ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΥΠΟ

ΣΤΥΛΙΑΝΟΥ Γ. ΡΗΓΟΠΟΥΛΟΥ

ΕΓΚΡΙΘΕΙΣΑ

ἐν τῷ κατὰ τὸν νόμον ,ΓΣΑ' διαγωνισμῷ τῶν διδακτικῶν βιβλίων διὰ τὴν τετραετίαν 1914—1918.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΕΚΔΟΤΑΙ: Δ. Χ. ΤΕΡΖΟΠΟΥΛΟΣ & ΑΔΕΛΦΟΣ

19:4

ΔΡ. 1,80

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Ἀριθ. *Πρωτ. 5960* / *Διεκπ. 4862* *Ἐν Ἀθήναις τῇ 10 Φεβρουαρίου 1915.*

Πρὸς τὸν κ. Δ. Χ. Τερζόπουλον

Γνωρίζομεν ὑμῖν, ὅτι κατ᾽ ἀπόφασιν τῆς ἐπὶ τῆς ἐκδόσεως τῶν διδακτικῶν βιβλίων ἐποπτικῆς Ἐπιτροπείας, ἡ τιμὴ τῆς ***Ἀλγέβρας*** διὰ τὰ Γυμνάσια καὶ τὰ ἰσοδύναμα σχολεῖα ἐκ φύλλων τυπογραφικῶν 14 1]2 ὡρίσθη, ὑπολογιζομένων μόνον τῶν 12 φύλλων κατὰ τὸν νόμον; εἰς δραχμὴν μίαν καὶ λεπτὰ ὀγδοήκοντα (1,80)· τὸ δ᾽ ἐπιθετέον βιβλιόσημον, χρώματος ῥ ο δ ί ν ο υ ἔσται ἀξίας δραχμῆς μιᾶς καὶ λεπτῶν εἴκοσιν ἓξ (1,26)

Ἐντελλόμεθα, ὅπως συμμορφωθῆτε πρὸς τὰς ἀποφάσεις ταύτας, ἐκτυπώσητε δὲ τὴν παροῦσαν ἐπὶ τῆς ἐσωτερικῆς ὄψεως τοῦ περικαλύμματος τοῦ βιβλίου, κάτωθι τῆς θέσεως, εἰς ἣν κατὰ τὸν νόμον ἐπικολλᾶται τὸ βιβλιόσημον.

Ὁ Ὑπουργὸς
Ι. Δ. ΤΣΙΡΙΜΩΚΟΣ

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

1) Σελὶς 50 ἄσκησις 2 ἀντὶ $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$

γράφε $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$

2) Σελὶς 59 ἄσκησις 1 εἰς τὸ β'. μέλος ἀντὶ $3\chi+6$ γράφε $3\chi-6$.

3) Σελὶς 89 » 1 » » τῆς γ' ἐξισώσεως ἀντὶ 0 γράφε 1.

4) Σελὶς 160 » 19 εἰς τὴν προτελευταίαν ἐξίσωσιν ἀντὶ

$$\frac{\chi-\sqrt{\chi^2-1}}{\chi+\sqrt{\chi^2+1}} \text{ γράφε } \frac{\chi-\sqrt{\chi^2-1}}{\chi+\sqrt{\chi^2-1}}$$

5 σελὶς 190 ἄσκησις 9 ἀντὶ $\frac{\lambda o\gamma.\,(\beta^2-\psi)}{\lambda o\gamma\sqrt{\chi^2+\psi^2}}$ γράφε $\frac{\lambda o\gamma\,(\beta^2-\chi\psi)}{\lambda o\gamma\sqrt{\chi^2+\psi^2}}$

Ἴδε παροράματα καὶ εἰς σελ 230.

Αθανάσιος Δημ. Καλογιάννης

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

I. ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Θεμελιώδεις νόμοι τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Ἐν τῇ ἀριθμητικῇ ἀποδεικνύεται ἡ ἀλήθεια τῶν ἑξῆς θεμελιωδῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

α΄) Τὸ ἄθροισμα ἢ τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται ἡτισδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ τάξις τῶν ἀποτελούντων αὐτὰ προσθετέων ἢ παραγόντων.

Κατὰ ταῦτα $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ καὶ $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\beta+\delta+\gamma+\alpha$.

Ὡσαύτως $\alpha.\beta=\beta.\alpha$ καὶ $\alpha.\beta.\gamma.\delta=\beta.\gamma.\delta.\alpha$.

Καλεῖται δὲ ἡ κοινὴ αὕτη θεμελιώδης ἰδιότης *νόμος ἀντιμεταθέσεως ἢ ἀνταλλακτικὴ ἰδιότης.*

β΄) Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμὸν καὶ ἂν ἕκαστος τῶν ἀποτελούντων αὐτὸ προσθετέων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ εἶτα προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα μερικὰ γινόμενα.

Ἡ δὲ ἰδιότης αὕτη ἡ συνδέουσα τὴν πρόσθεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν καλεῖται *ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης*, καὶ ἐκφράζεται διὰ τῆς ἰσότητος

$$(\alpha+\beta+\gamma).\delta=\alpha.\delta+\beta.\delta+\gamma.\delta.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἕνεκα τῆς ἀνταλλακτικῆς ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἡ ἰδιότης αὕτη γράφεται καὶ ὧδε

$\delta.(\alpha+\beta+\gamma)=\delta.\alpha+\delta.\beta+\delta.\gamma$ συνάγεται ὅτι·

γ΄) Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα καὶ ἂν ὁ ἀριθμὸς οὗτος πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν ἀποτελούντων τὸ ἄθροισμα τοῦτο προσθετέων καὶ εἶτα προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα μερικὰ γινόμενα.

Σημείωσις. — Ἐκλήθησαν δὲ αἱ ἀνωτέρω δύο ἰδιότητες θεμελιώδεις, διότι ἐξ αὐτῶν πηγάζουσιν ἅπασαι αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων.

2. Γενικαὶ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.

α΄) Ἐν παντὶ ἀθροίσματι δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ πλείονας προσθετέους διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

Οὕτω ἐν τῷ ἀθροίσματι $\alpha+6+\gamma+\delta$ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ἀντὶ τῶν προσθετέων 6 καὶ δ τὸ ἄθροισμα τούτων, ὅπερ παριστῶμεν διὰ τοῦ $(6+\delta)$, ὥστε νὰ ἔχωμεν $\alpha+6+\gamma+\delta=\alpha+(6+\delta)+\gamma$.

Διότι κατὰ τὴν ἀνταλλακτικὴν τῆς προσθέσεως ἰδιότητα (§ 1.α′) ἔχομεν $\alpha+6+\gamma+\delta=6+\delta+\alpha+\gamma$·
ἂν δὲ ἐν τῇ προσθέσει περιορισθῶμεν εἰς τὴν πρόσθεσιν μόνον τῶν δύο πρώτων προσθετέων θὰ ἔχωμεν

$$(6+\delta)+\alpha+\gamma \quad \text{ἢ} \quad \alpha+(6+\delta)+\gamma.$$

Τὴν ἰδιότητα ταύτην δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς·

6′) *Ἐν παντὶ ἀθροίσματι δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἕνα τῶν προσθετέων διὰ προσθετέων ἐχόντων αὐτὸν ἄθροισμα.*

γ′) *Εἴτε εἰς τὸ ὅλον ἄθροισμα εἴτε εἰς μέρος αὐτοῦ προστεθῇ ἀριθμός τις, τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα μένει τὸ αὐτό.*

Ἤτοι λέγω ὅτι $(\alpha+6+\gamma)+\delta=\alpha+(6+\delta)+\gamma$.

Διότι ἂν εἰς τὸ ἄθροισμα $\alpha+6+\gamma$ προστεθῇ ὁ δ, προκύπτει

$$\alpha+6+\gamma+\delta, \quad \text{ἐξ οὗ (§ 2. α′)} \quad \alpha+(6+\delta)+\gamma.$$

δ′) *Εἴτε εἰς ἄθροισμά τι ἕτερόν τι ἄθροισμα προστεθῇ εἴτε ἓν μόνον ἄθροισμα ἐκ τῶν μερῶν τῶν δύο ἀθροισμάτων ἀποτελεσθῇ, τὸ αὐτὸ προκύπτει ὁλικὸν ἄθροισμα.*

Λέγω δηλαδὴ ὅτι $(\alpha+6+\gamma)+(\delta+\varepsilon)=\alpha+6+\gamma+\delta+\varepsilon$.

Διότι κατὰ τὴν (§ 2.6′) $(\alpha+6+\gamma)+(\delta+\varepsilon)=(\alpha+6+\gamma)+\delta+\varepsilon$ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν πάλιν ἰδιότητα ἔχομεν

$$(\alpha+6+\gamma)+(\delta+\varepsilon)=\alpha+6+\gamma+\delta+\varepsilon.$$

3. Ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος.

α′) *Ἂν τὸ ἕτερον μέλος δύο ἰσοτήτων εἶναι κοινόν, τὰ δύο ἕτερα θὰ εἶναι ἴσα.*

Ἤτοι ἂν $\alpha=6$ καὶ $\gamma=\delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha=\gamma$.

6′) *Ἂν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προστεθῶσιν ἴσοι τὰ προκύπτοντα ἀθροίσματα εἶναι ἴσα.*

Ἤτοι ἂν $\alpha=6$, $\gamma=\delta$ καὶ $\varepsilon=\zeta$, θὰ εἶναι $\alpha+\gamma+\varepsilon=6+\delta+\zeta$.
Ὡσαύτως

ἂν $\alpha=6$, εἶναι καὶ $\alpha+\gamma=6+\gamma$ καὶ ἀντιστρόφως.

4 Γενικαὶ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.

Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι ἡ ἀντίστροφος πρᾶξις τῆς προσθέσεως. Ἀφαιρέσαι δὲ ἀπ᾽ ἀριθμοῦ α ἀριθμὸν β σημαίνει εὑρεῖν τρίτον ἀριθμόν, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν β νὰ ἀποτελῇ τὸν α, ἤτοι νὰ εἶναι

$$\alpha=\beta+\delta.$$

Κατὰ ταῦτα ἐπειδὴ ἡ μεταξὺ τοῦ μειωτέου τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν σχέσις, εἶναι σχέσις προσθέσεως, (διότι, ἂν εἶναι $\alpha - \beta = \delta$, εἶναι καὶ $\alpha = \beta + \delta$), ἔπεται ὅτι αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως δύνανται νὰ εὑρεθῶσι πᾶσαι ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἰσότητος τῶν ἀριθμῶν. Τούτων δὲ πρωτεύουσαι εἶναι αἱ ἑξῆς·

α΄) *Ἂν καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.*

Διότι ἂν $\alpha - \beta = \delta$, θὰ εἶναι $\alpha = \beta + \delta$

καὶ ἄρα (§ 3. β΄) $\alpha + \gamma = (\beta + \delta) + \gamma$ ἢ (§ 2.γ΄) $\alpha + \gamma = (\beta + \gamma) + \delta$

Λοιπὸν $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) = \delta$.

β΄) *Εἴτε ἀπὸ τοῦ ὅλου ἀθροίσματος εἴτε ἀπὸ τοῦ μέρους αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ ἀριθμός τις ἡ διαφορὰ εἶναι ἡ αὐτή.*

Λέγω δηλαδὴ ὅτι $(\alpha + \beta) - \gamma = (\alpha - \gamma) + \beta$.

Διότι (§ 2. γ΄) $[(\alpha - \gamma) + \beta] + \gamma = [(\alpha - \gamma) + \gamma] + \beta = \alpha + \beta$.

β΄) *Εἴτε ὅλον τι ἄθροισμα ἀφαιρεθῇ ἀπ᾽ ἀριθμοῦ τινος εἴτε πάντες οἱ προσθετέοι τοῦ ἀθροίσματος τούτου ἀφαιρεθῶσιν ἀλλεπαλλήλως ἡ διαφορὰ εἶναι ἡ αὐτή.*

Λέγω δηλαδὴ ὅτι $\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma$.

Διότι (κατὰ § 4. β΄) θὰ εἶναι

$[(\alpha - \beta) - \gamma] + (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta + \beta + \gamma) - \gamma = (\alpha + \gamma) - \gamma = \alpha$.

5. Γενικαὶ ἰδιότητες τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ.

Ἐκ τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (§ 1. α΄) πηγάζουσιν ἀναγκαίως αἱ ἑπόμεναι ἰδιότητες, αἵτινες ὅλως ὅμοιαι πρὸς τὰς ἰδιότητας τῆς προσθέσεως οὖσαι ἀποδεικνύονται ὡς ἐκεῖναι.

α΄) *Ἐν παντὶ γινομένῳ δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ πλείονας παράγοντας διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.*

Ἤτοι $\alpha.\beta.\gamma.\delta = \alpha.(\beta.\delta).\gamma$.

Τὴν ἰδιότητα ταύτην δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς·

β΄) *Ἐν παντὶ γινομένῳ δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων διὰ παραγόντων ἐχόντων αὐτὸν γινόμενον.*

γ΄) *Εἴτε τὸ ὅλον γινόμενον εἴτε παράγων τις αὐτοῦ πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν, τὸ ὁλικὸν γινόμενον μένει τὸ αὐτό.*

Ἤτοι $(\alpha.\beta.\gamma).\delta = \alpha.(\beta.\delta).\gamma$.

δ΄) *Εἴτε γινόμενόν τι ἐπὶ ἕτερόν τι γινόμενον πολλαπλασιασθῇ εἴτε ἓν μόνον γινόμενον ἐκ τῶν παραγόντων τῶν δύο γενομένων ἀποτελεσθῇ, τὸ αὐτὸ προκύπτει ὁλικὸν γινόμενον.*

ε΄) *Εἴτε ἄθροισμά τι πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἕτερόν τι ἄθροισμα εἴτε ἕκαστον τῶν μερῶν τῶν ἀποτελούντων τὸ πρῶτον ἄθροισμα πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν μερῶν τῶν ἀποτελούντων τὸ δεύτερον ἄθροισμα, καὶ εἶτα προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα μερικὰ γινόμενα τὸ αὐτὸ προκύπτει ὁλικὸν γινόμενον.*

Διότι ἂν ἐν τῷ γινομένῳ $(\alpha+\beta+\gamma).(\delta+\varepsilon)$ τὸ δεύτερον ἄθροισμα $(\delta+\varepsilon)$ θεωρηθῇ εὑρεθὲν καὶ ἐφαρμοσθῇ ἡ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης (§ 1.β΄), προκύπτει ἡ ἰσότης

$$(\alpha+\beta+\gamma).(\delta+\varepsilon)=\alpha(\delta+\varepsilon)+\beta(\delta+\varepsilon)+\gamma(\delta+\varepsilon)\cdot$$

ἂν δὲ πάλιν ἐφαρμοσθῇ ἡ ἰδιότης (§ 1. γ΄) προκύπτει

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\delta+\varepsilon)=\alpha.\delta+\alpha\varepsilon+\beta.\delta+\beta.\varepsilon+\gamma.\delta+\gamma.\varepsilon.$$

ϛ΄) *Οἱ τῶν ἴσων ἀριθμῶν διπλάσιοι εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ οἱ τριπλάσιοι ὡσαύτως· καὶ γενικῶς οἱ τῶν ἴσων ἀριθμῶν ἰσάκις πολλαπλάσιοι, εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους.*

Διότι ἂν $\alpha=\beta$, θὰ εἶναι (κατὰ § 3.β΄) $\alpha+\alpha=\beta+\beta$, ἤτοι $2.\alpha=2.\beta$... ὡσαύτως $3.\alpha=3.\beta$ καὶ ἐν γένει $\alpha.\mu=\beta.\mu$.

ζ΄) *Οἱ τῶν ἀνίσων ἀριθμῶν ἰσάκις πολλαπλάσιοι, εἶναι ἄνισοι πρὸς ἀλλήλους.*

6. Γενικαὶ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις ἀντίστροφος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Διαιρέσαι δὲ ἀριθμὸν δι' ἄλλου ἀριθμοῦ σημαίνει εὑρεῖν τρίτον ἀριθμόν, οὗ τὸ ἐπὶ τὸν δεύτερον γινόμενον νὰ ἀποτελῇ ἀριθμὸν ἴσον τῷ πρώτῳ.

Τὸ πηλίκον δὲ δύο ἀριθμῶν α καὶ β παρίσταται διὰ τοῦ σημείου $\frac{\alpha}{\beta}$ (ὅπερ ἀπαγγέλλεται α διὰ β)· κατὰ ταῦτα, ἂν εἶναι ἡ ἰσότης $\alpha=\beta.\pi$, αὕτη θὰ γράφηται καὶ ὡς ἑξῆς $\pi=\frac{\alpha}{\beta}$.

Κατὰ ταῦτα, ἐπειδὴ ἡ σχέσις ἡ μεταξὺ τοῦ διαιρετέου τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου αὐτῶν εἶναι σχέσις πολλαπλασιασμοῦ, (δ,ότι ἂν $\alpha:\beta=\pi$, εἶναι καὶ $\alpha=\beta.\pi$), ἕπεται ὅτι αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως δύνανται νὰ εὑρεθῶσι πᾶσαι ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς ἰσότητος τῶν ἀριθμῶν. Τούτων δὲ πρωτεύουσαι εἶναι αἱ ἑξῆς·

α΄) *Ἂν καὶ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται.*

Διότι ἂν $\alpha : \beta = \pi$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha = \beta.\pi$.

Κατὰ δὲ τὸ ἐδ. (5. ς΄) θὰ εἶναι καὶ $\alpha.\mu = (\beta.\pi).\mu$

ἤτοι (§ 5. γ΄) $\alpha.\mu = (\beta.\mu).\pi$ καὶ ἄρα $(\alpha.\mu) : (\beta.\mu) = \pi$.

β΄) *Εἴτε τὸ ὅλον γινόμενον, εἴτε παράγων τις αὐτοῦ διαιρεθῇ διά τινος ἀριθμοῦ (ἂν διαιρῆται), τὸ πηλίκον μένει τὸ αὐτό.*

Διότι ἂν ἔχωμεν $(\alpha.\beta.\gamma) : \delta$ καὶ ὑποτεθῇ ὅτι ὁ παράγων γ διαιρεῖται διὰ τοῦ δ καὶ δίδει πηλίκον π, θὰ εἶναι $\alpha.\beta.\gamma = \alpha.\beta.(\delta.\pi) = \alpha.\beta.\delta.\pi$ (§ 5. β΄) ἢ $\alpha.\beta.\gamma = (\alpha.\beta.\pi).\delta$ καὶ ἄρα $(\alpha.\beta.\gamma) : \delta = \alpha.\beta.\pi$.

Πόρισμα. *Τὸ πηλίκον γινομένου διαιρουμένου δι᾽ ἑνὸς τῶν παραγόντων αὐτοῦ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν λοιπῶν αὐτοῦ παραγόντων.*

γ΄) *Εἴτε ἀριθμός τις δι᾽ ὅλου τινὸς γινομένου διαιρεθῇ εἴτε ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεθῇ διὰ πάντων τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου ἀλλεπαλλήλως (τοῦτ᾽ ἔστι πρῶτον διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος, εἶτα δὲ τὸ προκῦψαν πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου παράγοντος καὶ ἐφεξῆς οὕτω) τὸ πηλίκον εἶναι τὸ αὐτό.*

Διότι ἔστω ὅτι ἀριθμός τις α διαιρούμενος διὰ τοῦ γινομένου $(\beta.\gamma.\delta)$ δίδει πηλίκον π· οὕτω $\alpha = (\beta.\gamma.\delta).\pi$ ἢ (§ 5.β΄) $\alpha = \beta.\gamma.\delta.\pi$ καὶ ἄρα (§ 5. α΄) $\alpha = \beta.(\gamma.\delta.\pi)$;

κατὰ τὸν ὁρισμὸν δὲ τοῦ πηλίκου εἶναι

$\alpha : \beta = \gamma.\delta.\pi$ ἢ (§ 5. α΄) $\alpha : \beta = \gamma.(\delta.\pi)$.

καὶ οὕτω πάλιν $(\alpha:\beta):\gamma = \delta.\pi$.

Λοιπὸν ἔχομεν ὅτι $[(\alpha : \beta) : \gamma] : \delta = \pi$.

δ΄) *Εἴτε τὸ ὅλον ἄθροισμα εἴτε ἕκαστος τῶν ἀποτελούντων αὐτὸ προσθετέων διαιρεθῇ διά τινος ἀριθμοῦ (ἂν διαιρῆται) καὶ εἶτα προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα μερικὰ πηλίκα, τὸ ὁλικὸν πηλίκον μένει τὸ αὐτό.*

Ἔστω ὅτι τῶν ἀριθμῶν α, β, γ διαιρουμένων διὰ δ, τὰ πηλίκα εἶναι κ, λ, μ, ἤτοι ἔστω ὅτι $\alpha = \delta.\kappa$, $\beta = \delta.\lambda$, $\gamma = \delta.\mu$, ἐξ ὧν (§3.β΄) εἶναι,

$\alpha + \beta + \gamma = \delta.\kappa + \delta.\lambda + \delta.\mu$, ἤτοι $\alpha + \beta + \gamma = \delta(\kappa + \lambda + \mu)$.

ε΄) *Τὰ ἡμίσεα τῶν ἴσων ἀριθμῶν εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα· καὶ γενικῶς· ἐὰν ἴσοι ἀριθμοὶ διαιρῶνται διά τινος ἀριθμοῦ, τὰ πηλίκα αὐτῶν εἶναι ἀριθμοὶ ἴσοι.*

Λέγω δηλαδὴ ὅτι, ἂν εἶναι $\alpha.\mu = \beta.\mu$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha = \beta$.

Διότι ἂν ἦτο $\alpha > \beta$ ἢ $\alpha < \beta$, θὰ ἦτο (§5.ς΄) $\alpha.\mu > \beta.\mu$ ἢ $\alpha.\mu < \beta.\mu$, ἅτινα ἀμφότερα εἶναι ἄτοπα.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἂν εἶναι $\alpha.\mu > \beta.\mu$, θὰ εἶναι $\alpha > \beta$.

II. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

7. Οἱ ἀριθμοὶ οἱ γινόμενοι ἐκ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς ἀκεραίας μονάδος (1) δὲν ἐξαρκοῦσιν πάντοτε εἰς τὴν λύσιν πάντων τῶν ἀριθμητικῶν ζητημάτων, διότι ἡ ἀφαίρεσις καὶ ἡ διαίρεσις δύο τοιούτων ἀριθμῶν δὲν εἶναι πάντοτε δυνατaί.

Ἐπὶ δὲ παραδείγματος δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν τὸ ἓν ἐκ τῶν τεσσάρων ἴσων μερῶν εἰς ἃ διῃρέθησαν 5 πήχεις ὑφάσματος, εἰ καὶ τοῦτο ἐν τῇ πράξει γίνεται εὐκολώτατα.

Διὰ τοῦτο παρέστη ἀνάγκη νὰ ἐπινοηθῶσι καὶ ἄλλοι ἀριθμοί, οἵτινες προσαρτώμενοι εἰς τοὺς 1,2,3,... ἀποτελοῦσι σύστημα ἀριθμῶν γενικώτερον καὶ καθιστῶσι δυνατὴν πᾶσαν διαίρεσιν.

8. Πρὸς εὕρεσιν δηλονότι τῶν πηλίκων τῶν διαιρέσεων 1:2, 1:3, ..., 1:μ ἐπενοήθησαν ἀριθμοὶ οἵτινες δὶς ἢ τρὶς ἢ τετράκις... κλπ. λαμβανόμενοι ἀποτελοῦσι τὴν ἀκεραίαν μονάδα (1).

Παρίστανται δὲ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι διὰ τῶν σημείων $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{\mu}$ καὶ λαμβάνονται ὡς νέαι μονάδες καλούμεναι κλασματικαί.

Οὕτω ἐν τῷ νέῳ συστήματι ἔχομεν τὰς μονάδας $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{\mu}$, κατὰ δὲ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα ὁρισμὸν τὸ μὲν $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, τὸ δὲ $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$... κλπ.

9. *Ἀριθμὸς λέγεται τὸ σύνολον πολλῶν μονάδων.*

Π.χ. $1+1+\frac{1}{5}=2+\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}$ εἶναι ἀριθμοί.

Οἱ νέοι οὗτοι ἀριθμοὶ οἱ ἀποτελούμενοι ἐκ κλασματικῶν μόνον μονάδων ἢ ἐκ κλασματικῶν καὶ ἀκεραίων μονάδων λέγονται ἀριθμοὶ *κλασματικοί*.

Ἔχουσι δὲ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι τὴν ἰδιότητα τῶν κλασματικῶν μονάδων, καθ' ἣν πολλάκις λαμβανόμενοι γίνονται ἀκέραιοι.

Π. χ., ἂν ὁ ἀριθμὸς $1+\frac{5}{4}+\frac{2}{3}$ ληφθῇ δωδεκάκις γίνεται ἀκέραιος· διότι αἱ μονάδες ἐξ ὧν σύγκειται γίνονται πᾶσαι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι.

Διὰ τῶν κλασματικῶν δὲ ἀριθμῶν ἡ λύσις παντὸς προβλήματος ἀναγομένου εἰς τὴν διαίρεσιν δύο ἀριθμῶν κατέστη δυνατὴ ἀριθμητικῶς τοὐλάχιστον.

10. Δύο ἀριθμοὶ ἰσάκις λαμβανόμενοι, ἂν μὲν γίνωνται ἀκέραιοι ἴσοι λέγονται *ἴσοι*, ἂν δὲ γίνωνται ἀκέραιοι ἄνισοι λέγονται *ἄνισοι*· ὧν μείζων λέγεται ὁ σχηματίζων τὸν μείζονα ἀκέραιον.

Κατὰ ταῦτα οἱ δύο ἀριθμοὶ $\frac{3}{8}+\frac{3}{8}$ καὶ $\frac{3}{4}$ εἶναι ἴσοι· διότι ὀκτάκις λαμβανόμενος ἑκάτερος τούτων γίνεται ὁ ἀκέραιος 6.

Ἐπίσης ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ δύο ἀριθμοὶ $\frac{\alpha}{6}$ καὶ $\frac{\alpha.\mu}{6.\mu}$ εἶναι ἴσοι.

Ἂν δὲ οἱ ἀριθμοὶ προκύπτωσιν ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, ἡ σύγκρισις αὐτῶν εἶναι εὔκολος.

Οὕτως ἔχομεν $2+\frac{4}{5}>2+\frac{2}{5}$· διότι πεντάκις λαμβανόμενος ἑκάτερος τούτων γίνεται ὁ μὲν πρῶτος $10+4$, ὁ δὲ δεύτερος $10+2$.

Κατὰ ταῦτα ἡ ἰσότης τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς ἰσότητα ἀκεραίων, (ὡς καὶ ἡ ἀνισότης)· κατ' ἀκολουθίαν αἱ ἰδιότητες (§ 3. β', § 5. ϛ', § 6. ε') τῆς ἰσότητος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν διατηροῦνται καὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν ἄρα τοῦτον αἱ ἰσότητες καὶ αἱ ἀνισότητες τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἀνάγονται εἰς ἰσότητας καὶ ἀνισότητας ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Κατὰ δὲ ταῦτα αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες (§ 3. α', β') τῆς ἰσότητος διατηροῦνται.

11. Ἵνα δὲ διατηρηθῶσι καὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν πράξεων πρέπει νὰ ὁρίσωμεν αὐτὰς ὡς ἑξῆς.

12. Ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις ὁρίζονται ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων· ὡσαύτως δὲ καὶ ὁ πολλαπλασιασμός, ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος· ἤτοι $\alpha.3$ σημαίνει $\alpha+\alpha+\alpha$, ὁστισδήποτε ἀριθμὸς καὶ ἂν εἶναι ὁ α.

13. Ἵνα δὲ ὁρίσωμεν τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος α ἐπὶ κλάσμα, διατηροῦντες τὰς ἀρχικὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, συλλογιζόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ἂν παραστήσαντες τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος α ἐπί τινα κλασματικὴν μονάδα, οἷον τὴν $\frac{1}{5}$, διὰ τοῦ συνήθους τύπου $\alpha.\frac{1}{5}$, πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ 5, λάβωμεν δὲ ὑπ' ὄψιν τὴν πρώτην ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, εὑρίσκομεν

$$\left(\alpha.\frac{1}{5}\right).\ 5=\alpha.\left(\frac{1}{5}\cdot 5\right)=\alpha.\ 1, \text{ ἤτοι } \alpha.$$

Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι τὸ $\alpha\cdot\frac{1}{5}$ εἶναι τὸ πέμπτον μέρος τοῦ α. διότι πεντάκις ληφθὲν ἀπετέλεσε τὸν α.

Οὕτω ἀποδεικνύεται ὅτι γενικῶς τὸ γινόμενον $\alpha.\frac{1}{\mu}$ εἶναι τὸ μυοστὸν μέρος τοῦ α.

Συνάγεται δὲ ἐκ τούτου ὅτι, ἵνα καὶ ἐν τῷ νέῳ συστήματι διατηρῶνται αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ τινος α ἐπὶ τὴν κλασματικὴν μονάδα $\frac{1}{\mu}$ *ὡς μερισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ τούτου α εἰς μ μέρη ἴσα.*

Ὁ πολλαπλασιασμὸς δὲ ἀριθμοῦ τινος α ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὅτι εἶναι μ φορὰς ἐπανάληψις τοῦ νυοστοῦ μέρους τοῦ α. Κατὰ ταῦτα τὸ γινόμενον $\frac{5}{8}\times\frac{3}{4}$ σημαίνει νὰ ἐπαναληφθῇ τρὶς τὸ τέταρτον μέρος τοῦ $\frac{5}{8}$, ὅπερ εἶναι $\frac{5}{8\times4}$.

14. Ἐν γένει δὲ ὁ πολλαπλασιασμὸς πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὅτι εἶναι πρᾶξις, *δι' ἧς δεδομένων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος ἀποτελούμενος ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ ὡς ὁ δεύτερος ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς.*

Διότι ἔστω τὸ γινόμενον α.β, ἔνθα ἔστω

$$\beta=1+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7},\ \text{ὅτε}\ \alpha.\beta=\alpha\left(1+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right),$$

κατὰ δὲ τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θὰ εἶναι

$$\alpha.\beta=\alpha.1+\alpha.1+\alpha.\frac{1}{3}+\alpha.\frac{1}{3}+\alpha.\frac{1}{7}=\alpha+\alpha+\frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha}{7}.$$

15. Ἐπειδὴ ἡ διαίρεσις ὁρίζεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, (§ 6) ὁ ὁρισμὸς αὐτῆς μένει ὁ αὐτός.

Τὸ πηλίκον δὲ δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν α καὶ β ἰσοῦται τῷ κλάσματι $\frac{\alpha}{\beta}$. Διότι τὸ ἐκ τοῦ κλάσματος τούτου ἐπὶ τὸν διαιρέτην β προκύπτον κατὰ τὰ ἀνωτέρω γινόμενον $\frac{\alpha}{\beta}.\beta$ ἰσοῦται τῷ διαιρετέῳ α.

16. Καὶ ἐν τῷ κλασματικῷ συστήματι ἰσχύουσιν αἱ θεμελειώδεις ἰδιότητες τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Διότι ἡ πρόσθεσις αὐτῶν, ἀφοῦ καταστῶσιν ὁμώνυμα, ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀριθμητῶν, ἤτοι εἰς πρόσθεσιν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Ἀληθεύει δὲ καὶ ἡ ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἤτοι εἶναι $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{8}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$. Διότι τὰ γινόμενα ταῦτα ἔχοντα ἀριθμητὰς τὰ γινόμενα τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὰς τὰ γινόμενα τῶν παρονομαστῶν, ἅτινα πάντα εἶναι γινόμενα ἀκεραίων, εἶναι προφανῶς ἴσα (§ 1. α΄).

Καὶ ἡ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης ἀληθεύουσα ἀποδεικνύεται ὧδε·

$$\left(3+\frac{2}{5}+\frac{4}{7}\right).\frac{8}{9}=\left(\frac{3.5.7+2.7+4.5}{5.7}\right).\frac{8}{9}=$$

$$\frac{(3.5.7+2.7+4.5).8}{5.7.9}=\frac{3.5.7.8+2.7.8+4.5.8}{5.7.9}=$$

$$\frac{3.5.7.8}{5.7.9}+\frac{2.7.8}{5.7.9}+\frac{4.5.8}{5.7.9}=3.\frac{8}{9}+\frac{2}{5}.\frac{8}{9}+\frac{4}{7}.\frac{8}{9}.$$

Ἐκ τούτων ἄρα συνάγεται ὅτι διατηροῦνται καὶ πᾶσαι αἱ ἐξ αὐτῶν προκύπτουσαι γενικαὶ ἰδιότητες.

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν μόνον ὅτι διὰ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις ἀπέβαλον τὴν πρώτην αὐτῶν σημασίαν, καθ᾽ ἣν ὁ μὲν πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἐπανάληψις ἀριθμοῦ τινος πολλάκις, ἡ δὲ διαίρεσις μερισμὸς ἀριθμοῦ εἰς πολλὰ μέρη ἴσα.

Τῷ ὄντι δὲ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ $\frac{1}{5}$ σημαίνει διαίρεσιν αὐτοῦ διὰ τοῦ 5, ἡ δὲ διαίρεσις ἀριθμοῦ τινος διὰ τοῦ $\frac{1}{3}$ σημαίνει πολλαπλασιασμὸν αὐτοῦ ἐπὶ 3. Ἐν γένει δὲ ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ τινος διὰ τοῦ ἑτέρου τῶν ἀριθμῶν $\frac{\alpha}{6}$ καὶ $\frac{6}{\alpha}$ σημαίνει πολλαπλασιασμὸν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἕτερον.

III. ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΜΗΔΕΝΟΣ ΩΣ ΑΡΙΘΜΟΥ.

17. Δύο ἴσων ἀριθμῶν ἡ ἀπ᾽ ἀλλήλων διαφορὰ θεωρεῖται καὶ αὐτὴ ὡς ἀριθμὸς καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου 0, ὅπερ χρησιμεύει καὶ ἐν τῇ γραφῇ τῶν ἀριθμῶν πρὸς δήλωσιν τῶν ἐλλειπουσῶν μονάδων τάξεώς τινος. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν εἶναι ἄθροισμα μονάδων πρέπει νὰ ὁρισθῇ προσηκόντως, ὥστε νὰ διατηρῶνται αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες καὶ αἱ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων καὶ αἱ τῆς ἰσότητος. Κατὰ ταῦτα τὸ μὲν ἄθροισμα $\alpha+0=\alpha$, ἡ δὲ διαφορὰ $\alpha-0=\alpha$; τὸ δὲ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος, οἷον τοῦ 3, ἐπὶ τὸ μηδὲν ἰσοῦται τῷ μηδενί· διότι $3.0=0.3=0+0+0=0$.

Τὸ δὲ πηλίκον $0:\alpha=0$· διότι $\alpha.0=0$.

18. Ἡ δὲ διαίρεσις διὰ τοῦ 0 εἶναι ἀδύνατος.

Διότι παντὸς γνωστοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ 0 τὸ γινόμενον εἶναι 0· ἀλλ᾽ οὐδὲ νέος ἀριθμὸς δύναται νὰ ληφθῇ πηλίκον τοιαύτης διαιρέσεως· διότι, ἂν ληφθῇ τοιοῦτός τις ὡς πηλίκον τῆς διαιρέσεως 5:0 καὶ παρασταθῇ διά τινος γράμματος, οἷον τοῦ λ, θὰ προκύψῃ 0.λ=5 καὶ ἄρα 0.λ.2=5.2=10 καὶ 0.λ.2=0.2.λ=0.λ=5. Ὡσαύτως δὲ (7+0).λ=7.λ καὶ (7+0).λ=7.λ+0.λ=7.λ+5.

Ἐκ δὲ τούτων συνάγεται ὅτι δὲν διατηροῦνται αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες καὶ αἱ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων καὶ τῆς ἰσότητος.

Τέλος δὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 0:0 εἶναι ἀόριστον· διότι τὸ γινόμενον παντὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 0 εἶναι 0.

IV. ΑΡΙΘΜΟΙ ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ.

19. Ἐπειδὴ διὰ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν δὲν εἶναι πάντοτε ἡ ἀφαίρεσις δυνατή, διότι ὁ μειωτέος πρέπει νὰ εἶναι ἢ μείζων ἢ τουλάχιστον ἴσος τῷ ἀφαιρετέῳ, ἐν τῷ παρόντι κεφαλαίῳ θὰ ἐξετάσωμεν ἄν, εἰσάγοντες νέους τινὰς ἀριθμοὺς παρὰ τοὺς ἤδη θεωρηθέντας, δυνάμεθα νὰ ἀποτελέσωμεν σύστημα ἀριθμῶν γενικώτερον, ἐν ᾧ καὶ ἡ ἀφαίρεσις νὰ εἶναι πάντοτε δυνατή, καὶ αἱ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων καὶ τῆς ἰσότητος νὰ μὴ ἀλλοιῶνται.

20. Ἐν τῷ νέῳ τούτῳ συστήματι τῶν ἀριθμῶν πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἡ διαφορὰ 0—α, τοῦ α ὄντος οὑτινοσδήποτε ἀριθμοῦ τοῦ κλασματικοῦ συστήματος· πρέπει δηλονότι νὰ δεχθῶμεν ὅτι ὑπάρχει ἀριθμός, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν α ἀποτελεῖ μετ᾽ αὐτοῦ 0.

21. Κατὰ ταῦτα δι᾽ ἕκαστον ἀριθμὸν α τοῦ κλασματικοῦ συστήματος, πρέπει νὰ παραδεχθῶμεν ἕνα ἀντίθετον, οὗτινος τὸ μετὰ τοῦ α ἄθροισμα νὰ εἶναι 0.

22. Τὴν παραδοχὴν τῶν ἀριθμῶν τούτων δικαιολογεῖ καὶ ἡ ὕπαρξις ποσῶν ἐπιδεχομένων ἀντίθεσιν, οἷα εἶναι τὸ κέρδος καὶ ἡ ζημία, ἡ περιουσία καὶ τὸ χρέος, ἡ αὔξησις καὶ ἡ ἐλάττωσις τῆς θερμοκρασίας, αἱ ὡς πρός τινα χρονικὴν ἀρχὴν λαμβανόμεναι ἑπόμεναι καὶ προηγούμεναι χρονολογίαι καὶ τὰ ὅμοια.

23. Τὸν ἀντίθετον δὲ ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν τοῦ κλασματικοῦ συστήματος σημειοῦμεν κατ᾽ ἀρχὰς διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμητικοῦ σημείου φέροντος ὀξεῖαν.

Π. χ. τῶν ἀριθμῶν 5, 7, $\frac{2}{3}$ οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοὶ σημειοῦνται οὕτω

$5', 7', \frac{2'}{3}$. Καλοῦμεν δὲ τοὺς νέους τούτους ἀριθμοὺς ἀρνητικοὺς πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν ἤδη γνωστῶν, οὓς καλοῦμεν *θετικούς*.

24. Ὡς οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ γίνονται ἐκ τῶν μονάδων $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, οὕτω καὶ οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ γίνονται ἐκ τῶν ἀντιθέτων μονάδων $1', \frac{1'}{2}, \frac{1'}{3}, \ldots$, αἵτινες καλοῦνται *ἀρνητικαὶ μονάδες*.

Πᾶς ἄρα ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα μονάδων τοῦ αὐτοῦ εἴδους.

25. *Τὸ ἄθροισμα δὲ ἀριθμῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν καλεῖται καὶ* ***ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα*** *αὐτῶν.*

Πρόσθεσις.

26. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν τε θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν (§ 24) συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τῆς προσθέσεως αὐτῶν.

Κανών. Ἵνα προστεθῶσι δύο ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ προστίθενται αἱ ἀπόλυτοι αὐτῶν τιμαί, εἰς δὲ τὸ ἄθροισμα τίθεται τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον. Ἵνα δὲ προστεθῶσι δύο ἑτεροειδεῖς ἀριθμοὶ λαμβάνονται αἱ ἀπόλυτοι αὐτῶν τιμαί· ἀφαιρουμένης δὲ τῆς ἐλάσσονος ἀπὸ τῆς μείζονος εἰς τὴν διαφορὰν τίθεται τὸ σημεῖον τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἔχοντος τὴν μείζονα ἀπόλυτον τιμήν.

Οὕτω τὸ $3+5=8$, τὸ $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$, τὸ $5'+7'=12'$, τὸ $\frac{1'}{2}+\frac{1'}{5}=\frac{7'}{10}$· τὸ δὲ $4+7'=4+4'+3'=3'$ καὶ τὸ

$$\frac{11}{8}+\frac{5'}{8}=\frac{6}{8}+\frac{5'}{8}+\frac{5'}{8}=\frac{6}{8}.$$

Συνάγεται δὲ ἐκ τούτου ὅτι ἡτισδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ τάξις δύο προσθετέων τὸ ἄθροισμα δὲν μεταβάλλεται.

27. *Ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν*, οὓς κατὰ συνθήκην γράφομεν τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον καὶ ἕκαστον μετὰ τοῦ οἰκείου σημείου, *καλεῖται ὁ ἀριθμὸς ὁ ἀποτελούμενος ἐκ τῆς προσθέσεως τοῦ δευτέρου εἰς τὸν πρῶτον καὶ τοῦ τρίτου εἰς τὸ προκῦψαν ἄθροισμα καὶ ἐφεξῆς οὕτω μέχρις οὗ προστεθῶσι πάντες οἱ ἀριθμοί.*

28. Καὶ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς τούτοις ἡ ἀρχικὴ ἰδιότης (§ 1. α΄) τῆς προσθέσεως μένει ἀμετάβλητος. Διότι ἑκάστου ἀριθμοῦ διατηροῦντος τὸ σημεῖόν του, καὶ αἱ θετικαὶ καὶ αἱ ἀρνητικαὶ μονάδες δὲν μεταβάλλονται, κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἄθροισμα μένει τὸ αὐτό. Ἐκ τούτου δὲ ἕπεται ὅτι, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος πολλῶν ἀριθμῶν δυνά-

μεθα νὰ προσθέσωμεν πρῶτον χωριστὰ τοὺς θετικοὺς καὶ χωριστὰ τοὺς ἀρνητικούς, εἶτα δὲ νὰ ἀθροίσωμεν τοὺς προκύψαντας δύο ἀριθμούς.

Οὕτω τὸ $3+5'+2'+7+11'=10+18'=8'$, τὸ δὲ $5'+2+3'+4=8'+6=2'$, τὸ δὲ $2+\frac{1}{2}+3'+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=3+3'=0$.

Τὰ δὲ θεωρήματα τὰ ἀποδειχθέντα διὰ τὴν περίπτωσιν διαδοχικῶν προσθέσεων ἀληθεύουσιν ὡσαύτως καὶ ἐν τῇ περιπτώσει ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος.

Λοιπὸν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δὲν μεταβάλλεται, ἡτισδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ τάξις τῶν ἀποτελούντων αὐτὸ προσθετέων.

Π. χ. $5+2'+9'+8=5+8+2'+9'$.

29. ***Πόρισμα.*** *Ἐν παντὶ ἀθροίσματι δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ πλείονας προσθετέους διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.*

Σημείωσις.—Ἐπειδὴ δυνάμεθα τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε μονάδων, εἴτε ὁμοειδῶν εἴτε ἑτεροειδῶν νὰ ἀναγάγωμεν εἰς μονάδας τοῦ αὐτοῦ εἴδους ἢ εἰς τὸ 0, ὁρίζομεν γενικώτερον ὅτι, *ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα μονάδων,* μὴ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ἂν αὗται εἶναι ὁμοειδεῖς ἢ ἑτεροειδεῖς.

Ἀφαίρεσις.

30. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἀφαιρέσεως (§ 4), ἐπεκτεινομένου καὶ ἐφ' οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, συνάγεται διὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν τε θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ὁ ἑξῆς κανών.

Κανών. *Ἵνα ἀπό τινος ἀριθμοῦ, οἷον τοῦ ἀριθμοῦ α, ἀφαιρεθῇ ἀριθμός τις, οἷον ὁ β, πρέπει εἰς τὸν α νὰ προστεθῇ ὁ ἀντίθετος τοῦ β ἀριθμός.*

Οὕτω, ἂν τοῦ ἀριθμοῦ 6 ὁ ἀντίθετος παρασταθῇ διὰ τοῦ $6'$, λέγω ὅτι ἡ διαφορὰ $\alpha-6$ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι $\alpha+6'$.

Διότι, ἂν εἰς τὸ ἄθροισμα $\alpha+6'$ προστεθῇ ὁ ἀφαιρετέος 6, προκύπτει $\alpha+6'+6$, ἤτοι ὁ μειωτέος α.

Π. χ. ἡ διαφορὰ $5-2'=5+2=7$, ἡ δὲ $6'-2=6'+2'=8'$, ἡ δὲ $8'-3'=8'+3=5'$, ἡ δὲ $5'-8'=5'+8=3$.

31. Ἐκ τοῦ κανόνος τούτου συνάγεται ὅτι αἱ ἐν ἀριθμητικῇ παραστάσει σεσημειωμέναι πράξεις προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως δύνανται νὰ σημειῶνται μόνον διὰ προσθέσεως.

Π. χ. $5-(3)-(4')+(2')=5+(3')+4+(2')=9+(5')=4$.

Κατὰ ταῦτα ἄρα τὸ ἐξαγόμενον σειρᾶς προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ὡς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα.

32. Διὰ τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, οὓς συνήθως

διακρίνομεν προτάσσοντες αὐτῶν τὸ μὲν σημεῖον + διὰ τοὺς θετικούς, τὸ δὲ σημεῖον — διὰ τοὺς ἀρνητικούς, δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν συνθηματικῶς καὶ συντόμως τὰ ἀντίθεσιν ἐπιδεχόμενα ποσά. Ἐπὶ παραδείγματος ἀντὶ τοῦ συνήθως λεγομένου ὅτι ἡ θερμοκρασία εἶναι 10° ἄνω ἢ κάτω τοῦ 0, δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ θερμοκρασία εἶναι πλέον δέκα ἢ μεῖον δέκα καὶ νὰ σημειῶμεν +10° ἢ —10°. Ὡσαύτως, ἂν τὴν μίαν δραχμὴν κέρδους σημειώσωμεν διὰ +1, τὴν μίαν δραχμὴν ζημίας θὰ σημειώσωμεν διὰ τοῦ —1.

Ὡσαύτως δυνάμεθα νὰ συνδυάσωμεν συνθήκας τινὰς σχετικὰς πρὸς τμήματα εὐθείας καὶ πρὸς τὸν χρόνον. Ἁπλοῦν δὲ τούτου παράδειγμα παρέχει ἡμῖν ἡ ὁμαλὴ κίνησις κινητοῦ τινος ἐπ' εὐθείας.

Ἄς ὑποθέσωμεν δηλαδὴ ὅτι ἐν τῇ παρούσῃ στιγμῇ κινητόν τι ὂν ἐν τῷ σημείῳ O τῆς εὐθείας AB $\overline{A \qquad O \qquad B}$ κινεῖται ἐπ' αὐτῆς μετὰ σταθερᾶς ταχύτητος 8 μέτρων κατὰ λεπτόν. Ἵνα ὁρισθῇ ἀκριβῶς ἡ κίνησις καὶ ἡ θέσις τοῦ κινητοῦ ἔν τινι χρόνῳ π. χ. 5 λεπτῶν, πρέπει νὰ εἶναι γνωστὴ καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς κινήσεως, ἧς ἕνεκα καὶ ἡ ἀνάγκη ἀποδόσεως σημείου εἰς τὴν ταχύτητα, καὶ ἂν ὁ ὁρισθεὶς χρόνος 5 λεπτῶν εἶναι ὡς πρὸς τὴν παροῦσαν στιγμὴν παρελθὼν ἢ μέλλων. Ἀνάγκη ἄρα νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ τὸν χρόνον σημεῖον. Οὕτω δὲ ἡ θέσις τοῦ κινητοῦ θὰ εἶναι ἀκριβῶς ὡρισμένη.

33. Ἂν ἀριθμόν τινα θεωρῶμεν ἄνευ τοῦ σημείου (+ ἢ —) λέγομεν ὅτι λαμβάνομεν αὐτὸν ἀπολύτως ἢ ὅτι λαμβάνομεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν αὐτοῦ.

Π. χ. ὁ $\frac{3}{5}$ εἶναι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ $+\frac{3}{5}$ καὶ τοῦ $-\frac{3}{5}$ καὶ ὁ $2+\frac{5}{7}$ εἶναι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ $2+\frac{5}{7}$ καὶ τοῦ $-(2+\frac{5}{7})$.

34. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται προσέτι ὅτι, τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν π. χ. τὸ 3+5′+4+8′+2′ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς 3—5+4—8—2· ὡσαύτως τὸ 3′+5 γράφεται καὶ —3+5 κ.ο.κ. διότι οὕτω εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν σεσημειωμέναι αἱ ἀπαιτούμεναι πράξεις πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος.

35. Κατὰ ταῦτα τὰ σημεῖα + καὶ — ἐπὶ μεμονωμένων μὲν ἀριθμῶν, +3, —2, $+\frac{5}{8}$, σημαίνουσι τὸ εἶδος τῶν ἀριθμῶν, ἐπὶ ἀριθμῶν δὲ συνδεδεμένων πρὸς ἀλλήλους διὰ τῶν σημείων τούτων

σημαίνουσιν ἄνευ συγχύσεως, εἴτε τὸ εἶδος τῶν ἀριθμῶν εἴτε καὶ τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως.

Πολλαπλασιασμός.

36. Καὶ ἐν τῷ παρόντι συστήματι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ θετικὸν ἀριθμὸν ὁρίζεται ὡς καὶ ἐν τῷ κλασματικῷ συστήματι· ἤτοι τὸ $\alpha.4=\alpha+\alpha+\alpha+\alpha$, τὸ δὲ $\alpha.\frac{1}{3}$ σημαίνει τὸ τρίτον μέρος τοῦ α, ἤτοι τὸ $\frac{\alpha}{3}$, τὸ δὲ $\alpha.\frac{2}{5}$ σημαίνει $\frac{\alpha}{5}+\frac{\alpha}{5}$, οἱοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ ἂν εἶναι ὁ α.

37. *Ὁ πολλαπλασιασμὸς οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν νάδα (1΄) πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὅτι εἶναι τροπὴ αὐτοῦ εἰς τὸν ἀντίθετον. τοῦτο δὲ ἵνα αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μένωσιν ἀμετάβλητοι.*. Πρὸς τοῦτο ἔστω ἀριθμός τις α (θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς) καὶ α΄ ὁ ἀντίθετος τούτου. Ἐπειδὴ $1+1'=0$, συνάγεται ὅτι καὶ τὸ γινόμενον $\alpha(1+1')=0$. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα (§ 1. γ΄) τὸ αὐτὸ γινόμενον ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι $(\alpha.1)+(\alpha.1')$· κατ᾽ ἀκολουθίαν οἱ δύο ἀριθμοὶ α.1 καὶ α.1΄ εἶναι ἀντίθετοι· ἐπειδὴ δὲ (§ 12) ὁ πρῶτος α.1 ἰσοῦται τῷ α, ἀντίθετον δὲ αὐτοῦ ἐλάβομεν ἕνα μόνον τὸν α΄, ἀναγκαῖον τὸ γινόμενον α.1΄ νὰ εἶναι ἴσον τῷ α΄.

38. Πορίσματα τούτου εἶναι τὰ ἑξῆς·

1ον *Τὸ γινόμενον τῆς ἀρνητικῆς μονάδος ἐφ᾽ ἑαυτὴν ἰσοῦται τῇ θετικῇ μονάδι 1*· ἤτοι $1'.1'=1$.

2ον *Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον τοῦ ἀντιθέτου αὐτοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα.*

Π. χ. ὁ $5'=5.1'$ καὶ ὁ $\frac{5'}{9}=\frac{5}{9}.\ 1'$.

39. Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν γίνεται ὡσεὶ ἀμφότεροι οἱ παράγοντες ἦσαν θετικοί, τὸ δὲ γινόμενον εἶναι θετικὸν μέν, ἂν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι ὁμοειδεῖς, ἀρνητικὸν δέ, ἂν εἶναι ἑτεροειδεῖς. Ἡ ἀπόλυτος ἄρα τιμὴ τοῦ γινομένου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἀριθμῶν τούτων. Ἂν δὲ ὁ ἕτερος τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι 0, τὸ γινόμενον ἰσοῦται τῷ μηδενί.

Διότι, ἐπειδὴ $4'=4.1'$ καὶ $6'=6.1'$, ἕπεται (§ 5 α΄) ὅτι $3.4'=3.4.1'=12.1'=12'$ καὶ $4'.6'=4.1'.6'=4.(6'1')=4.6.=24$.

40. Τῶν ἴσων ἀριθμῶν τὰ γινόμενα ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἶναι ἴσα.

Διότι αἱ ἀπόλυτοι τούτων τιμαὶ εἶναι ἀριθμοὶ ἴσοι· ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ ὁμοειδεῖς, οὐδόλως διαφέρουσιν.

41. Ἐπειδὴ καὶ πάλιν ὁρίζεται ὅτι, *γινόμενον πολλῶν παραγόντων εἶναι τὸ ἐξαγόμενον ὅπερ προκύπτει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πρώτου παράγοντος ἐπὶ τὸν δεύτερον, τοῦ προκύψαντος γινομένου ἐπὶ τὸν τρίτον καὶ ἐφεξῆς οὕτω μέχρις οὗ πολλαπλασιασθῶσι πάντες οἱ παράγοντες*, καὶ ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ μὲν θετικὸν παράγοντα δὲν ἀλλάσσει τὸ σημεῖον τοῦ ἀριθμοῦ, ἐπὶ δὲ ἀρνητικὸν ἀλλάσσει αὐτό, συνάγεται ὅτι, τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τοῦ πλήθους τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων, καὶ εἶναι θετικὸν μέν, ἂν τὸ πλῆθος τοῦτο εἶναι ἄρτιον, ἀρνητικὸν δέ, ἂν εἶναι περιττόν.

Ἐπὶ παραδείγματος τὸ $-3.5.(-2).(-4)=-120$· διότι τὸ $-3.5=-15$, τὸ δὲ $-15.(-2)=30$, τὸ δὲ $30.(-4)=-120$.

Ὡσαύτως τὸ $-5.4.(-3).8.2=960$.

Διαίρεσις.

42. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς διαιρέσεως (§ 6), ἐπεκτεινομένου καὶ ἐφ᾽ οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, συνάγεται διὰ τὴν διαίρεσιν τῶν τε θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ὁ ἑξῆς κανών·

Κανών. *Ἡ διαίρεσις δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, ἐπειδὴ εἶναι ἄμεσον ἐπακολούθημα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, γίνεται ὡσεὶ ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ ἦσαν θετικοί, τὸ δὲ πηλίκον εἶναι θετικὸν μέν, ἂν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι ὁμοειδεῖς, ἀρνητικὸν δέ, ἂν εἶναι ἑτεροειδεῖς.*

Π. χ. τὸ $10:(-2)=-5$, τὸ $(-15):5=-3$ καὶ τὸ $(-8):(-5)=\frac{8}{5}$· διότι τὸ $(-2).(-5)=10$, τὸ $5.(-3)=-15$ καὶ τὸ $(-5).\frac{8}{5}=-8$.

Σχέσεις τῶν τε θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ὡς πρὸς τὸ μέγεθος.

43. Ἡ ἀνισότης τῶν θετικῶν ἀριθμῶν (§ 10) ἔχει τὴν ἑξῆς ἀρχικὴν ἰδιότητα. *Ἂν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἀνίσους προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ἡ ἀνισότης δὲν μεταβάλλεται.*

Ἂν δὲ θέλωμεν νὰ συμπεριλάβωμεν εἰς τὰς ἀνισότητας τῆς ἀριθμητικῆς καὶ τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμούς, νὰ διατηρήσωμεν δὲ τὴν ἀρχικὴν ταύτην ἰδιότητα, δέον νὰ θεωρῶμεν *πάντα μὲν θετικὸν ἀριθμὸν μείζονα τοῦ 0, πάντα δὲ ἀρνητικὸν ἀριθμὸν ἐλάσσονα τοῦ 0 καὶ παντὸς ἄρα θετικοῦ ἀριθμοῦ, ἐκ δύο δὲ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν νὰ θεωρῶμεν μείζονα τὸν ἔχοντα τὴν ἐλάσσονα ἀπόλυτον τιμήν.*

Διότι, ἂν μὲν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος $4 < 7$ προστεθῇ, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς -4, προκύπτει ἡ ἀνισότης $4-4 < 7-4$, ἤτοι $0 < 3$· ἂν δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς αὐτῆς ἀνισότητος προστεθῇ ὁ ἀριθμὸς -7, προκύπτει ἡ ἀνισότης $4-7 < 7-7$, ἤτοι $-3 < 0$· ἂν δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς αὐτῆς ἀνισότητος $4 < 7$ προστεθῇ ὁ ἀριθμὸς -9, προκύπτει ἡ ἀνισότης $4-9 < 7-9$, ἤτοι ὅτι $-5 < -2$.

44. Γενικῶς δὲ πρέπει νὰ δεχθῶμεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν :

Ὁρισμός.—*Ἀριθμός τις α λέγεται ὅτι εἶναι μείζων ἀριθμοῦ τινος β, ἂν ἡ διαφορὰ α—β εἶναι θετικὸς ἀριθμός· λέγεται δὲ ὅτι ὁ α εἶναι ἐλάσσων τοῦ β, ἂν ἡ διαφορὰ α—β εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.*

Διότι, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ α—β εἶναι θετικὸς ἀριθμός, καὶ ἴση τῷ θ, ἤτοι $\theta > 0$, τότε, ἂν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς β, θὰ προκύψῃ ἡ ἀνισότης

$$\beta + \theta > \beta, \text{ τουτέστιν } \alpha > \beta.$$

Ἂν δὲ ἡ διαφορὰ α—β εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, ἡ ἀντίθετος β—α εἶναι θετικός, καὶ κατ' ἀκολουθίαν θὰ εἶναι τότε $\beta > \alpha$· ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι $\alpha > \beta$ σημαίνει, ὅτι ἡ διαφορὰ α—β εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

Ἐκ δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν μείζων εἶναι ὁ ἔχων τὴν ἐλάσσονα ἀπόλυτον τιμήν.

Πρὸς τοῦτο ἔστωσαν οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β, καὶ ὅτι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ β εἶναι μείζων τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ α.

Ἐπειδὴ ἡ τῶν ἀριθμῶν τούτων διαφορὰ α—β ἰσοῦται (§ 31) τῷ ἀθροίσματι $\alpha + (-\beta)$, ὅπερ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, διότι ὁ θετικὸς ἀριθμὸς $-\beta$ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως μείζων τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ α, ἕπεται (§ 44) ὅτι ὁ α εἶναι μείζων τοῦ β.

Ἐπὶ δὲ παραδείγματος ὁ -5 εἶναι μείζων τοῦ -8, διότι ἡ τούτων διαφορὰ $-5+8=3$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

V. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΑΡΧΙΚΑΙ ΑΥΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ·

45. **Ὁρισμός.** *Δύναμις ἀριθμοῦ θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ καλεῖται τὸ γινόμενον δύο ἢ πλειόνων παραγόντων ἴσων τῷ ἀριθμῷ τούτῳ.*

Τὰς δυνάμεις παριστῶμεν συντόμως διὰ τῶν αὐτῶν καὶ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ συμβόλων· ὁ δὲ τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων δηλῶν ἀριθμὸς καλεῖται *ἐκθέτης.*

46. Παρατηροῦνται δὲ ἐπὶ τῶν δυνάμεων τὰ ἑξῆς·

1ον. *Πᾶσα δύναμις ἀριθμοῦ ἔχουσα ἄρτιον ἐκθέτην εἶναι ἀριθμὸς θετικός.*

Διότι εἶναι γινόμενον ἀρτίου πλήθους ὁμοειδῶν παραγόντων (§ 41).

2ον. *Πᾶσα δύναμις οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἔχουσα περιττὸν ἐκθέτην εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς τὸν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην ὑψούμενον ἀριθμόν.*

Διότι εἶναι γινόμενον περιττοῦ πλήθους παραγόντων θετικῶν μέν, ἂν ὁ δεδομένος ἀριθμὸς εἶναι θετικός, ἀρνητικῶν δέ, ἂν ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ἀρνητικός (§ 41).

Ἡ ἀπόλυτος δὲ τιμὴ τῆς δυνάμεως ἀριθμοῦ τινος εἶναι ἐν πάσαις ταῖς περιπτώσεσιν ἡ δύναμις τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ ἀριθμοῦ τούτου (§ 39).

Οὕτω $2^4=2.2.2.2=16, (-2)^4=(-2).(-2)(-2).(-2)=16$, $5^3=5.5.5=125$, $(-5)^3=(-5).(-5).(-5)=-125$.

47. Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις ἀριθμοῦ οἱουδήποτε εἶναι γινόμενα, αἱ ἰδιότητες αὐτῶν συναγόμεναι ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, εἶναι αἱ αὐταὶ πρὸς τὰς ἐν τῇ ἀριθμητικῇ, καὶ ἀποδεικνυόμεναι, ὡς ἐκεῖναι, εἶναι αἱ ἑξῆς·

1ον. *Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι καὶ τοῦτο δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐκθετῶν.*

Κατὰ ταῦτα τὸ $\alpha^3.\alpha^4=\alpha^7$ καὶ ἐν γένει τὸ $\alpha^\mu.\alpha^\nu=\alpha^{\mu+\nu}$.

Διότι τοῦτο εἶναι ἄμεσον ἐπακολούθημα τῆς προτάσεως (§ 5. δ).

Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης συνάγεται ὅτι καὶ τὸ γινόμενον

$$\alpha^\mu.\alpha^\nu\ldots\alpha^\rho=\alpha^{\mu+\nu+\ldots+\rho}. \quad \text{Π. χ. τὸ } 2^2.2^3.2^7=2^{12},$$

ἤτοι ὅτι *καὶ τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι καὶ τοῦτο δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἐκθετῶν.*

Ἂν δὲ πάντες οἱ ἐκθέται εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, ἤτοι $\mu=\nu=\ldots=\rho$, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν παρασταθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ κ, ἕπεται ὅτι τὸ $\alpha^\mu.\alpha^\mu\ldots\ldots\alpha^\mu=\alpha^{\mu+\mu+\ldots+\mu}=\alpha^{\mu.\kappa}$.

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha^\mu.\alpha^\mu\ldots\alpha^\mu=(\alpha^\mu)^\kappa$, ἕπεται ὅτι $(\alpha^\mu)^\kappa=\alpha^{\mu.\kappa}$.

Κατὰ ταῦτα εἶναι $(2^3)^5=2^{15}$ καὶ $(43^2)^5=43^{10}$.

ἤτοι *δύναμις ἀριθμοῦ ὑψουμένη εἰς δύναμιν, εἶναι πάλιν δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐκθετῶν.*

2ον. *Γινόμενον ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἂν ἕκαστος τῶν παραγόντων ὑψωθῇ εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν.*

ἤτοι $(\alpha.\beta.\gamma^\rho)^\mu=\alpha^\mu.\beta^\mu.\gamma^{\rho\mu}$. Π. χ. $(2.5)^3=2^3.5^3=1000$.

3ον. *Κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἂν ἑκάτερος τῶν ὅρων ὑψωθῇ εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν.*

ἤτοι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu=\frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}$. Π. χ. $\left(\frac{3}{11}\right)^7=\frac{3^7}{11^7}$.

Ὁρισμὸς τῶν συμβόλων α^1, α^0 καὶ α^{μ}.

48. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων (§45) ὁ ἐκθέτης πάσης δυνάμεως εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος καὶ θετικός, οὐχὶ μικρότερος τοῦ 2· ὥστε, ἂν νῦν θέλωμεν νὰ εὐρύνωμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦτον καὶ ἐπὶ ἄλλων ἐκθετῶν, πρέπει νὰ διατηρήσωμεν ἐπὶ πασῶν τῶν δυνάμεων τὰς αὐτὰς ἀρχικὰς ἰδιότητας, ὡς ἐποιήσαμεν καὶ περὶ τῶν πράξεων πάντων τῶν ἀριθμῶν· διότι τοῦτο καὶ τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις γενικεύει καὶ ἁπλοποιεῖ, καὶ τὰς δυνάμεις πάσας γενικώτερον ὁρίζει, ὡς ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ ἀποδείξωμεν.

Κατὰ ταῦτα, ἵνα ὁρίσωμεν τὴν σημασίαν τῶν συμβόλων α^0, α^1 καὶ $\alpha^{-\mu}$, ἅτινα καθ᾽ ἑαυτὰ οὐδεμίαν ἔχουσι σημασίαν, πρέπει νὰ προσέξωμεν, ὥστε νὰ διατηρῆται καὶ ἐν αὐτοῖς ἡ πρώτη ἰδιότης τῶν δυνάμεων, καθ᾽ ἣν $\alpha^{\mu}.\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$.

Πρὸς τοῦτο, ἂν ἡ ἰσότης αὕτη ἀληθεύῃ, ὁ δὲ α διαφέρῃ τοῦ 0, ὑποτεθῇ δὲ ὅτι·

1^{ον}) $\nu=0$, συνάγεται $\alpha^{\mu}.\alpha^0=\alpha^{\mu+0}=\alpha^{\mu}$, ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι ὁ α^0 εἶναι πηλίκον τοῦ α^{μ} διαιρεθέντος διὰ τοῦ α^{μ}, ἤτοι $\alpha^0=1$.

Λοιπὸν πρέπει νὰ ὁρίσωμεν ὅτι, *ἡ δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ* (διαφόρου τοῦ 0) *ἡ ἔχουσα μηδενικὸν ἐκθέτην ἰσοῦται τῇ θετικῇ μονάδι* (1).

2^{ον}) ἂν $\nu=1$, συνάγεται $\alpha^{\mu}.\alpha^1=\alpha^{\mu+1}=\alpha^{\mu}.\alpha$, ἐξ οὗ ἕπεται $\alpha^1=\alpha$. Λοιπὸν πρέπει νὰ ὁρίσωμεν *ὡς πρώτην δύναμιν παντὸς ἀριθμοῦ* (*διαφόρου* τοῦ 0) *αὐτὸν τοῦτον τὸν ἀριθμόν*.

3^{ον}) ἂν $\nu=-\mu$, συνάγεται $\alpha^{\mu}.\alpha^{-\mu}=\alpha^{\mu-\mu}=\alpha^0=1$,

ἐξ οὗ $\alpha^{-\mu}=\dfrac{1}{\alpha^{\mu}}$.

Λοιπὸν πρέπει νὰ ὁρίσωμεν ὅτι, *πᾶσα δύναμις ἀριθμοῦ* (διαφόρου τοῦ 0) *ἔχουσα ἀρνητικὸν ἐκθέτην ἰσοῦται κλάσματι ἔχοντι ἀριθμητὴν μὲν τὴν μονάδα 1, παρονομαστὴν δὲ τὴν δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τὴν ἔχουσαν ἀντίθετον ἐκθέτην*.

Π.χ. $(-8)^0=1, \left(\dfrac{3}{4}\right)^0=1, \left(\dfrac{3}{5}\right)^1=\dfrac{3}{5}, (-5)=-5, 2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}$.

Διαίρεσις δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

49. *Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι καὶ τοῦτο δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἐκθετῶν· τῆς διαφορᾶς δὲ ταύτης μειωτέος μὲν εἶναι ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρετέου, ἀφαιρετέος δὲ ὁ τοῦ διαιρέου.*

Ἔστωσαν αἱ δύο δυνάμεις α^{μ} καὶ α^{ν}, ἔνθα $\mu > \nu$· λέγω ὅτι τῶν δυνάμεων τούτων τὸ πηλίκον εἶναι $\alpha^{\mu-\nu}$.

Διότι, ἂν ἡ δύναμις α^{-} πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν διαιρέτην α^{ν}, προκύπτει (§ 47, 1ον) $\alpha^{\mu-\nu}.\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu-\nu+\nu}=\alpha^{\mu}$, ἤτοι ὁ διαιρετέος.

Π. χ. $2^5 : 2^2 = 2^3$ καὶ $(-5)^7 : (-5)^3 = (-5)^4$.

50. Ἂν δὲ νῦν ὑποτεθῇ $\nu > \mu$, ἔστω δὲ $\nu = \mu + \rho$, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\mu+\rho}} = \frac{1}{\alpha^{\rho}} = \alpha^{-\rho} = \alpha^{\mu-(\mu+\rho)} = \alpha^{\mu-\nu},$$

ἤτοι $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$, ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι, ἡ ἀποδειχθεῖσα ἀνωτέρω ἰδιότης τοῦ πηλίκου δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀληθεύει καὶ ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει.

Νῦν δὲ θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι αἱ ἐπὶ τῶν δυνάμεων ἀποδειχθεῖσαι ἰδιότητες $\alpha^{\mu}.\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$, $\alpha^{\mu}:\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu-\nu}$, ἀληθεύουσι καὶ ἂν οἱ ἐκθέται πάντες ἢ τινὲς εἶναι ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.

Διότι, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ μὲν μ εἶναι ἀριθμὸς θετικός, ὁ δὲ ν ἀρνητικός, τεθῇ δὲ $\nu = -\nu'$, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha^{\mu}.\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu}.\alpha^{-\nu'} = \alpha^{\mu}.\frac{1}{\alpha^{\nu'}} = \alpha^{\mu-\nu'} = \alpha^{\mu+\nu},$$

Ἂν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι ὁ μ καὶ ὁ ν εἶναι ἀριθμοὶ ἀρνητικοί, τεθῇ δὲ $\mu = -\mu'$ καὶ $\nu = -\nu'$, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha^{\mu}.\alpha^{\nu} = \alpha^{-\mu'}.\alpha^{-\nu'} = \frac{1}{\alpha^{\mu'}}\cdot\frac{1}{\alpha^{\nu'}} = \frac{1}{\alpha^{\mu'+\nu'}} = \alpha^{-\mu'-\nu'} = \alpha^{\mu+\nu}.$$

Ὡσαύτως διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς διαιρέσεως, ἂν ὑποτεθῇ ὁ μὲν μ θετικὸς ἀριθμός, ὁ δὲ ν ἀρνητικός, τεθῇ δὲ $\nu = -\nu'$, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{-\nu'}} = \alpha^{\mu} : \frac{1}{\alpha^{\nu'}} = \alpha^{\mu}.\alpha^{\nu'} = \alpha^{\mu+\nu'} = \alpha^{\mu-\nu}.$$

Ἂν δὲ ὁ μὲν μ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, τεθῇ δὲ $\mu = -\mu'$, ὁ δὲ ν θετικός, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \frac{\alpha^{-\mu'}}{\alpha^{\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\mu'}} : \alpha^{\nu} = \frac{1}{\alpha^{\mu'}}.\frac{1}{\alpha^{\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\mu'+\nu}} = \alpha^{-\mu'-\nu} = \alpha^{\mu-\nu}.$$

Ἂν δὲ ὁ μ καὶ ὁ ν εἶναι ἀριθμοὶ ἀρνητικοί, ἔστω δὲ $\mu = -\mu'$ καὶ $\nu = -\nu'$, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \frac{\alpha^{-\mu'}}{\alpha^{-\nu'}} = \frac{1}{\alpha^{\mu'}} : \frac{1}{\alpha^{\nu'}} = \frac{\alpha^{\nu'}}{\alpha^{\mu'}} = \alpha^{\nu'-\mu'} = \alpha^{\mu-\nu}.$$

51. Ὡσαύτως ἀληθεύει ἡ ἰσότης $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu.\nu}$, ἂν ὁ μὲν μ εἶναι ἀριθμὸς θετικός, ὁ δὲ ν ἀρνητικός· διότι, ἂν τεθῇ $\nu = -\nu'$, θὰ ἔχωμεν

$$(\alpha^\mu)^\nu = (\alpha^\mu)^{-\nu'} = \frac{1}{(\alpha^\mu)^{\nu'}} = \frac{1}{\alpha^{\mu.\nu'}} = \alpha^{-\mu.\nu'} = \alpha^{\mu.\nu}$$

Ἂν δὲ ὁ μὲν μ εἶναι ἀριθμὸς ἀρνητικός, ὁ δὲ ν θετικός, τεθῇ δὲ $\mu = -\mu'$, θὰ ἔχωμεν

$$(\alpha^\mu)^\nu = (\alpha^{-\mu'})^\nu = \left(\frac{1}{\alpha^{\mu'}}\right)^\nu = \frac{1}{\alpha^{\mu'\nu}} = \alpha^{-\mu'\nu} = \alpha^{\mu.\nu}.$$

Ἂν δὲ τέλος ὁ μ καὶ ὁ ν εἶναι ἀριθμοὶ ἀρνητικοί, τεθῇ δὲ $\mu = -\mu'$ καὶ $\nu = -\nu'$, θὰ ἔχωμεν

$$(\alpha^\mu)^\nu = \left(\alpha^{-\mu'}\right)^{-\nu'} = \left(\frac{1}{\alpha^{\mu'}}\right)^{-\nu'} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha^{\mu'}}\right)^{\nu'}} = \alpha^{\mu'\nu'} = \alpha^{\mu.\nu}.$$

Ῥίζαι θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.

52. Ἂν ἀριθμός τις εἶναι νυοστὴ δύναμις ἄλλου ἀριθμοῦ, ὁ ἄλλος οὗτος ἀριθμὸς καλεῖται νυοστὴ ῥίζα ἐκείνου.

Π. χ. ἂν $\alpha = 6^\nu$, ὁ 6 καλεῖται νυοστὴ ῥίζα τοῦ α.

Παρίσταται δὲ ἡ νυοστὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ α διὰ τοῦ σημείου $\sqrt[\nu]{\alpha}$, ἰδίᾳ τὸ μὲν σημεῖον $\sqrt{\ }$ καλεῖται *ῥιζικόν*, ἡ δὲ ὑπ' αὐτὸ παράστασις *ὑπόρριζον*, ὁ δὲ ἀριθμὸς ν *δείκτης τῆς ῥίζης*, ὅστις συνήθως παραλείπεται, ὅταν εἶναι ἴσος τῷ 2.

Καλεῖται δὲ ἡ μὲν ῥίζα τῆς δευτέρας τάξεως καὶ *τετραγωνικὴ ῥίζα*, ἡ δὲ τῆς τρίτης *καὶ κυβικὴ ῥίζα*.

Λοιπόν, ἂν τὸ $\alpha = 6^\nu$, τὸ $6 = \sqrt[\nu]{\alpha}$· ἀμφότεραι δηλονότι αἱ ἰσότητες αὗται ἐκφράζουσι τὴν αὐτὴν σχέσιν τῶν ἀριθμῶν α καὶ 6.

53. Ἐκ τοῦ εἰρημένου ὁρισμοῦ τῆς νυοστῆς ῥίζης συνάγονται αἱ ἑξῆς ταὐτότητες

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha \quad \text{καὶ} \quad \sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha.$$

54. Ἐπὶ τῶν ῥιζῶν τῶν ἀριθμῶν παρατηροῦνται τὰ ἑξῆς·

1ον. Ἐπειδὴ ἡ δύναμις οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἡ ἔχουσα ἄρτιον ἐκθέτην εἶναι πάντοτε θετική, *οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουσι ῥίζαν ἀρτίας τάξεως*.

2ον. *Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο ῥίζας ἑκάστης ἀρτίας τάξεως ἐχούσας ἀπόλυτον μὲν τιμὴν τὴν αὐτήν, σημεῖα δὲ διάφορα.*

Π. χ. ὁ 16 ἔχει δύο τετραγωνικὰς ῥίζας, τὸν 4 καὶ τὸν —4· διότι 4 4=16 καὶ (—4). (—4)=16· ἤτοι $\sqrt{16}=4$ καὶ $\sqrt{16}=-4$.

Ἐπίσης ὁ 16 ἔχει δύο τετάρτας ῥίζας, τὸν 2 καὶ τὸν —2.

Διότι 2.2.2.2=16 καὶ (—2) (—2) (—2) (—2) = 16.

3ον. *Πᾶς θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἔχει μίαν ῥίζαν ἑκάστης περιττῆς τάξεως. θετικὴν μέν, ἂν οὗτος εἶναι θετικός, ἀρνητικὴν δέ, ἂν οὗτος εἶναι ἀρνητικός.*

Π.χ. ὁ 8 ἔχει μίαν κυβικὴν ῥίζαν τὸν ἀριθμὸν 2· διότι 2.2.2=8· ὁ δὲ —8 ἔχει κυβικὴν ῥίζαν τὸν —2· διότι (—2).(—2).(—2)=—8.

55. *Αἱ ῥίζαι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν οὐδέποτε εἶναι ἀριθμοὶ κλασματικοί.*

Διότι, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι νυοστὴ ῥίζα τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ Α εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, ὅπερ ἔστω ἀνάγωγον, θὰ εἶναι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}=\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}=A$.

Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β ὑπετέθησαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἕπεται ὅτι καὶ αἱ δυνάμεις αὐτῶν α^{ν} καὶ β^{ν} εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἶναι ἀδύνατον νὰ διαιρῆται ὁ α^{ν} διὰ τοῦ β^{ν} καὶ νὰ προκύπτῃ τὸ ἀκέραιον πηλίκον Α.

Λοιπὸν αἱ ῥίζαι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν οὐδέποτε εἶναι κλάσματα, ἀλλ' εἶναι ἢ ἀκέραιοι πάλιν ἀριθμοὶ ἢ ἀσύμμετροι (ἴδε Ἀριθμητ.).

56. *Ἡ νυοστὴ ῥίζα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, μόνον ἂν πάντες οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων αὐτοῦ παραγόντων εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ν.*

Διότι, ἂν ὁ $\beta^{\nu}=\alpha$, ἤτοι ἂν ὁ $\beta=\sqrt[\nu]{\alpha}$, οἱ δὲ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἀκέραιοι, ἂς ἀναλυθῇ ὁ β εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, καὶ ἔστω $\beta=\gamma^{\rho}.\delta^{\sigma}.......$

θὰ εἶναι ἄρα (§ 47,2) , $\beta^{\nu}=(\gamma^{\rho}.\delta^{\sigma}...)^{\nu}=\gamma^{\rho.\nu}.\delta^{\sigma.\nu}....$

καὶ ἐπειδὴ ὁ $\beta^{\nu}=\alpha$, ἕπεται ὅτι ὁ $\alpha=\gamma^{\rho\nu}.\delta^{\sigma\nu}.....$

Λοιπὸν ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι πάντες οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ α εἶναι πολλαπλάσα τοῦ ν.

Καὶ ἀντιστρόφως· *ἂν ὁ $\alpha=\gamma^{\rho.\nu}.\delta^{\sigma.\nu}...$, ἡ νυοστὴ ῥίζα τοῦ α εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς $\gamma^{\rho}.\delta^{\sigma}..$*, ἤτοι $\sqrt[\nu]{\alpha}=\gamma^{\rho}.\delta^{\sigma}...$

Διότι, ἂν ὁ ἀριθμὸς οὗτος ὑψωθῇ εἰς τὴν ν δύναμιν, προκύπτει ὁ α.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ*

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ.

57. *Ἡ Ἄλγεβρα εἶναι ἐπιστήμη, δι' ἧς γενικεύονται καὶ ἁπλοποιοῦνται τὰ ἀριθμητικὰ ζητήματα.* Πρὸς τοῦτο ἡ ἐπιστήμη αὕτη ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν ποιουμένη συνήθως χρῆσιν τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου, τῶν μὲν πρώτων πρὸς παράστασιν τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν, τῶν δὲ τελευταίων πρὸς παράστασιν τῶν ἀγνώστων ἀριθμῶν, ὁρίζει ἐν ἑκάστῳ ζητήματι τὰς ἐπὶ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν ἐκτελεστέας πράξεις, πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων. Πρὸς δήλωσιν δὲ καὶ τῶν πράξεων ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ τῆς ἰσότητος καὶ τῆς ἀνισότητος αὐτῶν ποιεῖται χρῆσιν τῶν αὐτῶν καὶ ἡ ἀριθμητικὴ σημείων, οἷον τοῦ $+$, $-$, $\times$ ἢ $.$, $:$, $\sqrt{\ }$, $=$, $<$, $>$.

Π. χ. ἂν μ πήχεις ὑφάσματος τιμῶνται α δραχμάς, εὑρίσκεται ὅτι αἱ δ πήχεις τοῦ ἰδίου ὑφάσματος τιμῶνται $\frac{\alpha.\delta}{\mu}$ δραχμάς.

58. *Ἀλγεβρικὴ παράστασις καλεῖται τὸ ἐξ ἀριθμῶν καὶ γραμμάτων καὶ σημείων ἢ μόνον ἐκ γραμμάτων καὶ σημείων ἀποτελούμενον σύνολον, ἐν ᾧ τὰ σημεῖα δηλοῦσι σειρὰν ἐκτελεστέων πράξεων ἐπί τε τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν γραμμάτων τούτων.*

Π. χ. τὸ $-5\alpha^2\beta^3\gamma$, τὸ $5\alpha^2-3\alpha\beta^2+2\beta^3$, ὡς καὶ τὸ $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^3\gamma$ εἶναι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις.

59. Ἂν παράστασις λαμβανομένη ὡς εἷς ἀριθμὸς συνδυάζεται διά

(*) Ἡ λέξις Ἄλγεβρα οὖσα Ἀραβικὴ σημαίνει σύγκρισιν.

τινος πράξεως μετ' ἄλλης παραστάσεως ἢ μεθ' ἁπλοῦ γράμματος ἢ καὶ μετ' ἀριθμοῦ, ἐγκλείεται ἐντὸς παρενθέσεως.

Κατὰ ταῦτα τὸ γινόμενον τῆς παραστάσεως $α+β-γ$ ἐπὶ τὸ δ παρίσταται συμβολικῶς οὕτω $(α+β-γ).δ$.

Ὁμοίως εἶναι $(α-βγ)\ (α+γ)$ καὶ $[α-(β+2γ)].δ$.

60. *Ἀλγεβρικὸς τύπος καλεῖται ἀλγεβρικὴ παράστασις δεδομένων ποσοτήτων, παρέχουσα τὴν σύντομον σειρὰν ἐκτελεστέων πράξεων ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τῶν παριστώντων δεδομένα ποσὰ πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς ζητουμένης ποσότητος ἢ ἀριθμοῦ.*

Κατὰ ταῦτα ἀλγεβρικὸς τύπος εἶναι ἐπὶ παραδείγματι ἡ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ καὶ ἐν τῇ μεθόδῳ τοῦ τόκου εὑρεθεῖσα ἰσότης $Τ=\frac{Κ.Ε.Χ}{100}$, δι' ἧς εὑρίσκεται ὁ τόκος Τ, ὅταν τὰ τρία ἄλλα ποσά, ἤτοι τὸ κεφάλαιον Κ, τὸ ἐπιτόκιον Ε καὶ ὁ χρόνος Χ εἶναι δεδομένα.

Ὡσαύτως, ἂν τὴν τιμὴν τοῦ ἐν τῇ παραγράφῳ 56 προκύψαντος ἐξαγομένου $\frac{α.δ}{μ}$ παραστήσωμεν χάριν συντομίας διὰ τοῦ χ, θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ λύσις τοῦ ζητήματος ἐκείνου παρίσταται ὑπὸ τοῦ τύπου $χ=\frac{α.δ}{μ}$, ἐν ᾧ ὁ μὲν ἀριστερὰ τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος ἄγνωστος ἀριθμὸς χ θὰ καλῆται *πρῶτον μέλος τοῦ τύπου*, ἡ δὲ δεξιὰ τοῦ σημείου τούτου παράστασις $\frac{α.δ}{μ}$ *δεύτερον μέλος* τοῦ τύπου.

Ὡσαύτως ἡ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ ἐπὶ θετικῶν ἀριθμῶν εὑρεθεῖσα ἰσότης $(α+β)^2=α^2+2αβ+β^2$, ἥτις, ὡς κατωτέρω ἀποδεικνύεται, ἀληθεύει καὶ ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ ἐφ' οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, εἶναι ἀλγεβρικὸς τύπος κλπ. Ὁ ἔν τινι δὲ ζητήματι χρησιμεύων τύπος πρὸς εὕρεσιν ποσοῦ ἐξ ἄλλων δεδομένων εἶναι προφανῶς ἀνεξάρτητος τῶν τιμῶν τῶν δεδομένων ποσῶν, ἅτινα ἐν τῷ τύπῳ περιλαμβάνονται. Μετὰ δὲ τὴν ἀντικατάστασιν ἐν τῷ τύπῳ τῶν ἑκάστοτε τιμῶν ἑκάστου τῶν δεδομένων ποσῶν καὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἐν αὐτῷ σεσημειωμένων πράξεων προκύπτει ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ζητουμένου ποσοῦ.

61. Παράστασις περιέχουσα γράμμα τι, ἂν μὲν δὲν σημειῶται ἐπ' αὐτοῦ ἐξαγωγὴ ῥίζης, καλεῖται ὡς πρὸς τὸ γράμμα τοῦτο *ῥητή*, εἰ δὲ μή, καλεῖται ὡς πρὸς αὐτὸ *ἄρρητος* ἢ *ἄλογος*.

Κατὰ ταῦτα αἱ παραστάσεις $5α^2-3\sqrt{β}$ καὶ $α+\sqrt[3]{5β}$ εἶναι ὡς πρὸς μὲν τὸ α ῥηταί, ὡς πρὸς δὲ τὸ β ἄρρητοι.

62. Παράστασις, ἂν εἶναι ῥητὴ ὡς πρὸς ἕκαστον τῶν ἐν αὐτῇ γραμμάτων, καλεῖται *ῥητή*.

Π. χ. αἱ παραστάσεις $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ καὶ $\dfrac{\alpha-\sqrt{3\beta^2}}{5\alpha}$ εἶναι ῥηταί.

63. Παράστασις ῥητὴ ὡς πρὸς α, καλεῖται *ἀκεραία* ὡς πρὸς τὸ γράμμα τοῦτο, ἂν δὲν περιέχῃ διαίρεσιν δι᾽ αὐτοῦ, εἰδὲ μή, καλεῖται ὡς πρὸς αὐτὸ *κλασματική*.

Π.χ. αἱ μὲν παραστάσεις $\alpha^3-2\alpha^2\beta+\sqrt{5\beta^2}$ καὶ $\alpha\beta^2-\dfrac{2}{3}\alpha^2$ εἶναι ἀκέραιαι ὡς πρὸς πάντα τὰ ἐν αὐταῖς γράμματα, αἱ δὲ παραστάσεις $\dfrac{5\alpha-2\sqrt[3]{\beta}}{3\gamma}$ καὶ $\dfrac{\alpha^2+3\sqrt{\beta}}{\beta^2-5\gamma^2}$ εἶναι ἀκέραιαι μὲν ὡς πρὸς τὸ α, κλασματικαὶ δὲ ὡς πρὸς τὸ γ, ἄρρητοι δὲ ὡς πρὸς τὸ β.

64. *Μονώνυμον* καλεῖται παράστασις, ἐν ᾗ δὲν σημειοῦται μήτε πρόσθεσις *μήτε ἀφαίρεσις*.

Π. χ. ἡ παράστασις $(-3).\alpha.(-5).\beta.\alpha.\gamma.\beta.$ εἶναι μονώνυμον.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλαχθῇ ἡ τάξις τῶν ἀποτελούντων αὐτὸ παραγόντων (§ 1, α′), ἕπεται ὅτι τὸ ἀνωτέρω μονώνυμον δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὧδε:

$$(-3).(-5).\alpha.\alpha.\beta.\beta.\gamma.$$

Ἐπειδὴ δὲ γινόμενόν τι δὲν μεταβάλλεται, ἂν δύο ἢ πλείονας τούτου παράγοντας ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν (§ 5, α′), ἕπεται ὅτι τὸ μονώνυμον τοῦτο γράφεται καὶ ὑπὸ τὴν ἑξῆς μορφὴν

$$15\alpha^2\beta^2\gamma,$$

ἥτις εἶναι ἡ συνήθως θεωρουμένη ἁπλουστάτη μορφὴ τῶν μονωνύμων.

Ὁ ἐν τῷ μονωνύμῳ ὑπάρχων ἀριθμητικὸς παράγων γράφεται συνήθως πρῶτος καὶ καλεῖται *συντελεστὴς* τοῦ μονωνύμου· οὕτω τῶν μονωνύμων $3\alpha^2$, $\dfrac{3}{8}\alpha^2\beta$, $5\beta\gamma$ συντελεσταὶ εἶναι ὁ 3, ὁ $\dfrac{3}{8}$ καὶ ὁ 5′.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου εἶναι ἢ θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός, πρὸ μὲν τῶν μονωνύμων τῶν ἐχόντων θετικὸν συντελεστὴν τίθεται τὸ σημεῖον $+$, πρὸ δὲ τῶν ἐχόντων ἀρνητικὸν συντελεστὴν τὸ $-$.

Π. χ. τὰ $+5\alpha^2\beta$, $-2\beta^3$, $-7\alpha\beta^3\gamma$ εἶναι $(+5).\alpha^2\beta$, $(-2).\beta^3$, $(-7).\alpha\beta^3\gamma$, ἤτοι συντελεσταὶ αὐτῶν ἀντιστοίχως εἶναι ὁ $+5$, ὁ -2, ὁ -7.

Οὕτω τὰ πρὸ τῶν μονωνύμων τιθέμενα σημεῖα $+$ ἢ $-$ ἀνήκουσιν εἰς τὸν συντελεστὴν καὶ δεικνύουσι τὸ εἶδος αὐτοῦ.

Ἐπὶ δὲ τῶν μονωνύμων τῶν μὴ ἐχόντων συντελεστὴν λαμβάνεται ὡς συντελεστὴς ἡ θετικὴ μονὰς (1).

Π. χ. τοῦ $\alpha^2\beta\gamma$ καὶ τοῦ α συντελεστὴς εἶναι ἡ θετικὴ μονὰς (1)· διότι ταῦτα γράφονται καὶ οὕτω $1.\alpha^2\beta$ καὶ $1.\alpha$.

Ἐνίοτε ἐν τοῖς μονωνύμοις γράμματά τινα λαμβάνονται ὡς γνωστοὶ ὡρισμένοι ἀριθμοὶ καὶ συναποτελοῦσι μετὰ τοῦ ἀριθμητικοῦ παράγοντος τὸν συντελεστὴν τοῦ μονωνύμου.

Π. χ. ἐν τῷ μονωνύμῳ $5\alpha^2\chi\psi^3$ συντελεστὴς λαμβάνεται ὁ $5\alpha^2$.

65. *Πολυώνυμον* καλεῖται ἄθροισμα μονωνύμων, γράφεται δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μονωνύμων ὡς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν (§ 27)· ἤτοι γράφονται τὰ μονώνυμα τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο ἄνευ ὡρισμένης τάξεως, ἔχοντα ἕκαστον τὸ ἑαυτοῦ σημεῖον.

Π. χ. αἱ παραστάσεις $5\alpha-2\alpha\beta^2+\gamma$, $\alpha^2-3\alpha^2\beta+\beta^2-\gamma^3$ εἶναι πολυώνυμα. Εἶναι δὲ ἀθροίσματα τὸ μὲν πρῶτον τῶν μονωνύμων $+5\alpha$, $-2\alpha\beta^2$, $+\gamma$, τὸ δὲ δεύτερον τῶν $+\alpha^2$, $-3\alpha^2\beta$, $+\beta^2$, $-\gamma^3$· ἤτοι τὰ πολυώνυμα ταῦτα δύνανται νὰ γραφῶσι καὶ ὧδε :

$$5\alpha+(-2\alpha\beta^2)+\gamma \quad \text{καὶ} \quad \alpha^2+(-3\alpha^2\beta)+\beta^2+(-\gamma^3).$$

Τὰ μονώνυμα ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τὸ πολυώνυμον καλοῦνται *ὅροι* τοῦ πολυωνύμου. Καὶ τὰ μὲν ἐκ δύο ὅρων ἀποτελούμενα πολυώνυμα καλοῦνται *διώνυμα*, τὰ δὲ ἐκ τριῶν *τριώνυμα*.

Π. χ. τὸ $\alpha^2-2\beta$ εἶναι διώνυμον, τὸ δὲ $\alpha+\beta^2+\gamma$ τριώνυμον.

Ἂν δὲ τὸ σημεῖον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ πρώτου ὅρου εἶναι τὸ $+$, συνήθως παραλείπεται. Παραλείπεται δὲ τὸ σημεῖον $+$ καὶ πρὸ τῶν μεμονωμένων μονωνύμων, ἅτινα ἔχουσι θετικὸν συντελεστήν. Ἐν πολυωνύμῳ δὲ τὸ πρὸ ἑκάστου ὅρου σημεῖον $+$ ἢ $-$ δύναται νὰ λαμβάνηται καὶ ὡς σημεῖον προσθέσεως ἢ ἀφαιρέσεως, κατὰ τὰ εἰρημένα ἐν § 35 περὶ τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.

Π. χ. τὸ πολυώνυμον $5\alpha-2\beta^2+\alpha^2\gamma$, ὅπερ εἶναι ἄθροισμα τῶν μονωνύμων 5α, $-2\beta^2$, $\alpha^2\gamma$, ἤτοι τὸ $5\alpha+(-2\beta^2)+\alpha\gamma$,

δύναται νὰ γράφηται καὶ ὧδε $[5\alpha-2\beta^2]+\alpha^2\gamma$,

ἐν ᾧ ὁ ἀφαιρούμενος ὅρος $2\beta^2$ εἶναι προφανῶς ὁ ἀντίθετος τοῦ $-2\beta^2$.

66. *Βαθμὸς* ἀκεραίου μονωνύμου (60) πρός τι γράμμα καλεῖται ὁ ἐν τῷ μονωνύμῳ ἐκθέτης τοῦ γράμματος τούτου· οἷον τὸ μονώνυμον $5\alpha^2\beta\gamma^3\delta^4$ εἶναι πρὸς μὲν τὸ α δευτέρου βαθμοῦ, πρὸς δὲ τὸ γ τρίτου, πρὸς δὲ τὸ δ τετάρτου, πρὸς δὲ τὸ β πρώτου. Εἶναι δὲ μονώνυμόν τι πρώτου βαθμοῦ πρός τι γράμμα, ἂν τὸ γράμμα τοῦτο εἶναι ἐν τῷ μονωνύμῳ ἄνευ ἐκθέτου (47)· μηδενὸς δὲ βαθμοῦ, ἂν δὲν ὑπάρχῃ ἐν τῷ μονωνύμῳ, διότι δύναται νὰ ληφθῇ ἐν αὐτῷ ὡς παράγων ἡ μηδε-

νικὴ δύναμις τοῦ γράμματος τούτου, ἥτις ἰσοῦται τῇ μονάδι (§ 48).

Βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου (§ 62) πρὸς πλείονα τοῦ ἑνὸς γράμματα καλεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν τῷ μονωνύμῳ ἐκθετῶν τῶν γραμμάτων τούτων· π. χ. τὸ μὲν μονώνυμον $3\alpha^2\beta\chi^3\psi$ εἶναι τετάρτου βαθμοῦ πρὸς τὰ γράμματα χ καὶ ψ, πέμπτου δὲ πρὸς τὰ α καὶ χ· τὸ δὲ $-5\alpha^2\beta\chi^3$ εἶναι ἕκτου βαθμοῦ πρὸς τὰ α, β, χ.

67. *Μονώνυμα ὅμοια* λέγονται τὰ ἐν πᾶσιν ὅμοια ἢ κατὰ τὸν συντελεστὴν μόνον διαφέροντα.

Π. χ. τὰ μονώνυμα $2\alpha^2\beta$, $-5\alpha^2\beta$, $2\alpha^2\beta$ εἶναι ὅμοια.

Ἂν δὲ τὸ ἐξ ὁμοίων ὅρων ἀποτελούμενον πολυώνυμον $5\alpha\beta^2-3\alpha\beta^2+4\alpha\beta^2$ μετασχηματίσωμεν εἰς τὸ $(5-3+4)\alpha\beta^2$, διότι κατὰ τὰ ἐν § 19 τὸ γινόμενον τοῦ $(5-3+4)$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $\alpha\beta^2$, οἱονδήποτε ὄντα, ἰσοῦται πρὸς τὸ δεδομένον πολυώνυμον, θὰ προκύψῃ τὸ ὅμοιον μονώνυμον $6\alpha\beta^2$, ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι, *τὸ ἐξ ὁμοίων ὅρων ἀποτελούμενον πολυώνυμον ἰσοῦται τῷ ὁμοίῳ τοῖς ὅροις μονωνύμῳ τῷ ἔχοντι συντελεστὴν τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν ὅρων τούτων*. Οὕτω τὸ μὲν πολυώνυμον $-3\chi\psi^2+3\chi\psi^2-2\chi\psi^2$ ἰσοῦται τῷ μονωνύμῳ $-2\chi\psi^2$, τὸ δὲ πολυώνυμον $\alpha^3\beta^2-5\alpha^3\beta^2+8\alpha^3\beta^2$ ἰσοῦται τῷ μονωνύμῳ $4\alpha^3\beta^2$.

68. *Βαθμὸς ἀκεραίου πολυωνύμου* (§ 62) πρός τι γράμμα καλεῖται ὁ μέγιστος τῶν βαθμῶν τῶν ὅρων αὐτοῦ πρὸς τὸ γράμμα τοῦτο.

Π. χ. τὸ πολυώνυμον $-3\chi^2+5\alpha^3\chi^3-\alpha\chi^4$ εἶναι πρὸς μὲν τὸ χ τετάρτου βαθμοῦ, πρὸς δὲ τὸ α τρίτου βαθμοῦ.

Βαθμὸς ἀκεραίου πολυωνύμου πρὸς πλείονα τοῦ ἑνὸς γράμματα καλεῖται ὁ βαθμὸς τοῦ ὅρου τοῦ ἔχοντος ὡς πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα τὸν μέγιστον βαθμόν.

Π.χ. τὸ πολυώνυμον $\chi^3-5\chi^2\psi^3+3\chi^2\psi^4$ εἶναι ἕκτου βαθμοῦ πρὸς χ, ψ.

69. Τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον λέγεται *ὁμογενὲς* πρός τινα γράμματα, ἐὰν πάντες οἱ ὅροι αὐτοῦ εἶναι πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ. Π.χ. τὸ μὲν ἀκέραιον πολυώνυμον $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ εἶναι ὁμογενὲς πρὸς τὰ α καὶ β, τὸ δὲ $\chi^3+\chi^2\psi+3\chi\psi^2+\psi^3$ πρὸς τὰ χ, ψ.

70. ***Πολυώνυμα διατεταγμένα***.—Ἂν οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου εἶναι διατεταγμένοι οὕτως, ὥστε οἱ ἐκθέται γράμματός τινος νὰ βαίνωσιν ἀεὶ ἢ αὐξανόμενοι ἢ ἐλαττούμενοι, λέγομεν ὅτι τὸ πολυώνυμον τοῦτο εἶναι *διατεταγμένον* πρὸς τὸ γράμμα τοῦτο κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ τὰς κατιούσας δυνάμεις. Π. χ. τὸ μὲν πολυώνυμον $\chi^2-5\chi^3+2\chi^4$ εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ χ, τὸ δὲ $\alpha^3-2\alpha^2\beta+5\alpha+\beta^3$ κατὰ τὰς κατιούσας τοῦ α.

Πολυώνυμόν τι μετὰ τὴν διάταξιν ὡς πρός τι τούτου γράμμα χ λέγεται *πλῆρες*, ὡς πρὸς τὸ γράμμα τοῦτο χ, ἂν ἐν τῷ πολυωνύμῳ περιέχωνται ὅροι πάντων τῶν βαθμῶν ἀπὸ τοῦ μεγίστου μέχρι σταθεροῦ ὅρου, οὗτινος βαθμὸς θεωρεῖται τὸ μηδέν, διότι (§ 48) $\chi^0=1$. Ἐπὶ δὲ παραδείγματος, τὸ πολυώνυμον $\chi^4-5\chi^3+2\chi^2-\chi+4$, εἶναι πλῆρες· τὸ δὲ τελευταῖον μονώνυμον 4 εἶναι μηδενὸς βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ χ, διότι (§ 48) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὧδε $4\chi^0$. Τὸ πολυώνυμον δὲ $\chi^3+5\chi$ εἶναι ἀτελές· ἐλλείπουσι δὲ ἐξ αὐτοῦ ὁ δευτεροβάθμιος καὶ ὁ σταθερὸς ὅρος.

Μερικαὶ τιμαὶ τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων,

71. Ἂν τὰ γράμματα ἀλγεβρικῆς παραστάσεως ἀντικαταστήσωμεν δι᾿ ὡρισμένων ἀριθμῶν καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς σεσημειωμένας πράξεις θὰ προκύψῃ ἀριθμός, ὅστις καλεῖται *ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως*· ὁ δὲ γράμμα τι ἀντικαθιστῶν ἀριθμὸς καλεῖται *τιμὴ* τοῦ γράμματος τούτου.

Ἡ τιμὴ παραστάσεως ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν τιμῶν τῶν ἐν αὐτῇ περιεχομένων γραμμάτων, ὧν, ἂν αἱ τιμαὶ ὁρισθῶσιν, ὁρίζεται καὶ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως· οἷον ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$, ἂν μὲν $\alpha=2$ καὶ $\beta=3$, εἶναι $2^2-2.2.3+3^2=4-12+9=1$· ἂν δὲ $\alpha=5$ καὶ $\beta=-2$, εἶναι $5^2-2.5.(-2)+(-2)^2=25+20+4=49$· ἂν δὲ $\alpha=\frac{1}{3}$ καὶ $\beta=-1$, εἶναι $\left(\frac{1}{3}\right)^2-2.\frac{1}{3}(-1)+(-1)^2=$ $\frac{1}{9}+\frac{2}{3}+1=\frac{1+6+9}{9}=\frac{16}{9}$.

ἈΣΚΗΣΕΙΣ

Εὑρεῖν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῶν παραστάσεων:

1) $\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$, ἂν $\alpha=3$ καὶ $\beta=-2$.

2) $(\alpha+\beta)\left[\alpha^2-(\beta^2-\alpha\gamma)\right]$, ἂν $\alpha=-5$, $\beta=3$ καὶ $\gamma=-2$

3) $\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$, ἂν $\alpha=5$, $\beta=12$ καὶ $\gamma=4$.

4) $2\sqrt{\alpha^3-2\beta-3\gamma}-\sqrt[3]{2\alpha^2+\beta(\alpha+\gamma)}$, ἂν $\alpha=3$, $\beta=-2$ καὶ $\gamma=2$.

5) $\frac{\varepsilon^7-\delta^7}{\varepsilon^2+\varepsilon\delta+\delta^2}$, ἂν $\gamma=3$, $\delta=3$ καὶ $\varepsilon=5$.

6) $5\alpha^2-2\alpha\chi-7\chi^2$, ἂν $\chi=-\alpha$.

ΜΕΤΑΒΛΗΤΑΙ ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

Ὁρισμοί.

72. *Μεταβλητὸν* καλεῖται τὸ ποσόν, ὅπερ ἐν ὑπολογισμῷ τινι θεωρεῖται λαμβάνον διαφόρους τιμάς.

73. *Σταθερὸν* δὲ καλεῖται τὸ ποσόν, ὅπερ ἐν ὑπολογισμῷ τινι μένει πάντοτε τὸ αὐτό.

Οἱ ἀριθμοὶ δὲ οἱ παριστῶντες τὰ μεταβλητὰ ποσὰ εἶναι μεταβλητοί, οἱ δὲ τὰ σταθερὰ εἶναι σταθεροί. Π. χ. ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι ποσὸν μεταβλητόν, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ πάντοτε διπλασιάζηται· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι σταθερόν· ἐπίσης δὲ ἡ εἰς δεδομένον τμῆμα κύκλου ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι σταθερὰ κτλ.

74. Ἂν δύο ποσὰ μεταβλητὰ ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων οὕτως, ὥστε ἡ μεταβολὴ τοῦ ἑτέρου νὰ συνεπάγηται τὴν μεταβολὴν τοῦ ἑτέρου, λέγομεν ὅτι τὰ μεταβλητὰ ταῦτα ποσὰ εἶναι τὸ ἕτερον *συνάρτησις* τοῦ ἑτέρου. Τούτων δὲ τὸ μὲν ἕτερον, ὅπερ δυνάμεθα αὐθαιρέτως νὰ μεταβάλλωμεν, καλεῖται *ἀνεξάρτητος μεταβλητή*, τὸ δὲ ἕτερον, οὗτινος ἡ τιμὴ ὁρίζεται ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ αὐθαιρέτως μεταβαλλομένου, καλεῖται ἐκείνου *συνάρτησις*.

Ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁριζόμενος ὑπὸ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως περιεχούσης ἕνα μεταβλητὸν ἀριθμὸν εἶναι τούτου συνάρτησις. Οὕτως, ἂν τὸ μὲν χ παριστᾷ μεταβλητὸν ἀριθμόν, τὰ δὲ α, β, γ δεδομένους σταθεροὺς ἀριθμούς, ἡ ἰσότης $\psi=\alpha\chi^2-\beta\chi+\gamma$, ἐξ ἧς δυνάμεθα νὰ ὑπολογίζωμεν τὰς εἰς αὐθαιρέτως δεδομένας τιμὰς τοῦ χ ἀντιστοιχούσας τιμὰς τοῦ ψ, ὁρίζει τὸν ἀριθμὸν ψ ὡς συνάρτησιν τοῦ χ. Θέλοντες δὲ νὰ δηλώσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς ψ εἶναι συνάρτησίς τις τοῦ χ ὡρισμένη γράφομεν ἐν γένει $\psi=\sigma(\chi)$. Ἐπὶ παραδείγματος, ἡ ταχύτης καὶ τὸ διανυόμενον ὑπὸ πίπτοντος σώματος διάστημα εἶναι συναρτήσεις τοῦ χρόνου· ἐπίσης, ἐπειδή, ὅταν ἡ ἀκτὶς κύκλου αὐθαιρέτως ὁρισθῇ, ἥ τε περιφέρεια καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου τούτου ὁρίζονται, ἕπεται ὅτι εἶναι ἀμφότεραι συναρτήσεις τῆς ἀκτῖνος· ὡσαύτως ἡ χορδὴ εἶναι συνάρτησις τοῦ τόξου κτλ.

75. Ἂν ἡ τὴν συνάρτησιν πρὸς τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς συνδέουσα ἰσότης εἶναι πρώτου βαθμοῦ πρὸς ἐκείνην, προσέτι δὲ ῥητὴ ὡς πρὸς τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς, ἡ συνάρτησις καλεῖται

ρητή. Κατὰ ταῦτα ἡ συνάρτησις τοῦ ψ ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τῆς ἰσότητος $\psi=\frac{\chi^2-\chi+1}{\chi+2}$ εἶναι ρητή. Εἶναι δὲ αἱ ρηταὶ συναρτήσεις τῆς μορφῆς $\frac{A}{B}$, ἔνθα τὸ Α καὶ τὸ Β εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, ἀφ᾽ ὧν ἐξαρτῶνται· κατ᾽ ἀκολουθίαν πάσης ρητῆς συναρτήσεως ἡ τιμὴ εὑρίσκεται ἐκ τῶν δεδομένων τιμῶν τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν καὶ ἐκ γνωστῶν ἀριθμῶν (τῶν συντελεστῶν τῶν πολυωνύμων) διὰ τῶν τεσσάρων στοιχειωδῶν πράξεων.

Ἂν δὲ ὁ παρονομαστὴς Β τῆς ρητῆς συναρτήσεως $\frac{A}{B}$ μηδεμίαν τῶν μεταβλητῶν περιέχῃ, ἤτοι, ἂν ἡ ρητὴ συνάρτησις εἶναι ἴση πρὸς ἀκέραιον πολυώνυμον τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, ἡ ρητὴ αὕτη συνάρτησις καλεῖται *ἀκεραία*.

Ἐπὶ παραδείγματος ἡ συνάρτησις ψ τῆς μεταβλητῆς χ ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τῆς ἰσότητος $\psi=(\chi-2)^2+4\chi-3$ εἶναι ἀκεραία· ἐπίσης καὶ ἡ συνάρτησις ψ τῶν μεταβλητῶν φ,χ ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τῆς ἰσότητος

$$\psi=\frac{2}{5}\varphi^2\chi^3-\varphi\chi^2+\chi-3 \text{ εἶναι ἀκεραία.}$$

Ἂν δὲ ἡ ἴση πρὸς τὴν συνάρτησιν παράστασις εἶναι ἄρρητος ὡς πρὸς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητήν, ἡ συνάρτησις αὕτη καλεῖται *ἄρρητος*.

Οὕτως ἡ συνάρτησις ψ τῆς μεταβλητῆς, ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τῆς ἰσότητος $\psi=\chi^2-3\sqrt{\chi}+5$ εἶναι συνάρτησις ἄρρητος.

Περὶ τῆς ὁμαλῆς κινήσεως σημείου.

76. Ἂν ἡ ἐπ᾽ εὐθείας κίνησις κινητοῦ τινὸς σημείου εἶναι ὁμαλή, ἤτοι, ἂν τὸ σημεῖον τοῦτο κατὰ τὴν αὐτὴν ἀεὶ διεύθυνσιν κινούμενον διανύῃ διαστήματα ἀνάλογα τῶν χρόνων, ἐν οἷς ταῦτα διηνύθησαν, συνάγεται ὅτι τὸ μὲν ἐν τῇ μονάδι τοῦ χρόνου ὑπὸ τοῦ κινητοῦ διανυόμενον διάστημα, ὅπερ *ταχύτης* τοῦ κινητοῦ καλεῖται, εἶναι ἀεὶ τὸ αὐτό, τὰ δὲ ἐν ἴσοις χρόνοις διανυόμενα ὑπὸ τοῦ κινητοῦ διαστήματα εἶναι ἴσα. Ὁ δὲ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν τὴν ταχύτητα ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν μονάδων καὶ τοῦ μήκους καὶ τοῦ χρόνου. Ἂν δὲ ληφθῇ μονὰς μὲν τοῦ μήκους τὸ μέτρον, μονὰς δὲ τοῦ χρόνου τὸ δεύτερον λεπτὸν τῆς ὥρας, ἡ ταχύτης τ παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν τῶν μέτρων τῶν ἐν ἑνὶ δευτέρῳ λεπτῷ διανυθέντων.

Ἂν δὲ διὰ τοῦ δ καὶ τοῦ δ' παραστήσωμεν τὰ ἐν τοῖς χρόνοις χ καὶ χ' διανυθέντα διαστήματα, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\delta}{\delta'}=\frac{\chi}{\chi'}, \text{ ἐξ οὗ καὶ } \frac{\delta}{\chi}=\frac{\delta'}{\chi'}=\frac{\tau}{1}.$$

Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς τ εἶναι ὁ σταθερὸς λόγος τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ παριστῶντος τὸ διανυθὲν διάστημα πρὸς τὸν ἀριθμὸν τὸν παριστῶντα τὸν εἰς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦντα χρόνον· ἐξ οὗ καὶ

$$\delta=\tau.\chi, \text{ ἔτι δὲ καὶ } \chi=\frac{\delta}{\tau}.$$

Ὁρίζεται δὲ γενικώτερον ἡ ἐπ' εὐθείας θέσις τοῦ μεθ' ὁμαλῆς ταχύτητος τ κινηθέντος ἐπ' αὐτῆς σημείου, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ ἔν τινι χρόνῳ ἐπὶ τῆς εὐθείας θέσις τοῦ σημείου, ὡς πρός τι σταθερὸν αὐτῆς σημεῖον O, ὅπερ λαμβάνεται ὡς ἀρχὴ τῶν ἀπ' αὐτοῦ ἀποστάσεων παντὸς τῆς εὐθείας σημείου καὶ καλεῖται *ἀρχὴ τῶν διαστημάτων*. Πρὸς τοῦτο, ἂν ὁ χρόνος παρασταθῇ διὰ μὲν τοῦ χ_0, ὅταν τὸ κινηθὲν ἐπὶ τῆς εὐθείας OA

$$\overline{\text{O} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{A}_0 \quad \text{A}_1 \quad \text{A}}.$$

σημεῖον εὑρίσκετο εἰς τὸ σημεῖον A_0, διὰ δὲ τοῦ χ_1, ὅταν τοῦτο εὑρίσκεται εἰς τὸ A_1, ληφθῇ δὲ καὶ ἡ ἀληθεύουσα προφανῶς ἰσότης

$$(\text{OA}_1) = (\text{OA}_0) + (\text{A}_0\text{A}_1),$$

ἐν ᾗ τὸ κατὰ τὸν χρόνον $\chi_1-\chi_0$ διανυθὲν ὑπὸ τοῦ κινηθέντος σημείου διάστημα (A_0A_1) ἰσοῦται τῷ γινομένῳ $\tau.(\chi_1-\chi_0)$, ἐν ᾧ ὁ χρόνος $\chi_1-\chi_0$ εἶναι θετικὸς μὲν ἀριθμός, ἂν ὁ χ_1 παριστᾷ χρόνον μεταγενέστερον τοῦ χ_0, ἀρνητικὸς δὲ ἐν τῇ ἐναντίᾳ περιπτώσει, ἔτι δὲ παρασταθῇ ἡ μὲν ἀπόστασις (OA_1) διὰ τοῦ δ_1, ἡ δὲ (OA_0) διὰ τοῦ δ_0, θὰ ἔχωμεν

$$\delta_1=\delta_0+\tau(\chi_1-\chi_0)\cdot$$

ἤ, ἂν τεθῇ $\chi=\chi_1-\chi_0$, θὰ ἔχωμεν

$$\delta_1=\tau.\chi+\delta_0.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ.

77. *Ἀλγεβρικαὶ πράξεις* καλοῦνται αἱ κατὰ τοὺς γενικοὺς νόμους τῶν πράξεων γινόμεναι ἐπὶ τῶν παραστάσεων μεταβολαί, ἄνευ προηγουμένου ὁρισμοῦ τῶν τιμῶν τῶν ἐν αὐταῖς γραμμάτων.

Ἐπὶ παραδείγματος, ἡ παράστασις $(α+β).γ$ κατὰ τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον μεταβάλλεται εἰς τὴν $(α.γ)+(β.γ)$, οἱουσδήποτε ἀριθμοὺς καὶ ἂν παριστῶσι τὰ ἐν αὐτῇ γράμματα· τοῦτο δὲ ποιοῦντες ἐκτελοῦμεν *ἀλγεβρικὴν πρᾶξιν*. Τὸ δὲ σύνολον τῶν ἀλγεβρικῶν πράξεων καλεῖται *ἀλγεβρικὸς λογισμός*.

78. Δύο παραστάσεις, ἂν προκύπτωσιν ἐξ ἀλλήλων κατὰ τοὺς εἰρημένους νόμους, καλοῦνται *ἰσοδύναμοι*· διότι αἱ ἐξ ἀλλήλων προκύπτουσαι ἀριθμητικαὶ τιμαὶ εἶναι αἱ αὐταί, οἱαιδήποτε καὶ ἂν ὦσιν αἱ τιμαὶ τῶν ἐν αὐταῖς γραμμάτων.

Π. χ. αἱ παραστάσεις $(α+β)^2$ καὶ $α^2+2αβ+β^2$ εἶναι ἰσοδύναμοι· ἐπίσης αἱ $(α+β)$ $(α-β)$ καὶ $α^2-β^2$ εἶναι ἰσοδύναμοι κτλ.

79. Αἱ σημειούμεναι δὲ ἐν ταῖς παραστάσεσι πράξεις ἔχουσι τὰς αὐτὰς γενικὰς ἰδιότητας, ἃς καὶ αἱ ὁμώνυμοι ἀριθμητικαὶ πράξεις· διότι, ἐπειδὴ τὰ ἐν ταῖς παραστάσεσι γράμματα παριστῶσιν ἀριθμούς, ἕπεται ὅτι καὶ αἱ παραστάσεις αὗται ἀριθμούς τινας ἀεὶ παριστῶσι.

Κατὰ ταῦτα αἱ ἰσότητες $(α+β).γ=α.γ+β.γ$, $\dfrac{α+β}{γ}=\dfrac{α}{γ}+\dfrac{β}{γ}$ κλπ. ἀληθεύουσι καὶ ἂν ἀντὶ τῶν γραμμάτων $α,β,γ$ τεθῶσιν οἱαιδήποτε παραστάσεις· διότι ἀληθεύουσιν, οἱοιδήποτε καὶ ἂν ὦσιν οἱ ἀριθμοὶ $α,β,γ$.

Πρόσθεσις.

80. Ἐπειδὴ κατὰ τὰ ἐν § 65 εἰρημένα πᾶν πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτοῦ, *ἵνα προσθέσωμεν δύο ἢ πλείονα πολυώνυμα σχηματίζομεν ἐκ πάντων τῶν ὅρων τῶν πολυωνύμων τούτων ἓν πολυώνυμον, λαμβάνοντες ἕκαστον ὅρον μετὰ τοῦ οἰκείου αὐτοῦ σημείου.*

Κατὰ ταῦτα τὸ ἄθροισμα $(7α^2-5αβ+β^2)+(8αβ-3α^2)$ τῶν δύο πολυωνύμων $7\alpha^2-5\alpha\beta+\beta^2$ καὶ $8\alpha\beta-3\alpha^2$ ἰσοῦται τῷ πολυωνύμῳ

$$7\alpha^2-5\alpha\beta+\beta^2+8\alpha\beta-3\alpha^2.$$

Ἂν δὲ τοὺς ὁμοίους τούτου ὅρους προσθέσωμεν καὶ ἀποτελέσωμεν ἕνα ὅρον (§ 29), θὰ ἔχωμεν $4\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2$.

Καλεῖται δὲ ἡ πρᾶξις αὕτη *πρόσθεσις* ἢ *ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων*·

Ἐπίσης τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων $\chi^3-2\chi^2\psi+2\psi^2$ καὶ $-2\chi^3+5\chi^2\psi$ καὶ $4\chi^3-\chi^2\psi+3\psi^2$ ἰσοῦται τῷ πολυωνύμῳ

$$\chi^3-2\chi^2\psi+2\psi^2-2\chi^3+5\chi^2\psi+4\chi^3-\chi^2\psi+3\psi^2,$$

ἤτοι τῷ $3\chi^3+2\chi^2\psi+5\psi^2$.

Ἀφαίρεσις.

81. ***Ἀφαιρέσαι πολυώνυμον Β ἀπό τινος παραστάσεως Α σημαίνει εὑρεῖν ἄλλην παράστασιν Γ, ἧς τὸ μετὰ τοῦ Β ἄθροισμα νὰ εἶναι ἴσον τῇ παραστάσει Α.***

Κατὰ τὰ εἰρημένα δὲ ἐν § 30 εἶναι προφανὲς ὅτι, ***ἵνα ἀπὸ τῆς παραστάσεως Α ἀφαιρέσωμεν τὸν ὑπὸ τοῦ πολυωνύμου Β παριστώμενον ἀριθμόν, προσθέτομεν εἰς τὴν εἰρημένην παράστασιν τὸν ἀντίθετον τοῦ πολυωνύμου Β ἀριθμὸν ὅστις εὑρίσκεται, ἂν ἀλλαχθῶσι τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου, ἤτοι τὰ μὲν + εἰς —, τὰ δὲ — εἰς +.***

Ἐπὶ δὲ παραδείγματος ἡ ἀπὸ τῆς παραστάσεως $5\alpha\chi^2-3\alpha^2\chi$ τοῦ πολυωνύμου $2\alpha\chi^2-5\alpha^2\chi+3\alpha^3$ διαφορὰ

$(5\alpha\chi^2-3\alpha^2\chi)-(2\alpha\chi^2-5\alpha^2\chi+3\alpha^3)$ ἰσοῦται τῷ πολυωνύμῳ

$$(5\alpha\chi^2-3\alpha^2\chi)+(-2\alpha\chi^2+5\alpha^2\chi-3\alpha^3),$$

ἤτοι τῷ $5\alpha\chi^2-3\alpha^2\chi-2\alpha\chi^2+5\alpha^2\chi-3\alpha^3$.

Διότι, ἂν ἐπαναληφθῇ πάλιν ἡ γενομένη (§ 31) ἐπαλήθευσις, ἢ ἂν εἰς τὸ πολυώνυμον τοῦτο προστεθῇ ὁ ἀφαιρετέος $2\alpha\chi^2-5\alpha^2\chi+3\alpha^3$, θὰ προκύψῃ

$$5\alpha\chi^2-3\alpha^2\chi-2\alpha\chi^2+5\alpha^2\chi-3\alpha^3+2\alpha\chi^2-5\alpha^2\chi+3\alpha^3=5\alpha\chi^2-3\alpha^2\chi,$$

τουτέστιν ὁ μειωτέος.

Σημείωσις.—Πολλάκις εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐκτελῆται πρᾶξις ἀντίστροφος τῆς ἄνω εἰρημένης· τουτέστιν ὅροι τινὲς πολυωνύμου νὰ ἐγκλείωνται ἐντὸς παρενθέσεως πρὸ τῆς ὁποίας νὰ γράφηται τὸ σημεῖον —. Οὕτω τὸ πολυώνυμον $\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta^3+\gamma$ γράφεται καὶ ὧδε: $(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)-(\alpha\beta^3-\gamma)$ ἢ $\alpha^2-(\beta^2-\gamma^2+\alpha\beta^3-\gamma)$.

Παρατήρησις. — Ἵνα ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων ἐν τῇ προσθέσει ἢ τῇ ἀφαιρέσει τῶν πολυωνύμων εἶναι εὐχερεστέρα, διατάσσομεν αὐτὰ κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος καὶ εἶτα γράφομεν αὐτὰ τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἄλλο οὕτως, ὥστε οἱ τὴν αὐτὴν δύναμιν τοῦ γράμματος, πρὸς ὃ ἐγένετο ἡ διάταξις, ἔχοντες ὅροι νὰ εἶναι ἐν τῇ αὐτῇ κατακορύφῳ στήλῃ, ἀντικαθιστῶντες ἅμα τὰ σημεῖα τῶν ὅρων τῶν ἀφαιρουμένων πολυωνύμων διὰ τῶν ἀντιθέτων αὐτοῖς σημείων. Ἐπὶ δὲ παραδείγματος, ἵνα προσθέσωμεν τὰ πολυώνυμα $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ καὶ $\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$, καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν ἀφαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $-5\alpha\beta+4\beta^2-3\alpha^2$, γράφομεν αὐτὰ ὧδε:

$$\begin{array}{r} \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \\ \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \\ 3\alpha^2+5\alpha\beta-4\beta^2 \\ \hline 5\alpha^2+5\alpha\beta-2\beta^2. \end{array}$$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων

$5\chi^3-2\chi^2+\chi-3$, $-2\chi^3-4\chi+3\chi^2$ καὶ $\chi^2-2\chi+4\chi^3-8$.

2) Εὑρεῖν τὴν διαφορὰν τῶν πολυωνύμων

$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ καὶ $\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

καὶ τῶν $8\chi^2-7,5\psi^3$ καὶ $0,06\chi^2-9,45\psi^3$.

3) Ὑπολογίσαι τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως $\varphi-\chi-\psi+\omega$, ὅταν $\varphi=3\alpha^2-2\alpha\beta+5\beta^2$, $\chi=4\alpha^2-6\alpha\beta$, $\psi=9\alpha^2+3\beta^2$, $\omega=\alpha^2-3\alpha\beta-5\beta^2$ καὶ ὅταν $\varphi=\alpha^3+\beta^3$, $\chi=3\alpha^2-4\beta^2$ $\psi=-5\alpha^3+6\beta^2$, $\omega=-\alpha^3+\beta^2$.

Πολλαπλασιασμός.

α΄) *Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίων μονωνύμων.*

82. *Πολλαπλασιασμὸς δύο μονωνύμων καλεῖται ἡ πρᾶξις, δι᾽ ἧς εὑρίσκεται μονώνυμον ἴσον τῷ γινομένῳ αὐτῶν.*

Ἐπειδὴ δὲ πᾶν ἀκέραιον μονώνυμον εἶναι γινόμενον πολλῶν παραγόντων (64), συνάγεται ὅτι·

Τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων μονωνύμων εἶναι μονώνυμον ἀποτελούμενον ἐκ τῶν παραγόντων ἀμφοτέρων τῶν μονωνύμων.

Π. χ. τῶν μονωνύμων $-\frac{3}{4}\alpha^3\beta^2$ καὶ $5\alpha^2\beta\gamma^3$, ἀποτελουμένων ἐκ τῶν παραγόντων $-\frac{3}{4}, \alpha^3, \beta^2$ καὶ $+5, \alpha^2, \beta, \gamma^3$, τὸ γινόμενον ἰσοῦται

$$τῷ \left(-\frac{3}{4}\right).α^3.β^2.5.α^2.β.γ^3$$

ἢ τῷ (§ 5.α') $\left(-\frac{3}{4}.5\right).(α^3).α^2.(β^2.β),γ^3$ ἤτοι τῷ $-\frac{15}{4}α^5β^3.γ^3$.

Ὡσαύτως καὶ τῶν μονωνύμων $5α^2βγ^3$ καὶ $3α^3χ^2ψ$ τὸ γινόμενον εἶναι $15α^5βγ^3χ^2ψ$.

Ἐκ τῶν εἰρημένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών :

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀκέραια μονώνυμα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς συντελεστὰς αὐτῶν, δεξιὰ δὲ τοῦ προκύψαντος γινομένου γράφομεν πάντα τὰ ἐν τοῖς μονωνύμοις ὑπάρχοντα γράμματα ἕκαστον μετ' ἐκθέτου ἴσου τῷ ἀθροίσματι τῶν ἐκθετῶν, οὓς ἔχει ἐν τοῖς μονωνύμοις.

Τὸ οὕτω προκῦπτον γινόμενον, ἂν μὲν οἱ συντελεσταὶ εἶναι ὁμόσημοι, ἔχει πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον +, ἂν δὲ ἑτερόσημοι, ἔχει τὸ σημεῖον —.

83. *Γινόμενον πολλῶν ἀκεραίων μονωνύμων καλεῖται τὸ μονώνυμον, ὅπερ προκύπτει, ἂν πολλαπλασιασθῇ τὸ πρῶτον μονώνυμον ἐπὶ τὸ δεύτερον, εἶτα τὸ προκύψαν γινόμενον ἐπὶ τὸ τρίτον καὶ ἐφεξῆς οὕτω.*

Οὕτω δέ, καὶ διὰ τοῦ προηγουμένου κανόνος, εὑρίσκεται τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε μονωνύμων. Ἐπὶ δὲ παραδείγματος :

$$3α^2β \times \frac{2}{5}αβ^2γ \times 4α^2γ^3 = \frac{24}{5}α^5β^3γ^4,$$

$$(-5)αβ^2 \times 3α^3γ^2 \times \left(-\frac{2}{7}\right)β^2γ^3 = \frac{30}{7}α^4β^4γ^5.$$

84. Ὁ πρός τι γράμμα βαθμὸς τοῦ γινομένου δύο ἢ πλειόνων μονωνύμων ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν πρὸς τὸ γράμμα τοῦτο βαθμῶν τῶν μονωνύμων.

β') **Πολλαπλασιασμὸς τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων.**

85. *Πολλαπλασιασμὸς πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον ἢ ἐπὶ πολυώνυμον καλεῖται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκεται πολυώνυμον ἴσον τῷ γινομένῳ αὐτῶν.*

Ἐπειδὴ δὲ πᾶν πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτοῦ (§ 65), συνάγεται ὅτι·

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν πολυώνυμον ἐπὶ μονώνυμον πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου ἐπὶ τὸ μονώνυμον καὶ εἶτα προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα μονώνυμα.

Ἵνα δὲ πολλαπλασιάσωμεν πολυώνυμον ἐπὶ πολυώνυμον, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον *τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ εἶτα προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα μονώνυμα.*

Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἄρα τῶν πολυωνύμων ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν μονωνύμων.

Τὸ γινόμενον δὲ πολλῶν ἀκεραίων πολυωνύμων ὁρίζεται καὶ πάλιν ὡς καὶ τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων (41).

Παρατήρησις.—Ὁ πολλαπλασιασμὸς μονωνύμου ἐπὶ πολυώνυμον, ἂν ἀντιστραφῇ ἡ τάξις τῶν παραγόντων, ἀνάγεται εἰς τὴν ἀνωτέρω περίπτωσιν. Πρὸς εὐκολωτέραν δὲ ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων τοῦ γινομένου δύο πολυωνύμων διατάσσομεν ἀμφότερα τὰ πολυώνυμα κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος· γράφοντες δὲ τὸ ἕτερον ὑπὸ τὸ ἕτερον ἄγομεν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστὴν ὁριζόντιον γραμμήν, ὑφ᾽ ἣν γράφομεν κατὰ σειρὰς τὰ μερικὰ γινόμενα τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐφ᾽ ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, χωροῦντες ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ οὕτως, ὥστε οἱ τὴν αὐτὴν δύναμιν τοῦ γράμματος τῆς διατάξεως ἔχοντες ὅροι νὰ εἶναι ἐν τῇ αὐτῇ κατακορύφῳ στήλῃ· εἶτα ὑπὸ τὸ τελευταῖον μερικὸν γινόμενον ἄγοντες ὁριζόντιον γραμμὴν γράφομεν ὑπ᾽ αὐτὴν τὸ ἐκ πάντων τῶν μερικῶν γινομένων μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων ἀποτελούμενον πολυώνυμον, ὅπερ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο πολυωνύμων

Παραδείγματα.

36. Εὑρεῖν τὰ γινόμενα τῶν ἑξῆς πολυωνύμων

1) $\chi^3-5\chi^2+2\chi-4 \quad \text{καὶ} \quad \chi^2+2\chi-3$

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & \chi^3 & -5\chi^2 & +2\chi & -4 \\
 & & & \chi^2 & +2\chi & -3 \\
\hline
\chi^5 & -5\chi^4 & +2\chi^3 & -4\chi^2 & & \\
 & 2\chi^4 & -10\chi^3 & +4\chi^2 & -8\chi & \\
 & & -3\chi^3 & +15\chi^2 & -6\chi & +12 \\
\hline
\chi^5 & -3\chi^4 & -11\chi^3 & +15\chi^2 & -14\chi & +12.
\end{array}
$$

2) $\chi^4-2\alpha^2\chi-\alpha\chi^2 \quad \text{καὶ} \quad -\alpha\chi+\chi^3+\alpha^2$

$$
\begin{array}{llllll}
\chi^4 & -\alpha\chi^2 & +2\alpha^2\chi & & & \\
\chi^3 & -\alpha\chi & +\alpha^2 & & & \\
\hline
\chi^7 & -\alpha\chi^5 & +2\alpha^2\chi^4 & & & \\
 & -\alpha\chi^5 & & +\alpha^2\chi^3 & -2\alpha^3\chi^2 & \\
 & & +\alpha^2\chi^4. & & -\alpha^3\chi^2 & +2\alpha^4\chi \\
\hline
\chi^7 & -2\alpha\chi^5 & +3\alpha^2\chi^4 & +\alpha^2\chi^3 & -3\alpha^3\chi^2 & +2\alpha^4\chi
\end{array}
$$

3) $\chi^3+4\chi-2\chi^2-8$ καὶ $\chi+2$

$$\begin{array}{l} \chi^3-2\chi^2+4\chi-8 \\ \underline{\chi+2} \\ \chi^4-2\chi^3+4\chi^2-8\chi \\ \quad +2\chi^3-4\chi^2+8\chi-16 \\ \hline \chi^4-16 \end{array}$$

Παρατηρήσεις.—Ἐν τῷ γινομένῳ δύο πολυωνύμων ὑπάρχουσιν ἀεὶ δύο ὅροι πρὸς οὐδένα ὅμοιοι. Διότι, ἂν τὰ πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, οἷον τὰς κατιούσας, ἐπειδὴ οἱ πρῶτοι αὐτῶν ὅροι θὰ ἔχωσι τὰς μεγίστας δυνάμεις τοῦ γράμματος, τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ ἔχῃ δύναμιν τοῦ αὐτοῦ γράμματος μείζονα ἢ τὰ ἄλλα μερικὰ γινόμενα· καὶ οἱ τελευταῖοι δὲ αὐτῶν ὅροι, ἐπειδὴ θὰ ἔχωσι τὰς ἐλαχίστας δυνάμεις τοῦ γράμματος, τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ ἔχῃ δύναμιν τοῦ αὐτοῦ γράμματος ἐλάσσονα ἢ τὰ ἄλλα μερικὰ γινόμενα· οἱ δύο ἄρα οὗτοι ὅροι τοῦ γινομένου οὐδένα ὅμοιον ὅρον ἔχοντες μένουσιν ἀνάγωγοι. Ἐκ τῶν εἰρημένων συνάγεται ὅτι τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ὀλιγωτέρους τῶν δύο ὅρων, οἵτινες ἐνδέχεται νὰ μείνωσι μόνοι, τῶν λοιπῶν πάντων ἐξαφανιζομένων ἐν τῇ ἀναγωγῇ, ὡς τοῦτο δῆλον γίνεται ἐν τῷ 3ῳ παραδείγματι. Ὁ δὲ πρός τι γράμμα βαθμὸς τοῦ γινομένου δύο πολυωνύμων ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν πρὸς τὸ γράμμα τοῦτο βαθμῶν τῶν πολυωνύμων. Ἔτι δὲ συνάγεται ὅτι τὸ γινόμενον δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι καὶ τοῦτο πολυώνυμον ὁμογενές, οὗ ὁ βαθμὸς ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων πολυωνύμων.

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ

87. *Ταυτότης καλεῖται ἰσότης, ἧς τὰ μέλη ἔχοντα γράμματα γίνονται τὰ αὐτά, ἂν μετασχηματισθῶσιν.*

Π. χ. ταυτότητες εἶναι αἱ ἰσότητες $\chi(\chi+1)=2\chi^2-\chi(\chi-1)$, $(\alpha+\beta)2\beta=2\alpha\beta+2\beta^2$ κλπ. Αἱ ἐξ ἀμφοτέρων ἄρα τῶν μελῶν ταυτότητος προκύπτουσαι τιμαὶ εἶναι πάντοτε ἴσαι, οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν ἐν αὐτῇ γραμμάτων.

Ἄξιαι δὲ ἰδίας προσοχῆς ταυτότητες, διότι γίνεται συνήθης αὐτῶν χρῆσις ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς, εἶναι αἱ ἑξῆς :

1) $$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2.$$

Διότι τὸ γινόμενον $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$ ἰσοῦται τῷ πολυωνύμῳ

$$\alpha.\alpha+6.\alpha+\alpha.6+6.6, \quad \text{ἤτοι τῷ} \quad \alpha^2+2\alpha 6+6^2,$$

δηλοῖ δὲ ἡ ταυτότης αὕτη ὅτι :

Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων αὐτῶν ηὐξημένῳ κατὰ τὸ διπλάσιον αὐτῶν γινόμενον.

2) $$(\alpha-6)^2=\alpha^2-2\alpha 6+6^2.$$

Διότι τὸ γινόμενον $(\alpha-6)(\alpha-6)$ ἰσοῦται τῷ πολυωνύμῳ $\alpha.\alpha+(-6).\alpha+\alpha.(-6)+(-6).(-6)$, ἤτοι τῷ $\alpha^2-2\alpha 6+6^2$· δηλοῖ δὲ ἡ ταυτότης αὕτη ὅτι :

Τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων αὐτῶν ἠλαττωμένῳ κατὰ τὸ διπλάσιον αὐτῶν γινόμενον.

3) $$(\alpha+6)(\alpha-6)=\alpha^2-6^2.$$

Διότι τὸ γινόμενον $(\alpha+6)(\alpha-6)$ ἰσοῦται τῷ πολυωνύμῳ

$$\alpha.\alpha+6.\alpha.+\alpha.(-6)+6.(-6), \quad \text{ἤτοι τῷ} \quad \alpha^2-6^2\cdot$$

δηλοῖ δὲ ἡ ταυτότης αὕτη ὅτι :

Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν τούτων.

4) $$(\alpha+6)^3=\alpha^3+3\alpha^2 6+3\alpha 6^2+6^3.$$

Διότι τὸ γινόμενον $(\alpha+6)\,(\alpha+6)\,(\alpha+6)$ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ

$$(\alpha+6)^2.(\alpha+6) \quad \text{ἤτοι τῷ} \quad (\alpha^2+2\alpha 6+6^2).(\alpha+6),$$

ἐξ οὗ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν προκύπτει τὸ πολυώνυμον $\alpha^3+2\alpha^2 6+6^2.\alpha+\alpha^2.6+2\alpha 6^2+6^3$, ἤτοι τὸ $\alpha^3+3\alpha^2 6+3\alpha 6^2+6^3$.

5) $$(\alpha-6)^3=\alpha^3-3\alpha^2 6+3\alpha 6^2-6^3.$$

Καὶ ἡ ταυτότης δὲ αὕτη προκύπτει ὡς καὶ ἡ ἀνωτέρω.

6) Ἐκ δὲ τοῦ τρόπου καθ' ὃν γίνεται ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο ἀθροισμάτων ἢ δύο πολυωνύμων, προκύπτει ταυτότης δηλοῦσα ὅτι :

Τὸ τετράγωνον παντὸς ἀθροίσματος ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων αὐτοῦ ηὐξημένῳ κατὰ τὰ διπλάσια γινόμενα τῶν ὅρων ἀνὰ δύο εἰλημμένων· ἤτοι ὅτι

$$(\alpha-6+\gamma)^2=\alpha^2+6^2+\gamma^2-2\alpha 6+2\alpha\gamma-26\gamma.$$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐκτελέσαι τὰς ἑξῆς πράξεις :

$$(\alpha-56)(56+\alpha), \qquad (\alpha-6)(\alpha+6)(\alpha^2+6^2),$$

$$(1+2\alpha+36+4\gamma)(1+2\alpha-36-4\gamma), \quad 3\alpha 6\times 5\alpha^2\times 7\alpha^3 6\gamma^2,$$

$$(\alpha^2+6^2)(\alpha'^2+6'^2)-(\alpha\alpha'+66')^2,\ (\alpha^2-6^2-\gamma^2)^2+(2\alpha 6)^2+(2\alpha\gamma)^2,$$

$$(\alpha^2-6^2-\gamma)(6^2+\gamma^2-\alpha^2), \qquad (1+2\chi-3\psi)^2-(3\psi-2\chi-1)^2,$$

$$8(\chi-1)^3+4(\chi-1)^2+(\chi^2-4\chi+2)^2-(\chi^4-\chi^2+1).$$

2) Σχηματίσαι τὰ τετράγωνα καὶ τοὺς κύβους τῶν ἑξῆς διωνύμων:

$2\alpha+\beta,\quad \chi^2-5\psi,\quad \chi^2+\psi^3$ καὶ $\beta\gamma^2-\alpha\delta^2$

3) Συμπληρῶσαι τὰ τετράγωνα τῶν δυωνύμων, ὧν οἱ δύο ὅροι εἶναι: $\chi^2+6\chi$, $10\psi^2+25\psi^4$, $\alpha^6-2\sqrt{3}\alpha^3$, $\alpha^2\beta^6+4\alpha\beta^3\gamma$, $\alpha^2-4\alpha\beta^3$, $4\chi^6-12\chi^3\psi$, $9\alpha^2+1$, χ^4+25 καὶ $\chi^2-2\chi$.

3) Συμπληρῶσαι τοὺς κύβους τῶν δυωνύμων, ὧν οἱ δύο ὅροι εἶναι:

$\alpha^3+3\alpha^2,\quad \chi^6-3\chi^4,\quad 8\chi+12\chi^2$ καὶ $\alpha^3-15\alpha^2\beta$.

Διαίρεσις.

α΄) *Διαίρεσις ἀκεραίων μονωνύμων.*

88. Μονώνυμον ἀκέραιον καλεῖται διαιρετὸν δι᾽ ἄλλου μονωνύμου, ἂν ὑπάρχῃ ἀκέραιον μονώνυμον ἴσον τῷ πηλίκῳ αὐτῶν.

Ἡ δὲ πρᾶξις, δι᾽ ἧς εὑρίσκεται τὸ ἀκέραιον μονώνυμον πηλίκον, καλεῖται διαίρεσις τῶν μονωνύμων.

89. Ἵνα μονώνυμον ᾖ διαιρετὸν δι᾽ ἄλλου μονωνύμου ἀνάγκη νὰ ἔχῃ πάντα τὰ ἐν τῷ διαιρέτῃ γράμματα ἕκαστον μετ᾽ ἐκθέτου οὐχὶ ἐλάσσονος. Διότι ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ ἀκέραιον μονώνυμον πηλίκον πρέπει νὰ προκύπτῃ ὁ διαιρετέος· ἐν τῷ διαιρετέῳ ἄρα περιέχονται πάντα τὰ γράμματα τοῦ διαιρέτου, ἕκαστον μετ᾽ ἐκθέτου οὐχὶ ἐλάσσονος.

90. Ἐκ δὲ τοῦ τρόπου, καθ᾽ ὃν πολλαπλασιάζονται δύο ἀκέραια μονώνυμα (82), ἂν μονώνυμόν τι διαιρῆται δι᾽ ἑτέρου, συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τῆς διαιρέσεως αὐτῶν.

Ἵνα διαιρέσωμεν ἀκέραιον μονώνυμον δι᾽ ἄλλου τοιούτου, διαιροῦμεν τὸν συντελεστὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου, δεξιὰ δὲ τοῦ προκύπτοντος πηλίκου γράφομεν πάντα τὰ ἐν τῷ διαιρετέῳ γράμματα ἀφαιροῦντες ἐκ τοῦ ἐκθέτου ἑκάστου γράμματος αὐτοῦ τὸν ἐκθέτην τοῦ αὐτοῦ γράμματος τοῦ διαιρέτου.

Σημείωσις.—Ἂν γράμμα τι δὲν ὑπάρχῃ ἐν τῷ διαιρέτῃ, ἐκθέτης αὐτοῦ νοεῖται τὸ μηδενικόν (48).

Κατὰ τὸν εἰρημένον κανόνα τὸ πηλίκον τῶν μονωνύμων $12\alpha^4\chi^2\psi$ καὶ $4\alpha^2\chi$, ὅπερ παρίσταται διὰ τοῦ $\dfrac{12\alpha^4\chi^2\psi}{4\alpha^2\chi}$, ἰσοῦται τῷ μονωνύμῳ $3\alpha^2\chi\psi$· διότι ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν διαιρέτην προκύπτει ὁ διαιρετέος· ὡσαύτως τὸ πηλίκον τοῦ μὲν μονωνύμου $-5\alpha^3\beta^2\gamma\delta^4$ διὰ τοῦ $3\alpha\beta\delta^2$ εἶναι $-\dfrac{5}{3}\alpha^2\beta\gamma\delta^2$, τοῦ δὲ μονωνύμου $-8\alpha^2\beta\chi^3\psi^2$ διὰ τοῦ $-4\alpha^2\chi\psi$ εἶναι τὸ $2\beta\chi^2\psi$.

Σημείωσις.—Ἐν τῷ τρίτῳ πηλίκῳ ὁ παράγων α^0, ἐπειδὴ εἶναι ἴσος τῇ μονάδι (§ 48), παρελήφθη.

Τὰ οὕτω προκύπτοντα πηλίκα, ἂν μὲν τὰ μονώνυμα εἶναι ὁμόσημα, ἔχουσιν ἕκαστον πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον $+$, ἂν δὲ ἑτερόσημα, ἔχουσι τὸ $-$.

β′) *Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ μονωνύμου (ἀκεραίων).*

91. Ἀκέραιον πολυώνυμον καλεῖται *διαιρετὸν* διὰ ἀκεραίου μονωνύμου, ἂν ὑπάρχῃ ἀκέραιον πολυώνυμον ἴσον τῷ πηλίκῳ αὐτῶν.

Ἡ δὲ πρᾶξις, δι᾽ ἧς εὑρίσκεται τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον πηλίκον, καλεῖται διαίρεσις τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ μονωνύμου.

92. Ἀκέραιον πολυώνυμον, ἄνευ ὁμοίων ὅρων, εἶναι διαιρετὸν διὰ μονωνύμου, ἂν πάντες οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ μονωνύμου. Διότι οἱ ὅροι οὗτοι εἶναι γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς ὅρους τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου πηλίκου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτοῦ, ἄθροισμα δὲ διαιρεῖται δι᾽ ἀριθμοῦ, ἂν ἕκαστος τῶν προσθετέων διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ προστεθῶσι τὰ προκύψοντα μερικὰ πηλίκα, συνάγεται ὅτι:

Ἵνα διαιρέσωμεν ἀκέραιον πολυώνυμον διὰ ἀκεραίου μονωνύμου, διαιροῦμεν ἕκαστον ὅρον τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ μονωνύμου, προσθέτοντες εἶτα τὰ προκύπτοντα πηλίκα.

Ἐπὶ δὲ παραδείγματος ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $6\alpha^3\chi^2-15\alpha^2\beta\chi^3+2\alpha\beta^2\chi^4$ διὰ τοῦ μονωνύμου $-2\alpha\chi^2$ προκύπτει πηλίκον τὸ πολυώνυμον $-3\alpha^2+\frac{15}{2}\alpha\beta\chi-\beta^2\chi^2$.

Σημείωσις.—Ἂν πολυώνυμον εἶναι διαιρετὸν διὰ μονωνύμου, τὸ πολυώνυμον τοῦτο ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ μονωνύμου ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ μονωνύμου.

Κατὰ ταῦτα, ἐπειδὴ τὸ πολυώνυμον $6\alpha^4\beta-9\alpha^2\beta^2-3\alpha\beta^3\gamma$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ μονωνύμου $3\alpha\beta$, τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως εἶναι τὸ πολυώνυμον $2\alpha^3-3\alpha\beta\;\;\beta^2\gamma$, συνάγεται ὅτι τὸ πολυώνυμον τοῦτο δύναται νὰ παρασταθῇ καὶ ὧδε: $3\alpha\beta.(2\alpha^3-3\alpha\beta-\beta^2\gamma)$.

Ὡσαύτως τὰ πολυώνυμα $2\chi-1$ καὶ $7\chi^3\psi^2-6\chi^2\psi^4+5\chi\psi^5$ δύνανται νὰ παρασταθῶσι καὶ ὧδε:

$$2\left(\chi-\frac{1}{2}\right) \qquad \text{καὶ } 3\chi\psi^2\left(\frac{7}{3}\chi^2-2\chi\psi^2+\frac{5}{3}\psi^3\right).$$

Ὁ τοιοῦτος μετασχηματισμὸς τοῦ πολυωνύμου καλεῖται *ἐξαγωγὴ τῶν κοινῶν παραγόντων τῶν ὅρων ἐκτὸς παρενθέσεως.*

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοιούτου μονωνύμου διαιρέτου λαμβάνομεν συντελεστὴν μὲν οἱονδήποτε (ἢ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν συντελεστῶν), ἐκ δὲ τῶν γραμμάτων τῶν παριστώντων ἀγνώστους ἀριθμούς, τὰ κοινὰ τῶν ὅρων γράμματα, ἕκαστον μετὰ τοῦ μικροτέρου ἐκθέτου, ὥστε τὸ ἐντὸς παρενθέσεως μένον πολυώνυμον νὰ εἶναι ἀκέραιον.

γ΄) *Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου (ἀκεραίων).*

93. Πολυώνυμον ἀκέραιον λέγεται διαιρετὸν δι' ἄλλου τοιούτου, ἂν ὑπάρχῃ ἀκέραιον πολυώνυμον (ἢ μονώνυμον) ἴσον τῷ πηλίκῳ αὐτῶν.

Ἡ δὲ πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκεται τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον πηλίκον, καλεῖται διαίρεσις τῶν πολυωνύμων.

Γίνεται δὲ ἡ πρᾶξις αὕτη κατὰ τὰ ἑξῆς δύο θεωρήματα:

1) *Ἂν δύο ἀκέραια πολυώνυμα καὶ τὸ πηλίκον τούτων, ὅπερ λαμβάνεται εὑρεθέν, διαταχθῶσι κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου εὑρίσκεται διαιρουμένου τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου.*

Διότι ὁ διαιρετέος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον· τὸ δὲ γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου, ἐπειδὴ εἶναι τοῦ ὅλου γινομένου ὅρος ἀνάγωγος (§ 86), θὰ εἶναι ἴσον τῷ πρώτῳ ὅρῳ τοῦ διαιρετέου· ἐξ οὗ συνάγεται, ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου.

2) *Ἂν ὁ διαιρέτης πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου, ἀφαιρεθῇ δὲ τὸ γινόμενον τοῦτο ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, προκύπτει ὑπόλοιπον, ἐξ οὗ, διαιρουμένου διὰ τοῦ διαιρέτου, εὑρίσκονται πάντες οἱ ἄλλοι ὅροι τοῦ πηλίκου.*

Διότι τοῦ διαιρετέου ὄντος γινομένου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, ἤτοι ἀποτελουμένου ἐκ πάντων τῶν μερικῶν γινομένων τοῦ διαιρέτου ἐφ' ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πηλίκου, ἂν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐφ' ἕνα ὅρον τοῦ πηλίκου, τὸ προκῦψον ὑπόλοιπον θὰ εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς λοιποὺς ὅρους τοῦ πηλίκου, ἤτοι ἐπὶ τὸ πολυώνυμον τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῶν λοιπῶν ὅρων τοῦ πηλίκου· ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι τὸ πολυώνυμον τοῦτο εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ὑπολοίπου διὰ τοῦ διαιρέτου. Διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου ἡ εὕρεσις τῶν λοιπῶν, πλὴν τοῦ πρώτου, ὅρων τοῦ πηλίκου ἀνάγεται εἰς νέαν διαίρεσιν. Ἂν δὲ καὶ ἡ νέα διαίρεσις γίνῃ καθ' ὅμοιον τρόπον, κατὰ μὲν τὸ πρῶτον θεώρημα θὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου αὐτῆς, ὅστις εἶναι ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ ζητουμένου πηλίκου, κατὰ δὲ τὸ δεύτερον τοῦτο θεώρημα, καὶ τῶν λοιπῶν ὅρων ἡ εὕρεσις ἀνάγεται εἰς τρίτην διαίρεσιν καὶ ἐφεξῆς οὕτως.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι, ἂν ὑπάρχῃ πολυώνυμον πηλίκον, ἐκ μιᾶς τῶν μερικῶν τούτων διαιρέσεων, θὰ προκύψῃ ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ πηλίκου, θὰ μείνῃ δὲ ὑπόλοιπον 0.

Σημείωσις.—Κατὰ ταῦτα ἡ διαίρεσις τῶν πολυωνύμων ἀνάγεται εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν μονωνύμων, διότι ἐν ἑκάστῃ μερικῇ διαιρέσει μόνον οἱ πρῶτοι ὅροι διαιροῦνται. Ὁ δὲ βαθμὸς τοῦ πηλίκου ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρετέου.

Τὴν διάταξιν δὲ τῆς πράξεως δηλοῦσι τὰ ἑπόμενα παραδείγματα:

1) Εὑρεῖν τὸ πηλίκον τοῦ πολυωνύμου $4\chi^4-9\chi^2+6\chi-1$ διὰ τοῦ $2\chi^2-3\chi+1$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
4\chi^4 & & -9\chi^2 & +6\chi & -1 & 2\chi^2-3\chi+1 \\
\cline{6-6}
-4\chi^4 & +6\chi^3 & -2\chi^2 & & & 2\chi^2+3\chi-1 \\
\cline{1-5}
& +6\chi^3 & -11\chi^2 & +6\chi & -1 & \\
& -6\chi^3 & +9\chi^2 & -3\chi & & \\
\cline{2-5}
& & -2\chi^2 & +3\chi & -1 & \\
& & +2\chi^2 & -3\chi & +1 & \\
\cline{3-5}
& & & 0. & &
\end{array}
$$

Ἀμφότερα τὰ πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ· μετὰ δὲ τὴν εὕρεσιν τοῦ πρώτου τοῦ πηλίκου ὅρου $2\chi^2$ πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν διαιρέτην, τοὺς δὲ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτοντας ὅρους, ἐπειδὴ πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, γράφομεν ὑπ᾽ αὐτὸν ἕκαστον μετὰ τοῦ ἀντιθέτου σημείου καὶ εἶτα προσθέτομεν αὐτοὺς εἰς ἐκεῖνον, ποιοῦντες ἅμα καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων. Ἐκτελοῦντες δὲ ἐπὶ τοῦ οὕτω προκύπτοντος ὑπολοίπου $6\chi^3-11\chi^2+6\chi-1$, ὡς νέου διαιρετέου λαμβανομένου, τὰς αὐτὰς πράξεις, εὑρίσκομεν τὸν δεύτερον τοῦ πηλίκου ὅρον 3χ καὶ τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον $-2\chi^2+3\chi-1$· τὰς αὐτὰς δὲ πράξεις καὶ ἐπὶ τοῦ δευτέρου τούτου ὑπολοίπου ἐκτελοῦντες, εὑρίσκομεν τὸν τρίτον τοῦ πηλίκου ὅρον -1 καὶ ὑπόλοιπον 0. Λοιπὸν τὸ ζητούμενον πηλίκον τῆς οὕτω γενομένης διαιρέσεως εἶναι $2\chi^2+3\chi-1$.

2) Εὑρεῖν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $12\alpha^4-11\alpha^3\beta-10\alpha^2\beta^2+11\alpha\beta^3-2\beta^4$· διὰ τοῦ $3\alpha^2-5\alpha\beta+2\beta^2$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
12\alpha^4 & -11\alpha^3\beta & -10\alpha^2\beta^2 & +11\alpha\beta^3 & -2\beta^4 & 3\alpha^2-5\alpha\beta+2\beta^2 \\
\hline
-12\alpha^4 & +20\alpha^3\beta & -8\alpha^2\beta^2 & & & 4\alpha^2+3\alpha\beta-\beta^2 \\
\hline
 & +9\alpha^3\beta & -18\alpha^2\beta^2 & +11\alpha\beta^3 & -2\beta^4 & \\
 & -9\alpha^3\beta & +15\alpha^2\beta^2 & -6\alpha\beta^3 & & \\
\hline
 & & -3\alpha^2\beta^2 & +5\alpha\beta^3 & -2\beta^4 & \\
 & & +3\alpha^2\beta^2 & -5\alpha\beta^3 & +2\beta^4 & \\
\hline
 & & & 0 & &
\end{array}
$$

94. Ἐκ τῶν εἰρημένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τῆς διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων:

Ἵνα ἀκέραιον πολυώνυμον διαιρέσωμεν δι' ἑτέρου τοιούτου πολυωνύμου, διατάσσομεν ἀμφότερα κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, εἶτα δὲ διαιρέσαντες τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου εὑρίσκομεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου· μεθ' ὃ πολλαπλασιάσαντες τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν ὅρον τοῦτον τοῦ πηλίκου, τὸ δὲ οὕτω προκῦψαν γινόμενον ἀφαιρέσαντες ἀπὸ τοῦ διαιρετέου εὑρίσκομεν ὑπόλοιπόν τι· εἶτα τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο λαβόντες ὡς νέον διαιρετέον καὶ ἐκτελέσαντες ἐπ' αὐτοῦ τὰς αὐτὰς καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου διαιρετέου πράξεις, εὑρίσκομεν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ ὑπόλοιπόν τι. Καὶ ἐπὶ τοῦ ὑπολοίπου δὲ τούτου καὶ ἐπὶ παντὸς ἐν γένει τοιούτου ὑπολοίπου ποιοῦμεν τὰς αὐτὰς καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου διαιρετέου πράξεις, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0· τοῦτο δὲ θὰ συμβῇ, ἂν τὸ ἕτερον τῶν δεδομένων πολυωνύμων διαιρῆται διὰ τοῦ ἑτέρου.

95. Ἐκ τῶν εἰρημένων συνάγεται, ὅτι ἀκέραιόν τι πολυώνυμον δὲν εἶναι διαιρετὸν δι' ἑτέρου τοιούτου πολυωνύμου, 1ον) ἂν ὁ πρῶτος ὅρος ἢ τοῦ διαιρετέου ἢ τινος ἐκ τῶν ὑπολοίπων δὲν διαιρῆται διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, καὶ 2ον) ἂν διαιρῆται μὲν ἕκαστος τούτων διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, δὲν εὑρίσκεται δὲ ὑπόλοιπον 0, ὡς τοῦτο συμβαίνει ἐν τῷ ἑπομένῳ παραδείγματι:

$$
\begin{array}{rrr|l}
\alpha^2 & -\alpha^3 & & \alpha+\alpha^2 \\
\hline
-\alpha^2 & -\alpha^3 & & \alpha-2\alpha^2+\dots \\
\hline
 & -2\alpha^3 & & \\
 & +2\alpha^3 & +2\alpha^4 & \\
\hline
 & & +2\alpha^4 & \\
 & & \dots\dots &
\end{array}
$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ μὲν ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι πάντα μονώνυμα, τὰ δὲ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐφ' ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πηλίκου εἶναι δυώνυμα, πρόδηλον εἶναι ὅτι οὐδέποτε προκύπτει ὑπόλοιπον 0.

Ἂν δὲ τὰ πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις γράμματός τινος, ἐπειδὴ ὁ ὡς πρὸς τὸ γράμμα τῆς διατάξεως βαθμὸς τῶν ὑπολοίπων βαίνει ἀεὶ ἐλαττούμενος, διότι μεθ' ἑκάστην διαίρεσιν ἐκλείπει ἐκ τοῦ ὑπολοίπου ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου, ἕπεται ὅτι μετά τινας πράξεις, ἂν δὲν εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0, θὰ προκύψῃ ὑπόλοιπον κατωτέρου βαθμοῦ ἀπὸ τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου· μεθ' ὃ ἡ ἐξακολούθησις τῆς πράξεως ἀποβαίνει ἄσκοπος. Τούτου ἕνεκα εἶναι προτιμώτερον ἐν τῇ διαιρέσει τὰ πολυώνυμα νὰ διατάσσωνται κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις γράμματός τινος.

Σημείωσις Α΄. Ἂν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο πολυωνύμων ἀποτελῆται ἐκ δύο μόνον ὅρων, τούτους εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὸν μὲν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, τὸν δὲ τελευταῖον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ τελευταίου τοῦ διαιρέτου. Οὕτω ἐν τῇ διαιρέσει τοῦ πολυωνύμου $2χ^3—9χ^2+13χ—6$ διὰ τοῦ πολυωνύμου $2χ^2—5χ+3$ τὸ πηλίκον, ἂν ὑπάρχῃ, ἐπειδὴ θὰ εἶναι πρώτου βαθμοῦ, θὰ εἶναι τὸ δυώνυμον $χ—2$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τούτου ἐπὶ τὸν διαιρέτην προκύπτει ὁ διαιρετέος, ἕπεται ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Σημείωσις Β΄. Ἂν ἔν τινι πολυωνύμῳ οἱ συντελεσταὶ τοῦ γράμματος τῆς διατάξεως δὲν εἶναι ἀριθμοὶ ἢ μονώνυμα ἀλλὰ πολυώνυμα, δὲν μεταβάλλεται μὲν ἡ θεωρία τῆς διαιρέσεως, ἀλλ' ἡ πρᾶξις εἶναι ἐπιπονωτέρα. Κατὰ ταῦτα εἶναι

$$
\begin{array}{l|l}
3βχ^4+(3αβ—α^2)χ^3—(6β^3+α^3)χ^2+2α^2β^2χ & χ^2+αχ—2β^2 \\
\underline{—3βχ^4—3αβχ^3\qquad\qquad +6β^3χ^2\qquad\qquad\qquad} & \overline{3βχ^2—α^2χ} \\
\qquad\qquad\qquad —α^2χ^3—α^3χ^2+2α^2β^2χ & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{+α^2χ^3+α^3χ^2—2α^2β^2χ} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου διὰ τοῦ χ—α.

96. Ἡ διὰ τοῦ $χ—α$ διαίρεσις παντὸς ἀκεραίου πολυωνύμου διατεταγμένου κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ $χ$ δύναται νὰ παραταθῇ μέχρις οὗ εὑρεθῇ ὑπόλοιπον βαθμοῦ πρὸς τὸ $χ$ μικροτέρου ἀπὸ

τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου, τουτέστιν ὑπόλοιπον μὴ περιέχον τὸ χ. Τούτου δὲ οὕτως ἔχοντος δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο ἄνευ διαιρέσεως καὶ νὰ συναγάγωμεν πότε τὸ πολυώνυμον εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $\chi-\alpha$.

Πρὸς τοῦτο, ἂν παραστήσωμεν τὸ μὲν διαιρετέον πολυώνυμον, ὅπερ ἔστω τὸ $A\chi^{\mu}+B\chi^{\mu-1}+\Gamma\chi^{\mu-2}+\ldots+K\chi+\Lambda$ διὰ τοῦ $\Sigma(\chi)$, τὸ δὲ πηλίκον διὰ τοῦ $\Pi(\chi)$, τὸ δὲ ὑπόλοιπον διὰ τοῦ υ, θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα

$$\Sigma(\chi)=(\chi-\alpha).\Pi(\chi)+\upsilon,$$

ἥτις ἀληθεύει, ἡτισδήποτε καὶ ἂν ᾖ ἡ τιμὴ τοῦ ἐν αὐτῇ ἀριθμοῦ χ (§ 87). Δι᾽ ὅ, ἂν ἐν τῇ ἰσότητι ταύτῃ ὑποτεθῇ $\chi=\alpha$, τὸ μὲν γινόμενον $(\chi-\alpha)\,\Pi(\chi)$, μηδενιζομένου τοῦ παράγοντος $\chi-\alpha$ μηδενίζεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον υ μὴ περιέχον τὸ χ μένει ἀμετάβλητον, τὸ δὲ πολυώνυμον $\Sigma(\chi)$ τρέπεται εἰς παράστασιν μὴ περιέχουσαν τὸ χ, ἣν ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ $\Sigma(\alpha)$, θὰ ἔχωμεν $\Sigma(\alpha)=\upsilon$· τουτέστιν θὰ εἶναι

$\upsilon=A\alpha^{\mu}+B\alpha^{\mu-1}+\Gamma\alpha^{\mu-2}+\ldots+K\alpha+\Lambda$, ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι:

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου διὰ τοῦ χ—α ἰσοῦται τῇ ἀριθμητικῇ τιμῇ τοῦ πολυωνύμου, ἂν ἀντὶ τοῦ χ τεθῇ εἰς αὐτὸ τὸ α.

Ἂν ἄρα ἡ οὕτω προκύπτουσα τιμὴ τοῦ πολυωνύμου ἰσῶται τῷ 0, ἔπεται ὅτι τὸ πολυώνυμον εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ δυωνύμου. Κατὰ ταῦτα τὸ πολυώνυμον $\chi^3-2\alpha\chi^2+3\alpha^2\chi-2\alpha^3$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $\chi-\alpha$, διότι τὸ πολυώνυμον τοῦτο μηδενίζεται, ἂν τεθῇ εἰς αὐτὸ ἀντὶ τοῦ χ ὁ α, ἤτοι γίνεται $\alpha^3-2\alpha^3+3\alpha^3-2\alpha^3=0$· τοῦ δὲ πολυωνύμου $\chi^3-3.\chi^2+5.\chi-20$ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ $\chi-3$ θὰ εἶναι $3^3-3.3^2+5.3-20$, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς -5.

Ὡσαύτως εὑρίσκομεν καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῶν ἑξῆς ἀξιοσημειώτων διαιρέσεων δυωνύμου διὰ δυωνύμου, ὧν σημειοῦμεν καὶ τὰ πηλίκα πρὸς ἀπομνημόνευσιν :

1) Τῆς διαιρέσεως τοῦ $\chi^{\mu}-\alpha^{\mu}$ διὰ τοῦ $\chi-\alpha$ ὑπόλοιπον μὲν εἶναι $\alpha^{\mu}-\alpha^{\mu}=0$, πηλίκον δὲ προκῦπτον ἐκ ταύτης εἶναι

$$\chi^{\mu-1}+\alpha\chi^{\mu-2}+\alpha^2\chi^{\mu-3}+\ldots+\alpha^{\mu-2}\chi+\alpha^{\mu-1}.$$

2) Τῆς διαιρέσεως τοῦ $\chi^{\mu}+\alpha^{\mu}$ διὰ τοῦ $\chi-\alpha$ ὑπόλοιπον εἶναι $\alpha^{\mu}+\alpha^{\mu}$, ἤτοι $2\alpha^{\mu}$.

3) Τῆς διαιρέσεως τοῦ $\chi^{\mu}-\alpha^{\mu}$ διὰ τοῦ $\chi+\alpha$, ἐπειδὴ δύναται νὰ γραφῇ $\chi+\alpha=\chi-(-\alpha)$, ὑπόλοιπον μὲν εἶναι $(-\alpha)^{\mu}-\alpha^{\mu}$, ἤτοι τὸ $-2\alpha^{\mu}$, ἂν ὁ μ εἶναι περιττός, τὸ 0 δέ, ἂν ὁ μ εἶναι ἄρτιος, πηλίκον δὲ προκῦπτον ἐκ ταύτης εἶναι

$$\chi^{\mu-1}-\alpha\chi^{\mu-2}+\alpha^2\chi^{\mu-3}-\alpha^3\chi^{\mu-4}+\ldots+\alpha^{\mu-2}\chi-\alpha^{\mu-1}.$$

4) Τῆς διαιρέσεως τοῦ $\chi^\mu+\alpha^\mu$ διὰ τοῦ $\chi+\alpha$, ἐπειδὴ $\chi+\alpha= \chi-(-\alpha)$, ὑπόλοιπον μὲν εἶναι $(-\alpha)^\mu+\alpha^\mu$, ἤτοι τὸ $2\alpha^\mu$, ἂν ὁ μ εἶναι ἄρτιος, τὸ 0 δὲ, ἂν ὁ μ εἶναι περιττός, πηλίκον δὲ προκῦπτον ἐκ ταύτης εἶναι

$$\chi^{\mu-1}-\alpha\chi^{\mu-2}+\alpha^2\chi^{\mu-3}-\ldots\ldots-\alpha^{\mu-2}\chi+\alpha^{\mu-1}.$$

Ἐπὶ δὲ παραδείγματος ἔχομεν τὰς ἑξῆς ταυτότητας:

$$\chi^3-\alpha^3=(\chi-\alpha)(\chi^2+\alpha\chi+\alpha^2)$$
$$\chi^3+\alpha^3=(\chi+\alpha)(\chi^2-\alpha\chi+\alpha^2).$$
$$\chi^4-\alpha^4=(\chi-\alpha)(\chi^4+\alpha\chi^2+\alpha^2\chi+\alpha^3)$$
$$\chi^4-\alpha^4=(\chi+\alpha)(\chi^3-\alpha\chi^2+\alpha^2\chi-\alpha^3)$$
$$\chi^4+\alpha^4=(\chi+\alpha)(\chi^3-\alpha\chi^2+\alpha^2\chi-\alpha^3)+2\alpha^4.$$
$$\chi^\mu-1=(\chi-1)(\chi^{\mu-1}+\chi^{\mu-2}+\chi^{\mu 3-}+\ldots+\chi^2+\chi+1).$$

Κλασματικαὶ παραστάσεις ἢ ἀλγεβρικὰ κλάσματα.

97. Τὸ πηλίκον δύο ἀλγεβρικῶν παραστάσεων παρίσταται διὰ κλάσματος, οὗ ἀριθμητὴς μὲν εἶναι ὁ διαιρετέος, παρονομαστὴς δὲ ὁ διαιρέτης.

Αἱ κλασματικαὶ δὲ αὗται παραστάσεις, αἵτινες καὶ *ἀλγεβρικὰ κλάσματα* καλοῦνται, ἔχουσι πάσας τὰς γενικὰς τῶν κλασμάτων ἰδιότητας, διότι ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτῶν παριστῶσιν ἀεὶ ἀριθμοὺς οἱουσδήποτε ἀκεραίους ἢ κλασματικούς, θετικοὺς ἢ ἀρνητικούς· ἐπειδὴ δὲ ἀπεδείχθη ὅτι αἱ ἰδιότητες αὗται, οὖσαι ἀναγκαῖα ἀκολουθήματα τῶν ἀρχικῶν ἰδιοτήτων τῶν τεσσάρων πράξεων, ἀληθεύουσιν ἐπὶ πάντων τῶν ἀριθμῶν· πᾶσαι ἄρα αἱ ἁπλοποιήσεις καὶ αἱ πράξεις, αἵτινες γίνονται ἐπὶ τῶν συνήθων κλασμάτων, καὶ ἐπὶ τούτων γινόμεναι μετασχηματίζουσιν αὐτὰς εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους.

Τοῦ μετασχηματισμοῦ δὲ τούτου ἔστωσαν τὰ ἑξῆς παραδείγματα:

1) Τὸ πηλίκον τοῦ μονωνύμου $12\alpha^3 6\gamma^4\chi^2$ διὰ τοῦ μονωνύμου $18\alpha^2 6^4\gamma^4$, δηλούμενον διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{12\alpha^3 6\gamma^4\chi^2}{18\alpha^2 6^4\gamma^4}$, ἂν ἁπλοποιηθῇ, ἄγει εἰς τὴν παράστασιν $\frac{2\alpha\chi^2}{36^3}$.

2) Τὸ κλάσμα $\frac{2\alpha^2 6^2-3\alpha 6^2\gamma}{10\alpha\gamma^2-15\gamma^3}$, ἐπειδὴ ὁ μὲν ἀριθμητὴς αὐτοῦ εἶναι $\alpha 6^2(2\alpha-3\gamma)$, ὁ δὲ παρονομαστὴς $5\gamma^2(2\alpha-3\gamma)$, γράφεται ὧδε:

$\frac{\alpha\beta^2(2\alpha-3\gamma)}{5\gamma^2(2\alpha-3\gamma)}$· ἂν δὲ ἐκ τῶν ὅρων αὐτοῦ ἐξαλειφθῇ ὁ κοινὸς παράγων $2\alpha-3\gamma$, τὸ κλάσμα τότε ἁπλοποιούμενον γίνεται $\frac{\alpha\beta^2}{5\gamma^2}$.

3) Τὸ πηλίκον τῆς παραστάσεως $\chi+\psi+\frac{\psi^2}{\chi}$ διὰ τῆς $\chi+\psi+\frac{\chi^2}{\psi}$ εἶναι $\frac{\chi+\psi+\frac{\psi^2}{\chi}}{\chi+\psi+\frac{\chi^2}{\psi}}$· ἂν δὲ πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος τούτου ἐπὶ τὴν παράστασιν $\chi.\psi$, τὸ κλάσμα γίνεται $\frac{\chi^2\psi+\chi\psi^2+\psi^3}{\chi^2\psi+\chi\psi^2+\chi^3}$ ~~ἢ μετασχηματίζεται,~~ ὅπερ μετασχηματίζεται εἰς τὸ $\frac{\psi(\chi^2+\chi\psi+\psi^2)}{\chi(\chi\psi+\psi^2+\chi^2)}$· ἂν δὲ διαιρεθῶσιν οἱ δύο αὐτοῦ ὅροι διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν παράγοντος $\chi^2+\chi\psi+\psi^2$, βλέπομεν ὅτι τὸ πηλίκον τῶν δεδομένων παραστάσεων εἶναι $\frac{\psi}{\chi}$.

4) Τῶν κλασμάτων $\frac{3\alpha+2\beta}{\alpha}$, $\frac{2\alpha^2-2\beta^2}{\alpha\beta}$, $\frac{2\alpha^2-3\beta^2}{\beta^2}$ τὸ ἄθροισμα εὑρίσκεται, ἂν τὰ κλάσματα γίνωσιν ὁμώνυμα, ὅτε κοινὸς αὐτῶν παρονομαστὴς θὰ εἶναι ὁ $\alpha\beta^2$, διότι ἡ παράστασις αὕτη διαιρεῖται διὰ πάντων τῶν παρονομαστῶν· οὕτω θὰ ἔχωμεν τὸ $\frac{3\alpha\beta^2+2\beta^3+2\alpha^2\beta-2\beta^3+2\alpha^3-3\alpha\beta^2}{\alpha\beta^2}$· μετὰ δὲ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀναγωγῶν καὶ τὴν ἐξαγωγὴν ἐν τῷ ἀριθμητῇ τοῦ κοινοῦ παράγοντος $2\alpha^3$ ἐκτὸς παρενθέσεως τὸ $\frac{2\alpha^2(\beta+\alpha)}{\alpha\beta^2}$ καὶ ἄρα τὸ $\frac{2\alpha(\alpha+\beta)}{\beta^2}$

Ὁ κοινὸς παρονομαστής, εἰς ὃν δύνανται νὰ ἀναχθῶσιν οἱ παρονομασταὶ κλασμάτων, ἂν οὗτοι εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα, εἶναι παράστασις διαιρετὴ διὰ πάντων τῶν παρονομαστῶν· τοιαύτη δὲ παράστασις εἶναι ἀεὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν· ἀλλ' εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ καὶ ἄλλη ἁπλουστέρα αὐτοῦ.

5) Τῶν κλασμάτων $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta-\beta^2}$, $\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta-\beta^3}$ ἡ διαφορὰ εὑρίσκεται, ἂν τὰ κλάσματα γίνωσιν ὁμώνυμα, ὅτε, ἐπειδὴ κοινὸς αὐτῶν παρονομαστὴς θὰ εἶναι ὁ $\beta(\alpha^2-\beta^2)$, θὰ ἔχωμεν τὸ $\frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)-(\alpha^3+\beta^3)}{\beta(\alpha^2-\beta^2)}$,

μετὰ δὲ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων τὸ $\dfrac{\alpha^3+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+\beta^3-\alpha^3-\beta^3}{\beta(\alpha^2-\beta^2)}$

καὶ ἄρα τὸ $\dfrac{\alpha\beta^2+\alpha^2\beta}{\beta(\alpha^2-\beta^2)}$ ἢ τὸ $\dfrac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\beta(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$, ἤτοι τὸ $\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}$.

6) Τῶν κλασμάτων $\dfrac{3(\chi^2-\psi^2)}{4\chi^2\omega}$, $\dfrac{8\chi\omega}{9(\chi-\psi)}$ τὸ γινόμενον εἶναι

$\dfrac{3(\chi^2-\psi^2).8\chi\omega}{4\chi^2\omega.9(\chi-\psi)}$ ἢ $\dfrac{3(\chi+\psi)(\chi-\psi)8\chi\omega}{4\chi^2\omega.9(\chi-\psi)}$, ἤτοι $\dfrac{2(\chi+\psi)}{3\chi}$

7) Τῶν κλασμάτων $\dfrac{\alpha^2-4\chi^2}{\alpha^2+4\alpha\chi}$, $\dfrac{\alpha^2-2\alpha\chi}{\alpha\chi+4\chi^2}$ τὸ πηλίκον εὑρίσκεται, ἂν τὸ πρῶτον κλάσμα πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ ἀντίστροφον τοῦ δευτέρου, ἤτοι εἶναι $\dfrac{\alpha^2-4\chi^2}{\alpha^2+4\alpha\chi}\cdot\dfrac{\alpha\chi+4\chi^2}{\alpha^2-2\alpha\chi}$ ἤτοι $\dfrac{(\alpha+2\chi)(\alpha-2\chi).\chi.(\alpha+4\chi)}{\alpha(\alpha+4\chi).\alpha.(\alpha-2\chi)}$,

καὶ ἂν ἁπλοποιηθῇ γίνεται $\dfrac{(\alpha+2\chi)\cdot\chi}{\alpha^2}$.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἁπλοποιῆσαι τὰς παραστάσεις:

$$\frac{\chi^3+2\chi^2}{\chi^2+4\chi+4},\quad \frac{\alpha^3-\beta^3}{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta},\quad \frac{(1+\alpha\beta)(1-\alpha\beta)-(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{(1+\alpha\beta)^2+(\alpha-\beta)^2},$$

$$\frac{\chi}{\psi}+\frac{2\chi^2+\psi^2}{\chi\psi}+\frac{3\chi\psi^2-3\chi^3-\psi^3}{\chi^2\psi}-\frac{4\chi\psi^3-2\chi^2\psi^2-\psi^4}{\chi^2\psi^2}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta^2}+1\right)\left(\frac{\alpha}{\beta^2}-1\right)\left(\frac{\alpha^2}{\beta^4}+1\right):\left(1+\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\beta^4}+\frac{\alpha^3}{\beta^6}\right),$$

$$\left[\frac{\alpha+\beta}{2(\alpha-\beta)}-\frac{\alpha-\beta}{2(\alpha+\beta)}+\frac{2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}\right]\cdot\frac{\alpha-\beta}{2\beta},$$

$$\frac{3}{\alpha+1}-\frac{2\alpha-1}{\alpha^2+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}},\quad \frac{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}-\alpha}{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}}\cdot\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^3+\beta^3},\quad \frac{\chi^2-7\chi+6}{\chi^2-5\chi+4},$$

$$\frac{1}{2(\chi-1)^2}-\frac{1}{4(\chi-1)}+\frac{1}{4(\chi+1)}-\frac{1}{(\chi-1)^2.(\chi+1)}.$$

$$\frac{\chi^2+\chi\psi}{\chi^2+\psi^2}\cdot\left(\frac{\chi}{\chi-\psi}-\frac{\psi}{\chi+\psi}\right),\ \left(\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{\chi^2}-\frac{\chi}{\alpha}-\frac{\alpha}{\gamma}+1\right)\left(\frac{\chi}{\alpha}-\frac{\alpha}{\chi}\right),$$

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-1}-\frac{1+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}}{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha^2}}$$

$$\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2\beta^3-\alpha^4}:\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha\beta^2+\beta^3},\quad \frac{\chi^2+2\chi\psi+\psi^2-\alpha^2}{\alpha^2-\chi^2-\psi^2+2\chi\psi}:\frac{\chi+\psi+\alpha}{\alpha-\chi+\psi}.$$

$$\left(\frac{\chi}{2}-\frac{2}{3}\right)\left[\frac{2\chi-3}{\chi-1}+\frac{3\chi-1}{2(\chi-1)}\right]:\frac{3(3\chi-4)}{3\chi-2}.$$

$$\text{καὶ}\ \frac{1}{(\alpha+\beta)^2}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)+\frac{2}{(\alpha+\beta)^3}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right).$$

2) Ἀποδεῖξαι τὴν ἀλήθειαν τῶν ἑξῆς ἰσοτήτων :

$$2(\chi^2+1)^2=(\chi^2-2\chi-1)^2+(\chi^2+2\chi-1)^2,\quad \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\alpha\beta$$

$$\frac{1-\alpha^2}{(\alpha+\chi)^2-(1+\alpha\chi)^2}=\frac{1}{\chi^2-1},\quad \frac{\alpha^6+2\alpha^3\beta^3+\beta^6}{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}=(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)^2.$$

$$\text{καὶ}\quad \frac{1}{\chi(\chi-\alpha)(\chi-\beta)}=\frac{1}{\alpha\beta\chi}+\frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)(\chi-\alpha)}-\frac{1}{\beta(\alpha-\beta)(\chi-\beta)}.$$

3) Εὑρεῖν τὴν τιμὴν τῶν ἑξῆς παραστάσεων :

$$\frac{\chi-\alpha}{\beta}-\frac{\chi-\beta}{\alpha},\quad \text{ἂν}\quad \chi=\frac{\alpha^2}{\alpha-\beta},$$

$$\alpha\psi-\frac{\alpha\beta^2\gamma}{\alpha+\beta}+(\alpha+\beta+\gamma)\beta\chi-\beta^2\psi-\alpha\beta(\alpha+2\beta),\ \text{ἂν}\ \chi=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta},\ \psi=\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}$$

$$\left(\frac{\chi-\alpha}{\chi-\beta}\right)^3-\frac{\chi-2\alpha+\beta}{\chi+\alpha-2\beta},\ \text{ἂν}\ \chi=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

4) Ἐκτελέσαι τὴν ἑξῆς πρᾶξιν : $\frac{\chi^3}{\chi-1}-\frac{\chi^2}{\chi+1}-\frac{1}{\chi-1}+\frac{1}{\chi+1}$.

5) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς $7^\nu+1$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 8, ἂν ὁ ἐκθέτης ν εἶναι περιττὸς ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΟΡΙΣΜΟΙ

98. *Ἐξίσωσις καλεῖται ἰσότης περιέχουσα ἐν ᾗ πλείονα γράμματα παριστῶντα ποσὰ ἄγνωστα, ἀληθεύουσα δέ, ἂν ἀντὶ τῶν γραμμάτων τούτων τεθῶσι τιμαὶ προσήκουσαι.*

Ἐπὶ δὲ παραδείγματος ἐξισώσεις εἶναι αἱ ἰσότητες

$$3\chi-1=5,\quad \chi^2-4\chi+3=0 \quad \textit{καὶ} \quad \chi^2+3\psi=7,$$

αἵτινες ἀληθεύουσιν ἡ μὲν πρώτη, ἂν ἀντὶ τοῦ χ τεθῇ μόνον ὁ ἀριθμὸς 2, ἡ δὲ δευτέρα, ἂν ἀντὶ τοῦ χ τεθῶσι μόνον οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 3, ἡ δὲ τρίτη, ἂν ἀντὶ τοῦ χ τεθῇ ὁ ἀριθμὸς 2, ἀντὶ δὲ τοῦ ψ ὁ 1, δὲν ἀληθεύει δέ, ἂν ἀντὶ τοῦ χ τεθῇ ὁ 4, ἀντὶ δὲ τοῦ ψ ὁ ἀριθμὸς 2.

Ὡσαύτως ἐξισώσεις εἶναι αἱ ἰσότητες $\alpha\chi+\beta=0$, $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ κτλ., ἐν αἷς τὰ μὲν γράμματα α, β, γ παριστῶσι γνωστοὺς ἀριθμούς, τὸ δὲ χ ἄγνωστον ἀριθμόν.

Τὰ μὲν γράμματα τῆς ἐξισώσεως τὰ παριστῶντα ποσὰ ἄγνωστα σημαινόμενα συνήθως διὰ τῶν τελευταίων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου καλοῦνται *οἱ ἄγνωστοι τῆς ἐξισώσεως*· οἱ δὲ ἀριθμοὶ οἱ τιθέμενοι ἀντὶ τῶν ἀγνώστων καὶ ἐπαληθεύοντες τὰς ἐξισώσεις, καλοῦνται *τιμαὶ τῶν ἀγνώστων* ἢ *λύσεις τῆς ἐξισώσεως*. Αἱ λύσεις δὲ ἐξισώσεως περιεχούσης μίαν μόνην ἄγνωστον λέγονται καὶ *ῥίζαι* αὐτῆς. Ἂν δὲ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ δὲν ὑπάρχωσιν, ἡ ἐξίσωσις καλεῖται *ἀδύνατος*.

Ἡ δὲ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων καλεῖται *λύσις* ἢ *ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως*· εἶναι δὲ ἡ ἐπίλυσις τῶν ἐξισώσεων τὸ κυριώτατον ἔργον τῆς ἀλγέβρας, διότι εἰς τοῦτο ἀνάγεται συνήθως ἡ λύσις τῶν προβλημάτων. Ἡ μὲν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος γεγραμμένη παράστασις καλεῖται *πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως*, ἡ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ *δεύτερον μέλος*. Δύο ἐξισώσεις καλοῦνται *ἰσοδύναμοι*, ἂν πᾶσαι αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων αἱ ἐπαληθεύουσαι τὴν ἑτέραν τῶν ἐξισώσεων ἐπαληθεύωσι καὶ τὴν ἑτέραν.

Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων.

99. *Θεώρημα Α'.*— *Ἂν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός, προκύπτει ἐξίσωσις πρὸς ταύτην ἰσοδύναμος.*

Ἔστω ἡ δεδομένη ἐξίσωσις

$$A = B \qquad (1),$$

ἧς ἑκάτερον τῶν μελῶν ἔχει παρασταθῇ συντομίας χάριν διὰ γράμματος· λέγω δὲ ὅτι, ἂν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς μ, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις

$$A+\mu = B+\mu \qquad (2)$$

θὰ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ δεδομένῃ (1).

Διότι, ἐπειδὴ διὰ πᾶσαν λύσιν τῆς δεδομένης ἐξισώσεως (1) αἱ ἐκ τῶν μελῶν αὐτῆς A καὶ B προκύπτουσαι ἀντίστοιχοι τούτων τιμαὶ A_1 καὶ B_1 εἶναι ἀριθμοὶ ἴσοι, καὶ αἱ διὰ τὴν λύσιν ταύτην ἐκ τῶν μελῶν $A+\mu$ καὶ $B+\mu$ τῆς ἐξισώσεως (2) προκύπτουσαι ἀντίστοιχοι τούτων τιμαὶ $A_1+\mu$ καὶ $B_1+\mu$ εἶναι ὡσαύτως ἀριθμοὶ ἴσοι· διότι, ἂν εἰς τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς A_1 καὶ B_1 προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς μ, τὰ προκύψοντα ἀθροίσματα $A_1+\mu$ καὶ $B_1+\mu$, θὰ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα· θὰ ἐπαληθεύῃ ἄρα ὡς πρὸς τὴν λύσιν ταύτην καὶ ἡ ἐξίσωσις (2).

Καὶ τἀνάπαλιν, πᾶσα λύσις τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι λύσις καὶ τῆς δεδομένης ἐξισώσεως (1).

Διότι, ἐπειδὴ διὰ πᾶσαν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (2), αἱ ἐκ τῶν μελῶν αὐτῆς προκύπτουσαι ἀντίστοιχοι τιμαὶ $A_1+\mu$ καὶ $B_1+\mu$ εἶναι ἀριθμοὶ ἴσοι, καὶ αἱ διὰ τὴν λύσιν ταύτην ἐκ τῶν μελῶν A καὶ B τῆς ἐξισώσεως (1) προκύπτουσαι ἀντίστοιχοι τούτων τιμαὶ A_1 καὶ B_1 εἶναι ὡσαύτως ἀριθμοὶ ἴσοι· διότι, ἂν ἀπὸ τῶν ἴσων ἀριθμῶν $A_1+\mu$ καὶ $B_1+\mu$ ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς μ, αἱ προκύψουσαι διαφοραὶ A_1 καὶ B_1 θὰ εἶναι ὡσαύτως ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Λοιπὸν αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἐπειδὴ δὲ πᾶσα ἀφαίρεσις ἀνάγεται εἰς πρόσθεσιν (31), ἕπεται ὅτι, *καὶ ἂν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐξισώσεως ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός, προκύπτει ἐξίσωσις πρὸς ταύτην ἰσοδύναμος.*

Ἐπὶ δὲ παραδείγματος αἱ ἐξισώσεις

$$5\chi-2 = 3\chi+4 \quad \text{καὶ} \quad 5\chi-2+6 = 3\chi+4+6$$

εἶναι ἰσοδύναμοι· εἶναι δὲ ἐνταῦθα ὁ μ ἴσος τῷ ἀριθμῷ 6.

Ὡσαύτως αἱ ἐξισώσεις

$$χ+3ψ=8 \quad καὶ \quad χ+3ψ-χ^2=8-χ^2$$

εἶναι ἰσοδύναμοι· τοῦ μ ὄντος ἐνταῦθα ἴσου τῷ ἀριθμῷ $-χ^2$.

100. ***Πόρισμα Α'***.—*Ἂν ὁ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως προστεθησόμενος ἀριθμὸς εἶναι ἀντίθετος ὅρῳ τινὶ τῆς ἐξισώσεως, ὁ ὅρος οὗτος ἐξαφανιζόμενος ἐκ τοῦ μέλους ἐν ᾧ κεῖται, μετατίθεται εἰς τὸ ἕτερον μέλος μετ' ἀντιθέτου σημείου.*

Ἐπὶ δὲ παραδείγματος, ἐπειδὴ ὁ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως $5χ-2=2χ+4$ προστεθησόμενος ἀριθμὸς 2 εἶναι ἀντίθετος τοῦ ἐν τῷ πρώτῳ μέλει ὅρου -2, ὁ ὅρος οὗτος -2 θὰ ἐξαφανισθῇ ἐκ τοῦ μέλους ἐκείνου καὶ θὰ μετατεθῇ εἰς τὸ δεύτερον μέλος μετὰ τοῦ ἀντιθέτου σημείου $+$, οὕτω δὲ θὰ προκύψῃ ἡ πρὸς τὴν δεδομένην ἰσοδύναμος ἐξίσωσις $\quad 5χ=2χ+4+2$.

Ὁμοίως, ἂν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς οὕτω προκυψάσης ἐξισώσεως $5χ=2χ+4+2$ προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς $-2χ$, θὰ προκύψῃ ἡ πρὸς ταύτην καὶ κατ' ἀκολουθίαν τῇ δεδομένῃ ἰσοδύναμος ἐξίσωσις

$$5χ-2χ=4+2.$$

101. ***Πόρισμα Β'***.—*Ἂν ἀλλαχθῶσι τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων ἐξισώσεώς τινος, ἡ οὕτω προκύπτουσα ἐξίσωσις θὰ εἶναι τῇ ἐξισώσει ταύτῃ ἰσοδύναμος.*

Διότι ἡ ἐξίσωσις αὕτη προκύπτει ἐκ τῆς δεδομένης, μετατιθεμένου ἑκάστου ὅρου ἐκείνης ἐκ τοῦ ἑτέρου μέλους αὐτῆς εἰς τὸ ἕτερον, εἶτα δὲ λαμβανομένου τοῦ μὲν δευτέρου μέλους ὡς πρώτου, τοῦ δὲ πρώτου ὡς δευτέρου.

102. ***Θεώρημα Β'***.—*Ἂν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (διάφορον τοῦ 0), προκύπτει ἐξίσωσις πρὸς ταύτην ἰσοδύναμος.*

Ἔστω ἡ δεδομένη ἐξίσωσις

$$A=B \qquad (1),$$

λέγω ὅτι, ἂν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μ, διάφορον τοῦ μηδενός, ἡ προκύψουσα ἐξίσωσις

$$A.μ=B.μ \qquad (2)$$

θὰ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ δεδομένῃ (1).

Διότι, ἐπειδὴ διὰ πᾶσαν λύσιν τῆς δεδομένης ἐξισώσεως (1) αἱ ἐκ τῶν μελῶν αὐτῆς A καὶ B προκύπτουσαι ἀντίστοιχοι τούτων τιμαὶ A_1 καὶ B_1 εἶναι ἀριθμοὶ ἴσοι, καὶ αἱ διὰ τὴν λύσιν ταύτην ἐκ τῶν μελῶν $A.μ$ καὶ $B.μ$ τῆς ἐξισώσεως (2) προκύπτουσαι ἀντίστοιχοι τούτων τιμαὶ $A_1.μ$ καὶ $B_1.μ$ εἶναι ὡσαύτως ἀριθμοὶ ἴσοι· διότι, ἂν οἱ ἴσοι ἀριθμοὶ A_1

καὶ B_1 πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μ, τὰ προκύψοντα γινόμενα $A_1.\mu$ καὶ $B_1.\mu$, θὰ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα· θὰ ἐπαληθεύῃ ἄρα ὡς πρὸς τὴν λύσιν ταύτην καὶ ἡ ἐξίσωσις (2).

Καὶ τἀνάπαλιν, πᾶσα λύσις τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι λύσις καὶ τῆς δεδομένης ἐξισώσεως (1).

Διότι, ἐπειδὴ διὰ πᾶσαν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (2), αἱ ἐκ τῶν μελῶν αὐτῆς προκύπτουσαι ἀντίστοιχοι τιμαὶ $A_1.\mu$ καὶ $B_1.\mu$ εἶναι ἀριθμοὶ ἴσοι, καὶ αἱ διὰ τὴν λύσιν ταύτην ἐκ τῶν μελῶν A καὶ B τῆς ἐξισώσεως (1) προκύπτουσαι ἀντίστοιχοι τούτων τιμαὶ A_1 καὶ B_1 εἶναι ὡσαύτως ἀριθμοὶ ἴσοι· διότι, ἂν τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς $A_1.\mu$ καὶ $B_1.\mu$ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μ (διαφόρου τοῦ 0), τὰ προκύψοντα πηλίκα A_1 καὶ B_1 θὰ εἶναι ὡσαύτως ἴσα πρὸς ἄλληλα.

Λοιπὸν αἱ δύο ἐξισώσεις $A=B$ καὶ $A.\mu=B.\mu$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἐπειδὴ δὲ πᾶσα διαίρεσις (ἐκτὸς τῆς διὰ τοῦ 0) ἀνάγεται εἰς πολλαπλασιασμὸν (16), ἕπεται ὅτι, *καὶ ἂν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, προκύπτει ἐξίσωσις πρὸς ταύτην ἰσοδύναμος.*

Παρατήρησις Α΄. — *Ἂν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸ 0, προκύπτει πάντοτε ἡ ἰσότης $0=0$, ἐξ ἧς οὐδὲν δυνάμεθα ἀντιστρόφως νὰ συναγάγωμεν περὶ τῶν λύσεων τῆς δεδομένης ἐξισώσεως.*

Παρατήρησις Β΄.—*Ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς μ ἢ ὁ διαιρέτης εἶναι παραστάσεις περιέχουσαι γράμματα διάφορα τῶν ἀγνώστων τῆς ἐξισώσεως, αἱ προκύπτουσαι ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμοι τῇ δεδομένῃ μόνον ὡς πρὸς τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων, αἵτινες δὲν μηδενίζουσι τὰς παραστάσεις ταύτας.*

Π. χ. ἡ ἐξίσωσις $(\alpha-6)\chi=\alpha^2-\alpha6+6^2$, ἧς ἄγνωστος εἶναι ὁ χ, εἶναι ἰσοδύναμος τῇ $(\alpha-6).\chi.(\alpha+6)=(\alpha^2-\alpha6+6^2)(\alpha+6)$, ἤτοι τῇ $(\alpha^2-6^2)\chi=\alpha^3+6^3$, μόνον ἂν ἡ διαφορὰ $\alpha-6$ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

Ὡσαύτως ἡ ἐξίσωσις $(\alpha-6)\chi=\alpha^3-6^3$ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ $\chi=\dfrac{\alpha^3-6^3}{\alpha-6}$, ἤτοι τῇ $\chi=\alpha^2+\alpha6+6^2$, ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς πρώτης διὰ τῆς διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐκείνης διὰ $\alpha-6$, μόνον ἂν ἡ διαφορὰ $\alpha-6$ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

Παρατήρησις Γ΄.—*Ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς μ ἢ ὁ διαιρέτης εἶναι παραστάσεις περιέχουσαι ἕνα ἢ πλείονας τῶν ἀγνώστων τῆς ἐξισώσεως, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις δὲν εἶναι πάντοτε ἰσοδύναμος τῇ δεδομένῃ.*

Π. χ. ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $3\chi+2=6\chi-4$ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς ἐπὶ τὴν παράστασιν $\chi-3$ προκύπτουσα ἐξίσωσις

$$(3\chi+2)(\chi-3)=(6\chi-4)(\chi-3)$$

ἀληθεύει καὶ ὡς πρὸς τὴν μηδενίζουσαν τὴν παράστασιν $\chi-3$ τιμὴν τοῦ $\chi=3$, πρὸς ἣν δὲν ἀληθεύει καὶ ἡ δεδομένη ἐξίσωσις.

103. ***Πόρισμα.***—*Ἂν ὁ ἀριθμὸς ἐφ' ὃν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως θὰ πολλαπλασιασθῶσιν εἶναι κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν, πάντες οἱ παρονομασταὶ τῶν ὅρων τῆς ἐξισώσεως ἐξαφανίζονται.*

Π. χ. Ἂν πάντες οἱ ὅροι τῆς ἐξισώσεως $\frac{\chi}{2}-\frac{2\chi}{3}=26-\frac{3\chi}{5}$ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸ τῶν παρονομαστῶν γινόμενον 2.3.5, θὰ προκύψῃ ἡ τῇ δεδομένῃ ἰσοδύναμος, ἀλλ' ἄνευ παρονομαστῶν, ἐξίσωσις $2.3.5.\frac{\chi}{2}-2.3.5\frac{2\chi}{3}=2.3.5.26-2.3.5.\frac{3\chi}{5}$,

ἤτοι ἡ $\qquad 3.5.\chi-2.5.2\chi=2.3.5.26-2.3.3.\chi.$

Ἂν οἱ περὶ ὧν ὁ λόγος παρονομασταὶ εἶναι ὡρισμένοι ἀκέραιοι ἀριθμοί, ὁ ἁπλούστατος πολλαπλασιαστής, ἐφ' ὃν ἂν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως, ἐξαφανίζονται οἱ παρονομασταί, εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν αὐτῶν πολλαπλάσιον. Κατὰ ταῦτα, ἂν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως $\frac{\chi}{4}+\frac{5\chi}{12}=\frac{7\chi}{6}-4$ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν τῶν παρονομαστῶν πολλαπλάσιον 12, θὰ προκύψῃ ἡ τῇ δεδεδομένῃ ἰσοδύναμος ἐξίσωσις

$$12.\frac{\chi}{4}+12.\frac{5\chi}{12}=12.\frac{7\chi}{6}-12.4,$$

ἤτοι ἡ $\qquad 3\chi+5\chi=14\chi-48.$

Ὡσαύτως, ἂν οἱ εἰρημένοι παρονομασταὶ παρίστανται διὰ γραμμάτων, εὑρίσκεται ἐνίοτε παράστασις διαιρετὴ δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν καὶ ἁπλουστέρα τοῦ γινομένου αὐτῶν, ἐφ' ἣν πολλαπλασιάζονται ἀμφότερα τὰ μέλη (ἤτοι πάντες οἱ ὅροι) τῆς ἐξισώσεως.

Οὕτως ἐν τῇ διὰ γραμμάτων παριστωμένῃ ἐξισώσει

$$\frac{\chi}{\alpha-6}-\frac{5\alpha}{\alpha+6}=\frac{26\chi}{\alpha^2-6^2},$$

ἡ παράστασις α^2-6^2 εἶναι διαιρετὴ δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν· ἂν ἄρα ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' αὐτήν, θὰ προκύψῃ ἡ ἄνευ παρονομαστῶν ἰσοδύναμος τῇ δεδομένῃ ἐξίσωσις $(\alpha+\beta)\chi-5\alpha(\alpha-\beta)=2\delta\chi$, πλὴν ἂν $\alpha^2=\beta^2$.

Περὶ τοῦ βαθμοῦ τῶν ἐξισώσεων.

104. ***Βαθμὸς ἐξισώσεως***, ἧς οἱ μὲν ὅροι εἶναι ἢ ἀριθμοὶ ὡρισμένοι ἢ μονώνυμα ἀκέραια ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους, ὅμοιοι δὲ ὅροι δὲν ὑπάρχουσι, λέγεται ὁ μέγιστος τῶν βαθμῶν τῶν μονωνύμων πρὸς τοὺς ἀγνώστους.

Οὕτως αἱ μὲν ἐξισώσεις $5\chi+2=\frac{\chi}{2}+11$ καὶ $2\chi-\psi=3\chi-4$ εἶναι τοῦ πρώτου βαθμοῦ, αἱ δὲ ἐξισώσεις $\chi^2-3\chi=2$ καὶ $2\chi\psi+\chi=6$ εἶναι τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

Ἐπίλυσις τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ τῶν περιεχουσῶν ἕνα ἄγνωστον.

105. Ἡ ἐπίλυσις ἐξισώσεως ἕνα ἄγνωστον ἐχούσης γίνεται συνήθως ὡς ἑξῆς:

α΄) *Ἐξαλείφονται οἱ παρονομασταὶ αὐτῆς.*

β΄) *Ἐκτελοῦνται αἱ ἐν αὐτῇ σεσημειωμέναι πράξεις.*

γ΄) *Χωρίζονται οἱ γνωστοὶ ὅροι ἀπὸ τῶν ἐχόντων τὸν ἄγνωστον, μεταφερομένων τῶν μὲν γνωστῶν εἰς τὸ ἕτερον τῶν μελῶν, τῶν δὲ ἐχόντων τὸν ἄγνωστον εἰς τὸ ἕτερον.*

δ΄) *Γίνεται δὲ ἐν ἑκατέρῳ τῶν μελῶν ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων.*

Μετὰ ταῦτα, ἂν ἡ ἐξίσωσις εἶναι τοῦ πρώτου βαθμοῦ, οἱ μὲν τὸν ἄγνωστον ἔχοντες ὅροι, ἐπειδὴ ὁ ἄγνωστος εἶναι κοινὸς αὐτῶν παράγων, θὰ ἀποτελέσωσι τὸ ἐπὶ ὡρισμένον ἀριθμὸν ἢ γνωστήν τινα παράστασιν γινόμενον αὐτοῦ, οἱ δὲ γνωστοὶ ὅροι θὰ ἀποτελέσωσιν ἀριθμὸν ὡρισμένον ἢ παράστασιν γνωστήν· τουτέστιν ἡ ἐξίσωσις θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν $\alpha\chi=\beta$, τοῦ α καὶ τοῦ β παριστώντων ἢ ἀριθμοὺς ὡρισμένους ἢ παραστάσεις γνωστάς.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi=\beta$ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ δεδομένῃ, διότι προέκυψεν ἐξ αὐτῆς διὰ πράξεων, δι᾽ ὧν ἐξίσωσίς τις μετασχηματίζεται εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον, ἕπεται ὅτι ἡ λύσις πάσης ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐχούσης τὴν μορφὴν $\alpha\chi=\beta$.

Ἐν τῇ ἐξισώσει δὲ ταύτῃ, ἂν μὲν ὁ τοῦ ἀγνώστου πολλαπλασιαστὴς α θεωρηθῇ διάφορος τοῦ 0, διαιρεθῶσι δὲ δι᾽ αὐτοῦ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης, προκύπτει ἡ ἰσοδύναμος ἐξίσωσις

$\chi=\frac{6}{\alpha}$, ἥτις ἀληθεύει μόνον, ἂν ἐν αὐτῇ ἀντὶ τοῦ ἀγνώστου χ τεθῇ ὁ ἀριθμὸς $\frac{6}{\alpha}$· καὶ ἡ δεδομένη ἄρα ἐξίσωσις θὰ ἀληθεύῃ μόνον, ἂν ἐν αὐτῇ ἀντὶ τοῦ ἀγνώστου χ τεθῇ ὁ ἀριθμὸς $\frac{6}{\alpha}$.

Τούτων ἄρα οὕτως ἐχόντων ἡ δεδομένη ἐξίσωσις ἐλύθη.

Ἂν δὲ ὁ πολλαπλασιαστὴς α εἶναι ἴσος τῷ 0, ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi=6$ θὰ εἶναι $0.\chi=6$, ἤτοι $0=6$· ὅτε, ἂν μὲν ὁ γνωστὸς ὅρος 6 εἶναι ἴσος τῷ 0, ἡ ἐξίσωσις θὰ εἶναι $0.\chi=0$ καὶ θὰ ἀληθεύῃ οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ ὁ ἄγνωστος χ, διότι δὲν περιέχεται ἐν αὐτῇ· καὶ ἡ δεδομένη ἄρα ἰσοδύναμος πρὸς ταύτην ἐξίσωσις θὰ ἀληθεύῃ, οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ ὁ χ.

Τούτων οὕτως ἐχόντων ἡ πρὸς λύσιν δεδομένη ἐξίσωσις εἶναι ταυτότης (87)· ἂν δὲ ὁ ὅρος 6 διαφέρῃ τοῦ 0, ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi=6$ θὰ εἶναι $0.\chi=6$, ἤτοι θὰ εἶναι ἀδύνατος· κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ἡ δεδομένη ἐξίσωσις ὑπὸ οὐδεμιᾶς τιμῆς τοῦ χ θὰ ἐπαληθεύηται, τουτέστιν θὰ εἶναι καὶ αὕτη ἀδύνατος.

106. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἄρα συνάγεται, ὅτι *τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ αἱ μὲν ἐπαληθεύονται ὑπὸ μιᾶς μόνης τιμῆς τοῦ ἀγνώστου, αἱ δὲ ὑπὸ οὐδεμιᾶς, αἱ δὲ ὑπὸ πλειόνων· αἱ δὲ εἰς τὴν τελευταίαν κατηγορίαν ὑπαγόμεναι ἐξισώσεις εἶναι ταυτότητες.*

Παραδείγματα ἐπιλύσεως ἐξισώσεων.

1) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{7(\chi+3)}{2}-25=\frac{5\chi+6}{3}$.

Πρὸς ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐξαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς αὐτῆς, πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα αὐτῆς τὰ μέλη ἐπὶ τὸ τῶν παρονομαστῶν γινόμενον 2.3· οὕτω δὲ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$2.3.\frac{7(\chi+3)}{2}-2.3.25=2.3.\frac{5\chi+6}{3}$$

ἢ ἁπλούστερον ἡ $21(\chi+3)-2.3.25=2(5\chi+6)$·
εἶτα ἐκτελοῦμεν τὰς ἐν αὐτῇ σεσημειωμένας πράξεις, μεθ' ὃ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$21\chi+63-150=10\chi+12·$$

μετὰ δὲ τοῦτο χωρίζομεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τῶν ἐχόντων τὸν ἄγνωστον, ὅτε προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$21\chi-10\chi=12+150-63·$$

εἶτα προσθέτομεν τοὺς ἐν αὐτῇ ὁμοίους ὅρους καὶ οὕτω ἔχομεν

$$11\chi = 99,$$

ἐξ ἧς προκύπτει ἡ $\chi = \frac{99}{11}$, ἤτοι ἡ $\chi = 9$.

Λοιπὸν ἡ δεδομένη ἐξίσωσις ἀληθεύει μόνον ἂν ἀντὶ τοῦ χ τεθῇ ὁ ἀριθμὸς 9.

2) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{2\chi}{3} - \frac{\chi}{2} = \frac{\chi}{6} + \frac{5}{3}$.

Πρὸς ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐξαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς αὐτῆς, πολλαπλασιάζοντες πάντας αὐτῆς τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν τῶν παρονομαστῶν πολλαπλάσιον 6· οὕτω δὲ προκύπτει ἡ πρὸς τὴν δεδομένην ἰσοδύναμος ἐξίσωσις

$$6.\frac{2\chi}{3} - 6.\frac{\chi}{2} = 6.\frac{\chi}{6} + 6.\frac{5}{3}\cdot$$

εἶτα ἐκτελοῦμεν τὰς ἐν αὐτῇ ἁπλοποιήσεις καὶ σεσημειωμένας πράξεις, μεθ' ὃ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$4\chi - 3\chi = \chi + 10\cdot$$

μετὰ δὲ τοῦτο χωρίζομεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τῶν ἐχόντων τὸν ἄγνωστον, προσθέτοντες ἅμα τοὺς ἐν αὐτῇ ὁμοίους ὅρους, καὶ οὕτω ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $0.\chi = 10$, ἥτις εἶναι ἀδύνατος· ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι καὶ ἡ δεδομένη ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος, τουτέστιν ὑπὸ οὐδεμιᾶς τιμῆς τοῦ χ ἐπαληθεύεται ἡ δεδομένη ἐξίσωσις.

3) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{\chi - 2}{4} + \frac{\chi}{3} = \frac{7\chi}{12} - \frac{1}{2}$.

ἂν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 12 προκύπτει ἡ ἰσοδύναμος ταύτῃ ἐξίσωσις

$$3(\chi - 2) + 4\chi = 7\chi - 6\cdot$$

ἂν δὲ ἐκτελεσθῶσιν αἱ σεσημειωμέναι πράξεις προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$3\chi - 6 + 4\chi = 7\chi - 6,$$

ἐξ ἧς προκύπτει ἡ $3\chi + 4\chi - 7\chi = 6 - 6,$

καὶ ἄρα ἡ $0.\chi = 0,$ ἥτις εἶναι ταυτότης.

Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι ἡ πρὸς ἐπίλυσιν δεδομένη ἐξίσωσις εἶναι ταυτότης καὶ ἀληθεύει ἄρα οἱοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ ἂν τεθῇ ἀντὶ τοῦ χ.

4) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{\chi - \alpha}{\alpha} - \gamma = \frac{\chi - 6}{6} - \delta$.

Πρὸς ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως ταύτης πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν τῶν παρονομαστῶν πολλαπλάσιον α.β, τὸ ὁποῖον διαφέρει τοῦ 0, διότι καὶ τὸ α καὶ τὸ β διαφέρουσιν αὐτοῦ· οὕτω δὲ προκύπτει ἡ ἰσοδύναμος ἐξίσωσις

$$\beta(\chi-\alpha)-\alpha\beta\gamma=\alpha(\chi-\beta)-\alpha\beta\delta\cdot$$

εἶτα ἐκτελοῦμεν τὰς σεσημειωμένας πράξεις, μεθ' ὃ ἔχομεν

$$\beta\chi-\alpha\beta-\alpha\beta\gamma=\alpha\chi-\alpha\beta-\alpha\beta\delta\cdot$$

μετὰ τοῦτο χωρίζομεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τῶν ἐχόντων τὸν ἄγνωστον, ὅτε προκύπτει ἡ πρὸς ταύτην ἰσοδύναμος ἐξίσωσις

$$\beta\chi-\alpha\chi=\alpha\beta+\alpha\beta\gamma-\alpha\beta-\alpha\beta\delta\cdot$$

εἶτα δὲ προσθέτομεν τοὺς ὁμοίους ὅρους, ὅτε προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$(\beta-\alpha)\chi=\alpha\beta(\gamma-\delta).$$

Καὶ ἂν μὲν ὁ τοῦ ἀγνώστου πολλαπλασιαστὴς β—α εἶναι διάφορος τοῦ 0, διαιροῦμεν δι' αὐτοῦ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης, μεθ' ὃ ἔχομεν $\chi=\dfrac{\alpha\beta(\gamma-\delta)}{\beta-\alpha}.$

ἂν δὲ $\beta-\alpha=0$, ἤτοι $\beta=\alpha$, τότε, ἂν μὲν εἶναι $\gamma-\delta\neq 0$, ἤτοι $\gamma\neq\delta$, ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις θὰ εἶναι $0=\alpha\beta(\gamma-\delta)$, ἀδύνατος ἄρα, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ἡ δεδομένη· ἂν δὲ εἶναι καὶ $\gamma-\delta=0$, ἤτοι $\gamma=\delta$, ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις θὰ εἶναι $0=0$· ἐν τῇ περιπτώσει ἄρα ταύτῃ ἡ δεδομένη εἶναι ταυτότης· διότι, ἂν τεθῇ ἐν αὐτῇ ἀντὶ τοῦ β τὸ α καὶ ἀντὶ τοῦ γ τὸ δ, θὰ προκύψῃ ἡ ταυτότης $\dfrac{\chi-\alpha}{\alpha}-\delta=\dfrac{\chi-\alpha}{\alpha}-\delta.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ ἐπιλυθῶσιν αἱ ἑπόμεναι ἐξισώσεις:

1) $\dfrac{2\chi-3}{2\chi-4}-3=\dfrac{\chi+5}{3\chi-6}-\dfrac{5}{2}.$ 2) $\dfrac{5\chi-\frac{3}{2}}{9\chi-\frac{5}{4}}=\dfrac{4}{13}.$

3) $\dfrac{\chi}{6}-\dfrac{\chi-\frac{1}{2}}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{\chi}{3}\right)=0.$

4) $\dfrac{1}{2}\left(\chi-\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{1}{3}\left(\chi-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{4}\left(\chi-\dfrac{1}{5}\right)=0.$

5) $2\alpha^2-(\alpha-\chi)^2=-(2\alpha+\chi)^2.$ 6) $\dfrac{\chi-\alpha}{\beta}-\dfrac{\chi-\beta}{\alpha}=\dfrac{\beta}{\alpha}.$

7) $\dfrac{\alpha}{\beta}\left(1-\dfrac{\alpha}{\chi}\right)+\dfrac{\beta}{\alpha}\left(1-\dfrac{\beta}{\chi}\right)=1.$

8) $\dfrac{\omega}{3\alpha+\omega}+\dfrac{\omega}{3\alpha-\omega}=\dfrac{\alpha^2}{9\alpha^2-\omega^2}.$ 9) $\dfrac{\chi+\alpha}{\chi+\beta}=\left(\dfrac{2\chi+\alpha+\gamma}{2\chi+\beta+\gamma}\right)^2.$

10) $\dfrac{3\alpha^2-5\alpha\chi}{2\alpha-3\chi}-\dfrac{\alpha(\alpha-\chi)}{5\alpha+\chi}+\dfrac{7\alpha^3-15\alpha^2\chi+11\alpha\chi^2}{10\alpha^2-13\alpha\chi-3\chi^2}+\alpha=0.$

Προβλήματα, ὧν ἡ λύσις ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἐπιλύσεως μιᾶς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως περιεχούσης ἕνα ἄγνωστον.

107. Ἐν παντὶ προβλήματι ὑπάρχουσι δεδομένα καὶ ζητούμενα, ἤτοι γνωστὰ καὶ ἄγνωστα.

108. Τὰ δὲ ποσά, ἅτινα ἐν τοῖς ἀλγεβρικοῖς προβλήμασι πολλάκις θεωροῦνται, μετρούμενα δι᾿ ὡρισμένης ὁμοειδοῦς πρὸς αὐτὰ μονάδος, παρίστανται πάντοτε δι᾿ ἀριθμῶν.

109. Αἱ δὲ ἀπαιτήσεις, ἃς πρέπει νὰ πληρῶσι τὰ ζητούμενα πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος, καλοῦνται *ὅροι* τοῦ προβλήματος.

Τῶν δὲ ἀπαιτήσεων τούτων αἱ κυριώταται ἐν τῇ ἐκφωνήσει τοῦ προβλήματος γνωσταὶ γινόμεναι καὶ τὰς σχέσεις τῶν ζητουμένων πρὸς τὰ δεδομένα ὁρίζουσαι καλοῦνται *ἐπιτάγματα*.

Ὅταν δὲ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παριστᾷ ποσόν τι, ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἕνεκα τῆς φύσεως τοῦ παριστωμένου ποσοῦ ὀφείλει πολλάκις νὰ πληροῖ καὶ δευτερεύοντάς τινας ὅρους καλουμένους *περιορισμούς*.

Π. χ. ἐν τῷ προβλήματι: *Εὑρεῖν ἀριθμόν, οὗ τὸ διπλάσιον ἰσοῦται τῷ τριπλασίῳ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἠλαττωμένῳ κατὰ τέσσαρα,* ἐπιτάσσεται τοῦτο μόνον: ὅτι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ νὰ εἶναι ἴσον τῷ τριπλασίῳ τοῦ ἀριθμοῦ ἠλαττωμένῳ κατὰ τέσσαρα· ἂν ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παρασταθῇ διὰ τοῦ χ, αἱ δύο παραστάσεις 2χ καὶ $3\chi - 4$ πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι, χωρὶς οὐδεὶς νὰ ὑπάρχῃ περιορισμός· διότι ὁ ζητούμενος ἀριθμός, ἐπειδὴ εἶναι ἀφῃρημένος, δύναται νὰ εἶναι οἱοσδήποτε (θετικὸς ἢ ἀρνητικός, ἀκέραιος ἢ κλασματικός).

Ἐν δὲ τῷ προβλήματι: *Εὑρεῖν πόσα τέκνα εἶχεν ἄνθρωπός τις, ὅστις, ἂν ἔδιδε 2 δραχμὰς εἰς ἕκαστον, θὰ διένειμε 4 δραχμὰς ὀλιγωτέρας, παρ᾿ ὅσας θὰ διένειμεν εἰς αὐτά, ἂν ἔδιδεν εἰς ἕκαστον 3 δραχμάς;*

Ἕπεται ὅτι, ἂν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν τέκνων παρασταθῇ διὰ τοῦ χ, ἐπιτάσσεται πάλιν νὰ εἶναι αἱ δύο παραστάσεις 2χ καὶ $3\chi—4$ ἴσαι· κατ᾿ ἀκολουθίαν ἡ τὸ ζητούμενον πρὸς τὰ δεδομένα συνδέουσα σχέσις εἶναι πάλιν ἡ αὐτή. Ἵνα δὲ τὸ πρόβλημα τοῦτο λυθῇ ἐν τοῖς πράγμασιν, ἀπαιτεῖται ἕνεκα τῆς φύσεως τοῦ παριστωμένου ποσοῦ, ἵνα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικός· τοῦτο δὲ εἶναι περιορισμός.

Καὶ πάντες οἱ διὰ τῶν γραμμάτων παριστώμενοι ἀριθμοί, εἴτε ὑποτίθενται γνωστοὶ εἴτε ἄγνωστοι, ὑπόκεινται συνήθως εἰς περιορισμούς, προκύπτοντας ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ὑπ᾿ αὐτῶν παριστωμένου ποσοῦ.

110. Ἡ λύσις δὲ τῶν ἀλγεβρικῶν προβλημάτων γίνεται ὧδε.

α΄) *Παρίστανται διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν σημείων οἱ ὅροι τοῦ προβλήματος,* τῶν μὲν ἐπιταγμάτων παριστωμένων δι᾿ ἐξισώσεων, ἃς οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ ἐπαληθεύωσι, τῶν δὲ περιορισμῶν ἀναγραφομένων ἁπλῶς πλησίον τῶν ἐξισώσεων· τουτέστιν *εὑρίσκονται αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος (μία ἢ πλείονες) καὶ οἱ περιορισμοὶ αὐτοῦ.*

β΄) *Ἐπιλύονται αἱ ἐξισώσεις, εὑρίσκονται δηλονότι τίνες ἀριθμοὶ πληροῦσι τὰ ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος.*

γ΄) *Ἐρευνᾶται ἂν οἱ ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τῶν ἐξισώσεων εὑρεθέντες ἀριθμοὶ πληρῶσι καὶ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος, ὧν ἡ πλήρωσις σημαίνει καὶ τὴν πραγματικὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.*

Ἡ μὲν ἐπίλυσις τῶν ἐξισώσεων γίνεται καθ᾿ ὡρισμένους κανόνας· ἡ δὲ εὕρεσις τῶν περιορισμῶν καὶ ἡ διερεύνησις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων δὲν ὑπάγονται μὲν εἰς κανόνας, ἀλλ᾿ εὐκόλως ἐπιτυγχάνονται· τὴν δὲ εὕρεσιν τῶν ἐξισώσεων ἕνεκα τῆς ἀπείρου ποικιλίας τῶν προβλημάτων δὲν δυνάμεθα μὲν ἐν γένει νὰ ὑπαγάγωμεν εἰς ὡρισμένους κανόνας, ἀλλὰ πολλάκις ἐπιτυγχάνομεν ὡς ἑξῆς·

Σημειοῦμεν διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν σημείων μεταξὺ τῶν γραμμάτων, δι᾿ ὧν παρίστανται οἱ ἄγνωστοι, καὶ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν ἢ γραμμάτων τὰς πράξεις, ἃς θὰ ἐξετελῶμεν, ἂν δεδομένων τῶν ἀγνώστων ἠθέλομεν νὰ βεβαιωθῶμεν περὶ τῆς πληρώσεως τῶν ὅρων τοῦ προβλήματος. Πρὸς ἐφαρμογὴν τούτου ἔστωσαν τὰ ἑξῆς προβλήματα·

Προβλήματα
ὧν ὁ ἄγνωστος οὐδένα ἔχει περιορισμόν.

111. *Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις ἂν προστεθῇ εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{6}{17}$ ποιεῖ αὐτὸ ἴσον τῷ κλάσματι $\frac{1}{3}$.*

Ἂν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παρασταθῇ διὰ τοῦ χ θὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{6+\chi}{17+\chi}=\frac{1}{3},$$

ἐξ ἧς ἐπιλυομένης θὰ προκύψῃ ἡ λύσις $\chi=-\frac{1}{2}$.

112. *Εὑρεῖν ἀριθμόν, εἰς ὃν ἂν προστεθῶσι διαδοχικῶς ὁ —5, ὁ 6 καὶ ὁ —8, θὰ προκύψωσι τρεῖς ἀριθμοί, ὧν οἱ δύο πρῶτοι θὰ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλους ὃν λόγον ὁ τρίτος τούτων πρὸς τὸν ζητούμενον.*

Ἂν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παρασταθῇ διὰ τοῦ χ, προστεθῶσι δὲ εἰς αὐτὸν οἱ δεδομένοι, θὰ προκύψωσιν οἱ ἀριθμοὶ $\chi-5$, $\chi+6$, $\chi-8$, καὶ κατ' ἀκολουθίαν θὰ σχηματισθῇ ἡ τοῦ προβλήματος ἐξίσωσις

$$\frac{\chi-5}{\chi+6}=\frac{\chi-8}{\chi},$$

ἐξ ἧς ἐπιλυομένης θὰ προκύψῃ ἡ λύσις $\chi=16$.

113. *Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς διαφέροντας κατὰ μονάδα, ὧν τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ $\frac{7}{5}$ τοῦ ἐλάσσονος, ηὐξημένα κατὰ τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ μείζονος.*

Ἂν ὁ ἐλάσσων τῶν ἀριθμῶν παρασταθῇ διὰ τοῦ χ, ὁ μείζων θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ $\chi+1$, ἡ δὲ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος θὰ εἶναι

$$\chi+\chi+1=\frac{7\chi}{5}+\frac{5(\chi+1)}{8},$$

ἐξ ἧς ἐπιλυομένης θὰ προκύψῃ ἡ λύσις $\chi=15$, ἐξ ἧς συνάγεται καὶ ἡ τιμὴ 16 τοῦ μείζονος ἀριθμοῦ $\chi+1$, ἤτοι ὅτι $\chi+1=16$.

114. *Εὑρεῖν ἀριθμόν, οὗ τὸ ἥμισυ ηὐξημένον κατὰ 4 ἰσοῦται τῷ τριπλασίῳ τοῦ ἕκτου τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ηὐξημένου κατὰ 2.*

Ἂν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παρασταθῇ διὰ τοῦ χ ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος θὰ εἶναι

$$\frac{\chi}{2}+4=3.\left(\frac{\chi}{6}+2\right),$$

ἐξ ἧς προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $0.\chi=2$· ἐκ δὲ ταύτης συνάγεται ὅτι οὐδεὶς ἀριθμὸς δύναται νὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα τοῦτο.

115. *Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις ἂν ἐλαττωθῇ κατὰ τὸ τρίτον αὐτοῦ καὶ κατὰ 4 ἔτι μονάδας, θὰ γίνῃ ἴσος τῷ τετραπλασίῳ τοῦ ἕκτου αὐτοῦ ἠλαττωμένου κατὰ 1.*

Ἂν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παρασταθῇ διὰ τοῦ χ ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος θὰ εἶναι

$$\chi-\frac{\chi}{3}-4=4.\left(\frac{\chi}{6}-1\right),$$

ἐξ ἧς προκύπτει ἡ $0.\chi=0$, τουτέστιν ταυτότης· ἐκ δὲ ταύτης συνάγεται ὅτι πᾶς ἀριθμὸς πληροῖ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

Προβλήματα ἐν οἷς ὁ ἄγνωστος ἀνάγκη νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

116. *Πρὸς ἐκτέλεσιν ἔργου τινὸς ἐργάτης τις μόνος ἐργαζόμενος δαπανᾷ 20 ὥρας, ἄλλος δὲ δαπανᾷ 30, καὶ ἄλλος 24. Ἂν οἱ ἐργά-*

ται οὗτοι ἐργασθῶσιν ὁμοῦ εἰς πόσας ὥρας θὰ ἐκτελέσωσι τὸ ἔργον τοῦτο;

Ἂν αἱ ζητούμεναι ὧραι παρασταθῶσι διὰ τοῦ χ, τὸ δὲ ἔργον διὰ τῆς μονάδος 1, ἐπειδὴ τὰ τρία μέρη, ἅτινα θὰ ἐκτελεσθῶσιν ὑπὸ τῶν τριῶν τούτων ἐργατῶν κατὰ τὰς χ ὥρας θὰ εἶναι $\frac{\chi}{20}$, $\frac{\chi}{30}$ καὶ $\frac{\chi}{24}$, θὰ σχηματισθῇ ἡ τοῦ προβλήματος ἐξίσωσις

$$\frac{\chi}{20}+\frac{\chi}{30}+\frac{\chi}{24}=1,$$

ἐξ ἧς ἐπιλυομένης πρέπει ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου χ νὰ εἶναι ἀριθμὸς θετικός. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως δὲ ταύτης θὰ προκύψῃ ἡ λύσις $\chi=8$, ἥτις πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

117. *Ἄνθρωπος διέθηκε τὴν περιουσίαν του οὕτως, ὥστε μετὰ τὸν θάνατόν του νὰ λάβωσιν ἡ μὲν σύζυγός του τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτῆς, τὰ δὲ τέκνα του τὰ $\frac{3}{10}$, οἱ δὲ ὑπηρέται του τὸ $\frac{1}{8}$, οἱ δὲ πτωχοὶ 1500 δραχμάς. Εὑρεῖν πόση ἦτο ἡ περιουσία αὐτοῦ;*

Ἂν ἡ περιουσία αὐτοῦ παρασταθῇ διὰ τοῦ χ, θὰ σχηματισθῇ ἡ τοῦ προβλήματος ἐξίσωσις

$$\frac{\chi}{2}+\frac{3\chi}{10}+\frac{\chi}{8}+1500=\chi,$$

ἐξ ἧς ἐπιλυομένης πρέπει ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου χ νὰ εἶναι ἀριθμὸς θετικός. Ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως ἄρα ταύτης προκύπτουσα λύσις $\chi=20000$ πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

118. *Κύριος συνεβλήθη μεθ' ὑπηρέτου νὰ δίδῃ εἰς αὐτὸν ὡς ἀμοιβὴν ἑνὸς ἔτους ὑπηρεσίας δραχμὰς 444 καὶ μίαν ἐνδυμασίαν· ἀπαλλάξας δὲ αὐτὸν μετὰ 8 μῆνας, ἔδωκεν εἰς αὐτὸν ὡς ἀμοιβὴν τῆς ὀκταμήνου ἐργασίας του δραχμὰς 274 καὶ τὴν ἐνδυμασίαν. Εὑρεῖν τὴν ἀξίαν τῆς ἐνδυμασίας.*

Ἂν ἡ ἀξία τῆς ἐνδυμασίας παρασταθῇ διὰ τοῦ χ, ἐπειδὴ ὁ ὀκτάμηνος μισθὸς τοῦ ὑπηρέτου ἦτο $\frac{(444+\chi).8}{12}$, ἔλαβε δὲ πρὸς τοῦτο $274+\chi$ δραχμάς, θὰ σχηματισθῇ ἡ τοῦ προβλήματος ἐξίσωσις

$$\frac{(444+\chi).8}{12}=274+\chi \quad \text{ἢ} \quad \frac{(444+\chi).2}{3}=274+\chi,$$

ἐξ ἧς ἐπιλυομένης πρέπει ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου χ νὰ εἶναι ἀριθμὸς θετικός. Ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως ταύτης θὰ προκύψῃ ἡ λύσις $\chi=66$, ἥτις πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

119. *Ἐκ δύο εἰδῶν ὑφασμάτων, ὧν τοῦ μὲν ἑτέρου ὁ πῆχυς τιμᾶται 5 δραχμῶν, τοῦ δὲ ἑτέρου 3, θέλει τις ἀντὶ 66 δραχμῶν νὰ ἀγοράσῃ 15 πήχεις. Πόσους πήχεις θὰ ἀγοράσῃ ἐξ ἑκατέρου τῶν ὑφασμάτων τούτων ;*

Ἂν τοὺς πήχεις τοῦ α΄ εἴδους παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ, οἱ τοῦ β΄ θὰ εἶναι $15-\chi$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ μὲν τοῦ α΄ εἴδους ὕφασμα τιμᾶται $5.\chi$, τὸ δὲ τοῦ β΄ $3.(15-\chi)$ δραχμάς, θὰ σχηματισθῇ ἡ τοῦ προβλήματος ἐξίσωσις

$$5\chi+3.(15-\chi)=66,$$

ἐξ ἧς ἐπιλυομένης πρέπει ἀμφότεραι αἱ τῶν ἀγνώστων τιμαὶ νὰ εἶναι ἀριθμοὶ θετικοί.

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης θὰ προκύψῃ ἡ λύσις $\chi=10\frac{1}{2}$ καὶ ἄρα $15-\chi=15-10\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}$, συνάγεται ὅτι ἡ λύσις αὕτη ὡς πληροῦσα πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος εἶναι παραδεκτή.

120. *Πόσον πρέπει νὰ ληφθῇ ἐκ δύο ἐλασμάτων ἀργύρου, ὧν τοῦ μὲν ἑτέρου ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος εἶναι 0,775, τοῦ δὲ ἑτέρου 0,940, ἵνα σχηματισθῇ κρᾶμα 25 γραμμαρίων ἔχον βαθμὸν καθαρότητος 0,900 ;*

Ἂν τὰ γραμμάρια τοῦ α΄ εἴδους τοῦ ἀργύρου παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ, τὰ τοῦ β΄ εἴδους θὰ εἶναι $25-\chi$.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ μὲν ὑπάρχων καθαρὸς ἄργυρος ἐν τοῖς χ γραμμαρίοις τοῦ α΄ ἐλάσματος ἔχει βάρος $0,775.\chi$ γρ., ὁ δὲ ἐν τοῖς $25-\chi$ γραμμαρίοις τοῦ β΄ ἐλάσματος καθαρὸς ἄργυρος ἔχει βάρος $0,940.(25-\chi)$ γρ., ὁ δὲ ἐν τοῖς 25 γραμμαρίοις τοῦ κράματος καθαρὸς ἄργυρος ἔχει βάρος $0,900.25$ γρ., θὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$0,775.\chi+0,940(25-\chi)=0,900.25,$$

μετὰ τὴν ἐπίλυσιν τῆς ὁποίας πρέπει οἱ ἄγνωστοι ἀριθμοὶ τῶν γραμμαρίων ἑκατέρου τῶν ἐλασμάτων νὰ εἶναι θετικοί.

Αἱ ἐκ τῆς ἐξισώσεως δὲ ταύτης προκύπτουσαι λύσεις $\chi=6^{\gamma\rho},0606$ καὶ $25-\chi=18^{\gamma\rho},9394$ εἶναι παραδεκταί, ὡς πληροῦσαι πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

121. *Κρουνὸς πληροῖ δεξαμενὴν ἐντὸς 12 ὡρῶν· ἕτερος κρουνὸς πληροῖ αὐτὴν ἐντὸς 10 ὡρῶν· τρίτος δὲ κρουνὸς δύναται νὰ κενώσῃ τὴν δεξαμενὴν ἐντὸς 30 ὡρῶν. Ἂν ἀνοιχθῶσι καὶ οἱ τρεῖς κρουνοὶ συγχρόνως ἐντὸς πόσου χρόνου θὰ πληρωθῇ ἡ δεξαμενή ;*

Ἄν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν παρασταθῇ διὰ τοῦ χ, ὁ α΄ κρουνός, ἐπειδὴ ἐντὸς μιᾶς ὥρας θὰ πληρώσῃ τὸ $\frac{1}{12}$ τῆς δεξαμενῆς, ἐντὸς χ ὡρῶν θὰ πληρώσῃ τὰ $\frac{\chi}{12}$ αὐτῆς. Ὡσαύτως ὁ β΄ κρουνὸς ἐντὸς τῶν χ ὡρῶν θὰ πληρώσῃ τὰ $\frac{\chi}{10}$ αὐτῆς· ὁ δὲ γ΄ κρουνὸς ἐντὸς τῶν χ ὡρῶν θὰ κενώσῃ τὰ $\frac{\chi}{30}$ τῆς δεξαμενῆς.

Οὕτως ἄρα θὰ σχηματισθῇ ἡ τοῦ προβλήματος ἐξίσωσις

$$\frac{\chi}{12}+\frac{\chi}{10}-\frac{\chi}{30}=1,$$

μετὰ τὴν ἐπίλυσιν τῆς ὁποίας πρέπει ἡ προκύψουσα τοῦ ἀγνώστου χ τιμὴ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως δὲ ταύτης θὰ προκύψῃ ἡ λύσις $\chi=6^{\omega\rho}40$, ἥτις πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

122. ***Ἀτμάμαξα διανύουσα 48 χιλιόμετρα καθ' ὥραν, ἀναχωρήσασα 20 λεπτὰ ὕστερον ἄλλης, συνηντήθη μετ' αὐτῆς 2 ὥρας καὶ 20 λεπτὰ ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς της. Τίς εἶναι ἡ ταχύτης τῆς ἄλλης ἐκείνης ἀτμαμάξης;***

Ἄν ἡ ταχύτης τῆς ἄλλης ἀτμαμάξης παρασταθῇ διὰ τοῦ χ, θὰ σχηματισθῇ ἡ τοῦ προβλήματος ἐξίσωσις

$$48.\frac{140}{60}=\chi.\frac{160}{60}\cdot$$

πρέπει δὲ ἡ ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύψουσα τοῦ ἀγνώστου χ τιμὴ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως δὲ ταύτης θὰ προκύψῃ ἡ λύσις $\chi=42$, ἥτις πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

123. *Ἁμάξης τῶν μὲν ἐμπροσθίων τροχῶν ἡ περιφέρεια εἶναι 2,40 τοῦ πήχεως, τῶν δὲ ὀπισθίων 2,80. Πόσον διάστημα διήνυσεν ἡ ἅμαξα, τῶν ἐμπροσθίων τροχῶν περιστραφέντων 60 περιστροφὰς πλείονας τῶν ὀπισθίων;*

Ἄν παρασταθῇ διὰ τοῦ χ ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων τοῦ διανυθέντος διαστήματος, ἐπειδὴ οἱ μὲν ἐμπρόσθιοι τροχοὶ διὰ τὸ διάστημα τοῦτο περιεστράφησαν $\frac{\chi}{2,40}$ περιστροφάς, οἱ δὲ ὀπίσθιοι $\frac{\chi}{2,80}$, θὰ σχηματισθῇ ἡ τοῦ προβλήματος ἐξίσωσις

$$\frac{\chi}{2,4}-\frac{\chi}{2,8}=60\cdot$$

πρέπει δὲ ἡ ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύψουσα τοῦ ἀγνώστου χ τιμὴ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

Ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως δὲ ταύτης προκύπτουσα λύσις $\chi = 1008$ εἶναι παραδεκτή, ὡς πληροῦσα πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

124. *Τεσσαράκοντα γραμμάρια θαλασσίου ὕδατος περιέχουσι 3 γραμμάρια ἅλατος. Πόσον πόσιμον ὕδωρ πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὸ θαλάσσιον τοῦτο ὕδωρ, ἵνα 60 γραμμάρια τοῦ κράματος περιέχωσι 2 γραμμάρια ἅλατος;*

Ἂν παρασταθῶσι διὰ τοῦ χ τὰ γραμμάρια τοῦ προστεθησομένου ποσίμου ὕδατος, τὸ κρᾶμα θὰ εἶναι $40+\chi$ γραμμάρια. Ἐπειδὴ δὲ τὰ 60 γραμ. τοῦ κράματος θὰ περιέχωσι 2 γραμ. ἅλατος τὸ 1 γραμ. τοῦ κράματος θὰ περιέχῃ ἅλας $\frac{2}{60}$, ἤτοι $\frac{1}{30}$ τοῦ γραμμαρίου. Τὰ $40+\chi$ ἄρα γραμ. τοῦ κράματος θὰ περιέχωσι $\frac{40+\chi}{30}$ γραμ. ἅλατος.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐν τῷ κράματι περιεχόμενον ἅλας εἶναι 3 γραμ., θὰ σχηματισθῇ ἡ τοῦ προβλήματος ἐξίσωσις

$$\frac{40+\chi}{30} = 3\cdot$$

πρέπει δὲ ἡ ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύψουσα τοῦ ἀγνώστου χ τιμὴ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

Οὕτω δὲ ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης θὰ προκύψῃ ἡ λύσις $\chi = 50$, ἥτις πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

Προβλήματα, ἐν οἷς ὁ ἄγνωστος ἀνάγκη νὰ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

125. *Δέκα πέντε ἄτομα, ἄνδρες καὶ γυναῖκες ἐδαπάνησαν εἰς δεῖπνον 66 δραχμάς· ἐπλήρωσε δὲ ἕκαστος μὲν τῶν ἀνδρῶν 5 δραχμάς, ἑκάστη δὲ τῶν γυναικῶν 3 δραχμάς. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, πόσαι δὲ αἱ γυναῖκες;*

Ἂν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνδρῶν παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ, ὁ τῶν γυναικῶν θὰ εἶναι $15-\chi$. Ἐπειδὴ δὲ ἕκαστος μὲν τῶν ἀνδρῶν ἐπλήρωσε 5 δραχμάς, οἱ χ ἄνδρες ἐπλήρωσαν 5χ δραχμάς. Ἐπειδὴ δὲ ἑκάστη τῶν γυναικῶν ἐπλήρωσε 3 δραχμάς, αἱ $15-\chi$ γυναῖκες ἐπλήρωσαν $3(15-\chi)$ δραχμάς.

Κατὰ ταῦτα ἄρα θὰ σχηματισθῇ ἡ τοῦ προβλήματος ἐξίσωσις

$$5\chi + 3.(15-\chi) = 66,$$

ἐξ ἧς ἐπιλυομένης πρέπει ἀμφότεραι αἱ προκύψουσαι τῶν ἀγνώστων τιμαὶ νὰ εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης θὰ προκύψῃ ἡ λύσις $\chi = 10\frac{1}{2}$ καὶ ἄρα $15 - \chi = 4\frac{1}{2}$, ἥτις ἀπορριπτέα, διότι δὲν πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

126. *Ὅμιλος ἀνθρώπων ἀπετελεῖτο ἐξ 80 ἀτόμων, ἀνδρῶν, γυναικῶν καὶ παιδίων. Καὶ ὁ μὲν ἀριθμὸς τῶν γυναικῶν ἀπετέλει τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀνδρῶν, ὁ δὲ τῶν παιδίων τὰ $\frac{7}{9}$ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀνδρῶν καὶ τῶν γυναικῶν. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, πόσαι δὲ αἱ γυναῖκες, πόσα δὲ τὰ παιδία ;*

Ἂν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνδρῶν παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ, ὁ τῶν γυναικῶν θὰ εἶναι $\frac{4\chi}{5}$, ὁ δὲ τῶν παιδίων θὰ εἶναι $\frac{7}{9}.\frac{9\chi}{5}$, ἤτοι $\frac{7\chi}{5}$. θὰ σχηματισθῇ ἄρα ἡ τοῦ προβλήματος ἐξίσωσις

$$\chi + \frac{4\chi}{5} + \frac{7\chi}{5} = 80,$$

ἐξ ἧς ἐπιλυομένης πρέπει οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ νὰ εἶναι πάντες ἀκέραιοι καὶ θετικοί.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης θὰ προκύψῃ ἡ λύσις $\chi = 25$, ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι αἱ γυναῖκες ἦσαν $25.\frac{4}{5} = 20$, τὰ δὲ παιδία $(25+20).\frac{7}{9} = 45.\frac{7}{9} = 35$.

Ἡ λύσις ἄρα αὕτη εἶναι παραδεκτή, ὡς πληροῦσα πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

Προβλήματα, ἐν οἷς ὁ ἄγνωστος ἀνάγκη νὰ περιέχηται μεταξὺ ὁρίων τινῶν.

127. *Ἄνθρωπός τις 32 ἐτῶν ἔχει υἱὸν 8 ἐτῶν. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦτο ἢ θὰ εἶναι τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ;*

Ἂν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν παρασταθῇ διὰ τοῦ χ, (θετικοῦ μέν, ἂν τὰ ἔτη εἶναι τοῦ μέλλοντος χρόνου, ἀρνητικοῦ δέ, ἂν τοῦ παρελθόντος), θὰ σχηματισθῇ ἡ τοῦ προβλήματος ἐξίσωσις

$$32 + \chi = 3.(8 + \chi)\cdot$$

πρέπει δὲ ὁ ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύψων ζητούμενος ἀριθμὸς $8+\chi$ νὰ εἶναι θετικὸς καὶ ὁ μείζων $32+\chi$ νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τοῦ ἀνθρώπου.

(Οἱ περιορισμοὶ ἄρα δὲν δύνανται ἐνίοτε νὰ ἐκφρασθῶσιν ἀκριβῶς).

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως δὲ ταύτης θὰ προκύψῃ ἡ λύσις $\chi=4$, ἥτις πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

128. *Ἐκ δύο ἀνθρώπων ὁ μὲν ἔχων 180 δραχμὰς δαπανᾷ 5 δραχμὰς καθ' ἑκάστην, ὁ δὲ ἔχων 100 δραχμὰς δαπανᾷ 3 δραχμὰς καθ' ἑκάστην. Μετὰ πόσας ἡμέρας ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς δαπάνης θὰ ἔχωσιν ἀμφότεροι ἴσας δραχμάς ;*

Ἂν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν παρασταθῇ διὰ τοῦ χ, ἐπειδὴ ὁ μὲν πρῶτος τῶν ἀνθρώπων τούτων δαπανήσας 5χ δραχμάς, θὰ ἔχῃ $180-5\chi$ δραχμάς, ὁ δὲ δεύτερος δαπανήσας ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ 3χ δραχμάς, θὰ ἔχῃ $100-3\chi$ δραχμάς, θὰ σχηματισθῇ ἡ τοῦ προβλήματος ἐξίσωσις

$$180-5\chi=100-3\chi,$$

μετὰ τὴν ἐπίλυσιν τῆς ὁποίας πρέπει ἡ προκύψουσα τοῦ ἀγνώστου χ τιμὴ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ νὰ ποιῇ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως θετικά· διότι μετὰ τὴν παρέλευσιν τῶν χ τούτων ἡμερῶν πρέπει ἀμφότεροι οἱ ἄνθρωποι νὰ ἔχωσι ποσόν τι δραχμῶν.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως δὲ ταύτης θὰ προκύψῃ ἡ λύσις $\chi=40$, ἥτις ἀπορριπτέα, διότι μετὰ 40 ἡμέρας ἀμφότεροι οἱ ἄνθρωποι οὗτοι οὐδὲν θὰ ἔχωσι· τὸ πρόβλημα ἄρα τοῦτο εἶναι ἀδύνατον.

Παρατήρησις.

129. Πρὸς ἐπίλυσιν παντὸς ἀλγεβρικοῦ προβλήματος, ἐν ᾧ ἡ σχέσις τοῦ γνωστοῦ πρὸς τὸν ἄγνωστον εἶναι ἡ αὐτή, σχηματίζεται μὲν ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὰ ἐν τῷ προβλήματι ποσά, ὡς τοῦτο γίνεται δῆλον ἐν τοῖς προβλήμασιν § 119 καὶ § 125, ἀλλ' οὐχὶ μετὰ τῶν αὐτῶν πάντοτε περιορισμῶν.

Πολλάκις δὲ διὰ γενικεύσεως ἢ μικρᾶς τινος μεταβολῆς τῶν ὅρων τοῦ προβλήματος δυνάμεθα ἢ νὰ ἄρωμεν παντελῶς ἢ τοὐλάχιστον νὰ ἐλαττώσωμεν τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος, ὥστε ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως προκύπτουσα λύσις νὰ εἶναι παραδεκτή.

Οὕτω ἡ λύσις τοῦ προβλήματος § 128 γίνεται παραδεκτή, ἐὰν πρὸ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος δεχθῶμεν ὅτι τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν, ἃς θὰ ἔχωσιν οἱ ἄνθρωποι, δύναται νὰ εἶναι καὶ ἀρνητικόν, τουτέστιν ἀντὶ περιουσίας νὰ ἔχωσιν οὗτοι ἴσον χρέος, διότι οὕτω αἴρεται ὁ ἐπὶ τοῦ ἀγνώστου περιορισμός.

Ὡσαύτως καὶ πρὸ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος § 127 ἐδέχθημεν ὅτι τὸ ζητούμενον εἶναι δυνατὸν ἢ νὰ συνέβη ἐν τῷ παρελθόντι ἢ νὰ συμβῇ ἐν τῷ μέλλοντι.

Αἱ δὲ γενικεύσεις αὗται τῶν ὅρων τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ γίνωνται πρὸ τοῦ σχηματισμοῦ τῆς ἐξισώσεως, οὐχὶ δὲ μετὰ τὴν ἐπίλυσιν αὐτῆς· διότι ἡ σημασία τοῦ ἀγνώστου ὁρίζεται ὑφ' ἡμῶν, οὐχὶ δὲ ὑπὸ τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐκτελουμένων πράξεων.

Προβλήματα γενικά.

130. Ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ, ἐπειδὴ οἱ γινόμενοι ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν συλλογισμοί, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ μέγεθος καὶ τὸ εἶδος τῶν ἀριθμῶν, εἶναι οἱ αὐτοί, διότι ἀνάγονται εἰς τὰς γενικὰς σχέσεις τῶν ἀριθμῶν, δυνάμεθα τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς νὰ παριστῶμεν διὰ γραμμάτων, ἐφ' ὧν μετὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος εἶναι σεσημειωμέναι αἱ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου ἐκτελεσταὶ πράξεις.

Διὰ δὲ τούτου γίνεται καὶ ἡ ἐξάρτησις τοῦ ἀγνώστου ἀπὸ τῶν γνωστῶν σαφεστέρα καὶ ἡ ἐπίλυσις τοῦ προβλήματος γενική, ὡς περιλαμβάνουσα πάντα τὰ προβλήματα τὰ διαφέροντα τῶν δεδομένων ἀριθμῶν μόνον κατὰ τὸ μέγεθος καὶ τὸ εἶδος.

Κατὰ ταῦτα τὸ πρόβλημα, οὗτινος τὰ δεδομένα παρίστανται διὰ γραμμάτων, καλεῖται *γενικόν*.

131. Ὁ ἐκ τῆς ἐπιλύσεως δὲ γενικοῦ προβλήματος προκύπτων τύπος, δι' οὗ παρίσταται ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου, περιέχει τὰ γράμματα, δι' ὧν σημαίνονται τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος· κατὰ δὲ τὰς διαφόρους τιμὰς τῶν γραμμάτων τούτων ἢ τὰς διαφόρους ὑποθέσεις, ἃς περὶ αὐτῶν ποιούμεθα, τὸ πρόβλημα εἶναι ἢ δυνατὸν ἢ ἀδύνατον ἢ ἀόριστον.

Ἡ δὲ ἐξέτασις τῶν διαφόρων τούτων περιπτώσεων καλεῖται ***διερεύνησις*** τοῦ γενικοῦ προβλήματος.

Πρὸς ἐφαρμογὴν τούτων ἔστωσαν τὰ ἑξῆς προβλήματα·

132. *Πρὸς ἐκτέλεσιν ἔργου τινὸς ἐργάτης τις μόνος ἐργαζόμενος δαπανᾷ α ὥρας, ἄλλος δὲ δαπανᾷ β καὶ ἄλλος γ· ἂν οἱ ἐργάται οὗτοι ἐργασθῶσιν ὁμοῦ εἰς πόσας ὥρας θὰ ἐκτελέσωσι τὸ ἔργον τοῦτο;*

Περιορισμός.—Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ καὶ δ χ πρέπει νὰ εἶναι πάντες θετικοί.

Εἴδομεν δὲ ἐν § 116 ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\chi}{\beta}+\frac{\chi}{\gamma}=1,$$

ἐξ ἧς προκύπτει ἡ λύσις $\chi=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}$, ἥτις εἶναι παραδεκτή, διότι πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

133. *Ἄνθρωπός τις α ἐτῶν ἔχει υἱὸν β ἐτῶν. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦτο ἢ θὰ εἶναι τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ ;*

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος τούτου, ὡς εἴδομεν ἐν § 127, εἶναι

$$\alpha+\chi=3(\beta+\chi).$$

Οἱ δὲ *περιορισμοὶ* εἶναι ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α, β καὶ β+χ, ὡς παριστῶντες ἡλικίας, πρέπει νὰ εἶναι θετικοί, ὁ δὲ $\alpha>\beta$, οὐδὲ πρέπει τις ἐξ αὐτῶν νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τῶν ἀνθρώπων.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως δὲ ταύτης θὰ προκύψῃ ἡ λύσις

$$\chi=\frac{\alpha-3\beta}{2}.$$

Διερεύνησις.—Ἂν μὲν εἶναι $\alpha<3\beta$, ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι ἀρνητική, δηλαδὴ τὸ ζητούμενον ἐγένετο ἐν τῷ παρελθόντι. Εἶναι δὲ ἡ λύσις αὕτη παραδεκτή, διότι αἱ ἡλικίαι τότε οὖσαι $\alpha+\dfrac{\alpha-3\beta}{2}$ καὶ $\beta+\dfrac{\alpha-3\beta}{2}$, ἤτοι $\dfrac{3(\alpha-\beta)}{2}$ καὶ $\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, εἶναι ἀμφότεραι θετικαί.

Ἂν δὲ εἶναι $\alpha>3\beta$, ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι θετική, δηλαδὴ τὸ ζητούμενον ἐγένετο ἐν τῷ μέλλοντι, ὅτε ὁ μὲν πατὴρ θὰ εἶναι $\dfrac{3(\alpha-\beta)}{2}$ ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς $\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. Εἶναι δὲ ἡ λύσις αὕτη παραδεκτή, ἂν ἡ μείζων ἡλικία $\dfrac{3(\alpha-\beta)}{2}$ δὲν ὑπερβαίνῃ τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τῶν ἀνθρώπων.

134. *Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις ἀφαιρούμενος ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\dfrac{\alpha}{\beta}$ ποιεῖ αὐτὸ ἴσον τῷ ἀντιστρόφῳ αὐτοῦ.*

Περιορισμός.—Ὁ β πρέπει νὰ διαφέρῃ τοῦ 0.

Ἡ ἐξίσωσις δὲ τοῦ προβλήματος εἶναι $\dfrac{\alpha-\chi}{\beta-\chi}=\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Ἂν δὲ θεωρήσωμεν τὸν παρονομαστὴν β—χ διάφορον τοῦ 0, ἤτοι τὸν χ διάφορον τοῦ β, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$(\alpha-\beta)\chi=\alpha^2-\beta^2. \qquad (1)$$

Ἂν δὲ ὁ α—β διαφέρῃ τοῦ 0, ἂν δηλαδὴ τὸ δεδομένον κλάσμα διαφέρῃ τῆς μονάδος 1, προκύπτει ἡ λύσις

$$\chi=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta},\quad \text{ἤτοι ἡ } \chi=\alpha+\beta \qquad (2).$$

Διερεύνησις.— Ἡ λύσις αὕτη πλὴν τῶν δύο ἐξαιρεθεισῶν ἁρμόζει εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν. Καὶ ἂν μὲν εἶναι $\alpha=\beta$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0=0$· πᾶς ἄρα ἀριθμὸς ποιεῖ τὸ ζητούμενον, τὸ δὲ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον. Ἡ δὲ ἐξαιρεθεῖσα λύσις $\chi=\beta$, τότε μόνον προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου (2), ἂν $\alpha=0$, ὅτε τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

135. *Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις ἀφαιρούμενος ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ ποιεῖ αὐτὸ ἴσον τῷ τετραγώνῳ αὐτοῦ.*

Περιορισμός.— Ὁ β πρέπει νὰ διαφέρῃ τοῦ 0.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι $\frac{\alpha-\chi}{\beta-\chi}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$.

Ἂν δὲ θεωρηθῇ ὁ παρονομαστὴς $\beta-\chi$ διάφορος τοῦ 0, ἤτοι ὁ χ διάφορος τοῦ β, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $(\alpha^2-\beta^2)\chi=\alpha\beta(\alpha-\beta)$ (1), ἐξ ἧς, ἂν $\alpha^2-\beta^2$ διαφέρῃ τοῦ 0, προκύπτει ἡ λύσις $\chi=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ (2).

Διερεύνησις.— Ἡ λύσις αὕτη πλὴν τῶν δύο ἐξαιρεθεισῶν ἁρμόζει εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν.

Ἂν δὲ εἶναι $\alpha^2=\beta^2$, θὰ εἶναι ἢ $\alpha=\beta$ ἢ $\alpha=-\beta$· διότι καὶ τῶν ἀντιθέτων ἀριθμῶν τὰ τετράγωνα εἶναι ἴσα· καὶ ἂν μὲν εἶναι $\alpha=\beta$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0=0$· τὸ δὲ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον, πᾶς δηλαδὴ ἀριθμὸς ποιεῖ τὸ ζητούμενον· ἂν δὲ εἶναι $\alpha=-\beta$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0=2\beta^3$· τὸ πρόβλημα ἄρα τότε εἶναι ἀδύνατον.

Ἡ δὲ ἐξαιρεθεῖσα λύσις $\chi=\beta$, οὐδέποτε προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου (2)· διότι, ἂν ἦτο $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\beta$, θὰ ἦτο καὶ $\alpha\beta=\alpha\beta+\beta^2$ καὶ ἄρα $\beta^2=0$, ἤτοι $\beta=0$, ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει.

Παρατηρήσεις.

136. Ἐπὶ τῶν δύο τελευταίων προβλημάτων παρατηροῦμεν ὅτι προβλήματά τινα ἔκ τινος μὲν σχέσεως τῶν ἐν αὐτοῖς δεδομένων γίνονται ἀόριστα, λύονται δηλαδὴ ὑπὸ παντὸς ἀριθμοῦ, ἐξ ἄλλης δὲ σχέσεως τῶν αὐτῶν δεδομένων γίνονται ὡρισμένα.

Ἂν δὲ τὰ δεδομένα τείνωσι πρὸς τὴν σχέσιν ἐκείνην, ἥτις ποιεῖ τὸ πρόβλημα ἀόριστον, δυνάμεθα νὰ ζητήσωμεν πρὸς τίνα τιμὴν τείνει ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου.

Αὕτη δὲ ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου προκύπτει ἐκ τοῦ γενικοῦ τύπου τῆς τιμῆς αὐτοῦ, μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τοῦ κοινοῦ παράγοντος τοῦ μηδενίζοντος τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως καὶ ποιοῦντος τὴν λύσιν ἀόριστον.

Π. χ. ἐν τῷ τελευταίῳ προβλήματι ὁ τύπος (2) ἀληθεύει ὅσον καὶ ἂν διαφέρωσιν ἀλλήλων τὸ α καὶ τὸ β· ἐκ δὲ τούτου γίνεται φανερὸν ὅτι, ὅσον ταῦτα τείνουσι νὰ γίνωσιν ἴσα, τόσον ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου τείνει πρὸς τὸ $\frac{\alpha.\alpha}{\alpha+\alpha}$, ἤτοι τὸ $\frac{\alpha}{2}$.

Ὡσαύτως ἐν τῷ προβλήματι τοῦ ἐδ. 134 γίνεται φανερὸν ἐκ τοῦ τύπου (2) ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου τείνει πρὸς τὸ 2α, ὅσον τὸ α καὶ β τείνουσι νὰ γίνωσιν ἴσα.

137. Ὡσαύτως παρατηροῦμεν ὅτι προβλημάτων τινῶν ἔκ τινος μὲν σχέσεως τῶν ἐν αὐτοῖς δεδομένων ἡ ἐξίσωσις γίνεται ἀδύνατος, ἐκ πάσης δὲ ἄλλης σχέσεως τῶν αὐτῶν δεδομένων ἡ ἐξίσωσις ἔχει λύσιν ὡρισμένην.

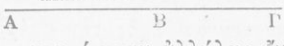
Π. χ. ἐν τῷ τελευταίῳ προβλήματι, ἂν θεωρήσωμεν $\alpha = -\beta$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται ἀδύνατος· διὰ πᾶσαν δὲ ὑπόθεσιν ἐλάχιστον ταύτης διαφέρουσαν, ἡ ἐξίσωσις ἔχει λύσιν ὡρισμένην.

Ἐν τῇ περιπτώσει δὲ ταύτῃ, ὅσον τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος τείνουσι πρὸς τὴν σχέσιν ἐκείνην, ἥτις ποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν ἀδύνατον, τόσον ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου αὐξάνει καὶ δύναται νὰ ὑπερβῇ πάντα δεδομένον ἀριθμόν. Διότι ἡ τιμὴ αὕτη ἰσοῦται κλάσματι ἔχοντι ἀριθμητὴν μὲν διάφορον τοῦ 0, παρονομαστὴν δὲ τείνοντα πρὸς τὸ 0.

138. *Δύο ἀτμάμαξαι ὁμαλῶς ἐπ᾽ εὐθείας ἀπ᾽ ἀορίστου χρόνου κινούμεναι, ὧν ἡ μὲν διανύει κατὰ πᾶσαν ὥραν α χιλιόμετρα, ἡ δὲ β, ἔν τινι στιγμῇ εἶναι ἐν τοῖς σημείοις Α καὶ Β, ὧν ἡ ἀπ᾽ ἀλλήλων ἀπόστασις εἶναι δ χιλιόμετρα. Ζητεῖται εἰς τίνα ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Α θὰ συναντήσωσιν ἀλλήλας;*

Περιορισμός.—Ὁ μὲν ἀριθμὸς δ παριστῶν τὴν ἀπόστασιν τῶν σημείων Α καὶ Β λαμβάνεται θετικός, ἑκάτερος δὲ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β κατὰ τὰ ἐν ἐδαφίῳ 32 εἰρημένα λαμβάνεται θετικὸς μέν, ἂν τὸ ὑπ᾽ αὐτοῦ σημαινόμενον διάστημα διανύηται κατὰ τὴν ἀπὸ τοῦ Α πρὸς τὸ Β φοράν, ἀρνητικὸς δέ, ἂν κατὰ τὴν ἀντίθετον.

Τεθέντος ὅτι αἱ δύο ἀτμάμαξαι κινοῦνται κατὰ τὴν ἀπὸ τοῦ Α πρὸς τὸ Β φορὰν



καὶ ὅτι $\alpha > \beta$, εἶναι φανερὸν ὅτι αὗται θὰ συναντήσωσιν ἀλλήλας ἔν τινι σημείῳ Γ κειμένῳ δεξιὰ τοῦ Β. Ἂν δὲ ἡ ζητουμένη ἀπόστασις παρασταθῇ διὰ τοῦ χ, ἡ μὲν πρώτη ἀτμάμαξα θὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν ταύτην ἐν χρόνῳ $\frac{\chi}{\alpha}$, ἡ δὲ δευτέρα θὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν ΒΓ, ἥτις θὰ παρίσταται διὰ τοῦ $\chi—\delta$ ἐν χρόνῳ $\frac{\chi—\delta}{6}$ (§ 76). Ἐπειδὴ δὲ οἱ δύο οὗτοι χρόνοι εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\chi}{\alpha}=\frac{\chi—\delta}{6} \quad (1), \quad \text{ἢ} \quad (\alpha—6)\chi=\alpha.\delta \quad (2)$$

Ἡ οὕτω προκύψουσα ἐξίσωσις θὰ εἶναι γενικὴ καὶ θὰ περιλαμβάνῃ πάσας τὰς δυνατὰς περιπτώσεις τοῦ προβλήματος, ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν ἄν, ὁ μὲν ἀριθμὸς χ ὁ παριστῶν τὴν ἀπόστασιν τοῦ Α ἀπὸ τοῦ Γ ληφθῇ θετικὸς μέν, ἂν τὸ Γ καὶ τὸ Β κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Α, ἀρνητικὸς δέ, ἂν συμβαίνῃ τὸ ἀντίθετον, ὁ δὲ ἀριθμὸς $\chi—\delta$ ὁ παριστῶν τὴν ἀπόστασιν τοῦ Β ἀπὸ τοῦ Γ ληφθῇ θετικὸς μέν, ἂν τὸ σημεῖον Α καὶ τὸ Γ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ Β, ἀρνητικὸς δέ, ἂν συμβαίνῃ τὸ ἀντίθετον, ἀφ᾽ ἑτέρου δέ, ἂν ὁ μὲν εἰς τὸ μέλλον ἀναφερόμενος χρόνος λαμβάνηται θετικός, ὁ δὲ εἰς τὸ παρελθὸν ἀρνητικὸς (§ 25).

Ἂν ἡ διαφορὰ $\alpha—6$ εἶναι ἀριθμὸς διάφορος τοῦ 0, ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) θὰ προκύψῃ ἡ λύσις $\chi=\frac{\alpha.\delta}{\alpha—6}$.

Διερεύνησις.—Ἂν εἶναι τὸ $\alpha>0$ καὶ τὸ $6>0$ θὰ εἶναι καὶ τὸ $\alpha\delta>0$· οὕτω δέ, ἂν μὲν εἶναι τὸ $\alpha>6$, θὰ εἶναι τὸ $\chi>\delta$, ἤτοι ἡ συνάντησις θὰ γίνῃ δεξιὰ τοῦ Β· ἂν δὲ εἶναι τὸ $\alpha<6$, θὰ εἶναι τὸ $\chi<0$, ἤτοι ἡ συνάντησις ἐγένετο (ἐν τῷ παρελθόντι) ἀριστερὰ τοῦ Α.

Ἂν δὲ εἶναι τὸ $\alpha=6$, ἡ ἐξίσωσις (2) θὰ εἶναι $\alpha\delta=0$· οὐδεμίαν ἄρα θὰ ἔχῃ λύσιν, καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἐφ᾽ ὅσον δὲ αἱ ταχύτητες τείνουσι νὰ γίνωσιν ἴσαι, ἐπὶ τοσοῦτον τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως ἀπομακρύνεται ἀπὸ τοῦ Α καὶ τοῦ Β.

Ἂν δὲ εἶναι τὸ $\alpha>0$ καὶ τὸ $6<0$, θὰ εἶναι ἄρα $\alpha-6>0$ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν τὸ $0<\chi<\delta$.

Ὁμοίως γίνεται ἡ διερεύνησις, ἂν τὸ μὲν α εἶναι ἀρνητικόν, τὸ δὲ 6 θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ.

1) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς ἀπὸ τοῦ ὁποίου, ἂν ἀφαιρεθῇ ὁ α, τὸ δὲ προκύψαν ὑπόλοιπον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ μ, προκύπτει πάλιν ὁ ζητούμενος ἀριθμός, καὶ νὰ διερευνηθῇ τὸ ἐξαγόμενον, ὅταν $\mu=1$.

2) Ἐν ᾧ τάγμα στρατιωτῶν ἐπρόκειτο νὰ παραταχθῇ ἐν σχήματι πλήρους τετραγώνου, ἐπερίσσευσαν κατὰ τὴν πρώτην δοκιμὴν 39 ἄνδρες· ἂν δὲ παρετάσσετο εἰς ἑκάστην πλευρὰν εἷς ἔτι στρατιώτης

θὰ ἔλειπον 50 ἄνδρες. Πόσοι ἦσαν οἱ στρατιῶται τοῦ τάγματος; (Ἀπ. 1975 στρατ.).

3) Πόσα κοιλὰ σίτου, τιμωμένου ἑκάστου κοιλοῦ 4 δραχμάς, χρειάζονται, ἵνα ἀναμιχθῶσι μετὰ 60 κοιλῶν σίτου τιμωμένου 7 δραχμὰς ἑκάστου κοιλοῦ, ὥστε τὸ κοιλὸν τοῦ μίγματος νὰ τιμᾶται 5 δραχμάς; (Ἀπ. 120 κοιλά).

4) Δύο ἄνθρωποι ἀγοράσαντες ἐν ὅλῳ 100 κυβικὰ μέτρα ἄμμου μετέφερον αὐτὴν ὁ μὲν ἕτερος εἰς ἀπόστασιν 2 χιλιομέτρων, ὁ δὲ ἕτερος εἰς ἀπόστασιν 3 χιλιομέτρων. Ἂν ἕκαστον κυβικὸν μέτρον τῆς ἄμμου ἠγοράσθη 1,50 τῆς δραχμῆς, ἡ δὲ μεταφορὰ ἐπληρώθη 40 λεπτὰ δι᾽ ἕκαστον κυβ. μέτρον καὶ δι᾽ ἀπόστασιν ἑνὸς χιλιομέτρου, πόσα κυβικὰ μέτρα ἄμμου ἠγόρασεν ἑκάτερος τούτων, ἂν ἐπλήρωσαν τὸ αὐτὸ ποσόν; (Ἀπ. 54 καὶ 46 κυβ. μ.).

5) Ἀλώπηξ διωκομένη ὑπὸ κυνὸς προηγεῖται αὐτοῦ κατὰ 20 πηδήματα αὐτῆς· ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ὁ κύων πηδᾷ τρὶς ἡ ἀλώπηξ πηδᾷ τετράκις· ἀλλὰ τὸ διανυόμενον διάστημα ὑπὸ τοῦ κυνὸς διὰ 5 πηδημάτων αὐτοῦ, διανύεται ὑπὸ τῆς ἀλώπεκος διὰ 8 αὐτῆς πηδημάτων. Μετὰ πόσα πηδήματα ὁ κύων θὰ φθάσῃ τὴν ἀλώπεκα; (Ἀπ. 75).

6) Ἄνθρωπός τις ἐτόκισε ποσόν τι δραχμῶν πρὸς 4 % ἐπὶ 2 ἔτη καὶ 8 μῆνας, διπλάσιον δὲ τούτου ποσὸν πρὸς 4,5 % ἐπὶ 3 ἔτη καὶ 4 μῆνας, τετραπλάσιον δὲ τοῦ δευτέρου ποσὸν πρὸς 5 % ἐπὶ 4 ἔτη. Πάντες δὲ οἱ τόκοι τῶν τριῶν τούτων χρηματικῶν ποσῶν ἀπετέλεσαν ποσὸν δραχμῶν 4816. Εὑρεῖν πόσον ἦτο τὸ πρῶτον τοκισθὲν ποσόν; (Ἀπ. 2400 δραχ.).

7) Ἄνθρωπός τις διέθεσε τὴν περιουσίαν του εἰς τοὺς υἱούς του ὡς ἑξῆς· Εἰς μὲν τὸν α´ ἐκ τῶν υἱῶν αὐτοῦ κατέλιπε 1000 δραχμὰς καὶ τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ ὑπολοίπου, εἰς δὲ τὸν β´ 2000 δραχμὰς καὶ τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου, εἰς δὲ τὸν γ´ 3000 δρ. καὶ τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου καὶ ἐφεξῆς οὕτως. Εὑρεῖν τὴν περιουσίαν τοῦ πατρὸς καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν τέκνων, δεδομένου ὅτι ἕκαστον τέκνον ἔλαβεν ἴσον ποσὸν δραχμῶν. (Ἀπ. ἡ μὲν περιουσία ἦτο 36000 δραχ., τὰ δὲ τέκνα 6).

8) Δεξαμενὴ πλήρης ὕδατος κενοῦται διὰ δύο ἀνίσου μεγέθους κρουνῶν ὡς ἑξῆς· Ἀνοιγομένου τοῦ ἑτέρου τῶν κρουνῶν ἐκρέει τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἐν τῇ δεξαμενῇ ὕδατος· εἶτα ἀνοιγομένου καὶ τοῦ ἑτέρου ἐκρέει ἐξ ἀμφοτέρων τὸ ὕδωρ, ἕως οὗ ἡ δεξαμενὴ κενοῦται εἰς χρόνον κατὰ

$\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας πλείονα τοῦ δαπανηθέντος πρὸς ἐκροὴν τοῦ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὅλου ὕδατος. Ἂν ἀμφότεροι οἱ κρουνοὶ ἠνοίγοντο συγχρόνως, ἡ δεξαμενὴ θὰ ἐκενοῦτο κατὰ μίαν ὥραν καὶ $\frac{3}{5}$ τῆς ὥρας ταχύτερον. Ἐν πόσῳ χρόνῳ ἑκάτερος τῶν κρουνῶν θὰ ἐκένου μόνος τὴν δεξαμενήν ;

(Ἀπ. εἰς 12 καὶ εἰς 18 ὥρας).

9) Κατὰ τίνα ὥραν ἀπὸ τῆς μεσημβρίας ὁ τῶν λεπτῶν δείκτης ὡρολογίου τινὸς θὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ δείκτου τῶν ὡρῶν; κατὰ τίνα δὲ στιγμὴν γίνεται ἡ μεταξὺ τῆς 2ας καὶ τῆς 3ης ὥρας σύμπτωσις; κατὰ τίνα δὲ στιγμὴν μετὰ τὴν 3ην ἀπὸ τῆς μεσημβρίας ὥραν ὁ ἕτερος τῶν δεικτῶν θὰ εἶναι προέκτασις τοῦ ἑτέρου ;

$\left(\text{Ἀπ. } 1^{\text{ὡρ.}} 5^{\lambda} \frac{5}{11},\ 2^{\text{ὡρ.}} 10^{\lambda} \frac{10}{11},\ 3^{\text{ὡρ.}} 49^{\lambda} \frac{1}{11}\right)$.

10) Κατὰ τίνα ὥραν ἀπὸ τῆς μεσημβρίας ὁ τῶν δευτέρων λεπτῶν δείκτης ὡρολογίου ἔχοντος τρεῖς δείκτας θὰ διχοτομήσῃ τὴν ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων δεικτῶν σχηματιζομένην γωνίαν ; $\left(\text{Ἀπ. } 60'' + \frac{780}{1427}\right)$.

11) Ποσὸν ἐκ δραχμῶν 5200, ὅπερ τοκισθὲν ἐπί τινα χρόνον ηὐξήθη μετὰ τῶν ἁπλῶν τόκων αὐτοῦ εἰς δραχμὰς 8138, κατὰ μὲν τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ χρόνου τούτου ἐτοκίσθη πρὸς 4,5 %, κατὰ δὲ τὸ $\frac{1}{2}$ πρὸς 4,75 %, κατὰ δὲ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 5 %. Ἐπὶ πόσον χρόνον ἦτο ἐν τόκῳ ; (Ἀπ. 12 ἔτη).

12) Ποσόν τι δραχμῶν ἐτοκίσθη τὸ μὲν α$^{\text{ον}}$ ἔτος πρὸς $2\frac{3}{4}$ %, τὸ δὲ β$^{\text{ον}}$ πρὸς 3 %, τὸ δὲ γ$^{\text{ον}}$ πρὸς $3\frac{1}{4}$ % καὶ ἐφεξῆς οὕτω. Κατὰ τὸ τέλος δὲ τοῦ δεκάτου ἔτους οἱ ἁπλοῖ τόκοι μετὰ τοῦ ποσοῦ τούτου ἀπετέλεσαν ποσὸν ἐκ δραχμῶν 4995. Πόσον ἦτο τὸ ποσὸν τοῦτο ; (Ἀπ. 3600 δραχ.).

13) Δύο ὁδοιπόροι ἀναχωροῦντες ἐκ τοῦ σημείου Α, βαίνουσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν. Τούτων ὁ ἕτερος ἀναχωρήσας δύο ἡμέρας πρότερον περιπατεῖ 9 ὥρας ἑκάστην ἡμέραν διανύων $5\frac{1}{2}$ χιλιόμετρα καθ' ὥραν, ὁ δὲ ἕτερος περιπατῶν 12 ὥρας ἑκάστην ἡμέραν διανύει $4\frac{1}{2}$ χιλιόμετρα καθ' ὥραν. Μετὰ πόσας ἡμέρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς των καὶ ἐν τίνι ἀποστάσει ἀπὸ τοῦ σημείου Α θὰ συναντηθῶσιν ; (Ἀπ. 22 ἡμ.).

14) Δύο κινητῶν ὁμαλῶς κινουμένων ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα α, ἡ ταχύτης εἶναι τοῦ μὲν ἑτέρου τ, τοῦ δὲ ἑτέρου τ΄· κατά τινα δὲ χρόνον συμπίπτουσιν ἔν τινι τῆς περιφερείας σημείῳ. Μετὰ πόσας ὥρας ἀπὸ τῆς εἰρημένης συναντήσεως θὰ συναντηθῶσι πάλιν, καὶ ἐν τίνι σημείῳ τῆς περιφερείας; $\left(\text{᾿Απ. } \frac{2\pi\alpha}{\tau-\tau'}, \frac{2\pi\alpha\tau'}{\tau-\tau'}\right)$.

15) Τραπεζίτης ἔχει δύο εἴδη νομισμάτων, ἐξ ὧν α μὲν τοῦ ἑτέρου ἰσοδυναμοῦσι πρὸς ἓν εἰκοσόδραχμον, β δὲ τοῦ ἑτέρου ἰσοδυναμοῦσιν ὡσαύτως πρὸς ἓν εἰκοσόδραχμον· ἂν δέ τις ἀντὶ ἑνὸς εἰκοσαδράχμου ζητήσῃ γ ἐξ αὐτῶν, πόσα ἐξ ἑκατέρου εἴδους θὰ δώσῃ ὁ τραπεζίτης; $\left(\text{᾿Απ. } \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\alpha-\beta} \quad \frac{\beta(\alpha-\gamma)}{\alpha-\beta}\right)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΟΣΩΝΔΗΠΟΤΕ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕΤ᾿ ΙΣΑΡΙΘΜΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ

139. *Σύστημα ἐξισώσεων* καλεῖται σύνολον ἐξισώσεων, ἃς πρέπει νὰ ἐπαληθεύωσιν αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων.

᾿Επιλῦσαι σύστημα ἐξισώσεων σημαίνει εὑρεῖν τὸ ἓν ἢ τὰ πλείονα σύνολα τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων τὰ ἐπαληθεύοντα τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος· ἕκαστον δὲ τῶν συνόλων τούτων ἀποτελεῖ *λύσιν* τοῦ συστήματος.

Δύο συστήματα ἐξισώσεων καλοῦνται *ἰσοδύναμα*, ἂν πᾶσα λύσις τοῦ ἑτέρου τῶν συστημάτων εἶναι λύσις καὶ τοῦ ἑτέρου.

῎Αν δὲ ἔν τινι συστήματι ἐξισώσεων ἀντὶ ἐξισώσεών τινων ἀντικαταστήσωμεν ἄλλας ἰσοδυνάμους πρὸς αὐτάς, τὸ προκῦπτον σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον τῷ συστήματι ἐκείνῳ.

᾿Εκ τοῦ ὁρισμοῦ δὲ περὶ ἰσοδυνάμων συστημάτων συνάγεται ὅτι, ἂν ἔχωμεν δύο συστήματα ἰσοδύναμα, δυνάμεθα, ἂν ἀποβλέπωμεν εἰς μόνον τὸν προσδιορισμὸν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων, νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τοῦ ἑτέρου τὸ ἕτερον.

᾿Εν δὲ τοῖς ἑξῆς θὰ ἀποδείξωμεν πῶς ἐκ δεδομένου συστήματος προκύπτει ἕτερον ἰσοδύναμον πρὸς ἐκεῖνον.

140. *Θεώρημα Α΄.—"Αν ὁσασδήποτε ἐξισώσεις συστήματός τινος προσθέσωμεν κατὰ μέλη καὶ ἀντὶ μιᾶς αὐτῶν ἀντικαταστήσωμεν τὴν προκύψασαν, προκύπτει σύστημα ἰσοδύναμον τῷ δεδομένῳ.*

Ἔστωσαν τὰ συστήματα τῶν ἐξισώσεων

$$\begin{matrix} A = A' & & \text{καὶ} & A + B = A' + B' & \\ B = B' & (1) & & B = B' & (2) \\ \Gamma = \Gamma' & & & \Gamma = \Gamma', & \end{matrix}$$

ἐν οἷς ἑκάτερον τῶν μελῶν ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων παρεστήσαμεν χάριν συντομίας διὰ γράμματος, καὶ ὧν τὸ δεύτερον προέκυψεν ἐκ τοῦ πρώτου, ἀντικατασταθείσης τῆς πρώτης ἐκείνου ἐξισώσεως $A = A'$ διὰ τῆς ἐξισώσεως $A + B = A' + B'$, προκυψάσης ἐκ τῆς προσθέσεως κατὰ μέλη τῆς ἀντικατασταθείσης ἐξισώσεως $A = A'$ καὶ τῆς ἐξισώσεως $B = B'$· λέγω ὅτι τὰ δύο ταῦτα συστήματα εἶναι ἰσοδύναμα.

Διότι, ἐπειδὴ διὰ πᾶσαν λύσιν τοῦ δεδομένου συστήματος (1) αἱ ἐκ τῶν μελῶν ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ προκύπτουσαι ἀντίστοιχοι τιμαὶ A_1, A'_1, B_1, B'_1 καὶ Γ_1, Γ_1' εἶναι ἴσαι, ἤτοι

$$A_1 = A'_1 \quad B_1 = B'_1 \quad \text{καὶ} \quad \Gamma = \Gamma'_1,$$

καὶ αἱ διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων ἐκ τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως $A + B = A' + B'$ τοῦ ἑτέρου συστήματος (2) προκύπτουσαι τούτων τιμαὶ $A_1 + B_1$ καὶ $A'_1 + B'_1$ θὰ εἶναι ὡσαύτως ἴσαι· διότι, ἂν αἱ ἰσότητες $A_1 = A_1'$ καὶ $B_1 = B'_1$ προστεθῶσι κατὰ μέλη, τὰ προκύψοντα ἀθροίσματα $A_1 + B_1$ καὶ $A',+B'_1$, θὰ εἶναι ἴσα· κατ᾽ ἀκολουθίαν ἐπαληθεύεται ὡς πρὸς τὴν λύσιν ταύτην καὶ τὸ σύστημα (2)· καὶ τἀνάπαλιν, πᾶσα λύσις τοῦ δευτέρου συστήματος (2) εἶναι λύσις καὶ τοῦ δεδομένου συστήματος (1).

Διότι, ἐπειδὴ διὰ πᾶσαν λύσιν τοῦ συστήματος (2) αἱ ἐκ τῶν μελῶν ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ προκύπτουσαι τιμαὶ $A_1 + B_1$, $A'_1 + B'_1$, B_1, B'_1 καὶ Γ_1, Γ'_1 εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι, ἤτοι

$$A_1 + B_1 = A'_1 + B'_1, \quad B_1 = B'_1 \quad \text{καὶ} \quad \Gamma_1 = \Gamma'_1,$$

καὶ αἱ διὰ τὴν λύσιν ταύτην ἐκ τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως $A = A'$ τοῦ δεδομένου συστήματος (1) προκύπτουσαι τούτων τιμαὶ A_1 καὶ A'_1 θὰ εἶναι ὡσαύτως ἴσαι· διότι, ἂν ἀπὸ τῶν ἴσων $A_1 + B_1$ καὶ $A'_1 + B'_1$ ἀφαιρεθῶσι τὰ ἴσα B_1 καὶ B'_1, αἱ προκύψουσαι διαφοραὶ A_1 καὶ A'_1 θὰ εἶναι ὡσαύτως ἴσαι· κατ᾽ ἀκολουθίαν καὶ τὸ δεδομένον σύστημα ἐπαληθεύεται ὡς πρὸς τὴν λύσιν ταύτην.

Λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα συστήματα (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμα.

Ὡσαύτως ἀποδεικνύεται ὅτι, καὶ ἂν ἀντὶ μιᾶς μόνης τῶν ἐξισώσεων τοῦ δεδομένου συστήματος (1) ἀντικαταστήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $A+B+\Gamma=A'+B'+\Gamma'$, προκύπτει σύστημα ἰσοδύναμον.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι ἡ ἀπόδειξις τῆς προειρημένης ἀντιστρόφοι προτάσεως γίνεται εὐκόλως καὶ διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Παρατήρησις.—Ἐπειδὴ πρὸ τῆς προσθέσεως τῶν ἐξισώσεων δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἑκάστης αὐτῶν ἐφ' οἱονδήποτε ἀριθμὸν διάφορον τοῦ 0, ἕπεται ὅτι τὸ σύστημα (1) εἶναι ἰσοδύναμον τῷ συστήματι

$$\mu A+\nu B+\rho\Gamma=\mu A'+\nu B'+\rho\Gamma'$$
$$B=B'$$
$$\Gamma=\Gamma',$$

ἐν ᾧ οἱ ἀριθμοὶ μ,ν,ρ εἶναι οἱοιδήποτε πλὴν τοῦ 0.

141. ***Θεώρημα Β'.*** *Ἂν ἐξίσωσίς τις συστήματος ἐξισώσεων ἐπιλυθῇ πρός τινα ἄγνωστον, τῶν ἄλλων ἀγνώστων αὐτῆς λαμβανομένων ὡς δεδομένων, ἀντὶ δὲ τῆς ἀγνώστου ταύτης τεθῇ ἐν ταῖς λοιπαῖς ἐξισώσεσιν ἡ προκύψασα ἴση πρὸς αὐτὴν παράστασις, σχηματίζεται νέον σύστημα ἰσοδύναμον τῷ δεδομένῳ.*

Π. χ. τὸ σύστημα (1), οὗτινος ἡ πρώτη ἐξίσωσις εἶναι λελυμένη ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον χ, εἶναι ἰσοδύναμον τῷ συστήματι (2) τῷ προκύψαντι ἐκ τοῦ πρώτου (1), τεθείσης ἐν ταῖς λοιπαῖς ἐξισώσεσιν ἐκείνου πλὴν τῆς πρώτης ἀντὶ τοῦ χ τῆς ἴσης αὐτῷ παραστάσεως Α'.

$$\left\{\begin{array}{l}\chi=A'\\ B=B'\\ \Gamma=\Gamma'\end{array}\right. \qquad (1)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\chi=A'\\ \beta=\beta'\\ \gamma=\gamma'\end{array}\right. \qquad (2).$$

Διότι, ἂν τὸ ἕτερον τῶν συστημάτων τούτων ἀληθεύσῃ, ἐπειδὴ αἱ τοῦ χ καὶ τοῦ Α' τιμαὶ θὰ γίνωσιν ἴσαι, θὰ ἀληθεύσῃ καὶ τὸ ἕτερον· διότι τὰ συστήματα ταῦτα θὰ διαφέρωσιν ἀλλήλων κατὰ τοῦτο μόνον, ὅτι ἐν τῷ δευτέρῳ συστήματι (2) ἀντὶ τοῦ χ θὰ ἔχῃ τεθῇ τὸ πρὸς αὐτὸ ἴσον Α'.

142. ***Παρατήρησις.***—Ἂν κατὰ τὸ ἕτερον τῶν ἀνωτέρω εἰρημένων θεωρημάτων συνδυάζοντες προσηκόντως δύο ἢ πλείονας ἐξισώσεις συστήματός τινος εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν μὴ περιέχουσαν ἄγνωστόν τινα τοῦ συστήματος, λέγομεν ὅτι *ἀπαλείφομεν* τὸν ἄγνωστον τοῦτον· καλεῖται δὲ ὁ τοιοῦτος τῶν ἐξισώσεων συνδυασμὸς *ἀπαλοιφὴ* τοῦ ἀγνώστου τούτου. Ὡς δὲ ἐν τοῖς ἔπειτα θὰ ἴδωμεν, ἡ ἐπίλυσις παντὸς συστήματος ἐξισώσεων γίνεται διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς.

Ἐπίλυσις ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἐχουσῶν πλείονας ἀγνώστους.

143. Πᾶσα ἐξίσωσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ, ἔχουσα δύο ἀγνώστους, ἂν ἐφαρμοσθῶσιν εἰς αὐτὴν αἱ ἐν τῷ ἐδαφίῳ § 105 ἀναγεγραμμέναι πράξεις, θὰ λάβῃ τὴν μορφὴν $\alpha\chi+6\psi=\gamma$, ἐν ᾗ τὰ μὲν $\alpha, 6, \gamma$ σημαίνουσι γνωστὰς παραστάσεις ἢ ὡρισμένους ἀριθμούς, τὸ δὲ χ καὶ ψ ἀγνώστους.

Μίαν δὲ μόνην τοιαύτην ἐξίσωσιν δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν κατ' ἀπείρους τρόπους· διότι, ἂν ἀντὶ τοῦ ἑτέρου τῶν ἀγνώστων αὐτῆς, οἷον τοῦ ψ, τεθῇ οἱοσδήποτε ἀριθμός, προκύπτει ἐξίσωσις περιέχουσα ἐκ τῶν ἀγνώστων μόνον τὸν χ, οὗτινος ἡ τιμὴ προσδιορίζεται ἐκ τῆς προκυπτούσης ἐξισώσεως.

Π. χ. ἐν τῇ ἐξισώσει $3\chi-4\psi=2$, ἂν λάβωμεν τὸν ψ ὡς γνωστὸν καὶ ἐπιλύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν πρὸς τὸν χ, θὰ ἔχωμεν $\chi=\frac{2+4\psi}{3}$.

Ἂν δὲ ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ ἀντὶ τοῦ ψ τεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ $0, 1, 2, \ldots$, θὰ προκύψωσιν αἱ ἀντίστοιχοι τοῦ χ τιμαὶ $\frac{2}{3}, 2, \frac{10}{3}, \ldots$, ὧν ἑκάστη μετὰ τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς τοῦ ψ ἀποτελεῖ μίαν λύσιν τῆς δεδομένης ἐξισώσεως· ἡ τοιαύτη ἄρα ἐξίσωσις ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις.

144. Ἂς ἐξετάσωμεν νῦν σύστημα δύο ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ περιεχουσῶν δύο ἀγνώστους, οἷον τὸ σύστημα

$$2\chi-3\psi=-11$$
$$5\chi+4\psi=30.$$

Ἐκ τοῦ συστήματος τούτου δύναται πάντοτε νὰ προκύψῃ ἕτερον ἰσοδύναμον, οὗτινος ἡ ἑτέρα τῶν ἐξισώσεων νὰ μὴ περιέχῃ τὸν ἕτερον τῶν ἀγνώστων, ἤτοι δύναται νὰ ἀπαλειφθῇ ἐξ αὐτῆς ὁ ἕτερος τῶν ἀγνώστων.

Πρὸς τοῦτο κατὰ τὸ θεώρημα (§ 140) ἀντὶ τῆς ἑτέρας τῶν δεδομένων ἐξισώσεων λαμβάνομεν τὴν προκύπτουσαν ἐκ τῆς προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν δύο ἐξισώσεων τῶν προκυπτουσῶν ἐκ τῶν δεδομένων διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἑκατέρας ἐκείνων, ἐφ' οἱονδήποτε ἀριθμὸν διάφορον τοῦ 0.

Ἂν δὲ οἱ πολλαπλασιασταὶ οὗτοι εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε οἱ συντελεσταὶ ... τοῦ ... τῶν ἀγνώστων νὰ γίνωσιν ἀριθμοὶ ἀντίθετοι, ἡ ἐκ τῆς προσθέσεως αὐτῶν προκύπτουσα ἐξίσωσις δὲν θὰ περιέχῃ τὸν ἄγνωστον τοῦτον.

Κατὰ ταῦτα, ἵνα ἐκ τοῦ δεδομένου συστήματος ἀπαλείψωμεν τὸν ψ, πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἑκατέρας τῶν ἐξισώσεων ἐκείνων ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ ἀπολειπτέου ἀγνώστου τὸν περιεχόμενον ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἐξισώσεων, διότι οὕτω θὰ προκύψῃ τὸ σύστημα

$$8\chi - 12\psi = -44$$
$$15\chi + 12\psi = 90,$$

ἐξ οὗ πάλιν θὰ προκύψῃ, κατὰ τὸ Α΄ Θεώρημα (§ 140), τὸ πρὸς τὸ δεδομένον ἰσοδύναμον σύστημα

$$2\chi - 3\psi = -11$$
$$23\chi = 46,$$

οὗ ἡ ἑτέρα τῶν ἐξισώσεων, ἡ $23\chi = 46$, μόνον τὸν ἄγνωστον χ περιέχουσα, παρέχει τὴν λύσιν $\chi = 2$.

Εἶτα, ἂν εἰς τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων τοῦ δεδομένου συστήματος τεθῇ ἀντὶ τοῦ χ ἡ εὑρεθεῖσα αὐτοῦ τιμὴ 2 (διότι καὶ αὕτη ὑπὸ τῆς αὐτῆς τιμῆς τοῦ χ πρέπει νὰ ἐπαληθεύηται), θὰ προκύψῃ ἡ μόνον τὸν ψ περιέχουσα ἐξίσωσις $4-3\psi=-11$, ἡ τὴν τιμὴν αὐτοῦ 5 ὁρίζουσα.

145. Παρατηρητέον ὅτι, ἂν οἱ συντελεσταὶ ἀμφοτέρων τῶν ἐξισώσεων τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου δὲν εἶναι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ πρῶτοι, εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις κοινὸς συντελεστὴς τοῦ ἀγνώστου τούτου τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν συντελεστῶν τούτων.

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῶν ἐξισώσεων τούτων τῆς μὲν ἑτέρας ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου διὰ τοῦ ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ συντελεστοῦ τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου, τῆς δὲ ἑτέρας ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ αὐτοῦ πολλαπλασίου διὰ τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ ἐξισώσει συντελεστοῦ τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου.

146. Καλεῖται δὲ ἡ μέθοδος αὕτη, καθ' ἣν ἀπαλειφομένου τοῦ ἑτέρου τῶν ἀγνώστων ἐκ τῆς ἑτέρας τῶν ἐξισώσεων ἐπιλύεται τὸ σύστημα, *μέθοδος τῆς προσθέσεως*.

Παραδείγματα συστημάτων.

1)
$$5\chi + 6\psi = -7$$
$$9\chi + 4\psi = 1.$$

Ἐπειδὴ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν συντελεστῶν τοῦ ψ εἶναι ὁ 12, πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς μὲν πρώτης τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ $\frac{12}{6}$, ἤτοι ἐπὶ 2, τῆς δὲ δευτέρας ἐπὶ $\frac{12}{4}$, ἤτοι ἐπὶ 3, ἐξ οὗ προκύπτει τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$10\chi + 12\psi = -14$$
$$27\chi + 12\psi = 3.$$

Εἶτα ἀλλάσσοντες τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων τούτων καὶ προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη θὰ ἔχωμεν

$$17\chi = 17, \quad \text{ἐξ ἧς } \chi = 1.$$

Θέτοντες δὲ εἰς τὴν ἑτέραν τῶν δεδομένων ἐξισώσεων, οἷον εἰς τὴν πρώτην, ἀντὶ τοῦ χ τὴν εὑρεθεῖσαν αὐτοῦ τιμὴν 1, καὶ ἐπιλύοντες εἶτα πρὸς τὸν ψ τὴν προκύψουσαν ἐξίσωσιν $5+6\psi=-7$, θὰ ἔχωμεν $\psi=-2$.

2)
$$\frac{\chi}{4} - \frac{\psi}{7} = 0$$
$$\frac{\chi}{4} - \frac{\psi}{6} = \frac{7}{6}$$

Ἐκτελοῦντες ἐν ἑκάστῃ ἐξισώσει τὰς ἐν τῷ ἐδαφίῳ 105 ἀναγεγραμμένας πράξεις, θὰ ἔχωμεν τὸ πρὸς τὸ δεδομένον ἰσοδύναμον σύστημα

$$7\chi - 4\psi = 0$$
$$3\chi - 2\psi = -14.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν συντελεστῶν τοῦ ψ εἶναι ὁ ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει συντελεστὴς αὐτοῦ 4, πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐπὶ τὸ πηλίκον 2 τῶν συντελεστῶν τούτων, θὰ ἔχωμεν

$$7\chi - 4\psi = 0$$
$$6\chi - 4\psi = -28.$$

Εἶτα ἀλλάσσοντες τὰ σημεῖα τῆς δευτέρας καὶ προσθέτοντες τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη, θὰ ἔχωμεν $\chi = 28$.

Θέτοντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, καὶ ἐπιλύοντες εἶτα πρὸς τὸν ψ τὴν προκύψουσαν ἐξίσωσιν $7.28-4.\psi=0$, θὰ ἔχωμεν $\psi = 49$.

3)
$$11\chi - 2\psi = 5$$
$$5\chi - 2\psi = 3$$

Ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς τοῦ ψ εἶναι ὁ αὐτὸς ἐν ἀμφοτέραις ταῖς ἐξισώσεσιν, ἵνα ἀπαλείψωμεν αὐτὸν ἀλλάσσομεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων τῆς δευτέρας καὶ εἶτα προσθέτομεν ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη· ἐξ οὗ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $6\chi = 2$, ἐξ ἧς πάλιν $\chi = \frac{1}{3}$.

Θέτοντες δὲ εἰς τὴν ἑτέραν τῶν δεδομένων ἐξισώσεων, οἷον εἰς τὴν δευτέραν, ἀντὶ τοῦ χ τὴν εὑρεθεῖσαν αὐτοῦ τιμὴν $\frac{1}{3}$, καὶ ἐπιλύοντες εἶτα ὡς πρὸς τὸν ψ τὴν προκύψουσαν ἐξίσωσιν $5.\frac{1}{3}-2\psi=3$, θὰ ἔχωμεν $\psi=-\frac{2}{3}$.

4) $$\begin{aligned} 9\chi-6\psi&=11 \\ 3\chi-2\psi&=2 \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ τὸ ἐκ τοῦ συστήματος τούτου μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τοῦ ψ προκῦπτον ἰσοδύναμον αὐτῷ σύστημα

$$\begin{aligned} 0&=5 \\ 3\chi-2\psi&=2 \end{aligned}$$

εἶναι ἀδύνατον, καὶ τὸ δεδομένον εἶναι ἀδύνατον.

5) $$\begin{aligned} 10\chi+8\psi&=12 \\ 5\chi+4\psi&=6 \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ τὸ ἐκ τοῦ συστήματος τούτου μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τοῦ χ προκῦπτον ἰσοδύναμον αὐτῷ σύστημα

$$\begin{aligned} 0&=0 \\ 5\chi+4\psi&=6 \end{aligned}$$

ἔχει μίαν μόνην ἐξίσωσιν μετὰ δύο ἀγνώστων, ἐπιδέχεται ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις (§ 143), κατ' ἀκολουθίαν καὶ τὸ δεδομένον εἶναι τοιοῦτον. Τοῦτο δέ, διότι ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων εἶναι ἰσοδύναμος τῇ δευτέρᾳ, ὡς προκύψασα ἐξ ἐκείνης πολλαπλασιασθέντων ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς ἐπὶ 2· ἦτο ἄρα δεδομένη μία μόνη ἐξίσωσις, περιέχουσα ἀμφοτέρους τοὺς ἀγνώστους.

147. Ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ ἑτέρου τῶν ἀγνώστων ἐκ τοῦ συστήματος δύο ἐξισώσεων, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ἡ ἐπίλυσις αὐτοῦ δύναται νὰ γίνῃ καὶ κατὰ τὸ Β' Θεώρημα (§ 141), δι' ἑτέρας μεθόδου καλουμένης ***μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως***. Πρὸς τοῦτο ἔστω τὸ σύστημα

$$\left\{\begin{aligned} 5\chi-6\psi&=4 \\ 7\chi+9\psi&=23. \end{aligned}\right.$$

Ἂν τὴν ἑτέραν τῶν ἐξισώσεων τούτων, οἷον τὴν πρώτην, ἐπιλύσωμεν ὡς πρὸς τὸν ἕτερον ἄγνωστον, οἷον τὸν χ, ὡς εἰ ὁ ἕτερος ἄγνωστος ψ ἦτο γνωστός, τὴν δὲ τοῦ ἀγνώστου χ προκύψουσαν τιμὴν $\chi=\frac{4+6\psi}{5}$ θέσωμεν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν ἀντὶ τοῦ ἀγνώστου τούτου, θὰ προκύψῃ τὸ πρὸς δεδομένον ἰσοδύναμον σύστημα

$$\chi = \frac{4+6\psi}{5}$$

$$7\left(\frac{4+6\psi}{5}\right) + 9\psi = 23\cdot$$

ἐκ τῆς δευτέρας δὲ τούτου ἐξισώσεως, ἐπειδὴ μόνον τὸν ἄγνωστον ψ περιέχει, ἂν ἐπιλυθῇ πρὸς αὐτόν, ὁρίζεται ἡ τοῦ ἀγνώστου τούτου τιμὴ 1. Εἶτα, ἂν εἰς τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων τούτων τεθῇ ἀντὶ τοῦ ψ ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ αὐτοῦ 1, θὰ προκύψῃ ἡ τοῦ χ τιμὴ 2.

Ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ ἑτέρου τῶν ἀγνώστων δύναται νὰ γίνῃ καὶ διὰ τῆς ἐπιλύσεως ἀμφοτέρων τῶν ἐξισώσεων ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον τοῦτον, τιθεμένης εἶτα εἰς τὴν ἑτέραν ἐξίσωσιν τῆς ἐκ τῆς ἑτέρας τῶν ἐξισώσεων προκυψάσης τιμῆς τοῦ ἀγνώστου.

Ἡ δι' ἀντικαταστάσεως ἐπίλυσις τοῦ συστήματος προτιμᾶται, ἂν ἐκ τῆς ἑτέρας τῶν ἐξισώσεων προκύπτῃ εὐκόλως ἡ τιμὴ τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου.

Γενικὴ διερεύνησις συστήματος δύο ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μετὰ δύο ἀγνώστων.

148. Πᾶν σύστημα δύο τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων δύναται νὰ λάβῃ τὴν ἑξῆς γενικὴν μορφὴν

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha\chi + \beta\psi = \gamma & (1) \\ \alpha'\chi + \beta'\psi = \gamma', & (2) \end{array}\right.$$

ἐν ᾧ οἱ $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ παριστῶσιν οἱουσδήποτε ἀριθμοὺς ἀνεξαρτήτους τῶν ἀγνώστων.

Ἂν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι εἷς τῶν συντελεστῶν α, β, α', β' εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, ἔστω ὁ α, ἐπιλυθῇ δὲ ἡ ἐξίσωσις (1) ὡς πρὸς χ, θὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις

$$\chi = \frac{\gamma - \beta\psi}{\alpha} \qquad (3)$$

Ἂν δὲ τεθῇ ἐν τῇ ἐξισώσει (2) ἀντὶ τοῦ χ ἡ προκύψασα αὐτοῦ τιμὴ (3), θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\alpha'\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha} + \beta'\psi = \gamma' \quad \text{ἢ} \quad \alpha'(\gamma - \beta\psi) + \alpha\beta'\psi = \alpha\gamma',$$

ἤτοι τὴν

$$(\alpha\beta' - \alpha'\beta)\psi = \alpha\gamma' - \gamma\alpha', \qquad (4)$$

Τὸ δὲ σύστημα τῶν προκυψασῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4) εἶναι ἰσοδύναμον (§ 141) τῷ δεδομένῳ συστήματι (1) καὶ (2).

Οὕτως ἄρα

1ον) *Ἂν ἡ παράστασις αϐ΄—ϐα΄ εἶναι διάφορος τοῦ 0,* ἐκ τῆς ἐξισώσεως (4) προκύπτει ἡ ἑξῆς μόνη τοῦ ψ τιμὴ

$$\psi = \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} \qquad (\alpha)$$

Ἂν δὲ τεθῇ ἐν τῇ ἐξισώσει (3) ἀντὶ τοῦ ψ ἡ εὑρεθεῖσα αὐτοῦ τιμὴ (α) προκύπτει ὁ τὴν τιμὴν τοῦ χ παριστῶν τύπος

$$\chi = \frac{\gamma - \beta\frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}}{\alpha} = \frac{\gamma\alpha\beta' - \gamma\beta\alpha' - \beta\alpha\gamma' + \beta\gamma\alpha'}{\alpha(\alpha\beta' - \beta\alpha')},$$

ἤτοι

$$\chi = \frac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} \qquad (\beta)$$

Λοιπὸν ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἐπειδὴ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4) ἐπαληθεύεται ὑπὸ μόνον τῶν τιμῶν τοῦ χ καὶ τοῦ ψ τῶν παριστωμένων διὰ τῶν τύπων (α) καὶ (β), ἕπεται ὅτι καὶ τὸ πρὸς αὐτὸ ἰσοδύναμον δεδομένον σύστημα (1) καὶ (2) ἐπιδέχεται μίαν μόνην λύσιν, διδομένην ὑπὸ τῶν εὑρεθέντων τύπων (α) καὶ (β).

Ἐν τοῖς τύποις δὲ τούτοις, ὁ μὲν παρονομαστὴς ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν γινομένων τῶν συντελεστῶν τοῦ χ καὶ τοῦ ψ χιαστὶ εἰλημμένων, ὁ δὲ ἀριθμητὴς προκύπτει ἐκ τοῦ παρονομαστοῦ, ἂν εἰς αὐτὸν τεθῶσιν ἀντὶ τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀγνώστου, οὗ μέλλει νὰ ὁρισθῇ ἡ τιμή, οἱ εἰς τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων γνωστοὶ ὅροι.

Παρατήρησις. Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν γενικῶν τούτων τύπων (α) καὶ (β) ἡ ἐπίλυσις τοῦ συστήματος δὲν γίνεται πάντοτε ταχυτέρα τῆς ἀπ' εὐθείας ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος.

2ον) *Ἂν μὲν ἡ παράστασις αβ΄—βα΄ εἶναι ἴση τῷ μηδενί, ἡ δὲ παράστασις αγ΄—γα΄ διάφορος τοῦ μηδενός,* ἡ ἐξίσωσις (4) γίνεται

$$0.\psi = \alpha\gamma' - \gamma\alpha'$$

καὶ οὐδεμίαν ἄρα ἐπιδέχεται λύσιν.

Λοιπὸν ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4), κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ τὸ πρὸς αὐτὸ ἰσοδύναμον δεδομένον σύστημα (1) καὶ (2) οὐδεμίαν ἐπιδέχονται λύσιν, ἤτοι εἶναι ἀδύνατα.

3ον) *Ἂν ἀμφότεραι αἱ παραστάσεις αϐ΄—ϐα΄ καὶ αγ΄—γα΄ εἶναι ἴσαι τῷ μηδενί,* ἡ ἐξίσωσις (4) ἀνάγεται εἰς τὴν ἑξῆς ταυτότητα $0.\psi = 0$, ἥτις προφανῶς ἐπαληθεύεται δι' οἱασδήποτε τοῦ ψ τιμῆς.

Οὕτω δὲ *πᾶν σύστημα τιμῶν τοῦ χ καὶ τοῦ ψ ἐπαληθεῦον τὴν ἐξίσωσιν (3) ἐπαληθεύει ἅμα καὶ τὰς δεδομένας ἐξισώσεις (1) καὶ (2).*

Λοιπὸν ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ δεδομένον σύστημα (1) καὶ (2) ἐπιδέχεται ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις.

Αἱ ἄπειροι δὲ αὗται λύσεις εὑρίσκονται ἐκ τοῦ τύπου (3), ἂν εἰς τὸν ψ δοθῇ αὐθαίρετος τιμὴ καὶ εἶτα προσδιορισθῇ ἡ ἐκ τοῦ τύπου τούτου προκύπτουσα ἀντίστοιχος τοῦ χ τιμή.

4ον) *Ἂν δὲ νῦν ὑποτεθῇ ὅτι οἱ τῶν ἀγνώστων συντελεσταὶ* α, β, α', β', *εἶναι πάντες ἴσοι τῷ μηδενί*, δὲν δύναται ἡ ἐξίσωσις (1) νὰ ἐπιλυθῇ ὡς πρὸς τὸν ἕτερον τῶν ἀγνώστων, καὶ αἱ δεδομέναι ἐξισώσεις θὰ εἶναι

$$\begin{cases} 0.\chi+0.\psi=\gamma \\ 0.\chi+0.\psi=\gamma' \end{cases}$$

Οὕτω δέ, ἂν ὁ γ καὶ ὁ γ' δὲν εἶναι ἀμφότεροι ἴσοι τῷ μηδενί, ἡ ἑτέρα τοὐλάχιστον ἐκ τῶν δύο δεδομένων ἐξισώσεων εἶναι ἀδύνατος, καὶ τὸ δεδομένον ἄρα σύστημα οὐδεμίαν ἐπιδέχεται λύσιν.

Ἂν δὲ ἀμφότεροι οἱ γνωστοὶ ὅροι γ καὶ γ' εἶναι ἴσοι τῷ μηδενί, αἱ δύο δεδομέναι ἐξισώσεις θὰ εἶναι ταυτότητες, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἐπαληθεύονται οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι αἱ τιμαὶ τοῦ χ καὶ τοῦ ψ· ὑπάρχουσι δηλαδὴ ἄπειρα συστήματα λύσεων ἀντιστοιχοῦντα εἰς αὐθαιρέτους τιμὰς τοῦ χ καὶ τοῦ ψ.

Παρατηρήσεις. Ἂν τοῦ α ὄντος διαφόρου τοῦ μηδενός, ἔχομεν

$$\alpha\beta'-\beta\alpha'=0, \quad \text{καὶ} \quad \alpha\gamma'-\gamma\alpha'=0,$$

$$\text{ἤτοι } \frac{\beta'}{\beta}=\frac{\alpha'}{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\gamma'}{\gamma}=\frac{\alpha'}{\alpha},$$

$$\text{καὶ ἄρα } \frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{\beta'}{\beta}=\frac{\gamma'}{\gamma}.$$

προκύπτει δηλαδὴ ὅτι αἱ δεδομέναι ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἔχουσι τοὺς συντελεστὰς αὐτῶν ἀναλόγους.

Ἐκ δὲ τούτων συνάγεται ὅτι, ἂν τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐξισώσεως

$$\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$$

πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν λόγον $\frac{\alpha'}{\alpha}$, προκύπτει ἡ (2) ἐξίσωσις

$$\alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma'.$$

Ἀφ' ἑτέρου δὲ ἔχομεν τότε τὴν ταυτότητα

$$\frac{\alpha'}{\alpha}(\alpha\chi+\beta\psi-\gamma)=\alpha'\chi+\beta'\psi-\gamma',$$

ἐξ ἧς συνάγεται ὅτι πᾶν σύστημα τιμῶν τοῦ χ καὶ τοῦ ψ μηδενίζον τὸ πολυώνυμον $\alpha\chi+\beta\psi-\gamma$ μηδενίζει ὡσαύτως καὶ τὸ $\alpha'\chi+\beta'\psi-\gamma'$· πᾶσα δηλαδὴ λύσις τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπαληθεύει καὶ τὴν ἐξίσωσιν (2).

Ἂν δὲ νῦν ὑποτεθῇ ὅτι ἐν τῇ ἑτέρᾳ μόνῃ ἐξισώσει ὁ συντελεστὴς *τοῦ ἑτέρου μόνου ἀγνώστου ἰσοῦται τῷ μηδενὶ τὰ ἐξαγόμενα εἶναι πάλιν τὰ αὐτά· ὑπάρχει δηλαδὴ μία μὲν λύσις, ἂν* $\alpha\beta'-\beta\alpha'\neq 0$, *οὐδεμία δὲ ἢ ἄπειροι, ἂν* $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$.

Ἂν δὲ ἀμφότεροι οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἑτέρου τῶν ἀγνώστων, π.χ. τοῦ χ, εἶναι ἴσοι τῷ μηδενί, ἡ μὲν τοῦ ἀγνώστου τούτου τιμὴ εἶναι οἱαδήποτε, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου εἶναι ὡρισμένη.

Ἐν τῇ περιπτώσει ἄρα ταύτῃ αἱ τοῦ συστήματος ἐξισώσεις γίνονται

$$\beta\psi=\gamma \quad \text{καὶ} \quad \beta'\psi=\gamma'$$

καὶ ὁρίζουσι μίαν μόνην τιμὴν διὰ τὸν ἐν αὐταῖς ἄγνωστον ψ, ἂν $\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\gamma'}{\beta'}$, ἤτοι ἂν $\gamma\beta'=\beta\gamma'$, ἐνῷ ἡ τοῦ ἑτέρου ἀγνώστου χ τιμὴ εἶναι ἀόριστος.

Ἐπίλυσις συστημάτων πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων ἐχουσῶν ἰσαρίθμους ἀγνώστους.

149. Ἔστω πρῶτον πρὸς ἐπίλυσιν τὸ ἑξῆς ἐκ τριῶν ἐξισώσεων μετὰ τριῶν ἀγνώστων σύστημα

$$\begin{aligned} 4\chi-3\psi+2\omega &= 9 \qquad (1)\\ 5\chi+4\psi-3\omega &= 7 \qquad (2)\\ 7\chi-2\psi+4\omega &= 28 \qquad (3) \end{aligned}$$

Ἂν συνδυάσαντες τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἀπαλείψωμεν διὰ τῆς ἑτέρας τῶν μεθόδων ἕνα τῶν ἀγνώστων, οἷον τὸν ω, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν περιέχουσαν δύο μόνους ἀγνώστους, ἣν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀντὶ τῆς δευτέρας (2).

Ὡσαύτως, ἂν συνδυάσαντες τὴν (1) καὶ τὴν (3) ἀπαλείψωμεν τὸν αὐτὸν ἄγνωστον ω, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν περιέχουσαν τοὺς αὐτοὺς δύο ἀγνώστους χ καὶ ψ, ἣν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀντὶ τῆς (3) (§ 140).

Οὕτω προκύπτει τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\begin{aligned} 4\chi-3\psi+2\omega &= 9\\ 22\chi-\psi &= 41\\ -\chi+4\psi &= 10 \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ δευτέρα καὶ ἡ τρίτη τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος περιέχουσι δύο μόνους ἀγνώστους ἀποτελοῦσιν ἴδιον σύστημα δύο ἐξισώσεων ἐχουσῶν δύο ἀγνώστους, ἂν ἐπιλύσαντες αὐτὰς εὕρωμεν τὰς τιμὰς 2 καὶ 3 τῶν ἐν αὐταῖς περιεχομένων δύο ἀγνώστων χ καὶ ψ, εἶτα δὲ θέσωμεν τὰς εὑρεθείσας ταύτας τιμὰς εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ἀντὶ τῶν ἀγνώστων τούτων, θὰ προκύψῃ ἐξίσωσις, ἥτις τὸν τρίτον μόνον τῶν ἀγνώστων περιέχουσα καὶ πρὸς αὐτὸν ἐπιλυομένη ὁρίζει τὴν τούτου τιμὴν 5.

Κατὰ ταῦτα ἡ ἐπίλυσις συστήματος τριῶν ἐξισώσεων περιεχουσῶν τρεῖς ἀγνώστους ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν συστήματος δύο ἐξισώσεων περιεχουσῶν δύο ἀγνώστους.

Ἔστω νῦν πρὸς ἐπίλυσιν σύστημα ν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ περιεχουσῶν ν ἀγνώστους. Ἂν συνδυάσαντες τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων μεθ᾽ ἑκάστης τῶν ἄλλων ἀπαλείψωμεν τὸν αὐτὸν ἄγνωστον, εὑρίσκομεν ν—1 ἐξισώσεις περιεχούσας ν—1 ἀγνώστους, αἵτινες μετὰ τῆς πρώτης ἀποτελοῦσι σύστημα ἰσοδύναμον τῷ δεδομένῳ· διότι ἑκάστη ἐκ τῶν προκυπτουσῶν ἐξισώσεων δύναται νὰ ληφθῇ ἀντὶ τῆς ἐξισώσεως, ἐξ ἧς συνδυασθείσης μετὰ τῆς πρώτης προέκυψεν αὕτη (§ 140). Ἐπειδὴ δὲ αἱ ν—1 αὗται ἐξισώσεις περιέχουσαι ν—1 μόνους ἀγνώστους ἀποτελοῦσιν ἴδιον σύστημα ν—1 ἐξισώσεων ἐχουσῶν ν—1 ἀγνώστους, ἂν ἐπιλύσαντες αὐτὰς εὕρωμεν τὰς τιμὰς τῶν ἐν αὐταῖς περιεχομένων ν—1 ἀγνώστων, εἶτα δὲ θέσωμεν τὰς εὑρεθείσας ταύτας τιμὰς εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ἀντὶ τῶν ἀγνώστων τούτων, θὰ προκύψῃ ἐξίσωσις περιέχουσα ἕνα μόνον ἄγνωστον καὶ πρὸς αὐτὸν ἐπιλυομένη ὁρίζει τὴν τιμὴν αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα ἡ ἐπίλυσις συστήματος ν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ περιεχουσῶν ν ἀγνώστους ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν συστήματος ν—1 ἐξισώσεων περιεχουσῶν ν—1 ἀγνώστους.

Δυνάμεθα δὲ διὰ τοῦ τρόπου τούτου νὰ ἐπιλύωμεν πᾶν σύστημα. διότι δι᾽ αὐτοῦ ἀνάγεται ἡ ἐπίλυσις τῶν μὲν ν ἐξισώσεων εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν ν—1, τούτων δὲ πάλιν εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν ν—2 ἐξισώσεων, καὶ ἐφεξῆς οὕτω· τέλος δὲ εἰς τὴν ἐπίλυσιν δύο μόνων ἐξισώσεων ἐχουσῶν δύο μόνους ἀγνώστους.

Παρατηρήσεις.

150. Πολλάκις αἱ ἐξισώσεις εἰσὶ τοιαῦται, ὥστε πλὴν τοῦ ἀνωτέρω εἰρημένου γενικοῦ τρόπου ὑπάρχει καὶ συντομώτερος τρόπος τῆς ἐπιλύσεως αὐτῶν.

Πρὸς τοῦτο διὰ τὴν μετάβασιν ἀπὸ συστήματος εἰς ἕτερον ἰσοδύναμον μάλιστα συντελεῖ ἡ ἐκλογὴ καὶ τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου καὶ τῶν ἀνὰ δύο πρὸς ἀλλήλας συνδυαζομένων ἐξισώσεων πρὸς ἀπαλοιφὴν τοῦ αὐτοῦ ἀγνώστου· διότι δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ συνδυάζηται πάντοτε μία μόνη ἐξίσωσις μεθ᾽ ἑκάστης τῶν ἄλλων.

Καὶ ἄλλοι δὲ συνδυασμοὶ δύο ἢ πλειόνων ἢ καὶ πασῶν τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος δύνανται νὰ γίνωσι πρὸς συντομωτέραν διάλυσιν αὐτοῦ.

Ἰδίᾳ δὲ παρατηρητέον ὅτι,

1) Ἂν ἐξίσωσίς τις συστήματος δὲν περιέχῃ ἕνα τῶν ἀγνώστων, ἡ ἐξίσωσις αὕτη θὰ περιέχηται καὶ ἐν τῷ ἑπομένῳ ἰσοδυνάμῳ συστήματι, ὅπερ θὰ ἔχῃ μίαν ἐξίσωσιν καὶ ἕνα ἄγνωστον ὀλιγώτερα, ἂν ἀπαλειπτέος ἄγνωστος ληφθῇ ὁ μὴ ὑπάρχων ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ.

Π. χ. ἐκ τοῦ συστήματος τῶν ἑπομένων ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} 2\varphi-3\chi+\psi-\omega &= -4 \\ 5\varphi+3\chi-2\psi+4\omega &= 11 \\ 7\varphi-2\chi &= -2 \\ 2\varphi+5\chi+3\omega &= 14, \end{aligned}$$

ἂν ἀπαλειπτέος ἄγνωστος αὐτοῦ ληφθῇ ὁ ψ, ὅστις δὲν ὑπάρχει ἐν ταῖς δύο τελευταίαις ἐξισώσεσι, θὰ προκύψῃ τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} 9\varphi-3\chi+2\omega &= 3 \\ 7\varphi-2\chi &= -2 \\ 2\varphi+5\chi+3\omega &= 14, \end{aligned}$$

οὗ ἡ μὲν πρώτη τῶν ἐξισώσεων προῆλθεν ἐκ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως τοῦ δεδομένου συστήματος, αἱ δὲ δύο ἄλλαι εἶναι αἱ δεδομέναι.

Ἂν δὲ πάλιν ἀπαλειπτέος ἄγνωστος αὐτοῦ ληφθῇ ὁ ω, ὅστις δὲν ὑπάρχει ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει, θὰ προκύψῃ τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} 23\varphi+19\chi &= 19 \\ 7\varphi-2\chi &= -2, \end{aligned}$$

ἐξ οὗ προκύπτει ἡ λύσις $\varphi=0$, $\chi=1$ καὶ ἄρα $\omega=3$ καὶ $\psi=2$.

2) Ἐνίοτε εὑρίσκομεν τὴν λύσιν τοῦ συστήματος προσθέτοντες κατὰ μέλη πάσας τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος ἢ τινας μόνον αὐτῶν.

Π. χ. ἂν τοῦ συστήματος

$$\begin{aligned} \chi+\psi-\omega &= 4 \\ \chi-\psi+\omega &= 0 \\ -\chi+\psi+\omega &= 6 \end{aligned}$$

τὰς ἐξισώσεις προσθέσωμεν κατὰ μέλη ἀνὰ δύο, θὰ εὕρωμεν $2\chi=4$, $2\psi=10$, $2\omega=6$ καὶ ἄρα $\chi=2$, $\psi=5$, $\omega=3$.

Ὡσαύτως, ἂν τοῦ συστήματος

$$\begin{aligned} \chi+\psi &= 8 \\ \psi+\omega &= 1 \\ \omega+\chi &= 3, \end{aligned}$$

πολλαπλασιάζοντες ἑκάστοτε ἀμφότερα τὰ μέλη ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ —1, προσθέτωμεν αὐτὰς κατὰ μέλη πάσας, θὰ εὑρίσκωμεν $2\chi = 10$, $2\psi = 6$, $2\omega = -4$ καὶ ἄρα $\chi = 5$, $\psi = 3$, $\omega = -2$.

3) Ἡ χρῆσις βοηθητικοῦ ἀγνώστου ποιεῖ πολλάκις τὴν ἐπίλυσιν τοῦ συστήματος εὐκολωτέραν. Π. χ. ἂν τοῦ συστήματος

$$\varphi - 3\chi + 4\psi = 6$$

$$\frac{\varphi}{6} = \frac{\chi}{5} = \frac{\psi}{3}$$

ἕνα τῶν ἴσων λόγων $\frac{\varphi}{6}$, $\frac{\chi}{5}$, $\frac{\psi}{3}$ καλέσωμεν δ, θὰ προκύψῃ τὸ ἰσοδύναμον τῷ δεδομένῳ σύστημα

$$\varphi - 3\chi + 4\psi = 6, \quad \varphi = 6.\delta, \quad \chi = 5.\delta, \quad \psi = 3.\delta,$$

ἐξ οὗ, ἂν αἱ τιμαὶ τοῦ φ, τοῦ χ καὶ τοῦ ψ τεθῶσιν εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, θὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις $6.\delta - 15.\delta + 12.\delta = 6$, ἐξ ἧς πάλιν θὰ προκύψῃ $\delta = 2$· κατ' ἀκολουθίαν δὲ $\varphi = 12$, $\chi = 10$ καὶ $\psi = 6$.

Σημείωσις. Ἂν ἐκ τῆς προσθέσεως ἐξισώσεών τινων τοῦ συστήματος τῆς γινομένης κατὰ τὸ θεώρημα § 140 προκύπτῃ ἐξίσωσις μηδένα ἄγνωστον περιέχουσα, τὸ σύστημα εἶναι ἢ ἀδύνατον ἢ ἀόριστον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ἐπιλῦσαι τὰ ἑπόμενα συστήματα

1) $\frac{\chi}{8} - \frac{\psi}{3} + \frac{\omega}{4} = -2$ Ἀπ. $\chi = 8$

$\frac{\chi}{4} + \frac{\psi}{9} + \frac{\omega}{6} = 3$ $\psi = 9$

$\frac{\chi}{2} - \frac{\psi}{3} + \frac{\omega}{4} = 1$ $\omega = 4$

2) $\frac{5}{\chi} + \frac{9}{\chi} = 4$ ἐν ᾧ ἄγνωστοι θὰ ληφθῶσιν οἱ Ἀπ. $\chi = 5$,

$\frac{10}{\chi} - \frac{3}{\psi} = 1$, $\frac{1}{\chi}$ καὶ $\frac{1}{\psi}$. $\psi = 3$.

3) $\frac{3}{4}\chi - \psi = 0$ Ἀπ. $\chi = 8$

$\chi - \frac{5\omega}{3} = -12$ $\psi = 6$

$\frac{1}{4}\omega - \frac{1}{3}\psi = 1$ $\omega = 12$.

4) $$\begin{aligned} 2\varphi+4\chi-3\psi&=9\\ 2\chi+6\omega&=28\\ 4\varphi-2\psi&=14\\ 4\varphi+3\chi&=26 \end{aligned}$$ Ἀπ. $\chi=2,\ \psi=3,\ \omega=4,\ \varphi=5.$

5) $$\frac{\chi}{\alpha+\beta}+\frac{\psi}{\alpha-\beta}=2\alpha$$ $$\frac{\chi-\psi}{2\alpha\beta}=\frac{\chi+\psi}{\alpha^2+\beta^2}$$ Ἀπ. $\chi=(\alpha+\beta)^2$, $\psi=(\alpha-\beta)^2$

6) $$(\alpha+\beta)\chi-(\alpha-\beta)\psi=4\alpha\beta$$ $$\frac{\chi}{\alpha+\beta}+\frac{\psi}{\alpha-\beta}=2.$$ Ἀπ. $\chi=\alpha+\beta$, $\psi=\alpha-\beta.$

7) $$\frac{(\gamma+\delta)\chi}{5}-\frac{(\gamma-\delta)\psi}{3}=4\gamma\delta$$ $$3\chi+\frac{5(\gamma+\delta)\psi}{\gamma-\delta}=30(\gamma+\delta)$$ Ἀπ. $\chi=5(\gamma+\delta)$, $\psi=3(\gamma-\delta).$

8) Ἐν τῷ συστήματι $\left\{\begin{aligned}(\alpha-1)\chi-2\alpha\psi&=4\\ \alpha\chi+\psi&=3\alpha\end{aligned}\right.$

νὰ προσδιορισθῇ ὁ α οὕτως, ὥστε τὸ σύστημα νὰ ἐπιδέχηται μίαν μόνην λύσιν.

Πρὸς τοῦτο πρέπει ἡ παράστασις $2\alpha^2+(\alpha-1)$ νὰ ἔχῃ τιμὴν διάφορον τοῦ μηδενός· ἤτοι νὰ εἶναι $2\alpha^2+(\alpha-1)\neq 0$.

Ἐπειδὴ δὲ $2\alpha^2+(\alpha-1)=(\alpha^2+\alpha)+(\alpha^2-1)=(\alpha+1)(2\alpha-1)$, ἕπεται ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατὸν διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ α, ἐκτὸς τῶν -1 καὶ $\frac{1}{2}$.

9) $$\begin{aligned} \varphi-\chi+\psi-\omega&=-2\\ \chi-2\psi+3\omega-4\varphi&=4\\ \psi-3\omega+6\varphi-15\chi&=-33\\ \omega-4\varphi+10\chi-20\psi&=-40 \end{aligned}$$ Ἀπ. $\varphi=1\quad \chi=2$, $\psi=3\quad \omega=4.$

10) $$\alpha\chi+\frac{\psi}{\beta}-\frac{\omega}{\beta}=\alpha$$ $$\beta\chi-\frac{\psi}{\alpha}+\frac{\omega}{\alpha}=\beta$$ $$\alpha\psi+\beta\omega-\beta\varphi=\alpha$$ $$\beta\omega-\alpha\psi+\alpha\varphi=\beta.$$ Ἀπ. $\varphi=1,\ \chi=1,\ \psi=1,\ \omega=1.$

11) $\begin{aligned} \varphi+\psi+\omega &= 3\alpha+6+\gamma \\ \varphi+\chi+\omega &= \alpha+36+\gamma \\ \varphi-\chi-\omega &= \alpha-6+\gamma \\ \omega+\psi-\chi &= 3\alpha-6-\gamma. \end{aligned}$ 'Απ. $\begin{aligned} \varphi &= \alpha+6+\gamma \\ \chi &= -\alpha+6+\gamma \\ \psi &= \alpha-6+\gamma \\ \omega &= \alpha+6-\gamma. \end{aligned}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1ον) *Ἀγοράσας μῆλα πρὸς 8 λεπτὰ ἕκαστον καὶ πορτοκάλια πρὸς 12 λεπτὰ ἕκαστον ἔδωκα ἐν ὅλῳ δραχμὰς 2,80. Ἂν δὲ ἠγόραζον ἕκαστον μὲν τῶν μήλων πρὸς 1 λεπτὸν ὀλιγώτερον, ἕκαστον δὲ τῶν πορτοκαλίων πρὸς 3 λεπτὰ περισσότερον, θὰ ἔδιδον ἐν ὅλῳ δραχμὰς 2,90. Πόσα ἐξ ἑκατέρου εἴδους ἠγόρασα ;*

Ἂν παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μὲν μήλων διὰ τοῦ χ, τῶν δὲ πορτοκαλίων διὰ τοῦ ψ, θὰ προκύψῃ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 8\chi+12\psi=280 \\ 7\chi+15\psi=290, \end{cases}$$

οὗτινος οἱ ἄγνωστοι πρέπει νὰ εἶναι ἀριθμοὶ θετικοὶ καὶ ἀκέραιοι.

Ἐκ δὲ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος τούτου θὰ ἔχωμεν $\chi=20$ καὶ $\psi=10$.

2ον) *Εὑρεῖν διψήφιον ἀριθμόν, οὗ τὰ ψηφία νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 8· καὶ ἐξ οὗ, τῶν ψηφίων αὐτοῦ κατ' ἀντίστροφον τάξιν γραφομένων, νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς μείζων κατὰ 18 μονάδας.*

Ἂν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου τὰ ψηφία παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ τὰς δεκάδας καὶ τοῦ ψ τὰς μονάδας, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi+\psi=8$.

Ἔτι δέ, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει ἐν ὅλῳ μονάδας $10\chi+\psi$, ἀντιστρόφως δὲ γραφομένων τῶν ψηφίων αὐτοῦ, ἔχει ἐν ὅλῳ μονάδας $10\psi+\chi$, θὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις

$$10\chi+\psi=10\psi+\chi-18 \quad \text{ἢ} \quad \chi-\psi=-2.$$

Οὕτως ἄρα ἔχομεν τὸ σύστημα $\chi+\psi=8$ καὶ $\chi-\psi=-2$, οὗ οἱ ἄγνωστοι πρέπει νὰ εἶναι ἀριθμοὶ θετικοί, ἀκέραιοι καὶ μικρότεροι τοῦ 10.

Ἐκ δὲ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος τούτου, θὰ ἔχωμεν $\chi=3$ καὶ $\psi=5$· ὁ ζητούμενος ἄρα ἀριθμὸς εἶναι ὁ 35.

3ον) *Ἐκ δύο ἐργατῶν ἀποπερατωσάντων ἔργον τι ὁ μὲν ἕτερος, ἐργασθεὶς 5 ἡμέρας πλείονας τοῦ ἑτέρου καὶ λαμβάνων μισθὸν ἡμερήσιον* $\frac{1}{4}$ *περιπλέον ἢ ὅσον ὁ ἕτερος, ἔλαβεν ἐν ὅλῳ ἀμοιβὴν δραχμὰς 150, ὁ δὲ ἕτερος 90. Πόσον ἡμερήσιον μισθὸν ἑκάτερος αὐτῶν ἐλάμβανε καὶ πόσας ἡμέρας εἰργάσθη ;*

Ἂν τοῦ ἑτέρου τὸ μὲν ἡμερήσιον κέρδος παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ, τὰς δὲ ἡμέρας, καθ' ἃς εἰργάσθη, διὰ τοῦ ψ, τότε τοῦ ἑτέρου τὸ μὲν ἡμερήσιον κέρδος θὰ εἶναι $\chi+\frac{\chi}{4}$, ἤτοι $\frac{5\chi}{4}$, αἱ δὲ ἡμέραι, καθ' ἃς εἰργάσθη, $\psi+5$, καὶ οὕτω θὰ προκύψῃ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} \frac{5\chi}{4}.(\psi+5)=150 \\ \chi.\psi \qquad = 90, \end{cases}$$

ἤτοι τὸ ἰσοδύναμον $\chi.\psi+5.\chi=120$ καὶ $\chi.\psi=90$, οὗτινος οἱ ἄγνωστοι πρέπει νὰ εἶναι ἀριθμοὶ θετικοί.

Ἐκ δὲ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος τούτου, θὰ προκύψῃ ἡ λύσις $\chi=6$, $\psi=15$· ἐξ ἧς καὶ $\frac{5\chi}{4}=7{,}50$ καὶ $\psi+5=20$.

4ον) *Ἔδωκέ τις εἰς τὸν ὑπηρέτην του δραχμὰς 8, ἵνα ἀγοράσῃ 3 ὀκάδας ζακχάρεως καὶ 5 ὀκάδας σάπωνος ἀντὶ δραχμῶν 7.10. Οὗτος δὲ λησμονήσας ἠγόρασε 5 ὀκάδας ζακχάρεως καὶ 3 ὀκάδας σάπωνος ἀντὶ δραχμῶν 8,10.*

Τίς ἦτο ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς ἑκατέρου τῶν εἰδῶν τούτων;

Ἂν τὴν τιμὴν ἑκάστης ὀκᾶς τῆς μὲν ζακχάρεως παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ, τοῦ δὲ σάπωνος διὰ τοῦ ψ, θὰ προκύψῃ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 3\chi+5\psi=7{,}10 \\ 5\chi+3\psi=8{,}10, \end{cases}$$

οὗ οἱ ἄγνωστοι πρέπει νὰ εἶναι ἀριθμοὶ θετικοί. Ἐκ δὲ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος τούτου, θὰ ἔχωμεν $\chi=1{,}20$ καὶ $\psi=0{,}70$.

5ον) ***Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν τὸ μὲν τρίτον τοῦ ἑτέρου νὰ εἶναι ἴσον τῷ ἡμίσει τοῦ ἑτέρου ἠλαττωμένῳ κατὰ μονάδα, ὁ δὲ ἕτερος νὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὰ δύο τρίτα τοῦ ἑτέρου ηὐξημένα κατὰ δύο.***

Ἂν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ καὶ τοῦ ψ, θὰ προκύψῃ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} \frac{\chi}{3}=\frac{\psi}{2}-1 \\ \psi=\frac{2\chi}{3}+2. \end{cases}$$

Ἂν δὲ ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει ἀντὶ τοῦ ψ ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν αὐτοῦ διδομένην ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως, θὰ προκύψῃ τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$0=0 \quad \text{καὶ} \quad \psi=\frac{2\chi}{3}+2.$$

Οὕτως, ἐπειδὴ ἡ ἑτέρα τῶν ἐξισώσεων ἀνήχθη εἰς ταυτότητα, ἔχομεν μίαν μόνην ἐξίσωσιν μετὰ δύο ἀγνώστων, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἀπείρους λύσεις (§ 143).

6ον) *Ἱέρων ὁ τύραννος τῶν Συρακουσῶν δοὺς εἰς χρυσοχόον ποσὸν χρυσοῦ ἀνέθηκεν αὐτῷ τὴν κατασκευὴν στεφάνου τοῦ Διός. Μετὰ δὲ τὴν κατασκευὴν ζυγισθεὶς ὁ στέφανος εὑρέθη ὅτι εἶχε βάρος 7465 γραμμαρίων. Ὑποπτεύσας δὲ ὁ Ἱέρων μήπως ὁ χρυσοχόος ἔκλεψε μέρος τοῦ χρυσοῦ καὶ ἀντεκατέστησεν ἀντ' αὐτοῦ ἴσον ποσὸν ἀργύρου, ἠρώτησε τὸν Ἀρχιμήδην, ἂν δύναται νὰ ἀνακαλύψῃ τὴν κλοπὴν χωρὶς νὰ βλάψῃ τὸν στέφανον. Ὁ Ἀρχιμήδης εὑρὼν κατὰ τύχην ὅτι πᾶν σῶμα βυθιζόμενον εἰς τὸ ὕδωρ ἀποβάλλει τόσον ἐκ τοῦ ἑαυτοῦ βάρους, ὅσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὑπ' αὐτοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος, ἐζύγισεν εἶτα τὸν στέφανον ἐντὸς τοῦ ὕδατος καὶ εὗρεν ὅτι οὗτος ἀπέβαλε 467 γραμμάρια. Γινώσκων δὲ ἤδη ὁ Ἀρχιμήδης ὅτι ἐν τῷ ὕδατι ὁ μὲν χρυσὸς ἀποβάλλει τὰ 0,052 τοῦ ἑαυτοῦ βάρους, ὁ δὲ ἄργυρος τὰ 0,095 ἀνεκάλυψε τὴν κλοπήν.*

Ζητεῖται πόσος χρυσὸς καὶ πόσος ἄργυρος ὑπῆρχεν ἐν τῷ στεφάνῳ;

Πρὸς τοῦτο, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐν τῷ στεφάνῳ γραμμαρίων τοῦ μὲν χρυσοῦ παρασταθῇ διὰ τοῦ χ, τοῦ δὲ ἀργύρου διὰ τοῦ ψ, θὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις

$$\chi+\psi=7465 \qquad (1).$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῷ ὕδατι ἀποβάλλουσιν ἐκ τοῦ ἑαυτῶν βάρους τὰ μὲν χ γραμμάρια τοῦ χρυσοῦ $\frac{52\,\chi}{1000}$ γραμμάρια, τὰ δὲ ψ γραμμάρια τοῦ ἀργύρου $\frac{95.\psi}{1000}$ γραμμάρια, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων ἀποβαλλομένων βαρῶν ἀποτελεῖ τὴν ὅλην ἐν τῷ ὕδατι ἀπώλειαν τοῦ βάρους τοῦ στεφάνου, θὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{52\chi}{1000}+\frac{95\psi}{1000}=467, \quad \text{ἢ ἡ} \quad 52\chi+95\psi=467000 \qquad (2).$$

Τοῦ συστήματος δὲ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων (1) καὶ (2) οἱ ἄγνωστοι πρέπει νὰ εἶναι ἀριθμοὶ θετικοί. Λύοντες δὲ τοῦτο εὑρίσκομεν

$$\chi=5631\frac{42}{43} \quad \text{καὶ} \quad \psi=1833\frac{1}{43}$$

7ον) *Ἐκ τριῶν ἀνθρώπων ὁ μὲν ἔδωκεν εἰς ἑκάτερον τῶν δύο ἄλλων τόσας δραχμάς, ὅσας ἑκάτερος αὐτῶν εἶχεν· ὁ δὲ ἔδωκεν εἰς ἑκάτερον τῶν δύο ἄλλων τόσας δραχμάς, ὅσας ἑκάτερος αὐτῶν τότε εἶχεν· τέλος δὲ ὁ γ' ἔδωκεν εἰς ἑκάτερον τῶν δύο ἄλλων τόσας* *δραχμάς, ὅσας ἑκάτερος αὐτῶν τότε εἶχε. Μετὰ τοῦτο ὁ μὲν εἶχε 40 δραχμάς, ὁ δὲ 60, ὁ δὲ 190.*

Πόσας ἕκαστος αὐτῶν ἐν τῇ ἀρχῇ εἶχεν;

Ἂν παραστήσωμεν τὰς δραχμὰς τοῦ μὲν α΄ διὰ τοῦ χ, τοῦ δὲ β΄ διὰ τοῦ ψ, τοῦ δὲ τρίτου διὰ τοῦ ω, ἐπειδὴ κατὰ μὲν τὴν πρώτην δόσιν, ἀπὸ μὲν τῶν χ δραχμῶν τοῦ α΄ ἀφῃρέθησαν τόσαι, ὅσαι οἱ δύο ἄλλοι εἶχον, ἤτοι $\psi+\omega$, αἱ δὲ τῶν δύο ἄλλων δραχμαὶ ἐδιπλασιάσθησαν, τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν τῶν τριῶν τούτων ἀνθρώπων τότε ἦτο, τοῦ μὲν α΄ $\chi-\psi-\omega$, τοῦ δὲ β΄ 2ψ, τοῦ δὲ γ΄ 2ω.

Ἔτι δέ, ἐπειδὴ κατὰ τὴν 2αν δόσιν τοῦ μὲν α΄ καὶ τοῦ γ΄ αἱ δραχμαὶ ἐδιπλασιάσθησαν, ἀπὸ δὲ τοῦ β΄ ἀφῃρέθησαν τόσαι δραχμαί, ὅσας οἱ δύο ἄλλοι τότε εἶχον, τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν τῶν τριῶν τούτων ἀνθρώπων τότε ἦτο,

$$2(\chi-\psi-\omega),\quad 2\psi-(\chi-\psi-\omega)-2\omega,\quad 4\omega$$
$$\text{ἢ}\quad 2\chi-2\psi-2\omega,\quad -\chi+3\psi-\omega,\quad 4\omega$$

Πρὸς δὲ τούτοις, ἐπειδὴ κατὰ τὴν 3ην δόσιν τοῦ μὲν α΄ καὶ τοῦ β΄ αἱ δραχμαὶ ἐδιπλασιάσθησαν, ἀπὸ δὲ τοῦ γ΄ ἀφῃρέθησαν τόσαι δραχμαί, ὅσας οἱ δύο ἄλλοι τότε εἶχον, τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν τῶν τριῶν τούτων ἀνθρώπων τότε ἦτο,

$$2(2\chi-2\psi-2\omega),\quad 2(-\chi+3\psi-\omega),\quad 4\omega-(-2\chi-2\psi-2\omega)-(-\chi+3\psi-\omega)$$
$$\text{ἢ}\quad 4\chi-4\psi-2\omega,\quad -2\chi+6\psi-2\omega,\quad -\chi-\psi+7\omega.$$

Οὕτως ἄρα θὰ προκύψῃ τὸ σύστημα

$$\left\{\begin{aligned} 4\chi-4\psi-4\omega&=40\\ -2\chi+6\psi-2\omega&=60\\ -\chi-\psi+7\omega&=190\end{aligned}\right.\quad(1)\qquad\text{ἢ τὸ}\quad\left\{\begin{aligned} \chi-\psi-\omega&=10\\ -\chi+3\psi-\omega&=30\\ -\chi-\psi+7\omega&=190,\end{aligned}\right.\quad(2)$$

οὗτινος οἱ ἄγνωστοι πρέπει νὰ εἶναι ἀριθμοὶ θετικοί.

Ἐκ δὲ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος τούτου, θὰ προκύψῃ ἡ λύσις

$$\chi=150,\quad \psi=80\quad \text{καὶ}\quad \omega=60.$$

Σημείωσις.—Τὰ δύο τελευταῖα τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων δύνανται νὰ λυθῶσι καὶ ἄνευ ἐξισώσεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

1) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν τὸ ἄθροισμα, ἡ διαφορὰ καὶ τὸ γινόμενον νὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 1, 3. (Ἀπ. 6 καὶ 2).

2) Πίθος περιέχει κρᾶμα ἐκ 12 ὀκάδων οἴνου καὶ 18 ὀκάδων ὕδατος· ἕτερος δὲ πίθος περιέχει κρᾶμα ἐξ 9 ὀκάδων οἴνου καὶ 3 ὀκάδων ὕδατος. Πόσον πρέπει νὰ ληφθῇ ἐξ ἑκατέρου τούτων, ἵνα

σχηματισθῇ κρᾶμα 14 ὀκάδων, οὗ τὸ μὲν ἥμισυ νὰ εἶναι οἶνος, τὸ δὲ ἕτερον ἥμισυ ὕδωρ ; ('Απ. 10 καὶ 4 όκ.).

3) Ἂν κρᾶμα χρυσοῦ καὶ ἀργύρου ἔχῃ βάρος 825 γραμμαρίων, πόσον θὰ εἶναι τὸ βάρος ἑκατέρου τῶν μετάλλων τούτων, δεδομένου ὅτι ἡ ἀξία τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ μίγματι ἀργύρου εἶναι ἴση πρὸς τὴν τοῦ χρυσοῦ καὶ ὅτι ὁ χρυσὸς τιμᾶται 15,5 φορὰς περισσότερονς ἀπὸ ἴσον βάρος ἀργύρου ; ('Απ. 50 καὶ 775 γραμμ.).

4) Ἔλεγέ τις πρὸς ἄλλον ἐρωτήσαντα αὐτόν· «Ἔχω ἡλικίαν διπλασίαν ἐκείνης ἣν εἶχες, ὅταν εἶχον τὴν ἡλικίαν ἣν ἔχεις· ὅταν δὲ θὰ ἔχῃς τὴν ἡλικίαν ἣν ἔχω, τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν ἀμφοτέρων θὰ εἶναι 126 ἔτη. Τίνα ἡλικίαν εἶχεν ἑκάτερος ; ('Απ.56 καὶ 42 ἔτη).

5) Δύο ἄνθρωποι ὀφείλουσιν ἀμφότεροι δραχμὰς 4000. Τούτων ὁ ἕτερος εἶπεν εἰς τὸν ἕτερον : Ἂν μοὶ ἔδιδες τὰ $\frac{5}{6}$ τῶν χρημάτων, ἅπερ ἔχεις, θὰ ἠδυνάμην νὰ πληρώσω τὸ χρέος. Οὗτος δὲ ἀπήντησεν· Ἂν σὺ μοὶ ἔδιδες τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν ἰδικῶν σου χρημάτων, θὰ ἠδυνάμην καὶ ἐγὼ νὰ πληρώσω τὰ ὀφειλόμενα. Πόσα ἑκάτερος αὐτῶν εἶχεν ;
('Απ. 1500 καὶ 3000 δραχ.).

6) Τρεῖς γυναῖκες ἐκόμισαν εἰς τὴν ἀγορὰν ᾠὰ πρὸς πώλησιν. Ἐκ τούτων αἱ δύο ἔδωκαν εἰς τὴν ἄλλην ἡ μὲν ἑτέρα τὸ $\frac{1}{8}$ τῶν ὅσων εἶχεν ᾠῶν, ἡ δὲ ἑτέρα τὰ $\frac{3}{10}$ αὐτῶν, ὥστε πᾶσαι εἶχον τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ᾠῶν. Ὁ δὲ ἀριθμὸς πάντων τῶν ᾠῶν ἦτο 630. Πόσα ᾠὰ ἑκάστη αὐτῶν ἐκόμισεν εἰς τὴν ἀγοράν ; ('Απ. 240, 300 καὶ 90 ᾠά).

7) Ἐργάται λαμβάνοντες τὸν αὐτὸν μισθόν, κερδαίνουσιν ἡμερησίως ποσόν τι δραχμῶν. Καὶ ἂν μὲν ἦσαν κατὰ τέσσαρας ὀλιγώτεροι, ἐλάμβανε δὲ ἕκαστος 25 λεπτὰ ὀλιγώτερον καθ' ἡμέραν, θὰ ἐκέρδαινον ἐν ὅλῳ καθ' ἑκάστην 20 δραχμὰς ὀλιγώτερον. Ἂν δὲ ἦσαν κατὰ τρεῖς ἐργάτας πλείονες, ἐκέρδαινε δὲ ἕκαστος 20 λεπτὰ ἐπὶ πλέον ἡμερησίως, θὰ ἐκέρδαινον ἑκάστην ἡμέραν 16 δραχμὰς καὶ 60 λεπτὰ ἐπὶ πλέον. Πόσοι ἐργάται ἦσαν, πόσον δὲ τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου ;
('Απ. 20 ἐργ., 4 δραχ.).

8) Δεξαμενὴ πληροῦται ὑπὸ μὲν τῶν κρουνῶν Α καὶ Β ὁμοῦ ῥεόντων ἐντὸς 70 λεπτῶν τῆς ὥρας, ὑπὸ δὲ τοῦ Β καὶ τοῦ Γ, ὁμοῦ ῥεόντων ἐντὸς 140 λεπτῶν, ὑπὸ δὲ τοῦ Γ καὶ τοῦ Α, ὁμοῦ ῥεόντων, ἐντὸς 84 λεπτῶν. Ἐντὸς πόσου χρόνου δύναται νὰ πληρωθῇ ἡ δεξα-

μενὴ ὑφ' ἑκάστου κρουνοῦ μόνου ῥέοντος καὶ ἐντὸς πόσου χρόνου ὑπὸ τῶν τριῶν ὁμοῦ ῥεόντων ; ('Απ. 105, 210, 420 καὶ 60 λεπτά).

9) Εὑρεῖν τετραψήφιον ἀριθμόν, ἐξ οὗ, διαιρουμένου διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων αὐτοῦ, προκύπτει πηλίκον μὲν 109, ὑπόλοιπον δὲ 9· καὶ οὗτινος τὸ ψηφίον τῶν μὲν ἑκατοντάδων νὰ εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι τοῦ ψηφίου μονάδων καὶ τοῦ τῶν δεκάδων, τῶν δὲ δεκάδων νὰ εἶναι ἴσον τῷ διπλασίῳ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ ψηφίου τῶν χιλιάδων καὶ τοῦ τῶν μονάδων· καὶ ἐξ οὗ, τῶν ψηφίων αὐτοῦ κατ' ἀντίστροφον τάξιν γραφομένων, νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς μείζων κατὰ 819 μονάδας. ('Απ. 1862).

10) Τρία βυτία, ἴσα καὶ ὅλως ὅμοια, εἶναι πεπληρωμένα τὸ μὲν ὕδατος, τὸ δὲ ἐλαίου, τὸ δὲ ἐλαίου καὶ ὕδατος· εἶναι δὲ τὸ βάρος τοῦ μὲν 1ου α ὀκάδων, τοῦ δὲ 2ου β, τοῦ δὲ 3ου γ. Πόσον εἶναι τὸ βάρος ἑκάστου βυτίου κενοῦ, πόσον δὲ ὕδωρ καὶ πόσον ἔλαιον περιέχει τὸ τρίτον ;

'Απ. Ἂν παραστήσωμεν τὸ βάρος ἑκάστου μὲν βυτίου κενοῦ διὰ τοῦ φ, τοῦ δὲ ἐν τῷ 3ῳ βυτίῳ ὕδατος διὰ τοῦ χ, τοῦ δὲ ἐλαίου διὰ τοῦ ψ, τὸ δὲ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου διὰ τοῦ ε, θὰ προκύψῃ ἡ λύσις

$$\varphi = \frac{\beta - \alpha\varepsilon}{1-\varepsilon},\quad \chi = \frac{\gamma - \beta}{1-\varepsilon},\quad \psi = \frac{(\alpha-\gamma)\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

11) Ἐκ σιδηροδρομικοῦ σταθμοῦ ἀνεχώρησεν ἀτμάμαξα μετὰ ταχύτητος τ· ἐκ τοῦ αὐτοῦ σταθμοῦ ἀνεχώρησε μετά τινα χρόνον ἄλλη ἀτμάμαξα μετὰ ταχύτητος τ′, διευθυνομένη πρὸς τὸ αὐτὸ καὶ ἡ προτέρα σημεῖον. Ὑπελογίσθη δὲ ὁ μεταξὺ τῶν δύο ἀναχωρήσεων χρόνος οὕτως, ὥστε ἀμφότεραι νὰ φθάσωσιν εἰς ὡρισμένον σημεῖον συγχρόνως. Ἀλλ' ἡ πρώτη ἀτμάμαξα διανύσασα τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὁδοῦ, ἠναγκάσθη νὰ ἐλαττώσῃ τὴν ταχύτητα αὐτῆς εἰς τὸ ἥμισυ τῆς προτέρας· τούτου δὲ ἕνεκα συνηντήθησαν α χιλιόμετρα πρὸ τοῦ ὡρισμένου σημείου. Ζητεῖται ἡ ἀπὸ τοῦ σιδηροδρομικοῦ σταθμοῦ ἀπόστασις τοῦ σημείου τῆς συναντήσεως.

'Απ. Ἂν τὸ μὲν μῆκος τῆς ὁδοῦ παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ, τὸν δὲ μεταξὺ τῶν δύο ἀναχωρήσεων μεσολαβήσαντα χρόνον διὰ τοῦ ψ, θὰ ἔχωμεν $\chi = \left(2 - \frac{\tau}{\tau'}\right).\alpha$ καὶ $\psi = 3.\frac{\tau - \tau'}{\tau\,\tau'}\left(2 - \frac{\tau}{\tau'}\right).\alpha.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΠΕΡΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

151. Ἐκ τῆς ἀρχικῆς ἰδιότητος τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, καθ' ἥν, ἂν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἀνίσους προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ἡ ἀνισότης δὲν μεταβάλλεται, καὶ ἐκ τῶν ἀποδειχθεισῶν πρὸς ἀλλήλους σχέσεων τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν (§44), προκύπτουσιν αἱ ἑξῆς ἰδιότητες περὶ τῶν ἀνισοτήτων τῶν ἀριθμῶν·

α') *Ἂν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προστεθῶσιν ἀριθμοὶ ἄνισοι, ὁ μὲν μείζων εἰς τὸν μείζονα, ὁ δὲ ἐλάσσων εἰς τὸν ἐλάσσονα, ἡ ἀνισότης μένει.*

Λέγω δηλαδὴ ὅτι, ἂν $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\gamma>\beta+\delta$.

Διότι, ἂν $\alpha-\beta=\theta$ καὶ $\gamma-\delta=\theta'$, θὰ εἶναι καὶ

$$\alpha+\gamma-(\beta+\delta)=\theta+\theta'\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ αἱ διαφοραὶ θ καὶ θ' εἶναι ἀριθμοὶ θετικοὶ (§ 44), καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $\theta+\theta'$ εἶναι ἀριθμὸς θετικός· θὰ ἔχωμεν ἄρα

$$\alpha+\gamma>\beta+\delta.$$

β') *Ἂν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ὄντα διάφορον τοῦ 0, ἡ ἀνισότης μένει μέν, ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι θετικός, ἀντιστρέφεται δέ, ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.*

Πρὸς τοῦτο ἔστω $\alpha>\beta$, ὅτι δὲ $\alpha-\beta=\theta$· θὰ εἶναι ἄρα καὶ $\alpha.\mu-\beta.\mu=\theta.\mu$. Οὕτως, ἂν μὲν ὁ μ εἶναι θετικός, καὶ ὁ $\theta.\mu$ θὰ εἶναι ὡσαύτως θετικός· ἐπομένως $\alpha.\mu>\beta.\mu$· ἂν δὲ ὁ μ εἶναι ἀρνητικός, καὶ ὁ $\theta.\mu$ θὰ εἶναι ὡσαύτως ἀρνητικός· καὶ ἐπομένως $\alpha.\mu<\beta.\mu$.

152. ***Πόρισμα.*** — *Ἂν ἀμφότερα τὰ μέλη ἀνισότητος τραπῶσιν εἰς τοὺς ἀντιθέτους αὐτῶν ἀριθμούς, ἤτοι ἂν ἀμφότερα πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ —1, ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται.*

Κατὰ ταῦτα ἐκ τῆς ἀνισότητος $-3>-5$, προκύπτει ἡ $3<5$.

153. Καὶ αἱ ἀνισότητες, ὧν τὰ μέλη ἔχουσι γράμματα, δύνανται νὰ ἀληθεύωσιν ἢ ὡς πρὸς πάσας τὰς τιμὰς τῶν ἐν ἑαυταῖς γραμμάτων, ἢ μόνον ὡς πρός τινας αὐτῶν, ἢ ὡς πρὸς οὐδεμίαν· καλοῦνται δὲ τότε τὰ γράμματα ταῦτα *ἄγνωστοι* τῆς ἀνισότητος.

Αἱ γενικαὶ ἰδιότητες (§ 99) καὶ (§ 102) τῶν ἐξισώσεων ἀληθεύουσι καὶ περὶ τῶν ἀνισοτήτων, ὧν τὰ μέλη ἔχουσιν ἀγνώστους· ἡ δὲ ἀλήθεια τούτων ἀποδεικνύεται ὡς καὶ ἐν ταῖς ἐξισώσεσι· πλὴν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἀνισότητος πρέπει νὰ εἶναι ἀριθμὸς θετικός· αἱ οὕτω δὲ ἀπ' ἀλλήλων προκύπτουσαι ἀνισότητες εἶναι ἰσοδύναμοι, ἤτοι ἑκατέρα τούτων εἶναι ἀκολουθία τῆς ἑτέρας. Ἂν δὲ ἀνισότης λάβῃ τοιαύτην μορφήν, ὥστε τὸ μὲν ἕτερον τῶν μελῶν αὐτῆς νὰ ἀποτελῆται ἐκ μόνου τοῦ ἀγνώστου, τὸ δὲ ἕτερον ἐκ τῶν γνωστῶν, τότε λέγομεν ὅτι ἡ ἀνισότης ἐλύθη.

Ἔστω πρὸς ἐπίλυσιν ἡ ἀνισότης $\frac{3\chi}{4}-\frac{1}{2}>\frac{\chi}{6}+3$· ἂν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 12, θὰ προκύψῃ ἡ πρὸς ταύτην ἰσοδύναμος ἀνισότης $9\chi-6>2\chi+36$, ἐξ ἧς χωριζομένων τῶν γνωστῶν ὅρων ἀπὸ τῶν λοιπῶν, θὰ προκύψῃ πάλιν ἡ ταύτῃ ἰσοδύναμος ἀνισότης $9\chi-2\chi>36+6$, ἤτοι ἡ $7\chi>42$, ἐξ ἧς διαιρουμένων ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς διὰ τοῦ 7, θὰ προκύψῃ ἡ ἰσοδύναμος τῇ δεδομένῃ ἀνισότης $\chi>6$· ἡ δεδομένη δηλαδὴ ἀνισότης ἀληθεύει, μόνον ἂν ὁ ἀριθμὸς χ εἶναι μείζων τοῦ 6.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι ἡ ἐπίλυσις τῶν ἀνισοτήτων γίνεται ὡς καὶ ἡ τῶν ἐξισώσεων (§ 105).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἐπιλῦσαι τὴν ἀνισότητα $5\chi-\frac{\chi}{2}-\frac{1}{3}>3\chi-\frac{1}{6}+\frac{\chi}{3}$.

2) Τίνες ἀριθμοὶ ἀκέραιοι, θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί, δύνανται νὰ ἀληθεύωσιν ἅμα τὰς ἑξῆς δύο ἀνισότητας;

$$7\chi-2>3\chi-22 \quad \text{καὶ} \quad \frac{5\chi+1}{6}<\frac{\chi+4}{3}.$$

Ἐπειδὴ ἐκ τῶν ἀνισοτήτων τούτων προκύπτουσιν αἱ πρὸς ταύτας ἰσοδύναμοι δύο ἀνισότητες, ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἡ $\chi>-5$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας ἡ $\chi<2\frac{1}{3}$, συνάγεται ὅτι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$· διότι οὗτοι περιέχονται μεταξὺ τοῦ -5 καὶ τοῦ $2\frac{1}{3}$.

3) Τίνες ἀριθμοὶ ἀκέραιοι, θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί, δύνανται νὰ ἀληθεύωσιν ἅμα τὰς ἑξῆς δύο ἀνισότητας;

$$5\chi-3>3\chi+\frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad 2(\chi-3)<\frac{3\chi-10}{2}.$$

4) Ἀποδεῖξαι τὴν ἀλήθειαν τῶν ἑξῆς ἀνισοτήτων

$$\frac{\alpha}{6}+\frac{6}{\alpha}>2, \quad 3(1+\alpha^2+\alpha^4)>(1+\alpha+\alpha^2)^2$$

καὶ
$$\alpha^2+6^2+\gamma^2>\alpha 6+6\gamma+\gamma\alpha.$$

5) Ἀποδεῖξαι ὅτι ὁ μέσος ἀριθμητικὸς δύο ἀριθμῶν α καὶ 6 εἶναι μείζων τοῦ μέσου αὐτῶν γεωμετρικοῦ.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γʹ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Αʹ.

ΠΕΡΙ ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

154. Πρὸς μέτρησιν μεγέθους Β δι' ἄλλου ὁμοειδοῦς μεγέθους Α, λαμβανομένου ὡς μονάδος, ἤτοι πρὸς εὕρεσιν τοῦ τρόπου καθ' ὃν παράγεται τὸ Β ἐκ τοῦ Α καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ, ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν κοινὸν αὐτῶν μέτρον (ἂν ὑπάρχῃ τοιοῦτον), ἤτοι ὁμοειδὲς μέγεθος, ἐξ οὗ ἐπαναλαμβανομένου νὰ ἀποτελῶνται ἀμφότερα.

Τῶν ὁμοειδῶν μεγεθῶν τὰ μὲν κοινὸν μέτρον ἔχοντα καλοῦνται σύμμετρα πρὸς ἄλληλα, τὰ δὲ μὴ κοινὸν μέτρον ἔχοντα ἀσύμμετρα.

Οὕτω δέ, ἂν τὸ κοινὸν μέτρον περιέχηται ἐν μὲν τῇ μονάδι τρὶς ἐν δὲ τῷ μετρητέῳ μεγέθει τετράκις, ὁ τὸ μέγεθος τοῦτο παριστῶν ἀριθμὸς εἶναι ὁ $\frac{4}{3}$· ἂν δὲ δὲν ὑπάρχῃ κοινὸν αὐτῶν μέτρον, ὡς ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἀποδεικνύεται περί τε τῆς διαγωνίου τετραγώνου καὶ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ, λαμβανομένης ὡς μονάδος, ἔτι δὲ καὶ περὶ ἄλλων μεγεθῶν, εἶναι ἀδύνατον ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ νὰ μετρηθῇ ἀκριβῶς τὸ ἕτερον μέγεθος διὰ τοῦ ἑτέρου, ὁ δὲ ἐκ τῆς μετρήσεως προκύπτων τότε ἀριθμὸς ὁρίζεται κατὰ προσέγγισιν.

Οὕτως, ἂν διαιρέσωμεν τὴν μονάδα εἰς πολλὰ ἴσα μέρη, οἷον εἰς 1000, ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι τὸ μετρητέον μέγεθος περιέχει 258 ἐκ τῶν μερῶν τούτων καὶ μέρος τι ἔλασσον ἑνὸς τῶν ἴσων τούτων μερῶν, ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν τὸ μετρητέον μέγεθος θὰ εἶναι μείζων μὲν τοῦ $\frac{258}{1000}$ ἐλάσσων δὲ τοῦ $\frac{259}{1000}$. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ μετρητέον μέγεθος θὰ παρίσταται διὰ τοῦ ἑτέρου τῶν κλασμάτων τούτων κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$. Ἂν δὲ πάλιν διαιρέσωμεν τὴν μονάδα εἰς 10000 ἴσα μέρη, ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν τὸ μετρητέον μέγεθος θὰ λαμβάνηται κατὰ προσέγγισιν μικροτέραν τοῦ $\frac{1}{10000}$ καὶ ἐφεξῆς οὕτως.

Ὁ δὲ τὸ ἀσύμμετρον τοῦτο μέγεθος παριστῶν ἀριθμὸς ἀποτελούμενος, ὡς ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἀποδεικνύεται, ἀπὸ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικὰ καλεῖται ἀριθμὸς *ἀσύμμετρος* καὶ λαμβάνεται μεθ᾿ ὁσησδήποτε ἂν θέλωμεν προσεγγίσεως.

155. Ἀσύμμετροι ὡσαύτως ἀριθμοὶ προκύπτουσι καὶ ἐκ τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, οἵτινες δὲν εἶναι τέλειαι δυνάμεις· διότι, ὡς ἀπεδείχθη (§ 55), αἱ ῥίζαι τῶν τοιούτων ἀριθμῶν οὐδὲ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ δύνανται νὰ εἶναι.

156. Ἀνάγκη ἄρα νὰ ἐπαυξήσωμεν τὸ ὑπάρχον σύστημα τῶν ἀριθμῶν διὰ προσθήκης νέων ἀριθμῶν τοιούτων, ὥστε καὶ τὰ ῥηθέντα ζητήματα νὰ λύωνται, καὶ οἱ νόμοι τῶν πράξεων νὰ μένουν πάντοτε οἱ αὐτοί. Πρὸς τοῦτο ὁδηγούμεθα παρατηροῦντες ὅτι πρὸς σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος 1 καὶ τῶν δεκαδικῶν μονάδων $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... τὰ πλεῖστα τῶν κλασμάτων ἔχουσιν ἀνάγκην ἀπείρου πλήθους τοιούτων μονάδων.

Π.χ. Ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{7}{5}$, $\frac{6}{25}$, $\frac{7}{6}$, τὸ μὲν $\frac{7}{5}$ γίνεται 1,4, τὸ δὲ $\frac{6}{25}$ γίνεται 0,24· τὸ δὲ $\frac{7}{6}$ γίνεται ἐκ τῶν ἀπείρων ἑπομένων μονάδων 1,16666..., ἂν αἱ μονάδες αὗται νοηθῶσιν ὡς ἓν ὅλον ἀποτελοῦσαι. Τὰ δὲ οὕτω προκύπτοντα ἄπειρα αὐτῶν δεκαδικὰ ψηφία ἀπό τινος ψηφίου ἀρχόμενα ἐπαναλαμβάνονται πάντοτε τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Ὅπως δὲ αἱ ἄπειροι τὸ πλῆθος δεκαδικαὶ μονάδες θεωροῦνται ὅτι συναποτελοῦσιν ἀριθμόν, ἂν τὰ ψηφία, δι᾿ ὧν αὗται γράφονται, ἔχωσι τὴν εἰρημένην τάξιν, οὕτως οὐδὲν κωλύει νὰ δεχθῶμεν ὅτι τοιαῦται μονάδες ἀποτελοῦσιν ἀριθμόν, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὰ ψηφία, δι᾿ ὧν αὗται γράφονται.

157. Ἐκ δὲ τούτων συνάγεται ὁ ἑξῆς ὁρισμός·

Τὸ πλῆθος τῶν δεκαδικῶν μονάδων, οὗτινος αἱ μονάδες ἑκάστης τάξεως δὲν εἶναι πλείονες τῶν ἐννέα, λαμβάνεται ὡς ἀριθμός, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὰ ψηφία, δι᾿ ὧν αὗται γράφονται.

Κατὰ ταῦτα ἡ τοῦ 2 τετραγωνικὴ ῥίζα 1,41421356... εἶναι ἀριθμὸς ὡρισμένος, διότι τὰ ψηφία αὐτοῦ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένα.

Ὁρισμὸς τῆς ἰσότητος καὶ τῆς ἀνισότητος.

158. *Ἀριθμὸς λέγεται* μ ε ί ζ ω ν *ἄλλου ἀριθμοῦ, ἂν περιέχῃ πλὴν τῶν μονάδων αὐτοῦ καὶ ἄλλας.*

159. *Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, ἂν πᾶς ἀριθμός, ἀκέραιος ἢ κλασματικός, μικρότερος ὢν τοῦ ἑτέρου αὐτῶν εἶναι καὶ τοῦ ἑτέρου μικρότερος.*

Κατὰ ταῦτα οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 0,999... εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους· διότι πᾶς ἀριθμός, οἷον ὁ $\frac{752}{753}$, μικρότερος ὢν τῆς μονάδος 1, εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ $\frac{999}{1000}$· διότι ὁ μὲν $\frac{999}{1000}$ διαφέρει τῆς μονάδος κατὰ $\frac{1}{1000}$, ὁ δὲ $\frac{752}{753}$ διαφέρει αὐτῆς κατὰ $\frac{1}{753}$, ἤτοι περισσότερον· ὁ ἀριθμὸς ἄρα $\frac{752}{753}$, μικρότερος ὢν τοῦ 0,999, εἶναι καὶ τοῦ 0,99999.... μικρότερος· καὶ τἀνάπαλιν ἀληθεύει· ὁσαδήποτε ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ ἂν ληφθῶσι, προκύπτει πάντοτε ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος, ὥστε $1=0,999....$ Ὡσαύτως ἀποδεικνύεται ὅτι $0,1=0,0999...$ καὶ ὅτι $0,01=0,00999....$ καὶ ἐφεξῆς οὕτως.

Ἰσότης καὶ ἀνισότης τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

160. Ἵνα δύο ἀριθμοὶ ἐξ ἀκεραίων καὶ δεκαδικῶν μονάδων συγκείμενοι εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, πρέπει ἢ τὰ ὁμοταγῆ αὐτῶν ψηφία νὰ εἶναι πάντα προφανῶς τὰ αὐτά, ἢ τὰ πρῶτα αὐτῶν ὁμοταγῆ ψηφία, καθ' ἃ διαφέρουσιν ἀλλήλων, νὰ ἔχωσι διαφορὰν 1· τὰ δὲ ἀκόλουθα ψηφία τοῦ μὲν ἔχοντος τὸ μικρότερον ψηφίον νὰ εἶναι πάντα 9, τοῦ δὲ ἔχοντος τὸ μεῖζον νὰ εἶναι πάντα 0· ἄλλως οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι ἄνισοι πρὸς ἀλλήλους.

Π. χ. ἔστωσαν δύο ἴσοι πρὸς ἀλλήλους δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ 5,147... καὶ 5,146....

Ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{1000}$, ὅπερ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς περὶ πλέον ἔχει, ἰσοῦται τῷ 0,000999..., ἕπεται ὅτι ὁ πρῶτος ἀριθμὸς ἰσοῦται τῷ 5,146999... ηὐξημένῳ κατὰ τὰς μονάδας τῶν ἀνωτέρων τοῦ χιλιοστοῦ τάξεων, ἂν ὑπάρχωσι· κατ' ἀκολουθίαν δέ, ἐπειδὴ οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοὶ ἐλήφθησαν ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, εἶναι ἀνάγκη πάντα τὰ λοιπὰ ψηφία τοῦ μὲν πρώτου νὰ εἶναι μηδενικά, τοῦ δὲ δευτέρου 9· ἤτοι ὁ δεύτερος νὰ εἶναι 5,146999...

161. Ἂν τὰ πρῶτα ὁμοταγῆ ψηφία, καθ' ἃ οἱ ἀριθμοὶ διαφέρουσιν, ἔχωσι διαφορὰν μείζονα τῆς μονάδος 1, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι ἄνισοι πρὸς ἀλλήλους.

Π. χ. ἐκ τῶν ἀριθμῶν 5,148... καὶ 5,146... ὁ δεύτερος εἶναι ἐλάσσων, τοῦ πρώτου· διότι οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὰ ἑπόμενα τούτου ψηφία, δὲν δύναται οὗτος νὰ εἶναι μείζων τοῦ ἀριθμοῦ 5,146999..., ἤτοι τοῦ 5,147· εἶναι ἄρα ἐλάσσων τοῦ πρώτου 5,148...

162. Ὁ νέος ὁρισμὸς τῶν ἀριθμῶν (§ 157) περιλαμβάνει μὲν τοὺς ἀκεραίους καὶ τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμούς, οἵτινες καλοῦνται *σύμμετροι* ἀριθμοί, διότι παριστῶσι τὰ σύμμετρα πρὸς τὴν μονάδα μεγέθη, εἰσάγει δὲ καὶ τοὺς διαφόρους τούτων *ἀσυμμέτρους* ἀριθμούς, οἵτινες ἔχουσι ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά.

163. Καὶ μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν εἰς τοὺς ἤδη γνωστοὺς ἀριθμοὺς οἱ ὁρισμοὶ τῶν τεσσάρων πράξεων μένουσιν οἱ αὐτοί. Δύναται δὲ νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι δυνατὴ ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις, ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, καὶ ὅτι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν πράξεων δὲν μεταβάλλονται.

Δύναται δὲ ἔτι νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι καὶ τετράγωνον καὶ κύβος καὶ ἐν γένει μυοστὴ δύναμις ἄλλου τινὸς ἀριθμοῦ συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου. Πρὸς τούτοις δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶσα εὐθεῖα μετρεῖται καὶ παρίσταται δι' ἀριθμοῦ συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου.

164. Ἐν ταῖς πράξεσι δὲ ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν παραλείποντες κατὰ τὴν σημασίαν τοῦ ζητήματος τὰ ἀπό τινος δεκαδικῆς καὶ ἐφεξῆς τάξεως ψηφία, εὑρίσκομεν ἀριθμοὺς συμμέτρους κατὰ προσέγγισιν ἴσους πρὸς τοὺς δεδομένους, ἐφ' ὧν, ὡς εἰκός, ἐκτελοῦμεν τὰς συνήθεις πράξεις τῶν συμμέτρων ἀριθμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΠΕΡΙ ΟΡΙΩΝ

165. *Μεταβλητὸν* καλεῖται τὸ ποσόν, ὅπερ ἐν ὑπολογισμῷ τινι λαμβάνει διαφόρους τιμὰς ἢ καταστάσεις.

166. *Σταθερὸν* δὲ καλεῖται τὸ ποσόν, ὅπερ ἐν ὑπολογισμῷ τινι μένει πάντοτε τὸ αὐτό.

Καὶ ὁ μὲν ἀριθμός, ὁ παριστῶν μεταβλητὸν ποσόν, καλεῖται *μεταβλητός*, ὁ δὲ παριστῶν σταθερὸν ποσὸν ἀριθμὸς καλεῖται *σταθερός*.

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμός, ὁ παριστῶν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου, εἶναι σταθερός· ἐπίσης ὁ λόγος τῆς διαγωνίου τετραγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ εἶναι ἀριθμὸς σταθερός· ὡσαύτως ἡ εἰς δεδομένον τμῆμα κύκλου ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι ποσὸν σταθερὸν καὶ παρίσταται ἄρα ὑπὸ σταθεροῦ ἀριθμοῦ κ.τ.λ.

167. *Ὅριον* μεταβλητοῦ ἀριθμοῦ καλεῖται σταθερὸς ὡρισμένος ἀριθμός, ἂν ἡ διαφορὰ τοῦ μεταβλητοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ τοῦ σταθεροῦ δύναται νὰ γίνῃ κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἐλάσσων παντὸς δεδομένου ἀριθμοῦ, μένῃ δὲ τοιαύτη καὶ διὰ πάσας τὰς τιμάς, ἃς εἶτα τὸ μεταβλητὸν λαμβάνει.

Ἂν δὲ ὁ μεταβλητὸς ἀριθμὸς ἀπό τινος αὐτοῦ τιμῆς καὶ ἐφεξῆς γίνηται καὶ μένῃ ἀπολύτως ἐλάσσων δεδομένου θετικοῦ ἀριθμοῦ ε, ὁσονδήποτε ἐλαχίστου, τότε λέγομεν ὅτι ὁ μεταβλητὸς οὗτος ἀριθμὸς *τείνει πρὸς τὸ μηδέν*, ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ *ὅτι ἔχει ὅριον τὸ μηδέν*.

Ἂν δὲ ὁ μεταβλητὸς ἀριθμὸς ἀπό τινος αὐτοῦ τιμῆς καὶ ἐφεξῆς γίνηται καὶ μένῃ ἀπολύτως μείζων δεδομένου θετικοῦ ἀριθμοῦ Μ, ὁσονδήποτε μεγάλου, τότε λέγομεν ὅτι ὁ μεταβλητὸς οὗτος ἀριθμὸς *τείνει ἀπολύτως πρὸς τὸ ἄπειρον*, ἤτοι *ὅτι αὐξάνει ἀπολύτως ὑπὲρ πᾶν ὅριον*.

Σημείωσις. — Μεταβλητὸς ἀριθμὸς α δύναται νὰ τείνῃ πρὸς ὅριον Α εἴτε ἐκ τιμῶν ἀεὶ μειζόνων τοῦ Α, εἴτε ἐκ τιμῶν ἀεὶ ἐλασσόνων, εἴτε ἐκ τιμῶν ἄλλοτε ἐλασσόνων καὶ ἄλλοτε μειζόνων τοῦ Α. Δύναται δηλαδὴ ἡ διαφορὰ $\alpha - A = \varepsilon$ νὰ εἶναι ἢ πάντοτε θετική, ἢ πάντοτε ἀρνητική, ἢ ἄλλοτε μὲν ἀρνηνική, ἄλλοτε δὲ θετική. (Ἴδε ἐμὴν Γεωμετρίαν).

Παραδείγματα.

168. 1) Ἂν θεωρήσωμεν δεκαδικόν τινα περιοδικὸν ἀριθμόν, οἷον τὸν 0,353535..., παρατηροῦμεν ὅτι, ἐφ' ὅσον λαμβάνομεν πλείονας τούτου περιόδους ὁ ἀριθμὸς πάντοτε αὐξάνεται, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{35}{99}$ διαφορὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου δύναται νὰ γίνῃ ὅσον μικρὸς θέλωμεν ἀριθμὸς (ἴδε Ἀριθμητ.)· ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι τὸ ὅριον τοῦ δεκαδικοῦ τούτου περιοδικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{35}{99}$.

2) Ἂν ἐν μεταβλητῷ ἀθροίσματι δύο προσθετέων, οἷον τῷ $\chi + \alpha$, ὁ ἕτερος μόνον προσθετέος, ὁ χ, μεταβάλλεται, ἂν μὲν τείνῃ πρὸς τὸ 0, τὸ ἄθροισμα ἔχει προφανῶς ὅριον τὸ α, ἂν δὲ πάντοτε αὐξάνηται ἀπολύτως, τὸ ἄθροισμα αὐξάνεται ἀπολύτως ὑπὲρ πᾶν ὅριον.

3) Ἂν ἐν μεταβλητῷ γινομένῳ δύο παραγόντων, οἷον τῷ $\alpha\chi$, ἐν ᾧ εἶναι ὁ $\alpha > 0$, μόνον δὲ ὁ παράγων χ μεταβάλλεται, ἂν μὲν τείνῃ πρὸς τὸ 0, τὸ γινόμενον ἔχει ὅριον τὸ 0, ἂν δὲ ὁ χ αὐξάνεται πάντοτε ἀπολύτως, τὸ γινόμενον αὐξάνεται ἀπολύτως ὑπὲρ πᾶν ὅριον.

Διότι, ἵνα μὲν $\alpha\chi < \varepsilon$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι ὁ $\chi < \frac{\varepsilon}{\alpha}$,

ἵνα δὲ $\alpha\chi > M$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι ὁ $\chi > \frac{M}{\alpha}$.

Καὶ ἀντιστρόφως· ἂν ὑποτεθῇ ἀληθεύουσαι αἱ δεύτεραι σχέσεις, θὰ προκύψωσιν αἱ πρῶται, ἂν ἀμφότερα τὰ μέλη ἑκατέρας ἐκείνων πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ α.

4) Ὡσαύτως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἂν ἐν τῷ μεταβλητῷ πηλίκῳ $\frac{\alpha}{\chi}$, ἐν ᾧ εἶναι ὁ $\alpha > 0$, μόνον δὲ ὁ διαιρέτης χ μεταβάλλεται, ἂν μὲν τείνῃ πρὸς τὸ 0, τὸ πηλίκον αὐξάνεται ὑπὲρ πᾶν ὅριον, ἂν δὲ ὁ χ πάντοτε αὐξάνηται τὸ πηλίκον ἔχει ὅριον τὸ 0.

Θεώρημα.

169. *Αἱ διαδοχικαὶ δυνάμεις παντὸς ἀριθμοῦ μείζονος τῆς μονάδος εἶναι ἀριθμοὶ μείζονες τῆς μονάδος, ἀεὶ δὲ αὐξανόμενοι ὑπερβαίνουσι πᾶν ὅριον.*

Ἔστω ὁ μείζων τῆς μονάδος ἀριθμὸς $1+\alpha$, ἤτοι ἔστω $1+\alpha > 1$· ἐκ τῆς ἀνισότητος ταύτης προκύπτει (§ 151,6) $(1+\alpha)^2 > 1+\alpha$, ἐκ ταύτης δὲ πάλιν (§ 151,6) $(1+\alpha)^3 > (1+\alpha)^2$ καὶ ἐφεξῆς οὕτως.

Ἐπειδὴ δὲ $(1+\alpha)^2 > 1+2\alpha$, συνάγεται ὅτι

$$(1+\alpha)^3 > (1+2\alpha)(1+\alpha) \quad \text{καὶ} \quad (1+\alpha)^3 > 1+3\alpha.$$

Ἐν γένει δὲ προκύπτει ὅτι $(1+\alpha)^\chi > 1+\alpha\chi$.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ $1+\alpha\chi$ αὐξάνει ὑπὲρ πᾶν ὅριον (Παράδ. 3ον, § 168), διότι τὸ χ αὐξάνεται ἀπεριορίστως, συνάγεται ὅτι καὶ τὸ $(1+\alpha)^\chi$ αὐξάνει ὡσαύτως ὑπὲρ πᾶν ὅριον.

Θεώρημα.

170. *Αἱ διαδοχικαὶ δυνάμεις παντὸς ἀριθμοῦ θετικοῦ ἐλάσσονος τῆς μονάδος εἶναι ἀριθμοὶ ἐλάσσονες τῆς μονάδος, ἀεὶ δὲ ἐλαττούμενοι τείνουσι πρὸς τὸ μηδέν.*

Διότι ἐκ τῆς ἀνισότητος $\alpha < 1$ προκύπτουσιν (§ 151,6) αἱ ἀνισότητες $\alpha^2 < \alpha$, $\alpha^3 < \alpha^2$ καὶ ἐφεξῆς οὕτως.

Ἂν δὲ παραστήσωμεν διὰ τοῦ α' τὸν ἀντίστροφον τοῦ α ἀριθμόν, ὅτε $\alpha' > 1$, ἤτοι ἂν $\alpha = \frac{1}{\alpha'}$, θὰ προκύψῃ $\alpha^\chi = \frac{1}{\alpha'^\chi}$.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 169), τοῦ χ αὐξάνοντος ἀπεριορίστως, τὸ α^{χ} αὐξάνει ὑπὲρ πᾶν ὅριον, συνάγεται (Παράδ. 4ον, § 168) ὅτι τὸ $\alpha^{\chi}=\frac{1}{\alpha'^{\chi}}$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν.

171. ***Σημείωσις***.—Περὶ τῶν ὁρίων ἀληθεύουσι τὰ ἀκόλουθα θεωρήματα, ὧν τὰς ἀποδείξεις, γενομένας ἐν τῇ ἐμῇ Γεωμετρίᾳ, παραλείπομεν ἐνταῦθα.

1ον) *Ἂν μεταβλητοὶ ἀριθμοί, πεπερασμένου πλήθους, ἐξαρτώμενοι ἐκ τῆς μεταβλητῆς χ, ἔχωσιν ὅρια, ὅταν ὁ χ τείνῃ πρὸς ὅριον ἢ αὐξάνηται ἀπεριορίστως, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἔχει ὅριον τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρίων τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

2ον) *Ἂν μεταβλητοὶ ἀριθμοί, πεπερασμένου πλήθους, ἐξαρτώμενοι ἐκ τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς χ, ἔχωσιν ὅρια, ὅταν ὁ χ τείνῃ πρὸς ὅριον ἢ αὐξάνηται ἀπεριορίστως, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἔχει ὅριον τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

3ον) *Ἂν δύο μεταβλητοὶ ἀριθμοί, ἐξαρτώμενοι ἐκ τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς χ, ἔχωσιν ὅρια, ὅταν ὁ χ τείνῃ πρὸς ὅριον ἢ αὐξάνηται ἀπεριορίστως, τὸ πηλίκον αὐτῶν ἔχει ὅριον τὸ πηλίκον τῶν ὁρίων αὐτῶν, ἂν τὸ ὅριον τοῦ διαιρέτου διαφέρῃ τοῦ μηδενός.*

4ον) *Ἂν μεταβλητὸς θετικὸς ἀριθμὸς ἀπείρους λαμβάνων τιμάς, ἀεὶ μὲν αὐξάνηται, μένῃ δὲ ἐλάσσων δεδομένου τινὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει ὅριον· ἂν δὲ ἀεὶ ἐλαττιῶται, ἀναγκαίως τείνει πρὸς ὅριον, ὅπερ δυνατὸν νὰ εἶναι ἴσον τῷ μηδενί.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΠΕΡΙ ΡΙΖΩΝ

172. Ἐν ταῖς γινομέναις ἐπὶ τῶν ῥιζῶν μεταβολαῖς διὰ τὰς ἐν γένει ἁπλοποιήσεις καὶ ἐκτελέσεις τῶν σεσημειωμένων ἐπ' αὐτῶν διαφόρων πράξεων, ἐπὶ παραδείγματος, διὰ τὴν ἐξαγωγὴν ἀρτίας τάξεως ῥίζης θετικοῦ ἀριθμοῦ ἀναλελυμένου εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας κλπ. (§ 52-§ 57), ἀληθεύουσιν ἀπεριορίστως πᾶσαι αἱ προκύψασαι ἰσότητες, ἂν ἐκ τῶν δύο ἀντιθέτων τιμῶν πάσης ἀρτίας τάξεως ῥίζης παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ (54, 2ον), λαμβάνηται πάντοτε μόνον ἡ θετικὴ σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος ἀριθμητικὴ αὐτῆς τιμή.

Οὕτω δὲ ἐν ταῖς πράξεσιν ἐπὶ τῶν ῥιζῶν θὰ περιορισθῶμεν νῦν εἰς τὰς θετικὰς μόνον ῥίζας τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, διότι καὶ ἡ ἐξαγωγὴ περιττῆς τάξεως ῥίζης παντὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς ἰσοβαθμίου ῥίζης τοῦ ἀντιθέτου αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Διότι, ἂν ὁ μὲν ἀριθμὸς α εἶναι ἀρνητικός, ἴσος δὲ πρὸς τὸν $-\alpha'$, ὁ δὲ μ περιττός, ἡ μυοστὴ ῥίζα τοῦ $-\alpha'$, ἤτοι ἡ $\sqrt[\mu]{-\alpha'}$, θὰ εἶναι ἴση τῇ ἀρνητικῇ ἰσοβαθμίῳ ῥίζῃ τοῦ ἀντιθέτου πρὸς τὸν α θετικοῦ ἀριθμοῦ α', ἤτοι θὰ εἶναι $\sqrt[\mu]{-\alpha'}=-\sqrt[\mu]{\alpha'}$.

Διότι, ἐπειδὴ ἐκ ταυτότητος ἔχομεν ὅτι $\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\mu=\alpha$ (§ 53), ἕπεται ὅτι ἡ μυοστὴ δύναμις τοῦ ἀριθμοῦ $\sqrt[\mu]{-\alpha'}$, ἥτις εἶναι $-\alpha'$, ἐπειδὴ ὁ μ εἶναι ἀριθμὸς περιττός, θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν τοῦ ἀριθμοῦ $-\sqrt[\mu]{-\alpha'}$ μυοστὴν δύναμιν $-\alpha'$.

Κατὰ ταῦτα $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2$.

Διότι ὁ κύβος τοῦ -2 εἶναι ὁ ἀριθμὸς -8.

Οὕτω δέ, ἂν ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν ὑπάρχῃ δύναμις ἀριθμοῦ, θὰ δυνάμεθα πολλάκις νὰ ἁπλοποιῶμεν τὴν ῥίζαν.

1ον) *Ἂν ὁ δείκτης τῆς ῥίζης εἶναι ἴσος τῷ βαθμῷ τῆς δυνάμεως, αἱ δύο αὗται πράξεις θὰ ἀναιρῶσιν ἀλλήλας.*

Τουτέστιν θὰ ἔχωμεν $\sqrt[\mu]{\alpha^\mu}=\alpha$.

2ον) *Ἂν ὑπάρχῃ κοινὸς παράγων εἴς τε τὸν δείκτην τῆς ῥίζης καὶ εἰς τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως, θὰ δυνάμεθα νὰ ἐξαλείφωμεν αὐτόν.*

Θὰ ἔχωμεν ἄρα $\sqrt[\mu\sigma]{\alpha^{\rho\sigma}}=\sqrt[\mu]{\alpha^\rho}$.

Διότι ἐκ τῶν δύο τούτων παραστάσεων ὑψουμένων εἰς τὴν $\mu\sigma$ δύναμιν προκύπτουσιν ἴσα ἐξαγόμενα·

διότι $\left(\sqrt[\mu\sigma]{\alpha^{\rho\sigma}}\right)^{\mu\sigma}=\alpha^{\rho\sigma}$, καὶ (§ 47,1η) $\left(\sqrt[\mu]{\alpha^\rho}\right)^{\mu\sigma}=\left[\left(\sqrt[\mu]{\alpha^\rho}\right)^\mu\right]^\sigma=(\alpha^\rho)^\sigma=\alpha^{\rho\sigma}$

Ὡσαύτως θὰ ἔχωμεν καὶ $\sqrt[\mu]{\alpha^{\mu\rho}}=\sqrt[\mu]{(\alpha^\rho)^\mu}=\alpha^\rho$.

3ον) *Ἂν ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν ὑπάρχῃ παράγων ἔχων ἐκθέτην ἴσον τῷ δείκτῃ τῆς ῥίζης, θὰ ἐξάγηται ὁ παράγων ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ, ἂν ἐξαλείφηται ὁ ἐκθέτης αὐτοῦ.*

Θὰ ἔχωμεν ἄρα $\sqrt[\mu]{\alpha^\mu \beta}=\alpha.\sqrt[\mu]{\beta}$.

Διότι, ἂν αἱ δύο αὗται παραστάσεις ὑψωθῶσιν εἰς τὴν μην δύναμιν, προκύπτουσιν ἴσα ἐξαγόμενα·

διότι $\left(\sqrt[\mu]{\alpha^\mu \beta}\right)^\mu = \alpha^\mu.\beta$ καὶ (§ 47,2^{ον}) $\left(\alpha.\sqrt[\mu]{\beta}\right)^\mu = \alpha^\mu.\left(\sqrt[\mu]{\beta}\right)^\mu = \alpha^\mu.\beta.$

Δύναμις ῥιζικοῦ.

173. *Ἵνα ῥίζα ὑψωθῇ εἰς δύναμιν ἀρκεῖ νὰ ὑψωθῇ ὁ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν ἀριθμὸς εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.*

Ἤτοι θὰ ἔχωμεν $\left(\sqrt[\kappa]{\alpha}\right)^\mu = \sqrt[\kappa]{\alpha^\mu}$.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ μη δύναμις τῶν δύο τούτων παραστάσεων εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Διότι(§47,1^{ον}) $\left[\left(\sqrt[\kappa]{\alpha}\right)^\mu\right]^\kappa = \left(\sqrt[\kappa]{\alpha}\right)^{\kappa\mu} = \left[\left(\sqrt[\kappa]{\alpha}\right)^\kappa\right]^\mu = \alpha^\mu$ καὶ $\left(\sqrt[\kappa]{\alpha^\mu}\right)^\kappa = \alpha^\mu.$

Ῥίζαι ῥιζικοῦ.

174. *Ἵνα ἐξαχθῇ ἡ μυοστὴ ῥίζα ἑτέρας ῥίζης ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ δείκτης τῆς ῥίζης ταύτης ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν μ.*

Θὰ ἔχωμεν δηλαδὴ $\sqrt[\mu]{\sqrt[\sigma]{\alpha}} = \sqrt[\mu\sigma]{\alpha}$.

Διότι, ἂν αἱ δύο αὗται παραστάσεις ὑψωθῶσιν εἰς τὴν μ.σ δύναμιν, θὰ προκύψωσιν ἴσα ἐξαγόμενα· ἤτοι

$$\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\sigma]{\alpha}}\right)^{\mu\sigma} = \left[\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\sigma]{\alpha}}\right)^\mu\right]^\sigma = \left(\sqrt[\sigma]{\alpha}\right)^\sigma = \alpha \quad \text{καὶ} \quad \left(\sqrt[\mu\sigma]{\alpha}\right)^{\mu\sigma} = \alpha.$$

Ἀναγωγὴ πολλῶν ῥιζῶν εἰς τὸν αὐτὸν δείκτην.

175. *Ῥίζαι διαφόρου βαθμοῦ τρέπονται εἰς ἄλλας ἰσοβαθμίους, ὡς καὶ ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα· διότι δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸν δείκτην ἑκάστης ῥίζης ἐφ' οἱονδήποτε ἀριθμόν, πολλαπλασιάζοντες ἅμα καὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (§ 172,2^{ον}).*

Οὕτω αἱ ῥίζαι $\sqrt[\mu]{\alpha}$, $\sqrt[\sigma]{\beta}$ γινόμεναι ἰσοβάθμιοι μετασχηματίζονται εἰς τὰς ῥίζας $\sqrt[\mu\sigma]{\alpha^\sigma}$ καὶ $\sqrt[\mu\sigma]{\beta^\mu}$

Ὡσαύτως αἱ ῥίζαι $\sqrt[\mu]{\alpha}$, $\sqrt[\rho]{\beta}$, $\sqrt[\sigma]{\gamma}$ μετασχηματίζονται εἰς τὰς ἰσοβαθμίους $\sqrt[\mu\rho\sigma]{\alpha^{\rho\sigma}}$, $\sqrt[\mu\rho\sigma]{\beta^{\mu\sigma}}$, $\sqrt[\mu\rho\sigma]{\gamma^{\mu\rho}}$.

Δύναται δὲ ὁ κοινὸς δείκτης τῶν ῥιζῶν νὰ εἶναι ἴσος τῷ ἐλαχίστῳ κοινῷ πολλαπλασίῳ τῶν δεικτῶν.

Κατὰ ταῦτα αἱ ῥίζαι $\sqrt[3]{\alpha^2}$, $\sqrt[4]{\beta^3}$, $\sqrt{\gamma}$ μετασχηματίζονται εἰς τὰς ἰσοβαθμίους $\sqrt[12]{\alpha^8}$, $\sqrt[12]{\beta^9}$, $\sqrt[12]{\gamma^6}$.

Γινόμενον πολλῶν ῥιζῶν.

176. *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἰσοβαθμίους ῥίζας ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ ὑπόρριζα, τοῦ δὲ γινομένου νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ἰσοβάθμιον ῥίζαν.*

Ἐπὶ δὲ παραδείγματος $\sqrt[\mu]{\alpha}.\sqrt[\mu]{\beta}.\sqrt[\mu]{\gamma}=\sqrt[\mu]{\alpha.\beta.\gamma}.$

Διότι τὰ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν παραστάσεων τούτων διὰ τῆς ὑψώσεως αὐτῶν εἰς $\mu^{\text{ην}}$ δύναμιν προκύπτοντα ἐξαγόμενα $\left(\sqrt[\mu]{\alpha\beta\gamma}\right)^\mu=\alpha\beta\gamma$ καὶ

$$\left(\sqrt[\mu]{\alpha}.\sqrt[\mu]{\beta}.\sqrt[\mu]{\gamma}\right)^\mu=\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\mu.\left(\sqrt[\mu]{\beta}\right)^\mu.\left(\sqrt[\mu]{\gamma}\right)^\mu=\alpha.\beta.\gamma,$$

εἶναι ἴσα.

Κατὰ ταῦτα $\sqrt{2}.\sqrt{18}=\sqrt{36}=6.$

Πηλίκον δύο ῥιζῶν.

177. *Ἵνα διαιρέσωμεν ῥίζαν δι' ἑτέρας ἰσοβαθμίου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὰ ὑπόρριζα καὶ τοῦ πηλίκου αὐτῶν νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ἰσοβάθμιον ῥίζαν.*

Οὕτω θὰ ἔχωμεν $$\frac{\sqrt[\mu]{\alpha}}{\sqrt[\mu]{\beta}}=\sqrt[\mu]{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Διότι τὰ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν παραστάσεων τούτων διὰ τῆς ὑψώσεως αὐτῶν εἰς τὴν $\mu^{\text{ην}}$ δύναμιν προκύπτοντα ἐξαγόμενα (§ 47, 3ον)

$$\left(\frac{\sqrt[\mu]{\alpha}}{\sqrt[\mu]{\beta}}\right)^\mu=\frac{\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\mu}{\left(\sqrt[\mu]{\beta}\right)^\mu}=\frac{\alpha}{\beta}$$

καὶ (§ 172, 1ον) $\left(\sqrt[\mu]{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\mu=\frac{\alpha}{\beta}$, εἶναι ἴσα.

Κατὰ ταῦτα $$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{9}=3.$$

Παρατηρήσεις.

178. 1) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται, ὅτι τὸ γινόμενον καὶ τὸ πηλίκον δύο οἱωνδήποτε ῥιζῶν ἀνάγονται εἰς μίαν μόνην ῥίζαν.

Οὕτω $\sqrt[\mu]{\alpha^{\kappa}}.\sqrt[\rho]{\alpha^{\sigma}}=\sqrt[\mu\rho]{\alpha^{\kappa\rho}}.\sqrt[\mu\rho]{\alpha^{\mu\sigma}}=\sqrt[\mu\rho]{\alpha^{\kappa\rho+\mu\sigma}}$,

καὶ $$\frac{\sqrt[\mu]{\alpha^{\kappa}}}{\sqrt[\rho]{\alpha^{\sigma}}}=\frac{\sqrt[\mu\rho]{\alpha^{\kappa\rho}}}{\sqrt[\mu\rho]{\alpha^{\mu\sigma}}}=\sqrt[\mu\rho]{\frac{\alpha^{\kappa\rho}}{\alpha^{\mu\sigma}}}=\sqrt[\mu\rho]{\alpha^{\kappa\rho-\mu\sigma}}.$$

Τῆς ἀναγωγῆς δὲ ταύτης γίνεται χρῆσις πρὸς ὑπολογισμὸν κατὰ προσέγγισιν γινομένου καὶ πηλίκου ῥιζικῶν οἱωνδήποτε καὶ ὁσωνδήποτε. Οὕτω, ἂν ἀντὶ τοῦ γινομένου $10.\sqrt{5}$ γράψωμεν τὸν πρὸς αὐτὸ ἴσον ἀριθμὸν $\sqrt{500}$, ἐξαγάγωμεν δὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 500 κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος, θὰ προκύψῃ ὁ 22, ἐνῷ ἐκ τοῦ $10.\sqrt{5}$ προκύπτει μόνον ὁ 20. Τοῦτο δὲ διότι τὸ ἐκ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς τοῦ 5 ῥίζης προκύπτον μικρότερον τῆς μονάδος λάθος δεκαπλασιαζόμενον ὑπερβαίνει αὐτήν. Ὡσαύτως ἀντὶ μὲν τοῦ γινομένου $\sqrt{8}.\sqrt{5}$ γράφομεν $\sqrt{40}$, ἀντὶ δὲ τοῦ $\sqrt{5}.\sqrt{20}$ γράφομεν $\sqrt{100}=10$.

2) Ἡ ἐξαγωγὴ τῆς $\mu^{\eta\varsigma}$ ῥίζης κλάσματος ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς $\mu^{\eta\varsigma}$ ῥίζης ἀκεραίου, ἂν ἀμφοτέρους αὐτοῦ τοὺς ὅρους πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε ὁ παρονομαστὴς νὰ γίνῃ τελεία μυοστὴ δύναμις. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2.3}{3^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3},\quad \sqrt[3]{\frac{3}{4}}=\sqrt[3]{\frac{5.4.4}{4^3}}=\frac{\sqrt[3]{80}}{4}.$$

3) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλασματικῆς παραστάσεως ἔχῃ ῥιζικόν, πολλαπλασιάζοντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ προσήκουσαν παράστασιν, δυνάμεθα νὰ μεταβιβάσωμεν αὐτὸ εἰς τὸν ἀριθμητήν. Ἔστω δὲ τοιαύτη παράστασις ἡ $\frac{2\alpha^3\gamma}{\sqrt{6}}$, ἥτις, ἂν ἀμφότεροι αὐτῆς οἱ ὅροι πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ $\sqrt{6}$, μετασχηματίζεται εἰς τὴν $\frac{2\alpha^3\gamma\sqrt{6}}{\sqrt{6}.\sqrt{6}}$, ἥτις γράφεται καὶ ὧδε $\frac{2\alpha^3\gamma\sqrt{6}}{6}$.

Ἂν δὲ ὁ παρονομαστὴς εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha+\sqrt{6}$, ἧς τὸ α καὶ 6 εἶναι ῥηταὶ παραστάσεις, ἂν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τῆς κλασματικῆς παραστάσεως πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ $\alpha - \sqrt{\beta}$, ὁ παρονομαστὴς ἀπαλλάσσεται τοῦ ῥιζικοῦ, διότι γίνεται $(\alpha+\sqrt{\beta})(\alpha-\sqrt{\beta})=\alpha^2-\beta$, τουτέστιν ῥητός. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν

$$\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{4.5-9.2}=2\sqrt{15}+3\sqrt{6}.$$

Ἂν δὲ ὁ παρονομαστὴς εἶναι τῆς μορφῆς $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}$, ἧς τὸ α καὶ τὸ β καὶ τὸ γ εἶναι ῥηταὶ παραστάσεις, ἂν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τῆς κλασματικῆς παραστάσεως πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὴν διαφορὰν $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})-\sqrt{\gamma}$, τοῦ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ θεωρουμένου ὡς ἑνὸς μόνου ὅρου, ὁ παρονομαστὴς γίνεται $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2-\gamma$, ἤτοι $\alpha+\beta-\gamma+2\sqrt{\alpha\beta}$· ἂν δὲ πάλιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τῆς προκυψάσης κλασματικῆς παραστάσεως πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὴν διαφορὰν $(\alpha+\beta-\gamma)-2\sqrt{\alpha\beta}$, ὁ παρονομαστὴς ἀπαλλάσσεται τοῦ ῥιζικοῦ, διότι γίνεται $(\alpha+\beta-\gamma)^2-4\alpha\beta$.

Τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν μονωνύμων

179. Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον παντὸς μονωνύμου προκύπτει ἐκ τοῦ δεδομένου, ἂν διπλασιασθῶσιν οἱ ἐκθέται τῶν παραγόντων αὐτοῦ, συνάγεται ὅτι· *ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παντὸς ἀκεραίου μονωνύμου προκύπτει ἐκ τοῦ δεδομένου μονωνύμου, ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἑκάστου παράγοντος.*

Ἐπειδὴ δὲ ἕκαστος παράγων εἶναι δύναμις ἀριθμοῦ τινος, ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα ἐξάγεται διαιρουμένου τοῦ ἐκθέτου αὐτῆς διὰ τοῦ 2. Κατὰ ταῦτα εἶναι

$$\sqrt{25\alpha^4\beta^2}=\pm 5\alpha^2\beta \quad \text{καὶ} \quad \sqrt{18\alpha^2\beta^3}=\sqrt{9.2\alpha^2\beta^2.\beta}=\pm 3\alpha\beta\sqrt{2\beta}.$$

Πρὸ ἑκάστου δὲ τῶν ἐξαγομένων τούτων ἐγράφη τὸ διπλοῦν σημεῖον $\pm$, διότι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ὡς καὶ πᾶσα ἀρτίου βαθμοῦ ῥίζα, ἔχει δύο ἀντιθέτους τιμάς, καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν δύναται τὸ ἐξαγόμενον νὰ λαμβάνηται καὶ θετικῶς καὶ ἀρνητικῶς.

Ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ παραδείγματι, ἐπειδὴ τῶν παραγόντων 18 καὶ β^3 δὲν ἐξήγετο ἀκριβῶς ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἀνελύθη ἑκάτερος αὐτῶν εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, ὧν τοῦ ἑτέρου τούτων, τοῦ 9 καὶ τοῦ β^2, ἐξήγετο ἀκριβῶς ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα.

Ἡ τετραγωνικὴ δὲ ῥίζα κλασματικοῦ μονωνύμου ἐξάγεται, ἂν ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἑκατέρου τῶν ὅρων.

Κατὰ ταῦτα εἶναι $\sqrt{\frac{16\alpha^4\beta^2}{25\gamma^6\delta^4}} = \pm \frac{4\alpha^2\beta}{5\gamma^3\delta^2}$.

Κατ' ἀνάλογον δὲ τρόπον εὑρίσκεται καὶ ἡ κυβικὴ ῥίζα τῶν μονωνύμων, ὡς καὶ ἡ ῥίζα παντὸς ἄλλου βαθμοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἁπλοποιῆσαι τὰς ἀκολούθους ἀρρήτους παραστάσεις καὶ ἐκτελέσαι τὰς ἐπ' αὐτῶν σεσημειωμένας πράξεις·

$$\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{6}, \quad \sqrt{45\gamma^3}-\sqrt{80\gamma^3}+\sqrt{5\alpha^2\gamma}$$

$$\sqrt{\frac{\alpha^4\gamma}{\beta^3}}+\sqrt{\frac{\alpha^2\gamma^3}{\beta\delta^2}}-\sqrt{\frac{\alpha^2\gamma\delta^2}{\beta\gamma^2}}, \quad \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\gamma^2}}+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta^2}-\frac{1}{\beta}}$$

2) Ἐκτελέσαι τὰς ἀκολούθους πράξεις

$$\left(\alpha\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\beta\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)\left(\alpha\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\beta\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right),$$

$$\left(\sqrt{1-\chi}+\frac{1}{\sqrt{1+\chi}}\right):\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-\chi^2}}\right).$$

$$\frac{\chi}{\chi-\sqrt{\chi^2-1}}-\frac{\chi}{\chi+\sqrt{\chi^2-1}} \text{ καὶ } \frac{\chi+\sqrt{\chi}}{\chi-\sqrt{\chi}}-\frac{\chi-\sqrt{\chi}}{\chi+\sqrt{\chi}}.$$

3) Καταστῆσαι ῥητὸν τὸν παρονομαστὴν τῶν ἑξῆς κλασμάτων

$$\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^3}-\sqrt{\alpha\beta^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}, \quad \frac{\alpha}{\sqrt[3]{\chi}-\sqrt[3]{\psi}},$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} \text{ καὶ } \frac{\gamma}{\sqrt{\chi-1}-\sqrt{\chi-2}}.$$

4) Ἁπλοποιῆσαι τὰς ἑξῆς δυνάμεις καὶ ῥίζας

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}\chi\sqrt{\frac{\chi}{2}}}, \quad \left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{\delta\alpha^3}}\right)^5, \quad \sqrt{\frac{\chi^3+2\alpha^2+\alpha}{\beta^3+\beta^2\chi}}.$$

5) Ἀποδεῖξαι τὴν ἀλήθειαν τῶν ἑξῆς ἰσοτήτων

$$\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3} \text{ καὶ } \sqrt{\chi}+\sqrt{\psi}=\sqrt{\chi+\psi+2\sqrt{\chi\psi}},$$

ἐκ τῆς δευτέρας τῶν ὁποίων συνάγονται καὶ αἱ ἰσότητες

$$\sqrt{2}+\sqrt{18}=\sqrt{32}, \text{ καὶ } \sqrt{4+2\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΠΕΡΙ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

180. Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον παντὸς θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ εἶναι πάντοτε ἀριθμὸς θετικός, συνάγεται ὅτι τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, οἷον τοῦ -4, τοῦ -9 κλπ., δὲν ὑπάρχουσι τετραγωνικαὶ ῥίζαι. Πρὸς γενίκευσιν δὲ τῆς ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ συμβολικῆς γραφῆς $\sqrt{A}$ συμφωνοῦμεν, ἵνα ἡ παράστασις $\sqrt{A}$, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ Α, παριστᾷ πάντοτε ἀριθμόν, οὗτινος δηλαδὴ τὸ τετράγωνον εἶναι ἴσον τῷ Α. Πρὸς τοῦτο εἶναι ἀνάγκη νὰ διαπλάσωμεν καὶ παραδεχθῶμεν νέον ἀριθμόν, οὗτινος τὸ τετράγωνον νὰ εἶναι ἴσον τῇ ἀρνητικῇ μονάδι -1.

Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον παριστῶντες διὰ τοῦ i θεωροῦμεν ὡς νέαν μονάδα καὶ εἰσάγομεν αὐτὴν εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν, μετ' αὐτῆς δὲ καὶ τὴν ταύτης ἀντίθετον μονάδα $-i$, ἔνθα $(-i)^2=-1$, ἔτι δὲ καὶ τὰ πολλαπλάσια καὶ τὰ πολλοστὰ ἀμφοτέρων τῶν μονάδων τούτων. Οὕτω προκύπτει εὐρύτερον σύστημα, οὗτινος οἱ ἀριθμοὶ πάντες γίνονται ἐκ τῶν τεσσάρων μονάδων 1, -1, i καὶ $-i$ καὶ τῶν μερῶν αὐτῶν.

Καλοῦνται δὲ αἱ μὲν νέαι μονάδες i καὶ $-i$ *φανταστικαί*, καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν ἀποτελούμενοι ἀριθμοί, *φανταστικοί*· αἱ δὲ παλαιαὶ 1 καὶ -1 πρὸς διάκρισιν καλοῦνται *πραγματικαὶ* καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν ἀριθμοί, *πραγματικοί*.

Ἡ γενικὴ δὲ μορφὴ παντὸς φανταστικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἡ $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, ἤτοι $\alpha+\beta i$, τοῦ α καὶ τοῦ β παριστώντων ἀριθμοὺς πραγματικούς.

Ἐν τῇ ἀνωτέρᾳ δὲ μαθηματικῇ ἀποδεικνύεται ὅτι, καὶ ἐν τῷ γενικωτέρῳ τούτῳ συστήματι τῶν ἀριθμῶν αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν πράξεων, κατ' ἀκολουθίαν καὶ σύμπας ὁ ἀλγεβρικὸς λογισμός, διατηροῦνται ἀμετάβλητοι καὶ ὅτι πᾶσα ἐξίσωσις μ βαθμοῦ ἔχει μ ἐν αὐτῷ ῥίζας· ὅτι δὲ εἶναι ἀδύνατον νὰ εὑρυνθῇ περισσότερον, χωρὶς αἱ ῥηθεῖσαι ἰδιότητες νὰ παύσωσιν ὑπάρχουσαι.

Δύο φανταστικοὶ ἀριθμοὶ διαφέροντες μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ φανταστικοῦ μέρους, οἷοι εἶναι ὁ $\alpha+\beta i$ καὶ ὁ $\alpha-\beta i$, καλοῦνται *συζυγεῖς φανταστικοὶ ἀριθμοί*. *Μέτρον* δὲ τοῦ φανταστικοῦ ἀριθμοῦ $\alpha+\beta i$ καλεῖται ὁ θετικὸς λαμβανόμενος ἀριθμὸς $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

181. ***Θεώρημα***. *Ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἰσότητα $\alpha+\beta i=0$, δυνάμεθα ἀντ' αὐτῆς νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν διπλῆν ἰσότητα $\alpha=0$, $\beta=0$.*

Διότι ἐκ τῆς δεδομένης ἰσότητος $\alpha+\beta i=0$, προκύπτει (§ 180) ἡ ἰσότης $\alpha=-\beta i$, ἐξ ἧς

$\alpha^2=+\beta^2(-1)$, τουτέστιν $\alpha^2+\beta^2=0$· καὶ ἄρα $\alpha=0$, $\beta=0$.

182. ***Θεώρημα***. *Ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἰσότητα $\alpha+\beta i=\alpha'+\beta' i$, δυνάμεθα ἀντ' αὐτῆς νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὰς δύο ἰσότητας $\alpha=\alpha'$ καὶ $\beta=\beta'$.*

Διότι ἐκ τῆς δεδομένης ἰσότητος προκύπτει (§ 180)

$$(\alpha-\alpha')+(\beta-\beta').i=0,$$

καὶ ἄρα (§ 181) $\alpha-\alpha'=0$, $\beta-\beta'=0$· ἤτοι $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$.

Παρατήρησις. Διὰ τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν κατὰ συνθήκην, ὡς εἴπομεν, σημειοῦμεν μόνον ἁπλῶς τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, χωρὶς οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι νὰ παριστῶσιν, ὡς οἱ πραγματικοί, ποσὸν πραγματικόν· τούτου ἕνεκα, ἂν ἐκ τῆς λύσεως προβλήματός τινος προκύψῃ φανταστικὸς ἀριθμός, τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι ἀδύνατον ἐν τοῖς πράγμασιν.

ΝΟΜΟΙ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

183. Ἂν θέλωμεν νὰ εὐρύνωμεν τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων καὶ ἐφ' οἱωνδήποτε ἐκθετῶν, πρέπει νὰ διατηρήσωμεν τὰς ἀρχικὰς τῶν δυνάμεων ἰδιότητας, ἃς θεωροῦμεν νόμους τῶν δυνάμεων.

Οὕτω δέ, ἵνα ἡ ὑπὸ τῆς ἰσότητος $\alpha^\mu.\alpha^\nu=\alpha^{\mu+\nu}$ (1) ἐκφραζομένη ἀρχικὴ ἰδιότης τῶν δυνάμεων ἰσχύῃ καὶ ἐφ' οἱωνδήποτε συμμέτρων ἐκθετῶν, ἀναγκαῖον εἶναι νὰ ὁρισθῇ καταλλήλως ἡ σημασία τῶν δυνάμεων, τῶν ἐχουσῶν ἐκθέτην κλασματικὸν ἢ ἀρνητικόν, ἀριθμόν.

Δυνάμεις ἔχουσαι κλασματικὸν ἐκθέτην.

184. Ἂν ἐν τῇ ἀνωτέρω ἰδιότητι $\alpha^\mu.\alpha^\nu=\alpha^{\mu+\nu}$(1), ἣν θὰ θεωρήσωμεν

ἀληθεύουσαν ἐπὶ πασῶν τῶν δυνάμεων, ὑποτεθῇ $\mu=\nu=\frac{1}{2}$, θὰ προκύψῃ ἡ ἰσότης

$$\alpha^{\frac{1}{2}}.\alpha^{\frac{1}{2}}=\alpha,$$

ἐξ ἧς συνάγεται, ὅτι τὸ $\alpha^{\frac{1}{2}}$ *δέον νὰ ὁρισθῇ ὅτι εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ α*, διότι πολλαπλασιασθὲν ἐφ' ἑαυτὸ ἔδωκε τὸν α.

Κατὰ τὴν αὐτὴν πάλιν ἀρχικὴν ἰδιότητα (1), ἂν ὁ ν εἶναι οἱοσδήποτε ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός, θὰ ἔχωμεν

$$\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\nu}=\alpha^{\frac{1}{\nu}}.\alpha^{\frac{1}{\nu}}.\alpha^{\frac{1}{\nu}}\ldots.\alpha^{\frac{1}{\nu}}=\alpha^{\left(\frac{1}{\nu}.\nu\right)}, \text{ ἤτοι } \left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\nu}=\alpha,$$

ἐξ ἧς ἔπεται, ὅτι τὸ $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$ *δέον νὰ ὁρισθῇ ὅτι εἶναι ἡ νυοστὴ ῥίζα τοῦ α.*

Κατὰ ταῦτα αἱ δύο παραστάσεις

$$\alpha^{\frac{1}{\nu}} \text{ καὶ } \sqrt[\nu]{\alpha}$$

σημαίνουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Π. χ. $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$, $27^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{27}=3$.

Γενικώτερον δὲ τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, ἐν ᾧ ὁ μ καὶ ὁ ν εἶναι οἱοιδήποτε ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί, δέον νὰ ὁρισθῇ ὅτι εἶναι ἡ νὴ ῥίζα τοῦ α^{μ}. διότι, ἂν τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ πολλαπλασιασθῇ ν φορὰς ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται α^{μ}· ἤτοι εἶναι

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}.\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\ldots.\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}.\nu}=\alpha^{\mu}. \text{ Λοιπὸν } \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

Ἔτι δὲ τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ σημαίνει καὶ τὴν μὴν δύναμιν τῆς νυοστῆς ῥίζης τοῦ α· διότι, ἂν ἡ δύναμις $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$ πολλαπλασιασθῇ μ φορὰς ἐφ' ἑαυτήν, θὰ προκύψῃ τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, διότι θὰ ἔχωμεν

$$\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\mu}=\alpha^{\frac{1}{\nu}}\cdot\alpha^{\frac{1}{\nu}}\ldots\alpha^{\frac{1}{\nu}}=\alpha^{\frac{1}{\nu}\cdot\mu},\ \text{ἤτοι}\ \left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\mu}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

Ὅτι δὲ αἱ προκύψασαι δύο παραστάσεις $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ καὶ $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\mu}$ αἱ παριστῶσαι τὴν τιμὴν τοῦ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας ἐπαληθεύεται ὡς ἑξῆς:

$$\left[\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\mu}\right]^{\nu}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\mu\nu}=\left[\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}\right]^{\mu}=\alpha^{\mu}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}\right)^{\nu}.$$

Παρατήρησις. Ἡ εὑρεθεῖσα ἰσότης $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\mu}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ (2)

δὲν εἶναι καθόλα τελεία. Διότι, ἂν ὁ ν εἶναι ἄρτιος, ὁ α ἐξ ἀνάγκης θὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς (§ 54), τὸ δὲ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (2) ἔχει πάντοτε δύο ἀντιθέτους τιμάς, τὸ δὲ πρῶτον ἔχει ἀμφοτέρας μὲν τὰς τιμὰς ταύτας, ἂν ὁ μ εἶναι περιττός, διότι τὸ γινόμενον $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\mu}$ θὰ εἶναι ὁμοιειδὲς τῇ $\sqrt[\nu]{\alpha}$, τὴν θετικὴν δὲ μόνην, ἂν ὁ μ εἶναι ἄρτιος· π. χ. ἡ μὲν $\sqrt[6]{\alpha^4}$ ἔχει δύο ἀντιθέτους τιμάς, ἡ δὲ $\left(\sqrt[6]{\alpha}\right)^{4}$ ἔχει τὴν θετικὴν μόνην ἐξ αὐτῶν.

Κατὰ ταῦτα ἡ σχέσις (2) ἀληθεύει ἀπεριορίστως, ἂν θεωρῶμεν μόνον τὰς θετικὰς τῶν ῥιζικῶν τιμάς.

185. Ἡ χρῆσις τῶν δυνάμεων τῶν ἐχουσῶν κλασματικὸν ἐκθέτην θὰ ἔχῃ σημασίαν, ἂν ἀποδειχθῇ ὅτι μία τοιαύτη παράστασις, οἷον ἡ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, διατηρεῖ τὴν τιμὴν αὐτῆς, ἂν ἀντὶ τοῦ ἐκθέτου αὐτῆς $\frac{\mu}{\nu}$ ἀντικατασταθῇ ἕτερον ἴσον κλάσμα $\frac{\mu'}{\nu'}$· τουτέστιν ὅτι $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\alpha^{\frac{\mu'}{\nu'}}$, ἤτοι ὅτι $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}=\sqrt[\nu']{\alpha^{\mu'}}$.

Διότι ἐκ τῶν δύο τούτων ῥιζικῶν ἀναγομένων εἰς τὸν αὐτὸν δείκτην (§ 175), προκύπτουσι τὰ ἐκ ταυτότητος ἴσα ῥιζικὰ $\sqrt[\nu\nu']{\alpha^{\mu\cdot\nu'}}$, $\sqrt[\nu\nu']{\alpha^{\mu'\cdot\nu}}$· διότι, ἐπειδὴ $\frac{\mu}{\nu}=\frac{\mu'}{\nu'}$, ἕπεται ὅτι $\mu.\nu'=\mu'.\nu$.

Λοιπὸν θὰ δυνάμεθα τὸν κλασματικὸν ἐκθέτην δυνάμεως νὰ ἀνάγω-

μεν εἰς τὴν ἁπλουστάτην αὐτοῦ μορφήν. Κατὰ ταῦτα θὰ εἶναι $\alpha^{\frac{20}{12}}=\alpha^{\frac{4}{3}}$,
$\alpha^{\frac{10}{15}}=\alpha^{\frac{2}{3}}$ κ. τ. λ.

Διατήρησις τῶν θεμελιωδῶν νόμων τῶν δυνάμεων.

186. Οἱ δεδομένοι ὁρισμοὶ ἐπὶ τῶν δυνάμεων τῶν ἐχουσῶν κλασματικοὺς ἐκθέτας εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε καὶ ἐπὶ τῶν δυνάμεων τούτων διατηροῦνται πάντες οἱ θεμελιώδεις τῶν δυνάμεων νόμοι.

1^{ον}) *Ἔστω τὸ γινόμενον* $\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}.\alpha^{\frac{\sigma}{\tau}}$.

Ἐπειδὴ (§ 184) $\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}=\sqrt[\rho]{\alpha^{\pi}}$ καὶ $\alpha^{\frac{\sigma}{\tau}}=\sqrt[\tau]{\alpha^{\sigma}}$, θὰ ἔχωμεν ὅτι

$$\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}.\alpha^{\frac{\sigma}{\tau}}=\sqrt[\rho]{\alpha^{\pi}}.\sqrt[\tau]{\alpha^{\sigma}}=\sqrt[\rho\tau]{\alpha^{\pi\tau}}.\sqrt[\rho\tau]{\alpha^{\sigma\rho}}=\sqrt[\rho\tau]{\alpha^{\pi\tau+\sigma\rho}} \text{ καὶ ἄρα}$$

$$\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}.\alpha^{\frac{\sigma}{\tau}}=\alpha^{\frac{\pi\tau+\sigma\rho}{\rho\tau}}=\alpha^{\frac{\pi}{\rho}+\frac{\sigma}{\tau}}.$$

Λοιπὸν τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται τῇ δυνάμει τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τῇ ἐχούσῃ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐκθετῶν.

Κατὰ ταῦτα $\alpha^{\frac{1}{2}}.\alpha^{\frac{1}{3}}=\alpha^{\frac{5}{6}}$ καὶ $\alpha^{\frac{2}{5}}.\alpha^{\frac{3}{5}}=\alpha$.

2^{ον}) Ἐπειδὴ (§ 172,2^{ον}) $\dfrac{\sqrt[\rho]{\alpha^{\pi}}}{\sqrt[\tau]{\alpha^{\sigma}}}=\dfrac{\sqrt[\rho\tau]{\alpha^{\pi\tau}}}{\sqrt[\rho\tau]{\alpha^{\rho\sigma}}}=\sqrt[\rho\tau]{\dfrac{\alpha^{\pi\tau}}{\alpha^{\rho\sigma}}}$,

ἂν ὑποτεθῇ $\pi.\tau>\rho.\sigma$, ἡ ἰσότης αὕτη γράφεται καὶ ὧδε :

$$\frac{\sqrt[\rho]{\alpha^{\pi}}}{\sqrt[\tau]{\alpha^{\sigma}}}=\sqrt[\rho\tau]{\alpha^{\pi\tau-\rho\sigma}}$$

καὶ ἄρα (§ 184) $$\frac{\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}}{\alpha^{\frac{\sigma}{\tau}}}=\alpha^{\frac{\pi\tau-\rho\sigma}{\rho\tau}}=\alpha^{\frac{\pi}{\rho}-\frac{\sigma}{\tau}}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη $\pi.\tau > \rho.\sigma$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\frac{\pi}{\rho}, \wedge \frac{\sigma}{\tau},$ ἐκ τοῦ προκύψαντος ἐξαγομένου συνάγεται ὅτι:

Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται τῇ δυνάμει τοῦ ἀριθμοῦ τῇ ἐχούσῃ ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τὴν προκύπτουσαν σ ἂν ἐκ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεθῇ ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρέτου.

Κατὰ ταῦτα $\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{3}}}=\alpha^{\frac{1}{6}}$ καὶ $\frac{\alpha^{\frac{5}{6}}}{\alpha^{\frac{3}{4}}}=\alpha^{\frac{1}{12}}$.

3ον) Ἐπειδὴ (§ 173, 174) $\sqrt[\tau]{\left(\sqrt[\rho]{\alpha^{\pi}}\right)^{\sigma}}=\sqrt[\tau]{\sqrt[\rho]{\alpha^{\pi\sigma}}}=\sqrt[\tau\rho]{\alpha^{\pi\sigma}}$

συνάγεται (§ 184) ὅτι $\left(\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}\right)^{\frac{\sigma}{\tau}}=\alpha^{\frac{\pi\sigma}{\rho\tau}}$.

Λοιπὸν ἡ δύναμις ἑτέρας δυνάμεως ἰσοῦται τῇ δυνάμει τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τῇ ἐχούσῃ ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐκθετῶν.

Π. χ. $\left(\alpha^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{8}{3}}=\alpha^{2}$ καὶ $\left(\alpha^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}=\alpha$.

Καὶ ἀντιστρόφως, ἕπεται ὅτι $\alpha^{3\omega}=(\alpha^{\omega})^{3}$, $\alpha^{\frac{15}{4}}=\left(\alpha^{\frac{3}{4}}\right)^{5}$ κ.τ.λ.

Δυνάμεις ἔχουσαι ἐκθέτην ἀρνητικόν.

187. Ἐκ τῆς ἀποδειχθείσης (§ 47) ἰσότητος $\alpha^{\mu}.\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$, συνάγεται ὅτι ἡ ἀποδειχθεῖσα (§ 48) ἰσότης $\alpha^{-\mu}=\frac{1}{\alpha^{\mu}}$ ἀληθεύει νῦν καὶ ἂν ὁ ἀρνητικὸς ἐκθέτης μ εἶναι κλασματικὸς ἀριθμός· κατ' ἀκολουθίαν ὁ ἀρνητικὸς ἐκθέτης ἀντικαθιστᾷ πάλιν τὴν διαίρεσιν.

Ἡ ἀποδειχθεῖσα δὲ (§ 186, 2ον) ἰσότης

$$\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}}=\alpha^{\mu-\nu},$$

ὅταν $\mu>\nu$, ὁ δὲ μ καὶ ὁ ν εἶναι οἱοιδήποτε θετικοὶ ἀριθμοὶ ἀκέραιοι ἢ κλασματικοί, ἀληθεύει καὶ ἂν $\mu<\nu$ (§ 50).

Διότι $\quad \dfrac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}}=\dfrac{1}{\dfrac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}}}=\dfrac{1}{\alpha^{\nu-\mu}}=\alpha^{-(\nu-\mu)}=\alpha^{\mu-\nu}$

Οἱ ἐφαρμοσθέντες δὲ ἀνωτέρω κανόνες διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν δυνάμεων τῶν ἐχουσῶν θετικοὺς ἐκθέτας ἐκτείνονται νῦν καὶ ἐπὶ δυνάμεων ἐχουσῶν ἀρνητικοὺς ἐκθέτας (§ 51). Κατὰ ταῦτα

1ον) Ἡ ἰσότης $\alpha^{\mu}.\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$ ἀληθεύει καὶ ἂν ὁ ἕτερος τῶν ἐκθετῶν, οἷον ὁ ν, εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.

Διότι, ἂν τεθῇ $\nu=-\nu'$, ἐπειδὴ $\alpha^{-\nu'}=\dfrac{1}{\alpha^{\nu'}}$, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha^{\mu}.\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu}.\alpha^{-\nu'}=\alpha^{\mu}.\frac{1}{\alpha^{\nu'}}=\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu'}},$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ πηλίκον $\dfrac{\alpha^{\mu}}{\alpha_{\nu'}}$ παρίσταται ἀεί, εἴτε εἶναι ὁ μ μείζων τοῦ ν′ εἴτε ἐλάσσων, διὰ τοῦ συμβόλου $\alpha^{\mu-\nu'}$, θὰ προκύψῃ ἡ ἰσότης

$$\alpha^{\mu}.\alpha_{\nu}=\alpha^{\mu-\nu'}=\alpha^{\mu+\nu}$$

Ὡσαύτως ἡ ἰσότης αὕτη ἀληθεύει καὶ ἂν ἀμφότεροι οἱ ἐκθέται εἶναι ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.

Διότι, ἂν τεθῇ $\mu=-\mu'$, $\nu=-\nu'$, ἐπειδὴ $\alpha^{-\mu'}=\dfrac{1}{\alpha^{\mu'}}$, $\alpha^{-\nu}=\dfrac{1}{\alpha^{\nu'}}$,

θὰ ἔχωμεν $\alpha^{\mu}.\,\alpha^{\nu}=\alpha^{-\mu'}.\,\alpha^{-\nu'}=\dfrac{1}{\alpha^{\mu'}}.\dfrac{1}{\alpha^{\nu'}}=\dfrac{1}{\alpha^{\mu'}.\alpha^{\nu'}}=\dfrac{1}{\alpha^{\mu'+\nu'}}$.

καὶ ἐπειδὴ $\dfrac{1}{\alpha^{\mu'+\nu'}}=\alpha^{-(\mu'+\nu')}=\alpha^{-\mu'-\nu'}$, ἕπεται πάλιν ὅτι

$$\alpha^{\mu}.\,\alpha^{\nu}=\alpha^{-\mu'-\nu'},\quad \text{ἤτοι}\quad \alpha^{\mu}.\,\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu}.$$

Λοιπὸν τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται τῇ δυνάμει τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τῇ ἐχούσῃ ἐκθέτην τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν δύο ἐκθετῶν.

2ον) Ἡ ἰσότης $\dfrac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}}=\alpha^{\mu-\nu}$ ἀληθεύει, οἱοιδήποτε ἀριθμοί, ἀκέραιοι ἢ κλασματικοί, θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί, καὶ ἂν εἶναι ὁ μ καὶ ὁ ν.

Διότι ἔχομεν πάντοτε $\alpha^{\mu-\nu}.\,\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu-\nu+\nu}=\alpha^{\mu}$.

Ἔτι δὲ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητος ταύτης συνάγεται καὶ ἂν ὁ διαιρέτης ἀντικατασταθῇ ὑπὸ πολλαπλασιαστοῦ, ὅστις θὰ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἀντίθετον ἐκθέτην· διότι $\dfrac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}}=\alpha^{\mu}.\,\alpha^{-\nu}=\alpha^{\mu-\nu}$.

Κατὰ ταῦτα $\frac{\alpha^{-5}}{\alpha^{2}}=\alpha^{-5}.\alpha^{-2}=\alpha^{-7}$ καὶ $\frac{\alpha^{-3}}{\alpha^{-5}}=\alpha^{-3}.\alpha^{5}=\alpha^{2}$.

Λοιπὸν τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται τῇ δυνάμει τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τῇ ἐχούσῃ ἐκθέτην τὴν ἀλγεβρικὴν διαφορὰν τὴν προκύπτουσαν, ἂν ἐκ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεθῇ ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρέτου.

3ον) Ἡ ἰσότης $(\alpha^{\mu})^{\nu}=\alpha^{\mu.\nu}$ ἀληθεύει, ἂν ὁ μὲν μ εἶναι ἀρνητικός, καὶ ἔστω $\mu=-\mu'$, ὁ δὲ ν θετικός· διότι

$$(\alpha^{\mu})^{\nu}=(\alpha^{-\mu'})^{\nu}=\left(\frac{1}{\alpha^{\mu'}}\right)^{\nu}=\frac{1}{\alpha^{\mu'.\nu}}.$$

ἐπειδὴ δὲ $\frac{1}{\alpha^{\mu'.\nu}}=\alpha^{-\mu'.\nu}=\alpha^{\mu.\nu}$, προκύπτει $(\alpha^{\mu})^{\nu}=\alpha^{\mu.\nu}$.

Ὡσαύτως ἡ προηγουμένη ἰσότης ἀληθεύει καὶ ἄν, ὁ μὲν ἐκθέτης μ εἶναι θετικὸς ὁ δὲ ν ἀρνητικός, ἔστω δὲ $\nu=-\nu'$· διότι

$$(\alpha^{\mu})^{\nu}=(\alpha^{\mu})^{-\nu'}=\frac{1}{(\alpha^{\mu})^{\nu'}}=\frac{1}{\alpha^{\mu.\nu'}},=\alpha^{-\mu.\nu'}=\alpha^{\mu.\nu}.$$

Ἔτι δὲ ἡ ἀνωτέρω ἰσότης ἀληθεύει καὶ ἂν ἀμφότεροι οἱ ἐκθέται εἶναι ἀρνητικοί. Ἔστω δὲ $\mu=-\mu'$, $\nu=-\nu'$· διότι

$$(\alpha^{\mu})^{\nu}=(\alpha^{-\mu'})^{-\nu'}=\frac{1}{(\alpha^{-\mu'})^{\nu'}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha^{\mu'}}\right)^{\nu'}}=\frac{1}{\alpha^{-\mu'.\nu'}}=\alpha^{\mu'\nu'}=\alpha^{\mu.\nu}.$$

Λοιπὸν ἡ δύναμις ἑτέρας δυνάμεως ἰσοῦται τῇ δυνάμει τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τῇ ἐχούσῃ ἐκθέτην τὸ ἀλγεβρικὸν γινόμενον τῶν δύο ἐκθετῶν.

Ἐπὶ δὲ παραδείγματος $(\alpha^{3})^{-2}=\alpha^{-6}$ καὶ $\left(\alpha^{-\frac{2}{3}}\right)^{-6}=\alpha^{4}$,

Ὡσαύτως ἡ ἀποδειχθεῖσα ἰσότης

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$$

διὰ θετικὰς τιμὰς τοῦ μ καὶ τοῦ ν, ἀληθεύει καὶ ἂν ὁ μ εἶναι ἀρνητικός, ἔστω δὲ $\mu=-\mu'$· διότι

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{-\mu'}}=\sqrt[\nu]{\frac{1}{\alpha^{\mu'}}}=\frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu'}}}=\frac{1}{\alpha^{\frac{\mu'}{\nu}}}=\alpha^{\frac{-\mu'}{\nu}}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

188. Θὰ λέγωμεν δὲ ὅτι, ὁ α^{χ} διά τινα ἀσύμμετρον τοῦ χ τιμὴν ε παριστᾷ ἀριθμὸν περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν τιμῶν τοῦ α^{χ}

τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς ἐκθέτας συμμέτρους ἐλάσσονας τοῦ ε, καὶ τῶν τιμῶν τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς ἐκθέτας μείζονας τοῦ ε.

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος ἀναλογῶν πρὸς τὸν δοθέντα ἐν τῇ ἀριθμητικῇ ὁρισμὸν διὰ τὰς τετραγωνικὰς καὶ τὰς κυβικὰς ῥίζας τῶν ἀριθμῶν, προσδιορίζει διὰ τὸν α μίαν μόνην καὶ ὡρισμένην τιμήν.

Ἂν δὲ ὑποθέσωμεν, ἵνα ὁρίσωμεν τὰς ἰδέας μας, ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ α^χ παριστῶσι τὰ μήκη τμημάτων λαμβανομένων ἐπ' εὐθείας καὶ ἐχόντων πάντων τὴν αὐτὴν ἀρχήν, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ἄκρα μὲν τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τιμὰς τοῦ χ ἐλάσσονας τοῦ ε κατέχουσιν ὡρισμένον τμῆμα τῆς εὐθείας, τὰ ἄκρα δὲ τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τιμὰς τοῦ χ μείζονας τοῦ ε κατέχουσιν ἄλλο τμῆμα· ὥστε ἐκ τῶν προηγουμένων παρατηρήσεων συνάγεται, ὅτι τὰ τμήματα ταῦτα εἶναι ἐξ ὁλοκλήρου κεχωρισμένα, καὶ δὲν δύναται νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ αὐτῶν οὐδὲν πεπερασμένον τμῆμα, ἀλλ' ἁπλοῦν σημεῖον. Ἡ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς δὲ ἀπόστασις τοῦ σημείου τούτου παριστᾷ τὸν α^χ.

Τούτων οὕτως ἐχόντων παρατηροῦμεν ὅτι πάντες οἱ κανόνες τοῦ ὑπολογισμοῦ δυνάμεων ἐχουσῶν κλασματικοὺς ἐκθέτας ἐπεκτείνονται καὶ ἐπὶ δυνάμεων ἐχουσῶν ἀσυμμέτρους ἐκθέτας.

Π.χ. $\alpha^{\sqrt{3}} \cdot \alpha^{\sqrt{5}} = \alpha^{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ καὶ $\left(\alpha^{\sqrt{8}}\right)^{\sqrt{2}} = \alpha^{\sqrt{16}} = \alpha^4$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Καταστῆσαι ῥητὸν τὸν παρονομαστὴν τῶν ἑξῆς κλασμάτων

$$\frac{5-\sqrt{-2}}{1+\sqrt{-2}} \text{ καὶ } \frac{\alpha+\sqrt{-6}}{\alpha-\sqrt{-6}} + \frac{\alpha-\sqrt{-6}}{\alpha+\sqrt{-6}}.$$

2) Ἀποδεῖξαι τὴν ἀλήθειαν τῆς ἰσότητος

$$\left(\alpha^2+\alpha^{\frac{4}{3}}.\,6^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(6^2+\alpha^{\frac{2}{3}}.\,6^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\alpha^{\frac{2}{3}}+6^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

3) Ἀποδεῖξαι ὅτι τὸ τριώνυμον $\chi^3+3\chi+2$ μηδενίζεται,

ἂν $$\chi=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}}$$

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

189. ***Θεώρημα.*** *Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ὑψωθῶσιν εἰς τὸ τετράγωνον, θὰ προκύψῃ ἐξίσωσις ἰσοδύναμος πρὸς δύο ἐξισώσεις, τὴν ἀρχικὴν καὶ τὴν ἐξ αὐτῆς προκύπτουσαν, δι' ἀλλαγῆς τοῦ σημείου τοῦ ἑτέρου τῶν μελῶν αὐτῆς.*

Καλεῖται δὲ ***ἐξίσωσις ἰσοδύναμος πρὸς δύο ἄλλας***, ὅταν πᾶσα μὲν λύσις αὐτῆς εἶναι λύσις καὶ τῆς ἑτέρας τῶν δύο ἄλλων, πᾶσα δὲ λύσις τῆς ἑτέρας τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων εἶναι λύσις καὶ ταύτης.

Π. χ. ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $A=B$, διὰ τῆς ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς, προκύπτουσα ἐξίσωσις $A^2=B^2$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς ἐξισώσεις $A=B$ καὶ $A=-B$.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ἡ μὲν πρώτη γραφῇ ὧδε : $A^2-B^2=0$, ἢ ὧδε : $(A+B).(A-B)=0$,

αἱ δὲ δύο ἄλλαι ὧδε : $A-B=0$ καὶ $A+B=0$,

συνάγεται ὅτι, ἂν μὲν ἀληθεύσῃ ἡ πρώτη, ἐπειδὴ ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων αὐτῆς πρέπει νὰ μηδενισθῇ, θὰ ἀληθεύσῃ καὶ ἡ ἑτέρα τῶν δύο ἄλλων ἐξισώσεων, ἢ ἡ $A-B=0$, ἢ ἡ $A+B=0$· ἂν δὲ πάλιν ἀληθεύσῃ ἡ ἑτέρα τῶν ἐξισώσεων $A-B=0$ καὶ $A+B=0$, θὰ ἀληθεύσῃ ἀναγκαίως καὶ ἡ ἐξίσωσις $(A+B).(A-B)=0$· διότι ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων αὐτῆς θὰ μηδενισθῇ.

Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὧδε :

190. *Ἂν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐξισώσεως ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ δὲ ῥίζα τοῦ ἑτέρου τῶν μελῶν ληφθῇ καὶ μετὰ τοῦ $+$ καὶ μετὰ τοῦ $-$, αἱ οὕτω προκύπτουσαι δύο ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς τὴν δεδομένην.*

Κατὰ ταῦτα, ἂν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως $A=B$

ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ δὲ ῥίζα τοῦ B ληφθῇ πρῶτον μὲν μετὰ τοῦ $+$, εἶτα δὲ μετὰ τοῦ $-$, αἱ προκύψουσαι ἐξισώσεις $\sqrt{A}=\sqrt{B}$, καὶ $\sqrt{A}=-\sqrt{B}$, θὰ εἶναι πρὸς τὴν δεδομένην ἐξίσωσιν $A=B$ ἰσοδύναμοι· διότι θὰ προκύψῃ αὕτη ἐξ ἑκατέρας αὐτῶν, διὰ τῆς ὑψώσεως ἑκατέρου τῶν μελῶν αὐτῶν εἰς τὸ τετράγωνον.

Γενικὴ μορφὴ πάσης ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

191. Πᾶσα ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ περιέχουσα ἕνα ἄγνωστον, μετὰ τὴν εἰς αὐτὴν ἐφαρμογὴν τῶν πράξεων τῆς § 105, ἀνάγεται εἰς τὴν γενικὴν μορφὴν

$$\alpha\chi^2+6\chi+\gamma=0, \qquad (1)$$

ἧς τὰ α, 6, γ παριστῶσιν ἀριθμοὺς γνωστούς, τοῦ α ὄντος θετικοῦ καὶ διαφόρου πάντοτε τοῦ 0· διότι ἄλλως ἡ ἐξίσωσις θὰ ἦτο τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τῶν τύπων ἐπιλύσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης πολλαπλασιάζομεν πάντας αὐτῆς τοὺς ὅρους ἐπὶ 4α καὶ μεταφέρομεν τὸν προκύψαντα σταθερὸν ὅρον $4\alpha\gamma$ εἰς τὸ δεύτερον μέλος, μεθ' ὃ θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσοδύναμον ταύτῃ ἐξίσωσιν

$$4\alpha^2\chi^2+4\alpha6\chi=-4\alpha\gamma$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ πρῶτον αὐτῆς μέλος σύγκειται ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ $2\alpha\chi$ καὶ τοῦ διπλασίου γινομένου τοῦ $2\alpha\chi$ ἐπὶ τὸν γνωστὸν ἀριθμὸν 6, ἤτοι ἀποτελεῖ τοὺς δύο πρώτους ὅρους τοῦ τετραγώνου τοῦ διωνύμου $2\alpha\chi+6$, ἕπεται ὅτι, ἵνα ἀποτελεσθῇ τὸ ὅλον τετράγωνον πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς αὐτὸ ὁ τρίτος τοῦ τετραγώνου ὅρος 6^2.

Ἂν ἄρα εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης προστεθῇ ὁ ἀριθμὸς 6^2, θὰ προκύψῃ ἡ τῇ δεδομένῃ ἰσοδύναμος ἐξίσωσις

$$4\alpha^2\chi^2+4\alpha6\chi+6^2=6^2-4\alpha\gamma,$$

ἥτις γράφεται καὶ ὧδε :

$$(2\alpha\chi+6)^2=6^2-4\alpha\gamma. \qquad (2)$$

Ἂν δὲ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς, θὰ προκύψωσιν (§ 185) αἱ πρὸς ταύτην ἰσοδύναμοι δύο ἐξισώσεις

$$2\alpha\chi+6=\sqrt{6^2-4\alpha\gamma} \text{ καὶ } 2\alpha\chi+6=-\sqrt{6^2-4\alpha\gamma}, \qquad (3)$$

ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τῶν ὁποίων θὰ προκύψωσιν ἄρα οἱ τὴν δεδομένην ἐξίσωσιν (1) τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἐπιλύοντες τύποι

$$\chi=\frac{-6+\sqrt{6^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \chi=\frac{-6-\sqrt{6^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha},$$

οὓς περιλαμβάνοντες εἰς ἕνα μόνον διπλοῦν τύπον γράφομεν ὧδε :

$$\chi=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \qquad (4)$$

Ὁ δὲ τὴν τιμὴν τοῦ χ παρέχων οὗτος τύπος εἶναι ὁ **γενικὸς τύπος**, δι' οὗ δυνάμεθα νὰ εὑρίσκωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς ἐπιλύοντας τὴν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἐξίσωσιν (1) ἄνευ ἐπαναλήψεως τῶν προηγηθέντων συλλογισμῶν, οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ καὶ ἂν εἶναι ὁ 6 καὶ ὁ γ.

192. Συνάγεται δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων ὅτι :

Αἱ ῥίζαι τῆς δευτέρου βαθμοῦ ἐξισώσεως τῆς ἐχούσης τὴν μορφὴν $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, ἰσοῦνται τῷ συντελεστῇ τοῦ χ εἰλημμένῳ μετ' ἀντιθέτου σημείου, ηὐξημένῳ δὲ ἢ ἠλαττωμένῳ κατὰ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ διωνύμου, ὅπερ προκύπτει, ἂν ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ συντελεστοῦ τούτου ἀφαιρεθῇ τὸ τετραπλάσιον γινόμενον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ χ^2 ἐπὶ τὸν γνωστὸν ὅρον, τὸ δὲ ὅλον τοῦτο γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ συντελεστοῦ τοῦ χ^2.

193. Ἐκ τοῦ εὑρεθέντος τύπου (4) βλέπομεν ὅτι, ἡ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δεδομένη ἐξίσωσις (1), ἂν μὲν εἶναι $6^2-4\alpha\gamma>0$, ἔχει δύο πραγματικὰς καὶ ἀνίσους λύσεις ἢ ῥίζας· ἂν δὲ εἶναι $6^2-4\alpha\gamma=0$, ἔχει μίαν μόνην πραγματικὴν ῥίζαν, ὅτε καὶ πάλιν λέγομεν ὅτι ἔχει δύο πραγματικὰς καὶ ἴσας ῥίζας· [τοῦτο δὲ καὶ ἀμέσως προκύπτει ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) τῆς ἰσοδυνάμου πρὸς τὴν δεδομένην (1), ἂν γραφῇ ὧδε : $(2\alpha\chi+6)^2=0$· διότι ἐκ ταύτης προκύπτει ἡ μόνη τοῦ χ τιμὴ $\chi=-\frac{6}{2\alpha}$, ἥτις μηδενίζει τὸ πρῶτον μέλος τῆς δεδομένης ἐξισώσεως (1), ἂν τεθῇ αὕτη ἀντὶ τοῦ χ]· τέλος δέ, ἂν εἶναι $6^2-4\alpha\gamma<0$, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει δύο ῥίζας φανταστικάς· [τοῦτο δὲ πάλιν προκύπτει καὶ ἀμέσως ἐκ τῆς πρὸς τὴν δεδομένην (1) ἰσοδυνάμου ἐξισώσεως (2), ἂν γραφῇ ὧδε :

$$(2\alpha\chi+6)^2+4\alpha\gamma-6^2=0 \quad \text{ἢ} \quad (2\alpha\chi+6)^2+\mu^2=0,$$

τεθέντος ἀντὶ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $4\alpha\gamma-6^2$ τοῦ μ^2· διότι ἐκ ταύτης βλέπομεν ὅτι δὲν μηδενίζεται τὸ πρῶτον αὐτῆς μέλος, ἥτισδήποτε θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ τιμὴ καὶ ἂν τεθῇ ἐν αὐτῇ ἀντὶ τοῦ χ, διότι εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων].

Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα γενικῶς νὰ λέγωμεν ὅτι πᾶσα ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς ἕνα ἄγνωστον ἔχει δύο ῥίζας.

194. ***Παρατήρησις.*** Ἂν ὁ τοῦ πρωτοβαθμίου ὅρου συντελεστὴς β εἶναι ἄρτιος, ὁ τύπος (4) ἁπλοποιεῖται, ἂν τεθῇ $2\beta'=\beta$· ὅτε

$$\chi=\frac{-2\beta'\pm\sqrt{4\beta'^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \text{ καὶ ἄρα } \chi=\frac{-\beta'\pm\sqrt{\beta'^2-\alpha\gamma}}{\alpha} \quad (5)$$

Παραδείγματα.

1ον) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3\chi^2-7\chi+4=0$.

Ἂν ἐν τῷ τύπῳ (4) ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ μὲν τοῦ α τὸν 3, ἀντὶ δὲ τοῦ β τὸν -7, ἀντὶ δὲ τοῦ γ τὸν 4, θὰ ἔχωμεν

$$\chi=\frac{7\pm\sqrt{49-4.3.4}}{2.3}.$$

Ἂν δὲ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις καὶ καλέσωμεν χ', χ'' τὰς ῥίζας, θὰ ἔχωμεν $\chi'=\frac{4}{3}$ καὶ $\chi''=1$.

2ον) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5\chi^2-12\chi+7=0$.

Ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς τοῦ χ εἶναι ἄρτιος, ἂν ἐφαρμοσθῇ ὁ τύπος (5), θὰ προκύψῃ

$$\chi=\frac{6\pm\sqrt{36-5.7}}{5}.$$

Μετὰ δὲ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων, θὰ ἔχωμεν $\chi'=\frac{7}{5}$, $\chi''=1$.

3ον) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-3\chi-10=0$.

Ἐκ τοῦ τύπου (4), τιθεμένου ἐν αὐτῷ $\alpha=1$, $\beta=-3$, $\gamma=-10$, θὰ προκύψῃ

$$\chi=\frac{3\pm\sqrt{9+4.10}}{2}, \text{ ἤτοι } \chi=\frac{3\pm7}{2}.$$

Οὕτως ἄρα αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι $\chi'=5$, $\chi''=-2$.

4ον) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+6\chi+8=0$.

Πρὸς τοῦτο, ἂν ἐφαρμοσθῇ ὁ τύπος (4), θὰ ἔχωμεν

$$\chi=-3\pm\sqrt{9-8}, \text{ ἤτοι } \chi=-3\pm1.$$

Αἱ ῥίζαι ἄρα τῆς ἐξισώσεως εἶναι $\chi'=-2$ καὶ $\chi''=-4$.

5ον) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-4\chi+29=0$.

Πρὸς τοῦτο, ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (5), θὰ ἔχωμεν

$$\chi=2\pm\sqrt{4-29}\,,\ \ \text{ἤτοι}\ \ \chi=2\pm\sqrt{-25}\,.$$

Οὕτως αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι $\chi'=2+5i$, $\chi''=2-5i$. Εὐκόλως δὲ βεβαιούμεθα δι' ἀντικαταστάσεως, ὅτι ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἐπαληθεύουσι τὴν δεδομένην ἐξίσωσιν.

Μερικαὶ περιπτώσεις τῆς ἐξισώσεως (1).

195. 1ον) Ἐὰν ὁ γνωστὸς ὅρος $\gamma=0$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

$$\alpha\chi^2+\beta\chi=0, \qquad (6)$$

ἐκ δὲ τῶν εὑρεθέντων γενικῶν τύπων λύσεως προκύπτουσι

$$\chi'=0 \ \text{καὶ}\ \chi''=-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο προκύπτει καὶ ἀμεσώτερον, διότι ἡ δεδομένη ἐξίσωσις (6) γράφεται καὶ ὧδε :

$$\chi.(\alpha\chi+\beta)=0.$$

Ἵνα δὲ γινόμενον δύο παραγόντων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μηδέν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ ἕτερος τῶν δύο παραγόντων νὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ μηδέν. Λοιπὸν θὰ ἔχωμεν τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως, ἂν λάβωμεν

$$\chi=0 \ \text{καὶ}\ \alpha\chi+\beta=0,\ \text{ἐξ ἧς}\ \chi=-\frac{\beta}{\alpha}$$

Οὕτως ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο λύσεις, ὧν ἡ ἑτέρα ἰσοῦται τῷ μηδενί. Π. χ. ἡ ἐξίσωσις $2\chi^2-5\chi=0$, ἔχει ῥίζας

$$\chi'=0 \ \text{καὶ}\ \chi''=\frac{5}{2}.$$

2ον) Ἐὰν ὁ τοῦ χ συντελεστὴς $\beta=0$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

$$\alpha\chi^2+\gamma=0 \qquad (7)$$

ἐκ δὲ τῶν εὑρεθέντων γενικῶν τύπων λύσεως προκύπτει

$$\chi'=+\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}} \ \text{καὶ}\ \chi''=-\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}\,.$$

Ταῦτα δὲ προκύπτουσι καὶ ἀπ' εὐθείας ἐκ τῆς ἐξισώσεως (7), διότι αὕτη γράφεται καὶ ὧδε :

$$\chi^2=-\frac{\gamma}{\alpha},\ \text{ἐξ ἧς προκύπτουσι (§ 185)}\ \ \chi=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}\,.$$

Κατὰ ταῦτα ἡ ἐξίσωσις $2\chi^2-5=0$ ἔχει ῥίζας τὴν

$$\chi'=\sqrt{\frac{5}{2}} \ \text{καὶ τὴν}\ \chi''=-\sqrt{\frac{5}{2}}\,.$$

Σχέσεις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.

196. ***Θεώρημα*** *Τῶν δύο ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, τὸ μὲν ἄθροισμα ἰσοῦται τῷ ἀντιθέτῳ πηλίκῳ τοῦ συντελεστοῦ τῆς πρώτης δυνάμεως τοῦ ἀγνώστου διαιρουμένου διὰ τοῦ συντελεστοῦ τῆς δευτέρας δυνάμεως τοῦ ἀγνώστου, ἤτοι τῷ $-\frac{\beta}{\alpha}$, τὸ δὲ γινόμενον ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τοῦ γνωστοῦ τῆς ἐξισώσεως ὅρου διαιρουμένου καὶ τούτου διὰ τοῦ αὐτοῦ συντελεστοῦ, ἤτοι τῷ $\frac{\gamma}{\alpha}$.*

Διότι, ἂν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως παρασταθῶσι διὰ τοῦ χ' καὶ τοῦ χ'', ἤτοι ἂν

$$\chi'=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \chi''=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha},$$

τὰς δὲ ἰσότητας ταύτας, ἂν μὲν προσθέσωμεν κατὰ μέλη, θὰ προκύψῃ ἡ ἰσότης

$$\chi'+\chi''=-\frac{\beta}{\alpha},$$

ἂν δὲ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη, θὰ προκύψῃ ἡ ἰσότης

$$\chi'\cdot\chi''=\frac{(-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}).(-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})}{4\alpha^2}=\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2},$$

$$\text{ἤτοι} \quad \chi'\cdot\chi''=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

***Ἂν δὲ α = 1**, τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν ἰσοῦται τῷ ἀντιθέτῳ συντελεστῇ τῆς πρώτης δυνάμεως τοῦ ἀγνώστου, τὸ δὲ γινόμενον ἰσοῦται τῷ γνωστῷ τῆς ἐξισώσεως ὅρῳ.*

Παρατηρητέον δὲ ὅτι καὶ ἂν μίαν μόνην ῥίζαν ἡ ἐξίσωσις ἔχῃ, ἂν αὕτη θεωρηθῇ διπλῆ, αἱ εἰρημέναι ἰδιότητες τῶν ῥιζῶν μένουσι· διότι οὕτω τὸ χ' καὶ τὸ χ'' γίνονται ἴσα πρὸς ἄλληλα.

Κατὰ ταῦτα τῆς μὲν ἐξισώσεως $3\chi^2-5\chi+2=0$, τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν ἰσοῦται τῷ $\frac{5}{3}$, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν ἰσοῦται τῷ $\frac{2}{3}$· τῆς δὲ ἐξισώσεως $\chi^2+3\chi-10=0$, τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν ἰσοῦται τῷ -3, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν τῷ -10.

197. Διὰ τῶν ἰδιοτήτων τούτων λύονται τὰ ἑξῆς ζητήματα :

1ον) *Ὁρίζεται τὸ εἶδος τῶν ῥιζῶν τῶν ἐξισώσεων (1) τοῦ δευτέρου βαθμοῦ πρὸ τῆς ἐπιλύσεως αὐτῶν.*

Πρὸς τοῦτο πρῶτον μέν, ἂν ἐξετάσαντες τὰς ῥίζας βεβαιωθῶμεν ὅτι αὗται εἶναι πραγματικαί, ἂν δηλαδὴ τὸ $6^2-4\alpha\gamma$ εἶναι ἀριθμὸς θετικός, τότε τοῦ α ὄντος θετικοῦ, ἂν μὲν ὁ γ εἶναι θετικός, αἱ ῥίζαι εἶναι ὁμοειδεῖς, διότι τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι θετικόν, τὸ δὲ σημεῖον αὐτῶν εἶναι ἀντίθετον τοῦ σημείου τοῦ 6· ἂν δὲ ὁ γ εἶναι ἀρνητικός, αἱ ῥίζαι εἶναι ἑτεροειδεῖς, ἡ δὲ ἀπολύτως μείζων ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ σημείου τοῦ 6· ἂν δὲ ὁ γ εἶναι ἴσος τῷ μηδενί, ἡ μὲν ἑτέρα τῶν ῥιζῶν εἶναι 0, ἡ δὲ ἑτέρα εἶναι ἴση πρὸς $-\frac{6}{\alpha}$ (§ 195)· ἂν δὲ ὁ 6 εἶναι ἴσος τῷ μηδενί, αἱ δύο ῥίζαι εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί.

Τέλος δέ, ἂν $6=0$ καὶ $\gamma=0$, ἀμφότεραι αἱ ῥίζαι εἶναι 0.

Π. χ. τῆς ἐξισώσεως $3\chi^2-11\chi+2=0$ ἀμφότεραι αἱ ῥίζαι εἶναι θετικαί, τῆς δὲ ἐξισώσεως $2\chi^2+5\chi+2=0$ ἀμφότεραι αἱ ῥίζαι εἶναι ἀρνητικαί, τῶν δὲ ἐξισώσεων $\chi^2+3\chi-10=0$ καὶ $3\chi^2-2\chi-3=0$ αἱ ῥίζαι εἶναι ἑτεροειδεῖς, ὧν ἡ ἀπολύτως μείζων ἐν μὲν τῇ πρώτῃ τῶν ἐξισώσεων εἶναι ἡ ἀρνητική, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ἡ θετική.

2ον) *Σχηματίζεται ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ ἔχουσα ῥίζας δύο δεδομένους ἀριθμούς.*

Πρὸς τοῦτο γράφεται ἐξίσωσις ἔχουσα πρῶτον μὲν ὅρον τὸ χ^2, συντελεστὴν δὲ τοῦ χ τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν εἰλημμένον μετ' ἀντιθέτου σημείου, γνωστὸν δὲ ὅρον τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν, καὶ δεύτερον μέλος τὸ 0.

Κατὰ ταῦτα ἐξίσωσις ἔχουσα ῥίζας τοὺς ἀριθμοὺς 5 καὶ -8, ὧν τὸ μὲν ἄθροισμα ἰσοῦται τῷ -3, τὸ δὲ γινόμενον ἰσοῦται τῷ -40, θὰ εἶναι ἡ $\chi^2+3\chi-40=0$. Ἐξίσωσις δὲ ἔχουσα ῥίζας τοὺς ἀριθμοὺς $-\frac{5}{2}$ καὶ $\frac{1}{2}$, θὰ εἶναι ἡ $\chi^2+2\chi-\frac{5}{4}=0$, ἥτις γράφεται καὶ ὧδε : $4\chi^2+8\chi-5=0$.

Δύο δὲ ἀριθμοί, ὧν τὸ μὲν ἄθροισμα εἶναι -2, τὸ δὲ γινόμενον $-\frac{21}{4}$, θὰ εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+2\chi-\frac{21}{4}=0$, ἥτις γράφεται καὶ ὧδε :

$$4\chi^2+8\chi-21=0.$$

Λοιπὸν ἀρκεῖ, ἵνα εὕρωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους, νὰ λύσωμεν τὴν προκύψασαν ἐξίσωσιν, διότι ἐκ τῆς λύσεως ταύτης προκύπτουσι

$$χ'=\frac{3}{2} \text{ καὶ } χ''=-\frac{7}{2}.$$

$3_{ον}$) *Σπουδάζονται αἱ μεταβολαὶ τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $αχ^2+βχ+γ=0$, ὅταν οἱ μὲν ἀριθμοὶ β καὶ γ μένωσιν ἀμετάβλητοι, ὁ δὲ α ἀεὶ ἐλαττῶται καὶ τείνῃ πρὸς τὸ 0.*

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις $αχ^2+βχ+γ=0$ ἀεὶ πλησιάζει πρὸς τὴν $βχ+γ=0$, ἕπεται, ὅτι ἡ ἑτέρα τῶν ῥιζῶν αὐτῆς πλησιάζει πρὸς τὸν ἀριθμὸν $-\frac{γ}{β}$, ὅστις εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως $βχ+γ=0$· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν αὐτῆς εἶναι $-\frac{β}{α}$, ἕπεται, ὅτι ἡ ἑτέρα ῥίζα διαφέρει ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $-\frac{β}{α}+\frac{γ}{β}$ τόσῳ ὀλιγώτερον ὅσῳ τὸ α εἶναι μικρότερον.

Ἐπειδὴ τοῦ α τείνοντος εἰς τὸ 0 ὁ ἀριθμὸς $-\frac{β}{α}+\frac{γ}{α}$ τείνει εἰς τὸ ἄπειρον, βλέπομεν ὅτι ἡ δευτέρα αὕτη ῥίζα ἀπεριορίστως αὐξάνεται καὶ γίνεται κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μεγαλητέρα παντὸς δεδομένου ἀριθμοῦ, τουτέστιν κατ' ἀπόλυτον τιμὴν τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον.

Ἀνάλυσις παντὸς τριωνύμου τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἰς παράγοντας τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

198. ***Τριώνυμον** δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς χ καλεῖται ἡ ὡς πρὸς χ ἀκεραία παράστασις*

$$αχ^2+βχ+γ. \qquad (1)$$

Τὸ τριώνυμον τοῦτο, παριστώμενον συνήθως διὰ τοῦ ψ, δύναται νὰ γράφηται καὶ ὧδε :

$$ψ=α\left(χ^2+\frac{β}{α}χ+\frac{γ}{α}\right) \qquad (2)$$

Τιμαὶ δὲ τοῦ χ μηδενίζουσαι τὸ τριώνυμον τοῦτο εἶναι προφανῶς αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $αχ^2+βχ+γ=0$, ἥτις προκύπτει, ἂν τὸ τριώνυμον τοῦτο ἐξισωθῇ τῷ μηδενί.

Καλοῦμεν δέ, ἕνεκα συντομίας, τὰς ῥίζας ταύτας καὶ ῥίζας τοῦ τριωνύμου καὶ παριστῶμεν αὐτὰς διὰ τοῦ χ' καὶ τοῦ χ''.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 196) αἱ ῥίζαι αὗται συνδέονται πρὸς ἀλλήλας διὰ τῶν σχέσεων $\chi'+\chi''=-\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\chi'.\chi''=\frac{\gamma}{\alpha}$, ἕπεται ὅτι, ἂν ἐν τῷ τριωνύμῳ (2) ἀντὶ τοῦ $-\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ τοῦ $\frac{\gamma}{\alpha}$ τεθῶσιν οἱ ἴσοι πρὸς αὐτοὺς ἀριθμοὶ $\chi'+\chi''$ καὶ $\chi'.\chi''$, τὸ τριώνυμον θὰ γράφηται καὶ ὧδε·

$$\psi=\alpha[\chi^2-(\chi'+\chi'')\chi+\chi'\chi'']=\alpha(\chi^2-\chi'\chi-\chi''\chi+\chi'\chi'')$$

καὶ ἄρα $$\psi=\alpha(\chi-\chi')(\chi-\chi'')\cdot$$

τουτέστιν, ***πᾶν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ συντελεστοῦ τῆς δευτέρας τοῦ ἀγνώστου δυνάμεως ἐπὶ τοὺς δύο πρωτοβαθμίους παράγοντας, οἵτινες προκύπτουσιν, ἂν ἀπὸ τοῦ χ ἀφαιρεθῶσιν διαδοχικῶς ἑκατέρα τῶν ῥιζῶν τοῦ τριωνύμου.*** $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$ $\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

Παραδείγματα.

Ἀναλῦσαι εἰς παράγοντας τοῦ πρώτου βαθμοῦ τὰ ἑξῆς τριώνυμα·

1ον) $-5\chi^2-20\chi-15$.

Πρὸς τοῦτο, ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $-5\chi^2-20\chi-15=0$ εἶναι $\chi'=-1$ καὶ $\chi''=-3$, θὰ ἔχωμεν

$$-5\chi^2-20\chi-15=-5(\chi+1)\ (\chi+3).$$

2ον) $9\chi^2-12\chi+4$.

Πρὸς τοῦτο, ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $9\chi^2-12\chi+4=0$ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἑκάστη ἴση τῷ $\frac{2}{3}$, θὰ ἔχωμεν

$$9\chi^2-12\chi+4=9\left(\chi-\frac{2}{3}\right)\left(\chi-\frac{2}{3}\right)=9\left(\chi-\frac{2}{3}\right)^2.$$

199. ***Παρατηρήσεις 1η.*** Δύναται νὰ σχηματισθῇ δευτέρου βαθμοῦ ἐξίσωσις ἔχουσα ῥίζας δύο δεδομένους ἀριθμούς, οἷον τὸν **κ** καὶ τὸν **λ**, ἂν σχηματισθῇ τὸ γινόμενον τῶν δύο παραγόντων τῶν προκυπτόντων ἑκατέρου ἐκ τοῦ χ ἠλαττωμένου κατὰ τὸν ἕτερον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, ἤτοι τὸ $(\chi-\kappa)\ (\chi-\lambda)$, καὶ ἐξισωθῇ τοῦτο τῷ μηδενί· θὰ εἶναι ἄρα $$(\chi-\kappa)\ (\chi-\lambda)=0.$$

Κατὰ ταῦτα, ἐπειδὴ $(\chi-3)(\chi+5)=\chi^2+2\chi-15$, ἕπεται ὅτι μόνη ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+2\chi-15=0$ ἔχει ῥίζας τοὺς ἀριθμοὺς 3 καὶ -5.

2α. Ἂν ἀριθμός τις κ εἶναι ῥίζα ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ, τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως ταύτης διαιρεῖται διὰ τοῦ $\chi-\kappa$ (§ 96), διότι τὸ $\chi-\kappa$ εἶναι παράγων εἰς τὸ πρῶτον αὐτῆς μέλος.

200. ***Θεώρημα.*** *Τὸ ἐκ τοῦ τριωνύμου* $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ *διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν δεδομένην εἰς τὸ χ καὶ μὴ μηδενίζουσαν τὸ πολυώνυμον προκύπτον ἐξαγόμενον εἶναι ὁμοειδὲς τῷ συντελεστῇ τῆς δευτέρας δυνάμεως τοῦ ἀγνώστου, ἐκτὸς μόνον ὅταν τὸ τριώνυμον ἔχῃ ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, ἀντὶ δὲ τοῦ χ ἀντικατασταθῇ ἀριθμὸς περιλαμβανόμενος μεταξὺ τῶν ῥιζῶν τούτων.*

Θὰ διακρίνωμεν τρεῖς περιπτώσεις, καθόσον αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, πραγματικαὶ καὶ ἴσαι, καὶ τέλος φανταστικαί.

1ον) *Αἱ ῥίζαι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.* Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἂν αἱ ῥίζαι παρασταθῶσι διὰ τοῦ χ', χ'', θὰ ἔχωμεν

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha(\chi-\chi')(\chi-\chi'').$$

Ἐπειδὴ δέ, ἂν ὑποτεθῇ $\chi'>\chi''$, πᾶσα τοῦ χ τιμὴ μείζων μὲν τοῦ χ' θὰ καθιστᾷ ἑκάτερον παράγοντα θετικόν, ἐλάσσων δὲ τοῦ χ'', θὰ καθιστᾷ ἑκάτερον τούτων ἀρνητικόν, ἕπεται ὅτι κατ' ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις οἱ δύο παράγοντες θὰ εἶναι ὁμοειδεῖς, καὶ τὸ γινόμενον ἄρα αὐτῶν θὰ εἶναι θετικόν· κατ' ἀκολουθίαν τοῦ θετικοῦ τούτου γινομένου πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ α θὰ προκύψῃ ἐξαγόμενον ὁμοειδὲς τῷ α.

Ἀφ' ἑτέρου δὲ διὰ πᾶσαν τοῦ χ τιμὴν περιλαμβανομένην μεταξὺ τῶν ῥιζῶν τοῦ τριωνύμου, θὰ εἶναι ὁ μὲν παράγων $\chi-\chi'$ ἀρνητικός, ὁ δὲ παράγων $\chi-\chi''$ θετικός· τὸ γινόμενον ἄρα τῶν δύο τούτων ἑτεροειδῶν παραγόντων θὰ εἶναι ἀρνητικόν· κατ' ἀκολουθίαν, ἂν τὸ ἀρνητικὸν τοῦτο γινόμενον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ α, θὰ προκύψῃ ἐξαγόμενον ἑτεροειδὲς τῷ α.

2ον) *Αἱ ῥίζαι πραγματικαὶ καὶ ἴσαι.* Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἐπειδὴ (§ 196) ἑκάστη τῶν ῥιζῶν θὰ εἶναι ἴση τῷ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, ἔχομεν

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ $\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ εἶναι θετικόν, οἱουδήποτε πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ὄντος τοῦ χ, ἐκτὸς διὰ τὴν τιμὴν αὐτοῦ τὴν μηδενίζουσαν τὸ διώνυμον $\chi+\frac{6}{2\alpha}$, ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν α εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς τῷ α.

3ον) *Αἱ ῥίζαι φανταστικαί*. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἂν τὰς φανταστικὰς συζυγεῖς ῥίζας τοῦ τριωνύμου παραστήσωμεν διὰ τοῦ $\chi'=\varkappa+\lambda\,\mathrm{i}$ καὶ τοῦ $\chi''=\varkappa-\lambda\,\mathrm{i}$, τοῦ $\varkappa$ καὶ τοῦ λ ὄντων πραγματικῶν ἀριθμῶν, θὰ ἔχωμεν.

$$\alpha\chi^2+6\chi+\gamma=\alpha(\chi-\varkappa-\lambda\,\mathrm{i})(\chi-\varkappa+\lambda\,\mathrm{i}),$$

ἤτοι
$$\alpha\chi^2+6\chi+\gamma=\alpha[(\chi-\varkappa)^2+\lambda^2].$$

Ἐπειδὴ δὲ δι᾽ οἱανδήποτε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ τὸ προκύπτον ἐξαγόμενον ἐκ τῆς ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν παραστάσεως, ἥτις εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων, εἶναι πάντοτε θετικόν, ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸν α θὰ εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς τῷ α.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, καθ᾽ ἣν $6^2-4\alpha\gamma<0$, ἡ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσα μορφὴ τοῦ τριωνύμου, προκύπτει καὶ ὧδε·

ἐπειδὴ $6^2<4\alpha\gamma$, καὶ ἄρα $\frac{\gamma}{\alpha}>\frac{6^2}{4\alpha^2}$, ἂν τεθῇ $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{6^2}{4\alpha^2}+\mathrm{K}^2$,

τοῦ Κ ὄντος ἀριθμοῦ πραγματικοῦ καὶ διαφόρου τοῦ 0, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha\chi^2+6\chi+\gamma=\alpha\left(\chi^2+\frac{6}{\alpha}\chi+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha\left(\chi^2+\frac{6}{\alpha}\chi+\frac{6^2}{4\alpha^2}+\mathrm{K}^2\right),$$

ἤτοι
$$\alpha\chi^2+6\chi+\gamma=\alpha\left[\left(\chi+\frac{6}{2\alpha}\right)^2+\mathrm{K}^2\right],$$

ἀνάλογον δηλαδὴ μορφὴν πρὸς τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν.

Κατὰ ταῦτα τοῦ μὲν τριωνύμου $7\chi^2-5\chi+8$ ἡ τιμὴ θὰ εἶναι πάντοτε θετική, δι᾽ οἱανδήποτε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ· διότι $5^2-4.7.8<0$, ὁ δὲ τοῦ χ συντελεστὴς 7 εἶναι θετικός· τοῦ δὲ τριωνύμου $-3\chi^2+4\chi-6$ ἡ τιμὴ θὰ εἶναι πάντοτε ἀρνητική, δι᾽ οἱανδήποτε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ· διότι $2^2-3.6<0$, ὁ δὲ τοῦ χ συντελεστὴς -3 εἶναι ἀρνητικός· τοῦ δὲ τριωνύμου $4\chi^2-12\chi+9$ ἡ τιμὴ θὰ εἶναι πάντοτε θετική, οἱουδήποτε πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ὄντος τοῦ χ, ἐκτὸς ἂν ἡ τιμὴ αὐτοῦ μηδενίζῃ τὸ πολυώνυμον· διότι $6^2-4.9=0$, ὁ δὲ τοῦ χ^2 συντελεστὴς 4 εἶναι θετικός· τοῦ δὲ τριωνύμου $\chi^2-4\chi+13$, ἡ τιμὴ ἡ πρὸς οἱανδήποτε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ ἀντίστοιχος θὰ εἶναι θετική· διότι $2^2-13<0$, ὁ δὲ τοῦ χ^2 συντελεστὴς 1 εἶναι θετικός· τοῦ δὲ τριωνύμου $\chi^2+3\chi-28$, οὗτινος ῥίζαι εἶναι ὁ -7, καὶ ὁ $+4$, ἡ τιμὴ εἶναι θετικὴ μὲν διὰ πᾶσαν τοῦ χ τιμὴν περιλαμβανομένην εἴτε μεταξὺ τοῦ $-\infty$ καὶ τοῦ -7, εἴτε μεταξὺ τοῦ $+4$ καὶ τοῦ $+\infty$, ἀρνητικὴ δὲ διὰ πᾶσαν τοῦ χ τιμὴν περιλαμβανομένην μεταξὺ τοῦ -7 καὶ τοῦ $+4$.

201. ***Πόρισμα***. *Ἐὰν αἱ εἰς δύο τοῦ χ διαδοχικὰς τιμὰς $\varkappa$ καὶ λ ἀντιστοιχοῦσαι τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ τιμαὶ εἶναι ἑτερόσημοι, ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ ἔχει ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, μία δὲ μόνη ἐξ αὐτῶν περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ $\varkappa$ καὶ τοῦ λ.*

Διότι, ἂν ἡ ἐξίσωσις δὲν εἶχε ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, θὰ εἴχομεν $\beta^2-4\alpha\gamma\leqq 0$, ὁπότε γνωρίζομεν (§ 200) ὅτι ἡ πρὸς οἱανδήποτε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ προκύπτουσα ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ τριωνύμου θὰ ἦτο ὁμοειδὴς τῷ συντελεστῇ α.

Ἂν δὲ παραστήσωμεν τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως διὰ τοῦ χ' καὶ χ'', ὑποθέσωμεν δὲ $\chi'<\chi''$, παρατηροῦμεν ὅτι εἷς μόνος ἐκ τῶν ἀριθμῶν $\varkappa$ καὶ λ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ῥιζῶν χ' καὶ χ'', διότι διὰ τὴν μίαν μόνην τοιαύτην τοῦ χ τιμὴν ἡ ἀντίστοιχος τοῦ τριωνύμου τιμὴ εἶναι ἑτεροειδὴς τῷ συντελεστῇ α.

Ἀντιστρόφως, *ἂν δύο ἀριθμοὶ $\varkappa$ καὶ λ περιλαμβάνουσι μίαν μόνην ῥίζαν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, αἱ ἐκ τοῦ πρώτου τῆς ἐξισώσεως μέλους προκύπτουσαι τιμαί, ὅταν ὁ χ ἀντικατασταθῇ διαδοχικῶς διὰ τοῦ $\varkappa$ καὶ τοῦ λ εἶναι ἑτεροειδεῖς.*

Τοῦτο συνάγεται ἀμέσως ἐκ τῆς ἰδιότητος (§ 200).

202. ***Παρατήρησις***. Ὅταν ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ ἔχῃ ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, ἡ δὲ διά τινα τοῦ χ τιμὴν $\varkappa$ προκύπτουσα ἐκ τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἐξισώσεως ἀντίστοιχος τιμὴ εἶναι ὁμοειδὴς τῷ συντελεστῇ α τῆς δευτέρας δυνάμεως τοῦ ἀγνώστου, ὁ ἀριθμὸς οὗτος θὰ εἶναι ἡ μείζων μὲν τῶν ῥιζῶν, ἂν $\varkappa>\frac{\beta}{2\alpha}$, ἡ ἐλάσσων αὐτῶν, ἂν $\varkappa<-\frac{\beta}{2\alpha}$· διότι ἂν π. χ. εἶναι $\varkappa<\chi'$ καὶ $\varkappa<\chi''$, θὰ εἶναι καὶ $2\varkappa<\chi'+\chi''$, ἤτοι $2\varkappa<-\frac{\beta}{\alpha}$, καὶ ἄρα $\varkappa<-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Π.χ. ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-9\chi+20=0$, ἧς αἱ ῥίζαι εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ὁ μὲν ἀριθμὸς 6 εἶναι μείζων, ὁ δὲ ἀριθμὸς 2 ἐλάσσων, ἑκατέρας τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως.

Ἀνισότητες τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

203. *Πρὸς ἐπίλυσιν τῶν ἀνισοτήτων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ γινομένην κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα (§ 200) λαμβάνομεν τὰ ἑξῆς παραδείγματα·*

1ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνισότης* $4\chi^2-7\chi+3>0$.

Πρὸς τοῦτο, ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $4\chi^2-7\chi+3=0$ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ $\frac{3}{4}$, ἕπεται ὅτι ἡ δεδομένη ἀνισότης θὰ ἐπαληθεύηται διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ χ, δι᾽ ἃς ἡ παράστασις $4\chi^2-7\chi+3$ ἔχει τὸ αὐτὸ σημεῖον πρὸς τὸν συντελεστὴν 4, ἤτοι διὰ πᾶσαν τοῦ χ τιμὴν μείζονα τοῦ 1, ὡς καὶ διὰ πᾶσαν τοῦ χ τιμὴν ἐλάσσονα τοῦ $\frac{3}{4}$.

3ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνισότης* $-5\chi^2+8\chi-3>0$.

Πρὸς τοῦτο, ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $-5\chi^2+8\chi-3=0$ εἶναι $\chi'=1$, $\chi''=\frac{3}{5}$, ἕπεται ὅτι ἡ ἀνισότης θά ἐπαληθεύηται διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ χ, δι᾽ ἃς ἡ παράστασις $-5\chi^2+8\chi-3$ εἶναι θετική, ἑτεροειδὴς δηλαδὴ πρὸς τὸν συντελεστὴν -5 τῆς δευτέρας δυνάμεως τοῦ ἀγνώστου, ἤτοι διὰ πᾶσαν τοῦ χ τιμὴν περιλαμβανομένην μεταξὺ τῶν ῥιζῶν αὐτῆς 1 καὶ $\frac{3}{5}$.

3ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνισότης* $3\chi^2-8\chi+100<0$

Πρὸς τοῦτο, ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $3\chi^2-8\chi+100=0$ εἶναι φανταστικαί, ἡ παράστασις $3\chi^2-8\chi+100$ ἔχει πάντοτε τιμὴν ὁμοειδῆ πρὸς τὸν συντελεστὴν 3, δηλαδὴ θετικήν, καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν ἡ δεδομένη ἀνισότης οὐδέποτε πληροῦται, ἡτισδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ διδομένη εἰς τὸν χ τιμή.

4ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνισότης* $\frac{\chi^2-8\chi+12}{\chi^2+2}<0$.

Πρὸς τοῦτο, ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς εἶναι πάντοτε θετικός, τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῆς ἀνισότητος $\chi^2-8\chi+12<0$, ἥτις πληροῦται διὰ τιμὰς τοῦ χ περιλαμβανομένας μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 6, οἵτινες εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-8\chi+12=0$.

5ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνισότης* $\frac{\chi^2-5\chi+6}{\chi^2-5\chi+4}>0.$

Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὰς ῥίζας 3 καὶ 2 τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τὰς ῥίζας 4 καὶ 1 τοῦ παρονομαστοῦ.

Πρέπει δὲ καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς· ἐπειδὴ δέ, ὁ μὲν ἀριθμητὴς εἶναι θετικὸς διὰ πᾶσαν τοῦ χ τιμὴν μείζονα τοῦ 3, ὡσαύτως δὲ καὶ διὰ πᾶσαν τοῦ χ τιμὴν ἐλάσσονα τοῦ 2, ὁ δὲ παρονομαστὴς εἶναι θετικὸς διὰ πᾶσαν τοῦ χ τιμὴν εἴτε μείζονα τοῦ 4 εἴτε ἐλάσσονα τοῦ 1, συνάγεται ὅτι ἡ δεδομένη ἀνισότης ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τοῦ χ τιμὴν εἴτε μείζονα τοῦ 4 εἴτε ἐλάσσονα τοῦ 1.

Ἀφ' ἑτέρου δέ, ἐπειδὴ ὁ μὲν ἀριθμητὴς εἶναι ἀρνητικὸς διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ χ τὰς περιλαμβανομένας μεταξὺ τοῦ 2 καὶ τοῦ 3, ὁ δὲ παρονομαστὴς εἶναι ὡσαύτως ἀρνητικὸς διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ χ τὰς περιλαμβανομένας μεταξὺ τοῦ 4 καὶ τοῦ 1, ἕπεται ὅτι ἡ δεδομένη ἀνισότης ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τοῦ χ τιμὴν περιλαμβανομένην μεταξὺ τοῦ 2 καὶ τοῦ 3.

6ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνισότης* $\frac{3\chi^2-11\chi+10}{\chi^2-3\chi+2}>2.$ (1)

Πρὸς τοῦτο, ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς εἶναι θετικὸς μὲν διὰ τιμὰς τοῦ χ εἴτε μείζονας τοῦ 2 εἴτε ἐλάσσονας τοῦ 1, αἵτινες εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-3\chi+2=0$, ἀρνητικὸς διὰ τιμὰς τοῦ χ περιλαμβανομένας μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 2, ἕπεται ὅτι, ἂν νῦν θεωρήσωμεν μόνον τὰς τιμὰς τοῦ χ τὰς μείζονας τοῦ 2 ἢ τὰς ἐλάσσονας τοῦ 1, πολλαπλασιάσωμεν δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ἐπὶ τὸν θετικὸν τότε παράγοντα $\chi^2-3\chi+2$, θὰ προκύψῃ (§ 148, 6)

$$3\chi^2-11\chi+10>2\chi^2-6\chi+4, \text{ ἐξ ἧς } \chi^2-5\chi+6>0.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀνισότης αὕτη ἀληθεύει διὰ τιμὰς τοῦ χ μὴ περιλαμβανομένας εἰς τὰς ῥίζας 2 καὶ 3 τοῦ τριωνύμου τούτου, καὶ ἐπειδὴ ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει ὁ χ πρέπει νὰ ἔχῃ τιμὰς εἴτε μείζονας τοῦ 2 εἴτε ἐλάσσονας τοῦ 1, ἕπεται ὅτι ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τοῦ χ τιμὴν εἴτε μείζονα τοῦ 3 εἴτε ἐλάσσονα τοῦ 1.

Ἂν δὲ νῦν θεωρήσωμεν τὰς τιμὰς τοῦ χ τὰς περιλαμβανομένας μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 2, πολλαπλασιάσωμεν δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος (1) ἐπὶ τὸν ἀρνητικὸν τότε παράγοντα $\chi^2-3\chi+2$, θὰ προκύψῃ (§ 151, 6΄)

$$3\chi^2-11\chi+10<2\chi^2-6\chi+4, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \chi^2-5\chi+6<0.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ προκύψασα ἀνισότης ἐπαληθεύεται μόνον διὰ τιμὰς τοῦ χ περιλαμβανομένας μεταξὺ τοῦ 2 καὶ τοῦ 3, ἕπεται ὅτι ἡ ἀνισότης (1) δὲν θὰ ἐπαληθεύηται ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει.

Λοιπὸν ἡ δεδομένη ἀνισότης ἀληθεύει διὰ τιμὰς τοῦ χ εἴτε μείζονας τοῦ 3 εἴτε ἐλάσσονας τοῦ 1.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) *Ἐπιλῦσαι τὰς ἑξῆς ἐξισώσεις·*

$$\frac{\chi+2}{4}\cdot\ \frac{\chi+3}{3}=\frac{3(\chi+2)}{4}, \qquad \frac{\chi+1}{\chi}+1=\frac{\chi}{\chi-1},$$

$$(\alpha^2-\beta^2)\chi^2-2(\alpha^2+\beta^2)\chi+\alpha^2-\beta^2=0.$$

$$\frac{\chi^2}{\alpha}-\frac{\chi}{\beta}=\frac{\gamma}{\beta\delta}-\frac{\gamma\chi}{\alpha\delta}.$$

2) *Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον νὰ εἶναι ἴσα τῷ ἀριθμῷ* $\frac{9}{2}$.

3) *Δεδομένων τῶν δύο πρώτων ὅρων* $3\chi^2-30\chi$ *ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ ἐχούσης ἴσας ῥίζας, εὑρεῖν τὰς ῥίζας καὶ τὸν τρίτον τῆς ἐξισώσεως ὅρον.*

4) *Δεδομένης τῆς ἐξισώσεως* $8\chi^2-(\alpha-1)\chi+\alpha+1=0$, *εὑρεῖν διὰ τίνας τιμὰς τοῦ α αἱ ῥίζαι αὐτῆς εἶναι 1) πραγματικαὶ καὶ ἴσαι, 2) ἀντίθετοι, 3) ἀντίστροφοι καὶ 4) ἡ ἑτέρα ἴση τῷ μηδενί.*

5) Δεδομένης τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, σχηματίσαι ἄλλην ἐξίσωσιν ἔχουσαν ῥίζας,

α΄) Ἀντιθέτους τῶν ῥιζῶν τῆς δεδομένης,

β΄) Ἀντιστρόφους τῶν ῥιζῶν τῆς δεδομένης,

γ΄) Τὰς ῥίζας τῆς δεδομένης πολλαπλασιασμένας ἐπὶ μ,

γ΄) Τὰς ῥίζας τῆς δεδομένης ηὐξημένας κατὰ ε,

ε΄) Τὰ τετράγωνα τῶν ῥιζῶν ἐκείνης.

6) Σχηματίσαι ἐξίσωσιν ἔχουσαν ῥίζας τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.

7) Δεδομένων τῶν ἐξισώσεων

$$\chi^2-7\chi+12=0 \quad \text{καὶ} \quad \chi^2-3\chi+\gamma=0,$$

ὁρίσαι τὸν γ οὕτως, ὥστε αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις νὰ ἔχωσι μίαν ῥίζαν κοινήν.

8) Προσδιορίσαι τὸν α τῆς δεδομένης ἐξισώσεως

$$(\alpha+6)\chi^2-2(\alpha+3)\chi+6-2\alpha-\alpha^2=0$$

οὕτως, ὥστε αἱ ῥίζαι αὐτῆς νὰ εἶναι ἀριθμοὶ ἀντίστροφοι καὶ ἐπιλῦσαι τὰς προκυπτούσας τότε ἐξισώσεις.

9) Ὁρίσαι τὰς τιμὰς τοῦ α καὶ τοῦ 6 εἰς τὰς ἐξισώσεις

$$(5\alpha-52)\chi^2-(\alpha-4)\chi+4=0$$

$$(2\beta+1)\chi^2-5\beta\chi+20=0,$$

ὥστε αἱ ῥίζαι αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσαι.

10) Ἐν τῇ ἐξισώσει $\chi^2-\pi\chi+36=0$ *προσδιορίσαι τὸν π οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωμεν* $\frac{1}{\chi'}+\frac{1}{\chi''}=\frac{5}{12}$.

11) Ἐπιλῦσαι τὴν ἀνισότητα $\frac{\chi-1}{\chi-2}>\frac{\chi-3}{\chi-4}$.

12) *Εὑρεῖν τὰς τιμὰς τοῦ χ τὰς ἀληθευούσας συγχρόνως τὰς ἀνισότητας* $\chi^2-12+32>0$ *καὶ* $\chi^2-13\chi+22<0$.

Διτετράγωνοι ἐξισώσεις.

204. ***Διτετράγωνοι ἐξισώσεις*** *καλοῦνται αἱ ἐξισώσεις τοῦ τετάρτου βαθμοῦ αἱ περιέχουσαι ἀρτίας μόνας δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου· ἤτοι αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς*

$$\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=0. \qquad (1)$$

Αἱ ῥίζαι τοιαύτης ἐξισώσεως εἶναι ἀνὰ δύο ἀντίθετοι· διότι τῶν ἀντιθέτων ἀριθμῶν τὰ τετράγωνα εἶναι ἀριθμοὶ ἴσοι.

Ἵνα δὲ ἐπιλυθῇ μία τοιαύτη ἐξίσωσις, ἂς ληφθῇ $\chi^2=\psi$, ἐξ οὗ $\chi^4=\psi$, διότι τότε ἡ δεδομένη ἐξίσωσις (1) μετασχηματίζεται εἰς τὴν

$$\alpha\psi^2+\beta\psi+\gamma=0, \qquad (2)$$

ἤτοι εἰς ἐξίσωσιν δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον ψ.

Ὅταν δὲ ἐκ τῆς δευτεροβαθμίου ταύτης ἐξισώσεως εὑρεθῶσιν αἱ δύο τοῦ ψ τιμαὶ ψ′ καὶ ψ″ (§ 186), εὑρίσκονται εἶτα καὶ αἱ τιμαὶ τοῦ χ ἐκ τῶν ἐξισώσεων $\chi^2=\psi'$ καὶ $\chi^2=\psi''$.

Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν

$$\psi=\frac{-\beta\pm\sqrt{6^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \text{ καὶ ἄρα } \chi=\pm\sqrt{\frac{-\beta\pm\sqrt{6^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}. \qquad (3)$$

ἤτοι προέκυψαν τέσσαρες ῥίζαι τῆς δεδομένης ἐξισώσεως (1).

Λοιπόν, ἂν οὕτως ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3\chi^4-26\chi^2-9=0$, θὰ ἔχωμεν $\psi'=9$ καὶ $\psi''=-\frac{1}{3}$, ἐξ ὧν θὰ συναγάγωμεν ὅτι αἱ ῥίζαι αὐτῆς εἶναι

$$\chi_1=3,\quad \chi_2=-3,\quad \chi_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{-1} \text{ καὶ } \chi_4=-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{-1}.$$

Ὡσαύτως ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi^4+13\chi^2+36=0$ οὕτως ἐπιλυομένης, θὰ προκύψωσιν αἱ ῥίζαι αὐτῆς

$$\chi_1=2i,\quad \chi_2=-2i,\quad \chi_3=3i \text{ καὶ } \chi_4=-3i.$$

Διερεύνησις. Οἱ ἐν τῷ τύπῳ (3) ὑπὸ τὸ ἐξωτερικὸν ῥιζικὸν εὑρισκόμενοι ἀριθμοὶ εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\psi^2+6\psi+\gamma=0$. Ἂν μὲν αἱ ῥίζαι αὗται εἶναι πραγματικαὶ καὶ θετικαί, αἱ τέσσαρες τιμαὶ τοῦ χ θὰ εἶναι πραγματικαί· ἂν δὲ αἱ ῥίζαι αὗται εἶναι πραγματικαὶ ἑτεροειδεῖς, αἱ μὲν δύο τιμαὶ τοῦ χ θὰ εἶναι πραγματικαί, αἱ δὲ δύο ἄλλαι φανταστικαί· ἂν δὲ αἱ ῥίζαι αὗται εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἀρνητικαί, αἱ τέσσαρες τοῦ χ τιμαὶ θὰ εἶναι φανταστικαί. Τέλος δέ, ἂν αἱ ῥίζαι αὗται εἶναι φανταστικαί, αἱ τέσσαρες τοῦ χ τιμαὶ θὰ εἶναι ὡσαύτως φανταστικαί· διότι, ἂν αὗται ἦσαν πραγματικαὶ καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν θὰ ἦσαν ἀριθμοὶ πραγματικοί.

Μετασχηματισμὸς τῶν παραστάσεων τῆς μορφῆς

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}\,.$$

205. Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως διτετραγώνου ἐξισώσεως προκύπτουσι παραστάσεις τῆς μορφῆς $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$. Εἶναι δὲ πολλάκις χρήσιμον, ἕνεκα εὐκολίας τοῦ ὑπολογισμοῦ καὶ ἐκτιμήσεως τῆς προσεγγίσεως τοῦ ἐξαγομένου, νὰ ἀντικαθίστανται τοιαῦται παραστάσεις δι' ἄλλων ἰσοδυνάμων, αἵτινες νὰ περιέχωσιν ἀντὶ ῥιζικῶν ἐπαλλήλων ῥιζικὰ παρατιθέμενα. Θὰ δείξωμεν δὲ τίνι τρόπῳ καὶ ὑπὸ τίνας συνθήκας ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ.

Οὕτω δεδομένων τῶν παραστάσεων $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$, ἐν αἷς τὸ A καὶ τὸ B εἶναι ἀριθμοὶ σύμμετροι, ὁ δὲ B δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ζητεῖται νὰ εὑρεθῶσι δύο σύμμετροι θετικοὶ ἀριθμοὶ χ καὶ ψ τοιοῦτοι, ὥστε νὰ ἔχωμεν

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\chi}\pm\sqrt{\psi}, \tag{1}$$

ὑποτιθεμένης τῆς $\sqrt{\chi}$ πάντοτε θετικῆς.

Πρὸς τοῦτο, ἂν ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον, ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) διὰ τῆς ὑψώσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῶν εἰς τὸ τετράγωνον, θὰ προκύψωσιν αἱ ἰσότητες

$$A \pm \sqrt{B} = \chi + \psi \pm 2\sqrt{\chi}.\sqrt{\psi}\,, \qquad (2)$$

ἐν αἷς ἡ $\sqrt{\chi}.\sqrt{\psi}$ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος, διότι ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος θὰ ἦτο ἀριθμὸς σύμμετρος, ἐνῷ τὸ πρῶτον μέλος εἶναι ἀσύμμετρος.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) προκύπτει ὅτι $\pm\sqrt{B} = \pm 2\sqrt{\chi}\,\sqrt{\psi}$,

ἐξ ὧν ἕπεται ὅτι ἡ $\sqrt{\psi}$ εἶναι ὁμόσημος τῇ $\sqrt{B}$, ὅτι δὲ $\chi\psi = \frac{B}{4}$,

καὶ $\chi + \psi = A$· διότι ἂν τὰς ἰσότητας (2) γράψωμεν ὧδε·

$$\pm\sqrt{B} = \chi + \psi - A \pm 2\sqrt{\chi\psi}\,, \qquad (3)$$

ὑψώσωμεν δὲ εἶτα ἀμφότερα τὰ μέλη ἑκατέρας αὐτῶν εἰς τὸ τετράγωνον, θεωροῦντες τὸ $\chi + \psi - A$ ὡς ἕνα ὅρον, θὰ προκύψωσιν αἱ ἰσότητες

$$B = (\chi + \psi - A)^2 \pm 4(\chi + \psi - A)\sqrt{\chi\psi} + 4\chi\psi. \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ πρῶτον μέλος τῶν ἰσοτήτων αὐτῶν (4) εἶναι ἀριθμὸς σύμμετρος, ἕπεται ὅτι, ἵνα αὗται ἀληθεύσωσι διὰ συμμέτρους τιμὰς τοῦ χ καὶ τοῦ ψ, πρέπει ὁ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ χψ συντελεστὴς $\chi + \psi - A$ νὰ εἶναι ἴσος τῷ μηδενί.

Κατὰ ταῦτα ἄρα θὰ εἶναι $\quad \chi + \psi = A, \qquad (5)$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἐκ τῆς ἰσότητος (4) θὰ προκύψῃ $\chi\psi = \frac{B}{4}$. $\quad$ (6)

Ἐκ τῶν σχέσεων δὲ τούτων (5) καὶ (6) συνάγεται (§ 191) ὅτι οἱ ἄγνωστοι ἀριθμοὶ χ, ψ εἶναι ῥίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως

$$\omega^2 - A\omega + \frac{B}{4} = 0, \qquad (7)$$

ἐξ ἧς ἐπιλυομένης εὑρίσκεται ὅτι

$$\omega = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}.$$

Λοιπὸν ἔχομεν $\quad \chi = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}$ καὶ $\psi = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$.

Ἵνα δὲ ὁ χ καὶ ὁ ψ εἶναι ἀριθμοὶ σύμμετροι, πρέπει ἡ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν παράστασις $A^2 - B$ νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον. Αὕτη δὲ εἶναι ἡ συνθήκη, ἥτις ἀπαιτεῖται, ἵνα ᾖ δυνατὸς ὁ ζητούμενος μετασχημός.

Κατὰ ταῦτα ἄρα ἔχομεν

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

καὶ $$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Π. χ. ὁ μετασχηματισμὸς τῆς παραστάσεως $\sqrt{7\pm\sqrt{40}}$ εἰς ἁπλᾶ ῥιζικὰ εἶναι δυνατός, διότι $49-40=9$, ὁ δὲ 9 εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Λοιπὸν ἔχομεν $$\sqrt{7\pm\sqrt{40}}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{9}}{2}}\pm\sqrt{\frac{7-\sqrt{9}}{2}},$$

ἤτοι $$\sqrt{7\pm\sqrt{40}}=\sqrt{5}\pm\sqrt{2}.$$

Ὡσαύτως $$\sqrt{9-\sqrt{45}}=\sqrt{\frac{9+\sqrt{81-45}}{2}}-\sqrt{\frac{9-\sqrt{81-45}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{15}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}$$ καὶ $$\sqrt{6\pm\sqrt{11}}=\sqrt{\frac{11}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Ὡσαύτως ἔχομεν $$\sqrt{\frac{2\alpha+1+\sqrt{4\alpha+1}}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha+1},$$

$$\sqrt{\alpha\beta+\gamma^2+\sqrt{(\alpha^2-\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)}}=\frac{1}{2}\sqrt{2(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)}+\frac{1}{2}\sqrt{2(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

καὶ $$\sqrt{4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\sqrt{-1}}=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\sqrt{-1}.$$

0,25

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΧΟΥΣΑΙ ΡΙΖΙΚΑ

206. Ἐὰν ἐξίσωσις περιέχῃ ῥιζικὸν τετραγωνικῆς ῥίζης, ὑφ' ὃ νὰ ὑπάρχῃ ὁ ἄγνωστος, διατηροῦντες τὸ ῥιζικὸν τοῦτο ἐν τῷ ἑτέρῳ μέλει, μεταφέρομεν πάντας τοὺς ἄλλους ὅρους εἰς τὸ ἕτερον μελος, καὶ εἶτα ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς προκυψάσης ἐξισώσεως. Ἡ δὲ οὕτω ἄνευ ῥιζικοῦ προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶναι, ὡς εἴδομεν (§ 189), ἰσοδύναμος πρὸς δύο ἐξισώσεις, τὴν δεδομένην καὶ τὴν ἐξ αὐτῆς προκύπτουσαν δι' ἀλλαγῆς τοῦ σημείου τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

Καλοῦνται δὲ αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις συζυγεῖς ἀλλήλων.

Παραδείγματα.

1ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\chi-\sqrt{\chi}=12$.

Πρὸς τοῦτο γράφομεν αὐτὴν ὧδε $\chi-12=\sqrt{\chi}\cdot$ εἶτα δὲ ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς εἰς τὸ τετράγωνον ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\chi^2-24\chi+144=\chi,$$

ἥτις γράφεται καὶ ὧδε· $\chi^2-25\chi+144=0$,
καὶ ἐξ ἧς ἐπιλυομένης προκύπτουσιν αἱ λύσεις

$$\chi'=\frac{25+\sqrt{25^2-4.144}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \chi''=\frac{25-\sqrt{25^2-4.144}}{2},$$

ἤτοι $\chi'=16$ καὶ $\chi''=9$.

Τῶν δὲ λύσεων τούτων ἡ μὲν πρώτη ἁρμόζει εἰς τὴν δεδομένην ἐξίσωσιν, διότι ἐπαληθεύει αὐτήν, ἡ δὲ δευτέρα εἰς τὴν συζυγῆ αὐτῆς ἐξίσωσιν $\chi+\sqrt{\chi}=12$.

2ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\chi+\sqrt{\chi^2-9}=9$.

Πρὸς τοῦτο γράφομεν αὐτὴν ὧδε· $\sqrt{\chi^2-9}=9-\chi\cdot$ εἶτα δὲ ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς εἰς τὸ τετράγωνον ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\chi^2-9=81-18\chi+\chi^2, \quad \text{ἤτοι τὴν} \quad 18\chi=90,$$

ἐξ ἧς ἐπιλυομένης προκύπτει $\chi=\frac{90}{18}=5$.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ λύσις αὕτη ἁρμόζει εἰς τὴν δεδομένην ἐξίσωσιν, ἕπεται ὅτι ἡ συζυγὴς αὐτῆς $\chi-\sqrt{\chi^2-9}=9$, οὐδεμίαν ἐπιδέχεται λύσιν.

3ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\chi+\sqrt{\chi^2+5\chi-8}=-1$.

Πρὸς τοῦτο γράφομεν αὐτὴν ὧδε· $\sqrt{\chi^2+5\chi-8}=-1-\chi$.

Εἶτα δὲ ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς εἰς τὸ τετράγωνον, ἔχομεν

$\chi^2+5\chi-8=1+\chi^2+2\chi$ καὶ ἄρα $3\chi=9$, ἤτοι $\chi=3$.

Ἡ δὲ λύσις αὕτη ἁρμόζει εἰς τὴν συζυγῆ τῆς δεδομένης ἐξίσωσιν, καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν ἡ δεδομένη $\chi+\sqrt{\chi^2+5\chi-8}=-1$ οὐδεμίαν ἐπιδέχεται λύσιν.

4ον) *Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\chi-\sqrt{\chi^2-14\chi+25}=7$.

Πρὸς τοῦτο γράφομεν αὐτὴν ὧδε· $\chi-7=\sqrt{\chi^2-14\chi+25}$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν πάλιν ὡς ἀνωτέρω τὴν ἐξίσωσιν

$\chi^2-14\chi+49=\chi^2-14\chi+25$, ἤτοι τὴν $24=0$.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ προκύψασα ἐξίσωσις οὐδεμίαν ἔχει λύσιν, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ δεδομένη ἐξίσωσις καὶ ἡ συζυγὴς αὐτῆς οὐδεμίαν ἔχουσι λύσιν.

5ον) *Ἔστω ἡ ἐξίσωσις* $\sqrt{\chi+6}+\sqrt{\chi-1}=\sqrt{4\chi+9}$. (1)

Πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως ταύτης, τῆς περιεχούσης πλείονα ῥιζικὰ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ὑψοῦμεν ἀλλεπαλλήλως τὰ μέλη αὐτῆς εἰς τὸ τετράγωνον, ἵνα ἐξαφανισθῶσι τὰ ῥιζικὰ καὶ οὕτω ἔχομεν

$$\sqrt{\chi^2+5\chi-6}=\chi+2, \qquad (2)$$

ἐξ ἧς προκύπτει ἡ $\chi^2+5\chi-6=\chi^2+4\chi+4$,

καὶ ἐξ ἧς ἄρα ἡ λύσις $\chi=10$. (3)

Ἡ προκύψασα δὲ ἄνευ ῥιζικῶν ἐξίσωσις (3) εἶναι ἰσοδύναμος τῇ (2) καὶ τῇ συζυγῇ αὐτῆς $-\sqrt{\chi^2+5\chi-6}=\chi+2$· τούτων δὲ πάλιν ἡ μὲν (2) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\chi+6}+\sqrt{\chi-1}=\sqrt{4\chi+9}\\ \sqrt{\chi+6}+\sqrt{\chi-1}=-\sqrt{4\chi+9}.\end{array}\right.$$

ἡ δὲ πρὸς τὴν (2) συζυγὴς $-\sqrt{\chi^2+5\chi-6}=\chi+2$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\chi+6}-\sqrt{\chi-1}=\sqrt{4\chi+9} \\ \sqrt{\chi+6}-\sqrt{\chi-1}=-\sqrt{4\chi+9}.\end{array}\right.$$

Λοιπὸν ἡ προκύψασα ἄνευ ῥιζικῶν ἐξίσωσις (3) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς ἀνωτέρω τέσσαρας ἐξισώσεις, τὰς προκυπτούσας ἐκ τῆς δεδομένης, ἂν ἑκάστη ἐκείνης ῥίζα ληφθῇ μετὰ τοῦ θετικοῦ ἢ τοῦ ἀρνητικοῦ σημείου, καθ' ἅπαντας τοὺς δυνατοὺς συνδυασμούς.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ λύσις $\chi=10$ ἁρμόζει εἰς τὴν δεδομένην ἐξίσωσιν, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς ἀμέσου ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ χ ἐν τῇ δεδομένῃ ἐξισώσει, συνάγεται ὅτι αἱ λοιπαὶ τρεῖς ἄλλαι ἐξισώσεις οὐδεμίαν ἔχουσι λύσιν.

6ον) Ὡσαύτως ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\sqrt{2\chi+7}+\chi=3\chi-13$ ἐπιλυομένης κατὰ τὰ ἀνωτέρω προκύπτουσιν αἱ τοῦ χ τιμαὶ 9 καὶ $\frac{9}{2}$, ἐξ ὧν ἡ μὲν 9 ἁρμόζει εἰς τὴν δεδομένην ἐξίσωσιν, ἡ δὲ $\frac{9}{2}$ εἰς τὴν ταύτης συζυγῆ $-\sqrt{2\chi+7}+\chi=3\chi-13$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1) *Ἀγοράσας ὕφασμα ἔδωκα ἐν ὅλῳ δραχμὰς 240. Ἂν δὲ ἠγόραζον ἀντὶ τῶν αὐτῶν χρημάτων 3 πήχεις πλείονας, ὁ πῆχυς θὰ ἐτιμᾶτο 4 δραχμὰς ὀλιγώτερον. Πόση ἦτο ἡ τιμὴ ἑκάστου πήχεως ;*

Ἂν παραστήσωμεν τὴν τιμὴν ἑκάστου πήχεως τοῦ ὑφάσματος διὰ τοῦ χ, ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων θὰ ἦτο $\frac{240}{\chi}$. Ἂν δὲ ἡ τιμὴ ἑκάστου πήχεως τοῦ ὑφάσματος ἦτο $\chi-4$, ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων θὰ ἦτο $\frac{240}{\chi-4}$. Οὕτως ἄρα προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{240}{\chi-4}-\frac{240}{\chi}=3,$$

ἧς ὁ ἄγνωστος χ πρέπει νὰ εἶναι ἀριθμὸς θετικός.

Ἐκ δὲ τῆς ἐπιλύσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης, θὰ ἔχωμεν $\chi'=20$ καὶ $\chi''=-16$, ἐξ ὧν μόνον ὁ 20 λύει τὸ πρόβλημα.

2) *Δύο ἐργάται λαμβάνοντες διάφορον ἡμερήσιον μισθὸν ἐκέρδισαν ἐν ὅλῳ, ὁ μὲν ἕτερος, ἐργασθεὶς 6 ἡμέρας πλείονας τοῦ ἑτέρου,*

δραχμὰς 96, ὁ δὲ ἕτερος δραχμὰς 54. Ἂν δὲ ἑκάτερος αὐτῶν ἐλάμβανεν ἡμερησίως ὅσα ὁ ἕτερος, θὰ ἐκέρδαινον κατὰ τὰς ἡμέρας αὐτὰς ἴσα ποσά. Πόσας ἡμέρας εἰργάσθη ἑκάτερος αὐτῶν ;

Ἂν παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν, καθ' ἃς εἰργάσθη ὁ πρῶτος ἐργάτης διὰ τοῦ χ, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, καθ' ἃς ἐργάσθη ὁ ἕτερος ἐργάτης, θὰ εἶναι $\chi-6$· οὕτω δὲ ὁ ἡμερήσιος μισθὸς τοῦ μὲν πρώτου θὰ ἦτο $\frac{96}{\chi}$, τοῦ δὲ δευτέρου θὰ ἦτο $\frac{54}{\chi-6}$· κατ' ἀκολουθίαν ὁ μὲν πρῶτος, ἂν εἰργάζετο $\chi-6$ ἡμέρας θὰ ἐλάμβανεν ἐν ὅλῳ $\frac{96}{\chi}(\chi-6)$ δραχμάς, ὁ δὲ δεύτερος, ἂν εἰργάζετο χ ἡμέρας, θὰ ἐλάμβανεν ἐν ὅλῳ $\frac{54}{\chi-6}$ δραχμάς.

Οὕτως ἄρα ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος θὰ εἶναι

$$\frac{96}{\chi}(\chi-6)=\frac{54}{\chi-6}.\ \chi,$$

ἧς ὁ ἄγνωστος χ πρέπει νὰ εἶναι ἀριθμὸς θετικὸς καὶ μείζων τοῦ 6.

Ἐκ δὲ τῆς ἐπιλύσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης, θὰ ἔχωμεν $\chi'=24$ καὶ $\chi''=\frac{24}{7}$, ἐξ ὧν ὁ πρῶτος μόνος ἀριθμὸς 24 ἁρμόζει εἰς τὸ πρόβλημα.

Κατὰ ταῦτα ἄρα ὁ μὲν ἕτερος εἰργάσθη 24 ἡμέρας, ὁ δὲ ἕτερος 18.

3) ***Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς,*** *ὧν ἡ μὲν διαφορὰ νὰ εἶναι ἴση τῷ ἀριθμῷ 3, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν κύβων τούτων νὰ εἶναι ἴση τῷ 117.*

Ἂν παραστήσωμεν τὸν ἕτερον τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν διὰ τοῦ χ, τότε ὁ ἕτερος, θὰ εἶναι $\chi-3$, κατ' ἀκολουθίαν δὲ ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος θὰ εἶναι

$$\chi^3-(\chi-3)^3=117.$$

Ἐπειδὴ δὲ $(\chi-3)^3=\chi^3-3\chi^2.3+3.\chi.3^2-3^3$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται καὶ ὧδε·

$$3^2.\chi^2-3^3.\chi+3^3-117=0 \text{· τουτέστιν } \chi^2-3\chi-10=0,$$

ἐξ ἧς ἐπιλυομένης προκύπτουσιν αἱ λύσεις

$$\chi'=5 \ \text{ καὶ } \ \chi''=-2$$

καὶ ἄρα αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ἑτέρου ἀγνώστου θὰ εἶναι 2 καὶ — 5.

4) *Ἐκ δύο σιδηροδρομικῶν σταθμῶν Α καὶ Β ἀνεχώρησαν συγχρόνως δύο ἀτμάμαξαι ὁμαλῶς πρὸς ἀλλήλας κινούμεναι. Ἔφθασαν δὲ ἡ μὲν ἐκ τοῦ Α ἀναχωρήσασα εἰς τὸν σταθμὸν Β 9 ὥρας μετὰ τὴν συνάντησιν αὐτῆς μετὰ τῆς ἑτέρας, ἡ δὲ ἐκ τοῦ Β ἀναχωρήσασα εἰς τὸν Α 4 ὥρας μετ' αὐτήν. Ζητεῖται ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων, μεθ' ὧν ἐβάδιζον.*

Ἂν παραστήσωμεν τὴν ταχύτητα τῆς μὲν ἐκ τοῦ Α ἐκκινησάσης ἀτμαμάξης διὰ τοῦ χ, τῆς δὲ ἐκ τοῦ Β διὰ τοῦ ψ, τὸ δὲ σημεῖον τῆς ὁδοῦ ΑΒ εἰς ὃ συνηντήθησαν διὰ τοῦ Γ,

Α χ Γ ψ Β

ἐπειδὴ ἡ μὲν ἑτέρα, ἔχουσα τὴν ταχύτητα χ, διήνυσε τὸ διάστημα ΓΒ εἰς 9 ὥρας, ἡ δὲ ἑτέρα, ἔχουσα τὴν ταχύτητα ψ, διήνυσε τὸ ΓΑ εἰς 4 ὥρας, θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας

$$(\Gamma\mathrm{B})=9.\chi \quad \text{καὶ} \quad (\Gamma\mathrm{A})=4.\psi \tag{73}$$

Ἐπειδὴ δὲ ἀμφότεραι συγχρόνως ἐξεκίνησαν ἐκ τοῦ Α καὶ τοῦ Β καὶ συγχρόνως ἔφθασαν εἰς τὸ Γ, ἔπεται ὅτι οἱ χρόνοι, καθ' οὓς τὰ διαστήματα ΑΓ καὶ ΓΒ διηνύθησαν ἀντιστοίχως ὑπὸ τῆς ἀτμαμάξης τῆς ἐκκινησάσης ἐκ τοῦ Α καὶ τῆς ἐκκινησάσης ἐκ τοῦ Β, εἶναι ἴσοι· τουτέστιν θὰ ἔχωμεν $\dfrac{(\mathrm{A}\Gamma)}{\chi}=\dfrac{(\mathrm{B}\Gamma)}{\psi}$.

Οὕτως ἄρα ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος θὰ εἶναι

$$\frac{4.\psi}{\chi}=\frac{9.\chi}{\psi}, \text{ ἥτις γράφεται καὶ ὧδε· } 4\psi^2=9\chi^2,$$

ἐξ ἧς καὶ
$$\frac{\chi^2}{\psi^2}=\frac{4}{9}.$$

Πρέπει δὲ ὁ ζητούμενος λόγος νὰ εἶναι ἀριθμὸς θετικός.

Ἂν δὲ ἐξαχθῇ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, θὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\chi}{\psi}=\dfrac{2}{3}$.

Λοιπὸν ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων αὐτῶν θὰ εἶναι, ὡς ὁ 2 πρὸς τὸν 3.

5) ***Δέκα ὀκτὼ ἄτομα, ἄνδρες καὶ γυναῖκες, ἐδαπάνησαν εἰς δεῖπνον δραχμὰς 80· ἐπλήρωσε δὲ ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν 1 δραχμὴν***

περισσότερον ἢ ὅσον ἑκάστη τῶν γυναικῶν. Ἐπλήρωσαν δὲ ἐν ὅλῳ οἱ ἄνδρες ὅσα καὶ αἱ γυναῖκες. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, πόσαι δὲ αἱ γυναῖκες;

Ἂν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνδρῶν παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ, ὁ τῶν γυναικῶν θὰ εἶναι $18-\chi$. Ἐπειδὴ δὲ ἐν ὅλῳ οἱ ἄνδρες ἐπλήρωσαν 40 δραχμάς, ἕπεται ὅτι ἕκαστος τούτων ἐπλήρωσε $\frac{40}{\chi}$. Ὡσαύτως δὲ ἑκάστη τῶν γυναικῶν ἐπλήρωσε $\frac{40}{18-\chi}$.

Οὕτως ἄρα θὰ προκύψῃ ἡ τοῦ προβλήματος ἐξίσωσις

$$\frac{40}{\chi}-\frac{40}{18-\chi}=1,$$

ἐξ ἧς ἐπιλυομένης εὑρίσκεται ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου χ, ὅστις πρέπει νὰ εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος, θετικὸς καὶ μικρότερος τοῦ 18.

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης θὰ προκύψωσιν αἱ λύσεις $\chi'=8$ καὶ $\chi''=90$, ἕπεται ὅτι ἡ πρώτη μόνη ἁρμόζει εἰς τὸ πρόβλημα, ὡς πληροῦσα πάντας τοὺς ὅρους αὐτοῦ, ἡ δὲ ἑτέρα ἀπορρίπτεται.

Λοιπὸν οἱ μὲν ἄνδρες ἦσαν 8, αἱ δὲ γυναῖκες 10.

6) ***Εὑρεῖν τοὺς τέσσαρας ὅρους ἀναλογίας, δεδομένου ὅτι τῶν μὲν ἄκρων ὅρων τὸ ἄθροισμα εἶναι 11, τῶν δὲ μέσων 10, τῶν δὲ τετραγώνων τῶν τεσσάρων ὅρων τὸ ἄθροισμα εἶναι 125.***

Ἂν τοὺς τέσσαρας ζητουμένους ὅρους τῆς ἀναλογίας παραστήσωμεν διὰ τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta},\quad \alpha+\delta=11,\quad \beta+\gamma=10,\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=125.$$

Οὕτως, ἂν λάβωμεν βοηθητικὸν ἄγνωστον τὸν $\alpha\delta=\beta\gamma=\varphi$, ἡ τελευταία ἐξίσωσις δύναται νὰ γραφῇ ὧδε·

$$(\alpha+\delta)^2-2\alpha\delta+(\beta+\gamma)^2-2\beta\gamma=125\cdot$$

καὶ ἄρα $11^2-2\varphi+10^2-2\varphi=125$, ἐξ ἧς προκύπτει $\varphi=24$.

Κατὰ ταῦτα ἄρα οἱ μὲν α, δ εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-11\chi+24=0$, ἐξ ἧς $\chi'=8$, $\chi''=3$, αἱ δὲ β, γ εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\psi^2-10\psi+24=0$, ἐξ ἧς $\psi'=4$, $\psi''=6$.

Λοιπὸν οἱ ζητούμενοι ὅροι εἶναι 8, 4, 6, 3.

7) ***Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν τὸ μὲν ἄθροισμα νὰ εἶναι ἴσον τῷ ἀριθμῷ α, τὸ δὲ γινόμενον ἴσον τῷ γ.***

Ἂν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ καὶ τοῦ ψ, θὰ προκύψῃ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} \chi+\psi=\alpha \\ \chi\psi=\gamma. \end{cases} \qquad (1)$$

Ἂν δὲ ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει ἀντὶ τοῦ ψ ἀντικατασταθῇ ἡ ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως προκύπτουσα τούτου τιμή, ἀπαλείφεται ὁ ψ καὶ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$\chi(\alpha-\chi)=\gamma, \text{ ἥτις γράφεται καὶ ὧδε: } \chi^2-\alpha\chi+\gamma=0, \qquad (2)$$

ἐξ ἧς ἐπιλυομένης ἔχομεν $\chi=\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$.

Ἂν δὲ ὁ χ ληφθῇ ἴσος τῷ $\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$, ὁ ψ θὰ εἶναι ἴσος τῷ $\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$, διότι τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι α.

Ἂν δὲ πάλιν ὁ χ ληφθῇ ἴσος τῷ $\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$, ὁ ψ θὰ εἶναι ἴσος τῷ $\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$· οἱ δύο ἄρα ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι

$$\text{ὁ } \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2} \text{ καὶ ὁ } \frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2} \qquad (3)$$

τουτέστιν εἶναι αἱ δύο ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (2).

Σημείωσις. Ἐγνωρίζομεν ὅτι αἱ δύο ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (2) ἔχουσιν ἄθροισμα μὲν α γινόμενον δὲ γ (§ 196), καὶ ἄρα λύουσι τὸ πρόβλημα· νῦν δὲ ἐδείχθη διὰ τῆς ἀμέσου λύσεως τοῦ προβλήματος, ὅτι μόνοι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι λύουσι τὸ πρόβλημα.

Διερεύνησις. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶναι πραγματικοί, ἐὰν $\alpha^2-4\gamma\geqq0$. Καὶ ἂν μὲν τὸ γ εἶναι ἀρνητικόν, ἂν δηλαδὴ οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἑτεροειδεῖς, τὸ $\alpha^2-4\gamma$ θὰ εἶναι πάντοτε θετικόν· ἂν δὲ τὸ γ εἶναι θετικόν, ἤτοι ἂν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ὁμοειδεῖς, πρέπει νὰ εἶναι ὁ $\alpha^2\geqq4\gamma$. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι·

Τὸ γινόμενον δύο ὁμοειδῶν ἀριθμῶν οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν, ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, ἐὰν δεδομένον ἀριθμὸν α μερίσωμεν ὁπωσδήποτε εἰς δύο μέρη ὁμοειδῆ, τὸ μέγιστον γινόμενον τῶν μερῶν τούτων ἰσοῦται τῷ τετάρτῳ τοῦ τε-

τραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ. Τὸ δὲ μέγιστον τοῦτο γινόμενον εὑρίσκεται, ἂν ὁ ἀριθμὸς μερισθῇ εἰς δύο μέρη ἴσα· διότι, ἂν ὑποτεθῇ $\gamma=\frac{\alpha^2}{4}$, *οἱ τύποι (3) δίδουσι τὰ δύο μέρη* $\frac{\alpha}{2}$ *καὶ* $\frac{\alpha}{2}$.

8) ***Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων νὰ εἶναι ἴσον τῷ*** β^2, ***τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν ἴσον τῷ*** γ.

Ἂν τοὺς ζητουμένους ἀριθμοὺς παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ καὶ τοῦ ψ, θὰ προκύψῃ τὸ σύστημα

$$\left\{\begin{aligned} \chi^2+\psi^2&=\beta^2 \\ \chi\psi&=\gamma. \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

Ἂν δέ, ἀφοῦ διπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐξισώσεως, προσθέσωμεν αὐτὰ κατὰ μέλη εἰς τὴν πρώτην, θὰ προκύψῃ

$$(\chi+\psi)^2=\beta^2+2\gamma\cdot$$

ἂν δὲ πάλιν ἀφαιρέσωμεν αὐτὰ κατὰ μέλη ἐκ τῆς πρώτης, θὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις

$$(\chi-\psi)^2=\beta^2-2\gamma\cdot$$

Οὕτως ἄρα θὰ προκύψῃ τὸ ἑξῆς πρὸς τὸ δεδομένον ἰσοδύναμον σύστημα

$$\left\{\begin{aligned} \chi+\psi&=\pm\sqrt{\beta^2+2\gamma} \\ \chi-\psi&=\pm\sqrt{\beta^2-2\gamma}. \end{aligned}\right.$$

Καὶ ἂν μὲν ὑποθέσαντες τὸ ἄθροισμα τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν θετικόν, προσθέσωμεν αὐτὰς κατὰ μέλη, καὶ εἶτα διαιρέσωμεν τὰ μέλη τῶν προκυψασῶν ἐξισώσεων διὰ τοῦ 2, θὰ ἔχωμεν τοὺς ἑξῆς δύο ἀριθμούς·

$$\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2+2\gamma}+\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2-2\gamma} \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2+2\gamma}-\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2-2\gamma}.$$

Ὡσαύτως δέ, ἂν ὑποθέσωμεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα ἀρνητικόν, θὰ προκύψωσιν οἱ ἀντίθετοι τούτων ἀριθμοί· καὶ ἐκ τῶν ἐξισώσεων δὲ τοῦ συστήματος (1) εἶναι πρόδηλον ὅτι, ἂν αὗται ἀληθεύωσι διὰ δύο ἀριθμούς, ἀληθεύουσι καὶ διὰ τοὺς ἀντιθέτους αὐτῶν.

Διερεύνησις. Ἀμφότεραι αἱ λύσεις θὰ εἶναι πραγματικαί, ἂν οἱ ἀριθμοὶ $\beta^2+2\gamma$ καὶ $\beta^2-2\gamma$ εἶναι θετικοί, ἤτοι, ἂν ὁ 2γ (θετικῶς λαμβανόμενος) δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν β^2.

9) *Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν δίδεται τὸ ἄθροισμα α καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν β².*

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἔχομεν τὰς ἑξῆς δύο τοῦ προβλήματος ἐξισώσεις

$$\left\{\begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \chi^2+\psi^2=\beta^2. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Ἂν δὲ ἀφοῦ ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς πρώτης εἰς τὸ τετράγωνον, ἀφαιρέσωμεν τὴν δευτέραν κατὰ μέλη, θὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις

$$2\chi\psi=\alpha^2-\beta^2 \text{ καὶ ἐξ ἧς } \chi\psi=\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}.$$

Οὕτω δέ, ἐπειδὴ $\chi+\psi=\alpha$ καὶ $\chi\psi=\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}$, ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τοῦ 7ου.

Τὸ πρόβλημα δὲ τοῦτο δύναται νὰ λυθῇ καὶ διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ ἑτέρου τῶν ἀγνώστων ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων (1)· πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ ἡ τιμὴ αὐτῆς ἐκ τῆς πρώτης καὶ νὰ τεθῇ εἰς τὴν δευτέραν. Οἱ ζητούμενοι δὲ δύο ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἑξῆς·

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2\beta^2-\alpha^2}}{2} \text{ καὶ } \frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{2\beta^2-\alpha^2}{2}}. \qquad (2)$$

Διερεύνησις. Οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοὶ θὰ εἶναι πραγματικοί, ἂν ὁ $2\beta^2$, θετικὸς ὤν, εἶναι μείζων ἢ τοὐλάχιστον ἴσος πρὸς τὸν α^2· εἰ δὲ μή, εἶναι φανταστικοί.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι· ***Ἐὰν ἀριθμὸς μερισθῇ εἰς δύο μέρη οἱαδήποτε, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μερῶν τούτων θὰ εἶναι τοὐλάχιστον ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ. Τὸ δὲ ἐλάχιστον ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο τούτων μερῶν προκύπτει, ὅταν τὰ δύο ταῦτα μέρη εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα.*** (*)

10) ***Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν εἶναι δεδομένον τὸ ἄθροισμα α καὶ τὸ ἄθροισμα β³ τῶν κύβων αὐτῶν.***

Οὕτως αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι αἱ ἑξῆς δύο·

$$\left\{\begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \chi^3+\psi^3=\beta^3 \end{array}\right. \qquad (1)$$

Ἂν δέ, ἀφοῦ ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἰς τὸν κύβον, ἀφαιρέσωμεν ἐκ τῆς προκυψάσης τὴν δευτέραν κατὰ μέλη, θὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις

$$3\chi^2\psi+3\chi\psi^2=\alpha^3-\beta^3, \quad \text{ἢ} \quad 3\chi\psi(\chi+\psi)=\alpha^3-\beta^3.$$

Ἂν δὲ ἀντικαταστήσωμεν ἐν αὐτῇ ἀντὶ τοῦ ἀθροίσματος $\chi+\psi$ τὸν ἴσον αὐτοῦ ἀριθμὸν α, θὰ ἔχωμεν

$$3\alpha\chi\psi=\alpha^3-\beta^3, \quad \text{ἐξ ἧς καὶ} \quad \chi\psi=\frac{\alpha^3-\beta^3}{3}.$$

Οὕτως ἄρα τὸ σύστημα (1) ἀνάγεται εἰς τὸ ἑξῆς·

$$\left|\begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \chi\psi=\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{3\alpha}. \end{array}\right.$$

Ἐκ δὲ τῆς ἐπιλύσεως τούτου, γινομένης κατὰ τὸ 7ον πρόβλημα, προκύπτουσιν αἱ ἑξῆς τῶν ἀγνώστων τιμαί·

$$\frac{3\alpha^2+\sqrt{12\alpha\beta^3-3\alpha^4}}{6\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \frac{3\alpha^2-\sqrt{12\alpha\beta^3-3\alpha^4}}{6\alpha}.$$

Διερεύνησις. Ἵνα οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι πραγματικοὶ ἀνάγκη νὰ εἶναι $12\alpha\beta^3-3\alpha^4\geqq 0$, τουτέστιν οἱ α, β νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς καὶ νὰ εἶναι $4\beta^3\geqq\alpha^3$.

Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι· *Ἂν ἀριθμὸς μερισθῇ εἰς δύο μέρη οἱαδήποτε, τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν μερῶν τούτων θὰ εἶναι τοὐλάχιστον ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ κύβου τοῦ ἀριθμοῦ. Τὸ δὲ ἐλάχιστον ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν μερῶν τούτων προκύπτει, ὅταν τὰ δύο ταῦτα μέρη εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα.*

11) *Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν εἶναι δεδομένον τὸ ἄθροισμα α καὶ τὸ ἄθροισμα β^4 τῶν τετάρτων αὐτῶν δυνάμεων.*

Αἱ ἐξισώσεις ἄρα τοῦ προβλήματος εἶναι αἱ ἑξῆς δύο :

$$\left\{\begin{array}{l} \chi^4+\psi^4=\beta^4 \\ \chi+\psi=\alpha. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ συστήματος τούτου ὑψοῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἰς τὸ τετράγωνον, ἤτοι

$$\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=\alpha^2. \qquad (2)$$

Ἂν δὲ πάλιν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς προκυψάσης ἐξισώσεως (2) ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον, θὰ ἔχωμεν

$$\chi^4+\psi^4+6\chi^2\psi^2+4\chi^3\psi+\chi\psi^3=\alpha^4,$$

ἐξ ἧς ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὴν δευτέραν (1), θὰ ἔχωμεν

$$6\chi^2\psi^2+4\chi\psi(\chi^2+\psi^2)=\alpha^4-\beta^4.$$

Ἂν δὲ ἀντικαταστήσωμεν ἐν αὐτῇ ἀντὶ τοῦ $\chi^2+\psi^2$ τὸν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) προκύπτοντα ἴσον αὐτοῦ ἀριθμὸν $\alpha^2-2\chi\psi$, θὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις

$$2(\chi\psi)^2-4\alpha^2(\chi\psi)+(\alpha^4-\beta^4)=0, \qquad (3)$$

ἐξ ἧς ἐπιλυομένης προκύπτουσιν αἱ τοῦ γινομένου $\chi\psi$, θεωρουμένου ἀγνώστου, ἑξῆς δύο τιμαὶ

$$\frac{2\alpha^2-\sqrt{2\alpha^4+2\beta^4}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{2\alpha^2+\sqrt{2\alpha^4+2\beta^4}}{2}.$$

Οὕτω δέ, ἂν μὲν λάβωμεν τὴν πρώτην τῶν τιμῶν τούτων ὡς γινόμενον τῶν δύο ζητουμένων ἀριθμῶν, κατὰ τὸ 7ον πρόβλημα ἐπιλύοντες τὸ σύστημα

$$\chi+\psi=\alpha \quad \text{καὶ} \quad \chi\psi=\frac{2\alpha^2-\sqrt{2\alpha^4+2\beta^4}}{2} \qquad (4)$$

θὰ ἔχωμεν τοὺς ἑξῆς δύο ἀριθμοὺς

$$\frac{\alpha+\sqrt{-3\alpha^2+\sqrt{8\alpha^4+8\beta^4}}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha-\sqrt{-3\alpha^2+\sqrt{8\alpha^4+8\beta^4}}}{2}\cdot \qquad (5)$$

ἂν δὲ λάβωμεν τὴν δευτέραν, θὰ ἔχωμεν ὡσαύτως ὡς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, τοὺς ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων (5) προκύπτοντας, ὅταν τὸ ῥιζικὸν $\sqrt{8\alpha^4+8\beta^4}$ ληφθῇ μετὰ τοῦ ἀρνητικοῦ σημείου· τὸ δεύτερον ἄρα τοῦτο ζεῦγος τῶν τιμῶν εἶναι ἀριθμοὶ φανταστικοί.

Διερεύνησις. Οἱ ἐκ τῆς πρώτης τῶν λύσεων τούτων προκύψαντες ἀριθμοὶ θὰ εἶναι πραγματικοί, ἂν $\sqrt{8\alpha^4+8\beta^4}\geqq 3\alpha^2$, ἤτοι, ἂν εἶναι $8\beta^4\geqq\alpha^4$· ἂν δηλαδὴ ὁ β^4, θετικὸς ὤν, δὲν εἶναι μικρότερος τοῦ $\frac{1}{8}$ τοῦ α^4· ἐκ τούτων συνάγεται ὅτι·

Ἂν ἀριθμὸς μερισθῇ εἰς δύο μέρη οἱαδήποτε τὸ ἄθροισμα τῶν τετάρτων δυνάμεων τῶν μερῶν τούτων εἶναι τοὐλάχιστον ἴσον πρὸς τὸ ὄγδοον τῆς τετάρτης τοῦ ἀριθμοῦ δυνάμεως.

12) *Δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ διαιρέσαι εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, δηλαδὴ εὑρεῖν ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης σημεῖον. οὗ ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἀπόστασις νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Β ἀποστάσεως αὐτοῦ.*

Πρὸς τοῦτο, ἂν ὑποθέσαντες ὅτι τὸ ἐπὶ τῆς ΑΒ ζητούμενον σημεῖον εἶναι τὸ Μ, παραστήσωμεν τὸ μὲν $\overline{A \qquad\qquad M \qquad\qquad B}$ τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ μῆκος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ α, τὸ δὲ τῆς ΑΜ διὰ τοῦ χ, ὅτε τὸ λοιπὸν τῆς εὐθείας μέρος ΜΒ θὰ παριστᾶται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha-\chi$, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha : \chi = \chi : (\alpha-\chi), \tag{1}$$

ἥτις γράφεται καὶ ὧδε· $\chi^2+\alpha\chi-\alpha^2=0.$ (2)

Πρέπει δὲ αἱ ἐκ ταύτης προκύψουσαι τοῦ χ τιμαὶ νὰ εἶναι θετικαὶ καὶ ἐλάσσονες τοῦ α.

Ἐπειδὴ δὲ ἐπιλύοντες τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς

$$\chi=\frac{\alpha(-1\pm\sqrt{5})}{2},$$

συνάγομεν, ὅτι ἐκ τῶν τιμῶν τούτων τοῦ χ μόνη ἡ θετικὴ $\frac{\alpha(-1+\sqrt{5})}{2}$ παριστᾷ τὸ μῆκος τοῦ ζητουμένου μέρους ΑΜ, διότι πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

Παρατήρησις. Ἂν ἐν τῇ ἐξισώσει (1) ἀντικατασταθῇ ἀντὶ τοῦ χ τὸ $-\chi$, θὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις

$$\chi^2-\alpha\chi-\alpha^2=0, \tag{3}$$

ἥτις θὰ ἔχῃ ῥίζας τὰς ἀντιθέτους τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως (2).

Ἐκ τούτου ἄρα συνάγεται εὐκόλως ὅτι ἡ ἐξίσωσις (3) ἀναλογεῖ εἰς τὴν ἑξῆς πρότασιν·

Εὑρεῖν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ σημείου Α προεκτεινομένης σημεῖον, οὗ ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἀπόστασις νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ σημείου Β ἀποστάσεως αὐτοῦ.

Ἡ νέα δὲ αὕτη πρότασις δὲν περιέχει ἄλλως ὡς λύσιν εἰμὴ τὴν θετικὴν μόνην τῆς ἐξισώσεως (3) ῥίζαν, ἥτις δὲν εἶναι ἄλλη εἰμὴ ἡ ἀρνητικὴ τῆς ἐξισώσεως (2) ῥίζα εἰλημμένη μετ᾽ ἀντιθέτου σημείου.

Συνάγεται ἄρα ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ προταθῇ καὶ γενικώτερον ὡς ἑξῆς·

Ἐπὶ δεδομένης ἀπεριορίστου εὐθείας, ἐφ᾽ ἧς εἶναι δεδομένα δύο σημεῖα Α καὶ Β, ὧν ἡ ἀπ᾽ ἀλλήλων ἀπόστασις παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ α, εὑρεῖν σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἀπόστασις *αὐτοῦ νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Β ἀποστάσεως αὐτοῦ.*

Κατὰ ταῦτα ἀμφότεραι αἱ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) προκύπτουσαι λύσεις θὰ ἁρμόζωσιν εἰς τὸ πρόβλημα, καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν δύο σημεῖα λύοντα τὸ πρόβλημα· ἐκ τῶν σημείων δὲ τούτων τὸ μὲν ἕτερον θὰ κεῖται πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ σημείου Α (θετικὴ λύσις), τὸ δὲ ἕτερον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (ἀρνητικὴ λύσις).

Οὕτως, ὅταν ἡ ἐξίσωσις προβλήματος ἔχει πλείονας λύσεις, ἐξ ὧν τινας δὲν περιλαμβάνει ἡ πρότασις, δύναται νὰ συμβῇ, ὥστε πᾶσαι αἱ λύσεις αὗται νὰ περιλαμβάνωνται εἰς γενικώτερον ζήτημα, οὗτινος ἡ πρότασις αὕτη νὰ εἶναι μερικὴ περίπτωσις, χωρὶς ὅμως τοῦτο νὰ εἶναι ἀφ' ἑτέρου πάντοτε δυνατόν.

13) *Δεδομένων τεσσάρων ἐπ' εὐθείας σημείων, οἷον τῶν Α, Β, Γ, Δ εὑρεῖν ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης σημεῖον Μ, οὗτινος αἱ ἀπὸ τῶν τεσσάρων δεδομένων σημείων ἀποστάσεις νὰ ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν· ἤτοι νὰ εἶναι*

$$\text{ΑΜ} : \text{ΒΜ} = \text{ΓΜ} : \text{ΔΜ}.$$

Α　　　　　　Β　　　　　　Γ　　　　　　Δ

'Επειδὴ τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ δύναται νὰ ὑποτεθῇ κείμενον, ἢ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Α, ἢ μεταξύ, ἢ τοῦ Α καὶ τοῦ Β, ἢ τοῦ Β καὶ τοῦ Γ, ἢ τοῦ Γ καὶ τοῦ Δ, ἢ τέλος πέραν τοῦ Δ, τὸ πρόβλημα διαιρεῖται εἰς πέντε περιπτώσεις. Οὕτω δέ, ἂν οἱ τὰς ἀποστάσεις ΑΜ, ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ παριστῶντες θετικοὶ ἀριθμοὶ παρασταθῶσι κατὰ σειρὰν διὰ τῶν χ, β, γ, δ, διὰ τὰς εἰρημένας διαφόρους πέντε περιπτώσεις, θὰ προκύψωσιν αἱ ἑξῆς πέντε ἐξισώσεις·

1) $\chi(\beta+\gamma-\delta)+\beta\gamma=0$, Περιορισμὸς $\chi>0$,

2) $2\chi^2-(\beta+\gamma-\delta)\chi+\beta\gamma=0$, » $0<\chi<\beta$,

3) $\chi(\beta+\gamma-\delta)-\beta\gamma=0$, » $\beta<\chi<\gamma$,

4) $2\chi^2-(\beta+\gamma+\delta)\chi+\beta\gamma=0$, » $\gamma<\chi<\delta$,

5) $\chi(\beta+\gamma-\delta)-\beta\gamma=0$, » $\chi>\delta$.

Διερεύνησις. Ἡ πρώτη περίπτωσις ἐπιδέχεται μὲν λύσιν, ἂν $\delta>\beta+\gamma$, διότι ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως προκύπτουσα τιμὴ τοῦ χ θὰ εἶναι θετική· εἶναι δὲ ἀδύνατος, ἂν εἶναι ἢ $\delta<\beta+\gamma$, ἢ $\delta=\beta+\gamma$.

Ἡ δὲ δευτέρα καὶ ἡ τετάρτη περίπτωσις ἐπιδέχονται πάντοτε ἀνὰ μίαν λύσιν ἑκάστη· διότι ἡ κοινὴ αὐτῶν ἐξίσωσις ἔχει δύο πραγματικὰς καὶ ἀνίσους ῥίζας, ὧν ἡ μὲν ἑτέρα περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 0 καὶ τοῦ 6, ἡ δὲ ἑτέρα μεταξὺ τοῦ γ καὶ τοῦ δ· διότι, ἂν ἐν τῷ πολυωνύμῳ $2\chi^2-(6+\gamma+\delta)\chi+6\gamma$ ἀντικατασταθῶσιν ἀντὶ τοῦ χ διαδοχικῶς οἱ ἀριθμοὶ 0 καὶ β, τὰ προκύψοντα ἐξαγόμενα θὰ εἶναι ἑτεροειδῆ· ὡσαύτως δὲ καὶ διὰ τοὺς ἀριθμοὺς γ καὶ δ, τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα θὰ εἶναι ἑτεροειδῆ (§ 195).

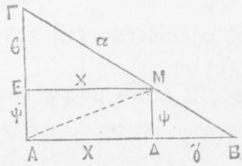
Ἡ δὲ τρίτη περίπτωσις εἶναι πάντοτε ἀδύνατος· διότι ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς προκύπτουσα τιμὴ τοῦ χ δὲν εἶναι μικροτέρα τοῦ γ.

Ἡ δὲ πέμπτη περίπτωσις ἐπιδέχεται λύσιν, μόνον ἂν εἶναι $\delta<6+\delta$· διότι τότε ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι θετικὴ καὶ μείζων τοῦ δ.

Λοιπὸν τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται ἐν συνόλῳ τρεῖς μὲν λύσεις, ἂν τὸ δ καὶ τὸ $6+\gamma$ εἶναι ἄνισα πρὸς ἄλληλα· δύο δέ, ἂν δ $\delta=6+\gamma$· ἐφ᾽ ὅσον δὲ τὸ δ καὶ τὸ $6+\gamma$ διαφέρουσιν ἐλάχιστον ἀπ᾽ ἀλλήλων, ἐπὶ τοσοῦτον τὸ ἓν ἐκ τῶν τριῶν σημείων, ἅτινα λύουσι τὸ πρόβλημα, κεῖται εἰς μεμακρυσμένην ἐπὶ τῆς εὐθείας ἀπόστασιν.

14) *Ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης δεδομένου ὀρθογωνίου τριγώνου εὑρεῖν σημεῖον, ἐξ οὗ αἱ εἰς τὰς δύο τοῦ τριγώνου καθέτους πλευρὰς ἀγόμεναι κάθετοι νὰ σχηματίζωσιν ὀρθογώνιον ἔχον περίμετρον ἴσην τῷ ἀθροίσματι τῶν δύο τοῦ τριγώνου καθέτων πλευρῶν.*

Πρὸς τοῦτο, ἂν παραστήσωμεν τοὺς μὲν τὰς καθέτους πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ τοῦ δεδομένου ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ παριστῶντας ἀριθμοὺς διὰ τῶν γ, 6, τοὺς δὲ τὰς ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ ἀποστάσεις τοῦ ζητουμένου σημείου Μ παριστῶντας ἀριθμοὺς διὰ τῶν χ, ψ, θὰ προκύψῃ ἐν πρώτοις ἡ ἐξίσωσις $$2\chi+2\psi=6+\gamma.$$



Ἂν δὲ ἀχθῇ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΜ, ἐπειδὴ τὸ δεδομένον τρίγωνον ΑΒΓ θὰ διαιρεθῇ εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΜ, ΑΜΓ, ἐξ ὧν τὸ μὲν ἕτερον ἔχει βάσιν μὲν τὴν ΑΒ, ὕψος δὲ τὴν ΔΜ, τὸ δὲ ἕτερον ἔχει βάσιν μὲν τὴν ΑΓ, ὕψος δὲ τὴν ΕΜ, ἕπεται ὅτι οἱ τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο τούτων τριγώνων παριστῶντες ἀριθμοὶ θὰ ἀποτελῶσι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὅλου τριγώνου ΑΒΓ, καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν θὰ προκύψῃ καὶ ἡ ἐξίσωσις

$$6\chi+\gamma\psi=6\gamma.$$

Πρέπει δὲ αἱ ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων προκύψουσαι τιμαὶ τῶν ἀγνώστων νὰ πληρῶσι τοὺς ἑξῆς περιορισμούς·

$$0<\chi<\gamma \quad \text{καὶ} \quad 0<\psi<6.$$

Ἂν δὲ ὑποθέσωμεν $6 \neq \gamma$, ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τῶν ἐξισώσεων τούτων θὰ προκύψωσιν αἱ ἑξῆς τῶν ἀγνώστων τιμαί· $\chi = \frac{1}{2}\gamma$ καὶ $\psi = \frac{1}{2}6$, ἐξ ὧν ἕπεται ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ θὰ κεῖται εἰς τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης.

Ἂν δὲ εἶναι $6 = \gamma$, ἤτοι ἂν τὸ δεδομένον ὀρθογώνιον εἶναι καὶ ἰσοσκελές, αἱ δύο ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος καταντῶσι μία μόνη καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν τὸ σύστημα ἀποβαίνει ἀόριστον.

Κατὰ ταῦτα ἄρα πᾶν σημεῖον τῆς ὑποτεινούσης πληροῖ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

15) *Ἔρριψέ τις λίθον εἰς ξηρὸν φρέαρ, οὗτινος ὁ κρότος πλήξαντος τὸν πυθμένα τοῦ φρέατος ἠκούσθη μετὰ παρέλευσιν θ δευτέρων λεπτῶν ἀπὸ τοῦ χρόνου τῆς πτώσεως. Πόσον ἦτο τὸ βάθος τοῦ φρέατος;*

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ᾽ ὄψιν τοὺς ἑξῆς νόμους τῆς φυσικῆς·

1ον) Ἂν σῶμα ἀφεθὲν ἀπό τινος ὕψους πίπτῃ ἐν τῷ κενῷ ἐπὶ χ δεύτερα λεπτά, τὸ διανυθὲν ὑπ᾽ αὐτοῦ διάστημα παριστώμενον διὰ τοῦ φ, δίδεται διὰ τοῦ τύπου $\varphi = \frac{1}{2}\gamma\chi^2$, οὗτινος τὸ γ ἰσούμενον πρὸς 9,8088 μέτρα καὶ παριστῶν τὸ διπλάσιον τοῦ ἐν τῷ πρώτῳ δευτέρῳ λεπτῷ διανυθέντος διαστήματος καλεῖται *ἐπιτάχυνσις*.

2ον) Ὁ ἦχος, ὁμαλῶς τῶν ἠχητικῶν κυμάτων κινουμένων, μεταδίδεται διανύων ἐν τῷ ἀέρι 340 περίπου μέτρα κατὰ δεύτερον λεπτόν.

Ἡ δὲ ταχύτης αὕτη τοῦ ἤχου παρίσταται συμβολικῶς διὰ τοῦ τ.

Κατὰ ταῦτα, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ βάθος τοῦ φρέατος εἶναι φ μέτρα, ἐπειδὴ ὁ χρόνος θ θὰ ἀποτελῆται τὸ μὲν ἐκ τοῦ χρόνου χ τοῦ διανυθέντος ἀπὸ τῆς ἀφέσεως τοῦ λίθου μέχρι τῆς πτώσεως αὐτοῦ εἰς τὸν πυθμένα, τὸ δὲ ἐκ τοῦ χρόνου τοῦ διανυθέντος μέχρις οὗ ὁ ἦχος ἀπὸ τοῦ πυθμένος φθάσῃ μέχρι τοῦ στομίου, ὅστις ἔστω χ′, θὰ ἔχωμεν τοὺς ἑξῆς τύπους·

$$\varphi = \frac{1}{2}\gamma\chi^2 \quad \text{καὶ} \quad \varphi = \tau.\chi', \qquad (1)$$

ἐξ ὧν προκύπτουσιν αἱ τῶν χρόνων χ καὶ χ΄ τιμαὶ

$$\chi=+\sqrt{\frac{2\varphi}{\gamma}} \quad \text{καὶ} \quad \chi'=\frac{\varphi}{\tau},$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος θὰ εἶναι

$$\sqrt{\frac{2\varphi}{\gamma}}+\frac{\varphi}{\tau}=\theta, \quad \text{διότι } \chi+\chi'=\theta. \qquad (2)$$

Ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἀπαλλασσομένης τοῦ ῥιζικοῦ (§ 206) καὶ μετασχηματιζομένης, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$\gamma\varphi^2-2\tau(\tau+\gamma\theta)\varphi+\gamma\tau^2\theta^2=0, \qquad (3)$$

ἐξ ἧς ἐπιλυομένης προκύπτουσιν αἱ ἑξῆς τοῦ ἀγνώστου τιμαὶ

$$\varphi=\frac{\tau[(\tau+\gamma\theta)\pm\sqrt{\tau(\tau+2\gamma\theta)}\,]}{\gamma}, \qquad (4)$$

ἐξ ὧν, ἐπειδὴ $\tau(\tau+2\gamma\theta)>0$, ἕπεται ὅτι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (3) εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.

Ἐπειδὴ δὲ τῶν δύο τούτων ῥιζικῶν (4) καὶ τὸ γινόμενον $\tau^2\theta^2$ καὶ τὸ ἄθροισμα $\dfrac{2\tau(\tau+\gamma\theta)}{\gamma}$ εἶναι ἀμφότερα θετικά, ἕπεται ὅτι ἀμφότεραι αἱ ῥίζαι εἶναι θετικαί.

Ἐν τούτοις δὲν δύναται τὸ πρόβλημα νὰ ἔχῃ, εἰμὴ μίαν μόνην λύσιν· διότι δὲν δύνανται δύο διαφόρου βάθους φρέατα νὰ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ χρόνου.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τῆς ἀντιστοίχου εἰς τὸ πρόβλημα τιμῆς τοῦ φ, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐκ τῶν τιμῶν τούτου ἔχουσα τὸ ῥιζικὸν μετὰ τοῦ θετικοῦ σημείου δὲν ἁρμόζει εἰς τὸ πρόβλημα· διότι θὰ εἶναι $\varphi>\tau\theta$, ἐνῷ ἐκ τῆς (1) ἐξισώσεως $\varphi=\tau\chi'$, ἕπεται ὅτι $\varphi<\tau\theta$· ἡ δὲ ἑτέρα τιμὴ τοῦ φ εἶναι μικροτέρα τοῦ τθ, διότι, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον ἀμφοτέρων τῶν ῥιζῶν εἶναι τθ.τθ (§ 196), δὲν δύνανται ἀμφότεραι νὰ εἶναι μείζονες τοῦ τθ· ἡ ἑτέρα ἄρα αὕτη τιμὴ τοῦ φ λύει τὸ πρόβλημα.

16) *Ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις διέρχεται διὰ δύο φώτων, εὑρεῖν σημεῖον ἐξ ἴσου ὑφ᾽ ἑκατέρου αὐτῶν φωτιζόμενον.*

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν ἑξῆς νόμον τῆς φυσικῆς·

Τὸ ποσὸν τοῦ φωτός, ὅπερ δέχεται σημεῖόν τι ἀπό τινος φωτός, *εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τοῦ φωτός.*

Κατὰ ταῦτα, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ μὲν ἕτερον τῶν φώτων

$$\underset{}{M''}\quad \underset{}{A}\;\; \underset{\alpha}{}\;\; \chi\; M\; \underset{\delta}{}\; B\; \underset{6}{}\qquad M'$$

κείμενον εἰς τὸ σημεῖον Α ἔχει ἔντασιν α, ἤτοι, ἂν εἶναι α τὸ ποσὸν τοῦ φωτός, ὅπερ δέχεται τὸ εἰς ἀπόστασιν ἴσην τῇ μονάδι ἀπὸ τοῦ φωτὸς τούτου κείμενον σημεῖον, τὸ δὲ ἕτερον κείμενον εἰς τὸ Β ἔχει ἔντασιν 6, παραστήσωμεν δὲ τὴν μὲν τῶν δύο φώτων ἀπ᾽ ἀλλήλων ἀπόστασιν ΑΒ διὰ τοῦ δ, τὴν δὲ ἀπὸ τοῦ Α ἀπόστασιν τοῦ ζητουμένου σημείου Μ διὰ τοῦ χ, θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Μ θὰ δέχηται ἐκ μὲν τοῦ εἰς τὸ Α κειμένου φωτὸς ποσὸν φωτὸς ἴσον τῷ $\frac{\alpha}{\chi^2}$, ἐκ δὲ τοῦ εἰς τὸ Β κειμένου φωτὸς ποσὸν φωτὸς ἴσον τῷ $\frac{6}{(\delta-\chi)^2}$· καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος θὰ εἶναι

$$\frac{\alpha}{\chi^2}=\frac{6}{(\delta-\chi)^2}, \tag{1}$$

ἐξ ἧς προκύπτουσιν (§ 128) αἱ ἰσοδύναμοι πρὸς αὐτὴν δύο ἐξισώσεις

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\chi}=+\frac{\sqrt{6}}{\delta-\chi} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\sqrt{\alpha}}{\chi}=-\frac{\sqrt{6}}{\delta-\chi}, \tag{2}$$

ἐξ ὧν ἐπιλυομένων προκύπτουσιν αἱ ἑξῆς δύο τοῦ ἀγνώστου τιμαὶ

$$\chi'=\frac{\delta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{6}} \quad \text{καὶ} \quad \chi''=\frac{\delta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{6}}, \tag{3}$$

Διερεύνησις. 1ον) Ὑποθέσωμεν $\alpha>6$. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἔχομεν $\sqrt{\alpha}>\sqrt{6}$ καὶ ἄρα τὰς δύο τιμὰς τοῦ χ θετικάς. Ἐκ τούτων δὲ ἡ μὲν χ′ εἶναι ἐλάσσων τοῦ δ, διότι $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{6}}<1$, ἡ δὲ χ″ εἶναι μείζων τοῦ δ, διότι $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{6}}>1$.

Λοιπὸν ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὑπάρχουσιν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ δύο σημεῖα ἐξ ἴσου φωτιζόμενα ὑφ᾽ ἑκατέρου τῶν δύο φώτων καὶ κείμενα, τὸ μὲν ἕτερον Μ μεταξὺ τῶν δύο φώτων, τὸ δὲ ἕτερον Μ΄ πέραν τοῦ Β, ἔνθα κεῖται τὸ ἀσθενέστερον τῶν φώτων.

2ον) Ἔστω νῦν $\alpha < \beta$. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἶναι $\sqrt{\alpha} < \sqrt{\beta}$, ἐκ δὲ τῶν δύο τιμῶν τοῦ χ ἡ μὲν ἑτέρα, ἡ χ΄, εἶναι θετική, ἡ δὲ ἑτέρα, ἡ χ΄΄, εἶναι ἀρνητική.

Ἡ θετικὴ δὲ τιμὴ δεικνύει προσέτι ὅτι ὑπάρχει σημεῖον μεταξὺ τῶν δύο φώτων ἐξ ἴσου φωτιζόμενον.

Ἂν δὲ ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ τοῦ χ ληφθῇ κατ᾽ ἀπόλυτον τιμήν, θὰ προκύψῃ ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἀπόστασις ἑτέρου σημείου ἐξ ἴσου φωτιζομένου καὶ κειμένου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Α.

Ἵνα δὲ δικαιολογήσωμεν τὴν ἐξήγησιν ταύτην, ἂς ἐπανεύρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος ὑποθέτοντες ὅτι ὑπάρχει εἰς τὸ Μ΄΄ ἀριστερὰ τοῦ σημείου Α σημεῖόν τι ἐξ ἴσου φωτιζόμενον ὑφ᾽ ἑκατέρου τῶν δύο φώτων. Παριστῶντες δὲ διὰ τοῦ χ τὴν ἀπόστασιν ΑΜ΄΄, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\alpha}{\chi^2} = \frac{\beta}{(\delta+\chi)^2}. \tag{4}$$

Ἡ δὲ προκύψασα αὕτη ἐξίσωσις (4) δὲν διαφέρει τῆς ἐξισώσεως (1) εἰμὴ μόνον κατὰ τὴν ἀλλαγὴν τοῦ σημείου τοῦ ἀγνώστου. Ἡ ἐξίσωσις ἄρα αὕτη (4) θὰ ἔχῃ ῥίζας τὰς τῆς ἐξισώσεως (1) εἰλημμένας μετ᾽ ἀντιθέτου σημείου· κατ᾽ ἀκολουθίαν ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) προκύπτουσα ἀρνητικὴ τοῦ χ τιμὴ χ΄΄ θετικῶς εἰλημμένη δίδει τὴν ἀπὸ σημείου Α ἀπόστασιν σημείου Μ΄΄ φωτιζομένου ἐξ ἴσου ὑφ᾽ ἑκατέρου τῶν δύο φώτων.

3ον) Ἔστω δὲ τέλος $\alpha = \beta$. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ μόνη ἡ τιμὴ χ΄ τοῦ χ(3) ὑπάρχει γινομένη ἴση τῷ $\frac{\delta}{2}$, ἡ δὲ ἑτέρα χ΄΄ τιμὴ τοῦ χ (3) εἶναι ἀδύνατος, διότι ἡ ἐξίσωσις (2), ἐξ ἧς αὕτη προέκυψε, γίνεται $0.\chi = \delta\sqrt{\alpha}$, καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν δὲν ὁρίζεται ἐξ αὐτῆς ὁ ἄγνωστος.

Λοιπὸν ὑπάρχει ἓν μόνον σημεῖον ἐξ ἴσου φωτιζόμενον· κεῖται δὲ τὸ σημεῖον τοῦτο εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΑΒ, ὅπερ ἦτο εὔκολον νὰ προΐδωμεν.

Ἂν δὲ τὰ φῶτα ἄνισα ὄντα τὴν ἔντασιν, τείνωσι νὰ καταστῶσιν ἴσα, ἡ χ΄΄ τιμὴ τοῦ χ ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον αὐξανομένη δύναταί νὰ ὑπερβῇ πάντα δεδομένον ἀριθμόν, τουτέστιν τὸ ἐξ ἴσου φωτιζόμενον σημεῖον, τὸ ἐκτὸς τῆς ΑΒ ὑπάρχον, ἀπομακρύνεται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἀπὸ τῶν δύο φώτων, ἡ δὲ ἀπὸ τούτων ἀπόστασις αὐτοῦ δύναται νὰ ὑπερβῇ πᾶσαν δεδομένην ἀπόστασιν· ἀπέχει δὲ ἀπ' αὐτῶν τόσῳ περισσότερον, ὅσῳ ὀλιγώτερον διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων τὰ δύο φῶτα.

Ἐὰν δὲ τὸ ἕτερον τῶν φώτων, ἔστω τὸ εἰς τὸ Β κείμενον, γίνηται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἀσθενέστερον, ἀμφότερα τὰ ἐξ ἴσου φωτιζόμενα σημεῖα πλησιάζουσιν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον πρὸς τὸ σημεῖον Β.

Διότι, ὅσῳ μικρότερον γίνεται τὸ 6, τόσῳ ἀμφότεραι αἱ τοῦ χ τιμαὶ χ΄ καὶ χ΄΄ (3) πλησιάζουσι πρὸς τὸ δ.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) 360 δραχμαὶ διενεμήθησαν εἴς τινας ἀνθρώπους· ἂν δὲ οἱ ἄνθρωποι ἦσαν κατὰ τέσσαρας ὀλιγώτεροι, θὰ ἐλάμβανεν ἕκαστος τρεῖς δραχμὰς πλείονας. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνθρωποι ; (Ἀπ. 24).

2) Δεξαμενὴ πληροῦται ὑπὸ δύο κρουνῶν ὁμοῦ ῥεόντων ἐντὸς 12 ὡρῶν, ὑπὸ δὲ τοῦ ἑτέρου μόνου ῥέοντος ἐντὸς 10 ὡρῶν ἐπὶ πλέον ἢ ὅσον ὑπὸ τοῦ ἑτέρου. Ἐντὸς πόσου χρόνου δύναται νὰ πληρωθῇ ἡ δεξαμενὴ ὑφ' ἑκατέρου κρουνοῦ μόνου ῥέοντος ;

(Ἀπ. 20 καὶ 30 ὥρ.)

3) Ἐκ δύο σιδηροδρομικῶν σταθμῶν Α καὶ Β ἀνεχώρησαν συγχρόνως δύο ἀτμάμαξαι ὁμαλῶς πρὸς ἀλλήλας κινούμεναι. Ἔφθασαν δὲ ἡ μὲν ἐκ τοῦ Α ἀναχωρήσασα εἰς τὸν σταθμὸν Β 16 ὥρας μετὰ τὴν συνάντησιν αὐτῶν, ἡ δὲ ἐκ τοῦ Β ἀναχωρήσασα εἰς τὸν σταθμὸν Α 9 ὥρας μετ' αὐτήν. Δεδομένου δὲ ἔτι ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Β ἀναχωρήσασα ἀτμάμαξα διήνυσε μέχρι τῆς συναντήσεώς των 108 χιλιόμετρα πλείονα ἢ ὅσα ἡ ἑτέρα διήνυσε, ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις τῶν δύο σταθμῶν καὶ ἡ ταχύτης ἑκατέρας τούτων.

(Ἀπ. 756 χιλ., 36 χιλ. καὶ 27 χιλ.)

4) Δύο ἐργάται ὁμοῦ ἐργαζόμενοι ἐκτελοῦσιν ἔργον τι ἐντὸς α ὡρῶν· ἂν δὲ ἑκάτερος τούτων ἐξετέλει διαδοχικῶς τὸ ἥμισυ τοῦ ἔργου, τὸ ἔργον θὰ ἀποπερατοῦτο ἐντὸς 6 ὡρῶν. Ζητεῖται ἐντὸς πόσων ὡρῶν ἑκάτερος τούτων δύναται μόνος νὰ ἐκτελέσει τὸ ἔργον ;

5) Ἂν ἐν κύκλῳ ἔχοντι ἀκτῖνα 8 πήχεων δύο χορδαὶ τέμνωνται, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν τμημά-

των τῆς ἑτέρας τούτων εἶναι 15 τετραγωνικῶν πήχεων, τίς θὰ εἶναι ἡ ἀπὸ τῆς τομῆς τῶν χορδῶν τούτων ἀπόστασις τοῦ κέντρου;

('Απ. 7 πήχ.).

6) Εὑρεῖν τὴν βάσιν τοῦ συστήματος ἀριθμήσεως, ἐν ᾧ ὁ ἀριθμὸς 425 γράφεται 651. ('Απ. 8).

7) Δεδομένου ἰσοπλεύρου τριγώνου ἔχοντος πλευρὰν α, εὑρεῖν τὸ μῆκος, καθ' ὅ, ἂν αὐξηθῇ ἑκάστη αὐτοῦ πλευρά, προκύπτει τρίγωνον διπλάσιον τοῦ δεδομένου.

('Απ. $\alpha(\sqrt{2}-1)$).

8) Δεδομένων τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου, εὑρεῖν τὸ μῆκος, καθ' ὅ, ἂν ἐλαττωθῇ ἑκάστη αὐτοῦ πλευρά, θὰ προκύψῃ τρίγωνον ὀρθογώνιον.

9) Εὑρεῖν τίς ἀριθμὸς ἀφαιρούμενος ἐξ ἑκατέρου τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλει τὸ γινόμενον; τίς δὲ ἀριθμὸς ἐν γινομένῳ τριῶν παραγόντων ἔχει τὴν αὐτὴν ἰδιότητα;

10) Εὑρεῖν τοὺς τέσσαρας ὅρους ἀναλογίας, δεδομένου ὅτι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι 130, τὰ δὲ γινόμενα τοῦ πρώτου ὅρου ἐφ' ἕκαστον τῶν τριῶν ἄλλων ὅρων εἶναι ὁ 6, ὁ 12 καὶ ὁ 18.

11) Ἂν ἐπὶ δύο εὐθειῶν καθέτως τεμνομένων κατὰ τὸ σημεῖον Ο κινῶνται δύο κινητὰ Α καὶ Β, τὸ μὲν Α κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΟΑ μετὰ ταχύτητος α, τὸ δὲ Β κατὰ τὴν ΒΟ μετὰ ταχύτητος 6, εὑρίσκονται δὲ κατά τινα στιγμὴν εἰς τὰ σημεῖα ΛΒ τὰ ἀπέχοντα ἀπὸ τοῦ Ο τὸ μὲν Α εἰς ἀπόστασιν 6, τὸ δὲ Β εἰς ἀπόστασιν α, ζητεῖται κατὰ τίνα στιγμὴν ἡ ἀπόστασις τῶν κινητῶν θὰ εἶναι μ;

12) Ἁμαξοστοιχία ἀναχωρήσασα ἐκ τῆς πόλεως Α διευθύνεται πρὸς τὴν Β ἀπέχουσαν ἀπὸ τῆς Α 288 στάδια· τέσσαρας δὲ ὥρας ὕστερον ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς αὐτῆς πόλεως Α διευθυνομένη πρὸς τὴν Β ἑτέρα ἁμαξοστοιχία ἔχουσα ταχύτητα κατὰ 1 στάδιον μείζονα τῆς ταχύτητος τῆς πρώτης· οὕτω δὲ ἔφθασαν συγχρόνως εἰς τὴν πόλιν Β. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσην ὥραν ἑκατέρα τῶν ἁμαξοστοιχιῶν διήνυσε τὸ διάστημα τῶν δύο πόλεων; ('Απ. 36 καὶ 32).

13) Ἐπιλῦσαι τὸ ἑξῆς σύστημα ἐξισώσεων·

$$\frac{\chi^2+\chi\psi+\psi^2}{\chi+\psi}=\alpha \qquad (1)$$

$$\frac{\chi^2+\chi\psi-\psi^2}{\chi-\psi}=6. \qquad (2)$$

Ἐκ τούτου προκύπτει $\frac{\chi}{\psi} = \sqrt[3]{\frac{\alpha+6}{6-\alpha}}$. (3)

Ἂν δὲ ἐν τῇ (1) ἐξισώσει ἀντικατασταθῇ ἀντὶ τοῦ χ ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (3) προκύπτουσα τούτου τιμὴ $\chi = \sqrt[3]{\frac{\alpha+6}{6-\alpha}}.\psi$, ἢ χάριν συντομίας ἡ $\chi=\delta.\psi$, τὸ ζήτημα θὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἐξισώσεως τοῦ 2ου βαθμοῦ μεθ' ἑνὸς ἀγνώστου.

14) Ἐπιλῦσαι τὸ ἑξῆς σύστημα ἐξισώσεων·

$$\begin{cases} \chi^3+\psi^3=35 \\ \chi\psi=6 \end{cases}$$

15) Ἐπιλῦσαι τὰς ἐξισώσεις 1ον) $\chi^3\pm1=0$ καὶ 2ον), $\chi^4-1=0$.

16) Εὑρεῖν τὸ ὕψος καὶ τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗ ἡ μὲν ὑποτείνουσα θεωρουμένη ὡς βάσις εἶναι 25πχ, τὸ δὲ ἄθροισμα τοῦ ὕψους καὶ τῶν καθέτων πλευρῶν 47πήχεων.

(Ἀπ. 12πχ, 15πχ, 20πχ).

17) Εὑρεῖν τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗ δίδεται ἡ περίμετρος 2τ καὶ τὸ ἐμβαδὸν α^2.

18) Εὑρεῖν ἂν δύνανται νὰ αὐξηθῶσιν πᾶσαι αἱ πλευραὶ δεδομένου ὀρθογωνίου τριγώνου κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ὥστε τὸ προκύπτον τρίγωνον νὰ εἶναι πάλιν ὀρθογώνιον.

19. Ἐπυλῦσαι τὰς ἐξισώσεις

$$2\chi\sqrt[3]{\chi}-3\chi\sqrt[3]{\frac{1}{\chi}}=20, \qquad \frac{\chi^3+1}{\chi^2-1}=\chi+\sqrt{\frac{6}{\chi}},$$

$$\frac{\chi+\sqrt{\chi^2-1}}{\chi-\sqrt{\chi^2-1}}-\frac{\chi-\sqrt{\chi^2-1}}{\chi+\sqrt{\chi^2+1}}=8\chi\sqrt{\chi^2-3\chi+2},$$

$$\frac{\alpha+2\chi+\sqrt{\alpha^2-4\chi^2}}{\alpha+2\chi-\sqrt{\alpha^2-4\chi^2}}=\frac{5\chi}{\alpha}.$$

ΒΙΒΛΙΟΝ Ε΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΕΡΙ ΠΡΟΟΔΩΝ

α΄) Πρόοδοι ἀριθμητικαί.

Ὁρισμοί.

207. ***Πρόοδος ἀριθμητικὴ*** *ἢ* ***κατὰ διαφορὰν*** *λέγεται σειρὰ ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου προστιθεμένου εἰς αὐτὸν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Τοιοῦτοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11 \ldots,$$

ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου προστιθεμένου εἰς αὐτὸν τοῦ ἀριθμοῦ 2· καὶ οἱ ἀριθμοὶ 24, 21, 18, 15,..., ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου προστιθεμένου εἰς αὐτὸν τοῦ ἀριθμοῦ —3.

Καλοῦνται δὲ οἱ μὲν ἀποτελοῦντες τὴν πρόοδον ἀριθμοὶ ***ὅροι τῆς προόδου***, ὁ δὲ εἰς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων προστιθέμενος ἀριθμὸς πρὸς σχηματισμὸν τοῦ ἑπομένου ***λόγος τῆς προόδου.***

Ἀριθμητικὴ πρόοδος λέγεται ***αὔξουσα*** μέν, ἂν οἱ ὅροι αὐτῆς βαίνωσιν αὐξανόμενοι, ὅπερ γίνεται, ἂν ὁ λόγος αὐτῆς εἶναι ἀριθμὸς θετικός, ***φθίνουσα*** δέ, ἂν οἱ ὅροι αὐτῆς βαίνωσιν ἐλαττούμενοι, ὅπερ γίνεται, ἂν ὁ λόγος αὐτῆς εἶναι ἀριθμὸς ἀρνητικός.

Εὕρεσις τοῦ ὅρου τοῦ κατέχοντος ὡρισμένην τάξιν ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ.

208. ***Θεώρημα.*** *Ἐν πάσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ ἕκαστος ὅρος* ***ἰσοῦται τῷ πρώτῳ ηὐξημένῳ κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τὸν δηλοῦντα τὸ πλῆθος τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων.***

Διότι, ἂν παρασταθῇ ὁ μὲν πρῶτος ὅρος διὰ τοῦ α, ὁ δὲ ν διὰ τοῦ τ, ὁ δὲ λόγος διὰ τοῦ ω, θὰ εἶναι, ὁ μὲν δεύτερος ὅρος

$\alpha+\omega$, ὁ δὲ τρίτος $\alpha+\omega+\omega$, ἤτοι $\alpha+2\omega$ καὶ ἐφεξῆς οὕτω· καὶ ὁ τὴν $\nu^{\eta\nu}$ ἄρα τάξιν ἔχων ὅρος τ, οὗ προηγοῦνται $\nu-1$ ἄλλοι ὅροι, θὰ εἶναι

$$\tau=\alpha+(\nu-1).\omega \qquad (1)$$

209. ***Πόρισμα***. *Ἐν αὐξούσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ ἐχούσῃ ἀπείρους ὅρους ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ὅρου τῆς νυοστῆς τάξεως αὐξάνει μετὰ τοῦ ν ἀπεριορίστως.*

Ἐφαρμογαί.

Ἐν μὲν τῇ προόδῳ 1, 3, 5, 7.... ὁ 30ὸς ὅρος εἶναι $1+29.2$, ἤτοι 59.

Ἐν δὲ τῇ προόδῳ 48, 43, 38, 33.... ὁ 10ος ὅρος εἶναι $48+9.(-5)$, ἤτοι ὁ 3.

Παρεμβολή.

210. ***Πρόβλημα***. *Παρεμβαλεῖν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β μ μέσους ἀριθμητικοὺς ἤτοι μ ἀριθμοὺς ἀποτελοῦντας μετὰ τοῦ α καὶ τοῦ β ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἔχουσαν μ+2 ὅρους καὶ πρῶτον μὲν ὅρον τὸν α τελευταῖον δὲ τὸν β.*

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου πρέπει νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς πρόδου ταύτης.

Πρὸς τοῦτο, ἂν καλέσωμεν ω τὸν λόγον τῆς προόδου ταύτης καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸν ἀνωτέρω εὑρεθέντα τύπον (1), θὰ ἔχωμεν

$$\beta=\alpha+(\mu+1)\omega \quad \text{καὶ ἄρα} \quad \omega=\frac{\beta-\alpha}{\mu+1},$$

ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι

$$\alpha,\ \alpha+\frac{\beta-\alpha}{\mu+1},\ \alpha+2\frac{\beta-\alpha}{\mu+1},\ldots,\ \alpha+\mu\frac{\beta-\alpha}{\mu+1},\ \beta.$$

211. ***Θεώρημα***. *Ἂν μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου παρεμβληθῇ τὸ αὐτὸ πλῆθος μέσων ἀριθμητικῶν, ἐκ τῶν οὕτω προκυπτουσῶν προόδων θὰ σχηματισθῇ μία μόνη νέα πρόοδος.*

Διότι τῶν προόδων τούτων καὶ οἱ λόγοι θὰ εἶναι ἀριθμοὶ ἴσοι, ὡς πηλίκα ἴσων διαφορῶν διαιρουμένων διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος ἑκάστης ἴσος πρὸς τὸν πρῶτον τῆς ἑπομένης.

Π. χ. ἂν μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου 1, 11, 21, 31, ... παρεμβληθῶσι 4 ὅροι, οἱ μὲν λόγοι θὰ εἶναι

$\frac{11-1}{5}=2$, $\frac{21-11}{5}=2,\ldots$, αἱ δὲ προκύπτουσαι πρόοδοι θὰ εἶναι

1, 3, 5, 7, 9, 11 καὶ 11, 13, 15, 17, 19, 21,....

Ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου.

212. *Ἐν πάσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων ὅρων ἀπεχόντων ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἄκρων ὅρων.*

Π. χ. ἐν τῇ ἀριθμητικῇ προόδῳ α, β, γ, ... ρ, σ, τ τὸ ἄθροισμα $β+σ$ τῶν ὅρων β καὶ σ, οἵτινες ἴσον ἀπέχουσι τῶν ἄκρων ὅρων α καὶ τ, λέγω ὅτι ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι $α+τ$.

Διότι, ἂν λόγος τῆς προόδου ταύτης εἶναι ὁ ω, θὰ ἔχωμεν

$β=α+ω$, $τ=σ+ω$, ἤτοι $σ=τ-ω$ καὶ ἄρα $β+σ=α+τ$.

Ὡσαύτως, ἐπειδὴ $γ=β+ω$ καὶ $σ=ρ+ω$, θὰ ἔχωμεν

$γ+ρ=β+σ$ καὶ ἄρα $γ+ρ=α+τ$ καὶ ἐφεξῆς οὕτω.

213. *Θεώρημα. Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων πάσης ἀριθμητικῆς προόδου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ἄκρων ὅρων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τὸν παριστῶντα τὸ πλῆθος τῶν ὅρων.*

Ἔστω ἡ ἐκ ν ὅρων ἀποτελουμένη ἀριθμητικὴ πρόοδος

$$α,\ β,\ γ,\ \ldots\ldots,\ ρ,\ σ,\ τ.$$

Ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτῆς παρασταθῇ διὰ τοῦ Κ, θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα

$$Κ=α+β+γ+\ldots+ρ+σ+τ$$
$$\text{ἢ}\quad Κ=τ+σ+ρ+\ldots+γ+β+α,$$

ἂν οἱ ὅροι γραφῶσι κατ' ἀντίστροφον τάξιν.

Ἂν δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας προσθέσωμεν κατὰ μέλη, θὰ ἔχωμεν

$$2Κ=(α+τ)+(β+σ)+(γ+ρ)+\ldots+(σ+β)+(τ+α).$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἐντὸς ἑκάστης παρενθέσεως ἀθροίσματα, ν κατὰ τὸ πλῆθος ὄντα, εἶναι κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἀποδειχθέντα ἴσα ἀλλήλοις, θὰ ἔχωμεν

$$2Κ=(α+τ).ν,\ \text{ἐξ ἧς}\ Κ=\frac{(α+τ).ν}{2}. \qquad (2)$$

214. Ἂν δοθῶσιν ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προόδου, ὁ λόγος αὐτῆς καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων, ζητῆται δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων, ἀντικαθιστῶμεν ἐν τῷ τελευταίῳ τύπῳ (2) ἀντὶ τοῦ τ τὴν ἐκ τοῦ τύπου (1) τιμὴν αὐτοῦ $τ=α+(ν-1)ω$. Οὕτω δὲ θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$K=\frac{[2\alpha+(\nu-1)\omega].\nu}{2}, \tag{3}$$

δίδοντα τὴν τιμὴν τοῦ K ἀνεξαρτήτως τοῦ τ.

Παράδειγμα I. *Τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν 1, 2, 3,... ν εἶναι* $\frac{(\nu+1)}{2}\nu$.

Παράδειγμα II. *Τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν* 1, 3, 5, 7,...., 2ν—1 *εἶναι* $\frac{(1+2\nu-1)\nu}{2}=\nu^2$.

Σημείωσις. Οἱ τύποι $\tau=\alpha+(\nu-1)\omega$ (1), $K=\frac{(\alpha+\tau).\nu}{2}$ (2) εἶναι οἱ μόνοι διακεκριμένοι, δι' ὧν συνδέονται πρὸς ἀλλήλους οἱ ἐν πάσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ θεωρούμενοι πέντε ἀριθμοὶ α, ω, τ, ν, K.

Ἐκ τῶν τύπων δὲ τούτων ἐπιλυομένων προσηκόντως δύνανται νὰ προσδιορίζωνται δύο τῶν πέντε τούτων ἀριθμῶν, ὅταν οἱ τρεῖς ἄλλοι εἶναι δεδομένοι.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ν πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν 1,2,3,....,ν.

Πρὸς τοῦτο, ἂν ἐν τῇ ταυτότητι

$$(\alpha+1)^3=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1$$

ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τοῦ α διαδοχικῶς τοὺς ἀριθμοὺς 0, 1, 2, 3, ..., ν, εἶτα δὲ προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς προκυψούσας ἰσότητας, θὰ ἔχωμεν

$$(\nu+1)^3=3(1^2+2^2+3^2+..+\nu^2)+3(1+2+3+...+\nu)+\nu+1$$

καὶ ἐπειδὴ $1+2+3+..+\nu=\frac{(\nu+1)\nu}{2}$, θὰ προκύψῃ ἡ ἰσότης

$$(\nu+1)^3=3(1^2+2^2+3^2+...+\nu^2)+\frac{3}{2}\nu(\nu+1)+\nu+1,\ \text{ἐξ ἧς}$$

$$1^2+2^2+3^2+...+\nu^2=\frac{2(\nu+1)^3-3\nu(\nu+1)-2(\nu+1)}{6}.$$

καὶ ἄρα $$1^2+2^2+...+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)\,(2\nu+1)}{6}.$$

2) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ν πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Πρὸς τοῦτο ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς ταυτότητος

$$(\alpha+1)^4=\alpha^4+4\alpha^3+6\alpha^2+4\alpha+1$$

καὶ προχωροῦντες κατὰ τρόπον ἀνάλογον τοῦ προηγουμένου προβλήματος, θὰ εὕρωμεν τὴν ἑξῆς ἰσότητα

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3=\left[\frac{(\nu+1)}{2}\,\nu.\right]^2=(1+2+3+\ldots+\nu)^2.$$

3) Σῶμα πίπτον διανύει $4^{\mu},9$ κατὰ τὸ πρῶτον δεύτερον λεπτὸν τῆς πτώσεως αὐτοῦ· τὸ καθ' ἕκαστον δὲ δεύτερον λεπτὸν διανυόμενον ὑπ' αὐτοῦ διάστημα ὑπερέχει τοῦ κατὰ τὸ προηγούμενον δεύτερον λεπτὸν διανυθέντος ὑπ' αὐτοῦ διαστήματος κατὰ $9^{\mu},8$. Ζητεῖται 1ον) Τὸ κατὰ τὸ δέκατον δεύτερον λεπτὸν διανυθὲν ὑπὸ τοῦ πίπτοντος σώματος διάστημα καὶ 2ον) Τὸ κατὰ τὰ 10 δεύτερα λεπτὰ διανυθὲν διάστημα.

4) Εὑρεῖν τοὺς ἕνδεκα ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου, ἧς τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ὅρων εἶναι 176, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἄκρων ὅρων 30.

5) Δύο ὁδοιπόροι ἀναχωρήσαντες συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β ἀπεχουσῶν ἀπ' ἀλλήλων 165 χιλιόμετρα ἐβάδισαν ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ ἀντιθέτως διευθυνόμενοι πρὸς συνάντησιν ἀλλήλων. Οὕτω δέ, ἂν διέτρεξαν ὁ μὲν ἐκ τῆς πόλεως Α ἀναχωρήσας τὴν πρώτην ἡμέραν 1 χιλιόμετρον, τὴν δευτέραν 2, τὴν τρίτην 3 κ.ἐ.ο., ὁ δὲ ἐκ τῆς Β τὴν μὲν πρώτην ἡμέραν 20 χιλιόμετρα, τὴν δευτέραν 18 καὶ ἐφεξῆς οὕτω, μετὰ πόσας ἡμέρας συνηντήθησαν καὶ εἰς τίνα ἀπὸ τῆς πόλεως Α ἀπόστασιν;

6) Εὑρεῖν τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου δεδομένων τῆς περιμέτρου αὐτοῦ 3τ, καὶ ὅτι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ἀποτελοῦσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

7) Ἂν αἱ τρεῖς πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου ἀποτελῶσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἀποδεῖξαι ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐν τῷ τριγώνῳ τούτῳ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῆς προόδου ταύτης.

8) Εὑρεῖν τὸν νον ὅρον καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς πρόδου 1, $\frac{\nu-1}{\nu}, \frac{\nu-2}{\nu}, \frac{\nu-3}{\nu}, \ldots$

9) Εὑρεῖν τὸν νον ὅρον καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς προόδου $\frac{\nu^2-1}{\nu}, \nu, \frac{\nu^2+1}{\nu}, \frac{\nu^2+2}{\nu}, \ldots$

10) Εὑρεῖν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου ἐχούσης πρῶτον ὅρον τὸν 12, λόγον δὲ τὸν 3, καὶ ἄθροισμα τῶν ὅρων τὸν 882.

11) Εὑρεῖν τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον δεδομένων τοῦ ἀθροίσματος κ τοῦ μ^οῦ καὶ τοῦ ν^οῦ ὅρων αὐτῆς καὶ τοῦ ἀθροίσματος κ′ τοῦ μ′^οῦ καὶ τοῦ ν′^οῦ ὅρων αὐτῆς.

12) Ἂν Σ, Σ′, Σ′′ εἶναι τὰ ἀθροίσματα τῶν ν πρώτων ὅρων τριῶν ἀριθμητικῶν προόδων, ὧν πρῶτος μὲν ὅρος ἑκάστης εἶναι ἡ μονάς, ἀντίστοιχοι δὲ τούτων λόγοι δ 1, δ 2 καὶ δ 3, ἀποδεῖξαι ὅτι ἀληθεύει ἡ ἰσότης $\Sigma + \Sigma'' = 2\Sigma'$.

6′) Πρόοδοι Γεωμετρικαί.

Ὁρισμοί.

215. *Πρόοδος γεωμετρικὴ ἢ κατὰ πηλίκον λέγεται σειρὰ ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Τοιοῦτοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ

$$5,\ 10,\ 20,\ 40,\ 80, \ldots\ldots,$$

ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2· καὶ οἱ ἀριθμοὶ

$$162,\ 54,\ 18,\ 6,\ 2, \ldots\ldots,$$

ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{3}$.

Καλοῦνται δὲ οἱ μὲν ἀποτελοῦντες τὴν πρόοδον ἀριθμοὶ ***ὅροι τῆς προόδου***, ὁ δὲ ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων πολλαπλασιάζων ἀριθμὸς πρὸς σχηματισμὸν τοῦ ἑπομένου ***λόγος τῆς προόδου***.

Γεωμετρικὴ πρόοδος λέγεται ***αὔξουσα*** μέν, ἂν οἱ ὅροι αὐτῆς βαίνωσιν αὐξανόμενοι, ὅπερ γίνεται, ἂν ὁ λόγος αὐτῆς εἶναι ἀριθμὸς μείζων τῆς μονάδος, ***φθίνουσα*** δέ, ἂν οἱ ὅροι αὐτῆς βαίνωσιν ἐλαττούμενοι, ὅπερ γίνεται, ἂν ὁ λόγος αὐτῆς εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος.

Εὕρεσις τοῦ ὅρου τοῦ κατέχοντος ὡρισμένην τάξιν ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ.

216. ***Θεώρημα.*** *Ἐν πάσῃ γεωμετρικῇ προόδῳ ἕκαστος ὅρος ἰσοῦται τῷ πρώτῳ πολλαπλασιαζομένῳ ἐπὶ τὴν δύναμιν τοῦ λόγου*

τὴν ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τὸν δηλοῦντα τὸ πλῆθος τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων.

Διότι, ἂν παρασταθῇ ὁ μὲν πρῶτος ὅρος διὰ τοῦ α, ὁ δὲ ν^ος^ διὰ τοῦ τ, ὁ δὲ λόγος διὰ τοῦ ω, θὰ εἶναι ὁ μὲν δεύτερος ὅρος αω, ὁ δὲ τρίτος $\alpha\omega^2$ καὶ ἐφεξῆς οὕτω· καὶ ὁ τὴν ν^ην^ ἄρα τάξιν ἔχων ὅρος τ, οὗ προηγοῦνται ν—1 ἄλλοι ὅροι, θὰ εἶναι

$$\tau = \alpha\omega^{\nu-1}. \qquad (1)$$

Παρεμβολή.

217. ***Πρόβλημα***. *Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β παρεμβαλεῖν μ μέσους γεωμετρικούς, ἤτοι μ ἀριθμοὺς ἀποτελοῦντας μετὰ τοῦ α καὶ τοῦ β γεωμετρικὴν πρόοδον ἔχουσαν μ+2 ὅρους καὶ πρῶτον μὲν ὅρον τὸν α τελευταῖον δὲ τὸν β.*

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου πρέπει νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς προόδου ταύτης. Πρὸς τοῦτο, ἂν καλέσωμεν ω τὸν λόγον τῆς προόδου ταύτης, ἐφαρμόσωμεν δὲ τὸν ἀνωτέρω προκύψαντα τύπον (1), θὰ ἔχωμεν

$$\beta = \alpha\omega^{\mu+1} \quad \text{καὶ ἄρα} \quad \omega = \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}},$$

ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι

$$\alpha,\ \alpha\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}},\ \alpha\left(\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2, \ldots\ldots,\ \alpha\left(\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^{\mu}, \ \beta.$$

218. ***Θεώρημα***. *Ἂν μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου παρεμβληθῇ τὸ αὐτὸ πλῆθος μέσων γεωμετρικῶν, ἐκ τῶν οὕτω προκυπτουσῶν προόδων θὰ σχηματισθῇ μία μόνη νέα πρόοδος.*

Διότι τῶν προόδων τούτων καὶ οἱ λόγοι θὰ εἶναι ἀριθμοὶ ἴσοι, ὡς ἰσοβάθμιαι ῥίζαι ἀριθμῶν ἴσων τῷ λόγῳ τῆς δεδομένης προόδου, καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος ἑκάστης ἴσος πρὸς τὸν πρῶτον τῆς ἑπομένης.

Π. χ. ἂν μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου 1, 8, 64, 512, παρεμβληθῶσι δύο ὅροι, θὰ προκύψῃ ἡ νέα πρόοδος

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512.

Ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου.

219. ***Θεώρημα***. *Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων πάσης γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τῆς διαιρέσεως τῆς διαφορᾶς τοῦ πρώτου ὅρου ἀπὸ τοῦ γινομένου τοῦ τελευταίου ὅρου πολλαπλασιασμένου*

ἐπὶ τὸν λόγον διαιρεθείσης διὰ τοῦ λόγου ἠλαττωμένου κατὰ μονάδα.

Ἂν διὰ τοῦ Κ παρασταθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,\ \rho,\ \sigma,\ \tau,$$

θὰ ἔχωμεν $$K=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\rho+\sigma+\tau. \qquad (\alpha)$$

Ἂν δὲ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης (α) ἐπὶ τὸν λόγον ω τῆς προόδου, θὰ προκύψῃ ἡ ἰσότης

$$K\omega=\beta+\gamma+\ldots+\rho+\sigma+\tau+\tau\omega,$$

διότι $$\alpha\omega=\beta,\ \beta\omega=\gamma,\ \ldots,\ \sigma\omega=\tau.$$

Ἂν δὲ ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὴν (α), θὰ ἔχωμεν $$K(\omega-1)=\tau\omega-\alpha, \qquad (\beta)$$

ἐξ ἧς, ἂν ὑποτεθῇ ὁ ω διάφορος τῆς μονάδος 1, θὰ προκύψῃ ὁ τύπος

$$K=\frac{\tau\omega-\alpha}{\omega-1} \qquad (2)$$

220. Ἂν δὲ νῦν ὑποτεθῇ ὅτι ὁ λόγος ω εἶναι ἴσος τῇ μονάδι 1, δὲν δύναται ἐκ τῆς ἰσότητος (β) νὰ προκύψῃ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς προόδου, διότι ἡ ἰσότης ἐκείνη (β) γίνεται $0=0$. Ἐπειδὴ ὅμως τότε πάντες οἱ ὅροι εἶναι ἴσοι, ἂν τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶναι ν, τὸ ἄθροισμα Κ, προκύπτον ἀμέσως ἐκ τῆς προόδου, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$K=\alpha\nu.$$

221. Ἂν δοθῶσιν ὁ πρῶτος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου, ὁ λόγος αὐτῆς καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων, ζητεῖται δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων, ἀντικαθιστῶμεν ἐν τῷ τύπῳ (2) ἀντὶ τοῦ τ τὴν ἐκ τοῦ τύπου (1) τιμὴν αὐτοῦ $\tau=\alpha\omega^{\nu-1}$. Οὕτω δὲ θὰ ἔχωμεν τὸν ἑξῆς τύπον·

$$K=\frac{\alpha(\omega^{\nu}-1)}{\omega-1}, \qquad (3)$$

δι᾽ οὗ εὑρίσκεται τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, ὅταν ἔχωσι δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προόδου, ὁ λόγος αὐτῆς καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων.

Ἐφαρμογαί.

Κατὰ τὸν εὑρεθέντα ἀνωτέρω τύπον (2) ἔχομεν

$$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{\nu-1}=\frac{2^{\nu}-1}{2-1}=2^{\nu}-1.$$

Ὡσαύτως $$1+10+10^2+\ldots+10^{\nu-1}=\frac{10^{\nu}-1}{10-1}=\frac{10^{\nu}-1}{9}.$$

222. Οἱ τύποι $\tau = \alpha\omega^{\nu-1}$ (1), $K = \frac{\tau\omega - \alpha}{\omega - 1}$ (2)

εἶναι οἱ μόνοι διακεκριμένοι, δι᾽ ὧν συνδέονται πρὸς ἀλλήλους οἱ πέντε ἀριθμοὶ α, ω, τ, ν, Κ πάσης γεωμετρικῆς προόδου. Διὰ τῶν τύπων τούτων ἐπιλυομένων προσηκόντως δύνανται νὰ προσδιορίζωνται δύο ἐκ τῶν πέντε τούτων ἀριθμῶν δεδομένων τῶν τριῶν ἄλλων. Ὑπάρχουσι δὲ περιπτώσεις, καθ᾽ ἃς αἱ οὕτω προκύπτουσαι ἐξισώσεις δὲν δύνανται νὰ ἐπιλυθῶσιν ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε εἰρημένων.

223. Ἂν ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος εἶναι φθίνουσα, ἔχῃ δὲ ἄπειρον πλῆθος ὅρων, ὁσουσδήποτε ὅρους αὐτῆς καὶ ἂν προσθέσωμεν, παραστήσωμεν δὲ τὸν τελευταῖον τούτων διὰ τοῦ τ, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν Κ, προκύπτον ἐκ τοῦ τύπου $K = \frac{\tau\omega - \alpha}{\omega - 1}$, ὅστις γράφεται καὶ ὧδε

$$K = \frac{\alpha - \tau\omega}{1 - \omega}, \text{ ἤτοι } K = \frac{\alpha}{1 - \omega} - \frac{\omega}{1 - \omega}\tau,$$

εἶναι πάντοτε μικρότερον τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ $\frac{\alpha}{1 - \omega}$, διαφέρον τούτου κατὰ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν $\frac{\omega}{1 - \omega}.\tau$.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι γινόμενον δύο παραγόντων, τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ $\frac{\omega}{1 - \omega}$ καὶ τοῦ ληφθέντος τελευταίου ὅρου τ, ὅστις ἰσούμενος τῷ γινομένῳ $\alpha\omega^{\nu}$, τοῦ σταθεροῦ δηλαδὴ ἀριθμοῦ α ἐπὶ τὴν δύναμιν ω^{ν}, ἥτις γίνεται μικροτέρα παντὸς δεδομένου ἀριθμοῦ (§ 170), ἕπεται (§ 168, 3ον) ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος τ, κατ᾽ ἀκολουθίαν δὲ (§ 168) καὶ ἡ θεωρουμένη διαφορὰ $\frac{\omega}{1 - \omega}.\tau$, γίνονται μικρότεροι παντὸς δεδομένου ἀριθμοῦ.

Τὴν ἰδιότητα ταύτην τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐκφράζοντες συντόμως, λέγομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα πάντων αὐτῆς τῶν ὅρων ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν $\frac{\alpha}{1 - \omega}$, ἤτοι *τὸν πρῶτον αὐτῆς ὅρον διῃρημένον διὰ τῆς μονάδος ἠλαττωμένης κατὰ τὸν λόγον.*

Ἀσκήσεις.

1) Ἐν πάσῃ γεωμετρικῇ προόδῳ τὸ γινόμενον δύο ὅρων ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων ὅρων ἀπεχόντων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν ἄκρων ὅρων.

2) Τὸ γινόμενον τῶν ὅρων πάσης γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῆς δυνάμεως τοῦ γινομένου τῶν ἄκρων ὅρων τῆς ἐχούσης ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τὸν παριστῶντα τὸ πλῆθος τῶν ὅρων.

3) Πᾶν δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου.

Π. χ. τὸ δεκαδικὸν $0,\ 35\ 35\ 35\ldots$ γράφεται καὶ ὧδε·

$$\frac{35}{100}+\frac{35}{100^2}+\frac{35}{100^3}+\ldots$$

Οὕτω δὲ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν κλασμάτων τούτων κατὰ τὸν ἀνωτέρω τύπον εἶναι $\dfrac{\frac{35}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\dfrac{35}{99}$, ὅπερ προέκυψε καὶ ἐκ τῆς γενομένης ἐν τῇ ἀριθμητικῇ θεωρίας τῶν περιοδικῶν κλασμάτων.

4) Τὸ μικτὸν δεκαδικὸν περιοδικὸν $0,3565656\ldots$, γραφόμενον καὶ ὧδε

$$\frac{3}{10}+\frac{56}{10^3}+\frac{56}{10^5}+\frac{56}{10^7}+\ldots$$

ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι $\dfrac{3}{10}+\dfrac{\frac{56}{10^3}}{1-\frac{1}{100}}$,

ἤτοι τῷ $\dfrac{3}{10}+\dfrac{56}{990}=\dfrac{3.99+56}{990}=\dfrac{356-3}{990}$.

5) Ἐν τετραγώνῳ ἔχοντι πλευρὰν α γράφομεν τετράγωνον ἑνοῦντες δι' εὐθειῶν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ δεδομένου· ὡσαύτως ἐν τῷ προκύψαντι τετραγώνῳ ἐγγράφομεν ἄλλο καὶ ἐφεξῆς οὕτω.

Ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν περιμέτρων καὶ τῶν ἐμβαδῶν πάντων τῶν τετραγώνων τούτων.

6) Δεδομένου ὅτι $α>6$ εὑρεῖν τὰ ἀθροίσματα τῶν ἀπείρων ὅρων τῶν ἑξῆς σειρῶν·

1ον) $\alpha+\beta+\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\beta^3}{\alpha^2}+\ldots.$

2ον) $\frac{\delta}{\alpha}-\frac{(\delta-\alpha)\beta}{\alpha}+\frac{(\delta-\alpha)\beta^2}{\alpha^2}-\frac{(\delta-\alpha)\beta^3}{\alpha^3}+\ldots..$

7) Τίς εἶναι ὁ λόγος τῆς ἐκ 10 ὅρων ἀποτελουμένης γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης πρῶτον μὲν ὅρον τὸν 10, τελευταῖον δὲ ὅρον τὸν 100;

8) Ἂν ἡ περιφέρεια δεδομένου κύκλου Ο ἔχοντος ἀκτῖνα α, διαιρεθῇ εἰς ὀκτὼ ἴσα μέρη, εἶτα δὲ ἀχθῶσιν αἱ εἰς τὰ σημεῖα τῶν διαιρέσεων ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ,....., ἔτι δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΟΒ κάθετος ΑΠ, καὶ ἡ ἐκ τοῦ Π ἡ ἐπὶ τὴν ΟΓ κάθετος ΠΡ καὶ ἐφεξῆς οὕτω μέχρις οὗ ἀχθῇ καὶ ἡ ἐπὶ τὴν τελευταίαν ἀκτῖνα ΟΑ κάθετος, ποῖον θὰ εἶναι τὸ μῆκος τῆς ὑπὸ τῶν καθέτων τούτων προκυψάσης οὕτω τεθλασμένης γραμμῆς;

9) Εὑρεῖν τὰς τέσσαρας γωνίας τετραπλεύρου, δεδομένου ὅτι αὗται ἀποτελοῦσι γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ ὅτι ἡ τετάρτη τούτων εἶναι ἐννεαπλασία τῆς δευτέρας.

10) Ἄνθρωπός τις διέθεσε τὴν περιουσίαν του εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του ὡς ἑξῆς. Εἰς μὲν τὸν α΄. ἐκ τῶν υἱῶν αὐτοῦ κατέλιπε τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς περιουσίας του, εἰς δὲ τὸν β΄. τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῆς καὶ εἰς τὸν γ΄. τὸ $\frac{1}{8}$. δὲν ἐσυλλογίσθη ὅμως, ὅτι τὰ τρία ταῦτα μέρη $\left(\text{τὸ } \frac{1}{2}, \text{ τὸ } \frac{1}{4} \text{ καὶ τὸ } \frac{1}{8}\right)$ δὲν συναποτελοῦσιν ὅλην τὴν περιουσίαν, ἀλλὰ μόνον τὰ $\frac{7}{8}$ αὐτῆς. Εὑρεῖν πῶς πρέπει νὰ γίνῃ ἡ διανομή, ἵνα ὅσον τὸ δυνατὸν πραγματωθῇ ἡ θέλησις τοῦ πατρός;

11) Νὰ εὑρεθῇ ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος, ἧς τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τεσσάρων πρώτων ὅρων εἶναι 40, τὸ δὲ ἄθροισμα των τεσσάρων ἑπομένων εἶναι 3240.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

224. Διὰ τὴν σπουδὴν τῆς θεωρίας τῶν λογαρίθμων ἀναγκαῖον εἶναι νὰ σπουδάσωμεν τὴν παράστασιν α^χ, ὅταν ὁ α εἶναι ἀριθμὸς θετικὸς μείζων ἢ ἐλάσσων τῆς μονάδος, ἐξετάζοντες ἅμα, ἂν τὸ ὅριον τῆς δυνάμεως α^χ εἶναι ἀριθμὸς ἐντελῶς ὡρισμένος καὶ πάντοτε ὁ αὐτός, ἡτισδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ σειρὰ τῶν συμμέτρων ἐκθετῶν, οἵτινες ἀπεριορίστως πλησιάζουσι πρὸς τὸν χ.

225. Πρὸς τοῦτο θὰ ἀποδείξωμεν τὰς ἑξῆς προτάσεις·

1ον) *Παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ αἱ σύμμετροι δυνάμεις εἶναι ἀριθμοὶ θετικοί.*

Διότι, ὡς εἴπομεν (§ 172), θεωροῦμεν τὰς θετικὰς μόνον τῶν ριζῶν τιμὰς τῶν θετικῶν ἀριθμῶν.

2ον) *Παντὸς ἀριθμοῦ μείζονος τῆς μονάδος πᾶσαι μὲν αἱ θετικαὶ δυνάμεις, ἤτοι αἱ θετικοὺς ἐκθέτας ἔχουσαι δυνάμεις, εἶναι ὡσαύτως ἀριθμοὶ μείζονες τῆς μονάδος (§ 169), πᾶσαι δὲ αἱ ἀρνητικαί, ἤτοι αἱ ἀρνητικοὺς ἐκθέτας ἔχουσαι, εἶναι ἀριθμοὶ ἐλάσσονες τῆς μονάδος.*

Ἐπὶ δὲ τῶν δυνάμεων παντὸς ἀρθμοῦ ἐλάσσονος τῆς μονάδος ἀληθεύουσι τὰ ἀντίστροφα τῶν προηγουμένων.

Ἔστω ὁ μείζων τῆς μονάδος ἀριθμὸς α καὶ ἡ τυχοῦσα τούτου θετικὴ δύναμις $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$.

Ἐπειδὴ εἶναι ὁ $\alpha > 1$, ἕπεται (§ 169) ὅτι καὶ $\alpha^\mu > 1$· καὶ ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι τῶν μειζόνων τῆς μονάδος ἀριθμῶν εἶναι ὡσαύτως ἀριθμοὶ μείζονες τῆς μονάδος, ἤτοι, ἂν $\alpha > 1$, θὰ εἶναι καὶ $\sqrt[\nu]{\alpha} > 1$· διότι, ἂν ὑποτεθῇ τὸ ἐναντίον, ἤτοι ὅτι $\sqrt[\nu]{\alpha} < 1$, θὰ εἶναι (§ 170) καὶ $\alpha < 1$, ὅπερ ἄτοπον· ἐκ τούτων ἄρα προκύπτει ὅτι $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} > 1$· ἐπειδὴ δὲ (§ 187) $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, ἕπεται ὅτι καὶ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} > 1$.

Κατὰ ταῦτα, ἐπειδὴ αἱ θετικαὶ δυνάμεις τοῦ α εἶναι ἀριθμοὶ μείζονες τῆς μονάδος, καὶ ἐπειδὴ (§ 187) $\alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^\mu}$, συνάγεται ὅτι·

Ωστε θετικοῦ ἀριθμοῦ μείζονος τῆς μονάδος πᾶσα ἀρνητικὴ δύναμις εἶναι ἐλάσσων τῆς μονάδος ἀριθμός.

Διότι εἶναι ἴσος τῷ ἀντιστρόφῳ ἀριθμῷ τῆς δυνάμεως τοῦ ἀριθμοῦ τούτου τῆς ἐχούσης τὸν ἀντίθετον θετικὸν ἐκθέτην.

Ἂν δὲ τέλος ὑποθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν α ἐλάσσονα τῆς μονάδος, καὶ παραστήσωμεν αὐτὸν διὰ τοῦ $\frac{1}{\alpha'}$, ἔνθα ὁ α′ εἶναι ἀριθμὸς μείζων τῆς μονάδος, θὰ προκύψῃ $\alpha^\chi=\frac{1}{\alpha'^\chi}$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης προκύπτει ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ χ, δι᾽ ἃς ὁ α'^χ εἶναι ἀριθμὸς μείζων τῆς μονάδος, καθιστῶσιν ἀντιστρόφως τὸν α^χ ἐλάσσονα αὐτῆς, καὶ ἀντιστρόφως.

3ον) *Ἂν ὁ ἐκθέτης χ λαμβάνῃ συμμέτρους πάντοτε αὐξούσας τιμάς, ἡ παράστασις α^χ μεταβάλλεται πάντοτε ὁμοίως καὶ αὐξάνει μέν, ἂν ὁ α εἶναι μείζων τῆς μονάδος ἀριθμός, ἐλαττοῦται δὲ ἂν ὁ α εἶναι ἐλάσσων αὐτῆς.*

Ἔστωσαν δύο σύμμετροι θετικοὶ ἢ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ ὁ ρ καὶ ὁ σ τιθέμενοι διαδοχικῶς ἐν τῇ παραστάσει α^χ ἀντὶ τοῦ χ, καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha^\rho}{\alpha^\sigma}=\alpha^{\rho-\sigma}$ (§ 187, 2ον).

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ ρ—σ θὰ εἶναι ἀριθμὸς θετικός, ἂν ἐξ ὑποθέσεως ληφθῇ ὁ ρ μείζων τοῦ σ, ἕπεται ὅτι, ἂν μὲν ὁ α εἶναι μείζων τῆς μονάδος, θὰ εἶναι ὡσαύτως (§ 184) καὶ ὁ $\alpha^{\rho-\sigma}$ μείζων τῆς μονάδος, τουτέστιν ὁ $\alpha^\rho>\alpha^\sigma$· ἂν δὲ τοὐναντίον, ὁ α εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος, θὰ εἶναι ὡσαύτως (§ 184) καὶ ὁ $\alpha^{\rho-\sigma}$ μικρότερος τῆς μονάδος, τουτέστιν ὁ $\alpha^\rho<\alpha^\sigma$.

Κατὰ ταῦτα δὲ καθόσον ὁ χ αὐξάνεται ἀπὸ τῆς τιμῆς ρ εἰς τὴν σ, ὁ α^χ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει αὐξάνεται, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἐλαττοῦται.

4ον) ***Δυνάμεθα ἐν τῇ παραστάσει α^χ νὰ δώσωμεν εἰς σύμμετρόν τινα τιμὴν τοῦ χ αὔξησιν ἐλαχίστην, ὥστε ἡ ἀντίστοιχος μεταβολὴ τοῦ α^χ νὰ εἶναι ὅσον θέλωμεν ἐλαχίστη.***

Διότι, ἐπειδὴ $\alpha^{\mu+\varepsilon}-\alpha^\mu=\alpha^\mu.\alpha^\varepsilon-\alpha^\mu=\alpha^\mu(\alpha^\varepsilon-1)$, ὁ δὲ α^μ εἶναι ἀριθμὸς ἀνεξάρτητος τοῦ ε, ἕπεται ὅτι, ἵνα ἀποδειχθῇ ἡ πρότασις, ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ παράγων $\alpha^\varepsilon-1$ δύναται νὰ γίνῃ, ὅσον ἐλάχιστος θέλωμεν, δι᾽ ἐλαχίστας τιμὰς τοῦ ε (§ 168,3ον).

Πρὸς τοῦτο, ἂν μὲν ὁ α ὑποτεθῇ μείζων τῆς μονάδος, ἡτισδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ θετικὴ τιμὴ τοῦ ε, ὁ α^ε θὰ εἶναι πάντοτε μείζων τῆς μονάδος (§ 169).

Ἵνα δὲ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος τείνει πρὸς τὴν μονάδα, ὅσον ἂν θέλῃ τις, ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι δύναται νὰ γίνῃ ἐλάσσων οἱουδήποτε μείζονος τῆς μονάδος ἀριθμοῦ $1+\eta$, τουτέστιν δύναται νὰ ληφθῇ ὁ ε τοιοῦτος, ὥστε $\alpha^\varepsilon < 1+\eta$.

Πρὸς τοῦτο, ἂν τεθῇ $\varepsilon = \frac{1}{K}$, ἡ προηγουμένη ἀνισότης γίνεται

$$\alpha^{\frac{1}{K}} < 1+\eta,$$

ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ $\quad (1+\eta)^K > \alpha.$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἀκέραιαι δυνάμεις τοῦ $1+\eta$, σχηματίζουσαι αὔξουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον, δύνανται νὰ ὑπερβῶσι πᾶν ὅριον (§ 169), ἕπεται ὅτι ἡ τελευταία ἀνισότης εἶναι πάντοτε δυνατή, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ πρότασις ἀπεδείχθη, ὅτάν $\alpha > 1$.

Ἂν δὲ ὁ α εἶναι ἀριθμὸς ἐλάσσων τῆς μονάδος, παρασταθῇ δὲ διὰ τοῦ $\frac{1}{\alpha'}$, ὅτε ὁ α' θὰ εἶναι μείζων τῆς μονάδος, θὰ ἔχωμεν

$\alpha^\varepsilon = \frac{1}{\alpha'^\varepsilon}$· ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁ α'^ε διαφέρει τῆς μονάδος, ὅσον ἐλάχιστον θέλωμεν, συνάγεται ὅτι καὶ ὁ α^ε διαφέρει τῆς μονάδος, ὅσον ἐλάχιστον θέλωμεν.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΕΧΟΥΣΑΙ ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΝ ΕΚΘΕΤΗΝ

226. Αἱ προηγούμεναι παρατηρήσεις ἦσαν ἀπαραίτητοι, πρὸς ὁρισμὸν τῆς παραστάσεως α^χ, ὅταν ὁ χ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος.

Διότι, ἵνα ὁρίσωμεν τὴν παράστασιν α^χ, ὅταν ὁ χ ἔχῃ τιμὰς ἀσυμμέτρους, οἷα εἶναι ἡ παράστασις $\alpha^{\sqrt{2}}$ θεωροῦμεν δύο ἐφεξῆς κλάσματα $\frac{\mu}{\nu}$ καὶ $\frac{\mu+1}{\nu}$, ὧν τὰ τετράγωνα περιλαμβάνουσι τὸν 2, καὶ ὁρίζομεν ὅτι ἡ παράστασις $\alpha^{\sqrt{2}}$ παριστᾷ τὸ κοινὸν ὅριον τῶν δύο ἀριθμῶν $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ καὶ $\alpha^{\frac{\mu+1}{\nu}}$ ὅταν ἡ ἀπ' ἀλλήλων διαφορὰ $\frac{1}{\nu}$ τῶν κλασμάτων $\frac{\mu}{\nu}$ καὶ $\frac{\mu+1}{\nu}$ γίνηται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐλαχίστη.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν ἄρα τοῦτον, πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμεὶ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ καὶ $\alpha^{\frac{\mu+1}{\nu}}$ τείνουσι πρὸς κοινὸν ὅριον.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι $\alpha^{\frac{\mu+\nu}{\nu}} - \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}.\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}} - 1\right)$, ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι διὰ μεγάλας τοῦ ν τιμὰς ὁ ἐκθέτης $\frac{1}{\nu}$ καθίσταται ἐλάχιστος, καὶ κατ' ἀκολουθίαν, ἐπειδὴ τὸ $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$ τείνει εἰς τὴν μονάδα, ἡ ὅλη αὕτη διαφορὰ τείνει πρὸς τὸ μηδενικόν.

Θὰ λέγωμεν δέ ὅτι ὁ α^{χ} διά τινα ἀσύμμετρον του χ τιμὴν παριστᾷ ἀριθμὸν περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν τιμῶν τοῦ α^{χ} τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς ἐκθέτας συμμέτρους ἐλάσσονας τοῦ ε, καὶ τῶν τιμῶν τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς ἐκθέτας μείζονας τοῦ ε.

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος, ὅστις ἀναλογεῖ πρὸς τὸν ἐν τῇ ἀριθμητικῇ δοθέντα ὁρισμὸν διὰ τὰς τετραγωνικὰς καὶ τὰς κυβικὰς τῶν ἀριθμῶν ῥίζας, προσδιορίζει διὰ τὸν α' μίαν μόνην καὶ ὡρισμένην τιμήν.

Ἵνα δὲ ὁρίσωμεν τὰ ἀνωτέρω, ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ α^{χ} παριστῶσι τὰ μήκη τμημάτων, ἅτινα λαμβάνονται ἐπ' εὐθείας καὶ ἔχουσι πάντα τὴν αὐτὴν ἀρχήν. Οὕτω δέ τὰ ἄκρα τῶν τμημάτων τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τιμὰς τοῦ χ ἐλάσσονας τοῦ ε θὰ κατέχωσιν ὡρισμένον τμῆμα τῆς εὐθείας, τῶν δὲ ἀντιστοιχούντων εἰς τιμὰς τοῦ χ μείζονας τοῦ ε θὰ κατέχωσιν ἄλλο τμῆμα. Ἐκ τούτων ἄρα συνάγεται, ὅτι τὰ τμήματα ταῦτα εἶναι ἐξ ὁλοκλήρου κεχωρισμένα, καὶ δὲν δύναται νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ αὐτῶν οὐδὲν πεπερασμένον τμῆμα, ἀλλ' ἁπλοῦν σημεῖον, Ἡ δὲ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ἀπόστασις τοῦ σημείου τούτου παριστᾷ τὸν α^{χ}'. Τούτων οὕτως ἐχόντων παρατηροῦμεν ὅτι πάντες οἱ κανόνες τοῦ ὑπολογισμοῦ δυνάμεων, αἵτινες ἔχουσι κλασματικοὺς ἐκθέτας, ἐπεκτείνονται καὶ ἐπὶ ἀσυμμέτρων ἐκθετῶν.

Π. χ. $\alpha^{\sqrt{3}} . \alpha^{\sqrt{5}} = \alpha^{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ καὶ $\alpha^{\sqrt{8}\sqrt{2}} = \alpha^{\sqrt{16}} = \alpha^4$.

227) Ἕνεκα τῶν ἀνωτέρω ἡ παράστασις α^{χ} καλεῖται ***συνεχὴς συνάρτησις*** τοῦ χ, διότι δὲν δύναται νὰ μεταβῇ ἔκ τινος τιμῆς εἰς ἄλλην, χωρὶς νὰ μὴ δύναται νὰ λάβῃ ἑκάστην τῶν ἄλλων ἐνδιαμέσων τιμῶν(*).

(*) *Συνεχὴς* καλεῖται ἐν γένει συνάρτησίς τις τοῦ χ, οἷον ἡ σ(χ), διὰ τὰς ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$ τιμὰς τοῦ χ, ἂν ἡ πρός τινα τοῦ χ αὔξησιν ε ἀντίστοιχος τῆς συναρτήσεως ταύτης αὔξησις $\sigma(\chi+\varepsilon)-(\chi)$ τείνῃ εἰς τὸ 0, ὅταν καὶ τὸ ε τείνῃ εἰς τὸ 0.

Ἀποδεικνύεται δὲ γενικῶς διὰ πᾶσαν συνεχῆ συνάρτησιν, ὅτι δὲν δύναται νὰ μεταβῇ ἔκ τινος τιμῆς εἰς ἄλλην, ἂν μὴ διέλθῃ διὰ πάσης ἐνδιαμέσου τιμῆς.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, ἂν ὁ α εἶναι ἀριθμὸς θετικός, ὁ δὲ χ μεταβάλληται ἀπὸ τοῦ $-\infty$ εἰς τὸ $+\infty$, ὁ α^χ δύναται νὰ λάβῃ πάσας τὰς θετικὰς τιμάς.

Ἵνα δὲ τοῦτο ἀποδείξωμεν θὰ διακρίνωμεν δύο περιπτώσεις·

1ον) *Ἂν ὁ α εἶναι μείζων τῆς μονάδος.*

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ αἱ ἀκέραιοι δυνάμεις τοῦ α σχηματίζουσιν αὔξουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὑπάρχει πάντοτε ἐκθέτης, ὥστε ὁ α^χ νὰ εἶναι μείζων παντὸς δεδομένου ἀριθμοῦ (§ 169)· ἀφ' ἑτέρου δέ, ἂν εἶναι ὁ $\chi=0$, ὁ α^χ θὰ εἶναι ἴσος τῇ μονάδι. Οὕτως, ἐπειδὴ ὁ α^χ δύναται νὰ εἶναι ἴσος καὶ πρὸς τὴν μονάδα καὶ πρὸς πάντα δεδομένον μέγιστον ἀριθμόν, ἕπεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος α^χ, ἕνεκα τῆς συνεχείας, δύναται νὰ λάβῃ πάσας τὰς ἐνδιαμέσους τιμάς.

Λοιπόν, ὅταν ὁ χ μεταβάλληται ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$, ὁ α^χ μεταβάλλεται ἀπὸ τῆς 1 μέχρι τοῦ $+\infty$ καὶ λαμβάνει πάσας τὰς μείζονας τῆς μονάδος τιμάς.

Ἂν δὲ ἀντὶ τοῦ χ τεθῶσιν ἀρνητικαὶ τιμαί, ἐπὶ παραδείγματι $\chi=-\mu$, θὰ ἔχωμεν $\alpha^\chi=\frac{1}{\alpha^\mu}$, ὅτε, ἂν ὁ μ μεταβάλληται ἀπὸ τοῦ 0 εἰς τὸ $+\infty$, ὁ παρονομαστὴς τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος λαμβάνει πάσας τὰς μείζονας τῆς μονάδος δυνατὰς τιμάς, καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ κλάσμα θὰ λάβῃ πάσας τὰς ἐλάσσονας τῆς μονάδος τιμάς.

Δὲν δύναται δὲ ἀφ' ἑτέρου ὁ α^χ νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν τιμὴν διὰ δύο τιμὰς τοῦ χ· διότι, ἂν $\alpha^\chi=\alpha^{\chi'}$, θὰ προέκυπτεν ἐκ τούτου $1=\frac{\alpha^{\chi'}}{\alpha^\chi}=\alpha^{\chi'-\chi}$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ 0 δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ μείζονος τῆς μονάδος εἶναι ἡ μόνη δύναμις, ἥτις ἰσοῦται τῇ μονάδι, ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι ὁ $\chi=\chi'$.

2ον) ***Ἂν ὁ α εἶναι ἐλάσσων τῆς μονάδος.***

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἂν τεθῇ $\alpha=\frac{1}{\alpha'}$, τοῦ α' ὄντος ἀριθμοῦ μείζονος τῆς μονάδος, θὰ ἔχωμεν $\alpha^\chi=\frac{1}{\alpha'^\chi}$· κατὰ δὲ τὰ προηγούμενα, ἂν μὲν ὁ χ μεταβάλληται ἀπὸ τοῦ 0 εἰς τὸ $+\infty$, ὁ α'^χ θὰ λάβῃ πάσας τὰς μείζονας τῆς μονάδος δυνατὰς τιμάς, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὁ α^χ θὰ λάβῃ προφανῶς πάσας τὰς ἐλάσσονας τῆς μονάδος τιμάς.

ἂν δὲ ὁ χ μεταβάλληται ἀπὸ τοῦ 0 εἰς τὸ $-\infty$, ὁ α^χ θὰ λάβῃ πάσας τὰς ἐλάσσονας τῆς μονάδος τιμάς, καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν ὁ α^χ θὰ λάβῃ προφανῶς πάσας τὰς μείζονας τῆς μονάδος τιμάς. Κατὰ ταῦτα ἄρα, καὶ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ὁ α^χ δύναται νὰ λάβῃ πάσας τὰς θετικὰς τιμάς.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

228. *Λογάριθμος ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ὑψωθῇ δεδομένος τις θετικὸς ἀριθμός α, ἵνα προκύψῃ ὁ δεδομένος.*

Ὁ ἀριθμὸς δὲ α, ἐξ οὗ ὑψουμένου εἰς δυνάμεις προκύπτουσιν οἱ ἄλλοι, καλεῖται *βάσις* τῶν λογαρίθμων.

Κατὰ ταῦτα, ἂν $\alpha^\chi=\beta$, τοῦ ἀριθμοῦ β ὡς πρὸς τὴν βάσιν α λογάριθμος θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς χ, καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου $\lambda o\gamma_\alpha \beta=\chi$· ἂν δὲ $\alpha=10$, παρίσταται ἁπλῶς διὰ τοῦ συμβόλου $\lambda o\gamma \beta=\chi$.

Τὸ σύνολον τῶν λογαρίθμων τῶν διαφόρων ἀριθμῶν τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὴν αὐτὴν βάσιν α καλεῖται *σύστημα λογαριθμικόν*.

Δὲν δύναται νὰ ληφθῇ ὡς βάσις λογαρίθμων οὔτε ἡ 1, διότι ἡ ἐξίσωσις $1^\chi=\beta$ εἶναι ἀδύνατος διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ β διάφορον τῆς μονάδος, οὔτε ἀρνητικὸς ἀριθμός, διότι ἡ ἐξίσωσις $(-\alpha)^\chi=\beta$ εἶναι ἀδύνατος διά τινας τιμὰς τοῦ β· ἐπὶ παραδείγματος ἡ ἐξίσωσις $(-10)^\chi=1900$, εἶναι ἀδύνατος.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ βάσις α δύναται νὰ εἶναι οἱοσδήποτε ἀριθμὸς θετικὸς καὶ διάφορος τῆς μονάδος, διὰ τοῦτο δύνανται νὰ σχηματισθῶσι διάφορα λογαριθμικὰ συστήματα, εἰς δὲ καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ διαφόρους λογαρίθμους εἰς τὰ διάφορα ταῦτα συστήματα.

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 10 θὰ ἔχῃ λογάριθμον 1, ἂν ληφθῇ βάσις ὁ 10· διότι $10^1=10$· θὰ ἔχῃ δὲ λογάριθμον τὸν $\frac{1}{2}$, ἂν βάσις ληφθῇ ὁ 100· διότι $100^{\frac{1}{2}}=10$ καὶ ἐφεξῆς οὕτω.

Οἱ λογάριθμοι, ὧν ποιούμεθα συνήθως χρῆσιν, ἔχουσι βάσιν τὸν ἀριθμὸν 10 καὶ καλοῦνται διὰ τοῦτο ***δεκαδικοὶ λογάριθμοι ἢ κοινοὶ λογάριθμοι.***

Ἐν τῇ ἀνωτέρᾳ μαθηματικῇ εἶναι παραδεδεγμένη ἄλλη βάσις ἀσύμμετρος πασῶν τῶν ἄλλων ἁρμοδιωτέρα διὰ τὰς μαθηματικὰς θεωρίας· ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς ὅμως γίνεται πάντοτε χρῆσις τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων.

Οἱ λογάριθμοι δὲ τοῦ αὐτοῦ συστήματος ἀπολαύουσιν ἰδιοτήτων χρησίμων, ἃς ἀμέσως θὰ ἀποδείξωμεν.

Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων.

229. *Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

Ἔστωσαν χ καὶ ψ οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν β καὶ γ ὡς πρὸς τὴν βάσιν α, τουτέστιν (§ 228) ἔστωσαν

$$\alpha^{\chi}=\beta \text{ καὶ } \alpha^{\psi}=\gamma.$$

Ἂς πολλαπλασιάσωμεν δὲ κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας ταύτας, ὅτε θὰ προκύψῃ

$$\alpha^{\chi+\psi}=\beta.\gamma,$$

ἐξ ἧς ἕπεται (§ 228) ὅτι $\lambda o\gamma_{\alpha}\beta.\gamma=\chi+\psi=\lambda o\gamma_{\alpha}\beta+\lambda o\gamma_{\alpha}\gamma$.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀληθεύουσα καὶ ἐφ᾽ ὁσωνδήποτε παραγόντων ἀποδεικνύεται ὁμοίως.

230. *Ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

Διότι, ἂν διαιρεθῶσι κατὰ μέλη αἱ ἰσότητες

$$\alpha^{\chi}=\beta \text{ καὶ } \alpha^{\psi}=\gamma,$$

θὰ προκύψῃ ἡ ἰσότης

$$\alpha^{\chi-\psi}=\frac{\beta}{\gamma},$$

ἐξ ἧς ἕπεται (§ 228) ὅτι

$$\lambda o\gamma_{\alpha}\frac{\beta}{\gamma}=\lambda o\gamma_{\alpha}\beta-\lambda o\gamma_{\alpha}\gamma.$$

231. *Ὁ λογάριθμος τῆς μῆς δυνάμεως ἀριθμοῦ τινος ἰσοῦται, οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ὄντος τοῦ μ (ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ, θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ), τῷ γινομένῳ τοῦ ἐκθέτου μ ἐπὶ τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.*

Διότι, ἂν χ εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ β ὡς πρὸς βάσιν α, ἤτοι ἂν εἶναι

$$\alpha^{\chi}=\beta,$$

ὑψωθῶσι δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης εἰς οἱανδήποτε πραγματικὴν δύναμιν, θὰ προκύψῃ

$$\alpha^{\mu\chi}=\beta^{\mu},$$

ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς $\mu\chi$ εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ β^{μ} ἤτοι

$\lambda o\gamma_\alpha \beta^\mu = \mu . \chi$ καὶ ἄρα $\lambda o\gamma_\alpha \beta^\mu = \mu . \lambda o\gamma_\alpha \beta$.

232. ***Πόρισμα.*** *Ὁ λογάριθμος πάσης ῥίζης ἀριθμοῦ εἶναι ἴσος τῷ λογαρίθμῳ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διαιρουμένῳ διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης.*

Διότι, ἐπειδὴ (§184) $\sqrt[\mu]{\beta} = \beta^{\frac{1}{\mu}}$, ἕπεται ὅτι $\lambda o\gamma_\alpha \sqrt[\mu]{\beta} = \frac{1}{\mu} \lambda o\gamma_\alpha \beta$

τουτέστιν $\lambda o\gamma_\alpha \sqrt[\mu]{\beta} = \frac{\lambda o\gamma_\alpha \beta}{\mu}$.

233. *Ἐν οἱῳδήποτε λογαριθμικῷ συστήματι, ἡ μὲν μονὰς ἔχει λογάριθμον τὸ μηδέν, ἡ δὲ βάσις τοῦ συστήματος ἔχει λογάριθμον τὴν μονάδα.*

Διότι, οἱουδήποτε θετικοῦ ἀριθμοῦ ὄντος τοῦ α, ἔχομεν

$$\alpha^0 = 1 \text{ καὶ } \alpha^1 = \alpha.$$

234. *Ὅταν ἡ βάσις τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος εἶναι ἀριθμὸς μείζων τῆς μονάδος, οἱ μὲν τῆς μονάδος ἀριθμοὶ μείζονες ἔχουσι θετικοὺς λογαρίθμους, οἱ δὲ ἐλάσσονες τῆς μονάδος ἔχουσιν ἀρνητικοὺς λογαρίθμους.*

235. *Τὰ ἀντίστροφα δὲ ἀληθεύουσιν, ὅταν ἡ βάσις εἶναι ἐλάσσων τῆς μονάδος ἀριθμός.*

Διότι εἴδομεν (§ 227,1ον) ὅτι, ἀριθμοῦ μείζονος τῆς μονάδος αἱ μὲν θετικαὶ δυνάμεις εἶναι ἀριθμοὶ μείζονες τῆς μονάδος, αἱ δὲ ἀρνητικαὶ εἶναι ἀριθμοὶ ἐλάσσονες τῆς μονάδος.

236. Τὰ ἀντίστροφα δὲ ἀληθεύουσι (§ 227,2ον) διὰ τὰς δυνάμεις τῶν ἐλασσόνων τῆς μονάδος ἀριθμῶν.

Λοιπόν, ἐὰν ὁ α εἶναι ἀριθμὸς μείζων τῆς μονάδος, ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\alpha^\chi = \beta$, προκύπτει ὅτι ὁ χ, δηλαδὴ ὁ $\lambda o\gamma_\alpha \beta$, εἶναι θετικὸς μέν, ἂν ὁ β εἶναι μείζων τῆς μονάδος, ἀρνητικὸς δὲ ἐν τῇ ἐναντίᾳ περιπτώσει.

Ἐὰν δὲ τοὐναντίον ὁ α εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος, ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\alpha^\chi = \beta$, προκύπτει ὅτι ὁ χ, δηλαδὴ ὁ $\lambda o\gamma_\alpha \beta$, εἶναι ἀρνητικὸς μέν, ἂν ὁ β εἶναι μείζων τῆς μονάδος, θετικὸς δὲ ἐν τῇ ἐναντίᾳ περιπτώσει.

Παρατήρησις. Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουσι λογαρίθμους (§ 225 1ον)· διότι πάσης θετικῆς βάσεως αἱ θετικαὶ ἢ ἀρνητικαὶ δυνάμεις εἶναι πᾶσαι θετικαί.

Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων.

237. Ἐν τῷ δεκαδικῷ συστήματι τῶν λογαρίθμων οἱ λογάριθμοι τῶν μικροτέρων τῆς μονάδος ἀριθμῶν εἶναι ἀρνητικοί (§ 229). Ἀλλὰ τοὺς ὅλως ἀρνητικοὺς λογαρίθμους, διὰ τὴν εὐκολίαν τοῦ ὑπολογισμοῦ, τρέπομεν συνήθως εἰς ἄλλους, ὧν τὸ ἀκέραιον μόνον μέρος εἶναι ἀρνητικόν, τὸ δὲ δεκαδικὸν θετικόν.

Πρὸς τοῦτο, ἂν εἶναι $λογA = -2,40547$, ἡ ἰσότης αὕτη θὰ γράφηται καὶ ὡς ἑξῆς·

$λογA = -2 - 0,40547 + 1 - 1$, ἤτοι $λογA = -3 + (1 - 0,40547)$ ἤ, ἐκτελουμένης τῆς ἐντὸς παρενθέσεως πράξεως, ὧδε·

$$λογA = \overline{3},59453,$$

τοῦ ἀρνητικοῦ σημείου τεθέντος ἄνωθεν τοῦ ἀκεραίου μέρους, ἵνα δειχθῇ ὅτι τοῦτο μόνον εἶναι ἀρνητικόν.

238. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Ἵνα ὅλως ἀρνητικὸν λογάριθμον τρέψωμεν εἰς ἄλλον, οὗτινος τὸ ἀκέραιον μόνον μέρος νὰ εἶναι ἀρνητικόν, αὐξάνομεν τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος κατὰ μονάδα καὶ γράφομεν ὑπεράνω αὐτοῦ τὸ σημεῖον —, εἶτα δὲ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς μονάδος τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου.

Κατὰ ταῦτα ὁ $-5,42108 = \overline{6},57892$, ὁ δὲ $-0,85040 = \overline{1},14960$.

Ἐν τοῖς ἑξῆς τὸ δεκαδικὸν μέρος τῶν λογαρίθμων ὑποτίθεται πάντοτε θετικόν.

239. Καλεῖται δὲ τὸ ἀκέραιον μέρος ἑκάστου λογαρίθμου *χαρακτηριστικὸν* τοῦ λογαρίθμου.

Τὸ χαρακτηριστικὸν τῶν λογαρίθμων τῶν μειζόνων τῆς μονάδος ἀριθμῶν δύναται νὰ ορισθῇ ἀμέσως· ἰσοῦται δὲ πρὸς τὸν ἀριθμὸν τὸν παριστῶντα τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ ἀριθμοῦ, ἠλαττωμένον κατὰ μονάδα.

Διότι ἔστω ἀριθμός τις A περιέχων ν ψηφία εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ. Ὁ ἀριθμὸς ἄρα οὗτος περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ $10^{ν-1}$, ὅστις εἶναι ὁ μικρότερος ἀριθμὸς ἐκ τῶν ἐχόντων ν ψηφία, καὶ τοῦ $10^{ν}$· κατ' ἀκολουθίαν (§ 226) ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ τούτου A περιλαμβανόμενος μεταξὺ τοῦ $ν-1$ καὶ τοῦ ν, θὰ ἔχῃ χαρακτηριστικὸν τὸν $ν-1$.

240. *Ἐὰν ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ διά τινος δυνάμεως τοῦ 10, ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ τούτου αὐξάνεται ἢ ἐλατ-*

τοῦται καὶ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως τοῦ **10.**

Διότι $\lambda o\gamma(A\times10^{\nu})=\lambda o\gamma A+\lambda o\gamma 10^{\nu}=\lambda o\gamma A+\nu$,

ὡσαύτως $\lambda o\gamma\frac{A}{10^{\nu}}=\lambda o\gamma A-\lambda o\gamma 10^{\nu}=\lambda o\gamma A-\nu$.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες διαφέρουσιν ἀπ᾽ ἀλλήλων μόνον κατὰ τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, ἔχουσι τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος, διαφέρουσι δὲ ἀπ᾽ ἀλλήλων μόνον κατὰ τὸ χαρακτηριστικόν.

Π. χ. $\lambda o\gamma4=0,60206$, $\lambda o\gamma40=1,60206$ κ.τ.λ.

Τούτου τεθέντος, ἔστω δεκαδικός τις μικρότερος τῆς μονάδος ἀριθμὸς Α, οὗτινος ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ πρῶτον σημαντικὸν ψηφίον κατέχει τὴν νὴν μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν θέσιν.

Τὸ γινόμενον $A\times10^{\nu}$ θὰ ἔχῃ τότε ἓν μόνον ψηφίον εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ, καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ θὰ εἶναι μηδενικόν.

Ἐπειδὴ δὲ $\lambda o\gamma A\times10^{\nu}=\lambda o\gamma A+\nu$, ἕπεται $\lambda o\gamma A=\lambda o\gamma A\times10^{\nu}-\nu$.

Λοιπόν, ἐὰν $\lambda o\gamma A\times10^{\nu}=0,47136$ θὰ ἔχωμεν $\lambda o\gamma A=\bar{\nu},47136$.

Ἐκ τούτων προκύπτει ὅτι, *τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ μικροτέρου τῆς μονάδος ἐκπεφρασμένου εἰς δεκαδικόν, ἔχει τόσας ἀρνητικὰς μονάδας, ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὁ δηλῶν τὴν τάξιν τοῦ πρώτου μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν σημαντικοῦ ψηφίου.*

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται προσέτι ὅτι, *τὸ μὲν δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου ὁρίζει τὰ σημαντικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ, τὸ δὲ χαρακτηριστικὸν ὁρίζει τὴν ἀξίαν ἑκάστου αὐτῶν.*

241. Διὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων δυνάμεθα νὰ περιορίσωμεν πολλάκις τὰς δυσκολίας διαφόρων πράξεων τοῦ ὑπολογισμοῦ. Οὕτως, ὅταν ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν ἀντικαθιστῶμεν τοὺς λογαρίθμους αὐτῶν ἀνάγεται ὁ πολλαπλασιασμὸς εἰς τὴν διαίρεσιν, ἡ διαίρεσις εἰς ἀφαίρεσιν, ἡ ὕψωσις εἰς δυνάμεις εἰς πολλαπλασιασμὸν καὶ ἡ ἐξαγωγὴ τῶν ῥιζῶν εἰς διαίρεσιν.

Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ ἔχωμεν πίνακα περιέχοντα τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν, δι᾽ οὗ, δεδομένου ἀριθμοῦ, νὰ εὑρίσκηται ὁ λογάριθμος τούτου, καὶ ἀντιστρόφως, δεδομένου τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ, νὰ εὑρίσκηται ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

Περὶ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.

242. Οἱ λογαριθμικοὶ πίνακες, ὧν συνήθως ποιούμεθα χρῆσιν,

εἶναι οἱ τοῦ ***Λαλάνδου***, ὡς διεσκεύασεν αὐτοὺς ὁ Dupuis καὶ οἱ τοῦ ***Καλλέτου***.

Ἐπειδὴ δὲ μόνον οἱ λογάριθμοι τῶν συμμέτρων δυνάμεων τοῦ 10 εἶναι ἀριθμοὶ σύμμετροι (§ 228), αἱ δὲ δυνάμεις αὗται, πλὴν τῶν ἐχουσῶν ἀκέραιον ἐκθέτην, εἶναι πᾶσαι ἀσύμμετροι (§ 155), ἕπεται ὅτι ἐκτὸς τῶν ἀριθμῶν 1, 10, 100, 1000,... πάντων τῶν λοιπῶν ἀκεραίων οἱ λογάριθμοι εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοί, ἔχοντες ἄρα ἄπειρα δεκαδικὰ μὴ περιοδικὰ ψηφία.

Ἐν τοῖς πίναξι τούτοις ἀναγράφονται ἀκεραίων μόνον ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ἐφεξῆς μέχρι τινὸς τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων αὐτῶν μέχρι τάξεώς τινος, ἤτοι μετὰ προσεγγίσεως, ἥτις καὶ ἀρκεῖ διὰ τὰς συνήθεις ἐφαρμογὰς τῶν λογαρίθμων.

Καὶ ἐν μὲν τοῖς πίναξι τοῦ Λαλάνδου ἀναγράφονται οἱ λογάριθμοι μέχρι τοῦ πέμπτου δεκαδικοῦ ψηφίου, ἐν δὲ τοῖς τοῦ Καλλέτου μέχρι τοῦ ἑβδόμου. Δὲν ἐγράφησαν δὲ ἐν αὐτοῖς τὰ χαρακτηριστικὰ τῶν λογαρίθμων, διότι προσδιορίζονται ἀμέσως (§ 239).

Διάταξις τῶν πινάκων τοῦ Λαλάνδου.

243. Ὁ I πίναξ (σελὶς 1) περιέχει τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 100. Αἱ στῆλαι αἱ σημαινόμεναι διὰ τοῦ N (Nombres) περιέχουσι τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ σειρὰν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 99, τοῦ ψηφίου ἑκάστης δεκάδος γεγραμμένου ἅπαξ. Αἱ δὲ στῆλαι αἱ σημαινόμεναι διὰ τοῦ log. περιέχουσι τοὺς λαγαρίθμους τοὺς ἀντιστοιχοῦντας εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.

Ὁ II πίναξ (σελ 2-31) περιέχει τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 10000. Ἑκάστη δὲ τῶν σελίδων τούτων περιέχει 11 στήλας, ἐξ ὧν ἡ πρὸς τὰ ἀριστερὰ πρώτη σημαινομένη διὰ τοῦ N περιέχει κατὰ σειρὰν ἀπὸ τοῦ 100 μέχρι τοῦ 999 τὰς δεκάδας τῶν ἀριθμῶν, ἐνῷ αἱ μονάδες αὐτῶν εἶναι ἀναγεγραμμέναι ἐν τῇ αὐτῇ μετὰ τοῦ N ὁριζοντίᾳ σειρᾷ. Ὁ λογάριθμος δὲ ἑκάστου ἀριθμοῦ εὑρίσκεται ἐν τῷ διασταυρώσει τῶν δύο σειρῶν, αἵτινες ἔχουσι τὰς δεκάδας καὶ τὴν μονάδα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου. Ἐπειδὴ δὲ πολλῶν ἐφεξῆς λογαρίθμων τὰ δύο πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία εἶναι τὰ αὐτὰ γράφονται ταῦτα ἅπαξ ἀπὸ 10 εἰς 10 καὶ μεμονωμένως ἐν τῇ δευτέρᾳ στήλῃ τῇ διὰ τὸ 0 σημαινομένῃ καὶ νοοῦνται ἐπαναλαμβανόμενα τὰ αὐτὰ μέχρις οὗ ἀλλαχθῶσι.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι

λογ 3464=3, ~~55 194~~ 53958
λογ 2546=3, 40 586
λογ 8053=3, 90 596.

Ὁ δὲ εὑρισκόμενος ἀστερίσκος εἴς τινας λογαρίθμους σημαίνει ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν παραλειπομένων δύο πρώτων ψηφίων ἤλλαξε καὶ πρέπει νὰ λαμβάνηται ὁ ἀμέσως ἑπόμενος δεψήφιος ἀριθμός.

Κατὰ ταῦτα λογ 7763=3, 89003.

Ἐκτὸς δὲ τοῦ πλαισίου ἔχουσιν ἐγγραφῇ αἱ διαφοραὶ διαδοχικῶν λογαρίθμων αἱ μείζονες τοῦ 10, μετ' ἀναλόγων μερῶν αὐτῶν. διότι αἱ κατώτεραι τοῦ 10 τοιαῦται διαφοραὶ ὑπολογίζονται ἀμέσως Π. χ. λογ 75 = 1, 87 506 λογ 2705 = 3,43 201.

Χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.

244. Χρῆσιν τῶν λογαριθμικῶν πινάκων ποιούμεθα πρὸς λύσιν τῶν ἑξῆς δύο προβλημάτων.

1ον) *Δεδομένου ἀριθμοῦ εὑρεῖν τὸν λογάριθμον.*

2ον) *Δεδομένου λογαρίθμου εὑρεῖν τὸν ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμόν.*

Πρόβλημα 1ον.

245. *Δεδομένου ἀριθμοῦ, εὑρεῖν τὸν λογάριθμον.*

13) Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου εὑρίσκεται εὐκόλως (232), διὰ δὲ τὸ δεκαδικὸν διακρίνονται δύο περιπτώσεις.

1ον) Ὁ δεδομένος ἀριθμός, ἀφαιρουμένης τῆς ὑποδιαστολῆς αὐτοῦ, νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 10000.

Π. χ. ζητήσωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 34,25.

Πρὸς τοῦτο ἀναζητοῦμεν ἐν τῇ ἐχούσῃ ἐπικεφαλίδα τὸ N στήλῃ τὸν ἀριθμὸν 342 τὸν σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν πρώτων τοῦ ἀριθμοῦ ψηφίων καὶ ἀκολουθοῦμεν τὴν ὁριζόντιον γραμμὴν ἐν ᾗ κεῖται ὁ 342 μέχρις οὗ συναντήσωμεν τὴν ἔχουσαν ἐπικεφαλίδα τὸν 5 κατακόρυφον στήλην.

Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 466, ὅστις μετὰ τοῦ ἐν τῇ στήλῃ 0 προηγουμένου τούτου μεμονωμένου ἀριθμοῦ 53, ἀποτελεῖ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου.

Λοιπὸν ἔχομεν λογ 34,25=1,53466.
εὑρίσκεται ὡσαύτως λογ 316,7=2,50065.

2ον) Ὁ δεδομένος ἀριθμὸς ἀφαιρουμένης τῆς ὑποδιαστολῆς, νὰ εἶναι μείζων τοῦ 10000.

Π. χ. ζητήσωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 168,457.

Πρὸς τοῦτο ἀποχωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς τὰ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τέσσαρα πρῶτα ψηφία αὐτοῦ καὶ ἐργαζόμεθα ὡς ἐὰν δεδομένος ἀριθμὸς ἦτο ὁ 1684,57. Ζητοῦμεν δὲ κατ' ἀρχάς, ὡς ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 1484· οὕτω δὲ εὑρίσκομεν 22634. Εἶτα δὲ λαμβάνομεν τὴν μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τοῦ ἀριθμοῦ 1684 καὶ τοῦ 1685 διαφοράν, ἥτις εἶναι 26 μονάδων τῆς 5ης δεκαδικῆς τάξεως. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἀπ' ἀλλήλων διαφοραὶ τῶν λογαρίθμων εἶναι ὡς ἔγγιστα ἀνάλογοι πρὸς τὰς διαφορὰς τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ὀλίγον ἀπ' ἀλλήλων διαφέρωσιν, ἕπεται ὅτι πρέπει εἰς τὸν λογάριθμον τοῦ 1684 νὰ προσθέσωμεν τὰ 0,57 τῶν 26 μονάδων τῆς 5ης δεκαδικῆς τάξεως, τουτέστιν 14,82, ἢ κατ' ἀνάγκην 15 ἐκ τῶν μονάδων τούτων.

Κατὰ ταῦτα δὲ τὸ δεκαδικὸν μέρος γίνεται 22649 καὶ ἔχομεν

$$\text{λογ}\ 168,457=2,22649.$$

Ὁ μικρὸς πίναξ τῶν ἀναλόγων μερῶν ὁ τεθειμένος κάτωθεν τοῦ 26 ἐπιτρέπει νὰ ἀποφεύγωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ 26 ἐπὶ 0,57· διότι ἐν αὐτῷ εὑρίσκονται αἱ πρὸς τὸ 0,5 καὶ πρὸς τὸ 0,07 ἀντιστοιχοῦσαι αὐξήσεις 13 καὶ 1,82, ὧν τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται τῷ 14,82 ἢ τὸ 15 καθ' ὑπεροχήν.

Ὁ δὲ ὑπολογισμὸς διατάσσεται οὕτω.

Διὰ	1684	22634
Διὰ	0,5	13
Διὰ	0,07	2.82

$$\text{λογ}\ 168,457=2,22649.$$

Ἐν τῇ ἀναζητήσει τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ, θὰ ληφθῶσιν ὑπ' ὄψιν μόνον τὰ 5 ἢ τὸ πολὺ τὰ 6 πρῶτα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ, διότι τὰ ἑπόμενα δὲν ἔχουσιν οὐδεμίαν ἐπίδρασιν ἐπὶ τῶν 5 πρώτων δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ λογαρίθμου. Θὰ εἶναι μόνον καλόν, ὅταν τὸ πρῶτον παραλειπόμενον ψηφίον εἶναι μεῖζον τοῦ 5, νὰ αὐξάνωμεν κατὰ μονάδα τὸ διατηρούμενον τελευταῖον ψηφίον.

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸν λαγάριθμον τοῦ 32,587386, θὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἂν ὁ ἀριθμὸς ἦτο 32,5874.

Πρόβλημα 2ον.

246. *Δεδομένου λογαρίθμου εὑρεῖν τὸν ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμόν.*

1ον) Ἂν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δεδομένου λογαρίθμου εὑρίσκηται ἐν τῷ πίνακι. Π. χ. δεδομένου ὅτι λογχ$=\bar{1},86652$, εὑρεῖν τὸν χ.

Πρὸς τοῦτο ἀναζητοῦντες τὸν 86 μεταξὺ τῶν μεμονωμένων ψηφίων τῆς στήλης τῆς δηλουμένης διὰ τοῦ 0, εὑρίσκομεν μεταξὺ τῶν ἐκ 3 ψηφίων ἀντιστοιχούντων εἰς τὸν 93 ἀριθμῶν, τὸν ἀριθμὸν 652.

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος κεῖται ἐν τῇ στήλῃ τῇ δηλουμένῃ ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 4, ὅστις εἶναι το 4ον ψηφίον τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ. Τὰ τρία δὲ πρῶτα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ δίδονται ὑπὸ τοῦ εἰς τὴν στήλην N κειμένου ἀριθμοῦ 735, καὶ ἀπέναντι τῆς περιεχούσης τὸν 652 ὁριζοντίου γραμμῆς.

Λοιπόν, τοῦ χαρακτηριστικοῦ ὄντος 1, ἔχομεν ὅτι $\chi=0,7354$.

2ον) Ἂν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δεδομένου λογαρίθμου δὲν εὑρίσκηται ἐν τῷ πίνακι.

Π. χ. δεδομένου ὅτι $\lambda o\gamma \chi=2,33878$, εὑρεῖν τὸν χ.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ζητοῦμεν ἐν τῷ πίνακι τὸν κατ' ἔλλειψιν λογάριθμον τὸν πλησιέστερον πρὸς τὸν δεδομένον λογάριθμον· οὕτω δὲ εὑρίσκομεν τὸν 33866, ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν ἀριθμὸν 2181. Ἐπειδὴ δὲ ἡ μὲν μεταξὺ τοῦ 33866 καὶ τοῦ δεδομένου λογαρίθμου διαφορὰ εἶναι δώδεκα μονάδων τῆς 5ης δεκαδικῆς τάξεως, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τοῦ 2182 καὶ τοῦ 2181 διαφορὰ εἶναι 19 μονάδων τῆς αὐτῆς δεκαδικῆς τάξεως, ἕπεται ὅτι, ἐπειδὴ καὶ ἡ ἀπ' ἀλλήλων διαφορὰ τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν εἶναι ἐπαισθητῶς ἀνάλογος πρὸς τὰς διαφορὰς τῶν λογαρίθμων, πρέπει εἰς τὸν ἀριθμὸν 2181 νὰ προστεθῇ τὸ πηλίκον τοῦ 12 διὰ τοῦ 19, τουτέστιν ὁ ἀριθμὸς 0,63.

Λοιπὸν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς χ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ψηφίων 218163, καὶ ἐπειδὴ τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ εἶναι 2, θὰ ἔχωμεν $\chi=218,163$.

Παρατηρητέον ὅτι διὰ τοῦ πίνακος τῶν ἀναλόγων μερῶν δυνάμεθα νὰ ἀποφύγωμεν τὴν διαίρεσιν, διατάσσοντες τὸν ὑπολογισμὸν ὧδε.

$\lambda o\gamma\ \chi=2,33878$

Διὰ 33866......2181

12

11,4........6

6

5,7.....3

$\chi=218163$

Δυνάμεθα δὲ ἐν γένει νὰ ὑπολογίζωμεν τὴν ἀκρίβειαν τῶν πέντε πρώτων ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ. Ἔτι δὲ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ὑπολογίζεται μετὰ μείζονος προσεγγίσεως, καθόσον τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου εἶναι μικρότερον. Διότι, ἂν μὲν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 1, τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἀκριβῆ μέχρι τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάκις χιλιοστῶν, ἂν δὲ εἶναι 0, τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἀκριβῆ μέχρι τῶν μυριοστῶν, ἂν δὲ εἶναι 2, μέχρι τῶν ἑκατοστῶν, ἂν δὲ 5, μέχρι τῶν δεκάδων, αἱ δὲ τοῦ ἀριθμοῦ μονάδες εἶναι ἄγνωστοι.

Σημείωσις. Ἂν ὁ δεδομένος λογάριθμος εἶναι ὅλως ἀρνητικός, τρέπομεν αὐτὸν εἰς ἄλλον, οὗ τὸ χαρακτηριστικὸν μόνον νὰ εἶναι ἀρνητικόν (§ 238).

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

247. Ἵνα ἐφαρμόσωμεν ἐν τῷ ὑπολογισμῷ τοὺς λογαρίθμους, πρέπει κατ᾽ ἀρχὰς νὰ ἀνάγωμεν εἰς λογαριθμικὰς τὰς παραστάσεις, ὧν πρόκειται νὰ ὁρισθῶσιν αἱ τιμαί. Ἡ δὲ ἀναγωγὴ αὕτη γίνεται διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἀποδειχθέντων θεωρημάτων (§ 229-237).

Παραδείγματα.

1ον) *Ἀναγαγεῖν εἰς λογαριθμικὴν τὴν παράστασιν*

$$\chi=\frac{38\times 0,85\times 615}{562\times 74,6}.$$

ἔχομεν ἄρα λογχ$=$λογ 38$+$λογ,0,85$+$λογ 615—λογ562—λογ74,6

2ον) *Ἀναγαγεῖν εἰς λογαριθμικὴν τὴν παράστασιν*

$$\chi=\sqrt[5]{\frac{24,3^3\times 57}{23,56^2}}.$$

Ἔχομεν ἄρα λογχ$=\frac{1}{5}\left(3 \text{ λογ } 24,3+\text{ λογ } 57-2 \text{ λογ } 23,56\right)$.

3ον) *Ἀναγαγεῖν εἰς λογαριθμικὴν τὴν παράστασιν*

$$\chi=\left(\sqrt[3]{\frac{425\times\sqrt{32}}{54\times 7,12^5}}\right)^4$$

Ἔχομεν ἄρα λογχ$=\frac{4}{3}\left(\text{λογ } 425+\frac{1}{2}\text{ λογ}32-\text{λογ}54-5\text{λογ } 7,12\right)$

4ον) *Ἀναγαγεῖν εἰς λογαριθμικὴν τὴν παράστασιν*

$$\chi=\frac{\alpha^5\times\sqrt[3]{\delta^4}}{\gamma^2\times\sqrt[5]{\delta^3}}.$$

Ἔχομεν ἄρα $\lambda o \gamma \chi = 5\ \lambda o \gamma\ \alpha + \frac{4}{3} \lambda o \gamma\ 6 - 2\ \lambda o \gamma\ \gamma - \frac{3}{5} \lambda o \gamma \delta$.

Ἐφαρμογαὶ τῶν λογαρίθμων.

1ον) *Ὑπολογίσαι τὴν παράστασιν*

$$\chi = \frac{0,576^3 \times \sqrt[5]{0,07414^2}}{0,8465 \times \sqrt[3]{0,000875}}.$$

Πρὸς τοῦτο ἀνάγοντες αὐτὴν εἰς λογαριθμικὴν ἔχομεν

$$\lambda o \gamma\ \chi = 3\ \lambda o \gamma\ 0,576 + \frac{2}{5}\ \lambda o \gamma\ 0,07414 - (\lambda o \gamma\ 0,8465 + \frac{1}{3}\ \lambda o \gamma\ 0,000875).$$

$$\begin{array}{rl|rl}
3\ \lambda o \gamma\ \ 0,576 = & \overline{1},28126 & \lambda o \gamma\ \ 0,8465 = & \overline{1},92763 \\
\frac{2}{5}\ \lambda o \gamma\ 0,07414 = & \overline{1},54802 & \frac{1}{3}\ \lambda o \gamma\ 0,000875 = & \overline{2},98067 \\
\hline
 & \overline{2},82928 & & \overline{2},90830 \\
 & \overline{2},90830 & & \\
\hline
\lambda o \gamma\ \chi = & \overline{1},92098 & & \\
\chi = & 0,83364. & &
\end{array}$$

Ἐν τοιούτοις ὑπολογισμοῖς εἶναι εὐκολώτερον νὰ εὑρίσκηται τὸ ἐξαγόμενον διὰ μιᾶς μόνης προσθέσεως τῶν λογαρίθμων. Τοῦτο δὲ γίνεται, διότι ἑκάστη ἀφαίρεσις λογαρίθμου ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τοῦ ἀντιθέτου αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Κατὰ ταῦτα ἡ τελευταία ἀνωτέρω ἀφαίρεσις τῶν δύο λογαρίθμων ἀνάγεται εἰς τὴν ἑξῆς πρόσθεσιν·

$$\begin{array}{r}
\overline{2},82928 \\
1,09170. \\
\hline
\overline{1},91098
\end{array}$$

Παρατήρησις. Ἵνα διαιρέσωμεν τὸν λογάριθμον $\overline{4},94201$ διὰ τοῦ 3, προσθέτομεν εἰς τὸ ἀρνητικὸν χαρακτηριστικὸν τὸν μικρότερον ἀναγκαῖον ἀριθμὸν 2 ἀρνητικῶν μονάδων, ἵνα τοῦτο καταστῇ ἀκριβῶς διαιρετὸν διὰ τοῦ διαιρέτου 3, προσθέτοντες ὡσαύτως τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 2 θετικῶν μονάδων καὶ εἰς τὸ δεκαδικὸν μέρος τούτου· διότι $\overline{4},94201 = \overline{6} + 2,94201$. Εἶτα δὲ διαιροῦμεν διὰ τοῦ 3 ἕκαστον τῶν μερῶν τούτου χωριστά.

2ον *Υπολογίσαι τὴν παράστασιν*

$$\chi = \sqrt[11]{0,0419^5}.$$

Πρὸς τοῦτο ἀνάγοντες αὐτὴν εἰς λογαριθμικὴν ἔχομεν

$$\lambda o\gamma\ \chi = \frac{5\ \lambda o\gamma\ 0,0419}{11}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\qquad \lambda o\gamma\ 0,0419 = \overline{2},62221,$

ἕπεται ὅτι $\qquad 5\ \lambda o\gamma\ 0,0419 = \overline{7},11105,$

καὶ ἄρα $\qquad \lambda o\gamma\ \chi = \dfrac{\overline{7},11105}{11},$

τουτέστιν $\qquad \lambda o\gamma\ \chi = \overline{1},37373,$

ἐξ ἧς προκύπτει $\qquad \chi = 0,23644.$

3ον *Υπολογίσαι τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ μονωνύμου*

$$\chi = \frac{4\alpha^3 6\gamma^2}{\sqrt[4]{7\delta}},$$

διὰ τὰς τιμὰς $\alpha = 0,271$, $6 = 6,15$, $\gamma = 44,82$,

$$\delta = 0,059, \text{ ὅτε καὶ } 7\delta = 0,413.$$

Πρὸς τοῦτο, ἀνάγοντες αὐτὴν εἰς λογαριθμικήν, ἔχομεν

$$\lambda o\gamma\ \chi = \lambda o\gamma\ 4 + 3\ \lambda o\gamma\ \alpha + \lambda o\gamma\ 6 + 2\ \lambda o\gamma\ \gamma - \frac{1}{4}\lambda o\gamma\ 7\delta.$$

$$\begin{aligned}
\lambda o\gamma\ 4 &= 0,60206\\
3\ \lambda o\gamma\ \alpha &= \overline{2},29891\\
\lambda o\gamma\ 6 &= 0,78888\\
2\ \lambda o\gamma\ \gamma &= 3,30294\\
\hline
&\ 2,99279\\
\frac{1}{4}\lambda o\gamma\ 7\delta &= \overline{1},90399\\
\hline
\lambda o\gamma\ \chi &= 3,08880
\end{aligned}$$

καὶ ἄρα $\qquad \chi = 1227,88.$

Παρατήρησις Ἂν ἡ ὑπολογιστέα παράστασις δὲν εἶναι μονώνυμον δυσκόλως ἐφαρμόζονται ἐπ᾽ αὐτῆς οἱ λογάριθμοι· διότι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἶναι ἐν γένει ἀναγκαῖον νὰ ὑπολογίζηται διὰ τῶν λογαρίθμων ἕκαστος προσθετέος τοῦ ἀθροίσματος (ἐκτὸς ἂν εἶναι δεδομένος)· οὕτω δὲ ὁ ὑπολογισμὸς ὅλης τῆς παραστάσεως ἀναλύεται εἰς πλείονας ὑπολογισμοὺς μονωνύμων, ὅπερ καὶ τὰς ἐργασίας πολλαπλασιάζει καὶ τὴν προσέγγισιν βλάπτει. Τούτου ἕνεκα ζητοῦμεν νὰ μετασχηματίζωμεν πάντοτε, εἰ δυνατόν, τὴν ὑπολογιστέαν διὰ τῶν λογαρίθμων παράστασιν, εἰς μονώνυμον.

Κατὰ ταῦτα, ἂν ζητῆται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$, γράφεται ὧδε· $\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$, καὶ εἶτα ἐφαρμόζονται ἐπ' αὐτῆς οἱ λογάριθμοι, διότι οἱ παράγοντες $\alpha+\beta$ καὶ $\alpha-\beta$ εὑρίσκονται ἀμέσως, ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ α, β ὑποτίθενται δεδομένοι.

Ὡσαύτως ἡ πατάστασις $\sqrt{75\alpha^2-3\beta^2\gamma^2}$, γράφεται ὧδε·
$\sqrt{3}\ \sqrt{25\alpha^2-\beta^2\gamma^2}$ ἢ $\sqrt{3}\ \sqrt{(5\alpha+\beta\gamma)(5\alpha-\beta\gamma)}$,

κατ' ἀκολουθίαν ὁ λογάριθμος αὐτῆς εἶναι

$$\frac{1}{2}\ [\lambda o\gamma\ 3+\lambda o\gamma\ (5\alpha+\beta\gamma)+\lambda o\gamma\ (5\alpha-\beta\gamma)].$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ἐπιλῦσαι τὰς ἑξῆς ἐξισώσεις·

1) $\lambda o\gamma\ (7\chi-9)^2+\lambda o\gamma\ (3\chi-4)^2=2,$

2) $\dfrac{\lambda o\gamma\ (35-\chi^3)}{\lambda o\gamma\ (5-\chi)}=3,$

3) $\lambda o\gamma\ \sqrt{5\chi+8}+\dfrac{1}{2}\ \lambda o\gamma(2\chi+3)=\lambda o\gamma\ 15.$

4) Ὑπολογίσαι τὴν παράστασιν

$$\frac{\sqrt[3]{(\alpha^2-\beta^2).3\alpha}}{\sqrt{(\alpha+\beta)}\ \sqrt{\gamma\delta}},$$

ἂν $\alpha=60,\ \beta=15,\ \gamma=16,\ \delta=9$, Ἀπ. $\chi=2,8231$.

5) Ἐπιλῦσαι ἄνευ τῆς βοηθείας τῶν πινάκων τὴν ἐξίσωσσιν

$$4\ \lambda o\gamma\ \frac{\chi}{2}+3\ \lambda o\gamma\ \frac{\chi}{3}=5\ \lambda o\gamma\ \chi-\lambda o\gamma\ 27.$$

Ἐπιλῦσαι τὰ ἑξῆς συστήματα·

6) $\begin{cases} \chi+\psi=94 \\ \lambda o\gamma\ \chi+\lambda o\gamma\ \psi=2,64836, \end{cases}$

7) $\begin{cases} \lambda o\gamma\ \sqrt{\chi}-\lambda o\gamma\ \sqrt{\psi}=0,5 \\ 3\ \lambda o\gamma\ \chi+2\lambda o\gamma\ \psi=1,50515. \end{cases}$

8) $$\begin{cases} \lambda o\gamma\, \chi + \lambda o\gamma\, \psi = \dfrac{3}{2}. \\ \lambda o\gamma\, \chi - \lambda o\gamma\, \psi = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

9) $$\begin{cases} \sqrt{\chi^2+\psi^2} + \sqrt{\chi\psi} = \alpha \\ \dfrac{\lambda o\gamma\, (\beta^2-\chi\psi)}{\lambda o\gamma\, \sqrt{\chi^2+\psi^2}} = 2. \end{cases}$$

Περὶ ἀνατοκισμοῦ.

248. Ὁ τόκος εἶναι **ἁπλοῦς** καὶ **σύνθετος**· καὶ **ἁπλοῦς** μὲν καλεῖται, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ᾽ ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου· **σύνθετος** δέ, ὅταν εἰς τὸ τέλος ἑκάστης ὡρισμένης χρονικῆς μονάδος προστίθεται οὗτος εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ ἀποτελῇ μετ᾽ αὐτοῦ τὸ κατὰ τὴν ἑπομένην χρονικὴν μονάδα τοκιζόμενον κεφάλαιον. Ὁ σύνθετος τόκος καλεῖται καὶ **ἀνατοκισμός**· τὸ δὲ ἐπὶ συνθέτῳ τόκῳ δανειζόμενον κεφάλαιον λέγεται ὅτι ἀνατοκίζεται.

Ἐπὶ παραδείγματος, ἄν τις τοκίσῃ 1000 δραχμὰς πρὸς 4 %, εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους δὲν πληρωθῇ ὁ τόκος 40 δραχμῶν, ἀλλὰ προστεθῇ εἰς τὸ κεφάλαιον, θὰ γίνῃ τοῦτο 1040 δραχμῶν.

Κατὰ ταῦτα τόκος τοῦ νέου τούτου κεφαλαίου εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους, θὰ εἶναι

$$1040 \times 0{,}04 = 41,^{\delta\rho.}60.$$

Ὡσαύτως ὁ τόκος οὗτος προστιθέμενος εἰς τὸ κεφάλαιον καθιστᾷ αὐτὸ 1081,$^{\delta\rho.}$60 κ. ε. ο.

249. ***Πρόβλημα.*** *Νὰ εὑρεθῇ πόσον θὰ γίνῃ εἰς τὸ τέλος ν ἐτῶν κεφάλαιον α, ἀνατοκιζόμενον κατ᾽ ἔτος, ὅταν ἡ μία δραχμὴ εἰς ἓν ἔτος φέρῃ τόκον τ;*

Ἐπειδὴ εἰς τὸ τέλος ἑνὸς ἔτους ἡ μία δραχμὴ γίνεται μετὰ τοῦ τόκου αὐτῆς $1+\tau$, αἱ α δραχμαὶ εἰς τὸ τέλος ἑνὸς ἔτους μετὰ τοῦ τόκου αὐτῶν γίνονται $\alpha\,(1+\tau)$.

Ἐκ τούτου προκύπτει, ὅτι εἰς τὸ τέλος ἑνὸς ἔτους ἡ ἀξία οἱουδήποτε κεφαλαίου εὑρίσκεται, ἂν τὸ κεφάλαιον τοῦτο πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $(1+\tau)$.

Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι τὸ κεφάλαιον, ὅπερ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου ἔτους ἀξίζει $\alpha(1+\tau)$, εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους τούτου θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^2$, εἶτα δὲ εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους $\alpha(1+\tau)^3$ καὶ ἐφεξῆς οὕτω.

Λοιπόν, ἂν παρασταθῇ διὰ τοῦ Κ ἡ ἀξία τοῦ δανείου εἰς τὸ τέλος τοῦ $\nu^{ου}$ ἔτους, θὰ προκύψῃ ὁ τύπος $\quad K=\alpha(1+\tau)^{\nu}$. $\quad$ (1)

Ὁ αὐτὸς προφανῶς προκύπτει τύπος, καὶ ὅταν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνηται οὐχὶ κατ' ἔτος, ἀλλὰ καθ' οἱαδήποτε ἴσα χρονικὰ διαστήματα, ἀρκεῖ νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ τ μὲν ὁ τόκος μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν τῶν διαστημάτων διὰ τοῦ ν δὲ τὸ πλῆθος αὐτῶν.

Ἐκ τοῦ τύπου (1) περιέχοντος τέσσαρα ποσὰ δυνάμεθα νὰ προσδιορίζωμεν ἓν τούτων, ὅταν τὰ τρία ἄλλα εἶναι δεδομένα.

Οὕτως ἀνάγοντες τὸν τύπον αὐτὸν εἰς λογαριθμικόν, ἔχομεν

$$\lambda o\gamma\, K=\lambda o\gamma \alpha+\nu\, \lambda o\gamma\,(1+\tau), \qquad (1')$$

ὃν εὐκόλως ἐπιλύομεν καὶ ὡς πρὸς ἕκαστον τῶν τριῶν ἄλλων ποσῶν.

Οὕτως ἔχομεν $\quad \lambda o\gamma\, \alpha=\lambda o\gamma\, K-\nu\, \lambda o\gamma\,(1+\tau)$,

$$\lambda o\gamma\,(1+\tau)=\frac{\lambda o\gamma\, K-\lambda o\gamma\, \alpha}{\nu},$$

$$\nu=\frac{\lambda o\gamma\, K-\lambda o\gamma\, \alpha}{\lambda o\gamma\,(1+\tau)}.$$

250. Τῶν διαφόρων τούτων προβλημάτων ἔστωσαν τὰ ἑξῆς παραδείγματα·

1ον). *Ἐδάνεισέ τις 8000 δραχμὰς ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς* $4\frac{1}{2}\%$. *Πόσας θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ 39 ἔτους ;*

Ἐπειδὴ $\alpha=8000$, $\nu=29$, $\tau=0{,}045$. ἐκ τοῦ τύπου (1) προκύπτει

$$\lambda o\gamma K=\lambda o\gamma\ 8000+39\lambda o\gamma\ (1{,}045).$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ 1{,}045 &= 0{,}01912 \\ 39\ \lambda o\gamma\ 1{,}043 &= 0{,}74568 \\ \lambda o\gamma\ 8000 &= 3{,}90309 \\ \hline \lambda o\gamma\ K &= 4{,}64877 \\ K &= 44542.\ \delta\rho\chi. \end{aligned}$$

2ον). *Ἂν ἐδάνειζέ τις ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς γεννήσεως τοῦ Χριστοῦ 1 λεπτὸν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 5 %, πόσα θὰ ἐγένοντο εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἔτους 1855 ;*

Ἔχομεν $\alpha=0{,}01, \nu=1855, \tau=0{,}05$, ἐκ τοῦ τύπου ἄρα (1) προκύπτει

$$\lambda o\gamma K=\lambda o\gamma\ 0{,}01+1855\ \lambda o\gamma\ 1{,}05.$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\, 1{,}05 &= 0{,}02119 \\ 1855\, \lambda o\gamma\, 1{,}05 &= 39{,}30745 \\ \lambda o\gamma\, 0{,}01 &= \overline{2}. \\ \hline \lambda o\gamma K &= 37{,}30745, \end{aligned}$$

ἐξ' οὗ προκύπτει $K = 20297727 \times 10^{30}$ δρχ. (κατὰ προσέγγισιν), τουτέστιν προκύπτει ἀριθμὸς ἐκ 38 ψηφίων.

Ἵνα δὲ παραστήσωμεν τὸ ποσὸν τοῦτο ὑπὸ μορφὴν, ἥν εὐκολώτερον δύναταί τις νὰ κρίνῃ, ὑπολογίσωμεν τὰς διαστάσεις σφαίρας ἐκ χρυσοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ὑποδεικνυόμενον ποσόν. Ἐπειδὴ δὲ ἡ μὲν πυκνότης τοῦ χρυσοῦ εἶναι 19,5, ἡ δὲ ἀξία τοῦ χιλιογράμμου τούτου εἶναι $3444\frac{4}{9}$ δρχ., θὰ ἔχωμεν ὅτι, ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας παρασταθῇ διὰ χ θὰ εἶναι ὁ μὲν τῆς σφαίρας ὄγκος $= \frac{4}{3}\pi\chi^3$ κυβ. πχ. τὸ δὲ τῆς ἐκ χρυσοῦ ἴσης σφαίρας βάρος $= \frac{4}{3}\pi\chi^3 . 19500$ χιλ., ἡ δὲ εἰς δραχμὰς ἀξία $= \frac{4\pi\chi^3}{3} \times 19500 \times 3444\frac{4}{9}$ δρχ.

Λοιπὸν $$K = \frac{4\pi\chi^3}{3} \times 19500 \times 3444\frac{4}{9},$$

καὶ ἄρα $$\chi^3 = \frac{3\,K}{4\pi \times 19500 \times 3444\frac{4}{9}}.$$

Ἐκ δὲ τοῦ τύπου τούτου προκύπτει ὅτι·

$$\lambda o\gamma \chi^3 = 28{,}85875 \text{ καὶ ἄρα } \lambda o\gamma \chi = 9{,}61958,$$

ἐξ' οὗ εὑρίσκεται ὅτι $\chi = 4164636363$ πήχεις.

Λοιπὸν ἡ ἀκτὶς τῆς προκειμένης σφαίρας εἶναι μείζων ἀπὸ 4164 ἑκατομύρια πήχεις, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὁ ὄγκος αὐτῆς θὰ εἶναι περισσότερον ἀπὸ 280 ἑκατομύρια φορὰς μείζων τοῦ ὄγκου τῆς γῆς.

3ον). ***Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ δανείσῃ τις ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 5 %, ἵνα εἰς τὸ τέλος τοῦ 33 ἔτους λάβῃ 7220 δραχμάς ;***

Ἐπειδὴ $K = 7220$, $\tau = 0{,}05$, $\nu = 33$ ἐκ τοῦ τύπου (1) προκύπτει

$$\lambda o\gamma\ \alpha = \lambda o\gamma\ 7220 - 33\ \lambda o\gamma\ 1{,}05.$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ 1{,}05 &= 0{,}02119 \\ 33\ \lambda o\gamma\ 1{,}05 &= 0{,}69927 \\ \lambda o\gamma\ 7220 &= 3{,}85854 \\ \hline \lambda o\gamma\ \alpha &= 3{,}15927 \\ \alpha &= 1443\ \delta\rho\chi. \end{aligned}$$

4ον). *Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον 28895 δραχμαὶ ἀνατοκιζόμεναι ἐπὶ 73 ἔτη γίνονται 250000 δραχμαί ;*

Ἐπειδὴ $K=250000$, $\alpha=28895$, $\nu=73$, ἐκ τοῦ τύπου (1) προκύπτει

$$\lambda o\gamma\ (1+\tau) = \frac{\lambda o\gamma\ 250000 - \lambda o\gamma\ 28895}{73}.$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ 250000 &= 5{,}39794 \\ \lambda o\gamma\ \ 28895 &= 4{,}46082 \\ \hline 73.\lambda o\gamma\ (1+\tau) &= 0{,}93712 \\ \lambda o\gamma\ (1+\tau) &= 0{,}01284 \\ 1+\tau &= 1{,}03 \quad \text{καὶ ἄρα } \tau=0{,}03, \end{aligned}$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἐπιτόκιον 100τ εἶναι 3 δρχ.

251. Τὸν τύπον (1) εὕρομεν ὑποθέσαντες ὅτι τὸ κεφάλαιον α δραχμῶν ἐδανείσθη ἐπὶ ἀριθμὸν ἐτῶν ἀκέραιον ν. Ὑποθέσωμεν νῦν ὅτι τὸ ποσὸν τοῦτο ἐδανείσθη ἐπὶ ν ἔτη καὶ ἐπί τι πλέον τοῦ ἔτους μέρος η, καὶ ζητήσωμεν πόσον ἐγένετο εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου τούτου.

Πρὸς τοῦτο, ἐπειδὴ εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν ἀνατοκισθὲν τὸ κεφάλαιον ἐγένετο $\alpha(1+\tau)^\nu$, τὸ κεφάλαιον τοῦτο εἰς τὸ μέρος η τοῦ ἔτους φέρει τὸν ἁπλοῦν τόκον $\alpha(1+\tau)^\nu.\tau\eta$, ἕπεται ὅτι, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ K τὴν εἰς τὸ τέλος τοῦ ὅλου χρόνου τιμὴν τοῦ κεφαλαίου, θὰ ἔχωμεν

$$K=\alpha(1+\tau)^\nu + \alpha(1+\tau)^\nu\tau\eta,$$

τουτέστιν

$$K=\alpha(1+\tau)^\nu(1+\tau\eta). \qquad (2)$$

Εἶναι δὲ ὁ τύπος οὗτος γενικώτερος τοῦ εὑρεθέντος τύπου (1) καὶ ἐκ τούτου προκύπτει ὁ τύπος ἐκεῖνος (1), ἂν ἐν αὐτῷ τεθῇ $\eta=0$.

Ἐκ δὲ τούτου προκύπτει ὁ λογαριθμικὸς τύπος

$$\lambda o\gamma\ K = \lambda o\gamma\ \alpha + \nu\ \lambda o\gamma\ (1+\tau) + \lambda o\gamma\ (1+\tau\eta), \qquad (3)$$

ἐξ' οὗ, ἂν εἶναι δεδομένα τὰ κ, τ, ν καὶ η, εὐκόλως δύναται νὰ προκύψῃ ἡ τιμὴ τοῦ α, διότι ἔχομεν

$$\lambda o\gamma\ \alpha = \lambda o\gamma K - \nu\ \lambda o\gamma(1+\tau) - \lambda o\gamma(1+\tau\eta).$$

252. Ἂν ὑποθέσωμεν τὸν χρόνον ἄγνωστον, ἐκ τοῦ λογαριθμικοῦ τύπου (3), θὰ συναγάγωμεν τὸν ἑξῆς τύπον·

$$\frac{\lambda o\gamma\ K - \lambda o\gamma\ \alpha}{\lambda o\gamma\ (1+\tau)} = \nu + \frac{\lambda o\gamma\ (1+\tau\eta)}{\lambda o\gamma\ (1+\tau)}.$$

Ἂν δὲ παραστήσωμεν διὰ μὲν τοῦ σ τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ λογ Κ—λογ α διὰ τοῦ λογ (1+τ) προκύπτον ἀκέραιον πηλίκον, διὰ δὲ τοῦ υ τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν

$$\lambda o\gamma K - \lambda o\gamma\ \alpha = \sigma .\ \lambda o\gamma\ (1+\tau) + \upsilon,$$

καὶ ἄρα
$$\frac{\lambda o\gamma\ K - \lambda o\gamma\ \alpha}{\lambda o\gamma\ (1+\tau)} = \sigma + \frac{\upsilon}{\lambda o\gamma\ (1+\tau)}.$$

Λοιπὸν ἔχομεν

$$\nu + \frac{\lambda o\gamma\ (1+\tau\eta)}{\lambda o\gamma\ (1+\tau)} = \sigma + \frac{\upsilon}{\lambda o\gamma\ (1+\tau)},$$

ὅπερ γράφεται καὶ ὧδε·

$$\sigma = \nu + \frac{\lambda o\gamma\ (1+\tau\eta)}{\lambda o\gamma\ (1+\tau)} - \frac{\upsilon}{\lambda o\gamma\ (1+\tau)}.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ δεύτερον μέλος αὐτῆς πρέπει νὰ εἶναι ὡσαύτως ἀκέραιος ἀριθμός· ἔτι δέ, ἐπειδὴ τὰ κλάσματα τὰ ἀκολουθοῦντα τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν ν εἶναι προφανῶς ἐλάσσονα τῆς μονάδος, ἕπεται ὅτι τὰ κλάσματα ταῦτα εἶναι ἀναγκαίως ἴσα, ἐξ οὗ ἄρα προκύπτει ἡ ἑξῆς ἰσότης·

$$\upsilon = \lambda o\gamma\ (1+\tau\eta).$$

Κατὰ ταῦτα τὸ μὲν ἐκ τῆς διαιρέσεως τῆς διαφορᾶς λογΚ—λογ α διὰ τοῦ λογ (1+τ) προκύπτον ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν, τὸ δὲ ἐκ τῆς αὐτῆς διαιρέσεως προκύπτον ὑπόλοιπον εἶναι ὁ λογ (1+τη).

Ἐκ δὲ τούτου ἄρα εὐκόλως προκύπτει ἡ τιμὴ τοῦ η.

253. ***Ἐφαρμογή***.— *Μετὰ πόσα ἔτη 7372 δραχμαὶ ἀνατοκιζόμεναι πρὸς 5 % γίνονται 12328 ;*

Ἔχομεν ἄρα λογ Κ = λογ 12328 = 4,09089

$$\lambda o\gamma\ \alpha = \lambda o\gamma\ \ 7872 = 3{,}89609$$

$$\lambda o\gamma\ (1+\tau) = \lambda o\gamma\ \ 1{,}05 = 0{,}02119$$

$$\frac{\lambda o\gamma\ K - \lambda o\gamma\ \alpha}{\lambda o\gamma\ (1+\tau)} = \frac{0{,}19480}{0{,}02119} = 9 + \frac{0{,}00409}{0{,}02119}.$$

Λοιπὸν ἔχομεν υ=9, καὶ λογ(1+η×0,05)=0,00409,

ἐξ οὗ $1+\eta\times 0{,}05 = 1{,}00946$, καὶ ἄρα $\eta = \frac{0{,}00946}{0{,}05} = 0{,}189.$

Ἀνάγοντες δὲ τὸ κλάσμα τοῦτο εἰς ἡμέρας, πολλαπλασιάζοντες αὐτὸ ἐπὶ 360, εὑρίσκομεν 68.

Οὕτως ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι 9 ἔτη, 2 μῆνες, 8 ἡμέραι.

254. Ἂν δὲ εἶναι ἄγνωστον τὸ ἐπιτόκιον τ, ὁ δὲ χρόνος σύγκειται ἐξ ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἐτῶν καὶ κλάσματος τοῦ ἔτους, εὑρίσκομεν τὸ τ διὰ μεθόδου, ἥτις καλεῖται ***μέθοδος*** τῶν ***διαδοχικῶν προσεγγίσεων***.

Πρὸς τοῦτο ἐκ τῆς ἰσότητος (3) ἔχομεν ὅτι

$$\text{λογ}\,(1+\tau) = \frac{\text{λογ}\,K - \text{λογ}\,\alpha}{\nu} - \frac{\text{λογ}\,(1+\tau\eta)}{\nu}. \qquad (4)$$

Ἂν δὲ παραλείψωμεν τὸν ὅρον $\frac{\text{λογ}\,(1+\tau\eta)}{\nu}$, θὰ δυνηθῶμεν νὰ ὁρίσωμεν τὸν τ, ἀλλ' ὁ οὕτω προκύπτων ἀριθμὸς θὰ εἶναι προφανῶς πολὺ μείζων τοῦ ζητουμένου.

Ἂν δὲ παραστήσωμεν τοῦτον διὰ τοῦ β, θὰ ἔχωμεν ὅτι $\beta > \tau$.

Ἂν δὲ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει τῆς ἰσότητος (4) ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τοῦ τ τὸν β, θὰ ἔχωμεν ἀριθμὸν μικρότερον τῆς ἀληθοῦς τιμῆς τοῦ λογ $(1+\tau)$. Ἂν δὲ ἐκτελέσωμεν τοὺς ὑπολογισμούς, θὰ ἔχωμεν διὰ τιμὴν τοῦ τ τὸν $\gamma < \tau$.

Ἂν δὲ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει τῆς ἰσότητος (4) ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τοῦ τ τὴν μικροτέραν ταύτην τιμὴν τοῦ τ, θὰ προκύψῃ, ἐκτελουμένων τῶν πράξεων, ἀριθμὸς $\beta' > \tau$.

Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον β΄ ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ τ, ἐν τῇ (4) ἰσότητι, θὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν $\gamma < \tau$ καὶ ἐφεξῆς οὕτω.

Λοιπὸν θὰ ἔχωμεν οὕτω τιμὰς ἐναλλὰξ μείζονας καὶ ἐλάσσονας τοῦ τ, ἀλλὰ προχωροῦντες οὕτω θὰ εὑρίσκωμεν ἀνὰ δύο ἀντίστοιχα κοινὰ ψηφία τῶν ἀριθμῶν τούτων, ἅτινα θὰ εἶναι τὰ ψηφία τῆς ἀληθοῦς τοῦ τ τιμῆς, ἣν οὕτω θὰ δυνηθῶμεν νὰ εὕρωμεν μεθ' ὡρισμένης προσεγγίσεως.

ΠΕΡΙ ΧΡΕΩΛΥΣΙΟΥ

255. ***Χρεωλύσιον*** καλεῖται σταθερὸν ποσόν, ὅπερ πληρώνεται κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα, συνήθως κατ' ἔτος πρὸς ἀπόσβεσιν χρέους.

Χρησιμεύει δὲ μέρος μὲν τοῦ χρεωλυσίου πρὸς πληρωμὴν τῶν τόκων τοῦ χρέους, μέρος δὲ πρὸς ἐξόφλησιν αὐτοῦ τοῦ χρέους.

Ἀποσβέννυται δὲ τὸ χρέος, ὅταν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν χρεωλυσίων μετὰ τῶν συνθέτων αὐτῶν τόκων ἀποτελέσῃ ποσὸν ἴσον τῇ ἀξίᾳ τοῦ ἀνατοκιζομένου κεφαλαίου.

256. ***Πρόβλημα.*** *Νὰ εὑρεθῇ τὸ σταθερὸν ποσόν, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πληρώνηται καθ' ἕκαστον ἔτος ἐπὶ ν ἔτη, πρὸς ἀπόσβεσιν χρέους τινὸς α.*

Πρὸς τοῦτο ἔστω χ τὸ ζητούμενον ποσόν, καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ καθ' ἕκαστον ἔτος τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἶναι τ.

Τὸ πρῶτον χρεωλύσιον χ, ἐπειδὴ πληρώνεται εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους, θὰ μείνῃ εἰς τόκον ν—1 ἔτη, καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν θὰ γίνῃ $\chi(1+\tau)^{\nu-1}$· ὡσαύτως τὸ δεύτερον χρεωλύσιον, ἐπειδὴ δίδεται εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους, εἰς τὸ τέλος τοῦ νοῦ ἔτους θὰ γίνῃ $(1+\tau)^{\nu-2}$· ὡσαύτως δὲ τὸ τρίτον χρεωύσιον εἰς τὸ τέλος τοῦ νοῦ ἔτους θὰ γίνῃ $\chi(1+\tau)^{\nu-3}$ κλπ., τὸ δὲ λδιδόμενον χρεωλύσιον ἓν ἔτος πρὸ τοῦ τέλος θὰ γίνῃ $\chi(1+\tau)$, καὶ τὸ τελευταῖον ἄρα θὰ εἶναι μόνον χ. Τὰ ν ἄρα χρεωλύσια εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν θὰ ἀποτελέσωσι ποσότητα ἴσην τῷ ἀθροίσματι

$$\chi+\chi(1+\tau)+\chi(1+\tau)^2+\chi(1+\tau)^3+\ldots\ldots+\chi(1+\tau)^{\nu-1},$$

ὅπερ ἰσοῦται (§ 219) τῷ κλάσματι $\dfrac{\chi[(1+\tau)^\nu-1]}{\tau}$.

Λοιπόν, ἐπειδὴ ἐπὶ τὰ ν ἔτη ἀνατοκιζόμενον τὸ ὅλον κεφάλαιον α γίνεται $\alpha(1+\tau)^\nu$, ἕπεται ὅτι, ἵνα ἀποσβεσθῇ τὸ χρέος εἰς τὸ τέλος τοῦ νοῦ ἔτους, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἀληθεύσῃ ὁ τύπος

$$\frac{\chi[(1+\tau)^\nu-1]}{\tau}=\alpha(1+\tau)^\nu, \qquad (1)$$

ἐξ οὗ δυνάμεθα νὰ προσδιορίζωμεν ἕνα ἑκάστοτε ἐκ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν χ,τ,ν,α, ὅταν οἱ λοιποὶ τρεῖς ἄλλοι εἶναι δεδομένοι.

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου (1), ἐπιλυομένου ὡς πρὸς χ, προκύπτει ὁ τύπος

$$\chi=\frac{\alpha\tau(1+\tau)^\nu}{(1+\tau)^\nu-1}, \qquad (2)$$

ἐξ οὗ καὶ ὁ ἑξῆς λογαριθμικὸς τύπος·

$$\lambda o\gamma\,\chi=\lambda o\gamma\,\alpha+\lambda o\gamma\,\tau+\nu\,\lambda o\gamma(1+\tau)-\lambda o\gamma[(1+\tau)^\nu-1],$$

ἐν ᾧ πρέπει νὰ ὑπολογισθῇ χωριστὰ ὁ ἀριθμὸς $(1+\tau)^\nu-1$.

Πρὸς τοῦτο θὰ ληφθῇ ν φορὰς ὁ λογάριθμος τοῦ 1+τ, τοῦ δὲ προκύψοντος λογαρίθμου θὰ εὑρεθῇ ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμός, ἐξ οὗ θὰ ἀφαιρεθῇ ἡ μονάς.

Σημείωσις. Ὁ ἀνωτέρω εὑρεθεὶς τύπος (1) ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος § 256 εὑρίσκεται καὶ ὧδε·

Ἐπειδὴ εἰς τὸ τέλος τοῦ $1^{ου}$ ἔτους τὸ δανεισθὲν ποσὸν δραχμῶν α γίνεται $α(1+τ)$, ἕπεται ὅτι, ἂν πληρωθῶσι χ δραχμαί, θὰ ὑπολειφθῇ χρέος μόνον $α(1+τ)-χ$.

Ὡσαύτως, ἐπειδὴ πάλιν εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους τὸ χρέος θὰ γίνῃ $α(1+τ)^2-χ(1+τ)$ (§ 249), θὰ πληρωθῶσι δὲ χ δραχμαί, θὰ ὑπολειφθῇ προφανῶς χρέος

$$α(1+τ)^2-χ(1+τ)-χ.$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον προκύπτει ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ $3^{ου}$ ἔτους τὸ χρέος θὰ γίνῃ

$$α(1+τ)^3-χ(1+τ)^2-χ(1+τ)-χ,$$

καὶ ἐφεξῆς οὕτως· εἰς τὸ τέλος ἄρα τοῦ $ν^{ου}$ ἔτους τὸ χρέος θὰ γίνῃ

$$α(1+τ)^ν-χ(1+τ)^{ν-1}-χ(1+τ)^{ν-2}-χ(1+τ)^{ν-3}-χ(1+τ)-χ=0,$$

διότι τότε θὰ ἐξοφληθῇ· ἐξ οὗ ἄρα θὰ ἔχωμεν τὸν εὑρεθέντα τύπον (1).

Προβλήματα.

$1^{ον}$). *Πόσον χρεωλύσιον πρέπει νὰ πληρώνῃ τις κατ' ἔτος, ἵνα εἰς 10 ἔτη ἐξοφλήσῃ τὸ ἐξ 176830 δραχμῶν χρέος αὐτοῦ, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 8 %;*

Ἐκ τοῦ προηγουμένου τύπου (1) ἔχομεν ὅτι

$$λογ\ χ = λογ\ α + λογ\ τ + ν\ λογ\ (1+τ) - λογ\ [(1+τ)^ν - 1].$$

$$λογ\ α = λογ\ 176830 = 5,24756$$

$$λογ\ τ = λογ\ \ 0,08 = \overline{2},90309$$

$$λογ\ (1+τ) = λογ\ \ 1,08 = 0,03342$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ $(1+τ)^ν - 1$.

$$10\ λογ\ 1,08 = 0,23420$$

$$1,08^{10} = 1,71476$$

$$1,08^{10}-1 = 0,71476$$

$$λογ\ (1,08^{10}-1) = \overline{1},85416.$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ χ.

$$λογ\ α = 5,24756$$

$$λογ\ τ = \overline{2},90309$$

$$10\ λογ\ (1+τ) = 0,23420$$

$$-\ λογ\ [(1+τ)^ν-1] = 0,14584$$

$$λογ\ χ = 4,53069$$

Λοιπὸν τὸ χρεωλύσιον εἶναι $\quad χ = 3393^{δρχ.},85.$

2ον). *Πόσον εἶναι τὸ χρέος, ὅπερ ἐξοφλεῖται εἰς 6 ἔτη διὰ χρεωλυσίου 11051 δραχμῶν, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 4,5 %;*

Ἐκ τοῦ προηγουμένου τύπου (1) ἔχομεν

$$\alpha = \frac{\chi[(1+\tau)^\nu - 1]}{\tau(1+\tau)^\nu}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\chi=11051, \nu=6$ καὶ $\tau=0,045$, θὰ προκύψῃ

$\lambda o\gamma\ \alpha = \lambda o\gamma\ 11051 + \lambda o\gamma\,(1,045-1) - \lambda o\gamma\ 0,045 - 6\ \lambda o\gamma\ 1,045.$

Ἐπειδὴ δὲ (Dup. σελ. 134) εἶναι $1,045^6 = 1,30226$, θὰ ἔχωμεν

$$\begin{array}{llll} \lambda o\gamma\ 11051 = & 4,04337 & \lambda o\gamma\ 0,045 = & \bar{2},65321 \\ \lambda o\gamma\ 0,30226 = & \bar{1},48037 & \lambda o\gamma\ 1,045 = & 0,11472 \\ \hline & 3,52374 & & \bar{2},76793 \\ & \bar{2},76793 & & \\ \hline \lambda o\gamma\ \alpha = & 4,75581 & & \\ \kappa\alpha\grave{\iota}\ \alpha = & 56991. & & \end{array}$$

3ον). *Εἰς πόσα ἔτη ἐξοφλεῖται χρέος 261068 δραχμῶν διὰ χρεωλυσίου 10000 δραχμῶν, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος $3\frac{1}{4}$ %;*

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἐπιλύομεν πρὸς τὸν $(1+\tau)^\nu$ τὸν τύπον (1), ἐξ οὗ προκύπτει

$$(1+\tau)^\nu = \frac{\chi}{\chi - \alpha\tau}, \tag{3}$$

καὶ ἐξ οὗ προκύπτει ὁ ἑξῆς λογαριθμικὸς τύπος·

$$\nu = \frac{\lambda o\gamma\ \chi - \lambda o\gamma\ (\chi - \alpha\tau)}{\lambda o\gamma\ (1+\tau)}.$$

Ἵνα δὲ τὸ πρόβλημα ᾖ δυνατὸν πρέπει νὰ ἔχωμεν $\chi - \alpha\tau > 0$, ἤτοι $\chi > \alpha\tau$, διότι οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουσι πραγματικοὺς λογαρίθμους.

Εἶναι δὲ $\alpha.\tau = 261068 \times \frac{3,25}{100} = 8484,71$

$$\begin{aligned} \chi - \alpha\tau &= 1515,29 \\ \lambda o\gamma\ \chi - \lambda o\gamma\ (\chi - \alpha\tau) &= 4 - 3,18049 \\ \lambda o\gamma\ \chi - \lambda o\gamma\ (\chi - \alpha\tau) &= 0,81951 \\ \lambda o\gamma\ (1+\tau) &= 0,01389. \end{aligned}$$

Λοιπὸν $\qquad \nu = \frac{0,81951}{0,01389} = 59$ ἔτη.

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν προέκυπτεν ἐξαγόμενον 59 ἔτη καί τι πλέον, αἱ μὲν 59 δόσεις δὲν θὰ ἦσαν ἀρκεταὶ διὰ τὴν ἐντελῆ τοῦ χρέους ἀπόσβεσιν, αἱ δὲ 60 δόσεις θὰ ἦσαν πλείονες τοῦ δέοντος· ἤτοι ἡ 60ὴ δόσις θὰ ἀπετελεῖτο ἐξ ὀλιγωτέρων τοῦ χρεωλυσίου δραχμῶν.

Ἵνα δὲ εὕρωμεν τὴν 60ὴν δόσιν, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν πόσον γίνεται τὸ δάνειον εἰς τὸ τέλος τῶν 60 ἐτῶν, εἶτα δὲ τί γίνονται αἱ 59 δόσεις εἰς τὸ τέλος τῶν αὐτῶν ἐτῶν, καὶ εἶτα νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου ποσοῦ τὸ δεύτερον.

4ον). *Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ ἀποπληρώσῃ τις χρεωλυτικῶς δάνειον 20000 διὰ 16 ἐτησίων δόσεων ἐκ δραχμῶν 1780,30 ἑκάστης ;*

Πρὸς τοῦτο ἐπιλύομεν καταλλήλως τὸν τύπον (1) γράφοντες αὐτὸν ὧδε·

$$\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau(1+\tau)^{\nu}}=\frac{\alpha}{\chi}, \qquad (\alpha)$$

ἢ καὶ

$$\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau(1+\tau)^{\nu}}=\frac{\alpha}{\chi}. \qquad (\beta)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως δὲ ταύτης, περιεχούσης τὸν ἄγνωστον τ εἰς τὴν νὴν δύναμιν, θὰ προσδιορισθῇ ὁ ἄγνωστος οὗτος διὰ τῆς μεθόδου τῶν διαδοχικῶν προσεγγίσεων. Τὸ πρῶτον δὲ μέλος τῆς ἐξισώσεως (β) θὰ εἶναι προφανῶς ἐπὶ τοσοῦτον μεῖζον, καθόσον ὁ τ θὰ εἶναι ἐλάσσων. Ἂν ἄρα ἀντικατασταθῇ ἀντὶ τοῦ τ πολὺ μικρὰ τούτου τιμή, τὸ προκύψον ἐξαγόμενον, θὰ εἶναι μεῖζον τοῦ $\frac{\alpha}{\chi}$.

Ἂν δὲ τοὐναντίον ἀντικατασταθῇ ἀντὶ τοῦ τ πολὺ μείζων τούτου τιμή, θὰ προκύψῃ ἐξαγόμενον ἔλασον τοῦ $\frac{\alpha}{\chi}$.

Λοιπόν, οὕτω δοκιμαστικῶς προχωροῦντες, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐξαγόμενον διαφέρον ὅσον ἐλάχιστον θέλωμεν τοῦ $\frac{\alpha}{\chi}$, καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν οὕτω θὰ εὕρωμεν τὴν ἀληθῆ τιμὴν τοῦ τ.

Οὕτως, ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (α) ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τῶν χ, α καὶ ν τὰς ἀντιστοίχους αὐτῶν τιμάς, θέσωμεν δὲ τ=0,04, θὰ ἔχωμεν ἐκ μὲν τοῦ πρώτου μέλους

$$\frac{1}{0,04}\left(1-\frac{1}{1,04^{16}}\right)=25\left(1-\frac{1}{1,04^{16}}\right)=$$

$$= 25 \times 0,4660914 = 11,652285,$$

ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου

$$\frac{20000}{1780,3} = 11,234.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐκ τοῦ πρώτου μέλους προκύψαν ἐξαγόμενον εἶναι μεῖζον τοῦ ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους προκύψαντος, συνάγομεν ὅτι ὁ τ ἐλήφθη πολὺ μικρός. Ἂν δὲ τεθῇ τ=0,05, τὸ ἐκ τοῦ πρώτου μέλους προκύπτον ἐξαγόμενον εἶναι τοὐναντίον ἔλασσον τοῦ ἐκ τοῦ δευτέρου προκύψοντος· τούτου ἄρα ἕνεκα τὸ ἐπιτόκιον θὰ εἶναι ἔλασσον τοῦ 5, καὶ θὰ περιλαμβάνηται ἄρα μεταξὺ τοῦ 4 καὶ τοῦ 5.

Ἂν δὲ τεθῇ τ=0,0475, τὸ ἐκ τοῦ πρώτου μέλους προκύπτον ἐξαγόμενον θὰ εἶναι ὡσαύτως ἔλασον τοῦ ἐκ τοῦ δευτέρου· τὸ ἐπιτόκιον ἄρα θὰ περιλαμβάνηται, μεταξὺ τοῦ 4 καὶ τοῦ 4,75.

Ἂν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι τ=0,045, τὰ ἐκ τῶν δύο μελῶν προκύψοντα ἐξαγόμενα θὰ εἶναι σχεδὸν ἴσα· ἐξ οὗ συνάγομεν ὅτι τὸ ζητούμενον ἐπιτόκιον εἶναι 4,50.

5) *Ἂν ὀφείλῃ τις νὰ πληρώνῃ καθ' ἕκαστον ἔτος 2000 δραχμὰς ἐπὶ 12 ἔτη, πόσον ποσὸν πρέπει νὰ πληρώσῃ εἰς τὸ 4 ἔτος, ἵνα ἀναπληρώσῃ τὰ χρεωλύσια ταῦτα, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 5 %;*

Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον εἶναι προωρισμένον νὰ ἀποδώσωσι τὰ 12 χρεωλύσια, θὰ εὕρωμεν ἐπιλύοντες ὡς πρὸς α τὸν εὑρεθέντα τύπον (1), ἐξ οὗ θὰ ἔχωμεν

$$\alpha = \frac{\chi[(1+\tau)^\nu - 1]}{\tau(1+\tau)^\nu},$$

Ἐπειδὴ δὲ χ=2000, ν=12 καὶ τ=0,05, θὰ προκύψῃ

$$\alpha = \frac{2000\ (1,05^{12} - 1)}{0,05.(1,05)^{12}}.$$

Τὸ ποσὸν δὲ τοῦτο α εἰς τὰ 4 ἔτη θὰ ἀξίζῃ

$$\frac{2000\ (1,05^{12} - 1)}{0,05 \times 1,05^{12}} \times 1,05^4.$$

Ἂν δὲ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα $1,05^4$, παραστήσωμεν δὲ διὰ τοῦ ψ τὸ ζητούμενον ποσόν, θὰ ἔχωμεν

$$\psi = \frac{2000\ (1,05^{12} - 1)}{0,05 \times 1,05^8},$$

ἐξ οὗ λογ ψ=2000+λογ$(1,05^{12}-1)$—λογ 0,05—8 λογ 1,05.

Ἐπειδὴ δὲ (Dup. σελ. 134) εἶναι $1,05^{12} = 1,795856$, θὰ ἔχωμεν

$$\lambda o\gamma\, 2000 = 3,30103 \qquad \lambda o\gamma\, 0,05 = \overline{2},69897$$
$$\lambda o\gamma\, 0,795856 = \overline{1},90083 \qquad 8\lambda o\gamma\, 1,05 = 0,16952$$
$$3,20186 \qquad \overline{2},86849$$
$$\overline{2},86849$$
$$\lambda o\gamma\psi = 4,33337 \quad \text{καὶ ἄρα } \psi = 21546 \text{ δρχ.}$$

Ἐπισώρευσις κεφαλαίων δι' ἴσων καταθέσεων.

257. ***Πρόβλημα I.*** *Ἐὰν καταθέτῃ τις κατ' ἔτος εἰς τράπεζαν* **α** *δραχμὰς ἐπὶ ἀνατοκισμῷ, πόσα θὰ ἔχῃ νὰ λάβῃ μετὰ* **ν** *ἔτη, τοῦ τόκου τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος ὄντος* **τ** *;*

Ἡ 1_η κατάθεσις α εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν ἀξίζει $\alpha(1+\tau)^\nu$,

ἡ δὲ 2_α » » » » » » » $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$,

ἡ δὲ 3_η » » » » » » » $\alpha(1+\tau)^{\nu-2}$,

. . . .

. . . . ,

ἡ δὲ τελευταία κατάθεσις, δηλαδὴ ἡ πραγματοποιηθεῖσα ἓν ἔτος πρὸ τῆς συμπληρώσεως τῶν **ν** ἐτῶν, ἀξίζει $\alpha(1+\tau)$.

Λοιπόν, ἐὰν διὰ τοῦ Σ παραστήσωμεν τὸ ποσόν, ὅπερ θὰ λάβῃ ὁ ἄνθρωπος οὗτος εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν, θὰ προκύψῃ ἡ ἰσότης

$$\Sigma = \alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)^2+\alpha(1+\tau)^3+\cdot\cdot\cdot+\alpha(1+\tau)^\nu,$$

καὶ ἄρα (§ 215)

$$\Sigma = \frac{\alpha(1+\tau)^{\nu+1}-\alpha(1+\tau)}{\tau} = \frac{\alpha(1+\tau)[(1+\tau)^\nu-1]}{\tau} \quad (1).$$

Παραδείγματα 1ον). Ἔστω $\alpha=50$ δρχ., $\nu = 24$ ἔτη, $\tau=0,06$.

Θὰ ἔχωμεν ἄρα $\quad \Sigma = \dfrac{50\times 1,06(1,06^{25}-1)}{0,06}$,

ἤτοι (Dup. σελ. 134) $\Sigma = \dfrac{50\times 1,06\times 3,291871}{0,06}$,

καὶ ἄρα $\lambda o\gamma\Sigma = \lambda o\gamma\, 50+\lambda o\gamma\, 1,06+\lambda o\gamma\, 3,291871-\lambda o\gamma 0,06$

$$\lambda o\gamma\, 50 = 1,69897$$
$$\lambda o\gamma\, 1,06 = 0,02531$$
$$\lambda o\gamma\, 3,291871 = 0\ 51744$$
$$-\lambda o\gamma\, 0,06 = 1,22185$$
$$\lambda o\gamma\Sigma = 3,46357$$

Λοιπὸν θὰ εἶναι $\Sigma = 2907,85$ δραχ.

2) Ἔστω $\alpha=1000$ δρχ, $\nu = 20$ ἔτη καὶ $\tau=0,05$.

Θὰ ἔχωμεν $$\Sigma = 1000\frac{1,05(1,05^{20}-1)}{0,05},$$

τουτέστιν $$\Sigma = 21000 \times (1,05^{20}-1),$$

καὶ ἐπειδὴ (Dup. σελ 134) $1,05^{20} = 2,653298$,

ἔπεται ὅτι $$\text{λογ}\,\Sigma = \text{λογ}\,21000 + \text{λογ}\,16533.$$

$$\begin{aligned} \text{λογ}210000 &= 4,32221 \\ \text{λογ}1,6533 &= 0,21835 \\ \text{λογ}\,\Sigma &= 4,54056 \end{aligned}$$

καὶ ἄρα $$\Sigma \doteq 34719,30.$$

258. ***Πρόβλημα*** II. *Ἂν καταθέτων τις κατὰ τὰς ἀρχὰς ἑκάστου ἔτους εἰς τράπεζαν τὸ αὐτὸ ποσὸν ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 4 $^0/_0$ ἔλαβε μετὰ 12 ἔτη 46880,$^{\delta\rho}$35, πόση ἦτο ἡ ἐτησία κατάθεσις ;*

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἐπιλύοντες ὡς πρὸς τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν α τὸν ἀνωτέρω (§ 257) εὑρεθέντα τύπον

$$\Sigma = \frac{\alpha(1+\tau)[(1+\tau)^{\nu}-1]}{\tau},$$

θὰ ἔχωμεν

$$\alpha = \frac{\Sigma\tau}{(1+\tau)[(1+\tau)^{\nu}-1]}, \text{ ἤτοι } \alpha = \frac{\Sigma\tau}{(1+\tau)^{\nu+1}-(1+\tau)}.$$

Ἂν δὲ ἐν τῷ τελευταίῳ τούτῳ τύπῳ ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τῶν ἐν αὐτῷ γραμμάτων τὰς ἀντιστοιχούσας αὐτῶν τιμάς, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha = \frac{46880,35 \times 0,04}{1,04^{13}-1,04}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $1,04^{13} - 1,04 = 1,665074 - 1,04 = 0,625074$,

ἔπεται ὅτι $$\alpha = \frac{1875,214}{0,625074}, \text{ ἤτοι } \alpha = 3000.$$

Λοιπὸν ἑκάστη ἐτησία κατάθεσις ἦτο 3000 δρχ.

259. ***Πρόβλημα*** *III. Ἂν καταθέτῃ τις κατ' ἔτος εἰς τράπεζαν 2000 δρχ. ἐπ' ἀνατοκισμῷ, μετὰ πόσα ἔτη θὰ λάβῃ 65566,$^{\delta\rho}$25 ;*

Πρὸς τοῦτο ἐπιλύομεν ὡς πρὸς ν τὸν εὑρεθέντα τύπον (1)

$$\Sigma = \frac{\alpha(1+\tau)[(1+\tau)^{\nu}-1]}{\tau},$$

ἐξ οὗ $$\Sigma\tau = \alpha(1+\tau)^{\nu+1} - \alpha(1+\tau),$$

ἤτοι $$\alpha(1+\tau)^{\nu+1} = \Sigma\tau + \alpha(1+\tau),$$

καὶ ἄρα $$\text{λογ}\,\alpha + (\nu+1)\text{λογ}(1+\tau) = \text{λογ}[\Sigma\tau + \alpha(1+\tau)],$$

ἐξ οὗ $$\nu+1=\frac{\lambda o\gamma\ [\Sigma\tau+\alpha(1+\tau)]-\lambda o\gamma\ \alpha}{\lambda o\gamma\ (1+\tau)},$$

ἤτοι $$\nu=\frac{\lambda o\gamma\ [\Sigma\tau+\alpha(1+\tau)]-\lambda o\gamma\ \alpha}{\lambda o\gamma\ (1+\tau)}-1.$$

Ἂν δὲ ἐν τῷ τύπῳ τούτῳ ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τῶν ἐν αὐτῷ γραμμάτων τὰς ἀντιστοίχους αὐτῶν τιμάς, θὰ ἔχωμεν

$$\nu=\frac{\lambda o\gamma\ (65566{,}25\times 0{,}045+2000\times 1{,}045)-\lambda o\gamma\ 2000}{\lambda o\gamma\ 1{,}045}-1,$$

καὶ ἄρα $$\nu=\frac{\lambda o\gamma\ 5040{,}481-\lambda o\gamma\ 2000}{\lambda o\gamma\ 1{,}045}-1,$$

ἤτοι $$\nu=\frac{3{,}70247-3{,}30103}{0{,}01912}-1,$$

ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι ὁ ζητούμενος χρόνος $\nu=20$ ἔτη.

260. ***Πρόβλημα*** IV. *Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον καταθέτων τις ἐτησίως εἰς τράπεζαν 2000 δρ. ἐπ' ἀνατοκισμῷ ἔλαβε μετὰ 20 ἔτη 65566,δρ25;*

Πρὸς τοῦτο ἐκ τοῦ ἀνωτέρω (§ 257) εὑρεθέντος τύπου (1)

$$\Sigma=\frac{\alpha(1+\tau)[(1+\tau)^{\nu}-1]}{\tau}, \qquad (1)$$

ἔχομεν $$\frac{\Sigma}{\alpha}=\frac{(1+\tau)^{\nu+1}-(1+\tau)}{\tau} \qquad (2)$$

ἢ $$\frac{\Sigma}{\alpha}=\frac{(1+\tau)^{\nu+1}}{\tau}-\frac{1}{\tau}-1. \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως δὲ ταύτης περιεχούσης τὸν ἄγνωστον τ εἰς τὴν $\nu+1$ δύναμιν, θὰ προσδιορισθῇ ὁ ἄγνωστος οὗτος διὰ τῆς μεθόδου τῶν διαδοχικῶν προσεγγίσεων. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι προφανές ὅτι τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως (3) θὰ εἶναι ἐπὶ τοσοῦτον μικρότερον, καθόσον τὸ τ θὰ εἶναι ἐλάχιστον, ἕπεται ὅτι, ἂν εἰς τὸν ἄγνωστον τοῦτον τ δοθῇ τιμή τις ἐλαχίστη, τὸ προκύψον ἐξαγόμενον θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{\Sigma}{\alpha}$· τοὐναντίον δέ, ἂν δοθῇ εἰς τὸν τ τιμή τις πολὺ μεγάλη, τὸ προκύψον ἐξαγόμενον θὰ εἶναι μεῖζον τοῦ $\frac{\Sigma}{\alpha}$.

Λοιπόν, ἂν οὕτω προχωρήσωμεν δίδοντες εἰς τὸ τ ἐνδιαμέσους ἄλλας τιμάς, τὰ ἐξαγόμενα θὰ εἶναι ἐναλλὰξ μείζονα καὶ ἐλάσσονα τοῦ $\frac{\Sigma}{\alpha}$

καὶ θὰ πλησιάζωσιν ἀεὶ πρὸς αὐτὸν, ὥστε νὰ δύναται ὁ τ νὰ εὑρεθῇ μεθ' ὡρισμένης προσεγγίσεως.

Οὕτως, ἂν ἀντικατασταθῶσιν ἐν τῷ τύπῳ (2) ἀντὶ τῶν Σ, α καὶ ν αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν τιμαί, ὑποτεθῇ δὲ ὅτι τ=0,04, θὰ προκύψῃ ἐκ μὲν τοῦ πρώτου μέλους

$$\frac{65566,25}{2000}, \text{ ἤτοι } 32,783125,$$

ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου

$$\frac{1,04^{21}-1,04}{0,04}, \text{ ἤτοι } 30,9692.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους προκύψαν ἐξαγόμενον εἶναι ἔλασσον τοῦ ἐκ τοῦ πρώτου, ἕπεται ὅτι ἡ ληφθεῖσα τιμὴ τοῦ τ ἦτο πολὺ μικρά. Ἂν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι τ=0,05, εὑρίσκεται τοὐναντίον ὅτι τὸ δεύτερον μέλος εἶναι μεῖζον τοῦ πρώτου, ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι τὸ ἐπιτόκιον εἶναι μικρότερον τοῦ 5, καὶ κατ' ἀκολουθίαν περιλαμβάνεται τοῦτο μεταξὺ τοῦ 4 καὶ τοῦ 5.

Ἂν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι τ=0,0475, θὰ προκύψῃ ὡσαύτως ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους ἀριθμὸς μείζων τοῦ ἐκ τοῦ πρώτου προκύψοντος· κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἐπιτόκιον περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 4 καὶ τοῦ 4,75.

Ἂν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι τ=0,045, οἱ ἐκ τῶν δύο μελῶν προκύψοντες ἀριθμοὶ θὰ διαφέρωσιν ἀπ' ἀλλήλων ἐλάχιστον. Λοιπὸν ἐκ τούτων συνάγεται ὅτι τὸ ζητούμενον ἐπιτόκιον εἶναι 4,50.

ΕΚΘΕΤΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

261. ***Ἐκθετικὴ ἐξίσωσις*** καλεῖται πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $α^χ=β$, ἐν ᾗ ὁ μὲν α καὶ ὁ β εἶνε δεδομένοι θετικοὶ ἀριθμοί, ὁ δὲ ἐκθέτης χ ἄγνωστος, ὀφείλων νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν ἐξίσωσιν.

Ἐπιλῦσαι τὴν ἐξίσωσιν ταύτην σημαίνει εὑρεῖν τὴν τιμὴν τοῦ χ, δι' ἣν αὕτη ἐπαληθεύεται.

Αἱ τοιαῦται ἐξισώσεις λύονται εὐκόλως διὰ τῶν λογαρίθμων· διότι, ἂν ληφθῶσιν οἱ λογάριθμοι τῶν δύο μελῶν τῆς δεδομένης ταύτης ἐξισώσεως, θὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις

$$χ.λογ\ α=λογ\ β,$$

ἐξ ἧς θὰ προκύψῃ καὶ ἡ τὴν δεδομένην ἐξίσωσιν ἐπιλύουσα τοῦ ἀγνώστου τιμὴ

$$χ=\frac{λογ\ β}{λογ\ α}.$$

Κατὰ ταῦτα 1ον) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $6^χ = 7776$,

ἐξ ἧς ἐπιλυομένης προκύπτει $χ = \frac{λογ\ 7776}{λογ 6}$, ἤτοι $χ = 5$.

2) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $2^{χ+1} + 4^χ = 80$.

Ἵνα ἐπιλύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην γράφομεν αὐτὴν ὧδε·

$$2^{2χ} + 2^χ.2 - 80 = 0·$$

ἂν δὲ ἀντὶ τοῦ $2^χ$ τεθῇ τὸ ω, θὰ ἔχωμεν

$$ω^2 + 2ω - 80 = 0,$$

ἐξ ἧς ἐπιλυομένης προκύπτουσιν $ω' = 8$ καὶ $ω'' = -10$.

Ἐκ τῶν τιμῶν δὲ τούτων τοῦ ω μόνον ἡ $ω' = 8$ ἁρμόζει, ἐξ ἧς θὰ ἔχωμεν $2^χ = 8$ καὶ ἄρα $χ = 3$.

3) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $2^{χ^2 - 5χ + 11} = 32$,

ἐξ ἧς προκύπτει $χ^2 - 5χ + 11 = 5$,

τουτέστιν $χ^2 - 5χ + 6 = 0$,

καὶ ἐξ ἧς ἐπιλυομένης προκύπτει $χ' = 2$ καὶ $χ'' = 3$.

4) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $α^{β^χ} = γ$,

ἐν ᾗ τὰ γράμματα α, β, γ παριστῶσι δεδομένους θετικοὺς ἀριθμούς.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύπτει ἡ ἰσοδύναμος ἐξίσωσις

$$β^χ \times λογ\ α = λογ\ γ,$$

ἐξ ἧς πάλιν προκύπτει ἡ ἰσοδύναμος τῇ δεδομένῃ ἐξίσωσις

$$β^χ = \frac{λογ\ γ}{λογ\ α}.$$

Ἂν δὲ πάλιν ληφθῶσιν οἱ λογάριθμοι ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς, θὰ προκύψῃ ἡ ἰσοδύναμος τῇ δεδομένῃ ἐξίσωσις

$$χ.\ λογ\ β = λογ.\ λογ\ γ - λογ.\ λογ\ α,$$

ἐξ ἧς ἄρα $χ = \frac{λογ.\ λογ\ γ - λογ.\ λογ\ α}{λογ\ β}$.

Σημείωσις. Ἡ ἐπίλυσις τῆς ἐκθετικῆς ἐξισώσεως $α^χ = β$ δύναται νὰ γίνῃ καὶ ἄνευ τῶν λογαρίθμων ὡς ἑξῆς.

Ἵνα ὁ ἄγνωστος χ, ὅστις εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ β κατὰ τὴν βάσιν α, προσδιορισθῇ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{ν}$, πρέπει νὰ εὑρεθῇ κλάσμα τι $\frac{μ}{ν}$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $α^{\frac{μ}{ν}} < β < α^{\frac{μ+1}{ν}}$, διότι τότε ὁ ἄγνωστος χ θὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ τοῦ $\frac{\mu}{\nu}$ καὶ τοῦ $\frac{\mu+1}{\nu}$.

Ἐκ δὲ τῶν ἀνισοτήτων τούτων προκύπτουσιν αἱ ἑξῆς ανισοτητες·

$$\alpha^{\mu} < \beta^{\nu} < \alpha^{\mu+1},$$

ἐξ ὧν ἕπεται ὅτι, ἵνα εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ χ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, ἀρκεῖ νὰ ὑψωθῇ ὁ β εἰς τὴν $\nu^{\text{ην}}$ δύναμιν, εἶτα δὲ νὰ εὑρεθῶσι δύο ἐφεξῆς δυνάμεις τοῦ α, ἔστω ἡ α^{μ} καὶ ἡ $\alpha^{\mu+1}$, αἵτινες νὰ περιλαμβάνωσι τὴν $\nu^{\text{ην}}$ δύναμιν τοῦ β· οὕτω δὲ θὰ εἶναι

$$\chi = \frac{\mu}{\nu}, \text{ κατὰ προσέγγισιν } \frac{1}{\nu}.$$

ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΕΩΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

262. Ἡ βάσις λογαριθμικοῦ συστήματος δύναται νὰ εἶναι οἱοσδήποτε σταθερὸς θετικὸς ἀριθμός.

Ἂν δὲ εἶναι γνωστοὶ οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν πρὸς βάσιν τινὰ α, ζητῶνται δὲ οἱ λογάριθμοι αὐτῶν πρὸς ἄλλην τινὰ βάσιν α', ἂς καλέσωμεν ἀριθμοῦ τινος, οἷον τοῦ ψ, τοὺς λογαρίθμους, ὡς πρὸς μὲν τὴν βάσιν α διὰ τοῦ χ, ὡς πρὸς δὲ τὴν βάσιν α' διὰ τοῦ χ', ἤτοι ἔστω

$$\lambda o\gamma_{\alpha}\ \psi = \chi \quad \text{καὶ} \quad \lambda o\gamma_{\alpha'}\ \psi = \chi',$$

ὅτε (§ 228) $\qquad \psi = \alpha^{\chi} \quad \text{καὶ} \quad \psi = \alpha'^{\chi'}$·

ἐκ δὲ τούτων ἄρα προκύπτει ἡ ἰσότης

$$\alpha^{\chi} = \alpha'^{\chi'}.$$

Ἂν δὲ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος ταύτης ληφθῶσιν οἱ λογάριθμοι ὡς πρὸς τὴν βάσιν α, παρατηρήσωμεν δὲ (§ 228) ὅτι ὁ λογάριθμος τῆς βάσεως α εἶναι ἡ μονάς, θὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις

$$\chi = \chi' . \lambda o\gamma_{\alpha}\ \alpha',$$

ἥτις γράφεται καὶ ὧδε·

$$\chi' = \chi \cdot \frac{1}{\lambda o\gamma_{\alpha}\ \alpha'},$$

καὶ ἐξ ἧς, ἀντικαθισταμένων ἀντὶ τοῦ χ' καὶ τοῦ χ τῶν ἴσων αὐτοῖς ἀριθμῶν $\lambda o\gamma_{\alpha'}\psi$ καὶ $\lambda o\gamma_{\alpha}\psi$, θὰ προκύψῃ ὁ ζητούμενος τύπος

$$\lambda o\gamma_{\alpha'}\psi = \lambda o\gamma_{\alpha}\psi \cdot \frac{1}{\lambda o\gamma_{\alpha}\alpha'}, \qquad (1)$$

ἐξ οὗ συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών·

Κανών. *Ἵνα ἐκ λογαριθμικοῦ συστήματος μεταβῶμεν εἰς ἕτερον, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὡς πρὸς τὴν πρώτην βάσιν γνωστοὺς τῶν ἀριθμῶν λογαρίθμους ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον λογάριθμον τῆς νέας βάσεως εἰλημμένον ὡς πρὸς τὸ πρῶτον σύστημα.*

Π. χ. ὁ $\lambda o\gamma_8 512 = 3$· διότι

$$\lambda o\gamma_8 512 = \frac{\lambda o\gamma\, 512}{\lambda o\gamma\, 8} = \frac{2,70927}{0,90309} = 3.$$

Ἀντιστρόφως· ἂν γνωρίζωμεν τὸν λογάριθμον οἱουδήποτε ἀριθμοῦ, δυνάμεθα ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (1) νὰ εὕρωμεν τὴν βάσιν τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος.

Οὕτως, ἂν $\lambda o\gamma_\chi 512 = 3$,

θὰ ἔχωμεν $\dfrac{\lambda o\gamma\, 512}{\lambda o\gamma\, \chi} = 3$, τουτέστιν

$$\lambda o\gamma\, \chi = \frac{\lambda o\gamma\, 512}{3} = \frac{2,70927}{3} = 0,90309$$

καὶ ἄρα $\chi = 8$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Μετὰ πόσον χρόνον κεφάλαιον 45900 δρχ. ἀνατοκιζόμενον πρὸς 4,5⁰/₀ θὰ γίνῃ ἴσον πρὸς τὸ ἀνατοκιζόμενον ἐπίσης πρὸς 3,5⁰/₀ ποσὸν 89100 δραχμῶν ;

2) Ἐκ δύο ἀνατοκιζομένων κεφαλαίων, καὶ ἐξ ὧν τὸ ἕτερον εἶναι μεῖζον τοῦ ἑτέρου κατὰ 393 δραχμάς, τοκίζεται τὸ μὲν ἔλασσον πρὸς 5,25⁰/₀, τὸ δὲ μεῖζον πρὸ 3,25⁰/₀. Τίνα εἶναι τὰ κεφάλαια ταῦτα, γνωστοῦ ὄντος ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ 40 ἔτους τὸ ἔλασσον ἐγένετο διπλάσιον τοῦ ἄλλου ;

3) Ἐντὸς πόσων ἐτῶν κεφάλαιόν τι ἀνατοκιζόμενον πρὸς 5⁰/₀ διαπλασιάζεται ; (Ἀπ. 14 ἔτη, 74 ἡμέρας).

4) Ἂν ὁ πληθυσμὸς τῶν Ἀθηνῶν κατὰ μὲν τὸ ἔτος 1821 ἦτο 20000, κατὰ δὲ τὸ 1913 ἦτο 180000, ἡ δὲ κατὰ μέσον ὅρον καθ' ἕκαστον ἔτος θνησιμότης ἦτο 20 κάτοικοι ἐπὶ χιλίων, εὑρεῖν πόση τοῖς ἑκατὸν ἦτο ἡ κατ' ἔτος αὔξησις τοῦ πληθυσμοῦ ;

5) Ἂν ὁ πληθυσμὸς κράτους τινὸς εἶναι 40 ἑκατομύρια κατοίκων, αὐξάνηται δὲ κατ' ἔτος κατὰ τὸ $\frac{1}{300}$ τῆς τιμῆς αὐτοῦ, πόσος θὰ γίνῃ ἐντὸς ἑνὸς αἰῶνος;

$$\left((\text{'Απ.}\ \chi = 40.000.000 \times \left(\frac{301}{300}\right)^{100} \right).$$

6) Ἐὰν οἱ πληθυσμοὶ δύο Κρατῶν εἶναι τοῦ μὲν ἑτέρου 20 ἑκατομύρια κατοίκων, τοῦ δὲ ἑτέρου 30 ἑκατομύρια, αὐξάνωνται δὲ κατ' ἔτος τοῦ μὲν πρώτου κατὸ τὸ $\frac{1}{200}$ τῆς τιμῆς αὐτοῦ, τοῦ δὲ δευτέρου κατὰ τὸ $\frac{1}{300}$, ἐντὸς πόσου χρόνου οἱ δύο πληθυσμοὶ θὰ γίνωσιν ἴσοι;

$$(\text{'Απ.}\ 20.000.000 \times \left(\frac{201}{200}\right)^{\nu} = 30.000.000 \left(\frac{301}{300}\right)^{\nu},$$

ἐξ οὗ προκύπτει $\nu = \dfrac{\lambda o\gamma 3 - \lambda o\gamma 2}{\lambda o\gamma\ 603 - \lambda o\gamma\ 602} = 244$ ἔτη,...).

7) Ἂν κεφάλαιόν τι τοκίζηται 10 ἔτη ἐπ' ἀνατοκισμῷ, καὶ κατὰ μὲν τὸ 1ον ἔτος πρὸς 1%, κατὰ δὲ τὸ 2ον πρὸς 2%, κατὰ δὲ τὸ 3ον πρὸς 3%, καὶ ἐφεξῆς οὕτω, ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ πρὸς ποῖον σταθερὸν ἐπιτόκιον πρέπει νὰ ἀνατοκισθῇ τὸ αὐτὸ κεφάλαιον, ἵνα εἰς τὸ τέλος τοῦ 10ου ἔτους συμποσωθῇ εἰς τὸ αὐτὸ ποσόν;

('Απ. 5,46.%)

8) Ἐκ πίθου περιέχοντος 60 ὀκάδας οἴνου ἀφαιρεῖται καθ' ἑκάστην ἡμέραν μία ὀκὰ καὶ ἀναπληροῦται δι' ὕδατος. Ζητεῖται πόσος οἶνος θὰ μείνῃ μετὰ 20 ἡμέρας, καὶ μετὰ πόσας ἡμέρας δὲν θὰ ὑπάρχῃ οἶνος ἐν τῷ πίθῳ;

9) Ἂν ἔν τινι Κράτει κατὰ τὸ ἔτος 1886 ὁ μὲν τῶν ἀποβιώσεων ἀριθμὸς ἀνῆλθεν εἰς τὸ $\frac{1}{42}$ τοῦ πληθυσμοῦ, ὁ δὲ τῶν γεννήσεων εἰς τὸ $\frac{1}{35}$ αὐτοῦ, τὸ αὐτὸ δὲ συνέβαινε καὶ κατὰ τὰ ἑπόμενα ἔτη, ἐντὸς πόσου χρόνου ὁ πληθυσμὸς τοῦ τόπου τούτου ηὔξησε κατὰ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ;

10) Ἂν κατέθετέ τις ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 5% 100 δραχμὰς καθ' ἑκάστην πρώτην Ἰανουαρίου καὶ ἐπὶ δέκα ἔτη, δηλαδὴ ἀπὸ τῆς 1ης Ἰανουαρίου 1869 μέχρι καὶ τῆς 1ης Ἰανουαρίου 1878, εἶτα δὲ τὴν 1 Ἰανουαρίου ἑκάστου ἔτους ἀπέσειρε τὸ αὐτὸ ποσὸν 100 δραχμῶν

ἐπὶ δέκα ἐφεξῆς ἔτη, δηλαδὴ κατὰ τὸ 1879,1880,.. μέχρι τοῦ 1888, πόσον ποσὸν θὰ ὑπελείπετο τὴν 31 Δεκεμβρίου τοῦ 1888 ἔτους;

11, Ἐπιλῦσαι ἄνευ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τὰς ἑξῆς ἐξισώσεις·

$$100\times10^{\chi}=\sqrt[\chi]{1000^5}\ ,\ 2^{\chi+3}+4^{\chi+1}=320 \text{ καὶ}$$

$$2\,\lambda o\gamma\,\chi=\lambda o\gamma\,192+\lambda o\gamma\,\frac{3}{4}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ ΩΣ ΟΡΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

263. Ἐὰν ἔχωμεν δύο αὐξούσας προόδους, τὴν μὲν ἑτέραν γεωμετρικὴν ἔχουσαν πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, τὴν δὲ ἑτέραν ἀριθμητικὴν ἔχουσαν πρῶτον ὅρον τὸ μηδέν, τοὺς ὅρους τῆς ἀριθμητικῆς προόδου καλοῦμεν **λογαρίθμους** τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς.

Οὕτως, ἂν εἶναι δεδομέναι αἱ ἑξῆς δύο πρόοδοι·

$$1,\ \delta,\ \delta^2,\ \delta^3,\ldots,\ \delta^\nu\ldots, \qquad (1)$$

$$0,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon,\ 3\varepsilon,\ldots,\ \nu\varepsilon\ldots, \qquad (2)$$

ὁ μὲν ε εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ δ, ὁ δὲ 2ε ὁ λογάριθμος τοῦ δ^2, ὁ δὲ 3ε εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ δ^3 καὶ ἐφεξῆς οὕτω.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι, ἐπειδὴ ὁ πρῶτος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται τῇ μονάδι, οἱ λοιποὶ αὐτῆς ὅροι εἶναι αἱ ἐφεξῆς δυνάμεις τοῦ λόγου· ὡσαύτως δέ, ἐπειδὴ ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι ἴσος τῷ μηδενί, οἱ λοιποὶ ὅροι αὐτῆς εἶναι τὰ διαδοχικὰ πολλαπλάσια τοῦ λόγου ε.

Ἔτι δὲ παρατηροῦμεν ὅτι εἰς δύο ἀντιστοίχους ὅρους τῶν προόδων ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἐκθέτης καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς τοῦ λόγου.

Οὕτω γενικῶς ὁ νε εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ δ^ν· Τὸ σύνολον δὲ τῶν δύο προόδων ἀποτελεῖ τὸ καλούμενον ***σύστημα λογαρίθμων***.

264. Ἐπειδὴ προτιθέμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ***πᾶς ἀριθμὸς μείζων τῆς μονάδος ἔχει ἕνα λογάριθμον***, διὰ τοῦτο θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ***δεδομένων δύο προόδων*** *σχηματιζουσῶν σύστημα λογαρίθμων*, οἷον τῶν ἀνωτέρω (1) καὶ (2), ***δυνάμεθα πάντοτε νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων αὐτῶν μέγα πλῆθος μέσων ὅρων, ὥστε οἱ διαδοχικοὶ ὅροι τῶν προκυψουσῶν προόδων νὰ διαφέρωσιν ἀπ' ἀλλήλων κατ' ἀριθμὸν ὅσον θέλωμεν ἐλάχιστον.***

Πρὸς τοῦτο ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις, ὅτι μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου παρεμβάλλονται $\mu-1$ μέσοι ὅροι.

Οὕτως ὁ μὲν λόγος τῆς οὕτω σχηματιζομένης προόδου θὰ εἶναι ἴσος τῇ $\sqrt[\mu]{\delta}$ (§ 217), πάντες δὲ οἱ ὅροι αὐτῆς θὰ εἶναι αἱ δυνάμεις τοῦ λόγου· κατ' ἀκολουθίαν δύο τούτων ἐφεξῆς θὰ δύνανται νὰ παρίστανται διὰ τοῦ $\left(\sqrt[\mu]{\delta}\right)^{\varkappa}$ καὶ διὰ τοῦ $\left(\sqrt[\mu]{\delta}\right)^{\varkappa+1}$.

Ἡ διαφορὰ ἄρα τούτων θὰ εἶναι

$\left(\sqrt[\mu]{\delta}\right)^{\varkappa+1}-\left(\sqrt[\mu]{\delta}\right)^{\varkappa}$, τουτέστιν $\left(\sqrt[\mu]{\delta}\right)^{\varkappa}\left(\sqrt[\mu]{\delta}-1\right)$.

Πρόκειται δὲ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύναται ὁ μ νὰ ληφθῇ ἱκανῶς μέγας, ὥστε νὰ εἶναι

$$\left(\sqrt[\mu]{\delta}\right)^{\varkappa}\left(\sqrt[\mu]{\delta}-1\right)<\varepsilon, \tag{3}$$

τοῦ ε ὄντος ἀριθμοῦ προσεγγίζοντος τοῦ μηδενός, ὅσον θέλῃ τις.

Ἀλλ' ἐὰν ὁ τελευταῖος ὅρος τῆς θεωρουμένης γεωμετρικῆς προόδου εἶναι ὁ Α, θὰ ἔχωμεν

$\left(\sqrt[\mu]{\delta}\right)^{\varkappa}<A$, ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι, ἐὰν ἐπαληθεύηται ἡ ἀνισότης

$$A\left(\sqrt[\mu]{\delta}-1\right)<\varepsilon,$$

θὰ ἐπαληθεύηται δι' ἰσχυρότερον λόγον ἡ ἀνισότης (1).

Ἐκ δὲ τῆς ἀνισότητος $A\left(\sqrt[\mu]{\delta}-1\right)<\varepsilon$ προκύπτει ἡ ἀνισότης

$$\sqrt[\mu]{\delta}<1+\frac{\varepsilon}{A},$$

ἐξ ἧς πάλιν προκύπτει ἡ $\delta<\left(1+\dfrac{\varepsilon}{A}\right)^{\mu}$,

ἥτις δύναται πάντοτε νὰ ἀληθεύῃ, διότι τοῦ $1+\dfrac{\varepsilon}{A}$ ὄντος ἀριθμοῦ μείζονος τῆς μονάδος, ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ ὁ $\mu>\dfrac{A(\delta-1)}{\varepsilon}$ (§169), ὅπερ πάντοτε εἶναι δυνατόν. Λοιπὸν δύναται πάντοτε νὰ λαμβάνηται ὁ μ ἱκανῶς μέγας, ὥστε νὰ ἐπαληθεύηται ἡ ἀνισότης (1).

Ἀφ' ἑτέρου, ἐὰν παρεμβάλῃ τις ὡσαύτως $\mu-1$ μέσους ὅρους μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου τοῦ συστήματος, ὁ λόγος τῆς οὕτω σχηματιζομένης ἀριθμητικῆς προόδου θὰ εἶναι $\frac{\varepsilon}{\mu}$ (§ 210), καὶ εἶναι προφανὲς ὅτι δύναται νὰ ληφθῇ ὁ μ ἱκανῶς μέγας ὥστε ὁ $\frac{\varepsilon}{\mu}$ νὰ προσεγγίζῃ τοῦ μηδενὸς ὅσον θέλῃ τις.

Ἂν δὲ τεθῇ $\delta' = \sqrt[\mu]{\delta}$ καὶ $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\mu}$, θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$1,\ \delta',\ \delta'^2,\ \delta'^3,\ \ldots\ldots, \tag{4}$$
$$0,\ \varepsilon',\ 2\varepsilon',\ 3\varepsilon',\ \ldots\ldots, \tag{5}$$

οὗτινος ἀμφότεραι αἱ πρόοδοι ἀποτελοῦνται ἐξ ὅρων διαδεχομένων ἀλλήλους εἰς πολὺ πλησιάζοντα διαστήματα τιμῶν.

Τούτου τεθέντος, θεωρήσωμεν ἀριθμόν τινα N μείζονα τῆς μονάδος. Ἐὰν μὲν ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ὅρος τῆς προκυψάσης γεωμετρικῆς προόδου (4), δηλαδὴ δύναμίς τις τοῦ δ′, λογάριθμος τούτου ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι ὁ ἀντίστοιχος ὅρος τῆς προκυψάσης ἀριθμητικῆς προόδου (5). Ἂν δὲ ὁ N δὲν εἶναι ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου (4), θὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου ταύτης, καὶ ἐπειδὴ οἱ ὅροι οὗτοι διαφέρουσιν ἀπ᾿ ἀλλήλων κατ᾿ ἐλάχιστον ἀριθμόν, ἕπεται ὅτι δι᾿ ἰσχυρότερον λόγον ὁ ἀριθμὸς οὗτος N θὰ διαφέρῃ τοῦ ἑτέρου τούτων κατ᾿ ἐλαχίστην ποσότητα, ὥστε θὰ δύναταί τις νὰ θεωρῇ λογάριθμον τούτου τὸν ἕτερον τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται ὁ λογάριθμος τοῦ N. Οὕτω δὲ θὰ γίνῃ λάθος μικρότερον τοῦ λόγου ε′ τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, ὅπερ κατ᾿ ἀκολουθίαν θὰ εἶναι ἐλάχιστον. Λοιπὸν δύναταί τις νὰ λέγῃ ὅτι εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις ὁ ἀριθμὸς N ἔχει λογάριθμον.

Ἂν δὲ νῦν θεωρήσωμεν τὰς δύο προόδους προεκτεινομένας καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν ὅρων 1 καὶ 0, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\delta^\nu}\ \ldots\ldots,\ \frac{1}{\delta^2},\ \frac{1}{\delta},\ 1,\ \delta,\ \delta^2,\ \delta^3,\ \ldots\ldots\ \delta^\nu,$$

$$-\nu\varepsilon,\ \ldots\ldots -2\varepsilon, -\varepsilon,\ 0,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon,\ 3\varepsilon,\ \ldots\ldots\ \nu\varepsilon,$$

καὶ θὰ λέγωμεν προσέτι ὅτι οἱ ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς προόδου $-\varepsilon, -2\varepsilon, \ldots, -\nu\varepsilon$ εἶναι οἱ λογάριθμοι τῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου. $\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta^2}, \ldots, \frac{1}{\delta^2}$. Δύναται δὲ νὰ ἀποδειχθῇ διὰ συλλογισμῶν καθόλου ὁμοίων πρὸς τοὺς προηγουμένους ἐφαρμοσθέντας, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς θετικὸς μικρότερος τῆς μονάδος ἔχει λογάριθμον.

Λοιπὸν ἐν συνόψει, πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει λογάριθμον.

Καὶ ἂν μὲν ὁ ἀριθμὸς εἶναι μείζων τῆς μονάδος, ὁ λογάριθμος οὗτος εἶναι θετικός· ἂν δὲ ὁ ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος, ὁ λογάριθμος εἶναι ἀρνητικός.

Οἱ ἀρνητικοὶ δὲ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουσι λογαρίθμους.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

265 ***Θεώρημα.*** *Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου δύο ἢ πλειόνων ἀριθμῶν εἶναι ἴσος τῷ ἀθροίσματι τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων.*

Θεωρήσωμεν κατ' ἀρχὰς γινόμενον ἐκ δύο παραγόντων $\alpha.\beta$ καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι ἀμφότεροι οἱ παράγοντες α, β εἶναι ὅροι τῆς γεωμετρικῆς προόδου τοῦ θεωρουμένου συστήματος. Οἱ ἀριθμοὶ ἄρα οὗτοι θὰ εἶναι τότε δυνάμεις τοῦ λόγου δ, καὶ θὰ δύναται νὰ τεθῇ $\alpha=\delta^\mu, \beta=\delta^\nu$.

Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι $\alpha.\beta=\delta^{\mu+\nu}$. Τὸ γινόμενον ἄρα $\alpha.\beta$ εἶναι ὡσαύτως ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου.

Ἂν δὲ παρασταθῇ διὰ τοῦ ε ὁ λόγος τῆς ἀντιστοίχου ἀριθμητικῆς προόδου, θὰ ἔχωμεν

$$\text{λογ}\ \alpha = \mu\varepsilon,\ \text{λογ}\ \beta = \nu\varepsilon,$$

$$\text{λογ}\ \alpha\beta = (\mu+\nu)\varepsilon = \mu\varepsilon+\nu\varepsilon,$$

καὶ ἄρα $$\text{λογ}\ \alpha\beta = \text{λογ}\ \alpha+\text{λογ}\ \beta.$$

Ὑποθέσωμεν δὲ νῦν ὅτι ὁ α καὶ ὁ β δὲν εἶναι ὅροι τῆς γεωμετρικῆς προόδου, ἔστωσαν δὲ α', β' οἱ ὅροι τῆς προόδου ταύτης οἱ περισσότερον κατ' ἔλλειψιν ἢ καθ' ὑπεροχὴν προσεγγίζοντες τοῦ α καὶ τοῦ β, ὁπότε θὰ ἔχωμεν

$$\text{λογ}\ \alpha'\beta'=\text{λογ}\ \alpha'+\text{λογ}\ \beta'.$$

Ἐπειδὴ δὲ δύνανται νὰ διαφέρωσιν ἀπ' ἀλλήλων ὁ α' ἀπὸ τοῦ α καὶ ὁ β' ἀπὸ τοῦ β, ὅσον ἐλάχιστον θέλωμεν, καὶ τὸ γινόμενον $\alpha'.\beta'$ θὰ διαφέρῃ ὡσαύτως ἀπὸ τοῦ $\alpha.\beta$ ὅσον ἐλάχιστον θέλωμεν (§171), ἡ δὲ προηγουμένη ἰσότης θὰ ἀληθεύῃ πάντοτε, ὅσον μικραὶ καὶ ἂν εἶναι αἱ διαφοραὶ αὗται, ἕπεται ὅτι εἰς τὸ ὅριον θὰ ἔχωμεν πάλιν

$$\text{λογ}\ \alpha\,\beta=\text{λογ}\ \alpha + \text{λογ}\ \beta.$$

Ἂν δὲ οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι μικρότεροι τῆς μονάδος, ἤτοι τῆς μορφῆς $\frac{1}{\delta^\mu}$ καὶ $\frac{1}{\delta^\nu}$, λογάριθμοι αὐτῶν μὲν θὰ εἶναι δ —$\mu\varepsilon$ καὶ δ —$\nu\varepsilon$, τοῦ δὲ γινομένου αὐτῶν $\frac{1}{\delta^{\mu+\nu}}=\delta^{-(\mu+\nu)}$ δ $-(\mu+\nu)\,\varepsilon$· κατ' ἀκολουθίαν τὸ θεώρημα ἀληθεύει καὶ ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει.

Ὡσαύτως τὸ θεώρημα ἀληθεύει, ἂν ὁ μὲν ἕτερος παράγων εἶναι μείζων τῆς μονάδος, ὁ δὲ ἕτερος ἐλάσσων αὐτῆς.

Ἂν νῦν θεωρήσωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἐκ πλειόνων παραγόντων γινομένου α.β.γ, θὰ ἔχωμεν λογ(α.β.γ) = λογ[(α.β).γ] = λογ(α.β) + λογ γ, καὶ ἄρα λογ(α.β.γ.) = λογ α + λογ β + λογ γ καὶ ἐφεξῆς οὕτως, ὁσοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ παράγοντες τοῦ γινομένου.

266. ***Θεώρημα.*** *Ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ λογαρίθμῳ τοῦ διαιρετέου ἠλαττωμένῳ κατὰ τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου.*

Ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ δεδομένον πηλίκον καὶ γ ἡ τούτου τιμή· ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\alpha}{\beta}=\gamma$, προκύπτει α=β.γ, ἕπεται ὅτι (§ 265)

$$\lambda o\gamma\ \beta + \lambda o\gamma\ \gamma = \lambda o\gamma\ \alpha,$$

ἐξ ἧς

$$\lambda o\gamma\ \gamma = \lambda o\gamma\ \alpha - \lambda o\gamma\ \beta,$$

ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$\lambda o\gamma \frac{\alpha}{\beta} = \lambda o\gamma\ \alpha - \lambda o\gamma\ \beta,$$

ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδειχθῇ.

267. *Ὡσαύτως ἀποδεικνύεται, ὡς ἐν τοῖς παραγράφοις* 225 *καὶ* 225 *ἀπεδείχθη, ὅτι ἀληθεύουσιν αἱ ἰδιότητες*

$$\lambda o\gamma\ \alpha^{\mu} = \mu.\lambda o\gamma\ \alpha$$

καὶ

$$\lambda o\gamma \sqrt[\mu]{\alpha} = \frac{\lambda o\gamma\ \alpha}{\mu}.$$

Διάφορα συστήματα λογαρίθμων.

268. Αἱ πρόοδοι αἱ ἀποτελοῦσαι σύστημα λογαρίθμων ὑπόκεινται εἰς μόνην τὴν συνθήκην νὰ ἔχωσιν ἀντιστοίχους ὅρους ἐν μὲν τῇ γεωμετρικῇ προόδῳ τὴν μονάδα ἐν δὲ τῇ ἀριθμητικῇ τὸ μηδέν.

Ὑπάρχουσιν ἄρα ἄπειρα συστήματα λογαρίθμων, ὁ δὲ λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος δὲν εἶναι ὡρισμένος, εἰ μὴ μόνον, ἂν πρόκειται περὶ μερικοῦ συστήματος, οὗτινος θὰ ἔχωσιν ὁρισθῇ αἱ πρόοδοι.

Βάσις συστήματος λογαρίθμων καλεῖται ὁ ἀριθμός, οὗτινος ὁ λογάριθμος ἐν τῷ θεωρουμένῳ συστήματι ἰσοῦται τῇ μονάδι.

Τὸ σύστημα λογαρίθμων ὁρίζεται, ἂν εἶναι δεδομένη ἡ βάσις αὐτοῦ β· διότι θὰ εἶναι τότε γνωστοὶ οἱ δύο ὅροι 1 καὶ β τῆς γεωμετρικῆς προόδου καὶ οἱ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ ἀντίστοιχοι τούτων ἀριθμοὶ

0 καὶ 1. Οὕτω θὰ εἶναι ὡρισμέναι αἱ σχηματίζουσαι τὸ σύστημα πρόοδοι, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ τὸ σύστημα, ὅπερ αὗται συνιστῶσιν.

Ἐπειδὴ δέ, ἐν ὅσῳ οἱ ἀριθμοὶ γράφονται κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα, αἱ ἰδιότητες τοῦ ἀκεραίου καὶ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους των λογαρίθμων (§ 264) ὑπάρχουσι μόνον εἰς τὸ σύστημα λογαρίθμων τὸ ἔχον βάσιν τὸ 10, διὰ τοῦτο εἰς τὰς ἐφαρμογὰς γίνεται χρῆσις μόνον τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων, οἵτινες ὁρίζονται ὑπὸ τοῦ συστήματος τῶν ἑξῆς δύο προόδων·

$$\ldots\ldots \frac{1}{10^3},\ \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10},\ 1,\ 10,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ 10^5\ldots.$$

$$\ldots\ldots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ldots.$$

Ἂν δὲ μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων τῆς πρώτης προόδου παρεμβάλωμεν μέγα πλῆθος μ μέσων ὅρων, ὡσαύτως δὲ τὸ αὐτὸ πλῆθος μ μέσων ἀριθμητικῶν, καὶ μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων τῆς δευτέρας προόδου, θὰ σχηματισθῶσιν αἱ ἑξῆς δύο νέαι πρόοδοι·

$$1,\ \sqrt[\mu+1]{10}\,,\ \sqrt[\mu+1]{10^2}\,,\ \ldots.,\ 10,\ 10.\sqrt[\mu+1]{10}\,,\ \ldots.$$

$$0,\ \frac{1}{\mu+1},\ \frac{2}{\mu+1}\,,\ \ldots.,\ 1,\ 1+\frac{1}{\mu+1}\,,\ \ldots,$$

ἐν αἷς οἱ ἀριθμοὶ τῆς δευτέρας εἶναι οἱ λογάριθμοι τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν τῆς πρώτης.

Οὕτω δὲ εἶναι ὡρισμένοι οἱ λογάριθμοι πάντων τῶν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $\sqrt[\varkappa]{10^{\varkappa'}}$.

Ἐπειδὴ δὲ εἰς τοιαύτης μορφῆς ἀριθμὸς εἶναι δυνατὸν νὰ προκύψῃ ἐκ δύο διαφόρων γεωμετρικῶν προόδων, ἕπεται ὅτι, ἵνα ὁ λογάριθμος αὐτοῦ εἶναι ὁ αὐτὸς ὡρισμένος ἀριθμός, πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ λογάριθμος οὗτος δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν προόδων τούτων.

Πρὸς τοῦτο, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι παρεμβαλλομένων $\varkappa-1$ μέσων ὅρων, εἶτα δὲ $\lambda-1$ τοιούτων, προκύπτει ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς παριστώμενος διὰ τοῦ $\sqrt[\varkappa]{10^{\varkappa'}}$ καὶ διὰ τοῦ $\sqrt[\lambda]{10^{\lambda'}}$, ὁ ἀριθμὸς οὗτος θὰ ἔχῃ λογαρίθμους τὸν $\frac{\varkappa'}{\varkappa}$ ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει καὶ τὸν $\frac{\lambda'}{\lambda}$ ἐν τῇ δευτέρα. Λέγω ὅτι θὰ εἶναι $\frac{\varkappa'}{\varkappa}=\frac{\lambda'}{\lambda}$.

Διότι, ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν

$$\sqrt[\kappa]{10^{\kappa'}} = \sqrt[\lambda]{10^{\lambda'}},$$

ἂν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ὑψωθῶσιν εἰς τὴν κ.λ δύναμιν, θὰ ἔχωμεν

$$10^{\kappa'\lambda} = 10^{\kappa.\lambda'},$$

ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι $\kappa'\lambda = \kappa\lambda'$,

ἤτοι $$\frac{\kappa'}{\kappa} = \frac{\lambda'}{\lambda}.$$

269. Μετὰ τὴν ἐκλογὴν τῶν προόδων, αἵτινες ἀποτελοῦσι τὸ σύστημα τῶν δεκαδικῶν ἢ *κοινῶν* καλουμένων *λογαρίθμων*, βλέπομεν κατ᾿ ἀρχὰς ὅτι ὁ λογάριθμος οἱασδήποτε δυνάμεως τοῦ 10 ἰσοῦται τῷ ἐκθέτῃ τῆς δυνάμεως ταύτης. Ἀφ᾿ ἑτέρου δὲ αἱ συμμέτρους ἐκθέτας ἔχουσαι δυνάμεις τοῦ 10 εἶναι οἱ μόνοι ἀριθμοί, οἵτινες ἐν τῷ συστήματι ὡς πρὸς βάσιν τὸ 10 ἔχουσι συμμέτρους λογαρίθμους.

Διότι, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος Α εἶναι σύμμετρος, παραστήσωμεν δὲ αὐτὸν διὰ τοῦ $\frac{\mu}{\nu}$, τοῦ μ καὶ τοῦ ν ὄντων ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἐκ τῆς ἰσότητος $\lambda o\gamma\, A = \frac{\mu}{\nu}$, θὰ προκύψῃ ἡ ἰσότης $\nu \,.\, \lambda o\gamma\, A = \mu$, ἥτις γράφεται καὶ ὧδε·

$\lambda o\gamma\, A^{\nu} = \lambda o\gamma\, 10^{\mu}$, ἐξ ἧς προκύπτει $A^{\nu} = 10^{\mu}$.

Κατ᾿ ἀκολουθίαν ὁ Α δὲν δύναται νὰ περιέχῃ ἄλλους πρώτους παράγοντας, ἐκτὸς τῶν παραγόντων τοῦ 10, δηλαδὴ τοῦ 2 καὶ τοῦ 5.

Ἂν ἄρα τεθῇ $A = 2^{\rho} \times 5^{\sigma}$, θὰ προκύψῃ $A^{\nu} = 2^{\rho\nu} \times 5^{\sigma\nu}$, καὶ κατ᾿ ἀκολουθίαν $2^{\rho\nu} \times 5^{\sigma\nu} = 10^{\mu} = 2^{\mu} \times 5^{\mu}$.

Κατὰ ταῦτα θὰ εἶναι $\mu = \rho\nu = \sigma\nu$, καὶ ἄρα $\rho = \sigma$.

Λοιπὸν ἀπεδείχθη ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἔχων σύμμετρον λογάριθμον εἶναι δύναμις τοῦ 10 ἔχουσα σύμμετρον ἐκθέτην.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΠΕΡΙ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΩΝ ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΔΙΩΝΥΜΟΥ ΠΕΡΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΟΣ

Διατάξεις.

270. ***Διατάξεις*** μ πραγμάτων ἀνὰ ν καλοῦνται οἱ διάφοροι τρόποι, καθ' οὓς δυνάμεθα λαμβάνοντες ν ἐκ τῶν μ τούτων πραγμάτων ($\mu \geqq \nu$) νὰ θέτωμεν αὐτὰ τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

Δύο ἄρα διατάξεις διαφέρουσιν ἀλλήλων, ἢ κατὰ τὸ εἶδος ἑνὸς ἢ πλειόνων ἐκ τῶν πραγμάτων ἐξ ὧν ἀποτελοῦνται, ἢ κατὰ μόνην τὴν τάξιν αὐτῶν.

Ἂς παραστήσωμεν δὲ τὰ μὲν μ διάφορα πράγματα διὰ τῶν μ πρώτων τοῦ ἀλφαβήτου γραμμάτων α, β, γ,..., κ, τὸν δὲ ἀριθμὸν τῶν διατάξεων διὰ τοῦ συμβόλου Δ_μ^ν.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ μ γράμματα α, β, γ,..., κ ἀνὰ ἓν ἐπιδέχονται τὰς ἑξῆς μ διατάξεις

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta, \ldots,\ \kappa,$$

ἔχομεν ὅτι

$$\Delta_\mu^1 = \mu.$$

Ἵνα δὲ εὕρωμεν τὰς διατάξεις τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ δύο θέτομεν μεθ' ἕκαστον γράμμα διαδοχικῶς ἓν ἕκαστον τῶν λοιπῶν γραμμάτων ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{llll}
\alpha\beta & \beta\alpha & \gamma\alpha \ldots\ldots\ldots & \kappa\alpha \\
\alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma\beta \ldots\ldots\ldots & \kappa\beta \\
\alpha\delta & \beta\delta & \gamma\delta \ldots\ldots\ldots & \kappa\gamma \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot\ \ldots\ldots\ldots & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\alpha\kappa & \beta\kappa & \gamma\kappa \ldots\ldots\ldots & \kappa\iota.
\end{array}$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ἑκάστου γράμματος προκύπτουσι μ—1 διατάξεις, πᾶσαι αἱ διατάξεις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ δύο εἶναι μ(μ—1), ἤτοι

$$\Delta_\mu^2 = \mu(\mu - 1).$$

Ὅτι δὲ ἄλλη δὲν ὑπάρχει βλέπει τις εὐκόλως· διότι, ἂν τις θεωρήσῃ τοιαύτην τινα διάταξιν καὶ ἐξ αὐτῆς παραλείψῃ τὸ δεύτερον γράμμα θὰ ἀπομείνῃ ἓν μόνον ἐκ τῶν μ γραμμάτων κατόπιν τοῦ ὁποίου, ἐπειδὴ ἐτέθη ἕκαστον τῶν λοιπῶν γραμμάτων, ἕπεται ὅτι ἐτέθη καὶ τὸ παραλειφθέν. Ἂν δὲ θεωρήσωμεν ἐσχηματισμένας τὰς διατάξεις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν—1, θελήσωμεν δὲ νὰ σχηματίσωμεν τὰς διατάξεις τῶν μ τούτων γραμμάτων ἀνὰ ν, μεθ' ἑκάστην τῶν διατάξεων τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν—1 γράφομεν διαδοχικῶς ἕκαστον τῶν μ—ν+1 λοιπῶν ἄλλων γραμμάτων. Οὕτω δὲ θὰ σχηματίσωμεν πάσας τὰς διατάξεις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν· διότι πᾶσα διάταξις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν σύγκειται ἐκ διατάξεως τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν—1, ᾗ ἕπεται ἓν τῶν ἄλλων γραμμάτων.

Δὲν λαμβάνεται δὲ ἡ αὐτὴ διάταξις δίς· διότι δύο οἱαιδήποτε τῶν οὕτω ἐσχηματισμένων διατάξεων διαφέρουσιν ἀλλήλων, ἢ κατὰ τὸ τελευταῖον μόνον γράμμα ἢ κατὰ τὴν διάταξιν τῶν ν—1 πρώτων γραμμάτων.

Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ἑκάστης τῶν προηγουμένων διατάξεων τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν—1, ὧν τὸ πλῆθος ἔστω $\Delta_{\mu}^{\nu-1}$, προκύπτουσι μ—ν+1 νέαι διατάξεις, τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν, θὰ εἶναι $\Delta_{\mu}^{\nu}=\Delta_{\mu}^{\nu-1}\times(\mu-\nu+1)$.

Ἂν δὲ ἐν τῷ τύπῳ τούτῳ ἀντὶ τοῦ ν ἀντικαταστήσωμεν διαδοχικῶς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3,...ν, θὰ ἔχωμεν

$$\Delta_{\mu}^{2}=\Delta_{\mu}^{1}\times(\mu-1)=\mu(\mu-1),$$
$$\Delta_{\mu}^{3}=\Delta_{\mu}^{2}\times(\mu-2),$$
$$\Delta_{\mu}^{4}=\Delta_{\mu}^{3}\times(\mu-3),$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\Delta_{\mu}^{\nu}=\Delta_{\mu}^{\nu-1}\times(\mu-\nu+1).$$

Ἂν δὲ πάσας τὰς ἰσότητας ταύτας πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη, θὰ προκύψῃ ὁ τύπος

$$\Delta_{\mu}^{\nu}=\mu(\mu-1)\,(\mu-2).\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;(\mu-\nu+1).$$

Ἐφαρμογαί. 1η) Πόσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν διατάξεων ὀκτὼ γραμμάτων ἀνὰ τρία;

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν ἀπὸ τοῦ 8 ἀρχομένων καὶ διαδοχικῶς κατὰ μονάδα ἐλαττουμένων τριῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν· ἤτοι

$$\Delta_8^3=8.7.6=336.$$

2α) Πόσοι ἀριθμοὶ διψήφιοι ὑπάρχουσιν ἀποτελούμενοι ἐκ δύο διαφόρων σημαντικῶν ψηφίων;

Ὑπάρχουσι τόσοι τοιοῦτοι ἀριθμοί, ὅσαι εἶναι αἱ διατάξεις τῶν ἐννέα σημαντικῶν ψηφίων ἀνὰ δύο· ἤτοι

$$\Delta_9^2=9.8=72.$$

3η) Πόσοι ἀριθμοὶ ὑπάρχουσιν ἀποτελούμενοι ἐκ πέντε διαφόρων σημαντικῶν ψηφίων;

Ὅσαι διατάξεις δύνανται νὰ σχηματισθῶσι μετὰ τῶν ἐννέα σημαντικῶν ψηφίων ἀνὰ πέντε· ἤτοι

$$\Delta_9^5=9.8.7.6.5=15120$$

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

271. ***Μεταθέσεις*** μ πραγμάτων καλοῦνται οἱ διάφοροι τρόποι, καθ' οὓς δυνάμεθα νὰ θέτωμεν ταῦτα τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο ἐπ' εὐθείας γραμμῆς. Κατὰ ταῦτα δύο γράμματα τὸ α καὶ τὸ 6 ἐπιδέχονται δύο μόνας μεταθέσεις, τὴν α6 καὶ τὴν 6α.

Ἂς παραστήσωμεν δὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν μεταθέσεων τῶν μ πραγμάτων διὰ τοῦ συμβόλου M_μ.

Ἐκ δὲ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν μεταθέσεων συνάγεται ὅτι αἱ μεταθέσεις τῶν μ πραγμάτων οὐδὲν ἄλλο εἶναι ἢ αἱ διατάξεις τῶν μ τούτων πραγμάτων ὁμοῦ πάντων εἰλημμένων. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν τὴν ἰσότητα

$$M_\mu=\Delta_\mu^\mu=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots\ldots.3.2.1,$$

ἥτις γράφεται καὶ ὧδε·

$$M_\mu=1.2.3.\ldots\ldots\mu.$$

Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων μ πραγμάτων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν μ πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Ἐφαρμογαί. *1η.*) Πόσοι τριψήφιαι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ σχηματισθῶσιν ἐκ τριῶν διαφόρων δεδομένων μονοψηφίων ἀριθμῶν;

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι ὅσος ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων τριῶν ψηφίων· τουτέστιν

$$M_3=1.2.3.=6.$$

2α.) Κατὰ πόσους τρόπους δύνανται ὀκτὼ στρατιῶται νὰ παραταχθῶσιν ἐπ' εὐθείας γραμμῆς;

Οἱ τρόποι οὗτοι ἰσοῦνται τῷ ἀριθμῷ τῶν μεταθέσεων ὀκτὼ πραγμάτων· ἤτοι

$$M_8=1.2.3.4.5.6.7.8=40320.$$

272. ***Παρατήρησις***. Τὸν ἀριθμὸν τῶν μεταθέσεων πραγμάτων τινῶν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας, χωρὶς δηλονότι νὰ θεωρήσωμεν αὐτὰς μερικὴν περίπτωσιν τῶν διατάξεων.

Πρὸς τοῦτο, ἂν εἰς πάσας τὰς θέσεις ἑκατέρας τῶν μεταθέσεων αϐ καὶ ϐα τῶν γραμμάτων α καὶ ϐ θέσωμεν τὸ γράμμα γ, θὰ προκύψωσιν αἱ τῶν τριῶν γραμμάτων α,ϐ,γ μεταθέσεις

αϐγ, αγϐ, γαϐ, ϐαγ, ϐγα, γϐα.

Ἐν τῷ σχηματισθέντι δὲ τούτῳ πίνακι θὰ περιλαμβάνωνται πᾶσαι αἱ μεταθέσεις τῶν τριῶν γραμμάτων· διότι πᾶσα μετάθεσις τῶν τριῶν γραμμάτων προκύπτει ἐκ μεταθέσεως τῶν δύο πρώτων γραμμάτων α,ϐ, ἂν τὸ γράμμα γ τεθῇ εἰς ὡρισμένην θέσιν αὐτῆς. Ἔτι δὲ διαφέρουσιν ἀλλήλων· διότι δύο τούτων διαφέρουσιν ἢ κατὰ τὴν θέσιν τοῦ γράμματος γ ἢ κατὰ τὴν θέσιν τῶν δύο ἄλλων γραμμάτων.

Οὕτως, ἐπειδὴ ἐξ ἑκατέρας τῶν μεταθέσεων τῶν δύο γραμμάτω α, ϐ προκύπτουσι τρεῖς νέαι μεταθέσεις, συνάγεται ὅτι

$$M_3=M_2\times 3=1.2.3.$$

Ὡσαύτως, ἂν εἰς πάσας τὰς θέσεις ἑκάστης τῶν μεταθέσεων τῶν τριῶν γραμμάτων α,ϐ,γ τεθῇ τὸ δ, εἶναι δὲ αἱ θέσεις αὗται τέσσαρες, θὰ προκύψωσιν αἱ μεταθέσεις τῶν τεσσάρων γραμμάτων α, ϐ, γ, δ. Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ἑκάστης τῶν προηγουμένων μεταθέσεων προκύπτουσι τέσσαρες νέαι μεταθέσεις, συνάγεται ὅτι

$$M_4=M_3\times 4=1.2.3.4.$$

Οὕτω δὲ χωροῦντες φθάνομεν εἰς τὸν ἑξῆς γενικὸν τύπον·

$$M_\mu=1.2.3......\mu.$$

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

273. ***Συνδυασμοὶ*** μ πραγμάτων ἀνὰ ν καλοῦνται οἱ διάφοροι τρόποι, καθ' οὓς δυνάμεθα νὰ λαμβάνωμεν ἐκ τῶν μ τούτων πραγμάτων ν οὕτως, ὥστε δύο τῶν τρόπων τούτων οἱτινεσδήποτε νὰ διαφέρωσιν ἀλλήλων κατὰ ἓν τοὐλάχιστον τῶν ἀποτελούντων αὐτοὺς πραγμάτων, τῆς τάξεως αὐτῶν οὔσης ἀδιαφόρου.

Π. χ. οἱ συνδυασμοὶ τῶν τριῶν γραμμάτων α,ϐ,γ ἀνὰ δύο εἶναι οἱ ἑξῆς τρεῖς· αϐ, αγ, ϐγ,

ἐνῷ αἱ τῶν αὐτῶν γραμμάτων ἀνὰ δύο διατάξεις εἶναι ἕξ.

Ἂς παραστήσωμεν διὰ τοῦ συμβόλου Σ_μ^ν τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν.

Τὸν τύπον δὲ τῶν συνδυασμῶν θὰ εὕρωμεν ἐκ τοῦ τύπου τῶν διατάξεων καὶ τοῦ τύπου τῶν μεταθέσεων ὡς ἑξῆς.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ συνδυασμοὶ τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν εἶναι πάντες ἐσχηματισμένοι καὶ γεγραμμένοι ἐν πίνακι. Οὕτως; ἂν ἐν ἑκάστῳ τῶν συνδυασμῶν τούτων γίνωσιν αἱ δυναταὶ μεταθέσεις τῶν ν αὐτοῦ γραμμάτων, θὰ προκύψωσιν ἐν τῷ σχηματισθέντι νέῳ πίνακι πᾶσαι αἱ διατάξεις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν.

Αἱ διατάξεις δὲ αὗται διαφέρουσιν ἀλλήλων, αἱ μὲν ἐκ τοῦ αὐτοῦ συνδυασμοῦ προκύψασαι κατὰ τὴν τάξιν τῶν ν αὐτοῦ γραμμάτων, αἱ δὲ ἐκ διαφόρων συνδυασμῶν κατὰ ἓν τοὐλάχιστον γράμμα· οὐδεμία δὲ ὑπάρχει ἄλλη διάταξις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν· διότι ἐκ πάσης τοιαύτης διατάξεως, ἂν τὰ ἀποτελοῦντα αὐτὴν ν γράμματα τεθῶσι κατὰ τὴν συνήθη τάξιν αὐτῶν, θὰ προκύψῃ συνδυασμὸς τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν· ἐπειδὴ δὲ ὁ συνδυασμὸς οὗτος ἐλήφθη ἐξ ἀρχῆς ἐσχηματισμένος, ἐγένοντο δὲ ἐν αὐτῷ πᾶσαι αἱ δυναταὶ μεταθέσεις τῶν ἀποτελούντων αὐτὸν γραμμάτων προέκυψε καὶ ἡ εἰρημένη διάταξις.

Συνάγεται δὲ ἐκ τούτων ὅτι αἱ οὕτω προκύπτουσαι $M_\nu \times \Sigma_\mu^\nu$ διατάξεις εἶναι ἅπασαι αἱ διατάξεις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν· ἤτοι εἶναι

$$\Delta_\mu^\nu = M_\nu \times \Sigma_\mu^\nu, \text{ καὶ ἄρα } \Sigma_\mu^\nu = \frac{\Delta_\mu^\nu}{M_\nu}.$$

Ἂν δὲ ἐν τῷ τύπῳ τούτῳ ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τῶν Δ_μ^ν καὶ M_ν τὰς γνωστὰς τιμὰς αὐτῶν, θὰ προκύψῃ ὁ τύπος

$$\Sigma_\mu^\nu = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2.3.\ldots.\nu}. \tag{1}$$

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν τὰς ἑξῆς ἰσότητας·

1ον) $\Sigma_7^2 = \dfrac{7.6}{1.2} = 21,$

2ον) $\Sigma_{21}^4 = \dfrac{12.11.10.9}{1.2.3.4} = 495,$

3ον) $\Sigma_\mu^1 = \mu$, ὅπερ εἶναι ἀμέσως προφανές,

καὶ 4ον) $\Sigma_\mu^\mu = \dfrac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots\ldots 3.2.1}{1.\,2.\,3.\ldots\ldots\ldots\mu} = 1.$

Ἐπὶ δὲ τῶν συνδυασμῶν ἀληθεύουσι τὰ ἑξῆς δύο χρήσιμα θεωρήματα.

274. **Θεώρημα** 1ον. *Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ τῶν συνδυασμῶν τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ μ—ν.*

Διότι, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἐντὸς κληρωτίδος ὑπάρχουσι μ διάφοροι ἀριθμοί, ἐξαχθῶσι δὲ ἐξ αὐτῶν οἱ ν, θὰ ὑποληφθῶσιν ἐν τῇ κληρωτίδι οἱ μ—ν ἄλλοι ἀριθμοί· οὕτω δὲ πρὸς ἕκαστον συνδυασμὸν τῶν ἑκάστοτε ἐξαγομένων ν ἀριθμῶν ἀντιστοιχεῖ εἷς συνδυασμὸς τῶν ὑπολειπομένων μ—ν ἀριθμῶν καὶ ἀντιστρόφως· θὰ ἔχωμεν ἄρα

$$\Sigma_\mu^\nu = \Sigma_\mu^{\mu-\nu}.$$

Ἡ ἐπαλήθευσις τῆς ἰσότητος ταύτης γίνεται προσέτι εὐκόλως, ἂν ληφθῇ ἑκατέρου τῶν συνδυασμῶν τούτων τὸ παριστῶν τὴν γνωστὴν αὐτοῦ τιμὴν κλάσμα καὶ τραπῶσιν ταῦτα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιαζομένων τῶν ὅρων ἑκατέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἑτέρου· διότι οὕτω θὰ προκύψωσι τὰ ἑξῆς ὁμώνυμα κλάσματα·

$$\Sigma_\mu^\nu = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdot\cdot\cdot\cdot(\mu-\nu+1)\;.\;1\,2.3.\;\cdot\cdot\cdot(\mu-\nu)}{1.2.3.\;\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(\nu-1).\nu\quad .\;1.2.3.\;\cdot\cdot\cdot(\mu-\nu)}$$

$$\Sigma_\mu^{\mu-\nu} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(\nu+1)\;.\;1.2.3.\;\cdot\cdot(\nu-1).\nu}{1.2.3.\cdot\cdot\cdot(\mu-\nu+1)(\mu-\nu)\;.\;1.2.3.\;\cdot\cdot(\nu-1).\nu},$$

ἅτινα, ὡς ἔχοντα προφανῶς καὶ τοὺς ἀριθμητὰς ἴσους, εἶναι ἴσα.

275. **Θεώρημα** 2ον. *Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ τῶν συνδυασμῶν μ—1 πραγμάτων ἀνὰ ν, ηὐξυμένῳ κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν μ—1 πραγμάτων ἀνὰ ν—1.*

Διότι οἱ συνδυασμοὶ τῶν μ γραμμάτων α,β,γ,...,κ ἀνὰ ν, δύνανται νὰ διακριθῶσιν εἰς δύο κατηγορίας, δηλαδὴ εἰς τοὺς μὴ περιέχοντας γράμμα τι, οἷον τὸ κ, καὶ εἰς τοὺς περιέχοντας αὐτό. Καὶ οἱ μὲν πρῶτοι ἀποτελοῦσι προφανῶς τοὺς συνδυασμοὺς τῶν μ—1 πρώτων γραμμάτων ἀνὰ ν. Οἱ δὲ τῆς δευτέρας κατηγορίας προκύπτουσιν ἐκ τῶν συνδυασμῶν τῶν μ—1 πρώτων γραμμάτων ἀνὰ ν—1, ἂν εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν προστεθῇ τὸ γράμμα κ. Λοιπὸν οὕτω θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma_\mu^\nu = \Sigma_{\mu-1}^\nu + \Sigma_{\mu-1}^{\nu-1}.$$

Ἔτι δὲ ἡ ἰσότης αὕτη ἐπαληθεύεται εὐκόλως διὰ τῆς προσθέσεως τῶν τιμῶν ἑκατέρου τῶν συνδυασμῶν τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος ταύτης· διότι οὕτω θὰ προκύψῃ ὁ ἀριθμὸς $\frac{\mu(\mu-1)\ldots.(\mu-\nu+1)}{\ldots.1.2.3\ldots.\nu}$, ὅστις παριστᾷ τὴν τιμὴν τῶν συνδυασμῶν τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν.

Παρατηρήσεις περὶ τῶν συνδυασμῶν.

276. Οἱ συνδυασμοὶ μ γραμμάτων α,β,γ,....κ ἀνὰ ν εὑρίσκονται καὶ ἀπ' εὐθείας, ἂν παρασταθῇ διὰ δύο τρόπων ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν ποσάκις γράμμα τι, οἷον τὸ α, ὑπάρχει εἰς τοὺς συνδυασμοὺς τούτους.

Πρὸς τοῦτο, ἐπειδὴ οἱ συνδυασμοὶ οὗτοι περιέχουσιν ἐν ὅλῳ $\nu.\Sigma_\mu^\nu$ γράμματα, ἕκαστον δὲ τούτων εἰσέρχεται εἰς αὐτοὺς προφανῶς ἰσάκις, ἕπεται ὅτι τὸ γράμμα α εἰσέρχεται εἰς $\frac{\nu}{\mu}.\Sigma_\mu^\nu$ ἐν ὅλῳ συνδυασμούς.

Ἂν δὲ ἐκ τῶν συνδυασμῶν τούτων, οὓς ὑπεθέτομεν ἐσχηματισμένους, ληφθῶσιν οἱ περιέχοντες τὸ γράμμα α, καὶ ἐξ αὐτῶν ἀφαιρεθῇ τὸ γράμμα α, θὰ προκύψωσι προφανῶς οἱ συνδυασμοὶ τῶν μ—1 ἄλλων γραμμάτων β,γ,δ,...,κ ἀνὰ ν—1, ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι τὸ γράμμα α εἰσέρχεται εἰς $\Sigma_{\mu-1}^{\nu-1}$ ἐν ὅλῳ συνδυασμοὺς τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν. Κατὰ ταῦτα προκύπτει ἡ ἰσότης

$$\frac{\nu}{\mu}.\Sigma_\mu^\nu=\Sigma_{\mu-1}^{\nu-1},\ \text{ἥτις γράφεται καὶ ὧδε}\ \Sigma_\mu^\nu=\frac{\mu}{\nu}\Sigma_{\mu-1}^{\nu-1};$$

π. χ.
$$\Sigma_8^3=\frac{8}{3}\Sigma_7^2\ \text{καὶ}\ \Sigma_{11}^5=\frac{11}{5}\Sigma_{10}^4.$$

Λοιπόν, ἂν ληφθῶσιν αἱ ἑξῆς ἰσότητες·

$$\Sigma_\mu^\nu=\frac{\mu}{\nu}\ \Sigma_{\mu-1}^{\nu-1},$$

$$\Sigma_{\mu-1}^{\nu-1}=\frac{\mu-1}{\nu-1}\ \Sigma_{\mu-2}^{\nu-2},$$

$$\Sigma_{\mu-2}^{\nu-2}=\frac{\mu-2}{\nu-2}\ \Sigma_{\mu-3}^{\nu-3},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\Sigma_{\mu-\nu+2}^2=\frac{\mu-\nu+2}{2}\ \Sigma_{\mu-\nu+1}^1,$$

$$\Sigma_{\mu-\nu+1}^1=\frac{\mu-\nu+1}{1},$$

καὶ πολλαπλασιασθῶσι πᾶσαι αὗται κατὰ μέλη, θὰ προκύψῃ ὁ ζητούμενος τύπος

$$\Sigma_\mu^\nu = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{\mu-1}{\nu-1} \cdot \frac{\mu-2}{\nu-2} \cdot \ldots \ldots \cdot \frac{\mu-\nu+2}{2} \cdot \frac{\mu-\nu+1}{1},$$

$$\text{ἤτοι } \Sigma_\mu^\nu = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2) \ldots (\mu-\nu+2)(\mu-\nu+1)}{1.2.3. \ldots (\nu-1).\nu}.$$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων εὐθυγράμμου σχήματος, τὸ ὁποῖον ἔχει μ πλευρὰς καὶ μ ἄρα κορυφάς $\left(\text{Ἀπ. } \frac{\mu(\mu-3)}{1.2}\right)$.

2) Εὑρεῖν πόσοι εἶναι οἱ διάφοροι τρόποι, καθ' οὓς δύναται νὰ σχηματισθῇ φρουρὰ ἐξ 8 στρατιωτῶν, εἰλημμένων ἀπὸ 60 τοιούτους;

3) Ἔμπορος ἔχων 8 εἴδη καφφὲ ἐπιθυμεῖ νὰ σχηματίσῃ ἐξ αὐτῶν μίγματα ἐξ ἴσων μερῶν, λαμβάνων δι' ἕκαστον τούτων ἐκ τριῶν διαφόρων εἰδῶν. Εὑρεῖν πόσα διάφορα τοιαῦτα μίγματα δύναται νὰ σχηματίσῃ;

4) Θέλεις τις νὰ θέσῃ κατὰ σειρὰν τριάκοντα βιβλία, τὰ ὁποῖα ἔχει. Εὑρεῖν εἰς πόσον χρόνον θὰ κάμῃ καθ' ἅπαντας τοὺς τρόπους τὰς τοποθετήσεις ταύτας, ἂν δι' ἑκάστην τούτων χρειάζηται ἓν δεύτερον λεπτὸν τῆς ὥρας;

ΔΙΩΝΥΜΟΝ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΟΣ

277. Ἐπειδὴ (§85) τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν γινομένων τῶν προκυπτόντων ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ὅρων τοῦ πολαπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον πολλῶν πολυωνύμων εὑρίσκεται (§85), ἂν τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ τρίτον πολυώνυμον, τὸ δὲ προκύψαν γινόμενον ἐπὶ τὸ τέταρτον καὶ ἐφεξῆς οὕτω, μέχρις οὗ πολαπλασιασθῶσι πάντα τὰ πολυώνυμα ταῦτα, ἕπεται ὅτι τὸ οὕτω προκύπτον γινόμενον τῶν πολλῶν πολυωνύμων ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν γινομένων τῶν σχηματιζομένων ἐξ ὅρων λαμβανομένων ἀνὰ ἕνα ἐξ ἑκάστου τῶν πολυωνύμων κατὰ πάντας τοὺς δυνατοὺς τρόπους.

Κατὰ ταῦτα τὸ ἐκ τῶν ἑξῆς τριῶν διωνύμων $\chi+\alpha$, $\chi+\beta$, $\chi+\gamma$ γινόμενον $(\chi+\alpha)(\chi+\beta)(\chi+\gamma)$ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι

$$\chi^3+\alpha\chi^2+\beta\chi^2+\gamma\chi^2+\alpha\beta\chi+\alpha\gamma\chi+\beta\gamma\chi+\alpha\beta\gamma,$$

ἤτοι τῷ $\quad \chi^3+(\alpha+\beta+\gamma)\chi^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\chi+\alpha\beta\gamma.$

Οὕτω δὲ διὰ τὸ γινόμενον τῶν ἑξῆς μ διωνύμων παραγόντων

$\chi+\alpha$, $\chi+\beta, \ldots, \chi+\kappa$, ἂν μὲν ἐξ ἑκάστου τῶν μ διωνύμων ληφθῇ ὁ πρῶτος ὅρος, θὰ προκύψῃ ὁ πρῶτος τοῦ γινομένου ὅρος χ^{μ}.

Ἂν δὲ ληφθῇ ἐκ μὲν τοῦ πρώτου διωνύμου παράγοντος ὁ δεύτερος ὅρος α, ἐκ δὲ τῶν λοιπῶν μ—1 ἄλλων διωνύμων ὁ πρῶτος ὅρος χ, θὰ προκύψῃ τὸ γινόμενον $\alpha\chi^{\mu-1}$, ὅπερ εἶναι ὡς πρὸς τὸν χ τοῦ μ—1 βαθμοῦ· ὡσαύτως δέ, ἂν ληφθῇ ἐκ μὲν τοῦ δευτέρου διωνύμου παράγοντος ὁ δεύτερος ὅρος β, ἐκ δὲ τῶν λοιπῶν μ—1 ἄλλων διωνύμων ὁ πρῶτος ὅρος χ, θὰ προκύψῃ τὸ γινόμενον $\beta\chi^{\mu-1}$· οὕτω δέ, ἂν λαμβάνηται ἐξ ἑκάστου μὲν διωνύμου ὁ δεύτερος ὅρος ἐκ δὲ τῶν λοιπῶν μ—1 ἄλλων διωνύμων ὁ πρῶτος, θὰ προκύψωσι πάντες οἱ ὅροι τοῦ γινομένου οἱ ἔχοντες τὸν παράγοντα $\chi^{\mu-1}$· ἂν δὲ ὅροι οὗτοι ἀναχθῶσιν εἰς ἕνα μόνον ὅρον, παρασταθῇ δὲ χάριν συντομίας διὰ τοῦ S_1, ὁ συντελεστὴς $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\kappa$ τοῦ προκύψαντος μ—1 βαθμοῦ ὡς πρὸς χ ὅρου, θὰ ἔχωμεν τὸν δεύτερον τοῦ γινομένου ὅρον $S_1\, \chi^{\mu-1}$.

Ὡσαύτως, ἂν ἐκ δύο μὲν οἱωνδήποτε τῶν διωνύμων τούτων ληφθῶσιν οἱ δεύτεροι ὅροι κατὰ πάντας τοὺς τρόπους, ἐξ ἑκάστου δὲ τῶν λοιπῶν μ—2 ἄλλων ὁ πρῶτος ὅρος χ, θὰ προκύψωσι πάντες οἱ ὅροι τοῦ γινομένου τῶν διωνύμων οἱ ἔχοντες τὸν χ εἰς τὸν μ—2 βαθμόν, ἤτοι οἱ $\alpha\beta\chi^{\mu-2}$, $\alpha\gamma\chi^{\mu-2}$, $\beta\gamma\chi^{\mu-2}\ldots$· ἂν δὲ πάντες οἱ ὅροι οὗτοι ἀναχθῶσιν εἰς ἕνα μόνον ὅρον, παρασταθῇ δὲ διὰ τοῦ S_2 ὁ συντελεστὴς τοῦ $\chi^{\mu-2}$, ὅστις εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων ἀνὰ δύο τῶν ἀριθμῶν $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \kappa$, θὰ προκύψῃ ὁ τρίτος τοῦ γινομένου ὅρος $S_2\chi^{\mu-2}$.

Ἂν δὲ νῦν ἐκ τριῶν μὲν οἱωνδήποτε τῶν διωνύμων τούτων παραγόντων ληφθῶσιν οἱ δεύτεροι ὅροι κατὰ πάντας τοὺς τρόπους, ἐξ ἑκάστου δὲ τῶν λοιπῶν μ—3 ἄλλων ὁ πρῶτος ὅρος χ, θὰ προκύψωσι πάντες οἱ τοῦ μ—3 βαθμοῦ ὡς πρὸς χ ὅροι $\alpha\beta\gamma\chi^{\mu-3}$, $\alpha\beta\delta\chi^{\mu-3}, \ldots\ldots$

Ἂν δὲ πάντες οὗτοι οἱ ὅροι ἀναχθῶσιν εἰς ἕνα μόνον ὅρον, παρασταθῇ δὲ διὰ τοῦ S_3 ὁ συντελεστὴς τοῦ $\chi^{\mu-3}$, ὅστις εἶναι τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν γινομένων ἀνὰ τριῶν τῶν δευτέρων ὅρων $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \kappa$, θὰ προκύψῃ ὁ τέταρτος τοῦ γινομένου ὅρος $S_3\chi^{\mu-3}$.

Ἐν γένει δέ, ἂν ἐκ ν μὲν οἱωνδήποτε διωνύμων παραγόντων ληφθῶσιν οἱ δεύτεροι ὅροι, ἐξ ἑκάστου δὲ τῶν μ—ν ἄλλων ὁ πρῶτος ὅρος χ, θὰ προκύψωσι πάντες οἱ τοῦ μ—ν βαθμοῦ ὡς πρὸς χ ὅροι τοῦ γινομένου· ἂν δὲ οἱ ὅροι οὗτοι ἀναχθῶσιν εἰς ἕνα μόνον ὅρον, παρασταθῇ δὲ διὰ τοῦ S_ν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν γινομένων τῶν προκυπτόντων ἐκ τῶν ἀριθμῶν $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \kappa$ ἀνὰ ν ἐλλημμένων, θὰ προκύψῃ ὁ γενικὸς τοῦ γινομένου ὅρος $S_\nu\chi^{\mu-\nu}$.

Ἂν δὲ ληφθῶσιν ἐκ τῶν $\mu-1$ διωνύμων οἱ δεύτεροι ὅροι, ἐξ ἑνὸς δὲ μόνου ὁ πρῶτος ὅρος κατὰ πάντας τοὺς τρόπους, θὰ προκύψωσιν οἱ τοῦ πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς χ ὅροι, ἐξ ὧν, ἂν ἀναχθῶσιν εἰς ἕνα μόνον ὅρον, θὰ προκύψῃ ὁ προτελευταῖος τοῦ γινομένου ὅρος $S_{\mu-1}\chi$.

Τέλος δέ, ἂν τὸ ἐκ πάντων τῶν δευτέρων ὅρων τῶν διωνύμων τούτων προκύπτον γινόμενον αβγ...κ παρασταθῇ διὰ τοῦ S_μ, θὰ ἔχωμεν τὸν τελευταῖον ὅρον τοῦ ζητουμένου γινομένου.

Κατὰ ταῦτα τὸ γινόμενον μ τοιούτων διωνύμων παραγόντων ἀναπτύσσεται κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον·

$$\chi^\mu+S_1\chi^{\mu-1}+S_2\chi^{\mu-2}+\ldots+S_\nu\chi^{\mu-\nu}+\ldots+S_{\mu-1}\chi+S_\mu.$$

278. Ἂν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι πάντων τῶν διωνύμων $\chi+\alpha, \chi+\beta, \ldots, \chi+\varkappa$ οἱ δεύτεροι ὅροι $\alpha, \beta, \ldots$ εἶναι ἴσοι, τὸ γινόμενον

$$(\chi+\alpha)(\chi+\beta)(\chi+\gamma)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(\chi+\varkappa)$$

γίνεται $(\chi+\alpha)^\mu$. Ἐν τῷ προκύψαντι δὲ ἀναπτύγματι τοῦ γινομένου τούτων τὸ μὲν ἄθροισμα S_1 τῶν ἀριθμῶν $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varkappa$ εἶναι μα, τὸ δὲ ἄθροισμα S_2 τῶν γινομένων τῶν δευτέρων ὅρων $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ ἀνὰ δύο, ἐπειδὴ ἕκαστον μὲν τῶν γινομένων τούτων ἰσοῦται τῷ α^2, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ τῶν συνδυασμῶν τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ δύο, ἤτοι τῷ ἀριθμῷ $\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}$, θὰ εἶναι $S_2=\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\alpha^2$.

Ὡσαύτως τὸ ἄθροισμα S_3 τῶν γινομένων τῶν δευτέρων ὅρων ἀνὰ τρία, ἐπειδὴ ἕκαστον μὲν τῶν γινομένων τούτων ἰσοῦται τῷ α^3, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ τῶν συνδυασμῶν τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ τρία θὰ εἶναι $S_3=\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3.}\alpha^3$.

Ἐν γένει δὲ τὸ S_ν παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν δευτέρων ὅρων $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa$ ἀνὰ ν· ἐπειδὴ δὲ ἕκαστον τῶν γινομένων τούτων ἰσοῦται τῷ α^ν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ τῶν συνδυασμῶν τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν, θὰ εἶναι

$$S_\nu=\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(\mu-\nu+1)}{1.2.3\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\nu}\alpha^\nu.$$

Τέλος δὲ ὁ τελευταῖος τοῦ ἀναπτύγματος ὅρος, ἤτοι τὸ γινόμενον τῶν μ δευτέρων ἴσων ὅρων γίνεται α^μ.

Κατὰ ταῦτα ἄρα προκύπτει ὁ ἑξῆς γενικὸς τύπος, ὁ ὁποῖος εἶναι γνωστὸς ὑπὸ τὸ ὄνομα *τύπος τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος*·

$$(\chi+\alpha)^\mu = \chi^\mu + \frac{\mu}{1}\alpha\chi^{\mu-1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\alpha^2\chi^{\mu-2} +$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\alpha^3\chi^{\mu-3}+\ldots\ldots+\frac{\mu}{1}\alpha^{\mu-1}\chi+\alpha^\mu. \quad (1)$$

Τοῦ τύπου δὲ τούτου γίνεται συνήθως ἐφαρμογή, διότι εἶναι χρήσιμος διὰ τὸ ἀνάπτυγμα οἱασδήποτε δυνάμεως διωνύμου ἐχούσης ἀκέραιον ἐκθέτην. Ὁ δὲ τὴν $\nu+1$ τάξιν κατέχων γενικὸς ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι, ὡς εἴπομεν,

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2.3.\ldots\ldots\nu}\alpha^\nu\chi^{\mu-\nu}. \quad (2)$$

Ἂν δὲ ἐν τῷ τύπῳ (1) ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τοῦ α τὸ —α, θὰ προκύψῃ ὁ τύπος

$$(\chi-\alpha)^\mu = \chi^\mu - \frac{\mu}{1}\alpha\chi^{\mu-1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\alpha^2\chi^{\mu-2} - \ldots\ldots \pm \alpha^\mu, \quad (3)$$

ἐν ᾧ τὰ σημεῖα τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι ἐναλλὰξ θετικὰ καὶ ἀρνητικά.

Παρατηρήσεις.

1η) Ἐν τῷ τύπῳ (1) τοῦ διωνύμου οἱ μὲν ἐκθέται τοῦ χ ἐλαττοῦνται κατὰ μονάδα ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον, οἱ δὲ τοῦ α τοὐναντίον αὐξάνουσιν, ὥστε ἐν ἑκάστῳ ὅρῳ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τοῦ χ καὶ τοῦ α εἶναι σταθερῶς ἴσον τῷ μ. Τὸ πλῆθος ἄρα τῶν ὅρων εἶναι $\mu+1$, διότι οἱ ἐκθέται τοῦ χ εἶναι οἱ ἑξῆς $\mu+2$ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ

$$\mu,\ \mu-1,\ \mu-2,\ \ldots,\ 2,\ 1,\ 0.$$

2α) Οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τῶν ἀπεχόντων ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων ὅρων εἶναι ἴσοι.

Διότι, ἂν ὁ τοῦ διωνύμου τύπος (1) γραφῇ ὧδε·

$$(\chi+\alpha)^\mu = \chi^\mu + \Sigma^1_\mu \alpha\chi^{\mu-1} + \Sigma^2_\mu \alpha^2\chi^{\mu-2} + \ldots \Sigma^{\mu-2}_\mu \alpha^{\mu-2}\chi^2 + \Sigma^{\mu-1}_\mu \alpha^{\mu-1}\chi + \alpha^\mu$$

συνάγεται ὅτι ἑκατέρου μὲν τῶν ἄκρων ὅρων ὁ συντελεστὴς ἰσοῦται τῇ μονάδι, τῶν δὲ ὅρων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν ἀντιστοίχως τάξιν ἀπὸ τῶν ἄκρων ὅρων οἱ συντελεσταὶ εἶναι ἴσοι, ἕνεκα τῆς ἰσότητος $\Sigma^\nu_\mu = \Sigma^{\mu-\nu}_\mu$ (§ 274).

Ἡ ἰσότης τῶν συντελεστῶν τούτων συνάγεται προσέτι ἐκ τοῦ εὑρεθέντος τύπου τοῦ διωνύμου, ἂν ἐν αὐτῷ τεθῇ ἀντὶ μὲν τοῦ χ τὸ α ἀντὶ δὲ τοῦ α τὸ χ, διότι θὰ προκύψῃ πάλιν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς μῆς δυνάμεως τοῦ αὐτοῦ διωνύμου $(\alpha+\chi)$, οἱ δὲ τῶν αὐτῶν δυνάμεων τοῦ χ συντελεσταὶ θὰ εἶναι ἀναγκαίως οἱ αὐτοὶ πάλιν ἀριθμοί.

3η) Οἱ συντελεσταὶ προκύπτουσιν εὐκόλως ἀπ' ἀλλήλων ὡς ἑξῆς· Πολλαπλασιάζεται ὁ συντελεστὴς τοῦ ἑκάστοτε προκύπτοντος ὅρου ἐπὶ τὸν ἐν τῷ ὅρῳ τούτῳ ἐκθέτην τοῦ χ, τὸ δὲ γινόμενον τούτων διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ παριστῶντος τὴν τάξιν τοῦ ὅρου τούτου, καὶ οὕτως εὑρίσκεται ὁ συντελεστὴς τοῦ ἑπομένου ὅρου.

Ἀσκήσεις.

1) Εὑρεῖν τὰ ἀναπτύγματα τῶν ἑξῆς διωνύμων·

$$(\chi+\alpha)^4,\quad (\chi+\alpha)^7 \text{ καὶ } (\chi-\alpha)^5.$$

Πρὸς τοῦτο κατὰ τοὺς ἀνωτέρω τύπους θὰ ἔχωμεν

$$(\chi+\alpha)^4=\chi^4+4\alpha\chi^3+6\alpha^2\chi^2+4\alpha^3\chi+\alpha^4.$$

$$(\chi+\alpha)^7=\chi^7+7\alpha\chi^6+21\alpha^2\chi^5+35\alpha^3\chi^4$$
$$+35\alpha^4\chi^3+21\alpha^5\chi^2+7\alpha^6\chi+\alpha^7.$$

$$(\chi-\alpha)^5=\chi^5-5\alpha\chi^4+10\alpha^2\chi^3-10\alpha^3\chi^2+5\alpha^4\chi-\alpha^5.$$

2) Ἀποδεῖξαι τὴν ἀλήθειαν τῆς ἑξῆς ἰσότητος·

$$(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})^7+(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^7=2\alpha(64\alpha^6-112\alpha^4+56\alpha^2-7).$$

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι τῶν ἀναπτυγμάτων τῶν δύο παραστάσεων τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἰσότητος οἱ ὅροι ἀνὰ δύο ἀντιστοίχως ἔχουσιν ἴσας ἀριθμητικὰς τιμὰς καὶ ὅτι ὁ 2ος, ὁ 4ος, ὁ 6ος καὶ ὁ 8ος ὅροι τοῦ ἀναπτύγματος τῆς δευτέρας παραστάσεως εἶναι ἀρνητικοί, καὶ κατ' ἀκολουθίαν μηδενίζουσι τοὺς ἀντιστοίχους ἀντιθέτους αὐτῶν ὅρους τῆς πρώτης παραστάσεως.

3) Ἐν τῷ ἀναπτύγματι τῆς παραστάσεως $(\chi^2-2\chi)^{10}$ εὑρεῖν τὸν συντελεστὴν τοῦ χ^{16}.

Ἂν πρὸς εὐκολίαν τῆς πράξεως ταύτης ἡ παράστασις αὕτη γραφῇ ὧδε $\chi^{20}\left(1-\dfrac{2}{\chi}\right)^{10}$, εὑρίσκεται ὅτι ὁ ζητούμενος συντελεστὴς ἰσοῦται τῷ

ἀριθμῷ $\Sigma_{10}^{4}\,(-2)^4=\dfrac{10.9.8.7}{1.2.3.4}\,.\,16=3360.$

4) Ἀποδεῖξαι ὅτι

$$\Sigma_\mu^1+\Sigma_\mu^2+\Sigma_\mu^3+\ldots\ldots+\Sigma_\mu^\mu=2^\mu-1,$$

$$\Sigma_\mu^1+\Sigma_\mu^3+\Sigma_\mu^5+\ldots=1+\left(\Sigma_\mu^2+\Sigma_\mu^4+\ldots\ldots\right).$$

ΠΕΡΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

279. ***Πιθανότης*** συμβάντος καλεῖται ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων πρὸς τὸν ὅλον ἀριθμὸν τῶν δυνατῶν περιπτώσεων, ἂν αἱ περιπτώσεις αὗται εἶναι πᾶσαι ἐξ ἴσου δυναταί.

Παραδείγματα.

1ον) Ἂν ῥίψῃ τις κύβον ἐπί τινος τραπέζης, ἡ πιθανότης νὰ φέρῃ ἐπάνω τὴν ἕδραν τῶν ἓξ στιγμῶν εἶναι $\frac{1}{6}$· διότι ἓξ μὲν περιπτώσεις δύνανται νὰ προκύψωσι, μία δὲ μόνη τούτων εἶναι ἡ εὐνοϊκή.

2ον) Ἂν ῥίψῃ τις ἐπί τινος ὁριζοντίου ἐπιπέδου δύο κύβους, ἡ πιθανότης νὰ ἔλθωσιν ἐπάνω δύο ἕδραι, ἐφ' ὧν αἱ σημειούμεναι στιγμαὶ νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 9, εἶναι $\frac{1}{9}$.

Διότι αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶναι ἐν ὅλῳ 36, ἐπειδὴ ἑκάστης ἕδρας τοῦ ἑτέρου κύβου ὁ ἀριθμὸς τῶν στιγμῶν δύναται νὰ συνδυασθῇ μεθ' ἑκάστου ἀριθμοῦ στιγμῶν τῶν ἓξ ἑδρῶν τοῦ ἑτέρου κύβου· ἐκ δὲ τούτων τῶν περιπτώσεων τέσσαρες μόναι εἶναι αἱ εὐνοϊκαί, αἵτινες δίδουσιν ἄθροισμα 9, αἱ ἑξῆς $3+6, 4+5, 5+4, 6+3$· κατ' ἀκολουθίαν ἡ πιθανότης εἶναι $\frac{4}{36}$, τουτέστιν $\frac{1}{9}$.

3ον) Ἂν ῥίψῃ τις ἐπί τινος τραπέζης τρεῖς κύβους, ἡ πιθανότης νὰ ἔλθωσιν ἐπάνω τρεῖς ἕδραι, ἐφ' ὧν τὸ ἄθροισμα τῶν σημειουμένων στιγμῶν νὰ εἶναι 15, εἶναι $\frac{5}{108}$.

Διότι αἱ μὲν δυναταὶ περιπτώσεις εἶναι ἐν ὅλῳ $6.6.6=216$, αἱ δὲ εὐνοϊκαὶ 10 αἱ ἑξῆς· $3+6+6$, $4+5+6$, $4+6+5$, $5+4+6$, $5+5+5$, $5+6+4$, $6+3+6$, $6+4+5$, $6+5+4$ καὶ $6+6+3$· κατ' ἀκολουθίαν ἡ πιθανότης εἶναι $\frac{10}{216}$, τουτέστιν $\frac{5}{108}$.

4ον) Ἂν ἔκ τινος κάλπης, περιεχούσης 15 σφαιρίδια τοῦ αὐτοῦ ὄγκου καὶ ὕλης, ἐξ ὧν τὰ 6 λευκὰ τὰ δὲ 9 μέλανα, ἐξαχθῇ ἓν σφαιρίδιον κατὰ τύχην, ἡ πιθανότης νὰ εἶναι μὲν λευκὸν τὸ ἐξαχθὲν εἶναι $\frac{6}{15}$, τουτέστιν $\frac{2}{5}$, νὰ εἶναι δὲ μέλαν εἶναι $\frac{9}{15}$, τουτέστιν $\frac{3}{5}$.

5ον) Ἂν ἐκ κάλπης περιεχούσης 8 σφαίρας λευκάς, 7 ἐρυθρὰς καὶ 9 μελαίνας, τοῦ αὐτοῦ ὄγκου καὶ ὕλης, ἐξαχθῇ κατὰ τύχην μία σφαῖρα, τίς ἡ πιθανότης ὅτι ἡ σφαῖρα αὕτη θὰ εἶνε εἴτε λευκή, εἴτε ἐρυθρά; $\left(\text{Ἀπ. } \frac{8+7}{8+7+9} = \frac{5}{8}\right)$.

6ον) Ἂν ἔν τινι κάλπῃ περιέχονται οἱ πεντήκοντα πρῶτοι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 1, 2, 3,.., 49,50, ἐξαχθῶσι δὲ ἐκ τούτων τρεῖς κατὰ τύχην ὁ εἷς μετὰ τὸν ἄλλον, τίς εἶναι ἡ πιθανότης ὅτι οἱ ἐξαχθησόμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶναι κατὰ σειρὰν ὁ 1, ὁ 2 καὶ ὁ 3; Πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τούτου παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ μὲν δυναταὶ περιπτώσεις εἶναι ὅσαι αἱ διατάξεις τῶν πεντήκοντα ἀριθμῶν ἀνὰ τριῶν, τουτέστιν 50.49.48, ἡ δὲ εὐνοϊκὴ περίπτωσις μία μόνη· κατ' ἀκολουθίαν ἡ πιθανότης εἶναι $\frac{1}{50.49.48}$. Ἡ δὲ πιθανότης νὰ ἐξαχθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 1,2,3 καθ' οἱανδήποτε τάξιν εἶναι $\frac{1.2.3.}{50.49.48}$· διότι αἱ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις ἐπὶ τοῦ προκειμένου εἶναι ὅσαι αἱ μεταθέσεις τῶν τριῶν ἀριθμῶν 1,2 καὶ 3· διότι εἶναι ἐκεῖναι ἐκ τῶν διατάξεων τῶν πεντήκοντα ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀνὰ τρία, ὅσαι ἔχουσι τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς 1, 2, 3.

7ον) Ἂν ἐκ κληρωτίδος περιεχούσης 12 κλήρους, ἐφ' ὧν εἶναι ἀναγεγραμμένοι οἱ δώδεκα πρῶτοι ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἐξαχθῶσι κατὰ τύχην δύο κλῆροι, τίς εἶναι ἡ πιθανότης, ὅτι ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι 5, ὁ δὲ δεύτερος ὁ 8; $\left(\text{Ἀπ. } \frac{1}{12 \times 11} = \frac{1}{132}\right)$.

8ον) Ἂν ῥίψωμεν δύο κύβους ἐπί τινος τραπέζης, τίς εἶναι ἡ πιθανότης ὅτι θὰ ἔλθωσιν ἐπάνω αἱ ἕδραι, ἐφ' ἑκατέρας τῶν ὁποίων θὰ ἔχωσι σημειωθῇ 4 στιγμαί; $\left(\text{Ἀπ. } \frac{1}{36}\right)$.

9ον) Ἂν λαχεῖόν τι ἀπετελεῖτο ἐξ 80 ἀριθμῶν, καθ' ἑκάστην δὲ κλήρωσιν ἐξήγοντο 4 ἐξ αὐτῶν κατὰ τύχην, τότε δὲ μόνον ὁ ἔχων δεδηλωμένον ἀριθμόν τινα, οἷον τὸν 10, θὰ ἐκέρδιζεν, ἂν ὁ ἀριθμὸς 10 περιελαμβάνετο μεταξὺ τῶν 4 ἐξαχθέντων, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τίνα πιθανότητα εἶχεν ὁ δηλώσας τὸν ἀριθμὸν 10.

Αἱ μὲν δυναταὶ περιπτώσεις, νὰ ἐξαχθῶσι δηλαδὴ 4 ἀριθμοὶ ἐκ τῶν 80, εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν τῶν 80 ἀριθμῶν ἀνὰ 4, αἱ δὲ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις εἶναι ἐκ τῶν συνδυασμῶν τούτων οἱ περιέχοντες τὸν ἀριθμὸν 10· ἵνα δὲ σχηματίσωμεν τούτους, ὑποθέσωμεν ὅτι ἀφῃρέσαμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον 10 καὶ ὅτι συνεδυάσαμεν τοὺς 79 ἄλλους ἀριθμοὺς ἀνὰ 3, εἶτα δὲ εἰς ἕκαστον τοῦτον προσεθέσαμεν τὸν ἀριθμὸν 10· κατ' αὐτὸν ἄρα τὸν τρόπον θὰ ἔχωμεν πάντας τοὺς συνδυασμοὺς τοὺς ἔχοντας τὸν ἀριθμὸν 10. Κατ' ἀκολουθίαν ὁ ἀριθμὸς τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν τῶν 79 ἀριθμῶν ἀνὰ 3.

Λοιπὸν ἡ πιθανότης θὰ εἶναι

$$\Sigma_{79}^{3}:\Sigma_{80}^{4}=\frac{79.78.77}{1.2.3.}:\frac{80.79.78.77}{1.2.3.4}=\frac{4}{80}=\frac{1}{20}.$$

Ἂν δὲ εἶχέ τις δηλώσῃ δύο ἐκ τῶν 80 ἀριθμῶν, ἐκέρδιζε δὲ ἂν οὗτοι περιείχοντο μεταξὺ τῶν 4 ἐξαχθέντων, ἡ πιθανότης θὰ ἦτο

$$\Sigma_{78}^{2}:\Sigma_{80}^{4}=\frac{3.4}{80.79},\ \text{τουτέστιν}\ \frac{3}{1580}.$$

10ον) Ἂν ῥίψῃ τις ἓν νόμισμα κατὰ τύχην τετράκις, τίς εἶναι ἡ πιθανότης ὅτι τὸ νόμισμα πῖπτον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους θὰ δεικνύῃ πάντοτε τὸ πρόσωπον; $\left(\text{Ἀπ. } \frac{1}{2^4}\right)$.

11ον) Ἂν ῥίψῃ τις δύο νομίσματα πεντάκις, τίς εἶναι ἡ πιθανότης ὅτι ἀμφότερα τὰ νομίσματα πεσόντα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους θὰ δεικνύωσι πάντοτε τὸ πρόσωπον; $\left(\text{Ἀπ. } \frac{1}{4^5}\right)$.

ΤΕΛΟΣ

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελ. 19 στ. τελευταῖος ἀντὶ $\left(\frac{3}{11}\right)$ γρ. $\left(\frac{3}{11}\right)^7$.

» 20 » 1 ἀντὶ α^{μ} γρ, $\alpha^{-\mu}$.

» 48 » 13 παραλειπτέον τὸ «ἡ μετασχηματίζεται».

» 74 » 13 ἀντὶ 52 καὶ 78 γρ. 54 καὶ 46.

» 121 » 1 ἀντὶ βιβλίον Γ' γρ. βιβλίον Δ'.

» 161 » 1 ἀντὶ βιβλίον Δ' γρ. βιβλίον Ε'.

» 216 » 13 προσθετέον μετὰ τὸ λαμβάνοντες τὸ γράμμα ν.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἀκέραιοι ἀριθμοί. Κλασματικοὶ ἀριθμοί. Περὶ τοῦ μηδενὸς ὡς ἀριθμοῦ. Ἀριθμοὶ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοί. Δυνάμεις καὶ ἀρχικαὶ αὐτῶν ἰδιότητες. Ῥίζαι θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν. Σελ. 3

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄

Προκαταρκτικαὶ ἔννοιαι καὶ ὁρισμοί. 24

Μεταβληταὶ ποσότητες καὶ συναρτήσεις. Περὶ τῆς ὁμαλῆς κινήσεως σημείου. 30

Ἀλγεβρικαὶ πράξεις. Πρόσθεσις, Ἀφαίρεσις, Πολλαπλασιασμὸς καὶ Διαίρεσις Ἀλγεβρικῶν παραστάσεων. Ταυτότητες ἀξιοσημείωτοι. Ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου διὰ τοῦ χ—α. Κλασματικαὶ παραστάσεις. 33

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄

Ἐξισώσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ. 51

Ἐπίλυσις ὁσωνδήποτε ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μετ᾽ ἰσαρίθμων ἀγνώστων. 77

Περὶ ἀνισοτήτων. 97

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄

Περὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. 99

Περὶ ὁρίων. 102

Περὶ ῥιζῶν. 105

Περὶ φανταστικῶν ἀριθμῶν. Νόμοι τῶν δυνάμεων. 112

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄

Ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ. Ἀνισότητες τοῦ δευτέρου βαθμοῦ. Διτετράγωνοι ἐξισώσεις. Μετασχηματισμὸς τῶν παραστάσεων τῆς μορφῆς $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$. Ἐξισώσεις ἔχουσαι ῥιζικά. 121

ΒΙΒΛΙΟΝ Ε'

Πρόοδοι ἀριθμητικαί. Πρόοδοι γεωμετρικαί. Σελ. 161
Λογάριθμοι. Δυνάμεις ἔχουσαι ἀσύμετρον ἐκθέτην.
Περὶ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων καὶ τῆς χρήσεων αὐτῶν. 172
Περὶ ἀνατοκισμοῦ. Περὶ χρεωλυσίου. Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις.
Ἀλλαγὴ βάσεως λογαρίθμων. 191
Ὁρισμὸς τῶν λογαρίθμων ὡς ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου. 209
Περὶ διατάξεων, μεταθέσεων καὶ συνδυασμῶν. Τύπος τοῦ διωνύμου. Περὶ πιθανότητος. 216
Παροράματα. 230