ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝ ΤΩι Π. Σ. Π. Α.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΔΙΑ ΤΑΣ ΚΑΤΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΚΑΙ ΔΙΑ ΤΑ ΑΣΤΙΚΑ ΣΧΟΛΕΙΑ

ΟΕΣΒ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1947

383 386 387

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝ ΤΩι Π. Σ. Π. Α.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΔΙΑ ΤΑΣ ΚΑΤΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΚΑΙ ΔΙΑ ΤΑ ΑΣΤΙΚΑ ΣΧΟΛΕΙΑ

ΟΕΣΒ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1947

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄

ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠ΄ ΑΥΤΩΝ

I. ΠΡΩΤΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ

1. Ὅλοι ἔχομεν ἀκριβῆ ἰδέαν τοῦ ἑνὸς πράγματος καὶ τῶν πολλῶν πραγμάτων ἢ τοῦ πλήθους. Ὅπως τοῦ ἑνὸς μήλου καὶ τῶν πολλῶν μήλων, τοῦ ἑνὸς θρανίου καὶ τῶν πολλῶν θρανίων, τοῦ ἑνὸς βιβλίου καὶ τῶν πολλῶν βιβλίων.

2. Ἂς ὑποθέσω τώρα, ὅτι ἔχω ἓν πλῆθος ἀπὸ ὅμοια πράγματα, παραδείγματος χάριν ἀπὸ βώλους, καὶ μὲ ἐρωτοῦν : **Ἀπὸ πόσους βώλους ἀποτελεῖται τὸ πλῆθος αὐτό ;**

Διὰ νὰ ἀπαντήσω εἰς τὴν ἐρώτησιν αὐτὴν θὰ ἐργασθῶ ὡς ἑξῆς :

Θὰ λάβω ἀπὸ τὸ πλῆθος κατ' ἀρχὰς ἕνα βῶλον καὶ θὰ τὸν θέσω κατὰ μέρος. Ἔπειτα θὰ λάβω ἀπὸ τὸ πλῆθος ἄλλον ἕνα βῶλον, τὸν ὁποῖον θὰ θέσω πλησίον τοῦ πρώτου καὶ θὰ εἴπω **δύο** βῶλοι. Κατόπιν θὰ λάβω ἀπὸ τὸ πλῆθος ἄλλον ἕνα, τὸν ὁποῖον θὰ θέσω πλησίον τῶν ἄλλων καὶ θὰ εἴπω **τρεῖς** βῶλοι. Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον θὰ λαμβάνω ἀπὸ τὸ πλῆθος τοὺς βώλους καὶ θὰ τοὺς θέτω τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον πλησίον τῶν προηγουμένων καὶ θὰ λέγω συγχρόνως **τέσσαρες, πέντε ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα, δέκα βῶλοι.** Ἐὰν δὲ δὲν ἔχω πλέον νὰ λάβω ἄλλους βώλους, θὰ εἴπω ὅτι τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ **δέκα** βώλους.

Τώρα παρατηρῶ τὸ ἑξῆς : Ὅτι ἡ ἐργασία, τὴν ὁποίαν ἔκαμα, διὰ νὰ ὁρίσω τὸ πλῆθος (νὰ μάθω δηλαδὴ ἀπὸ πόσα πράγματα ἀποτελεῖται), δὲν εἶναι παρὰ σύγκρισις τοῦ ὅλου πλήθους πρὸς ἓν ἀπὸ τὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα τὸ ἀποτελοῦν.

3. Τὸ ἓν ἀπὸ τὰ πράγματα, πρὸς τὸ ὁποῖον συγκρίνομεν τὸ πλῆθος, λέγεται **μονάς.** Τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως, τὸ ὁποῖον μᾶς λέγει πόσα εἶναι τὰ πράγματα τοῦ πλήθους, λέγεται **ἀριθμός.**

Ὥστε εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα μονὰς εἶναι ὁ βῶλος καὶ ἀριθμὸς ὁ δέκα. Εἰς ἓν δὲ πλῆθος μήλων μονὰς εἶναι τὸ μῆλον. Ἀριθμὸς δὲ εἶναι τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως τοῦ ὅλου πλήθους πρὸς τὴν μονάδα του. Π.χ. ὁ πέντε, ἐὰν τὸ πλῆθος ἀποτελῆται ἀπὸ πέντε μῆλα, δηλαδὴ ἀπὸ ἓν καὶ ἓν καὶ ἓν καὶ ἓν καὶ ἓν μῆλα.

Πρέπει ὅμως νὰ σημειωθῇ, ὅτι σύγκρισιν, ὡς αἱ προηγούμεναι, δύναμαι νὰ κάμω καὶ εἰς ἓν πλῆθος, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀντικείμενα διάφορα, π. χ. εἰς ἓν πλῆθος ἀπὸ αἶγας καὶ πρόβατα, ἐὰν ἐρωτήσω, ἀπὸ πόσα ζῷα ἀποτελεῖται. Διότι τότε παραβλέπω τὰς διαφοράς των. Συγκρίνω λοιπὸν τὸ πλῆθος αὐτὸ τῶν ζώων πρὸς ἓν ἀπὸ αὐτὰ καὶ εὑρίσκω, ὅτι ἀποτελεῖται π. χ. ἀπὸ **ὀκτὼ** ζῷα. Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ μονὰς εἶναι τὸ ζῷον καὶ ἀριθμὸς ὁ ὀκτώ.

Ἐπίσης πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι μονὰς λέγεται καὶ ἓν σύνολον πολλῶν πραγμάτων, ὅταν τὰ θεωροῦμεν ὡς ἓν ὅλον. Π. χ. εἰς ἓν πλῆθος λέξεων μονὰς εἶναι ἡ λέξις.

4. Ἡ ἐργασία, τὴν ὁποίαν κάμνομεν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος ὁρίζει τὸ πλῆθος, λέγεται **ἀρίθμησις** (κοινῶς μέτρημα).

5. Οἱ ἀριθμοὶ δέκα βῶλοι, πέντε μῆλα, ὀκτὼ ζῷα, φανερώνουν τὸ εἶδος τῶν πραγμάτων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀποτελεῖται τὸ πλῆθος, τὸ ὁποῖον καθορίζει ὁ καθεὶς (ἀριθμός). Λέγονται δὲ διὰ τοῦτο **συγκεκριμένοι.** Ἐνῷ οἱ ἀριθμοὶ δέκα, ἑπτά, ὀκτώ, οἱ ὁποῖοι δὲν φανερώνουν τοῦτο, λέγονται **ἀφῃρημένοι.**

6. Εἰς τοὺς συγκεκριμένους ἀριθμοὺς πέντε μῆλα καὶ ὀκτὼ μῆλα παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ μονάδες των παριστάνουν τὸ αὐτὸ πρᾶγμα· ἐνῷ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τρία μῆλα καὶ ἑπτὰ βῶλοι, παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ μονάδες των παριστάνουν διάφορα πράγματα. Οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοί, ὡς πέντε μῆλα καὶ ὀκτὼ μῆλα, λέγονται **ὁμοειδεῖς,** ἐνῷ οἱ ἀριθμοὶ ὡς τρία μῆλα καὶ ἑπτὰ βῶλοι λέγονται **ἑτεροειδεῖς.**

7. Ἡ ἐπιστήμη, ἡ ὁποία πραγματεύεται περὶ τῶν ἀριθμῶν, λέγεται **Ἀριθμητική.**

ΙΣΟΙ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

8. Εἰς ἓν σακκίδιον ἔχω βώλους λευκοὺς καὶ εἰς ἓν ἄλλο ἔχω πρασίνους. Ὅταν δὲ ἐξάγω ἀπὸ τὸ πρῶτον σακκίδιον ἕνα βῶλον λευκόν, ἐξάγω συγχρόνως ἀπὸ τὸ ἄλλο ἕνα πράσινον. Ἀντιστοιχῶ δηλαδὴ τοὺς λευκοὺς βώλους πρὸς τοὺς πρασίνους ἕνα πρὸς ἕνα. Ὅταν λοιπὸν τελειώσῃ ἡ ἐργασία αὐτὴ καὶ εὑρεθῇ, ὅτι κάθε λευκὸς βῶλος τοῦ ἑνὸς σακκιδίου ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, πράσινον βῶλον τοῦ ἄλλου σακκιδίου, λέγω ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν λευκῶν βώλων τοῦ ἑνὸς σακκιδίου εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν πρασίνων βώλων τοῦ ἄλλου.

Ἐὰν ὅμως λευκοί τινες βῶλοι δὲν ἔχουν ἀντιστοίχους των πρασίνους, λέγομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ τῶν λευκῶν καὶ πρασίνων αὐτῶν βώλων εἶναι ἄνισοι. Ὥστε :

1) **Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ὅταν κάθε μία μονὰς τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχῇ εἰς μίαν** (καὶ μόνον μίαν) **μονάδα τοῦ ἄλλου.** Π. χ. ὁ ἀριθμὸς τῶν δακτύλων τῆς μιᾶς χειρὸς ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν δακτύλων τῆς ἄλλης. Καὶ

2) **Ἄνισοι λέγονται δύο ἀριθμοί, ὅταν μονάδες τινὲς τοῦ ἑνὸς δὲν ἔχουν ἀντιστοίχους εἰς τὸν ἄλλον. Ἐκεῖνος δέ, ὁ ὁποῖος ἔχει τὰς περισσοτέρας μονάδας, λέγεται μεγαλύτερος, ἐνῷ ὁ ἄλλος λέγεται μικρότερος.** Π.χ. οἱ ἀριθμοὶ πέντε καὶ ὀκτὼ εἶναι ἄνισοι, ὁ δὲ ὀκτὼ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ πέντε.

Σημεῖον τῆς ἰσότητος δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ = (ἴσον), γράφεται δὲ τοῦτο μεταξὺ τῶν δύο ἴσων ἀριθμῶν, π.χ. ἑπτὰ=ἑπτά.

Σημεῖον δὲ τῆς ἀνισότητος εἶναι τὸ $<$, γράφεται δὲ ὁ μικρότερος πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας, ὡς ὀκτὼ$<$δέκα (ὀκτὼ μικρότερον τοῦ δέκα) ἢ δέκα$>$ὀκτὼ (δέκα μεγαλύτερον τοῦ ὀκτώ).

9. Ἔχω ἓν σακκίδιον μὲ βώλους λευκούς, ἓν ἄλλο μὲ βώλους πρασίνους καὶ τρίτον μὲ ἐρυθρούς. Γνωρίζω δὲ ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν λευκῶν βώλων εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν πρασίνων καὶ μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐρυθρῶν βώλων. Ἀλλὰ τότε εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν πρασίνων βώλων ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐρυθρῶν. Συμπεραίνομεν ὅτι : **ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι πρὸς τρίτον, εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσοι.**

ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ ΚΑΤΑ ΤΟ ΔΕΚΑΔΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ

10. Ἡ μονάς, ὅταν θεωρῆται ὡς ἀριθμός, λέγεται ἕν. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα δὲ ἐννοοῦμεν, ὅτι, ἔπειτα ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, ἔρχονται κατὰ σειρὰν οἱ ἀριθμοὶ δύο, τρία, τέσσαρα, . . . δέκα. Σχηματίζεται δὲ ὁ δύο, ἐὰν εἰς τὴν μονάδα προστεθῇ καὶ ἄλλη μία μονάς, ὁ δὲ τρία, ἐὰν εἰς τὸν δύο προστεθῇ καὶ ἄλλη μία μονάς, ὁ δὲ τέσσαρα σχηματίζεται, ἐὰν προστεθῇ εἰς τὸν τρία καὶ ἄλλη μία μονάς. Μὲ τὸν ἴδιον δὲ τρόπον, ἤτοι διὰ τῆς προσθέσεως τῆς μονάδος, σχηματίζομεν ἀπὸ κάθε ἀριθμὸν τὸν ἀμέσως ἑπόμενον. Οὕτως ἀπὸ τὸν τέσσαρα διὰ τῆς προσθέσεως μιᾶς μονάδος σχηματίζεται ὁ πέντε καὶ κατόπιν οἱ ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα, δέκα.

Ἡ σειρὰ αὕτη τῶν ἀριθμῶν, ἡ ὁποία ἀρχίζει ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν ἕν, ἐννοοῦμεν καλῶς, ὅτι δὲν τελειώνει ποτέ, διότι δυνάμεθα ἀπὸ κάθε ἀριθμὸν διὰ τῆς προσθέσεως εἰς αὐτὸν μιᾶς μονάδος νὰ σχηματίζωμεν νέον ἀριθμόν. Λέγεται δὲ αὕτη **φυσικὴ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν.**

Σημείωσις. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα συνάγομεν καὶ τὸ ἑξῆς: ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ μονάδας, ἤτοι εἶναι **πλῆθος μονάδων.**

11. Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι ἡ φυσικὴ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν δὲν ἔχει τέλος. Ἐννοοῦμεν λοιπὸν καλῶς, ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν ὁ καθεὶς ἀριθμὸς νὰ λέγεται μὲ ἰδιαίτερον ὄνομα, οὔτε ἐπίσης εἶναι δυνατὸν νὰ γράφεται μὲ ἰδιαίτερον ψηφίον. Διὰ τοῦτο οἱ ἄνθρωποι εὑρέθησαν εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ ἐπινοήσουν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον νὰ ὀνομάζουν τοὺς ἀριθμοὺς μὲ ὀλίγας λέξεις καὶ νὰ γράφουν αὐτοὺς μὲ ὀλίγα ψηφία.

Ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον ὀνομάζονται οἱ ἀριθμοὶ μὲ ὀλίγας λέξεις, λέγεται **προφορικὴ ἀρίθμησις,** ὁ δὲ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον γράφονται οἱ ἀριθμοὶ μὲ ὀλίγα ψηφία, λέγεται **γραπτὴ ἀρίθμησις.**

12. Ἀρίθμησις προφορική. — Ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους εἴδομεν, ὁ ἓν λέγεται μονὰς **ἁπλῆ** ἢ πρώτης τάξεως, οἱ δὲ ἀριθμοὶ ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα σχηματίζουν τὴν τάξιν τῶν ἁπλῶν μονάδων.

Ὁ ἀριθμὸς δέκα θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς (μονὰς δευτέρας τάξεως) καὶ λέγεται **δεκάς.**

13. Καθὼς δέ, ἐὰν εἰς τὴν μονάδα προστεθῇ ἄλλη μία μονάς, σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς δύο (ἁπλαῖ μονάδες), οὕτω καὶ ἐὰν εἰς τὴν δεκάδα προστεθῇ ἄλλη μία δεκάς, σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς δύο δεκάδες ἢ εἴκοσι. Ἐὰν δὲ εἰς τοῦτον προστεθῇ ἄλλη μία δεκὰς σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς τρεῖς δεκάδες ἢ τριάκοντα. Μὲ τὸν ἴδιον δὲ τρόπον σχηματίζονται κατὰ σειρὰν οἱ ἀριθμοὶ τεσσαράκοντα (τέσσαρες δεκάδες), πεντήκοντα, ἑξήκοντα, ἑβδομήκοντα, ὀγδοήκοντα, ἐνενήκοντα, ἑκατὸν (δέκα δεκάδες).

Ὁ ἑκατὸν θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς (τρίτης τάξεως) καὶ λέγεται **ἑκατοντάς.**

14. Καὶ μὲ τὸν ἑκατὸν σχηματίζονται ἀριθμοὶ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως. Οἱ πρῶτοι δὲ ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁ δύο ἑκατοντάδες (ἤτοι διακόσια), τρεῖς ἑκατοντάδες (ἤτοι τριακόσια), ὁ τετρακόσια (τέσσαρες ἑκατοντάδες), ὁ πεντακόσια, ἑξακόσια, ἑπτακόσια, ὀκτακόσια, ἐννεακόσια, χίλια (δέκα ἑκατοντάδες).

Ὁ χίλια θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς (τετάρτης τάξεως) καὶ λέγεται **χιλιάς.**

15. Νέας μονάδας ἀνωτέρων τάξεων δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ὅσας θέλομεν. Τὰς σχηματίζομεν δέ, ὅπως τὰς προηγουμένας: δεκάδα, ἑκατοντάδα, χιλιάδα· ἤτοι μὲ δέκα μονάδας μιᾶς τάξεως θὰ σχηματίζωμεν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Σχηματίζομεν δὲ μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν τὴν δεκάδα χιλιάδων (πέμπτης τάξεως), τὴν ἑκατοντάδα χιλιάδων (ἕκτης τάξεως), τὴν μονάδα ἑκατομμυρίου (δέκα ἑκατοντάδες χιλιάδων ἢ χίλιαι χιλιάδες), τὴν δεκάδα ἑκατομμυρίου, τὴν ἑκατοντάδα ἑκατομμυρίου, τὸ δισεκατομμύριον (δέκα ἑκατοντάδες ἑκατομμυρίου ἢ χίλια ἑκατομμύρια), τὴν δεκάδα δισεκατομμυρίου, τὴν ἑκατοντάδα δισεκατομμυρίου, τὸ τρισεκατομμύριον (δέκα ἑκατοντάδες δισεκατομμυρίου ἢ χίλια δισεκατομμύρια) κ.τ.λ.

16. Τώρα μὲ τὰ ὀνόματα αὐτὰ τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων καὶ μὲ τὰ ὀνόματα τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμόν.

Ἂς ὑποθέσωμεν, δηλαδή, ὅτι θέλομεν νὰ ὀνομάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν σφαιριδίων, ποὺ εἶναι εἰς ἕνα σάκκον. Πρὸς τοῦτο θὰ χωρίσωμεν ἀπὸ αὐτὰ πρῶτον δέκα σφαιρίδια, ἤτοι θὰ σχηματίσωμεν ἀπὸ αὐτὰ μίαν δεκάδα, ἔπειτα θὰ σχηματίσωμεν ἀπὸ αὐτὰ ἄλλην μίαν δεκάδα, ἔπειτα ἄλλην κ.ο.κ. Θὰ εὑρεθῇ λοιπὸν μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν ὁ ἀριθμὸς τῶν σφαιριδίων χωρισμένος εἰς δεκάδας· εἶναι δὲ πιθανὸν νὰ περισσεύσουν καὶ μερικαὶ μονάδες, ἀλλ᾽ ἂν περισσεύσουν, δὲν θὰ εἶναι περισσότεραι ἀπὸ ἐννέα, διότι ἂν ἐπερίσσευον δέκα, θὰ ἐσχηματίζετο ἀπὸ αὐτὰς ἄλλη μία δεκάς.

17. Ἂς ὑποθέσωμεν λοιπόν, ὅτι ἐχωρίσαμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν σφαιριδίων δεκάδας ὀλιγωτέρας τῶν ἐννέα, π.χ. ἑπτά, καὶ ὅτι ἐπερίσσευσαν καὶ πέντε μονάδες. Τότε ὁ ἀριθμὸς τῶν σφαιριδίων τοῦ σάκκου εἶναι ὁ ἑπτὰ δεκάδες καὶ πέντε μονάδες ἢ ὁ ἑβδομήκοντα πέντε.

18. Εἶναι δυνατὸν ὅμως αἱ δεκάδες, τὰς ὁποίας ἐχωρίσαμεν, νὰ εἶναι περισσότεραι τῶν ἐννέα. Τότε χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων εἰς ἑκατοντάδας. Θὰ σχηματίσωμεν δηλαδὴ ἀπὸ τὰς δεκάδας ὅσας ἑκατοντάδας, δυνάμεθα. Εἶναι δὲ πιθανὸν νὰ περισσεύσουν καὶ μερικαὶ δεκάδες· ἀλλ᾿ ἂν περισσεύσουν, δὲν θὰ εἶναι περισσότεραι τῶν ἐννέα. Ἂς ὑποθέσωμεν λοιπόν, ὅτι ἐσχηματίσαμεν ἓξ ἑκατοντάδα καὶ ὅτι ἐπερίσσευσαν καὶ τρεῖς δεκάδες. Ἐνθυμούμεθα δέ, ὅτι, ἔπειτα ἀπὸ τὸν σχηματισμὸν τῶν δεκάδων, ἐπερίσσευσαν καὶ πέντε μονάδες. Τότε ὁ ἀριθμὸς τῶν σφαιριδίων τοῦ σάκκου εἶναι ὁ ἓξ ἑκατοντάδες, τρεῖς δεκάδες καὶ πέντε μονάδες ἢ ὁ ἑξακόσια τριάκοντα πέντε.

19. Ἂν ὅμως αἱ ἑκατοντάδες, τὰς ὁποίας ἐσχηματίσαμεν, εἶναι περισσότεραι τῶν ἐννέα, τότε χωρίζομεν αὐτὰς εἰς χιλιάδας. Θὰ περισσεύσουν δὲ (ἂν περισσεύσουν) καὶ μερικαὶ ἑκατοντάδες· ἀλλ᾿ αὗται δὲν θὰ εἶναι περισσότεραι τῶν ἐννέα. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν χιλιάδων, ποὺ ἐχωρίσαμεν, εἶναι π.χ. τέσσαρες καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑκατοντάδων, ποὺ ἐπερίσσευσαν, εἶναι ὀκτώ, ὁ ἀριθμὸς τῶν σφαιριδίων τοῦ σάκκου εἶναι ὁ τέσσαρες χιλιάδες, ὀκτὼ ἑκατοντάδες, τρεῖς δεκάδες καὶ πέντε μονάδες ἢ ὁ τέσσαρες χιλιάδες ὀκτακόσια τριάκοντα πέντε.

Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν καὶ νὰ σχηματίσωμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν χιλιάδων δεκάδας χιλιάδων καὶ νὰ μᾶς περισσεύσουν (ἂν περισσεύσουν) καὶ μερικαὶ χιλιάδες, αἱ ὁποῖαι ὅμως δὲν θὰ εἶναι περισσότεραι τῶν ἐννέα. Ἔπειτα δέ, ἀπὸ τὰς δεκάδας χιλιάδων θὰ σχηματίσωμεν ἑκατοντάδας χιλιάδων κ.ο.κ.

20. Τοῦτο ὅμως δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξακολουθήσῃ ὅσον θέλομεν· διότι ὅσον προχωροῦμεν εἰς τάξεις ἀνωτέρας, τόσον αἱ μονάδες αὐτῶν εἶναι ὀλιγώτεραι. Θὰ φθάσωμεν λοιπὸν κατ᾿ ἀνάγκην εἰς μίαν τάξιν μονάδων, ἡ ὁποία δὲν θὰ ἔχῃ περισσοτέρας τῶν ἐννέα· δὲν θὰ εἶναι ἑπομένως δυνατὸν νὰ σχηματίσωμεν ἀπὸ αὐτὰς μονάδας ἀνωτέρας τάξεως. Ἂς ὑποτεθῇ δέ, ὅτι τελικῶς ἐσχηματίσαμεν δύο ἑκατοντάδας χιλιάδων, ἑπτὰ δεκάδας χιλιάδων, τέσσαρας χιλιάδας, ὀκτὼ ἑκατοντάδας, τρεῖς δεκάδας καὶ πέντε μονάδας. Ἀλλ' ἀφοῦ γνωρίζομεν, πόσας μονάδας ἑκάστης τάξεως περιέχει ὁ ἀριθμὸς τῶν σφαιριδίων τοῦ σάκκου, γνωρίζομεν ἐντελῶς αὐτόν· εἶναι δὲ ὁ διακόσιαι ἑβδομήκοντα τέσσαρες χιλιάδες ὀκτακόσια τριάκοντα πέντε.

21. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν συμπεραίνομεν:

α) ὅτι **πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων καὶ ὅτι αἱ μονάδες ἑκάστης τάξεως δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι περισσότεραι ἀπὸ ἐννέα**· καὶ

β) ὅτι **διὰ νὰ ὀνομάσωμεν ἕνα ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ εἴπωμεν πόσας μονάδας ἑκάστης τάξεως περιέχει.**

Ἰδοὺ δὲ διατὶ εἴπομεν προηγουμένως, ὅτι οἱοσδήποτε ἀριθμὸς δύναται νὰ ὀνομασθῇ μὲ τὰ ὀνόματα τῶν μονάδων τῶν ἐννέα ἀριθμῶν καὶ μὲ τὰ ὀνόματα τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων.

22. Ὡς φαίνεται ἀπὸ τὰ προηγούμενα, οἱ ἀριθμοὶ οἱ μικρότεροι τοῦ χίλια δύνανται νὰ περιέχουν ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας ἁπλᾶς. Ὀνομάζονται δὲ μὲ τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον ὠνομάσαμεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν παραγράφων 17 καὶ 18 (οἱ δέκα καὶ ἕν, δέκα καὶ δύο λέγονται ἕνδεκα καὶ δώδεκα). Οἱ ἀριθμοὶ οἱ μικρότεροι τοῦ ἑκατομμυρίου καὶ μεγαλύτεροι τοῦ χίλια δύνανται νὰ περιέχουν ἑκατοντάδας χιλιάδων δεκάδας καὶ μονάδας χιλιάδων, ὡς καὶ ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας ἁπλᾶς. Ἀλλ' αἱ ἑκατοντάδες, δεκάδες καὶ μονάδες χιλιάδων ἀποτελοῦν ἕνα ἀριθμὸν χιλιάδων, αἱ ὁποῖαι εἶναι ὀλιγώτεραι τοῦ χίλια, αἱ δὲ ἑκατοντάδες, δεκάδες καὶ μονάδες ἁπλαῖ ἀποτελοῦν ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ χίλια. Τὰ ὀνόματα δὲ τῶν δύο αὐτῶν μερῶν (χιλιάδων καὶ ἁπλῶν μονάδων) ἀποτελοῦν τὸ ὄνομα ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν τῶν μεταξὺ τοῦ ἑκατομμυρίου καὶ τοῦ χίλια. Οὕτως ὠνομάσθησαν οἱ ἀριθμοὶ τῶν παραγράφων 19 καὶ 20. Ἐννοεῖται, ὅτι τὸ ὄνομα τοῦ δευτέρου μέρους—τῶν ἁπλῶν μονάδων—θὰ λείπῃ, ἂν ὁ ἀριθμὸς δὲν περιέχῃ μέρος μικρότερον τοῦ χίλια. Εὐκόλως δὲ συνάγομεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οἱ μικρότεροι τοῦ δισεκατομμυρίου καὶ μεγαλύτεροι τοῦ ἑκατομμυρίου θὰ ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν ἑκατομμυρίων (τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι ὀλιγώτερα τοῦ χίλια), δύνανται δὲ νὰ περιέχουν καὶ ἀριθμόν τινα χιλιάδων (αἱ ὁποῖαι θὰ εἶναι ὀλιγώτεραι τοῦ χίλια) καὶ ἀριθμόν τινα μικρότερον τοῦ χίλια. Τὰ ὀνόματα δὲ τῶν τριῶν αὐτῶν μερῶν ἀποτελοῦν καὶ τὸ ὄνομα ἑκάστου τῶν ἄνω ἀριθμῶν.

Πρέπει ὅμως νὰ σημειωθῇ, ὅτι τὰ ὀνόματα τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου μέρους (χιλιάδων καὶ ἁπλῶν μονάδων) θὰ ὑπάρχουν, ἂν ὑπάρχουν καὶ τὰ σχετικὰ μέρη. Οὕτως ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς ἑκατοντάδας, πέντε δεκάδας καὶ ἓξ μονάδας ἑκατομμυρίου, ἀπὸ δύο ἑκατοντάδας καὶ ἑπτὰ μονάδας χιλιάδων, ἀπὸ τέσσαρας ἑκατοντάδας, καὶ ἀπὸ δύο δεκάδας ἁπλῶν μονάδων, ἀπαγγέλλεται τριακόσια πεντήκοντα ἓξ ἑκατομμύρια, διακόσιαι ἑπτὰ χιλιάδες, τετρακόσια εἴκοσι.

Ὁμοίως ὀνομάζομεν καὶ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι μεταξὺ τοῦ δισεκατομμυρίου καὶ τρισεκατομμυρίου κ.ο.κ.

23. Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ὀνομάζονται μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν φαίνονται, ὅτι ἀποτελοῦνται ἀπὸ μονάδας, χιλιάδας, ἑκατομμύρια, δισεκατομμύρια, τρισεκατομμύρια κλπ.

Ἑκάστη δὲ ἀπὸ αὐτὰς σχηματίζεται ἀπὸ χιλίας μονάδας τῆς προηγουμένης τάξεως.

Αἱ μονάδες αὗται, ἤτοι ἡ μονὰς ἕν, χίλια, ἑκατομμύριον κτλ. λέγονται **ἀρχικαὶ** ἢ **πρωτεύουσαι** μονάδες.

Παρατηροῦμεν δέ, ὅτι εἰς τοὺς ἀριθμοὺς ἑκάστη ἀπὸ αὐτὰς περιέχει μονάδας, δεκάδας, καὶ ἑκατοντάδας. Αἱ τρεῖς αὗται τάξεις ἑκάστης ἀρχικῆς μονάδος ἀποτελοῦν ὁμοῦ τὴν **κλάσιν** αὐτῆς. Οὕτως ἔχομεν τὴν **κλάσιν** τῶν ἁπλῶν μονάδων ἢ τὴν 1ην κλάσιν, τὴν κλάσιν τῶν χιλιάδων ἢ τὴν 2αν, τὴν κλάσιν τῶν ἑκατομμυρίων ἢ τὴν 3ην κ.ο.κ.

Τετάρτη κλάσις δισεκατομμύρια			Τρίτη κλάσις ἑκατομμύρια			Δευτέρα κλάσις χιλιάδες			Πρώτη κλάσις μονάδες		
12 τάξις ἑκατ.	11 τάξις δεκ.	10 τάξις μον.	9 τάξις ἑκατ.	8 τάξις δεκ.	7 τάξις μον.	6 τάξις ἑκατ.	5 τάξις δεκ.	4 τάξις μον.	3 τάξις ἑκατ.	2 τάξις δεκ.	1 τάξις μον.
δισεκατομμυρίου			ἑκατομμυρίου			χιλιάδων			ἁπλῶν μονάδων		

24. Ἀρίθμησις γραπτή.— Εἴδομεν προηγουμένως, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ σχηματίζονται ἀπὸ μονάδας διαφόρων τάξεων. Ἐπίσης, ὅτι οὗτοι ὀνομάζονται μὲ τὰ ὀνόματα τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν καὶ μὲ τὰ ὀνόματα τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμοὺς διὰ ψηφίων (ἢ συμβόλων), ὅπως εἶναι τά:

ἕν,	δύο,	τρία,	τέσσαρα,	πέντε,	ἕξ,	ἑπτά,	ὀκτώ,	ἐννέα,
1	2	3	4	5	6	7	8	9

δυνάμεθα μὲ αὐτὰ νὰ γράψωμεν πάντα ἀριθμόν. Γίνεται δὲ τοῦτο, ἐὰν γράφωμεν μὲ τὰ ψηφία αὐτὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως καὶ ἕνα ἕκαστον ψηφίον ὀνομάζωμεν μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας φανερώνει.

Οὕτως ὁ ἀριθμὸς ἑπτὰ δεκάδες καὶ τρεῖς μονάδες γράφεται:

7 δεκάδες καὶ 3 μονάδες.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς δύο ἑκατοντάδες, τέσσαρες δεκάδες καὶ μία μονὰς γράφεται:

2 ἑκατοντάδες, 4 δεκάδες καὶ 1 μονάς.

25. Ἀλλὰ καὶ ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν γίνεται ἀκόμη εὐκολώτερος, ἐὰν κάμωμεν τὴν ἑξῆς συμφωνίαν: **Ἕκαστον ψηφίον, τὸ ὁποῖον γράφεται πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου ψηφίου νὰ παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἀπὸ ἐκείνην τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ ἄλλο ψηφίον.**

Οὕτως ἀντὶ 7 δεκάδες καὶ 3 μονάδες γράφομεν 73 καὶ ἀντὶ 2 ἑκατοντάδες, 4 δεκάδες καὶ 1 μονάς, γράφομεν 241. Καὶ ἀντὶ 8 χιλιάδες, 6 ἑκατοντάδες, 9 δεκάδες καὶ 5 μονάδες, γράφομεν 8695. Ὁ δὲ ἀριθμὸς τῆς § 20 γράφεται κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν 274835.

26. Ὥστε: κατὰ τὴν ἀνωτέρω συμφωνίαν, τὸ τελευταῖον ψηφίον φανερώνει ἁπλᾶς μονάδας ἢ πρώτης τάξεως. Τὸ ἀριστερὰ αὐτοῦ φανερώνει δεκάδας ἢ μονάδας δευτέρας τάξεως. Τὸ ἀριστερὰ αὐτοῦ (τοῦ δευτέρου), φανερώνει ἑκατοντάδας ἢ μονάδας τρίτης τάξεως, τὸ πρὸ αὐτοῦ φανερώνει χιλιάδας ἢ μονάδας τετάρτης τάξεως κ.ο.κ. Ὥστε: **ἡ ἀξία ἑκάστου ψηφίου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν ἔχει εἰς τὸν ἀριθμόν.**

27. Ἀλλὰ μὲ τὰ 9 ψηφία, τὰ ὁποῖα εἴδομεν, δὲν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουν μονάδας μιᾶς τάξεως. Διότι ἂν π.χ. ὁ ἀριθμὸς 4 ἑκατοντάδες καὶ 8 μονάδες γραφῇ ὡς ἑξῆς: 48, τὸ ψηφίον 4 δὲν φανερώνει ἑκατοντάδας, ἀλλὰ δεκάδας. Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ γράψωμεν ἓν ἄλλο ψηφίον εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων, αἱ ὁποῖαι λείπουν, ὁπότε τὸ ψηφίον 4 θὰ φανερώνῃ ἑκατοντάδας. Τὸ ψηφίον τοῦτο εἶναι τὸ 0 (μηδέν), τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει καμμίαν ἀξίαν. Γράφεται δὲ τοῦτο εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας δὲν ἔχει ὁ ἀριθμός.

Κατόπιν τούτου ὁ ἀνωτέρω ἀριθμὸς γράφεται 408. Ὁ δὲ ἀριθμὸς 5 χιλιάδες καὶ 6 μονάδες γράφεται 5006. Ὁ δὲ ἀριθμὸς 7 χιλιάδες καὶ 3 δεκάδες γράφεται 7030, ὁ δὲ ἀριθμὸς 3 ἑκατομμύρια καὶ 4 ἑκατοντάδες γράφεται 3000400. Αἱ δὲ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων γράφονται.

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 κτλ.

Ἐξ ἄλλου, ὁ ἀριθμὸς 32075 σημαίνει 3 δεκάδας χιλιάδων, 2 χιλιάδας, 7 δεκάδας καὶ 5 μονάδας. Ὁ δὲ ἀριθμὸς 207300 σημαίνει 2 ἑκατοντάδας χιλιάδων, 7 χιλιάδας καὶ 3 ἑκατοντάδας.

28. Εἰς τὰ ἀνωτέρω εἴδομεν, ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ γράφονται μὲ τὰ δέκα ψηφία 1, 2, 3 κτλ. Λέγονται δὲ πλὴν τοῦ μηδενός, **σημαντικά.** Ἡ μὲ τὰ ψηφία αὐτὰ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν λέγεται **ἀραβικὴ** γραφὴ καὶ τὰ ψηφία **ἀραβικοὶ χαρακτῆρες.** Διότι τὰ ἔκαμον γνωστὰ εἰς τὴν Εὐρώπην οἱ Ἄραβες (περὶ τὸν 12ον αἰῶνα μ.Χ.). Τὰ ἐφεῦρον ὅμως οἱ Ἰνδοί, οἱ ὁποῖοι ἐπενόησαν καὶ τὴν μέθοδον τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν.

Ἡ μέθοδος δὲ αὐτη εἶναι μία ἀπὸ τὰς εὐφυεστέρας ἐπινοήσεις τοῦ ἀνθρώπου. Συνετέλεσε δὲ πολὺ καὶ εἰς τὸ νὰ ἀναπτυχθῇ ἡ Ἀριθμητικὴ καὶ εἰς τὸ νὰ ἐξυπηρετηθοῦν αἱ πρακτικαὶ ἀνάγκαι τοῦ ἀνθρώπου.

29. Ἡ ἀνάλυσις τῶν ἀριθμῶν εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων καὶ ἡ μέθοδος τῆς γραφῆς αὐτῶν ἀποτελοῦν τὸ λεγόμενον σύστημα ἀριθμήσεως. Τὸ σύστημα δέ, τὸ ὁποῖον εἴδομεν, λέγεται **δεκαδικόν,** διότι δέκα μονάδες ἑκάστης τάξεως ἀποτελοῦν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας. Ὁ ἀριθμὸς δέκα λέγεται **βάσις** τοῦ συστήματος αὐτοῦ.

30. Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι γράφονται μὲ ἓν ψηφίον, λέγονται **μονοψήφιοι,** ὡς ὁ 7, ὅσοι δὲ γράφονται μὲ δύο λέγονται **διψήφιοι,** ὡς ὁ 45, καὶ οἱ μὲ τρία **τριψήφιοι,** ὡς ὁ 200.

Ἐὰν δὲ γράφωνται μὲ περισσότερα ψηφία, λέγονται **πολυψήφιοι.**

31. Περὶ τῆς ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν.—Ἀπὸ ὅσα εἴπομεν εἰς τὰς § § 17 καὶ 18, εὐκόλως συνάγεται ὁ κανὼν τῆς ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τὰ ψηφία δὲν εἶναι περισσότερα ἀπὸ τρία.

Ἀπὸ ὅσα δὲ εἴπομεν εἰς τὴν § 23, συνάγομεν, ὅτι διὰ νὰ ἀπαγγείλωμεν ἀριθμὸν πολυψήφιον: **Χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ δεξιά, ἔπειτα δὲ ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον τμῆμα χωριστά, ὡς νὰ ἦτο εἷς ἀριθμός. Συγχρόνως δὲ προσθέτομεν καὶ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας παριστᾷ. Ἡ ἀπαγγελία ἀρχίζει ἀπὸ τὸ τμῆμα τῶν ἀνωτάτων μονάδων, τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ εἶναι διψήφιον ἢ καὶ μονοψήφιον.**

32. Περὶ τῆς γραφῆς ἀπαγγελλομένου ἀριθμοῦ.—Γράφομεν διὰ ψηφίων ἕνα ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἀπαγγέλλεται, ὡς ἑξῆς: Γράφομεν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τὰ ψηφία τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων, καθ᾽ ὃν χρόνον ἀπαγγέλλονται, εἰς τὰς θέσεις δὲ τῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι λείπουν, γράφομεν μηδενικά.

33. Σύνολον μονάδων μιᾶς τάξεως δοθέντος ἀριθμοῦ.—Μᾶς δίδεται ὁ ἀριθμὸς 587324. Ἂν τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ ἀποκόψωμεν τὸ ψηφίον 4, ὁ ἀριθμὸς 58732 φανερώνει πόσας ἐν ὅλῳ δεκάδας ἔχει ὁ δοθεὶς ἀριθμός, ἤτοι φανερώνει τὸ σύνολον τῶν δεκάδων αὐτοῦ, ἂν δὲ ἀποκόψωμεν τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον κάμνουν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ, δηλαδὴ τὸν 24, ὁ ἀριθμὸς 5873 φανερώνει τὸ σύνολον τῶν ἑκατοντάδων αὐτοῦ· ἐνῷ ἂν ἀποκόψωμεν τὸν ἀριθμὸν 324, ὁ 587 φανερώνει τὸ σύνολον τῶν χιλιάδων του.

Ὥστε: **Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σύνολον τῶν μονάδων μιᾶς τάξεως ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἀποκόπτομεν** (ἀπὸ τὰ δεξιὰ) **τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον κάμνουν τὰ ψηφία τῶν μονάδων κατωτέρας τάξεως ἀπὸ ἐκείνην τὴν ὁποίαν ζητοῦμεν.**

34. Ποσόν. Μέτρησις αὐτοῦ.—Ἓν πλῆθος ἀπὸ μῆλα εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ περισσότερα ἢ ὀλιγώτερα μῆλα. Ἐπίσης ἀπὸ ἓν ὕφασμα ἠμπορῶ νὰ κόψω ἓν τεμάχιον μεγαλύτερον ἢ μικρότερον. Ὁμοίως τὴν ζάχαριν, τὴν ὁποίαν ῥίπτω εἰς τὸ πρωινὸν γάλα μου, ἠμπορῶ νὰ τὴν αὐξήσω ἢ νὰ τὴν ἐλαττώσω.

Κάθε πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ αὐξηθῇ ἢ νὰ ἐλαττωθῇ, λέγεται ποσόν.

Διὰ τοῦτο λέγομεν, ὅτι ἔχομεν π. χ. ἓν ποσὸν μήλων, μίαν ποσότητα ζαχάρεως, σίτου, βουτύρου, καὶ τὰ παρόμοια.

Ἂν προσέξωμεν τὰ διάφορα ποσά, θὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἑξῆς: Ὅτι, δηλαδή, ἄλλα μὲν ἀποτελοῦνται ἀπὸ πράγματα χωρισμένα τὸ ἓν ἀπὸ τὰ ἄλλα, ὅπως εἶναι κάθε πλῆθος πραγμάτων, π.χ. πλῆθος βιβλίων, τετραδίων κτλ. Ἐνῷ μία λωρὶς ὑφάσματος δὲν εἶναι ὡς τὰ ἀνωτέρω ποσά. Αὐτὴ ἀποτελεῖ ἓν ὁλόκληρον. Εἶναι δηλαδὴ **συνεχής.** Συνεχὲς ποσὸν εἶναι τὸ πλάτος ἑνὸς δωματίου ἢ τὸ μῆκος τῆς αὐλῆς τοῦ σχολείου κτλ.

Εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα, ὅτι διὰ νὰ ὁρίσωμεν ἓν πλῆθος πραγμάτων συγκρίνομεν αὐτὸ πρὸς ἓν ἀπὸ τὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα τὸ ἀποτελοῦν. Ὠνομάσαμεν δὲ τοῦτο μονάδα. Ἐπίσης εἴδομεν, ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως αὐτῆς εἶναι εἷς ἀριθμός.

Ἀλλὰ καὶ ὅταν ἔχω ἓν συνεχὲς ποσόν, π.χ. μίαν λωρίδα ὑφάσματος, καὶ θέλω νὰ εὕρω πόσον εἶναι μεγάλη—ἤτοι νὰ εὕρω τὸ μῆκος αὐτῆς—πάλιν σύγκρισιν θὰ κάμω. Ἀλλὰ διὰ νὰ τὴν κάμω, χρειάζεται μία μονὰς συγκρίσεως. Θὰ εἶναι δὲ αὕτη ἓν ποσὸν ὁμοειδὲς πρὸς τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον συγκρίνω, καὶ ὡρισμένον. Ὥστε ἐδῶ εἰς τὸ παράδειγμά μας μονὰς θὰ εἶναι ἓν ὡρισμένον μῆκος, π.χ. τὸ μέτρον. Θὰ συγκρίνω λοιπὸν τὸ μῆκος τῆς λωρίδος πρὸς τὸ μέτρον καὶ θὰ εὕρω ἕνα ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος θὰ μᾶς λέγῃ πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς λωρίδος.

Τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον γίνεται μία τοιαύτη σύγκρισις, θὰ τὸν ἴδωμεν ἀργότερα. Ἐδῶ λέγομεν μόνον, ὅτι τὴν τοιαύτην σύγκρισιν τὴν λέγομεν **μέτρησιν.**

Μονάδες μετρήσεως. — α) Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ μήκους λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸ μέτρον. Ὅταν θέλωμεν νὰ μετρήσωμεν μεγάλας ἀποστάσεις, χρησιμοποιοῦμεν τὸ χιλιόμετρον (1000 μέτρα). Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ μήκους τῶν ὑφασμάτων ἔχομεν τὸν πῆχυν.

β) Ὅταν θέλωμεν νὰ μετρήσωμεν ἐπιφανείας, π.χ. τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δωματίου μας ἢ τῆς αὐλῆς, λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Ἤτοι τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν 1 μέτρον. Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας τῶν ἀγρῶν χρησιμοποιοῦμεν τὸ στρέμμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐπιφάνειαν 1000 τετραγωνικῶν μέτρων.

γ) Ὅταν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν χῶρον π.χ. τοῦ δωματίου μας ἢ τὸν ὄγκον ἑνὸς κιβωτίου κτλ., λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸ κυβικὸν μέτρον. Ἤτοι κύβον, ὁ ὁποῖος ἔχει πλευρὰν 1 μέτρον.

δ) Τὰ βάρη τῶν σωμάτων τὰ μετροῦμεν συνήθως μὲ τὴν ὀκᾶν. Χρησιμοποιοῦμεν ὅμως καὶ τὸ γραμμάριον ἢ καὶ τὸ χιλιόγραμμον (1000 γραμμάρια).

Διὰ τὰ μεγάλα βάρη χρησιμοποιοῦμεν τὸν τόννον (1000 χιλιόγραμμα).

ε) Διὰ τὰ νομίσματα μονὰς εἶναι ἡ δραχμή.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς Α΄

1) Νὰ ἀριθμήσῃς τοὺς μαθητὰς τῆς τάξεώς σου. Ποία εἶναι ἡ μονὰς εἰς τὸ παράδειγμα αὐτό ; Τί μᾶς λέγει ὁ ἀριθμὸς ποὺ εὗρες ;

2) Νὰ ἀριθμήσῃς τὰ θρανία τῆς τάξεώς σου.

3) Ὁ ἀριθμὸς ποὺ εὗρες τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς σου, τί εἶναι μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν θρανίων αὐτῆς ; Ἴσος ἢ ἄνισος ; Καὶ ἂν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι ἄνισοι, νὰ εἴπῃς ποῖος ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι ὁ μεγαλύτερος. Ἐπίσης νὰ εἴπῃς, ἂν οὗτοι εἶναι ὁμοειδεῖς ἢ ἑτεροειδεῖς.

4) Οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεώς σου παρετάχθησαν εἰς εἴκοσι τριάδας. Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς καὶ ποία ἡ μονάς ;

Ὁμὰς Β΄

5) Πόσας μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας ἔχει α) μία χιλιάς, β) μία δεκὰς χιλιάδων, γ) μία ἑκατοντὰς χιλιάδων ;

6) Πόσας φορὰς ἡ χιλιὰς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος καὶ πόσας τῆς δεκάδος ; Πόσας φορὰς ἡ δεκὰς χιλιάδων εἶναι μεγαλυτέρα τῆς δεκάδος καὶ πόσας τῆς ἑκατοντάδος ;

7) Εἰς ποίαν ἀρχικὴν ἢ πρωτεύουσαν μονάδα ἀνήκουν α) αἱ ἑκατοντάδες τῶν ἁπλῶν μονάδων, β) αἱ δεκάδες τῶν χιλιάδων, γ) αἱ ἑκατοντάδες τῶν ἑκατομμυρίων ;

8) Ποίαν ἀξίαν ἔχει τὸ ψηφίον 5 καὶ ποίαν τὸ 7 εἰς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν 75, 857, 5721, 57300, 75000 ;

9) Ποίαν θέσιν ἔχει εἰς ἕνα ἀριθμὸν τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων, τῶν ἑκατοντάδων, τῶν δεκάδων χιλιάδων, τῶν μονάδων ἑκατομμυρίου ;

10) Εἰς ἕνα ἀριθμὸν πόσα ψηφία ὑπάρχουν δεξιὰ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων, τῶν ἑκατοντάδων, τῶν μονάδων χιλιάδων, τῶν ἑκατοντάδων χιλιάδων, τῶν δεκάδων ἑκατομμυρίου ;

11) Εἰς ἕνα ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει ἑκατομμύρια, πόσα ψηφία ὑπάρχουν κατόπιν τῶν ἑκατομμυρίων ;

12) Γράψατε διὰ ψηφίων τοὺς ἀριθμοὺς 1) τετρακόσια πεντήκοντα τέσσαρα, 2) ἑξακόσια ὀκτώ, 3) χίλια ἑκατὸν ἕνδεκα, 4) χίλια ἕνδεκα, 5) χίλια ἕν, 6) δύο χιλιάδες τριάκοντα ἐννέα, 7) τριάκοντα χιλιάδες δέκα ἑπτά, 8) τριάκοντα χιλιάδες ἑπτά, 9) ὀκτακόσιαι πεντήκοντα χιλιάδες εἴκοσι ἑπτά, 10) ὀκτακόσιαι χιλιάδες εἴκοσι ἑπτά, 11) τρία ἑκατομμύρια πεντακόσιαι δέκα χιλιάδες, 12) ἐννέα ἑκατομμύρια πέντε χιλιάδες ἑκατὸν πέντε, 13) τριάκοντα ἑπτὰ ἑκατομμύρια εἴκοσι ὀκτώ.

13) Τί παριστᾶ ἕκαστον ψηφίον εἰς τὸν ἀριθμὸν 358647 ; Καὶ τί εἰς τὸν ἀριθμὸν 537886241 ;

14) Εἰς ἕνα ἀριθμὸν ἓν ψηφίον κατέχει τὴν τρίτην, πέμπτην, ἕκτην, ὀγδόην, ἐνάτην θέσιν. Ποίας τάξεως μονάδας παριστᾶ κάθε φοράν ;

15) Πῶς ἀπαγγέλλονται οἱ ἀριθμοὶ

59	80007	1010101	300500000
247	80800	30005	305000000
859	800106	300005	100000011
1605	100001	300030	2478157239
12017	3570087	25178045	2000157239.

16) Ὁμοίως νὰ ἀπαγγελθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ

1
121
12321
1234321
123454321.

Νὰ σχηματίσετε δύο ἀκόμη σειρὰς ἀριθμῶν, ὡς ἐσχηματίσθησαν αἱ ἄνω σειραὶ καὶ νὰ ἀπαγγείλετε τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς.

17) Νὰ γραφοῦν οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν

4Δ (δεκάδας)	4ΔΧ (δεκάδας χιλιάδων)
7Δ καὶ 5Μ (μονάδας)	2ΔΧ καὶ 6Ε
3Ε (ἑκατοντ.), 6Δ καὶ 1Μ	4ΔΧ, 5Ε καὶ 9Δ
8Ε καὶ 9Μ	9ΕΧ (ἑκατ. χιλιάδων)
2Ε καὶ 3Δ	9ΕΧ, 7ΔΧ, 5ΜΧ, 3Ε καὶ 1Δ
6Χ (χιλιάδας)	1ΕΧ, 4ΜΧ καὶ 6Μ

7Χ καὶ 8Ε	*8ΜΕμ (μονάδας ἑκατομμυρίου)*
3Χ, 5Ε καὶ 9Δ	*7ΜΕμ, 3ΕΧ, 7ΜΧ, 7Δ καὶ 7Μ*
3Χ, 5Δ καὶ 7Μ	*6ΔΕμ (δεκάδας ἑκατομμυρίου)*
8Χ καὶ 8Μ	*9ΔΕμ, 5ΜΕμ, 2ΜΧ, 6Ε, 3Δ καὶ 1Μ.*

18) Πόσας φορὰς μικροτέρα εἶναι ἡ μονὰς ἀπὸ τὴν δεκάδα ; Ἡ δεκὰς ἀπὸ τὴν ἑκατοντάδα, ἡ ἑκατοντὰς ἀπὸ τὴν χιλιάδα ;

19) Πόσας φορὰς μικροτέρα εἶναι ἡ μονὰς ἀπὸ τὴν ἑκατοντάδα, ἀπὸ τὴν χιλιάδα ; Ἐπίσης ἡ δεκὰς ἀπὸ τὴν χιλιάδα, ἀπὸ τὴν δεκάδα χιλιάδων ;

20) Νὰ σχηματίσῃς ἀσκήσεις ὁμοίας μὲ τὰς ἀσκήσεις 18 καὶ 19.

21) Πόσας μονάδας (ἁπλᾶς) κάμνουν 4Δ καὶ 5Μ ; 9Δ καὶ 8Μ ; 5Δ καὶ 1Μ ;

22) Πόσας δεκάδας καὶ πόσας μονάδας κάμνουν 7Ε καὶ 3Δ ; 6Ε καὶ 5Δ ; 3Ε καὶ 9Δ ;

23) Πόσας ἑκατοντάδας, πόσας δεκάδας καὶ πόσας μονάδας κάμνουν 6Χ καὶ 1Ε ; 2Χ καὶ 7Ε ; 9Χ καὶ 9Ε ;

24) Νὰ γραφοῦν διὰ ψηφίων οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν :

14Δ καὶ 6Μ	*27Χ, 4Ε καὶ 86Μ*
5Ε καὶ 6Μ	*87ΔΧ, 58Ε καὶ 14Μ*
12Ε καὶ 47Μ	*93ΔΧ, 4Ε καὶ 78Μ*
25Ε καὶ 9Μ	*27ΔΧ καὶ 54Μ*
3Χ, 45Δ καὶ 7Μ	*27ΔΧ καὶ 4Μ*
4Χ καὶ 59Δ	*3ΕΧ, 75ΔΧ, 84Ε καὶ 69Μ*
8Χ, 2Ε καὶ 37Μ	*37ΕΧ, 58Χ, 46Δ καὶ 9Μ*
12Χ, 54Δ καὶ 8Μ	*37ΕΧ, 46Δ καὶ 9Μ.*

25) Πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ 5 γράφομεν ἕνα μηδενικόν, δύο μηδενικά, τρία, τέσσαρα μηδενικά. Τί γίνεται ὁ ἀριθμὸς 5 κάθε φοράν ;

26) Νὰ γίνῃ ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 5, 6 δέκα, ἑκατόν, χιλίας φορὰς μεγαλύτερος.

27) Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν δεκάδων, ἑκατοντάδων, χιλιάδων καὶ ἑκατοντάδων χιλιάδων ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν 1252, 37306, 705040, 3604809.

35. Ἑλληνικὴ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν.—Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μετεχειρίζοντο διὰ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν τὰ 24 γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου καὶ τὰ σημεῖα ϛ′ (στίγμα), ϟ′ (κόππα) καὶ ϡ′ (σαμπί). Ἔθετον δὲ ἄνωθεν αὐτῶν καὶ δεξιὰ ἕνα τόνον.

Καὶ τὰς μὲν μονάδας ἀπὸ 1 ἕως 9 παρίστανον διὰ τῶν

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
α′	β′	γ′	δ′	ε′	ϛ′	ζ′	η′	θ′

τὰς δεκάδας ἀπὸ τοῦ 10 ἕως 90 διὰ τῶν

10,	20,	30,	40,	50,	60,	70,	80,	90,
ι′	κ′	λ′	μ′	ν′	ξ′	ο′	π′	ϟ′

καὶ τὰς ἑκατοντάδας ἀπὸ 100 ἕως 900 διὰ τῶν

100,	200,	300,	400,	500,	600,	700,	800,	900.
ρ′	σ′	τ′	υ′	φ′	χ′	ψ′	ω′	ϡ′

Διὰ τὰς χιλιάδας μετεχειρίζοντο τὰ ἴδια γράμματα μὲ τὸν τόνον ὄπισθεν καὶ ὀλίγον ὑποκάτω, ὡς

1000,	2000,	3000,	100000,	200000	κτλ.
͵α	͵β	͵γ	͵ρ	͵σ	

Τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦνται ἀπὸ μονάδας καὶ δεκάδας, παρίστανον μὲ τὸ γράμμα τῶν δεκάδων, τὸ ὁποῖον ἔγραφον πρῶτον, καὶ μὲ τὸ γράμμα τῶν μονάδων, τὸ ὁποῖον ἔγραφον δεύτερον, ὡς λγ′ (33), πε′ (85). Ὁμοίως ἔγραφον καὶ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦνται ἀπὸ μονάδας, δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας, ὡς σκζ′ (227), χμα′ (641), υη′ (408).

36. Ρωμαϊκὴ γραφή.—Οἱ Ρωμαῖοι μετεχειρίζοντο ἑπτὰ ἀπὸ τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου των διὰ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν. Ἦσαν δὲ τὰ ἑξῆς:

I	V	X	L	C	D	M
1,	5,	10,	50,	100,	500,	1000.

Μὲ τὰ γράμματα αὐτὰ ἐσχηματίζοντο οἱ ἀριθμοὶ ὡς ἑξῆς:

1) Ὅμοια ψηφία, ὅταν γράφωνται τὸ ἓν πλησίον τοῦ ἄλλου, προστίθενται. Οὕτως

ὁ	ἀριθμὸς	XX	παριστᾷ	τὸν	20
»	»	CC	»	»	200
»	»	MMM	»	»	3000

2) Ὅταν ἓν ψηφίον γράφεται ἀριστερὰ μεγαλυτέρου του, ἀφαιρεῖται ἀπὸ αὐτό· ἀλλ' ὅταν γραφῇ δεξιά, προστίθεται. Οὕτως

ὁ ἀριθμὸς IV παριστᾷ τὸν 4

ὁ ἀριθμὸς	VI	παριστᾷ	τὸν	6
» »	XL	»	»	40
» »	LX	»	»	60

3) Ἀριθμός, ἄνωθεν τοῦ ὁποίου γράφεται μία γραμμή, παριστᾷ χιλιάδας, δύο γραμμαὶ παριστᾷ ἑκατομμύρια, καὶ τρεῖς γραμμαὶ δισεκατομμύρια. Οὕτως

ὁ ἀριθμὸς	$\overline{\text{VII}}$	παριστᾷ	7	χιλιάδας,
» »	$\overline{\overline{\text{XIX}}}$	»	19	ἑκατομμύρια,
» »	$\overline{\overline{\overline{\text{LXX}}}}$	»	70	δισεκατομμύρια.

Ἡ Ἑλληνικὴ καὶ Ρωμαϊκὴ γραφὴ χρησιμοποιεῖται σήμερον εἰς ὡρισμένας περιστάσεις, π. χ. εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν κεφαλαίων ἑνὸς βιβλίου, ὁπότε γράφουν: Κεφάλαιον Α΄ (πρῶτον), Κεφάλαιον Β΄ κτλ. Ἐπίσης εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν τόμων ἑνὸς ἔργου, ὡς Ι (πρῶτος), ΙΙ (δεύτερος), τῶν σελίδων τοῦ προλόγου ἑνὸς βιβλίου κτλ.

Σημείωσις. Τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου τὰ χρησιμοποιοῦμεν σήμερον πολλάκις διὰ νὰ παραστήσωμεν οἱουσδήποτε ἀριθμούς. Ἤτοι, ὅταν λέγωμεν π.χ. ὁ ἀριθμὸς α, ἐννοοῦμεν ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ὁ 5 ἢ ὁ 37 ἢ ὁ 629 κ.ο.κ. Ὁμοίως ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν ὁ ἀριθμὸς β ἢ ὁ γ κ.ο.κ.

Ἐὰν τὸ γράμμα α παριστᾷ π.χ. τὸν ἀριθμὸν 6, γράφομεν α=6. Ἐὰν γράψωμεν α=β, λέγομεν ὅτι ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον παριστᾷ ὁ α, εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον παριστᾷ ὁ β. Ἐὰν γράψωμεν α>β, λέγομεν, ὅτι ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον παριστᾷ ὁ α, εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον παριστᾷ ὁ β.

Ἀσκήσεις.

28) Γράψε τοὺς ἀριθμοὺς 11, 45, 87, 290, 358, 756, 1725, 5000, 30700 καὶ 200000 διὰ τῆς Ἑλληνικῆς καὶ Ρωμαϊκῆς γραφῆς. Ἐπίσης διὰ τῆς Ρωμαϊκῆς γραφῆς νὰ γράψῃς τὰς ὥρας τοῦ ὡρολογίου.

29) Νὰ γράψῃς τοὺς ἀριθμοὺς ιγ΄, κα΄, μη΄, ξθ΄, τλε΄, ωνβ΄, φδ΄ καὶ ϡζ΄ καθὼς καὶ τοὺς ἀριθμοὺς XII, XXI, XC, $\overline{\text{D}}$, $\overline{\overline{\text{VI}}}$ *μὲ ἀραβικὰ ψηφία.*

30) Ἀπὸ τὰς ἰσότητας α=β καὶ α=γ, ποίαν ἄλλην ἰσότητα ἠμποροῦμεν νὰ συναγάγωμεν; (§ 9).

II. ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

Α΄. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

37. Πρόβλημα. Ἓν σακκίδιον περιέχει 3 σφαίρας. Ἓν ἄλλο περιέχει 5 σφαίρας καὶ τρίτον σακκίδιον περιέχει 6. Πόσαι εἶναι αἱ σφαῖραι καὶ τῶν τριῶν σακκιδίων μαζί ;

Ἐὰν τὰς σφαίρας καὶ τῶν τριῶν σακκιδίων ρίψωμεν ὅλας εἰς ἓν σακκίδιον, ὁ ἀριθμὸς τῶν σφαιρῶν, αἵ ὁποῖαι περιέχονται εἰς τὸ σακκίδιον αὐτό, εἶναι ἐκεῖνος τὸν ὁποῖον ζητοῦμεν.

Ἀλλὰ τοῦτο σημαίνει, ὅτι ἑνώσαμεν τὰς μονάδας τῶν ἀριθμῶν 3, 5 καὶ 6 (καὶ μόνον αὐτὰς) καὶ ἐσχηματίσαμεν ἀπὸ αὐτὰς ἄλλον ἀριθμόν. Ἡ πρᾶξις αὐτὴ λέγεται **πρόσθεσις.**

Ὥστε : **Πρόσθεσις εἶναι ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἀπὸ ὅλας τὰς μονάδας, τὰς ὁποίας ἔχουν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοί.**

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως λέγεται **ἄθροισμα** ἢ κεφάλαιον, οἱ δὲ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι προστίθενται, λέγονται **προσθετέοι** ἢ **ὅροι** τοῦ ἀθροίσματος.

Τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως εἶναι τὸ $+$(σύν), γράφεται δὲ τοῦτο μεταξὺ τῶν προσθετέων, π.χ. $3+5+6$.

Ἡ πρόσθεσις συγκεκριμένων ἀριθμῶν εἶναι δυνατή, ὅταν οὗτοι εἶναι ὁμοειδεῖς. Τὸ δὲ ἄθροισμά των εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς αὐτούς. Οὕτως ἠμποροῦμεν νὰ προσθέσωμεν 3 πρόβατα καὶ 5 πρόβατα καὶ τὸ ἄθροισμά των θὰ παριστᾷ πρόβατα. Δὲν ἠμποροῦμεν ὅμως νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἑτεροειδεῖς ἀριθμοὺς 3 πρόβατα καὶ 5 μῆλα.

38. Πρόσθεσις ἀριθμῶν μονοψηφίων.—Πρόβλημα. Ἀπὸ ἓν χαρτοπωλεῖον ἠγόρασα χαρτὶ 5 δραχμῶν καὶ μελάνην 3 δραχμῶν. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσα ἐν ὅλῳ ;

Διὰ τὸ χαρτὶ ἐπλήρωσα 5 δρχ., ἤτοι 1 δρχ. + 1 δρχ. + 1 δρχ. + 1 δρχ. + 1 δρχ. καὶ διὰ τὴν μελάνην 3 δρχ., ἤτοι 1 δρχ. + 1 δρχ. + 1 δρχ. Ὥστε καὶ διὰ τὰ δύο αὐτὰ εἴδη ἐπλήρωσα 5 δρχ. + 3 δρχ. = 1 δρχ. +1 δρχ. +1 δρχ. +1 δρχ. + 1 δρχ. + 1 δρχ. +1 δρχ. + 1 δρχ. = 8 δρχ.

Ἀλλ᾿ ἀντὶ νὰ εὕρω τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι μᾶς ἐδόθησαν, κατὰ τὸν τρόπον αὐτόν, δύναμαι νὰ τὸ εὕρω ὡς ἑξῆς : Νὰ προσθέσω εἰς τὸν ἀριθμὸν 5 δρχ. τὰς μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ 3 δραχμαί, μίαν πρὸς μίαν· λέγω δὲ τότε 5 δρχ.+1 δρχ.=6 δρχ., 6 δρχ.+1 δρχ.= 7 δρχ., 7 δρχ.+ 1 δρχ.= 8 δρχ. Ἀλλ' εἴτε εἰς τὸν ἀριθμὸν 5 δρχ. προσθέσω τὰς μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ 3 δρχ. εἴτε εἰς τὸν ἀριθμὸν 3 δρχ. προσθέσω τὰς μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ 5 δρχ., τὸ αὐτὸ ἄθροισμα 8 δραχμαὶ θὰ εὕρω. Διότι τοῦτο πάντοτε περιέχει τὰς μονάδας τῶν ἀριθμῶν 5 δρχ. καὶ 3 δρχ. καὶ μόνον αὐτάς.

Ὥστε εἶναι 5 δρχ.+3 δρχ.=3 δρχ.+5 δρχ.

39. Πρόβλημα. Εἷς ἠγόρασε χαρτὶ 4 δραχμῶν, μελάνην 6 δραχμῶν, μολύβια 9 δραχμῶν καὶ πέννες 3 δραχμῶν. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ;

Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ, πρέπει νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 4, 6, 9 καὶ 3.

Τὸ δὲ ἄθροισμα 4 δρχ.+6 δρχ.+9 δρχ.+3 δρχ. εἶναι αἱ δραχμαί, τὰς ὁποίας ζητοῦμεν. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τοῦτο, θὰ προσθέσωμεν πρῶτον εἰς τὸν ἀριθμὸν 4 δραχμαὶ τὸν ἀριθμὸν 6 δραχμαί. Ἔπειτα εἰς τὸ ἄθροισμά των θὰ προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 9 δραχμαὶ καὶ εἰς τὸ νέον ἄθροισμα θὰ προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3 δραχμαί. Καὶ τὴν μὲν πρόσθεσιν 4 δρχ. + 6 δρχ. ἐκτελοῦμεν ἀπὸ μνήμης (διότι εὐκόλως μανθάνομεν νὰ προσθέτωμεν ἀπὸ μνήμης δύο οἱουσδήποτε μονοψηφίους ἀριθμούς)· ἐνῷ τὰς προσθέσεις 10 δρχ.+9 δρχ.=19 δρχ. καὶ 19 δρχ.+3 δρχ.=22 δρχ. ἐκτελοῦμεν διὰ τῆς προσθέσεως εἰς τὸν πολυψήφιον τῶν μονάδων τῶν μονοψηφίων, μίαν πρὸς μίαν.

40. Ἀλλὰ καὶ κατ' ἄλλην τάξιν καὶ ἂν λάβωμεν τοὺς ἀριθμούς, πάλιν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα 22 δραχμαὶ θὰ εὕρωμεν. Ἤτοι θὰ εἶναι π. χ. 4 δρχ.+6 δρχ.+9 δρχ.+3 δρχ.=6 δρχ.+3 δρχ.+9 δρχ.+4 δρχ. Διότι τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖται πάντοτε ἀπὸ τὰς δραχμὰς (τὰς μονάδας) τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

41. Ἐπίσης τὸ αὐτὸ ἄθροισμα θὰ εὕρωμεν, ἂν εὕρωμεν πρῶτον πόσον ἐπλήρωσε π.χ. διὰ τὰ μολύβια καὶ διὰ τὴν μελάνην (9 δρχ. +6 δρχ.=15 δρχ.)· ἔπειτα πόσον ἐπλήρωσε διὰ τὸν χάρτην καὶ διὰ τὰς πέννας (4 δρχ.+3 δρχ.=7 δρχ.) καὶ κατόπιν νὰ προσθέσωμεν τὰ ἀθροίσματα 15 δρχ. καὶ 7 δρχ. (15 δρχ.+7 δρχ.=22 δρχ.).

Ἤτοι **τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν, ἂν ἀντικαταστή-**

σωμεν εἰς ἓν ἄθροισμα μερικοὺς προσθετέους αὐτοῦ μὲ τὸ ἄθροισμά των.

Ἐπίσης τὸ αὐτὸ ἄθροισμα θὰ εὕρωμεν καὶ ἂν ἐργασθῶμεν ὡς δεικνύουν αἱ ἰσότητες 4 δρχ.+6 δρχ.+9 δρχ.+3 δρχ.=4 δρχ.+6 δρχ.+9 δρχ.+1 δρχ.+2 δρχ.=10 δρχ.+10 δρχ.+2 δρχ.=22 δρχ.

42. Πρόσθεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.—Π ρ ό β λ η μ α. **Εἷς παντοπώλης ἐκέρδισεν ἀπὸ τὴν πώλησιν βουτύρου 2394 δραχμάς, ἀπὸ τὴν πώλησιν ἐλαίου 3512 δραχμὰς καὶ ἀπὸ τὴν πώλησιν ἀλεύρου 463 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισεν ἐν ὅλῳ;**

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, πρέπει νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 2394, 3512 καὶ 463. Τὸ δὲ ἄθροισμα 2394 δρχ.+3512 δρχ.+463 δρχ. εἶναι τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον ζητοῦμεν.

Ἀλλὰ γνωρίζομεν, ὅτι κάθε ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα μονάδων διαφόρων τάξεων. Δυνάμεθα δὲ νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας των, χωριστὰ τὰς δεκάδας των κτλ.

Ἀλλὰ διὰ νὰ γίνῃ τοῦτο εὐκόλως, γράφομεν αὐτοὺς ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 2394 \\ 3512 \\ 463 \\ \hline 6369 \end{array} = \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2X & + & 3E & + & 9\Delta & + & 4M \\ 3X & + & 5E & + & 1\Delta & + & 2M \\ & & 4E & + & 6\Delta & + & 3M \\ \hline 5X & + & 12E & + & 16\Delta & + & 9M \end{array} \right\}$$

Ἡ στήλη τῶν ἁπλῶν μονάδων δίδει ἄθροισμα 9. Ἡ στήλη τῶν δεκάδων δίδει ἄθροισμα 16, ἤτοι 6 δεκάδας καὶ 1 ἑκατοντάδα. Τὴν ἑκατοντάδα προσθέτομεν εἰς τὰς ἑκατοντάδας τῆς τρίτης στήλης καὶ λαμβάνομεν ἄθροισμα 13, ἤτοι 3 ἑκατοντάδας καὶ 1 χιλιάδα. Τὴν χιλιάδα τέλος προσθέτομεν εἰς τὰς χιλιάδας τῆς τετάρτης στήλης. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν αὐτῶν εἶναι 6369, τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὰς δραχμὰς τοῦ κέρδους τοῦ παντοπώλου.

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον μόνον πρὸς εὐκολίαν, διότι ἡ πρόσθεσις τῶν ἀριθμῶν γίνεται καὶ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ διαταχθοῦν κατ' ἄλλον τρόπον, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας τῶν αὐτῶν τάξεων. Ἤτοι:

2394 + 3512 + 463 = 6369.

43. Κανὼν τῆς προσθέσεως.— Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς προσθέσεως:

Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀριθμοὺς 1ον) Γράφομεν αὐτοὺς τὸν ἕνα κάτωθεν τοῦ ἄλλου, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην. 2ον) Προσθέτομεν χωριστὰ τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων. 3ον) Τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν, γράφομεν κάτωθεν τῆς στήλης, ἐὰν δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν 9. Ἐὰν ὅμως τὸν ὑπερβαίνῃ, γράφομεν κάτωθεν αὐτῆς μόνον τὰς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος τὰς δὲ δεκάδας προσθέτομεν εἰς τὴν στήλην, ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ κ.ο.κ. μέχρι τῆς τελευταίας στήλης.

44. Δοκιμὴ τῆς προσθέσεως.—Δοκιμὴ πράξεως ἀριθμητικῆς λέγεται ἄλλη πρᾶξις, ἡ ὁποία γίνεται διὰ νὰ ἴδωμεν ἂν ἡ πρώτη ἔγινε χωρὶς λάθος.

Ἡ δοκιμὴ τῆς προσθέσεως γίνεται ἢ διὰ τῆς προσθέσεως τῶν ὅρων κατὰ διάφορον τάξιν ἢ ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἐὰν ἡ πρώτη ἔγινε ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Ἐὰν εὕρωμεν πάλιν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, εἶναι πιθανὸν ὅτι ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος.

Σημείωσις. Εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀριθμῶν, ἀντὶ μὲ τὸ ἄθροισμα ἑκάστης στήλης νὰ ἐργαζώμεθα ὡς λέγει ὁ ἀνωτέρω κανών, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς:

Γράφομεν τὰς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος μιᾶς στήλης ὑποκάτω τῆς στήλης, τὰς δὲ δεκάδας αὐτοῦ κάτωθεν τῆς ἑπομένης στήλης πρὸς τὰ ἀριστερά, ἀλλ' ὀλίγον χαμηλότερα. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα μιᾶς στήλης δὲν ἔχῃ δεκάδας, γράφομεν εἰς τὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν εἴπομεν, ὅτι γράφονται αἱ δεκάδες, τὸ ψηφίον 0. Μὲ τὸν τρόπον λοιπὸν αὐτὸν τὰ ἀθροίσματα τῶν στηλῶν γράφονται εἰς δύο σειράς. Προσθέτομεν δὲ ἔπειτα τὰς σειρὰς αὐτὰς καὶ εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν.

Παράδειγμα

3785	$(3+7+8+5) =$	23	
8277		24	27
5168		20	34
7494		24	21
6743		20	29
9147		01	91
2232		11	02
31467		111	111.

Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ τὸ ἄθροισμα τῆς πρώτης στήλης πρὸς τὰ δεξιὰ εἶναι 27. Γράφομεν τὸ 7 ὑποκάτω τῆς στήλης αὐτῆς καὶ τὸ 2 κάτωθεν τῆς δευτέρας στήλης καὶ χαμηλότερα. Τὸ ἄθροισμα τῆς δευτέρας στήλης εἶναι 34. Γράφομεν τὸ 4 ὑποκάτω τῆς δευτέρας στήλης (ἀριστερὰ τοῦ 7) καὶ τὸ 3 κάτωθεν τῆς τρίτης στήλης ἀριστερὰ τοῦ 2. Ὁμοίως γράφομεν καὶ τὰ ἀθροίσματα 21 καὶ 29 τῆς τρίτης καὶ τετάρτης στήλης. Ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς προσθέσεως τῶν ἀριθμῶν μᾶς διευκολύνει νὰ κάμωμεν τὴν ἑξῆς δοκιμήν: Προσθέτομεν τὰ ψηφία ἑκάστου ἀριθμοῦ καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ εὑρισκόμενα ἀθροίσματα. Τὸ ἄθροισμα δὲ αὐτὸ συγκρίνομεν πρὸς τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον θὰ εὕρωμεν, ὅταν προσθέσωμεν τὰ ἀθροίσματα τῶν στηλῶν, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν ὡς ἰδιαιτέρους ἀριθμούς. Ἐὰν δὲ ταῦτα εἶναι ἴσα, ἡ πρόσθεσις ἔγινε χωρὶς λάθος. Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα τὰ ἀθροίσματα τῶν ψηφίων τῶν ἀριθμῶν εἶναι κατὰ σειρὰν 23, 24, 20, 24 καὶ 20. Τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 111. Τὰ ἀθροίσματα τῶν στηλῶν, εἴδομεν, ὅτι εἶναι 27, 34, 21, 29. Τὸ ἄθροισμα δὲ αὐτῶν εἶναι ἐπίσης 111.

Ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς προσθέσεως τῶν ἀριθμῶν χρησιμοποιεῖται συνηθέστατα, ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι πολλοί. Προσθέτουν δὲ τότε κατακορύφως τὰς στήλας καὶ ὁριζοντίως τὰ ψηφία τῶν ἀριθμῶν (διὰ νὰ κάμουν καὶ τὴν δοκιμήν).

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς.—α΄) Μὲ τὸν ἄνω τρόπον τῆς προσθέσεως τῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ ἀρχίζωμεν τὴν πρόσθεσιν αὐτῶν καὶ ἀπὸ τὰ ἀριστερά, ἀρκεῖ νὰ γράφωμεν πάντοτε τὰς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος μιᾶς στήλης ὑποκάτω τῆς στήλης, τὰς δὲ δεκάδας αὐτοῦ χαμηλότερα καὶ μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἀριστερά.

β΄) Ἐὰν τὸ ἄθροισμα μιᾶς στήλης εἶναι τριψήφιον, τὸ γράφομεν εἰς 3 σειράς. Ἐὰν π.χ. τὰ ἀθροίσματα τῶν στηλῶν εἶναι κατὰ σειρὰν 65, 107, 112, 44 τὰ γράφομεν ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 4275 \\ 4106 \\ 11 \\ \hline 56335. \end{array}$$

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι ἀριθμοὶ μεγάλοι καὶ πολλοί, π. χ. 15, διὰ νὰ μὴ κάμουν σφάλματα, ἐργάζονται καὶ ὡς ἑξῆς: Προσθέτουν π. χ. τοὺς 5 πρώτους, ἔπειτα προσθέτουν τοὺς ἄλλους 5 καὶ κατόπιν τοὺς ἄλλους 5. Τέλος προσθέτουν τὰ τρία εὑρεθέντα ἀθροίσματα καὶ ἔχουν τὸ τελικὸν ἄθροισμα.

45. Πρόσθεσις ἀπὸ μνήμης.—Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι δύο καὶ διψήφιοι προστίθενται εὐκόλως ἀπὸ μνήμης, ἐὰν προηγηθῇ ἄσκησις. Γενικῶς προσθέτομεν χωριστὰ εἰς τὸν ἕνα τὰς δεκάδας τοῦ ἄλλου καὶ ἔπειτα τὰς μονάδας του. Οὕτως, ἐὰν ἔχωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 67 καὶ 58, προσθέτομεν εἰς τὸν 67 τὸν 50 καὶ εἰς τὸ ἄθροισμά των 117 προσθέτομεν τὸν 8. Ἐὰν ὁ εἷς ἀριθμὸς τελειώνῃ εἰς μηδενικὰ καὶ ὁ ἄλλος ἔχῃ τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ πρῶτος, δὲν ἔχομεν παρὰ εἰς τὴν θέσιν τῶν μηδενικῶν τοῦ πρώτου νὰ θέσωμεν τὸν δεύτερον. Οὕτω 37000 καὶ 575 κάμνουν 37575.

Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι περισσότεροι τῶν δύο καὶ πολυψήφιοι, (ὄχι βέβαια πολὺ μεγάλοι), προσθέτομεν ἀπὸ μνήμης χωριστὰ τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν ἀνωτάτην τάξιν. Κατόπιν δὲ προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα. Οὕτω διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 318, 275, 434 λέγομεν 300 + 200 + 400 = 900, 10 + 70 + 30 = 110 καὶ 8 + 5 + 4 = 17. Τέλος δὲ 900 + 110 + 17 = 1027.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

Ἀπὸ μνήμης. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα.

31) 8M+2M, 7M+6M, 6M+9M, 7M+8M, 9M+8M
2Δ+5M, 3Δ+7M, 7Δ+2M, 6Δ+4Δ, 8Δ+5Δ
10 δρχ. + 7 δρχ., 40 δρχ. + 50 δρχ. + 60 δρχ.
17 δρχ. + 7 δρχ., 80 μέτ. + 70 μέτ. + 37 μέτ.
30 μέτ. + 60 μέτ., 90 πήχ. + 69 πήχ. + 70 πήχ.
50 πήχ. + 70 πήχ., 20 τάλ. + 90 τάλ. + 95 τάλ.
20 όκ. + 35 όκ.

32) 4E+2E, 3E+7E, 6E+8E, 2E+5Δ+4M
300+500 400+500+300
700+600 200+800+600
900+800 200+600+436
200+257 700+900+100+435
400+159 300+500+755+400.

33) 400+40 5500+500
630+70 7200+800
910+90 6400+658
468+40 3349+700
911+90 4977+100.

34) 56+44 460+530
67+33 880+220

81+19	350+655
78+32	846+160
73+69	638+462.

35) Νὰ ἀπαγγείλῃς τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ 1 ἕως 100 καὶ ἀπὸ 12 ἕως 100, α) ἀπὸ 5 εἰς 5, β) ἀπὸ 7 εἰς 7 καὶ γ) ἀπὸ 9 εἰς 9.

Ὁμὰς Β΄

36) Εἷς μαθητὴς ἠγόρασε δύο βιβλία. Τὸ ἓν ἤξιζε 37 δρχ. καὶ τὸ ἄλλο 45 δρχ. Πόσας δραχμὰς ἤξιζον τὰ δύο βιβλία ;

37) Ἡ Ἑλένη ἐξώδευσε διὰ τὰ τετράδιά της 35 δραχμάς, διὰ τὸ μελανοδοχεῖόν της 15 δραχμὰς καὶ διὰ τὴν σάκκαν της 80 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἐξώδευσεν ἐν ὅλῳ ;

38) Εἰς τὸν σχολικὸν κῆπον ἐφύτευσαν αἱ μαθήτριαι μιᾶς τάξεως 12 καλλωπιστικὰ φυτὰ καὶ 6 εἴδη λαχανικῶν, οἱ δὲ μαθηταὶ 8 καλλωπιστικὰ φυτὰ καὶ 16 δένδρα ὀπωροφόρα. Πόσα εἶναι ὅλα τὰ φυτά, ποὺ ἐφυτεύθησαν εἰς τὸν κῆπον αὐτόν ;

39) Ἡ μαθητικὴ κοινότης τῆς πρώτης τάξεως ἑνὸς Γυμνασίου, ἀπὸ τὰ χρήματα ποὺ εἶχεν, ἠγόρασεν εἰκόνα ἀξίας 150 δραχμῶν, διὰ νὰ διακοσμήσῃ τὴν αἴθουσαν τῆς τάξεώς της. Ἔμειναν δὲ εἰς αὐτὴν 80 δραχμαί. Πόσας δραχμὰς εἶχεν ;

40) Ἡ μαθητικὴ κοινότης τῆς πρώτης τάξεως ἑνὸς Γυμνασίου ἔδωκεν ὑπὲρ τῆς ἀεροπορίας τὸ πρῶτον τρίμηνον 100 δρχ., τὸ δεύτερον 150 δρχ. καὶ τὸ τρίτον 250. Πόσας δραχμὰς ἔδωκεν ἐν ὅλῳ ;

41) Μία μαθητικὴ κοινότης ἔδωκεν εἰς ἕνα πτωχὸν τὸν ἕνα μῆνα 40 δρχ., τὸν δεύτερον 55 δρχ., τὸν τρίτον 80 δρχ. καὶ τὸν τέταρτον 85 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς τοῦ ἔδωκεν ἐν ὅλῳ ;

42) Μάθε τὸν ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν τῆς δευτέρας τάξεως τοῦ σχολείου σου καὶ πρόσθεσε αὐτὸν εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς σου.

43) Μάθε ἀπὸ τοὺς γονεῖς σου πόσας δραχμὰς ἔδωσαν εἰς τὸ πρῶτον τρίμηνον διὰ τὴν ἐγγραφήν σου καὶ διὰ τὸ σχολικὸν ταμεῖον καὶ πρόσθεσε ἔπειτα τὰς δραχμὰς αὐτάς.

Ὁμὰς Γ΄

Γραπτῶς. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα :

44) 1800+250+950+437

2156+844 +1515 +1485
1795+383 +218 +1079
547+252 +453 +1748 +1700
2943+385 +536 +584 +5208
59308+95244 +25091+561 +6781+3038
21979+128661+30577+450590+598 +46+48954
104283+875 +99 +3019 +2702300 +27803.

45) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι προσθέσεις, χωρὶς νὰ τεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ ὁ εἷς κάτωθεν τοῦ ἄλλου :

α) 58+ 22+ 85+ 34 γ) 4728+5926+8975
β) 589+325+121+384 δ) 6547+ 523+9478+659.

46) Νὰ προσθέσῃς τοὺς κάτωθι ἀριθμούς, πρῶτον κατὰ στήλας καὶ ἔπειτα κατὰ ὁριζοντίους σειράς :

35+72+49 +81+53=
28+54+39+77+62=
11+ 94+65+54+36=
83+39+74+47+57=
23+51+93+21+62=

Κατόπιν νὰ εὕρῃς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀριθμῶν. Τί θὰ προσθέσῃς διὰ νὰ τὸ εὕρῃς ;

47) Νὰ εὕρῃς τὰ ἀθροίσματα :

α) 18+15+34+29+37+42=
β) 37+29+42+18+15+34=
γ) 15+34+18+37+29+42=

Ἠμπορεῖς νὰ εἴπῃς, πρὶν ἀκόμη κάμῃς τὰς προσθέσεις αὐτάς, τί θὰ εἶναι μεταξύ των τὰ ἀθροίσματα, ποὺ θὰ εὕρῃς ; (δηλαδὴ ἂν θὰ εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα).

48) Τὸ αὐτὸ νὰ εἴπῃς καὶ διὰ τὰ ἀθροίσματα :

α) 16+ 5+ 2 καὶ 16+ 7
β) 39 +42+ 8 καὶ 39+50
γ) 17+13+46 καὶ 30+46
δ) 14+26+13+37 καὶ 40+50
ε) 28+21+12+39 καὶ 40+60.

49) Νὰ εὕρῃς τὰ ἀκόλουθα ἀθροίσματα κατὰ τὸν εὐκολώτερον

τρόπον : 27+51+ 9, 72+ 8+ 19, 37+ 13+ 49
24+38+ 16, 79+ 32+ 21, 67+ 89+ 43
132+68+150, 79+132+121, 146+250+154.

50) Ὁμοίως νὰ εὕρῃς τὰ ἀθροίσματα :

14+ 16+ 22+ 8
70+ 55+ 25+ 45+ 75
728+500+200+300+122
27+ 23+ 15+ 25
28+130+ 20+150+ 62
150+135+250+ 15+165
39+ 18+ 11+ 45
10+139+130+160+ 41
325+ 81+175+119+426.

51) Ἡ πρόσθεσις δύο ἀριθμῶν γίνεται εὐκόλως καὶ ὅταν ἀρχίσωμεν αὐτὴν ἀπὸ τὰ ἀριστερά. Πρὸς τοῦτο ὅμως, πρέπει, πρὶν ἢ γράψωμεν τὸ ἄθροισμα μιᾶς στήλης, νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς ἑπομένης στήλης. Ἐὰν δὲ τοῦτο εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 9, αὐξάνομεν τὸ ἄθροισμα τῆς προηγουμένης στήλης κατὰ μονάδα. Π.χ. εἰς τὴν πρόσθεσιν 547+328 τὸ μὲν ἄθροισμα 5 + 3 = 8 γράφομεν ὑποκάτω τῆς στήλης, διότι βλέπομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς ἑπομένης στήλης εἶναι μικρότερον τοῦ 10. Τὸ ἄθροισμα ὅμως 6 τῆς δευτέρας στήλης αὐξάνομεν κατὰ μονάδα, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῆς τρίτης στήλης εἶναι 15, εὑρίσκομεν δὲ οὕτως, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι 875.

Κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν νὰ γίνουν αἱ κάτωθι προσθέσεις :

438	3724	5726	2678	7396
549	5861	2857	3756	8274.

52) Οἱ 16 ἀριθμοὶ τοῦ ἑπομένου τετραγώνου εἶναι τοποθετημένοι εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται 1ον) εἰς ἑκάστην ὁριζοντίαν γραμμήν, 2ον) εἰς ἑκάστην στήλην καὶ 3ον) διαγωνίως, εἶναι πάντοτε τὸ αὐτό.

1	12	7	14
8	13	2	11
10	3	16	5
15	6	9	4

Καὶ πραγματικῶς βλέπομεν, ὅτι εἶναι π.χ.

1) $1+12+7+14=34$ *2)* $12+13+3+6=34$ *3)* $1+13+16+4=34$

$10+3+16+5=34$ $\quad 14+11+5+4=34$ $\quad 14+2+3+15=34$.

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον, τὸ ἀνωτέρω τετράγωνον λέγεται μ α γ ι κ ό ν.

Νὰ εὕρετε ὅθεν ποῖα ἀπὸ τὰ κατωτέρω τετράγωνα εἶναι μαγικά.

19	2	18
12	13	14
8	24	7

67	1	43
13	37	61
31	73	7

24	1	13
3	14	23
12	23	4

1	6	11	16
7	15	2	10
14	4	13	3
12	8	9	5

23	6	19	2	15
10	18	1	14	22
17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
11	24	7	20	3

53) Νὰ κατασκευάσῃς μαγικὸν τετράγωνον μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. (Θέσε τὸ 5 εἰς τὸ κέντρον. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἀριθμῶν μιᾶς γραμμῆς ἢ μιᾶς στήλης κτλ. θὰ εἶναι 15).

Ὁμὰς Δ΄

54) Εἷς ὑπάλληλος ἀπὸ τὸν μισθὸν τοῦ μηνὸς κρατεῖ διὰ τὰ ἀτομικά του ἔξοδα 875 δραχμάς. Τὰς δὲ ἄλλας 5125 δραχμὰς δίδει εἰς τὴν σύζυγόν του, ἡ ὁποία ἔχει τὴν φροντίδα τῆς οἰκίας. Πόσον μισθὸν λαμβάνει οὗτος κατὰ μῆνα ;

55) Ὁ ἀνωτέρω οἰκογενειάρχης, ὅταν ἐγκατεστάθη εἰς τὴν οἰκίαν του, ἐξώδευσε 1) δι' ἔπιπλα 8375 δραχμὰς καὶ 2) διὰ μαγειρικὰ σκεύη καὶ μάλλινα εἴδη 3785 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἐξώδευσεν ἐν ὅλῳ ;

56) Διὰ τὴν συντήρησιν τῆς οἰκογενείας των ἐργάζονται ὁ πατήρ, ἡ μήτηρ καὶ ἡ μεγαλυτέρα κόρη των. Εἰς ἕνα δὲ μῆνα, ὁ μὲν πατὴρ ἐκέρδισε 3840 δραχμάς, ἡ μήτηρ 1675 δραχμὰς καὶ ἡ κόρη 1050 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισαν ἐν ὅλῳ κατὰ τὸν μῆνα αὐτόν ;

57) Εἷς οἰκογενειάρχης κατὰ τὴν ἐνοικίασιν οἰκίας ἐπλήρωσε 2100 δραχμὰς διὰ τὸ ἐνοίκιον ἑνὸς μηνός, 504 δραχμὰς διὰ μεσιτείαν, 750 δραχμὰς διὰ τὰ ἔξοδα τοῦ συμβολαίου τῆς ἐνοικιάσεως καὶ 250 δραχμὰς διὰ τὴν μεταφορὰν τῶν ἐπίπλων του. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ ;

58) Εἰς τὸ βιβλίον τῶν ἐξόδων, τὸ ὁποῖον κρατεῖ μία οἰκοκυρά, ἔγραψε δι' ἔξοδα μιᾶς ἡμέρας τὰ ἑξῆς :

Ἔτος	Μὴν	Ἡμέρα	Εἴδη ἀγορασθέντα	Δραχ.	Λ.
1939	Μάρτιος	18	κρέας	48	
			βούτυρον	24	
			μακαρόνια	12	
			τυρὸς	10	
			λαχανικὰ	8	
			πορτοκάλια	23	
			οἰνόπνευμα	17	
			σάπων	32	

Πόσα εἶναι τὰ ἔξοδα τῆς ἡμέρας αὐτῆς ;

59) Ἡ οἰκοκυρὰ αὐτὴ εὗρεν—ἀπὸ τὸ βιβλίον τῶν ἐξόδων—ὅτι ἐπλήρωσεν εἰς ἕνα μῆνα δι᾽ ἐνοίκιον 1800 δραχμάς, διὰ τρόφιμα 4675 δρχ., διὰ τὸ ὕδωρ 65 δρχ. καὶ 875 δραχμὰς διὰ διαφόρους ἄλλας ἀνάγκας. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ διὰ τὸν μῆνα αὐτόν;

60) Εἷς πατὴρ ἐπλήρωσεν εἰς ἓν ἔτος 1) διὰ τὴν ἐγγραφὴν τῶν δύο τέκνων του εἰς τὸ σχολεῖον 1800 δραχμάς, 2) διὰ τὴν ἀγορὰν τῶν βιβλίων τοῦ προγράμματος τοῦ σχολείου 568 δραχμάς, 3) διὰ λεξικὰ καὶ ἄλλα βοηθητικὰ βιβλία 1075 δραχμάς, 4) διὰ τετράδια καὶ μελανοδοχεῖα 179 δραχμάς, 5) διὰ τὰς σχολικὰς ἐκδρομάς των 375 δραχμὰς καὶ 6) διὰ τὰς ἐκτάκτους εἰσφοράς, αἱ ὁποῖαι ἐζητήθησαν ἀπὸ τὸ σχολεῖον, 75 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ εἰς τὸ ἔτος αὐτό;

61) Ὁ ἴδιος πατὴρ ἐδαπάνησεν εἰς ἓν ἔτος διὰ τὰ δύο τέκνα του 2850 δραχμὰς διὰ τὴν ἐνδυμασίαν των, 687 δρχ. διὰ τὴν ὑπόδησίν των, 1456 δρχ. διὰ τὰ ἐσώρρουχά των, 709 δρχ. δι᾽ ὑποκάμισα καὶ 438 δραχμὰς διὰ λοιπὰ χρήσιμα εἴδη. Πόσας δραχμὰς ἐδαπάνησεν ἐν ὅλῳ εἰς τὸ ἔτος αὐτό;

62) Μία οἰκογένεια, ἐπειδὴ ἐπρόκειτο νὰ μεταβῇ τὸ θέρος εἰς τὰ λουτρά, ὅπου τὰ ἔξοδα εἶναι πολλά, περιώρισε τὰς δαπάνας, τὰς ὁποίας ἔκαμνε συνήθως. Οἰκονόμησε δὲ οὕτως ἀπὸ τὰ ἐτήσια ἔξοδα διὰ τὴν ἐνδυμασίαν 3560 δραχμάς, ἀπὸ τὸν κινηματογράφον 725 δραχμάς, ἀπὸ τὰ ἀτομικὰ ἔξοδα τοῦ συζύγου 1865 δραχμάς, ἀπὸ τὰ ἀτομικὰ ἔξοδα τῆς συζύγου 390 δραχμὰς καὶ ἀπὸ ἄλλα μικροέξοδα τῆς οἰκογενείας 600 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς οἰκονόμησεν ἐν ὅλῳ;

63) Μία ἄλλη οἰκογένεια ἔκαμεν οἰκονομίας διὰ παρόμοιον σκοπόν. Περιώρισε δὲ τὰς συνήθεις δαπάνας της, τὸν πρῶτον μῆνα κατὰ 820 δραχμάς. Τὸν δεύτερον μῆνα κατὰ 265 δρχ. περισσότερον, καὶ τὸν τρίτον κατὰ 380 δραχμὰς περισσότερον, ἀπὸ ὅτι τὰς περιώρισε τὸν δεύτερον μῆνα. Πόσας δραχμὰς οἰκονόμησεν ἐν ὅλῳ εἰς τοὺς τρεῖς αὐτοὺς μῆνας;

Ὁ μ ὰ ς Ε΄

64) Πέντε ἀριθμοὶ εἶναι γραμμένοι εἰς τὴν σειράν. Ἐξ αὐτῶν, ὁ πρῶτος, ὅστις εἶναι ὁ 1067, εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν δεύτερον κατὰ 109, ὁ δεύτερος εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν τρίτον πάλιν κατὰ 109 κ.ο.κ. Ἤτοι ὁ καθεὶς ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν ἑπόμενον κατὰ 109. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν πέντε αὐτῶν ἀριθμῶν.

65) Ἑπτὰ ἀριθμοὶ εἶναι γραμμένοι εἰς σειράν. Ἐξ αὐτῶν ὁ πρῶτος εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν δεύτερον κατὰ 147, ὁ δεύτερος μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν τρίτον κατὰ 147 κ.ο.κ. Ἤτοι ὁ καθεὶς ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἑπόμενον κατὰ 147. Ὁ τελευταῖος εἶναι 2008. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπτὰ αὐτῶν ἀριθμῶν.

66) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $3758+\alpha$, *ὅταν εἶναι 1) ὁ* α *ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν 2379 ἤτοι* $\alpha=2379$, *2)* $\alpha=5065$, *καὶ 3)* $\alpha=7297$.

67) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$, *ὅταν εἶναι 1)* $\alpha=1076$ *καὶ* $\beta=3509$, *2)* $\alpha=10049$ *καὶ* $\beta=57148$, *καὶ 3)* $\alpha=43077$ *καὶ* $\beta=127375$.

68) Εἷς ἠγόρασε ζάχαριν ἀντὶ α *δραχ., βούτυρον ἀντὶ* β *δραχμῶν καὶ κρέας ἀντὶ* γ *δραχμῶν. Πόσας δραχμὰς ἔδωκεν ἐν ὅλῳ ;*

Β'. ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

46. Π ρ ό β λ η μ α. **Ἀπὸ 12 δραχμάς, τὰς ὁποίας ἔχω, ἔδωκα 5 δραχμὰς καὶ ἠγόρασα ἓν τετράδιον. Πόσαι δραχμαὶ μοῦ ἔμειναν ;**

Διὰ νὰ εὕρω τὸ ζητούμενον, πρέπει νὰ ἐλαττώσω τὸν 12 κατὰ 5 μονάδας. Ἡ πρᾶξις αὕτη εἶναι **ἀφαίρεσις.**

Ὥστε : **Ἀφαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐλαττώνομεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει εἷς ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.**

Ὁ πρῶτος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ, (ὁ 12) λέγεται **μειωτέος,** ὁ δεύτερος, (ὁ 5), **ἀφαιρετέος,** καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως λέγεται **διαφορὰ** ἢ ὑπόλοιπον ἢ ὑπεροχή. Λέγομεν δὲ ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, ἢ τὸ ὑπόλοιπον μιᾶς ἀφαιρέσεως, ἢ ἡ ὑπεροχὴ ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀπὸ ἕνα ἄλλον.

Ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος λέγονται ὁμοῦ **ὅροι** τῆς διαφορᾶς.

Σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι τὸ — (πλήν). Γράφεται δὲ τοῦτο μεταξὺ τῶν ὅρων τῆς διαφορᾶς. Ἐκ τούτων δὲ ὁ μειωτέος γράφεται πρῶτος. Οὕτω γράφομεν 12—5.

47. Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ δραχμαί, αἱ ὁποῖαι θὰ μείνουν, ὁμοῦ μὲ τὰς δραχμάς, τὰς ὁποίας θὰ ἐξοδεύσω, κάμνουν τὰς 12 δραχμάς. Ὥστε εἰς μίαν ἀφαίρεσιν **τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς ἰσοῦται μὲ τὸν μειωτέον.**

Διὰ τοῦτο ὁρίζομεν τὴν ἀφαίρεσιν καὶ ὡς ἑξῆς :

Ἀφαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας, ὅταν δίδωνται δύο ἀριθμοί, εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις, ἐὰν προστεθῇ εἰς τὸν ἕνα, δίδει ἄθροισμα τὸν ἄλλον.

48. Ὅταν οἱ ὅροι τῆς διαφορᾶς εἶναι συγκεκριμένοι ἀριθμοί, πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς. Ἡ δὲ διαφορὰ εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς αὐτούς.

49. Ἐὰν οἱ ὅροι τῆς διαφορᾶς εἶναι ἴσοι, μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν δὲν μένει οὐδεμία μονὰς τοῦ μειωτέου. Λέγομεν δὲ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὅτι ἡ διαφορὰ εἶναι 0, διότι δεχόμεθα τὸ 0 ὡς ἀριθμόν. Οὕτως $6-6=0$.

Ὥστε καὶ $0+6=6$. Ἐπίσης εἶναι $6-0=6$· καὶ $6+0=6$. Τὸ 0 λοιπόν, ὅταν προστίθεται εἰς τὸν ἀριθμὸν ἢ ὅταν ἀφαιρῆται ἀπ' αὐτόν, δὲν τὸν μεταβάλλει.

Σημείωσις. Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν μειωτέον διὰ τοῦ Μ, τὸν ἀφαιρετέον διὰ τοῦ Α καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν διὰ τοῦ Δ, ἔχομεν κατὰ τὰ προηγούμενα $Μ-Α=Δ$, $Μ=Δ+Α$, καὶ $Μ-Δ=Α$.

50. Ἀφαίρεσις ἀριθμῶν.—Ἡ ἀφαίρεσις $12-5$ τοῦ προηγουμένου προβλήματος κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως γίνεται ὡς ἑξῆς:

$12-1=11$, $11-1=10$, $10-1=9$, $9-1=8$, $8-1=7$. Ὥστε εἶναι $12-5=7$.

Ἀλλ' ὁ τρόπος οὗτος τῆς ἀφαιρέσεως μονάδος πρὸς μονάδα δὲν εἶναι καθόλου πρακτικός, ἰδίως, ὅταν ὁ ἀφαιρετέος εἶναι πολυψήφιος ἀριθμός. Διὰ τοῦτο, ὅταν ὁ ἀφαιρετέος εἶναι μονοψήφιος, μανθάνομεν νὰ κάμνωμεν τὰς ἀφαιρέσεις αὐτὰς ἀπὸ μνήμης. Π. χ. 8 ἀπὸ 15 μένουν 7, 9 ἀπὸ 17 μένουν 8. Ἐὰν ὅμως ὁ ἀφαιρετέος εἶναι πολυψήφιος, θὰ κάμωμεν τὴν ἀφαίρεσιν αὐτοῦ κατ' ἄλλον τρόπον σύντομον καὶ εὔκολον.

Διὰ νὰ μάθωμεν ὅμως τὸν τρόπον αὐτόν, πρέπει νὰ μάθωμεν προηγουμένως μερικὰς ἰδιότητας τῆς ἀφαιρέσεως.

51. Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.— α' Πρόβλημα. **Ἀπὸ τὰ χρήματα ποὺ ἐλάμβανον ἀπὸ τοὺς γονεῖς των οἱ δύο ἀδελφοί, Πέτρος καὶ Νικόλαος, οἰκονόμησεν ὁ μὲν πρῶτος 17 δραχμάς, ὁ δὲ δεύτερος 9 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἔχει ὁ Πέτρος περισσοτέρας ἀπὸ τὸν Νικόλαον;**

Ἔχει 17 δρχ.—9 δρχ.=8 δραχμάς.

Τώρα ὑποθέτομεν, ὅτι ὁ καθεὶς τῶν ἀδελφῶν αὐτῶν, ἔλαβεν ἀπὸ τοὺς γονεῖς του ἄλλας 10 δραχμάς. Ζητοῦμεν δὲ νὰ μάθωμεν πάλιν, πόσας δραχμὰς ἔχει ὁ Πέτρος περισσοτέρας τοῦ Νικολάου. Ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ Πέτρος ἐξακολουθεῖ νὰ ἔχῃ πλέον τοῦ Νικολάου 8 δραχμάς.

Εἶναι δηλαδὴ 27—19=8 ἤτοι 17—9=27—19.

Ὥστε: **Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους τῆς διαφορᾶς τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, αὕτη δὲν μεταβάλλεται.**

Ἀλλὰ καὶ ὅταν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους τῆς διαφορᾶς τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, αὕτη δὲν μεταβάλλεται. Π. χ. ἂν ὁ καθεὶς τῶν ἄνω ἀδελφῶν ἔδωκεν εἰς ἕνα πτωχὸν πέντε δραχμάς, ὁ Πέτρος θὰ ἔχῃ ἐπὶ πλέον τοῦ Νικολάου 8 δραχμάς. Εἶναι δηλαδὴ 17—9=12—4.

52. β' Πρόβλημα. **Ὁ Πέτρος ἀπὸ τὰς 17 δραχμάς, τὰς ὁποίας εἶχεν, ἠγόρασεν ἓν τετράδιον πρὸς 5 δραχμάς, ἓν μοδυβδοκόνδυλον πρὸς 3 δραχμὰς καὶ μίαν γόμαν πρὸς 2 δραχμάς. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν;**

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰς 17 δραχμὰς τὸ ἄθροισμα 5 δρχ. + 3 δρχ. + 2 δρχ. = 10 δραχμαί. Ἀλλ' ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν διὰ μιᾶς ὅλον τὸ ἄθροισμα, εἶναι φανερόν, ὅτι δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰς 17 δραχμὰς πρῶτον τὰς 5 δρχ. (ὅτε μένουν 12) καὶ ἔπειτα, ἀπὸ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον μένει, νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰς 3 δραχμὰς (ὅτε μένουν 9) καὶ τέλος ἀπὸ τὰς 9 νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰς 2 δρχ. (ὅτε μένουν 7). Δηλαδὴ ἡ ἀνωτέρω διαφορὰ 17 δρχ. — (5 δρχ. + 3 δρχ. + 2 δρχ.) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

17 δρχ. — 5 δρχ. — 3 δρχ. — 2 δρχ.

Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι: **Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν πάντας τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος, τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον.**

53. Πρόβλημα. **Τὰ βιβλία τοῦ Πέτρου ἐστοίχισαν 548 δραχμάς, τὰ δὲ τοῦ Νικολάου 314 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς περισσότερον ἐστοίχισαν τὰ βιβλία τοῦ Πέτρου ἀπὸ τὰ βιβλία τοῦ Νικολάου;**

Αἱ δραχμαί, τὰς ὁποίας ζητοῦμεν, εἶναι ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως 548 δρχ. — 314 δρχ. Ἀλλὰ διὰ νὰ κάμω τὴν ἀφαίρεσιν αὐτήν, παρατηρῶ, ὅτι

$$314 = 3E + 1\Delta + 4M.$$

Θὰ ἀφαιρέσω λοιπὸν ἀπὸ τὸν 548 ὅλα τὰ μέρη τοῦ ἀφαιρετέου κατὰ τὴν ἰδιότητα 52, ἡ ὁποία μᾶς λέγει, πῶς ἀφαιρεῖται ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμόν. Εἶναι φανερὸν ὅμως, ὅτι δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ μειωτέου, τὰς δεκάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς δεκάδας τοῦ μειωτέου κ.ο.κ. Γίνεται δὲ τοῦτο εὐκολώτερον, ἂν γράψω τὸν ἀφαιρετέον κάτωθεν τοῦ μειωτέου :

$$\begin{array}{r} 548 \\ \underline{314} \\ 234 \end{array} = \left\{ \begin{array}{r} 5E+4\Delta+8M \\ \underline{3E+1\Delta+4M} \\ 2E+3\Delta+4M \end{array} \right\}$$

54. Πρόβλημα. Εἷς γονεὺς κερδίζει τὸν μῆνα 9356 δραχμάς. Διὰ νὰ μορφώσῃ τὰ τέκνα του ἐξοδεύει 1874 δραχμὰς τὸν μῆνα. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ μένουν κατὰ μῆνα, διὰ νὰ θρέψῃ τὴν οἰκογένειάν του ;

Αἱ δραχμαί, τὰς ὁποίας ζητοῦμεν, εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως 9356 δρχ. — 1874 δρχ.

$$\begin{array}{rr} 9356 & 9X+3E+5\Delta+6M \\ \underline{1874} & \underline{1X+8E+7\Delta+4M} \\ & +2M \end{array}$$

Ἀλλ' εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι αἱ 4M ἀφαιροῦνται ἀπὸ τὰς 6M καὶ δίδουν ὑπόλοιπον 2M. Αἱ 7Δ ὅμως δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τὰς 5Δ. Διὰ νὰ γίνῃ δὲ ἡ ἀφαίρεσις αὐτὴ δυνατή, προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον 10Δ καὶ γίνονται 15Δ· κατόπιν δὲ ἀφαιροῦμεν τὰς 7Δ ἀπὸ 15Δ, ὁπότε μένουν 8Δ. Ἔπειτα ὅμως, διὰ νὰ μὴ ἀλλάξῃ ἡ διαφορά, προσθέτομεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 10Δ ἢ 1E (§ 51). Ὥστε τώρα ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν 9E ἀπὸ 3E. Ἐπειδὴ δὲ καὶ αὐτὴ ἡ ἀφαίρεσις δὲν γίνεται, προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον 10E καὶ ἀφαιροῦμεν 9E ἀπὸ 13E, ὁπότε μένουν 4E. Ἔπειτα προσθέτομεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 10E ἢ 1X. Ἀφαιροῦμεν λοιπὸν 2X ἀπὸ 9X καὶ μένουν 7X. Ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως αὐτῆς εἶναι :

$$\begin{array}{r} 9356 \\ 1874 \\ \hline 7482 \end{array} = \left\{ \begin{array}{r} 9X+13E+15\Delta+6M \\ 2X+\ 9E+\ \ 7\Delta+4M \\ \hline 7X+\ 4E+\ \ 8\Delta+2M \end{array} \right\}$$

Ὥστε τοῦ μένουν κατὰ μῆνα 7482 δραχμαί.

55. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα :

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἕνα ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλον :

1ον) **Γράφομεν αὐτὸν κάτωθεν τοῦ ἄλλου ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν.**

2ον) **Ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸ ψηφίον τοῦ μειωτέου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἄνωθεν αὐτοῦ. Ἀρχίζομεν δὲ ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας.**

3ον) **Ἐὰν μία τῶν μερικῶν αὐτῶν ἀφαιρέσεων εἶναι ἀδύνατος, προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον αὐτῆς 10. Ἔπειτα ὅμως προσθέτομεν εἰς τὸν ἀφαιρετέον τῆς ἑπομένης μερικῆς ἀφαιρέσεως μίαν μονάδα.**

Τὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν αὐτῶν ἀφαιρέσεων εἶναι τὰ ψηφία τοῦ ὑπολοίπου, τὸ ὁποῖον ζητοῦμεν.

56. Δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως.—Πρὸς τοῦτο προσθέτομεν τὸν ἀφαιρετέον καὶ τὴν διαφορὰν καί, ἐὰν εὕρωμεν τὸν μειωτέον, εἶναι πιθανόν, ὅτι δὲν ἔγινε λάθος· ἢ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν μειωτέον τὴν εὑρεθεῖσαν διαφοράν, ὁπότε πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν ἀφαιρετέον.

57. Ἀφαίρεσις ἀπὸ μνήμης. — Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ μνήμης, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν μειωτέον χωριστὰ τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ ἀφαιρετέου ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν ἀνωτάτην τάξιν. Οὕτω διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 754—326 λέγομεν 300 ἀπὸ 754 454, 20 ἀπὸ 454 434, καὶ 6 ἀπὸ 434 428.

Ὅταν ἔχω νὰ ἀφαιρέσω 9, ἀφαιρῶ 10 καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέτω 1. Οὕτω $357-9=347+1$. Διότι $357-9=(357+1)-(9+1)=357+1-10=347+1=348$. Ἐπίσης, ὅταν ἔχω νὰ ἀφαιρέσω 99, 999 κτλ., ἀφαιρῶ 100, 1000 κτλ. καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέτω 1. Ἐὰν δὲ ἔχω νὰ ἀφαιρέσω π.χ. 98, 97 ἀφαιρῶ 100 καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέτω 2, 3. Διότι εἶναι π. χ. $2786-97=2786+3-100=2689$.

Σημείωσις. Ὅταν ἔχω νὰ προσθέσω 9, 99, 999 κτλ. προσθέτω

10, 100, 1000 κτλ. καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα ἀφαιρῶ 1. Ἐπίσης ἐὰν ἔχω νὰ προσθέσω π.χ. 98, 97, 96, προσθέτω 100 καὶ ἀφαιρῶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα 2, 3, 4.

58. Ἀφαίρεσις διὰ τῆς προσθέσεως.— Ἡ ἀφαίρεσις δύναται νὰ νοηθῇ καὶ νὰ γίνῃ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον. Ἀντὶ δηλαδὴ νὰ ἐλαττώνω τὸν μειωτέον κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ὁ ἀφαιρετέος, προσθέτω εἰς τὸν ἀφαιρετέον τόσας μονάδας, ὥστε νὰ φθάσω τὸν μειωτέον. Οὕτως εἰς τὴν ἀφαίρεσιν 9—5 π. χ. ἀντὶ νὰ εἴπω 9—1=8, 8—1=7, 7—1=6, 6—1=5 καὶ τέλος 5—1=4 (ἢ διὰ μιᾶς 9—5=4) λέγω 5+1=6, 6+1=7, 7+1=8, 8+1=9 (ἢ διὰ μιᾶς 5+4=9). Ἀφοῦ λοιπὸν 4 μονάδας προσέθεσα εἰς τὸν ἀφαιρετέον 5, διὰ νὰ εὕρω τὸν μειωτέον 9, ἡ διαφορὰ 9—5 εἶναι 4. Ὁμοίως εἶναι 11—8=3, διότι 8 καὶ 3 κάμνουν 11, καὶ 15—9=6, διότι 9+6=15.

Ὥστε μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν τὴν ἀφαίρεσιν 76238—45363 θὰ κάμωμεν ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{r} 76238 \\ \underline{45363} \\ 30875 \end{array}$$

λέγομεν 3 καὶ **πέντε** 8. Γράφομεν τὸ 5 ὑπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων. Κατόπιν λέγομεν 6 καὶ **ἑπτὰ** 13. Γράφομεν τὸ 7 καὶ κρατοῦμεν 1 (δηλαδὴ 1Ε, ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὰς 13Δ). Ἔπειτα λέγομεν 1 καὶ 3=4 καὶ **ὀκτὼ** 12. Γράφομεν τὸ 8 καὶ κρατοῦμεν 1. Ἔπειτα, 1 καὶ 5=6 καὶ **μηδὲν** 6. Γράφομεν τὸ 0. Τέλος δὲ λέγομεν 4 καὶ **τρία** 7 καὶ γράφομεν τὸ 3. Ὥστε τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶναι 30875.

59. Ὁ τρόπος αὐτός, τῆς ἀφαιρέσεως διὰ τῆς προσθέσεως, χρησιμοποιεῖται σχεδὸν πάντοτε εἰς τὸ ἐμπόριον, κατὰ τὴν ἀπὸ μνήμης ἀφαίρεσιν. Διότι, ὅταν π. χ. μᾶς δίδουν ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τῶν 53 δραχμῶν ἀπὸ τὰς 100 δραχμάς, μᾶς δίδουν π. χ. πρῶτον 7 δρχ., ἔπειτα 20 δρχ., καὶ τέλος ἄλλας 20 δραχμάς. Λέγουν δὲ συγχρόνως 53 δρχ.+7 δρχ.=60 δρχ., 60 δρχ.+20 δρχ. = 80 δρχ., καὶ 80 δρχ.+20 δρχ.=100 δρχ. Οὕτω δὲ μᾶς δίδουν 47 δραχμάς, αἱ ὁποῖαι εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως 100 δρχ.—53 δρχ.

60. Ἐπίσης ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς ἀφαιρέσεως χρησιμοποιεῖται συνήθως, ὅταν πρόκειται νὰ ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμόν. Π. χ. ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι εἷς, ἀπὸ 23063 δρχ., τὰς ὁποίας εἶχεν, ἐπλήρωσε κατὰ σειρὰν διὰ διαφόρους ἀγορὰς 2626 δραχμάς, 874 δραχμάς, 6548 δραχμάς, 629 δραχμὰς καὶ 4537 δραχμάς. Θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἀπέμειναν. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν δαπανῶν ἀπὸ τὰς 23063 δραχμάς.

Γράφομεν λοιπὸν πρῶτον τὸν 23063 (τὸν μειωτέον) καὶ κάτωθεν αὐτοῦ ὅλους τοὺς ἄλλους ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r} 23063 \\ \hline 2626 \\ 874 \\ 6548 \\ 629 \\ 4537 \\ \hline \end{array}$$

Ἔπειτα δὲ λέγομεν :

α) 7 καὶ 9, 16, 24, 28, 34 καὶ **ἐννέα** 43,

β) 4 (κρατούμενα) καὶ 3, 7, 9, 13, 20, 22, καὶ **τέσσερα** 26,

γ) 2 καὶ 5, 7, 13, 18, 26, 32 καὶ **ὀκτὼ** 40 καὶ

δ) 4 καὶ 4, 8, 14, 16 καὶ **ἑπτὰ** 23.

Ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι 7849.

Ἀσκήσεις.

69) Οἱ διαδοχικοὶ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶναι κατὰ σειρὰν πρὸ τοῦ 25, εἶναι 24, 23, 22 κτλ. Γράψε ἐννέα τοιούτους διαδοχικοὺς ἀριθμούς. Ποῖος εἶναι ὁ τελευταῖος ; Μὲ ποίαν πρᾶξιν θὰ εὕρῃς αὐτὸν ἀμέσως ; Τί εἶναι ὁ 25, ὁ 9 καὶ ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον θὰ εὕρῃς εἰς τὴν πρᾶξιν αὐτήν ;

70) Νὰ ἀριθμήσῃς ἀπὸ τὸν 9 μέχρι τοῦ 25. Πόσας μονάδας προσέθεσες εἰς τὸν 9, διὰ νὰ λάβῃς τὸν 25 ; Βλέπεις καμμίαν ὁμοιότητα μεταξὺ τῆς ἀσκήσεως αὐτῆς καὶ τῆς προηγουμένης ;

71) Δύο δοχεῖα περιέχουν, τὸ μὲν ἓν 23 ὀκάδας οἴνου, τὸ δὲ ἄλλο 35 ὀκάδας. Πόσας ὀκάδας οἴνου περιέχει τὸ δεύτερον δοχεῖον περισσοτέρας ἀπὸ τὸ πρῶτον ; Καὶ πόσας ὀκάδας οἴνου πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ πρῶτον δοχεῖον, ἵνα καὶ τὰ δύο δοχεῖα περιέχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ὀκάδων ;

Ὁμὰς Α΄

Ἀπὸ μνήμης. 72) Νὰ ἐκτελέσῃς τὰς ἀφαιρέσεις :

18 δρχ. — 9 δρχ.	570 όκ. — 40 όκ.
15 δρχ. — 8 δρχ.	850 όκ. — 320 όκ.
70 δρχ. — 40 δρχ.	3600 γραμ. — 600 γραμ.
99 τάλ. — 39 τάλ.	7800 γραμ. — 700 γραμ.
75 τάλ. — 35 τάλ.	99000 χιλγρ. — 9000 χιλγρ.
818 πήχ. — 320 πήχ.	3600 πήχ. — 700 πήχ.
7600 μέτρ. — 900 μέτρ.	8500 μέτρ. — 6500 μέτρ.

89000 μέτρ. — 8900 μέτρ.

73) Ὁμοίως νὰ ἐκτελέσῃς τὰς ἀφαιρέσεις :

59 — 18	300 — 236	525 — 317
47 — 25	500 — 345	942 — 608
88 — 49	1000 — 250	8500 — 6600
100 — 37	1000 — 215	9700 — 3700
200 — 152	2000 — 746	345000 — 35000.

74) Νὰ συμπληρώσῃς τὰς ἰσότητας μὲ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι λείπουν :

$11 + \ldots = 31$	$75 + \ldots = 110$
$15 + \ldots = 40$	$43 + \ldots = 104$
$42 + \ldots = 97$	$108 + \ldots = 167$.

75) Εἰς τὰς κατωτέρω ἰσότητας νὰ ἀντικαταστήσῃς τὰ γράμματα μὲ τοὺς καταλλήλους ἀριθμούς :

$250 + \alpha = 400$	$\alpha + 360 = 580$
$325 + \beta = 500$	$\beta + 715 = 1000$
$1050 + \gamma = 1475$	$\gamma + 1049 = 1200$.

Ὁμὰς Β΄

76) α) Εἰς τὰς εἰσιτηρίους ἐξετάσεις τῆς πρώτης ἑξαταξίου ἑνὸς σχολείου, παρουσιάσθησαν 165 μαθηταί. Ἀπὸ αὐτοὺς δὲ ἐπέτυχον οἱ 142. Πόσοι ἀπέτυχον ;

β) Ἀπὸ τοὺς 142 μαθητάς, οἱ ὁποῖοι ἐπέτυχον, ἔγιναν δεκτοὶ εἰς τὸ σχολεῖον αὐτὸ 75, οἱ δὲ ἄλλοι ἐνεγράφησαν εἰς ἄλλα σχολεῖα. Πόσοι εἶναι οὗτοι ;

γ) Ἀπὸ τοὺς 75 μαθητάς, οἱ ὁποῖοι ἔγιναν δεκτοί, οἱ 26 δὲν εἶχον ἐμβολιασθῆ καθόλου εἰς τὴν ζωήν των. Πόσοι εἶναι οἱ ἄλλοι ;

δ) Ἀπὸ τοὺς 75 αὐτοὺς μαθητὰς ἐξῃρέθησαν τῆς Γυμναστικῆς, ὡς ἀσθενεῖς, 6 μαθηταὶ ὁριστικῶς καὶ 11 προσωρινῶς. Πόσοι μαθηταὶ παρακολουθοῦν τὸ μάθημα τῆς Γυμναστικῆς ;

77) Οἱ περισσότεροι μαθηταὶ τῆς πρώτης τάξεως τοῦ ἑξαταξίου πρέπει νὰ εἶναι ἡλικίας 11 ἐτῶν. Εἰς ποῖον ἔτος ἐγεννήθησαν οἱ μαθηταὶ τῆς ἡλικίας αὐτῆς ; Καὶ εἰς ποῖον ἔτος ἐγεννήθησαν, ὅσοι ἐξ αὐτῶν εἶναι 12 ἐτῶν ;

78) Εἶπες, ὅτι ἡ ἀδελφή σου ἐγεννήθη κατὰ τὸ ἔτος 1924. Πόσων ἐτῶν εἶναι σήμερον ;

79) Μάθε ἀπὸ τοὺς γονεῖς σου τὰ ἔτη τῆς ἡλικίας τοῦ καθενὸς μέλους τῆς οἰκογενείας σου. Εὗρε δὲ ἔπειτα εἰς ποῖον ἔτος ἐγεννήθη τὸ καθέν.

80) Μάθε ἀπὸ τοὺς γονεῖς σου εἰς ποῖον ἔτος ἐγεννήθη τὸ καθὲν μέλος τῆς οἰκογενείας σου. Εὗρε δὲ ἔπειτα τὰ ἔτη τῆς ἡλικίας, τὴν ὁποίαν ἔχει σήμερον τὸ καθέν.

Ὁμὰς Γ'

81) Ἐὰν εἰς ἕνα ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἔχω εἰς τὸν νοῦν μου, προσθέσω τὸν 28, θὰ λάβω τὸν 60. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός ;

82) Ποῖον ἀριθμόν, πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν 70, διὰ νὰ λάβωμεν διαφορὰν 43 ;

83) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 39, διὰ νὰ λάβωμεν ἄθροισμα 68 ;

84) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 145, καὶ ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁ 46. Ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος ;

85) Τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν εἶναι 60. Ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁ 9 καὶ ὁ ἄλλος κατὰ 5 μεγαλύτερος αὐτοῦ (τοῦ 9). Ποῖος εἶναι ὁ τρίτος ἀριθμός ;

86) Τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν εἶναι 56. Ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁ 15 καὶ ὁ ἄλλος κατὰ 7 μικρότερος αὐτοῦ (τοῦ 15). Ποῖος εἶναι ὁ τρίτος ἀριθμός ;

Ὁμὰς Δ'

Γραπτῶς. 87) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑπόμεναι ἀφαιρέσεις :

3576— 378	4315819— 732944
52436— 23709	1483040— 606450
10006— 5938	2872691— 1141943
101010— 85054	5130248— 3025619
748317—269931	24494576—20212683.

88) Νὰ συμπληρωθοῦν αἱ ἰσότητες :

757+ . . . = 4463   87308+ . . . = 96094

23063+ . . . = 40541   98769+ . . . = 181211.

89) Εἰς τὰς κατωτέρω ἰσότητας νὰ ἀντικαταστήσῃς τὰ γράμματα μὲ τοὺς καταλλήλους ἀριθμούς.

$37085 + \alpha = 50476$ $97148 + \beta = 138057$

$\gamma + 260368 = 455049$ $\delta + 698409 = 900400.$

90) Αἱ κάτωθι ἀφαιρέσεις νὰ ἐκτελεσθοῦν, χωρὶς νὰ τεθῇ ὁ ἀφαιρετέος κάτωθεν τοῦ μειωτέου :

α) 4709— 3657	δ) 90007—45009
β) 56700— 8956	ε) 70043—27168
γ) 85704—16007	ϛ) 97541—79742.

91) Εἰς τὰς κάτωθι ἀφαιρέσεις, νὰ ἀντικαταστήσῃς τὰ ἐρωτηματικὰ μὲ τὰ κατάλληλα ψηφία :

; ; ;	565	7 3 ;
347	; ; ;	; ; 3
589	287	222.

92) Ὁμοίως νὰ κάμῃς καὶ εἰς τὰς κάτωθι ἀφαιρέσεις :

; 0 ;	51 ; 1	4 ; 2 ;
8 ; 8	3 ; 0 ;	; 5 ; 8
1 ; 1	; 0 ; 9	1959.

93) Νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸν 3728 ὁ 723 καὶ ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 898.

94) Νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸν 3728 τὸ ἄθροισμα 723+898. Δύνασαι νὰ εἴπῃς, πρὶν κάμῃς τὴν πρᾶξιν, τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς ; (Νὰ λάβῃς ὑπ' ὄψιν τὴν προηγουμένην ἄσκησιν).

95) Νὰ εὕρῃς τὰ ἐξαγόμενα τῶν ἑπομένων πράξεων, κατὰ τὸν εὐκολώτερον τρόπον :

275— 28— 47, 523—215—148, 127— 24—38—65,
841—251—136—308, 1748—999— 99, 3005—997—97— 7.

Ὁμὰς Ε΄

96) Εἰς τὴν Ἑλλάδα, ἀσχολοῦνται εἰς τὴν γεωργίαν 1293398 κάτοικοι (ἡλικίας ἄνω τῶν 10 ἐτῶν). Ἐξ αὐτῶν οἱ 858775 εἶναι ἄρρενες. Πόσοι εἶναι οἱ θήλεις;

97) Ἡ Ἀγροτικὴ Τράπεζα ἐδάνεισεν εἰς τοὺς ἀγρότας διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς καλλιεργείας, κατὰ μὲν τὸ 1936 1511460000 δραχμάς, κατὰ δὲ τὸ 1937 1840000000. Πόσας δραχμὰς ἐπὶ πλέον ἐδάνεισεν αὕτη κατὰ τὸ 1937;

98) Οἱ ἀγρόται μας ἐκαλλιέργησαν εἰς τὰ διάφορα μέρη τῆς Ἑλλάδος κατὰ τὰ ἔτη 1935 καὶ 1936 τοὺς κάτωθι ἀριθμοὺς στρεμμάτων:

Μέρη τῆς Ἑλλάδος	1935	1936
Κυκλάδες	251070	254584
Ἰόνιοι νῆσοι	322413	343509
Ἤπειρος	919415	972395
Κρήτη	815001	1035555
Νῆσοι Αἰγαίου	507665	548645
Θράκη	1722009	1732693
Θεσσαλία	2996941	3158290
Πελοπόννησος	3891880	4163115
Στερεὰ Ἑλλὰς - Εὔβοια . . .	3825340	3973764
Μακεδονία	6657766	6973475

Νὰ εὕρῃς πόσα στρέμματα περισσότερον ἐκαλλιεργήθησαν κατὰ τὸ 1936. α) Εἰς καθὲν ἀπὸ τὰ ἄνω μέρος καὶ β) εἰς ὅλην τὴν Ἑλλάδα.

99) Διάφοροι λίμναι καὶ ἕλη τῆς Μακεδονίας ἀπεξηράνθησαν. Ἐδόθησαν δὲ οὕτως εἰς τὴν καλλιέργειαν 660948 στρέμματα γῆς. Ἐξ αὐτῶν 12900 στρέμματα ἐδόθησαν εἰς γεωπόνους διὰ νὰ ἐφαρμόσουν καλυτέρας μεθόδους καλλιεργείας. Διὰ τὸν ἴδιον σκοπὸν ἐδόθησαν ἄλλα 12300 στρέμματα εἰς γεωργικοὺς σταθμούς. Ἐπίσης διετέθησαν 1000 στρέμματα διὰ τὴν καλλιέργειαν κανάβεως εἰς γεωργούς, οἱ ὁποῖοι γνωρίζουν τὴν καλλιέργειαν αὐτῆς. Τὰ δὲ λοιπὰ στρέμματα ἐδόθησαν εἰς ἀκτήμονας. Πόσα εἶναι τὰ στρέμματα αὐτά;

100) Κατὰ τὰ ἔτη 1936 καὶ 1937 ἡ παραγωγὴ εἰς τόννους σίτου-κριθῆς καὶ βρώμης, ἀραβοσίτου, καὶ ὀσπρίων, φαίνεται εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα:

Ἔτη	Σῖτος	Κριθὴ-Βρώμη	Ἀραβόσιτος	Ὄσπρια
1936	531708	248042	286964	60580
1937	881051	366721	269158	99367

Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ παραγωγῆς, εἰς καθὲν εἶδος, κατὰ τὰ ἔτη αὐτά;

101) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ παραγωγῆς εἰς τόννους, κατὰ τὰ ἴδια ἔτη, εἰς καθὲν ἀπὸ τὰ κάτωθι εἴδη:

Ἔτη	Καπνὸς	Βάμβαξ	Γεώμηλα	Γλεῦκος	Σταφὶς	Ἔλαιον
1936	80968	42167	129009	191899	173561	72569
1937	64156	55592	158703	320502	192291	159145

102) Εἰς τὸ Ταμεῖον τῶν Γεωργικῶν Ἀσφαλίσεων, ἠσφαλίσθησαν κατὰ τὸ ἔτος 1936, εἰς ὅλην τὴν Ἑλλάδα 9536 ἀγρόται κατὰ τῆς χαλάζης. Ἐπλήρωσαν δηλαδὴ εἰς τὸ ταμεῖον αὐτὸ ἓν ποσὸν χρημάτων, (τὸ ἀσφάλιστρον) ὥστε νὰ ἀποζημιωθοῦν ἀπὸ αὐτό, ἐὰν ἡ παραγωγὴ τῶν κτημάτων των κατεστρέφετο ὑπὸ τῆς χαλάζης. Ἐπλήρωσαν δὲ οὕτως ἀσφάλιστρα 6121084 δραχμάς. Ἐκ τῶν ἀσφαλισθέντων ἔπαθον ὑπὸ τῆς χαλάζης 3215, οἱ ὁποῖοι ἔλαβον ὡς ἀποζημίωσιν 9008984 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἠσφαλίσθησαν καὶ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἔπαθον καὶ ἀπεζημιώθησαν. Ἐπίσης νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν ἀσφαλίστρων καὶ τῶν ἀποζημιώσεων, αἱ ὁποῖαι ἐπληρώθησαν ἀπὸ τὸ ἄνω ταμεῖον.

103) Ὁμοίως νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἴδιαι διαφοραὶ μὲ τὰς ἄνω, διὰ τὴν ἀσφάλειαν κατὰ τοῦ παγετοῦ. Κατ' αὐτοῦ δὲ ἠσφαλίσθησαν κατὰ τὸ 1936 εἰς ὅλην τὴν Ἑλλάδα 1773 ἀγρόται, οἱ ὁποῖοι ἐπλήρωσαν ἀσφάλιστρα 1082985 δραχμάς. Ἐξ ἐκείνων δέ, οἱ ὁποῖοι ἠσφαλίσθησαν, ἀπεζημιώθησαν οἱ 866 καὶ ἔλαβον ὡς ἀποζημίωσιν 1824769 δραχμάς.

Ὁμὰς ΣΤ΄

104) Εἷς ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἔχω εἰς τὸν νοῦν μου, ὅταν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸν 2765, δίδει διαφορὰν 1018. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός ;

105) Δύο ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα 2860. Ὁ εἷς δὲ ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι ὁ 973. Ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος ;

106) Δύο ἀριθμοὶ ἔχουν διαφορὰν 4658. Ὁ μικρότερος δὲ ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι ὁ 9859. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄλλος.

107) Πατήρ τις εἶναι 48 ἐτῶν, ὁ δὲ υἱός του 14. Ποία θὰ εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ πατρός, ὅταν ὁ υἱὸς γίνῃ 37 ἐτῶν ;

108) Πατήρ τις εἶναι κατὰ 36 ἔτη μεγαλύτερος τοῦ υἱοῦ του, ὁ ὁποῖος εἶναι 17 ἐτῶν. Ποία θὰ εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ πατρός, ὅταν ὁ υἱός του θὰ εἶναι 40 ἐτῶν ;

109) Πατήρ τις εἶναι κατὰ 17 ἔτη μεγαλύτερος τοῦ υἱοῦ του καὶ κατὰ 28 ἔτη μεγαλύτερος τῆς θυγατρός του, ἡ ὁποία εἶναι 23 ἐτῶν. Πόσων ἐτῶν εἶναι ὁ πατὴρ καὶ πόσων ὁ υἱός ;

Ὁμὰς Ζ΄

110) Ἐὰν εἰς τὸν μειωτέον μιᾶς ἀφαιρέσεως προσθέσωμεν 5 μονάδας, τί παθαίνει ἡ διαφορά ;

111) Ἐὰν ἀπὸ τὸν μειωτέον μιᾶς ἀφαιρέσεως ἀφαιρέσωμεν 4 μονάδας, τί παθαίνει ἡ διαφορά ;

112) Εἰς τὸν ἀφαιρετέον ἀφαιρέσεώς τινος, ἐὰν προσθέσωμεν 6 μονάδας, τί παθαίνει ἡ διαφορά ;

113) Ἐὰν ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον ἀφαιρέσεώς τινος ἀφαιρέσωμεν 3 μονάδας, ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται ἡ διαφορά ;

114) Εἷς εἶχεν α δραχμὰς καὶ ἐξώδευσεν ἀπὸ αὐτὰς β δραχμάς. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν ;

115) Εἷς ἔμπορος ἐκέρδισεν ἀπὸ ἓν εἶδος α δραχμὰς καὶ ἀπὸ ἄλλο β δραχμάς. Ἐξώδευσεν ὅμως ἀπὸ τὰ κέρδη του γ δραχμάς. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν ;

116) Ὅταν γνωρίζῃς τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως $\alpha-\beta$, ἠμπορεῖς νὰ γνωρίζῃς καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως $(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)$ (§ 51) ;

Γ'. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

61. Π ρ ό β λ η μ α. **Ὁ μικρὸς Γεώργιος ἔμεινεν εἰς τὰς παιδικὰς ἐξοχὰς Βούλας τέσσαρας ἑβδομάδας. Πόσας ἡμέρας ἔμεινεν;**

Ἔμεινεν 7 ἡμ.+7 ἡμ.+7 ἡμ.+7 ἡμ.=28 ἡμ. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ 28 ἔγινε διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τοῦ 7 τέσσαρας φοράς.

Ἡ πρᾶξις αὕτη εἶναι **πολλαπλασιασμός.**

Ὥστε: **Πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐπαναλαμβάνομεν ἕνα ἀριθμὸν πολλάκις.**

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐπαναλαμβάνεται πολλάκις (ὅπως ὁ 7 εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα), λέγεται **πολλαπλασιαστέος,** ὁ δὲ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δεικνύει πόσας φορὰς θὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος (ὅπως ὁ 4), λέγεται **πολλαπλασιαστής.**

Ὁ ἀριθμὸς δέ, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὅπως ὁ 28, λέγεται **γινόμενον.**

Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς λέγονται μὲ ἕνα ὄνομα **παράγοντες** τοῦ γινομένου.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ τὸ γινόμενον εἶναι ὁμοειδεῖς, ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς θεωρεῖται πάντοτε ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμός. Καὶ τοῦτο, διότι δεικνύει μόνον πόσας φορὰς θὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον.

Διὰ νὰ σημειώσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, γράφομεν πρῶτον τὸν πολλαπλασιαστέον, ἔπειτα τὸ σημεῖον × (ἐπὶ) ἢ . καὶ κατόπιν τὸν πολλαπλασιαστήν. Οὕτως 7×5 ἢ 7 . 5 σημαίνει 7+7+7+7+7, τὸ δὲ ἄθροισμα 8+8+8+8 γράφεται 8×4 ἢ 8 . 4.

62. Π ρ ό β λ η μ α. **Πόσον τιμῶνται αἱ τρεῖς ὀκάδες σάπωνος, ὅταν ἡ μία ὀκᾶ τιμᾶται 25 δραχμάς;**

Ἀφοῦ ἡ μία ὀκᾶ τιμᾶται 25 δραχμάς, εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ τρεῖς ὀκάδες τιμῶνται 25 δρχ.+25 δρχ.+25 δρχ.=25 δρχ ×3. Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ προκύπτει ὁ κάτωθι κανών:

Ὅταν δίδεται ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος ἑνὸς πράγματος καὶ ζητῆται ἡ τιμὴ πολλῶν μονάδων τοῦ αὐτοῦ πράγματος, κάμνομεν πολλαπλασιασμόν. Καὶ πολλαπλασιαστέος μὲν εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος φανερώνει πόσαι εἶναι αἱ μονάδες, τὴν τιμὴν τῶν ὁποίων ζητοῦμεν.

63. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὴν ἀξίαν τῶν τριῶν ὀκάδων εἰς τὸ ἄνω πρόβλημα, πρέπει νὰ προσθέσωμεν τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους πρὸς τὸν 25. Ἐὰν δὲ ἐζητούσαμεν τὴν τιμὴν 35 π. χ. ὀκάδων, θὰ ἔπρεπε νὰ προσθέσωμεν 35 ἀριθμοὺς ἴσους πρὸς τὸν 25. Ἀλλ' ἡ πρόσθεσις τόσων ἀριθμῶν ἀπαιτεῖ χρόνον καὶ κόπον. Διὰ τοῦτο εὑρέθη τρόπος, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν εὑρίσκεται πολὺ συντομώτερον. Καὶ τὰ μὲν γινόμενα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν μανθάνομεν νὰ εὑρίσκωμεν ἀπὸ μνήμης. Ἡ σύντομος ὅμως εὕρεσις τῶν γινομένων πολυψηφίων ἀριθμῶν ἐπὶ μονοψήφιον ἢ ἐπὶ πολυψήφιον στηρίζεται εἰς τὰς κάτωθι ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Σημείωσις. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι 1, τὸ γινόμενον ἰσοῦται μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον. Ὅταν δὲ ὁ εἷς τῶν παραγόντων εἶναι 0, τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι 0. Ἤτοι 7×1=7, 0×8=0 καὶ 3×0=0.

64. Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.— Πρόβλημα. Εἷς ἔμπορος πωλεῖ κιβώτια, τὰ ὁποῖα περιέχουν σάπωνα τριῶν ποιοτήτων. Καθὲν δὲ ἀπὸ αὐτὰ περιέχει 5 ὀκάδας σάπωνα κατάλληλον διὰ τὸ πλύσιμον τῶν ὑφασμάτων, 3 ὀκάδας διὰ τὴν χρῆσιν τῆς κουζίνας καὶ δύο ὀκάδας διὰ τὸν καθαρισμὸν τοῦ σώματος. Πόσας ὀκάδας σάπωνα ἐν ὅλῳ περιέχουν 4 τοιαῦτα κιβώτια;

Ἐπειδὴ κάθε κιβώτιον περιέχει ἐν ὅλῳ 5 ὀκ.+3 ὀκ.+2 ὀκ. σάπωνα, τὰ 4 κιβώτια περιέχουν (§ 62) (5 ὀκ.+3 ὀκ.+2 ὀκ.)×4. Ὥστε διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα 5+3+2 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 4. Ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον καὶ ὡς ἑξῆς. Ἀφοῦ κάθε κιβώτιον περιέχει 5 ὀκάδας σάπωνα διὰ τὰ ὑφάσματα, τὰ 4 κιβώτια περιέχουν τοιοῦτον 5 ὀκ.×4. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ 4 κιβώτια περιέχουν 3 ὀκ.×4 σάπωνα διὰ τὴν κουζίναν καὶ 2 ὀκ.×4 διὰ τὸν καθαρισμὸν τοῦ σώματος. Ἑπομένως αἱ ὀκάδες τοῦ σάπωνος καὶ τῶν τριῶν ποιοτήτων εἶναι 5 ὀκ.×4+3 ὀκ.×4+2 ὀκ.×4. Ἄρα εἶναι: (5 ὀκ.+3 ὀκ.+2 ὀκ.)×4=5 ὀκ.×4+3 ὀκ.×4+2 ὀκ.×4.

Ὥστε: **Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον ὅρον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ γινόμενα.**

65. Π ρ ό β λ η μ α. **Ἀπὸ τὰ κιβώτια τοῦ προηγουμένου προβλήματος ἐπώλησεν ὁ ἔμπορος τὴν πρώτην ἡμέραν 3 καὶ τὴν δευτέραν ἡμέραν ἄλλα 4. Πόσας ἐν ὅλῳ ὀκάδας σάπωνος περιέχουν τὰ κιβώτια, τὰ ὁποῖα ἐπώλησεν εἰς τὰς δύο αὐτὰς ἡμέρας ;**

Κάθε κιβώτιον γνωρίζομεν, ὅτι περιέχει 10 ὀκάδας σάπωνος. Ἐπειδὴ δὲ ὅλα τὰ κιβώτια, τὰ ὁποῖα ἐπώλησεν, εἶναι $(3+4)$ εὑρίσκομεν, ὅτι ὅλαι αἱ ὀκάδες, τὰς ὁποίας ζητοῦμεν εἶναι $10\times(3+4)$.

Ἤτοι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 10 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $3+4$. Ἀλλὰ τὸ ζητούμενον αὐτὸ εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς. Τὰ 3 κιβώτια περιέχουν 10 ὀκ. $\times$ 3 καὶ τὰ ἄλλα 4 κιβώτια περιέχουν 10 ὀκ. $\times$ 4. Ὥστε αἱ ὅλαι ὀκάδες, τὰς ὁποίας ζητοῦμεν, εἶναι 10 ὀκ. $\times$ 3 $+$ 10 ὀκ. $\times$ 4. Ἑπομένως εἶναι 10 ὀκ. $\times$ $(3+4)=$ 10 ὀκ. $\times$ 3 $+$ 10 ὀκ. $\times$ 4.

Ὥστε: **Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄθροισμα, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν χωριστὰ μὲ κάθε ὅρον τοῦ ἀθροίσματος καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ γινόμενα.**

66. Π ρ ό β λ η μ α. **Ὁ ἀνωτέρω ἔμπορος ἔχει ἀκόμη πρὸς πώλησιν εἰς τὴν ἀποθήκην του κιβώτια σάπωνος εἰς σειράς, ὡς δεικνύει ὁ κατωτέρω πίναξ,**

I	I	I	I
I	I	I	I
I	I	I	I
I	I	I	I
I	I	I	I

Πόσα τοιαῦτα κιβώτια ἔχει εἰς τὴν ἀποθήκην του ;

Ἐὰν ἀριθμήσωμεν, θὰ ἴδωμεν, ὅτι εἶναι 20 ἐν ὅλῳ. Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν εὐκολώτερον μὲ τὸν ἑξῆς τρόπον. Βλέπομεν, ὅτι εἰς κάθε ὁριζοντίαν γραμμὴν εἶναι 4 κιβώτια. Ἐπειδὴ δὲ αἱ γραμμαὶ αὐταὶ εἶναι 5, ἕπεται, ὅτι ὅλα τὰ κιβώτια εἶναι 4×5. Ἠμποροῦμεν ὅμως νὰ ἀριθμήσωμεν τὰ κιβώτια αὐτὰ καὶ κατὰ στήλας. Ἐπειδὴ δὲ εἰς κάθε στήλην εἶναι 5 κιβώτια, αἱ δὲ στῆλαι εἶναι 4, εὑρίσκομεν, μὲ τὸν τρόπον αὐτόν, ὅτι ὅλα τὰ κιβώτια εἶναι 5×4. Ἀλλὰ μὲ οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν ἀριθμήσωμεν τὰ ἀνωτέρω κιβώτια, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸν ἴδιον ἀριθμὸν πάντοτε θὰ εὕρωμεν.

Ὥστε εἶναι $4 \times 5 = 5 \times 4$. Ἡ δὲ ἰσότης αὐτὴ μᾶς λέγει, ὅτι:

Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ

67. α) **Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.** — Πρόβλημα. **Πόσας δραχμὰς ἀξίζουν 4 πήχεις ὑφάσματος, ὅταν ὁ εἷς πῆχυς ἀξίζει 238 δραχμάς;**

Ἀξίζουν 238 δρχ.$\times 4$. Ἀλλὰ διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 238 ἐπὶ 4, παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ 238 ἀποτελεῖται ἀπὸ 8Μ, 3Δ καὶ 2Ε.

Ὥστε τὸ γινόμενον 238×4 εἶναι ἄθροισμα τῶν γινομένων $8\text{M} \times 4$, $3\Delta \times 4$ καὶ $2\text{E} \times 4$ (§ 64), ἤτοι εἶναι $238 \times 4 = 8\text{M} \times 4 + 3\Delta \times 4 + 2\text{E} \times 4$.

Ἀλλὰ γνωρίζομεν, ὅτι

$$
\begin{array}{lll}
8\text{M} \times 4 = 32\text{M} = & 3\Delta + 2\text{M} & \\
3\Delta \times 4 = 12\Delta = & 1\text{E} + 2\Delta & \text{καὶ} \\
2\text{E} \times 4 = & 8\text{E} & \text{ὥστε} \\
\hline
238 \times 4 = & 9\text{E} + 5\Delta + 2\text{M} = 952. &
\end{array}
$$

Εὐκολώτερον εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον αὐτό, ἂν γράψωμεν τοὺς παράγοντάς του ὡς ἑξῆς:

$$
\begin{array}{r}
238 \\
4 \\
\hline
952
\end{array}
\qquad 238 \times 4 = 952
$$

καὶ ἔπειτα λέγομεν 8Μ ἐπὶ 4=32Μ ἢ 3Δ καὶ 2Μ. Τὰς 2Μ γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων καὶ κρατοῦμεν τὰς 3Δ. Κατόπιν λέγομεν, 3Δ ἐπὶ 4=12Δ καὶ 3Δ, αἱ κρατούμεναι, =15Δ ἢ 1Ε καὶ 5Δ. Τὰς 5Δ γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν δεκάδων καὶ κρατοῦμεν τὴν 1Ε. Ἔπειτα εὑρίσκομεν, ὅτι 2Ε ἐπὶ 4 =8Ε καὶ 1Ε, ἡ κρατουμένη, =9Ε. Γράφομεν δὲ αὐτὰς ὑπὸ τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων.

68. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών:

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν πολυψήφιον ἐπὶ μονοψήφιον, 1ον) πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων, καὶ 2ον) ἑκάστου μερικοῦ γινομένου

γράφομεν μόνον τὰς μονάδας, τὰς δὲ δεκάδας αὐτοῦ προσθέτομεν εἰς τὸ ἑπόμενον μερικὸν γινόμενον.

69. β) **Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ.**— Ὁ πολλαπλασιασμὸς οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ. γίνεται κατὰ τρόπον συντομώτατον. Διὰ νὰ εὕρω δὲ τὸν τρόπον αὐτὸν παρατηρῶ τὰ ἑξῆς :

Τὸ γινόμενον 1Μ×10=10Μ ἤτοι 1Δ, ἄρα 3Μ×10=3Δ
5Μ×10=5Δ κ.ο.κ.
Τὸ γινόμενον 1Δ×10=10Δ ἤτοι 1Ε, ἄρα 4Δ×10=4Ε
7Δ×10=7Ε κ.ο.κ.
Τὸ γινόμενον 1Ε×10=10Ε ἤτοι 1Χ, ἄρα 2Ε×10=2Χ
6Ε×10=6Χ κ.ο.κ.

Ἔπειτα ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω, ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸν πολλαπλασιασμὸν 478×10. Ἀλλὰ διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 478 ἐπὶ 10, θὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 10 πρῶτον τὰς 8 μονάδας του, ἔπειτα τὰς 7 δεκάδας του καὶ τέλος τὰς 4 ἑκατοντάδας του. Ἀλλὰ 8Μ×10=8Δ, 7Δ×10=7Ε καὶ 4Ε×10=4Χ. Ὥστε ὅλα τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ 478 μετὰ τὸν πολλαπλασιασμόν του ἐπὶ 10 παριστοῦν μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἀπὸ ἐκείνην, τὴν ὁποίαν παρίστανον προηγουμένως. Ἀλλὰ διὰ νὰ γίνῃ τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν ἓν μηδενικὸν εἰς τὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ. Ὥστε 478×10=4780.

Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι 478×100=47800, 206×100=20600, 35×1000=35000 κτλ.

70. Ὅθεν : **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ., γράφομεν δεξιὰ αὐτοῦ τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής.**

Σημείωσις. Ἔπειτα ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω εὐκόλως συνάγομεν ὅτι εἶναι π. χ.
570= 57×10
3100= 31×100
125000=125×1000 κτλ.

71. γ) **Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἀριθμὸν πολυψήφιον, τοῦ ὁποίου τὸ πρῶτον μόνον ψηφίον εἶναι σημαντικόν.**—Ἂς λάβωμεν ὡς π. δ. τὸν πολλαπλασιασμὸν 378×300.

Ἀλλὰ γνωρίζομεν, ὅτι 378×300=300×378 ἢ 3Ε×378. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον 3Ε×378 παριστᾷ ἑκατοντάδας, ἤτοι εἶναι 3Ε×378 =1134Ε ἢ 3Ε×378=113400 μονάδες ἁπλαῖ.

Ὥστε τὸ γινόμενον 113400 εὑρέθη ἀπὸ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 378 καὶ 3, δεξιὰ τοῦ ὁποίου ἐγράψαμεν τὰ μηδενικὰ τοῦ 300, ἤτοι δύο.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ γινόμενον 27×4000 εὑρίσκεται ἀπὸ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 27 καὶ 4, ὅταν δεξιὰ αὐτοῦ γράψωμεν τρία μηδενικά. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι 27×4=108, εἶναι καὶ 27×4000=108000.

Ἐκ τῶν παραδειγμάτων δὲ τούτων εὐκόλως συνάγομεν τὸν σχετικὸν κανόνα.

72. δ) Πολλαπλασιασμὸς δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.— Ἔστω, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν

$$3687\times 635$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ 635=5+30+600, θὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον γινόμενον, ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὸν 3687 πρῶτον 5 φοράς, ἔπειτα 30 φορὰς καὶ τέλος 600 φορὰς καὶ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

$$\begin{array}{lrl} \text{Ἀλλὰ} & 3687\times 5= 18435 & \\ & 3687\times 30= 110610 & \\ \text{καὶ} & \underline{3687\times 600=2212200} & \text{ὥστε} \\ & 3687\times 635=2341245 & \end{array}$$

Πρὸς συντομίαν ἡ πρᾶξις αὕτη διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 3687 \\ \underline{635} \\ 18435 \\ 11061 \\ \underline{22122} \\ 2341245 \end{array}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν 578×307=177446

$$\begin{array}{r} 578 \\ \underline{307} \\ 4046 \\ \underline{1734} \\ 177446 \end{array}$$

73. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν λοιπὸν τὸν κανόνα:

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον, 1ον) **πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον μὲ ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ δεξιά,** 2ον) **γράφομεν τὰ μερικὰ γινόμενα τὸ ἓν κάτωθεν τοῦ ἄλλου, εἰς τρόπον ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον ἑκάστου ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι ὑπὸ τὸ ψηφίον, μὲ τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσαμεν, καὶ** 3ον) **προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα. Τὸ δὲ προκῦπτον ἄθροισμα εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.**

Σημείωσις. Ὅταν οἱ παράγοντες τελειώνουν εἰς μηδενικά, ὁ πολλαπλασιασμὸς συντομεύεται, ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἑπόμενον παράδειγμα. Π. χ. ἐὰν ἔχωμεν 56000×800 πολλαπλασιάζομεν 56×8 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου 448 γράφομεν τόσα μηδενικά, ὅσα παρελείψαμεν. Ὥστε $56000 \times 800 = 44800000$.

74. **Δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.**— Ἀφοῦ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἀριθμούς, δοκιμάζομεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ὡς ἑξῆς. Ἐπαναλαμβάνομεν αὐτὸν μὲ πολλαπλασιαστὴν τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ μὲ πολλαπλασιαστέον τὸν πολλαπλασιαστὴν (§ 66). Ἐὰν δὲ εὑρεθῇ τὸ ἴδιον γινόμενον, πιθανῶς δὲν ἔγινε λάθος.

Σημείωσις. Ὅταν πολλαπλασιασμοὶ συνδέωνται διὰ τῶν σημείων τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως, διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον, πρέπει νὰ ἐκτελεσθοῦν πρῶτον οἱ πολλαπλασιασμοὶ καὶ κατόπιν αἱ προσθέσεις ἢ αἱ ἀφαιρέσεις.

Οὕτως ἔχομεν $5 \times 3 + 8 \times 9 = 15 + 72 = 87$.

75. **Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.**—Πρόβλημα. **Εἰς μίαν πόλιν ὑπάρχουν δύο ἑξατάξια Γυμνάσια. Ἑκάστη τάξις τῶν σχολείων αὐτῶν ἔχει 60 μαθητὰς καὶ ἕκαστος μαθητὴς εἰς ἔρανον, ὁ ὁποῖος ἔγινεν ὑπὲρ τῆς ἀεροπορίας, ἔδωσε 10 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἔδωσαν καὶ τὰ δύο αὐτὰ Γυμνάσια;**

1) Ἀφοῦ ὁ 1 μαθητὴς ἔδωσε 10 δραχμάς, οἱ 60 μαθηταὶ μιᾶς τάξεως, ἤτοι ἑκάστη τάξις, ἔδωσε 10 δραχ. $\times 60 = (10 \times 60)$ δραχμὰς $= 600$ δραχμάς.

2) Ἀφοῦ ἡ 1 τάξις ἔδωσε (10×60) δραχμάς, αἱ 6 τάξεις τοῦ ἑνὸς Γυμνασίου ἔδωσαν (10×60) δραχμὰς $\times 6 = (10 \times 60 \times 6)$ δραχμὰς $= 600 \times 6 = 3600$ δραχμάς.

3) Ἀφοῦ τὸ 1 Γυμνάσιον ἔδωσε $(10 \times 60 \times 6)$ δραχμάς, τὰ δύο

Γυμνάσια ἔδωσαν $(10\times6\times6)$ δραχμὰς $\times 2 = 3600 \times 2 = 7200$ δραχμάς.

Ἀλλ' εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ βλέπομεν, ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν 7200, ἐπολλαπλασιάσαμεν πρῶτον τὸ 10 ἐπὶ 60, ἔπειτα τὸ γινόμενον αὐτῶν 600 ἐπολλαπλασιάσαμεν ἐπὶ 6, τέλος δὲ τὸ νέον γινόμενον 3600 ἐπολλαπλασιάσαμεν ἐπὶ 2. Ἤτοι εὕρομεν, ὅτι $10\times 60\times6\times2=7200$. Τὸ γινόμενον τοῦτο λέγεται **γινόμενον πολλῶν παραγόντων.**

Ὥστε: **Γινόμενον πολλῶν παραγόντων λέγεται τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν πρῶτον παράγοντα ἐπὶ τὸν δεύτερον· ἔπειτα τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν τρίτον, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τὸν τέταρτον κ.ο.κ. μέχρις ὅτου λάβωμεν καὶ τὸν τελευταῖον παράγοντα.**

Ἀλλὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἠμποροῦμεν νὰ λύσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς. Νὰ εὕρωμεν δηλαδὴ πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν τάξεων τῶν δύο Γυμνασίων. Εἶναι δὲ οὗτος τὸ γινόμενον $6\times2=12$. Ἔπειτα νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν καὶ τῶν 12 τάξεων. Εἶναι δὲ οὗτος τὸ γινόμενον $60\times12=720$ μαθηταί. Τέλος δὲ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν, τὰς ὁποίας ζητοῦμεν. Θὰ εἶναι δὲ οὗτος ἴσος μὲ τὸ γινόμενον 10×720, ὁπότε θὰ εὕρωμεν 7200 δραχμ. ὅπως καὶ προηγουμένως. Τὰ ἀνωτέρω φανερώνουν ὅτι, ὅπως τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ὅταν ἀλλάξῃ ἡ τάξις τῶν παραγόντων, οὕτω καὶ **τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ὅταν μεταβληθῇ ἡ τάξις αὐτῶν.**

π. χ. εἶναι $10\times60\times6\times2=6\times2\times60\times10$.

Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἰδιότητος αὐτῆς συντομεύει πολλάκις τὸν πολλαπλασιασμόν. Οὕτως, ἂν τὸ γινόμενον $2\times3\times5\times7\times2\times5$ ἐκτελέσωμεν κατὰ τὴν τάξιν $2\times5\times5\times2\times7\times3$, εὑρίσκομεν γινόμενον τῶν τεσσάρων πρώτων παραγόντων 100, ὁπότε τὰ ἑπόμενα γινόμενα εὑρίσκονται εὐκολώτερα.

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους παράγοντας διὰ τοῦ γινομένου των. Οὕτως εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἀντικαθιστῶμεν τοὺς 2 καὶ 5 διὰ τοῦ 10, τοὺς ἄλλους 2 καὶ 5 διὰ τοῦ 10. Τὰ δύο 10 διὰ τοῦ 100 καὶ τέλος τοὺς παράγοντας 3 καὶ 7 διὰ τοῦ 21. Ἔχομεν δὲ οὕτω νὰ πολλαπλασιάσωμεν $100\times21 =2100$. Ἐπίσης, ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀριθμούς, ὡς τοὺς 38 καὶ 62139, λαμβάνομεν ὡς πολλαπλασιαστέον τὸν μεγαλύτερον, διότι τότε θὰ ἔχωμεν μόνον δύο μερικοὺς πολλαπλασιασμούς.

76. Πολλαπλασιασμὸς ἀπὸ μνήμης. — Πολλαπλασιάζομεν ἀπὸ μνήμης εἰς πολλὰς περιπτώσεις. Π. χ. ὅταν πολλαπλασιάζωμεν ἀριθμόν.

α΄) ἐπὶ 4, διπλασιάζομεν δύο φοράς· Π. χ. 78×4, λέγομεν δύο φορὰς τὸ 78=156 καὶ δύο φορὰς 156=312 (διότι 4=2×2).

β΄) ἐπὶ 9, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 10 καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμόν. Π. χ. 38×9, λέγομεν 38×10=380, καὶ 38 ἀπὸ 380=342 (διότι 9=10—1).

γ΄) ἐπὶ 99, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 100 καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμόν. Π. χ. 56×99=5600—56 (διατί ;).

δ΄) ἐπὶ 11, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 10 καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμόν. Π. χ. 75×11=750+75 (διατί ;).

ε΄) ἐπὶ 12, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 10 καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ Π. χ. 49×12=490+98.

στ΄) διψήφιον ἐπὶ 101, θέτομεν πλησίον τοῦ ἀριθμοῦ τὸν ἑαυτόν του. Π. χ. 69×101=6969 (διότι 101=100+1) καὶ 69×(100+1)=6900+69.

ζ΄) διψήφιον ἢ τριψήφιον ἐπὶ μονοψήφιον, πολλαπλασιάζομεν τὰ μέρη τοῦ ἀριθμοῦ χωριστά, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν ἀνωτάτην τάξιν καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα. Π. χ. 36×7, λέγομεν 30×7=210, 6×7=42 καὶ τέλος 210 καὶ 42=252, ὁμοίως διὰ 248×5 λέγομεν 200×5=1000, 40×5=200, 8×5=40 καὶ τέλος 1000, 200 καὶ 40=1240.

η΄) δύο διψηφίους ἀριθμούς, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶναι μικρότερος τοῦ 20, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὡς ἑξῆς. Πολλαπλασιάζομεν τὸν μικρότερον ἐπὶ τὰ μέρη χωριστὰ τοῦ ἄλλου, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων. Π. χ. 17×43. Λέγομεν 3×17=51, 1 καὶ κρατοῦμεν πέντε, 4×17=68 καὶ 5=73. Ὅθεν 17×43=731.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

117) Ἀπὸ τὰ ἀθροίσματα :

5 δρχ.+8 δρχ.+9 δρχ.+3 δρχ.+6 δρχ.
8 δρχ.+8 δρχ.+8 δρχ.+8 δρχ.+8 δρχ.

ποῖον ἠμπορεῖς νὰ εὕρῃς εὐκολώτερα ;

118) Τὰ κάτωθι ἀθροίσματα νὰ γράψῃς ὑπὸ μορφὴν γινομένων καὶ νὰ εὕρῃς αὐτά·

5 ὀκ.+5 ὀκ.+5 ὀκ.+5 ὀκ.
7 μ.+7 μ.+7 μ.+7 μ.+7 μ.
9 πήχ.+9 πήχ.+9 πήχ.+9 πήχ.+9 πήχ.+9 πήχ.
23+23+23+23+23+23+23+23+23+23.

119) Ποίαν σημασίαν ἔχουν τὰ γινόμενα

5 δρχ.×3, 8 ὀκ.×5, 20 μ.×4, 2 πήχ.×8
9.2 10.6 3.9 5.5 ;

120) Εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα νὰ εὕρῃς τὸν ἀριθμὸν τῶν στιγμῶν, ἀλλὰ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἀριθμῶν (§ 66).

α)	β)	γ)
. .	. . .	. . . .
. .	. . . .	. . . .
. .	. . . .	. . . .
. .	. . . .	. . . .
. .	. . .	

Ὁμὰς Β΄

Ἀπὸ μνήμης. 121) Νὰ πολλαπλασιάσῃς :

4Δ×2	5Δ×6	4Ε×8	9Ε×9
40×3	80×5	30×9	70×7
608×8	900×5	700×9	900×7
3000×2	8000×9	8000×9	500000×3.

122) Ὁμοίως νὰ πολλαπλασιάσῃς :

50× 60	40×70	70× 80	700× 88	30× 400
2000×200	3000×20	40×2000	1000×100	10000×1000.

123) Νὰ ἐκτελέσῃς τοὺς πολλαπλασιασμούς :

36×2,	95×2,	95×20,	25×300,	150× 9
33×3,	45×3,	30×45,	25×600,	340× 9
25×4,	25×8,	20×55,	400× 15,	67×11
26×4,	75×5,	13×80,	40×150,	76×11
41×3,	49×9,	159×0,	50×250,	56×12.

Ὁμὰς Γ΄

124) Ὁ ἐφημεριδοπώλης ἀφήνει καθ᾽ ἡμέραν εἰς τὴν οἰκίαν μου μίαν ἐφημερίδα καὶ πληρώνεται εἰς τὰ τέλη ἑκάστου μηνός. Πόσας δραχμὰς λαμβάνει εἰς τὸ τέλος τοῦ μηνός; Καὶ πόσας θὰ λάβη ὅταν ὁ μὴν οὗτος εἶναι Ἰανουάριος ἢ Φεβρουάριος ἢ Μάρτιος ἢ Ἀπρίλιος;

125) Ὁμοίως ὁ γαλακτοπώλης μοῦ ἔφερεν εἰς τὴν οἰκίαν μου κατὰ τὸν μῆνα Μάϊον γάλα καθ᾽ ἑκάστην ἀξίας 6 δραχμῶν. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν εἰς τὸ τέλος τοῦ μηνὸς αὐτοῦ;

126) Ὁ ἀνθρακοπώλης μοῦ φέρει καθ᾽ ἡμέραν ξυλάνθρακας ἀξίας 11 δραχμῶν. Πόσας δραχμὰς λαμβάνει εἰς τὸ τέλος τοῦ μηνός; Καὶ πόσας θὰ λάβη, ἂν ὁ μὴν οὗτος εἶναι Ἰούνιος ἢ Ἰούλιος ἢ Αὔγουστος ἢ Σεπτέμβριος;

127) Καὶ ὁ ἀρτοπώλης φέρει καθ᾽ ἡμέραν εἰς τὴν οἰκίαν μου ἄρτον ἀξίας 15 δραχμῶν. Πόσας δραχμὰς λαμβάνει εἰς τὸ τέλος τοῦ μηνός; Καὶ πόσας θὰ λάβη ἐὰν ὁ μὴν οὗτος εἶναι Ὀκτώβριος ἢ Νοέμβριος ἢ Δεκέμβριος;

128) Κατὰ τὸν μῆνα Δεκέμβριον, λόγῳ τῶν ἑορτῶν, ἠγόρασα ἐπὶ πλέον 12 ὀκάδας ξυλάνθρακας πρὸς 5 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ 8 ὀκάδας ἄρτον (χριστόψωμα) πρὸς 15 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσα ἐπὶ πλέον διὰ καθὲν ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ εἴδη κατὰ τὸν μῆνα Δεκέμβριον; Καὶ πόσας ὁμοῦ;

Ὁμὰς Δ΄

129) Τὸ Κράτος προστατεύει τὸ παιδὶ κατὰ πολλοὺς καὶ διαφόρους τρόπους:

Διὰ τὰ ἀσθενῆ καὶ ἄπορα παιδιὰ ὑπάρχουν εἰς τὰς Ἀθήνας 4 ἰατρεῖα. Εἰς καθὲν ἀπὸ αὐτὰ προσέρχονται καθ᾽ ἡμέραν 35—40. Πόσα παιδιὰ προσέρχονται τὴν ἡμέραν καὶ εἰς τὰ 4 ἰατρεῖα, ὅταν εἶναι 40, καὶ πόσα, ὅταν εἶναι 35;

130) Εἰς καθὲν ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω παιδιὰ δίδονται φάρμακα, γάλα καὶ τροφαὶ κατάλληλοι διὰ τὴν ἀσθένειάν των. Ἐὰν τὰ εἴδη αὐτά, ποὺ δίδουν εἰς κάθε παιδί, ἀξίζουν 25 δραχμάς, πόσον ἀξίζουν τὰ εἴδη, ποὺ δίδουν εἰς 30, 50, 100 παιδιά ;

131) Εἰς τὰ ἀντιτραχωματικὰ ἰατρεῖα τῶν Ἀθηνῶν προσέρχονται τρεῖς φορὰς τὴν ἑβδομάδα 120 ἀσθενεῖς κάθε φοράν. Πόσοι προσέρχονται εἰς μίαν ἑβδομάδα ;

132) Εἰς τὴν μαθητικὴν πολυκλινικὴν προσέρχονται τρεῖς φορὰς τὴν ἑβδομάδα 250 ἀσθενεῖς μαθηταὶ κάθε φοράν. Πόσοι προσέρχονται εἰς κάθε ἑβδομάδα ;

133) Εἰς τοὺς 5 παιδικοὺς σταθμοὺς τῶν Ἀθηνῶν ἀφήνουν αἱ μητέρες, αἱ ὁποῖαι ἐργάζονται, τὰ μικρὰ τέκνα των τὴν πρωΐαν καὶ τὰ παραλαμβάνουν τὴν ἑσπέραν μετὰ τὴν ἐργασίαν των. Ἐὰν εἰς καθένα ἀπὸ αὐτοὺς τοὺς σταθμοὺς μείνουν μίαν ἡμέραν 65 παιδιά, πόσα μένουν καὶ εἰς τοὺς 5 ;

134) Εἰς καθὲν ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω παιδιὰ δίδονται τρία γεύματα τὴν ἡμέραν. Ἐὰν αἱ τροφαί, τὰς ὁποίας δίδουν εἰς κάθε παιδὶ εἰς μίαν ἡμέραν, ἀξίζουν 20 δραχμάς, πόσας δραχμὰς ἀξίζουν αἱ τροφαί, τὰς ὁποίας δίδουν εἰς μίαν ἡμέραν εἰς 325 παιδιά ;

135) Διὰ τὰ παιδιά, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀνάγκην ἐξοχῆς, ἔγιναν αἱ παιδικαὶ ἐξοχαὶ τῆς Βούλας. Εἰς αὐτὰς γίνονται τὸ θέρος 4 ἀποστολαί. Ἐὰν δὲ κάθε ἀποστολὴ ἀποτελῆται ἀπὸ 1200 παιδιά, πόσα παιδιὰ παραθερίζουν εἰς τὴν Βούλαν ἕκαστον θέρος ;

136) Διὰ τὰ παιδιά, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀνάγκην ὀρεινῆς ἐξοχῆς, γίνονται αἱ παιδικαὶ ἐξοχαὶ τῆς Πεντέλης. Εἰς αὐτὰς θὰ γίνωνται 4 ἀποστολαὶ τὸ θέρος. Ἑκάστη ἀποστολὴ θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ 400 παιδιά. Πόσα θὰ παραθερίζουν ἕκαστον θέρος εἰς τὴν Πεντέλην ;

137) Εἰς τὴν περιφέρειαν Ἀθηνῶν—Πειραιῶς ὑπάρχουν 24 συμβουλευτικοὶ σταθμοί, εἰς τοὺς ὁποίους προσέρχονται ἄποροι μητέρες καὶ λαμβάνουν συμβουλάς, διὰ τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ περιποιοῦνται καὶ νὰ διατρέφουν τὰ βρέφη των. Εἰς αὐτὰς δίδουν καὶ σπάργανα. Ἐὰν καθεὶς τῶν σταθμῶν τούτων ἔδωσεν ἐπὶ ἓν ἔτος σπάργανα εἰς 300 μητέρας, εἰς πόσας μητέρας δίδουν σπάργανα ὅλοι οἱ σταθμοί ;

Ὁμὰς Ε'

Γραπτῶς. 138) *Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοί :*

1283×96	1456×916
9563×39	3039×6300
274×520	3673×3002
849×360	2045×4069
205×817	4753×40085.

139) *Νὰ γράψης τὰ κάτωθι ἀθροίσματα ὑπὸ μορφὴν ἀθροίσματος δύο γινομένων :*

α) 2 ὀκ.+2 ὀκ.+2 ὀκ.+2 ὀκ.+4 ὀκ.+4 ὀκ.+4 ὀκ.

β) 5δρχ.+5δρχ.+5δρχ.+3δρχ.+3δρ.+3δρ.+3δρ.+3δρ.+3δρ.

γ) 6+7+6+7+6+7+6.

Γράψε μόνος σου ὅμοια παραδείγματα.

140) *Νὰ εὕρης τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :*

α) 4×25+18×32   β) 23×31+45×17

γ) 9×32+47×8+27×13.

141) *Γνωρίζομεν ὅτι*

274—15—26—18 = 274—(15+26+18)

Ἀφοῦ δὲ λάβῃς ὑπ' ὄψει τὰ ἀνωτέρω, νὰ γράψης τὰ κάτωθι παραδείγματα ὑπὸ μορφὴν διαφορᾶς δύο γινομένων :

α) 9+9+9+9—3—3—3—3—3

β) 8+8+8+8+8+8—14—14—14.

142) *Νὰ εὕρης τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :*

α) 58+63—36×47,   β) 103×125—18×89

γ) 78×140+30×70—29×60.

143) *Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων κατὰ δύο τρόπους :* α) (12+17+9)×8   β) (64+32+53+101)×20

γ) 15×(50+34+16)   δ) 25×(6+12+33+25)

Ποίας ἰδιότητας θὰ ἐφαρμόσῃς ;

Ὁμὰς ΣΤ'

144) *Πόσας δραχμὰς ἀξίζουν α) 125 ὀκάδες τυροῦ πρὸς 36 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, β) 108 ὀκάδες ἐλαίου πρὸς 47 δρχ. τὴν ὀκᾶν, γ) 89 ὀκάδες βουτύρου πρὸς 112 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, δ) 49 πήχεις ὑφάσμα-*

τος πρὸς 175 δραχμὰς τὸν πῆχυν καὶ ε) 137 μέτρα ὑφάσματος πρὸς 248 δραχμὰς τὸ μέτρον ;

145) Πόσας ὀκάδας περιέχουν α) 135 δοχεῖα ἐλαίου, καθὲν τῶν ὁποίων περιέχει 14 ὀκάδας καὶ β) 27 βαρέλια οἴνου, καθὲν τῶν ὁποίων περιέχει 1125 ὀκάδας ;

146) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν 6252 ὀκάδας ἐλαίας πρὸς 25 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Ἐξ αὐτῶν ἐπώλησε 5480 ὀκ. πρὸς 30 δρχ. τὴν ὀκᾶν, τὰς δὲ ὑπολοίπους πρὸς 28 δρχ. Πόσον ἐκέρδισεν ;

147) Ἐκ δύο βαρελίων οἴνου, τὸ μὲν περιέχει 238 ὀκάδας, τὸ δὲ ἄλλο 386 ὀκάδας. Καὶ τὸν μὲν οἶνον τοῦ πρώτου βαρελίου ἠγόρασε πρὸς 13 δρχ. τὴν ὀκᾶν, τὸν δὲ τοῦ δευτέρου πρὸς 11 δρχ. Πόσον ἐστοίχισεν ὁ οἶνος ;

148) Ἡ μητέρα εἶδεν, ὅτι εἰς τὰ καταστήματα τῆς συνοικίας της τὸ κρέας ἐτιμᾶτο 58 δρχ. τὴν ὀκᾶν, τὰ λαχανικὰ ἐτιμῶντο 10 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ τὰ μῆλα 26 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ αὐταὶ τῆς ἐφάνησαν μεγάλαι, μετέβη εἰς τὴν λαϊκὴν ἀγορὰν καὶ ἠγόρασε 1 ὀκᾶν κρέας πρὸς 52 δρχ. τὴν ὀκᾶν, 3 ὀκάδας λαχανικὰ πρὸς 7 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ 5 ὀκάδας μῆλα πρὸς 18 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Νὰ εὕρῃς α) πόσας δρχ. ἐπλήρωσεν δι᾽ ὅλα τὰ εἴδη, τὰ ὁποῖα ἠγόρασε καὶ β) πόσας δρχ. οἰκονόμησεν ἐπειδὴ ἠγόρασε τὰ εἴδη αὐτὰ ἀπὸ τὴν λαϊκὴν ἀγοράν. Νὰ ἔχῃς δὲ ὑπ᾽ ὄψει, ὅτι διὰ τὴν μετάβασιν εἰς τὴν ἀγορὰν καὶ τὴν ἐπιστροφήν της ἐπλήρωσε 5 δρχ. τροχιοδρομικά.

149) Ἐὰν ἔρραπτε μία τὸ μάλλινον φόρεμά της εἰς οἶκον ραπτικῆς θὰ ἠγόραζε 7 πήχεις μάλλινον ὕφασμα καὶ 5 πήχεις ὕφασμα διὰ φόδραν, θὰ ἐπλήρωνε δὲ καὶ 600 δραχμὰς ραπτικά. Τὰ ἔρραψεν ὅμως εἰς τὴν οἰκίαν της μὲ μίαν ράπτριαν, τὴν ὁποίαν προσέλαβε καὶ εἰς τὴν ὁποίαν ἔδωσεν 150 δραχμάς. Ἔγινε δὲ τὸ φόρεμα αὐτὸ μὲ 6 πήχεις μάλλινον ὕφασμα, ἀξίας 220 δραχμῶν τὸν πῆχυν καὶ μὲ 4 πήχεις ὕφασμα διὰ φόδραν, ἀξίας 45 δραχμῶν τὸν πῆχυν. Νὰ εὕρῃς α) πόσον ἐστοίχισεν ἐν ὅλῳ τὸ φόρεμα αὐτὸ καὶ β᾽) πόσας δραχμὰς οἰκονόμησεν ἐπειδὴ τὸ ἔρραψεν εἰς τὴν οἰκίαν της. Νὰ ἔχῃς δὲ ὑπ᾽ ὄψει, ὅτι τὸ φαγητὸν τῆς ραπτρίας ἐστοίχισε 40 δρχ.

150) Μία οἰκογένεια ἐχρειάζετο 2 ὀκάδας σταφύλια τὴν ἡμέραν. Τὰ ἠγόραζε δὲ πρὸς 8 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Μίαν ἡμέραν ἠγόρασε σταφύλια δι᾽ ὁλόκληρον ἑβδομάδα, ἐπειδὴ τὰ εὗρε πρὸς 6 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Ἀλλ᾽ ἀπὸ τὰ σταφύλια αὐτὰ ἔφαγε μόνον 4 ἡμέρας, διότι τὰ λοιπὰ

ἐσάπισαν. Ἠναγκάσθη λοιπὸν νὰ ἀγοράσῃ διὰ τὰς ὑπολοίπους ἡμέρας τῆς ἑβδομάδος σταφύλια ἀπὸ τὸν τακτικὸν ὀπωροπώλην, πρὸς 8 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Νὰ εὕρῃς α) πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσε διὰ τὰ σταφύλια τῆς ἑβδομάδος αὐτῆς, β) πόσας δραχμὰς θὰ ἐπλήρωνε τὴν ἑβδομάδα αὐτήν, ἐὰν ἠγόραζε τὰ σταφύλια, τὰ ὁποῖα ἐχρειάζετο καθ' ἡμέραν, ἀπὸ τὸν τακτικὸν ὀπωροπώλην καὶ γ) πόσας δραχμὰς ἐζημιώθη.

151) Μία οἰκοκυρὰ ἠγόρασε β ὀκάδας καφὲ πρὸς α δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσεν;

152) Ἄλλη μία οἰκοκυρὰ ἠγόρασε γ ὀκάδας τυρὸν πρὸς α δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ δ ὀκάδας βούτυρον πρὸς β δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσας δραχμὰς ἔδωσεν ἐν ὅλῳ;

Ὁμὰς Ζ'

153) Νὰ εὕρῃς τὰ γινόμενα:

α) 3.4.5.6 δ) 3.4.5.3.2
β) 4.6.5.3 ε) 3.20.6
γ) 5.3.6.4 ς) 5.24.3

Τί παρατηρήσεις κάμνεις ἐπὶ τῶν γινομένων αὐτῶν;

Ἀπὸ μνήμης. 154) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:

$3\times3\times2\times3$ $2\times7\times5\times12$ $5\times7\times2\times10$ $7\times9\times100$
$5\times6\times2\times2$ $8\times8\times4\times2$ $3\times2\times3\times20$ $3\times8\times5\times20$.

155) Ὁμοίως τά:

$3\times5\times7$ $5\times4\times12$ $5\times8\times9\times10$ $4\times28\times25$ $50\times49\times4$
$6\times8\times2$ $8\times4\times30$ $4\times25\times30$ $50\times78\times2$ $4\times20\times125$.

Γραπτῶς. 156) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:

$5\times7\times9\times13$ $38\times4\times77\times8$ $50\times25\times19\times2\times10$
$13\times17\times55\times46$ $8\times7\times4\times30\times5\times2$ $10\times21\times37\times4\times15$.

157) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἑπόμενα γινόμενα κατὰ τὸν συντομώτερον τρόπον:

275×11 2140×12 493×101 1170×102
3212×11 4245×12 750×101 2489×102.

158) Ὁμοίως τά:

$27\times22=(54\times11)$ (διότι $22=2\times11$)
$15\times33=(45\times11)$ (διότι $33=3\times11$)

145×22 540×22 2104×22 548×33
272×32 115×44 1250×33 1897×44.

159) Ὁμοίως τά :

5125×9	719×99	460× 98	1037×999	320×998
7018×9	872×99	223×999	6208×999	120×997.

160) Αἱ κάτωθι προσθέσεις νὰ γίνουν κατὰ τὸν συντομώτερον τρόπον (νὰ προσέξῃς τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης) :

358	1239	7046
258	5139	2823
1058	4637	9923
958	2039	7143
758	737	5746
458	6837	8923
3558	539	1643
6158	4039	9026.

161) Οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοὶ ἔγιναν ὀρθῶς ; Ἂν εἰς αὐτοὺς ἔγιναν σφάλματα, νὰ τὰ διορθώσῃς :

$$\begin{array}{r} 759 \\ 83 \\ \hline 2167 \\ 5672 \\ \hline \\ 58877 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 563 \\ 802 \\ \hline 1126 \\ 563 \\ 4554 \\ \hline 51796 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5734 \\ 103 \\ \hline 17202 \\ 5734 \\ \\ \hline 590602. \end{array}$$

162) Εἰς τοὺς κάτωθι πολλαπλασιασμοὺς εἰς τὴν θέσιν τῶν ἐρωτηματικῶν νὰ γράψῃς τὰ κατάλληλα ψηφία :

$$\begin{array}{r} 23\,; \\ 14 \\ \hline ;\,;\,0 \\ ;\,;\,; \\ \hline ;\,;\,;\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\,;\,; \\ 267 \\ \hline ;\,;\,78 \\ ;\,;\,;\,; \\ ;\,;\,; \\ \hline ;\,;\,;\,;\,8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} ;\,;\,; \\ 359 \\ \hline 5589 \\ ;\,;\,;\,; \\ ;\,;\,;\,; \\ \hline ;\,;\,;\,;\,;\,;9. \end{array}$$

163) Νὰ ἐκτελέσῃς τοὺς κάτωθι πολλαπλασιασμοὺς (οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀξιοπερίεργοι) :

α)	β)	γ)	δ)
111× 11	4649×239	37× 3	625×16
1111× 111	4649×478	101×11	3125×32
11111×1111	4469×717	3003×37	15625×64.

ε) Προσπάθησε νὰ κάμῃς μόνος σου ὅμοια παραδείγματα μὲ τὰ ἀνωτέρω.

164) Νὰ εὕρῃς τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

α)	β)	γ)
$1\times8+1$	$1\times9+2$	$12345679\times1\times9$
$12\times8+2$	$12\times9+3$	$12345679\times2\times9$
$123\times8+3$	$123\times9+4$	$12345679\times3\times9$
$1234\times8+4$	$1234\times9+5$	$12345679\times4\times9$

καὶ νὰ κάμῃς μόνος σου ὅμοια παραδείγματα μὲ τὰ ἄνω. Νὰ εὕρῃς δὲ τὰ ἐξαγόμενα αὐτῶν μὲ τὸν συντομώτερον τρόπον (νὰ προσέξῃς πρὸς τοῦτο τὰ ἐξαγόμενα τῶν ἀνωτέρω πράξεων).

165) Τί μᾶς λέγει ἡ ἰσότης $\alpha\times\beta=\beta\times\alpha$;
καὶ τί ἡ ἰσότης $(\alpha+\beta)\times\gamma=\alpha\times\gamma+\beta\times\gamma$;
καὶ τί ἡ ἰσότης $\gamma\times(\alpha+\beta)=\gamma\times\alpha+\gamma\times\beta$;

Ὁμὰς Η΄

166) Κατὰ τὸ ἔτος 1937 καὶ ἐπὶ 6 μῆνας ἤρχοντο εἰς τὴν Ἑλλάδα 12 ἀτμόπλοια τὸν μῆνα μὲ 250 περιηγητὰς τὸ καθέν. Πόσοι περιηγηταὶ ἦλθον μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν εἰς τὴν πατρίδα μας κατὰ τὸ ἔτος αὐτό;

167) Ἓξ ἀεροπλάνα τοῦ ἐξωτερικοῦ ἤρχοντο εἰς τὴν Ἑλλάδα 4 φορὰς τὸν μῆνα καὶ ἐπὶ 5 μῆνας. Εἰς καθὲν δὲ ταξίδιον ἔφερον 8 περιηγητάς. Πόσοι περιηγηταὶ ἦλθον εἰς τὴν πατρίδα μας μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν κατὰ τὸ διάστημα τῶν 5 μηνῶν;

168) Διὰ νὰ ἔρχωνται εἰς τὴν πατρίδα μας περισσότεροι περιηγηταὶ καὶ νὰ αὐξάνῃ τὸ ἐθνικόν μας εἰσόδημα, ἵδρυσεν ἡ Κυβέρνησις εἰς τὸ ἐξωτερικὸν 7 γραφεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν σκοπὸν νὰ κάμουν γνωστὴν εἰς τοὺς ξένους τὴν ὡραιότητα τῆς Ἑλληνικῆς φύσεως καὶ τὴν σπουδαιότητα τῶν ἀρχαιολογικῶν τόπων μας. Εἰς καθὲν ἀπὸ τὰ γραφεῖα αὐτὰ ὑπηρετοῦν 3 ὑπάλληλοι. Ἐὰν δὲ ὁ καθεὶς ἐξ αὐτῶν λαμβάνῃ 9000 δραχμὰς τὸν μῆνα, πόσας δραχμὰς ἐξοδεύει ἡ Κυβέρνησις εἰς μισθοὺς κατὰ μῆνα διὰ νὰ κάμῃ Τουριστικὴν προπαγάνδαν εἰς τὸ ἐξωτερικόν; Καὶ πόσας ἐξοδεύει κατ᾽ ἔτος διὰ τὸν σκοπὸν αὐτόν;

169) Διὰ τὴν αὔξησιν τῆς Τουριστικῆς κινήσεως ἡ Κυβέρνησις μεταξὺ τῶν ἄλλων κατεσκεύασε καὶ κατασκευάζει νέας ὁδούς. Εἰς τὰ τρία ἔτη 1938, 1939, 1940, θὰ γίνουν 650 χιλιόμετρα νέων ὁδῶν κατ᾽

ἔτος. Ἐὰν τὸ καθὲν χιλιόμετρον νέας ὁδοῦ στοιχίζῃ 150000 δραχμάς, πόσον θὰ στοιχίσουν ὅλα τὰ χιλιόμετρα τῶν νέων ὁδῶν, αἱ ὁποῖαι θὰ γίνουν κατὰ τὰ τρία αὐτὰ ἔτη ;

170) Εἰς τὴν Ἑλλάδα ἦλθον κατὰ τὸ ἔτος 1937 145000 περιηγηταί. Ἐὰν ὁ καθεὶς ἐξ αὐτῶν ἔμεινεν εἰς τὴν πατρίδα μας ἐπὶ 8 ἡμέρας καὶ ἐξώδευσε 550 δραχμὰς τὴν ἡμέραν, πόσας τὸ ὅλον δραχμὰς ἐδαπάνησαν οἱ περιηγηταὶ οὗτοι κατὰ τὸ ἔτος αὐτό ;

171) Ἡ Κυβέρνησις διὰ νὰ αὐξήσῃ καὶ τὸν ἐσωτερικὸν Τουρισμόν, δηλαδὴ διὰ νὰ διευκολύνῃ καὶ τοὺς κατοίκους τῆς Ἑλλάδος νὰ ἐπισκέπτωνται τὰ διάφορα μέρη αὐτῆς (δι' ἀναψυχὴν ἢ διὰ νὰ τὴν γνωρίσουν), ὥρισε καὶ ἐκδρομικὰς ἁμαξοστοιχίας, μὲ τὰς ὁποίας ταξιδεύει κανεὶς μὲ πολὺ εὐθηνὸν εἰσιτήριον. Κατὰ τὸ θέρος τοῦ 1937 ἐκυκλοφόρησαν 370 ἁμαξοστοιχίαι ἐκδρομικαὶ μὲ 14 ὀχήματα ἑκάστη. Καθὲν δὲ ὄχημα μετέφερε 30 ἐκδρομεῖς. Πόσοι ἐκδρομεῖς ἐν ὅλῳ ἐκινήθησαν κατὰ τὸ ἔτος αὐτὸ διὰ τῶν ἐκδρομικῶν ἁμοξοστοιχιῶν ;

ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

77. Ἐὰν ἀγοράσω 2 μολυβδοκόνδυλα πρὸς 2 δραχμὰς τὸ ἓν θὰ δώσω δραχμὰς $2 \times 2 (=4)$. Ὁμοίως ἐὰν ἀγοράσω 3 σειρὰς γραμματοσήμων τῶν 3 δραχμῶν, ἑκάστη δὲ σειρὰ νὰ ἔχῃ 3 γραμματόσημα θὰ δώσω δραχμὰς $3 \times 3 \times 3 (=27)$. Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι πολλάκις συμβαίνει, οἱ παράγοντες ἑνὸς γινομένου νὰ εἶναι ἴσοι. Τότε ἓν τοιοῦτον γινόμενον λέγεται **δύναμις** ἑνὸς τῶν παραγόντων του. Π.χ. τὸ ἄνω γινόμενον 2×2 λέγεται δύναμις τοῦ 2 καὶ τὸ γινόμενον $3 \times 3 \times 3$ λέγεται δύναμις τοῦ 3.

Ὥστε : **Δύναμις ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον ἴσων παραγόντων πρὸς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.**

78. Ἐὰν εἶναι δύο οἱ παράγοντες, τὸ γινόμενον λέγεται **δευτέρα** δύναμις ἢ **τετράγωνον,** ἐὰν τρεῖς, **τρίτη** δύναμις ἢ **κύβος,** ἐὰν τέσσαρες, **τετάρτη**, δύναμις κ.ο.κ. Π.χ. τὸ γινόμενον 3×3 λέγεται δευτέρα δύναμις τοῦ 3 ἢ τετράγωνον τοῦ 3, τὸ δὲ γινόμενον $4 \times 4 \times 4$ λέγεται τρίτη δύναμις τοῦ 4 ἢ κύβος αὐτοῦ, τὸ δὲ γινόμενον $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, λέγεται ἕκτη δύναμις τοῦ 2.

79. Τὰς δυνάμεις γράφομεν συντόμως ὡς ἑξῆς : Γράφομεν μόνον τὸν ἕνα παράγοντα καὶ ὀλίγον ὑπεράνω γράφομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος δεικνύει πόσοι εἶναι οἱ παράγοντες. Λέγεται δὲ οὗτος **ἐκθέτης**, ἐνῷ ὁ εἷς τῶν παραγόντων λέγεται **βάσις** τῆς δυνάμεως. Οὕτως ἡ τρίτη δύναμις τοῦ 2 γράφεται συντόμως 2^3. Εἰς αὐτὴν ὁ 2 εἶναι βάσις, ὁ δὲ 3 ἐκθέτης καὶ εἶναι $2^3=2\times2\times2=8$.

Ἐπίσης ἡ τετάρτη δύναμις τοῦ 5 γράφεται 5^4. Εἶναι δὲ εἰς αὐτὴν βάσις ὁ 5, ἐκθέτης ὁ 4 καὶ εἶναι $5^4=5\times5\times5\times5=625$.

80 Θεμελιώδης ἰδιότης τῶν δυνάμεων.— Ἔστω, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς δύο δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἤτοι τὰς 3^2 καὶ 3^4.

Ἐπειδὴ $3^2=3\times3$ καὶ $3^4=3\times3\times3\times3$, θὰ εἶναι καὶ $3^2\times3^4=3\times3\times3\times3\times3\times3$, ἤτοι $3^2\times3^4=3^6$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $7^3\times7^5=7^8$.

Ὥστε: **Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐκθετῶν.**

Ἀσκήσεις.

172) Νὰ εὕρῃς τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, κτλ. μέχρι τοῦ 20.

173) Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἄσκησιν βλέπομεν, ὅτι :

$$1^2=1$$
$$2^2=4=1+(1+2)$$
$$3^2=9=4+(2+3)$$
$$4^2=9+(3+4)=16$$
$$5^2=16+(4+5)=25$$

Κατόπιν τούτων νὰ εὕρῃς τὰ τετράγωνα τῶν 6, 7 κτλ. μὲ τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον εὑρίσκονται ἀνωτέρω τὰ τετράγωνα τοῦ 4 καὶ τοῦ 5.

174) Νὰ εὕρῃς τοὺς κύβους τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3 κτλ. μέχρι τοῦ 10.

175) Νὰ εὕρῃς τὰς δυνάμεις :

10^2, 10^3, 10^4, κτλ. 10^9.

176) Ὁμοίως νὰ εὕρῃς τὰς δυνάμεις :

1^3, 1^4, 2^5, 3^6, 4^4

177) Νὰ εὕρῃς τὰ ἐξαγόμενα :

α) 2^2+2^3 β) $3+3^2+3^3$ γ) $5^3+5^2+5^4$ δ) $10+10^2+10^3+10^4$.

178) Νὰ εὕρῃς τὰ ἐξαγόμενα τῶν γινομένων :

α) $2^3 \times 2^4$ β) $2^3 \times 3^2$ γ) $5^2 \times 7^2$. 5

179) Ἀφοῦ εἴδομεν ὅτι $2^2 \times 2^3 = 2^5$ εἶναι καὶ $2^5 = 2^2 \times 2^3$. Κατόπιν τῆς παρατηρήσεως αὐτῆς νὰ ἀντικαταστήσῃς τὴν δύναμιν 3^7 διὰ γινομένου δύο δυνάμεων τοῦ 3, νὰ εὕρῃς δὲ μόνος σου ὅμοια παραδείγματα.

180) Τί μᾶς λέγει ἡ ἰσότης $\alpha^\mu \times \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$;

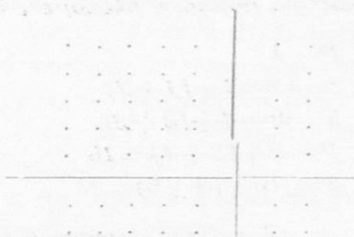
181) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $(5+2)^2$.

Ἐπειδὴ $(5+2) = 7$, θὰ εἶναι $(5+2)^2 = 7 \times 7 = 49$.

Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἠμποροῦμεν νὰ τὸ εὕρωμεν καὶ κατ' ἄλλον τρόπον. Τὸ γινόμενον 7×7 γράφομεν ὡς ἑξῆς :

$$7 \times 7 = \begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Ἐπειδὴ δὲ μᾶς ἐδόθη τὸ 7 ὡς ἄθροισμα τοῦ 5 καὶ τοῦ 2, χωρίζομεν τὸν ἄνω πίνακα τῶν μονάδων διὰ δύο γραμμῶν ὡς ἑξῆς :



Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι ὁ πίναξ αὐτὸς ἐχωρίσθη μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν εἰς τέσσαρα μέρη. Καὶ τὸ μὲν ἓν μέρος εἶναι τὸ 5^2, τὸ ἄλλο τὸ 2^2 καὶ καθὲν τῶν ἄλλων δύο μερῶν εἶναι τὸ 5×2, ἤτοι τὰ δύο ὁμοῦ εἶναι $2 \times 5 \times 2$. Ὥστε ἔχομεν :

$$(5+2)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 2 + 2^2 = 49 \qquad \begin{array}{r} 5^2 = 25 \\ 2 \times 5 \times 2 = 20 \\ 2^2 = \ \ 4 \\ \hline 49 \end{array}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι :

$$13^2=(10+3)^2=10^2+2\times10\times3+3^2=169 \qquad \begin{array}{r} 10^2= 100 \\ 2\times10\times3= 60 \\ 3^2= 9 \\ \hline 169 \end{array}$$

Κατόπιν τούτων, μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν νὰ εὕρῃς τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 13, 14, 15 κτλ. καὶ ἂν ἠμπορῇς ἀπὸ μνήμης.

**182) Ἂν ἀπὸ τὸν ἄνω πίνακα τῶν μονάδων (ὁ ὁποῖος, ὡς εἴδομεν, παριστᾷ τὸ 7^2) ἀφαιρέσωμεν τὸ μέρος, τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὸ 5^2 θὰ μᾶς μείνουν μονάδες $12\times2=24$. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ μὲν 12 εἶναι ἄθροισμα τοῦ 7 καὶ 5, τὸ δὲ 2 εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ 7 καὶ 5. Ὥστε εἶναι $7^2-5^2=(7+5)\times(7-5)=24$.*

Καὶ πράγματι $7^2-5^2=49-25=24$ καὶ
$7^2-5^2=(7+5)\times(7-5)=12\times2=24$.

Τὰ ἀνωτέρω μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ εὑρίσκωμεν τὰ γινόμενα ὡρισμένων ἀριθμῶν εὐκόλως καὶ πολλάκις ἀπὸ μνήμης. Π.χ.

$$107\times93=(100+7)\times(100-7)=9951 \qquad \begin{array}{r} 100^2= 10000 \\ 7^2= 49 \\ \hline 9951 \end{array}$$

$$394\times406=(400-6)\times(400+6)=159964 \qquad \begin{array}{r} 400^2= 160000 \\ 6^2= 36 \\ \hline 159964. \end{array}$$

Κατόπιν τούτων νὰ εὕρῃς μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν τὰ γινόμενα :
95×105, 204×196, 309×291, 492×508.

Νὰ κάμῃς δὲ ἔπειτα μόνος σου ὁμοίας ἀσκήσεις.

Δ΄. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

81. Πρόβλημα. **Θέλομεν νὰ μοιράσωμεν 24 τετράδια εἰς 6 μαθητὰς ἐξ ἴσου. Πόσα τετράδια θὰ λάβῃ ὁ καθείς ;**

Ἐὰν μοιράσωμεν τὸν ἀριθμὸν 24 εἰς 6 ἴσα μέρη τὸ ἓν μέρος θὰ φανερώνῃ τὸν ἀριθμὸν τῶν τετραδίων, τὰ ὁποῖα θὰ λάβῃ ὁ καθεὶς μαθητής. Ἠμποροῦμεν δὲ νὰ κάμωμεν τοῦτο ὡς ἑξῆς.

Δίδομεν εἰς καθένα μαθητὴν ἀπὸ ἓν τετράδιον. Τότε θὰ μείνουν 24—6=18 τετράδια. Ἔπειτα ἀπὸ τὰ 18 τετράδια, τὰ ὁποῖα ἔμειναν, δίδομεν πάλιν εἰς καθένα ἀπὸ ἓν τετράδιον. Κάμνομεν δὲ τοῦτο, ὅσας φορὰς εἶναι δυνατόν. Τὸ κάμνομεν δὲ 4 φοράς, χωρὶς εἰς τὸ τέλος νὰ μείνῃ κανὲν τετράδιον, ὡς ἑξῆς φαίνεται·

				24	τετρ
α)	ἀνὰ	1	τετράδιον εἰς κάθε μαθητὴν	6	»
				18	»
β)	»	1	» » » »	6	»
				12	»
γ)	»	1	» » » »	6	»
				6	»
δ)	»	1	» » » »	6	»
ἐξαγόμ.		4	τετράδια	0	

Εὕρομεν λοιπόν, ὅτι ὁ καθεὶς μαθητὴς θὰ λάβῃ 4 τετράδια.

Ἀλλ' ἡ πρᾶξις, τὴν ὁποίαν ἐκάμομεν ἀνωτέρω, εἶναι **διαίρεσις (μερισμοῦ).**

Ὥστε: **Διαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας μοιράζομεν ἕνα ἀριθμὸν εἰς ἴσα μέρη.**

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ μοιρασθῇ εἰς ἴσα μέρη, λέγεται **διαιρετέος,** ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δεικνύει εἰς πόσα μέρη θὰ μοιρασθῇ ὁ ἄλλος, λέγεται **διαιρέτης,** τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως αὐτῆς λέγεται **πηλίκον** (μερίδιον), τὸ ὁποῖον, ὡς μέρος τοῦ διαιρετέου, εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς αὐτό. Ὁ διαιρέτης, εἰς τὸν μερισμόν, εἶναι ἀφῃρημένος ἀριθμός.

Σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶναι τὸ : (διὰ) καὶ γράφεται μεταξὺ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου ὡς ἑξῆς 24 : 6.

Ἂν εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα τὰ τετράδια ἦσαν 26, ὁ μερισμὸς δὲν θὰ ἐγίνετο ἀκριβῶς διότι θὰ μᾶς ἐπερίσσευον 2 τετράδια. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος (ὁ 2) λέγεται **ὑπόλοιπον.**

82. Πρόβλημα. Εἰς πόσους μαθητὰς θὰ μοιράσωμεν 24 τετράδια, ἂν δώσωμεν εἰς καθένα ἀπὸ 6 ;

Θὰ δώσωμεν πρῶτον εἰς ἕνα μαθητὴν 6 τετράδια. Κατόπιν θὰ δώσωμεν εἰς ἄλλον ἄλλα 6 κ.ο.κ. Κάμνομεν δὲ τοῦτο, ὅσας φορὰς εἶναι δυνατόν. Ὅσας δὲ φορὰς θὰ δυνηθῶμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 6 ἀπὸ τὸν 24, ἤτοι ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 6 εἰς τὸν 24, τόσοι θὰ εἶναι καὶ οἱ μαθηταί, εἰς τοὺς ὁποίους θὰ τὰ μοιράσωμεν. Ἀλλ' ὁ 6 χωρεῖ εἰς τὸν 24 τέσσαρας φοράς. Ἑπομένως οἱ μαθηταὶ αὐτοὶ θὰ εἶναι 4.

᾿Αλλ᾿ ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὕρομεν τὸ ζητούμενον τοῦ προβλήματος αὐτοῦ, εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν πρᾶξιν, μὲ τὴν ὁποίαν εὕρομεν τὸ ζητούμενον τοῦ πρώτου προβλήματος, δηλαδὴ διαίρεσις. ᾿Αλλ᾿ ἡ διαίρεσις αὐτὴ δὲν εἶναι μερισμός.

᾿Αφαιροῦμεν βεβαίως, διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ ἐξαγόμενα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου προβλήματος, ἀλλεπαλλήλως 6 τετράδια. ᾿Αλλ᾿ ἑκάστην φοράν, εἰς μὲν τὸ πρῶτον πρόβλημα μοιράζομεν τὰ 6 τετράδια ἀνὰ ἕν, ἐνῷ εἰς τὸ δεύτερον, δίδομεν καὶ τὰ 6 εἰς ἕνα μαθητήν.

Εἰς τὸ α΄ πρόβλημα ὁ 6 φανερώνει τὸν ἀριθμὸν τῶν ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ μοιρασθῇ ὁ 24. Τὸ δὲ ἐξαγόμενον 4, φανερώνει τὴν ἀξίαν ἑνὸς μέρους. Εὑρέθη τοῦτο διὰ τοῦ μερισμοῦ τοῦ 24.

᾿Ενῷ εἰς τὸ δεύτερον πρόβλημα ὁ 6 φανερώνει τὴν ἀξίαν τοῦ ἑνὸς μέρους. Τὸ δὲ ἐξαγόμενον 4 φανερώνει τὸν ἀριθμὸν τῶν μερῶν. Εὕρομεν δὲ τοῦτο, ἀφοῦ ἐμετρήσαμεν πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 6 εἰς τὸν 24. Διὰ τοῦτο ἡ διαίρεσις αὕτη λέγεται **μέτρησις.** Δι᾿ αὐτὴν τὴν διαίρεσιν δίδομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν.

Διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν, πόσας φορὰς χωρεῖ εἷς ἀριθμὸς εἰς ἄλλον.

Εἰς τὴν μέτρησιν τὸ ἀκριβὲς πηλίκον λέγεται **λόγος.**

Εἰς τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα λύονται διὰ τῆς μετρήσεως ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης, οἱ ὁποῖοι εἶναι ὁμοειδεῖς θεωροῦνται ἀφῃρημένοι ἀριθμοί. ᾿Επίσης καὶ τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς θεωρεῖται ἀφῃρημένος ἀριθμός. Κατόπιν δὲ λαμβάνει συγκεκριμένην σημασίαν. ῾Ορίζει δὲ αὐτὴν τὸ πρόβλημα.

83. Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι, ἂν μοιρασθοῦν 24 τετράδια ἐξ ἴσου εἰς 6 μαθητάς, θὰ λάβῃ ὁ καθεὶς ἀπὸ 4 τετράδια καὶ δὲν θὰ μείνῃ κανὲν τετράδιον. ᾿Ενῷ, ἂν μοιρασθοῦν 26 τετράδια εἰς τοὺς μαθητὰς αὐτούς, θὰ λάβῃ ὁ καθεὶς 4 τετράδια καὶ θὰ περισσεύσουν 2. ῞Ωστε ἡ διαίρεσις 24 : 6 ἀφίνει ὑπόλοιπον 0, ἐνῷ ἡ 26 : 6 ἀφίνει ὑπόλοιπον 2.

84. ῾Η διαίρεσις, ὅταν δὲν ἀφίνῃ ὑπόλοιπον, λέγεται **τελεία.** Οὕτως ἡ διαίρεσις 24 : 6 εἶναι τελεία ὡς καὶ ἡ 12 : 4. Τῆς διαιρέσεως αὐτῆς τὸ πηλίκον εἶναι 3, διότι 4+4+4=12 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 0.

Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὴν πρώτην διαίρεσιν εἶναι 24=4×6 καὶ εἰς τὴν δευτέραν εἶναι 12=3×4, συμπεραίνομεν, ὅτι **εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην.**

Σημείωσις. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι, ἀφοῦ π. χ. εἶναι 18=6×3, θὰ εἶναι 18 : 6=3 καὶ 18 : 3=6.

85. Ἡ διαίρεσις, ὅταν ἀφίνῃ ὑπόλοιπον, λέγεται **ἀτελής.** Οὕτως ἡ διαίρεσις 26 : 6, ἡ ὁποία ὡς εἴδομεν, ἀφίνει ὑπόλοιπον 2, εἶναι ἀτελής. Εἰς αὐτὴν εἶναι 26=4×6+2.

Ὥστε: **Εἰς τὴν ἀτελῆ διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, εἰς τὸ ὁποῖον προστίθεται καὶ τὸ ὑπόλοιπον.** Εὐκόλως δὲ ἐννοοῦμεν, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον μιᾶς διαιρέσεως θὰ εἶναι πάντοτε μικρότερον τοῦ διαιρέτου αὐτῆς.

Σημείωσις. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα 17=3×5+2, ἐπειδὴ τὸ 2 εἶναι μικρότερον καὶ τοῦ 3 καὶ τοῦ 5, συμπεραίνομεν ὅτι, ἐὰν ὁ 17 διαιρεθῇ διὰ 3, θὰ δώσῃ πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 2· ἐὰν δὲ διαιρεθῇ διὰ 5, θὰ δώσῃ πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον πάλιν 2. Ἐνῷ ἀπὸ τὴν ἰσότητα 17=2×7+3 συμπεραίνομεν ὅτι, ἐὰν ὁ 17 διαιρεθῇ μόνον διὰ τοῦ 7 θὰ δώσῃ πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 3, (διότι 3<7 ἀλλὰ 3>2).

86. Ἡ διαίρεσις δύναται νὰ γίνῃ καὶ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς ἑξῆς: Ἔστω π.χ. ἡ διαίρεσις 56 : 9. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην 9 κατὰ σειρὰν ἐπὶ 1, 2, 3, κτλ. εὑρίσκομεν δὲ 9×1=9, 9×2=18, 9×3=27, 9×4=36, 9×5=45, 9×6=54, 9×7=63. Ἀπὸ τὴν σειρὰν δὲ αὐτὴν τῶν γινομένων παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ 9 χωρεῖ τὸ πολὺ 6 φορὰς εἰς τὸν 56. Τὸ πηλίκον λοιπὸν τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι 6 καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 56—54=2.

87. Γενικὸς ὁρισμὸς τῆς διαιρέσεως.—Ἔπειτα ἀπὸ ὅσα εἴπομεν προηγουμένως, συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικώτερον ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως:

Διαίρεσις ἀριθμοῦ δι' ἄλλου εἶναι ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὸν μεγαλύτερον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος, ὅταν πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸν διαιρέτην, δίδει γινόμενον ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ διαιρετέου.

Παρατηρήσεις. Ὅταν ἡ μονὰς εἶναι διαιρέτης, τὸ πηλίκον εἶναι ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον, π.χ. 8 : 1=8.

Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἴσος μὲ τὸν διαιρετέον τὸ πηλίκον εἶναι 1, π.χ. 7 : 7=1.

Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι 0, ὁ δὲ διαιρέτης ἄλλος ἀριθμός, μὴ μηδέν, τὸ πηλίκον εἶναι 0.

Καὶ πράγματι, ἂν ἔχωμεν 0 : 5 τὸ πηλίκον εἶναι 0, διότι 5×0=0.

Ὅταν καὶ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι 0, πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πηλίκον, π.χ. 0 : 0=5, διότι 0×5=0. Ἀλλὰ καὶ 0 : 0=6, διότι 0×6=0 κ.ο.κ.

Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, ὁ δὲ διαιρέτης 0, ἡ διαίρεσις δὲν δύναται νὰ γίνῃ, ἤτοι εἶναι ἀδύνατος. Διότι πᾶς ἀριθμός, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 0, δίδει γινόμενον 0. Ἐπίσης ἀδύνατος εἶναι ἡ διαίρεσις καὶ ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου.

88. Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.—Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι ἡ διαίρεσις δύναται νὰ γίνῃ ἢ διὰ τῆς ἀλλεπαλλήλου ἀφαιρέσεως, ἢ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ὑπάρχει ὅμως ἄλλος τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον οἱαδήποτε διαίρεσις ἐκτελεῖται συντομώτερον. Πρὶν ὅμως ἐκθέσωμεν αὐτόν, θὰ ἴδωμεν μερικὰς ἰδιότητας τῆς διαιρέσεως.

89. Ὑποθέτομεν, ὅτι πρόκειται νὰ μοιράσωμεν 235 δραχμὰς ἐξ ἴσου εἰς 5 ἀνθρώπους. Ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν εἰς αὐτοὺς πρῶτον τὰς 200 δραχμάς, ἔπειτα τὰς 30 καὶ τέλος τὰς 5. Θὰ λάβῃ δὲ ὁ καθεὶς ἀπὸ τὰς 200 δραχμάς, 200 δρχ. : 5 =40 δρχ. (διότι 40×5=200), ἀπὸ τὰς 30 δραχμάς, 30 δρχ. : 5=6 δρχ. καὶ ἀπὸ τὰς 5 δρχ., 5 δρχ. : 5=1 δρχ. Ὥστε ὁ καθεὶς ἀπὸ τοὺς 5 ἀνθρώπους θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ 40 δρχ.+6 δρχ.+1 δρχ.=47 δρχ. Καὶ πράγματι, διότι εἶναι 47 δρχ.×5=235 δρχ.

Ὥστε : **Ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὰ μέρη αὐτοῦ χωριστὰ** (ἐὰν διαιροῦνται ἀκριβῶς) **καὶ κατόπιν νὰ προσθέσωμεν τὰ πηλίκα.**

90. Ὑποθέτομεν, ὅτι πρόκειται νὰ μοιράσωμεν ἐξ ἴσου πρῶτον 23 δραχμὰς εἰς 5 ἀνθρώπους καὶ ἔπειτα διπλασίας δραχμὰς εἰς διπλασίους ἀνθρώπους.

Ὅταν μοιράσωμεν τὰς 23 δραχμὰς εἰς 5 ἀνθρώπους, θὰ λάβῃ ὁ καθεὶς 4 δραχμὰς καὶ θὰ μείνουν 3 δραχμαί.

Τώρα τὰς 46 δραχμὰς δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν εἰς τοὺς 10 ἀνθρώπους ὡς ἑξῆς. Μοιράζομεν πρῶτον τὰς 23 δρχ. εἰς τοὺς 5 ἀνθρώπους καὶ κατόπιν μοιράζομεν τὰς ἄλλας 23 δραχμὰς εἰς τοὺς ἄλλους 5 ἀνθρώπους. Ὥστε ὁ καθεὶς τῶν 10 ἀνθρώπων θὰ λάβῃ πάλιν 4 δρχ. Ἀλλ' εἰς ἡμᾶς θὰ μείνουν ὡς ὑπόλοιπον 6 δρχ.

Ὥστε τῆς διαιρέσεως 23:5 τὸ πηλίκον εἶναι 4 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 3, τῆς δὲ διαιρέσεως 46 : 10, ἤτοι τῆς (23×2) : (5×2), τὸ πηλίκον εἶναι πάλιν 4, ἐνῷ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 6 (3×2).

Ὥστε : **Ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην ἐπὶ ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.**

Σημείωσις α'. Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι, καὶ ἂν διαιρέσωμεν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος τοὺς διαιρεῖ, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, ἐνῷ τὸ ὑπόλοιπον διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Σημείωσις β'. Αἱ δύο ἀνωτέρω ἰδιότητες ἀληθεύουν καὶ διὰ τὴν τελείαν διαίρεσιν.

91. Ἂς ὑποτεθῇ ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον 7×3×2 δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων του, π.χ. διὰ τοῦ 3. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι ὁ διαιρέτης 3, πολλαπλασιάζων τὸν 7×2, δίδει τὸν διαιρετέον 7×3×2. Ὥστε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι 7×2.

Ὥστε : **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον διά τινος τῶν παραγόντων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον.**

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος ἕπεται, ὅτι, **διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἀριθμοῦ** (διαφόρου τοῦ 0), **ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν δι' αὐτοῦ ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου ἐὰν διαιρῆται ἀκριβῶς.**

Ἤτοι (5×24×7×11) : 8=5×3×7×11. Διότι εἶναι φανερόν, ὅτι 5×24×7×11=5×3×8×7×11. Ἄρα (5×3×8×7×11) : 8=5×3×7×11.

92. Λαμβάνω τὴν διαίρεσιν 40 : (4×5).

Διὰ νὰ εὕρω τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς, εὑρίσκω πρῶτον τὸ γινόμενον 4×5=20 καὶ ἔπειτα διαιρῶ 40 : 20. Εἶναι δὲ 40 : 20 =2 (διότι 2×20=40). Ἀλλ' εἰς τὴν δοθεῖσαν ἀρχικῶς διαίρεσιν, δύναμαι νὰ ἐργασθῶ καὶ ὡς ἑξῆς. Διαιρῶ δηλαδὴ τὸ 40 πρῶτον διὰ τοῦ 4 καὶ ἔπειτα τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρέθη, διαιρῶ διὰ τοῦ 5. Οὕτως εὑρίσκω $40:4=10$ (διότι $10\times4=40$) καὶ κατόπιν $10:5=2$. Ὥστε $40:(4\times5)=2$.

Ὥστε: **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ γινομένου πολλῶν παραγόντων, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου, κατόπιν τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ τρίτου κ.ο.κ. μέχρις ὅτου λάβωμεν καὶ τὸν τελευταῖον παράγοντα** (αἱ διαιρέσεις αὗται ὑποτίθενται ὅλαι ἀκριβεῖς).

93. Διαίρεσις δύο ἀριθμῶν.—Τώρα ποὺ ἐμάθομεν τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας, δυνάμεθα νὰ ἐννοήσωμεν τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον μία οἱαδήποτε διαίρεσις δύναται νὰ γίνῃ συντόμως. Πρὸς τοῦτο διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις:

α) **Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι 10, 100, 1000 κτλ.**

Πρόβλημα. **Εἰς πόσους πτωχοὺς θὰ μοιράσωμεν 1746 δραχμάς, ὅταν ὁ καθεὶς λάβῃ 10;**

Οἱ πτωχοὶ θὰ εἶναι τόσοι, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 10 εἰς τὸν 1746. Δηλαδὴ οἱ πτωχοὶ θὰ εἶναι τόσοι, ὅσαι εἶναι αἱ δεκάδες, τὰς ὁποίας ἔχει ὁ ἀριθμός. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ἔχει 174 δεκάδας καὶ 6 μονάδας (§ 33). Ἑπομένως ἡ διαίρεσις $1746:10$ δίδει πηλίκον 174 καὶ ὑπόλοιπον 6. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ διαίρεσις $3675:100$ δίδει πηλίκον 36 καὶ ὑπόλοιπον 75, καὶ ἡ $43000:1000$ δίδει πηλίκον 43 καὶ ὑπόλοιπον 0.

Ἐκ τῶν παραδειγμάτων τούτων εὐκόλως συνάγομεν τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 10, 100, 1000 κτλ.

β) **Ὅταν ὁ διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιοι ἀριθμοί.**

Ἔχω τὴν διαίρεσιν $58:7$. Ἀλλ' εἰς αὐτὴν τὸ πηλίκον εἶναι μικρότερον τοῦ 10, ἤτοι μονοψήφιον (διότι $7\times10=70$ εἶναι δὲ $70>58$), εὑρίσκεται δὲ τοῦτο ἀπὸ μνήμης εὐκόλως. Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι 8 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 2 (διότι $7\times8=56$ καὶ $7\times9=63$).

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ἀπὸ μνήμης, ὅτι ἡ διαίρεσις $68:9$ δίδει πηλίκον 7 καὶ ὑπόλοιπον 5.

γ) **Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι πολυψήφιος καὶ τὸ πηλίκον μονοψήφιον.** Ἔχω τὴν διαίρεσιν 2358 : 300.

Εἰς τὴν διαίρεσιν αὐτὴν (ἐπειδὴ $300 \times 10 = 3000$ καὶ ἐπειδὴ πάλιν $3000 > 2358$), τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὸ πηλίκον αὐτῆς, ἤτοι διὰ νὰ εὕρωμεν, πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 300 εἰς τὸν 2358, παρατηροῦμεν, ὅτι ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὰς 23 ἑκατοντάδας τοῦ διαιρετέου 2358 διὰ τοῦ 3. Διότι ὁ διαιρέτης 300 εἶναι 3 ἑκατοντάδες, αἱ δὲ ἑκατοντάδες χωροῦν μόνον εἰς τὰς ἑκατοντάδας.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 23 : 3 εἶναι 7, συμπεραίνομεν, ὅτι καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 2358 : 300 εἶναι 7. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $300 \times 7 = 2100$, ἕπεται, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς εἶναι $2358 - 2100 = 258$.

Τώρα λαμβάνω τὴν διαίρεσιν 2358 : 379.

Εἰς αὐτὴν (ἐὰν ἔχωμεν ὑπ᾿ ὄψει τὴν προηγουμένην διαίρεσιν) παρατηροῦμεν πρῶτον, ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον καὶ δεύτερον, ὅτι ὁ 379 δὲν ἠμπορεῖ νὰ χωρῇ εἰς τὸν 2358 περισσοτέρας φοράς, ἀπὸ ὅσας χωρεῖ ὁ 300 εἰς τὸν 2358, ἤτοι αἱ 3 ἑκατοντάδες τοῦ 379 εἰς τὰς 23 ἑκ. τοῦ 2358. Ὥστε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς θὰ εἶναι ἢ 7 ἢ μικρότερον τοῦ 7. Ἀλλ᾿ ἐπειδὴ $379 \times 7 = 2653 > 2358$, ἕπεται ὅτι ὁ 379 δὲν χωρεῖ 7 φορὰς εἰς τὸν 2358. Θὰ χωρεῖ λοιπὸν ἴσως 6 φοράς. Καὶ πράγματι, διότι $379 \times 6 = 2274 < 2358$. Τὸ πηλίκον λοιπὸν τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι 6 καὶ τὸ ὑπόλοιπον $2358 - 2274 = 84$.

Τὴν πρᾶξιν αὐτήν, χάριν συντομίας διατάσσομεν ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{r|l} 2358 & 379 \\ \cline{2-2} 2274 & 6 \\ \cline{1-1} 84 & \end{array}$$

94. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα : **Ὅταν τὸ πηλίκον μιᾶς διαιρέσεως εἶναι μονοψήφιον, διαιροῦμεν διὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τοῦ διαιρέτου τὰς μονάδας τοῦ διαιρετέου τῆς αὐτῆς τάξεως. Κατόπιν τὸ εὑρεθὲν ψηφίον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην· καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν διαιρετέον, τὸ ψηφίον τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον. Ἄλλως ἐλαττώνομεν τοῦτο διαδοχικῶς κατὰ μονάδα,**

μέχρις ὅτου εὕρωμεν ψηφίον, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸν διαιρετέον.

δ) **Ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον.** Ἂς ὑποτεθῇ, ὅτι πρόκειται νὰ μοιράσω ἐξ ἴσου 15384 δρχ. εἰς 65 ἀνθρώπους. Ἀλλὰ τότε θὰ κάμω τὴν διαίρεσιν 15384 : 65. Ἀλλὰ κατὰ πρῶτον παρατηρῶ, ὅτι $65 \times 100 = 6500 < 15384$ καὶ $65 \times 1000 = 65000 > 15384$. Ἑπομένως τὸ πηλίκον αὐτῆς θὰ εἶναι ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ 100 ἀλλὰ μικρότερον τοῦ 1000, ἤτοι τριψήφιον. Διὰ νὰ τὸ εὕρω δέ, σκέπτομαι ὡς ἑξῆς. Τὸ πηλίκον ἀφοῦ θὰ εἶναι τριψήφιον, θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας (αἱ δεκάδες καὶ αἱ μονάδες αὐτοῦ εἶναι δυνατὸν καὶ νὰ λείπουν), ἤτοι μὲ ἄλλους λόγους, ὁ καθεὶς τῶν 65 ἀνθρώπων θὰ λάβῃ μερικὰ ἑκατοντάδραχμα (ἀσφαλῶς), μερικὰ δεκάδραχμα καὶ μερικὰς δραχμάς. Ἀλλ᾽ εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ εὕρω τὰ ἑκατοντάδραχμα, τὰ ὁποῖα θὰ λάβῃ ὁ καθεὶς τῶν 65 ἀνθρώπων, ἐὰν μοιράσω τὰ ἑκατοντάδραχμα, ποὺ περιέχουν αἱ 15384 δραχμαί. Ἤτοι θὰ εὕρω τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου, ἐὰν διαιρέσω τὰς ἑκατοντάδας τοῦ διαιρετέου 15384 καὶ αἱ ὁποῖαι εἶναι 153 διὰ τοῦ 65. Διαιρῶ λοιπὸν τὸν 153 διὰ τοῦ 65 καὶ εὑρίσκω πηλίκον 2 ἑκατοντάδας.

Εὗρον λοιπόν, ὅτι ἕκαστος τῶν 65 ἀνθρώπων θὰ λάβῃ ἀπὸ τὰ 153 ἑκατοντάδραχμα 2 καὶ θὰ περισσεύσουν 153 ἑκ.—2ἑκ.$\times$65=153 ἑκ. —130 ἑκ.=23 ἑκ. Μένουν ἑπομένως νὰ μοιράσω ἀκόμη 23 ἑκ. καὶ 84 δραχμάς, ποὺ ἔμειναν ἀπὸ τὰς 15384. Ὥστε πρέπει νὰ κάμω τὴν διαίρεσιν 2384 : 65 Ἀπὸ αὐτὴν δέ, θὰ εὕρω τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ τῶν μονάδων τοῦ ζητουμένου πηλίκου. Ἐὰν δὲ σκεφθῶ ὁμοίως ὡς ἄνω, συμπεραίνω, ὅτι θὰ εὕρω τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων, ἐὰν διαιρέσω τὰς 238 δεκάδας τοῦ 2384 διὰ τοῦ 65. Διαιρῶ λοιπὸν τὸν 238 διὰ τοῦ 65 καὶ εὑρίσκω πηλίκον 3 δεκάδας καὶ ὑπόλοιπον 238 δεκ.—3 δεκ.$\times$65=238 δεκ.—195 δεκ.= 43 δεκ.

Τώρα αἱ 43 αὗται δεκάδες ὁμοῦ μὲ τὰς 4 μονάδας, αἱ ὁποῖαι ἔμειναν, κάμνουν 434 μονάδας. Ἐὰν δὲ διαιρέσω αὐτὰς μὲ τὸ 65, θὰ εὕρω τὸ ζητούμενον ψηφίον τῶν μονάδων. Διαιρῶ λοιπὸν τὸν 434 διὰ 65 καὶ εὑρίσκω πηλίκον 6 καὶ ὑπόλοιπον 44.

Ὥστε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 15384 : 65 εἶναι 236 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 44. Ἕκαστος λοιπὸν τῶν 65 ἀνθρώπων ἔλαβε 236 δραχμὰς καὶ ἐπερίσσευσαν 44 δραχμαί.

Τὴν ἀνωτέρω πρᾶξιν διατάσσομεν ὡς ἑξῆς.

```
15384 | 65              15384 | 65
130   |----             130   |----
----- | 236             ----- | 236
 2384 |                  238  |
 1950              ἤ     195
 ----                   -----
  434                    434
  390                    390
 ----                   -----
   44                     44
```

Οἱ ἀριθμοὶ 153, 238, 434 εἶναι οἱ μερικοὶ διαιρετέοι. Παρατηρῶ δέ, ὅτι ὁ δεύτερος ἐξ αὐτῶν λαμβάνεται, ἐὰν δεξιὰ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου 23 καταβιβάσω τὸ πρῶτον ἐκ τῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα ἀφῆκα, ἤτοι τὸ 8.

Σημείωσις. Πολλάκις συμβαίνει εἷς ἐκ τῶν μερικῶν διαιρετέων, (ὄχι βέβαια ὁ πρῶτος), νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου· τότε τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τοῦ πηλίκου εἶναι 0.

```
π. δ.  23914 | 47
       235   |----
       ----- | 508
         414 |
         376 |
        ---- 
          38
```

95. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ κανών:

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν δι' ἄλλου: 1ον) Χωρίζομεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ λάβωμεν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος, ὅταν διαιρεθῇ διὰ τοῦ διαιρέτου, νὰ δίδῃ πηλίκον μονοψήφιον. 2ον) Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου. 3ον) Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ ψηφίον τοῦτο καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν πρῶτον μερικὸν διαιρετέον. 4ον) Δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον ἀπὸ τὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα παρελείψαμεν, καὶ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προέκυψε, διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου. Εὑρίσκομεν δὲ οὕτω τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου. Ἐπ' αὐτοῦ ἐργαζόμεθα ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω, μέχρις ὅτου καταβιβάσωμεν ὅλα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου. 5ον) Ἐὰν μερικός τις διαιρετέος εἶναι μικρότερος

τοῦ διαιρέτου γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον καὶ καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου.

ε) **Ὅταν ὁ διαιρέτης τελειώνῃ εἰς μηδενικά.** Εἴδομεν, ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 2358 : 300 (εἰς τὴν γ´ περίπτωσιν), διῃρέσαμεν τὸν 23 : 3. Ὥστε εἰς αὐτὴν ἀφήσαμεν τὰ δύο μηδενικὰ τοῦ διαιρέτου. Ἀλλὰ συγχρόνως ἀφήσαμεν καὶ δύο ψηφία ἀπὸ τοῦ τέλους τοῦ διαιρετέου. Τώρα παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 23 : 3 εἶναι 2 ἑκατοντάδες. Ἐὰν δὲ εἰς αὐτὰς προσθέσωμεν καὶ τὰς 58 μονάδας, τὰς ὁποίας ἀφήσαμεν, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 2358 : 300 θὰ εἶναι 258. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 427581 : 15000 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 427 : 15, ἤτοι 28. Τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 427 : 15, τὸ ὁποῖον εἶναι 7 χιλιάδες, καὶ ἀπὸ τὰς 581 μονάδας, τὰς ὁποίας ἀφήσαμεν ἤτοι 7581.

Τὰς πράξεις αὐτὰς διατάσσομεν ὡς ἑξῆς :

23(58	3(00	427(581	15(000	180(000	4(000
21	7	30	28	16	45
258		127		20	
		120		20	
		7581		0	

96. Δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως.— Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον. Ἂν δὲ εὑρεθῇ ὁ διαιρετέος, ἡ διαίρεσις εἶναι πιθανόν, ὅτι ἔγινεν ἄνευ λάθους.

Σημείωσις. Τὸν πολλαπλασιασμὸν δοκιμάζομεν καὶ ὡς ἑξῆς : Διαιροῦμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν δι' ἑνὸς τούτων. Ἂν δὲ εὑρεθῇ πηλίκον ὁ ἄλλος ἀριθμὸς καὶ ὑπόλοιπον 0, ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος.

97. Διαίρεσις ἀπὸ μνήμης.— Ὑπάρχουν περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας ἡ διαίρεσις δύναται νὰ γίνῃ ἀπὸ μνήμης.

1. Διὰ νὰ διαιρέσω ἕνα ἀριθμὸν διὰ 5 ἢ 50 ἢ 500, διπλασιάζω τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ ἔπειτα διαιρῶ διὰ 10 ἢ 100 ἢ 1000. Οὕτως ἀντὶ νὰ διαιρέσω τὸν 3244 διὰ 5 ἢ 50 ἢ 500, διαιρῶ τὸν 6488 διὰ 10 ἢ 100 ἢ 1000.

2. Διὰ νὰ διαιρέσω ἕνα ἀριθμὸν διὰ 25, πολλαπλασιάζω αὐτὸν

ἐπὶ 4 καὶ ἔπειτα διαιρῶ διὰ 100. Οὕτως ἀντὶ νὰ διαιρέσω τὸν 1575 δι᾽ 25, διαιρῶ τὸν 6300 διὰ 100.

3. Διὰ νὰ διαιρέσω ἕνα ἀριθμὸν διὰ 4, διαιρῶ πρῶτον διὰ 2 καὶ ἔπειτα πάλιν διὰ 2· καί, ἐὰν ἔχω νὰ διαιρέσω δι᾽ 6, διαιρῶ διὰ 2 καὶ ἔπειτα διὰ 3. Οὕτως εἰς τὴν διαίρεσιν 724 : 4 διαιρῶ διὰ 2 καὶ εὑρίσκω 362 καὶ ἔπειτα διαιρῶ τὸ 362 διὰ 2.

Ἐπίσης εἰς τὴν διαίρεσιν 576 : 6 διαιρῶ διὰ 2 καὶ εὑρίσκω 288 καὶ ἔπειτα διαιρῶ τὸ 288 διὰ 3.

Σημείωσις. Ἡ διαίρεσις βοηθεῖ καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν ὡς φαίνεται ἀπὸ τὰς κάτωθι ἰσότητας:

$537 \times 5 = 5370 : 2$. $475 \times 25 = 47500 : 4$. $57 \times 125 = 57000 : 8$. Διατί;

Προβλήματα.

98. 1ον) **36 ὀκάδες ζάχαρη ἀξίζουν 684 δραχμάς. Πόσον ἀξίζει ἡ 1 ὀκᾶ;**

Θὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν τῆς 1 ὀκᾶς, ἐὰν μοιράσωμεν τὰς 684 δραχμὰς εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ ὀκάδες. Τὸ ἓν δὲ ἀπὸ αὐτὰ θὰ εἶναι ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς. Διαιροῦντες εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ζητουμένη ἀξία τῆς ὀκᾶς εἶναι 19 δραχμαί.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀξίαν πολλῶν μονάδων ἑνὸς πράγματος καὶ ζητοῦμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος τοῦ ἰδίου πράγματος, διαιροῦμεν τὴν ἀξίαν τῶν πολλῶν μονάδων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις μᾶς λέγει, πόσοι εἶναι αἱ μονάδες.

Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα λύεται, ὡς βλέπομεν διὰ μερισμοῦ (§ 81).

2ον) **Μία ὀκᾶ τυροῦ ἀξίζει 36 δραχμάς. Πόσας ὀκάδας ἀγοράζω μὲ 684 δραχμάς;**

Ἂν ἀπὸ τὰς 684 δραχμὰς δώσω 36 καὶ ἔπειτα δώσω ἄλλας 36 κ.ο.κ., θὰ ἴδω, ὅτι θὰ ἀγοράσω τόσας ὀκάδας, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 36 εἰς τὸν 684. Διαιρῶ καὶ εὑρίσκω 19. Ὥστε 19 ὀκάδας δύναμαι νὰ ἀγοράσω.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ κανών:

Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος ἑνὸς πράγματος ὡς καὶ τὴν τιμὴν πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων τοῦ ἰδίου πρά-

γματος, εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει πόσαι εἶναι αἱ μονάδες, ὅταν διαιρέσωμεν τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων διὰ τῆς τιμῆς τῆς μιᾶς.

Σημείωσις α΄. Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα λύεται, ὡς βλέπομεν, διὰ διαιρέσεως μετρήσεως (§ 82).

Σημείωσις β΄. Ὅταν ἀπὸ τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων εὕρω τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος, δύναμαι ἔπειτα νὰ εὕρω τὴν τιμὴν ὁσωνδήποτε ἄλλων μονάδων. Π. χ. ὅταν αἱ 30 ὀκάδες ζάχαρη ἀξίζουν 600 δραχμάς, ἡ 1 ὀκᾶ ἀξίζει 600 δραχ. : 30=20 δραχμὰς καὶ αἱ 25 ὀκάδες ἀξίζουν 20 δρχ.×25=500 δρχ., αἱ δὲ 18 ὀκ. ἀξίζουν 20 δρχ.×18=360 δρχ. κ.ο.κ.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

183) Ἓν ὕφασμα 36 πήχεων τὸ ἔκοψες εἰς 4 ἴσα τεμάχια. Ἀπὸ πόσους πήχεις ἀποτελεῖται τὸ καθὲν τεμάχιον; Τί πρᾶξιν ἔκαμες;

184) Ἓν ὕφασμα 36 πήχεων τὸ ἔκοψες εἰς τεμάχια, καθὲν τῶν ὁποίων εἶναι 4 πήχεων. Εἰς πόσα τεμάχια τὸ ἔκοψες; Τί πρᾶξιν ἔκαμες; Ἔχει καμμίαν διαφορὰν ἡ πρᾶξις αὐτὴ μὲ τὴν πρᾶξιν τοῦ προηγουμένου προβλήματος;

Ὁμὰς Α΄

Ἀπὸ μνήμης. 185) Οἱ μαθηταὶ τῶν δύο Γυμνασίων μιᾶς πόλεως, ἐπειδὴ θὰ λάβουν μέρος εἰς ἀθλητικοὺς ἀγῶνας, προπονοῦνται. Κατὰ τὴν προπόνησίν των εἰς τοὺς ἀγῶνας δρόμου ὁ ταχύτερος μαθητὴς τοῦ ἑνὸς Γυμνασίου ἔτρεξε τὰ 900 μέτρα εἰς 2 πρῶτα λεπτὰ τῆς ὥρας, ὁ δὲ τοῦ ἄλλου τὰ ἔτρεξε εἰς 3 πρῶτα λεπτά. Πόσα μέτρα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν καθένα μαθητὴν εἰς 1 πρῶτον λεπτόν;

186) Εἰς τοὺς ἀγῶνας δρόμου 1000 μέτρων μεταξὺ μαθητριῶν, ἡ νικήτρια τὰ ἔτρεξεν εἰς 4 πρῶτα λεπτά. Πόσα μέτρα ἔτρεξεν εἰς 1 πρῶτον λεπτόν;

187) Διὰ τὴν σωματικὴν ἀνάπτυξιν τῶν παιδιῶν, ἡ Κυβέρνησις ἱδρύει εἰς διαφόρους πόλεις κέντρα παιδικῆς χαρᾶς. Εἰς αὐτὰ παίζουν καὶ γυμνάζονται συγχρόνως παιδιὰ 6—12 ἐτῶν. Εἰς τὰς Ἀθήνας ὑπάρχουν 10 τοιαῦτα κέντρα. Εἶναι δὲ γραμμένα εἰς αὐτὰ 2650 ἄρρενα καὶ 2340 θήλεα. Πόσα ἄρρενα καὶ πόσα θήλεα ἀντιστοιχοῦν εἰς καθὲν κέντρον;

188) Εἰς τὰ 10 κέντρα παιδικῆς χαρᾶς παίζουν καθ' ἡμέραν

1800 ἕως 2500 παιδιά. Πόσα ἀντιστοιχοῦν εἰς καθὲν κέντρον, ἐὰν τὰ παιδιὰ εἶναι 1800, 2300, 2500 ;

189) Εἰς καθὲν ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω κέντρα ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν ἄλλων ὀργάνων καὶ 6 αἰῶραι (κούνιες), αἱ ὁποῖαι ἠγοράσθησαν ἀντὶ 9000 δραχμῶν. Πόσον ἠγοράσθη ἡ μία ;

190) Διὰ τὰ ὄργανα τῶν παιδικῶν αὐτῶν κέντρων ἐπλήρωσε τὸ Ὑπουργεῖον Διοικήσεως Πρωτευούσης 820000 δραχμάς. Πληρώνει δὲ εἰς μισθοὺς τὸν μῆνα εἰς τοὺς 10 γυμναστάς, οἱ ὁποῖοι τὰ διευθύνουν, 25000 δραχμὰς καὶ εἰς τοὺς 10 ἐπιστάτας 18000. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσε διὰ τὰ ὄργανα τοῦ καθενὸς κέντρου, πόσας δραχμὰς δίδει κατὰ μῆνα εἰς τὸν 1 γυμναστὴν καὶ πόσας εἰς τὸν 1 ἐπιστάτην ;

Ὁμὰς Β'

191) Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 9 διὰ νὰ λάβωμεν γινόμενον 63, 72, 81 ;

192) Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι 500 καὶ ὁ εἷς ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι ὁ 50. Ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος ;

193) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι τρεῖς φορὰς μικρότερος τοῦ 45, 75, 240, 360 ;

194) Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 180 διὰ νὰ λάβωμεν ἀριθμὸν κατὰ 6, 9, 30 φορὰς μικρότερόν του ;

195) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ 8πλάσιον δίδει τὸν 480 ;

196) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις

72 δρχ. : 8	120 πήχ. : 4
84 » : 7	120 » : 8
238 μέτρ. : 2	120 ὀκ. : 15
88 » : 8	96 » : 6
51 » : 3	240 » : 5.

197) Ὁμοίως αἱ :

36 : 18	75 : 15	540 : 9	2400 : 80
48 : 12	60 : 15	390 : 13	4500 : 90
72 : 12	68 : 17	720 : 12	2500 : 500
39 : 13	95 : 19	800 : 80	6300 : 700
55 : 11	84 : 14	7500 : 15	1000 : 125.

198) Ὁμοίως αἱ :

37 : 12	91 : 15	476 : 10
40 : 13	95 : 16	1593 : 100
62 : 12	50 : 17	1579 : 100
65 : 15	60 : 18	9895 : 1000
36 : 11	56 : 19	89765 : 1000.

199) Εἰς τὰς κάτωθι ἰσότητας τὰ ἐρωτηματικὰ νὰ ἀντικατασταθοῦν διὰ τῶν καταλλήλων ἀριθμῶν·

12 × ; = 60	; × 17 = 85
7 × ; = 77	; × 11 = 99
14 × ; = 70	; × 5 = 95
18 × ; = 72	; × 4 = 88.

200) Εἰς τὴν διαίρεσιν

```
131320 | 56
 193   |-----
  252  | 2345
   280 |
   000
```

Τὸ ψηφίον 2 τοῦ πηλίκου, ἀπὸ τὴν διαίρεσιν ποίου μέρους τοῦ διαιρετέου προέκυψεν ;

Τὸ ψηφίον 3 τοῦ πηλίκου διατί κατέχει τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων ;

201) Ἐξετέλεσα τὴν διαίρεσιν 988 : 34 καὶ εὗρον πηλίκον 28 καὶ ὑπόλοιπον 36. Τί λέγεις διὰ τὸ εὑρεθὲν ὑπόλοιπον ;

202) Ἐξετέλεσα τὴν διαίρεσιν 3847 : 125 καὶ εὗρον πηλίκον 24 καὶ ὑπόλοιπον 22. Τὴν ἐξετέλεσα ἀκριβῶς ;

Ὁ μ ὰ ς Δ΄

Γ ρ α π τ ῶ ς. 203) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις

49776 : 48	8152 : 1019
85258 : 94	14616 : 1624
14700 : 196	284355 : 16871
59556 : 709	8384628 : 15419
150880 : 736	9150000 : 375000.

204) Νὰ εὕρῃς τοὺς διαιρετέους τῶν κάτωθι διαιρέσεων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν

Διαιρετέον	Διαιρέτην	Πηλίκον	Ὑπόλοιπον
;	37	14	36
;	125	23	112
;	29	246	8
;	205	205	99.

205) Ἡ διαίρεσις 165 : 12 δίδει πηλίκον 13 καὶ ὑπόλοιπον 9. Πόσας μονάδας πρέπει νὰ ἀφαιρέσω ἀπὸ τὸν διαιρετέον 165, ὥστε ἡ διαφορὰ ποὺ θὰ προκύψῃ, ὅταν διαιρεθῇ διὰ 12, νὰ δώσῃ πηλίκον πάλιν 13, ἀλλ' ὑπόλοιπον 8, 3, 0 ;

206) Ἀφοῦ θὰ λάβῃς ὑπ' ὄψει τὴν ἀνωτέρω ἄσκησιν, νὰ εὕρῃς τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 168 : 12 χωρὶς νὰ τὴν ἐκτελέσῃς. Ὁμοίως νὰ εὕρῃς τὰ πηλίκα καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων :

171 : 12 176 : 12 180 : 12.

207) Νὰ εὕρῃς τοὺς διαιρέτας τῶν κάτωθι διαιρέσεων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν

Διαιρετέον	Διαιρέτην	Πηλίκον	Ὑπόλοιπον
573	;	16	13
1529	;	32	25
37149	;	297	24
83809	;	289	288.

208) α) Νὰ εὕρῃς τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων :

18 : 3, 36 : 3, 54 : 3, 90 : 3, 270 : 3.

β) Ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ διαιρετέος τελείας διαιρέσεως ἐπὶ 2, 3, 5, 15 κτλ. τί παθαίνει τὸ πηλίκον ;

209) α) Νὰ εὕρῃς τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων :

360 : 6, 180 : 6, 120 : 6, 36 : 6, 18 : 6.

β) Ἐὰν διαιρεθῇ ὁ διαιρετέος τελείας διαιρέσεως διὰ 2, 3, 10, 20 καὶ γενικῶς, ἐὰν διαιρεθῇ μὲ ἕνα ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος νὰ τὸν διαιρῇ, τί παθαίνει τὸ πηλίκον ;

210) α) Νὰ εὕρῃς τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων :

180 : 3, 180 : 6 180 : 12, 180 : 36, 180 : 60.

β) Ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ διαιρέτης τελείας διαιρέσεως ἐπὶ 2, 3, 12, 20 καὶ γενικῶς, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ μὲ ἕνα ἀριθμόν, ὥστε νὰ προκύψῃ διαίρεσις τελεία, τί παθαίνει τὸ πηλίκον ;

211) α) Νὰ εὕρῃς τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων :

360 : 60, 360 : 30, 360 : 20, 360 : 10, 360 : 2.

β) Ἐὰν διαιρεθῇ ὁ διαιρέτης τελείας διαιρέσεως διὰ 2, 3, 6, 30 καὶ γενικῶς, ἐὰν διαιρεθῇ μὲ ἕνα ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος νὰ τὸν διαιρῇ, τί παθαίνει τὸ πηλίκον;

212) Ἐκ τῆς διαιρέσεως 51 : 17 = 3 νὰ εὕρῃς ἀμέσως τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων:

102 : 34, 153 : 51, 204 : 68, 306 : 102, 459 : 153.

213) Ἐκ τῆς διαιρέσεως 5400 : 1800 νὰ εὕρῃς ἀμέσως τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων:

2700 : 900, 1800 : 600, 540 : 180, 216 : 72, 72 : 24

214) Νὰ εὕρῃς τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων

48 : 3 : 4	48 : 4 : 3	48 : 3×4
75 : 5 : 3	75 : 3 : 5	75 : 3×5
72 : 3 : 4 : 2	72 : 2 : 4 : 3	72 : 3×4×2
450 : 2 : 3 : 5	450 : 5 : 3 : 2	450 : 2×3×5.

215) Νὰ εὕρῃς κατὰ δύο τρόπους τὰ ἐξαγόμενα τῶν πράξεων:

420 : 2×3×7	720 : 3 : 4 : 5
1200 : 10×2×12	1056 : 2 : 3 : 11
3600 : 3×5×16	1617 : 3 : 7 : 11.

216) Νὰ εὕρῃς τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων

(35+50+15) : 5	35 : 5+50 : 5+15 : 5.
(72+44+80) : 4	72 : 4+44 : 4+80 : 4
(36+108+60) : 12	36 : 12+108 : 12+60 : 12.

217) Νὰ εὕρῃς τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων κατὰ δύο τρόπους

(51+96+201) : 3	(39+13+65+91) : 13
(63+105+154) : 7	(60+180+45+165) : 15.

218) Νὰ εὕρῃς τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων κατὰ τὸν εὐκολώτερον τρόπον

8×7×19×6 : 19	15×28×13×11 : 7
5×7×57×6 : 19	8×9×75×50 : 25.

219) Νὰ συγκρίνῃς τὰ γινόμενα:

α)	3×5×2×7	3×5×8×7
β)	5×12×7×11	5×4×7×11
γ)	9×5×7×13	9×35×13.

220) Νὰ εὕρῃς τὰ κάτωθι γινόμενα κατὰ τὸν εὐκολώτερον τρόπον

7×8	7×16	14×16	28×32
9×5	18× 5	18×15	36×30.

Ὁμὰς Ε΄

221) Νὰ κάμῃς δύο προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ νὰ εἶναι 160 καὶ 18 καί, ἐκ τῶν ὁποίων, τὸ μὲν ἓν νὰ λύεται διὰ διαιρέσεως μερισμοῦ, τὸ δὲ ἄλλο διὰ μετρήσεως.

222) 59 ἐργάται ἐμοιράσθησαν ἐξ ἴσου 22715 δραχμάς. Πόσας ἔλαβεν ὁ καθείς;

223) 22715 δραχμαὶ ἐμοιράσθησαν εἰς ἐργάτας καὶ ἔλαβεν ὁ καθεὶς 385 δραχμάς. Πόσοι ἦσαν οἱ ἐργάται;

224) Μία ἐργάτρια ἠγόρασε ραπτομηχανὴν ἀντὶ 7200 δρχ. Θὰ πληρώσῃ δὲ αὐτὰς εἰς 18 μηνιαίας δόσεις. Πόσων δραχμῶν εἶναι ἡ μία δόσις;

225) Ἄλλη ἐργάτρια ἠγόρασε ραπτομηχανὴν ἀντὶ 7840 δρχ., τὰς ὁποίας θὰ πληρώσῃ εἰς μηνιαίας δόσεις πρὸς 245 δρχ. ἑκάστην. Μετὰ πόσους μῆνας θὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος της;

226) Ἡ ἄνω ἐργάτρια εἰργάσθη μὲ τὴν μηχανήν της εἰς ἕνα μῆνα 150 ὥρας καὶ ἐκέρδισε 2700 δραχμάς. Πόσαι δραχμαὶ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἐργασίαν μιᾶς ὥρας;

227) Ἡ ἰδία ἐργάτρια ἀπὸ τὰς 2700 δρχ., τὰς ὁποίας ἐκέρδισεν ἐπλήρωσεν 700 δραχμὰς δι' ἐνοίκιον καὶ τὴν δόσιν τοῦ χρέους της ἐκ 245 δραχμῶν. Ἀφοῦ δὲ ἔπειτα κατέθεσεν εἰς τὴν Τράπεζαν 300 δραχμάς, ἐχρησιμοποίησε τὰς ὑπολοίπους διὰ τὴν διατροφὴν τοῦ μηνός. Πόσαι δραχμαὶ ἀντιστοιχοῦν εἰς διατροφὴν μιᾶς ἡμέρας;

228) Μία ὁμὰς ἐξ 8 ἐργατῶν ἐφύτευσεν εἰς ἕνα ἀγρὸν 23640 κλήματα. Εἰς κάθε δὲ στρέμμα ἐφύτευσαν 985 κλήματα. Πόσων στρεμμάτων ἦτο ὁ ἀγρὸς καὶ πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἡ ὁμὰς αὐτή, ἐὰν διὰ κάθε στρέμμα ἐπληρώθη 2000 δραχμάς; Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἐν ὅλῳ ὁ καθεὶς ἐργάτης;

229) 16 ἐργάται, οἱ ὁποῖοι εἶχον ἀναλάβει νὰ κτίσουν τοὺς τοίχους μιᾶς οἰκίας, ἐμοιράσθησαν τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον εἶχον συμφωνήσει, ἐξ ἴσου. Οἱ 14 ἀπὸ αὐτοὺς ἔλαβον ὁμοῦ 21000 δραχμάς. Πόσον ἦτο τὸ ποσὸν καὶ πόσα ἔλαβεν ὁ καθείς;

230) Ἐδόθησαν μὲ φροντίδα τοῦ Κράτους 7000000 δραχμαὶ εἰς 250 γέροντας φορτοεκφορτωτὰς (οἱ ὁποῖοι ἔπαυσαν νὰ ἐργάζωνται) ὡς ἀποζημίωσις. Πόση ἀποζημίωσις ἐδόθη εἰς κάθε φορτοεκφορτωτήν;

231) Ἐπίσης μὲ φροντίδα τοῦ Κράτους πληρώνονται 126000 δραχμαὶ τὸν μῆνα διὰ τὴν σύνταξιν 120 φορτοεκφορτωτῶν. Πόση σύνταξις ἀντιστοιχεῖ εἰς κάθε τοιοῦτον ἐργάτην δι' ἕνα μῆνα;

232) Ἐργάτης ἐργάζεται καθ' ἑκάστην, πλὴν τῶν Κυριακῶν, καὶ λαμβάνει ἡμερομίσθιον 49 δρχ. Ἐξοδεύει ὅμως πρὸς συντήρησίν του καθ' ἡμέραν 32 δρχ. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ οἰκονομήσῃ 1400 δραχμάς;

233) Ἐργάτης τις λαμβάνει δι' ἑκάστην ἡμέραν ἐργασίας 60 δρχ. Ἐξοδεύει δὲ πρὸς συντήρησίν του καθ' ἡμέραν 39 δρχ. Εἰς τὸ διάστημα ἑνὸς ἔτους τοῦ ἐπερίσσευσαν 2085 δρχ. Πόσας ἡμέρας εἰργάσθη καὶ πόσας ἔμεινεν ἄνεργος;

234) Εἰς τὴν Ἑλλάδα ὑπῆρχον ἄνεργοι τὴν 1ην Αὐγούστου 1936 128000 καὶ μετὰ 11 μῆνας, ἤτοι τὴν 1ην Ἰουλίου 1937, ὑπῆρχον 30265 ἄνεργοι. Ἐκ τῶν ἐργατῶν, οἱ ὁποῖοι εὗρον ἐργασίαν, πόσοι ἀντιστοιχοῦν εἰς 1 μῆνα;

Ὁμὰς ΣΤ'

235) Εἷς ἔμπορος ἠγόρασε 345 πήχεις ὑφάσματος ἀντὶ 43815 δραχμῶν. Πρὸς πόσας δραχμὰς θὰ ἀγοράσῃ 175, 280, 500 πήχεις;

236) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ὕφασμα ἀντὶ 2975 δρχ. καὶ τὸ μετεπώλησε πρὸς 3570 δραχ., κερδίσας 7 δρχ. τὸν πῆχυν. Ἐκ πόσων πήχεων ἀπετελεῖτο τὸ ἀγορασθὲν ὕφασμα;

237) Ἐπώλησέ τις 8 σάκκους ξυλανθράκων ἀντὶ 1440 δρχ. μὲ κέρδος ἐν ὅλῳ 120 δρχ. Πόσον ἠγόρασε τὸν σάκκον;

238) Ἠγόρασέ τις 67 ὀκάδας ἔλαιον καὶ 15 ὀκάδας βούτυρον ἀντὶ 4223 δρχ. Τὸ βούτυρον ἠγόρασε πρὸς 85 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πρὸς πόσας δραχμὰς τὴν μίαν ὀκᾶν ἠγόρασε τὸ ἔλαιον;

239) Εἷς ἔμπορος ζῴων ἐχρεώστει 26000 δρχ. Ἐξώφλησε δὲ τὸ χρέος του τοῦτο μὲ 7300 δρχ. εἰς μετρητὰ καὶ τὸ ὑπόλοιπον μὲ πρόβατα, τὰ ὁποῖα ἤξιζον 275 δρχ. τὸ ἕν. Πόσα πρόβατα ἔδωκε;

240) Ἠγόρασέ τις οἶνον πρὸς 9 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, διὰ τὸν ὁποῖον ἐπλήρωσε 12825 δρχ. καὶ τὸν ὁποῖον μετήγγισεν εἰς βαρέλια τῶν 95 ὀκ. ἕκαστον. Εἰς πόσα βαρέλια τὸν μετήγγισεν;

241) Ἠγόρασέ τις ἀντὶ 5349 δρχ. ὕφασμα τριῶν ποιοτήτων. Τῆς πρώτης ποιότητος ἦτο 19 πήχ. καὶ ἤξιζεν 87 δρχ. τὸν πῆχυν, τῆς δευτέρας ποιότητος ἦτο 28 πήχ. καὶ ἤξιζεν 78 δραχμάς, τῆς δὲ τρίτης ἦτο ὕφασμα 24 πήχεων. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τοῦ πήχεως τοῦ ὑφάσματος τῆς τρίτης ποιότητος;

Ὁμὰς Ζ΄

242) Ἐπὶ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 83 διὰ νὰ λάβωμεν γινόμενον 1411;

243) Ἐκ δύο παραγόντων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν γινόμενον 48118, ὁ εἷς εἶναι 491. Ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος;

244) Πόσας φορὰς δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 67450 τὸν 475;

245) Τί μᾶς λέγει ἡ ἰσότης $\Delta=\delta\times\pi+\upsilon$ καὶ τί μᾶς λέγει αὐτὴ μετὰ τῆς $(\Delta\times\alpha)=(\delta\times\alpha)\times\pi+\upsilon\times\alpha$;

246) Ὁμοίως τί μᾶς λέγει ἡ ἰσότης:

$$(\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta):\beta=\alpha\times\gamma\times\delta \text{ καὶ τί ἡ: }$$
$$(\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta):\varepsilon=\alpha\times\beta\times(\gamma:\varepsilon)\times\delta\,;$$

247) Τί ἐκφράζει ἡ ἰσότης $\alpha:\beta\times\gamma=\alpha:\beta:\gamma$;

248) Ὁμοίως τί ἐκφράζει ἡ ἰσότης:

$$(\alpha+\delta+\gamma):\delta=(\alpha:\delta)+(\beta:\delta)+(\gamma:\delta)\,;$$

Προβλήματα ἐπὶ τῶν 4 πράξεων.

Ὁμὰς Α΄

249) Εἰς τὴν Ἑλλάδα τὰ παντὸς εἴδους σχολεῖα δημόσια καὶ ἰδιωτικὰ εἶναι:

1. Τῆς δημοτικῆς ἐκπαιδεύσεως 8437 μὲ ἀριθμὸν μαθητῶν		1006350
2. Μέσης ἐκπαιδεύσεως 548	μὲ ἀριθ. μαθητῶν	79564
3. Ἐπαγγελματ. » 268	» »	27303
4. Ἀνωτάτης » 8	» » σπουδαστῶν	12258.

Νὰ εὑρεθῇ: α) τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν καὶ σπουδαστῶν, οἱ ὁποῖοι φοιτοῦν εἰς τὰ παντὸς εἴδους σχολεῖα, β) πόσοι μαθηταὶ μένουν μὲ τὴν μόρφωσιν μόνον τοῦ δημοτικοῦ σχολείου καὶ γ) ἐκ τῶν μαθητῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι εἰς τὴν μέσην καὶ ἐπαγγελματικὴν ἐκπαίδευσιν, πόσοι μένουν μὲ αὐτήν;

250) Τὸ Ὑπουργεῖον τῆς Παιδείας ἐδαπάνησε κατὰ τὸ ἔτος 1938—1939 :

1. Διὰ τὴν σχολικὴν ὑγιεινὴν	3030200	δρχ.
2. Διὰ τὰς ἱερατικὰς σχολὰς	3752600	»
3. Διὰ τὴν ἐπιθεώρησιν τῆς μέσης ἐκπαιδεύσεως	3873000	»
4. Διὰ τὰ διδασκαλεῖα μέσης ἐκπαιδεύσεως	2569800	»
5. Διὰ τὰ σχολεῖα μέσης ἐκπαιδεύσεως	216701000	»
6. Διὰ τὴν γυμναστικὴν	24401500	»
7. Διὰ τὴν ἐπιθεώρησιν δημοτ. ἐκπαιδεύσεως	11621000	»
8. Διὰ τὰ δημοτικὰ σχολεῖα	649299005	»
9. Διὰ τὰς μέσας ἐμπορικὰς σχολὰς	13799300	»
10. Διὰ τὰ σχολεῖα ἑτεροδόξων καὶ ἑτεροθρήσκων Κοινοτήτων	200000	»
11. Διὰ τὴν ἀνωτέραν ἐκπαίδευσιν	23650000	»
12. Διὰ γενικὰ ἔξοδα ἐκπαιδεύσεως	103501	»

Νὰ εὕρῃς: α) πόσον ἐδαπάνησε διὰ τὴν μέσην ἐκπαίδευσιν, β) πόσον διὰ τὴν δημοτικήν, γ) πόσον ἐδαπάνησε διὰ τὴν δημοτικήν, μέσην καὶ ἀνωτέραν ἐκπαίδευσιν καὶ δ) πόση εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δαπανῶν μεταξὺ δημοτικῆς καὶ μέσης ἐκπαιδεύσεως

251) Εἰς ἓν Γυμνάσιον εἶναι ἐγγεγραμμένοι 575 μαθηταί. Ἐξ αὐτῶν 128 εἶναι εἰς τὴν Αην καὶ Βαν τάξιν τοῦ νέου ἑξαταξίου Γυμνασίου καὶ 60 εἰς τὴν Γην τάξιν τοῦ αὐτοῦ 79 εἶναι εἰς τὴν δευτέραν τάξιν τοῦ παλαιοῦ ἑξαταξίου Γυμνασίου καὶ οἱ λοιποὶ εἰς τὰς ἄλλας τέσσαρας τάξεις αὐτοῦ. Καθεὶς τῶν μαθητῶν τῶν δύο μικροτέρων τάξεων τοῦ ν. ἑξαταξίου πληρώνει δι᾿ ἐγγραφὴν 510 δρχ. τὸ ἔτος καὶ καθεὶς τῶν μαθητῶν τῆς Γης τάξεως αὐτοῦ πληρώνει 675 δραχμὰς τὸ ἔτος. Ἐπίσης καθεὶς τῶν μαθητῶν τῆς μικροτέρας τάξεως τοῦ π. ἑξαταξίου πληρώνει διὰ τὸν ἴδιον σκοπὸν 675 δρχ. τὸ ἔτος. Καθεὶς δὲ τῶν μαθητῶν τῶν 4 ἀνωτέρων τάξεων τοῦ π. ἑξαταξίου πληρώνει τὸ ἔτος 1335 δραχμάς. Νὰ εὕρῃς πόσας δραχμὰς εἰσπράττει τὸ Κράτος τὸ ἔτος α) ἀπὸ τὰς τρεῖς τάξεις τοῦ ν. ἑξαταξίου, β) ἀπὸ τὴν δευτέραν τάξιν τοῦ π. ἑξαταξίου, γ) ἀπὸ τὰς ἀνωτέρας τάξεις αὐτοῦ καὶ δ) ἀπὸ ὅλον τὸ Γυμνάσιον.

252) Διὰ τὴν μόρφωσιν τῶν Ἑλληνοπαίδων, οἱ ὁποῖοι φοιτοῦν

εἰς τὰ δημόσια σχολεῖα, ἐδαπάνησε τὸ Κράτος κατὰ τὸ ἔτος 1937 899328034 δραχ. Ἐὰν δὲ ἐφοίτησαν εἰς τὰ σχολεῖα κατὰ τὸ ἔτος αὐτὸ 834250 μαθηταί, πόση δαπάνη ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕκαστον Ἑλληνόπαιδα; Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸ ἔτος 1938 ἐδαπάνησε τὸ Κράτος διὰ τὸν ἴδιον σκοπὸν 53672870 δραχμὰς ἐπὶ πλέον, πόση δαπάνη ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕκαστον Ἑλληνόπαιδα κατὰ τὸ ἔτος 1938;

253) Τὸ Ὑπουργεῖον τῆς Παιδείας ἐφρόντισε καὶ διὰ τὰ μαθητικὰ συσσίτια τῶν μαθητῶν. Εἰς τὴν περιφέρειαν τῶν Ἀθηνῶν κατὰ τὸν χειμῶνα τοῦ 1937 ἔλαβον μέρος εἰς τὰ συσσίτια αὐτὰ 5635 ἄποροι μαθηταί. Ἐδόθησαν δὲ εἰς αὐτοὺς κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο 450800 μερίδες φαγητοῦ. Ἀπὸ τὰς μερίδας αὐτὰς αἱ 54000 ἐδόθησαν ἐντελῶς δωρεάν, αἱ δὲ λοιπαὶ ἐδόθησαν πρὸς μίαν δραχμὴν ἡ μία. Τὰ ὑπόλοιπα ἔξοδα τῶν μερίδων κατέβαλε τὸ Κράτος, ὁ Δῆμος καὶ αἱ Κοινότητες τῶν Ἀθηνῶν. Καὶ τὸ μὲν Κράτος κατέβαλε 1000000 δρχ., ὁ δὲ Δῆμος καὶ αἱ Κοινότητες 857200 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ: α) πόσαι μερίδες φαγητοῦ ἐν ὅλῳ ἀντιστοιχοῦν εἰς κάθε μαθητὴν (καὶ ἑπομένως ἐπὶ πόσας ἡμέρας μετεῖχεν εἰς τὰ συσσίτια αὐτά, ἀφοῦ εἰς 1 ἡμέραν ἐλάμβανε 1 μερίδα φαγητοῦ), β) πόσαι δραχμαὶ εἰσεπράχθησαν ἀπὸ τὰς μερίδας, αἱ ὁποῖαι ἐπωλήθησαν, γ) πόσα ἦσαν ὅλα τὰ ἔξοδα δι' ὅλας τὰς μερίδας καὶ δ) πόσας δραχμὰς ἤξιζε ἡ μία μερίς

254) Νὰ ἀπαντήσῃς εἰς τὰς ἰδίας ἐρωτήσεις μὲ τὰς ἄνω, ὅταν γνωρίζῃς ὅτι: α) εἰς ὅλην τὴν Ἑλλάδα ἔλαβον μέρος εἰς τὰ μαθητικὰ συσσίτια 16129 ἄποροι μαθηταί, β) ἐδόθησαν εἰς αὐτοὺς ἐν ὅλῳ 1209675 μερίδες, ἀπὸ τὰς ὁποίας αἱ 362911 ἦσαν ἐντελῶς δωρεὰν καὶ γ) τὸ μὲν Κράτος κατέβαλε 4000000 δραχμάς, αἱ δὲ πόλεις 2411286 δραχ.

255) Ἡ σχολικὴ ἐπιτροπὴ ἑνὸς Γυμνασίου, τοῦ ὁποίου κάθε τάξις ἀριθμεῖ 50 μαθητάς, εἰσέπραξεν, εἰς διάστημα ἑνὸς ἔτους, ἀπὸ μηνιαίας εἰσφορὰς τῶν μαθητῶν τῶν δύο τάξεων τοῦ ν. ἑξαταξίου καὶ τῆς κατωτέρας τάξεως τοῦ π. ἑξαταξίου 10 δρχ. δι' ἕκαστον, καὶ τῶν 4 ἀνωτέρων τάξεων τοῦ π. ἑξαταξίου 15 δρχ. δι' ἕκαστον· ἀπὸ προαιρετικὰς εἰσφορὰς γονέων καὶ μαθητῶν Δρχ. 5000

ἀπὸ σχολικὰς ἑορτὰς κλπ.	»	11500
ἀπὸ εἰσφορὰν τοῦ Δήμου	»	5000
ἀπὸ ἔνσημον ἐκπαιδ. προνοίας	»	500
ἀπὸ χορήγησιν τοῦ Κράτους	»	15000

Ἐδαπάνησε δέ:

διὰ τὴν συντήρησιν καὶ ἐπισκευὴν τοῦ διδακτηρίου	*Δρχ.*	*7250*
διὰ τὴν θέρμανσιν, φωτισμόν, καθαριότητα	»	*10000*
διὰ τὴν προμήθειαν σχολικῶν ἐπίπλων	»	*2000*
διὰ τὴν προμήθειαν σχολικῶν ὀργάνων	»	*15000*
διὰ τὴν προμήθειαν σχολικῶν βιβλίων	»	*4000*
δι' ἵδρυσιν καὶ συντήρησιν σχολικοῦ κήπου	»	*2000*
διὰ τὴν γυμναστικὴν	»	*1500*
δι' ἐνίσχυσιν τοῦ μισθοῦ τοῦ ὑπηρετικοῦ προσωπικοῦ	»	*5000.*

Νὰ εὑρεθῇ τί εἰσέπραξεν ἡ ἐν λόγῳ σχολικὴ ἐπιτροπή, τί ἐδαπάνησε καὶ ποία εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἐσόδων καὶ δαπανῶν.

Νὰ καταρτισθῇ δηλαδὴ ὁ ἐτήσιος προϋπολογισμὸς τῆς σχολικῆς ταύτης ἐπιτροπῆς.

Ὁμὰς Β'

256) Αἱ ἁμαξιτοὶ ὁδοὶ εἰς τὴν Ἑλλάδα εἶναι·

	χιλιόμετρα
α) Ἐθνικαὶ (συντηρούμεναι ὑπὸ τοῦ Κράτους)	*8615*
β) Ἐπαρχιακαὶ (συντηρούμεναι ὑπὸ ἐπαρχιακῶν ταμείων)	*3254*
γ) Δημοτικαὶ καὶ Κοινοτικαὶ (συντηρούμεναι ὑπὸ τῶν Δήμων καὶ Κοινοτήτων).	*1025*

Εἰς πόσα χιλιόμετρα ἀνέρχεται τὸ σύνολον τῶν ἁμαξιτῶν ὁδῶν (δηλαδὴ τὸ ὁδικὸν δίκτυον) τῆς Ἑλλάδος;

257) Τὸ μῆκος τῶν σιδηροδρομικῶν γραμμῶν εἶναι:

α) Τοῦ Ἑλληνικοῦ Κράτους 1444 χιλιόμ., β) Πειραιῶς, Ἀθηνῶν καὶ ὅλης τῆς Πελοποννήσου 878 χιλιόμ., γ) Θεσσαλίας 258 χιλιόμετρα, δ) Βορειοδυτικῆς Ἑλλάδος (ἀπὸ Κρυονερίου εἰς Ἀγρίνιον) 78 χιλιόμετρα, ε) Μακεδονίας, Θρᾴκης 218 χιλιόμετρα, στ) Ἠλεκτρικοῦ σιδηροδρόμου Ἀθηνῶν—Πειραιῶς 10 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα εἶναι τὸ σιδηροδρομικὸν δίκτυον τῆς Ἑλλάδος;

258) Οἱ σιδηρόδρομοι τοῦ Ἑλληνικοῦ Κράτους εἰσέπραξαν κατὰ τὸ ἔτος 1937 ἀπὸ ἐπιβάτας καὶ ἐμπορεύματα 407 ἑκατομμύρια δραχμῶν. Ὅλα δὲ τὰ ἔξοδα τῆς κινήσεως αὐτῆς κατὰ τὸ ἴδιον ἔτος ἦσαν 382 ἑκατομμύρια δραχμῶν. Πόσα εἶναι τὰ κέρδη τῶν σιδηροδρόμων αὐτῶν κατὰ τὸ ἔτος 1937;

259) Εἰς τὸν ἠλεκτρικὸν σιδηρόδρομον Ἀθηνῶν — Πειραιῶς ἀνῆλθον ἢ κατῆλθον εἰς Ἀθήνας καὶ Πειραιᾶ 28300 ἐπιβάται εἰς μίαν ἡμέραν. Ἐξ αὐτῶν οἱ 9600 ἦσαν ἐπιβάται πρώτης θέσεως οἱ ὁποῖοι ἐπλήρωσαν εἰσιτήριον 5 δραχμὰς ὁ εἷς. Οἱ λοιποὶ ἦσαν ἐπιβάται τρίτης θέσεως. Τὸ εἰσιτήριον δὲ τῆς τρίτης θέσεως ἦτο 3 δραχμαί. Πόσας δραχμὰς εἰσέπραξεν ἡ ἑταιρεία κατὰ τὴν ἡμέραν αὐτὴν ἀπὸ τὰ εἰσιτήρια ὅλων τῶν ἐπιβατῶν ;

260) Οἱ σιδηρόδρομοι Θεσσαλίας εἰσέπραξαν εἰς 1 ἔτος ἀπὸ ἐπιβάτας καὶ ἐμπορεύματα 42600000 δραχμάς. Ἐδαπάνησαν δὲ κατὰ τὸ ἴδιον ἔτος διὰ τὴν κίνησίν των 41100000 δραχμάς. Πόσον κέρδος ἀντιστοιχεῖ εἰς 1 μῆνα ;

261) Ὁ ἐμπορικός μας στόλος κατὰ τὴν 1ην Ἰανουαρίου 1938 ἀπετελεῖτο ἀπὸ 712 ἱστιοφόρα, 518 ἀτμόπλοια φορτηγά, 77 ἐπιβατικὰ καὶ 20 διάφορα. Ἀπὸ πόσα ἐν ὅλῳ πλοῖα ἀπετελεῖτο οὗτος ;

262) Τὰ κέρδη τῶν ἑλληνικῶν φορτηγῶν ἀτμοπλοίων, τὰ ὁποῖα ἐργάζονται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν καὶ τὰ ὁποῖα κέρδη ἐστάλησαν εἰς τὴν Ἑλλάδα, ἦσαν κατὰ τὸ ἔτος 1937 2000000 λίραι Ἀγγλίας. Ἐὰν δὲ ἡ μία λίρα ἔχει 540 δρχ., εἰς πόσας δρχ. ἀνέρχονται τὰ κέρδη αὐτά ;

263) Τὰ αὐτοκίνητα εἰς ὅλην τὴν Ἑλλάδα ἦσαν κατὰ τὸ 1937, 8437 ἐπιβατικά, 5148 φορτηγὰ καὶ 3238 λεωφορεῖα. Πόσα ἦσαν ὅλα τὰ κυκλοφοροῦντα αὐτοκίνητα κατὰ τὸ ἔτος τοῦτο ; Καὶ πόση εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν ἐπιβατικῶν καὶ φορτηγῶν αὐτοκινήτων ἢ μεταξὺ ἐπιβατικῶν καὶ λεωφορείων ;

264) Εἷς ἀνέλαβε νὰ κάμῃ ἀποστολὰς σίτου εἰς διάφορα μέρη. Κάθε δὲ ἀποστολὴ ἀπετελεῖτο ἀπὸ 1000 ὀκάδας σίτου. Ἡ μία ἔγινε δι᾽ ἡμιόνων καὶ εἰς ἀπόστασιν 10 χιλιομέτρων. Ἐπλήρωσε δὲ διὰ τὴν μεταφορὰν 220 δραχμάς. Ἡ ἄλλη ἔγινε δι᾽ ἁμάξης καὶ εἰς ἀπόστασιν 25 χιλιομέτρων. Ἐπλήρωσε δὲ διὰ τὴν μεταφορὰν αὐτὴν 300 δρχ. Ἡ τρίτη ἔγινε δι᾽ αὐτοκινήτου καὶ εἰς ἀπόστασιν 85 χιλιομέτρων. Ἐπλήρωσε διὰ τὴν μεταφορὰν αὐτὴν 765 δραχμάς. Ἡ τετάρτη ἔγινε διὰ σιδηροδρόμου καὶ εἰς ἀπόστασιν 138 χιλιομέτρων. Ἐπλήρωσε δὲ δι᾽ αὐτὴν 276 δραχμάς. Ἡ πέμπτη ἔγινε δι᾽ ἀτμοπλοίου καὶ εἰς ἀπόστασιν 250 χιλιομέτρων. Ἐπλήρωσε δὲ δι᾽ αὐτὴν 250 δραχμάς. Νὰ εὕρῃς, πόσαι δραχμαὶ ἀντιστοιχοῦν διὰ τὴν μεταφορὰν τῶν 1000 ὀκάδων σίτου εἰς 1 χιλιόμετρον, ὅταν ἡ μεταφορὰ αὐτὴ γίνῃ δι᾽ ἡμιόνου, δι᾽ ἁμάξης καὶ γενικῶς δι᾽ ἑκάστου ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω μέσα τῆς συγκοινωνίας. Ποῖον λοιπὸν μέσον μεταφορᾶς εἶναι τὸ εὐθηνότερον καὶ ποῖον τὸ ἀκριβώτερον ;

265) Μία ἅμαξα τρέχει 10 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, εἷς σιδηρόδρομος τρέχει 30 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, ἓν αὐτοκίνητον 40 χιλιόμετρα τὴν ὥραν καὶ ἓν ἀτμόπλοιον 15 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Ἓν διάστημα 120 χιλιομέτρων, εἰς πόσας ὥρας θὰ τὸ διανύσῃ τις μὲ καθὲν ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω μέσα συγκοινωνίας ;

266) Τὰ ἀεροπλάνα 1) τῆς γραμμῆς Ἀθηνῶν — Θεσσαλονίκης κατὰ τὸ ἔτος 1937 ἔκαμον 545 πτήσεις καὶ διέτρεξαν 204920 χιλιόμετρα, 2) τῆς γραμμῆς Θεσσαλονίκης—Δράμας κατὰ τὸ ἴδιον ἔτος ἔκαμον 229 πτήσεις καὶ διέτρεξαν 32747 χιλιόμετρα καὶ 3) τῆς γραμμῆς Ἀθηνῶν — Ἰωαννίνων ἔκαμον πάλιν κατὰ τὸ ἴδιον ἔτος 480 πτήσεις καὶ διέτρεξαν 126240 χιλιόμετρα. Νὰ εὕρῃς α) πόσας ἐν ὅλῳ πτήσεις ἔκαμον τὰ ἀεροπλάνα καὶ τῶν τριῶν αὐτῶν γραμμῶν κατὰ τὸ διάστημα αὐτό, καὶ πόσα χιλιόμετρα διέτρεξαν ἐν ὅλῳ καὶ β) πόσα χιλιόμετρα ἀντιστοιχοῦν εἰς 1 πτῆσιν δι' ἑκάστην.

III ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ

99. Ὁ ἀριθμὸς 20 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 5. Διὰ τοῦτο ὁ 20 λέγεται **διαιρετὸς** διὰ τοῦ 5. Ὁ δὲ 5 λέγεται **διαιρέτης** τοῦ 20.

Διὰ τὸν ἴδιον λόγον ὁ 15 λέγεται διαιρετὸς διὰ τοῦ 5 καὶ ὁ 5 διαιρέτης τοῦ 15.

Ὥστε : **Εἷς ἀριθμὸς λέγεται διαιρετὸς δι' ἄλλου, ἐὰν διαιρῆται ἀκριβῶς δι' αὐτοῦ.**

Εἷς ἀριθμὸς λέγεται διαιρέτης ἄλλου, ἐὰν διαιρῇ τὸν ἄλλον ἀκριβῶς.

100. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $20=4\times5$ βλέπομεν, ὅτι ὁ 20 γίνεται ἀπὸ τὸν 4 διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ του ἐπὶ τὸν 5. Διὰ τοῦτο ὁ 20 λέγεται **πολλαπλάσιον** τοῦ 4, ὁ δὲ 4 λέγεται **παράγων** τοῦ 20.

Ὥστε : **Εἷς ἀριθμὸς λέγεται πολλαπλάσιον ἄλλου, ἐὰν γίνεται ἀπὸ αὐτὸν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ὁ δὲ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ του παράγει ἄλλον λέγεται παράγων αὐτοῦ.**

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι οἱ παράγοντες ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ οἱ διαιρέται αὐτοῦ εἶναι οἱ ἴδιοι ἀριθμοί.

101. Ὁ 5 διαιρεῖ τὸν $10(5+5)$, τὸν $15(5+5+5)$, τὸν $20(5+5+5+5)$ κτλ., διότι εἶναι πολλαπλάσια αὐτοῦ· τὸν $6(2+2+2)$ ἢ $(3+3)$

ὅμως ἢ τὸν 9(3+3+3), οἱ ὁποῖοι δὲν εἶναι πολλαπλάσια αὐτοῦ, δὲν τοὺς διαιρεῖ.

Ὥστε : **Εἷς ἀριθμὸς διαιρεῖ ἀκριβῶς τὰ πολλαπλάσιά του καὶ μόνον αὐτά.**

102. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπόν, εἶναι 15=5+5+5, καὶ ὁ 5 διαιρεῖ τὸν 15. Ἐπίσης ὁ 5 διαιρεῖ καὶ τὸν 35, διότι 35=5+5+5+5+5+5+5. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν τώρα, ὅτι ὁ 5 θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα 15+35=50. Διότι τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ 10 φορὰς τὸν 5, ἤτοι εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5.

Ὥστε : **Ἐὰν εἷς ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.**

103. Ἐπειδὴ ὁ 8 διαιρεῖ τὸν 16, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν 32(16+16) καὶ τὸν 48(16+16+16) κτλ. Εἶναι δέ, ὅπως βλέπομεν, καὶ ὁ 32 καὶ ὁ 48 πολλαπλάσια τοῦ 16.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι : **Ἐὰν εἷς ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλον, θὰ διαιρῇ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ.**

Π.χ. ὁ 5 διαιρεῖ τὴν 1 δεκάδα, ἄρα θὰ διαιρῇ καὶ τὰς 6 δεκάδας ὡς καὶ τὰς 15 δεκάδας κτλ.

Ὁμοίως ὁ 5 διαιρεῖ τὰ μέρη τοῦ ἀριθμοῦ 85, ἤτοι τὰς 8 δεκάδας καὶ τὰς 5 μονάδας. Ἄρα θὰ διαιρῇ καὶ ὅλον τὸν ἀριθμὸν 85, ὁ ὁποῖος εἶναι ἄθροισμα αὐτῶν.

104. Ἐὰν ἀπὸ τὸν 35 ἀφαιρέσωμεν τὸν 15, θὰ ἔχωμεν 35—15 =5+5+5+5. Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι ἡ διαφορὰ 35—15 διαιρεῖται διὰ 5.

Ὥστε : **Ἐὰν εἷς ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.**

ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ

Μία διευθύνει ἐργοστάσιον ἑτοίμων γυναικείων ἐνδυμάτων. Τὸ ἐργοστάσιον αὐτὸ ἔχει τεμάχια ὑφασμάτων διαφόρων ποιοτήτων καὶ μεγεθῶν. Κόπτονται δὲ τὰ τεμάχια αὐτὰ εἰς ἄλλα μικρότερα καὶ ἴσα τεμάχια. Π.χ. Ἓν τεμάχιον ὑφάσματος κόπτεται εἰς μικρότερα τεμάχια τῶν 4 πήχεων ἢ τῶν 5. Ἓν τεμάχιον δαντέλλας κόπτεται εἰς ἄλλα τῶν 2 πήχεων κτλ. Ἡ διευθύντρια λοιπόν, ἡ ὁποία ἑκάστην πρωίαν, δίδει εἰς τὰς ἐργάτιδας τεμάχια ὑφασμάτων πρὸς κοπὴν αὐτῶν πρέπει νὰ ἔχῃ ὑπ᾽ ὄψει της, ὅτι κατὰ τὴν κοπὴν καὶ ραφὴν πρέπει νὰ μὴ περισσεύουν τεμάχια, τὰ ὁποῖα νὰ μὴ δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ τὸν σκοπόν, διὰ τὸν ὁποῖον δίδονται. Π.χ. Ἓν τεμάχιον ὑφάσματος 125 πήχεων πρέπει νὰ χρησιμοποιηθῇ δι' ἐνδυμασίας, κάθε μία τῶν ὁποίων χρειάζεται 4 πήχεις; Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 125 διὰ 4, θὰ ἴδωμεν, ὅτι περισσεύει 1 πῆχυς. Ὥστε τὸ τεμάχιον αὐτὸ δὲν πρέπει νὰ δοθῇ διὰ τὸν σκοπὸν αὐτόν, πρέπει νὰ δοθῇ ἓν ἄλλο, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ 4. Ἀλλὰ ἡ διευθύντρια, ἡ ὁποία εἶναι ὑποχρεωμένη νὰ κάμῃ κάθε ἡμέραν τόσας διαιρέσεις, θὰ διηυκολύνετο πολὺ εἰς τὴν ἐργασίαν της, ἐὰν ἐγνώριζε πότε εἷς ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' ἄλλου, χωρὶς νὰ κάμῃ τὴν διαίρεσιν. Ἀλλ' εἶναι δυνατὸν νὰ γνωρίζῃ τοῦτο, ὡς φανερώνουν οἱ κάτωθι κανόνες.

105. Κανὼν διὰ 10, 100, 1000 κτλ.— Ὅταν ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τὴν περίπτωσιν α τῆς διαιρέσεως (ἐδ. 93), εὐκόλως συνάγομεν τὸν ἑπόμενον κανόνα.

Διὰ τοῦ 10 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν τελειώνῃ εἰς 0 διὰ τοῦ 100, ἐὰν τελειώνῃ εἰς δύο 0, διὰ τοῦ 1000, ἐὰν τελειώνῃ εἰς τρία 0 κ.ο.κ.

106. Κανὼν διὰ 2 ἢ 5. Εἷς ἔχει 234 δραχμὰς καὶ θέλει νὰ τὰς μετατρέψῃ ὅλας εἰς νομίσματα τῶν 2 δραχμῶν ἢ τῶν 5 δραχμῶν. Ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ τοῦτο; Θὰ γίνῃ τοῦτο, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς 234 διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ 2 ἢ 5. Ἀλλὰ διὰ νὰ ἴδωμεν, ἂν ὁ 234 διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ 2 ἢ 5, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ $2\times5=10$, ἕπεται ὅτι ὁ 2 καὶ ὁ 5 διαιροῦν ἀκριβῶς τὸν 10 ἢ τὴν μίαν δεκάδα. Ἄρα καθεὶς τούτων διαιρεῖ οἱονδήποτε ἀριθμὸν δεκάδων. Ἑπομένως καὶ τὰς 23 δεκάδας τοῦ 234. Ἂν λοιπὸν διαιροῦν ὁ 2 ἢ ὁ 5 καὶ τὰς 4 μονάδας αὐτοῦ, θὰ διαιροῦν καὶ ὅλον τὸν ἀριθμὸν 234. Ἀλλ' ὁ 4 διαιρεῖται μόνον διὰ τοῦ 2. Ἄρα ὁ 234 διαιρεῖται διὰ τοῦ 2 καὶ ὄχι διὰ τοῦ 5 καὶ ἑπομένως ὅλαι αἱ 234 δραχμαὶ μόνον εἰς δίδραχμα δύνανται νὰ μετατραποῦν. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν συνάγομεν ὅτι:

Διὰ 2 ἢ 5 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τελευταῖον ψηφίον διαιρεῖται διὰ 2 ἢ 5.

Π. χ. ὁ 1025 διαιρεῖται διὰ 5, διότι λήγει εἰς 5. Ὁ 128 διαιρεῖται διὰ 2, ὁ δὲ 1027 δὲν διαιρεῖται οὔτε διὰ 2, οὔτε διὰ 5.

Σημείωσις. Ὅσοι ἀριθμοὶ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 2 λέγονται ἄρτιοι (ζυγοί). Ὅσοι δὲ δὲν διαιροῦνται δι᾽ αὐτοῦ λέγονται περιττοὶ (μονοί).

107. Κανὼν διὰ 4 ἢ 25.—Εἷς ἔμπορος ἔχει 7468 ὀκάδας σταφίδα. Θέλει δὲ νὰ βάλῃ ὅλην τὴν σταφίδα αὐτὴν εἰς κιβώτια τῶν 4 ὀκάδων ἢ τῶν 25 ὀκάδων. Ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ τοῦτο;

Τοῦτο θὰ γίνῃ, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς 7468 διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ 4 ἢ 25. Ἀλλὰ διὰ νὰ ἴδωμεν, ἂν ὁ 7468 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 4 ἢ 25, σκεπτόμεθα, ὡς ἐσκέφθημεν εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα. Εὑρίσκομεν δέ, ὅτι πρέπει νὰ χωρίσωμεν τὰς ἑκατοντάδας του (διότι $4\times25=100$), ἐπειδὴ αὗται διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 4 καὶ 25, καὶ νὰ προσέξωμεν τὸν ἀριθμὸν 68, ποὺ κάμνουν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ 7468. Ἂν δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος δηλ. ὁ 68, διαιρῆται, ἀκριβῶς διὰ 4 ἢ 25, τότε καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς 7468 διαιρεῖται διὰ 4 καὶ 25. Ἤτοι τότε ὅλη ἡ σταφὶς αὐτὴ θὰ χωρέσῃ εἰς κιβώτια τῶν 4 ἢ 25 ὀκάδων.

Ὥστε: **Διὰ 4 ἢ 25 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ δύο τελευταῖα ψηφία κάμνουν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4 ἢ 25.** Π.χ. ὁ 2532 διαιρεῖται διὰ 4, διότι ὁ 32 διαιρεῖται διὰ 4. Ὁ 37675 διαιρεῖται διὰ 25, διότι ὁ 75 διαιρεῖται δι᾽ 25 καὶ ὁ 42837 δὲν διαιρεῖται οὔτε διὰ 4 οὔτε δι᾽ 25.

108. Κανὼν διὰ 9 ἢ 3.—Εἷς ἔμπορος θέλει νὰ βάλῃ 3546 ὀκάδας σύκων εἰς κιβώτια, καθὲν τῶν ὁποίων χωρεῖ 9 ὀκάδας. Δύναται νὰ κάμῃ τοῦτο δι᾽ ὅλας τὰς ὀκάδας αὐτάς;

Δύναται νὰ κάμῃ τοῦτο, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς 3546 διαιρῆται ἀκριβῶς δι᾽ 9. Καὶ πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 3546 ἀφαιρέσωμεν τὸν 9, ὅσας φορὰς εἶναι δυνατόν, καὶ μείνῃ ἔπειτα ὑπόλοιπον 0, θὰ εἶναι οὗτος διαιρετὸς δι᾽ 9, ἄλλως ὄχι. Ἀλλὰ διὰ νὰ κάμωμεν τοῦτο εὐκόλως παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ἀπὸ μίαν δεκάδα ἀφαιρέσωμεν τὸν 9, μένει ὑπόλοιπον μία μονὰς ἁπλῆ. Ἂν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ μίαν ἑκατοντάδα τὸν 9 ἕνδεκα φοράς, θὰ μείνῃ ὑπόλοιπον πάλιν μία μονὰς ἁπλῆ, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ μίαν χιλιάδα ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸν 9, ὅσας φορὰς δυνάμεθα (ἤτοι 111 φοράς), πάλιν θὰ μείνῃ ὑπόλοιπον μία μονὰς ἁπλῆ. Ἀφαιροῦμεν λοιπὸν τὸν 9 ὅσας φορὰς δυνάμεθα, χωριστὰ ἀπὸ τὰς 4 δεκάδας τοῦ ἀριθμοῦ 3546, χωριστὰ ἀπὸ τὰς ἑκατοντάδας του καὶ χωριστὰ ἀπὸ τὰς χιλιάδας του. Θὰ μείνῃ δὲ τότε ἀπὸ τὰς 4 δεκάδας του ὑπόλοιπον 4 μονάδες (ἁπλαῖ), ἀπὸ δὲ τὰς 5 ἑκατοντάδας του ὑπόλοιπον 5 μονάδες καὶ τέλος ἀπὸ τὰς 3 χιλιάδας του 3 μονάδες. Ὥστε τὰ ὑπόλοιπα τῶν ἀφαιρέσεων αὐτῶν καὶ αἱ 6 μονάδες τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ κάμνουν τὸν ἀριθμὸν $3+5+4+6$. Βλέπομεν δέ, ὅτι τὸ μέρος τοῦ ἀριθμοῦ, τὸ ὁποῖον ἀφῃρέσαμεν ἀπὸ τὸ 3546 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9. Ἀλλὰ τὸ μέρος τοῦτο διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 9. Ἂν λοιπὸν καὶ τὸ ἄθροισμα $3+5+4+6$ διαιρῆται διὰ τοῦ 9, τότε καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς 3546 διαιρεῖται διὰ τοῦ 9. Ἤτοι τότε ὅλαι αὐταὶ αἱ ὀκάδες τῶν σύκων θὰ χωρέσουν εἰς κιβώτια τῶν 9 ὀκάδων.

Ἂν ὁ ἔμπορος αὐτὸς ἤθελε νὰ βάλῃ ὅλα τὰ σῦκα εἰς κιβώτια τῶν 3 ὀκάδων, θὰ ἔπρεπε νὰ ἴδωμεν, ἂν ὁ ἀριθμὸς 3546 διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ 3. Ἀλλὰ διὰ νὰ ἴδωμεν τοῦτο, θὰ σκεφθῶμεν ὡς ἐσκέφθημεν καὶ διὰ τὸν 9, διότι εἶναι $9=3\times3$. Εὑρίσκομεν δέ, ὅτι ὁ 3546 ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓν μέρος, τὸ ὁποῖον εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3 καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα $3+5+4+6$. Ὥστε, ἂν τὸ ἄθροισμα $3+5+4+6$ διαιρῆται διὰ 3, καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς 3546 διαιρεῖται διὰ 3.

Ὥστε: **Δι' 9 ἢ 3 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι διαιρετὸν δι' 9 ἢ 3.**

Σημείωσις α'. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 3, διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ 6.

Π. χ. Ὁ ἀριθμὸς 5142 διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 3. Ἐπομένως διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ 6 ($5142:6=857$).

Σημείωσις β'. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 4, διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ 12.

Π. χ. Ὁ ἀριθμὸς 4236 διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 4. Ἐπομένως διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ 12 ($4236:12=353$).

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς Α'

267) Εἰς τί ψηφίον ἢ ψηφία πρέπει νὰ τελειώνῃ ἀριθμός τις, διὰ νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 2 ἢ 5, 4 ἢ 25;

268) Ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 298, 140, 453, 25700, 10425, 16000 εἶναι διαιρετοὶ μὲ καθένα ἐκ τῶν ἀριθμῶν 2, 5, 10, 100;

269) Ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1900, 608, 975, 1400, 18225, 19285, 10832 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 4 ἢ 25 ;

270) Ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 891, 652, 8273, 8604, 64270, 16326, 206007, 215783 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 3 ἢ 9 ;

271) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων (χωρὶς νὰ γίνουν αὗται) διὰ 2, 3, 4, 5, 9, 25, 6 καὶ 12 τῶν ἀριθμῶν 648, 2075, 4735, 7128, 8043, 65826, 53469, 40007, 162072.

272) Εἰς τὸν ἀριθμὸν 358167 νὰ ἀντικατασταθῇ τὸ ψηφίον 7 δι' ἄλλου οὕτως, ὥστε νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2 ἢ 4 ἢ 5 ἢ 10. Ποῖον δὲ ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου πρέπει νὰ ἀντικαταστήσωμεν δι' ἄλλου, ὥστε νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς δι' 9 ;

273) Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' 9 καὶ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ψηφίων αὐτοῦ, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς θὰ ἐξακολουθῇ νὰ εἶναι διαιρετὸς δι' 9 ;

Ὁμὰς Β'

274) Εἷς ἔμπορος θέλει νὰ τοποθετήσῃ 8317 λεμόνια, εἰς κιβώτια, καθὲν τῶν ὁποίων χωρεῖ 100. Εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ τοῦτο, χωρὶς νὰ τοῦ περισσεύσῃ κανέν ; Καὶ ἂν ὄχι, πόσα θὰ τοῦ περισσεύσουν ; Ὁμοίως νὰ ἀπαντήσῃς, ὅταν ὁ ἔμπορος αὐτὸς θέλῃ τοποθετήσῃ εἰς κιβώτια :

α)	15725	πορτοκάλλια		εἰς	κιβ.	καθὲν	τῶν	ὁποίων	χωρεῖ	25	ὀκάδας
β)	1653	ὀκάδες	μῆλα	»	»	»	»	»	»	10	»
γ)	874	»	σῦκα	»	»	»	»	»	»	5	»
δ)	1572	»	κυδώνια	»	»	»	»	»	»	4	»
ε)	2151	»	κάστανα	»	»	»	»	»	»	9	»
στ)	3734	»	σταφίδα	»	»	»	»	»	»	3	»

ΚΟΙΝΟΙ ΔΙΑΙΡΕΤΑΙ

109. Ἂς λάβωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 18 καὶ 24 καὶ ἂς ἐξετάσωμεν τοὺς διαιρέτας καθενὸς χωριστά. Καὶ τοῦ μὲν

18 εἶναι οἱ 1, 2, 3, 6, 9, 18· τοῦ δὲ

24 » οἱ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Ἀλλ' ἐκ τῶν διαιρετῶν αὐτῶν οἱ 1,2,3,6, εἶναι διαιρέται καὶ τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν. Εἶναι δηλαδὴ οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 6.

κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν 18 καὶ 24. Ἐκ τῶν κοινῶν δὲ αὐτῶν διαιρετῶν ὁ 6, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ μεγαλύτερος, λέγεται **μέγιστος κοινὸς διαιρέτης** τῶν ἀριθμῶν 18 καὶ 24.

Ὥστε: **Κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρεῖ ὅλους ἀκριβῶς. Μέγιστος δὲ κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν λέγεται ὁ μεγαλύτερος ἀπὸ ὅλους τοὺς κοινοὺς διαιρέτας, τοὺς ὁποίους ἔχουν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.**

Π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 16, 24, 64, ἔχουν κοινοὺς διαιρέτας τοὺς 1, 2, 4, 8 καὶ μ. κ. δ. τὸν 8.

Ἐὰν ἀριθμοί τινες δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν διαιρέτην πλὴν τοῦ 1, λέγονται **πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.** Τοιοῦτοι εἶναι οἱ 4, 5, 9, 12.

110. Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δοθέντων ἀριθμῶν. α΄) Δύο ἀριθμῶν. — 1ον) Π ρ ό β λ η μ α. **72 κυρίαι καὶ 18 κύριοι μιᾶς πόλεως πρόκειται ν' ἀποτελέσουν μεικτὰς ὁμάδας, αἱ ὁποῖαι θὰ σκορπισθοῦν εἰς τὴν πόλιν διὰ τὸν ἔρανον ὑπὲρ τοῦ Ἐρυθροῦ Σταυροῦ. Αἱ ὁμάδες αὐταὶ ἀπεφασίσθη νὰ ἔχουν ὅλαι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κυριῶν, ὡς καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κυρίων. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότεραι. Πόσαι τοιαῦται ὁμάδες εἶναι δυνατὸν νὰ γίνουν;**

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τόσα ἴσα μέρη θὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν κυριῶν, εἰς ὅσα ἴσα μέρη θὰ διαιρεθῇ καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν κυρίων. Ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἴσων αὐτῶν μερῶν θὰ εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 72 καὶ 18. Ἐπειδὴ δὲ τὰ μέρη αὐτὰ πρέπει νὰ εἶναι ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερα, ἕπεται, ὅτι ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν θὰ εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 72 καὶ 18. Εὑρίσκομεν δὲ τὸν μ. κ. δ. αὐτῶν ὡς ἑξῆς.

Διαιροῦμεν τὸν 72 διὰ τοῦ 18. Ἀλλ' ὁ 18 διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν 72. Ἐπειδὴ δὲ διαιρεῖ καὶ τὸν ἑαυτόν του, ἕπεται, ὅτι ὁ 18 εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Εἶναι ὅμως καὶ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν, διότι ἄλλος ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 18, ὁ ὁποῖος θὰ διαιρῇ τὸν 72, δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 18.

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Αἱ ἀνωτέρω ὁμάδες θὰ εἶναι λοιπὸν 18. Θὰ μετέχουν δὲ εἰς ἑκάστην 4 κυρίαι (διότι 72 : 18=4) καὶ εἷς κύριος (διότι 18 : 18=1).

2ον) Π ρ ό β λ η μ α. **Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 63 καὶ 135.**

Τώρα παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ διαίρεσις τοῦ 135 διὰ τοῦ 63 ἀφίνει ὑπόλοιπον 9. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ., διαιροῦμεν τὸν 63 διὰ τοῦ 9. Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαίρεσις αὐτὴ γίνεται ἀκριβῶς, ὁ 9 εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 135 καὶ 63.

111. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα δύο παραδείγματα εὐκόλως ἐννοοῦμεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν, διαιροῦμεν αὐτοὺς καὶ ἐὰν εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0, ὁ μικρότερος εἶναι ὁ ζητούμενος μ.κ.δ., ἄν δὲ ὄχι, διαιροῦμεν τὸν μικρότερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον αὐτὸ διὰ τοῦ νέου ὑπολοίπου κ.ο.κ., μέχρις ὅτου εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0. Ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας διαιρέσεως εἶναι ὁ ζητούμενος μ. κ. δ.

Ἡ πρᾶξις αὕτη διατάσσεται ἐν τῷ συνόλῳ της, ὡς φαίνεται εἰς τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα.

1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 52 καὶ 143.

	2	1	3
143	52	39	13
104	39	39	
39	13	0	

Μ.Κ.Δ.=13

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 145 καὶ 133.

	1	11	12
145	133	12	1
133	12	12	
	13		
12	1	0	

Μ.Κ.Δ.=1. Ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 145 καὶ 133 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

112. β′) Ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν. — Π ρ ό β λ η μ α. Τρία σχολεῖα μιᾶς πόλεως ἀνέλαβον τὴν ἀναδάσωσιν τῶν λόφων, οἱ ὁποῖοι εἶναι πέριξ αὐτῆς. Ἀπεφασίσθη δὲ νὰ γίνῃ αὕτη δι᾽ ὁμάδων μεικτῶν, εἰς ἑκάστην τῶν ὁποίων θὰ μετέχουν μαθηταὶ καὶ τῶν τριῶν σχολείων (διὰ νὰ ἔχουν ὅλα ἴσην εὐθύνην). Αἱ ὁμάδες αὐταὶ θὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μαθητῶν ἐκ τοῦ ἑνὸς σχολείου, ὡς καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μαθητῶν ἐκ τοῦ ἄλλου. Ὁμοίως καὶ ἐκ τοῦ τρίτου σχολείου. Πρέπει δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὁμάδων νὰ εἶναι ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλύτερος. Πόσαι θὰ εἶναι αἱ ὁμάδες αὐταί, ὅταν οἱ μαθηταὶ τοῦ ἑνὸς σχολείου εἶναι 184 οἱ μαθηταὶ τοῦ ἄλλου εἶναι 232 καὶ οἱ τοῦ τρίτου 280;

Ἐὰν σκεφθῶμεν, ὅπως καὶ εἰς τὸ πρόβλημα τῆς παραγράφου 110, θὰ εὕρωμεν ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ὁμάδων εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 184, 232 καὶ 280. Εὑρίσκεται δὲ οὗτος κατὰ τὸν κάτωθι κανόνα.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. πολλῶν ἀριθμῶν γράφομεν αὐτοὺς εἰς μίαν σειρὰν καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ τοῦ μικροτέρου ὅλους τοὺς ἄλλους καὶ γράφομεν ὑποκάτω ἑκάστου τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεώς του. Ἂν ὅλα τὰ ὑπόλοιπα εἶναι 0, ὁ μικρότερος τῶν δοθέντων εἶναι ὁ μ. κ. δ., εἰ δὲ μή, κάμνομεν τὰ αὐτὰ καὶ εἰς τὴν νέαν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω, μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἀριθμόν, ὅστις νὰ διαιρῇ ἀκριβῶς ὅλους τοὺς ἄλλους τῆς σειρᾶς του. Ὁ διαιρέτης οὗτος εἶναι ὁ ζητούμενος μ. κ. δ.

Κατὰ τὸν κανόνα λοιπὸν τοῦτον ἔχομεν :

184	232	280	(διὰ τοῦ 184)
184	48	96	(διὰ τοῦ 48)
40	48	0	(διὰ τοῦ 40)
40	8	0	(διὰ τοῦ 8)
0	8	0	

Ἄρα μ.κ.δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι ὁ 8.

Ὥστε αἱ ὁμάδες θὰ εἶναι 8 Θὰ περιλαμβάνῃ δὲ ἑκάστη 23 μαθητὰς τοῦ πρώτου σχολείου (184 : 8=23), 29 τοῦ δευτέρου (232 : 8=29) καὶ 35 τοῦ τρίτου (280 : 8=35).

Σημείωσις. Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα οἱ ἀριθμοὶ γράφονται :

184	232	280
23×8	29×8	35×8

Τὰ πηλίκα δὲ τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ τοῦ μ.κ.δ. εἶναι 23, 29, 35. Ἐπειδὴ δὲ ὁ μέγιστος κοινὸς παράγων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι ὁ 8, εὐκόλως συνάγεται, ὅτι τὰ εὑρεθέντα πηλίκα εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα.

Ὥστε: **Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀριθμοὺς διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν, τὰ προκύπτοντα πηλίκα εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.**

Ἀσκήσεις.

275) Νὰ εὑρεθοῦν ὅλοι οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν;

α)	24	8	γ)	15	28		ε)	51	27	15
β)	12	36	δ)	21	42	85	στ)	30	40	27.

Ἀπὸ μνήμης. 276) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν:

α)	4	8	γ)	12	36	ε)	5	7	ζ)	4	6
β)	24	8	δ)	21	42	στ)	6	13	η)	10	15.

277) Ὁμοίως τῶν:

α)	2	4	8	δ)	25	75	100	ζ)	4	6	8
β)	3	9	12	ε)	2	3	5	η)	12	16	24
γ)	11	33	55	στ)	5	9	10	θ)	9	18	27.

Γραπτῶς 278) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν:

α)	752	256	ε)	768	256
β)	180	156	στ)	648	75
γ)	252	588	ζ)	1591	1247
δ)	1881	475	η)	17171	4906.

279) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν:

α)	87	348	783	
β)	144	180	396	
γ)	310	290	570	150
δ)	825	2570	1375	2475
ε)	4200	8100	900	1500

ΚΟΙΝΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ

113. Ἔχομεν τοὺς ἀριθμοὺς 4, 6.

Ἂς ἴδωμεν μερικὰ πολλαπλάσια αὐτῶν.

Τοῦ 4 εἶναι $4\times2=8$, $4\times3=12$, 16, 20, 24....

Τοῦ 6 εἶναι $6\times2=12$, $6\times3=18$, 24, 30, 36....

Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ 12 εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 4 καὶ τοῦ 6 καὶ ἑπομένως διαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ διὰ τοῦ 4 καὶ διὰ τοῦ 6. Τὴν αὐτὴν παρατήρησιν κάμνομεν καὶ διὰ τὸ 24. Τὰ πολλαπλάσια ταῦτα 12 καὶ 24 τὰ λέγομεν **κοινὰ πολλαπλάσια** τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 6.

Ὥστε: **Εἷς ἀριθμὸς λέγεται κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, ὅταν διαιρῆται ἀκριβῶς μὲ καθένα ἐξ αὐτῶν.**

Οὕτω κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 8 εἶναι ὁ ἀριθμὸς $3 \times 5 \times 8 = 120$. Ἀλλ' ἀφοῦ εἶναι ὁ 120, εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι καὶ ὁ $120 \times 2 = 240$ καὶ ὁ $120 \times 3 = 360$ κ.ο.κ. Ὥστε κοινὰ πολλαπλάσια δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρα, τὸ δὲ μικρότερον ἐξ αὐτῶν λέγεται **ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.** Οὕτω τὸ ἑ.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 5 (πρώτων πρὸς ἀλλήλους) εἶναι τὸ $3 \times 5 = 15$ καὶ τῶν 4 καὶ 7 εἶναι τὸ $4 \times 7 = 28$ καὶ τῶν 4 καὶ 6 εἶναι τὸ 12.

114. Εὕρεσις τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου δοθέντων ἀριθμῶν.—1) **Ἔχω ἕνα ἀριθμὸν τετραδίων. Ἐὰν μοιράσω τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν ἐξ ἴσου εἰς 18 μαθητὰς δὲν θὰ περισσεύσῃ κανὲν τετράδιον. Ἐπίσης δὲν θὰ περισσεύσῃ κανὲν καὶ ὅταν τὸ μοιράσω ἐξ σου εἰς 72 μαθητάς. Εἶναι δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν τετραδίων, τὰ ὁποῖα ἔχω καὶ ὁ ὁποῖος δύναται νὰ μοιρασθῇ κατὰ τὸν τρόπον αὐτόν, ὁ μικρότερος. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;**

Ἀφοῦ ὁ ἀριθμὸς τῶν τετραδίων δύναται νὰ μοιρασθῇ ἐξ ἴσου εἰς τοὺς 18 μαθητάς, ἕπεται ὅτι διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 18. Εἶναι ἑπομένως πολλαπλάσιον τοῦ 18. Διὰ τὸν ἴδιον λόγον εἶναι καὶ πολλαπλάσιον τοῦ 72. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 72 καὶ 18 καὶ μάλιστα τὸ ἑ.κ.π. αὐτῶν, ἀφοῦ εἶναι ὁ μικρότερος.

Τώρα διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἑ.κ.π. αὐτῶν διαιροῦμεν τὸν 72 διὰ τοῦ 18. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 72 **διαιρεῖται ἀκριβῶς** διὰ τοῦ 18, ὁ 72 εἶναι τὸ ζητούμενον ἑ.κ.π.

2) Τώρα ὑποθέτομεν, ὅτι **ὁ ἀριθμὸς τῶν τετραδίων μοιράζεται ἐξ ἴσου εἰς 54 μαθητάς, ὡς καὶ εἰς 135 καὶ εἰς 270. Εἶναι δὲ ἐπίσης ὁ μικρότερος ἐκ τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι δύνανται νὰ μοιρασθοῦν κατὰ τὸν τρόπον αὐτόν.** Ἀλλὰ τότε, θὰ εἶναι

τὸ ἐ.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 54, 135 καὶ 270. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τοῦτο διαιροῦμεν τὸν 270 διὰ τοῦ 54 καὶ διὰ τοῦ 135. Ἐπειδὴ δὲ διαιρεῖται ἀκριβῶς ὑπὸ τούτων, ὁ 270 εἶναι τὸ ἐ.κ.π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

3) **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 21 καὶ 35.** Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ ὁ μεγαλύτερος 35 δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 21. Διὰ τοῦτο διαιροῦμεν τὸ διπλάσιον τοῦ 35 διὰ τοῦ 21. Ἐπειδὴ δὲ καὶ τοῦτο δὲν διαιρεῖται, διαιροῦμεν τὸ τριπλάσιον τοῦ 35. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 105 διαιρεῖται διὰ τοῦ 21 καὶ εἶναι τὸ μικρότερον πολλαπλάσιον τοῦ 35, τὸ ὁποῖον διαιρεῖται διὰ τοῦ 21, ὁ 105 εἶναι τὸ ἐ.κ.π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

4) **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 12, 36, 20, 45.** Ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα. Διαιροῦμεν δηλαδὴ τὸν μεγαλύτερον τῶν δοθέντων, ἤτοι τὸν 45, μὲ ἕκαστον τῶν ἄλλων, καὶ ἐπειδὴ δὲν διαιρεῖται, διαιροῦμεν μὲ αὐτοὺς τὸν 90, κατόπιν τὸν 135 καὶ ἔπειτα τὸν 180. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 180 διαιρεῖται μὲ ἕκαστον τῶν ἄλλων καὶ εἶναι τὸ μικρότερον πολλαπλάσιον τοῦ 45, τὸ ὁποῖον διαιρεῖται μὲ αὐτούς, ὁ 180 εἶναι τὸ ἐ.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 12, 36, 20, 45.

115. Τὸ ἐ.κ.π. δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται καὶ ὡς ἑξῆς: Ἤτοι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ.κ.π. π.χ. τῶν ἀριθμῶν 21 καὶ 35 τοῦ τρίτου παραδείγματος, εὑρίσκομεν τὸν μ.κ.δ. αὐτῶν, ὅστις εἶναι ὁ 7, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἄλλου διὰ τοῦ εὑρεθέντος μ.κ.δ.

Οὕτως ἔχομεν $35:7=5$ καὶ ἐ.κ.π. $21\times5=105$.

Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι περισσότεροι ἀπὸ δύο, ὅπως οἱ ἀριθμοὶ 12, 18 καὶ 40, εὑρίσκομεν τὸ ἐ.κ.π. τῶν δύο ἐξ αὐτῶν π.χ. τῶν 12 καὶ 18 καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι 36. Κατόπιν εὑρίσκομεν τὸ ἐ.κ.π. τοῦ 36 καὶ τοῦ 40. Εὑρίσκομεν δὲ 360. Ὥστε τὸ ἐ.κ.π. τῶν τριῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι ὁ 360.

Ἀσκήσεις.

280. Νὰ εὑρεθοῦν μερικὰ κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν:

α)	*3*	*5*	*δ)*	*2*	*5*	*7*
β)	*8*	*24*	*ε)*	*20*	*30*	*12*
γ)	*16*	*12*	*στ)*	*19*	*30*	*45.*

Ἀ π ὸ μ ν ή μ η ς. 281) *Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ.κ.π. τῶν ἀριθμῶν :*

α)	21	63	στ)	14	21	
β)	17	68	ζ)	15	21	
γ)	130	26	η)	26	39	
δ)	7	9	θ)	20	40	80
ε)	11	6	ι)	15	45	90

Γ ρ α π τ ῶ ς. 282) *Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ.κ.π. τῶν ἀριθμῶν :*

α)	42	63	ε)	20	30	12	
β)	75	180	στ	18	30	45	
γ)	60	225	ζ)	24	30	60	40
δ)	72	120	η)	85	56	24	36

IV ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

116. Ἤδη θὰ ἐξετάσωμεν τοὺς διαιρέτας τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν μονάδα.

Διαιρέται τοῦ 1 εἶναι ὁ 1
» » 2 » οἱ 1, 2
» » 3 » » 1, 3
» » 4 » » 1, 2, 4
» » 5 » » 1, 5
» » 6 » » 1, 2, 3, 6
» » 7 » » 1, 7
» » 8 » » 1, 2, 4, 8
» » 9 » » 1, 3, 9
» » 10 » » 1, 2, 5, 10 κ.ο.κ.

Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι μερικοὶ ἀπὸ τοὺς ἄνω ἀριθμούς, ὅπως π.χ. οἱ 2, 3, 5, 7, ἔχουν διαιρέτας μόνον τὸν ἑαυτόν τους καὶ τὴν μονάδα, ἐνῷ οἱ 4, 6, 8 κτλ. ἔχουν, ἐκτὸς τῆς μονάδος καὶ τοῦ ἑαυτοῦ των, καὶ ἄλλους διαιρέτας. Ἐκ τῶν ἀριθμῶν ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν δύο καὶ μόνον διαιρέτας, λέγονται **πρῶτοι**, ἐνῷ οἱ ἄλλοι λέγονται **σύνθετοι**.

Ὥστε : **Πρῶτος ἀριθμὸς λέγεται ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος δὲν ἔχει ἄλλους διαιρέτας, παρὰ μόνον τὸν ἑαυτόν του καὶ τὴν μονάδα.**

Π.χ. πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι καὶ οἱ 13, 17, 19 κτλ.

Σύνθετος ἀριθμὸς λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι πρῶτος.

Π.χ. σύνθετοι ἀριθμοὶ εἶναι ὁ 27, ὁ 51 κτλ.

Πρῶτοι ἀριθμοὶ ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 100 εἶναι οἱ ἑξῆς: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

117. Ἀνάλυσις συνθέτου ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων.—Λαμβάνομεν τὸν σύνθετον ἀριθμὸν 6. Οὗτος, παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι γινόμενον τῶν πρώτων ἀριθμῶν 2 καὶ 3. Ἤτοι $6=2\times3$.

Διὰ τὸν 24 παρατηροῦμεν, ὅτι

$$\begin{aligned}24&=2\times12\\&=2\times2\times6\\&=2\times2\times2\times3=2^3\times3.\end{aligned}$$

Διὰ δὲ τὸν 84 ἔχομεν

$$\begin{aligned}84&=2\times42\\&=2\times2\times21\\&=2\times2\times3\times7=2^2\times3\times7 \text{ κ.ο.κ.}\end{aligned}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι: **Πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων.**

118. Τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα μᾶς δίδουν καὶ τὴν μέθοδον, μὲ τὴν ὁποίαν ἐκτελοῦμεν συνήθως τὴν ἀνάλυσιν τῶν συνθέτων ἀριθμῶν. Κατ' αὐτὴν τοὺς διαιρέτας λαμβάνομεν κατὰ τὴν φυσικὴν σειρὰν ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸν 2. Δοκιμάζομεν δὲ ἕκαστον διαιρέτην ἐπανειλημμένως, μέχρις ὅτου παύσῃ νὰ εἶναι διαιρέτης.

Ἡ πρᾶξις αὕτη συνήθως διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r|l}84&2\\42&2\\21&3\\7&7\\1&\end{array}\quad 84=2^2\times3\times7 \qquad\qquad \begin{array}{r|l}630&2\\315&3\\105&3\\35&5\\7&7\\1&\end{array}\quad 630=2\times3^2\times5\times7$$

Πολλάκις ἡ ἀνάλυσις συντομεύεται, ὡς φαίνεται ἀπὸ τὰ κάτωθι παραδείγματα

$$10 = 2 \times 5$$
$$100 = 10 \times 10 = 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$$
$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 2^3 \times 5^3$$
$$10000 \quad - \quad = 2^4 \times 5^4$$
$$4000 = 4 \times 1000 = (2 \times 2) \times 2^3 \times 5^3 = 2^5 \times 5^3 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

119. Τὸ ἐ.κ.π. ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ τὸ εὕρωμεν καὶ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. Ἄς ὑποτεθῇ, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 2, 18, 12, 9. Τότε γράφομεν αὐτοὺς ὡς ἑξῆς:

2	18	12	9	2
1	9	6	9	2
1	9	3	9	3
1	3	1	3	3
1	1	1	1	

Ε.Κ.Π. $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$

Δηλαδὴ γράφομεν αὐτοὺς εἰς μίαν σειράν. Κατόπιν παρατηροῦμεν, ὅτι ἀπὸ αὐτοὺς οἱ 2, 18 καὶ 12 ἔχουν κοινὸν διαιρέτην τὸν 2. Διαιροῦμεν λοιπὸν αὐτοὺς διὰ τοῦ 2 καὶ τὰ πηλίκα 1, 9, 6 γράφομεν κάτωθεν τῶν ἀντιστοίχων διαιρετέων. Εἰς τὴν αὐτὴν δὲ σειρὰν καταβιβάζομεν καὶ τὸν 9. Εἰς τὴν νέαν σειρὰν κάμνομεν τὸ ἴδιον καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὸν ἴδιον τρόπον, μέχρις ὅτου εὕρωμεν σειράν, ἡ ὁποία νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ μονάδας. Τὸ γινόμενον τῶν διαιρετῶν 2, 2, 3, 3, διὰ τῶν ὁποίων διῃρέσαμεν, εἶναι τὸ ζητούμενον ἐ.κ.π.

Ἀσκήσεις.

Ἀπὸ μνήμης. 283) *Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 8, 16, 18, 27, 36, 45, 66, 50, 75, 60, 80.*

Γραπτῶς. 284) *Νὰ ἀναλυθῇ ἕκαστος τῶν κάτωθι ἀριθμῶν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων 120, 216, 238, 384, 482, 3750, 2205, 1323, 4176, 14400.*

285) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ.κ.π., κατὰ τὸν τρόπον τῆς παραγράφου 119

α)	*5*	*9*	*15*	*γ)*	*8*	*14*	*21*	*24*
β)	*4*	*21*	*28*	*δ)*	*15*	*30*	*63*	*45.*

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ι. ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

120. Εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα (§ 87), ὅτι, ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, ἡ διαίρεσις δὲν γίνεται. Ἤτοι ἡ διαίρεσις π.χ. 1 μῆλον : 4 εἶναι ἀδύνατος. Ἀλλ᾽ ἂν μᾶς δώσουν ἓν μῆλον καὶ μᾶς εἴπουν νὰ τὸ μοιράσωμεν ἐξ ἴσου εἰς 4 παιδία, θὰ κόψωμεν τὸ μῆλον εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ ἓν ἀπὸ αὐτὰ τὰ μέρη θὰ εἶναι τὸ μερίδιον τοῦ καθενός.

Ἐπίσης λέγομεν, ὅτι ἡ διαίρεσις 3 μῆλα : 4 εἶναι ἀδύνατος. Ἀλλ᾽ εἰς τὴν πραγματικότητα ἠμποροῦμεν νὰ τὴν κάμωμεν. Διότι θὰ μοιράσωμεν πρῶτον τὸ ἓν μῆλον ἐξ ἴσου εἰς 4 παιδία, ἔπειτα θὰ μοιράσωμεν ὁμοίως τὸ ἄλλο καὶ τέλος τὸ τρίτον μῆλον. Ὥστε καθὲν ἀπὸ τὰ 4 παιδία θὰ λάβῃ ἓν μέρος ἀπὸ κάθε μῆλον, δηλαδὴ τρία μέρη ἐν ὅλῳ ἤ, ὅπερ εἶναι τὸ ἴδιον, τρία μέρη ἀπὸ τὰ τέσσαρα, εἰς τὰ ὁποῖα θὰ κόψωμεν τὸ ἓν μῆλον.

Ἐξ ἄλλου λέγομεν, ὅτι ἡ διαίρεσις π.χ. 9 μῆλα : 4 εἶναι ἀτελής. Ἀλλ᾽ εἰς τὴν πραγματικότητα θὰ δώσωμεν εἰς καθὲν παιδίον ἀπὸ 2 ὁλόκληρα μῆλα καὶ ἀπὸ ἓν μέρος ἀπὸ τὰ τέσσαρα ἴσα μέρη ποὺ θὰ κόψωμεν τὸ ἓν μῆλον ποὺ θὰ περισσεύσῃ, ἤ, ἂν μοιράσωμεν τὰ 9 μῆλα, ὅπως καὶ τὰ τρία τοῦ προηγουμένου παραδείγματος, εἰς τὸ καθὲν παιδίον θὰ δώσωμεν 9 μέρη ἴσα πρὸ τὸ ἓν μέρος τοῦ μήλου.

121. Ἀπὸ τὰ παραδείγματα λοιπὸν αὐτὰ ἐννοοῦμεν, ὅτι τὸν μερισμὸν πραγμάτων δυνάμεθα νὰ τὸν κάμωμεν πάντοτε καὶ χωρὶς νὰ μᾶς περισσεύῃ τίποτε. Ἂν δὲ λέγωμεν, ὅτι ὁ μερισμὸς 1 μῆλον : 4 ἢ ὁ 3 μῆλα : 4 εἶναι ἀδύνατος ἢ ὁ 9 μῆλα : 4 εἶναι ἀτελής, τὸ λέγομεν **διότι δὲν ἔχομεν ἀριθμούς, μὲ τοὺς ὁποίους νὰ παριστάνωμεν τὸ μερίδιον ἑνὸς μερισμοῦ εἰς κάθε περίστασιν.**

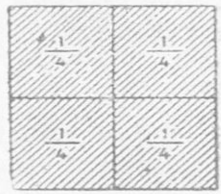
122. Παρουσιάζεται λοιπὸν ἡ ἀνάγκη νὰ εὕρωμεν τοιούτους ἀριθμούς. Αὐτοὶ δὲ οἱ νέοι ἀριθμοί, ὁμοῦ μὲ τοὺς προηγουμένους, ποὺ ἐμάθομεν, θὰ ἀποτελοῦν ἓν σύστημα ἀριθμῶν, εἰς τὸ ὁποῖον πᾶσα διαίρεσις θὰ εἶναι δυνατὴ καὶ τελεία (ἐκτὸς ἀπὸ τὴν διαίρεσιν ἀριθμοῦ διαφόρου τοῦ μηδενὸς διὰ τοῦ μηδενός). Τοιοῦτοι ἀριθμοὶ εὑρέθησαν καὶ εἶναι **οἱ κλασματικοί.**

123. Διὰ νὰ εὕρουν τοὺς νέους αὐτοὺς ἀριθμοὺς ἐσκέφθησαν ὡς ἑξῆς. Ἀφοῦ καθὲν πρᾶγμα δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη, ἠμποροῦμεν νὰ δεχθῶμεν, ὅτι καὶ ἡ μονὰς 1 δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη.

Καὶ ἂν μὲν ἡ μονὰς 1 διαιρεθῇ εἰς δύο ἴσα μέρη, τὸ καθὲν λέγεται **ἥμισυ** καὶ γράφεται ὡς ἑξῆς $\frac{1}{2}$, ἂν δὲ εἰς τρία μέρη τὸ καθὲν λέγεται **τρίτον** καὶ γράφεται $\frac{1}{3}$, ἂν δὲ εἰς τέσσαρα, τὸ καθὲν λέγεται **τέταρτον** καὶ γράφεται $\frac{1}{4}$ κ. ο. κ.

Ἑπομένως εἶναι $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ $=1$, κ.ο.κ.

Δεχόμεθα δηλαδή, ὅτι τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ κτλ. εἶναι ἀριθμοί.



Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι θεωροῦνται ὡς νέαι μονάδες καὶ λέγονται **κλασματικαί,** ἡ δὲ μονὰς 1 λέγεται **ἀκεραία.**

Ὥστε: **Κλασματικὴ μονὰς λέγεται τὸ ἓν ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ἀκεραία μονάς.**

124. Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι γίνονται ἀπὸ τὴν ἐπανάληψιν τῆς ἀκεραίας μονάδος, λέγονται ἀκέραιοι, ὡς οἱ 2, 3, 4 κτλ. (καὶ ἡ μονὰς 1 λέγεται ἀκέραιος ἀριθμός).

125. Οἱ δὲ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι γίνονται ἀπὸ τὴν ἐπανάληψιν οἱασδήποτε κλασματικῆς μονάδος, λέγονται **κλασματικοί,** ἢ ἁπλῶς **κλάσματα.**

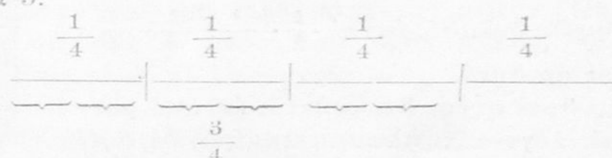
Ὅπως εἶναι π.χ. ὁ $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, ἤτοι δύο τρίτα.

Γράφεται δὲ οὗτος $\frac{2}{3}$ ἢ ὁ $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$, ἤτοι τρία πέμπτα καὶ ὅστις γράφεται $\frac{3}{5}$. (Κλασματικοὶ ἀριθμοὶ ἢ ἁπλῶς κλάσματα λέγονται καὶ αἱ κλασματικαὶ μονάδες.

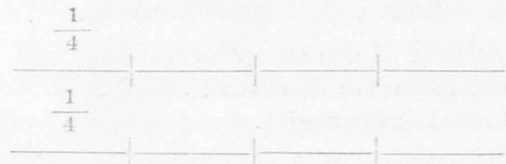
Ὥστε π.χ. εἶναι $4=1+1+1+1$ καὶ $\frac{3}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$ καὶ $3+\frac{2}{9}=1+1+1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}$ κ.ο.κ.

126. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω βλέπομεν λοιπόν, ὅτι τὸ κλάσμα γράφεται μὲ δύο ἀριθμοὺς ἀκεραίους. Καὶ ὁ μὲν πρῶτος φανερώνει πόσας μονάδας τοῦ κλάσματος ἔχει αὐτὸ καὶ λέγεται **ἀριθμητής.** Ὁ δὲ δεύτερος φανερώνει τὸ ὄνομα τῶν μονάδων. Ἤτοι φανερώνει εἰς πόσα ἴσα μέρη διηρέθη ἡ ἀκεραία μονὰς καὶ ἔδωκε τὴν κλασματικὴν καὶ λέγεται **παρονομαστής.** Ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς ἑνὸς κλάσματος λέγονται μὲ ἓν ὄνομα **ὅροι αὐτοῦ.**

Οὕτως εἰς τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ ὁ 4 εἶναι ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ 5 ὁ παρονομαστής. Σημαίνει δὲ τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$, ὅτι ἀπὸ τὰ 5 ἴσα μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα διηρέθη ἡ μονὰς 1, ἐλάβομεν τὰ 4. Καὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως σημαίνει, ὅτι διηρέσαμεν τὸν πῆχυν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ ἐλάβομεν τὰ 3.



Ἀλλ' ἂν ἔχωμεν τρεῖς πήχεις καὶ λάβωμεν ἀπὸ καθένα τὸ ἓν τέταρτον



θὰ λάβωμεν ἓν τέταρτον καὶ ἓν τέταρτον καὶ ἓν τέταρτον, δηλαδὴ θὰ λάβωμεν ἐν ὅλῳ $\frac{3}{4}$ πήχεως. Ἤτοι, ἐὰν μοιράσωμεν ἐξ ἴσου 3 πήχεις εἰς 4 ἀνθρώπους, ἕκαστος θὰ λάβῃ $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως.

Ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως σημαίνει ἢ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἑνὸς πήχεως, ἢ τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν τριῶν πήχεων δηλ. $\frac{3}{4}$ πήχεις $=3$ πήχεις : 4.

127. Μὲ τοὺς νέους τούτους ἀριθμοὺς κάθε διαίρεσις γίνεται δυνατὴ καὶ τελεία. Διότι τοῦ μερισμοῦ 1 μῆλον : 4 (§ 121) τὸ μερίδιον εἶναι $\frac{1}{4}$ τοῦ μήλου. Τοῦ 3 μῆλα : 4 τὸ μερίδιον εἶναι $\frac{3}{4}$ μῆλα καὶ τοῦ μερισμοῦ 9 μῆλα : 4 εἶναι $\frac{9}{4}$ μῆλα ἢ 2 μῆλα $+\frac{1}{4}$ μῆλα ἢ ἁπλούστερον $2\frac{1}{4}$ μῆλα. Ἤτοι εἶναι 1 μῆλον : 4 $=\frac{1}{4}$ τοῦ μήλου, 3 μῆλα : $4=\frac{3}{4}$ τοῦ μήλου καὶ 9 μῆλα : $4=\frac{9}{4}$ μῆλα (ἢ 9 μῆλα : $4=2\frac{1}{4}$ μῆλα.)

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συμπεραίνομεν α) **ὅτι πᾶσα διαίρεσις εἶναι δυνατὴ καὶ τελεία,** β) **ὅτι τὸ πηλίκον πάσης διαιρέσεως εἶναι κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην** καὶ γ) **ὅτι πᾶν κλάσμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.**

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα δὲ 9 μῆλα : $4=2\frac{1}{4}$ μῆλα, συμπεραίνομεν καὶ ὅτι **τὸ ἀκριβὲς πηλίκον** (ἀτελοῦς διαιρέσεως) **ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν διὰ τῆς διαιρέσεως καὶ ἀπὸ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην αὐτῆς.** Οὕτως εἶναι:

$$29:6=4\frac{5}{6} \qquad \begin{array}{r|l} 29 & 6 \\ \hline 5 & 4 \end{array}$$

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν συνάγομεν, ὅτι ὁ ὁρισμὸς τῆς διαιρέσεως, τὸν ὁποῖον ἐδώσαμεν εἰς τὴν παράγρ. 87, ἠμπορεῖ νὰ γενικευθῇ ὡς ἑξῆς:

Διαίρεσις ἑνὸς ἀριθμοῦ δι' ἄλλου λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τρίτον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος, ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν διαιρέτην, δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον.

Ὥστε ἀπὸ τὴν ἰσότητα $5:6=\frac{5}{6}$ προκύπτει ἡ ἰσότης $\frac{5}{6}\times 6=5$ καὶ ἀπὸ τὴν $7:9=\frac{7}{9}$ προκύπτει ἡ $\frac{7}{9}\times 9=7$.

Ἀπὸ τὰ παραδείγματα δὲ αὐτὰ προκύπτει πάλιν ἡ ἑξῆς ἰδιότης· **Πᾶν κλάσμα ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του, δίδει γινόμενον ἴσον μὲ τὸν ἀριθμητήν του.**

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς Α΄

286) Ἐὰν κόψῃς ἓν φύλλον χάρτου εἰς 2, 4, 8 κτλ. ἴσα μέρη, πῶς ὀνομάζεις τὸ ἓν μέρος ἑκάστην φοράν;

287) Τί ἐννοοῦμεν, ὅταν γράφωμεν $\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ αὐτοῦ;

288) Ἐὰν κόψωμεν ἕνα πῆχυν εἰς 8 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν τὰ 3, τί μέρος τοῦ πήχεως λαμβάνομεν;

289) Τί ἐννοοῦμεν, ὅταν γράφωμεν $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως;

290) Ἀπὸ ἓν τεμάχιον ὑφάσματος 15 πήχεων λαμβάνομεν 1, 3, 7, 11 πήχεις. Τί μέρος τοῦ τεμαχίου λαμβάνομεν ἑκάστην φοράν;

Ὁμὰς Β΄

291) Ἐὰν ἡ ἀκεραία μονὰς 1 διαιρεθῇ εἰς 2, 3, 4, 5, 15, 20, 50 κτλ. ἴσα μέρη, πῶς λέγεται τὸ ἓν μέρος αὐτῆς ἑκάστην φοράν;

292) Τί ἐννοοῦμεν, ὅταν γράφωμεν $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{13}{20}$;

293) Ἐὰν ἡ μονὰς 1 διαιρεθῇ εἰς 9 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν τὰ 4, τί μέρος τῆς μονάδος λαμβάνομεν;

294) Πόσας φορὰς πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸ $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{15}$ διὰ νὰ λάβωμεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1;

295) Νὰ γραφοῦν οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοί: πέντε ὄγδοα, ἑπτὰ δωδέκατα, δώδεκα ἑξηκοστά, ἐννέα ἑκατοστά, τριάκοντα ἐννέα ἑκατοστά, εἴκοσι πέμπτα, ἕνδεκα ἑξακοσιοστά, ἑκατὸν τριάκοντα πέντε ἑπτακοσιοστὰ πεντηκοστά, δεκατρία χιλιοστά, ἑκατὸν πέντε χιλιοστὰ εἰκοστὰ ἕνατα, εἴκοσι ὀκτὼ δισχιλιοστά. Πῶς σχηματίζονται ἐκ τῆς μονάδος 1 οἱ ἀνωτέρω κλασματικοὶ ἀριθμοί;

Ὁμὰς Γ΄

296) Ὁ Γεώργιος ἀπὸ τὰς 8 δραχμάς, τὰς ὁποίας εἶχεν, ἔδωκε τὰς 3 εἰς ἕνα πτωχόν. Τί μέρος τῶν 8 δρχ. ἔδωκεν ;

297) 12 ἐργάται ἐμοίρασαν ἐξ ἴσου ἓν ποσὸν δραχμῶν. Τί μέρος τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ ἔλαβον οἱ 7 ἐκ τῶν ἐργατῶν ;

298) Τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι τὸ 1 λεπτόν, τὰ 5, τὰ 20, τὰ 50 καὶ τὰ 85 λεπτά ;

299) Τί μέρος τοῦ ταλήρου εἶναι ἡ 1 δραχμή, αἱ 3 δραχμαί ;

300) Τί μέρος τοῦ εἰκοσαδράχμου εἶναι ἡ μία δραχμή, αἱ 9, αἱ 13, αἱ 17 δραχμαί ;

301) Ἐμοιράσαμεν 7 δραχμὰς εἰς 8 ἀνθρώπους. Ποῖον εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου καὶ ποῖον θὰ ἦτο τὸ μερίδιον, ἐὰν ἐμοιράζαμεν εἰς αὐτοὺς 9, 15, 25 δραχμάς ;

Ὁμὰς Δ΄

302) Ποῖον εἶναι τὸ (ἀκριβὲς) πηλίκον τῶν διαιρέσεων 3 : 7, 8 : 23, 21 : 3, 42 : 5, 65 : 12, 120 : 9 ;

303) Τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$ *ποίας διαιρέσεως ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς πηλίκον ; Ὁμοίως διὰ καθὲν τῶν κλασμάτων* $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{9}$, $\frac{21}{20}$.

304) Ποία εἶναι ἡ διπλῆ σημασία τοῦ κλάσματος $\frac{7}{9}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{13}{25}$;

305) Τί ἐκφράζει ἑκάστη τῶν κάτωθι ἰσοτήτων ;

1) $\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta}$, 2) $\frac{\alpha}{\beta} = \pi$ καὶ $\alpha = \beta \times \pi$, 3) $\frac{\alpha}{\beta} \times \beta = \alpha$.

128. Σύγκρισις τῶν κλασμάτων πρός τήν ἀκεραίαν μονάδα. — Ἐξ ὅσων εἴπομεν προηγουμένως, εὐκόλως συνάγομεν, ὅτι π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{5}{5}$ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{3}{7}$ εἶναι μικρότερον αὐτῆς καὶ ὅτι τὸ $\frac{7}{4}$ εἶναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος 1.

Δηλαδὴ εἶναι $\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \dots\dots = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$, $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, ἐὰν $\alpha < \beta$ καὶ $\frac{\alpha}{\beta} > 1$, ἐὰν $\alpha > \beta$.

129. Τροπή τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἰς κλάσματα. — Θέλω νὰ τρέψω τοὺς 3 πήχεις εἰς ὄγδοα, ἤτοι θέλω νὰ τρέψω τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 3 εἰς κλάσμα, μὲ παρονομαστὴν 8. Ἀλλ' ὁ εἷς πῆχυς ἔχει 8 ὄγδοα, οἱ δύο πήχεις ἔχουν 2 φορὰς 8 ὄγδοα, ἤτοι 16 ὄγδοα καὶ οἱ 3 πήχεις ἔχουν 3 φορὰς 8 ὄγδοα, ἤτοι 24 ὄγδοα. Δηλαδὴ 3 πήχ.$=\frac{3\times 8}{8}$ πήχ.$=\frac{24}{8}$ πήχ. Ἂν δὲ τοὺς 3 πήχεις θελήσωμεν νὰ τοὺς τρέψωμεν εἰς δέκατα ἕκτα θὰ ἔχωμεν 3 πήχ.$=\frac{3\times 16}{16}$ πήχ.$=\frac{48}{16}$ πήχ.

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν εἶναι π.χ. $5=\frac{10}{2}=\frac{15}{3}=\frac{20}{4}=\frac{25}{5}$ κλπ.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω εὐκόλως συνάγεται ὁ σχετικὸς κανών.

130. Τροπὴ μεικτῶν ἀριθμῶν εἰς κλάσματα.—Εἴδομεν προηγουμένως, ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 9 μῆλα : 4 εἶναι 2 μῆλα $+\frac{1}{4}$ μῆλα. Ἐπίσης εἶναι $27 : 5=\frac{27}{5}=5+\frac{2}{5}=5\frac{2}{5}$.

Οἱ ἀριθμοὶ $2\frac{1}{4}$, $5\frac{2}{5}$ κτλ., οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἀκέραιον καὶ κλάσμα λέγονται **μεικτοί.** Ἐὰν ἕνα μεικτὸν ἀριθμόν, ὡς τὸν $7\frac{2}{5}$ π.χ. θέλω νὰ τρέψω εἰς κλασματικόν, δύναμαι νὰ τὸ κάμω· διότι $7=\frac{7\times 5}{5}=\frac{35}{5}$. Ὥστε εἶναι $7\frac{2}{5}=\frac{35}{5}+\frac{2}{5}$. Ἀλλὰ 35 πέμπτα καὶ 2 πέμπτα κάμουν 37 πέμπτα. Εἶναι λοιπὸν $7\frac{2}{5}=\frac{7\times 5+2}{5}=\frac{37}{5}$. Ὁμοίως εὑρίσκω, ὅτι $6\frac{3}{8}=\frac{6\times 8+3}{8}=\frac{51}{8}$.

131. Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων τοῦ κλάσματος. —Ἀνωτέρω εὕρομεν, ὅτι $7\frac{2}{5}=\frac{37}{5}$ καὶ $6\frac{3}{8}=\frac{51}{8}$. Ὥστε εἶναι $\frac{37}{5}=7\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{51}{8}=6\frac{3}{8}$.

Ἀλλ' αἱ τελευταῖαι αὐταὶ ἰσότητες φανερώνουν, ὅτι, ἐὰν ἓν κλάσμα περιέχῃ ἀκεραίας μονάδας, δυνάμεθα νὰ τὰς ἐξαγάγωμεν. Καὶ πράγματι. Τὸ κλάσμα $\frac{37}{5}$ περιέχει ἀκεραίας μονάδας. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀκεραία μονάς, ὅταν τραπῇ εἰς πέμπτα ἔχει πέντε πέμπτα, θὰ ἐξαγάγωμεν ἀπὸ τὸ κλάσμα 37 πέμπτα τόσας ἀκεραίας μονάδας, ὅσας φοράς, χωρεῖ ὁ 5 εἰς τὸν 37. Καὶ ἐπειδὴ χωρεῖ 7 φοράς, θὰ ἐξαγάγωμεν ἀπὸ 37 πέμπτα, 7 ἀκεραίας μονάδας. Θὰ μείνουν δὲ καὶ 2 πέμπτα (διότι $7=\frac{7\times 5}{5}=\frac{35}{5}$). Εἶναι λοιπὸν $\frac{37}{5}=7\frac{2}{5}$ διότι $\begin{array}{r|l} 37 & 5 \\ \hline 2 & 7 \end{array}$, καὶ $\frac{51}{8}=6\frac{3}{8}$ διότι $\begin{array}{r|l} 51 & 8 \\ \hline 3 & 6 \end{array}$, καὶ $\frac{28}{4}=7$ διότι $\begin{array}{r|l} 28 & 4 \\ \hline 0 & 7 \end{array}$.

Ὥστε : **Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας ἑνὸς κλάσματος, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· καὶ τὸ μὲν πηλίκον εἶναι ὁ ἀκέραιος τοῦ κλάσματος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον, ἂν μείνῃ, εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος, ποὺ θὰ μείνῃ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν ἴδιον παρονομαστήν.**

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς Α΄

Ἀπὸ μνήμης. 306) *Ἀπὸ τὰ κλάσματα* $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{17}{18}$ $\frac{15}{15}$ $\frac{32}{31}$ $\frac{106}{160}$ $\frac{545}{545}$ $\frac{1015}{1016}$ $\frac{8003}{8002}$ *ποῖα εἶναι ἴσα πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα, ποῖα μικρότερα καὶ ποῖα μεγαλύτερα αὐτῆς ;*

307) *Νὰ τραποῦν αἱ 3, 7, 9 δραχμαὶ εἰς δεύτερα (50λεπτα), εἰς πέμπτα (20λεπτα), εἰς δέκατα (10λεπτα).*

308) *Πόσα δεύτερα, τρίτα, τέταρτα ἔχει ὁ καθεὶς τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 5, 6 ;*

309) *Τί μᾶς λέγει ἡ ἰσότης* $\alpha=\frac{\alpha\times\beta}{\beta}$ *; (α καὶ β ἀκέραιοι ἀριθμοί).*

310) *Πόσα δεύτερα ἐν ὅλῳ ἔχει καθεὶς τῶν μεικτῶν* $3\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{2}$, $85\frac{1}{2}$;

311) *Πόσα τρίτα ἐν ὅλῳ ἔχει καθεὶς τῶν μεικτῶν* $5\frac{1}{3}$, $9\frac{2}{3}$, $18\frac{1}{3}$, $25\frac{2}{3}$;

312) *Νὰ τραποῦν εἰς κλάσματα οἱ μεικτοί :*

$$4\frac{1}{5},\ 7\frac{3}{4},\ 8\frac{4}{5},\ 5\frac{5}{10},\ 10\frac{4}{7},\ 15\frac{1}{6},\ 20\frac{3}{10},\ 2\frac{7}{100}.$$

313) *Τί μᾶς λέγει ἡ ἰσότης* $\alpha+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\times\gamma+\beta}{\gamma}$;

314) *Πόσας ἀκεραίας μονάδας ἔχει τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ κλάσματα :*

$$\frac{3}{3}\quad \frac{9}{3}\quad \frac{21}{3}\quad \frac{21}{7}\quad \frac{36}{6}\quad \frac{55}{5}\quad \frac{55}{11}\quad \frac{80}{4}\quad \frac{120}{12}\quad \frac{225}{25};$$

315) Νὰ ἐξαγάγῃς τὰς ἀκεραίας μονάδας, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς τὰ κλάσματα :

$$\frac{5}{2} \quad \frac{7}{2} \quad \frac{11}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{8}{3} \quad \frac{14}{3} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{19}{17} \quad \frac{37}{12} \quad \frac{64}{15}$$

Ὁ μ ὰ ς Β΄

Γ ρ α π τ ῶ ς. 316) Νὰ τραπῇ ὁ ἀκέραιος 18 εἰς δέκατα πέμπτα, ὁ 25 εἰς εἰκοστὰ πρῶτα, ὁ 198 εἰς τριακοστὰ ἕβδομα, ὁ 201 εἰς τεσσαρακοστὰ καὶ ὁ 305 εἰς ἑκατοστὰ εἰκοστά.

317) Νὰ τραποῦν εἰς κλάσματα οἱ μεικτοὶ ἀριθμοί :

$18\frac{8}{15}$, $68\frac{9}{20}$, $99\frac{85}{97}$, $317\frac{6}{7}$, $36\frac{41}{54}$, $351\frac{44}{45}$, $872\frac{305}{871}$, $1508\frac{15}{26}$, $1032\frac{19}{48}$, $1141\frac{1037}{2143}$.

318) Αἱ ὀκάδες $28\frac{3}{4}$ ἀπὸ πόσα τέταρτα ἀποτελοῦνται ; Καὶ ἀπὸ πόσα τετρακοσιοστὰ ἀποτελοῦνται αἱ $37\frac{350}{400}$ ὀκάδες ;

Ὁ μ ὰ ς Γ΄

319) Νὰ ἐξαγάγῃς τὰς ἀκεραίας μονάδας, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς τὰ κλάσματα :

$$\frac{631}{9}, \quad \frac{916}{7}, \quad \frac{497}{40}, \quad \frac{819}{13}, \quad \frac{5400}{25}, \quad \frac{10000}{35}, \quad \frac{37009}{522}, \quad \frac{199415}{1080}.$$

320) Πόσας ὀκάδας καὶ πόσα μέρη αὐτῆς κάμνουν 15170 δράμια καὶ πόσους στατῆρας καὶ μέρη αὐτοῦ κάμνουν αἱ 279 ὀκάδες ; (1 στατὴρ=44 ὀκ.).

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

132. Διὰ νὰ λάβω τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως, θὰ κόψω τὸν πῆχυν εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ θὰ λάβω τὰ 3. Ἐὰν τώρα κόψω καθὲν τῶν ἴσων εἰς 2 ἴσα μέρη, ὁ πῆχυς θὰ κοπῇ εἰς 8 ἴσα μέρη. Ἑπομένως τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ θὰ παρίσταται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$.

Εἶναι λοιπὸν $\frac{1}{4}=\frac{1\times2}{4\times2}=\frac{2}{8}$ καὶ $\frac{3}{4}=\frac{3\times2}{4\times2}=\frac{6}{8}$ ἢ $\frac{6}{8}=\frac{6:2}{8:2}=\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{2}{8}=\frac{2:2}{8:2}=\frac{1}{4}$.

Τὰ ἀνωτέρω δεικνύονται καὶ ὡς ἑξῆς :

Γνωρίζομεν ὅτι εἶναι :

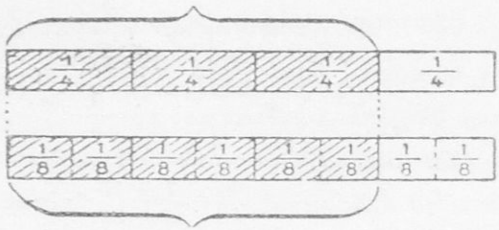
3 πήχ. : $4=\frac{3}{4}$ πήχ.

1 πήχ. : $4=\frac{1}{4}$ πήχ.

6 πήχ. : $8=\frac{6}{8}$ πήχ.

2 πήχ. : $8=\frac{2}{8}$ πήχ.

$\frac{3}{4}$



$\frac{6}{8}$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

Ἀλλὰ τὰ πηλίκα τῶν δύο αὐτῶν διαιρέσεων εἶναι (90 σημ. β′.) ἴσα, διότι ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην τῆς πρώτης διαιρέσεως ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 2 καὶ εὕρομεν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην τῆς δευτέρας διαιρέσεως.

Ὥστε εἶναι :

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8} \text{ καὶ } \frac{1}{4}=\frac{2}{8} \text{ ἢ } \frac{6}{8}=\frac{3}{4} \text{ καὶ } \frac{2}{8}=\frac{1}{4}.$$

Ὥστε : **Ἐὰν καὶ οἱ δύο ὅροι ἑνὸς κλάσματος πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται.**

Ἐπίσης ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται καὶ ἐὰν οἱ ὅροι αὐτοῦ **διαιρεθοῦν** διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ (ἐὰν διαιροῦνται).

133. Ἐφαρμογὴ εἰς τὴν ἁπλοποίησιν τῶν κλασμάτων.— Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν εἶναι :

$$\frac{24}{36}=\frac{12}{18}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3} \text{ ἤτοι } \frac{24}{36}=\frac{2}{3}\left(\frac{24:12}{36:12}=\frac{2}{3}\right).$$

Ἀπὸ τὸ κλάσμα λοιπὸν $\frac{24}{36}$ εὕρομεν ἄλλα κλάσματα ἴσα πρὸς αὐτό, τὰ ὁποῖα ἔχουν μικροτέρους ὅρους.

Ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν ἀπὸ ἓν κλάσμα ἄλλο, ἴσον πρὸς τὸ δοθέν, ἀλλὰ μὲ μικροτέρους ὅρους, λέγεται **ἁπλοποίησις** τοῦ δοθέντος κλάσματος.

Ἡ ἁπλοποίησις κλάσματος εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι δυνατή, ὅταν οἱ ὅροι αὐτοῦ ἔχουν κοινόν τινα διαιρέτην.

Οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{21}{51}$, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι ἔχουν κοινὸν διαιρέτην τὸν 3, ἁπλοποιεῖται καὶ γίνεται $\frac{21}{51} = \frac{21:3}{51:3} = \frac{7}{17}$. Τὸ δὲ $\frac{7}{17}$, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, δὲν ἁπλοποιεῖται ὅπως δὲν ἁπλοποιεῖται καὶ τὸ $\frac{2}{3}$.

Τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον δὲν ἁπλοποιεῖται, λέγεται **ἀνάγωγον**. Οὕτω τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{17}$, $\frac{15}{32}$ εἶναι ἀνάγωγα.

Ἀπὸ ἓν κλάσμα προκύπτει ἀνάγωγον, ὅταν οἱ ὅροι τοῦ δοθέντος κλάσματος διαιρεθοῦν διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν (112 σημ.)· π.χ. τοῦ κλάσματος $\frac{279}{558}$ οἱ ὅροι ἔχουν μ.κ.δ. τὸν 279. Ἐξ αὐτοῦ δὲ προκύπτει τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{279:279}{558:279} = \frac{1}{2}\right)$.

Ὁμοίως τοῦ κλάσματος $\frac{255}{340}$ οἱ ὅροι ἔχουν μ.κ.δ. τὸν 85. Ἐξ αὐτοῦ δὲ προκύπτει τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{3}{4}$.

Σημείωσις. Τὸ κλάσμα $\frac{15}{5} = 3$ (§ 131). Ἀλλὰ διὰ τῆς ἁπλοποιήσεως λαμβάνομεν $\frac{15}{5} = \frac{15:5}{5:5} = \frac{3}{1}$. Ὥστε εἶναι $3 = \frac{3}{1}$.

Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ παριστῶμεν τοὺς ἀκεραίους καὶ ὡς κλάσματα μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1.

134. Ἐὰν κόψω ἓν μέτρον ὑφάσματος εἰς 5 ἴσα μέρη καὶ λάβω τὰ 2, τὸ μέρος, ποὺ ἔλαβα, παρίσταται ὑπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{2}{5}$. Ἐὰν δὲ λάβω 4 μέρη, θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{4}{5}$. Ἀλλὰ τὰ 4 μέρη εἶναι 2 φορὰς τὰ 2 μέρη. Καὶ ἡ ἀξία λοιπὸν τοῦ κλάσματος $\frac{4}{5}$, εἶναι διπλασία τῆς ἀξίας τοῦ κλάσματος $\frac{2}{5}$, ἢ ἡ ἀξία τοῦ $\frac{2}{5}$ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀξίας τοῦ $\frac{4}{5}$. Ἀλλὰ τὸ $\frac{4}{5}$ λαμβάνεται ἀπὸ τὸ $\frac{2}{5}$, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής του 2 ἐπὶ 2. Τὸ δὲ $\frac{2}{5}$ λαμβάνεται ἀπὸ τὸ $\frac{4}{5}$, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητής του 4 διὰ 2. Ἄλλως τε εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ 4 πέμπτα εἶναι διπλάσια τῶν 2 πέμπτων καὶ τὰ 6 πέμπτα εἶναι τριπλάσια αὐτῶν (τῶν 2 πέμπτων) κ.ο.κ.

Ὥστε : **Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὴς διαιρεθῇ, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διαιρεῖται.**

Σημείωσις. Γενικῶς : ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος αὐξάνῃ καὶ τὸ κλάσμα αὐξάνει.

135. Ἔχομεν ἓν μέτρον ὑφάσματος. Ἐὰν τὸ κόψωμεν εἰς 2 ἴσα μέρη, τὸ ἓν μέρος παρίσταται ὑπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{1}{2}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος 1. Ἐὰν δὲ κόψωμεν τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου εἰς δύο ἴσα μέρη, τὸ ἓν ἀπὸ αὐτὰ τὰ μέρη παρίσταται ὑπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{1}{4}$. Εἶναι δὲ τὸ μέρος αὐτό, δηλαδὴ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ μέτρου, δύο φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ. Ἐὰν δὲ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ μέτρου τὸ κόψωμεν ἐπίσης εἰς δύο ἴσα μέρη, τὸ ἓν ἀπὸ αὐτὰ τὰ μέρη, τὸ ὁποῖον παρίσταται ὑπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{1}{8}$, εἶναι δύο φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ μέτρου καὶ τέσσαρας φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ. Εἶναι ἑπομένως φανερόν, ὅτι καὶ τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ μέτρου εἶναι δύο φορὰς μικρότερα ἀπὸ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ καὶ τέσσαρας φορὰς μικρότερα ἀπὸ τὰ $\frac{3}{2}$, τὰ δὲ $\frac{3}{2}$ τοῦ μέτρου εἶναι δύο φορὰς μεγαλύτερα ἀπὸ τὰ $\frac{3}{4}$ καὶ τέσσαρας φορὰς μεγαλύτερα ἀπὸ τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτοῦ. Ἀλλ' ὁ παρονομαστὴς 8 τοῦ κλάσματος $\frac{3}{8}$ γίνεται ἀπὸ τὸν παρονομαστὴν 4 τοῦ $\frac{3}{4}$, ὅταν πολλαπλασιασθῇ οὗτος ἐπὶ 2 καὶ ἀπὸ τὸν παρονομαστὴν 2 τοῦ $\frac{3}{2}$, ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 4.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν συνάγομεν, ὅτι: **Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμόν, τὸ ὅλον κλάσμα διαιρεῖται μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, ἐνῷ, ἐὰν διαιρεθῇ, τὸ ὅλον κλάσμα πολλαπλασιάζεται.**

Σημείωσις. α'. Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν δεικνύομεν καὶ ὡς ἑξῆς: Ἡμεῖς γνωρίζομεν, ὅτι ἐπειδὴ $3+3=6$, τὸ 3 εἶναι δύο φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὸ 6 καὶ ἐπειδὴ $4+4+4=12$, τὸ 4 εἶναι τρεῖς φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὸ 12 κτλ. Κατόπιν τούτων λαμβάνομεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν 5 ἐπὶ 4 γίνεται τὸ κλάσμα $\frac{3}{20}$, τὸ ὁποῖον λέγομεν, ὅτι εἶναι τέσσαρας φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὸ $\frac{3}{5}$. Διότι 3 εἰκοστὰ καὶ 3 εἰκοστὰ καὶ 3 εἰκοστὰ καὶ 3 εἰκοστὰ κάμνουν 12 εἰκοστά, ἤτοι εἶναι $\frac{3}{20}+\frac{3}{20}+\frac{3}{20}+\frac{3}{20}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$, ἤτοι τὸ $\frac{3}{20}$ εἶναι τέσσαρας φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὸ $\frac{3}{5}$, τὸ δὲ $\frac{3}{5}$ εἶναι τέσσαρας φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ $\frac{3}{20}$.

Σημείωσις β'. Γενικῶς, ὅταν ὁ παρονομαστὴς αὐξάνῃ τὸ κλάσμα ἐλαττοῦται. Ὅταν δὲ οὗτος ἐλαττοῦται, τὸ κλάσμα αὐξάνει.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς Α'

321) Γράψε 4 κλάσματα ἴσα πρὸς τὸ $\frac{3}{7}$.

322) Γράψε 4 κλάσματα ἴσα πρὸς τὸ $\frac{36}{72}$, *ἀλλ' ὅλα νὰ ἔχουν μικροτέρους ὅρους ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ* $\frac{36}{72}$.

323) Νὰ συμπληρώσῃς τὰς ἰσότητας:

$$\frac{1}{5}=\frac{;}{10}=\frac{;}{15}=\frac{}{30}=\frac{;}{60}=\frac{;}{100}$$

$$\frac{1}{6}=\frac{;}{12}=\frac{;}{18}=\frac{;}{42}=\frac{;}{60}=\frac{;}{90}.$$

324) Ὁμοίως νὰ συμπληρωθοῦν αἱ ἰσότητες:

$$\frac{5}{6}=\frac{}{30},\quad \frac{4}{9}=\frac{}{36},\quad \frac{19}{24}=\frac{}{120},\quad \frac{2}{9}=\frac{}{108},\quad \frac{3}{4}=\frac{}{192}.$$

325) Ὁμοίως αἱ:

$$\frac{2}{3}=\frac{}{9},\quad \frac{9}{11}=\frac{45}{},\quad \frac{19}{24}=\frac{95}{},\quad \frac{5}{8}=\frac{45}{},\quad \frac{7}{17}=\frac{28}{}.$$

326) Ὁμοίως αἱ :

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{},\quad \frac{44}{77}=\frac{4}{},\quad \frac{35}{50}=\frac{}{10},\quad \frac{10}{15}=\frac{}{3},\quad \frac{132}{156}=\frac{}{13}.$$

Ἀπὸ μνήμης. 327) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα :

$$\frac{20}{20}\quad \frac{16}{18}\quad \frac{15}{60}\quad \frac{36}{48}\quad \frac{25}{100}\quad \frac{35}{49}\quad \frac{48}{64}\quad \frac{38}{91}.$$

328) Ὁμοίως τά : $\frac{300}{400}\quad \frac{150}{250}\quad \frac{350}{450}\quad \frac{500}{750}\quad \frac{1500}{2000}\quad \frac{140}{420}.$

Ὁμὰς Β'

Γραπτῶς. 329) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα :

$$\frac{70}{84}\quad \frac{98}{132}\quad \frac{38}{117}\quad \frac{95}{135}\quad \frac{825}{975}\quad \frac{108}{396}\quad \frac{2568}{7680}\quad \frac{10200}{47600}\quad \frac{3765}{4020}\quad \frac{6363}{9999}.$$

330) Νὰ ἁπλοποιήσῃς τὰ κλάσματα :

$$\frac{2\times3}{2\times5}\quad \frac{2\times3\times5}{2\times3\times7}\quad \frac{5\times11}{5\times11\times13}\quad \frac{7\times9\times8}{7\times5\times9\times8}\quad \frac{2\times3}{10}\quad \frac{13}{9\times5}\quad \frac{20\times}{30\times18}$$

$$\frac{12\times21}{32\times28}\quad \frac{3\times7}{24}\quad \frac{4\times17}{136}\quad \frac{15\times9\times4}{30\times18\times8}\quad \frac{12\times15\times18}{60\times36\times30}.$$

331) Νὰ κατατάξῃς τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς σειρὰν τοιαύτην, ὥστε νὰ ἀρχίζῃ ἀπὸ τὸ μικρότερον κλάσμα καὶ καθὲν τῶν ἄλλων νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ προηγούμενον. Νὰ κατατάξῃς δηλαδὴ τὰ κλάσματα κατὰ τάξιν μεγέθους αὐξανομένου.

$$\frac{31}{64}\quad \frac{17}{64}\quad \frac{2}{64}\quad \frac{45}{64}\quad \frac{39}{64}\quad \frac{13}{64}\quad \frac{51}{64}\quad \frac{25}{64}.$$

332) Ὁμοίως νὰ κατατάξῃς κατὰ τάξιν μεγέθους ἐλαττουμένου τὰ κλάσματα :

$$\frac{108}{130}\quad \frac{108}{184}\quad \frac{108}{260}\quad \frac{108}{120}\quad \frac{108}{196}.$$

333) Νὰ γράψῃς 5 κλάσματα μικρότερα τοῦ $\frac{1}{2}$.

Νὰ γράψῃς 5 κλάσματα μεγαλύτερα τοῦ $\frac{1}{2}$.

334) Νὰ γίνουν τὰ κάτωθι κλάσματα 2, 3, 4 . . . φορὰς μεγαλύτερα

$$\frac{8}{15}\quad \frac{16}{90}\quad \frac{45}{120}\quad \frac{76}{83}\quad \frac{156}{280}.$$

335) Νὰ γίνουν τὰ ἑπόμενα κλάσματα 2, 3, 5 . . . φορὰς μικρότερα

$$\frac{8}{15}\quad \frac{18}{96}\quad \frac{13}{21}\quad \frac{86}{108}\quad \frac{96}{1\ \ 0}.$$

336) Νὰ συγκρίνῃς τὸ κλάσμα, ποὺ εἶναι 4 φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{1}{5}$, πρὸς τὸ κλάσμα ποὺ εἶναι 5 φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{1}{4}$.

Ὁμοίως νὰ συγκρίνῃς τὸ κλάσμα, ποὺ εἶναι 3 φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{1}{7}$, πρὸς τὸ κλάσμα, ποὺ εἶναι 7 φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{1}{3}$.

Πῶς ἐξηγεῖς τὰ ἐξαγόμενα τῆς συγκρίσεως, ποὺ θὰ κάμῃς; Νὰ δώσῃς ὅμοια παραδείγματα.

337) Νὰ συγκρίνῃς τὸ κλάσμα, ποὺ εἶναι 7 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ $\frac{1}{21}$, πρὸς τὸ κλάσμα, ποὺ εἶναι 5 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ $\frac{1}{15}$.

Ὁμοίως νὰ συγκρίνῃς τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον εἶναι 3 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ $\frac{5}{15}$, πρὸς ἐκεῖνο, ποὺ εἶναι 9 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ $\frac{5}{45}$.

Πῶς ἐξηγεῖς τὰ ἐξαγόμενα τῶν συγκρίσεων, ποὺ θὰ κάμῃς;

338) Νὰ συγκρίνῃς τὰ κάτωθι κλάσματα καὶ νὰ εἴπῃς πόσας φορὰς εἶναι τὸ ἓν μεγαλύτερον ἢ μικρότερον τοῦ ἄλλου ἢ ἂν εἶναι ἴσα.

α) $\frac{7}{36}$ $\frac{35}{36}$ β) $\frac{64}{75}$ $\frac{16}{75}$ γ) $\frac{81}{256}$ $\frac{243}{256}$

δ) $\frac{7}{12}$ $\frac{7}{132}$ ε) $\frac{63}{179}$ $\frac{73}{13}$ στ) $\frac{80}{203}$ $\frac{80}{29}$

ζ) $\frac{57}{95}$ $\frac{171}{285}$ η) $\frac{63}{81}$ $\frac{105}{135}$ θ) $\frac{121}{143}$ $\frac{187}{221}$.

339) Τί ἐκφράζει ἑκάστη τῶν κάτωθι ἰσοτήτων;

1) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \times \gamma}{\beta \times \gamma}$ 2) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha : \gamma}{\beta : \gamma}$ 3) $\frac{\alpha \times \gamma}{\beta} = \frac{\alpha}{6} \times \gamma$

4) $\frac{\alpha}{\beta \times \gamma} = \frac{\alpha}{\beta} : \gamma$ 5) $\frac{\alpha : \gamma}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} : \gamma$ 6) $\frac{\alpha}{\beta : \gamma} = \frac{\alpha}{\beta} \times \gamma$

136. Σύγκρισις οἱωνδήποτε κλασμάτων πρὸς ἄλληλα. Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.—Δύο ἄνθρωποι εἶχον τὸ αὐτὸ ποσὸν δραχμῶν. Ἀλλ' ὁ μὲν εἷς ἐδαπάνησε τὰ $\frac{7}{12}$ τῶν χρημάτων του, ὁ δὲ τὰ $\frac{4}{7}$ αὐτῶν. Ποῖος ἐδαπάνησε τὰ περισσότερα χρήματα;

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, πρέπει νὰ ἴδωμεν ποῖον ἐκ τῶν κλασμάτων αὐτῶν εἶναι μεγαλύτερον. Ἀλλὰ τὰ κλάσματα αὐτά, ὡς ἔχοντα διαφόρους παρονομαστάς, δηλ. ὡς **ἑτερώνυμα**, δὲν δύνανται νὰ συγκριθοῦν. Διὰ νὰ γίνῃ ἡ σύγκρισις πρέπει νὰ τραποῦν εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ τὸν αὐτὸν ὅμως παρονομαστήν, δηλ. πρέπει νὰ τραποῦν εἰς **ὁμώνυμα.** Γίνεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς: Πολλαπλασιάζω τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{7}{12}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 7 τοῦ ἄλλου κλάσματος $\frac{4}{7}$ καὶ τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{4}{7}$ ἐπὶ τὸν 12. Λαμβάνω δὲ οὕτω τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{7\times7}{12\times7}$ $\frac{4\times12}{7\times12}$ ἢ $\frac{49}{84}$ $\frac{48}{84}$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ δοθέντα.

Ὥστε βλέπω, ὅτι ὁ πρῶτος ἐδαπάνησε τὰ περισσότερα χρήματα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κανόνα.

Διὰ νὰ τρέψωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ καθενὸς ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου.

137. Τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{8}$, νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα.

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζω τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{2}{3}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον 5×8 τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο ἄλλων κλασμάτων. Ὁμοίως πολλαπλασιάζω τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{4}{5}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον 3×8 τῶν ἄλλων παρονομαστῶν καὶ τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{1}{8}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον 3×5. Ἔχω δὲ οὕτω:

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times5\times8}{3\times5\times8}=\frac{80}{120}$$

$$\frac{4}{5}=\frac{4\times3\times8}{5\times3\times8}=\frac{96}{120}$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1\times3\times5}{8\times3\times5}=\frac{15}{120}.$$

Ὥστε: **Διὰ νὰ τρέψωμεν πολλὰ ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ καθενὸς μὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν ὅλων τῶν ἄλλων κλασμάτων.**

138. Εἰς πολλὰς περιπτώσεις δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν κοινὸν παρονομαστὴν μικρότερον τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν τῶν διδομένων κλασμάτων. Ὁ μικρότερος δὲ κοινὸς παρονομαστής, τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν, εἶναι τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν διδομένων κλασμάτων, ἐὰν εἶναι ἀνάγωγα. Τοῦτο δὲ πρέπει νὰ προτιμῶμεν, διότι αἱ πράξεις εἶναι εὐκολώτεραι. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴ[ν] πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ καθενὸς κλάσματος μὲ τὸ πηλί-κον τῆς διαιρέσεως τοῦ κοινοῦ αὐτοῦ παρονομαστοῦ διὰ τοῦ παρο-νομαστοῦ τοῦ κλάσματος τούτου.

Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὰ ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{7}{8}$. Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν 4, 9, 8 εἶναι ὁ 72.

Ἔχομεν λοιπὸν $72 : 4 = 18$ καὶ $\frac{3}{4} = \frac{3\times18}{4\times18} = \frac{54}{72}$

$72 : 9 = 8$ καὶ $\frac{5}{9} = \frac{5\times8}{9\times8} = \frac{40}{72}$

$72 : 8 = 9$ καὶ $\frac{7}{8} = \frac{7\times9}{8\times9} = \frac{63}{72}$.

Σημείωσις. Ἐὰν τὰ κλάσματα δὲν εἶναι ἀνάγωγα, τὰ κάμνομεν πρῶτον ἀνάγωγα καὶ ἔπειτα τὰ τρέπομεν εἰς ὁμώνυμα.

Παρατήρησις. Ἡ σύγκρισις τῶν κλασμάτων γίνεται καὶ διὰ τῆς τροπῆς αὐτῶν εἰς ἰσοδύναμα ἔχοντα κοινὸν ἀριθμητήν. Γίνεται δὲ καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν κατωτέρω παραδειγμάτων.

1ον

$$\begin{array}{lll} \frac{4}{9} & \frac{3}{7} & \\ \frac{4\times3}{9\times3} & \frac{3\times4}{7\times4} & \\ \frac{12}{27} & \frac{12}{28} & \frac{12}{27} > \frac{12}{28} \end{array}$$

2ον

$$\begin{array}{llll} \frac{3}{5} & \frac{4}{9} & \frac{7}{11} & \\ \frac{3\times4\times7}{5\times4\times7} & \frac{4\times3\times7}{9\times3\times7} & \frac{7\times4\times3}{11\times4\times3} & \\ \frac{84}{140} & \frac{84}{189} & \frac{84}{132} & \frac{7}{11} > \frac{3}{5} > \frac{4}{9}. \end{array}$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς Α'

Ἀπὸ μνήμης. 340) *Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα:*

α) $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ *β)* $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ *γ)* $\frac{6}{8}$, $\frac{1}{4}$ *δ)* $\frac{9}{100}$, $\frac{11}{25}$

ε) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ στ) $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ ζ) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ η) $\frac{2}{9}$, $\frac{11}{18}$, $\frac{5}{6}$.

341) Ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{6}$ ποῖον εἶναι τὸ μεγαλύτερον καὶ ἐκ τῶν $\frac{11}{13}$, $\frac{32}{39}$ ποῖον εἶναι τὸ μικρότερον ;

Ὁμὰς Β'

Γραπτῶς. 342) Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα :

α) $\frac{7}{13}$, $\frac{8}{15}$ β) $\frac{2}{7}$, $\frac{16}{17}$ γ) $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{18}$ δ) $\frac{9}{15}$, $\frac{15}{20}$

ε) $\frac{13}{35}$, $\frac{5}{14}$ στ) $\frac{27}{45}$, $\frac{34}{\ }$ ζ) $\frac{38}{91}$, $\frac{105}{120}$ η) $\frac{42}{144}$, $\frac{51}{192}$.

343) Ὁμοίως νὰ τρέψῃς εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα :

α) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ β) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ γ) $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$

δ) $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{9}$ ε) $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{10}$ στ) $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{12}$.

344) Ὁμοίως τὰ ἑξῆς :

α) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ β) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ γ) $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{12}$

δ) $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{16}$ ε) $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{11}{18}$ στ) $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{20}$.

345) Ἐπίσης τὰ κάτωθι

α) $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$ β) $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$ γ) $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{9}$

δ) $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{18}$ ε) $\frac{5}{9}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{7}{12}$ στ) $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{25}$, $\frac{5}{3}$.

346) Ὁμοίως τὰ κάτωθι

α) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{14}$, $\frac{4}{15}$ β) $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{11}$ γ) $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{13}{29}$

δ) $\frac{7}{9}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{13}{20}$ ε) $\frac{11}{35}$, $\frac{12}{84}$, $\frac{19}{63}$ στ) $\frac{5}{36}$, $\frac{7}{44}$, $\frac{1}{6}$.

347) Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἰσοδύναμα ἔχοντα κοινὸν ἀριθμητὴν

α) $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{7}{9}$ β) $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{19}{30}$

γ) $\frac{13}{60}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{11}{12}$ δ) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$.

348) Ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{2}{3}$ ποῖον εἶναι τὸ μεγαλύτερον καὶ ποῖον τὸ μικρότερον ;

349) Νὰ γραφοῦν κατὰ τάξιν μεγέθους αὐξανομένου τὰ κλάσματα:

α) $\frac{3}{4}$, $\frac{13}{18}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{11}{12}$ *β)* $\frac{9}{10}$, $\frac{14}{25}$, $\frac{17}{30}$, $\frac{3}{5}$.

Ὁμὰς Γ΄

350) Εἰς μίαν ἐκδρομὴν δύο μαθηταὶ εἶχον τὸ αὐτὸ ποσὸν χρημάτων. Ἀλλ' ὁ εἷς ἐδαπάνησε τὰ $\frac{13}{15}$ τῶν χρημάτων του, ἐνῷ ὁ ἄλλος τὰ $\frac{19}{25}$. Ποῖος ἐκ τῶν δύο ἐδαπάνησε περισσότερα ;

351) Τρεῖς μαθηταί, διὰ νὰ λάβῃ μέρος εἷς ἄπορος συμμαθητής των εἰς τὴν ἄνω ἐκδρομήν, διέθεσαν ὁ εἷς τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν χρημάτων του, ὁ ἄλλος τὰ $\frac{2}{7}$ καὶ ὁ τρίτος τὰ $\frac{4}{9}$. Ποῖος μαθητὴς διέθεσε περισσότερον μέρος τῶν χρημάτων του καὶ ποῖος ὀλιγώτερον ;

352) Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἄνω ἐκδρομῆς οἱ μαθηταὶ ἠγωνίσθησαν μεταξύ των. Ἐξ αὐτῶν τὰ $\frac{2}{5}$ ἠγωνίσθησαν εἰς ἀγῶνας δρόμου, τὸ $\frac{1}{3}$ εἰς σκοπευτικοὺς ἀγῶνας καὶ τὰ $\frac{4}{15}$ ἔλαβον μέρος εἰς τὰ διάφορα ἅλματα. Εἰς ποῖον ἀγώνισμα ἔλαβον μέρος περισσότεροι μαθηταί ;

353) Ἡ ἐπίδοσις τριῶν μαθητῶν εἰς τὸ ἅλμα εἰς ὕψος ἄνευ φορᾶς ἦτο $\frac{3}{5}$ τοῦ μέτρου τοῦ ἑνός, $\frac{16}{25}$ τοῦ ἄλλου καὶ $\frac{2}{3}$ τοῦ τρίτου. Ποῖος ἐξ αὐτῶν ὑπερτερεῖ τοὺς δύο ἄλλους ;

II. ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Α΄. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

139. Ἡ πρόσθεσις τῶν κλασματικῶν ὁρίζεται ὅπως καὶ ἡ πρόσθεσις τῶν ἀκεραίων. Μόνον ἐδῶ πρέπει νὰ ἐνθυμούμεθα, ὅτι αἱ μονάδες, τὰς ὁποίας ἔχουν οἱ ἀριθμοί, δύνανται νὰ εἶναι ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί.

140. Πρόσθεσις κλασμάτων ὁμωνύμων.—Ἡ πρόσθεσις κλασμάτων ὁμωνύμων δὲν διαφέρει ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν· διότι, ὅπως λέγομεν 2 μῆλα καὶ 3 μῆλα καὶ 4 μῆλα κάμνουν 9 μῆλα, οὕτω λέγομεν 2 δέκατα καὶ 3 δέκατα καὶ 4 δέκατα κάμνουν 9 δέκατα, ἤτοι εἶναι:

$\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{2+3+4}{10}=\frac{9}{10}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

$\frac{5}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{5+4+3}{12}=\frac{12}{12}=1$ καὶ

$\frac{3}{8}+\frac{2}{8}+\frac{7}{8}=\frac{3+2+7}{8}=\frac{12}{8}=1\,\frac{4}{8}=1\,\frac{1}{2}$.

Γενικῶς δὲ εἶναι $\frac{\alpha}{\mu}+\frac{\beta}{\mu}+\frac{\gamma}{\mu}+\frac{\delta}{\mu}=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{\mu}$.

Ἐκ τῶν παραδειγμάτων δὲ τούτων εὐκόλως συνάγεται ὁ σχετικὸς κανών.

141. Πρόσθεσις κλασμάτων ἑτερωνύμων.— Ἔστω ὅτι, θέλομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{7}{8}$. Ἀλλὰ τρία πέμπτα καὶ ἑπτὰ ὄγδοα δὲν δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν. Πρέπει λοιπὸν νὰ τὰ κάμωμεν πρῶτον ὁμώνυμα. Τότε θὰ ἔχωμεν $\frac{3}{5}+\frac{7}{8}=\frac{24}{40}+\frac{35}{40}=\frac{59}{40}=1\,\frac{19}{40}$. Ὁμοίως ἔχομεν $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{4}{9}+\frac{5}{18}=\frac{12}{18}+\frac{3}{18}+\frac{8}{18}+\frac{5}{18}=\frac{28}{18}=1\,\frac{10}{18}=1\,\frac{5}{9}$.

142. Πρόσθεσις μεικτῶν ἀριθμῶν.— Ἔστω, ὅτι ἔχω νὰ προσθέσω $12\frac{1}{2}$ δρχ. $+2\,\frac{2}{5}$ δρχ. Πρὸς τοῦτο προσθέτω πρῶτον τοὺς ἀκεραίους $12+2=14$ καὶ ἔπειτα τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{5}{10}+\frac{4}{10}=\frac{9}{10}$. Εἶναι λοιπὸν $12\frac{1}{2}$δρχ. $+2\,\frac{2}{5}$δρχ. $=14\,\frac{9}{10}$δρχ.

Ὥστε: **Ὅταν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν μεικτοὺς ἀριθμούς, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ ἀθροίσματα.**

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

Ἀπὸ μνήμης. 354) *Νὰ κάμῃς τὰς προσθέσεις:*

α) $\frac{5}{12}+\frac{7}{12}$, β) $\frac{15}{33}+\frac{7}{33}$, γ) $\frac{11}{36}+\frac{19}{36}+\frac{7}{36}$, δ) $\frac{23}{45}+\frac{43}{45}+\frac{24}{45}$,

ε) $3+\frac{1}{3}$, στ) $\frac{7}{8}+5$, ζ) $9+\frac{7}{9}+\frac{4}{9}$,

η) $7\frac{2}{3}+8\frac{1}{3}$, ϑ) $5+\frac{3}{5}+4\frac{4}{5}$, ι) $3\frac{1}{7}+2\frac{5}{7}+\frac{4}{7}$.

355) Ὁμοίως νὰ κάμης τὰς προσθέσεις :

α) $\frac{7}{50}$ μέτρ. $+\frac{33}{50}$ μέτρ. $+\frac{21}{50}$ μέτρ. $+\frac{19}{50}$ μέτρ.

β) $\frac{23}{60}$ ὥρ. $+\frac{47}{60}$ ὥρ. $+\frac{39}{60}$ ὥρ. $+\frac{11}{60}$ ὥρ.

γ) $\frac{21}{30}$ μην. $+\frac{17}{30}$ μην. $+\frac{5}{30}$ μην. $+\frac{11}{30}$ μην. $+\frac{24}{30}$ μην.

δ) $\frac{111}{365}$ ἔτ. $+\frac{49}{365}$ ἔτ. $+\frac{52}{365}$ ἔτ. $+\frac{68}{365}$ ἔτ.

356) Ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν ποίων κλασμάτων προέκυψαν τὰ ἀθροίσματα $\frac{5+7}{19}$, $\frac{3+9+8}{23}$, $\frac{5+2}{5}$, $\frac{9+7}{9}$;

357) Νὰ κάμης τὰς προσθέσεις :

α) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$, β) $\frac{1}{6}+\frac{5}{8}$, γ) $\frac{2}{3}+\frac{8}{5}$, δ) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$.

ε) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{12}$, στ) $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{11}{16}$.

Ὁμὰς Β΄

Γραπτῶς. 358) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ προσθέσεις :

$\frac{3}{4}+\frac{9}{10}$, $\frac{7}{10}+\frac{9}{25}$, $\frac{11}{14}+\frac{5}{21}$, $\frac{13}{16}+\frac{7}{12}$, $\frac{5}{13}+\frac{9}{11}$.

359) Ὁμοίως νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ προσθέσεις :

α) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$, β) $\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}$,

$\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}+\frac{5}{6}+\frac{19}{30}$,

$\frac{3}{8}+\frac{5}{6}+\frac{13}{24}$, γ) $\frac{5}{9}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$, $\frac{5}{12}+\frac{3}{8}+\frac{5}{6}$,

$\frac{5}{36}+\frac{3}{4}+\frac{4}{9}$, $\frac{3}{5}+\frac{5}{8}+\frac{7}{20}$, $\frac{3}{7}+\frac{3}{14}+\frac{3}{4}$.

360) Νὰ εὕρης τὰ ἀθροίσματα :

α) $12\frac{4}{5}+17\frac{9}{10}$, $33\frac{4}{9}+48\frac{23}{72}$, $38\frac{1}{15}+47\frac{1}{12}$,

$59\frac{5}{18}+74\frac{13}{24}$, $\quad 34\frac{5}{6}+69\frac{6}{13}$, $\quad 5\frac{7}{11}+8\frac{6}{13}$

β) $7\frac{1}{2}+8\frac{7}{12}+3\frac{5}{16}$, $\quad 4\frac{25}{36}+12\frac{5}{9}+22\frac{3}{4}+7\frac{5}{12}$

$14\frac{5}{72}+13\frac{17}{36}+15\frac{11}{18}+13\frac{7}{9}+24\frac{1}{8}$

$5\frac{11}{40}+8\frac{8}{9}+7\frac{11}{24}+\frac{23}{90}+3\frac{31}{45}$.

361) Ὁμοίως τὰ κάτωθι ἀθροίσματα

$2\frac{5}{6}$ στ. $+\ 4\frac{3}{4}$ στ. $+\ 5\frac{2}{3}$ στ.

$9\frac{1}{8}$ ὀκ. $+10\frac{1}{4}$ ὀκ. $+12\frac{3}{16}$ ὀκ. $+\ 2\frac{1}{2}$ ὀκ.

$18\frac{1}{5}$ χιλγρ. $+\ 13\frac{8}{25}$ χιλγρ. $+\ 4\frac{64}{126}$ χιλγρ. $+\ 25\frac{3}{5}$ χιλγρ.

$5\frac{1}{2}$ ὥρ. $+\ 9\frac{7}{12}$ ὥρ. $+15\frac{8}{15}$ ὥρ. $+\ 13\frac{3}{5}$ ὥρ.

$1\frac{1}{3}$ ἔτ. $+\ 2\frac{1}{2}$ ἔτ. $+\ 5\frac{1}{5}$ ἔτ. $+\ 8\frac{3}{7}$ ἔτ.

Ὁμὰς Γ΄

362. Ἓν δοχεῖον ζυγίζει $1\frac{3}{8}$ ὀκ. Τὸ ἔλαιον, τὸ ὁποῖον περιέχει, ζυγίζει $7\frac{5}{8}$ ὀκάδας. Ποῖον εἶναι τὸ μικτὸν βάρος τοῦ δοχείου;

363) Τὸ ἄνω ἔλαιον ἠγόρασεν ὁ ἔμπορος πρὸς $35\frac{17}{20}$ δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ τὸ ἐπώλησε μὲ κέρδος $7\frac{13}{20}$ δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσον τὸ ἐπώλησε τὴν ὀκᾶν;

364) Κατὰ τὴν συλλογὴν τῶν ἐλαιῶν, εἷς συνέλεξεν ἀπὸ μίαν ἐλαίαν $54\frac{3}{5}$ ὀκάδας, ἀπὸ ἄλλην $60\frac{4}{5}$ ὀκάδας καὶ ἀπὸ τρίτην $73\frac{3}{5}$ ὀκάδας. Πόσας ὀκάδας συνέλεξεν ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐλαίας ὁμοῦ;

365) Εἷς ἐλαιοπαραγωγὸς μετέφερεν εἰς ἓν ἐλαιοτριβεῖον τέσσαρας μεγάλους σάκκους ἐλαιῶν. Ἀπὸ τὰς ἐλαίας τοῦ πρώτου σάκκου ἐξήχθη τὸ ἔλαιον εἰς $\frac{50}{60}$ τῆς ὥρας. Ἀπὸ τὰς τοῦ β΄ σάκκου ἐξήχθη εἰς $\frac{48}{60}$ τῆς ὥρας, ἀπὸ τὰς τοῦ τρίτου ἐξήχθη εἰς $\frac{45}{60}$ τῆς ὥρας καὶ ἀπὸ τὰς ἐλαίας *τοῦ τετάρτου ἐξήχθη εἰς* $\frac{45}{60}$ *τῆς ὥρας. Ἐπὶ πόσον χρόνον διήρκεσεν ἡ ἐξαγωγὴ τοῦ ἐλαίου αὐτοῦ ;*

366) Τὰ ὑπολείμματα τῶν ἐλαιῶν (ἐλαιοπυρῆνες), τὰ ὁποῖα ἀπέμενον εἰς ἓν ἐλαιοτριβεῖον, ἦσαν εἰς μίαν ἡμέραν $257\frac{1}{2}$ *ὀκάδες καὶ τὴν ἄλλην ἦσαν* $249\frac{1}{4}$ *ὀκάδες. Πόσαι ὀκάδες ἐλαιοπυρήνων ἀπέμειναν εἰς τὰς δύο ταύτας ἡμέρας ;*

367) Εἰς ἓν δοχεῖον ἐλαιῶν ἔρριψέ τις $\frac{4}{5}$ *τῆς ὀκᾶς ἅλας, εἰς δεύτερον δοχεῖον ἔρριψε* $\frac{3}{4}$ *τῆς ὀκᾶς καὶ εἰς τρίτον ἔρριψεν* $\frac{9}{10}$ *τῆς ὀκᾶς. Πόσας ὀκάδας ἅλατος ἔρριψεν εἰς τὰ τρία δοχεῖα ὁμοῦ ;*

Ὁ μ ὰ ς Δ΄

368) Εἷς ἠγόρασεν σταφυλὰς καὶ ἐπώλησεν ἀπὸ αὐτὰς $108\frac{4}{5}$ *ὀκάδας τὴν μίαν ἡμέραν καὶ τὰς ἄλλας* $37\frac{1}{4}$ *ὀκάδας ἐπώλησε τὴν ἐπομένην. Πόσας ὀκάδας σταφυλὰς εἶχεν ἀγοράσει ;*

369) Ἐπώλησεν εἷς μίαν ἡμέραν $35\frac{3}{5}$ *ὀκάδας μῆλα,* $42\frac{5}{8}$ *ὀκάδας ἀχλάδια καὶ* $85\frac{7}{20}$ *ὀκάδας σταφυλάς. Πόσας ὀκάδας ὀπωρικῶν ἐπώλησε τὴν ἡμέραν αὐτήν ;*

370) Εἷς εἰς μίαν ἡμέραν ἐκέρδισεν ἀπὸ πορτοκάλλια $25\frac{3}{5}$ *δρχ. ἀπὸ λεμόνια* $12\frac{4}{5}$ *δραχ. ἀπὸ λαχανικὰ* $18\frac{7}{20}$ *δραχ. καὶ ἀπὸ μῆλα* $15\frac{1}{2}$ *δρχ. Πόσας δρχ. ἐκέρδισε τὴν ἡμέραν αὐτήν ;*

371) Εἷς ὀπωροπώλης ἔστειλεν εἰς τὴν οἰκίαν ἑνὸς πελάτου του τὴν μίαν ἡμέραν $2\frac{3}{8}$ *ὀκ. σταφυλῶν, τὴν δὲ ἐπομένην* $\frac{1}{2}$ *ὀκ. περισσότερον. Πόσας ὀκάδας σταφυλῶν ἀπέστειλεν ἐν ὅλῳ ;*

372) Ὁ ἄνω ὀπωροπώλης διὰ τὸ ὕδωρ, τὸ ὁποῖον ἐχρησιμοποίησεν εἰς τὸ κατάστημά του, ἐπλήρωσε τὴν πρώτην τριμηνίαν $628\frac{3}{4}$

δρχ. καὶ τὴν ἑπομένην $57\frac{4}{5}$ *δραχμὰς περισσότερον. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσε διὰ τὰς δύο τριμηνίας ὁμοῦ;*

373) Ὁ ἄνω ὑπελόγισεν, ὅτι τὰ ἔξοδα μιᾶς ἡμέρας διὰ τὸ κατάστημά του εἶναι $48\frac{3}{4}$ *δραχμαὶ δι' ἐνοίκιον,* $12\frac{4}{5}$ *δραχμαὶ διὰ φωτισμόν,* $9\frac{9}{20}$ *δραχμαὶ διὰ τὸ ὕδωρ,* $18\frac{1}{2}$ *δραχμαὶ διὰ φόρους καὶ 45 δραχ. διὰ τὴν ἀμοιβὴν ἑνὸς ὑπαλλήλου. Πόσαι δραχμαὶ ἐν ὅλῳ εἶναι τὰ ἔξοδα μιᾶς ἡμέρας;*

Β΄ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

143. Ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων ὁρίζεται ὅπως καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν ἀκεραίων. Αἱ μονάδες δὲ δυνατὸν νὰ εἶναι ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί.

144. Ἀφαίρεσις κλασμάτων.— Ἐὰν σκεφθῶμεν, ὅπως ἐσκέφθημεν καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν κλασμάτων, συνάγομεν τοὺς κάτωθι κανόνας.

α) **Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο κλάσματα ὁμώνυμα, ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ μειωτέου καὶ κάτωθεν τῆς διαφορᾶς γράφομεν τὸν ἴδιον παρονομαστήν.**

Ἤτοι $\frac{9}{16}-\frac{5}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{\alpha}{\mu}-\frac{\beta}{\mu}=\frac{\alpha-\beta}{\mu}$.

β) **Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα, πρέπει νὰ τρέψωμεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα.**

π.δ. $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{15}{20}-\frac{8}{20}=\frac{7}{20}$, $\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{6}{9}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$.

γ) **Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μεικτούς, ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ κατόπιν προσθέτομεν τὰς δύο διαφοράς.**

π.δ. 1) $8\frac{5}{7}-5\frac{2}{3}=8\frac{15}{21}-5\frac{14}{21}=3\frac{1}{21}$

2) $15\frac{3}{8}-6\frac{8}{9}=15\frac{27}{72}-6\frac{64}{72}$.

Ἀλλ' ἐδῶ παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου. Διὰ τοῦτο λαμβάνομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα τοῦ μειωτέου, τὴν τρέπομεν εἰς $\frac{72}{72}$ καὶ τὴν προσθέτομεν εἰς τὸ κλάσμα $\frac{27}{72}$. Ἔχομεν δὲ οὕτω νὰ ἀφαιρέσωμεν $14\frac{99}{72} - 6\frac{64}{72} = 8\frac{35}{72}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν $3 - 2\frac{4}{7} = 2\frac{7}{7} - 2\frac{4}{7} = \frac{3}{7}$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

Ἀπὸ μνήμης. 374) *Νὰ κάμῃς τὰς ἀφαιρέσεις:*

α) $\frac{28}{41} - \frac{19}{41}$, $\frac{35}{64} - \frac{19}{64}$, $\frac{87}{125} - \frac{38}{125}$, $\frac{217}{250} - \frac{126}{250}$

β) $23\frac{43}{53} - \frac{19}{53}$, $37\frac{18}{25} - \frac{12}{25}$, $35\frac{13}{15} - 26\frac{5}{15}$, $58\frac{26}{35} - 32\frac{9}{35}$.

γ) $1 - \frac{8}{9}$, $1 - \frac{13}{18}$, $2 - \frac{29}{75}$, $2 - \frac{63}{600}$

δ) $12 - 1\frac{7}{12}$, $32 - 7\frac{3}{4}$, $21 - 10\frac{27}{40}$, $32 - 19\frac{131}{200}$

ε) $\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$, $\frac{2}{3} - \frac{1}{9}$, $\frac{1}{5} - \frac{1}{15}$, $\frac{7}{15} - \frac{2}{5}$

στ) $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, $\frac{1}{5} - \frac{1}{6}$, $\frac{1}{7} - \frac{1}{9}$, $\frac{1}{8} - \frac{1}{11}$.

375) *Ὁμοίως νὰ κάμῃς τὰς ἀφαιρέσεις:*

α) $\frac{15}{16}$ *ὀκ.* — $\frac{3}{4}$ *ὀκ.*, $\frac{9}{10}$ *μέτρ.* — $\frac{3}{5}$ *μέτρ.*, $\frac{24}{25}$ *χλμ.* — $\frac{25}{50}$ *χλμ.*

β) 15 *ὥρ.* — $\frac{37}{60}$ *ὥρ.*, 1 *ὀκ.* — $\frac{225}{400}$ *ὀκ.*, 1 *ἔτ.* — $\frac{175}{365}$ *ἔτ.*

Ὁμὰς Β΄

Γραπτῶς. 376) *Νὰ ἐκτελέσῃς τὰς ἀφαιρέσεις:*

α) $\frac{17}{18} - \frac{11}{12}$, $\frac{25}{42} - \frac{17}{60}$, $\frac{89}{96} - \frac{47}{54}$, $\frac{159}{160} - \frac{111}{200}$

β) $10\frac{9}{10} - 6\frac{11}{12}$, $26\frac{14}{25} - 9\frac{13}{15}$, $17\frac{29}{36} - 12\frac{41}{42}$, $28\frac{19}{120} - 27\frac{109}{180}$.

377) *Νὰ εὕρῃς τὰ ἐξαγόμενα τῶν πράξεων:*

α) $\frac{7}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$, $\frac{7}{8} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$,

$\frac{11}{12} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4}$, $\frac{13}{16} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$, $\frac{19}{24} - \frac{3}{8} - \frac{1}{4}$, β) $25\frac{3}{4} - 7\frac{1}{3} - 8\frac{5}{12}$, $39\frac{5}{8} - 12\frac{4}{5} - 9\frac{2}{3}$,

$87\frac{6}{7} - 13\frac{9}{14} - 25\frac{2}{5}$, $\left(13\frac{7}{8} + 8\frac{2}{3}\right) - \left(7\frac{12}{16} + 5\frac{4}{9} + 3\frac{5}{12}\right)$.

378) Νὰ συμπληρωθοῦν αἱ ἰσότητες:

α) $\frac{7}{9} + \ldots = \frac{17}{18}$, β) $\frac{2}{13} + \ldots = \frac{4}{11}$, γ) $\ldots + \frac{25}{36} = \frac{57}{60}$,

δ) $14\frac{7}{18} + \ldots = 31\frac{23}{36}$ ε) $52\frac{35}{72} + \ldots = 100\frac{7}{24}$ ς) $33\frac{6}{35} + \ldots = 44\frac{2}{21}$.

Ὁμὰς Γ΄

379) Εἰς ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{5}{7}$ προσθέτομεν τὸν 3. Νὰ συγκρίνῃς τὸ νέον κλάσμα πρὸς τὸ δοθέν.

380) Τί παθαίνει τὸ κλάσμα $\frac{7}{9}$, ἐὰν ἀπὸ ἕκαστον τῶν ὅρων αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ ὁ 2;

381) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι $7\frac{2}{3}$ καὶ ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶναι $\frac{6}{7}$. Ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος;

382) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν $17\frac{8}{9}$, διὰ νὰ λάβωμεν ἄθροισμα $41\frac{5}{8}$;

383) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν $85\frac{3}{5}$, διὰ νὰ λάβωμεν διαφορὰν $27\frac{17}{25}$;

384) Τὸ ἄθροισμα τριῶν κλασμάτων εἶναι $\frac{11}{12}$. Τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν εἶναι $\frac{1}{3}$ καὶ τὸ ἄλλο $\frac{2}{5}$. Ποῖον εἶναι τὸ τρίτον κλάσμα;

Ὁμὰς Δ΄

385) Εἷς πεζοπόρος διέτρεξεν εἰς μίαν ὥραν $6\frac{3}{4}$ χιλιόμ. καὶ εἷς ποδηλάτης $14\frac{2}{5}$. Πόσα χιλμ. περισσότερον διέτρεξεν ὁ ποδηλάτης;

386) Εἷς ἄλλος ποδηλάτης διέτρεξεν εἰς μίαν ὥραν $17\frac{4}{5}$ χιλιόμ. καὶ ἓν αὐτοκίνητον διέτρεξεν εἰς μίαν ὥραν $48\frac{5}{8}$ χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα διέτρεξεν περισσότερα τὸ αὐτοκίνητον;

387) Ἓν αὐτοκίνητον καὶ εἷς σιδηρόδρομος ἀνεχώρησαν ἐκ τῆς πόλεως Α τὴν αὐτὴν στιγμήν. Καὶ τὸ μὲν αὐτοκίνητον ἔφθασεν εἰς τὴν πόλιν Β μετὰ $8\frac{4}{5}$ ὥρας, ὁ δὲ σιδηρόδρομος ἔφθασεν εἰς τὴν αὐτὴν πόλιν Β μετὰ $9\frac{1}{6}$ ὥρας. Ποῖον ἐκ τῶν δύο ἔφθασεν εἰς τὴν πόλιν Β ἐνωρίτερον καὶ εἰς πόσον χρόνον;

388) Ἀτμόπλοιον ἀνεχώρησεν ἐκ τοῦ λιμένος Α τὴν $6\frac{3}{4}$ π.μ. καὶ ἔφθασεν εἰς τὸν λιμένα Β μετὰ $12\frac{1}{3}$ ὥρας. Ποίαν ὥραν ἔφθασεν;

389) Ἓν ἀτμόπλοιον ἀνεχώρησεν ἐκ τοῦ λιμένος Α τὴν $9\frac{1}{4}$ π. μ. καὶ ἔφθασεν εἰς τὸν λιμένα Β τὴν $11\frac{43}{60}$ π. μ. τῆς ἑπομένης ἡμέρας. Πόσας ὥρας ἐταξίδευσεν;

390) Εἷς κάτοικος τῶν Ἀθηνῶν ἀνεχώρησεν ἐκ τῆς οἰκίας του τὴν 7 π. μ. μιᾶς ἡμέρας καὶ ἔφθασεν εἰς τὸ ἀεροδρόμιον τοῦ Τατοΐου τὴν $7\frac{1}{2}$ π. μ. Ἐπεβιβάσθη ἐκεῖ τοῦ ἀεροπλάνου καὶ ἔφθασεν εἰς τὴν Θεσσαλονίκην τὴν $9\frac{1}{4}$. Εἷς ἄλλος ἀνεχώρησεν ἐκ τῆς οἰκίας του ἐπίσης τὴν 7 π. μ. τῆς αὐτῆς ἡμέρας καὶ μετέβη εἰς τὸν σταθμὸν Λαρίσσης τὴν $7\frac{1}{4}$ π. μ. Ἐκεῖ ἐπεβιβάσθη τοῦ σιδηροδρόμου καὶ ἔφθασεν εἰς τὴν Θεσσαλονίκην τὴν 10ην μ. μ. τῆς αὐτῆς ἡμέρας. α) Πόσος χρόνος μεσολαβεῖ δι' ἕκαστον ταξειδιώτην ἀπὸ τῆς στιγμῆς, ποὺ ἀνεχώρησεν ἐκ τῆς οἰκίας του, μέχρι τῆς στιγμῆς ποὺ ἔφθασεν εἰς Θεσσαλονίκην; β) Πόσον χρόνον ἐκέρδισεν ὁ ταξειδεύσας διὰ τοῦ ἀεροπλάνου;

Ὁμὰς Ε΄

391) Μία ἐργάτρια ὕφανεν εἰς ἕνα μῆνα ὕφασμα $320\frac{3}{4}$ πήχεων καὶ μία ἄλλη ὕφανεν εἰς ἕνα μῆνα ὕφασμα $325\frac{2}{5}$ πήχεων. Πόσον ὕφασμα ὕφανεν περισσότερον ἡ δευτέρα ἐργάτρια;

392) Μία ἐκέντησεν εἰς μίαν ἑβδομάδα τὸ $\frac{1}{3}$ ἑνὸς τραπεζομανδήλου. Τὴν ἄλλην ἑβδομάδα ἐκέντησε τὰ $\frac{5}{12}$ αὐτοῦ καὶ τὴν τρίτην

ἐκέντησε τὸ ὑπόλοιπον. Πόσον μέρος αὐτοῦ ἐκέντησε τὴν τρίτην ἑβδομάδα ;

393) Τέσσαρες ὁμάδες ἐργατῶν ἀνέλαβον νὰ ἐπισκευάσουν δρόμον 70 $\frac{7}{10}$ χιλιομ. Ἡ Α ὁμὰς ἀνέλαβε νὰ ἐπισκευάση $17\frac{4}{5}$ χιλμ., ἡ Β $17\frac{1}{2}$ χιλμ. καὶ ἡ Γ 17 $\frac{2}{5}$ χιλμ. Πόσα χιλιόμετρα ἀνέλαβεν ἡ Δ ὁμάς ;

394. Τρεῖς ἐργάται ἤνοιξαν ἕνα χάνδακα. Ὁ πρῶτος ἤνοιξε 12 $\frac{7}{20}$ μέτρα μῆκος, ὁ δεύτερος ἤνοιξεν 3 μέτρα περισσότερον ἀπὸ τὸν πρῶτον καὶ ὁ τρίτος $1\frac{3}{4}$ μέτρα περισσότερον ἀπὸ τὸν δεύτερον. Πόσα μέτρα ἤνοιξαν οἱ τρεῖς ἐργάται ὁμοῦ ;

395) Εἷς ἐργάτης ἔσκαψεν εἰς ἕνα ἀγρὸν τὴν μίαν ἡμέραν 183 $\frac{1}{2}$ τετρ. μέτρ., τὴν δευτέραν ἡμέραν ἔσκαψε $10\frac{4}{5}$ τετρ. μέτρα ὀλιγώτερον καὶ τὴν τρίτην ἡμέραν ἔσκαψεν $8\frac{3}{4}$ μέτρα ὀλιγώτερον ἀπὸ ὅ,τι ἔσκαψε τὴν δευτέραν ἡμέραν. Πόσα τετρ. μέτρα ἔσκαψε τὰς τρεῖς ἡμέρας ὁμοῦ ;

396) Μία ἐργάτρια ὕφανεν εἰς μίαν ἑβδομάδα τάπητα 50 τετρ. μέτρων, εἰς τὴν δευτέραν ἑβδομάδα ὕφανεν τάπητα $58\frac{1}{2}$ τετρ. μέτρων καὶ εἰς τὴν τρίτην ὕφανεν τάπητα $60\frac{8}{10}$ τετρ. μέτρα. Μία ἄλλη ἐργάτρια ὕφανεν εἰς τὰς τρεῖς αὐτὰς ἑβδομάδας τάπητα α) 35 $\frac{3}{5}$ β) 37 $\frac{3}{4}$ καὶ γ) 42 τετρ. μέτρων. Πόσον ὕφανεν περισσότερον ἡ πρώτη ἐργάτρια κατὰ τὰς τρεῖς ἑβδομάδας ὁμοῦ ;

397) Ἐργοστάσιον ταπήτων εἶχε 375 ὀκάδας μαλλίου πρώτης ποιότητος, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἐχρησιμοποίησε μέχρι σήμερον 70 $\frac{1}{4}$ ὀκάδας. Εἶχε δὲ καὶ 215 $\frac{1}{4}$ ὀκάδας μαλλίου δευτέρας ποιότητος, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἐχρησιμοποίησε 43 $\frac{2}{5}$ ὀκάδας. Πόσαι ὀκάδες μαλλίου τῆς μιᾶς ποιότητος τοῦ μένουν σήμερον ἀχρησιμοποίητοι περισσότεραι ἀπὸ τὰς ὀκάδας τῆς ἄλλης ;

Γ΄. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΕΠΙ ΑΚΕΡΑΙΟΝ

145. Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον.—Π ρ ό β λ η μ α. **Τὸ 1 δράμιον ἑνὸς νήματος ἀξίζει $\frac{7}{8}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον ἀξίζουν τὰ 4 δράμια τοῦ ἰδίου νήματος ;**

Ἀξίζουν $\frac{7}{8}$ δραχ. $+$ $\frac{7}{8}$ δραχ. $+$ $\frac{7}{8}$ δραχ. $+$ $\frac{7}{8}$ δραχ. Ἀλλ' ἐδῶ παρατηροῦμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸ $\frac{7}{8}$ τέσσαρας φοράς· ὥστε τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα δυνάμεθα νὰ τὸ γράψωμεν $\frac{7}{8}$ δρχ. $\times 4$. Ἀλλ' ὁ πολλαπλασιασμὸς οὗτος σημαίνει νὰ κάμωμεν τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$ τέσσαρας φορὰς μεγαλύτερον. Ἀλλ' ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψει τὰς ἰδιότητας 134, 135, εὑρίσκομεν $\frac{7}{8}$ δραχ. $\times 4 = \frac{7 \times 4}{8}$ δρχ. $=$ $\frac{28}{8}$ δρχ. ἢ $\frac{7}{8}$ δρχ. $\times 4 = \frac{7}{8:4}$ δρχ. $= \frac{7}{2}$ δρχ.

Καὶ πράγματι διότι εἶναι $\frac{7}{8} + \frac{7}{8} + \frac{7}{8} + \frac{7}{8} = \frac{7 \times 4}{8} =$ $\frac{28}{8} = \frac{7}{2}$. Τὰ 4 δράμια λοιπὸν ἀξίζουν $\frac{7}{2}$ δρχ ἢ $3\frac{1}{2}$ δρχ.

Ὥστε: **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν ἢ διαιροῦμεν τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ ἀκεραίου** (ἐὰν διαιρῆται).

Π.δ. $\frac{7}{20} \times 5 = \frac{7}{4}$, $\frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5}$, $\frac{5}{8} \times 8 = 5$.

146. Πολλαπλασιασμὸς μεικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιον. — Π ρ ό β λ η μ α. **Εἷς ἐμπορορράπτης κατεσκεύασεν 7 ἐνδυμασίας· ἐχρειάσθη δὲ διὰ κάθε ἐνδυμασίαν $4\frac{3}{8}$ πήχεις ὑφάσματος. Πόσους πήχεις ἐχρειάσθη ἐν ὅλῳ ;**

Ἐχρειάσθη ἐν ὅλῳ $4\frac{3}{8}$ πήχ. $\times 7$.

Ἀλλ' εἶναι $(4 + \frac{3}{8}) \times 7 = 4 \times 7 + \frac{3}{8} \times 7 = 28 + \frac{21}{8} = 28$ $+ 2\frac{5}{8} = 30\frac{5}{8}$ (§ 64). Ὥστε $30\frac{5}{8}$ πήχεως ἐχρειάσθη ἐν ὅλῳ.

Ὥστε: **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μεικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ μεικτοῦ**

καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα αὐτοῦ καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ δύο γινόμενα.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

Ἀπὸ μνήμης. 398) *Νὰ εὕρῃς τὰ κάτωθι γινόμενα*

α) $\frac{2}{15}\times 7$, $\frac{4}{21}\times 5$, $\frac{3}{35}\times 11$, $\frac{8}{87}\times 10$

β) $\frac{2}{7}\times 5$, $\frac{2}{5}\times 7$, $\frac{5}{11}\times 4$, $\frac{9}{13}\times 3$

γ) $\frac{1}{8}\times 8$, $\frac{1}{9}\times 9$, $\frac{3}{12}\times 12$, $\frac{16}{21}\times 21$

δ) $\frac{1}{8}\times 16$, $\frac{1}{9}\times 27$, $\frac{3}{12}\times 36$, $\frac{16}{21}\times 42$

ε) $\frac{1}{4}\times 2$, $\frac{1}{6}\times 3$, $\frac{2}{5}\times 6$, $\frac{5}{12}\times 14$.

399) *Τί μᾶς λέγει ἡ ἰσότης* $\frac{\alpha}{\beta}\times\gamma=\frac{\alpha\times\gamma}{\beta}$ *ἢ* $\frac{\alpha}{\beta:\gamma}$;

Γραπτῶς. 400) *Ὁμοίως νὰ εὕρῃς τὰ γινόμενα:*

α) $3\frac{1}{2}\times 2$, $5\frac{1}{5}\times 5$, $3\frac{2}{7}\times 7$, $8\frac{5}{9}\times 9$

β) $2\frac{1}{3}\times 6$, $4\frac{1}{3}\times 9$, $2\frac{1}{4}\times 16$, $1\frac{1}{5}\times 25$

γ) $11\frac{1}{4}\times 12$, $9\frac{1}{6}\times 3$, $12\frac{1}{12}\times 3$, $7\frac{2}{10}\times 5$.

401) *Νὰ εὕρῃς τὰ κάτωθι γινόμενα*

α) $\frac{15}{16}\times 35$, $\frac{7}{8}\times 125$, $\frac{19}{40}\times 95$, $\frac{11}{12}\times 248$

$\frac{121}{272}\times 84$, $18\frac{5}{6}\times 25$, $71\frac{15}{21}\times 19$, $101\frac{27}{35}\times 41$

β) $36\frac{2}{3}\times 12$, $15\frac{7}{12}\times 60$, $33\frac{11}{17}\times 51$, $9\frac{27}{35}\times 84$

γ) $17\frac{5}{18}\times 19$, $21\frac{11}{12}\times 7$, $42\frac{24}{25}\times 6$, $50\frac{30}{31}\times 8$.

402) *Νὰ εὕρῃς τὰ γινόμενα:*

α) $\frac{9}{10}$ δρχ.$\times 18$, $\frac{11}{15}$ ὥρ.$\times 12$, $\frac{7}{24}$ ἡμέρ.$\times 40$, $\frac{29}{36}$ ἔτη$\times 42$.

β) $13\frac{5}{8}$ πήχ.$\times 12$, $7\frac{2}{9}$ ὥρ.$\times 15$, $12\frac{9}{11}$ ἡμέρ.$\times 30$, $9\frac{14}{25}$ ὀκ.$\times 35$.

Ὁμὰς Β΄

403) Ὁ Νῖκος δίδει κάθε ἡμέραν εἰς ἕνα πτωχὸν $\frac{1}{2}$ τῆς δραχμῆς. Πόσας δραχμὰς δίδει εἰς 7 ἡμέρας ;

404) Ἡ Μαρία δίδει κάθε ἡμέραν εἰς ἕνα πτωχὸν $\frac{4}{5}$ τῆς δραχμῆς. Πόσας δραχμὰς δίδει εἰς μίαν ἑβδομάδα καὶ πόσας εἰς μῆνα;

405) Τὸ τμῆμα προστασίας μητέρων τοῦ Πατριωτικοῦ Ἱδρύματος ἔδωσε μίαν ἡμέραν εἰς 150 ἀπόρους μητέρας $\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς γάλα εἰς κάθε μίαν. Πόσας ὀκάδας γάλα ἔδωσεν ἐν ὅλῳ ;

406) Τὸ ἴδιον τμῆμα ἔδωσεν εἰς ἄλλην ἡμέραν εἰς ἀπόρους μητέρας 175 φιάλας, κάθε μία τῶν ὁποίων περιεῖχε $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς γάλα. Πόσας ὀκάδας γάλα περιεῖχον ὅλαι αἱ φιάλαι αὐταί ;

407) Τὸ ἴδιον Ἵδρυμα ἔδωσε μίαν ἡμέραν εἰς 72 ἀπόρους οἰκογενειάρχας σάπωνα, ἔδωσε δὲ εἰς τὸν καθένα $1\frac{1}{2}$ ὀκάδας. Πόσας ὀκάδας σάπωνος διένειμε τὴν ἡμέραν αὐτήν ;

408) Ἐκ τῶν 30 μαθητῶν μιᾶς τάξεως προσέφερεν ὁ καθεὶς εἰς ἔρανον ὑπὲρ τῶν πτωχῶν $7\frac{1}{2}$ δρχ. Πόσας δρχ. ἔδωσεν ὅλη ἡ τάξις ;

409) Εἷς φιλανθρωπικὸς σύλλογος ἔδωσε τρόφιμα εἰς 150 ἀπόρους οἰκογενείας. Ἡ ἀξία αὐτῶν διὰ κάθε οἰκογένειαν ἦτο $27\frac{3}{4}$ δραχμαί. Πόση ἦτο ἡ ἀξία ὅλων τῶν τροφίμων, τὰ ὁποῖα ἐδόθησαν ;

410) Τὰς παραμονὰς τῶν Χριστουγέννων ἐδόθησαν ὑπὸ μιᾶς κοινότητος εἰς 250 πτωχοὺς καὶ εἰς τὸν καθένα ἀνὰ εἷς ἄρτος ἀξίας $12\frac{1}{2}$ δρχ. καὶ μία ὀκᾶ κρέατος ἀξίας $46\frac{3}{5}$ δρχ. Πόσας δραχμὰς ἤξιζον ἐν ὅλῳ τὰ εἴδη, τὰ ὁποῖα ἐδόθησαν εἰς τοὺς πτωχοὺς αὐτούς ;

411) Εἰς τὰ μαθητικὰ συσσίτια μιᾶς πόλεως συσσιτοῦν 80 ἄποροι μαθηταί. Εἰς αὐτοὺς δίδεται τὴν ἑβδομάδα : δύο φορὰς κρέας ἀπὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ὀκᾶς εἰς τὸν καθένα, δύο φορὰς ὄσπρια ἀπὸ $\frac{1}{10}$ τῆς ὀκᾶς, μίαν φορὰν ἰχθεῖς ἀπὸ $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκᾶς, καὶ μίαν φορὰν λαχανικὰ ἀπὸ

$\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσας ὀκάδας ἀπὸ κάθε εἶδος τῶν τροφίμων αὐτῶν ἐξώδευσαν τὰ συσσίτια τῆς πόλεως αὐτῆς εἰς μίαν ἑβδομάδα;

Δ΄. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΔΙ' ΑΚΕΡΑΙΟΥ

147. Διαίρεσις ἀκεραίου δι' ἀκεραίου.—Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πόσον ἠγόρασέ τις τὸ 1 δράμιον νήματος, ὅταν διὰ 5 δράμια ἔδωσεν 11 δραχμάς, θὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν 11 δρχ. : 5. Ἀλλὰ γνωρίζομεν (§ 127), ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου εἶναι κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην.

Εἶναι λοιπὸν 11 δρχ. : $5 = \frac{11}{5}$ δραχμαί.

148. Διαίρεσις κλάσματος δι' ἀκεραίου.—Π ρ ό β λ η μ α. **Εἷς ἠγόρασεν 8 δράμια νήματος πρὸς $\frac{32}{5}$ δρχ. Πόσον ἠγόρασε τὸ ἓν δράμιον;**

Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ διαιρέσωμεν $\frac{32}{5}$ δρχ. : 8, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος, ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 8, νὰ δίδῃ τὸν $\frac{32}{5}$. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι 8 φορὰς μικρότερος τοῦ $\frac{32}{5}$. Γνωρίζομεν δέ, πῶς γίνεται ἓν κλάσμα ὡρισμένας φορὰς μικρότερον.

Ἔχομεν ἑπομένως:

$$\frac{32}{5} : 8 = \frac{4}{5} \quad \text{ἢ} \quad \frac{32}{5} : 8 = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}.$$

Ὥστε: **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ ἀκεραίου** (ἂν διαιρῆται) **ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστήν του ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.**

149. Διαίρεσις μεικτοῦ δι' ἀκεραίου.—Π ρ ό β λ η μ α. **Ὕφασμα 12 $\frac{3}{4}$ μέτρων ἐκόπη εἰς 3 ἴσα τεμάχια. Πόσων μέτρων εἶναι τὸ καθὲν ἀπὸ αὐτὰ τὰ τεμάχια;**

Διὰ νὰ εὕρωμεν τοῦτο πρέπει νὰ διαιρέσωμεν 12 $\frac{3}{4}$ διὰ 3. Εἶναι δὲ $12\frac{3}{4} : 3 = \left(12 + \frac{3}{4}\right) : 3 = 12 : 3 + \frac{3}{4} : 3 = 4 + \frac{1}{4} = 4\frac{1}{4}$.

Ἤτοι τὸ καθὲν τεμάχιον εἶναι 4 $\frac{1}{4}$ πήχεις.

Ὥστε : **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν μεικτὸν δι' ἀκεραίου, διαιροῦμεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον τοῦ μεικτοῦ καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα του καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ δύο πηλίκα.**

Σημείωσις. Δυνάμεθα, ἐννοεῖται, νὰ τρέπωμεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα νὰ διαιροῦμεν.

Π.δ. $15\frac{7}{9} : 6 = 15 : 6 + \frac{7}{9} : 6 = \frac{15}{6} + \frac{7}{54} = \frac{135}{54} + \frac{7}{54} = 2\frac{34}{54}$

ἢ $15\frac{7}{9} : 6 = \frac{142}{9} : 6 = \frac{142}{54} = 2\frac{34}{54}$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς Α'

Ἀπὸ μνήμης. *412) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα :*

$\frac{6}{7} : 3,\quad \frac{18}{25} : 9,\quad \frac{35}{44} : 7,\quad \frac{72}{91} : 8,\quad \frac{25}{27} : 25,\quad \frac{49}{84} : 49,$

$9\frac{9}{13} : 9,\quad 12\frac{8}{15} : 4,\quad 75\frac{50}{97} : 25,\quad 108\frac{27}{32} : 27,\quad 140\frac{80}{81} : 20,$

$1\frac{2}{3} : 3,\quad 1\frac{1}{4} : 5,\quad 2\frac{1}{7} : 4,\quad 3\frac{4}{5} : 7,\quad 8\frac{7}{11} : 9,\quad 5\frac{9}{25} : 8.$

Γραπτῶς. *413) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα :*

$\frac{64}{85} : 18,\quad \frac{72}{89} : 27,\quad \frac{44}{75} : 77,\quad \frac{39}{105} : 65,\quad \frac{51}{90} : 85,\quad \frac{126}{243} : 105,$

$4\frac{8}{25} : 36,\quad 18\frac{3}{16} : 15,\quad 79\frac{3}{5} : 14,\quad 175\frac{7}{8} : 15,\quad 118\frac{1}{3} : 45.$

414) Τί μᾶς λέγει ἡ ἰσότης $\frac{\alpha}{\beta} : \gamma = \frac{\alpha : \gamma}{\beta}$ *ἢ* $\frac{\alpha}{\beta \times \gamma}$ *;*

Καὶ τί ἡ ἰσότης $\alpha\frac{6}{\gamma} : \delta = \alpha : \delta + \frac{\beta}{\gamma} : \delta$ *;*

Ὁμὰς Β'

415) Μία ἐργάτρια ὑφαίνει εἰς 16 ἡμέρας 150 πήχεις ὑφάσματος. Πόσους πήχεις ὑφαίνει εἰς 1 ἡμέραν ;

416) Μία ἐργάτρια ὑφαίνει εἰς 4 ὥρας τάπητα $\frac{3}{4}$ *τοῦ μέτρου. Πόσον ὑφαίνει εἰς μίαν ὥραν ;*

417) Διὰ νὰ ράψῃ μία ἐργάτρια 5 ὑποκάμισα, ἐχρειάσθησαν $20\frac{1}{2}$ *μέτρα ὑφάσματος. Πόσα μέτρα ἐχρειάσθη δι' ἓν ὑποκάμισον ;*

418) 4 μέτρα ὑφάσματος δι' ὑποκάμισα ἀξίζουν $160\frac{4}{5}$ δραχμάς. Πόσον ἀξίζει τὸ 1 μέτρον ;

419) Μία ἐργάτρια συνεφώνησε νὰ ὑφάνῃ εἰς 8 ἡμέρας ὕφασμα μήκους $24\frac{4}{5}$ μέτρων. Πόσα μέτρα πρέπει νὰ ὑφάνῃ εἰς μίαν ἡμέραν ;

420) Εἷς ἐργάτης ἐφύτευσε 30 δένδρα εἰς μίαν σειρὰν μήκους $101\frac{1}{2}$ μέτρων. Πόσον ἀπέχει τὸ ἓν δένδρον ἀπὸ τὸ ἄλλο ;

421) Ὁ ἄνω ἐργάτης ἔλαβε διὰ τὴν φύτευσιν τῶν 30 δένδρων $262\frac{1}{2}$ δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἔλαβε διὰ τὸ ἓν δένδρον ;

422) Μία ὁμὰς ἐργατῶν ἐκαλλιέργησεν διὰ βενζιναρότρου $1920\frac{3}{8}$ στρέμματα εἰς 12 ἡμέρας. Πόσα στρέμματα ἐκαλλιέργησεν εἰς μίαν ἡμέραν ;

Ε΄. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΕΠΙ ΚΛΑΣΜΑ. ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

150. Γνωρίζομεν, ὅτι 27×3 π.χ. σημαίνει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸ 27, 3 φοράς. Ἀλλ' ἐὰν γράψωμεν $27\times\frac{3}{4}$; Φυσικὰ ὁ πολλαπλασιασμὸς $27\times\frac{3}{4}$ δὲν δύναται νὰ σημαίνῃ, ὅ,τι καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς 27×3. Διότι δὲν ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν, ὅτι $27\times\frac{3}{4}$ σημαίνει τὸ 27 νὰ τὸ ἐπαναλάβωμεν $\frac{3}{4}$ φοράς· ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιασμὸς $27\times\frac{3}{4}$ *καὶ γενικῶς ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα* πρέπει νὰ ἔχῃ σημασίαν, διὰ νὰ εὕρωμεν αὐτήν, εἶναι ἀνάγκη νὰ γενικεύσωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ *πολλαπλασιασμοῦ*. Πρὸς τοῦτο ἂς λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα :

Μία ὀκᾶ μῆλα ἀξίζει 27 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ;

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ἂν ἐγνωρίζομεν τὴν ἀξίαν τοῦ 1 τετάρτου τῆς ὀκᾶς, εὐκόλως θὰ εὑρίσκομεν τὴν ἀξίαν τῶν 3 τετάρτων αὐτῆς.

Ἀλλ' ἡ μία ὀκᾶ, ἡ ὁποία ἀξίζει 27 δραχμάς, ἔχει τέσσαρα τέταρτα $\left(\frac{4}{4}\right)$· ὥστε τὸ ἓν τέταρτον αὐτῆς ἀξίζει τέσσαρας φορὰς ὀλιγώτερον. Ἤτοι ἀξίζει $\frac{27}{4}$ δραχμὰς καὶ ἑπομένως τὰ τρία τέταρτα αὐτῆς ἀξίζουν τρεῖς φορὰς περισσότερον ἀπὸ ὅ,τι ἀξίζει τὸ ἓν τέταρτον. Ἤτοι ἀξίζουν $\frac{27}{4}$ δρχ. $+ \frac{27}{4}$ δρχ. $+ \frac{27}{4}$ δρχ. $= \frac{27}{4}$ δρχ. $\times 3 = 6\frac{3}{4}$ δρχ. $\times 3 = 20\frac{1}{4}$ δραχμάς.

Τώρα παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς: Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς (ἀκεραίας) μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ πολλῶν κλασματικῶν μονάδων. Εὕρομεν δὲ τὴν ζητουμένην τιμήν, ἀφοῦ ἐπανελάβομεν 3 φορὰς τὸ τέταρτον μέρος τοῦ 27. Ἤτοι ἐπανελάβομεν μέρος τοῦ ἀριθμοῦ πολλὰς φοράς.

Ἀλλ' ὅπως τὴν ἐπανάληψιν ὁλοκλήρου τοῦ ἀριθμοῦ πολλὰς φορὰς τὴν ἐκαλέσαμεν πολλαπλασιασμόν, οὕτω συμφωνοῦμεν νὰ καλέσωμεν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν ἐπανάληψιν μέρους τοῦ ἀριθμοῦ πολλὰς φοράς.

Κατὰ τοῦτο λοιπὸν καὶ τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα γνωρίζομεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς (ἀκεραίας) μονάδος καὶ ζητοῦμεν τὴν τιμὴν πολλῶν κλασματικῶν μονάδων, θὰ λέγωμεν, ὅτι λύονται διὰ πολλαπλασιασμοῦ. Καὶ πολλαπλασιαστέος θὰ εἶναι ἐπίσης ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ ἀριθμός, ὅστις ἐκφράζει πόσαι εἶναι αἱ κλασματικαὶ μονάδες (§ 62). Ὥστε διὰ τὴν λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος γράφομεν:

27 δρχ. $\times \frac{3}{4} = \frac{27}{4}$ δρχ. $+ \frac{27}{4}$ δρχ. $+ \frac{27}{4}$ δρχ. $= \frac{27}{4}$ δρχ. $\times 3$.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι: **Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα πρέπει νὰ σημαίνῃ τὴν ἐπανάληψιν μέρους τινὸς τοῦ ἀριθμοῦ.**

Οὕτω $15 \times \frac{4}{7} = \frac{15}{7} + \frac{15}{7} + \frac{15}{7} + \frac{15}{7} = \frac{15}{7} \times 4$.

151. Γενικὸς ὁρισμὸς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.— Πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐπαναλαμβάνομεν ἕνα ἀριθμὸν ἢ μέρος αὐτοῦ πολλὰς φοράς.

152. Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα. — Εἰς τὸ πρόβλημα τῆς § 150 εἴδομεν ὅτι:

27 δρχ. $\times \frac{3}{4} = \frac{27}{4}$ δρχ. $+ \frac{27}{4}$ δρχ. $+ \frac{27}{4}$ δρχ. Ἀλλ' $\frac{27}{4} + \frac{27}{4} + \frac{27}{4} = \frac{27+27+27}{4} = \frac{27\times3}{4} = \frac{81}{4} = 20\frac{1}{4}$.

Ὁμοίως εἶναι:

$$19 \times \frac{4}{5} = \frac{19}{5} + \frac{19}{5} + \frac{19}{5} + \frac{19}{5} = \frac{19+19+19+19}{5} = \frac{19\times4}{5}.$$

Ὥστε: **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφομεν τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ.**

Σημείωσις. Ἐπειδὴ εἶναι $8 \times \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$, ἕπεται, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλασματικὴν μονάδα καὶ ἡ διαίρεσις αὐτοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτῆς ἔχουν τὴν αὐτὴν σημασίαν. Διὰ τοῦτο λέγομεν, διαιροῦμεν π.χ. διὰ 2 ἢ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ $\frac{1}{2}$.

153. Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα. — Ἐὰν ἡ ὀκᾶ νήματος ἀξίζῃ $\frac{17}{20}$ τῆς λίρας, πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτῆς;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\frac{17}{20}$ λίρ. $\times \frac{3}{8}$, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{17}{20}$ καὶ νὰ λάβωμεν αὐτὸ τρεῖς φοράς.

Ἀλλὰ τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{17}{20}$ εἶναι (§ 134, 135) $\frac{17}{20\times8}$ καὶ τὸ τριπλάσιον τοῦ $\frac{17}{20\times8}$ εἶναι $\frac{17\times3}{20\times8}$.

Ὥστε εἶναι $\frac{17}{20} \times \frac{3}{8} = \frac{17\times3}{20\times8} = \frac{51}{160}$ λίρας.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι $\frac{5}{9} \times \frac{7}{8} = \frac{5\times7}{9\times8} = \frac{35}{72}$.

Ἐκ τῶν παραδειγμάτων τούτων νὰ ἐξαχθῇ ὁ σχετικὸς κανών.

Σημείωσις. $\frac{5}{9} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{8} \times \frac{5}{9}$.

154. Πολλαπλασιασμὸς μεικτοῦ ἐπὶ κλάσμα. — Μία ὀκᾶ κρέατος ἀξίζει $52\frac{1}{2}$ δραχ. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς;

Ἀξίζουν $52\frac{1}{2}$ δραχ. $\times \frac{3}{4} = \frac{105}{2}$ δραχ. $\times \frac{3}{4} = \frac{105\times 3}{8}$ δρχ. $= 39\frac{3}{8}$ δρχ. ἢ $52\frac{1}{2}$ δρχ. $\times \frac{3}{4} = 52$ δρχ. $\times \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ δρχ. $\times \frac{3}{4} = 39\frac{3}{8}$ δρχ.

Ὥστε: **Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν μεικτὸν ἐπὶ κλάσμα, ἢ τρέπομεν τὸν μεικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν μεικτὸν κατὰ τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μεικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιον (§ 146).**

155. Πολλαπλασιασμὸς μεικτοῦ ἐπὶ μεικτόν. — Μία ὀκᾶ κρέατος ἀξίζει $52\frac{1}{2}$ δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν αἱ $2\frac{3}{4}$ ὀκάδες;

Ἀξίζουν $52\frac{1}{2}$ δρχ. $\times 2\frac{3}{4} = \frac{105}{2}$ δρχ. $\times \frac{11}{4} = 144\frac{3}{8}$ δρχ.

Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς: Εὑρίσκομεν χωριστὰ πόσον ἀξίζουν αἱ 2 ὀκάδες καὶ χωριστὰ πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτῆς. Ἔχομεν λοιπόν:

$52\frac{1}{2}$ δρχ. $\times 2 = 52$ δρχ. $\times 2 + \frac{1}{2}$ δρχ. $\times 2 = 104$ δρχ. $+ 1$ δρχ. καὶ $52\frac{1}{2}$ δρχ. $\times \frac{3}{4} = 52$ δρχ. $\times \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ δρχ. $\times \frac{3}{4} = 39$ δρχ. $+ \frac{3}{8}$ δρχ. ἤτοι $52\frac{1}{2} \times 2\frac{3}{4} = 52 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 + 52 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = 104 + 1 + 39 + \frac{3}{8} = 144\frac{3}{8}$.

Ὥστε: **Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν μεικτὸν ἐπὶ μεικτόν, ἢ τρέπομεν αὐτοὺς εἰς κλάσματα καὶ πολλαπλασιάζομεν, ἢ πολλαπλασιάζομεν 1) τοὺς δύο ἀκεραίους 2) τὰ δύο κλάσματα 3) τὸν ἀκέραιον τοῦ πρώτου μὲ τὸ κλάσμα τοῦ δευτέρου 4) τὸν ἀκέραιον τοῦ δευτέρου μὲ τὸ κλάσμα τοῦ πρώτου καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ τέσσαρα γινόμενα.**

Σημείωσις. Κατὰ τὰ προηγούμενα ἔχομεν:

$8 \times \frac{3}{4} = \frac{8\times 3}{4} = 6 \qquad 8 \times \frac{5}{4} = \frac{8\times 5}{4} = 10.$

Πότε λοιπὸν τὸ γινόμενον εἶναι μικρότερον τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ πότε μεγαλύτερον αὐτοῦ;

ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

156. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{7}{9} \times \frac{1}{8}$.

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο πρώτους καὶ εὑρίσκομεν $\frac{2\times3}{5\times4}$. Ἔπειτα τὸ γινόμενον τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν τρίτον παράγοντα $\frac{7}{9}$ καὶ εὑρίσκομεν $\frac{2\times3\times7}{5\times4\times9}$, τέλος τὸ γινόμενον τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν τέταρτον παράγοντα $\frac{1}{8}$ καὶ εὑρίσκομεν $\frac{2\times3\times7\times1}{5\times4\times9\times8}$.

Ὥστε εἶναι: $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{2\times3\times7\times1}{5\times4\times9\times8}=\frac{7\times1}{5\times2\times3\times8}=\frac{7}{240}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\frac{4}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{7}{9}=\frac{4\times5\times7}{5\times7\times9}=\frac{4}{9}$.

Ὥστε: **Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολλὰ κλάσματα πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενόν των γράφομεν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν των.**

Σημείωσις. Ὅταν μερικοὶ τῶν παραγόντων αὐτῶν εἶναι ἀκέραιοι, γράφομεν αὐτοὺς ὡς κλάσματα μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1 καὶ κατόπιν πολλαπλασιάζομεν.

Π.χ. $\frac{1}{3} \times 5 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{1\times5\times2}{3\times1\times3}$.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

157. Αἱ δυνάμεις τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ὁρίζονται, ὅπως καὶ αἱ τῶν ἀκεραίων καὶ σημειοῦνται ὁμοίως· οὕτω $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3}{7} \times \frac{3}{7}$.

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{3\times3}{7\times7} = \frac{3^2}{7^2}$, ἕπεται ὅτι $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3^2}{7^2}$.

Ὁμοίως εἶναι $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3}$.

Ἤτοι: **Διὰ νὰ ὑψώσωμεν κλάσμα εἰς δύναμιν, ὑψοῦμεν τοὺς δύο ὅρους του εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.**

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς. Ἡ ἰδιότης τῶν δυνάμεων (§ 80) ἀληθεύει καὶ περὶ τῶν κλασματικῶν. Π.χ. $\left(\frac{4}{9}\right)^2 \times \left(\frac{4}{9}\right)^3 = \left(\frac{4}{9}\right)^5$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

Ἀ π ὸ μ ν ή μ η ς. 423) Νὰ εὕρῃς τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων

$8 \times \frac{1}{2}$ $\quad 8 : 2$ $\qquad 49 : 7$ $\quad 49 \times \frac{1}{7}$

$12 \times \frac{1}{3}$ $\quad 12 : 3$ $\qquad 45 : 9$ $\quad 45 \times \frac{1}{9}$

$30 \times \frac{1}{5}$ $\quad 30 : 5$ $\qquad 72 : 8$ $\quad 72 \times \frac{1}{8}$.

424) Νὰ κάμῃς τοὺς πολλαπλασιασμούς :

$12 \times \frac{1}{2}$, $24 \times \frac{11}{24}$, $36 \times \frac{1}{12}$, $51 \times \frac{1}{3}$, $12 \times \frac{3}{4}$,

$49 \times \frac{5}{7}$, $90 \times \frac{13}{30}$, $15 \times \frac{4}{30}$, $21 \times \frac{3}{42}$, $30 \times \frac{12}{45}$.

425) Ὁμοίως νὰ κάμῃς τοὺς πολλαπλασιασμούς :

α) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{4}$, $\frac{4}{5} \times \frac{1}{4}$, $\frac{3}{5} \times \frac{3}{4}$, $\frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$, $\frac{7}{10} \times \frac{9}{11}$,

$\frac{9}{20} \times \frac{11}{12}$, $\frac{7}{8} \times \frac{3}{12}$, $\frac{11}{15} \times \frac{7}{8}$, β) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$, $\frac{8}{9} \times \frac{7}{8}$,

$\frac{6}{7} \times \frac{2}{3}$, $\frac{12}{13} \times \frac{3}{4}$, $\frac{12}{17} \times \frac{3}{8}$, $\frac{4}{5} \times \frac{5}{4}$, $\frac{9}{11} \times \frac{11}{9}$.

Γ ρ α π τ ῶ ς. 426) Νὰ κάμῃς τοὺς πολλαπλασιασμούς :

$9 \times 5\frac{2}{9}$, $12 \times 2\frac{1}{4}$, $15 \times 4\frac{3}{5}$, $18 \times 5\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{7}$,

$\frac{2}{5} \times 4\frac{1}{4}$, $\frac{7}{9} \times \frac{3}{11}$, $\frac{7}{9} \times \frac{5}{11}$, $\frac{15}{16} \times \frac{4}{25}$, $\left(\frac{4}{5}\right)^2$, $\left(\frac{8}{9}\right)^2$, $\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

427) Νὰ εὕρῃς τὰ γινόμενα :

$1\frac{1}{7} \times 1\frac{1}{6}$, $8\frac{1}{3} \times 1\frac{1}{2}$, $9\frac{3}{5} \times 3\frac{1}{8}$, $\frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{9}{5}$,

$\frac{3}{4} \times \frac{2}{9} \times \frac{8}{11}$, $\frac{11}{12} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{11} \times 2$, $\frac{8}{9}$ $\frac{3}{5} \times \frac{15}{16} \times \frac{3}{5}$.

428) Ὁμοίως τὰ γινόμενα:

$60 \times \frac{25}{36}$, $88 \times \frac{17}{33}$, $57 \times \frac{18}{19}$, $28 \times 2\frac{4}{7}$, $98 \times 8\frac{5}{6}$,
$225 \times 1\frac{1}{9}$, $437 \times 5\frac{11}{12}$, $\frac{40}{81} \times \frac{23}{85}$, $1\frac{27}{40} \times \frac{19}{45}$,
$\frac{3}{7} \times 6\frac{15}{22}$, $8\frac{3}{8} \times 8\frac{3}{4}$, $28\frac{1}{2} \times 49\frac{2}{3}$, $\left(\frac{11}{12}\right)^2$, $\left(\frac{4}{5}\right)^3$.

Ὁμὰς Β'

429) Ὁ πῆχυς μεταξωτοῦ ὑφάσματος ἀξίζει 120 δρχ. Πόσον ἀξίζουν $\frac{3}{5}$ τοῦ πήχεως;

430) Ὁ πῆχυς βαμβακεροῦ ὑφάσματος ἀξίζει 84 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν $\frac{5}{8}$ αὐτοῦ;

431) Ἓν μέτρον δαντέλλας ἀξίζει 32 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν $3\frac{3}{5}$ μέτρα;

432) Μία ὀκᾶ καφὲ ἀξίζει 125 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς;

433) Μία ὀκᾶ κρέατος ἀξίζει $50\frac{3}{8}$ δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{7}{10}$ τῆς ὀκᾶς;

434) Μία ὀκᾶ τυροῦ ἀξίζει $42\frac{1}{2}$ δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν $1\frac{1}{2}$ ὀκάδες καὶ πόσον $2\frac{3}{4}$ ὀκάδες;

435) Μία ὀκᾶ ζάχαρη ἀξίζει $24\frac{3}{5}$ δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν $8\frac{1}{2}$ ὀκάδες καὶ πόσον $15\frac{3}{4}$, $28\frac{1}{4}$ ὀκάδες;

436) Εἷς ἠγόρασε $15\frac{1}{2}$ ὀκάδας ζάχαρη πρὸς $18\frac{3}{4}$ δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ $2\frac{1}{4}$ ὀκάδας καφὲ πρὸς $92\frac{1}{2}$ δραχμὰς τὴν ὀκᾶν· πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ;

437) Ἐπώλησεν εἷς $13\frac{3}{5}$ ὀκάδας βουτύρου πρὸς $120\frac{1}{2}$ δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ ἀπὸ τὰς δραχμάς, τὰς ὁποίας εἰσέπραξεν, ἐπλήρω-

σεν $185\frac{1}{2}$ *ὀκάδας σίτου, τὸν ὁποῖον εἶχεν ἀγοράσει πρὸς* $7\frac{3}{4}$ *δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν;*

Ὁ μ ὰ ς Γ΄

438) *Παρατηρῶ, ὅτι εἶναι:*

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3},\quad \frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4},\quad \frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}$$

Διατί ἀληθεύουν αἱ ἰσότητες αὗται; Νὰ δώσῃς ὅμοια παραδείγματα.

439) *Ὁμοίως παρατηρῶ, ὅτι:*

$$\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5},\quad \frac{3}{4}-\frac{3}{7}=\frac{3}{4}\times\frac{3}{7},\quad \frac{2}{5}-\frac{2}{7}=\frac{2}{5}\times\frac{2}{7},$$

$\frac{4}{5}-\frac{4}{9}=\frac{4}{5}\times\frac{4}{9}$. *Νὰ δώσῃς ὅμοια παραδείγματα.*

440) *Τί μᾶς λέγουν αἱ ἰσότητες*

1) $\alpha\times\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\times\beta}{\gamma}$, 2) $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\times\gamma}{\beta\times\delta}$,

3) $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\gamma}{\delta}\times\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha\times\gamma\times\varepsilon}{\beta\times\delta\times\zeta}$, 4) $\alpha\frac{\beta}{\gamma}\times\frac{\delta}{\varepsilon}=\alpha\times\frac{\delta}{\varepsilon}+\frac{\beta}{\gamma}\times\frac{\delta}{\varepsilon}$

5) $\alpha\frac{\beta}{\gamma}\times\delta\frac{\varepsilon}{\zeta}=\alpha\times\delta+\frac{\beta}{\gamma}\times\frac{\varepsilon}{\zeta}+\alpha\times\frac{\varepsilon}{\zeta}+\frac{\beta}{\gamma}\times\delta$

6) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}=\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}$ 7) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}\times\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu+\nu}$

ΣΤ. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΔΙΑ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

158. 1) Διαίρεσις ἀκεραίου διὰ κλάσματος.— Ἠγόρασεν εἷς $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ζάχαρην καὶ ἐπλήρωσεν 15 δραχμάς. Πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν;

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο γνωρίζομεν τὴν τιμὴν πολλῶν κλασματικῶν μονάδων (τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς) καὶ ζητοῦμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς (ἀκεραίας) μονάδος. Θὰ τὸ λύσωμεν λοιπὸν κατὰ τὸν κανόνα τῆς § 98, ὅστις ἀληθεύει καὶ εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν. Ἤτοι θὰ διαιρέσωμεν 15 δρχ.: $\frac{3}{4}$. Ἀλλὰ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{3}{4}$, δίδει γινόμενον 15.

Τὰ $\frac{3}{4}$ λοιπὸν τοῦ ζητουμένου πηλίκου εἶναι ὁ 15· ἄρα

τὸ $\frac{1}{4}$ » » » » » $\frac{15}{3}$

καὶ τὰ $\frac{4}{4}$ αὐτοῦ, ἤτοι ὅλον τὸ πηλίκον εἶναι ὁ $\frac{15}{3} \times 4$ ἢ $15 \times \frac{4}{3}$.

Ὥστε 15 δρχ. : $\frac{3}{4} = 15 \times \frac{4}{3} = \frac{60}{3} = 20$ δραχμ.

Σημείωσις. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $15 : \frac{3}{4}$ εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς:

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $15 : 3$ εἶναι $\frac{15}{3}$. Ἐπομένως τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $15 : \frac{3}{4}$ πρέπει νὰ εἶναι 4 φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ πηλίκον $\frac{15}{3}$ τῆς πρώτης διαιρέσεως. Διότι ὁ διαιρέτης $\frac{3}{4}$ εἶναι 4 φορὰς μικρότερος ἀπὸ τὸν διαιρέτην 3. Εἶναι λοιπὸν $15 : \frac{3}{4} = \frac{15}{3} \times 4$ ἢ $15 \times \frac{4}{3}$.

2) **Διαίρεσις κλάσματος διὰ κλάσματος.—Μία ὑφάντρια ὑφαίνει εἰς $\frac{5}{6}$ τῆς ὥρας ὕφασμα μήκους $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως. Πόσους πήχεις θὰ ὑφάνῃ εἰς μίαν ὥραν;**

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν $\frac{7}{8}$ πήχ. : $\frac{5}{6}$. Ἐὰν δὲ σκεφθῶμεν, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, λέγομεν: Τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ ζητουμένου πηλίκου εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{7}{8}$, ἄρα τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ ζητουμένου πηλίκου εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{7}{8 \times 5}$, καὶ τὰ $\frac{6}{6}$ ἢ ὅλον τὸ πηλίκον εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{7 \times 6}{8 \times 5} = \frac{7}{8} \times \frac{6}{5}$.

Ὥστε $\frac{7}{8}$ πήχ. : $\frac{5}{6} = \frac{7}{8} \times \frac{6}{5} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$ πήχ.

Σημείωσις. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{7}{8} : \frac{5}{6}$ δυνάμεθα νὰ τὸ εὕρωμεν καὶ ἐὰν σκεφθῶμεν ὡς εἰς τὴν ἄνω σημείωσιν.

"Εχομεν $\frac{7}{8}:5=\frac{7}{8\times5}$, ἄρα $\frac{7}{8}:\frac{5}{6}=\frac{7}{8\times5}\times6=\frac{7\times6}{8\times5}=\frac{7}{8}\times\frac{6}{5}$.

"Ωστε: **"Οταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.**

3) Διαίρεσις διὰ μικτοῦ ἀριθμοῦ.—Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν κατ' ἄλλον τρόπον παρὰ ἐὰν **τρέψωμεν τὸν μικτὸν διαιρέτην εἰς κλάσμα.** Π.δ.

$4:3\frac{2}{5}=4:\frac{17}{5}=4\times\frac{5}{17}=\frac{20}{17}$, $\frac{7}{8}:1\frac{1}{4}=\frac{7}{8}:\frac{5}{4}=\frac{7}{8}\times\frac{4}{5}$.

Αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀληθεύουν καὶ διὰ τοὺς κλασματικούς.

Σημείωσις. Ἀπὸ τὴν διαίρεσιν $\frac{15}{29}:\frac{5}{29}=\frac{15}{29}\times\frac{29}{5}=\frac{15}{5}$ συνάγομεν ὅτι, ὅταν τὰ πρὸς διαίρεσιν κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα, τὸ πηλίκον αὐτῶν εἶναι τὸ πηλίκον τῶν ἀριθμητῶν $15:5=3$. "Αλλως τε τὰ 5 εἰκοστὰ ἔνατα χωροῦν εἰς τὰ 15 εἰκοστὰ ἔνατα, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 5 εἰς τὸν 15.

Ἐπομένως τὴν διαίρεσιν $\frac{7}{8}:\frac{5}{6}=\frac{7}{8}\times\frac{6}{5}=\frac{21}{20}$ δυνάμεθα νὰ τὴν κάμωμεν καὶ ὡς ἑξῆς· $\frac{7}{8}:\frac{5}{6}=\frac{21}{24}:\frac{20}{24}=\frac{21}{20}$. Ὁμοίως καὶ τὴν $15:\frac{\varepsilon}{4}=\frac{60}{4}:\frac{3}{4}=\frac{60}{3}=20$.

159. Ἀριθμοὶ ἀντίστροφοι.—"Οταν τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα 1, τότε οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι λέγονται ἀντίστροφοι.

Οὕτως οἱ ἀριθμοὶ $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{5}{2}$ εἶναι ἀντίστροφοι διότι $\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}=1$.

Ὁμοίως ὁ ἀντίστροφος τοῦ $\frac{1}{3}$ εἶναι ὁ $\frac{3}{1}$, δηλαδὴ ὁ 3, διότι $\frac{1}{3}\times3=1$, καὶ ὁ ἀντίστροφος τοῦ 7 εἶναι ὁ $\frac{1}{7}$.

Ἐπειδὴ δὲ $3:\frac{2}{5}=3\times\frac{5}{2}$ καὶ $3\times\frac{5}{2}=3:\frac{2}{5}$ καὶ ἐπειδὴ πάλιν $\frac{7}{9}:4=\frac{7}{9\times4}=\frac{7}{9}\times\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{7}{9}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{9}:4$ λέγομεν, **ὅτι ἡ διαίρεσις δι' ἀριθμοῦ οἱουδήποτε, ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τὸν ἀντίστροφόν του καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἀριθμὸν οἱονδήποτε ἀνάγεται εἰς τὴν διαίρεσιν διὰ τοῦ ἀντιστρόφου του.**

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

Ἀπὸ μνήμης. 441) Νὰ εὕρῃς τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων

α) $\frac{2}{3}:\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}:\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}:\frac{1}{8}$, $\frac{5}{14}:\frac{1}{7}$, $\frac{8}{21}:\frac{1}{7}$, $\frac{9}{35}:\frac{1}{5}$

β) $1:\frac{1}{10}$, $1:\frac{1}{100}$, $1:\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10}:\frac{1}{100}$, $\frac{1}{100}:\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}:\frac{1}{1000}$

γ) $2:\frac{1}{3}$, $3:\frac{1}{4}$, $4:\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}:\frac{1}{5}$, $\frac{7}{15}:\frac{1}{6}$.

Γραπτῶς. 442) Ὁμοίως νὰ εὕρῃς τὰ πηλίκα :

α) $1:2\frac{1}{3}$, $1:3\frac{2}{5}$, $1:5\frac{5}{9}$, $3:1\frac{1}{2}$, $14:1\frac{3}{4}$

β) $4\frac{2}{9}:\frac{2}{9}$, $2\frac{1}{7}:\frac{3}{7}$, $1\frac{3}{8}:\frac{1}{4}$, $1\frac{3}{8}:\frac{1}{5}$, $1\frac{4}{15}:\frac{1}{5}$

γ) $2\frac{2}{3}:1\frac{1}{3}$, $3\frac{3}{5}:1\frac{5}{4}$, $5\frac{3}{7}:2\frac{5}{7}$, $5\frac{1}{4}:3\frac{1}{2}$, $3\frac{5}{9}:3\frac{1}{3}$.

443) Πόσας φορὰς χωρεῖ τὸ $\frac{1}{2}$ εἰς τὴν 1, τὸν 2, 3, 4, 5 ; Καὶ πόσας φορὰς χωροῦν τὰ $\frac{2}{3}$ εἰς τὸν 2, 4, 6, 8, 10 ;

444) Πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ $\frac{2}{3}$ εἰς τὸν 5, ὁ $\frac{4}{9}$ εἰς τὸν $\frac{5}{7}$ καὶ ὁ $5\frac{1}{2}$ εἰς τὸν $22\frac{1}{2}$;

445) Ἐκ τῶν ἐξαγομένων τῶν πράξεων τῆς 1ης σειρᾶς νὰ εὕρῃς τὰ ἐξαγόμενα τῶν πράξεων τῆς 2ας σειρᾶς :

$7:2$	$5:6$	$11:8$	$12:13$
$7:\frac{2}{3}$	$5:\frac{6}{7}$	$11:\frac{8}{9}$	$12:\frac{13}{2}$.

446) Ἐπὶ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν $\frac{4}{7}$ διὰ νὰ λάβωμεν τὸν $3\frac{1}{5}$;

447) Ποῖος ἀριθμός, ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{4}{5}$, γίνεται $\frac{19}{25}$;

448) Τί λέγει ἡ ἰσότης $\alpha:\frac{\beta}{\gamma}=\alpha\times\frac{\gamma}{\beta}$ καὶ τί ἡ $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\delta}{\gamma}$;

Ὁμὰς Β΄

449) Ἐπλήρωσεν εἷς διὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως ἑνὸς ὑφάσματος 123 δραχμάς. Πόσον συνεφώνησε τὸν πῆχυν ;

450) Τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ μέτρου ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζουν 154 δραχμάς. Πόσον ἀξίζει τὸ μέτρον ;

451) Ἐπίσης πόσον ἀξίζει τὸ 1 μέτρον ὑφάσματος, ὅταν τὰ $3\frac{3}{4}$ μέτρα ἀξίζουν 960 δραχμάς ;

452) Τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως ἑνὸς κορδονίου ἀξίζουν μίαν δραχμήν. Πόσας δραχμὰς ἀξίζουν οἱ 6 πήχεις ;

453) Ὁ 1 πῆχυς τοῦ ἄνω κορδονίου ἀξίζει $2\frac{2}{5}$ δραχμάς. Πόσους πήχεις ἀγοράζομεν μὲ 24 δραχμάς ;

454) Τὸ 1 μέτρον δαντέλλας ἀξίζει $6\frac{3}{5}$ δραχμάς. Πόσα μέτρα ἀγοράζομεν μὲ $115\frac{1}{2}$ δραχμάς ;

455) Ἐὰν μὲ $328\frac{4}{5}$ δραχμὰς ἀγοράζῃ τις 1 πῆχυν ὑφάσματος, πόσους πήχεις θὰ ἀγοράσῃ μὲ 1644 δραχμάς ;

Ὁμὰς Γ΄

456) Μία ἐργάτρια ράπτει ἕνα σάκκον εἰς $\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας. Ἐργάζεται δὲ 8 ὥρας τὴν ἡμέραν. Πόσους σάκκους ράπτει εἰς μίαν ἡμέραν ;

457) Μία ὑφάντρια ὑφαίνει εἰς μίαν ἡμέραν $4\frac{3}{4}$ πήχεις. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ὑφάνῃ 38 πήχεις ;

458) Μία ὑφάντρια ὑφαίνει εἰς $1\frac{1}{4}$ ὥρας $\frac{7}{10}$ τοῦ μέτρου ἑνὸς τάπητος. Πόσον ὑφαίνει εἰς μίαν ὥραν ;

459) Ἡ ἄνω ὑφάντρια δι' ἐργασίαν $8\frac{3}{5}$ ὡρῶν ἔλαβεν $150\frac{1}{2}$ δραχμάς. Πόσας ἔλαβε δι' ἐργασίαν μιᾶς ὥρας ;

460) Μία ἄλλη ὑφάντρια δι' ἐργασίαν $25\frac{4}{5}$ ὡρῶν ἔλαβε $580\frac{1}{2}$ δραχμάς. Πόσας ἔλαβε δι' ἐργασίαν μιᾶς ὥρας ;

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΟΝΑΔΑ

160. Εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα ὅτι :

1) Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος ἑνὸς πράγματος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν πολλῶν μονάδων τοῦ αὐτοῦ πράγματος, κάμνομεν πολλαπλασιασμόν. Πολλαπλασιάζομεν δηλ. τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὅστις μᾶς λέγει πόσαι εἶναι αἱ μονάδες. Ἤτοι ἐὰν ἡ ἀξία μιᾶς μονάδος εἶναι α, ἡ ἀξία τῶν β μονάδων εἶναι $\alpha \times \beta$.

Ὁ ἀριθμὸς β (καὶ ὁ α) δύναται νὰ εἶναι ἀκέραιος, κλασματικὸς ἢ μεικτός.

2) Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀξίαν πολλῶν μονάδων ἑνὸς πράγματος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος, κάμνομεν διαίρεσιν (μερισμόν). Διαιροῦμεν δὲ τὴν ἀξίαν τῶν πολλῶν μονάδων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων. Ἤτοι, ἐὰν ἡ ἀξία τῶν β μονάδων εἶναι α, ἡ ἀξία τῆς 1 μονάδος εἶναι $\alpha : \beta$.

Ὁ ἀριθμὸς β (καὶ ὁ α) δύναται νὰ εἶναι οἱοσδήποτε.

3) Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος καὶ τὴν ἀξίαν πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων καὶ ζητῆται ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων, κάμνομεν διαίρεσιν (μέτρησιν). Διαιροῦμεν δὲ τὴν ἀξίαν τῶν πολλῶν μονάδων διὰ τῆς ἀξίας τῆς μιᾶς μονάδος.

Ἤτοι, ἐὰν ἡ ἀξία τῆς 1 μονάδος εἶναι α καὶ
» » τῶν ; μονάδων » β,
εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων εἶναι $\beta : \alpha$.

Καὶ ἐδῶ οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β δύνανται νὰ εἶναι οἱοιδήποτε. Ἀλλ' ὅταν εἶναι συγκεκριμένοι, πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς.

161. Π ρ ό β λ η μ α. **Αἱ 2 ὀκάδες τυροῦ ἀξίζουν 72 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς αὐτοῦ ;**

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ δὲν ὑπάγεται εἰς κανὲν ἀπὸ τὰ τρία ἀνωτέρω εἴδη προβλημάτων, διότι μᾶς ζητεῖται ἡ ἀξία πολλῶν μονάδων (τῶν $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς), δὲν μᾶς δίδεται ὅμως ἡ ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος. Ἀλλὰ πάλιν, ἀφοῦ μᾶς δίδεται ἡ ἀξία τῶν δύο μονάδων, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν τῆς 1 μονάδος. Κατόπιν δὲ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν τῶν $\frac{3}{5}$ αὐτῆς. Λέγομεν λοιπόν :

Ἀφοῦ αἱ 2 ὀκάδες τυροῦ ἀξίζουν 72 δραχμὰς

ἡ 1 ὀκᾶ » ἀξίζει $\frac{72}{2}$ » ἢ 36 δρχ.

καὶ τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς αὐτοῦ ἀξίζουν $\frac{72}{2}$ δρχ. $\times \frac{3}{5}$

ἢ 36 δρχ. $\times \frac{3}{5} 21 = \frac{3}{5}$ δρχ.

162. Π ρ ό β λ η μ α. **Τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς βουτύρου ἀξίζουν 39 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτῆς ;**

Καὶ εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο εὑρίσκομεν τὴν ἀξίαν τῆς 1 ὀκᾶς καὶ κατόπιν τὴν ἀξίαν τῶν $\frac{4}{5}$ αὐτῆς. Λέγομεν λοιπόν :

Ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν 39 δρχ.

ἡ 1 ὀκᾶ ἀξίζει 39 δρχ. : $\frac{3}{8} = 39$ δρχ. $\times \frac{8}{3} = 104$ δρχ.

καὶ τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν 104 δρχ. $\times \frac{4}{5} = 83 \frac{1}{5}$ δρχ.

163. Π ρ ό β λ η μ α. **Μὲ $15 \frac{3}{8}$ πήχεις ἔκαμα 3 ὑποκάμισα. Πόσα ὑποκάμισα θὰ κάμω μὲ $35 \frac{7}{8}$ πήχεις ;**

Θὰ εὕρω πρῶτον πόσοι πήχεις χρειάζονται δι' 1 ὑποκάμισον καὶ κατόπιν θὰ εὕρω πόσα ὑποκάμισα θὰ κάμω μὲ $35 \frac{7}{8}$ πήχεις.

Χρειάζονται δὲ δι' 1 ὑποκ. $15 \frac{3}{8}$ πήχ. : $3 = 5 \frac{1}{8}$ πήχ. Ὥστε :

Ἀφοῦ μὲ $5 \frac{1}{8}$ πήχ. κάμνω 1 ὑποκάμισον,

» $35 \frac{7}{8}$ πήχ. κάμνω $35 \frac{7}{8} : 5 \frac{1}{8} = 7$ ὑποκάμισα.

164. Τὰ ἀνωτέρω τρία προβλήματα παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι σύνθετα. Ἀποτελεῖται δὲ τὸ καθὲν ἀπὸ δύο ἁπλᾶ προβλήματα τοῦ εἴδους τῶν προβλημάτων τῆς § 160.

Ἐλύσαμεν δὲ τὰ σύνθετα αὐτὰ προβλήματα, ἀφοῦ εὕρομεν πρῶτον τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος καὶ κατόπιν εὕρομεν τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων, ἢ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων.

165. Ἡ ἀνάγκη τῆς εὑρέσεως τῆς τιμῆς τῆς μιᾶς μονάδος, (ἡ ὁποία μονὰς δύναται νὰ εἶναι καὶ κλασματική), διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τὴν λύσιν προβλημάτων, παρουσιάζεται συνηθέστατα.

Ὁ τρόπος τῆς λύσεως προβλημάτων διὰ τῆς εὑρέσεως πρῶτον τῆς τιμῆς τῆς μιᾶς μονάδος, λέγεται **μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.**

Τὴν μέθοδον αὐτὴν ἐχρησιμοποιήσαμεν διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῶν § § 150, 158.

Μὲ αὐτὴν δὲ θὰ λύσωμεν καὶ τὰ ἑπόμενα προβλήματα.

1) **Τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζουν 75 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{7}{8}$ αὐτοῦ;**

Ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{8}$ ἀξίζουν 75 δραχμάς,

τὸ $\frac{1}{8}$ ἀξίζει $\frac{75}{3}$ δρχ.$=$25 δρχ.

καὶ τὰ $\frac{7}{8}$ ἀξίζουν $\frac{75}{3}$ δρχ.$\times 7=$25 δρχ.$\times 7=$175 δρχ.

2) **Ἡ μία ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 44 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς;**

Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκᾶ ἀξίζει 44 δραχμάς,

τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζει $\frac{44}{5}$ δραχμὰς

καὶ τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν $\frac{44}{5}$ δρχ.$\times 4=35\frac{1}{5}$ δρχ.

3) **Νὰ εὑρεθοῦν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ 54.**

Ὅλος ὁ ἀριθμὸς εἶναι $\frac{4}{4}$. Ἀφοῦ λοιπὸν

τὰ $\frac{4}{4}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 54

τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι $\frac{54}{4}$

καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι $\frac{54}{4}\times 3=54\times\frac{3}{4}=40\frac{1}{2}$.

Σημείωσις. Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω λύσιν συνάγομεν, ὅτι, **ὅταν**

 460 496

ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν μέρος τι ἀριθμοῦ, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον φανερώνει τὸ ζητούμενον μέρος.

4) **Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{5}{7}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 75;**

Ἀφοῦ τὰ $\frac{5}{7}$	εἶναι ὁ	75
τὸ $\frac{1}{7}$	εἶναι ὁ	$\frac{75}{5}$
καὶ τὰ $\frac{7}{7}$	ἢ ὅλος ὁ ἀριθμὸς εἶναι	$\frac{75}{5}\times 7=15\times 7=105$.

Σημείωσις. Ἐπειδὴ $\frac{75}{5}\times 7=75:\frac{5}{7}$, συνάγομεν, ὅτι, ὅταν γνωρίζωμεν μέρος τι ἀριθμοῦ καὶ ζητοῦμεν τὸν ἀριθμόν, διαιροῦμεν τὸ γνωστὸν μέρος διὰ τοῦ κλάσματος, τὸ ὁποῖον φανερώνει τὸ μέρος.

5) **Εἷς δρομεὺς εἰς 1 πρῶτον λεπτὸν διανύει τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ χιλιομέτρου. Εἰς πόσον χρόνον θὰ διανύσῃ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ χιλιομέτρου;**

Ἀφοῦ διὰ τὰ $\frac{7}{8}$ χλμ.	χρειάζεται	1 πρ. λ.
διὰ τὸ $\frac{1}{8}$ »	»	$\frac{1}{7}$ » »
καὶ διὰ τὰ $\frac{8}{8}$ » ἢ 1 χλμ.	»	$\frac{8}{7}$ » »
ἐπομένως διὰ τὸ $\frac{1}{5}$ » $\left(1 \text{ χλμ.} = \frac{5}{5} \text{ χλμ.}\right)$		$\frac{8}{7\times 5}$ » »
καὶ διὰ τὰ $\frac{3}{5}$ »	»	$\frac{8\times 3}{7\times 5}=\frac{24}{35}$ πρ. λ.

6) **Εἷς ἐργάτης σκάπτει μίαν ἄμπελον εἰς 6 ἡμέρας καὶ εἷς ἄλλος τὴν σκάπτει εἰς 8 ἡμέρας. Ἐὰν οἱ δύο οὗτοι ἐργάται ἐργασθοῦν ὁμοῦ, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ σκάψουν τὴν ἰδίαν ἄμπελον;**

Θὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσον μέρος τῆς ἀμπέλου σκάπτουν οἱ δύο οὗτοι ἐργάται εἰς μίαν ἡμέραν. Εἰς 1 δὲ ἡμέραν σκάπτει ὁ μὲν εἷς τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ ἔργου, ὁ δὲ ἄλλος τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτοῦ. Ἄρα καὶ οἱ δύο ὁμοῦ θὰ σκάψουν εἰς μίαν ἡμέραν $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{4}{24}+\frac{3}{24}=\frac{7}{24}$ τῆς ἀμπέλου. Ὥστε:

ἀφοῦ τὰ $\frac{7}{24}$ ἀμπ. σκάπτουν εἰς 1 ἡμ.

τὸ $\frac{1}{24}$ » » » $\frac{1}{7}$ ἡμ.

καὶ τὰ $\frac{24}{24}$ » ἢ ὅλην τὴν ἄμπελ. » » $\frac{24}{7}$ ἡμ. $= 3\frac{3}{7}$ ἡμ.

Προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

461) Μία μετεποίησε τὸ φόρεμα καὶ ἠγόρασε $\frac{5}{8}$ πήχ. μεταξωτοῦ ὑφάσματος ἀξίας 228 δρχ τὸν πῆχυν. Πόσον ἐπλήρωσεν;

462) Διὰ τὸ ἄνω φόρεμα ἐχρειάσθησαν καὶ $\frac{7}{8}$ μέτρον δαντέλλας. Πόσον ἀξίζουν αὐτά, ὅταν τὸ 1 μέτρον ἀξίζει $42\frac{1}{2}$ δρχ.;

463) Διὰ ῥαπτικὰ τοῦ ἄνω φορέματος ἀντὶ νὰ πληρωθοῦν 200 δρχ. ἐπληρώθησαν τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτῶν. Πόσον ἐπληρώθησαν;

464) Μία οἰκοκυρὰ ἀπὸ ἓν τεμάχιον χασὲ ἔκοψεν $26\frac{1}{4}$ πήχεις, διὰ νὰ κάμῃ σινδόνια· ἦσαν δὲ οὗτοι τὰ $\frac{5}{8}$ τῶν πήχεων τοῦ ὅλου τεμαχίου. Ἀπὸ πόσους πήχεις ἀπετελεῖτο τὸ τεμάχιον;

465) Διὰ νὰ πλέξῃ μία ἓν ζεῦγος παιδικῶν καλτσῶν, ἐχρειάσθη $7\frac{1}{2}$ δράμια νήματος. Πόσα τοιαῦτα ζεύγη θὰ πλέξῃ μὲ $67\frac{1}{2}$ δράμια τοῦ ἰδίου νήματος;

466) Μία μητέρα ὥρισεν εἰς τὴν κόρην της νὰ πλέξῃ ἐντὸς μιᾶς ἡμέρας $5\frac{1}{2}$ ῥούπια δαντέλλας. Ἡ κόρη πλέκει $1\frac{1}{4}$ ῥούπια τὴν ὥραν. Εἰς πόσας ὥρας ἔπλεξεν ἡ κόρη τὴν δαντέλλαν αὐτήν;

Ὁμὰς Β΄

467) Μὲ πόσα μέτρα ἰσοῦνται τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ χιλιομέτρου;

468) Τὸ ναυτικὸν μίλιον ἰσοῦται μὲ 1852 μέτρα. Μὲ πόσα μέτρα ἰσοῦνται τὰ $3\frac{4}{5}$ μίλια;

469) Εἷς πεζοπόρος βαδίζει $4\frac{3}{4}$ χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Εἰς πόσας ὥρας θὰ βαδίσῃ $15\frac{1}{2}$ χιλιόμετρα;

470) Εἷς διέτρεξε τὰ $\frac{3}{7}$ τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ δύο πόλεων. Ἡ δὲ λοιπὴ ἀπόστασις εἶναι 66 χιλιόμετρα. Πόσον ἀπέχουν αἱ δύο πόλεις;

471) Εἷς διέτρεξε τὰ $\frac{4}{9}$ τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ δύο πόλεων. Ἡ δὲ λοιπὴ ἀπόστασις εἶναι 65 χιλμ. Πόσα χλμ. διέτρεξεν;

472) Ἓν αὐτοκίνητον πρέπει νὰ διατρέξῃ $752\frac{1}{2}$ χιλμ. εἰς 18 ὥρας. Εἰς 12 ὥρας διέτρεξε $460\frac{1}{4}$ χιλμ. Πόσα χλμ. πρέπει νὰ τρέχῃ τώρα τὴν ὥραν;

473) Ἓν πλοῖον μὲ λαθρεμπόριον ταχύτητος $6\frac{1}{2}$ μιλίων τὴν ὥραν ἀνεχώρησε κρυφίως ἀπὸ τὸν λιμένα Α. Μετὰ 4 ὥρας ἐγνώσθη αὐτὸ καὶ ἀμέσως ἀνεχώρησεν ἀπὸ τὸν λιμένα Α τὸ πλοῖον καταδιώξεως τοῦ λαθρεμπορίου ταχύτητος 9 μιλ. τὴν ὥραν διὰ νὰ συλλάβῃ τὸ πρῶτον. Μετὰ πόσας ὥρας θὰ τὸ συλλάβῃ;

474) Εἷς ποδηλάτης ἀναχωρεῖ ἐξ Ἀθηνῶν τὴν $8\frac{1}{2}$ π.μ. καὶ τρέχει μὲ ταχύτητα $20\frac{3}{4}$ χλμ. τὴν ὥραν. Μετὰ δύο ὥρας ἀναχωρεῖ ἐξ Ἀθηνῶν ἐπίσης αὐτοκίνητον, διὰ νὰ συναντήσῃ τὸν ποδηλάτην, καὶ τὸ ὁποῖον τρέχει μὲ ταχύτητα διπλασίαν. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν ὥραν θὰ τὸν συναντήσῃ καὶ εἰς ποίαν ἀπὸ τῶν Ἀθηνῶν ἀπόστασιν.

Ὁμὰς Γ΄

475) Ἐκ δύο κρουνῶν ὁ καθεὶς χωριστὰ γεμίζει τὸν λουτῆρα ἑνὸς λουτροῦ εἰς 20 πρῶτα λεπτὰ τῆς ὥρας. Εἰς πόσα πρῶτα λεπτὰ θὰ γεμίσουν τὸν λουτῆρα αὐτὸν καὶ οἱ δύο κρουνοὶ ὁμοῦ;

476) Ὁ κρουνός, ἀπὸ τὸν ὁποῖον χύνεται τὸ ψυχρὸν ὕδωρ, γεμίζει τὸν λουτῆρα ἑνὸς λουτροῦ εἰς 30 πρῶτα λεπτὰ τῆς ὥρας, ὁ δὲ κρουνός, ἀπὸ τὸν ὁποῖον χύνεται τὸ θερμὸν ὕδωρ, γεμίζει τὸν λουτῆρα εἰς 20 πρῶτα λεπτά. Νὰ εὕρῃς 1ον) πόσον μέρος τοῦ λουτῆρος γεμίζει ἕκαστος κρουνὸς χωριστὰ εἰς 1 πρῶτον λεπτόν, 2ον) πόσον μέρος τοῦ

λουτῆρος θὰ γεμίσουν εἰς 1 πρῶτον λεπτὸν καὶ οἱ δύο κρουνοὶ ὁμοῦ, καὶ 3ον) εἰς πόσα πρῶτα λεπτὰ θὰ γεμίσουν τὸν λουτῆρα οἱ δύο κρουνοὶ ὁμοῦ ;

477) Μία δεξαμενὴ πλήρης ὕδατος κενοῦται διὰ μιᾶς ἀντλίας εἰς 20 πρῶτα λεπτὰ τῆς ὥρας καὶ διὰ μιᾶς ἄλλης κενοῦται εἰς 25 πρῶτα λεπτά. Πόσον μέρος τῆς δεξαμενῆς θὰ κενωθῇ, ἐὰν ἐργασθοῦν καὶ αἱ δύο ἀντλίαι ὁμοῦ ἐπὶ 10 πρῶτα λεπτὰ τῆς ὥρας ;

478) Μία ἀντλία γεμίζει μίαν δεξαμενὴν εἰς 12 πρῶτα λεπτὰ τῆς ὥρας. Κενοῦται δὲ αὕτη ὑπὸ μιᾶς ἄλλης εἰς 18 πρῶτα λεπτά. Ἐὰν ἐργασθοῦν καὶ αἱ δύο αὗται ἀντλίαι ὁμοῦ, πόσον μέρος τῆς δεξαμενῆς γεμίζει εἰς 1 πρῶτον λεπτόν, καὶ εἰς πόσα πρῶτα λεπτὰ θὰ γεμίσῃ ἡ δεξαμενή ;

479) Μία ἀντλία γεμίζει μίαν δεξαμενὴν εἰς 8 πρῶτα λεπτὰ τῆς ὥρας καὶ ἄλλη ἀντλία τὴν γεμίζει εἰς 15 πρῶτα λεπτά. Κενοῦται δὲ ἡ δεξαμενὴ αὐτὴ ὑπὸ τρίτης ἀντλίας εἰς 6 πρῶτα λεπτά. Εἰς πόσα πρῶτα λεπτὰ θὰ γεμίσῃ ἡ δεξαμενή, ὅταν ἐργασθοῦν καὶ αἱ τρεῖς ἀντλίαι ὁμοῦ ;

Ὁμὰς Δ΄

480) Τὸ Ὑπουργεῖον Κρατικῆς Ὑγιεινῆς καὶ Ἀντιλήψεως ἔδωσεν εἰς τὸν Ἐρυθρὸν Σταυρὸν κατὰ τὰ ἔτη 1936—1938 δραχμὰς 36000000. Ἐξ αὐτῶν διετέθησαν 1) τὸ $\frac{1}{3}$ δι' ἀνέγερσιν σταθμῶν Α΄ Βοηθειῶν, 2) τὰ $\frac{2}{9}$ διὰ τὴν ἀνέγερσιν δύο περιπτέρων εἰς τὸ Ἀσκληπιεῖον Βούλας, 3) τὸ $\frac{1}{24}$ διὰ τὴν προσθήκην ὀρόφου εἰς τὸν Οἶκον Ἀδελφῶν Νοσοκόμων, 4) τὸ $\frac{1}{4}$ διὰ τὴν ἐπέκτασιν τοῦ Νοσοκομείου, 5) τὸ $\frac{1}{18}$ διὰ τὰ νοσοκομειακὰ ὑλικὰ τῆς ἀποθήκης του, 6) τὸ $\frac{1}{36}$ δι' ἐκπαίδευσιν νοσοκόμων καὶ διὰ τὴν σχολὴν βοηθῶν νοσοκόμων, 7) τὸ $\frac{1}{72}$ δι' ἐπέκτασιν τοῦ σταθμοῦ Α΄ Βοηθειῶν Θεσσαλονίκης καὶ διὰ τὴν ἀγορὰν αὐτοκινήτου διὰ τὴν μεταφορὰν ἀσθενῶν, καὶ 8) τὸ $\frac{1}{18}$ διὰ διαφόρους ἄλλας ἀνάγκας του. Νὰ εὑρεθῇ τί ποσὸν ἐκ τῶν 36000000 δραχμῶν διετέθη δι' ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω σκοπῶν.

481) Ἀπὸ τὸν προϋπολογισμὸν τοῦ Ὑπουργείου Θρησκευμάτων

καὶ Ἐθνικῆς Παιδείας τὰ $\frac{5}{11}$ ἐξοδεύονται διὰ τὰ Δημοτικὰ σχολεῖα καὶ τὸ $\frac{1}{8}$ διὰ τὰ Γυμνάσια. Μένουν δὲ διὰ τὰς ἀνάγκας του 666 ἑκατομμύρια. Πόσα ἑκατομμύρια εἶναι ὅλος ὁ προϋπολογισμὸς τοῦ Ὑπουργείου αὐτοῦ, πόσα ἑκατομμύρια ἐξοδεύει τὸ Κράτος διὰ τὰ Δημοτικὰ σχολεῖα καὶ πόσα διὰ τὰ Γυμνάσια;

482) Εἷς Δῆμος διέθεσεν ἐκ τοῦ προϋπολογισμοῦ του 360000 δραχμὰς ὑπὲρ τῶν ἀπόρων δημοτῶν του. Ἐκ τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ τὰ $\frac{3}{8}$ διενεμήθησαν πρὸς ἄμεσον ἐνίσχυσιν 72 οἰκογενειῶν καὶ τὰ λοιπὰ διὰ τὴν λειτουργίαν συσσιτίου ὑπὲρ τῶν ἀνέργων. Πόσαι δραχμαὶ ἐδόθησαν δι' ἑκάστην οἰκογένειαν καὶ πόσαι διετέθησαν διὰ τὸ συσσίτιον;

483) Τὸ σύνολον τῶν ἠσφαλισμένων προσώπων ἐν Ἑλλάδι κατὰ τῶν ἀσθενειῶν, γήρατος, ἀναπηρίας, μητρότητος κλπ. κατὰ τὸ ἔτος 1938 ἦτο 696000. Ἐξ αὐτῶν τὰ $\frac{23}{58}$ ἦσαν ἐγγεγραμμένοι εἰς τὰς Κοινωνικὰς Ἀσφαλίσεις. Πόσοι εἶναι οὗτοι;

484) Τὰ ἔσοδα τῶν ἀσφαλιστικῶν ταμείων, κατὰ τὸ 1938 ἦσαν 1 440 000 000 δραχ. Ἐξ αὐτῶν τὰ $\frac{7}{20}$ κατέβαλον οἱ ἠσφαλισμένοι, τὰ $\frac{17}{120}$ οἱ ἐργοδόται καὶ τὰ $\frac{7}{30}$ τὸ Κράτος. Τὰ δὲ λοιπὰ ἦσαν ἔσοδα ἐκ τῆς περιουσίας τῶν ταμείων. Νὰ εὕρῃς πόσας δρχ. κατέβαλον οἱ ἠσφαλισμένοι, πόσας οἱ ἐργοδόται, πόσας τὸ Κράτος καὶ πόσαι δρχ. εἶναι τὰ ἔσοδα ἐκ τῆς περιουσίας τῶν ταμείων.

485) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐσόδων διετέθησαν κατὰ τὸ 1938 τὰ $\frac{10}{18}$ διὰ τὴν παροχὴν συντάξεων καὶ βοηθημάτων, δι' ἀσθένειαν καὶ ἀνεργίαν. Νὰ εὕρῃς πόσαι δρχ. διετέθησαν διὰ τοὺς σκοποὺς αὐτούς, ὡς καὶ πόσαι δρχ. ἐδόθησαν κατὰ τὸ ἔτος τοῦτο εἰς τοὺς ἠσφαλισμένους περισσότεραι ἀπὸ ἐκείνας, τὰς ὁποίας κατέβαλον.

Ὁμὰς Ε'

486) Νὰ εὕρῃς τὰ $\frac{7}{9}$ τοῦ ἀριθμοῦ 60.

487) Τὰ $\frac{2}{5}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 40. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

488) Τὰ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 120. Πόσον εἶναι τὰ $\frac{5}{8}$ αὐτοῦ;

489) Τὸ $\frac{1}{3}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ ἔχουν ἄθροισμα 39. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

490) Τὸ $\frac{1}{3}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ καὶ τὸ $\frac{1}{6}$ αὐτοῦ ἔχουν ἄθροισμα 60. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

491) Νὰ εὕρῃς τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ 60.

492) Τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{4}{5}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 32. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

493) Ἐὰν πολλαπλασιάσω ἕνα ἀριθμὸν μὲ τὸν $3\frac{1}{5}$, εὑρίσκω γινόμενον $7\frac{3}{4}$. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

494) Ἐὰν εἰς τὸ διπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ προσθέσω τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ, θὰ λάβω τὸν ἀριθμὸν 72. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

495) Ἐὰν εἰς τὸ $\frac{1}{3}$ ἀριθμοῦ τινος καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ προσθέσωμεν τὸν 25, λαμβάνομεν τὸν ἴδιον ἀριθμόν. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

496) Τίνος ἀριθμοῦ τὸ $\frac{1}{20}$, ὅταν αὐξηθῇ κατὰ 30, γίνεται ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ;

III ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

166. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, π. χ. τῆς διαιρέσεως 3 : 5, παριστῶμεν διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{3}{5}$. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεχόμεθα ἤδη νὰ παριστῶμεν καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν. Οὕτω τὰ πηλίκα $\frac{2}{3} : 4$, $7 : \frac{3}{4}$, $\frac{5}{8} : \frac{2}{3}$ τὰ παριστῶμεν ἀντιστοίχως διὰ τῶν κλασμάτων:

$$\frac{\frac{2}{3}}{4}, \qquad \frac{7}{\frac{3}{4}}, \qquad \frac{\frac{5}{8}}{\frac{2}{3}}$$

Τὰ κλάσματα ὡς τὰ ἀνωτέρω, εἰς τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι καὶ οἱ δύο ὅροι ἀκέραιοι ἀριθμοί, λέγονται **σύνθετα κλάσματα**, τὰ δὲ μέχρι τοῦδε γνωστὰ λέγονται **ἁπλᾶ.**

167. Τὰ σύνθετα κλάσματα ἔχουν ὅλας τὰς ἰδιότητας τῶν ἁπλῶν κλασμάτων. Ἑπομένως, ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ συνθέτου κλάσματος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀξία του δὲν μεταβάλλεται. Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ χρησιμοποιήσωμεν διὰ νὰ τρέψωμεν ἓν σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν.

1ον) **Νὰ τραπῇ τὸ σύνθετον κλάσμα $\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{8}}$ εἰς ἁπλοῦν.**

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν 9 καὶ 8 τῶν ὅρων αὐτοῦ. Εἶναι δὲ τοῦτο τὸ 9×8.

Ἔχομεν λοιπὸν $\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{8}} = \dfrac{\frac{4}{9} \times 9 \times 8}{\frac{5}{8} \times 9 \times 8} = \dfrac{4 \times 8}{5 \times 9} = \dfrac{32}{45}.$

Σημείωσις. Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον θὰ φθάσωμεν καὶ ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ $\frac{4}{9}$ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ $\frac{5}{8}$ τοῦ συνθέτου κλάσματος. Καὶ πράγματι ἔχομεν:

$$\frac{4}{9} : \frac{5}{8} = \frac{4}{9} \times \frac{8}{5} = \frac{32}{45}.$$

2ον) **Ὁμοίως νὰ τραπῇ τὸ σύνθετον κλάσμα $\dfrac{5}{\frac{3}{4}}$ εἰς ἁπλοῦν.**

$$\frac{5}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{1} \times 4}{\frac{3}{4} \times 4} = \frac{20}{3} \quad \text{ἢ} \quad 5 : \frac{3}{4} = 5 \times \frac{4}{3} = \frac{20}{3}.$$

3ον) **Ὁμοίως διὰ τὸ σύνθετον κλάσμα $\dfrac{\frac{7}{9}}{3}$** ἔχομεν:

$$\frac{\frac{7}{9}}{\frac{3}{1}} = \frac{\frac{7}{9} \times 9}{\frac{3}{1} \times 9} = \frac{7}{3 \times 9} = \frac{7}{27} \quad \text{ἢ} \quad \frac{7}{9} : 3 = \frac{7}{9 \times 3} = \frac{7}{27}.$$

463 4661

4ον) **Ἐπίσης ἔχομεν :**

$$\frac{3\frac{1}{15}}{4\frac{2}{5}}=\frac{\frac{46}{15}}{\frac{22}{5}}=\frac{\frac{46}{15}\times 15}{\frac{22}{5}\times 15}=\frac{46}{66}=\frac{23}{33}\quad \text{ἢ}$$

$$3\frac{1}{15}:4\frac{2}{5}=\frac{46}{15}:\frac{22}{5}=\frac{46}{15}\times\frac{5}{22}=\frac{46}{66}=\frac{23}{33}.$$

Ἀσκήσεις.

497) *Νὰ τραποῦν τὰ σύνθετα κλάσματα εἰς ἁπλᾶ :*

$$\cfrac{\frac{5}{9}}{\frac{4}{9}}\qquad \cfrac{\frac{7}{12}}{\frac{11}{12}}\qquad \cfrac{\frac{1}{15}}{\frac{8}{15}}\qquad \cfrac{\frac{9}{20}}{\frac{1}{20}}\qquad \cfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}\qquad \cfrac{\frac{2}{5}}{\frac{5}{2}}$$

$$\cfrac{\frac{8}{9}}{4}\qquad \cfrac{\frac{30}{7}}{6}\qquad \cfrac{2}{\frac{2}{3}}\qquad \cfrac{3}{\frac{9}{10}}\qquad \cfrac{1\frac{1}{3}}{1\frac{1}{2}}\qquad \cfrac{3\frac{1}{5}}{7\frac{2}{5}}$$

498) *Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι σύνθετα κλάσματα εἰς ἁπλᾶ*

$$\cfrac{\frac{15}{64}}{45}\qquad \cfrac{\frac{28}{81}}{112}\qquad \cfrac{17\frac{7}{9}}{480}\qquad \cfrac{23\frac{9}{11}}{411}\qquad \cfrac{72}{\frac{9}{13}}\qquad \cfrac{225}{\frac{25}{37}}$$

$$\cfrac{49}{5\frac{3}{10}}\qquad \cfrac{49}{4\frac{4}{31}}\qquad \cfrac{4\frac{9}{50}}{3\frac{17}{25}}\qquad \cfrac{14\frac{5}{12}}{\frac{23}{24}}\qquad \cfrac{43\frac{1}{8}}{5\frac{11}{18}}\qquad \cfrac{40\frac{1}{5}}{14\frac{14}{25}}$$

IV. ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

168. Ὁρισμοί.—Ἐκ τῶν κλασματικῶν μονάδων αἱ $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κτλ. λέγονται **δεκαδικαί.** Ἤτοι **δεκαδικαὶ κλασματικαὶ μονάδες λέγονται αἱ μονάδες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν παρονομαστὴν 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ.** Τὰ δὲ κλάσματα, τὰ ὁποῖα γίνονται ἀπὸ τὴν ἐπανάληψιν δεκαδικῆς μονάδος, λέγονται δεκαδικὰ κλάσματα, ἐνῷ τὰ ἄλλα λέγονται **κοινά.** Οὕτω **δεκαδικὰ κλάσματα** εἶναι τὰ $\frac{75}{100}$, $\frac{9}{10}$, $1\frac{5}{1000}$ κτλ. καὶ κοινὰ τὰ $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{21}$ κτλ.

Τὰ δεκαδικὰ λοιπὸν κλάσματα ὑπάγονται εἰς τὰ κοινά. Ἑπομένως αἱ ἰδιότητες καὶ ἐν γένει, ὅσα ἐμάθομεν περὶ τῶν κλασμάτων, ἀληθεύουν καὶ περὶ τῶν δεκαδικῶν.

Τὰ δεκαδικὰ ὅμως κλάσματα δύνανται (ἕνεκα τῶν παρονομαστῶν 10, 100, 1000 κτλ.) νὰ γράφωνται, ὅπως θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, καὶ ὑπὸ μορφὴν ἀκεραίων. Ἐπίσης αἱ πράξεις ἐπ' αὐτῶν γίνονται πολὺ εὐκολώτερον ἀπὸ τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν κοινῶν κλασμάτων. Ἕνεκα δὲ τούτων κάμνομεν περὶ αὐτῶν ἰδιαίτερον λόγον.

169. Γραφὴ δεκαδικῶν κλασμάτων (ὑπὸ μορφὴν ἀκεραίων). —Διὰ νὰ ἴδωμεν, διατὶ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα δύνανται νὰ γράφωνται ὑπὸ μορφὴν ἀκεραίων, παρατηροῦμεν πρῶτον τὰ ἑξῆς:

Ὅτι $1=\frac{10}{10}$, $\frac{1}{10}=\frac{10}{100}$, $\frac{1}{100}=\frac{10}{1000}$, $\frac{1}{1000}=\frac{10}{10000}$ κτλ.

Ὅτι δηλαδή:

τὸ $\frac{1}{100}$ εἶναι δέκα φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὸ $\frac{1}{10}$,

» $\frac{1}{1000}$ » » » » » » $\frac{1}{100}$,

» $\frac{1}{10000}$ » » » » » » $\frac{1}{1000}$ κ.ο.κ.

Ἐπίσης γνωρίζομεν, ὅτι:

ἡ 1 μονὰς	εἶναι	τὸ	δέκατον	τῆς	1 δεκάδος,
ἡ 1 δεκὰς	»	»	»	»	1 ἑκατοντάδος,
ἡ 1 ἑκατοντὰς	»	»	»	»	1 χιλιάδος κ.ο.κ.

Κατόπιν τούτων, ἔστω ὁ ἀριθμὸς 3 ἑκατοντ., 5 δεκάδ., 6 μονάδες, 7 δέκατα, 2 ἑκατοστά, 4 χιλιοστά, τὸν ὁποῖον θέλομεν νὰ γράψωμεν ὑπὸ ἁπλουστέραν μορφήν. Τὸν ἀριθμὸν αὐτόν, ἔπειτα ἀπὸ ὅσα γνωρίζομεν, θὰ τὸν γράψωμεν ὡς ἑξῆς·

$$356+\frac{7}{10}+\frac{2}{100}+\frac{4}{1000}=356+\frac{700}{1000}+\frac{20}{1000}+\frac{4}{1000}+=356\frac{724}{1000}.$$

Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ τὸν γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς: Γράφομεν πρῶτον τὸ ψηφίον 3 τῶν ἑκατοντάδων. Δεξιὰ αὐτοῦ γράφομεν, ὡς γνωρίζομεν, τὸ ψηφίον 5 τῶν δεκάδων (εἶναι δὲ αἱ δεκάδες δέκα φορὰς μικρότεραι τῶν ἑκατοντάδων). Δεξιὰ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων γράφομεν τὸ ψηφίον 6 τῶν ἁπλῶν μονάδων (εἶναι δὲ 1 μονὰς τὸ δέκατον τῆς 1 δεκάδος).

Τώρα ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{10}$ εἶναι δέκα φορὰς μικρότερον τῆς ἁπλῆς μονάδος 1, δυνάμεθα τὸ ψηφίον 7 τῶν δεκάτων νὰ τὸ γράψωμεν δεξιὰ τοῦ ψηφίου 6 τῶν ἁπλῶν μονάδων, διότι ἡ θέσις, τὴν ὁποίαν θὰ καταλάβῃ, θὰ φανερώνῃ, ὅτι παριστᾷ μονάδα δέκα φορὰς μικροτέραν ἀπὸ τὴν μονάδα, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ 6 τῶν ἁπλῶν μονάδων, ἤτοι δέκατα. Ἐὰν δὲ πάλιν τὸ ψηφίον 2 τῶν ἑκατοστῶν γράψωμεν δεξιὰ τοῦ ψηφίου 7, ἡ θέσις, τὴν ὁποίαν θὰ καταλάβῃ, θὰ φανερώνῃ μονάδα δέκα φορὰς μικροτέραν ἀπὸ τὴν προηγουμένην, ἤτοι ἑκατοστά. Ἐὰν δὲ δεξιὰ τοῦ ψηφίου 2 γράψωμεν τὸ ψηφίον 4 τῶν χιλιοστῶν, ἡ θέσις του θὰ φανερώνῃ χιλιοστά. Ὥστε τὸν δοθέντα ἀριθμὸν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν, ὅπως γράφομεν τοὺς ἀκεραίους, ἤτοι 356724. Ἀλλ' ἂν ἀφήσωμεν οὕτω τὸν ἀριθμὸν αὐτόν, δὲν θὰ διακρίνεται τὸ ἀκέραιον μέρος ἀπὸ τὸ δεκαδικόν. Διὰ τοῦτο γράφομεν ἀμέσως ἔπειτα ἀπὸ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων **ὑποδιαστολήν.** Ὥστε ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς γράφεται 356,724. Ἤτοι εἶναι $356\frac{724}{1000} = 356{,}724$.

Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς 3 μον. $+ \frac{7}{10} + \frac{5}{100} = 3\frac{75}{100}$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: 3,75 καὶ ὁ 12 μον. $+ \frac{3}{10} + \frac{9}{1000} = 12\frac{309}{1000}$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: 12,309, ὁ δὲ $\frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{75}{1000}$ γράφεται 0,075. Ὥστε κατὰ τὴν γραφὴν αὐτήν, ὅταν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἀκέραιον μέρος, γράφομεν εἰς τὴν θέσιν του 0 καὶ κατόπιν αὐτοῦ τὴν ὑποδιαστολήν. Ἐπίσης 0 γράφομεν καὶ εἰς τὴν θέσιν δεκαδικῆς τάξεως (δηλαδὴ τῶν δεκάτων, ἑκατοστῶν, κτλ.), ἡ ὁποία λείπει.

170. Τὰ δεκαδικὰ κλάσματα, ὅταν γράφωνται ὑπὸ μορφὴν ἀκεραίων, θὰ τὰ ὀνομάζωμεν **δεκαδικοὺς ἀριθμούς.**

171. Γραφὴ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ὡς κλάσματος. — **Δεκαδικὸν ἀριθμὸν γράφομεν ὡς κλάσμα, ἐὰν παραλείψωμεν τὴν ὑποδιαστολήν, τὸν δὲ ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος θὰ προκύψῃ, γράφομεν ὡς ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν γράφομεν τὴν μονάδα 1 καὶ τόσα μηδενικὰ ἔπειτα ἀπὸ αὐτήν, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχει ὁ δοθεὶς δεκαδικὸς ἀριθμός.**

Π. χ. $2,5=\frac{25}{10}$ $29,105=\frac{29105}{1000}$ $0,05=\frac{5}{100}$.

172. Ἀπαγγελία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.—Ἀπαγγέλλομεν συνήθως ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν ὡς ἑξῆς:

Ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ, ἐὰν ὑπάρχῃ, καὶ κατόπιν τὸ δεκαδικὸν μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου.

Π. χ. 25,849 ἀπαγγέλλεται 25 ἀκέραια καὶ 849 χιλιοστά.

Ἄλλος συνήθης τρόπος ἀπαγγελίας δεκαδικοῦ (ἰδίως ὅταν ἔχῃ ὀλίγα ψηφία) εἶναι ὁ ἑξῆς:

Ἀπαγγέλλομεν τὸν ἀριθμὸν ὡς νὰ ἦτο ἀκέραιος, εἰς τὸ τέλος ὅμως λέγομεν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου του.

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 3,2 $\left(\frac{32}{10}\right)$ ἀπαγγέλλεται 32 δέκατα, καὶ ὁ 4,65 $\left(\frac{465}{100}\right)$ ἀπαγγέλλεται 465 ἑκατοστά,

173. Διὰ νὰ γράψωμεν ἀπαγγελλόμενον δεκαδικὸν ἀριθμόν, γράφομεν τὸ ἀκέραιον μέρος, κατόπιν τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ ἔπειτα τὸ δεκαδικὸν μέρος. Προσέχομεν ὅμως νὰ γράψωμεν πρῶτον, ὅσα μηδενικὰ εἶναι ἀνάγκη, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτοῦ νὰ κατέχῃ τὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν ὁρίζει ἡ τάξις, ἡ ὁποία ἀπαγγέλλεται.

Οὕτω 12 ἀκέραια καὶ 5 ἑκατοστὰ γράφονται 12,05, τὰ δὲ 7 χιλιοστὰ γράφονται 0,007.

174. Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.—1) **Δύο ἠγόρασαν ἀπὸ τὸ αὐτὸ κατάστημα ἀπὸ 25 δράμια καφέ· ἀλλ' ὁ μὲν εἷς ἐπλήρωσεν 7,2 δραχμάς ὁ δὲ ἄλλος 7,20 δραχμάς. Μήπως ἀπὸ αὐτοὺς τοὺς δύο ἐπλήρωσε κανεὶς περισσότερα χρήματα;**

Ὁ ἀριθμὸς 7,20 γίνεται ἀπὸ τὸν 7,2 ὅταν γράψωμεν εἰς τὸ τέλος τοῦ 7,2 ἓν μηδενικόν. Ἀλλὰ μὲ τὴν γραφὴν τοῦ 0 ἡ θέσις ἑκάστου ψηφίου, ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολήν, δὲν ἤλλαξε. Ὥστε δὲν ἤλλαξε καὶ ἡ ἀξία τοῦ ἀριθμοῦ. Ἑπομένως εἶναι 7,2=7,20. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι 7,2=7,20=7,200 κ.ο.κ. Ὥστε: **Ἡ ἀξία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται, ὅταν γράψωμεν εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ ὁσαδήποτε μηδενικά.** Διότι ἡ θέσις ἑκάστου ψηφίου, ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολήν, δὲν ἀλλάσσει. Ἄρα καὶ ἡ ἀξία του δὲν μεταβάλλεται. Οὕτως εἶναι $8{,}5 = 8{,}50 = 8{,}500$.

2) Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $4{,}87 \times 10$. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{487}{100} \times 10 = \frac{487}{10} = 48{,}7$. Ὥστε $4{,}87 \times 10 = 48{,}7$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $0{,}3728 \times 100 = \frac{3728}{10000} \times 100 = \frac{3728}{100}$ ἤτοι $0{,}3728 \times 100 = 37{,}28$ καὶ $0{,}27 \times 1000 = 270$, διότι $\frac{27}{100} \times 1000 = 27 \times 10 = 270$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $273{,}28 : 10 = \frac{27328}{100} : 10 = \frac{27328}{1000}$, ἤτοι $273{,}28 : 10 = 27{,}328$ καὶ $0{,}5 : 100 = \frac{5}{10} : 100 = \frac{5}{1000} = 0{,}005$.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα συνάγομεν ὅτι: **Πολλαπλασιάζομεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ. μεταθέτοντες τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν, δύο, τρεῖς κτλ. θέσεις πρὸς τὰ δεξιά. Διαιροῦμεν δὲ δεκαδικὸν διὰ 10, 100, 1000 κτλ. μεταθέτοντες τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ἀριστερὰ μίαν, δύο, τρεῖς κτλ. θέσεις.**

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς Α'

499) Τὸ δεκάλεπτον πόσας φορὰς εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὴν δραχμήν; Τί μέρος εἶναι τῆς δραχμῆς;

500) Ἡ δραχμὴ πόσα λεπτὰ ἔχει; Τὸ ἓν λεπτὸν τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι; Τί μέρος τοῦ δεκαλέπτου;

501) Πόσα δεκάλεπτα κάμνουν μίαν δραχμήν, ἓν δεκάδραχμον; Πόσα δέκατα κάμνουν μίαν ἀκεραίαν μονάδα, μίαν δεκάδα;

502) Πόσα λεπτὰ κάμνουν ἓν δεκάλεπτον, μίαν δραχμήν, ἓν δεκάδραχμον; Πόσα ἑκατοστὰ κάμνουν ἓν δέκατον, μίαν ἀκεραίαν μονάδα, μίαν δεκάδα;

503) Πόσα χιλιοστὰ κάμνουν ἓν ἑκατοστόν, ἓν δέκατον, μίαν ἀκεραίαν μονάδα;

504) Πόσα δεκάκις χιλιοστὰ κάμνουν ἓν χιλιοστόν, ἓν ἑκατοστόν, ἓν δέκατον;

505) Τέσσαρες ἁπλαῖ μονάδες πόσα ἑκατοστά, πόσα χιλιοστὰ καὶ πόσα δεκάκις χιλιοστὰ κάμνουν;

506) Μὲ πόσα δεκαδικὰ ψηφία γράφονται τὰ δέκατα, τὰ ἑκατοστὰ, τὰ δεκάκις χιλιοστά, τὰ ἑκατοντάκις χιλιοστά, τὰ ἑκατομμυριοστά;

507) Ἀριθμοῦ, ὅστις ἔχει τρία, πέντε, ἑπτὰ δεκαδικὰ ψηφία, πῶς θὰ ἀπαγγελθῇ τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον παριστᾷ μονάδας τῆς μικροτέρας τάξεως;

Ὁμὰς Β΄

508) Νὰ γραφοῦν ὡς δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ τὰ δύο δέκατα, τρία, ἑπτά, ἐννέα δέκατα τῆς δραχμῆς, ὡς καὶ τὰ ὀκτώ, δέκα πέντε, πενήντα ἑκατοστὰ τῆς δραχμῆς.

509) Νὰ γραφοῦν οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοί: α) Τρία ἀκέραια καὶ ὀκτὼ χιλιοστά. β) Τετρακόσια πέντε δεκάκις χιλιοστά. γ) Εἴκοσι πέντε ἑκατοντάκις χιλιοστά. δ) Εἴκοσι ἑπτὰ ἀκέραια καὶ πέντε ἑκατοντάκις χιλιοστά. ε) Ἑκατὸν ὀκτὼ ἀκέραια καὶ διακόσια πέντε ἑκατομμυριοστά. στ) Τριάκοντα δύο ἑκατομμυριοστά. ζ) Ἑκατὸν τεσσαράκοντα πέντε δεκάκις ἑκατομμυριοστά.

510) Νὰ ἀπαγγελθοῦν οἱ ἀριθμοὶ καὶ νὰ δειχθῇ ἡ ἀξία ἑκάστου δεκαδικοῦ ψηφίου:

47,08	25,313006	0,0000003
1,034	32,00671	0,0000058
0,0038	1,030072	5,20500342.

511) Πῶς ἄλλως δυνάμεθα νὰ ἀπαγγείλωμεν δεκαδικὸν ἀριθμόν;

512) Νὰ γραφοῦν οἱ ἑπόμενοι ἀριθμοὶ ὡς κοινὰ κλάσματα

0,6 0,18 0,608 0,005 4,25 0,00175 18,008.

513) Νὰ γίνουν οἱ ἀριθμοὶ 7,112 1,195 0,534 0,7 18,2 2,12847 0,000009 δέκα, ἑκατόν, χιλίας φορὰς μεγαλύτεροι.

514) Νὰ γίνουν οἱ ἑπόμενοι ἀριθμοὶ 10, 100, 1000 φορὰς μικρότεροι: 10,4 31,415 0,075 1583,62.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἀφοῦ οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ὑπάγονται εἰς τὰ κλάσματα, αἱ πράξεις αὐτῶν ὁρίζονται, ὅπως καὶ αἱ τῶν κλασμάτων. Ἐκτελοῦνται ὅμως πολὺ εὐκολώτερον, ἐπειδὴ γράφονται ὡς ἀκέραιοι.

175. Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις.—Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς γράφομεν αὐτοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ

εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην (γίνεται δὲ τοῦτο ὅταν αἱ ὑποδιαστολαὶ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην). **Ἔπειτα δὲ ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν ὑποδιαστολῶν.** Ποῖος ὁ λόγος τούτου;

Π.δ. 1ον) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα 23,745+2,2347+0,68.

23,7450		23,745
2,2347	ἢ	2,2347
0,6800		0,68
26,6597		26,6597.

2ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ 27,53—9,065.

27,530		27,53
9,065	ἢ	9,065
18,465		18,465.

3ον) Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι 47,495—15=32,495 καὶ ὅτι 25—7,636=17,364.

47,495		47,495		25,000		25
15,000	ἢ	15	καὶ	7,636	ἢ	7,636
32,495		32,495		17,364		17,364

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

Ἀπὸ μνήμης. 515) Νὰ εὕρῃς τὰ ἀθροίσματα:

3+5	*30+5*	*300+5*
0,3+0,5	*3+0,5*	*3+0,005*
0,03+0,05	*0,3+5*	*0,03+5*
0,003+0,005	*0,3+0,05*	*0,3+0,005.*

516) Ὁμοίως νὰ εὕρῃς τὰ ἀθροίσματα:

0,3 δρχ. +0,7 δρχ.	*4,5 + 5,5*	*5,4 +7,6*
0,25 δρχ. +0,75 δρχ.	*3,45+ 7,55*	*7,30+8,70*
0,15 μέτρ. +0,35 μέτρ.	*0,2 + 7*	*15,35+4,65*
0,37 μέτρ. +0,63 μέτρ.	*13+21,64*	*9,70+3,85.*

Γραπτῶς. 517) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα:

$62{,}22+73{,}8+2{,}439+45{,}6+0{,}287$

$0{,}425+3{,}1418+1{,}32816+8{,}42+102{,}564$

$74{,}1+0{,}7568+300{,}42+0{,}785649+48+0{,}0268$

$97{,}72+954{,}07+105+15{,}175+13{,}2+5{,}0003+0{,}46160$

Ὁμὰς Β′

518) Εἷς χρεωστεῖ εἰς ἕνα 1347,50 δρχμ., εἰς ἄλλον 1445,75, εἰς τρίτον 2500 καὶ εἰς τέταρτον 987,25 δραχμάς. Πόσας ὀφείλει ἐν ὅλῳ;

519) Εἷς ἐχρεώστει εἰς ἕνα 3100 δραχμάς, εἰς ἄλλον 2845,65 δραχ. καὶ εἰς τρίτον 4150,40 δραχ., ἀφοῦ δὲ ἐξώφλησε τὰ χρέη αὐτὰ τοῦ ἔμειναν εἰς τὸ ταμεῖον ἄλλαι 5075,75 δραχ. Πόσας δραχμὰς εἶχε πρὸ τῆς ἐξοφλήσεως τῶν χρεῶν;

520) Ὁ ἄνω εἰσέπραξε τὴν 1ην ἡμέραν τῆς ἑβδομάδος 1445,75 δρχ., τὴν 2αν 2053,35, τὴν 3ην 760 καὶ τὴν 4ην ἡμέραν 854,45 δρχ. Πόσας δρχ. εἰσέπραξε κατὰ τὰς 4 αὐτὰς ἡμέρας;

521) Εἷς ἐδαπάνησεν ἀπὸ τὰ κέρδη του τὴν 1ην ἡμέραν 135,60 δρχ. καὶ οἰκονόμησεν 47,15 δρχ., τὴν 2αν ἡμέραν ἐδαπάνησε 103,75 καὶ οἰκονόμησεν 56,25 καὶ τὴν 3ην ἐδαπάνησε 97,80 δρχ. οἰκονομήσας 78,85 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κέρδη ἑκάστης ἡμέρας, πόσον ἐδαπάνησεν ἐν ὅλῳ καὶ πόσα οἰκονόμησε τὰς τρεῖς αὐτὰς ἡμέρας.

522) Ὁ ἄνω ἐδαπάνησεν εἰς μίαν ἑβδομάδα τὰ ἑξῆς:

Εἴδη	Κυριακὴ	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευὴ	Σάββ.	Ὁλικὰ ποσὰ
	Δρχ.	Δρχ.	Δρχ.	Δρχ.	Δρχ	Δρχ.	Δρχ.	Δρχ.
Διὰ κρέας	52,50	—	48,80	—	59,60	—	—	
Ὄσπρια-λαχανικὰ	—	24,40	—	28.50	—	30,40	35,40	
Βούτυρον	18,20	9,75	16,25	8,60	14,90	6,25	24,80	
Ἔλαιον	5,75	11,25	6,75	12,00	4,25	14,80	9,60	
Φροῦτα	26,50	17.80	16,30	19,75	20,00	15,75	14,20	
Διάφορα	56,25	60,00	42,50	48,50	75,80	39,20	46,00	
Ὁλικὸν								

Νὰ εὕρῃς 1) τὰ ἔξοδα τῆς οἰκογενείας αὐτῆς δι' ἑκάστην ἡμέραν τῆς ἑβδομάδος, 2) τὰ ἔξοδα τῆς ἑβδομάδος δι' ἕκαστον εἶδος δαπάνης, καὶ 3) τὸ σύνολον τῶν δαπανῶν δι' ὁλόκληρον τὴν ἑβδομάδα.

523) Νὰ καταρτίσῃς ὅμοιον πίνακα δαπανῶν τῆς οἰκογενείας σου.

Ὁμὰς Γ΄

Ἀπὸ μνήμης. 524) Νὰ ἀφαιρέσῃς:

9 —5	90 —5	0,8 δρχ. —0,25 δρχ.
0,9 — 0,5	9 —0,5	0,6 μέτρ.—0,35 μέτρ.
0,07—0,05	0,9—0,05	0,5 ὥρ. —0,25 ὥρ.

525) Ὁμοίως νὰ ἀφαιρέσῃς:

5,45 — 3	47,30 — 20,30	9,48 — 7,23	17,50 — 12,65
18,68 — 6	1 — 0,25	12,80 — 6,37	0,1 — 0,01
13,25 — 8,25	4 — 2,35	5,20 — 3,40	0,35 — 0,035.

Γραπτῶς. 526) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἀφαιρέσεις:

1—0,008	8,9 —3,569	25,0378— 17,127	0,005— 0,00059
15—6,072	0,75—0,075	462—268,846	1000—775,0998.

527) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαφοραί:

$$160,75 - (15,408 + 3,517 + 103,64)$$
$$1115 - (69,07 + 462,456 + 3,0005)$$
$$(3109,8 + 214,527) - (375,198 + 2115,0019).$$

Ὁμὰς Δ΄

528) Τὰ κέρδη δύο συνεταίρων ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεώς των ἦσαν εἰς μίαν ἑβδομάδα 1812,25 δραχμαί. Ἐξ αὐτῶν ἔλαβεν ὁ εἷς, 697,90 δραχμάς. Πόσας ἔλαβεν ὁ ἄλλος;

529) Οἱ ἄνω συνεταῖροι κατέθεσαν ὁμοῦ κεφάλαια 64500 δρχ. Ἐξ αὐτῶν ὁ εἷς κατέθεσεν 27500,75 δρχ. Πόσας κατέθεσεν ὁ ἄλλος;

530) Ἀπὸ τὴν πώλησιν διαφόρων εἰδῶν εἰσέπραξαν οἱ ἄνω μίαν ἡμέραν 128,50 δρχ., 140,75 δρχ., 170 δρχ., 220 δρχ., 235 δρχ. καὶ 300,40 δρχ. Ἐστοίχισαν δὲ τὰ εἴδη αὐτὰ 875,50 δρχ. Πόσον ἐκέρδισαν;

531) Αἱ εἰσπράξεις μιᾶς ἑβδομάδος τοῦ καταστήματος ἦσαν 710,35 δρχ. Ἐπληρώθησαν ὅμως κατ' αὐτὴν διάφορα χρέη, ἤτοι:

2125,50 δρχ., 900 δρχ. 1775,75 δρχ. καὶ 1320,25 δρχ. Πόσαι δρχ. ἐπερίσσευσαν ἐκ τῶν εἰσπράξεων ;

532) Τὸ κτίριον τοῦ καταστήματος ἐστοίχισεν 125000 δρχ. διὰ τὴν ἀγορὰν καὶ 8164,65 δρχ. διὰ τὴν ἐπισκευήν του. Τὸ κτίριον τοῦτο μετεπωλήθη. Εἰσεπράχθησαν δὲ κατὰ πρῶτον 107500,50 δρχ. καὶ ἔπειτα ἄλλαι 44332,75 δρχ. Πόσον ἦτο τὸ κέρδος τῆς μεταπωλήσεως ;

Ὁ μ ὰ ς Ε΄

533) Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 0,00989 καὶ 0,0105 ποῖος εἶναι ὁ μεγαλύτερος καὶ κατὰ πόσον ;

534) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσω εἰς τὸν 408,1578 διὰ νὰ λάβω τὸν 1000 ;

535) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσω εἰς τὸν 0,001 διὰ νὰ λάβω 1 ;

536) Ἀπὸ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ ἀφαιρέσω τὸν 0,97, διὰ νὰ λάβω τὸν 0,00346 ;

176. Πολλαπλασιασμός.— Ἡ μία ὀκᾶ πράγματός τινος ἀξίζει 18,75 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν αἱ 2,6 ὀκάδες τοῦ αὐτοῦ πράγματος ;

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν 18,75 δρχ. $\times$ 2,6. Ἀλλὰ $18,75 = \frac{1875}{100}$, καὶ $2,6 = \frac{26}{10}$. Ὥστε εἶναι $18,75 \times 2,6 = \frac{1875}{100} \times \frac{26}{10} = \frac{1875 \times 26}{1000}$, ἤτοι $18,75 \times 2,6 = \frac{48750}{1000} = 48,750$ δρχ.

$$\begin{array}{r} 1875 \\ 26 \\ \hline 11250 \\ 3750 \\ \hline 48750 \end{array}$$

Ἀλλὰ τώρα παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ γινόμενον 48,750 εἶναι τὸ γινόμενον 1875$\times$26 (δηλαδὴ τῶν παραγόντων χωρὶς ὑποδιαστολήν) ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐχωρίσαμεν 3 δεκαδικὰ ψηφία (δηλαδὴ ὅσα ψηφία ἔχουν καὶ οἱ δύο παράγοντες ὁμοῦ). Ὥστε :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο δεκαδικοὺς ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι προκύπτουν, ὅταν δὲν λάβωμεν ὑπ' ὄψει τὰς ὑποδιαστολάς, καὶ εἰς τὸ γινόμενον αὐτῶν χωρίζομεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουν οἱ δύο παράγοντες ὁμοῦ.

Π. δ.			
	52,6	0,0048	1,27
	0,07	0,12	23
	3,682	96	381
		48	254
		0,000576	29,21

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς Α'

Ἀπὸ μνήμης. 537) *Νὰ εὕρῃς τὰ γινόμενα:*

5 δρχ. × 0,2	0,5 × 25	0,20 × 60	0,05 × 0,1
0,2 δρχ. × 5	0,3 × 0,2	200 × 0,06	0,01 × 0,8
0,25 ὥρ. × 4	0,6 × 0,4	0,4 × 0,02	0,001 × 12
0,25 μέτρ. × 6	20 × 0,6	0,04 × 0,2	0,01 × 1,2.

538) *Ἐκ τοῦ γινομένου 2357 × 54 = 127278 νὰ εὕρῃς ἀμέσως τὰ γινόμενα:*

23,57 × 54	2,357 × 0,54	2,357 × 0,054
235,7 × 5,4	0,2357 × 0,54	0,2357 × 5400.

Γραπτῶς. 539) *Νὰ εὕρῃς τὰ γινόμενα:*

36,25 × 44	768 × 82,003	83,86 × 3,5
15,747 × 36	4 × 17,04285	5,79 × 4,45
68,0705 × 13	47,45 × 0,6	0,38 × 0,0049.

540) *Νὰ πολλαπλασιασθῇ ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν:*

358,7   5819,58   70562   *ἐπὶ*   0,2   0,02   0,04

Πῶς δύνασαι νὰ συντομεύσῃς τὰς πράξεις αὐτάς;

541) *Νὰ εὕρῃς τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι*

$0,3 \times 0,3 = (0,3)^2$, $(0,5)^2$, $(0,12)^2$, $(2,5)^2$, $(0,02)^2$, $(0,07)^2$, $(0,25)^2$.

542) *Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα:*

5,2 × 8 × 0,3	74,9 × 4,8 × 0,6	6,89 × 0,49 × 0,02
24,5 × 24 × 0,3	0,24 × 12 × 0,16	80,09 × 7,4 × 0,015.

543) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων
$(0,2)^3$, $(0,3)^3$, $(0,5)^3$, $(0,1)^3$, $(0,1)^4$, $(0,1)^5$.

544) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα :
50,26 δρχ.$\times$4+86,75 δρχ.$\times$8, (5,28+7,05+0,03)$\times$0,15
19,25 δκ.$\times$12—9,125 δκ.$\times$11, (17+8,23+0,045)$\times$3,2—25,5$\times$2,7.

545) Νὰ εὕρῃς τὰ 0,5 τοῦ ἀριθμοῦ 2,14 καὶ τὰ 0,15 τοῦ 257,4

546) Νὰ εὕρῃς τὰ 0,125 τοῦ 25,28 καὶ τὰ 0,045 τοῦ 10,72.

Ὁ μ ὰ ς Β'

547) Εἷς ἠγόρασεν 928 ὀκάδας σίτου πρὸς 7,25 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσε ;

548) Μία ὀκᾶ σίτου δίδει 320 δράμια ἀλεύρου καὶ 80 δράμια πίτυρα. Πόσα δράμια ἀλεύρου καὶ πόσα δράμια πιτύρων δίδουν αἱ 4,5 ὀκάδες σίτου ;

549) Σῖτος καλῆς ποιότητος δίδει τὰ 0,85 τοῦ βάρους του ἄλευρον. Πόσον ἄλευρον λαμβάνομεν ἀπὸ 358 ὀκάδας σίτου, πόσον πίτυρον, καὶ πόσας ἀπὸ 228,4 ὀκάδας σίτου ;

550) Ἀπὸ μίαν ὀκᾶν ἀλεύρου παράγονται 1,25 ὀκάδες ἄρτου. Πόσος ἄρτος παράγεται ἀπὸ 8,4 ὀκάδας ἀλεύρου ;

551) Εἷς ἀρτοποιὸς ἠγόρασεν 20 σάκκους σίτου, καθεὶς τῶν ὁποίων περιεῖχε 45 ὀκάδας. Ἀπὸ τὸν σῖτον αὐτὸν πόσας ὀκάδας ἄλευρον ἔλαβεν, ὅταν οὗτος δίδῃ τὰ 0,16 τοῦ βάρους του πίτυρα καὶ τὰ λοιπὰ ἄλευρον ;

552) Ὁ ἀνωτέρω ἀρτοποιὸς ἐκ τοῦ ἀλεύρου, τὸ ὁποῖον ἔλαβεν, ἐκράτησε τὰς 56 ὀκάδας καὶ τὰς ὑπολοίπους ἐχρησιμοποίησε διὰ τὴν παραγωγὴν ἄρτου. Πόσας ὀκάδας ἄρτου παρήγαγεν, ὅταν 1 ὀκᾶ τοῦ ἀλεύρου αὐτοῦ δίδῃ 1,3 ὀκ. ἄρτου ;

553) Εἰς τὸν ἄνω ἀρτοποιὸν τὸ ἄλευρον, μὲ τὸ ὁποῖον παρασκευάζεται μία ὀκᾶ ἄρτου, στοιχίζει 8,10 δραχμάς. Πληρώνει δὲ δι᾽ ἀρτοποιητικὰ 0,4 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ διὰ ζύμην 0,05 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Ἐπιβαρύνεται δὲ ἡ τιμὴ τοῦ ἄρτου ἀπὸ τὰ ἄλλα ἔξοδα 0,25 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Τὸν ἄρτον αὐτὸν ἐπώλησε πρὸς 10,20 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Νὰ εὕρῃς α) πόσον κερδίζει τὴν μίαν ὀκᾶν, β) πόσον κερδίζει εἰς 350 ὀκάδας καὶ γ) πόσον κερδίζει εἰς ἕνα μῆνα, ἐὰν πωλῇ καθ᾽ ἡμέραν 500 ὀκάδας ἄρτου μὲ τὴν ἰδίαν τιμήν.

354) *Εἷς ἔμπορος ἠγόρασεν 75 σάκκους σίτου, καθεὶς τῶν ὁποίων περιεῖχεν 64 ὀκάδας, πρὸς 6,90 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Ἀπὸ τὸν σῖτον αὐτὸν ἔλαβε τὰ 0,82 τοῦ βάρους του ἄλευρον καὶ τὰ λοιπὰ πίτυρα. Ἐπώλησε δὲ τὸ μὲν ἄλευρον πρὸς 9,50 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, τὰ δὲ πίτυρα πρὸς 2,15 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισεν ἐν ὅλῳ ;*

177. Διαίρεσις. Διαίρεσις δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου.— Θέλομεν νὰ μοιράσωμεν 725,2 δραχμὰς ἐξ ἴσου εἰς 4 ἀνθρώπους. Πόσας θὰ λάβῃ ὁ καθείς ;

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν 725,2 δραχ : 4. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ 725,2 δραχμαὶ κάμνουν 7252 δέκατα τῆς δραχμῆς. Ἐὰν δὲ μοιράσωμεν τὰ 7252 δέκατα τῆς δραχμῆς εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους, τὸ μερίδιον ἑκάστου θὰ παριστᾷ δέκατα τῆς δραχμῆς. Διαιροῦμεν λοιπὸν 7252 : 4 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 1813 δέκατα ἢ 181,3. Ὥστε εἶναι 725,2 : 4=181,3. Ἐὰν εἴχομεν νὰ μοιράσωμεν 356,75 δραχμὰς εἰς 5 ἀνθρώπους, θὰ ἔπρεπε νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν 356,75 : 5, ἤτοι τὴν διαίρεσιν 35675 ἑκατοστῶν τῆς δραχμῆς διὰ 5. Τὸ πηλίκον τῆς τελευταίας αὐτῆς διαιρέσεως εἶναι 7135 ἑκατοστὰ ἢ 71,35 δραχμαί. Εἶναι λοιπὸν 356,75 : 5=71,35.

Ὥστε : **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου, διαιροῦμεν ὡς ὁ διαιρετέος νὰ ἦτο ἀκέραιος. Χωρίζομεν δὲ ἔπειτα εἰς τὸ πηλίκον τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα τοιαῦτα ἔχει ὁ διαιρετέος.**

Π.δ. 1ον) 27,456 : 12=2,288 2ον) 360,36 : 15=24,02

```
27,456 | 12            360,36 | 15
 34    |------          60     |------
 105   | 2,288             36  | 24,02
   96                        6.
    0
```

178. Πηλίκον κατὰ προσέγγισιν.— Τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς δευτέρας διαιρέσεως εἶναι 24,02 καὶ $\frac{6}{15}$ τοῦ ἑκατοστοῦ. Ὥστε ἡμεῖς, οἱ ὁποῖοι ἐλάβομεν ὡς πηλίκον τὸ 24,02, ἐκάμομεν λάθος. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ λάθος αὐτὸ εἶναι μικρότερον τοῦ ἑνὸς ἑκατοστοῦ, λέγομεν ὅτι τὸ πηλίκον 24,02 τῆς διαιρέσεως 360,36 : 15 εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

Π. δ.

2,367	8
23	0,295
76	
47	
7	

μὲ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ.

Ἀλλ' εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ παρατηροῦμεν πάλιν, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$, ποὺ παραλείπομεν, εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἥμισυ τοῦ χιλιοστοῦ. Ἐὰν κάμωμεν λοιπὸν αὐτὸ 1 χιλιοστὸν καὶ τὸ προσθέσωμεν εἰς τὸ 0,295, λάβωμεν δὲ οὕτω ὡς πηλίκον τὸ 0,296, τὸ σφάλμα, ποὺ θὰ κάμωμεν τώρα θὰ εἶναι $\frac{1}{8}$ τοῦ χιλιοστοῦ καὶ ὄχι $\frac{7}{8}$ αὐτοῦ, ὡς ἦτο προηγουμένως. Τὸ πηλίκον λοιπὸν 0,296 εἶναι ἀκριβέστερον ἀπὸ τὸ 0,295, μὲ τὴν διαφοράν, ὅτι τὸ πρῶτον εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἀληθὲς πηλίκον, ἐνῷ τὸ δεύτερον εἶναι μικρότερον αὐτοῦ. Δι' ὃ λαμβάνομεν ὡς πηλίκον τῆς διαιρέσεως 2,367 : 8 τὸ 0,296.

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Ἐὰν ἡ διαίρεσις ἀφήσῃ ὑπόλοιπον δυνάμεθα νὰ τὴν ἐξακολουθήσωμεν. Πρὸς τοῦτο δὲ γράφομεν 0 εἰς τὸ ὑπόλοιπον καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν (ὅταν κάμνωμεν τοῦτο, τρέπομεν τὸ ὑπόλοιπον εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως). Ἐὰν δὲ καὶ αὕτη ἀφήσῃ ὑπόλοιπον, γράφομεν εἰς αὐτὸ ἄλλο 0. Ἐξακολουθοῦμεν δὲ οὕτω, μέχρις ὅτου εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0 ἢ εὕρωμεν τὸ πηλίκον, μὲ ὅσην προσέγγισιν θέλομεν. Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν ἐξακολουθοῦμεν τὰς προηγουμένας διαιρέσεις.

360,36	15
60	24,024
36	
60	
0	

2,367	8
23	0,295875
76	
47	
70	
60	
40	
0.	

Π.δ. 1ον) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῆς 47,3 : 17 μὲ προσέγγισιν 0,01.

47,3	17
133	2,78
140	
4	

47,3 : 17=2,78 μὲ προσέγγισιν 0,01.

2ον) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῆς 178 : 14 μὲ προσέγγισιν 0,001.

```
 178   | 14
  38   |-------
 100   | 12,714
   20
    60
     4
```

178 : 14=12,714 μὲ προσέγγισιν 0,001.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὁμὰς Α'

Ἀπὸ μνήμης. *555) Νὰ εὕρῃς τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων*

4,6 δρχ. : 2 12,8 λίρ. : 4 0,8 : 4 0,24 : 2 0,9 : 9
6,9 μέτρ. : 3 15,9 δκ. : 3 0,19 : 3 0,48 : 4 0,3 : 5.

556) Ὁμοίως νὰ εὕρῃς τὰ πηλίκα :

9,81 : 9 25,75 : 5 0,035 : 7 27,27 : 3
12,69 : 3 0,006 : 6 0,124 : 4 3,25 : 5
36,45 : 5 0,012 : 2 8,48 : 8 6,37 : 7.

Γραπτῶς. *557) Νὰ κάμῃς τὰς διαιρέσεις :*

173,52 : 9 83,5128 : 36 0,3465 : 231 359,7 : 654
5,0024 : 18 5,705 : 35 27,69 : 213 9,765 : 1050.

558) Νὰ εὕρῃς τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων μὲ προσέγγισιν 0,1, 0,01, 0,001.

0,566 : 21 3,4 : 701 1,70342 : 786
73,18 : 137 76,5 : 859 28,8778 : 3567.

559) Ὁμοίως τῶν κάτωθι διαιρέσεων κατὰ προσέγγισιν 0,0001.

24,8 : 7 206,7 : 419 80,50 : 144
142,56 : 23 0,572 : 859 224,1 : 4728.

560) Νὰ εὕρῃς τὰ ἐξαγόμενα :

$(13,4 + 3,51 + 1,269 + 0,036) : 3$
$(678,4 + 7,055 + 75,61 + 478,3) : 16$
$(75,68 + 42,528 + 35,7 + 71,256) : 48.$

561) Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι 1310,35 καὶ ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁ 15. Ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος ;

Ὁμὰς Β΄

562) Εἷς οἰκονόμησεν ἐπὶ 7 ἡμέρας 122,50 δραχμάς. Πόσον οἰκονόμησε τὴν ἡμέραν ;

563) Εἷς ἐργάτης ἐκέρδισεν εἰς 1 μῆνα 1687,50 δραχμάς. Ἐξ αὐτῶν κατέθεσε 500 δρχ. εἰς τὸ Ταμιευτήριον καὶ τὰς ὑπολοίπους ἐξώδευσε διὰ τὴν διατροφήν του κατὰ τὸν μῆνα αὐτόν. Πόσον ἐξώδευε τὴν ἡμέραν ;

564) Εἷς εἰργάσθη εἰς 1 ἑβδομάδα 5 ἡμέρας μὲ ἡμερομίσθιον 72,50 δρχ. Ἐξ αὐτῶν οἰκονόμησεν 65 δρχ., τὰς δὲ ὑπολοίπους ἐδαπάνησε διὰ τὴν διατροφήν του κατὰ τὴν ἑβδομάδα αὐτήν. Πόση δαπάνη ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν ἡμέραν ;

565) Εἷς ἐργάτης ἐργάζεται 25 ἡμέρας τὸν μῆνα μὲ ἡμερομίσθιον 75 δρχ. Ἐξ αὐτῶν πληρώνει 56,25 δρχ. εἰς τὸ Ταμεῖον τῶν Κοινωνικῶν Ἀσφαλίσεων διὰ κάθε μῆνα ἐργασίας καὶ καταθέτει εἰς τὸ Ταμιευτήριον 150 δρχ. Τὰς ὑπολοίπους δὲ δρχ. ἐξοδεύει διὰ τὴν διατροφὴν τοῦ μηνός. Πόσον ἐξοδεύει τὴν ἡμέραν ;

566) Εἷς ἐργάτης καὶ ἡ σύζυγός του κερδίζουν μαζὶ 117,60 δρχ. τὴν ἡμέραν. Ἐξ αὐτῶν τὸ $\frac{1}{3}$ κερδίζει ἡ σύζυγος καὶ τὰ λοιπὰ ὁ σύζυγος. Νὰ εὕρῃς α) πόσον κερδίζει χωριστὰ ὁ καθεὶς εἰς 1 μῆνα, ἐὰν αἱ ἐργάσιμοι ἡμέραι τοῦ μηνὸς εἶναι 26.

β) Ἐὰν θέλουν νὰ οἰκονομήσουν εἰς 1 ἔτος δραχ. 2500, πόσας δραχ. πρέπει νὰ δαπανοῦν τὴν ἡμέραν ;

567) Ἐὰν εἷς ἐργάτης ἐξώδευε διὰ τὴν διατροφήν του 1500 δρχ. τὸν μῆνα, θὰ τοῦ ἔλειπον εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους 1757,50 δρχ. Νὰ εὕρῃς α) πόσον κερδίζει ὁ ἐργάτης οὗτος εἰς 1 ἔτος καὶ β) πόσον πρέπει νὰ ἐξοδεύῃ τὸν μῆνα διὰ νὰ μὴ ἔχῃ ἔλλειμμα.

179. Διαίρεσις δεκαδικοῦ διὰ δεκαδικοῦ.— **Ἔστω ἡ διαίρεσις 25,896 : 2,3.** Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ 10 θὰ ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν 258,96 : 23, ἤτοι δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου.

Ὁμοίως, ὅταν ἔχωμεν 0,45 : 2,768 καὶ πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ 1000, θὰ ἔχωμεν 450 : 2768.

Ὥστε: **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν διὰ δεκαδικοῦ, κάμνομεν πρῶτον τὸν διαιρέτην ἀκέραιον καὶ ἔπειτα μεταθέτο-**

μεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ διαιρετέου τόσας θέσεις πρὸς τὰ δεξια, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία εἶχεν ὁ διαιρέτης. Διαιροῦμεν δὲ οὕτω δεκαδικὸν ἢ ἀκέραιον δι' ἀκεραίου.

Π. δ. 8,7 : 0,23=37,82 μὲ προσέγγισιν 0,01 ἢ καλύτερα 37,83

$$\begin{array}{r|l} 870 & 23 \\ \cline{2-2} 180 & 37,82 \\ 190 & \\ 60 & \\ 14 & \end{array}$$

Σημείωσις. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 870 : 23 εἶναι 0,14. Ἑπομένως τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 8,7 : 0,23 εἶναι 0,14 : 100=0,0014 (διότι ἐπολλαπλασιάσαμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην αὐτῆς ἐπὶ 100, ἐπομένως καὶ τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς 0,0014 ἐπολλαπλασιάσθη (§ 90) ἐπὶ 100 καὶ ἔγινε 0,14 εἰς τὴν διαίρεσιν 870 : 23.

Ὥστε διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πραγματικὸν ὑπόλοιπον μιᾶς τοιαύτης διαιρέσεως, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ εὑρεθὲν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ἐπὶ τὸν ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσθη ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

Ἀπὸ μνήμης. 568) Νὰ εὕρῃς τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων

0,6 δρχ. : 0,2 δρχ.	*0,9 μέτρ. : 0,3 μέτρ.*
1,6 δρχ. : 0,8 δρχ.	*4,2 πήχ. : 0,6 πήχ.*
5,6 δρχ. : 0,8 δρχ.	*6 ὀκάδ. : 0,2 ὀκάδ.*
9 μέτρ. : 0,3 μέτρ	*16 χιλγ. : 0,8 χιλγ.*
42 μέτρ. : 0,7 μέτρ.	*56 χιλγ. : 0,7 χιλγ.*

569) Ὁμοίως τῶν διαιρέσεων :

0,24 : 0,6	*0,54 : 0,06*	*5,4 : 0,09*	*1,24 : 0,002*
0,86 : 0,2	*0,32 : 0,8*	*0,5 : 0,05*	*3,6 : 0,003*
0,95 : 0,19	*0,75 : 0,5*	*24 : 0,04*	*35 : 0,05*
0,27 : 0,03	*2,7 : 0,03*	*1 : 0,005*	*0,125 : 0,025.*

570) Ἐκ τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως 356 : 89 (=4) νὰ εὕρῃς ἀμέσως τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων :

35,6 : 8,9	*35,6 : 890*	*0,0356 : 0,89*
35,6 : 89	*0,0356 : 890*	*0,356 : 0,0089.*

Γ ρ α π τ ῶ ς. 571) Νὰ εὕρῃς τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων

169 : 0,013	*819 : 0,2457*	*2345 : 0,06*
81 : 0,0162	*8675,6 : 0,004*	*0,00027 : 11,07*
2875 : 2,875	*8,5604 : 0,012*	*354,293 : 6,005*
84 : 0,697	*38,572 : 45,6*	*198,064 : 0,0541.*

572) Νὰ συμπληρώσῃς τὰς ἰσότητας :

7,5 : ; = 0,5	*4,8 : ; = 0,12*	*0,96 : ; = 2,4*
; : 0,09 = 0,25	*; : 0,72 = 1,3*	*; : 0,019 = 0,084.*

Ὁ μ ὰ ς Β΄

573) Διὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ ὕδατος ἐκ μιᾶς πηγῆς εἰς ἓν χωρίον ἐχρησιμοποιήθησαν σωλῆνες, μήκους 0,75 μ. ὁ καθείς. Πόσοι σωλῆνες ἐχρησιμοποιήθησαν, ἐὰν ἡ ἀπόστασις ἦτο 1500 μέτρα ;

574) Ἓν ἐργοστάσιον ἀπέχει ἀπὸ τὴν θάλασσαν 2100 μέτρα. Διὰ νὰ ρίπτωνται δὲ εἰς ταύτην τὰ ἀκάθαρτα νερὰ τοῦ ἐργοστασίου ἐχρησιμοποιήθησαν σωλῆνες, καθεὶς τῶν ὁποίων εἶχε μῆκος 1,25 μ. Πόσοι ἦσαν οἱ σωλῆνες αὐτοί ;

575) Καθεὶς τῶν ἄνω σωλήνων στοιχίζει 5,75 δραχμάς. Πόσους σωλῆνας θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 10120 δρχ. ;

180. Τροπὴ κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικόν.—Οἱ ἄνθρωποι εἰς τοὺς ἐμπορικούς, χρηματικοὺς κτλ. λογαριασμούς των προτιμοῦν νὰ ἐργάζωνται μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμούς, διότι αἱ πράξεις ἐπ᾿ αὐτῶν εἶναι, ὡς εἴδομεν, εὔκολοι. Διὰ τοῦτο, ὅταν εἰς αὐτοὺς (τοὺς λογαριασμοὺς) παρουσιάζωνται κοινὰ κλάσματα, τὰ τρέπουν εἰς δεκαδικά.

Ἡ τροπὴ τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικὰ στηρίζεται εἰς τὸ ἑξῆς. Γνωρίζομεν, ὅτι πᾶν κλάσμα εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του. Τὸ δὲ πηλίκον τοῦτο δυνάμεθα νὰ τὸ ἐκφράσωμεν (2ον π.δ. § 178) διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

Π.δ. 1) Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$ εἰς δεκαδικόν. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.

1) 7 | 8
70 | 0,875
60
40
0

ὥστε $\frac{7}{8} = 0{,}875$

2) $\frac{19}{16} = 1{,}1875$

19 | 16
30 | 1,1875
140
120
80
0

3) $\frac{8}{11} = 0{,}7272..$

8 | 11
80 | 0,7272..
30
80
30
8

4) $\frac{27}{55} = 0{,}49090..$

27 | 55
270 | 0,49090..
500
50
500
50

Σημείωσις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων συνάγομεν, ὅτι ἄλλα μὲν κοινὰ κλάσματα τρέπονται εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ἀκριβῶς, ἄλλα δὲ ὄχι. Εἰς τὰ τελευταῖα δὲ κοινὰ κλάσματα ἡ διαίρεσις τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ δὲν τελειώνει ποτέ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον μὲ ὅσην προσέγγισιν θέλομεν.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς Α΄

576) Νὰ τραποῦν εἰς δεκαδικὰ τὰ κοινὰ κλάσματα:

α) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{16}$, $\frac{9}{25}$, $\frac{19}{32}$, $\frac{13}{40}$, $\frac{27}{64}$, $\frac{111}{125}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$

β) $2\frac{3}{8}$, $3\frac{3}{12}$, $7\frac{9}{20}$, $11\frac{21}{40}$, $6\frac{37}{80}$, $12\frac{111}{160}$, $9\frac{187}{200}$.

577) Νὰ εὕρῃς τὰ ἀθροίσματα:

α) $\frac{3}{4} + 0{,}15$ *δ)* $\frac{3}{4} + 0{,}375$ *ζ)* $\frac{1}{2} + 0{,}24 + 4\frac{3}{4}$

β) $\frac{4}{5} + 0{,}47$ *ε)* $2{,}148 + \frac{7}{8}$ *η)* $0{,}5 + \frac{5}{8} + 0{,}65$

γ) $0{,}65 + \frac{1}{2}$ *ϛ)* $0{,}137 + 3\frac{1}{4}$ *ϑ)* $\frac{4}{5} + 1{,}08 + 7\frac{5}{8}$.

578) Νὰ ἀφαιρέσῃς τὸν $5\frac{3}{8}$ *ἀπὸ τὸν* $10{,}065$, *τὸν* $4{,}6$ *ἀπὸ τὸν* $5\frac{1}{25}$ *καὶ τὸν* $0{,}875$ *ἀπὸ τὸν* $3\frac{7}{125}$.

579) *Νὰ πολλαπλασιάσῃς :*

α) $1{,}4 \times \frac{3}{4}$ δ) $0{,}24 \times \frac{1}{4}$ ζ) $0{,}275 \times \frac{1}{4}$

β) $0{,}8 \times 1\frac{4}{5}$ ε) $2\frac{5}{8} \times 1{,}6$ η) $0{,}454 \times \frac{9}{20}$

γ) $2\frac{1}{2} \times 4{,}8$ ϛ) $8\frac{11}{40} \times 5{,}3$ ϑ) $4{,}8 \times \frac{7}{16}$

580) *Νὰ κάμῃς τὰς διαιρέσεις :*

$4{,}8 : \frac{2}{3}$ $\frac{3}{4} : 0{,}75$ $12\frac{1}{4} : 2{,}25$

$0{,}48 : \frac{3}{4}$ $2\frac{1}{2} : 0{,}05$ $2{,}34375 : 3\frac{1}{8}$

$0{,}625 : \frac{5}{8}$ $3\frac{1}{8} : 0{,}125$ $7{,}644 : 2\frac{6}{7}$.

Ὁ μ ὰ ς Β΄

581) *Ἐκ δύο ὑφασμάτων τὸ ἓν ἔχει πλάτος $\frac{7}{8}$ τοῦ μέτρου καὶ τὸ ἄλλο 0,850 αὐτοῦ. Ποῖον ἀπὸ αὐτὰ τὰ ὑφάσματα ἔχει τὸ μεγαλύτερον πλάτος ;*

582) *Ἐκ δύο ὑφασμάτων, τὸ ἓν ἔχει μῆκος $\frac{3}{8}$ τοῦ μέτρου καὶ τὸ ἄλλο 0,37 τοῦ μέτρου. Ποῖον ἀπὸ αὐτὰ ἔχει μῆκος μεγαλύτερον ;*

583) *Μία λωρὶς ὑφάσματος ἔγινε ἀπὸ τρία τεμάχια. Τὸ πρῶτον εἶχε μῆκος 0,2 τοῦ μέτρου, τὸ δεύτερον $\frac{1}{4}$ καὶ τὸ τρίτον $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ὅλης τῆς λωρίδος ;*

584) *Ἡ ἀξία τῆς ὅλης λωρίδος τοῦ ἄνω προβλήματος ἦτο 56,95 δραχμάς. Ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς τεμαχίου ἦτο 16 $\frac{3}{4}$ δραχμὰς καὶ ἡ τοῦ ἄλλου $26\frac{4}{5}$. Πόση ἦτο ἡ ἀξία τοῦ τρίτου τεμαχίου ;*

585) *Ἐὰν ἡ ἀξία ἑνὸς ὑφάσματος εἶναι 54,80 δρχ. τὸν πῆχυν, ποία εἶναι ἡ ἀξία 4 πήχεων, $4\frac{4}{5}$ πήχ., $2\frac{7}{8}$ πήχεων ;*

586) *Ἐὰν ἡ ἀξία $\frac{2}{5}$ τοῦ πήχεως ἑνὸς ὑφάσματος εἶναι 32,80 δραχμαί, πόση εἶναι ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς πήχεως ;*

587) *Ἓν τεμάχιον ὑφάσματος 17,80 μέτρων πρόκειται νὰ κοπῇ εἰς δύο ἄλλα τεμάχια, τὸ ἓν **ἐξ αὐτῶν** νὰ εἶναι κατὰ 2 $\frac{1}{2}$ μέ-*

τρα μεγαλύτερον τοῦ ἄλλου. Πόσων μέτρων θὰ εἶναι τὸ καθέν;

588) Δι' ἓν ὑποκάμισον χρειάζονται $3\frac{3}{4}$ μέτρα ὑφάσματος. Πόσα ὑποκάμισα θὰ γίνουν μὲ 11,25 μέτρα; Καὶ πόσον θὰ στοιχίσουν αὐτά, ἐὰν τὸ ἓν μέτρον τοῦ ὑφάσματος ἀξίζῃ $62\frac{1}{2}$ δραχμ. καὶ ἐὰν διὰ ραπτικὰ τοῦ ἑνὸς ὑποκαμίσου ἐπληρώθησαν 72,50 δραχμαί;

Προβλήματα ἐπὶ τῶν πράξεων.

Ὁμὰς Α'

589) Τὰ δάση ὅλης τῆς Ἑλλάδος εἶναι 19180000 στρέμματα. Ἐξ αὐτῶν τὰ $\frac{5}{8}$ εἶναι τοῦ Δημοσίου. Πόσα στρέμματα ἀνήκουν εἰς τὸ Δημόσιον καὶ πόσα ὄχι;

590) Ἡ ξυλεία, ποὺ ἐξήχθη ἀπὸ τὰ δάση τῆς Ἑλλάδος, ἦτο 107100 κυβ. μ. κατὰ τὸ 1936, κατὰ δὲ τὸ 1937 ἦτο μεγαλυτέρα τῆς προηγουμένης κατὰ τὸ $\frac{1}{90}$ αὐτῆς. Πόση ξυλεία ἐξήχθη κατὰ τὸ 1937;

591) Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ξυλείας 46000 κ. μ. προῆλθον ἀπὸ τὰ δάση τοῦ Δημοσίου. Ἡ ἀξία δὲ αὐτῶν ἦτο 44500000 δραχμαί. Πόση ἦτο ἡ ἀξία 1 κυβικοῦ μέτρου;

592) Τὰ $\frac{4}{9}$ τῆς παραγωγῆς τῶν ξυλανθράκων κατὰ τὸ 1937 προῆλθον ἀπὸ τὰ δημόσια δάση καὶ ἦσαν 36000000 ὀκ. Πόσοι ξυλάνθρακες παρήχθησαν ἀπὸ ὅλα τὰ δάση τῆς Ἑλλάδος κατὰ τὸ 1937;

593) Ἡ ἀξία 1 ὀκᾶς ξυλανθράκων εἰς τὸν τόπον τῆς παραγωγῆς εἶναι 2,25 δρχ. Πόση ἦτο ἡ ἀξία ὅλων τῶν ξυλανθράκων, οἱ ὁποῖοι παρήχθησαν ἀπὸ τὰ δάση τῆς Ἑλλάδος κατὰ τὸ 1937;

594) Ἡ ρητίνη, ποὺ συνέλεξαν ἀπὸ τὰ πεῦκα τῆς Ἑλλάδος κατὰ τὸ 1937, ἦτο 23100000 ὀκάδ. Ἤξιζε δὲ 7,20 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσαι δρχ. ἦτο τὸ εἰσόδημα ἐκ τῆς ρητίνης κατὰ τὸ ἔτος τοῦτο;

595) Τὰ $\frac{7}{8}$ τῆς ἄνω ρητίνης ἠγόρασαν διάφορα ἐργοστάσια. Ἐκ δὲ τοῦ ὑπολοίπου αἱ 293400 ὀκάδες ἐξήχθησαν εἰς τὸ ἐξωτερικὸν καὶ αἱ λοιπαὶ ἠγοράσθησαν ὑπὸ τῶν οἰνοποιῶν καὶ ἄλλων. Νὰ εὑρεθῇ πό-

σας ὀκάδας ῥητίνης ἠγόρασαν τὰ ἐργοστάσια κατὰ τὸ 1937 καὶ πόσαι ὀκ. ἠγοράσθησαν ὑπὸ τῶν οἰνοποιῶν καὶ ἄλλων.

596) Ἀπὸ τὴν ῥητίνην τὰ ἐργοστάσια, ἐκτὸς τῶν ἄλλων, ἐξάγουν τερεβινθέλαιον (νέφτι). Τὸ νέφτι, τὸ ὁποῖον ἐξήχθη εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κατὰ τὸ 1937 ἦτο 4100000 ὀκ. Ἐπωλήθη δὲ πρὸς 18,40 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσαι δραχμαὶ εἰσῆλθον εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ κατὰ τὸ 1937 ἀπὸ τὴν ἐξαγωγὴν αὐτήν;

597) Ἄλλο σπουδαῖον προϊὸν τῶν δασῶν εἶναι τὸ βαλανίδιον. Κατὰ τὸ 1937 ἡ παραγωγὴ τοῦ βαλανιδίου ἀνῆλθεν εἰς 16000 τόννους. Ἐξ αὐτῶν τὸ $\frac{1}{6}$ ἐξήχθη εἰς τὸ ἐξωτερικὸν πρὸς 9,5 λίρας Ἀγγλίας κατὰ τόννον. Τὸ ἥμισυ αὐτῶν ἠγόρασε τὸ ἐργοστάσιον Μυτιλήνης. Ἐξήγαγε δὲ ἀπ' αὐτοὺς 3470 τόννους ὑγροῦ καταλλήλου διὰ τὴν βυρσοδεψίαν. Ἐκ τοῦ ὑγροῦ αὐτοῦ οἱ 105 τόννοι ἐπωλήθησαν εἰς τὴν Ἑλλάδα, οἱ δὲ λοιποὶ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν πρὸς 25,4 λίρ. Ἀγγλ. τὸν τόννον. Πόσαι λίρ. Ἀγγλ. εἰσῆλθον εἰς τὴν Ἑλλάδα κατὰ τὸ 1937 ἀπὸ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν βαλανιδίων ὡς καὶ ἀπὸ τὴν ἐξαγωγὴν τοῦ ὑγροῦ, ποῦ ἐξήχθη ἀπὸ τὰ βαλανίδια;

598) Τὰ χαρούπια παράγονται κατὰ τὰ $\frac{9}{10}$ εἰς τὴν Κρήτην καὶ κατὰ τὸ $\frac{1}{10}$ εἰς τὴν λοιπὴν Ἑλλάδα. Τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς παραγωγῆς αὐτῆς κατὰ τὸ 1937 ἦτο 2140 τόννοι. Πόσους τόννους χαρουπίων παρήγαγε κατὰ τὸ ἔτος τοῦτο ἡ Κρήτη καὶ πόσους ὅλη ἡ Ἑλλάς;

599) Ἀπὸ τὴν ὅλην παραγωγὴν χαρουπίων τοῦ ἔτους 1937 οἱ 7150 τόννοι ἐχρησιμοποιήθησαν εἰς τὴν Ἑλλάδα, οἱ δὲ λοιποὶ ἐξήχθησαν εἰς τὸ ἐξωτερικόν. Οἱ τόννοι, οἱ ὁποῖοι ἐξήχθησαν, ἐπωλήθησαν ἀντὶ 36000000 δρχ. Πόσοι τόννοι ἐξήχθησαν καὶ πρὸς πόσας δραχμὰς τὸν τόννον;

600) Τὰ ἐμβολιασμένα δένδρα χαρουπιᾶς ὑπολογίζονται εἰς 1200000. Ὑπάρχει ὅμως εἰς τὴν Ἑλλάδα 4πλάσιος ἀριθμὸς δένδρων χαρουπιᾶς, ποὺ δὲν εἶναι ἐμβολιασμένα καὶ ποὺ δὲν ἔχουν ἀξίαν. Πόσα λοιπὸν τοιαῦτα δένδρα χαρουπιᾶς ὑπάρχουν εἰς τὴν Ἑλλάδα; Καὶ πόσον εἰσόδημα θὰ εἴχομεν κατ' ἔτος ἀπὸ τὰ δένδρα αὐτά, ἐὰν ὑπολογίσωμεν, ὅτι τὸ κάθε δένδρον μετὰ τὸν ἐμβολιασμόν του θὰ δίδῃ εἰσόδημα κατ' ἔτος 44,50 δραχμάς;

601) Κατὰ τὸ ἔτος 1937 ἐκάησαν ἐκ πυρκαϊᾶς 536 στρέμματα

ἐλάτης, 19407 στρέμματα πεύκης, 6475 στρέμ. δρυός, 16 στρέμματα ὀξυᾶς, 272 στρέμ. καστανέας καὶ 14554 στρέμ. διαφόρων εἰδῶν. Πόσα στρέμματα ἐκάησαν κατὰ τὸ ἔτος τοῦτο καὶ πόση ἦτο ἡ ζημία εἰς δραχμάς, ἐὰν τὴν ὑπολογίσωμεν 500 δρχ. κατὰ στρέμμα;

602) Διὰ τὴν ἀναδάσωσιν ὑπάρχουν 25 μεγάλα δασικὰ φυτώρια, τὰ ὁποῖα παράγουν 15000000 δενδρύλλια. Ἐὰν τὸ καθὲν ἐξ αὐτῶν στοιχίζῃ 1,50 δρχ., πόσον στοιχίζουν ὅλα τὰ δενδρύλλια αὐτά;

603) Ἡ ἔκτασις, ποὺ πρέπει νὰ ἀναδασωθῇ ἐν Ἑλλάδι, ὑπολογίζεται εἰς 48260000 στρέμματα. Ἐὰν δὲ ὑπολογίσωμεν, ὅτι ἀπὸ κάθε στρέμμα θὰ εἴχομεν εἰσόδημα κατ' ἔτος 60 δρχ., πόσον θὰ ηὐξάνετο τὸ εἰσόδημά μας κατ' ἔτος, ἐὰν ἐγίνετο ἡ ἀναδάσωσις αὕτη;

Ὁμὰς Β'

604) Ἓν κυτίον σπόρου κουκουλίου κιτρίνου τῶν 25 γραμμαρίων ἔχει 37500 αὐγά. Εἷς δὲ σηροτρόφος ὑπελόγισεν, ὅτι τὸ $\frac{1}{20}$ τῶν αὐγῶν ἑνὸς κυτίου δὲν ἤνοιξε καὶ ὅτι ἀπὸ τὰ αὐγά, τὰ ὁποῖα ἤνοιξαν, παρήχθησαν χλωρὰ κουκούλια, ἐκ τῶν ὁποίων 650 ἐζύγιζον μίαν ὀκᾶν. Νὰ εὕρῃς α) πόσας ὀκάδας χλωρῶν κουκουλίων παρήγαγεν οὗτος ἀπὸ ἓν κυτίον, καὶ β) πόσας δραχμὰς εἰσέπραξεν ἀπὸ τὴν πώλησιν αὐτῶν πρὸς 67,50 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν.

605) Ἓν κυτίον σπόρου κουκουλίου λευκοῦ τῶν 25 γραμμαρίων ἔχει 32500 αὐγά, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἤνοιξαν τὰ $\frac{20}{21}$. Ἐζύγιζον δὲ μίαν ὀκᾶν 500 χλωρὰ κουκούλια. Νὰ εὕρῃς α) πόσαι ὀκάδες χλωρῶν κουκουλίων παρήχθησαν ἀπὸ ἓν κυτίον, καὶ β) πόση εἶναι ἡ ἀξία αὐτῶν, ἐὰν μία ὀκᾶ τιμᾶται 72,50 δραχμάς.

606) Κατὰ τὸ ἔτος 1936 εἰς τὸν Νομὸν Αἰτωλίας καὶ Ἀκαρνανίας ἐτράφησαν 3 κυτία σπόρου κουκουλίου λευκοῦ καὶ 7 κυτία σπόρου κιτρίνου. Εἰς δὲ τὸν Νομὸν Ἕβρου ἐτράφησαν 6860 κυτία σπόρου λευκοῦ καὶ 5378 κυτία σπόρου κιτρίνου. Ἐὰν ὑπολογίσωμεν α) ὅτι ἀπὸ κάθε κυτίον σπόρου λευκοῦ παρήχθησαν 61 ὀκάδες χλωρῶν κουκουλίων, αἱ ὁποῖαι ἐπωλήθησαν πρὸς 69,50 δρχ. τὴν ὀκᾶν, β) ὅτι ἀπὸ καθὲν κυτίον σπόρου κιτρίνου παρήχθησαν $53\frac{3}{4}$ ὀκάδες, αἱ ὁποῖαι ἐπωλήθησαν πρὸς 61,40 δρχ. τὴν ὀκᾶν, νὰ εὕρῃς πόσας δραχμὰς εἰσέπραξεν ἀπὸ τὴν παραγωγὴν κουκουλίων 1) ἡ περιφέρεια

τοῦ Νομοῦ Αἰτωλίας, καὶ 2) ἡ περιφέρεια τοῦ Νομοῦ Ἕβρου· ἐπίσης καὶ τὴν διαφορὰν τῶν εἰσπράξεων αὐτῶν τῶν δύο Νομῶν.

607) Κατὰ τὸ 1936 εἰσήγαγεν ἡ Ἑλλὰς ἀπὸ τὸ ἐξωτερικὸν 59 χιλιόγρ. σπόρον κουκουλίων ἀξίας 32550 δρχ. καὶ ἐξήγαγεν εἰς αὐτὸ 1931 χιλιόγρ. ἀξίας 1916700 δρχ. Πόσον ἤξιζε τὸ 1 χλγρ. εἰς τὰς δύο περιπτώσεις καὶ πόσον τὸ 1 κυτίον τῶν 25 γραμ.;

608) Κατὰ τὸ ἔτος 1936 παρήχθη μέταξα 320000 χιλγρ. Ἐξ αὐτῶν ἐξήχθησαν εἰς τὸ ἐξωτερικὸν 214 χιλγρ. ἀντὶ 208757 δρχ. Νὰ εὕρῃς α) πόσον ἐπωλήθη τὸ 1 χιλγρ. εἰς τὸ ἐξωτερικόν, β) πόσα χιλγρ. τῆς μετάξης αὐτῆς ἔμειναν διὰ τὰς ἀνάγκας τῆς Ἑλλάδος, καὶ γ) πόσον ἤξιζον αὐτά, ἐὰν τὸ χιλγρ. ἤξιζεν 875,50 δρχ.

Ὁμὰς Γ΄

609) Εἷς μελισσοτρόφος εἶχεν 100 μελίσσια· ἔλαβε δὲ ἀπὸ τὸ καθὲν $8\frac{1}{2}$ ὀκάδας μέλι καὶ $\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς κηρόν. Πόσας δραχμὰς εἰσέπραξεν ἀπὸ ὅλα τὰ μελίσσια, ὅταν τὸ μὲν μέλι ἐπώλησε πρὸς 22,50 τὴν ὀκᾶν, τὸν δὲ κηρὸν πρὸς 123 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν;

610) Εἷς ἠγόρασε 5 μελίσσια πρὸς 75 δραχμὰς τὸ ἕν. Ἐδαπάνησε δὲ ἀκόμη διὰ τὸ καθὲν 8,50 δραχ. δι' ἔξοδα μεταφορᾶς, 1,75 διὰ φόρον Δημοσίου καὶ 25 δραχ. τὸν μῆνα καὶ ἐπὶ ἓξ μῆνας διὰ φύλακτρα καὶ δικαίωμα βοσκῆς. Κατὰ τοὺς ἓξ αὐτοὺς μῆνας ὁ μελισσοτρόφος οὗτος ὀκταπλασίασε τὸν ἀριθμὸν τῶν μελισσιῶν, τὰ ὁποῖα ἠγόρασεν. Ἀφοῦ δὲ ἐκράτησε 10 ἐξ αὐτῶν, ἐπώλησε τὰ λοιπὰ πρὸς 95 δραχμὰς τὸ ἕν. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισεν;

611) Ἀπὸ τὰ 75000 μελίσσια τῆς περιφερείας τοῦ Ἁγίου Ὄρους καὶ Χαλκιδικῆς καὶ ἀπὸ ἕκαστον ὑπελογίσθη ὅτι εἰς ἓν ἔτος παρήχθησαν 8,75 ὀκάδες μέλι καὶ $\frac{7}{15}$ τῆς ὀκᾶς κηρός. Ἐκ τῶν ὑπολειμμάτων δὲ τοῦ ὅλου μέλιτος παρήχθησαν καὶ 15000 ὀκάδες οἰνοπνευματώδους ὑγροῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἰσόδημα κατὰ τὸ ἔτος τοῦτο, ὅταν τὸ μὲν μέλι ἐπωλήθη πρὸς 21,60 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, ὁ κηρὸς πρὸς 126 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ ὅλον τὸ ὑγρὸν ἀντὶ 380000 δραχμῶν.

612) Εἰς ὅλην τὴν Ἑλλάδα τὸ ἔτος 1936 παρήχθησαν 4300000 ὀκάδες μέλι ἀξίας 77000000 δραχμῶν καὶ 390000 ὀκάδες κηρὸς ἀξίας

28500000 δραχμῶν. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τῆς μιᾶς ὀκᾶς μέλιτος καὶ τῆς μιᾶς ὀκᾶς κηροῦ κατὰ τὸ ἔτος αὐτό;

Ὁμὰς Δ΄

613) 80 βαθμοὶ τοῦ θερμομέτρου τοῦ Ρεωμύρου ἰσοδυναμοῦν μὲ 100 βαθμοὺς τοῦ θερμομέτρου τοῦ Κελσίου. Ὁ 1 βαθμὸς τοῦ Ρεωμύρου τί εἶναι τοῦ βαθμοῦ τοῦ Κελσίου; Ἐπίσης ὁ 1 βαθμὸς Κελσίου τί εἶναι τοῦ βαθμοῦ τοῦ Ρεωμύρου;

614) 60 βαθμοὶ Κελσίου πόσους βαθμοὺς Ρεωμύρου κάμνουν;

615) 54 βαθμοὶ Ρεωμύρου πόσους βαθμοὺς Κελσίου κάμνουν;

616) Μία ῥάβδος μεταλλικὴ μήκους 0,875 τοῦ μέτρου θερμαινομένη ἔχει μῆκος 0,876124 μ. Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν;

617) Ἓν σῶμα χάνει, ὅταν βυθισθῇ ἐντὸς τοῦ ὕδατος, τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ βάρους του. Εἰς τὸν ἀέρα τὸ σῶμα αὐτὸ ζυγίζει 234 δράμια. Πόσα δράμια θὰ ζυγίζῃ ἐντὸς τοῦ ὕδατος;

618) Ἓν σῶμα χάνει, ὅταν βυθισθῇ ἐντὸς τοῦ ὕδατος, τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ βάρους του. Ἐντὸς δὲ αὐτοῦ ζυγίζει τὸ σῶμα αὐτὸ 126 δράμια. Πόσα ζυγίζει εἰς τὸν ἀέρα;

619) Ὁ ἀὴρ εἶναι 770 φορὰς ἐλαφρότερος ἴσου ὄγκου ὕδατος καὶ ὁ ὑδράργυρος 13,598 φορὰς βαρύτερος τοῦ ὕδατος. Ποσάκις ὁ ὑδράργυρος εἶναι βαρύτερος τοῦ ἀέρος;

620) Ὁ ἦχος ἔχει εἰς τὸν ἀέρα ταχύτητα 337,118 μέτρα κατὰ 1'', ἐνῷ ἡ ταχύτης εἰς τὸ ὕδωρ αὐξάνει κατὰ 1179,912 μέτρα εἰς τὸ 1''. Πόσον διάστημα διατρέχει ὁ ἦχος εἰς τὸ ὕδωρ εἰς 2,5'';

621) Τὸ φῶς ἔχει ταχύτητα 300000000 μέτρα τὸ δευτερόλεπτον. Πόσον διάστημα τρέχει εἰς $3\frac{3}{4}$ δευτερόλεπτα καὶ εἰς πόσα δευτερόλεπτα διατρέχει διάστημα 3000000 χιλιομέτρων;

Ἀνάμεικτα προβλήματα.

Ὁμὰς Ε΄

622) Ἐκ δύο ἀριθμῶν ὁ μεγαλύτερος εἶναι 217. Ἐὰν δὲ εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν προσθέσω τὸν 135, λαμβάνω τὸν 500.

Ποῖος εἶναι ὁ μικρότερος ἀπὸ αὐτοὺς καὶ ποία ἡ διαφορά των;

623) Ἐκ δύο ἀριθμῶν ὁ εἷς εἶναι 79. Ἐὰν αὐξηθῇ ὁ μὲν ἐξ αὐτῶν κατὰ 37 καὶ ὁ ἄλλος κατὰ 48, θὰ ἔχουν ἄθροισμα 276. Ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος;

624) Εἰς ἓν ἀγώνισμα δρόμου ἔλαβον μέρος τρεῖς ἀθληταί. Ὁ πρῶτος ἔτρεξε τὸν δρόμον αὐτὸν εἰς $8\frac{2}{5}$ *πρῶτα λεπτά, ὁ δεύτερος εἰς* $8\frac{3}{8}$ *καὶ ὁ τρίτος εἰς* $8\frac{5}{9}$. *Κατὰ ποίαν σειρὰν ἔφθασαν οἱ ἀθληταὶ αὐτοὶ εἰς τὸ τέρμα;*

625) Ἀνέμειξεν εἰς $15\frac{2}{5}$ *ὀκ. βούτυρον μὲ* $12\frac{3}{4}$ *ὀκ. βούτυρον ἄλλης ποιότητος καὶ μὲ* $7\frac{5}{8}$ *ὀκ. λίπος. Πόσον ζυγίζει τὸ μεῖγμα;*

626) Εἷς εἶχε 300 ὀκάδας οἴνου. Ἀπὸ αὐτὸ ἐγέμισε δύο βαρέλια. Διὰ τὸ ἓν ἐχρειάσθη $85\frac{1}{2}$ *ὀκάδας καὶ διὰ τὸ ἄλλο* $93\frac{3}{8}$ *ὀκάδας. Τὸ ἥμισυ δὲ τοῦ ὑπολοίπου τὸ ἔβαλεν εἰς φιάλας καὶ τὸ ἄλλο ἥμισυ τὸ ἐπώλησε. Πόσας ὀκάδας ἐπώλησεν;*

627) Δύο ὁμάδες ἐργατῶν ἐπεσκεύασαν ἕνα δρόμον. Ἤρχισαν ἀπὸ τὸ ἴδιον σημεῖον καὶ ἐπροχώρουν ἀντιθέτως. Ἡ μία ὁμὰς ἐπεσκεύαζε δρόμον $\frac{2}{5}$ *χλμ. εἰς μίαν ἡμέραν καὶ ἡ ἄλλη* $\frac{3}{10}$ *χλμ. Πόσα χλμ. ἐπεσκεύασαν καὶ αἱ δύο ὁμάδες εἰς 15 ἡμέρας;*

628) Καθεὶς τῶν 42 μαθητῶν μιᾶς τάξεως καταβάλλει κάθε ἑβδομάδα $\frac{4}{5}$ *τῆς δραχμῆς διὰ τὸ κοινὸν ταμεῖον τῶν ἐκδρομῶν. Πόσας δραχμὰς θὰ ἔχῃ τὸ ταμεῖον αὐτὸ μετὰ 26 ἑβδομάδας;*

629) Μία Κοινότης διέθεσε κατὰ τὰς ἡμέρας τοῦ Πάσχα 4500 δρχ. διὰ νὰ μοιρασθοῦν εἰς τοὺς πτωχούς. Κάθε πτωχὸς ἔλαβεν $62\frac{1}{2}$ *δρχ. Εἰς πόσους πτωχοὺς ἐμοιράσθη τὸ ποσὸν αὐτό;*

630) Ἀπὸ μίαν ἐπιδημίαν ἠσθένησαν τὰ 0,15 τῶν κατοίκων μιᾶς πόλεως, οἱ ὁποῖοι ἦσαν 7800. Πόσοι ἀπὸ αὐτοὺς ἠσθένησαν;

631) Ἀπὸ μίαν ἀγελάδα λαμβάνει μία $2\frac{1}{4}$ *ὀκ. γάλα τὴν ἡμέραν. Τὸ γάλα πωλεῖ πρὸς 10,80 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον εἰσπράττει τὸν μῆνα;*

632) Εἷς ἔμπορος ἠγόρασε νωπὸν καφὲ πρὸς 70 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ τὸν ἐπώλησε ψημένον μὲ κέρδος $\frac{1}{10}$ ἐπὶ τῆς ἀξίας του. Πόσον τὸν ἐπώλησε τὴν ὀκᾶν, ὅταν εἶναι γνωστόν, ὅτι ὁ καφές, ὅταν ψηθῇ, χάνει τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ βάρους του ;

633) Εἷς ποδηλάτης ἀναχωρεῖ ἐξ Ἀθηνῶν τὴν 8 π.μ. καὶ τρέχει μὲ ταχύτητα 20 χιλμ. τὴν ὥραν· μετὰ δύο ὥρας ἀναχωρεῖ ἐξ Ἀθηνῶν, διὰ νὰ συναντήσῃ τὸν ποδηλάτην, αὐτοκίνητον, τὸ ὁποῖον τρέχει μὲ ταχύτητα διπλασίαν. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν ὥρας θὰ τὸν συναντήσῃ καὶ εἰς ποίαν ἀπὸ τῶν Ἀθηνῶν ἀπόστασιν.

634) Εἷς λαμβάνει 2400 δρχ. τὸν μῆνα μισθόν. Τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ δίδει εἰς τὸν πατέρα του. Ἀπὸ ἐκεῖνα, ποὺ τοῦ μένουν, ἐξοδεύει τὸν μῆνα διὰ τὰ ἰδιαίτερά του ἔξοδα τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ καταθέτει τὰ λοιπὰ εἰς τὸ Ταμιευτήριον. Πόσας δραχμὰς καταθέτει κατὰ μῆνα ;

635) Εἰς τὴν Ἑλλάδα ὁ Ἥλιος ἀνέτειλε τὸ 1938 τὴν 20ὴν Ἀπριλίου εἰς τὰς $5\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας π.μ. καὶ ἔδυσεν εἰς τὰς $7\frac{1}{20}$ μ.μ., τὴν 20ὴν Ὀκτωβρίου ἀνέτειλεν εἰς τὰς $6\frac{42}{60}$ π.μ. καὶ ἔδυσεν εἰς τὰς $5\frac{37}{60}$ μ.μ., τὴν δὲ 20ὴν Δεκεμβρίου ἀνέτειλεν εἰς τὰς $7\frac{41}{60}$ π.μ. καὶ ἔδυσεν εἰς τὰς $5\frac{7}{60}$ μ.μ. Πόσας ὥρας ἔμεινεν ὁ Ἥλιος κατὰ τὰς ἡμέρας αὐτὰς ἐπάνω εἰς τὸν ὁρίζοντα ;

636) Μία τάξις ἐπρόκειτο νὰ κάμῃ ἐκδρομὴν καὶ ἐνοικίασεν ἓν λεωφορεῖον μὲ τὴν ὑποχρέωσιν νὰ πληρώσῃ 35 εἰσιτήρια πρὸς $7\frac{1}{2}$ δραχμὰς τὸ ἕν. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ὥραν τῆς ἐκκινήσεως παρουσιάσθησαν 30 μαθηταί, οἱ ὁποῖοι ἐπλήρωσαν καὶ τὰ εἰσιτήρια τῶν ἀπόντων. Πόσον ἐπλήρωσεν ἐπὶ πλέον ὁ καθεὶς τῶν 30 μαθητῶν ;

637) Ἓν ποσὸν χρημάτων ἐμοιράσθη εἰς τρία πρόσωπα. Ὁ πρῶτος ἔλαβε τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ, ὁ δεύτερος τὰ 0,25 καὶ ὁ τρίτος τὸ ὑπόλοιπον. Ἐὰν τὸ μερίδιον τοῦ τρίτου εἶναι 63 δραχμαί, πόσαι δραχμαὶ εἶναι τὸ μερίδιον τοῦ δευτέρου καὶ πόσαι τοῦ πρώτου ;

638) Εἷς εἶχεν 25 φιάλας οἴνου, κάθε μία τῶν ὁποίων περιεῖχεν

$\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς. Ἐπώλησε δὲ τὸν οἶνον τοῦτον πρὸς $10\frac{1}{4}$ δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν;

639) Εἷς εἰδικὸς τεχνίτης λαμβάνει διὰ μίαν ὥραν ἐργασίας $96\frac{1}{2}$ δρχ. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ, ἐὰν ἐργασθῇ ὁλόκληρον ἑβδομάδα ἐπὶ $4\frac{1}{2}$ ὥρας καθ' ἡμέραν;

640) Ἠρώτησαν ἕνα πόσα χρήματα εἶχεν. Ἐκεῖνος ἀπήντησεν ὡς ἑξῆς: Ἐὰν εἶχον τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον καὶ τὸ τέταρτον ἀπὸ ὅσα ἔχω, θὰ εἶχον 20 δραχμὰς ἐπὶ πλέον. Πόσας δραχμὰς εἶχεν;

641) Εἷς ἐπώλησε κτῆμα ἀντὶ 23750 δρχ. μὲ ζημίαν τὸ $\frac{1}{20}$ τῆς ἀξίας του. Πόσας δραχμὰς ἤξιζε τὸ κτῆμα;

V. ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ

181. Ἔννοια τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.— Ἐὰν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ πατώματος ἑνὸς δωματίου μὲ σχῆμα τετράγωνον εἶναι 5 μέτρα, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ γνωρίζομεν, ὅτι εἶναι ἴσον μὲ $5 \times 5 = 5^2 = 25$ τετραγωνικὰ μέτρα. Ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 25 τετραγωνικὰ μέτρα, τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ εἶναι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του δίδει γινόμενον ἴσον μὲ 25, ἤτοι 5 μέτρα, διότι $5^2 = 25$. Ὁ ἀριθμὸς 5, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὸν 25, λέγεται **τετραγωνικὴ ρίζα** τοῦ 25. Γενικῶς δέ: **Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὸν δοθέντα.**

Π.χ. Τετρ. ρίζα τοῦ 64 εἶναι ὁ 8, διότι $8^2 = 8 \times 8 = 64$, καὶ τετρ. ρίζα τοῦ κλάσματος $\frac{16}{25}$ εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$, διότι $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$, καὶ τοῦ 0,04 εἶναι ὁ 0,2, διότι $(0{,}2)^2 = 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04$.

Τὴν τετρ. ρίζαν παριστῶμεν μὲ τὸ σημεῖον $\sqrt{}$, τὸ ὁποῖον λέγεται **ριζικόν.** Οὕτω $\sqrt{4}$ σημαίνει τὴν τετρ. ρίζαν τοῦ 4, εἶναι δὲ $\sqrt{4} = 2$.

182. Ἀλλὰ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 32 δὲν ὑπάρχει, διότι δὲν εὑρίσκεται ἀριθμός, οὔτε ἀκέραιος οὔτε κλασματικός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸν 32. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν παρατηροῦμεν, ὅτι $5^2 = 25$ καὶ $6^2 = 36$ καὶ ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ 5, δηλαδὴ ὁ 25, χωρεῖ εἰς τὸν 32, ἐνῷ τὸ τετράγωνον τοῦ 6, δηλαδὴ ὁ 36, δὲν χωρεῖ εἰς αὐτόν. Δηλαδὴ παρατηροῦμεν, ὅτι ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ εἰς τὸν 32, εἶναι ὁ 5. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸν 5 λέγομεν τετρ. ρίζαν τοῦ **32 κατὰ προσέγγισιν** (ἀκεραίας) **μονάδος**.

Ὅθεν: **Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, λέγεται ὁ μέγιστος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ εἰς τὸν δοθέντα.**

Π.χ. $\sqrt{47}$ εἶναι ὁ 6 κατὰ προσέγγισιν μονάδος, διότι $6^2 = 36$, ἐνῷ $7^2 = 49$. Καὶ $\sqrt{5}$ εἶναι ὁ 2 κατὰ προσέγγισιν μονάδος, καὶ $\sqrt{67\frac{1}{2}}$ εἶναι ὁ 8, ἐπίσης κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Ἀσκήσεις.

642) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν ἀριθμῶν 1, 4, 9, 16, 36, 64, 100, 2, 15, 42, 60, 71, 90, 98.

ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ

183. Τετραγωνικὴ ρίζα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.—Ἐπειδὴ $\sqrt{100} = 10$, ἕπεται, ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀκεραίων ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 100 εἶναι ἀριθμὸς μονοψήφιος καὶ εὑρίσκεται ἀμέσως ἀπὸ μνήμης. Ἀλλ᾽ ἂν ὁ δοθεὶς ἀκέραιος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 100, εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν του μὲ τὴν ἑξῆς πρᾶξιν.

184. Ἔστω π.χ., ὅτι ζητεῖται ἡ τετρ. ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 5382.

$$
\begin{array}{r|r}
53'82 & 73 \\ \cline{2-2}
49 & 143 \\ \cline{1-1}
48'2 & 3 \\ \cline{2-2}
42\,9 & 429 \\ \cline{1-1}
53 &
\end{array}
$$

Πρὸς τοῦτο α) χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς διψήφια τμήματα ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας· β) ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος, ἤτοι $\sqrt{53}=7$· ἡ ρίζα δὲ αὐτὴ (δηλ. τὸ 7) θὰ εἶναι τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης ρίζης· γ) εὑρίσκομεν τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ρίζης καὶ ἀφαιροῦμεν τοῦτο ἀπὸ τὸ τμῆμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον εὑρέθη (53—49=4)· δεξιὰ δὲ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου (τοῦ 4) γράφομεν τὸ ἑπόμενον τμῆμα, ὅτε σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς 482· δ) τοῦ ἀριθμοῦ τούτου χωρίζομεν τὰς ἁπλᾶς μονάδας (2) καὶ διαιροῦμεν τὰς δεκάδας του (48) μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῆς ρίζης (48:14=3). ε) διὰ νὰ δοκιμάσωμεν, ἂν τὸ πηλίκον (3) τῆς τελευταίας ταύτης διαιρέσεως εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ρίζης, γράφομεν αὐτὸ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου αὐτῆς (τοῦ 14) καὶ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προέκυψε (τὸν 143) πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ἴδιον πηλίκον 3· κατόπιν τὸ εὑρεθὲν γινόμενον (τὸ 429) ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 482. Τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 53 καὶ λέγεται **ὑπόλοιπον τῆς ὅλης πράξεως** (τοῦτο δὲ δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ διπλάσιον τῆς εὑρεθείσης τετραγωνικῆς ρίζης). Δηλαδὴ εἶναι $5382=(73)^2+53$· ὥστε ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 5382 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 73· εἶναι δὲ αὕτη κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Παρατηρήσεις. 1) Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον τῆς ὅλης πράξεως (ἢ τὰ μερικὰ ὑπόλοιπα αὐτῆς) εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ, ποὺ κάμνουν τὰ εὑρεθέντα ψηφία τῆς ρίζης δοκιμάζομεν, ὡς ἀνωτέρω (ε), τὸ κατὰ μονάδα μεγαλύτερον ψηφίον.

2) Ἐὰν τὸ γινόμενον, ποὺ σχηματίζεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω (ε), δὲν ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος ἐσχηματίσθη, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον.

3) Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς διψήφια τμήματα περισσότερα τῶν δύο, διὰ μὲν τὸ πρῶτον τμῆμα κάμνομεν, ὅ,τι ἐκάμομεν καὶ διὰ τὸ πρῶτον τμῆμα τοῦ προηγουμένου παραδείγματος (β)· διὰ δὲ τὰ λοιπὰ τμήματα μέχρι τοῦ τελευταίου ἐφαρμόζομεν, ὅσα ἀνωτέρω εἴπομεν διὰ τὸ δεύτερον τμῆμα.

Π. χ. $\sqrt{74529}=273$ ἀκριβὴς καὶ $\sqrt{259481}=509$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

7′45′29	273		
4	48	47	543
34′5	8	7	3
32 9	384	329	1629
1 62′9			
1 62 9			
0.			

25′94′81	509
25	1009
9′48′1	9
9 08 1	9081
400	

185. Τετραγωνική ρίζα κλασματικῶν ἀριθμῶν.—1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{\frac{9}{16}}$. Ἐπειδὴ $\frac{3\times3}{4\times4}=\frac{9}{16}$, ἕπεται, ὅτι $\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}$.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{4\,\frac{21}{25}}$.

Ἔχομεν $\sqrt{4\,\frac{21}{25}}=\sqrt{\frac{121}{25}}=\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{25}}=\frac{11}{5}$.

3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{6\,\frac{1}{25}}$.

Ἔχομεν $\sqrt{6\,\frac{1}{25}}=\sqrt{\frac{151}{25}}=\frac{\sqrt{151}}{\sqrt{25}}=\frac{12}{5}$. προσέγγισις $\frac{1}{5}$.

Σημείωσις α′. Λέγομεν, ὅτι ἡ $\sqrt{6\,\frac{1}{25}}=\frac{12}{5}$ εἶναι κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{5}$, διότι τὸ $\frac{12}{5}$ εἶναι τὸ μεγαλύτερον ἀπὸ τὰ κλάσματα μὲ παρονομαστὴν 5, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ εἰς τὸν $6\,\frac{1}{25}$. Καὶ πράγματι: $\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{144}{25}=5\,\frac{19}{25}$, ἐνῷ $\left(\frac{13}{5}\right)^2=\frac{169}{25}=6\,\frac{19}{25}$.

Σημείωσις β′. Ἐὰν ἐζητεῖτο ἡ $\sqrt{6\,\frac{1}{25}}$ κατὰ προσέγγισιν 1, θὰ εἴχομεν $\sqrt{6\,\frac{1}{25}}=2$, δηλαδὴ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἀκεραίου μέρους του.

4) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{\frac{4}{7}}$.

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο, ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς δὲν ἔχει ἀκριβῆ τετραγωνικὴν ρίζαν, δηλαδὴ δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ δοθέντος κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του, διὰ νὰ γίνῃ οὗτος τέλειον τετράγωνον.

Ἔχομεν δὲ οὕτω : $\sqrt{\frac{4}{7}} = \sqrt{\frac{28}{49}} = \frac{5}{7}$, προσέγγισις $\frac{1}{7}$.

186. Τετραγωνικὴ ρίζα δεκαδικῶν ἀριθμῶν.— 1ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{6,25}$. Ἐπειδὴ $6,25 = \frac{625}{100}$, γράφομεν $\sqrt{6,25} = \frac{\sqrt{625}}{\sqrt{100}} = \frac{25}{10} = 2,5$.

2ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{0,0004}$. Ἔχομεν :

$$\sqrt{0,0004} = \sqrt{\frac{4}{10000}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{10000}} = \frac{2}{100} = 0,02.$$

3ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{0,004}$. Ἐπειδὴ εἶναι $0,004 = \frac{4}{1000}$ βλέπομεν, ὅτι ὁ 1000 δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Διὰ νὰ γίνῃ δέ, πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{4}{1000}$ ἐπὶ 10, ὁπότε ἔχομεν $\frac{4}{1000} = \frac{40}{10000}$ καὶ $\sqrt{0,004} = \sqrt{\frac{4}{1000}} = \sqrt{\frac{40}{10000}} = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10000}} = \frac{6}{100}$ $= 0,06$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$.

187. Ἐκ τῶν ἄνω παραδειγμάτων συμπεραίνομεν α) ὅτι διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, πρέπει οὗτος νὰ ἔχῃ ἄρτιον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων. Ἂν δὲ ἔχῃ περιττόν, γράφομεν εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ ἓν μηδενικόν, ὅπερ δὲν ἀλλάσσει τὴν ἀξίαν του.

β) Ἐξάγομεν ἔπειτα τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν αὐτοῦ, ὡς νὰ ἦτο ἀκέραιος.

γ) εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν ρίζαν χωρίζομεν, ἀπὸ τὰ δεξιά, δεκαδικὰ ψηφία δύο φορὰς ὀλιγώτερα, ἀπὸ ὅσα ἔχει ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός.

188. Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, θὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἀκεραίου μέρους του. Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, πρέπει ὁ ἀριθμὸς οὗτος νὰ ἔχῃ δύο δεκαδικὰ ψηφία. Ἐὰν θέλωμεν νὰ τὴν εὕρωμεν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ πρέπει νὰ ἔχῃ 4 δεκαδικὰ ψηφία, ἐὰν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$ πρέπει νὰ ἔχῃ ἕξ κ.ο.κ.

Π.δ. Ἡ $\sqrt{27{,}854}$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ἡ $\sqrt{27} = 5$. Κατὰ προσέγγ. 0,1 εἶναι ἡ $\sqrt{27{,}85} = 5{,}2$. Κατὰ προσέγγισιν 0,01 εἶναι ἡ $\sqrt{27{,}8540} = 5{,}27$.

Ὁμοίως ἡ $\sqrt{7}$ κατὰ προσέγγισιν 0,1 εἶναι ἡ $\sqrt{7{,}00} = 2{,}6$. Καὶ κατὰ προσέγγισιν 0,01 εἶναι ἡ $\sqrt{7{,}0000} = 2{,}64$.

Ὁμοίως ἡ $\sqrt{28\frac{5}{8}}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ εἶναι ἡ $\sqrt{28{,}6250} = 5{,}35$. Δηλαδὴ ἐτρέψαμεν τὸ κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικὸν καὶ εἰργάσθημεν ὡς ἀνωτέρω.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς Α΄

643) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι (αἱ ἀκριβεῖς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος) τῶν ἀριθμῶν:

α) 115, 144, 150, 225, 729, 900, 2304, 12596, 22441, 73934,

β) $7{,}14 \quad 239{,}5 \quad 89\frac{3}{7}, \quad \frac{56}{3}, \quad \frac{7}{6}, \quad \frac{2453}{20}.$

644) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ:

$$\sqrt{\frac{25}{49}}, \quad \sqrt{\frac{16}{81}}, \quad \sqrt{\frac{1}{64}}, \quad \sqrt{2\frac{1}{4}}, \quad \sqrt{6\frac{1}{4}}, \quad \sqrt{2\frac{14}{25}}.$$

645) Ὁμοίως νὰ εὑρεθοῦν αἱ:

$\sqrt{0{,}09}$, $\sqrt{0{,}16}$, $\sqrt{0{,}0016}$, $\sqrt{0{,}64}$, $\sqrt{0{,}81}$,
$\sqrt{00{,}1}$, $\sqrt{0{,}0001}$, $\sqrt{1{,}21}$, $\sqrt{2{,}56}$, $\sqrt{4{,}41}$,

646) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι :

α) $\sqrt{6{,}32}$, $\sqrt{5{,}4}$, $\sqrt{8{,}452}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{15}{4}}$, κατὰ προσέγγ. $\frac{1}{10}$ καὶ

β) $\sqrt{7}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{41}$, $\sqrt{0{,}5}$, $\sqrt{0{,}05}$, $\sqrt{36\frac{7}{8}}$, κατὰ προσέγγ. $\frac{1}{100}$

Ὁμὰς Β′

647) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πατώματος δωματίου, σχήματος τετραγώνου εἶναι 11,56 τετραγ. μέτρα. Ποῖον τὸ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς αὐτοῦ;

648) Τὸ πάτωμα δωματίου σχήματος τετραγώνου πλευρᾶς 3 μ. ἐστρώθη διὰ πλακῶν τετραγ., ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ἐμβαδὸν 2,25 τ. παλ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς ἑκάστης πλακὸς καὶ μὲ πόσας πλάκας ἐστρώθη τὸ δωμάτιον;

649) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ μία κάθετος πλευρὰ εἶναι 12 μ. καὶ ἡ ἄλλη 16 μ.

(ἀπ. $\sqrt{12^2+16^2} = \sqrt{400} = 20$)

650) Αἱ δύο μικρότεραι πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 12 μ. καὶ 6 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς.

(ἀπ. $\sqrt{12^2+6^2} = \sqrt{180}$)

651) Ἐὰν ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγῃ εἰς 2 ἢ 3 ἢ 7 ἢ 8 ἢ εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν, δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου. Διατί;

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄.

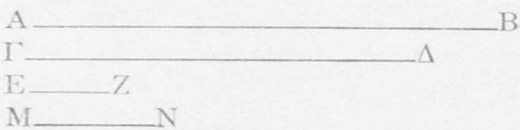
ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ι. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΠΟΣΩΝ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΑΥΤΩΝ

189. Μέτρησις ποσῶν.— Εἰς τὰς πρώτας παραγράφους τοῦ βιβλίου αὐτοῦ εἴδομεν, πῶς γίνεται ἡ ἀρίθμησις πλήθους πραγμάτων. Εἴδομεν δὲ ἐκεῖ, ὅτι διὰ νὰ ὁρίσωμεν ἓν τοιοῦτον πλῆθος λαμβάνομεν ἓν ἀπὸ αὐτὰ καὶ πρὸς αὐτὸ συγκρίνομεν τὸ πλῆθος. Ἐξαγόμενον δὲ τῆς συγκρίσεως αὐτῆς εἶναι εἷς ἀριθμὸς ἀκέραιος. Τώρα θὰ ἴδωμεν ὁμοίαν ἐργασίαν, ἀπὸ τὴν ὁποίαν δύναται νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς ἢ δεκαδικός. Εἶναι δὲ αὕτη ἡ μέτρησις συνεχῶν ποσῶν, περὶ τῆς ὁποίας κάμνομεν λόγον ἀμέσως κατωτέρω.

190. Ἔστω, ὅτι ἔχω μίαν λωρίδα ὑφάσματος ΑΒ. Πῶς θὰ λάβω ἀκριβῆ ἰδέαν τοῦ μήκους τῆς λωρίδος αὐτῆς;

Πρὸς τοῦτο θὰ λάβω ἓν ὡρισμένον μῆκος π.χ. τὸ μῆκος ΜΝ ἑνὸς δακτύλου, τὸ ὁποῖον καλῶ μονάδα, καὶ πρὸς αὐτὸ θὰ συγκρίνω τὸ



μῆκος ΑΒ τῆς λωρίδος. Θὰ ἴδω δηλαδή, πῶς γίνεται τὸ μῆκος ΑΒ ἀπὸ τὸ μῆκος ΜΝ. Ἐὰν δὲ ἴδω, ὅτι, διὰ νὰ γίνῃ τὸ μῆκος ΑΒ, πρέπει νὰ ἐπαναλάβω τὴν μονάδα ΜΝ τέσσαρας φοράς, θὰ εἴπω, ὅτι τὸ μῆκος τῆς λωρίδος ΑΒ εἶναι 4 δάκτυλοι.

Ἐὰν δὲ λάβω καὶ ἓν ἄλλο μῆκος ΓΔ καὶ ἴδω, ὅτι γίνεται τοῦτο, ἐὰν ἐπαναλάβω τὴν μονάδα MN τρεῖς καὶ ἡμίσειαν φοράς, θὰ εἴπω, ὅτι τὸ μῆκος ΓΔ εἶναι $3\frac{1}{2}$ δάκτυλοι.

Ἐὰν δὲ πάλιν λάβω καὶ ἓν ἄλλο μῆκος ΕΖ, εἶναι δὲ τοῦτο μικρότερον τῆς μονάδος MN, θὰ κάμω τότε τὴν σύγκρισιν πρὸς ἓν μέρος τῆς μονάδος, π. χ. πρὸς τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῆς. Ἐὰν δὲ ἴδω, ὅτι τὸ ΕΖ γίνεται ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς μονάδος, ὅταν ἐπαναληφθῇ τοῦτο τρεῖς φοράς, θὰ εἴπω ὅτι τὸ μῆκος εἶναι $\frac{3}{4}$ τοῦ δακτύλου.

Βλέπω λοιπόν, ὅτι ἐκ τῆς συγκρίσεως τοῦ μήκους AB ὡς καὶ τοῦ μήκους ΓΔ καὶ ΕΖ πρὸς τὸ μῆκος MN, τὸ ὁποῖον ἔλαβα ὡς μονάδα, προέκυψαν οἱ ἀριθμοὶ 4, $3\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{3}{4}$, οἱ ὁποῖοι παριστοῦν κατὰ σειρὰν τὰ ποσὰ AB, ΓΔ καὶ ΕΖ.

191. Ἡ σύγκρισις ἑνὸς ποσοῦ πρὸς ἓν ἄλλο ὁμοειδές, ὡρισμένον καὶ γνωστόν, λέγεται, ὡς εἴδομεν καὶ εἰς τὴν § 34, **μέτρησις αὐτοῦ**. Τὸ δὲ ὁμοειδές, ὡρισμένον καὶ γνωστὸν ποσὸν λέγεται **μονάς.**

192. Ὥστε ὅταν λέγωμεν, ὅτι ἓν ποσὸν σίτου ἔχει βάρος $7\frac{4}{5}$ ὀκάδας, φανερώνει, ὅτι τὸ ποσὸν αὐτὸ τοῦ σίτου τὸ ἔχομεν συγκρίνει πρὸς τὸ βάρος μιᾶς ὀκᾶς καὶ ὅτι ἀπὸ τὴν σύγκρισιν αὐτὴν εὑρέθη, ὅτι ἔγινε ἀπὸ τὴν μονάδα (τὴν ὀκᾶν), ἡ ὁποία ἐπανελήφθη 7 φοράς, καὶ ἀπὸ τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτῆς, τὸ ὁποῖον ἐπανελήφθη 4 φοράς.

Ἂν τὸ βάρος τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ τοῦ σίτου τὸ συγκρίνωμεν πρὸς ἄλλην μονάδα διάφορον τῆς ὀκᾶς, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος θὰ προκύψῃ, θὰ εἶναι διάφορος. Οὕτως, ἂν μονὰς βάρους ληφθῇ τὸ δράμιον, τὸ βάρος τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ θὰ παρασταθῇ μὲ τὸν ἀριθμὸν 3120 δράμια· καὶ ἂν ληφθῇ ὁ στατὴρ (44 ὀκάδες) θὰ παρασταθῇ μὲ τὸν ἀριθμὸν $\frac{39}{220}$ στατῆρες. Ὡς δὲ βλέπομεν ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτό, ἡ πλέον κατάλληλος μονὰς βάρους διὰ τὸ ἄνω ποσὸν τοῦ σίτου εἶναι ἡ ὀκᾶ.

193. Διὰ ποσὰ μεγάλα λαμβάνομεν μονάδας μετρήσεως αὐτῶν μεγάλας, ἵνα οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι θὰ προκύψουν εἶναι μικροί· διὰ δὲ τὰ μικρὰ ποσὰ λαμβάνομεν μονάδας μικράς.

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΠΟΣΩΝ

194. Μονάδες μήκους — Αἱ κυριώτεραι μονάδες μήκους, τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦμεν ἐν Ἑλλάδι εἶναι α) Τὸ **γαλλικὸν μέτρον**, ὑποδιαίρεσις δὲ αὐτοῦ εἶναι ἡ **παλάμη** $= \frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου, ὁ **δάκτυλος** $= \frac{1}{10}$ τῆς παλάμης καὶ ἡ **γραμμὴ** $= \frac{1}{10}$ τοῦ δακτύλου, ἐνῷ πολλαπλάσια εἶναι τὸ **δεκάμετρον** = 10 μέτρα, τὸ **ἑκατόμμετρον** = 100 μέτρα, τὸ **χιλιόμετρον** (ἢ στάδιον) = 1000 μέτρα.

β) Ὁ **τεκτονικὸς πῆχυς** = 0,75 τοῦ μέτρου (διὰ τὰς οἰκοδομὰς καὶ τὰ οἰκόπεδα).

γ) Ὁ **μικρὸς πῆχυς Κωνσταντινουπόλεως** = 0,648 τοῦ μέτρου (διὰ τὸ ἐμπόριον)· 1 πηχ. = 8 ρούπια.

δ) Οἱ Ἄγγλοι καὶ οἱ Ἀμερικανοὶ μεταχειρίζονται τὴν **ὑάρδαν** = 0,914 τοῦ μέτρου· 1 ὑάρδα = 3 πόδες· 1 ποὺς = 12 δάκτυλοι (ἴντσες).

Οἱ Ἰταλοὶ καὶ οἱ Γερμανοὶ παρεδέχθησαν τὸ γαλλικὸν μέτρον, οἱ δὲ Ρῶσοι ἔχουν τὸ **ἀρσὶν** = 0,711 τοῦ μέτρου.

Διὰ τὰς μεγάλας ἀποστάσεις οἱ ξένοι χρησιμοποιοῦν καὶ τὸ **γεωγραφικὸν** ἢ **γερμανικὸν μίλιον** = 7420,44 μέτρα, τὸ **ἀγγλικὸν μίλιον** = 1700 ὑάρδαι ἢ 1609,3295 μέτρα.

Τὸ ναυτικὸν μίλιον δι᾽ ὅλα τὰ ἔθνη εἶναι 1852 μέτρα.

Τὸ ρωσικὸν **βέρστιον** ἔχει 1500 ἀρσίν, ἤτοι 1066,79 μέτρα.

195. Μονάδες ἐπιφανείας. — Μονάδες ἐπιφανειῶν εἶναι τὰ τετράγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν πλευρὰς τὰς μονάδας μήκους. Καὶ ἂν μὲν τὸ τετράγωνον ἔχῃ πλευρὰν ἑνὸς μέτρου, ὀνομάζεται **τετραγωνικὸν μέτρον**, ἂν δὲ ἔχῃ πλευρὰν μιᾶς παλάμης, ὀνομάζεται **τετραγωνικὴ παλάμη** κ.ο.κ.

Ἀρχικὴ μονὰς εἶναι τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Ὑποδιαιρεῖται δὲ εἰς 100 τετραγωνικὰς παλάμας (10×10), καὶ ἑκάστη τετραγωνικὴ παλάμη εἰς 100 τετραγωνικοὺς δακτύλους. Πολλαπλάσια τῆς ἀρχικῆς μονάδος εἶναι τὸ τετραγωνικὸν δεκάμετρον (ἂρ) = 100 τ.μ., τὸ τετραγωνικὸν ἑκατόμμετρον (ἑκτάριον) = 10000 τ.μ. καὶ τὸ τετραγ. χιλιόμετρον = 1000000 τ.μ. Διὰ τοὺς ἀγροὺς μεταχειρίζονται τὸ **βασιλικὸν στρέμμα** = 1000 τ.μ. Ἐὰν νοηθῇ ὡς τετράγωνον, ἡ πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι περίπου 31,6....μ. Τὸ παλαιὸν στρέμμα εἶναι ἴσον μὲ 1,27 βασιλικὰ στρέμματα. Διὰ τὰ οἰκόπεδα μεταχειρίζονται τὸν τετραγ. τεκτονικὸν πῆχυν $= \frac{9}{16}$ τοῦ τετρ. μέτρου.

196. Μονάδες ὄγκου ἢ χωρητικότητος. — Μονάδες ὄγκου εἶναι οἱ **κύβοι,** οἱ ὁποῖοι ἔχουν πλευρὰς τὰς μονάδας τοῦ μήκους. Ἀρχικὴ μονὰς τοῦ ὄγκου εἶναι τὸ **κυβικὸν μέτρον,** ἤτοι στερεόν, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ 6 ἴσα τετράγωνα πλευρᾶς 1 μέτρου.

Τὸ κυβικὸν μέτρον διαιρεῖται εἰς 1000 κυβικὰς παλάμας ($10 \times 10 \times 10$). Ὁμοίως ἡ κυβικὴ παλάμη διαιρεῖται εἰς 1000 κυβικοὺς δακτύλους.

Λίτρα λέγεται ἡ χωρητικότης τῆς κυβικῆς παλάμης. Εἶναι δὲ ἐν χρήσει διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑγρῶν.

Κοιλὸν λέγεται τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ κυβικοῦ μέτρου. Γίνεται δὲ χρῆσις τούτου ἰδίως εἰς τοὺς δημητριακοὺς καρπούς.

197. Μονάδες βάρους.—Ἡ συνηθεστέρα μονὰς βάρους εἰς ἡμᾶς εἶναι ἡ **ὀκᾶ.** Μικρότερα βάρη μετροῦνται μὲ τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς **(δράμιον)** καὶ μεγαλύτερα μὲ τὸν **στατῆρα** (44 ὀκάδες).

Εἰς τὰ τελωνεῖα ὅμως, καπνεργοστάσια, φαρμακεῖα κτλ. χρησιμοποιοῦν τὸ **γραμμάριον** (βάρους ὕδατος ἑνὸς κυβικοῦ δακτύλου ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4° K), τὸ **χιλιόγραμμον** (1000 γραμμάρια) καὶ τὸν **τόννον** (1000 χιλιόγραμμα).

1 χιλιόγραμμον ἔχει βάρος 312,5 δραμίων καὶ 1 ὀκᾶ ἔχει βάρος 1280 γραμμαρίων περίπου. Διὰ τὰ φάρμακα εἶναι ἡ **λίτρα** (115 δράμια περίπου)· 1 λίτρα = 12 οὐγγίαι, 1 οὐγγία = 8 δραχμαί, 1 δραχμὴ = 3 γράμμα, 1 γράμμον = 20 κόκκοι.

Ἐν τῇ Ἑπτανήσῳ χρησιμοποιοῦν τὴν **ἀγγλικὴν λίτραν** 453,5 γραμμάρια.

Διὰ τὴν σταφίδα χρησιμοποιεῖται ἡ **ἑνετικὴ λίτρα** $\left(\frac{3}{8}\right.$ τῆς ὀκᾶς περίπου).

Διὰ τοὺς πολυτίμους λίθους λαμβάνεται ὡς μονὰς βάρους τὸ **καράτιον** (0,205 ἢ 0,2 γραμμ.).

198. Μονάδες νομισμάτων. — Μονὰς νομισμάτων εἰς ἡμᾶς εἶναι ἡ **δραχμή.** ἡ ὁποία ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 ἑκατοστά. Ἡ δραχμὴ ἀρχικῶς εἶχεν ὁρισθῆ ὡς νόμισμα ἀργυροῦν βάρους 5 γραμμαρίων καὶ βαθμοῦ καθαρότητος 0,835· δηλ. μόνον τὰ 0,835 αὐτοῦ εἶναι καθαρὸς ἄργυρος, τὰ δὲ ἄλλα 0,165 εἶναι χαλκὸς ἢ ἄλλα μέταλλα.

Πρὸ τοῦ πολέμου ἐν Ἑλλάδι ἐκυκλοφόρουν κυρίως νομίσματα ἐξ ἀλουμινίου (10 λεπτῶν), ἐκ νικελίου (τῶν 50 λεπτῶν, τῆς 1, 2 καὶ 5 δραχμῶν) καὶ ἀργυρᾶ (τῶν 10 καὶ 20 δραχμῶν), καὶ χαρτονομίσματα τῶν 50, 100, 500, 1000 καὶ 5000 δραχμῶν.

199. Μονάδες νομισμάτων ξένων Κρατῶν. 1) Τῆς λατινικῆς ἑνώσεως. Ἡ Γαλλία, ἡ Ἰταλία, ἡ Ἑλλάς, τὸ Βέλγιον καὶ ἡ Ἑλβετία παρεδέχθησαν διὰ τῆς λεγομένης **Λατινικῆς νομισματικῆς ἑνώσεως** (ἥτις δὲν ἰσχύει σήμερον ἢ ἐν μέρει) νὰ κόπτουν νομίσματα ὅμοια καὶ ἴσης ἀξίας, καὶ τὰ ὁποῖα νὰ κυκλοφοροῦν ἐλευθέρως εἰς τὰ Κράτη αὐτά. Ὥρισαν δὲ ὡς ἀρχικὴν μονάδα νομισμάτων τὸ φράγκον, ὅπερ ἐν Ἑλλάδι λέγεται δραχμή.

Ἡ ἀξία τοῦ φράγκου σήμερον δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ διὰ τὰ Κράτη αὐτά. Εἰς μερικὰ ἐξ αὐτῶν μάλιστα δὲν εἶναι καὶ σταθερά, ἀλλὰ μεταβλητὴ (ὅπως ἄλλως τε μεταβλητὴ εἶναι καὶ ἡ ἀξία τῶν νομισμάτων καὶ ἄλλων χωρῶν).

Τὸ φράγκον τὸ ἔχουν παραδεχθῆ καὶ ἡ Ἱσπανία **(πεσσέτα)**, ἡ Ρουμανία **(λέου)**, ἡ Σερβία **(δηνάριον)** καὶ ἡ Βουλγαρία **(λὲβ ἢ λέβι)**.

2) Ἐν Ἀγγλίᾳ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ **ἀγγλικὴ λίρα** (25,22 δραχμαὶ χρυσαῖ)· 1 λίρα = 20 σελλίνια· 1 σελλίνιον = 12 πένναι καὶ 1 πέννα = 4 φαρδίνια.

3) Ἐν Γερμανίᾳ εἶναι τὸ **μάρκον** (1,234 χρ. δρχ.)· 1 μάρκον = 100 πφένιχ.

4) Ἐν Αὐστρίᾳ ἡ **κορῶνα** (1,05 χρ. δρχ.)· 1 κορῶνα = 100 χέλλερ.

5) Ἐν Τουρκίᾳ τὸ **γρόσιον** = 40 παράδες· 100 γρόσ. = 1 **λίρα.**

6) Ἐν Ρωσίᾳ τὸ **ρούβλιον** (2,667 χρ. δρχ.)· 1 ρούβλιον = 100 καπίκια.

7) Ἐν ταῖς Ἡνωμέναις Πολιτείαις τὸ **δολλάριον** (5,18 χρ. δραχ.)· 1 δολλάριον = 100 ἑκατοστὰ (σέντς).

200. Μονάδες χρόνου. Εἶναι ἡ **ἡμέρα** ἢ τὸ **ἡμερονύκτιον.**

Ἄλλαι μονάδες εἶναι ἡ ὥρα $= \frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας, τὸ πρῶτον λεπτὸν $= \frac{1}{60}$ τῆς ὥρας, καὶ τὸ δευτερόλεπτον $= \frac{1}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ. Ἐπίσης εἶναι ὁ μὴν καὶ τὸ ἔτος. Τὰ ἔτη δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἡμερῶν.

Ἀπὸ 4 συνεχῆ ἔτη, τὰ μὲν 3 ἔχουν ἀπὸ 365 ἡμέρας, λέγονται δὲ ταῦτα **κοινά**, τὸ δὲ ἄλλο ἔχει 366 ἡμέρας καὶ λέγεται **δίσεκτον**. Ἀπὸ τὰ 4 αὐτὰ ἔτη δίσεκτον εἶναι ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 4, π.χ. ἐκ τῶν 1928, 1929, 1930, 1931, δίσεκτον εἶναι τὸ 1928. Ἐξαιροῦνται τὰ ἔτη, τὰ ὁποῖα φανερώνουν αἰῶνας (αἰὼν τὰ 100 ἔτη), τὰ ὁποῖα εἶναι κοινά, ἐκτὸς ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑκατοντάδων διαιρῆται διὰ 4. Οὕτως ἐκ τῶν 2000, 2100, 2200, 2300 δίσεκτον εἶναι τὸ 2000.

201. **Μονάδες κυκλικῶν τόξων καὶ γωνιῶν.** — Ὡς μονὰς κυκλικοῦ τόξου λαμβάνεται τόξον τῆς αὐτῆς περιφερείας ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{360}$ αὐτῆς καὶ λέγεται **μοῖρα.**

Σημειοῦνται δὲ αἱ μοῖραι διὰ τοῦ συμβόλου^{o}, π.χ. 320^{o}· 1^{o}=60 πρῶτα λεπτά, δηλ. 60′, καὶ 1′=60 δεύτερα λεπτά, δηλ. 60″.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς Α′

652) Ἐκ τῶν διαφόρων μονάδων μετρήσεως, τὰς ὁποίας εἴδομεν, ποῖαι ἔχουν ὑποδιαιρέσεις δεκαδικάς ;

653) Νὰ τραποῦν 158 πήχεις εἰς μέτρα.

654) Νὰ τραποῦν 285 τεκτ. πήχεις εἰς μέτρα.

655) Νὰ τραποῦν 573 ὑάρδαι εἰς μέτρα.

656) Νὰ τραποῦν 464 μέτρα εἰς μικροὺς πήχεις (ἀπ. 464:0,64)

657) 105,5 ὑάρδαι νὰ τραποῦν εἰς πήχεις.

658) 312 πήχεις νὰ τραποῦν εἰς ὑάρδας.

Ὁμὰς Β′

659) Ποία εἶναι ἡ σχέσις τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου πρὸς τὸν τετραγωνικὸν τεκτονικὸν πῆχυν ; (ἀπ. 1. τ.μ. $= \frac{16}{9}$ τ. τ. π.).

660) Ἔκτασιν 1840 τετρ. μετρ. μετέτρεψεν εἷς εἰς 10 οἰκόπεδα. Ἀπὸ πόσους τετρ. τεκτονικοὺς πήχεις ἀποτελεῖται τὸ κάθε οἰκόπεδον;

661) Ἓν οἰκόπεδον 2000 τετραγ. τεκτονικῶν πήχεων ἀπὸ πόσα τετραγωνικὰ μέτρα ἀποτελεῖται;

662) Ἔκτασις 15 τετρ. δεκαμέτρων ἐχρησιμοποιήθη διὰ τὴν ἀνέγερσιν σχολείου. Ἐξ αὐτῶν τὸ $\frac{1}{3}$ ἐχρησιμοποιήθη διὰ τὴν οἰκοδομήν, τὰ $\frac{2}{10}$ διὰ γυμναστήριον, καὶ τὰ λοιπὰ διὰ σχολικὸν κῆπον. Ἀπὸ πόσους τετρ. τεκτονικοὺς πήχεις ἀποτελεῖται τὸ κάθε τμῆμα;

663) Ἀγρὸς $6\frac{3}{4}$ παλαιῶν στρεμμάτων ἐπωλήθη πρὸς 2500 δραχμὰς τὸ βασιλικὸν στρέμμα. Ἀντὶ πόσων δραχμῶν ἐπωλήθη;

664) Εἷς ἔστρωσε δάπεδον ἐκτάσεως 20 τετρ. πήχεων μὲ πλάκας, κάθε μία τῶν ὁποίων εἶχεν ἐπιφάνειαν 2 τετρ παλαμῶν καὶ ἀξίαν 0,75 δρχ. τὴν τετρ. παλάμην. Πόσον ἐστοίχισαν αἱ πλάκες, αἱ ὁποῖαι ἐχρησιμοποιήθησαν διὰ τὴν ἐπίστρωσιν;

Ὁμὰς Γ΄

665) Πόσοι κυβικοὶ δάκτυλοι περιέχονται α) εἰς $1\frac{1}{4}$ κυβ. παλάμας καὶ β) εἰς τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ κυβ. μέτρου;

666) Τί μέρος τοῦ κυβικοῦ μέτρου εἶναι 250 κυβικαὶ παλάμαι καὶ τί μέρος αὐτοῦ εἶναι 50000 κυβικοὶ δάκτυλοι;

667) Δεξαμενὴ χωρητικότητος 7,45 κυβ. μέτρων μὲ πόσας λίτρας ὕδατος γεμίζει;

668) Εἷς ἐγέμισε τὴν ἀποθήκην του μὲ 260 κοιλὰ σίτου. Πόσα κυβικὰ μέτρα χωρεῖ ἡ ἀποθήκη αὐτή;

Ὁμὰς Δ΄

669) Μὲ πόσα γραμμάρια ἰσοῦται ἓν δράμιον;

670) 1 γραμμάριον τί μέρος τοῦ δραμίου ἀποτελεῖ;

671) Νὰ τραποῦν εἰς γραμμάρια α) 150 δραμ., β) τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς.

672) Νὰ τραποῦν 320 γραμμάρια εἰς δράμια.

673) Πόσα χιλιόγραμμα κάμνουν ἕνα στατῆρα;

674) Νὰ τραποῦν 8 χιλιόγραμμα καὶ 562 γραμμάρια εἰς ὀκάδας.

675) Νὰ τραποῦν 12,5 ἀγγλικαὶ λίτραι α) εἰς χιλιόγραμμα καὶ β) εἰς ὀκάδας.

676) Διὰ μεταξωτὰ ὑφάσματα βάρους 48 ὀκάδων ἐπλήρωσεν εἷς εἰσαγωγικὸν δασμὸν 1242,50 δραχ. τὸ χιλιόγρ. Πόσον ἐπλήρωσεν;

Ὁμὰς Ε΄

677) Νὰ τραποῦν 87,25 λίραι Ἀγγλίας εἰς δραχμ.

Σημείωσις. Αἱ μετατροπαὶ τῶν νομισμάτων θὰ στηρίζωνται ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς δραχμῆς κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς μετατροπῆς.

678) Τὸ σελλίνιον ποίαν ἀξίαν ἔχει α) εἰς χρυσᾶς δραχμὰς καὶ β) εἰς χαρτίνας; Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία μιᾶς πέννας.

679) 55687,50 δραχμαὶ πόσας λίρας Ἀγγλίας κάμνουν;

680) Πόσας δραχμὰς κάμνουν 124,8 μάρκα;

681) Πόσα μάρκα κάμνουν 7345 δραχμαί;

682) Πόσας λίρας Τουρκίας κάμνουν 6276,60 δραχμαί;

683) 11718 δραχμαὶ πόσα δολλάρια κάμνουν;

684) Πόσας δραχμὰς κάμνουν 2147,6 γαλλικὰ φράγκα;

685) Πόσας δραχμὰς κάμνουν 1050 ἑλβετικὰ φράγκα;

686) Μὲ 9375,35 δρχ. πόσα γαλλικὰ φράγκα ἀγοράζομεν;

687) Πόσα δηνάρια κάμνουν 6256 δραχμαί;

688) Πόσα λέβι κάμνουν 12800 δραχμαί;

689) Πόσας δραχμὰς κάμνουν 7345,8 λιρέτται;

ΙΙ. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΚΑΙ ΤΡΟΠΗ ΑΥΤΟΥ ΕΙΣ ΑΛΛΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ

202. Ὁρισμὸς τοῦ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ. — *Ἀπὸ τὰ προηγούμενα περὶ μονάδων μετρήσεως ποσῶν εἴδομεν, ὅτι εἰς πολλαπλάσια* ἢ ὑποδιαιρέσεις μιᾶς ἀρχικῆς μονάδος ἔδωσαν ὀνόματα ἰδιαίτερα. Διὰ τοῦτο ἠμποροῦμεν νὰ παριστάνωμεν π.χ. τὸ βάρος μιᾶς ποσότητος ξυλανθράκων μὲ στατῆρας, ὀκάδας καὶ δράμια ἢ τὸ μῆκος ὑφάσματος μὲ πήχεις καὶ ρούπια κ.ο.κ. Οὕτω λέγομεν, ὅτι ἓν ποσὸν ξυλανθράκων ζυγίζει 5 στατῆρας, 18 ὀκάδας καὶ 200 δράμια, ἢ τὸ μῆκος ἑνὸς ὑφάσματος εἶναι 6 πήχεις καὶ 5 ρούπια. Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸ βάρος τῶν ξυλανθράκων, ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι ὁμοειδεῖς, ἀλλ' ἔχουν διαφόρους μονάδας. Ἀλλ' ἐξ αὐτῶν ὁ στατὴρ εἶναι πολλαπλάσιον, ἐνῷ τὸ δράμιον εἶναι ὑποδιαίρεσις τῆς αὐτῆς ἀρχικῆς μονάδος, ἤτοι τῆς ὀκᾶς. Ἕνα τοιοῦτον ἀριθμὸν ὀνομάζομεν **συμμιγῆ**. Ὥστε: συμμιγὴς ἀριθμὸς εἶναι καὶ ὁ ἀριθμὸς 6 πήχεις καὶ 5 ρούπια. Εὐνόητον δὲ εἶναι, ὅτι οἱ συμμιγεῖς εἶναι ἀριθμοὶ συγκεκριμένοι.

Ὅθεν: **Συμμιγὴς ἀριθμὸς εἶναι ὁ συγκεκριμένος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἄλλους ἀριθμούς. Αἱ μονάδες δὲ αὐτῶν εἶναι πολλαπλάσια ἢ ὑποπολλαπλάσια μιᾶς ἀρχικῆς μονάδος, καθὲν τῶν ὁποίων ἔχει ἰδιαίτερον ὄνομα.**

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς. Οἱ ἀριθμοί, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ἀποτελεῖται εἷς συμμιγής, εἶναι ἀκέραιοι, πλὴν ἐκείνου, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του· οὗτος δὲ εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι μεικτὸς ἢ κλάσμα, ἀλλὰ γράφεται ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν.

203. Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς μονάδας μιᾶς τάξεώς του.— 1ον) **Ἐὰν εἷς ἐβάδιζεν ἐπὶ 4 ὥρας καὶ 35′, ἐπὶ πόσα πρῶτα λεπτὰ ἐβάδισεν;**

Διὰ νὰ εὕρω τὸ ζητούμενον θὰ τρέψω τὰς ὥρας εἰς πρῶτα λεπτὰ καὶ κατόπιν εἰς τὰ λεπτά, τὰ ὁποῖα θὰ εὕρω, θὰ προσθέσω τὰ 35.

Ἔχω δὲ οὕτω 4 ὥρας καὶ $35' = 60' \times 4 + 35' = 240' + 35' = 275'$.

2ον) **Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 14 στατῆρες 12 ὀκάδες καὶ 150 δράμια εἰς δράμια.**

Θὰ τρέψω πρῶτον τοὺς 14 στατ. εἰς ὀκάδας καὶ θὰ ἔχω 44 ὀκ. $\times 14 = 616$ ὀκ. Ἔπειτα εἰς τὰς 616 ὀκ. θὰ προσθέσω τὰς 12 ὀκ. τοῦ συμμιγοῦς καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ τρέψω εἰς δράμια.

Ἔχω δὲ οὕτω:

616 ὀκ. + 12 ὀκ. = 628 ὀκ., καὶ 400 δράμ. $\times 628 = 251200$ δράμια.

Τέλος εἰς τὰ δράμια αὐτά, θὰ προσθέσω καὶ τὰ 150 δράμια τοῦ συμμιγοῦς. Θὰ λάβω δὲ ἐν ὅλῳ δράμια 251350. Ὥστε εἶναι 14 στατ. 12 ὀκ. 150 δράμ. = 251350 δράμια.

Ἡ πρᾶξις αὐτὴ διατάσσεται πρὸς εὐκολίαν ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{rl}
14 \text{ στατ. } 12 \text{ ὀκ. } 150 \text{ δράμ.} = 251350 \text{ δράμια} & \\
44 & \\
\hline
56 & \\
56 & \\
\hline
616 & \text{ὀκάδες} \\
12 & » \\
\hline
628 & » \\
400 & \\
\hline
251200 & \text{δράμια} \\
150 & » \\
\hline
251350 & »
\end{array}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐκόλως συνάγεται ὁ κανὼν τῆς τροπῆς συμμιγοῦς εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τί ἀριθμοὺς θὰ λάβωμεν;

204. 1ον) **Τὰ 250 δράμια τί μέρος εἶναι τῆς ὀκᾶς;**

Εἶναι $250 = \frac{250}{400}$ τῆς ὀκᾶς $= \frac{5}{8}$ ὀκ.

2ον) **Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 7 ὀκάδες καὶ 250 δράμια εἰς ἀριθμὸν ὀκάδων.**

Εἶναι 7 ὀκ. 250 δράμια $= 7\frac{250}{400}$ ὀκ. $= 7\frac{5}{8}$ ὀκάδες.

3ον) **Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 2 ἡμέραι 9 ὧραι καὶ 30′ εἰς ἀριθμὸν ὡρῶν.**

Ἔχομεν 2 ἡμ. = 24 ὥρ. $\times$ 2 = 48 ὧραι.
48 ὥρ. + 9 ὥρ. = 57 ὧραι
εἶναι δὲ καὶ $30' = \frac{30}{60}$ ὥρ. $= \frac{1}{2}$ ὥρας.

Ὥστε εἶναι 2 ἡμ. 9 ὥρ. $30' = 57\frac{1}{2}$ ὧραι.

4ον) **Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 2 λ. Ἀγγλίας 5 σελ. καὶ 7 πένναι εἰς ἀριθμὸν λιρῶν.**

Πρὸς τοῦτο θὰ τρέψωμεν τὸ μέρος τοῦ συμμιγοῦς 5 σελ. καὶ 7 πέν. εἰς πέννας. Ἔχομεν δὲ 5 σελ. = 12 πέν. × 5 = 60 πένναι καὶ 60 πέν. + 7 πέν. = 67 πένναι.

Τώρα, διὰ νὰ τρέψωμεν τὰς 67 πέννας εἰς ἀριθμὸν λιρῶν πρέπει νὰ ἴδωμεν πόσαι πένναι κάμνουν μίαν λίραν. Ἐπειδὴ δὲ 1 λίρ. = 20 σελ., καὶ 1 σελ. = 12 πένναι, ἕπεται ὅτι 1 λίρα = 12 πέν. × 20 = 240 πένναι. Ὥστε αἱ 67 εἶναι τὰ $\frac{67}{240}$ τῆς λίρας. Ἄρα εἶναι:

$$2 \text{ λίρ. } 5 \text{ σελ. } 7 \text{ πέν.} = 2\frac{67}{240} \text{ τῆς λίρας.}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων εὐκόλως συνάγεται ὁ κανὼν τῆς τροπῆς συμμιγοῦς εἰς μονάδας τάξεως ἀνωτέρας ἀπὸ τὴν τελευταίαν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τί ἀριθμὸν λαμβάνομεν;

Προβλήματα.

Ὁμὰς Α'

Ἀπὸ μνήμης. 690) Νὰ τραποῦν εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως:

3 πήχ. 6 ρούπ., 6 πήχ. 5 ρούπ., 10 πήχ. 6 ρούπια.
2 ὀκ. 300 δράμ., 4 ὀκ. 150 δράμ., 5 ὀκ. 225 δράμ.
3 λίρ. 15 σελ., 7 λίρ. 5 σελ., 9 λίρ. 18 σελ.
6 μέτρ. 8 παλ., 5 μέτρ. 3 παλ. 7 δάκτυλ.
4 τετρ. μέτρ. 25 τετρ. παλ., 3 τετρ. μέτρ. 50 τετρ. παλ.
2 κυβ. μέτρ. 300 κυβ. παλ., 3 κυβ. μέτρ. 50 κυβ. παλάμ.
12 χιλιόγρ. 500 γραμμ., 2 τόννοι 350 χιλιόγρ.

Γραπτῶς. 691) Νὰ τραποῦν εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως:

α) 65 πήχ. 6 ρούπ., β) 15 μ. 7 παλ. 5 δάκτ., γ) 8 ὑάρδ. 2 πόδ. 5 ἴντσες, δ) 15 τετρ. μέτρ. 28 τετρ. παλ. 72 τετρ. δάκτ., ε) 4 κυβ. μέτρ. 8 κυβ. παλ. 13 κυβ. δάκτ., στ) 723 ὀκάδ. 300 δράμ., ζ) 6058 ὀκάδ. 150 δράμ., η) 27 στατ. 31 ὀκ. 300 δράμ., θ) 15 λίρ. Τουρκ. 25 γρόσ. 20 παράδες, ι) 34 λίρ. Ἀγγλ. 15 σελ. 8 πεν., ια) 5 ἡμ. 10 ὧραι, ιβ) 15 ἡμ. 9 ὧραι 40′ 25″, ιγ) 4° 7′ 40″, ιδ) 27° 45′ 25″.

Ὁμὰς Β΄

Ἀπὸ μνήμης. 692) Νὰ τραποῦν α) εἰς ἀριθμὸν πήχεων: 5 ρούπ., 3 ρούπ., 6 πήχ. 2 ρούπ., 9 πήχ. 7 ρούπ., β) εἰς ἀριθμὸν ὀκάδων: 350 δράμ., 80 δράμ., 50 δράμ., 3 ὀκ. 240 δράμ., 25 ὀκ. 24 δράμ., γ) εἰς ἀριθμὸν ὡρῶν: 45΄, 15΄, 2 ὥρ. 20΄, 15 ὥρ. 32΄., δ) εἰς ἀριθμὸν ἡμερῶν: 6 ὥρ., 8 ὥρ., 12 ὥρ., 5 ἡμ. 16 ὥρ., 7 ἡμ. 22 ὥρ.

Γραπτῶς. 693) Νὰ τραποῦν εἰς λίρας Ἀγγλίας: α) 7 λίρ. 12 σελ., β) 15 σελ. 6 πέν. καὶ γ) 11 πέν. 3 φαρδ.

694) Νὰ τραποῦν 3 λίρ. Τουρκ. 40 γρόσ. καὶ 15 παρ. 1) εἰς λίρ., 2) εἰς γρόσ.

695) Νὰ τραποῦν α) εἰς ὀκάδας: 5 στατ. 15 ὀκ. 250 δράμια, καὶ β) εἰς στατῆρας 1) 350 δράμια, 2) 35 ὀκ. 150 δράμια καὶ 3) 3 στατ. 19 ὀκ. 250 δράμια.

696) Νὰ τραποῦν εἰς ὥρας α) 50΄ 20΄΄, β) 7 ὥρ. 48΄ 25΄΄ καὶ γ) 1 ἡμ. 12 ὥρ. 30΄ καὶ 30΄΄.

697) Νὰ τραποῦν εἰς μοίρας α) 20° 35΄ καὶ β) 27° 20΄ 40΄΄.

ΤΡΟΠΗ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΕΙΣ ΣΥΜΜΙΓΗ

205. 1ον) **Τὰ 900 δράμια πόσας ὀκάδας καὶ δράμια κάμνουν;**

Κάμνουν 2 ὀκ. 100 δράμια.

$$\begin{array}{r|l} 900 & 400 \\ \hline 100 & 2 \end{array}$$

2ον) **Εἷς δρομεὺς διήνυσεν ἕνα δρόμον εἰς 4340΄΄. Ἐπὶ πόσας ὥρας, πρῶτα καὶ δεύτερα λεπτὰ ἔτρεξεν;**

Ἔτρεξεν ἐπὶ 1 ὥρ. 12΄ 20΄΄, ἡ δὲ κάτωθι διάταξις τῆς πράξεως ἐξηγεῖ τὸν τρόπον τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος αὐτοῦ.

$$\begin{array}{r|l|l} 4340'' & 60 & \\ \cline{2-2} 140 & 72' & 60 \\ \cline{3-3} 20'' & 12' & 1 \text{ ὥρα.} \end{array}$$

3ον) **Ἐμοιράσθησαν 18 ὀκάδες ἀλεύρου εἰς 5 πτωχούς. Πόσας ὀκάδας καὶ δράμια ἔλαβεν ἕκαστος;**

Διαιροῦντες 18 ὀκ. : 5 $(=\frac{18}{5}$ ὀκ.) εὑρίσκομεν, ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ 3 ὀκάδας καὶ θὰ περισσεύσουν πρὸς διανομὴν 3 ὀκάδ. ἢ 1200 δράμια. Ὥστε ἕκαστος θὰ λάβῃ ἀκόμη δράμια 1200 : 5=240 ἢ ἐν ὅλῳ 3 ὀκάδ. 240 δράμια, δηλαδὴ εἶναι $\frac{18}{5}$ ὀκ =3 ὀκ. 240 δράμια.

Τὴν πρᾶξιν αὐτὴν διατάσσομεν ὡς ἑξῆς :

18 ὀκάδες	5
3	3 ὀκ. 240 δράμια
400	
1200 δράμ.	
20	
00.	

4ον) Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\frac{91}{9}$ ἡμέραι =10 ἡμ. 2 ὥρ. 40′

91 ἡμέραι	9
1	10 ἡμ. 2 ὥρ. 40′
24	
24 ὥρ,	
6	
60	
360′	
00.	

5ον) **Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 2,75 ὀκάδες εἰς συμμιγῆ.**

Ἐπειδὴ εἶναι 2,75 ὀκ. $=\frac{275}{100}$ ὀκάδ., ἐργαζόμεθα ὡς ἄνω. Ἀλλ' ἀφοῦ ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀκάδων, τρέπομεν τὰ 0,75 τῆς ὀκᾶς εἰς δράμια, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν 400 δράμ.×0,75=300 δράμ. Ὥστε εἶναι 2,75 ὀκ. = 2 ὀκ. 300 δράμια.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι 3,275 λίρ. Ἀγγλ.=3 λίρ. 5 σελ. 6 πεν.

20 σελ. × 0,275=5,5 σελ.

12 πεν. × 0,5 =6 πεν.

Ἐκ τῶν ἄνω παραδειγμάτων εὐκόλως συνάγονται οἱ κανόνες τῆς τροπῆς συγκεκριμένου ἀκεραίου εἰς συμμιγῆ καὶ συγκεκριμένου κλάσματος εἰς συμμιγῆ.

Προβλήματα.

Ὁμὰς Α′

698) Νὰ τραποῦν εἰς συμμιγεῖς οἱ ἑπόμενοι ἀκέραιοι :

α) 36 ρούπια, 57 ρούπια.
β) 900 δράμια, 15765 δράμ., 45350 δράμια,
γ) 42 σελλίν., 102 πέν., 15311 φαρδ.
δ) 4108 παλ.. 24573 δάκτυλ.
ε) 468′ τῆς ὥρας, 2147′, 232465″ τῆς ὥρας.
στ) 435′ κυκλικοῦ τόξου, 214816″ ἐπίσης κυκλικοῦ τόξου.

Ὁ μ ά ς Β′

699) Νὰ τραποῦν εἰς συμμιγεῖς :
α) $2\frac{3}{4}$ ὀκάδες, $\frac{7}{8}$ στατ., $\frac{19}{5}$ στατ. β) $6\frac{7}{12}$ ὧραι. $\frac{37}{9}$ ἡμ., $\frac{53}{15}$ ἔτη, 4,25 ὧραι, γ) $9\frac{3}{4}$ λίρ. Ἀγγλίας. $\frac{239}{33}$ λίρ. Ἀγγλ. 25,375 λίρ. Ἀγγλ. δ) $5\frac{4}{5}$ μοῖραι, $\frac{149}{45}$ μοῖραι, 7,125 μοῖραι, ε) 3,5 πήχ., 8,375 πήχ., 0,875 πήχ.

700) Ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 6 ὧραι 44′ 50″,25 νὰ τραπῇ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἡμερῶν.

701) Τὸ τροπικὸν ἔτος ἀποτελεῖται ἀπὸ 365,24226 ἡμέρας. Νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

III. ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

206. Νὰ προστεθοῦν οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοί :

1ον)

	15	στατ.	27	ὀκ.	250	δράμια
	8	»	30	»		»
	2	»	39	»	350	»
	25	στατ.	96	ὀκ.	600	δράμια
ἢ	27	»	9	»	200	»

2ον)

	13	λίρ.	7	σελ.	4	πέν.
	2	»		»	11	»
			14	»	8	»
	6	»	3	»	7	»
	21	λίρ.	24	σελ.	30	πέν.
ἢ	22	»	6	»	6	»

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων εὐκόλως συνάγεται ὁ κανὼν τῆς προσθέσεως τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς Α′

702) Νὰ προσθέσῃς:

1) 5 μέτρ. 7 παλ. 8 δάκτ.
3 » 6 » 5 »
4 » 9 » 7 »

2) 7 τετρ. μέτρ. 27 τετρ. παλ. 60 τετρ. δάκτ.
12 » » 55 » » 48 » »
27 » » 69 » » 72 » »

3) 2 κυβ. » 475 κυβ. παλ. 890 κυβ. δάκτ.
4 » » 790 » » 365 » »
5 » » 630 » ».

703) Νὰ γίνουν αἱ προσθέσεις:

α) 3 ὑάρδ. 1 π. 8 ἴν. + 5 ὑάρδ. 1 πόδ. 8 ἴν. + 1 ὑάρδ. 7 ἴν.

β) 14 λίρ. 8 σελ. 5 π. + 3 λίρ. 5 πέν. 3 φαρ. + 5 λιρ. 7 πεν. 6 φαρδ.

γ) 20 ὧραι 32′ 25′′ + 7 ὧραι 50′ 40′′ + 25′ 28′′ + 19 ὧραι 45′′

δ) 10° 15′ 25′′ + 83° 34′ 37,6′′ + 44° 49′ 19,7′′.

704) Ὁμοίως αἱ:

α) 7 δρχ. 45 λεπτ. + $3\frac{1}{2}$ δρχ. + 3,2 δρχ.

β) 3 στατ. 17 ὀκ. 200 δράμ. + $8\frac{7}{8}$ στατ. + $3\frac{2}{5}$ ὀκ.

γ) 3 κυβ. μ. 275 κυβ. παλ. 870 κυβ δ. + 1,2576 κυβ. μ. + $\frac{3}{16}$ κ. μ.

δ) $123{,}25^{\circ} + 75^{\circ}\ 35'\ 32'' + \frac{213^{\circ}}{90}$.

Ὁμὰς Β′

705) Εἷς ἤρχισε τὴν καλλιέργειαν καπνοῦ τὴν 7 Νοεμβρίου 1937 καὶ τὴν ἐτελείωσε μετὰ 8 μῆνας καὶ 15 ἡμέρας. Πότε τὴν ἐτελείωσε;

706) Ὁ ἄνω καπνοκαλλιεργητὴς ἔλαβεν ἀπὸ ἕνα ἀγρὸν

23 στατ. 17 ὀκ. καπνοῦ, ἀπὸ ἄλλον 15 στατ. 23 ὀκ. 300 δράμ. καὶ ἀπὸ τρίτον ἀγρὸν 18 στατ. 29 ὀκ. 250 δράμ. Πόσον καπνὸν ἔλαβε καὶ ἀπὸ τοὺς τρεῖς ἀγρούς ;

707) Εἷς ἐπώλησε καπνὸν α) 650 χιλιογρ. 500 γραμμ., β) 450 χιλιόγρ. 750 γραμμ. καὶ γ) 1 τόν. 150 χιλιόγρ. καὶ 600 γραμμ. Πόσον ἐπώλησεν ἐν ὅλῳ ;

708) Παρήγαγέ τις, τὸ μὲν ἓν ἔτος 84 στ. 15 ὀκ. καπνοῦ, τὸ δεύτερον ἔτος 15 στ. 30 ὀκ. περισσότερον, τὸ δὲ τρίτον ἔτος παρήγαγεν ὅσον τὰ δύο πρῶτα ἔτη ὁμοῦ. Πόσον καπνὸν παρήγαγεν ἐν ὅλῳ ;

Ὁμὰς Γ′

709) Ἓν διάστημα 50 χιλιομέτρων τὸ διήνυσεν εἷς ἀφοῦ πρῶτον ἐβάδισεν ἐπὶ 3 ὥρας 30′ καὶ ἐστάθμευσεν ἐπὶ 15′. Ἔπειτα ἐβάδισεν ἄλλας 4 ὥρας καὶ 10′ καὶ ἐστάθμευσεν ἐπὶ 1 ὥραν καὶ 10′ καὶ τέλος ἀφοῦ ἐβάδισεν ἐπὶ 2 ὥρας 25′ 30″. Πόσον χρονικὸν διάστημα παρῆλθεν ἀπὸ τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐξεκίνησε, μέχρι τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἔφθασεν εἰς τὸ τέρμα ;

710) Μία ἁμαξοστοιχία διὰ νὰ φθάσῃ ἀπὸ τῆς πόλεως Α εἰς τὴν πόλιν Β ἔκαμεν ἀκριβῶς 12 ὥρας 25′ 40″. Εἰς τὴν πόλιν Β ἐστάθμευσεν ἐπὶ 1,125 ὥρ. καὶ κατόπιν ἐπέστρεψεν εἰς τὴν πόλιν Α μετὰ $12\frac{1}{2}$ ὥρ. Πόσος χρόνος παρῆλθεν ἀπὸ τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀνεχώρησεν ἀπὸ τῆς πόλεως Α μέχρι τῆς ἐπανόδου της εἰς αὐτήν ;

Β′. ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

207. Νὰ ἀφαιρεθοῦν οἱ συμμιγεῖς :

1)

27 στατ.	18 ὀκάδ.	300 δρ.
12 »	11 »	200 »
15 στατ.	7 ὀκάδ.	100 δράμ.

2)

12 ἡμέρ.	32 ὥρ. / 8 ὥρ.	40′
7 »	11 »	25′
4 ἡμέρ.	21 »	15′

3)

8 λίρ.	34 σελ. / 14 σελ.	19 πεν. / 7 πεν.	3 φαρδ.
3 »	15 »	11 »	2 »
4 λίρ.	18 σελ.	8 πέν.	1 φαρδ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων εὐκόλως συνάγεται ὁ κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως συμμιγῶν ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

711) Νὰ ἀφαιρέσῃς:

α)	6 δρχ.	75 λεπτ.		β)	3 τάλ.	3 δρχ.	65 λ.
	6 »	40 »			1 »	4 »	80 »
γ)	5 λίρ.		4 πέν.	δ)	35 λίρ.	40 γρ.	20 παρ.
	2 »	15 σελ.	3 »		17 »		30 »

ε) $5\frac{3}{8}$ λ. Α. — 2 λ. 15 σελ. 3 πέν. 2 φαρ. στ) 8 λ. Τ. 16 γρ. — 0,875 λ. Τ.

ζ) 7 πήχ. 3 ρ — 2 πήχ. 5 ρ. η) 23 πήχ. — 14 πήχ. 3 ρ.

θ) 15 ὑάρ. — 7 ὑάρ. 1 π. 7 ἴντ. ι) 7 ὥρ. 40΄ 32΄΄ — 3,145 ὥρ.

ια) 14° 25΄΄ — 7° 25΄ 45΄΄ ιβ) 25° 40΄ — 15΄ 32΄΄

ιγ) 7 στ. — 6 στ. 43 ὀκ. 300 δρ. ιδ) 2 στ. 6 ὀκ. 150 δράμ. — $\frac{21}{32}$ στ.

Ὁμὰς Β΄

712) Εἷς μαθητὴς ἐγεννήθη τὴν 28 Δεκεμβρίου 1928 καὶ ἐνεγράφη εἰς τὴν πρώτην τάξιν τοῦ νέου ἑξαταξίου τὴν 28 Σεπτεμβρίου 1939. Ποίαν ἡλικίαν εἶχε τότε;

713) Εἷς ἡμισύσσιτος μαθητὴς πηγαίνει εἰς τὸ σχολεῖον τὴν 8 ὥρ. 15΄ π. μ. καὶ ἀναχωρεῖ ἀπὸ αὐτὸ τὴν 5 μ. μ. Πόσον χρόνον παραμένει εἰς τὸ σχολεῖον τὴν ἡμέραν;

714) Εἰς μίαν ἐκδρομὴν ἀνεχώρησαν οἱ μαθηταὶ τὴν 6 ὥρ. 25΄ π. μ. καὶ ἐπέστρεψαν ἐξ αὐτῆς τὴν 5 ὥρ. 40΄ μ. μ. τῆς ἑπομένης ἡμέρας. Πόσον χρόνον διήρκεσεν ἡ ἐκδρομὴ αὕτη;

715) Ἀπὸ ἕνα μαθητὴν ἐζήτησαν νὰ εὕρῃ τί τόξον μένει ἀπὸ μίαν περιφέρειαν κύκλου, ὅταν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ αὐτῆς τόξον 125° 32΄ 9΄΄. Εὗρε δέ, ὅτι μένει τόξον 234° 27΄ 51΄΄. Ἔδωκεν ὀρθὴν ἀπόκρισιν;

716) Ἀπέστειλεν ἔμπορος εἰς ἓν κατάστημα τοῦ Λονδίνου ἓν τσὲκ χιλίων λιρῶν διὰ μίαν παραγγελίαν του, τοῦ ἀπεστάλησαν δὲ ἐμπορεύματα ἀξίας 850 λιρ. 15 σελ., τὰ ὁποῖα ἐπεβα-

ρύνθησαν μὲ ἀσφάλιστρα 5 λίρ. 7 πέν. καὶ μὲ ναῦλα 3 λιρ. 10 σελ. 6 πέν. Τί ποσὸν πρέπει νὰ τοῦ ἐπιστραφῇ;

717) Ὁ Α χρεωστεῖ εἰς τὸν Β 5 λίρ. 15 σελ. Ὁ Β χρεωστεῖ εἰς τὸν Γ 6 λίρ. 15 σελ., ὁ δὲ Γ χρεωστεῖ εἰς τὸν Α 8 λίρας. Μετὰ τὴν ἐκκαθάρισιν τῶν λογαριασμῶν τί ποσὸν ἔμεινεν εἰς τὸν πρῶτον καὶ τί ἐπλήρωσαν οἱ δύο ἄλλοι;

Γ΄. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΕΠΙ ΑΚΕΡΑΙΟΝ

208. 1ον) **Πόσον οἶνον περιέχουν 3 φιάλαι, ὅταν ἡ μία περιέχῃ 1 ὀκ. 120 δράμ.;**

Περιέχουν (1 ὀκ. 120 δράμ.) $\times 3 = 3$ ὀκ. 360.

1 ὀκ. 120 δράμ.
3 ἢ 520 δράμ. $\times 3 = 1560$ δράμ. $= 3$ ὀκ. 360 δράμ.
3 ὀκ. 360 δράμ.

2ον) **Διὰ νὰ κατασκευάσῃ τις μίαν ἐνδυμασίαν, ἠγόρασε 3 ὑάρδας ἀγγλικοῦ ὑφάσματος πρὸς 1 λίρ. 7 σελ. 6 πέν. τὴν ὑάρδαν. Πόσον ἐπλήρωσεν;**

Ἐπλήρωσε (1 λίρ. 7 σελ. 6 πέν.) $\times 3 = 4$ λίρ. 2 σελ. 6 πέν.

1 λίρ. 7 σελ. 6 πέν.
3
3 λίρ. 21 » 18 πέν. ἢ 330 πέν. $\times 3 = 990$ πέν. $= 4$ λίρ. 2 σελ. 6 πέν.
4 » 2 » 6 »

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων εὐκόλως συνάγεται ὁ κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον.

209. Ὁ πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον καὶ ἰδίως ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι πολυψήφιος ἀριθμός, δύναται νὰ γίνῃ καὶ κατὰ **τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν,** ἥτις φαίνεται κατωτέρω.

Ἔστω ὁ πολλαπλασιασμὸς (18 στατ. 33 ὀκ. καὶ 150 δραμ.) $\times 120$.

Καὶ ἐδῶ θὰ πολλαπλασιάσωμεν κάθε μέρος τοῦ συμμιγοῦς χωριστὰ ἐπὶ 120. Ἤτοι 18 στατ. $\times 120 = 2160$ στατ. Ἀλλ' εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν 33 ὀκ. ἐπὶ 120 παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ 33 ὀκάδες ἀποτελοῦνται ἀπὸ 22 ὀκ. $= \frac{1}{2}$ τοῦ στατῆρος καὶ 11 ὀκ. $= \frac{1}{4}$ αὐτοῦ. Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν $\frac{1}{2}$ στατ. $\times$ 120 = 60 στατ. καὶ $\frac{1}{4}$ στατ. $\times$ 120 = 30 στατ. καὶ κατόπιν προσθέτομεν 60 στατ. + 30 στατ. = 90 στατ.

Ἐπίσης εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν 150 δράμ. $\times$ 120 παρατηροῦμεν, ὅτι 150 δράμ. = 100 δράμ. + 50 δράμ. = $\frac{1}{4}$ὀκᾶς + $\frac{1}{8}$ ὀκᾶς. Ὥστε ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 150 δράμια $\times$ 120 πολλαπλασιάζομεν $\frac{1}{4}$ ὀκ. $\times$ 120 = 30 ὀκάδες καὶ $\frac{1}{8}$ ὀκ. $\times$ 120 = 15 ὀκ. καὶ κατόπιν προσθέτομεν 30 ὀκ. + 15 ὀκ. = 45 ὀκ. = 1 στατ. 1 ὀκᾶ. Εἶναι λοιπὸν (18 στατ. 33 ὀκ. 150 δράμια)$\times$120 = 2160 στατ. + 90 στατ. + 1 στατ. + 1 ὀκ. = 2251 στατ. 1 ὀκ.

Τὴν πρᾶξιν αὐτὴν διατάσσομεν ὡς ἑξῆς:

		18 στ. 33 ὀκ. 150 δράμ.	
		120	
		2160 στ.	
33 ὀκ.	22 ὀκ. = $\frac{1}{2}$ στατ. δίδει	60 »	
	11 ὀκ. = $\frac{1}{4}$ στατ. δίδει	30 »	
150 δρ.	100 δρ. = $\frac{1}{4}$ ὀκάδ. δίδει		30 ὀκ.
	50 δρ. = $\frac{1}{8}$ ὀκάδ. δίδει		15 »
		2250 στ.	45 ὀκ.
		ἢ 2251 στ.	1 ὀκ.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

718) Νὰ γίνουν οἱ πολλαπλασιασμοί:

α) (3 ὥρ. 15΄ 44΄΄)$\times$ 4

β) (9 ἡμ. 5 ὥρ. 52΄)$\times$12

γ) (1 ὥρ. 12΄ 32 $\frac{1''}{2}$) $\times$24

δ) (12 πήχ. 6 ρούπ.) $\times$32

ε) (14 ὑάρδ. 2 πόδ. 7 δάκτ.)$\times$21

στ) (9° 35΄)$\times$29

ζ) (5° 20΄ 40΄΄)$\times$44

η) (31 ὀκ. 200 δράμ.)$\times$15

θ) (1 στατ. 28 ὀκ. 158 δρμ.)$\times$20.

'Ο μ ὰ ς Β'

719) Εἷς ἐργάτης μετατρέπει μίαν ὀκᾶν βάμβακος εἰς νῆμα εἰς 2 ὥρ. 25'. Εἰς πόσον χρόνον θὰ μετατρέψῃ εἰς νῆμα 5 ὀκ. βάμβακος;

720) Μία ὀκᾶ νήματος μεταξωτοῦ στοιχίζει 1 λίρ. 5 σελ. Πόσον στοιχίζουν αἱ 8 ὀκάδες τοῦ ἰδίου νήματος;

721) Μὲ μίαν ὀκᾶν ἑνὸς νήματος γίνεται ὕφασμα 8 πήχ. 6 ρουπ. Πόσον ὕφασμα γίνεται μὲ 15 ὀκάδας τοῦ ἰδίου νήματος;

722) Διὰ μίαν ἐνδυμασίαν χρειάζεται ὕφασμα 2 ὑάρδ. 1 πούς καὶ 7 δάκτ. Πόσον ὕφασμα χρειάζεται δι' 24 ἐνδυμασίας;

723) Ὕφασμα 200 μέτρων ἐστοίχισε 1 λίρ. 5 σελ. 10 πέν. τὸ μέτρον. Μετεπωλήθη δὲ πρὸς 1 λίρ. 6 σελ. 1 πέν. τὸ μέτρον. Πόσον εἶναι τὸ κέρδος ἐκ τῆς μεταπωλήσεως αὐτῆς;

'Ο μ ὰ ς Γ'

724) Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ ἑπόμενοι πολλαπλασιασμοὶ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν:

9 ὧραι 25' 12'' ×360 7 λίρ. 16 σελ. 8 πέν. ×210

4 στ. 33 ὀκ. 320 δράμ. ×160 12 τάλ. 4 δρχ. 80 λ. ×240.

725) Εἷς ἠγόρασε ξυλάνθρακας ἀντὶ 280 λιρῶν καὶ πρὸς 1 λίραν τοὺς 2 στατ. 35 ὀκ. 300 δραμ. Πόσους ξυλάνθρακας ἠγόρασεν;

726) Ἀπὸ τοὺς ἀνωτέρω ξυλάνθρακας ἐπώλησεν ὁ ἔμπορος 520 ὀκάδας πρὸς 5 δρχ. 30 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν. Πόσας δραχμὰς εἰσέπραξεν;

727) Εἷς ἠγόρασεν 120 σιδηροτροχιάς, μήκους ἡ καθεμία 1 ὑάρδ. 2 πόδ. 8 δακτ. Πόσον μῆκος ἔχουν ὅλαι αἱ σιδηροτροχιαί;

728) Διὰ νὰ κατασκευάσῃ εἷς τυρόν, ἠγόρασε 520 ὀκάδας γάλα πρὸς 6 δρχ. 30 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν. Πόσας δραχμὰς ἔδωκεν;

729) Μία ὑφάντρια ὑφαίνει εἰς μίαν ὥραν ὕφασμα 1 ὑάρδ. 2 ποδῶν 8 δακτύλων. Πόσον θὰ ὑφάνῃ εἰς 120 ὥρας;

Δ'. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΔΙ' ΑΚΕΡΑΙΟΥ

210. **Ἐμοίρασαν εἰς 16 χωρία πρὸς σπορὰν σῖτον 154 στατήρων καὶ 30 ὀκάδων. Πόσον σῖτον θὰ λάβῃ καθὲν χωρίον;**

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν, (154 στατ. 30 ὀκ.) : 16. Θὰ διαιρέσωμεν δὲ πρῶτον 154 στατ. : 16 καὶ θὰ εὕρωμεν, ὅτι κάθε χωρίον θὰ λάβῃ 9 στατ. καὶ θὰ μείνουν 10 στατ. Οἱ 10 αὐτοὶ στατῆρες μὲ τὰς 30 ὀκάδας κάμνουν ἐν ὅλῳ 470 ὀκάδας, τὰς ὁποίας θὰ διαιρέσωμεν διὰ 16. Εὑρίσκομεν δέ, ὅτι κάθε χωρίον θὰ λάβῃ καὶ ἄλλας 29 ὀκάδας καὶ θὰ μείνουν ἀκόμη 6 ὀκάδες ἢ 2400 δράμια. Ἐὰν τέλος διαιρέσωμεν τὰ 2400 δράμια διὰ 16, θὰ εὕρωμεν 150 δράμ. Ἤτοι θὰ εὕρωμεν, ὅτι κάθε χωρίον θὰ λάβῃ σῖτον 9 στατ. 29 ὀκ. 150 δράμια.

Τὴν πρᾶξιν διατάσσομεν ὡς ἑξῆς :

154 στατ. 30 ὀκ.	16
144	9 στατ. 29 ὀκ. 150 δράμ.
10	
44 ὀκ.	
440 »	
30 »	
470 »	
32 »	
150	
144	
6	
400 δράμ.	
2400 »	
80	
00	

Σημείωσις. Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον θὰ εὕρωμεν καὶ ἂν τρέψωμεν πρῶτον τὸν διαιρετέον εἰς ἀκέραιον καὶ κατόπιν διαιρέσωμεν.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

730) Νὰ διαιρέσῃς :

24 ὀκ. 300 δράμ.	διὰ 6	72 λίρ. 8 σελ.	διὰ 12
3 στατ. 24 ὀκ.	διὰ 2	48 λίρ. 7 σελ. 6 πέν.	διὰ 15
3 στατ. 24 ὀκ.	διὰ 5	21 ὧρ. 45΄ 40΄΄	διὰ 25
24 στ. 17 ὀκ. 300 δράμ.	διὰ 16	30° 45΄ 32΄΄	διὰ 64

731) Ὁμοίως νὰ διαιρέσῃς:

1 λίρα Ἀγγλίας διὰ 32	56 ὑάρδ. 9 δάκτ. διὰ 30
88 λίρ. 17 σελ. $1\frac{1}{2}$ πέν. διὰ 63	7 ὧραι 40′ διὰ 12
60 ὑάρδαι 2 πόδια διὰ 15	5 ὧραι $37\frac{1'}{2}$ διὰ 72

Ὁμὰς Β′

732) Ἁμαξοστοιχία διατρέχει 64 χιλιόμετρα εἰς 1 ὥρ. 20′. Εἰς πόσον χρόνον διατρέχει ἓν χιλιόμετρον;

733) Ἁμαξοστοιχία διατρέχει εἰς 15 ὥρας 450 χιλιόμετρα καὶ 500 μέτρα. Πόσον διάστημα διατρέχει εἰς 1 ὥραν;

734) Εἷς μετέφερε μὲ τὸν σιδηρόδρομον 25 τόν. ἐλαιῶν ἀντὶ 2 λιρ. 15 σελ. Πόσα ἔξοδα μεταφορᾶς ἀντιστοιχοῦν εἰς 1 τόννον;

735) Εἷς ἠγόρασε 48 στατῆρας ἐλαιῶν, αἱ ὁποῖαι κατὰ τὴν μεταφορὰν ἔχασαν βάρος 2 στατήρων 24 ὀκ. 320 δραμ. Πόση ἀπώλεια βάρους ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα στατῆρα;

736) Τοὺς ἄνω 48 στατῆρας ἐλαιῶν ἐξήγαγεν ὁ ἔμπορος εἰς τὸ ἐξωτερικόν. Ἐπληρώθη δὲ τὴν ἀξίαν εἰς δύο δόσεις. Καὶ ἡ μὲν πρώτη δόσις ἦτο ἐκ 45 λιρ. 8 σελ. 5 πεν. καὶ ἡ δευτέρα ἦτο ἐξ 71 λιρ. 4 σελ. 7 πεν. Πόσον ἐπώλησε τὸν στατῆρα;

737) Ὁ ἄνω ἔμπορος ἐξήγαγεν εἰς τὸ ἐξωτερικὸν καὶ ἄλλους 25 στατῆρας ἐλαιῶν. Ἔλαβε δὲ διὰ τὴν ἀξίαν των 13612 δρχ. 50 λεπτά, ὡς καὶ 55 λιρ. 5 σελ. Πόσον ἐπώλησε τὸν ἕνα στατῆρα;

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΕΠΙ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΝ

211. 1ον) **Ἓν αὐτοκίνητον διέτρεξεν ἕνα δρόμον εἰς 7 ὥρας 12′ καὶ 40″. Εἰς πόσον χρόνον διέτρεξε τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ;**

Διὰ νὰ εὕρω τὸ ζητούμενον, θὰ πολλαπλασιάσω (7 ὥρ. 12′ 40″) $\times \frac{3}{4} = \frac{(7 \text{ ὥρ. } 12' \; 40'') \times 3}{4} =$ (21 ὥρ. 36′ 120″) : 4=5 ὥρ. 24′ 30″.

2ον) **Νὰ εὑρεθοῦν τὰ $2\frac{3}{8}$ τῶν 14 λιρ. 7 σελ. 2 πεν.**

Πρὸς τοῦτο θὰ πολλαπλασιάσω (14 λίρ. 7 σελ. 2 πέν.) $\times 2\frac{3}{8}$.

14 λίρ. 7 σελ. 2 πέν.	14 λίρ. 7 σελ. 2 πέν.	
2	3	
28 λίρ. 14 σελ. 4 πέν.	42 λίρ. 21 σελ. 6 πέν.	8
	2	5 λ. 7 σ. 8 πέν. 1 φαρ.
	20 σελ.	
	40 »	
	21 »	
	61 »	
	5	
	12 πέν.	
	60 »	
	6 »	
	66 »	
	2	
	4 φαρδ.	
	8 »	
	0.	

Ὥστε (14 λίρ. 7 σελ. 2 πέν.) $\times 2\frac{3}{8}$ = 28 λίρ. 14 σελ. 4 πέν. + 5 λίρ. 7 σελ. 8 πέν. 1 φαρδ. = 34 λίρ. 2 σελ. 1 φαρ.

Σημείωσις. Ἠδυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸν μεικτὸν $2\frac{3}{8}$ εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσωμεν.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

738) Νὰ γίνουν οἱ πολλαπλασιασμοί:

(10 σελ. 6 πέν) $\times \frac{2}{3}$ (22 ὑάρδ. 2 πόδ.) $\times \frac{4}{5}$

(9 λίρ. 15 σελ.) $\times \frac{4}{5}$ (7 ὥρ. 18′) $\times \frac{5}{6}$

(17 πήχ. 3 ρούπ.) $\times \frac{3}{4}$ (3 ἡμ. 18 ὧρ.) $\times \frac{7}{8}$.

739) Ὁμοίως νὰ γίνουν οἱ πολλαπλασιασμοί:

(17 στατ. 4 ὀκ.) $\times 2\frac{3}{5}$ (14 λίρ. 7 σελ. 2 πέν.) $\times 3\frac{5}{8}$

(40 στ. 33 ὀκ. 200 δρ.) $\times 7\frac{9}{16}$ (8 λίρ. 16 σελ.) $\times$ 2,037

(3 στ. 12 ὀκ. 100 δρ.) $\times$ 0,35 (35° 45′ 20″) $\times 3\frac{1}{5}$

(78° 40′) $\times$ 0,875.

Ὁμὰς Β′

740) Μία οἰκοκυρὰ ὑπελόγισεν ὅτι, διὰ νὰ στρώσῃ ἕνα διάδρομον, ἐχρειάσθη τάπητα 2 πήχ. 5 ρούπ. Πόσους πήχεις χρειάζεται διὰ νὰ στρώσῃ ἄλλον διάδρομον, ὅστις εἶναι τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ πρώτου;

741) Ἡ ἄνω οἰκοκυρά, διὰ νὰ κεντήσῃ ἓν τραπεζομάνδηλον, ἐχρειάσθη 37 ὥρας 40′. Διὰ νὰ κεντήσῃ ἄλλο τραπεζομάνδηλον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πρώτου, πόσας ὥρας θὰ χρειασθῇ;

742) Μία ὑφαίνει μὲ μηχανὴν 158 πήχεις καὶ 3 ρούπια ἑνὸς ὑφάσματος εἰς μίαν ἡμέραν. Πόσον ὑφαίνει εἰς $\frac{1}{2}$ τῆς ἡμέρας;

743) Ἡ ἄνω ὑφάντρια ἀπὸ τὴν ἐργασίαν ἑνὸς μηνὸς ἐκέρδισεν 8 λίρας 12 σελ. 6 πέν. Πόσον θὰ κερδίσῃ εἰς $4\frac{1}{2}$ μῆνας;

744) Ἓν τεμάχιον ὑφάσματος ἔχει ἔκτασιν 17 τετρ. δεκαμέτρων καὶ 40 τετρ. μέτρ. Πόσην ἔκτασιν ἔχουν $8\frac{1}{2}$ τοιαῦτα τεμάχια;

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ (ΜΕΡΙΣΜΟΣ) ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΔΙΑ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

212. Μία μηχανὴ ἀνασκάπτει τὰ $\frac{2}{5}$ ἑνὸς κτήματος εἰς 7 ὥρας 32′ 16″. Εἰς πόσον χρόνον θὰ ἀνασκάψῃ ὅλον τὸ κτῆμα;

Διὰ νὰ εὕρω τὸ ζητούμενον πρέπει νὰ κάμω διαίρεσιν (μερισμόν). (7 ὥρας 32′ 16″) : $\frac{2}{5}$ = (7 ὥρ. 32′ 16″) $\times \frac{5}{2}$. Εὑρίσκομεν δέ, ὅτι τὸ κτῆμα θὰ τὸ ἀνασκάψῃ εἰς 18 ὥρας 50′ 40″.

213. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μεικτός, τρέπομεν αὐτὸν εἰς κλάσμα καὶ διαιροῦμεν ἔπειτα ὡς ἀνωτέρω, ἐὰν ἡ διαίρεσις εἶναι μερισμός.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

745) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις:

1 πήχ. 3 ρ. διὰ $\frac{3}{4}$ 75 λίρ. 18 σελ. 6 πέν. διὰ $2\frac{1}{2}$

2 ὥρ. 40΄ διὰ $\frac{5}{8}$ 7 ὑάρ. 2 πόδ. 9 δάκ. διὰ $\frac{5}{9}$

15 μ. 6 παλ. 9 δάκ. διὰ $\frac{3}{5}$ 12 στ. 35 ὀκ. 75 δράμ. διὰ $5\frac{7}{8}$.

746) Ὁμοίως αἱ:

46 τάλ. 3 δραχ. 10 λ. διὰ 0,8 32 λίρ. 45 γρ. 15 παρ. διὰ 0,12

3 τόν. 200 χιλ. 150 γρ. διὰ 0,4 15° 45΄ 56΄΄ διὰ 3,25.

747) Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγὴς 2 στατ. 15 ὀκ. ἐπὶ $5\frac{1}{4}$ καὶ τὸ γινόμενον νὰ διαιρεθῇ διὰ $2\frac{1}{5}$.

Ὁμὰς Β΄

748) Ἑνὸς οἰκογενειάρχου τὰ $\frac{7}{20}$ τοῦ ἐτησίου εἰσοδήματος εἶναι 63 λ. 14 σελ. Πόσον εἶναι τὸ ἐτήσιον εἰσόδημά του;

749) Ὁ ἄνω οἰκογενειάρχης ἠγόρασε διὰ τὰς ἐνδυμασίας τῶν τέκνων του $12\frac{1}{4}$ πήχεις ὑφάσματος καὶ ἐπλήρωσε 3480 δρχ. 60 λεπτά. Πόσον ἐπλήρωσε δι' ἕνα πῆχυν;

750) Διὰ τὴν θέρμανσιν τῆς οἰκίας του ἐξώδευσεν οὗτος εἰς $5\frac{1}{2}$ μῆνας ξύλα 17 στ. 20 ὀκ. Πόσα ξύλα ἐξώδευσεν εἰς ἕνα μῆνα;

751) Ὁ ἄνω οἰκογενειάρχης ὑπελόγισεν, ὅτι ἐχρησιμοποίησεν ἓν ζεῦγος ὑποδημάτων ἀξίας 18 σελ. 6 πέν. ἐπὶ $8\frac{1}{2}$ μῆνας καὶ μίαν ἐνδυμασίαν ἀξίας 5 λιρ. 10 σελ. ἐπὶ $30\frac{1}{2}$ μῆνας. Πόση δαπάνη ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα μῆνα διὰ τὰ ὑποδήματα καὶ πόση διὰ τὴν ἐνδυμασίαν;

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΕΠΙ ΣΥΜΜΙΓΗ

214. Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος ἀξίζει 65 δρχ. 60 λεπτά. Πόσον ἀξίζουν 4 πήχ. 6 ρούπ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ (65 δρχ. 60 λεπτ.) × (4 πήχ. 6 ρούπ.).

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἐδόθη ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς πήχεως, τρέπομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν 4 πήχ. 6 ρούπ. εἰς πήχεις καὶ πολλαπλασιάζομεν (65 δρχ. 60 λεπτὰ) $\times 4\frac{6}{8} =$ 311 δρχ. 60 λεπτά.

Ὅθεν : **Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι συμμιγής, τρέπομεν αὐτὸν εἰς μονάδας μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ τὴν ὁποίαν ὁρίζει τὸ πρόβλημα.**

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα λύεται καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἁπλῶν μερῶν ὡς ἑξῆς φαίνεται :

ἀξία τῶν 4 πήχεων=65 δρχ. 60 λ. ×4=262 δρχ. 40 λεπτ.

» 6 ρ. ἢ { 4 ρ. ἢ $\frac{1}{2}$ πήχ.=65 δρχ. 60 λ. $\times\frac{1}{2}$= 32 δρχ. 80 λ.
2 ρ. ἢ $\frac{1}{4}$ πήχ. ἢ $\frac{1}{2}$ τοῦ προηγ.=16 δρχ. 40 λεπτ. }

ὁλικὸν ἐξαγόμενον 311 δρχ. 60 λεπτά.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΔΙΑ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ

215. Διαίρεσις μερισμοῦ.—Ἓν αὐτοκίνητον διέτρεξεν εἰς 3 ὥρ. 45′ 102 χιλιόμετρα 450 μ. Πόσον διέτρεξε τὴν ὥραν;

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν (102 χιλ. 450 μ.) διὰ (3 ὥρ. 45′). Ἀλλ' ὁ συμμιγὴς διαιρέτης δὲν ἠμπορεῖ νὰ διαιρέσῃ κανένα ἀριθμόν, πρέπει δὲ οὗτος νὰ τραπῇ εἰς μονάδας μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς τάξεως. Ἐνταῦθα ἐπειδὴ ζητεῖται ἡ τιμὴ μιᾶς ὥρας τρέπομεν τὸν συμμιγῆ 3 ὥρ. καὶ 45′ εἰς ὥρας, $3\frac{3}{4}$. Διαιροῦμεν δὲ 102 χιλ. 450 μ. διὰ $3\frac{3}{4}$ καὶ εὑρίσκομεν 27 χιλ. 320 μ.

Ἡ διαίρεσις αὕτη, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ διαιρετέος εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς τὸ πηλίκον καὶ διάφορος πρὸς τὸν διαιρέτην, εἶναι μερισμός.

Ὅθεν: **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ συμμιγοῦς, ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι μερισμός, τρέπομεν πρῶτον τὸν διαιρέτην εἰς μονάδας μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς τάξεως, τὴν ὁποίαν ὁρίζει τὸ** πρόβλημα, καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν.

216. Διαίρεσις μετρήσεως.—Μία μηχανὴ ὑφαίνει εἰς μίαν ὥραν 7 πήχεις 6 ρούπ. ἑνὸς ὑφάσματος. Πόσας ὥρας χρειάζεται διὰ νὰ ὑφάνῃ 96 πήχ. 7 ρούπ. τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον πρέπει νὰ διαιρέσωμεν (96 πήχ. 7 ρούπ.) δι' (7 πήχ. 6 ρούπ.). Ἀλλὰ διὰ νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις αὕτη, τρέπομεν καὶ τοὺς δύο συμμιγεῖς εἰς μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως· ἀλλὰ πρὸς εὐκολίαν τρέπομεν αὐτοὺς εἰς ρούπια (ὁπότε θὰ προκύψουν ἀριθμοὶ ἀκέραιοι) καὶ διαιροῦμεν 775 δι' 62. Θεωροῦμεν δὲ τοὺς δύο τούτους ἀκεραίους ὡς ἀφῃρημένους· τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{775}{62}$ καὶ πρέπει νὰ θεωρηθῇ, ὅτι παριστᾷ ὥρας, διότι ὥρας λέγει τὸ πρόβλημα, εὑρίσκομεν δὲ $12\frac{1}{2}$ ὥρας.

Ἡ διαίρεσις αὕτη, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ διαιρετέος εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς τὸν διαιρέτην, εἶναι μέτρησις.

Ὅθεν: **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ συμμιγοῦς, ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι μέτρησις, τρέπομεν πρῶτον τοὺς δύο συμμιγεῖς εἰς ἀκεραίους ὁμοειδεῖς καὶ ἔπειτα τοὺς διαιροῦμεν. Τὸ δὲ πηλίκον θὰ προσδιορισθῇ ἀπὸ τὸ πρόβλημα.**

Προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

752) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 24 δραχ. καὶ 40 λεπ. Πόσον ἀξίζουν 10 πήχ. 3 ρούπια τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;

753) Τὸ ρούπιον μεταξωτοῦ ὑφάσματος ἀξίζει 24 δραχ. καὶ 40 λεπ. Πόσον ἀξίζουν οἱ 10 πήχ. καὶ 3 ρ. τοῦ ἰδίου ὑφάσματος

754) Μία ὑφαίνει εἰς μίαν ὥραν 14 ρούπια ἑνὸς ὑφάσματος. Πόσον θὰ ὑφάνῃ εἰς 8 ὥρας 45΄;

755) Διὰ νὰ πλέξῃ μία 1 μέτρον δαντέλλαν χρειάζεται 20΄ 45΄΄ τῆς ὥρας. Εἰς πόσον χρόνον θὰ πλέξῃ δαντέλλαν 8 μέτρ. 4 παλ.;

756) Ὁ εἷς πῆχυς ἑνὸς μαλλίνου ὑφάσματος ἔχει βάρος 150 δραμ. Πόσον βάρος ἔχουν 18 πήχεις 3 ρούπια;

757) Ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος 18 πήχ. καὶ 7 ρουπ. οἱ 8 πήχεις

4 ρούπια ἐπωλήθησαν πρὸς 224 δρχ. 50 λεπτὰ τὸν πῆχυν, οἱ δὲ λοιποὶ πρὸς 232 δραχ. 80 λεπτ. τὸν πῆχυν. Ἀντὶ πόσων δραχμῶν ἐπωλήθη ὅλον τὸ ὕφασμα;

Ὁ μ ὰ ς Β΄

758) Ἓν ἀτμόπλοιον διατρέχει εἰς 8 ὥρ. 45΄ $112\frac{1}{2}$ μίλια. Πόσον διατρέχει εἰς 1 ὥραν;

759) Ἓν κινητὸν διατρέχει εἰς 20΄ 45΄΄ 174 μέτρα 3 παλάμας. Πόσον διατρέχει εἰς 1΄.

760) Εἷς σιδηρόδρομος διέτρεξε 306 χιλιόμετρα εἰς 12 ὥρας 35΄. Πόσον διέτρεξεν εἰς 1 ὥραν, καὶ πόσον εἰς 1΄;

761) Εἷς σιδηρόδρομος, ὁ ὁποῖος ἐκινήθη ἐπὶ 15 ὥρ. 40΄, ἔκαψε 2 τόν. καὶ 500 χιλιόγρ. γαιάνθρακας. Πόσον ἔκαψεν εἰς 1 ὥραν;

762) Ἐὰν οἱ 5 τόννοι 400 χιλιόγραμμα γαιανθράκων ἀξίζουν 17 λίρ. 5 σελ., πόσον ἀξίζει ὁ εἷς τόννος;

763) Ἠγόρασέ τις 15 τόννους 400 χιλιόγραμμα γαιανθράκων ἀντὶ 50 λιρῶν 1 σελ., καὶ 13 τόννους 500 χιλιόγραμμα γαιανθράκων ἄλλης ποιότητος ἀντὶ 44 λιρῶν 11 σελ. Ποία ποιότης γαιανθράκων εἶναι ἡ κατωτέρα;

Ὁ μ ὰ ς Γ΄

764) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 35 δραχμὰς καὶ 60 λεπτά. Πόσους πήχεις ἀγοράζομεν μὲ 249 δρχ. καὶ 20 λεπτά;

765) Ἡ ὑάρδα ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 6 σελ. 3 πέν. Πόσας ὑάρδας θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 5 λίρ. 10 σελ. 6 πέννας;

766) Μὲ μίαν λίραν Ἀγγλίας ἀγοράζομεν 2 ὑάρδας 2 πόδ. ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος. Πόσας λίρας θὰ δώσωμεν διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 18 ὑάρδας 2 πόδ. τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;

767) Μία μηχανὴ ὑφαίνει 5 πήχ. ἑνὸς ὑφάσματος εἰς μίαν ὥραν. Εἰς πόσας ὥρας θὰ ὑφάνῃ 1870 πήχ. 2 ρούπ. τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;

768) Εἷς πῆχυς ὑφάσματος ἔχει βάρος 79,88 γραμμαρίων. Πόσοι πήχεις τοῦ ἰδίου ὑφάσματος ἔχουν βάρος ἑνὸς χιλιογράμμου;

769) Εἷς ἔμπορος δι' ὕφασμα μιᾶς ποιότητος βάρους 1 ὀκᾶς 100 δραμ. πληρώνει τελωνειακὸν δασμὸν 1 ἑκατοντάδραχμον. Πόσα ἑκατοντάδραχμα θὰ πληρώσῃ διὰ τελωνειακὸν δασμόν, ὅταν ὕφασμα τῆς αὐτῆς ποιότητος ἔχῃ βάρος 93 χιλιόγραμμα καὶ 312 γραμμάρια ;

Ὁμὰς Δ'

770) Τόξον περιφερείας κύκλου $2^\circ\ 15'$ ἔχει μῆκος 1 μέτρου. Πόσων μέτρων εἶναι τὸ μῆκος τόξου $63^\circ\ 33'\ 45''$ τῆς αὐτῆς περιφερείας ;

771) Ἓν κινητὸν διατρέχει εἰς $1'$ τῆς ὥρας τόξον περιφερείας κύκλου $3^\circ\ 15'\ 42''$. Εἰς πόσον χρόνον θὰ διατρέξῃ τόξον τῆς αὐτῆς περιφερείας $17^\circ\ 56'\ 21''$;

772) Ἓν ὡρολόγιον ἔμεινεν ὀπίσω $8'\ 40''$. Πρὸ πόσων ὡρῶν ἐκανονίσθη μὲ τὴν ἀκριβῆ ὥραν, ὅταν εἶναι γνωστόν, ὅτι τὸ ὡρολόγιον τοῦτο μένει ὀπίσω κάθε ὥραν $21\frac{2''}{3}$;

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'.

ΠΕΡΙ ΜΕΘΟΔΩΝ

I. ΠΟΣΑ ΑΝΑΛΟΓΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ

217. Εἰς τὰ προηγούμενα εἴδομεν ἁπλᾶ προβλήματα, τὰ ὁποῖα λύονται μὲ ἕνα πολλαπλασιασμὸν (160) ἢ μὲ μίαν διαίρεσιν (160). Ἐπίσης εἴδομεν καὶ μερικὰ σύνθετα προβλήματα (161 — 163), τὰ ὁποῖα ἐλύθησαν διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Ὑπάρχει ὅμως καὶ ἄλλη μέθοδος, δηλαδὴ ὑπάρχει καὶ ἄλλος τρόπος περισσότερον πρακτικός, διὰ νὰ λύσωμεν τοιαῦτα προβλήματα. Ἀλλὰ διὰ νὰ ἐννοήσωμεν τὴν μέθοδον αὐτήν, πρέπει νὰ μάθωμεν πρῶτον τὰ ἑξῆς :

218. Ποσὰ ἀνάλογα.— Ἂς θεωρήσωμεν δύο ποσά, π. χ. τὸ μῆκος ἑνὸς ὑφάσματος καὶ τὴν ἀξίαν αὐτοῦ. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἀξία τοῦ ὑφάσματος αὐτοῦ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μῆκος του.

Διότι, ἐὰν ὁ 1 πῆχυς ἀξίζει 50 δραχμάς,
οἱ 2 πήχεις ἀξίζουν $50 \times 2 = 100$ δραχμ.
οἱ 3 » » $50 \times 3 = 150$ »
καὶ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ πήχ. ἀξίζει $50 : 2 = 25$ »

Καὶ γενικῶς, ὅταν τὸ μῆκος αὐτὸ γίνῃ 2, 3, 4, 5 κτλ. φορὰς μεγαλύτερον (ἢ μικρότερον), ἡ ἀξία του θὰ γίνῃ 2, 3, 4, 5, κτλ. φορὰς μεγαλυτέρα (ἢ μικροτέρα).

Ὁμοίως τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον διανύει εἷς σιδηρόδρομος, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν χρόνον, κατὰ τὸν ὁποῖον κινεῖται. Ἐὰν δὲ ἡ ταχύτης του εἶναι σταθερὰ καὶ διανύῃ εἰς 1 ὥραν 30 π. χ. χιλιόμετρα, εἰς χρόνον διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. θὰ διανύσῃ διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. διάστημα.

Τὰ τοιαῦτα ποσὰ λέγονται **ἀπ' εὐθείας ἀνάλογα** ἢ ἁπλῶς **ἀνάλογα.**

Εἰς τὸ 1ον ἀπὸ τὰ ἄνω παραδείγματα ὁ ἀριθμὸς π.χ. 2 πήχ. εἶναι μία τιμὴ ἑνὸς ποσοῦ (τοῦ μήκους), ἡ δὲ ἀξία του 100 δρχ. εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ἡ ἀντίστοιχος πρὸς τὴν τιμὴν 2 πήχεις.

Ὁμοίως εἰς τὸ ἄλλο παράδειγμα ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν δύο ποσῶν εἶναι π. χ. αἱ 3 ὧραι καὶ τὰ 90 χιλιόμ. (διότι εἰς 3 ὥρας διανύει διάστημα 30 χιλ.×3=90 χιλ.).

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν συνάγομεν ὅτι :

Δύο ποσὰ θὰ τὰ εἴπωμεν ἀνάλογα, ἐὰν ἴδωμεν, ὅτι, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν (διαιρέσωμεν) μίαν τιμὴν τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, θὰ πολλαπλασιασθῇ (διαιρεθῇ) καὶ ἡ πρὸς αὐτὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν.

219. Ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.—Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι :

1 ἐργάτης σκάπτει μίαν ἄμπελον εἰς 24 ἡμέρας

2 ἐργάται σκάπτουν τὴν ἄμπελον εἰς 24 : 2 = 12 ἡμ.

3 » » » » » 24 : 3 = 8 ἡμ. κ.ο.κ.

Ἀλλ' ἐδῶ βλέπομεν, ὅτι, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν ἀπὸ 1 γίνῃ 2 ἢ 3, δηλαδὴ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2 ἢ 3, ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν ἐργασίας διαιρεῖται διὰ 2 ἢ 3.

Ὁμοίως βλέπομεν, ὅτι, ἐὰν ἓν αὐτοκίνητον, κινούμενον μὲ ταχύτητα 40 χλμ. τὴν ὥραν, διανύῃ ἓν διάστημα εἰς 4 ὥρ. τὸ ἴδιον διάστημα θὰ διανύσῃ εἰς 2 ὥρ. ἐὰν διπλασιάσῃ τὴν ταχύτητά του. Τὰ τοιαῦτα ποσὰ λέγονται **ἀντιστρόφως ἀνάλογα** ἢ ἁπλῶς **ἀντίστροφα.**

Πότε λοιπὸν δύο ποσὰ λέγονται ἀντίστροφα ;

220. Ἀνωτέρω εἴδομεν δύο ποσά, νὰ ἐξαρτῶνται τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ ποσά, τὰ ὁποῖα ἐξαρτῶνται ἀπὸ πολλὰ ἄλλα. Π.χ. ὁ χρόνος, κατὰ τὸν ὁποῖον ἓν αὐτοκίνητον διανύει ἓν διάστημα, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ διάστημα καὶ τὴν ταχύτητά του. Εἶναι δὲ ὁ χρόνος αὐτὸς ἀνάλογος πρὸς τὸ διάστημα (ὅταν ἡ ταχύτης μένῃ σταθερὰ) καὶ ἀντίστροφος πρὸς τὴν ταχύτητα (ὅταν τὸ διάστημα μένῃ τὸ ἴδιον.)

Ἀσκήσεις.

773) Δώσατε παραδείγματα ποσῶν ἀναλόγων καὶ ἀντιστρόφων.

774) Τὸ ἀνάστημα τοῦ παιδίου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἡλικίαν του. Εἶναι τὰ ποσὰ αὐτὰ ἀνάλογα;

II. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

221. Πρόβλημα. **Ὀκτὼ ὀκάδες οἴνου ἀξίζουν 92 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν 35 ὀκάδ. τοῦ αὐτοῦ οἴνου;**

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν δύο ποσὰ ἀνάλογα: τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀκάδων καὶ τὰς δραχμάς.

Διὰ τοῦτο, ἀφοῦ αἱ 8 ὀκάδες ἀξίζουν 92 δραχμ., ἡ ὀκᾶ ἀξίζει $\frac{92}{8}$ δραχμ. καὶ αἱ 35 ὀκάδ. ἀξίζουν $\frac{92}{8}$ δραχμὰς $\times 35 = 92$ δραχμὰς $\times \frac{35}{8} = 402{,}50$ δραχμ.

222. Πρόβλημα. **Εἷς ἐργάτης, ὁ ὁποῖος εἰργάζετο 6 ὥρας τὴν ἡμέραν, ἔσκαψε μίαν ἄμπελον εἰς 12 ἡμέρας. Ἐὰν ὅμως εἰργάζετο 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἔσκαπτε τὴν ἰδίαν ἄμπελον;**

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν δύο ποσὰ ἀντίστροφα: τὰς ὥρας τῆς καθημερινῆς ἐργασίας καὶ τὰς ἡμέρας, εἰς τὰς ὁποίας τελειώνει τὸ ἔργον. Διὰ τοῦτο, ἀφοῦ, ὅταν ἐργάζεται 6 ὥρας τὴν ἡμέραν, χρειάζεται 12 ἡμ. διὰ νὰ τελειώσῃ τὸ ἔργον, ἐὰν ἐργασθῇ 1 ὥραν τὴν ἡμέραν, θὰ χρειασθῇ 12 ἡμ. $\times$ 6 καὶ ἐὰν ἐργασθῇ 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, θὰ χρειασθῇ $\frac{12 \text{ ἡμ.} \times 6}{8} = 12$ ἡμ. $\times \frac{6}{8} = 9$ ἡμέρας, διὰ νὰ τελειώσῃ τὸ ἔργον.

223. Τώρα παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς καθὲν ἀπὸ τὰ δύο ἀνωτέρω προβλήματα ἐδόθησαν δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ δύο ποσῶν ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων. Ἐπίσης ἐδόθη καὶ μία ἄλλη τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἀπὸ αὐτά. Ζητεῖται δὲ ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν νέαν τιμὴν τοῦ πρώτου.

Τοιαῦτα προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ἀπὸ τοὺς ὁποίους ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος, λέγονται **προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.**

224. Τώρα, διὰ νὰ ἴδωμεν τὸν νέον τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον θὰ λύωμεν τὰ τοιαῦτα προβλήματα ταχύτερα, θὰ κατατάξωμεν τὰ δεδομένα ἑκάστου τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων καὶ τὸ ζητούμενον εἰς δύο σειρὰς ὡς ἑξῆς :

	ὀκάδες	δραχμαί			ὧραι	ἡμέραι
α)	$\frac{8}{35}$	$\frac{92}{X}$		β)	$\frac{6}{8}$	$\frac{12}{X}$

$$X = 92 \text{ δρχ.} \times \frac{35}{8} \qquad\qquad X = 12 \text{ ἡμ.} \times \frac{6}{8}$$

Μὲ τὸν τρόπον δὲ αὐτὸν τῆς κατατάξεως βλέπομεν ὅτι, εἰς τὸ πρῶτον πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ἡ εὑρεθεῖσα προηγουμένως τιμὴ $= 92$ δρχ. $\times \frac{35}{8}$ ἰσοῦται μὲ τὸν ὑπεράνω τοῦ X ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{8}{35}$ τῶν δύο ἄλλων ἀριθμῶν, **ἀντεστραμμένον.** Ἐνῷ εἰς τὸ δεύτερον πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ ἰσοῦται ἐπίσης μὲ τὸν ὑπεράνω τοῦ X ἀριθμόν, ἀλλὰ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ τών δύο ἄλλων ἀριθμῶν, **ὅπως ἔχει.** Ὥστε εἰς τὰ προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, τῶν ὁποίων τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον κατατάσσομεν ὡς ἀνωτέρω, **διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον X πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ὁμοειδῆ ἀριθμὸν μὲ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν οἱ δύο ἄλλοι (ὡς εἶναι γραμμένοι,) ἐὰν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, ἢ μὲ τὸ κλάσμα αὐτὸ ἀντεστραμμένον, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.**

Ἤτοι, ἐὰν ἡ τιμὴ α μονάδων ἑνὸς ποσοῦ εἶναι β, ἡ τιμὴ γ ὁμοίων μονάδων τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ εἶναι $\beta \times \frac{\gamma}{\alpha}$, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, καὶ $\beta \times \frac{\alpha}{\gamma}$, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

Προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

775) Πέντε πήχεις βαμβακεροῦ ὑφάσματος ἀξίζουν 125 δρχ. Πόσας δρχ. ἀξίζει ὁ εἷς πῆχυς καὶ πόσας ἀξίζουν οἱ 11 πήχεις;

776) Ὀκτὼ πήχεις μεταξωτοῦ ὑφάσματος ἀξίζουν 1020 δρχ. Πόσους πήχεις τοιούτου ὑφάσματος ἀγοράζομεν μὲ 1657,50 δρχ.;

777) Διὰ μίαν ἐνδυμασίαν χρειάζονται 4 πήχ. ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος πλάτους 12 ρουπίων. Πόσους πήχεις θὰ χρειασθῶμεν διὰ τὴν ἐνδυμασίαν αὐτήν, ἐὰν τὴν κατασκευάσωμεν ἀπὸ ὕφασμα πλάτους 15 ρουπίων;

778) Διὰ τὴν κατασκευὴν 80 ὁμοίων ἐνδυμασιῶν χρειάζονται 624 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος πλάτους 6 ρουπίων. Πόσοι πήχεις θὰ χρειασθοῦν διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν ἐνδυμασιῶν αὐτῶν, ὅταν τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος εἶναι 1 πῆχυς;

779) Μὲ 114,40 δραχμὰς ἠγόρασεν εἷς 1 πῆχυν καὶ 5 ρούπια ἑνὸς ὑφάσματος. Πόσους πήχεις θὰ ἀγοράσῃ μὲ 510,40 δραχμάς;

780) 4 ὑάρδ. καὶ 2 π. ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζουν $3\frac{1}{2}$ λίρας Ἀγγλίας. Πόσον ἀξίζουν αἱ 12 ὑάρδ. καὶ 1 π. τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;

781) 3 ὑάρδ. καὶ 2 π. ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζουν 4 λίρ. 19 σελ. Πόσας ὑάρδας τοῦ ὑφάσματος αὐτοῦ ἀγοράζομεν μὲ 11 λίρας 5 σελ.;

Ὁμὰς Β΄

782) Εἷς ἐργάτης κερδίζει εἰς 6 ἡμέρας 350 δρχ. Πόσας δρχ. κερδίζει εἰς μίαν ἡμέραν καὶ πόσας εἰς 15 ἡμέρας;

783) Ἐὰν 10 ἐργάτριαι ὑφαίνουν 35 πήχεις ὑφάσματος εἰς χρόνον τινά, πόσαι ἐργάτριαι θὰ ὑφάνουν εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον 49 πήχεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

784) Μία ἐργάτρια ἐκέρδισεν εἰς 15 ἡμέρας 845,25 δραχμάς. Πόσας θὰ ἐκέρδιζεν, ἐὰν εἰργάζετο 6 ἡμέρας ἐπὶ πλέον;

785) 9 ἐργάται σκάπτουν ἓν κτῆμα εἰς 10 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τὸ σκάψῃ 1 ἐργάτης; καὶ εἰς πόσας θὰ τὸ σκάψουν 15;

786) 10 ἐργάται σκάπτουν ἓν κτῆμα εἰς 28 ἡμέρας. Πόσοι ἐργάται θὰ σκάψουν τὸ κτῆμα εἰς 8 ἡμέρας;

787) 38 ἐργάται ἐπεσκεύασαν τὸ ἥμισυ ἑνὸς δρόμου εἰς 18 ἡμέρας. Πόσοι ἐργάται θὰ ἐπισκευάσουν τὸ ἄλλο ἥμισυ εἰς 12 ἡμέρας;

Ὁμὰς Γ΄

788) Ἓν αὐτοκίνητον, ἐὰν τρέξῃ μὲ ταχύτητα 34 χιλιομέτρων τὴν ὥραν, θὰ χρειασθῇ 12 ὥρας διὰ νὰ ταξιδεύσῃ ἀπὸ τὴν πόλιν Α εἰς τὴν πόλιν Β. Ἔτρεξεν ὅμως τὸ διάστημα αὐτὸ μὲ ταχύτητα 40 χιλιομέτρων τὴς ὥραν. Πόσας ὥρας διήρκεσε τὸ ταξίδιον αὐτό ;

789) Ἓν αὐτοκίνητον, ἐὰν τρέχῃ 39 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, θὰ φθάσῃ ἀπὸ μίαν πόλιν εἰς ἄλλην μετὰ 8 ὥρας. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει νὰ τρέχῃ τὴν ὥραν, ἐὰν θέλῃ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν ἐκείνην μετὰ $6\frac{1}{2}$ ὥρας ;

790) Ἓν αὐτοκίνητον, ἐὰν τρέξῃ μὲ ταχύτητα 45 χιλιομέτρων τὴν ὥραν, θὰ διανύσῃ ἓν διάστημα εἰς 8 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας θὰ διανύσῃ τὸ ἴδιον διάστημα, ἐὰν αὐξήσῃ τὴν ταχύτητα αὐτοῦ κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς προηγουμένης ;

791) Ἓν ἀτμόπλοιον δι' ἓν ταξίδιον 6 ὡρῶν καίει 8,5 τόννους γαιανθράκων. Πόσους τόννους θὰ κάψῃ, ὅταν πλέῃ μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα δι' ἓν ταξίδιον 17 ὡρῶν 30΄ ;

792) Ἓν φορτηγὸν πλοῖον εἶχε τροφὰς διὰ νὰ τραφῇ τὸ πλήρωμά του ἐπὶ 8 ἡμέρας, ἡ μερὶς δὲ διὰ μίαν ἡμέραν ἦτο 600 δράμια διὰ τὸ καθὲν ἄτομον. Ἀλλὰ τὸ πλοῖον ἠναγκάσθη νὰ μείνῃ εἰς τὴν θάλασσαν 12 ἡμέρας. Πόσα δράμια πρέπει νὰ γίνῃ ἡ μία μερίς ;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

225. Οἱ ἄνθρωποι εἰς τὰς συναλλαγάς των πολλὰ ποσὰ τὰ προσδιορίζουν ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ 100 ἢ 1000. Π.χ. ὁ μεσίτης λαμβάνει μεσιτείαν 2 ἐπὶ τοῖς 100, δηλαδὴ διὰ κάθε ἑκατοντάδα δραχμῶν ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ ἐμπορεύματος, τὸ ὁποῖον μεσιτεύει καὶ πωλεῖται, λαμβάνει ὡς ἀμοιβὴν 2 δραχ. καὶ σημειοῦται αὕτη συμβολικῶς 2 %. Ὁμοίως ὁ ἔμπορος πωλεῖ μὲ κέρδος π.χ. ἢ μὲ ἔκπτωσιν 12 %. Τὸ Δημόσιον ὁρίζει φόρον ἐπὶ τοῦ εἰσοδήματος 3 %, αἱ ἀσφαλιστικαὶ ἑταιρεῖαι ἀσφαλίζουν τὰ ἐμπορεύματα ἐναντίον τοῦ πυρὸς μὲ ἀσφάλιστρα $3\frac{1}{2}$ ‰ ($3\frac{1}{2}$ ἐπὶ τοῖς χιλίοις διὰ διάστημα ἑνὸς ἔτους κτλ.).

Τὸ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ 100 ἢ τοῦ 1000 ἀντιστοιχοῦν ποσὸν ἐπὶ τῆς ὅλης ἀξίας λέγεται **ποσοστόν.**

Προβλήματα.

1ον) **Εἷς ἐπώλησεν ἐμπορεύματα ἀξίας 3650 δραχ.** μὲ κέρ-**δος 12 %. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισεν ;**

Εἷς 100 δραχμὰς κερδίζει 12
» 3650 » » X

$$X = 12 \text{ δρχ.} \times \frac{3650}{100} = 438 \text{ δρχ.}$$ (τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα).

Ἢ εἰς 100 δραχμὰς κερδίζει 12 δραχμ.
» 1 δραχμὴν » 0,12 »
» 3650 δραχμὰς » 0,12 » $\times$ 3650 = 438.

2ον) **Εἷς ἠσφάλισεν ἐμπόρευμα ἐναντίον τῶν κινδύνων τῆς θαλάσσης πρὸς 4‰, ἐπλήρωσε δὲ δι' ἀσφάλιστρα 720 δρχ. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τῶν ἀσφαλισθέντων ἐμπορευμάτων ;**

Δι' ἀξίαν 1000 δραχ. ἐπλήρωσε 4 δρχ.
» » X » » 720 »

$$X = 1000 \text{ δραχμ.} \times \frac{720}{4} = 180000 \text{ δρχ.}$$

3ον) **Ἔμπορος πωλήσας ἓν ἐμπόρευμα μὲ κέρδος 7 % ἔλαβεν ἐκ τῆς πωλήσεως 2289,80 δραχμάς. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος ;**

Δι' ἀξίαν 100 δραχμ. ἔλαβεν 107
» » X » » 2289,80

$$X = 100 \text{ δραχ.} \times \frac{2289,80}{107} = 2140 \text{ δραχ.}$$

4ον) **Ἀπὸ ἓν μετάλλευμα 150 χιλιογράμμων ἐξήχθησαν 11.25 χιλιόγραμμα καθαροῦ σιδήρου. Πόσον τοῖς ἑκατὸν τοῦ ὅλου μεταλλεύματος εἶναι ὁ σίδηρος, ὁ ὁποῖος ἐξήχθη ;**

ἀπὸ 150 χιλγρ. ἐξήχθησαν 11,25 χιλγρ. σιδήρου
» 100 » » X » »

$$X = 11,25 \text{ χιλγρ.} \times \frac{100}{150} = 7,5 \%.$$

Προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

Ἀπὸ μνήμης. 793) Νὰ εὕρῃς: α) τὸ 1 % τῶν 200 δρχ. 700 δρχ., 800 δρχ., 2000 δρχ., 1500 λιρῶν· β) τὸ 2 %, τὸ 3 % τῶν 300 δρχ., 500 ὀκ., 1500 χιλγρ.· γ) τὸ $\frac{1}{2}$ % τῶν 600 δρχ., 1200 ὀκ., 1800 λιρῶν· δ) τὸ $1\frac{1}{2}$ % τῶν 600 δρχ., 1600 ὀκ., 2000 χιλιγρ.· ε) τὸ 100 %, τὸ 50 %, τὸ 150 % τῶν 400 δρχ.· στ) τὸ 1 ‰, τὸ 2 ‰, τὸ $\frac{1}{2}$ ‰, τὸ $2\frac{1}{2}$ ‰ τῶν 10000 δρχ.

Γραπτῶς. 794) Νὰ εὕρῃς: α) τὸ 1 % τῶν 850 δρχ., τὸ 2 % τῶν 650 ὀκ., τὸ 3 % τῶν 425 δρχ., τὸ 5 % τῶν 724 χιλγρ., τὸ 7 % τῶν 824 δρχ.· β) τὸ $\frac{1}{2}$ % τοῦ 1500, τὸ $\frac{1}{3}$ % τοῦ 6300, τὰ $\frac{2}{3}$ % τοῦ 630, τὸ $\frac{1}{4}$ % τοῦ 3200, τὰ $\frac{3}{4}$ % τοῦ 320· γ) τὸ $1\frac{1}{2}$ % τοῦ 2350, τὰ $3\frac{1}{3}$ % τοῦ 5400, τὰ $5\frac{3}{4}$ % τοῦ 3600, τὸ $1\frac{1}{2}$ ‰ τοῦ 20000, τὰ $4\frac{5}{8}$ ‰ τοῦ 16000.

Ὁμὰς Β΄

795) Εἷς μεσίτης ἐπώλησε διὰ λογαριασμὸν ἄλλου ἔλαιον ἀξίας 25000 δραχμῶν καὶ ἔλαβε μεσιτείαν 3 %. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν;

796) Εἷς μεσίτης ἐνοικίασε μίαν οἰκίαν πρὸς 2500 δρχ τὸν μῆνα, μὲ μεσιτείαν διὰ τὸ ἐνοίκιον ἑνὸς ἔτους $2\frac{1}{2}$ %. Πόσας δρχ. ἔλαβεν;

797) Εἷς μεσίτης ἐπώλησεν ἐμπόρευμα ἀξίας 36000 δρχ. Ἀλλ' ἐνῷ ἔπρεπε νὰ λάβῃ μεσιτείαν 4 %, ἔλαβεν 3,75 %. Πόσον ἐζημιώθη;

798) Εἷς μεσίτης λαμβάνει μεσιτείαν 2 %. Ἐκέρδισε δὲ εἰς μίαν ἑβδομάδα ἀπὸ μεσιτικὰ 800 δραχμάς. Πόση ἦτο ἡ ἀξία τῶν πράξεων, τὰς ὁποίας ἔκαμε τὴν ἑβδομάδα αὐτήν;

799) Εἷς μεσίτης ἐπώλησεν οἰκίαν ἀξίας 750000 δραχμῶν,

ἔλαβε δὲ ὡς μεσιτείαν 15000 δραχμάς. Πόσον % ἔλαβε μεσιτείαν ;

Ὁμὰς Γ΄

800) Εἷς ἔμπορος ἐπτώχευσε μὲ παθητικὸν 400000 δραχ. Ἔκαμεν ὅμως συμβιβασμὸν καὶ συνεφώνησε νὰ πληρώσῃ ἀπὸ τὰς 400000 δραχ. ποὺ χρεωστεῖ τὰ 55 %. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσεν ;

801) Ἔμπορος ὕφασμα ἀξίας 56,25 δραχμῶν τὸν πῆχυν τὸ ἐπώλησε μὲ κέρδος 8 %. Πόσον ἐπώλησε τὸν πῆχυν ;

802) Μία ἠγόρασεν ὕφασμα ἀξίας 160 δραχμῶν τὸν πῆχυν μὲ ἔκπτωσιν 15 %. Πόσον ἠγόρασε τὸν πῆχυν ;

803) Δι' ὕφασμα ἀξίας 400 δρχ. ἐπέτυχε μίαν ἔκπτωσιν 40 δρχ. Πόση εἶναι ἡ ἔκπτωσις εἰς τὰς 100 δραχμάς ;

804) Εἷς ἐπώλησεν ὕφασμα μὲ κέρδος 7 % καὶ ἔλαβεν 856 δρχ. Πόση ἦτο ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος ;

805) Εἷς ἐπώλησεν ὕφασμα μὲ ζημίαν 7,5 % καὶ ἔλαβε 462,50 δρχ. Πόση ἦτο ἡ ἀξία τοῦ ὑφάσματος αὐτοῦ ;

806) Ἐὰν ἐπώλει εἷς τὸ ἐμπόρευμά του 3600 δραχμὰς θὰ ἐκέρδιζε 12,5 % ἐπὶ τῆς ἀξίας του. Τὸ ἐπώλησεν ὅμως 3040 δρχ. Τὸ ἐπώλησεν κάτω τῆς ἀξίας του ; Καὶ ἂν ναί, πόσον % ;

807) Ἔμπορος ἠγόρασεν ἐλαίας μὲ 15 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Τὰς πωλεῖ δὲ εἰς μικρεμπόρους μὲ κέρδος 12 %. Οὗτοι δὲ τὰς πωλοῦν εἰς τοὺς πελάτας μὲ κέρδος 25 %. Πόσας δρχ. πωλοῦν οἱ μικρέμποροι τὴν 1 ὀκᾶν ;

Ὁμὰς Δ΄

808) Εἷς ἠσφάλισε τὴν οἰκίαν του ἀξίας 225000 δραχμῶν πρὸς $2\frac{2}{3}$ ‰. Πόσα ἀσφάλιστρα πληρώνει κατ' ἔτος ;

809) Ἠσφάλισεν εἷς ἐμπορεύματα πρὸς 4 ‰ καὶ ἐπλήρωσε 340 δρχ. Πόση ἦτο ἡ ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων, τὰ ὁποῖα ἠσφάλισεν ;

810) Εἷς ἠσφάλισεν ἐμπορεύματα ἀξίας 67500 δρχ. καὶ ἐπλήρωσε 202,50 δρ. Πρὸς πόσον ‰ τὰ ἠσφάλισεν ;

811) Εἷς ἠσφάλισε τὴν ζωήν του εἰς ἀγγλικὴν ἑταιρείαν

διὰ 500 λίρας. Συνεφώνησε δὲ νὰ πληρώσῃ 2 λίρας καὶ 4 σελλίνια εἰς τὰς 100. Πόσα εἶναι τὰ ἀσφάλιστρα, τὰ ὁποῖα θὰ πληρώνῃ κατ' ἔτος;

812) Κατὰ τὸν Εὐρωπαϊκὸν πόλεμον τὰ ἀσφάλιστρα ἐπὶ τῶν ἐμπορευμάτων ηὐξήθησαν ἀπὸ 5 ‰ εἰς 5 %, ἐπλήρωσε δὲ τότε εἷς ἔμπορος ἐπὶ πλέον ἀσφάλιστρα διὰ τὰ ἐμπορεύματά του 18000 δρχ. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τῶν ἀσφαλισθέντων ἐμπορευμάτων;

Ὁμὰς Ε΄

813) Διὰ τῶν συλλογικῶν συμβάσεων, τὰς ὁποίας ἐπέβαλεν ἡ Κυβέρνησις, τὰ ἡμερομίσθια τῶν ἐργατῶν ηὐξήθησαν ἀπὸ 25 % ἕως 50 %. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κατωτάτη καὶ ἡ ἀνωτάτη αὔξησις τῶν ἡμερομισθίων τῶν 30, 40, 50, 70, 80, 90, 100 δρχ.

814) Διὰ τὴν ἀσφάλισιν τοῦ ἐργάτου καταβάλλει εἰς τὸ ταμεῖον τῶν Κοινωνικῶν Ἀσφαλίσεων καὶ ὁ ἐργάτης καὶ ὁ ἐργοδότης του ἀνὰ 4 % ἐπὶ τῶν ἡμερομισθίων. Νὰ εὑρεθῇ, τί καταβάλλει ὁ ἐργάτης καὶ ὁ ἐργοδότης εἰς ἕνα μῆνα, ἐὰν ὁ ἐργάτης λαμβάνῃ ἡμερομίσθιον 80 δρχ. καὶ ἐὰν τὸν μῆνα αὐτὸν εἰργάσθη ἐπὶ 26 ἡμέρας.

815) Οἱ ἐργοδόται, διὰ νὰ καλύψουν τὰς εἰσφοράς των ὑπὲρ τῆς ἀσφαλίσεως τοῦ ἐργάτου, ἐπεβάρυναν τὰ προϊόντα ποὺ πωλοῦν ἀπὸ 1 % ἕως $1\frac{1}{2}$ % ἐπὶ τῆς ἀξίας των. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἐπιβαρύνεται ἡ ἀξία ἑνὸς ὑποκαμίσου, τὸ ὁποῖον στοιχίζει 300 δρχ. ἢ μιᾶς ἐνδυμασίας, ἡ ὁποία στοιχίζει 2000 δρχ.

816) Εἷς ἐργάτης, ὁ ὁποῖος ἐργάζεται ἐπὶ 15 ἔτη καὶ ἐπὶ 25 ἡμέρας τὸν μῆνα λαμβάνει σύνταξιν (ἐὰν μὲν εἶναι πλέον ἀνίκανος πρὸς ἐργασίαν) μηνιαίαν τὰ 35 % τῶν ἡμερομισθίων ἑνὸς μηνός. Πόσην σύνταξιν θὰ λαμβάνῃ κατὰ μῆνα ὁ ἐργάτης οὗτος, ἐὰν τὸ ἡμερομίσθιον εἶναι 90 δραχμαὶ εἰς τὴν τελευταίαν 3ετίαν;

817) Ὁ ἐργάτης τοῦ ἄνω προβλήματος, ἐὰν ἐργασθῇ μὲ τοὺς ἰδίους ὅρους ἐπὶ 35 ἔτη θὰ λάβῃ σύνταξιν τὰ 76,5 % τῶν ἡμερομισθίων ἑνὸς μηνός. Πόσην σύνταξιν θὰ λαμβάνῃ κατὰ μῆνα;

818) Εἷς ὑπάλληλος λαμβάνει 5200 δρχ. μισθὸν κατὰ μῆνα καὶ ἓν ἐπίδομα 15 % ἐπὶ τοῦ μισθοῦ του. Πληρώνει δὲ διὰ τὴν ἀσφάλισίν του 6 % ἐπὶ τοῦ μισθοῦ του, 5 % ἐπὶ τοῦ ἐπιδόματός του, ὡς καὶ 220 δρχ. κατὰ μῆνα. Ἐπὶ τοῦ ὑπολοίπου δὲ πληρώνει καὶ 4 % διὰ φόρον καθαρᾶς προσόδου. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ μένουν κατὰ μῆνα;

Ὁ μ ὰ ς ΣΤ΄

819) Μεῖγμα βουτύρου καὶ λίπους ζυγίζει 95 ὀκ., τὰ 20 % δὲ αὐτοῦ εἶναι βούτυρον. Πόσας ὀκάδας βούτυρον ἔχει τὸ μεῖγμα;

820) Ἓν μετάλλευμα 1500 ὀκάδων ἔδωκε 5,5 % καθαρὸν χαλκόν. Πόσας ὀκάδας ἐζύγιζεν ὁ χαλκὸς οὗτος;

821) Μετάλλευμα 150 χλγρ. ἔδωκε καθαρὸν σίδηρον 11,25 χλγρ. Πόσον % τοῦ ὅλου μεταλλεύματος εἶναι ὁ καθαρὸς σίδηρος;

822) Ἔκαμεν εἷς κρᾶμα ἀπὸ χαλκὸν καὶ κασσίτερον. Ὁ χαλκὸς εἶχε βάρος 36 χλγρ. καὶ ὁ κασσίτερος 9 χλγρ. Πόσον % εἶναι ὁ χαλκὸς καὶ πόσον % ὁ κασσίτερος ἐπὶ τοῦ ὅλου κράματος;

823) Ἡ πυρῖτις γίνεται ἀπὸ 75 % νίτρον, 10 % θεῖον καὶ 15 % ἄνθρακα. Ἔχει δὲ εἷς ἄφθονον ποσότητα θείου καὶ ἄνθρακος καὶ 45 χλγρ. νίτρου. Πόσα χιλιόγραμμα πυρίτιδος δύναται νὰ κατασκευάσῃ, ἐὰν χρησιμοποιήσῃ ὅλην τὴν ποσότητα τοῦ νίτρου;

Ὁ μ ὰ ς Ζ΄

824) Εἷς ἐκαλλιέργησε γεώμηλα εἰς τρεῖς ἀγρούς. Εἰς τὸν ἕνα ἀγρὸν ἡ καλλιέργεια ἔγινε χωρὶς λίπασμα, εἰς τὸν ἄλλον ἔγινε μὲ ἐλλιπῆ λίπανσιν καὶ εἰς τὸν τρίτον μὲ πλήρη λίπανσιν. Ἐκ τοῦ πρώτου ἀγροῦ ἡ ἀπόδοσις ἦτο 800 ὀκάδες κατὰ στρέμμα. Ἐκ τοῦ δευτέρου ἦτο ηὐξημένη κατὰ 125 % καὶ ἐκ τοῦ τρίτου ἦτο ηὐξημένη κατὰ 262,5 %. Πόσας ὀκάδας γεώ-

μηλα ἔλαβε κατὰ στρέμμα ἐκ τοῦ δευτέρου ἀγροῦ καὶ πόσας ἐκ τοῦ τρίτου ;

825) Μεταξὺ τῶν σπουδαιοτέρων οὐσιῶν, ποὺ χρειάζονται εἰς τὰ φυτὰ διὰ νὰ αὐξηθοῦν καὶ νὰ καρποφορήσουν εἶναι τὸ ἄζωτον, τὸ φωσφορικὸν ὀξύ, τὸ κάλιον κ.ἄ., περιέχονται δὲ ἐν τοῖς χιλίοις :

					ἄζωτον	φωσφ. ὀξὺ	κάλιον
Εἰς	τὴν	κόπρον	τοῦ	προβάτου	7,50	6	3
»	»	»	»	χοίρου	6	4,5	5
»	»	»	»	ἵππου	5	3,5	3
»	»	»	τῆς	ἀγελάδος	3	2,5	1
»	»	»	τῶν	ὀρνίθων	11	8,5	5,60
Εἰς	τὰ	ἄχυρα	τοῦ	σίτου	4,80	2,50	9
»	»	»	τῆς	κριθῆς	5,70	2,60	12
»	»	»	»	βρώμης	7,20	1,90	12

Ἐὰν λοιπὸν εἷς ἐλίπανε τὸν ἀγρόν του μὲ 3500 ὀκάδας κόπρου ἀγελάδος ἢ μὲ 2750 ὀκάδας κόπρου προβάτου, πόσας ὀκάδας ἀπὸ κάθε μίαν τῶν ἄνω οὐσιῶν ἔρριψεν εἰς τὸν ἀγρόν του ;

Κάμετε μόνοι σας ὅμοια προβλήματα δι' ἕκαστον εἶδος ἐκ τῶν ἄνω φυσικῶν λιπασμάτων.

826) Διὰ τὴν πλήρη λίπανσιν ἑνὸς κτήματος ἐξ ὀπωροφόρων δένδρων, ὑπελόγισεν εἷς, ὅτι χρειάζονται ἀνὰ 10 στρέμ. 5 χλγρμ. ἀζώτου, 3,5 χλγρμ. φωσφορικοῦ ὀξέος καὶ 2,75 χλγρμ. καλίου. Ποῖον ἐκ τῶν φυσικῶν λιπασμάτων εἶναι τὸ κατάλληλον διὰ τὸ κτῆμα αὐτό ; Καὶ πόσα χλγρμ. τοῦ φυσικοῦ αὐτοῦ λιπάσματος, πρέπει νὰ ἀγοράσῃ, ἐὰν τὸ κτῆμά του εἶναι 27 στρέμματα ;

827) Ἡ δαπάνη διὰ τὴν λίπανσιν τοῦ ἄνω κτήματος ἀνῆλθεν εἰς 4500 δραχ. Ἡ ἀπόδοσις αὐτοῦ ἦτο μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἀπόδοσιν τοῦ προηγουμένου ἔτους κατὰ 75 %. Ἐὰν τὸ προηγούμενον ἔτος ἡ παραγωγὴ ὀπωρῶν ἦτο 5600 ὀκάδες, πόση ἦτο ἡ παραγωγὴ ὀπωρῶν τὸ ἔτος τοῦτο ; Ἐὰν δὲ τὰς ἐπὶ πλέον ὀκάδας ἐπώλησε πρὸς 4,50 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, πόσον ἦτο τὸ καθαρὸν κέρδος ἕνεκα τῆς λιπάνσεως ;

828) Ἡ παραγωγὴ εἰς τὴν Ἑλλάδα, ἕνεκα α) τῶν μεγαλυτέρων ἐκτάσεων, ποὺ ἐκαλλιεργήθησαν, β) τῶν διαφόρων ὑπὲρ τῆς γεωργίας μέτρων καὶ γ) τῆς λιπάνσεως, ἦτο τὸ ἔτος 1937 μεγαλυτέρα τῆς παραγωγῆς κατὰ τὸ 1936 1) τοῦ ἐλαίου κατὰ 138 %, 2) τοῦ γλεύκους κατὰ 67 %, 3) τοῦ σίτου κατὰ 65 %, 4) τῆς κριθῆς καὶ βρώμης κατὰ 47 % καὶ 5) τοῦ βάμβακος κατὰ 20 %. Τοῦ καπνοῦ μόνον ἦτο ἠλαττωμένη κατὰ 20 %, διότι περιωρίσθη ἡ καλλιέργεια αὐτοῦ διὰ νόμου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παραγωγὴ τοῦ ἔτους 1937 δι' ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω εἰδῶν, ὅταν ἡ παραγωγὴ τοῦ ἔτους 1936 ἦτο εἰς τόννους, 1) τοῦ ἐλαίου 72500, 2) τοῦ γλεύκους 192000, 3) τοῦ σίτου 532000, 4) τῆς κριθῆς καὶ βρώμης 248000, 5) τοῦ βάμβακος 42100 καὶ 6) τοῦ καπνοῦ 81000.

Ὁ μ ὰ ς Η΄

829) Ἓν σχολεῖον εἶχε 375 μαθητάς. Ἀπὸ τοὺς μαθητὰς αὐτοὺς οἱ 8 % ἀπερρίφθησαν. Πόσοι εἶναι οἱ μαθηταὶ αὐτοί;

830) Εἰς τὰ σχολεῖα μέσης ἐκπαιδεύσεως Ἀττικῆς καὶ Βοιωτίας κατὰ τὸ ἔτος 1935—1936 ἦσαν ἐγγεγραμμένοι μαθηταὶ καὶ μαθήτριαι ἐν ὅλῳ 5000. Ἐξ αὐτῶν 54 % ἦσαν μαθηταί. Πόσοι ἦσαν οἱ ἐγγεγραμμένοι μαθηταὶ καὶ πόσαι αἱ μαθήτριαι;

831) Ἐκ τῶν ἄνω μαθητῶν προήχθησαν οἱ 70 % καὶ ἐκ τῶν μαθητριῶν αἱ 74 %. Πόσοι μαθηταὶ καὶ μαθήτριαι προήχθησαν;

832) Εἰς τὰ σχολεῖα μέσ. ἐκπ. ὅλου τοῦ Κράτους ἦσαν ἐγγεγραμμένοι κατὰ τὸ ἔτος 1935—36 ἄρρενες μαθηταὶ 53655 καὶ ἦσαν οὗτοι τὰ 73% τοῦ ὅλου ἐγγεγραμμένου ἀριθμοῦ τῶν μαθητῶν ἀρρένων καὶ θηλέων. Πόσαι ἦσαν αἱ ἐγγεγραμμέναι μαθήτριαι;

833) Εἰς τὰς σχολὰς ὑπηρεσίας κοινωνικῆς προνοίας (νοσοκόμων κτλ.) ἦσαν ἐγγεγραμμένοι κατὰ τὸ ἔτος 1935—36 ἄρρενες 150 καὶ θήλεις 416. Ἐκ τῶν ἀρρένων προήχθησαν καὶ οἱ 150, ἐκ δὲ τῶν θηλέων αἱ 366. Πόσοι % ἐπὶ τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν ἐγγεγραμμένων ἦσαν οἱ ἄρρενες καὶ πόσαι τοῖς % αἱ θήλεις; Πόσοι % ἐκ τῶν ἀρρένων προήχθησαν καὶ πόσαι % ἐκ τῶν θηλέων,

'Ομὰς Θ'

834) Εἰς μίαν ἀπογραφὴν εὑρέθη, ὅτι μία πόλις εἶχε 26000 κατοίκους. Εἰς τὴν δευτέραν ἀπογραφὴν εὑρέθη, ὅτι οἱ κάτοικοι τῆς πόλεως αὐτῆς εἶχον αὐξηθῆ κατὰ 12%. Πόσος ἦτο ὁ πληθυσμὸς τῆς πόλεως αὐτῆς κατὰ τὴν δευτέραν ἀπογραφήν ;

835) Ἡ Ἑλλὰς κατὰ τὸ ἔτος 1821 εἶχε πληθυσμὸν 939000. Κατὰ τὸ 1912 εἶχε πληθυσμὸν 2000000. Τώρα δὲ (τὸ 1939) ὑπολογίζεται, ὅτι ἔχει 7000000. Πόσον % ηὐξήθη ὁ πληθυσμὸς τῆς Ἑλλάδος α) ἀπὸ τοῦ 1821 — 1912, β) ἀπὸ τοῦ 1912 — 1939 καὶ γ) ἀπὸ τοῦ 1821 — 1939 ;

836) Ὑπελογίσθη ὅτι ὁ πληθυσμὸς τῆς Ἑλλάδος αὐξάνεται φυσιολογικῶς (ἕνεκα τῶν περισσοτέρων γεννήσεων ἀπὸ τοὺς θανάτους), κατὰ 13‰ κατ' ἔτος. Πόσος θὰ εἶναι ὁ πληθυσμὸς τῆς Ἑλλάδος κατὰ τὸ ἔτος 1940 καὶ πόσος ἦτο κατὰ τὸ 1938 ; (Κατὰ τὸ 1939 ὁ πληθυσμὸς ἦτο 7000000).

837) Ὑπελογίσθη, ὅτι κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη αἱ γεννήσεις ἐν Ἑλλάδι ἀνέρχονται κατ' ἔτος εἰς 29‰, οἱ δὲ θάνατοι εἰς 16‰. Ἐπὶ πληθυσμοῦ 7000000 κατοίκων πόσαι εἶναι ἐτησίως αἱ γεννήσεις, πόσοι οἱ θάνατοι καὶ ποία εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ αὐτῶν ;

838) Εἰς μίαν πόλιν αἱ γεννήσεις ἔφθασαν εἰς ἓν ἔτος εἰς 26‰ καὶ οἱ θάνατοι εἰς 14,5‰ ἐπὶ τοῦ πληθυσμοῦ. Ὁ δὲ πληθυσμὸς τῆς πόλεως εὑρέθη εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους ηὐξημένος κατὰ 575 κατοίκους. Πόσος ἦτο ὁ ὅλος πληθυσμὸς αὐτῆς ;

III. ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

226. Πρόβλημα. **5 ἐργάται, ὅταν ἐργασθοῦν 4 ἡμέρας, κερδίζουν 900 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς θὰ κερδίσουν 7 ἐργάται, οἱ ὁποῖοι ἐργάζονται 9 ἡμέρας ;**

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν τρία ποσά, τοὺς ἐργάτας, τὰς ἡμέρας καὶ τὰς δραχμάς, τὰς ὁποίας κερδίζουν. Εἶναι δὲ τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου ἀνάλογον καὶ πρὸς τοὺς ἐργάτας καὶ πρὸς τὰς ἡμέρας. Ἠμποροῦμεν ἑπομένως νὰ τὸ λύσωμεν διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Πρὸς τοῦτο δὲ λέγομεν :

ἀφοῦ οἱ 5 ἐργάται	εἰς 4 ἡμ.	κερδίζουν	900 δραχμ.
ὁ 1 ἐργάτης	εἰς 4 »	κερδίζει	$\frac{900}{5}$ »
» 1 »	» 1 »	»	$\frac{900}{5\times4}$ »
οἱ 7 ἐργάται	» 1 »	κερδίζουν	$\frac{900\times7}{5\times4}$ »

καὶ οἱ 7 ἐργάται εἰς 9 ἡμ. κερδίζουν $\frac{900 \times 7 \times 9}{5 \times 4}$ δρχ. = 900 δρχ. $\times \frac{7}{5} \times \frac{9}{4}$ = 2835 δραχμ.

Ἐπίσης τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἀναλύεται εἰς δύο προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὡς ἑξῆς φαίνεται :

α) 5 ἐργ. εἰς 4 ἡμ. κερδίζουν 900 δραχμ.
7 » » 4 » » X »

$$X = 900 \text{ δραχ.} \times \frac{7}{5}$$

β) 7 ἐργ. εἰς 4 ἡμ. κερδίζουν 900 δραχμ. $\times \frac{7}{5}$
7 » » 9 » » X »

$$X = 900 \text{ δραχμ.} \times \frac{7}{5} \times \frac{9}{4}.$$

227. Πρόβλημα. **4 ἐργάται, οἱ ὁποῖοι ἐργάζονται 6 ὥρας τὴν ἡμέραν κερδίζουν εἰς 7 ἡμέρας 1680 δραχμάς. 9 ἐργάται, οἱ ὁποῖοι ἐργάζονται 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ κερδίσουν 3600 δραχμάς ;**

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν τέσσαρα ποσά. Τὸ ποσὸν δὲ τοῦ ἀγνώστου εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὰς δραχμάς, τὰς ὁποίας κερδίζουν οἱ ἐργάται καὶ ἀντίστροφον πρὸς τὰ ἄλλα δύο.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Ἐπίσης ἀναλύεται εἰς τρία προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν ὡς ἑξῆς φαίνεται :

α) Οἱ 4 ἐργ. ἐργαζ. 6 ὥρ. τὴν ἡμ. κερδίζουν 1680 δρ. εἰς 7 ἡμ.
» 9 » » 6 » » » » 1680 » » X »

$$X = 7 \text{ ἡμέρ.} \times \frac{4}{9}$$

β) Οἱ 9 ἐργ. ἐργαζ. 6 ὥρ. τὴν ἡμ. κερδίζουν 1680 δρ. εἰς 7 ἡμ. $\times \frac{4}{9}$

» 9 » » 8 » » » » 1680 » » X »

$$X = 7 \text{ ἡμ.} \times \frac{4}{9} \times \frac{6}{8}$$

γ) Οἱ 9 ἐργ. ἐργαζ. 8 ὥρ. τὴν ἡμ. κερδ. 1680 δρ. εἰς 7 ἡμ. $\times \frac{4}{9} \times \frac{6}{8}$

» 9 » » 8 » » » » 3600 » » X »

$$X = 7 \text{ ἡμ.} \times \frac{4}{9} \times \frac{6}{8} \times \frac{3600}{1680} = 5 \text{ ἡμέρας.}$$

228. Τώρα παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς καθὲν ἀπὸ τὰ ἄνω προβλήματα δίδονται ποσὰ περισσότερα ἀπὸ δύο, ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα πρὸς ἓν ἀπ' αὐτά, ὡς καὶ ἡ τιμὴ αὐτοῦ, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὰς διδομένας τιμὰς τῶν ἄλλων. Ζητεῖται δὲ νὰ εὑρεθῇ, τί γίνεται ἡ τιμὴ αὐτή, ὅταν αἱ τιμαὶ ὅλων τῶν ἄλλων ποσῶν μεταβληθοῦν.

Τὰ τοιαῦτα προβλήματα ἀναλύονται, ὡς εἴδομεν εἰς δύο ἢ περισσότερα προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Διὰ τοῦτο λέγονται προβλήματα τῆς **συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν** (τὰ δὲ τῆς § 223 λέγονται, πρὸς διάκρισιν, προβλήματα τῆς **ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν**).

229. Τώρα, ἐὰν κατατάξωμεν τὰ δεδομένα τῶν δύο προηγουμένων προβλημάτων καὶ τὸ ζητούμενον εἰς δύο σειράς, ὡς εἰς τὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου :

α) ἐργ. $\frac{5}{7}$ ἡμ. $\frac{4}{9}$ δρχμ. $\frac{900}{X}$

$$X = 900 \text{ δρχμ.} \times \frac{7}{5} \times \frac{9}{4}$$

β) ἐργ. $\frac{4}{9}$ ὥρ. $\frac{6}{8}$ δρχμ. $\frac{1680}{3600}$ ἡμέρ. $\frac{7}{X}$

$$X = 7 \text{ ἡμ.} \times \frac{4}{9} \times \frac{6}{8} \times \frac{3600}{1680}$$

κατόπιν δὲ συγκρίνωμεν εἰς αὐτὰ τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου πρὸς τὰ δεδομένα τοῦ καθενὸς (ὡς τὰ κατετάξαμεν) συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον X πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ὁμοειδῆ ἀριθμὸν μὲ ἕκαστον τῶν κλασμάτων, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν αἱ δύο τιμαὶ ἑκάστου ποσοῦ. Προσέχομεν ὅμως νὰ ἀντιστρέφωμεν αὐτό, ἐὰν τὸ ποσόν του εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου.

Προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

839) 15 ἐργάται κερδίζουν 12000 δρχ. ἐργαζόμενοι 20 ἡμ. Πόσας θὰ κερδίσουν 12 τοιοῦτοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 35 ἡμέρας ;

840) 7 ἐργάται, ἐὰν ἐργάζωνται 10 ὥρας καθ' ἡμέραν θὰ τελειώσουν ἓν ἔργον εἰς 28 ἡμέρας. 49 ἐργάται, ἐὰν ἐργάζωνται 8 ὥρας καθ' ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τελειώσουν τὸ αὐτὸ ἔργον ;

841) Μία ὕφανε τάπητα 6 μέτρων μήκους καὶ πλάτους 3 μέτρων καὶ ἔλαβε 1800 δραχμάς. Πόσον θὰ λάβῃ δι' ἕνα ἄλλον τάπητα, τὸν ὁποῖον ὕφανε, μήκους 8 μέτρων καὶ πλάτους 4 μέτρων ;

842) Μία ὑφάντρια ἐργάζεται 6 ὥρας τὴν ἡμέραν καὶ ὑφαίνει εἰς 5 ἡμέρας 15 πήχεις ὕφασμα. Θέλει ὅμως 18 πήχεις ἀπὸ αὐτὸ τὸ ὕφασμα νὰ τὸ ὑφάνῃ εἰς 4 ἡμέρας. Πόσας ὥρας τὴν ἡμέραν πρέπει νὰ ἐργάζεται ;

843) Μὲ 8 ὀκάδας νῆμα κατεσκεύασε μία ὕφασμα μήκους 16 πήχ. καὶ πλάτους 6 ρουπ. Μὲ 12 ὀκάδας ἀπὸ τὸ ἴδιον νῆμα θέλει νὰ κατασκευάσῃ ὕφασμα πλάτους 1 πήχεως. Πόσον μῆκος θὰ ἔχῃ τὸ ὕφασμα αὐτό ;

844) Διὰ 15 παιδικὰς ἐνδυμασίας ἐχρειάσθη ὕφασμα 45 πήχεων πλάτους $1\frac{1}{4}$ πήχ. Πόσον ὕφασμα θὰ χρειασθῇ πλάτους $1\frac{1}{2}$ πήχ. διὰ 24 ὁμοίας ἐνδυμασίας ;

845) 42 ἐργάτριαι ἐργαζόμεναι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐξετέλεσαν τὰ $\frac{2}{5}$ μιᾶς παραγγελίας εἰς 15 ἡμέρας. Πόσας ὥρας τὴν ἡμέραν πρέπει νὰ ἐργάζωνται αἱ ἄνω ἐργάτριαι, διὰ νὰ τελειώσουν τὸ ὑπόλοιπον τῆς παραγγελίας εἰς 18 ἡμέρας ;

846) 12 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐχρειάσθησαν 25 ἡμέρας διὰ νὰ σκάψουν τάφρον μήκους 200 πήχεων, πλάτους 4 καὶ βάθους 2. Εἰς πόσας ἡμέρας 50 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, θὰ σκάψουν τάφρον μήκους 80 πήχεων, πλάτους 8 καὶ βάθους 1 πήχ. ;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΛΟΥ ΤΟΚΟΥ

230. Πολλάκις οἱ ἄνθρωποι εὑρίσκονται εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ δανείζωνται χρήματα, τὰ ὁποῖα ἐπιστρέφουν εἰς τὸν δανειστὴν μετὰ χρόνον, τὸν ὁποῖον ἔχουν συμφωνήσει προηγουμένως. Ἐκτὸς ὅμως ἀπὸ τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα ἐδανείσθησαν, πληρώνουν εἰς τὸν δανειστὴν καὶ ἓν ἄλλο ποσὸν χρημάτων (τὸ κέρδος), τὸ ὁποῖον λέγεται **τόκος,** ἐνῶ τὸ δανειζόμενον ποσὸν λέγεται **κεφάλαιον.**

Ὁ τόκος, τὸν ὁποῖον θὰ λάβῃ ὁ δανείζων χρήματα, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς ἰδιαιτέρας συμφωνίας μεταξὺ τοῦ δανειστοῦ καὶ τοῦ ὀφειλέτου. Συνήθως ὁρίζεται ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ συμφωνουμένου τόκου τῶν 100 δρχ. εἰς 1 ἔτος. Ὁ τόκος οὗτος λέγεται **ἐπιτόκιον.** Οὕτως, ὅταν δανείζῃ τις μὲ ἐπιτόκιον 5 %, τοῦτο σημαίνει, ὅτι εἰς κάθε ἑκατοντάδα δραχμῶν καὶ δι' ἓν ἔτος θὰ λαμβάνῃ τόκον 5 δραχμὰς (ἂν τὸ δάνειον ὅμως εἶναι εἰς λίρας, θὰ λαμβάνῃ ἐπὶ 100 λιρῶν τόκον 5 λιρῶν δι' ἓν ἔτος). Ἐπίσης μία ἄλλη συνήθης συμφωνία, ἡ ὁποία γίνεται, εἶναι νὰ μένῃ τὸ κεφάλαιον τὸ αὐτὸ κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου. Ὁ τόκος τότε λέγεται **ἁπλοῦς.**

231. Εἰς τὸν ἁπλοῦν τόκον εὐκόλως συνάγεται, ὅτι οὗτος εἶναι ἀνάλογος καὶ πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ πρὸς τὸν χρόνον καὶ πρὸς τὸ ἐπιτόκιον. Τὸ κεφάλαιον ὅμως καὶ ὁ χρόνος εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα. Διότι ἂν π. χ. ἓν κεφάλαιον 1000 δραχμῶν φέρῃ εἰς 2 ἔτη πρὸς 5 % τόκον 100 δραχμάς, διπλάσιον κεφάλαιον, δηλαδὴ κεφάλαιον 2000 δραχμῶν, θὰ φέρῃ τὸν ἴδιον τόκον, 100 δραχμάς, εἰς ἓν ἔτος. Ἐπίσης τὸ κεφάλαιον εἶναι ἀντίστροφον καὶ πρὸς τὸ ἐπιτόκιον. Διότι τὸ προηγούμενον κεφάλαιον τῶν 2000 δραχμῶν θὰ φέρῃ εἰς 2 ἔτη τὸν ἴδιον τόκον, 100 δραχμάς, ὅταν τοκισθῇ πρὸς $2\frac{1}{2}$ %, ἤτοι πρὸς τὸ ἥμισυ ἐπιτόκιον. Καὶ ὁ χρόνος καὶ τὸ ἐπιτόκιον εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα. Διότι ἂν π.χ. κεφάλαιόν τι φέρῃ εἰς 2 ἔτη πρὸς 8 % τόκον τινά, τὸ αὐτὸ κεφάλαιον θὰ φέρῃ τὸν αὐτὸν τόκον εἰς διπλάσιον χρόνον, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4 %.

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν ὅτι τὰ προβλήματα τοῦ τόκου θὰ λύωνται κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν (ἁπλῆν ἢ σύνθετον).

232. Εὕρεσις τοῦ τόκου.—1ον) **Πόσον τόκον φέρει κεφάλαιον 1500 δραχμῶν, ὅταν τοκισθῇ ἐπὶ 4 ἔτη πρὸς 7 %;**

κεφ.	ἔτη	τόκος
100	1	7
1500	4	X

$$X = 7 \text{ δρχ.} \times \frac{1500}{100} \times \frac{4}{1} = \frac{7 \times 1500 \times 4}{100} = 420 \text{ δραχμαί.}$$

2ον) **Πόσον τόκον φέρουν 1800 δραχ. εἰς 3 μῆνας πρὸς 8 %;**

κεφ	μῆνες	τόκος
100	12	8
1800	3	X

$$X = 8 \text{ δρχ.} \times \frac{1800}{100} \times \frac{3}{12} = \frac{8 \times 1800 \times 3}{1200} = 36 \text{ δραχμαί.}$$

3ον) **Πόσον τόκον φέρουν 24000 δραχ. εἰς 70 ἡμέρας πρὸς 6 %;**

κεφ.	ἡμέραι	τόκος
100	360	6
24000	70	X

$$X = 6 \text{ δρχ.} \times \frac{24000}{100} \times \frac{70}{360} = \frac{6 \times 24000 \times 70}{36000} = 280 \text{ δραχμαί.}$$

Τώρα παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ εἰς τὰ τρία προβλήματα εὑρίσκομεν τὸν τόκον, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὰ τρία δεδομένα (ἤτοι τὸ κεφάλαιον, τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν χρόνον). Ἀλλὰ τὸ γινόμενον αὐτῶν διαιροῦμεν εἰς μὲν τὸ 1ον πρόβλημα δι' 100, ἐπειδὴ ὁ χρόνος δίδεται εἰς ἔτη, εἰς τὸ 2ον διὰ 1200 ἐπειδὴ ὁ χρόνος δίδεται εἰς μῆνας, καὶ εἰς τὸ 3ον διὰ 36000 ἐπειδὴ ὁ χρόνος δίδεται εἰς ἡμέρας (τὸ ἐμπορικὸν ἔτος θεωρεῖται, ὅτι ἔχει 360 ἡμέρας).

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν τόκον διὰ τοῦ γράμματος τ, τὸ κεφάλαιον διὰ τοῦ κ, τὸν χρόνον εἰς ἔτη διὰ τοῦ χ καὶ τὸ ἐπιτόκιον διὰ τοῦ ε, θὰ ἔχωμεν σύμφωνα μὲ τὰ ἀνωτέρω $\tau = \frac{\varepsilon.\kappa.\chi.}{100}$.

Ἡ ἰσότης αὐτὴ λέγεται **τύπος** τοῦ τόκου. Λύομεν δὲ μὲ αὐτὸν εὐκόλως κάθε πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον ζητεῖται ὁ τόκος, ὅταν ἀντὶ τῶν γραμμάτων ε, κ, χ, θέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ προβλήματος καὶ ὅταν διαιροῦμεν διὰ 1200 ἢ 36000, ἐὰν ὁ χρόνος εἶναι μῆνες ἢ ἡμέραι. Οὕτως, ἂν ζητῆται ὁ τόκος τῶν 2700 δρχ. εἰς 5 ἔτη πρὸς 12 °/₀ εὑρίσκομεν : $\tau = \frac{12 \times 2700 \times 5}{100} = 1620$ δρχ.

233. Τοκάριθμοι καὶ σταθεροὶ διαιρέται.— Ἔστω, ὅτι ζητεῖται ὁ τόκος τῶν 1200 δραχμῶν εἰς 40 ἡμέρας πρὸς 6 °/₀.

Θὰ εἶναι τότε :

$\tau = \frac{6 \times 1200 \times 40}{36000}$. Ἂν δὲ διαιρέσωμεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν διὰ τοῦ 6, θὰ ἔχωμεν : $\tau = \frac{1200 \times 40}{6000} = 8$ δραχμαί.

Βλέπομεν δὲ τώρα, ὅτι ὁ τόκος εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὰς ἡμέρας καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν μὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 36000 διὰ τοῦ ἐπιτοκίου 6.

Τὸ γινόμενον τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὰς ἡμέρας ὀνομάζομεν **τοκάριθμον**, τὸ δὲ πηλίκον τοῦ 36000 διὰ τοῦ ἐπιτοκίου **σταθερὸν διαιρέτην**.

Ὥστε: **Ὅταν ζητοῦμεν τὸν τόκον ἑνὸς κεφαλαίου διὰ μερικὰς ἡμέρας, διαιροῦμεν τὸν τοκάριθμον διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου.**

234. Εὕρεσις τοῦ κεφαλαίου.—Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον ἐτοκίσθη ἐπὶ 3 ἔτη πρὸς 9 °/₀ καὶ ἔφερε τόκον 1350 δραχμας ;

κεφ.	ἔτη	τόκος
100	1	9
X	3	1350

$$X = 100 \times \frac{1}{3} \times \frac{1350}{9} = \frac{100 \times 1350}{3 \times 9} = 5000 \text{ δραχμαί.}$$

235. Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον ἐτοκίσθη ἐπὶ χ ἔτη πρὸς ε °/₀ καὶ ἔφερε τόκον τ ;

κεφ.	ἔτη	τόκος
100	1	ε
κ ;	χ	τ

$$\kappa = 100 \times \frac{1}{\chi} \times \frac{\tau}{\varepsilon} = \frac{100 . \tau}{\chi . \varepsilon}$$

Ὥστε ὁ τύπος τοῦ κεφαλαίου, ὅταν ὁ χρόνος ὑπολογίζεται εἰς ἔτη, εἶναι: $\kappa = \frac{100.\tau}{\chi.\varepsilon}$. Ποῖος τότε εἶναι ὁ τύπος, ὅταν ὁ χρόνος ὑπολογίζεται εἰς ἡμέρας ἢ μῆνας;

236. Εὕρεσις τοῦ χρόνου.—Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 8100 δραχμῶν, τοκιζόμενον πρὸς 6 % θὰ φέρῃ τόκον 2025 δραχμάς;

κεφ.	ἔτη	τόκος
100	1	6
8100	X	2025

$$X = 1 \text{ ἔτος} \times \frac{100}{8100} \times \frac{2025}{6} = \frac{100 \times 2025}{8100 \times 6} \text{ ἔτη} = 4 \text{ ἔτη } 2 \text{ μ.}$$

Ὁ τύπος τοῦ χρόνου εἰς ἔτη εὐκόλως εὑρίσκεται, ὅτι εἶναι $X = \frac{100\,\tau.}{\kappa.\varepsilon}$

237. Εὕρεσις τοῦ ἐπιτοκίου.—Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 900 δραχμῶν καὶ ἔφερεν εἰς 5 ἔτη καὶ 4 μῆνας τόκον 288 δραχμάς;

κεφ.	ἔτη	τόκος
900	$5\frac{1}{3}$	288
100	1	X

$$X = 288 \times \frac{100}{900} \times \frac{1}{5\frac{1}{3}} = \frac{288 \times 100}{900 \times 5\frac{1}{3}} = \frac{288 \times 100}{900 \times \frac{16}{3}} = \frac{288 \times 100 \times 3}{900 \times 16}$$

ἢ $X = 6$ %

ἢ

κεφ.	μῆνες	τόκος
900	64	288
100	12	X

$$X = 288 \times \frac{100}{900} \times \frac{12}{64} = \frac{288 \times 1200}{900 \times 64} = 6.$$

Ὁ τύπος τοῦ ἐπιτοκίου εὑρίσκεται ὅτι εἶναι $\varepsilon = \frac{100\,\tau.}{\kappa.\chi}$ (ὁ χ ὑπολογίζεται εἰς ἔτη).

Ἐὰν προσέξωμεν τοὺς τύπους τοῦ κεφαλαίου, χρόνου καὶ ἐπιτοκίου, βλέπομεν, ὅτι οὗτοι ἠμποροῦν νὰ περιληφθοῦν εἰς ἕνα γενικὸν κανόνα. Ποῖος εἶναι οὗτος;

238. Μερική περίπτωσις.—Εἷς ἐδάνεισε χρήματα πρὸς 9 %, καὶ μετὰ 3 ἔτη ἔλαβε τόκον καὶ κεφάλαιον ὁμοῦ 73406 δραχμάς. Πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιον;

Ἂν λάβωμεν ἓν οἱονδήποτε κεφάλαιον, π.χ. 100 δρχ., καὶ ὑπολογίσωμεν πόσον θὰ γίνῃ μετὰ τῶν τόκων ἐπὶ 3 ἔτη, πρὸς 9 %, εὑρίσκομεν εὐκόλως τὸ ζητούμενον (διότι θὰ γίνῃ $100 + 27 = 127$).

$$\frac{127}{73406} \qquad \frac{100}{X}$$

Ἤτοι ἂν ἐλάμβανε 127 δραχ., τὸ κεφάλαιον θὰ ἦτο 100 δραχμαί. Τώρα, ποὺ ἔλαβε 73406 δραχ., τὸ κεφάλαιον θὰ εἶναι:

$$X = 100 \times \frac{73406}{127} = 57800 \text{ δραχ.}$$

Ἐὰν ἐζητεῖτο ὁ τόκος, θὰ εἴχομεν:

$$\begin{array}{llll} \text{διὰ} & 127 & \text{δραχ.} & \text{τόκος } 27 \\ \hline » & 73406 & » & » \quad X \end{array}$$

$$X = 27 \times \frac{73406}{127} = 15606 \text{ δραχ.}$$

239. Πρόβλημα ἀνατοκισμοῦ.—Εἷς κατέθεσεν εἰς μίαν Τράπεζαν 80000 δραχ. πρὸς 5 %, δι᾿ ἓν ἔτος. Ἀλλ᾿ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ τὸν τόκον, τὸν ὁποῖον ἔπρεπε νὰ λάβῃ, προσέθεσεν εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ προκῦψαν ποσὸν ἀφῆκεν εἰς τὴν Τράπεζαν δι᾿ ἓν ἀκόμη ἔτος μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον· εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους ἔκαμε τὸ ἴδιον. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἐν ὅλῳ εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους;

Λύσις:	Ἀρχικὸν κεφάλαιον	80000	δραχ.
	τόκος πρὸς 5 % διὰ τὸ 1ον ἔτος	4000	»
	κεφάλαιον κατὰ τὸ 2ον ἔτος	84000	»
	τόκος πρὸς 5 % διὰ τὸ 2ον ἔτος	4200	»
	κεφάλαιον κατὰ τὸ 3ον ἔτος	88200	»
	τόκος πρὸς 5 % διὰ τὸ 3ον ἔτος	4410	»
	Ἔλαβεν εἰς τὸ τέλος τοῦ 3ου ἔτους ἐν ὅλῳ . .	92610	»

Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ τόκος ἑκάστου ἔτους προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ ἀποτελεῖται νέον κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον τοκίζεται κατὰ τὸ ἑπόμενον ἔτος. Ἡ πρόσθεσις τοῦ τόκου εἰς τὸ κεφάλαιον, ἤτοι ἡ κεφαλαιοποίησις τοῦ τόκου, λέγεται **ἀνατοκισμός,** ὁ δὲ τόκος, ποὺ λαμβάνεται ἀπὸ τὸν ἀνατοκισμόν, λέγεται **σύνθετος**. Κατὰ ταῦτα τὸ προηγούμενον πρόβλημα εἶναι ἀνατοκισμοῦ, ὁ δὲ τόκος 92610—80000=12610 εἶναι σύνθετος.

Παρατήρησις. Ὁ ἀνατοκισμὸς δύναται νὰ γίνεται καὶ καθ᾽ ἑξάμηνον, τρίμηνον κτλ.

240. Δάνεια καὶ ὁμολογίαι.—Ὅταν τὰ ἔσοδα τοῦ Κράτους, τὰ ὁποῖα προέρχονται κυρίως ἀπὸ τοὺς φόρους, δὲν ἐπαρκοῦν διὰ τὰς ἀνάγκας του, τότε τὸ Κράτος δανείζεται. Τοιαύτη δὲ ἀνάγκη παρουσιάζεται εἰς ὅλα τὰ Κράτη. Ἑπομένως καὶ ἡ Ἑλλὰς ἔχει συνάψει δάνεια, τὰ ὁποῖα λέγονται **δημόσια.** Πᾶν δέ, τὸ ὁποῖον ὀφείλει τὸ Κράτος εἰς τοὺς δανειστάς του, λέγεται **δημόσιον χρέος.** Τὸ Κράτος, ὅταν δανείζεται, ὁρίζει αὐτὸ τὸ ποσὸν τοῦ δανείου ὡς καὶ τὸν τόκον, τὸν ὁποῖον θὰ πληρώσῃ· ὁρίζει π.χ., ὅτι τὸ ποσὸν τοῦ δανείου θὰ εἶναι 500000000 δραχμαὶ καὶ ὁ τόκος αὐτοῦ 8%. Ἀλλὰ διὰ νὰ εἰσπράξῃ τὸ ποσὸν αὐτό, ἐκδίδει **τίτλους χρεωγράφων,** ὡρισμένης ἀξίας δι᾽ ἕκαστον τίτλον, τοὺς ὁποίους πωλεῖ. Εἶναι δὲ οἱ τίτλοι οὗτοι ἔγγραφα, διὰ τῶν ὁποίων ὁμολογεῖται τὸ χρέος. Δι᾽ ὃ καὶ καλοῦνται **ὁμολογίαι.** Π. χ. ἐκδίδει ὁμολογίας τῶν 100 δραχμῶν. Ὥστε αἱ ὁμολογίαι διὰ τὸ ἀνωτέρω δάνειον θὰ εἶναι 5000000. Διὰ νὰ προσελκύσῃ δὲ ἀγοραστάς, πωλεῖ τὰς ὁμολογίας, εἰς τιμὴν μικροτέραν τῆς ἀξίας ποὺ ἀναγράφουν. Π. χ. τὰς πωλεῖ πρὸς 95 ἢ 90 δρχ. τὴν μίαν. Ὁ χρόνος τῆς ἐξοφλήσεως τῶν τοιούτων δανείων εἶναι κατὰ κανόνα μακρός, π. χ. 30, 40, 50 ἔτη· Ἐνίοτε δὲ γίνονται καὶ δάνεια δημόσια, τὰ ὁποῖα δὲν ἐξοφλοῦνται. Πληρώνει δὲ δι᾽ αὐτὰ τὸ Κράτος μόνον καὶ διαρκῶς τὸν τόκον. Ἐπειδὴ δὲ ὁ τόκος αὐτῶν ἀποτελεῖ καλὴν τοποθέτησιν τῶν χρημάτων ἑνὸς κεφαλαιούχου, αἱ ὁμολογίαι τῶν τοιούτων δανείων εὑρίσκουν ἀγοραστάς.

241. Χρηματιστήριον.—Ὅταν λοιπὸν ἔχῃ τις διαθέσιμα κεφάλαια καὶ τὰ διαθέτῃ εἰς ἀγορὰν ὁμολογιῶν, εἰσπράττει ἀπὸ αὐτὰς τὸν τόκον συνήθως κατὰ ἑξάμηνον. Ἂν δὲ ἐν τῷ μεταξὺ λάβῃ ἀνάγκην τοῦ κεφαλαίου, ποὺ διέθεσεν εἰς ἀγορὰν ὁμολογιῶν, δύναται νὰ πωλήση αὐτὰς εἰς οἱανδήποτε τιμὴν εἰς τὸ **Χρηματιστήριον**. Εἶναι δὲ τοῦτο ἵδρυμα, τὸ ὁποῖον ἐλέγχει τὸ Κράτος, καὶ εἰς τὸ ὁποῖον πωλοῦνται καὶ ἀγοράζονται διὰ τῶν μεσιτῶν ὁμολογίαι κρατικῶν δανείων, συνάλλαγμα καὶ τὰ λοιπὰ χρεώγραφα. Δι᾽ ὃ λέγεται καὶ **Χρηματιστήριον ἀξιῶν**, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τὸ **Χρηματιστήριον τῶν ἐμπορευμάτων**, εἰς τὸ ὁποῖον πωλοῦνται καὶ ἀγοράζονται ἐμπορεύματα.

Ἡ τιμή, εἰς τὴν ὁποίαν δύναται νὰ ἀγοράση ἢ νὰ πωλήση τις ὁμολογίας, μεταβάλλεται ἀναλόγως τῆς προσφορᾶς καὶ τῆς ζητήσεως. Δύναται δὲ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀξίας, ἡ ὁποία ἀναγράφεται εἰς μίαν ὁμολογίαν, μικροτέρα ἢ ἴση. Π. χ. μία ὁμολογία τῶν 100 δραχμῶν δύναται νὰ πωληθῆ ἢ ἀγορασθῆ πρὸς 105 δρχ. ἢ καὶ πρὸς 95 ἢ 90 δρχ. Ὅταν ἡ τιμὴ τῆς ὁμολογίας εἶναι ἴση πρὸς ἐκείνην, ἡ ὁποία ἀναγράφεται εἰς αὐτήν, τότε λέγομεν ὅτι εἶναι εἰς τὸ **ἄρτιον**. Τὸ Χρηματιστήριον ἐκδίδει καθ᾽ ἡμέραν **χρηματιστηριακὸν δελτίον**, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναγράφονται αἱ τιμαὶ τῶν ὁμολογιῶν κτλ. κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς ἐκδόσεώς του. Δημοσιεύεται δὲ τοῦτο εἰς ὅλας τὰς ἐφημερίδας.

242. Μετοχαί, μέρισμα.—Ὅταν γίνεται μία ἑταιρεία καὶ ἔχη ἀνάγκην διὰ τὰς ἐπιχειρήσεις μεγάλου σχετικῶς κεφαλαίου, διαιρεῖ τὸ κεφάλαιον τοῦτο εἰς ὡρισμένον ἀριθμὸν ἴσων μερῶν. Δι᾽ ἕκαστον δὲ τῶν μερῶν τούτων ἐκδίδεται ἔγγραφον ὅμοιον πρὸς τὰς ὁμολογίας. Λέγεται δὲ τοῦτο **μετοχή**. Εἷς λοιπόν, ὅστις ἀγοράζει μετοχὰς μιᾶς ἑταιρείας, εἶναι μέλος αὐτῆς ἢ **μέτοχος**. Τὰ καθαρὰ κέρδη ἑνὸς ἔτους (ἢ καὶ μιᾶς ἑξαμηνίας) μιᾶς ἑταιρείας μοιράζονται εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσα εἶναι αἱ μετοχαί, ποὺ ἐξεδόθησαν. Τὸ ἓν δὲ μέρος τοῦ κέρδους λέγεται **μέρισμα** (κατὰ μετοχήν). Τὸ μέρισμα μεταβάλλεται κατὰ τὰ κέρδη τῆς ἑταιρείας καὶ εἶναι μεγαλύτερον, ὅταν τὰ κέρδη εἶναι περισσότερα. Τότε δὲ καὶ ἡ ἀξία τῆς μετοχῆς γίνεται μεγαλυτέρα. Αἱ μετοχαὶ τῶν ἑταιρειῶν, ὅταν ἔχουν εἰδικὴν ἄδειαν πωλοῦνται καὶ ἀγοράζονται συνήθως ἐν τῷ Χρηματιστηρίῳ.

243. Ἀποταμίευσις, Ταμιευτήρια. — Ὁ ἄνθρωπος δὲν πρέπει νὰ ἐξοδεύη ὅλα τὰ ἔσοδα αὐτοῦ (ἀπὸ κέρδη, μισθούς, ἡμερομίσθια κτλ.), ἀλλὰ μέρος αὐτῶν πρέπει νὰ τὸ φυλάσση, διὰ νὰ ἀποκτήση ἓν κεφάλαιον. Ἡ πρᾶξις αὐτὴ τοῦ ἀνθρώπου, διὰ τῆς ὁποίας φυλάσσει μέρος τοῦ εἰσοδήματός του, λέγεται **ἀποταμίευσις**. Ἡ ἀποταμίευσις, ὅταν εἶναι λογικὴ καὶ δὲν ἀποτελῇ φιλαργυρίαν, εἶναι πολὺ ὠφέλιμος εἰς τὸν ἄνθρωπον καὶ εἰς τὴν κοινωνίαν ἐν γένει. Διότι ὁ ἄνθρωπος, ὅταν ἀποταμιεύῃ, γίνεται οἰκονόμος καὶ προνοητικός. Ἐργάζεται διαρκῶς, καλλιτερεύει τὰ τοῦ βίου του καὶ προσπαθεῖ νὰ παράγῃ διαρκῶς περισσότερα.

Εἰς ὅλας τὰς χώρας ὑπάρχουν ὡρισμένα ἱδρύματα, τὰ ὁποῖα διευκολύνουν καὶ ἐνθαρρύνουν τὴν ἀποταμίευσιν, ὡς εἶναι π.χ. αἱ ἑταιρεῖαι ἀλληλοβοηθείας, καταναλώσεως κ.ἄ. Ἀλλὰ τὰ σπουδαιότερα ἱδρύματα διὰ τὴν ἀποταμίευσιν εἶναι τὰ **Ταμιευτήρια**. Εἰς αὐτὰ φυλάσσονται τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα κατατίθενται· ἐπιστρέφονται δὲ εἰς τὸν καταθέτην, ὅταν τὰ ζητήσῃ, μετὰ τοῦ τόκου των, ὅστις εἶναι συνήθως 4 %, καὶ ὁ ὁποῖος εἶναι πάντοτε μεγαλύτερος τοῦ τόκου, τὸν ὁποῖον δίδουν αἱ Τράπεζαι εἰς τὸ μεγάλον κεφάλαιον. Εἰς τὰ Ταμιευτήρια δύναται νὰ κατατίθενται καὶ ἐλάχιστα ποσά, ὄχι ὅμως καὶ πολὺ μεγάλα. Π.χ. δὲν δύναταί τις νὰ καταθέσῃ ποσὸν μεγαλύτερον τῶν 100000 δραχμῶν. Ὁ τόκος τῶν καταθέσεων αὐτῶν προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ ἀνατοκίζεται. Εἰς τὴν Ἑλλάδα αἱ Τράπεζαι ἔχουν καὶ τμήματα Ταμιευτηρίου. Τὸ σπουδαιότερον ὅμως ἵδρυμα, τὸ ὁποῖον διευκολύνει τὴν ἀποταμίευσιν, εἶναι τὰ Ταχυδρομικὰ Ταμιευτήρια τοῦ Κράτους. Ἡ σπουδαιότης αὐτῶν φαίνεται ἀπὸ τὰς καταθέσεις τοῦ ἔτους 1937, αἱ ὁποῖαι ἀνῆλθον εἰς $2\frac{1}{2}$ δισεκατομμύρια δραχμῶν.

Τὰ Ταχυδρομικὰ Ταμιευτήρια διευκολύνουν καὶ ἐνθαρρύνουν τὴν ἀποταμίευσιν μεταξὺ τῶν μαθητῶν διὰ τῶν γνωστῶν «κουμπαράδων». Δύνανται δὲ οὕτω οἱ μαθηταὶ νὰ ἀποταμιεύουν καὶ νὰ συνηθίζουν εἰς τὸ πνεῦμα τῆς οἰκονομίας καὶ τῆς προνοίας.

Προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

Ἀπὸ μνήμης. 847) Νὰ εὕρῃς τὸν τόκον:

α)	500	δρχ. πρὸς	5 %	εἰς	1	ἔτος		δ)	800	δρχ. πρὸς	4 %	εἰς	2	ἔτη
β)	900	» »	9 %	»	1	»		ε)	1000	» »	5 %	»	3	»
γ)	450	» »	4 %	»	1	»		στ)	500	» »	6 %	»	4	».

Γ ρ α π τ ῶ ς. 848) Πόσον τόκον φέρει κεφάλαιον 24500 δραχμῶν τοκιζόμενον πρὸς 7 % ἐπὶ 4 ἔτη;

849) Κατέθεσέ τις εἰς μίαν Τράπεζαν 37500 δρχ. πρὸς 4,25 %. Πόσον τόκον θὰ λάβῃ εἰς ἓν ἔτος καὶ πόσον εἰς 3 ἢ 5 ἔτη;

850) Κεφάλαιον 50000 δραχμῶν ἐτοκίσθη πρὸς $6\frac{3}{4}$ % διὰ 5 ἔτη. Πόσον τόκον θὰ δώσῃ εἰς τὸν χρόνον αὐτόν;

851) Πόσον τόκον φέρει κεφάλαιον 3457,50 δραχμῶν τοκιζόμενον πρὸς 12 % εἰς 7 ἔτη;

852) Πόσον τόκον φέρουν 3270 δρχ. πρὸς $4\frac{1}{2}$ % εἰς 1 ἔτος καὶ 3 μῆνας;

853) Πόσον τόκον φέρουν 52 λίρ. καὶ 10 σελ. πρὸς 6 % εἰς 3 ἔτη καὶ 2 μῆνας;

854) Πόσον τόκον φέρουν 63000 δρχ. πρὸς 12 % εἰς 20 ἡμέρας;

855) Πόσον τόκον φέρουν 72000 δρχ. πρὸς 9 % εἰς 1 μῆνα καὶ 15 ἡμέρας;

856) Εἷς Δῆμος ἔκαμε προσωρινὸν δάνειον 150000 δραχμῶν πρὸς $4\frac{1}{2}$ % διὰ 2 μῆνας καὶ 15 ἡμέρας. Πόσον ἐπλήρωσεν εἰς τὸ τέλος τῆς προθεσμίας τόκον καὶ κεφάλαιον ὁμοῦ;

857) Πόσον τόκον φέρουν 40000 δραχμαὶ πρὸς 9 % εἰς 1 ἔτος 1 μῆνα καὶ 10 ἡμέρας;

858) Νὰ εὕρῃς τὸν τόκον:

α) τῶν 4760 δραχμῶν πρὸς 6 % ἀπὸ 1 Φεβρουαρίου 1936 μέχρι 1 Μαΐου 1936.

β) τῶν 8780 δραχμῶν πρὸς $7\frac{1}{2}$ % ἀπὸ 15 Μαρτίου 1937 μέχρι 25 Σεπτεμβρίου 1937.

γ) τῶν 25000 δρχ. πρὸς $7\frac{1}{5}$ % ἀπὸ 4 Ἰουνίου 1938 ἕως 11 Αὐγούστου 1938.

859) Νὰ εὕρῃς διὰ τῶν τοκαρίθμων τὸν τόκον:

α) 25000 πρὸς 8 % διὰ 40 ἡμ.	δ) 54000 πρὸς 4 % διὰ 70 ἡμ.
β) 18000 » 6 % » 24 »	ε) 60000 » 10 % » 20 »
γ) 30000 » 5 % » 45 »	στ) 75650 » 4,5 % » 36 ».

860) Εἷς ἐδάνεισεν ἓν κεφάλαιον διὰ 5 ἔτη πρὸς 12 % καὶ

ἔλαβε τόκον 1500 δραχμάς. Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον τοῦτο;

861) Ποῖον κεφάλαιον, ὅταν τοκισθῇ πρὸς 7 %, θὰ φέρῃ εἰς 4 μῆνας τόκον 157,50 δραχμάς;

862) Εἷς ἐτόκισεν ἓν κεφάλαιον πρὸς 12 % καὶ ἔλαβε διὰ 40 ἡμέρας τόκον 760 δραχμάς. Ποῖον κεφάλαιον ἐτόκισεν;

863) Εἷς ἐτόκισεν ἓν κεφάλαιον πρὸς $10\frac{1}{2}$ % καὶ ἔλαβε διὰ 40 ἡμέρας τόκον 760 δραχμάς. Ποῖον κεφάλαιον ἐτόκισεν;

864) Ἓν κεφάλαιον 3600 δραχμῶν τοκίζεται πρὸς $5\frac{1}{2}$ %. Εἰς πόσα ἔτη θὰ φέρῃ τόκον 374 δραχμάς;

865) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 9640 δραχμῶν τοκιζόμενον πρὸς 6,75 % θὰ φέρῃ τόκον 739,15 δραχμάς;

866) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 75000 δραχμῶν τοκιζόμενον πρὸς 12 % θὰ φέρῃ τόκον 2700 δραχμάς;

867) Εἰς πόσα ἔτη ἓν κεφάλαιον 2000 δραχμῶν τοκιζόμενον πρὸς 4 % φέρει τόκον ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον;

868) Εἰς πόσα ἔτη ἓν κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 8% διπλασιάζεται;

869) Εἰς πόσα ἔτη ἓν κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 6% τριπλασιάζεται καὶ εἰς πόσα, ἐὰν τοκισθῇ πρὸς 10 % ἢ 15 %;

870) Ἐὰν 800 δραχμαὶ εἰς 3 ἔτη φέρουν 120 δραχμὰς τόκον, αἱ 100 δραχμαὶ εἰς 1 ἔτος πόσον τόκον φέρουν;

871) Ἓν κεφάλαιον 7360 δραχμῶν ἔφερε τόκον 1656 δραχμὰς εἰς 5 ἔτη. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη;

872) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 5000 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον ἔφερεν εἰς 3 μῆνας τόκον 75 δραχμάς;

873) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 4800 δραχμῶν καὶ ἔφερεν εἰς 75 ἡμέρας τόκον 82,50 δραχμάς;

874) Ἐδάνεισεν εἷς 30000 δραχμὰς καὶ μετὰ 3 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας ἔλαβε τόκον καὶ κεφάλαιον 30375 δραχμάς. Πόσον % ἐτόκισε τὰ χρήματά του;

875) Ἐδανείσθη εἷς 72000 δρχ. διὰ 3 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας, ἀλλ' ἐπλήρωσε τόκον πρὸς $7\frac{1}{2}$ % καὶ προμήθειαν ἐπὶ τοῦ

κεφαλαίου $\frac{4}{5}$ %. Πόσας δραχ. ἐπλήρωσε διὰ τόκον καὶ προμήθειαν ὁμοῦ ;

876) Ἐδάνεισεν εἷς χρήματα πρὸς 8 % καὶ μετὰ 2 ἔτη ἔλαβε τόκον καὶ κεφάλαιον 9860 δραχμάς. Πόσαι δραχμαὶ εἶναι τὸ κεφάλαιον καὶ πόσαι ὁ τόκος ;

877) Εἶχε δανείσει τις χρήματα πρὸς 12 % καὶ μετὰ 1 ἔτος καὶ 2 μῆνας ἔλαβε τόκον καὶ κεφάλαιον 6840 δραχμάς. Πόσαι δραχμαὶ εἶναι τὸ κεφάλαιον καὶ πόσαι ὁ τόκος ;

878) Εἷς ἐπρόκειτο νὰ δανείσῃ χρήματα πρὸς 8 %, ἀλλὰ τελικῶς τὰ ἐδάνεισε πρὸς 8 $\frac{1}{2}$ % καὶ ηὔξησεν οὕτω τὸν τόκον ἑνὸς ἔτους κατὰ 350 δραχμάς. Πόσα ἦσαν τὰ δανεισθέντα χρήματα ;

879) Εἰς μίαν Τράπεζαν εἶχον καταθέσει τὴν 1 Ἰανουαρίου 2000000 δρχ. καὶ μετὰ 2 μῆνας ἄλλα 3000000 δρχ. πρὸς 4 $\frac{1}{2}$ %. Τὰ ποσὰ αὐτὰ ἡ Τράπεζα ἐδάνεισεν αὐθημερὸν πρὸς 9 %. Πόσον εἶναι τὸ κέρδος αὐτῆς ἐκ τῶν κεφαλαίων τούτων εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους ;

Ὁμὰς Β΄

880) Μία ὁμολογία τοῦ Β΄ ἀναγκαστικοῦ δανείου ἔχει ὀνομαστικὴν ἀξίαν 100 δραχμὰς καὶ φέρει τόκον 6 %. Ὁ τόκος ὅμως, τὸν ὁποῖον πληρώνει τώρα τὸ Κράτος διὰ τὰς ὁμολογίας του εἶναι μικρότερος κατὰ τὸ $\frac{1}{4}$. Πόσον τόκον λαμβάνει κάθε ἑξάμηνον εἷς, ὁ ὁποῖος ἔχει 500 ἀπὸ αὐτὰς τὰς ὁμολογίας ;

881) Εἷς ἄλλος ἔχει 800 ὁμολογίας τοῦ Α΄ ἀναγκαστικοῦ δανείου 6 $\frac{1}{2}$ % καὶ ὀνομαστικῆς ἀξίας 100 δραχμῶν ἡ μία. Πόσον τόκον λαμβάνει τὸ κάθε ἑξάμηνον ;

882) Εἷς ἔχει 150 ὁμολογίας τοῦ Α΄ δαν. ἀνταλλαξίμων 8 % καὶ ὀνομαστικῆς ἀξίας 1000 δραχ. Πόσον τόκον λαμβάνει κάθε ἑξάμηνον ;

883) Εἷς ἔχει 275 ὁμολογίας τοῦ Β΄ δανείου ἀνταλλαξίμων

6°/₀ καὶ ὀνομαστικῆς ἀξίας 1000 δρχ. Πόσον τόκον λαμβάνει κάθε ἑξάμηνον ;

884) Ἀπὸ ὁμολογίας τοῦ Α΄ δαν. ἀνταλλαξίμων 8 °/₀ εἰσπράττει εἰς κάθε ἑξάμηνον τόκον 1200 δραχ. Πόσας ὁμολογίας ἔχει ;

885) Ἠγόρασεν εἰς ὁμολογίας τοῦ Α΄ δαν. ἀνταλλαξίμων 790 δραχμὰς τὴν μίαν. Πόσον °/₀ τοῦ ἔρχονται τὰ χρήματά του ;

886) Ἔχει τις μετοχὰς τῆς Τραπέζης Ἀθηνῶν, τὰς ὁποίας ἠγόρασε 200 δραχ. τὴν μίαν. Αἱ μετοχαὶ αὐταὶ κατὰ τὸ ἔτος, τὸ ὁποῖον τὰς ἠγόρασεν, ἔδωκαν μέρισμα 5 °/₀ ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς, εἰσέπραξε δὲ ἀπὸ τὰς μετοχὰς αὐτὰς 2700 δρχ. Πόσας μετοχὰς ἔχει ;

887) Ἔχει τις μετοχὰς τῆς Ἑταιρείας Καμπᾶ, τὰς ὁποίας ἠγόρασε 500 δραχ. τὴν μίαν. Αἱ μετοχαὶ αὐταὶ εἰς δύο συνεχῆ ἔτη ἔδωκαν μέρισμα 4 °/₀ ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Εἰσέπραξε δὲ οὕτω ἀπὸ τὰς μετοχάς, τὰς ὁποίας εἶχεν, 8000 δρχ. Πόσας μετοχὰς ἔχει ;

Ὁ μ ὰ ς Γ΄

888) Εἷς ἔμπορος ἠγόρασε σῖτον πρὸς 6 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ τὸν ἐπώλησε μετὰ 6 μῆν. κερδίσας 15 °/₀. Πόσον ἐπώλησε τὴν μίαν ὀκᾶν ;

889) Ἠγόρασέ τις 2500 ὀκ. τυροῦ πρὸς 24 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ μετὰ 3 μῆνας τὸν ἐπώλησε κερδίσας 20 °/₀. Πόσον τὸν ἐπώλησεν;

890) Εἷς ἠγόρασεν ἔλαιον πρὸς 41 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ μετὰ 5 μῆνας ἐπώλησεν αὐτὸ πρὸς 46,20 δραχμάς. Πόσον °/₀ ἐκέρδισεν ;

891) Εἷς ἠγόρασεν 615 ὀκ. βούτυρον πρὸς 72 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ μετὰ 7 μῆνας τὸ ἐπώλησεν ἀντὶ 48412,80 δρχ. Πόσον °/₀ ἐκέρδισεν ;

892) Τὸ χιλιόγραμμον ἑνὸς ἐμπορεύματος κοστίζει 56,25 δραχ. Πόσον πρέπει νὰ πωληθῇ ἡ ὀκᾶ διὰ νὰ φέρῃ μετὰ ἓν ἔτος κέρδος 15 °/₀ ;

893) Ἠγόρασέ τις καφὲν καὶ μετὰ 4 μῆνας ἐπώλησεν αὐτὸν ἀντὶ 53000 δρχ. κερδίσας 18 °/₀. Πόσον ἠγόρασε τὸν καφέν ;

894) Ἠγόρασέ τις οἶνον καὶ μετὰ 3 μῆνας ἐπώλησεν αὐτὸν ἀντὶ 44325 δρχ. ζημιώσας 6 %. Πόσον ἠγόρασε τον οἶνον ;

Ὁ μ ὰ ς Δ΄

895) Κεφάλαιον 15500 δραχμῶν ἀνατοκίζεται κατ' ἔτος πρὸς 8 %. Πόσον θὰ γίνῃ μετὰ 2 ἔτη ;

896) Πόσον θὰ γίνῃ ἓν κεφάλαιον 18000 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον ἀνατοκίζεται κατ' ἔτος πρὸς 7 % ἐπὶ 3 ἔτη ;

897) Κεφάλαιον 100000 δραχμῶν ἀνατοκίζεται κατ' ἔτος πρὸς 4 %. Πόσον θὰ γίνῃ μετὰ 4 ἔτη;

898) Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως αὐξάνει κατ' ἔτος κατὰ 2 % αὐτοῦ. Εἶναι δὲ σήμερον 250000. Πόσος θὰ γίνῃ μετὰ 3 ἔτη ;

899) Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως ἐλαττοῦται κατ' ἔτος κατὰ 1 %. Εἶναι δὲ σήμερον 1000000. Πόσος θὰ γίνῃ μετὰ 3 ἔτη :

900) Μία ἐργάτρια κατέθεσεν εἰς μίαν Τράπεζαν τὴν 1 Ἰουλίου 1934, 10000 δραχμὰς μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 5 %. Ἔπειτα τὴν 1 Ἰουλίου 1935 κατέθεσε, μὲ τὰς ἰδίας συμφωνίας, ἄλλας 10000 δραχμὰς πάλιν πρὸς 5 %. Εἰς τὸ τέλος δὲ τοῦ Ἰουνίου τοῦ 1937 ἀπέσυρεν ὅλας τὰς καταθέσεις, τὰς ὁποίας εἶχε κάμει, ὁμοῦ μὲ τοὺς τόκους των. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ;

ΠΕΡΙ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

244. Ὅταν δανείζωμεν χρήματα, ἠμποροῦμεν νὰ ἀσφαλίσωμεν τὸ δανεισθὲν ποσὸν ὡς ἑξῆς : Ἢ νὰ ἐγγράψωμεν ὑποθήκην ἐπὶ τῆς ἀκινήτου περιουσίας τοῦ ὀφειλέτου μας, ἢ νὰ λάβωμεν ἀπὸ αὐτὸν ἓν ἔγγραφον, εἰς τὸ ὁποῖον νὰ ὁμολογῇ τὸ χρέος του καὶ συγχρόνως νὰ ὑπόσχεται, ὅτι θὰ τὸ πληρώσῃ εἰς ὡρισμένην ἡμέραν. Τὸ ἔγγραφον αὐτὸ—τὸ ὁποῖον συντάσσεται ἐπὶ ἀναλόγου χαρτοσήμου—ὀνομάζεται γενικῶς **γραμμάτιον.** Χρῆσιν τοῦ γραμματίου κάμνουν συνήθως καὶ κυρίως οἱ ἔμποροι.

245. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ ἔμπορος κ. Γ. Ἀποστόλου ἠγόρασε τὴν 10 Ἀπριλίου 1939, ἀπὸ τὸν κ. Α. Γεωργίου ἐμπορεύματα ἀξίας

30000 δρχ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ κ. Γ. Ἀποστόλου δὲν ἠδύνατο νὰ τὰ ἀγοράσῃ τοῖς μετρητοῖς, συνεφώνησαν νὰ πληρώσῃ μετὰ 4 μῆνας τὴν ἀξίαν των καὶ τὸν τόκον αὐτῆς πρὸς 6 %. Ἐπειδὴ δὲ ὁ τόκος διὰ τοὺς 4 μῆνας εἶναι 600 δρχ. ὁ κ. Γ. Ἀποστόλου ἔδωκεν εἰς τὸν κ. Γεωργίου τὸ κατωτέρω (ἐμπορικὸν) γραμμάτιον εἰς διαταγήν.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 10 Ἀπριλίου 1939.

Διὰ δραχμὰς 30600

Μετὰ τέσσαρας μῆνας ἀπὸ σήμερον ὑπόσχομαι καὶ ὑποχρεοῦμαι νὰ πληρώσω εἰς τὸν κ. Α. Γεωργίου, ἢ εἰς διαταγήν του, τριάκοντα χιλιάδας ἑξακοσίας δραχμὰς (30600), τὰς ὁποίας ἔλαβον παρ' αὐτοῦ εἰς ἐμπορεύματα.

Γ. Ἀποστόλου ὁδὸς Ἑρμοῦ 389

Σημείωσις α'. Ἀντὶ τοῦ ἀνωτέρω γραμματίου εἰς διαταγήν, δύναται νὰ ἐκδοθῇ καὶ **συναλλαγματική**. Συναλλαγματικὴ δὲ λέγεται τὸ ἔγγραφον, διὰ τοῦ ὁποίου ἐκεῖνος, ὅστις ἔχει νὰ λάβῃ (εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ὁ κ. Γεωργίου), διατάσσει τὸν ὀφειλέτην του (τὸν κ. Ἀποστόλου) νὰ πληρώσῃ εἰς τρίτον τινὰ (π.χ. εἰς τὸν κ. Δημητρίου), ἢ εἰς τὴν διαταγὴν τοῦ τρίτου αὐτοῦ, τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ὀφείλεται, ὁ δὲ ὀφειλέτης πρέπει νὰ **ἀποδεχθῇ τὴν συναλλαγματικήν**, δηλαδὴ νὰ ἀναγνωρίσῃ τὸ χρέος καὶ νὰ ἀναλάβῃ τὴν ὑποχρέωσιν νὰ τὸ πληρώσῃ. Δι' ὃ ὁ ὀφειλέτης εἰς ἓν περιθώριον τῆς συναλλαγματικῆς γράφει τὴν λέξιν **δεκτὴ** καὶ ὑπογράφεται, ὡς δεικνύει τὸ κατωτέρω ὑπόδειγμα συναλλαγματικῆς.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 10 Ἀπριλίου 1939.

Διὰ δραχμὰς 30600

Τὴν 10ην προσεχοῦς Αὐγούστου πληρώσατε διὰ τῆς παρούσης εἰς διαταγὴν τοῦ κ. Α. Δημητρίου τριάκοντα χιλιάδας ἑξακοσίας δραχμὰς (30600), τὰς ὁποίας ἐλάβατε παρ' ἐμοῦ εἰς ἐμπορεύματα.

Πρὸς τὸν Γ. Ἀποστόλου *Α. Γεωργίου*

ὁδὸς Ἑρμοῦ 389 *Δεκτὴ*

Γ. Ἀποστόλου

Σημείωσις β'. Ἄλλο εἶδος γραμματίου εἶναι καὶ ἡ **ἐπιταγή**, δηλαδὴ τὸ ἔγγραφον, διὰ τοῦ ὁποίου ὁ δανειστὴς διατάσσει τὸν ὀφειλέτην νὰ πληρώσῃ (μόλις ἐμφανισθῇ εἰς αὐτὸν τὸ ἔγγραφον) εἰς τρίτον ἢ εἰς διαταγήν του, ἢ καὶ εἰς τὸν φέροντα, ποσόν τι, ὡς δεικνύει τὸ κατωτέρω ὑπόδειγμα ἐπιταγῆς.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 10 Ἀπριλίου 1939.

Διὰ δραχμὰς 30600

Πληρώσατε ἅμα τῇ ἐμφανίσει, εἰς διαταγὴν τοῦ κ. Ἀ. Γεωργίου, δραχμὰς τριάκοντα χιλιάδας ἑξακοσίας, εἰς χρέωσιν τοῦ παρ' ὑμῖν λογαριασμοῦ μου.

Πρὸς τὴν Ἐθνικὴν Τράπεζαν τῆς Ἑλλάδος

Ἐνταῦθα

Γ. Ἀποστόλου

Παρατήρησις. Ὁ κ. Γ. Ἀποστόλου ἐκδίδει τὴν ἐπιταγὴν πρὸς τὴν Ἐθνικὴν Τράπεζαν, ὅταν ἔχῃ καταθέσεις εἰς αὐτὴν μεγαλυτέρας ἢ ἴσας πρὸς τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἀναγράφεται εἰς αὐτήν.

Διὰ τραπεζιτικῶν ἢ ταχυδρομικῶν ἐπιταγῶν ἀποστέλλονται καὶ χρήματα ἀπὸ μιᾶς πόλεως εἰς ἄλλην. Τότε κατατίθενται εἰς τὴν Τράπεζαν ἢ εἰς τὸ Ταχυδρομεῖον τὰ πρὸς ἀποστολὴν χρήματα (καὶ ἐπὶ πλέον τὰ ἔξοδα διὰ τὴν ἀποστολήν), ἐκδίδεται ἐπιταγὴ ἐπ' ὀνόματι τοῦ παραλήπτου, ἥτις ἀποστέλλεται εἰς αὐτόν· οὗτος δὲ τὴν ἐξοφλεῖ.

246. Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἀναγράφεται εἰς τὸ γραμμάτιον (ὅπως εἰς τὸ ἀνωτέρω 30600 δρχ.), ὅτι θὰ πληρωθῇ εἰς ὡρισμένην ἡμέραν, λέγεται **ὀνομαστικὴ ἢ μέλλουσα ἀξία** αὐτοῦ. Εἶναι δέ, ὡς εἴδομεν, ἄθροισμα τοῦ δανεισθέντος ποσοῦ καὶ τοῦ τόκου αὐτοῦ ἀπὸ τὴν ἡμέραν, ποὺ ἔγινε τὸ δάνειον, μέχρι τῆς ἡμέρας ποὺ θὰ λήξῃ τὸ γραμμάτιον. Εὐνόητον δὲ εἶναι, ὅτι τὸ ἄνω γραμμάτιον θὰ ἀξίζῃ πράγματι 30600 δραχμὰς τὴν ἡμέραν τῆς λήξεώς του.

247. Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι ὁ κ. Γεωργίου ἔχει ἀνάγκην ἀπὸ χρήματα καὶ θέλει νὰ προεξοφλήσῃ τὸ γραμμάτιον, θέλει δηλαδὴ νὰ τὸ πωλήσῃ εἰς ἄλλον πρὸ τῆς λήξεώς του. Φυσικὰ ὁ ἀγοραστὴς (συνηθέστατα τὰ γραμμάτια προεξοφλοῦνται ἀπὸ Τραπέζας) δὲν θὰ δώσῃ εἰς τὸν πωλητὴν ὁλόκληρον τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἀναγράφει τὸ γραμμάτιον. Διότι θὰ κρατήσῃ ἓν ποσὸν δραχμῶν (τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ εἶναι ὁ τόκος τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα θὰ πληρώσῃ, ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως, μὲ ὡρισμένον ἐπιτόκιον) καὶ τὸ ὑπόλοιπον θὰ δώσῃ εἰς τὸν πωλητήν. Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον θὰ λάβῃ ὁ πωλητὴς τοῦ γραμματίου, λέγεται **παροῦσα ἀξία** αὐτοῦ, τὸ δὲ ποσόν, τὸ ὁποῖον θὰ κρατήσῃ ὁ προεξοφλητής, λέγεται **ὑφαίρεσις.**

248. Τώρα, ἂς ὑποθέσωμεν πάλιν, ὅτι ὁ κ. Γεωργίου ἠθέλησε νὰ προεξοφλήσῃ τὸ γραμμάτιον αὐτὸ τὴν ἰδίαν ἡμέραν ποὺ ἐξεδόθη καὶ συνεφώνησε νὰ γίνῃ ἡ προεξόφλησις ἐπίσης πρὸς 6 %. Γνωρίζομεν δέ, ὅτι ὁ χρόνος τῆς προεξοφλήσεως εἶναι 4 μῆνες. Ἀλλ' ἐπὶ ποίου ποσοῦ (δηλαδὴ ἐπὶ ποίου κεφαλαίου) θὰ ὑπολογισθῇ ὁ τόκος, τὸν ὁποῖον θὰ κρατήσῃ ὁ ἐξαργυρώνων τὸ γραμμάτιον, δηλαδὴ ἡ ὑφαίρεσις; Λογικῶς ἡ ὑφαίρεσις πρέπει νὰ ὑπολογισθῇ ἐπὶ τῆς ἀξίας, τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ γραμμάτιον κατὰ τὴν ἡμέραν, ποὺ προεξοφλεῖται. Πρέπει δηλαδὴ νὰ εὑρεθῇ ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς προεξοφλήσεως καὶ ἐπ' αὐτῆς νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος διὰ τὸν χρόνον τῆς προεξοφλήσεως καὶ μὲ τὸ ἐπιτόκιον, τὸ ὁποῖον συνεφωνήθη. **Ὁ τόκος δὲ οὗτος τῆς παρούσης ἀξίας λέγεται ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις.**

Εἰς τὸ ἐμπόριον ὅμως, διὰ λόγους εὐκολίας συνηθίζουν νὰ κρατοῦν ὄχι τὸν τόκον τῆς παρούσης ἀξίας, ἀλλὰ τὸν τόκον τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου διὰ τὸν χρόνον τῆς προεξοφλήσεως. **Ὁ τόκος οὗτος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας λέγεται ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις.**

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν ὁ κ. Α. Γεωργίου, ἐὰν προεξοφλήσῃ τὸ γραμμάτιον ἐξωτερικῶς, θὰ πληρώσῃ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν $= \frac{30600 \times 6 \times 4}{1200} = 612$ δρχ. καὶ θὰ λάβῃ $30600 - 612 = 29988$ δρχ.

Ἐνῶ, ἐὰν τὸ προεξοφλήσῃ ἐσωτερικῶς, θὰ πληρώσῃ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν $= \frac{30000 \times 6 \times 4}{1200} = 600$ δρχ. καὶ θὰ λάβῃ $30600 - 600 = 30000$ δρχ.

Σημείωσις. Γνωρίζομεν εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ ἐκ τῶν προτέρων, ὅτι ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι 30000 δραχμαί, διότι συμπίπτει μὲ τὴν ἀξίαν τῶν ἐμπορευμάτων. Συμπίπτει δὲ πάλιν ἡ παροῦσα ἀξία μὲ τὴν ἀξίαν τῶν ἐμπορευμάτων, διότι καὶ τὸ ἐπιτόκιον τῆς προεξοφλήσεως (6 %) εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἐπιτόκιον, ποὺ ὑπελογίσθη ὁ τόκος τῆς ἀξίας τῶν ἐμπορευμάτων καὶ ἡ ἡμέρα τῆς προεξοφλήσεως εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἡμέραν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐξεδόθη τὸ γραμμάτιον. Πῶς εἰς πᾶσαν περίπτωσιν εὑρίσκομεν τὴν παροῦσαν ἀξίαν ἑνὸς γραμματίου θὰ τὸ ἴδωμεν κατωτέρω.

249. Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις.—Ἀπὸ ὅσα εἴδομεν ἀνωτέρω, συνάγομεν, ὅτι τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως εἶναι προβλήματα ἁπλοῦ τόκου. Δύναται δὲ νὰ ζητῆται εἰς αὐτὰ α) ἡ ὑφαίρεσις, β) ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία, γ) τὸ ἐπιτόκιον καὶ δ) ὁ χρόνος.

Πρόβλημα, εἰς ὃ ζητεῖται ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἴπομεν ἀνωτέρω. Τώρα ἂς λύσωμεν καὶ τὰ ἑξῆς.

Π ρ ό β λ η μ α. **Ποία εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου, τὸ ὁποῖον προεξωφλήθη ἐξωτερικῶς πρὸς 5 % 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του καὶ ἔδωκεν ὑφαίρεσιν 162 δραχμάς;**

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ θὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τοῦ κεφαλαίου:

$$\text{ὀν. ἀξία} = \frac{162 \times 1200}{5 \times 3} = 12960 \text{ δραχμάς.}$$

250. Ἄλλη περίπτωσις.—Π ρ ό β λ η μ α. **Γραμμάτιον προεξωφλήθη 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9 % ἀντὶ 1455 δραχμῶν. Ποία εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου;**

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτό, πρέπει νὰ ἴδωμεν ἀντὶ πόσων δραχμῶν θὰ προεξωφλεῖτο, ἂν τὸ γραμμάτιον ἦτο 100 δραχμῶν. Ἐπειδὴ δὲ ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν εἰς 4 μῆνας πρὸς 9 % εἶναι 3 δραχμαί, ἕπεται, ὅτι θὰ προεξωφλεῖτο ἀντὶ 97 δραχμῶν. Ἔπειτα λέγομεν:

ἀφοῦ 100 δραχμ. ὀν. ἀξ. ἔχουν 97 παροῦσαν
X » » » » 1455 »

$$X = \frac{100 \times 1455}{97} = 1500 \text{ δραχμαί.}$$

$$1500 - 1455 = 45 \text{ δραχμ. ὑφαίρεσις.}$$

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Ἂν ἠθέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν ὑφαίρεσιν θὰ ἐλέγομεν:

ἀφοῦ εἰς 97 δραχ. παρ. ἀξ. ἡ ὑφαίρ. εἶναι 3 δραχ.
» 1455 » » » » » » X »

$$X = \frac{3 \times 1455}{97} = 45 \text{ δραχμ.}$$

251. Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις.—**Γραμμάτιον 30600 δραχμ. προεξοφλεῖται σήμερον ἐσωτερικῶς πρὸς 6 % 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του. Ποία εἶναι ἡ ὑφαίρεσις αὐτοῦ;**

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ ὁ τόκος θὰ ὑπολογισθῇ ἐπὶ τῆς παρούσης ἀξίας τοῦ γραμματίου. Διὰ νὰ τὴν εὕρω δὲ εὑρίσκω πρῶτον τὸν τόκον 100 δραχ. πρὸς 6 °/₀ διὰ 4 μῆνας. Εἶναι δὲ οὗτος:

$$\tau = \frac{100 \times 4 \times 6}{1200} = 2 \text{ δραχ. καὶ}$$

ἔπειτα προσθέτω 100 δραχ. + 2 δραχ. = 102 δραχ. Θεωρῶ δὲ τώρα τὰς 102 δραχμὰς ὡς ὀνομαστικὴν ἀξίαν γραμματίου, τὸ ὁποῖον ἔγινε διὰ 4 μῆνας. Ἂν λοιπὸν τὸ γραμμάτιον αὐτὸ προεξοφληθῇ ἐσωτερικῶς 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6 °/₀ θὰ δώσῃ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν 2 δραχμάς·

ἀφοῦ λοιπὸν	102	ὀν.	ἀξ.	δίδει	ἐσωτ. ὑφαίρ.	2
	30600	»	»	»	» »	X

$$X = 2 \times \frac{30600}{102} = 600 \text{ δραχμαί.}$$

Ἡ παροῦσα λοιπὸν ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι 30600 — 600 = 30000 δραχμ. Ἠμποροῦμεν δὲ νὰ εὕρωμεν αὐτὴν ἀπ' εὐθείας:

ὀν. ἀξία	παροῦσα
102	100
30600	X

$$X = 100 \times \frac{30600}{102} = 30000 \text{ δραχμαί.}$$

252. Κοινὴ λῆξις.—Πολλὰ γραμμάτια πληρωτέα εἰς διαφόρους ἡμερομηνίας δύνανται νὰ ἀντικατασταθοῦν δι' ἑνὸς μόνου γραμματίου, εἰς τρόπον ὥστε ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ νέου γραμματίου εἰς ἡμέραν τινὰ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀξίαν, τὴν ὁποίαν θὰ εὕρωμεν, ἐὰν προσθέσωμεν τὰς παρούσας ἀξίας κατὰ τὴν αὐτὴν ἡμέραν ὅλων τῶν δοθέντων γραμματίων. Ἡ λῆξις τοῦ γραμματίου, τὸ ὁποῖον ὑπὸ τὸν ἄνω ὅρον ἀντικαθιστᾷ τὰ ἄλλα, λέγεται **κοινὴ λῆξις**.

1ον) Π ρ ό β λ η μ α. **Ποία εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου, τὸ ὁποῖον λήγει μετὰ 1 ἔτος καὶ τὸ ὁποῖον ἀντικαθιστᾷ** α) **γραμμάτιον 15000 δραχμῶν πληρωτέον μετὰ 3 μῆνας καὶ** β) **γραμμάτιον 12500 δραχμῶν πληρωτέον μετὰ 14 μῆνας, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 6 °/₀ ;**

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν παροῦσαν ἀξίαν καὶ τοῦ α' γραμματίου καὶ τοῦ β', τὸ ἄθροισμα δὲ αὐτῶν θὰ εἶναι ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ νέου γραμματίου. Ἐξ αὐτῆς δὲ θὰ εὕρωμεν τὴν ζητουμένην ὀνομαστικὴν ἀξίαν· οἱ δὲ ὑπολογισμοὶ οὗτοι δύνανται νὰ γίνουν ἢ διὰ τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως ἢ διὰ τῆς ἐσωτερικῆς.

Συνήθως ὅμως τὰ ὡς ἄνω προβλήματα λύονται ἁπλούστερα ὡς ἑξῆς :

1) Τὸ α΄ γραμμάτιον παρατηροῦμεν, ὅτι θὰ πληρωθῇ 9 μῆνας μετὰ τὴν λῆξίν του. Ἑπομένως ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ θὰ αὐξηθῇ κατὰ τὸν τόκον αὐτῆς πρὸς 6 $^0/_0$ καὶ δι' 9 μῆνας, ἤτοι κατὰ $\frac{15000\times9\times6}{1200}=675$. Ὥστε μετὰ 1 ἔτος θὰ γίνῃ $15000+675=15675$ δρχ.

2) Τὸ β΄ γραμμάτιον θὰ πληρωθῇ 2 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του. Ἑπομένως ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ τὸν τόκον αὐτῆς πρὸς 6 $^0/_0$ καὶ διὰ 2 μῆνας, ἤτοι κατὰ $\frac{12500\times2\times6}{1200}=125$ δραχμάς. Ὥστε μετὰ ἓν ἔτος θὰ γίνῃ $12500-125=12375$ δρχ.

Ἡ ζητουμένη λοιπὸν ὀνομαστικὴ ἀξία θὰ εἶναι $15675+12375=28050$ δραχμαί.

Αἱ ἀνωτέρω πράξεις διατάσσονται συνήθως ὡς ἑξῆς :

	ὀνομ. ἀξίαι	τόκοι +		τόκοι —	
			(δηλ. οἱ προστιθέμενοι)		(δηλ. οἱ ἀφαιρούμενοι)
	15000	675			
	12500			125	
ἄθροισμα	27500				
+ διαφορὰ τόκ.	550				
	28050 δραχμαὶ πληρωτέαι μετὰ 1 ἔτος.				

2ον) Π ρ ό β λ η μ α. **Εἷς ἔμπορος πρέπει νὰ ἐξοφλήσῃ τὰ ἑξῆς γραμμάτια : α) 20000 δραχμῶν τὴν 16 Νοεμβρίου, β) 18000 δρχ. τὴν 23 Νοεμβρίου, γ) 36000 δρχ. τὴν 1 Δεκεμβρίου, δ) 30000 δρχ. τὴν 14 Δεκεμβρίου καὶ ε) 40000 τὴν 22 Δεκεμβρίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους. Θέλει δὲ νὰ ἀντικαταστήσῃ τὰ γραμμάτια αὐτὰ δι' ἑνὸς μόνου γραμματίου πληρωτέου τὴν 1 Δεκεμβρίου τοῦ ἰδίου ἔτους. Ποία θὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου αὐτοῦ, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 6 $^0/_0$;**

Τὸ πρόβλημα αὐτό, ἐπειδὴ τὰ χρονικὰ διαστήματα μεταξὺ τῶν διαφόρων λήξεων ἐκφράζονται εἰς ἡμέρας, θὰ τὸ λύσωμεν διὰ τῶν τοκαρίθμων.

	ὀν. ἀξίαι	ἡμέραι	τοκάριθμοι +	τοκάριθμοι −
	20000	15	300000	
	18000	8	144000	
	36000	0	0	
	30000	13		390000
	40000	21		840000
ἄθροισμα	144000		444000	1230000

διαφορὰ τόκων 131 $\qquad$ τόκος $= \dfrac{786000}{6000} = 131$

143869 κεφάλαιον πληρωτέον τὴν 1 Δεκεμβρίου.

Ὥστε ἡ ζητουμένη ὀνομαστικὴ ἀξία εἶναι 143869 δρχ.

3ον) Π ρ ό β λ η μ α. **Γραμμάτιον ὀν. ἀξίας 2500 δραχμῶν εἶναι πληρωτέον μετὰ 90 ἡμέρας ἀπὸ σήμερον, ἄλλο δὲ γραμμάτιον ὀν. ἀξίας 4000 εἶναι πληρωτέον μετὰ 30 ἡμέρ. Τὰ γραμμάτια ταῦτα πρόκειται σήμερον νὰ ἀντικατασταθοῦν δι' ἑνὸς γραμματίου ὀν. ἀξίας 6490 δραχμῶν. Μετὰ πόσας ἡμέρας ἀπὸ σήμερον θὰ λήγῃ τὸ νέον γραμμάτιον, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 6 %;**

Τὸ πρόβλημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ τὸ λύσωμεν καὶ διὰ τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως καὶ διὰ τῆς ἐσωτερικῆς. Καὶ εἰς τὰς δύο ὅμως περιπτώσεις ὁ τρόπος εἶναι ὁ αὐτός. Ἡμεῖς θὰ τὸ λύσωμεν διὰ τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις τοῦ α' γραμματίου εἶναι $\dfrac{2500 \times 90 \times 6}{36000} =$ 37,50 δρχ. Ἄρα ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ εἶναι 2500 — 37,50 = 2462,50.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ἐξωτ. ὑφ. τοῦ β' γραμματίου εἶναι $\dfrac{4000 \times 30 \times 6}{36000} = 20$ δραχ. Ἑπομένως ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ εἶναι 4000 — 20 = 3980 δραχ.

Ἄρα ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ νέου γραμματίου θὰ εἶναι 2462,50 + 3980 = 6442,50 δραχμαί. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ὀν. ἀξία αὐτοῦ εἶναι 6450 δραχ., ἕπεται, ὅτι ἡ ἐξωτ. ὑφαίρεσις αὐτοῦ εἶναι 6490 — 6442,50 = 47,50 δραχμαί. Τὸ νέον λοιπὸν γραμμάτιον θὰ λήγῃ ἀπὸ σήμερον μετὰ ἡμέρας $\frac{47,50 \times 36000}{6490 \times 6} = 43 \frac{593}{649}$ ἢ μετὰ 44 ἡμέρας, ἐπειδὴ τὸ κλάσμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\frac{1}{2}$. (Καὶ ἴσον, ἐὰν ἦτο πρὸς τὸ $\frac{1}{2}$, πάλιν θὰ ηὐξάνομεν κατὰ μονάδα τὸν 43).

Προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

901) Εἷς προεξώφλησε γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 8200 δραχμῶν 6 μῆνας πρὸ τῆς διορίας του μὲ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν πρὸς 8 %. Τί ὑφαίρεσιν ἐπλήρωσεν; Καὶ πόσας δραχμὰς εἰσέπραξεν;

902) Εἷς προεξώφλησε γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 4200 δραχ. 1 μῆνα καὶ 20 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς $7\frac{1}{2}$ %. Ποία εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ ποία ἡ παροῦσα ἀξία;

903) Εἷς προεξώφλησεν ἐξωτερικῶς γραμμάτιον ὀν. ἀξ. 12500 δρχ. 5 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8 %. Ἐπλήρωσε δέ, καὶ προμήθειαν $1\frac{1}{2}$ % ἐπὶ τῆς ὀν. ἀξ. Πόσας δρχ. εἰσέπραξεν;

904) Ἓν γραμμάτιον ὀν. ἀξ. 42000 δρχ. ἔληγε τὸ τέλος Μαρτίου. Προεξωφλήθη δὲ ἐξωτερικῶς τὴν 5 Ἰανουαρίου τοῦ ἰδίου ἔτους πρὸς $7\frac{1}{2}$ %. Ποία ἦτο ἡ ἐξ. ὑφ. καὶ ποία ἡ παρ. ἀξία;

905) Προεξώφλησέ τις γραμμάτιον πρὸς 8,5 % 4 μῆνας πρὸ τῆς διορίας του καὶ ἐπλήρωσεν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 136 δρχ. Ποία ἦτο ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου αὐτοῦ;

906) Εἷς προεξώφλησε γραμμάτιον πρὸς 11,5 % 5 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας πρὸ τῆς διορίας του καὶ ἐπλήρωσεν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 460 δραχμάς. Ποία ἦτο ἡ ὀνομαστική του ἀξία;

907) Εἷς προεξώφλησε γραμμάτιον 8400 δραχμῶν ἐξωτερικῶς πρὸς 15 % καὶ ἐπλήρωσεν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 87,50 δρχ. Πόσας ἡμέρας πρὸ τῆς διορίας του ἔγινεν ἡ προεξόφλησις;

908) Εἷς προεξώφλησε γραμμάτιον 3781,25 δραχμῶν ἐξω-

τερικῶς πρὸς 8 % καὶ ἔλαβε 3720,75 δραχμάς. Πόσας ἡμέρας πρὸ τῆς διορίας του ἔγινεν ἡ προεξόφλησις ;

909) Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 5600 δραχμῶν ἔληγε μετὰ 2 ἔτη καὶ προεξωφλήθη σήμερον μὲ 5000 δραχμάς. Πρὸς πόσον % ἔγινεν ἡ προεξόφλησις ;

910) Γραμμάτιον 8460 δραχμῶν ἔληγε τὴν 28 Μαΐου καὶ προεξωφλήθη ἐξωτερικῶς τὴν 3 Ἀπριλίου τοῦ ἰδίου ἔτους μὲ 8389,50 δραχμάς. Πρὸς πόσον % ἔγινεν ἡ προεξόφλησις ;

911) Ἓν γραμμάτιον προεξωφλήθη ἐξωτερικῶς πρὸς $6\frac{3}{4}$ % 5 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας πρὸ τῆς διορίας του μὲ 6596 δραχμάς. Ποία ἦτο ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου αὐτοῦ ;

Ὁ μ ὰ ς Β΄

912) Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 7650 δραχ. προεξωφλήθη 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἐσωτερικῶς πρὸς 8 %. Ποία εἶναι ἡ ὑφαίρεσις καὶ ποία ἡ παροῦσα ἀξία ;

913) Γραμμάτιον 2840 δρχ. προεξωφλήθη ἐσωτερικῶς πρὸς 12 % 2 μῆνας καὶ 15 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του. Ποία εἶναι ἡ ὑφαίρεσις καὶ ποία ἡ παροῦσα ἀξία ;

914) Ἓν γραμμάτιον προεξωφλήθη ἐσωτερικῶς πρὸς 5 % 7 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ 6800 δραχμάς. Ποία εἶναι ἡ ὑφαίρεσις καὶ ποία ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία ;

915) Ἓν γραμμάτιον προεξωφλήθη ἐσωτερικῶς πρὸς 10 % 3 μῆνας καὶ 20 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ὑφαίρεσιν 220 δραχμάς. Ποία ἦτο ἡ παροῦσα ἀξία του ;

916) Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 3870 δραχμῶν προεξωφλήθη ἐσωτερικῶς 2 μῆνας καὶ 20 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ 3818,40 δρχ. Πρὸς πόσον % ἔγινεν ἡ προεξόφλησις ;

917) Γραμμάτιον παρούσης ἀξίας 10800 δραχμῶν προεξωφλήθη πρὸς 4,5 % μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν 175,50 δραχμάς. Πόσας ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του ἔγινεν ἡ προεξόφλησις ;

Ὁ μ ὰ ς Γ΄

918) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου, τὸ ὁποῖον λήγει τὴν 18 7βρίου καὶ τὸ ὁποῖον ἀντικαθιστᾷ α) γραμμάτιον

6000 δραχ. λῆγον τὴν 5 7βρίου καὶ β) γραμμάτιον 30000 δραχ. λῆγον τὴν 22 7βρίου. Τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 6 %.

919) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομ. ἀξία γραμματίου λήγοντος τὴν 28 8)βρίου καὶ τὸ ὁποῖον ἀντικαθιστᾷ τὰ γραμμάτια α) 10000 δρχ. λῆγον τὴν 15 8βρίου, β) 20000 δρχ. λῆγον τὴν 5 9βρίου καὶ γ) 15000 δρχ. λῆγον τὴν 20 9βρίου τοῦ ἰδίου ἔτους. Τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4 %.

920) Γραμμάτιον 3600 δρχ. λήγει μετὰ 45 ἡμέρας ἀπὸ σήμερον, ἄλλο δὲ γραμμάτιον 4870 δρχ. λήγει μετὰ 25 ἡμέρας. Πρόκειται δὲ τὰ γραμμάτια αὐτὰ νὰ ἀντικατασταθοῦν σήμερον δι' ἑνὸς γραμματίου ὀνομ. ἀξίας 8460 δρχ. Μετὰ πόσας ἡμέρας ἀπὸ σήμερον θὰ λήγῃ τὸ γραμμάτιον τοῦτο, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 5 %;

921) Εἷς ἔμπορος πρέπει νὰ πληρώσῃ τρία γραμμάτια· τὸ πρῶτον ὀνομ. ἀξίας 8000 δραχ. τὴν 15 'Απριλίου, τὸ δεύτερον ὀνομ. ἀξίας 12400 τὴν 20 Μαΐου καὶ τὸ τρίτον ὀνομ. ἀξίας 15620 δραχ. τὴν 25 Μαΐου τοῦ ἰδίου ἔτους. Θέλει δὲ νὰ ἀντικαταστήσῃ τὰ γραμμάτια αὐτὰ σήμερον 20 Μαρτίου δι' ἑνὸς γραμματίου ὀνομ. ἀξίας 36000 δρχ. Ποία θὰ εἶναι ἡ λῆξις τοῦ γραμματίου αὐτοῦ, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 6 % ;

IV. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΡΙΣΜΟΥ

253. Π ρ ό β λ η μ α. 'Εκ τριῶν ἐργατῶν, οἱ ὁποῖοι εἰργάζοντο εἰς τὸ αὐτὸ ἐργοστάσιον μὲ τὸ αὐτὸ ἡμερομίσθιον, ὁ μὲν εἰργάσθη 2 ἡμ. ὁ δὲ 3 ἡμ., ὁ δὲ ἄλλος 5 ἡμ. Ἔλαβον δὲ καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ 450 δραχμάς. Πόσας θὰ λάβῃ ὁ καθεὶς ;

'Επειδὴ τὰ ἡμερομίσθια καὶ τῶν 3 ἐργατῶν εἶναι $2+3+5=10$, τὸ ἓν ἡμερομίσθιον εἶναι $\frac{450}{10}$ δραχ., ἄρα ὁ μὲν α' ἔλαβε $\frac{450}{10}\times 2 = 45\times 2 = 90$, ὁ β' ἔλαβε $\frac{450}{10}\times 3 = 135$ δραχ., ὁ δὲ γ' ἔλαβε $\frac{450}{10}\times 5 = 225$ δραχ. Εἶναι δὲ $90+135+225=450$.

'Αλλὰ τώρα παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 90, 135, 225, εἰς τοὺς ὁποίους ἐμερίσθη ὁ 450, ἔγιναν ἀπὸ τοὺς 2, 3, 5, οἱ ὁποῖοι ἐπολλαπλασιάσθησαν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 45. Οἱ 90, 135, 225 λέγονται **ἀνάλογοι** τῶν 2, 3, 5. 'Αλλὰ καὶ οἱ 2, 3, 5 λέγονται ἀνάλογοι τῶν 90, 135, 225, ἐπειδὴ ὅταν πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον τούτων ἐπὶ $\frac{1}{45}$, λαμβάνομεν τοὺς 2, 3, 5. Ἐν γένει δέ: **Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἰσοπληθεῖς, ὅταν γίνωνται ἀπὸ αὐτοὺς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.**

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ 450 ἐμερίσθη εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 2, 3, 5, εἶναι πρόβλημα **μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα,** ἐκ τῆς λύσεως δὲ αὐτοῦ συνάγομεν πρὸς συντομωτέραν λύσιν αὐτῶν τὸν κανόνα: **Διὰ νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα ἄλλων δοθέντων ἀριθμῶν, διαιροῦμεν αὐτὸν μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων καὶ τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζομεν μὲ καθένα ἐκ τῶν δοθέντων.**

Τὸν ἀνωτέρω κανόνα ἐφαρμόζομεν, ὅταν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς διαιρῆται ἀκριβῶς μὲ τὸ ἐν λόγῳ ἄθροισμα. Ἂν δὲν διαιρῆται, προτιμότερον εἶναι νὰ πολλαπλασιάζωμεν πρῶτον τὸν μεριστέον μὲ καθένα ἐκ τῶν δοθέντων καὶ ἔπειτα νὰ διαιροῦμεν μὲ τὸ ἄθροισμά των.

Σημείωσις. Ἐὰν οἱ 2, 3, 5 πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, π.χ. τὸν 4 καὶ μερίσωμεν τὸν 450 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν γινομένων 8, 12, 20, θὰ εὕρωμεν τὰ ἴδια μέρη 90, 135, 225, διότι τὰ μέρη ταῦτα εἶναι $\frac{450 \times 8}{40} = \frac{450 \times 2 \times 4}{10 \times 4} = \frac{450 \times 2}{10} = 90$ κ.τ.λ.

Ἀλλὰ καὶ ἂν διαιρεθοῦν πάντες διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, πάλιν τὰ ἴδια μέρη θὰ εὕρωμεν. Διὰ ταῦτα, ἐὰν ἔχωμεν νὰ μερίσωμεν ἕνα ἀριθμόν, π.χ. τὸν 160, ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν $2\frac{1}{2}$, 5, $\frac{4}{9}$, τρέπομεν πρῶτον τοὺς τρεῖς τοιούτους ἀριθμοὺς εἰς κλάσματα ὁμώνυμα $\frac{45}{18}$, $\frac{90}{18}$, $\frac{8}{18}$ καὶ ἔπειτα μερίζομεν τὸν 160 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 45, 90, 8, ὅπερ εἶναι εὐκολώτερον.

254. Πρόβλημα. **Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 775 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5.**

Ἤτοι νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 775 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀντιστρόφων τῶν 2, 3, 5· εἶναι δὲ ἀντίστροφοι αὐτῶν οἱ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ (§ 159).

Πρὸς τοῦτο τρέπομεν τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ εἰς ὁμώνυμα $\frac{15}{30}$, $\frac{10}{30}$, $\frac{6}{30}$

καὶ μερίζομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν 775 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 15, 10, 6 εὑρίσκομεν δὲ α) $\frac{775}{31} \times 15 = 25 \times 15 = 375$, β) $25 \times 10 = 250$, καὶ γ) $25 \times 6 = 150$.

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Ὁ 150, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν ἀριθμὸν 5, εἶναι $2\frac{1}{2}$ φορὰς μικρότερος ἀπὸ τὸν 375, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν ἀριθμὸν 2. Εἶναι δὲ ὁ 5 $2\frac{1}{2}$ φορὰς μεγαλύτερος τοῦ 2.

255. Π ρ ό β λ η μ α. Τρεῖς ἐργάται ἤνοιξαν ἓν φρέαρ καὶ ἔλαβον διὰ τὴν ἐργασίαν των 1200 δραχ. Ἀλλ' ὁ πρῶτος αὐτῶν εἰργάσθη ἐπὶ 5 ἡμέρας καὶ 8 ὥρας καθ' ἡμέραν, ὁ δεύτερος ἐπὶ 4 ἡμέρας καὶ 9 ὥρας καθ' ἡμέραν καὶ ὁ τρίτος ἐπὶ 7 ἡμέρας καὶ 7 ὥρας καθ' ἡμέραν. Πόσας δραχμὰς ἐκ τῶν 1200 ἔλαβεν ἕκαστος ἐργάτης;

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ πρῶτος ἐργάτης εἰργάσθη ὥρας $8 \times 5 = 40$, ὁ δεύτερος $9 \times 4 = 36$ καὶ ὁ τρίτος $7 \times 7 = 49$. Ὥστε αἱ 1200 δραχμαὶ πρέπει νὰ μερισθοῦν ἀναλόγως τῶν ὡρῶν ἐργασίας 40, 36, 49. Ἔλαβον ἐπομένως:

ὁ α' ἐργάτης $\frac{1200 \times 40}{125} = 384$

ὁ β' » $\frac{1200 \times 36}{125} = 345{,}60$

καὶ ὁ γ' » $\frac{1200 \times 49}{125} = 470{,}40$

1200

Προβλήματα.

Ὁμὰς Α'

922) Νὰ μοιρασθοῦν εἰς μέρη ἀνάλογα:

α) Τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 7 αἱ 240 δρχ., β) τῶν 4, 5 καὶ 9 αἱ 360 δρχ., γ) τῶν 8, 11 καὶ 5 αἱ 1200 ὀκ., δ) τῶν 3, 4 καὶ 8 ὁ ἀριθμὸς 72, ε) τῶν 34, 28 καὶ 18 ὁ 40, στ) τῶν 3, 7, 8 καὶ 11 ὁ 3944 καὶ ζ) τῶν $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{5}{6}$ ὁ 600.

Ὁ μ ὰ ς Β'

923) Μία μητέρα δι' ἓν γλύκισμα χρησιμοποιεῖ 75 δράμια βούτυρον, 150 δράμια ζάχαρη καὶ 120 δράμια ἄλευρον. Πόσα δράμια θὰ χρειασθῇ ἀπὸ τὸ καθὲν διὰ γλύκισμα 650 δράμ. ;

924) Μία μητέρα ἐμοίρασεν εἰς τὰς τρεῖς θυγατέρας της τὴν 1ην τοῦ νέου ἔτους 265 δρχ. ἀναλόγως τῶν ἡλικιῶν των. Ἡ μία ἦτο 20 ἐτῶν, ἡ ἄλλη 17 καὶ ἡ τρίτη 16. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἡ κάθε μία ;

925) Τρεῖς ἀδελφοὶ ἠγόρασαν κτῆμα 24 στρεμ. ἀξίας 43200 δρχ. Τὸ κτῆμα αὐτὸ τὸ ἐμοίρασαν μεταξύ των καὶ ὁ μὲν α' ἔλαβεν 9 στρέμματα, ὁ β' 6 καὶ ὁ γ' τὰ ὑπόλοιπα. Πόσας δρχ. ἐπλήρωσεν ὁ καθείς ;

926) Τρεῖς ἀδελφοὶ θὰ μοιράσουν μεταξύ των 90000 δρχ. μετὰ δύο ἔτη καὶ ἀναλόγως τῶν ἡλικιῶν, ποὺ θὰ ἔχουν τότε. Οἱ ἀδελφοὶ αὐτοὶ εἶναι σήμερον 21, 18 καὶ 15 ἐτῶν. Πόσα θὰ λάβῃ ὁ καθείς ;

927) Ἓν ὕφασμα ἀπὸ 84 πήχεις τὸ ὕφανεν ἡ μητέρα καὶ αἱ δύο ἀδελφαί. Ἡ μεγαλυτέρα ἀδελφὴ ὕφανε διπλασίους πήχεις, ἀπὸ ὅσους ὕφανεν ἡ μικροτέρα. Ἡ δὲ μητέρα ὕφανεν, ὅσους πήχεις ὕφαναν καὶ αἱ δύο ἀδελφαί. Πόσους πήχεις ὕφανε κάθε μία ;

Ὁ μ ὰ ς Γ'

928) Κατεσκεύασεν εἷς 42 ὀκ. πυρίτιδα καὶ ἀνέμειξε 32 ὀκ. νίτρον, 6 ὀκ. ἄνθρακα καὶ 4 ὀκ. θεῖον. Τώρα ὅμως θέλει νὰ κατασκευάσῃ 60 ὀκ. πυρίτιδα. Πόσον θὰ ἀναμείξῃ ἀπὸ κάθε εἶδος ;

929) Τὸ μάρμαρον ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀσβέστιον, ἄνθρακα καὶ ὀξυγόνον μὲ τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν εἰς βάρος : 10 μέρη ἀσβεστίου, 3 μέρη ἄνθρακος καὶ 12 μέρη ὀξυγόνου. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἀσβεστίου καὶ τοῦ ἄνθρακος εἰς 800 ὀκ. μάρμαρον ;

930) Τὰ μετάλλινα φύλλα, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦν εἰς τὰ ὑπόστεγα, ἀποτελοῦνται ἀπὸ 90 μέρη ψευδαργύρου, 8 μέρη χαλκοῦ καὶ 2 μέρη κασσιτέρου. Πόσον εἶναι τὸ βάρος ἑκάστου

μετάλλου, εἰς τοιαῦτα φύλλα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάρος 150 χιλιόγραμμα;

931) Τὸ μέταλλον, μὲ τὸ ὁποῖον κατασκευάζονται τὰ τυπογραφικὰ στοιχεῖα, ἀποτελεῖται ἀπὸ 15 μέρη κασσιτέρου, 60 μέρη μολύβδου καὶ 25 μέρη ἀντιμονίου. Εἰς τυπογραφικὰ στοιχεῖα, ποὺ ἔχουν βάρος 34 χιλιογράμμων, πόσον εἶναι τὸ βάρος ἑκάστου τῶν ἄνω μετάλλων;

932) Ὁ ὀρείχαλκος ἀποτελεῖται ἀπὸ 59,5 μέρη χαλκοῦ, 39,4 μέρη ψευδαργύρου, 0,4 μέρη νικελίου καὶ 0,7 μέρη μολύβδου. Εἰς ὀρείχαλκον βάρους 15 χιλιογράμμων καὶ 600 γραμμ. πόσον εἶναι τὸ βάρος ἑκάστου τῶν μετάλλων, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὸν ὀρείχαλκον;

Ὁμὰς Δ΄

933) Νὰ μοιρασθῇ ὁ ἀριθμὸς 48 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$.

934) Νὰ μοιρασθῇ ὁ ἀριθμὸς 142 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 8.

935) Εἷς πατὴρ ἐμοίρασεν εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του τὴν κτηματικὴν περιουσίαν του καὶ ἔλαβεν ὁ μὲν α΄ 3 στρέμματα, ὁ β΄ 6 στρέμματα καὶ ὁ γ΄ 8 στρέμματα. Τὴν χρηματικὴν ὅμως περιουσίαν του ἐξ 75000 δραχ. ἐμοίρασεν εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν στρεμμάτων ποὺ ἔλαβον. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ὁ καθεὶς ἀδελφός;

936) Τέσσαρες ἀδελφοὶ ἐμοίρασαν κληρονομίαν 165000 δραχ. εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἡλικιῶν των. Ἦσαν δὲ 18, 15, 12 καὶ 10 ἐτῶν. Πόσον εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου;

937) Εἷς μετέφερεν εἰς τὴν ἀποθήκην του τὸν σῖτον, τὸν ὁποῖον παρήγαγεν ἀπὸ τὰ τρία κτήματά του. Καὶ ἀπὸ τὸ μὲν ἓν κτῆμα, τὸ ὁποῖον ἀπεῖχεν ἀπὸ τὴν ἀποθήκην του 8 χιλιόμετρα, μετέφερεν 800 ὀκάδας, ἀπὸ τὸ ἄλλο, ποὺ ἀπεῖχε 5 χιλιόμετρα μετέφερε 1000 ὀκάδας καὶ ἀπὸ τὸ τρίτον κτῆμα ποὺ ἀπεῖχε 4 χιλιόμετρα 2000 ὀκάδας. Ἐπλήρωσε δὲ εἰς τοὺς τρεῖς ἀμαξηλάτας, οἱ ὁποῖοι μετέφερον τὸν σῖτον, 2910 δραχ. ἐν ὅλῳ. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ὁ καθείς;

938) Ὁ αὐτὸς καλλιεργητής, διὰ νὰ θερίσῃ τὸν σῖτόν του, ἐχρειάσθη διὰ τὸ πρῶτον κτῆμα 3 ἐργάτας πρὸς 72 δραχ. τὸν καθένα, διὰ τὸ δεύτερον 5 ἐργάτας πρὸς 58 δρχ. τὸν καθένα καὶ διὰ τὸ τρίτον 7 ἐργάτας πρὸς 52 δρχ. τὸν καθένα. Ἐμοίρασε δὲ καὶ εἰς τὰς τρεῖς ὁμάδας ἐργατῶν ὡς δῶρον 435 δρχ., ἀναλόγως τῆς ἀμοιβῆς, τὴν ὁποίαν ἔλαβε διὰ τὴν ἐργασίαν της ἑκάστη ὁμάς. Πόσας δρχ. ἐκ τῶν 435 ἔλαβεν ἡ κάθε ὁμὰς καὶ πόσα ὁ εἷς ἐργάτης ἑκάστης ὁμάδος;

939) Ἐπίσης ὁ ἴδιος καλλιεργητὴς κατὰ τὴν καλλιέργειαν τῶν κτημάτων του εἶχε χρησιμοποιήσει διὰ τὸ α′ κτῆμα 3 ἐργάτας καὶ 2 ἵππους ἐπὶ 5 ἡμέρας, διὰ τὸ β′ κτῆμα 6 ἐργάτας καὶ 4 ἵππους ἐπὶ 4 ἡμέρας καὶ διὰ τὸ γ′ 5 ἐργάτας καὶ 6 ἵππους ἐπὶ 7 ἡμέρας. Ἐπλήρωσε δὲ διὰ 2 ἵππους, ὅσον ἐπλήρωσε δι' ἕνα ἐργάτην. Ἐστοίχισε δὲ ἡ καλλιέργεια αὐτὴ 8100 δρχ. Πόσας δρχ. ἔλαβεν ὁ εἷς ἐργάτης ἑκάστης ὁμάδος καὶ πόσας οἱ ἰδιοκτῆται τῶν ἵππων.

256. Προβλήματα ἑταιρείας.— Εἰς αὐτὰ ζητεῖται νὰ μοιρασθῇ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία μιᾶς ἐπιχειρήσεως, εἰς ὅσους τὴν ἀνέλαβον. Ἀνάγονται δὲ εἰς τὸν μερισμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα, ὡς ἑξῆς φαίνεται:

1ον) **Τρεῖς ἄνθρωποι ἔκαμαν ἑταιρείαν διὰ μίαν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν καὶ κατέβαλον ὁ α′ 4500 δραχ., ὁ β′ 8900 καὶ ὁ γ′ 5000. Ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκέρδισαν 2760 δραχ. Πόσον θὰ λάβῃ ὁ καθείς;**

Εἶναι φανερόν, ὅτι πρέπει νὰ μοιρασθῇ τὸ κέρδος 2760 δραχμαὶ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 4500, 8900 καὶ 5000 δρχ. Εὑρίσκομεν δὲ ὅτι θὰ λάβῃ ὁ α′ $\frac{2760 \times 4500}{18400} = 675$, ὁ β′ $\frac{2760 \times 8900}{18400} = 1335$ καὶ ὁ γ′ $\frac{2760 \times 5000}{18400} = 750$. Εἶναι δὲ $675 + 1335 + 750 = 2760$.

2ον) **Εἷς ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 50000 δραχμάς. Μετὰ δύο μῆνας λαμβάνει καὶ συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέβαλεν ἐπίσης 50000 δραχμάς. Μετ' ἄλλους τρεῖς μῆνας λαμβάνει καὶ ἄλλον συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέβαλε 50000 δραχμάς. Μετὰ ἓν ἔτος, ἀφ' ὅτου ἤρχισεν ἡ ἐπιχείρησις, εἶδον, ὅτι αὕτη ἀφῆκε ζημίαν 8700 δραχμῶν. Πόσον ἐζημιώθη ὁ καθείς;**

Ἀφοῦ τὰ κεφάλαια, τὰ ὁποῖα κατέθεσεν ἕκαστος, εἶναι ἴσα εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ζημία θὰ μοιρασθῇ ἀναλόγως τοῦ χρόνου, κατὰ τὸν ὁποῖον ἔμεινεν ἕκαστον κεφάλαιον εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Ἔμειναν δὲ τὰ κεφάλαια τοῦ α′ ἐπὶ 12 μῆνας, τοῦ β′ ἐπὶ 10 μῆνας καὶ τοῦ γ′ ἐπὶ 7 μῆνας. Ἐζημιώθη λοιπὸν ὁ α′ $\frac{8700}{29} \times 12 = 300 \times 12 =$ 3600 δραχμάς, ὁ β′ $300 \times 10 = 3000$ δραχ. καὶ ὁ γ′ $300 \times 7 =$ 2100 δρχ. Εἶναι δὲ $3600 + 3000 + 2100 = 8700$.

Τὰ ἀνωτέρω δύο προβλήματα εἶναι ἁπλᾶ προβλήματα ἑταιρείας. **Μοιράζομεν δὲ εἰς αὐτὰ τὸ κέρδος ἢ τὴν ζημίαν ἀναλόγως μὲν τῶν κεφαλαίων, ὅταν οἱ χρόνοι εἶναι ἴσοι, ἀναλόγως δὲ τῶν χρόνων** (οἱ ὁποῖοι μετροῦνται μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα) **ὅταν τὰ κεφάλαια εἶναι ἴσα.** Τώρα πῶς μοιράζομεν τὸ κέρδος ἢ τὴν ζημίαν, ὅταν καὶ τὰ κεφάλαια καὶ οἱ χρόνοι εἶναι διάφοροι, θὰ τὸ ἴδωμεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ κατωτέρω προβλήματος.

3ον) **Εἷς ἔμπορος ἀρχίζει ἐπιχείρησιν μὲ 8000 δραχμάς. Μετὰ 6 μῆνας λαμβάνει καὶ συνέταιρον, ὁ ὁποῖος καταβάλλει 15000 δραχμάς. 8 δὲ μῆνας μετὰ ταῦτα προσλαμβάνει καὶ ἄλλον, ὁ ὁποῖος καταβάλλει 20000 δραχμάς. Δύο δὲ ἔτη ἀπὸ τότε, ποὺ ἤρχισεν ἡ ἐπιχείρησις εὗρον, ὅτι ἐκέρδισαν 33100 δραχμάς. Πόσας πρέπει νὰ λάβῃ ὁ καθείς;**

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ τὰ κεφάλαια εἶναι διάφορα καὶ οἱ χρόνοι, κατὰ τοὺς ὁποίους ἔμειναν ταῦτα εἰς τὴν ἐπιχείρησιν, εἶναι διάφοροι. Καὶ τοῦ μὲν α′ ἔμειναν 2 ἔτη, τοῦ β′ 18 μῆνας, τοῦ δὲ γ′ 10 μῆνας. Πρέπει λοιπὸν τὸ κέρδος νὰ μοιρασθῇ ὄχι μόνον ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων, ἀλλὰ καὶ ἀναλόγως τῶν χρόνων.

Πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει νὰ χωρίσωμεν τὸ κέρδος εἰς μερίδια. Ἓν δὲ μερίδιον νὰ εἶναι τὸ κέρδος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς 1 μῆνα. Ἂν λοιπὸν ὁ πρῶτος κατέθετεν 8000 δραχμὰς εἰς 1 μῆνα, θὰ ἐλάμβανεν 8000 μερίδια. Ἀφοῦ ὅμως κατέθεσεν 8000 δραχμὰς εἰς 24 μῆνας θὰ λάβῃ $8000 \times 24 = 192000$ μερίδια. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ δεύτερος θὰ λάβῃ $15000 \times 18 = 270000$ μερίδια καὶ ὁ τρίτος $20000 \times 10 = 200000$ μερίδια. Ὥστε ὅλον τὸ κέρδος θὰ χωρισθῇ εἰς $192000 + 270000 + 200000 = 662000$ μερίδια.

Ἀφοῦ λοιπὸν τὰ 662000 μερίδια εἶναι 33100 δρχ. τὸ 1 μερίδιον θὰ εἶναι $\frac{33100}{662000}$ δραχ. Ἄρα ὁ α΄ θὰ λάβη $\frac{33100 \times 192000}{662000} = \frac{19200}{2}$ $= 9600$ δρχ., ὁ β΄ $\frac{33100 \times 270000}{662000} = 13500$ δρχ. καὶ ὁ γ΄ $\frac{33100 \times 200000}{662000}$ $= 10000$ δραχ. Εἶναι δὲ $9600 + 13500 + 10000 = 33100$.

Ἀλλ' ἡ τελευταία αὐτὴ λύσις φανερώνει, ὅτι ἐκάμαμεν μερισμὸν τοῦ κέρδους τῶν 33100 δραχ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν, ποὺ εὕρομεν πολλαπλασιάσαντες τὰ κεφάλαια ἐπὶ τοὺς ἀντιστοίχους χρόνους (μετρουμένους μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα).

Ὥστε: **Εἰς τὰ προβλήματα ἑταιρείας, εἰς τὰ ὁποῖα καὶ τὰ κεφάλαια καὶ οἱ χρόνοι εἶναι διάφοροι, μοιράζομεν τὸ κέρδος ἢ τὴν ζημίαν ἀναλόγως τῶν γινομένων τῶν κεφαλαίων ἐπὶ τοὺς ἀντιστοίχους χρόνους.**

Προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

940) Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν ἑταιρείαν διὰ μίαν ἐπιχείρησιν καὶ ὁ μὲν α΄ κατέβαλε 45000 δρχ., ὁ β΄ 40000 καὶ ὁ γ΄ 55000. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησιν αὐτὴν ἐκέρδισαν 10500 δρχ. Πόσον κέρδος θὰ λάβη ὁ καθείς;

941) Διὰ μίαν ἐπιχείρησιν, τὴν ὁποίαν ἔκαμαν τρεῖς ἄνθρωποι, ὁ α΄ κατέβαλεν 75000 δρχ., ὁ β΄ 83000 καὶ ὁ γ΄ 47000. Ἀλλ' ἡ ἐπιχείρησις αὐτὴ ἀφῆκε ζημίαν 8200 δρχ. Πόσον ἐζημιώθη ὁ καθείς;

942) Διὰ μίαν ἐπιχείρησιν κατέβαλον τρεῖς ἄνθρωποι ὁμοῦ 60000 δρχ. Ἀπὸ τὰ κέρδη τῆς ἐπιχειρήσεως αὐτῆς ἔλαβεν ὁ α΄ 3000 δρχ., ὁ β΄ 2500 καὶ ὁ γ΄ 2000. Πόσας δραχ. κατέθεσεν ὁ καθείς;

943) Τέσσαρες ἄνθρωποι διὰ μίαν ἐπιχείρησιν κατέβαλον ἀπὸ ἴσα χρήματα. Ἀλλ' ὁ α΄ ἦτο εἰς τὴν ἐπιχείρησιν αὐτὴν ἐπὶ 12 μῆνας, ὁ β΄ ἐπὶ 10, ὁ γ΄ ἐπὶ 8 καὶ ὁ δ΄ ἐπὶ 6 μῆνας. Τὰ κέρδη ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησιν αὐτὴν ἦσαν 54000 δρχ. Πόσον κέρδος ἔλαβεν ὁ καθείς;

944) Τρεῖς ἄνθρωποι ἔκαμαν ἑταιρείαν μὲ κεφάλαια 300000 δραχ. Ὁ πρῶτος κατέβαλε τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῶν, ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ

ὁ τρίτος τὰ ὑπόλοιπα. Εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους τὰ κέρδη τῆς ἑταιρείας ἦσαν 75000 δραχ. Πόσον κέρδος ἔλαβεν ὁ καθείς;

945) Εἷς ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 60000 δρχ. Μετὰ 6 μῆνας προσέλαβε καὶ συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέβαλε 50000 δρχ. Δύο δὲ ἔτη ἀπὸ τὴν ἡμέραν, ποὺ ἤρχισεν ἡ ἐπιχείρησις, ἐλογαριάσθησαν καὶ εὗρον, ὅτι ἐκέρδισαν 46800 δραχ. Πόσον κέρδος ἔλαβεν ὁ καθείς;

946) Εἷς ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 100000 δραχμάς. Μετὰ ἓν ἔτος προσέλαβε καὶ συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέβαλεν 120000 δραχμάς. Τρία ἔτη ἀπὸ τὴν ἡμέραν, ποὺ ἤρχισεν ἡ ἐπιχείρησις, εὗρον, ὅτι ἐκέρδισαν 135000 δραχμάς. Ἀλλὰ ἐπλήρωσαν φόρον 8 % ἐπὶ τῶν κερδῶν. Πόσας δραχμὰς καθαρὸν κέρδος ἔλαβεν ὁ καθείς;

947) Εἷς ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 80000 δρχ. Μετὰ 8 μῆνας προσέλαβε συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέβαλεν 100000 δρχ. Ἔπειτα ἀπὸ ἄλλους 10 μῆνας προσέλαβε καὶ τρίτον, ὁ ὁποῖος κατέβαλεν 6000 δρχ. Τρία ἔτη ἀπὸ τὴν ἡμέραν, ποὺ ἤρχισεν ἡ ἐπιχείρησις εὗρον, ὅτι ἐκέρδισαν 67600 δρχ. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ὁ καθείς;

948) Μία ἑταιρεία εἶχε 3 μετόχους. Ὅταν δὲ διελύθη, εὑρέθη κέρδος 5000 δρχ. Ἀπὸ αὐτὰς ἔλαβεν ὁ εἷς 3000 δρχ. διότι εἶχε καταβάλει 26000 δρχ., τὰς δὲ ὑπολοίπους 2000 δρχ. ἔλαβον οἱ δύο ἄλλοι. Πόσας δραχ. κατέβαλον εἰς τὴν ἑταιρείαν οἱ δύο ἄλλοι;

949) Τρεῖς ἄνθρωποι ἔκαμαν ἑταιρείαν. Ὁ β′ κατέθεσεν εἰς αὐτὴν τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ κεφαλαίου, τὸ ὁποῖον κατέθεσεν ὁ α′. Ὁ δὲ γ′ κατέθεσε τὸ ἥμισυ τοῦ κεφαλαίου, τὸ ὁποῖον κατέθεσεν ὁ β′. Ἡ ἑταιρεία αὐτὴ εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους εὑρέθη, ὅτι ἐκέρδισε 39760 δραχμάς. Πόσον κέρδος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν καθένα τῶν τριῶν συνεταίρων, ὅταν ὁ πρῶτος ἐκτὸς τοῦ μεριδίου διὰ τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον κατέθεσε, λαμβάνει ἰδιαιτέραν ἀμοιβὴν πρὸς 4 % ἐπὶ τοῦ ὅλου κέρδους;

950) Δύο ἄνθρωποι ἤρχισαν ἐπιχείρησιν, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ α′ κατέβαλεν 90000 δραχμὰς καὶ ὁ β′ 64000 δραχμάς. Μετὰ 6 μῆνας προσέλαβον καὶ γ′ συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέβαλε

50000 δραχμάς. Μετὰ 18 μῆνας, ἀφ' ὅτου ἤρχισεν ἡ ἐπιχείρησις, εὑρέθη, ὅτι αὕτη ἐκέρδισε 42960 δραχμάς. Ἐκ τοῦ κέρδους αὐτοῦ τὰ $\frac{2}{5}$ ἔλαβεν ὁ πρῶτος ὡς ἀμοιβὴν διὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐπιχειρήσεως. Νὰ εὑρεθῇ α') πόσον κέρδος ἔλαβεν ὁ καθεὶς καὶ β) πόσον τοῖς ‰ ἐκέρδισεν.

951) Τρεῖς ἔκαμαν ἐπιχείρησιν, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἐκέρδισαν 137800 δραχ. Τὰ κεφάλαια, ποὺ κατέθεσεν ἕκαστος εἰς αὐτήν, ἦσαν ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, οἱ δὲ χρόνοι, κατὰ τοὺς ὁποίους ἔμειναν ταῦτα εἰς τὴν ἐπιχείρησιν, ἦσαν ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. Πόσον κέρδος ἔλαβεν ὁ καθεὶς καὶ πόσον κέρδος θὰ ἐλάμβανεν, ἐὰν οἱ χρόνοι ἦσαν ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$;

V. ΠΕΡΙ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ

257. Εἷς ἐργάτης, ὁ ὁποῖος εἰργάσθη ἐπὶ δύο ἡμέρας, μὲ ἡμερομίσθια τὴν α' ἡμέραν 55 δραχ. καὶ τὴν β' 65 δραχ. εἶναι ὡς νὰ εἰργάσθη τὰς δύο ἡμέρας μὲ τὸ αὐτὸ ἡμερομίσθιον τῶν 60 δραχμ. Διότι $\frac{55+65}{2}=60$. Τὸ ἡμερομίσθιον τῶν 60 δραχ. λέγεται **μέσος ὅρος** (ἢ μέσον ἡμερομίσθιον) τῶν δύο δοθέντων ἡμερομισθίων. Ἐν γένει δὲ **μέσος ὅρος ἢ ἀριθμητικὸν μέσον διαφόρων ποσῶν ὁμοειδῶν λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν.**

Οὕτως ὁ μέσος ὅρος τῶν 12, 18, 30 εἶναι $\frac{12+18+30}{3}=20$.

Τοὺς μέσους ὅρους μεταχειρίζονται εἰς πολλὰς περιστάσεις, π.χ. τὰ ἄτομα ὑπολογίζουν τὴν μέσην ἡμερησίαν δαπάνην, τὸ Κράτος τὴν μέσην μηνιαίαν εἴσπραξιν ἐκ τῶν φόρων. Ὁμοίως εὑρίσκουν τὸν μέσον ὅρον τῶν γεννήσεων ἢ τῶν θανάτων εἰς μίαν χώραν κτλ. Εἰς περιπτώσεις μετρήσεων ἑνὸς μεγέθους, αἱ ὁποῖαι δίδουν διάφορα ἐξαγόμενα, ὡς πιθανώτερον ἐξαγόμενον λαμβάνουν τὸν μέσον ὅρον τῶν διαφόρων ἐξαγομένων.

Ἐπίσης εὑρίσκουν τὴν μέσην τιμὴν ἑνὸς εἴδους διατροφῆς εἰς μίαν πόλιν δι' ἕνα μῆνα. Ἐὰν δὲ λάβουν τὰς ἄνω μέσας τιμὰς τῶν σπουδαιοτέρων εἰδῶν διατροφῆς εἰς αὐτὴν τὴν πόλιν καὶ λάβουν τὸν μέσον ὅρον αὐτῶν, ἔχουν τὸν **τιμάριθμον** τῆς διατροφῆς τοῦ μηνὸς εἰς τὴν πόλιν αὐτήν. Ἐὰν δὲ λάβουν τὸν τιμάριθμον διατροφῆς τοῦ αὐτοῦ μηνὸς 44 πόλεων τῆς Ἑλλάδος καὶ εὕρουν τὸν μέσον ὅρον αὐτῶν, ἔχουν τὸν τιμάριθμον διατροφῆς τῆς Ἑλλάδος εἰς τὸν μῆνα τοῦτον. Διὰ τὸν καταρτισμὸν τοῦ τιμαρίθμου εἰς ἑκάστην πόλιν, ἔχουν ὡς βάσιν τὰς τιμὰς τῶν σπουδαιοτέρων εἰδῶν διατροφῆς κατὰ τὸ ἔτος 1914, τοῦ ὁποίου ὁ τιμάριθμος παρίσταται διὰ τοῦ 100. Οὕτως, ὅταν λέγωμεν, ὅτι ὁ τιμάριθμος διατροφῆς τῶν Ἀθηνῶν εἰς ἕνα μῆνα εἶναι 2415, δεικνύομεν τὸν μέσον ὅρον τοῦ κόστους τῆς διατροφῆς εἰς τὰς Ἀθήνας κατὰ τὸν μῆνα αὐτόν. Εἶναι δὲ (τὸ 1939) τὸ κόστος τοῦτο 24,15 φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ μέσον κόστος τῆς διατροφῆς εἰς τὰς Ἀθήνας κατὰ τὸ ἔτος 1914.

Π ρ ό β λ η μ α. **Ἐδαπάνησεν εἰς ἐπὶ 3 ἡμέρας 60 δραχμὰς τὴν ἡμέραν, κατὰ τὰς ἑπομένας 2 ἡμέρας ἀπὸ 72 δραχμὰς καὶ κατὰ τὰς ἑπομένας 5 ἡμέρας ἀπὸ 54 δρχ. Ποία εἶναι ἡ μέση ἡμερησία δαπάνη κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο;**

Ἐδαπάνησεν ἐν ὅλῳ $60 \times 3 + 72 \times 2 + 54 \times 5 = 594$ δραχ. κατὰ τὸ διάστημα τῶν $3+2+5=10$ ἡμερῶν. Ὥστε ἡ ζητουμένη δαπάνη εἶναι 594 δραχ. : 10=59,40 δραχ.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α.

Ὁ μ ὰ ς Α΄

952) Εἰς μίαν ἡμέραν ἡ θερμοκρασία ἦτο τὴν 8 π. μ. 10°, τὴν 2 μ.μ. 16° καὶ τὴν 8 μ.μ. 11°. Ποία εἶναι ἡ μέση θερμοκρασία τῆς ἡμέρας αὐτῆς;

953) Εἰς τὰ Ἰωάννινα ἡ μέση θερμοκρασία κατὰ τὸ 1936 ἦτο: τοῦ ἔαρος 14,5°, τοῦ θέρους 24,2°, τοῦ φθινοπώρου 15,2° καὶ τοῦ χειμῶνος 7,8°. Ποία ἡ μέση θερμοκρασία τοῦ ἔτους τούτου εἰς τὰ Ἰωάννινα;

954) Διὰ νὰ εὕρῃ τις τὸ μῆκος μιᾶς γραμμῆς ἀκριβέστατα ἐμέτρησεν αὐτὴν 3 φοράς. Τὴν 1ην φορὰν εὗρε 12,626 μ., τὴν 2αν 12,628 μ. καὶ τὴν 3ην 12,621 μ. καὶ ἔλαβε τὸν μέσον ὅρον τῶν ἀριθμῶν ποὺ εὗρε. Ποῖος εἶναι οὗτος;

955) Μία οἰκογένεια ἐπλήρωνεν ἐνοίκιον ἐπὶ 5 ἔτη 700 δραχμὰς τὸν μῆνα· κατόπιν ἐπὶ 3 ἔτη ἐπλήρωνεν 800 δραχμὰς τὸν μῆνα, καὶ ἔπειτα ἐπλήρωνεν ἐπὶ 2 ἔτη 1000 δραχμ. τὸν μῆνα. Πόσον ἐνοίκιον ἐπλήρωνε τὸν μῆνα κατὰ μέσον ὅρον εἰς τὰ 10 αὐτὰ ἔτη;

956) Ἓν πλοῖον ἐταξίδευσε τὴν πρώτην ἡμέραν 10 ὥρ., τὴν δευτέραν 8, τὴν τρίτην 7 καὶ τὰς ἄλλας 10 ἡμέρας εταξίδευε 5 ὥρ. τὴν ἡμέρ. Πόσας ὥρ. ἐταξίδευε τὴν ἡμέρ. κατὰ μέσον ὅρον;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΕΙΞΕΩΣ

258. 1ον) **Ἔχει τις τρεῖς ποιότητας οἴνου. Ἡ πρώτη ποιότης του στοιχίζει 10 δρχ. τὴν ὀκᾶν· ἡ δευτέρα 7 καὶ ἡ τρίτη 5 δρχ. Ἔκαμε δὲ μεῖγμα ἀπὸ 400 ὀκ. τῆς α΄ ποιότητος, 200 ὀκ. τῆς β΄ καὶ 360 ὀκ. τῆς γ΄. Πόσον τοῦ στοιχίζει ἡ 1 ὀκᾶ τοῦ μείγματος;**

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ὡς τὸ πρόβλημα μέσου ὅρου τῆς σελ. 273, θὰ λυθῇ ἑπομένως ὡς ἐλύθη ἐκεῖνο. Ἤτοι θὰ εἴπωμεν, ὅτι:

	400 ὀκ.	πρὸς	10 δρχ.	τὴν ὀκᾶν	ἀξίζουν	10 δρχ.	×400	=	4000 δρχ.
	200 »	»	7 »	»	»	7 »	×200	=	1400 »
	360 »	»	5 »	»	»	5 »	×360	=	1800 »
αἱ	960 ὀκάδες	τοῦ μείγματος ἀξίζουν							7200 »

καὶ ἡ 1 ὀκᾶ τοῦ μείγματος ἀξίζει 7200 δρχ. : 960 = 7,50 δραχμ.

2ον) **Εἷς ἔμπορος ἔχει δύο εἴδη ἐλαίου. Τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 37 δραχμὰς καὶ τοῦ δευτέρου 29 δραχμάς. Θέλει δὲ νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν μεῖγμα 2400 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ τιμᾶται 34 δραχμάς. Πόσον θὰ λάβῃ ἀπὸ κάθε εἶδος;**

Πρὸς τοῦτο σκέπτομαι ὡς ἑξῆς: ἀπὸ κάθε ὀκᾶν τοῦ α΄ εἴδους, τὴν ὁποίαν θὰ βάλῃ ὁ ἔμπορος εἰς τὸ μεῖγμα θὰ χάσῃ 37 — 34 = 3 δρχ. Ἐνῷ ἀπὸ κάθε ὀκᾶν τοῦ β΄ εἴδους θὰ κερδίσῃ 34 — 29 = 5 δρχ. Λοιπόν, ἂν βάλῃ ἀπὸ τὸ πρῶτον εἶδος 5 ὀκάδας (ὅσας δραχμὰς κερδίζει ἀπὸ τὸ δεύτερον), θὰ χάσῃ 3×5. Ἂν δὲ βάλῃ ἀπὸ τὸ δεύτερον 3 ὀκ. (ὅσας δραχμὰς χάνει ἀπὸ τὸ πρῶτον) θὰ κερδίσῃ 5×3. Ὥστε οὔτε κέρδος οὔτε ζημίαν θὰ ἔχῃ, ἂν ἀναμείξῃ 5 ὀκάδας ἀπὸ τὸ πρῶτον καὶ 3 ὀκάδας ἀπὸ τὸ δεύτερον. Ὥστε:

$$\begin{array}{llllllllll} \text{διὰ μεῖγμα} & & 8 \text{ ὀκ.} & \text{βάζει} & 5 \text{ ὀκ.} & \alpha' & \text{καὶ} & 3 \text{ ὀκ.} & \beta' \\ \text{»} & \text{»} & 2400 \text{ »} & \text{»} & X \text{ »} & \alpha' & \text{»} & X \text{ »} & \beta' \\ \hline \end{array}$$

$$\text{ἤτοι } \alpha' = 5 \times \frac{2400}{8} = 1500 \text{ ὀκάδες}$$

$$\text{καὶ } \beta' = 3 \times \frac{2400}{8} = 900 \text{ ὀκάδες.}$$

Σημείωσις. Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν ὁ ἔμπορος λαμβάνῃ ἀπὸ τὸ α' εἶδος 2, 3, 4 κτλ. φορὰς 5 ὀκάδας, πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἀπὸ τὸ δεύτερον εἶδος 2, 3, 4 κτλ. φορὰς 3 ὀκάδας διὰ νὰ μὴ ἔχῃ οὔτε κέρδος οὔτε ζημίαν. Ἑπομένως ἂν μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 2400 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 5 καὶ 3, εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συντόμως ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{lccc} \text{α' δραχμ.} & 37 & & 5 \\ & & \searrow\quad\nearrow & \\ \text{τιμὴ μείγματος} & & 34 & \\ & & \swarrow\quad\searrow & \\ \text{β' δραχμ.} & 29 & & 3 \end{array}$$

$$\alpha' \ \frac{2400 \times 5}{8} = 1500 \text{ ὀκ.} \qquad \beta' \ \frac{2400 \times 3}{8} = 900 \text{ ὀκ.}$$

Παρατηρήσεις. Ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ προβλήματα ἀναμείξεως εἶναι δύο εἰδῶν:

1ον) Ἐκεῖνα, εἰς ἃ δίδονται ποσότητες πρὸς ἀνάμειξιν καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος αὐτῶν, ζητεῖται δὲ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μείγματος.

2ον) Ἐκεῖνα, εἰς ἃ δίδονται αἱ τιμαὶ τῆς μονάδος δύο διαφόρων πραγμάτων καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μείγματος, ζητεῖται δὲ πόσον θὰ λάβωμεν ἀπὸ κάθε εἶδος διὰ νὰ κάμωμεν μεῖγμα ὡρισμένον.

Σημειωτέον ὅμως, ὅτι καὶ εἰς τὰ δύο αὐτὰ εἴδη προβλημάτων ὑποτίθεται, ὅτι ἡ ἀνάμειξις γίνεται, χωρὶς νὰ προκύψῃ οὔτε κέρδος οὔτε ζημία. Οἱ ἔμποροι ὅμως εἰς τὴν μέσην αὐτὴν τιμὴν προσθέτουν ἓν κέρδος καὶ ἔχουν οὕτω τὴν μέσην τιμὴν τῆς πωλήσεως.

259. Εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἀναμείξεως ἀνάγονται καὶ τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ τίτλος τοῦ κράματος πολυτίμου τινὸς μετάλλου, π. χ. ἀργύρου ἢ χρυσοῦ μὲ ἄλλο τι μέταλλον. Λέγεται δὲ τίτλος τὸ ποσὸν τοῦ πολυτίμου μετάλλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς μίαν μονάδα κράματος. Οὕτως ὁ τίτλος τῶν χρυσῶν νομισμάτων εἶναι 0,900. Ἤτοι εἰς 1000 μέρη τὰ 900 εἶναι καθαρὸς χρυσὸς καὶ τὰ 100 εἶναι χαλκὸς ἢ ἄλλα μέταλλα. Ἐξ ἄλλου ἐὰν μᾶς εἴπουν, ὅτι εἰς ἓν ἀργυροῦν νόμισμα, τὸ ὁποῖον ζυγίζει 5 γραμμάρια, τὰ 4 γραμ. εἶναι καθαρὸς ἄργυρος, θὰ εἴπωμεν, ὅτι ὁ τίτλος αὐτοῦ εἶναι $\frac{4}{5}$ ἢ 0,800.

1ον) Π ρ ό β λ η μ α. **Εἷς ἔκαμε κρᾶμα ἀπὸ 150 γραμμάρια ἀργύρου τίτλου 0,950 καὶ ἀπὸ 50 γραμμάρια ἀργύρου τίτλου 0,750. Ποῖος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος;**

Τὰ 150 γρ. ἀργ. περιέχουν καθ. ἄργ. 0,950 × 150 = 142,50 γρ.
» 50 » » » » » 0,750 × 50 = 37,50 γρ.

Τὰ 200 γρ. τοῦ κράματος περιέχουν καθαρὸν ἄργ. 180 γρ.
ἄρα τὸ 1 γραμμ. περιέχει καθαρὸν ἄργυρον 180 : 200 = 0,900. Ὥστε ὁ τίτλος τοῦ κράματος θὰ εἶναι 0,900.

2ον) Π ρ ό β λ η μ α. **Εἷς ἔχει χρυσὸν τίτλου 0,965 καὶ ἄλλον τίτλου 0,870 θέλει δὲ ἐξ αὐτῶν νὰ κάμῃ κρᾶμα 380 γραμμαρίων τίτλου 0,920. Πόσα γραμμάρια θὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος;**

Ἀπὸ κάθε γραμμάριον τοῦ α΄ εἴδους, τὸ ὁποῖον θὰ εἰσέλθῃ εἰς τὸ κρᾶμα, θὰ ἔχῃ περίσσευμα 0,965 — 0,920 = 0,045 γραμμ. καθαροῦ χρυσοῦ, ἐνῷ ἀπὸ κάθε γραμμάριον τοῦ β΄ εἴδους θὰ τοῦ λείπουν 0,920 — 0,870 = 0,050 γραμμάρια καθαροῦ χρυσοῦ. Ἂν λάβῃ λοιπὸν ἀπὸ τὸ α΄ 50 γραμμ. θὰ ἔχῃ περίσσευμα 0,045 × 50 γραμμ. καθ. χρυσοῦ, καὶ ἂν λάβῃ ἀπὸ τὸ β΄ 45 γραμμ. θὰ τοῦ λείπουν 0,050 × 45 καθ. χρυσ. Ἑπομένως οὔτε περίσσευμα, οὔτε ἔλλειμμα θὰ ἔχῃ. Ἀλλὰ τότε θὰ κάμῃ κρᾶμα 95 γραμμαρίων, καὶ διὰ νὰ κάμῃ κρᾶμα 380 γραμ. θὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ

$$\text{α΄}\quad 50 \times \frac{380}{95} = 200 \text{ γραμμ., καὶ ἀπὸ τὸ}$$

$$\text{β΄}\quad 45 \times \frac{380}{95} = 180 \text{ γραμμ.}$$

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον μερίζοντες τὸν 380 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 50 καὶ 45 ἢ 10 καὶ 9 (258 σημ.).

Δ ι ά τ α ξ ι ς τ ῆ ς π ρ ά ξ ε ω ς

$$\begin{array}{lcr} \text{α΄ } 0{,}965 & & 50 \text{ ἢ } 10 \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ \text{τίτλ. κρ.} & 0{,}920 & \\ & \nearrow \quad \searrow & \\ \text{β΄ } 0{,}870 & & 45 \text{ ἢ } \frac{9}{19} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{α΄}\quad \dfrac{380 \times 10}{19} = 200 \text{ γραμμάρια} \\[2ex] \text{β΄}\quad \dfrac{380 \times 9}{19} = 180 \text{ γραμμάρια.} \end{array}$$

Προβλήματα.

Ὁμὰς Α΄

957) Εἷς ἀνέμειξε 290 ὀκάδας οἴνου τῶν 10 δραχμῶν τὴν ὀκᾶν μὲ 80 ὀκάδας οἴνου τῶν 8 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ μὲ ἄλλας 80 ὀκάδας οἴνου τῶν 7,50 δραχμ. τὴν ὀκᾶν. Ποία εἶναι ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς τοῦ μείγματος;

958) Ἀνέμειξεν εἷς 200 ὀκάδας οἴνου τῶν 10 δραχμ. τὴν ὀκᾶν μὲ 100 ὀκάδας οἴνου τῶν 7 δραχμῶν τὴν ὀκᾶν καὶ μὲ ἄλλας 60 ὀκάδας ὕδατος. Πόσον ἀξίζει ἡ μία ὀκᾶ τοῦ μείγματος καὶ πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν 1 ὀκᾶν αὐτοῦ, ἂν θέλῃ νὰ κερδίζῃ 70 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν;

959) Ἀνέμειξεν εἷς 125 ὀκάδας ἐλαίου τῶν 48 δραχμῶν τὴν ὀκᾶν μὲ $62\frac{1}{2}$ ὀκάδας ἐλαίου τῶν 42 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Νὰ εὕρῃς α) πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος καὶ β) πόσον ἀξίζουν αἱ 85 ὀκάδες τοῦ μείγματος.

960) Ἀνέμειξεν εἷς 300 ὀκάδας οἴνου τῶν 9,60 δραχμῶν τὴν ὀκᾶν μὲ 220 ὀκάδας οἴνου τῶν 7 δραχμῶν τὴν ὀκᾶν. Νὰ εὕρῃς α) πόσον ἀξίζουν αἱ 40 ὀκάδες τοῦ μείγματος καὶ β) πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὸ μεῖγμα τὴν ὀκᾶν διὰ νὰ κερδίζῃ 10 °/₀ ἐπὶ τῆς ἀξίας.

961) Εἶχεν εἷς 300 ὀκάδας ἐλαίου τῶν 40 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ 420 ὀκάδας ἐλαίου τῶν 30 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Ἔλαβε τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν ὀκάδων τῆς πρώτης ποιότητος καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν ὀκάδ. τῆς δευτέρας. Νὰ εὕρῃς α) πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος καὶ β) πόσον πρέπει νὰ τὸ πωλῇ τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ κερδίσῃ ἀπὸ τὸ ὅλον μεῖγμα 1200 δραχμάς.

962) Ἀνέμειξεν εἷς 37 ὀκάδας βουτύρου τῶν 95 δραχμῶν τὴν ὀκᾶν μὲ διπλασίαν ποσότητα λίπους τῶν 35 δραχμ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος;

963) Ἀνέμειξεν εἷς 150 ὀκ. ἐλαίου τῶν 50 δρχ. τὴν ὀκᾶν μὲ 250 ὀκ. ἐλαίου δευτέρας ποιότητος, τὴν ἀξίαν τοῦ ὁποίου

δὲν γνωρίζομεν. Γνωρίζομεν ὅμως, ὅτι ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος αὐτοῦ ἀξίζει 45 δραχμάς. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τῆς δευτέρας ποιότητος ;

964) Ἀνέμειξεν εἰς 160 ὀκάδας βουτύρου τῶν 100 δραχμῶν τὴν ὀκᾶν μὲ 25 % τοῦ βάρους του λῖπος καὶ ἔκαμε μεῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἤξιζε 90 δραχμάς. Πόσον ἤξιζεν ἡ ὀκᾶ τοῦ λίπους ;

965) Ἀνέμειξεν εἰς 20 ὀκάδας βουτύρου τῶν 120 δρχ. τὴν ὀκᾶν μὲ διπλασίαν ποσότητα βουτύρου τῶν 105 δραχμῶν τὴν ὀκᾶν καὶ μὲ 50 ὀκάδας λίπους. Ἔκαμε δὲ μεῖγμα ἀξίας 85 δραχμῶν τὴν ὀκᾶν. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ λίπους ;

966) Ἀνέμειξεν εἰς 100 ὀκάδ. οἴνου τῶν 14 δραχ. τὴν ὀκᾶν μὲ τριπλασίαν ποσότητα οἴνου τῶν 12,50 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ μὲ οἶνον, τοῦ ὁποίου ἡ ποσότης εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ποσότητος τῶν δύο ἄλλων ποιοτήτων ὁμοῦ. Ἔλαβε δὲ μεῖγμα ἀξίας 11,50 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον ἤξιζεν ἡ ὀκᾶ τοῦ οἴνου τῆς τρίτης ποιότητος ;

Ὁ μ ὰ ς Β΄

967) Εἷς ἔχει 50 ὀκάδας οἰνοπνεύματος τῶν 80° (βαθμῶν). Πόσας ὀκάδας καθαρὸν οἰνόπνευμα περιέχουν αἱ 50 αὐταὶ ὀκάδες ;

968) Ἀνέμειξεν εἰς 50 ὀκάδας οἰνοπνεύματος τῶν 50° μὲ 550 ὀκάδας οἰνοπνεύματος τῶν 30°. Ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ μείγματος ;

969) Ἀνέμειξεν εἰς 36 ὀκάδας καθαροῦ οἰνοπνεύματος (100°) μὲ 164 ὀκ. ὕδατος (0°). Ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ μείγματος ;

970) Ἔχει τις 80 δράμια χρυσοῦ τίτλου 0,800. Πόσα δράμια καθαροῦ χρυσοῦ περιέχουν τὰ 80 αὐτὰ δράμια ;

971) Εἷς χρυσοχόος κατεσκεύασεν ἓν κόσμημα μὲ 35 δράμια ἀργύρου τίτλου 0,900 καὶ μὲ 40 δράμια ἀργύρου τίτλου 0,750. Ποῖος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος ;

972) Μία πλὰξ χρυσῆ ἔγινε μὲ 24 δράμια καθαροῦ χρυσοῦ (τίτλου 1,000) καὶ μὲ 6 δράμια χαλκοῦ (τίτλου 0). Ποῖος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος ;

'Ο μ ὰ ς Γ΄

973) Ἀπὸ δύο ποιότητας οἴνου ἡ μία ὀκᾶ τῆς πρώτης ἀξίζει 10 δραχ. καὶ ἡ μία ὀκᾶ τῆς δευτέρας ἀξίζει 6 δρχ. Θέλει δὲ εἷς νὰ κάμῃ ἀπὸ αὐτὰς μεῖγμα 1600 ὀκ., τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 7 δρχ. Πόσας ὀκάδας θὰ βάλῃ ἀπὸ τὴν πρώτην ποιότητα καὶ πόσας ἀπὸ τὴν δευτέραν ;

974) Εἷς ἔχει δύο ποιότητας οἴνου. Τῆς πρώτης ποιότητος ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 9,50 δρχ. καὶ τῆς δευτέρας 6,50. Θέλει νὰ κάμῃ μεῖγμα 1200 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 8,50 δραχμ. Πόσας ὀκάδας θὰ βάλῃ ἀπὸ τὴν πρώτην ποιότητα καὶ πόσας ἀπὸ τὴν δευτέραν ;

975) Θέλει τις νὰ ἀναμείξῃ 60 ὀκ. βούτυρον τῶν 100 δρχ. τὴν ὀκᾶν, μὲ λῖπος τῶν 50 δρχ. τὴν ὀκᾶν, ἀλλὰ τὸ μεῖγμα νὰ ἔχῃ ἀξίαν 80 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας λῖπος θὰ ἀναμείξῃ;

976) Θέλει τις νὰ ἀναμείξῃ 20 ὀκ. καφὲ τῶν 100 δρχ. τὴν ὀκᾶν μὲ κριθὴν τῶν 6 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Τὸ μεῖγμα δὲ ποὺ θὰ γίνῃ, νὰ ἀξίζῃ 86 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας κριθῆς θὰ ἀναμείξῃ ;

977) Ἔχει τις οἰνόπνευμα 70° καὶ 20°, θέλει δὲ ἀπ' αὐτὰ νὰ κάμῃ μεῖγμα 150 ὀκάδων 30°. Πόσας ὀκάδας θὰ βάλῃ ἀπὸ τὸ πρῶτον καὶ πόσας ὀκάδας ἀπὸ τὸ δεύτερον ;

978) Θέλει τις εἰς 50 ὀκάδας καθαροῦ οἰνοπνεύματος νὰ ρίψῃ ὕδωρ. Ἀλλὰ τὸ μεῖγμα ποὺ θὰ κάμῃ νὰ εἶναι 20°. Πόσας ὀκάδας ὕδατος θὰ ρίψῃ εἰς τὸ οἰνόπνευμα αὐτό ;

979) Ἔχει τις χρυσὸν τίτλου 0,900 καὶ ἄλλον χρυσὸν τίτλου 0,700. Ἀπ' αὐτὰ δὲ τὰ εἴδη θέλει νὰ κάμῃ κρᾶμα 300 γραμμαρ. τίτλου 0,850. Πόσα γραμμάρια θὰ βάλῃ ἀπὸ κάθε εἶδος ;

980) Ἔχει τις 80 δράμ. καθαρ. χρυσοῦ καὶ θέλει μὲ αὐτὰ καὶ μὲ χαλκὸν νὰ κάμῃ κρᾶμα τίτλου 0,900. Πόσον χαλκὸν θὰ χρειασθῇ ;

981) Δύο κράματα ἐκ χρυσοῦ καὶ χαλκοῦ ἔχουν τίτλους τὸ μὲν 0,840, τὸ δὲ 0,750. Ἀμφότερα ζυγίζουν 1881 γραμμάρια καὶ περιέχουν 376,20 γραμμάρια χαλκοῦ. Ποῖον εἶναι τὸ βάρος τοῦ χρυσοῦ ;

ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

260. Μεταβλητὰ καὶ σταθερὰ ποσά.—1) Εἰς τὸ δωμάτιόν μου ἔχω ἕνα λαμπτῆρα τῶν 40 κηρίων. Ἡ δὲ τιμὴ τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος, ποὺ ἐξοδεύω, εἶναι πάντοτε 11,50 δραχμὰς δι' ἕνα κιλοβάττ. Ἀλλ' ἐνῷ τὸ μέγεθος τοῦ λαμπτῆρος εἶναι **σταθερὸν** ὡς καὶ ἡ τιμὴ τοῦ 1 κιλοβὰττ εἶναι σταθερά, τὸ ποσὸν τοῦ ἠλεκτρικοῦ, ποὺ καίω καθ' ἡμέραν, δὲν εἶναι ἐν γένει σταθερόν. Τὰς νύκτας π.χ. τοῦ χειμῶνος καίω περισσότερον ἠλεκτρικὸν φῶς καὶ τὰς νύκτας τοῦ θέρους ὀλιγώτερον. Εἶναι δηλ. τὸ ποσὸν τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος, ποὺ καίω καθ' ἡμέραν, **μεταβλητόν.** Ἐπομένως **μεταβλητὴ** εἶναι καὶ ἡ δαπάνη διὰ τὸ φῶς, ποὺ καίω καθ' ἡμέραν.

2) Ἓν αὐτοκίνητον συγκοινωνίας εἶναι ἐπὶ τῆς γραμμῆς Ἀθηνῶν—Χαλκίδος. Τὸ διάστημα λοιπόν, ποὺ διανύει τὸ αὐτοκίνητον, ὅταν ἀναχωρῇ ἐκ τοῦ σταθμοῦ Ἀθηνῶν καὶ φθάνῃ εἰς τὸν σταθμὸν Χαλκίδος (ἢ καὶ τἀνάπαλιν), εἶναι σταθερόν. Ὁ χρόνος ὅμως, ποὺ διαρκεῖ τὸ ταξίδιον αὐτό, δὲν εἶναι πάντοτε ὁ ἴδιος. Διότι, ἐὰν αὐξηθῇ ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου, θὰ φθάσῃ τοῦτο εἰς τὸ τέρμα ἐνωρίτερον, ἐνῷ, ἐὰν ἐλαττωθῇ, θὰ φθάσῃ ἀργότερον. Εἶναι λοιπὸν ὁ χρόνος τοῦ ταξιδίου αὐτοῦ μεταβλητός.

3) Γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν οἱουδήποτε τριγώνου εἶναι πάντοτε 180 μοῖραι. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τοῦτο εἶναι σταθερόν. Τὸ ἐμβαδὸν ὅμως τοῦ τριγώνου δὲν εἶναι τὸ ἴδιον εἰς ὅλα τὰ τρίγωνα. Ἐὰν δὲ ἑνὸς τριγώνου μεταβάλωμεν τὴν βάσιν, μεταβάλλεται καὶ τὸ ἐμβαδόν, ἐνῷ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του μένει ἀμετάβλητον. Εἶναι λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἷς ἀριθμὸς μεταβλητός.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν παραδείγματα συνάγομεν, ὅτι ἀπὸ τὰ διάφορα ποσά, ἄλλα εἶναι σταθερὰ καὶ ἄλλα μεταβλητά. Γενικῶς δὲ **μεταβλητὸν ποσὸν λέγεται τὸ ποσὸν ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον λαμβάνει διαφόρους τιμὰς ἢ καταστάσεις.**

Μεταβλητὰ ποσὰ εἶναι ἐπίσης τὸ ἀνάστημα τοῦ παιδίου, ὁ πυρετὸς τοῦ ἀσθενοῦς, αἱ τιμαὶ τῶν διαφόρων εἰδῶν τροφῆς, ἐνδυμασίας κτλ.

Σταθερὸν δὲ ποσὸν εἶναι π. χ. τὸ ἀνάστημα ἑνὸς ὡρίμου ἀνδρός, ἡ διαφορὰ τῆς ἡλικίας δύο ἀδελφῶν κτλ.

261. Έννοια τῆς συναρτήσεως. — Εἴδομεν ἀνωτέρω εἰς τὸ 1ον π.δ., ὅτι ἡ δαπάνη διὰ τὸ ἠλεκτρικὸν φῶς, ποὺ καίω, εἶναι μεταβλητή. Εἶναι δὲ αὕτη μεγαλυτέρα, ὅταν καίω τὸ φῶς ἐπὶ περισσότερον χρόνον καὶ μικροτέρα, ὅταν τὸ καίω ἐπὶ χρόνον ὀλιγώτερον. Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι ἡ δαπάνη αὕτη ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν χρόνον. Δι᾿ ὃ λέγομεν, ὅτι τὸ μεταβλητὸν αὐτὸ ποσὸν εἶναι **συνάρτησις** τοῦ χρόνου.

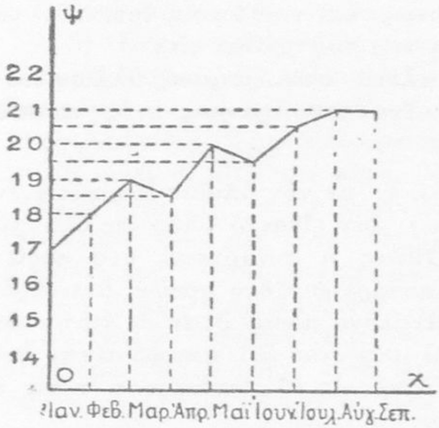
Ἐπίσης εἰς τὸ 2ον π.δ. εἴδομεν, ὅτι ὁ χρόνος τοῦ ταξιδίου ἀπ᾿ Ἀθηνῶν εἰς Χαλκίδα εἶναι μεταβλητός. Ἐξαρτᾶται δὲ ἀπὸ τὴν ταχύτητα τοῦ αὐτοκινήτου· δι᾿ ὃ λέγομεν, ὅτι ὁ χρόνος αὐτὸς εἶναι συνάρτησις τῆς ταχύτητος. Ὁμοίως βλέπομεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι συνάρτησις τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους του, ὅτι τὸ ἀνάστημα τοῦ παιδίου εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου κτλ.

Ὥστε: **Τὰ μεταβλητὰ ποσὰ εἶναι συναρτήσεις ἄλλων ποσῶν. Δύναται δὲ ἓν ποσὸν νὰ εἶναι συνάρτησις ἑνὸς ποσοῦ ἢ καὶ περισσοτέρων.**

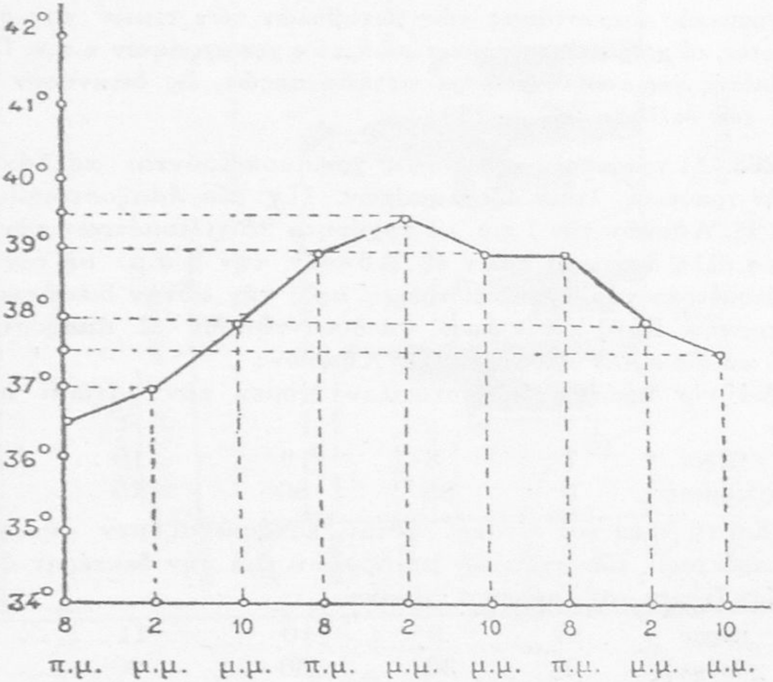
Παρατηρήσεις. Ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον ἐξαρτᾶται ἓν ποσὸν ἀπὸ τὸ ἄλλο (ὅταν ἐξαρτᾶται), δὲν εἶναι ὁ ἴδιος εἰς ὅλα τὰ ἐξαρτώμενα ἀπ᾿ ἀλλήλων ποσά. Οὕτως ἡ συνάρτησις δύο ποσῶν ἀναλόγων εἶναι διάφορος ἀπὸ τὴν συνάρτησιν δύο ποσῶν ἀντιστρόφων. Διότι, ὅπως εἴδομεν εἰς τὰ ἀνάλογα ποσά, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ π.χ. διπλασιάζεται, διπλασιάζεται καὶ ἡ πρὸς αὐτὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ. Ἐνῷ εἰς τὰ ἀντίστροφα ποσὰ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ διαιρεῖται διὰ δύο.

Ἐπίσης βλέπομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις τοῦ ἀναστήματος τοῦ παιδίου εἶναι διάφορος ἀπὸ τὰς προηγουμένας. Διότι καὶ ἐδῶ αὐξάνει τὸ ἀνάστημα, ὅταν ἡ ἡλικία αὐξάνῃ. Ἡ αὔξησις ὅμως τοῦ ἀναστήματος δὲν εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸν χρόνον.

262. Γραφικαὶ παραστάσεις.—Ὅσοι ἀσχολοῦνται εἰς διαφόρους ἐπιχειρήσεις, ἐμπορικάς, βιομηχανικὰς κτλ., παρακολουθοῦν τὰς μεταβολὰς τῶν τιμῶν τῶν εἰδῶν, μὲ τὰ ὁποῖα ἀσχολοῦνται, διὰ νὰ ἐξαγάγουν ὠφελίμους προβλέψεις. Οὕτω π. χ. ὁ ἔμπορος ζαχάρεως παρατηρεῖ εἰς ποῖον μῆνα ἑνὸς ἔτους ἡ μέση μηνιαία τιμὴ αὐτῆς κατ᾿ ὀκᾶν εἶναι μεγαλυτέρα ἢ μικροτέρα. Ἐὰν δὲ ἔχῃ ὑπ᾿ ὄψει τοιαύτας παρατηρήσεις μερικῶν ἐτῶν, εἶναι πιθανὸν νὰ εὕρῃ σχέσεις τινὰς μεταξὺ ἐποχῆς καὶ τιμῆς καὶ νὰ κανονίσῃ οὕτω τὰς ἀγορὰς καὶ τὰς πωλήσεις αὐτοῦ. Καταγράφει λοιπὸν τὰς διαφόρους τιμὰς εἰς ἕνα πίνακα καὶ παρακολουθεῖ αὐτάς. Ἐξ ἄλλου ὁ ἰατρός, ὅστις θεραπεύει ἕνα ἀσθενῆ, πρέπει νὰ παρακολουθήσῃ μεταξὺ ἄλλων καὶ τὰς μεταβολὰς τοῦ πυρετοῦ τοῦ ἀσθενοῦς, διὰ νὰ κάμῃ τὴν πρέπουσαν διάγνωσιν τῆς ἀσθενείας. Καταγράφονται λοιπὸν αἱ παρατηρήσεις ἐπὶ τοῦ πυρετοῦ εἰς ἕνα πίνακα, ὁ ὁποῖος τίθεται ὑπ' ὄψει τοῦ ἰατροῦ κατὰ τὴν ἐπίσκεψίν του εἰς τὸν ἀσθενῆ. Ἀλλὰ καὶ ὁ ἔμπορος καὶ ὁ ἰατρὸς θὰ παρακολουθοῦν εὐκολώτερον τὰς μεταβολὰς τῶν ποσῶν, διὰ τὰ ὁποῖα ἐνδιαφέρονται, ἐὰν εἶχον ὑπ' ὄψει τὰς **γραφικὰς παραστάσεις** τῶν ἐν λόγῳ μεταβολῶν. Πρὸς τοῦτο, ὁ ἔμπορος π.χ. τῆς ζαχάρεως, ἐργάζεται ὡς ἑξῆς :



Λαμβάνει δύο εὐθείας ΟΧ καὶ ΟΨ καθέτους πρὸς ἀλλήλας, καὶ ἑκάστην τούτων διαιρεῖ εἰς τμήματα ἴσα. Εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου τμήματος τῆς ὁριζοντίου εὐθείας ΟΧ σημειώνει διαδοχικῶς τοὺς μῆνας Ἰανουάριον, Φεβρουάριον, Μάρτιον κτλ. Ὁμοίως, εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου τμήματος τῆς ἄλλης εὐθείας ΟΨ, σημειώνει διαδοχικῶς τοὺς ἀριθμοὺς 14, 15, 16, 17, 18, 19 (δηλ. τὰς πιθανὰς τιμὰς τῆς μιᾶς ὀκᾶς ζαχάρεως εἰς δραχμάς, ὅπως δεικνύει τὸ παρακείμενον σχῆμα. Κατόπιν, ἐὰν π.χ. τὸν Φεβρουάριον μῆνα ἡ μέση τιμὴ τῆς 1 ὀκᾶς ζαχάρεως ἦτο 18 δραχμάς, φέρει ἐκ μὲν τοῦ σημείου, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι σημειωμένος ὁ Φεβρουάριος, παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΟΨ, ἐκ δὲ τοῦ σημείου, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι σημειωμένος ὁ ἀριθμὸς 18, εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ΟΧ. Αἱ δύο αὗται παράλληλοι τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Α. Τὸ σημεῖον λοιπὸν Α διὰ πάντα, ὅστις θὰ παρακολουθήσῃ τὰς εὐθείας, αἵτινες τέμνονται εἰς αὐτό, δεικνύει, ὅτι κατὰ τὸν μῆνα Φεβρουάριον ἡ μέση τιμὴ τῆς ζαχάρεως ἦτο 18 δραχ. κατ᾽ ὀκᾶν. Ὁμοίως ἐργαζόμενος λαμβάνει διὰ τὴν μέσην τιμὴν τῶν 19 δραχ. τῆς μιᾶς ὀκᾶς ζαχάρεως κατὰ τὸν μῆνα Μάρτιον τὸ σημεῖον Β. Ἐξακολουθεῖ δὲ οὕτω λαμβάνων τὰ σημεῖα Γ, Δ κτλ. διὰ τὰς μέσας τιμάς, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς ἄλλους μῆνας. Ἐὰν τώρα ἑνώσῃ δι᾽ εὐθειῶν γραμμῶν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ κτλ. θὰ λάβῃ μίαν τεθλασμένην γραμμήν, ἥτις λέγεται γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τῶν μέσων μηνιαίων τιμῶν τῆς ζαχάρεως κατὰ τὸ διάστημα ἑνὸς ἔτους. Ἐὰν δέ τις ρίψῃ ἓν μόνον βλέμμα ἐπ᾽ αὐτῆς, ἀντιλαμβάνεται ἀμέσως τὴν πορείαν τῶν μεταβολῶν τούτων.



Μὲ ὅμοιον τρόπον ἔγινε καὶ ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τοῦ πυρετοῦ ἑνὸς ἀσθενοῦς, ἡ ὁποία φαίνεται εἰς τὸ ἀνωτέρω σχῆμα.

Μὲ ὅμοιον ἐπίσης τρόπον ἔγινε καὶ ἡ διπλῆ γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀνέργων κατὰ τοὺς μῆνας Σεπτέμβριον, Ὀκτώβριον καὶ Νοέμβριον τῶν ἐτῶν 1935 καὶ 1936, ἡ ὁποία φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα τῆς σελίδος 285. Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν ἠμποροῦμεν νὰ κάμωμεν εὐκολώτερα σχετικὴν σύγκρισιν. Οὕτω βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι οἱ ἄνεργοι κατὰ τὸν Νοέμβριον τοῦ 1935 ἦσαν 125000, ἐνῷ τὸν ἴδιον μῆνα τοῦ 1936 ἦσαν μόνον 80000. Ὁμοίως ἔγινε καὶ ἡ παράστασις τῶν μεταβολῶν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν νοσηλευομένων κατὰ τὰ ἔτη 1933—1938 εἰς τὸ Νοσοκομεῖον Παίδων Βούλας τοῦ Πατριωτικοῦ Ἱδρύματος, ὡς καὶ τῶν ἡμερῶν νοσηλείας αὐτῶν, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα τῆς σελίδος 286.

Κατὰ τὸν αὐτὸν ἐπίσης τρόπον κατασκευάζουν αἱ Τράπεζαι τὰς γραφικὰς παραστάσεις τῶν μεταβολῶν τῶν τιμῶν τοῦ συναλλάγματος, οἱ χρηματισταὶ τῶν τιμῶν τῶν χρεωγράφων κ.ο.κ. Γραφικῶς ἐπίσης παριστοῦν διάφορα μεγέθη ποσῶν, ὡς δεικνύουν αἱ εἰκόνες τῶν σελίδων 287 — 289.

263. Αἱ γραφικαὶ παραστάσεις χρησιμοποιοῦνται πολλάκις καὶ εἰς τὴν γραφικὴν λύσιν προβλημάτων. Π.χ. μία ἁμαξοστοιχία ἀναχωρεῖ ἐξ Ἀθηνῶν τὴν 7 π.μ. μὲ ταχύτητα 25 χιλιομέτρων τὴν ὥραν καὶ μία ἄλλη ἀναχωρεῖ πάλιν ἐξ Ἀθηνῶν τὴν 8 π.μ. μὲ ταχύτητα 30 χιλιομέτρων τὴν ὥραν καὶ τρέχει πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν μὲ τὴν πρώτην. Κατὰ ποίαν ὥραν θὰ συναντηθοῦν αἱ ἁμαξοστοιχίαι αὗται καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἐξ Ἀθηνῶν;

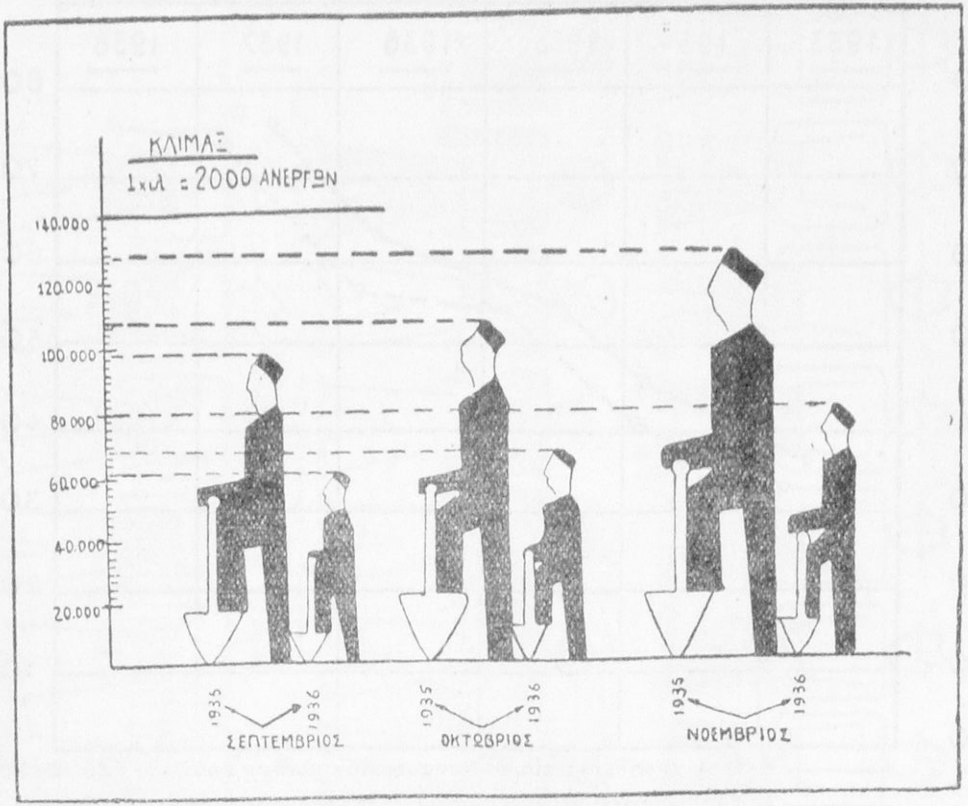
Διὰ τὴν πρώτην ἁμαξοστοιχίαν ἔχομεν τὸν κάτωθι πίνακα τιμῶν

Ὧραι	7	8	9	10 . . . . .
χιλιόμετρ.	0	25	50	75 . . . . .

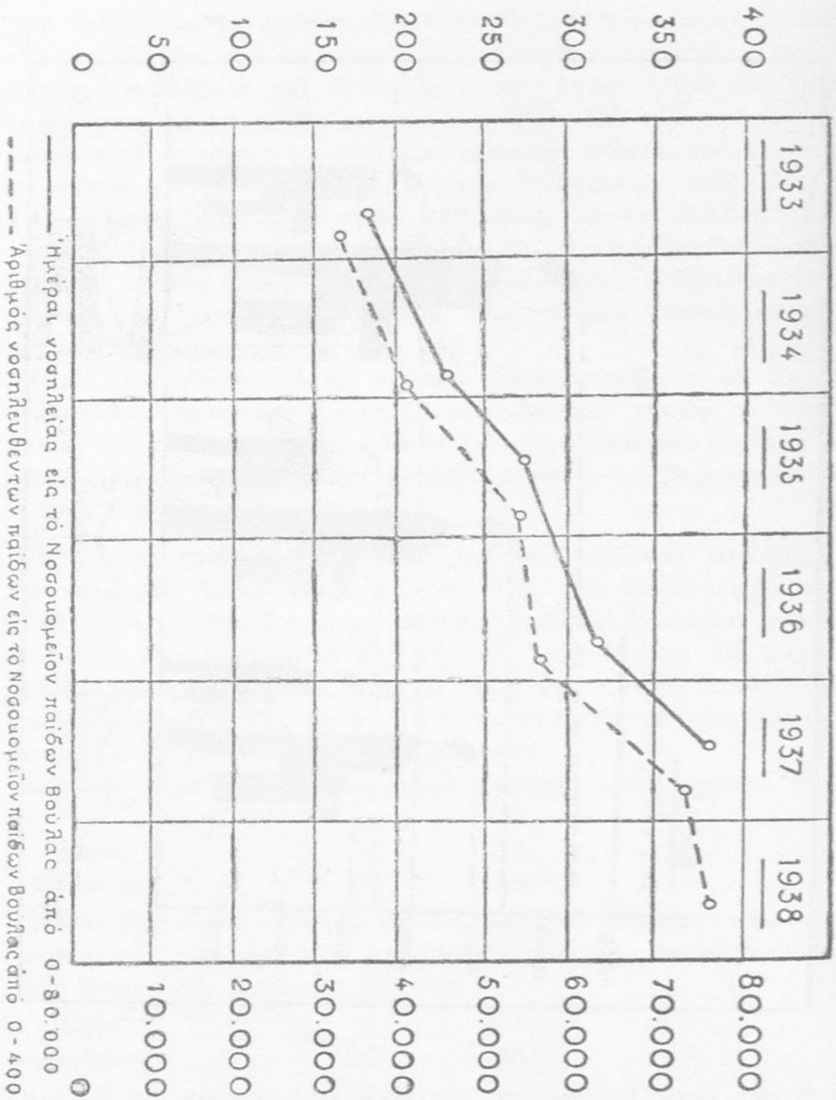
Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ πίνακος αὐτοῦ κατασκευάζομεν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῶν σχετικῶν μεταβολῶν. Διὰ τὴν δευτέραν ἁμαξοστοιχίαν ἔχομεν τὸν ἑπόμενον πίνακα

Ὧραι	8	9	10	11 . . . . .
χιλιόμετρ.	0	30	60	90 . . . . .

Καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου διαγράμματος κατασκευάζομεν τὴν δευτέραν γραφικὴν παράστασιν, ἡ ὁποία θὰ τέμνῃ τὴν πρώτην εἰς ἓν γραφικὸν σημεῖον, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα τῆς σελίδος 289.

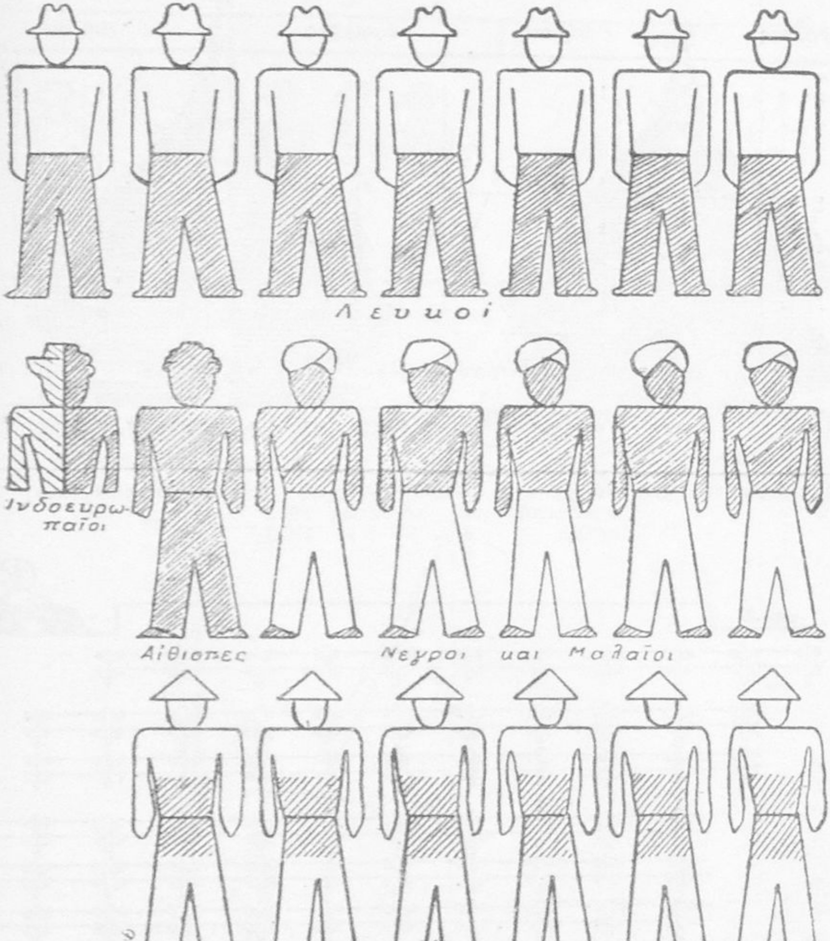


Σύγκρισις ἀνέργων κατὰ τὸ τρίμηνον Σεπτεμβρίου—Νοεμβρίου τοῦ 1935 καὶ τοῦ 1936.

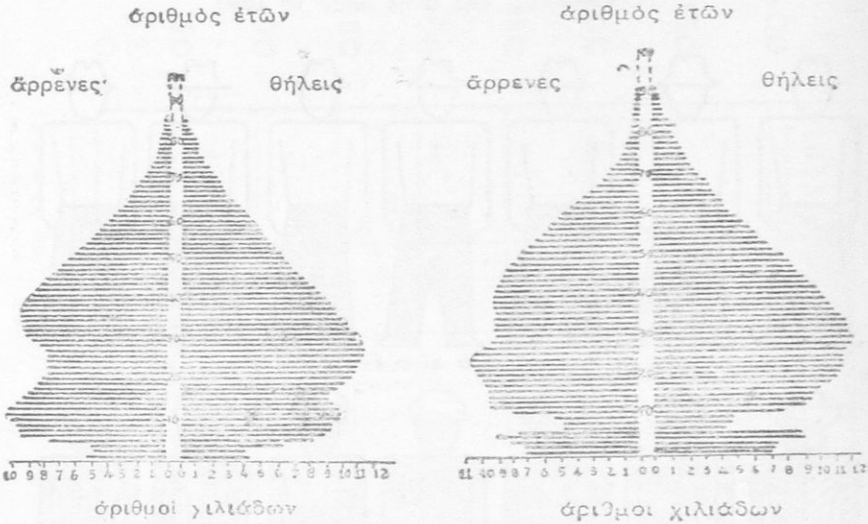


400
350
300
250
200
150
100
50
0
1933
1934
1935
1936
1937
1938
80.000
70.000
60.000
50.000
40.000
30.000
20.000
10.000
0
Ἡμέραι νοσηλείας εἰς τό Νοσοκομεῖον παίδων Βούλας ἀπό 0-80.000
Ἀριθμός νοσηλευθέντων παίδων εἰς τό Νοσοκομεῖον παίδων Βούλας ἀπό 0-400

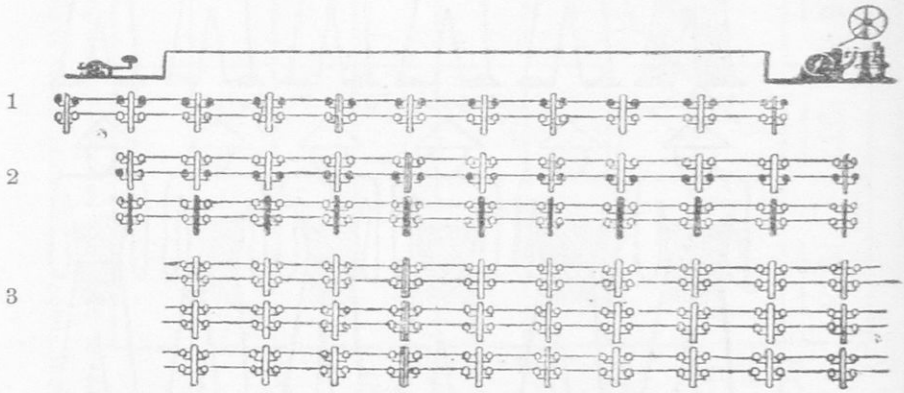
Πληθυσμὸς τῆς Γῆς κατὰ τὸ 1930



Ἑκάστη εἰκὼν παριστᾷ 100.000.000 κατοίκων.

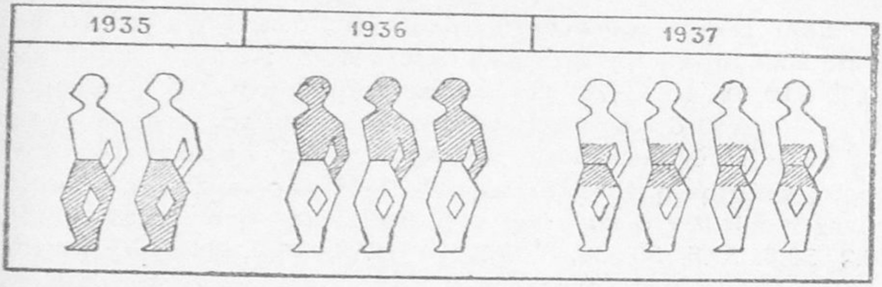


Σύνθεσις τοῦ πληθυσμοῦ τῆς πόλεως Ἀθηνῶν (κατὰ προσέγγισιν)
ἀριστερὰ κατὰ τὸ ἔτος 1922
δεξιὰ » » » 1928



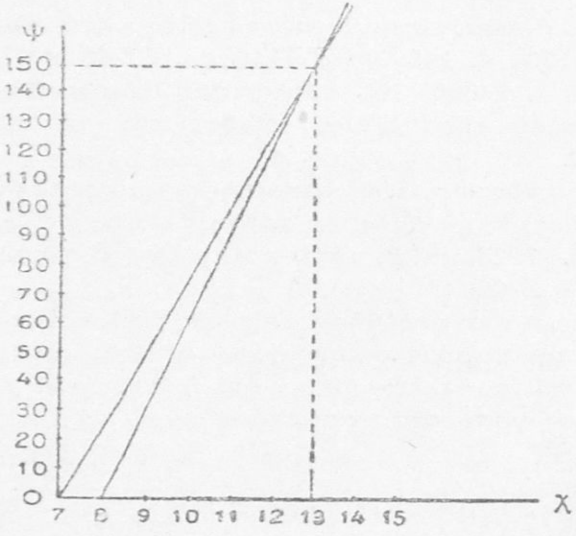
1) Ἕκαστος στῦλος τῆς ἄνω ὁριζοντίας γραμμῆς παριστᾷ 1000 χιλιόμετρα τῶν τηλεγραφικῶν γραμμῶν τῆς Ἑλλάδος (κατὰ τὸ ἔτος 1936).
2) Ἕκαστος στῦλος τῶν δύο ἑπομένων γραμμῶν παριστᾷ 1000 χιλιόμετρα μήκους τηλεγραφικῶν συρμάτων.
3) Ἕκαστος στῦλος τῶν τριῶν κατωτέρω γραμμῶν παριστᾷ 150000 διαβιβασθέντα τηλεγραφήματα κατὰ τὸ 1936.

Νοσολογικὴ κίνησις
εἰς τὰ λαϊκὰ ἰατρεῖα τοῦ Δήμου Ἀθηναίων κατὰ τὰ ἔτη



Ἑκάστη εἰκὼν ἀνθρώπου παριστᾷ 30000 νοσηλευθέντας.

Ἐὰν τώρα φέρωμεν ἐκ τοῦ σημείου αὐτοῦ καθέτους πρὸς τὰς εὐθείας ΟΧ καὶ ΟΨ καὶ μετρήσωμεν τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ εὐθεῖαι τέμνονται ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν καθέτων



ἀπὸ τοῦ Ο, θὰ ἔχωμεν τοὺς ζητουμένους ἀριθμούς. Οὕτως εὑρίσκομεν, ὅτι θὰ συναντηθοῦν τὴν 13 ὥραν (1 μ. μ.) καὶ εἰς ἀπόστασιν 150 χιλιομέτρων ἀπὸ τῶν Ἀθηνῶν.

Ἀσκήσεις.

982) Ἡ τιμὴ τοῦ λευκοῦ ἄρτου κατ' ὀκᾶν ἦτο ἐπὶ 10 συνεχεῖς ἑβδομάδας κατὰ σειρὰν 9,40 9,80 9 9,80 9,60 9,90 10,20 10,10 10 9,70. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τῶν τιμῶν τοῦ ἄρτου κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο.

983) Ἡ θερμοκρασία ἀσθενοῦς τινος λαμβάνεται τρεῖς φορὰς ἑκάστην ἡμέραν. Κατὰ τὰς 9 δὲ θερμομετρήσεις τριῶν συνεχῶν ἡμερῶν ὁ πυρετὸς τοῦ ἀσθενοῦς ἦτο κατὰ σειρὰν 38,2 38,8 39,5 39 38,4 39,2 38 37,6 36,4. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τοῦ πυρετοῦ τοῦ ἀσθενοῦς τούτου.

984) Αἱ μέσαι ἑβδομαδιαῖαι τιμαὶ τῶν ἀνταλλαξίμων 8 % ἦσαν 725, 732, 738, 750, 758, 751, 747, 730, 715, 700, 770, 778, 770, 765. Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ μεταβολαὶ αὗται.

985) Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως ἦτο κατὰ τὸ 1890 κάτοικ. 12000, τὸ 1900 κ. 14800, τὸ 1910 κ. 16000, τὸ 1920 κ. 19000 καὶ τὸ 1930 κ. 24000. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τοῦ πληθυσμοῦ τῆς πόλεως αὐτῆς κατὰ τὸ διάστημα ἀπὸ 1890—1930.

986) Ἐκ τῆς ὡς ἄνω γραφικῆς παραστάσεως νὰ εὑρεθῇ α) ὁ (πιθανὸς) πληθυσμὸς τῆς πόλεως αὐτῆς κατὰ τὰ ἔτη 1905, 1914, 1922, 1928, καὶ β) κατὰ ποῖον ἔτος ὁ πληθυσμὸς αὐτῆς ἦτο 13400 ἢ 22000;

987) Νὰ παρακολουθήσῃς εἰς τὰς ἐφημερίδας τὴν θερμοκρασίαν ἢ τὴν βαρομετρικὴν πίεσιν ἢ τὰς τιμὰς τῶν χρεωγράφων ἢ τοῦ συναλλάγματος ἐπὶ ἡμέρας καὶ νὰ κάμῃς τὰς ἀντιστοίχους γραφικὰς παραστάσεις.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

264. Αον) **Ἰδιότητες τῆς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.**

Εἴδομεν εἰς τὴν παράγρ. 9, ὅτι, ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι πρὸς τρίτον, θὰ εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσοι, ἤτοι, ἐὰν $\alpha=\beta$ καὶ $\alpha=\gamma$ θὰ εἶναι καὶ $\beta=\gamma$. Ἄλλαι ἰδιότητες τῆς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος εἶναι αἱ ἑξῆς :

1) Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἰσότητος δύο ἀριθμῶν εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν $\alpha=\beta$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha+1=\beta+1$. Ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ $\alpha+1+1=\beta+1+1$. Ἤτοι $\alpha+2=\beta+2$ καὶ $\alpha+3=\beta+3$. Καὶ γενικῶς $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$.

Ὥστε: **Ἐὰν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι.**

2) Ἔστω ὅτι εἶναι $\alpha=\beta$ καὶ $\gamma=\delta$.

Ἀφοῦ λοιπὸν εἶναι $\alpha=\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$
καὶ ἀφοῦ » $\gamma=\delta$, » » $\beta+\gamma=\beta+\delta$.

Ἄρα εἶναι καὶ $\alpha+\gamma=\beta+\delta$. Ὥστε, ἐὰν $\alpha=\beta$ καὶ $\gamma=\delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\gamma=\beta+\delta$. Ἤτοι: **Ἐὰν προσθέσωμεν ἰσότητας κατὰ μέλη, τὰ προκύπτοντα ἀθροίσματα εἶναι ἴσα.**

3) Ἐὰν εἶναι $\alpha=\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\alpha=\beta+\beta$, ἤτοι $2.\alpha=2.\beta$. Ἐπίσης θὰ εἶναι $3.\alpha=3.\beta$ καὶ $4.\alpha=4.\beta$ κ.ο.κ.

Ὥστε, ἐὰν $\alpha=\beta$, εἶναι καὶ $\mu.\alpha=\mu.\beta$. Δηλαδή: **Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν δύο ἴσους ἀριθμοὺς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, λαμβάνομεν ἀριθμοὺς ἴσους.**

4) Ἔστω, ὅτι $\alpha=\beta$ καὶ $\gamma=\delta$.

Ἀφοῦ λοιπὸν εἶναι $\alpha=\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha\gamma=\beta\gamma$, καὶ ἀφοῦ $\gamma=\delta$ θὰ εἶναι καὶ $\beta\gamma=\beta\delta$. Ὥστε θὰ εἶναι $\alpha\gamma=\beta\delta$.

Ἤτοι, ἐὰν $\alpha=\beta$ καὶ $\gamma=\delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha\gamma=\beta\delta$. Ἤτοι: **Ἐὰν**

πολλαπλασιάσωμεν ἰσότητας κατὰ μέλη, τὰ προκύπτοντα γινόμενα εἶναι ἴσα.

5) Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀνισότητος δύο ἀριθμῶν εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν $\alpha>\beta$ καὶ $\beta>\gamma$ ἢ $\beta=\gamma$, θὰ εἶναι $\alpha>\gamma$. Ἤτοι: **Ἐὰν εἷς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος ἑνὸς ἄλλου καὶ οὗτος εἶναι μεγαλύτερος ἢ ἴσος πρὸς ἕνα τρίτον, ὁ πρῶτος ἀριθμὸς θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ τρίτου.**

6) Ἐπίσης εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν $\alpha>\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha+1>\beta+1$ καὶ $\alpha+2>\beta+2$ κ.ο.κ. Ὥστε, ἐὰν $\alpha>\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$. Ἤτοι: **Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν ἴσους, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶναι ὁμοίως ἄνισοι.**

7) Ἔστω ὅτι εἶναι $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$. Τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$ καὶ $\beta+\gamma>\beta+\delta$. Ἄρα κατὰ τὴν ἄνω πρότασιν 5 θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\gamma>\beta+\delta$.

Ὥστε, ἐὰν $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\gamma>\beta+\delta$. Ἤτοι: **Ἐὰν προσθέσωμεν ἀνίσους ἀριθμοὺς εἰς ἀνίσους, ἀλλὰ τὸν μεγαλύτερον εἰς τὸν μεγαλύτερον καὶ τὸν μικρότερον εἰς τὸν μικρότερον, τὰ προκύπτοντα ἀθροίσματα εἶναι ὁμοίως ἄνισα.**

8) Ἐὰν εἶναι $\alpha>\beta$, εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\alpha>\beta+\beta$ ἤτοι $2.\alpha>2.\beta$ καὶ $3.\alpha>3.\beta$ κ.ο.κ. Ὥστε, ἐὰν $\alpha>\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\mu.\alpha>\mu.\beta$. Ἤτοι: **Ἐὰν ἀνίσους ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὰ προκύπτοντα γινόμενα εἶναι ὁμοίως ἄνισα.**

9) Καθ' ὃν τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης 7, ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἰδιότης, ἡ ὁποία ἐκφράζεται διὰ τῶν ἑξῆς: ἐὰν $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha.\gamma>\beta.\delta$. Ἤτοι: **Ἐὰν ἀνίσους ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ἀνίσους, ἀλλὰ τὸν μεγαλύτερον ἐπὶ τὸν μεγαλύτερον καὶ τὸν μικρότερον ἐπὶ τὸν μικρότερον τὰ προκύπτοντα γινόμενα εἶναι ὁμοίως ἄνισα.**

265. Ἄλλαι ἰδιότητες εἶναι καὶ αἱ ἐκφραζόμεναι διὰ τῶν ἑξῆς:

1) Ἐὰν $\alpha=\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha-\gamma=\beta-\gamma$ (αἱ ἀφαιρέσεις ὑποτίθενται δυναταί). Διότι, ἐὰν αἱ διαφοραὶ $\alpha-\gamma$ καὶ $\beta-\gamma$ ἦσαν ἄνισοι, ἤτοι, ἐὰν π.χ. ἦτο $\alpha-\gamma>\beta-\gamma$, θὰ ἦτο καὶ $\alpha-\gamma+\gamma>\beta-\gamma+\gamma$ κατὰ τὴν ἄνω ἰδιότητα 6, ἤτοι θὰ ἦτο $\alpha>\beta$. Ἀλλ' ἡμεῖς ὑπεθέσαμεν, ὅτι $\alpha=\beta$. Ὥστε αἱ διαφοραὶ $\alpha-\gamma$, $\beta-\gamma$ εἶναι ἴσαι.

2) Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι, ἐὰν $\alpha > \beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$.

3) Ἐὰν $\alpha = \beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha : \gamma = \beta : \gamma$ (δηλαδὴ αἱ διαιρέσεις ὑποτίθενται τέλειαι). Διότι, ἐὰν τὰ πηλίκα $\alpha : \gamma$ καὶ $\beta : \gamma$ ἦσαν ἄνισα, ἤτοι, ἐὰν π. χ. ἦτο $(\alpha : \gamma) > (\beta : \gamma)$, θὰ ἦτο κατὰ τὴν ἄνω ἰδιότητα 8 καὶ $(\alpha : \gamma) . \gamma > (\beta : \gamma) . \gamma$, ἤτοι $\alpha > \beta$. Ἀλλ' ἡμεῖς ὑπεθέσαμεν, ὅτι $\alpha = \beta$. Ὥστε εἶναι $\alpha : \gamma = \beta : \gamma$.

4) Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν $\alpha > \beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha : \gamma > \beta : \gamma$.

266. Βον) **Ἰδιότητες τῆς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.** — Εἴδομεν, ὅτι διὰ νὰ συγκρίνωμεν δύο κλάσματα τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα. Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ ἢ τῆς ἀνισότητος τῶν ἀριθμητῶν συμπεραίνομεν τὴν ἰσότητα ἢ τὴν ἀνισότητα τῶν κλασμάτων. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ἰσότης ἢ ἡ ἀνισότης τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὴν ἰσότητα ἢ ἀνισότητα τῶν ἀκεραίων, ἕπεται, ὅτι αἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος καὶ τῆς ἀνισότητος τῶν ἀκεραίων, τὰς ὁποίας εἴδομεν προηγουμένως, ἀληθεύουν καὶ ὅταν πρόκειται περὶ κλασματικῶν ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις.

988) Νὰ δειχθῇ ὅτι: α) ἐὰν $\alpha = \beta$ καὶ $\gamma = \delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha - \gamma = \beta - \delta$. β) ἐὰν $\alpha = \beta$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha^{\mu} = \beta^{\mu}$. γ) ἐὰν $\alpha > \beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha^{\mu} > \beta^{\mu}$.

267. Ὁρισμοί. — Εἰς τὰ προηγούμενα περὶ τῆς ἰσότητος καὶ τῆς ἀνισότητος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἴδομεν, ὅτι ἡ ἀλήθεια τῶν περισσοτέρων προτάσεων ἔγινε φανερὰ κατόπιν διαφόρων συλλογισμῶν, τοὺς ὁποίους ἐκάμομεν.

Ὁ συλλογισμὸς ἢ οἱ συλλογισμοί, τοὺς ὁποίους κάμνομεν, διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι μία πρότασις εἶναι ἀληθής, λέγεται **ἀπόδειξις**. Ἡ δὲ πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερὰ διὰ τῆς ἀποδείξεως, λέγεται **θεώρημα.** Οὕτω π.χ. αἱ προτάσεις 3, 6 τῆς § 264 εἶναι θεωρήματα.

Εἰς τὸ θεώρημα (ὡς καὶ εἰς πᾶσαν πρότασιν) διακρίνομεν τὴν **ὑπόθεσιν,** ἤτοι ὅ,τι ὑποθέτομεν δεδομένον ἢ γνωστόν, καὶ τὸ **συμπέρασμα,** ἤτοι, ὅ,τι ζητεῖται νὰ ἀποδειχθῇ. Οὕτω π.χ. εἰς τὸ θεώρημα 6, τῆς § 264 τὸ μέρος «ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν ἴσους» ἀποτελεῖ τὴν ὑπόθεσιν καὶ τὸ ἄλλο συμπέρασμα.

Ἡ πρότασις 2 τῆς § 264 βλέπομεν, ὅτι στηρίζεται ἀμέσως ἐπὶ τῆς προηγουμένης ἀληθοῦς προτάσεως καὶ ἐπὶ τῆς προτάσεως τῆς παραγρ. 9. Διὰ τοῦτο τὴν λέγομεν **πόρισμα.** Ὥστε: Πόρισμα λέγεται ἡ πρότασις, ἡ ὁποία στηρίζεται ἐπὶ μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἀληθῶν προτάσεων. Οὕτω πόρισμα εἶναι καὶ ἡ πρότασις 7. Ἡ πρότασις 5 τῆς § 264 βλέπομεν, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε θεώρημα οὔτε πόρισμα. Διότι ἡ ἀλήθεια αὐτῆς εἶναι φανερὰ ἄνευ ἀποδείξεως. Τὰς τοιαύτας προτάσεις λέγομεν **ἀξιώματα.** Οὕτως ἡ πρότασις «παντὸς ἀριθμοῦ ὑπάρχει μεγαλύτερος» εἶναι ἀξίωμα.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Α΄. ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

268. 1ον) Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς προσθέσεως, τὸν ὁποῖον εἴδομεν εἰς τὴν § 37, συνάγομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένον. Ὅθεν ἕπεται ἡ γνωστὴ θεμελιώδης ἰδιότης τῆς προσθέσεως, κατὰ τὴν ὁποίαν:

Καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν ἀριθμούς, εὑρίσκομεν πάντοτε τὸ αὐτὸ ἄθροισμα.

Τὴν λέγομεν δὲ θεμελιώδη, διότι ἀπὸ αὐτὴν προκύπτουν ὅλαι αἱ ἄλλαι ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.

2ον) Κατὰ τὴν ἰδιότητα λοιπὸν αὐτὴν ἔχομεν:

$$9+5+3+7+15 = 3+7+9+5+15 \quad \text{ἢ}$$
$$9+5+3+7+15 = 10+9+5+15 \quad \text{ἢ}$$
$$9+5+3+7+15 = 9+5+10+15 \qquad (1)$$

Ἀλλ' ἂν προσέξωμεν τὴν τελευταίαν ἰσότητα, θὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι εἰς τὸ δοθὲν ἄθροισμα ἀντικατέστησα τοὺς προσθετέους 3 καὶ 7 μὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 10.

Ὥστε: **Εἰς ἓν οἱονδήποτε ἄθροισμα δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν προσθετέους τινὰς μὲ τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμά των.**

Ἤτοι $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon = \alpha+\beta+(\gamma+\delta)+\varepsilon \qquad (2)$

Σημείωσις. Ἡ παρένθεσις $(\gamma + \delta)$ σημαίνει, ὅτι ἡ πρόσθεσις $\gamma + \delta$ ἔχει ἐκτελεσθῆ.

3ον) Ἐπειδὴ ἡ ἀνωτέρω ἰσότης (1) γράφεται:

$9 + 5 + 10 + 15 = 9 + 5 + 3 + 7 + 15$, ἔπεται ὅτι:

Δυνάμεθα εἰς ἓν ἄθροισμα νὰ ἀντικαταστήσωμεν οἱονδήποτε προσθετέον μὲ ἄλλους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν αὐτὸν ἄθροισμα.

4ον) Ἔστω, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν $(5+2+11+13)+9$. Ἀλλ' ἡ παράστασις αὕτη φανερώνει, ὅτι πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 5, 2, 11 καὶ 13 τὸν ἀριθμὸν 9. Ἤτοι, ὅτι πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα $5+2+11+13+9$.

Ὥστε εἶναι $(5+2+11+13)+9=5+2+11+13+9$. Ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι καὶ $5+2+11+13+9 = 5+2+20+13$, ἔπεται, ὅτι $(5+2+11+13)+9 = 5+2+20+13$.

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν δὲ αὐτὴν ἰσότητα συνάγομεν, ὅτι, **ὅταν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν ἀριθμὸν εἰς ἄθροισμα, δυνάμεθα ἀντὶ τούτου νὰ προσθέσωμεν αὐτὸν εἰς ἕνα τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος.**

5ον) Ἔστω, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν $(8+3+7)+(6+13)$. Κατὰ τὴν ἰδιότητα 3 ἀντικαθιστῶμεν τὸν προσθετέον $(8+3+7)$ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 8, 3, 7, οἱ ὁποῖοι ἔχουν αὐτὸν ἄθροισμα. Ἔχομεν ἑπομένως: $(8+3+7)+(6+13) = 8+3+7+(6+13)$. Τώρα εἰς τὸ ἄθροισμα $8+3+7+(6+13)$ ἀντικαθιστῶμεν τὸν προσθετέον $(6+13)$ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 6 καὶ 13. Ὥστε εἶναι $8+3+7+(6+13) =8+3+7+6+13$. Εἶναι λοιπὸν $(8+3+7)+(6+13) = 8+3+7+6+13$.

Ὅθεν: **Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἄθροισμα εἰς ἄθροισμα ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τοὺς προσθετέους τῶν δύο ἀθροισμάτων.**

Ἀσκήσεις.

989) Νὰ παρασταθοῦν αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως διὰ γραμμάτων.

990) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι μικρότεροι τοῦ 100 καὶ οἱ ὁποῖοι λήγουν εἰς 2.

991) Ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρι-

θμῶν 25, 32, 11, ὅταν εἰς τὸν 25 προσθέσω 12, εἰς τὸν 32 9 καὶ εἰς τὸν 11 14;

992) Ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται τὸ ἄθροισμα ἀριθμῶν, ὅταν εἰς ἕκαστον προσθετέον αὐτοῦ προσθέσω τὸν 10;

993) Τὸ ἄθροισμα διψηφίου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ ἀριθμοῦ μὲ τὰ ψηφία τοῦ πρώτου ἀντεστραμμένα εἶναι ἀριθμὸς τριψήφιος. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ ἀθροίσματος ὑπερβαίνει κατὰ μονάδα τὸ ψηφίον τῶν μονάδων αὐτοῦ.

Β'. ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

269. Γνωρίζομεν, ὅτι, ἐὰν **δ** εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ β ἀπὸ τοῦ α, ἤτοι, ἐὰν α—β = δ, θὰ εἶναι καὶ α = β+δ. Ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν α = β+δ, θὰ εἶναι καὶ α—β = δ.

Ἀφοῦ λοιπὸν ὁ μειωτέος, ὁ ἀφαιρετέος καὶ ἡ διαφορὰ συνδέονται διὰ τῆς προσθέσεως, συμπεραίνομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς ἰδιότητας τῆς ἀφαιρέσεως ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἰσότητος. Ἐξ αὐτῶν δὲ θεμελιώδεις εἶναι αἱ ἑξῆς:

1ον) **Ἐὰν προσθέσωμεν (ἢ ἀφαιρέσωμεν) εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τῆς διαφορᾶς τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, αὕτη δὲν μεταβάλλεται.**

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀπεδείχθη εἰς τὴν § 51 διὰ συγκεκριμένου παραδείγματος. Ἤδη θὰ τὴν ἀποδείξωμεν ὡς ἑξῆς:

Ἔστω ἡ διαφορὰ 18—7=11. Ἀλλὰ τότε εἶναι 18=7+11. Ἐὰν τώρα προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, π. χ. τὸν 3, θὰ ἔχωμεν (§ 264, 1) 18+3=7+11+3 ἢ (18+3) = (7+3)+11. Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη δεικνύει, ὅτι ἡ διαφορὰ (18+3)—(7+3) ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν 11, ἤτοι εἶναι 18—7=(18+3)—(7+3) ἢ (18+3)—(7+3) =18—7.

2ον) Ἔστω, ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα 3+5+8+9 τὸν 5, ἤτοι ἕνα τῶν προσθετέων του.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα 2 τῆς προσθέσεως ἔχομεν 3+5+8+9= (3+8+9)+5 ἢ 3+5+8+9 = 5+(3+8+9). Ἡ ἰσότης δὲ αὕτη δεικνύει, ὅτι ἡ διαφορὰ 3+5+8+9—5 ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν 3+8+9.

Ὥστε: **Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἄθροισμα ἕνα τῶν προσθετέων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτόν.**

Ἄλλως τε εἶναι φανερόν, ὅτι, ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσω τὰς μονάδας τοῦ 5 ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος, δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω αὐτὰς ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ 5. Ἐπειδὴ δὲ $5-5=0$, ἕπεται, ὅτι ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα $3+8+9$.

3ον) Ἔστω τώρα, ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα $7+18+4+6$ τὸν ἀριθμὸν 15.

Ἀλλ' ἐπειδὴ $7+18+4+6=7+15+3+4+6$, ἕπεται κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, ὅτι $7+15+3+4+6-15=7+3+4+6$, ἤτοι εἶναι $7+18+4+6-15=7+(18-15)+4+6$. Ὅθεν ἕπεται, ὅτι:

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἀπὸ ἕνα τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος.

4ον) Ἔστω, ὅτι ἔχω νὰ ἀφαιρέσω ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 20 τὸν 6 καὶ κατόπιν ἀπὸ τὴν διαφοράν των τὸν ἀριθμὸν 5. Ἀλλὰ τότε θὰ ἔχω τὴν διαφορὰν $(20-6)-5$. Ἐὰν ἤδη προσθέσω καὶ εἰς τὸν μειωτέον $(20-6)$ καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 5 τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 6, θὰ ἔχω (§ 269, 1) $(20-6)-5=(20-6+6)-(5+6)$. Ἀλλὰ προφανῶς εἶναι $20-6+6=20$. Ὥστε ἔχομεν $(20-6)-5=20-(5+6)$.

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν εἶναι $[(30-7)-4]-9=(30-7)-(4+9)$. Ἀλλὰ καὶ πάλιν εἶναι $(30-7)-(4+9)=30-(7+4+9)$. Ὥστε εἶναι
$$[(30-7)-4]-9=30-(7+4+9). \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν συνάγομεν, ὅτι, **ὅταν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀριθμὸν διαδοχικῶς πολλοὺς ἀριθμούς, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν διὰ μιᾶς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.**

Ἄλλως τε εἶναι φανερόν, ὅτι εἴτε ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν 30 πρῶτον 7 μονάδας καὶ ἔπειτα ἀπὸ τὴν διαφορὰν 4 μονάδας καὶ τέλος ἀπὸ τὴν νέαν διαφορὰν ἀφαιρέσωμεν 9 μονάδας, εἴτε ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν 30 διὰ μιᾶς $7+4+9$ μονάδας, τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον 10 θὰ εὕρωμεν. Διότι καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις 20 μονάδας ἀφαιροῦμεν.

Ἐπειδὴ ἡ ἰσότης (1) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $30-(7+4+9)=[(30-7)-4]-9$, ἕπεται, ὅτι: **Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν διαδοχικῶς ὅλους τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος.**

5ον) Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας ἕπεται καὶ ἡ ἑξῆς: **Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀριθμὸν τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων** (χωρὶς νὰ τὴν εὕρωμεν) **προσθέτομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα ἀφαιροῦμεν τὸν μειωτέον αὐτῆς.**

Ἤτοι εἶναι 15—(8—5)=(15+5)—8. Διότι ἐὰν εἰς τὸν μειωτέον 15 καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 8 – 5 προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 5, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται. Ἤτοι εἶναι 15—(8—5)=(15+5)—(8—5+5). Ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι 8—5+5=8. Ὥστε εἶναι 15—(8—5)=(15+5)—8.

Ἀσκήσεις.

994) Νὰ παρασταθοῦν αἱ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως διὰ γραμμάτων.

995) Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι ἀφαιρέσεις διὰ τῆς ἐφαρμογῆς ἰδιότ. 5 § 269.

4895—999, 83453—9997, 2156865—999997.

996) Τί παθαίνει ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, ἐὰν προστεθῇ εἰς τὸν μειωτέον ὁ 18 καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον ὁ 13 (ἢ 13 καὶ 18);

997) Ὁμοίως τί παθαίνει ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, ἐὰν ἀπὸ τὸν μειωτέον ἀφαιρέσωμεν τὸν 15 καὶ ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον τὸν 23 (ἢ 23 καὶ 15); Αἱ ἀφαιρέσεις αὗται ὑποτίθενται δυναταί.

998) Ὁμοίως ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, ἐὰν εἰς τὸν μειωτέον προσθέσωμεν (ἀφαιρέσωμεν) τὸν 17 καὶ ἀπὸ τοῦ ἀφαιρετέου ἀφαιρέσωμεν (προσθέσωμεν) τὸν 8;

999) Κατὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ 1675 ἀπὸ τοῦ 2563 παρελείφθησαν ὅλα τὰ κρατούμενα. Νὰ εὑρεθῇ ἄνευ ἐκτελέσεως τῆς ἀφαιρέσεως ἡ διαφορὰ τοῦ ἀκριβοῦς ὑπολοίπου ἀπὸ τοῦ ἐσφαλμένου.

1000) Νὰ δειχθῇ, ὅτι, ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν προσθέσωμεν τὴν διαφορὰν αὐτῶν, λαμβάνομεν τὸ διπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἀφαιρέσωμεν τὴν διαφορὰν αὐτῶν, λαμβάνομεν τὸ διπλάσιον τοῦ μικροτέρου.

1001) Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἄνω ἀσκήσεως νὰ εὑρεθοῦν οἱ δύο ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἄθροισμα 15 καὶ διαφορὰν 3. Ὁμοίως οἱ ἔχοντες ἄθροισμα 50 καὶ διαφορὰν 10.

Γ'. ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

270. Ἡ πρώτη θεμελιώδης ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι ἡ ἐκφραζομένη διὰ τῆς ἰσότητος $\alpha.\beta = \beta.\alpha$ καὶ ἡ ὁποία ἀπεδείχθη (§ 66). Ἐξ αὐτῆς δὲ προκύπτουν αἱ ἑξῆς προτάσεις.

Θεώρημα 1ον. Ἔστω τὸ γινόμενον $3\times5\times7\times2\times6$. Ἀλλὰ διὰ νὰ τὸ εὕρωμεν, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν πρῶτον τὸν 3 ἐπὶ τὸν 5, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ 7 κ.ο.κ., ὡς εἴπομεν εἰς τὴν § 75. Ἀλλ' ἂν ἀντὶ τούτου πολλαπλασιάσωμεν πρῶτον τὸν 5 ἐπὶ τὸν 3 καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ 7, τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον δὲν θὰ μεταβληθῇ, διότι $3\times5=5\times3$. Κατὰ ταῦτα λοιπὸν εἶναι:

$$3\times5\times7\times2\times6=5\times3\times7\times2\times6.$$

Ὅθεν: **Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν δύο πρώτων παραγόντων αὐτοῦ.**

Θεώρημα 2ον. Ἔστω τὸ γινόμενον τῶν τριῶν παραγόντων $7\times3\times4$. Ἀλλὰ διὰ νὰ τὸ εὕρωμεν, πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν 3 φορὰς τὸν 7 καὶ τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον θὰ εὕρωμεν, νὰ τὸ ἐπαναλάβωμεν 4 φοράς. Γράφομεν δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς:

$$7\times3\times4=\begin{array}{c}7+7+7\\7+7+7\\7+7+7\\7+7+7\end{array}$$

Ἀλλὰ προφανὲς εἶναι, ὅτι:

$$\begin{array}{c}7+7+7\\7+7+7\\7+7+7\\7+7+7\end{array}=\begin{array}{c}7+7+7+7\\7+7+7+7\\7+7+7+7\end{array}$$

Ἀλλ' ὁ δεύτερος πίναξ τῶν 7 ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς γραμμάς, κάθε μία τῶν ὁποίων ἔχει τέσσαρα 7. Παρίσταται λοιπὸν ὑπὸ τοῦ γινομένου $7\times4\times3$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ πρῶτος πίναξ τῶν 7 παριστᾷ τὸ γινόμενον $7\times3\times4$ ἕπεται, ὅτι $7\times3\times4=7\times4\times3$.

Ὅθεν: **Τὸ γινόμενον τριῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν δύο τελευταίων παραγόντων αὐτοῦ.**

Σημείωσις. Ἡ πρότασις αὕτη ἀληθεύει καὶ ὅταν οἱ παράγοντες εἶναι περισσότεροι ἀπὸ τρεῖς. Διότι ἔστω τὸ γινόμενον $3\times7\times5\times4$. Διὰ νὰ τὸ εὕρωμεν δὲ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν πρῶτον τὸν 3 ἐπὶ τὸν 7 καὶ ἔπειτα νὰ προχωρήσωμεν. Ἀλλὰ τότε θὰ ἔχωμεν γινόμενον τριῶν παραγόντων, δηλαδὴ τοῦ παράγοντος (3×7) καὶ τῶν παραγόντων 5 καὶ 4.

Ἀλλὰ $(3\times7)\times5\times4=(3\times7)\times4\times5$, ἐπειδὴ δὲ εἶναι $(3\times7)\times5\times4=3\times7\times5\times4$ εἶναι καὶ $3\times7\times5\times4=3\times7\times4\times5$.

Θεώρημα 3ον. Ἔστω τὸ γινόμενον $2\times6\times9\times5\times8$, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀποδείξωμεν, **ὅτι δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν δύο οἱωνδήποτε ἐφεξῆς παραγόντων.** Π χ. τῶν 6 καὶ 9. Ἤτοι θὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι $2\times6\times9\times5\times8=2\times9\times6\times5\times8$. Διότι διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ γινόμενα αὐτά, πρέπει νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸ γινόμενον $2\times6\times9$ ἢ τὸ $2\times9\times6$ καὶ κατόπιν ἕκαστον τούτων νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 5 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 8. Ἀλλ᾽ ἡμεῖς γνωρίζομεν, ὅτι $2\times6\times9=2\times9\times6$. Ἄρα καὶ $2\times6\times9\times5\times8=2\times9\times6\times5\times8$.

Θεώρημα 4ον. Ἐὰν τώρα εἰς τὸ ἄνω γινόμενον $2\times9\times6\times5\times8$ ἐφαρμόσωμεν τὸ 3ον θεώρημα ἔχομεν $2\times9\times6\times5\times8=9\times2\times6\times5\times8$.

Ὁμοίως ἔχομεν $9\times2\times6\times5\times8=9\times2\times5\times6\times8=9\times5\times2\times6\times8$.

Ἐπειδὴ δὲ εἴδομεν, ὅτι εἶναι $2\times9\times6\times5\times8=9\times2\times6\times5\times8$, ἕπεται, ὅτι $2\times9\times6\times5\times8=9\times5\times2\times6\times8$.

Ἐκ τῆς τελευταίας δὲ αὐτῆς ἰδιότητος συνάγομεν, ὅτι **τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, καθ᾽ οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν αὐτούς.**

271. Ἐπὶ τῆς προηγουμένης θεμελιώδους ἰδιότητος στηρίζονται καὶ τὰ ἑξῆς.

α΄) **Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν παράγοντας τινὰς μὲ τὸ εὑρεθὲν γινόμενον αὐτῶν.**

Ἤτοι εἶναι $11\times5\times9\times6\times7=11\times45\times6\times7$, διότι εἶναι:

$11\times5\times9\times6\times7=5\times9\times11\times6\times7$

ἢ $11\times5\times9\times6\times7=45\times11\times6\times7$

ἢ $11\times5\times9\times6\times7=11\times45\times6\times7$.

β') Ἐπειδὴ ἡ τελευταία ἄνω ἰσότης γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $11\times45\times6\times7=11\times5\times9\times6\times7$, ἕπεται ὅτι **γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν παράγοντά τινα αὐτοῦ μὲ ἄλλους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν αὐτὸν γινόμενον.**

γ') Κατόπιν τούτων, **ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον** π.χ. τὸ $9\times4\times11$ **ἐπὶ ἀριθμὸν** π.χ. τὸν 5, **δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ἕνα παράγοντα τοῦ γινομένου** π.χ. τὸν 4, ἤτοι $(9\times4\times11)\times5=9\times20\times11$, διότι $(9\times4\times11)\times5=9\times4\times11\times5$ καὶ $9\times4\times11\times5=9\times20\times11$ (ἰδιότητες α' καὶ β').

δ') **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο γινόμενα ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὁμοῦ τοὺς παράγοντας καὶ τῶν δύο γινομένων.**

Ἤτοι εἶναι $(5\times4\times7)\times(9\times3)=5\times4\times7\times9\times3$.

Ἀποδεικνύεται δὲ αὕτη, ὡς ἀπεδείχθη ἡ ἰδιότης περὶ τῆς προσθέσεως δύο ἀθροισμάτων.

272. Ἰδιότητες συνδέουσαι τὰς τρεῖς πρώτας πράξεις.

Θεώρημα 1ον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα 5×8 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3.

Ἀλλ' εἶναι $(5+8)\times3=5+8+5+8+5+8$ ἢ $(5+8)\times3=5+5+5+8+8+8$, ἤτοι $(5+8)\times3=5\times3+8\times3$.

Ὅθεν: **Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμὸν καὶ ἐὰν καθεὶς τῶν προσθετέων αὐτοῦ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ προστεθοῦν τὰ γινόμενα.**

Θεώρημα 2ον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 7 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $9+6$. Ἀλλ' εἶναι $7\times(9+6)=(9+6)\times7$ καὶ $(9+6)\times7=9\times7+6\times7=7\times9+7\times6$. Ὥστε εἶναι $7\times(9+6)=7\times9+7\times6$.

Ὅθεν: **Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ μὲ καθένα τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος, καὶ προστεθοῦν τὰ γινόμενα.**

Πόρισμα. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα $2+5+7$ ἐπὶ τὸ $3+6$.

Ἀλλ' εἶναι $(2+5+7)\times(3+6)=(2+5+7)\times3+(2+5+7)\times6$, ἐπειδὴ δὲ εἶναι $(2+5+7)\times 3 = 2\times 3+5\times 3+7\times 3$ καὶ $(2+5+7)\times$ $\times 6 = 2\times 6+5\times 6+7\times 6$ ἕπεται, ὅτι $(2+5+7)\times(3+6) = 2\times 3+$ $5\times 3+7\times 3+2\times 6+5\times 6+7\times 6$.

῞Οθεν: **῎Αθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα καὶ ὅταν καθεὶς τῶν προσθετέων τοῦ ἑνὸς πολλαπλασιασθῇ μὲ καθένα τῶν προσθετέων τοῦ ἄλλου ἀθροίσματος καὶ προστεθοῦν τὰ γινόμενα.**

Θ ε ώ ρ η μ α 3ον. ῎Εστω τώρα, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν διαφορὰν $17-8$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3. ᾿Αλλὰ τὸ γινόμενον $(17-8)\times 3$ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα $(17-8)+(17-8)+(17-8)$. ᾿Αλλὰ εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ τὴν παράστασιν $(17-8)+(17-8)+(17-8)+8\times 3-8\times 3$, ἤτοι μὲ τὴν $(17-8)$ $+(17-8)+(17-8)+8+8+8-8\times 3$. ᾿Αλλ᾿ ἐπειδὴ $17-8+8=17$, ἕπεται, ὅτι ἡ παράστασις αὕτη ἰσοῦται μὲ τὴν $17+17+17-8\times 3$, ἤτοι μὲ τὴν $17\times 3-8\times 3$. Εἶναι λοιπὸν $(17-8)\times 3 = 17\times 3-8\times 3$.

῞Οθεν: **Διαφορὰ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμὸν καὶ ἐὰν καθεὶς τῶν ὅρων τῆς διαφορᾶς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον.**

Π ό ρ ι σ μ α. ᾿Εὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 4 ἐπὶ τὴν διαφορὰν $15-7$, παρατηροῦμεν, ὅτι $4\times(15-7) = (15-7)\times 4$. ᾿Επειδὴ δὲ εἶναι $(15-7)\times 4 = 15\times 4-7\times 4 = 4\times 15-4\times 7$, ἕπεται, ὅτι $4\times(15-7) = 4\times 15-4\times 7$.

῞Οθεν: **᾿Αριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ διαφορὰν καὶ ἐὰν καθεὶς τῶν ὅρων τῆς διαφορᾶς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν κα ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον.**

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

273. 1ον) ᾿Αφοῦ αἱ δυνάμεις εἶναι γινόμενα, αἱ ἰδιότητες αὐτῶν εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ εὑρίσκωνται ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. ᾿Απὸ αὐτὰς δὲ ἀπεδείξαμεν (§ 80) τὴν ἰδιότητα, ἡ ὁποία ἐκφράζεται διὰ τῆς ἰσότητος $\alpha^{\mu}\,.\,\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$.

᾿Αλλ᾿ εὐκόλως εὑρίσκεται, ὅτι ἡ ἰσότης αὕτη ἀληθεύει καὶ ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὁσασδήποτε δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Δηλαδὴ εἶναι $5^3\times 5^4\times 5^6 = 5^{3+4+6} = 5^{13}$.

2ον) Ἔστω τώρα, ὅτι θέλομεν τὴν δύναμιν 7^3 νὰ ὑψώσωμεν εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν. Ἀλλὰ $(7^3)^4 = 7^3 \times 7^3 \times 7^3 \times 7^3$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $7^3 \times 7^3 \times 7^3 \times 7^3 = 7^{3+3+3+3} = 7^{3\times4}$, ἕπεται, ὅτι $(7^3)^4 = 7^{3\times4} = 7^{12}$.

Ὅθεν : **Ὅταν ἔχωμεν νὰ ὑψώσωμεν δύναμιν ἀριθμοῦ εἰς ἄλλην δύναμιν πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἐκθέτας.**

3ον) Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν τὸ γινόμενον $2\times5\times9$ εἰς τὴν τρίτην δύναμιν. Ἀλλ. $(2\times5\times9)^3 = 2\times5\times9\times2\times5\times9\times 2\times5\times9$. Ἀλλὰ $2\times5\times9\times2\times5\times9\times2\times5\times9 = 2\times2\times2\times5\times5\times 5\times9\times9\times9 = 2^3\times5^3\times9^3$.

Ὥστε $(2\times5\times9)^3 = 2^3\times5^3\times9^3$.

Ὅθεν : **Διὰ νὰ ὑψώσωμεν γινόμενον εἰς δύναμιν ὑψοῦμεν καθένα τῶν παραγόντων αὐτοῦ εἰς τὴν ἰδίαν δύναμιν.**

Ἀσκήσεις.

1002) Γράψατε ὑπὸ συντομωτέραν μορφὴν τὰ ἀθροίσματα :

1) $\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\beta+\beta+\beta$
2) $\alpha+\alpha+\beta+\beta+\alpha+\beta+\beta+\alpha+\beta$
3) $\alpha+\alpha+(\beta+\beta+\beta+\beta+\beta)$
4) $3\alpha+3\beta+7\alpha+4\beta$.

1003) Πόσον μεταβάλλεται τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστος τούτων ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν ;

1004) Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 15, διὰ νὰ λάβωμεν γινόμενον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα $1500+150+15$;

1005) Νὰ γραφῇ ὑπὸ μορφὴν γινομένου δύο παραγόντων τὸ ἄθροισμα $45000+4500+450+45$.

1006) Νὰ γραφοῦν ὑπὸ μορφὴν γινομένου διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμὸν αἱ παραστάσεις : $18\times17-18\times9$, $29\times12-12$, $4\times5\times7-7$.

1007) Πόσον μεταβάλλεται τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ὅταν αὐξήσω κατὰ μονάδα α') τὸν πολλαπλασιαστέον, β') τὸν πολλαπλασιαστήν, γ') ἀμφοτέρους τοὺς παράγοντας ;

1008) Εἰς τὰς ἄνω δύο πρώτας περιπτώσεις πότε ἡ αὔξησις τοῦ γινομένου εἶναι μεγαλυτέρα ;

1009) Πόσον μεταβάλλεται τὸ γινόμενον δύο παραγόντων, ἐὰν εἰς ἕκαστον τούτων προσθέσω τὸν αὐτὸν ἀριθμόν ;

1010) Πόσον μεταβάλλεται τὸ γινόμενον δύο παραγόντων, ὅταν ἕκαστος τούτων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν; Καὶ πόσον μεταβάλλεται, ἐὰν οἱ παράγοντες εἶναι 3, 4 ἢ καὶ περισσότεροι;

1011) Ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσῃ τις 450 ἐπὶ 32, ἐπολλαπλασίασε 432 ἐπὶ 50. Νὰ εὑρεθῇ, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμός, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ εὑρεθέντος γινομένου καὶ τοῦ ζητηθέντος.

1012) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $1007\times1006=1000\times1013+7\times6$.

1013) Νὰ ἐφαρμοσθοῦν αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα

α) $3^2\times4^4\times3^5$ β) $2^3\times5^4\times2^2\times2^3\times5^3$ γ) $(7^2)^5$ δ) $(3\times5\times8)^2$.

1014) Ἡ δύναμις 2^{12} νὰ μετατραπῇ εἰς δύναμίν τινα τοῦ 2, ἡ ὁποία νὰ ὑψώνεται εἰς ἄλλην δύναμιν.

1015) Τὸ γινόμενον $2^4\times5^4\times7^4$ νὰ ἀντικατασταθῇ διὰ τῆς τετάρτης δυνάμεως ἑνὸς ἀριθμοῦ.

Δ΄. ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

274. Θεώρημα 1ον. Ἔστω ἡ διαίρεσις 38 : 9, ἡ ὁποία δίδει πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 2. Ἀλλὰ τότε ἔχομεν $38=9\times4+2$. Ἐὰν τώρα πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, π.χ. τὸν 3, τὸ μὲν πρῶτον μέλος θὰ γίνῃ 38×3 διὰ δὲ τὸ δεύτερον μέλος παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι ἄθροισμα καὶ ἑπομένως πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3 ἕκαστον ὅρον τοῦ ἀθροίσματος αὐτοῦ· ἀλλὰ πάλιν παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος αὐτοῦ 9×4 εἶναι γινόμενον καὶ διὰ νὰ τὸ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ, π. χ. τὸν 9, ἐπὶ 3. Ἔχομεν λοιπὸν $38\times3=(9\times3)\times4+2\times3$. Ἀλλὰ $2<9$· ὥστε καὶ $2\times3<9\times3$. Ἄρα ἡ διαίρεσις τοῦ 38×3 διὰ τοῦ 9×3 δίδει πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 2×3.

Ὅθεν: **Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται· τὸ ὑπόλοιπον ὅμως πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.**

Σημείωσις. Διὰ τὴν τελείαν διαίρεσιν, π. χ. τὴν 36 : 4, ἔχομεν $36:4=(36\times9):(4\times9)$.

Θεώρημα 2ον. **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον διά τινος τῶν παραγόντων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον.**

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀπεδείχθη εἰς τὴν § 91.

Πόρισμα. **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἀριθμοῦ** (διαφόρου τοῦ μηδενός), **ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν δι' αὐτοῦ ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου** (ἐὰν διαιρῆται ἀκριβῶς) (§ 91).

Θεώρημα 3ον. Ἔστω ἡ διαίρεσις $504:(2\times3\times7)$ ἢ $504:42 =12$. Ὥστε $504=(2\times3\times7)\times12$, ἤτοι $504=2\times3\times7\times12$. Ἀλλὰ τότε ἔχομεν $2\times3\times7\times12:2=3\times7\times12$ καὶ $3\times7\times12:3=7\times12$ καὶ $7\times12:7=12$. Ὥστε $504:(2\times3\times7)=[(504:2):3]:7$.

Ὅθεν: **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου, κατόπιν τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ τρίτου κ.ο.κ. μέχρις ὅτου λάβωμεν καὶ τὸν τελευταῖον παράγοντα** (αἱ διαιρέσεις αὗται ὑποτίθενται ὅλαι ἀκριβεῖς).

Θεώρημα 4ον. Ἔστω ἤδη ἡ διαίρεσις $4^5:4^3$, ἤτοι ἡ $(4\times4\times4\times4\times4):(4\times4\times4)$. Ἀλλὰ $4\times4\times4\times4\times4:4=4\times4\times4\times4$, $4\times4\times4\times4:4=4\times4\times4$ καὶ $4\times4\times4:4=4\times4=4^2$. Ὥστε $4^5:4^3=4^{5-3}=4^2$.

Καὶ πράγματι, διότι εἶναι $4^2\times4^3=4^{2+3}=4^5$.

Ὅθεν: **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δύναμιν ἀριθμοῦ διὰ μικροτέρας δυνάμεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἀφαιροῦμεν τὸν ἐκθέτην τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου.**

Σημείωσις. Κατὰ τὴν ἄνω ἰδιότητα εἶναι $\alpha^3:\alpha^2=\alpha^{3-2}=\alpha^1$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $(\alpha\times\alpha\times\alpha):(\alpha\times\alpha)=(\alpha\times\alpha\times\alpha):\alpha:\alpha=\alpha$ δεχόμεθα τὸ α^1 ὡς δύναμιν καὶ ἴσον πρὸς α.

Θεώρημα 5ον. **Ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν προσθετέων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ νὰ προσθέσωμεν ἔπειτα τὰ προκύπτοντα πηλίκα** (αἱ διαιρέσεις ὑποτίθενται, ὅτι γίνονται ὅλαι ἀκριβῶς). Δηλαδὴ εἶναι $(20+15+30):5=4+3+6$, διότι $(4+3+6)\times5 =20+15+30$.

Ἀσκήσεις.

1016) Ἐὰν ὁ διαιρέτης μιᾶς διαιρέσεως εἶναι 5, ποῖα εἶναι τὰ δυνατὰ ὑπόλοιπα αὐτῆς; Καὶ ποῖα, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι 7 ἢ 9; Καὶ διατί;

1017) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον μιᾶς διαιρέσεως, ἵνα τὸ πηλίκον αὐξηθῇ κατὰ μίαν μονάδα;

1018) Ποῖον ἀριθμὸν δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον μιᾶς διαιρέσεως, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ πηλίκον;

1019) Πόσον μεταβάλλεται τὸ πηλίκον μιᾶς διαιρέσεως, 1) ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον τὸν διαιρέτην, 2) ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπ' αὐτοῦ τὸν διαιρέτην;

1020) Πόσον μεταβάλλεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 48 : 12, ἐὰν πολλαπλασιάσω ἐπὶ 2 α') τὸν διαιρετέον καὶ β') τὸν διαιρέτην; Καὶ πόσον ἐὰν διαιρέσω διὰ 2;

1021) Πόσον μεταβάλλεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 60 : 15, ἐὰν τὸν μὲν διαιρετέον πολλαπλασιάσω ἐπὶ 3, τὸν δὲ διαιρέτην διαιρέσω διὰ 3;

1022) Πόσον μεταβάλλεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 120 : 20, ἐὰν τὸν μὲν διαιρετέον διαιρέσω διὰ 2, τὸν δὲ διαιρέτην πολλαπλασιάσω ἐπὶ 2;

1023) Νὰ γενικευθοῦν αἱ τρεῖς ἄνω ἀσκήσεις.

1024) Ποίαν μεταβολὴν ὑφίστανται τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον μιᾶς διαιρέσεως, ἐὰν μόνον ὁ διαιρετέος αὐτῆς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμόν;

1025) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 472, τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ μεγαλυτέρου ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ μικροτέρου εἶναι 3 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 12. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ δύο ἀριθμοί.

1026) Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι 528 καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν εἶναι 5. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ δύο ἀριθμοί.

1027) Τὸ πηλίκον μιᾶς διαιρέσεως εἶναι 7 καὶ τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς 2. Ἐὰν προσθέσωμεν τὸν διαιρετέον, τὸν διαιρέτην, τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον λαμβάνομεν ἄθροισμα 51. Νὰ εὑρεθῇ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης.

1028) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων:

$$7^7 : 7^5 \qquad 9^4 : 9^3 \qquad 6^5 : 6 \qquad 4^8 : (4^2 \times 4^3).$$

275. Πᾶς πρῶτος ἀριθμός, ὅστις δὲν διαιρεῖ ἕνα ἄλλον ἀριθμόν, εἶναι πρῶτος πρὸς αὐτόν.

Δηλαδή, ἂν λάβω ἕνα πρῶτον ἀριθμόν, π.χ. τὸν 5, καὶ ἕνα ἄλλον ἀριθμὸν οἱονδήποτε α, καὶ ὁ 5 δὲν διαιρῇ τὸν α, λέγω, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 5 καὶ α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι ὁ 5 διαιρεῖται μόνον διὰ τῶν 5 καὶ 1. Ἑπομένως οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ α δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἄλλοι ἀπὸ τοὺς 1 καὶ 5. Ἀλλ' ἡμεῖς ὑπεθέσαμεν, ὅτι ὁ 5 δὲν διαιρεῖ τὸν α. Ὥστε ὁ μόνος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ α εἶναι ἡ μονὰς 1. Ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 5 καὶ α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

276. Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ ἕνα γινόμενον, θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον ἕνα παράγοντα τοῦ γινομένου τούτου.

Ἔστω πρῶτος ἀριθμός, π.χ. ὁ 5, ὅστις διαιρεῖ τὸ γινόμενον $\alpha\times\beta\times\gamma$. Ἐὰν ὁ 5 δὲν διαιρῇ κανένα ἐκ τῶν παραγόντων α β ἢ γ, θὰ εἶναι πρῶτος μὲ καθένα ἐξ αὐτῶν. Ἤτοι μὲ ἄλλους λόγους οὐδεὶς τῶν παραγόντων α, β, γ περιέχει τὸν παράγοντα 5. Εἶναι φανερὸν ἑπομένως, ὅτι καὶ τὸ γινόμενον $\alpha\times\beta\times\gamma$ δὲν περιέχει τὸν παράγοντα 5 Ὥστε τὸ γινόμενον $\alpha\times\beta\times\gamma$ δὲν διαιρεῖται διὰ 5. Ἀλλ' ἡμεῖς ὑπεθέσαμεν, ὅτι τὸ γινόμενον αὐτὸ διαιρεῖται διὰ 5. Ἑπομένως ὁ 5 διαιρεῖ τοὐλάχιστον ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου.

277. Ἐὰν πρῶτος ἀριθμός, π.χ. ὁ 5, διαιρῇ τὴν δύναμιν α^4, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν α. Διότι, ἀφοῦ ὁ 5 διαιρεῖ τὸ γινόμενον α.α.α.α, θὰ διαιρῇ κατὰ τὴν ἄνω ἰδιότητα καὶ τὸν α.

Ὥστε: **Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ δύναμιν ἑνὸς ἀριθμοῦ, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.**

278. Ἐὰν οἱ παράγοντες τοῦ γινομένου α. β. γ τῆς § 276 εἶναι πρῶτοι, ὁ 5 θὰ εἶναι ἴσος μὲ ἕνα ἐξ αὐτῶν. Διότι ὁ πρῶτος ἀριθμὸς μόνον διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του διαιρεῖται (ἡ 1 δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψει).

Ὥστε: **Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ γινόμενον παραγόντων πρώτων, θὰ εἶναι ἴσος πρὸς ἕνα ἐξ αὐτῶν.**

279. Εἴδομεν προηγουμένως (§ 117), ὅτι πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων. Ἤδη θὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι **καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν ἀναλύσωμεν ἀριθμὸν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, πάντοτε τοὺς αὐτοὺς παράγοντας θὰ εὕρωμεν.**

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς Μ, ὅστις, ὅταν ἀναλυθῇ κατὰ δύο διαφόρους τρόπους εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, θὰ εἶναι:

$M=\alpha.\beta.\gamma.\delta....$ καὶ $M=\alpha'.\beta'.\gamma'.\delta'....$ Λέγω, ὅτι $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$ κτλ., διότι ὁ α, ὁ ὁποῖος διαιρεῖ τὸ γινόμενον $\alpha.\beta.\gamma.\delta....$ (δηλαδὴ τὸν Μ), θὰ διαιρῇ καὶ τὸ γινόμενον $\alpha'.\beta'.\gamma'.\delta'....$ Ἑπομένως κατὰ τὴν ἰδιότητα 278 θὰ εἶναι ἴσος πρὸς ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ $\alpha'.\beta'.\gamma'.\delta'....$ Ἔστω δέ, ὅτι εἶναι ἴσος πρὸς τὸν α'. Ὥστε $\alpha=\alpha'$. Ὁμοίως ὁ β, ἐπειδὴ διαιρεῖ τὸ γινόμενον $\alpha.\beta.\gamma.\delta....$, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ $\alpha'.\beta'.\gamma'.\delta'....$ Ἑπομένως θὰ εἶναι ἴσος πρὸς ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ $\alpha'.\beta'.\gamma'.\delta'....$, ἔστω πρὸς τὸν β', ὥστε εἶναι $\beta=\beta'$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ $\gamma=\gamma'$, $\delta=\delta'$ κ.ο.κ. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ, ὅτι τὸ ἓν ἀπὸ τὰ γινόμενα αὐτὰ περιέχῃ π.χ. τὸν παράγοντα α δύο, τρεῖς κλπ. φοράς, καὶ τὸ ἄλλο γινόμενον θὰ περιέχῃ τὸν παράγοντα α' (τὸν ἴσον μὲ τὸν α) δύο, τρεῖς κτλ. φοράς. Ἀπεδείχθη λοιπὸν ἡ πρότασις.

280. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι, **ἐὰν δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων εἶναι ἴσα, οἱ παράγοντες τῶν δύο γινομένων εἶναι οἱ αὐτοὶ καὶ ἕκαστος περιέχεται ἰσάκις.**

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

281. Πολλαπλασιασμός. — Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 120 καὶ 810, τοὺς ὁποίους θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν. Ἐὰν ἀναλύσωμεν αὐτούς, θὰ ἔχωμεν: $120=2^3\times3\times5$ καὶ $810=2\times3^4\times5$, ἄρα καὶ (§ 271, δ') $120\times810=2^3\times3\times5\times2\times3^4\times5$ ἢ $120\times810=2^4\times3^5\times5^2$ (§ 271, α').

282. Ὕψωσις εἰς δύναμιν.—Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 360, τοῦ ὁποίου θέλω νὰ εὕρω τὸ τετράγωνον.

Ἐὰν ἀναλύσωμεν τὸν 360 θὰ ἔχωμεν $360=2^3\times3^2\times5$ καὶ $360^2=(2^3\times3^2\times5)^2$ ἢ $360^2=(2^3)^2\times(3^2)^2\times(5)^2$ (§ 273, 3), ἤτοι $360^2=2^6\times3^4\times5^2$.

Διὰ τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ 360 θὰ ἔχωμεν $360^3 = (2^3 \times 3^2 \times 5)^3$ ἢ $360^3 = 2^9 \times 3^6 \times 5^3$.

Πῶς λοιπὸν ὑψοῦται ἀριθμὸς ἀναλελυμένος εἰς τὴν δευτέραν, τρίτην, κτλ. δύναμιν;

283. Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.—Ἵνα εἷς ἀριθμὸς ἔχῃ τετραγωνικὴν ρίζαν (ἀκριβῆ), **πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ νὰ διαιροῦνται ὅλοι διὰ τοῦ 2.**

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς $2^6 \times 3^4 \times 5^2$, τοῦ ὁποίου οἱ ἐκθέται τῶν παραγόντων του διαιροῦνται διὰ 2. Λέγω, ὅτι ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ἔχει τετραγωνικὴν ρίζαν καὶ εἶναι ὁ $2^3 \times 3^2 \times 5$. Διότι $(2^3 \times 3^2 \times 5)^2 = 2^6 \times 3^4 \times 5^2$. Ὁ ἀριθμὸς $2^3 \times 5^4 \times 11^2$ δὲν ἔχει τετραγωνικὴν ρίζαν, ἐπειδὴ ὁ ἐκθέτης τοῦ 2^3 δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 2. Καὶ πράγματι, ἐὰν ὁ $2^3 \times 5^4 \times 11^2$ εἶχε τετραγωνικὴν ρίζαν, αὕτη, ὅταν ὑψωθῇ εἰς τὸ τετράγωνον, πρέπει νὰ δώσῃ τὸν $2^3 \times 5^4 \times 11^2$. Ἀλλ' αὐτὸ εἶναι ἀδύνατον. Διότι οἱ ἐκθέται τῶν παραγόντων τῆς ρίζης θὰ διπλασιασθοῦν καὶ θὰ δώσουν ἐκθέτας ἀρτίους.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν συνάγομεν, ὅτι, **ὅταν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων ἑνὸς ἀριθμοῦ** (ἀναλελυμένου) **διαιροῦνται διὰ 2, ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει τετραγωνικὴν ρίζαν. Ἐὰν δὲ γνωρίζωμεν, ὅτι εἷς ἀριθμὸς ἔχει τετραγωνικὴν ρίζαν, οἱ ἐκθέται τῶν παραγόντων αὐτοῦ, εἰς τοὺς ὁποίους θὰ ἀναλυθῇ, θὰ εἶναι ἄρτιοι.**

284. Διαίρεσις.—Πότε εἷς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλου. Ἔστω, ὅτι θέλω νὰ ἴδω πότε εἷς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλου, π.χ. ὁ 144 διὰ τοῦ 36.

Ἀναλύω τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς καὶ ἔχω:

$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2 \qquad 36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$.

Κατόπιν παρατηρῶ α) **ἂν ὁ διαιρετέος περιέχῃ ὅλους τοὺς παράγοντας τοῦ διαιρέτου** καὶ β) **ἂν καθένα ἀπὸ αὐτοὺς τὸν περιέχῃ τόσας τοὐλάχιστον φοράς, ὅσας φορὰς περιέχει αὐτὸν ὁ διαιρέτης. Ἐὰν δὲ συμβαίνῃ τοῦτο, τότε ὁ εἷς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ ἄλλου.**

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ὁ 144 περιέχει τοὺς παράγοντας 2 καὶ 3 τοῦ διαιρέτου, καὶ τὸν μὲν 2 τὸν περιέχει τέσσαρας φορὰς—

ἐνῷ ὁ 36 τὸν περιέχει δύο φορὰς — τὸν δὲ 3 δύο φοράς. Δύο δὲ φορὰς τὸν περιέχει καὶ ὁ 36. Συμπεραίνω λοιπόν, ὅτι ὁ 144 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 36. Διότι τὸν 144 δύναμαι νὰ τὸν γράψω ὡς ἑξῆς $144 = (2^2 \times 3^2) \times 2^2$ (παρατηρῶ δὲ ὅτι, τὸ ἐντὸς τῆς παρενθέσεως γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὸν διαιρέτην 36). Ἔχω λοιπὸν νὰ διαιρέσω $144 : 36$ ἢ $(2^2 \times 3^2) \times 2^2 : (2^2 \times 3^2)$. Ἀλλ' ἡ διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς καὶ πηλίκον αὐτῆς εἶναι τὸ 2^2, ἀντιστρόφως δέ:

Ἂν γνωρίζω, ὅτι εἷς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλου, τότε συμπεραίνω, ὅτι οὗτος περιέχει τοὺς παράγοντας τοῦ ἄλλου καὶ τόσας φορὰς τοὐλάχιστον, ὅσας φορὰς τοὺς περιέχει ὁ ἄλλος, διότι ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην.

285. Εὕρεσις τοῦ μ.κ.δ. δοθέντων ἀριθμῶν διὰ τῆς ἀναλύσεως αὐτῶν εἰς πρώτους παράγοντας. — Ἂς λάβωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 72, 180, 240. Ὁ μ.κ.δ. αὐτῶν εὑρίσκεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἀναλύομεν τοὺς ἀριθμοὺς καὶ εὑρίσκομεν $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$, $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$, $240 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^4 \times 3 \times 5$. Κατόπιν παρατηροῦμεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας αὐτῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι 2, 2, 3. Ἑπομένως τὸ γινόμενον αὐτῶν $2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$ εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων (§ 284). Εἶναι ὅμως καὶ μ.κ.δ. αὐτῶν, διότι, ἂν περιέχῃ οἱονδήποτε ἄλλον πρῶτον παράγοντα, δὲν θὰ διαιρῇ πάντας τοὺς δοθέντας. Π.χ. ὁ $2^2 \times 3 \times 5$ θὰ διαιρῇ μὲν τοὺς 180 καὶ 240, ἀλλὰ δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 72 κ.ο.κ.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι, εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν $108 = 2^2 \times 3^3$, $144 = 2^4 \times 3^2$, $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ εἶναι ὁ $2^2 \times 3^2$.

Ὅθεν συνάγομεν, ὅτι: **Ὁ μ.κ.δ. δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι γινόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχει τοὺς κοινοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν καὶ ἕκαστον μὲ τὸν ἐλάχιστον ἐκθέτην.**

286. Εὕρεσις τοῦ ε.κ.π. δοθέντων ἀριθμῶν διὰ τῆς ἀναλύσεως αὐτῶν εἰς πρώτους παράγοντας. — Ἂς λάβωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 84, 72, 180. Τὸ ε.κ.π. αὐτῶν εὑρίσκεται καὶ ὡς ἑξῆς: Ἀναλύομεν τοὺς ἀριθμοὺς καὶ εὑρίσκομεν: $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$, $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$, $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.

Κατόπιν παρατηροῦμεν τοὺς παράγοντας αὐτῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ 2, 3, 5, 7. Ἑπομένως συνάγομεν, ὅτι ἓν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν θὰ περιέχῃ ἐξάπαντος τοὺς παράγοντας 2, 3, 5, 7, ἀλλ' ἐξ αὐτῶν πρέπει τὸν μὲν 2 νὰ περιέχῃ τοὐλάχιστον τρεῖς φοράς, τὸν δὲ 3 τοὐλάχιστον δύο φοράς, διότι ἂν περιεῖχε τὸν 2 π.χ. δύο φοράς, δὲν θὰ διῃρεῖτο διὰ τοῦ 72, ἐὰν δὲ περιεῖχε τὸν 3 μίαν φοράν, δὲν θὰ διῃρεῖτο διὰ τοῦ 72 καὶ 180. Ἀλλὰ τότε τὸ γινόμενον $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ εἶναι τὸ ἑ.κ.π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ὥστε : **Τὸ ἑ.κ.π. δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι γινόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν** (κοινοὺς καὶ μὴ κοινοὺς) **καὶ ἕκαστον μὲ τὸν μέγιστον ἐκθέτην.**

Ἀσκήσεις.

Νὰ εὑρεθοῦν διὰ τῆς ἀναλύσεως εἰς πρώτους παράγοντας :

1029) Τὰ γινόμενα :

12×18, 20×30, 60×100, 45×60
48×36, 64×32, 27×81, 39×91
$15 \times 24 \times 68$, $49 \times 63 \times 250$, $16 \times 30 \times 225$, $16 \times 27 \times 125$.

1030) Ἡ δευτέρα καὶ τρίτη δύναμις τῶν ἀριθμῶν 6, 24, 45, 72, 180, 120, 320, 325, 343, 693.

1031) Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν :

$2^2 \times 5^4$, $2^8 \times 3^2 \times 7^2$, $5^2 \times 7^2 \times 4$, $3^4 \times 25 \times 81$
1600, 2500, 2025, 3136, 6561.

1032) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. καὶ τὸ ἑ.κ.π. τῶν ἀριθμῶν :

α΄) 70, 90, β΄) 36, 240, γ΄) 8401, 2940, δ΄) 210, 280, 700, ε΄) 7000, 1764, 1232, στ΄) 200, 441, 221.

1033) Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν ἐπὶ τὸ ἑ.κ.π. αὐτῶν.

1034) Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἄνω ἀσκήσεως νὰ εὑρεθῇ τὸ ἑ.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 240 καὶ 210, οἱ ὁποῖοι ἔχουν μ.κ.δ. τὸν 30.

1035) Νὰ δειχθῇ ἄνευ ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὅτι τὸ γινόμενον 135×85 εἶναι διαιρετὸν δι' 25. Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(135 \times 85) : 25$.

1036) Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον τριῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ 2, 3 καὶ 6.

1037) Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον τεσσάρων διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε διαιρετὸν δι' 24.

ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

287. Κατὰ τὴν τροπὴν τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς εἴδομεν, ὅτι : $\frac{7}{8}=0{,}875$, $\frac{8}{11}=0{,}7272..$ καὶ $\frac{27}{55}=0{,}49090...$

Ἀπὸ τὰ παραδείγματα δὲ αὐτὰ συνάγομεν, ὅτι ἄλλα μὲν κοινὰ κλάσματα τρέπονται εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ἀκριβῶς, ἄλλα δὲ ὄχι.

288. Διὰ νὰ γνωρίζωμεν ἐκ τῶν προτέρων (δηλαδὴ πρὶν ἢ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν) πότε ἓν κοινὸν κλάσμα τρέπεται εἰς ἀκριβὲς δεκαδικὸν θὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς :

Ἔστω τὸ κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, διὰ τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ ἴδωμεν, ἂν τρέπεται εἰς ἀκριβὲς δεκαδικόν. Ἀλλὰ πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν (τοῦτο δὲ δεχόμεθα ὡς φανερόν), ὅτι ὅλα τὰ κλάσματα τὰ ἴσα πρὸς τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ παράγονται ἀπὸ τοῦτο τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$, ὅταν καὶ οἱ δύο ὅροι του πολλαπλασιασθοῦν μὲ καθένα τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 5 κτλ. Ἑπομένως καὶ τὸ δεκαδικὸν κλάσμα (ἐὰν ὑπάρχῃ), τὸ ὁποῖον θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$, θὰ προκύψῃ ἀπὸ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἔστω τὸν μ. Ἀλλ' ἀφοῦ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον θὰ προκύψῃ ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτόν, θὰ εἶναι δεκαδικόν, ἕπεται, ὅτι ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ θὰ εἶναι ἢ 10 ἢ 100 ἢ 1000 κ.ο.κ. Ὥστε θὰ εἶναι $\beta.\mu=10$ ἢ 100 ἢ 1000 κτλ. Ἔστω δέ, ὅτι εἶναι $\beta.\mu=100$, ἤτοι $\beta.\mu=2^2\times5^2$. Ἀλλ' ἡ τελευταία αὐτὴ ἰσότης δεικνύει, ὅτι ἂν οἱ ἀριθμοὶ β καὶ μ ἀναλυθοῦν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, οἱ παράγοντες, τοὺς ὁποίους θὰ εὕρωμεν, δὲν ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ἄλλοι ἀπὸ τοὺς 2 καὶ 5 (§ 280). Ἑπομένως οἱ πρῶτοι παράγοντες, τοὺς ὁποίους θὰ περιέχῃ ὁ παρονομαστὴς β τοῦ δοθέντος ἀναγώγου κλάσματος, δὲν ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ἄλλοι ἀπὸ τοὺς 2 καὶ 5. Ἀντιστρόφως δέ, ἂν οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ παρονομαστοῦ β τοῦ κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι 2 καὶ 5, τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ τρέπεται εἰς ἀκριβὲς δεκαδικόν. Διότι ἠμποροῦμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐπὶ ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος νὰ περιέχῃ τόσα 2 καὶ 5, ὥστε ὁ παρονομαστής, ὁ ὁποῖος θὰ προκύψῃ, νὰ ἔχῃ τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5 μὲ ἴσους ἐκθέτας.

Π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{7}{20}=\frac{2}{2^2\times 5}$ τρέπεται εἰς ἀκριβὲς δεκαδικόν, διότι $\frac{7}{2^2\times 5}=\frac{7\times 5}{2^2\times 5^2}=\frac{35}{100}$ καὶ τὸ $\frac{5}{8}=\frac{5}{2^3}$, διότι $\frac{5}{2^3}=\frac{5\times 5^3}{2^3\times 5^3}=\frac{625}{1000}$, ἐνῷ τὸ κλάσμα $\frac{3}{7}$ δὲν τρέπεται εἰς ἀκριβὲς δεκαδικόν, διότι οἱ παρονομασταὶ ὅλων τῶν κλασμάτων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα πρὸς τὸ $\frac{3}{7}$, περιέχουν τὸν παράγοντα 7. Καὶ ἑπομένως κανεὶς ἀπὸ τοὺς παρονομαστὰς τῶν κλασμάτων τούτων δὲν δύναται νὰ εἶναι δύναμις τοῦ 10.

Ὅθεν : **Διὰ νὰ τραπῇ ἓν κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα εἰς ἀκριβὲς δεκαδικόν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ παρονομαστής του νὰ μὴ περιέχῃ ἄλλον πρῶτον παράγοντα πλὴν τοῦ 2 καὶ τοῦ 5.**

289. Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι τὸ $\frac{3}{7}$ δὲν τρέπεται εἰς ἀκριβὲς δεκαδικόν. Ἐὰν δὲ κάμωμεν τὴν δεκαδικὴν διαίρεσιν τοῦ 3 διὰ τοῦ 7

$$\begin{array}{l|l} 3 & 7 \\ \cline{2-2} 30 & 0,428571..... \\ \quad 20 & \\ \quad\ \ 60 & \\ \quad\quad 40 & \\ \quad\quad\ \ 50 & \\ \quad\quad\quad 10 & \\ \quad\quad\quad\ \ 3 & \end{array}$$

παρατηροῦμεν, ὅτι μετὰ ἓξ διαιρέσεις εὕρομεν ὑπόλοιπον 3, δηλαδὴ τὸν ἀρχικὸν διαιρετέον.

Ὅθεν, ἂν ἐξακολουθήσωμεν, θὰ κάμωμεν τὰς προηγουμένας διαιρέσεις μὲ τὴν αὐτὴν σειρὰν καὶ ἑπομένως θὰ εὑρίσκωμεν τὰ ἴδια ψηφία τοῦ πηλίκου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, χωρὶς αἱ διαιρέσεις αὗται νὰ ἔχουν τέλος. Καὶ πράγματι οὕτω πρέπει νὰ συμβαίνῃ εἰς ὅλα τὰ κοινὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα δὲν τρέπονται εἰς ἀκριβῆ δεκαδικά. Διότι εἰς ταῦτα ἡ δεκαδικὴ διαίρεσις τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ οὐδέποτε ἀφίνει ὑπόλοιπον 0. Ἑπομένως ἡ διαίρεσις αὕτη δὲν ἔχει τέλος. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν διαιρέσεων εἶναι ὅλα μικρότερα τοῦ διαιρέτου, ἕπεται ὅτι, μετά τινας διαιρέσεις, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἔχομεν εὕρει καὶ προηγουμένως, ὁπότε αἱ διαιρέσεις, αἱ ὁποῖαι θὰ ἀκολουθήσουν, θὰ εἶναι αἱ ἴδιαι μὲ τὰς προηγουμένας καὶ κατὰ συνέπειαν θὰ εὑρίσκωμεν τὰ ἴδια ψηφία τοῦ πηλίκου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ἐπ' ἄπειρον.

Εἴδομεν δὲ τοῦτο ἄλλωστε καὶ εἰς τὰ παραδείγματα $\frac{8}{11} = 0{,}7272...$ καὶ $\frac{27}{55} = 0{,}49090...$

Ὅθεν: **Ὅταν ἓν κοινὸν κλάσμα δὲν τρέπεται εἰς ἀκριβὲς δεκαδικόν, τρέπεται εἰς δεκαδικόν, τὸ ὁποῖον ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἀπό τινος ψηφίου καὶ ἐφεξῆς ἐπαναλαμβάνονται ἐπ' ἄπειρον τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.**

290. Τὰ τοιαῦτα δεκαδικὰ λέγονται **περιοδικὰ δεκαδικὰ κλάσματα,** τὸ δὲ σύνολον τῶν ψηφίων, ποὺ ἐπαναλαμβάνονται, λέγεται **περίοδος.** Καὶ ὅταν μὲν ἡ περίοδος ἀρχίζῃ ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, τὸ περιοδικὸν λέγεται **ἁπλοῦν,** ὅταν δὲ ὄχι λέγεται **μεικτόν.**

Οὕτω τὰ 0,7272... 0,231231... εἶναι ἁπλᾶ περιοδικὰ καὶ τοῦ μὲν πρώτου ἡ περίοδος εἶναι 72, τοῦ δὲ δευτέρου 231. Ἐνῷ τὸ 0,49090... εἶναι μεικτὸν περιοδικὸν μὲ περίοδον 90, καὶ μὲ μὴ περιοδικὸν μέρος 4.

291. Εὕρεσις τοῦ κοινοῦ κλάσματος, ἐκ τοῦ ὁποίου παράγεται ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα. — 1ον) Ἔστω τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα 0,727272... Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κοινὸν κλάσμα, ἐκ τοῦ ὁποίου τοῦτο παράγεται, πολλαπλασιάζομεν τὸ δοθὲν περιοδικὸν ἐπὶ 100 (διότι δύο ψηφία ἔχει ἡ περίοδος) καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου ἀφαιροῦμεν τὸ δοθὲν περιοδικόν. Οὕτω δὲ θὰ ἔχωμεν:

$$\begin{array}{rl}
100 \text{ φορὰς τὸ δοθὲν} & = 72{,}72727272.... \\
1 \text{ φορὰ τὸ δοθὲν} & = 0{,}72727272.... \\
\hline
\text{Ὥστε } 99 \text{ φορὰς τὸ δοθὲν} & = 72 \\
\text{καὶ } 1 \text{ φορὰ τὸ δοθὲν} & = \frac{72}{99} \\
\text{ἤτοι } 0{,}727272.... & = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}.
\end{array}$$

2ον) Διὰ τὸ 0,231231..., τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος ἔχει τρία ψηφία, λέγομεν:

$$\begin{array}{rl} 1000 \text{ φορὰς τὸ δοθὲν} = & 231{,}231231231\ldots \\ 1 \text{ φορὰ τὸ δοθὲν} = & 0{,}231231231\ldots \\ \hline \end{array}$$

$$\text{ὥστε}\quad 999 \text{ φορὰς τὸ δοθὲν} = 231$$

$$\text{καὶ}\quad 1 \text{ φορὰ τὸ δοθὲν} = \frac{231}{999}$$

$$\text{Ἤτοι εἶναι } 0{,}231231\ldots = \frac{231}{999} = \frac{77}{333}.$$

3ον) Καὶ διὰ τὸ 5,333... λέγομεν:

$$\begin{array}{rl} 10 \text{ φορὰς τὸ δοθὲν} = & 53{,}3333\ldots. \\ 1 \text{ φορὰ τὸ δοθὲν} = & 5{,}3333\ldots. \\ \hline \end{array}$$

$$\text{ὥστε}\quad 9 \text{ φορὰς τὸ δοθὲν} = 48$$

$$\text{καὶ}\quad 1 \text{ φορὰ τὸ δοθὲν} = \frac{48}{9} = 5\,\frac{3}{9}.$$

Ὅθεν: **Τὸ δεκαδικὸν μέρος ἁπλοῦ περιοδικοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος παράγεται ἀπὸ κοινὸν κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἀριθμητὴν ἔχει μίαν περίοδον καὶ παρονομαστὴν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει τόσα 9, ὅσα ψηφία ἔχει ἡ περίοδος.**

Σημείωσις. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις δὲν ἀληθεύει, ὅταν τὰ ψηφία τῆς περιόδου εἶναι ὅλα 9. Διότι $\frac{9}{9}=1$, $\frac{99}{99}=1$ κ.ο.κ.

Ἤτοι 0,999... = 1. Ὥστε τὸ περιοδικὸν τοῦτο δὲν παράγεται ἀπὸ κανὲν κοινὸν κλάσμα.

Παρατηρήσεις. Εἴδομεν, ὅτι ἓν ἁπλοῦν περιοδικὸν παράγεται ἀπὸ κοινὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς λήγει εἰς 9. Ἕπεται ἑπομένως, ὅτι ὁ παρονομαστὴς οὗτος δὲν διαιρεῖται οὔτε διὰ 2 οὔτε διὰ 5, ἤτοι, ὅτι δὲν περιέχει τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι οὔτε μὲ τὴν ἁπλοποίησιν τοῦ κλάσματος (ἂν ἁπλοποιῆται) εἶναι δυνατὸν νὰ τοὺς ἀποκτήσῃ.

Ὅθεν: **Ὁ παρονομαστὴς τοῦ κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται ἁπλοῦν περιοδικόν, δὲν περιέχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν 5.**

Ἀντιστρόφως δέ: **Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου**

κλάσματος δὲν περιέχῃ κανένα παράγοντα 2 ἢ 5, τρέπεται τοῦτο εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν. Ὅπως π.χ. $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{11}$.

292. Εὕρεσις τοῦ κοινοῦ κλάσματος, ἐκ τοῦ ὁποίου παράγεται μεικτὸν περιοδικόν—.

1ον) Ἔστω τὸ μεικτὸν περιοδικὸν 0,4909090... Ἐπειδὴ τοῦτο ἔχει 1 μὴ περιοδικὸν ψηφίον καὶ 2 περιοδικὰ λέγομεν :

1000 φορὰς τὸ δοθὲν = 490,909090...
10 » » » = 4,909090...

ἄρα 990 » » » = 490—4

καὶ 1 φορὰ » » $= \frac{490-4}{990} = \frac{486}{990} = \frac{27}{55}$.

2ον) Διὰ τὸ 0,15237237..., τοῦ ὁποίου τὰ μὴ περιοδικὰ ψηφία εἶναι 2 καὶ τὰ περιοδικὰ 3, λέγομεν :

100000 φορὰς τὸ δοθὲν = 15237,237237...
100 » » » = 15,237237...

Ὥστε 99900 » » » = 15237—15

καὶ 1 φορὰ » » $= \frac{15237-15}{99900} = \frac{15222}{99900}$.

3ον) Διὰ δὲ τὸ 5,166666... λέγομεν :

100 φορὰς τὸ δοθὲν = 516,666...
10 » » » = 51,666...

Ὥστε 90 » » » = 465

καὶ 1 φορὰ » » $= \frac{465}{90} = 5\frac{15}{90}$.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω εὐκόλως συνάγεται **ἡ πρότασις ἡ σχετικὴ μὲ** τὴν εὕρεσιν τοῦ κοινοῦ κλάσματος, ἐκ τοῦ ὁποίου **παράγεται δοθὲν** μεικτὸν περιοδικόν.

Σημείωσις. Τὸ ζητούμενον, εἰς τὸ πρῶτον τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων, εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς :

10 φορὰς τὸ δοθὲν = 4,909090... ἢ $= 4\frac{90}{99} = \frac{4\times99+90}{99}$, ἄρα **1** φορὰ τὸ δοθὲν $= \frac{4\times99+90}{990} = \frac{4(100-1)+90}{990} = \frac{400-4+90}{990} = \frac{490-4}{990}$.

Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ εἰς τὰ ἄλλα δύο παραδείγματα.

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς. Ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς: **Ὁ παρονομαστὴς τοῦ** κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος, ἀπὸ τὸ ὁποῖον **παράγεται** μεικτὸν περιοδικόν, ἀφοῦ λήγει εἰς μηδέν, περιέχει τοὺς **παράγοντας** 2 καὶ 5 καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν **τῶν μὴ περιοδικῶν** ψηφίων. Ἐκτὸς ὅμως τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 **περιέχει καὶ** ἄλλους. Διότι, ἂν δὲν περιεῖχε, θὰ ἦτο ἀκριβὲς δεκαδικόν.

Ἐξ ἄλλου ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς τοιούτου κλάσματος οὐδέποτε τελειώνει εἰς 0. Διότι, ὡς εἴδομεν, ὁ ἀριθμητής του εἶναι τὸ ὑπόλοιπον ἀφαιρέσεως, π.χ. τῆς 15237 — 15 τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος. **Διὰ νὰ** τελειώνῃ ὅμως τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο εἰς 0, πρέπει τὸ τελευταῖον ψηφίον ἀπὸ τὰ μὴ περιοδικὰ νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τελευταῖον τῆς **περιόδου**. Δηλαδὴ τὸ 5 νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ 7. Ἀλλὰ τότε τὸ περιοδικὸν 0,15237237.... θὰ ἐγίνετο 0,17237237...., ἤτοι τὸ ψηφίον **τοῦτο θὰ** μετεῖχε τῆς περιόδου, ὅπερ εἶναι ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν.

Ἀφοῦ λοιπὸν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ τοιούτου κλάσματος δὲν τελειώνει **εἰς** 0 (ἐνῷ ὁ παρονομαστής του τελειώνει εἰς 0), ἔπεται, ὅτι τὸ **κλάσμα** τοῦτο δὲν ἁπλοποιεῖται διὰ 10. Τοῦτο δὲ σημαίνει, ὅτι τὸ **κλάσμα** τοῦτο, ἐὰν ἁπλοποιῆται, θὰ ἁπλοποιῆται μὲ ἀριθμόν, ὁ **ὁποῖος θὰ** περιέχῃ ἢ τὸν παράγοντα 2 ἢ τὸν 5. Ἑπομένως μετὰ τὴν **ἁπλοποίησιν** ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἀναγώγου κλάσματος, τὸ ὁποῖον **θὰ προκύψῃ**, θὰ περιέχῃ τὸν ἕνα τοὐλάχιστον ἀπὸ τοὺς παράγοντας 2 ἢ 5. Καὶ θὰ τὸν περιέχῃ μὲ τὸν ἴδιον ἐκθέτην, τὸν ὁποῖον περιεῖχε καὶ πρὸ τῆς ἁπλοποιήσεως.

Καὶ πράγματι εἴδομεν, ὅτι εἶναι $0{,}49090... = \frac{490-4}{990} = \frac{486}{990} = \frac{27}{55}$

καὶ $990 = 3^2 \times 11 \times 2 \times 5$

$55 = 11 \times 5$

Ἐπίσης εἶναι $0{,}1477272... = \frac{14772-147}{99000} = \frac{14625}{99000} = \frac{13}{88}$

καὶ $99000 = 3^2 \times 11 \times 2^3 \times 5^3$

$88 = 11 \times 2^3$

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν συνάγομεν, ὅτι **ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἀναγώγου κλάσματος, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται μεικτὸν περιοδικόν, περιέχει τὸν ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 μὲ ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν μὴ περιοδικῶν ψηφίων.** Ἐὰν δὲ περιέχῃ καὶ τὸν ἄλλον παράγοντα, θὰ τὸν περιέχῃ μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μικρότερον.

Ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος περιέχῃ ἐκτὸς τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 καὶ ἄλλους παράγοντας, τὸ κλάσμα τοῦτο τρέπεται εἰς μεικτὸν περιοδικόν, μὲ ἀριθμὸν μὴ περιοδικῶν ψηφίων ἴσον μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην τῶν παραγόντων 2 καὶ 5.

Ἀσκήσεις.

1038) Νὰ εὑρεθῇ, πρὶν γίνῃ ἡ διαίρεσις, ποῖα ἐκ τῶν κάτωθι κλασμάτων τρέπονται εἰς ἀκριβῆ δεκαδικὰ καὶ ποῖα εἰς περιοδικὰ

$$\frac{1}{3},\quad \frac{3}{8},\quad \frac{3}{12},\quad \frac{3}{11},\quad \frac{9}{20},\quad \frac{7}{15},\quad \frac{45}{80},\quad \frac{41}{60},\quad \frac{173}{180},\quad \frac{113}{400}.$$

1039) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κοινὰ κλάσματα, ἐκ τῶν ὁποίων παράγονται τὰ κάτωθι περιοδικὰ

0,373737...	3,185185185...	0,2533333...
0,666666...	2,692307692307...	0,01212...
2,513513513...	0,1636363...	4,17262626...

1040) Νὰ εὑρεθῇ, πρὶν ἢ γίνῃ ἡ διαίρεσις, ποῖα ἐκ τῶν κάτωθι κλασμάτων τρέπονται εἰς ἁπλᾶ περιοδικὰ καὶ ποῖα εἰς μεικτά. Διὰ τὰ τελευταῖα δὲ ταῦτα νὰ εὑρεθῇ καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν μὴ περιοδικῶν ψηφίων

$$\frac{2}{3},\quad \frac{5}{6},\quad \frac{6}{7},\quad \frac{15}{27},\quad \frac{7}{24},\quad \frac{25}{48},\quad \frac{169}{1875},\quad \frac{1331}{3500}.$$

1041) Δώσατε π.δ. 4 ἀναγώγων κλασμάτων, τὰ ὁποῖα νὰ τρέπωνται εἰς ἀκριβῆ δεκαδικά, 4 κλασμάτων, τὰ ὁποῖα νὰ τρέπωνται εἰς ἁπλᾶ περιοδικὰ καὶ ἄλλων 4, τὰ ὁποῖα νὰ τρέπωνται εἰς μεικτὰ περιοδικὰ μὲ ἀριθμὸν μὴ περιοδικῶν ψηφίων κατὰ σειρὰν 1, 2, 3, 4.

ΠΕΡΙ ΛΟΓΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

293. Περὶ λόγου. — Ἡ ἰσότης $2+2+2=6$ δεικνύει, ὅτι ὁ 6 γίνεται ἀπὸ τὸν 2, ἐὰν τὸν ἐπαναλάβωμεν 3 φοράς. Ὁ ἀριθμός, ὅστις δεικνύει τοῦτο, λέγεται **λόγος** τοῦ 6 πρὸς τὸν 2. Εἶναι δὲ ὁ λόγος οὗτος 3, διότι ὁ 3 γίνεται ἀπὸ τὴν 1, ὅπως καὶ ὁ 6 γίνεται ἀπὸ τὸν 2. Ἐπίσης ἡ ἰσότης $3+3+3+3+\frac{3}{5}=12\frac{3}{5}$ δεικνύει, ὅτι ὁ $12\frac{3}{5}$ γίνεται ἀπὸ τὸν 3, ἐὰν τὸν ἐπαναλάβωμεν τέσσαρας φορὰς καὶ ἀπὸ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 3. Ὁ ἀριθμὸς δὲ οὗτος εἶναι ὁ $4\frac{1}{5}$ καὶ εἶναι ὁ λόγος τοῦ $12\frac{3}{5}$ πρὸς τὸν 3, διότι $4\frac{1}{5}=1+1+1+1+\frac{1}{5}$, ἤτοι διότι οὗτος γίνεται ἀπὸ τὴν μονάδα 1, ὅπως γίνεται ὁ $12\frac{3}{5}$ ἀπὸ τὸν 3 καὶ ἀπὸ τὸ μέρος τοῦ 3.

Ἐπίσης ἡ ἰσότης 5 δραχ.$+$5 δραχ.$+\frac{5}{100}$ δραχ.$+\frac{5}{100}$ δραχ.$+\frac{5}{100}$ δραχ. $=10\frac{15}{100}$ δραχ. δεικνύει, πῶς γίνεται ὁ $10\frac{15}{100}$ δραχ. ἀπὸ τὰς 5 δραχ. καὶ ἀπὸ μέρος αὐτῶν. Ἐπειδὴ δὲ γίνεται ἀπὸ τὰς 5 δραχ., ἐὰν τὰς ἐπαναλάβωμεν δύο φορὰς καὶ ἀπὸ τὸ $\frac{1}{100}$ τῶν 5 δραχ. ἐὰν τὸ ἐπαναλάβωμεν 3 φοράς, ὁ ἀριθμὸς $2\frac{3}{100}$ εἶναι ὁ λόγος τῶν $10\frac{15}{100}$ δρ. πρὸς τὰς 5. Εἶναι δὲ καὶ

$$1+1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}=2\frac{3}{100}.$$

Ὥστε: **Λόγος ἑνὸς ἀφῃρημένου ἀριθμοῦ α πρὸς ἄλλον τοιοῦτον β, ἢ συγκεκριμένου ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον ὁμοειδῆ, λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δεικνύει, πῶς γίνεται ὁ α ἀπὸ τὸν β καὶ ἀπὸ τὰ μέρη τοῦ β.**

Κατὰ ταῦτα ὁ λόγος τοῦ $\frac{1}{2}$ πρὸς τὸ $\frac{1}{4}$ εἶναι ὁ 2, διότι τὸ $\frac{1}{2}$ γίνεται ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$, ἐὰν τὸ ἐπαναλάβωμεν 2 φοράς, ἤτοι:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Ὁ δὲ λόγος 2 γίνεται ἀπὸ τὴν μονάδα, ὡς γίνεται ὁ $\frac{1}{2}$ ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$.

Ὁ δὲ λόγος τοῦ $\frac{1}{4}$ πρὸς τὸ $\frac{1}{2}$ εἶναι $\frac{1}{2}$, διότι τὸ $\frac{1}{4}$ γίνεται ἀπὸ τὸ ἥμισυ (τὸ $\frac{1}{2}$) τοῦ $\frac{1}{2}$.

Σημείωσις. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ὁρίζεται καὶ ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε ὁμοειδῶν ποσῶν.

294. Ἀνωτέρω εἴδομεν, ὅτι ὁ λόγος τοῦ 6 πρὸς τὸν 2 εἶναι 3, καὶ δεικνύει οὗτος, ὅτι ὁ 6 γίνεται ἀπὸ τὸν 2, ὅπως ὁ 3 γίνεται ἀπὸ τὴν μονάδα 1. Τοῦτο ὅμως σημαίνει, ὅτι $6 = 2 \times 3$. Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς διὰ 2, ἔχομεν πηλίκον τὸν λόγον 3.

Ὥστε ὁ λόγος τοῦ 6 πρὸς τὸν 2 εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 6 διὰ τοῦ 2. Καὶ ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ τοῦ β. Διὰ τοῦτο οὗτος παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ τοῦ $\alpha : \beta$, ὁ δὲ λόγος τοῦ β πρὸς τὸν α εἶναι ὁ $\frac{\beta}{\alpha}$ ἢ $\beta : \alpha$.

Εἶναι δέ, ὡς γνωρίζομεν, ὁ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἀντίστροφος τοῦ $\frac{\beta}{\alpha}$.

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι συνιστοῦν τὸν λόγον, λέγονται **ὅροι** αὐτοῦ καὶ ὁ μὲν πρῶτος λέγεται **ἡγούμενος,** ὁ δὲ ἄλλος **ἑπόμενος.** Οὕτω τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$ ὅροι εἶναι οἱ α καὶ β, καὶ ὁ μὲν α εἶναι ὁ ἡγούμενος, ὁ δὲ β ὁ ἑπόμενος. Ἐνῷ εἰς τὸν λόγον $\frac{\beta}{\alpha}$ ἡγούμενος εἶναι ὁ β.

295. Ἂς λάβωμεν δύο ὁμοειδῆ ποσά, π. χ. τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἔστω δὲ ὁ λόγος αὐτῶν 2. Ἤτοι ΑΒ = 2.ΓΔ. Ἐὰν τώρα μετρήσωμεν τὰ δύο ταῦτα ποσὰ διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος ΜΝ καὶ εὕρωμεν ἐκ τῆς μετρήσεως τοῦ ΑΒ τὸν ἀριθμὸν α καὶ ἐκ τῆς μετρήσεως τοῦ ΓΔ τὸν ἀριθμὸν β, εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ ἔχωμεν $\alpha = 2.\beta$ (διότι τὰ ποσὰ ΑΒ καὶ 2.ΓΔ εἶναι ἴσα), ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta} = 2$, ἤτοι **ὁ λόγος τῶν δύο ὁμοειδῶν ποσῶν $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = 2$ εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τὰ ποσὰ $\frac{\alpha}{\beta} = 2$** (μετρηθέντα διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος).

Α____________________Β
Γ__________Δ
Μ_____Ν

Μὲ ἄλλους λόγους, ἐὰν τὰ ποσὰ αὐτὰ μετρηθοῦν διὰ τοῦ μέτρου καὶ εὕρωμεν, ὅτι τὸ μῆκος τῆς ΑΒ εἶναι 6 μ., θὰ εὕρωμεν, ὅτι τὸ μῆκος τῆς ΓΔ εἶναι 3 μ., δηλ. ὅτι $\frac{6}{3} = 2$. Ἐὰν δὲ μετρήσωμεν αὐτὰ διὰ τῆς παλάμης, θὰ εὕρωμεν 60 παλ. διὰ τὴν μίαν καὶ 30 διὰ τὴν ἄλλην κ.ο.κ.

296. Περὶ ἀναλογιῶν. — **Ἀναλογία λέγεται ἡ ἰσότης δύο λόγων.**

Οὕτω $\frac{6}{7} = \frac{12}{14}$ ἢ $6 : 7 = 12 : 14$ εἶναι ἀναλογία.

Τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ἢ $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ οἱ ὅροι α καὶ δ λέγονται **ἄκροι,** οἱ δὲ β καὶ γ **μέσοι.** Ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$, ἡ ὁποία ἔχει τοὺς μέσους ὅρους ἴσους, λέγεται συνεχής, ὁ δὲ μέσος ὅρος αὐτῆς β λέγεται **μέσος ἀνάλογος** τῶν δύο ἄκρων ὅρων αὐτῆς α καὶ γ. Οὕτως εἰς τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν $\frac{12}{6} = \frac{6}{3}$ ὁ 6 εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν 12 καὶ 3.

297. Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν.—Ἔστω $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἐπὶ 7×14 λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα $\frac{5}{7} \times 7 \times 14 = \frac{10}{14} \times 7 \times 14$ ἢ $5 \times 14 = 10 \times 7$.

Ὁμοίως ἐκ τῆς $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ λαμβάνομεν τὴν $\frac{\alpha}{\beta} \times \beta \times \delta = \frac{\gamma}{\delta} \times \beta \times \delta$ ἢ $\alpha \times \delta = \gamma \times \beta$.

Ὅθεν: **Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων ὅρων αὐτῆς.**

298. Ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $5 \times 14 = 10 \times 7$ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 7×14, λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{5 \times 14}{7 \times 14} = \frac{10 \times 7}{7 \times 14}$ ἢ $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$ (1). Καὶ ὁμοίως ἐκ τῆς $\alpha \times \delta = \gamma \times \beta$ λαμβάνομεν τὴν $\frac{\alpha \times \delta}{\beta \times \delta} = \frac{\gamma \times \beta}{\beta \times \delta}$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

Ὅθεν: **Ἐὰν δοθοῦν τέσσαρες ἀριθμοὶ** (διάφοροι τοῦ μηδενὸς) **τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον δύο ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι συνιστοῦν ἀναλογίαν, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἄκροι ὅροι εἶναι οἱ παράγοντες τοῦ ἑνὸς γινομένου καὶ μέσοι οἱ παράγοντες τοῦ ἄλλου.**

Ἐὰν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $5 \times 14 = 10 \times 7$ διαιρέσωμεν διὰ 14×10 ἢ 7×5 ἢ 10×5 θὰ εὕρωμεν:

$$\frac{5}{10} = \frac{7}{14} \quad (2) \qquad \frac{14}{7} = \frac{10}{5} \quad (3) \qquad \frac{14}{10} = \frac{7}{5} \quad (4)$$

Παρατηροῦντες δὲ τὰς ἀναλογίας (1), (2), (3), (4) συνάγομεν, ὅτι **δυνάμεθα εἰς μίαν ἀναλογίαν νὰ ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων ὅρων ἢ τῶν ἄκρων.**

Τὰ ἀνωτέρω ἐκφράζονται ὡς ἑξῆς : Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ θὰ εἶναι $\alpha \times \delta = \beta \times \gamma$ ἢ $\alpha.\delta = \beta.\gamma$ Ἐὰν δὲ εἶναι $\alpha.\delta = \beta.\gamma$ θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ἢ $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ ἢ $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$ ἢ $\frac{\delta}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha}$.

299. Ἔστω ἡ ἀναλογία $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς προσθέσωμεν τὴν μονάδα 1, λαμβάνομεν $\frac{2}{3} + 1 = \frac{4}{6} + 1$, ἤτοι $\frac{2+3}{3} = \frac{4+6}{6}$. Ὅθεν :

Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸν πρῶτον ὅρον ἑκάστου λόγου μιᾶς ἀναλογίας τὸν δεύτερον ὅρον αὐτοῦ, λαμβάνομεν νέαν ἀναλογίαν.

Νέας ἀναλογίας λαμβάνομεν ἐκ δοθείσης καὶ ὡς ἑξῆς φαίνεται :

1) $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$ $\quad \frac{5}{4} - 1 = \frac{10}{8} - 1$, ἤτοι $\frac{5-4}{4} = \frac{10-8}{8}$

2) $\frac{5}{7} = \frac{15}{21}$ $\quad 1 - \frac{5}{7} = 1 - \frac{15}{21}$ ἢ $\frac{7-5}{7} = \frac{21-15}{21}$

3) $\frac{8}{3} = \frac{24}{9}$, ἐξ ἧς ἔχομεν $\frac{8+3}{3} = \frac{24+9}{9}$ καὶ $\frac{8-3}{3} = \frac{24-9}{9}$

Καὶ ἐκ τῶν τελευταίων ἀναλογιῶν λαμβάνομεν $\frac{8+3}{24+9} = \frac{3}{9}$, $\frac{8-3}{24-9} = \frac{3}{9}$, ἤτοι $\frac{8+3}{24+9} = \frac{8-3}{24-9}$, ἐξ ἧς τέλος ἔχομεν $\frac{8+3}{8-3} = \frac{24+9}{24-9}$.

300. Ὅταν εἷς ὅρος τῆς ἀναλογίας εἶναι ἄγνωστος, δυνάμεθα νὰ τὸν εὕρωμεν. Π.χ. ἐὰν ζητῆται ὁ τέταρτος ὅρος, τὸν ὁποῖον παριστῶμεν διὰ χ, τῆς ἀναλογίας $\frac{10}{2} = \frac{15}{\chi}$, θὰ ἔχωμεν $10.\chi = 2.15$, ὥστε $\chi = \frac{2.15}{10} = \frac{30}{10} = 3$.

Ἐπίσης ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{12}{3} = \frac{\chi}{9}$ εὑρίσκομεν $3.\chi = 12.9$. καὶ $\chi = \frac{12.9}{3} = 4.9 = 36$.

Ὁμοίως ἐκ τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας $\frac{8}{\chi}=\frac{\chi}{2}$ εὑρίσκομεν $\chi^2=8.2$ καὶ $\chi=\sqrt{8.2}=\sqrt{16}=4$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐκόλως συνάγομεν τοὺς κανόνας τῆς εὑρέσεως ἑνὸς ὅρου δοθείσης ἀναλογίας, ὅταν οὗτος εἶναι μέσος ἢ ἄκρος, ἢ τῆς εὑρέσεως τοῦ μέσου ἀναλόγου μιᾶς συνεχοῦς ἀναλογίας.

301. Ἄς ὑποτεθῇ, ὅτι ἔχομεν τοὺς ἴσους λόγους:

$$\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{\delta}{\Delta}=\varrho.$$

Ἐπειδὴ $\frac{\alpha}{A}=\varrho$, ἕπεται, ὅτι $\alpha=A.\varrho$

ὁμοίως » $\frac{\beta}{B}=\varrho$ κλπ. » » $\beta=B.\varrho$ (1)

$$\gamma=\Gamma.\varrho$$
$$\delta=\Delta.\varrho$$

Ἐὰν ἤδη τὰς ἰσότητας (1) προσθέσωμεν κατὰ μέλη

ἔχομεν $\alpha+\beta+\gamma+\delta=A.\varrho+B.\varrho+\Gamma.\varrho+\Delta.\varrho$ ἢ

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=(A+B+\Gamma+\Delta).\varrho$· ἄρα

καὶ $\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{A+B+\Gamma+\Delta}=\varrho$ ἤτοι

$$\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{\delta}{\Delta}=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{A+B+\Gamma+\Delta}.$$

Ὅθεν: **Ἐὰν ἔχωμεν λόγους ἴσους καὶ προσθέσωμεν τοὺς ὁμωνύμους ὅρους αὐτῶν, λαμβάνομεν λόγον ἴσον.**

ΛΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

Τὰς ἐννοίας τοῦ λόγου καὶ ἀναλογιῶν δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα εἰσέρχονται ποσὰ ἀνάλογα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Ἀλλὰ πρὸ αὐτῶν θὰ ἴδωμεν τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

302. 1ον) **Ἐὰν δύο ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε τιμῶν τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.**

Ἄς λάβωμεν δύο τυχόντα ἀνάλογα ποσά, π.χ. τὸν μισθὸν ἑνὸς ἐργάτου, τοῦ ὁποίου τὸ ἡμερομίσθιον εἶναι 45 δρχ. καὶ τὰς ἡμέρας τῆς ἐργασίας του. Ἐὰν ὁ ἐργάτης οὗτος ἐργασθῇ ἐπὶ 3 ἡμέρας θὰ λάβη 45 δρχ.×3, ἐὰν δὲ ἐπὶ 7 ἡμέρας θὰ λάβη 45 δρχ.×7. Ἐὰν δὲ λάβωμεν τὸν λόγον $\frac{3}{7}$ τῶν δύο τιμῶν τοῦ πρώτου ποσοῦ καὶ τὸν λόγον $\frac{45\times3}{45\times7}=\frac{3}{7}$ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου, παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ δύο οὗτοι λόγοι εἶναι ἴσοι.

2ον) **Ἐὰν δύο ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε τιμῶν τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸν ἀντίστροφον τοῦ λόγου τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.**

Διότι, ἐὰν 1 ἐργάτης τελειώσῃ ἓν ἔργον εἰς 18 ἡμ. οἱ 2 ἐργάται θὰ τὸ τελειώσουν εἰς 9 ἡμέρας καὶ οἱ 3 ἐργάται εἰς 6 μόνον ἡμέρας. Ἐὰν δὲ λάβωμεν τὸν λόγον $\frac{2}{3}$ τῶν τελευταίων τιμῶν τοῦ πρώτου ποσοῦ καὶ τὸν λόγον $\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ λόγος $\frac{2}{3}$ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀντίστροφον τοῦ λόγου $\frac{3}{2}$.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω τὸ πρῶτον πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν (221) λύεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἀξία τοῦ οἴνου εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ ποσὸν αὐτοῦ. Ἑπομένως ἔχομεν $\frac{\chi}{92}=\frac{35}{8}$, ἤτοι $\chi=\frac{92\times35}{8}=402{,}50$ δραχμαί. Ἐνῷ εἰς τὸ δεύτερον πρόβλημα (222), εἰς τὸ ὁποῖον αἱ ὧραι τῆς καθημερινῆς ἐργασίας καὶ αἱ ἡμέραι, εἰς τὰς ὁποίας τελειώνει τὸ ἔργον εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα, ἔχομεν:

$$\frac{\chi}{12}=\frac{6}{8}\cdot \text{ ἤτοι } \chi=\frac{12\times6}{8}=9 \text{ ἡμέραι.}$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον λύονται καὶ τὰ προβλήματα μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα. Π.χ. ἐὰν τὰ ζητούμενα μέρη τοῦ πρώτου προβλήματος (253) παραστήσωμεν διὰ χ, ψ, φ θὰ ἔχωμεν:

$\frac{\chi}{2}=\frac{\psi}{3}=\frac{\varphi}{5}=\frac{\chi+\psi+\varphi}{2+3+5}$ καί, ἐπειδὴ $\chi+\psi+\varphi=450$, θὰ ἔχωμεν $\frac{\chi}{2}=\frac{450}{10}$, ἤτοι $\chi=90$, $\frac{\psi}{3}=\frac{450}{10}$, ἤτοι $\psi=135$, $\frac{\varphi}{5}=\frac{450}{10}$, ἤτοι $\varphi=225$.

Ἀσκήσεις.

1042) Νὰ εὕρῃς τὸν λόγον (ἀπὸ μνήμης):

1ον α´) τοῦ 24 πρὸς τὸν 3
β´) τοῦ 27 πρὸς τὸν 9
γ´) τοῦ 120 πρὸς τὸν 24
δ´) τοῦ 24 πρὸς τὸν 120
ε´) τοῦ 1 πρὸς τὸν 2
στ´) τοῦ 2 πρὸς τὸν 3
ζ´) τοῦ $\frac{3}{7}$ πρὸς τὸν $\frac{5}{7}$
η´) τοῦ $\frac{2}{5}$ πρὸς τὸν $\frac{7}{10}$

2ον α´) τῶν 24 δρ. πρὸς τὰς 6 δρ.
β´) τῶν 16 ὀκ. πρὸς τὰς 4 ὀκ.
γ´) τῶν 5 μέτ. πρὸς τὰ 10 μέτ.
δ´) τῶν 2 παλ. πρὸς τὸ 1 μέτ.
ε´) τοῦ 1 πήχ. πρὸς τὸ 1 μέτ.
στ´) τῆς 1 ὑάρ. πρὸς τὸ 1 μέτ.

1043) Νὰ γίνῃ ἡ ἐπαλήθευσις τῶν ἀναλογιῶν:

α´) $\frac{3}{7}=\frac{15}{35}$ β´) $\frac{33}{11}=\frac{21}{7}$ γ´) $\frac{125}{250}=\frac{98}{196}$

δ´) $\frac{8}{27}=\frac{3}{7}$ ε´) $\frac{39}{52}=\frac{26}{39}$ στ´) $\frac{36}{9}:5=\frac{12}{5}:5$.

1044) Σχηματίσατε τέσσαρας ἀναλογίας ἀπὸ ἑκάστην τῶν ἰσοτήτων: α´) $4\times7=2\times14$, β´) $5\times15=3\times25$.

1045) Νὰ εὑρεθῇ, ἂν οἱ ἀριθμοὶ 3, 5, 9, 15 συνιστοῦν ἀναλογίαν καὶ ποίαν, ὡς καὶ οἱ α´) 4, 7, 14, 2, καὶ β´) 80, 16, 100, 20.

1046) Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{3}{12}$ νὰ εὑρεθῇ πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ α εἰς τὸν β.

1047) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὅρος χ τῶν ἀναλογιῶν:

α´) $\frac{3}{5}=\frac{12}{x}$ β´) $\frac{x}{15}=\frac{4}{6}$ γ´) $\frac{20}{x}=\frac{30}{6}$

δ´) $\frac{11}{16}=\frac{x}{32}$ ε´) $\frac{16}{x}=\frac{x}{4}$ στ´) $\frac{x}{9}=\frac{81}{x}$.

1048) Σχηματίσατε ἀναλογίαν, τῆς ὁποίας οἱ τρεῖς ὅροι εἶναι οἱ ἀριθμοί: α´) 3, 5, 6, β´) 7, 8, 28. γ´) 18, 3, 2, δ´) 20, 5, 30.

1049) Σχηματίσατε συνεχῆ ἀναλογίαν μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς α´) 1 καὶ 100, β´) 2 καὶ 50, γ´) 4 καὶ 36, δ´) 9 καὶ 36, ε´) 12 καὶ 108.

1050) Σχηματίσατε συνεχῆ ἀναλογίαν μὲ μέσον ἀνάλογον α´) τὸν 4, β´) τὸν 5, γ´) τὸν 8 καὶ δ´) τὸν 12.

1051) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν δύο ἀναλογίαι ἔχουν τοὺς τρεῖς ἀντιστοίχους ὅρους αὐτῶν ἴσους, θὰ ἔχουν ἴσον καὶ τὸν τέταρτον.

1052) Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{5}{12} = \frac{15}{36}$ νὰ εὑρεθοῦν ἄλλαι ἀναλογίαι.

1053) Νὰ λυθοῦν διὰ τῶν ἀναλογιῶν προβλήματα ἐκ τῶν δοθέντων εἰς τὰς μεθόδους.

ΠΕΡΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

303. Πρόβλημα. **Ἐὰν εἰς τὸ τριπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ προσθέσω τὸν 15, θὰ λάβω τὸν 45. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;**

Διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο σκέπτομαι ὡς ἑξῆς: ὁ 45 εἶναι ἄθροισμα τοῦ τριπλασίου τοῦ ζητουμένου καὶ τοῦ 15. Ὥστε ἡ διαφορὰ 45—15 εἶναι τὸ τριπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἐπομένως ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι τὸ τρίτον τοῦ 30, ἤτοι $\frac{30}{3} = 10$.

Ἀλλὰ τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναμαι νὰ τὸ λύσω καὶ ὡς ἑξῆς: Ἂν παραστήσω τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ χ, τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ εἶναι 3χ. Ἐὰν δὲ εἰς τὸ 3χ προσθέσω τὸν 15, θὰ λάβω κατὰ τὸ πρόβλημα τὴν ἰσότητα $3χ + 15 = 45$ (1). Τώρα ἐκεῖνο, ποὺ μένει νὰ εὕρω, εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ χ, δηλαδὴ ὁ ἀριθμός, ὅστις ἀντὶ τοῦ χ ἐπαληθεύει τὴν ἰσότητα. Εὑρίσκεται δὲ ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ χ ἀπὸ τὴν σχηματισθεῖσαν ἰσότητα ὡς ἑξῆς: Ἀφαιρῶ ἀπὸ ἀμφότερα τὰ ἴσα (τὰ μέλη) τὸν 15, ὁπότε εὑρίσκω $3χ + 15 - 15 = 45 - 15$ ἢ $3χ = 30$. Τῆς νέας δὲ αὐτῆς ἰσότητος διαιρῶ ἀμφότερα τὰ μέρη διὰ 3 καὶ εὑρίσκω $\frac{3χ}{3} = \frac{30}{3}$ ἢ $χ = 10$. Ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ 10 (καὶ μόνη αὐτὴ) **ἐπαληθεύει** τὴν ἰσότητα $3χ + 15 = 45$. Καὶ πράγματι $3.10 + 15 = 45$ ἢ $45 = 45$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ τιμὴ $χ = 10$ ἁρμόζει καὶ εἰς τὸ πρόβλημα, λέγω, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 10.

304. Διὰ νὰ λύσω τὸ προταθὲν πρόβλημα διὰ τῆς δευτέρας μεθόδου ἐσχημάτισα μίαν ἰσότητα (1), ἥτις συνέδεσε τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος (δηλ. τοὺς γνωστοὺς) μὲ τὸ ζητούμενον (δηλ. τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν) καὶ κατόπιν εὗρον τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου χ, ἥτις ἐπηλήθευσε τὴν ἰσότητα. Ἔλαβον δὲ οὕτω τὸν ζητούμενον ἀριθμόν. Ἡ ἰσότης (1), ἥτις περιέχει τὸν ἄγνωστον ἀριθμόν, λέγεται **ἐξίσωσις**, ἡ δὲ εὕρεσις τῆς τιμῆς $\chi = 10$ λέγεται **λύσις** τῆς ἐξισώσεως.

Ὅθεν: **Ἐξίσωσις λέγεται ἰσότης, ἥτις συνδέει γνωστοὺς καὶ ἀγνώστους ἀριθμοὺς καὶ τῆς ὁποίας τὸ α΄ μέλος γίνεται ἴσον μὲ τὸ β΄, ὅταν οἱ ἄγνωστοι λάβουν καταλλήλους τιμάς.** Π.χ. αἱ ἰσότητες $\frac{\chi}{2}+5=3\chi-7$, $3\chi-\varphi=1$ εἶναι ἐξισώσεις.

305. Διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐξισώσεων θὰ λύσωμεν καὶ τὰ ἑπόμενα προβλήματα, ἡ λύσις δὲ αὐτῶν θὰ κάμῃ νὰ ἐννοήσωμεν καὶ πῶς γίνεται ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων.

Πρόβλημα 1ον **Ὁ Ἰωάννης εἶχε τόσους βώλους, ὅσους καὶ ὁ Πέτρος. Ἔπαιξαν μὲ ἄλλους συμμαθητάς των καὶ ὁ μὲν Ἰωάννης, ἀφοῦ ἑπταπλασίασε πρῶτον τοὺς ἰδικούς του, ἔχασεν ἔπειτα 12, ὁ δὲ Πέτρος ἀφοῦ τοὺς ἐδιπλασίασεν, ἐκέρδισεν ἔπειτα ἄλλους 8. Εὑρέθησαν δὲ πάλιν μὲ ἴσους βώλους. Πόσους βώλους εἶχεν ἕκαστος ἀρχικῶς;**

Ἔστω, ὅτι εἶχον ἀπὸ χ βώλους. Ὁ Ἰωάννης τοὺς ἔκαμε πρῶτον 7χ. Ἐπειδὴ δὲ ἔχασεν ἔπειτα 12, τοῦ ἔμειναν τελικῶς $7\chi-12$ βῶλοι. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ Πέτρος εἶχε τελικῶς $2\chi+8$. Πρέπει δὲ κατὰ τὸ πρόβλημα νὰ εἶναι $7\chi-12=2\chi+8$. Διὰ νὰ λύσωμεν τώρα τὴν σχηματισθεῖσαν ἐξίσωσιν, προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς τὸν 12 καὶ εὑρίσκομεν $7\chi-12+12=2\chi+8+12$ ἢ $7\chi=2\chi+8+12$ ἢ $7\chi=2\chi+20$. Ἔπειτα ἀπὸ τὰ μέλη αὐτῆς ἀφαιροῦμεν τὸν 2χ καὶ λαμβάνομεν $7\chi-2\chi=2\chi+20-2\chi$ ἢ $7\chi-2\chi=20$ ἢ $5\chi=20$, καὶ τέλος διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη διὰ 5, ὁπότε εὑρίσκομεν $\frac{5\chi}{5}=\frac{20}{5}$ ἢ $\chi=4$. Ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ χ (καὶ μόνον αὐτὴ) ἐπαληθεύει τὴν σχηματισθεῖσαν ἐξίσωσιν $7\chi-12=2\chi+8$. Καὶ πράγματι $7.4-12=2.4+8$ ἢ $16=16$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ τιμὴ $\chi=4$ ἁρμόζει εἰς τὸ πρόβλημα, λέγομεν, ὅτι ὁ Ἰωάνης καὶ ὁ Πέτρος εἶχον ἀπὸ 4 βώλους.

Πρόβλημα 2ον. **Εἰς μίαν μαθητικὴν ἐκδρομὴν οἱ μαθηταὶ μιᾶς τάξεως ἀπεφάσισαν, ἵνα πληρώσουν ἐκ τοῦ κοινοτικοῦ ταμείου τῆς τάξεώς των τὰς δαπάνας μεταφορᾶς τῶν ἀπόρων μαθητῶν, αἱ ὁποῖαι ἦσαν 35 δραχμαὶ δι' ἕκα-**

στον. Ἀλλ' εἶδον, ὅτι, ἐὰν ἐπλήρωνε τὸ ταμεῖον ὅλας τὰς δαπάνας αὐτάς, θὰ ἐχρειάζοντο ἀκόμη 10 δραχ., ἐνῷ ἐὰν κατέβαλλε 30 δραχ. δι' ἕκαστον ἄπορον, θὰ ἐπερίσσευον 20 δρχ. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄποροι μαθηταί;

Ἔστω, ὅτι οἱ ἄποροι μαθηταὶ ἦσαν χ. Αἱ δαπάναι λοιπὸν τῆς μεταφορᾶς τῶν ἀπόρων ἦσαν 35χ δρχ. Ἄρα τὸ ταμεῖον τῆς κοινότητος τῆς τάξεως εἶχε 35χ—10 δρχ. Ἐὰν τώρα ἐξ ἄλλου κατέβαλλε δι' ἕκαστον ἄπορον 30 δρχ. διὰ τοὺς χ ἀπόρους θὰ κατέβαλλε 30χ δρχ. Ἄρα τὸ ταμεῖον τῆς κοινότητος εἶχε 30χ+20 δρχ.

Ἔχομεν ἑπομένως τὴν ἐξίσωσιν $35\chi-10=30\chi+20$ (1). Ἐὰν τώρα προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς τὸν ἀριθμὸν 10 καὶ ἀφαιρέσωμεν κατόπιν ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὸν 30.χ, ἔχομεν $35.\chi-10+10=30.\chi+20+10$ ἢ $35\chi=30\chi+30$. Κατόπιν δὲ $35\chi-30\chi=30\chi+30-30\chi$ ἢ $5\chi=30$. Διαιροῦντες δὲ ἤδη διὰ τοῦ 5 εὑρίσκομεν $\frac{5\chi}{5}=\frac{30}{5}$, ἤτοι $\chi=6$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ $\chi=6$ ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν (1), διότι $35.6-10=30.6+20$ ἤτοι $200=200$ ἕπεται, ὅτι οἱ ἄποροι μαθηταὶ ἦσαν 6.

Π ρ ό β λ η μ α 3ον. **Εἷς πατὴρ εἶναι σήμερον ἡλικίας 46 ἐτῶν, ὁ δὲ υἱός του 12 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ;**

Ἔστω μετὰ χ ἔτη, ὁπότε ὁ πατὴρ θὰ εἶναι 46+χ ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς 12+χ. Ἐπειδὴ δὲ τότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ, διὰ νὰ γίνουν ἴσαι πρέπει τὴν ἡλικίαν τοῦ υἱοῦ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3, ὁπότε θὰ λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν $46+\chi=(12+\chi).3$. Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ἐκτελοῦμεν, πρῶτον τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ β' μέλους καὶ εὑρίσκομεν $46+\chi=36+3\chi$. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰ δύο μέλη τὸ χ, ὅτε ἔχομεν $46+\chi-\chi=36+3\chi-\chi$ ἢ $46=36+2\chi$. Κατόπιν ἀφαιροῦμεν πάλιν τὸν 36 καὶ λαμβάνομεν $46-36=36+2\chi-36$ ἢ $10=2\chi$ καὶ τέλος διαιροῦντες διὰ 2, εὑρίσκομεν $\frac{10}{2}=\frac{2\chi}{2}$ ἢ $5=\chi$.

Π ρ ό β λ η μ α 4ον. **Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ $\frac{1}{4}$ ὅταν αὐξηθῇ κατὰ 9, νὰ ἰσοῦται μὲ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ.**

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ, ἤτοι τὸ $\frac{\chi}{4}$, αὐξηθὲν κατὰ 9 γίνεται $\frac{\chi}{4}+9$, τὰ δὲ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{2\chi}{5}$. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι $\frac{\chi}{4}+9=\frac{2\chi}{5}$. Διὰ νὰ λύσωμεν ἤδη αὐτήν, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ 4.5 (ἤτοι ἐπὶ ἓν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν 4 καὶ 5), διὰ νὰ ἐξαλειφθοῦν οἱ παρονομασταί, καὶ εὑρίσκομεν $4.5.\frac{\chi}{4}+4.5.9=4.5.\frac{2\chi}{5}$ ἢ $5\chi+180=8\chi$. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰ δύο μέλη τὸ 5χ, ὁπότε εὑρίσκομεν $180=3\chi$. Καὶ τέλος διαιροῦντες διὰ 3 εὑρίσκομεν $\frac{180}{3}=\frac{3\chi}{3}$ ἢ $60=\chi$. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 60. Καὶ πράγματι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 60, ἤτοι τὸ 15, αὐξηθὲν κατὰ 9 γίνεται 24, ἀλλὰ $24=\frac{2}{3}$ τοῦ 60 ἢ $24=24$.

Πρόβλημα 5ον. **Ἐχρεώστει τις ἓν ποσὸν δραχμῶν καὶ ἐπλήρωσε πρῶτον τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ, ἔπειτα τὸ $\frac{1}{4}$, ἔπειτα τὸ $\frac{1}{6}$ αὐτοῦ καὶ τέλος ἐπλήρωσε 100 δραχμάς. Οὕτω δὲ ἐξώφλησε τὸ χρέος αὐτό. Πόσας δραχμὰς ἐχρεώστει;**

Ἔστω, ὅτι ἐχρεώστει χ δραχμάς. Ἐπλήρωσε δὲ $\frac{\chi}{2}$ δρχ., $\frac{\chi}{4}$, $\frac{\chi}{6}$ καὶ 100 δραχ. Ἐὰν δὲ αὐτὰ προστεθοῦν θὰ ἰσοῦνται μὲ τὸ ὅλον χρέος, ἤτοι χ δραχμάς. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{4}+\frac{\chi}{6}+100=\chi$. Διὰ νὰ λύσωμεν τώρα τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ 12, ἤτοι ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν, καὶ εὑρίσκομεν:

$$12.\frac{\chi}{2}+12.\frac{\chi}{4}+12.\frac{\chi}{6}+12.100=12.\chi$$

$$\text{ἢ}\quad 6.\chi+3.\chi+2.\chi+1200=12.\chi \quad \text{ἢ} \quad 11\chi+1200=12\chi$$

Ἐὰν δὲ κατόπιν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὸν 11χ εὑρίσκομεν $1200=12\chi-11\chi$ ἢ $1200=\chi$. Ὥστε ἐχρεώστει 1200 δραχμάς. Καὶ πράγματι τὸ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ αὐτῶν εἶναι 600, 300, 200 καὶ 100 ἀκόμη κάμνουν 1200 δραχμάς.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ἀπὸ μνήμης. 1054) Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

$2\chi = 6 \quad 5\chi = 45 \quad 7\chi = 77 \quad 12\chi = 72 \quad 5 + \psi = 9$

$16 + \psi = 31 \quad 25 + \psi = 60 \quad \psi - 12 = 6 \quad \frac{\chi}{5} = 1 \quad \frac{\chi}{3} = 5$

$\frac{\chi}{6} = 3 \quad 3\chi = 2\chi + 7 \quad 7\varphi = 5\varphi + 16 \quad 5\varphi = 2\varphi + 15 \quad 9\chi = 4\chi + 20.$

Γραπτῶς. 1055) Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

$9\chi + 14 = 7\chi + 22, \quad 19\chi - 11 = 11\chi + 5, \quad 12\chi - 37 = 7\chi - 17$

$25\chi - 32 = 7\chi + 8\chi - 12, \quad 3(\varphi - 7) = 36, \quad 5(\chi + 9) = \chi + 81$

$4(\psi + 1) = 3(\psi + 9), \quad 7(\chi + 3) = 3(\chi + 4) + 41, \quad \frac{3\chi}{5} = 6$

$\frac{9\chi}{11} = 18, \quad \frac{\psi}{3} + \frac{\psi}{8} = 11, \quad \frac{\chi}{4} + \frac{\chi}{5} = \frac{13}{20}$

$\frac{2\chi}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}, \quad \frac{3\varphi}{8} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}, \quad 4\chi - \frac{2\chi}{7} = \frac{\chi}{2} + 45.$

1056) Ἐὰν εἰς ἀριθμὸν προσθέσω τὸν 84, εὑρίσκω ἄθροισμα ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

1057) Ἐὰν ἀπὸ τὸ πενταπλάσιον ἀριθμοῦ ἀφαιρέσω τὸν 81, εὑρίσκω τὸ διπλάσιον τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

1058) Οἱ μαθηταὶ μιᾶς τάξεως σχολείου τινὸς παρήγγειλαν μίαν βιβλιοθήκην πρὸς χρῆσίν των. Ἐὰν ἕκαστος μαθητὴς κατέβαλλε 17 δραχμάς, θὰ ἐπερίσσευον μετὰ τὴν πληρωμὴν τῆς βιβλιοθήκης 39 δραχμαί, ἐνῷ, ἐὰν ἐπλήρωνεν ἕκαστος 15 δραχμάς, θὰ ἐχρειάζετο ἀκόμη 55 δραχμαί. Πόσοι εἶναι οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεως αὐτῆς;

1059) Δύο τάξεις ἑνὸς σχολείου ἔκαμαν ἔρανον καὶ συνέλεξαν ὁμοῦ 285 δρχ. Ἀλλ' ἡ δευτέρα τάξις συνέλεξε διπλασίας δρχ. ἀπὸ τὴν πρώτην. Πόσας δρχ. συνέλεξεν ἡ πρώτη καὶ πόσας ἡ δευτέρα;

1060) Ἠγόρασέ τις ὕφασμα βαμβακερὸν καὶ μάλλινον τὸ ὅλον 73 πήχεις. Ἀλλὰ τὸ βαμβακερὸν ὕφασμα ἦτο κατὰ 15 πήχεις μεγαλύτερον τοῦ μαλλίνου. Πόσους πήχεις ἠγόρασεν ἀπὸ κάθε ὕφασμα;

1061) Εἷς μίαν ἐκδρομὴν ἑνὸς διδασκαλείου μετέσχον ἐν ὅλῳ 220 πρόσωπα καὶ ἐξ αὐτῶν οἱ μαθηταὶ ἦσαν κατὰ 30 περισσότεροι τῶν μαθητριῶν καὶ κατὰ 80 περισσότεροι τῶν καθηγητῶν. Πόσοι ἦσαν οἱ μαθηταί, αἱ μαθήτριαι καὶ οἱ καθηγηταί;

1062) Εἷς πατὴρ εἶναι 48 ἐτῶν καὶ ὁ υἱός του 9. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι τετραπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ;

1063) Ἐὰν εἰς τὸ τρίτον ἀριθμοῦ τινος προσθέσω τὸν 16 λαμβάνω τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

1064) Ἐὰν εἰς ἓν σχολεῖον ἐφοίτων μαθηταὶ κατὰ $\frac{1}{3}$ περισσότεροι ἀπὸ ὅσους φοιτοῦν, τὸ σχολεῖον θὰ εἶχε 220 μαθητάς. Πόσοι μαθηταὶ φοιτοῦν εἰς τὸ σχολεῖον;

1065) Μία σχολικὴ ἐπιτροπὴ ἀπὸ τὰ ἔσοδα ἑνὸς ἔτους ἐδαπάνησε τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτῶν διὰ τὴν ἀγορὰν σχολικῶν ἐπίπλων, τὰ $\frac{2}{5}$ διὰ τὴν ἀγορὰν σχολικῶν ὀργάνων, τὸ $\frac{1}{10}$ αὐτῶν διὰ τὸν πλουτισμὸν τῆς βιβλιοθήκης τοῦ σχολείου καὶ τὰς ὑπολοίπους 12500 δραχμὰς ἐκράτησεν ὡς ἀποθεματικὸν τοῦ ταμείου. Πόσα ἦσαν τὰ ἐτήσια ἔσοδα; Πόσα ἐδαπάνησε διὰ τὴν προμήθειαν ἐπίπλων, ὀργάνων καὶ βιβλίων;

1066) Εἷς ἐργάτης ἀπὸ τὸν μισθὸν μιᾶς ἡμέρας διαθέτει τὸ $\frac{1}{2}$ διὰ τὴν τροφὴν τῆς οἰκογενείας του τὸ $\frac{1}{5}$ θέτει κατὰ μέρος διὰ τὸ ἐνοίκιον τῆς οἰκίας του καὶ τὸ $\frac{1}{8}$ δαπανᾷ δι' ἀτομικάς του ἀνάγκας, τοῦ περισσεύουν δὲ καὶ 14 δραχμαί. Ποῖον εἶναι τὸ ἡμερομίσθιόν του;

1067) Ἀνέμειξέ τις ἔλαιον τῶν 42 δρχ. τὴν ὀκᾶν μετ' ἄλλου ἐλαίου τῶν 48 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἔκαμε μεῖγμα 1200 ὀκάδων τῶν 46 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας ἀνέμειξεν ἐξ ἑκάστου εἴδους;

1068) Ἐὰν ἀπὸ τὰ $\frac{3}{4}$ ἀριθμοῦ τινος ἀφαιρέσω τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ λαμβάνω τὸν 30. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄ ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠ' ΑΥΤΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄ ΠΕΡΙ ΜΕΘΟΔΩΝ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

Ἀνάδοχος Ἐκτυπώσεως καὶ Βιβλιοδετήσεως:
Ἐργοστάσιον Γραφικῶν Τεχνῶν Π. ΔΙΑΛΗΣΜΑ, Καρόρη 11 — Ἀθῆναι