ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΑ ΜΟΝΑ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΚΑΤΗ ΤΕΤΑΡΤΗ

Ἀριθμὸς καὶ χρονολογία
ἐγκριτικῆς ἀποφάσεως $\frac{22}{17 \text{ Ὀκτωβρίου } 1918}$

Δ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΤΥΠΟΙΣ Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
1920

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ γεωμετρία ἐξετάζει τὰ σώματα ὡς πρὸς τὴν ἔκτασιν, τὸ σχῆμα καὶ τὴν θέσιν· τὸ ἔργον δ' αὐτῆς τοῦτο εἶναί τι ποικίλον καὶ πολλαπλοῦν· ἐνῷ ἡ ἀριθμητική, ἐξετάζουσα αὐτὰ μόνον ὡς πρὸς τὸ πλῆθος, ἔχει ἔργον ἁπλοῦν. Ἀμφότεραι θεμελιοῦνται ἐπί τινων ἁπλουστάτων πρώτων ἐννοιῶν, ἐν ἡμῖν διὰ τῆς ἐπιδράσεως τοῦ ἐκτὸς ἡμῶν κόσμου γιγνομένων, δι' ὧν αἱ λοιπαὶ ὁρίζονται, καὶ ἐπί τινων προτάσεων καλουμένων ἀξιωμάτων ἢ αἰτημάτων δι' ὧν αἱ λοιπαὶ ἀποδεικνύονται. Ἀλλ' αἱ θεμελιώδεις ἔννοιαι καὶ αἱ θεμελιώδεις προτάσεις τῆς γεωμετρίας, ἤτοι αἱ ἀρχαὶ αὐτῆς, εἶναι διὰ τὸ πολλαπλοῦν καὶ ποικίλον τοῦ ἔργου αὐτῆς ποικίλαι καὶ διάφοροι ἀπ' ἀλλήλων (τὰ ἀξιώματα, λόγου χάριν, τῆς ἰσότητος καὶ τῆς ἀνισότητος εἶναι πάντη διάφορα τῶν ἀξιωμάτων τῆς εὐθείας γραμμῆς, καὶ ταῦτα διάφορα τῶν τῆς συνεχείας καὶ τῆς κινήσεως)· ὅθεν καὶ τὰ θεωρήματα αὐτῆς δὲν ἔχουσι τὴν ἑνότητα καὶ τὸ ὁμοιόμορφον τῶν θεωρημάτων τῆς ἀριθμητικῆς, μάλιστα δὲ τῆς γενικῆς, ἥτις ἀπὸ ὀλιγίστων ἀρχῶν ἀναπτύσσεται.

Ἐκ τούτων ἐννοεῖ πᾶς τις, ὅτι ἡ ἔρευνα τῶν θεμελιωδῶν τῆς γεωμετρίας προτάσεων καὶ ἐννοιῶν, ἡ ἐξακρίβωσις δηλονότι τῆς πρὸς ἀλλήλας σχέσεως αὐτῶν καὶ τῆς σημασίας καὶ δυνάμεως ἑκάστης, ἔτι δὲ καὶ ἡ διάκρισις αὐτῶν εἰς εἴδη, θὰ ἦτο τὰ μέγιστα ὠφέλιμος εἰς τὴν διάπλασιν τῆς γεωμετρίας. Ἀλλ' ἕνεκα τῆς δυσκολίας τοῦ πράγματος αἱ τοιαῦται ἔρευναι εἰς οὐδὲν μέχρι τοῦδε κατέληξαν συμπέρασμα δυνάμενον νὰ ἐπιδράσῃ ἐπὶ τῇ διαπλάσεως τῶν στοιχείων, οὐδὲ συμφωνοῦσι μάλιστα οἱ μαθηματικοὶ εἰς τὴν ἐκλογὴν τῶν θεμελιωδῶν τούτων ἐννοιῶν καὶ προτάσεων, ἀλλ᾽ ἄλλοι ἄλλας λαμβάνουσι.

Γράφων τὰ παρόντα στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας, ἵνα χρησιμεύσωσιν ὡς διδακτικὸν βιβλίον εἰς τοὺς μαθητὰς τῶν γυμνασίων, ἔλαβον, ὡς ἦτο ἑπόμενον, θεμελιώδεις ἐννοίας καὶ προτάσεις ὅσον οἷόν τε ἁπλᾶς καὶ συνήθεις τῇ διανοίᾳ τοῦ μαθητοῦ· ἔκρινα δὲ ὡς ἁπλουστέρας ἐκείνας, αἵτινες πρωιμώτερον γεννῶνται ἐν ἡμῖν καὶ συχνότερον ἐξεγείρονται ἐν τῇ συνειδήσει διὰ τῆς παρατηρήσεως· διότι αὗται εἶναι προχειρόταται εἰς τὴν διάνοιαν τοῦ μαθητοῦ καὶ διὰ τοῦτο εἶναι τὸ καταλληλότατον θεμέλιον, ἐφ᾽ οὗ οἰκοδομοῦνται αἱ μετὰ ταῦτα γνώσεις. Ἁπλουστέρα, λόγου χάριν, εἶναι ἡ ἔννοια τῆς εὐθείας γραμμῆς ἢ ἡ ἔννοια τῆς περιστροφῆς στερεοῦ περὶ δύο σημεῖα αὐτοῦ ἀκίνητα· διότι πάντες, καὶ οἱ μηδεμιᾶς τυχόντες μορφώσεως, ἔχουσιν, ἐκ παίδων μάλιστα, τὴν ἰδέαν τῆς εὐθείας, ἐνῷ τῆς περιστροφῆς περὶ δύο σημεῖα ἀκίνητα καὶ τῶν κατ᾽ αὐτὴν συμβαινόντων, ὀλίγιστοι. Ὁρίζοντες λοιπὸν τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν διὰ τῆς περιστροφῆς στερεοῦ, ὁρίζομεν ἁπλούστερον, ἀμέσως ἐν τῇ διανοίᾳ ἡμῶν εὑρισκόμενον, δι᾽ ἄλλου πολυπλοκωτέρου. Ὅτι δὲ οὕτως ἔχει, ἕκαστος δύναται νὰ βεβαιωθῇ διδάσκων εἰς παιδίον τὰς ἀρχὰς τῆς γεωμετρίας. Ἡ ἔννοια τῆς εὐθείας γραμμῆς εἶναι οὕτως ἁπλῆ, ὥστε εἶναι ἀδύνατον νὰ ὁρισθῇ δι᾽ ἁπλουστέρων ἐννοιῶν, χρησιμεύει δὲ μᾶλλον πρὸς ὁρισμὸν τῶν ἄλλων σχημάτων.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔλαβον ὡς ἀξιώματα τὰς ἁπλουστάτας προτάσεις «ὅτι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι συντομωτέρα πάσης τεθλασμένης ἐχούσης τὰ αὐτὰ πέρατα» καὶ «ὅτι ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ τόξον τοῦ κύκλου ἔχουσι μέσον» καὶ ἄλλας ὁμοίας. Διότι αἱ προτάσεις αὗται μοὶ ἐφάνησαν κατὰ πολὺ ἁπλούστεραι ἐκείνων, δι᾽ ὧν ἀποδεικνύονται ὑπ᾽ ἄλλων.

Ἐν τῷ ὁρισμῷ τῶν ἴσων συμπεριέλαβον εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἀφοῦ διαιρεθῶσιν εἰς μέρη· διότι ἐν τοῖς θεωρήμασι τοῦ πρώτου βιβλίου, ἐν οἷς γίνεται λόγος περὶ τοῦ ἀθροίσματος γωνιῶν, ἡ ἰσότης ὑποτίθεται κατὰ μέρη· τὰ ἐν αὐτοῖς δηλονότι ἀναφερόμενα ἴσα ἐφαρμόζουσι, μόνον ἀφοῦ διαιρεθῶσιν εἰς μέρη.

Τὰ θεωρήματα περὶ τῆς ἰσότητος τῶν στερεῶν τριέδρων γωνιῶν ἔταξα ἐν παραρτήματι εἰς τὸ τέλος τοῦ Ε´ βιβλίου· ὡσαύτως τὰ περὶ συμμετρίας εἰς τὸ τέλος τοῦ ϛ´ καὶ τὰ περὶ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων εἰς τὸ τέλος τοῦ Ζ´. Τὰ τρία ταῦτα παραρτήματα δέν μοι φαίνονται χρήσιμα, εἰ μὴ δι᾽ ἐκείνους οἵτινες μέλλουσι νὰ σπουδάσωσιν εἰδικῶς τὰ μαθηματικὰ ἢ συγγενῆ τινα ἐπιστήμην· διὰ τοῦτο ἐν τῇ γυμνασιακῇ διδασκαλίᾳ δύνανται νὰ παραλείπωνται· ἐπίσης ἐσημείωσα δι᾽ ἀστερίσκων καὶ ἄλλα τινὰ θεωρήματα, ἐφ᾽ ὧν οὐδὲν τῶν ἑπομένων στηρίζεται, καὶ τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ παραλείπωνται, ἐὰν ὁ χρόνος δὲν συγχωρῇ τὴν διδασκαλίαν αὐτῶν.

Ιωαννης Ν. Χατζιδακις

σκοπὸς γινομένη, ἡ ἰσότης ὑποτίθεται κατὰ μέσον ὅρον τὰ ἐκ τούτου σφάλματα ἀναφερόμενα ἴσα ὑπερκαλύπτουσι μόνον ὅσον ἀ... σιν εἰς μέρη.

Τὰ θεωρητικὰ περὶ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ... ἐν παραρτήματι εἰς τὸ τέλος τοῦ 1. βιβλίου, ... τα περὶ ... εἰς τὸ τέλος τοῦ 2. καὶ τὰ περὶ τῶν σφαιρικῶν ... τοῦ 3. Τὰ τρία ταῦτα παραρτήματα ... φαίνονται γράμματα. Εἰ καὶ ... τὰ καθηγητικὰ ... ἐν τῇ γυμνασιακῇ διδασκαλίᾳ ... νὰ παραλείπωνται ... τὰ ... τῶν ... νὰ παραλείπωνται, ἐὰν ὁ χρόνος ... τὴν ... τούτων.

ΙΩΑΝΝΗΣ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΠΡΩΤΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Εἰς τὰ πράγματα, ἅτινα βλέπομεν ἢ ἐγγίζομεν, καὶ τὰ ὁποῖα καλοῦμεν ὑλικὰ σώματα, διακρίνομεν (πλὴν τῆς ὕλης, ἐξ ἧς ἀποτελοῦνται) σχῆμα καὶ ἔκτασιν ἢ μέγεθος.

2. *Γεωμετρία* λέγεται ἡ ἐπιστήμη, ἥτις ἐξετάζει τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν.

3. Ὅταν ἐξετάζωμεν μόνον τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν τῶν σωμάτων, ἀδιαφοροῦντες περὶ τῆς ὕλης, ἐξ ἧς ἀποτελοῦνται, καλοῦμεν αὐτὰ *σώματα γεωμετρικὰ* ἢ *στερεά*.

4. Πᾶν τὸ ἔχον ἔκτασιν δύναται νὰ νοηθῇ διῃρημένον εἰς μέρη.

5. Τὰ ἄκρα ἑκάστου σώματος ἀποτελοῦσιν ὅλα ὁμοῦ τὴν *ἐπιφάνειαν* αὐτοῦ. Καὶ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν διακρίνομεν σχῆμα καὶ ἔκτασιν· ἀλλ᾽ ἡ ἔκτασις τῆς ἐπιφανείας εἶναι ἄλλου εἴδους ἢ ἡ ἔκτασις τῶν σωμάτων.

6. Τὰ ἄκρα τῆς ἐπιφανείας ἢ μέρος τῆς ἐπιφανείας ἀποτελοῦσιν ὅλα ὁμοῦ *γραμμήν*. Καὶ εἰς τὴν γραμμὴν διακρίνομεν σχῆμα καὶ ἔκτασιν· διαφέρει ὅμως ἡ ἔκτασις τῆς γραμμῆς ἀπὸ τῶν δύο προηγουμένων.

7. Τὰ ἄκρα γραμμῆς ἢ μέρους γραμμῆς λέγονται *σημεῖα*. Τὸ δὲ σημεῖον δὲν ἔχει ἔκτασιν οὔτε μέρη.

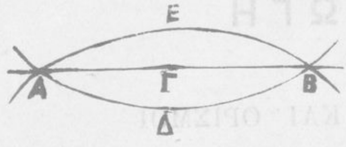
8. Τὸ μέρος εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς πρὸς τὸ ὅλον, ἤτοι τὰ μέρη τοῦ σώματος εἶναι σώματα, τὰ μέρη τῆς ἐπιφανείας εἶναι ἐπιφάνειαι καὶ τὰ μέρη τῆς γραμμῆς γραμμαί.

Τὰ σημεῖα καὶ αἱ γραμμαὶ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι ἐξετάζονται ἐν τῇ γεωμετρίᾳ καὶ καθ᾽ ἓν χωριστά, ἤγουν *ἄνευ τῶν σωμάτων*, *εἰς τὰ ὁποῖα* *εὑρίσκονται*· καθὼς εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ἐξετάζονται οἱ ἀριθμοὶ καὶ ἄνευ τῶν πραγμάτων, τὰ ὁποῖα παριστῶσιν.

9. Ὅταν ἐξετάζωμεν τὰ στερεά, τὰς ἐπιφανείας καὶ τὰς γραμμὰς ὡς πρὸς τὸ σχῆμα, λέγομεν καὶ αὐτὰ ἑνὶ ὀνόματι *σχήματα*· ὅταν δὲ ὡς πρὸς τὴν ἔκτασιν, τὰ λέγομεν *ποσὰ γεωμετρικὰ* ἢ *μεγέθη*.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὰ σημεῖα, αἱ γραμμαί, αἱ ἐπιφάνειαι καὶ τὰ στερεὰ παρίστανται δι' εἰκόνων, αἵτινες καὶ αὐταὶ λέγονται *σχήματα*. Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ

διακρίνωμεν σημεῖόν τι, γράφομεν πλησίον αὐτοῦ γράμμα τι τοῦ ἀλφαβήτου· οὕτω, λέγομεν, τὸ σημεῖον Α, ἤτοι τὸ σημεῖον πλησίον τοῦ ὁποίου εἶναι τὸ γράμμα Α.



Ἡ γραμμὴ διακρίνεται συνήθως διὰ δύο γραμμάτων, γραφομένων ἐπὶ δύο σημείων αὐτῆς, ὡς ἡ γραμμὴ ΑΒ. Ἀλλ' ἐὰν διὰ τῶν αὐτῶν σημείων διέρχωνται πολλαὶ γραμμαί, μεταχειριζόμεθα πρὸς διάκρισιν αὐτῶν περισσότερα γράμματα· οὕτω, λέγομεν, ἡ γραμμὴ ΑΓΒ, ἡ γραμμὴ ΑΔΒ, ἡ ΑΕΒ κτλ

10. Ἡ γεωμετρία θεμελιοῦται ἐπί τινων κρίσεων, διὰ τῶν ὁποίων σκεπτόμενοι διακρίνομεν τὸ ἀληθὲς ἀπὸ τοῦ ψευδοῦς· διότι ὅσα μὲν πρὸς αὐτὰς ἀντιβαίνουσι, λέγομεν ψευδῆ, ὅσα δὲ συμφωνοῦσι, λέγομεν ἀληθῆ· περὶ τῶν κρίσεων ὅμως τούτων οὐδεμίαν δεχόμεθα ἀντίρρησιν, θεωροῦντες αὐτὰς ὡς *ἀφ' ἑαυτῶν φανεράς*. Αἱ κρίσεις αὗται λέγονται *ἀξιώματα* ἢ *αἰτήματα*.

Παράδειγμα ἀξιώματος ἔστω τὸ ἑπόμενον *ἀξίωμα*:

Πᾶν σχῆμα δύναται ν' ἀλλάξῃ θέσιν χωρὶς αὐτὸ νὰ μεταβληθῇ τὸ παράπαν.

11. *Ἀπόδειξις* λέγεται συλλογισμὸς (ἢ πολλοὶ συλλογισμοί), δι' οὗ πειθόμεθα, ὅτι πρότασίς τις εἶναι ἀληθής.

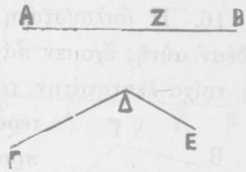
12. *Θεώρημα* δὲ λέγεται ἡ πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερὰ διὰ τῆς ἀποδείξεως.

13. *Πόρισμα* λέγεται πρότασις στηριζομένη ἀμέσως ἐπὶ μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἀληθῶν προτάσεων.

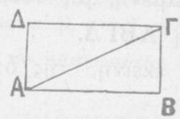
ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ

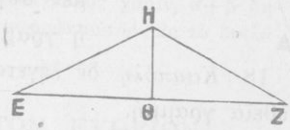
14. *Ἴσα* λέγονται δύο σχήματα, ὅταν δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσι, τουτέστι νὰ καταλάβωσι τὸν αὐτὸν τόπον, ὥστε πᾶν σημεῖον ἑκατέρου αὐτῶν νὰ εἶναι σημεῖον καὶ τοῦ ἄλλου.

Δυνατὸν δύο σχήματα ἀκέραια μὲν νὰ μὴ ἐφαρμόζωσι, νὰ ἐφαρμόζωσιν ὅμως, ἀφοῦ διαιρεθῶσιν εἰς μέρη. Ἄν, π. χ., ἡ γραμμὴ ΓΔ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς ΑΖ καὶ ἡ ΔΕ ἐπὶ τῆς ΖΒ, αἱ δύο γραμμαὶ ΑΖΒ καὶ ΓΔΕ ἐφαρμόζουσιν, ἀφοῦ διαιρεθῶσιν, ἡ πρώτη εἰς τὰ μέρη ΑΖ, ΖΒ, ἡ δὲ δευτέρα εἰς τὰ μέρη ΓΔ, ΔΕ.



Ὁμοίως, ἂν ἡ ἐπιφάνεια ΕΗΘ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς ΑΓΒ καὶ ἡ ΗΘΖ ἐπὶ τῆς ΑΔΓ, αἱ δύο ἐπιφάνειαι ΑΒΓΔ καὶ ΕΗΖ ἐφαρμόζουσιν, ἀφοῦ διαιρεθῶσιν εἰς μέρη· ἀκέραιαι ὅμως δὲν δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσι.





Καὶ τὰ τοιαῦτα σχήματα λέγονται ἴσα, ὡς καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἀκέραια· ὅταν ὅμως θέλωμεν νὰ διακρίνωμεν τὰ δύο εἴδη τῶν ἴσων (τουτέστι τὰ ἐφαρμόζοντα ἀκέραια καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα διῃρημένα), καλοῦμεν τὰ δεύτερα *ἴσα κατὰ μέρη*, ἢ *ἴσα τὴν ἔκτασιν* ἢ *ἰσοδύναμα*.

15. *Μικρότερον* ἄλλου λέγεται σχῆμά τι, ἐὰν εἶναι ἴσον πρός τι μέρος αὐτοῦ, τὸ δὲ ἄλλο λέγεται *μεγαλήτερον*· π. χ., τὸ σχῆμα ΑΒΓ εἶναι μικρότερον τοῦ ΕΗΖ.

Ἄνισα λέγονται δύο σχήματα, ἐὰν τὸ ἓν εἶναι ἴσον μὲ μέρος τι τοῦ ἄλλου· π. χ., τὰ σχήματα ΑΒΓ καὶ ΕΗΖ εἶναι ἄνισα.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ

1) *Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα εἶναι καὶ ἀλλήλοις ἴσα.*

Ἐὰν δηλονότι δύο σχήματα Α καὶ Β ἐφαρμόζωσιν ἀμφότερα ἐπί τινος ἄλλου Γ, εἴτε ἀκέραια εἴτε διῃρημένα, καὶ τὰ σχήματα ταῦτα ἐφαρμόζουσιν ἐπ᾽ ἀλλήλων, εἴτε ἀκέραια εἴτε διῃρημένα.

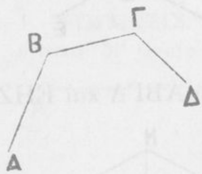
2) *Δύο σχήματα δὲν δύνανται τὰ αὐτὰ νὰ εἶναι καὶ ἴσα καὶ ἄνισα.*

Τουτέστι, κατά τινα μὲν τρόπον διαιρέσεως καὶ ἐπιθέσεως νὰ ἐφαρμόζωσι, κατ᾽ ἄλλον δὲ νὰ εἶναι τὸ ἓν μέρος τοῦ ἄλλου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Πρὸς παράστασιν τῆς ἰσότητος ἢ τῆς ἀνισότητος δύο γεωμετρικῶν μεγεθῶν, μεταχειριζόμεθα τὰ ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς γνωστὰ σημεῖα διὰ τῶν ὁποίων σημειοῦται ἡ ἰσότης ἢ ἡ ἀνισότης τῶν ἀριθμῶν· οἷον, $ΑΒΓΔ = ΕΖΗ$ καὶ $ΑΒΓ < ΕΗΖ$.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΓΡΑΜΜΗΣ

16. Ἡ ἁπλουστάτη τῶν γραμμῶν εἶναι ἡ *εὐθεῖα γραμμή*· τὴν ἰδέαν αὐτῆς ἔχομεν πάντες· σχηματίζομεν δ' αὐτὴν βλέποντες κλωστὴν ἢ τρίχα λεπτοτάτην τεταμένην (ἢ ἄλλα ὅμοια πράγματα)· ὅσῳ λεπτότερον εἶναι τὸ τεταμένον νῆμα, τόσῳ περισσότερον προσεγγίζει πρὸς τὴν εὐθεῖαν γραμμήν.



17. *Τεθλασμένη γραμμὴ* λέγεται ἡ ἐξ εὐθειῶν μὲν συγκειμένη, μὴ οὖσα δὲ εὐθεῖα· τοιαύτη εἶναι ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔ.

18. *Καμπύλη* δὲ λέγεται ἐκείνη, τῆς ὁποίας οὐδὲν μέρος εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Ὅτι δὲ ὑπάρχουσι καὶ τοιαῦται γραμμαί, θὰ δειχθῇ ἐν τοῖς ἑπομένοις.

19. Περὶ τῆς εὐθείας γραμμῆς δεχόμεθα τὰ ἑπόμενα ἀξιώματα, ἅτινα ἐκφράζουσι τὰς θεμελιώδεις ἰδιότητας αὐτῆς.

1) *Πᾶν μέρος εὐθείας γραμμῆς εἶναι καὶ αὐτὸ εὐθεῖα γραμμή.*

2) *Ἐκ παντὸς σημείου εἰς πᾶν ἄλλο σημεῖον ἄγεται μία εὐθεῖα γραμμὴ καὶ μόνον μία.*

3) *Πᾶσα εὐθεῖα δύναται νὰ αὐξηθῇ ἑκατέρωθεν ἑαυτῆς καὶ προχωρεῖ ἐφ' ὅσον θέλωμεν, χωρὶς νὰ διχασθῇ.*

4) *Πᾶσα εὐθεῖα δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ πάσης ἄλλης οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσωσι δύο οἱαδήποτε πέρατα αὐτῶν.*

Ἐὰν τότε καὶ τὰ ἕτερα δύο πέρατα συμπίπτωσιν, αἱ εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι· εἰ δὲ μή, ἡ μία εἶναι μικροτέρα τῆς ἄλλης.

5) *Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι μικροτέρα πάσης τεθλασμένης ἐχούσης τὰ αὐτὰ πέρατα.*

6) *Ἐκ δύο εὐθειῶν δύναται πάντοτε ἡ μικροτέρα πολλαπλασιαζομένη νὰ ὑπερβῇ τὴν μεγαλητέραν.*

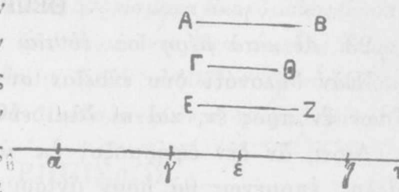
ΟΡΙΣΜΟΙ

20. *Ἀπόστασις* ἢ *ἀπόστημα* δύο σημείων λέγεται ἡ εὐθεῖα ἡ ταῦτα ἐπιζευγνύουσα.

21. *Ἄθροισμα* δύο ἢ περισσοτέρων εὐθειῶν λέγεται ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσιν αὗται, ὅταν τεθῶσι κατὰ σειρὰν ἐπὶ ἄλλης εὐθείας.

Παραδείγματος χάριν, τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΘ, ΕΖ, ἄθροισμα εἶναι ἡ εὐθεῖα αζ, ἣν εὑρίσκομεν λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς εὐθείας θη τὰ τρία συνεχῆ μέρη αγ, γε, εζ, ἴσα πρὸς τὰς δοθείσας εὐθείας.

Διαφορὰ δὲ δύο ἀνίσων εὐθειῶν λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἥτις μένει, ὅταν ἀπὸ τῆς μεγαλητέρας, ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτῆς, ἀποτμηθῇ μέρος ἴσον μὲ τὴν μικροτέραν. Παραδείγματος χάριν, ἡ εὐθεῖα γε εἶναι διαφορὰ τῶν εὐθειῶν αε καὶ αγ.



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ πράξεις σημαίνονται καὶ ἐν τῇ γεωμετρίᾳ διὰ τῶν αὐτῶν σημείων, δι' ὧν καὶ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ. Οὕτω, παραδείγματος χάριν, α+β δηλοῖ τὸ ἄθροισμα τῶν γραμμῶν α καὶ β, α—β τὴν διαφορὰν αὐτῶν, 2α τὸ διπλάσιον τῆς α, ἤτοι α+α, καὶ $\frac{\alpha}{2}$ τὸ ἥμισυ αὐτῆς.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

Ἐκ τοῦ 4ου ἀξιώματος τῶν εὐθειῶν ἕπεται ἀμέσως, ὅτι

Δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι ἢ ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἀλλήλων ἢ ἡ μία ἐξ αὐτῶν ἐφαρμόζει ἐπί τινος μέρους τῆς ἄλλης·

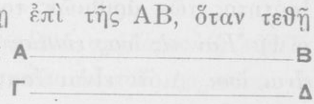
τουτέστι, *δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι εἶναι ἢ ἴσαι ἢ ἄνισοι.*

Ἐκ τούτου πηγάζουσιν αἱ ἑξῆς ἰδιότητες τῆς ἰσότητος τῶν εὐθειῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

22. *Ἐὰν εὐθεῖα τιθεμένη ἐπὶ ἄλλης ἐφαρμόζῃ ἐπ' αὐτῆς, θὰ ἐφαρμόζῃ καὶ ὅταν τεθῇ ἀντιστρόφως.*

Ἐὰν δηλονότι ἡ εὐθεῖα ΓΔ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ, ὅταν τεθῇ ἐπ' αὐτῆς οὕτως, ὥστε νὰ πέσῃ τὸ Γ εἰς τὸ Α, θὰ ἐφαρμόσῃ, καὶ ὅταν τεθῇ οὕτως ὥστε νὰ πέσῃ τὸ Δ εἰς τὸ Α.



ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Διότι, ἂν κατὰ τὴν δευτέραν ταύτην ἐπίθεσιν ἡ ΓΔ δὲν ἐφήρμοζεν ἐπὶ τῆς ΑΒ, θὰ ἦτο ἡ μία μέρος τῆς ἄλλης, τουτέστι θὰ ἦσαν ἄνισοι· ἀλλ' ἐπειδὴ κατὰ τὴν πρώτην ἐπίθεσιν ἐφήρμοσαν, εἶναι ἴσαι· ὥστε αἱ αὐταὶ εὐθεῖαι θὰ ἦσαν καὶ ἴσαι καὶ ἄνισοι, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὸ 2ον ἀξίωμα τῆς ἰσότητος καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰς πᾶν θεώρημα διακρίνομεν, πλὴν τῆς ἀποδείξεως ὑπόθεσιν καὶ συμπέρασμα. Εἰς τὸ θεώρημα τοῦτο ὑπόθεσις ἦτο, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΔ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς ΑΒ, ὅταν τεθῇ ἐπ' αὐτῆς οὕτως, ὥστε νὰ πέσῃ τὸ Γ εἰς τὸ Α, συμπέρασμα δὲ ἦτο τοῦτο, ὅτι ἡ ΓΔ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ ὅταν τεθῇ ἐπ' αὐτῆς οὕτως, ὥστε νὰ πέσῃ τὸ Δ εἰς τὸ Α.

ΘΕΩΡΗΜΑ

23. *Αἱ κατὰ μέρη ἴσαι εὐθεῖαι εἶναι καὶ ἀκέραιαι ἴσαι.*

Ἐὰν δηλονότι δύο εὐθεῖαι σύγκεινται ἐκ μερῶν ἰσαρίθμων καὶ ἴσων ἓν πρὸς ἕν, καὶ αἱ ὅλαι εὐθεῖαι θὰ εἶναι ἴσαι.

Διότι, ἂν δὲν ἐφήρμοζον ἐπ' ἀλλήλων, θὰ ἦτο ἡ μία μέρος τῆς ἄλλης, ἑπομένως θὰ ἦσαν ἄνισοι· ἀλλ' αἱ αὐταὶ εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι κατὰ μέρη· ἄρα θὰ ἦσαν καὶ ἴσαι καὶ ἄνισοι, ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὸ 2ον ἀξίωμα τῆς ἰσότητος.

ΠΟΡΙΣΜΑ

24. *Ἐν τῇ προσθέσει τῶν εὐθειῶν (ὡς καὶ τῶν ἀριθμῶν), ἡ τάξις, καθ' ἣν λαμβάνονται αἱ γραμμαί, εἶναι ἀδιάφορος·* τουτέστι, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ληφθῶσιν ἡ μία μετὰ τὴν ἄλλην, τὸ ἄθροισμα μένει τὸ αὐτό.

Διότι πάντα τὰ ἀθροίσματα, ὅσα προκύπτουσι μεταβαλλομένης τῆς τάξεως τῶν εὐθειῶν, εἶναι κατὰ μέρη ἴσα, ἄρα καὶ ἀκέραια εἶναι ἴσα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως τῶν ἀριθμῶν, αἱ ἐκ τῆς θεμελιώδους ταύτης ἰδιότητος πηγάζουσαι, ἀληθεύουσι καὶ περὶ τῶν εὐθειῶν γραμμῶν καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως (Στ. Ἀλγ. ἐδ. 14), ἀρκεῖ νὰ νοηθῶσι τὰ γράμματα ὡς παριστῶντα γραμμάς.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

25. Ἡ ἰσότης τῶν εὐθειῶν ἔχει καὶ τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος τῶν ἀριθμῶν· τουτέστι

1) *Ἐὰν εἰς ἴσας εὐθείας προστεθῶσιν ἴσαι, αἱ προκύπτουσαι εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι.* Διότι εἶναι ἴσαι κατὰ μέρη (ἐδ. 23).

2) *Ἐὰν ἀπὸ ἴσων εὐθειῶν ἀφαιρεθῶσιν ἴσαι, αἱ μένουσαι εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι.*

Τοῦτο βλέπει τις ἀμέσως ἂν τὰς εὐθείας, ἀπὸ τῶν ὁποίων γίνεται ἡ ἀφαίρεσις, ἐφαρμόσῃ οὕτως, ὥστε τὰ ἀφαιρούμενα μέρη νὰ εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ἄκρον.

3) *Αἱ διπλάσιαι τῶν ἴσων εὐθειῶν εἶναι ἴσαι· καὶ αἱ τριπλάσιαι ὡσαύτως ἴσαι· καὶ οὕτω καθεξῆς.*

Τοῦτο εἶναι ἄμεσον ἀκολούθημα τῆς 1ης ἰδιότητος.

4) *Τὰ ἡμίση τῶν ἴσων εὐθειῶν εἶναι ἴσα· καὶ τὰ τρίτα ὡσαύτως ἴσα, καὶ οὕτω καθεξῆς.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ ἡ ἀνισότης τῶν εὐθειῶν ἔχει τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῆς ἀνισότητος τῶν ἀριθμῶν· τουτέστι

1) Ἐὰν εἰς ἄνισα προστεθῶσιν ἴσα, καὶ τὰ ἀθροίσματα εἶναι ὁμοίως ἄνισα.

2) Ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἀφαιρεθῶσιν ἴσα, τὰ μένοντα εἶναι ὁμοίως ἄνισα.

3) Ἐὰν εἰς ἄνισα προστεθῶσιν ἄνισα, ἀλλὰ τὸ μεῖζον εἰς τὸ μεῖζον καὶ τὸ ἔλασσον εἰς τὸ ἔλασσον, καὶ τὰ ἀθροίσματα εἶναι ὁμοίως ἄνισα.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

26. *Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια* ἢ ἁπλῶς *ἐπίπεδον* λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζει πανταχοῦ· ἤτοι *ἡ διὰ δύο οἱωνδήποτε σημείων αὐτῆς ἀγομένη εὐθεῖα κεῖται ὅλη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.*

Ὅτι δὲ ὑπάρχει τοιαύτη ἐπιφάνεια, τοῦτο δεχόμεθα ὡς ἀξίωμα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰκόνα τῆς ἐπιφανείας ταύτης παρέχει ἡμῖν ἡ ἐπιφάνεια ἠρεμοῦντος ὕδατος, ἢ ἄλλαι ὅμοιαι ἐπιφάνειαι (ὡς τῶν τοίχων, τῶν πατωμάτων τῶν οἰκιῶν κτλ.).

Περὶ τοῦ ἐπιπέδου δεχόμεθα τὰ ἑπόμενα ἀξιώματα:

1) Πᾶν ἐπίπεδον δύναται νὰ αὐξηθῇ ἐφ᾽ ὅσον θέλωμεν πέριξ ἑαυτοῦ.

2) Πᾶν ἐπίπεδον δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ παντὸς ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε νὰ ἀποτελέσωσιν ἓν μόνον ἐπίπεδον· γίνεται δὲ ἡ ἐπίθεσις αὕτη, καὶ ὅταν ἓν τῶν ἐπιπέδων ἀντιστραφῇ.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ἐπίπεδον σχῆμα λέγεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια πανταχόθεν περατουμένη.

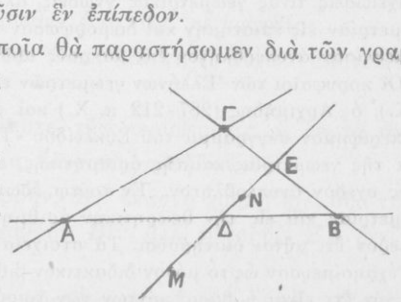
ΑΞΙΩΜΑ

27. *Ἐὰν μέρος εὐθείας κεῖται ἐντὸς ἐπιπέδου σχήματος, ἡ εὐθεῖα αὕτη ἐκβαλλομένη ἑκατέρωθεν ἑαυτῆς ἐξέρχεται ἐκ τοῦ σχήματος.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

28. *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ἔχωσι κοινὰ τρία σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ᾽ εὐθείας ἐφαρμόζουσι καὶ ἀποτελοῦσιν ἓν ἐπίπεδον.*

Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα θὰ παραστήσωμεν διὰ τῶν γραμμάτων Π καὶ Ρ, ἔχοντα κοινὰ τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ, ἅτινα δὲν κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας· λέγω, ὅτι καὶ πάντα τὰ ἄλλα σημεῖα αὐτῶν ἔχουσι κοινὰ (ὅταν ἐφ᾽ ἱκανὸν αὐξηθῶσιν).



Ἄς ἐπιζευχθῶσι τὰ τρία σημεῖα ἀνὰ δύο διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Ἑκάστη τῶν εὐθειῶν τούτων θὰ κεῖται ὅλη καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ (κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐπιπέδου). Ἔστω νῦν Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π· ἐὰν ληφθῇ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου σημεῖόν τι Ν ἐντὸς τοῦ σχήματος ΑΒΓ καὶ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Ν ἡ εὐθεῖα ΝΜ, αὕτη θὰ ἐξέλθῃ ἐκ τοῦ σχήματος ΑΒΓ καὶ θὰ τέμνῃ τὴν περατοῦσαν αὐτὸ τεθλασμένην γραμμὴν ΑΒΓ εἰς δύο τοὐλάχιστον σημεῖα, τὰ Δ καὶ Ε. Τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι καὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ σημεῖα· ἄρα καὶ ἡ ὅλη εὐθεῖα ΔΕ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ· ἄρα καὶ τὸ Μ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π εἶναι σημεῖον καὶ τοῦ Ρ· ὁμοίως δὲ δεικνύεται, ὅτι καὶ ἀντιστρόφως πᾶν σημεῖον τοῦ Ρ εἶναι σημεῖον καὶ τοῦ Π· τουτέστι τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ἔχουσι πάντα τὰ σημεῖα αὐτῶν κοινά.

ΠΟΡΙΣΜΑ

29. *Ἐὰν τὰ ἄκρα δύο ἐπιπέδων σχημάτων ἐφαρμόζωσι, καὶ τὰ σχήματα ἐφαρμόζουσι.*

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

30. Ἡ γεωμετρία διαιρεῖται εἰς δύο μέρη. Καὶ ἐν μὲν τῷ πρώτῳ ἐξετάζονται σχήματα τῶν ὁποίων πάντα τὰ σημεῖα κεῖνται ἐφ᾽ ἑνὸς ἐπιπέδου· ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ, σχήματα οἱαδήποτε. Καλεῖται δὲ τὸ μὲν πρῶτον μέρος *ἐπίπεδος γεωμετρία* ἢ *ἐπιπεδομετρία*· τὸ δὲ δεύτερον *στερεὰ γεωμετρία* ἢ *στερεομετρία*.

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ

Ἡ γεωμετρία εἶναι καθ᾽ ὁλοκληρίαν ἑλληνικὴ ἐπιστήμη. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἔλαβον μὲν παρὰ τῶν Αἰγυπτίων, οἵτινες εἶχον πολιτισθῆ πολὺ πρότερον αὐτῶν, στοιχειώδεις τινὰς γεωμετρικὰς γνώσεις, ἀλλ᾽ αὐτοὶ πρῶτοι ἐκαλλιέργησαν τὴν γεωμετρίαν εἰς ἐπιστήμην καὶ διεμόρφωσαν καὶ προήγαγον αὐτὴν εἰς τελειότητα διαμείνασαν ἀνυπέρβλητον ἐπὶ μακροὺς αἰῶνας.

Οἱ κορυφαῖοι τῶν Ἑλλήνων γεωμετρῶν εἶναι ὁ Εὐκλείδης (ζήσας περὶ τὸ 300 π. Χ.), ὁ Ἀρχιμήδης (287 - 212 π. Χ.) καὶ ὁ Ἀπολλώνιος (περὶ τὸ 200 π. Χ.) Τὸ περίφημον σύγγραμμα τοῦ Εὐκλείδου «Τὰ στοιχεῖα», ὅπερ περιέχει τὰ στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας καὶ τῆς ἀριθμητικῆς, εἶναι πρότυπον ἐπιστημονικῆς ἀκριβείας σχεδὸν ἀνυπέρβλητον. Ἐν τούτῳ ἔδωκεν ὁ Εὐκλείδης εἰς τὴν στοιχειώδη γεωμετρίαν καὶ εἰς τὴν θεωρητικὴν ἀριθμητικὴν τὴν τάξιν καὶ ἔκθεσιν, ἣν καὶ σήμερον ἔτι αὗται διατηροῦσι. Τὰ στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἐπὶ χίλια καὶ πλέον ἔτη ἐχρησίμευσαν ὡς τὸ μόνον διδακτικὸν βιβλίον τῆς στοιχειώδους μαθηματικῆς καὶ νῦν ἔτι εἶναι ἡ βάσις πάντων τῶν τοιούτων βιβλίων.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

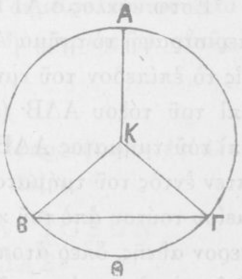
ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ

31. *Κύκλος* λέγεται ἐπίπεδον σχῆμα, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς γραμμῆς, εἰς ἣν περατοῦται.

Τὸ σημεῖον τοῦτο λέγεται *κέντρον* τοῦ κύκλου. Ἡ δὲ τὸν κύκλον περατοῦσα γραμμὴ λέγεται *περιφέρεια*.

Ὁ κύκλος γεννᾶται, ἐὰν εὐθεῖα, ὡς ἡ ΚΑ, ἐφ᾽ ἑνὸς ἐπιπέδου μένουσα περιστραφῇ περὶ τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς Κ, ὅπερ μένει ἀκίνητον μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν αὐτῆς· τότε, ἡ μὲν εὐθεῖα ΚΑ θὰ γράψῃ τὸν κύκλον, τὸ δὲ ἄλλο ἄκρον αὐτῆς Α θὰ γράψῃ τὴν περιφέρειαν.



Ἀκτὶς τοῦ κύκλου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα ἐκ τοῦ κέντρου εἰς τὴν περιφέρειαν ἠγμένη.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ δὲ τοῦ κύκλου ἕπεται, ὅτι πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες αὐτοῦ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Διάμετρος τοῦ κύκλου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη καὶ περατουμένη ἑκατέρωθεν ὑπὸ τῆς περιφερείας.

Πᾶσαι αἱ διάμετροι εἶναι ἴσαι· διότι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἀκτίνων.

Τόξον λέγεται μέρος οἱονδήποτε τῆς περιφερείας· ἡ δὲ τὰ ἄκρα τοῦ τόξου ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα λέγεται *χορδὴ* αὐτοῦ.

Ἕκαστον τόξον ἔχει μίαν χορδήν, ἀλλ᾽ ἑκάστη χορδὴ ἔχει δύο τόξα· π. χ., τὸ τόξον ΒΘΓ ἔχει τὴν χορδὴν ΒΓ· ἀλλ᾽ ἡ χορδὴ ΒΓ ἔχει τὰ δύο τόξα ΒΘΓ καὶ ΒΑΓ.

Τμῆμα κύκλου λέγεται μέρος αὐτοῦ περιεχόμενον ὑπὸ τόξου καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ, οἷον τὸ σχῆμα ΒΘΓΒ.

Τομεὺς δὲ λέγεται μέρος τοῦ κύκλου περιεχόμενον ὑπὸ τόξου καὶ ὑπὸ τῶν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου τούτου ἠγμένων ἀκτίνων, οἷον τὸ σχῆμα ΚΓΘΒΚ.

32. Ἐκ τῆς γενέσεως τοῦ κύκλου καθίστανται ἀμέσως φανεραὶ αἱ ἑξῆς προτάσεις:

1) Πᾶν σημεῖον τοῦ κύκλου μὴ ἐπὶ τῆς περιφερείας κείμενον ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστασιν μικροτέραν τῆς ἀκτῖνος.

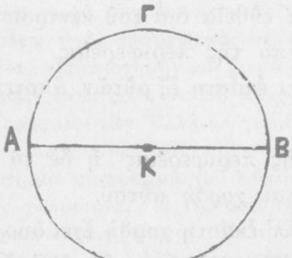
2) Πᾶν σημεῖον ἐκτὸς τοῦ κύκλου κείμενον (ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ) ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστασιν μεγαλητέραν τῆς ἀκτῖνος.

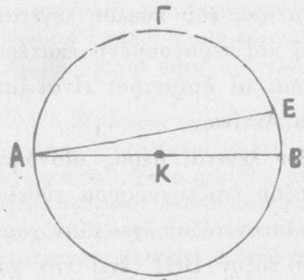
3) Δύο κύκλοι ἔχοντες ἴσας ἀκτῖνας εἶναι ἴσοι· διότι ὅταν τεθῇ ὁ εἷς ἐπὶ τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσωσι τὰ κέντρα αὐτῶν, θὰ συμπέσωσι καὶ αἱ ἀκτῖνες, ὡς ἴσαι. Ἑπομένως θὰ ἐφαρμόσωσι καὶ αἱ περιφέρειαι καὶ οἱ κύκλοι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

33. *Πᾶσα διάμετρος τέμνει εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ.*

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΓΒΔΑ καὶ τυχοῦσα διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΑΚΒ· ἐὰν περιστραφῇ τὸ τμῆμα ΑΓΒΚΑ περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ, μέχρις οὗ πέσῃ εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τμήματος ΑΔΒΚΑ, τὸ τόξον ΑΓΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΔΒ· (ἑπομένως καὶ τὸ τμῆμα ΑΓΒΚΑ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΔΒΚΑ)· διότι, ἂν σημεῖόν τι τοῦ τόξου ΑΓΒ ἔπιπτεν ἐντὸς τοῦ τμήματος ΑΔΒΚΑ ἢ ἐκτὸς αὐτοῦ, τὸ ἀπόστημα τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τοῦ κέντρου θὰ ἦτο μικρότερον τῆς ἀκτῖνος ἢ μεγαλήτερον αὐτῆς, ὅπερ ἄτοπον· διότι ἡ γενομένη περιστροφὴ οὐδόλως μετέβαλε τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων τοῦ τόξου ΑΓΒ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ.





Παρατήρησις. Πλὴν τῶν διαμέτρων οὐδεμία ἄλλη εὐθεῖα δύναται νὰ διαιρέσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη. Διότι ἔστω ἄλλη τις εὐθεῖα μὴ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη, ἡ ΑΕ· αὕτη διαιρεῖ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο μέρη, τὰ ΑΓΕ καὶ ΑΔΒΕ τὰ ὁποῖα εἶναι ἄνισα· διότι τὸ μὲν ΑΓΕ εἶναι μέρος τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΓΕΒ, τὸ δὲ ΑΔΒΕ ὑπερβαίνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΔΒ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

34. *Πᾶν τόξον δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ πανταχοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας ἧστινος εἶναι μέρος.*

Ἔστω περιφέρεια ἡ ΑΒΓΔ καὶ τυχὸν τόξον αὐτῆς τὸ ΑΒ· ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΒ, εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου, σχηματίζεται ὁ τομεὺς ΚΑΒ· ἐὰν δὲ τὸν τομέα τοῦτον μεταφέρωμεν ἐπὶ τοῦ κύκλου, ὥστε ἡ ἀκτὶς ΚΑ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς τυχούσης ἀκτῖνος ΚΓ, καὶ ἡ ΚΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπί τινος ἄλλης ΚΔ καὶ τὸ τόξον ΑΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΔ· διότι, ἂν σημεῖόν τι τοῦ τόξου ΑΒ, ἔπιπτεν ἐντὸς τοῦ τομέως ΓΚΔ ἢ ἐκτὸς αὐτοῦ, ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ θὰ ἦτο μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος ἢ μεγαλητέρα αὐτῆς, ὅπερ ἄτοπον.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Δύο τυχόντα τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἀλλήλων, ἢ τὸ ἓν ἐφαρμόζει ἐπί τινος μέρους τοῦ ἄλλου.

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΟΞΩΝ ΤΗΣ ΑΥΤΗΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

35. *Ἄθροισμα* δύο ἢ περισσοτέρων τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας λέγεται τὸ τόξον, ὅπερ ἀποτελοῦσιν, ὅταν τεθῶσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας (ἢ ἐπὶ ἄλλης ἴσης) κατὰ σειράν· οἷον, ἄθροισμα τῶν τόξων ΑΒ καὶ ΒΓ εἶναι τὸ τόξον ΑΓ.

Διαφορὰ δὲ δύο τόξων (τῆς αὐτῆς περιφερείας) λέγεται τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον μένει, ὅταν ἀπὸ τοῦ μεγαλητέρου, ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτοῦ, ἀποτμηθῇ μέρος ἴσον τῷ μικροτέρῳ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ περὶ τῆς ἰσότητος τῶν τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας ἰσχύουσιν αἱ αὐταὶ προτάσεις αἱ περὶ τῶν εὐθειῶν ἀληθεύουσαι (σελ. 5) καὶ ἀποδεικνύονται ἀπαραλλάκτως.

ΠΕΡΙ ΓΩΝΙΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

36. *Γωνία* λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουσι δύο εὐθεῖαι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀρχόμεναι καὶ μὴ ἀποτελοῦσαι μίαν μόνην εὐθεῖαν.

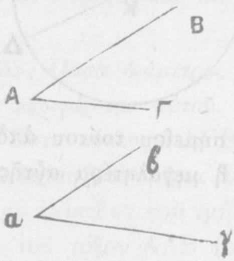
Τὸ σχῆμα ΒΑΓ εἶναι γωνία.

Κορυφὴ τῆς γωνίας λέγεται τὸ σημεῖον, ἐξ οὗ ἄρχονται αἱ τὴν γωνίαν σχηματίζουσαι εὐθεῖαι.

Πλευραὶ δὲ τῆς γωνίας λέγονται αἱ σχηματίζουσαι αὐτὴν εὐθεῖαι.

Τῆς γωνίας ΒΑΓ κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Α, πλευραὶ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ.

Ἴσαι λέγονται δύο γωνίαι, ἐὰν δύνανται νὰ τεθῶσιν οὕτως ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, ὥστε ν' ἀποτελέσωσι μίαν μόνην γωνίαν.



Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον, ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν δὲν ἐξαρτᾶται ποσῶς ἐκ τοῦ μεγέθους τῶν πλευρῶν αὐτῶν. Οὕτως, αἱ δύο γωνίαι ΒΑΓ καὶ βαγ θὰ εἶναι ἴσαι, ἐάν, τεθείσης τῆς αγ ἐπὶ τῆς ΑΓ οὕτως, ὥστε νὰ πέσῃ τὸ α εἰς τὸ Α, πέσῃ καὶ ἡ αβ ἐπὶ τῆς ΑΒ.

Ἐπίκεντρος γωνία λέγεται ἡ ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. Τὸ δὲ τόξον τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας περιεχόμενον λέγεται *ἀντίστοιχον* αὐτῆς.

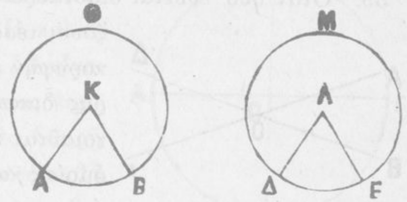
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὴν γωνίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος τῆς κορυφῆς ἢ καὶ διὰ τριῶν γραμμάτων, γραφομένων ἐπὶ τῆς κορυφῆς καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν (ἐφ' ἑκατέρας ἕν)· γράφεται δὲ καὶ ἀναγινώσκεται τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς πάντοτε μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων. Οὕτω λέγομεν: ἡ γωνία Α, ἢ ἡ γωνία ΒΑΓ, ἢ ἡ γωνία ΓΑΒ. Ἐνίοτε σημαίνομεν τὴν γωνίαν καὶ δι' ἑνὸς γράμματος, ἐντὸς αὐτῆς καὶ πλησίον τῆς κορυφῆς γραφομένου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

37. *Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι βαίνουσιν ἐπὶ τόξων ἴσων· καὶ ἀντιστρόφως, αἱ ἐπὶ ἴσων τόξων βαίνουσαι ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.*

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΘΑ καὶ ΔΕΜΔ καὶ εἰς αὐτοὺς ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι αἱ ΑΚΒ καὶ ΔΛΕ· λέγω, ὅτι καὶ τὰ τόξα, ἐφ' ὧν βαίνουσιν αἱ γωνίαι, ἤτοι τὰ ΑΒ καὶ ΔΕ, θὰ εἶναι ἴσα.

Διότι, ὅταν αἱ ἴσαι γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΔΛΕ ἐφαρμόσωσι, θὰ συμπέσωσι τὰ κέντρα τῶν κύκλων, καὶ ἐπειδὴ οἱ κύκλοι ὑπετέθησαν ἴσοι, θὰ ἐφαρμόσωσιν· ἄρα καὶ τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΔΕ (ὧν τὰ ἄκρα συνέπεσαν) θὰ ἐφαρμόσωσιν, ὥστε εἶναι ἴσα.



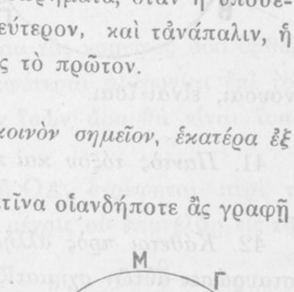
Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει· ἐὰν δηλαδὴ ὑποτεθῶσι τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΔΕ ἴσα, καὶ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΔΛΕ, αἱ ἐπ' αὐτῶν βαίνουσαι, θὰ εἶναι ἴσαι. Διότι, ἐφαρμοζομένων τῶν δύο ἴσων κύκλων οὕτως, ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσι τὰ δύο ἴσα τόξα ΑΒ καὶ ΔΕ, θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ ἀκτὶς ΚΑ ἐπὶ τῆς ΛΔ καὶ ἡ ΚΒ ἐπὶ τῆς ΛΕ, τουτέστι θὰ ἐφαρμόσωσι καὶ αἱ γωνίαι· ἄρα εἶναι ἴσαι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἀντιστρόφων θεωρημάτων· λέγονται δὲ *ἀντίστροφα* δύο θεωρήματα, ὅταν ἡ ὑπόθεσις τοῦ πρώτου εἶναι συμπέρασμα εἰς τὸ δεύτερον, καὶ τἀνάπαλιν, ἡ ὑπόθεσις τοῦ δευτέρου εἶναι συμπέρασμα εἰς τὸ πρῶτον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

38. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ἑκατέρα ἐξ αὐτῶν διαπερᾷ τὴν ἄλλην.*

Μὲ κέντρον τὸ κοινὸν σημεῖον Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε ἂς γραφῇ περιφέρεια καὶ ἂς τέμνῃ τὴν μίαν εὐθεῖαν εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, τὴν δὲ ἄλλην εἰς τὰ Γ, Δ· ἀμφότεραι αἱ εὐθεῖαι ΑΟΒ, ΓΟΔ εἶναι διάμετροι τοῦ κύκλου καὶ ἑπομένως ἑκατέρα ἐξ αὐτῶν διαιρεῖ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη. Ἔστωσαν τὰ δύο ἡμίση, εἰς ἃ διαιρεῖ αὐτὴν ἡ ΑΟΒ, τὰ ΑΜΒ καὶ ΑΡΒ· τὰ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ δὲν δύνανται νὰ εὑρίσκωνται ἀμφότερα ἐφ' ἑνὸς καὶ



τοῦ αὐτοῦ ἡμίσεως· διότι τότε τὸ μεταξὺ αὐτῶν τόξον ΓΔ θὰ ἦτο μέρος τοῦ ἡμίσεως, ἄρα μικρότερον αὐτοῦ· ἂν λοιπὸν τὸ σημεῖον Γ εὑρίσκηται ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως ΑΜΒ, τὸ Δ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἑτέρου ἡμίσεως ΑΡΒ· ἤτοι ἡ εὐθεῖα ΓΟΔ διαπερᾷ τὴν ΑΟΒ.

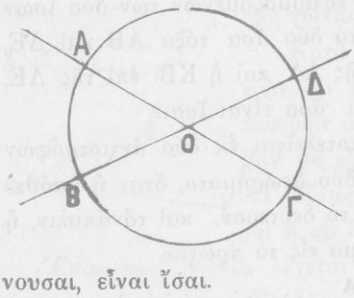
ΟΡΙΣΜΟΣ

39. Ὅταν δύο εὐθεῖαι διασταυρῶνται, ὡς αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ, σχηματίζουσι τέσσαρας γωνίας. Ἐκ τούτων, αἱ τὴν κορυφὴν μόνον ἔχουσαι κοινήν, ἀλλὰ πλευρὰς διαφόρους, λέγονται *κατὰ κορυφήν*, τοιαῦται εἶναι αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ· ὁμοίως καὶ αἱ γωνίαι ΑΟΔ καὶ ΒΟΓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

40. *Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.*

Μὲ κέντρον τὴν κοινὴν κορυφὴν τῶν γωνιῶν καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε ἂς γραφῇ κύκλος· τοῦ κύκλου τούτου ἀμφότεραι αἱ εὐθεῖαι ΑΟΓ καὶ ΒΟΔ εἶναι διάμετροι· ἑπομένως τὰ τόξα ΑΒΓ καὶ ΒΓΔ εἶναι ἴσα, ὡς ἡμίση τῆς περιφερείας· ἐὰν δὲ ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν μέρος ΒΓ, μένουσιν ἴσα τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΓΔ· ἄρα καὶ αἱ γωνίαι, αἱ ἐπ' αὐτῶν βαίνουσαι, εἶναι ἴσαι.



ΑΞΙΩΜΑ

41. *Παντὸς τόξου καὶ πάσης εὐθείας ὑπάρχει μέσον.*

ΟΡΙΣΜΟΣ

42. *Κάθετοι πρὸς ἀλλήλας* λέγονται δύο εὐθεῖαι, ἐὰν ἐν τῇ διασταυρώσει αὐτῶν σχηματίζωσι τὰς τέσσαρας γωνίας ἴσας.

Ὀρθὴ δὲ λέγεται ἑκάστη τῶν τεσσάρων ἴσων γωνιῶν, ἃς σχηματίζουσιν αἱ κάθετοι πρὸς ἀλλήλας εὐθεῖαι.

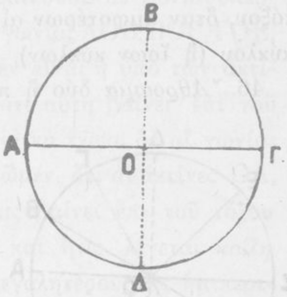
Παρατήρησις. Ὅταν ἐκ τῶν τεσσάρων γωνιῶν, τὰς ὁποίας δύο εὐθεῖαι διασταυρούμεναι σχηματίζουσι, δύο ἐφεξῆς εἶναι ἴσαι, ὡς αἱ ΑΟΒ, ΒΟΓ, καὶ αἱ τέσσαρες θὰ εἶναι ἴσαι (διότι αἱ λοιπαὶ δύο εἶναι κατὰ κορυφὴν τῶν πρώτων) καὶ αἱ εὐθεῖαι θὰ εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

ΘΕΩΡΗΜΑ

43. *Δι' ἑκάστου σημείου δοθείσης εὐθείας διέρχεται μία κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ μία μόνη.*

Ἔστω δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΓ καὶ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς τὸ Ο· λέγω ὅτι διὰ τοῦ Ο διέρχεται μία καὶ μία μόνη κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ.

Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε ἂς γραφῇ κύκλος· τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου τούτου διαιρεῖ ἡ εὐθεῖα ΑΟΓ εἰς δύο ἴσα μέρη ΑΒΓ, ΑΔΓ, τῶν ὁποίων τὰ μέσα ἔστωσαν Β καὶ Δ.



Τὰ τέσσαρα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εἶναι ἴσα ὡς τεταρτημόρια τῆς περιφερείας· ἑπομένως, ἂν ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΔ, θὰ διαιρῇ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο μέρη ἴσα· ἄρα θὰ εἶναι διάμετρος· τουτέστι θὰ διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου Ο. Θὰ εἶναι δὲ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, διότι αἱ τέσσαρες γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζει μετ᾽ αὐτῆς, εἶναι ἴσαι, ὡς ἐπὶ ἴσων τόξων βαίνουσαι.

Ἐὰν στραφῇ ἡ ΒΔ περὶ τὸ Ο, δὲν θὰ διέρχηται πλέον διὰ τοῦ μέσου Β τοῦ τόξου ΑΒΓ· ἑπομένως θὰ σχηματίζῃ ἀνίσους τὰς ἐφεξῆς γωνίας· ὥστε μία μόνη ὑπάρχει κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ο.

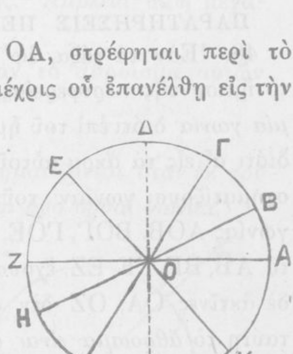
ΘΕΩΡΗΜΑ

44. *Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι* (ὑπὸ οἱωνδήποτε εὐθειῶν καὶ ἂν σχηματίζωνται) *εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.*

Διότι, ἐὰν γραφῶσι κύκλοι ἔχοντες κέντρα τὰς κορυφὰς δύο ὀρθῶν γωνιῶν καὶ ἀκτῖνας ἴσας, θὰ βαίνωσιν ἀμφότεραι αἱ γωνίαι ἐπὶ τοῦ τετάρτου ἴσων περιφερειῶν, ἤτοι ἐπὶ τόξων ἴσων· ἄρα θὰ εἶναι ἴσαι.

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ἐὰν ἐν κύκλῳ, μία τῶν ἀκτίνων, ὡς ἡ ΟΑ, στρέφηται περὶ τὸ κέντρον καὶ προχωρεῖ πάντοτε στρεφομένη, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην αὐτῆς θέσιν, αἱ διάφοροι θέσεις, ἃς λαμβάνει, ὡς αἱ ΟΒ, ΟΓ, ΟΕ, ΟΖ, σχηματίζουσι μετὰ τῆς ἀρχικῆς θέσεως ΟΑ διαφόρους γωνίας, ὡς τὰς ΑΟΒ, ΑΟΓ, ΑΟΕ,... Καθὼς δὲ τὸ τόξον ΑΒ, ἐφ' οὗ βαίνει ἡ γωνία ΑΟΒ, εἶναι μέρος τοῦ τοῦ τόξου ΑΓ, ἐφ' οὗ βαίνει ἡ ΑΟΓ, οὕτω λέγεται καὶ ἡ γωνία ΑΟΒ *μέρος* τῆς γωνίας ΑΟΓ (ἂν καί, ἵνα εἴπωμεν σχῆμά τι μέρος ἄλλου πρέπει νὰ εἶναι ἀμφότερα ἐντελῶς ὡρισμένα κατὰ τὴν



ἔκτασιν· ὅπερ δὲν συμβαίνει εἰς τὰς γωνίας). Ἐκ τούτου ὁδηγούμενοι δίδομεν τοὺς ἑπομένους ὁρισμούς.

45. *Μικροτέρα* λέγεται γωνία ἄλλης, ἐὰν βαίνῃ ἐπὶ μικροτέρου τόξου, ὅταν ἀμφοτέρων αἱ κορυφαὶ τεθῶσιν εἰς τὸ κέντρον τοῦ αὐτοῦ κύκλου (ἢ ἴσων κύκλων).

46. *Ἄθροισμα* δύο ἢ περισσοτέρων γωνιῶν λέγεται γωνία τις, ἐὰν τὸ τόξον αὐτῆς εἶναι ἄθροισμα τῶν τόξων τῶν γωνιῶν τούτων, ὅταν τεθῶσιν αἱ κορυφαὶ αὐτῶν εἰς τὸ κέντρον τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Οὕτως, ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ εἶναι ἡ γωνία ΑΟΓ καὶ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΕ, εἶναι ἡ ΑΟΕ. Ἐὰν δὲ τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ ὑποτεθῶσιν ἴσα, ἡ γωνία ΑΟΓ εἶναι διπλασία τῆς ΑΟΒ καὶ ἡ ΑΟΔ τριπλασία αὐτῆς.

47. *Διαφορὰ* δὲ δύο ἀνίσων γωνιῶν λέγεται γωνία τις, ἐὰν τὸ τόξον της εἶναι διαφορὰ τῶν τόξων τῶν γωνιῶν τούτων, ὅταν τεθῶσιν αἱ κορυφαὶ αὐτῶν εἰς τὸ κέντρον τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Οὕτω, διαφορὰ τῶν γωνιῶν ΑΟΓ καὶ ΑΟΒ εἶναι ἡ γωνία ΒΟΓ, τῶν δὲ γωνιῶν ΑΟΕ καὶ ΓΟΕ διαφορὰ εἶναι ἡ ΑΟΓ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ περὶ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν ἀληθεύουσιν αἱ αὐταὶ προτάσεις αἱ περὶ τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τόξων (τοῦ αὐτοῦ κύκλου) ἀληθεύουσαι, ἀποδεικνύονται δὲ ὁμοίως.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

48. Ἐὰν τὰ τόξα, ἐφ᾽ ὧν βαίνουσιν αἱ γωνίαι, ἔχωσιν ἄθροισμα τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας, *τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτων δὲν εἶναι μία γωνία*· διότι ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς περιφερείας, οὐδεμία βαίνει γωνία, διότι αἱ εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἠγμέναι ἀκτῖνες κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας καὶ δὲν σχηματίζουσι γωνίαν· τοῦτο συμβαίνει παραδείγματος χάριν, εἰς τὰς γωνίας ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΕ, ΕΟΖ· τὰ τόξα, ἐφ᾽ ὧν αὗται βαίνουσιν, ἤτοι τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΕ, ΕΖ, ἔχουσιν ἄθροισμα τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΒΓΕΖ· αἱ δὲ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΖ δὲν σχηματίζουσι γωνίαν. Ἀλλ᾽ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ *ἄθροισμα εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι*, ἐάν, τῷ ὄντι ἀχθῇ ἀκτὶς εἰς τὸ μέσον Δ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΒΓΕΖ, διαιρεῖται ἡ γωνία ΓΟΕ εἰς δύο ἄλλας ΓΟΔ, ΔΟΕ, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν δὲν μεταβάλλεται· τότε ὅμως αἱ μὲν γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ ἀποτελοῦσι

τὴν ὀρθὴν ΑΟΔ, αἱ δὲ ΔΟΕ, ΕΟΖ ἀποτελοῦσι τὴν ἄλλην ὀρθὴν ΔΟΖ· ὥστε τὸ ἄθροισμα εἶναι δύο ὀρθαί.

49. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων, ἐφ᾽ ὧν βαίνουσιν αἱ γωνίαι ὑπερβαίνῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν, ὡς συμβαίνει εἰς τὰς γωνίας ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΕ, ΕΟΖ, ΖΟΗ, ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτων δὲν εἶναι ἡ ὑπὸ τῶν ἀκτίνων ΟΑ, ΟΗ σχηματιζομένη γωνία ΑΟΗ· διότι αὕτη βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΚΘΙΗ καὶ οὐχὶ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΕΖΗ. Διὰ νὰ ἔχωσι δὲ αἱ γωνίαι αὗται ἄθροισμα μίαν γωνίαν, ἀνάγκη νὰ δεχθῶμεν, ὅτι αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΗ σχηματίζουσι δύο γωνίας, τὴν ΑΟΗ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΚΘΙΗ, τοῦ μικροτέρου τῆς ἡμιπεριφερείας, καὶ ἥτις λέγεται *κοίλη* γωνία, καὶ τὴν ΑΟΗ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ μεγαλητέρου τῆς ἡμιπεριφερείας τόξου ΑΒΓΕΖΗ καὶ ἥτις λέγεται *κυρτὴ* γωνία, καὶ ταύτην ἔχουσιν ἄθροισμα αἱ εἰρημέναι γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΕ, ΕΟΖ, ΖΟΗ. Αἱ κυρταὶ γωνίαι ὑπερβαίνουσι τὰ δύο ὀρθάς· π. χ. ἡ κυρτὴ γωνία ΑΟΗ εἶναι μεγαλητέρα τῶν δύο ὀρθῶν ΑΟΔ καὶ ΔΟΖ· παρατηρητέον ὅμως, ὅτι, ὅταν λέγωμεν ἁπλῶς γωνίαν δύο εὐθειῶν, ἐννοοῦμεν πάντοτε τὴν κοίλην γωνίαν αὐτῶν.

50. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων, ἐφ᾽ ὧν βαίνουσιν αἱ γωνίαι, εἶναι ὅλη ἡ περιφέρεια, ὅπερ συμβαίνει εἰς τὰς γωνίας ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΕ, ΕΟΗ, ΗΟΚ, ΚΟΑ, δεικνύεται ὁμοίως, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι τέσσαρες ὀρθαί, αἱ ΑΟΔ, ΔΟΖ, ΖΟΘ, ΘΟΑ.

ΟΡΙΣΜΟΙ

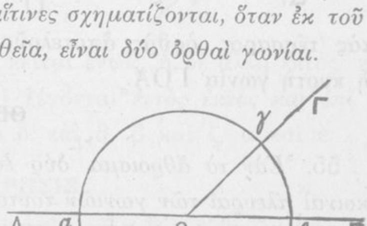
51. *Ὀξεῖα* γωνία λέγεται ἡ μικροτέρα ὀρθῆς. *Ἀμβλεῖα* δὲ ἡ μεγαλητέρα ὀρθῆς.

Παραπληρωματικαὶ λέγονται δύο γωνίαι, ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι δύο ὀρθαί.

ΘΕΩΡΗΜΑ

52. *Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν αἵτινες σχηματίζονται, ὅταν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου εὐθείας ἀχθῇ ἄλλη εὐθεῖα, εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι.*

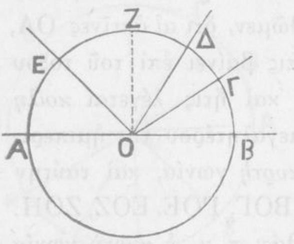
Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τυχὸν αὐτῆς σημεῖον (πλὴν τῶν ἄκρων) τὸ Ο καὶ ἐκ τοῦ Ο ἠγμένη, ὡς ἔτυχεν, ἡ εὐθεῖα ΟΓ· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΑΟΓ, ΓΟΒ εἶναι δύο ὀρθαί.



Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε ἂς γραφῇ περιφέρεια· ἂς τέμνῃ δὲ τὰς εὐθείας εἰς τὰ σημεῖα α, β, γ· τὰ τόξα αγ καὶ γβ, τὰ ἀντίστοιχα τῶν δύο γωνιῶν, ἔχουσιν ἄθροισμα τὴν ἡμιπεριφέρειαν αγβ (διότι ἡ αΟβ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου)· ἄρα (48) τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

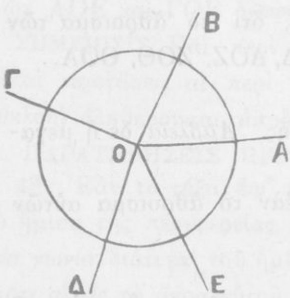
53. *Πᾶσαι αἱ γωνίαι, αἵτινες σχηματίζονται, ὅταν ἐξ ἑνὸς σημείου εὐθείας ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς κείμεναι, ἔχουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθὰς γωνίας.*



Διότι, ἂν γραφῇ κύκλος μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε, τὰ τόξα τὰ εἰς τὰς γωνίας ταύτας ἀντίστοιχα θὰ ἔχωσιν ἄθροισμα τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας (48).

ΘΕΩΡΗΜΑ

54. *Πᾶσαι αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι, ὅταν ἐξ ἑνὸς σημείου ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι, ἔχουσιν ἄθροισμα τέσσαρας ὀρθάς.*



Διότι ἂν γραφῇ κύκλος μὲ κέντρον τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε, τὰ ἀντίστοιχα τῶν γωνιῶν τούτων τόξα ἔχουσιν ἄθροισμα ὅλην τὴν περιφέρειαν (50).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῷ θεωρήματι τούτῳ πρέπει νὰ λαμβάνωνται ὑπ᾽ ὄψει καὶ αἱ κυρταὶ γωνίαι· ἂν λ. χ. ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ Ο μόνον αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, αἱ τὰς τέσσαρας ὀρθὰς ἀποτελοῦσαι γωνίαι εἶναι, ἡ ΑΟΒ, ἡ ΒΟΓ καὶ ἡ κυρτὴ γωνία ΓΟΑ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

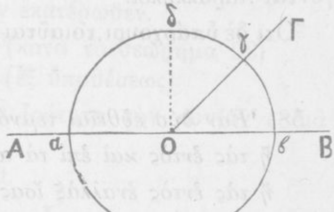
55. *Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας.*

Ἐφεξῆς λέγονται δύο γωνίαι, ὅταν ἔχωσιν τὴν κορυφὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, τὰς δὲ μὴ κοινὰς ἐκ διαφόρων μερῶν τῆς κοινῆς.

Ἔστω τὸ ἄθροισμα τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν ΑΟΓ καὶ ΒΟΓ δύο ὀρθαί·

λέγω, ὅτι αἱ πλευραὶ ΑΟ καὶ ΟΒ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· τουτέστιν, ὅτι ἡ ΑΟΒ εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

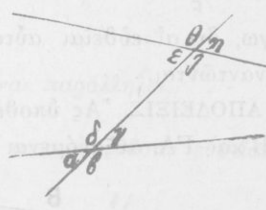
Ἐὰν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα οἱανδήποτε γραφῇ περιφέρεια καὶ τέμνῃ τὰς εὐθείας εἰς τὰ σημεῖα α, β, γ, τὸ τόξον αγβ θὰ εἶναι ἥμισυ τῆς περιφερείας· διότι ἂν μὲν αἱ δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι, θὰ εἶναι ἀμφότεραι ὀρθαὶ καὶ τὰ τόξα αγ, γβ θὰ εἶναι τεταρτημόρια τῆς περιφερείας, ἂν δὲ πάλιν εἶναι ἄνισοι, ἃς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς μεγαλητέρας ΑΟΓ ἡ ὀρθὴ γωνία αΟδ· τότε αἱ δύο γωνίαι δΟγ καὶ γΟβ θὰ ἀποτελῶσι τὴν ἄλλην ὀρθήν, καὶ θὰ εἶναι πάλιν τὰ τόξα αδ καὶ δβ τεταρτημόρια τῆς περιφερείας· ὥστε πάντοτε τὸ τόξον αγβ εἶναι ἥμισυ τῆς περιφερείας καὶ διὰ τοῦτο ἡ χορδὴ αὐτοῦ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου (33, παρατ.), ἡ δὲ διάμετρος αὕτη ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο ἀκτίνων αΟ καὶ Οβ· ὥστε ἡ γραμμὴ ΑΟΒ εἶναι εὐθεῖα γραμμή.



ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

56. Ὅταν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ τρίτης, σχηματίζονται πέριξ τῶν δύο τομῶν, 8 γωνίαι. Ἐκ τούτων αἱ μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης κείμεναι καλοῦνται *ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη*· τοιαῦται εἶναι αἱ γωνίαι γ καὶ ζ, ὡσαύτως καὶ αἱ γωνίαι δ καὶ ε.



Αἱ γωνίαι δ καὶ ζ (αἱ ἑκατέρωθεν τῆς τεμνούσης καὶ μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν κείμεναι) καλοῦνται *ἐντὸς ἐναλλάξ*· ὡσαύτως καὶ αἱ γωνίαι γ καὶ ε.

Αἱ δὲ γωνίαι γ καὶ η (ὧν ἡ μία κεῖται ἐντός, ἡ δὲ ἄλλη ἐκτὸς καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης) λέγονται *ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη*. Ὡσαύτως καὶ αἱ γωνίαι δ καὶ θ, β καὶ ζ, α καὶ ε.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Αἱ τέσσαρες γωνίαι δ, γ, ζ, ε, αἱ μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν κείμεναι, ἀποτελοῦσι πάντοτε τέσσαρας ὀρθὰς (δύο μὲν αἱ δ καὶ γ, δύο δὲ αἱ ε καὶ ζ)· ἂν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι δύο ὀρθαί, καὶ τῶν ἄλλων δύο τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι δύο ὀρθαί· ἂν δηλονότι εἶναι $\gamma+\zeta=2^{\text{ὀρθ}}$, θὰ εἶναι καὶ $\delta+\varepsilon=2^{\text{ὀρθ}}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

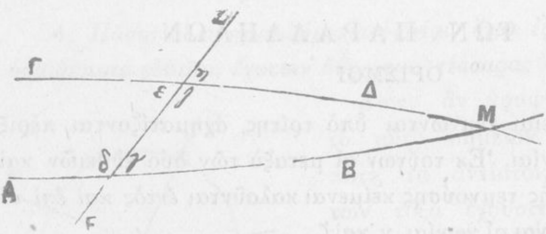
57. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι, δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν ἑκατέρωθεν, αἱ τοιαῦται εὐθεῖαι λέγονται *παράλληλοι.*

Ὅτι δὲ ὑπάρχουσι τοιαῦται εὐθεῖαι, φαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

58. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης, σχηματίζωσιν*
ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς,
ἢ τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ ἴσας,
ἢ τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας,
αἱ εὐθεῖαι αὗται δὲν δύνανται νὰ συναντηθῶσιν, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν ἑκατέρωθεν, ἤτοι εἶναι παράλληλοι.

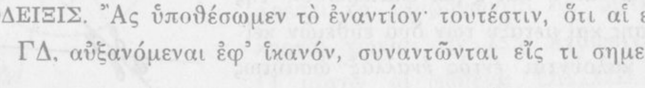
1) Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΕΖ, σχηματίζουσι τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς· ἤτοι ἔστω



$\gamma+\zeta=2^{\text{ὀρθ}}$
καὶ $\delta+\varepsilon=2^{\text{ὀρθ}}$.

λέγω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν ἑκατέρωθεν, δὲν συναντῶνται.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Ἂς ὑποθέσωμεν τὸ ἐναντίον· τουτέστιν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, αὐξανόμεναι ἐφ᾽ ἱκανόν, συναντῶνται εἴς τι σημεῖον Μ.



Ἐὰν νοήσωμεν δύο σχήματα ἴσα πρὸς τὸ ΜΔζγΒΜ καὶ προσαρμόσωμεν αὐτὰ οὕτως, ὥστε ἡ γωνία γ τοῦ ἑνὸς καὶ ἡ γωνία ζ τοῦ ἑτέρου νὰ ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν (ὡς δεικνύει τὸ προηγούμενον σχῆμα), ἀμφότεραι αἱ γραμμαὶ ΜΒΔΜ καὶ ΜΔΒΜ θὰ εἶναι (55) εὐθεῖαι γραμμαί, διότι εἶναι $\gamma+\zeta=2^{\text{ὀρθ}}$· ἀλλὰ τότε θὰ ἔχωμεν ἐκ τοῦ ἑνὸς σημείου Μ εἰς τὸ ἄλλο δύο εὐθείας γραμμάς· ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὸ 2ον ἀξίωμα τῆς εὐθείας καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἄτοπον. Εἰς τὸ ἄτοπον τοῦτο κατηντήσαμεν, ὑποθέσαντες, ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ συναντῶνται· ἄρα αἱ εὐθεῖαι αὗται δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν ἑκατέρωθεν.

2) Ἂς ὑποθέσωμεν δεύτερον, ὅτι δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι, ὡς αἱ γ καὶ ε εἶναι ἴσαι· λέγω, ὅτι καὶ πάλιν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν ἑκατέρωθεν.

Διότι εἶναι $\varepsilon+\zeta=2^{\text{ὀρθ.}}$ (κατὰ τὸ θεώρημα 52)

καὶ $\gamma=\varepsilon$ (ἐξ ὑποθέσεως)·

ἂν δὲ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν πρώτην ἰσότητα τὴν γωνίαν ε διὰ τῆς ἴσης αὐτῇ γ, εὑρίσκομεν

$$\gamma+\zeta=2^{\text{ ὀρθ.}}$$

ἤτοι αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί· ἄρα, κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, αἱ εὐθεῖαι δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν ἑκατέρωθεν.

3) Ἂς ὑποθέσωμεν τέλος, ὅτι δύο ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι, ὡς αἱ γ καὶ η, εἶναι ἴσαι· λέγω, ὅτι καὶ τότε αἱ εὐθεῖαι δὲν συναντῶνται.

Διότι εἶναι $\eta+\zeta=2^{\text{ὀρθ.}}$, (κατὰ τὸ θεώρημα 52)

καὶ $\eta=\gamma$ (ἐξ ὑποθέσεως).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων εὑρίσκομεν καὶ πάλιν

$$\gamma+\zeta=2^{\text{ ὀρθ.}}$$

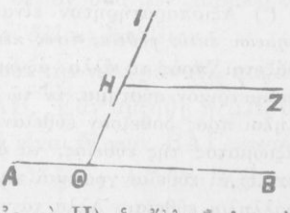
ὥστε καὶ πάλιν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν ἑκατέρωθεν.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

59. *Δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

60. *Ἐκ παντὸς σημείου ἄγεται παράλληλός τις πρὸς πᾶσαν εὐθεῖαν μὴ διερχομένην δι᾽ αὐτοῦ.*



Ἔστω σημεῖον τὸ Η καὶ εὐθεῖα ἡ ΑΒ. Ἂν ἐκ τοῦ Η ἀχθῇ εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Θ τῆς ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΗΘ, γίνεται γωνία, ἡ ΗΘΒ· ἂν δὲ τὴν γωνίαν ταύτην θέσωμεν εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε ἡ πλευρὰ αὐτῆς ΘΗ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΗΙ (καὶ ἡ κορυφὴ Θ εἰς τὸ Η), ἡ ἄλλη πλευρὰ αὐτῆς ΘΒ θὰ λάβῃ θέσιν τινὰ ΗΖ καὶ θὰ εἶναι ἡ ΗΖ παράλληλος τῇ ΑΘΒ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα.

ΑΞΙΩΜΑ

61. Ἐκ σημείου μὴ κειμένου ἐπ᾽ εὐθείας τινὸς μία μόνη διέρχεται παράλληλος τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ (*).

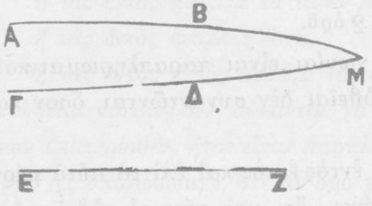
ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

62. Πᾶσα εὐθεῖα συναντῶσα μία τῶν παραλλήλων θὰ συναντᾷ καὶ τὴν ἄλλην.

Ἄλλως θὰ ἦσαν ἐξ ἑνὸς σημείου (τοῦ σημείου τῆς συναντήσεως) δύο παράλληλοι τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

63. Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.



Διότι, ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, ὧν ἑκατέρα ὑποτίθεται παράλληλος τῇ ΕΖ, συνηντῶντο εἴς τι σημεῖον Μ, θὰ εἴχομεν ἐκ τοῦ Μ δύο παραλλήλους τῇ ΕΖ, τουτέστι τὰς ΜΒΑ καὶ ΜΔΓ, ὅπερ ἄτοπον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

64. Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τμηθῶσιν ὑπὸ τρίτης οἱασδήποτε θὰ σχηματίσωσι

1) Τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς.

2) Τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας.

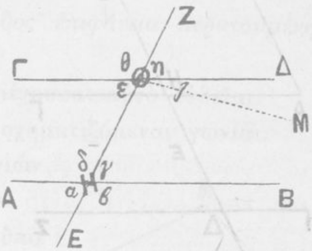
3) Τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας.

Ἔστωσαν παράλληλοι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΕΖ· λέγω, ὅτι θὰ εἶναι

$$\gamma+\zeta=2^{\text{ὀρθ}}.\qquad \gamma=\varepsilon=\eta,\ \ \beta=\zeta$$
$$\delta+\varepsilon=2^{\text{ὀρθ}}.\qquad \delta=\zeta=\vartheta,\ \ \alpha=\varepsilon \qquad (\iota)$$

(*) Ἀξιοπαρατήρητον εἶναι, ὅτι καὶ ἡ ἐναντία πρότασις, τουτέστιν, ὅτι ἐκ *σημείου ἐκτὸς εὐθείας τινὸς κειμένου ἄγονται πολλαὶ παράλληλοι πρὸς αὐτήν*, συμβιβάζεται πρὸς τὰ ἄλλα ἀξιώματα τῆς γεωμετρίας καὶ δύναται νὰ διαπλασθῇ γεωμετρικὸν σύστημα, ἐν τῷ ὁποίῳ ὑπάρχουσιν ἐξ ἑνὸς σημείου ἄπειροι παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν. Ὁμοίως δύναται, μεταβαλλομένου τοῦ δευτέρου ἀξιώματος τῆς εὐθείας, νὰ διαπλασθῇ καὶ ἄλλο σύστημα γεωμετρικόν, ἐν τῷ ὁποίῳ αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ εἶναι κλεισταὶ καὶ ἐν τῷ ὁποίῳ δὲν ὑπάρχουσι παράλληλοι εὐθεῖαι. Ἀλλὰ τὰ γεωμετρικὰ ταῦτα συστήματα, καίτοι εἶναι λογικῶς δυνατά, εἶναι πολὺ πολυπλοκώτερα τοῦ κοινῶς παραδεδεγμένου γεωμετρικοῦ συστήματος τοῦ Εὐκλείδου, ἐν τῷ ὁποίῳ ἐξ ἑκάστου σημείου μία μόνη ἄγεται παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Ἄς τεθῇ ἡ γωνία γ ἐπὶ τῆς η τοιουτοτρόπως, ὥστε νὰ συμπέσωσιν αἱ κορυφαὶ αὐτῶν, νὰ πέσῃ δὲ καὶ ἡ πλευρὰ ΗΘ τῆς γ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΘΖ τῆς η, τότε καὶ ἡ πλευρὰ ΗΒ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΘΔ· διότι, ἂν ἐλάμβανεν ἄλλην θέσιν, ἔστω τὴν ΘΜ, θὰ ἦτο ἡ γωνία γ ἴση τῇ γωνίᾳ ΖΘΜ· ἄρα (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα) θὰ ἦτο ἡ ΘΜ παράλληλος τῇ ΑΒ· ἀλλὰ τότε θὰ εἴχομεν ἐκ τοῦ σημείου Θ δύο παραλλήλους τῇ ΑΒ, τουτέστι τὰς ΓΘΔ καὶ ΘΜ, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὸ ἀξίωμα τῶν παραλλήλων καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἄτοπον· ὥστε ἀνάγκη νὰ πέσῃ καὶ ἡ πλευρὰ ΗΒ ἐπὶ τῆς ΘΔ· ἐπομένως εἶναι $\gamma = \eta$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι (40) καὶ $\varepsilon = \eta$, ἕπεται $\gamma = \varepsilon$. Ἔχομεν πρὸς τούτοις (52) $\eta + \zeta = 2^{\text{ὀρθ.}}$, ὅθεν καὶ $\gamma + \zeta = 2^{\text{ὀρθ.}}$ (διότι $\gamma = \eta$).



Ὁμοίως ἀποδεικνύονται καὶ αἱ ἄλλαι ἰσότητες (ι).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

65. Πᾶσα κάθετος ἐπὶ μίαν τῶν παραλλήλων εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

66. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζωσι δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν (*ὡς αἱ εὐθεῖαι* ΑΒ *καὶ* ΘΜ *τοῦ προηγουμένου σχήματος*), *αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνουσιν ἀλλήλας, ὅταν ἐφ' ἱκανὸν αὐξηθῶσι πρὸς τὸ μέρος τῶν γωνιῶν τούτων.*

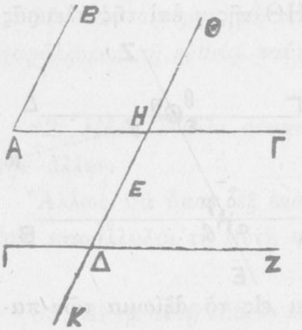
ΘΕΩΡΗΜΑ

67. Ἐὰν αἱ πλευραὶ δύο γωνιῶν εἶναι παράλληλοι, αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι μέν, ἂν αἱ παράλληλοι πλευραὶ ἔχωσιν ἀμφότεραι τὴν αὐτὴν φορὰν ἢ ἀμφότεραι ἀντίθετον, παραπληρωματικαὶ δέ, ἂν δύο μὲν παράλληλοι πλευραὶ ἔχωσι τὴν αὐτὴν φοράν, αἱ δὲ δύο ἄλλαι ἀντίθετον.

Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ, ἔχουσαι τὴν πλευρὰν ΔΖ παράλληλον τῇ ΑΓ καὶ τὴν ΔΕ παράλληλον τῇ ΑΒ. Ἐὰν αὐξηθῇ ἡ ΔΕ, θὰ συναντήσῃ τὴν ΑΓ (62) εἴς τι σημεῖον Η, θὰ εἶναι δὲ γων. ΒΑΓ = γων. ΘΗΓ· διότι αὗται εἶναι ἐντὸς ἐκτὸς τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΚΘ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ· ἐπίσης εἶναι γων. ΕΔΖ = γων. ΘΗΓ· διότι αὗται εἶναι ἐντὸς ἐκτὸς τῶν παραλλήλων ΑΓ καὶ ΙΖ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΘΚ.

Ἐκ τῶν δύο τούτων ἰσοτήτων ἕπεται γων. ΒΑΓ = γων. ΕΔΖ.

Καὶ αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΙΔΚ εἶναι ἴσαι· διότι ἡ ΙΔΚ εἶναι ἴση τῇ ΕΔΖ.



Ἔχουσι δὲ τῶν μὲν γωνιῶν ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ αἱ παράλληλοι πλευραί, ἀμφότεραι τὴν αὐτὴν φορὰν (ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ), τῶν δὲ γωνιῶν ΙΔΚ καὶ ΒΑΓ ἀμφότεραι τὴν ἀντίθετον (ἡ ΔΙ τῇ ΑΓ καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΑΒ).

Τέλος αἱ γωνίαι ΙΔΕ καὶ ΚΔΖ, ὡς παραπληρωματικαὶ τῆς ΕΔΖ, εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ τῆς ΒΑΓ· ἔχουσιν ὅμως αἱ μὲν παράλληλοι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΔΕ (τῶν γωνιῶν ΒΑΓ καὶ ΙΔΕ) τὴν αὐτὴν φοράν, αἱ δὲ ΑΓ καὶ ΔΙ ἐναντίαν.

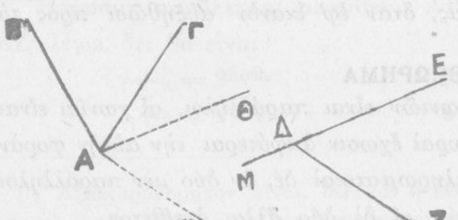
ΘΕΩΡΗΜΑ

68. Ἐὰν αἱ πλευραὶ γωνίας εἶναι κάθετοι πρὸς τὰς πλευρὰς ἄλλης (ἑκατέρα πρὸς ἑκατέραν), *αἱ γωνίαι εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.*

(Ἴσαι μὲν εἶναι, ἂν ἀμφότεραι εἶναι ὀξεῖαι, ἢ ἀμφότεραι ἀμβλεῖαι· παραπληρωματικαὶ δέ, ἂν ἡ μία εἶναι ὀξεῖα, ἡ δὲ ἄλλη ἀμβλεῖα).

Ἔστωσαν δύο γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΕΔΒ ἔχουσαι τὴν ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΔΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ· ἔστωσαν δὲ ἀμφότεραι ὀξεῖαι· λέγω ὅτι θὰ εἶναι ἴσαι.

Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Α, παράλληλος τῇ ΔΕ καὶ τὴν αὐτὴν ἔχουσα φοράν, ἡ ΑΘ· ἔτι δὲ παράλληλος τῇ ΔΖ καὶ τὴν αὐτὴν ἔχουσα φορὰν ἡ ΑΗ· τότε ἡ γωνία ΘΑΗ θὰ εἶναι ἴση τῇ ΕΔΖ (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα)· θὰ εἶναι δὲ ἡ μὲν ΑΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἡ δὲ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΑΒ (65), ὥστε αἱ γωνίαι ΘΑΒ καὶ ΗΑΓ θὰ εἶναι ἴσαι, ὡς ὀρθαί· ἐὰν δὲ ἀπ' ἀμφοτέρων ἀφαιρεθῇ ἡ κοινὴ ΘΑΓ, μένουσιν



ἴσαι γωνίαι, αἱ ΒΑΓ καὶ ΘΑΗ· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΘΑΗ εἶναι ἴση τῇ ΕΔΖ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΒΑΓ ἰσοῦται τῇ ΕΔΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Καὶ ἡ γωνία ΜΔΖ ἔχει τὰς πλευρὰς αὐτῆς καθέτους πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΒΑΓ· δὲν εἶναι ὅμως αἱ γωνίαι αὗται ἴσαι (διότι αἱ μὲν ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ εἶναι ὀξεῖαι, ἡ δὲ ΜΔΖ εἶναι ἀμβλεῖα) ἀλλ' εἶναι παραπληρωματικαί· διότι ἡ ΜΔΖ, παραπληρωματικὴ οὖσα τῆς ΕΔΖ, εἶναι παραπληρωματικὴ καὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΒΑΓ.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

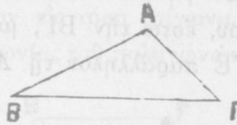
ΟΡΙΣΜΟΙ

69. *Εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περατουμένη εἰς εὐθείας γραμμάς.*

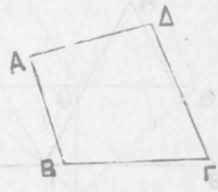
Πλευραὶ τοῦ σχήματος λέγονται αἱ περιέχουσαι αὐτὸ εὐθεῖαι.

Γωνίαι δ᾽ αὐτοῦ, αἱ ὑπὸ τῶν πλευρῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι.

Κορυφαὶ δ᾽ αὐτοῦ, αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν τούτων.

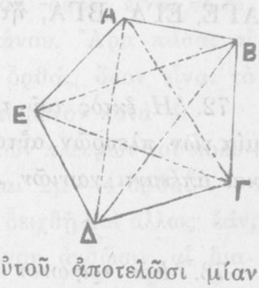


Τρίπλευρον μὲν ἢ *τρίγωνον* λέγεται τὸ ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν περιεχόμενον σχῆμα, ὡς τὸ ΑΒΓ· *τετράπλευρον* δὲ τὸ ὑπὸ τεσσάρων ὡς τὸ ΑΒΓΔ· πολύπλευρον δὲ ἢ *πολύγωνον* τὸ ὑπὸ περισσοτέρων.



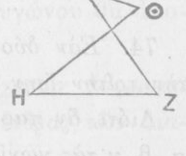
Περίμετρος τοῦ σχήματος λέγεται ἡ τεθλασμένη καὶ κλειστὴ γραμμή, ἣν σχηματίζουσιν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ· ἔτι δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Διαγώνιος τοῦ σχήματος λέγεται πᾶσα εὐθεῖα ἥτις συνδέει δύο κορυφὰς χωρὶς νὰ εἶναι πλευρά.



Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔΕ εἶναι πολύγωνον·
πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ·
γωνίαι αὐτοῦ εἶναι αἱ γωνίαι Α, Β, Γ, Δ, Ε·
κορυφαὶ αὐτοῦ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε·
διαγώνιοι δέ, αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΒΔ, ΒΕ, ΓΕ.

Ἁπλοῦν λέγεται τὸ σχῆμα, ἐὰν τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἀποτελῶσι μίαν γραμμὴν κλειστὴν μὴ ἔχουσαν μέρη κλειστά· οἷον, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἁπλοῦν σχῆμα καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐπίσης, ἀλλὰ τὸ τετράπλευρον ΖΗΙΘ δὲν εἶναι ἁπλοῦν σχῆμα.



Τὰ σχήματα, περὶ ὧν ἐνταῦθα γίνεται λόγος, εἶναι πάντα ἁπλᾶ σχήματα.

70. *Κυρτὸν* λέγεται τὸ σχῆμα, ἐὰν ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ προσεκβαλλομένη ἀφίνῃ τὸ σχῆμα ὁλόκληρον πρὸς τὸ ἓν μέρος αὐτῆς.

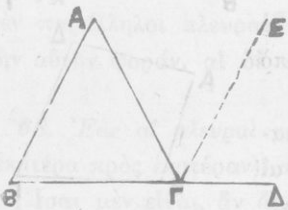
Τὸ τρίγωνον εἶναι κυρτὸν σχῆμα· διότι, ἂν πλευρά τις αὐτοῦ προσεκβαλλομένη εἰσήρχετο εἰς τὸ τρίγωνον, ἐν τῇ ἐξόδῳ ἢ θὰ ἔτεμνεν ἑαυτήν, ἢ θὰ ἔτεμνε μίαν τῶν ἄλλων εἰς δύο σημεῖα· ταῦτα δὲ εἶναι ἀδύνατα.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

71. *Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι δύο ὀρθαί.*

Ἔστω τυχὸν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· ἵνα δείξωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι δύο ὀρθαί, αὐξάνομεν μίαν τῶν πλευρῶν του, ἔστω τὴν ΒΓ, μέχρι σημείου τινὸς Δ καὶ ἄγομεν ἐκ τοῦ Γ τὴν ΓΕ παράλληλον τῇ ΑΒ.



Ἡ γωνία Α τοῦ τριγώνου εἶναι ἴση τῇ ΑΓΕ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΕ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ· ἐπίσης ἡ γωνία Β τοῦ τριγώνου εἶναι ἴση τῇ ΕΓΔ, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς τῶν αὐτῶν παραλλήλων, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ· ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου $Α+Β+Γ$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΒΓΑ, ἤτοι (53) δύο ὀρθαί.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

72. *Ἡ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνία ΑΓΔ* (ἥτις σχηματίζεται, ὅταν μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ προσεκβληθῇ) *εἶναι ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν Α καὶ Β.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

73. *Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ μίαν ὀρθὴν γωνίαν, αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι αὐτοῦ* (ὀξεῖαι οὖσαι) *θὰ ἀποτελῶσι μίαν ὀρθήν.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 3ον

74. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς δύο γωνίας ἴσας, θὰ ἔχωσι καὶ τὴν τρίτην ἴσην.*

Διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ Α, Β, Γ τὰς γωνίας τοῦ ἑνὸς καὶ διὰ α, β, γ τὰς γωνίας τοῦ ἄλλου, θὰ εἶναι

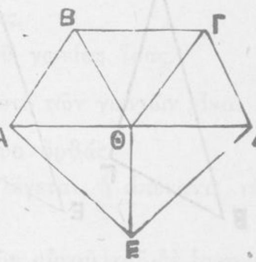
$$Α+Β+Γ=α+β+γ,$$

(διότι ἀμφότερα τὰ ἀθροίσματα εἶναι δύο ὀρθαί)· ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ἴσων τὰ ἴσα $Α+Β$ καὶ $α+β$ (διότι $Α=α$ καὶ $Β=β$), προκύπτει $Γ=γ$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

75. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς πολυγώνου κυρτοῦ εἶναι τόσαι ὀρθαὶ γωνίαι, ὅσον εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του ἠλαττωμένον κατὰ τέσσαρα.

Ἔστω κυρτὸν πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ τυχὸν σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ τὸ Θ· ἐὰν ἐκ τοῦ Θ ἀχθῶσιν εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου αἱ εὐθεῖαι ΘΑ, ΘΒ, ΘΓ, ΘΔ, ΘΕ, διαιροῦσι τὸ πολύγωνον εἰς τόσα τρίγωνα, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ· διαιροῦσι δὲ καὶ τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου ἑκάστην εἰς δύο μέρη, ὅπερ δὲν μεταβάλλει προφανῶς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν· ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων, ἐξαιρουμένων τῶν περὶ τὸ Θ γωνιῶν (αἵτινες ἀποτελοῦσι τέσσαρας ὀρθάς)· ἐπειδὴ δὲ ἑκάστου τριγώνου αἱ γωνίαι ἀποτελοῦσι δύο ὀρθάς, αἱ γωνίαι πάντων τῶν τριγώνων θὰ ἀποτελέσωσι τόσας ὀρθάς, ὅσον εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου. Ἄρα πᾶσαι αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου θὰ ἀποτελέσωσι τόσας ὀρθάς, ὅσον εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του ἠλαττωμένον κατὰ 4.



Ἐὰν διὰ τοῦ μ παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ θὰ εἶναι 2μ — 4 ὀρθαί.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ δειχθῇ καὶ ἄλλως· ἐάν, δηλονότι, ἀπὸ μιᾶς τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου ἀχθῶσιν αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ, διαιροῦσι τὸ πολύγωνον εἰς τόσα τρίγωνα, ὅσα εἶναι αἱ πλευραί του, πλὴν δύο, ἤτοι μ — 2· ἐπειδὴ δὲ ἑκάστου τούτων αἱ γωνίαι ἀποτελοῦσι δύο ὀρθάς, αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου θὰ ἀποτελῶσι 2 (μ — 2) ὀρθάς, ἤτοι 2μ — 4.

Παντὸς ἁπλοῦ τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα 4 ὀρθάς. Διότι χωρίζεται εἰς δύο τρίγωνα διὰ τῆς ἑτέρας τῶν διαγωνίων του.

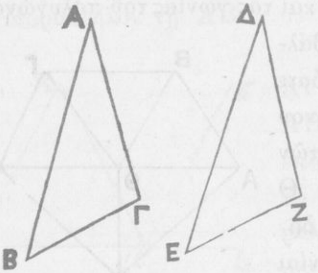
ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

76. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν μὲ ἑκατέραν, *καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.*

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἔχοντα τὰς δύο πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἴσας μὲ τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ καὶ ΔΖ (τὴν ΑΒ ἴσην τῇ ΔΕ καὶ τὴν ΑΓ ἴσην τῇ ΔΖ) καὶ τὴν γωνίαν ΒΑΓ ἴσην τῇ γωνίᾳ ΕΔΖ· λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Διότι, ἂν τεθῇ ἡ γωνία ΕΔΖ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΒΑΓ οὕτως, ὥστε νὰ πέσῃ ἡ πλευρὰ ΔΕ ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἡ δὲ ΔΖ ἐπὶ τῆς ΑΓ, τὸ μὲν σημεῖον Ε θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν ΔΕ καὶ ΑΒ, τὸ δὲ σημεῖον Ζ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν ΔΖ καὶ ΑΓ· καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΖ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ, διότι τὰ ἄκρα αὐτῶν συνέπεσαν καὶ μεταξὺ δύο σημείων μία μόνη εὐθεῖα ὑπάρχει· ὥστε τὰ δύο τρίγωνα ἐφαρμόζουσιν, ἄρα εἶναι ἴσα· θὰ ἔχωσι λοιπὸν καὶ τὰς γωνίας Β καὶ Ε ἴσας καὶ τὰς γωνίας Γ καὶ Ζ ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ ΕΖ ἴσας.



ΘΕΩΡΗΜΑ

77. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.*

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχῆμα τὸ ἀνωτέρω), ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΒΓ ἴσην τῇ ΕΖ καὶ τὴν γωνίαν Β ἴσην τῇ Ε καὶ τὴν γωνίαν Γ ἴσην τῇ Ζ· λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Διότι, ἂν τεθῇ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ ΕΖ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΒΓ (νὰ πέσῃ δὲ τὸ Ε εἰς τὸ Β καὶ τὸ Ζ εἰς τὸ Γ), ἡ μὲν ΕΔ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΒΑ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν Ε καὶ Β, ἡ δὲ ΖΔ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΓΑ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν Ζ καὶ Γ· ἑπομένως τὸ σημεῖον Δ, ὅπερ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν ΕΔ καὶ ΖΔ, θὰ γίνῃ κοινὸν σημεῖον τῶν ΒΑ καὶ ΓΑ· ἐπειδὴ δὲ αἱ ΒΑ καὶ ΓΑ δὲν δύνανται νὰ ἔχωσιν ἄλλο κοινὸν σημεῖον πλὴν τοῦ Α, συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ σημεῖον Δ θὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ Α· ἑπομένως ἡ ΕΔ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΑ καὶ ἡ ΖΔ ἐπὶ τῆς ΓΑ· ὥστε καὶ τὰ τρίγωνα θὰ ἐφαρμόσωσιν· ἄρα εἶναι ἴσα.

ΟΡΙΣΜΟΙ

78. Ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ λέγεται τὸ τρίγωνον:

Ἰσόπλευρον, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς αὐτοῦ πλευρὰς ἴσας.

Ἰσοσκελὲς δέ, ἐὰν ἔχῃ δύο μόνον πλευρὰς ἴσας.

Σκαληνὸν δέ, ἐὰν δὲν ἔχῃ πλευρὰς ἴσας.

79. Ἐκ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ λέγεται τὸ τρίγωνον:

Ὀρθογώνιον, ἐὰν ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθήν.

Ἀμβλυγώνιον δέ, ἐὰν ἔχῃ μίαν γωνίαν ἀμβλεῖαν (αἱ λοιπαὶ δύο θὰ εἶναι (71) ὀξεῖαι).

Ὀξυγώνιον δέ, ἐὰν καὶ τὰς τρεῖς ἔχῃ ὀξείας.

Ἰσογώνιον δέ, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς αὐτοῦ γωνίας ἴσας.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τοῦ ἰσογωνίου τριγώνου ἑκάστη τῶν γωνιῶν εἶναι $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς· διότι αἱ τρεῖς ἔχουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθάς.

Ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου λέγεται ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρά.

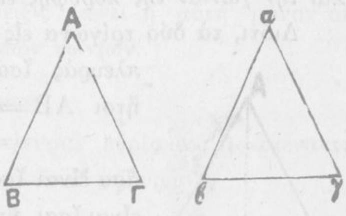
Βάσις τριγώνου λέγεται μία τις τῶν πλευρῶν αὐτοῦ· τοῦ δὲ ἰσοσκελοῦς τριγώνου λαμβάνεται συνήθως ὡς βάσις ἡ πρὸς τὰς ἄλλας ἄνισος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

80. Παντὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι (αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν) *εἶναι ἴσαι.*

Ἔστω ἰσοσκελὲς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἔχον ἴσας τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ· λέγω, ὅτι αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι, αἱ Γ καὶ Β, εἶναι ἴσαι.

Ἂς ἐπαναληφθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ἂς ἐφαρμοσθῶσιν αἱ ἴσαι γωνίαι Α καὶ α, ἀλλ' οὕτως ὥστε ἡ πλευρὰ αβ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΓ καὶ ἡ αγ ἐπὶ τῆς ΑΒ· τότε καὶ τὸ σημεῖον β θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ (διότι αβ = ΑΒ = ΑΓ) καὶ τὸ γ ἐπὶ τοῦ Β καὶ ἡ εὐθεῖα βγ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΓΒ· ὥστε αἱ γωνίαι γ καὶ Β θὰ ἐφαρμόσωσιν· ἄρα εἶναι ἴσαι· καὶ ἐπειδὴ ἡ γ εἶναι ἴση τῇ Γ, ἕπεται Β = Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου δύο ἴσαι γωνίαι εἶναι πάντοτε ὀξεῖαι· ἄλλως θὰ ὑπερέβαινε τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν αὐτοῦ γωνιῶν τὰς δύο ὀρθάς.

ΠΟΡΙΣΜΑ

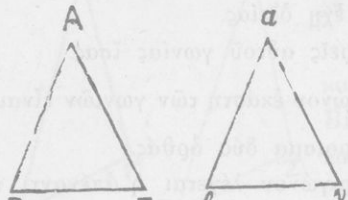
81. Πᾶν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

82. Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ δύο γωνίας ἴσας, ἔχει καὶ τὰς ἀπέναντι αὐτῶν πλευρὰς ἴσας.

Ἔστω τοιοῦτο τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἔχον τὰς γωνίας Β καὶ Γ ἴσας· λέγω, ὅτι καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν γωνιῶν τούτων πλευραί, αἱ ΑΓ καὶ ΑΒ, εἶναι ἴσαι.

Ἂς ἐπαναληφθῇ τὸ τρίγωνον καὶ ἂς τεθῇ τὸ αβγ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ



οὕτως, ὥστε ἡ βγ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΓΒ, νὰ πέσῃ δὲ τὸ β ἐπὶ τοῦ Γ καὶ τὸ γ ἐπὶ τοῦ Β· τότε καὶ ἡ βα θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΓΑ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν β καὶ Γ (διότι β = Β = Γ)· ὁμοίως ἡ γα θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΒΑ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν Β καὶ γ· ἑπομένως τὰ τρίγωνα θὰ ἐφαρμόσωσι (κατὰ τὸ θεώρημα 77) καὶ ἡ αβ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΓ· ἄρα εἶναι ἴσαι· ἐπειδὴ δὲ εἶναι αβ = ΑΒ, ἕπεται ΑΒ = ΑΓ· ὅ. ἔ. δ.

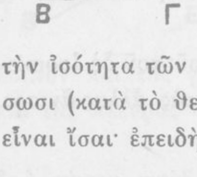
ΠΟΡΙΣΜΑ

83. Πᾶν τρίγωνον ἰσογώνιον εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

84. Ἐὰν εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἀχθῇ εὐθεῖα ἐκ τῆς κορυφῆς εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως, θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν καὶ θὰ διαιρῇ καὶ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο μέρη ἴσα.

Διότι, τὰ δύο τρίγωνα εἰς ἃ τὸ ἰσοσκελὲς διαιρεῖται, ἔχουσι τὰς δύο



πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, ἤτοι ΑΒ = ΑΓ καὶ ΒΔ = ΔΓ (ἐξ ὑποθέσεως) καὶ Β = Γ· (80)

ἄρα εἶναι ἴσα καὶ διὰ τοῦτο αἱ γωνίαι ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι ἴσαι, ἤτοι ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ.

Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν αὐτῶν τριγώνων ἕπεται καὶ ὅτι αἱ δύο γωνίαι ΒΑΔ καὶ ΓΑΔ, εἰς τὰς ὁποίας διαιρεῖται ἡ Α, εἶναι ἴσαι.

85. Ἀξιοπαρατήρητον εἶναι, ὅτι ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ μία καὶ ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ἐκτελεῖ τὰ ἑξῆς τέσσαρα.

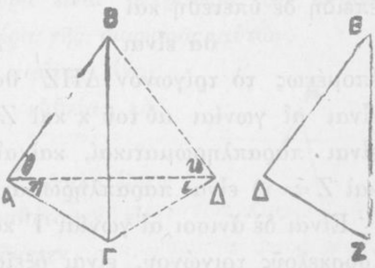
1) διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς·
2) διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς βάσεως·
3) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν·
4) διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς·

δεικνύεται δὲ εὐκολώτατα, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ ἄλλη εὐθεῖα ἐκτελοῦσα δύο ἐκ τούτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

86. *Δύο τρίγωνα ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν, εἶναι ἴσα.*

Ἔστω ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ καὶ ΒΓ = ΕΖ·
λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα.



Ἂς τεθῇ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ καὶ οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ Ε νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Β καὶ ἡ πλευρὰ ΕΖ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΒΓ, ἂς ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΔ· τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελὲς· διότι ΑΒ = ΕΔ = ΒΔ· ὅθεν ἕπεται (80)

$$\theta = \kappa\cdot$$

ἀλλὰ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ εἶναι ὡσαύτως ἰσοσκελές· ὅθεν εἶναι $\eta = \iota$.
Ἐκ τῶν δύο τούτων ἰσοτήτων ἕπεται: $\eta + \theta = \iota + \kappa$, ἤτοι Α = Δ· ὥστε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἴσας· ἄρα εἶναι ἴσα (76).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῇ ἀποδείξει ὑπετέθη, ὅτι ἡ ΑΔ κεῖται ἐντὸς τῶν τριγώνων, ὥστε διαιρεῖ τὰς γωνίας Α καὶ Δ εἰς μέρη· ἀλλὰ καὶ ἐκτὸς αὐτῶν ἂν κεῖται ἡ ΑΔ, πάλιν ἡ ἀπόδειξις μένει ἡ αὐτή· μόνον αἱ γωνίαι Α καὶ Δ εἶναι τότε διαφοραὶ ἴσων γωνιῶν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

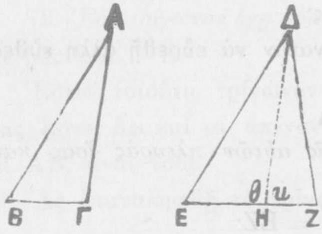
87. Εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα, αἱ ἴσαι πλευραὶ εὑρίσκονται ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν καὶ αἱ ἴσαι γωνίαι ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

88. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν γωνίαν ἴσην ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν, ἢ εἶναι τὰ τρίγωνα ταῦτα ἴσα, ἢ αἱ δύο γωνίαι, αἱ ἀπέναντι τῶν δύο ἄλλων ἴσων πλευρῶν, εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ ἄνισοι.*

Ἔστω ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ καὶ Β = Ε.

Ἂν μὲν αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ ΕΖ εἶναι ἴσαι, τὰ τρίγωνα θὰ εἶναι ἴσα. ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἴσας,



Ἂν δὲ εἶναι ἄνισοι, ἔστω μεγαλητέρα ἡ ΕΖ καὶ ἂς ἐφαρμοσθῇ ἡ γωνία Β ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ Ε· τότε ἡ μὲν πλευρὰ ΒΑ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΕΔ (διότι εἶναι ἴσαι), ἡ δὲ ΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπί τινος μέρους τῆς ΕΖ, ἔστω ἐπὶ τῆς ΕΗ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΔΕΗ· ὥστε θὰ εἶναι Γ = θ καὶ ΑΓ = ΔΗ· ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη καὶ ΑΓ = ΔΖ συνάγεται ὅτι θὰ εἶναι ΔΗ = ΔΖ·

ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΔΗΖ θὰ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ διὰ τοῦτο θὰ εἶναι αἱ γωνίαι αὐτοῦ κ καὶ Ζ ἴσαι, ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι θ καὶ κ εἶναι παραπληρωματικαί, καὶ αἱ ἴσαι πρὸς αὐτὰς Γ καὶ Ζ (Γ = θ καὶ Ζ = κ) εἶναι παραπληρωματικαί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Εἶναι δὲ ἄνισοι αἱ γωνίαι Γ καὶ Ζ· διότι ἡ Ζ οὖσα παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, εἶναι ὀξεῖα· ἑπομένως ἡ Γ θὰ εἶναι ἀμβλεῖα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν αἱ γωνίαι Γ καὶ Ζ εἶναι ἢ ἀμφότεραι ὀξεῖαι ἢ ἀμφότεραι ἀμβλεῖαι, δὲν δύνανται νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα δύο ὀρθὰς καὶ ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ θὰ εἶναι ἴσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

89. Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσι τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσην, εἶναι ἴσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

90. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Διότι καὶ τὴν τρίτην γωνίαν ἔχουσιν ἴσην (74)· ἔχοντα δὲ μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας, εἶναι ἴσα (77).

ΠΟΡΙΣΜΑ

91. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχωσι μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην καὶ τὰς ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰς ἴσας, ἢ ἐὰν ἔχωσι μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην καὶ τὰς ὑποτεινούσας ἴσας.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν ὅτι δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχωσι·

1) Τὰς δύο πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ (76).

2) Τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσην (88).

3) Μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην καὶ τὰς ὑποτεινούσας ἴσας (90).

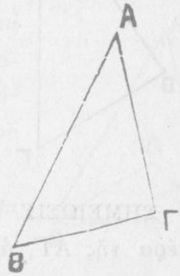
4) Μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην καὶ τὰς ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰς ἴσας (90).

5) Μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην καὶ τὴν προσκειμένην κάθετον πλευρὰν ἴσην (77).

ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΟΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ

92. Παντὸς τριγώνου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλητέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.



Τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως ταύτης εἶναι φανερὸν ἐκ τοῦ 5ου ἀξιώματος τῆς εὐθείας, τὸ δὲ δεύτερον ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Ἵνα δείξωμεν, ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι μεγαλητέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων, προσθέτομεν εἰς αὐτὴν τὴν μικροτέραν ἐξ αὐτῶν· ὅτε ἔχομεν

$$ΒΓ + ΑΓ > ΑΒ.$$

Ἐὰν δὲ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ἀνίσων ἀφαιρέσωμεν τὴν αὐτὴν γραμμὴν ΑΓ, λαμβάνομεν

$$ΒΓ > ΑΒ - ΑΓ.$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ περὶ τῶν ἄλλων πλευρῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

93. Ἐὰν δύο πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἄνισοι, καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἄνισοι· ἡ μεγαλητέρα γωνία ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας πλευρᾶς.

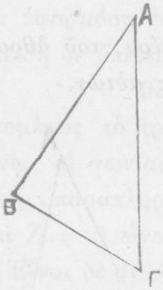
Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἔχον τὴν πλευρὰν ΑΒ μεγαλητέραν τῆς ΑΓ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ γωνία Γ (ἡ ἀπέναντι τῆς ΑΒ) θὰ εἶναι μεγαλητέρα τῆς Β.

Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς μεγαλητέρας πλευρᾶς ΑΒ τὸ μέρος ΑΔ, ἴσον τῇ μικροτέρᾳ ΑΓ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΔ. Ἡ γωνία ΑΔΓ, οὖσα ἐκτὸς γωνία τοῦ τριγώνου ΓΔΒ, εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἐντὸς καὶ ἀπέναντι Β (72)· ἡ αὐτὴ δὲ γωνία ΑΔΓ εἶναι ἴση τῇ ΑΓΔ, διότι τὸ τρίγωνον ΑΓΔ εἶναι ἰσοσκελὲς ἐκ κατασκευῆς· ὥστε ἡ γωνία ΑΓΔ, ἥτις εἶναι μέρος τῆς Γ, ὑπερβαίνει τὴν Β· πολὺ δὲ περισσότερον ἡ γωνία Γ θὰ ὑπερβαίνῃ τὴν Β.

ΘΕΩΡΗΜΑ

94. *Ἐὰν δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἄνισοι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἄνισοι, ἡ μεγαλητέρα πλευρὰ ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας γωνίας.*

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἔχον τὴν γωνίαν Β μεγαλητέραν τῆς Γ· λέγω ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ θὰ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΒ.



Ἂν ἡ ΑΓ δὲν ἦτο μεγαλητέρα τῆς ΑΒ, θὰ ἦτο ἢ ἴση τῇ ΑΒ ἢ μικροτέρα αὐτῆς. Ἀλλ' ἂν ἦτο ἡ ΑΓ ἴση τῇ ΑΒ, θὰ ἦτο καὶ $Β = Γ$· ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει. Ἂν δὲ πάλιν ἦτο ἡ ΑΓ μικροτέρα τῆς ΑΒ, θὰ ἦτο (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα) καὶ ἡ γωνία Β μικροτέρα τῆς Γ· ὅπερ καὶ τοῦτο ἐναντίον τῇ ὑποθέσει· ἄρα ἡ ΑΓ οὔτε ἴση δύναται νὰ εἶναι τῇ ΑΒ, οὔτε μικροτέρα αὐτῆς· ἐπομένως θὰ εἶναι μεγαλητέρα.

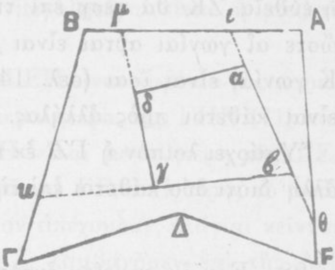
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀντὶ νὰ ἀποδείξωμεν εὐθύς, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΓ, ἀπεδείξαμεν πρῶτον, ὅτι δὲν δύναται νὰ εἶναι μήτε ἴση μήτε μικροτέρα· διότι ἀμφότεραι αἱ ὑποθέσεις $ΑΒ = ΑΓ$ ἢ $ΑΒ < ΑΓ$ φέρουσιν εἰς ἄτοπα. Ἡ τοιαύτη μέθοδος τῆς ἀποδείξεως λέγεται *ἀπαγωγὴ εἰς ἄτοπον* καὶ κατ' αὐτὴν ἐγένοντο αἱ ἀποδείξεις τῶν πρώτων θεωρημάτων (ἐδάφ. 22,23,33 κτλ.). Συνίσταται δὲ ἡ μέθοδος αὕτη γενικῶς εἰς τοῦτο, ὅτι ἀποδεικνύομεν τὰς ὑποθέσεις, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ κάμωμεν περί τινος πράγματος, πάσας ψευδεῖς, πλὴν μιᾶς καὶ μόνης, τῆς ὁποίας τότε συμπεραίνομεν τὴν ἀλήθειαν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

95. *Ἡ περίμετρος κυρτοῦ σχήματος εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης γραμμῆς ἐξ εὐθειῶν συγκειμένης καὶ περικλειούσης αὐτό.*

Ἔστω κυρτὸν σχῆμα τὸ αβγδ καὶ περικλείουσα αὐτὸ γραμμὴ ἡ ΑΒΓΔΕΑ· λέγω ὅτι ἡ περίμετρος $αβ + βγ + γδ + δα$ εἶναι μικροτέρα τῆς $ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΕΑ$.

Ἂς προσεκβληθῇ ἑκατέρωθεν ἡ αβ, μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν περικλείουσαν γραμμὴν εἰς τὰ σημεῖα ι καὶ θ· ἐὰν ἐν τῇ περικλειούσῃ ἀντικαταστήσωμεν τὴν τεθλασμένην γραμμὴν ιΑθ διὰ τῆς εὐθείας ιθ, λαμβάνομεν γραμμὴν μικροτέραν (5ον ἀξίωμα τῆς εὐθείας), τὴν ιθΕΔΓΒι· ἐὰν δὲ καὶ ἐν ταύτῃ ἀντικαταστήσωμεν τὴν τεθλασμένην γραμμὴν βθΕΔΓκ διὰ τῆς εὐθείας βκ, λαμβάνομεν μικροτέραν γραμμήν, τὴν ιβκΒι. Ὁμοίως ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν μικροτέραν τὴν ιβγμι καὶ τέλος ταύτης μικροτέραν, τὴν αβγδα. Ἐπειδὴ δὲ ἐλαττοῦντες τὴν γραμμὴν ΑΒΓΔΕΑ, εὕρομεν τὴν αβγδα, συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ γραμμὴ αβγδα εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΒΓΔΕΑ.



ΠΟΡΙΣΜΑ

96. Ἐὰν ἐντὸς τριγώνου ληφθῇ σημεῖόν τι Δ καὶ ἀχθῶσιν ἐξ αὐτοῦ εὐθεῖαι, εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς πλευρᾶς, αἱ ΔΒ, ΔΓ, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

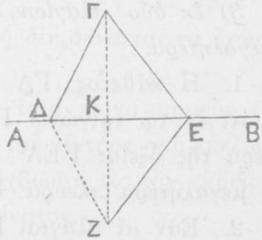
Διότι ἡ γραμμὴ ΒΔ + ΔΓ + ΓΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΑ + ΑΓ + ΓΒ.

ΠΕΡΙ ΚΑΘΕΤΟΥ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

97. Ἐκ σημείου ὑπάρχοντος ἐκτὸς εὐθείας δύναται νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ᾿ αὐτήν· μία δὲ καὶ μόνη.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς τὸ Γ· λέγω ὅτι ὑπάρχει τις εὐθεῖα διὰ τοῦ Γ διερχομένη καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

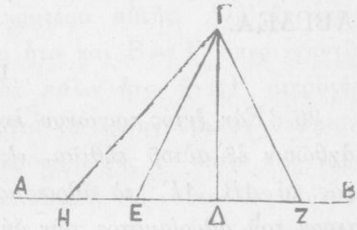


Ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ Γ εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι, ἔστωσαν αἱ ΓΔ, ΓΕ, καὶ ἂς περιστραφῇ τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΓΔΕ περὶ τὴν βάσιν του ΔΕ, μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ, ἂς λάβῃ δὲ τότε τὴν θέσιν ΔΕΖ· ἂς ἀχθῇ δὲ ἡ εὐθεῖα ΓΖ, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Κ (διότι ἡ ΑΒ εἰσέρχεται εἰς τὸ τρίγωνον ΓΔΖ, ἄρα καὶ θὰ ἐξέρχηται ἐξ αὐτοῦ)· ἐὰν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν του, περιστρεφόμενον περὶ τὴν ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΖΚ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΓΚ καὶ ἡ γωνία ΖΚΔ ἐπὶ τῆς ΓΚΔ· ὥστε αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι· ἑπομένως καὶ αἱ τέσσαρες περὶ τὸ Κ γωνίαι εἶναι ἴσαι (σελ. 14, παρατήρ.) καὶ αἱ εὐθεῖαι ΓΖ καὶ ΑΒ εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

Ὑπάρχει λοιπὸν ἡ ΓΖ ἐκ τοῦ Γ, κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· ἀλλ' οὐδεμία ἄλλη· διότι δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι (59).

ΟΡΙΣΜΟΙ

98. Ἐὰν ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου, ἀχθῇ ἐπ' αὐτὴν ἡ κάθετος ΓΔ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι ΓΕ, ΓΗ, ΓΖ......, αὗται λέγονται *πλάγιαι*. Δύο πλάγιαι ΓΕ, ΓΖ, λέγεται, ὅτι *ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τῆς καθέτου*, ἐὰν οἱ πόδες αὐτῶν Ε καὶ Ζ ἀπέχωσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ *ποδὸς* Δ τῆς καθέτου.



Ἄνισον δὲ λέγεται, ὅτι ἀπέχουσιν αἱ πλάγιαι ἀπὸ τῆς καθέτου, ὅταν αἱ ἀποστάσεις τῶν ποδῶν αὐτῶν ἀπὸ τοῦ Δ εἶναι ἄνισοι, ὡς αἱ ΓΗ, ΓΕ καὶ μᾶλλον ἀπέχουσα λέγεται ἐκείνη, τῆς ὁποίας ὁ ποῦς ἀπέχει περισσότερον ἀπὸ τοῦ Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

99. Ἐὰν ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου, ἀχθῶσιν ἐπ' αὐτὴν ἡ κάθετος καὶ ὁσαιδήποτε πλάγιαι

1) ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας,

2) δύο πλάγιαι ἴσον ἀπὸ τῆς καθέτου ἀπέχουσαι εἶναι ἴσαι,

3) ἐκ δύο πλαγίων, ἡ μᾶλλον ἀπὸ τῆς καθέτου ἀπέχουσα εἶναι μεγαλητέρα.

1. Ἡ κάθετος ΓΔ εἶναι μικροτέρα τῆς τυχούσης πλαγίας ΓΕ· διότι ἐν τῷ τριγώνῳ ΓΔΕ, ἡ γωνία ΓΔΕ, ὡς ὀρθή, εἶναι μεγαλητέρα τῆς ὀξείας ΓΕΔ· ἀπέναντι δὲ τῆς μεγαλητέρας γωνίας κεῖται ἡ μεγαλητέρα πλευρά· ὅθεν ΓΕ > ΓΔ.

2. Ἐὰν αἱ πλάγιαι ΓΕ καὶ ΓΖ ἀπέχωσιν ἴσον ἀπὸ τῆς καθέτου, ἤτοι, ἂν εἶναι ΔΕ = ΔΖ, τὰ τρίγωνα ΓΔΕ καὶ ΓΔΖ θὰ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΓΔ κοινήν, τὴν ΔΕ ἴσην τῇ ΔΖ καὶ τὴν γωνίαν ΓΔΕ ἴσην

τῇ ΓΔΖ. Ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων συνάγεται, ὅτι ἡ ΓΕ εἶναι ἴση τῇ ΓΖ.

3. Ἐκ τῶν πλαγίων ΓΗ καὶ ΓΕ, μεγαλητέρα εἶναι ἡ μᾶλλον ἀπὸ τῆς καθέτου ἀπέχουσα ΓΗ.

Διότι, ἐν τῷ τριγώνῳ ΓΕΗ, ἡ γωνία ΓΕΗ εἶναι ἀμβλεῖα (ὡς παραπλήρωμα τῆς ὀξείας ΓΕΔ)· ἄρα εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΓΗΕ (71) καὶ ἑπομένως ἡ ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰ ΓΗ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΓΕ.

Ἐν τῇ ἀποδείξει ἐλήφθησαν δύο πλάγιαι ΓΕ, ΓΗ, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου κείμεναι· ἐὰν αἱ ἄνισον ἀπέχουσαι πλάγιαι κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς καθέτου, ὡς αἱ ΓΗ, ΓΖ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΔΗ (ἥτις εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΔΗ) τὴν ΔΕ ἴσην τῇ ΔΖ καὶ ἄγομεν τὴν πλαγίαν ΓΕ, ἥτις, κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἰσοῦται τῇ ΓΖ· ἔπειτα δεικνύομεν, ὡς ἀνωτέρω, ὅτι ἡ ΓΗ ὑπερβαίνει τὴν ΓΕ, ἄρα καὶ τὴν ἴσην αὐτῇ ΓΖ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ τὰ ἀντίστροφα τῶν τριῶν τούτων προτάσεων ἀληθεύουσι καὶ ἀποδεικνύονται εὐκολώτατα διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ

100. Ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου, εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀχθῶσιν εἰς αὐτὴν τρεῖς εὐθεῖαι ἴσαι.

Διότι, ἂν μὲν ἡ μία ἐκ τῶν τριῶν εἶναι κάθετος, θὰ εἶναι αὕτη μικροτέρα τῶν δύο ἄλλων· ἐὰν δὲ εἶναι πλάγιαι καὶ αἱ τρεῖς, ἢ θὰ εὑρίσκωνται καὶ αἱ τρεῖς πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου καί, κατ' ἀκολουθίαν, θὰ εἶναι ἄνισοι, ἢ θὰ εὑρίσκωνται, δύο πρὸς τὸ ἓν μέρος τῆς καθέτου καὶ μία πρὸς τὸ ἄλλο· ἀλλὰ καὶ τότε αἱ δύο, αἱ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου εὑρισκόμεναι, θὰ εἶναι ἄνισοι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

101. Περιφέρεια κύκλου καὶ εὐθεῖα γραμμὴ δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.

Διότι, ἂν εὐθεῖά τις καὶ περιφέρεια εἶχον τρία κοινὰ σημεῖα, τὰ σημεῖα ταῦτα τῆς εὐθείας θὰ ἀπεῖχον ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου· ὥστε θὰ ἦτο δυνατὸν ἐκ τοῦ κέντρου νὰ ἀχθῶσιν εἰς τὴν εὐθεῖαν ταύτην τρεῖς εὐθεῖαι ἴσαι· ὅπερ ἀπεδείχθη ἀδύνατον.

ΠΟΡΙΣΜΑ

102. Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι γραμμὴ καμπύλη.

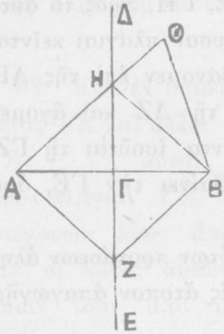
Διότι, οὐδὲν μέρος αὐτῆς, ὅσον μικρὸν καὶ ἂν ὑποτεθῇ, εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΝ ΚΑΘΕΤΩΣ

103. Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου εὐθείας ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν,

1) πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου θὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων,

2) πᾶν σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου κείμενον, θὰ ἀπέχῃ ἄνισον ἀπὸ τῶν ἄκρων.



Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ μέσου αὐτῆς Γ, κάθετος ἐπ' αὐτήν, ἡ ΕΓΔ.

1. Τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς καθέτου, οἷον τὸ Ζ, ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων Α καὶ Β, διότι αἱ εὐθεῖαι ΖΑ καὶ ΖΒ εἶναι πλάγιαι, ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τῆς καθέτου ΖΓ· ἄρα εἶναι ἴσαι.

2. Πᾶν σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου κείμενον, ὡς τὸ Θ, ἀπέχει ἄνισον ἀπὸ τῶν ἄκρων Α καὶ Β (ὀλιγώτερον δ' ἀπέχει ἀπὸ τοῦ ἄκρου, ὅπερ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου, πρὸς ὃ καὶ τὸ Θ). Διότι, ἐκ τῶν εὐθειῶν ΘΑ, ΘΒ, ἡ ἑτέρα τέμνει ἀναγκαίως (27) τὴν κάθετον ΕΓΔ εἴς τι σημεῖον Η· ἐὰν δὲ ἀχθῇ καὶ ἡ ΒΗ, ἔχομεν ἐκ τοῦ τριγώνου ΘΗΒ

$$ΘΒ < ΒΗ + ΗΘ·$$

καὶ ἐὰν ἀντὶ τῆς ΒΗ θέσωμεν τὴν ἴσην αὐτῇ ΗΑ, εὑρίσκομεν:

$$ΘΒ < ΑΗ + ΗΘ, \quad \text{τουτέστι} \quad ΘΒ < ΑΘ. \qquad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

104. Πᾶν σημεῖον, ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῶν ἄκρων εὐθείας κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου, ἥτις ἄγεται εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ταύτης.

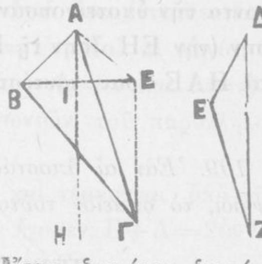
ΘΕΩΡΗΜΑ

105. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὰς δὲ περιεχομένας ὑπ' αὐτῶν γωνίας ἀνίσους, αἱ λοιπαὶ πλευραὶ θὰ εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλητέρα θὰ εἶναι ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας γωνίας.

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἔχοντα ΑΒ = ΔΕ ΑΓ = ΔΖ καὶ Α > Δ· λέγω, ὅτι θὰ εἶναι ΒΓ > ΕΖ.

Διότι, ἐὰν τεθῇ ἡ κορυφὴ Δ ἐπὶ τῆς Α καὶ ἡ πλευρὰ ΔΖ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΓ, τὸ δὲ τρίγωνον ΔΕΖ ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ, ἡ διχοτομοῦσα τὴν γωνίαν ΒΑΕ θὰ κεῖται ἐντὸς τῆς μεγαλητέρας γωνίας

ΓΑΒ, θὰ εἶναι δὲ καὶ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΕ· διότι τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἰσοσκελὲς (διότι ΑΒ=ΔΕ)· ἀλλὰ τὸ σημεῖον Γ κεῖται ἐκτὸς τῆς καθέτου ταύτης καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς ἔνθα καὶ τὸ Ε· ἄρα τὸ Γ ἀπέχει ἀπὸ τῶν σημείων Β καὶ Ε ἄνισον καὶ εἶναι ΒΓ>ΕΓ, ἤτοι ΒΓ>ΕΖ. Ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τούτου εἶναι τὸ ἑξῆς.



106. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ τὰς δὲ λοιπὰς πλευρὰς ἀνίσους, αἱ ἀπέναντι τῶν ἀνίσων πλευρῶν γωνίαι εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλητέρα θὰ εἶναι ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας πλευρᾶς.

Δεικνύεται δὲ εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

ΟΡΙΣΜΟΣ

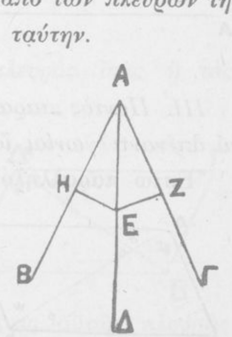
107. *Ἀπόστημα* ἢ *ἀπόστασις* σημείου ἀπὸ εὐθείας λέγεται ἡ κάθετος, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν· λαμβάνεται δὲ ἡ κάθετος ὡς ἀπόστημα, διότι εἶναι μία· εἶναι δὲ καὶ ἡ ἐλαχίστη πασῶν τῶν εὐθειῶν τῶν δυναμένων νὰ ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ σημείου εἰς τὴν εὐθεῖαν.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥΣΗΣ ΓΩΝΙΑΝ

108. Πᾶν σημεῖον τῆς διχοτομούσης γωνίαν εὐθείας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας.

Καὶ ἀντιστρόφως: *πᾶν σημεῖον ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν ταύτην.*

Ἔστω γωνία ἡ ΒΑΓ καὶ εὐθεῖα διχοτομοῦσα αὐτὴν ἡ ΑΔ καὶ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς τὸ Ε· λέγω ὅτι τὸ Ε ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, ἤτοι, ὅτι αἱ ἐξ αὐτοῦ ἀγόμεναι κάθετοι ΕΗ, ΕΖ ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας, εἶναι ἴσαι.



Διότι τὰ τρίγωνα ΑΕΗ καὶ ΑΕΖ εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουσι τὴν ὑποτείνουσαν ΑΕ κοινὴν καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ΗΑΕ ἴσην τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ ΖΑΕ· ἄρα εἶναι ἴσα (91) καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ΕΖ=ΕΗ.

Ἀντιστρόφως, ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον Ε ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΒΑΓ, ἤτοι, ὅτι αἱ ΕΖ, ΕΗ εἶναι ἴσαι, καὶ ἀχθῇ ἡ

ΑΕ, τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΗ καὶ ΑΕΖ θὰ εἶναι πάλιν ἴσα ὡς ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν κοινὴν καὶ μίαν πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσην (τὴν ΕΗ ἴσην τῇ ΕΖ)· ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ αἱ γωνίαι ΖΑΕ καὶ ΗΑΕ ἴσαι· τουτέστιν ἡ ΑΕ θὰ διχοτομῇ τὴν γωνίαν ΒΑΓ.

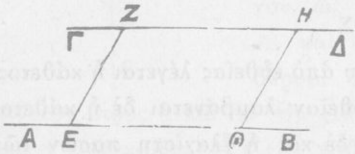
ΠΟΡΙΣΜΑ

109. Ἐὰν αἱ ἀποστάσεις σημείου ἀπὸ τῶν πλευρῶν γωνίας εἶναι ἄνισοι, τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται ἐκτὸς τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν.

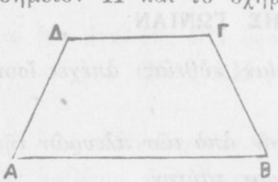
ΠΕΡΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

110. Παραλληλόγραμμον λέγεται τὸ τετράπλευρον, οὗτινος αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι



Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι καὶ ἐπιζευχθῶσι δύο σημεῖα αὐτῶν, τὰ τυχόντα, οἷον τὰ Ε, Ζ, διὰ τῆς εὐθείας ΕΖ, ἀχθῇ δὲ ἔπειτα ἔκ τινος σημείου τῆς ΑΒ, ἔστω ἐκ τοῦ Θ, παράλληλος τῇ ΕΖ, αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν ΓΔ κατά τι σημεῖον Η καὶ τὸ σχῆμα ΕΖΗΘ θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον.

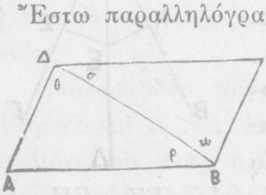


Τραπέζιον λέγεται τὸ τετράπλευρον, οὗτινος δύο μόνον ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι· τοιοῦτον εἶναι τὸ ΑΒΓΔ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

111. Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἴσαι.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ· λέγω, ὅτι εἶναι



ΑΒ = ΓΔ, ΑΔ = ΒΓ

καὶ Α = Γ, Β = Δ.

Ἐὰν ἀχθῇ ἡ διαγώνιος ΒΔ, διαιρεῖ τὸ παραλληλόγραμμον εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΒΓ· τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΒΔ κοινήν, τὴν γωνίαν ρ ἴσην τῇ σ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΔΒ, καὶ τὰς γωνίας ϑ καὶ κ ἴσας, δι' ὅμοιον λόγον· ἔχουσι λοιπὸν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας αὐτῇ γωνίας ἴσας· ἄρα εἶναι ἴσα· ἐντεῦθεν ἕπεται ΑΔ = ΒΓ καὶ ΑΒ = ΔΓ, ἔτι δὲ καὶ Α = Γ. Καὶ αἱ γωνίαι Β καὶ Δ εἶναι ἴσαι· διότι σύγκεινται ἐκ μερῶν ἴσων (ϱ = σ καὶ ϑ = κ).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἰσότης τῶν ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ παραλληλογράμμου ἀποδεικνύεται καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι καὶ τέμνονται ὑπὸ τῆς ΑΔ, ἔχομεν Α + Δ = 2 ὀρθ.· δι' ὅμοιον λόγον ἔχομεν Γ + Δ = 2 ὀρθ.

ὅθεν Α + Δ = Γ + Δ καὶ ἑπομένως Α = Γ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ Β = Δ.

Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ αἱ εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς πλευρᾶς εὑρισκόμεναι δύο γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, συνάγεται, ὅτι

1) ἐὰν μία γωνία παραλληλογράμμου εἶναι γνωστή, καὶ αἱ λοιπαὶ εἶναι γνωσταί· καὶ

2) ἐὰν μία γωνία παραλληλογράμμου εἶναι ὀρθή, καὶ αἱ ἄλλαι θὰ εἶναι ὀρθαί.

ΠΟΡΙΣΜΑ

112. Αἱ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἀγόμεναι κάθετοι εἶναι πᾶσαι ἴσαι.

Διότι αἱ ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν κάθετοι εἶναι παράλληλοι· παράλληλοι δὲ μεταξὺ παραλλήλων εἶναι ἴσαι, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου.

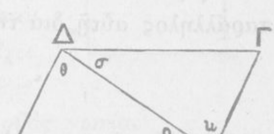
ΟΡΙΣΜΟΣ

Ἀπόστασις δύο παραλλήλων λέγεται μία τις τῶν καθέτων, αἵτινες ἄγονται μεταξὺ αὐτῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

113. Πᾶν τετράπλευρον ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας ἢ τὰς ἀπέναντι γωνίας ἴσας, εἶναι παραλληλόγραμμον.

1) Ἐν τῷ τετραπλεύρῳ ΑΒΓΔ, ἂς ὑποτεθῇ ΑΒ = ΔΓ καὶ ΑΔ = ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.



Διότι ἡ διαγώνιος ΒΔ, ἀγομένη, χωρίζει τὸ τετράπλευρον εἰς δύο τρίγωνα, ἔχοντα τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν καὶ διὰ τοῦτο ἴσα ἀλλήλοις· ἑπομένως αἱ γωνίαι ϑ καὶ κ, ὡς ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν κείμεναι, εἶναι ἴσαι· ὁμοίως καὶ αἱ γωνίαι ϱ καὶ σ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΔΓ καὶ ΑΒ, τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΔΒ, σχηματίζουσι τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ρ καὶ σ ἴσας, ἕπεται, ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι. Ὁμοίως, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν κ καὶ θ, εἶναι παράλληλοι καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ· ἄρα τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

2) Ἐν τῷ τετραπλεύρῳ ΑΒΓΔ ἂς ὑποτεθῇ

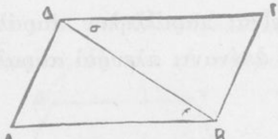
$$\mathrm{A} = \Gamma \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{B} = \Delta \cdot$$

λέγω, ὅτι τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma+\Delta$ τῶν τεσσάρων γωνιῶν εἶναι τέσσαρες ὀρθαὶ καὶ $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ ἰσοῦται τῷ $\Gamma+\Delta$ (κατὰ τὰς προηγουμένας ἰσότητας), ἑκάτερον τῶν ἀθροισμάτων τούτων θὰ εἶναι δύο ὀρθαί· ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΓΒ θὰ εἶναι παράλληλοι. Ὡσαύτως καὶ αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ θὰ εἶναι παράλληλοι· διότι καὶ $\mathrm{A}+\Delta = \mathrm{B}+\Gamma = 2^{\text{ὀρθ}}$· ὥστε τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

114. Πᾶν τετράπλευρον, ἔχον δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους, εἶναι παραλληλόγραμμον.



Ἐν τῷ τετραπλεύρῳ ΑΒΓΔ, ἔστω ἡ ΑΒ ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΓΔ· λέγω, ὅτι τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.

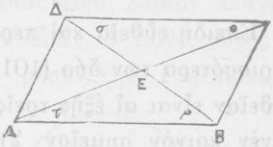
Διότι, τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ, εἰς ἃ ἡ διαγώνιος ΒΔ διαιρεῖ τὸ τετράπλευρον, εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΒΔ κοινήν, τὴν ΑΒ ἴσην τῇ ΓΔ καὶ τὴν γωνίαν ρ ἴσην τῇ σ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ. Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν τριγώνων συνάγεται, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι ἴση τῇ ΒΓ, ἔτι δὲ καὶ παράλληλος αὐτῇ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν ΑΔΒ καὶ ΔΒΓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

115. Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ διαγώνιοι τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ· λέγω, ὅτι τὸ σημεῖον Ε, εἰς ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΓ καὶ ΒΔ, εἶναι τὸ μέσον ἀμφοτέρων.

Διότι, τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΔΕΓ ἔχουσι τὴν ΑΒ ἴσην τῇ ΔΓ (ὡς ἀπέναντι πλευρὰς παραλληλογράμμου), τὴν γωνίον ρ ἴσην τῇ σ (ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ) καὶ τὴν γωνίαν τ ἴσην τῇ ο (δι' ὅμοιον λόγον)· ἄρα εἶναι ἴσα. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι εἶναι ΑΕ=ΕΓ καὶ ΔΕ=ΕΒ, τουτέστιν, ὅτι τὸ Ε εἶναι τὸ μέσον ἀμφοτέρων τῶν διαγωνίων.

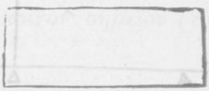


ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ τὸ ἀντίστροφον θεώρημα: *πᾶν τετράπλευρον οὗτινος αἱ διαγώνιοι τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα, εἶναι παραλληλόγραμμον,* ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως τῇ βοηθείᾳ τῶν τριγώνων.

ΟΡΙΣΜΟΙ

116. Ἐκ τῶν παραλληλογράμμων διακρίνομεν ἰδιαζόντως τὰ ἑπόμενα εἴδη.

Ὀρθογώνιον λέγεται τὸ παραλληλόγραμμον, ἐὰν ἔχῃ ὀρθὰς πάσας τὰς γωνίας του.



Ρόμβος λέγεται τὸ παραλληλόγραμμον, ἐὰν ἔχῃ πάσας τὰς πλευράς του ἴσας.

Τετράγωνον δὲ λέγεται τὸ παραλληλόγραμμον, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς πλευρὰς πάσας ἴσας καὶ τὰς γωνίας πάσας ὀρθάς. Τὸ τετράγωνον εἶναι ὀρθογώνιον ἰσόπλευρον, ἤτοι ὀρθογώνιον ἔχον ἴσας πάσας τὰς πλευράς, εἶναι δὲ καὶ ρόμβος, ἔχων ἴσας πάσας τὰς γωνίας.

117. Αἱ ἑπόμεναι προτάσεις ἀποδεικνύονται εὐκόλως τῇ βοηθείᾳ τῶν τριγώνων.

Τοῦ ὀρθογωνίου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι· καὶ ἀντιστρόφως: *πᾶν παραλληλόγραμμον, ὅπερ ἔχει διαγωνίους ἴσας, εἶναι ὀρθογώνιον.*

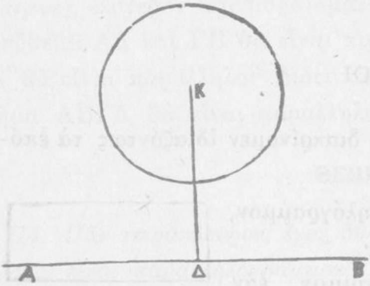
Τοῦ ρόμβου αἱ διαγώνιοι τέμνονται πρὸς ὀρθὰς γωνίας· καὶ ἀντιστρόφως· *πᾶν παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας, εἶναι ρόμβος.*

ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΘΕΣΕΙΣ ΚΥΚΛΟΥ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑΝ

Ἐπειδὴ εὐθεῖα καὶ περιφέρεια δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο (101), διὰ τοῦτο αἱ δυναταὶ θέσεις κύκλου πρὸς εὐθεῖαν εἶναι αἱ ἑξῆς τρεῖς: 1) Ἐὰν ὁ κύκλος καὶ ἡ εὐθεῖα δὲν ἔχωσι κανὲν κοινὸν σημεῖον· 2) Ἐὰν ἔχωσιν ἓν μόνον κοινόν, καὶ 3) Ἐὰν ἡ περιφέρεια καὶ ἡ εὐθεῖα ἔχωσι δύο σημεῖα κοινά.

ΘΕΩΡΗΜΑ

118. Ἐὰν εὐθεῖα καὶ κύκλος δὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον, τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς εὐθείας ὑπερβαίνει τὴν ἀκτῖνα.



Διότι, ὁ ποὺς Δ τοῦ ἀποστήματος τούτου θὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου (διότι ὅλη ἡ εὐθεῖα κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου), ἑπομένως τὸ ἀπόστημα ὑπερβαίνει τὴν ἀκτῖνα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

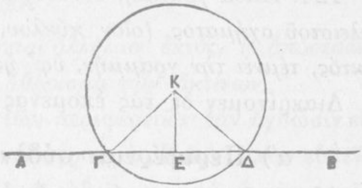
119. Ἐὰν εὐθεῖα καὶ κύκλος ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς εὐθείας εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα.

Διότι, ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἐγγίζει τὸν κύκλον μόνον εἰς τὸ σημεῖον Μ, τὰ λοιπὰ σημεῖα αὐτῆς εὑρίσκονται ἐκτὸς τοῦ κύκλου καὶ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ περισσότερον τῆς ἀκτῖνος· ἑπομένως ἡ ἀκτὶς ΚΜ εἶναι ἡ ἐλαχίστη πασῶν τῶν εὐθειῶν, αἵτινες δύνανται νὰ ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ Κ εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ· ἄρα ἡ ΚΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον Μ, καὶ τὸ ἀπόστημα τοῦ Κ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι ἡ ἀκτὶς ΚΜ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

120. Ἐὰν εὐθεῖα καὶ περιφέρεια ἔχωσι δύο κοινὰ σημεῖα, τὸ μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχον μέρος τῆς εὐθείας κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου (χορδὴ ὂν τοῦ κύκλου), καὶ τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς εὐθείας εἶναι μικρότερον τῆς ἀκτῖνος.

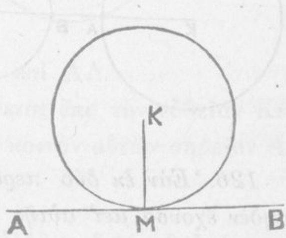
Διότι, αἱ ἀκτῖνες ΚΓ, ΚΔ, αἱ εἰς τὰ κοινὰ σημεῖα ἀγόμεναι, δὲν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, διότι εἶναι ἴσαι· εἶναι λοιπὸν πλάγιαι καὶ ἡ κάθετος ΚΕ εἶναι μικροτέρα αὐτῶν· ὥστε ὁ ποῦς αὐτῆς Ε κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου· κεῖται δὲ εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΔ, διότι αἱ πλάγιαι ΚΓ, ΚΔ εἶναι ἴσαι· ὥστε ἡ ΓΔ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου.



Παρατήρησις. Καὶ τὰ ἀντίστροφα τῶν θεωρημάτων τούτων ἀληθεύουσι καὶ ἀποδεικνύονται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Διὰ τοῦτο ἀρκούμεθα εἰς τὸ ἑπόμενον, ὅπερ ἀποδεικνύομεν ἀμέσως (ἐξ οὗ γίνεται φανερόν, ὅτι εὐθεῖα καὶ κύκλος δύνανται νὰ ἔχωσι ἓν μόνον σημεῖον κοινόν).

121. Ἐὰν τὸ ἀπόστημα εὐθείας ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εἶναι ἴσον τῇ ἀκτῖνι, ἤτοι, ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον ἀκτῖνος, ἡ εὐθεῖα αὕτη ἔχει μετὰ τῆς περιφερείας ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον (τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος).

Διότι, ὁ ποῦς Μ τοῦ ἀποστήματος ΚΜ, ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ὤν, θὰ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας· ἀλλὰ τὰ λοιπὰ σημεῖα τῆς εὐθείας θὰ κεῖνται πάντα ἐκτὸς τῆς περιφερείας, διότι αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου (ὡς πλάγιαι) εἶναι μεγαλήτεραι τῆς καθέτου ΚΜ, ἤτοι τῆς ἀκτῖνος.



ΟΡΙΣΜΟΣ

122. Ἐὰν εὐθεῖα καὶ κύκλος ἓν μόνον ἔχωσι κοινὸν σημεῖον, ἡ εὐθεῖα λέγεται *ἐφαπτομένη* τοῦ κύκλου.

ΠΟΡΙΣΜΑ

123. Εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς περιφερείας ὑπάρχει μία ἐφαπτομένη καὶ μόνον μία.

Διότι, διὰ νὰ εἶναι εὐθεῖά τις ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Μ, πρέπει νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΜ· μία δὲ μόνη ὑπάρχει κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΜ εἰς τὸ σημεῖον Μ.

ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΟΥΣ ΘΕΣΕΙΣ

Ἐν τῇ ἐρεύνῃ τῶν θέσεων δύο κύκλων πρὸς ἀλλήλους δεχόμεθα τὸ ἑπόμενον ἀξίωμα.

124. Πᾶσα γραμμή, συνδέουσα δύο σημεῖα, ὧν τὸ μὲν κεῖται ἐντὸς κλειστοῦ σχήματος (οἷον κύκλου, τριγώνου καὶ τῶν τοιούτων), τὸ δὲ ἐκτός, τέμνει τὴν γραμμήν, ὑφ᾽ ἧς τὸ σχῆμα περατοῦται.

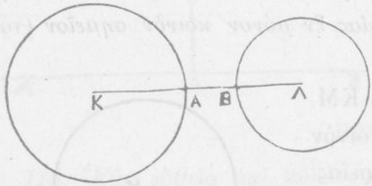
Διακρίνομεν δὲ τὰς ἑπομένας τρεῖς περιπτώσεις.

α΄) Περιφέρειαι οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουσαι.

Αἱ τοιαῦται περιφέρειαι ἢ εἶναι ὅλως ἐκτὸς ἀλλήλων, ἢ εἶναι ἡ μία ὅλη ἐντὸς τῆς ἄλλης.

ΘΕΩΡΗΜΑ

125. Ἐὰν δύο περιφέρειαι κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων, μηδὲν ἔχουσαι κοινὸν σημεῖον, τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων αὐτῶν ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀκτίνων.



Διότι ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων ΚΛ ἀποτελεῖται τότε ἐκ τῶν δύο ἀκτίνων ΚΑ, ΛΒ καὶ ἐκ τοῦ μεταξὺ τῶν δύο κύκλων μέρους αὐτῆς ΑΒ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

126. Ἐὰν ἐκ δύο περιφερειῶν, ἡ μία κεῖται ὅλη ἐντὸς τῆς ἄλλης μηδὲν ἔχουσα μετ᾽ αὐτῆς κοινὸν σημεῖον, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων.

Ἔστω Κ τὸ κέντρον τῆς μεγαλητέρας καὶ Λ τὸ τῆς μικροτέρας· ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΚΛ καὶ ἐκβληθῇ πέραν τοῦ Λ (ὅπερ κεῖται ἐντὸς ἀμφοτέρων τῶν περιφερειῶν), θὰ συναντήσῃ πρώτην τὴν μικροτέραν περιφέρειαν, κατά τι σημεῖον Β καὶ ἔπειτα τὴν μεγαλητέραν κατά τι ἄλλο Α· ἀλλὰ τότε, ἂν ἐκ τῆς μεγαλητέρας ἀκτῖνος ΚΑ ἀφαιρεθῇ ἡ μικροτέρα ΛΒ, μένει ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων ΚΛ καὶ ἡ μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν εὐθεῖα ΑΒ· ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν ἀκτίνων ὑπερβαίνει τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν τὰ κέντρα Κ καὶ Λ συμπίπτωσιν, αἱ περιφέρειαι λέγονται *ὁμόκεντροι*.

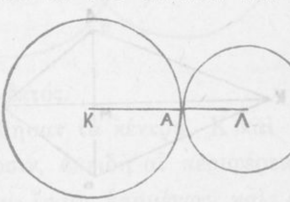
β΄) Περιφέρειαι ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχουσαι.

Αἱ τοιαῦται περιφέρειαι λέγεται ὅτι ἐφάπτονται ἀλλήλων εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον· δύνανται δὲ ἢ νὰ εἶναι ἐκτὸς ἀλλήλων (ὅτε ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐκτός), ἢ νὰ κεῖται ἡ μία ἐντὸς τῆς ἄλλης (ὅτε ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός).

ΘΕΩΡΗΜΑ

127. *Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων.*

Ἔστω Α τὸ μόνον κοινὸν σημεῖον τῶν περιφερειῶν· ἐὰν ἀχθῶσιν εἰς αὐτὸ αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΛΑ, λέγω, ὅτι ἡ γραμμὴ ΚΑΛ εἶναι εὐθεῖα γραμμή· διότι, ἂν ὑποτεθῇ τεθλασμένη, ἡ εὐθεῖα γραμμή, ἡ τὰ σημεῖα Κ, Λ συνδέουσα, ὡς μὴ διερχομένη διὰ τοῦ Α, θὰ τέμνῃ τὰς περιφερείας εἰς ἄλλα σημεῖα καὶ διὰ τοῦτο θὰ σύγκειται ἐκ δύο ἀκτίνων καὶ ἔκ τινος μέρους, κειμένου ἐκτὸς ἀμφοτέρων τῶν περιφερειῶν· ἑπομένως θὰ εἶναι μεγαλητέρα τῆς τεθλασμένης ΚΑΛ, ὅπερ ἄτοπον (κατὰ τὸ 5ον ἀξίωμα τῆς εὐθείας)· ὥστε ἡ ΚΑΛ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ καὶ ἑπομένως ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων ΚΛ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων ΚΑ καὶ ΑΛ.

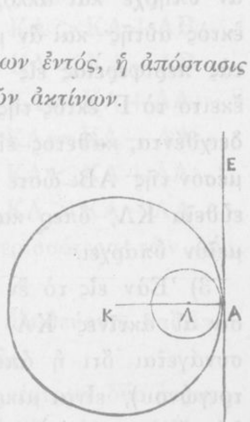


ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἀπὸ τοῦ Α ὑψουμένη κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΚΛ ἐφάπτεται ἀμφοτέρων τῶν περιφερειῶν εἰς τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον Α.

ΘΕΩΡΗΜΑ

128. *Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων.*

Διότι, ἂν εἰς τὸ μόνον κοινὸν σημεῖον Α ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΑΕ τῆς μεγαλητέρας, θὰ ἐφάπτηται αὕτη καὶ τῆς μικροτέρας (ἥτις κεῖται ἐντὸς τῆς ἄλλης)· ἑπομένως αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΛΑ θὰ εἶναι ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην ΑΕ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Α καὶ διὰ τοῦτο θὰ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας· τούτου δὲ οὕτως ἔχοντος, ἂν ἀπὸ τῆς μεγαλητέρας ἀκτῖνος ΚΑ, ἀφαιρεθῇ ἡ μικροτέρα ΛΑ, μένει προδήλως ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων ΚΛ.



γ) Περιφέρειαι δύο σημεῖα κοινὰ ἔχουσαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

129. Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἔχωσι κοινὰ δύο σημεῖα

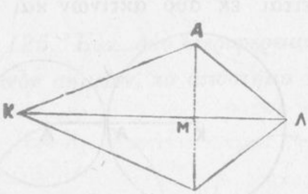
1) ἡ ταῦτα συνδέουσα εὐθεῖα τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς εὐθείας τῶν κέντρων.

2) αἱ τοιαῦται περιφέρειαι δὲν δύνανται νὰ ἔχωσιν ἄλλο σημεῖον κοινόν.

3) ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι μικροτέρα μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, μεγαλητέρα δὲ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

4) αἱ τοιαῦται περιφέρειαι τέμνουσιν ἀλλήλας.

1) Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο κοινὰ σημεῖα δύο περιφερειῶν, ἐχουσῶν κέντρα τὰ Κ καὶ Λ· ἐπειδὴ τὰ σημεῖα ταῦτα Α καὶ Β, ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ Κ, ἕπεται (104) ὅτι τὸ Κ θὰ εἶναι σημεῖον τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ· ἀλλὰ καὶ τὸ Λ θὰ εἶναι σημεῖον τῆς αὐτῆς καθέτου· διότι καὶ τοῦτο ἴσον ἀπέχει ἀπὸ τῶν Α καὶ Β· διὰ δὲ



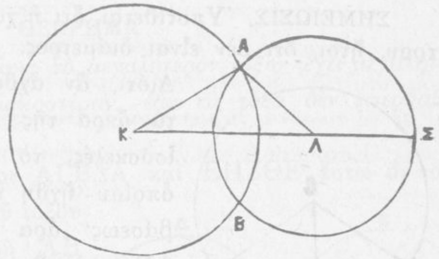
τῶν δύο σημείων Κ καὶ Λ δὲν διέρχεται ἄλλη εὐθεῖα πλὴν τῆς ΚΛ· ὥστε ἡ εὐθεῖα ΚΛ εἶναι ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.

2) Ἄλλο κοινὸν σημεῖον τῶν αὐτῶν περιφερειῶν δὲν ὑπάρχει· διότι, ἂν ὑπῆρχε καὶ ἄλλο, ἔστω τὸ Γ, τοῦτο θὰ ἔκειτο ἢ ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἢ ἐκτὸς αὐτῆς· καὶ ἂν μὲν ἔκειτο ἐπὶ τῆς ΑΒ, θὰ ἔτεμνεν ἡ εὐθεῖα ΑΒ τὰς περιφερείας εἰς τρία σημεῖα Α, Β, Γ, ὅπερ ἄτοπον (101)· ἂν δὲ ἔκειτο τὸ Γ ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ ΚΛ θὰ ἦτο, κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΓ, εἶναι δὲ κάθετος καὶ εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ· ὥστε ἐκ τοῦ Α θὰ ἦσαν δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖα ΚΛ, ὅπερ καὶ τοῦτο ἄτοπον· ὥστε οὐδὲν ἄλλο κοινὸν σημεῖον ὑπάρχει.

3) Ἐὰν εἰς τὸ ἓν ἐκ τῶν κοινῶν σημείων, ἔστω εἰς τὸ Α, ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΛΑ, γίνεται τρίγωνον τὸ ΚΑΛ, ἐξ οὗ ἀμέσως συνάγεται ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων ΚΛ (ἡ μία πλευρὰ τοῦ τριγώνου), εἶναι μικροτέρα μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων (τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν), μεγαλητέρα δὲ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

4) Αἱ δύο κοινὰ σημεῖα ἔχουσαι περιφέρειαι τέμνουσιν ἀλλήλας, τουτέστιν ἓν μέρος ἑκατέρας κεῖται ἐντὸς τῆς ἄλλης καὶ ἓν μέρος ἐκτός, ὡς δεικνύει τὸ ἑπόμενον σχῆμα.

Διότι, ἡ περιφέρεια Λ δὲν δύναται νὰ κεῖται ὅλη ἐκτὸς τῆς ἄλλης· διότι ἡ ΑΒ, ὡς κοινὴ χορδή, κεῖται ἐντὸς ἀμφοτέρων τῶν περιφερειῶν· ἀλλ᾽ οὐδὲ ὅλη ἡ Λ δύναται νὰ εἶναι ἐντὸς τῆς ἄλλης· διότι τὸ σημεῖον Σ, εἰς ὃ τέμνεται ὑπὸ τῆς ΚΛ, ἐκβληθείσης πέραν τοῦ Λ, κεῖται ἐκτὸς τῆς ἄλλης, ὡς ἀπέχον ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἀπόστασιν ΚΛ+ΛΣ, μεγαλητέραν τῆς ἀκτῖνος ΚΑ· τῷ ὄντι, ἐκ τῆς ἀνισότητος



$$ΚΛ > ΚΑ - ΛΑ,$$

ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ ἄνισα προστεθῇ ἡ ΛΑ ἢ ἡ ΛΣ, προκύπτει:

$$ΚΛ + ΛΣ > ΚΑ·$$

μέρος ἄρα τῆς περιφερείας Λ κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας Κ καὶ μέρος ἐκτός.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῇ ἀποδείξει ὑπετέθησαν τὰ κέντρα Κ καὶ Λ εἰς διάφορα σημεῖα· ἐὰν ταῦτα συμπίπτωσιν, ἐπειδὴ αἱ περιφέρειαι ἔχουσι κοινὰ σημεῖα, αἱ ἀκτῖνες θὰ εἶναι ἴσαι· ἑπομένως καὶ αἱ περιφέρειαι συμπίπτουσιν εἰς μίαν.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

130. Αἱ διάφοροι θέσεις δύο περιφερειῶν πρὸς ἀλλήλας (ἐὰν μὴ ἐφαρμόζωσι καὶ ἀποτελῶσι μίαν μόνην) εἶναι αἱ ἑξῆς πέντε:

1) Ὅλως ἐκτὸς ἀλλήλων· τότε $ΚΛ > ΚΑ + ΛΒ$.

2) Ὅλως ἐντὸς ἡ μία τῆς ἄλλης· » $ΚΛ < ΚΑ - ΛΒ$.

3) Ἐπαφὴ ἐκτός· » $ΚΛ = ΚΑ + ΛΑ$.

4) Ἐπαφὴ ἐντός· » $ΚΛ = ΚΑ - ΛΑ$·

5) Τομὴ εἰς δύο σημεῖα· » $\begin{cases} ΚΛ < ΚΑ + ΛΑ· \\ ΚΛ > ΚΑ - ΛΑ. \end{cases}$

Δὲν δύνανται δὲ νὰ ἔχωσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Καὶ τὰ ἀντίστροφα τῶν θεωρημάτων τούτων ἀληθεύουσι καὶ ἀποδεικνύονται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

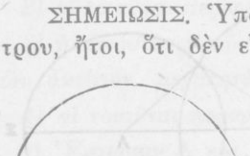
Ἐάν, παραδείγματος χάριν, τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων δύο περιφερειῶν εἶναι μικρότερον μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, μεγαλήτερον δὲ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, αἱ περιφέρειαι αὗται θὰ τέμνωνται εἰς δύο σημεῖα· διότι οὐδεμίαν ἄλλην θέσιν δύνανται νὰ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλας· ἐπειδὴ εἰς πᾶσαν ἄλλην θέσιν αἱ ἀκτῖνες καὶ τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων συνδέονται διὰ σχέσεως μὴ συμβιβαζομένης πρὸς τὰς εἰρημένας.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΧΟΡΔΩΝ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

ΘΕΩΡΗΜΑ

131. Ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εἰς τὸ μέσον χορδῆς ἠγμένη εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν καὶ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τοῦ τόξου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὑποτίθεται, ὅτι ἡ χορδὴ δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, ἤτοι, ὅτι δὲν εἶναι διάμετρος.



Διότι, ἂν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς ΑΒ, γίνεται τρίγωνον ἰσοσκελές, τὸ ΑΟΒ, ἐκ τῆς κορυφῆς τοῦ ὁποίου ἤχθη ἡ εὐθεῖα ΟΓ εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως· ἄρα ἡ ΟΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ διαιρεῖ καὶ τὴν γωνίαν ΑΟΒ εἰς δύο ἴσα μέρη (84).

Καὶ τὰ δύο τόξα ΑΔ, ΔΒ (εἰς τὰ ὁποῖα, προσεκβαλλομένη ἡ ΟΓ, διαιρεῖ τὸ τόξον ΑΒ) εἶναι ἴσα· διότι αἱ ἐπ' αὐτῶν βαίνουσαι ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΟΔ, ΔΟΒ εἶναι ἴσαι (37).

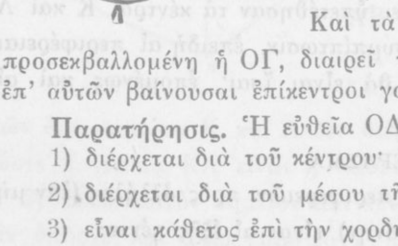
Παρατήρησις. Ἡ εὐθεῖα ΟΔ ἐκτελεῖ τὰ ἑξῆς τέσσαρα:

1) διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου·
2) διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς·
3) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδήν·
4) διαιρεῖ τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἀποδεικνύεται δὲ εὐκόλως, ὅτι οὐδεμία ἄλλη εὐθεῖα ἐκτελεῖ δύο ἐκ τούτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

132. Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, τὰ ἴσα τόξα ἔχουσιν ἴσας χορδάς· καὶ ἀντιστρόφως, αἱ ἴσαι χορδαὶ ἔχουσιν ἴσα τόξα (εἴτε μικρότερα τῆς ἡμιπεριφερείας εἶναι τὰ τόξα, εἴτε μεγαλήτερα).



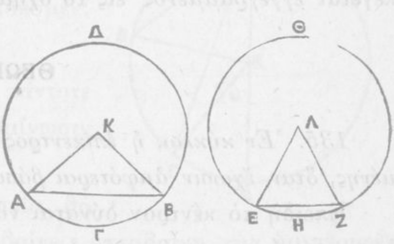
Τὰ ἴσα τόξα ἔχουσιν ἴσας χορδάς· διότι ἐφαρμοζόντων τῶν ἴσων τόξων, ἐφαρμόζουσι καὶ τὰ ἄκρα αὐτῶν, ἑπομένως ἐφαρμόζουσι καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν (διότι ἐξ ἑνὸς σημείου εἰς ἄλλο μία μόνη εὐθεῖα ἄγεται).

Καὶ ἀντιστρόφως· αἱ ἴσαι χορδαὶ ἔχουσιν ἴσα τόξα· διότι, ἂν αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΘΗ ὑποτεθῶσιν ἴσαι καὶ ἀχθῶσιν εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΒ, ΛΘ, ΛΗ, γίνονται δύο τρίγωνα, ΚΑΒ, ΛΘΗ, ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν· ἑπομένως ἐφαρμόζουσιν. Ὅταν δὲ τὰ τρίγωνα ἐφαρμόσωσιν ἐφαρμόζουσι καὶ οἱ κύκλοι (διότι συμπίπτουσι τὰ κέντρα αὐτῶν) καὶ τὸ μὲν τόξον ΘΖΗ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ ΑΓΒ, τὸ δὲ ΘΙΗ ἐπὶ τοῦ ΑΔΒ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

133. Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις τὸ μεγαλήτερον τόξον ἔχει μεγαλητέραν χορδὴν καὶ τὸ μικρότερον μικροτέραν, ἐὰν τὰ τόξα δὲν ὑπερβαίνωσι τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας.

Ἔστωσαν ἴσοι οἱ κύκλοι ΑΓΒΔΑ καὶ ΕΗΖΘΕ· ἔστω δὲ καὶ τὸ τόξον ΑΓΒ μεγαλήτερον τοῦ τόξου ΕΗΖ· λέγω, ὅτι ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΕΖ.



Ἀχθεισῶν τῶν ἀκτίνων ΚΑ, ΚΒ, ΛΕ, ΛΖ, γίνονται τὰ δύο τρίγωνα ΚΑΒ, ΛΕΖ, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὴν ΚΑ ἴσην τῇ ΛΕ καὶ τὴν ΚΒ ἴσην τῇ ΛΖ (ὡς ἀκτῖνας ἴσων κύκλων) καὶ τὴν γωνίαν Κ μεγαλητέραν τῆς Λ· διότι ἡ Κ βαίνει ἐπὶ μεγαλητέρου τόξου· ἄρα (105) ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΕΖ.

Ἡ ἀντίστροφος πρότασις, ὅτι δηλαδὴ *ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις ἡ μεγαλητέρα χορδὴ ἔχει μεγαλήτερον τόξον, ἐὰν λαμβάνωνται τὰ μὴ ὑπερβαίνοντα τὴν ἡμιπεριφέρειαν τόξα,* ἀποδεικνύεται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

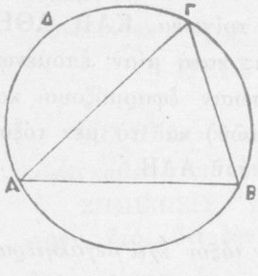
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅτι ἐκ τῶν χορδῶν μεγίστη εἶναι ἡ διάμετρος ἀποδεικνύεται ἀμέσως ἁπλούστατα.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΙΣ ΚΥΚΛΟΝ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

134. Γωνία λέγεται *ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον,* ἐὰν ἡ μὲν κορυφὴ αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου.

Εἰς τμῆμα δὲ ἐγγεγραμμένη λέγεται ἡ γωνία, ἐὰν ἡ μὲν κορυφὴ αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ τμήματος, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς διέρχωνται διὰ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας, ἥτις εἶναι βάσις τοῦ τμήματος.



Παραδείγματος χάριν, ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον· ἡ αὐτὴ δὲ γωνία εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ εἰς τὸ τμῆμα ΑΒΓΔΑ.

Εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται *ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον*, ἐὰν πᾶσαι αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας. Ὁ δὲ κύκλος λέγεται τότε *περιγεγραμμένος* περὶ τὸ σχῆμα.

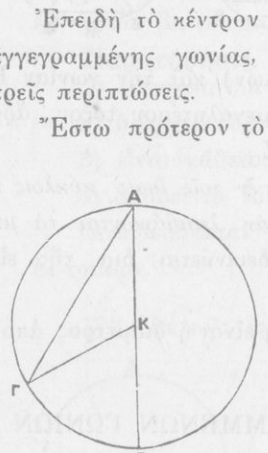
Εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται *περιγεγραμμένον* περὶ κύκλον, ἐὰν ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου· ὁ δὲ κύκλος λέγεται *ἐγγεγραμμένος* εἰς τὸ σχῆμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

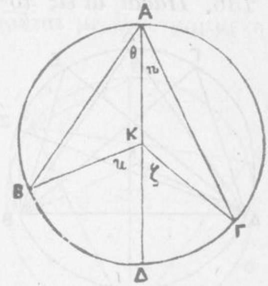
135. *Ἐν κύκλῳ, ἡ ἐπίκεντρος γωνία εἶναι διπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης, ὅταν ἔχωσιν ἀμφότεραι βάσιν τὸ αὐτὸ τόξον.*

Ἐπειδὴ τὸ κέντρον δύναται νὰ εἶναι ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας, ἢ ἐντὸς αὐτῆς, ἢ ἐκτὸς αὐτῆς, διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

Ἔστω πρότερον τὸ κέντρον ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ΑΒ τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΒΑΓ· ἐὰν ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΚΓ, γίνεται γωνία ἐπίκεντρος ἡ ΒΚΓ, βάσιν ἔχουσα τὸ αὐτὸ καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη τόξον ΒΓ· εἶναι δὲ ἡ γωνία ΒΚΓ, ὡς ἐκτὸς γωνία τοῦ τριγώνου ΑΚΓ, ἴση τῷ ἀθροίσματι $Α+Γ$ τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν Α καὶ Γ· καὶ ἐπειδὴ εἶναι $Α=Γ$ (διότι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές), ἡ ἐκτὸς γωνία ΒΚΓ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι $Α+Α$, ἤτοι εἶναι διπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης Α.



Ἔστω, δεύτερον, τὸ κέντρον ἐντὸς τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΒΑΓ· ἀχθεισῶν τῶν ἀκτίνων ΚΒ, ΚΓ, γίνεται ἐπίκεντρος γωνία ἡ ΒΚΓ, βάσιν ἔχουσα τὸ αὐτὸ καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη τόξον ΒΓ· ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ἐγγεγραμμένης, ἡ διάμετρος ΑΚΔ, διαιρεῖ τὴν ἐγγεγραμμένην εἰς δύο ἄλλας, ϑ καὶ η, καὶ τὴν ἐπίκεντρον ὁμοίως εἰς δύο, κ καὶ ζ· εἶναι δέ, κατὰ τὰ προηγούμενα (διότι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ΒΑΔ, ΔΑΓ ἔχουσι τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς πλευρᾶς αὐτῶν ΑΔ)

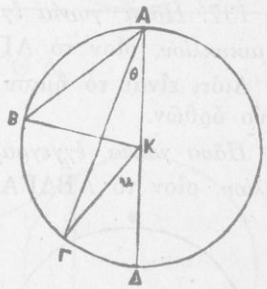


$$\varkappa = 2\vartheta, \quad \zeta = 2\eta,$$

ὅθεν $\varkappa + \zeta = 2\vartheta + 2\eta = 2\,(\vartheta + \eta)$,

τουτέστι $\mathrm{BK\Gamma} = 2\,.\,\mathrm{BA\Gamma}$.

Ἔστω τέλος, τὸ κέντρον ἐκτὸς τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΒΑΓ· τῶν αὐτῶν κατασκευασθέντων, εἶναι καὶ πάλιν



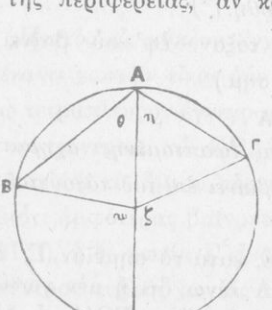
$$\mathrm{BK\Delta} = 2\,.\,\mathrm{BA\Delta}, \quad \varkappa = 2\vartheta,$$

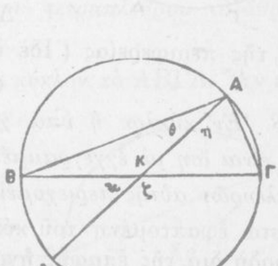
ὅθεν, ἀφαιροῦντες ἴσα ἀπὸ ἴσων, εὑρίσκομεν:

$$\mathrm{BK\Gamma} = 2\,.\,\mathrm{BA\Gamma}.$$

Ὥστε ἡ ἐπίκεντρος γωνία εἶναι πάντοτε διπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης, ἐὰν βαίνωσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Ἡ ἐπίκεντρος γωνία θὰ εἶναι κυρτή, ἐὰν τὸ τόξον, ἐφ᾽ οὗ βαίνει, ὑπερβαίνῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν· ἀλλ᾽ ἡ ἀπόδειξις κατ᾽ οὐδὲν μεταβάλλεται. Ὁμοίως εὐοδοῦται ἡ ἀπόδειξις, καὶ ὅταν τὸ τόξον, ἐφ᾽ οὗ βαίνει ἡ ἐγγεγραμμένη, εἶναι ἥμισυ τῆς περιφερείας, ἂν καὶ τότε αἱ ἀκτῖνες ΚΒ, ΚΓ δὲν σχη-

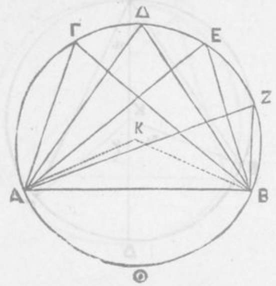




ματίζουσι γωνίαν, ἀλλ᾽ ἀποτελοῦσι μίαν διάμετρον, ὡς δεικνύει τὸ παρακείμενον σχῆμα· εἶναι δὲ τότε ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ὀρθή· διότι εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος $\varkappa + \zeta$, ἤτοι τῶν δύο ὀρθῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

136. *Πᾶσαι αἱ εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.*



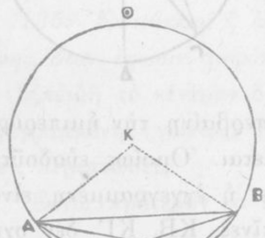
Διότι, πᾶσαι βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου (ἐκείνου, ὅπερ κεῖται ἐκτὸς τοῦ τμήματος) καὶ εἶναι διὰ τοῦτο ἡμίση μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἐπικέντρου γωνίας.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

137. *Πᾶσα γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς τμῆμα κύκλου μεγαλήτερον ἡμικυκλίου,* οἷον τὸ ΑΓΔΕΖΒΑ, *εἶναι ὀξεῖα.*

Διότι εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ΑΚΒ, ἥτις εἶναι μικροτέρα τῶν δύο ὀρθῶν.

Πᾶσα γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς τμῆμα κύκλου μικρότερον ἡμικυκλίου, οἷον τὸ ΑΒΔΓΑ, *εἶναι ἀμβλεῖα.*



Διότι εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς κυρτῆς ἐπικέντρου γωνίας ΑΚΒ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ μεγαλητέρου τῆς ἡμιπεριφερείας τόξου ΑΘΒ καὶ ἥτις εἶναι διὰ τοῦτο μεγαλητέρα τῶν δύο ὀρθῶν.

Πᾶσα δὲ εἰς ἡμικύκλιον ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι ὀρθή. (*)

Διότι τὸ τόξον, ἐφ' οὗ βαίνει, εἶναι ἥμισυ τῆς περιφερείας (Ἰδὲ ὄπισθεν, σημ.).

ΘΕΩΡΗΜΑ

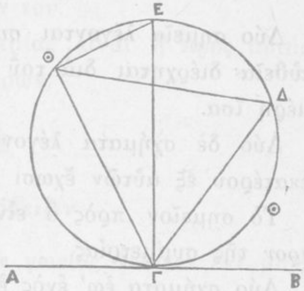
138. *Ἐν κύκλῳ ἡ ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης σχηματιζομένη γωνία εἶναι ἴση μὲ ἐγγεγραμμένην, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου.*

Ἔστω ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΓΔΕ, κατὰ τὸ σημεῖον Γ, ἡ ΑΓΒ καὶ χορδὴ διὰ τῆς ἐπαφῆς ἠγμένη, ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν γωνία ΔΓΒ ἰσοῦται ἐγγεγραμμένῃ ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΘ΄Δ, ἡ δὲ γωνία ΔΓΑ ἰσοῦται ἐγγεγραμμένῃ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΘΓ.

Ἐὰν ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΓΕ, ἡ γωνία ΔΒΓ εἶναι διαφορὰ τῆς ὀρθῆς ΕΓΒ καὶ τῆς ὀξείας ΕΓΔ· καὶ ἡ μὲν ὀρθὴ ΕΓΒ ἰσοῦται μὲ ἐγγεγραμ-

(*) Ἡ πρότασις αὕτη ἀποδίδεται εἰς τὸν Θαλῆν, ἕνα τῶν ἑπτὰ σοφῶν τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος (640 π. Χ.).

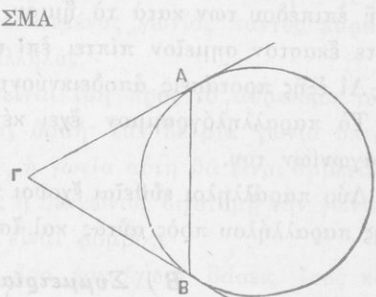
μένην βαίνουσαν ἐπὶ ἡμικυκλίου, ἔστω τὴν ΔΘΓ (ἔνθα Θ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου ΓΘΕ)· ἡ δὲ γωνία ΕΓΔ ἰσοῦται μὲ ἐγγεγραμμένην, βαίνουσαν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΔΕ, οἵα εἶναι ἡ ΕΘΔ (διότι ἀμφότεραι εἶναι ἡμίση τῆς ἐπικέντρου, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΕ)· ἄρα ἡ διαφορὰ αὐτῶν ΔΓΒ ἰσοῦται τῇ ἐγγεγραμμένῃ γωνίᾳ ΔΘΓ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΘ΄Δ.



Ὁμοίως δεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ περὶ τῆς γωνίας ΑΓΔ, ἥτις εἶναι ἄθροισμα τῆς ὀρθῆς ΑΓΕ καὶ τῆς ὀξείας ΕΓΔ· τὸ σημεῖον Θ λαμβάνεται τότε ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΘ΄Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

139. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται τοῦ κύκλου, ἡ τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς συνδέουσα εὐθεῖα σχηματίζει μετὰ τῶν δύο ἐφαπτομένων ἴσας γωνίας.

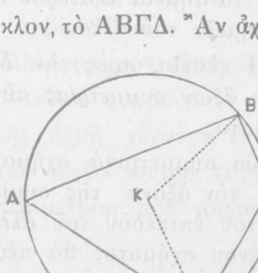


Καὶ τὰ τμήματα τῶν ἐφαπτομένων τὰ ἀπὸ τῆς τομῆς αὐτῶν μέχρι τῶν ἐπαφῶν, θὰ εἶναι ἴσα (82).

ΘΕΩΡΗΜΑ

140. Παντὸς εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαί.

Ἔστω τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, τὸ ΑΒΓΔ. Ἂν ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ κέντρου αἱ ΚΒ, ΚΔ ἡ μὲν γωνία Α εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου ΒΚΔ (διότι ἀμφότεραι βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓΔ), ἡ δὲ γωνία Γ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου κυρτῆς γωνίας ΒΚΔ (διότι ἀμφότεραι βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΑΔ)· ἄρα τὸ ἄθροισμα Α + Γ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο περὶ τὸ Κ γωνιῶν, αἵτινες ἀποτελοῦσι τέσσαρας ὀρθάς· ἐπομένως εἶναι Α + Γ = 2 ὀρθ.



Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι καὶ Β + Δ = 2 ὀρθ.

ΠΕΡΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

Α΄) Συμμετρία πρὸς σημεῖον.

Δύο σημεῖα λέγονται *συμμετρικὰ πρὸς ἄλλο,* ἐὰν ἡ ἑνοῦσα αὐτὰ εὐθεῖα διέρχηται διὰ τοῦ ἄλλου καὶ διαιρῆται ὑπ' αὐτοῦ εἰς δύο μέρη ἴσα.

Δύο δὲ σχήματα λέγονται *συμμετρικὰ ἀλλήλων,* ἐὰν τὰ σημεῖα ἑκατέρου ἐξ αὐτῶν ἔχωσι συμμετρικὰ τὰ σημεῖα τοῦ ἄλλου.

Τὸ σημεῖον πρὸς ὃ εἶναι συμμετρικὰ δύο σχήματα, λέγεται *κέντρον* τῆς συμμετρίας.

Δύο σχήματα ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου κείμενα καὶ συμμετρικὰ ἀλλήλων, ἐφαρμόζουσιν ἐὰν τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν στραφῇ περὶ τὸ κέντρον καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου των κατὰ τὸ ἥμισυ μιᾶς ὁλοκλήρου περιστροφῆς, διότι τότε ἕκαστον σημεῖον πίπτει ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ του.

Αἱ ἑξῆς προτάσεις ἀποδεικνύονται εὐκόλως.

Τὸ παραλληλόγραμμον ἔχει κέντρον συμμετρίας τὴν τομὴν τῶν διαγωνίων του.

Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ἔχουσι κέντρα συμμετρίας πάντα τὰ σημεῖα τῆς παραλλήλου πρὸς αὐτὰς καὶ ἴσον ἀπεχούσης ἀπ' ἀμφοτέρων.

Β΄) Συμμετρία πρὸς εὐθεῖαν.

Δύο σημεῖα λέγονται *συμμετρικὰ πρὸς εὐθεῖαν,* ὅταν ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι κάθετος εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἑνούσης αὐτὰ εὐθείας.

Δύο δὲ σχήματα λέγονται *συμμετρικὰ ἀλληλων* πρός τινα εὐθεῖαν, ὅταν τὰ σημεῖα ἑκατέρου ἔχωσι συμμετρικὰ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην τὰ σημεῖα τοῦ ἄλλου.

Ἡ εὐθεῖα, πρὸς τὴν ὁποίαν εἶναι συμμετρικὰ δύο σχήματα, λέγεται *ἄξων συμμετρίας* αὐτῶν ἢ καὶ τοῦ ὑπ' αὐτῶν ἀποτελουμένου σχήματος.

Δύο συμμετρικὰ σχήματα ἐφαρμόζουσιν, ἐὰν περιστραφῇ τὸ ἓν περὶ τὸν ἄξονα τῆς συμμετρίας, μέχρις οὗ τὸ ἐπίπεδόν του πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἄλλου· διότι ἕκαστον σημεῖον τοῦ περιστρεφομένου σχήματος θὰ πέσῃ τότε ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ του.

Αἱ ἑξῆς προτάσεις ἀποδεικνύονται εὐκόλως.

Τὸ ὀρθογώνιον ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας· καὶ ὁ ῥόμβος ἐπίσης· τὸ δὲ τετράγωνον τέσσαρας.

Ἄξων συμμετρίας εὐθείας τινὸς εἶναι ἡ ἐκ τοῦ μέσου αὐτῆς ἀγομένη κάθετος.

Ἄξων συμμετρίας γωνίας εἶναι ἡ διχοτομοῦσα αὐτήν.

Ὁ κύκλος ἔχει ἄξονας συμμετρίας πάσας τὰς διαμέτρους αὐτοῦ· ὁ δὲ τομεὺς τὴν διχοτομοῦσαν τὴν γωνίαν του.

Δύο παραλλήλων εὐθειῶν, ἄξων συμμετρίας εἶναι ἡ πρὸς αὐτὰς παράλληλος, ἡ ἴσον ἀπέχουσα ἀπ' ἀμφοτέρων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Θεωρήματα πρὸς ἀπόδειξιν.

1) Αἱ διχοτομοῦσαι δύο κατὰ κορυφὴν γωνίας κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.

2) Αἱ διχοτομοῦσαι δύο ἐφεξῆς γωνίας εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

3) Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς δύο προσκειμένας γωνίας παντὸς παραλληλογράμμου εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

4) Ἐὰν ἐν τριγώνῳ μία γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, ἡ γωνία αὕτη θὰ εἶναι ὀρθή· ἐὰν δὲ μία γωνία ὑπερβαίνῃ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, ἡ γωνία αὕτη θὰ εἶναι ἀμβλεῖα.

5) Ἐὰν παραλληλογράμμου τινὸς ἡ διαγώνιος διχοτομῇ τὴν γωνίαν αὐτοῦ, τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο εἶναι ῥόμβος.

6) Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα εἶναι ἴσα ἐὰν ἔχωσι βάσεις ἴσας καὶ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς ἴσην.

7) Ἰσοσκελές τι τρίγωνον δύναται νὰ διαιρεθῇ διὰ μιᾶς εὐθείας εἰς δύο ἐπίσης ἰσοσκελῆ· νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

8) Πᾶν ὀξυγώνιον τρίγωνον δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία ἰσοσκελῆ, ἐκ δὲ τούτων δύο τοὐλάχιστον εἶναι ἀμβλυγώνια.

9) Πᾶν εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένον παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον καὶ πᾶν εἰς κύκλον περιγεγραμμένον εἶναι ῥόμβος.

10) Ἐὰν ἐν τριγώνῳ, ἐξ ἑκάστης κορυφῆς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα μέχρι τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τούτων εὐθειῶν θὰ εἶναι μικρότερον μὲν τῶν $^3/_2$ τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου, μεγαλήτερον δὲ τοῦ ἡμίσεως τῆς περιμέτρου.

11) Ἐν παντὶ κυρτῷ τετραπλεύρῳ τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου, ἀλλὰ μεγαλήτερον τοῦ ἡμίσεως αὐτῆς.

12) Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου ἐντὸς κυρτοῦ πολυγώνου, ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἰς τὰς κορυφάς του, τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν τούτων θὰ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἡμίσεως τῆς περιμέτρου.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

141. *Πρόβλημα* λέγεται πρότασις, ἐν ᾗ ζητεῖται νὰ γίνῃ τι. Εἰς πᾶν πρόβλημα διακρίνομεν δεδομένα καὶ ζητούμενα.

Λύσις τοῦ προβλήματος λέγεται ἡ ποίησις τοῦ ζητουμένου.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις προβλήμασιν, ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὰς ἑξῆς δύο ἐργασίας.

α΄) Νὰ γραφῇ εὐθεῖα, ἧς τινος ἔχομεν δύο σημεῖα καὶ νὰ προσεκβληθῇ ἐφ᾽ ὅσον θέλομεν.

Ἡ ἐργασία αὕτη ἐκτελεῖται διὰ τοῦ κανόνος καὶ τῆς γραφίδος(*).

β΄) Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἧς τινος ἔχομεν τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα.

Ἡ ἐργασία αὕτη ἐκτελεῖται διὰ τοῦ διαβήτου (**).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1ον

142. *Δοθείσης εὐθείας, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον καὶ ἡ εἰς αὐτὸ κάθετος.*

Ἔστω δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον αὐτῆς καὶ νὰ ἀχθῇ ἐξ αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Κατασκευή. Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ, ἂς γραφῇ περιφέρεια κύκλου καὶ μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτήν, ἑτέρα περιφέρεια. Αἱ περιφέρειαι αὗται τέμνουσιν ἀλλήλας (διότι ἑκατέρα ἐξ αὐτῶν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἄλλης)· ἐὰν δὲ αἱ δύο τομαὶ Γ καὶ Δ

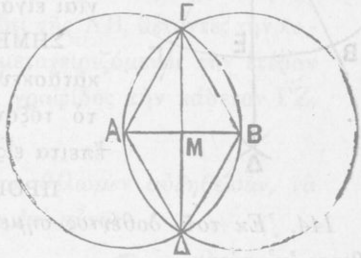
(*) Ὁ ἀκριβὴς κανὼν πρέπει νὰ ἔχῃ τὰς ἀκμὰς αὐτοῦ εὐθυγράμμους· ἐξελέγχεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς· γράφομεν γραμμήν τινα ἐπὶ τοῦ χάρτου διὰ λεπτῆς γραφίδος, παρακολουθούσης τὴν ἀκμὴν τοῦ κανόνος, ἔπειτα περιστρέφομεν τὸν κανόνα ἐπὶ τοῦ χάρτου, οὕτως, ὥστε ἡ ἐπὶ τοῦ χάρτου ἐφαρμόζουσα ἐπιφάνειά του νὰ ἐφαρμόζῃ πάντοτε, νὰ ἔλθῃ ὅμως εἰς τὸ ἕτερον μέρος τῆς γραμμῆς καὶ νὰ διέλθῃ ἡ ἀκμή, τὴν ὁποίαν δοκιμάζομεν, διὰ τῶν ἄκρων τῆς γραμμῆς· τότε γράφομεν πάλιν διὰ λεπτῆς γραφίδος γραμμήν, παρακολουθοῦντες τὴν ἀκμὴν τοῦ κανόνος· ἐὰν αἱ δύο οὕτω γραφεῖσαι γραμμαί, αἵτινες ἔχουσι τὰ αὐτὰ πέρατα, δὲν συμπίπτωσιν ἐντελῶς, ὁ κανὼν δὲν εἶναι εὐθύγραμμος.

Πρὸς τούτοις, ὅσον ἀφορᾷ τὴν χρῆσιν τοῦ κανόνος, παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν εὐθεῖά τις προσδιορίζηται διὰ δύο σημείων αὐτῆς, τὰ σημεῖα ταῦτα δὲν πρέπει νὰ εἶναι πολὺ πλησίον· διότι μικρόν τι λάθος, εἰς τὴν θέσιν τοῦ κανόνος συμβαῖνον, φέρει τότε μεγάλην ἀλλοίωσιν εἰς τὴν θέσιν τῆς εὐθείας.

(**) Περὶ τοῦ διαβήτου καὶ τῆς χρήσεως αὐτοῦ ἰδὲ μικράν μου γεωμετρίαν.

ἐπιζευχθῶσι διὰ τῆς ΓΔ, λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ διαιρεῖ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς δύο ἴσα μέρη, ΑΜ, ΜΒ καὶ εἶναι κάθετος πρὸς αὐτήν.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Τὸ σημεῖον Γ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας ΑΒ· ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ σημεῖον Δ (διότι ἐκ τῆς κατασκευῆς αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ΓΑ, ΓΒ, ΔΑ, ΔΒ εἶναι ἴσαι), διὰ τοῦτο ἀμφότερα θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ (104)· ἀλλ' ἡ μόνη εὐθεῖα, ἥτις ἔχει ἀμφότερα τὰ σημεῖα ταῦτα Γ, Δ, εἶναι ἡ δι' αὐτῶν διερχομένη ΓΔ· ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.



Τὸ αὐτὸ ἀποδεικνύομεν καὶ παρατηροῦντες ὅτι τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι ῥόμβος, τοῦ δὲ ῥόμβου αἱ διαγώνιοι τέμνονται πρὸς ὀρθάς.

Παρατήρησις. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς κατασκευάζεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχον τὰς πλευρὰς ἴσας τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ΑΒ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο γραφομένων περιφερειῶν δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ εἶναι ἴσαι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀρκεῖ νὰ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· διότι αἱ τομαὶ αὐτῶν Γ, Δ, θὰ ἀπέχωσι πάντοτε ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς ΑΒ· ἐπομένως ἡ ΓΔ θὰ εἶναι ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2ον

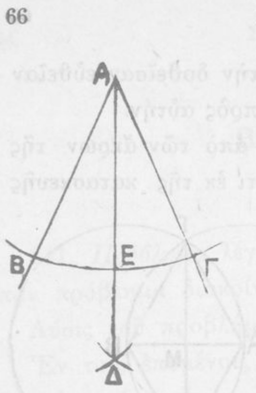
143. Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τόξον, ἢ δοθεῖσα γωνία εἰς δύο μέρη ἴσα.

Ἔστω δοθὲν τόξον τὸ ΑΒ· ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον αὐτοῦ.

ΛΥΣΙΣ. Διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ προηγουμένου προβλήματος εὑρίσκομεν τὴν κάθετον ΓΔ εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ· ἡ δὲ κάθετος αὕτη ΓΔ διαιρεῖ τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη (131).

Ἔστω, δεύτερον, δοθεῖσα γωνία ἡ ΒΑΓ· πρόκειται νὰ διαιρεθῇ αὕτη εἰς δύο ἴσα μέρη.

ΛΥΣΙΣ. Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας Α καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν τυχοῦσαν, γράφομεν περιφέρειαν, τῆς ὁποίας τόξον τι, ἔστω τὸ ΒΓ, περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας· ἔπειτα εὑρίσκομεν (διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ πρώτου προβλήματος) τὴν κάθετον ΑΔ εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΒΓ (τῆς ὁποίας καθέτου ἔχομεν ἓν σημεῖον, τὸ Α)· αὕτη



δὲ ἡ κάθετος θὰ διαιρέσῃ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εἰς δύο μέρη ἴσα, ΒΑΔ, ΔΑΓ· διότι διαιρεῖ τὸ τόξον ΒΓ εἰς δύο ἴσα μέρη, ΒΕ, ΕΓ, αἱ δὲ ἐπὶ ἴσων τόξων βαίνουσαι ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπαναλαμβάνοντες τὴν αὐτὴν κατασκευὴν ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν μερῶν, διαιροῦμεν τὸ τόξον καὶ τὴν γωνίαν εἰς 4 ἴσα μέρη ἔπειτα εἰς 8, 16 κτλ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3ον

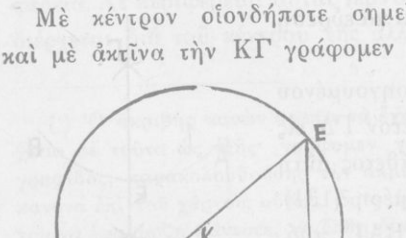
144. *Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ᾽ αὐτήν.*

Ἔστω δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ σημεῖον αὐτῆς τὸ Γ· πρόκειται ἐκ τοῦ Γ νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν τυχοῦσαν, ἂς γραφῇ περιφέρεια, τέμνουσα τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς δύο σημεῖα, Δ καὶ Ε. Ἐὰν νῦν, κατὰ τὸ πρῶτον πρόβλημα, ἀχθῇ ἡ κάθετος ΖΗ εἰς τὸ μέσον τῆς ΔΕ (ὅπερ εἶναι τὸ Γ), αὕτη θὰ εἶνα, ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς Γ.

Παρατήρησις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται καὶ ἄλλως, ὡς ἑξῆς.

Μὲ κέντρον οἱονδήποτε σημεῖον Κ, ἐκτὸς τῆς εὐθείας κείμενον καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΚΓ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις νὰ τέμνῃ τὴν εὐθεῖαν καὶ εἰς ἄλλο τι σημεῖον Δ (πλὴν τοῦ Γ)· ἔπειτα ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΚ καὶ προσεκβάλλομεν αὐτήν, μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἴς τι σημεῖον Ε· ἄγομεν τέλος τὴν ΕΓ καὶ αὐτὴ θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος. Διότι ἡ γωνία ΔΓΕ, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον, εἶναι ὀρθή. Ἡ κατασκευὴ



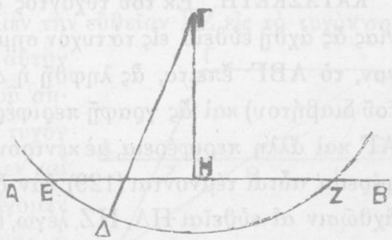
αὕτη χρησιμεύει τότε μάλιστα, ὅταν τὸ σημεῖον Γ εἶναι τὸ ἄκρον τῆς εὐθείας καὶ δὲν θέλομεν νὰ προσεκβάλωμεν αὐτήν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται πρακτικῶς δι' ὀργάνου, τὸ ὁποῖον λέγεται *γνώμων*· εἶναι δὲ τοῦτο σανὶς λεπτή, σχῆμα ἔχουσα ὀρθογωνίου τριγώνου. Ὅταν θέλωμεν διὰ τοῦ ὀργάνου τούτου νὰ εὕρωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον αὐτῆς Γ, ἐφαρμόζομεν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ ἐπὶ τῆς ΑΒ, θέτοντες τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἰς τὸ Γ· τότε δὲ μεταχειριζόμενοι τὴν ἑτέραν κάθετον πλευρὰν ὡς κανόνα, γράφομεν διὰ γραφίδος τὴν κάθετον ΓΖ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4ον

145. Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ἐφ' ὅσον θέλωμεν αὐξηθεῖσαν, νὰ ἀχθῇ κάθετος ἀπὸ σημείου, ὅπερ δὲν κεῖται ἐπ' αὐτῆς.

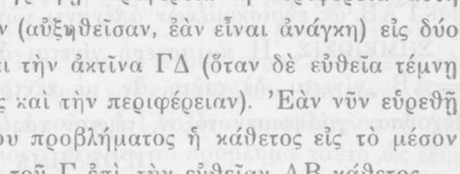
Ἔστω δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· τὸ δὲ ἐκτὸς αὐτῆς δοθὲν σημεῖον, τὸ Γ· ζητεῖται ἐκ τοῦ Γ νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ (αὐξηθεῖσαν, ἐὰν εἶναι ἀνάγκη).



ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Ἄς ληφθῇ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τὸ Δ, κείμενον πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς εὐθείας ἢ τὸ Γ, καὶ μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΓΔ, ἂς γραφῇ περιφέρεια· ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν (αὐξηθεῖσαν, ἐὰν εἶναι ἀνάγκη) εἰς δύο σημεῖα Ε, Ζ· διότι ἡ ΑΒ τέμνει τὴν ἀκτῖνα ΓΔ (ὅταν δὲ εὐθεῖα τέμνῃ μίαν ἀκτῖνα, τέμνει προφανῶς καὶ τὴν περιφέρειαν). Ἐὰν νῦν εὑρεθῇ διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ πρώτου προβλήματος ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΕΖ, αὕτη θὰ εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ κάθετος.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Διότι, ὡς κάθετος εἰς τὸ μέσον χορδῆς, διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου (131).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Διὰ τοῦ γνώμονος λύεται τὸ πρόβλημα τοῦτο ὡς ἑξῆς. Ἐὰν πρόκειται νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἀπὸ σημείου ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου, ἔστω ἀπὸ τοῦ Γ, ἐφαρμόζομεν πάλιν ἐπὶ τῆς ΑΒ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ γνώμονος καὶ προσαρμόζομεν εἰς αὐτὴν τὸν κανόνα, ἔπειτα, διατηροῦντες τὸν κανόνα ἀκίνητον, σύ-

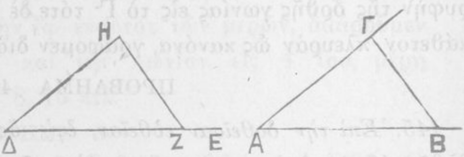


ρομεν τὸν γνώμονα ἐπ' αὐτοῦ μέχρις οὗ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Γ, ὅτε γράφομεν τὴν κάθετον ΓΕ, ὡς ἀνωτέρω ἐρρήθη (*).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5ον

146. Νὰ σχηματισθῇ γωνία, ἴση τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ καὶ ἔχουσα πλευρὰν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, κορυφὴν δὲ τὸ ἄκρον αὐτῆς.

Ἔστω δοθεῖσα γωνία ἡ ΒΑΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΔΕ· πρόκειται νὰ σχηματισθῇ γωνία ἴση τῇ ΒΑΓ, ἔχουσα πλευρὰν τὴν ΔΕ καὶ κορυφὴν τὸ ἄκρον αὐτῆς Δ.



ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Β τῆς μιᾶς πλευρᾶς τῆς γωνίας ἂς ἀχθῇ εὐθεῖα εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Γ τῆς ἄλλης, ὅτε γίνεται τρίγωνον, τὸ ΑΒΓ· ἔπειτα, ἂς ληφθῇ ἡ ΔΖ ἴση τῇ ΑΒ (γίνεται δὲ τοῦτο διὰ τοῦ διαβήτου) καὶ ἂς γραφῇ περιφέρεια, μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΓ καὶ ἄλλη περιφέρεια, μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΒΓ. Αἱ περιφέρειαι αὗται τέμνονται (129)· ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ ἑνὸς σημείου τῆς τομῆς Η, ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΗΔ, ΗΖ, λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΗΔΕ εἶναι ἡ ζητουμένη.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΗΖ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν· ἐκ τούτου δὲ ἕπεται ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν ΗΔΖ καὶ ΓΑΒ, ὡς εὑρισκομένων ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ΒΓ καὶ ΗΖ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ κατασκευὴ γίνεται ἁπλουστέρα ἐὰν λάβωμεν ΑΓ = ΑΒ· γίνεται δὲ τοῦτο, ἂν μὲ κέντρον τὸ Α καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν τυχοῦσαν γράψωμεν τόξον, τέμνον τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας Α.

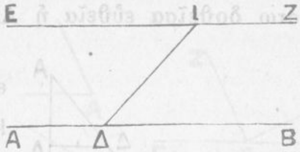
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6ον

147. Νὰ ἀχθῇ παράλληλος τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ δοθέντος σημείου, μὴ κειμένου ἐπ' αὐτῆς.

Ἔστω δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ἐκτὸς αὐτῆς τὸ Γ· ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Γ εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΑΒ.

(*) Ὁ ἀκριβὴς γνώμων πρέπει νὰ ἔχῃ τὰς μὲν πλευρὰς αὐτοῦ εὐθυγράμμους, τὴν δὲ γωνίαν ὀρθήν· καὶ τὸ μὲν εὐθύγραμμον τῶν πλευρῶν ἐξελέγχεται ὡς καὶ εἰς τὸν κανόνα, ἡ δὲ γωνία αὐτοῦ ἐξελέγχεται ὡς ἑξῆς· κατασκευάζομεν, ὡς ἐρρήθη, τὴν κάθετον ΓΔ ἐπί τινα εὐθεῖαν ΑΒ, εἴς τι σημεῖον Γ, ἐφαρμόζοντες τὴν μίαν τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τοῦ μέρους ΓΒ· ἔπειτα κατασκευάζομεν πάλιν τὴν κάθετον εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἐφαρμόζοντες τὴν αὐτὴν πλευρὰν ἐπὶ τοῦ ἄλλου μέρους ΓΑ· ἂν τότε αἱ οὕτως εὑρισκόμεναι δύο κάθετοι συμπίπτωσιν ἐντελῶς, ἡ γωνία τοῦ γνώμονος εἶναι ἀκριβῶς ὀρθή, εἰ δὲ μή, εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα.

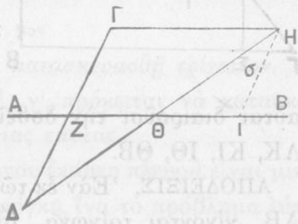
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Ἐκ τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ εὐθεῖα εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς δοθείσης, ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ ἂς σχηματισθῇ γωνία ἔχουσα πλευρὰν τὴν ΓΔ, κορυφὴν τὸ Γ, καὶ ἴση τῇ γωνίᾳ ΓΔΒ, κειμένη δὲ πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς ΓΔ· ἂς ἐκβληθῇ δὲ ἡ πλευρὰ αὐτῆς ΓΕ πέραν τοῦ Γ· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος.



ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Διότι, αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΕΓΔ καὶ ΓΔΒ εἶναι ἐκ τῆς κατασκευῆς ἴσαι.

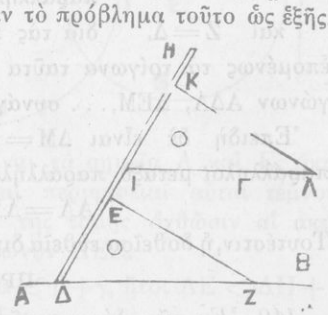
Τὸ αὐτὸ πρόβλημα λύεται καὶ ἄλλως, ὡς ἑξῆς.

Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Γ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΖ εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Ζ τῆς ΑΒ· προσεκβάλλομεν αὐτὴν καὶ λαμβάνομεν ΖΔ = ΓΖ. Ἐκ τοῦ σημείου Δ ἄγομεν τὴν ΔΘ, εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Θ τῆς ΑΒ· προσεκβάλλομεν καὶ αὐτὴν καὶ λαμβάνομεν ΘΗ = ΔΘ· ἄγομεν ἔπειτα τὴν ΓΗ καὶ αὐτὴ θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος.



Διότι, ἂν ληφθῇ ἡ ΘΙ ἴση τῇ ΖΘ καὶ ἀχθῇ ἡ ΙΗ, τὰ δύο τρίγωνα ΔΖΘ καὶ ΘΙΗ θὰ εἶναι ἴσα (76), ὅθεν ΙΗ = ΔΖ = ΖΓ· εἶναι δὲ καὶ αἱ γωνίαι Δ καὶ ΘΗΙ τῶν τριγώνων τούτων ἴσαι· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΖΓΗΙ ἔχει τὰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς ΗΙ καὶ ΓΖ ἴσας καὶ παραλλήλους, ἑπομένως εἶναι παραλληλόγραμμον (114) καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΓΗ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ.

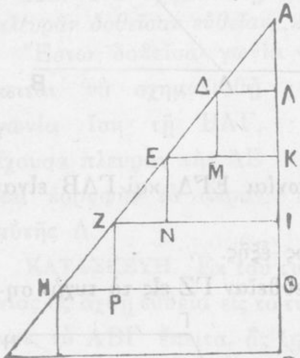
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Διὰ τοῦ γνώμονος λύομεν τὸ πρόβλημα τοῦτο ὡς ἑξῆς. Ἐφαρμόζομεν τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ γνώμονος ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου πλευρᾶς αὐτοῦ ΔΕ ἐφαρμόζομεν κανόνα, τὸν ΔΗ, ἔπειτα κινοῦμεν τὸν γνώμονα οὕτως ὥστε ἡ ΔΕ νὰ μένῃ ἐπὶ τοῦ κανόνος, μέχρις οὗ ἡ ὑποτείνουσα διέλθῃ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Γ· τότε, μεταχειριζόμενοι τὴν ὑποτείνουσαν ὡς κανόνα, γράφομεν διὰ γραφίδος τὴν εὐθεῖαν ΙΓΛ, ἥτις θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος. Διότι αἱ γωνίαι ΗΙΛ καὶ ΗΔΒ εἶναι ἴσαι· εἶναι δὲ αἱ γωνίαι αὗται ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΙΛ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΔΗ· ἄρα αἱ ΑΒ, ΙΛ εἶναι παράλληλοι.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7ον

148. *Νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἰς ἴσα μέρη, ὅσα ἄν τις προστάξῃ.*

Ἔστω δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ ἂς διαιρεθῇ εἰς πέντε ἴσα μέρη.



ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου Α τῆς εὐθείας ΑΒ, ἂς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα σχηματίζουσα μετ αὐτῆς γωνίαν, ἔστω ἡ ΑΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν τμῆμα, τὸ ΑΔ καὶ ἂς ἐπαναληφθῇ τοῦτο κατὰ σειρὰν ἐπὶ τῆς ΑΓ, πεντάκις· ἔστω δὲ Γ τὸ ἄκρον τοῦ πέμπτου τμήματος ΗΓ· ἂς ἀχθῇ ἔπειτα διὰ τῶν σημείων Γ καὶ Β ἡ εὐθεῖα ΒΓ καὶ ἐκ τῶν σημείων Η, Ζ, Ε, Δ, τὰ ὁποῖα διαιροῦσι τὴν ΑΓ εἰς ἴσα μέρη, ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΒΓ· ἔστωσαν δὲ αἱ ΗΘ, ΖΙ, ΕΚ, ΔΛ· λέγω, ὅτι αἱ παράλληλοι αὗται διαιροῦσι τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς πέντε μέρη ἴσα, ΑΛ, ΛΚ, ΚΙ, ΙΘ, ΘΒ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Ἐὰν ἐκ τῶν σημείων Δ, Ε, Ζ, Η ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΑΒ, γίνονται τρίγωνα, τὰ ΔΜΕ, ΕΖΝ, ΖΗΡ, ΗΓΣ, ἴσα τῷ ΑΔΛ.

Τῷ ὄντι, παραβάλλοντες τὸ ΑΔΛ πρὸς ἓν τούτων, ἔστω πρὸς τὸ ΕΖΝ, βλέπομεν, ὅτι ἔχουσιν:

ΕΖ = ΑΔ, ἐκ κατασκευῆς·

Ε = Α, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΕΝ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ·

καὶ Ζ = Δ, διὰ τὰς παραλλήλους ΔΛ, ΖΙ·

ἑπομένως τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα· ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν τριγώνων ΑΔΛ, ΔΕΜ, . . . συνάγεται ΑΛ = ΔΜ = ΕΝ = ΖΡ = ΗΣ.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ΔΜ = ΛΚ, ΕΝ = ΚΙ, ΖΡ = ΙΘ, ΗΣ = ΘΒ, ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων, ἕπεται, ὅτι εἶναι

ΑΛ = ΛΚ = ΚΙ = ΙΘ = ΘΒ.

Τουτέστιν, ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα διηρέθη εἰς πέντε ἴσα μέρη· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

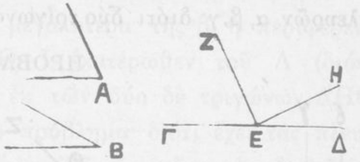
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8ον

149. *Ἐκ τῶν δύο γωνιῶν τριγώνου νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη.*

Ἔστωσαν Α, Β, αἱ δύο δοθεῖσαι γωνίαι τοῦ τριγώνου, ζητεῖται ἡ τρίτη.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ. Αἱ δύο δοθεῖσαι γωνίαι Α καὶ Β πρέπει νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Ἄς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα, ἡ ΓΔ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπ' αὐτῆς τυχὸν σημεῖον, τὸ Ε, ἔπειτα ἂς σχηματισθῇ γωνία ἴση τῇ Α, ἔχουσα κορυφὴν τὸ Ε καὶ πλευρὰν τὴν ΕΓ, ἔστω ἡ ΖΕΓ, καὶ γωνία ἴση τῇ Β, ἔχουσα κορυφὴν τὸ Ε καὶ πλευρὰν τὴν ΕΔ, κειμένη δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΓΔ, ἔστω ἡ ΔΕΗ· λέγω, ὅτι ἡ ζητουμένη τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου εἶναι ἴση τῇ ΖΕΗ.



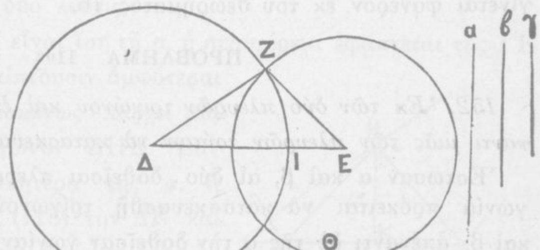
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Διότι, ἡ γωνία αὕτη ΖΕΗ, μετὰ τῶν δύο δοθεισῶν Α καὶ Β, ἀποτελεῖ τὰς δύο ὀρθάς· τοῦτο δὲ ποιεῖ καὶ ἡ ζητουμένη τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9ον

150. Ἐκ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον.

Ἔστωσαν δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ α, β, γ· πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον ἔχον πλευρὰς τὰς εὐθείας ταύτας.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ. Ἐπειδὴ παντὸς τριγώνου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, ἀνάγκη, ἵνα τὸ πρόβλημα λύηται ἡ μεγαλητέρα ἐκ τῶν τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν δύο.



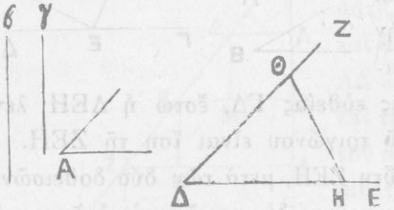
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Λαμβάνομεν εὐθεῖαν ἴσην τῇ α, ἔστω τὴν ΔΕ, καὶ γράφομεν δύο περιφερείας τῶν ὁποίων κέντρα μὲν εἶναι τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, ἀκτῖνες δὲ αἱ εὐθεῖαι β καὶ γ· λέγω, ὅτι αἱ περιφέρειαι αὗται τέμνουσιν ἀλλήλας· καὶ ἂν εἰς ἓν τῶν σημείων τῆς τομῆς ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΔΖ, ΕΖ, γίνεται τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΔΕΖ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Ὑπετέθη ὅτι εἶναι $\alpha < \beta + \gamma$, ἤτοι $\Delta E < \Delta H + E\Theta$·
ἀλλὰ καὶ $\beta < \alpha + \gamma$,
ὅθεν $\beta - \gamma < \alpha$, ἤτοι $\Delta E > \Delta H - E\Theta$.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων ΔΕ εἶναι μικρότερον μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, μεγαλήτερον δὲ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν· ἑπομένως τέμνονται αἱ περιφέρειαι.

Τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἔχει πλευρὰς τὰς τρεῖς δοθείσας εὐθείας. Ἄλλο δὲ τρίγωνον, διάφορον τούτου δὲν δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἐκ τῶν αὐτῶν πλευρῶν α, β, γ· διότι δύο τρίγωνα τὰς αὐτὰς ἔχοντα πλευράς, εἶναι ἴσα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 10ον



151. Ἐκ τῶν δύο πλευρῶν τριγώνου καὶ ἐκ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.

Ἔστωσαν β καὶ γ αἱ δύο δοθεῖσαι πλευραί, Α δὲ ἡ δοθεῖσα γωνία· ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, ἔχον πλευρὰς τὰς β, γ, καὶ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν τὴν Α.

Ἐπὶ τῆς τυχούσης εὐθείας ΔΕ σχηματίζομεν γωνίαν ἴσην τῇ Α, τὴν ΖΔΕ (146), ἔπειτα λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΔΕ τὴν ΔΗ, ἴσην τῇ β, καὶ ἐπὶ τῆς ΔΖ τὴν ΔΘ, ἴσην τῇ γ, καὶ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΘΗ· τὸ τρίγωνον ΔΘΗ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.

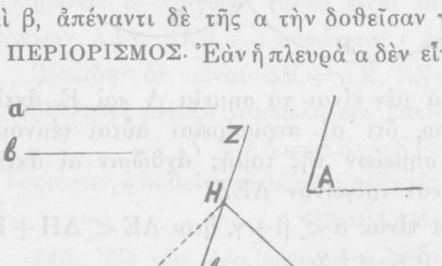
Ὅτι δὲ πλὴν τούτου οὐδὲν ἄλλο τρίγωνον λύει τὸ πρόβλημα, γίνεται φανερὸν ἐκ τοῦ θεωρήματος 76.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 11ον

152. Ἐκ τῶν δύο πλευρῶν τριγώνου καὶ ἐκ τῆς γωνίας τῆς ἀπέναντι μιᾶς τῶν πλευρῶν τούτων νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.

Ἔστωσαν α καὶ β, αἱ δύο δοθεῖσαι πλευραὶ καὶ Α ἡ δοθεῖσα γωνία· πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἔχον πλευρὰς τὰς α καὶ β, ἀπέναντι δὲ τῆς α τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Α.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ· Ἐὰν ἡ πλευρὰ α δὲν εἶναι μεγαλητέρα τῆς β, ἡ γωνία Α πρέπει νὰ εἶναι ὀξεῖα.



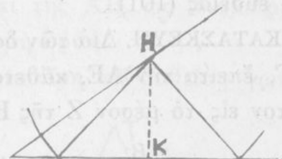
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Ἂς σχηματισθῇ γωνία ἴση τῇ Α, ἡ ΖΔΕ καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς ΔΖ, ἡ ΔΗ, ἴση τῇ δοθείσῃ πλευρᾷ β· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Η καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν α, ἂς γραφῇ περιφέρεια κύκλου· ἃς ἀχθῶσι δὲ ἀκτῖνες εἰς τὰς τομὰς τῆς περιφερείας καὶ τῆς εὐθείας ΔΕ.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ. Ἐὰν ἡ α εἶναι μεγαλητέρα τῆς β, ἡ περιφέρεια θὰ τέμνῃ τὴν ΔΕ εἰς δύο σημεῖα Θ, Ι, ἑκατέρωθεν τοῦ Δ (διότι τὸ Δ εἶναι ἐντὸς τῆς περιφερείας), ἐκ τῶν δύο δὲ τριγώνων ΔΗΘ καὶ ΔΗΙ, μόνον τὸ πρῶτον λύει τὸ πρόβλημα· διότι ἔχει τὰς πλευρὰς α (= ΗΘ) καὶ β (= ΔΗ), ἀπέναντι δὲ τῆς α ἔχει τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Α· τὸ δὲ δεύτερον ΔΗΙ ἔχει μὲν τὰς δοθείσας πλευρὰς α (= ΗΙ) καὶ β (= ΔΗ), ἀλλ' ἀπέναντι τῆς α ἔχει τὴν γωνίαν ΗΔΙ, ἥτις εἶναι ἡ παραπληρωματικὴ τῆς δοθείσης.

Ἄρα, ὅταν εἶναι $α > β$, τὸ πρόβλημα μίαν μόνην λύσιν ἐπιδέχεται. Ἐὰν εἶναι $α = β$ (καὶ ἡ γωνία Α ὀξεῖα), τὸ Ι συμπίπτει μετὰ τοῦ Δ· ὥστε πάλιν μία μόνη λύσις ὑπάρχει.

Τέλος, ἐὰν εἶναι $α < β$ (καὶ ἡ γωνία Α ὀξεῖα), ἡ περιφέρεια τέμνει τὴν ΔΕ, *ὅταν ἡ ἐκ τοῦ Η καταβιβαζομένη κάθετος ἐπ' αὐτήν, ἤτοι ἡ ΗΚ, εἶναι μικροτέρα τῆς α*· τότε αἱ δύο τομαὶ Ι, Θ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κορυφῆς Δ (διότι τὸ Δ κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας)· ἑπομένως ἀμφότερα τὰ τρίγωνα ΔΙΗ, ΔΗΘ λύουσι τὸ πρόβλημα καὶ ἔχομεν δύο λύσεις.

Ἐὰν ἡ κάθετος ΗΚ εἶναι ἴση τῇ α, ἡ περιφέρεια ἐφάπτεται τῆς ΓΕ κατὰ τὸ Κ (ἔνθα συμπίπτουσιν ἀμφότεραι αἱ τομαὶ Ι, Θ) καὶ ἑπομένως ὑπάρχει μία μόνη λύσις, τὸ τρίγωνον ΔΗΚ. Ἐὰν δὲ ἡ ΗΚ εἶναι μεγαλητέρα τῆς α, ἡ περιφέρεια δὲν τέμνει (118) τὴν ΔΕ καὶ ἑπομένως οὐδεμία λύσις ὑπάρχει.



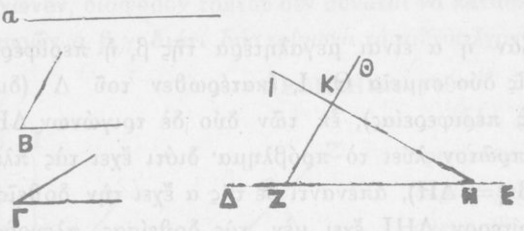
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12ον

153. Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ δύο γωνιῶν νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.

Αἱ δοθεῖσαι γωνίαι δύνανται νὰ εἶναι ἢ ἀμφότεραι προσκείμεναι εἰς τὴν δοθεῖσαν πλευράν, ἤ, ἡ μὲν προσκειμένη, ἡ δὲ ἀντικειμένη. Κατὰ τὴν δευτέραν ταύτην περίπτωσιν, εὑρίσκομεν τὴν τρίτην γωνίαν τοῦ τριγώνου (ἐκ τῶν δύο δοθεισῶν) καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν πάντοτε τὰς εἰς τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν δύο προσκειμένας γωνίας Β καὶ Γ.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δοθεισῶν γωνιῶν πρέπει νὰ εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Ἐπὶ τῆς τυχούσης εὐθείας ΔΕ λαμβάνομεν τὸ τμῆμα



ΖΗ, ἴσον τῇ α καὶ σχηματίζομεν γωνίαν ἴσην τῇ Β, ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Ζ καὶ πλευρὰν τὴν ΖΗ, ἔστω τὴν ΘΖΗ, καὶ ἄλλην γωνίαν, ἴσην τῇ Γ καὶ ἔχουσαν κορυφὴν τὸ ΙΗ καὶ πλευρὰν τὴν ΗΖ (πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΔΕ), ἔστω τὴν ΙΗΔ· αἱ δύο εὐθεῖαι ΖΘ καὶ ΗΙ τέμνονται (ὅταν ἐπαρκῶς αὐξηθῶσι), διότι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν Ζ+Η, ἤτοι Β+Γ, εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν· καὶ τὸ προκῦπτον τρίγωνον ΖΚΗ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.

Ὅτι δὲ πλὴν τούτου, οὐδὲν ἄλλο τρίγωνον λύει τὸ πρόβλημα, γίνεται φανερὸν ἐκ τοῦ θεωρήματος 77.

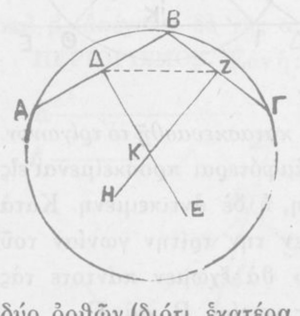
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 13ον

154. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ τριῶν δοθέντων σημείων

Ἔστωσαν Α, Β, Γ τὰ τρία δοθέντα σημεῖα. Ζητεῖται νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου ἔχουσα τὰ τρία ταῦτα σημεῖα.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ. Τὰ τρία δοθέντα σημεῖα πρέπει νὰ μὴ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (101).

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Διὰ τῶν δοθέντων σημείων ἄγομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΒΓ, ἔπειτα τὴν ΔΕ, κάθετον εἰς τὸ μέσον Δ τῆς ΑΒ καὶ τὴν ΖΗ, κάθετον εἰς τὸ μέσον Ζ τῆς ΒΓ· λέγω ὅτι αἱ δύο αὗται κάθετοι, ΔΕ, ΖΗ,



ἱκανῶς αὐξανόμεναι, θὰ τέμνωνται εἴς τι σημεῖον Κ καὶ ὅτι ἡ μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΑ γραφομένη περιφέρεια, θὰ ἔχῃ τὰ δοθέντα σημεῖα Α, Β, Γ,

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Ἐὰν ἀχθῇ ἡ τὰ μέσα Δ καὶ Ζ συνδέουσα εὐθεῖα ΔΖ, σχηματίζει πρὸς τὰς δύο καθέτους, τὰς γωνίας ΕΔΖ καὶ ΗΖΔ, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν (διότι ἑκατέρα τούτων εἶναι μέρος ὀρθῆς)· ὥστε αἱ δύο εὐθεῖαι ΔΕ καὶ ΖΗ συναντῶνται. Τὸ δὲ σημεῖον Κ τῆς τομῆς αὐτῶν ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β, διότι κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ (104)· ὁμοίως ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων Β καὶ Γ, διότι εἶναι σημεῖον τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ· ὥστε αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ εἶναι ἴσαι καὶ ἡ γραφομένη περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΚΑ, ἢ τὴν ΚΒ, ἢ τὴν ΚΓ, θὰ ἔχῃ καὶ τὰ τρία δοθέντα σημεῖα.

Ὅτι δὲ ἄλλη περιφέρεια ἀδύνατον νὰ διέλθῃ διὰ τῶν αὐτῶν τριῶν σημείων, γίνεται φανερὸν ἐκ τούτου, ὅτι δύο διάφοροι περιφέρειαι οὐδέποτε ἔχουσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς εὑρίσκομεν τὸ κέντρον δοθέντος κύκλου ἢ τόξου. Διότι ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἢ ἐπὶ τοῦ τόξου, τρία τυχόντα σημεῖα καὶ νὰ εὕρωμεν τὸ κέντρον τῆς δι᾽ αὐτῶν διερχομένης περιφερείας.

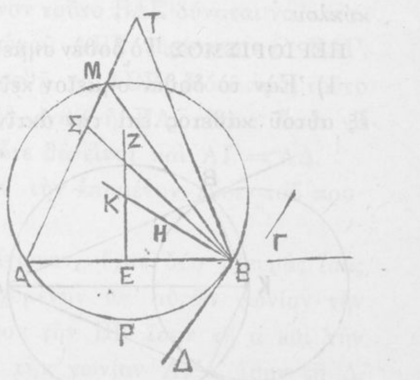
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου ἀπεδείχθη τὸ θεώρημα, ὅτι *αἱ τρεῖς κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου διέρχονται δι᾽ ἑνὸς σημείου*· διότι καὶ ἂν ἐλαμβάνομεν τὰς εὐθείας, ΑΒ, ΑΓ, τὸ αὐτὸ κέντρον Κ θὰ εὑρίσκομεν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 14ον

155. Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ γραφῇ τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ.

Ἔστω δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Γ· πρόκειται ἐπὶ τῆς ΑΒ νὰ γραφῇ τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ Γ· Ἐὰν ἡ γωνία Γ εἶναι ὀρθή, ἀρκεῖ ἐπὶ τῆς ΑΒ, ὡς διαμέτρου, νὰ γραφῇ ἡμικύκλιον· ἂς ὑποτεθῇ λοιπὸν μὴ ὀρθή.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Ἂς σχηματισθῇ γωνία ἴση τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ Γ, ἔχουσα κορυφὴν τὸ Β καὶ πλευρὰν τὴν ΒΑ, ἔστω δὲ αὕτη ἡ ΔΒΑ· ἔπειτα ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ, εἰς τὸ σημεῖον Β, ἔστω ἡ ΒΗ, καὶ ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ, ἔστω ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι αἱ κάθετοι αὗται, ΒΗ, ΕΖ τέμνονται, καί, ἂν μὲ κέντρον τὴν τομὴν αὐτῶν Κ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΚΑ γραφῇ περιφέρεια, τὸ τμῆμα τοῦ κύκλου, τὸ ἐκτὸς τῆς γωνίας ΑΒΔ ὑπάρχον, εἶναι τὸ ζητούμενον.



ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Αἱ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΒΗ τέμνονται ἱκανῶς αὐξανόμεναι· διότι σχηματίζουσι μετὰ τῆς τεμνούσης αὐτὰς ΕΒ τὰς δύο γωνίας ΖΕΒ καὶ ΗΒΕ, ὧν ἡ μὲν εἶναι ὀρθή, ἡ δὲ μέρος ὀρθῆς (τῆς ΗΒΔ)· ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν, ἄρα τέμνονται αἱ εὐθεῖαι ΒΗ καὶ ΕΖ, εἴς τι σημεῖον Κ. Ἐὰν δέ, μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΚΒ, γραφῇ περιφέρεια, θὰ διέλθῃ ἡ περιφέρεια αὕτη καὶ διὰ τοῦ Α (διότι ΚΑ = ΚΒ), θὰ ἐφάπτηται δὲ τῆς ΒΔ εἰς τὸ Β, διότι ἡ ΒΔ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΚΒ· ἐπομένως ἡ γωνία ΔΒΑ, ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς χορδῆς ΒΑ καὶ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΒΔ, ἰσοῦται τῇ ἐγγεγραμμένῃ ΒΜΑ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΡΒ, τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου. Ἐπειδὴ δὲ κατεσκευάσθη ἡ γωνία ΔΒΑ ἴση τῇ δοθείσῃ Γ, ἕπεται ὅτι ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΜΒ ἰσοῦται τῇ Γ. Ἐγράφη λοιπὸν ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τμῆμα κύκλου, τὸ ΑΜΒΕΑ, δεχόμενον τὴν δοθεῖσαν γωνίαν. Ὃ. ἔ. π.

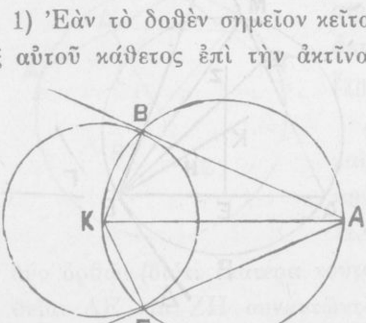
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ, ἔνθα κεῖται τὸ τμῆμα ΑΜΒΕΑ, δὲν ὑπάρχει ἄλλο σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β νὰ σχηματίζωσι γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ Γ, εἰμὴ τὰ σημεῖα τοῦ τόξου ΑΜΒ· διότι ἂν μὲν ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς τοῦ τμήματος, ὡς τὸ Τ, ἡ γωνία ΑΤΒ εἶναι (72) μικροτέρα τῆς ΑΜΒ, ἤτοι τῆς Γ· ἂν δὲ ληφθῇ τι ἐντός, ὡς τὸ Σ, ἡ γωνία ΑΣΒ θὰ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΜΒ, ἤτοι τῆς Γ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 15ον

156. Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ δοθέντος κύκλου.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ. Τὸ δοθὲν σημεῖον πρέπει νὰ μὴ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου.

1) Ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἀρκεῖ νὰ ἀχθῇ ἐξ αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα, τὴν εἰς αὐτὸ καταλήγουσαν (123).



2) Ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον Α κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΚ καὶ ἂς γραφῇ ἐπ' αὐτῆς ὡς διαμέτρου, περιφέρεια, ἡ ΚΒΑΓΚ, ἥτις τέμνει τὴν δοθεῖσαν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ· λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ εἶναι ἐφαπτόμεναι τοῦ δοθέντος κύκλου·

Διότι ἀχθεισῶν τῶν ἀκτίνων ΚΒ, ΚΓ, αἱ γινόμεναι γωνίαι ΚΒΑ, ΚΓΑ εἶναι ὀρθαί, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς τὰ ἡμικύκλια ΚΒΑ, ΚΓΑ· ἑπομένως ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΑΓ, ὡς κάθετος ἐπὶ ἀκτῖνα εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς, εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου.

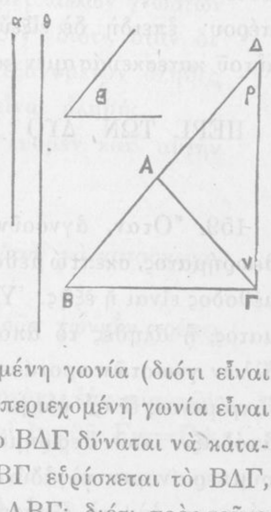
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀγόμεναι δύο ἐφαπτόμεναι εἰς κύκλον εἶναι ἴσαι· τοῦτο φαίνεται ἀμέσως ἐκ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΒΚΑ, ΓΚΑ (89).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 16ον

157. Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ μιᾶς τῶν παρ᾽ αὐτὴν γωνιῶν καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.

Ἔστω δοθεῖσα πλευρὰ ἡ α καὶ ἡ παρ᾽ αὐτὴν γωνία ἡ Β, τὸ δὲ δοθὲν ἄθροισμα τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν ἡ ϑ.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ εὐθεῖα ϑ, ὡς ἄθροισμα τῶν δύο πλευρῶν, πρέπει νὰ εἶναι μεγαλητέρα τῆς α.



Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ζητούμενον τρίγωνον εὑρέθη καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΒΓ καὶ ἡ γωνία Β καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ΑΒ+ΑΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα. Ἐὰν προσεκβληθῇ ἡ ΑΒ καὶ ληφθῇ ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΑΓ, ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ ΓΔ, γίνεται τὸ τρίγωνον ΒΔΓ, οὗτινος αἱ δύο πλευραὶ ΒΓ καὶ ΒΔ εἶναι γνωσταί, ὡς καὶ ἡ ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένη γωνία (διότι εἶναι ΒΓ=α, ΒΔ=ΒΑ+ΑΔ=ΒΑ+ΑΓ=ϑ, καὶ ἡ περιεχομένη γωνία εἶναι ἴση τῇ δοθείσῃ Β)· ἑπομένως τὸ τρίγωνον τοῦτο ΒΔΓ δύναται νὰ κατασκευασθῇ (151)· ὅπως δὲ ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκεται τὸ ΒΔΓ, οὕτω καὶ ἐκ τοῦ ΒΔΓ, δύναται νὰ εὑρεθῇ τὸ ΑΒΓ· διότι πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ (κατασκευασθέντος τοῦ ΒΔΓ) νὰ ἀχθῇ ἡ ΓΑ, οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίσῃ τὴν γωνίαν ν ἴσην τῇ ρ, ὅτε θὰ εἶναι καὶ ΑΓ=ΑΔ.

Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι εὑρίσκομεν τὴν ἑπομένην λύσιν τοῦ προταθέντος προβλήματος.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Κατασκευάζομεν τρίγωνον, ἔχον δύο πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς δοθείσας εὐθείας καὶ περιεχομένην ὑπ᾽ αὐτῶν γωνίαν τὴν δοθεῖσαν, ἔστω δὲ τοῦτο τὸ ΒΓΔ, ἔχον τὴν ΒΓ ἴσην τῇ α καὶ τὴν ΒΔ ἴσην τῇ ϑ· ἔπειτα σχηματίζομεν τὴν γωνίαν ΑΓΔ ἴσην τῇ Δ. Τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Διότι τῆς πλευρᾶς θ οὔσης μεγαλητέρας τῆς α, ἡ γωνία Γ εἶναι μεγαλητέρα τῆς Δ· ὥστε ἡ ΓΑ, ἡ σχηματίζουσα τὴν γωνίαν ΑΓΔ ἴσην τῇ Δ, θὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΒΓΔ καὶ θὰ τέμνῃ ἑπομένως τὴν ΒΔ, κατά τι σημεῖον Α· ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΔΓ αἱ παρὰ τὴν ΓΔ γωνίαι ἴσαι, θὰ εἶναι καὶ ΑΔ = ΑΓ· ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει: ΒΓ = α, ΒΑ + ΑΓ = ΒΑ + ΑΔ = ΒΔ = θ καὶ τὴν γωνίαν Β ἴσην τῇ δοθείσῃ· εἶναι λοιπὸν τὸ ζητούμενον.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

158 Ἵνα λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, ὑπεθέσαμεν εὑρεθὲν τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ ἐφαρμόσαντες ἐπ' αὐτοῦ γνωστὰς προτάσεις, ἐσχηματίσαμεν ἐξ αὐτοῦ ἄλλο, συνδεόμενον πρὸς τὸ πρῶτον οὕτως, ὥστε ἑκάτερον ἐξ αὐτῶν δύναται νὰ κατασκευασθῇ, δοθέντος τοῦ ἑτέρου· ἐπειδὴ δὲ εἰξεύρομεν νὰ κατασκευάσωμεν τὸ δεύτερον, ἐξ αὐτοῦ κατεσκευάσαμεν καὶ τὸ πρῶτον καὶ ἐλύσαμεν τὸ πρόβλημα.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΥΟ ΠΡΩΤΕΥΟΥΣΩΝ ΕΝ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΕΘΟΔΩΝ

159. Ὅταν, ἀγνοοῦντες τὴν λύσιν προβλήματος, ἢ τὴν ἀπόδειξιν θεωρήματος, σκεπτώμεθα, ἵνα εὕρωμεν αὐτήν, ἡ ἁρμοδιωτάτη πρὸ τοῦτο μέθοδος εἶναι ἡ ἑξῆς. Ὑποθέτομεν εὑρεθὲν τὸ ζητούμενον τοῦ προβλήματος, ἢ ἀληθὲς τὸ ἀποδεικτέον θεώρημα καὶ συνδυάζομεν αὐτὸ μετ' ἄλλων γνωστῶν προτάσεων, προσπαθοῦντες νὰ φθάσωμεν εἰς γνωστόν τι ἐξαγόμενον, ἐξ οὗ ὁδηγούμεθα εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, ἢ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, ἐὰν τὸ ἐξαγόμενον εἶναι ἀληθές· ἢ καὶ συμπεραίνομεν τὸ ἀδύνατον τοῦ προβλήματος, ἢ τὸ ψευδὲς τοῦ θεωρήματος, ἐὰν τὸ ἐξαγόμενον, εἰς ὃ ἐφθάσαμεν, εἶναι ψευδές.

Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται *ἀναλυτική*. Ὁ δὲ τοιοῦτος τρόπος τοῦ σκέπτεσθαι λέγεται *ἀνάλυσις*.

Ἀλλ' ὅταν, εὑρόντες τὴν λύσιν ἢ τὴν ἀπόδειξιν, θέλωμεν νὰ ἐκθέσωμεν αὐτὴν εἰς ἄλλους, τότε ἀκολουθοῦμεν ἄλλην μέθοδον. Ἀρχόμενοι τότε ἀπὸ γνωστῶν προτάσεων, συνδυάζομεν αὐτὰς ἁρμοδίως, προχωροῦντες, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὴν λύσιν, ἢ εἰς τὴν ἀπόδειξιν.

Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται *συνθετικὴ* καὶ ἡ διανοητικὴ ἐργασία ἡ ἐν αὐτῇ γινομένη, ἐναντία τῆς προηγουμένης οὖσα, λέγεται *σύνθεσις*.

Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην ἐλύθησαν πάντα τὰ προηγούμενα προβλήματα πλὴν τοῦ τελευταίου· κατ' αὐτὴν ἀπεδείχθησαν καὶ πάντα τὰ θεωρήματα, πλὴν τῶν ἀποδειχθέντων διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Ἡ συνθετικὴ μέθοδος ἔχει τὸ μειονέκτημα, ὅτι πείθει μὲν περὶ τῆς ἀληθείας τοῦ θεωρήματος, ἢ περὶ τῆς ἀληθοῦς λύσεως τοῦ προβλήματος, δὲν εὐχαριστεῖ ὅμως τὸν νοῦν, ὅστις ζητεῖ νὰ ἐννοήσῃ, πῶς εὑρέθη ἡ λύσις, ἢ ἡ ἀπόδειξις, οὐδὲ ὁδηγεῖ τὸ παράπαν εἰς τὴν λύσιν ἄλλων ὁμοίων προβλημάτων, ἢ εἰς τὴν ἀπόδειξιν ἄλλων θεωρημάτων.

Ἡ ἀναλυτικὴ πάλιν μέθοδος δεικνύει μὲν τὴν πορείαν, ἣν ἠκολούθησεν ὁ νοῦς εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς ἀληθείας, δὲν παρέχει ὅμως βεβαιότητα ἐκτὸς ὅταν συμπεραίνῃ τὸ ἀδύνατον τοῦ προβλήματος, ἢ τὸ ψευδὲς τοῦ θεωρήματος (ὡς συμβαίνει ἐπὶ τῶν θεωρημάτων, τῶν διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ἀποδεικνυομένων, ἔνθα ὑποτίθεται ἀληθὲς τὸ ἐναντίον τοῦ ἀποδειχθησομένου καὶ συνδυάζεται μετ' ἄλλων γνωστῶν εἰς τρόπον, ὥστε νὰ προκύψῃ ψευδὲς ἐξαγόμενον)· διότι, ὅταν δι' αὐτῆς, ὑποθέσαντές τι ὡς ἀληθές, φθάσωμεν εἰς ἐξαγόμενον ἀληθές, δὲν ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι ἡ γενομένη ὑπόθεσις εἶναι ἀληθής.

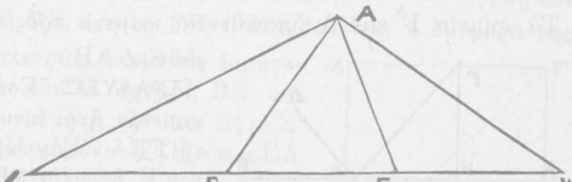
Πρὸς ἄσκησιν περὶ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον, λύομεν κατ' αὐτὴν καὶ τὰ ἑπόμενα προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 17ον

160. Ἐκ τῶν γωνιῶν καὶ ἐκ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν δοθεισῶν γωνιῶν πρέπει νὰ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

ΑΝΑΛΥΣΙΣ. Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον· ἐὰν μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ προσεκβληθῇ ἑκατέρωθεν ἑαυτῆς καὶ ληφθῇ Γγ=ΓΑ καὶ Ββ=ΒΑ καὶ ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι Αγ, Αβ, γίνεται νέον τρίγωνον, τὸ Αβγ οὗτινος ἡ πλευρὰ βγ, ἰσοῦται τῇ



δοθείσῃ περιμέτρῳ (ἐκ κατασκευῆς), αἱ δὲ παρ' αὐτὴν γωνίαι β καὶ γ εἶναι τὰ ἡμίση τῶν δοθεισῶν γωνιῶν Β καὶ Γ, ὡς συνάγεται ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΒβ καὶ ΑΓγ (72). Ἑπομένως τὸ τρίγωνον Αβγ δύναται νὰ κατασκευασθῇ, ἐξ αὐτοῦ δὲ κατασκευάζεται καὶ τὸ ζητούμενον.

Ἐκ τῆς ἀναλύσεως ταύτης συνάγεται ἡ ἑπομένη συνθετικὴ λύσις τοῦ προβλήματος.

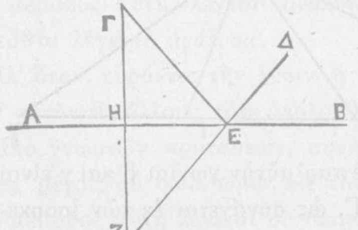
ΣΥΝΘΕΣΙΣ. Κατασκευάζομεν τρίγωνον, τὸ Αβγ, ἔχον τὴν πλευρὰν βγ ἴσην τῇ δοθείσῃ περιμέτρῳ καὶ παρ᾽ αὐτὴν γωνίας τὰς $\frac{1}{2}$ Β, $\frac{1}{2}$ Γ (ἃς εὑρίσκομεν διχοτομοῦντες τὰς δοθείσας Β, Γ)· ἐκ τῆς κορυφῆς Α τοῦ τριγώνου τούτου ἄγομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ, οὕτως, ὥστε νὰ γίνῃ ἡ γωνία ΒΑβ, ἴση τῇ ΒβΑ καὶ ἡ γωνία ΓΑγ, ἴση τῇ ΓγΑ· αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι τέμνουσι τὴν βγ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ καὶ τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ.

Διότι, ἡ γωνία βΑγ ἰσοῦται μὲ $2^{\text{ὀρθ.}}-\frac{1}{2}$ Β$-\frac{1}{2}$ Γ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $Α+Β+Γ=2^{\text{ὀρθ.}}$, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία βΑγ ἰσοῦται $(Α+Β+Γ)-\frac{1}{2}Β-\frac{1}{2}Γ$, ἤτοι $\frac{1}{2}Β+\frac{1}{2}Γ+Α$· δύνανται λοιπὸν νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπ᾽ αὐτῆς δύο μέρη, βΑΒ καὶ γΑΓ, ἴσα τοῖς $\frac{1}{2}$ Β καὶ $\frac{1}{2}$ Γ, τουτέστι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κατασκευάζεται· ἀλλὰ τότε τὰ τρίγωνα ΑγΓ καὶ ΑβΒ εἶναι ἰσοσκελῆ (82)· ἄρα ΑΓ = Γγ καὶ ΑΒ = Ββ· ἑπομένως ἡ περίμετρος ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ ἰσοῦται τῇ Ββ + ΒΓ + Γγ, ἤτοι τῇ εὐθείᾳ βγ, ἥτις ἐλήφθη ἴση τῇ δοθείσῃ περιμέτρῳ, καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι διπλασία τῆς β (ὡς ἐκτὸς γωνίᾳ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑβΒ), ἤτοι ἰσοῦται τῇ δοθείσῃ Β· δι᾽ ὅμοιον λόγον καὶ ἡ ΑΓΒ ἰσοῦται τῇ δοθείσῃ Γ, καὶ ἡ ΒΑΓ τῇ δοθείσῃ Α· ὥστε κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 18ον

161. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ σημεῖόν τι, ἀπὸ τοῦ ὁποίου αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἰς δύο δοθέντα σημεῖα Γ, Δ, νὰ σχηματίζωσιν ἴσας γωνίας μετὰ τῶν δύο μερῶν τῆς εὐθείας.

Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ὑποτίθενται κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ.



ΑΝΑΛΥΣΙΣ. Ἔστω Ε τὸ ζητούμενον σημεῖον, ἤτοι ἔστω ἡ γωνία ΔΕΒ ἴση τῇ ΓΕΑ. Ἐὰν ἐκβληθῇ ἡ ΔΕ πέραν τοῦ Ε, ἡ γωνία ΑΕΖ, ὡς ἴση τῇ ΔΕΒ, θὰ εἶναι ἴση καὶ τῇ ΓΕΑ. Ἐὰν ἄρα ληφθῇ ΕΖ ἴση τῇ ΕΓ καὶ ἀχθῇ ἡ ΓΖ, τὰ δύο τρίγωνα ΓΕΗ καὶ ΗΕΖ θὰ εἶναι ἴσα (76) καὶ θὰ εἶναι ἡ ΓΗ ἴση τῇ ΗΖ καὶ αἱ περὶ τὸ Η γωνίαι ἴσαι, ἤτοι ἡ ΓΖ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ θὰ διαιρῆται ὑπ᾽ αὐτῆς εἰς δύο μέρη ἴσα. Δύναται λοιπὸν νὰ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΖ καὶ νὰ προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον Ζ, τὸ *συμμετρικὸν* τοῦ Γ, πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ· τὸ δὲ Ε θὰ εὑρεθῇ τότε ὡς τομὴ τῆς ΖΔ καὶ τῆς ΑΒ.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ. Τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν δοθέντων σημείων, ἔστω τοῦ Γ, ἂς εὑρεθῇ τὸ συμμετρικὸν σημεῖον, πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ· ἔστω δὲ τοῦτο τὸ Ζ καὶ ἂς ἀχθῇ ἔπειτα ἡ ΖΔ· τὸ σημεῖον Ε, εἰς ὃ ἡ ΖΔ τέμνει τὴν ΑΒ, εἶναι τὸ ζητούμενον.

Διότι, τὰ τρίγωνα ΓΕΗ, ΖΕΗ εἶναι ἴσα (76), ἑπομένως αἱ γωνίαι ΓΕΗ καὶ ΗΕΖ εἶναι ἴσαι· ἀλλ᾽ ἡ γωνία ΔΕΒ εἶναι ἴση τῇ ΗΕΖ, ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα ἡ γωνία ΓΕΗ εἶναι ἴση τῇ ΔΕΒ· ὅ. ἔ. π.

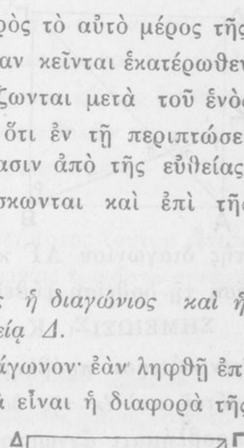
Παρατήρησις. Ἐκ πασῶν τῶν γραμμῶν, αἵτινες ἄγουσιν ἐκ τοῦ Γ εἰς τὸ Δ καὶ ἐγγίζουσι τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ, ἐλαχίστη εἶναι ἡ τεθλασμένη ΓΕΔ (ἡ τὰς ἴσας γωνίας σχηματίζουσα πρὸς τὴν ΑΒ)· διότι αὕτη μὲν ἰσοῦται τῇ εὐθείᾳ ΖΔ (ΓΕ=ΖΕ)· ἐνῷ πᾶσα ἄλλη, οἷον ἡ ΓΘΔ (ἡ ἐγγίζουσα τὴν ΑΒ εἰς οἱονδήποτε ἄλλο σημεῖον Θ), ἰσοῦται τῇ τεθλασμένῃ ΖΘΔ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὑπετέθησαν τὰ σημεῖα Γ, Δ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ· ἀλλ᾽ ἡ λύσις μένει ἡ αὐτή, καὶ ὅταν κεῖνται ἑκατέρωθεν αὐτῆς καὶ ζητεῖται, αἱ ἴσαι γωνίαι νὰ σχηματίζωνται μετὰ τοῦ ἑνὸς μέρους τῆς εὐθείας ΑΒ. Παρατηρητέον ὅμως, ὅτι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἐὰν τὰ σημεῖα κεῖνται εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς εὐθείας, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον μέν, ἂν δὲν εὑρίσκωνται καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου, ἀόριστον δέ, ἂν τοὐναντίον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 19ον

162. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, οὗτινος ἡ διαγώνιος καὶ ἡ πλευρὰ νὰ ἔχωσι διαφορὰν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Δ.

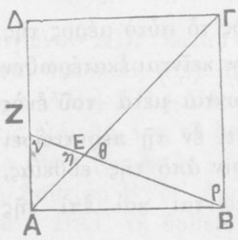
ΑΝΑΛΥΣΙΣ. Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον τετράγωνον· ἐὰν ληφθῇ ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΑΓ, ἡ ΓΕ, ἴση τῇ ΓΒ, ἡ ΕΑ θὰ εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς, ἑπομένως ἰσοῦται τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Δ· ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἡ ΒΕ καὶ ἐκβληθῇ, μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν ΑΔ εἰς τὸ Ζ, γίνονται ἀμφότερα τὰ τρίγωνα ΓΕΒ καὶ ΖΕΑ ἰσοσκελῆ· τὸ μὲν ΓΕΒ ἐκ κατασκευῆς (ἑπομένως ἔχει καὶ $\theta=\rho$), τὸ δὲ ΕΖΑ, διότι εἶναι $\nu=\rho$, ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΑΔ, ΓΒ καὶ $\eta=\theta$, ὡς κατὰ κορυφήν·



καὶ ἐπειδὴ $\theta=\rho$, ἕπεται καὶ $\nu=\eta$· ἤτοι τὸ τρίγωνον ΖΕΑ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἔχει τὴν ΑΖ ἴσην τῇ ΑΕ. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον τοῦτο δύναται νὰ κατασκευασθῇ· διότι αἱ δύο πλευραὶ αὐτοῦ ΑΕ, ΑΖ εἶναι ἴσαι τῇ δοθείσῃ διαφορᾷ Δ, ἡ δὲ περιεχομένη ὑπ' αὐτῶν γωνία εἶναι τὸ ἥμισυ ὀρθῆς. Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ ἑπομένη λύσις τοῦ προβλήματος.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ. Κατασκευάζομεν τρίγωνον ἔχον δύο πλευρὰς ἴσας τῇ δοθείσῃ διαφορᾷ Δ καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὀρθῆς· ἔστω δὲ τοῦτο τὸ ΑΕΖ. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α τοῦ τριγώνου τούτου ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΖ, τὴν ΑΒ καὶ προσεκβάλλομεν τὴν ΖΕ, μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν κάθετον ταύτην εἴς τι σημεῖον Β· ἡ ΑΒ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΖΕ συναντῶνται· διότι αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουσι πρὸς τὴν ΑΔ, ἔχουσιν ἄθροισμα μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν. Ἐὰν δὲ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἐπὶ τῆς ΑΒ, τὸ ΑΒΓΔ, καὶ προσεκβληθῇ ἡ ΑΕ, θὰ διέλθῃ διὰ τῆς κορυφῆς Γ· διότι διχοτομεῖ τὴν

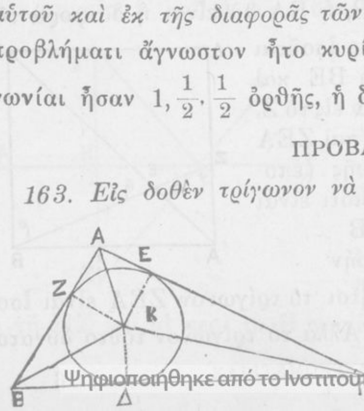


ὀρθὴν γωνίαν Α τοῦ τετραγώνου· ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΕΖΑ εἶναι ἰσοσκελὲς ἐκ κατασκευῆς, ἔχει τὰς γωνίας ν καὶ η ἴσας· ἀλλ' εἶναι $\nu=\rho$, ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΒΓ καὶ $\eta=\vartheta$, ὡς κατὰ κορυφήν· ὅθεν ἕπεται καὶ $\rho=\vartheta$· ἄρα τὸ τρίγωνον ΕΓΒ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἔχει τὴν ΓΕ ἴσην τῇ ΓΒ· ἑπομένως ἡ ΑΕ εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς διαγωνίου ΑΓ καὶ τῆς πλευρᾶς ΓΒ τοῦ τετραγώνου· ἐλήφθη δὲ ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Δ· ὥστε ἐλύθη τὸ πρόβλημα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύεται καὶ τὸ ἑπόμενον γενικώτερον πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ καὶ ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο πλευρῶν αὐτοῦ.* Ἐν τῷ λυθέντι προβλήματι ἄγνωστον ἦτο κυρίως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος αἱ γωνίαι ἦσαν $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ὀρθῆς, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἦτο Δ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 20ὸν

163. Εἰς δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.



ΑΝΑΛΥΣΙΣ. Ἄς ὑποτεθῇ τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστω Κ τὸ κέντρον τοῦ εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Ἐὰν ἀχθῶσιν ἀκτῖνες εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ, ἔνθα ὁ κύκλος ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, αἱ ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ, θὰ εἶναι κάθετοι ἐπ' αὐτάς, ὡς ἐφαπτομένας· ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι τὸ σημεῖον Κ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν ἑκάστης τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ καὶ κατ' ἀκολουθίαν θὰ κεῖται ἐπὶ τῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας ταύτας (108).

ΣΥΝΘΕΣΙΣ. Ἂς διχοτομηθῶσι δύο ἐκ τῶν γωνιῶν τοῦ δοθέντος τριγώνου, ἔστωσαν αἱ Β, Γ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Κ, εἰς ὃ αἱ διχοτομοῦσαι αὐτὰς τέμνονται, ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν, ἔστω ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ΚΔ, ἂς γραφῇ δὲ κύκλος, μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΚΔ· λέγω, ὅτι ὁ κύκλος οὗτος θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τρίγωνον.

Διότι τὸ Κ, σημεῖον ὂν τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν Β, ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς (108), ἤτοι αἱ κάθετοι ἐπ' αὐτὰς ΚΔ, ΚΖ εἶναι ἴσαι· δι' ὅμοιον λόγον καὶ ἡ κάθετος ΚΕ ἐπὶ τὴν ΑΓ εἶναι ἴση τῇ ΚΔ· ὥστε αἱ ἐκ τοῦ Κ ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ἀγόμεναι κάθετοι ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ εἶναι ἴσαι· καὶ διὰ τοῦτο ἡ περιφέρεια, ἡ μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΔ γραφεῖσα θὰ διέρχηται διὰ τῶν σημείων Δ, Ε, Ζ· αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, ὡς κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ, θὰ εἶναι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Καθ' ὅμοιον τρόπον γράφεται κύκλος ἐφαπτόμενος μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ τῶν προσεκβολῶν τῶν δύο ἄλλων.

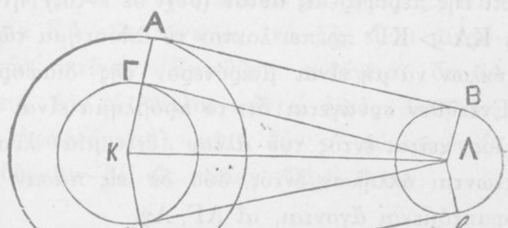
Ἑπομένως ὑπάρχουσι τέσσαρες κύκλοι ἐφαπτόμενοι τριῶν δεδομένων εὐθειῶν, τρίγωνον ποιουσῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου ἀπεδείχθη τὸ θεώρημα, ὅτι *αἱ διχοτομοῦσαι τὰς τρεῖς γωνίας τριγώνου συνέρχονται εἰς ἓν σημεῖον*.

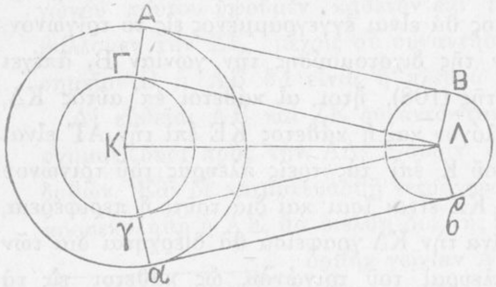
*ΠΡΟΒΛΗΜΑ 21ον

164. Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη κοινὴ δύο δοθέντων κύκλων.

Ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη δύναται νὰ ἔχῃ τοὺς κύκλους ἢ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς ἢ ἑκατέρωθεν αὐτῆς· διὰ τοῦτο ὑποδιαιρεῖται τὸ πρόβλημα εἰς δύο.



Α΄ ΑΝΑΛΥΣΙΣ. Ἔστω ΑΒ ἡ ζητουμένη κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο δοθέντων κύκλων Κ καὶ Λ, ἔχουσα ἀμφοτέρους πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς· ἐὰν εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς Α καὶ Β ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΛΒ, καὶ ἐξ ἑνὸς τῶν κέντρων, ἔστω ἐκ τοῦ Λ, ἡ ΛΓ παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ ΑΒ, θὰ γίνῃ τὸ σχῆμα ΑΒΛΓ ὀρθογώνιον καὶ θὰ ἔχῃ διὰ τοῦτο ΑΓ = ΒΛ· ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ἡ ΚΓ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἀκτίνων ΚΑ καὶ ΛΒ ἐὰν δὲ γραφῇ κύκλος μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΚΓ, ἡ ΛΓ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου τούτου (ὡς κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΚΓ). Ἀλλ' ἡ ΛΓ δύναται νὰ εὑρεθῇ· διότι εἶναι ἐφαπτομένη γνωστοῦ κύκλου, τοῦ ἔχοντος κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν διαφορὰν ΚΑ — ΛΒ, ἐκ τοῦ γνωστοῦ σημείου Λ. Εὑρεθείσης δὲ τῆς ΛΓ, εὑρίσκεται καὶ τὸ σημεῖον Α, ὡς ἄκρον τῆς ἀκτῖνος τῆς διὰ τοῦ Γ διερχομένης, καὶ τὸ Β, ὡς ἄκρον τῆς παραλλήλου ἀκτῖνος ΛΒ· ἄρα καὶ ἡ ΑΒ.

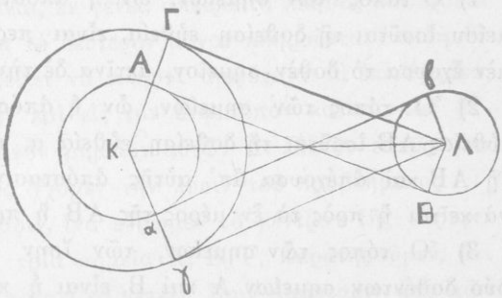


ΣΥΝΘΕΣΙΣ. Μὲ κέντρον τὸ Κ (τοῦ μεγαλητέρου κύκλου) καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων, ἂς γραφῇ περιφέρεια, ἂς ἀχθῇ δὲ ἐφαπτομένη αὐτῆς, ἐκ τοῦ ἄλλου κέντρου Λ, ἡ ΛΓ· ἔπειτα ἂς ἀχθῇ διὰ τῆς ἐπαφῆς Γ ἡ ἀκτὶς ΚΑ τοῦ κύκλου Κ καὶ ἐκ τοῦ κέντρου Λ ἡ ἀκτὶς ΛΒ, παράλληλος τῇ ΚΑ καὶ τὴν αὐτὴν ἔχουσα φοράν· ἡ εὐθεῖα ΑΒ θὰ εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων.

Διότι τοῦ σχήματος ΑΒΛΓ αἱ δύο πλευραὶ ΛΒ καὶ ΓΑ εἶναι παράλληλοι καὶ ἴσαι (διότι ἡ ΚΓ ἐλήφθη ἴση τῇ διαφορᾷ τῶν ἀκτίνων)· ἄρα τὸ σχῆμα τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον· εἶναι δὲ ὀρθογώνιον, διότι ἡ γωνία αὐτοῦ Γ εἶναι ὀρθή· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΛΒ, εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν Α καὶ Β, θὰ εἶναι ἐφαπτομένη ἀμφοτέρων τῶν κύκλων.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ. Ἵνα ἐκ τοῦ Λ ἄγηται ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΚΓ, πρέπει τὸ σημεῖον Λ νὰ κεῖται ἢ ἐκτὸς τοῦ κύκλου τούτου ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ (οὐχὶ δὲ ἐντός)· ἤτοι, νὰ εἶναι ἢ ΚΛ = ΚΓ ἢ ΚΛ > ΚΓ· πρέπει λοιπὸν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων τῶν δοθέντων κύκλων νὰ μὴ εἶναι μικρότερον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων αὐτῶν. Ἐντεῦθεν συνάγεται ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, ἐὰν ὁ εἷς κύκλος κεῖται ἐντὸς τοῦ ἄλλου· ἔχει μίαν λύσιν, ἐὰν οἱ κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, δύο δὲ εἰς πᾶσαν ἄλλην θέσιν· διότι δύο ἐφαπτόμεναι ἄγονται, αἱ ΛΓ, Λγ.

Β΄ ΑΝΑΛΥΣΙΣ. Ἔστω ἡ ΑΒ ἐφαπτομένη κοινὴ τῶν δοθέντων κύκλων καὶ ἔχουσα αὐτοὺς ἑκατέρωθεν αὐτῆς. Ἐὰν ἀχθῶσιν εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς Α καὶ Β αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΛΒ καὶ ἐκ τοῦ Λ παράλληλος τῇ ΑΒ ἡ ΛΓ, συναντῶσα εἰς τὸ Γ τὴν προσεκβολὴν τῆς ΚΑ, γίνεται τὸ σχῆμα ΑΒΓΛ ὀρθογώνιον· ἑπομένως ἡ ΛΓ θὰ ἐφάπτηται τοῦ κύκλου, τοῦ ὁποίου κέντρον εἶναι τὸ Κ καὶ ἀκτὶς ἡ ΚΓ, ἥτις ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι ΚΑ + ΛΒ τῶν ἀκτίνων· διότι ΑΓ = ΛΒ.



ΣΥΝΘΕΣΙΣ. Μὲ κέντρον τὸ Κ (τοῦ ἑνὸς κύκλου) καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀκτίνων, ἂς γραφῇ περιφέρεια, ἂς ἀχθῇ δὲ ἐκ τοῦ Λ ἐφαπτομένη αὐτῆς, ἡ ΛΓ· ἔπειτα ἂς ἀχθῇ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Γ ἡ ἀκτὶς ΚΓ, τέμνουσα τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ἐκ τοῦ Λ ἡ ἀκτὶς ΛΒ, παράλληλος τῇ ΚΓ, ἀλλ' ἐναντίαν ἔχουσα φοράν· ἡ ΑΒ θὰ εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δοθέντων κύκλων.

Διότι, τοῦ σχήματος ΑΓΒΛ αἱ δύο πλευραὶ ΛΒ καὶ ΑΓ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (διότι ἐλήφθη ἡ ΚΓ ἴση τῷ ἀθροίσματι ΚΑ + ΛΒ)· ἄρα τὸ σχῆμα τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον· εἶναι δὲ ὀρθογώνιον διότι ἡ γωνία αὐτοῦ Γ εἶναι ὀρθή· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων ΚΑ, ΛΒ, θὰ εἶναι ἐφαπτομένη ἀμφοτέρων τῶν κύκλων.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ. Ἵνα ἐκ τοῦ Λ ἄγηται ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΚΓ, πρέπει τὸ σημεῖον Λ νὰ κεῖται ἢ ἐκτὸς αὐτοῦ ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ (οὐχὶ δὲ ἐντός)· ἤτοι νὰ εἶναι ἢ ΚΛ = ΚΓ ἢ ΚΛ > ΚΓ· πρέπει λοιπὸν τὸ ἀπόστημα ΚΛ τῶν κέντρων, νὰ μὴ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων. Ἐντεῦθεν συνάγεται ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, ἐὰν οἱ κύκλοι κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων, (διότι δύο τότε ἄγονται ἐφαπτόμεναι), μίαν, ἐὰν οἱ κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, οὐδεμίαν δέ, εἰς πᾶσαν ἄλλην θέσιν.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΟΠΩΝ (*)

ΛΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΔΙ' ΑΥΤΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ

165. Ὅταν πάντα τὰ σημεῖα, τὰ κοινήν τινα ἰδιότητα ἔχοντα εὑρίσκωνται ἐπί τινος γραμμῆς, πάντα δὲ τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς ταύτης ἔχωσι τὴν κοινὴν ἐκείνην ἰδιότητα, ἡ γραμμὴ λέγεται *γεωμετρικὸς τόπος*, ἢ ἁπλῶς *τόπος* τῶν σημείων τῶν τὴν ἰδιότητα ἐκείνην ἐχόντων·

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Ὁ τόπος τῶν σημείων, ὧν ἡ ἀπόστασις ἀπὸ δοθέντος σημείου ἰσοῦται τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, εἶναι περιφέρεια κύκλου, κέντρον μὲν ἔχουσα τὸ δοθὲν σημεῖον, ἀκτῖνα δὲ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

2) Ὁ τόπος τῶν σημείων, ὧν ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ ἰσοῦται τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ α, εἶναι εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΑΒ καὶ ἀπέχουσα ἀπ' αὐτῆς ἀπόστασιν, ἴσην τῇ α (δύναται δὲ νὰ κεῖται ἢ πρὸς τὸ ἓν μέρος τῆς ΑΒ ἢ πρὸς τὸ ἕτερον).

3) Ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ἴσην ἀπόστασιν ἐχόντων ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β, εἶναι ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΑΒ, ἥτις συνδέει τὰ δοθέντα σημεῖα (104).

4) Ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν δύο πλευρῶν δοθείσης γωνίας, εἶναι ἡ διχοτομοῦσα τὴν γωνίαν ταύτην εὐθεῖα (108).

5) Ὁ τόπος τῶν σημείων, ἐξ ὧν αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἰς δύο δοθέντα σημεῖα Α,Β, σχηματίζουσι γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ Γ, εἶναι τὸ τόξον τοῦ τμήματος, τοῦ ἐπὶ τῆς ΑΒ γραφομένου καὶ τὴν γωνίαν Γ δεχομένου (136) (τοιαῦτα τόξα εἶναι δύο, ἓν πρὸς ἑκάτερον τῶν μερῶν τῆς εὐθείας ΑΒ).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τοῖς παραδείγμασι τούτοις, ὡς καὶ ἐν τοῖς ἑπομένοις πᾶσι, θεωροῦνται σημεῖα ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ κείμενα.

ΛΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΟΠΩΝ

Ὅταν ἐν προβλήματι τὸ ζητούμενον εἶναι σημεῖόν τι (τοιαῦτα δὲ εἶναι τὰ πλεῖστα ἢ εἰς τοιαῦτα ἀνάγονται), τὸ σημεῖον τοῦτο ὀφείλει νὰ πληροῖ ἐπιτάγματά τινα, ἵνα λύῃ τὸ πρόβλημα.

Ἐν τῷ προβλήματι, παραδείγματος χάριν: «*νὰ γραφῇ περιφέρεια διὰ τριῶν σημείων δοθέντων διερχομένη*», ἄγνωστον κυρίως εἶναι τὸ κέντρον· τὸ δὲ σημεῖον τοῦτο ὀφείλει νὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῶν τριῶν δοθέντων σημείων.

(*) Τοὺς γεωμετρικοὺς τόπους ἐπενόησεν ὁ φιλόσοφος Πλάτων.

Ἐν τῷ προβλήματι «*νὰ ἐγγραφῇ κύκλος εἰς δοθὲν τρίγωνον*», ἄγνωστον εἶναι τὸ κέντρον· ὀφείλει δὲ τοῦτο νὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῶν τριῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν.

Ὁμοίως ἐν τῷ προβλήματι «*νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ δοθέντος κύκλου ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου*», ἄγνωστον εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς· ὀφείλει δὲ τοῦτο νὰ εἶναι κορυφὴ ὀρθῆς γωνίας, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ νὰ διέρχωνται, διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ἡ μία, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἡ ἄλλη.

Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἐὰν εἶναι δύο τὰ ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος (ἢ δύνανται νὰ χωρισθῶσιν εἰς δύο), τὰ τὸ πρῶτον μόνον ἐπίταγμα πληροῦντα σημεῖα εἶναι, ἐν γένει, ἄπειρα τὸ πλῆθος καὶ ἔχουσι τόπον τινά, ὡσαύτως καὶ τὰ τὸ δεύτερον μόνον πληροῦντα· ἐπειδὴ δὲ τὸ ζητούμενον σημεῖον ὀφείλει νὰ πληροῖ ἀμφότερα τὰ ἐπιτάγματα, θὰ εὑρίσκηται κατ' ἀνάγκην καὶ εἰς τὸν ἕνα τόπον καὶ εἰς τὸν ἄλλον· ἑπομένως θὰ εἶναι κοινὸν σημεῖον αὐτῶν· ἂν λοιπὸν εἰξεύρωμεν τοὺς δύο εἰρημένους τόπους, ἔχομεν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Οὕτω, παραδείγματος χάριν, ἵνα εὕρωμεν τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, τῆς ὁποίας ἔχομεν τρία σημεῖα Α, Β, Γ, παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ζητούμενον κέντρον Κ πρέπει νὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῶν τριῶν δοθέντων σημείων, ἤτοι νὰ πληροῖ τὰ δύο ἐπιτάγματα

$$KA = KB \quad \text{καὶ} \quad KA = K\Gamma\cdot$$

καὶ τὰ μὲν σημεῖα, τὰ τὸ πρῶτον μόνον ἐπίταγμα πληροῦντα (ἤτοι τὰ ἀπέχοντα ἴσον ἀπὸ τῶν δύο σημείων Α καὶ Β), ἔχουσι τόπον τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ, τὰ δὲ τὸ δεύτερον μόνον πληροῦντα, ἔχουσι τόπον τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΓ· ἐπειδὴ δὲ τὸ Κ θὰ πληροῖ ἀμφότερα τὰ ἐπιτάγματα, ἀναγκαίως θὰ εὑρίσκηται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν καθέτων τούτων· ὥστε θὰ εἶναι ἡ τομὴ αὐτῶν.

Ὁμοίως, ἵνα εὕρωμεν τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, τῆς εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγραφησομένης, παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ζητούμενον κέντρον πρέπει νὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος τριγώνου, ἤτοι νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα: 1) ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ νὰ εἶναι ἴση τῇ ἀποστάσει αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ καὶ 2) ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ νὰ εἶναι ἴση τῇ ἀποστάσει αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ. Καὶ τὰ μὲν σημεῖα, ἅτινα πληροῦσι τὸ πρῶτον μόνον, ἔχουσι τόπον τὴν διχοτομοῦσαν τὴν γωνίαν Α, τὰ δὲ πληροῦντα τὸ δεύτερον μόνον, ἔχουσι τόπον τὴν διχοτομοῦσαν τὴν γωνίαν Β· ἐπειδὴ δὲ τὸ κέντρον θὰ πληροῖ ἀμφότερα, θὰ κεῖται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν διχοτομουσῶν τούτων· ὥστε θὰ εἶναι ἡ τομὴ αὐτῶν.

Ὁμοίως ἐν τῷ προβλήματι: «*νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ δοθέντος κύκλου Κ, ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Α*», τὸ ζητούμενον σημεῖον τῆς ἐπαφῆς πρέπει νὰ πληροῖ τὸ ἐπίταγμα τοῦτο: αἱ ἐξ αὐτοῦ ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ Α, νὰ σχηματίζωσιν ὀρθὴν γωνίαν· ἀλλὰ τὰ τὸ ἐπίταγμα τοῦτο πληροῦντα σημεῖα, ἔχουσι τόπον τὴν ἐπὶ τῆς ΑΚ, ὡς διαμέτρου, γραφομένην περιφέρειαν (137)· ἐπ' αὐτῆς ἄρα θὰ κεῖται τὸ ζητούμενον σημεῖον· πρέπει δὲ νὰ εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας· ἄρα εἶναι τομὴ αὐτῶν· ἐπειδὴ δὲ δύο τομαὶ ὑπάρχουσιν (ὅταν τὸ Α κεῖται ἐκτὸς τοῦ δοθέντος κύκλου), ἐπιδέχεται τὸ πρόβλημα δύο λύσεις.

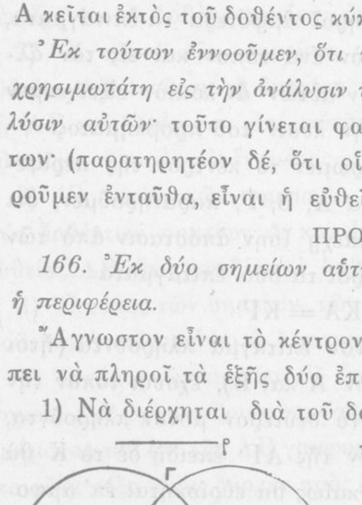
Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν, ὅτι ἡ γνῶσις τῶν γεωμετρικῶν τόπων εἶναι χρησιμωτάτη εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν προβλημάτων, ἑπομένως καὶ εἰς τὴν λύσιν αὐτῶν· τοῦτο γίνεται φανερὸν καὶ ἐκ τῶν ἑπομένων προβλημάτων· (παρατηρητέον δέ, ὅτι οἱ γεωμετρικοὶ τόποι, τοὺς ὁποίους θεωροῦμεν ἐνταῦθα, εἶναι ἡ εὐθεῖα καὶ ὁ κύκλος).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 22ον

166. *Ἐκ δύο σημείων αὐτῆς καὶ ἐκ τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς νὰ γραφῇ ἡ περιφέρεια.*

Ἄγνωστον εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας, ἥτις πρέπει νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα.

1) Νὰ διέρχηται διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Α καὶ νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ρ.



2) Νὰ διέρχηται διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Β καὶ νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα ἴσην τῇ ρ.

Ἀλλ' ἂν μόνον τὸ πρῶτον πληροῖ, τὸ κέντρον αὐτῆς ἔχει τόπον τὴν μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ρ γραφομένην περιφέρειαν· ἂν δὲ μόνον τὸ δεύτερον πληροῖ, τὸ κέντρον αὐτῆς ἔχει τόπον τὴν μὲν κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ρ γραφομένην περιφέρειαν· ἑπομένως τὸ ζητούμενον κέντρον εἶναι τομὴ τῶν δύο τούτων περιφερειῶν καὶ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχῃ δύο μὲν λύσεις, ἂν τέμνωνται αἱ ῥηθεῖσαι περιφέρειαι, μίαν δέ, ἐὰν ἐφάπτωνται ἀλλήλων (ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ἡ ΑΒ εἶναι διπλασία τῆς ρ) καὶ οὐδεμίαν, ἐὰν μηδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον (ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ἡ ΑΒ ὑπερβαίνῃ τὸ διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος ρ).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 23ον

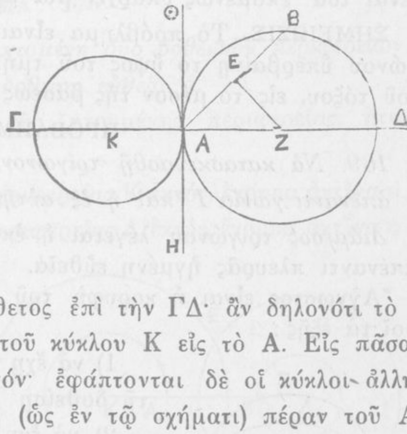
167. Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς δοθείσης περιφερείας K, εἰς τὸ σημεῖον A καὶ διερχομένη διὰ τοῦ δοθέντος σημείου B.

Ἄγνωστον εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας· πρέπει δὲ νὰ πληροῖ αὕτη τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα.

1) νὰ διέρχηται διὰ τῶν σημείων A καὶ B.

2) νὰ ἐφάπτηται τοῦ κύκλου K εἰς τὸ σημεῖον A.

Ἀλλὰ τῶν περιφερειῶν, αἵτινες πληροῦσι μόνον τὸ πρῶτον ἐπίταγμα, τὰ κέντρα ἔχουσι τόπον τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς AB (διότι ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων A καὶ B), τῶν δὲ περιφερειῶν αἵτινες πληροῦσι μόνον τὸ δεύτερον, τὰ κέντρα ἔχουσι τόπον τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν σημείων K καὶ A· ἄρα ἡ ζητουμένη περιφέρεια θὰ ἔχῃ τὸ κέντρον της καὶ ἐπὶ τῆς EZ καὶ ἐπὶ τῆς ΓΔ· ὥστε ἡ τομὴ Z τῶν εὐθειῶν τούτων εἶναι τὸ ζητούμενον κέντρον· τούτου δὲ εὑρεθέντος, ἐλύθη τὸ πρόβλημα.



ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ. Τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, ἂν αἱ δύο εὐθεῖαι ΓΔ καὶ EZ εἶναι παράλληλοι, ἤτοι, ἂν ἡ AB εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ· ἂν δηλονότι τὸ B δοθῇ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης HΘ τοῦ κύκλου K εἰς τὸ A. Εἰς πᾶσαν δ' ἄλλην περίπτωσιν εἶναι δυνατόν· ἐφάπτονται δὲ οἱ κύκλοι ἀλλήλων, ἐκτὸς μέν, ὅταν τὸ Z πίπτῃ (ὡς ἐν τῷ σχήματι) πέραν τοῦ A, ἐντὸς δέ, ὅταν τὸ Z πίπτῃ ὄπισθεν τοῦ A.

Ἐὰν τὸ κέντρον Z πέσῃ ἐπὶ τοῦ K, αἱ δύο περιφέρειαι ταυτίζονται· συμβαίνει δὲ τοῦτο, ὅταν ἡ AB εἶναι χορδὴ τοῦ δοθέντος κύκλου· ἤτοι, ὅταν τὸ B κεῖται ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 24ον

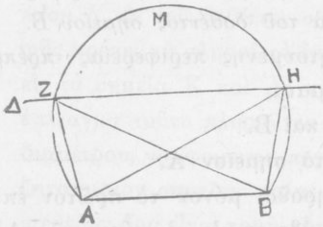
168. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος ἐδόθησαν ἡ βάσις AB, τὸ ὕψος υ καὶ ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνία Γ.

Ὕψος τριγώνου λέγεται ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν, ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς.

Ἄγνωστος εἶναι ἡ κορυφὴ Γ τοῦ τριγώνου, ὅπερ ὀφείλει νὰ πληροῖ τὰ δύο ταῦτα:

1) νὰ ἔχῃ ὕψος ἴσον τῷ υ·

2) νὰ ἔχῃ γωνίαν ἀπέναντι τῆς βάσεως ἴσην τῇ Γ.



Ἀλλ' ἂν μόνον τὸ πρῶτον πληροῖ, ἡ κορυφὴ τοῦ τριγώνου ἔχει τόπον τὴν εὐθεῖαν ΔΕ, παράλληλον τῇ ΑΒ καὶ ἀπέχουσαν ἀπ' αὐτῆς ἀπόστασιν ἴσην τῷ υ· ἂν δὲ μόνον τὸ δεύτερον, ἡ κορυφὴ αὐτοῦ ἔχει τόπον τὸ τόξον ΑΜΒ τοῦ τμήματος τοῦ ἐπὶ τῆς ΑΒ γραφομένου (πρὸς ὃ μέρος κεῖται ἡ ΔΕ) καὶ τὴν γωνίαν Γ δεχομένου. Ἐπειδὴ δὲ πρέπει νὰ πληροῖ ἀμφότερα, ἡ κορυφὴ αὐτοῦ θὰ εἶναι τομὴ τοῦ ρηθέντος τόξου καὶ τῆς εὐθείας ΕΔ· ὥστε τὰ τὸ πρόβλημα λύοντα τρίγωνα εἶναι τὰ ΑΒΖ καὶ ΑΒΗ, ἅτινα εἶναι ἴσα· ἑπομένως ὑπάρχει μία μόνον λύσις.

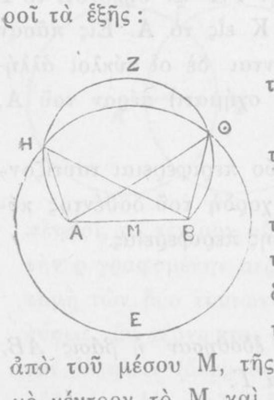
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, ἂν τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ὑπερβαίνῃ τὸ ὕψος τοῦ τμήματος, τουτέστι τὴν ἐκ τοῦ μέσου τοῦ τόξου, εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως ΑΒ ἀγομένην εὐθεῖαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 25ον

169. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος ἐδόθησαν ἡ βάσις ΑΒ, ἡ ἀπέναντι γωνία Γ καὶ ἡ ἐξ αὐτῆς διάμεσος Δ.

Διάμεσος τριγώνου λέγεται ἡ ἐκ μιᾶς κορυφῆς εἰς τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ἠγμένη εὐθεῖα.

Ἄγνωστος εἶναι ἡ κορυφὴ τοῦ τριγώνου, ὅπερ ὀφείλει νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς:



1) νὰ ἔχῃ γωνίαν ἀπέναντι τῆς βάσεως, ἴσην τῇ δοθείσῃ Γ·

2) νὰ ἔχῃ διάμεσον τῆς βάσεως ΑΒ, ἴσην τῇ δοθείσῃ Δ.

Ἀλλ' ἂν μόνον τὸ πρῶτον πληροῖ, ἡ κορυφὴ τοῦ τριγώνου ἔχει τόπον τὸ τόξον ΑΗΖΘΒ τοῦ τμήματος, ὅπερ γράφεται ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ δέχεται τὴν γωνίαν Γ· ἂν δὲ μόνον τὸ δεύτερον πληροῖ, ἡ κορυφὴ αὐτοῦ, ὡς ἀπέχουσα ἀπὸ τοῦ μέσου Μ, τῆς ΑΒ, ἀπόστασιν ἴσην τῇ Δ, ἔχει τόπον τὴν μὲ κέντρον τὸ Μ καὶ ἀκτῖνα τὴν Δ γραφομένην περιφέρειαν· ἄρα ἡ ζητουμένη κορυφὴ εἶναι τομὴ τῶν περιφερειῶν τούτων καὶ τὰ τρίγωνα τὰ λύοντα τὸ πρόβλημα, εἶναι τὰ ΑΒΗ καὶ ΑΒΘ, ἅτινα εἶναι ἴσα· ἑπομένως ὑπάρχει μία μόνη λύσις.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ. Ἵνα τὸ πρόβλημα λυθῇ, πρέπει ἡ περιφέρεια Ε νὰ τέμνῃ τὸ τόξον ΑΖΒ τοῦ τμήματος. Πρὸς τοῦτο, ἂν μὲν ἡ διάμεσος εἶναι μεγαλητέρα τοῦ ἡμίσεως τῆς βάσεως (ὡς ἐν τῷ σχήματι), ἀνάγκη νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸ ὕψος τοῦ τμήματος· ἂν δὲ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεως τῆς βάσεως, ἀνάγκη νὰ μὴ εἶναι μικροτέρα τοῦ ὕψους τοῦ τμήματος (τουτέστι πρέπει ἡ διάμεσος νὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ τοῦ ἡμίσεως τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους τοῦ τμήματος). Ἂν δὲ τέλος ἡ διάμεσος εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως (ὅτε αἱ δύο περιφέρειαι ἔχουσι τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Β κοινά, ἑπομένως, ἢ οὐδὲν ἄλλο ἔχουσι κοινὸν ἢ ταυτίζονται), τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον μέν, ἐὰν ἡ δοθεῖσα γωνία διαφέρῃ τῆς ὀρθῆς, ἀόριστον δέ, ἐὰν εἶναι ὀρθή· διότι τότε αἱ δύο περιφέρειαι ταυτίζονται καὶ πᾶν σημεῖον τοῦ τόξου ΑΖΒ εἶναι κορυφὴ τριγώνου, λύοντος τὸ πρόβλημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 26ον

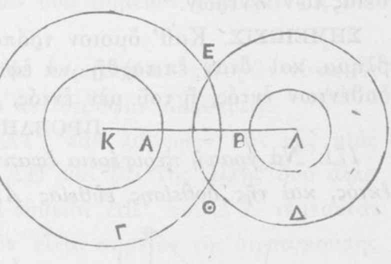
170. *Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν περιφερειῶν ἐκτὸς καὶ ἔχουσα ἀκτῖνα ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ α.*

Ἄγνωστον εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας, ἥτις ὀφείλει νὰ πληροῖ τὰ δύο ταῦτα:

1) νὰ ἐφάπτηται τῆς δοθείσης περιφερείας Κ ἐκτός, ἔχουσα ἀκτῖνα α.

2) νὰ ἐφάπτηται τῆς δοθείσης περιφερείας Λ ἐκτός, ἔχουσα ἀκτῖνα α.

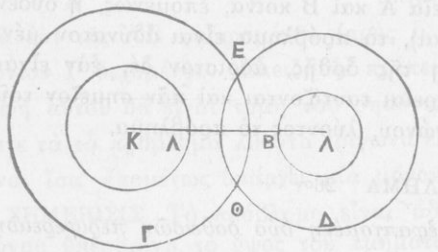
Ἀλλ' ἂν μόνον τὸ πρῶτον πληροῖ, τὸ κέντρον αὐτῆς θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ Κ ἀπόστασιν ἴσην τῷ ἀθροίσματι ΚΑ+α (127)· ἑπομένως ἔχει τόπον τὴν μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΑ+α γραφομένην περιφέρειαν Γ· ἂν δὲ πάλιν πληροῖ μόνον τὸ δεύτερον, τὸ κέντρον της ἔχει τόπον τὴν μὲ κέντρον τὸ Λ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΛΒ+α γραφομένην περιφέρειαν Δ· ὥστε τὸ ζητούμενον κέντρον εἶναι τομὴ τῶν δύο περιφερειῶν Γ καὶ Δ. Ἑπομένως τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, ἂν αἱ περιφέρειαι Γ, Δ τέμνωνται (ὡς ἐν τῷ σχήματι)· μίαν μόνην, ἂν ἐφάπτωνται ἀλλήλων· καὶ οὐδεμίαν, ἂν μηδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον.



ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ. Ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων τῶν δύο γραφομένων περιφερειῶν εἶναι ΚΛ, αἱ δὲ ἀκτῖνες αὐτῶν εἶναι $\alpha + \mathrm{KA}$ καὶ $\alpha + \Lambda\mathrm{B}$· ἑπομένως, ἵνα τέμνωνται πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι

$$\mathrm{K}\Lambda > \mathrm{KA} - \Lambda\mathrm{B} \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{K}\Lambda < 2\alpha + \mathrm{KA} + \Lambda\mathrm{B}.$$

Ἡ πρώτη ἀνισότης δεικνύει, ὅτι αἱ δοθεῖσαι περιφέρειαι δὲν πρέπει νὰ εἶναι ἡ μία ἐντὸς τῆς ἄλλης· ἡ δὲ δευτέρα πληροῦται ἀφ' ἑαυτῆς, ἂν εἶναι $\mathrm{K}\Lambda \leq \mathrm{KA} + \Lambda\mathrm{B}$, τουτέστιν, ἂν αἱ δύο περιφέρειαι τέμνωσιν ἀλλήλας ἢ ἂν ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός· ἂν ὅμως, τοὐναντίον, εἶναι:



$\mathrm{K}\Lambda > \mathrm{KA} + \Lambda\mathrm{B}$, ἤτοι, ἂν αἱ δοθεῖσαι περιφέρειαι εἶναι ἐκτὸς ἀλλήλων, ἀνάγκη νὰ εἶναι

$$2\alpha > \mathrm{K}\Lambda - (\mathrm{KA} + \Lambda\mathrm{B}),$$

ἤτοι, νὰ ὑπερβαίνῃ ἡ δοθεῖσα ἀκτὶς διπλῆ, τὸ ἐκτὸς τῶν κύκλων κείμενον μέρος τῆς εὐθείας τῶν κέντρων.

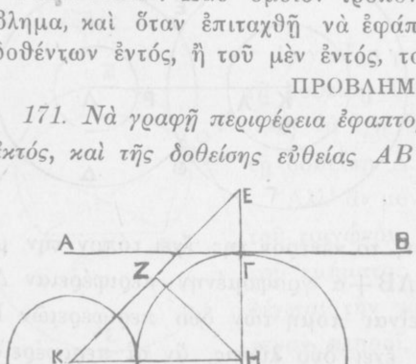
Αἱ περιφέρειαι Γ καὶ Δ ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός, ἂν εἶναι $\mathrm{K}\Lambda = \mathrm{KA} - \Lambda\mathrm{B}$, ἤτοι ἂν τὸ αὐτὸ ποιῶσι καὶ αἱ δοθεῖσαι.

Ἐφάπτονται δ' ἀλλήλων ἐκτός, ἐὰν εἶναι $\mathrm{K}\Lambda = 2\alpha + \mathrm{KA} + \Lambda\mathrm{B}$, ἤτοι $2\alpha = \mathrm{K}\Lambda - \mathrm{KA} - \Lambda\mathrm{B}$, τουτέστιν ἂν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα διπλῆ, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἐκτὸς τῶν δοθέντων κύκλων κείμενον τμῆμα τῆς εὐθείας τῶν κέντρων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καθ' ὅμοιον τρόπον λύεται καὶ διερευνᾶται τὸ πρόβλημα, καὶ ὅταν ἐπιταχθῇ νὰ ἐφάπτηται ὁ κύκλος ἀμφοτέρων τῶν δοθέντων ἐντός, ἢ τοῦ μὲν ἐντός, τοῦ δ' ἄλλου ἐκτός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 27ον

171. Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς δοθείσης περιφερείας Κ ἐκτός, καὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ εἰς δοθὲν σημεῖον Γ.



Ἐπειδὴ ἡ ζητουμένη περιφέρεια θὰ ἐφάπτηται τῆς ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Γ, τὸ κέντρον αὐτῆς θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΓΔ, ἥτις ἐκ τοῦ Γ, ἄγεται κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· ἐπειδὴ δὲ θὰ ἐφάπτηται καὶ τοῦ κύκλου Κ ἐκτός, τὸ κέντρον αὐτῆς θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ Κ περισσότερον ἢ ἀπὸ τοῦ Γ, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων τούτων θὰ εἶναι ἴση τῇ ἀκτῖνι ΚΘ τοῦ δοθέντος κύκλου· ἐὰν λοιπὸν προσεκβάλωμεν τὴν ΓΔ, πέραν τοῦ Γ καὶ λάβωμεν ΓΕ = ΚΘ, τὸ ζητούμενον κέντρον θὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων Ε καὶ Κ καὶ διὰ τοῦτο θὰ εὑρίσκηται ἐπὶ τῆς ΖΗ, καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΚΕ. Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας εἶναι τὸ σημεῖον Η, εἰς ὃ αἱ δύο αὗται κάθετοι τέμνονται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύεται τὸ πρόβλημα, καὶ ὅταν ἐπιταχθῇ νὰ ἐφάπτηται ἡ περιφέρεια τῆς δοθείσης περιφερείας ἐντός, περιέχουσα αὐτὴν ἢ περιεχομένη ὑπ' αὐτῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται καὶ τὸ ἑξῆς:

«Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν περιφερειῶν, μιᾶς δὲ τούτων εἰς δοθὲν σημεῖον».

Διότι ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν περιφέρειαν ταύτην ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον.

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

Α΄. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΙΝ

1) Ἡ περίμετρος κυρτοῦ σχήματος τέμνεται ὑπὸ εὐθείας τὸ πολὺ εἰς δύο σημεῖα. Καὶ πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἑνώνει δύο σημεῖα κυρτοῦ σχήματος, κεῖται ὅλη (τὸ μεταξὺ τῶν δύο σημείων μέρος) ἐντὸς τοῦ σχήματος.

2) Ἐν τῷ ῥόμβῳ, ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πλευρῶν εἶναι εἰς ἀμφότερα τὰ ζεύγη ἡ αὐτή· (καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει).

3) Δοθείσης γωνίας, ὡς τῆς ΒΑΓ, ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς δύο τυχόντα τμήματα ΑΔ, ΑΕ καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης δύο ἄλλα ΑΔ΄, ΑΕ΄, ἴσα πρὸς τὰ ΑΔ, ΑΕ, αἱ εὐθεῖαι ΔΕ΄ καὶ Δ΄Ε τέμνονται ἐντὸς τῆς γωνίας καὶ ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι σημεῖον τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν (ἐφαρμογὴ εἰς τὴν διχοτομίαν τῶν γωνιῶν).

4) Ἐὰν ἡ διχοτομοῦσα γωνίαν τριγώνου διχοτομῇ καὶ τὴν ἀπέναντι πλευράν, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

5) Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου, εἰς ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου, ἀχθῇ παράλληλος πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν ἡ παράλληλος αὕτη θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μερῶν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ἅτινα περιέχονται μεταξὺ τῶν παραλλήλων.

6) Ἐὰν ἐκ τριῶν κύκλων, ἕκαστος ἐφάπτηται τῶν δύο ἄλλων, αἱ εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἀφῆς ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι τῶν κύκλων τούτων τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον.

7) Αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν τριγώνου ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς, σχηματίζουσι νέον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι διπλάσιαι τῶν πρὸς αὐτὰς παραλλήλων πλευρῶν τοῦ πρώτου καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι τετραπλάσιον τοῦ πρώτου.

8) Τὰ τρία ὕψη παντὸς τριγώνου τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον· (διὰ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἀνάγεται τοῦτο εἰς τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 154, σημ. β΄).

9) Παντὸς πολυγώνου περιγεγραμμένου περὶ κύκλον, οὗ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶναι ἄρτιος, τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν περιττῆς τάξεως (πρώτης, τρίτης κτλ.), εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ἀρτίας τάξεως· ὡς πρώτη δὲ πλευρὰ δύναται νὰ ληφθῇ οἱαδήποτε πλευρὰ αὐτοῦ.

10) Παντὸς πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶναι ἄρτιος, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν περιττῆς τάξεως, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἀρτίας τάξεως· ὡς πρώτη δὲ γωνία δύναται νὰ ληφθῇ μία οἱαδήποτε γωνία αὐτοῦ.

11) Ἐὰν εἰς τὸ τυχὸν τρίγωνον, ΑΒΓ, ἐφ' ἑκάστης πλευρᾶς, κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον, $ΑΒΓ_1$, $ΒΓΑ_1$, $ΑΓΒ_1$, ἐκτὸς τούτου, καὶ ἀχθῶσιν αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι ἑκάστην κορυφὴν τοῦ τριγώνου μετὰ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι καὶ τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς ἓν σημεῖον Ο, σχηματίζουσι δὲ εἰς τὴν τομὴν αὐτῶν ἓξ γωνίας ἴσας· προσέτι δὲ εἶναι $ΟΑ + ΟΒ = ΟΓ_1$· κλπ.

12) Ἐὰν εἰς δύο περιφερείας ὑπάρχωσι δύο ἐγγεγραμμένα τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις, αἱ δύο περιφέρειαι εἶναι ἴσαι.

13) Ἐν κύκλῳ, αἱ ἴσαι χορδαὶ ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὲ τοῦ κέντρου καὶ αἱ ἄνισοι ἀπέχουσιν ἄνισον· ἡ μεγαλητέρα ὀλιγώτερον.

14) Νὰ δειχθῇ τὸ ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τοῦ ἐδ. 140, τουτέστιν ὅτι, ἐὰν τετραπλεύρου, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαί, τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

15) Ἐὰν δύο παράλληλοι τέμνωσι κύκλον, τὰ μεταξὺ αὐτῶν περιεχόμενα τόξα εἶναι ἴσα.

16) Ἐὰν τριγώνου, δύο ὕψη εἶναι ἴσα, καὶ αἱ πλευραί, ἐφ' ὧν ἵστανται κάθετα, εἶναι ἴσαι· καὶ ἀντιστρόφως.

17) Νὰ δειχθῇ, ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον, αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες συνδέουσι τὰς κορυφὰς μὲ οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ τριγώνου, ἔχουσιν ἄθροισμα μικρότερον μὲν τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου, μεγαλήτερον δὲ τοῦ ἡμίσεως τῆς περιμέτρου.

18) Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 75 ἀληθεύει καὶ περὶ παντὸς ἁπλοῦ πολυγώνου.

19) Αἱ 4 διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας παντὸς παραλληλογράμμου σχηματίζουσιν ὀρθογώνιον· αἱ 4 δὲ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας παντὸς ὀρθογωνίου σχηματίζουσι τετράγωνον, ἡ δὲ διαγώνιος τοῦ τετραγώνου τούτου εἶναι ἴση τῇ διαφορᾷ τῶν προσκειμένων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου.

20) Ἐὰν ἰσόπλευρον σχῆμα εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, θὰ εἶναι καὶ ἰσογώνιον.

21) Ἐὰν μία γωνία τριγώνου εἶναι τριπλασία ἄλλης, τὸ τρίγωνον χωρίζεται εἰς δύο τρίγωνα ἰσοσκελῆ.

22) Καὶ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον χωρίζεται εἰς δύο ἰσοσκελῆ.

23) Ἐὰν ἐκ σημείου τινὸς ἄγωνται εἰς περιφέρειαν τρεῖς εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας.

24) Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν, εἶναι ἴση τῷ ἡμίσει τῆς ὑποτεινούσης, ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία θὰ εἶναι $^1/_3$ τῆς ὀρθῆς.

25) Ἐὰν ἐν τριγώνῳ, ἀχθῶσιν ἐκ μιᾶς κορυφῆς, ἡ διχοτομοῦσα τὴν γωνίαν καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, ἡ γωνία τῶν δύο τούτων εὐθειῶν θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο γωνιῶν τῆς βάσεως.

26) Ἐὰν ἐν τραπεζίῳ, αἱ εἰς τὰ πέρατα μιᾶς τῶν παραλλήλων πλευρῶν κείμεναι γωνίαι εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι αὐτοῦ θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ ἐπίσης ἴσαι.

27) Αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες ἄγονται ἐκ δύο ἀπέναντι κορυφῶν παραλληλογράμμου εἰς τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ, τέμνουσι τὴν διαγώνιον τῶν δύο ἄλλων κορυφῶν εἰς τρία ἴσα μέρη.

28) Ἐὰν σημεῖόν τι κείμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν, διχοτομῇ μίαν τῶν δι' αὐτοῦ διερχομένων καὶ μεταξὺ τῶν παραλλήλων κειμένων εὐθειῶν, θὰ διχοτομῇ καὶ πάσας τὰς ἄλλας.

29) Ἐὰν ἡ διχοτομοῦσα τῆς ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνίας εἶναι παράλληλος τῇ βάσει, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἀντιστρόφως.

30) Ἐὰν εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἐκ τῶν περάτων τῆς βάσεως, ὑψωθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰς δύο πλευράς, αἱ κάθετοι αὗται σχηματίζουσι μετὰ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου ἕτερον ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗ αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς τοῦ πρώτου τριγώνου.

31) Ἐὰν ἐκ δύο κορυφῶν τριγώνου, ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ἐξ ἑκατέρας ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευράν, νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι ἀδύνατον νὰ διχοτομῶσιν ἀλλήλας.

32) Ἐὰν ἑξαγώνου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ τρεῖς διαγώνιοι, αἱ ἑνοῦσαι τὰς ἀπέναντι κορυφάς, θὰ διέρχωνται δι' ἑνὸς σημείου.

33) Ἐν παντὶ τριγώνῳ, ἑκάστη διάμεσος εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν εἰς αὐτὴν προσκειμένων πλευρῶν.

34) Ἐκ τῶν δύο διαγωνίων παντὸς παραλληλογράμμου, μεγαλητέρα εἶναι ἡ τὰς κορυφὰς τῶν μικροτέρων γωνιῶν αὐτοῦ ἐπιζευγνύουσα.

35) Ἐὰν γωνία τις τριγώνου εἶναι ὀξεῖα, ἡ ἐξ αὐτῆς ἐρχομένη διάμεσος ὑπερβαίνει τὸ ἥμισυ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς· ἐὰν δὲ ἡ γωνία εἶναι ἀμβλεῖα, ἡ ἐξ αὐτῆς διάμεσος εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

Β΄. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΠΡΟΣ ΕΥΡΕΣΙΝ

Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος:

1) τῶν μέσων τῶν χορῶν τοῦ δοθέντος κύκλου, αἵτινες εἶναι ἴσαι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

2) τῶν μέσων τῶν χορδῶν τοῦ δοθέντος κύκλου, αἵτινες διέρχονται διὰ τοῦ δοθέντος σημείου.

3) τοῦ μέσου εὐθείας, ἥτις κινεῖται οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα αὐτῆς νὰ μένωσιν ἐπὶ δύο εὐθειῶν, τεμνομένων πρὸς ὀρθάς.

4) τῶν ἄκρων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἐκ τῶν σημείων δοθείσης περιφερείας, ἴσαι καὶ παράλληλοι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

5) τῶν σημείων, ἐξ ὧν αἱ ἀγόμεναι δύο ἐφαπτόμεναι τοῦ δοθέντος κύκλου, εἶναι ἴσαι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἢ σχηματίζουσι δοθεῖσαν γωνίαν.

6) τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται, ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου εἰς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

7) τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἵτινες ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας.

8) τῶν κέντρων τῶν ἴσων κύκλων, οἵτινες ἐφάπτονται δοθείσης περιφερείας.

9) τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἑνοῦσι τὰ σημεῖα δύο παραλλήλων εὐθειῶν.

Γ΄. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν ἑξῆς στοιχείων αὐτοῦ·

1) Ἐκ δύο πλευρῶν καὶ ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν ἀπέναντι γωνιῶν.

2) Ἐκ δύο πλευρῶν καὶ ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

3) Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ τῆς ἀπέναντι γωνίας καὶ ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

4) Ἐκ τῶν γωνιῶν καὶ ἐκ μιᾶς τῶν εἰρημένων ἀκτίνων.

5) Ἐκ τῆς βάσεως, ἐκ τῆς ἀπέναντι γωνίας καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν (περίπτωσις, καθ' ἣν ἡ γωνία εἶναι ὀρθή).

6). Ἐκ τῶν γωνιῶν καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος δύο πλευρῶν.

7) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, οὗ ἡ διαγώνιος καὶ ἡ πλευρὰ νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

8) Νὰ κατασκευασθῇ ῥόμβος, ἔχων διαγωνίους ἴσας πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας.

9) Νὰ γραφῇ κύκλος μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ ἐφαπτόμενος δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.

ἤ, δοθείσης περιφερείας καὶ δοθείσης εὐθείας, ἤ, διερχόμενος διὰ τοῦ δοθέντος σημείου καὶ ἐφαπτόμενος τῆς δοθείσης εὐθείας.

10) Νὰ γραφῇ κύκλος, ἔχων κέντρον δοθὲν σημεῖον καὶ τέμνων τὸν δοθέντα κύκλον οὕτως, ὥστε ἡ κοινὴ αὐτῶν χορδὴ νὰ εἶναι ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

11) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τοιαύτη, ὥστε τὸ μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ἀπολαμβανόμενον μέρος αὐτῆς νὰ εἶναι ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

12) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα, τέμνουσα δύο δοθείσας οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζηται τρίγωνον ἰσοσκελές.

13) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τοιαύτη, ὥστε τὸ ἐντὸς τοῦ δοθέντος κύκλου κείμενον τμῆμα αὐτῆς νὰ εἶναι ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

14) Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα, τέμνουσα δύο δοθέντας κύκλους οὕτως, ὥστε

τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ἀπολαμβανόμενα τμήματα αὐτῆς νὰ εἶναι ἴσα πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας Α καὶ Β.

15) Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

16) Δεδομένων τῶν τριῶν σημείων, ἅτινα εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.

17) Νὰ γραφῇ περιφέρεια, διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ τέμνουσα δεδομένην περιφέρειαν οὕτως, ὥστε ἡ κοινὴ αὐτῶν χορδὴ νὰ εἶναι παράλληλος δεδομένῃ εὐθείᾳ.

18) Περὶ τὸ δοθὲν τετράπλευρον νὰ περιγραφῇ τετράγωνον.

19) Ἐπὶ δεδομένης εὐθείας, νὰ εὑρεθῇ σημεῖον, ἀπέχον ἐξ ἴσου ἀπὸ δύο δεδομένων εὐθειῶν ἢ ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων.

20) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗτινος ἡ γωνία τῆς κορυφῆς νὰ εἶναι τετραπλασία ἑκατέρας τῶν δύο γωνιῶν τῆς βάσεως.

21) Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν, εὑρεῖν σημεῖον, οὗτινος αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων νὰ εἶναι ἴσαι πρὸς δεδομένας εὐθείας· πόσα τοιαῦτα σημεῖα ὑπάρχουσιν;

22) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα, περατουμένη ὑπὸ δύο δεδομένων εὐθειῶν καὶ ἔχουσα μέσον τὸ δοθὲν σημεῖον.

23) Εἰς δοθὲν παραλληλόγραμμον, νὰ ἐγγραφῇ ῥόμβος, ἔχων μίαν τῶν κορυφῶν αὐτοῦ εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον μιᾶς πλευρᾶς τοῦ παραλληλογράμμου.

24) Ἐκ δύο δεδομένων σημείων, νὰ ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι, αἵτινες, μετὰ τῆς δοθείσης εὐθείας, νὰ σχηματίζωσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον.

25) Νὰ κατασκευασθῇ ῥόμβος ἐκ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ καὶ ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν γωνιῶν του ἢ ἐκ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαγωνίων του.

26) Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ἐκ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ καὶ ἐκ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ. (Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ἀόριστον· ἐκ τῶν αὐτῶν δεδομένων δύνανται νὰ κατασκευασθῶσιν ἄπειρα παραλληλόγραμμα).

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

172. *Κοινὸν μέτρον* δύο εὐθειῶν λέγεται εὐθεῖα, ἐξ ἧς ἐπαναλαμβανομένης ἀποτελοῦνται ἀμφότεραι.

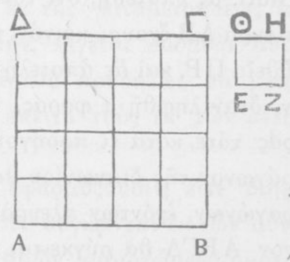
Αἱ κοινὸν μέτρον ἔχουσαι εὐθεῖαι, λέγονται *σύμμετροι* πρὸς ἀλλήλας, αἱ δὲ μὴ ἔχουσαι, *ἀσύμμετροι*· ὅτι δὲ ὑπάρχουσι τοιαῦται εὐθεῖαι, θὰ δειχθῇ ἐν τοῖς ἑπομένοις.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁμοίως ὁρίζεται τὸ κοινὸν μέτρον δύο οἱωνδήποτε ποσῶν ὁμοειδῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

173. *Ἐὰν εὐθεῖα σύγκειται ἐξ ἄλλης, ρ φορὰς λαμβανομένης, τὸ τετράγωνον αὐτῆς σύγκειται ἐκ τοῦ τετραγώνου τῆς ἄλλης, λαμβανομένου ρ.ρ φοράς·*

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ τετραπλασία τῆς ΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον αὐτῆς, τὸ ΑΒΓΔ, εἶναι 4.4, ἤτοι 16πλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΖ.



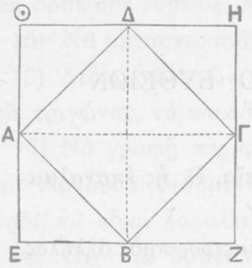
Ἂς διαιρεθῇ ἑκατέρα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΔ εἰς 4 ἴσα μέρη (ὧν ἕκαστον εἶναι ἴσον τῇ ΕΖ) καὶ ἀπὸ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας, ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ἄλλῃ· αἱ παράλληλοι αὗται θὰ διαιρέσωσι τὸ τετράγωνον εἰς 4.4, ἤτοι 16 μέρη (διότι αἱ μὲν παράλληλοι τῇ ΑΔ, διαιροῦσι πρῶτον αὐτὸ εἰς 4 ἴσα ὀρθογώνια, αἱ δὲ παράλληλοι τῇ ΑΒ, διαιροῦσιν ἔπειτα ἕκαστον τῶν ὀρθογωνίων τούτων εἰς 4), τὰ δὲ μέρη ταῦτα εἶναι τετράγωνα, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ὀρθὰς καὶ τὰς πλευρὰς πάσας ἴσας τῇ ΕΖ. Σύγκειται ἄρα τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ ἐκ 16 τετραγώνων ἴσων τῷ ΕΖΗΘ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ πάντα ἀκέραιον ἀριθμόν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

174. *Τὸ ἐπὶ τῆς διαγωνίου τετραγώνου κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι διπλάσιον αὐτοῦ.*

Ἔστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ καὶ διαγώνιοι αὐτοῦ αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ· ἐὰν ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς ΑΓ ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΒΔ καί, τἀνάπαλιν, ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς ΒΔ ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΑΓ, γίνεται τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ, ὅπερ εἶναι τετράγωνον· διότι αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ὀρθαί, ὡς ἴσαι (67) μὲ τὰς γωνίας τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ (αἵτινες εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας), καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι (111) πρὸς τὰς διαγωνίους ΑΓ,ΒΔ τοῦ τετραγώνου (αἵτινες διαγώνιοι εἶναι ἴσαι).

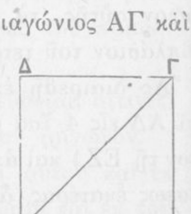


Τὸ δὲ τετράγωνον τοῦτο ἀποτελεῖται ἐξ 8 ὀρθογωνίων τριγώνων, ἴσων ἀλλήλοις (διότι αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι, μία πρὸς μίαν), καὶ ἐκ τῶν ὁποίων τέσσαρα ἀποτελοῦσι τὸ ΑΒΓΔ. Ἄρα τὸ τετράγωνον ΕΖΗΘ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΒΓΔ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

175. Ἡ διαγώνιος παντὸς τετραγώνου εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.

Διότι, ἂς ὑποτεθῇ, ὅτι τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ, ἡ διαγώνιος ΑΓ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ ἔχουσι κοινόν τι μέτρον· ἔστω δὲ τοῦτο ἡ εὐθεῖα ΠΡ, καὶ ἂς ἀποτελῇ ἡ ΠΡ, τὴν μὲν διαγώνιον, ὅταν ληφθῇ μ φοράς, τὴν δὲ πλευράν, ὅταν ν φοράς· τότε, κατά τι προηγούμενον θεώρημα, τὸ μὲν τετράγωνον τῆς διαγωνίου θὰ σύγκειται ἐκ μ.μ ἴσων τετραγώνων, ἐχόντων πλευρὰν τὴν ΠΡ, τὸ δὲ τετράγωνον ΑΒΓΔ θὰ σύγκειται ἐκ ν.ν τοιούτων τετραγώνων. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαγωνίου ΑΓ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ, ἕπεται, ὅτι ὁ ἀριθμὸς μ.μ εἶναι διπλάσιος τοῦ ν.ν, τουτέστι $\mu.\mu = 2\,\nu.\nu$, ἢ $\mu^2 = 2\nu^2$.



Ἐντεῦθεν ἕπεται $\frac{\mu^2}{\nu^2} = 2$, ἢ $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 = 2$.

Θὰ ἦτο λοιπὸν ὁ 2 τετράγωνον ἀριθμοῦ ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ (διότι οἱ ἀριθμοὶ μ καὶ ν εἶναι ἀκέραιοι)· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον (Στοιχ. Ἀλγέβρ., σελ. 120)· ὥστε συμπεραίνομεν, ὅτι *κοινὸν μέτρον τῆς πλευρᾶς τετραγώνου καὶ τῆς διαγωνίου αὐτοῦ δὲν ὑπάρχει.*

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

176. *Μέτρησις* μεγέθους λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδές, ὡρισμένον, τὸ ὁποῖον λέγεται *μονάς*. Τῆς συγκρίσεως δὲ ταύτης σκοπὸς εἶναι νὰ εὕρωμεν, πόσαι μονάδες καὶ πόσα καὶ ὁποῖα μέρη τῆς μονάδος ἀποτελοῦσι τὸ μέγεθος, ἤτοι πῶς ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ μέγεθος.

177. Τὸ μέγεθος, ὅπερ ἐλήφθη ὡς μονάς, παρίσταται διὰ τῆς μονάδος 1, τὸ δὲ μετρηθὲν μέγεθος παρίσταται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς, καθ' ὃν τρόπον ἀποτελεῖται τὸ μετρηθὲν μέγεθος ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως. Ἐάν, παραδείγματος χάριν, τὸ μετρηθὲν μέγεθος εὑρέθη ἀποτελούμενον ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τοῦ ἡμίσεως αὐτῆς καὶ ἐκ τοῦ πέμπτου αὐτῆς, ὁ παριστῶν αὐτὸ ἀριθμὸς θὰ εἶναι:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}, \text{ ἤτοι } \frac{17}{10}.$$

178. Ὁ ἐκ τῆς μετρήσεως γραμμῆς προκύπτων ἀριθμός, ὁ παριστῶν αὐτήν, λέγεται *μῆκος* αὐτῆς· ὁ δὲ ἐκ τῆς καταμετρήσεως ἐπιφανείας προκύπτων, ὁ καὶ παριστῶν αὐτήν, λέγεται *ἐμβαδὸν* αὐτῆς.

Ἀντὶ νὰ μετρήσωμεν μέγεθός τι, δυνάμεθα προδήλως νὰ μετρήσωμεν τὰ μέρη του καὶ νὰ ἀθροίσωμεν ἔπειτα τοὺς ἐκ τῶν μετρήσεων τούτων προκύπτοντας ἀριθμούς.

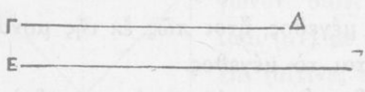
179. Τὰ ἴσα σχήματα, εἴτε ἀκέραια ἐφαρμόζουσιν, εἴτε διῃρημένα, παρίστανται ὑπὸ ἴσων ἀριθμῶν· διότι σύγκεινται ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν. Καὶ ἀντιστρόφως, τὰ ὑπὸ ἴσων ἀριθμῶν παριστώμενα ὁμοειδῆ σχήματα, εἶναι ἴσα, εἴτε ἀκέραια, εἴτε κατὰ μέρη· διότι ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν τῆς μονάδος.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

180. Ἐὰν εὐθεῖα οἱαδήποτε, ληφθῇ ὡς μονὰς καὶ παρασταθῇ διὰ τοῦ 1, αἱ μὲν σύμμετροι πρὸς τὴν μονάδα εὐθεῖαι, παρίστανται διὰ τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν (οἵτινες διὰ τοῦτο λέγονται σύμμετροι), *αἱ δὲ ἀσύμμετροι πρὸς τὴν μονάδα, παρίστανται* *δι᾽ ἀριθμῶν, οἵτινες οὔτε ἀκέραιοι εἶναι, οὔτε κλάσματα, ἀλλ᾽ ἔχουσιν ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικὰ* (οἵτινες διὰ τοῦτο λέγονται *ἀσύμμετροι).*

Ἔστω μονὰς τῶν εὐθειῶν ἡ ΑΒ καὶ τυχοῦσα εὐθεῖα, σύμμετρος πρὸς



αὐτήν, ἡ ΓΔ· ἐὰν τὸ κοινὸν αὐτῶν μέτρον περιέχηται ἐν τῇ ΑΒ τρίς, ἐν δὲ τῇ ΓΔ τετράκις, τὸ κοινὸν τοῦτο μέτρον θὰ εἶναι τὸ τρίτον τῆς μονάδος ΑΒ καὶ θ᾽ ἀποτελῆται ἡ ΓΔ ἐκ τοῦ τρίτου τῆς ΑΒ, ληφθέντος τετράκις· ἑπομένως θὰ παριστᾶται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}, \text{ ἤτοι } \frac{4}{3}.$$

Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν εὐθεῖά τις παριστᾶται ὑπὸ ἀκεραίου ἢ ὑπὸ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν μονάδα.

Διότι, ἄν τις, παραδείγματος χάριν, παριστᾶται ὑπὸ τοῦ 4, ἡ εὐθεῖα αὕτη ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος τετράκις ληφθείσης· εἶναι λοιπὸν σύμμετρος πρὸς τὴν μονάδα, καὶ κοινὸν μέτρον αὐτῶν εἶναι αὐτὴ ἡ μονάς.

Ἂν δέ τις παριστᾶται ὑπὸ τοῦ $\frac{3}{5}$, ἤτοι $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$, ἡ εὐθεῖα αὕτη ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ πέμπτου τῆς μονάδος τρὶς ληφθέντος· τὸ αὐτὸ δὲ πέμπτον τῆς μονάδος ἀποτελεῖ καὶ τὴν μονάδα πεντάκις ληφθέν· ὥστε εἶναι κοινὸν μέτρον τῆς μονάδος καὶ τῆς εὐθείας, ἥτις διὰ τοῦτο εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν μονάδα.

Ἔστω νῦν εὐθεῖα, ἀσύμμετρος πρὸς τὴν μονάδα, ἡ ΕΖ· ἵνα μετρήσωμεν αὐτήν, παραβάλλομεν αὐτὴν πρῶτον πρὸς τὴν μονάδα ΑΒ, ὅτε θὰ εὕρωμεν (κατὰ τὸ 6ον ἀξίωμα τῆς εὐθείας) ὅτι σύγκειται ἔκ τινος πολλαπλασίου αὐτῆς (ἔστω τοῦ ϱ) καὶ ἔκ τινος ὑπολοίπου Μ, μικροτέρου τῆς ΑΒ· ἔπειτα συγκρίνομεν τὸ Μ πρὸς τὸ δέκατον τῆς ΑΒ, ὅτε θὰ εὕρωμεν, ὅτι σύγκειται ἔκ τινος πολλαπλασίου τοῦ δεκάτου τούτου (μὴ ὑπερβαίνοντος τὸ 9), ἔστω τοῦ ϱ_1, καὶ ἔκ τινος ὑπολοίπου Σ, μικροτέρου τοῦ δεκάτου. Ὡσαύτως τὸ ὑπόλοιπον Σ θὰ σύγκειται ἔκ τινος πολλαπλασίου τοῦ ἑκατοστοῦ τῆς ΑΒ (τοῦ ϱ_2) καὶ ἔκ τινος ὑπολοίπου, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε θὰ σύγκειται ἡ δοθεῖσα γραμμὴ ἐκ τῆς μονάδος ΑΒ, ληφθείσης ϱ φορὰς καὶ ἐκ τοῦ δεκάτου αὐτῆς, ληφθέντος ϱ_1 φορὰς καὶ ἐκ τοῦ ἑκατοστοῦ αὐτῆς, ληφθέντος ϱ_2 φορὰς καὶ οὕτω καθεξῆς εἰς ἄπειρον· ἑπομένως θὰ παριστᾶται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ

$$\varrho + \frac{\varrho_1}{10} + \frac{\varrho_2}{100} + \ldots$$

Τὰ δεκαδικὰ ψηφία ϱ_1, ϱ_2 . . . τοῦ ἀριθμοῦ τούτου εἶναι ἄπειρα τὸ πλῆθος (τουτέστιν ὅλαι αἱ μετρήσεις ἀφίνουσιν ὑπόλοιπα), οὐδὲ ἔχουσι περίοδον· ἄλλως θὰ ἦτο ὁ ἀριθμὸς σύμμετρος, ἑπομένως καὶ ἡ ΕΖ σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ· ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀληθεύει καὶ περὶ τῶν τόξων τοῦ αὐτοῦ κύκλου, διότι καὶ ταῦτα συγκρίνονται πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ (34), ἔτι δὲ καὶ περὶ τῶν γωνιῶν· ἀποδεικνύεται δὲ ὁμοίως.

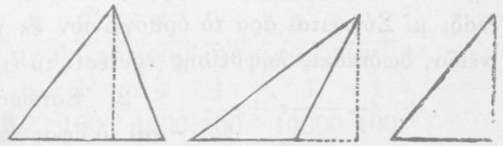
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀντὶ νὰ μετρήσωμεν τὸ ὑπόλοιπον Μ διὰ τοῦ δεκάτου τῆς μονάδος ΑΒ, δυνάμεθα νὰ δεκαπλασιάσωμεν πρῶτον αὐτὸ καὶ ἔπειτα νὰ μετρήσωμεν διὰ τῆς μονάδος ΑΒ· ὁμοίως καὶ τὰ ἄλλα ὑπόλοιπα.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

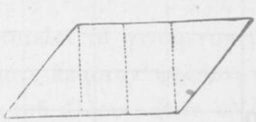
ΟΡΙΣΜΟΙ

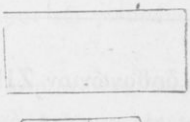
181. Ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνεται τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν μονάδα τῶν εὐθειῶν.

Βάσις τριγώνου λέγεται μία τις τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ὕψος δὲ ἡ ἐπὶ τὴν βάσιν, ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς ἠγμένη κάθετος. Δύναται δὲ ἡ κάθετος αὕτη νὰ πέσῃ εἴτε ἐπ' αὐτὴν τὴν βάσιν, εἴτε ἐπὶ τὴν προσεκβολὴν αὐτῆς.

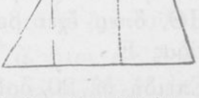


Βάσις παραλληλογράμμου λέγεται ἑκατέρα τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν, *ὕψος* δὲ τὸ ἀπόστημα τῶν πλευρῶν τούτων ἀπ' ἀλλήλων. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι, πᾶσαι αἱ μεταξὺ αὐτῶν κάθετοι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις καὶ δύναται οἱαδήποτε ἐξ αὐτῶν νὰ ληφθῇ ὡς ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου.





Ἐὰν τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον, βάσις καὶ ὕψος αὐτοῦ εἶναι (κατὰ τὸν ὁρισμὸν) δύο προσκείμεναι πλευραὶ αὐτοῦ.

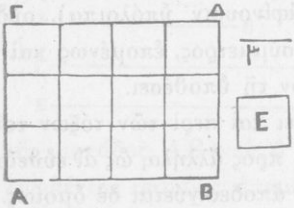


Τοῦ τραπεζίου *βάσεις* λέγονται αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ αὐτοῦ· *ὕψος* δὲ τὸ ἀπόστημα αὐτῶν ἀπ' ἀλλήλων.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΟΥ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ

ΘΕΩΡΗΜΑ

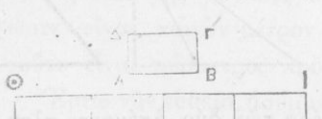
182. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ (τουτέστι τῶν παριστώντων ταῦτα ἀριθμῶν).



1) Ἔστωσαν, πρότερον, οἱ τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος παριστῶντες ἀριθμοὶ ἀμφότεροι ἀκέραιοι.

Ἂς ὑποτεθῇ, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἡ μὲν βάσις ΑΒ περιέχει τὴν μονάδα μ τῶν εὐθειῶν τετράκις, τὸ δὲ ὕψος ΑΓ περιέχει αὐτὴν τρίς· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ θὰ περιέχῃ τὴν μονάδα Ε τῶν ἐπιφανειῶν 3×4 φοράς, ἤτοι 12ἀκις, καὶ ἑπομένως ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ 12.

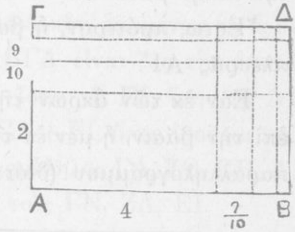
Διότι, ἂν διαιρεθῇ ἡ μὲν βάσις ΑΒ εἰς 4 μέρη, ἴσα τῇ μονάδι μ, ἡ δὲ ΑΓ εἰς 3, καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ἄλλῃ, διαιρεῖται τὸ ὀρθογώνιον εἰς 3.4, ἤτοι 12 μέρη (διότι αἱ μὲν παράλληλοι τῇ ΑΓ διαιροῦσιν αὐτὸ πρῶτον εἰς 4, αἱ δὲ παράλληλοι τῇ ΑΒ διαιροῦσιν ἔπειτα ἕκαστον τῶν τεσσάρων τούτων εἰς 3)· εἶναι δὲ τὰ μέρη ταῦτα πάντα τετράγωνα ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ὀρθὰς καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας τῇ μονάδι μ. Σύγκειται ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ἐκ τῆς μονάδος Ε τῶν ἐπιφανειῶν, δωδεκάκις ληφθείσης· τουτέστι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι 12.



2) Ἔστωσαν, δεύτερον, οἱ τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος παριστῶντες ἀριθμοὶ ἀμφότεροι σύμμετροι. Ἂς ὑποτεθῇ, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἡ μὲν βάσις ΑΒ εἶναι $\frac{5}{4}$ τῆς μονάδος μ, τὸ δὲ ὕψος ΑΔ εἶναι $\frac{3}{5}$ αὐτῆς. Ἐὰν τεθῶσι κατὰ σειρὰν 4 ὀρθογώνια, ἴσα τῷ ΑΒΓΔ, ἀποτελοῦσι τὸ ὀρθογώνιον ΖΗΡΠ, ὅπερ ἔχει βάσιν 5 καὶ ὕψος $\frac{3}{5}$· ἐὰν δὲ τεθῶσιν ἐπ' ἄλληλα 5 ὀρθογώνια ἴσα τῷ ΖΗΡΠ, ἀποτελοῦσι τὸ ὀρθογώνιον ΖΗΙΘ, ὅπερ ἔχει βάσιν 5 καὶ ὕψος 3· ἑπομένως ἔχει ἐμβαδὸν 15 μονάδας Ε.

Ἐπειδὴ δὲ 20 ὀρθογώνια ἴσα τῷ ΑΒΓΔ, ἀποτελοῦσι τὸ ὀρθογώνιον ΖΗΙΘ, ὅπερ περιέχει 15 μονάδας Ε, ἕπεται ὅτι ἕκαστον ἐξ αὐτῶν εἶναι $\frac{15}{20}$ τῆς μονάδος τῶν ἐπιφανειῶν, τουτέστι ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{15}{20}$, ἤτοι τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του $\frac{5}{4}$ ἐπὶ τὸ ὕψος του $\frac{3}{5}$.

*3) Ἔστωσαν νῦν, οἱοιδήποτε οἱ τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παριστῶντες ἀριθμοί. Ἐπειδὴ πᾶς ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα δεκαδικῶν μονάδων, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ μὲν βάσις ΑΒ εἶναι 4,7841..., τὸ δὲ ὕψος ΑΓ εἶναι 2,9189... Ἐὰν χωρίσωμεν ἐπὶ τῆς ΑΒ τὰ μέρη τῆς μονάδος μ ἐξ ὧν σύγκειται ἡ ΑΒ (τουτέστι τὰς 4 μονάδας μ, τὰ 7 δέκατα αὐτῆς, τὰ 8 ἑκατοστά, τὰ 4 χιλιοστὰ κλπ.) καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ ὡσαύτως, καὶ φέρωμεν ἔπειτα, ἐκ τῶν ἄκρων τῶν μερῶν τούτων παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, διαιρεῖται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ εἰς πλῆθος ὀρθογωνίων, ἐχόντων πλευρὰς συμμέτρους τῇ μονάδι καὶ τῶν ὁποίων τὰ ἐμβαδὰ εἶναι κατὰ σειρὰν



$$4.2+\frac{7}{10}.2+\frac{8}{100}.2+\frac{4}{1000}.2+\frac{1}{10000}.2+\dots$$

$$4.\frac{9}{10}+\frac{7}{10}.\frac{9}{10}+\frac{8}{100}.\frac{9}{10}+\frac{4}{1000}.\frac{9}{10}+\frac{1}{10000}.\frac{9}{10}+\dots$$

$$4.\frac{1}{100}+\frac{7}{10}.\frac{1}{100}+\frac{8}{100}.\frac{1}{100}+\frac{4}{1000}.\frac{1}{100}+\frac{1}{10000}.\frac{1}{100}+\dots$$

$$4.\frac{8}{1000}+\frac{7}{10}.\frac{8}{1000}+\frac{8}{100}.\frac{8}{1000}+\frac{4}{1000}.\frac{8}{1000}+\frac{1}{10000}.\frac{8}{1000}+\dots$$

. . . .

Ἀλλὰ τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν τούτων ἀποτελεῖ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν 4,7841... καὶ 2,9189..., διότι ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἑνὸς πολλαπλασιάζεται ἐφ' ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἄλλου· ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι καὶ πάλιν ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἐὰν δύο προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου παριστῶνται ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β, ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ παρίσταται ὑπὸ τοῦ γινομένου α.β.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ἡ πλευρὰ τετραγώνου παρίσταται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ α, ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ παρίσταται ὑπὸ τοῦ α.α, ἤτοι $α^2$· διὰ τοῦτο ἡ δευτέρα δύναμις ἀριθμοῦ λέγεται καὶ *τετράγωνον* αὐτοῦ.

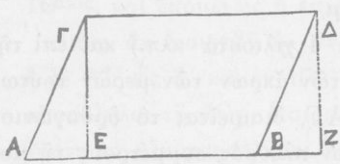
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΚΑΙ ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΙΣ ΑΥΤΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

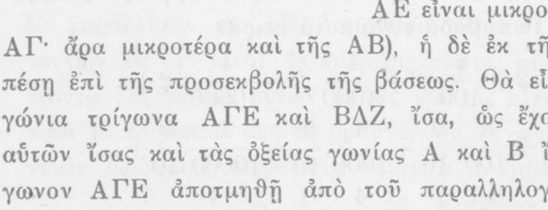
183. Πᾶν παραλληλόγραμμον εἶναι ἰσοδύναμον ὀρθογωνίῳ, ἔχοντι τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Ἔστω, πρότερον, ἡ βάσις ΑΒ, ἴση ἢ μεγαλητέρα τῆς προσκειμένης πλευρᾶς ΑΓ.

Ἐὰν ἐκ τῶν ἄκρων τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, καταβιβασθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὴν βάσιν, ἡ μὲν ἐκ τῆς ἀμβλείας γωνίας, ἡ ΓΕ, θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ παραλληλογράμμου (διότι ἡ κάθετος αὕτη θὰ κεῖται ἐν τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ Γ, ὡς σχηματίζουσα μετὰ τῆς ΓΔ ὀρθὴν γωνίαν καὶ ὁ ποῦς αὐτῆς Ε θὰ εὑρεθῇ μεταξὺ Α καὶ Β ἐπὶ τῆς ΑΒ· διότι ἐν τῷ σχηματιζομένῳ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΓΕ, ἡ πλευρὰ ΑΕ εἶναι μικροτέρα τῆς ὑποτεινούσης ΑΓ· ἄρα μικροτέρα καὶ τῆς ΑΒ), ἡ δὲ ἐκ τῆς ὀξείας Δ, ἡ ΔΖ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς βάσεως. Θὰ εἶναι δὲ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΕ καὶ ΒΔΖ, ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας αὐτῶν ἴσας καὶ τὰς ὀξείας γωνίας Α καὶ Β ἴσας. Ἀλλ' ἂν τὸ τρίγωνον ΑΓΕ ἀποτμηθῇ ἀπὸ τοῦ παραλληλογράμμου καὶ τεθῇ εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἴσου του ΒΔΖ, τὸ παραλληλόγραμμον μετασχηματίζεται εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΕΓΔΖ· ἐπομένως τὸ ὀρθογώνιον ΕΓΔΖ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἴσα τὴν ἐπιφάνειαν· ἔχει δὲ τὸ ὀρθογώνιον ΕΓΔΖ βάσιν μὲν τὴν ΕΖ, ἴσην τῇ ΓΔ, ἴσην τῇ ΑΒ, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ΓΕ.



Ἔστω ἔπειτα, ἡ βάσις ΑΒ μικροτέρα τῆς προσκειμένης πλευρᾶς ΑΓ· τότε, ἂν μὲν πίπτῃ ἡ κάθετος ΓΕ ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒ, ἰσχύουσι τὰ προειρημένα· εἰ δὲ μή, διαι-



ροῦμεν πρῶτον τὴν ΑΓ εἰς μέρη μικρότερα τῆς ΑΒ καὶ ἐκ τῶν σημείων Ε, Ζ τῆς διαιρέσεως, ἄγομεν παραλλήλους τῇ ΑΒ· τὸ παραλληλόγραμμον διαιρεῖται τότε εἰς ἄλλα, ΑΕΗΒ, ΕΗΘΖ, ΖΘΔΓ, ἔχοντα βάσεις ΕΗ, ΖΘ, ἴσας τῇ ΑΒ καὶ τὰ ὁποῖα, ὡς προηγουμένως ἐρρήθη, μετασχηματίζονται εἰς τὰ ὀρθογώνια ΕΙΗΚ, ΖΛΘΜ, ΝΡΓΔ, ἅτινα πάντα, ἔχουσι βάσεις ἴσας τῇ ΑΒ. Τὰ ὀρθογώνια ταῦτα, τιθέμενα κατὰ σειρὰν ἐπ' ἄλληλα, ἀποτελοῦσι τὸ ὀρθογώνιον ικδγ, ἑπομένως τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἴσα τὴν ἐπιφάνειαν· ἔχει δὲ τὸ ὀρθογώνιον τὴν βάσιν ικ ἴσην τῇ ΙΚ, ἴσην τῇ ΑΒ, καὶ τὸ ὕψος ιγ ἴσον τῷ ἀθροίσματι ΓΝ+ΖΛ+ΕΙ, ὅπερ ἰσοῦται πρὸς τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου· διότι αἱ παράλληλοι ΓΔ, ΖΘ, ΕΗ, ΑΒ διαιροῦσι τὸ ὕψος τοῦτο εἰς τμήματα ἴσα τοῖς ΓΝ, ΖΛ, ΕΙ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δυνάμεθα διὰ μιᾶς μόνον τομῆς νὰ μετασχηματίζωμεν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον, ἀρκεῖ νὰ λαμβάνωμεν ὡς βάσιν αὐτοῦ τὴν μεγαλητέραν τῶν πλευρῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

184. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Διότι, ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἰσοῦται τῇ ἐπιφανείᾳ ὀρθογωνίου, ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

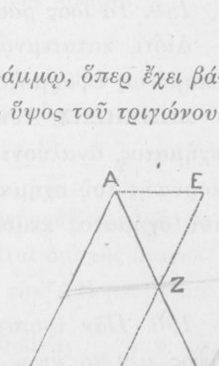
ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

185. Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμα.

Διότι, μετασχηματίζονται εἰς τὸ ὀρθογώνιον, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

186. Πᾶν τρίγωνον εἶναι ἰσοδύναμον παραλληλογράμμῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου.



Ἔστω βάσις τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ ΒΓ· ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς ΒΓ, ἂς ἀχθῇ ἡ παράλληλος τῇ ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ Α, ἡ παράλληλος τῇ ΒΓ. Οὕτω σχηματίζεται παραλληλόγραμμον, τὸ ΑΒΔΕ, ἔχον βάσιν μὲν τὴν ΒΔ, ἤτοι τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ Α κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἤτοι, τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου. Εἶναι δὲ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο ἰσοδύναμον τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ· διότι τὰ δύο τρίγωνα ΔΖΓ καὶ ΑΖΕ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΑΕ, ἴσην τῇ ΔΓ (ὡς ἴσας ἀμφοτέρας τῇ ΒΔ) καὶ τὴν γωνίαν Α ἴσην τῇ Γ (διὰ τὰς παραλλήλους ΑΕ καὶ ΒΓ), ἔτι δὲ καὶ τὴν γωνίαν Ε ἴσην τῇ Δ (δι' ὅμοιον λόγον). Ἀλλ' ἐὰν τὸ τρίγωνον ΔΖΓ ἀποτμηθῇ ἀπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τεθῇ εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἴσου του ΖΕΑ, μετασχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΔΕ· εἶναι λοιπὸν ἰσοδύναμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

187. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ ἡμίσεως τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ $\left(\frac{1}{2}\beta.\upsilon\right)$,

ἢ τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους $\left(\beta.\frac{1}{2}\upsilon\right)$,

ἢ τῷ ἡμίσει τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος $\left(\frac{1}{2}\beta.\upsilon\right)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

188. Πᾶν τρίγωνον εἶναι ἰσοδύναμον ὀρθογωνίῳ, ἔχοντι βάσιν μὲν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου.

Διότι, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΔΕ, ὅπερ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ, μετασχηματίζεται εἰς ὀρθογώνιον, ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΔ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3ον

189. Τὰ ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη ἔχοντα τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα.

Διότι, κατατεμνόμενα, μετασχηματίζονται εἰς τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον· ἑπομένως ἐφαρμόζουσιν, ἀφοῦ διαιρεθῶσιν εἰς μέρη.

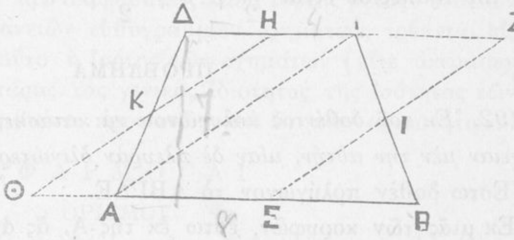
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν παντὸς εὐθυγράμμου σχήματος, ἀναλύοντες αὐτὸ εἰς τρίγωνα. Πρὸς τοῦτο, ἄγομεν ἔκ τινος κορυφῆς τοῦ σχήματος τὰς διαγωνίους αὐτοῦ, ἢ καί, ἐκ σημείου ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένου, ἄγομεν εὐθείας εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

190. Πᾶν τραπέζιον εἶναι ἰσοδύναμον παραλληλογράμμῳ, ὅπερ ἔχει ὕψος μὲν τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου, βάσιν δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο βάσεων τοῦ τραπεζίου.

Ἔστω τραπέζιον τὸ ΑΒΓΔ, ἔχον βάσεις μὲν τὰς παραλλήλους ΑΒ, ΓΔ, ὕψος δὲ τὸ ἀπόστημα αὐτῶν.

Ἡ διαγώνιος ΑΓ διαιρεῖ τὸ τραπέζιον εἰς δύο τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ, ἔχοντα βάσεις τὰς τοῦ τραπεζίου καὶ ὕψος τὸ αὐτό, τουτέστι τὸ ἀπόστημα τῶν παραλλήλων. Καὶ τὸ μὲν ΑΒΓ μετασχηματίζεται, κατὰ τὰ



προηγουμένως εἰρημένα εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΕΖΓ, τὸ δὲ ΑΓΔ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΗΘ· ἑπομένως τὸ τραπέζιον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ παραλληλογράμμῳ ΘΕΖΗ· ἔχει δὲ τοῦτο ὕψος μὲν τὸ τοῦ τραπεζίου, βάσιν δὲ τὴν ΘΕ, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσιν ἡ ΑΘ, ἥμισυ τῆς ΓΔ (διότι $ΑΘ = ΗΓ$), καὶ ἡ ΑΕ, ἥμισυ τῆς ΑΒ, τουτέστι τὰ ἡμίση ἀμφοτέρων τῶν βάσεων· ὥστε εἶναι

$$ΘΕ = \frac{1}{2}\, ΑΒ + \frac{1}{2}\, ΓΔ = \frac{1}{2}\,(ΑΒ + ΓΔ).$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ σημεῖον Ι εἶναι μέσον τῶν εὐθειῶν ΕΖ καὶ ΒΓ (ὡς συνάγεται ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΕΙΒ καὶ ΓΙΖ), τὸ δὲ Κ εἶναι μέσον τῶν εὐθειῶν ΑΔ καὶ ΘΗ· ἄρα ἡ ΕΙ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΘΚ· ἑπομένως, ἂν ἀχθῇ ἡ ΚΙ, τὸ σχῆμα ΘΚΙΕ θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἐξ οὗ ἕπεται, ὅτι *ἡ τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου συνδέουσα εὐθεῖα ΚΙ, εἶναι ἴση τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν παραλλήλων βάσεων αὐτοῦ καὶ παράλληλος αὐταῖς.*

ΠΟΡΙΣΜΑ

191. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπεζίου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ ὕψους αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ·

$$\text{ἤτοι}\quad \frac{(β + β')}{2}\,υ.$$

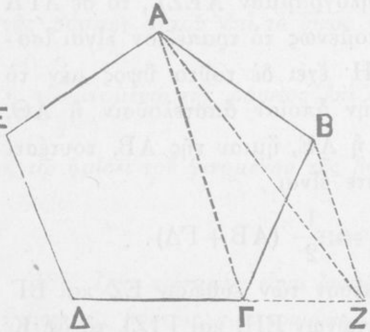
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ἀμέσως ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται διὰ τῆς διαγωνίου ΑΓ· τῷ ὄντι, τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει βάσιν τὴν ΑΒ ($= β$) καὶ ὕψος υ, τὸ τοῦ τραπεζίου· ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $\frac{1}{2}\, β\,.\,υ$· τὸ δὲ τρίγωνον ΑΓΔ ἔχει βάσιν τὴν ΓΔ ($= β'$), ὕψος δὲ τὸ τοῦ τραπεζίου υ· ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $\frac{1}{2}$ β΄.υ· ὅθεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι $\frac{1}{2}$ β.υ $+$ $\frac{1}{2}$ β΄.υ ἢ $\frac{1}{2}$ (β$+$β΄).υ·

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

192. Ἐκ τοῦ δοθέντος πολυγώνου νὰ κατασκευασθῇ ἄλλο, ἔχον ἐπιφάνειαν μὲν τὴν αὐτήν, μίαν δὲ πλευρὰν ὀλιγώτερον.

Ἔστω δοθὲν πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ.

Ἐκ μιᾶς τῶν κορυφῶν, ἔστω ἐκ τῆς Α, ἂς ἀχθῇ διαγώνιος, ὡς ἡ ΑΓ, χωρίζουσα ἀπὸ τοῦ πολυγώνου τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς Β, ἂς ἀχθῇ ἡ παράλληλος τῇ ΑΓ καὶ ἂς προσεκβληθῇ ἡ ἑτέρα τῶν εἰς τὴν ΑΓ προσκειμένων πλευρῶν (ΔΓ ἢ ΕΑ), ἔστω ἡ ΔΓ, μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν παράλληλον τῆς ΑΓ κατὰ τὸ Ζ· τέλος ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΖ.



Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΖΓ εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΓ καὶ ὕψη ἴσα· διότι αἱ κορυφαὶ αὐτῶν Β καὶ Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου τῇ βάσει ΑΓ· ὅθεν αἱ ἐξ αὐτῶν κάθετοι ἐπὶ τὴν βάσιν εἶναι ἴσαι. Καὶ ἂν μὲν τὸ σχῆμα ΑΓΔΕ προστεθῇ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, προκύπτει τὸ δοθὲν πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, ἂν δὲ τὸ αὐτὸ σχῆμα ΑΓΔΕ προστεθῇ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΖ, γίνεται τὸ σχῆμα ΑΖΔΕ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ δοθὲν πολύγωνον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ΑΖΔΕ· ἔχει δὲ τοῦτο μίαν πλευρὰν ὀλιγώτερον ἢ τὸ δοθέν, διότι ἀντὶ τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ, ἔχει τοῦτο μίαν μόνον, τὴν ΑΖ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

193. Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον (ἑπομένως καὶ ὀρθογώνιον) *ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι πολυγώνῳ.*

Ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὰ προειρημένα εἰς τὸ πολύγωνον πολλάκις, ἐλαττοῦντες ἑκάστοτε κατὰ μίαν τὰς πλευρὰς αὐτοῦ, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τρίγωνον.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

194. Ἐκ τῶν προηγουμένων πάντων συνάγεται, ὅτι αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων καταμετροῦνται καὶ παρίστανται δι' ἀριθμῶν· κατ' ἀκολουθίαν, πᾶσα ἰσότης μεταξὺ εὐθειῶν γραμμῶν ἢ μεταξὺ ἐπιφανειῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, τρέπεται εἰς ἰσότητα ἀριθμῶν· διὰ τοῦτο ἡ ἰσότης τῶν σχημάτων (εἴτε ἀκεραίων εἴτε διῃρημένων), ἔχει πάσας τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος τῶν ἀριθμῶν. Τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει προφανῶς καὶ ἐπὶ τῶν ἀνισοτήτων.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ὡς μονάδα τῶν εὐθειῶν λαμβάνομεν ἐν τοῖς ἑπομένοις τὸν βασιλικὸν πῆχυν, ἤτοι τὸ γαλλικὸν μέτρον, ὅπερ εἶναι περίπου τὸ $\frac{1}{40000000}$ τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς.

Τὸ τετράγωνον, ὅπερ ἔχει πλευρὰν ἕνα πῆχυν, λέγεται *τετραγωνικὸς πῆχυς*· τοῦτο δὲ λαμβάνομεν ὡς μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν (181).

Παλάμη λέγεται τὸ δέκατον τοῦ πήχεως· τὸ δὲ τετράγωνον τὸ ἔχον αὐτὴν πλευρὰν λέγεται *τετραγωνικὴ παλάμη*· εἶναι δὲ ἡ τετραγωνικὴ παλάμη τὸ ἑκατοστὸν τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως (173).

Δάκτυλος λέγεται τὸ ἑκατοστὸν τοῦ πήχεως· τὸ δὲ τετράγωνον τὸ ἔχον αὐτὸν πλευρὰν λέγεται *τετραγωνικὸς δάκτυλος*· εἶναι δὲ ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος τὸ δεκάκις χιλιοστὸν ἢ μυριοστὸν τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως (173).

ΖΗΤΗΜΑΤΑ

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶναι 14^{π}, τὸ δὲ ὕψος $7^{\pi},3$.

(Ἀπ. $102^{\tau\pi},2$, ἤτοι 102 τετρ. πήχεις καὶ 20 τετραγωνικαὶ παλάμαι).

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶναι $13^{\pi},8$ τὸ δὲ ὕψος $5^{\pi},17$.

(Ἀπ. $35^{\tau\pi},673$, ἤτοι 35 τετρ. πήχεις, 67 τετρ. παλάμαι καὶ 30 τετρ. δάκτυλοι).

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, ὅπερ ἔχει βάσιν $12^{\pi},5$ καὶ ὕψος $4^{\pi},7$.

(Ἀπ. $58^{\tau\pi},75$, ἤτοι 58 τετρ. πήχεις καὶ 75 τετρ. παλάμαι).

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, ὅπερ ἔχει ὕψος 8^{π}, αἱ δὲ βάσεις αὐτοῦ εἶναι ἡ μὲν $25^{\pi},2$, ἡ δὲ $9^{\pi},15$.

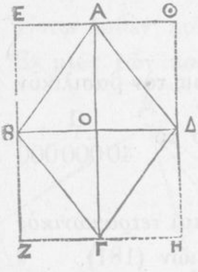
(Ἀπ. $173^{\tau\pi}$, $40^{\tau\pi\lambda}$).

5) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ὅπερ εἶναι τὸ δέκατον τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως.

('Απ. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ ἢ $\dfrac{1\sqrt{10}}{10}$, ἤτοι 0^{π}, 3162...).

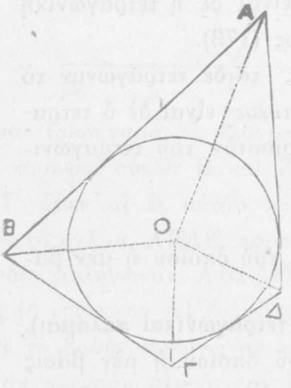
6) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου ἐκ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

Ὁ ρόμβος μετασχηματίζεται εἰς ὀρθογώνιον καὶ διὰ τῶν διαγωνίων



του· διότι διαιρεῖται ὑπ' αὐτῶν εἰς τέσσαρα ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα (ὡς ἔχοντα τὰς πλευράς των ἴσας)· ἐὰν δὲ τὰ τρίγωνα ταῦτα τεθῶσιν ὡς δεικνύει τὸ ἀπέναντι σχῆμα (τὸ ΟΔΓ εἰς τὴν θέσιν τοῦ ΕΑΒ καὶ τὸ ΟΒΓ εἰς τὴν θέσιν τοῦ ΘΑΔ), ἀποτελοῦσι τὸ ὀρθογώνιον ΒΔΘΕ, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν μίαν διαγώνιον τοῦ ρόμβου καὶ ὕψος τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης.

Ἐκ τούτου ἔπεται, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν δύο διαγωνίων του.



Ἐάν, παραδείγματος χάριν, αἱ διαγώνιοι εἶναι, ἡ μὲν μία 8^{π},15, ἡ δὲ ἄλλη 6^{π},12, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου θὰ εἶναι $24^{\tau\pi}$,939.

7) Παντὸς μὴ ἰσοπλεύρου πολυγώνου δύναται νὰ εὑρεθῇ ἄλλο ἰσοδύναμον, ἔχον τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν καὶ μικροτέραν περίμετρον.

8) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν πολυγώνου περιγεγραμμένου εἰς κύκλον, ὡς τοῦ ΑΒΓΔ.

Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου, ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, ἀναλύεται τὸ πολύγωνον (189, σημείωσις) εἰς τρίγωνα, ἔχοντα ὕψος τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου (119)· ἑπομένως τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν εἶναι (ἐὰν διὰ ρ παρασταθῇ ἡ ἀκτίς),

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{AB}.\rho,\qquad \frac{1}{2}\,\mathrm{B\Gamma}.\rho,\qquad \frac{1}{2}\,\Gamma\Delta.\rho,\qquad \frac{1}{2}\,\Delta\mathrm{A}.\rho\cdot$$

καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου εἶναι ἑπομένως,

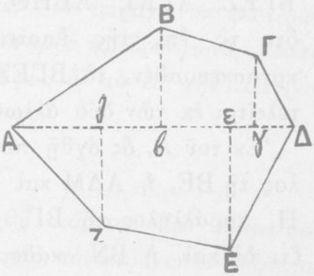
$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}.\rho+\frac{1}{2}\mathrm{B\Gamma}.\rho+\frac{1}{2}\Gamma\Delta.\rho+\frac{1}{2}\Delta\mathrm{A}.\rho,\quad \text{ἤτοι}\quad \frac{1}{2}\rho(\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\Gamma\Delta+\Delta\mathrm{A}).$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὸ *ἐμβαδὸν παντὸς πολυγώνου περιγεγραμμένου εἰς κύκλον, εἶναι γινόμενον τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου.*

Καὶ ἐπειδὴ εἰς πᾶν τρίγωνον ἐγγράφεται κύκλος (163), συνάγεται, ὅτι τὸ *ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου εἶναι γινόμενον τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγραφομένου κύκλου.*

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ., ὅτι πολύγωνόν τι εἶναι περιγεγραμμένον εἰς κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι 3π καὶ ὅτι ἔχει περίμετρον 37π, 8· τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶναι $37{,}8 \times 3 \times \frac{1}{2}$, ἤτοι 59τπ, 7.

9) Εἰς τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ ἤχθη ἡ μεγαλητέρα διαγώνιος ΑΔ καὶ ἔπειτα κάθετοι ἐπ' αὐτήν, ἐκ τῶν κορυφῶν, αἱ Ββ, Γγ, Εε, Ζζ· εὑρέθη δὲ ἐκ τῆς μετρήσεως, ὅτι εἶναι:



Αζ = 2,3 ζβ = 1,8, βε = 1,9,
εγ = 0,91, γΔ = 1,52,
Ββ = 3,75, Γγ = 2,91,
Εε = 4, Ζζ = 3,65·

ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου. (Ἀπ. 42τπ, 4664)

Ὁ τρόπος οὗτος τῆς ἀναλύσεως τῶν πολυγώνων καὶ τῆς καταμετρήσεως αὐτῶν εἶναι συνήθης εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογάς.

ΣΗΜ. Διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου εὑρίσκομεν κατὰ προσέγγισιν καὶ τὸ ἐμβαδὸν καμπυλογράμμων σχημάτων· πρὸς τοῦτο χωρίζομεν αὐτὰ διὰ παραλλήλων εὐθειῶν εἰς λωρίδας καὶ θεωροῦμεν ἑκάστην λωρίδα ὡς τραπέζιον, ἀντικαθιστῶντες ἐν ἑκάστῃ λωρίδι ἀντὶ τῆς καμπύλης, τὴν εὐθεῖαν γραμμήν, ἥτις ἑνώνει τὰ ἄκρα αὐτῆς. Ἀθροίζοντες τὰ ἐμβαδὰ τῶν τραπεζίων τούτων, θὰ ἔχωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου σχήματος, μὲ προσέγγισιν τόσῳ μεγαλητέραν, ὅσῳ στενότεραι εἶναι αἱ λωρίδες.

10) Νὰ μετρηθῇ ἡ ἀπροσπέλαστος ἐπιφάνεια ΑΒΓΔΕ.

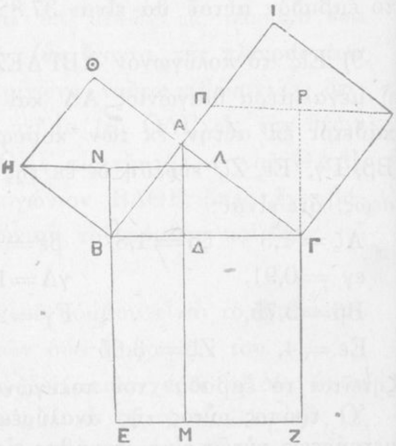
Σχηματίζομεν πέριξ αὐτῆς εὐθύγραμμόν τι σχῆμα, περιέχον αὐτήν· ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΖΗΘΙ· ἔπειτα ἐκ τῶν κορυφῶν Α, Β..., ἄγομεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου, καὶ μετροῦντες τὰς καθέτους ταύτας, ὡς καὶ τὰ τμήματα, τὰ ὁποῖα τέμνουσιν ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου, εὑρίσκομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τραπεζίων ΑΒΙβ, ΒΓβγ...· ἀφαιροῦντες τότε τὰ ἐμβαδὰ ταῦτα ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ΖΗΘΙ, θὰ εὕρωμεν προφανῶς τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ΑΒΓΔΕ.

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΝ ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΑΙ ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ ΑΥΤΟΥ

ΘΕΩΡΗΜΑ

195. Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν γωνίαν Α. Ἐὰν ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ κατασκευασθῶσι τετράγωνα, τὰ ΒΓΕΖ, ΑΓΚΙ, ΑΒΗΘ, λέγω, ὅτι τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης κατασκευασθέν, τὸ ΒΓΕΖ, ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο ἄλλων.



Ἐκ τοῦ Α, ἃς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΒΕ, ἡ ΑΔΜ καὶ ἐκ τοῦ Η, παράλληλος τῇ ΒΓ, ἡ ΗΛ, ἔτι δὲ καὶ ἡ ΒΝ, κάθετος ἐπὶ τὴν ΗΛ. Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΗΒΝ καὶ ΑΒΔ ἔχουσι τὰς ὑποτεινούσας αὐτῶν ΗΒ καὶ ΒΑ ἴσας (ὡς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου ΒΑΘΗ) καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ΗΒΝ καὶ ΑΒΔ ἴσας (ὡς ὑπόλοιπα τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΗΒΑ καὶ ΝΒΔ, ἀφ᾽ ὧν ἀφῃρέθη ἡ ΡΒΑ)· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα καὶ ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῶν συνάγεται ΒΝ = ΒΔ. Τούτου τεθέντος, τὸ τετράγωνον ΗΒΑΘ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΗΒΓΛ εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΗΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΑ· ἀλλὰ πάλιν τὸ παραλληλόγραμμον ΗΒΓΛ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΔΜΕ εἶναι ἰσοδύναμα· διότι ἔχουσι βάσεις ΒΓ, ΒΕ ἴσας (ὡς πλευρὰς τετραγώνου) καὶ ὕψη ΒΝ, ΒΔ, ἴσα, ὡς προηγουμένως ἀπεδείχθη· ἄρα τὸ τετράγωνον ΗΒΑΘ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΕΜΔ εἶναι ἰσοδύναμα.

Ὁμοίως, ἀγομένης τῆς ΚΠ, παραλλήλου τῇ ΒΓ καὶ τῆς ΓΡ καθέτου ἐπ᾽ αὐτήν, ἀποδεικνύεται ἡ ΓΡ ἴση τῇ ΓΔ, μετὰ δὲ ταῦτα, ὅτι τὸ τετράγωνον ΑΓΚΙ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ ΔΓΖΜ. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τετραγώνων ΗΒΑΘ καὶ ΑΓΚΙ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀρθογωνίων ΒΕΜΔ καὶ ΔΜΖΓ, ἤτοι τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

196. Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων τετραγώνων.

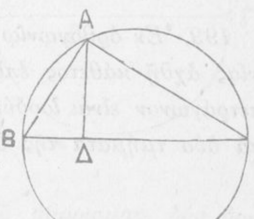
Διότι, ἂν εἰς αὐτὸ προστεθῇ τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης πλευρᾶς τῆς ὀρθῆς γωνίας, προκύπτει ἄθροισμα τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

197. Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ,, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν ὅλην τὴν ὑποτείνουσαν, ὕψος δὲ τὸ εἰς τὴν πλευρὰν ταύτην προσκείμενον μέρος τῆς ὑποτεινούσης.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3ον

198. Ἐὰν ἐκ σημείου περιφερείας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ διάμετρον αὐτῆς καὶ χορδαὶ εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου, τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν χορδῶν τούτων εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν τὴν διάμετρον, ὕψος δὲ τὸ εἰς τὴν χορδὴν ταύτην προσκείμενον τμῆμα τῆς διαμέτρου.



Διότι, ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν, μετροῦντες τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ διὰ τῆς μονάδος, δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν διὰ τῶν αὐτῶν γραμμάτων, ἐγκλειομένων εἰς παρένθεσιν, οἷον (ΑΒ), (ΒΓ), (ΓΑ)· τότε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τετραγώνων τῶν αὐτῶν γραμμῶν θὰ εἶναι $(ΑΒ)^2$, $(ΒΓ)^2$, $(ΓΑ)^2$. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον, τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα καὶ τὰ πορίσματα αὐτοῦ ἐκφράζονται διὰ τῶν ἑπομένων ἰσοτήτων:

Θεώρημα $\quad (ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$

Πόρισμα 1ον $\quad \begin{cases} (ΑΒ)^2 = (ΒΓ)^2 - (ΑΓ)^2 \\ (ΑΓ)^2 = (ΒΓ)^2 - (ΑΒ)^2 \end{cases}$

Πορίσματα 2ον καὶ 3ον $\quad \begin{cases} (ΑΒ)^2 = (ΒΓ) . (ΒΔ) \\ (ΑΓ)^2 = (ΒΓ) . (ΓΔ). \end{cases}$

Παρατηρητέον δέ, ὅτι ἐκ τῆς ἰσότητος $(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$, ἥτις συνδέει τὰς τρεῖς πλευρὰς παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, δυνάμεθα, δοθεισῶν δύο ἐξ αὐτῶν (ἤγουν τῶν μετρούντων αὐτὰς ἀριθμῶν), νὰ εὕρωμεν τὴν τρίτην· ἄν, παραδείγματος χάριν, δοθῇ $(ΑΓ) = 3$, $(ΑΒ) = 4$,

εὑρίσκομεν $(ΒΓ)^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ ὅθεν $(ΒΓ) = 5$.

Ἐὰν δὲ δοθῇ $(ΑΓ) = 12$, $(ΑΒ) = 5$

εὑρίσκομεν $(ΒΓ)^2 = 12^2 + 5^2 = 169$, ὅθεν $(ΒΓ) = 13$.

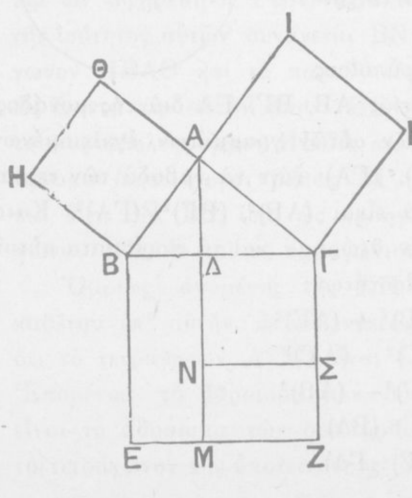
Ἐὰν δὲ δοθῇ $(ΒΓ) = 29$, $(ΑΓ) = 20$,

εὑρίσκομεν $(ΑΒ)^2 = 29^2 - 20^2 = 441$, ὅθεν $(ΑΒ) = 21$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦτο λέγουσιν ὅτι εὗρεν ὁ Πυθαγόρας (540 π. Χ.)· ἐκφράζει δὲ τοῦτο τὴν μόνην σχέσιν, δι' ἧς συνδέονται πρὸς ἀλλήλας αἱ τρεῖς πλευραὶ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν θεωρῶνται ὡς μεγέθη. Ἐπειδὴ δὲ καὶ πᾶν ἄλλο τρίγωνον ἀναλύεται εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα, ἔτι δέ, πᾶν πολύγωνον, εἰς τρίγωνα, εὐκόλως ἐννοεῖ τις τὴν μεγάλην σημασίαν τοῦ θεωρήματος τούτου ἐν ὅλῃ τῇ γεωμετρίᾳ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

199. Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, τὸ ἀπὸ τῆς καθέτου ταύτης τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὰ δύο τμήματα τῆς ὑποτεινούσης.



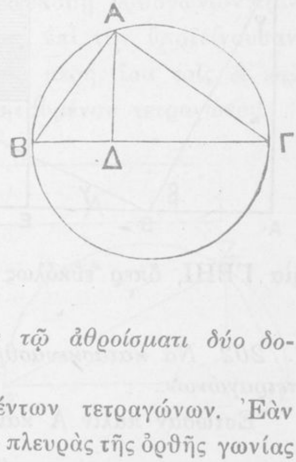
Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας Α, κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι εἶναι

$$(ΑΔ)^2 = (ΒΔ) . (ΔΓ)$$

Διότι, τοῦ τριγώνου ΑΔΓ ὄντος ὀρθογωνίου, τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς ΑΔ εἶναι διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ΑΓ καὶ ΔΓ. Καὶ τὸ μὲν τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ΑΓ εἶναι τὸ ΑΓΚΙ καί, ὡς προηγουμένως ἀπεδείχθη, μετασχηματίζεται εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΓΔΜΖ, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ΔΓ κατασκευάζομεν, λαμβάνοντες τὴν ΓΣ ἴσην τῇ ΓΔ καὶ ἄγοντες τὴν ΣΝ παράλληλον τῇ ΓΔ· ἐπομένως τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΔΓ ἔχουσι διαφορὰν τὸ ὀρθογώνιον ΝΣΖΜ· ἀλλὰ τὰ αὐτὰ τετράγωνα ἔχουσι διαφορὰν καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ. Ἐντεῦθεν συμπεραίνεται, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΝΣΖΜ ἔχουσιν ἴσα ἐμβαδὰ καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμα. Ἔχει δὲ τὸ ὀρθογώνιον ΝΣΖΜ, βάσιν μὲν τὴν ΜΖ, ἴσην τῇ ΔΓ, ὕψος δὲ τὴν ΖΣ, ἥτις ἰσοῦται τῇ ΔΒ· διότι ἀμφότεραι εἶναι ὑπόλοιπα τῶν ἴσων εὐθειῶν ΓΒ καὶ ΓΖ, ἀφ' ὧν ἀφηρέθησαν ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ΓΔ καὶ ΓΣ. Ἐδείχθη ἄρα, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς καθέτου ΑΔ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὰ δύο τμήματα ΒΔ, ΔΓ τῆς ὑποτεινούσης.

ΠΟΡΙΣΜΑ

200. Ἐὰν ἐκ σημείου περιφερείας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ διάμετρον, τὸ τετράγωνον τῆς καθέτου ταύτης θὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὰ δύο τμήματα τῆς διαμέτρου.

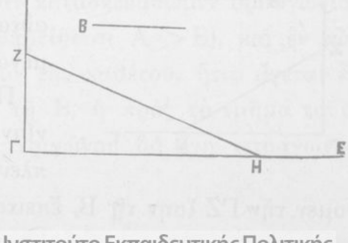


ΠΡΟΒΛΗΜΑ

201. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, ἴσον τῷ ἀθροίσματι δύο δοθέντων τετραγώνων.

Ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ πλευραὶ τῶν δοθέντων τετραγώνων. Ἐὰν κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἔχον πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας τὰς εὐθείας Α καὶ Β, ἡ ὑποτείνουσα τοῦ τριγώνου τούτου θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Πρὸς τοῦτο, κατασκευάζομεν ὀρθὴν γωνίαν, τὴν ΔΓΕ, καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς τὴν ΓΗ ἴσην τῇ Α καὶ τὴν ΓΖ ἴσην τῇ Β καὶ ἐπιζευγνύομεν τὰ σημεῖα Η καὶ Ζ διὰ τῆς ΖΗ. Ἡ ΖΗ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου



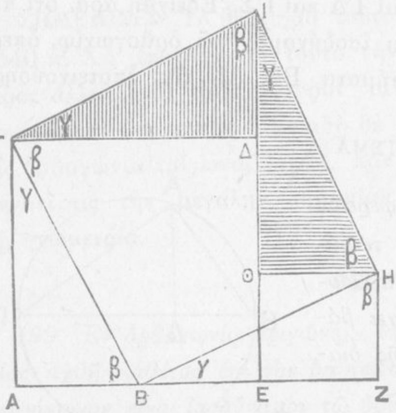
τετραγώνου· διότι εἶναι ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΖΓΗ·

$$\text{ὅθεν} \quad (ZH)^2 = (\Gamma H)^2 + (\Gamma Z)^2,$$

$$\text{ἤτοι} \quad (ZH)^2 = (A)^2 + (B)^2.$$

Ἐπαναλαμβάνοντες τὴν αὐτὴν κατασκευὴν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἴσον τῷ ἀθροίσματι ὁσωνδήποτε τετραγώνων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ζητεῖται ἐκ τῶν μερῶν τῶν δοθέντων τετραγώνων νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἰσοδύναμον αὐτοῖς τετράγωνον, δυνάμεθα, τεμαχίζοντες αὐτά, νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς ὀρθογώνια, κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος 195. Ἀλλὰ ταχύτερον ἐκτελεῖται τὸ ζητούμενον ὡς ἑξῆς.

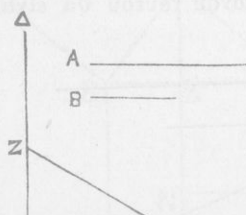


Θέτομεν τὰ δύο τετράγωνα ΑΕΔΓ καὶ ΗΖΕΘ, ὡς ἐν τῷ σχήματι δεικνύεται, καὶ λαμβάνομεν τὴν ΑΒ ἴσην τῇ ΕΖ· ἄγομεν τὰς εὐθείας ΒΓ καὶ ΒΗ καὶ ἀποτέμνομεν τὰ προκύπτοντα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΒΖΗ, τὸ ὁποῖα θέτομεν ὡς ἑξῆς· τὸ μὲν πρῶτον εἰς τὴν θέσιν ΔΙΓ (τὴν ΓΑ ἐπὶ τῆς ΓΔ), τὸ δὲ δεύτερον εἰς τὴν θέσιν ΙΗΘ (τὴν ΖΗ ἐπὶ τῆς ΘΗ)· οὕτως ἀποτελεῖται τὸ σχῆμα ΓΒΗΙ, ὅπερ εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι τετράγωνον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

202. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, ἴσον τῇ διαφορᾷ δύο δοθέντων τετραγώνων.

Ἔστωσαν πάλιν Α καὶ Β αἱ πλευραὶ τῶν δοθέντων τετραγώνων, ἔστω δὲ ἡ Α μεγαλητέρα.



Ἐὰν κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἔχον ὑποτείνουσαν τὴν Α καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην τῇ Β, ἡ τρίτη πλευρὰ αὐτοῦ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Πρὸς τοῦτο, κατασκευάζομεν ὀρθὴν γωνίαν, τὴν ΔΓΕ, καὶ ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν πλευρῶν αὐτῆς, ἔστω ἐπὶ τῆς ΓΔ, λαμβάνομεν τὴν ΓΖ ἴσην τῇ Β, ἔπειτα, μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα τὴν Α, γράφομεν περιφέρειαν· ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ συναντήσῃ τὴν πλευρὰν ΓΕ, εἴς τι σημεῖον Η (διότι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου Ζ ἀπὸ τῆς ΓΕ, τουτέστιν ἡ Β, εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος Α) καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΗ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Διότι, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΖΓΗ εὑρίσκομεν

$$(ZH)^2 = (\Gamma Z)^2 + (\Gamma H)^2,$$

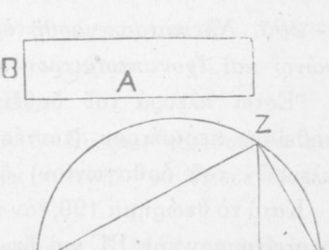
ὅθεν ἕπεται $$(\Gamma H)^2 = (ZH)^2 - (\Gamma Z)^2 \cdot$$

τουτέστιν $$(\Gamma H)^2 = (A)^2 - (B)^2.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

203. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι ὀρθογωνίῳ.

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου. Κατὰ τὸ θεώρημα 199, ἐὰν κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν κάθετος νὰ διαιρῇ τὴν ὑποτείνουσαν εἰς δύο μέρη, ἴσα τοῖς Α καὶ Β, ἡ κάθετος αὕτη θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.



Πρὸς τοῦτο, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς τυχούσης εὐθείας, τὴν ΓΔ ἴσην τῇ Α καὶ τὴν ΔΕ ἴσην τῇ Β καὶ ἐπὶ τῆς ΓΕ, γράφομεν ἡμικύκλιον· ἐκ τοῦ σημείου Δ ἄγομεν τὴν ΔΖ, κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΕ, μέχρι τῆς περιφερείας· ἡ ΔΖ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου. Διότι, ἀχθεισῶν τῶν ΓΖ καὶ ΕΖ, γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ΓΖΕ, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν

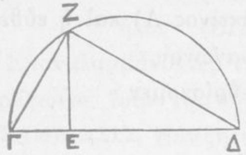
$$(Z\Delta)^2 = (\Gamma\Delta).(\Delta E),$$

ἤτοι $$(Z\Delta)^2 = (A).(B).$$

Τὸ αὐτὸ πρόβλημα δύναται νὰ λυθῇ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον.

Τῷ ὄντι, κατὰ τὸ πόρισμα 197, ἐὰν κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἔχον ὑποτείνουσαν τὴν Α (ὑποτίθεται $A > B$), καὶ ἓν τῶν τμημάτων αὐτῆς (εἰς ἃ διαιρεῖται ὑπὸ τῆς καθέτου, ἥτις ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας), ἴσον τῇ Β, ἡ πρὸς τὸ τμῆμα τοῦτο προσκειμένη πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ ἔχῃ τετράγωνον ἴσον τῷ δοθέντι ὀρθογωνίῳ.

Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν εὐθεῖαν, ἴσην τῇ Α, ἔστω τὴν ΓΔ, καὶ ἐπ' αὐτῆς, ἀπὸ τοῦ ἑτέρου τῶν ἄκρων Γ, τὴν ΓΕ, ἴσην τῇ Β· ἐπὶ τῆς ΓΔ, ὡς διαμέτρου, γράφομεν ἡμικύκλιον καὶ ἐκ τοῦ Ε ἄγομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ, μέχρι τῆς περιφερείας, τὴν ΕΖ, ἐκ δὲ τοῦ σημείου Ζ, εἰς ὃ ἡ κάθετος συναντᾷ τὴν περιφέρειαν, ἄγομεν τὰς εὐθείας ΖΓ καὶ ΖΔ· ἡ ΖΓ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.



Διότι ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΖΔ εὑρίσκομεν

$$(\Gamma Z)^2 = (\Gamma\Delta).(\Gamma E) = (A).(B).$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

204. Παντὸς εὐθυγράμμου σχήματος δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἰσοδύναμον τετράγωνον.

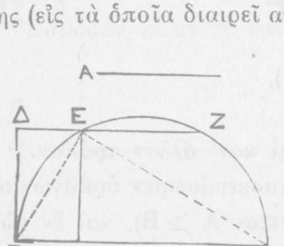
Διότι ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ὀρθογώνιον, ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι σχήματι καὶ ἔπειτα τετράγωνον, ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ τούτῳ.

* ΠΡΟΒΛΗΜΑ

205. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ καὶ ἔχον περίμετρον ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

Ἔστω πλευρὰ τοῦ δοθέντος τετραγώνου ἡ Α καὶ τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης περιμέτρου (τουτέστι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου) ἡ ΒΓ.

Κατὰ τὸ θεώρημα 199, ἐὰν κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἔχον ὑποτείνουσαν τὴν ΒΓ καὶ ὕψος ἴσον τῇ Α, τὰ δύο μέρη τῆς ὑποτεινούσης (εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖ αὐτὴν τὸ ὕψος), θὰ εἶναι αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου. Ἡ κορυφὴ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις γράφεται ἐπὶ τῆς ΒΓ, ὡς διαμέτρου, θὰ κεῖται δὲ καὶ ἐπ' εὐθείας παραλλήλου τῇ ΒΓ καὶ ἀπεχούσης ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀπόστασιν ἴσην τῇ εὐθείᾳ Α· ἄρα θὰ εἶναι τομὴ αὐτῶν.



Διὰ ταῦτα, γράφομεν ἡμικύκλιον ἐπὶ τῆς ΒΓ, ὡς διαμέτρου, καὶ ἔκ τινος σημείου τῆς ΒΓ, ἔστω ἐκ τοῦ Β, ὑψοῦμεν ἐπ' αὐτὴν κάθετον, τὴν ΒΔ, ἴσην τῇ Α, ἐκ τοῦ Δ ἄγομεν, παράλληλον τῇ ΒΓ, τὴν ΔΕΖ, καὶ ἐκ τοῦ ἑτέρου τῶν σημείων, εἰς ἃ αὕτη τέμνει τὴν περιφέρειαν, ἔστω ἐκ τοῦ Ε, ἄγομεν τὴν ΕΗ, κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ· τὰ δύο τμήματα ΒΗ καὶ ΗΓ θὰ εἶναι αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.

Διότι, τὸ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι αἱ ΒΗ, ΗΓ, θὰ ἔχῃ περίμετρον μέν, ἴσην τῇ $2.\mathrm{BH}+2.\mathrm{H\Gamma}$, ἤτοι $2.\mathrm{B\Gamma}$· ἐμβαδὸν δὲ ἴσον τῷ $(\mathrm{EH})^2$ ἢ $(\Delta\mathrm{B})^2$, ἤτοι A^2.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ. Ἵνα τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπιδέχηται λύσιν, πρέπει ἡ ἐκ τοῦ Δ ἀγομένη παράλληλος τῇ ΒΓ, νὰ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν, ἢ τοὐλάχιστον νὰ ἐφάπτηται αὐτῆς· πρέπει, δηλονότι, ἡ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἥτις ἰσοῦται τῇ ΒΔ, νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν ἀκτῖνα, ἤτοι νὰ εἶναι $\mathrm{A} \leqq \frac{1}{2}\,\mathrm{B\Gamma}$, ἐξ οὗ ἕπεται $4\mathrm{A} \leqq 2.\mathrm{B\Gamma}$.

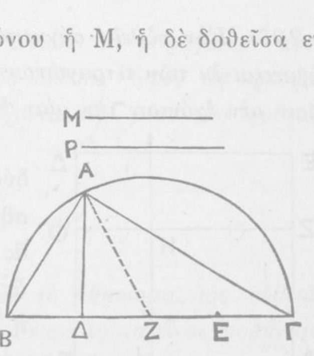
Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα λύεται μόνον, *ὅταν ἡ περίμετρος τοῦ δοθέντος τετραγώνου δὲν ὑπερβαίνῃ τὴν δοθεῖσαν περίμετρον τοῦ ὀρθογωνίου.*

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι, *ὅταν ὀρθογώνιον καὶ τετράγωνον εἶναι ἴσα τὴν ἐπιφάνειαν, ἡ περίμετρος τοῦ τετραγώνου εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ ὀρθογωνίου· ἑπομένως, ἐκ πάντων τῶν τὴν αὐτὴν περίμετρον ἐχόντων ὀρθογωνίων, μέγιστον εἶναι τὸ τετράγωνον.*

* ΠΡΟΒΛΗΜΑ

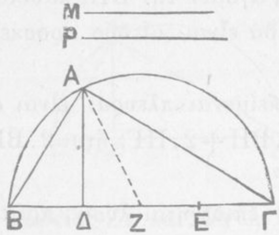
206. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ καὶ τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ νὰ ἔχωσι διαφοράν, ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

Ἔστω πλευρὰ τοῦ δοθέντος τετραγώνου ἡ Μ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ Ρ.



Κατὰ τὸ θεώρημα 199, ἐὰν κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἔχον ὕψος ἴσον τῇ εὐθείᾳ Μ καὶ ἐν τῷ ὁποίῳ τὰ δύο τμήματα τῆς ὑποτεινούσης (εἰς ἃ διαιρεῖ αὐτὴν τὸ ὕψος) νὰ ἔχωσι διαφορὰν ἴσην τῇ Ρ, τὰ τμήματα ταῦτα θὰ εἶναι αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.

Ἔστω τοιοῦτο τὸ τρίγωνον ΒΑΓ· τὰ δύο τμήματα τῆς ὑποτεινούσης, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖ αὐτὴν τὸ ὕψος ΑΔ, ἔστωσαν ΒΔ καὶ ΓΔ· ἐὰν ληφθῇ ἀπὸ τοῦ Γ, ἡ ΓΕ, ἴση τῇ ΒΔ, ἡ ΔΕ θὰ εἶναι διαφορὰ τῶν δύο τμημάτων (ἑπομένως ἴση τῇ ρ) καὶ τὸ μέσον αὐτῆς Ζ θὰ εἶναι μέσον καὶ τῆς ὑποτεινομένης ΒΓ· ἐὰν δέ, μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΖΒ ἢ τὴν ΖΓ, γραφῇ περιφέρεια κύκλου, αὕτη θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ σημείου Α, διότι ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθή· ἑπομένως θὰ εἶναι ΖΑ = ΖΒ = ΖΓ.



Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΖΔΑ δύναται νὰ κατασκευασθῇ· διότι ἔχει τὴν ΔΑ = Μ καὶ τὴν $\Delta Z = \frac{1}{2}$ Ρ, εἶναι δὲ καὶ ὀρθογώνιον· ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν τὴν ἑπομένην λύσιν.

Ἐπὶ τῆς τυχούσης εὐθείας καὶ ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου Δ αὐτῆς, ὑψοῦμεν κάθετον, τὴν ΔΑ, ἴσην τῇ εὐθείᾳ Μ, λαμβάνομεν ἔπειτα τὴν ΔΖ, ἴσην τῷ ἡμίσει τῆς δοθείσης διαφορᾶς Ρ καὶ ἄγομεν τὴν ΑΖ, ἔπειτα, μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΖΑ, γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν εὐθεῖαν ΔΖ εἰς δύο σημεῖα Β καὶ Γ· λέγω, ὅτι αἱ προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου εἶναι αἱ ΒΔ, ΔΓ· διότι εἶναι

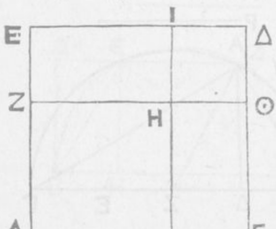
$$(B\Delta).(\Delta\Gamma) = (\Delta A)^2 = (M)^2\cdot$$

καὶ ἂν ληφθῇ ΖΕ = ΖΔ, θὰ εἶναι ἡ ΕΓ ἴση τῇ ΒΔ (ὡς ὑπόλοιπα ἴσων, τῶν ΒΖ, ΓΖ ἀπὸ ἴσων, τῶν ΔΖ, ΕΖ), ἑπομένως αἱ ΔΓ, ΔΒ διαφέρουσι κατὰ τὴν ΔΕ, ἥτις εἶναι ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Ρ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

207. *Ἐὰν εὐθεῖα σύγκειται ἐκ δύο ἄλλων, τὸ τετράγωνον αὐτῆς σύγκειται ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων καὶ ἐκ δύο ὀρθογωνίων, βάσιν μὲν ἐχόντων τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, ὕψος δὲ τὴν ἄλλην.*

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΓ, συγκειμένη ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ. Ἂς κατασκευασθῇ τετράγωνον ἐπ᾽ αὐτῆς, τὸ ΑΓΔΕ καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΕΑ, ἡ ΑΖ, ἴση τῇ ΑΒ, ἂς ἀχθῶσι δὲ ἡ ΒΙ, παράλληλος τῇ ΑΕ καὶ ἡ ΖΘ, παράλληλος τῇ ΑΓ· αἱ εὐθεῖαι αὗται διαιροῦσι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ εἰς τέσσαρα μέρη. Τὸ πρῶτον ἐκ τούτων, τὸ ΑΒΗΖ, εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ. Τὸ δὲ δεύτερον, τὸ ΗΙΔΘ, εἶναι



τετράγωνον, ἔχον πλευρὰς ἴσας τῇ ΒΓ· διότι αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι πᾶσαι ὀρθαί, αἱ δὲ προσκείμεναι πλευραὶ αὐτοῦ, ΔΘ καὶ ΔΙ, εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις· διότι ΔΘ = ΕΖ καὶ ΔΙ = ΒΓ (ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων), αἱ δὲ ΕΖ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι, ὡς ὑπόλοιπα τῶν ἴσων ΑΓ, ΑΕ, ἀφ' ὧν ἀφηρέθησαν ἴσαι, αἱ ΑΒ, ΑΖ. Τὰ δὲ λοιπὰ σχήματα ΒΓΗΘ καὶ ΖΗΙΕ εἶναι ὀρθογώνια· ἔχει δὲ τὸ μὲν ΖΗΙΕ, βάσιν τὴν ΖΗ, ἴσην τῇ ΑΒ, καὶ ὕψος τὴν ΕΖ, ἴσην τῇ ΒΓ, τὸ δὲ ΒΓΗΘ ἔχει βάσιν τὴν ΗΒ, ἴσην τῇ ΑΒ, καὶ ὕψος τὴν ΒΓ. Ἐδείχθη ἄρα τὸ θεώρημα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ διὰ τῶν ἐμβαδῶν. Ἐάν, τῷ ὄντι, παραστήσωμεν τὰ μήκη τῶν δύο γραμμῶν ΑΒ, ΒΓ διὰ α καὶ β, τὸ ἄθροισμα ΑΓ τῶν δύο γραμμῶν θὰ ἔχῃ μῆκος $\alpha+\beta$, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ θὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν $(\alpha+\beta)^2$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2,$$

ἕπεται ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ, σύγκειται ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΒ (ὅπερ ἐμβαδὸν εἶναι α^2) καὶ ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου ΒΓ (ὅπερ εἶναι β^2) καὶ ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ δύο ὀρθογωνίων, ὧν βάσις ἡ ΑΒ καὶ ὕψος ἡ ΒΓ· ἑπομένως τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ εἶναι ἄθροισμα τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΒ καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς ΒΓ καὶ τῶν δύο ὀρθογωνίων.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς ἰσότητος

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2,$$

ἀποδεικνύεται τὸ ἑπόμενον θεώρημα.

208. Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι διαφορὰ δύο ἄλλων, τὸ τετράγωνον αὐτῆς ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων, ἀφοῦ ἀφαιρεθῶσιν ἀπ' αὐτῶν, δύο ὀρθογώνια, βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν μίαν τῶν εὐθειῶν, ὕψος δὲ τὴν ἄλλην.

Ὁμοίως ἐκ τῆς ἰσότητος

$$(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2,$$

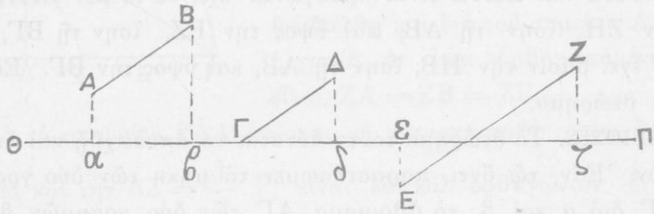
ἀποδεικνύεται τὸ ἑπόμενον θεώρημα.

209. Ἐὰν ὀρθογώνιον ἔχῃ βάσιν μὲν τὸ ἄθροισμα δύο εὐθειῶν, ὕψος δὲ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον τῇ διαφορᾷ τῶν τετραγώνων τῶν αὐτῶν εὐθειῶν.

Τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων τούτων παραλείπομεν, χάριν συντομίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ

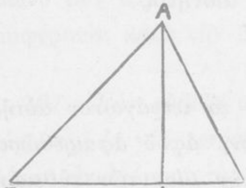
210. *Προβολὴ* εὐθείας ἐπὶ ἄλλην λέγεται, ἐὰν ἀπὸ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἄλλην, τὸ μεταξὺ τῶν ποδῶν τῶν καθέτων τούτων περιεχόμενον τμῆμα.



Οἷον, προβολὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΘΠ εἶναι ἡ αβ· τῆς ΓΔ, ἡ Γδ καὶ τῆς ΕΖ, ἡ εζ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

211. *Ἐν παντὶ τριγώνῳ, τὸ τετράγωνον πλευρᾶς, ἐχούσης ἀπέναντι ὀξεῖαν γωνίαν εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, κατὰ δύο ὀρθογώνια, ἔχοντα βάσιν μὲν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, ὕψος δὲ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ ταύτην.*



Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ πλευρά, ἀπέναντι ὀξείας γωνίας, ἡ ΑΒ, προβολὴ δὲ τῆς ΑΓ ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ΔΓ· λέγω, ὅτι θὰ εἶναι

$$(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{A\Gamma})^2 + (\mathrm{B\Gamma})^2 - 2\,(\mathrm{B\Gamma}).(\Delta\Gamma).$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ εὑρίσκομεν

$$(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{A}\Delta)^2 + (\mathrm{B}\Delta)^2\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\mathrm{B}\Delta = \mathrm{B\Gamma} - \Delta\Gamma,$

ἕπεται $(\mathrm{B}\Delta)^2 = (\mathrm{B\Gamma})^2 + (\Delta\Gamma)^2 - 2\,(\mathrm{B\Gamma}).(\Delta\Gamma)\cdot$

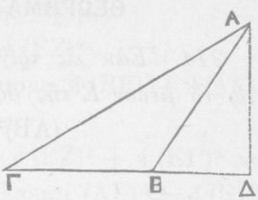
ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ $(\mathrm{B}\Delta)^2$, εἰς τὴν πρώτην ἰσότητα εὑρίσκομεν

$$(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{A}\Delta)^2 + (\mathrm{B\Gamma})^2 + (\Gamma\Delta)^2 - 2\,(\mathrm{B\Gamma}).(\Gamma\Delta)\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ $(\mathrm{A}\Delta)^2 + (\Delta\Gamma)^2$ ἰσοῦται τῷ $(\mathrm{A\Gamma})^2$ (διὰ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΓ), συμπεραίνομεν τὴν ἰσότητα

$$(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{A\Gamma})^2 + (\mathrm{B\Gamma})^2 - 2\,(\mathrm{B\Gamma}).(\Delta\Gamma).$$

'Εάν ἡ κάθετος ΑΔ πίπτῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου (ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἀμβλεῖα), θὰ εἶναι $ΒΔ = ΓΔ - ΒΓ$, κατὰ δὲ τὰ ἄλλα ἡ ἀπόδειξις μένει ἡ αὐτή.



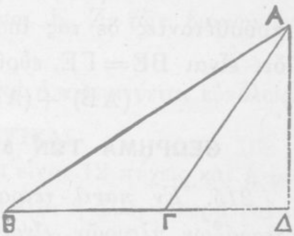
ΘΕΩΡΗΜΑ

212. *'Εν ἀμβλυγωνίῳ τριγώνῳ, τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς, ἥτις ἔχει ἀπέναντι τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, κατὰ δύο ὀρθογώνια, ἔχοντα βάσιν μὲν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, ὕψος δὲ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ ταύτην.*

Ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον, τὸ ΑΒΓ, ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν γωνίαν Γ, καὶ ΓΔ, ἡ προβολὴ τῆς ΑΓ ἐπὶ τὴν ΒΓ· λέγω, ὅτι εἶναι

$$(ΑΒ)^2=(ΑΓ)^2+(ΒΓ)^2+2(ΒΓ).(ΔΓ).$$

'Εκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ εὑρίσκομεν



$$(ΑΒ)^2=(ΑΔ)^2+(ΒΔ)^2·$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΒΔ=ΒΓ+ΓΔ$,

ἕπεται $(ΒΔ)^2=(ΒΓ)^2+(ΓΔ)^2+2(ΒΓ).(ΓΔ)$·

ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ $(ΒΔ)^2$ εἰς τὴν πρώτην ἰσότητα, εὑρίσκομεν $(ΑΒ)^2=(ΑΔ)^2+(ΒΓ)^2+(ΓΔ)^2+2(ΒΓ).(ΓΔ)$·

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $(ΑΔ)^2+(ΓΔ)^2=(ΑΓ)^2$, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται

$$(ΑΒ)^2=(ΑΓ)^2+(ΒΓ)^2+2(ΒΓ).(ΔΓ).$$ ὅ. ἔ. δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

213. *'Εὰν εἰς τρίγωνον μία πλευρὰ ἔχῃ τετράγωνον ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων, ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία εἶναι ὀρθή.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ τὰς πλευρὰς παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου συνδέουσα ἰσότης $(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2$, ἐπαληθεύεται ἐὰν λάβωμεν

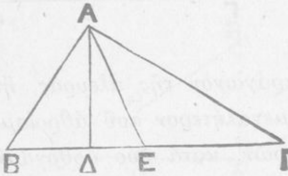
$$(ΒΓ)=α^2+β^2, \qquad (ΑΒ)=α^2-β^2, \qquad (ΑΓ)=2αβ,$$

ἔνθα α καὶ β εἶναι τυχόντες ἀκέραιοι ἀριθμοί· ἐπομένως μεταχειριζόμενοι τοὺς τύπους τούτους, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὅσα θέλωμεν ὀρθογώνια τρίγωνα, ἔχοντα πλευρὰς δι' ἀκεραίων ἀριθμῶν παριστωμένας (ἑπομένως συμμέτρους πρὸς ἀλλήλας). Τὸ ἁπλούστατον πάντων εἶναι τὸ ἔχον πλευρὰς 3, 4, 5 (ἰδὲ Στ. 'Αλγ., σελ. 179).

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

214. Ἐὰν εἰς τρίγωνον, ὡς τὸ ΑΒΓ, ἀχθῇ, ἐκ τῆς κορυφῆς Α εἰς τὸ μέσον Ε τῆς βάσεως, ἡ διάμεσος ΑΕ, θὰ εἶναι

$$(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{A\Gamma})^2=2\,(\mathrm{AE})^2+2\,(\mathrm{BE})^2.$$



Διότι, ἄγοντες τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, εὑρίσκομεν ἐκ τῶν δύο τριγώνων ΑΒΕ καὶ ΑΓΕ, κατὰ τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα:

ἐκ τοῦ ΑΒΕ (οὗ ἡ γωνία Ε εἶναι ὀξεῖα),

$$(\mathrm{AB})^2=(\mathrm{AE})^2+(\mathrm{BE})^2-2\,(\mathrm{BE})\,.\,(\Delta\mathrm{E})\cdot$$

ἐκ δὲ τοῦ ΑΓΕ (οὗ ἡ γωνία Ε εἶναι ἀμβλεῖα),

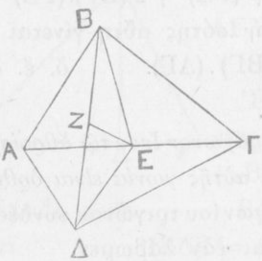
$$(\mathrm{A\Gamma})^2=(\mathrm{AE})^2+(\Gamma\mathrm{E})^2+2\,(\Gamma\mathrm{E})\,.\,(\Delta\mathrm{E})\cdot$$

προσθέτοντες δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη καὶ ἐνθυμούμενοι, ὅτι εἶναι ΒΕ = ΓΕ, εὑρίσκομεν

$$(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{A\Gamma})^2=2\,(\mathrm{AE})^2+2\,(\mathrm{BE})^2. \qquad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΩΝ ΠΑΝΤΟΣ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ

215. Ἐν παντὶ τετραπλεύρῳ, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο διαγωνίων, πλέον τετράκις τὸ τετράγωνον τῆς τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ἐπιζευγνυούσης εὐθείας.



Ἔστω τυχὸν τετράπλευρον τὸ ΑΒΓΔ καὶ διαγώνιοι αὐτοῦ, αἱ ΑΓ, ΒΔ, μέσα δὲ αὐτῶν τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ λέγω ὅτι θὰ εἶναι $(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{B\Gamma})^2+(\Gamma\Delta)^2+(\Delta\mathrm{A})^2=(\mathrm{A\Gamma})^2+(\mathrm{B}\Delta)^2+4\,(\mathrm{EZ})^2$.

Διότι, ἄγοντες τὰς εὐθείας ΒΕ, ΔΕ, εὑρίσκομεν, ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα:

$$(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{B\Gamma})^2=2\,(\mathrm{BE})^2+2\,(\mathrm{E\Gamma})^2,$$
$$(\mathrm{A}\Delta)^2+(\Delta\Gamma)^2=2\,(\Delta\mathrm{E})^2+2\,(\mathrm{E\Gamma})^2\cdot$$

καὶ προσθέτοντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{B\Gamma})^2+(\Gamma\Delta)^2+(\Delta\mathrm{A})^2=2\,(\mathrm{BE})^2+2\,(\Delta\mathrm{E})^2+4\,(\mathrm{E\Gamma})^2. \qquad (\iota)$$

Ἀλλ ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΕΔ εὑρίσκομεν πάλιν, κατὰ τὸ αὐτὸ θεώρημα,

$$(\mathrm{BE})^2+(\Delta\mathrm{E})^2=2\,(\Delta\mathrm{Z})^2+2\,(\mathrm{EZ})^2\cdot$$

καὶ διπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης, ἔχομεν

$$2\,(\text{ΒΕ})^2+2\,(\text{ΔΕ})^2=4\,(\text{ΔΖ})^2+4\,(\text{ΕΖ})^2\cdot$$

ἀντικαθιστῶντες δὲ ἐν τῇ ἰσότητι (ι), τὸ ἄθροισμα $2\,(\text{ΒΕ})^2+2\,(\text{ΔΕ})^2$, διὰ τοῦ ἴσου του $4\,(\text{ΔΖ})^2+4\,(\text{ΕΖ})^2$, εὑρίσκομεν $(\text{ΑΒ})^2+(\text{ΒΓ})^2+(\text{ΓΔ})^2+(\text{ΔΑ})^2=4\,(\text{ΔΖ})^2+4\,(\text{ΕΖ})^2+4\,(\text{ΕΓ})^2$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\text{ΑΓ}=2\,(\text{ΕΓ})$ καὶ $\text{ΒΔ}=2\,(\text{ΔΖ})$, ἕπεται $(\text{ΑΓ})^2=4\,(\text{ΕΓ})^2$ καὶ $(\text{ΒΔ})^2=4\,(\text{ΔΖ})^2\cdot$ ὅθεν ἀντικαθιστῶντες τὰ $4\,(\text{ΕΓ})^2$ καὶ $4\,(\text{ΔΖ})^2$, διὰ τῶν ἴσων των $(\text{ΑΓ})^2$ καὶ $(\text{ΒΔ})^2$, εὑρίσκομεν

$$(\text{ΑΒ})^2+(\text{ΒΓ})^2+(\text{ΓΔ})^2+(\text{ΔΑ})^2=(\text{ΑΓ})^2+(\text{ΒΔ})^2+4\,(\text{ΕΖ})^2.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

216. Ἐν παντὶ παραλληλογράμμῳ, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο διαγωνίων.

Διότι, ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ, τὰ μέσα, Ε, Ζ, τῶν διαγωνίων, συμπίπτουσιν, ἑπομένως ἡ ΕΖ μηδενίζεται.

Καὶ ἡ ἀντίστροφος πρότασις ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

1) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 12 πήχεις καὶ ἡ μία τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας 3 πήχεις· ζητεῖται ἡ ἄλλη πλευρὰ καὶ τὸ ἐμβαδόν. (Ἀπ. Ἡ πλευρὰ εἶναι $\sqrt{135}$, ἤτοι 11,61895....· τὸ ἐμβαδὸν $\frac{3}{2}\sqrt{135}$, ἤτοι 17,42842 . . . .).

2) Ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 40 πήχεις· ζητοῦνται αἱ πλέυραὶ καὶ τὸ ἐμβαδόν,

(Ἀπ. Αἱ πλευραὶ εἶναι $20\sqrt{2}$, $20\sqrt{2}$, τὸ δὲ ἐμβαδὸν 400).

3) Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὰ δύο τμήματα τῆς ὑποτεινούσης, εἰς ἃ αὔτη διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ ὕψους, εἶναι τὸ μὲν 8, τὸ δὲ ἄλλο 2 πήχεις· ζητοῦνται τὸ ὕψος, αἱ ἄλλαι πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

(Ἀπ. ὕψος 4, αἱ πλευραὶ $\sqrt{80}$ ἢ $4.\sqrt{5}$ καὶ $\sqrt{20}$ ἢ $2.\sqrt{5}$· ἐμβαδὸν 20).

4) Παραλληλογράμμου τινὸς αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι, ἡ μὲν 8 πήχεις, ἡ δὲ 3, ἡ δὲ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία εἶναι $\frac{1}{2}$ τῆς ὀρθῆς· ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. $\left(\text{Ἀπ. } 12\sqrt{2}\right)$.

5) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι 7, 7 καὶ 9 πήχεις· ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. $\left(\text{Ἀπ. } \frac{9}{4}\sqrt{115}\right)$.

6) Τριγώνου τινὸς αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι, ἡ μὲν 12 πήχεις, ἡ δὲ 8, ἡ δὲ 16· ζητοῦνται αἱ διάμεσοι τοῦ τριγώνου. ('Απ. $\sqrt{124}$, $\sqrt{184}$, $\sqrt{40}$).

7) Ὀρθογωνίου τινός, ἡ μὲν βάσις εἶναι 15π, τὸ δὲ ὕψος 4· ἐὰν κατασκευασθῇ τετράγωνον, ἔχον ἴσην περίμετρον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο, κατὰ πόσον θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου μεγαλήτερον;

('Απ. κατὰ 30ττ, 25),

8) Τραπεζίου τινὸς αἱ δύο βάσεις εἶναι, ἡ μὲν μία 100 πήχεις, ἡ δὲ ἄλλη 40, αἱ δὲ ἄλλαι πλευραὶ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἑκάστη εἶναι 50 πήχεις· ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. ('Απ. 2800ττ).

9) Ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ περίμετρος εἶναι 50 πήχεις· ζητοῦνται αἱ πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΕΠΙ ΑΡΙΘΜΟΝ

217. *Γινόμενον* μεγέθους τινὸς Α, ἐπὶ ἀριθμὸν οἱονδήποτε, λέγεται τὸ μέγεθος, τὸ συγκείμενον ἐκ τοῦ Α καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ, καθὼς σύγκειται ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς. Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον Α.3 εἶναι Α+Α+Α, τὸ δὲ

γινόμενον $A.\frac{3}{5}$ εἶναι $\frac{A}{5}+\frac{A}{5}+\frac{A}{5}$ $\left(\text{διότι } \frac{3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)$

καὶ τὸ γινόμενον Α.(2,31...) εἶναι,

$$A+A+\frac{A}{10}+\frac{A}{10}+\frac{A}{10}+\frac{A}{100}+\dots \quad \text{ἢ} \quad A.2+\frac{A}{10}.3+\frac{A}{100}+\dots$$

Παρατήρησις. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς μεγέθους ἐπὶ ἀριθμὸν ἔχει τὰς ἑξῆς γενικὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀριθμῶν:

$$M\,(\alpha+\beta)=(M.\alpha)+(M.\beta),$$
$$(M+M')\,\alpha=(M.\alpha)+(M'.\alpha)$$
$$(M.\alpha)\,\beta=M\,(\alpha.\beta).$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς εἶναι πολλαπλασιαστής, ἔπρεπε νὰ γράφωμεν Α.3, Α.5 κτλ., ἀλλ' ἐπεκράτησεν ἡ γραφὴ 3.Α, 5.Α· διότι ἐν τοῖς ἀλγεβρικοῖς λογισμοῖς προτάσσομεν τοὺς ἀριθμητικοὺς παράγοντας.

ΛΟΓΟΣ ΔΥΟ ΜΕΓΕΘΩΝ

218. *Λόγος* μεγέθους πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς (οἷον, γραμμῆς πρὸς γραμμήν, ἐπιφανείας πρὸς ἐπιφάνειαν κτλ.), λέγεται *ὁ ἀριθμός, ὅστις δεικνύει, πῶς ἀποτελεῖται τὸ μέγεθος τοῦτο ἐκ τοῦ ἄλλου καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ·* τουτέστιν, *ὁ ἀριθμός, ὅστις σύγκειται ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς, καθὼς σύγκειται τὸ πρῶτον μέγεθος ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ.*

'Εὰν π. χ., εἶναι $A = 3 . B + \frac{B}{10} + 8 . \frac{B}{100} + 2 . \frac{B}{1000} + \ldots$

ἤτοι $A = (3,182\ldots) . B$, ὁ ἀριθμὸς 3,182... λέγεται λόγος τοῦ μεγέθους Α πρὸς τὸ μέγεθος Β.

῾Ο ἐκ τῆς μετρήσεως τοῦ μεγέθους Α διὰ τῆς μονάδος του Μ προκύπτων ἀριθμός, ὁ παριστῶν αὐτό, εἶναι ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὴν μονάδα του (ἰδὲ ἐδ. 177).

Παρατήρησις. Εκ τῶν προηγουμένων γίνεται φανερόν, ὅτι ὁ λόγος τοῦ μεγέθους Α πρὸς τὸ μέγεθος Β εἶναι *ὁ ἀριθμός, ἐφ' ὃν πολλαπλασιαζόμενον τὸ Β δίδει τὸ Α.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

219. *῾Ο λόγος δύο μεγεθῶν ὁμοειδῶν ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν παριστώντων αὐτὰ ἀριθμῶν* (ὅταν μετρηθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος).

Διότι, ἔστω λόγος τοῦ μεγέθους Α πρὸς τὸ μέγεθος Β ὁ ἀριθμὸς 2,152... τότε θὰ εἶναι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ λόγου

$$A = 2B + \frac{B}{10} + \frac{5B}{100} + \frac{2B}{1000} + \ldots$$

καὶ ἂν μετρήσωμεν τὰ δύο ἴσα μεγέθη (τὰ ἀποτελοῦντα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης) διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος Μ, θὰ εὕρωμεν ἴσους ἀριθμούς· ἔστω λοιπὸν α, ὁ ἀριθμός, ὃν εὑρίσκομεν μετροῦντες τὸ μέγεθος Α καὶ β, ὁ ἀριθμός, ὃν εὑρίσκομεν μετροῦντες τὸ Β· τὸ δέκατον τοῦ Β, ἤτοι τὸ $\frac{B}{10}$, μετρηθὲν θὰ δώσῃ τὸν ἀριθμὸν $\frac{\beta}{10}$ (διότι τὸ $\frac{B}{10}$, δεκάκις ληφθὲν γίνεται Β· ἄρα καὶ ὁ ἀριθμός, ὅστις παριστᾷ αὐτό, δεκάκις ληφθείς, πρέπει νὰ γίνηται β· ἑπομένως εἶναι ὁ $\frac{\beta}{10}$) ὁμοίως τὸ $\frac{B}{100}$, μετρηθὲν δίδει τὸν ἀριθμὸν $\frac{\beta}{100}$ κτλ.· ὅθεν ἕπεται

$$\alpha = 2\beta + \frac{\beta}{10} + \frac{5\beta}{100} + \frac{2\beta}{1000} + \ldots = \beta . (2,152\ldots),$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ὁ λόγος τοῦ μεγέθους Α πρὸς τὸ μέγεθος Β ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν παριστώντων αὐτὰ ἀριθμῶν α καὶ β, ὅταν μετρηθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. 'Εὰν δύο ὀρθογώνια (ἢ παραλληλόγραμμα ἢ τρίγωνα) ἔχωσιν ἴσας βάσεις, ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ τῶν ὑψῶν αὐτῶν· ἐὰν δὲ ἔχωσιν ἴσα ὕψη, ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν βάσεών των.

Τοῦτο ἕπεται ἀμέσως ἐκ τῶν ἀριθμῶν, δι᾿ ὧν ἐκφράζονται αἱ ἐπιφάνειαι τῶν σχημάτων τούτων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν μετροῦντες τὰ μεγέθη Α καὶ Β, δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν διὰ τῶν αὐτῶν γραμμάτων, ἐγκλειομένων εἰς παρένθεσιν· οἷον (Α), (Β)· τότε ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Β παρίσταται διὰ τοῦ πηλίκου $\frac{(A)}{(B)}$ ἢ καὶ ἁπλῶς διὰ τοῦ $\frac{A}{B}$.

Ὅταν δὲ δὲν θέλωμεν νὰ ὑποθέσωμεν τὰ μεγέθη μεμετρημένα, θὰ παριστῶμεν τὸν λόγον αὐτῶν ὡς ἑξῆς: Α:Β.

ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

220. *Ἀναλογία* λέγεται ἡ ἰσότης δύο λόγων.

Οἷον $A:B = \Gamma:\Delta$, ἢ $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ εἶναι ἀναλογία.

Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν οἱ δύο ὅροι ἑκάστου λόγου πρέπει νὰ εἶναι ἢ ἀριθμοὶ ἢ μεγέθη ὁμοειδῆ (ἵνα ἔχωσι λόγον), δύνανται ὅμως οἱ δύο πρῶτοι ὅροι νὰ εἶναι ἑτεροειδεῖς πρὸς τοὺς δύο τελευταίους.

Ἐὰν τὰ τέσσαρα μεγέθη Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὁμοειδῆ, ἡ ἀναλογία $A:B = \Gamma:\Delta$ δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς $A:\Gamma = B:\Delta$.

Ἐάν, τῷ ὄντι, μετρηθῶσι τὰ μεγέθη ταῦτα διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος (οἱασδήποτε), θὰ εἶναι

$$\frac{(A)}{(B)} = \frac{(\Gamma)}{(\Delta)}.$$

Ἐὰν δὲ ἀπαλλάξωμεν τὴν ἰσότητα ταύτην ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν, εὑρίσκομεν τὴν ἑξῆς $(A).(\Delta) = (B).(\Gamma)$·
καὶ ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ γινομένου $(\Gamma).(\Delta)$, εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα $\frac{(A)}{(\Gamma)} = \frac{(B)}{(\Delta)}$

ἐξ ἧς γίνεται φανερόν, ὅτι ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Γ εἶναι ἴσος μὲ μὲ τὸν λόγον τοῦ Β πρὸς τὸ Δ· τουτέστιν $A:\Gamma = B:\Delta$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Πᾶσα ἀναλογία μεταξὺ μεγεθῶν τρέπεται εἰς ἀναλογίαν ἀριθμῶν, ἐὰν τὰ μεγέθη αὐτῆς μετρηθῶσι καὶ παρασταθῶσι δι᾿ ἀριθμῶν (ἡ μονάς, δι᾿ ἧς μετροῦμεν τοὺς ὅρους ἑκάστου λόγου, πρέπει (ἐδ. 219) νὰ εἶναι ἡ αὐτή)· διὰ τοῦτο πᾶσα ἀναλογία ὑπάγεται εἰς τὴν ἰσότητα τῶν ἀριθμῶν καὶ ἔχει τὰς γενικὰς ἰδιότητας αὐτῆς.

Ἐὰν οἱ δύο μέσοι τῆς ἀναλογίας εἶναι ἴσοι, ἡ ἀναλογία λέγεται *συνεχὴς* καὶ ὁ μέσος λέγεται *μέσος ἀνάλογος* τῶν δύο ἄκρων· οἷον, ἐν τῇ ἀναλογίᾳ $A:B = B:\Gamma$, ὁ Β λέγεται μέσος ἀνάλογος τῶν Α καὶ Γ.

221. Δύο ἢ περισσότερα μεγέθη λέγονται *ἀνάλογα* πρὸς ἄλλα ἰσάριθμα, ἐὰν προκύπτωσιν ἐξ αὐτῶν, πολλαπλασιαζομένων κατὰ σειρὰν ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· τουτέστιν, ἂν ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ πρῶτον, τοῦ δευτέρου πρὸς τὸ δεύτερον κτλ., εἶναι εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Ἂν δηλαδὴ εἶναι $A = B\varrho, A' = B'\varrho, A'' = B''\varrho$, ἢ $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} = \frac{A''}{B''}$, τότε τὰ μεγέθη A, A' A'', λέγονται ἀνάλογα πρὸς τὰ B, B', B''.

Ἐὰν τὰ μεγέθη A, A', A'', εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ B, B', B'', καὶ ἀντιστρόφως, τὰ B, B', B'' θὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ A, A', A''. Διότι, ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} = \frac{A''}{B''}$, ἕπεται: $\frac{B}{A} = \frac{B'}{A'} = \frac{B''}{A''}$.

Τὰ δύο μεγέθη, ἅτινα προκύπτουσιν ἐξ ἀλλήλων διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, λέγονται *ἀντίστοιχα* ἢ *ὁμόλογα*.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀναλόγων μεγεθῶν, εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν $A:B = \Gamma:\Delta$ ἢ $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, οἱ δύο ἡγούμενοι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς δύο ἑπομένους (ἢ οἱ ἀριθμηταὶ πρὸς τοὺς παρονομαστάς)· ἐὰν δὲ καὶ οἱ τέσσαρες ὅροι εἶναι ὁμοειδεῖς, οἱ δύο πρῶτοι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς δύο δευτέρους.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ ὅταν οἱ τέσσαρες ὅροι τῆς ἀναλογίας $A : B = \Gamma . \Delta$ δὲν εἶναι πάντες ὁμοειδεῖς, δυνάμεθα καὶ πάλιν νὰ λέγωμεν, ὅτι οἱ δύο πρῶτοι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς δύο τελευταίους· διότι οἱ ἀριθμοὶ οἱ παριστῶντες τοὺς δύο πρώτους (μετρηθέντας διὰ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μονάδος), εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμούς, οἵτινες παριστῶσι τοὺς δύο τελευταίους (μετρηθέντας καὶ τούτους διὰ μιᾶς μονάδος). Τῷ ὄντι, θὰ εἶναι $(A) : (B) = (\Gamma)\ (\Delta)$, ἐξ ἧς καὶ $(A) : (\Gamma) = (B) : (\Delta)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι A, B, Γ, Δ συνιστῶσι τὴν ἀναλογίαν $A : B = \Gamma\ \Delta$, θὰ εἶναι, κατὰ τὰ ἀνωτέρω ῥηθέντα, $(A).(\Delta) = (B).(\Gamma)$ καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $(A).(\Delta)$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, ἔχοντος βάσιν τὴν A καὶ ὕψος τὴν Δ, τὸ δὲ γινόμενον $(B).(\Gamma)$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου ἔχοντος βάσιν τὴν B καὶ ὕψος τὴν Γ, συνάγεται ἡ πρότασις:

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι Α, Β, Γ, Δ, συνιστῶσιν ἀναλογίαν, τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἄκρων εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν μέσων.

Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

Ἐὰν εἶναι $B = \Gamma$, ἐὰν δηλαδὴ ἡ B εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν A καὶ Δ, τὸ τετράγωνον τῆς B εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἄκρων A καὶ Δ. Ὥστε τὸ πρόβλημα:

«*Εὑρεῖν τὴν μέσην ἀνάλογον δύο δοθεισῶν εὐθειῶν*», ἀνάγεται εἰς τὸ ἑξῆς: «*Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι ὀρθογωνίῳ*» (ἐδ. 203).

ΠΕΡΙ ΠΟΣΩΝ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Μεταβλητὸν ποσὸν λέγεται τὸ διαφόρους τιμὰς ἢ καταστάσεις λαμβάνον.

Δύο ποσὰ λέγεται ὅτι ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων, ὅταν ἡ μεταβολὴ τοῦ ἑτέρου ἐξ αὐτῶν, προξενῇ μεταβολὴν καὶ τοῦ ἄλλου· οἷον τόξον τι κύκλου καὶ ἡ χορδὴ αὐτοῦ ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων· ὁμοίως ἡ ἐπίκεντρος γωνία ἐν κύκλῳ καὶ τὸ τόξον, ἐφ' οὗ βαίνει· ὁμοίως ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ, κτλ.

Δύο ποσὰ λέγεται, ὅτι μεταβάλλονται ἀναλόγως, ἐὰν πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, πολλαπλασιάζηται καὶ τὸ ἄλλο πάντοτε ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τουτέστιν, *ἐὰν πάντοτε αἱ νέαι τιμαὶ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς παλαιάς.*

Ἐὰν δηλαδὴ Α καὶ Β εἶναι δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν δύο ποσῶν καὶ μεταβληθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου ἀπὸ Α εἰς Α.ρ, καὶ ἡ τιμὴ τοῦ δευτέρου πρέπει νὰ μεταβληθῇ ἀπὸ Β εἰς Β.ρ· ὥστε αἱ νέαι τιμαὶ Αρ, Βρ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς παλαιὰς Α, Β.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὑποτίθεται, ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν δύο ποσῶν ἀντιστοιχοῦσι πρὸς ἀλλήλας, μία πρὸς μίαν.

Ποσόν τι δὲ λέγεται, ὅτι μεταβάλλεται *ἀναλόγως πρὸς πολλὰ ἄλλα,* ἐὰν μεταβάλληται ἀναλόγως πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν, ὅταν τὰ λοιπὰ δὲν μεταβάλλωνται. Παραδείγματος χάριν, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου μεταβάλλεται ἀναλόγως καὶ πρὸς τὴν βάσιν καὶ πρὸς τὸ ὕψος αὐτοῦ. Διότι, ὅταν ἡ βάσις μένῃ ἀμετάβλητος, τὸ ἐμβαδὸν μεταβάλλεται ἀναλόγως τοῦ ὕψους· καὶ πάλιν, ὅταν τὸ ὕψος μένῃ ἀμετάβλητον, τὸ ἐμβαδὸν μεταβάλλεται ἀναλόγως τῆς βάσεως.

ΘΕΩΡΗΜΑ

222. *Ἐὰν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως, δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ πρώτου ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ δευτέρου.*

Ἔστωσαν Α καὶ Α′ δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ πρώτου ποσοῦ καὶ Β, Β′ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ δευτέρου· λέγω, ὅτι θὰ εἶναι $\frac{(A')}{(A)}=\frac{(B')}{(B)}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Διότι, ἵνα ἡ τιμὴ Α μεταβληθῇ εἰς τὴν τιμὴν Α', ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὴν ἐπὶ τὸν λόγον Α' : Α, ὅν τινα παριστῶ διὰ ρ (ἐδ. 218, παρ.)· ἀλλὰ τότε καὶ ἡ τιμὴ Β θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ρ καὶ θὰ γίνῃ Β', τουτέστιν εἶναι

$$A' = A \cdot \rho \quad \text{καὶ} \quad B' = B \cdot \rho,$$

ἐξ ὧν συνάγεται $\dfrac{(A')}{(A)} = \dfrac{(B')}{(B)}$.

Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

* ΘΕΩΡΗΜΑ

223. Ἐὰν δύο ὁμοειδῆ ποσὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως, ὁ λόγος αὐτῶν μένει πάντοτε ὁ αὐτός.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Διότι, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ εἶναι

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B}, \quad \frac{A''}{A} = \frac{B''}{B}, \quad \frac{A'''}{A} = \frac{B'''}{B}.$$

ἐπειδὴ δὲ τὰ μεγέθη ταῦτα εἶναι ὁμοειδῆ, αἱ ἀναλογίαι αὗται γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς (ἐδ. 221):

$$\frac{A'}{B'} = \frac{A}{B}, \frac{A''}{B''} = \frac{A}{B}, \frac{A'''}{B'''} = \frac{A}{B}, \text{ τουτέστιν } \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} = \frac{A''}{B''} = \frac{A'''}{B'''}$$

ἢ καὶ $A = B \cdot \rho$, $A' = B' \cdot \rho$, $A'' = B'' \rho$, $A''' = B''' \cdot \rho$.

ρ, ὄντος τοῦ λόγου Α : Β.

Ὅτι δὲ καὶ τἀνάπαλιν ἀληθεύει, εἶναι πρόδηλον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

224. Δύο ποσὰ μεταβάλλονται ἀναλόγως, ἐὰν διπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς διπλασιάζηται καὶ τὸ ἄλλο, καὶ τριπλασιαζομένου τριπλασιάζηται, καὶ γενικῶς, ἐὰν ὁσαπλάσιον γίνῃ τὸ ἕν, τοσαπλάσιον γίνηται καὶ τὸ ἄλλο.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὑποτίθεται, ὅτι αἱ τιμαὶ αὐτῶν ἀντιστοιχοῦσι πρὸς ἀλλήλας μία πρὸς μίαν.

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν δύο ποσῶν· λέγω ὅτι ἐὰν ἡ πρώτη πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, οἷον τὸν 5,2741... καὶ ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς, ἡ Β, θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· καὶ ἑπομένως τὰ δύο ποσὰ θὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Εἰς τὴν τιμὴν Α τοῦ πρώτου ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ Β τοῦ δευτέρου· ἄρα εἰς τὴν τιμὴν 5Α τοῦ πρώτου θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ 5Β.

Εἰς τὴν τιμὴν $\dfrac{A}{10}$ τοῦ πρώτου ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $\dfrac{B}{10}$ τοῦ δευτέρου

(διότι, ὅταν δεκαπλασιασθῇ τὸ $\dfrac{A}{10}$ καὶ γίνῃ Α, πρέπει νὰ δεκαπλασιασθῇ καὶ ἡ πρὸς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ καὶ νὰ γίνῃ Β· ἡ δὲ τιμή, ἥτις δεκαπλασιαζομένη γίνεται Β, εἶναι ἡ $\frac{B}{10}$)· ἄρα εἰς τὴν τιμὴν (5,2) . Α ἤτοι $52 . \frac{A}{10}$, θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ (5,2) . Β.

Εἰς τὴν τιμὴν $\frac{A}{100}$ τοῦ πρώτου ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $\frac{B}{100}$ τοῦ δευτέρου (διότι ὅταν ἑκατονταπλασιασθῇ ἡ τιμὴ $\frac{A}{100}$ καὶ γίνῃ Α, πρέπει νὰ ἑκατονταπλασιασθῇ καὶ ἡ πρὸς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ καὶ νὰ γίνῃ Β)· ἄρα εἰς τὴν τιμὴν (5,27) . Α θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ (5,27) . Β.

Εἰς τὴν τιμὴν $\frac{A}{1000}$ τοῦ πρώτου ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $\frac{B}{1000}$ τοῦ δευτέρου· ἄρα εἰς τὴν τιμὴν (5,274) . Α θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ (5,274) . Β.

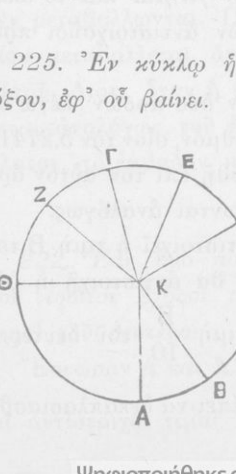
Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως, ἀποδεικνύομεν, ὅτι εἰς τὴν τιμὴν (5,2741 . .) . Α θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ τιμὴ (5,2741 . .) . Β, ἐξ οὗ γίνεται φανερόν, ὅτι τὰ δύο ποσὰ μεταβάλλονται ἀναλόγως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου εὐκολύνεται μεγάλως τὸ ζήτημα: «*νὰ διακρίνωμεν, ἂν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως ἢ ὄχι*», διότι, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι πᾶς ἀκέραιος πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἑνὸς προξενεῖ τὸν αὐτὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τοῦ ἄλλου, ἵνα ἐκ τούτου καὶ μόνου συμπεράνωμεν, ὅτι καὶ διὰ πάντα πολλαπλασιασμὸν συμβαίνει τὸ αὐτὸ καὶ ἑπομένως τὰ δύο ποσὰ μεταβάλλονται ἀναλόγως. Ἡ εὐκολία αὕτη γίνεται φανερὰ ἐκ τῶν ἑπομένων δύο θεωρημάτων.

(Χάριν συντομίας θὰ λέγωμεν, ὅτι δύο ποσὰ εἶναι *ἀνάλογα*, ἀντὶ νὰ λέγωμεν, ὅτι μεταβάλλονται ἀναλόγως).

ΘΕΩΡΗΜΑ

225. *Ἐν κύκλῳ ἡ ἐπίκεντρος γωνία μεταβάλλεται ἀναλόγως τοῦ τόξου, ἐφ᾽ οὗ βαίνει.*



Διότι, εἰς διπλάσιον τόξον ἀντιστοιχεῖ διπλασία ἐπίκεντρος γωνία, καὶ εἰς τριπλάσιον τριπλασία καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐάν, παραδείγματος χάριν, τὸ τόξον ΓΔ εἶναι διπλάσιον τοῦ τόξου ΑΒ, ἤτοι σύγκειται ἐκ δύο μερῶν ΓΕ, ΕΔ, ἴσων τῷ ΑΒ, καὶ ἡ γωνία ΓΚΔ εἶναι διπλασία τῆς ΑΚΒ, ἤτοι σύγκειται ἐκ δύο γωνιῶν, ΓΚΕ, ΕΚΔ, ἴσων πρὸς τὴν ΑΚΒ (διότι βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων).

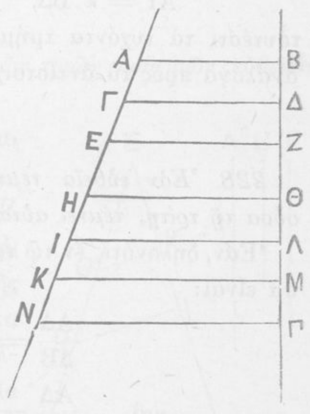
Ἐὰν δὲ τὸ τόξον ΔΖ εἶναι τριπλάσιον τοῦ ΑΒ, καὶ ἡ γωνία ΔΚΖ εἶναι τριπλασία τῆς ΑΚΒ· καὶ οὕτω καθεξῆς. Τούτου δὲ συμβαίνοντος, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἡ ἐπίκεντρος γωνία καὶ τὸ τόξον αὐτῆς μεταβάλλονται ἀναλόγως· ἑπομένως δύο τυχοῦσαι ἐπίκεντροι γωνίαι, ἔστωσαν αἱ ΑΚΒ καὶ ΒΚΔ, ἔχουσι λόγον τὸν αὐτόν, ὃν ἔχουσι καὶ τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΒΔ, ἐφ' ὧν βαίνουσι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

226. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν, τὰ ἀντίστοιχα τμήματα αὐτῶν μεταβάλλονται ἀναλόγως.

Λέγω δὲ *ἀντίστοιχα* τμήματα τὰ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων περιεχόμενα.

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι εἰς διπλάσιον τμῆμα τῆς πρώτης, ἀντιστοιχεῖ διπλάσιον τμῆμα τῆς δευτέρας καὶ εἰς τριπλάσιον, τριπλάσιον καὶ οὕτω καθεξῆς.



Ἔστω ΑΓ τυχὸν τμῆμα τῆς πρώτης καὶ ΔΒ τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ ἐν τῇ δευτέρᾳ· ἐὰν τὸ τμῆμα ΗΚ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΓ, ἤτοι σύγκειται ἐκ δύο μερῶν ΗΙ, ΙΚ, ἴσων τῷ ΑΓ, καὶ τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ, τὸ ΘΜ, θὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΒΔ· διότι, ἀχθείσης τῆς ΙΛ, παραλλήλου ταῖς ΑΒ, ΓΔ,.., ΗΘ, ΚΜ, διαιρεῖται τὸ ΘΜ εἰς δύο μέρη, ΘΛ, ΛΜ, ἅτινα εἶναι ἴσα τῷ ΒΔ (διότι εἰς ἴσα τμήματα ΑΓ, ΗΙ, ΙΚ τῆς μιᾶς ἀντιστοιχοῦσιν (148) ἴσα τῆς ἄλλης, τὰ ΒΔ, ΘΛ, ΛΜ).

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἂν τὸ τμῆμα ΗΝ εἶναι τριπλάσιον τοῦ ΑΓ καὶ τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ, τὸ ΘΠ, θὰ εἶναι τριπλάσιον τοῦ ΒΔ· καὶ οὕτω καθεξῆς διὰ πάντα ἀκέραιον ἀριθμόν.

Ἄρα τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῶν δύο εὐθειῶν μεταβάλλονται ἀναλόγως καὶ διὰ τοῦτο δύο οἱαδήποτε τμήματα τῆς πρώτης ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι καὶ τὰ ἀντιστοιχοῦντα τμήματα τῆς δευτέρας.

Παραδείγματος χάριν, εἶναι $ΑΓ : ΑΕ = ΒΔ : ΒΖ$

$$ΑΓ : ΓΕ = ΒΔ : ΔΖ$$

$$ΓΕ : ΑΕ = ΔΖ : ΒΖ$$

κτλ. κτλ. κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

227. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων, ὁσαδήποτε τμήματα τῆς μιᾶς εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης.

Διότι αἱ προηγούμεναι ἀναλογίαι δύνανται νὰ γραφῶσι καὶ ὡς ἑξῆς (ἐδ. 221):

$$\frac{ΑΓ}{ΒΔ}=\frac{ΑΕ}{ΒΖ},\quad \frac{ΑΓ}{ΒΔ}=\frac{ΓΕ}{ΔΖ},$$

$$\text{ἢ}\quad \frac{ΑΓ}{ΒΔ}=\frac{ΑΕ}{ΒΖ}=\frac{ΓΕ}{ΔΖ}\cdot$$

καὶ ἂν εἷς ἐκ τῶν λόγων τούτων παρασταθῇ διὰ τοῦ λ, θὰ εἶναι

$$ΑΓ=λ.ΒΔ,\qquad ΑΕ=λ.ΒΖ,\qquad ΓΕ=λ.ΔΖ,$$

τουτέστι τὰ τυχόντα τμήματα ΑΓ, ΑΕ, ΓΕ τῆς εὐθείας ΑΝ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης (παράβ. ἐδ. 223).

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

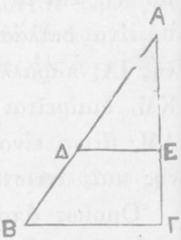
228. Ἐὰν εὐθεῖα τέμνῃ τὰς δύο πλευρὰς τριγώνου, παράλληλος οὖσα τῇ τρίτῃ, τέμνει αὐτὰς εἰς μέρη ἀνάλογα.

Ἐάν, δηλονότι, ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ, ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ, θὰ εἶναι:

$$\frac{ΑΔ}{ΔΒ}=\frac{ΑΕ}{ΕΓ}\qquad (1)$$

$$\text{καὶ}\quad \frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}\qquad (2)$$

$$\text{καὶ}\quad \frac{ΑΒ}{ΔΒ}=\frac{ΑΓ}{ΕΓ}\qquad (3)$$



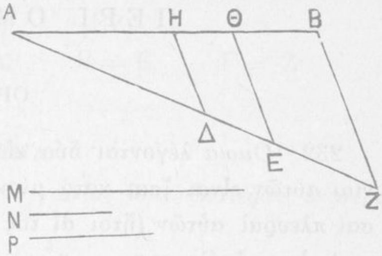
Διότι, ἡ ΒΓ καὶ ἡ ΔΕ καὶ ἡ παράλληλος αὐτῶν, ἡ ἐκ τοῦ Α ἀγομένη, τέμνουσι τὰς δύο εὐθείας ΑΒ, ΑΓ, καὶ τὰ τμήματα ΑΔ, ΔΒ, ΑΒ τῆς πρώτης εἶναι ἀντίστοιχα τῶν τμημάτων ΑΕ, ΕΓ, ΑΓ τῆς δευτέρας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

229. Νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν Μ, Ν, Ρ·

τουτέστι τοιαῦτα, ὥστε, πολλαπλασιαζόμενα ἐπί τινα ἀριθμόν, νὰ γίνωνται ἴσα πρὸς τὰς δοθείσας εὐθείας Μ, Ν, Ρ.

Ἐκ τοῦ σημείου Α ἂς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα, σχηματίζουσα γωνίαν μετὰ τῆς ΑΒ καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐπ' αὐτῆς ἡ ΑΔ ἴση τῇ Μ, ἡ ΔΕ ἴση τῇ Ν, καὶ ἡ ΕΖ ἴση τῇ Ρ· ἂς ἀχθῇ δὲ ἐκ τοῦ Ζ ἡ ΒΖ καὶ ἐκ τῶν σημείων Δ, Ε, παράλληλοι αὐτῆς, αἱ ΔΗ, ΕΘ. Αὗται διαιροῦσι τὴν ΑΒ εἰς τὰ μέρη ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, ἅτινα, κατὰ τὸ πόρισμα 227, εἶναι ἀνάλογα τῶν ΑΔ, ΔΕ, ΕΖ, ἤτοι τῶν εὐθειῶν Μ, Ν, Ρ, τουτέστιν εἶναι



$$\mathrm{M} = \lambda . \mathrm{AH}, \qquad \mathrm{N} = \lambda . \mathrm{H\Theta}, \qquad \mathrm{P} = \lambda . \mathrm{\Theta B}\cdot$$

λ ὄντος τοῦ λόγου δύο οἱωνδήποτε ἀντιστοιχούντων τμημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

230. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν Α, Β, Γ·

τουτέστιν εὐθεῖά τις Δ, τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι

$$\mathrm{A : B = \Gamma : \Delta}.$$

Ἂς σχηματισθῇ τυχοῦσα γωνία ἡ ΔΕΖ καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς ἡ ΕΗ, ἴση τῇ Α καὶ ἡ ΕΘ ἴση τῇ Β, ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης ἡ ΕΙ ἴση τῇ Γ· ἂς ἐπιζευχθῇ ἔπειτα ἡ ΗΙ καὶ ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Θ ἡ ΘΚ, παράλληλος τῇ ΗΙ· λέγω, ὅτι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα Δ εἶναι ἡ ΕΚ.

Διότι, κατὰ τὸ θεώρημα 226, εἶναι

$$\mathrm{EH : E\Theta = EI : EK}\cdot$$

τουτέστιν $\mathrm{A : B = \Gamma : EK}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

231. Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἐπὶ τὸν λόγον δύο ἄλλων.

Διότι, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὴν εὐθεῖαν Θ ἐπὶ τὸν λόγον Μ : Ν τῶν εὐθειῶν Μ καὶ Ν, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον Σ τῶν εὐθειῶν, Ν, Μ καὶ Θ· διότι ἐκ τῆς ἀναλογίας $\mathrm{N : M = \Theta : \Sigma}$, ἔπεται

$$\Sigma = \Theta . \frac{(\mathrm{M})}{(\mathrm{N})}.$$

ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

232. *Ὅμοια* λέγονται δύο εὐθύγραμμα σχήματα, ἐὰν αἱ μὲν γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν, αἱ δὲ ἀντιστοιχοῦσαι πλευραὶ αὐτῶν (ἤτοι αἱ τὰς κορυφὰς ἴσων γωνιῶν ἐπιζευγνύουσαι) εἶναι ἀνάλογοι.

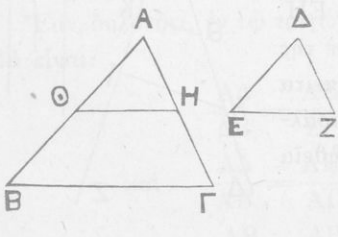
Αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πλευραὶ τῶν ὁμοίων σχημάτων λέγονται καὶ *ὁμόλογοι.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

233. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν, εἶναι ὅμοια.

Ἔστωσαν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἐν οἷς ὑποτίθεται

$$Α = Δ, \quad Β = Ε, \quad Γ = Ζ\cdot$$



λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.

Διότι, ἂν ἐφαρμοσθῇ ἡ γωνία Δ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ Α, οὕτως, ὥστε νὰ τεθῶσιν αἱ πλευραὶ αὐτῆς ἐπὶ τῶν ὁμολόγων των, τὸ τρίγωνον ΔΕΖ θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν ΑΘΗ καὶ θὰ εἶναι ἡ ΘΗ παράλληλος τῇ ΒΓ· διότι αἱ γωνίαι Β καὶ ΑΘΗ εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι τῇ αὐτῇ γωνίᾳ Ε. Ἐκ τούτου ἕπεται (228) ἡ ἰσότης

$$\frac{(ΑΒ)}{(ΑΘ)} = \frac{(ΑΓ)}{(ΑΗ)}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΘ εἶναι ἴση τῇ ΔΕ καὶ ἡ ΑΗ ἴση τῇ ΔΖ, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται

$$\frac{(ΑΒ)}{(ΔΕ)} = \frac{(ΑΓ)}{(ΔΖ)}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκεται, ἂν ἐφαρμοσθῇ ἡ γωνία Ε ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ Β,

$$\frac{(ΑΒ)}{(ΔΕ)} = \frac{(ΒΓ)}{(ΕΖ)}.$$

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι οἱ τρεῖς λόγοι τῶν ἀντιστοιχουσῶν πλευρῶν

$$\frac{(AB)}{(\Delta E)},\quad \frac{(A\Gamma)}{(\Delta Z)},\quad \frac{(B\Gamma)}{(EZ)}$$

εἶναι ἴσοι· εἶναι δὲ καὶ $A = \Delta$, $B = E$, $\Gamma = Z$· ἑπομένως τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

ΠΟΡΙΣΜΑ

234. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, εἶναι ὅμοια.

Διότι καὶ τὴν τρίτην γωνίαν ἔχουσιν ἴσην (74).

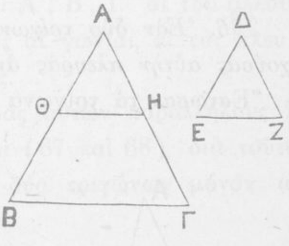
ΘΕΩΡΗΜΑ

235. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.

Ἔστωσαν ἀνάλογοι αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ· ἤτοι ἔστωσαν οἱ τρεῖς λόγοι

$$\frac{AB}{\Delta E},\quad \frac{A\Gamma}{\Delta Z},\quad \frac{B\Gamma}{EZ} \qquad (1)$$

ἴσοι· λέγω, ὅτι καὶ αἱ γωνίαι, αἱ ὑπὸ ἀναλόγων πλευρῶν περιεχόμεναι θὰ εἶναι ἴσαι, καὶ ἑπομένως τὰ τρίγωνα θὰ εἶναι ὅμοια.



Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡ ΑΘ ἴση τῇ ΔΕ καὶ ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Θ παράλληλος τῇ ΒΓ, ἡ ΘΗ· τὰ δύο τρίγωνα ΑΘΗ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια (ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν)· ἑπομένως οἱ τρεῖς λόγοι

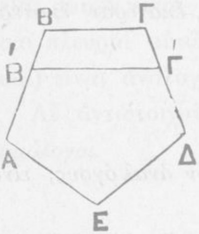
$$\frac{AB}{A\Theta},\quad \frac{A\Gamma}{AH},\quad \frac{B\Gamma}{\Theta H} \qquad (2)$$

εἶναι ἴσοι· ἐπειδὴ δὲ ἐλήφθη $A\Theta = \Delta E$, θὰ εἶναι καὶ $\dfrac{AB}{A\Theta} = \dfrac{AB}{\Delta E}$, ἄρα καὶ οἱ ἓξ λόγοι (1) καὶ (2) εἶναι ἴσοι· καὶ οἱ ἔχοντες ἀριθμητὰς ἴσους θὰ ἔχωσι καὶ τοὺς παρονομαστὰς ἴσους· ὅθεν ἕπεται $\Theta H = EZ$, καὶ $\Delta Z = AH$.

Ἀλλὰ τότε τὰ δύο τρίγωνα ΔΕΖ καὶ ΑΘΗ, ὡς ἔχοντα τὰς πλευράς των ἴσας κατὰ μίαν, εἶναι ἴσα· ὅθεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐκ τῶν δύο προηγουμένων θεωρημάτων βλέπομεν ὅτι ἐν τοῖς τριγώνοις, ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν συνεπάγεται τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν· καὶ ἀντιστρόφως, ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν, τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν συμβαίνει καὶ εἰς τὰ ἔχοντα περισσοτέρας πλευρὰς σχήματα.

Διότι, παραδείγματος χάριν, ὀρθογώνιον καὶ τετράγωνον ἔχουσιν ἴσας



τὰς γωνίας αὐτῶν, οὐχὶ δὲ καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους. Ὁμοίως, ῥόμβος καὶ τετράγωνον ἔχουσι τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, ἀλλὰ τὰς γωνίας ἀνίσους. Ὁμοίως, ἐὰν ἐν τῷ τυχόντι πολυγώνῳ ΑΒΓΔΕ ἀχθῇ ἔκ τινος σημείου τῆς ΑΒ, παράλληλος τῇ ΒΓ, ἡ Β′Γ′, τὰ δύο σχήματα ΑΒΓΔΕ καὶ ΑΒ′Γ′ΔΕ ἔχουσι τὰς γωνίας των ἴσας κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν· ἀλλ᾽ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πλευραὶ αὐτῶν δὲν εἶναι ἀνάλογοι· διότι ἡ μὲν ΑΕ τοῦ πρώτου ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν ἴσην της ΑΕ τοῦ δευτέρου, ἡ δὲ ΑΒ τοῦ πρώτου ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν ΑΒ′, ἄνισον πρὸς αὐτήν.

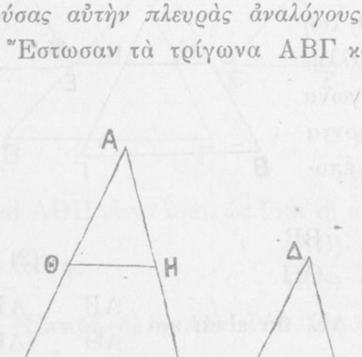
ΘΕΩΡΗΜΑ

236. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἔχοντα

$$Α = Δ$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{ΔΕ}{ΑΒ} = \frac{ΔΖ}{ΑΓ}. \qquad (1)$$



λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.

Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡ ΑΘ, ἴση τῇ ΔΕ καὶ ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Θ ἡ ΘΗ, παράλληλος τῇ ΒΓ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΘΗ εἶναι ὅμοια καὶ διὰ τοῦτο εἶναι

$$\frac{ΑΘ}{ΑΒ} = \frac{ΑΗ}{ΑΓ}. \qquad (2)$$

καὶ ἐπειδὴ ἐλήφθη $ΑΘ = ΔΕ$, εἶναι καὶ $\dfrac{ΑΘ}{ΑΒ} = \dfrac{ΕΔ}{ΑΒ}$.

ἄρα ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) προκύπτει

$$\frac{ΔΖ}{ΑΓ} = \frac{ΑΗ}{ΑΓ}. \qquad \text{ὅθεν} \quad ΔΖ = ΑΗ.$$

Ἀλλὰ τότε τὰ δύο τρίγωνα ΑΘΗ καὶ ΔΕΖ, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην ($Α = Δ$) καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἴσας, εἶναι ἴσα ὅθεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια.

ΠΟΡΙΣΜΑ

237. Ἐὰν εὐθεῖα, ὡς ἡ ΘΗ, τέμνῃ τὰς πλευρὰς τριγώνου εἰς μέρη ἀνάλογα, ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ εἶναι παράλληλος τῇ βάσει τοῦ τριγώνου.

Διότι, τὸ ὑπὸ τῆς τεμνούσης χωριζόμενον τρίγωνον εἶναι ὅμοιον τῷ ὅλῳ τριγώνῳ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

238. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἀνὰ δύο ἢ καθέτους ἀνὰ δύο, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια καὶ ὁμόλογοι πλευραὶ θὰ εἶναι αἱ παράλληλοι ἢ αἱ κάθετοι.

Ἔστωσαν Α, Β, Γ, αἱ γωνίαι τοῦ ἑνὸς καὶ Α′, Β′, Γ′ αἱ τοῦ ἄλλου, ἃς σημειωθῶσι δὲ διὰ τοῦ αὐτοῦ γράμματος αἱ γωνίαι, αἱ τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἔχουσαι ἢ καθέτους.

Ἐπειδὴ δύο γωνίαι, ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἢ καθέτους, εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικαὶ (67 καὶ 68), διὰ τοῦτο δύνανται νὰ γίνωσι περὶ τῶν γωνιῶν τῶν δύο τριγώνων μόνον αἱ ἑξῆς τρεῖς ὑποθέσεις:

ἢ 1) $Α + Α' = 2^{ὀρθ.}$ $\quad Β + Β' = 2^{ὀρθ.}$ $\quad Γ + Γ' = 2^{ὀρθ.}$

ἢ 2) $Α = Α'$ $\quad Β + Β' = 2^{ὀρθ.}$ $\quad Γ + Γ' = 2^{ὀρθ.}$

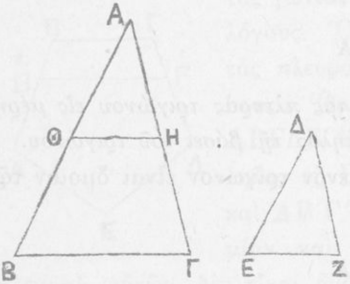
ἢ 3) $Α = Α'$ $\quad Β = Β'$· ἄρα (74) καὶ $Γ = Γ'$.

Ἀλλ' ἂν τὸ πρῶτον συνέβαινε, τὸ ἄθροισμα τῶν ἓξ γωνιῶν τῶν δύο τριγώνων θὰ ἦτο ἓξ ὀρθαί· ὅπερ ἀδύνατον· ἂν δὲ τὸ δεύτερον συνέβαινε, τὸ αὐτὸ ἄθροισμα θὰ ἦτο μεγαλήτερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν, ὅπερ καὶ τοῦτο ἀδύνατον. Ἄρα μόνη ἡ τρίτη ὑπόθεσις ἀληθεύει· ἤτοι τὰ τρίγωνα ἔχουσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν· ἄρα εἶναι ὅμοια.

*ΘΕΩΡΗΜΑ

239. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην μιᾷ γωνίᾳ, τὰς δὲ πλευρὰς, τὰς περιεχούσας δύο ἄλλας γωνίας, ἀναλόγους, ἢ τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια, ἢ αἱ λοιπαὶ δύο γωνίαι αὐτῶν εἶναι παραπληρωματικαί.

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἔχοντα:



$$\text{Α} = \text{Δ} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\text{ΕΔ}}{\text{ΒΑ}} = \frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΒΓ}}. \qquad (1)$$

λέγω, ὅτι ἢ εἶναι τὰ τρίγωνα ταῦτα ὅμοια ἢ εἶναι

$$\text{Γ} + \text{Ζ} = 2^{\text{ὀρθ}}.$$

Ἄς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡ ΑΘ ἴση τῇ ΔΕ καὶ ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Θ ἡ ΘΗ, παράλληλος τῇ ΒΓ· τὰ δύο τρίγωνα ΑΘΗ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια, καὶ διὰ ταῦτα εἶναι

$$\frac{\text{ΑΘ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΘΗ}}{\text{ΒΓ}}. \qquad (2)$$

καὶ ἐπειδὴ ἐλήφθη ΑΘ = ΔΕ, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\text{ΑΘ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΑΒ}}$· ἄρα ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγεται: $\frac{\text{ΘΗ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΒΓ}}$, ὅθεν καὶ ΘΗ = ΕΖ.

Ἀλλὰ τότε τὰ δύο τρίγωνα ΑΘΗ καὶ ΔΕΖ ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην Α = Δ, καὶ δύο πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ (ΑΘ = ΔΕ καὶ ΘΗ = ΕΖ) καὶ ἑπομένως (88) ἢ τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (ὅτε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια), ἢ αἱ γωνίαι Η καὶ Ζ συναποτελοῦσι δύο ὀρθάς, ὅτε καὶ αἱ Γ καὶ Ζ ἀποτελοῦσι δύο ὀρθὰς (διότι Η = Γ).

ΘΕΩΡΗΜΑ

240. Τὰ ὅμοια τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν.

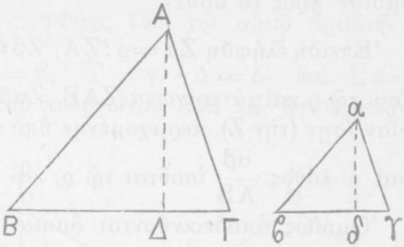
Ἔστωσαν ὅμοια τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ·

ἤτοι ἔστω $\quad \text{Α} = \alpha, \quad \text{Β} = \beta, \quad \text{Γ} = \gamma\cdot$

καὶ οἱ τρεῖς λόγοι $\frac{\alpha\beta}{\text{ΑΒ}}, \frac{\beta\gamma}{\text{ΒΓ}}, \frac{\gamma\alpha}{\text{ΓΑ}}$ ἴσοι τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ ρ, ἤτοι ἔστω

$$\alpha\beta = \varrho\,.\,\text{ΑΒ}, \quad \alpha\gamma = \varrho\,.\,\text{ΑΓ}, \quad \beta\gamma = \varrho\,.\,\text{ΒΓ}.$$

Ἐκ τῶν κορυφῶν δύο ἴσων γωνιῶν, Α καὶ α, ἂς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀπέναντι πλευράς, αἱ ΑΔ καὶ αδ· τότε εἶναι



$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\,(\mathrm{B\Gamma}).(\mathrm{A\Delta})\cdot$$

$$\text{καὶ}\ (\alpha\beta\gamma) = \frac{1}{2}\,(\beta\gamma).(\alpha\delta)\cdot$$

$$\text{ὅθεν}\ \frac{(\alpha\beta\gamma)}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{(\beta\gamma)}{(\mathrm{B\Gamma})}.\frac{(\alpha\delta)}{(\mathrm{A\Delta})} \quad (1)$$

ἀλλὰ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ αβδ, εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας Β = β καὶ Δ = δ· ἐπομένως εἶναι $\frac{(\alpha\delta)}{(\mathrm{A\Delta})} = \frac{(\alpha\beta)}{(\mathrm{AB})}$, ἄρα ἴσον καὶ τῷ $\frac{(\beta\gamma)}{(\mathrm{B\Gamma})}$.

Ἐὰν δὲ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸν λόγον $\frac{(\alpha\delta)}{(\mathrm{A\Delta})}$, διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ $\frac{(\beta\gamma)}{(\mathrm{B\Gamma})}$, εὑρίσκομεν

$$\frac{(\alpha\beta\gamma)}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{(\beta\gamma)^2}{(\mathrm{B\Gamma})^2},\quad \text{ἢ} = \left(\frac{\beta\gamma}{\mathrm{B\Gamma}}\right)^2$$

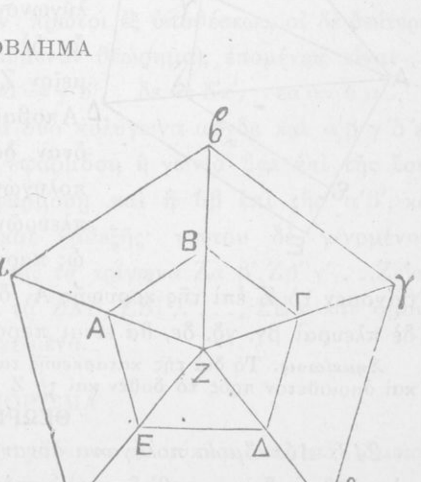
$$\text{ἢ} \qquad (\alpha\beta\gamma) = \varrho^2.(\mathrm{AB\Gamma}).$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

241. Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ϱ, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ ϱ, ἤτοι ἐπὶ ϱ^2.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

242. Δοθέντος πολυγώνου νὰ κατασκευασθῇ ὅμοιον.



Ἔστω δοθὲν πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ. Ἂς ληφθῇ τυχὸν σημεῖον τοῦ πολυγώνου τούτου, τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ Ζ, εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, αἱ εὐθεῖαι ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ, καὶ ἂς πολλαπλασιασθῶσι πᾶσαι ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν ϱ, ὅτε γίνονται Ζα, Ζβ, Ζγ, Ζδ, Ζε, ἂς ἐπιζευχθῶσι δὲ τὰ ἄκρα των διὰ τῶν εὐθειῶν αβ, βγ, γδ, δε, εα· λέγω, ὅτι τὸ πολύγωνον αβγδε εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν.

Ἐπειδὴ ἐλήφθη $Z\alpha = \varrho \,.\, ZA$, $Z\beta = \varrho \,.\, ZB$, οἱ λόγοι $\frac{Z\alpha}{ZA}$, $\frac{Z\beta}{ZB}$ εἶναι ἴσοι τῷ ρ καὶ τὰ τρίγωνα ΖΑΒ, Ζαβ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην (τὴν Ζ), περιεχομένην ὑπὸ πλευρῶν ἀναλόγων· ὅθεν ἕπεται, ὅτι καὶ ὁ λόγος $\frac{\alpha\beta}{AB}$ ἰσοῦται τῷ ρ, καὶ ὅτι ἡ αβ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ·

Ὁμοίως ἀποδεικνύονται ὅμοια τὰ τρίγωνα ΖΒΓ καὶ Ζβγ, ΖΓΔ καὶ Ζγδ, ΖΔΕ καὶ Ζδε, ΖΕΑ καὶ Ζεα· ἑπομένως πάντες οἱ λόγοι

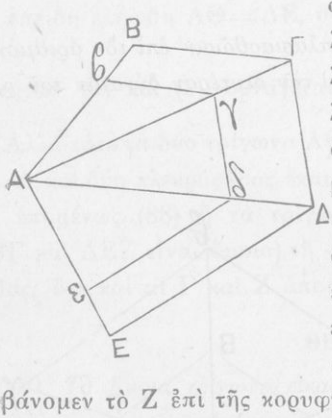
$$\frac{\alpha\beta}{AB},\quad \frac{\beta\gamma}{B\Gamma},\quad \frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta},\quad \frac{\delta\varepsilon}{\Delta E},\quad \frac{\varepsilon\alpha}{EA}$$

ἰσοῦνται τῷ ἀριθμῷ ρ. Καὶ ἡ γωνία Α τοῦ δοθέντος πολυγώνου ἰσοῦται τῇ α, διότι αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι παράλληλοι καὶ φέρονται πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι ἡ Β ἴση τῇ β, καὶ καθεξῆς.

Ὥστε τὰ δύο πολύγωνα ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν, καὶ τὰς ἀντιστοιχούσας πλευρὰς ἀναλόγους· ἄρα εἶναι ὅμοια.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς ρ εἶναι ὅλως ἀόριστος, δύνανται νὰ κατασκευασθῶσιν ἄπειρα πολύγωνα ὅμοια τῷ δοθέντι· καὶ ἂν μὲν ληφθῇ $\varrho < 1$, τὸ κατασκευαζόμενον πολύγωνον εἶναι μικρότερον τοῦ δοθέντος, ἂν δὲ $\varrho > 1$, μεγαλήτερον, καὶ τὸ σημεῖον Ζ δύναται νὰ ληφθῇ ὁπουδήποτε. Ἀποβαίνει δὲ τὸ πρόβλημα ὡρισμένον, ὅταν δοθῇ μία πλευρὰ τοῦ ζητουμένου πολυγώνου, καὶ ὁρισθῇ, πρὸς ποίαν τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος θὰ ἀντιστοιχῇ, ὡς παραδείγματος χάριν, ἡ αβ· τότε λαμβάνομεν τὸ Ζ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Α, ὅτε ἡ αβ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ, αἱ δὲ πλευραὶ βγ, γδ, δε, θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ.



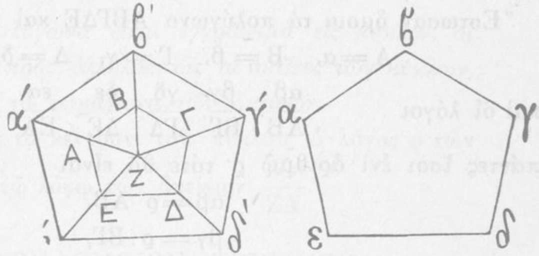
Σημείωσις. Τὸ διὰ τῆς κατασκευῆς ταύτης προκύπτον σχῆμα λέγεται ὅμοιον καὶ ὁμοιόθετον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ τὸ Ζ λέγεται *κέντρον* τῆς ὁμοιοθεσίας.

ΘΕΩΡΗΜΑ

243. Δύο ὅμοια πολύγωνα δύνανται νὰ διαιρεθῶσιν εἰς τρίγωνα ἴσα τὸ πλῆθος, ὅμοια καθ' ἓν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένα.

Ἔστωσαν ὅμοια τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε, ἤτοι ἔστωσαν οἱ λόγοι $\frac{\alpha\beta}{\mathrm{AB}}, \frac{\beta\gamma}{\mathrm{B\Gamma}}, \frac{\gamma\delta}{\mathrm{\Gamma\Delta}}, \frac{\delta\varepsilon}{\mathrm{\Delta E}}, \frac{\varepsilon\alpha}{\mathrm{EA}}$, πάντες ἴσοι τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ ρ καὶ πρὸς τούτοις $\mathrm{A}=\alpha$, $\mathrm{B}=\beta$, $\Gamma=\gamma$, $\Delta=\delta$ καὶ $\mathrm{E}=\varepsilon$.

Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Ζ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ καὶ ἂς πολλαπλασιασθῶσι πᾶσαι ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ρ, ὅτε γίνονται Ζα΄, Ζβ΄. . Ζε΄, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ πέρατα αὐτῶν, ὥστε νὰ γίνῃ πολύγωνον



ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔΕ, τὸ α΄ β΄ γ΄ δ΄ ε΄· τὸ πολύγωνον τοῦτο εἶναι ἴσον τῷ αβγδε· διότι αἱ γωνίαι αὐτῶν (ὡς ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τοῦ ΑΒΓΔΕ) εἶναι ἴσαι κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν· ἤτοι

$$\alpha'=\alpha, \quad \beta'=\beta, \quad \gamma'=\gamma, \quad \delta'=\delta, \quad \varepsilon'=\varepsilon\text{·}$$

αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι ὡσαύτως κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν, διότι πάντες οἱ λόγοι

$$\frac{\alpha\beta}{\mathrm{AB}}, \frac{\beta\gamma}{\mathrm{B\Gamma}} \ldots\ldots \frac{\varepsilon\alpha}{\mathrm{EA}}, \frac{\alpha'\beta'}{\mathrm{AB}}, \frac{\beta'\gamma'}{\mathrm{B\Gamma}} \ldots\ldots \frac{\varepsilon'\alpha'}{\mathrm{EA}},$$

εἶναι ἴσοι τῷ ἀριθμῷ ρ (οἱ μὲν πρῶτοι ἐξ ὑποθέσεως, οἱ δὲ δεύτεροι ἐκ κατασκευῆς, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα), ἑπομένως εἶναι

$$\alpha\beta=\alpha'\beta', \quad \beta\gamma=\beta'\gamma', \quad \gamma\delta=\gamma'\delta', \quad \delta\varepsilon=\delta'\varepsilon', \quad \varepsilon\alpha=\varepsilon'\alpha'.$$

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι τὰ δύο πολύγωνα αβγδε καὶ α΄β΄γ΄δ΄ε΄, ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἄλληλα, ἐὰν ἐφαρμόσῃ ἡ γωνία βαε ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ β΄α΄ε΄· διότι τότε θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ αβ ἐπὶ τῆς α΄β΄, καὶ ἡ γωνία αβγ ἐπὶ τῆς α΄β΄γ΄, καὶ καθεξῆς· τούτου δὲ γενομένου, θὰ εὑρεθῇ τὸ αβγδε διῃρημένον εἰς τὰ τρίγωνα Ζα΄β΄, Ζβ΄γ΄, . . , Ζε΄α΄, ἅτινα εἶναι τόσα, ὅσα εἶναι καὶ τὰ ΖΑΒ, ΖΒΓ, . . . , ΖΕΑ καὶ ὅμοια πρὸς αὐτὰ καθ' ἓν καὶ ὁμοίως κείμενα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

244. Ἐὰν πολύγωνον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, καὶ πᾶν ὅμοιον αὐτῷ εἶναι ἐπίσης ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Διότι ἂν αἱ ΖΑ, ΖΒ, . ., ΖΕ εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ αἱ Ζα′, Ζβ′, ..., Ζε′ εἶναι ἐπίσης ἴσαι ἀλλήλαις.

ΘΕΩΡΗΜΑ

245. Τῶν ὁμοίων πολυγώνων, αἱ μὲν περίμετροι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστωσαν ὅμοια τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε, ἤτοι ἔστω

$$\mathrm{A}=\alpha,\quad \mathrm{B}=\beta,\quad \Gamma=\gamma,\quad \Delta=\delta,\quad \mathrm{E}=\varepsilon$$

καὶ οἱ λόγοι $\dfrac{\alpha\beta}{\mathrm{AB}}, \dfrac{\beta\gamma}{\mathrm{B\Gamma}}, \dfrac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta}, \dfrac{\delta\varepsilon}{\Delta\mathrm{E}}, \dfrac{\varepsilon\alpha}{\mathrm{EA}}$

πάντες ἴσοι ἑνὶ ἀριθμῷ ρ· τότε θὰ εἶναι

$$\alpha\beta=\varrho\ \mathrm{AB},$$
$$\beta\gamma=\varrho\,.\,\mathrm{B\Gamma},$$
$$\gamma\delta=\varrho\ \Gamma\Delta,$$
$$\delta\varepsilon=\varrho\,.\,\Delta\mathrm{E},$$
$$\varepsilon\alpha=\varrho\ \mathrm{EA},$$

ὅθεν καὶ $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\varepsilon+\varepsilon\alpha=\varrho\,.(\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\Gamma\Delta+\Delta\mathrm{E}+\mathrm{EA})$, ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι καὶ αἱ περίμετροι ἔχουσι τὸν λόγον ρ, ἤτοι τὸν λόγον τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ λόγου, ὃν ἔχουσιν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν πολυγώνων, διαιροῦμεν τὸ ἕτερον τούτων, ἔστω τὸ ΑΒΓΔΕ, εἰς τρίγωνα, ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Ζ καὶ κατασκευάζομεν, ὡς ἐν τῷ προηγουμένῳ θεωρήματι, περὶ τὸ Ζ πολύγωνον ἴσον τῷ αβγδε. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΖΑΒ, ΖΒΓ, . . εἶναι κατὰ σειρὰν ὅμοια πρὸς τὰ Ζαβ, Ζβγ, . . καὶ ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν εἶναι ρ, ἔχομεν (240)

$$(\mathrm{Z}\alpha\beta)=\varrho^2.(\mathrm{ZAB}),$$
$$(\mathrm{Z}\beta\gamma)=\varrho^2.(\mathrm{ZB\Gamma}),$$
$$(\mathrm{Z}\gamma\delta)=\varrho^2.(\mathrm{Z}\Gamma\Delta),$$
$$(\mathrm{Z}\delta\varepsilon)=\varrho^2.(\mathrm{Z}\Delta\mathrm{E}),$$
$$(\mathrm{Z}\varepsilon\alpha)=\varrho^2.(\mathrm{ZEA})$$

προσθέτοντες δὲ κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας ταύτας, λαμβάνομεν

$$(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)=\varrho^2\ (\mathrm{AB}\Gamma\Delta\mathrm{E}),$$

$$\text{ἢ}\quad \frac{(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)}{(\mathrm{AB}\Gamma\Delta\mathrm{E})}=\varrho^2=\frac{(\alpha\beta)^2}{(\mathrm{AB})^2}.$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ὁμοίων πολυγώνων ἔχουσι τὸν λόγον ρ², ἤτοι τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

246. Ἐὰν αἱ πλευραὶ πολυγώνου πολλαπλασιασθῶσι πᾶσαι ἐπί τινα ἀριθμὸν ρ, αἱ δὲ γωνίαι αὐτοῦ μείνωσιν ἀμετάβλητοι, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ ρ, ἤτοι ἐπὶ ρ^2.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

247. Ἐὰν δύο ὅμοια πολύγωνα εἶναι ἐγγράψιμα εἰς κύκλον, αἱ μὲν περίμετροι αὐτῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι αὐτῶν, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων.

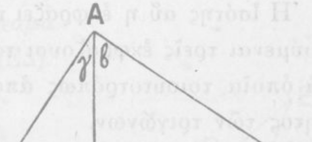
Διότι, ἂν τὸ Ζ ληφθῇ εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ὁ λόγος ρ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν ἀκτίνων $\frac{Z\alpha}{ZA}$

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

248. Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, διαιρεῖ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ὅμοια πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς τὸ ὅλον· εἶναι δὲ ἡ μὲν ἀχθεῖσα κάθετος μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης, ἑκατέρα δὲ τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὅλου τριγώνου μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ εἰς αὐτὴν προσκειμένου τμήματος.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας Α, κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς τὸ ΑΒΓ.



Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ἔχουσι τὴν γωνίαν Β κοινὴν καὶ τὰς ὀρθὰς γωνίας Α καὶ Δ ἴσας· ἄρα εἶναι ὅμοια· καὶ ἡ γωνία Γ ἰσοῦται τῇ γ.

Καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ ἔχουσι τὴν γωνίαν Γ κοινὴν καὶ τὰς ὀρθὰς γωνίας Δ καὶ Α ἴσας· ἄρα εἶναι ὅμοια καὶ ἡ γωνία Β ἰσοῦται τῇ β.

Καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια· διότι ἐδείχθη ἡ γωνία Β ἴση τῇ β καὶ ἡ γωνία Γ ἴση τῇ γ.

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ εὑρίσκομεν νῦν $\frac{ΒΔ}{ΑΔ} = \frac{Α}{Δ}$

ἢ ΒΔ:ΑΔ = ΑΔ:ΔΓ, ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἡ κάθετος ΑΔ εἶναι μέσ ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων ΒΔ ΔΓ τῆς ὑποτεινούσης.

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ εὑρίσκομεν

$$\frac{ΒΓ}{ΑΒ} = \frac{ΑΒ}{ΒΔ} \quad ἢ \quad ΒΓ:ΑΒ = ΑΒ:ΒΔ.$$

Ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ

$$\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{ΑΓ}{ΔΓ} \quad ἢ \quad ΒΓ:ΑΓ = ΑΓ:ΔΓ\cdot$$

ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι ἑκατέρα τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ το τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ καὶ το εἰς αὐτὴν προσκειμένου τμήματος.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1) Ἐκ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων, ἐὰν ἀπαλλάξωμεν αὐτὰς ἀπ τῶν παρονομαστῶν, εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned}(ΑΔ)^2 &= (ΒΔ)\ (ΔΓ)\\ (ΑΒ)^2 &= (ΒΓ).(ΒΔ) \qquad (1)\\ (ΑΓ)^2 &= (ΒΓ)\ (ΔΓ)\end{aligned}$$

καὶ προσθέτοντες τὰς δύο τελευταίας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$(ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 = (ΒΓ)\ \big|(ΒΔ) + (ΔΓ)\big|$$

$$ἤτοι\quad (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 = (ΒΓ)\ (ΒΓ) = (ΒΓ)^2.$$

Ἡ ἰσότης αὕτη ἐκφράζει τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρου· αἱ δὲ προη γούμεναι τρεῖς ἐκφράζουσι τὰ θεωρήματα τῶν ἐδαφίων 199 καὶ 19 τὰ ὁποῖα τοιουτοτρόπως ἀποδεικνύονται ἐκ δευτέρου διὰ τῆς ὁμοιό τητος τῶν τριγώνων.

2) Ἐκ τῆς δευτέρας καὶ τῆς τρίτης τῶν ἐξισώσεων (1) εὑρίσκομε προσέτι

$$\frac{(ΑΒ)^2}{(ΑΓ)^2} = \frac{(ΒΔ)}{(ΔΓ)} \quad ἢ \quad (ΑΒ)^2:(ΑΓ)^2 = ΒΔ:ΔΓ\cdot$$

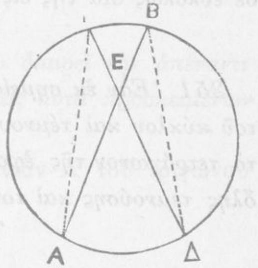
ἤτοι τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι πρὸς ἄλλη ὡς τὰ εἰς αὐτὰς προσκείμενα τμήματα τῆς ὑποτεινούσης.

ΘΕΩΡΗΜΑ

249. Ἐὰν ἐν κύκλῳ τέμνωνται δύο χορδαί, τὰ δύο ὀρθογώνι *τὰ ὑπὸ τῶν τμημάτων ἑκατέρας τῶν χορδῶν περιεχόμενα εἶναι ἰσοδύναμα.*

Τουτέστιν εἶναι (ΕΑ).(ΕΒ) = (ΕΓ).(ΕΔ)

Διότι, ἀχθεισῶν τῶν χορδῶν ΑΓ καὶ ΒΔ, γίνονται δύο ὅμοια τρίγωνα, τὰ ΑΓΕ καὶ ΒΔΕ· διότι ἔχουσι τὴν γωνίαν Α ἴσην τῇ Δ (ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸν κύκλον καὶ βαινούσας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΓΒ), δι' ὅμοιον λόγον ἔχουσι καὶ τὴν γωνίαν Γ ἴσην τῇ Β (καὶ τὰς εἰς τὸ Ε γωνίας ἴσας, ὡς κατὰ κορυφήν)· ἄρα εἶναι ὅμοια καὶ ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα



$$\frac{ΕΑ}{ΕΔ} = \frac{ΕΓ}{ΕΒ}\cdot$$

ὅθεν καὶ (ΕΑ).(ΕΒ) = (ΕΓ).(ΕΔ).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τούτου εἶναι τὸ ἑπόμενον. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνωνται κατά τι σημεῖον Ε, οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι (ΕΑ).(ΕΒ) = (ΕΓ).(ΕΔ), τὰ ἄκρα αὐτῶν Α, Β, Γ, Δ, κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας.*

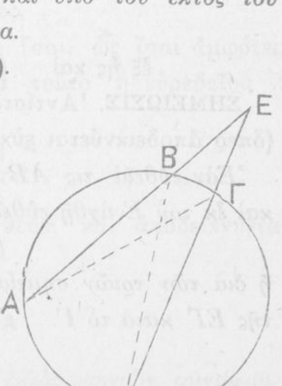
Ἀποδεικνύεται δὲ εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

ΘΕΩΡΗΜΑ

250. *Ἐὰν ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς κύκλου, ἀχθῶσι δύο τέμνουσαι, περατούμεναι εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ, τὰ δύο ὀρθογώνια, τὰ περιεχόμενα ὑφ' ἑκατέρας τῶν τεμνουσῶν τούτων καὶ ὑπὸ τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου κειμένου μέρους αὐτῆς, εἶναι ἰσοδύναμα.*

Τουτέστιν εἶναι (ΕΑ).(ΕΒ) = (ΕΓ).(ΕΔ).

Διότι, ἀχθεισῶν τῶν χορδῶν ΑΓ καὶ ΔΒ, γίνονται τὰ τρίγωνα ΑΓΕ καὶ ΒΔΕ, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια· διότι ἔχουσι τὴν γωνίαν Ε κοινὴν καὶ τὴν γωνίαν Α ἴσην τῇ Δ (ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸν κύκλον καὶ βαινούσας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΒΓ). Ἐκ δὲ τῶν τριγώνων τούτων εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα



$$\frac{ΕΑ}{ΕΔ} = \frac{ΕΓ}{ΕΒ},$$

ἐξ ἧς καὶ (ΕΑ).(ΕΒ) = (ΕΓ)(ΕΔ).

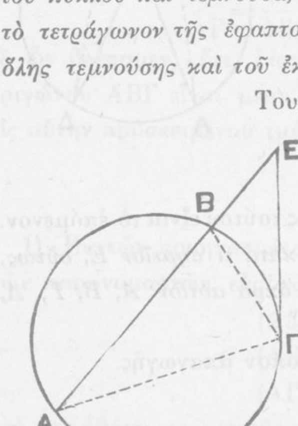
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τούτου εἶναι τὸ ἑπόμενο

Ἐὰν αἱ προσεκβολαὶ δύο εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνωνται κατὰ σημεῖον Ε καὶ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης (ΕΑ) (ΕΒ) = (ΕΓ).(ΕΔ), τὰ τέ σαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας. Ἀποδεικνύετ δὲ εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

ΘΕΩΡΗΜΑ

251. Ἐὰν ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς κύκλου, ἀχθῶσιν ἐφαπτομέ τοῦ κύκλου καὶ τέμνουσα, περατούμεναι ἀμφότεραι εἰς τὴν περιφέρεια τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ τ ὅλης τεμνούσης καὶ τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρους αὐτῆς.

Τουτέστιν εἶναι $(ΕΓ)^2 = (ΕΑ).(ΕΒ)$.



Διότι, ἀχθεισῶν τῶν χορδῶν ΑΓ κ ΒΓ, γίνονται τὰ δύο τρίγωνα ΑΕΓ κ ΒΕΓ, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια, διότι ἔχου τὴν γωνίαν Ε κοινὴν καὶ τὴν γωνίαν ἴσην τῇ ΒΓΕ (διότι ἡ ΒΓΕ σχηματίζ ται ὑπὸ τῆς χορδῆς ΓΒ καὶ ὑπὸ τῆς ἐφ πτομένης ΓΕ καὶ διὰ τοῦτο ἰσοῦται ἐγγεγραμμένῃ γωνίᾳ Α, ἥτις βαίνει τοῦ τόξου ΒΓ). Ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦ εἶναι ὅμοια, καὶ ἐξ αὐτῶν οριζόμε τὴν ἰσότητα

$$\frac{ΕΑ}{ΕΓ} = \frac{ΕΓ}{ΕΒ}.$$

ἐξ ἧς καὶ $(ΕΓ)^2 = (ΕΑ).(ΕΒ)$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τούτου εἶναι τὸ ἑ (ὅπερ ἀποδεικνύεται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς).

Ἐὰν εὐθεῖά τις ΑΒ προσεκβληθῇ μέχρι τοῦ τυχόντος σημείου καὶ ἐκ τοῦ Ε ἀχθῇ εὐθεῖά τις ΕΓ, τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι

$$(ΕΓ)^2 = (ΕΑ).(ΕΒ),$$

ἡ διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ διερχομένη περιφέρεια ἐφάπτε τῆς ΕΓ κατὰ τὸ Γ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

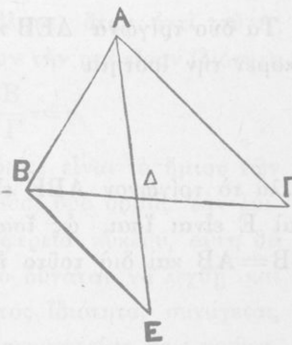
Τῶν τριῶν τούτων θεωρημάτων εἶναι προφανὴς ἡ συγγένεια τῷ πρώτῳ, αἱ χορδαὶ τέμνονται ἐντὸς τοῦ κύκλου, ἐν δὲ τῷ δευτέ τέμνονται ἐκτός, κατὰ δὲ τὰ ἄλλα οὐδόλως διαφέρουσιν· ἐν δὲ τῷ τρίτῳ μία τῶν ἐκτὸς τοῦ κύκλου τεμνομένων χορδῶν, ἡ ΓΔ, ἐλαττουμένη κατήντησε μηδέν, ὅτε ἡ ὅλη τέμνουσα ΕΔ καὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου κείμενον μέρος αὐτῆς ΕΓ ἔγιναν ἴσαι τῇ ἐφαπτομένῃ.

* ΘΕΩΡΗΜΑ

252. Ἡ διχοτομοῦσα γωνίαν τριγώνου διαιρεῖ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰν εἰς δύο τμήματα, ἀνάλογα τῶν εἰς αὐτὰ προσκειμένων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Ἐὰν δηλονότι ἡ ΑΔ διχοτομῇ τὴν γωνίαν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, λέγω, ὅτι θὰ εἶναι

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}.$$



Ἄς προσεκβληθῇ ἡ διχοτομοῦσα καὶ ἄς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Β, παράλληλος τῇ ΑΓ, ἡ ΒΕ.

Τὰ δύο τρίγωνα ΔΒΕ καὶ ΔΑΓ εἶναι ὅμοια· διότι ἔχουσι τὰς περὶ τὸ Δ γωνίας αὐτῶν ἴσας, ὡς κατὰ κορυφήν, καὶ τὴν γωνίαν Ε ἴσην τῇ ΔΑΓ καὶ τὴν Γ ἴσην τῇ ΔΒΕ, διὰ τὰς παραλλήλους ΑΓ καὶ ΒΕ· ἄρα εἶναι ὅμοια καὶ ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν

$$\frac{BE}{A\Gamma}=\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}.$$

ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἰσοσκελές, διότι, αἱ γωνίαι αὐτοῦ Α καὶ Ε εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι ἀμφότεραι τῇ ΔΑΓ· ἄρα εἶναι ΑΒ = ΒΕ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ εὑρεθεῖσα ἰσότης γίνεται

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}.$$

Καὶ τὸ ἀντίστροφον θεώρημα ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

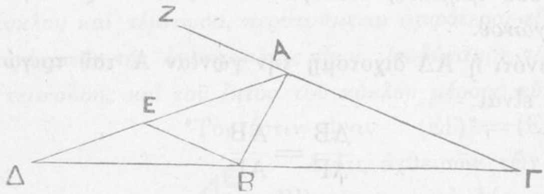
* ΘΕΩΡΗΜΑ

253. Ἐὰν ἡ διχοτομοῦσά τινα τῶν ἐκτὸς γωνιῶν τριγώνου τέμνῃ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν προσεκβαλλομένην, αἱ ἀποστάσεις τῆς τομῆς *ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς πλευρᾶς ταύτης εἶναι ἀνάλογοι τῶν εἰς αὐτὰς προσκειμένων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.*

Ἐάν, δηλονότι, ἡ ΑΔ διχοτομῇ τὴν ἐκτὸς γωνίαν ΒΑΖ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, λέγω, ὅτι θὰ εἶναι

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}.$$

Ἄς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Β, παράλληλος τῇ ΑΓ, ἡ ΒΕ.



Τὰ δύο τρίγωνα ΔΕΒ καὶ ΔΑΓ εἶναι ὅμοια καὶ ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{EB}{A\Gamma}.$$

ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ γωνίαι αὐτοῦ Α καὶ Ε εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι ἀμφότεραι τῇ γωνίᾳ ΔΑΖ· ἄρα εἶναι ΕΒ=ΑΒ καὶ διὰ τοῦτο ἡ εὑρεθεῖσα ἰσότης γίνεται

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}.$$

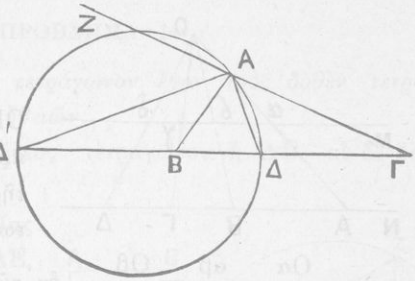
Καὶ ἡ ἀντίστροφος πρότασις ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ἡ διχοτομοῦσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν ΒΑΖ, ἡ ΑΕ, εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ, θὰ εἶναι
γωνία ΕΑΖ= γωνίᾳ Γ καὶ γωνία ΕΑΒ= γωνίᾳ ΑΒΓ· ἄρα θὰ εἶναι καὶ γωνία ΑΒΓ =γωνίᾳ Γ. Ἐπομένως θὰ εἶναι καὶ ΑΒ=ΑΓ, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι ἰσοσκελές. Ὅτι δὲ τότε ἀληθῶς ἡ ΑΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ, ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

*ΘΕΩΡΗΜΑ

254. Τὰ σημεῖα, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων ἔχουσι λόγον δοθέντα ἀριθμόν, κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας.

Ἔστωσαν Β καὶ Γ τὰ δοθέντα σημεῖα, ἀφ' ὧν λαμβάνονται αἱ ἀποστάσεις· ἔστω προσέτι Α ἓν τῶν εἰρημένων σημείων καὶ ρ ὁ δοθεὶς λόγος τῶν ἀποστάσεων ΑΒ καὶ ΑΓ, τουτέστιν ἔστω $\frac{AB}{A\Gamma}=\rho$.



Ἐὰν διχοτομηθῶσιν αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΖΑΒ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΔ καὶ ΑΔ', θὰ εἶναι, κατὰ τὰ προηγούμενα,

$$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}=\rho \quad \text{καὶ} \quad \frac{\Delta' B}{\Delta'\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}=\rho,$$

ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι τὰ δύο σημεῖα Δ καὶ Δ', εἰς τὰ ὁποῖα αἱ διχοτομοῦσαι τέμνουσι τὴν ΒΓ, μένουσιν ἀμετάβλητα, ὅταν, ἀντὶ τοῦ Α, ληφθῇ οἱονδήποτε ἄλλο σημεῖον ἐκ τῶν ἐχόντων τὴν ρηθεῖσαν ἰδιότητα διότι πάντοτε θὰ εἶναι $\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}=\rho$ καὶ $\frac{\Delta' B}{\Delta'\Gamma}=\rho$.

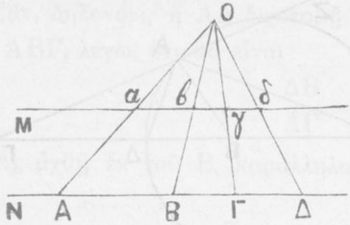
Ἀλλ' ἡ γωνία Δ'ΑΔ εἶναι ὀρθὴ γωνία, διότι εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν δύο γωνιῶν ΖΑΒ καὶ ΒΑΓ, αἵτινες ἀποτελοῦσι δύο ὀρθάς· ἐὰν λοιπὸν ἐπὶ τῆς Δ'Δ, ὡς διαμέτρου, γραφῇ περιφέρεια κύκλου, αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Α· ἐπειδὴ δὲ τὸ αὐτὸ δύναται νὰ λεχθῇ καὶ περὶ παντὸς ἄλλου σημείου τὴν αὐτὴν ἔχοντος ἰδιότητα, συνάγεται, ὅτι πάντα τὰ τοιαῦτα σημεῖα κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις γράφεται ἐπὶ τῆς διαμέτρου Δ'Δ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἵνα εὕρωμεν σημεῖόν τι Α, τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $\frac{AB}{A\Gamma}=\rho$, γράφομεν μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε α, περιφέρειαν κύκλου, ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Β καὶ μὲ ἀκτῖνα ρ.α, γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν· αἱ τομαὶ αὐτῶν θὰ εἶναι σημεῖα ἔχοντα τὴν ρηθεῖσαν ἰδιότητα. Θὰ τέμνωνται δὲ αἱ δύο περιφέρειαι, ἐὰν ἡ ἀκτὶς α περιλαμβάνηται ἐντὸς ὁρίων τινῶν, εὐκόλως εὑρισκομένων διὰ τοῦ θεωρήματος 129.

ΘΕΩΡΗΜΑ

255. Ἐὰν δύο παράλληλοι τέμνωνται ὑπὸ εὐθειῶν ἐξ ἑνὸς σημείου ἀρχομένων, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.

Ἔστωσαν παράλληλοι αἱ εὐθεῖαι M καὶ N, τεμνόμεναι ὑπὸ τῶν OA, OB, OΓ, OΔ. . . · λέγω, ὅτι θὰ εἶναι



$$\frac{\alpha\beta}{AB}=\frac{\beta\gamma}{B\Gamma}=\frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta}\dots \quad (\iota)$$

Διότι τὰ τρίγωνα OAB, OBΓ, OΓΔ. . . εἶναι κατὰ σειρὰν ὅμοια πρὸς τὰ Oαβ, Oβγ, Oγδ, . ., καὶ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων τούτων ἕπονται αἱ ἰσότητες

$$\frac{O\alpha}{OA}=\frac{\alpha\beta}{AB}=\frac{O\beta}{OB}, \quad \text{ἐκ τῶν ὁμοίων } OAB,\ O\alpha\beta\cdot$$

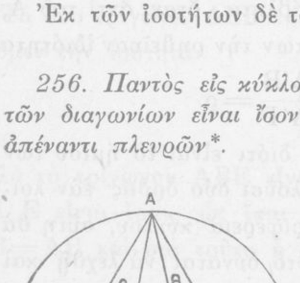
$$\frac{O\beta}{OB}=\frac{\beta\gamma}{B\Gamma}=\frac{O\gamma}{O\Gamma}, \quad \text{ἐκ τῶν } OB\Gamma,\ O\beta\gamma\cdot$$

$$\frac{O\gamma}{O\Gamma}=\frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta}=\frac{O\delta}{O\Delta}, \quad \text{ἐκ τῶν } O\Gamma\Delta,\ O\gamma\delta.$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων δὲ τούτων συνάγονται αἱ ἰσότητες (ι).

* ΘΕΩΡΗΜΑ

256. Παντὸς εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.*



Ἔστω τυχὸν τετράπλευρον, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, τὸ ABΓΔ· ἄγομεν τὴν AE, οὕτως ὥστε νὰ σχηματισθῇ ἡ γωνία BAE ἴση τῇ γωνίᾳ ΔAΓ· τότε τὰ τρίγωνα ABE καὶ AΓΔ εἶναι ὅμοια (διότι ἔχουσι τὰς γωνίας θ ἴσας ἐκ κατασκευῆς καὶ τὰς γωνίας η ἴσας, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα)· ὅθεν συνάγεται

$$\frac{(BE)}{(\Gamma\Delta)}=\frac{(AB)}{(A\Gamma)} \quad \text{ἢ} \quad (BE)=(\Gamma\Delta).\frac{(AB)}{(A\Gamma)}.$$

Ἀλλὰ καὶ τὰ τρίγωνα AEΔ καὶ ABΓ εἶναι ὅμοια (διότι εἶναι γων. BAΓ = γων. EAΔ καὶ αἱ γωνίαι ι ἴσαι)· ὅθεν

$$\frac{(E\Delta)}{(B\Gamma)}=\frac{(A\Delta)}{(A\Gamma)} \quad \text{ἢ} \quad (E\Delta)=(B\Gamma).\frac{(A\Delta)}{(A\Gamma)}.$$ Ἐντεῦθεν ἕπεται

$$(B\Delta)=\frac{(\Gamma\Delta).(AB)}{(A\Gamma)}+\frac{(B\Gamma).(A\Delta)}{(A\Gamma)}, \text{ ἤτοι } (A\Gamma).(B\Delta)=(AB).(\Gamma\Delta)+(B\Gamma).(A\Delta).$$

* Τὸ θεώρημα τοῦτο εὗρεν ὁ Πτολεμαῖος, διάσημος ἀστρονόμος Ἕλλην ζήσας κατὰ τὸν β΄ αἰῶνα μ. Χ.

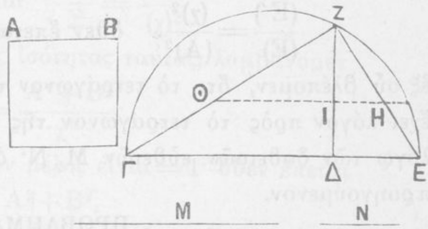
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1ον

257. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἔχον πρὸς δοθὲν τετράγωνον λόγον ἴσον τῷ λόγῳ δύο εὐθειῶν.

Ἔστω πλευρὰ τοῦ δοθέντος τετραγώνου ἡ ΑΒ, αἱ δὲ δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ Μ, Ν.

Ἂς ληφθῇ ἐπί τινος εὐθείας ἡ ΓΔ ἴση τῇ Μ, καὶ ἡ ΔΕ, ἴση τῇ Ν, καὶ ἐπὶ τῆς ΓΕ, ὡς διαμέτρου, ἂς γραφῇ ἡμικύκλιον. Ἐκ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ, κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΕ, ἡ ΔΖ, καὶ ἐκ τοῦ Ζ, ἔνθα τέμνει τὴν περιφέρειαν, ἂς ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΖΓ, ΖΕ. Ἐπὶ τῆς ΖΕ (προσεκβαλλομένης, ἐὰν εἶναι ἀνάγκη), ἂς ληφθῇ ἡ ΖΗ, ἴση τῇ πλευρᾷ ΑΒ τοῦ δοθέντος τετραγώνου, καὶ ἐκ τοῦ Η ἂς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΕΓ, ἡ ΗΘ, τέμνουσα τὴν ΔΖ εἰς τὸ Ι· λέγω ὅτι ἡ ΖΘ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.



Διότι, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΖΘΗ ἔχομεν (248, πόρ. 2ον)

$$\frac{(Z\Theta)^2}{(ZH)^2}=\frac{\Theta I}{IH},$$

ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\frac{\Theta I}{IH}=\frac{\Gamma\Delta}{\Delta E}$ (θεώρημα 225),

ἕπεται $\frac{(Z\Theta)^2}{(ZH)^2}=\frac{\Gamma\Delta}{\Delta E}$,

καὶ ἐπειδὴ ἐλήφθη $ZH=AB$ καὶ $\Gamma\Delta=M$, $\Delta E=N$, ἕπεται

$$\frac{(Z\Theta)^2}{(AB)^2}=\frac{M}{N} \quad ἢ \quad (Z\Theta)^2:(AB)^2=M:N\cdot$$

ἄρα ἡ ΖΘ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2ον

258. Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον δοθέντι πολυγώνῳ καὶ ἔχον πρὸς αὐτὸ λόγον ἴσον τῷ λόγῳ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν Μ καὶ Ν.

Ἔστω Ε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δοθέντος πολυγώνου καὶ Α μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, Ε′ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ζητουμένου πολυγώνου καὶ χ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ, ἡ ὁμόλογος τῆς Α· τὸ πρόβλημα θὰ λυθῇ, ἂν εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ αὕτη χ· διότι ταύτην ἔχοντες δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ πολύγωνον (242, σημ.).

Ἐν πρώτοις, ζητεῖται νὰ εἶναι $\frac{(E')}{(E)} = \frac{(M)}{(N)}$.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ πολύγωνα θὰ εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι καὶ

$$\frac{(E')}{(E)} = \frac{(\chi)^2}{(A)^2}, \quad \text{ὅθεν ἕπεται} \quad \frac{(\chi)^2}{(A)^2} = \frac{(M)}{(N)}.$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ἀγνώστου ταύτης πλευρᾶς χ ἔχει λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δοθείσης πλευρᾶς Α, ἴσον τῷ λόγῳ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν Μ, Ν· ἄρα τὸ πρόβλημα ἀνήχθη εἰς τὸ προηγούμενον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3ον

259. Νὰ κατασκευασθῇ σχῆμα ὅμοιον τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ σχήματι Π καὶ ἰσοδύναμον ἄλλῳ εὐθυγράμμῳ σχήματι Κ.

Ἔστω Α μία πλευρὰ τοῦ δοθέντος σχήματος Π καὶ χ ἡ ὁμόλογος αὐτῆς πλευρὰ τοῦ ζητουμένου, οὗτινος τὴν ἐπιφάνειαν παριστῶ διὰ τοῦ Σ.

Ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον σχῆμα Σ θὰ εἶναι ὅμοιον τῷ Π, θὰ εἶναι

$$\frac{(\Pi)}{(\Sigma)} = \frac{(A)^2}{(\chi)^2}$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ Σ ἰσοῦται τῷ Κ, ἕπεται

$$\frac{(\Pi)}{(K)} = \frac{(A)^2}{(\chi)^2}.$$

Ἄς τραπῶσι νῦν ἀμφότερα τὰ σχήματα Π καὶ Κ εἰς τετράγωνα καὶ ἔστωσαν Μ καὶ Ν αἱ πλευραὶ τῶν ἰσοδυνάμων αὐτοῖς τετραγώνων· ἤτοι, ἔστω $(\Pi) = (M)^2$ καὶ $(K) = (N)^2$.

τότε ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\frac{(M)^2}{(N)^2} = \frac{(A)^2}{(\chi)^2},$$

ὅθεν ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀμφοτέρων τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν

$$\frac{(M)}{(N)} = \frac{(A)}{(\chi)} \quad \text{ἢ} \quad M : N = A : \chi,$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἡ πλευρὰ χ τοῦ ζητουμένου σχήματος εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν γνωστῶν εὐθειῶν Μ, Ν, Α.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4ον

260. Δοθέντων δύο ὁμοίων πολυγώνων Π καὶ Κ, νὰ κατασκευασθῇ ἄλλο, ὅμοιον αὐτοῖς καὶ ἴσον τῷ ἀθροίσματι ἢ τῇ διαφορᾷ αὐτῶν.

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν ὁμοίων πολυγώνων Π καὶ Κ καὶ χ ἡ ὁμόλογος τούτων ἐν τῷ ζητουμένῳ πολυγώνῳ Σ, ὅπερ ἔστω ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν δύο δοθέντων.

Ἐπειδὴ τὰ τρία πολύγωνα Π, Κ καὶ Σ εἶναι ὅμοια, ἔχομεν

$$\frac{\Pi}{\Sigma}=\frac{(\mathrm{A})^2}{(\chi)^2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\mathrm{K}}{\Sigma}=\frac{(\mathrm{B})^2}{(\chi)^2},$$

ὅθεν προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας ταύτας, λαμβάνομεν

$$\frac{\Pi+\mathrm{K}}{\Sigma}=\frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}{\chi^2}.$$

καὶ ἐπειδὴ $\Pi+\mathrm{K}=\Sigma$, τὸ πρῶτον μέλος εἶναι $=1$· ὅθεν ἕπεται

$$\chi^2=\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2,$$

ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι ἡ ἄγνωστος πλευρὰ χ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου κάθετοι πλευραὶ εἶναι Α καὶ Β.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου, ἐὰν ζητῆται νὰ εἶναι $\Sigma=\Pi-\mathrm{K}$, φθάνομεν εἰς τὴν ἰσότητα $\chi^2=\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2$,

ἐξ ἧς βλέπομεν, ὅτι ἡ ἄγνωστος πλευρὰ χ εἶναι τότε μία τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅπερ ἔχει ὑποτείνουσαν τὴν Α καὶ τὴν ἄλλην ἴσην τῇ Β.

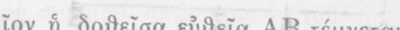
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου ἐδείχθη, ὅτι ἐὰν κατασκευασθῶσιν ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου (ὡς ὁμολόγων πλευρῶν) τρία ὅμοια πολύγωνα, τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5ον

261. Νὰ τμηθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα μέσον καὶ ἄκρον λόγον· ἤτοι εἰς δύο μέρη, ἐξ ὧν τὸ ἓν νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ ἄλλου μέρους.

Ἔστω Γ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ τέμνεται μέσον καὶ ἄκρον λόγον· ἤτοι

ἔστω $\mathrm{AB}:\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{A\Gamma}:\mathrm{\Gamma B}$.



Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν ΓΒ διὰ τῆς διαφορᾶς $\mathrm{AB}-\mathrm{A\Gamma}$, εὑρίσκομεν

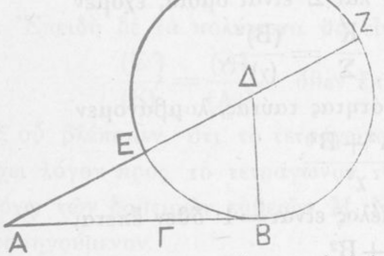
$$\mathrm{AB}:\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{A\Gamma}:(\mathrm{AB}-\mathrm{A\Gamma}),$$

$$\text{ὅθεν} \quad (\mathrm{AB}).(\mathrm{AB}-\mathrm{A\Gamma})=(\mathrm{A\Gamma})^2,$$

$$\text{ἢ} \quad (AB)^2 - (AB).(A\Gamma) = (A\Gamma)^2,$$

$$\text{τουτέστιν} \quad (AB)^2 = (A\Gamma).(AB + A\Gamma)\cdot$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ προκείμενον πρόβλημα ἀνήχθη εἰς τὸ ἑξῆς: *νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον δοθέντι τετραγώνῳ, τῷ $(AB)^2$, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ $A\Gamma$ καὶ $AB + A\Gamma$, νὰ ἔχωσι διαφορὰν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ AB.*



Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 251, ἐὰν γράψωμεν περιφέρειαν ἔχουσαν διάμετρον ἴσην τῇ ΑΒ καὶ ἔπειτα ἐφαπτομένην αὐτῆς ἴσην τῇ ΑΒ, αἱ δύο πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου θὰ εἶναι τὰ δύο τμήματα τῆς τεμνούσης, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς ἐφαπτομένης καὶ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Πρὸς τοῦτο, ὑψοῦμεν ἐκ τοῦ ἄκρου Β τῆς ΑΒ τὴν κάθετον ΒΔ, ἣν λαμβάνομεν ἴσην τῷ ἡμίσει τῆς ΑΒ· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΔΒ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις θὰ ἐφάπτηται τῇ ΑΒ εἰς τὸ Β, καὶ ἔπειτα ἄγομεν ἐκ τοῦ Α τὴν τέμνουσαν ΑΕΔΖ.

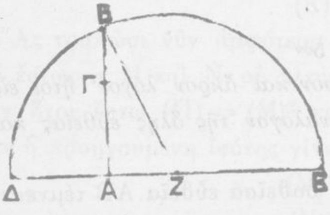
Κατὰ τὸ προειρημένον θεώρημα, θὰ εἶναι

$$(AB)^2 = (AE)\ (AZ),$$

ἤτοι $\quad (AB)^2 = (AE).(AE + EZ) = AE.(AE + AB)\cdot$

καὶ ἂν ληφθῇ $\quad A\Gamma = AE$, θὰ εἶναι

$$(AB)^2 = (A\Gamma)\ (A\Gamma + AB). \qquad \text{ὅ.ἔ.π.}$$



*Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐλύθη κατ' ἄλλον τρόπον ἐν τῷ ἐδαφ. 206· τὴν δὲ λύσιν παριστᾷ τὸ ἀπέναντι σχῆμα, ἔνθα $AZ = \frac{1}{2} AB$, ἡ δὲ ἄγνωστος ΑΓ ἰσοῦται τῇ ΑΔ.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

1) Τριγώνου τινὸς αἱ πλευραὶ εἶναι 5, 6, 7 πήχεις· ποῖαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ πρὸς αὐτὸ ὁμοίου καὶ διπλασίαν ἔχοντος ἐπιφάνειαν;

(Ἀπ. $5\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$, $7\sqrt{2}$).

2) Ἐκ δύο ὁμοίων τριγώνων, τοῦ μὲν ἑνὸς αἱ πλευραὶ εἶναι 8,10,12 πήχεις, τοῦ δὲ ἄλλου ἡ περίμετρος εἶναι $56^{\pi.}$ καὶ $\frac{1}{4}$· ποῖαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου τούτου; (Ἀπ. $15, 18\frac{3}{4}, 22\frac{1}{2}$).

3) Αἱ πλευραὶ δύο ὁμοίων τριγώνων εἶναι, τοῦ μὲν 4, 6, 7, τοῦ δὲ 12, 18, 21· ζητοῦνται αἱ πλευραὶ τοῦ πρὸς αὐτὰ ὁμοίου τριγώνου, ὅπερ ἔχει ἐπιφάνειαν ἴσην μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων.

(Ἀπ. $\sqrt{160}$, $\sqrt{360}$, $\sqrt{490}$, ἢ $4\sqrt{10}$, $6\sqrt{10}$, $7\sqrt{10}$).

4) Εὐθεῖα 65 πήχεων ἐτμήθη μέσον καὶ ἄκρον λόγον· ποῖα εἶναι τὰ μέρη αὐτῆς; (Ἀπ. 40,17 . . . καὶ 24,83 . . .).

5) Τριγώνου τινὸς αἱ πλευραὶ εἶναι 9, 10, 12 πήχεις· ἐπὶ τῆς πλευρᾶς 10 νὰ εὑρεθῇ σημεῖόν τι τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἐξ αὐτοῦ ἀγομένη παράλληλος τῇ πλευρᾷ 12, νὰ διαιρῇ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἴσα μέρη.

(Ἀπ. Τὸ ζητούμενον σημεῖον ἀπέχει ἀπὸ τῆς τομῆς τῶν δύο εἰρημένων πλευρῶν ἀπόστασιν $10-\sqrt{50}$, ἤτοι 2,92894 . . . .).

6) Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον, οὗτινος αἱ πλευραὶ εἶναι 6, 9, 12, διὰ τριῶν παραλλήλων τῇ πλευρᾷ 6, εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη.

(Ἀπ. Αἱ παράλληλοι πρέπει νὰ τέμνωσι τὴν πλευρὰν 12 εἰς σημεῖα, ὧν αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῆς ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς 6 κορυφῆς, εἶναι 6, $6\sqrt{2}$, $6\sqrt{3}$).

7) Αἱ πλευραὶ τριγώνου τινὸς εἶναι 10, 15, 18· ζητοῦνται τὰ μέρη, εἰς ἃ διαιροῦνται ὑπὸ τῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας του.

(Ἀπ. Ἡ πρώτη εἰς $\frac{60}{11}$ καὶ $\frac{50}{11}$, ἡ δευτέρα εἰς $\frac{75}{14}$ καὶ $\frac{135}{14}$, ἡ δὲ τρίτη εἰς $\frac{36}{5}$ καὶ $\frac{54}{5}$).

8) Κύκλος τις ἔχει ἀκτῖνα 10 πήχεων· ζητεῖται τὸ μῆκος τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις ἄγεται εἰς αὐτὸν ἀπὸ σημείου ἀπέχοντος ἐκ τοῦ κέντρου 18 πήχεις. (Ἀπ. 14.966 . .).

9) Δοθέντος πολυγώνου κατασκευάζομεν ἄλλο ὅμοιον καὶ ἔχον περίμετρον διπλασίαν· ποσαπλασία θὰ εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του;

(Ἀπ. Τετραπλασία).

10) Περιφερείας τινὸς ἔχομεν τρία σημεῖα Α, Β, Γ· καὶ εἶναι $AB = 5^{\pi}$ · ἐκ τοῦ Γ ἄγεται, ὡς ἔτυχεν, εὐθεῖά τις ΓΔ, συναντῶσα τὴν

ΑΒ εἰς τὸ Δ· εἶναι δὲ ΓΔ $= 3^{\pi}$, ΑΔ $= 1^{\pi}$, 5 ζητεῖται, εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἡ ΓΔ, προσεκβαλλομένη ἀπὸ τοῦ Δ, θὰ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν; (Ἀπ. 1^{π}, 75).

11) Τετράγωνόν τι ἔχει πλευρὰν 3 πήχ.· νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ὅπερ ἔχει πρὸς τοῦτο λόγον ἴσον τῷ ἀριθμῷ $\frac{2}{5}$ $\left(\text{Ἀπ. } \frac{3}{5}\sqrt{10}\right)$.

12) Τετραπλεύρου τινὸς αἱ πλευραὶ εἶναι κατὰ σειρὰν 12^{π}., 3^{π}., 8^{π}. καὶ 7^{π}· νὰ εὑρεθῶσιν αἱ πλευραὶ τοῦ πρὸς αὐτὸ ὁμοίου τετραπλεύρου, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ μεγίστη καὶ ἡ ἐλαχίστη πλευρὰ συναποτελοῦσι 18 πήχεις. $\left(\text{Ἀπ. } \frac{72}{5}, \frac{18}{5}, \frac{48}{5}, \frac{42}{5}\right)$.

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

1) Νὰ δειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ἡ πλευρὰ τετραγώνου αὐξηθῇ κατὰ τὴν διαγώνιόν του, ἡ διαγώνιος αὐξάνεται κατὰ τὸ διπλάσιον τῆς πλευρᾶς του.

2) Ἐκ τῆς χορδῆς κυκλικοῦ τόξου καὶ ἐκ τοῦ βέλους αὐτοῦ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτίς του.

Βέλος τόξου λέγεται ἡ ἐκ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς αὐτοῦ ἀγομένη κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ περατουμένη εἰς τὸ τόξον.

3) Εὑρεῖν ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗ αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι τρεῖς ἐφεξῆς ἀκέραιοι.

4) Ἐὰν προσεκβάλωμεν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, οὕτως, ὥστε νὰ γίνῃ ἡ εὐθεῖα $ΑΒΓ_1 = λ\ ΑΒ$, ἡ $ΒΓΑ_1 = μ . ΒΓ$, καὶ ἡ $ΓΑΒ_1 = ν . ΓΑ$, νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $Α_1 Β_1 Γ_1$ εἶναι $(Α_1 Β_1 Γ_1) = (ΑΒΓ)\ (1 - λ - μ - ν + λμ + μν + νλ)$.

5) Ἐὰν ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ ἀχθῇ ἡ $Β_1Γ_1$, παράλληλος τῇ ΒΓ, ἔπειτα δὲ ἡ $ΒΓ_1$ καὶ ἡ $Β_1Γ$, ἑκάτερον τῶν τριγώνων $ΑΒΓ_1$ καὶ $ΑΒ_1Γ$ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΑΒΓ καὶ $Α_1Β_1Γ_1$.

6) Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα· α) δι' εὐθείας ἀγομένης ἐξ ἑνὸς σημείου τῆς περιμέτρου· β) δι' εὐθείας καθέτου ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν.

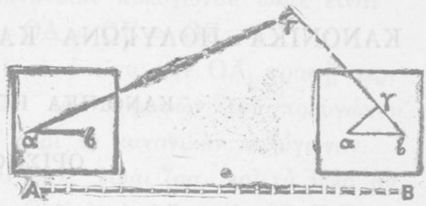
7) Ἐὰν μία τῶν διαγωνίων τετραπλεύρου διαιρῇ αὐτὸ εἰς μέρη ἰσοδύναμα, θὰ διαιρῇ καὶ τὴν ἄλλην διαγώνιον εἰς μέρη ἴσα.

8) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν καὶ ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτοῦ.

ΠΡΑΚΤΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

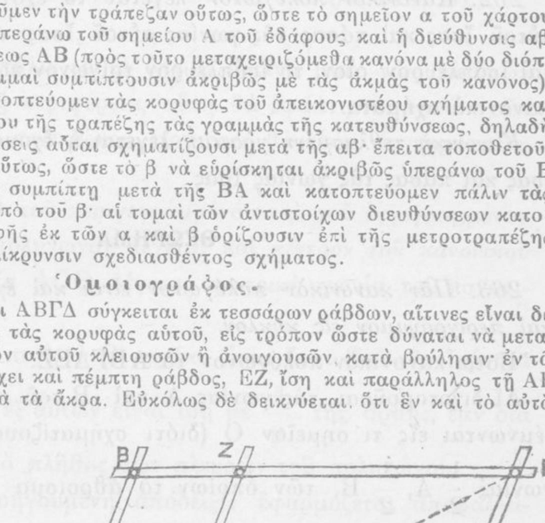
Κατάσκευὴ σχεδίου περιοχῆς τινος.

Ὅταν πρόκειται *νὰ ἀπεικονίσωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου ὁριζόντιον τμῆμα γῆς, ὑπὸ ὡρισμένην σμίκρυνσιν*, μεταχειριζόμεθα τὴν *μετροτράπεζαν*· εἶναι δὲ αὕτη πλὰξ ξυλίνη ἐπίπεδος, ἐπενδεδυμένη διὰ λείου χάρτου ἰχνογραφίας καὶ δυναμένη νὰ ὁριζοντιωθῇ ἐπὶ ἑνὸς ὑποστάτου, τῇ βοηθείᾳ ὑδροστάθμης. Ἀπόστασίν τινα ΑΒ, μετρηθεῖσαν ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐδάφους καὶ διὰ πασσάλων σημειωθεῖσαν (τὴν καλουμένην *βάσιν*), παριστῶμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου τῆς μετροτραπέζης, ὑπὸ τὴν ὡρισμένην σμίκρυνσιν, διὰ τῆς εὐθείας αβ (ἂν, λόγου χάριν, ἡ σμίκρυνσις εἶναι $^1/_{100}$, ἕκαστον μέτρον τῆς ἀποστάσεως ΑΒ παρίσταται ἐπὶ τῆς μετροτραπέζης δι' ἑνὸς δακτύλου), ἔπειτα τοποθετοῦμεν τὴν τράπεζαν οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον α τοῦ χάρτου νὰ εὑρίσκηται ἀκριβῶς ὑπεράνω τοῦ σημείου Α τοῦ ἐδάφους καὶ ἡ διεύθυνσις αβ ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς διευθύνσεως ΑΒ (πρὸς τοῦτο μεταχειριζόμεθα κανόνα μὲ δύο διόπτρας, ὧν αἱ ὀπτικαὶ γραμμαὶ συμπίπτουσιν ἀκριβῶς μὲ τὰς ἀκμὰς τοῦ κανόνος)· ἀκολούθως ἀπὸ τοῦ α κατοπτεύομεν τὰς κορυφὰς τοῦ ἀπεικονιστέου σχήματος καὶ χαράσσομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου τῆς τραπέζης τὰς γραμμὰς τῆς κατευθύνσεως, δηλαδὴ τὰς γωνίας, ἃς αἱ διευθύνσεις αὗται σχηματίζουσι μετὰ τῆς αβ· ἔπειτα τοποθετοῦμεν τὴν μετροτράπεζαν οὕτως, ὥστε τὸ β νὰ εὑρίσκηται ἀκριβῶς ὑπεράνω τοῦ Β καὶ ἡ διεύθυνσις βα, νὰ συμπίπτῃ μετὰ τῆς ΒΑ καὶ κατοπτεύομεν πάλιν τὰς κορυφὰς τοῦ σχήματος ἀπὸ τοῦ β· αἱ τομαὶ τῶν ἀντιστοίχων διευθύνσεων κατοπτεύσεως ἑκάστης κορυφῆς ἐκ τῶν α καὶ β ὁρίζουσιν ἐπὶ τῆς μετροτραπέζης τὰς κορυφὰς τοῦ ὑπὸ σμίκρυνσιν σχεδιασθέντος σχήματος.



Ὁμοιογράφος.

Παραλληλόγραμμόν τι ΑΒΓΔ σύγκειται ἐκ τεσσάρων ῥάβδων, αἵτινες εἶναι δι' ἀρθρώσεων ἡνωμέναι εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ, εἰς τρόπον ὥστε δύναται νὰ μεταβάλλῃ σχῆμα, τῶν γωνιῶν αὐτοῦ κλειουσῶν ἢ ἀνοιγουσῶν, κατὰ βούλησιν· ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ ὑπάρχει καὶ πέμπτη ῥάβδος, ΕΖ, ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΑΒ καὶ ἐπίσης ἀρθρωτὴ κατὰ τὰ ἄκρα. Εὐκόλως δὲ δεικνύεται, ὅτι ἐν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον Η τῆς ῥάβδου ΕΖ μένει διαρκῶς ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΑΓ, ὅταν τὸ παραλληλόγραμμον μεταβάλληται· ἐὰν λοιπὸν στερεώσωμεν τὴν κορυφὴν Α ἐπὶ τῆς ἰχνογραφικῆς τραπέζης καὶ θέσωμεν εἰς ἑκάτερον τῶν σημείων Η καὶ Γ αἰχμὴν μολυβδοκονδύλου, κατὰ πᾶσαν κίνησιν τοῦ παραλληλογράμμου, αἱ δύο αἰχμαὶ θὰ γράφωσι σχήματα ὅμοια καὶ ὁμοιόθετα, ἔχοντα κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ Α καὶ λόγον ὁμοιότητος ΑΕ : ΑΔ.



Διὰ τοῦ ὀργάνου τούτου, ὅπερ καλεῖται *ὁμοιογράφος*, δυνάμεθα εὐκολώτατα δοθὲν ἐπὶ τοῦ χάρτου σχῆμα νὰ σμικρύνωμεν ἢ καὶ τοὐναντίον νὰ μεγεθύνωμεν κατὰ λόγον ὡρισμένον· κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, ἡ αἰχμὴ Γ πρέπει νὰ διαγράψῃ τὸ δοθὲν σχῆμα κατὰ δὲ τὴν δευτέραν, ἡ αἰχμὴ Η μετακινοῦντες δὲ τὴν ῥάβδον ΕΖ, καθιστῶμεν τὸν λόγον ὁμοιότητος οἱονδήποτε ἀριθμὸν μεταξὺ 0 καὶ 1.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ

262. Κανονικὸν πολύγωνον λέγεται τὸ ἔχον πάσας τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας καὶ πάσας τὰς γωνίας αὐτοῦ ἴσας· τουτέστι τὸ ἰσογώνιον καὶ ἰσόπλευρον· οἷον, τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ τὸ τετράγωνον εἶναι κανονικὰ σχήματα.

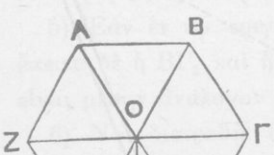
Κανονικὴ τεθλασμένη γραμμὴ λέγεται ἡ ἔχουσα πάσας τὰς πλευρὰς ἴσας καὶ πάσας τὰς γωνίας ἴσας.

ΘΕΩΡΗΜΑ

263. Πᾶν κανονικὸν πολύγωνον εἶναι καὶ ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον.

Ἔστω κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕΖ.

Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας Α καὶ Β τοῦ πολυγώνου τούτου θὰ τέμνωνται εἴς τι σημεῖον Ο (διότι σχηματίζουσι πρὸς τὴν ΑΒ τὰς γωνίας $\frac{1}{2}$ Α, $\frac{1}{2}$ Β, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν)· λέγω δέ, ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο Ο ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου· ἤτοι ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, . . ., ΟΕ εἶναι ἴσαι.



Διότι, ἂν τὸ τρίγωνον ΑΟΒ περιστραφῇ περὶ τὴν ΟΒ, ἡ μὲν ΒΑ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν περὶ τὸ Β γωνιῶν, τὸ δὲ σημεῖον Α θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν ΒΑ καὶ ΒΓ· ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΟΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΒΟΓ καὶ ἡ γωνία ΒΓΟ εἶναι διὰ τοῦτο τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας τοῦ πολυγώνου, ἤτοι ἡ ΓΟ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Γ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΟΓ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ ΓΟΔ, καὶ τοῦτο πάλιν ἐπὶ τοῦ ΔΟΕ, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε πάντα ταῦτα τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα· εἶναι δὲ καὶ ἰσοσκελῆ· διότι αἱ γωνίαι αὐτῶν, αἱ περὶ τὸ πολύγωνον, εἶναι πᾶσαι ἴσαι, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων γωνιῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου· ὥστε εἶναι

$$ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ = ΟΕ = ΟΖ.$$

Ἐὰν ἄρα, μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΟΑ, γραφῇ περιφέρεια, αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ πασῶν τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου· τουτέστι θὰ εἶναι περιγεγραμμένη περὶ τὸ κανονικὸν πολύγωνον.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ κτλ. εἶναι ἴσα, καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν, ἤτοι αἱ κάθετοι, αἱ ἀπὸ τοῦ Ο ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ,... ἀγόμεναι, θὰ εἶναι ἴσαι.

Ἐὰν δὲ μὲ κέντρον πάλιν τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα μίαν τῶν καθέτων τούτων, τὴν ΟΗ, γραφῇ περιφέρεια, αὕτη θὰ ἐφάπτηται πασῶν τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τουτέστι θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς αὐτό.

Τὸ κοινὸν κέντρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς κανονικὸν πολύγωνον λέγεται καὶ *κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου*. Ἡ δὲ γωνία ΑΟΒ λέγεται *κεντρικὴ* γωνία τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

Ἐπειδὴ δὲ πᾶσαι αἱ περὶ τὸ Ο γωνίαι εἶναι ἴσαι (διὰ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων), ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ $\frac{4}{\mu}$ τῆς ὀρθῆς, ἐὰν διὰ τοῦ μ παραστήσωμεν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις ἐφαρμόζεται ἀπαραλλάκτως ἐπὶ πάσης κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς, ὥστε καὶ εἰς πᾶσαν τοιαύτην γραμμὴν ἐγγράφεται κύκλος καὶ περιγράφεται κύκλος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

264. *Ἐὰν περιφέρεια κύκλου διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη* (περισσότερα τῶν δύο), *αἱ χορδαὶ αὐτῶν σχηματίζουσι κανονικὸν πολύγωνον.*

Αἱ μὲν πλευραὶ τοῦ οὕτω σχηματιζομένου πολυγώνου θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, διότι εἶναι χορδαὶ ἴσων τόξων· αἱ δὲ γωνίαι αὐτοῦ θὰ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὴν περιφέρειαν καὶ βαίνουσιν ἐπὶ τόξων ἴσων, ἐπειδὴ τὸ τόξον, ἐφ' οὗ ἑκάστη βαίνει, εἶναι ὅλη ἡ περιφέρεια ἠλαττωμένη κατὰ δύο μέρη αὐτῆς.

Ἄρα τὸ πολύγωνον τοῦτο εἶναι κανονικόν.

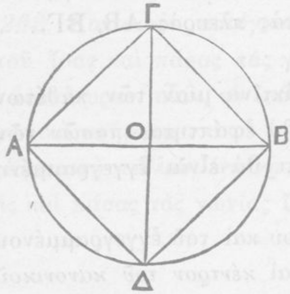
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Τὸ πρόβλημα: *νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον κανονικὸν πολύγωνον, ἔχον μ πλευράς,* εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἑπομένῳ: *νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα περιφέρεια εἰς μ ἴσα μέρη.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

265. Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.

Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἀρκεῖ νὰ διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια τοῦ δοθέντος κύκλου εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ νὰ ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ αὐτῶν.



Πρὸς τοῦτο, ἄγομεν τυχοῦσαν διάμετρον, τὴν ΑΒ, καὶ ἔπειτα, κάθετον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, τὴν διάμετρον ΓΔ (142)· αὗται διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη (διότι αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι, αἱ ἐπ' αὐτῶν βαίνουσαι, εἶναι ἴσαι) καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν ΑΓ, ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ σχηματίζουσι τετράγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΟΓ πορίζόμεθα $(ΑΓ)^2 = 2\,(ΑΘ)^2$· ὅθεν καὶ

$$(ΑΓ) = (ΑΟ)\,\sqrt{2}\cdot$$

ἤτοι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραγώνου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 2.

Εἶναι δὲ $\sqrt{2} = 1{,}4142$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

266. Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.

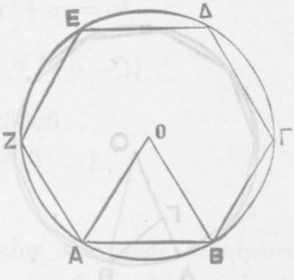
Ἀρκεῖ νὰ διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια αὐτοῦ εἰς ἓξ ἴσα μέρη.

Ἔστω ΑΒ τὸ ἕκτον τῆς περιφερείας Ο· τότε ἡ χορδὴ ΑΒ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου. Ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ, ἡ γωνία ΑΟΒ θὰ εἶναι τὸ ἕκτον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν, ἤτοι $\frac{4}{6}$ ἢ $\frac{2}{3}$ μιᾶς ὀρθῆς· ἑπομένως αἱ λοιπαὶ δύο γωνίαι τοῦ τριγώνου ΟΑΒ, αἱ Α καὶ Β, θὰ ἔχωσιν ἄθροισμα $2 - \frac{2}{3}$ ἢ $\frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς· καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι (διότι ΟΑ = ΟΒ), ἑκατέρα ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ $\frac{4}{3}$, ἤτοι $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΟΑΒ θὰ εἶναι ἰσογώνιον, ἐπομένως καὶ ἰσόπλευρον· ἤτοι

$$AB = OA = OB.$$

Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι

ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου ἰσοῦται τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου.



Ἐὰν λοιπόν, μὲ κέντρον σημεῖόν τι τῆς δοθείσης περιφερείας, ἔστω τὸ Α, καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν τοῦ κύκλου, γράψωμεν περιφέρειαν, καὶ τὰ σημεῖα Β καὶ Ζ, ἔνθα αὕτη τέμνει τὴν δοθεῖσαν, συνάψωμεν πρὸς τὸ Α, θὰ ἔχωμεν δύο πλευρὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου· λαμβάνοντες ἔπειτα τὴν κορυφὴν Β ὡς κέντρον καὶ γράφοντες ἴσην περιφέρειαν, εὑρίσκομεν τὴν κορυφὴν Γ καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

267. Νὰ ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.

Ἐγγράφομεν πρῶτον κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ἔπειτα ἐπιζευγνύομεν τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἐναλλὰξ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΓΕ, ΕΑ· τὸ τρίγωνον ΑΓΕ θὰ εἶναι ἰσόπλευρον· διότι ἕκαστον τῶν τόξων ΑΒΓ, ΓΔΕ, ΕΖΑ σύγκειται ἐκ δύο ἕκτων τῆς περιφερείας καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσον τῷ τρίτῳ αὐτῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΓ εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἀκτῖνος ΟΑ, ὡς ἑξῆς.

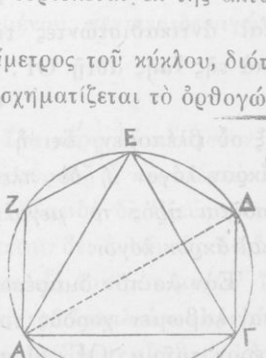
Ἐὰν ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΔ (ἥτις θὰ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου, διότι τὸ τόξον ΑΒΓΔ εἶναι ἥμισυ τῆς περιφερείας), σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΔ καὶ ἐκ τούτου εὑρίσκομεν:

$$(A\Gamma)^2 = (A\Delta)^2 - (\Gamma\Delta)^2.$$

ἐπειδὴ δὲ $A\Delta = 2 . OA$ καὶ $\Gamma\Delta = OA$, ἔπεται

$$(A\Gamma)^2 = 4 . (OA)^2 - (OA)^2 = 3(OA)^2$$

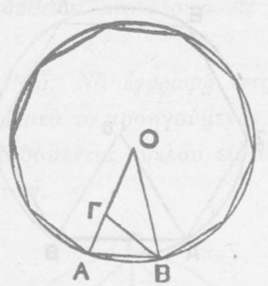
$$\text{ὅθεν} \quad A\Gamma = OA . \sqrt{3}.$$



ἤτοι *ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 3. Εἶναι δὲ $\sqrt{3} = 1,73205\ldots$*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

268. Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκάγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.



Ἔστω τὸ τόξον ΑΒ τὸ δέκατον τῆς περιφερείας, ἐπομένως ἡ χορδὴ ΑΒ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου.

Ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΒ, ἡ ἐπ' αὐτοῦ βαίνουσα, θὰ εἶναι τὸ δέκατον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν, ἤτοι τὰ $\frac{4}{10}$ ἢ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς· ἄρα αἱ γωνίαι Α καὶ Β τοῦ τριγώνου ΑΟΒ ἔχουσιν ἄθροισμα $2-\frac{2}{5}$, ἤτοι $\frac{8}{5}$ τῆς ὀρθῆς καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι, ἑκατέρα αὐτῶν εἶναι $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς, ἤτοι διπλασία τῆς ΑΟΒ. Ἐὰν δὲ διχοτομηθῇ ἡ γωνία Β διὰ τῆς ΒΓ, ἀμφότερα τὰ τρίγωνα ΟΓΒ, ΓΑΒ, θὰ εἶναι ἰσοσκελῆ· τὸ μὲν ΟΓΒ, διότι αἱ γωνίαι του Ο καὶ ΟΒΓ εἶναι ἀμφότεραι $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς, τὸ δὲ ΑΒΓ, διότι ἑκατέρα τῶν γωνιῶν του, Α καὶ ΑΓΒ, εἶναι ἴση μὲ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς (διότι ἡ ΑΒΓ, ἐκτὸς οὖσα τοῦ τριγώνου ΟΓΒ, ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν). Διὰ ταῦτα εἶναι ΟΓ = ΓΒ = ΒΑ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ΒΓ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Β τοῦ τριγώνου ΑΟΒ, ἔχομεν (252)

$$BO:BA = \Gamma O:\Gamma A\cdot$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν ΒΟ διὰ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΟ καὶ τὴν ΒΑ διὰ τῆς ἴσης αὐτῇ ΟΓ, λαμβάνομεν

$$OA:O\Gamma = O\Gamma:\Gamma A\cdot$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἡ ἀκτὶς ΟΑ διαιρεῖται κατὰ τὸ Γ, μέσον καὶ ἄκρον λόγον· *ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ μεγαλήτερον μέρος τῆς ἀκτῖνος, διαιρεθείσης μέσον καὶ ἄκρον λόγον.*

Ἐὰν λοιπὸν διαιρέσωμεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ μέσον καὶ ἄκρον λόγον καὶ λάβωμεν χορδὰς τοῦ κύκλου συνεχεῖς καὶ ἴσας πρὸς τὸ μεγαλήτερον τμῆμα ΟΓ, αἱ χορδαὶ αὗται θὰ σχηματίσωσι τὸ κανονικὸν ἐγγεγραμμένον δεκάγωνον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ δεκαγώνου εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἀναλογίας (1) ὡς ἑξῆς: παριστῶντες τὴν ἀκτῖνα ΟΑ διὰ τοῦ α καὶ τὴν ΑΒ διὰ τοῦ χ, γράφομεν τὴν ἀναλογίαν ὡς ἕπεται

$$α:χ = χ:(α - χ),$$

ἐξ ἧς $\quad χ^2 = α(α - χ) \quad$ ἢ $\quad χ^2 + αχ = α^2,$

ὅθεν (Στοιχ. Ἀλγ. σελ. 169), $\quad χ = \frac{1}{2} α\,(\sqrt{5} - 1)$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\quad \sqrt{5} = 2{,}23606\ldots,$

θὰ εἶναι $\quad χ = α\,(0{,}61803\ldots).$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

269. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον κανονικὸν πεντάγωνον.

Ἀφοῦ διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια εἰς δέκα ἴσα μέρη, ὡς ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι, δύο τοιαῦτα μέρη συνεχῆ ἀποτελοῦσι τὰ $\frac{2}{10}$, ἤτοι τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς περιφερείας· ἄρα ἡ χορδὴ τοῦ ὑπ' αὐτῶν ἀποτελουμένου τόξου εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

270. Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν πεντεκαιδεκάγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ $\frac{1}{6}$ τῆς περιφερείας ἀφαιρεθῇ τὸ $\frac{1}{10}$ αὐτῆς, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι $\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$ ἢ $\frac{4}{60}$ ἤτοι $\frac{1}{15}$ τῆς περιφερείας καὶ ἡ χορδὴ αὐτοῦ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πεντεκαιδεκαγώνου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Ἔχοντες τὴν περιφέρειαν διῃρημένην εἰς ἴσα μέρη, ἐὰν ἕκαστον τῶν ἴσων τόξων ὑποδιαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα, θὰ εὑρεθῇ ἡ περιφέρεια διῃρημένη εἰς διπλάσιον ἀριθμὸν ἴσων μερῶν. Ἐπειδὴ δὲ εἰξεύρομεν νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα, ἕπεται, ὅτι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν αὐτὴν καὶ εἰς 4, 8, 16, 32, . . ., ἤτοι εἰς ἀριθμὸν μερῶν ἴσον μὲ δύναμίν τινα τοῦ 2, ἤτοι $2^μ$. Ὁμοίως ἀπὸ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀρχόμενοι, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 3, 6, 12, 24, 48 . ., ἤτοι εἰς $3\ 2^μ$ ἴσα μέρη. Ὁμοίως ἀπὸ τοῦ πενταγώνου ἀρχόμενοι, διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 5, 10, 20, 40, 80, . . ., ἤτοι εἰς

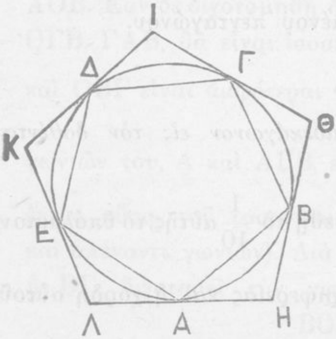
$5 . 2^{\mu}$ ἴσα μέρη· ἀπὸ δὲ τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου διαιροῦμεν αὐτὴν εἰς 15, 30, 60,..., ἤτοι εἰς $3 . 5 . 2^{\mu}$ ἴσα μέρη (*).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

271. *Δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, νὰ κατασκευασθῇ ἄλλο κανονικὸν πολύγωνον, ἔχον ἴσον πλῆθος πλευρῶν καὶ περιγεγραμμένον περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον.*

Ἔστω κανονικὸν τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον ΑΒΓΔΕ· αἱ εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου τούτου ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου σχηματίζουσι τὸ πολύγωνον ΗΘΙΚΛ, τὸ ὁποῖον λέγω, ὅτι εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ὅτι εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον, εἶναι φανερόν· ὅτι δὲ ἔχει τόσας πλευράς, ὅσας καὶ τὸ δοθέν, φαίνεται ἐκ τούτου, ὅτι πρὸς ἑκάστην πλευρὰν τοῦ δοθέντος ἀντιστοιχεῖ μία κορυφὴ τοῦ νέου (πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ κορυφὴ Η, πρὸς τὴν ΒΓ ἡ Θ, καὶ καθεξῆς) μένει λοιπὸν νὰ δείξωμεν, ὅτι εἶναι καὶ κανονικόν.



Τὰ τρίγωνα ΗΑΒ, ΘΒΓ, ΙΓΔ..., τὰ περὶ τὰς πλευρὰς τοῦ δοθέντος γινόμενα, εἶναι ἴσα ἀλλήλοις καὶ ἰσοσκελῆ· διότι τὰ ΗΑΒ καὶ ΙΓΔ, ἵνα ταῦτα θεωρήσωμεν, ἔχουσι τὴν ΑΒ ἴσην τῇ ΓΔ, ὡς πλευρὰς τοῦ δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου, καὶ τὰς γωνίας Α καὶ Β ἴσας μὲ τὰς Γ καὶ Δ· διότι καὶ αἱ τέσσαρες αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις, ὡς σχηματιζόμεναι ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης (138), καὶ διὰ τοῦτο ἴσαι τῷ ἡμίσει τῆς ἐπικέντρου, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ ἑτέρου τῶν ἴσων τόξων ΑΒ ἢ ΓΔ· ἄρα τὰ

(*) Μέχρι τῶν ἀρχῶν τοῦ παρελθόντος αἰῶνος ἐνομίζετο, ὅτι μόνον τὰ κανονικὰ ταῦτα πολύγωνα (γνωστὰ ἀπὸ τῶν Ἑλλήνων) δύνανται νὰ ἐγγραφῶσιν εἰς κύκλον διὰ τῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν, ἐν αἷς γίνεται χρῆσις εὐθειῶν μόνον καὶ περιφερειῶν. Ἀλλ' ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Gauss ἀπέδειξεν, ὅτι διὰ τοιούτων κατασκευῶν, δύναται νὰ διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια εἰς μ ἴσα μέρη, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς μ εἶναι ἢ πρῶτος ἀριθμός, περιεχόμενος ἐν τῷ τύπῳ $2\mu+1$ (οἷοι εἶναι οἱ 5,17,257...), ἢ γινόμενον τοιούτων πρώτων παραγόντων, λαμβανομένου ἑκάστου ἅπαξ, ἢ γινόμενον τοιούτων ἀριθμῶν, ἐπὶ τὴν τυχοῦσαν δύναμιν τοῦ 2.

τρίγωνα ΑΗΓ, ΓΙΔ εἶναι ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ· τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει καὶ περὶ τῶν ἄλλων τριγώνων ΘΒΓ, ΚΔΕ κτλ.

Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΗΒ, ΒΘΓ, ΓΙΔ,... συνάγεται ὅτι αἱ γωνίαι Η, Θ, Ι,... τοῦ νέου πολυγώνου, εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις καὶ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΗ, ΗΒ, ΒΘ, ΘΓ... εἶναι πᾶσαι ἴσαι· ἄρα καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ νέου πολυγώνου εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις· διότι ἑκάστη σύγκειται ἐκ δύο τοιούτων εὐθειῶν.

Τὸ πρόβλημα λύεται καὶ ἄλλως· ἐὰν δηλονότι ἐκ τῶν μέσων τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ,.. ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου, αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται θὰ σχηματίσωσιν (ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται) κανονικὸν πολύγωνον ἔχον ἴσον πλῆθος πλευρῶν καὶ περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ ἀντίστροφον πρόβλημα: «*ἐκ τοῦ δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου ΗΘΙΚΛ, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον, νὰ κατασκευάσωμεν ἄλλο κανονικόν, ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ ἔχον ἴσον πλῆθος πλευρῶν*», λύομεν ἐπιζευγνύοντες τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς Α, Β, Γ.. διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ... ἢ ἄγοντες ἐκ τοῦ κέντρου τὰς εὐθείας ΟΗ, ΟΘ, ΟΙ... καὶ ἐπιζευγνύοντες τὰ σημεῖα, ἔνθα αὗται τέμνουσι τὴν περιφέρειαν. Τὰς ἀποδείξεις τῶν κατασκευῶν τούτων, ὡς εὐκόλως εὑρισκομένας, παραλείπομεν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

272. *Δύο κανονικὰ πολύγωνα, ἔχοντα ἴσον πλῆθος πλευρῶν, εἶναι ὅμοια.*

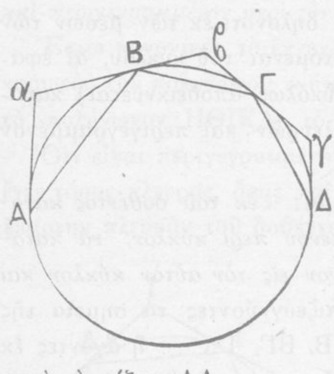
Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου, ἔχοντος μ πλευράς, εἶναι $2\mu-4$, ἑκάστη γωνία ἑκατέρου τῶν κανονικῶν πολυγώνων θὰ εἶναι $\frac{2\mu-4}{\mu}$ ἢ $2-\frac{4}{\mu}$ ὀρθαί. Ἄρα τὰ πολύγωνα ταῦτα ἔχουσι τὰς γωνίας των ἴσας, ἔχουσι δὲ καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους· διότι ὁ λόγος μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἑνὸς πρὸς μίαν τοῦ ἄλλου εἶναι πάντοτε ὁ αὐτός.

Ἄρα τὰ δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια.

ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

273. *Ἐγγεγραμμένη εἰς τόξον* λέγεται πᾶσα τεθλασμένη γραμμή, ἥτις προκύπτει, ἐὰν διαιρεθῇ τὸ τόξον εἰς μέρη καὶ ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ αὐτῶν· τοιαύτη εἶναι ἡ τεθλασμένη ΑΒΓΔ εἰς τὸ τόξον ΑΔ.



Περιγεγραμμένη δὲ περὶ τὸ τόξον λέγεται πᾶσα τεθλασμένη γραμμή, ἥτις προκύπτει, ἐὰν τὸ τόξον διαιρεθῇ εἰς μέρη καὶ εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι μέχρις οὗ συναντηθῶσι· τοιαύτη εἶναι ἡ ΑαβγΔ περὶ τὸ τόξον ΑΔ.

Ἀντιστοιχοῦσαι λέγονται δύο γραμμαί, ἐὰν εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ τόξον, ἡ μὲν ἐγγεγραμμένη, ἡ δὲ περιγεγραμμένη, ἐγγίζωσι δὲ ἀμφότεραι τὸ τόξον εἰς τὰ αὐτὰ σημεῖα.

Τοιαῦται εἶναι αἱ γραμμαὶ ΑΒΓΔ καὶ ΑαβγΔ.

274. *Ἀνάπτυγμα τόξου* λέγεται εὐθεῖά τις, ἥτις εἶναι μεγαλητέρα μὲν πάσης τεθλασμένης γραμμῆς, ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτό, μικροτέρα δὲ πάσης περιγεγραμμένης περὶ αὐτό.

Μῆκος δὲ *τόξου* λέγεται τὸ μῆκος τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Ἐὰν τὸ τόξον ΑΔ αὐξάνῃ, μέχρις οὗ τὰ δύο ἄκρα αὐτοῦ συμπέσωσι, καταντᾷ περιφέρεια, αἱ δὲ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμέναι καὶ περιγεγραμμέναι γραμμαὶ καταντῶσι πολύγωνα· ὅθεν ἕπονται οἱ ἑξῆς ὁρισμοί.

275. *Ἀνάπτυγμα περιφερείας* λέγεται εὐθεῖά τις, ἥτις εἶναι μεγαλητέρα μὲν τῆς περιμέτρου παντὸς εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, μικροτέρα δὲ τῆς περιμέτρου παντὸς περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν.

Μῆκος δὲ τῆς περιφερείας λέγεται τὸ μῆκος τῆς αὐτῆς εὐθείας.

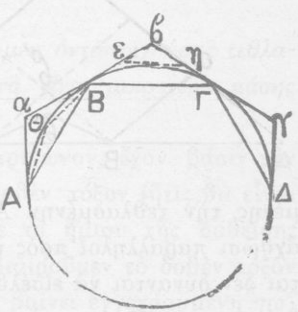
Ὅτι δὲ δι᾽ ἕκαστον τόξον (ἑπομένως καὶ διὰ τὴν ὅλην περιφέρειαν), ὑπάρχει μία τοιαύτη γραμμή, καὶ μία μόνη, ἀποδεικνύεται ἐν τοῖς ἑπομένοις θεωρήμασιν.

* ΘΕΩΡΗΜΑ

276. Πάσης εἰς τόξον ἐγγεγραμμένης γραμμῆς ὑπάρχει ἄλλη ἐγγεγραμμένη μεγαλητέρα, καὶ πάσης περιγεγραμμένης ὑπάρχει ἄλλη περιγεγραμμένη μικροτέρα.

Καὶ πᾶσα ἐγγεγραμμένη εἶναι μικροτέρα πάσης περιγεγραμμένης.

1) Ἔστω ἐγγεγραμμένη ἡ ΑΒΓΔ εἰς τὸ τόξον ΑΔ· ἐὰν ἓν τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη (ἢ καὶ περισσότερα) καὶ ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ αὐτῶν, γίνεται ἐγγεγραμμένη γραμμή, ἡ ΑΘΒΓΔ μεγαλητέρα τῆς πρώτης· διότι ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἀντικατεστάθη ὑπὸ τῆς τεθλασμένης ΑΘ + ΘΒ.

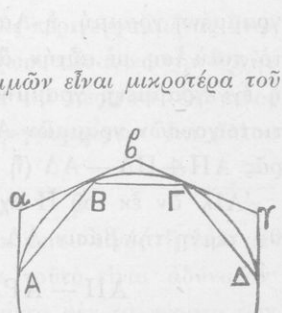


2) Ἔστω περιγεγραμμένη ἡ ΑαβγΔ εἰς τὸ τόξον ΑΔ· ἐὰν ἑνὸς τῶν τόξων, ἔστω τοῦ ΒΓ, ἀχθῇ ἐφαπτομένη τις, ὡς ἡ εη, γίνεται νέα περιγεγραμμένη γραμμή, ἡ ΑαεηγΔ, ἥτις εἶναι μικροτέρα τῆς πρώτης· διότι ἡ τεθλασμένη εβ + βη ἀντικατεστάθη ὑπὸ τῆς εὐθείας εη.

3) Ἡ ἐγγεγραμμένη ΑΒΓΔ εἶναι μικροτέρα πάσης περιγεγραμμένης εἰς τὸ αὐτὸ τόξον, οἷον τῆς ΑαβγδΔ· διότι ἀχθείσης τῆς χορδῆς ΑΔ, γίνεται πολύγωνον κυρτόν, τὸ ΑΒΓΔΑ, ὅπερ περικλείεται πανταχόθεν ὑπὸ τῆς τεθλασμένης ΑαβγΔΑ (ἐδ. 95).

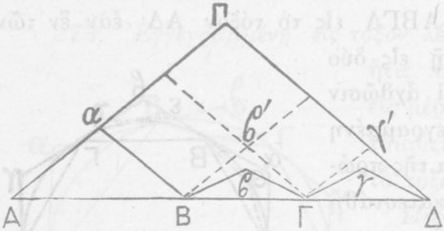
* ΘΕΩΡΗΜΑ

277. Ἡ διαφορὰ δύο ἀντιστοιχουσῶν γραμμῶν εἶναι μικροτέρα τοῦ διπλασίου ὕψους τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν ἴσην τῇ ἐγγεγραμμένῃ, γωνίας δὲ παρὰ τὴν βάσιν ἴσας τῇ ἐγγεγραμμένῃ γωνίᾳ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ μεγίστου τῶν μερῶν τοῦ τόξου.



Ἔστωσαν ἀντιστοιχοῦσαι αἱ τεθλασμέναι γραμμαὶ ΑΒΓΔ καὶ ΑαβγΔ καὶ ἐκ τῶν μερῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, τοῦ τόξου ΑΔ, ἔστω μέγιστον (ἢ μηδενὸς τῶν ἄλλων μικρότερον) τὸ ΑΒ.

Τοῦ τριγώνου ΑαΒ, ἑκατέρα τῶν γωνιῶν Α καὶ Β ἰσοῦται (138) μὲ ἐγγεγραμμένην βαίνουσαν ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ· ὡσαύτως τοῦ τριγώνου ΒβΓ, ἑκατέρα τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἰσοῦται μὲ ἐγγεγραμμένην βαίνουσαν ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓ, καὶ οὕτω καθεξῆς· ἑπομένως πάντα τὰ τρίγωνα ΑαΒ, ΒβΓ, ΓγΔ,..., εἶναι ἰσοσκελῆ, καὶ τὸ ΑαΒ ἔχει γωνίας Α καὶ Β, παρὰ τὴν βάσιν, μεγαλητέρας ἢ τὰ ἄλλα.



Ἂς τεθῶσι τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑαΒ, ΒβΓ... ἐπ' εὐθείας, ὥστε αἱ μὲν βάσεις αὐτῶν (αἱ πλευραὶ τῆς ἐγγεγραμμένης γραμμῆς) νὰ ἀποτελέσωσι τὴν εὐθεῖαν ΑΔ, αἱ δὲ πλευραὶ τῆς περιγεγραμμένης, τὴν τεθλασμένην ΑαΒβΓγΔ. Ἐὰν ἐκ τῶν σημείων Β, Γ,..., ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὰς εὐθείας Αα καὶ Ββ, αἱ παράλληλοι αὗται δὲν δύνανται νὰ εἰσέλθωσιν ἐντὸς τῶν τριγώνων ΒβΓ, ΓγΔ,..., διότι, σχηματίζουσι πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν γωνίας ἴσας τῇ Α, τουτέστι μεγαλητέρας τῶν γωνιῶν βΒΓ, γΓΒ,..., ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΒβΓ, ΓγΔ,..., κεῖνται ἐντὸς τῶν τριγώνων Ββ′Γ, Γγ′Δ... καὶ διὰ τοῦτο ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑαΒβΓγΔ εἶναι μικροτέρα τῆς τεθλασμένης ΑαΒβ′Γγ′Δ ... (96).

Ἀλλ' ἡ τεθλασμένη αὕτη γραμμὴ ἰσοῦται τῇ ΑΠ + ΠΔ· διότι αἱ μὲν Αα + Ββ′ + Γγ′ ἀποτελοῦσιν (ὡς ἐκ τῶν παραλλήλων ἀμέσως φαίνεται) τὴν ΑΠ, αἱ δὲ Βα + Γβ′ + Δγ′, τὴν ΠΔ· ἑπομένως ἡ περιγεγραμμένη γραμμή, ἡ ΑαΒβΓγΔ, εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΠ + ΠΔ (ἢ τὸ πολὺ ἴση μὲ αὐτήν, ἂν πάντα τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα)· εἶναι δὲ καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη γραμμὴ ἴση τῇ εὐθείᾳ ΑΔ· ἄρα ἡ διαφορὰ τῶν ἀντιστοιχουσῶν γραμμῶν ΑΒΓΔ καὶ ΑαβγΔ εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς ΑΠ + ΠΔ − ΑΔ (ἢ τὸ πολὺ ἴση μὲ αὐτήν).

Ἀλλ' ἂν ἐκ τοῦ Π ἀχθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΠΔ, θὰ τέμνῃ τὴν βάσιν ΑΔ κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς Ρ, καὶ θὰ εἶναι

$$\text{ΑΠ} - \text{ΑΡ} < \text{ΠΡ} \quad \text{καὶ} \quad \text{ΔΠ} - \text{ΔΡ} < \text{ΠΡ}\cdot$$

$$\text{ὅθεν} \qquad \text{ΑΠ} + \text{ΔΠ} - \text{ΑΡ} - \text{ΔΡ} < 2\,\text{ΠΡ},$$

$$\text{τουτέστιν} \qquad \text{ΑΠ} + \text{ΔΠ} - \text{ΑΔ} < 2\,\text{ΠΡ}\cdot$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἀντιστοιχουσῶν γραμμῶν εἶναι μικροτέρα τοῦ διπλασίου ὕψους τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΠΔ, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν ἴσην τῇ ἐγγεγραμμένῃ γραμμῇ, γωνίας δὲ παρὰ τὴν βάσιν τὰς Α καὶ Β, ἴσας τῇ ἐγγεγραμμένῃ γωνίᾳ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ μεγίστου μέρους ΑΒ τοῦ τόξου ΑΔ.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου αὐξάνῃ, αὐξανούσης τῆς βάσεως αὐτοῦ καὶ διατηρουμένων τῶν γωνιῶν του, συνάγεται, ὅτι τὸ θεώρημα ἀληθεύει, καὶ ὅταν ὡς βάσις τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ληφθῇ γραμμὴ μεγαλητέρα τῆς ἐγγεγραμμένης.

* ΠΡΟΒΛΗΜΑ

278. Δοθέντος τόξου, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀντιστοιχούσας τεθλασμένας γραμμάς, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ νὰ εἶναι μικροτέρα πάσης δοθείσης εὐθείας Μ.

Πρὸς τοῦτο, κατασκευάζομεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἔχον βάσιν μὲν ἴσην περιγεγραμμένῃ τινὶ γραμμῇ εἰς τὸ δοθὲν τόξον (ἥτις θὰ εἶναι μεγαλητέρα πάσης ἐγγεγραμμένης), ὕψος δὲ τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης εὐθείας Μ, ἔστω δὲ τοῦτο τὸ ΑΠΔ· ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ δοθὲν τόξον εἰς μέρη ἴσα ἢ μικρότερα τοῦ τόξου, ἐφ' οὗ βαίνει ἐγγεγραμμένη γωνία ἴση τῇ Α· αἱ χορδαὶ τῶν μερῶν τούτων ἀποτελοῦσιν ἐγγεγραμμένην γραμμήν, ἥτις θὰ διαφέρῃ ἀπὸ τῆς ἀντιστοιχούσης αὐτῇ περιγεγραμμένης διαφορὰν μικροτέραν τῆς δοθείσης εὐθείας Μ.

* ΘΕΩΡΗΜΑ

279. Δοθέντος τόξου ὑπάρχει εὐθεῖά τις μεγαλητέρα μὲν πάσης εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένης γραμμῆς, μικροτέρα δὲ πάσης περιγεγραμμένης· μία δὲ καὶ μόνη ὑπάρχει τοιαύτη εὐθεῖα.

Ἐὰν νοήσωμεν τάς τε ἐγγεγραμμένας καὶ τὰς περιγεγραμμένας ἀναπτυσσομένας ἐπὶ εὐθείας καὶ οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωσι πᾶσαι κοινὴν ἀρχὴν σημεῖόν τι Α, τὰ πέρατα τῶν ἐγγεγραμμένων θὰ πέσωσιν ἐπί τινος μέρους τῆς εὐθείας, τὰ δὲ πέρατα τῶν περιγεγραμμένων ἐπὶ ἄλλου (διότι πᾶσα ἐγγεγραμμένη εἶναι μικροτέρα πάσης περιγεγραμμένης)· θὰ χωρίζωνται δὲ τὰ δύο ταῦτα μέρη ἢ ὑπὸ σημείου τινός, ἢ ὑπὸ μέρους τινὸς τῆς εὐθείας· λέγω, ὅτι τὸ δεύτερον τοῦτο εἶναι ἀδύνατον· διότι, ἂν ἐχωρίζοντο ὑπὸ τοῦ μέρους βγ, πάντα μὲν τὰ πέρατα τῶν ἐγγεγραμμένων θὰ ἔπιπτον ἐπὶ τοῦ Αβ, πάντα δὲ τὰ πέρατα τῶν περιγεγραμμένων πέραν τοῦ γ· ἡ δὲ διαφορὰ τῆς τυχούσης ἐγγεγραμμένης καὶ τῆς τυχούσης περιγεγραμμένης θὰ ἦτο πάντοτε μεγαλητέρα τῆς

δ

Α β γ

βγ, ὅπερ ἄτοπον (278)· ἄρα τὰ δύο εἰρημένα μέρη χωρίζονται ὑπὸ σημείου τινὸς δ καὶ ἡ εὐθεῖα Αδ εἶναι ἑπομένως μεγαλητέρα μὲν πασῶν τῶν ἐγγεγραμμένων, μικροτέρα δὲ πασῶν τῶν περιγεγραμμένων. Οὐδεμία δὲ ἄλλη τοιαύτη εὐθεῖα ὑπάρχει· διότι πᾶσα μικροτέρα αὐτῆς, ὡς ἡ Αβ, εἶναι μικροτέρα τινῶν ἐκ τῶν ἐγγεγραμμένων (ὧν τὰ πέρατα πίπτουσιν μεταξὺ β καὶ δ), πᾶσα δὲ μεγαλητέρα αὐτῆς, ὡς ἡ Αγ, εἶναι μεγαλητέρα τινῶν ἐκ τῶν περιγεγραμμένων (ὧν τὰ πέρατα πίπτουσι μεταξὺ γ καὶ δ).

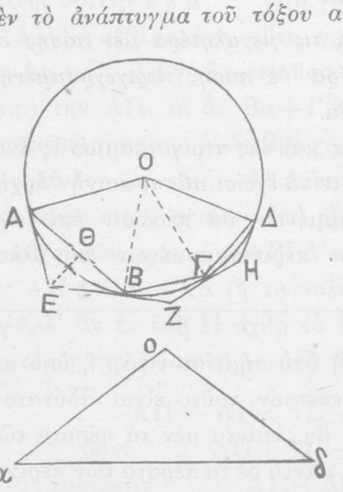
* ΠΟΡΙΣΜΑ

280. Δοθέντος τόξου, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν εὐθεῖαν διαφέρουσαν τοῦ ἀναπτύγματος αὐτοῦ διαφορὰν μικροτέραν πάσης δοθείσης εὐθείας Μ.

Ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν δύο ἀντιστοιχούσας τεθλασμένας γραμμάς, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ νὰ εἶναι μικροτέρα τῆς Μ· ἑκατέρα τῶν γραμμῶν τούτων, ἀναπτυσσομένη ἐπὶ εὐθείας θὰ δώσῃ ἀνάπτυγμα διαφέρον ἀπὸ τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ τόξου διαφορὰν μικροτέραν τῆς εὐθείας Μ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

281. Πᾶς κυκλικὸς τομεὺς εἶναι ἰσοδύναμος τριγώνῳ ἔχοντι βάσιν μὲν τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τόξου αὐτοῦ, ὕψος δὲ τὴν ἀκτῖνα.



Ἔστω κυκλικὸς τομεὺς ὁ ΟΑΔ καὶ ἀνάπτυγμα τοῦ τόξου αὐτοῦ ἡ εὐθεῖα αδ. Ἐὰν κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς αδ τρίγωνον, ἔχον ὕψος ἴσον τῇ ἀκτῖνι, λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον τοῦτο οαδ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸν τομέα.

Ἂς διαιρεθῇ τὸ τόξον ΑΔ τοῦ τομέως εἰς ὁσαδήποτε μέρη, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸ ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔ, ἂς περιγραφῇ δὲ καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα ΑΕΖΗΔ. Αἱ γραμμαὶ αὗται, μετὰ τῶν ἀκτίνων τοῦ τομέως, σχηματίζουσι δύο πολύγωνα, τὸ μὲν ΟΑΒΓΔΟ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν τομέα, τὸ δὲ ΟΑΕΖΗΔΟ περιγεγραμμένον περὶ αὐτόν.

Ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΑΟΔ εἶναι προφανῶς μεγαλήτερος μὲν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, μικρότερος δὲ τοῦ περιγεγραμμένου· καὶ τὸ τρίγωνον οαδ τὴν αὐτὴν ἔχει σχέσιν πρὸς τὰ ρηθέντα πολύγωνα.

Διότι, τὸ μὲν περιγεγραμμένον διαιρεῖται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΟΕ,ΟΖ,ΟΗ, εἰς τρίγωνα ἔχοντα ὕψος ἴσον τῇ ἀκτῖνι· ἄρα τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι

$$\frac{1}{2}\,\text{ΑΕ.ΟΑ} + \frac{1}{2}\,\text{ΕΖ.ΟΑ} + \frac{1}{2}\,\text{ΖΗ.ΟΑ} + \frac{1}{2}\,\text{ΗΔ.ΟΑ},$$

$$\text{ἤτοι}\quad \frac{1}{2}\,\text{ΟΑ}.(\text{ΑΕ}+\text{ΕΖ}+\text{ΖΗ}+\text{ΗΔ})\cdot$$

ἑπομένως μεγαλήτερον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου αοδ, διότι ἡ περιγεγραμμένη ΑΕΖΗΔ εἶναι μεγαλητέρα τοῦ ἀναπτύγματος αδ.

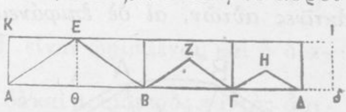
Τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον διαιρεῖται ὑπὸ τῶν ἀκτίνων ΟΒ, ΟΓ εἰς ἰσοσκελῆ τρίγωνα, ἔχοντα ὕψος μικρότερον τῆς ἀκτῖνος· ἄρα τὸ ἐμβαδὸν αὐτῶν εἶναι μικρότερον τοῦ

$$\frac{1}{2}\,\text{ΑΒ.ΟΑ} + \frac{1}{2}\,\text{ΒΓ.ΟΑ} + \frac{1}{2}\,\text{ΓΔ.ΟΑ},$$

$$\text{ἤτοι τοῦ}\quad \frac{1}{2}\,\text{ΟΑ}.(\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}+\text{ΓΔ})\cdot$$

ἑπομένως μικρότερον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου οαδ· διότι ἡ ἐγγεγραμμένη ΑΒΓΔ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀναπτύγματος αδ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι ἀμφότερα, καὶ τὸ τρίγωνον οαδ καὶ ὁ τομεύς, εἶναι μεγαλήτερα μὲν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, μικρότερα δὲ τοῦ περιγεγραμμένου· ἑπομένως αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν διαφέρουσιν (ἂν διαφέρωσιν) ὀλιγώτερον ἢ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο πολυγώνων· ἀλλ' ἡ διαφορὰ τῶν δύο πολυγώνων δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα πάσης ἐπιφανείας, ὅταν τὰ μέρη εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τὸ τόξον ΑΔ, γίνωσιν ἀρκούντως μικρά· διότι, ἂν θέσωμεν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας τὰ τὴν διαφορὰν ταύτην ἀποτελοῦντα ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΖΓ,... ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων ΑΒ, ΒΓ,... εἶναι μικρότερον τοῦ ἀναπτύγματος αδ, βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια



ὅλων τῶν τριγώνων τούτων εἶναι μικροτέρα τοῦ ὀρθογωνίου ΑΚιδ, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν τὸ ἀνάπτυγμα αδ τοῦ τόξου, ὕψος δὲ τὸ μέγιστον ἐκ τῶν ὑψῶν τῶν τριγώνων, ὅπερ ἔστω τὸ ΕΘ· τοῦ ὀρθογωνίου δὲ τούτου ἡ μὲν βάσις Αδ μένει ἀμετάβλητος, τὸ δὲ ὕψος ΕΘ δύναται νὰ γίνῃ μικρότερον πάσης δοθείσης εὐθείας· ὥστε ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ γίνεται μικροτέρα πάσης δοθείσης ἐπιφανείας· ἑπομένως καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ..., τουτέστιν ἡ διαφορὰ τῶν δύο πολυγώνων, γίνεται μικροτέρα πάσης δοθείσης ἐπιφανείας.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου περιγεγραμμένου δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης ἐπιφανείας καὶ πάντοτε μεταξὺ αὐτῶν περιλαμβάνονται καὶ ὁ τομεὺς καὶ τὸ τρίγωνον, συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ τομέως καὶ τοῦ τριγώνου οαδ εἶναι μικροτέρα πάσης ἐπιφανείας· ἤτοι, ὁ τομεὺς καὶ τὸ τρίγωνον οὐδεμίαν ἔχουσι διαφορὰν κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν· ἑπομένως εἶναι ἰσοδύναμα καὶ αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν παρίστανται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

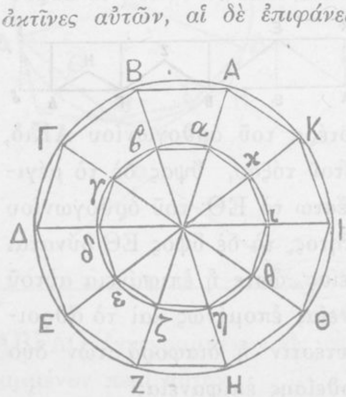
282. *Ὁ κύκλος εἶναι ἰσοδύναμος τριγώνῳ, ἔχοντι βάσιν μὲν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας αὐτοῦ, ὕψος δὲ τὴν ἀκτῖνα· ἢ ὀρθογωνίῳ, ἔχοντι βάσιν μὲν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας, ὕψος δὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.*

Ἀρκεῖ νὰ νοηθῇ ὁ τομεὺς αὐξανόμενος, μέχρις οὗ αἱ δύο ἀκτῖνες αὐτοῦ συμπέσωσιν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου συνίσταται εἰς τὴν κατασκευὴν τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς τὸν δοθέντα κύκλον. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται διὰ τῶν προηγουμένων, εἰς τὴν κατασκευὴν εὐθείας ἴσης τῷ ἀναπτύγματι τῆς περιφερείας. Διότι, ἂν ἠδυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν ταύτην, τὸ ἐπ' αὐτῆς, ὡς βάσεως, κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον, τὸ ἔχον ὕψος τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸν κύκλον· τρέποντες δὲ τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἰς τετράγωνον, θὰ εἴχομεν τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ κύκλῳ· ἀλλ' ἡ γεωμετρικὴ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου, ἤτοι ἡ κατασκευὴ τοῦ πρὸς κύκλον ἰσοδυνάμου τετραγώνου, ὡς καὶ ἡ κατασκευὴ τοῦ ἀναπτύγματος τῆς περιφερείας, διὰ τῆς βοηθείας τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου, ἀπεδείχθη ἀδύνατος ὑπὸ τοῦ γερμανοῦ μαθηματικοῦ Lindemann.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Ἱπποκράτους τοῦ Χίου).

283. *Τῶν κύκλων, αἱ μὲν περιφέρειαι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων.*



Ἂς τεθῶσι δύο κύκλοι οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσωσι τὰ κέντρα αὐτῶν καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ κέντρου ἀκτῖνες, διαιροῦσαι τὰς περιφερείας εἰς μέρη ὁσαδήποτε· αἱ χορδαὶ τῶν μερῶν τούτων σχηματίζουσι πολύγωνα ἐγγεγραμμένα καὶ ὅμοια (διότι ἑκάτερον ἐξ αὐτῶν προκύπτει ἐκ τοῦ ἄλλου, ἐὰν αἱ εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἀγόμεναι ἀκτῖνες πολλαπλασιασθῶσι πᾶσαι ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν)

(242). Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν τὰς περιμέτρους αὐτῶν διὰ Σ καὶ σ, τὰς δὲ ἐπιφανείας αὐτῶν διὰ Ε καὶ ε καὶ τὰς ἀκτῖνας διὰ Α καὶ α, θὰ εἶναι (247)

$$\frac{\sigma}{\Sigma}=\frac{\alpha}{A} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\varepsilon}{E}=\frac{\alpha^2}{A^2},$$

ὅθεν ἕπεται $\quad \sigma=\left(\frac{\alpha}{A}\right).\Sigma \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon=\left(\frac{\alpha^2}{A^2}\right).E. \quad (\iota)$

Αἱ ἰσότητες δὲ αὗται ἀληθεύουσιν, ὅσον μικραὶ καὶ ἂν γίνωσιν αἱ πλευραὶ τῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων· ἀλλ' ὅταν τὰ μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ πλευραὶ διαιροῦσι τὰς περιφερείας, γίνωσιν ἀρκούντως μικρά, αἱ περίμετροι σ καὶ Σ διαφέρουσιν ἀπὸ τῶν περιφερειῶν (ὧν τὰ μήκη παριστῶ διὰ γ καὶ Γ) διαφορὰν μικροτέραν πάσης δοθείσης εὐθείας· ἂν λοιπὸν θέσωμεν

$$\gamma-\sigma=\delta \quad \text{ἢ} \quad \sigma=\gamma-\delta,$$
$$\Gamma-\Sigma=\Delta \quad \text{ἢ} \quad \Sigma=\Gamma-\Delta,$$

αἱ διαφοραὶ δ καὶ Δ δύνανται νὰ γίνωσιν ὅσον θέλωμεν μικραί.

Διὰ τὰς ἰσότητας ταύτας, ἡ πρώτη τῶν ἰσοτήτων (ι) γίνεται

$$\gamma-\delta=\left(\frac{\alpha}{A}\right).(\Gamma-\Delta) \quad \text{ἢ} \quad \gamma-\left(\frac{\alpha}{A}\right).\Gamma=\delta-\left(\frac{\alpha}{A}\right).\Delta.$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἀριθμῶν γ καὶ $\left(\frac{\alpha}{A}\right)$ Γ εἶναι ὅσον θέλομεν μικρὰ (ἄν, λόγου χάριν, θέλωμεν νὰ ἀποδείξωμεν αὐτὴν μικροτέραν τοῦ $\frac{1}{\nu}$, ἀρκεῖ νὰ ἐγγράψωμεν πολύγωνα, διὰ τὰ ὁποῖα αἱ διαφοραὶ δ καὶ Δ νὰ εἶναι μικρότεραι τοῦ $\frac{1}{\nu}$).

Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ γ καὶ $\left(\frac{\alpha}{A}\right)$. Γ εἶναι ὡρισμένοι, καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι ἀριθμὸς ὡρισμένος· εἶναι δὲ καὶ μικρότερος παντὸς ἀριθμοῦ· ἀλλ' ἀριθμὸς ὡρισμένος, ὅστις νὰ εἶναι μικρότερος παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ, δὲν ὑπάρχει ἄλλος πλὴν τοῦ 0 (διότι παντὸς ἄλλου δύναται νὰ εὑρεθῇ μικρότερος)· ὅθεν ἡ διαφορά, περὶ ἧς ὁ λόγος, θὰ εἶναι 0·

ὥστε εἶναι $\quad \gamma-\left(\frac{\alpha}{A}\right).\Gamma=0, \quad$ ἤτοι $\frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{\alpha}{A}.$

Ὁμοίως ἐκ τῆς δευτέρας τῶν ἰσοτήτων (ι) συμπεραίνεται ἡ ἰσότης

$$\frac{\kappa}{K}=\frac{\alpha^2}{A^2}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὰ εἰς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας ἀντιστοιχοῦντα τόξα δύο κύκλων λέγονται *ὅμοια* (οἷον, τὰ τόξα ΑΒΓΔ καὶ αβγδ), ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, οἱ ἴσας ἔχοντες γωνίας, λέγονται *ὅμοιοι*. Ἀποδεικνύεται δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὅτι τὰ ὅμοια τόξα εἶναι πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν· διότι καὶ αἱ περίμετροι τῶν εἰς αὐτὰ ἐγγραφομένων γραμμῶν, ὅταν ταῦτα διαιρεθῶσιν εἰς μέρη δι' ὁσωνδήποτε ἀκτίνων (π. χ., αἱ $ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ$ καὶ $αβ+βγ+γδ$), ἔχουσι τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων (παράβλ. 245)· Ἔτι δὲ καὶ οἱ ὅμοιοι τομεῖς εἶναι πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ

284. Ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι ὁ αὐτὸς εἰς πάντας τοὺς κύκλους.

Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος $\dfrac{γ}{Γ}=\dfrac{α}{Α}$, εὑρίσκομεν $\dfrac{γ}{α}=\dfrac{Γ}{Α}$, ἐξ ἧς καὶ $\dfrac{γ}{2α}=\dfrac{Γ}{2Α}$,

τουτέστιν ὁ λόγος, ὃν ἔχει ἡ περιφέρεια $γ$ πρὸς τὴν διάμετρον αὐτῆς $2α$, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῆς τυχούσης περιφερείας $Γ$ πρὸς τὴν διάμετρον αὐτῆς $2Α$. Τουτέστιν αἱ περιφέρειαι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀκτίνας αὐτῶν ἢ καὶ πρὸς τὰς διαμέτρους.

Ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρόν της παρίσταται ἐν τοῖς συγγράμμασι πάντων τῶν ἐθνῶν διὰ τοῦ ἑλληνικοῦ γράμματος π. Ἀποδεικνύεται δέ, ὅτι εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος (ἤτοι ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά).

Παρακατιόντες, θὰ δείξωμεν, πῶς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὅσα θέλομεν ψηφία αὐτοῦ· εὑρίσκεται δὲ ὅτι $π=3{,}1415926535897932\ldots$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ ὁ λόγος ἑκάστου τόξου πρὸς τὴν ἀκτῖνά του εἶναι ὁ αὐτὸς εἰς πάντα τὰ ὅμοια τόξα· διότι ἐκ τῆς ἰσότητος

$$\frac{(\text{τοξ}\ αβ)}{(\text{τοξ.}\ ΑΒ)}=\frac{α}{Α},\quad \text{συνάγεται}\quad \frac{(\text{τοξ.}\ αβ)}{α}=\frac{(\text{τοξ.}\ ΑΒ)}{Α}.$$

ΜΕΤΡΑ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

285. Ἐὰν ἡ ἀκτὶς κύκλου παρασταθῇ διὰ τοῦ α, τὸ μὲν μῆκος τῆς περιφερείας αὐτοῦ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου $2πα$.
τὸ δὲ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ἐκ τοῦ τύπου $πα^2$,

Διότι, παριστῶντες τὸ μὲν μῆκος τῆς περιφερείας διὰ τοῦ $γ$, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου διὰ τοῦ $κ$, ἔχομεν $\dfrac{γ}{2α}=π$, ὅθεν $γ=2πα$,

πρὸς τούτοις εἶναι (282) $κ=\dfrac{1}{2}γ\cdot α=\dfrac{1}{2}\cdot 2πα\cdot α=πα^2$.

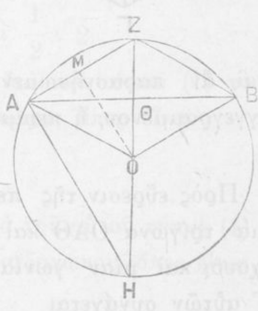
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς ἰσοῦται τῇ μονάδι τοῦ μήκους, ἔχει περιφέρειαν μὲν $2π$, ἐμβαδὸν δὲ $π$.

* ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ π ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΙΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

286. *Ἐκ τοῦ ἀποστήματος κανονικοῦ πολυγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον* (τουτέστιν ἐκ τοῦ ἀποστήματος τοῦ κέντρου αὐτοῦ ἀπὸ τῶν πλευρῶν του) *καὶ ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου, εὑρεῖν τὸ ἀπόστημα τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, ὅπερ ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.*

Ἔστω ΑΒ μία τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου καὶ ΟΘ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ· ἐὰν ἡ ΟΘ προσεκβληθῇ μέχρι τῆς περιφερείας, θὰ διαιρέσῃ τὸ τόξον ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη, ΑΖ καὶ ΖΒ, καὶ αἱ χορδαὶ ΑΖ, ΖΒ, θὰ εἶναι πλευραὶ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, ὅπερ ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν· ὥστε ἡ ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἐπὶ τὴν ΑΖ ἠγμένη κάθετος ΟΜ, θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον ἀπόστημα.



Τὴν μὲν ἀκτῖνα ΟΑ παριστῶμεν διὰ τοῦ α, τὸ δοθὲν ἀπόστημα ΟΘ διὰ τοῦ ϱ, τὸ δὲ ζητούμενον ΟΜ διὰ τοῦ ϱ΄.

Ἐὰν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ ΖΑΗ ἀχθῇ ἡ χορδὴ ΑΗ, θὰ εἶναι (198)

$$(\mathrm{AH})^2 = 2\alpha\ (\alpha+\varrho)\cdot$$

ἀλλ' εἶναι καὶ ΑΗ $= 2\varrho'$ (διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΖΜΟ καὶ ΖΑΗ)· ὅθεν $4\varrho'^2 = 2\alpha\ (\alpha+\varrho)$,

$$\text{ὅθεν}\quad \varrho' = \sqrt{\frac{\alpha\ (\alpha+\varrho)}{2}}.$$

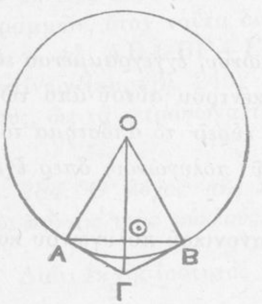
Ἐὰν ἡ ἀκτὶς α εἶναι ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους, ἔχομεν

$$\varrho' = \sqrt{\frac{1+\varrho}{2}}\cdot \qquad (1)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

287. Ἐκ τοῦ ἀποστήματος ρ κανονικοῦ τινος ἐγγεγραμμένου πολυγώνου εὑρεῖν τὴν περίμετρον αὐτοῦ Σ καὶ τὴν τοῦ ἀντιστοιχοῦντος περιγεγραμμένου Σ΄.

Ἔστω ΑΒ μία τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου· ἐὰν εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓ, ΒΓ, ἑκατέρα τούτων θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἀντιστοιχοῦντος περιγεγραμμένου.



Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΘ ἔχομεν ἐν πρώτοις

$$(\mathrm{A\Theta})^2 = (\mathrm{OA})^2 - (\mathrm{O\Theta})^2 = \alpha^2 - \rho^2$$

ὅθεν $\mathrm{A\Theta} = \sqrt{\alpha^2 - \rho^2}$

καὶ $\mathrm{AB} = 2\sqrt{\alpha^2 - \rho^2}$.

καὶ ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἡ περίμετρος αὐτοῦ Σ θὰ δοθῇ ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\Sigma = 2\,\nu.\sqrt{\alpha^2 - \rho^2}. \tag{2}$$

Πρὸς εὕρεσιν τῆς περιμέτρου Σ΄ παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΑΘ καὶ ΟΑΓ εἶναι ὅμοια· διότι, πλὴν τῆς ὀρθῆς, ἔχουσι καὶ μίαν γωνίαν ἴσην, τὴν εἰς τὸ Ο. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος δ᾽ αὐτῶν συνάγεται

$$\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{A\Theta}} = \frac{\alpha}{\rho}.$$

$$\text{ὅθεν καὶ} \quad \mathrm{A\Gamma} = \frac{\alpha}{\rho}\,\mathrm{A\Theta}\cdot$$

πολλαπλασιάζοντες δὲ τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ 2ν καὶ ἐνθυμούμενοι, ὅτι 2ν.ΑΘ ἰσοῦται τῇ περιμέτρῳ Σ, καὶ 2ν.ΑΓ ἰσοῦται τῇ Σ΄, εὑρίσκομεν τὸν τύπον

$$\Sigma' = \frac{\alpha}{\rho}.\Sigma. \tag{3}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

288. Εὑρεῖν τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον κατὰ δρθεῖσαν προσέγγισιν.

Ἐὰν ἡ ἀκτὶς κύκλου εἶναι ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους, ἡ περιφέρεια αὐτοῦ ἔχει μῆκος 2π· εἶναι δὲ ἡ περιφέρεια μεγαλητέρα μὲν τῆς περιμέτρου παντὸς ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, μικροτέρα δὲ τῆς περιμέτρου παντὸς περιγεγραμμένου (275). Ἐὰν λοιπὸν εὕρωμεν δύο ἀντιστοιχοῦντα κανονικὰ πολύγωνα, τῶν ὁποίων αἱ περίμετροι νὰ διαφέρωσιν ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{\mu}$, ὁ ἀριθμὸς 2π θὰ διαφέρῃ ἀφ' ἑκατέρας τῶν περιμέτρων τούτων ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{\mu}$, ἑπομένως λαμβάνοντες τὸ 2π ἴσον τῇ μιᾷ τῶν περιμέτρων, ποιοῦμεν λάθος μικρότερον τοῦ $\frac{1}{\mu}$.

Ἐγγράφοντες τετράγωνον εἰς κύκλον εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του, ἤτοι (265) $\frac{1}{2}\alpha\sqrt{2}$· καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς ὑπετέθη ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους, τὸ ἀπόστημα τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Ἔχοντες τὸ ἀπόστημα τοῦτο, εὑρίσκομεν διὰ τοῦ τύπου (1) τὸ ἀπόστημα τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ὀκταγώνου, ὅπερ εἶναι

$$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot$$

ἐκ τοῦ ἀποστήματος τούτου εὑρίσκομεν πάλιν διὰ τοῦ αὐτοῦ τύπου (1) τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου δεκαεξαγώνου, ὅπερ εἶναι

$$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot$$

καὶ ἐκ τούτου εὑρίσκομεν ὁμοίως τὸ ἀπόστημα τοῦ 32γώνου, ὅπερ εἶναι

$$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdot$$

καὶ οὕτω καθεξῆς· ὁ δὲ νόμος καθ' ὃν προχωροῦσιν αἱ παραστάσεις αὗται τῶν ἀποστημάτων, εἶναι προφανής· ὥστε δυνάμεθα ἀμέσως νὰ γράψωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀποστήματος τοῦ δοθέντος ἐγγεγραμμένου πολυγώνου (ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι δύναμίς τις τοῦ 2).

Ἐκ τοῦ ἀποστήματος ἑκάστου ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου εὑρίσκεται ἡ περίμετρος αὐτοῦ διὰ τοῦ τύπου (2) καὶ ἡ περίμετρος τοῦ ἀντιστοιχοῦντος περιγεγραμμένου διὰ τοῦ τύπου (3).

Ἐάν, κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον, ὑπολογίσωμεν τὰ ἀποστήματα καὶ τὰς περιμέτρους τῶν κανονικῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων ἅτινα ἔχουσι 4, 8, 16, 32, 64, 128... πλευρὰς καὶ τὰς περιμέτρους τῶν πρὸς αὐτὰ ἀντιστοιχούντων περιγεγραμμένων, σχηματίζομεν τὸν ἑξῆς πίνακα.

ἀρ. πλευρῶν	ἀπόστημα	περίμ. ἐγγεγρ.	περίμ. περιγεγρ.
4	0,707106...	5,656854...	8.
8	0,923887...	6,122934...	6,627145...
16	0,980785...	6,242888...	6,365194...
32	0,995185...	6,273095...	6,303448...
64	0,998795...	6,280662...	6,288236...
128	0,999699...	6,282553...	6,284446...
256	0,999925...	6,283027...	6,283500...
512	0,999981...	6,283145...	6,283264...
1024	0,999995...	6,283175...	6,283205...
2048	0,999999...	6,283182...	6,283190 ..

Ἐν τῷ πίνακι τούτῳ βλέπομεν ὅτι ἡ περιφέρεια, ἡ ἔχουσα ἀκτῖνα 1 εἶναι μικροτέρα μὲν τοῦ 6,283190. . (ὅπερ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ εἰς αὐτὴν περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, ὅπερ ἔχει 2048 πλευράς), μεγαλητέρα δὲ τοῦ 6,283182. . (ὅπερ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ ἴσον πλῆθος πλευρῶν ἔχοντος ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου)· καὶ ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια αὕτη ἔχει διάμετρον 2, ὁ λόγος αὐτῆς πρὸς τὴν διάμετρόν της εἶναι μικρότερος μὲν τοῦ 3,141595, μεγαλήτερος δὲ τοῦ 3,141591. . , ἄρα λαμβάνοντες $\pi = 3,14159$ . ., ποιοῦμεν λάθος μικρότερον τοῦ $\frac{1}{100000}$. (*)

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

289. Ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν λαμβάνεται συνήθως ἡ ὀρθὴ γωνία. Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος οἱασδήποτε γωνίας πρὸς τὴν ὀρθήν, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ τόξου, ἐφ' οὗ βαίνει (ὅταν ἡ κορυφὴ αὐτῆς τεθῇ εἰς τὸ κέντρον τοῦ τυχόντος κύκλου), πρὸς τὸ τεταρτημόριον τῆς περιφερείας (225), συμπεραίνομεν, ὅτι, ἀντὶ νὰ συγκρίνωμεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν πρὸς τὴν ὀρθήν, δυνάμεθα νὰ συγκρίνωμεν τὸ τόξον, ἐφ' οὗ ἡ γωνία βαίνει, πρὸς τὸ τεταρτημόριον, ὁ δὲ ἐκ τῆς συγκρίσεως ταύτης προκύπτων ἀριθμὸς παριστᾷ τὴν γωνίαν.

Ἐν ταῖς πρακτικαῖς ἐφαρμογαῖς τῆς γεωμετρίας γίνεται τοῦτο ὡς ἑξῆς: Περιφέρειάν τινα διαιροῦμεν εἰς 360 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *μοῖραι*, ἑκάστην μοῖραν διαιροῦμεν εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *λεπτὰ πρῶτα* καὶ ἕκαστον λεπτὸν πρῶτον εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *λεπτὰ δεύτερα*.

Ἡ διαίρεσις αὕτη τῆς περιφερείας ἐγένετο ὑπὸ τῶν Βαβυλωνίων.

(*) Ὁ Ἀρχιμήδης πρῶτος ἀνεκάλυψε τὴν ἰσότητα τοῦ κύκλου πρὸς τὸ τρίγωνον, οὗ βάσις ἡ περιφέρεια καὶ ὕψος ἡ ἀκτίς (282), καὶ εὗρε τὸν εἰς τὸν π προσεγγίζοντα ἀριθμὸν $\frac{22}{7}$ (ὅστις εἶναι μεγαλήτερος τοῦ π)· ἔδειξε δὲ ἐν τῷ συγγράμματι αὐτοῦ «Κύκλου μέτρησις», ὅτι περιλαμβάνεται ὁ π μεταξὺ $3+\frac{10}{71}$ καὶ $3+\frac{1}{7}$. Μετὰ τοῦτον, εὗρεν ὁ Μέτιος τὸν μᾶλλον προσεγγίζοντα ἀριθμὸν $\frac{355}{113}$. Ἄλλοι δὲ μαθηματικοὶ ὑπελόγισαν ἔπειτα τὸν π μὲ πολὺ μεγαλητέραν προσέγγισιν καὶ σήμερον εἶναι γνωστὸς μὲ 500 καὶ πλέον δεκαδικὰ ψηφία.

῞Ινα δὲ μετρήσωμεν δοθεῖσαν γωνίαν, θέτομεν τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ κέντρον τῆς ὡς εἴρηται διῃρημένης περιφερείας καὶ βλέπομεν πόσων μοιρῶν καὶ λεπτῶν πρώτων καὶ δευτέρων, εἶναι τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας περιεχόμενον τόξον. Ἐάν, παραδείγματος χάριν, εἶναι 36 μοιρῶν, τοῦτο σημαίνει, ὅτι ἡ γωνία εἶναι $\frac{36}{90}$ τῆς ὀρθῆς. Ἐὰν δὲ τὸ τόξον εἶναι 32 μοιρῶν, 25 λεπτῶν πρώτων (ὅπερ σημειοῦται ὡς ἑξῆς: $32^o25'$), ἡ γωνία εἶναι $\frac{32}{90}$ τῆς ὀρθῆς καὶ $\frac{25}{60}$ τοῦ $\frac{1}{90}$ αὐτῆς, τουτέστιν εἶναι $\frac{32}{90}+\frac{25}{60.90}$ τῆς ὀρθῆς.

290. Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν τὰς γωνίας καὶ ἄλλως· ἐὰν δηλαδή, μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς δοθείσης γωνίας καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν μονάδα τῶν εὐθειῶν, γράψωμεν κύκλον, τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας περιλαμβανόμενον τόξον ἔχει μῆκος ὡρισμένον, καὶ ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων αὐτὸ (τουτέστιν ὁ λόγος τοῦ τόξου τούτου πρὸς τὴν ἀκτῖνά του) δύναται νὰ ληφθῇ καὶ ὡς παριστῶν τὴν γωνίαν. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ὅλη περιφέρεια ἔχει μῆκος 2π (π ὄντος τοῦ γνωστοῦ ἀριθμοῦ), τὸ τεταρτημόριον ἔχει μῆκος $\frac{\pi}{2}$ καὶ ὁ ἀριθμὸς οὗτος $\frac{\pi}{2}$ παριστᾷ τὴν ὀρθὴν γωνίαν. Ἡ γωνία μιᾶς μοίρας, ὡς ἐνενηκοστὸν τῆς ὀρθῆς, παρίσταται διὰ $\frac{\pi}{180}$· ἑπομένως ἡ γωνία τῶν μ μοιρῶν παρίσταται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ ϑ, ὅστις εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἰσότητος $\vartheta=\frac{\pi\mu}{180}$.

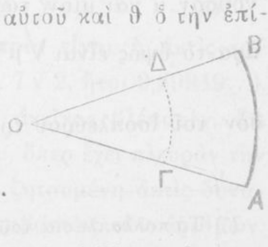
Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον καὶ αἱ γωνίαι μετροῦνται μὲ τὴν μονάδα τῶν εὐθειῶν, εἶναι δὲ συνήθης ἐν τῇ ἀνωτέρᾳ μαθηματικῇ.

* Ὅταν αἱ γωνίαι μετρῶνται μὲ τὴν μονάδα τῶν εὐθειῶν, ἰσχύει τὸ ἑξῆς θεώρημα.

* ΘΕΩΡΗΜΑ

291. Τὸ μῆκος παντὸς κυκλικοῦ τόξου εἶναι γινόμενον τῆς ἀκτῖνός του ἐπὶ τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν του.

Ἔστω ΑΒ τυχὸν κυκλικὸν τόξον, α ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ καὶ ϑ ὁ τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν ΑΟΒ παριστῶν ἀριθμός· λέγω ὅτι θὰ εἶναι μῆκος τόξου $AB=\alpha.\vartheta$.



Διότι, ἂν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν μονάδα τῶν εὐθειῶν, γράψωμεν τὸ τόξον ΓΔ, θὰ εἶναι (θεώρημα 283, σημ.):

$$\frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)}=\frac{(OA)}{(O\Gamma)} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{(AB)}{\vartheta}=\frac{\alpha}{1}, \text{ ὅθεν καὶ } (AB)=\alpha\vartheta$$

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

1) Ἡ ἀκτὶς κύκλου τινὸς εἶναι 8 πήχεις· πόση εἶναι ἡ περιφέρεια αὐτοῦ καὶ πόση ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ;

Ἡ ἀκτὶς α παντὸς κύκλου καὶ ἡ περιφέρεια αὐτοῦ γ καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ κ, συνδέονται πρὸς ἄλληλα διὰ τῶν ἰσοτήτων

$$\gamma = 2\pi\alpha \quad \text{καὶ} \quad \kappa = \pi\alpha^2. \qquad (\iota)$$

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν θέτοντες $\alpha = 8$,

$$\gamma = 16\pi = 50^{\pi\chi},26548\ldots, \ \kappa = 64\pi = 201^{\tau\pi},06192\ldots \ (*)$$

2) Ἡ περιφέρεια κύκλου τινὸς εἶναι 15 πήχεις· πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ καὶ πόση ἡ ἀκτίς του;

Ἐκ τῆς πρώτης τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων (ι), λαμβάνομεν $\alpha = \dfrac{\gamma}{2\pi}$ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τῆς ἀκτῖνος εἰς τὴν δευτέραν, λαμβάνομεν $\kappa = \dfrac{\gamma^2}{4\pi}$· ὑποθέτοντες δὲ $\gamma = 15$, εὑρίσκομεν

$$\alpha = 2^{\pi\chi},3873\ldots \quad \text{καὶ} \quad \kappa = 17^{\tau\pi},9049\ldots.$$

3) Ἡ ἐπιφάνεια κύκλου τινὸς εἶναι 40 τετρ. πήχεις· πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς καὶ πόση ἡ περιφέρεια αὐτοῦ;

Ἐκ τῶν αὐτῶν ἰσοτήτων (ι) εὑρίσκομεν $\alpha = \sqrt{\dfrac{\kappa}{\pi}}$ καὶ $\gamma = 2\sqrt{\kappa\pi}$· ὑποθέτοντες δὲ $\kappa = 40$, εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις,

$$\alpha = 3^{\pi\chi},568\ldots \quad \gamma = 22^{\pi\chi},42\ldots$$

4) Ἰσόπλευρόν τι τρίγωνον καὶ τετράγωνον καὶ κανονικὸν ἑξάγωνον εἶναι ἰσοπερίμετρα, ἡ δὲ περίμετρος αὐτῶν εἶναι $24^{\pi\chi}$· νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν.

Ἐκ τῆς περιμέτρου τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν αὐτοῦ, ἣν παριστῶ διὰ μ.

Καὶ ἂν μὲν εἶναι τετράγωνον, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι μ^2.

Ἂν δὲ εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον, εὑρίσκομεν τὸ ὕψος αὐτοῦ ἐκ τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος, διότι, ἂν ἀχθῇ, διαιρεῖ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς δύο ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα καὶ ἑκατέρου τούτων ἔχομεν τὴν ὑποτείνουσαν μ καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν (τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς μ)· ἄρα τὸ ὕψος εἶναι $\sqrt{\mu^2 - \left(\dfrac{\mu}{2}\right)^2}$, ἤτοι $\dfrac{1}{2}\mu\sqrt{3}$· ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι $\dfrac{1}{4}\mu^2\sqrt{3}$.

(*) Τὰ πολλαπλάσια τοῦ ἀριθμοῦ π εὑρίσκονται ἐν τοῖς λογαριθμικοῖς πίναξι τοῦ Dupuis, ἐν σελίδι 132, τὰ δὲ πολλαπλάσια τοῦ $\dfrac{1}{\pi}$ ἐν σελίδι 133.

Διὰ τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου του φέρωμεν εὐθείας εἰς τὰς κορυφάς του, διαιρεῖται εἰς ἓξ ἴσα ἰσόπλευρα τρίγωνα (266), ὧν πλευρὰ εἶναι ἡ μ· ἄρα τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι

$$6 \cdot \frac{1}{4}\, \mu^2 \sqrt{3}, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{3}{2}\, \mu^2 \sqrt{3}.$$

Ἐφαρμόζοντες νῦν τοὺς τύπους τούτους εἰς τὸ προκείμενον ζήτημα καὶ παρατηροῦντες, ὅτι τοῦ μὲν ἰσοπλεύρου τριγώνου ἡ πλευρὰ εἶναι $8^{\pi\chi}$, τοῦ δὲ τετραγώνου 6, τοῦ δὲ κανονικοῦ ἑξαγώνου 4, εὑρίσκομεν τρίγ. $= 27^{\tau\pi},7128\ldots$, τετράγ. $= 36^{\tau\pi}$, ἑξάγ. κανον. $= 41^{\tau\pi},5692\ldots$

5) Εἰς κύκλον ἔχοντα ἀκτῖνα 3 πήχεις ἐγγράφονται ἰσόπλευρον τρίγωνον, τετράγωνον καὶ ἑξάγωνον κανονικόν· νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν.

Αἱ πλευραὶ τῶν ἐγγεγραμμένων τούτων πολυγώνων εἶναι γνωσταὶ ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου, ἣν παριστῶ διὰ τοῦ α, εἶναι δὲ κατὰ σειρὰν αἱ ἑξῆς $\quad \alpha\sqrt{3}, \quad \alpha\sqrt{2} \quad$ καὶ $\quad \alpha$.

Ἑπομένως τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν εὑρίσκονται ἐκ τῶν πλευρῶν των κατὰ τοὺς προηγουμένους τύπους καὶ εἶναι

ἐγγ. τρίγ. $= \frac{3}{4}\alpha^2\sqrt{3}$, ἐγγ. τετρ. $= 2\alpha^2$, ἐγγ. ἑξάγ. καν. $= \frac{3}{2}\alpha^2\sqrt{3}\cdot$

καὶ ἐπειδὴ ἐδόθη $\alpha = 3$, εὑρίσκομεν (*)

ἐγγ. τρίγ. $= 11,69134\ldots$, ἐγγ. τετρ. $= 18$,

ἐγγ. ἑξάγ. καν. $= 32,38268\ldots$

6) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος (τοῦ μικροτέρου τοῦ ἡμικυκλίου), οὗτινος ἡ χορδὴ εἶναι ἴση τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ εἰρημένου τμήματος εἶναι τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς διαφορᾶς τοῦ κύκλου ἀπὸ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου· ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν του εἶναι $\frac{1}{6}\left(\pi\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha^2\sqrt{3}\right)$, ἤτοι $\frac{\alpha^2}{6}\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, περίπου $\frac{9}{100}\alpha^2$.

7) Κύκλου τινὸς ἡ ἀκτὶς εἶναι 7 πήχεις· ποία εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ διπλασίου κύκλου κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν; (Ἀπ. $7\sqrt{2}$, ἤτοι $9,89949\ldots$).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐκ τῆς τιμῆς τῆς ζητουμένης ἀκτῖνος βλέπομεν, ὅτι αὕτη εἶναι ἴση μὲ τὴν διαγώνιον τοῦ τετραγώνου, ὅπερ ἔχει πλευρὰν τὴν ἀκτῖνα τοῦ δοθέντος κύκλου (174)· ἐπομένως ἡ ζητουμένη ἀκτὶς δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ γεωμετρικῶς, ἄνευ τῆς παρεμβάσεως τῶν ἀριθμῶν.

(*) Αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ 2 μέχρις 100 εὑρίσκονται ἐν τοῖς λογαριθμικοῖς πίναξι τοῦ Dupuis, ἐν σελ. 147.

8) Εἰς κύκλον, ἔχοντα ἀκτῖνα 12 πήχεις, πόσον εἶναι τὸ τόξον τῶν 75^0.

Ἂν παρασταθῇ διὰ τοῦ α ἡ ἀκτίς, ἡ περιφέρεια ἔχει μῆκος 2πα καὶ τὸ τόξον μιᾶς μοίρας εἶναι

$$\frac{2\pi\alpha}{360} \text{ ἢ } \frac{\alpha\pi}{180} \text{ καὶ τὸ τόξον μ μοιρῶν εἶναι } \frac{\pi\alpha\mu}{180}.$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τοῦ ζητουμένου τόξου ἴσον μὲ $15^{\pi\chi}$, 70796 . .

9) Εἰς κύκλον, ἔχοντα ἀκτῖνα 20 πήχεις, πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως, οὗ ἡ γωνία εἶναι 15^0;

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως, οὗ ἡ γωνία εἶναι μ μοιρῶν, δίδεται (281) ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\frac{\pi\alpha\mu}{180}\cdot\frac{1}{2}\,\alpha, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{\pi.\alpha^2.\mu}{360}.$$

Ἐκ δὲ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν ἴσον μὲ $52^{\tau\pi}$, 3598 . . .

10) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεταξὺ δύο περιφερειῶν περιεχομένης ἐπιπέδου ἐπιφανείας, ὅταν ἡ μία τούτων κεῖται ἐντὸς τῆς ἄλλης.

Ἡ εἰρημένη ἐπιφάνεια εἶναι διαφορὰ τῶν κύκλων, ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς εἶναι $\pi\alpha^2 - \pi\beta^2$ ἤτοι $\pi(\alpha^2 - \beta^2)$, (α εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς μεγαλητέρας καὶ β ἡ ἀκτὶς τῆς μικροτέρας).

Ἐὰν π. χ., εἶναι $\alpha = 4$ καὶ $\beta = 3{,}5$, τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶναι 3,75 π., ἤτοι $11^{\tau\pi}$, 780972 . . .

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν κύκλον, ἔχοντα ἐπιφάνειαν ἴσην τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν δύο περιφερειῶν, ἤτοι ἴσην τῇ διαφορᾷ τῶν δύο κύκλων. Ἀρκεῖ τῷ ὄντι, ἡ ἀκτὶς χ τοῦ κύκλου τούτου νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν ἐξίσωσιν $\pi\chi^2 = \pi(\alpha^2 - \beta^2)$, ἤτοι τὴν $\chi^2 = \alpha^2 - \beta^2$· ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως ταύτης γίνεται φανερόν, ὅτι ἡ ἀκτὶς χ εἶναι τρίτη πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅπερ ἔχει ὑποτείνουσαν τὴν ἀκτῖνα α καὶ μίαν πλευρὰν τὴν β· τὸ τρίγωνον δὲ τοῦτο κατασκευάζεται εὐκόλως ἐκ τῶν γνωστῶν πλευρῶν του α καὶ β (202). Ὁμοίως κατασκευάζεται καὶ κύκλος, ἔχων ἐπιφάνειαν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν δύο ἄλλων δοθέντων κύκλων.

11) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία, ἥτις παρίσταται (290) διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 1;

Αἱ μοῖραι μ οἱασδήποτε γωνίας καὶ ὁ ἀριθμὸς ϑ, ὅστις παριστᾷ αὐτήν, συνδέονται διὰ τῆς ἰσότητος

$$\vartheta = \frac{\pi\mu}{180} \quad \text{ἢ} \quad \mu = \frac{180}{\pi}\,\vartheta,$$

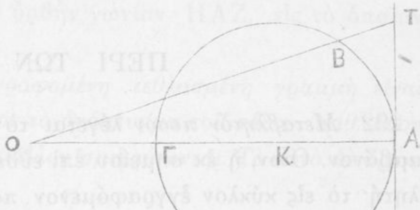
ἐξ ἧς, ὑποθέτοντες $\vartheta = 1$, εὑρίσκομεν $\mu = 57^0\ 17',\ 48''$

12) Εἴς τινα κύκλον, τὸ τόξον τῆς μιᾶς μοίρας ἔχει μῆκος $40^{\pi\chi}$. νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τούτου. $\left(\text{Ἀπ. } \frac{7200}{\pi}\right)$.

ΠΡΑΚΤΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

1) ***Ἀνάπτυγμα τόξου*** (κατὰ προσέγγισιν).

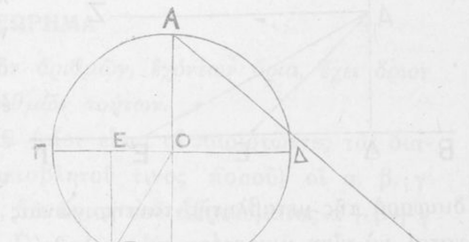
Ἔστω ΑΒ τόξον τι οὗτινος ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὸ ἀνάπτυγμα.



Ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου Α ἄγομεν τὴν ἐφαπτομένην ΑΤ καὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, τὴν ὁποίαν προσεκβάλλομεν καὶ λαμβάνομεν ΓΟ ἴσον τῇ ἀκτῖνι ΚΓ· ὥστε ἡ ΟΑ εἶναι τριπλασία τῆς ἀκτῖνος· ἔπειτα ἄγομεν ἐκ τοῦ σημείου Ο, εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον Β τοῦ τόξου ΑΒ, τὴν εὐθεῖαν ΟΒ, ἥτις, ἐκβαλλομένη τέμνει τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Τ· τὸ τμῆμα ΑΤ εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τόξου ΑΒ, μὲ προσέγγισιν τόσῳ μεγαλητέραν, ὅσῳ μικρότερον εἶναι τὸ τόξον. (Ἐν τῇ ἀνωτέρᾳ μαθηματικῇ ἀποδεικνύεται, ὅτι, ἐὰν τὸ τόξον ΑΒ εἶναι μικρότερον τῶν 30^{0}, τὸ λάθος, τὸ ὁποῖον κάμνομεν, λαμβάνοντες ὡς ἀνάπτυγμα αὐτοῦ τὸ ΑΤ, εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{4000}$ τῆς ἀκτῖνος).

2) ***Ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας*** (κατὰ προσέγγισιν).

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἡμιπεριφερείας (κατὰ προσέγγισιν), ἄγομεν τὰς διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ καθέτους πρὸς ἀλλήλας καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Β· ἔπειτα ἐκ τοῦ μέσου Ε τῆς ἀκτῖνος ΟΓ, ἄγομεν τὴν ΕΖ παράλληλον τῇ ΑΒ καὶ διὰ τοῦ Ζ τὴν εὐθεῖαν ΟΖΗ. Ἐκ τοῦ σημείου Η ἀρχόμενοι, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης τὸ τμῆμα ΗΝ τριπλάσιον τῆς ἀκτῖνος· τέλος ἄγομεν τὴν ΑΝ, ἥτις εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἡμιπεριφερείας μὲ προσέγγισιν $\frac{1}{100000}$ τῆς ἀκτῖνος.



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ Δ΄ ΒΙΒΛΙΟΥ

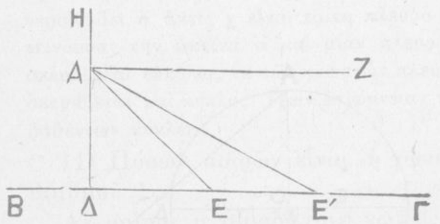
ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

292. *Μεταβλητὸν ποσὸν* λέγεται τὸ διαφόρους τιμὰς ἢ καταστάσεις λαμβάνον. Οἷον, ἡ ἐκ σημείου ἐπὶ εὐθεῖαν ἀγομένη εὐθεῖα εἶναι μεταβλητή· τὸ εἰς κύκλον ἐγγραφόμενον πολύγωνον εἶναι μεταβλητόν, καὶ τὸ περιγραφόμενον ἐπίσης· τὸ τόξον τοῦ κύκλου εἶναι μεταβλητόν, κτλ. *Σταθερὸν* δὲ λέγεται τὸ ποσόν, ὅπερ μένει ἀμετάβλητον, ἐνῷ ἄλλα, μεθ' ὧν ἔχει σχέσιν τινά, μεταβάλλονται. Οἷον, ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶναι σταθερά, ἡ γωνία, ἡ εἰς τμῆμα κύκλου ἐγγραφομένη, εἶναι σταθερά, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου εἶναι σταθερόν, κτλ.

293. *Ὅριον* μεταβλητοῦ ποσοῦ λέγεται σταθερόν τι, ὡρισμένον, ποσόν, ἐὰν ἡ διαφορὰ τοῦ μεταβλητοῦ ἀπὸ τοῦ σταθεροῦ δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης ποσότητος, μένῃ δὲ τοιαύτη καὶ διὰ πάσας τὰς τιμάς, τὰς ὁποίας ἔπειτα λαμβάνει τὸ μεταβλητόν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ον) Ἐκ τοῦ σημείου Α ἔστω κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, ἡ ΑΔ πλαγία δὲ ἡ ΑΕ· ἡ γωνία τῆς πλαγίας πρὸς τὴν κάθετον εἶναι μεταβλητὴ καὶ αὐξάνει, ὅταν τὸ σημεῖον Ε προχωρῇ ἐπὶ τῆς ΒΓ, προσεγγίζει δὲ ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον εἰς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΔΑΖ. Ἡ δὲ διαφορὰ τῆς μεταβλητῆς ταύτης γωνίας ἀπὸ τῆς σταθερᾶς ΔΑΖ, δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης γωνίας, ὅταν τὸ σημεῖον Ε, ὁ ποὺς τῆς πλαγίας, ἐφ' ἱκανὸν προχωρήσῃ. Διότι πᾶσα ἐκ τοῦ Α ἀγομένη εὐθεῖα, ὁσονδήποτε μικρὰν γωνίαν ε καὶ ἂν σχηματίζῃ πρὸς τὴν ΑΖ, θὰ τέμνῃ τὴν ΒΓ εἴς τι σημεῖον. Ὅταν δὲ τὸ Ε φθάσῃ καὶ ὑπερβῇ τὸ σημεῖον ἐκεῖνο, ἡ διαφορὰ τῆς μεταβλητῆς γωνίας ΔΑΕ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ΔΑΖ, γίνεται καὶ μένει μικροτέρα τῆς γωνίας ε. Ἑπομένως,



κατὰ τὸν δοθέντα ὁρισμόν, ἡ μεταβλητὴ γωνία τῆς καθέτου καὶ τῆς πλαγίας ἔχει ὅριον τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΔΑΖ.

Καὶ ἡ μεταβλητὴ γωνία ΗΑΕ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν προσεκβολὴν τῆς καθέτου, ἔχει ὅριον τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΗΑΖ, εἰς τὸ ὁποῖον προσεγγίζει ἐλαττουμένη.

2ον) Ἡ εἰς δοθὲν τόξον ἐγγραφομένη τεθλασμένη γραμμὴ εἶναι μεταβλητὴ τὸ μέγεθος· ἔχει δὲ ὅριον τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τόξου, καθ' ὅσον αἱ πλευραὶ αὐτῆς ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον σμικρύνονται. Τὸ αὐτὸ δὲ ὅριον ἔχει καὶ ἡ περιγραφομένη.

Διότι, ἡ διαφορὰ τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ τόξου ἀπὸ τῆς ἐγγεγραμμένης, εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τῆς ἐγγεγραμμένης ἀπὸ τῆς ἀντιστοιχούσης περιγεγραμμένης· αὕτη δὲ ἡ διαφορά, ὡς ἐν τῷ ἐδαφίῳ 278 ἀπεδείχθη, γίνεται μικροτέρα πάσης δοθείσης εὐθείας, ὅταν τὸ τόξον διαιρεθῇ εἰς ἱκανῶς μικρὰ μέρη· μένει δὲ τοιαύτη, καὶ ὅταν διαιρεθῇ εἰς ἔτι μικρότερα.

3ον) Ὁ κυκλικὸς τομεὺς εἶναι τὸ ὅριον τῶν εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένων πολυγώνων. Ὁ αὐτὸς δὲ εἶναι ὅριον καὶ τῶν περιγραφομένων.

Διότι, ἡ διαφορὰ τοῦ τομέως ἀπὸ τοῦ ἐγγραφομένου πολυγώνου εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος περιγεγραμμένου· ἡ δὲ διαφορὰ αὕτη, ὡς ἀπεδείχθη ἐν τῷ ἐδαφίῳ 281, γίνεται μικροτέρα πάσης ἐπιφανείας, ὅταν τὸ τόξον διαιρεθῇ εἰς μέρη ἱκανῶς μικρά· μένει δὲ τοιαύτη, καὶ ὅταν διαιρεθῇ εἰς ἔτι μικρότερα.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

294. Τὸ ἄθροισμα μεταβλητῶν ἀριθμῶν, ἐχόντων ὅρια, ἔχει ὅριον τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρίων τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Ἔστωσαν μεταβλητοὶ ἀριθμοὶ (οἷοι εἶναι οἱ παριστῶντες τὰς διαφόρους τιμὰς ἢ καταστάσεις μεταβλητοῦ τινος ποσοῦ) οἱ α, β, γ· ὅρια δὲ αὐτῶν οἱ Α, Β, Γ· λέγω, ὅτι ὅριον τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta+\gamma$ θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα $A+B+\Gamma$.

Διότι, ἡ διαφορὰ τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ $A+B+\Gamma$ ἀπὸ τοῦ μεταβλητοῦ $\alpha+\beta+\gamma$, εἶναι

$$A+B+\Gamma-(\alpha+\beta+\gamma),$$

$$\text{ἢ}\quad (A-\alpha)+(B-\beta)+(\Gamma-\gamma)\cdot$$

γίνεται δὲ ἡ διαφορὰ αὕτη μικροτέρα παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ μένει ἔπειτα τοιαύτη διὰ τὰς ἑπομένας τιμὰς τοῦ μεταβλητοῦ $\alpha+\beta+\gamma$. Διότι, ἂν θέλωμεν νὰ γίνῃ μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{\nu}$, ἀρκεῖ ἑκάστη τῶν διαφορῶν $(\mathrm{A}-\alpha)$, $(\mathrm{B}-\beta)$, $(\Gamma-\gamma)$ νὰ γίνῃ καὶ νὰ μένῃ μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{3\nu}$ (ὅπερ ἐξ ὑποθέσεως γίνεται). Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι εἶναι

$$\text{ὅρ. } (\alpha+\beta+\gamma)=\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἑξῆς θεώρημα:

Ἡ διαφορὰ δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν ἐχόντων ὅρια, ἔχει ὅριον τὴν διαφορὰν τῶν ὁρίων τῶν ἀριθμῶν τούτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

295. *Τὸ γινόμενον μεταβλητῶν ἀριθμῶν ἐχόντων ὅρια, ἔχει ὅριον τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

Ἔστωσαν, κατὰ πρῶτον, δύο μεταβλητοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β, ἔχοντες ὅρια τοὺς Α καὶ Β· λέγω, ὅτι θὰ εἶναι ὅρ. $(\alpha.\beta)=\mathrm{A}.\mathrm{B}=$ (ὅρ. α).(ὅρ. β).

Διότι, ἂν παραστήσωμεν τὰς διαφορὰς $\alpha-\mathrm{A}$ καὶ $\beta-\mathrm{B}$ διὰ τῶν ε καὶ η, θὰ εἶναι

$$\alpha-\mathrm{A}=\varepsilon, \qquad \beta-\mathrm{B}=\eta$$

ὅθεν
$$\alpha=\mathrm{A}+\varepsilon, \qquad \beta=\mathrm{B}+\eta$$

ἐξ ὧν, πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$\alpha\beta=\mathrm{AB}+\mathrm{A}\eta+\mathrm{B}\varepsilon+\varepsilon\eta$$

ἢ
$$\alpha\beta \quad \mathrm{AB}=\mathrm{A}\eta+\mathrm{B}\varepsilon+\varepsilon\eta.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ $\mathrm{A}.\mathrm{B}$ ἀπὸ τοῦ μεταβλητοῦ $\alpha.\beta$, θὰ γίνῃ μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ $\frac{1}{\nu}$, ἂν ἕκαστος τῶν τριῶν ἀριθμῶν Αη, Βε, ηε γίνῃ μικρότερος τοῦ $\frac{1}{3\nu}$· τοῦτο δὲ θὰ γίνῃ, ὅταν αἱ διαφοραὶ ε καὶ η γίνωσι μικρότεραι τοῦ $\frac{1}{3\mathrm{K}\nu}$· (ἔνθα Κ δηλοῖ ἀκέραιον ἀριθμὸν μεγαλήτερον τῶν Α, Β)· γίνεται δὲ τοῦτο, διότι ἐξ ὑποθέσεως, αἱ διαφοραὶ ε καὶ η γίνονται καὶ μένουσι μικρότεραι παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ.

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι εἶναι ὅρ. $(\alpha.\beta)=\mathrm{A}.\mathrm{B}$.

Ἔστωσαν νῦν τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ· ἐὰν θέσωμεν $\beta.\gamma=\delta$, θὰ εἶναι

$$\alpha\beta.\gamma=\alpha.\delta\cdot$$

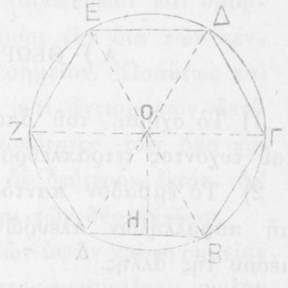
ὅθεν ὅρ. $(\alpha.\beta.\gamma)=$ ὅρ. $(\alpha.\delta)=$ (ὅρ. α).(ὅρ. δ) $=$ (ὅρ. α).(ὅρ. β.γ) $=$
$=$ (ὅρ. α).(ὅρ. β).(ὅρ. γ).

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ ἐπὶ περισσοτέρων.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Διὰ τῆς θεωρίας τῶν ὁρίων εὑρίσκομεν εὐκόλως τὰς σχέσεις, αἵτινες περιέχουσι τὰ μεγέθη καμπυλογράμμων σχημάτων, θεωροῦντες τὰ καμπυλόγραμμα σχήματα ὡς ὅρια τῶν εἰς αὐτὰ ἐγγραφομένων εὐθυγράμμων.

Ἵνα, παραδείγματος χάριν, ἀποδείξωμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου Κ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ μήκους τῆς περιφερείας αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος, θεωροῦμεν αὐτὸν ὡς ὅριον τῶν εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένων κανονικῶν πολυγώνων (ὅτε καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶναι ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν ἐγγραφομένων πολυγώνων)· ἔστω ἓν ἐξ αὐτῶν τὸ ΑΒΓΔΕΖ· τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι (ἐὰν διὰ τοῦ υ παραστήσωμεν τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ)



$$\frac{1}{2}\,\text{ΑΒ}\;\upsilon + \frac{1}{2}\,\text{ΒΓ}.\upsilon + \frac{1}{2}\,\text{ΓΔ}.\upsilon + \frac{1}{2}\,\text{ΔΕ}.\upsilon + \frac{1}{2}\,\text{ΕΖ}\;\upsilon + \frac{1}{2}\,\text{ΖΑ}\;\upsilon$$

$$\text{ἢ}\quad \frac{1}{2}\,\upsilon\,(\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}+\text{ΓΔ}+\text{ΔΕ}+\text{ΕΖ}+\text{ΖΑ}).$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἐμβαδὸν Κ $=$ ὅρ. ἐμβ. ΑΒΓΔΕΖ, ἕπεται

$$\text{ἐμβ. Κ} = \text{ὅρ.}\frac{1}{2}\,\upsilon\,(\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}+\text{ΓΔ}+\text{ΔΕ}+\text{ΕΖ}+\text{ΖΑ}).$$

Ἀλλ' ἡ μὲν περίμετρος τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἔχει ὅριον τὸ μῆκος τῆς περιφερείας Γ, τὸ δὲ ἀπόστημα υ ἔχει ὅριον τὴν ἀκτῖνα α (διότι ἡ διαφορὰ $\alpha-\upsilon$ εἶναι (92) μικροτέρα τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου). Ἐντεῦθεν συνάγεται

$$\text{ἐμβαδ. Κ} = \frac{1}{2}\,\alpha.\Gamma.$$

Ὁμοίως, ἵνα ἀποδείξωμεν τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 283, ἐγγράφομεν εἰς τοὺς κύκλους δύο τυχόντα πολύγωνα, ὡς ἐν τῷ ἐδαφίῳ ἐκείνῳ ἐρρήθη, ὅτε ἔχομεν

$$\frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{\alpha}{\text{Α}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\varepsilon}{\text{Ε}} = \frac{\alpha^2}{\text{Α}^2}.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται

$$\sigma = \frac{\alpha}{\text{Α}}\,\Sigma \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon = \frac{\alpha^2}{\text{Α}^2}\,\text{Ε}\cdot$$

λαμβάνοντες δὲ τὰ ὅρια ἀμφοτέρων τῶν μελῶν, εὑρίσκομεν

$$\gamma = \frac{\alpha}{A}\Gamma \quad \text{καὶ} \quad \varkappa = \frac{\alpha^2}{A^2}K,$$

ἐξ ὧν καὶ $$\frac{\gamma}{\Gamma} = \frac{\alpha}{A}, \quad \frac{\varkappa}{K} = \frac{\alpha^2}{A^2}.$$

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

Α) ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΙΝ

1) Τὸ σχῆμα, τοῦ ὁποίου κορυφαὶ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τυχόντος τετραπλεύρου, εἶναι παραλληλόγραμμον.

2) Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπεζίου εἶναι γινόμενον τῆς μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν αὐτῆς ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ἄλλης.

3) Ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων πλευρῶν ὑπερβαίνει τὴν ὑποτείνουσαν κατὰ τὴν διάμετρον τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον ἐγγεγραμμένου κύκλου.

4) Ἐὰν ἐντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ληφθῇ τυχὸν σημεῖον, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἶναι πάντοτε τὸ αὐτό.

5) Ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ δύο ὁμοκέντρων κύκλων περιλαμβανομένη, εἶναι ἰσοδύναμος κύκλῳ, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα τὴν ἐφαπτομένην τῆς μικροτέρας περιφερείας, τὴν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς ἄλλης ἠγμένην.

6) Ἐὰν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ὡς ἐπὶ διαμέτρου, γραφῇ ἡμικύκλιον, περιέχον αὐτό, καὶ ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ἡμικύκλια ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, τὰ μέρη τῶν ἡμικυκλίων τούτων, τὰ ἐκτὸς τοῦ πρώτου κείμενα (ἅτινα λέγονται *μηνίσκοι* τοῦ Ἱπποκράτους) ἔχουσιν ἄθροισμα τὸ τρίγωνον.

7) Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον περιγραφῇ κύκλος καὶ ἔπειτα μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν γραφῇ ἕτερος κύκλος, τὸ ἐκτὸς τούτου κείμενον μέρος τοῦ πρώτου εἶναι ἰσοδύναμον τῷ τριγώνῳ.

8) Ἐὰν περιφέρεια ἔχῃ κέντρον τὴν τομὴν τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμου, τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων παντὸς σημείου αὐτῆς ἀπὸ,

τῶν τεσσάρων κορυφῶν τοῦ παραλληλογράμμου ἔχουσιν ἄθροισμα τὸ αὐτὸ πάντοτε.

9) Αἱ διάμεσοι παντὸς τριγώνου τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον.

10) Ἐὰν διὰ δύο δοθέντων σημείων Α, Β, διέρχωνται περιφέρειαι τέμνουσαι δοθέντα κύκλον, αἱ κοιναὶ χορδαὶ τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ τῶν τεμνόντων αὐτόν, διέρχονται πᾶσαι δι' ἑνὸς σημείου τῆς ΑΒ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ δὲ σημείου διέρχεται καὶ ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ τοῦ διὰ τῶν σημείων Α, Β διερχομένου καὶ ἐφαπτομένου τοῦ δοθέντος.

11) Δοθέντων δύο κύκλων, αἱ τὰ ἄκρα δύο παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων ἀκτίνων ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι τέμνουσι τὴν διὰ τῶν κέντρων διερχομένην εὐθεῖαν πᾶσαι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ὡσαύτως καὶ αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰ ἄκρα δύο παραλλήλων καὶ ἀντιρρόπων ἀκτίνων. Λέγονται δὲ τὰ σημεῖα ταῦτα *κέντρα ὁμοιότητος* τῶν δύο κύκλων· καὶ τὸ μὲν πρῶτον λέγεται *ἐκτός*, τὸ δὲ δεύτερον *ἐντός*, δι' αὐτῶν δὲ διέρχονται καὶ αἱ κοιναὶ ἐφαπτόμεναι τῶν δύο κύκλων.

12) Εἰς πᾶν τρίγωνον τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων καὶ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ πρώτου ἀπὸ τοῦ δευτέρου εἶναι διπλασία τῆς ἀποστάσεως τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ τρίτου.

13) Ἐὰν τρίγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, οἱ τρεῖς πόδες τῶν καθέτων, αἵτινες ἄγονται ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς περιφερείας ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.

14) Ἐκ τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένων τριγώνων μέγιστον κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν εἶναι τὸ ἰσόπλευρον· καὶ ἐκ τῶν περιγεγραμμένων ἐλάχιστον εἶναι πάλιν τὸ ἰσόπλευρον.

15) Εἰς πᾶν τετράπλευρον, οἱ τέσσαρες κύκλοι, οἵτινες ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν, λαμβανομένων ἀνὰ τρεῖς, ἔχουσι τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπὶ μιᾶς περιφερείας.

16) Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τετραπλεύρου εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

17) Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς τέσσαρας γωνίας παντὸς τετραπλεύρου σχηματίζουσι τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

18) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐὰν δύο διάμεσοι τριγώνου εἶναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

19) Ἐκ δύο τόξων ἐχόντων ἴσας χορδὰς (καὶ μικροτέρων ἡμιπεριφερείας) μεγαλήτερον εἶναι τὸ ἔχον τὴν μικροτέραν ἀκτῖνα.

20) Ἐὰν ἡ βάσις ἡμικυκλίου διαιρεθῇ ὁπωσδήποτε εἰς δύο μέρη καὶ ἐπὶ τῶν μερῶν τούτων γραφῶσιν ἡμικύκλια, ἐντὸς τοῦ πρώτου κείμενα, τὸ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν αὐτῶν ὑπολειπόμενον μέρος τοῦ ἡμικυκλίου ἰσοῦται κύκλῳ, ἔχοντι διάμετρον τὴν ἐκ τοῦ σημείου τῆς διαιρέσεως ὑψουμένην κάθετον μέχρι τῆς περιφερείας.

21) Ἐὰν ἐκ τῶν δύο σημείων τῆς τομῆς δύο περιφερειῶν ἀχθῶσιν ὡς ἔτυχε δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ἀπολαμβανόμενα μέρη τῶν εὐθειῶν τούτων εἶναι ἴσα.

22) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν πλευρῶν παντὸς τριγώνου ἔχει πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν διαμέσων αὐτοῦ, ὃν λόγον ἔχει ὁ 4 πρὸς τὸν 3.

23) Τὸ τετράγωνον τῆς διχοτομούσης γωνίαν τριγώνου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν δύο πλευρῶν τῆς γωνίας, πλὴν τοῦ γινομένου τῶν δύο τμημάτων τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

24) Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν τριῶν αὐτοῦ πλευρῶν, διαιρεθέντι διὰ τοῦ διπλασίου τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Β΄) ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΠΡΟΣ ΕΥΡΕΣΙΝ

Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος·

1) τῶν σημείων, ὧν τὰ ἀποστήματα ἀπὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἔχουσι λόγον δοθέντα μ : ν.

2) τῶν σημείων, ἀφ' ὧν δύο δοθέντες κύκλοι φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας (τουτέστιν, αἱ ἐξ αὐτῶν ἀγόμεναι δύο ἐφαπτόμεναι ἑκατέρου τῶν κύκλων νὰ σχηματίζωσιν ἴσας γωνίας).

3) τῶν σημείων, ὧν τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων ἔχουσιν ἄθροισμα ἢ διαφορὰν ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ.

4) τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἵτινες, ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων, φαίνονται ὑπὸ γωνίας δοθείσας.

5) τῶν σημείων, ἀπὸ τῶν ὁποίων αἱ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι εἰς δύο δεδομένας περιφερείας εἶναι ἴσαι.

Γ΄) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

1) Νὰ γραφῇ κύκλος, διερχόμενος διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ἐφαπτόμενος τῆς δοθείσης εὐθείας ἢ τῆς δοθείσης περιφερείας.

2) Νὰ γραφῇ κύκλος διερχόμενος διὰ τοῦ δοθέντος σημείου καὶ ἐφαπτόμενος δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἢ μιᾶς εὐθείας καὶ ἑνὸς κύκλου, ἢ δύο κύκλων.

3) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδονται, ἡ βάσις, ἡ ἀπέναντι γωνία καὶ ὁ λόγος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

4) Νὰ γραφῇ κύκλος, ἐφαπτόμενος τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἢ ἐφαπτόμενος τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ τῶν δύο δοθεισῶν περιφερειῶν.

5) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ τρεῖς διάμεσοι.

6) Ἐν τῷ δοθέντι τριγώνῳ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον, ἀφ' οὗ αἱ εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἀγόμεναι εὐθεῖαι νὰ διαιρῶσιν αὐτὸ εἰς τρία τρίγωνα ἰσοδύναμα, ἤ, σημεῖον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν πλευρῶν νὰ ἔχωσι λόγους δοθέντας.

7) Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον τῷ δοθέντι πολυγώνῳ καὶ ἔχον περίμετρον ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

8) Δοθέντων δύο ὁμοίων πολυγώνων, νὰ κατασκευασθῇ ἄλλο ὅμοιον αὐτοῖς καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο δοθέντων.

9) Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ.

10) Νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τοῦ δοθέντος κύκλου ἐντὸς καὶ διαιρῶν τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον δοθέντα $\mu:\nu$.

11) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα διαιροῦσα τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν εἰς δύο μέρη ἔχοντα τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν 13 καὶ 17.

12) Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ βάσεις καὶ αἱ διαγώνιοι.

13) Ἐκ τῆς τομῆς δύο περιφερειῶν νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα, οὕτως ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν ἀπολαμβανόμενον μέρος αὐτῆς νὰ εἶναι ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

14) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, ἴσον τῷ δοθέντι τριγώνῳ καὶ ἐγγεγραμμένον εἰς δοθὲν τρίγωνον, ἤ, περιγεγραμμένον περὶ δοθὲν τρίγωνον (*ἐγγεγραμμένον* λέγεται τρίγωνον εἰς ἄλλο, ὅταν αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ἄλλου, ἑκάστη ἐφ' ἑκάστης· τοῦτο δὲ λέγεται *περιγεγραμμένον* περὶ τὸ πρῶτον).

15) Ἐκ τῶν εἰς τὸ αὐτὸ τρίγωνον περιγεγραμμένων τριγώνων, ἅτινα εἶναι ὅμοια πρὸς δοθὲν τρίγωνον, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον.

16) Εἰς τὸ δοθὲν ἰσόπλευρον τρίγωνον νὰ ἐγγραφῶσι τρεῖς κύκλοι, ὧν ἕκαστος νὰ ἐφάπτηται δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ τῶν δύο ἄλλων κύκλων. Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ τρεῖς οὗτοι κύκλοι θὰ εἶναι ἴσοι.

17) Νὰ ἐγγραφῇ κύκλος εἰς τὸν δοθέντα τομέα.

18) Ἐὰν ἐπὶ τῶν ἀκτίνων, ἐξ ὧν σύγκειται ἡ διάμετρος ἡμικυκλίου τινός, γραφῶσι ἡμικύκλια ἐντὸς τοῦ ἄλλου, ζητεῖται νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τῶν τριῶν τούτων ἡμικυκλίων.

19) Νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἰς τρία μέρη τοιαῦτα, ὥστε ἐξ αὐτῶν νὰ συνιστᾶται τρίγωνον ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές.

20) Ἐὰν μία τῶν κορυφῶν τριγώνου κινῆται ἐπὶ εὐθείας δοθείσης, αἱ δὲ δύο ἄλλαι μένωσιν ἀκίνητοι, εἰς ποίαν θέσιν γίνεται μεγίστη ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ταύτης;

21) Νὰ διαιρεθῇ ἡ ὀρθὴ γωνία εἰς τρία ἴσα μέρη.

22) Νὰ διαιρεθῇ τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς ἴσα μέρη δι' εὐθειῶν παραλλήλων μιᾷ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

23) Νὰ διαιρεθῇ ὁ δοθεὶς κύκλος διὰ χορδῆς εἰς δύο τμήματα τοιαῦτα, ὥστε ἡ γωνία ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι διπλασία τῆς ἐπὶ τοῦ ἑτέρου βαινούσης.

24) Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ τρίγωνον οὗ αἱ γωνίαι νὰ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 2, 5, 8.

25) Δοθέντος ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἐὰν μὲ κέντρον ἑκάστην κορυφὴν γραφῇ τόξον ἑνοῦν τὰς δύο ἄλλας κορυφάς, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου καμπυλογράμμου τριγώνου.

26) Ἐκ σημείου ἐντὸς παραλληλογράμμου, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα αὐτὸ εἰς δύο μέρη ἴσα.

27) Ἐκ μιᾶς τῶν κορυφῶν τετραπλεύρου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα διαιροῦσα τοῦτο εἰς δύο μέρη ἴσα.

28) Πόσους κύκλους ἴσους πρὸς ἀλλήλους δυνάμεθα νὰ θέσωμεν οὕτως, ὥστε νὰ ἐφάπτωνται ἑνὸς κύκλου ἴσου πρὸς αὐτοὺς (χωρὶς νὰ τέμνωσιν ἀλλήλους);

29) Ἐὰν πρόκειται νὰ στρώσωμεν τὸ ἔδαφος ἑνὸς δωματίου διὰ πλακῶν, ἐχουσῶν σχῆμα κανονικοῦ πολυγώνου, ποῖα κανονικὰ πολύγωνα εἶναι κατάλληλα πρὸς τοῦτο;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ

Πᾶσα σχέσις μεταξὺ γεωμετρικῶν μεγεθῶν τρέπεται εἰς σχέσιν ἀριθμῶν, ὅταν τὰ μεγέθη μετρηθῶσι μέ τινα μονάδα.

Οἱ ἐκ τῆς καταμετρήσεως τῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν προκύπτοντες ἀριθμοί, ἐξαρτῶνται προδήλως ἐκ τῆς μονάδος, μὲ τὴν ὁποίαν μετροῦμεν· ἐπειδὴ δὲ συνήθως ἀφίνομεν τὴν μονάδα ἀόριστον, διὰ τοῦτο παριστῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου.

Καὶ ἑκάστη μὲν εὐθεῖα γραμμὴ παρίσταται τότε δι' ἑνὸς γράμματος, καὶ ἕκαστον τόξον κύκλου ὁμοίως· διότι ἡ περιφέρεια, ἡ ἔχουσα ἀκτῖνα α παρίσταται ὑπὸ τοῦ 2πα, ἔνθα π εἶναι ὁ γνωστὸς ἀριθμὸς 3,14159....

Ἑκάστη δὲ ἐπιφάνεια παρίσταται διὰ τοῦ γινομένου δύο γραμμάτων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτὴν ὀρθογωνίου, ἢ καὶ διὰ τῆς δευτέρας δυνάμεως ἑνὸς γράμματος, ὅπερ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ πρὸς αὐτὴν ἰσοδυνάμου τετραγώνου.

Ἀφοῦ δὲ παραστήσωμεν τοιουτοτρόπως τὰ γεωμετρικὰ μεγέθη διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου καὶ ἐκφράσωμεν τὰς μεταξὺ αὐτῶν ὑπαρχούσας σχέσεις ἰσότητος ἢ ἀνισότητος, ἐφαρμόζομεν ἐπ' αὐτῶν τὸν ἀλγεβρικὸν λογισμὸν καὶ μετασχηματίζομεν αὐτὰς εἰς ἄλλας χρησιμωτέρας πρὸς τὴν λύσιν τοῦ ζητήματος, ὅπερ ἑκάστοτε ἐξετάζομεν. Τοῦτο γίνεται φανερὸν ἐκ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

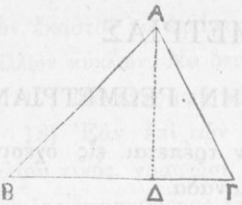
Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἂς παριστῶνται διὰ τῶν ἀριθμῶν α (ἢ ΒΓ), β (ἢ ΑΓ) καὶ γ (ἢ ΑΒ)· ζητεῖται, ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τριγώνου.

Ἐκ τῆς κορυφῆς Α, ἂς ἀχθῇ τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου· τότε εἶναι

$$E = \frac{1}{2}\,\alpha\,.(A\Delta).$$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ, εὑρίσκομεν

$$(A\Delta)^2 = \beta^2 - (\Gamma\Delta)^2 \quad \text{ἢ} \quad A\Delta = \sqrt{\beta^2 - (\Gamma\Delta)^2},$$



ὅθεν $$E = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{\beta^2 - (\Gamma\Delta)^2}. \qquad (\iota)$$

Ἐκ δὲ τοῦ θεωρήματος τοῦ ἐδαφίου 211 ἔχομεν τὴν ἰσότητα $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\,(\Delta\Gamma)$, ἐξ ἧς $$\Delta\Gamma = \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha}.$$

καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (ι) τὴν ΓΔ, διὰ τῆς τιμῆς αὐτῆς, εὑρίσκομεν

$$E = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{\beta^2 - \frac{(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}{4\alpha^2}} = \frac{1}{4}\sqrt{4\alpha^2\beta^2 - (\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}.$$

Τὸ ὑπόρριζον, ὡς διαφορὰ δύο τετραγώνων, ἀναλύεται εἰς τοὺς παράγοντας

$$2\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 \quad \text{καὶ} \quad 2\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2\cdot$$

τούτων δέ, ὁ μὲν πρῶτος γράφεται ὡς ἑξῆς $(\alpha+\beta)^2 - \gamma^2$ καὶ ἀναλύεται ἑπομένως εἰς τοὺς δύο παράγοντας

$$(\alpha+\beta+\gamma) \quad \text{καὶ} \quad (\alpha+\beta\;\gamma),$$

ὁ δὲ δεύτερος γράφεται ὡς ἑξῆς $\gamma^2 - (\alpha-\beta)^2$ καὶ ἀναλύεται εἰς τοὺς ἑξῆς δύο $\gamma - (\alpha-\beta)$ καὶ $\gamma + (\alpha-\beta)\cdot$

ἑπομένως τὸ ὑπόρριζον ἀναλύεται εἰς γινόμενον τεσσάρων παραγόντων καὶ εἶναι

$$E = \frac{1}{4}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)\,(-\alpha+\beta+\gamma)\,(\alpha-\beta+\gamma)\,(\alpha+\beta-\gamma)}. \qquad (*)$$

Ὁ τύπος οὗτος εἶναι κατάλληλος εἰς τὸν διὰ τῶν λογαρίθμων λογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ, εἶναι δὲ πάντες οἱ παράγοντες τοῦ ὑπορρίζου θετικοί, διότι ἑκάστη πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

Ὡς παράδειγμα ἔστω τὸ ἑξῆς.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, οὗτινος αἱ πλευραὶ εἶναι 12πχ,5, 15πχ,25 καὶ 23πχ,75.

Κατὰ πρῶτον εἶναι

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= 51{,}5 \\ -\alpha+\beta+\gamma &= 26{,}5 \\ \alpha-\beta+\gamma &= 21 \\ \alpha+\beta-\gamma &= 4\cdot \end{aligned}$$

ὅθεν ὁ γενικὸς τύπος γίνεται

$$E = \frac{1}{4}\sqrt{(51{,}5)\;(26{,}5)\;(21)\;(4)}\cdot$$

(*) Ὁ τύπος οὗτος εὑρίσκεται ἐν τῷ *περὶ διόπτρας* συγγράμματι τοῦ Ἥρωνος.

$$\text{ὅθεν } \lambda o\gamma\,(4\mathrm{E}) = \frac{1}{2}\left\{ \lambda o\gamma\,(51{,}5) + \lambda o\gamma\,(26{,}5) + \lambda o\gamma\,21 + \lambda o\gamma\,4 \right\}$$

$$\begin{aligned}
\lambda o\gamma\,51{,}5 &= 1{,}71181\\
\lambda o\gamma\,26{,}5 &= 1{,}42325\\
\lambda o\gamma\,21 &= 1{,}32222\\
\lambda o\gamma\,4 &= 0{,}60206\\
\text{ἄθροισμα} \quad & 5{,}05934\\
\text{ἥμισυ ἀθρ.} \quad & 2{,}52967 = \lambda o\gamma\,(4\mathrm{E}),\\
\text{ὅθεν} \quad 4\,\mathrm{E} &= 338{,}58\ldots\\
\text{καὶ} \quad \mathrm{E} &= 84^{\tau\pi},64\ldots
\end{aligned}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν μεταβάλλωνται μὲν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, ἀλλ' ἡ περίμετρος αὐτοῦ μένῃ σταθερά, ὁ μὲν πρῶτος παράγων τοῦ ὑπορρίζου μένει σταθερός, οἱ δὲ ἄλλοι μεταβάλλονται, ἔχουσιν ὅμως ἄθροισμα σταθερὸν $\alpha+\beta+\gamma$. Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ ἀποδεικνύεται, ὅτι πᾶν γινόμενον, οὗ οἱ παράγοντες ἔχουσι σταθερὸν ἄθροισμα γίνεται μέγιστον, ὅταν οἱ παράγοντές του γίνωσιν ἴσοι, συνάγεται τὸ θεώρημα: *Ἐκ πάντων τῶν ἴσην περίμετρον ἐχόντων τριγώνων μέγιστον εἶναι τὸ ἰσόπλευρον.*

Ὑπάρχουσιν ἄπειρα τρίγωνα, ὧν αἱ πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἐκφράζονται δι' ἀκεραίων ἀριθμῶν· δίδονται δὲ πάντα ταῦτα ὑπὸ τῶν ἑξῆς τύπων (ἐὰν εἰς ἕκαστον τῶν τριγώνων τούτων προσαρτήσωμεν καὶ τὰ πρὸς αὐτὸ ὅμοια).

$$\begin{aligned}
\alpha &= \lambda\mu\,(\rho^2+\sigma^2)\\
\beta &= \rho\sigma\,(\lambda^2+\mu^2)\\
\gamma &= \lambda\mu\,(\rho^2-\sigma^2)+\rho\sigma\,(\lambda^2-\mu^2), \qquad \mathrm{E}=\lambda\mu\rho\sigma\gamma\cdot
\end{aligned}$$

ἐν οἷς λ,μ,ρ,σ εἶναι τυχόντες ἀκέραιοι ἀριθμοί. Τοιαῦτα τρίγωνα εἶναι τὰ ἑξῆς (4, 13, 15, ἐμβ. 24), (7, 15, 20, ἐμβ. 42), (13, 14, 15, ἐμβ. 84) κτλ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

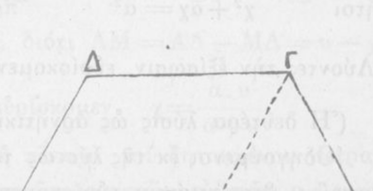
Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Ἔστω τραπέζιον τὸ ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἂς παριστῶνται κατὰ σειρὰν διὰ τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ.

Ἐκ τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΔΑ, ἡ ΓΕ· τότε εἶναι $\mathrm{AE}=\Delta\Gamma=\gamma$, ἄρα $\mathrm{EB}=\alpha-\gamma$ καὶ $\Gamma\mathrm{E}=\Delta\mathrm{A}=\delta$, καὶ ἂν παραστήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου διὰ τοῦ Ε, τοῦ δὲ τριγώνου ΓΕΒ διὰ τοῦ Ε΄, θὰ εἶναι

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\,(\alpha+\gamma)\,.\,\upsilon,$$

$$\mathrm{E}' = \frac{1}{2}\,(\alpha-\gamma)\,.\,\upsilon,$$



ἔνθα υ δηλοῖ τὸ κοινὸν ὕψος αὐτῶν.

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων ἕπεται

$$\frac{E}{E'}=\frac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma}, \qquad \text{ὅθεν} \qquad E=\frac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma}.E'.$$

καὶ ἐπειδή, κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα, εἶναι

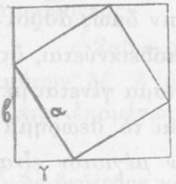
$$E'=\frac{1}{4}\sqrt{(\alpha-\gamma+\beta+\delta)\,(-\alpha+\gamma+\beta+\delta)\,(\alpha-\gamma-\beta+\delta)\,(\alpha-\gamma+\beta-\delta)},$$

ἕπεται

$$E=\frac{1}{4}.\frac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma}\sqrt{(\alpha-\gamma+\beta+\delta)\,(-\alpha+\gamma+\beta+\delta)\,(\alpha-\gamma-\beta+\delta)\,(\alpha-\gamma+\beta-\delta)}.$$

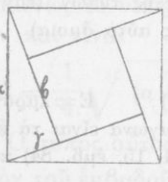
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Νὰ ἀποδειχθῇ διὰ τῶν ἐμβαδῶν τὸ πυθαγόρειον θεώρημα.



Ἔστωσαν α, β, γ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου (α ἡ ὑποτείνουσα)· ἐὰν θέσωμεν 4 τρίγωνα, ἴσα πρὸς αὐτό, ὡς δεικνύει τὸ ἀπέναντι σχῆμα, αἱ ὑποτείνουσαι ἀποτελοῦσι τετράγωνον καὶ αἱ κάθετοι πλευραὶ ἐπίσης, ἔχομεν δὲ ἐκ τοῦ σχήματος τὴν ἐξίσωσιν

$$(\beta+\gamma)^2=\alpha^2+2\beta\gamma, \qquad \text{ἤτοι} \qquad \beta^2+\gamma^2=\alpha^2.$$



Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὰ 4 ὀρθογώνια τρίγωνα καὶ ἄλλως, ὡς ἐν τῷ ἀπέναντι σχήματι δεικνύεται· τότε θὰ ἔχωμεν

$$\alpha^2=(\beta-\gamma)^2+2\beta\gamma, \qquad \text{ἤτοι} \qquad \alpha^2=\beta^2+\gamma^2.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν διὰ τοῦ α, τὸ δὲ μέρος αὐτῆς, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ λοιποῦ μέρους, διὰ τοῦ χ, θὰ εἶναι $\alpha:\chi=\chi:(\alpha-\chi)$, ὅθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις $\chi^2=\alpha(\alpha-\chi)$,

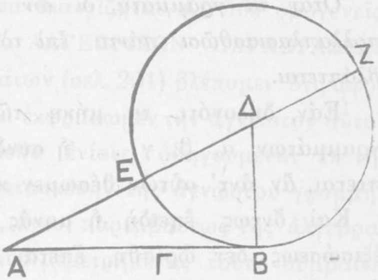
ἤτοι $\chi^2+\alpha\chi=\alpha^2$. πρέπει δὲ νὰ εἶναι $0<\chi<\alpha$.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν $\chi=-\frac{\alpha}{2}\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\alpha^2}$.

(Ἡ δευτέρα λύσις ὡς ἀρνητικὴ ἀπορρίπτεται).

Ὁδηγούμενοι ἐκ τῆς λύσεως ταύτης καὶ ἐκ τῶν γνωστῶν τῆς γεωμετρίας θεωρημάτων, εὑρίσκομεν τὸ μέρος χ διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς ὡς ἑξῆς.

Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον καθέτους πλευρὰς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς· ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ $\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \alpha^2}$· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης εὐθείας· τὸ ὑπόλοιπον θὰ παριστᾶται, ὑπὸ τοῦ χ καὶ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ζητούμενον μέρος.

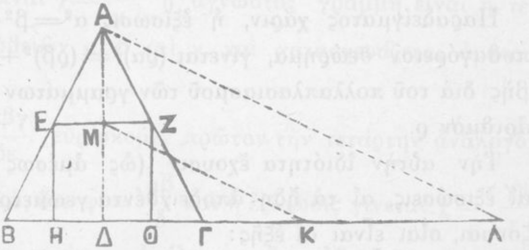


Οὕτως ἐπανευρίσκομεν τὴν ἐν τῷ ἐδαφίῳ 261 εὑρεθεῖσαν λύσιν τοῦ αὐτοῦ προβλήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ δοθὲν τρίγωνον· ἂς ὑποτεθῇ δὲ τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΕΖΘΗ τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις κεῖται ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ τοῦ τριγώνου. Τὴν βάσιν ταύτην ΒΓ παριστῶμεν διὰ τοῦ α· τὸ δὲ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου διὰ τοῦ υ, καὶ τὴν πλευρὰν ΕΖ τοῦ τετραγώνου διὰ τοῦ χ.



Ἐπειδὴ ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ, τὰ τρίγωνα ΑΕΖ, ΑΒΓ εἶναι ὅμοια· ὡσαύτως καὶ τὰ ΑΕΜ, ΑΒΔ· ὅθεν εἶναι

$$\frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΒ}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΑΜ}}{\text{ΑΔ}}, \quad \text{ὅθεν καὶ} \quad \frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΑΜ}}{\text{ΑΔ}},$$

τουτέστιν $\dfrac{\chi}{\alpha} = \dfrac{\upsilon - \chi}{\upsilon}$, διότι $\text{ΑΜ} = \text{ΑΔ} - \text{ΜΔ} = \upsilon - \chi$·

λύοντες δὲ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, εὑρίσκομεν $\chi = \dfrac{\alpha \cdot \upsilon}{\alpha + \upsilon}$.

Ἡ ἰσότης αὕτη δεικνύει, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου εἶναι τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν γνωστῶν εὐθειῶν $\alpha + \upsilon$, α, υ. Τὴν κατασκευὴν δεικνύει τὸ σχῆμα, ἔνθα ἐλήφθη $\text{ΔΚ} = \alpha$ καὶ $\text{ΚΛ} = \upsilon$.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΟΜΟΓΕΝΕΙΑΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Πᾶσα ἐξίσωσις, συνδέουσα τὰ μήκη τῶν γραμμῶν γεωμετρικοῦ σχήματος, ἐὰν ἡ μονὰς τοῦ μήκους μένῃ ἀόριστος, ἔχει τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

Ὅταν τὰ γράμματα, δι᾽ ὧν παρίστανται τὰ μήκη τῶν γραμμῶν, πολλαπλασιασθῶσι πάντα ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, ἡ ἐξίσωσις δὲν βλάπτεται.

Ἐάν, δηλονότι, τὰ μήκη τῶν γραμμῶν παριστῶνται διὰ τῶν γραμμάτων α, β, γ . . ., ἡ συνδέουσα αὐτὰ ἐξίσωσις οὐδόλως βλάπτεται, ἂν ἀντ' αὐτῶν θέσωμεν κατὰ σειρὰν αρ, βρ, γρ . . .

Καὶ ὄντως, ἐπειδὴ ἡ μονὰς τοῦ μήκους κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως δὲν ὡρίσθη, ἕπεται, ὅτι ἡ ἐξίσωσις δὲν θὰ ἀλλοιωθῇ, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν μεταβληθῇ ἡ μονάς· ἀλλ' ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μονὰς γίνεται ρ φορὰς μικροτέρα, οἱ τὰ μήκη παριστῶντες ἀριθμοὶ γίνονται ρα, ρβ, ργ . . . ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις δὲν βλάπτεται, ἄν, ἀντὶ τῶν α, β, γ . . . θέσωμεν κατὰ σειρὰν ρα, ρβ, ργ . . .

Παραδείγματος χάριν, ἡ ἐξίσωσις $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, ἥτις ἐκφράζει τὸ πυθαγόρειον θεώρημα, γίνεται $(\rho\alpha)^2=(\rho\beta)^2+(\rho\gamma)^2$, ἤτοι μένει ἀβλαβὴς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν γραμμάτων α, β, γ, ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν ρ.

Τὴν αὐτὴν ἰδιότητα ἔχουσιν (ὡς ἀμέσως βλέπει τις) καὶ πᾶσαι αἱ ἐξισώσεις, αἱ τὰ ἤδη ἀποδειχθέντα γεωμετρικὰ θεωρήματα ἐκφράζουσαι, οἷαι εἶναι αἱ ἑξῆς:

$$\kappa^2=\mu\nu \qquad (\text{ἐδ. } 199)$$

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta.\lambda, \qquad (\text{ἐδ. } 211)$$

$$\alpha^2+\beta^2=2\delta^2+2\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2, \qquad (\text{ἐδ. } 214)$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=\vartheta^2+\eta^2+4\zeta^2, \qquad (\text{ἐδ. } 215)$$

$$\alpha\gamma+\beta\delta=\vartheta\eta \qquad (\text{ἐδ. } 256).$$

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης ἕπεται, ὅτι ἐὰν ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀκεραία πρὸς πάντα τὰ γράμματα, ἅτινα περιέχει, ἢ πάντες οἱ ὅροι αὐτῆς θὰ εἶναι ἰσοβάθμιοι πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα (Στ. Ἀλγ., 78) ἤτοι θὰ εἶναι ὁμογενὴς πρὸς αὐτά, ἢ θὰ διασχίζηται εἰς ἄλλας ἐξισώσεις ὁμογενεῖς.

Διότι, ἂν λόγου χάριν, ὅροι τινὲς τῆς ἐξισώσεως, οὓς παριστῶ διὰ τοῦ Α, εἶναι πρωτοβάθμιοι πρὸς τὰ γράμματα, ἅτινα περιέχουσιν, οἱ δὲ λοιποί, οὓς παριστῶ διὰ Β, εἶναι δευτεροβάθμιοι, ἡ ἐξίσωσις γράφεται ὡς ἑξῆς $Α + Β = 0$ καὶ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν γραμμάτων αὐτῆς ἐπὶ ρ γίνεται $ρΑ + ρ^2Β = 0$ ἢ $Α + ρΒ = 0$· καὶ ἐπειδὴ πρέπει νὰ ἀληθεύῃ, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ρ, συνάγεται ὅτι θὰ εἶναι χωριστὰ $Α = 0$ καὶ $Β = 0$, ἤτοι ἡ ἐξίσωσις θὰ διασχίζηται εἰς δύο ὁμογενεῖς.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Ἐκ τῶν δύο τελευταίων προβλημάτων (σελ. 201) βλέπομεν ὅτι, ἀφοῦ λύσωμεν τὸ πρόβλημα ἀλγεβρικῶς καὶ ἐκφράσωμεν τὴν ἄγνωστον αὐτοῦ γραμμὴν διὰ τῶν γνωστῶν, δυνάμεθα ἐνίοτε, ὁδηγούμενοι ἐκ τῆς λύσεως, νὰ εὕρωμεν γεωμετρικὴν κατασκευὴν τῆς ἀγνώστου γραμμῆς ἀμέσως ἐκ τῶν δεδομένων γραμμῶν, ἄνευ παρεμβάσεως τῆς ἀλγέβρας καὶ χωρὶς νὰ ὑποθέσωμεν τὰς γραμμὰς μεμετρημένας· τοῦτο συμβαίνει πάντοτε, ὅταν ἡ ἐξίσωσις, δι' ἧς ὁρίζεται ἡ ἄγνωστος γραμμὴ εἶναι τοῦ πρώτου ἢ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὴν ἄγνωστον (ὅταν ἡ ἐξίσωσις γίνῃ ἀκεραία πρὸς πάντα τὰ ἐν αὐτῇ γράμματα) (Στ. Ἀλγ. 76).

Ἄν, λόγου χάριν, εἶναι $χ = \frac{αβ}{γ}$, ἡ ἄγνωστος γραμμὴ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν α, β καὶ γ, καὶ κατασκευάζεται ἀμέσως ἐξ αὐτῶν (σελ. 137).

Ἂν δὲ εἶναι $χ = \frac{αβγ}{δε}$, εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν τετάρτην ἀνάλογον ψ τῶν εὐθειῶν α, β καὶ δ, ὅτε, $ψ = \frac{αβ}{δ}$ καὶ ἡ ἐξίσωσις γίνεται $χ = \frac{γψ}{ε}$· ἑπομένως καταντᾷ ἡ χ τετάρτη ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν γ, ψ καὶ ε.

Ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ ἡ γραμμὴ $χ = \frac{αβγ\ldots λ}{α_1β_1γ_1\ldots κ_1}$, διὰ διαδοχικῶν τετάρτων ἀναλόγων (πρέπει δὲ νὰ εἶναι ὁ παρονομαστὴς τῆς τιμῆς τοῦ χ, βαθμοῦ κατὰ μονάδα μικροτέρου ἢ ὁ ἀριθμητὴς διὰ νὰ εἶναι ἡ ἐξίσωσις ὁμογενής, ὅταν ἀπαλλαχθῇ ἀπὸ τοῦ παρονομαστοῦ).

Καὶ πᾶσα γραμμὴ χ, τῆς ὁποίας ἡ ἔκφρασις εἶναι ρητὴ (Στ. Ἀλγ., σελ. 125) πρὸς πάντα τὰ γράμματα, ἅτινα περιέχει, κατασκευάζεται γεωμετρικῶς· ἔστω λόγου χάριν

$$χ = \frac{\pm αβγ \pm δεζ \pm \ldots \pm κλμ}{\pm α_1β_1 \pm δ_1ε_1 \pm \ldots \pm κ_1λ_1}$$

(καὶ ἐνταῦθα πρέπει, χάριν τῆς ὁμογενείας, νὰ εἶναι ὁ παρονομαστής, βαθμοῦ κατὰ μονάδα μικροτέρου ἢ ὁ ἀριθμητής).

Ἐὰν διαιρέσωμεν πάντας τοὺς ὅρους καὶ τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ διὰ τοῦ τετραγώνου ρ^2 τῆς τυχούσης γραμμῆς ρ καὶ κατασκευάσωμεν ἔπειτα (διὰ τῆς κατασκευῆς τῶν τετάρτων ἀναλόγων) τὰς γραμμὰς

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{\rho^2},\ \frac{\delta\varepsilon\zeta}{\rho^2}\ \ldots\ldots\ \frac{\varkappa\lambda\mu}{\rho^2},$$ ἃς παριστῶ διὰ $A, \Delta \ldots K$

καὶ τὰς $$\frac{\alpha_1\beta_1}{\rho},\ \frac{\delta_1\varepsilon_1}{\rho}\ldots\ldots\frac{\varkappa_1\lambda_1}{\rho},$$ ἃς παραστῶ διὰ $A_1 . \Delta_1 \ldots$

ἡ τιμὴ τοῦ χ γράφεται ὡς ἑξῆς

$$\chi = \frac{\rho(\pm A \pm \Delta \pm \ldots)}{\pm A_1 \pm \Delta_1 \pm \ldots}.$$

καὶ ἂν τὰ ἀθροίσματα $\pm A \pm \Delta \ldots$ καὶ $\pm A_1 \pm \Delta_1 \ldots$ εὑρεθῶσι καὶ παρασταθῶσι διὰ τοῦ Σ καὶ Σ_1 θὰ εἶναι $\chi = \frac{\rho\Sigma}{\Sigma_1}$, ἤτοι θὰ εἶναι ἡ χ τετάρτη ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν ρ, Σ καὶ Σ_1.

Πρὶν ἢ ἐξετάσωμεν τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν ἐν γένει, θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον τὰς ἑξῆς ἁπλουστέρας περιπτώσεις:

$$\chi^2 = \alpha . \beta, \quad \chi^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \chi^2 = \alpha^2 - \beta^2.$$

Ἡ ἄγνωστος γραμμὴ χ, ἡ διὰ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ὁριζομένη, εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος τῶν δύο εὐθειῶν α καὶ β· ἡ δὲ ὑπὸ τῆς δευτέρας ὁριζομένη, εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗτινος κάθετοι πλευραὶ εἶναι αἱ α καὶ β, ἡ δὲ ὑπὸ τῆς τρίτης ὁριζομένη, εἶναι ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, ἔχοντος ὑποτείνουσαν μὲν τὴν α, τὴν δὲ ἄλλην πλευρὰν ἴσην τῇ β.

Ἔστω νῦν ἡ τυχοῦσα ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\chi^2 + \alpha\chi = \beta$ (1).

Διὰ τὴν ὁμογένειαν ὁ συντελεστὴς α παριστᾷ γραμμήν, ἐπίσης καὶ τὸ πηλίκον $\frac{\beta}{\alpha}$· ἐὰν δὲ τεθῇ $\frac{\beta}{\alpha} = \pm \gamma$ καὶ εὑρεθῇ ἡ μέση ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν α καὶ γ, ἥτις ἔστω ἡ δ, ἡ ἐξίσωσις καταντᾷ $\chi^2 + \alpha\chi = \pm \delta^2$ (2) ἐξ ἧς

$$\chi = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} \pm \delta^2}.$$

ἡ δὲ παράστασις αὕτη κατασκευάζεται εὐκόλως.

Τὴν ἄγνωστον γραμμὴν χ τῆς ἐξισώσεως (2) δυνάμεθα καὶ ἄλλως νὰ κατασκευάσωμεν. Ἐάν, τῷ ὄντι, γράψωμεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς:

$$\chi(\chi + \alpha) = \pm \delta^2,$$

βλέπομεν ὅτι διὰ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ζητεῖται νὰ τραπῇ δοθὲν τετράγωνον εἰς ὀρθογώνιον, οὗ αἱ προσκείμεναι πλευραὶ νὰ ἔχωσι διαφορὰν δεδομένην ἢ ἄθροισμα δεδομένον.

Ἐὰν ἡ ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις, δι' ἧς ὁρίζονται αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων τοῦ προβλήματος, εἶναι βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου, ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ αὐτῶν, ἤτοι ἡ κατασκευὴ αὐτῶν *μόνον δι' εὐθειῶν καὶ περιφερειῶν* δὲν εἶναι πάντοτε δυνατή. Τοῦτο, λόγου χάριν, συμβαίνει εἰς τὸ πρόβλημα «νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα γωνία (μὴ ὀρθὴ) εἰς τρία ἴσα μέρη»· ἐπίσης ἐν τῇ στερεομετρίᾳ θὰ μάθωμεν ὅτι, ἐὰν ζητῆται ἡ πλευρὰ τοῦ κύβου, ὅστις εἶναι διπλάσιος ἄλλου (κατὰ τὸν ὄγκον), ἔχοντος πλευρὰν α, ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι $χ^3=2\,α^3$ ἢ $χ=α\sqrt[3]{2}$· ἀλλ' ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ χ εἶναι ἀδύνατον νὰ κατασκευασθῇ δι' εὐθειῶν καὶ περιφερειῶν μόνον.

Ὁμοίως, ἂν ζητῆται ἡ πλευρὰ κύβου, ἴσου πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων δοθέντων, ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$χ^3=α^3+β^3 \quad ἢ \quad χ=\sqrt[3]{α^3+β^3}.$$

ἀλλὰ καὶ ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ χ εἶναι ἀδύνατον νὰ κατασκευασθῇ δι' εὐθειῶν καὶ περιφερειῶν μόνον· πρὸς κατασκευὴν τούτων ἀπαιτοῦνται καὶ ἄλλαι πολυπλοκώτεραι γραμμαί.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Δοθέντος τριγώνου, νὰ τμηθῇ δι' εὐθείας ἀπ' αὐτοῦ τραπέζιον ἔχον ἐμβαδὸν δοθὲν ἢ περίμετρον δοθεῖσαν.

2) Δοθεῖσα εὐθεῖα νὰ τμηθῇ οὕτως, ὥστε τὸ ἄθροισμα (ἢ ἡ διαφορὰ) τῶν τετραγώνων τῶν δύο μερῶν νὰ εἶναι ἴσον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ.

3) Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ἐντὸς κύκλου, νὰ ἀχθῇ χορδή, ἥτις νὰ διαιρῆται εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον δοθέντα.

4) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ μιᾶς τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν καὶ ἐκ τῆς προβολῆς τῆς ἄλλης ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

5) Νὰ διαιρεθῇ τὸ δοθὲν τρίγωνον δι' εὐθείας παραλλήλου τῇ βάσει αὐτοῦ εἰς δύο μέρη ἔχοντα δοθέντα λόγον $μ : ν$.

6) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ μία τῶν ἴσων πλευρῶν καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους.

7) Εἰς δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, ἔχον δοθὲν ἐμβαδὸν (ποῖον ἐκ τῶν ἐγγεγραμμένων ὀρθογωνίων εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον εἶναι τὸ μέγιστον;).

ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ

Α') Παράστασις τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας διὰ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Τὰ σημεῖα ἑκάστης εὐθείας δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν πρὸς τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς· ἓν σημεῖον πρὸς ἕνα ἀριθμὸν καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀρκεῖ, πρὸς τοῦτο, νὰ λάβωμεν αὐθαιρέτως δύο σημεῖα τῆς εὐθείας, Ο καὶ Α, καὶ νὰ ἀντιστοιχίσωμεν αὐτὰ πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 0 καὶ 1· τότε, πᾶν ἄλλο σημεῖον τῆς εὐθείας, οἷον τὸ Μ, θὰ παριστᾶται ὑπὸ τοῦ λόγου $\frac{(OM)}{(OA)}$, ἤτοι διὰ τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Ο (ὅπερ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸν ἀριθμὸν 0), μετρηθείσης μὲ μονάδα τὴν ΟΑ· λαμβάνεται δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος θετικῶς μέν, ἂν τὰ τμήματα ΟΜ καὶ ΟΑ ἔχωσι κοινόν τι μέρος, ἀρνητικῶς δέ, ἂν τουναντίον.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ἀντίστοιχος σημείου τινὸς λέγεται ὅτι παριστᾷ αὐτό· ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως λέγεται ὅτι τὸ σημεῖον παριστᾷ τὸν ἀριθμόν.

Θετικὸν μέρος τῆς εὐθείας λέγεται ἐκεῖνο, οὗ τὰ σημεῖα παρίστανται διὰ θετικῶν ἀριθμῶν, *ἀρνητικὸν* δὲ ἐκεῖνο, οὗ τὰ σημεῖα παρίστανται δι' ἀρνητικῶν.

Β') Παράστασις τῶν τμημάτων μιᾶς εὐθείας διὰ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ἕκαστον τμῆμα μιᾶς εὐθείας παρίσταται δι' ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἀφοῦ ὁρισθῶσιν αὐθαιρέτως τὰ ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν 0 καὶ 1 παριστώμενα σημεῖα Ο καὶ Α τῆς εὐθείας, πᾶν ἄλλο σημεῖον Μ παρίσταται, κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα, ὑπὸ ἀριθμοῦ ἐντελῶς ὡρισμένου· ἐπειδὴ δὲ ἐκ τοῦ σημείου Μ ὁρίζεται ἐντελῶς καὶ τὸ τμῆμα ΟΜ, καὶ ἀντιστρόφως, ἐκ τοῦ τμήματος ΟΜ ὁρίζεται καὶ τὸ σημεῖον Μ, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν ἀμφότερα, καὶ τὸ σημεῖον Μ καὶ τὸ τμῆμα ΟΜ, δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· τότε οἱ μὲν θετικοὶ ἀριθμοὶ θὰ παριστῶσι τμήματα, ἅτινα, ὡς ὁδοὶ θεωρούμενα, φέρουσιν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας, πρὸς ὃ φέρει καὶ ἡ ὁδὸς ἀπὸ Ο εἰς Α, ἤτοι ἔχουσι τὴν *φορὰν* τῆς ΟΑ· καὶ λέγονται διὰ τοῦτο θετικά, οἱ δὲ ἀρνητικοὶ θὰ παριστῶσι τμήματα, ἅτινα, ὡς ὁδοὶ θεωρούμενα, φέρουσιν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος τῆς εὐθείας, ἤτοι ἔχουσι φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὰ πρῶτα καὶ λέγονται ἀρνητικά.

Ἐκ τούτων ἀγόμεθα εἰς τὴν ἰδέαν, νὰ διακρίνωμεν ἐπὶ ἑκάστου τμήματος τῆς εὐθείας, ἀρχὴν καὶ τέλος, καὶ νὰ θεωρῶμεν ὡς θετικὰ μὲν τὰ ἔχοντα μίαν τινὰ φοράν, οἷον τὴν φορὰν ἀπὸ Ο εἰς Α· ἀρνητικὰ δὲ τὰ ἔχοντα τὴν ἀντίθετον ΑΟ, ἀπὸ Α εἰς Ο.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν τὸ τμῆμα γράφηται διὰ δύο γραμμάτων, προτάσσεται πάντοτε τὸ γράμμα τῆς ἀρχῆς.

Τὰ ἰσομήκη καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς (ὁμόρροπα) τμήματα μιᾶς εὐθείας, ἢ καὶ παραλλήλων εὐθειῶν, θεωροῦνται ὡς ἴσα καὶ παρίστανται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· ἑπομένως, ἐὰν ληφθῇ αὐθαιρέτως τὸ τμῆμα ΟΑ, ὅπερ, παριστᾷ ἡ θετικὴ μονὰς 1, πᾶν ἄλλο τμῆμα ΜΝ τῆς εὐθείας, παρίσταται δι' ἀριθμοῦ ἐντελῶς ὡρισμένου, ἤτοι τοῦ λόγου $\frac{(\mathrm{MN})}{(\mathrm{OA})}$, ὅστις ἐκφράζει τὸ μῆκος τοῦ τμήματος, θετικῶς μὲν λαμβανομένου, ἂν εἶναι ὁμόρροπον τῷ ΟΑ, ἀρνητικῶς δέ, ἂν τοὐναντίον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ ἀριθμός, ὁ παριστῶν τμῆμά τι, γράφεται διὰ τῶν αὐτῶν γραμμάτων ἐγκλειομένων εἰς παρένθεσιν· οὕτω, λόγου χάριν, (ΟΑ) εἶναι $=1$, (ΑΟ) εἶναι $=-1$· κτλ.

Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις τῶν τμημάτων μιᾶς εὐθείας.

Ἡ πρόσθεσις τῶν τμημάτων μιᾶς εὐθείας ὁρίζεται ὡς καὶ ἡ πρόσθεσις τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ· ἤτοι ἂν μὲν δύο τμήματα εἶναι ὁμόρροπα, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι τμῆμα ὁμόρροπον αὐτοῖς καὶ εὑρίσκεται, ὡς ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς γεωμετρίας ἐρρήθη (ἐδ. 21)· ἂν δὲ δύο τμήματα εἶναι ἀντίρροπα, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἔχει τὴν φορὰν τοῦ μεγαλητέρου καὶ εὑρίσκεται διὰ τῆς ἐλαττώσεως αὐτοῦ, κατὰ τμῆμα ἰσομῆκες τῷ μικροτέρῳ· δύο δὲ ἰσομήκη τμήματα ἀντιθέτου φορᾶς ἔχουσιν ἄθροισμα 0.

Ἡ δὲ ἀφαίρεσις τμήματος ἀπὸ ἄλλου ἀνάγεται καὶ ἐπὶ τῶν τμημάτων, εἰς τὴν πρόσθεσιν τοῦ ἀντιθέτου πρὸς αὐτό.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον, αἱ μεταξὺ τῶν τμημάτων σχέσεις τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως ἰσχύουσι προδήλως καὶ ἐπὶ τῶν παριστώντων αὐτὰ ἀριθμῶν· καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν δηλαδὴ εἶναι $\mathrm{AB}+\Gamma\Delta=\mathrm{EZ}$ θὰ εἶναι καὶ $(\mathrm{AB})+(\Gamma\Delta)=(\mathrm{EZ})$.

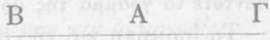
Ὅταν τὸ τέλος τμήματός τινος ΑΒ εἶναι ἀρχὴ ἑτέρου ΒΓ, ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι τὸ τμῆμα ΑΓ, ὅπερ ἔχει ἀρχήν, τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου καὶ τέλος, τὸ τέλος τοῦ δευτέρου, ἤτοι εἶναι $\mathrm{AB}+\mathrm{B}\Gamma=\mathrm{A}\Gamma$· καὶ τοῦτο, οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχωσι τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ ἐπὶ τῆς εὐθείας.

Ἐκ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ ἓν πάντως εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων· καὶ ἂν μὲν τὸ Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ, τὰ δύο τμήματα ΑΒ, ΒΓ εἶναι ὁμόρροπα καὶ ἡ ἰσότης

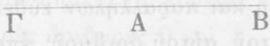
ΑΒ+ΒΓ=ΓΑ εἶναι προφανής· ἂν δὲ τὸ Γ κεῖται μεταξὺ Α καὶ Β, θὰ εἶναι πάλιν

$$ΑΒ+ΒΓ=ΑΓ+ΓΒ+ΒΓ=ΑΓ.$$

Ἂν δὲ τέλος, τὸ Α κεῖται μεταξὺ Β καὶ Γ, θὰ εἶναι



$$ΑΒ+ΒΓ=ΑΒ+ΒΑ+ΑΓ=ΑΓ·$$



ὥστε εἰς πᾶσαν περίπτωσιν εἶναι $ΑΒ+ΒΓ=ΑΓ$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἕπονται ἀμέσως αἱ ἑξῆς:

$$ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ=ΑΔ,$$
$$ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ=ΑΕ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ὁπωσδήποτε καὶ ἂν κεῖνται τὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς εὐθείας.

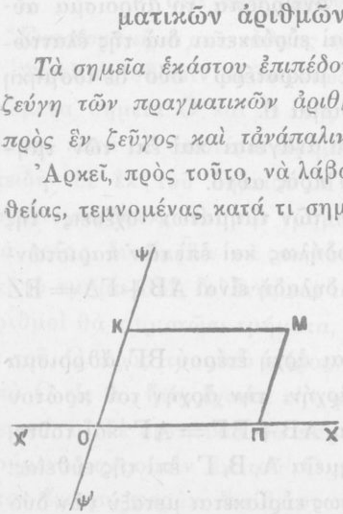
Ὁ ἀριθμός, ὁ παριστῶν τμῆμά τι, εἶναι ἴσος τῇ διαφορᾷ τῶν παριστώντων τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἀριθμῶν· καὶ τῆς διαφορᾶς ταύτης ἀφαιρετέος μὲν εἶναι ὁ τὴν ἀρχὴν τοῦ τμήματος παριστῶν ἀριθμός, μειωτέος δὲ ὁ τὸ τέλος.

Διότι, ἔστω τυχὸν τμῆμα τὸ ΜΝ· ἐπειδὴ $ΜΝ=ΜΟ+ΟΝ$, ἕπεται $ΜΝ=ΟΝ-ΟΜ$, ὅθεν καὶ $(ΜΝ)=(ΟΝ)-(ΟΜ)$.

Γ΄) Παράστασις τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου διὰ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἀνὰ δύο λαμβανομένων.

Τὰ σημεῖα ἑκάστου ἐπιπέδου δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν πρὸς τὰ ζεύγη τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἀνὰ δύο λαμβανομένων· ἓν σημεῖον πρὸς ἓν ζεῦγος καὶ τἀνάπαλιν.

Ἀρκεῖ, πρὸς τοῦτο, νὰ λάβωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο τυχούσας εὐθείας, τεμνομένας κατά τι σημεῖον Ο, ἔστω τὰς Χ΄ΟΧ καὶ Ψ΄ΟΨ καὶ νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Μ τὴν παράλληλον τῇ Χ΄ΟΧ καὶ τὴν παράλληλον τῇ Ψ΄ΟΨ, ὧν ἡ μὲν πρώτη τέμνει τὴν Ψ΄ΟΨ κατά τι σημεῖον Κ, ἡ δὲ δευτέρα τέμνει τὴν Χ΄ΟΧ κατά τι σημεῖον Π καὶ νὰ ἀντιστοιχίσωμεν τὸ σημεῖον Μ πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες παριστῶσι τὰ



σημεῖα Π καὶ Κ (ἢ καὶ τὰ τμήματα ΟΠ, ΟΚ) ἐπὶ τῶν δύο εὐθειῶν (ἡ μονὰς τοῦ μήκους λαμβάνεται ἡ αὐτὴ ἐπὶ ἀμφοτέρων τῶν εὐθειῶν).

Οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοὶ λέγονται *συντεταγμένοι* τοῦ σημείου Μ καὶ γράφονται διὰ τῶν γραμμάτων x (ὁ παριστῶν τὸ ΟΠ) καὶ y (ὁ παριστῶν τὸ ΟΚ)· καὶ τὰ δύο τμήματα ΟΠ, ΟΚ, ὡς γραμμαὶ θεωρούμενα λέγονται *συντεταγμέναι* τοῦ Μ· καὶ τὸ μὲν ΟΠ λέγεται *τετμημένη*, τὸ δὲ ΟΚ (ἢ μᾶλλον τὸ ἴσον πρὸς αὐτὸ ΠΜ), *τεταγμένη* τοῦ σημείου Μ, αἱ δὲ εὐθεῖαι Χ΄ΟΧ καὶ Ψ΄ΟΨ λέγονται *ἄξονες* τῶν συντεταγμένων· λαμβάνονται δὲ συνήθως κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπειδὴ αἱ γραμμαὶ ὑποπίπτουσιν εἰς τὰς αἰσθήσεις ἡμῶν ἀμέσως καὶ εὐκολύνουσι τοὺς συλλογισμοὺς ἡμῶν, παρέχουσαι αἰσθητὴν εἰκόνα τῶν ἐφ' ὧν σκεπτόμεθα ἀριθμῶν, διὰ τοῦτο, ἀντὶ τοῦ ὅρου «συντεταγμένοι» (ἀριθμοί), μεταχειριζόμεθα συνηθέστερον τὸν ὅρον «συντεταγμέναι» (γραμμαί).

Ἀμφότεροι οἱ συντεταγμένοι ἀριθμοὶ ἑκάστου σημείου εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένοι, κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα, διότι, δοθέντος τοῦ Μ, ὁρίζονται ἀμέσως καὶ τὰ σημεῖα Π καὶ Κ· ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, δοθέντων τῶν δύο σημείων Π καὶ Κ, ἢ καὶ τῶν δύο τμημάτων ΟΠ, ΟΚ, ἓν καὶ μόνον ὑπάρχει σημεῖον ἀντίστοιχον, ἔχον αὐτὰ συντεταγμένα· διότι καθ' ἓν μόνον σημεῖον συναντῶνται αἱ ἐκ τῶν Π καὶ Κ ἀγόμεναι παράλληλοι τοῖς ἄξοσι Ψ΄ΟΨ καὶ Χ΄ΟΧ.

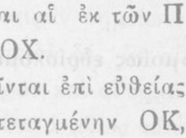
Ὅσα σημεῖα ἔχουσι τὴν αὐτὴν τετμημένην ΟΠ, κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῇ Ψ΄ΟΨ· ὅσα δὲ ἔχουσι τὴν αὐτὴν τεταγμένην ΟΚ, κεῖνται ἐπὶ παραλλήλου τῇ Χ΄ΟΧ. Τὰ κείμενα ἐπὶ τῆς Χ΄ΟΧ ἔχουσι τεταγμένην 0, τὰ δὲ κείμενα ἐπὶ τῆς Ψ΄ΟΨ ἔχουσι τετμημένην 0. τὸ δὲ σημεῖον Ο (ἡ ἀρχή) ἔχει συντεταγμένας (0, 0).

Τὰ πρὸς τὴν ἀρχὴν συμμετρικὰ σημεῖα ἔχουσι τὰς ὁμωνύμους συντεταγμένας ἀντιθέτους.

Ἐφαρμογαὶ τῶν συντεταγμένων.

1) Ἐκ τῶν συντεταγμένων δύο σημείων εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν αὐτῶν (ἄξονες ὀρθογώνιοι).

Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ δύο σημεῖα καὶ συντεταγμέναι, τοῦ μὲν Α αἱ $(x_1\ y_1)$, τοῦ δὲ Β αἱ (x_2, y_2)



Ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ τεταγμέναι ΑΠ καὶ ΒΡ, ἔτι δὲ καὶ ἡ ΑΙ, παράλληλος τῇ ΟΧ, γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΙΒ· ἐκ δὲ τούτου λαμβάνομεν

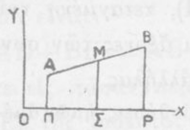
$$(AB)^2 = (AI)^2 + (IB)^2, \text{ ἤτοι } (AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \quad (1)$$

τουτέστι, τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως δύο σημείων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαφορῶν τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων.

Ἐάν, π. χ., εἶναι $x_1=1,\ x_2=8,\ y_1=4,\ y_2=3,$

θὰ εἶναι $(\mathrm{AB})^2=7^2+1^2=50$ καὶ $\mathrm{AB}=\sqrt{50}.$

2) Ἐκ τῶν συντεταγμένων δύο σημείων A καὶ B, εὑρεῖν τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου M τῆς AB, εἰς ὃ ὁ λόγος τῶν δύο τμημάτων AM : MB νὰ εἶναι ἴσος τῷ δοθέντι ἀριθμῷ λ.



Ἔστωσαν καὶ πάλιν $x_1\ y_1$ αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου A, $x_2\ y_2$ αἱ τοῦ B καὶ $x,\ y$ αἱ τοῦ M (οἱ ἄξονες ἔστωσαν οἱοιδήποτε)· ἄγοντες τὰς τεταγμένας τῶν τριῶν σημείων, λαμβάνομεν ἀμέσως ἐκ τοῦ σχήματος (ἐδ. 226)

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}}=\frac{\Pi\Sigma}{\Sigma\mathrm{P}},\ \text{ἤτοι}\ \lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}.$$

καὶ λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην πρὸς τὴν ἄγνωστον x, εὑρίσκομεν·

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}. \tag{2}$$

ὁμοίως εὑρίσκομεν ἐκ τῶν τετμημένων

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{3}$$

Μερικὴ περίπτωσις.

Ἐὰν τὸ M εἶναι τὸ μέσον τῆς AB, ὁ λόγος λ εἶναι 1, ὅθεν αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου τῆς AB, εἶναι

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \tag{4}$$

ἤτοι, *αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου οἱουδήποτε τμήματος εἶναι οἱ μέσοι ὅροι τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων τῶν ἄκρων αὐτοῦ.*

3) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἐκ τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν αὐτοῦ (ἄξονες ὀρθογώνιοι).

Αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν ἀγόμεναι τεταγμέναι σχηματίζουσι μετὰ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ ἄξονος OX, τρία τραπέζια, ὧν τὰ ἐμβαδὰ εὑρίσκονται ἀμέσως ἐκ τῶν συντεταγμένων· ἐκ δὲ τῶν τραπεζίων τούτων συντίθεται καὶ τὸ τρίγωνον· παριστῶντες δὲ διὰ

$$(x_1y_1),\quad (x_2y_2),\quad (x_3y_3),$$

τὰς συντεταγμένας τῶν κορυφῶν, εὑρίσκομεν διὰ τοῦ ῥηθέντος τρόπου, τὸν ἑξῆς τύπον διὰ τὸ ἐμβαδὸν Ε

$$E = (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3).$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ τάξις τῶν κορυφῶν πρέπει νὰ λαμβάνηται τοιαύτη ὥστε νὰ προκύπτει θετικὸν τὸ Ε.

Δ΄) Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν ἐξισώσεων.

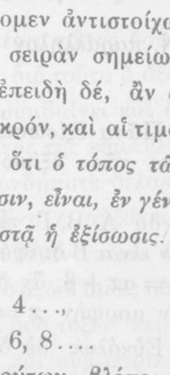
Ἐὰν δοθῇ μία ἐξίσωσις, συνδέουσα τὰς συντεταγμένας x, y, ὑπάρχουσιν ἐν γένει ἄπειρα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, ὧν αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουσιν αὐτήν, διότι, ἂν ὁρίσωμεν αὐτοβούλως τὴν μίαν ἐκ τῶν συντεταγμένων, ἔστω τὴν x, ἀπομένει εἰς τὴν ἐξίσωσιν μία ἄγνωστος, ἡ y, καὶ ἐπομένως ὁρίζεται καὶ αὐτή· ἐκ δὲ τῶν συντεταγμένων τούτων, ἀφοῦ ὡρίσθησαν, ὁρίζεται καὶ τὸ σημεῖον· οὕτως ἔχομεν ἓν σημεῖον, οὗτινος αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουσι τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν· ἐὰν δὲ εἰς τὴν x δώσωμεν σειράν τινα τιμῶν, λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως σειρὰν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς y· (ἐάν, λόγου χάριν, ἡ ἐξίσωσις εἶναι $y = 3x$ καὶ ὑποθέσωμεν $x = 0, 1, 2, 3$.., εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως $y = 0, 3, 6, 9 \ldots$,)· τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν ἐν γένει σειρὰν σημείων, ὧν αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν· ἐπειδὴ δέ, ἂν αἱ τιμαὶ τῆς x προβαίνωσιν αὐξανόμεναι μικρὸν κατὰ μικρόν, καὶ αἱ τιμαὶ τῆς y μεταβάλλονται μικρὸν κατὰ μικρόν, ἐννοοῦμεν, ὅτι *ὁ τόπος τῶν σημείων, ὧν αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν, εἶναι, ἐν γένει γραμμή τις· τὴν γραμμὴν δὲ ταύτην λέγομεν ὅτι παριστᾷ ἡ ἐξίσωσις.*

Ὡς παράδειγμα ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\quad y = 2x$

ἐὰν εἰς τὴν x δώσωμεν τὰς τιμὰς $\quad x = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$,

εὑρίσκομεν ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς $\quad y = 0, 2, 4, 6, 8 \ldots$

Ἐὰν δὲ κατασκευάσωμεν τινὰ ἐκ τῶν σημείων τούτων, βλέπομεν εὐκόλως ὅτι ταῦτα πάντα κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς Ο καὶ διὰ τοῦ σημείου Α ($x = 1$, $y = 2$), Ὅτι, τῷ ὄντι, αἱ συντεταγμέναι παντὸς σημείου τῆς εὐθείας ΟΑ, ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν $y = 2x$, δεικνύεται εὐκολώτατα διὰ τῶν ὁμοίων τριγώνων· διότι, ἄγοντες τὴν τεταγμένην ΡΜ τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς εὐθείας ταύτης, ἔχομεν

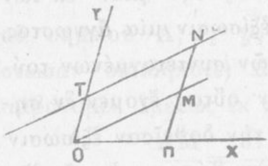


$$\frac{\text{ΜΡ}}{\text{ΑΠ}} = \frac{\text{ΟΡ}}{\text{ΟΠ}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{y}{2} = \frac{x}{1}, \quad \text{ἤτοι} \quad y = 2x$$

ἀλλ᾽ οὐδὲν ἄλλο σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἔχει συντεταγμένας πληρούσας τὴν ἐξίσωσιν $y=2x$· διότι ἑκάστου σημείου κειμένου ὑπεράνω τῆς εὐθείας ΟΑ, ἡ τεταγμένη εἶναι μεγαλητέρα τοῦ διπλασίου τῆς τετμημένης του (διὰ τὸ σημεῖον Ν, λόγου χάριν, εἶναι $\Theta N > \Theta I$, ἤτοι $\Theta N > 2O\Theta$ ἢ $y > 2x$)· ἑκάστου δὲ σημείου ὑποκάτω τῆς εὐθείας ΟΑ κειμένου, ἡ τεταγμένη εἶναι μικροτέρα τοῦ διπλασίου τῆς τετμημένης του.

Ὁμοίως δεικνύεται καὶ γενικῶς ὅτι ἡ ἐξίσωσις $y=\alpha x$, ἔνθα α εἶναι ἀριθμὸς ὡρισμένος, παριστᾷ τὴν εὐθεῖαν, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς Ο καὶ διὰ τοῦ σημείου (1, α)· διότι αἱ συντεταγμέναι ἀμφοτέρων τῶν σημείων τούτων ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν.

Ἡ δὲ ἐξίσωσις $y=\alpha x+\beta$ παριστᾷ τὴν εὐθεῖαν, ἥτις προκύπτει, ἐὰν τὰς τεταγμένας τῆς εὐθείας $y=\alpha x$, αὐξήσωμεν πάσας (ἂν β εἶναι θετικόν), ἢ ἐλαττώσωμεν πάσας (ἂν β εἶναι ἀρνητικόν), κατὰ τὸ μῆκος β· εἶναι ἄρα παράλληλος τῇ εὐθείᾳ $y=\alpha x$.



Παραδείγματος χάριν ἡ ἐξίσωσις $y=\frac{1}{2}x+1$ παριστᾷ τὴν εὐθεῖαν ΤΝ, παράλληλον τῇ ΟΜ, δι᾽ ἣν εἶναι $O\Pi=2$, $\Pi M=1$, $MN=1$.

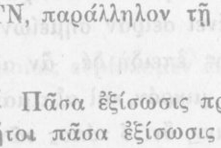
Παρατήρησις.

Πᾶσα ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ, συνδέουσα τὰς συντεταγμένας x, y, ἤτοι πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς

$$Ax+By+\Gamma=0 \tag{1}$$

(ἔνθα Α, Β, Γ εἶναι σταθερά), παριστᾷ εὐθεῖαν γραμμήν· διότι, ἂν μὲν εἶναι Β διάφορον τοῦ 0, λύεται πρὸς y καὶ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $y=\alpha x+\beta$· ἂν δὲ εἶναι $B=0$, λύεται πρὸς τὴν x καὶ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $x=\gamma$· τότε δὲ παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον τῇ ΟΨ.

Εὐκόλως δὲ δεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει· ἤτοι *πᾶσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἔχει ἐξίσωσιν πρωτοβάθμιον*, τουτέστιν αἱ δύο συντεταγμέναι x, y, παντὸς σημείου αὐτῆς συνδέονται διὰ μιᾶς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς (1).



Ἔστω καὶ ἡ ἐξίσωσις $x^2+y^2=\alpha^2$ (ἡ γωνία τῶν ἀξόνων ὑποτίθεται νῦν ὀρθή).

Ἔστω Α τυχὸν σημεῖον, οὗ αἱ συντεταγμέναι ΟΠ, ΠΑ ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν ταύτην· ἐὰν ἀχθῇ ἐκ τῆς ἀρχῆς ἡ ΟΑ, γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἐξ οὗ λαμβάνομεν

$$(OA)^2=(O\Pi)^2+(\Pi A)^2, \quad \text{ἤτοι} \quad x^2+y^2=(OA)^2=\alpha^2.$$

ἄρα, *πᾶν σημεῖον πληροῦν τὴν ἐξίσωσιν* $x^2+y^2=\alpha^2$ *ἀπέχει ἀπὸ τῆς ἀρχῆς Ο ἀπόστασιν ἴσην τῇ εὐθείᾳ α*· ἑπομένως κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἧς κέντρον εἶναι ἡ ἀρχὴ καὶ ἀκτὶς ἡ εὐθεῖα α.

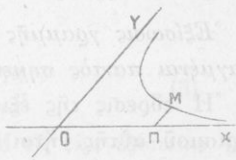
Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον τῆς περιφερείας ταύτης πληροῖ τὴν ἐξίσωσιν· διότι αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ καὶ ἡ ἀκτίς του σχηματίζουσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἐξ οὗ προκύπτει ἀμέσως ἡ σχέσις $x^2+y^2=\alpha^2$.

Ἔστω, πρὸς τούτοις, καὶ ἡ ἐξίσωσις

$$xy=\delta^2 \quad \text{ἢ} \quad y=\frac{\delta^2}{x}.$$

ἔνθα δ δηλοῖ ὡρισμένον τι μῆκος.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως βλέπομεν ἀμέσως ὅτι ἐν τῇ γωνίᾳ xoy, τοῦ x αὐξανομένου διηνεκῶς, ἡ τεταγμένη y ἐλαττοῦται διηνεκῶς καὶ τείνει πρὸς τὸ Ο, ἀλλ' οὐδέποτε γίνεται Ο· ἡ καμπύλη ἄρα, ἣν παριστᾷ ἡ ἐξίσωσις, καταβαίνει διαρκῶς καὶ πλησιάζει ἀπαύστως πρὸς τὸν ἄξονα ΟΧ, ὥστε ἡ ἀπόστασις



τῶν σημείων της ἀπὸ τῆς εὐθείας ΟΧ, γίνεται μικροτέρα πάσης δοθείσης εὐθείας, ἀλλ' οὐδαμοῦ ἐγγίζει τὴν εὐθείαν ταύτην· διὰ τοῦτο ὁ ἄξων ΟΧ λέγεται *ἀσύμπτωτος* τῆς καμπύλης. Τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΨ, ἤτοι καὶ ὁ ἄξων οὗτος εἶναι ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης· διότι δυνάμεθα μὲν νὰ δώσωμεν εἰς τὴν x τιμὰς ὁσονδήποτε θέλομεν μικρὰς ἀλλ' ὄχι καὶ Ο· καὶ ὅταν ἐλαττοῦται ἡ τετμημένη x, αὐξάνει ἡ τεταγμένη καὶ δύναται νὰ ὑπερβῇ πᾶσαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν· πᾶσα δηλαδὴ εὐθεῖα, παράλληλος τῇ ΟΨ τέμνει τὴν καμπύλην, ὁ ἄξων ὅμως οὐχί.

Ἡ καμπύλη αὕτη λέγεται *ὑπερβολή*, σύγκειται δὲ ἐκ δύο τόξων κειμένων ἐν ταῖς κατὰ κορυφὴν γωνίαις ΧΟΨ καὶ Χ΄ΟΨ΄ καὶ συμμετρικῶν πρὸς τὸ σημεῖον Ο· διότι, ἂν τὸ σημεῖον (α, β) εἶναι τῆς καμπύλης (ἂν δηλαδὴ εἶναι $\alpha \cdot \beta=\delta^2$), καὶ τὸ πρὸς τὴν ἀρχὴν συμμετρικὸν αὐτοῦ $(-\alpha, -\beta)$ θὰ εἶναι τῆς καμπύλης, διότι $(-\alpha) \cdot (-\beta)=\delta^2$.

Ἐὰν δοθῶσι δύο ἐξισώσεις, συνδέουσαι τὰς συντεταγμένας x, y, τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, ὧν αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουσιν ἀμφοτέρας, εἶναι ἐν γένει ὡρισμένα· διότι πρέπει νὰ εὑρίσκωνται καὶ ἐπὶ τῆς γραμμῆς, ἣν παριστᾷ ἡ πρώτη ἐξίσωσις καὶ ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἣν παριστᾷ ἡ δευτέρα· ὥστε εἶναι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν δύο τούτων γραμμῶν καὶ μόνα ταῦτα. Παραδείγματος χάριν, αἱ δύο ἐξισώσεις

$$2x - y = 16 \quad \text{καὶ} \quad x - 2y = 0$$

ἐπαληθεύονται εἰς τὴν τομὴν τῶν δύο εὐθειῶν, ἃς παριστῶσιν αἱ δύο ἐξισώσεις (ὅταν λαμβάνωνται χωριστὰ κάθε μία) καὶ μόνον εἰς αὐτήν.

Δυνάμεθα διὰ τοῦτο, ἢ νὰ λύωμεν τὰς δύο ἐξισώσεις πρὸς τὰς δύο ἀγνώστους x, y διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν μεθόδων καὶ νὰ προσδιορίζωμεν οὕτω τὰς συντεταγμένας τῶν κοινῶν σημείων τῶν δύο γραμμῶν, ἢ νὰ κατασκευάζωμεν γεωμετρικῶς τὰς δύο εἰρημένας γραμμὰς καὶ νὰ εὑρίσκωμεν τὴν τομὴν αὐτῶν· ἡ τοιαύτη λύσις λέγεται *γεωμετρικὴ λύσις* τῶν ἐξισώσεων.

Εὕρεσις τῆς ἐξισώσεως καμπύλων γεωμετρικῶς ὁριζομένων.

Ἐξίσωσις γραμμῆς λέγεται ἡ ἐξίσωσις ἣν ἐπαληθεύουσιν αἱ συντεταγμέναι παντὸς σημείου αὐτῆς, ἀλλ᾽ οὐδενὸς ἄλλου.

Ἡ εὕρεσις τῆς ἐξισώσεως ἑκάστης καμπύλης στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτῆς, ἤτοι ἐπί τινος χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος αὐτῆς. Διὰ τὴν περιφέρειαν, λόγου χάριν, ἐὰν λάβωμεν ὑπ᾽ ὄψει τὴν γνωστὴν ἰδιότητα αὐτῆς καὶ παραστήσωμεν διὰ x, y τὰς συντεταγμένας τοῦ τυχόντος σημείου αὐτῆς καὶ διὰ α, β τὰς συντεταγμένας τοῦ κέντρου καὶ διὰ ρ τὴν ἀκτῖνα, εὑρίσκομεν ἀμέσως τὴν ἐξίσωσιν (ὀρθογώνιοι ἄξονες)

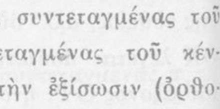
$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2\cdot$$

διότι τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου x, y ἀπὸ τοῦ κέντρου (α, β), ἤτοι τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος ρ.

Ἔστωσαν προσέτι τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

Ἔλλειψις

Ἔλλειψις λέγεται ὁ τόπος τῶν σημείων, ὧν αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον δεδομένῃ τινὶ εὐθείᾳ.



Τὰ δύο σημεῖα ἀφ᾽ ὧν λαμβάνονται αἱ ἀποστάσεις λέγονται *ἑστίαι* τῆς ἐλλείψεως.

Ἔστωσαν Ε καὶ Ε′, τὰ δύο δεδομένα σημεῖα καὶ ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα· ὡς ἄξονας τῶν συντεταγμένων λαμβάνομεν, τὴν μὲν εὐθεῖαν Ε′Ε ὡς ἄξονα τῶν x, τὴν δὲ κάθετον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς ὡς ἄξονα τῶν y καὶ παριστῶμεν τὴν ἀπόστασιν Ε′Ε διὰ τοῦ 2γ, τὴν δὲ εὐθεῖαν ΑΒ διὰ τοῦ 2α.

Ἐὰν Μ (x, y) εἶναι τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς ἐλλείψεως, θὰ εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτῆς, $E'M + EM = 2\alpha$ · ἀλλὰ τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων Ε′Μ καὶ ΕΜ εἶναι

$$(E'M)^2 = (x+\gamma)^2 + y^2 \quad \text{καὶ} \quad (EM)^2 = (x-\gamma)^2 + y^2, \qquad (1)$$

διότι τοῦ μὲν Ε συντεταγμέναι εἶναι (γ, 0), τοῦ δὲ Ε′ (—γ, 0)· ἐκ τῶν ἐξισώσεων (ι) ἔπεται νῦν $(E'M)^2 - (EM)^2 = 4\gamma x$,

$$\text{ἢ} \qquad (E'M + EM).(E'M - EM) = 4\gamma x \qquad (2)$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $E'M + EM = 2\alpha$, ἡ ἐξίσωσις (2) γίνεται

$$(E'M - EM) = \frac{2\gamma x}{\alpha}, \text{ εἶναι δὲ καὶ } E'M + EM = 2\alpha$$

ὅθεν λαμβάνομεν

$$E'M = \alpha + \frac{\gamma x}{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad EM = \alpha - \frac{\gamma x}{\alpha} \qquad (3)$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τῆς ΕΜ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\left(\alpha - \dfrac{\gamma x}{\alpha}\right)^2 = y^2 + (\gamma - x)^2$·

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 - \gamma^2} = 1 \qquad (4)$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\alpha > \gamma$ (ὡς ἐκ τοῦ τριγώνου ΜΕΕ′ φαίνεται), ἐὰν ἡ θετικὴ διαφορὰ $\alpha^2 - \gamma^2$ παρασταθῇ διὰ τοῦ β^2, προκύπτει

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad \text{ἢ} \quad y = \pm \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2} \qquad (5)$$

αὕτη δὲ εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως.

Ἐὰν ποιήσωμεν ἐν τῇ ἐξισώσει (5) $y = 0$, εὑρίσκομεν ἐξ αὐτῆς $x = \pm \alpha$, ἤτοι τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Α′, ὥστε $AA' = 2\alpha$ · ἐὰν δὲ ποιήσωμεν $x = 0$, εὑρίσκομεν $y = \pm \beta$, ἤτοι τὰ σημεῖα Β καὶ Β′, ὥστε $BB' = 2\beta$. Αἱ εὐθεῖαι Α′Α καὶ Β′Β λέγονται *ἄξονες* τῆς ἐλλείψεως, τὸ δὲ 0, *κέντρον* αὐτῆς. Καὶ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτῆς καὶ ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς φαίνεται ἀμέσως ὅτι ἡ ἔλλειψις εἶναι συμμετρικὴ πρὸς τοὺς ἄξονάς της καὶ πρὸς τὸ κέντρον της.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ἔχωμεν τὰς δύο ἑστίας Ε′ καὶ Ε καὶ τὸν μέγαν ἄξονα 2α, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν ἔλλειψιν διὰ συνεχοῦς κινήσεως ὡς ἑξῆς.

Προσηλοῦμεν εἰς τὰς δύο ἑστίας Ε καὶ Ε τὰ ἄκρα νήματος ἔχοντος μῆκος 2α καὶ τείνομεν ἔπειτα αὐτὸ διὰ τῆς αἰχμῆς ἥλου ἢ μολυβδοκονδύλου, ἣν περιάγομεν, διατηροῦντες πάντοτε τὸ νῆμα τεταμένον· ἡ αἰχμὴ τότε γράφει τὴν ἔλλειψιν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐκ τοῦ ἑτέρου τῶν σημείων Ε καὶ Ε′ ἐκπέμπονται ἀκτῖνες φωτειναὶ ἢ θερμαντικαί, αἱ ἀκτῖνες αὗται, προσπίπτουσαι ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως, ἀνακλῶνται, κατὰ τοὺς νόμους τῆς Φυσικῆς, καὶ συνέρχονται πᾶσαι εἰς τὸ ἄλλο. Διὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην, τὰ σημεῖα Ε καὶ Ε′ ὠνομάσθησαν *ἑστίαι*.

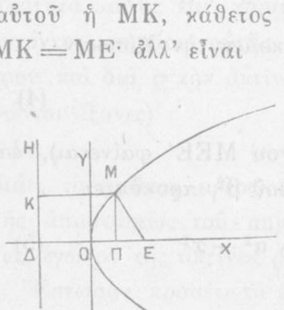
Παραβολή.

Παραβολὴ λέγεται ὁ τόπος τῶν σημείων, ἅτινα ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ δεδομένου σημείου καὶ ἀπὸ δεδομένης εὐθείας.

Ἔστω Ε τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ ΕΔ ($=\mu$) ἡ ἐξ αὐτοῦ ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΔΗ.

Ὡς ἀρχὴν τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων λαμβάνομεν τὸ μέσον Ο τῆς ΕΔ (ὅπερ εἶναι σημεῖον τῆς παραβολῆς, κατὰ τὸν ὁρισμὸν) καὶ τὴν εὐθεῖαν ΔΕ ὡς ἄξονα τῶν Χ.

Ἐὰν Μ (x, y) εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς παραβολῆς καὶ ἀχθῇ ἐξ αὐτοῦ ἡ ΜΚ, κάθετος πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΔΗ, θὰ εἶναι ΜΚ = ΜΕ· ἀλλ' εἶναι



$$\text{MK} = \Delta\Pi = \Delta\text{O} + \text{O}\Pi = x + \frac{1}{2}\mu$$

καὶ $(\text{EM})^2 = y^2 + (x - \frac{1}{2}\mu)^2$

καὶ ἐξισοῦντες τὰ τετράγωνα τῶν ἴσων εὐθειῶν ΕΜ καὶ ΜΚ, λαμβάνομεν

$$(x + \frac{1}{2}\mu)^2 = y^2 + (x - \frac{1}{2}\mu)^2.$$

καὶ μετὰ τὰς πράξεις

$$y^2 = 2\mu x \quad \text{ἢ} \quad y = \pm\sqrt{2\mu x}.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (ὡς καὶ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ) φαίνεται ὅτι ἡ τετμημένη x δέον νὰ εἶναι πάντοτε θετική· διότι, δι' ἀρνητικὰ x, ἡ τεταγμένη γίνεται φανταστική. Τοῦ x αὐξανομένου διαρκῶς, καὶ ἡ y αὐξάνεται· ὥστε ἡ καμπύλη ἐν τῇ γωνίᾳ ΧΟΨ διαρκῶς ἀνέρχεται· εἶναι δὲ ἡ καμπύλη συμμετρικὴ πρὸς τὸν ἄξονα ΟΧ αὐτῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ σημεῖον Ε λέγεται *ἑστία*· ἐὰν δέσμη ἀκτίνων παραλλήλων τῷ ἄξονι ΟΧ, προσπέσῃ ἐπὶ τῆς παραβολῆς, μετὰ τὴν ἀνάκλασιν θὰ συνέλθωσι πᾶσαι εἰς τὸ Ε.

Ὡς τελευταῖον παράδειγμα καμπύλης γεωμετρικῶς ὁριζομένης, ἔστω τὸ ἑξῆς.

Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης, ἥτις διχοτομεῖ πάσας τὰς ἀπὸ τῶν σημείων μιᾶς περιφερείας ἀγομένας καθέτους ἐπὶ μίαν διάμετρον αὐτῆς.

Ἐὰν Μ (x, y) εἶναι τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς εἰρημένης καμπύλης καὶ ΝΠ, ἡ κάθετος ἣν διχοτομεῖ, τοῦ δὲ σημείου Ν συντεταγμέναι εἶναι $x'\ y'$, θὰ εἶναι προδήλως

$$x=x' \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{1}{2}\,y' \quad \text{ἢ} \quad y'=2y$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $x'^2+y'^2=\alpha^2$ (διότι τὸ Ν εἶναι σημεῖον τῆς περιφερείας) συνάγεται ἡ ἐξίσωσις $\quad x^2+4y^2=\alpha^2$

καὶ ἂν τεθῇ $\dfrac{1}{2}\,\alpha=\beta$, ἡ ἐξίσωσις ἥτις συνδέει τὰς συντεταγμένας x, y, γίνεται

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,$$

ἤτοι, ἡ καμπύλη εἶναι ἔλλειψις ἔχουσα ἄξονας τὴν διάμετρον 2α καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς 2β.

Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ καμπύλη, ἥτις τέμνει τὰς αὐτὰς καθέτους κατὰ λόγον δοθέντα $\beta:\alpha$, εἶναι ἔλλειψις, ἔχουσα ἄξονας 2α, 2β.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ. Κατὰ τὰ προειρημένα, τὰ σημεῖα τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων παρίστανται δι᾽ ἀριθμῶν καὶ αἱ γραμμαὶ δι᾽ ἐξισώσεων· ἐκ δὲ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ ἐπ᾽ αὐτῶν προκύπτει νέος κλάδος τῆς μαθηματικῆς, ἡ καλουμένη «*ἀναλυτικὴ γεωμετρία*» (ἴδε ἀναλυτικὴν γεωμετρίαν μου, ἔκδοσιν Β΄).

Συναρτήσεις καὶ γραφικὴ παράστασις αὐτῶν.

Ὅταν μεταβλητή τις ποσότης y συνδέηται πρὸς ἄλλην x, οὕτως, ὥστε πρὸς ἑκάστην τιμὴν τῆς x νὰ ἀντιστοιχῇ ὡρισμένη τιμὴ τῆς y (ἢ ὡρισμέναι τιμαί), τότε λέγομεν ὅτι ἡ μεταβλητὴ y εἶναι *συνάρτησις* τῆς x· παραδείγματος χάριν, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι συνάρτησις τῆς ἀκτῖνός του καὶ ἡ περιφέρεια ἐπίσης· ἡ χορδὴ εἶναι συνάρτησις τοῦ τόξου· καὶ ἂν ἐν τριγώνῳ, δύο πλευραὶ μένωσι σταθεραί, ἡ τρίτη πλευρὰ εἶναι συνάρτησις τῆς ἀπέναντι αὐτῇ γωνίας κτλ.

Συνήθως ἡ ἐξάρτησις τῆς y ἀπὸ τῆς x ὁρίζεται διά τινος ἐξισώσεως, ἥτις συνδέει τὰς δύο μεταβλητάς. Ἐὰν τότε νοήσωμεν τὰς δύο μεταβλητὰς ὡς συντεταγμένας σημείου, ἡ γραμμή, ἣν ἡ ἐξίσωσις παριστᾷ, ἐὰν εἶναι γνωστή, δεικνύει ἀκριβῶς τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως διὰ τῆς προόδου τῶν τεταγμένων αὐτῆς (τοῦτο συμβαίνει εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα $y = 2x$, $x^2 + y^2 = \alpha^2$, $y = \frac{\delta^2}{x}$, κτλ.).

Ἐὰν ἡ γραμμή, ἣν παριστᾷ ἡ ἐξίσωσις, δὲν εἶναι γνωστή, εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως, τὰς ἀντιστοιχούσας πρός τινα σειρὰν τιμῶν τῆς x (συνήθως ἰσοδιαφόρων) καὶ ἔχομεν οὕτω σειράν τινα σημείων τῆς ἀγνώστου γραμμῆς· ἑνοῦντες δὲ ἕκαστον μετὰ τοῦ ἑπομένου του δι' εὐθείας, εὑρίσκομεν τεθλασμένην γραμμήν, ἥτις δεικνύει τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως y, μὲ προσέγγισιν τόσῳ μεγαλητέραν, ὅσῳ περισσότερα εἶναι τὰ σημεῖα καὶ ὅσῳ πυκνότερα κεῖνται.

Καὶ τὰς διαφόρους τιμὰς ἢ καταστάσεις μεταβλητοῦ τινος ποσοῦ, τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς χρόνους ὡρισμένους (συνήθως ἰσοδιαφόρους), ὡς λόγου χάριν, τὴν θερμοκρασίαν, τὸν ἀριθμὸν τῶν σφυγμῶν ἀσθενοῦς καθ' ἑκάστην ὥραν, τὴν βαρομετρικὴν πίεσιν κατὰ τὰς διαφόρους ὥρας τῆς ἡμέρας, τὴν μέσην θερμοκρασίαν τόπου τινὸς κατὰ τὰς διαφόρους ἡμέρας, κτλ., δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν δι' εἰκόνος γεωμετρικῆς, δι' ἧς καθίσταται εὐκολωτέρα ἡ σπουδὴ τῆς μεταβολῆς αὐτοῦ, ἢ διὰ τῆς ἁπλῆς ἀναγραφῆς τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν ἐπὶ πίνακος· πρὸς τοῦτο παριστῶμεν τὰς μὲν τιμὰς τοῦ χρόνου ὡς τετμημένας ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΧ, τὰς δὲ ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ μεταβλητοῦ ποσοῦ ὡς τεταγμένας ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΨ· τότε ἑκάστη τιμὴ τοῦ χρόνου καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ μεταβλητοῦ ποσοῦ παρίστανται ὡς συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου. Ἐὰν δὲ ἑνώσωμεν τὰ οὕτω προκύπτοντα σημεῖα δι' εὐθειῶν, ἕκαστον μετὰ τοῦ ἑπομένου αὐτῷ, προκύπτει τεθλασμένη γραμμή, ἧς τὸ σχῆμα καθιστᾷ εὐνόητον καὶ εὔκολον τὴν σπουδὴν τοῦ μεταβαλλομένου ποσοῦ· διότι ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται ἀμέσως, ἂν αὐξάνῃ τοῦτο ἢ ἂν ἐλαττοῦται σὺν τῷ χρόνῳ, πότε αὐξάνει ταχύτερον καὶ πότε βραδύτερον, πότε γίνεται μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, κτλ.

Ἡ γεωμετρικὴ αὕτη εἰκὼν τῆς μεταβολῆς ποσοῦ τινος λέγεται *διάγραμμα*.

Ἡ μέθοδος τῆς διὰ γεωμετρικῆς εἰκόνος παραστάσεως τῶν διαφόρων τιμῶν μεταβλητοῦ τινὸς ποσοῦ ἐφηρμόσθη εἰς τὰ *αὐτογραφικά*, καλούμενα, ὄργανα, τὸν θερμογράφον, τὸν βαρογράφον, κτλ., οἵτινες αὐτομάτως καὶ διὰ συνεχοῦς κινήσεως καταγράφουν τὴν θερμοκρασίαν ἢ τὴν βαρομετρικὴν πίεσιν, κατὰ τὰς διαφόρους ὥρας τῆς ἡμέρας, ὡς συνεχῆ καμπύλην γραμμήν.

Τὴν καμπύλην καταγράφει ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ κυλίνδρου, στρεφομένου περὶ τὸν ἄξονά του, καὶ καλυπτομένου ὑπὸ φύλλου χάρτου, εἰδικὴ γραφίς, ἐφηρμοσμένη εἰς τὸ ἄκρον μακρᾶς βελόνης, συνδεδεμένης κατὰ τὸ ἕτερον αὐτῆς ἄκρον μετὰ τοῦ μετεωρολογικοῦ ὀργάνου.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΘΕΣΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ

296. Εὐθεῖα λέγεται *κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον*, ἐὰν εἶναι κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας, τὰς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κειμένας καὶ διερχομένας διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς, ἤτοι τοῦ σημείου, ἔνθα τέμνει τὸ ἐπίπεδον· καὶ τὸ ἐπίπεδον λέγεται τότε κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν.

Εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον λέγονται *παράλληλα*, ἐὰν δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν.

Δύο ἐπίπεδα λέγονται *παράλληλα*, ἐὰν δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσι.

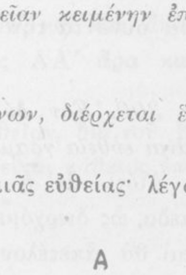
ΑΞΙΩΜΑ

Πᾶν ἐπίπεδον στρεφόμενον περὶ οἱανδήποτε εὐθεῖαν κειμένην ἐπ᾿ αὐτοῦ, δύναται νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ τυχόντος σημείου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

297. Δύο τριῶν σημείων, μὴ ἐπ᾿ εὐθείας κειμένων, διέρχεται ἓν ἐπίπεδον καὶ ἓν μόνον.

Ἔστωσαν τρία σημεῖα Α, Β, Γ, μὴ κείμενα ἐπὶ μιᾶς εὐθείας· λέγω ὅτι δι᾿ αὐτῶν διέρχεται ἓν ἐπίπεδον καὶ ἓν μόνον.



Ἐπὶ τοῦ τυχόντος ἐπιπέδου γράφομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν καὶ ἐφαρμόζομεν αὐτὴν ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, μεταφέροντες τὸ ἐπίπεδον, ὅπερ θὰ διέρχηται τότε διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β· ἔπειτα στρέφομεν τὸ ἐπίπεδον περὶ τὴν ΑΒ, μέχρις οὗ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ τρίτου σημείου Γ· τότε θὰ ἔχωμεν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῶν τριῶν δοθέντων σημείων. Ἄλλο δέ, πλὴν τούτου, δὲν δύναται νὰ διέλθῃ διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ· διότι, δύο ἐπίπεδα, ἔχοντα τρία κοινὰ σημεῖα, μὴ κείμενα ἐπ᾿ εὐθείας, ἐφαρμόζουσιν (28).

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

298. Δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι, ὡς αἱ ΑΒ, ΑΓ, ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ κεῖνται.

Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι τὸ διερχόμενον διὰ τῆς τομῆς Α τῶν εὐθειῶν καὶ διὰ δύο τυχόντων σημείων Β καὶ Γ, ἐπ' αὐτῶν κειμένων.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

299. Δύο παράλληλοι ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου.

Ὅτι δύο παράλληλοι εὐθεῖαι κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι γνωστὸν ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτῶν· δύο δὲ διάφορα ἐπίπεδα δὲν δύνανται νὰ διέρχωνται διὰ τῶν αὐτῶν δύο παραλλήλων, διότι θὰ εἶχον τρία σημεῖα κοινά, μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα, τουτέστιν ἓν οἱονδήποτε σημεῖον τῆς μιᾶς καὶ δύο οἱαδήποτε τῆς ἄλλης.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐξ ἑκάστου σημείου μία μόνη παράλληλος τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχει· διότι τὸ σημεῖον καὶ ἡ εὐθεῖα ὁρίζουσι τὸ ἐπίπεδον ἐφ' οὗ θὰ κεῖται ἡ παράλληλος, ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ μία μόνη παράλληλος τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἄγεται ἐξ ἑνὸς σημείου. Ἐκ τοῦ σημείου Γ, π. χ. μία μόνη ἄγεται παράλληλος τῇ εὐθείᾳ ΑΒ καὶ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΑΒ. Ἐὰν δὲ διὰ τοῦ Γ ἀχθῇ οἱαδήποτε εὐθεῖα μὴ κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΑΒ, ἀλλὰ διαπερῶσα αὐτό, ἡ εὐθεῖα αὕτη οὔτε θὰ συναντᾷ τὴν ΑΒ, οὔτε παράλληλος θὰ εἶναι πρὸς αὐτήν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

300. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνωσιν ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

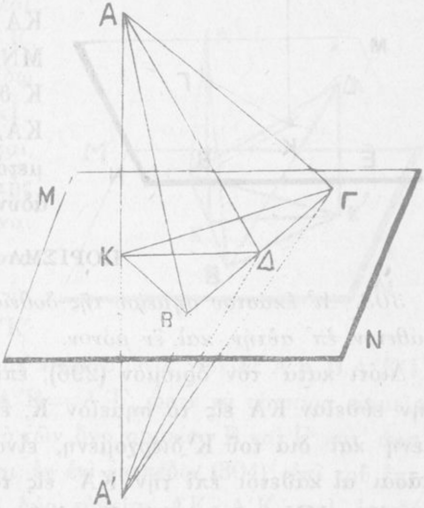
Διότι, ἂν ἡ τομὴ εἶχε τρία σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας, τὰ δύο ἐπίπεδα, ὡς διερχόμενα διὰ τῶν τριῶν τούτων σημείων θὰ ἐφήρμοζον. καὶ θὰ ἀπετέλουν ἓν μόνον ἐπίπεδον· ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει ἄρα πάντα τὰ σημεῖα τῆς τομῆς κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.

ΘΕΩΡΗΜΑ

301. Ἐὰν εὐθεῖά τις εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας τεμνομένας (κατὰ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν), *θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν.*

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΚ κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΚΒ καὶ ΚΓ, κατὰ τὸ σημεῖον Κ (γίνεται δὲ τοῦτο, ἐὰν διὰ τῆς ΑΚ ἀχθῶσι δύο ἐπίπεδα καὶ ἐν αὐτοῖς κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΚ, κατὰ τὸ σημεῖον Κ)· λέγω, ὅτι ἡ ΑΚ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ δι' αὐτῶν διερχόμενον ἐπίπεδον ΜΝ.

Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Κ, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ, τυχοῦσα εὐθεῖα, ἡ ΚΔ, ἥτις θὰ κεῖται ἔν τινι τῶν τεσσάρων γωνιῶν, τὰς ὁποίας αἱ δύο εὐθεῖαι ΚΒ, ΚΓ σχηματίζουσιν· ἂς τμηθῶσι δὲ αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας ταύτης ὑπὸ τῆς τυχούσης εὐθείας ΒΓ, ἥτις θὰ τέμνῃ καὶ τὴν ΚΔ εἴς τι σημεῖον Δ· ἔπειτα ἂς προσεκβληθῇ ἡ ΑΚ καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐπ᾽ αὐτῆς ἑκατέρωθεν τοῦ Κ, δύο μήκη ἴσα, ΚΑ ΚΑ΄, ἂς ἀχθῶσι δὲ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ καὶ αἱ Α΄Β, Α΄Γ, Α΄Δ.



Ἐπειδὴ ἡ ΚΓ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΑ΄, αἱ δύο ἀποστάσεις ΓΑ, ΓΑ΄ εἶναι ἴσαι· δι᾽ ὅμοιον λόγον εἶναι καὶ ΒΑ = ΒΑ΄, ἑπομένως τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄ΒΓ ἔχουσι τὰς τρεῖς των πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν καὶ εἶναι ἴσα. Ὅταν δὲ ἐφαρμόσωσι, θὰ πέσῃ τὸ Α΄ ἐπὶ τοῦ Α καὶ τὸ Δ θὰ μείνῃ εἰς τὴν θέσιν του, ὥστε ἡ Α΄Δ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΔ· εἶναι λοιπὸν ΔΑ = ΔΑ΄, καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν (104), ἡ ΔΚ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΑ΄· ἄρα καὶ ἡ ΑΑ΄ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΔ.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ πᾶσαν εὐθεῖαν, διὰ τοῦ Κ διερχομένην καὶ κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

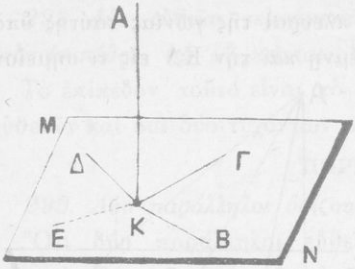
ΘΕΩΡΗΜΑ

302. Πᾶσαι αἱ ἐξ ἑνὸς σημείου εὐθείας ἀγόμεναι ἐπ᾽ αὐτὴν κάθετοι, κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ καθέτῳ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν.

Ἔστωσαν ἐκ τοῦ σημείου Κ τῆς εὐθείας ΚΑ, κάθετοι ἐπ᾽ αὐτήν, αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ κτλ. (ἡ μὲν ΚΒ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΚΒ, ἡ δὲ ΚΓ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΚΓ, κτλ.)· λέγω, ὅτι πᾶσαι αὗται κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.

Διὰ δύο ἐκ τῶν καθέτων τούτων, ἔστω διὰ τῶν ΚΒ, ΚΓ, ἂς διέλθῃ ἐπίπεδον, τὸ ΜΝ· λέγω, ὅτι ἐν τούτῳ θὰ κεῖνται καὶ αἱ λοιπαί.

Διότι, ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι μία ἐξ αὐτῶν, ἡ ΚΔ, δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, τὸ δι᾽ αὐτῆς καὶ διὰ τῆς ΚΑ ἀγόμενον ἐπίπεδον, τὸ



ΑΚΔ, θὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ κατά τινα εὐθεῖαν ΚΕ, ἥτις θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΑ· διότι ἡ ΚΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ (296)· τότε δὲ ἐκ τοῦ σημείου Κ θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν ΚΑ, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι μετὰ τῆς ΚΑ, αἱ ΚΔ, ΚΕ· ὅπερ ἀδύνατον.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

303. Δι᾽ ἑκάστου σημείου τῆς δοθείσης εὐθείας ἄγεται ἓν ἐπίπεδον κάθετον ἐπ᾽ αὐτήν, καὶ ἓν μόνον.

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν (296), ἐπίπεδόν τι λέγεται κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΚΑ εἰς τὸ σημεῖον Κ, ἐὰν πᾶσα εὐθεῖα ἐπ᾽ αὐτοῦ κειμένη καὶ διὰ τοῦ Κ διερχομένη, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΑ· ἀλλὰ πᾶσαι αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΚΑ εἰς τὸ σημεῖον Κ, κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ τοῦ διὰ δύο ἐξ αὐτῶν διερχομένου.

* ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Καὶ δι᾽ ἑκάστου σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου, ἄγεται ἐπ᾽ αὐτὴν ἓν κάθετον ἐπίπεδον καὶ ἓν μόνον.* Διότι, ἄν, λόγου χάριν, διὰ τοῦ σημείου Γ ζητῆται νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον, κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΚ, τὸ τοιοῦτον ἐπίπεδον πρέπει νὰ περιέχῃ τὴν κάθετον, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου Γ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΚΑ, ἥτις κάθετος εἶναι μία, ἡ ΓΚ· πρέπει λοιπὸν τὸ κάθετον ἐπίπεδον νὰ διέρχηται διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς Κ· ἄρα θὰ εἶναι τὸ διὰ τοῦ Κ ἀγόμενον ἐπίπεδον, κάθετον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΚΑ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

304. Ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ δύο σημείων, εἶναι ἐπίπεδον διαιροῦν τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο σημείων εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ κάθετον ἐπ᾽ αὐτήν.

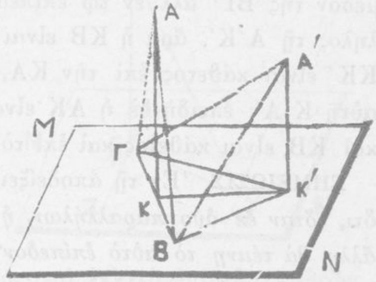
Διότι, πᾶν σημεῖον ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῶν δύο σημείων Α καὶ Α′ κεῖται ἐπὶ εὐθείας καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΑ′, πᾶσαι δὲ αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΑ′ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ἐφ᾽ ὃ ἡ ΑΑ′ εἶναι κάθετος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

305. Δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἶναι παράλληλοι.

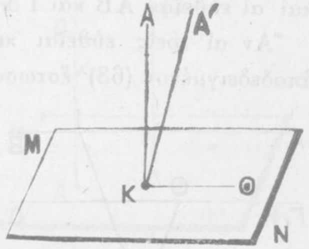
Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΚ καὶ Α΄Κ΄, κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· λέγω ὅτι αἱ ΑΚ, Α΄Κ΄ εἶναι παράλληλοι.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΚ΄ καὶ ἐκ τοῦ Κ, κάθετος ἐπ᾽ αὐτὴν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ, ἡ ΒΓ· ἂς ληφθῇ δὲ ΚΒ = ΚΓ.



Αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ εἶναι ἴσαι, ὡς πλάγιαι, ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τῆς καθέτου ΑΚ· δι᾽ ὅμοιον λόγον εἶναι Κ΄Β = Κ΄Γ· καὶ τὰ δύο τρίγωνα Α΄Κ΄Β καὶ Α΄Κ΄Γ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας, τὴν Α΄Κ΄ κοινήν, τὴν Κ Β ἴσην τῇ Κ΄Γ καὶ τὰς περιεχομένας γωνίας Α΄Κ΄Β, Α΄Κ΄Γ ἴσας, ὡς ὀρθάς· ἄρα εἶναι καὶ Α΄Β = Α΄Γ· ὥστε τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Κ, Α΄, Κ΄, ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τῶν δύο σημείων Β καὶ Γ· κατ᾽ ἀκολουθίαν, τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ (304)· ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου κεῖνται λοιπὸν αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΚ, Α΄Κ΄ καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΚΚ΄, συνάγεται ὅτι εἶναι παράλληλοι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῇ ἀποδείξει ὑπετέθη ὅτι αἱ δύο κάθετοι συναντῶσι τὸ ἐπίπεδον εἰς διάφορα σημεῖα Κ καὶ Κ΄. Ἐάν, τῷ ὄντι ὑποτεθῇ, ὅτι δύο κάθετοι ἐπὶ ἐπίπεδον, συναντῶσιν αὐτὸ εἰς ἓν σημεῖον, τουτέστιν, ὅτι ἐξ ἑνὸς σημείου Κ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ἄγονται δύο κάθετοι ΚΑ, ΚΑ΄ ἐπ᾽ αὐτό, τὸ ὑπὸ τῶν δύο καθέτων ὁριζόμενον ἐπίπεδον ΚΑΑ΄, θὰ ἔτεμνε τὸ ἐπίπεδον ΜΝ κατά τινα εὐθεῖαν ΚΘ καὶ θὰ ἦσαν αἱ ΚΑ, ΚΑ΄ ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΚΘ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μετ᾽ αὐτῆς, ὅπερ ἀδύνατον.



ΘΕΩΡΗΜΑ

306. Ἐὰν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν, ἡ μία εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ ἡ ἄλλη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Ἔστωσαν παράλληλοι αἱ ΑΚ, Α΄Κ΄, ἐξ αὐτῶν δὲ ἡ Α΄Κ΄, κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· ἐὰν γίνῃ ἡ κατασκευὴ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, τὰ τρία σημεῖα Κ, Κ΄, Α΄ ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων Β καὶ Γ (διότι τὰ τρίγωνα Α΄Κ΄Β καὶ Α΄Κ΄Γ εἶναι πάλιν ἴσα)· ἄρα τὸ δι' αὐτῶν διερχόμενον ἐπίπεδον εἶναι κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ· ἀλλ' ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κεῖται ἡ ΑΚ, ὡς παράλληλος τῇ Α΄Κ΄, ἄρα ἡ ΚΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΑ· ἀλλὰ καὶ ἡ ΚΚ΄ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΑ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ Κ΄Α΄· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς δύο εὐθείας ΚΚ΄ καὶ ΚΒ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΜΝ.

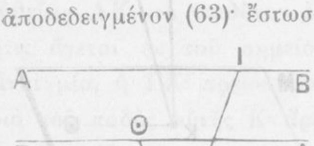
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῇ ἀποδείξει τοῦ θεωρήματος τούτου ὑποτίθεται, ὅτι, *ὅταν ἐκ δύο παραλλήλων, ἡ μία τέμνῃ ἐπίπεδόν τι ΜΝ, καὶ ἡ ἄλλη θὰ τέμνῃ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον*· ἀληθεύει δὲ τοῦτο, διότι τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο παραλλήλων τέμνει τὸ ΜΝ κατά τινα εὐθεῖαν, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Κ΄, ἔνθα ἡ μία παράλληλος τέμνει τὸ ἐπίπεδον, τὴν δὲ εὐθεῖαν ταύτην πρέπει νὰ τέμνῃ καὶ ἡ ἄλλη παράλληλος (62)· ἄρα τέμνει καὶ τὸ ἐπίπεδον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

307. *Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι εἶναι καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι.*

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ παράλληλοι τῇ ΕΖ· λέγω, ὅτι καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

Ἂν αἱ τρεῖς εὐθεῖαι κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, τὸ θεώρημα εἶναι ἀποδεδειγμένον (63)· ἔστωσαν λοιπὸν ἀνὰ δύο ἐν διαφόροις ἐπιπέδοις.



Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΕΖ τυχὸν σημεῖον, τὸ Η, καὶ ἐξ αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΙ, κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς καὶ τῆς ΑΒ, καὶ ἡ ΗΘ, κάθετος ἐπὶ τὴν αὐτὴν ΕΖ, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς καὶ τῆς ΓΔ.

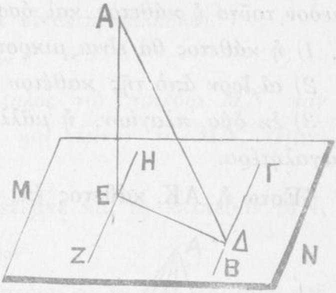
Ἡ ΕΖ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΘΗΙ, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, ὡς παράλληλοι τῇ ΕΖ, θὰ εἶναι καὶ αὐται κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ἄρα παράλληλοι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

308. *Νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.*

α') Τὸ δοθὲν σημεῖον Α ἔστω ἐκτὸς τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ΜΝ.

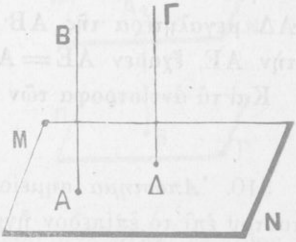
Ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ΜΝ γράφομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, τὴν ΒΓ καὶ ἄγομεν ἐπ' αὐτήν, ἐκ τοῦ σημείου Α, κάθετον τὴν ΑΔ. Ἐκ τοῦ Δ ἄγομεν τὴν ΔΕ, κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ, καὶ τέλος, ἐκ τοῦ Α, τὴν ΑΕ, κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΕ· αὕτη ἡ ΑΕ, θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ.



Διότι, ἡ ΒΓ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν ΔΑ καὶ ἐπὶ τὴν ΔΕ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΑΔΕ, ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ Ε, ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΒΓ, ἡ ΖΗ (ἥτις θὰ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ), θὰ εἶναι καὶ αὐτὴ κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΑΔΕ· ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν ΑΕ. Ἡ ΑΕ λοιπὸν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΗ, εἶναι δὲ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΕΔ, ἐκ κατασκευῆς· ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ.

β') Τὸ δοθὲν σημεῖον Α ἔστω ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ΜΝ.

Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Γ, ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου κειμένου, ἄγομεν κάθετον ἐπ' αὐτό, τὴν ΓΔ, ἐκ δὲ τοῦ Α, παράλληλον τῇ ΓΔ, τὴν ΑΒ· αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (306).



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. *Ἐξ ἑκάστου σημείου μία μόνη κάθετος ἄγεται ἐπὶ ἐπίπεδον·* διότι δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι (306).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ἐκ τῆς κατασκευῆς τοῦ προβλήματος τούτου συνάγεται ἡ ἑπομένη πρότασις. *Ἐὰν ὀρθογωνίου τριγώνου* (ὡς τοῦ ΑΔΕ), *ἡ μὲν μία πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας* (ὡς ἡ ΑΕ) *εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, ἡ δὲ ἄλλη ἐπὶ εὐθεῖάν τινα τοῦ ἐπιπέδου* (ὡς τὴν ΒΓ), *καὶ ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (ἐὰν τέμνῃ αὐτήν).*

Διότι ἡ ἐκ τοῦ Ε ἀγομένη παράλληλος τῇ ΒΓ, θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΔΕ (ὡς κάθετος ἐπ' ἀμφοτέρας τὰς ΕΑ, ΕΔ)· ἄρα καὶ ἡ παράλληλος αὐτῇ ΒΓ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ἑπομένως κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΔΑ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

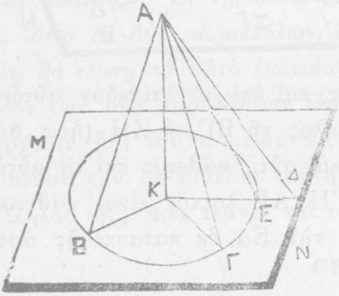
309. Ἐὰν ἐκ σημείου, κειμένου ἐκτὸς ἐπιπέδου, ἀχθῇ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἡ κάθετος καὶ ὁσαιδήποτε πλάγιαι,

1) ἡ κάθετος θὰ εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας,

2) αἱ ἴσον ἀπὸ τῆς καθέτου ἀπέχουσαι πλάγιαι θὰ εἶναι ἴσαι,

3) ἐκ δύο πλαγίων, ἡ μᾶλλον ἀπέχουσα ἀπὸ τῆς καθέτου θὰ εἶναι μεγαλητέρα.

Ἔστω ἡ ΑΚ, κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, αἱ δὲ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, πλάγιαι· ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ἑκάστη πλαγία γίνεται ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι ἡ ΑΚ· ὥστε ἡ ΑΚ εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας.



Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ΚΒ = ΚΓ, αἱ δύο πλάγιαι ΑΒ καὶ ΑΓ θὰ εἶναι ἴσαι· διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΚΒ καὶ ΑΚΓ εἶναι ἴσα· ὥστε, αἱ ἴσον ἀπὸ τῆς καθέτου ἀπέχουσαι πλάγιαι εἶναι ἴσαι. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ΚΔ > ΚΒ, θὰ εἶναι καὶ ἡ πλαγία ΑΔ μεγαλητέρα τῆς ΑΒ· διότι λαμβάνοντες ΚΕ = ΚΒ καὶ ἄγοντες τὴν ΑΕ, ἔχομεν ΑΕ = ΑΒ καὶ ΑΔ > ΑΕ, ἄρα καὶ ΑΔ > ΑΒ.

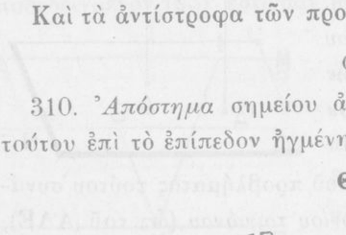
Καὶ τὰ ἀντίστροφα τῶν προτάσεων τούτων ἀποδεικνύονται εὐκόλως.

ΟΡΙΣΜΟΣ

310. *Ἀπόστημα* σημείου ἀπὸ ἐπιπέδου λέγεται ἡ ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἠγμένη κάθετος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

311. Ἐὰν εὐθεῖα, ἐκτὸς ἐπιπέδου οὖσα, εἶναι παράλληλος εὐθείᾳ τινὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, θὰ εἶναι παράλληλος καὶ τῷ ἐπιπέδῳ.



Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ, παράλληλος τῇ ΓΔ, ἥτις κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ θὰ εἶναι παράλληλος καὶ τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ.

Διότι, τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ τῶν δύο

παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ, τέμνει τὸ ΜΝ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ· ἂν λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΒ (ἥτις μένει πάντοτε ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΓΔ) συνήντα τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, ἡ συνάντησις θὰ ἐγίνετο ἐπὶ τῆς ΓΔ· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον· διότι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

312. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ, πᾶν ἐπίπεδον ΑΒΓΔ, δι᾽ αὐτῆς διερχόμενον καὶ τέμνον τὸ ΜΝ, τέμνει αὐτὸ κατὰ παράλληλον τῇ εὐθείᾳ ΑΒ.

Διότι, ἂν ἡ ΑΒ ἔτεμνε τὴν ΓΔ, θὰ ἔτεμνε καὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ.

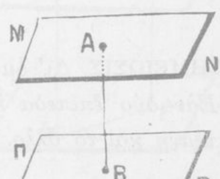
ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

313. Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι παράλληλος ἐπιπέδῳ, αἱ ἐκ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἀγόμεναι παράλληλοι τῇ εὐθείᾳ, κεῖνται πᾶσαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.

Τὸ διὰ τοῦ σημείου Γ καὶ διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ διερχόμενον ἐπίπεδον, τέμνει τὸ ΜΝ κατά τινα εὐθεῖαν ΓΔ, παράλληλον τῇ ΑΒ. ἄλλη δὲ ἐκ τοῦ Γ παράλληλος τῇ ΑΒ δὲν ὑπάρχει.

ΘΕΩΡΗΜΑ

314. Δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, εἶναι παράλληλα

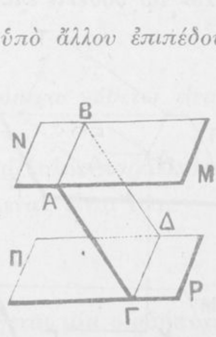


Ἔστωσαν τὰ ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΡ, κάθετα ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ· λέγω, ὅτι τὰ ἐπίπεδα ταῦτα εἶναι παράλληλα.

Διότι, ἂν εἶχον κοινόν τι σημεῖον, τὸ Γ, αἱ εὐθεῖαι ΓΑ, ΓΒ καὶ ἡ ΑΒ θὰ ἐσχημάτιζον τρίγωνον, τὸ ΑΒΓ, ἔχον δύο ὀρθὰς γωνίας τὰς Α καὶ Β, ὅπερ ἄτοπον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

315. Ἐὰν δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνωνται ὑπὸ ἄλλου ἐπιπέδου, αἱ τομαὶ αὐτῶν εἶναι παράλληλοι.



Ἔστωσαν παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΜΝ καὶ ΠΡ, τεμνόμενα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ· λέγω, ὅτι αἱ τομαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

Διότι, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, τῷ ΑΒΓΔ, ἢ λοιπὸν τέμνονται ἢ εἶναι παράλληλοι, ἀλλ᾽ ἐὰν ἐτέμνοντο εἴς τι σημεῖον, τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ ἦτο κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων ΜΝ καὶ ΠΡ· ὅπερ ἀδύνατον, διότι τὰ ἐπίπεδα ταῦτα εἶναι παράλληλα· ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

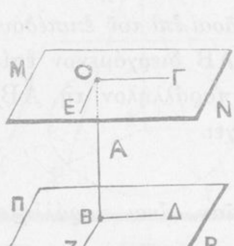
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα κειμένη ἐπὶ τοῦ ἑνός, εἶναι παράλληλος τοῦ ἄλλου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

316. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἕν, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἄλλο.

Ἔστωσαν παράλληλα τὰ ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΡ καὶ ἡ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὸ ΠΡ· λέγω, ὅτι θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ΜΝ.

Διὰ τῆς ΑΒ καὶ δι' ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου τοῦ ΜΝ, ἔστω διὰ τοῦ Γ, ἂς ἀχθῇ ἐπίπεδον· τοῦτο θὰ τέμνῃ τὸ ΠΡ, κατά τινα εὐθεῖαν ΒΔ, θὰ τέμνῃ δὲ καὶ τὸ ΜΝ, κατά τινα εὐθεῖαν ΟΓ, παράλληλον τῇ ΒΔ· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒ, κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν παραλλήλων τούτων εὐθειῶν, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν μίαν, τὴν ΒΔ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην ΟΓ· ἄρα θὰ τέμνῃ αὐτὴν (καὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, ἐφ' οὗ αὕτη κεῖται), κατά τι σημεῖον Ο. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ διὰ τῆς ΑΒ καὶ ἄλλο ἐπίπεδον, ἀποδεικνύεται ὁμοίως, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν ΟΕ· ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ.



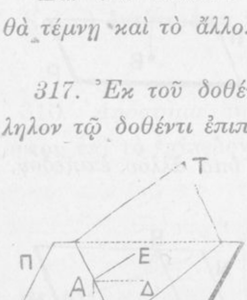
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δι' ὁμοίου τρόπου ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις: *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα τέμνουσα τὸ ἕν, θὰ τέμνῃ καὶ τὸ ἄλλο.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

317. Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου δύναται νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον, παράλληλον τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ, καὶ ἓν μόνον.

Ἔστω ΜΝ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ Α τὸ δοθὲν σημεῖον, ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου.

Ἐκ τοῦ Α ἄγομεν τὴν ΑΚ, κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ καὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ, κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΚ (γίνεται δὲ τοῦτο, ἂν ἀχθῶσι δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΚ, εἰς τὸ σημεῖον Α· τὸ ἐπίπεδον τῶν καθέτων θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΚ)· τὰ δύο ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΡ, κάθετα ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν, τὴν ΑΚ, εἶναι παράλληλα.



Ἄλλο ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τοῦ Α καὶ παράλληλον τῷ ΜΝ δὲν ὑπάρχει· διότι, ἂς ὑποτεθῇ τοιοῦτο τὸ ΑΤ· ἐὰν διὰ τῆς ΑΚ ἀχθῇ τυχὸν ἐπίπεδον, θὰ τέμνῃ τὸ μὲν ΜΝ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΚΓ, τὰ δὲ παράλληλα αὐτῷ κατὰ τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΑΕ, αἵτινες θὰ ἦσαν παράλληλοι τῇ ΚΓ· ὅπερ ἄτοπον.

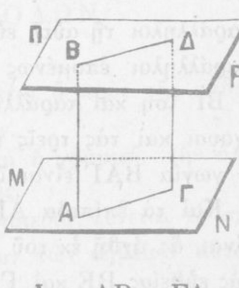
ΘΕΩΡΗΜΑ

318. Δύο ἐπίπεδα, Α καὶ Β, παράλληλα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ Γ, εἶναι καὶ ἀλλήλοις παράλληλα.

Διότι, ἂν τὰ ἐπίπεδα Α καὶ Β εἶχον κοινόν τι σημεῖον, ἐκ τοῦ σημείου ἐκείνου θὰ ἦσαν δύο ἐπίπεδα (τὰ Α καὶ Β) παράλληλα ἑνὶ ἐπιπέδῳ (τῷ Γ)· ὅπερ ἄτοπον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

319. Παράλληλοι εὐθεῖαι, μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμεναι, εἶναι ἴσαι.



Ἔστωσαν παράλληλοι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, περιεχόμεναι μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΜΝ καὶ ΠΡ· λέγω, ὅτι εἶναι ΑΒ = ΓΔ.

Διότι, τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ, θὰ τέμνῃ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΡ κατὰ παραλλήλους εὐθείας, τὰς ΑΓ καὶ ΒΔ· ἄρα τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἑπομένως εἶναι ΑΒ = ΓΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

320. Αἱ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἀγόμεναι κάθετοι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Διότι, αἱ κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι· παράλληλοι δὲ εὐθεῖαι, μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμεναι, εἶναι ἴσαι.

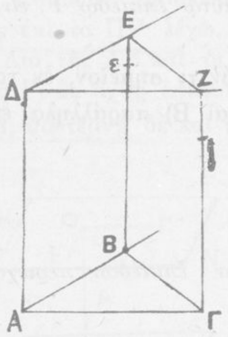
ΟΡΙΣΜΟΣ

321. Ἀπόστασις δύο παραλλήλων ἐπιπέδων λέγεται μία οἱαδήποτε τῶν μεταξὺ αὐτῶν καθέτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

322. *Ἐὰν δύο γωνίαι, μὴ κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη φερομένας, αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν παράλληλα.*

Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι καὶ ἔχουσαι τὴν ΑΒ παράλληλον τῇ ΕΔ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος φερομένην, καὶ τὴν ΑΓ παράλληλον τῇ ΔΖ καὶ ὁμοίως φερομένην· λέγω, ὅτι αἱ γωνίαι αὗται ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν παράλληλα.



Ἂς ληφθῇ ΑΓ = ΔΖ καὶ ΑΒ = ΔΕ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ καὶ αἱ ΒΓ, ΕΖ.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΔΕ, τὸ σχῆμα ΑΒΔΕ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΒΕ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΑΔ· δι' ὅμοιον λόγον, καὶ ἡ ΓΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΑΔ, ὥστε αἱ δύο εὐθεῖαι ΒΕ καὶ ΓΖ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΑΔ· ἄρα εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας ἴσαι καὶ παράλληλοι· ἐπομένως τὸ σχῆμα ΒΓΖΕ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἡ ΒΓ ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΕΖ. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουσι καὶ τὰς τρεῖς των πλευρὰς ἴσας· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση τῇ ΕΔΖ.

Καὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι παράλληλα· διότι, ἂν δὲν εἶναι, ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Δ, ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ΑΒΓ καὶ ἂς τέμνῃ τὰς εὐθείας ΒΕ καὶ ΓΖ εἰς τὰ σημεῖα ε καὶ ζ· τότε θὰ εἶναι

$$\varepsilon B = A\Delta \quad \text{καὶ} \quad \zeta\Gamma = A\Delta,$$

ὡς παράλληλοι εὐθεῖαι μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων.

Ἀλλ' ἀπεδείχθη ὅτι εἶναι $EB = A\Delta$ καὶ $Z\Gamma = A\Delta$·

ἄρα $EB = \varepsilon B$ $\quad Z\Gamma = \zeta\Gamma$, ὅπερ ἄτοπον.

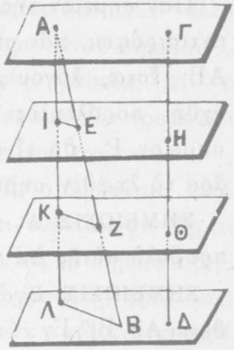
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις. *Ἐὰν ἐκ σημείων ἐπὶ ἐπιπέδου κειμένων, ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι, ἴσαι καὶ παράλληλοι καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν τούτων κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου τῷ δοθέντι.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

323. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.*

Ἔστωσαν τυχοῦσαι εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ,ΓΔ, τεμνόμεναι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων εἰς τὰ σημεῖα Α, Ε, Ζ, Β καὶ Γ, Η, Θ, Δ· λέγω ὅτι θὰ εἶναι

$$\frac{ΑΕ}{ΓΗ}=\frac{ΕΖ}{ΗΘ}=\frac{ΖΒ}{ΘΔ}.$$



Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Α ἡ ΑΛ, παράλληλος τῇ ΓΔ, καὶ ἂς τέμνῃ τὰ ἐπίπεδα εἰς τὰ σημεῖα Ι, Κ, Λ. Τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΛ, θὰ τέμνῃ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα κατ᾽ εὐθείας παραλλήλους, τὰς ΕΙ, ΖΚ, ΒΛ, καὶ ἑπομένως εἶναι

$$\frac{ΑΕ}{ΑΙ}=\frac{ΕΖ}{ΙΚ}=\frac{ΖΒ}{ΚΛ}.$$

ἀλλ᾽ εἶναι καὶ ΙΑ = ΓΗ, ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων· ὁμοίως ΙΚ = ΗΘ καὶ ΚΛ = ΘΔ· ἀντικαθιστῶντες λοιπὸν ἐν τοῖς ἴσοις λόγοις τὰς ΑΙ,ΙΚ,ΚΛ, ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν ΓΗ, ΓΘ, ΘΔ, εὑρίσκομεν

$$\frac{ΑΕ}{ΓΗ}=\frac{ΕΖ}{ΗΘ}=\frac{ΖΒ}{ΘΔ}.$$ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΟΒΟΛΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ

324. *Προβολὴ* σημείου ἐπὶ ἐπίπεδον λέγεται ὁ πούς τῆς καθέτου, ἥτις ἐκ τοῦ σημείου ἄγεται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

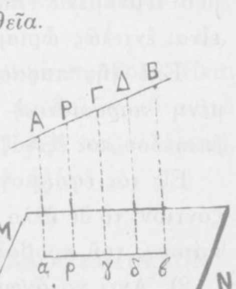
Προβολὴ δὲ γραμμῆς ἐπὶ ἐπίπεδον λέγεται ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσιν αἱ προβολαὶ τῶν σημείων αὐτῆς.

Καὶ *προβολὴ οἱουδήποτε σχήματος ἐπὶ ἐπίπεδον*, λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσιν αἱ προβολαὶ ἁπάντων τῶν σημείων αὐτοῦ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

325. *Ἡ προβολὴ εὐθείας ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι εὐθεῖα.*

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ ἐπίπεδον τὸ ΜΝ, μὴ περιέχον τὴν εὐθεῖαν, μηδὲ κάθετον ἐπ᾽ αὐτήν· λέγω, ὅτι ἡ προβολὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ εἶναι εὐθεῖα γραμμή.



Διότι, αἱ ἐκ τῶν σημείων τῆς ΑΒ ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, οἷον αἱ Αα, Ββ, Γγ, Δδ, εἶναι παράλληλοι, τέμνουσι δὲ καὶ τὴν ΑΒ· ἄρα κεῖνται πᾶσαι ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, τῷ αΑΒ καί, διὰ τοῦτο, οἱ πόδες αὐτῶν εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ἤτοι ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς, τῆς αγδβ.

Πᾶν σημεῖον τῆς ΑΒ ἔχει προβολὴν σημεῖόν τι τῆς αβ· ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον τῆς αβ, εἶναι προβολὴ σημείου τινος τῆς ΑΒ· ἔστω, λόγου χάριν, τυχὸν σημεῖον τῆς αβ, τὸ ρ· ἐὰν ἐξ αὐτοῦ ἀχθῇ παράλληλος τῇ αΑ, ἡ ρΡ, αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Ρ, θὰ εἶναι δὲ καὶ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ (306)· ἄρα τὸ ληφθὲν σημεῖον ρ εἶναι προβολὴ τοῦ Ρ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον εἶναι προφανῶς ἓν μόνον σημεῖον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ, αἱ κάθετοι Αα, Ββ, Γγ. . ., εἶναι πᾶσαι ἴσαι· ἡ δὲ τυχοῦσα ἐξ αὐτῶν λαμβάνεται ὡς ἀπόστασις τῆς εὐθείας ἀπὸ τοῦ παραλλήλου πρὸς αὐτὴν ἐπιπέδου.

* ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΟΒΟΛΩΝ

1) Ἡ προβολὴ τοῦ σημείου ἐπὶ ἓν ἐπίπεδον δὲν δύναται νὰ προσδιορίσῃ τὸ σημεῖον· διότι π. χ., τὸ σημεῖον, οὗτινος προβολὴ εἶναι τὸ α, δύναται νὰ εὑρίσκηται ὁπουδήποτε ἐπὶ τῆς καθέτου αΑ. Ἀλλ' ἂν ἔχωμεν ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α δύο προβολάς, α,α', ἐπὶ δύο ἐπίπεδα (μὴ παράλληλα), δυνάμεθα ἐξ αὐτῶν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ σημεῖον· πρὸς τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν ἐξ ἑκατέρας κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς· ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον σημεῖον θὰ εὑρίσκηται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν καθέτων τούτων, θὰ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως αὐτῶν.

Καὶ σχῆμα οἱονδήποτε ὁρίζεται διὰ τῶν δύο προβολῶν του ἐπὶ δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα· διότι ἡ θέσις ἑκάστου ἐκ τῶν σημείων του εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη ἐκ τῶν δύο προβολῶν αὐτοῦ.

Ἐπὶ τῆς παραστάσεως ταύτης τῶν σχημάτων βασίζεται ἡ καλουμένη *παραστατικὴ γεωμετρία,* ἥτις παριστᾷ πάντα τὰ σχήματα ἐπὶ ἐπιπέδου καὶ ἐξετάζει αὐτὰ διὰ τῶν δύο προβολῶν των.

Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς λαμβάνουσι τὸ ἓν ἐπίπεδον τῶν προβολῶν ὁριζόντιον· τὸ δὲ ἄλλο κατακόρυφον· λέγεται δὲ ἡ μὲν ὁριζοντία προβολὴ *κάτοψις* τοῦ προβαλλομένου σχήματος, ἡ δὲ ἄλλη *πρόσοψις* αὐτοῦ.

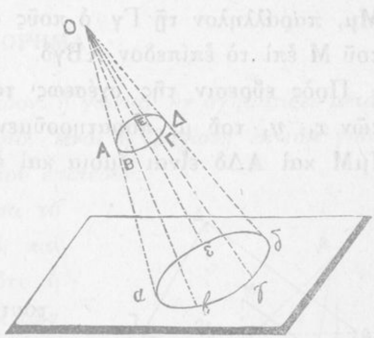
2) Ἀντὶ νὰ ἄγωμεν τὰς εὐθείας Αα, Ββ, Γγ. . ., (δι' ὧν προβάλλομεν τὸ σχῆμα) καθέτους πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν προβολῶν, δυνάμεθα νὰ ἄγωμεν αὐτὰς πλαγίας, παραλλήλους ὅμως· τότε προκύπτουσιν ἄλλαι

προβολαί, αἵτινες λέγονται *πλάγιαι·* αἱ δὲ διὰ καθέτων γινόμεναι λέγονται *ὀρθαί.*

3) Ἡ προβολὴ σχήματος ἐπὶ ἐπίπεδον γίνεται καὶ κατ' ἄλλον γενικώτερον τρόπον, ὡς ἑξῆς· ἄγομεν ἐξ ἑνὸς ὡρισμένου σημείου Ο, εἰς τὰ διάφορα σημεῖα Α, Β, Γ. . ., τοῦ σχήματος, εὐθείας καὶ τὰ σημεῖα α, β, γ. . ., εἰς ἃ αὗται συναντῶσι τὸ ἐπίπεδον τῶν προβολῶν, θεωροῦμεν ὡς προβολὰς τῶν ὁμωνύμων σημείων τοῦ σχήματος.

Ἡ προβολὴ αὕτη λέγεται *ὀφθαλμική·* διότι, ἂν ὁ ὀφθαλμὸς εὑρίσκηται εἰς τὸ Ο, ἐξ οὗ ἄγονται αἱ προβάλλουσαι εὐθεῖαι, θὰ ἴδῃ τὰ σημεῖα, Α, Β, Γ.., προβεβλημένα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου εἰς τὰ σημεῖα α,β,γ...

Χρῆσις τῆς προβολῆς ταύτης γίνεται ἐν τῇ ζωγραφικῇ, πρὸς ἀπεικόνισιν ἀντικειμένου τινὸς ἐπὶ τοῦ πίνακος· ἡ εἰκὼν παντὸς ἀντικειμένου εἶναι ἡ ὀφθαλμικὴ προβολὴ αὐτοῦ, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πίνακος· ἀπεικονίζομεν δὲ τὰ ἀντικείμενα τοιουτοτρόπως, διότι αἱ οὕτω γινόμεναι εἰκόνες ποιοῦσιν ἐπὶ τῆς ὁράσεως ἡμῶν τὴν αὐτὴν ἐντύπωσιν, ἣν καὶ αὐτὰ τὰ ἀντικείμενα. Ἐπειδὴ δὲ τὸ εἶδος τοῦτο τῆς ἀπεικονίσεως τῶν ἀντικειμένων λέγεται ***σκηνογραφία*** καὶ ἡ προβολή, δι' ἧς ἡ σκηνογραφία γίνεται, λέγεται καὶ ***σκηνογραφική***.



Ἡ ὀφθαλμικὴ προβολὴ καταντᾷ προβολὴ ἁπλῆ, ὅταν τὸ σημεῖον Ο ἀπομακρύνηται εἰς ἄπειρον· διότι, τότε αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ. . . καταντῶσι παράλληλοι.

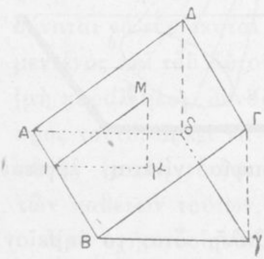
Παρατηρητέον, πρὸς τούτοις, ὅτι ἡ μὲν ὀφθαλμικὴ προβολὴ εἶναι ἡ σκιὰ τοῦ ἀντικειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν προβολῶν, ὅταν τὸ φῶς ἔρχηται ἐκ τοῦ Ο, ἡ δὲ ἁπλῆ προβολὴ (ἡ διὰ παραλλήλων), εἶναι ἡ σκιὰ αὐτοῦ, ὅταν τὸ φῶς ἔρχηται ἐκ τοῦ ἡλίου.

ΠΡΟΒΟΛΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΑΛΛΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

Θεωρήσωμεν δύο ἐπίπεδα, παριστώμενα διὰ τῶν ὀρθογωνίων ΑΒΓΔ καὶ ΑΒγδ, ὧν κοινὴ πλευρὰ εἶναι ἡ ΑΒ, καὶ ἔστω τὸ ΑΒγδ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ ΑΒΓΔ (ἤτοι ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι Γγ καὶ Δδ κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒγδ)· ἐὰν λάβωμεν ὡς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, ἐπὶ μὲν τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ, τὰς εὐθείας ΑΒ (τῶν x) καὶ ΑΓ (τῶν y), ἐπὶ δὲ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒγδ τὰς προβολὰς αὐτῶν ΑΒ καὶ Αγ, μεταξὺ τῶν συντεταγμένων (x, y) τοῦ τυχόντος σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ καὶ τῶν συντεταγμένων (x_1, y_1) τῆς προβολῆς αὐτοῦ μ, ὑπάρχουσιν ἁπλαῖ τινες σχέσεις, δι' ὧν ὁρίζομεν τὴν θέσιν τοῦ ἑτέρου τῶν σημείων Μ ἢ μ, ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ θέσις ἑνὸς ἐξ αὐτῶν.

Ἔστω, τῷ ὄντι, Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ· ἵνα κατασκευάσωμεν τὴν προβολὴν αὐτοῦ, ἄγομεν τὴν ΜΙ, παράλληλον τῇ ΑΔ καὶ ἐκ τοῦ Ι, τὴν Ιμ, παράλληλον τῇ Αδ καὶ ἐκ τοῦ Μ τὴν Μμ, παράλληλον τῇ Γγ ὁ ποῦς αὐτῆς μ θὰ εἶναι (308) ἡ προβολὴ τοῦ Μ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒγδ.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς σχέσεως τῶν συντεταγμένων x, y τοῦ Μ καὶ τῶν x_1, y_1 τοῦ μ, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΙμΜ καὶ ΑΔδ εἶναι ὅμοια καὶ ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν



$$\frac{\mathrm{IM}}{\mathrm{A\Delta}} = \frac{\mathrm{I\mu}}{\mathrm{A\delta}}.$$

τουτέστιν $$\frac{y}{\mathrm{A\Delta}} = \frac{y_1}{\mathrm{A\delta}}. \tag{1}$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ πλευραὶ Αδ καὶ ΑΔ εἶναι αἱ αὐταί, ὁπουδήποτε καὶ ἂν ληφθῇ τὸ σημεῖον Μ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ, ἐὰν παραστήσωμεν τὰ μήκη τούτων, διὰ β (τὴν Αδ) καὶ διὰ α (τὴν ΑΔ), θὰ εἶναι

$$\frac{y}{\alpha} = \frac{y_1}{\beta}, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad y_1 = \frac{\beta}{\alpha} y \quad \text{ἢ καὶ} \quad y = \frac{\alpha}{\beta} y_1 \cdot \tag{2}$$

ἔχομεν δὲ προδήλως καὶ $x = x_1$.

Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων εὑρίσκομεν τὰς συντεταγμένας τοῦ ἑνὸς τῶν σημείων Μ ἢ μ, ὅταν ἔχωμεν τὰς συντεταγμένας τοῦ ἄλλου.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Μ, μένον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ, γράφῃ περιφέρειαν κύκλου, ἔχοντος κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ρ, αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ x, y θὰ συνδέωνται διαρκῶς διὰ τῆς ἐξισώσεως $x^2 + y^2 = \rho^2$·

ἀλλὰ τότε καὶ αἱ συντεταγμέναι x_1 y_1 τῆς προβολῆς τοῦ Μ θὰ συνδέωνται διὰ τῆς ἐξισώσεως (διότι $x = x_1$ καὶ $y = \frac{\alpha}{\beta}\ y_1$):

$$x^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\, y_1^2 = \varrho^2$$

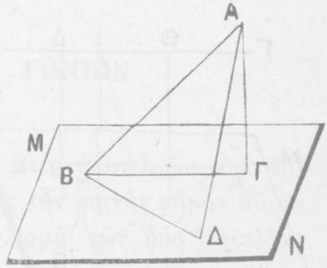
$$\text{ἢ καὶ}\quad \frac{x_1^2}{\varrho^2} + \frac{y_1^2}{\varrho^2\lambda^2} = 1 \cdot\ \text{ἐὰν τεθῇ}\ \frac{\beta}{\alpha} = \lambda,$$

ἥτις παριστᾷ ἔλλειψιν, ἔχουσαν ἄξονας 2ϱ καὶ $2\varrho\lambda$. Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι *πᾶσα ἔλλειψις εἶναι προβολὴ κύκλου, ἔχοντος διάμετρον τὸν μέγαν ἄξονα αὐτῆς.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

326. Ἐὰν εὐθεῖα τέμνῃ ἐπίπεδον, ἡ γωνία, ἣν σχηματίζει μετὰ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἐκ τῶν γωνιῶν, ἃς σχηματίζει μετὰ τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον ΜΝ εἰς τὸ σημεῖον Β, καὶ ΒΓ ἡ προβολὴ αὐτῆς· λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἐκ τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ ΑΒ μεθ' οἱασδήποτε εὐθείας, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κειμένης, ὡς τῆς ΒΔ.



Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Α, κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἡ ΑΓ, καὶ ἃς ληφθῇ ΒΔ=ΒΓ καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ ΑΔ.

Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ἔχουσι τὴν ΑΒ κοινήν, τὴν ΒΔ ἴσην τῇ ΒΓ, ἀλλὰ τὴν πλευρὰν ΑΓ μικροτέραν τῆς ΑΔ (διότι ἡ μὲν ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἡ δὲ ΑΔ πλαγία)· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΒΔ· ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ὀξεῖα γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει εὐθεῖά τις μετὰ τῆς προβολῆς της ἐπὶ ἐπίπεδον, λέγεται *κλίσις τῆς εὐθείας πρὸς τὸ ἐπίπεδον.*

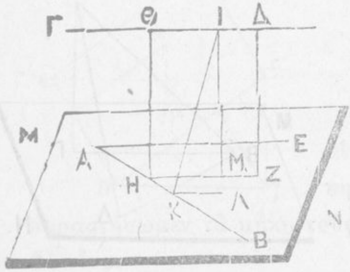
ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ, ΑΙΤΙΝΕΣ ΔΕΝ ΚΕΙΝΤΑΙ ΕΦ' ΕΝΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι δὲν κεῖνται πάντοτε ἐφ' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ἐάν, δηλονότι, ἀχθῇ ἐπίπεδον διὰ τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν καὶ δι' ἑνὸς σημείου τῆς ἄλλης, ἡ ἄλλη αὕτη δύναται νὰ μὴ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου (τοιαῦται εἶναι, λ. χ., αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ τοῦ προηγουμένου σχήματος). Περὶ τῶν τοιούτων εὐθειῶν ἔχομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

327. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δὲν κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὑπάρχει κοινὴ αὐτῶν κάθετος καὶ μία μόνη· εἶναι δὲ αὕτη ἡ ἐλαχίστη τῶν δύο εὐθειῶν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις.*

Ἔστωσαν τοιαῦται εὐθεῖαι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἔκ τινος σημείου Α τῆς ΑΒ, ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΕ, παράλληλος τῇ ΓΔ· αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΕ ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἐπιπέδου τινὸς ΜΝ, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι (311) παράλληλον τῇ ΓΔ· ἂς ἀχθῇ ἔπειτα, ἔκ τινος σημείου τῆς ΓΔ, κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, ἡ ΔΖ, καὶ ἐκ τοῦ Ζ, παράλληλος τῇ ΕΑ, ἡ ΖΗ, καὶ ἐκ τοῦ Η, ἡ ΗΘ, παράλληλος τῇ ΔΖ, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν ΓΔ εἴς τι σημεῖον Θ (διότι, ἡ ΗΘ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΗΖΓΔ τῶν δύο παραλλήλων ΗΖ καὶ ΓΔ)· λέγω, ὅτι ἡ ΗΘ εἶναι ἡ κοινὴ κάθετος τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.



Καὶ ὄντως, ἡ ΗΘ, ὡς παράλληλος τῇ ΔΖ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· ἄρα κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· εἶναι δὲ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΗΖ· ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ ΓΔ.

Ἄλλη κοινὴ κάθετος τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ δὲν ὑπάρχει· διότι, ἔστω τοιαύτη ἡ ΙΚ· αὕτη, κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν ΓΔ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ ΚΛ, τὴν ἀγομένην ἐκ τοῦ Κ· οὖσα δὲ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. ἀλλ' ἂν ἐκ τοῦ Ι (ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΘΔΖΗ), ἀχθῇ ἡ ΙΜ, παράλληλος τῇ ΖΔ, αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· θὰ ἦσαν λοιπὸν ἐκ τοῦ Ι, δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΜΝ· ὅπερ ἀδύνατον.

Τέλος, ἡ κοινὴ κάθετος ΗΘ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας, συνδεούσης τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ, οἷον τῆς ΙΚ· διότι ἡ ΙΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἡ δὲ ΙΚ πλαγία· ἄρα ΙΜ$<$ΙΚ· ἀλλ' ἡ ΙΜ εἶναι ἴση τῇ ΗΘ· ἄρα ΘΗ$<$ΙΚ· ὅ. ἔ. δ.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Αἱ διάφοροι θέσεις δύο ἐπιπέδων πρὸς ἄλληλα, εἶναι δύο·
- ἢ τέμνουσιν ἄλληλα κατά τινα εὐθεῖαν,
- ἢ εἶναι παράλληλα.

Αἱ διάφοροι θέσεις εὐθείας καὶ ἐπιπέδου πρὸς ἄλληλα, εἶναι τρεῖς·
- ἢ οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον, ὅτε εἶναι παράλληλα,
- ἢ ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ὅτε ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸ ἐπίπεδον καὶ διαπερᾷ αὐτό,
- ἢ κεῖται ἡ εὐθεῖα ὅλη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (26).

Αἱ δὲ διάφοροι θέσεις δύο εὐθειῶν πρὸς ἀλλήλας, εἶναι τρεῖς·
- ἢ τέμνουσιν ἀλλήλας
- ἢ εἶναι παράλληλοι, } τότε κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ,
- ἢ δὲν κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὅτε, οὔτε τέμνουσιν ἀλλήλας, οὔτε παράλληλοι εἶναι.

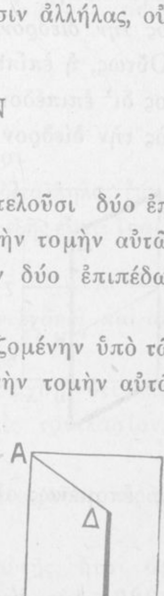
ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΙΕΔΡΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

328. *Δίεδρος γωνία* λέγεται τὸ σχῆμα, ὅπερ ἀποτελοῦσι δύο ἐπίπεδα, τέμνοντα ἄλληλα καὶ περατούμενα εἰς τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν.

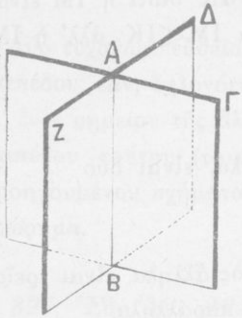
Ἀκμὴ τῆς διέδρου γωνίας λέγεται ἡ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων *ἕδραι* δ' αὐτῆς τὰ ἐπίπεδα.

Τὸ σχῆμα ΔΑΒΓ παριστᾷ δίεδρον γωνίαν, σχηματιζομένην ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων ΔΑΒ καὶ ΓΑΒ, περατουμένων εἰς τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν ΔΒ· ἡ ΑΒ εἶναι ἡ ἀκμὴ τῆς διέδρου γωνίας· τὰ δὲ ἐπίπεδα ΔΑΒ καὶ ΓΑΒ εἶναι αἱ ἕδραι αὐτῆς.



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὴν δίεδρον γωνίαν παριστῶμεν διὰ δύο γραμμάτων, γραφομένων ἐπὶ τῆς ἀκμῆς, ἢ (ἂν πολλαὶ δίεδροι γωνίαι ἔχωσι τὴν αὐτὴν ἀκμὴν) διὰ τεσσάρων, ὧν δύο μὲν γράφονται ἐπὶ τῆς ἀκμῆς, ἀνὰ ἓν δὲ ἐπὶ τῶν ἑδρῶν· οἷον, ἡ δίεδρος γωνία τοῦ παρακειμένου σχήματος σημειοῦται ΔΑΒΓ ἢ ἁπλῶς ΑΒ.

Ἴσαι λέγονται αἱ δίεδροι γωνίαι, ἐὰν δύνανται νὰ τεθῶσιν οὕτως, ὥστε νὰ ἀποτελέσωσι μίαν μόνην.



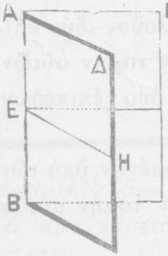
Ἐφεξῆς λέγονται δύο δίεδροι γωνίαι, ἐὰν ἔχωσι τὴν ἀκμὴν καὶ μίαν ἕδραν κοινά, τὰς δὲ ἄλλας ἕδρας ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς· τοιαῦται εἶναι αἱ δίεδροι γωνίαι ΕΑΒΖ καὶ ΖΑΒΓ.

Κατὰ κορυφὴν δὲ λέγονται δύο δίεδροι γωνίαι, ὅταν γίνωνται ὑπὸ δύο ἐπιπέδων, διατεμνόντων ἄλληλα, καὶ ἔχωσι μόνην τὴν ἀκμὴν κοινήν, ἀλλ' ἕδρας διαφόρους· τοιαῦται εἶναι αἱ δίεδροι γωνίαι ΔΑΒΓ καὶ ΕΑΒΖ.

Κάθετα λέγονται δύο ἐπίπεδα πρὸς ἄλληλα, ἐάν, διατέμνοντα ἄλληλα, σχηματίζωσι τέσσαρας διέδρους γωνίας ἴσας· αἱ δὲ γωνίαι αὗται λέγονται *ὀρθαὶ* δίεδροι γωνίαι.

Ὅταν δίεδρος γωνία τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου, καθέτου πρὸς τὴν ἀκμὴν αὐτῆς, ἡ προκύπτουσα ἐπίπεδος γωνία λέγεται *ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν δίεδρον.*

Οὕτως, ἡ ἐπίπεδος γωνία ΗΕΖ, ἥτις προκύπτει, ὅταν τμηθῇ ἡ δίεδρος δι' ἐπιπέδου, καθέτου πρὸς τὴν ἀκμὴν ΑΒ, εἶναι ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν δίεδρον ΑΒ.



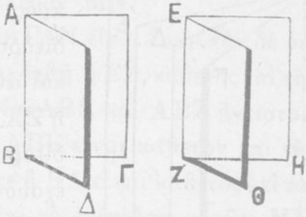
Εἶναι δὲ ἀδιάφορον, ἐκ τίνος σημείου τῆς ἀκμῆς θὰ ἀχθῇ τὸ κάθετον ἐπ' αὐτὴν ἐπίπεδον· διότι, πᾶσαι αἱ οὕτω προκύπτουσαι ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. Ἔστωσαν, τῷ ὄντι, δύο τοιαῦται γωνίαι, αἱ ΖΕΗ καὶ ΓΑΔ· τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν, ὡς κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ, εἶναι παράλληλα καὶ διὰ τοῦτο αἱ τομαὶ αὐτῶν ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ἑδρῶν θὰ εἶναι παράλληλοι· ἄρα αἱ ΑΓ καὶ ΕΖ εἶναι παράλληλοι· καὶ αἱ ΑΔ καὶ ΕΗ ὡσαύτως· ἑπομένως αἱ γωνίαι ΖΕΗ καὶ ΓΑΔ εἶναι ἴσαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

329. Δύο δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἐὰν αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἔστωσαν δίεδροι γωνίαι αἱ ΑΒ καὶ ΕΖ, ἔχουσαι ἴσας τὰς ἀντιστοιχούσας ἐπιπέδους γωνίας ΓΒΔ καὶ ΗΖΘ· λέγω, ὅτι αἱ δίεδροι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Διότι, ὅταν ἡ ἐπίπεδος γωνία ΗΖΘ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΓΒΔ, θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ ἀκμὴ ΖΕ ἐπὶ τῆς ΒΑ· διότι ἀμφότεραι θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (τὸ τῶν γωνιῶν), εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Β· ἄρα θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν ΗΖ καὶ ΖΕ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΒΓ καὶ ΒΑ, τουτέστιν ἡ ἕδρα ΗΖΕ ἐπὶ τῆς ἕδρας ΓΒΑ· ὡσαύτως θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ ἕδρα ΘΖΕ ἐπὶ τῆς ἕδρας ΔΒΑ· ὥστε αἱ δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἀντίστροφος πρότασις, τουτέστιν, *ὅταν αἱ δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι εἶναι ἴσαι*, εἶναι ἀφ' ἑαυτῆς φανερά.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

330. Τῶν ὀρθῶν διέδρων γωνιῶν αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι εἶναι ὀρθαί, καὶ ἀντιστρόφως.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

331. Αἱ κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Διότι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς αὐτὰς ἐπίπεδοι εἶναι ἴσαι.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι δύο ἐπίπεδα, εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα, ἐάν, ἐκ τῶν τεσσάρων γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουσι, δύο ἐφεξῆς εἶναι ἴσαι.

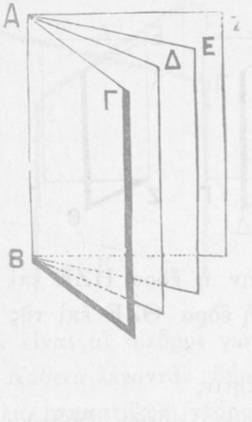
ΘΕΩΡΗΜΑ

332. Δύο δίεδροι γωνίαι ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι καὶ αἱ πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίπεδοι γωνίαι.

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 224, ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς διπλασίαν δίεδρον, ἀντιστοιχεῖ διπλασία ἐπίπεδος, εἰς τριπλασίαν, τριπλασία κτλ.

Ἔστω τυχοῦσα δίεδρος γωνία, ἡ ΓΑΒΔ, καὶ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς αὐτὴν ἐπίπεδος ἡ ΓΑΔ.

Ἂς ἐπαναληφθῇ τρὶς ἡ γωνία ΓΑΔ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς, ἤτοι ἃς γίνωσιν αἱ γωνίαι ΔΑΕ, ΕΑΖ, ἴσαι τῇ ΓΑΔ· ἐὰν διὰ τῆς ἀκμῆς ΑΒ καὶ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΕ, ΑΖ, ἀχθῶσιν ἐπίπεδα, γίνονται δίεδροι γωνίαι, αἱ ΔΑΒΕ, ΕΑΒΖ, ἴσαι τῇ ΓΑΒΔ· διότι αἱ πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίπεδοι εἶναι ἴσαι τῇ ΓΑΔ· εἶναι λοιπὸν ἡ μὲν δίεδρος γωνία ΓΑΒΕ, διπλασία τῆς ΓΑΒΔ καὶ ἀντιστοιχεῖ πρὸς αὐτὴν διπλασία ἐπίπεδος, ἡ ΓΑΕ, ἡ δὲ δίεδρος γωνία ΓΑΒΖ, τριπλασία τῆς ΓΑΒΔ καὶ ἀντιστοιχεῖ πρὸς αὐτὴν τριπλασία ἐπίπεδος, ἡ ΖΑΓ. Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι δύο τυχοῦσαι δίεδροι γωνίαι ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι γωνίαι.



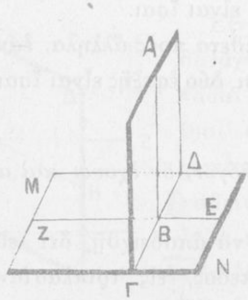
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὡς μέτρον τῆς διέδρου γωνίας λαμβάνεται διὰ τοῦτο, ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίπεδος γωνία· ἤτοι, παρίστανται ἀμφότεραι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

333. *Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος πρὸς ἐπίπεδον, καὶ πάντα τὰ δι᾽ αὐτῆς διερχόμενα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.*

Ἔστω ἐπίπεδον τὸ ΜΝ καὶ κάθετος πρὸς αὐτὸ ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τυχὸν ἐπίπεδον, δι᾽ αὐτῆς διερχόμενον, τὸ ΓΔΑ· λέγω, ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι κάθετον πρὸς τὸ ΜΝ.

Ἐκ τοῦ σημείου Β, τῆς κοινῆς τομῆς ΓΔ τῶν δύο ἐπιπέδων, ἃς ἀχθῇ ἡ ΕΒΖ, κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ· τὸ ἐπίπεδον ΑΒΕ εἶναι τότε κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ (διότι ἀμφότεραι αἱ ΑΒ, ΒΕ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΓ), ἐπειδὴ δὲ ἡ ΒΓ εἶναι ἡ κοινὴ ἀκμὴ τῶν διέδρων γωνιῶν ΑΓΔΕ καὶ ΑΓΔΖ, ἕπεται, ὅτι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΕΒΑ καὶ ΖΒΑ ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τὰς διέδρους ταύτας· ἀλλ᾽ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΕΒΑ καὶ ΖΒΑ εἶναι ὀρθαὶ (διότι ἡ ΒΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ), ἄρα καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι ΑΓΔΕ, ΑΓΔΖ εἶναι ὀρθαί· τουτέστι τὰ ἐπίπεδα ΑΓΔ καὶ ΜΝ εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα.



ΘΕΩΡΗΜΑ

334. *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα, πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις, ἐν τῷ ἑτέρῳ τῶν ἐπιπέδων, ἄγεται κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἄλλο.*

Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδα, κάθετα πρὸς ἄλληλα, τὰ ΑΓΔ καὶ ΜΝ· καὶ ἐν τῷ πρώτῳ ἡ ΑΒ, κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν αὐτῶν τομὴν ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ.

Διότι, αἱ δύο δίεδροι γωνίαι ΑΓΔΜ καὶ ΑΓΔΝ εἶναι ἴσαι· ἐὰν δὲ διὰ τοῦ σημείου Β, τῆς κοινῆς αὐτῶν ἀκμῆς ΓΔ, ἀχθῇ ἡ ΕΖ, κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ, αἱ δύο ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΒΕ καὶ ΑΒΖ ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τὰς διέδρους (διότι τὸ ἐπίπεδον ΑΒΕ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ)· ἄρα εἶναι ἴσαι καὶ διὰ τοῦτο ὀρθαί· ὥστε ἡ ΒΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς δύο εὐθείας ΒΔ καὶ ΕΖ· ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΜΝ.

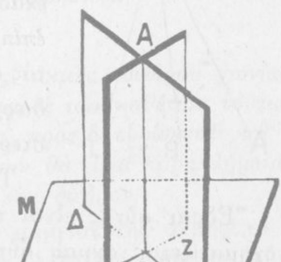
ΠΟΡΙΣΜΑ

335. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ΜΝ καὶ ΑΓΔ, καὶ ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Α, τοῦ ἑνός, ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἄλλο, αὕτη θὰ κεῖται ὅλη ἐν τῷ πρώτῳ ἐπιπέδῳ.

Διότι, ἂν ὑποτεθῇ τὸ ἐναντίον, δυνάμεθα ἐκ τοῦ σημείου Α νὰ φέρωμεν τὴν ΑΒ, κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων, ἥτις, κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΓΔ· τότε δὲ ἐκ τοῦ σημείου Α θὰ ἦσαν δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· ὅπερ ἄτοπον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

336. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα, τέμνοντα ἄλληλα, εἶναι ἀμφότερα κάθετα ἐπὶ ἄλλο, καὶ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.



Ἔστωσαν τὰ δύο ἐπίπεδα ΑΓΔ καὶ ΑΕΖ, ἀμφότερα κάθετα ἐπὶ τὸ ΜΝ λέγω, ὅτι καὶ ἡ τομὴ αὐτῶν ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΜΝ.

Διότι, ἂν ἐκ τοῦ σημείου Α τῆς κοινῆς τομῆς, ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, αὕτη θὰ κεῖται καὶ ἐν τῷ πρώτῳ ἐπιπέδῳ καὶ ἐν τῷ δευτέρῳ· ἄρα θὰ εἶναι ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ΑΒ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Περὶ τῶν διέδρων γωνιῶν δύνανται νὰ ἀποδειχθῶσι καὶ ἄλλα θεωρήματα (διὰ τῆς βοηθείας τῶν ἀντιστοιχουσῶν ἐπιπέδων γωνιῶν), ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀποδειχθέντα περὶ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν. Ἐκ τούτων ἀναφέρομεν τὰ ἑξῆς:

1) Δι' ἑκάστης εὐθείας κειμένης ἐν ἐπιπέδῳ, ἄγεται ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτὸ καὶ ἓν μόνον.

2) Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐφεξῆς διέδρων γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουσι δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα, εἶναι δύο ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι.

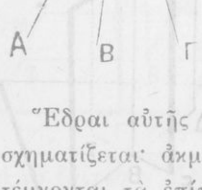
3) Τὸ ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου.

ΣΤΕΡΕΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

ΟΡΙΣΜΟΙ

337. *Στερεὰ γωνία* λέγεται τὸ σχῆμα, ὅπερ ἀποτελοῦσι τρία ἢ περισσότερα ἐπίπεδα, διερχόμενα διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ περατούμενα ἕκαστον εἰς τὰς δύο εὐθείας, καθ' ἃς τέμνεται ὑπὸ τῶν πλησίον αὐτοῦ δύο ἐπιπέδων.

Τὰ ἐπίπεδα, τὰ τὴν στερεὰν γωνίαν σχηματίζοντα, λέγονται *ἕδραι* αὐτῆς· αἱ δὲ τομαὶ αὐτῶν (ἑκάστου ὑπὸ τῶν δύο πλησίον αὐτοῦ) λέγονται *ἀκμαὶ* τῆς στερεᾶς γωνίας καὶ τὸ σημεῖον, εἰς ὃ αἱ ἀκμαὶ πᾶσαι συνέρχονται, λέγεται *κορυφὴ* τῆς στερεᾶς γωνίας.



Αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας ἀποτελοῦσιν αἱ ἀκμαὶ ἑκάστης τῶν ἑδρῶν, λέγονται καὶ αὐταὶ *ἕδραι* ἢ *ἐπίπεδοι γωνίαι* τῆς στερεᾶς γωνίας· αἱ δὲ γωνίαι, τὰς ὁποίας ἀποτελοῦσιν αἱ δι' ἑκάστης τῶν ἀκμῶν διερχόμεναι ἕδραι, λέγονται *δίεδροι γωνίαι* τῆς στερεᾶς γωνίας.

Τὸ σχῆμα ΟΑΒΓ παριστᾷ στερεὰν γωνίαν. Ἕδραι αὐτῆς εἶναι τὰ τρία ἐπίπεδα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ, ὑφ' ὧν σχηματίζεται· ἀκμαὶ αὐτῆς εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, καθ' ἃς τέμνονται τὰ ἐπίπεδα, καὶ ἡ κορυφὴ αὐτῆς τὸ Ο.

Τρίεδρος λέγεται, ἡ στερεὰ γωνία, ἡ τρεῖς ἕδρας μόνον ἔχουσα.

Κυρτὴ λέγεται ἡ στερεὰ γωνία, ἐὰν ἑκάστη ἕδρα αὐτῆς ἐκβαλλομένη, ἀφίνῃ τὴν στερεὰν γωνίαν ὁλόκληρον πρὸς ἓν μέρος αὐτῆς.

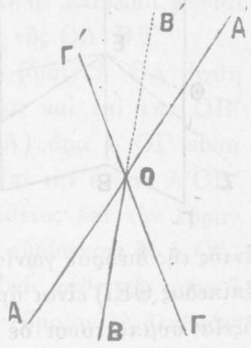
Ἐν τοῖς ἑξῆς ὁ λόγος γίνεται μόνον περὶ κυρτῶν γωνιῶν.

338. Ἐὰν αἱ ἀκμαὶ στερεᾶς γωνίας προσεκβληθῶσι πᾶσαι πέραν τῆς

κορυφῆς, σχηματίζεται νέα στερεὰ γωνία, ἥτις λέγεται *κατὰ κορυφὴν ἢ συμμετρικὴ* τῆς πρώτης.

Τοιαῦται εἶναι αἱ στερεαὶ γωνίαι ΟΑΒΓ καὶ ΟΑ'Β'Γ'.

Δύο κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι ἔχουσι προδήλως καὶ τὰς ἐπιπέδους αὐτῶν γωνίας ἴσας κατὰ μίαν καὶ τὰς διέδρους ἐπίσης ἴσας (διότι, παραδείγματος χάριν, αἱ δίεδροι γωνίαι ΟΒ καὶ ΟΒ', γίνονται ὑπὸ τῶν αὐτῶν δύο ἐπιπέδων), τουτέστιν ἔχουσι τὰ αὐτὰ *στοιχεῖα*. Ἀλλ' ὅμως δὲν δύνανται ἐν γένει νὰ ἐφαρμόσωσιν. Ἐάν, τῷ ὄντι, ὑποτεθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΟΑ' καὶ ΓΟΓ' ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ χάρτου καὶ ἡ ΟΒ ἔμπροσθεν τοῦ ἐπιπέδου τούτου, ἡ ΟΒ' θὰ εἶναι ὄπισθεν τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ἑπομένως, ὅταν περιστρέψωμεν τὴν γωνίαν Γ'ΟΑ' ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς, μέχρις οὗ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΓΟΑ, θὰ πέσῃ ἡ ΟΑ' ἐπὶ τῆς ΟΑ καὶ ἡ ΟΓ' ἐπὶ τῆς ΟΓ, ἀλλ' ἡ ΟΒ' θὰ εὑρίσκεται ὄπισθεν τοῦ ἐπιπέδου ΑΟΓ, ἐνῷ ἡ ΟΒ εἶναι ἔμπροσθεν αὐτοῦ. Ἐὰν δὲ πάλιν ἐφαρμόσωμεν τὴν γωνίαν Γ'ΟΑ' ἐπὶ τῆς ΑΟΓ, οὕτως ὥστε νὰ πέσῃ ἡ ΟΓ' ἐπὶ τῆς ΟΑ καὶ ἡ ΟΑ' ἐπὶ τῆς ΟΓ, θὰ ἔλθῃ ἡ δίεδρος γωνία ΟΑ' εἰς τὴν δίεδρον ΟΓ καὶ ἡ δίεδρος ΟΓ' εἰς τὴν δίεδρον ΟΑ, ὥστε καὶ πάλιν δὲν ἐφαρμόζουσιν, ἐκτὸς ἐὰν αἱ δίεδροι γωνίαι ΟΑ καὶ ΟΓ εἶναι ἴσαι, ἤτοι, ἂν ἡ τρίεδρος στερεὰ γωνία ἔχῃ δύο διέδρους ἴσας· διότι τότε ἐφαρμόζουσιν.



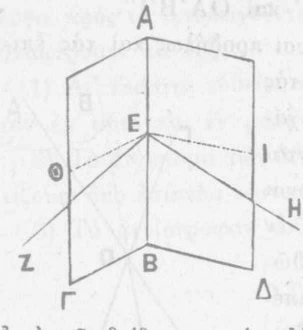
Αἱ τοιαῦται στερεαὶ γωνίαι ἃς λέγονται *ἰσοσκελεῖς*.

ΘΕΩΡΗΜΑ

339. Ἐὰν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς ἀκμῆς διέδρου γωνίας, ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας αὐτῆς, ἑκατέρα δὲ τῶν καθέτων τούτων ἀχθῇ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου της, πρὸς ὃ εὑρίσκεται καὶ ἡ ἄλλη ἕδρα, ἡ γωνία τῶν δύο τούτων καθέτων θὰ εἶναι παραπλήρωμα τῆς ἐπιπέδου γωνίας, ἥτις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν δίεδρον.

Ἔστω δίεδρος γωνία ἡ ΑΒ καὶ τυχὸν σημεῖον τῆς ἀκμῆς τὸ Ε καὶ ἐξ αὐτοῦ ἡ ΕΖ, κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΒΔ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς, πρὸς ὃ εὑρίσκεται καὶ ἡ ἕδρα ΑΒΓ, καὶ ἡ ΕΗ, κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΒΓ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς, πρὸς ὃ εὑρίσκεται καὶ ἡ ΑΒΔ.

Τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο καθέτων, τὸ ΖΕΗ, εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΑΒ καὶ τέμνει τὰς ἕδρας κατὰ τὰς εὐθείας ΕΘ καὶ ΕΙ, ὧν ἡ γωνία, ἡ ΘEI, ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν δίεδρον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ EZ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $AB\Delta$, ἡ γωνία ZEI εἶναι ὀρθή· δι' ὅμοιον λόγον καὶ ἡ γωνία $HE\Theta$ εἶναι ὀρθή· ἄρα εἶναι



$$HE\Theta + ZEI = 2 \text{ ὀρθ.}$$

καὶ ἐπειδὴ $HE\Theta = HEZ + ZE\Theta$, ἕπεται

$$HEZ + ZE\Theta + ZEI = 2 \text{ ὀρθ.}$$

ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $ZE\Theta + ZEI$ ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ ΘEI· ὅθεν συνάγεται

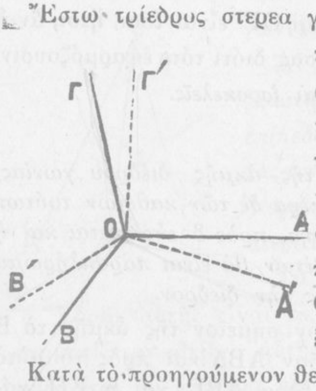
$$\Theta EI + ZEH = 2 \text{ ὀρθ.} \qquad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ εὐθεῖαι EZ, EH κεῖνται ἐντὸς τῆς διέδρου γωνίας, ἐὰν ἡ δίεδρος γωνία (ἤτοι, ἡ ἀντίστοιχος αὐτῇ ἐπίπεδος ΘEI) εἶναι ἀμβλεῖα· ἐκτὸς δ' αὐτῆς, ἐὰν ἡ δίεδρος γωνία εἶναι ὀξεῖα· συμπίπτουσι δὲ ταῖς $E\Theta$, EI, ἐὰν ἡ δίεδρος γωνία εἶναι ὀρθή.

ΘΕΩΡΗΜΑ

340. Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τριέδρου γωνίας ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰς τρεῖς ἕδρας, ἑκάστη πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου της, πρὸς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται καὶ ἡ τρίτη ἀκμή, ἡ τρίεδρος γωνία, ἡ ἔχουσα ἀκμὰς τὰς τρεῖς ταύτας καθέτους, εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς δοθείσης, ἤτοι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς μιᾶς εἶναι παραπληρώματα τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς ἄλλης.

Ἔστω τρίεδρος στερεὰ γωνία ἡ $OAB\Gamma$, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ μὲν OA' κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν $OB\Gamma$, πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς, ἔνθα εὑρίσκεται καὶ ἡ ἀκμὴ OA (τουτέστιν ἡ γωνία AOA' νὰ εἶναι ὀξεῖα), ἡ δὲ OB', κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν $OA\Gamma$, πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς, ἔνθα εὑρίσκεται καὶ ἡ OB, καὶ τέλος ἡ $O\Gamma'$, κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν OAB, πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς, ἔνθα εὑρίσκεται καὶ ἡ $O\Gamma$.



Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἡ μὲν γωνία $A'OB'$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας, ἥτις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν δίεδρον $O\Gamma$, ἡ δὲ γωνία $B'O\Gamma'$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας, ἥτις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν δίεδρον OA καὶ ἡ $\Gamma'OA'$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἀντιστοιχούσης πρὸς τὴν δίεδρον OB· ὥστε αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς στερεᾶς γωνίας ΟΑ΄Β΄Γ΄ εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς ΟΑΒΓ.

Ἀλλὰ καὶ τὸ ἀντίστροφον συμβαίνει· τουτέστιν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς ΟΑΒΓ εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων τῆς ΟΑ΄Β΄Γ΄.

Τῷ ὄντι, ἡ ΟΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ΄ (διότι ἡ ΟΑ΄ ἤχθη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΟΓ), εἶναι δὲ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΟΒ΄ (διότι ἡ ΟΒ΄ ἤχθη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΟΑ)· ἄρα ἡ ΟΓ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΟΑ΄, ΟΒ΄, ἤτοι ἐπὶ τὴν ἕδραν Α΄ΟΒ΄ Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν Β΄ΟΓ΄, καὶ ἡ ΟΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν Γ΄ΟΑ΄· εὑρίσκεται δὲ ἡ ΟΑ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἕδρας Β΄ΟΓ΄ (ἐφ' ἣν εἶναι κάθετος), πρὸς ὃ καὶ ἡ ἀκμὴ ΟΑ΄· διότι ἡ γωνία ΑΟΑ΄ εἶναι ὀξεῖα· ὅμοιον δὲ ἀληθεύει καὶ περὶ τῶν δύο ἄλλων ΟΒ, ΟΓ. Ἑπομένως ἡ στερεὰ γωνία ΟΑΒΓ προκύπτει ἐκ τῆς ΟΑ΄Β΄Γ΄, καθ' ὃν τρόπον προέκυψεν ἡ ΟΑ΄Β΄Γ΄ ἐκ τῆς ΟΑΒΓ. Ἄρα αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς ΟΑΒΓ εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς ΟΑ΄Β΄Γ΄.

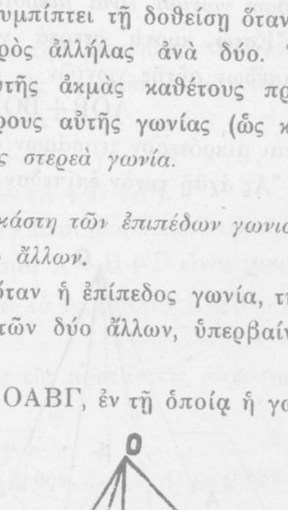
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ νέα στερεὰ γωνία συμπίπτει τῇ δοθείσῃ ὅταν ἡ δοθεῖσα ἔχει τὰς ἀκμὰς αὐτῆς καθέτους πρὸς ἀλλήλας ἀνὰ δύο. Ἡ τρίεδρος γωνία, ἥτις ἔχει τὰς τρεῖς αὐτῆς ἀκμὰς καθέτους πρὸς ἀλλήλας ἀνὰ δύο, ἔχει ὀρθὰς τὰς διέδρους αὐτῆς γωνίας (ὡς καὶ τὰς ἐπιπέδους) καὶ λέγεται *τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

341. Ἐν πάσῃ τριέδρῳ στερεᾷ γωνίᾳ, ἑκάστη τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

Τὸ θεώρημα χρῄζει ἀποδείξεως, μόνον ὅταν ἡ ἐπίπεδος γωνία, τὴν ὁποίαν συγκρίνομεν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, ὑπερβαίνῃ ἑκατέραν ἐξ αὐτῶν.

Ἔστω λοιπὸν τρίεδρος στερεὰ γωνία ἡ ΟΑΒΓ, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἡ γωνία ΑΟΒ ὑποτίθεται μεγαλητέρα καὶ τῆς ΒΟΓ καὶ τῆς ΓΟΑ· λέγω ὅτι εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.



Ἂς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα, ἡ ΑΒ, τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΑΟΒ καὶ ἂς σχηματισθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΟΒ, ἡ γωνία ΒΟΔ, ἴση τῇ ΒΟΓ. Ἡ πλευρὰ ΟΔ θὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Δ·

ἂς ληφθῇ ἔπειτα ἡ ΟΓ ἴση τῇ ΟΔ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΓ.

Τὰ τρίγωνα ΟΒΓ καὶ ΟΒΔ εἶναι ἴσα· διότι ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην (τὴν ΓΟΒ ἴσην τῇ ΔΟΒ) καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἴσας (ΟΔ = ΟΓ καὶ ΟΒ = ΟΒ)· ἐπομένως εἶναι ΒΓ = ΒΔ.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκομεν

$$AB < A\Gamma + B\Gamma\cdot$$

ἀφαιροῦντες δ' ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ἀνίσων, τὰς ἴσας ΒΓ καὶ ΒΔ, λαμβάνομεν $A\Delta < A\Gamma$.

Συγκρίνοντες νῦν τὰ δύο τρίγωνα ΑΟΔ καὶ ΑΟΓ, βλέπομεν, ὅτι ἔχουσι δύο πλευρὰς ἴσας (ΑΟ = ΑΟ καὶ ΟΔ = ΟΓ), τὴν δὲ τρίτην ἄνισον ($A\Delta < A\Gamma$)· ἄρα εἶναι καὶ $AO\Delta < AO\Gamma\cdot$ προσθέτοντες δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ ἄνισα, τὰς ἴσας γωνίας ΔΟΒ καὶ ΓΟΒ, εὑρίσκομεν $AOB < AO\Gamma + \Gamma OB\cdot$ ὅ. ἔ. δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

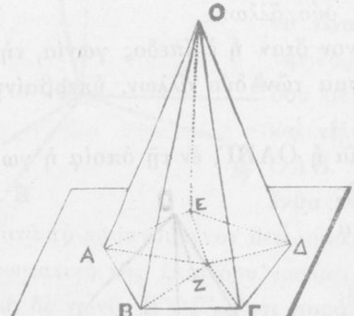
342. *Ἐν πάσῃ κυρτῇ στερεᾷ γωνίᾳ τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν.*

Ἔστω κυρτὴ στερεὰ γωνία ἡ Ο· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων αὐτῆς γωνιῶν

$$AOB + BO\Gamma + \Gamma O\Delta + \Delta OE + EOA$$

εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν.

Ἂς ἀχθῇ τυχὸν ἐπίπεδον, τέμνον πάσας τὰς ἀκμὰς τῆς στερεᾶς γωνίας (γίνεται δὲ τοῦτο, ἐὰν ἀχθῇ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ ἐγγίζῃ τὴν στερεὰν γωνίαν μόνον εἰς τὸ σημεῖον Ο καὶ ἔπειτα ἄλλο ἐπίπεδον, παράλληλον τούτου καὶ πρὸς τὸ μέρος τῶν ἀκμῶν)· ἂς τέμνῃ δ' αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε. Ἂς ληφθῇ ἔπειτα ἐντὸς τοῦ σχηματιζομένου πολυγώνου ΑΒΓΔΕ, σημεῖον οἷον δήποτε, τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐξ αὐτοῦ, εὐθεῖαι εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ.



Τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα κορυφὴν τὸ Ο, εἶναι τόσα, ὅσα εἶναι καὶ τὰ ἔχοντα κορυφὴν τὸ Ζ· διὰ τοῦτο, καὶ τὰ πρῶτα καὶ τὰ δεύτερα ἔχουσ τὸ αὐτὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν. Ἀλλ' εἰς τὸ σημεῖον Β, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, εἶναι

$$ΑΒΟ+ΟΒΓ > ΑΒΓ,$$

ἢ

$$ΑΒΟ+ΟΒΓ > ΑΒΖ+ΖΒΓ\cdot$$

τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ εἰς τὰς ἄλλας κορυφὰς τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ.

Ἄρα αἱ πρὸς τὰς βάσεις γωνίαι τῶν τὴν στερεὰν γωνίαν Ο ἀποτελούντων τριγώνων, ἔχουσιν ἄθροισμα μεγαλήτερον ἢ αἱ πρὸς τὰς βάσεις γωνίαι τῶν τὸ πολύγωνον ἀποτελούντων· ἑπομένως πρὸς ἐξίσωσιν, τὸ ἄθροισμα τῶν περὶ τὸ Ο γωνιῶν (τῶν πρώτων τριγώνων) θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν περὶ τὸ Ζ· ἀλλ' αἱ περὶ τὸ Ζ γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα τέσσαρας ὀρθάς· ἄρα αἱ περὶ τὸ Ο γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν· ὅ. ἔ. δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

343. Ἐν πάσῃ τριέδρῳ στερεᾷ γωνίᾳ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν διέδρων γωνιῶν εἶναι μεγαλήτερον μὲν δύο, μικρότερον δὲ ἓξ ὀρθῶν· καὶ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν, αὐξηθεῖσα κατὰ δύο ὀρθάς, ὑπερβαίνει τὸ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

Ἔστωσαν α, β, γ, αἱ δίεδροι γωνίαι τῆς τυχούσης τριέδρου γωνίας καὶ Α, Β, Γ, αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς παραπληρωματικῆς αὐτῇ· κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 340, εἶναι

$$α = 2^{\text{ὀρθ.}} - Α, \quad β = 2^{\text{ὀρθ.}} - Β, \quad γ = 2^{\text{ὀρθ.}} - Γ,$$

$$\text{ὅθεν} \quad α+β+γ = 6^{\text{ὀρθ.}} - (Α+Β+Γ),$$

ἐξ οὗ φαίνεται ὅτι τὸ ἄθροισμα $α+β+γ$ εἶναι μικρότερον τῶν 6 ὀρθῶν.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἀφαιρούμενον ἄθροισμα $Α+Β+Γ$ εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν (342), συνάγεται, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον $α+β+γ$ ὑπερβαίνει τὰς δύο ὀρθάς.

Ἵνα ἀποδείξωμεν τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως, παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι (341)

$$Α < Β+Γ\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ $Α = 2^{\text{ ὀρθ.}} - α, \quad Β = 2^{\text{ ὀρθ.}} - β, \quad Γ = 2^{\text{ ὀρθ.}} - γ,$

ἡ ἀνισότης γίνεται $\quad 2 - α < 2 - β + 2 - γ\cdot$

καὶ ἂν προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ ἄνισα, τὸ ἄθροισμα $α+β+γ$ καὶ ἔπειτα ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀμφοτέρων 2 ὀρθάς, εὑρίσκομεν

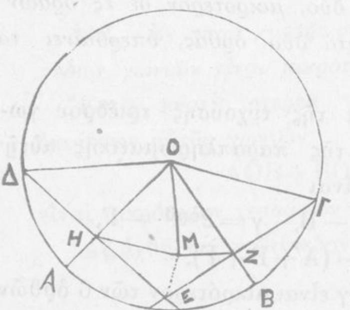
$$β+γ < α+2.$$

* ΘΕΩΡΗΜΑ

344. Ἐκ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, ὧν ἑκάστη εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν, δύναται νὰ σχηματισθῇ στερεὰ γωνία.

Ἂς τεθῶσιν αἱ τρεῖς γωνίαι εἰς ἓν ἐπίπεδον ἐφεξῆς ἀλλήλαις, ἂς τεθῇ δὲ εἰς τὸ μέσον ἡ μεγίστη (ἢ ἡ μηδεμιᾶς μικροτέρα)· ἔστωσαν δὲ αὗται αἱ ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΔΟΑ. Ἐκ τῆς κοινῆς αὐτῶν κορυφῆς Ο, ὡς κέντρου, ἂς γραφῇ τυχοῦσα περιφέρεια τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῶν γωνιῶν εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ.

Ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ, ὅπερ δὲν εἶναι μικρότερον τοῦ ΒΓ (διότι ἡ γωνία ΑΟΒ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΟΓ), ἂς ληφθῇ μέρος ἴσον τῷ ΒΓ, ἔστω τὸ Βγ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ χορδὴ Γγ, ἥτις θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΒ. Ὁμοίως, ἂς ληφθῇ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ μέρος, τὸ Αδ, ἴσον τῷ ΑΔ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ χορδὴ Δδ, ἥτις θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ. Τὸ σημεῖον δ πίπτει μεταξὺ γ καὶ Β (ἄλλως θὰ περιεῖχε τὸ τόξον ΑΒ ἀμφότερα τὰ τόξα ΑΔ καὶ ΒΓ, ἤτοι τὰ ἴσα αὐτῶν Αδ καὶ Βγ, ἑπομένως καὶ ἡ γωνία ΑΟΒ θὰ ἦτο μεγαλητέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων· ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει). Διὰ τοῦτο, αἱ χορδαὶ Γγ, Δδ θὰ τέμνωνται ἐντὸς τοῦ κύκλου, εἴς τι σημεῖον Ε. Ἂς ὑψωθῇ ἔπειτα ἐκ τοῦ Ε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, ἡ ΕΜ, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΕΖΜ ἂς



γραφῇ κύκλος μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΖΓ· ὁ κύκλος οὗτος θὰ τέμνῃ τὴν κάθετον ΕΜ εἴς τι σημεῖον Μ (διότι ΖΕ $<$ ΖΓ), καὶ ἂν ἀχθῇ ἡ ΟΜ, θὰ σχηματισθῇ τρίεδρος στερεὰ γωνία ἡ ΟΑΒΜ, ἔχουσα ἐπιπέδους γωνίας τὰς δοθείσας. Διότι τὰ τρίγωνα ΟΖΓ καὶ ΟΖΜ εἶναι ἴσα, ὡς ὀρθογώνια ἀμφότερα εἰς τὸ Ζ (308, σημ. β´) καὶ ἔχοντα τὴν ΟΖ κοινὴν καὶ ΖΓ $=$ ΖΜ· ἄρα εἶναι ἴσα, καὶ διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΖΟΜ εἶναι ἴση τῇ ΖΟΓ. Καὶ τὰ τρίγωνα ΟΗΔ καὶ ΟΗΜ εἶναι ἴσα, ὡς ὀρθογώνια ἀμφότερα εἰς τὸ Η καὶ ἔχοντα τὴν ΟΗ κοινὴν καὶ τὴν ΟΔ ἴσην τῇ ΟΜ (διότι ΟΜ $=$ ΟΓ $=$ ΟΔ)· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΑΟΜ ἰσοῦται τῇ ΑΟΔ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπειδὴ ἀμφότεραι αἱ ΖΕ καὶ ΖΜ, εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΟΒ, ἡ γωνία ΕΖΜ εἶναι ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν δίεδρον γωνίαν ΟΒ τῆς στερεᾶς γωνίας ΟΑΒΜ· τὴν γωνίαν ταύτην ΕΖΜ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, κατασκευάζοντες τὸ τρίγωνον ΕΖΜ, οὗτινος ἔχομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΜΖ (=ΓΖ) καὶ μίαν τῶν καθέτων, τὴν ΕΖ. Ὁμοίως, κατασκευάζοντες ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἔχον ὑποτείνουσαν τὴν ΗΔ καὶ μίαν πλευρὰν τὴν ΗΕ, εὑρίσκομεν τὴν ἐπίπεδον γωνίαν, ἥτις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν δίεδρον ΟΑ.

* ΘΕΩΡΗΜΑ

345. Ἐκ τριῶν δοθεισῶν διέδρων γωνιῶν, αἵτινες πληροῦσι τοὺς περιορισμοὺς τοῦ θεωρήματος 343, δύναται νὰ κατασκευασθῇ τρίεδρος στερεὰ γωνία.

Ἔστωσαν α, β, γ αἱ δοθεῖσαι δίεδροι γωνίαι.

Ἂν σχηματισθῇ τρίεδρος στερεὰ γωνία, ἔχουσα ἐπιπέδους γωνίας τὰς $2-\alpha$, $2-\beta$, $2-\gamma$, ἡ παραπληρωματικὴ αὐτῆς (340) θὰ ἔχῃ διέδρους τὰς δοθείσας α, β, γ.

Δύναται δὲ νὰ σχηματισθῇ στερεὰ γωνία, ἔχουσα ἐπιπέδους γωνίας τὰς $2-\alpha$, $2-\beta$, $2-\gamma$· διότι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν

$$(2-\alpha)+(2-\beta)+(2-\gamma) \quad \text{ἢ} \quad 6-(\alpha+\beta+\gamma)$$

εἶναι μικρότερον τῶν 4 ὀρθῶν (ἀφοῦ τὸ $\alpha+\beta+\gamma$ ὑπερβαίνει τὰς δύο ὀρθάς)· καὶ ἡ μεγαλητέρα ἐκ τῶν γωνιῶν τούτων, ἔστω τοιαύτη ἡ $2-\alpha$, εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Καὶ ὄντως ἔχομεν (343)

$$\alpha+2>\beta+\gamma\cdot$$

καὶ ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπ᾽ ἀμφοτέρων τῶν ἀνίσων τὸ $\alpha+\beta+\gamma-2$· εὑρίσκομεν

$$(2-\beta)+(2-\gamma)>2-\alpha.$$

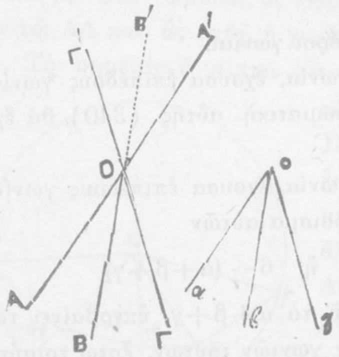
*ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ Ε΄ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΕΔΡΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

*ΘΕΩΡΗΜΑ

346. Ἐὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχωσι μίαν δίεδρον γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν ἕδρας ἴσας, θὰ ἔχωσι καὶ τὰ λοιπὰ αὐτῶν στοιχεῖα ἴσα καὶ θὰ εἶναι ἢ ἴσαι ἢ κατὰ κορυφήν.

Ἔστω ἡ δίεδρος γωνία ΟΒ ἴση τῇ διέδρῳ οβ καὶ ἡ ἐπίπεδος γωνία ΑΟΒ ἴση τῇ αοβ, ἔτι δὲ καὶ ἡ ΒΟΓ ἴση τῇ βογ.



Ἔστω ἡ ἀκμὴ οβ ἔμπροσθεν τοῦ ἐπιπέδου αογ, ὡς καὶ ἡ ΟΒ ἔμπροσθεν τοῦ ἐπιπέδου ΑΟΓ.

Ἐὰν τότε ἐφαρμοσθῇ ἡ δίεδρος γωνία οβ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΟΒ, θὰ ἐφαρμόσῃ τὸ ἐπίπεδον αοβ ἐπὶ τοῦ ΑΟΒ καὶ τὸ ἐπίπεδον βογ ἐπὶ τοῦ ΒΟΓ· ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι αοβ καὶ ΑΟΒ εἶναι ἴσαι, θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ ἀκμὴ οα ἐπὶ τῆς ΟΑ· δι' ὅμοιον λόγον θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ ἀκμὴ ογ ἐπὶ τῆς ΟΓ· ὥστε θὰ ἐφαρμόσωσιν αἱ στερεαὶ γωνίαι.

Ἐὰν δὲ ἡ μὲν ἀκμὴ οβ κεῖται ὄπισθεν τοῦ ἐπιπέδου αογ, ἡ δὲ ΟΒ ἔμπροσθεν τοῦ ΑΟΓ, ἐφαρμόζει ἡ στερεὰ γωνία οαβγ ἐπὶ τῆς ΟΑ΄Β΄Γ΄, ἥτις εἶναι κατὰ κορυφὴν τῆς ΟΑΒΓ.

*ΘΕΩΡΗΜΑ

347. Ἐὰν δύο τρίεδροι γωνίαι ἔχωσι μίαν ἕδραν ἴσην καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας διέδρους γωνίας ἴσας, θὰ ἔχωσι καὶ τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα καὶ θὰ εἶναι ἢ ἴσαι ἢ κατὰ κορυφήν.

Ἔστω ἡ ἕδρα ΑΟΓ ἴση τῇ αογ καὶ ἡ δίεδρος γωνία ΟΑ ἴση τῇ οα καὶ ἡ δίεδρος ΟΓ ἴση τῇ ογ.

῎Εστω ἡ ἀκμὴ οβ ἔμπροσθεν τοῦ ἐπιπέδου αογ, ὡς καὶ ἡ ΟΒ ἔμπροσθεν τοῦ ΑΟΓ.

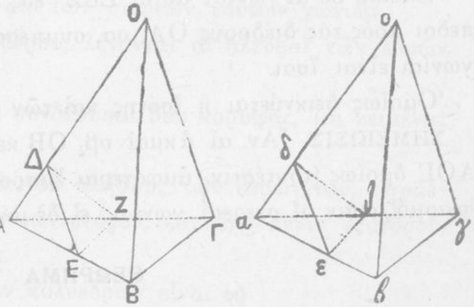
᾿Εὰν ἡ ἕδρα αογ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΟΓ, τὸ μὲν ἐπίπεδον αοβ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΑΟΒ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν διέδρων γωνιῶν οα καὶ ΟΑ, τὸ δὲ ἐπίπεδον ογβ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΟΓΒ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν διέδρων γωνιῶν ογ καὶ ΟΓ· ἑπομένως ἡ οβ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΟΒ· ἄρα ἡ στερεὰ γωνία οαβγ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΟΑΒΓ.

᾿Εὰν δὲ ἡ ἀκμὴ οβ κεῖται ὄπισθεν τοῦ ἐπιπέδου αογ (ἡ δὲ ΟΒ ἔμπροσθεν τοῦ ΑΟΓ), ἐφαρμόζει ἡ στερεὰ γωνία οαβγ ἐπὶ τῆς ΟΑ΄Β΄Γ΄, ἥτις εἶναι κατὰ κορυφὴν τῆς ΟΑΒΓ.

* ΘΕΩΡΗΜΑ

348. ᾿Εὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχωσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν, θὰ ἔχωσιν ἴσας καὶ τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας κατὰ μίαν, θὰ εἶναι δὲ ἴσαι αἱ ὑπὸ ἴσων ἑδρῶν περιεχόμεναι.

῎Εστωσαν τρίεδροι γωνίαι αἱ ΟΑΒΓ καὶ οαβγ, ἔχουσαι ΑΟΒ = αοβ, ΒΟΓ = βογ, ΓΟΑ = γοα.



῞Ας ληφθῶσιν ἐπὶ τῶν ἓξ ἀκμῶν, ἓξ ἴσα μέρη, τὰ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ καὶ οα, οβ, ογ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, καὶ αἱ αβ, βγ, γα.

Τὰ τρία ἰσοσκελῆ τρίγωνα, τὰ περὶ τὸ Ο, εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τρία ἰσοσκελῆ τρίγωνα, τὰ περὶ τὸ ο,

ἤτοι τρίγ. ΑΟΒ = τρίγ. αοβ,
τρίγ. ΒΟΓ = τρίγ. βογ,
τρίγ. ΓΟΑ = τρίγ. γοα·

διότι ἔχουσιν ἕκαστα μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην ὑπὸ πλευρῶν ἴσων.

᾿Εκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων τούτων, ἕπεται:

ΑΒ = αβ, ΒΓ = βγ, ΑΓ = αγ·

ἄρα καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ εἶναι ἴσα.

Ἂς ληφθῇ νῦν ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΟΑ, τυχὸν σημεῖον, τὸ Δ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐξ αὐτοῦ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΟΑ, κείμεναι, ἡ μὲν ΔΕ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΟΑΒ, ἡ δὲ ΔΖ ἐν τῷ ΟΑΓ. Αἱ κάθετοι αὗται θὰ συναντήσωσι τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ, διότι αἱ γωνίαι ΟΑΒ, ΟΑΓ εἶναι ὀξεῖαι, ὡς γωνίαι εἰς τὰς βάσεις τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΟΒ, ΑΟΓ. Ἂς ἀχθῇ λοιπὸν καὶ ἡ ΖΕ. Μετὰ δὲ ταῦτα, ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ἀκμῆς οα, ἡ οδ, ἴση τῇ ΟΔ, καὶ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή.

Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ καὶ αδε, εἶναι ἴσα· διότι ἔχουσι τὴν ΑΔ ἴσην τῇ αδ καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ΔΑΒ ἴσην τῇ δαβ· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῶν ἕπεται ΑΕ = αε. Ὁμοίως ἀποδεικνύονται καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΑΖ, δαζ, ἴσα καὶ ἑπομένως ΑΖ = αζ.

Καὶ τὰ τρίγωνα ΑΕΖ, αεζ εἶναι ἴσα· διότι ἔχουσιν ΑΕ = αε, ΑΖ = αζ καὶ τὰς γωνίας ΒΑΓ, βαγ ἴσας. Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν τριγώνων τούτων συνάγεται ΕΖ = εζ.

Τέλος, τὰ δύο τρίγωνα ΔΕΖ, δεζ, ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας κατὰ μίαν, εἶναι ἴσα· ἄρα γων. ΕΔΖ = γων. εδζ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι αὗται ΕΔΖ, εδζ, εἶναι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίπεδοι πρὸς τὰς διέδρους ΟΑ, οα, συμπεραίνομεν, ὅτι αἱ δίεδροι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ὁμοίως δεικνύεται ἡ ἰσότης καὶ τῶν ἄλλων διέδρων γωνιῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἂν αἱ ἀκμαὶ οβ, ΟΒ κεῖνται πρὸς τὰ ἐπίπεδα αογ, ΑΟΓ ὁμοίως (τουτέστιν, ἀμφότεραι ἔμπροσθεν ἢ ἀμφότεραι ὄπισθεν) ἐφαρμόζουσιν αἱ στερεαὶ γωνίαι· εἰ δὲ μή, εἶναι κατὰ κορυφήν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

349. Ἐὰν δύο τρίεδροι γωνίαι ἔχωσι τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας ἴσας κατὰ μίαν, θὰ ἔχωσι καὶ τὰς ἐπιπέδους ἴσας.

Ἔστωσαν δύο τρίεδροι γωνίαι, ἔχουσαι τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας ἴσας, αἱ Κ, Κ΄.

Ἐπειδὴ αἱ στερεαὶ γωνίαι Κ, Κ΄ ἔχουσι τὰς διέδρους αὐτῶν ἴσας, αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν, ἃς παριστῶμεν διὰ Π καὶ Π΄, θὰ ἔχωσι τὰς ἐπιπέδους γωνίας των ἴσας· ἄρα θὰ ἔχωσιν αἱ Π, Π΄ καὶ τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας ἴσας (348). Ἐπειδὴ δὲ αἱ στερεαὶ γωνίαι Π, Π΄ ἔχουσιν ἴσας τὰς διέδρους αὐτῶν, αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν Κ, Κ΄ θὰ ἔχωσιν ἴσας τὰς ἐπιπέδους γωνίας των· ὅ. ἔ. δ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

ΠΟΛΥΕΔΡΑ ΕΝ ΓΕΝΕΙ

ΟΡΙΣΜΟΙ

350. *Πολύεδρον* λέγεται στερεόν, πανταχόθεν ὑπὸ ἐπιπέδων περατούμενον.

Ἕδραι τοῦ πολυέδρου, λέγονται τὰ ἐπίπεδα σχήματα, ὑφ' ὧν περατοῦται.

Γωνίαι τοῦ πολυέδρου, λέγονται αἱ στερεαὶ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουσιν αἱ ἕδραι αὐτοῦ.

Κορυφαὶ δὲ αὐτοῦ αἱ κορυφαὶ τῶν στερεῶν τούτων γωνιῶν.

Πλευραὶ ἢ *ἀκμαὶ* τοῦ πολυέδρου, λέγονται αἱ πλευραὶ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ.

Διαγώνιοι δέ, αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι δύο κορυφάς, μὴ κειμένας ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας.

Τὸ πολύεδρον ὀνομάζεται, ἐκ τοῦ πλήθους τῶν ἑδρῶν του, *τετράεδρον*, ἐὰν ἔχῃ τέσσαρας ἕδρας· *πεντάεδρον*, ἐὰν ἔχῃ πέντε· *ἑξάεδρον*, ἐὰν ἔχῃ ἕξ· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τὸ ἁπλούστατον πάντων τῶν πολυέδρων εἶναι τὸ τετράεδρον· διότι, τρία ἐπίπεδα σχηματίζουσι, τὸ πολύ, στερεὰν γωνίαν, ἵνα δὲ κλεισθῇ πανταχόθεν ὁ χῶρος, χρειάζεται τουλάχιστον καὶ τέταρτον ἐπίπεδον.

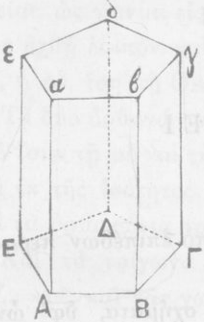
Κυρτὸν λέγεται τὸ πολύεδρον, ἐὰν ἑκάστη ἕδρα αὐτοῦ, ἐκβαλλομένη, ἀφίνῃ τὸ πολύεδρον ὁλόκληρον πρὸς τὸ ἓν μέρος αὐτῆς. Ἐν τοῖς ἑξῆς, ὁ λόγος γίνεται μόνον περὶ τῶν κυρτῶν πολυέδρων.

Ἐὰν πολύεδρον κυρτὸν τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου, ἡ τομὴ θὰ εἶναι πολύγωνον κυρτόν.

ΠΡΙΣΜΑΤΑ

351. *Πρίσμα* λέγεται τὸ στερεόν, οὗτινος δύο ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ λοιπαὶ παραλληλόγραμμα.

Ἵνα κατασκευάσωμεν πρίσμα, λαμβάνομεν τυχὸν πολύγωνον, ὥς τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ ἄγομεν ἐκ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ εὐθείας ἴσας καὶ παραλλήλους, τὰς Αα, Ββ, Γγ, Δδ, Εε, κειμένας ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ. Τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν τούτων θὰ κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, παραλλήλου τῷ ΑΒΓΔΕ (322 σημ.), καὶ τὸ στερεόν, ὅπερ περατοῦται ὑπὸ τῶν δύο ἐπιπέδων σχημάτων ΑΒΓΔΕ, αβγδε καὶ ὑπὸ τῶν τετραπλεύρων ΑΒαβ, ΒΓβγ, ΓΔγδ, ΔΕδε, ΕΑεα, θὰ εἶναι πρίσμα.

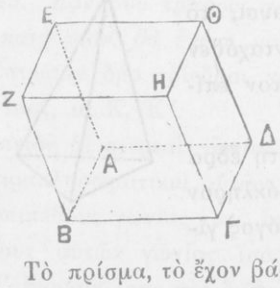


Διότι, τὸ τετράπλευρον ΑΒαβ, ὡς ἔχον δύο πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους, Αα, Ββ, εἶναι παραλληλόγραμμον· ὁμοίως καὶ τὰ ἄλλα πέριξ τετράπλευρα εἶναι παραλληλόγραμμα. Καὶ τὰ δύο πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, αβγδε εἶναι ἴσα· διότι αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμων, καὶ αἱ γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι κατὰ μίαν, ὡς σχηματιζόμεναι ὑπὸ εὐθειῶν παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων.

Βάσεις τοῦ πρίσματος λέγονται αἱ δύο ἴσαι καὶ παράλληλοι ἕδραι αὐτοῦ· *ὕψος* δὲ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ.

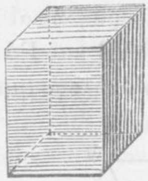
Τὸ πρίσμα λέγεται ἐκ τῆς βάσεως αὐτοῦ, *τριγωνικόν*, ἐὰν ἔχῃ βάσιν τρίγωνον· *τετραγωνικόν*, ἐὰν τετράπλευρον· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τὸ πρίσμα λέγεται *ὀρθόν*, ὅταν αἱ εὐθεῖαι, αἱ τὰς ἀντιστοιχούσας κορυφὰς τῶν βάσεων αὐτοῦ ἐπιζευγνύουσαι, (αἵτινες καὶ *πλευραὶ* ἰδίως καλοῦνται), εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις· εἰ δὲ μή, τὸ πρίσμα λέγεται *πλάγιον*.



Τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος ἑκάστη πλευρὰ ἰσοῦται προφανῶς πρὸς τὸ ὕψος αὐτοῦ· αἱ δὲ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια.

Τὸ πρίσμα, τὸ ἔχον βάσεις παραλληλόγραμμα, ἔχει πάσας τὰς ἕδρας παραλληλόγραμμα καὶ λέγεται *παραλληλεπίπεδον*· τοιοῦτον εἶναι τὸ στερεὸν ΑΗ.



Τὸ παραλληλεπίπεδον ἔχει ἓξ ἕδρας.

Ἐὰν τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθόν, ἔχῃ δὲ καὶ βάσεις ὀρθογώνια, λέγεται *ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον*.

Ἐὰν δὲ αἱ βάσεις εἶναι τετράγωνα καὶ αἱ λοιπαὶ ἕδραι ὡσαύτως, τὸ στερεὸν λέγεται *κύβος* ἢ *κανονικὸν ἑξάεδρον*.

ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

352. *Πυραμὶς* λέγεται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποίου μία ἕδρα εἶναι οἱονδήποτε πολύγωνον, αἱ δὲ λοιπαὶ εἶναι τρίγωνα, βάσεις μὲν ἔχοντα τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, κορυφὴν δὲ κοινήν, σημεῖόν τι, ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου κείμενον. Τοιοῦτον εἶναι τὸ στερεὸν ΚΑΒΓΔΕ.

Βάσις τῆς πυραμίδος, λέγεται τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, *κορυφὴ* δὲ τὸ σημεῖον Κ· *ὕψος* δέ, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἠγμένη κάθετος. Αἱ εἰς τὴν κορυφὴν συντρέχουσαι ἀκμαὶ λέγονται ἰδίως *πλευραί*· ἡ δὲ πέριξ αὐτῶν ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος, ἡ ἐκ τῶν ἑδρῶν ΑΚΒ, ΒΚΓ,. . ., ΕΚΑ, συγκειμένη λέγεται παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος.

Ἡ πυραμὶς λέγεται ἐκ τῆς βάσεως αὐτῆς, *τριγωνική*, ἐὰν ἔχῃ βάσιν τρίγωνον· *τετραγωνική*, ἐὰν τετράπλευρον· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τετράεδρον· δύναται δὲ οἱαδήποτε ἐκ τῶν ἑδρῶν αὐτῆς νὰ ληφθῇ ὡς βάσις τῆς πυραμίδος.

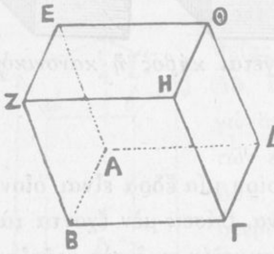
Κανονικὴ λέγεται ἡ πυραμίς, ἐὰν ἡ βάσις αὐτῆς εἶναι κανονικὸν πολύγωνον καὶ ἡ κάθετος, ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν, πίπτῃ εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς. Ἡ κάθετος αὕτη λέγεται τότε *ἄξων* τῆς κανονικῆς πυραμίδος.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

353. Παντὸς παραλληλεπιπέδου αἱ ἀπέναντι ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Ἔστω παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ. Αἱ μὲν βάσεις αὐτοῦ, ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν πρισμάτων. Δύο δὲ ἄλλαι ἀπέναντι ἕδραι, ὡς αἱ ΑΒΖΕ καὶ ΓΔΘΗ, εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι· διότι, αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ) καὶ ἡ ΑΕ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΔΘ, καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΘΗ, καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΗΓ· καὶ αἱ γωνίαι δὲ τῶν παραλληλογράμμων τούτων, αἱ ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχόμεναι, εἶναι ἴσαι· διότι, αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι· ἑπομένως τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΖΕ καὶ ΔΓΗΘ εἶναι ἴσα καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι παράλληλα (322).



ΠΟΡΙΣΜΑ

354. Ὡς βάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου δύνανται νὰ ληφθῶσι δύο οἱαιδήποτε ἀπέναντι ἕδραι αὐτοῦ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ παραλληλεπίπεδον ὁρίζεται, ὅταν δοθῶσι τρεῖς ἀκμαὶ αὐτοῦ, ἐκ μιᾶς κορυφῆς ἀρχόμεναι, ὡς λόγου χάριν, αἱ ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ. Ἐάν, τῷ ὄντι, ἐκ τοῦ ἄκρου ἑκάστης τῶν εὐθειῶν τούτων, ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ τῶν δύο ἄλλων (ἐκ τοῦ Β, ἐπίπεδον, παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΕΑΔ, ἐκ τοῦ Δ, παράλληλον τῷ ΕΑΒ, καὶ ἐκ τοῦ Ε, παράλληλον τῷ ΔΑΒ), σχηματίζεται τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΕΖΗΘ.

Ἐὰν αἱ τρεῖς δοθεῖσαι ἀκμαὶ εἶναι κάθετοι ἀνὰ δύο, τὸ προκύπτον παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθογώνιον, ἐὰν δὲ εἶναι καὶ ἴσαι, τὸ προκύπτον εἶναι κύβος. Ἐὰν δὲ εἶναι μὲν ἴσαι αἱ ἀκμαί, ἀλλ' οὐχὶ κάθετοι, προκύπτει παραλληλεπίπεδον ὑπὸ ῥόμβων περατούμενον, καὶ τὸ ὁποῖον διὰ τοῦτο λέγεται *ῥομβόεδρον*.

ΘΕΩΡΗΜΑ

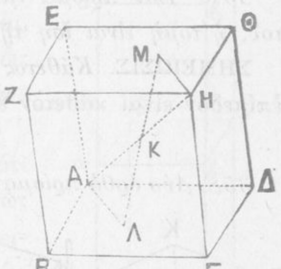
355. Τοῦ παραλληλεπιπέδου αἱ διαγώνιοι τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἔστω παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ καὶ δύο διαγώνιοι αὐτοῦ, αἱ ΑΗ καὶ ΕΓ. Τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο παραλλήλων ΑΕ καὶ ΓΗ, ἐὰν ἀχθῇ, θὰ τέμνῃ τὰς ἕδρας ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ, κατὰ τὰς εὐθείας ΑΓ καὶ ΕΗ, αἵτινες, μετὰ τῶν ἴσων καὶ παραλλήλων ΑΕ, ΗΓ, σχηματίζουσι παραλληλόγραμμον, τὸ ΑΓΗΕ· τούτου δὲ τοῦ παραλληλογράμ-

μου διαγώνιοι εἶναι αἱ ΑΗ καὶ ΓΕ· ἄρα τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Διαγώνιοι τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ εἶναι αἱ ἑξῆς τέσσαρες, ΑΗ, ΒΘ, ΓΕ, ΔΖ καὶ τέμνονται ἀνὰ δύο, ὡς ἀπεδείχθη, εἰς τὸ μέσον αὐτῶν· ἑπομένως καὶ αἱ τέσσαρες διέρχονται διὰ τοῦ μέσου Κ τῆς ΑΗ· τοῦτο δὲ εἶναι τὸ μέσον καὶ τῶν ἄλλων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Πᾶσα εὐθεῖα, διὰ τοῦ σημείου Κ ἠγμένη καὶ περατουμένη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ παραλληλεπιπέδου, τέμνεται δίχα εἰς τὸ σημεῖον Κ. Ἔστω, τῷ ὄντι, τυχοῦσα εὐθεῖα διὰ τοῦ Κ, ἡ ΚΛΜ, τέμνουσα τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ παραλληλεπιπέδου εἰς τὰ σημεῖα Λ καὶ Μ. Ἐὰν διὰ τῆς εὐθείας ταύτης καὶ διά τινος τῶν διαγωνίων, ὡς τῆς ΑΗ, ἀχθῇ ἐπίπεδον, θὰ τέμνῃ τὰς ἀπέναντι ἕδρας τοῦ παραλληλεπιπέδου κατὰ τὰς παραλλήλους ΑΛ καὶ ΗΜ, καὶ τὰ προκύπτοντα τρίγωνα ΚΛΑ καὶ ΚΗΜ, εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΚΑ ἴσην τῇ ΚΗ, τὴν γωνίαν ΛΚΑ ἴσην τῇ ΜΚΗ, καὶ τὴν γωνίαν Μ ἴσην τῇ Λ (διὰ τὰς παραλλήλους ΜΗ καὶ ΑΛ)· ἄρα εἶναι ΚΛ = ΚΜ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



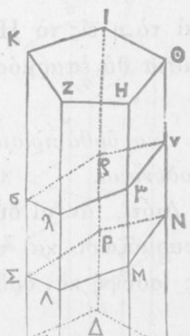
Διὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην, τὸ σημεῖον Κ λέγεται *κέντρον* τοῦ παραλληλεπιπέδου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

356. Αἱ τομαὶ πρίσματος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι πολύγωνα ἴσα.

Ἔστω τυχὸν πρίσμα τὸ ΑΙ καὶ τομαὶ αὐτοῦ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων (μὴ τεμνόντων τὰς βάσεις), αἱ ΛΜΝΡΣ καὶ λμνρσ λέγω, ὅτι τὰ πολύγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Αἱ εὐθεῖαι Λλ, Μμ,.., ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμεναι, εἶναι ἴσαι· ἄρα τὸ σχῆμα ΛΜλμ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΛΜ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ λμ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ΜΝ ἴση καὶ παράλληλος τῇ μν, καὶ ἡ ΝΡ τῇ νρ, καὶ ἡ ΡΣ τῇ ρσ, καὶ ἡ ΣΛ τῇ σλ. Καὶ ἡ γωνία



ΛΜΝ εἶναι ἴση τῇ λμν· διότι αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι· ὁμοίως ἡ ΜΝΡ εἶναι ἴση τῇ μνρ· καὶ ἡ ΡΣΑ τῇ ρσα· καὶ καθεξῆς. Τὰ δύο πολύγωνα λοιπὸν ΛΜΝΡΣ καὶ λμνρσ ἔχουσι τὰς πλευράς των ἴσας κατὰ μίαν καὶ τὰς γωνίας, τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας, ἴσας· ἄρα εἶναι ἴσα.

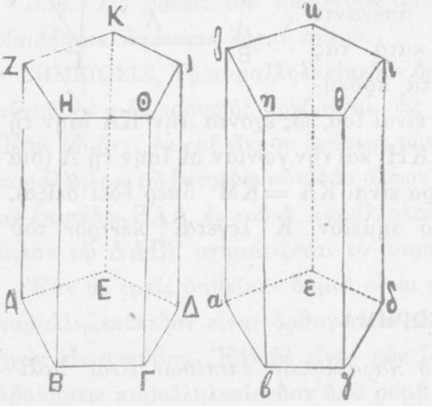
ΠΟΡΙΣΜΑ

357. Ἐὰν πρίσμα τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου, παραλλήλου τῇ βάσει αὐτοῦ, ἡ τομὴ εἶναι ἴση τῇ βάσει.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Κάθετος* **λέγεται ἡ τομὴ τοῦ πρίσματος, ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ.**

ΘΕΩΡΗΜΑ

358. Δύο ὀρθὰ πρίσματα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχωσιν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη



Ἔστωσαν ὀρθὰ πρίσματα τὰ ΑΙ καὶ αι· καὶ ἂς ὑποτεθῶσιν αἱ βάσεις αὐτῶν ΑΒΓΔΕ, αβγδε, ἴσαι, καὶ τὰ ὕψη ΑΖ, αζ ἴσα. Ἐὰν ἡ βάσις αβγδε ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΒΓΔΕ, ἡ αζ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΖ· διότι ἀμφότεραι θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔΕ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Α· ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ ἴσαι, θὰ πέσῃ τὸ σημεῖον ζ εἰς τὸ σημεῖον Ζ· ὁμοίως θὰ πέσῃ καὶ τὸ η εἰς τὸ Η καὶ τὸ θ εἰς τὸ Θ καὶ καθεξῆς· ὥστε τὰ δύο πρίσματα θὰ ἐφαρμόσωσιν.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Δύο ὀρθὰ πρίσματα, ἔχοντα βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἰσοδύναμα.

Διότι, ἂν αἱ δύο βάσεις, διῃρημέναι εἰς τὰ μέρη α, β, γ, δ, . . ., ἐφαρμόζωσι, καὶ τὰ δύο πρίσματα θὰ ἐφαρμόζωσιν, ἐὰν διαιρεθῶσιν εἰς ἰσοϋψῆ καὶ ὀρθὰ πρίσματα, ἔχοντα βάσεις τὰ μέρη α, β, γ, δ . .

ΘΕΩΡΗΜΑ

359. Δύο ὀρθὰ πρίσματα, τὴν αὐτὴν ἔχοντα βάσιν, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 224, ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, διπλασιαζομένου τοῦ ὕψους, διπλασιάζεται καὶ τὸ πρίσμα, καὶ τριπλασιαζομένου, τριπλασιάζεται καὶ καθεξῆς.

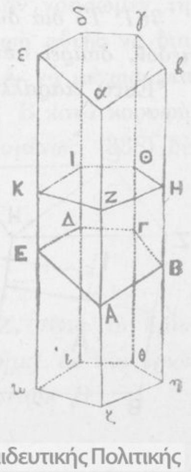
Ἔστω πρίσμα ὀρθὸν τὸ ΑΒΓΔαβγδ· ἐὰν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ Αα, Ββ, Γγ, Δδ, διπλασιασθῶσι καὶ γίνωσιν Αα', Ββ', Γγ', Δδ', τὸ πρίσμα διπλασιάζεται· διότι τὰ δύο πρίσματα, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται, τὰ ΑΒΓΔαβγδ καὶ αβγδα'β'γ'δ', εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη. Ἐὰν δὲ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ τριπλασιασθῶσι καὶ γίνωσιν Αα'', Ββ'', Γγ'', Δδ'', καὶ τὸ πρίσμα τριπλασιάζεται· διότι τὰ τρία πρίσματα, ἐξ ὧν σύγκειται, εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ πάντα ἄλλον ἀκέραιον ἀριθμόν.

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν, ὅτι τὰ ἴσας βάσεις ἔχοντα ὀρθὰ πρίσματα εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

360. Πᾶν πλάγιον πρίσμα εἶναι ἰσοδύναμον ὀρθῷ πρίσματι, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν τὴν κάθετον τομὴν τοῦ πλαγίου, ὕψος δὲ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Ἔστω πλάγιον πρίσμα τὸ ΑΒΓΔΕαβγδε καὶ κάθετος τομὴ αὐτοῦ ἡ ΖΗΘΙΚ. Ἐὰν προσεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ καὶ ληφθῇ Αζ = αΖ, Βη = βΗ, Γθ = γΘ, Δι = δΙ, Εκ = εΚ, ἀχθῶσι δὲ καὶ αἱ εὐθεῖαι ζη, ηθ, θι, ικ, κζ, προκύπτει πρίσμα (351) ὀρθόν, τὸ ΖΗΘΙΚζηθικ, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν κάθετον τομὴν τοῦ πλαγίου καὶ ὕψος τὴν Ζζ, ἴσην τῇ πλευρᾷ Αα τοῦ πλαγίου (διότι ἐλήφθη ζΑ = Ζα). Λέγω δέ, ὅτι τὸ ὀρθὸν τοῦτο πρίσμα εἶναι ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι πλαγίῳ.



Διότι, τὰ πρίσματα ταῦτα ἔχουσι κοινὸν μέρος τὸ στερεὸν ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ, τὰ δὲ μὴ κοινὰ μέρη αὐτῶν, τὰ ΑΒΓΔΕζηθικ καὶ αβγδεΖΗΘΙΚ, εἶναι ἴσα. Ἐάν, τῷ ὄντι, ἐφαρμόσῃ τὸ πολύγωνον

ΖΗΘΙΚ ἐπὶ τοῦ ἴσου του ζηθικ, ἡ Ζα θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ζΑ (διότι θὰ εἶναι ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ζηθικ καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου) καὶ ἐπειδὴ ἐλήφθη ζΑ = Ζα, θὰ πέσῃ τὸ α εἰς τὸ Α· ὁμοίως θὰ πέσῃ καὶ τὸ β εἰς τὸ Β καὶ τὸ γ εἰς τὸ Γ· καὶ καθεξῆς. Ὥστε τὰ δύο στερεὰ ΑΒΓΔΕζηθικ καὶ αβγδεΖΗΘΙΚ θὰ ἐφαρμόσωσιν.

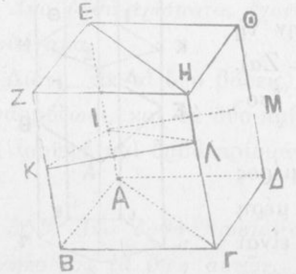
Ἄρα τὸ ὀρθὸν πρίσμα καὶ τὸ δοθὲν πλάγιον ἐφαρμόζουσιν, ὅταν διαιρεθῶσιν εἰς μέρη· ἤτοι εἶναι ἰσοδύναμα.

*ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀποδείξει ὑπετέθη, ὅτι δύναται νὰ ἀχθῇ κάθετος τομή, διαιροῦσα τὸ δοθὲν πρίσμα εἰς δύο μέρη καὶ μὴ τέμνουσα τὰς βάσεις αὐτοῦ· τοῦτο γίνεται πάντοτε, ὅταν τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς Αα τοῦ πρίσματος, ὑπερβαίνῃ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ληφθῇ δὲ καὶ τὸ Ζ εἰς τὸ μέσον τῆς Αα· διότι αἱ εὐθεῖαι ΖΗ, ΖΘ, ΖΙ, ΖΚ, εἶναι τὰ ὕψη τῶν παραλληλογράμμων ΑαΒβ, ΑαΓγ, ΑαΔδ, ΑαΕε· ταῦτα δὲ τὰ ὕψη πίπτουσι τότε ἐντὸς τῶν παραλληλογράμμων· ὥστε ἡ τομὴ ΖΗΘΙΚ κεῖται τότε ὅλη ἐντὸς τοῦ πρίσματος. Διαιροῦντες ὅμως τὴν βάσιν τοῦ πρίσματος εἰς μέρη εὐθύγραμμα, ἱκανῶς μικρά, δυνάμεθα νὰ κατορθώσωμεν, ὥστε τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς Αα νὰ ὑπερβαίνῃ πᾶσαν εὐθεῖαν, κειμένην ἐντὸς ἑκάστου τῶν μερῶν τούτων. Ἐὰν τότε διαιρέσωμεν καὶ τὸ πρίσμα εἰς μέρη ἰσάριθμα, ἔχοντα βάσεις τὰ μέρη τῆς βάσεώς του, πλευρὰς δὲ παραλλήλους τῇ Αα καὶ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ ἑκάστου τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα, φθάνομεν εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.

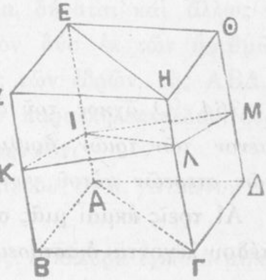
ΘΕΩΡΗΜΑ

361. Τὸ διὰ δύο ἀπέναντι πλευρῶν παραλληλεπιπέδου ἀγόμενον ἐπίπεδον, διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο τριγωνικὰ πρίσματα ἴσα ἢ ἰσοδύναμα.

Ἔστω παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ· διὰ τῶν δύο ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρῶν ΑΕ καὶ ΗΓ (αἵτινες, ὡς παράλληλοι τῇ ΒΖ, εἶναι καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι), ἂς ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ΑΕΗΓ ὅπερ διαιρεῖ τὸ παραλληλεπίπεδον εἰς τὰ δύο στερεὰ ΑΒΓΕΖΗ καὶ ΑΓΔΕΗΘ. Ἀμφότερα τὰ στερεὰ ταῦτα εἶναι πρίσματα· διότι αἱ εὐθεῖαι ΒΖ, ΑΕ, ΓΗ, ΔΘ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (ὡς πλευραὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου).



Καὶ ἂν μὲν τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθόν, τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα, εἰς ἃ διηρέθη, εἶναι ἴσα· διότι εἶναι ὀρθὰ καὶ ἔχουσι βάσεις ἴσας, ΑΒΓ, ΑΓΔ, καὶ ὕψη ἴσα, τὸ ΑΕ. Ἂν δὲ τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι πλάγιον, καὶ τὰ πρίσματα εἶναι ἐπίσης πλάγια· καὶ δὲν δύνανται μὲν τότε, ἐν γένει, νὰ ἐφαρμόσωσιν, ὡς παρακατιόντες θὰ ἀποδείξωμεν, εἶναι ὅμως ἰσοδύναμα· διότι, ἐὰν ἀχθῇ ἐπίπεδον, κάθετον ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ, ὡς τὸ ΙΚΛΜ, τὸ μὲν τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΕΖΗ εἶναι (360) ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ πρίσματι, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν ΙΚΛ καὶ ὕψος τὴν ΑΕ· τὸ δὲ ΑΓΔΕΗΘ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ πρίσματι, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν ΙΛΜ καὶ ὕψος τὴν ΑΕ· ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΙΚΛ, ΙΛΜ εἶναι ἴσα, διότι τὸ σχῆμα ΙΚΛΜ εἶναι παραλληλόγραμμον (ἡ ΙΚ εἶναι παράλληλος τῇ ΛΜ, ἐπειδὴ εἶναι τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τοῦ ΙΚΛΜ· ὁμοίως καὶ ἡ ΙΜ τῇ ΛΚ)· ὥστε τὰ δύο εἰρημένα ὀρθὰ πρίσματα εἶναι ἴσα, ἑπομένως καὶ τὰ πρὸς αὐτὰ ἰσοδύναμα τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΓΕΖΗ, ΑΓΔΕΗΘ, εἶναι ἰσοδύναμα· διότι ἀμφότερα προκύπτουσιν ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὀρθοῦ πρίσματος, διαιρεθέντος εἰς μέρη.



*Ὅτι δὲ τὰ δύο τριγωνικὰ πλάγια πρίσματα, εἰς τὰ ὁποῖα διηρέθη τὸ παραλληλεπίπεδον, δὲν δύνανται ἐν γένει νὰ ἐφαρμόσωσιν, ἀποδεικνύομεν, παρατηροῦντες ὅτι ἡ ἕδρα ΘΑ εἶναι ἴση τῇ ΒΗ· ἐπίσης, ἡ ΘΓ τῇ ΒΕ καὶ ἡ ΘΕΗ τῇ ΒΓΑ· αἱ στερεαὶ λοιπὸν γωνίαι Θ καὶ Β ἔχουσι τὰς ἕδρας των ἴσας κατὰ μίαν· ἀλλ' ἂν νοήσωμεν τὴν στερεὰν γωνίαν Β κινουμένην οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ αὐτῆς νὰ διατρέξῃ τὴν διαγώνιον ΒΘ (αἱ δὲ ἀκμαὶ ΒΓ, ΒΖ, ΒΑ νὰ μένωσι παράλληλοι πρὸς τὰς ἀρχικὰς θέσεις των), θὰ γίνῃ ἡ Β κατὰ κορυφὴν τῆς Θ· εἶναι λοιπὸν κατὰ κορυφὴν γωνίαι καὶ ἑπομένως (338) δὲν ἐφαρμόζουσιν ἐν γένει.

ΠΟΡΙΣΜΑ

362. Πᾶν τριγωνικὸν πρίσμα, ὡς τὸ ΒΑΓΗΕΖ, εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου, ὅπερ κατασκευάζεται (354, σημ.) ἐκ τῶν τριῶν ἀκμῶν ΒΑ, ΒΓ, ΒΖ μιᾶς τῶν στερεῶν αὐτοῦ γωνιῶν Β.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ

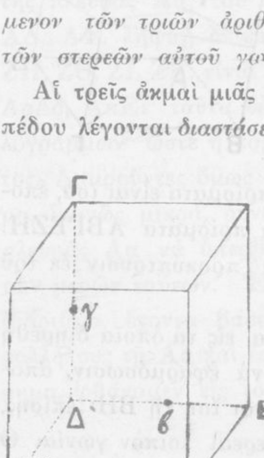
363. Ὡς μονὰς τῶν στερεῶν λαμβάνεται ὁ κύβος, ὁ ἔχων πλευρὰν τὴν μονάδα τοῦ μήκους.

Ὁ ἐκ τῆς καταμετρήσεως στερεοῦ προκύπτων ἀριθμός, ὁ τὴν ἔκτασιν αὐτοῦ ἐκφράζων, ἤτοι ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὸν ῥηθέντα κύβον, λέγεται *ὄγκος* αὐτοῦ (178).

ΘΕΩΡΗΜΑ

364. Ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἀριθμῶν, οἵτινες μετροῦσι τὰς τρεῖς ἀκμὰς μιᾶς τῶν στερεῶν αὐτοῦ γωνιῶν.

Αἱ τρεῖς ἀκμαὶ μιᾶς στερεᾶς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου λέγονται *διαστάσεις* αὐτοῦ (ἡ μὲν *μῆκος*, ἡ δὲ *πλάτος*, ἡ δὲ *ὕψος*).



Ἔστω ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒΓΔ καὶ αἱ διαστάσεις αὐτοῦ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, μετρηθεῖσαι μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους, ἂς ἔχωσι τὰ μήκη α, β, γ. Ἐὰν ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΔΓ (ἢ ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς αὐτῆς) ἡ Δγ, ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους καὶ κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΔΑ, ΔΒ, Δγ, θὰ ἔχῃ καὶ αὐτὸ τὴν βάσιν ΑΔΒ τοῦ δοθέντος. Ἐντεῦθεν ἕπεται, κατὰ τὸ ἐδάφιον 359:

$$\frac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}{(\mathrm{AB}\gamma\Delta)}=\frac{\gamma}{1}.$$

Ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ΔΒ ληφθῇ ἡ Δβ, ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους καὶ κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΔΑ, Δβ, Δγ, τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΔΑΒγ καὶ ΔΑβγ θὰ ἔχωσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΔΑγ, ἄρα θὰ εἶναι ὡς τὰ ὕψη των ΔΒ καὶ Δβ, τουτέστιν

$$\frac{(\mathrm{AB}\gamma\Delta)}{(\mathrm{A}\beta\gamma\Delta)}=\frac{\beta}{1}.$$

Ἐὰν δὲ τέλος ληφθῇ καὶ ἐπὶ τῆς ΔΑ ἡ Δα, ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους καὶ κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον ἐπὶ τῶν ἀκμῶν Δα, Δβ, Δγ, τοῦτο θὰ εἶναι ἡ μονὰς τῶν στερεῶν καὶ θὰ ἔχῃ μὲ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑβγΔ τὴν αὐτὴν βάσιν Δβγ· ἄρα θὰ εἶναι

$$\frac{(\text{Α}\beta\gamma\Delta)}{(\alpha\beta\gamma\Delta)} = \frac{\alpha}{1}.$$

πολλαπλασιάζοντες δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη καὶ ἐξαλείφοντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας, εὑρίσκομεν

$$\text{ὄγκος ΑΒΓΔ} = \alpha . \beta . \gamma .$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα δύναται καὶ ἄλλως νὰ ἐκφρασθῇ. Ἐπειδή, δηλονότι, τὸ γινόμενον δύο ἐκ τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, οἷον τὸ α . β, εἶναι τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς τῶν ἑδρῶν, τῆς ΑΒΔ, ὁ δὲ τρίτος γ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ὅταν ἡ ἕδρα αὕτη ληφθῇ ὡς βάσις, συμπεραίνομεν, ὅτι

ὁ ὄγκος παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

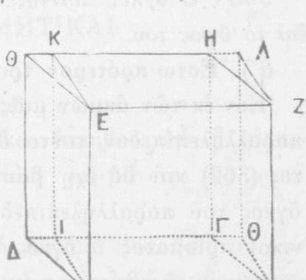
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ ὄγκος τοῦ κύβου, οὗτινος ἡ πλευρὰ ἔχει τὸ μῆκος α, εἶναι α . α . α, ἤτοι α^3· διὰ τοῦτο, ἡ τρίτη δύναμις ἀριθμοῦ λέγεται *κύβος* αὐτοῦ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

365. Ὁ ὄγκος παντὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

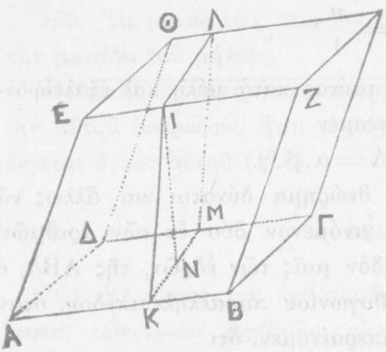
Διὰ τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ἀπεδείχθη τὸ θεώρημα· μένει λοιπὸν νὰ ἀποδειχθῇ καὶ διὰ τὰ μὴ ὀρθογώνια.

Ἔστω πρότερον, ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ, ἔχον βάσιν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ.



Ἐὰν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ μετασχηματισθῇ εἰς ὀρθογώνιον, τὸ ΑΙΘΒ, τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ παραλληλεπιπέδῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΘΙ καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ (358, πόρισμα)· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον· ἄρα ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι (ΑΒΘΙ) . (ΑΕ) ἢ καὶ (ΑΒΓΔ) . (ΑΕ), οὗτος δὲ εἶναι καὶ ὁ ὄγκος τοῦ δοθέντος παραλληλεπιπέδου ΑΗ.

Ἔστω νῦν πλάγιον παραλληλεπίπεδον, τὸ ΑΗ· καὶ κάθετος τομὴ αὐτοῦ ἡ ΙΚΛΜ, ἥτις θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον (315). Τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ παραλληλεπιπέδῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν ΙΚΛΜ καὶ ὕψος τὴν ΑΒ· τὸ ὀρθὸν δὲ τοῦτο παραλληλεπίπεδον ἔχει ὄγκον (ΙΚΛΜ).(ΑΒ)· ἄρα καὶ τὸ δοθὲν τὸν αὐτὸν ἔχει ὄγκον.



Ἀλλὰ τοῦ παραλληλογράμμου ΙΚΛΜ βάσις μὲν εἶναι ἡ ΚΜ (κάθετος ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΓΔ), ὕψος δὲ ἡ ἐκ τοῦ Ι ἐπὶ τὴν ΚΜ ἀγομένη κάθετος ΙΝ, ἥτις θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ (334) καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ· ἐπομένως ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: (ΑΒ).(ΚΜ).(ΙΝ). Καὶ ἐπειδὴ (ΑΒ).(ΚΜ) εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΒΓΔ, ἕπεται, ὅτι ὁ ὄγκος εἶναι (ΑΒΓΔ).(ΙΝ).

Ἤτοι, πάλιν, τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

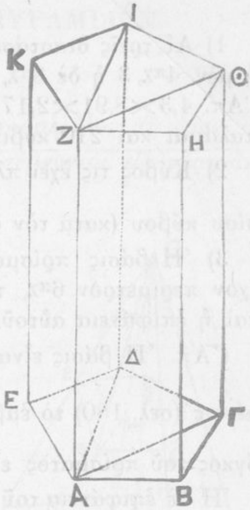
ΘΕΩΡΗΜΑ

366. Ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος εἶναι γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

α΄) Ἔστω πρότερον τριγωνικὸν πρίσμα, ἔχον βάσιν β καὶ ὕψος υ. Ἐὰν ἐκ τῶν ἀκμῶν μιᾶς ἐκ τῶν στερεῶν γωνιῶν του κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον, τοῦτο θὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος (362) καὶ θὰ ἔχῃ βάσιν διπλασίαν 2β καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ υ. Ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου τούτου θὰ εἶναι 2β.υ, ἄρα τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ὁ ὄγκος θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ, τουτέστι β.υ· ἤτοι τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

β΄) Ἔστω νῦν πολυγωνικὸν πρίσμα τὸ ΑΙ.

Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς Α διαιρεθῇ ἡ βάσις αὐτοῦ εἰς τρίγωνα, ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ, καὶ ἀχθῶσι τὰ ἐπίπεδα ΖΑΓ, ΖΑΔ, διαιροῦσι τὸ πρίσμα εἰς τριγωνικὰ πρίσματα, ἔχοντα βάσεις τὰ τρίγωνα εἰς ἃ διῃρέθη



ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ τοῦ πρίσματος καὶ ὕψος τὸ τοῦ πρίσματος, ὅπερ ὕψος ἔστω υ.

Ὁ ὄγκος τῶν πρισμάτων τούτων εἶναι

$$(\text{ΑΒΓ}).\upsilon, \quad (\text{ΑΓΔ}).\upsilon, \quad (\text{ΑΔΕ}).\upsilon\cdot$$

ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ δοθέντος πολυγωνικοῦ πρίσματος εἶναι

$$(\text{ΑΒΓ}).\upsilon+(\text{ΑΓΔ}).\upsilon+(\text{ΑΔΕ}).\upsilon,$$

$$\text{ἢ} \quad (\text{ΑΒΓ}+\text{ΑΓΔ}+\text{ΑΔΕ}).\upsilon,$$

$$\text{ἢ} \quad (\text{ΑΒΓΔΕ}).\upsilon\cdot$$

τουτέστι γινόμενον τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ ἐπὶ τὸ ὕψος υ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

367. Τὰ πρίσματα, τὰ ἔχοντα βάσεις ἴσας, ἢ ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἰσοδύναμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

368. Τὰ ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους βάσεις ἔχοντα πρίσματα, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη των, καὶ τὰ ἰσοϋψῆ εἶναι ὡς αἱ βάσεις των.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Κυβικὸς πῆχυς ἢ *κυβικὸν μέτρον* λέγεται ὁ κύβος, οὗ ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ ἕνα πῆχυν. Ὁ κύβος δὲ οὗτος λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν στερεῶν (363).

Κυβικὴ παλάμη λέγεται ὁ κύβος, οὗ ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ μίαν παλάμην· εἶναι δὲ ἡ κυβικὴ παλάμη τὸ χιλιοστὸν τοῦ κυβικοῦ πήχεως (364).

Κυβικὸς δάκτυλος λέγεται ὁ κύβος, ὁ ἔχων πλευρὰν ἕνα δάκτυλον εἶναι δὲ ὁ κυβικὸς δάκτυλος τὸ ἑκατομμυριοστὸν τοῦ κυβικοῦ πήχεως (364).

ΖΗΤΗΜΑΤΑ

1) Αἱ τρεῖς διαστάσεις ὀρθογωνίου τινὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι, ἡ μὲν 4πχ, 3 ἡ δὲ 8πχ, 91, ἡ δὲ 2πχ,17· ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ; (Ἀπ. $4{,}3\times 8{,}91\times 2{,}17$ ἢ 83κπ,13921, ἤτοι 83 κυβ. πήχεις, 139 κυβ. παλάμαι καὶ 210 κυβικοὶ δάκτυλοι).

2) Κύβος τις ἔχει πλευρὰν 5 πήχ.· ποία εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ διπλασίου κύβου (κατὰ τὸν ὄγκον); (Ἀπ. $5\sqrt[3]{2}$, ἤτοι 6,2995. . .).

3) Ἡ βάσις πρίσματός τινος ὀρθοῦ εἶναι τρίγωνον ἰσόπλευρον, ἔχον περίμετρον 6πχ, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶναι 5πχ· ζητεῖται ὁ ὄγκος καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

(Ἀπ. Ἡ βάσις εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχον πλευρὰν 2πχ, ἐπομένως (σελ. 180) τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς εἶναι $\frac{1}{4}(2)^2.\sqrt{3}$ ἢ $\sqrt{3}$· ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος εἶναι $5\sqrt{3}$, ἢ 8κπ, 66025. . .

Ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος σύγκειται ἐκ τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων (ὧν τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $2\sqrt{3}$) καὶ ἐκ τριῶν ἴσων ὀρθογωνίων, ἐχόντων βάσιν 2 καὶ ὕψος 5· ἄρα ὅλη εἶναι $30+2\sqrt{3}$, ἤτοι 33τπ, 4641. . .).

4) Δεξαμενὴ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ ἡ μὲν ἄνω βάσις αὐτῆς εἶναι τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ εἶναι 10πχ, 2, τὸ δὲ βάθος αὐτῆς εἶναι 1πχ,8· πόσον ὕδωρ δύναται νὰ χωρέσῃ;

(Ἐὰν νοηθῇ ἡ δεξαμενὴ πλήρης ὕδατος, ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος θὰ εἶναι $10{,}2\times 10{,}2\times 1{,}8$, ἤτοι 187κπ, 272κπλ.

Ἐὰν ζητῆται τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, πρέπει νὰ εἰξεύρωμεν, ὅτι μία κυβικὴ παλάμη ὕδατος τουτέστι μία λίτρα αὐτοῦ (ἀπεσταγμένου καὶ εἰς θερμοκρασίαν 4°) ἔχει βάρος 312 ½ δράμια· τὸ τὴν δεξαμενὴν πληροῦν ὕδωρ εἶναι 187272 λίτραι, ὥστε τὸ βάρος αὐτοῦ εἶναι $\frac{187272\times 312\frac{1}{2}}{400}$ ὀκάδες, τουτέστιν 146306 όκ., 100δράμ.).

5) Πόσα κυβικὰ μέτρα ἀέρος χωρεῖ δωμάτιόν τι, οὗτινος τὸ ὕψος εἶναι 6πχ, τὸ δὲ πάτωμα ἔχει μῆκος 5πχ, 8 καὶ πλάτος 3πχ, 2; καὶ πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἀέρος τούτου;

(Ἀπ. $6\times 5{,}8\times 3{,}2$, ἤτοι 111κμ, 36.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ βάρος, πρέπει νὰ ἐνθυμώμεθα, ὅτι ὁ ἀὴρ εἶναι 770 φορὰς ἐλαφρότερος τοῦ ὕδατος· ἄν, ἀντὶ ἀέρος, ἦτο ὕδωρ, θὰ εἶχε βάρος 111360 χιλιόγραμμα (διότι ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι 111360 κυβ. παλάμαι, ἤτοι λίτραι)· ἄρα ὁ ἀὴρ θὰ ἔχῃ βάρος $\frac{111360}{770}$ χιλιόγραμμα, ἤτοι 144 χιλιόγρ. 623 γραμμάρ.).

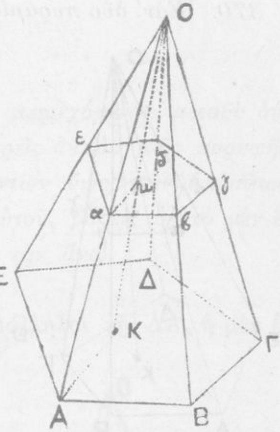
6) Κύβος τις ἔχει ὄγκον 80κ.μ., πόσα τετ. μέτρ. εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του;

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΥΡΑΜΙΔΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

369. Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς, αἱ πλευραὶ τῆς πυραμίδος καὶ τὸ ὕψος τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα, καὶ ἡ τομὴ εἶναι ὁμοία τῇ βάσει.

Ἔστω πυραμὶς ἡ ΟΑΒΓΔΕ, καὶ τομὴ αὐτῆς παράλληλος τῇ βάσει, ἡ αβγδε, ὕψος δὲ ἡ ΟΚ.



Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ αβ, ὡς τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓΔΕ, αβγδε ὑπὸ τοῦ ΟΑΒ, εἶναι παράλληλοι· δι' ὅμοιον λόγον εἶναι καὶ ἡ βγ παράλληλος τῇ ΒΓ, καὶ ἡ γδ τῇ ΓΔ, καὶ ἡ δε τῇ ΔΕ, καὶ ἡ εα τῇ ΕΑ· ἔτι δὲ καὶ ἡ ακ τῇ ΑΚ. Διὰ τὰς παραλλήλους ταύτας, τὸ ἐφ' ἑκάστης ἕδρας σχηματιζόμενον τρίγωνον εἶναι ὅμοιον αὐτῇ, ἤτοι, τὸ Οαβ εἶναι ὅμοιον τῷ ΟΑΒ, τὸ Οβγ τῷ ΟΒΓ καὶ καθεξῆς.

Ἐκ τῶν ὁμοίων δὲ τούτων τριγώνων συνάγεται ἡ ἰσότης πάντων τῶν λόγων

$$\frac{\mathrm{O}\alpha}{\mathrm{OA}},\ \frac{\mathrm{O}\beta}{\mathrm{OB}},\ \frac{\mathrm{O}\gamma}{\mathrm{O\Gamma}},\ \frac{\mathrm{O}\delta}{\mathrm{O\Delta}},\ \frac{\mathrm{O}\varepsilon}{\mathrm{OE}},$$

$$\frac{\alpha\beta}{\mathrm{AB}},\ \frac{\beta\gamma}{\mathrm{B\Gamma}},\ \frac{\gamma\delta}{\mathrm{\Gamma\Delta}},\ \frac{\delta\varepsilon}{\mathrm{\Delta E}},\ \frac{\varepsilon\alpha}{\mathrm{EA}}$$

ὅθεν βλέπομεν ὅτι αἱ πλευραὶ τῆς πυραμίδος διηρέθησαν εἰς μέρη ἀνάλογα.

Καὶ ἡ τομὴ αβγδε εἶναι ὁμοία τῇ βάσει ΑΒΓΔΕ· τῷ ὄντι, ἡ γωνία α εἶναι ἴση τῇ Α· διότι σχηματίζονται ὑπὸ πλευρῶν παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων· καὶ ἡ β εἶναι ἴση τῇ Β, δι' ὅμοιον λόγον· καὶ ἡ γ ἴση τῇ Γ, καὶ καθεξῆς· ἔχουσι λοιπὸν τὰ δύο πολύγωνα αβγδε καὶ ΑΒΓΔΕ τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν· ἔχουσι δέ, ὡς ἀνωτέρω ἀπεδείχθη, καὶ τὰς ἀντιστοιχούσας πλευράς των ἀναλόγους· ἄρα εἶναι ὅμοια.

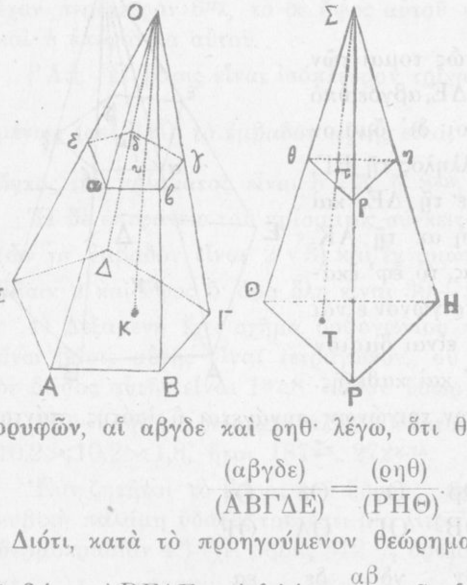
Καὶ τὸ ὕψος ΟΚ τῆς πυραμίδος τέμνεται εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, εἰς ὃν καὶ αἱ πλευραί· διότι ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΑΚ, Οακ, συνάγεται

$$\frac{\text{Οα}}{\text{ΟΑ}}=\frac{\text{Οκ}}{\text{ΟΚ}}=\frac{\text{ακ}}{\text{ΑΚ}}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ πᾶσα εὐθεῖα ἐκ τῆς κορυφῆς εἰς τὴν βάσιν ἠγμένη, τέμνεται εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

370. *Ἐὰν δύο πυραμίδες ἰσοϋψεῖς τμηθῶσιν ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν καὶ ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν κορυφῶν, αἱ τομαὶ θὰ εἶναι ἀνάλογοι τῶν βάσεων.*



Ἔστωσαν πυραμίδες ἰσοϋψεῖς, αἱ ΟΑΒΓΔΕ καὶ ΣΡΗΘ, ἔχουσαι ὕψη τὰ ΟΚ καὶ ΣΤ, καὶ τομαὶ αὐτῶν παράλληλοι πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τῶν κορυφῶν, αἱ αβγδε καὶ ρηθ· λέγω, ὅτι θὰ εἶναι

$$\frac{(\text{αβγδε})}{(\text{ΑΒΓΔΕ})}=\frac{(\text{ρηθ})}{(\text{ΡΗΘ})}.$$

Διότι, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἡ τομὴ αβγδε εἶναι ὁμοία τῇ βάσει ΑΒΓΔΕ καὶ ὁ λόγος $\frac{\text{αβ}}{\text{ΑΒ}}$ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ $\left(\frac{\text{Οκ}}{\text{ΟΚ}}\right)$· ἄρα εἶναι (245)

$$\frac{(\text{αβγδε})}{(\text{ΑΒΓΔΕ})}=\frac{(\text{αβ})^2}{(\text{ΑΒ})^2}=\frac{(\text{Οκ})^2}{(\text{ΟΚ})^2}.$$

Ἀλλὰ καὶ ἐν τῇ πυραμίδι ΣΡΗΘ εἶναι, δι' ὅμοιον λόγον,

$$\frac{(\text{ρηθ})}{(\text{ΡΗΘ})}=\frac{(\text{Στ})^2}{(\text{ΣΤ})^2}.$$

ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη ΣΤ=ΟΚ καὶ Στ=Οκ, ἕπεται ἡ ἰσότης

$$\frac{(\text{αβγδε})}{(\text{ΑΒΓΔΕ})}=\frac{(\text{ρηθ})}{(\text{ΡΗΘ})}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

371. Ἐὰν δύο πυραμίδες ἔχωσιν ἴσα ὕψη καὶ βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους, αἱ τομαὶ αὐτῶν, αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τῶν κορυφῶν, θὰ εἶναι ἐπίσης ἴσαι ἢ ἰσοδύναμοι.

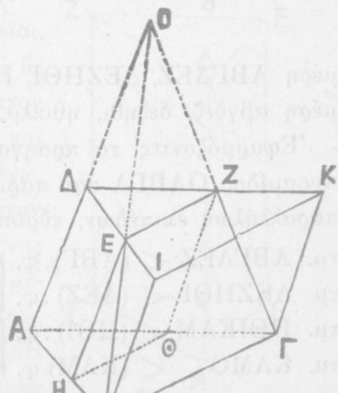
Διότι, ἂν εἶναι (ΑΒΓΔΕ) = (ΡΗΘ), θὰ εἶναι καὶ (αβγδε) = (ρηθ).

ΘΕΩΡΗΜΑ

372. Πᾶν τμῆμα τριγωνικῆς πυραμίδος περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, ἅτινα τέμνουσι τὰς τρεῖς ἀκμὰς μιᾶς κορυφῆς, περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο πρισμάτων, ἐχόντων ὕψος τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο παραλλήλων τριγωνικῶν βάσεων αὐτοῦ, βάσεις δέ, τὸ μὲν ἓν τὴν κάτω βάσιν τοῦ τμήματος, τὸ δὲ ἄλλο τὴν ἄνω.

Ἔστω τμῆμα τοιοῦτο τὸ ΑΒΓΔΕΖ.

Ἂν ἐκ τῶν κορυφῶν Ε, Ζ, ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΔΑ, ἡ μὲν ἐκ τοῦ Ε, ὡς κειμένη ἐν τῷ τραπεζίῳ ΔΕΒΑ, θὰ συναντήσῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Η, ἡ δὲ ἐκ τοῦ Ζ, ὡς κειμένη ἐν τῷ τραπεζίῳ ΔΖΓΑ, θὰ συναντήσῃ τὴν ΑΓ εἴς τι σημεῖον Θ· θὰ εἶναι δὲ ΕΗ = ΔΑ καὶ ΖΘ = ΔΑ· διότι τὰ σχήματα ΕΔΑΗ καὶ ΖΔΑΘ εἶναι παραλληλόγραμμα· ἑπομένως, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, ΔΑ, ΕΗ ΖΘ, αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ σχήματος ΔΕΖ ἠγμέναι, εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι· ἄρα τὸ στερεὸν ΔΕΖΑΗΘ εἶναι (351) πρίσμα. Τὸ πρίσμα τοῦτο εἶναι, προδήλως, μικρότερον τοῦ τμήματος ΑΒΓΔΕΖ καὶ ἔχει βάσιν τὴν ΔΕΖ καὶ ὕψος τὸ τοῦ τμήματος.

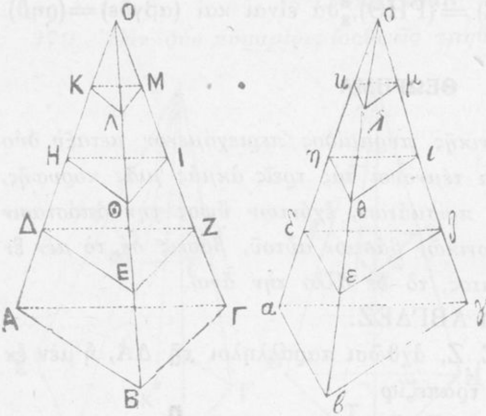


Ἂν δὲ πάλιν, ἐκ τῶν κορυφῶν Β, Γ, ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΔΑ καὶ προσεκβληθῶσιν αἱ ΔΕ, ΔΖ, σχηματίζεται τὸ στερεὸν ΑΒΓΔΙΚ, ὅπερ ἀποδεικνύεται ὁμοίως, ὅτι εἶναι πρίσμα· εἶναι δὲ τὸ πρίσμα τοῦτο μεγαλήτερον τοῦ τμήματος ΑΒΓΔΕΖ καὶ ἔχει βάσιν τὴν ΑΒΓ καὶ ὕψος τὸ ὕψος τοῦ τμήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

373. Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες, ἔχουσαι βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἔστωσαν δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ΟΑΒΓ, οαβγ, ἔχουσαι τὰς βάσεις αὐτῶν ΑΒΓ, αβγ, ἴσας, ἢ ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα· λέγω, ὅτι αἱ πυραμίδες αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι.



Ἂς τεθῶσιν αἱ βάσεις τῶν δύο πυραμίδων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καί, ἀφοῦ διαιρεθῇ τὸ ὕψος τῆς μιᾶς εἰς ἴσα μέρη, ἃς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως, ἐπίπεδα παράλληλα τῷ ἐπιπέδῳ τῶν βάσεων. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα διαιροῦσι τὰς πυραμίδας εἰς μέρη, τὴν μὲν ΟΑΒΓ, εἰς τὰ μέρη ΑΒΓΔΕΖ, ΔΕΖΗΘΙ, ΗΘΙΚΛΜ, ΚΛΜΟ, τὴν δὲ οαβγ, εἰς τὰ μέρη αβγδεζ, δεζηθι, ηθικλμ, κλμο.

Ἐφαρμόζοντες τὸ προηγούμενον θεώρημα εἰς τὰ τμήματα τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓΔ καὶ παριστῶντες διὰ τοῦ φ τὴν ἀπόστασιν τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, εὑρίσκομεν τὰς ἀνισότητας

$$\left.\begin{array}{l} \text{τμ. } ΑΒΓΔΕΖ < (ΑΒΓ)\,.\,φ, \\ \text{τμ. } ΔΕΖΗΘΙ < (ΔΕΖ)\,.\,φ, \\ \text{τμ. } ΗΘΙΚΛΜ < (ΗΘΙ)\,.\,φ, \\ \text{τμ. } ΚΛΜΟ < (ΚΛΜ)\,.\,φ, \end{array}\right\} \text{ἀλλὰ καὶ } \left|\begin{array}{l} \text{τμ. } ΑΒΓΔΕΖ > (ΔΕΖ)\,.\,φ, \\ \text{τμ. } ΔΕΖΗΘΙ > (ΗΘΙ)\,.\,φ, \\ \text{τμ. } ΗΘΙΚΛΜ > (ΚΛΜ)\,.\,φ, \\ \text{τμ. } ΚΛΜΟ > 0, \end{array}\right.$$

ἐξ ὧν, προστιθεμένων κατὰ μέλη, προκύπτει, ὅτι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο ἀθροισμάτων

$$(ΑΒΓ + ΔΕΖ + ΗΘΙ + ΚΛΜ)\,.\,φ$$

$$\text{καὶ} \qquad (ΔΕΖ + ΗΘΙ + ΚΛΜ)\,.\,φ. \qquad (\vartheta)$$

Ὁμοίως δεικνύομεν, ὅτι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος οαβγ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο ἀθροισμάτων

$$(αβγ + δεζ + ηθι + κλμ)\,.\,φ$$

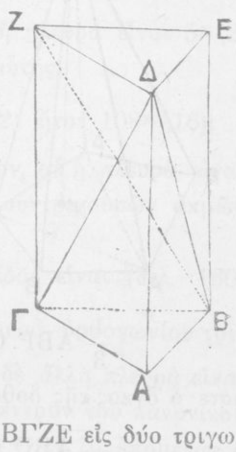
$$\text{καὶ} \qquad (δεζ + ηθι + κλμ)\,.\,φ.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι αβγ = ΑΒΓ καὶ (κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ θεωρήματος 370) δεζ = ΔΕΖ, ηθι = ΗΘΙ, κλμ = ΚΛΜ, συνάγεται, ὅτι οἱ ὄγκοι τῶν δύο πυραμίδων περιλαμβάνονται ἀμφότεροι, μεταξὺ τῶν αὐτῶν δύο ἀθροισμάτων (θ)· ἑπομένως, οἱ ὄγκοι οὗτοι διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων ὀλιγώτερον ἢ ὅσον τὰ δύο ἀθροίσματα διαφέρουσιν, ἤτοι ὀλιγώτερον τοῦ (ΑΒΓ) . φ. Ἀλλὰ τοῦτο δύναται νὰ γίνῃ μικρότερον παντὸς ἀριθμοῦ, ὅταν τὸ ὕψος τῶν πυραμίδων διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη, ἀρκούντως πολλά· διότι, ὁ μὲν παράγων (ΑΒΓ) μένει ἀμετάβλητος, ὁ δὲ φ καταντᾷ ὅσον θέλωμεν μικρός. Ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν, ὅτι οἱ ὄγκοι τῶν δύο πυραμίδων οαβγ, ΟΑΒΓ οὐδεμίαν δύνανται νὰ ἔχωσι διαφοράν, ἤτοι εἶναι ἴσοι· ἄρα αἱ πυραμίδες αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

374. Πᾶσα τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος, ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Ἔστω τριγωνικὴ πυραμὶς ἡ ΑΒΓΔ.



Ἐκ τῶν κορυφῶν Β, Γ, ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, ἴσαι καὶ παράλληλοι τῇ ΑΔ, αἱ ΓΖ, ΒΕ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ· τὸ προκύπτον σχῆμα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι πρίσμα τριγωνικὸν καὶ ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὰ τῆς πυραμίδος· λέγω, ὅτι ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΑΒΓΔ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΖ. Διότι, ἀφαιρουμένης τῆς πυραμίδος ΑΒΓΔ ἀπὸ τοῦ πρίσματος, μένει τὸ στερεὸν ΔΒΓΖΕ, ὅπερ εἶναι πυραμίς, βάσιν ἔχουσα τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓΖΕ καὶ κορυφὴν τὸ Δ. Ἐὰν δὲ διὰ τῶν σημείων Δ, Β, Ζ, ἀχθῇ ἐπίπεδον, διαιρεῖται ἡ πυραμὶς ΔΒΓΖΕ εἰς δύο τριγωνικὰς πυραμίδας ΔΒΓΖ, ΔΒΖΕ, αἵτινες εἶναι ἰσοδύναμοι, διότι, ἔχουσι βάσεις ΒΖΓ, ΒΖΕ, ἴσας (ὡς ἡμίση τοῦ παραλληλογράμμου ΒΕΖΓ) καὶ ὕψος κοινόν, τὴν ἀπὸ τοῦ Δ, ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΕΖΓ τῶν βάσεων, ἀγομένην κάθετον. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς ΔΒΖΕ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ ΑΒΓΔ· διότι, ἂν ληφθῶσιν ὡς βάσεις αὐτῶν τὰ ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφαὶ δὲ (352) τὰ σημεῖα Δ, Β, καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσα, ὡς κάθετοι, ἠγμέναι μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓ, ΔΕΖ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ ΔΒΕΖ, αὕτη δὲ ἰσοδύναμος τῇ ΔΒΓΖ· ἑπομένως αἱ τρεῖς πυραμίδες, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ, εἶναι ἰσοδύναμοι· ἄρα ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΖ, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

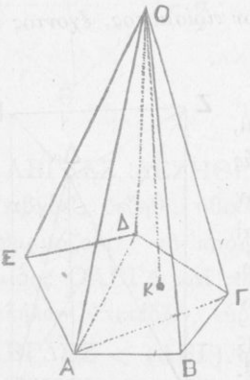
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦτο, δι' οὗ ἀνάγεται ἡ μέτρησις τῶν πυραμίδων εἰς τὴν μέτρησιν τῶν πρισμάτων, ἀποδίδεται εἰς τὸν Εὔδοξον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

375. Ὁ ὄγκος πάσης πυραμίδος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.

Ἔστω κατὰ πρῶτον τριγωνικὴ πυραμίς, ἔχουσα βάσιν β καὶ ὕψος υ. Ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος, ὅπερ ἔχει βάσιν β καὶ ὕψος υ, εἶναι β. υ· ἐπειδὴ δὲ ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος τούτου, ὁ ὄγκος αὐτῆς εἶναι:

$$\frac{1}{3}\beta\,.\,\upsilon.$$



Ἔστω νῦν ἡ τυχοῦσα πολυγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓΔΕ· ἐὰν διαιρεθῇ ἡ βάσις εἰς τρίγωνα, διὰ τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΑΔ, καὶ ἀχθῶσιν ἐπίπεδα διὰ τῆς κορυφῆς Ο καὶ διὰ τῶν διαγωνίων τούτων, διαιρεῖται ἡ πολυγωνικὴ πυραμὶς εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας, ἐχούσας κοινὴν κορυφὴν τὸ Ο καὶ βάσεις τὰ τρίγωνα, εἰς ἃ διηρέθη τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ· κοινὸν δὲ ὕψος τὸ ὕψος ΟΚ τῆς δοθείσης πυραμίδος. Οἱ ὄγκοι τῶν πυραμίδων τούτων εἶναι

$$\frac{1}{3}\,\text{ΑΒΓ}.\text{ΟΚ},\quad \frac{1}{3}\,\text{ΑΓΔ}.\text{ΟΚ},\quad \frac{1}{3}\,\text{ΑΔΕ}.\text{ΟΚ}\cdot$$

ὥστε ὁ ὄγκος τῆς δοθείσης πυραμίδος ΟΑΒΓΔΕ εἶναι τὸ ἄθροισμα

$$\frac{1}{3}\,\text{ΑΒΓ}.\text{ΟΚ}+\frac{1}{3}\,\text{ΑΓΔ}.\text{ΟΚ}+\frac{1}{3}\,\text{ΑΔΕ}.\text{ΟΚ},$$

$$\text{ἢ}\quad \frac{1}{3}.\,\text{ΟΚ}.(\text{ΑΒΓ}+\text{ΑΓΔ}+\text{ΑΔΕ}),\ \text{ἤτοι}\ \frac{1}{3}.\,\text{ΟΚ}.(\text{ΑΒΓΔΕ})\cdot$$

τουτέστι, τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

376. Πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος, ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

377. *Αἱ ἰσοϋψεῖς πυραμίδες εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν, αἱ δὲ ἔχουσαι ἴσας βάσεις ἢ ἰσοδυνάμους εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸν ὄγκον οἱουδήποτε πολυέδρου εὑρίσκομεν, ἀναλύοντες αὐτὸ εἰς πυραμίδας. Ἐάν, τῷ ὄντι, ἐντὸς τοῦ πολυέδρου ληφθῇ τυχὸν σημεῖον Ο καὶ ἐξ αὐτοῦ ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυέδρου, αἱ εὐθεῖαι αὗται μετὰ τῶν ἀκμῶν τοῦ πολυέδρου, σχηματίζουσι τρίγωνα ἐντὸς τοῦ στερεοῦ, τὰ δὲ ἐπίπεδα τῶν τριγώνων τούτων διαιροῦσι τὸ στερεὸν εἰς πυραμίδας, κοινὴν κορυφὴν ἐχούσας τὸ Ο καὶ βάσεις τὰς ἕδρας τοῦ στερεοῦ. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ε_1, ε_2, ε_3..., τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἑδρῶν τοῦ στερεοῦ καὶ διὰ ϱ_1, ϱ_2 ϱ_3, ..., τὰς ἀποστάσεις τῶν ἑδρῶν ἀπὸ τοῦ Ο, ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ θὰ εἶναι

$$\frac{1}{3}\cdot(\varepsilon_1\varrho_1+\varepsilon_2\varrho_2+\varepsilon_3\varrho_3+\ldots).$$

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

1) Πυραμίς τις ἔχει βάσιν τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ εἶναι 5π,2, τὸ δὲ ὕψος της εἶναι 12π· ζητεῖται ὁ ὄγκος αὐτῆς.

(Ἀπ. $\frac{1}{3}\times 5{,}2\times 5{,}2\times 12\cdot$ ἤτοι 108κπ,16).

2) Κανονική τις πυραμὶς ἔχει βάσιν ἑξάγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ εἶναι 3πχ, 2, ἑκάστη δὲ τῶν εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς συντρεχουσῶν ἀκμῶν εἶναι 8πχ· ζητεῖται ὁ ὄγκος αὐτῆς.

(Ἀπ. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος εἶναι (σελ. 180) $\frac{3}{2}\times 3{,}2\times 3{,}2\times\sqrt{3}$, τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς εἶναι πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 8πχ, ἡ δὲ ἄλλη πλευρὰ εἶναι 3πχ,2 (διότι τὸ ὕψος, ἐὰν ἀχθῇ, πίπτει εἰς τὸ κέντρον τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου)· ὥστε τὸ ὕψος εἶναι $\sqrt{8^2-(3{,}2)^2}$ ἢ $\sqrt{53{,}76}\cdot$ ἑπομένως ὁ ὄγκος αὐτῆς εἶναι $\frac{1}{2}\times 3{,}2\times 3{,}2\times\sqrt{3}\times\sqrt{53{,}76}$.

Ἐκτελοῦντες δὲ τὰς πράξεις διὰ τῶν λογαρίθμων, εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον ἴσον μὲ 65κπ,02...).

3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος πυραμίδος, ἥτις περικλείεται ὑπὸ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγώνων.

(Ἀπ. Ἐὰν διὰ τοῦ μ παρασταθῇ ἡ πλευρὰ τῶν τριγώνων, ἡ μὲν βάσις θὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν $\frac{1}{4}\mu^2\sqrt{3}$, τὸ δὲ ὕψος τῆς πυραμίδος, ἐὰν ἀχθῇ, θὰ πέσῃ εἰς τὸ κέντρον τῆς βάσεως, ἑπομένως θὰ εἶναι πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ὑποτείνουσα εἶναι μ, ἡ δὲ ἄλλη πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ εἰς τὴν βάσιν περιγεγραμμένου κύκλου, ἥτις εἶναι (267) $\frac{\mu}{\sqrt{3}}$, ὥστε τὸ ὕψος εἶναι $\sqrt{\mu^2-\frac{\mu^2}{3}}$ ἢ $\mu\sqrt{\frac{2}{3}}$.

ἑπομένως ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\mu^2\sqrt{3}\cdot\mu\sqrt{\frac{2}{3}},\quad \text{ἤτοι}\quad \frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\mu^3).$$

ΠΕΡΙ ΚΟΛΟΥΡΟΥ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

378. Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου, παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς, τὸ μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἐπιπέδου περιεχόμενον μέρος αὐτῆς, λέγεται *κόλουρος πυραμίς*.

Βάσις τῆς κολούρου πυραμίδος λέγονται αἱ παράλληλοι ἕδραι αὐτῆς, ὕψος δὲ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

379. Πᾶσα κόλουρος πυραμὶς εἶναι ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, αἵτινες ἔχουσιν ὕψος μὲν κοινόν, τὸ ὕψος τῆς κολούρου, βάσεις δέ, ἡ μέν, τὴν μίαν βάσιν τῆς κολούρου, ἡ δέ, τὴν ἄλλην, ἡ δὲ τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο τούτων βάσεων.

Ἔστω, κατὰ πρῶτον, κόλουρος πυραμὶς τριγωνική, ἡ ΑΒΓΔΕΖ. Ἐὰν διὰ τῶν τριῶν σημείων Δ, Γ, Β, ἀχθῇ ἐπίπεδον, ἀποκόπτει ἀπὸ τῆς κολούρου πυραμίδος τὴν πυραμίδα ΔΑΒΓ, ἥτις ἔχει βάσιν τὴν ΑΒΓ, ὕψος δὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἤτοι τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος.

Τὸ δὲ μένον στερεὸν ΔΒΓΖΕ, εἶναι πυραμὶς τετραγωνική, ἥτις διαιρεῖται διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΔΖΒ, εἰς δύο τριγωνικάς, ΔΒΕΖ, ΔΒΓΖ. Ἐκ τούτων, ἡ ΔΒΕΖ ἔχει βάσιν μὲν τὴν ΔΕΖ, ὕψος δέ, καὶ αὐτή, τὸ τῆς κολούρου πυραμίδος· ἡ δὲ πυραμὶς ΔΒΓΖ δὲν βλάπτεται κατὰ τὸν ὄγκον, ἐὰν μεταφέρωμεν τὴν κορυφὴν αὐτῆς Δ ἐπὶ εὐθείας, παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς ΓΖΒ (διότι τοῦτο δὲν μεταβάλλει τὸ ὕψος)· ἐὰν λοιπὸν ἀχθῇ ἢ ΔΗ πρὸς παράλληλος τῇ ΖΓ (ὅτε θὰ εἶναι παράλληλος (311) καὶ τῷ ἐπιπέδῳ ΖΓΒ), ἡ πυραμὶς ΔΒΓΖ θὰ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ ΗΓΒΖ. Ἀλλ᾽ ἡ πυραμὶς ΗΓΒΖ δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὅτι ἔχει βάσιν μὲν τὸ τρίγωνον ΓΗΒ, κορυφὴν δὲ τὸ Ζ· ἑπομένως ἔχει ὕψος τὸ τῆς κολούρου πυραμίδος· μένει λοιπὸν ν᾽ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ βάσις αὐτῆς, ἡ ΓΗΒ, εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο ἄλλων ΑΒΓ, ΔΕΖ.

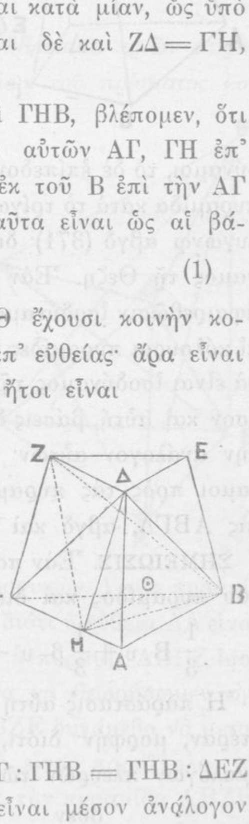
Πρὸς τοῦτο, ἄγομεν ἐκ τοῦ Η τὴν ΗΘ, παράλληλον τῇ ΑΒ (ἑπομένως καὶ τῇ ΔΕ) καὶ σχηματίζομεν τὸ τρίγωνον ΓΗΘ, ὅπερ εἶναι ἴσον τῷ ΔΕΖ· διότι αἱ γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι κατὰ μίαν, ὡς ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν περιεχόμεναι (322), εἶναι δὲ καὶ ΖΔ = ΓΗ, ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων.

Συγκρίνοντες νῦν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΓΗΒ, βλέπομεν, ὅτι ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν τὸ Β καὶ τὰς βάσεις αὐτῶν ΑΓ, ΓΗ ἐπ᾽ εὐθείας· ἑπομένως ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος (τὴν ἐκ τοῦ Β ἐπὶ τὴν ΑΓ καταβιβαζομένην κάθετον)· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὡς αἱ βάσεις των, τουτέστιν εἶναι

$$\frac{ΑΒΓ}{ΓΗΒ}=\frac{ΑΓ}{ΓΗ}. \qquad (1)$$

Ἐπίσης καὶ τὰ δύο τρίγωνα ΓΗΒ καὶ ΓΗΘ ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν τὸ Η καὶ τὰς βάσεις αὐτῶν ΓΒ, ΓΘ ἐπ᾽ εὐθείας· ἄρα εἶναι ἰσοϋψῆ καὶ ἑπομένως εἶναι ὡς αἱ βάσεις των, ἤτοι εἶναι

$$\frac{ΓΗΒ}{ΓΗΘ}=\frac{ΓΒ}{ΓΘ}. \qquad (2)$$



Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ἡ ΗΘ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ, ἔχομεν (228)

$$\frac{ΑΓ}{ΓΗ}=\frac{ΓΒ}{ΓΘ}.$$

διὰ δὲ τὴν ἰσότητα ταύτην, αἱ ἰσότητες (1) καὶ (2) δίδουσιν

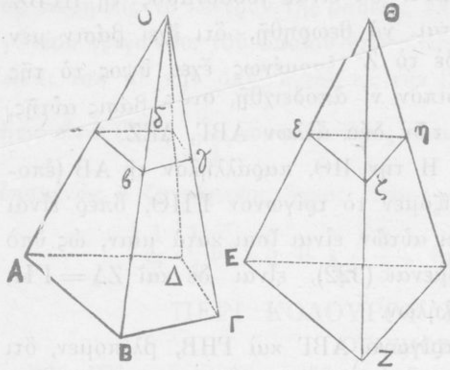
$$\frac{ΑΒΓ}{ΓΗΒ}=\frac{ΓΗΒ}{ΓΗΘ},$$

ἢ $\quad ΑΒΓ : ΓΗΒ = ΓΗΒ : ΓΗΘ \quad$ ἢ καὶ $\quad ΑΒΓ : ΓΗΒ = ΓΗΒ : ΔΕΖ$

(διότι ΓΗΘ = ΔΕΖ)· ἤτοι τὸ τρίγωνον ΓΗΒ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο ἄλλων ΑΒΓ, ΔΕΖ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι ἡ κόλουρος τριγωνικὴ πυραμὶς ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, αἵτινες ἔχουσιν ὕψος μὲν κοινόν, τὸ ὕψος της, βάσεις δέ, ἡ μέν, τὴν μίαν βάσιν ΑΒΓ τῆς κολούρου, ἡ δέ, τὴν ἄλλην ΔΕΖ, ἡ δέ, τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο ἄλλων, τὴν ΒΗΓ.

Ἔστω νῦν κόλουρος πυραμὶς πολυγωνική, ἡ ΑΒΓΔαβγδ, ἥτις προέκυψε, τμηθείσης τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓΔ ὑπὸ ἐπιπέδου, παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς, τοῦ αβγδ. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ αὐξηθέντος, κατασκευάζομεν τρίγωνον ἰσοδύναμον τῷ πολυγώνῳ ΑΒΓΔ, τὸ ΕΖΗ, καὶ ἐπ᾽ αὐτοῦ, ὡς βάσεως, κατασκευάζομεν πυραμίδα, τὴν ΘΕΖΗ, ἰσοϋψῆ τῇ δοθείσῃ. Αἱ δύο πυραμίδες ΟΑΒΓΔ καὶ ΘΕΖΗ θὰ εἶναι ἰσοδύναμοι, τὸ δὲ ἐπίπεδον αβγδ, ἐκβαλλόμενον, θὰ τέμνῃ τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα κατὰ τὸ τρίγωνον εζη, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ πολυγώνῳ αβγδ (371)· διὰ τοῦτο καὶ ἡ πυραμὶς Οαβγδ θὰ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ Θεζη. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν ἰσοδυνάμων, ΟΑΒΓΔ καὶ ΘΕΖΗ, ἀφαιρεθῶσιν ἰσοδύναμα, τὰ Οαβγδ καὶ Θεζη, τὰ μένοντα στερεά, ἤτοι αἱ κόλουροι πυραμίδες, θὰ εἶναι ἰσοδύναμα. Ἄρα, ἡ κόλουρος πυραμὶς θὰ εἶναι ἰσοδύναμος τῷ ἀθροίσματι τριῶν πυραμίδων, ἐχουσῶν ὕψος, ὅσον καὶ αὐτή, βάσεις δέ, ἡ μέν, τὴν ΕΖΗ, ἡ δέ, τὴν εζη, ἡ δέ, τὴν μέσην ἀνάλογον αὐτῶν· ἀλλ᾽ αἱ τρεῖς εἰρημέναι πυραμίδες εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς τὰς πυραμίδας, αἵτινες ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, βάσεις δὲ τὰς ΑΒΓΔ, αβγδ καὶ τὴν μέσην ἀνάλογον τούτων. Ἄρα κτλ.



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Β καὶ β τὰς δύο βάσεις κολούρου πυραμίδος καὶ διὰ υ τὸ ὕψος αὐτῆς, ὁ ὄγκος αὐτῆς θὰ εἶναι

$$\frac{1}{3}\,\mathrm{B}.\upsilon+\frac{1}{3}\,\beta.\upsilon+\frac{1}{3}\sqrt{\mathrm{B}.\beta}.\upsilon \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{3}\,\upsilon.\left(\mathrm{B}+\beta+\sqrt{\mathrm{B}\beta}\right).$$

Ἡ παράστασις αὕτη τοῦ ὄγκου δύναται νὰ λάβῃ καὶ ἄλλην, ἁπλουστέραν, μορφήν· διότι, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ρ τὸν λόγον δύο ὁμολόγων πλευρῶν τῶν βάσεων Β καὶ β, θὰ εἶναι $\beta=\mathrm{B}.\rho^2$,

$$\text{ὅθεν} \quad \sqrt{\mathrm{B}.\beta}=\sqrt{\mathrm{B}.\mathrm{B}\rho^2}=\mathrm{B}\rho,$$

ὅθεν ὁ ὄγκος γίνεται $\frac{1}{3}.\upsilon\,(\mathrm{B}+\mathrm{B}\rho^2+\mathrm{B}\rho)$, ἤτοι

$$\frac{1}{3}\,\mathrm{B}.\upsilon\,(1+\rho+\rho^2).$$

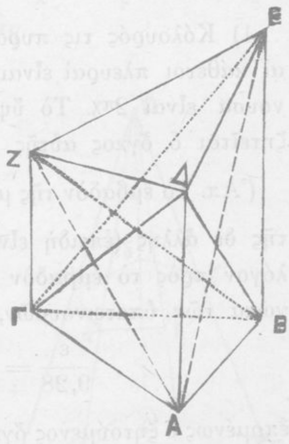
ΠΕΡΙ ΚΟΛΟΒΟΥ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

380. Ἐὰν πρίσμα τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου, μὴ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ, μηδὲ τέμνοντος τὴν βάσιν, τὸ μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἐπιπέδου περιεχόμενον μέρος, λέγεται *κολοβὸν πρίσμα*.

ΘΕΩΡΗΜΑ

381. Πᾶν κολοβὸν τριγωνικὸν πρίσμα εἶναι ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, αἵτινες ἔχουσι βάσιν μὲν κοινήν, τὴν βάσιν τοῦ πρίσματος, κορυφὰς δὲ τὰς τρεῖς κορυφὰς τῆς τομῆς.



Ἔστω κολοβὸν τριγωνικὸν πρίσμα τὸ ΑΒΓΔΕΖ, ἔχον βάσιν τὴν ΑΒΓ καὶ τομήν, μὴ παράλληλον τῇ βάσει, τὴν ΔΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν τοῦτο εἶναι ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, ἐχουσῶν κορυφὰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ καὶ βάσιν κοινήν, τὴν ΑΒΓ.

Τὸ ἐπίπεδον ΔΒΓ, ἐὰν ἀχθῇ, τέμνει ἀπὸ τοῦ στερεοῦ τὴν πυραμίδα ΔΑΒΓ, ἥτις ἔχει βάσιν τὴν ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ Δ.

Τὸ δὲ μένον στερεὸν ΔΒΓΖΕ εἶναι πυραμὶς τετραγωνική, ἔχουσα κορυφὴν τὸ Δ, καὶ ἂν ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ΔΒΖ, διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο τριγωνικὰς ΔΒΓΖ, ΔΒΖΕ. Τὴν κορυφὴν Δ τῆς πυραμίδος ΔΒΓΖ δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν εἰς τὸ Α· διότι ἡ εὐθεῖα ΔΑ εἶναι παράλληλος τῇ βάσει αὐτῆς ΒΓΖ, εἶναι λοιπὸν ἡ πυραμὶς ΔΒΓΖ ἰσοδύναμος τῇ ΑΒΓΖ, τῆς ὁποίας βάσιν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ Ζ. Καὶ τῆς πυραμίδος ΔΒΖΕ δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν τὴν κορυφὴν Δ εἰς τὸ Α (διότι ἡ ΔΑ εἶναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ ΒΖΕ), ὅτε εὑρίσκομεν ἰσοδύναμον αὐτῆς, τὴν πυραμίδα ΑΒΖΕ· ἀλλὰ καὶ ταύτης τὴν κορυφὴν Ζ, δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν εἰς τὸ Γ (διότι ἡ ΖΓ εἶναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΕΔ, ἐφ᾿ οὗ κεῖται ἡ βάσις αὐτῆς ΑΒΕ) ὅτε εὑρίσκομεν ἰσοδύναμον αὐτῆς, τὴν πυραμίδα ΑΒΓΕ, τῆς ὁποίας βάσιν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὴν ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ Ε.

Ἐδείχθη ἄρα, ὅτι τὸ τριγωνικὸν κολοβὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, ἐχουσῶν βάσιν κοινήν, τὴν βάσιν ΑΒΓ τοῦ πρίσματος, κορυφὰς δὲ τὰς τρεῖς κορυφὰς Δ, Ε, Ζ, τῆς τομῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Ἐὰν τὸ κολοβὸν πρίσμα εἶναι ὀρθόν, τουτέστιν, ἂν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒΓ, ὁ ὄγκος αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{1}{3}$ (ΑΒΓ).(ΑΔ+ΒΕ+ΓΖ).

Ἐὰν δὲ εἶναι πλάγιον, διαιρεῖται διὰ τῆς καθέτου τομῆς εἰς δύο ὀρθὰ καὶ εὑρίσκεται ὁ ὄγκος αὐτοῦ ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς καθέτου τομῆς του ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν παραλλήλων πλευρῶν του.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Τὰ κολοβὰ πολυγωνικὰ πρίσματα διαιροῦνται εἰς τριγωνικά, καθ᾽ ὃν τρόπον καὶ τὰ τέλεια (366, β΄).

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

1) Κόλουρός τις πυραμὶς ἔχει βάσεις ὀρθογώνια τρίγωνα· τοῦ ἑνὸς αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι 5πχ, 8 καὶ 3πχ, 2, τοῦ δὲ ἄλλου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 2πχ. Τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι 4πχ, 25· ζητεῖται ὁ ὄγκος αὐτῆς.

(Ἀπ. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς βάσεως εἶναι $\frac{1}{2}\times 5{,}8\times 3{,}2$, ἤτοι 9,28· τῆς δὲ ἄλλης (ἐπειδὴ εἶναι ὁμοία τῇ πρώτῃ) τὸ ἐμβαδὸν ε θὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν 9,28 τῆς πρώτης, ὃν ἔχουσι καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ὑποτεινουσῶν, ἤτοι θὰ εἶναι

$$\frac{\varepsilon}{9{,}28}=\frac{4}{43{,}88},\ \text{ὅθεν}\ \varepsilon=\frac{9{,}28}{10{,}97}\cdot$$

ἑπομένως ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι $\frac{1}{3}.4{,}25.\left(9{,}28+\frac{9{,}28}{10{,}97}+\frac{9{,}28}{\sqrt{10{,}97}}\right)$

ἢ $$\frac{4{,}25\times 9{,}28}{3\times 10{,}97}(11{,}97+\sqrt{10{,}97})=\frac{4{,}25\times 9{,}28\times 15{,}28\ldots}{3\times 10{,}97},$$

διότι ἡ $\sqrt{10{,}97}$ εὑρίσκεται (διὰ τῶν λογαρίθμων) ἴση μὲ 3,31 . . . ·ὑπολογίζοντες δὲ τὴν τελευταίαν παράστασιν διὰ τῶν λογαρίθμων, εὑρίσκομεν τέλος τὸν ζητούμενον ὄγκον ἴσον μὲ 18κπ, 31 . . .).

2) Πρίσμα τι ὀρθὸν ἔχει βάσιν τρίγωνον, οὗ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 20τπ., ἐτμήθη δὲ δι᾽ ἐπιπέδου πλαγίως πρὸς τὴν βάσιν του, ὥστε αἱ τρεῖς παράλληλοι αὐτοῦ ἀκμαὶ ἔγιναν, ἡ μὲν 8 πήχεις, ἡ δὲ 2, ἡ δὲ 7· ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ κολοβοῦ τούτου πρίσματος.

$$\left(\text{Ἀπ.}\quad \frac{1}{3}\ 20.(8+2+7),\quad \text{ἤτοι}\quad 113^{\text{κπ}}\,\frac{1}{3}\right).$$

ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

382. *Ὅμοια* λέγονται δύο πολύεδρα, ἐὰν ἔχωσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ἰσαρίθμους καὶ ὁμοίας κατὰ μίαν καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζομένας στερεὰς γωνίας ἴσας.

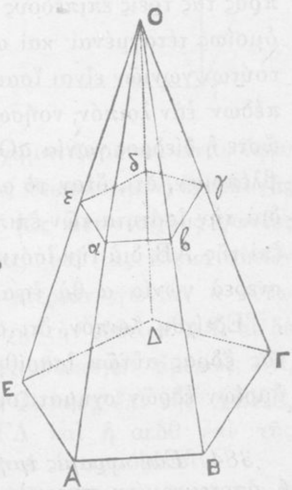
Αἱ ὅμοιαι ἕδραι λέγονται *ὁμόλογοι* ἕδραι. Καὶ αἱ κορυφαὶ τῶν ἴσων στερεῶν γωνιῶν λέγονται *ὁμόλογοι* κορυφαί.

Καὶ αἱ ὁμολόγους κορυφὰς ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι λέγονται καὶ αὐταὶ *ὁμόλογοι.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

383. *Ἐὰν αἱ πλευραὶ πυραμίδος (αἱ εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς συντρέχουσαι) πολλαπλασιασθῶσι πᾶσαι ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, ἡ προκύπτουσα νέα πυραμὶς εἶναι ὁμοία τῇ πρώτῃ.*

Ἔστω πυραμὶς ἡ ΟΑΒΓΔΕ ἂς πολλαπλασιασθῶσι δὲ αἱ πλευραὶ αὐτῆς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ, πᾶσαι ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν ρ (ἐν τῷ σχήματι ἐλήφθη $\rho = \frac{1}{2}$), ὅτε γίνεται Οα, Οβ, Ογ, Οδ, Οε, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ ἄκρα τούτων, ὡς καὶ πρίν· λέγω, ὅτι τὸ σχῆμα αβγδε εἶναι ἐπίπεδον καὶ ὅτι ἡ πυραμὶς Οαβγδε εἶναι ὁμοία τῇ δοθείσῃ ΟΑΒΓΔΕ.



Τὰ τρίγωνα ΟΑΒ, Οαβ ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην (τὴν Ο) καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους (ἐπειδὴ ἐλήφθη Οα $=$ ρ.ΟΑ καὶ Οβ $=$ ρ.ΟΒ) ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια καὶ ἡ αβ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἀποδεικνύονται τὰ τρίγωνα ΟΒΓ, Οβγ ὅμοια καὶ ἡ βγ παράλληλος τῇ ΒΓ· ὡσαύτως τὰ ΟΓΔ, Ογδ, καὶ καθεξῆς.

Τὸ δὲ σχῆμα αβγδε εἶναι ἐπίπεδον καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ εἶναι παράλληλον τῇ βάσει ΑΒΓΔΕ· διότι, ἂν ἐκ τοῦ σημείου α ἀχθῇ ἐπίπεδον, παράλληλον τῷ ΑΒΓΔΕ, θὰ τέμνῃ τὴν ἕδραν ΟΑΒ κατὰ εὐθεῖαν παράλληλον τῇ ΑΒ, ἄρα κατὰ τὴν αβ θὰ τέμνῃ καὶ τὴν ἕδραν ΟΒΓ κατὰ εὐθεῖαν παράλληλον τῇ ΒΓ καὶ διὰ τοῦ β διερχομένην ἄρα κατὰ τὴν βγ· καὶ τὴν ἕδραν ΟΓΔ θὰ τέμνῃ κατὰ εὐθεῖαν παράλληλον τῇ ΓΔ, ἄρα κατὰ τὴν γδ, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε τὸ σχῆμα αβγδε κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

Κατὰ δὲ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 369, τὰ δύο σχήματα ΑΒΓΔΕ, αβγδε εἶναι ὅμοια καὶ οἱ λόγοι

$$\frac{\alpha\beta}{AB},\quad \frac{\beta\gamma}{B\Gamma},\quad \frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta},\ldots.$$

τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, εἶναι ἴσοι τῷ λόγῳ $\frac{O\alpha}{OA}$, τουτέστι τῷ ἀριθμῷ ρ.

Ὥστε αἱ δύο πυραμίδες ΟΑΒΓΔΕ, Οαβγδε ἔχουσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ὁμοίας κατὰ μίαν.

Καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι αὐτῶν, αἱ ὑπὸ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζόμεναι, εἶναι ἴσαι. Ἔστωσαν, παραδείγματος χάριν, αἱ στερεαὶ γωνίαι Α καὶ α· αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι, ὑφ᾽ ὧν σχηματίζεται ἡ Α, εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας, ὑφ᾽ ὧν σχηματίζεται ἡ α, εἶναι δὲ καὶ ὁμοίως τεταγμέναι· καὶ αἱ δίεδροι δὲ γωνίαι Αα καὶ αΟ τῶν στερεῶν τούτων γωνιῶν εἶναι ἴσαι· διότι σχηματίζονται ὑπὸ δύο, τῶν αὐτῶν, ἐπιπέδων· ἐὰν λοιπόν, νοήσωμεν τὴν στερεὰν γωνίαν α κινουμένην οὕτως, ὥστε ἡ δίεδρος γωνία αΟ νὰ ἐφαρμόζῃ πάντοτε ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΟ, βλέπομεν, ὅτι, ὅταν τὸ α πέσῃ εἰς τὸ Α, θὰ πέσῃ καὶ ἡ αε ἐπὶ τῆς ΑΕ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν Οαε καὶ ΟΑΕ· ἐπίσης καὶ ἡ αβ ἐπὶ τῆς ΑΒ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν Οαβ καὶ ΟΑΒ· ἑπομένως ἡ στερεὰ γωνία α θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς Α· ἄρα εἶναι ἴσαι.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι αἱ δύο πυραμίδες ΟΑΒΓΔΕ, Οαβγδε ἔχουσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ἰσαρίθμους καὶ ὁμοίας κατὰ μίαν καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζομένας στερεὰς γωνίας ἴσας· ἄρα εἶναι ὅμοιαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ

384. Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου, παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς, ἡ ἀποτεμνομένη πυραμὶς εἶναι ὁμοία τῇ ὅλῃ.

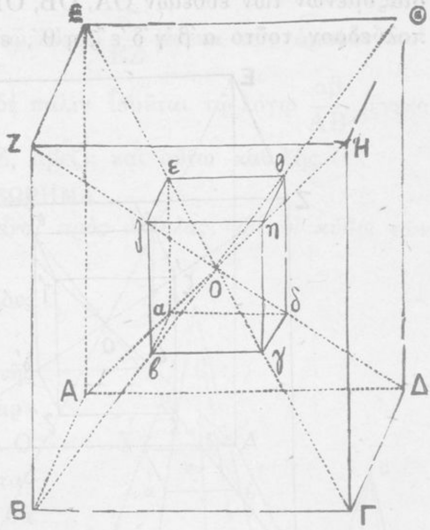
Διότι, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 369, αἱ πλευραὶ αὐτῆς τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα, ἤτοι προκύπτοντα ἐξ αὐτῶν, πολλαπλασιαζομένων ἐπί τινα ἀριθμόν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

385. Δοθέντος πολυέδρου, δύναται νὰ κατασκευασθῇ ὅμοιον.

Ἔστω δοθὲν πολύεδρον τὸ ΑΒΓΔΕΖΗΘ.

Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Ο τοῦ στερεοῦ, ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ, αἱ ΟΑ, ΟΒ,..., ΟΘ καὶ ἂς πολλαπλασιασθῶσι πᾶσαι ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν ρ, ὅτε γίνονται Οα, Οβ,..., Οθ, ἂς ἐπιζευχθῶσι δὲ τὰ ἄκρα αὐτῶν α, β,. . ., θ, ὡς εἶναι καὶ εἰς τὸ στερεόν· λέγω, ὅτι τὸ προκύπτον στερεὸν αβγδεζηθ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν ΑΒΓΔΕΖΗΘ.



Διότι τὰ δύο στερεὰ σύγκεινται ἐξ ἰσαρίθμων πυραμίδων, ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων· παραδείγματος χάριν, ἡ πυραμὶς Οαβγδ εἶναι ὁμοία τῇ ΟΑΒΓΔ (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα) καὶ ἡ Οαβεζ ὁμοία τῇ ΟΑΒΕΖ, καὶ καθεξῆς· ἑπομένως εἶναι ἡ ἕδρα αβγδ ὁμοία καὶ παράλληλος τῇ ΑΒΓΔ, καὶ ἡ αβεζ ὁμοία καὶ παράλληλος τῇ ΑΒΕΖ, καὶ καθεξῆς· ὥστε τὰ δύο στερεὰ ἔχουσι τὰς ἕδρας των ἰσαρίθμους καὶ ὁμοίας κατὰ μίαν. Ἀλλὰ καὶ αἱ στερεαὶ αὐτῶν γωνίαι, αἱ ὑπὸ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζόμεναι, εἶναι ἴσαι· διότι αἱ στερεαὶ γωνίαι Α καὶ α (ἵνα ταύτας θεωρήσωμεν) ἔχουσι τὰς ἐπιπέδους αὐτῶν γωνίας ἴσας κατὰ μίαν (ὡς ἀντιστοίχους γωνίας ὁμοίων πολυγώνων) καὶ ὁμοίως τεταγμένας, καὶ τὰς ἕδρας αὐτῶν παραλλήλους· ἐὰν λοιπὸν νοήσωμεν τὴν στερεὰν γωνίαν α οὕτω κινουμένην, ὥστε ἡ κορυφὴ αὐτῆς νὰ διατρέχῃ τὴν εὐθεῖαν αΑ, αἱ δὲ ἕδραι αὐτῆς νὰ μένωσι παράλληλοι ἑαυταῖς, βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι, ὅταν τὸ α φθάσῃ εἰς τὸ Α, ἡ μὲν ἕδρα αβζε θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒΖΕ, παραλλήλου αὐτῇ, ἡ αβγδ ἐπὶ τῆς ΑΒΓΔ καὶ ἡ αεδθ ἐπὶ τῆς ΑΕΔΘ· ἤτοι αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι α καὶ Α ἐφαρμόζουσιν.

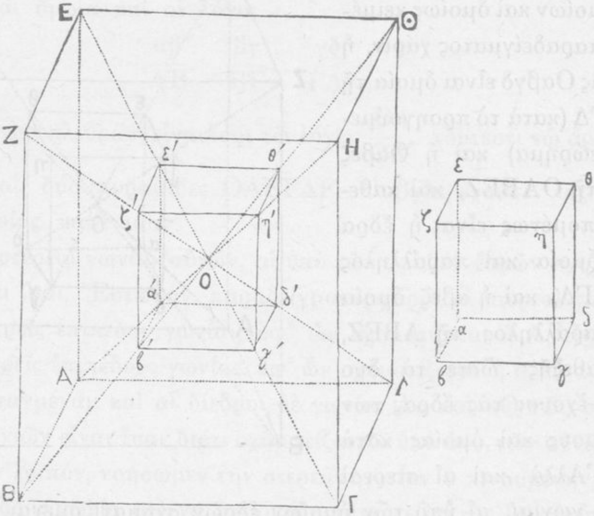
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι τὰ δύο στερεὰ ΑΒΓΔΕΖΗΘ καὶ αβγδεζηθ ἔχουσι τὰς ἕδρας των ὁμοίας κατὰ μίαν καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζομένας στερεὰς γωνίας ἴσας· ἄρα εἶναι ὅμοια· ὅ. ἔ. δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

386. Δύο ὅμοια πολύεδρα δύνανται νὰ διαιρεθῶσιν εἰς ἰσαρίθμους πυραμίδας, ὁμοίας κατὰ μίαν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένας.

Ἔστωσαν ὅμοια πολύεδρα τὰ ΑΒΓΔΕΖΗΘ καὶ αβγδεζηθ· καὶ δύο ὁμόλογοι ἀκμαὶ αὐτῶν αἱ αβ, ΑΒ, ἔχουσαι λόγον $\frac{\alpha\beta}{AB}$, ἴσον τῷ ἀριθμῷ ρ.

Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Ο τοῦ στερεοῦ ΑΗ, ἂς κατασκευασθῇ (κατὰ τὸν προειρημένον τρόπον) πολύεδρον, ὅμοιον τῷ ΑΗ, πολλαπλασιαζομένων τῶν εὐθειῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, . . ., ΟΘ, ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ρ· τὸ πολύεδρον τοῦτο α΄β΄γ΄δ΄ε΄ζ΄η΄θ΄, εἶναι ἴσον τῷ αβγδεζηθ.



Διότι, αἱ στερεαὶ αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι κατὰ μίαν, ὡς ἴσαι ταῖς τοῦ πολυέδρου ΑΗ καὶ αἱ ἕδραι αὐτῶν εἶναι ἴσαι κατὰ μίαν· διότι, αἱ ἕδραι αβγδ, α΄β΄γ΄δ΄, ὡς ὅμοιαι τῇ ΑΒΓΔ, εἶναι ὅμοιαι καὶ πρὸς ἀλλήλας· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\frac{\alpha\beta}{AB}=\rho$ καὶ $\frac{\alpha'\beta'}{\alpha\beta}=\rho$ (ὡς ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων Οα΄β΄, ΟΑΒ εὑρίσκεται), συμπεραίνεται αβ=α΄β΄. Τὰ δύο λοιπὸν ὅμοια πολύγωνα αβγδ, α΄β΄γ΄δ΄ ἔχουσι δύο ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας· ἄρα εἶναι ἴσα (διότι, ὅταν ἐκ τῶν ἴσων λόγων $\frac{\alpha'\beta'}{\alpha\beta}, \frac{\beta'\gamma'}{\beta\gamma}, \ldots, \frac{\delta'\alpha'}{\delta\alpha}$, εἷς εἶναι ἴσος τῇ μονάδι 1, καὶ οἱ ἄλλοι θὰ εἶναι 1). Καὶ αἱ ἕδραι αβεζ, α΄β΄ε΄ζ΄ εἶναι ὅμοιαι (ὡς ὅμοιαι τῇ ΑΒΕΖ) καὶ ἔχουσι δύο ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας, τὰς αβ, α΄β΄· ἄρα εἶναι ἴσαι. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἀποδεικνύεται ἡ ἰσότης τῶν ἑδρῶν εζηθ, ε΄ζ΄η΄θ΄· καὶ καθεξῆς.

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι τὰ δύο στερεὰ αη, α΄η΄ ἐφαρμόζουσιν, ἐὰν ἡ στερεὰ γωνία α ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ α΄· τούτου δὲ γενομένου, θὰ εὑρεθῇ τὸ στερεὸν αη, διῃρημένον εἰς πυραμίδας, αἵτινες εἶναι τόσαι, ὅσαι εἶναι αἱ πυραμίδες τοῦ στερεοῦ ΑΗ καὶ ὅμοιαι πρὸς αὐτὰς καὶ ὁμοίως κείμεναι.

ΠΟΡΙΣΜΑ

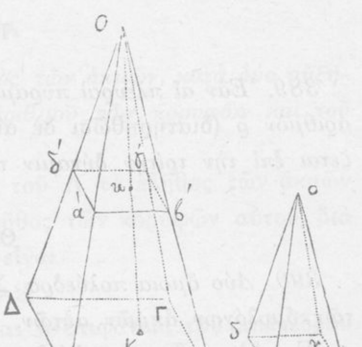
387. Δύο ὁμοίων στερεῶν αἱ ὁμόλογοι ἀκμαὶ ἔχουσι πᾶσαι τὸν αὐτὸν λόγον.

Διότι, ὁ λόγος $\frac{\varepsilon\theta}{\mathrm{E\Theta}}$ ἰσοῦται τῷ λόγῳ $\frac{\varepsilon\zeta}{\mathrm{EZ}}$ (ἕνεκα τῶν ὁμοίων πολυγώνων εζηθ, ΕΖΗΘ), οὗτος δὲ πάλιν ἰσοῦται τῷ λόγῳ $\frac{\alpha\beta}{\mathrm{AB}}$ (ἕνεκα τῶν ὁμοίων πολυγώνων ΑΒΕΖ, αβεζ) καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΘΕΩΡΗΜΑ

388. Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες εἶναι πρὸς ἀλλήλας, ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν.

Ἔστωσαν ὅμοιαι αἱ πυραμίδες ΟΑΒΓΔ, οαβγδ.



Ἂς τεθῇ ἡ μικροτέρα ἐντὸς τῆς μεγαλητέρας, οὕτως, ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσιν αἱ ἴσαι στερεαὶ γωνίαι Ο καὶ ο· τότε ἡ βάσις αβγδ θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν α′β′γ′δ′ καὶ θὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒΓΔ· διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ρ τὸν λόγον $\frac{o\alpha}{\mathrm{OA}}$ δύο ὁμολόγων ἀκμῶν τῶν ὁμοίων πυραμίδων, θὰ εἶναι

$$\mathrm{O}\alpha' = o\alpha = \varrho\,.\,\mathrm{OA},$$
$$\mathrm{O}\beta' = o\beta = \varrho\,.\,\mathrm{OB},$$
$$\mathrm{O}\gamma' = o\gamma = \varrho\,.\,\mathrm{O\Gamma},$$
$$\mathrm{O}\delta' = o\delta = \varrho\,.\,\mathrm{O\Delta}\cdot$$

προκύπτει λοιπὸν ἡ πυραμὶς Οα′β′γ′δ′ ἐκ τῆς ΟΑΒΓΔ, ἐὰν ταύτης αἱ πλευραὶ πολλαπλασιασθῶσι ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ρ, ἑπομένως (383) ἡ ἕδρα α′β′γ′δ′ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒΓΔ· διὰ τοῦτο δὲ διαιρεῖ τὸ ὕψος ΟΚ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον ρ (369).

Τούτου τεθέντος, εἶναι

$$\mathrm{OAB\Gamma\Delta} = \frac{1}{3}\,(\mathrm{AB\Gamma\Delta})\,.\,(\mathrm{OK}), \qquad o\alpha\beta\gamma\delta = \frac{1}{3}\,(\alpha\beta\gamma\delta)\,.\,(\mathrm{O}\varkappa),$$

ἐξ ὧν ἕπεται

$$\frac{(o\alpha\beta\gamma\delta)}{(\mathrm{OAB\Gamma\Delta})} = \frac{(\alpha\beta\gamma\delta)\,.\,(\mathrm{O}\varkappa)}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})\,.\,(\mathrm{OK})} = \frac{(\alpha\beta\gamma\delta)}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}\cdot\frac{(\mathrm{O}\varkappa)}{(\mathrm{OK})}.$$

Ἀλλ᾽ αἱ ἕδραι αβγδ, ΑΒΓΔ εἶναι ὅμοιαι· ὅθεν

$$\frac{(\alpha\beta\gamma\delta)}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}=\frac{(\alpha\beta)^2}{(\mathrm{AB})^2}=\varrho^2.$$

ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $\frac{(\mathrm{O}\varkappa)}{(\mathrm{OK})}=\varrho$, συνάγεται

$$\frac{(\mathrm{o}\alpha\beta\gamma\delta)}{(\mathrm{OAB\Gamma\Delta})}=\varrho^3=\frac{(\alpha\beta)^3}{(\mathrm{AB})^3},$$

τουτέστιν, ὁ λόγος τῶν δύο ὁμοίων πυραμίδων ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν κύβων δύο ὁμολόγων πλευρῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ

389. Ἐὰν αἱ πλευραὶ πυραμίδος πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν ϱ (διατηρηθῶσι δὲ αἱ γωνίαι), *ὁ ὄγκος αὐτῆς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ ϱ, ἤτοι ἐπὶ ϱ^3.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

390. Δύο ὅμοια πολύεδρα Σ καὶ σ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν.

Ἐπειδὴ τὰ ὅμοια πολύεδρα διαιροῦνται εἰς ἴσας τὸ πλῆθος πυραμίδας καὶ ὁμοίας κατὰ μίαν, ἔστωσαν, αἱ μὲν πυραμίδες, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ Σ, αἱ $\mathrm{T}, \mathrm{T}', \mathrm{T}'', \ldots$, αἱ δὲ ἀποτελοῦσαι τὸ σ, αἱ $\tau, \tau', \tau'' \ldots$ ἔστω δὲ τῇ Τ ὁμοία ἡ τ καὶ τῇ Τ΄ ἡ τ΄ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ϱ τὸν λόγον τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν τῶν ὁμοίων πολυέδρων, καὶ αἱ ὁμόλογοι ἀκμαὶ τῶν ὁμοίων πυραμίδων θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον· διότι, αἱ πυραμίδες Τ, τ ἔχουσι μετὰ τῶν στερεῶν Σ, σ, κοινὰς ἀκμάς, τὰς ἀκμὰς δύο ὁμολόγων ἑδρῶν· ὡσαύτως καὶ αἱ λοιπαί. Ἐντεῦθεν ἕπεται, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα,

$$\tau=\mathrm{T}.\varrho^3,\quad \tau'=\mathrm{T}'.\varrho^3,\quad \tau''=\mathrm{T}''.\varrho^3,\ldots,$$

ἐξ ὧν προκύπτει $\tau+\tau'+\tau''+\ldots\ldots=(\mathrm{T}+\mathrm{T}'+\mathrm{T}''+\ldots)\,\varrho^3$,

$$\text{τουτέστι}\quad \sigma=\Sigma.\varrho^3$$

$$\text{καὶ}\quad \frac{\sigma}{\Sigma}=\varrho^3=\frac{\alpha^3}{\mathrm{A}^3}.$$

ἔνθα Α καὶ α παριστῶσι δύο ὁμολόγους ἀκμὰς τῶν ὁμοίων πολυέδρων Σ, σ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

391. Ἐὰν αἱ ἀκμαὶ στερεοῦ πολλαπλασιασθῶσι πᾶσαι ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν ϱ (διατηρηθῶσι δὲ αἱ στερεαὶ γωνίαι αὐτοῦ ἀμετάβλητοι), ὁ ὄγκος αὐτοῦ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ϱ, ἤτοι ἐπὶ ϱ^3.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἡ πρότασις: *Αἱ ἐπιφάνειαι δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὰ τετράγωνα δύο ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν.*

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ ΕΝ ΓΕΝΕΙ

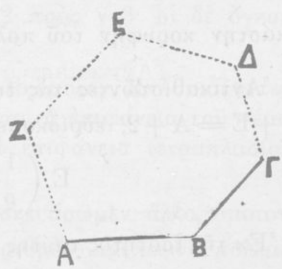
ΘΕΩΡΗΜΑ

392. Ἐν παντὶ πολυέδρῳ, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκμῶν, κατὰ δύο αὐξηθείς, γίνεται ἴσος τῷ ἀθροίσματι τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κορυφῶν καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν.

Ἐάν, δηλονότι, παραστήσωμεν διὰ τοῦ Α τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν τοῦ πολυέδρου, καὶ διὰ τοῦ Κ τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, διὰ δὲ τοῦ Ε τὸ πλῆθος τῶν ἑδρῶν, θὰ εἶναι

$$K+E=A+2.$$

Νοήσωμεν τὰς ἕδρας, ἐξ ὧν σύγκειται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυέδρου ἀφαιρουμένας ἀπ' αὐτοῦ, μίαν μετ' ἄλλην, ἀλλ' οὕτως, ὥστε ἡ ἑκάστοτε ἀφαιρουμένη νὰ εἶναι ἐξ ἐκείνων, μεθ' ὧν συνείχετο ἡ προηγουμένως ἀφαιρεθεῖσα, καὶ τὸ μένον μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ πολυέδρου, νὰ εἶναι ἓν συνεχές. Ὅταν ἀφαιρεθῇ ἡ πρώτη ἕδρα, φανερόν, ὅτι οὔτε ἀκμὴ ἀφαιρεῖται ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας, οὔτε κορυφή· ὅταν δὲ ἡ τελευταία, ἀφαιροῦνται προδήλως τόσαι ἀκμαί, ὅσαι καὶ κορυφαί. Ὅταν δέ τις ἄλλη ἐν τῷ μεταξὺ ἀφαιρῆται, ἀποβάλλει ἡ ἐπιφάνεια ἀκμὰς περισσοτέρας τῶν κορυφῶν κατὰ μίαν. Διότι, ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι πρόκειται νὰ ἀφαιρεθῇ ἡ ἕδρα ΑΒΓΔΕΖ καὶ ὅτι αὕτη συνέχεται μετὰ τῆς μενούσης ἐπιφανείας μόνον διὰ τῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΒΓ, φανερὸν εἶναι, ὅτι, ἀφαιρουμένης αὐτῆς, θὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας αἱ τέσσαρες ἀκμαὶ ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ· ἐνῷ κορυφαὶ θὰ ἀφαιρεθῶσι τρεῖς, αἱ Δ, Ε, Ζ.



Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ α_ν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκμῶν καὶ διὰ κ_ν τὸν ἀριθμὸν τῶν κορυφῶν, αἵτινες ἀφαιροῦνται ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας, ὅταν ἀφαιρεθῇ ἡ νυοστὴ ἕδρα, θὰ εἶναι

$$\alpha_1 - \kappa_1 = 0,$$
$$\alpha_2 - \kappa_2 = 1,$$
$$\alpha_3 - \kappa_3 = 1,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\alpha_{\tau-1} - \kappa_{\tau-1} = 1,$$
$$\alpha_\tau - \kappa_\tau = 0\cdot$$

προσθέτοντες δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη καὶ ἐνθυμούμενοι, ὅτι εἶναι τόσαι, ὅσαι εἶναι αἱ ἕδραι, τουτέστιν Ε, εὑρίσκομεν

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\tau) - (\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_\tau) = \text{E} - 2\cdot$$

ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\tau$ ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν πασῶν τῶν ἀκμῶν καὶ τὸ ἄθροισμα $\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_\tau$ τὸν ἀριθμὸν πασῶν τῶν κορυφῶν· ὅθεν εἶναι $\text{A} - \text{K} = \text{E} - 2$

ἢ $\text{K} + \text{E} = \text{A} + 2\cdot$ ὅ. ἔ. δ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ἐὰν πολυέδρου τινὸς αἱ ἕδραι πᾶσαι ἔχωσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν (ἔστω ν) καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι πᾶσαι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἑδρῶν (ἔστω ρ), τὸ τοιοῦτο πολύεδρον ἂς λέγεται *ὁμοιομερὲς* πολύεδρον.

Ἐὰν τὸ ὁμοιομερὲς πολύεδρον ἔχῃ Ε ἕδρας καὶ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἔχῃ ν πλευράς, ἔχουσι πᾶσαι αἱ ἕδραι ν.Ε πλευράς· ἀλλ᾽ αἱ πλευραὶ αὗται ἐφαρμόζουσιν ἀνὰ δύο καὶ ἀποτελοῦσι μίαν ἀκμὴν τοῦ πολυέδρου·

ὥστε αἱ ἀκμαὶ εἶναι $\dfrac{\nu\text{E}}{2}$, ἤτοι $\text{A} = \dfrac{\nu\text{E}}{2}$. (1)

Αἱ γωνίαι πασῶν τῶν ἑδρῶν εἶναι νΕ, καὶ ρ ἐξ αὐτῶν συνέρχονται εἰς ἑκάστην κορυφὴν τοῦ πολυέδρου· ὅθεν ἕπεται $\text{K} = \dfrac{\nu\text{E}}{\rho}$. (2)

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας τῶν Α καὶ Κ εἰς τὴν ἰσότητα $\text{K} + \text{E} = \text{A} + 2$, εὑρίσκομεν

$$\text{E}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\nu}. \tag{3}$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης βλέπομεν, ὅτι ἡ παράστασις $\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{\nu} - \dfrac{1}{2}$ ἀνάγκη νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμός· ἤτοι $\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{\nu} > \dfrac{1}{2}$.

Ἡ ἐλαχίστη τιμή, τὴν ὁποίαν δύνανται νὰ ἔχωσιν οἱ ἀριθμοὶ ν καὶ ρ, εἶναι 3. Ἂν ὑποτεθῇ $\nu=3$, ἡ ἀνισότης γίνεται $\frac{1}{\rho}>\frac{1}{6}$· ἄρα $\rho<6$· ἔχομεν λοιπὸν (ἐκ τριγώνων) τὰς ἑξῆς λύσεις

$$\nu=3,\quad \rho=3,\quad E=4,\quad K=4,\quad A=6,$$
$$\nu=3,\quad \rho=4,\quad E=8,\quad K=6,\quad A=12,$$
$$\nu=3,\quad \rho=5,\quad E=20,\quad K=12,\quad A=30.$$

Ἂν ὑποτεθῇ $\nu=4$, ἡ ἀνισότης γίνεται $\frac{1}{\rho}>\frac{1}{4}$ ὅθεν $\rho<4$· ἑπομένως ἔχομεν μίαν μόνην λύσιν

$$\nu=4,\quad \rho=3,\quad E=6,\quad K=8,\quad A=12.$$

Ἂν ὑποτεθῇ $\nu=5$, ἡ ἀνισότης γίνεται $\frac{1}{\rho}>\frac{3}{10}$· ὅθεν $\rho<\frac{10}{3}$· ὥστε πάλιν ἔχομεν μίαν μόνην λύσιν

$$\nu=5,\quad \rho=3,\quad E=12,\quad K=20,\quad A=30.$$

Ἂν τέλος ὑποτεθῇ $\nu=6$, ἢ >6, οὐδεμία τιμὴ τοῦ ρ εὑρίσκεται, πληροῦσα τὴν ἀνισότητα.

Ὥστε ὁμοιομερῆ πολύεδρα μόνον πέντε δύνανται νὰ ὑπάρξωσι, τὰ ἑξῆς· τετράεδρον, ὀκτάεδρον, εἰκοσάεδρον, ἐκ τριγώνων

ἑξάεδρον ἐκ τετραπλεύρων

δωδεκάεδρον ἐκ πενταγώνων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὰ ὁμοιομερῆ ταῦτα πολύεδρα λέγονται *κανονικά,* ὅταν αἱ ἕδραι αὐτῶν εἶναι κανονικὰ πολύγωνα καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι αὐτῶν ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

1) Αἱ ἐπιφάνειαι δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι πρὸς ἀλλήλας, ὡς ὁ 2 πρὸς τὸν 3· τίνα λόγον ἔχουσι οἱ ὄγκοι αὐτῶν καὶ τίνα αἱ ὁμόλογοι ἀκμαὶ αὐτῶν; (Ἀπ. Αἱ ἀκμαὶ εἶναι ὡς $\sqrt{2}$ πρὸς $\sqrt{3}$· οἱ δὲ ὄγκοι ὡς $2\sqrt{2}$ πρὸς $3\sqrt{3}$).

2) Δοθέντος πολυέδρου, κατασκευάζομεν ἄλλο ὅμοιον, διπλασιάζοντες πάσας τὰς ἀκμὰς αὐτοῦ· ποσαπλασία θὰ εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ νέου καὶ ποσαπλάσιος ὁ ὄγκος αὐτοῦ; (Ἀπ. Ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία· ὁ δὲ ὄγκος ὀκταπλάσιος).

3) Δοθέντος πολυέδρου, θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἄλλο, ὅμοιον καὶ διπλάσιον κατὰ τὸν ὄγκον· μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἀκμάς του; (Ἀπ. $\sqrt[3]{2}$, ἤτοι 1,26. . .).

4) Νὰ δειχθῇ, ὅτι πολύεδρον ἔχον 7 ἀκμὰς εἶναι ἀδύνατον.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ Ϛʹ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΠΕΡΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

393. Δύο σημεῖα λέγονται *συμμετρικὰ* πρός τι ἐπίπεδον, ἐὰν ἡ εὐθεῖα, ἡ τὰ σημεῖα ταῦτα συνδέουσα, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον καὶ τέμνεται ὑπ᾽ αὐτοῦ δίχα.

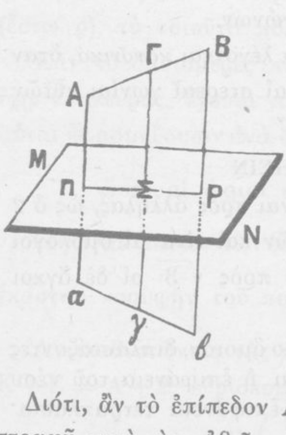
Δύο γραμμαὶ ἢ δύο ἐπιφάνειαι λέγονται *συμμετρικαὶ* πρός τι ἐπίπεδον, ἐὰν πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἑτέρας ἔχωσι τὰ συμμετρικά των ἐπὶ τῆς ἄλλης.

Δύο δὲ στερεὰ λέγονται *συμμετρικὰ* πρός τι ἐπίπεδον, ἐὰν αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ συμμετρικὸν οἱουδήποτε ἀντικειμένου βλέπομεν, ὅταν παρουσιάσωμεν αὐτὸ ἐνώπιον κατόπτρου ἐπιπέδου (ἢ εἰς ἐπιφάνειαν ἠρεμοῦντος ὑγροῦ)· διότι, κατὰ τοὺς νόμους τῆς ὀπτικῆς, ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἀντικειμένου ἔχει τὸ εἴδωλον αὐτοῦ ὄπισθεν τοῦ κατόπτρου καὶ ἐπὶ εὐθείας, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου τούτου, κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κατόπτρου καὶ εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπ᾽ αὐτοῦ· ὥστε ἕκαστον σημεῖον καὶ τὸ εἴδωλον αὐτοῦ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ κάτοπτρον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

394. Τὸ συμμετρικὸν εὐθείας εἶναι εὐθεῖα ἴση.



Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ· λέγω, ὅτι πάντα τὰ σημεῖα αὐτῆς ἔχουσι τὰ συμμετρικά των (πρὸς τὸ τυχὸν ἐπίπεδον ΜΝ) ἐπί τινος εὐθείας, ἴσης αὐτῇ.

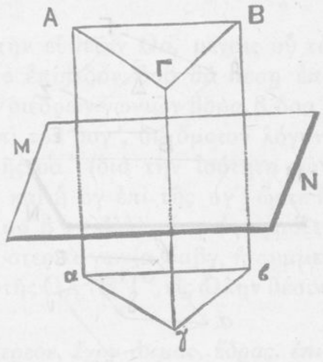
Ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β, κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, αἱ ΑΠ, ΒΡ καὶ ἂς προσεκβληθῶσιν, ὥστε νὰ γίνῃ ἡ Πα ἴση τῇ ΠΑ καὶ ἡ Ρβ ἴση τῇ ΡΒ· τὸ σημεῖον α εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α καὶ τὸ β τοῦ Β· τὰ δὲ σημεῖα τῆς αβ θὰ εἶναι συμμετρικὰ τῶν σημείων τῆς ΑΒ.

Διότι, ἂν τὸ ἐπίπεδον ΑΠΡΒ τῶν δύο παραλλήλων (305) ΑΠ, ΒΡ, στραφῇ περὶ τὴν εὐθεῖαν ΠΡ, καθ᾽ ἣν τέμνει τὸ ΜΝ, μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡαβ, ἡ ΠΑ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Πα, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν ὀρθῶν γωνιῶν Π, καὶ τὸ Α εἰς τὸ α, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν εὐθειῶν ΠΑ, Πα· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον θὰ πέσῃ καὶ ἡ ΡΒ ἐπὶ τῆς Ρβ καὶ τὸ Β εἰς τὸ β· ἄρα καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς αβ· καὶ τὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς, οἷον τὸ Γ, θὰ πέσῃ ἐπί τινος σημείου γ τῆς αβ (αγ = ΑΓ), τοῦτο δὲ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Γ· διότι, τῆς εὐθείας Γγ τὸ μέρος ΓΣ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ Σγ· εἶναι λοιπὸν ΓΣ = Σγ καὶ ἡ Γγ κάθετος ἐπὶ τὴν ΠΡ· ἄρα (334) κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

395. Τὸ συμμετρικὸν γωνίας εἶναι γωνία ἴση.

Ἔστω γωνία ἡ Α καὶ δύο σημεῖα τῶν πλευρῶν αὐτῆς, τὰ τυχόντα, Β καὶ Γ· συμμετρικὰ δὲ τῶν σημείων Α, Β, Γ, τὰ α, β, γ.



Τῆς εὐθείας ΑΒ συμμετρικὴ εἶναι ἡ αβ καὶ τῆς ΑΓ ἡ αγ καὶ τῆς ΒΓ ἡ βγ· ἄρα εἶναι

ΑΒ = αβ, ΑΓ = αγ, ΒΓ = βγ·

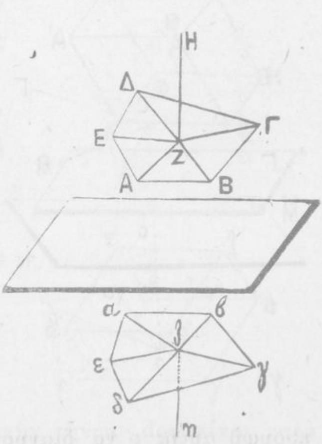
ἑπομένως τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ, εἶναι ἴσα· ἄρα ἡ γωνία Α εἶναι ἴση τῇ συμμετρικῇ αὐτῆς α.

ΘΕΩΡΗΜΑ

396. Τὸ συμμετρικὸν ἐπιπέδου σχήματος εἶναι ἐπίπεδον σχῆμα ἴσον.

Ἔστω σχῆμα ἐπίπεδον τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ ἡ ΖΗ· συμμετρικὰ δὲ τῶν σημείων Α, Β, Γ, . . ., Ζ, Η, τὰ σημεῖα α, β, γ, . . ., ζ, η.

Τῆς ΑΒ συμμετρικὴ εἶναι ἡ αβ καὶ τῆς ΒΓ ἡ βγ καὶ καθεξῆς· καὶ τῆς ΖΗ ἡ ζη. Τὸ δὲ σχῆμα αβγδε εἶναι ἐπίπεδον σχῆμα· διότι τῶν γωνιῶν ΗΖΑ, ΗΖΒ, ΗΖΓ, . . ., ΗΖΕ, οὐσῶν ὀρθῶν, καὶ αἱ συμμετρικαὶ αὐτῶν ηζα, . . ., ηζε, εἶναι ὀρθαί· ἄρα ἡ ζη εἶναι κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας ζα, ζβ, ζγ, . . ., ζε, ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι αὗται, κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ ἄγεται ἐκ τοῦ ζ κάθετον ἐπὶ τὴν ζη· ἐπ' αὐτοῦ δὲ κεῖται καὶ τὸ σχῆμα αβγδε.



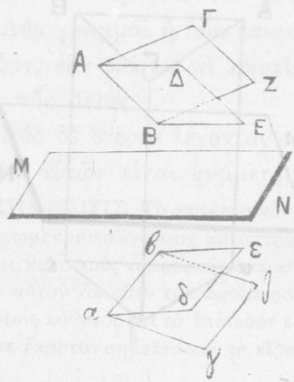
Εἶναι δὲ ἴσα τὰ δύο ἐπίπεδα σχήματα, ΑΒΓΔΕ, αβγδε, διότι ἔχουσι τὰς πλευράς των ἴσας κατὰ μίαν καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας.

ΠΟΡΙΣΜΑ

397. Ἐὰν εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

398. Τὸ συμμετρικὸν διέδρου γωνίας εἶναι δίεδρος γωνία ἴση.



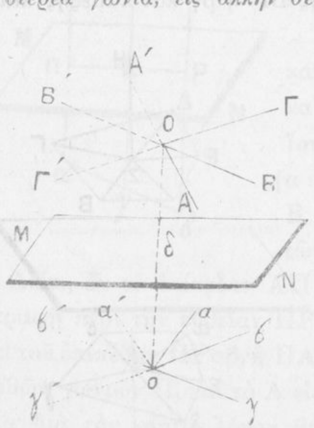
Ἔστω δίεδρος γωνία ἡ ΑΒ καὶ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς αὐτὴν ἐπίπεδος ἡ ΓΑΔ· συμμετρικὰ δὲ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, τὰ α, β, γ, δ, ε, ζ.

Τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΖ συμμετρικὸν θὰ εἶναι τὸ ἐπίπεδον αβγζ καὶ τοῦ ΑΒΕΔ τὸ αβεδ· ὥστε τῆς διέδρου γωνίας ΑΒ συμμετρικὴ θὰ εἶναι ἡ δίεδρος αβ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι ΒΑΔ, ΒΑΓ εἶναι ὀρθαί, καὶ αἱ συμμετρικαὶ αὐτῶν βαδ, βαγ εἶναι ὀρθαί· ἄρα ἡ γωνία γαδ εἶναι ἡ ἐπίπεδος γωνία, ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν δίεδρον αβ· καὶ ἐπειδὴ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι (ὡς συμμετρικαί), καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι ΑΒ, αβ θὰ εἶναι ἴσαι (330).

ΘΕΩΡΗΜΑ

399. Τὸ συμμετρικὸν στερεᾶς γωνίας εἶναι ἡ κατὰ κορυφὴν αὐτῆς στερεὰ γωνία, εἰς ἄλλην θέσιν.



Ἔστω στερεὰ γωνία ἡ ΟΑΒΓ, συμμετρικὴ δὲ αὐτῆς ἡ οαβγ (τουτέστι, συμμετρικὴ τῆς εὐθείας ΟΑ ἡ οα, τῆς ΟΒ ἡ οβ καὶ τῆς ΟΓ ἡ ογ)· λέγω, ὅτι ἡ στερεὰ γωνία οαβγ εἶναι ἡ κατὰ κορυφὴν τῆς ΟΑΒΓ, ἤτοι ἡ ΟΑ′Β′Γ′, εἰς ἄλλην θέσιν.

Ἃς ἀχθῇ ἡ οα′ παράλληλος καὶ ὁμόρροπος τῇ ΟΑ′ καὶ ἡ οβ′ τῇ ΟΒ′ καὶ ἡ ογ′ τῇ ΟΓ′. Ἡ στερεὰ γωνία οα′β′γ′ εἶναι ἴση τῇ ΟΑ′Β′Γ′· διότι ἂν ἡ στερεὰ γωνία οαβγ κινηθῇ, οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ αὐτῆς ο νὰ διανύσῃ τὴν εὐθεῖαν οΟ, αἱ δὲ ἀκμαὶ αὐτῆς νὰ μένωσι παράλληλοι ἑαυταῖς, ὅταν τὸ ο φθάσῃ εἰς τὸ Ο, θὰ ἐφαρμόσῃ ἡ οα΄ ἐπὶ τῆς ΟΑ΄ καὶ ἡ οβ΄ ἐπὶ τῆς ΟΒ΄ καὶ ἡ ογ΄ ἐπὶ τῆς ΟΓ΄· ἤτοι, αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι οα΄β΄γ΄, ΟΑ΄Β΄Γ΄, εἶναι ἴσαι. Τούτου δειχθέντος, παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ οα΄ θὰ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αοΟΑ (διότι αἱ συμμετρικαὶ εὐθεῖαι οα, ΟΑ κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ) καὶ ἡ οβ΄ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ βοΟΒ καὶ ἡ ογ΄ ἐν τῷ γοΟΓ.

Αἱ δὲ γωνίαι α΄οδ καὶ αοδ θὰ εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι ἀμφότεραι τῇ δΟΑ (395)· ὁμοίως αἱ γωνίαι β΄οδ, βοδ θὰ εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ γωνίαι γ΄οδ, γοδ ὡσαύτως ἴσαι.

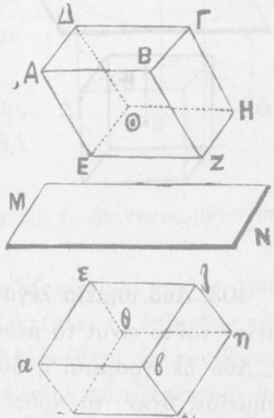
Ἂν νῦν τὸ σχῆμα οαβγ στραφῇ περὶ τὴν εὐθεῖαν Οο, μέχρις οὗ τὸ ἐπίπεδον δοα πέσῃ ἐπὶ τοῦ δοα΄, καὶ τὸ ἐπίπεδον δοβ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ δοβ΄, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν κατὰ κορυφὴν διέδρων γωνιῶν βδοα, β΄δοα΄· ὡσαύτως καὶ τὸ ἐπίπεδον δογ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ δογ΄, δι' ὅμοιον λόγον· τότε δὲ καὶ ἡ εὐθεῖα οα θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς οα΄ (διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν δοα, δοα΄) καὶ ἡ οβ ἐπὶ τῆς οβ΄ καὶ ἡ ογ ἐπὶ τῆς ογ΄· ὥστε ἡ στερεὰ γωνία οαβγ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς οα΄β΄γ΄· ἀλλ' αὕτη ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς ΟΑ΄Β΄Γ΄· ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι ἡ στερεὰ γωνία οαβγ, ἡ συμμετρικὴ τῆς ΟΑΒΓ, εἶναι ἡ κατὰ κορυφὴν αὐτῆς ΟΑ΄Β΄Γ΄, εἰς ἄλλην θέσιν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

400. Τὸ συμμετρικὸν στερεοῦ εἶναι στερεόν, ἔχον ἀκμάς, ἕδρας, ἐπιπέδους γωνίας καὶ διέδρους γωνίας, ἴσα πρὸς τὰ ἀντιστοιχοῦντα τοῦ πρώτου, στερεὰς δὲ γωνίας, τὰς κατὰ κορυφὴν τῶν ἀντιστοιχουσῶν στερεῶν γωνιῶν τοῦ πρώτου (εἰς ἄλλην θέσιν).

Δύο συμμετρικὰ στερεὰ δὲν ἐφαρμόζουσιν ἐν γένει.

Ἔστω στερεὸν τὸ ΑΒΓΔΕΖ, συμμετρικὰ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ τὰ σημεῖα α, β, γ, δ, ε, ζ.



Ἡ ἀκμὴ ΑΒ θὰ ἔχῃ συμμετρικὴν τὴν ἀκμὴν αβ, ἄρα εἶναι ΑΒ = αβ. Ὁμοίως ΑΔ = αδ, κτλ.

Ἡ ἕδρα ΑΒΓΔ ἔχει συμμετρικὴν τὴν ἕδραν αβγδ· ἄρα εἶναι ἴσαι· τὸ αὐτὸ δὲ ἰσχύει καὶ περὶ τῶν λοιπῶν.

Ἡ ἐπίπεδος γωνία ΑΒΓ ἔχει συμμετρικὴν τὴν ἐπίπεδον γωνίαν αβγ· ἄρα εἶναι ἴσαι· ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ἄλλαι.

Ἡ δίεδρος γωνία ΑΒ ἔχει συμμετρικὴν τὴν δίεδρον γωνίαν αβ· ἄρα εἶναι ἴσαι· ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ἄλλαι.

Ἡ δὲ στερεὰ γωνία Α ἔχει συμμετρικὴν τὴν α· ἄρα εἶναι κατὰ κορυφήν. Ὁμοίως καὶ αἱ ἄλλαι.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι δὲν ἐφαρμόζουσιν ἐν γένει, ἕπεται ὅτι *καὶ τὰ συμμετρικὰ στερεὰ δὲν ἐφαρμόζουσιν ἐν γένει.*

ΠΟΡΙΣΜΑ

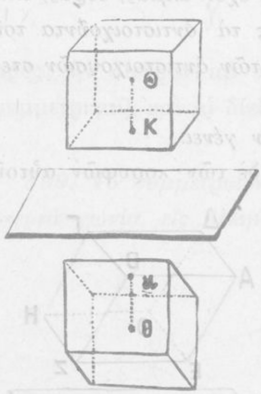
401. Τὰ συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ στερεοῦ πρὸς διάφορα ἐπίπεδα, εἶναι στερεὰ ἴσα πρὸς ἄλληλα.

Διότι, αἱ μὲν ἀκμαὶ αὐτῶν καὶ αἱ ἕδραι καὶ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι καὶ αἱ δίεδροι εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι πρὸς τὰς τοῦ πρώτου· αἱ δὲ ἀντιστοιχοῦσαι στερεαὶ γωνίαι αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσαι· διότι εἶναι κατὰ κορυφὴν γωνίαι τῆς ἀντιστοιχούσης τοῦ πρώτου· καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας εἶναι ἴσαι. Ἄρα τὰ στερεὰ ἐφαρμόζουσι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

402. Δύο συμμετρικὰ στερεὰ εἶναι ἴσα τὸν ὄγκον.

Ἔστω Θ σημεῖόν τι ἐντὸς τοῦ πρώτου στερεοῦ καὶ ϑ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ἐν τῷ δευτέρῳ.



Αἱ ἐκ τοῦ Θ, ἐπὶ τὰς ἕδρας τοῦ πρώτου, ἀγόμεναι κάθετοι, ΘΚ, ΘΚ΄. . . θὰ ἔχωσι συμμετρικὰς (ἄρα καὶ ἴσας) τὰς ἐκ τοῦ ϑ, ἐπὶ τὰς ἕδρας τοῦ δευτέρου, ἀγομένας καθέτους (397). Ἂν λοιπὸν τὰ δύο στερεὰ διαιρεθῶσιν εἰς πυραμίδας ἐκ τῶν σημείων Θ καὶ ϑ, ὡς ἐν τῇ σελίδι 273 ἐμάθομεν, καὶ αἱ βάσεις τῶν πυραμίδων θὰ εἶναι ἴσαι κατὰ μίαν, καὶ τὰ ὕψη τῶν ἴσας βάσεις ἐχουσῶν, θὰ εἶναι ἴσα· ἄρα αἱ πυραμίδες θὰ εἶναι ἴσαι, μία πρὸς μίαν (κατὰ τὸν ὄγκον), καὶ τὰ στερεά, ὡς ἀθροίσματα ἰσοδυνάμων στερεῶν, θὰ εἶναι ἰσοδύναμα, ἤτοι ἴσα τὸν ὄγκον.

ΟΡΙΣΜΟΙ

403. Δύο σημεῖα λέγονται *συμμετρικὰ* πρός τι σημεῖον, ὅταν τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ μέσον τῆς τὰ δύο σημεῖα ἐπιζευγνυούσης εὐθείας.

Δύο δὲ γραμμαὶ ἢ δύο ἐπιφάνειαι λέγονται *συμμετρικαὶ* πρός τι σημεῖον, ὅταν τὰ πρὸς αὐτὸ συμμετρικὰ τῶν σημείων τῆς ἑτέρας κεῖνται ἐπὶ τῆς ἄλλης.

Δύο δὲ στερεὰ λέγονται *συμμετρικὰ* πρός τι σημεῖον, ὅταν αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν εἶναι *συμμετρικαὶ* πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

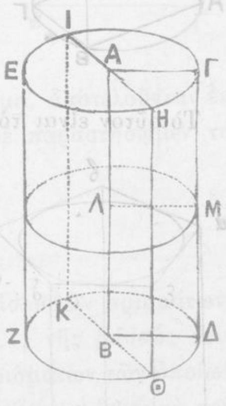
ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

ΠΕΡΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ, ΚΩΝΟΥ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΑΣ

Α΄ ΠΕΡΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ

404. *Κύλινδρος* λέγεται τὸ στερεὸν τὸ ὁποῖον γεννᾶται, ἐὰν περιστραφῇ ὀρθογώνιον περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (ἥτις μένει ἀκίνητος), πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ἤρχισε νὰ στρέφηται.



Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του. Ἐν τῇ περιστροφῇ ταύτῃ, αἱ πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΔ γράφουσι κύκλους, ὧν τὰ ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν ΑΒ, τὰ δὲ σημεῖα Γ καὶ Δ γράφουσι τὰς περιφερείας τῶν κύκλων τούτων· ἡ δὲ πλευρὰ ΓΔ γράφει ἐπιφάνειαν, ἥτις λέγεται *κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου*.

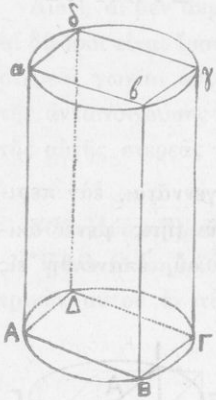
Βάσεις τοῦ κυλίνδρου λέγονται οἱ δύο κύκλοι, τοὺς ὁποίους γράφουσιν αἱ πλευραὶ ΑΓ, ΒΔ τοῦ ὀρθογωνίου.

Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου, ἢ *ὕψος* αὐτοῦ, λέγεται ἡ ἀκίνητος μένουσα πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου.

Πᾶσα τομὴ κυλίνδρου κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ εἶναι κύκλος, ἴσος μὲ τὰς βάσεις· διότι ἂν ἐκ τοῦ σημείου Λ, εἰς ὃ τέμνει τὸ ἐπίπεδον τὸν ἄξονα, ἀχθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ ὀρθογωνίου, ἡ ΛΜ, κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἡ κάθετος αὕτη, ἐν τῇ περιστροφῇ, θὰ γράψῃ κύκλον, οὗ τὸ ἐπίπεδον θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ διὰ τοῦτο θὰ εἶναι αὐτὴ ἡ τομή.

Πᾶσα δὲ τομὴ τοῦ κυλίνδρου, ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, οἷον ἡ ΙΚΘΗ, εἶναι ὀρθογώνιον, διπλάσιον τοῦ ΑΒΓΔ· διότι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, ἐν τῇ περιστροφῇ αὐτοῦ, θὰ ἔλθῃ δὶς ἐπὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ θὰ καταλάβῃ τὰς θέσεις ΑΒΗΘ, ΑΒΙΚ.

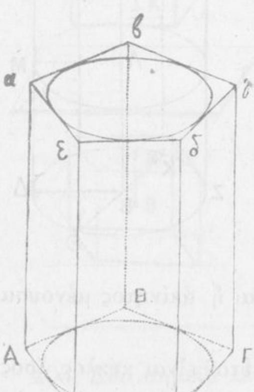
Ὀρθὸν πρίσμα λέγεται *ἐγγεγραμμένον* εἰς κύλινδρον, ἐὰν αἱ βάσεις τοῦ πρίσματος εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου· Ὁ δὲ κύλινδρος λέγεται τότε *περιγεγραμμένος* περὶ τὸ πρίσμα.



Τοιοῦτον εἶναι τὸ πρίσμα ΑΒΓΔαβγδ, ὅπερ προκύπτει ἐὰν ἐγγραφῇ εἰς μίαν τῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ καὶ ἐπ᾽ αὐτοῦ κατασκευασθῇ ὀρθὸν πρίσμα, ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ. Αἱ πλευραὶ αὐτοῦ Αα, Ββ, Γγ, Δδ, φανερὸν εἶναι ὅτι κεῖνται ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Περιγεγραμμένον δὲ λέγεται τὸ ὀρθὸν πρίσμα περὶ τὸν κύλινδρον, ἐὰν αἱ βάσεις τοῦ πρίσματος εἶναι περιγεγραμμέναι περὶ τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου· ὁ δὲ κύλινδρος λέγεται τότε *ἐγγεγραμμένος* εἰς τὸ πρίσμα.

Τοιοῦτον εἶναι τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕαβγδε, ὅπερ προκύπτει, ἐὰν περὶ μίαν τῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου, περιγραφῇ σχῆμα, ὡς τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ ἐπ᾽ αὐτοῦ κατασκευασθῇ ὀρθὸν πρίσμα, ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ. Τὰ ὀρθογώνια, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τούτου ἐγγίζουσι τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, ἕκαστον κατὰ μίαν εὐθεῖαν· διότι, ἂν ἐκ τοῦ σημείου, εἰς ὃ ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου ἐγγίζει τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου, ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ταύτην, ἡ κάθετος αὕτη θὰ εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου καὶ ἐπὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος. Αἱ δύο δὲ αὗται ἐπιφάνειαι οὐδὲν ἄλλο ἔχουσι κοινὸν σημεῖον καὶ ὁ κύλινδρος κεῖται ὅλος ἐντὸς τοῦ πρίσματος.



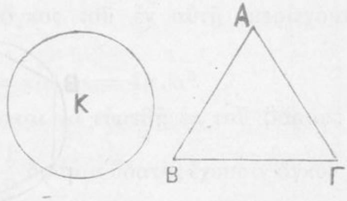
*ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς γεννωμένην ὑπὸ εὐθείας, ἥτις, ὡς ἡ ΓΔ, κινεῖται οὕτως, ὥστε νὰ μένῃ τὸ ἄκρον αὐτῆς πάντοτε ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου τινος (τοῦ ΔΚΖΘΔ), αὐτὴ δὲ νὰ μένῃ πάντοτε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου τούτου· ἑπομένως νὰ μένῃ πάντοτε παράλληλος ἑαυτῇ.

Ἐν τῇ ἀνωτέρᾳ γεωμετρίᾳ λέγεται γενικῶς *κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια*, πᾶσα ἐπιφάνεια, ἥτις γεννᾶται ὑπὸ εὐθείας κινουμένης, οὕτως, ὥστε νὰ διέρχηται πάντοτε διὰ δοθείσης καμπύλης, νὰ μένῃ δὲ καὶ παράλληλος ἑαυτῇ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

405. Ὁ κύλινδρος εἶναι ἰσοδύναμος ὀρθῷ πρίσματι, ὅπερ ἔχει βάσιν ἰσοδύναμον καὶ ὕψος ἴσον τοῖς τοῦ κυλίνδρου.

Ἔστω βάσις τοῦ κυλίνδρου ὁ κύκλος Κ, τοῦ δὲ ὀρθοῦ πρίσματος τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπερ ὑποτίθεται ἰσοδύναμον τῷ κύκλῳ Κ· ἔστωσαν δὲ ὁ κύλινδρος καὶ τὸ πρίσμα ἰσοϋψῆ· λέγω, ὅτι τὰ στερεὰ ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα.



Διότι, ὁ κύκλος καὶ τὸ τρίγωνον, ὡς ἰσοδύναμα, ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν (ἀπείρων τὸ πλῆθος)· ἂν δὲ παραστήσωμεν τὰ μέρη ταῦτα διὰ

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta, \ldots,$$

ὁ μὲν κύλινδρος ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ὀρθῶν καὶ ἰσοϋψῶν πρισμάτων, τῶν ὁποίων βάσεις εἶναι τὰ μέρη α, β, γ, δ, . . . , τῆς βάσεώς του, τὸ δὲ πρίσμα ἀποτελεῖται ὁμοίως ἐκ τῶν ὀρθῶν πρισμάτων τῶν ὁποίων βάσεις εἶναι τὰ μέρη α, β, γ, δ, . . . , τῆς βάσεώς του καὶ ὕψος τὸ τοῦ κυλίνδρου· ἄρα ὁ κύλινδρος καὶ τὸ τριγωνικὸν πρίσμα σύγκεινται ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν, ἤτοι εἶναι ἰσοδύναμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

406. Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

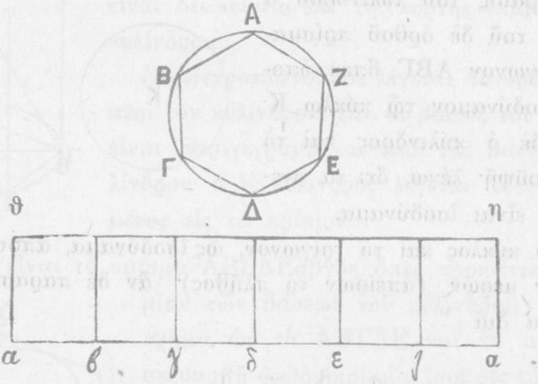
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν παρασταθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου διὰ τοῦ Α, τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως θὰ εἶναι πA^2, ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου θὰ παριστᾶται ὑπὸ τοῦ τύπου $\pi A^2 . \upsilon$, ἔνθα υ σημαίνει τὸ ὕψος αὐτοῦ.

ΟΡΙΣΜΟΣ

407. *Ἐμβαδὸν* τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου λέγεται τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος, ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον, ὅταν ἡ βάσις τοῦ πρίσματος αὐξάνηται οὕτως, ὥστε ἑκάστη πλευρὰ αὐτῆς νὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

408. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου εἶναι γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.



Διότι, ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια παντὸς εἰς κύλινδρον ἐγγεγραμμένου πρίσματος, σύγκειται ἐξ ὀρθογωνίων, ἐχόντων, ὕψος τὸ τοῦ κυλίνδρου, βάσεις δὲ τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, ὅπερ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου· ἑπομένως, ἀναπτυσσομένη ἐπὶ ἐπιπέδου, γίνεται ὀρθογώνιον, ἔχον ὕψος τὸ τοῦ κυλίνδρου, βάσιν δὲ τὴν περίμετρον τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὅριον τῆς περιμέτρου ταύτης (ὅταν αἱ πλευραὶ αὐτῆς τείνωσι πρὸς τὸ μηδὲν) εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως, ἣν παριστῶ διὰ τοῦ Γ, συνάγεται, ὅτι τὸ ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ἀναπτύγματος αθηα εἶναι $\upsilon . \Gamma$· τοῦτο ἄρα εἶναι (κατὰ τὸν ὁρισμὸν) τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν παρασταθῇ διὰ τοῦ Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, τὸ μῆκος τῆς περιφερείας θὰ εἶναι $2\pi . A$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου θὰ εἶναι $2\pi A . \upsilon$.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

1) Κυλίνδρου τινὸς ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι $4^{\pi\chi}$, 8, τὸ δὲ ὕψος $1^{\pi\chi}$, 5· πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

(Ἀπ. Ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι $\pi.(4{,}8)^2.1{,}5$, ἤτοι $108^{\kappa\pi}$, 57344..).

2) Κυλίνδρου τινὸς ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι $5^{\pi\chi}$, τὸ δὲ ὕψος $0^{\pi\chi}$, 18· πόση εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ;

(Ἀπ. $\pi.5.0{,}18$ ἢ $\pi.0.90$, ἤτοι $2^{\tau\pi\chi}$, 82743...).

3) Πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ κυλινδρικὸν ἀγγεῖον ἐκ λευκοσιδήρου, τὸ ὁποῖον νὰ χωρῇ μίαν ὀκᾶν ὕδατος καὶ νὰ ἔχῃ ὕψος διπλάσιον τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως· ποῖαι θὰ εἶναι αἱ διαστάσεις αὐτοῦ;

(Ἀπ. Ἐὰν παρασταθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ ἀγγείου διὰ τοῦ α, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ διὰ τοῦ υ καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ἐν αὐτῇ περιεχομένου ὕδατος διὰ τοῦ ω, θὰ εἶναι

$$\upsilon = 4\alpha \quad \text{καὶ} \quad \omega = \pi\alpha^2.\upsilon = 4\pi.\alpha^3.$$

Ἀλλ' ὁ ὄγκος ω τοῦ ὕδατος δύναται νὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ βάρους του (ὅπερ εἶναι μία ὀκᾶ)· τῷ ὄντι 312 $\frac{1}{2}$ δράμια ὕδατος ἔχουσιν ὄγκον μιᾶς λίτρας, τουτέστι μιᾶς κυβικῆς παλάμης, ἤτοι $\frac{1}{1000}$ τοῦ κυβικοῦ πήχεως· ἄρα, ἡ ὀκᾶ τοῦ ὕδατος θὰ ἔχῃ ὄγκον $\frac{2.400}{625.1000}$ ἢ $\frac{4}{3125}$ ὅθεν ἕπεται

$$4\pi\alpha^3 = \frac{4}{3125} \quad \text{καὶ} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{3125\pi}}$$

καὶ διὰ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκομεν

$$\alpha = 0^{\pi\chi},0467\ldots, \text{ ὅθεν καὶ } \upsilon = 0^{\pi\chi},1868\ \text{)}.$$

4) Κύλινδρός τις ἐκ χυτοῦ σιδήρου ἔχει μῆκος μὲν $4^{\pi\chi}$, 12, περιφέρειαν δὲ βάσεως $0^{\pi\chi}$, 6· ζητεῖται τὸ βάρος αὐτοῦ.

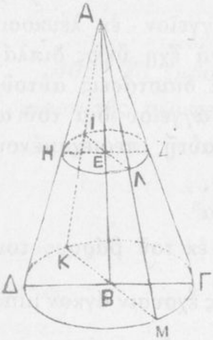
(Ἀπ. Ἡ ἀκτὶς τοῦ κυλίνδρου θὰ εἶναι $\frac{0{,}6}{2\pi}$· ὅθεν ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι $\frac{(0{,}6)^2}{4\pi}(4{,}12)$ ἢ $\frac{0{,}36}{\pi}(1{,}03)$· ἤτοι $0^{\kappa\pi}$, 1178... ἢ $117^{\kappa\pi\lambda}$, 8...

Ἴσος ὄγκος ὕδατος, ἤτοι $117^{\lambda\iota\tau\rho.}$, 8... θὰ εἶχε βάρος $117{,}8 \times 312^1/_2$ δράμια· ἐπειδὴ δὲ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χυτοῦ σιδήρου εἶναι περίπου 7,2, τὸ ζητούμενον βάρος τοῦ κυλίνδρου εἶναι δράμια $117{,}8 \times 7{,}2 \times 312^1/_2$· ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις, εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον βάρος ἴσον μὲ 663 ὀκάδ. 250 δράμια).

Β΄ ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ

409. *Κῶνος* λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον γεννᾶται, ὅταν ὀρθογώνιον τρίγωνον περιστραφῇ περὶ μίαν τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν, πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ἤρχισε νὰ στρέφηται.



Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του. Ἐν τῇ περιστροφῇ ταύτῃ ἡ μὲν πλευρὰ ΒΓ θὰ γράψῃ κύκλον, οὗ τὸ ἐπίπεδον θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ὅστις λέγεται *βάσις* τοῦ κώνου, ἡ δὲ πλευρὰ ΑΓ θὰ γράψῃ ἐπιφάνειαν, ἥτις λέγεται *κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου.*

Ἄξων τοῦ κώνου, ἢ *ὕψος* αὐτοῦ λέγεται ἡ ἀκίνητος μένουσα πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου

Κορυφὴ δὲ τοῦ κώνου τὸ σημεῖον Α.

Πλευρὰ δὲ ἢ *ἀπόστημα* τοῦ κώνου λέγεται ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐξ οὗ γεννᾶται.

Πᾶσα κώνου τομή, κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ, εἶναι κύκλος, τὸ κέντρον ἔχων, ἐπὶ τοῦ ἄξονος· διότι, ἂν ἐκ τοῦ σημείου Ε, εἰς τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἐπίπεδον τὸν ἄξονα, ἀχθῇ, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ τριγώνου. ἡ ΕΖ, κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἡ κάθετος αὕτη, ἐν τῇ περιστροφῇ, θὰ γράψῃ κύκλον, οὗ τὸ ἐπίπεδον θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ διὰ τοῦτο θὰ εἶναι αὐτὴ ἡ τομή.

Πᾶσα δὲ τομὴ κώνου ὑπὸ ἐπιπέδου, διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, οἷον ἡ ΑΜΚ, εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον, διπλάσιον τοῦ ΑΒΓ· διότι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐν τῇ περιστροφῇ αὐτοῦ, θὰ ἔλθῃ δὶς ἐπὶ τοῦ τέμνοντος, ἐπιπέδου, καὶ θὰ καταλάβῃ τὰς θέσεις ΑΒΚ καὶ ΑΒΜ.

Ἐγγεγραμμένη λέγεται πυραμὶς εἰς κῶνον, ἐὰν ἔχωσιν ἀμφότερα τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου.

Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς εἰς κῶνον ἐγγεγραμμένης πυραμίδος κεῖνται προδήλως ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου· ἡ δὲ πυραμὶς κεῖται ἐντὸς τοῦ κώνου.

Περιγεγραμμένη δὲ λέγεται ἡ πυραμὶς περὶ κῶνον, ἐὰν ἀμφότερα ἔχωσι τὴν αὐτὴν κυρυφὴν καὶ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι περιγεγραμμένη περὶ τὴν βάσιν τοῦ κώνου.

Ἑκάστη τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τῆς περὶ κῶνον περιγεγραμμένης πυραμίδος ἐγγίζει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου κατὰ μίαν εὐθεῖαν· διότι, ἂν ἐκ τοῦ σημείου, εἰς ὃ ἡ βάσις τῆς ἕδρας ἐγγίζει τὴν βάσιν τοῦ κώνου, ἀχθῇ εὐθεῖα, εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου, ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ἕδρας καὶ ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. Αἱ δύο δὲ αὗται ἐπιφάνειαι οὐδὲν ἄλλο ἔχουσι κοινὸν σημεῖον καὶ ὁ κῶνος κεῖται ὅλος ἐντὸς τῆς πυραμίδος.

Ἐὰν κῶνος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου, παραλλήλου τῇ βάσει αὐτοῦ (τουτέστι καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα), τὸ μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς βάσεως μέρος τοῦ κώνου, λέγεται *κόλουρος κῶνος*· τοιοῦτον εἶναι τὸ στερεὸν ΔΜΓΚΗΛΖΙ (σχῆμα τὸ προηγούμενον).

Βάσεις τοῦ κολούρου κώνου λέγονται οἱ δύο κύκλοι, ὑφ' ὧν περατοῦται. *Ἄξων* δὲ αὐτοῦ ἢ *ὕψος*, λέγεται ἡ τὰ κέντρα τῶν βάσεων ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα. *Πλευρὰ* δὲ αὐτοῦ λέγεται τὸ μέρος τῆς πλευρᾶς τοῦ ὅλου κώνου, τὸ μεταξὺ τῶν δύο βάσεων περιεχόμενον.

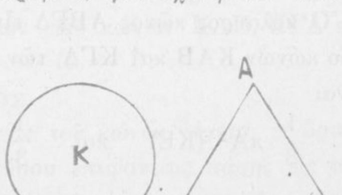
Ἐν τῷ στερεῷ ΔΜΓΚΗΛΖΙ, βάσεις μὲν εἶναι οἱ κύκλοι ΔΜΓΚ καὶ ΗΛΖΙ, ἄξων δὲ ἡ εὐθεῖα ΕΒ, πλευρὰ δὲ ἡ ΓΖ.

*ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γεννωμένη ὑπὸ εὐθείας ἥτις κινεῖται οὕτως, ὥστε νὰ διέρχηται πάντοτε διὰ τῆς περιφερείας κύκλου τινὸς καὶ δι' ἑνὸς σημείου, ἐξ οὗ ἡ ἀγομένη ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου κάθετος πίπτει εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ. Ἐν τῇ ἀνωτέρᾳ γεωμετρίᾳ καλεῖται ἐν γένει *κωνικὴ* ἐπιφάνεια, πᾶσα ἐπιφάνεια, ἥτις γεννᾶται ὑπὸ εὐθείας κινουμένης οὕτως, ὥστε νὰ διέρχηται πάντοτε διά τινος σημείου καὶ διά τινος καμπύλης.

ΘΕΩΡΗΜΑ

410. Ὁ κῶνος εἶναι ἰσοδύναμος πυραμίδι, ἥτις ἔχει βάσιν ἰσοδύναμον καὶ ὕψος ἴσον.

Ἔστω βάσις τοῦ κώνου ὁ κύκλος Κ, τῆς δὲ πυραμίδος τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπερ ὑποτίθεται ἰσοδύναμον τῷ κύκλῳ· ἔστωσαν δὲ ὁ κῶνος καὶ ἡ πυραμὶς ἰσοϋψῆ· λέγω, ὅτι τὰ στερεὰ ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα.



Διότι ὁ κύκλος καὶ τὸ τρίγωνον ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν (ἀπείρων τὸ πλῆθος)· ἂν δὲ παραστήσωμεν τὰ μέρη ταῦτα διὰ

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \ldots\ldots,$$

ὁ μὲν κῶνος ἀποτελεῖται ἐκ τῶν πυραμίδων, ὧν κορυφὴ εἶναι ἡ κορυφὴ αὐτοῦ καὶ βάσεις τὰ μέρη α, β, γ, δ, ..., τῆς βάσεώς του, ἡ δὲ τριγωνικὴ πυραμὶς ἀποτελεῖται ὁμοίως ἐκ τῶν πυραμίδων, ὧν κορυφὴ εἶναι ἡ κορυφὴ αὐτῆς καὶ βάσεις τὰ μέρη α, β, γ δ, . . ., τῆς βάσεώς της. Ἀλλ' αἱ τὸν κῶνον ἀποτελοῦσαι πυραμῖδες, εἶναι, μία πρὸς μίαν, ἰσοδύναμοι πρὸς τὰς πυραμίδας, τὰς ἀποτελούσας τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα (ὡς ἔχουσαι ἴσην βάσιν καὶ ἴσον ὕψος)· ἄρα ὁ κῶνος καὶ ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς σύγκεινται ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν, ἤτοι εἶναι ἰσοδύναμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

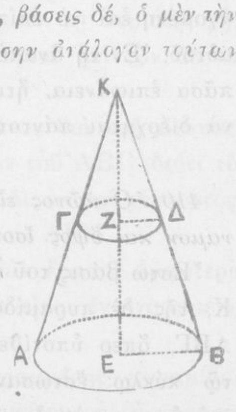
411. Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους του.

Ἑπομένως, ὁ κῶνος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ἔχοντος ἴσην βάσιν καὶ ἴσον ὕψος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν παρασταθῇ διὰ τοῦ Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου καὶ διὰ τοῦ υ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ὁ ὄγκος αὐτοῦ παρίσταται ὑπὸ τοῦ τύπου $\frac{1}{3}\pi A^2 . \upsilon$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

412. Ὁ κόλουρος κῶνος εἶναι ἄθροισμα τριῶν κώνων, οἵτινες ἔχουσιν ὕψος μὲν κοινόν, τὸ τοῦ κολούρου κώνου, βάσεις δέ, ὁ μὲν τὴν ἄνω τούτου βάσιν, ὁ δὲ τὴν κάτω, ὁ δὲ τὴν μέσην ἀνάλογον τούτων



Ἔστω κόλουρος κῶνος ὁ ΑΒΓΔ, ἔχων βάσεις τοὺς κύκλους ΑΒΑ καὶ ΓΔΓ, ὧν τὰς ἀκτῖνας ΕΒ καὶ ΖΔ, παριστῶμεν διὰ τοῦ Α καὶ α, ὕψος δὲ τὴν ΕΖ, ἣν παριστῶμεν διὰ τοῦ υ.

Ὁ κόλουρος κῶνος ΑΒΓΔ εἶναι διαφορὰ τῶν δύο κώνων ΚΑΒ καὶ ΚΓΔ, τῶν ὁποίων οἱ ὄγκοι εἶναι

$$\frac{1}{3}\pi A^2 . (KE) \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{3}\pi \alpha^2 . (KZ)$$

ἄρα ἔχομεν κόλ. κῶν. $AB\Gamma\Delta = \frac{1}{3}\pi\,(A^2 . KE - \alpha^2 . KZ)$.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΚΖΔ, ΚΕΒ εἶναι ὅμοια, εἶναι

$$\frac{\text{ΚΕ}}{\text{Α}} = \frac{\text{ΚΖ}}{\alpha}\cdot$$

καί, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ρ τὸν ἕνα ἐκ τῶν λόγων τούτων, θὰ εἶναι

$$\text{ΚΕ} = \varrho\,.\,\text{Α}, \qquad \text{ΚΖ} = \varrho\,.\,\alpha\cdot \qquad (\iota)$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας τῶν ΚΕ, ΚΖ, εἰς τὴν πρώτην ἰσότητα, εὑρίσκομεν

$$\text{κόλ. κῶν. ΑΒΓΔ} = \frac{1}{3}\,\pi\,.\,(\text{Α}^3 - \alpha^3)\,\varrho\,.$$

Ἀλλ' ἐὰν αἱ ἰσότητες (ι) ἀφαιρεθῶσι κατὰ μέλη, προκύπτει

$$\text{ΚΕ} - \text{ΚΖ} = \varrho\ (\text{Α} - \alpha),$$

$$\text{ἤτοι} \quad \upsilon = \varrho\,(\text{Α} - \alpha), \qquad \text{ὅθεν} \quad \varrho = \frac{\upsilon}{\text{Α} - \alpha}\cdot$$

ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου γίνεται

$$\text{κόλ. κῶν. ΑΒΓΔ} = \frac{1}{3}\,\pi\upsilon\,\frac{\text{Α}^3 - \alpha^3}{\text{Α} - \alpha}$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως (Στ. Ἀλγ., σελ. 44),

$$\text{κόλ. κῶν. ΑΒΓΔ} = \frac{1}{3}\,\pi\upsilon\,.\,(\text{Α}^2 + \text{Α}\alpha + \alpha^2).$$

Ἡ ἰσότης αὕτη δεικνύει τὴν ἀλήθειαν τοῦ θεωρήματος· διότι

$\frac{1}{3}\pi\text{Α}^2.\upsilon$ εἶναι ὁ ὄγκος κώνου, ἔχοντος ὕψος υ καὶ βάσιν τὸν κύκλον ΑΒΑ·

$\frac{1}{3}\pi\alpha^2.\upsilon$ εἶναι ὁ ὄγκος κώνου, ἔχοντος ὕψος υ καὶ βάσιν τὸν κύκλον ΓΔΓ καὶ

$\frac{1}{3}\pi\upsilon.\text{Α}\alpha$ εἶναι ὁ ὄγκος κώνου, ἔχοντος ὕψος υ καὶ βάσιν τὸν κύκλον $\pi\text{Α}\alpha$,

ὅστις εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν δύο ἄλλων· διότι εἶναι

$$\pi\,.\,\text{Α}\alpha = \sqrt{\pi\text{Α}^2\,.\,\pi\alpha^2}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ διὰ τῆς μεθόδου τοῦ ἐδαφίου 379, τρεπομένων τῶν κώνων ΚΑΒ, ΚΓΔ εἰς ἰσοδυνάμους τριγωνικὰς πυραμίδας.

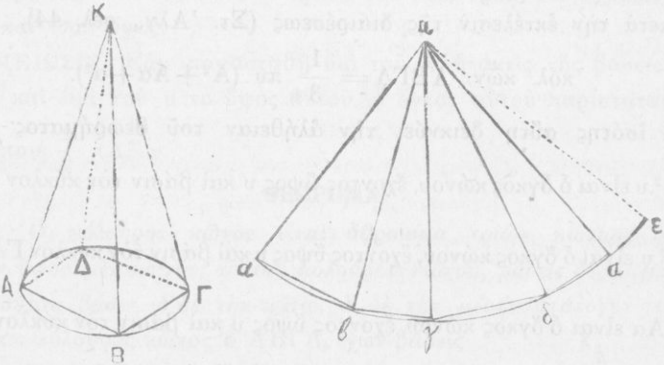
ΟΡΙΣΜΟΣ

413. *Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου* λέγεται τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πάσης εἰς τὸν κῶνον ἐγγεγραμμένης πυραμίδος, ὅταν ἡ βάσις τῆς πυραμίδος αὐξάνηται οὕτως, ὥστε ἑκάστη πλευρὰ αὐτῆς νὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

414. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου εἶναι γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

Ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κῶνον ἡ τυχοῦσα πυραμὶς ΚΑΒΓΔ. Ἐὰν ἡ ἐκ τῶν τριγώνων ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΑ, συγκειμένη παράπλευρος ἐπιφάνεια αὐτῆς, ἀναπτυχθῇ ἐπὶ ἐπιπέδου, θὰ λάβῃ τὸ σχῆμα καβγδα, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ α, β, γ, δ, α, θὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις γράφεται μὲ κέντρον τὸ κ καὶ ἀκτῖνα τὴν πλευρὰν ΚΑ τοῦ κώνου· διότι, αἱ εὐθεῖαι κα, κβ, κγ, κδ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ κώνου. Ἀλλά, καθόσον αἱ πλευραὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, ὅπερ εἶναι βάσις τῆς πυραμίδος, τείνουσι πρὸς τὸ μηδέν, ἡ μὲν τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ τείνει πρὸς τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἡ δὲ ἴση αὐτῆς αβ + βγ + γδ + δα τείνει πρός τι τόξον αε τοῦ κύκλου, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένη, ὅπερ τόξον αε εἶναι διὰ τοῦτο ἴσον τῇ περι-



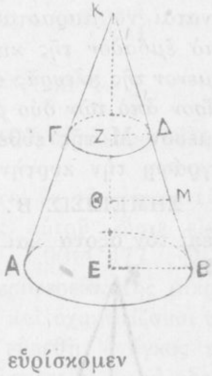
φερείᾳ ΑΒΓΔ· ὁ δὲ πολυγωνικὸς τομεὺς καβγδα τείνει πρὸς τὸν κυκλικὸν τομέα καε, ὅστις, ἑπομένως, εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως τούτου εἶναι $\frac{1}{2}$ (κα).(τοξ. αε) ἢ $\frac{1}{2}$ (ΚΑ).(περιφ. ΑΒΓΔ)· τοῦτο ἄρα εἶναι (κατὰ τὸν ὁρισμὸν) καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν παρασταθῇ ἡ μὲν ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου διὰ τοῦ Α, ἡ δὲ πλευρὰ αὐτοῦ διὰ τοῦ λ, τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{1}{2}\lambda . 2\pi A$, ἤτοι $\pi . A . \lambda$.

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\lambda = \sqrt{A^2+\upsilon^2}$, τὸ ἐμβαδὸν τῆς αὐτῆς περιφερείας παρίσταται καὶ ὑπὸ τοῦ τύπου $\pi . A . \sqrt{A^2+\upsilon^2}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

415. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου εἶναι γινόμενον τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων αὐτοῦ.



Ἔστω κόλουρος κῶνος ὁ ΑΒΓΔ, οὗτινος αἱ μὲν ἀκτῖνες τῶν βάσεων ἃς παρασταθῶσι διὰ τῶν Α καὶ α, ἡ δὲ πλευρὰ ΔΒ διὰ τοῦ λ.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ εἶναι διαφορὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο κώνων ΚΑΒ καὶ ΚΓΔ· τῶν δὲ κυρτῶν τούτων ἐπιφανειῶν τὰ ἐμβαδὰ εἶναι

$$\pi . A . (KB) \quad \text{καὶ} \quad \pi . \alpha . (K\Delta)\cdot$$

ὅθεν κυρτ. ἐπιφ. $AB\Gamma\Delta = \pi (A . KB - \alpha . K\Delta)$.

Ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΕΒ καὶ ΚΖΔ εὑρίσκομεν

$$\frac{KB}{A} = \frac{K\Delta}{\alpha}.$$

καὶ παριστῶντες διὰ τοῦ ρ ἕνα ἐκ τῶν ἴσων τούτων λόγων, θὰ ἔχωμεν

$$KB = \rho . A, \qquad K\Delta = \rho . \alpha, \qquad (1)$$

ὅθεν ἕπεται κυρτ. ἐπιφ. $AB\Gamma\Delta = \pi (A^2 - \alpha^2) \rho\cdot$

ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) προκύπτει

$$KB - K\Delta = \rho (A - \alpha),$$

$$\text{ἤτοι} \quad \lambda = \rho (A - \alpha), \quad \text{καὶ} \quad \rho = \frac{\lambda}{A - \alpha},$$

ἡ τιμὴ τῆς ἐπιφανείας γίνεται

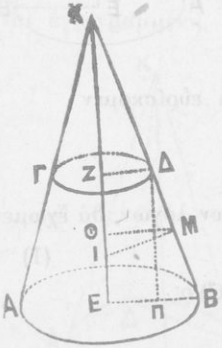
$$\text{κυρτ. ἐπιφ. } AB\Gamma\Delta = \pi . \lambda . \frac{A^2 - \alpha^2}{A - \alpha}$$

$$\text{ἢ} \quad \text{κυρτ. ἐπιφ. } AB\Gamma\Delta = \pi . \lambda . (A + \alpha).$$

Ἡ ἰσότης δὲ αὕτη δεικνύει τὴν ἀλήθειαν τοῦ θεωρήματος· διότι τὸ δεύτερον μέλος αὐτῆς γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $2\pi . (A + \alpha) . \frac{1}{2} \lambda\cdot$ καὶ ὁ μὲν παράγων $2\pi . (A + \alpha)$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο περιφερειῶν $2\pi A$ καὶ $2\pi\alpha$, ὁ δὲ ἄλλος εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ κολούρου κώνου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς πλευρᾶς ΒΔ ἀχθῇ ἡ ΜΘ, παράλληλος τῇ ΒΕ, ἐν τῷ τραπεζίῳ ΒΕΖΔ, θὰ εἶναι (190 σημ.) ἡ ΜΘ ἴση τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν ΒΕ καὶ ΔΖ, ἤτοι $ΜΘ = \frac{1}{2}(Α+α)$· ἡ δὲ περιφέρεια, ἡ ἔχουσα ἀκτῖνα τὴν ΜΘ, θὰ εἶναι $2π.ΜΘ$, ἤτοι $2π.\frac{1}{2}(Α+α)$, τουτέστιν $π(Α+α)$· ὅθεν ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου δύναται νὰ παρασταθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: $2π.ΜΘ.λ$· ὅθεν συνάγεται, ὅτι *τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου εἶναι γινόμενον τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅστις ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ.* (Τὴν περιφέρειαν ταύτην γράφει τὸ μέσον Μ τῆς εὐθείας ΔΒ, ὅταν αὕτη, στρεφομένη περὶ τὴν ΚΕ, γράφῃ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κολούρου κώνου).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς ΒΔ, ἀχθῇ ἡ ΜΘ, κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ ἡ ΜΙ, κάθετος ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου, ἐκ δὲ τοῦ Δ, παράλληλος τῷ ἄξονι, ἡ ΔΠ, τὰ δύο τρίγωνα ΜΘΙ καὶ ΔΠΒ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθέτους, ἑκάστην ἑκάστῃ· ἐκ δὲ τούτων εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα $\frac{ΔΠ}{ΜΘ} = \frac{ΔΒ}{ΜΙ}$,



ἐξ ἧς $ΔΠ.ΜΙ = ΔΒ.ΜΘ$, τουτέστιν $ΕΖ.ΜΙ = ΔΒ.ΜΘ$, διότι $ΕΖ = ΔΠ$· ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου, τὸ $2πΜΘ.λ$, γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $2π.ΜΙ.ΕΖ$, ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι *τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου εἶναι γινόμενον τοῦ ὕψους του ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα τὴν ἐκ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς του ὑψουμένην κάθετον ἐπ᾽ αὐτὴν μέχρι τοῦ ἄξονος.*

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

1) Κώνου τινός, ἡ μὲν διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 1πχ, 8, ἡ δὲ πλευρὰ 2πχ, 64· πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

(Ἀπ. Τὸ ὕψος τοῦ κώνου εἶναι πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ὑποτείνουσα εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου, μία δὲ τῶν καθέτων, ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως· διὰ τοῦτο τὸ ὕψος εἶναι $\sqrt{(2,64)^2-(0,9)^2}$ ἢ $\sqrt{3,54.1,74}$· ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κώνου θὰ εἶναι $\frac{1}{3}π.(0,9)^2\sqrt{3,54.1,74}$· καὶ διὰ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκομεν 2κπ, 105).

2) Κώνου τινὸς ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι $0^{\pi\chi},5$, τὸ δὲ ὕψος $2^{\pi\chi}$. πόση εἶναι ἡ κυρτὴ αὐτοῦ ἐπιφάνεια;

(Ἀπ. Ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου εἶναι $\sqrt{(2)^2+(0,5)^2}$ ἢ $\sqrt{4,25}$· ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ εἶναι $\pi\,(0,5)\,.\sqrt{4,25}$ ἤ, μετὰ τὰς πράξεις $3^{\pi\chi}, 228\ldots$).

3) Κολούρου τινὸς κώνου, τὸ ὕψος εἶναι $1^{\pi\chi}, 18$, αἱ δὲ ἀκτῖνες τῶν βάσεων εἶναι 0,14 καὶ 0,06· πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

$$(\text{Ἀπ. } \frac{1}{3}\ \pi.(1,18)\ \left\{(0,14)^2+(0,14).(0,06)+(0,06)^2\right\}$$

ἢ $\frac{1}{3}\,\pi\,(1,18)\,(0,0316)$· καὶ μετὰ τὰς πράξεις, $0^{\kappa\pi}, 03904\ldots$).

4) Κώνου τινός, ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι $4^{\pi\chi}$, ἡ δὲ πλευρὰ $12^{\pi\chi},4$· νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

(Ἀπ. Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου σύγκειται ἐκ τῆς ἐπιφανείας τῆς βάσεως καὶ ἐκ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτοῦ· ὥστε εἶναι

$$4\pi+(24,8)\,\pi, \quad \text{ἤτοι} \quad (28,8)\,\pi, \quad \text{ἤτοι} \quad 90^{\tau\pi}, 477\ldots).$$

5) Εἰς κόλουρόν τινα κῶνον ἄγονται, ἐκ τῆς περιφερείας τῆς μικροτέρας βάσεως, παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ καὶ σχηματίζουσι τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν κυλίνδρου τινός· νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ μένοντος στερεοῦ, ὅταν ἀπὸ τοῦ κολούρου κώνου ἀφαιρεθῇ ὁ κύλινδρος.

(Ἀπ. Ὁ ὄγκος τοῦ μένοντος στερεοῦ εἶναι (412):

$$\frac{1}{3}\,\pi\upsilon\,(A-\alpha)\,.\,(A+2\alpha).$$

Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν $A=5^{\pi}$, $\alpha=4^{\pi}$ καὶ $\upsilon=9^{\pi}$, εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις: $39.\pi$, ἤτοι $122^{\kappa\pi}, 522$).

6) Κῶνός τις ἔχει ὕψος $10^{\pi\chi}$· ἐὰν θέλωμεν νὰ τμήσωμεν αὐτὸν εἰς δύο ἴσα τὸν ὄγκον μέρη, δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει, ἐκ τίνος σημείου τοῦ ὕψους πρέπει νὰ ἀχθῇ τὸ τέμνον ἐπίπεδον;

(Ἀπ. Ἐὰν παραστήσωμεν δι' A τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως καὶ δι' υ τὸ ὕψος τοῦ κώνου, ἔτι δὲ δι' α τὴν ἀκτῖνα τῆς τομῆς καὶ διὰ χ τὴν ἀπόστασιν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ἀπὸ τῆς κορυφῆς, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\chi}{\upsilon}=\frac{\alpha}{A}, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \alpha=\frac{A}{\upsilon}\,\chi.$$

Ὁ ὄγκος τοῦ ἀποτεμνομένου κώνου εἶναι $\frac{1}{3}\,\pi\,\frac{A^2}{\upsilon^2}\,\chi^3$ καὶ ἐπειδὴ ὁ ὄγκος οὗτος εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλου, θὰ ἔχωμεν $\frac{1}{3}\,\pi\,\frac{A^2}{\upsilon^2}\,\chi^3=\frac{1}{6}\ \pi A^2.\upsilon$·

καὶ ἁπλοποιοῦντες εὑρίσκομεν $\chi^2=\frac{1}{2}\ \upsilon^3$, ὅθεν $\chi=\frac{\upsilon}{\sqrt[3]{2}}$· καὶ ἐπειδὴ ἐδόθη $\upsilon=10$ προκύπτει $\chi=7,774\ldots$).

Γ΄ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

416. *Σφαῖρα* λέγεται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποίου ἕν σημεῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

Τὸ σημεῖον τοῦτο λέγεται *κέντρον* τῆς σφαίρας.

Ἀκτὶς τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἐκ τοῦ κέντρου ἄγεται εἴς τι σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατοῦται ἑκατέρωθεν ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς σφαίρας, πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι· ὡσαύτως καὶ αἱ διάμετροι, ὡς διπλάσιαι τῆς ἀκτῖνος.

Δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν τὴν σφαῖραν γεννωμένην ὑπὸ ἡμικυκλίου, στρεφομένου περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ. Διότι, πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τοῦ οὕτω γεννωμένου στερεοῦ, ὡς σημεῖα τῆς περιφερείας, θὰ ἀπέχωσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτῆς.

Ἐπίπεδον λέγεται *ἐφαπτόμενον* σφαίρας, ἐὰν ἔχῃ ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.

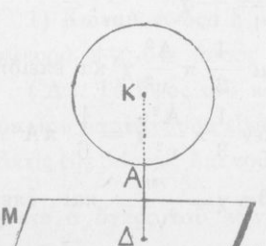
Δύο σφαῖραι λέγεται, ὅτι *ἐφάπτονται ἀλλήλων*, ἐὰν αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν ἓν μόνον ἔχωσι κοινὸν σημεῖον.

ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΘΕΣΕΙΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΡΟΣ ΣΦΑΙΡΑΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

417. Ἐὰν ἐπίπεδον καὶ σφαῖρα μηδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον, τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ὑπερβαίνει τὴν ἀκτῖνα.

Καὶ ἀντιστρόφως, *ἐὰν τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου σφαίρας ἀπὸ ἐπιπέδου ὑπερβαίνῃ τὴν ἀκτῖνα, ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον.*



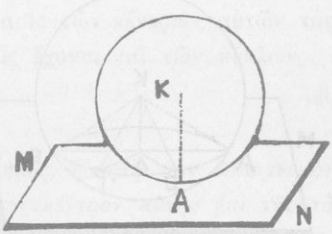
Διότι, ὁ πούς Δ τοῦ ἀποστήματος τούτου κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας (ἄλλως τὸ ἐπίπεδον, ὡς διερχόμενον διὰ τοῦ Δ, θὰ ἐξήρχετο ἐκ τῆς σφαίρας καὶ θὰ ἔτεμνεν αὐτήν)· ἑπομένως τὸ ἀπόστημα ὑπερβαίνει τὴν ἀκτῖνα.

Καὶ ἀντιστρόφως· ἂν ὑποτεθῇ τὸ ἀπόστημα ΚΔ τοῦ κέντρου Κ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, μεγαλήτερον τῆς ἀκτῖνος ΚΑ τῆς σφαίρας, τὸ Δ θὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας· καὶ πάντα δὲ τὰ λοιπὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου θὰ κεῖνται ἐκτὸς τῆς σφαίρας· διότι αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὡς πλάγιαι, ὑπερβαίνουσι τὴν κάθετον ΚΔ, ἑπομένως ὑπερβαίνουσι καὶ τὴν ἀκτῖνα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

418. Ἐὰν σφαῖρα καὶ ἐπίπεδον ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἴσον τῇ ἀκτῖνι.

Καὶ ἀντιστρόφως, *ἐὰν τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἴσον τῇ ἀκτῖνι, ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, τουτέστι τὸ ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς σφαίρας.*



Διότι, ἂν ἡ σφαῖρα Κ καὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἔχωσι μόνον τὸ σημεῖον Α κοινόν, τὰ λοιπὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου κεῖνται ἐκτὸς τῆς σφαίρας καί, διὰ τοῦτο, ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου περισσότερον τῆς ἀκτῖνος· ἑπομένως, ἡ ΚΑ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν ἐκ τοῦ Κ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἀγομένων εὐθειῶν· εἶναι λοιπὸν κάθετος ἐπ' αὐτὸ καὶ τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἡ ἀκτὶς ΚΑ.

Ἀντιστρόφως· ἂν τὸ ἀπόστημα ΚΑ τοῦ κέντρου Κ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ εἶναι ἴσον τῇ ἀκτῖνι, ὁ πούς αὐτοῦ, ὡς ἄκρον τῆς ἀκτῖνος, θὰ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου. Ἀλλὰ τὰ λοιπὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου περισσότερον τῆς ἀκτῖνος (διότι αἱ ἐκ τοῦ κέντρου εἰς αὐτὰ ἀγόμεναι εἶναι πλάγιαι καὶ διὰ τοῦτο μεγαλήτεραι τῆς καθέτου ΚΑ)· ἄρα κεῖνται ἐκτὸς τῆς σφαίρας· ὥστε ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχουσι, τὸ Α.

ΠΟΡΙΣΜΑ

419. Εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὑπάρχει ἓν ἐπίπεδον, ἐφαπτόμενον αὐτῆς· καὶ ἓν μόνον.

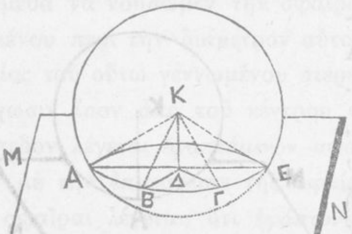
Διότι, τὸ εἰς τὸ σημεῖον Α ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον πρέπει νὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΑ· ἓν δὲ μόνον ἐπίπεδον δύναται νὰ ἀχθῇ κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΑ, εἰς τὸ σημεῖον Α.

ΘΕΩΡΗΜΑ

420. *Ἐὰν ἐπίπεδον καὶ σφαῖρα ἔχωσι κοινὰ σημεῖα, περισσότερα τοῦ ἑνός, τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι μικρότερον τῆς ἀκτῖνος καὶ τὸ ἐπίπεδον τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ κύκλον.*

Τὸ ἀπόστημα δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλήτερον τῆς ἀκτῖνος· διότι τότε, ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον δὲν θὰ εἶχον κοινὸν σημεῖον (417)· οὐδὲ ἴσον τῇ ἀκτῖνι δύναται νὰ εἶναι· διότι τότε, θὰ εἶχον ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον· ἄρα τὸ ἀπόστημα θὰ εἶναι μικρότερον τῆς ἀκτῖνος.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι μικρότερον τῆς ἀκτῖνος, ὁ ποὺς αὐτοῦ Δ κεῖται ἐντὸς τῆς σφαίρας· ἄρα τὸ δι᾽ αὐτοῦ διερχόμενον ἐπίπεδον ΜΝ τέμνει τὴν σφαῖραν· λέγω δέ, ὅτι ἡ τομὴ εἶναι κύκλος.



Διότι, ἂν ἐκ τοῦ ποδὸς Δ τοῦ ἀποστήματος ΚΔ, ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, εἰς ὁσαδήποτε σημεῖα τῆς γραμμῆς, ἐφ᾽ ἧς περατοῦται ἡ τομή, οἷον αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, . . ., ἀχθῶσι δὲ καὶ αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, . . ., αὗται, ὡς πρὸς τὴν κάθετον ΚΔ, θὰ εἶναι πλάγιαι· ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἴσαι, ἀπέχουσιν ἴσαν ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου (309)· ἄρα αἱ ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, . . ., εἶναι πᾶσαι ἴσαι· ἄρα πάντα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς ΑΒΓΕ ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ Δ καὶ διὰ τοῦτο ἡ γραμμὴ αὕτη εἶνα περιφέρεια κύκλου καὶ τὸ Δ εἶναι κέντρον αὐτῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΔΑ εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν

$$(\mathrm{K}\mathrm{A})^2 = (\mathrm{K}\Delta)^2 + (\Delta\mathrm{A})^2,$$

δι᾽ ἧς συνδέονται (ἐν ἑκάστῃ σφαίρᾳ) τὸ ἀπόστημα ΚΔ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ ἡ ἀκτὶς τ῀υ κύκλου τῆς τομῆς. Ἐκ τῆς σχέσεως δὲ ταύτης εὑρίσκομεν τὸ μέγεθος τῆς τομῆς, ὅταν ἔχωμεν τὸ ἀπόστημα τοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τοῦ κέντρου. Ἡ ἀκτὶς τῆς τομῆς εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας, πλήν, ὅταν τὸ ἐπίπεδον διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· διότι τότε, ἡ τομὴ εἶναι κύκλος, ἔχων ἀκτῖνα ἴσην τῇ ἀκτῖνι τῆς σφαίρας.

Παρατήρησις. Καὶ περὶ τῶν θέσεων εὐθείας πρὸς σφαῖραν ἀποδεικνύονται, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, θεωρήματα, ὅμοια πρὸς τὰ προηγούμενα.

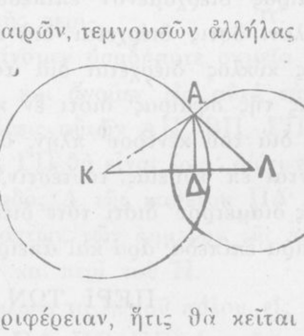
ΔΥΟ ΣΦΑΙΡΩΝ ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑΣ ΘΕΣΕΙΣ

421. Ἐὰν διὰ τῶν δύο κέντρων τῶν δύο σφαιρῶν νοήσωμεν ἀχθὲν υχὸν ἐπίπεδον, τοῦτο θὰ τέμνῃ τὰς σφαίρας κατὰ δύο κύκλους. Οἱ δὲ ύκλοι οὗτοι, περιστραφέντες περὶ τὴν διὰ τῶν κέντρων διερχομένην εὐθεῖαν, θὰ γράψωσι τὰς δύο σφαίρας, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ διόλου ἡ πρὸς ἀλλήλους θέσις των. Ἂν λοιπὸν οἱ δύο κύκλοι κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων, αὶ αἱ σφαῖραι κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων· ἂν οἱ κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήων ἐκτός, καὶ αἱ σφαῖραι ποιοῦσι τὸ αὐτό· ἂν οἱ κύκλοι τέμνωνται, αὶ αἱ σφαῖραι τέμνονται· τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ περὶ τὰς ἄλλας θέσεις. Ἐκ τούτων συνάγεται ὅτι, αἱ διάφοροι θέσεις δύο σφαιρῶν ρὸς ἀλλήλας (ἐὰν μὴ ἐφαρμόζωσι καὶ ἀποτελῶσι μίαν μόνην) εἶναι έντε· τουτέστιν, αἱ διάφοροι θέσεις δύο κύκλων πρὸς ἀλλήλους· ἔχουσι ὲ αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν τὰς ὐτὰς σχέσεις (ἐν ἑκάστῃ τῶν θέσεων), ἃς ἔχουσι καὶ τῶν κύκλων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

422. Ἐὰν δύο σφαῖραι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἡ τομὴ τῶν ἐπιφανειῶν ὐτῶν εἶναι περιφέρεια κύκλου, ἔχουσα τὸ κέντρον αὐτῆς ἐπὶ τῆς τὰ έντρα τῶν σφαιρῶν ἐπιζευγνυούσης εὐθείας, τὸ δὲ ἐπίπεδον αὐτῆς άθετον ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

Ἔστωσαν Κ καὶ Λ τὰ κέντρα δύο σφαιρῶν, τεμνουσῶν ἀλλήλας καὶ σημεῖόν τι κοινὸν τῶν ἐπιφανειῶν ὐτῶν. Ἐὰν διὰ τῶν τριῶν σημείων , Α, Λ νοήσωμεν ἐπίπεδον, τοῦτο ὰ τέμνῃ τὰς δύο σφαίρας κατὰ δύο ύκλους τεμνομένους. Ἐὰν δὲ περιτραφῶσιν οἱ κύκλοι οὗτοι περὶ τὴν Λ, θὰ γράψωσι τὰς δύο σφαίρας,



ὸ δὲ σημεῖον Α θὰ γράψῃ κύκλου περιφέρειαν, ἥτις θὰ κεῖται ἐπ' μφοτέρων τῶν σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν (διότι αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ ῶν κέντρων Κ, Λ, δὲν μεταβάλλονται). Ἡ περιφέρεια δὲ αὕτη θὰ χῃ ἀκτῖνα τὴν ΑΔ, κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΛ, καὶ ἐπίπεδον, τὸ ὑπὸ τῆς ΑΔ ραφόμενον, ὅπερ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΚΛ.

Πλὴν τῶν σημείων τῆς περιφερείας ταύτης, αἱ δύο σφαιρικαὶ ἐπιφάειαι, οὐδὲν ἄλλο ἔχουσι κοινὸν σημεῖον· διότι, πᾶν τοιοῦτο σημεῖον, συνδεόμενον πρὸς τὰ Κ καὶ Λ δι' εὐθειῶν, παρέχει τρίγωνον ἴσον τῷ ΑΚΛ· τὸ δὲ τρίγωνον τοῦτο ἔλαβε, περὶ τὴν ΚΛ, πάσας τὰς δυνατὰς θέσεις.

ΠΕΡΙ ΜΕΓΙΣΤΩΝ ΚΥΚΛΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

423. *Κύκλος μέγιστος* τῆς σφαίρας λέγεται πᾶς κύκλος τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Πᾶς μέγιστος κύκλος ἔχει κέντρον καὶ ἀκτῖνα τὰ τῆς σφαίρας.

Οἱ μέγιστοι κύκλοι τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι πάντες ἴσοι καὶ διαιροῦσιν ἀλλήλους εἰς δύο ἴσα μέρη· διότι, ἡ κοινὴ τομὴ δύο ἐξ αὐτῶν εἶναι εὐθεῖα, διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη καί, διὰ τοῦτο, διάμετρος τῆς σφαίρας· ἄρα καὶ τῶν κύκλων κοινὴ διάμετρος.

Πᾶς μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἴσα μέρη, ἅτινα λέγονται *ἡμισφαίρια*.

Διότι, ἐάν, ἀφοῦ χωρίσωμεν τὰ δύο μέρη, ἐφαρμόσωμεν αὐτὰ οὕτως, ὥστε νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τῆς κοινῆς αὐτῶν βάσεως, αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν θὰ ἐφαρμόσωσι· διότι τὰ σημεῖα ἑκατέρας αὐτῶν ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς κοινῆς αὐτῶν βάσεως.

Διὰ δύο τυχόντων σημείων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας διέρχεται τόξον μεγίστου κύκλου· διότι, τὸ δι' αὐτῶν καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχόμενον ἐπίπεδον, τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον, ὅστις διέρχεται διὰ τῶν δύο σημείων. Εἷς δὲ μόνος μέγιστος κύκλος διέρχεται διὰ τῶν δοθέντων δύο σημείων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας· διότι ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον διέρχεται δι' αὐτῶν καὶ διὰ τοῦ κέντρου· πλήν, ὅταν τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ τὸ κέντρον κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τουτέστιν, ὅταν τὰ δοθέντα σημεῖα εἶναι πέρατα μιᾶς διαμέτρου· διότι τότε διέρχονται δι' αὐτῶν καὶ διὰ τοῦ κέντρου ἄπειρα ἐπίπεδα· ἄρα καὶ ἄπειροι μέγιστοι κύκλοι.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΜΙΚΡΩΝ ΚΥΚΛΩΝ

424. *Μικρὸς κύκλος* τῆς σφαίρας λέγεται πᾶς κύκλος, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ ἐδαφίου 420 συνάγεται, ὅτι ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, εἰς τὸ κέντρον τοῦ μικροῦ κύκλου ἀγομένη εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μικροῦ κύκλου.

Οἱ μικροὶ κύκλοι εἶναι τόσῳ μικρότεροι, ὅσῳ περισσότερον ἀπέχουσι τὰ κέντρα αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· διότι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου καὶ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ συνδέονται διὰ τῆς ἰσότητος (420):

$$(\text{ΚΔ})^2+(\text{ΔΑ})^2=(\text{ΚΑ})^2\cdot$$

ἐξ ἧς φαίνεται, ὅτι, ὅταν ἡ ΚΔ αὐξάνῃ, ἡ ΑΔ ἐλαττοῦται.

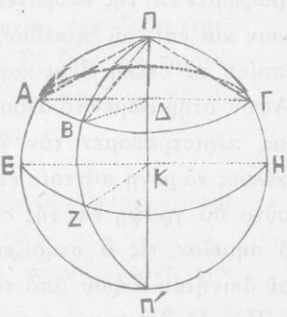
Ἡ θέσις μικροῦ κύκλου εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη, ὅταν δοθῶσι τρία σημεῖα τῆς περιφερείας αὐτοῦ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Παράλληλοι κύκλοι τῆς σφαίρας λέγονται οἱ κύκλοι, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα.

Πόλοι κύκλου τῆς σφαίρας λέγονται τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

425. Ἑκάτερος τῶν πόλων τοῦ τυχόντος κύκλου τῆς σφαίρας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς περιφερείας αὐτοῦ.



Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ τῆς σφαίρας Κ· ἡ τὸ κέντρον αὐτοῦ Δ καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ΔΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου καὶ τὰ σημεῖα, Π, Π΄, ἔνθα, προσεκβαλλομένη ἡ ΚΔ, τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, εἶναι οἱ πόλοι τοῦ κύκλου τούτου.

Ἵνα δείξωμεν, ὅτι ὁ πόλος Π ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΑΒΓ, λαμβάνομεν ὁσαδήποτε σημεῖα τῆς περιφερείας ταύτης, ὡς τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄγομεν εἰς αὐτὰ τὰς ἀκτῖνας ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, ὡς καὶ τὰς ἀποστάσεις αὐτῶν ΑΠ, ΒΠ, ΓΠ, ἀπὸ τοῦ πόλου. Αἱ εὐθεῖαι αὗται ΑΠ, ΒΠ, ΓΠ θὰ εἶναι ἴσαι· διότι εἶναι πλάγιαι, ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ ποδὸς Δ τῆς καθέτου ΠΔ· ἑπομένως, ὁ πόλος Π ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς περιφερείας ΑΒΓ· ὁμοίως δεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ περὶ τοῦ Π.

Καὶ τὰ τόξα τῶν μεγίστων κύκλων, τὰ ἐκ τοῦ πόλου, εἰς τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀγόμενα, οἷον τὰ ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ, εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ἴσας χορδάς.

Ἔτι δὲ καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν μεγίστων τούτων κύκλων εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, ὡς διερχόμενα διὰ τῆς ἐπ᾽ αὐτὸ καθέτου ΠΔ.

Ἐὰν ὁ κύκλος εἶναι μέγιστος, ὡς ὁ ΕΖΗ, αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ΠΚΕ, ΠΚΖ, ΠΚΗ, μετροῦνται ὑπὸ τῶν τόξων ΠΕ, ΠΖ, ΠΗ (ὧν κέντρα εἶναι αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν) καὶ διὰ τοῦτο τὰ τόξα ταῦτα εἶναι τεταρτημόρια περιφερείας.

ΠΟΡΙΣΜΑ

426. Ἐὰν τὰ ἔκ τινος σημείου Π τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἀγόμενα τόξα μεγίστου κύκλου (ΠΕ, ΠΖ), εἰς δύο σημεῖα τῆς περιφερείας ἄλλου μεγίστου κύκλου (ΕΖΗ) εἶναι τεταρτημόρια, τὸ σημεῖον Π εἶναι πόλος τοῦ μεγίστου τούτου κύκλου ΕΖΗ.

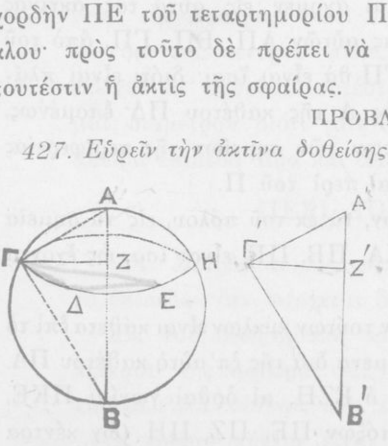
Διότι, ἀχθεισῶν τῶν ἀκτίνων ΕΚ, ΖΚ, ΗΚ, αἱ γωνίαι ΕΚΠ, ΖΚΠ, ὡς βαίνουσαι ἐπὶ τεταρτημορίων, εἶναι ὀρθαί· ἄρα ἡ διάμετρος ΠΠ′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΕΖΗ καί, διὰ τοῦτο, τὰ ἄκρα αὐτῆς Π, Π′ εἶναι πόλοι αὐτοῦ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπειδὴ ὁ πόλος οἱουδήποτε κύκλου τῆς σφαίρας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς περιφερείας αὐτοῦ, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τόξα κύκλων, τόσον εὐκόλως, ὅσον καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Πρὸς τοῦτο, μεταχειριζόμεθα διαβήτην, τοῦ ὁποίου τὰ σκέλη εἶναι καμπύλα καὶ ὅστις λέγεται *σφαιρικὸς* διαβήτης. Ἀφοῦ στηρίξωμεν τὸ ἄκρον τοῦ ἑνὸς σκέλους εἴς τι σημεῖον τῆς σφαίρας, περιστρέφομεν τὸν διαβήτην οὕτως, ὥστε τὸ ἄκρον τοῦ ἄλλου σκέλους νὰ μένῃ πάντοτε ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας· τότε, τὸ ἄκρον τοῦτο θὰ γράψῃ ἐπὶ τῆς σφαίρας περιφέρειαν κύκλου, ἔχουσαν πόλον τὸ σημεῖον, εἰς ὃ στηρίζεται τὸ ἀκίνητον ἄκρον· διότι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀκινήτου ἄκρου ἀπὸ τοῦ κινουμένου μένει πάντοτε ἡ αὐτή.

Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ γράψωμεν τόξον μεγίστου κύκλου, πρέπει νὰ λάβωμεν τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο ἄκρων τοῦ διαβήτου, ἴσην μὲ τὴν χορδὴν ΠΕ τοῦ τεταρτημορίου ΠΚΕ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου· πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει νὰ εἶναι γνωστὴ ἡ περιφέρεια αὐτὴ· τουτέστιν ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

427. Εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα δοθείσης σφαίρας.



Μὲ πόλον τὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς ἐπιφανείας καὶ μὲ ἀκτῖνα (τουτέστιν ἀπόστασιν τῶν ἄκρων τοῦ διαβήτου) οἱανδήποτε, ΑΓ, γράφομεν ἐπὶ τῆς σφαίρας περιφέρειαν κύκλου, τὴν ΓΔΕ. Ἔπειτα λαμβάνομεν διὰ τοῦ διαβήτου τὰς ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεις τριῶν σημείων τῆς περιφερείας ταύτης, ἔστω τῶν Γ, Δ, Ε, καί, μὲ τὰς ἀποστάσεις ταύτας ΓΔ, ΓΕ, ΔΕ, ὡς πλευράς, κατασκευάζομεν τρίγωνον ἐπὶ ἐπιπέδου καὶ περὶ τὸ τρίγωνον τοῦτο περιγράφομεν κύκλον· ὁ κύκλος οὗτος θὰ εἶναι ἴσος τῷ ἐπὶ τῆς σφαίρας γεγραμμένῳ ΓΔΕ καὶ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ θὰ εἶναι ἴση τῇ ἀκτῖνι τοῦ ΓΔΕ, ἤτοι τῇ ΓΖ.

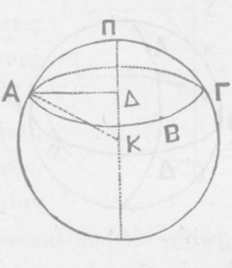
Τούτων γενομένων, ἂς νοήσωμεν μέγιστον κύκλον, ΑΓΒΗΑ, διερχόμενον διὰ τῆς διαμέτρου ΑΒ τῆς σφαίρας καὶ διά τινος σημείου Γ τῆς περιφερείας ΓΔΕ, ἔτι δὲ καὶ τὰς χορδὰς αὐτοῦ ΑΓ, ΓΒ. Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΓΖ, εἶναι γνωστὴ ἡ ὑποτείνουσα ΑΓ καὶ ἡ πλευρὰ ΓΖ· δύναται λοιπὸν νὰ κατασκευασθῇ ἐπὶ ἐπιπέδου τὸ τρίγωνον Α΄Γ΄Ζ΄ ἴσον τῷ ΑΓΖ· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΓΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΑ, ἐὰν ἐκ τοῦ Γ΄ ἀχθῇ ἡ Γ΄Β΄, κάθετος ἐπὶ τὴν Γ΄Α΄ καὶ προσεκβληθῇ ἡ Α΄Ζ΄, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον Α΄Γ΄Β΄, ἴσον τῷ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΑΓΒ· διότι εἶναι ΑΓ = Α΄Γ΄ καὶ αἱ γωνίαι Α καὶ Α΄ ἴσαι (ὡς γωνίαι τῶν ἴσων τριγώνων ΑΓΖ, Α΄Γ΄Ζ΄)· ἔτι δὲ καὶ αἱ γωνίαι Γ, Γ΄ ἴσαι ὡς ὀρθαί· ἄρα ἡ Α΄Β΄ ἰσοῦται τῇ ΑΒ, ἤτοι τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας· τὸ δὲ ἥμισυ αὐτῆς θὰ εἶναι ἴσον τῇ ἀκτῖνι τῆς σφαίρας.

* ΠΡΟΒΛΗΜΑ

428. Ἐπὶ τῆς δοθείσης σφαίρας νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου, ἔχουσα ἀκτῖνα ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ δοθεῖσα ἀκτὶς δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

ΑΝΑΛΥΣΙΣ. Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΑΒΓΑ ἡ ζητουμένη περιφέρεια. Ἡ ἀκτὶς αὐτῆς ΔΑ εἶναι ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Ε, ἑπομένως γνωστή· γνωστὴ δὲ εἶναι καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας ΑΚ· τοῦ ὀρθογωνίου λοιπὸν τριγώνου ΑΚΔ, εἶναι γνωσταὶ δύο πλευραί, ἄρα τὸ τρίγωνον τοῦτο δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ· κατασκευασθέντος δὲ τοῦ τριγώνου ΑΚΔ, εὑρίσκεται καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΠ, ἂν προσεκβληθῇ ἡ ΚΔ καὶ γίνῃ ἴση τῇ ἀκτῖνι ΚΑ.



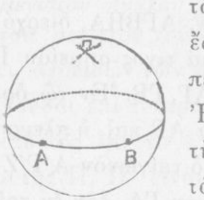
Τέλος, εὑρίσκεται ἐκ τούτων καὶ ἡ ΠΑ, ἥτις εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν ἄκρων τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου, μὲ τὴν ὁποίαν γράφεται ἡ περιφέρεια ἐκ τοῦ πόλου Π.

Ἡ σύνθεσις τοῦ προβλήματος τούτου, ὡς εὐκολωτάτη, παραλείπεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

429. Ἐπὶ τῆς δοθείσης σφαίρας νὰ γραφῇ μέγιστος κύκλος, διερχόμενος διὰ τῶν δοθέντων σημείων A καὶ B τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.

Ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β, ὡς πόλων, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ χορδῇ τοῦ τεταρτημορίου, γράφομεν δύο μεγίστους κύκλους· ἔστω δὲ Π τὸ ἕτερον τῶν σημείων, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ περιφέρειαι αὐτῶν τέμνονται ἐπὶ τῆς σφαίρας (423). Ἐκ τοῦ σημείου τούτου Π, ὡς πόλου, καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτήν, γράφομεν κύκλον, ὅστις θὰ διέλθῃ διὰ τῶν δοθέντων σημείων Α καὶ Β, διότι αἱ εὐθεῖαι ΠΑ, ΠΒ, εἶναι χορδαὶ τεταρτημορίου.



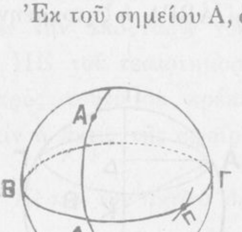
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν τὰ δοθέντα σημεῖα Α,Β εἶναι ἄκρα μιᾶς διαμέτρου, οἱ ἐξ αὐτῶν, ὡς πόλων, γραφόμενοι μέγιστοι κύκλοι, ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἀλλήλους· τότε δὲ ἄγονται διὰ τῶν Α, Β, ἄπειροι μέγιστοι κύκλοι, τῶν ὁποίων πόλοι εἶναι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν δύο γεγραμμένων περιφερειῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

430. Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου A τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, νὰ ἀχθῇ μέγιστος κύκλος, κάθετος ἐπὶ τὸν δοθέντα μέγιστον κύκλον ΒΓΔ.

Κάθετοι λέγονται δύο μέγιστοι κύκλοι, ἐὰν τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα.

Ἐκ τοῦ σημείου Α, ὡς πόλου, γράφομεν μέγιστον κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια θὰ τέμνῃ τὴν δοθεῖσαν (ἐὰν μὴ ἐφαρμόσῃ ἐπ' αὐτῆς) εἰς δύο σημεῖα· ἐκ τούτων ἔστω ἓν, τὸ Π. Ἐὰν ἐκ τοῦ Π, ὡς πόλου, γράψωμεν μέγιστον κύκλον, οὗτος θὰ διέρχηται διὰ τοῦ Α καὶ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ΒΓΔ· θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Α διότι ἡ ΑΠ εἶναι ἴση τῇ χορδῇ τοῦ τεταρτημορίου· θὰ εἶναι δὲ καὶ κάθετος ἐπὶ τὸν ΒΓΔ, διότι ἔχει πόλον τὸ Π καὶ πᾶς μέγιστος κύκλος διερχόμενος διὰ τοῦ Π, θὰ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτὸν (425)· ἄρα καὶ ὁ ΒΓΔ.



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν τὸ σημεῖον Α εἶναι πόλος τοῦ δοθέντος κύκλου ΒΓΔ, ὁ γραφόμενος κύκλος ἐφαρμόζει ἐπὶ τὸν δοθέντα καὶ πᾶς μέγιστος κύκλος, διὰ τοῦ Α διερχόμενος, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ΒΓΔ.

ΣΦΑΙΡΑΣ ΜΕΤΡΗΣΙΣ (*)

ΟΡΙΣΜΟΙ

431. *Σφαιρικὴ ζώνη* λέγεται μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, περιλαμβανόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων.

Βάσεις τῆς ζώνης λέγονται οἱ δύο κύκλοι, εἰς τοὺς ὁποίους περατοῦται. Ἐὰν δέ, τὸ ἓν ἐκ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐφάπτηται τῆς σφαίρας, ἡ ζώνη ἔχει μόνον μίαν βάσιν.

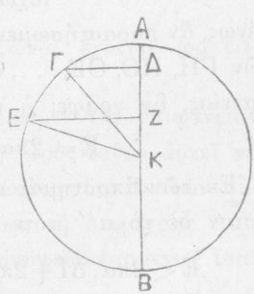
Ὕψος δὲ τῆς ζώνης λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται.

Τμῆμα σφαίρας λέγεται μέρος τῆς σφαίρας, περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἐπιπέδων παραλλήλων.

Βάσεις τοῦ τμήματος λέγονται οἱ δύο κύκλοι, εἰς οὓς περατοῦται. Τὸ τμῆμα ἔχει μόνον μίαν βάσιν, ἐὰν τὸ ἓν ἐκ τῶν ἐπιπέδων, ὑφ' ὧν περιέχεται, ἐφάπτεται τῆς σφαίρας.

Ὕψος δὲ τοῦ τμήματος λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων.

Σφαιρικὸς τομεὺς λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον γράφει ὁ τυχὼν τομεὺς τοῦ ἡμικυκλίου, ὅταν τοῦτο, περιστρεφόμενον περὶ τὴν διάμετρόν του, γράφῃ τὴν σφαῖραν.



Ἐὰν νοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον ΑΓΕΒΑ περιστρεφόμενον περὶ τὴν διάμετρόν του ΑΒ καὶ γράφον τὴν σφαῖραν, τὸ μὲν τόξον ΓΕ θὰ γράψῃ σφαιρικὴν ζώνην, ἔχουσαν βάσεις τοὺς ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΓΔ, ΕΖ, γραφομένους κύκλους καὶ ὕψος τὴν ΔΖ· τὸ δὲ μέρος ΓΕΖΔ τοῦ ἡμικυκλίου θὰ γράψῃ σφαιρικὸν τμῆμα, ἔχον τὰς αὐτὰς βάσεις καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Τὸ τόξον ΑΓ θὰ γράψῃ ζώνην, ἔχουσαν μίαν μόνον βάσιν καὶ τὸ μέρος ΑΓΔ τοῦ ἡμικυκλίου θὰ γράψῃ τμῆμα, ἔχον μίαν βάσιν.

(*) Πάντα τὰ ἑπόμενα θεωρήματα, περὶ τῆς μετρήσεως τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας καὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς, ἀπεδείχθησαν ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους. Ὁ αὐτὸς εὗρε καὶ τὰ μέτρα τῶν κυλίνδρων καὶ τῶν κώνων.

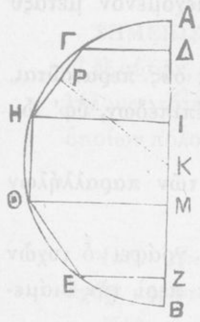
Ὁ δὲ κυκλικὸς τομεὺς ΓΚΕ θὰ γράψῃ σφαιρικὸν τομέα· ὡσαύτως καὶ ὁ τομεὺς ΑΚΓ.

Ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης λέγεται τὸ ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει τεθλασμένη γραμμή, ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τόξον, τὸ γράφον τὴν ζώνην.

ΘΕΩΡΗΜΑ

432. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης εἶναι γινόμενον τοῦ ὕψους αὐτῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας.

Ἔστω ἡ σφαιρικὴ ζώνη, ἡ ὑπὸ τοῦ τόξου ΓΕ γραφομένη. Ἂς ἐγγραφῇ



εἰς τὸ τόξον τοῦτο, ἡ τυχοῦσα τεθλασμένη γραμμὴ ΓΗΘΕ. Ἡ χορδὴ ΓΗ, ἐν τῇ περιστροφῇ τοῦ ἡμικυκλίου περὶ τὴν ΑΒ, θὰ γράψῃ ἐπιφάνειαν κολούρου κώνου, τῆς ὁποίας τὸ ἐμβαδὸν (415, σημ. β΄) εἶναι γινόμενον τοῦ ὕψους του, τουτέστι τῆς ΔΙ, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα τὴν ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΓΗ ὑψουμένην κάθετον πρὸς αὐτήν, μέχρι τοῦ ἄξονος ΑΒ· ἡ κάθετος δὲ αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Κ τῆς σφαίρας καὶ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς χορδῆς ΓΗ ἀπὸ τοῦ κέντρου· τὸ αὐτὸ δὲ ἰσχύει καὶ περὶ τῶν ἄλλων χορδῶν ΗΘ, ΘΕ· ἐπομένως, ἂν παραστήσωμεν τὰς ἀποστάσεις τοῦ κέντρου Κ ἀπὸ τῶν χορδῶν ΓΗ, ΗΘ, ΘΕ, . . ., διὰ τῶν α, α΄, α΄΄ . . ., τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἣν γράφει ἡ τεθλασμένη γραμμή, διὰ τοῦ Ε, θὰ εἶναι

$$E = 2\pi\alpha\,.\,\Delta I + 2\pi\alpha'\,.\,IM + 2\pi\alpha''\,.\,MZ.$$

Ἐκ τῶν ἀποστημάτων α, α΄, α΄΄, . ., ἔστω, μέγιστον μὲν τὸ α, ἐλάχιστον δὲ τὸ α΄΄· τότε εἶναι

$$E < 2\pi\alpha\,.\,\Delta I + 2\pi\alpha\,.\,IM + 2\pi\alpha\,.\,MZ, \qquad \text{ἢ} \qquad E < 2\pi\alpha\,.\,\Delta Z$$

$$\text{καὶ} \quad E > 2\pi\alpha''\,.\,\Delta I + 2\pi\alpha''\,.\,IM + 2\pi\alpha''\,.\,MZ \qquad \text{ἢ} \qquad E > 2\pi\alpha''\,.\,\Delta Z.$$

Ἀλλ' ὅταν αἱ πλευραὶ τῆς ἐγγεγραμμένης γραμμῆς τείνωσι πρὸς τὸ μηδέν, πᾶσαι αἱ ἀποστάσεις α, α΄, α΄΄,... αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου, τείνουσι πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, ἥντινα ἀκτῖνα παριστῶ διὰ τοῦ Α· ὥστε ἀμφότερα τὰ ἐμβαδὰ 2πα . ΔΖ καὶ 2πα΄΄ . ΔΖ, τείνουσι πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον 2πΑ . ΔΖ. Ἄρα καὶ τὸ Ε, ὅπερ περιέχεται μεταξὺ αὐτῶν, τείνει πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον 2πΑ . ΔΖ. Ἀλλὰ τὸ ὅριον τοῦ Ε λέγεται ἐμβαδὸν τῆς ζώνης.

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης εἶναι $2\pi A . \Delta Z$, τουτέστι γινόμενον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου $2\pi A$ τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς ΔZ· ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι *τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, ἔχοντος, βάσιν μέν, μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας, ὕψος δέ, τὸ τῆς ζώνης.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

433. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι γινόμενον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου ἐπὶ τὴν διάμετρον αὐτῆς.

Διότι, ὅταν τὸ τόξον ΓΕ, αὐξανόμενον, καταντήσῃ ἴσον τῇ ἡμιπεριφερείᾳ ΑΓΕΒ, ἡ σφαιρικὴ ζώνη καταντᾷ ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, τὸ δὲ ὕψος τῆς ζώνης καταντᾷ ἴσον τῇ διαμέτρῳ ΑΒ· ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι $2\pi A . 2A$, ἢ $4\pi A^2$, καὶ ἐπειδὴ πA^2 παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, συνάγεται ὅτι, *ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἔχει ἐμβαδόν, ὅσον ἔχουσι τέσσαρες μέγιστοι κύκλοι αὐτῆς.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

434. Αἱ ἐπιφάνειαι δύο σφαιρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3ον

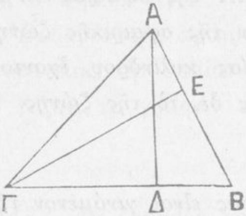
435. Εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν, αἱ ἰσοϋψεῖς ζῶναι ἔχουσιν ἴσα ἐμβαδά.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς ὁσαδήποτε θέλωμεν ἴσα μέρη· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν διάμετρον αὐτῆς ΑΒ εἰς ἴσα μέρη· τὰ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἀγόμενα ἐπίπεδα, καθέτως τῇ διαμέτρῳ, διαιροῦσι τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς ζώνας ἰσοϋψεῖς, ἐπομένως ἴσας κατὰ τὸ ἐμβαδόν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

436. Ἐὰν τρίγωνον περιστραφῇ περὶ ἄξονα, κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ, διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς του καὶ μὴ τέμνοντα αὐτό, τὸ γραφόμενον ὑπὸ τοῦ τριγώνου στερεόν, ἔχει ὄγκον ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς ἐπιφανείας, ἣν γράφει ἡ βάσις τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους του.

1ον) Ἂς ὑποθέσωμεν, κατὰ πρῶτον, ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΑΒ στρέφεται περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ἔστω περὶ τὴν ΓΒ. Τὸ ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΓΑΒ γραφόμενον στερεὸν (οὗ τὸν ὄγκον παριστῶμεν συντόμως διὰ τοῦ: ὄγκ. ΑΒΓ) σύγκειται ἐκ δύο κώνων, οὓς γράφουσι τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΔΑΒ· ἑπομένως εἶναι



$$\text{ὄγκος ΑΒΓ} = \frac{1}{3}\pi(\text{ΑΔ})^2.(\text{ΔΓ}) + \frac{1}{3}\pi(\text{ΑΔ})^2.(\text{ΔΒ})\cdot$$

$$\text{ἤτοι ὄγκ. ΑΒΓ} = \frac{1}{3}\pi(\text{ΑΔ})^2.(\text{ΒΓ}). \qquad (\iota)$$

Ἀλλ᾽ ἂν, ἐκ τῆς κορυφῆς Γ, ἀχθῇ ἡ κάθετος ΓΕ, ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΑΒ, θὰ ἔχωμεν

$$\text{ΒΓ}.\text{ΑΔ} = \text{ΓΕ}.\text{ΑΒ}\cdot$$

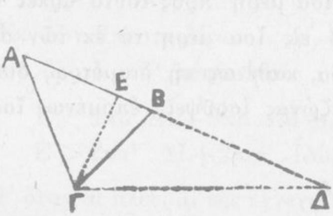
διότι, ἑκάτερον τῶν γινομένων τούτων δηλοῖ τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ὥστε, ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἰσότητι (ι), τὸ γινόμενον ΑΔ.ΒΓ, διὰ τοῦ ΓΕ.ΑΒ, εὑρίσκομεν

$$\text{ὄγκ. ΑΒΓ} = \frac{1}{3}\pi.\text{ΑΔ}.\text{ΑΒ}.\text{ΓΕ}\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ π.ΑΒ.ΑΔ παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, ἣν γράφει ἡ ΑΒ, συνάγεται, ὅτι εἶναι: $\text{ὄγκ. ΑΒΓ} = (\text{ἐπιφ. ΑΒ}).\left(\frac{1}{3}\ \text{ΓΕ}\right)$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἂν ἡ κάθετος ΑΔ πίπτῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὁ ὄγκος ΑΒΓ εἶναι διαφορὰ τῶν δύο προηγουμένων κώνων· κατὰ τὰ ἄλλα, ἡ ἀπόδειξις μένει ἡ αὐτή.

2ον) Ἂς ὑποθέσωμεν, δεύτερον, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται περὶ τὸν ἄξονα ΓΔ, ὅστις κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ τριγώνου καὶ διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Γ, χωρὶς νὰ τέμνῃ τὸ τρίγωνον.



Ἂς προσεκβληθῇ ἡ ΑΒ, μέχρις οὗ συναντήσῃ τὸν ἄξονα κατὰ τὸ Δ· τότε τὸ στερεόν, τὸ γραφόμενον ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι διαφορὰ τῶν στερεῶν, τὰ ὁποῖα γράφουσι τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ·

$$\text{ὅθεν} \quad \text{ὄγκ. ΑΒΓ} = \text{ὄγκ. ΑΓΔ} - \text{ὄγκ. ΒΓΔ}\cdot$$

ἀλλά, κατὰ τὰ προηγουμένως εὑρεθέντα, εἶναι

$$\text{ὄγκ. } ΑΓΔ = (\text{ἐπιφ. } ΑΔ) . \left(\frac{1}{3}\ ΓΕ\right),$$

$$\text{ὄγκ. } ΒΓΔ = (\text{ἐπιφ. } ΒΔ) . \left(\frac{1}{3}\ ΓΕ\right)$$

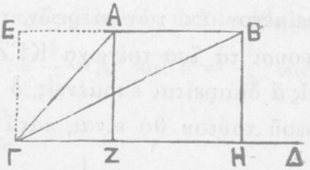
ὅθεν συνάγεται

$$\text{ὄγκ. } ΑΒΓ = (\text{ἐπιφ. } ΑΔ) . \frac{1}{3}\ ΒΓ - (\text{ἐπιφ. } ΒΔ) . \frac{1}{3}\ ΓΕ =$$

$$= \frac{1}{3}\ ΓΕ\ (\text{ἐπιφ. } ΑΔ - \text{ἐπιφ. } ΒΔ),$$

τουτέστιν $\text{ὄγκ. } ΑΒΓ = \frac{1}{3}\ ΓΕ\ (\text{ἐπιφ. } ΑΒ).$

Ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀποδείξει ὑπετέθη, ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ, προσεκβαλλομένη, τέμνει τὸν ἄξονα ΓΔ. Ἐὰν ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι καὶ πάλιν τὸ θεώρημα ἀληθεύει ἀποδεικνύεται δὲ ὡς ἑξῆς.



Ἐκ τῶν ἄκρων τῆς πλευρᾶς ΑΒ, ἃς ἀχθῶσιν ἐπὶ τὸν ἄξονα, κάθετοι, αἱ ΑΖ, ΒΗ τότε εἶναι προφανῶς

$$\text{ὄγκ. } ΑΒΓ = \text{ὄγκ. } ΑΓΖ + \text{ὄγκ. } ΑΖΗΒ - \text{ὄγκ. } ΓΒΗ\cdot$$

ἀλλὰ $\text{ὄγκ. } ΑΓΖ = \frac{1}{3}\pi (ΑΖ)^2 . ΓΖ,$

$$\text{ὄγκ. } ΑΖΗΒ = \pi (ΑΖ)^2 . ΖΗ,$$

$$\text{ὄγκ. } ΓΒΗ = \frac{1}{3}\pi (ΑΖ)^2 . ΓΗ, \quad \text{διότι} \quad ΑΖ = ΒΗ\cdot$$

ὅθεν $\text{ὄγκ. } ΑΒΓ = \frac{1}{3}\pi (ΑΖ)^2 \left\{ ΓΖ + 3\ ΖΗ - ΓΗ \right\}\cdot$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΓΗ = ΓΖ + ΖΗ$, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται

$$\text{ὄγκ. } ΑΒΓ = \frac{1}{3}\pi (ΑΖ)^2 . 2\ ΖΗ\cdot$$

ἀλλὰ 2π. ΑΖ. ΖΗ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ ΑΒ· ὅθεν ἕπεται

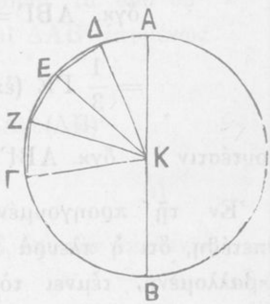
$$\text{ὄγκ. } ΑΒΓ = (\text{ἐπιφ. } ΑΒ) . \frac{1}{3} ΑΖ = (\text{ἐπιφ. } ΑΒ) . \frac{1}{3}\ ΓΕ\cdot$$

ὥστε, εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις, ὁ ὑπὸ τοῦ τριγώνου, ὡς εἴρηται γραφόμενος ὄγκος, εἶναι ἰσοδύναμος πυραμίδι, ἥτις ἔχει βάσιν μὲν τὴν ὑπὸ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου γραφομένην ἐπιφάνειαν, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

437. *Ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως εἶναι γινόμενον τῆς ζώνης, ἥτις εἶναι βάσις αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος.*

Ἔστω ΚΓΔ ὁ κυκλικὸς τομεύς, ὅστις περιστρεφόμενος περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ, γράφει τὸν σφαιρικὸν τομέα.



Ἐὰν διαιρεθῇ τὸ τόξον ΓΔ εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη καὶ ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ αὐτῶν, προκύπτει πολυγωνικὸς τομεύς, ὡς ὁ ΚΔΕΖΓΚ, ἐγγεγραμμένος εἰς τὸν κυκλικὸν τομέα. Ὁ πολυγωνικὸς οὗτος τομεύς, ἐν τῇ περιστροφῇ, θὰ γράψῃ στερεόν, συγκείμενον ἐκ τῶν στερεῶν, τὰ ὁποῖα γράφουσι τὰ ἴσα τρίγωνα ΚΓΖ, ΚΖΕ, ΚΕΔ, εἰς ἃ διαιρεῖται· ἑπομένως, ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τούτου θὰ εἶναι, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα,

$$(\text{ἐπιφ. ΓΖ}) \cdot \frac{1}{3}\alpha + (\text{ἐπιφ. ΖΕ}) \cdot \frac{1}{3}\alpha + (\text{ἐπιφ. ΕΔ}) \cdot \frac{1}{3}\alpha$$

$$\text{ἤτοι} \quad \frac{1}{3}\alpha \,.\, (\text{ἐπιφ. ΓΖ} + \text{ἐπιφ.ΖΕ} + \text{ἐπιφ.ΕΔ})$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{1}{3}\alpha \,.\, (\text{ἐπιφ. ΓΖΕΔ})$$

τουτέστιν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ, ἣν γράφει ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΓΖΕΔ, ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀποστάσεως α τῶν χορδῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ πολυγωνικὸς τομεὺς ἔχει ὅριον τὸν κυκλικὸν τομέα, ἕπεται, ὅτι καὶ τὸ ὑπ' αὐτοῦ γραφόμενον στερεὸν ἔχει ὅριον τὸ ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τομέως γραφόμενον, τουτέστι τὸν σφαιρικὸν τομέα· ὥστε εἶναι

$$\text{ὄγκ. σφαιρ. τομέως} = \text{ὅρ} \left\{ \frac{1}{3}\alpha \,(\text{ἐπιφ. ΓΖΕΔ}) \right\} =$$

$$= \text{ὅρ.}\left(\frac{1}{3}\alpha\right) \text{ ὅρ. (ἐπιφ. ΓΖΕΔ).}$$

Ἀλλ' ὅριον τοῦ ἀποστήματος α εἶναι ἡ ἀκτὶς Α τῆς σφαίρας, ὅριον δὲ τῆς ἐπιφανείας ΓΖΕΔ εἶναι ἡ σφαιρικὴ ζώνη, ἡ γραφομένη ὑπὸ τοῦ τόξου ΓΔ· ἄρα

$$\text{ὄγκ. σφαιρ. τομέως} = \frac{1}{3}\text{Α} \,.\, (\text{ζών. ΓΔ}).$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

438. Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι γινόμενον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς.

Διότι, ἂν τὸ τόξον ΓΔ αὐξανόμενον, καταντήσῃ ἴσον τῇ ἡμιπεριφερείᾳ ΑΓΒ, ὁ μὲν τομεὺς ΓΚΔ γίνεται ἴσος τῷ ἡμικυκλίῳ, ὁ δὲ ὑπ' αὐτοῦ γραφόμενος σφαιρικὸς τομεὺς γίνεται ἴσος τῇ ὅλῃ σφαίρᾳ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν παρασταθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας διὰ τοῦ Α, ἡ μὲν ἐπιφάνεια αὐτῆς εἶναι $4\pi A^2$,

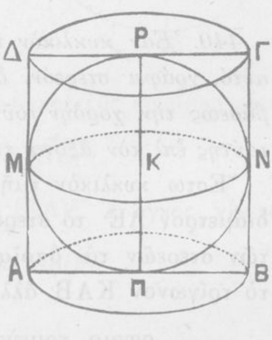
ὁ δὲ ὄγκος αὐτῆς θὰ εἶναι $4\pi A^2 . \frac{1}{3} A$ ἢ $\frac{4}{3}\pi A^3$.

Οἱ ὄγκοι δύο σφαιρῶν Σ καὶ σ εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων των Α καὶ α. Διότι εἶναι $\Sigma = \frac{4}{3}\pi A^3$ καὶ $\sigma = \frac{4}{3}\pi\alpha^3$·

$$\text{ἄρα } \frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{\alpha^3}{A^3}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

439. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι πρὸς τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν κυλίνδρου (ἤτοι συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν βάσεων αὐτοῦ) *ὡς ὁ 2 πρὸς τὸν 3. Τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἔχουσι καὶ οἱ ὄγκοι τῶν δύο τούτων στερεῶν.*



Ἔστω ΜΠΝΡ μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας καὶ ΑΒΓΔ τὸ περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένον τετράγωνον· ἐὰν στραφῇ τὸ ἡμικύκλιον ΡΝΠ περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ΠΡ, μετ' αὐτοῦ δὲ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΡΠΒΓ (ὅπερ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ), τὸ μὲν ἡμικύκλιον θὰ γράψῃ τὴν σφαῖραν, τὸ δὲ ὀρθογώνιον θὰ γράψῃ κύλινδρον, ὅστις θὰ εἶναι περιγεγραμμένος περὶ τὴν σφαῖραν· ἐγγίζει δὲ τὴν σφαῖραν εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ μεγίστου κύκλου ΝΜ καὶ εἰς τὰ σημεῖα Π καὶ Ρ.

Τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου τούτου εἶναι ἡ διάμετρος ΠΡ τῆς σφαίρας, ἡ δὲ ἀκτὶς ΠΑ τῆς βάσεώς του εἶναι ἴση τῇ ἀκτῖνι Α τῆς σφαίρας· ἑπομένως ἡ μὲν κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ εἶναι $2\pi A.\,2A$, ἤτοι $4\pi A^2$, αἱ δὲ δύο βάσεις εἶναι $\pi A^2 + \pi A^2$ ἢ $2\pi A^2$· ὅθεν ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι $6\pi A^2$· εἶναι δὲ καὶ τῆς σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια $4\pi A^2$· ὥστε εἶναι

$$\text{ἐπιφ σφαίρας : ἐπιφ. κυλίνδρου} = 4\pi A^2 : 6\pi A^2 = 4:6 = 2:3.$$

Καὶ οἱ ὄγκοι αὐτῶν ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον· διότι, τῆς μὲν σφαίρας ὁ ὄγκος εἶναι $\frac{4}{3}\pi A^3$, τοῦ δὲ κυλίνδρου $\pi A^2.2A$, ἤτοι $2\pi A^3$· ὥστε εἶναι

$$\text{ὄγκ. σφαίρας: ὄγκ. κυλίνδρου} = \frac{4}{3} : 2 = 4:6 = 2:3.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν νοήσωμεν πολύεδρον περιγεγραμμένον περὶ τὴν σφαῖραν (τουτέστι πολύεδρον, οὗ αἱ ἕδραι ἐφάπτονται πᾶσαι τῆς σφαίρας), τὸ πολύεδρον τοῦτο ἀναλύεται εἰς πυραμίδας, ἐχούσας κοινὴν κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ βάσεις τὰς ἕδρας τοῦ πολυέδρου. Τῶν πυραμίδων τούτων ὕψος εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας (418) καὶ ὁ ὄγκος ἑκάστης ἐξ αὐτῶν εἶναι γινόμενον τῆς ἕδρας, ἥτις εἶναι βάσις αὐτῆς, ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας· ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ πολυέδρου εἶναι γινόμενον τῆς ὅλης ἐπιφανείας του ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας. Ἀλλὰ καὶ τῆς σφαίρας ὁ ὄγκος εἶναι γινόμενον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι οἱ ὄγκοι τῶν δύο τούτων στερεῶν (σφαίρας καὶ περιγεγραμμένου πολυέδρου) ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι καὶ αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

440. Ἐὰν κυκλικὸν τμῆμα στραφῇ περὶ διάμετρον, μὴ τέμνουσαν αὐτό, γράφει στερεόν, ὅπερ εἶναι ἥμισυ τοῦ κώνου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα βάσεως τὴν χορδὴν τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν προβολὴν τῆς χορδῆς ταύτης ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς.

Ἔστω κυκλικὸν τμῆμα τὸ ΑΓΒΖΑ· ἂς περιστραφῇ δὲ περὶ τὴν διάμετρον ΔΕ· τὸ στερεόν, ὅπερ γράφει, εἶναι προφανῶς, διαφορὰ τῶν στερεῶν τὰ ὁποῖα γράφουσιν ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΚΑΓΒ καὶ τὸ τρίγωνον ΚΑΒ· ἀλλ' εἶναι

$$\text{σφαιρ. τομεὺς ΚΑΓΒ} = (\text{ζώνη ΑΓΒ}).\frac{1}{3}\text{ΚΑ}·$$

$$\text{καὶ ἐπειδὴ ζώνη ΑΓΒ} = 2\pi.\text{ΚΑ.ΠΡ, ἕπεται}$$

$$\text{σφαιρικὸς τομεὺς ΚΑΓΒ} = \frac{2}{3}\pi\,(\text{ΚΑ})^2.\text{ΠΡ}·$$

ἐπίσης εἶναι $\quad$ ὄγκος $\mathrm{ABK} = (\text{ἐπιφ. } \mathrm{AB}) . \frac{1}{3} \mathrm{KZ}\cdot$ $\qquad$ (436)

ἤ, ἐπειδὴ $\quad$ ἐπιφ. $\mathrm{AB} = 2\pi . \ \mathrm{KZ} . \Pi\mathrm{P}$, $\qquad$ (415, σημ. β΄)

$$\text{ὄγκος } \mathrm{ABK} = \frac{2}{3} \pi\, (\mathrm{KZ})^2 . \Pi\mathrm{P}\cdot$$

ὅθεν $\quad$ ὄγκος $\mathrm{A\Gamma BZA} = \frac{2}{3} \pi\, (\mathrm{KA})^2 . \ \Pi\mathrm{P} - \frac{2}{3} \pi\, (\mathrm{KZ})^2 . \Pi\mathrm{P}$

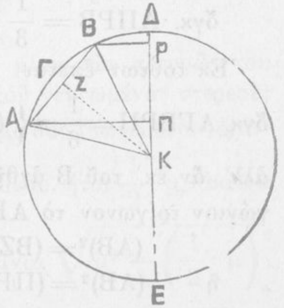
ἢ $\quad$ ὄγκος $\mathrm{A\Gamma BZA} = \frac{2}{3} \pi . \ \Pi\mathrm{P} \left\{ (\mathrm{KA})^2 - (\mathrm{KZ})^2 \right\}.$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΑΖ εὑρίσκομεν

$$(\mathrm{KA})^2 - (\mathrm{KZ})^2 = \left(\frac{\mathrm{AB}}{2}\right)^2 = \frac{(\mathrm{AB})^2}{4}.$$

ὅθεν $\quad$ ὄγκος $\mathrm{A\Gamma BZA} = \frac{1}{6} \pi . (\mathrm{AB})^2 . \Pi\mathrm{P}.$

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{1}{3}$ $\pi\, (\mathrm{AB})^2 . \Pi\mathrm{P}$ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα βάσεως τὴν χορδὴν ΑΒ, ὕψος δὲ τὴν προβολὴν αὐτῆς ἐπὶ τὴν ΔΕ, τουτέστι τὴν ΠΡ, συνάγεται ὅτι τὸ στερεόν, ὅπερ γράφει τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΓΒΖΑ εἶναι ἥμισυ τοῦ κώνου τούτου.



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν τὸ κυκλικὸν τμῆμα, αὐξανόμενον, καταντήσῃ ἴσον τῷ ἡμικυκλίῳ ΔΓΕ, τὸ ὑπ' αὐτοῦ γραφόμενον στερεὸν καταντᾷ ἴσον τῇ ὅλῃ σφαίρᾳ· τότε δὲ καὶ ἡ προβολὴ τῆς χορδῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΔΕ καταντᾷ ἴση τῇ διαμέτρῳ ταύτῃ· ὅθεν, ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι

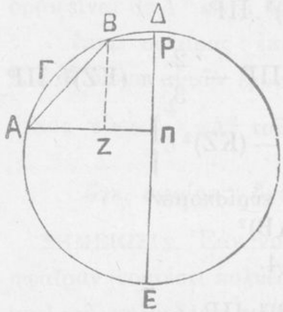
$$\frac{1}{6} \pi\, (\Delta\mathrm{E})^2 . \Delta\mathrm{E} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{1}{6} \pi\, (\Delta\mathrm{E})^3\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ $\Delta\mathrm{E} = 2 . \mathrm{KA}$ $\quad$ καὶ $\quad$ $(\Delta\mathrm{E})^3 = 8\, (\mathrm{KA})^3$, ὁ ὄγκος γίνεται $\frac{4}{3}$ $\pi\, (\mathrm{KA})^3\cdot$ ὅπερ καὶ ἐν τοῖς προηγουμένοις εὑρέθη.

ΘΕΩΡΗΜΑ

441. Τὸ σφαιρικὸν τμῆμα εἶναι ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο κυλίνδρων, οἵτινες ἔχουσι βάσεις τὰς βάσεις αὐτοῦ καὶ ὕψος τὸ ὕψος αὐτοῦ, αὐξηθὲν κατὰ τὴν σφαῖραν, ἥτις ἔχει διάμετρον τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἔστωσαν ΑΠ καὶ ΒΡ αἱ ἀκτῖνες δύο παραλλήλων κύκλων, καθέτων ἐπὶ τὴν διάμετρον ΔΕ.



Τὸ σφαιρικὸν τμῆμα, τὸ ἔχον βάσεις τοὺς κύκλους τούτους, γράφεται ὑπὸ τοῦ μέρους ΑΓΒΡΠΑ τοῦ ἡμικυκλίου ΔΑΕ, ὅταν τοῦτο περιστραφῇ περὶ τὴν διάμετρόν του ΔΕ· εἶναι δέ, προφανῶς, ἄθροισμα τῶν στερεῶν, τὰ ὁποῖα γράφουσι τὸ τραπέζιον ΑΠΡΒ καὶ τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΓΒ.

Ἀλλ' ἔχομεν ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος

$$\text{ὄγκος } ΑΓΒΑ = \frac{1}{6}\pi(ΑΒ)^2 . ΠΡ.$$

Τὸ δὲ ὑπὸ τοῦ τραπεζίου ΑΒΡΠ γραφόμενον στερεὸν εἶναι κόλουρος κῶνος· ὅθεν (412)

$$\text{ὄγκ. } ΑΠΡΒ = \frac{1}{3}.\pi\left\{(ΑΠ)^2+(ΒΡ)^2+(ΑΠ).(ΒΡ)\right\} ΠΡ.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται

$$\text{ὄγκ. } ΑΓΒΡΠ = \frac{1}{6}\pi\left\{(ΑΒ)^2+2(ΑΠ)^2+2(ΒΡ)^2+2(ΑΠ).(ΒΡ)\right\} ΠΡ$$

ἀλλ' ἂν ἐκ τοῦ Β ἀχθῇ ἡ ΒΖ, κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΠ, γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΖ, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν:

$$(ΑΒ)^2 = (ΒΖ)^2+(ΑΖ)^2 = (ΠΡ)^2+(ΑΠ-ΒΡ)^2,$$

$$\text{ἢ} \quad (ΑΒ)^2 = (ΠΡ)^2+(ΑΠ)^2+(ΒΡ)^2-2\,(ΑΠ).(ΒΡ).$$

Ἐὰν δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ $(ΑΒ)^2$ ἀντικαταστήσωμεν ἐν τῇ εὑρεθείσῃ ἐκφράσει τοῦ ὄγκου τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΑΓΒΡΠ, εὑρίσκομεν, μετὰ τὰς ἀναγωγὰς

$$\text{ὄγκ } ΑΓΒΡΠ = \frac{1}{6}\pi\left\{(ΠΡ)^2+3\,(ΑΠ)^2+3\,(ΒΡ)^2\right\} ΠΡ,$$

$$\text{ἢ ὄγκος } ΑΓΒΡΠ = \frac{1}{6}\pi\,(ΠΡ)^3+\frac{1}{2}\left\{\pi\,(ΑΠ)^2+\pi\,(ΒΡ)^2\right\} ΠΡ.$$

Ἀλλὰ $\frac{1}{6}\pi\,(ΠΡ)^3$ παριστᾷ τὸν ὄγκον σφαίρας, ἐχούσης διάμετρον τὸ ὕψος ΠΡ τοῦ τμήματος· τὰ δὲ γινόμενα $\pi\,(ΑΠ)^2 . ΠΡ$ καὶ $\pi\,(ΒΡ)^2 . ΠΡ$ παριστῶσι τοὺς ὄγκους δύο κυλίνδρων, ἐχόντων βάσεις τὰς τοῦ τμήματος καὶ ὕψος τὸ τοῦ τμήματος· ἐξ ὧν συνάγεται τὸ θεώρημα.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

1) Ἡ ἀκτὶς σφαίρας τινὸς εἶναι $2^{\pi\chi},6$· πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια καὶ πόσος ὁ ὄγκος αὐτῆς;

(Ἀπ. Ἡ ἐπιφάνεια Ε οἱασδήποτε σφαίρας καὶ ὁ ὄγκος αὐτῆς Σ συνδέονται πρὸς τὴν ἀκτῖνα α, διὰ τῶν ἰσοτήτων

$$E = 4\pi\alpha^2, \quad \Sigma = \frac{4}{3}\pi\alpha^3. \qquad (\iota)$$

ἐκ τούτων εὑρίσκομεν, θέτοντες $\alpha = 2,6$:

$$E = 4.\pi.2,6.2,6 = 27,04.\pi = 84^{\tau\pi},8355\ldots,$$

$$\Sigma = \frac{4}{3}\pi.(2,6)^3 = 73^{\kappa\pi},62\ldots \text{(διὰ τῶν λογ.)}).$$

2) Σφαίρας τινὸς ὁ ὄγκος εἶναι $15^{\kappa\pi},85$· πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτῆς;

(Ἀπ. Ἐκ τῆς δευτέρας τῶν ἰσοτήτων (ι) λαμβάνομεν, ἐὰν λύσωμεν αὐτὴν πρὸς τὸ α:

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{3\Sigma}{4\pi}}.$$

ὑποθέτοντες δὲ $\Sigma = 15,85$, εὑρίσκομεν (διὰ τῶν λογαρίθμων)

$$\alpha = 1^{\pi\chi},558\ldots).$$

3) Τρίγωνόν τι ἰσόπλευρον στρέφεται περὶ μίαν τῶν πλευρῶν του ὁλόκληρον περιστροφήν· πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ γεννωμένου στερεοῦ;

(Ἀπ. Τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος στερεὸν εἶναι ἄθροισμα δύο ἴσων κώνων, ἐχόντων ὕψος μὲν τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς μ τοῦ τριγώνου, ἤτοι $\frac{1}{2}\mu$, ἀκτῖνα δὲ τῆς βάσεως, τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, ὅπερ εἶναι $\sqrt{\mu^2 - \left(\frac{1}{2}\mu\right)^2}$ ἢ $\frac{1}{2}\mu\sqrt{3}$· ἑπομένως, ὁ ὄγκος ἑκατέρου τῶν κώνων τούτων εἶναι $\frac{1}{3}\pi.\frac{3}{4}\mu^2.\frac{1}{2}\mu$, ἤτοι $\frac{1}{8}\pi\mu^3$· ἄρα ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι $\frac{1}{4}\pi\mu^3$).

4) Σφαῖρα, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι $1^{\pi\chi},8$, τέμνεται ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἀπεχόντων ἀπ' ἀλλήλων κατὰ $0^{\pi\chi},2$· πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἥτις περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων;

(Ἀπ. Ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος ἐπιφάνεια εἶναι ζώνη σφαιρική, ἔχουσα ὕψος 0,2· ἄρα τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς εἶναι $2\pi.1,8.0,2$, ἤτοι $\pi.0,72$· τουτέστιν $2^{\tau\pi},26194\ldots$).

5) Σφαῖρα, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι $5^{\pi\chi}$, τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου, ἀπέχοντος ἀπὸ τοῦ κέντρου $3^{\pi\chi}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς καὶ τὰ

ἐμβαδὰ τῶν δύο ζωνῶν, εἰς τὰς ὁποίας διαιρεῖται ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια.

(Ἀπ. ἐμβ. τομῆς $= 50^{\tau\pi},2655..$ ἐμβ. τῆς μιᾶς ζώνης $= 62^{\tau\pi},8318...$, τῆς ἄλλης $= 251^{\tau\pi},3274...$).

6) Νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς (θεωροῦντες αὐτὴν ὡς σφαῖραν).

(Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς γῆς εἶναι 40000000 πήχεις, ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τούτου, τουτέστιν ἡ ἀκτὶς τῆς γῆς εἶναι $40000000 \times \frac{1}{2\pi}$· ἄρα ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς εἶναι

$$4\pi\,(40000000)^2 . \frac{1}{4\pi^2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{16}{\pi} . 10^{14}.$$

καὶ ἐπειδὴ $\frac{16}{\pi} = 5{,}092958\ldots$ (Dupuis, σελ. 133), ἡ ἐπιφάνεια εἶναι τετρ. πήχεις $5092958 . 10^8$ ἢ τετρ. στάδια 509295800 (κατὰ προσέγγισιν 100 τετρ. σταδίων)).

7) Ἐὰν διπλασιασθῇ ἡ ἀκτὶς σφαίρας τινός, ποσαπλασία γίνεται ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς καὶ ποσαπλάσιος ὁ ὄγκος αὐτῆς;

8) Σφαῖρά τις ἔχει ἀκτῖνα $8^{\pi\chi}$· πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς διπλασίας σφαίρας (κατὰ τὸν ὄγκον); (Ἀπ. $8\sqrt[3]{2}$, ἤτοι $10^{\pi\chi},08\ldots$).

9) Αἱ ἀκτῖνες δύο σφαιρῶν εἶναι, τῆς μὲν μιᾶς $12^{\pi\chi}$, τῆς δὲ ἄλλης $9^{\pi\chi}$ ζητεῖται ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, ἥτις εἶναι ἄθροισμα αὐτῶν.

(Ἀπ. $\sqrt[3]{12^3 + 9^3}$, ἤτοι $3\sqrt[3]{91}$, τουτέστι $13^{\pi\chi},494\ldots$).

10) Κυκλικόν τι τμῆμα, οὗ ἡ χορδὴ εἶναι δ, στρέφεται περὶ μίαν διάμετρον τοῦ κύκλου, παράλληλον τῇ χορδῇ αὐτοῦ· ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ προκύπτοντος στερεοῦ.

(Ἀπ. Κατὰ τὸ θεώρημα 440, ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι

$$\frac{1}{6}\,\pi\delta^2\delta \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{1}{6}\,\pi\delta^3.$$

τουτέστιν, ὁ ὄγκος τοῦ οὕτω προκύπτοντος στερεοῦ εἶναι ἴσος τῷ ὄγκῳ τῆς σφαίρας, ἥτις ἔχει διάμετρον τὴν χορδὴν δ.

Ἄξιον παρατηρήσεως εἶναι, ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου δὲν ὑπάρχει ἐν τῇ παραστάσει τοῦ ὄγκου· ὥστε πάντα τὰ ἴσας χορδὰς ἔχοντα κυκλικὰ τμήματα οἱωνδήποτε κύκλων, ὅταν στρέφωνται περὶ διάμετρον, παράλληλον τῇ χορδῇ αὐτῶν, γράφουσιν ἰσοδύναμα στερεά).

11) Ἐὰν τόξον κυκλικὸν στραφῇ περὶ διάμετρον, διερχομένην δι' ἑνὸς τῶν ἄκρων του, γράφει ζώνην, τῆς ὁποίας ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ κύκλου, ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν χορδὴν τοῦ τόξου.

12) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κοινοῦ μέρους δύο σφαιρῶν ἐκ τῶν δύο ἀκτίνων καὶ ἐκ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων αὐτῶν.

(Ὁ ζητούμενος ὄγκος σύγκειται ἐκ δύο σφαιρικῶν τμημάτων, ἐχόντων κοινὴν βάσιν τὸν κύκλον, οὗτινος ἡ περιφέρεια εἶναι κοινὴ τομὴ τῶν σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν. Ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν κέντρων καὶ αἱ δύο ἀκτῖνες συνιστῶσι τρίγωνον, ἐξ οὗ, κατὰ τὸ θεώρημα 211, εὑρίσκομεν εὐκόλως τὰ ὕψη τῶν δύο σφαιρικῶν τμημάτων καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς κοινῆς βάσεως αὐτῶν. Τούτων δὲ εὑρεθέντων, εὑρίσκομεν, διὰ τοῦ θεωρήματος 441, τὸν ζητούμενον ὄγκον. Ἐάν, λ. χ. αἱ ἀκτῖνες εἶναι 7^{π} καὶ 15^{π} καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων 20^{π}, εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ κοινὸς ὄγκος εἶναι $56^{\kappa\pi},967\ldots$).

13) Σφαῖρά τις ἐκ χυτοῦ σιδήρου ἔχει βάρος 120 χιλιογράμμων· νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς.

(Ἡ ἀκτὶς θὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ ὄγκου διὰ τοῦ τύπου (ι)· τὸν δὲ ὄγκον εὑρίσκομεν, παρατηροῦντες, ὅτι ἴσος ὄγκος ὕδατος θὰ εἶχε βάρος $\frac{120}{7,2}$ χιλ. (διότι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χυτοῦ σιδήρου εἶναι 7,2)· ἐπειδὴ δὲ 1 χιλιόγρ. ὕδατος ἔχει ὄγκον μιᾶς κυβικῆς παλάμης, ἤτοι $\frac{1}{1000}$ τοῦ κυβ. πήχεως, ἕπεται, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος (ἑπομένως καὶ τοῦ σιδήρου) εἶναι $\frac{1200}{72}\cdot\frac{1}{1000}$ κυβ. πήχεις, ἢ $\frac{12}{720}$ ἢ $\frac{1}{60}$ κυβ. πήχεως.

Εὑρεθέντος τοῦ ὄγκου εὑρίσκεται καὶ ἡ ἀκτίς· εἶναι δὲ $0^{\pi},158\ldots$).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον οἱουδήποτε σώματος ἐκ τοῦ βάρους αὐτοῦ, ἂν εἰξεύρωμεν καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ.

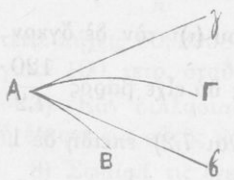
* ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ Ζ΄ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

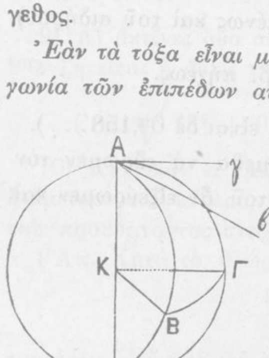
ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ ΔΥΟ ΤΟΞΩΝ

442. Ἐὰν δύο τόξα τῆς σφαίρας τέμνωνται εἴς τι σημεῖον Α, λέγεται, ὅτι σχηματίζουσι *γωνίαν*. Τὸ σημεῖον Α λέγεται *κορυφὴ* τῆς γωνίας, τὰ δὲ τόξα *πλευραὶ* αὐτῆς.



Μέτρον τῆς γωνίας δύο τόξων λέγεται ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουσιν αἱ εἰς τὴν κορυφὴν ἐφαπτόμεναι αὐτῶν, λαμβανόμεναι κατὰ τὴν φορὰν τῶν τόξων· ἀντικαθιστᾷ δ' αὐτήν, θεωρουμένην ὡς μέγεθος.

Ἐὰν τὰ τόξα εἶναι μεγίστων κύκλων, ἡ γωνία αὐτῶν καὶ ἡ δίεδρος γωνία τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν, ἔχουσι τὸ αὐτὸ μέτρον.



Διότι, αἱ ἐφαπτόμεναι Αβ, Αγ τῶν τόξων ΑΒ, ΑΓ, εἰς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας Α, κεῖνται ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων τῶν κύκλων καὶ εἶναι ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τὴν κοινὴν διάμετρον ΑΔ τῶν κύκλων τούτων, καθ' ἣν τέμνονται τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν.

Ἡ ὑπὸ τόξων μεγίστων κύκλων σχηματιζομένη γωνία Α ἔχει μέτρον καὶ τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιλαμβανόμενον τόξον μεγίστου κύκλου ΒΓ, τὸ γραφόμενον μὲ πόλον τὴν κορυφὴν αὐτῆς. Διότι, τὸ τόξον τοῦτο ΒΓ μετρεῖ τὴν γωνίαν ΒΚΓ, ἥτις ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ βΑγ τῶν ἐφαπτομένων· διότι τὰ τόξα ΑΒ, ΑΓ εἶναι τεταρτημόρια καὶ ἑπομένως αἱ γωνίαι ΑΚΒ, ΑΚΓ, εἶναι ὀρθαί· ἄρα ἡ ΚΒ εἶναι παράλληλος τῇ Αβ καὶ ἡ ΚΓ τῇ Αγ.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

443. *Σφαιρικὸν πολύγωνον* λέγεται μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, περατούμενον εἰς τόξα μεγίστων κύκλων.

Πλευραὶ τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου λέγονται τὰ τόξα, εἰς ἃ περατοῦται· *γωνίαι* δ' αὐτοῦ αἱ γωνίαι τῶν αὐτῶν τόξων καὶ *κορυφαὶ* αὐτοῦ, αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν.

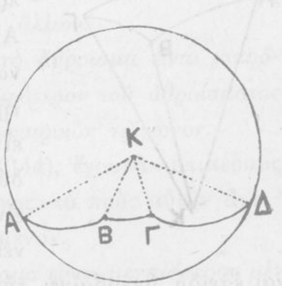
Τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον, τὸ ἔχον τρεῖς πλευράς, λέγεται *σφαιρικὸν τρίγωνον*.

Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον λέγεται *ἰσοσκελές*, *ἰσόπλευρον*, *σκαληνόν*, κατὰ τὰς αὐτάς, ὡς καὶ τὸ εὐθύγραμμον, περιπτώσεις.

Κυρτὸν λέγεται τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον, ἐὰν ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ, προσεκβαλλομένη, ἀφίνῃ ὁλόκληρον τὸ σχῆμα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς.

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Ἐὰν ἡ κορυφὴ στερεᾶς γωνίας τεθῇ εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, αἱ ἕδραι αὐτῆς θὰ τέμνωσιν, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τόξα μεγίστων κύκλων, οἷον τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, τὰ ὁποῖα σχηματίζουσι σφαιρικὸν πολύγωνον, ἀντίστοιχον τῆς στερεᾶς γωνίας. Καὶ ἀντιστρόφως, ἐκ σφαιρικοῦ πολυγώνου εὑρίσκομεν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν στερεὰν γωνίαν, ἄγοντες ἀκτῖνας εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, (ὑποτίθεται δέ, ὅτι οὐδεμία πλευρὰ τοῦ δοθέντος σφαιρικοῦ πολυγώνου ὑπερβαίνει τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας).

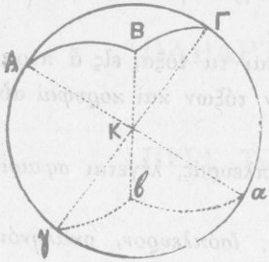


Αἱ πλευραὶ τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου εἶναι μέτρα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῆς στερεᾶς γωνίας· αἱ δὲ γωνίαι αὐτοῦ καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι τῆς στερεᾶς γωνίας ἔχουσι τὰ αὐτὰ μέτρα.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

444. *Συμμετρικὰ* λέγονται δύο σφαιρικὰ πολύγωνα, ἐὰν αἱ κορυφαὶ αὐτῶν εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας (403)· τουτέστιν ἂν κεῖνται, ἀνὰ δύο, εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου.

Τοιαῦτα εἶναι τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ.



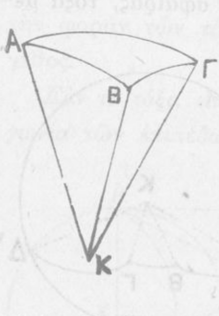
Τῶν συμμετρικῶν πολυγώνων αἱ ἀντίστοιχοι στερεαὶ γωνίαι εἶναι κατὰ κορυφήν. Ἐπειδὴ δὲ αἱ κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι δὲν ἐφαρμόζουσιν ἐν γένει, ἕπεται, ὅτι καὶ τὰ συμμετρικὰ σφαιρικὰ πολύγωνα δὲν ἐφαρμόζουσιν ἐν γένει (διότι, ὅταν δύο στερεαὶ γωνίαι ἐφαρμόζωσι, καὶ τὰ ἀντιστοιχοῦντα πρὸς αὐτὰς πολύγωνα ἐφαρμόζουσι· καὶ τἀνάπαλιν).

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

445. Παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου, ἑκάστη πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλητέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

Ἔστω σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ.



Ἵνα δείξωμεν, ὅτι τὸ τόξον ΑΓ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων ΑΒ + ΒΓ, ἄγομεν ἐκ τοῦ κέντρου Κ τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι ἐν τῇ σχηματιζομένῃ στερεᾷ γωνίᾳ, ἡ γωνία ΑΚΓ εἶναι (341) μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων ΑΚΒ + ΒΚΓ· ἀλλ' ἡ γωνία, ἥτις εἶναι ἄθροισμα τῶν δύο τούτων γωνιῶν, βαίνει ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τόξων ΑΒ + ΒΓ, καὶ ἐπειδὴ ὑπερβαίνει τὴν γωνίαν ΑΚΓ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΓ, συνάγεται, ὅτι εἶναι

$$\mathrm{ΑΓ} < \mathrm{ΑΒ} + \mathrm{ΒΓ}.$$

Τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως ἀποδεικνύεται, ὡς καὶ τὸ ὅμοιον περὶ τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

446. Παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ πλευραὶ ἔχουσιν ἄθροισμα μικρότερον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου.

Ἔστω σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς αὐτὸ στερεὰ γωνία ἡ Κ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ΑΚΒ, ΑΚΓ, ΒΚΓ εἶναι (342) μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν· ἂν λοιπὸν τεθῶσιν αὗται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου μεγίστου τινὸς κύκλου, ἐφεξῆς ἀλλήλαις, καὶ οὕτως, ὥστε αἱ κορυφαὶ αὐτῶν νὰ πέσωσιν εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, θὰ ἀποτελέσωσι γωνίαν μικροτέραν 4 ὀρθῶν· ἑπομένως, τὸ τόξον, ἐφ' οὗ θὰ βαίνῃ αὕτη, ἤτοι τὸ $AB+B\Gamma+\Gamma A$, εἶναι μικρότερον τῆς περιφερείας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

447. Ἐκ τῶν δύο προηγουμένων θεωρημάτων γίνεται φανερόν, ὅτι πᾶσα σχέσις μεταξὺ τῶν ἑδρῶν ἢ τῶν διέδρων γωνιῶν στερεᾶς γωνίας ὑπάρχει καὶ μεταξὺ τῶν πλευρῶν ἢ τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ πολυγώνου. Ἐντεῦθεν συνάγεται ὅτι

1) Παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου, αἱ τρεῖς γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα μεγαλήτερον μὲν τῶν δύο ὀρθῶν, μικρότερον δὲ τῶν ἓξ (343).

2) Ἑκάστη τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ τριγώνου, προσλαβοῦσα δύο ὀρθάς, γίνεται μεγαλητέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

3) Ἐκ τριῶν τόξων μεγίστων κύκλων, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τῆς περιφερείας καὶ ὧν ἕκαστον εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, δύναται νὰ κατασκευασθῇ σφαιρικὸν τρίγωνον.

Ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ στερεὰ γωνία (344), ἔχουσα ἐπιπέδους γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν τόξων τούτων μετρουμένας· τὸ πρὸς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦν σφαιρικὸν τρίγωνον εἶναι τὸ ζητούμενον.

4) Δοθεισῶν τριῶν γωνιῶν, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι μεγαλήτερον μὲν τῶν δύο ὀρθῶν, μικρότερον δὲ τῶν ἕξ, καὶ ὧν ἑκάστη, προσλαβοῦσα δύο ὀρθάς, ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, δύναται νὰ κατασκευασθῇ σφαιρικὸν τρίγωνον, ἔχον τὰς γωνίας ταύτας.

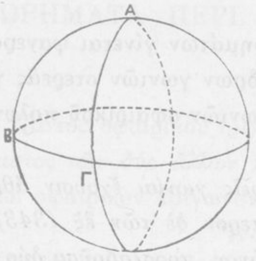
Ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ στερεὰ γωνία, ἔχουσα διέδρους γωνίας ἴσας πρὸς τὰς δεδομένας (345).

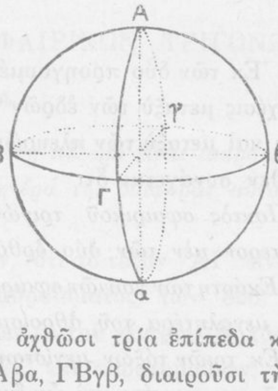
Ἐπειδὴ ἐν τοῖς σφαιρικοῖς τριγώνοις τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν περιλαμβάνεται μεταξὺ 2 καὶ 6 ὀρθῶν, ἕπεται, ὅτι δύναται σφαιρικὸν τρίγωνον νὰ ἔχῃ καὶ δύο καὶ τρεῖς ὀρθὰς γωνίας, ἢ καὶ δύο ἢ καὶ τρεῖς ἀμβλείας.

ΟΡΙΣΜΟΙ

448. Τὸ ἔχον δύο ὀρθὰς γωνίας τρίγωνον, ὡς τὸ ΑΒΓ, λέγεται *δισορθογώνιον*. Ἡ κορυφὴ Α εἶναι πόλος τῆς βάσεως ΒΓ καὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ εἶναι τεταρτημόρια μεγίστου κύκλου (336).

Τρισορθογώνιον λέγεται τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς του γωνίας ὀρθάς. Τοῦ τοιούτου τριγώνου αἱ πλευραὶ εἶναι τεταρτημόρια τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου.





ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ· Ἐὰν διὰ τοῦ κέντρου ἀχθῶσι τρία ἐπίπεδα κάθετα, πρὸς ἄλληλα ἀνὰ δύο, ὡς τὰ ΑΓαγ, ΒΑβα, ΓΒγβ, διαιροῦσι τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς 8 τρισορθογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΤΗΣ ΑΥΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

449. Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα καὶ αἱ πρὸς αὐτὰ ἀντιστοιχοῦσαι στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι· καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν δύο στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι, καὶ τὰ ἀντιστοιχοῦντα σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι ἡ ἰσότης τῶν σφαιρικῶν τριγώνων τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἀνάγεται εἰς τὴν ἰσότητα στερεῶν τριέδρων γωνιῶν, καὶ πρὸς ἕκαστον τῶν θεωρημάτων, τῶν περὶ τῆς ἰσότητος τῶν στερεῶν γωνιῶν ἀποδειχθέντων, ἀντιστοιχεῖ ἓν θεώρημα περὶ τῆς ἰσότητος τῶν σφαιρικῶν τριγώνων. Τοιαῦτα εἶναι τὰ ἑπόμενα.

1) Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν *ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουσι πάντα τὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα.*

Διότι, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι στερεαὶ γωνίαι ἔχουσι δύο ἕδρας ἴσας καὶ τὴν ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένην δίεδρον γωνίαν ἴσην· ἐπομένως (346) ἔχουσι πάντα τὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα.

2) Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας ἴσας, τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουσι πάντα τὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα.

3) Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχωσι τὰς τρεῖς των πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν, ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας των ἴσας (τὰς ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν).

4) Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχωσι τὰς γωνίας των ἴσας κατὰ μίαν, ἔχουσι καὶ τὰς πλευράς των ἴσας (τὰς ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν).

ΘΕΩΡΗΜΑ

450. Παντὸς ἰσοσκελοῦς σφαιρικοῦ τριγώνου, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαι, εἶναι ἴσαι.

Ἔστω ἐν τῷ σφαιρικῷ τριγώνῳ ΑΒΓ, ἡ ΑΒ ἴση τῇ ΑΓ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ γωνία Γ εἶναι ἴση τῇ Β.

Ἂς ἀχθῇ ἐκ τῆς κορυφῆς Α, εἰς τὸ μέσον Δ τῆς βάσεως, τόξον μεγίστου κύκλου, τὸ ΑΔ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ ἔχουσι τὰς πλευράς των ἴσας κατὰ μίαν· ἄρα, ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας των ἴσας· ὅθεν ἕπεται Β=Γ.

Ἐπειδὴ προσέτι αἱ περὶ τὸ Δ δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἕπεται, ὅτι *τὸ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως αὐτοῦ, ἀγόμενον τόξον μεγίστου κύκλου, εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν καὶ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς.*

Παρατήρησις. Τὸ συμμετρικὸν τρίγωνον ἰσοσκελοῦς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ἴσον αὐτῷ. Διότι, ἡ πρὸς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦσα στερεὰ γωνία ἔχει δύο διέδρους γωνίας ἴσας· ἐπομένως ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς συμμετρικῆς αὐτῇ (338).

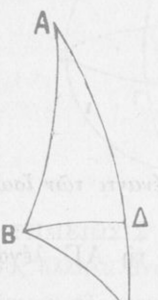
ΘΕΩΡΗΜΑ

451. Ἐὰν δύο γωνίαι σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ θὰ εἶναι ἴσαι· τουτέστι τὸ τρίγωνον θὰ εἶναι ἰσοσκελές.

Διότι, ἂν ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ ὑποτεθῇ Β = Γ, ἡ ἀντιστοιχοῦσα στερεὰ γωνία ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς συμμετρικῆς αὐτῇ, ὡς ἔχουσα δύο διέδρους γωνίας ἴσας· ἄρα καὶ τὸ συμμετρικὸν τρίγωνον αβγ τοῦ ΑΒΓ, ἐφαρμόζει ἐπ' αὐτοῦ· τότε δὲ ἡ ΑΒ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς αγ, ἥτις εἶναι ἴση τῇ ΑΓ· ἄρα εἶναι ΑΒ = ΑΓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

452. Ἐὰν σφαιρικοῦ τριγώνου δύο γωνίαι εἶναι ἄνισοι, καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἄνισοι· ἡ μεγαλητέρα πλευρὰ ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας γωνίας.

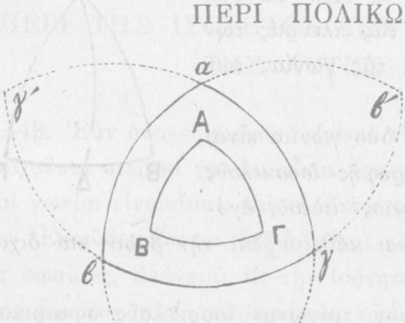


Ἔστω ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ, $Γ < Β$.

Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Β, τόξον μεγίστου κύκλου, τὸ ΒΔ, σχηματίζον τὴν γωνίαν ΓΒΔ ἴσην τῇ Γ· τότε θὰ εἶναι καὶ ΒΔ = ΔΓ· ἀλλ' ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ εὑρίσκομεν $ΑΒ < ΑΔ + ΔΒ$·
καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν ΔΒ διὰ τῆς ἴσης ΔΓ, εὑρίσκομεν $ΑΒ < ΑΔ + ΑΓ$, ἤτοι $ΑΒ < ΑΓ$.

Καὶ τὸ ἀντίστροφον τούτου θεώρημα ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

ΠΕΡΙ ΠΟΛΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ



453. Ἐὰν ἐκ τῶν κορυφῶν σφαιρικοῦ τριγώνου, ὡς πόλων, γραφῶσι τόξα μεγίστων κύκλων, τὸ ὑπὸ τῶν τόξων τούτων σχηματιζόμενον τρίγωνον λέγεται *πολικὸν* τοῦ πρώτου.

Τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πολικὸν εἶναι τὸ αβγ· ἡ κορυφὴ Α εἶναι πόλος τοῦ τόξου βγ· ἡ Β τοῦ αγ καὶ ἡ Γ τοῦ αβ.

Τῆς κορυφῆς Α ἡ ὁμόλογος

κορυφὴ α ἐν τῷ πολικῷ τριγώνῳ, προσδιορίζεται ὡς τομὴ τῶν δύο τόξων, τὰ ὁποῖα γράφονται ἐκ τῶν ἄλλων δύο κορυφῶν, ὡς πόλων· τὰ τόξα ταῦτα τέμνονται μὲν εἰς δύο σημεῖα α καὶ α΄, ἀλλ' ἐκ τούτων λαμβάνομεν μόνον τὸ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΒΓ κείμενον πρὸς ὃ κεῖται καὶ ἡ κορυφὴ Α· ὁμοίως προσδιορίζομεν καὶ τῶν ἄλλων κορυφῶν Β, Γ, τὰς ὁμολόγους β, γ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

454. *Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχῃ πολικὸν τὸ αβγ, καὶ τἀνάπαλιν, τὸ τρίγωνον αβγ θὰ ἔχῃ πολικὸν τὸ ΑΒΓ.*

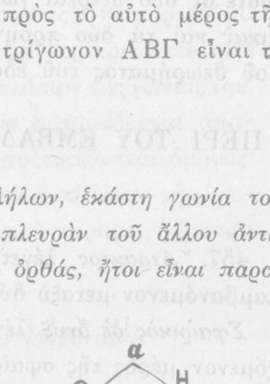
Ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι πόλος τοῦ τόξου βγ, τὸ τόξον μεγίστου κύκλου Αβ εἶναι τεταρτημόριον· ἐπειδὴ δὲ προσέτι τὸ Γ εἶναι πόλος τοῦ τόξου αβ, τὸ τόξον μεγίστου κύκλου Γβ εἶναι τεταρτημόριον· ὥστε τὰ ἀπὸ τοῦ β ἀγόμενα τόξα μεγίστου κύκλου, εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Γ, εἶναι τεταρτημόρια· ἄρα (426) τὸ β εἶναι πόλος τοῦ τόξου ΑΓ· ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι τὸ γ εἶναι πόλος τοῦ τόξου ΑΒ καὶ τὸ α πόλος τοῦ ΒΓ.

Κεῖνται δὲ αἱ ὁμόλογοι κορυφαὶ β, Β πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς πλευρᾶς ΑΓ· ὁμοίως καὶ αἱ ἄλλαι· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ πολικὸν τοῦ αβγ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

455. *Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι πολικὰ ἀλλήλων, ἑκάστη γωνία τοῦ ἑτέρου ἐξ αὐτῶν καὶ ἡ πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευρὰν τοῦ ἄλλου ἀντιστοιχοῦσα ἐπίκεντρος γωνία, ἀποτελοῦσι δύο ὀρθάς, ἤτοι εἶναι παραπληρωματικαί.*

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ πολικὰ ἀλλήλων· λέγω, ὅτι ἡ γωνία Α καὶ ἡ πρὸς τὸ τόξον βγ ἀντιστοιχοῦσα ἐπίκεντρος γωνία εἶναι παραπληρωματικαί.



Ἂς προσεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ, μέχρις οὗ συναντήσωσι τὴν βγ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε.

Ἡ γωνία Α ἔχει μέτρον (442) τὸ τόξον ΔΕ· ἀλλὰ τὸ τόξον βΕ εἶναι τεταρτημόριον· διότι τὸ β εἶναι πόλος τοῦ τόξου ΑΓ· ὁμοίως τὸ τόξον γΔ εἶναι τεταρτημόριον· διότι τὸ γ εἶναι πόλος τοῦ ΑΒ.

Ἄρα εἶναι $\beta E + \gamma \Delta =$ ἡμιπεριφερεία·

ἀλλὰ $\beta E + \gamma \Delta = \beta E + \Delta E + E\gamma = \beta\gamma + \Delta E$·

ὥστε $\beta\gamma + \Delta E =$ ἡμιπεριφερεία.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ τόξον ΔΕ μετρεῖ τὴν γωνίαν Α, τὸ δὲ τόξον βγ τὴν πρὸς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦσαν ἐπίκεντρον, ἕπεται ὅτι αἱ δύο εἰρημέναι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

Ὁμοίως δεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ περὶ τῶν ἄλλων γωνιῶν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

456. Αἱ εἰς δύο πολικὰ τρίγωνα ἀντιστοιχοῦσαι τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαὶ (340).

Καὶ τῷ ὄντι, τὸ α εἶναι πόλος τοῦ τόξου ΒΓ· ἄρα ἡ ἀκτὶς Κα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓ· κεῖται δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ, πρὸς ὃ κεῖται καὶ ἡ ΚΑ. Ὁμοίως, ἡ Κβ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΑΓ, καὶ ἡ Κγ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ΑΒ· ὥστε αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι Καβγ καὶ ΚΑΒΓ εἶναι παραπληρωματικαί· καὶ τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα εὑρίσκονται ἀμέσως ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ ἐδαφίου 340.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΤΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

457. *Ἄτρακτος* λέγεται μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας περιλαμβανόμενον μεταξὺ δύο ἡμικυκλίων μεγίστων κύκλων.

Σφαιρικὸς δὲ ὄνυξ λέγεται τὸ μεταξὺ τῶν αὐτῶν ἡμικυκλίων περιεχόμενον μέρος τῆς σφαίρας.

Βάσις τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος λέγεται ὁ ἄτρακτος, τὸν ὁποῖον περιλαμβάνουσι τὰ αὐτὰ ἡμικύκλια.

Ὁ σφαιρικὸς ἄτρακτος καὶ ὁ σφαιρικὸς ὄνυξ λέγονται ἐκ τῆς γωνίας τῶν ἡμικυκλίων, ὑφ' ὧν περιέχονται, *ὀρθογώνιοι* ἢ *ὀξυγώνιοι*, ἢ *ἀμβλυγώνιοι*.

Σφαιρικὴ δὲ πυραμὶς λέγεται μέρος τῆς σφαίρας, περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων στερεᾶς γωνίας, ἐχούσης τὴν κορυφὴν εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. *Βάσις* τῆς σφαιρικῆς πυραμίδος λέγεται τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον, τὸ ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων ὁριζόμενον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

458. Δύο ἄτρακτοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους, ὡς αἱ γωνίαι των, ἢ ὡς τὰ τόξα, τὰ μετροῦντα τὰς γωνίας των.

Διότι, διπλασιαζομένης τῆς γωνίας τῶν ἡμικυκλίων, διπλασιάζεται προδήλως καὶ ὁ ἄτρακτος, καὶ τριπλασιαζομένης, τριπλασιάζεται· καὶ τὸ αὐτὸ συμβαίνει διὰ πάντα ἀκέραιον ἀριθμόν. Ἐξ οὗ συνάγεται (224) ἡ πρότασις.

Ἔστω Α ὁ τυχὼν ἄτρακτος καὶ Γ ἡ γωνία αὐτοῦ, Α΄ ὁ ἄτρακτος, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ὀρθή· τότε θὰ εἶναι $A:A'=\Gamma:1$.

Ἐὰν λοιπὸν ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν ὁ ὀρθογώνιος ἄτρακτος Α΄, θὰ εἶναι

$$A:1=\Gamma:1, \text{ ἤτοι } A=\Gamma\cdot$$

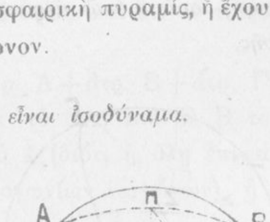
δηλαδὴ θὰ ἔχῃ μέτρον ὁ τυχὼν ἄτρακτος τὴν γωνίαν αὐτοῦ Γ (τουτέστι τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἐκφράζει, ἐκ πόσων ὀρθῶν καὶ ἐκ πόσων μερῶν τῆς ὀρθῆς σύγκειται ἡ Γ).

Ἀλλ᾽ ἂν ληφθῇ ὡς μονὰς τὸ ἥμισυ τοῦ εἰρημένου ἀτράκτου Α΄, τουτέστι τὸ τρισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον, ὁ ἄτρακτος Α΄ θὰ παριστᾶται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 2, καί, ἐκ τῆς προηγουμένης ἀναλογίας, προκύπτει τότε $A=2\Gamma$· ἤτοι μέτρον παντὸς ἀτράκτου εἶναι τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας του.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὰ περὶ τῶν ἀτράκτων εἰρημένα ἐφαρμόζονται ἀπαράλλακτα καὶ ἐπὶ τῶν σφαιρικῶν ὀνύχων καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως· ὥστε, παντὸς σφαιρικοῦ ὄνυχος μέτρον εἶναι τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας του, ἐὰν ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν ὄγκων ἡ σφαιρικὴ πυραμίς, ἡ ἔχουσα βάσιν τὸ τρισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

459. Δύο συμμετρικὰ σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα.



Ἔστωσαν συμμετρικὰ τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ. Διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ, διέρχεται μικρός τις κύκλος τῆς σφαίρας, τοῦ ὁποίου πόλοι ἔστωσαν τὰ σημεῖα Π καὶ Π΄. Ἐὰν ἐκ τοῦ Π, ἀχθῶσι τόξα μεγίστων κύκλων, εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τὰ ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ, τὰ τόξα ταῦτα θὰ εἶναι ἴσα (425)· ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ Π΄ ἀχθῶσι τὰ τόξα μεγίστων κύκλων Π΄α, Π΄β, Π΄γ, καὶ ταῦτα θὰ εἶναι ἴσα· διότι τὰ ΠΑ καὶ Π΄α μετροῦσι τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ΠΚΑ καὶ Π΄Κα· ἄρα εἶναι ἴσα· ὁμοίως εἶναι ΠΒ = Π΄β καὶ ΠΓ = Π΄γ· ὅθεν συνάγεται Π΄α = Π΄β = Π΄γ.

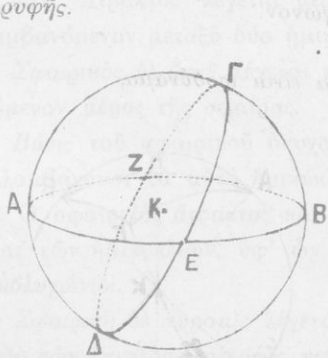
Τούτων τεθέντων, τὰ τρίγωνα ΑΠΓ καὶ αΠ΄γ ἔχουσι τὰς πλευράς των ἴσας κατὰ μίαν, εἶναι δὲ καὶ ἰσοσκελῆ· ἄρα ἐφαρμόζουσιν (450). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ τρίγωνον ΠΒΓ ἴσον τῷ Π΄βγ· καὶ τὸ τρίγωνον ΠΑΒ ἴσον τῷ Π΄αβ. Τὰ δύο λοιπὸν συμμετρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ ἐφαρμόζουσιν, ὅταν διαιρεθῶσιν εἰς μέρη· ἄρα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐν τῇ ἀποδείξει ὑπετέθη, ὅτι ὁ πόλος Π εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ἂν ἔκειτο ἐκτὸς αὐτοῦ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ ἦτο ἄθροισμα δύο ἐκ τῶν τριγώνων ΠΑΒ, ΠΒΓ, ΠΓΑ, ἠλαττωμένον κατὰ τὸ ἄλλο. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ θὰ συνέβαινε καὶ εἰς τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ αβγ καὶ πάλιν θὰ ἦσαν ἰσοδύναμα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἀποδεικνύεται καὶ ἡ πρότασις: *Δύο τριγωνικαὶ σφαιρικαὶ πυραμίδες, ἐὰν ἔχωσι βάσεις συμμετρικάς, εἶναι ἰσοδύναμοι.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

460. Ἐὰν τρεῖς μέγιστοι κύκλοι τέμνωνται ὁπωσδήποτε ἐν τῇ σφαίρᾳ, διαιροῦντες τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς εἰς τρίγωνα, τὸ ἄθροισμα δύο τριγώνων κατὰ κορυφὴν (ἤτοι, μόνον μίαν κορυφὴν ἐχόντων κοινὴν) *ἰσοῦται τῷ ἀτράκτῳ, ὅστις ἔχει τὴν γωνίαν τῆς κοινῆς κορυφῆς.*



Ἔστωσαν τρεῖς τυχόντες μέγιστοι κύκλοι, οἱ ΑΓΒΔ, ΑΕΒΖ, ΓΕΔΖ, τέμνοντες τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς τὰ ὀκτὼ τρίγωνα ΑΔΕ, ΕΒΓ κτλ.· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο ἐκ τούτων κατὰ κορυφὴν κειμένων, ὡς τῶν ΑΔΕ, ΕΒΓ, εἶναι ἴσον τῷ ἀτράκτῳ, ὅστις ἔχει τὴν γωνίαν Ε.

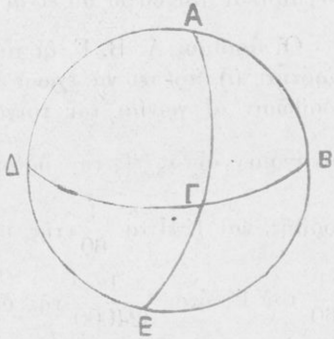
Διότι, τὰ τρία ἐπίπεδα τῶν τριῶν μεγίστων κύκλων τέμνονται, ἀνὰ δύο, κατὰ τὰς διαμέτρους ΑΚΒ, ΓΚΔ, ΕΚΖ, ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΕΒΓ καὶ ΖΑΔ εἶναι συμμετρικὰ καὶ διὰ τοῦτο ἰσοδύναμα· ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν δύο κατὰ κορυφὴν τριγώνων ΑΕΔ + ΕΒΓ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ΑΕΔ + ΖΑΔ, ὅπερ εἶναι ὁ ἄτρακτος ΕΑΖΕΔ, ὁ ἔχων τὴν γωνίαν Ε.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγωνικῶν σφαιρικῶν πυραμίδων, τῶν ὁποίων βάσεις εἶναι τὰ κατὰ κορυφὴν τρίγωνα ΕΑΔ, ΕΒΓ, ἰσοῦται τῷ σφαιρικῷ ὄνυχι, οὗτινος γωνία εἶναι ἡ Ε.

ΘΕΩΡΗΜΑ

461. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου, ὅταν ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν ληφθῇ τὸ τρισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον, εἶναι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν του ὑπὲρ τὰς δύο ὀρθάς.

Ἔστω τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ· ἐὰν συμπληρωθῇ ὁ μέγιστος κύκλος ΑΒΕΔΑ καὶ προσεκβληθῶσι τὰ τόξα ΑΓ καὶ ΒΓ πέραν τοῦ Γ, μέχρις οὗ συναντήσωσιν αὐτὸν κατὰ τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, θὰ εἶναι:



ΑΒΓ + ΓΒΕ = ἀτράκτῳ Α,

ΑΒΓ + ΑΓΔ = ἀτράκτῳ Β,

καὶ ΑΒΓ + ΓΔΕ = ἀτράκτῳ Γ,

κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα.

Προσθέτοντες δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη καὶ παρατηροῦντες, ὅτι τὰ ἓξ τρίγωνα, ἐξ ὧν σύγκεινται τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἰσοτήτων, ἀποτελοῦσι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἡμισφαιρίου καὶ δὶς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, εὑρίσκομεν

2 . ΑΒΓ + ἐπιφανεία ἡμισφαιρίου = ἀτρ. Α + ἀτρ. Β + ἀτρ. Γ·

καὶ ἐπειδὴ μέτρον τοῦ ἀτράκτου Α εἶναι τὸ 2Α, τοῦ δὲ Β τὸ 2Β καὶ τοῦ Γ τὸ 2Γ, τοῦ δὲ ἡμισφαιρίου τὸ 4 (διότι ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἀποτελεῖται ἐξ ὀκτὼ τρισορθογωνίων τριγώνων), ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται

$$2 . \mathrm{ΑΒΓ} + 4 = 2\mathrm{Α} + 2\mathrm{Β} + 2\mathrm{Γ},$$

ἐξ ἧς $$\mathrm{ΑΒΓ} = \mathrm{Α} + \mathrm{Β} + \mathrm{Γ} - 2.$$

Ἄν, παραδείγματος χάριν, ὑποτεθῇ

$$\mathrm{Α} = \frac{3}{4} \text{ τῆς ὀρθῆς}, \quad \mathrm{Β} = \frac{4}{5} \text{ ὀρθῆς} \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{Γ} = \frac{5}{6} \text{ ὀρθῆς},$$

θὰ εἶναι $$\mathrm{Α} + \mathrm{Β} + \mathrm{Γ} - 2 = \frac{23}{60}.$$

ἑπομένως, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τὰς γωνίας ταύτας ἔχοντος σφαιρικοῦ τριγώνου θὰ εἶναι τὰ $\frac{23}{60}$ τῆς ἐπιφανείας τοῦ τρισορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου, ἤτοι τὰ $\frac{23}{480}$ τῆς ὅλης ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Θὰ εὑρεθῇ δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου εἰς τετραγωνικὰ μέτρα, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἰς τετραγωνικὰ μέτρα, ἤτοι, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.

Ἂν, π. χ., ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἶναι 2 μέτρα, ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς θὰ εἶναι τετρ. μέτρα 16π· ἐπομένως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος σφαιρικοῦ τριγώνου θὰ εἶναι $16\pi.\frac{23}{480}$, ἤτοι $\frac{23\pi}{30}$, ἤτοι $2^{\tau\pi}, 4085$.

Οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, οἱ τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου ἐκφράζοντες ἐν τῇ ἰσότητι (ι), πρέπει νὰ ἔχωσι μονάδα τὴν ὀρθὴν γωνίαν. Ἂν λοιπὸν δοθῶσιν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου εἰς μοίρας καὶ πρῶτα λεπτὰ κτλ., ἀνάγομεν αὐτὰς εἰς τὴν ὀρθήν, παρατηροῦντες ὅτι 1^o εἶναι $\frac{1}{90}$ τῆς ὀρθῆς, καὶ $1'$ εἶναι $\frac{1}{60}$ τῆς μοίρας ἢ $\frac{1}{5400}$ τῆς ὀρθῆς καὶ $1''$ εἶναι $\frac{1}{60}$ τοῦ $1'$, ἤτοι $\frac{1}{324000}$ τῆς ὀρθῆς. Ἐάν, λόγου χάριν, δοθῇ

$$A = 69^o, \quad B = 94^o, \quad \Gamma = 83^o,15',$$

θὰ εἶναι $A = \frac{69}{90}$, $B = \frac{94}{90}$, $\Gamma = \frac{83}{90} + \frac{15}{5400}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

462. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του, μεῖον τοσάκις δύο ὀρθαί, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραί του, πλὴν δύο·

ἤ, ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν του, ὑπὲρ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ ὁμωνύμου ἐπιπέδου πολυγώνου.

Τοῦτο δεικνύομεν, διαιροῦντες τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα, ὡς εἰς τὴν πρότασιν (75).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ ὄγκος τῆς τριγωνικῆς σφαιρικῆς πυραμίδος, ὅταν, *ὡς μονὰς τῶν ὄγκων ληφθῇ ἡ τρισορθογώνιος σφαιρικὴ πυραμίς, τουτέστι τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς σφαίρας,* εἶναι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τῆς βάσεώς της, ὑπὲρ τὰς δύο ὀρθάς.

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

Α΄) ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΙΝ

1) Ἐὰν ἐκ τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας εὐθεῖα, τέμνουσα ἐπίπεδον, σχηματίζει πρὸς τὰς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κειμένας εὐθείας, εἶναι τρεῖς ἴσαι, ἡ εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

2) Πᾶσα εὐθεῖα, πλαγία πρὸς ἐπίπεδον, εἶναι κάθετος ἐπί τινα εὐθεῖαν, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κειμένην καὶ διερχομένην διὰ τοῦ ποδός της, μία δὲ καὶ μόνη τοιαύτη εὐθεῖα ὑπάρχει.

3) Ἐὰν εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα, ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ τυχὸν ἐπίπεδον θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων.

4) Ἐὰν εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ἢ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἶναι παράλληλα πρὸς ἄλληλα.

5) Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ, ἡ τομὴ αὐτῶν, ἐὰν τέμνωνται, θὰ εἶναι παράλληλος τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ.

6) Αἱ προβολαὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι.

7) Ἐὰν τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία τμηθῇ ὑπὸ τοῦ τυχόντος ἐπιπέδου, τὸ σημεῖον, ἔνθα τέμνονται τὰ ὕψη τοῦ προκύπτοντος τριγώνου, εἶναι ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου.

8) Ἡ προβολὴ ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι ὀρθὴ γωνία, ὅταν μία τῶν πλευρῶν αὐτῆς εἶναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ· καὶ τότε μόνον.

9) Ἐὰν στερεᾶς τριέδρου γωνίας δύο ἕδραι εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν δίεδροι γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι· καὶ ἀντιστρόφως.

10) Τὰ ἐπίπεδα, τὰ διερχόμενα δι᾽ ἑκάστης τῶν ἀκμῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας καὶ διὰ τῆς διχοτομούσης τὴν ἀπέναντι αὐτῆς ἕδραν, διέρχονται διὰ μιᾶς εὐθείας (ἐφαρμογὴ εἰς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα).

11) Ἐὰν διὰ τῶν διχοτομουσῶν τὰς ἕδρας τριέδρου στερεᾶς γωνίας ἀχθῶσιν ἐπίπεδα, κάθετα ἐπὶ τὰς ἕδρας, τὰ ἐπίπεδα ταῦτα διέρχονται διὰ μιᾶς εὐθείας (ἐφαρμογὴ εἰς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα).

12) Τὰ ἐκ τῶν ἀκμῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας ἀγόμενα ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὰς ἀπέναντι ἕδρας, διέρχονται διὰ μιᾶς εὐθείας (ἐφαρμογὴ εἰς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα).

13) Τὰ ἐπίπεδα, τὰ διχοτομοῦντα τὰς τρεῖς διέδρους γωνίας πάσης τριέδρου στερεᾶς γωνίας, διέρχονται διὰ μιᾶς εὐθείας (ἐφαρμογὴ εἰς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα).

14) Τὰ ἓξ ἐπίπεδα, τὰ ἐκ τῶν μέσων τῶν ἀκμῶν τοῦ τυχόντος τετραέδρου ἀγόμενα κάθετα ἐπ' αὐτάς, τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον (κέντρον τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας).

15) Αἱ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου συνδέουσαι εὐθεῖαι, διέρχονται δι' ἑνὸς σημείου, ὅπερ εἶναι τὸ κοινὸν μέσον αὐτῶν.

16) Εἰς πᾶν τετράεδρον, αἱ ἓξ ἑκάστης κορυφῆς ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἰς τὸ σημεῖον, ἔνθα τέμνονται αἱ διάμεσοι τῆς ἀπέναντι ἕδρας, τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς ἓν σημεῖον.

17) Πάντα τὰ ἐπίπεδα, τὰ ἐφαπτόμενα δύο σφαιρῶν καὶ ἔχοντα αὐτὰς πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῶν, τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον τῆς διὰ τῶν κέντρων διερχομένης εὐθείας· ὡσαύτως καὶ πάντα τὰ ἐφαπτόμενα αὐτῶν ἐπίπεδα, ἀφίνοντα δ' αὐτὰς πρὸς μέρη διάφορα.

18) Ἐὰν εἰς τὸ τεταρτημόριον τοῦ τυχόντος κύκλου, ἀχθῇ ἡ χορδὴ καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου, τὰ σχηματιζόμενα τρία χωρία, ἤτοι τὸ τρίγωνον, τὸ κυκλικὸν τμῆμα καὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου κείμενον μικτόγραμμον τρίγωνον, γράφουσιν ἰσοδύναμα στερεά, ὅταν στραφῶσι πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν ἀκτίνων τοῦ τεταρτημορίου.

Β') ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΠΡΟΣ ΕΥΡΕΣΙΝ

Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος:

1) Τῶν σημείων, ἅτινα ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ τριῶν δοθέντων σημείων.

2) Τῶν σημείων, ἅτινα ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ δύο δοθέντων ἐπιπέδων.

3) Τῶν σημείων ἅτινα ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν τριῶν ἑδρῶν ἢ ἀπὸ τῶν τριῶν ἀκμῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας.

4) Τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, αἵτινες ἄγονται ἐκ σημείου, κειμένου ἐκτὸς τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, ἐπὶ τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τούτου, τὰς δι' ἑνὸς σημείου διερχομένας.

5) Τῶν κέντρων τῶν κύκλων, καθ' οὕς, δοθεῖσα σφαῖρα τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδων, δι' ἑνὸς σημείου ἢ διὰ μιᾶς εὐθείας διερχομένων.

Γ') ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

1) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα, τέμνουσα δύο δοθείσας εὐθείας, μὴ κειμένας ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.

2) Νὰ ἀχθῇ παράλληλος τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, τέμνουσα δύο δοθείσας εὐθείας, μὴ κειμένας ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.

3) Νὰ τμηθῇ ἡ δοθεῖσα τετράεδρος στερεὰ γωνία, οὕτως, ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμον.

4) Νὰ γραφῇ σφαῖρα, ἧς ἡ ἐπιφάνεια νὰ διέρχηται διὰ τεσσάρων δοθέντων σημείων, μὴ κειμένων ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.

5) Νὰ ἐγγραφῇ σφαῖρα εἰς τὸ δοθὲν τετράεδρον.

6) Νὰ ἐγγραφῇ σφαῖρα μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ ἐφαπτομένη τριῶν δοθεισῶν σφαιρῶν.

7) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον, ἐφαπτόμενον δύο δοθεισῶν σφαιρῶν.

8) Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον, ἐφαπτόμενον τριῶν δοθεισῶν σφαιρῶν.

9) Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας στερεᾶς γωνίας, νὰ εὑρεθῇ ὁ συντομώτερος δρόμος ἀπὸ σημείου εἰς ἄλλο.

Τὰ ἑπόμενα προβλήματα, ἂς λυθῶσιν ἀλγεβρικῶς.

1) Εἰς τὸν δοθέντα κῶνον νὰ ἐγγραφῇ κύλινδρος, ἔχων κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἴσην τῷ δοθέντι τετραγώνῳ.

2) Τίς ἐκ τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κῶνον ἐγγεγραμμένων κυλίνδρων ἔχει τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν;

3) Νὰ τμηθῇ ἡ δοθεῖσα σφαῖρα δι' ἐπιπέδου, οὕτως, ὥστε τὸ ἀποτεμνόμενον μικρότερον ἡμισφαιρίου τμῆμα, νὰ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸν κῶνον, ὅστις ἔχει βάσιν τὴν τομὴν καὶ κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

4) Εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν νὰ περιγραφῇ κῶνος, ἔχων δοθέντα ὄγκον. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ἐλάχιστος τῶν περὶ τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν περιγεγραμμένων κώνων ἔχει ὕψος διπλάσιον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας.

5) Νὰ τμηθῇ ὁ δοθεὶς κύλινδρος δι' ἐπιπέδου, παραλλήλου τῇ βάσει, οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου.

6) Ἐκ τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων κυλίνδρων εὑρεῖν τὸν μέγιστον.

ΤΕΛΟΣ