28

330

ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ πρώην καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῇ προτύπῳ Βαρβακείῳ Σχολῇ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μ. Ἐκπαιδεύσεως.

Ἀγγ. Γατόπουλος
Γεωργία

# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΗ ΚΑΤΑ ΤΟ ΤΕΛΕΥΤΑΙΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ Α΄, Β΄, Γ΄ ΤΑΞΕΩΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΚΑΙ ΗΜΙΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

Ἐγκεκριμένη διὰ τὴν πενταετίαν 1933—1938

Ἀριθμὸς ἐγκριτικῆς ἀποφάσεως 41.062/31/7/933.

ΕΚΔΟΣΙΣ Α΄.

Ἀντίτυπα 5.000

Τιμᾶται μετὰ τοῦ βιβλιοσ. καὶ φόρου Δραχμ. 30.60
Βιβλιόσημον καὶ φόρος Ἀναγκ. Δανείου Δραχμ. 10.40
Ἀριθμ. ἐγκριτικῆς ἀποφάσεως 41.062]31—7—33.
Ἀριθμ. ἀδείας κυκλοφορίας 48.745

1190

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
ΔΗΜ. ΤΖΑΚΑ, ΣΤΕΦ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ & ΣΙΑ
8ΙΑ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 8ΙΑ
1933

$x \quad \frac{x}{2}$

$$\frac{x}{10} = \frac{x}{25} + 120$$

$5x = 2x + 6000$

$5x = 2x + 6000$

$$\frac{3x}{3} = \frac{6000}{3} = 2000$$

ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ πρῴην καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῇ προτύπῳ Βαρβακείῳ Σχολῇ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μ. Ἐκπαιδεύσεως.

# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΗ ΚΑΤΑ ΤΟ ΤΕΛΕΥΤΑΙΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

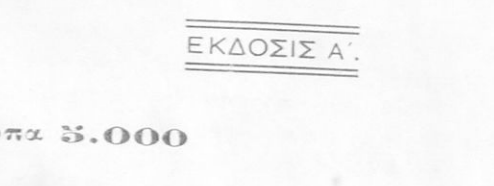
ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ Α΄, Β΄, Γ΄ ΤΑΞΕΩΣ ΤΩΝ ΗΜΙΓΥΜΝΑΣΙΩΝ ΚΑΙ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΔΙΑ ΤΗΝ ΠΕΝΤΑΕΤΙΑΝ 1933—1938

*Ἀριθμὸς ἐγκριτικῆς ἀποφάσεως 41.062/31/7/933.*

ΕΚΔΟΣΙΣ Α΄.

Ἀντίτυπα 3.000




ΔΗΜ. Τ. [illegible] ΣΙΑ
81Α ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 81Α
1933

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τῶν ἐκδοτῶν.

ΕΚΔΟΤΙΚΟΝ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
Ν. ΤΖΑΚΑ κ. Σ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΤΥΠΟΙΣ «ΕΛΛΑΣ» ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ 10

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ
## ΔΙΑ ΤΟΥΣ κ. κ. ΚΡΙΤΑΣ

Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει τὴν ὕλην τοῦ τελευταίου προγράμματος.

Ἡ θεωρητικὴ ἀπόδειξις τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων ἐπιτάσσεται ἑκάστοτε τῆς πρακτικῆς τοιαύτης σημειουμένη πρὸς διάκρισιν δι' ἀστερίσκου. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον διατηρεῖται ἡ προσήκουσα ἁρμονία καὶ ἐπιστημονικὴ ἀλληλουχία, ἀποφεύγεται ἄσκοπος ἐπανάληψις τῶν αὐτῶν προτάσεων καὶ μείζων κατ' ἀκολουθίαν ἐπέκτασις τοῦ βιβλίου χωρὶς νὰ προστίθηται τὸ παράπαν νέα ὕλη.

Ἀντιθέτως, ἂν τὰ θεωρητικὰ ταῦτα μέρη, ἀνεγράφοντο πάντα ὁμοῦ εἰς ἴδιον κεφάλαιον ἢ βιβλίον, τοῦτο θὰ ἦτο κυρίως μία σύντομος θεωρητικὴ Ἀριθμητικὴ προσηρτημένη εἰς τὸ ἄλλο βιβλίον ἄνευ λογικοῦ τινος εἱρμοῦ. Ἐν τοιαύτῃ δὲ περιπτώσει θὰ ἦτο ἴσως προτιμότερον νὰ παρείχετο εἰς τοὺς μαθητὰς ἴδιον καὶ αὐτοτελὲς ἐγχειρίδιον θεωρητικῆς Ἀριθμητικῆς· ἀλλὰ προφανῶς τὸ πνεῦμα τοῦ προγράμματος δὲν εἶναι τοιοῦτον.

Καὶ τὴν συσχέτισιν δὲ τῶν νέων πρὸς τὰς σχετικὰς παλαιὰς γνώσεις περισσότερον εὐκολύνει ἡ τοιαύτη διάταξις, διότι οἱ μαθηταὶ ἐπαναλαμβάνοντες τὴν γνωστὴν ἤδη αὐτοῖς πρακτικὴν ἀπόδειξιν προτάσεώς τινος εὑρίσκουσιν εὐθὺς ἀμέσως καὶ τὴν θεωρητικὴν τοιαύτην καὶ δὴ μὲ τοὺς αὐτοὺς ἀριθμούς.

Ἂν ὅμως οἱ κ. κ. κριταὶ φρονῶσιν ὅτι προτιμητέα εἶναι ἡ ἀθρόα ἀναγραφὴ τῶν θεωρητικῶν μερῶν εἰς ἴδιον μέρος τοῦ βιβλίου εἶναι πολὺ εὔκολον νὰ συγκεντρώσωμεν τὰ μέρη ταῦτα, καθ' ἣν σειρὰν διαδέχονται λογικῶς ἄλληλα.

Τὴν ἀναγραφὴν πολλῶν ἰδίᾳ μακρῶν κανόνων ἐκτελέσεως τῶν πράξεων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀποφεύγομεν κατὰ τὸ δυνατόν, διότι οὗτοι εἶναι γνωστοὶ ἐκ τοῦ δημοτικοῦ σχολείου. Ἐπιμένομεν ὅμως στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων νὰ ἐννοήσωσιν οἱ μαθηταὶ τὴν αἰτίαν, δι' ἣν γίνονται οὕτως αἱ πράξεις αὗται, ἵνα μὴ οἱ τρόποι οὗτοι θεωρῶνται αὐθαίρετοι. Ἐπίσης ἀποφεύγομεν νὰ ἀναγράψωμεν καὶ πολλοὺς κανόνας ἐπὶ τῶν πράξεων τῶν δεκαδικῶν καὶ συμμιγῶν, καθ' ὅσον ἄλλοι μὲν τούτων εἶναι γνωστοὶ ἐκ τοῦ δημοτικοῦ σχολείου, ἄλλων δὲ ἡ διατύπωσις εἶναι εὔκολον νὰ γείνῃ ὑπὸ τῶν μαθητῶν. Πρὸς τοῦτο ὁδηγοῦνται οὐ μόνον ἀπὸ τοὺς ἐπὶ παραδειγμάτων συλλογισμούς, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὴν διάταξιν τῶν πράξεων, εἴς τινας δὲ περιπτώσεις καὶ ἀπὸ τὴν ἀναγραφὴν τύπων, δι' ὧν δηλοῦνται διὰ γραμμάτων αἱ ἐκτελεστέαι πράξεις.

Οὕτω δὲ οὐ μόνον σημαντικῶς μειοῦται ὁ ὄγκος τοῦ βιβλίου ἀλλὰ καὶ παρέχεται ἀφορμὴ εἰς τοὺς μαθητὰς νὰ ἐθίζωνται εἰς τὴν περιληπτικὴν διατύπωσιν τῶν μεμαθημένων.

Κατὰ τὸ πλεῖστον ὡς ἀφετηρίαν χρησιμοποιοῦμεν ἁπλᾶ προβλήματα, ἰδίᾳ ἐκ τοῦ καθ' ἡμέραν βίου, διότι οὕτω προκαλεῖται ζωηρότερον τὸ ἐνδιαφέρον τῶν μαθητῶν.

Τέλος παραθέτομεν μεθ' ἕκαστον θέμα ἀρκετὰς ἀσκήσεις καὶ προβλήματα πρὸς ἄσκησιν τῶν μαθητῶν καὶ ἐμπέδωσιν τῶν μεμαθημένων. Προσέχομεν δὲ ὅπως αἱ ἀσκήσεις ἀναφέρωνται εἰς ζητήματα τοῦ καθ' ἡμέραν βίου, στατιστικῆς καὶ φυσικῶν φαινομένων.

Οὕτω συντεταγμένον τὸ βιβλίον τοῦτο κολακεύομαι νὰ πιστεύω ὅτι ἀνταποκρίνεται εἰς τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προγράμματος καὶ ὅτι θὰ ἀποβῇ πολύτιμον βοήθημα τῶν μαθητῶν. Εἰς ὑμᾶς δὲ ἀπόκειται νὰ κρίνητε κατὰ πόσον ἡ αἰσιοδοξία μου αὕτη εἶναι δεδικαιολογημένη.

Ὁ Συγγραφεὺς

ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

# ΑΠΟΣΠΑΣΜΑΤΑ
## ΕΚ ΤΩΝ ΕΚΘΕΣΕΩΝ ΤΩΝ κ. κ. ΕΙΣΗΓΗΤΩΝ

---

*«Τὸ ἔργον τοῦτο εἶναι γεγραμμένον μὲ ἀκρίβειαν καὶ σαφήνειαν, περιέχει πᾶσαν τὴν ὑπὸ τοῦ προγράμματος ὁριζομένην ὕλην, ἥτις ἐκτίθεται μετὰ συντομίας τινός.*

***Ἡ ἀνάπτυξις τῆς ὕλης τοῦ βιβλίου γίνεται μεθοδικῶς καὶ εἰς γλῶσσαν σαφῆ καὶ ἀκριβῆ.***

*Κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ὕλης τοῦ ἔργου ὁ συγγραφεὺς ἀκολουθεῖ τὴν ἀρχὴν ἐκ τοῦ παραδείγματος εἰς τὸν ὁρισμὸν καὶ ἐκ τοῦ προβλήματος εἰς τὸν κανόνα.*

*Λίαν ἐπιτυχὴς καὶ σύμφωνος πρὸς τὸ πρόγραμμα εἶναι ἡ ἀνάπτυξις μερῶν τινων τοῦ βιβλίου π χ Αἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν μὲ ἀφετηρίαν ἀπὸ τὰ κατάλληλα προβλήματα, τὰ περὶ τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων».*

*Γ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ*

*«Τὸ βιβλίον τοῦτο συντεταγμένον κατὰ τὰς ὑποδείξεις τοῦ ἀναλυτικοῦ προγράμματος λίαν ἐντέχνως ἀναχωροῦν πάντοτε ἐξ ἁπλῶν παραδειγμάτων εἰς τὰ γενικὰ συμπεράσματα Διὰ τῆς προσθήκης πολλῶν καὶ ποικίλων ἀσκήσεων εἰλημμένων ἐκ τοῦ καθ' ἡμέραν βίου ἀφήνει εὐρὺ στάδιον ἐργασίας εἰς τοὺς μαθητάς».*

*Δ. ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΣ*

# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

**§ 1. Πλῆθος καὶ μονάς.** Κάθε μαθητὴς εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τοὺς ἄλλους. Ὅλοι οἱ μαθηταὶ τάξεως ἀποτελοῦσι πλῆθος μαθητῶν.

Γενικῶς: *Πλῆθος ὀνομάζεται πᾶν ὅ,τι ἀποτελεῖται ἀπὸ μέρη, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀνεξάρτητα τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο.*

Τὸ καθ' ἓν ἀπὸ τὰ μέρη, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀποτελεῖται ἓν πλῆθος καλεῖται *ἀκεραία μονάς*. Π. χ. κάθε μαθητὴς τάξεως εἶναι ἀκεραία μονάς.

**§ 2. Μέτρησις πλήθους. Ἀριθμός.** Διὰ νὰ μάθῃ ἓν παιδίον πόσους βόλους ἔχει εἰς κυτίον κάμνει τὰ ἑξῆς. Ἐξάγει βόλον τινὰ καὶ λέγει «ἕνας» ἢ «εἷς». Ἔπειτα ἐξάγει ἄλλον καὶ λέγει «δύο» καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρι π. χ. τοῦ δώδεκα ὅτε ἐτελείωσαν οἱ βόλοι τοῦ κυτίου.

Ἡ ἐργασία αὕτη λέγεται *μέτρησις* τῶν βόλων, τὸ δὲ ἐξαγόμενον δώδεκα βόλοι λέγεται *ἀριθμός*.

Ὥστε: *Μέτρησις πλήθους καλεῖται ἡ ἐργασία, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ πόσας μονάδας ἀποτελεῖται τοῦτο.*

*Ἀριθμὸς εἶναι ἔννοια, μὲ τὴν ὁποίαν φανερώνομεν ἀπὸ πόσας μονάδας ἀποτελεῖται πλῆθός τι.*

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἀπὸ τὴν μέτρησιν ἑνὸς πλήθους λέγεται καὶ *μέτρον* τοῦ πλήθους τούτου.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι κάθε ἀριθμός, ἀποτελεῖται ἀπὸ μονάδας καὶ ἡ μονὰς εἶναι ἀριθμός, ὁ ὁποῖος λέγεται ἕν.

Ἄρα: *Ἡ ἀκεραία μονὰς καὶ πᾶν σύνολον ἀκεραίων μονάδων εἶναι ἀριθμός.* Λέγεται δὲ κάθε τοιοῦτος ἀριθμὸς καὶ ἀκέραιος ἀριθμός

ΣΗΜ. Ἐνίοτε μονὰς εἶναι πλῆθος. Ὅταν π.χ. λέγωμεν «ἡ γ ρασα τρεῖς δωδεκάδας μανδήλια», θεωροῦμεν ὡς μονάδα τὴν δωδεκάδα τῶν μανδηλίων, ἤτοι δώδεκα μανδήλια θεωρούμενα μαζὶ ὡς ἓν ὅλον.

§ **3. Συγκεκριμένοι καὶ ἀφῃρημένοι ἀριθμοί. Ὁμοειδεῖς καὶ ἑτεροειδεῖς ἀριθμοί.** Ὅταν λέγωμεν: ἑπτὰ δραχμαί, δώδεκα βόλοι, ἤτοι, ὅταν δηλώνωμεν καὶ τὸ ὄνομα τοῦ μετρηθέντος πλήθους, ἐκφράζομεν συγκεκριμένους ἀριθμούς. Ὅταν δὲ λέγωμεν ἁπλῶς: πέντε, ὀκτὼ κτλ. ἐκφράζομεν ἀφῃρημένους ἀριθμούς.

Οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ πέντε πρόβατα, ὀκτὼ πρόβατα εἶναι μέτρα ὁμοίων πληθῶν, τὰ ὁποῖα ἐμετρήθησαν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα. Λέγονται δὲ οὗτοι ὁμοειδεῖς ἀριθμοί.

Οἱ δὲ ἀριθμοὶ τρία δένδρα, δέκα πρόβατα, εἶναι μέτρα διαφόρου εἴδους πληθῶν. Λέγονται δὲ οὗτοι ἑτεροειδεῖς ἀριθμοί. Ὁμοίως καὶ οἱ ἑπτὰ μανδήλια, ὀκτὼ δωδεκάδες μανδηλίων εἶναι ἑτεροειδεῖς.

Γενικῶς: *Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται ὁμοειδεῖς, ἂν εἶναι μέτρα ὁμοίων πληθῶν, τὰ ὁποῖα ἐμετρήθησαν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα. Ἑτεροειδεῖς δέ, ἂν εἶναι μέτρα διαφόρων πληθῶν ἢ ὁμοίων, τὰ ὁποῖα ἐμετρήθησαν μὲ διαφόρους μονάδας.*

§ **4. Ἀριθμητική.** Ἡ ἐπιστήμη, ἡ ὁποία πραγματεύεται περὶ τῶν ἀριθμῶν, λέγεται *ἀριθμητική*.

***Ἀσκήσεις.*** 1) Ὀνομάσατε διάφορα πλήθη, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τῆς αἰθούσης τῆς διδασκαλίας. Ὁρίσατε δὲ καὶ τὴν ἀντίστοιχον διὰ καθ' ἓν μονάδα.

2) Οἱ ἀριθμοὶ δύο δραχμαί, πέντε δραχμαί, ἐννέα δραχμαὶ εἶναι συγκεκριμένοι ἢ ἀφῃρημένοι; Ὁμοειδεῖς ἢ ἑτεροειδεῖς; καὶ διατί;

3) Οἱ ἀριθμοὶ δέκα, δώδεκα, ὀκτὼ εἶναι ἀφῃρημένοι ἢ συγκεκριμένοι; Καὶ διατί;

4) Ἐκφωνήσατε δύο ἀριθμοὺς ἀφῃρημένους, ἄλλους τρεῖς συγκεκριμένους καὶ ὁμοειδεῖς, ἄλλους τέσσαρας συγκεκριμένους καὶ ἑτεροειδεῖς.

# ΒΙΒΛΙΟΝ Α'.
# ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.
## ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ

§ **5. Πλῆθος τῶν ἀριθμῶν.** Ἐὰν μὲ τὸν ἀριθμὸν ἓν ἑνώσωμεν ἀκόμη μίαν ἀκεραίαν μονάδα, σχηματίζομεν τὸν δύο. Ἀπὸ τοῦτον ὁμοίως σχηματίζομεν τὸν τρία καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον.

Ἄρα : *Τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρον.*

§ **6. Ἀρίθμησις.** Ἂν καὶ οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ εἶναι ἄπειροι, οἱ ἄνθρωποι εὗρον τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον δυνάμεθα μὲ ὀλίγας λέξεις νὰ ὀνομάζωμεν καὶ μὲ ὀλίγα σύμβολα νὰ γράφωμεν κάθε ἀριθμόν.

*Τὸ μέρος τῆς ἀριθμητικῆς, τὸ ὁποῖον διδάσκει τὸν τρόπον τῆς ὀνομασίας καὶ γραφῆς τῶν ἀριθμῶν, καλεῖται ἀρίθμησις.*

Διαιρεῖται δὲ ἡ ἀρίθμησις εἰς προφορικὴν καὶ γραπτὴν ἀρίθμησιν. Ἡ μὲν προφορικὴ ἀρίθμησις διδάσκει τὸν τρόπον τῆς ὀνομασίας τῶν ἀριθμῶν, ἡ δὲ γραπτὴ τὸν τρόπον τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν.

### *Α'. Προφορικὴ Ἀρίθμησις.*

§ **7. Μονάδες διαφόρων τάξεων.** Ἐὰν ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν ἓν ἐργασθῶμεν, ὅπως εἴπομεν προηγουμένως (§ 5), θὰ σχηματίσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς ἕν, δύο,.. δέκα.

Τὸν ἀριθμὸν δέκα θεωροῦμεν ὡς νέαν μονάδα, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν *δεκάδα* ἢ μονάδα δευτέρας τάξεως.

Ἐὰν ἑνώσωμεν δέκα δεκάδας, σχηματίζομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος λέγεται *ἑκατόν*. Τοῦτον θεωροῦμεν ὡς νέαν μονάδα, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν *ἑκατοντάδα* ἢ μονάδα γ'. τάξεως.

Ὁμοίως ἀπὸ δέκα ἑκατοντάδας σχηματίζομεν τὴν χιλιάδα (δ' τάξεως), ἀπὸ αὐτὴν τὴν δεκάδα τῶν χιλιάδων (ε' τάξεως), ἀπὸ αὐτὴν τὴν ἑκατοντάδα τῶν χιλιάδων, ἔπειτα τὸ ἑκατομμύριον κ.τ.λ.

Ὥστε. *Δέκα μονάδες ἀπὸ κάθε τάξιν σχηματίζουσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.*

Ἡ χιλιὰς ἔχει χιλίας ἁπλᾶς μονάδας, τὸ ἑκατομμύριον ἔχει χιλίας χιλιάδας, τὸ δυσεκατομμύριον ἔχει χίλια ἑκατομμύρια κτλ. Ἡ ἁπλῆ μονάς, ἡ χιλιάς, τὸ ἑκατομμύριον, τὸ δισεκατομμύριον, τρισεκατομμύριον κτλ. λέγονται *πρωτεύουσαι* μονάδες.

Ὥστε: *Χίλιαι πρωτεύουσαι μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν πρωτεύουσαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.*

Εἶναι δὲ τώρα δυνατὸν νὰ χωρίσωμεν τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων εἰς *κλάσεις*, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουσιν ἀπὸ τὰς πρωτευούσας μονάδας· φέρει δὲ κάθε κλάσις τὸ ὄνομα τῆς πρωτευούσης μονάδος, τὴν ὁποίαν περιέχει. Οὕτως ἡ ἁπλῆ μονάς, ἡ δεκὰς καὶ ἡ ἑκατοντὰς ἀποτελοῦσι τὴν κλάσιν τῶν ἁπλῶν μονάδων· ἡ χιλιάς, δεκὰς χιλιάδων καὶ ἡ ἑκατοντὰς τῶν χιλιάδων ἀποτελοῦσι τὴν κλάσιν τῶν χιλιάδων κτλ.

**§ 8. Σύνθεσις καὶ ὀνομασία τῶν ἀριθμῶν.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἓν παιδίον ἔχει εἰς κυτίον βόλους, τοὺς ὁποίους τοποθετεῖ ὡς ἑξῆς. Λαμβάνει πρῶτον δέκα βόλους καὶ τοὺς θέτει ὅλους μαζὶ εἰς ἓν μέρος. Ἔπειτα ἄλλους δέκα καὶ τοὺς θέτει εἰς ἄλλο μέρος καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις ὅτου τελειώσωσιν ὅλοι οἱ βόλοι ἢ μείνωσι εἰς τὸ κυτίον ὀλιγώτεροι ἀπὸ δέκα. Ἔπειτα λαμβάνει (ἂν εἶναι δυνατὸν) δέκα ἀπὸ τὰς δεκάδας, τὰς ὁποίας ἐσχημάτισε καὶ τοποθετεῖ ὅλας μαζὶ εἰς ἓν μέρος. Ἔπειτα ἄλλας δέκα δεκάδας βόλων τοποθετεῖ εἰς ἄλλο μέρος καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις ὅτου τελειώσωσιν ὅλαι αἱ δεκάδες ἢ μείνωσιν ὀλιγώτεραι ἀπὸ δέκα. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐχώρισε τοὺς βόλους π. χ. εἰς τρεῖς ἑκατοντάδας, δύο δεκάδας καὶ ἑπτὰ μονάδας βόλων.

Ἄρα: *Κάθε ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ μονάδας διαφόρων τάξεων καὶ ἀπὸ οὐδεμίαν περιέχει περισσοτέρας ἀπὸ ἐννέα.*

Κατὰ ταῦτα διὰ νὰ ὀνομάσωμεν ἕνα ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ χωρίσωμεν αὐτὸν εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων καὶ νὰ δηλώσωμεν ποίας μονάδας ἔχει καὶ πόσας ἀπὸ κάθε τάξιν. Ὅταν π. χ. λέγωμεν: ἓν παιδίον ἔχει τρεῖς ἑκατοντάδας, δύο δεκάδας καὶ ἑπτὰ μονάδας βόλων, ἐκφράζομεν γνωστὸν καὶ ὡρισμένον ἀριθμόν.

Ἐπεκράτησαν ὅμως εἰς τὴν συνήθη χρῆσιν αἱ ἑξῆς συντομίαι, μὲ τὰς ὁποίας ἀλλάζει ὁ τρόπος τῆς ὀνομασίας τῶν ἀριθμῶν.

1) Ἀντὶ νὰ λέγωμεν: **Μία δεκάς, δύο δεκάδες.., ἐννέα δεκάδες** λέγομεν: **δέκα, εἴκοσι, τριάκοντα... ἐννενήκοντα.**

2) Ἀντὶ νὰ λέγωμεν: Μία ἑκατοντάς, δύο ἑκατοντάδες... ἐννέα ἑκατοντάδες, λέγομεν: ἑκατόν, διακόσια, τριακόσια,... ἐννεακόσια.

3) Ἀντὶ νὰ λέγωμεν: Μία χιλιάς, λέγομεν ἁπλῶς χίλια.

Διὰ νὰ ὀνομάσωμεν δὲ ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει μόνον μονάδας τῆς α' κλάσεως, ἀπαγγέλλομεν κατὰ σειρὰν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων, τὰς ὁποίας ἔχει ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης τάξεως. Τοιουτοτρόπως ὁ ἀριθμὸς τῶν βώλων τοῦ παιδίου, τὸν ὁποῖον προηγουμένως (§ 8) ἀνεφέρομεν ἀπαγγέλλεται: *τριακόσια εἴκοσιν ἑπτά.*

ΣΗΜ. Ἀντὶ δέκα ἕν, δέκα δύο λέγομεν ἕνδεκα, δώδεκα.

Ἂν δὲ θέλωμεν νὰ ὀνομάσωμεν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει καὶ ἀνωτέρας κλάσεις ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Χωρίζομεν πρῶτον εἰς πρωτευούσας μονάδας τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων, τὰς ὁποίας περιέχει. Ἔπειτα δηλώνομεν τὸ πλῆθος καὶ ἔπειτα τὸ ὄνομα ἑκάστης πρωτευούσης μονάδος ἀρχίζοντες ἀπὸ τῆς ἀνωτάτης τάξεως καὶ προχωροῦντες κατὰ σειρὰν μέχρι τῆς κλάσεως τῶν ἁπλῶν μονάδων, τῶν ὁποίων τὸ ὄνομα συνήθως παραλείπεται. Οὕτως ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει τρεῖς δεκάδας χιλιάδων, ἑπτὰ χιλιάδας, ὀκτὼ ἑκατοντάδας, δύο δεκάδας καὶ ἐννέα ἁπλᾶς μονάδας, ἀπαγγέλλεται: *τριάκοντα ἑπτὰ χιλιάδες ὀκτακόσια εἴκοσιν ἐννέα.*

***Ἀσκήσεις.*** 5) Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει μίαν δεκάδα καὶ ἑπτὰ ἁπλᾶς μονάδας;

6) Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει δύο δεκάδας καὶ τρεῖς ἁπλᾶς μονάδας;

7) Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἑπτὰ δεκάδας καὶ μίαν ἁπλῆν μονάδα;

8) Πόσας δεκάδας καὶ πόσας ἁπλᾶς μονάδας ἔχει ὁ ἀριθμὸς ἐννενήκοντα τρία;

9) Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει δύο ἑκατοντάδας καὶ τέσσαρας δεκάδας;

10) Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἐννέα ἑκατοντάδας, δύο δεκάδας καὶ ὀκτὼ ἁπλᾶς μονάδας;

11) Ἀπὸ ποίας μονάδας ἀποτελεῖται ὁ ἀριθμὸς πεντακόσια εἴκοσιν ἕξ καὶ πόσας περιέχει ἀπὸ κάθε τάξιν;

12) Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει δύο δεκάδας χιλιάδων, πέντε χιλιάδας, ἑπτὰ δεκάδας καὶ ἐννέα ἁπλᾶς μονάδας;

13) Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἕξ ἑκατοντάδας χιλιάδων, μίαν χιλιάδα καὶ ἑπτὰ μονάδας;

14) Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ὀκτὼ ἑκατομμύρια, ἑπτὰ ἑκατοντάδας χιλιάδων, τρεῖς δεκάδας καὶ δύο ἁπλᾶς μονάδας;

15) Ἀπὸ ποίας πρωτευούσας μονάδας ἀποτελεῖται ὁ ἀριθμὸς τριάκοντα δύο ἑκατομμύρια ἑκατὸν ἑξήκοντα χιλιάδες πεντήκοντα ἑπτὰ καὶ πόσας περιέχει ἀπὸ κάθε μίαν;

## Β΄. Γραπτὴ ἀρίθμησις.

**§ 9. Γραφὴ τῶν ἀριθμῶν.** Διὰ νὰ γράφωμεν συντόμως τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμοὺς ἐπενοήθησαν τὰ ἑξῆς σύμβολα. Διὰ τὸν ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα. πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα τὸ σύμβολον

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Τὰ σύμβολα ταῦτα καλοῦνται ψηφία ἢ *ἀραβικοὶ χαρακτῆρες*, διότι οἱ Εὐρωπαῖοι ἔμαθον ταῦτα ἀπὸ τοὺς Ἄραβας τῆς Ἱσπανίας.

Τὸν ἀριθμὸν λοιπόν, ὁ ὁποῖος ἔχει πέντε ἑκατοντάδας, ἐννέα δεκάδας καὶ τέσσαρας ἁπλᾶς μονάδας, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν οὕτω 5 ἑκατοντάδες, 9 δεκάδες, 4 μονάδες. Ἐὰν δὲ παραλείψωμεν τὰ ὀνόματα τῶν μονάδων καὶ πλησιάσωμεν τὰ ψηφία, σχηματίζεται ἡ παράστασις 594. Μὲ αὐτὴν δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν τὸν ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ παραδεχθῶμεν ὅτι τὸ ψηφίον 4 παριστάνει ἁπλᾶς μονάδας, τὸ 9 δεκάδας καὶ τὸ 5 ἑκατοντάδας.

Ἔγεινε λοιπὸν ἡ ἑξῆς συμφωνία.

*Πᾶν ψηφίον, ὅταν εἶναι γραμμένον ἀριστερὰ ἄλλου, παριστάνει μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.*

Διὰ τὸν ἀριθμὸν 4 ἑκατοντάδες καὶ 7 ἁπλαῖ μονάδες προκύπτει ἡ παράστασις 47, ἡ ὁποία δὲν παριστάνει ἐκεῖνον. Τοῦτο συμβαίνει διότι ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχει δεκάδας, τὸ δὲ ψηφίον 4 τῶν ἑκατοντάδων κατέλαβε τὴν θέσιν τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων. Ἦτο λοιπὸν ἀνάγκη νὰ ἐπινοηθῇ καὶ ἕνα ψηφίον, τὸ ὁποῖον νὰ καταλαμβάνῃ τὴν θέσιν τῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι τυχὸν λείπουσιν ὑπὸ τὸν ἀριθμόν. Διὰ τοῦτο ἐπενοήθη τὸ ψηφίον 0, τὸ ὁποῖον καλεῖται μηδέν, διότι οὐδὲν φανερώνει. Τὰ ἄλλα δὲ ψηφία λέγονται σημαντικὰ ψηφία διότι σημαίνουσι μονάδας διαφόρων τάξεων. Ὁ προηγούμενος λοιπὸν ἀριθμὸς γράφεται 407.

Μὲ τὰ δέκα αὐτὰ ψηφία δυνάμεθα νὰ γράφωμεν πάντα ἀριθμὸν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

α´) Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ μόνον μονάδας πρώτης κλάσεως, γράφομεν διαδοχικῶς ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τὰ ψηφία τῶν ἑκατοντάδων, δεκάδων καὶ ἁπλῶν μονάδων, τὰς ὁποίας οὗτος περιέχει. Πρέπει ὅμως νὰ προσέχωμεν νὰ θέτωμεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων ἢ ἁπλῶν μονάδων, ἂν τυχὸν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ τοιαύτας. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς διακόσια ἑξήκοντα τέσσαρα γράφεται 264, ὁ πεντακόσια ἐννέα οὕτω 509.

β´) Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς περιέχῃ πρωτευούσας μονάδας ἀνωτέρων κλάσεων, γράφομεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τὸν ἀριθμὸν τῆς ἀνωτάτης πρωτευούσης μονάδος καὶ μετὰ τοῦτον διαδοχικῶς τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἄλλων πρωτευουσῶν μονάδων. Προσέχομεν ὅμως νὰ γράφωμεν πρὸ ἑκάστου ἀριθμοῦ τῶν ἄλλων τούτων πρωτευουσῶν μονάδων ἓν ἢ δύο ἢ τρία 0, ἂν ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχῃ δύο ἢ ἓν ἢ οὐδὲν ψηφίον. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς τεσσαράκοντα τρεῖς χιλιάδες ἑπτακόσια πεντήκοντα δύο γράφεται οὕτω 43752· ὁ ἑκατὸν τρεῖς χιλιάδες ἑξήκοντα πέντε οὕτω 103065.

§ **10. Ἀπαγγελία γραμμένων ἀριθμῶν.** α´) Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ψηφία περισσότερα ἀπὸ τρία, ἀπαγγέλλομεν διαδοχικῶς τὸ ὄνομα τῶν ἑκατοντάδων, δεκάδων καὶ ἁπλῶν μονάδων αὐτοῦ. Π. χ. ὁ 632 ἀπαγγέλλεται: ἑξακόσια τριάκοντα δύο.

β´) Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ ψηφία περισσότερα ἀπὸ τρία, χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα ἀπὸ τὰ δεξιὰ (τὸ τελευταῖον πρὸς τ[ὰ] ἀριστερὰ τμῆμα δυνατὸν νὰ εἶναι καὶ διψήφιον ἢ μονοψήφιον). Ἔπειτα ἀρχίζοντες ἀπὸ ἀριστερὰ ἀπαγγέλλομεν τὸν ἀριθμόν, τὸ[ν] ὁποῖον ἀποτελεῖ κάθε τμῆμα ἐπισυνάπτοντες μὲ αὐτὸν καὶ τ[ὸ] ὄνομα τῆς πρωτευούσης μονάδος, τὴν ὁποίαν αὐτὸς φανερώνει. Συ[νή]θως δὲ παραλείπεται τὸ ὄνομα τῶν ἁπλῶν μονάδων. Π. χ. [ὁ] ἀριθμὸς 3106043 ἀπαγγέλλεται: τρία ἑκατομμύρια ἑκατὸν ἓξ χι[λιάδες] τεσσαράκοντα τρία.

§ **11. Σύνολον μονάδων ἑκάστης τάξεως δοθέντος ἀριθμοῦ.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ μάθωμεν π[ό]σας δεκάδας ἢ ἑκατοντάδας ἔχει τὸ ὅλον ὁ ἀριθμὸς 4157.

Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Αἱ 4 χιλ. ἔχουσι 40 ἑκ. [ἢ] 400 δεκ. Ἡ δὲ 1 ἑκ. ἔχει 10 δεκ. Ἔχει λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς 41[5] δεκάδας τὸ ὅλον, 41 ἑκατοντάδας κτλ.

Ἄρα: Τὸ σύνολον τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως, αἱ ὁποῖαι π[ε]ριέχονται εἰς δοθέντα ἀριθμόν, φανερώνει ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος [μέ]νει, ἂν παραλειφθῶσι τὰ δεξιὰ τοῦ ψηφίου τῆς τάξεως ταύτης ψηφ[ία].

ἀρίθμησιν τῶν διαφόρων ἰδιοτήτων τῶν πράξεων καὶ τῶν λελυμένων προβλημάτων.

*Ἀσκήσεις.* 24) Νὰ ἀναγνωσθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ XVII, XXIX, DLXIX, DCCXCIII, CMXCIX, $\overline{\text{XXII}}$, $\overline{\text{XXXII}}$, $\overline{\text{LXII}}$.

25) Νὰ γραφῶσι κατὰ τὴν Ρωμαϊκὴν γραφὴν οἱ ἀριθμοὶ 27, 92, 998, 3457102, 4000, 160 004.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

### ΙΣΟΙ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.— ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

§ **14. Ἴσοι καὶ ἄνισοι ἀριθμοί.** Εἰς κάθε δάκτυλον τῆς δεξιᾶς χειρὸς ἀρτιμελοῦς ἀνθρώπου ἀντιστοιχεῖ ἕνας δάκτυλος τῆς ἀριστερᾶς χειρὸς καὶ τἀνάπαλιν. Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν δακτύλων τῆς μιᾶς χειρὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν δακτύλων τῆς ἄλλης.

Γενικῶς: *Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ἂν εἰς κάθε μονάδα τοῦ καθ' ἑνὸς ἀντιστοιχῇ μία μονὰς τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ ἄλλου.*

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι:

*Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι πρὸς τρίτον, θὰ εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσοι.*

Διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι, γράφομεν αὐτοὺς τὸν ἕνα δεξιὰ ἀπὸ τὸν ἄλλον καὶ μεταξύ των θέτομεν τὸ σημεῖον =, τὸ ὁποῖον καλεῖται σημεῖον ἰσότητος καὶ ἀναγινώσκεται ἴσον.

Ἐὰν ὑποκάτω ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ 5 θέσωμεν τὰς μονάδας τοῦ 3,

1,1,1,1,1
1,1,1

βλέπομεν ὅτι εἰς δύο μονάδας τοῦ 5 δὲν ἀντιστοιχοῦσι μονάδες τοῦ 3, ἤτοι ὁ 5 ἔχει περισσοτέρας μονάδας ἀπὸ τὸν 3. Διὰ τοῦτο ὁ 5 λέγεται *μεγαλύτερος* ἀπὸ τὸν 3, ὁ 3 λέγεται *μικρότερος* τοῦ 5, οἱ δύο δὲ μαζὶ λέγονται ἄνισοι ἀριθμοί.

Ὥστε: *Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἄνισοι, ἂν μερικαὶ μονάδες τοῦ ἑνὸς δὲν ἔχωσιν ἀντιστοίχους μονάδας εἰς τὸν ἄλλον.*

Ἀπὸ δύο ἀνίσους ἀριθμοὺς ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος ἔχει τὰς περισσοτέρας μονάδας λέγεται *μεγαλύτερος* ἀπὸ τὸν ἄλλον· ἐκεῖνος δὲ ὁ ὁποῖος ἔχει τὰς ὀλιγωτέρας μονάδας, λέγεται *μικρότερος* ἀπὸ τὸν ἄλλον.

Διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι, γράφομεν τὸν ἕνα δεξιὰ τοῦ ἄλλου καὶ μεταξὺ αὐτῶν θέτομεν τὸ σημεῖον $>$ ἢ $<$ προσέχοντες νὰ εἶναι μέσα εἰς τὴν γωνίαν ὁ μεγαλύτερος ἀριθμός. Οὕτω $5>3$ ἀναγινώσκεται: ὁ 5 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3 ἢ ἐκ δεξιῶν: ὁ 3 εἶναι μικρότερος τοῦ 5.

Τὸ σημεῖον $<$ καλεῖται σημεῖον ἀνισότητος.

§ **15. Παράστασις τῶν ἀριθμῶν διὰ γραμμάτων.** Πολλάκις χάριν τῆς γενικότητος μεταχειριζόμεθα διὰ τὴν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν γράμματα. Οὕτω π. χ. γράφοντες $α>5$ παριστάνομεν διὰ τοῦ α οἱονδήποτε ἀπὸ τοὺς μεγαλυτέρους τοῦ 5 ἀριθμούς.

## *Α΄. Πρόσθεσις.*

**§ 16.** Ἐὰν παιδίον ἔχῃ 2 βόλους, θέτῃ δὲ μαζὺ μὲ αὐτοὺ[ς] ἀπὸ ἕνα, ἕνα καὶ τρεῖς βόλους, τοὺς ὁποίους ἔδωκεν εἰς αὐτὸ ἕνα φίλος του, οἱ βόλοι του γίνονται κατὰ σειρὰν 3, 4, 5. Ἐὰν ἔπειτ[α] μαζὶ μὲ αὐτοὺς θέτῃ ἀπὸ ἕνα, ἕνα 4 βόλους, τοὺς ὁποίους ἐδώ[ρη]ρησεν εἰς αὐτὸ ἡ ἀδελφή του, οἱ βόλοι του γίνονται 6, 7, 8, 9.

Ἡ ἐργασία αὕτη λέγεται *πρόσθεσις* τῶν 2, τῶν 3 καὶ τῶν [4] βόλων. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι τὸ ἐξαγόμενον 9 βόλοι, ἔχει ὅλας τὰ[ς] μονάδας τῶν 2, 3, 4 καὶ μόνον αὐτάς.

Ἄρα: *Πρόσθεσις εἶναι πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν, ἂν μᾶς δοθῶ[σιν] ἀριθμοί τινες, εὑρίσκομεν ἄλλον, ὁ ὁποῖος ἔχει ὅλας τὰς μον[ά]δας αὐτῶν καὶ μόνον αὐτάς.*

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι προστίθενται λέγονται προσθετέοι. Τὸ [δὲ] ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως λέγεται *ἄθροισμα.*

Ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι συγκεκριμένοι, εἶναι ὁμοειδεῖς, τὸ [δὲ] ἄθροισμα εἶναι ὁμοειδὲς μὲ αὐτούς.

Τὸ ἄθροισμα ἀριθμῶν π.χ. τῶν 2, 3, 4 σημειώνομεν οὕτω $2+3+4$. Τὸ σημεῖον $+$ καλεῖται σημεῖον τῆς προσθέσεως κ[αὶ] ἀπαγγέλλεται *σὺν* ἢ *καί.*

Ἂν δὲ θέλωμεν νὰ νοῶμεν τὸ ἄθροισμα τοῦτο εὑρεθ[ὲν] θέτομεν αὐτὸ ἐντὸς παρενθέσεως οὕτω: $(2+3+4)$. Ἵνα δὲ [δη]λωθῇ ὅτι θεωρεῖται εὑρεθὲν τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμ[οῦ] $(2+3+4)$ καὶ ἄλλου τινος ἀριθμοῦ π.χ. τοῦ 6, θέτομεν α[ὐτὸ] ἐντὸς ἀγκυλῶν, οὕτω: $[\,(2+3+4)+6\,]$.

§ **17. Ἀθροίσματα ἴσων καὶ ἀνίσων ἀριθμ[ῶν].** Ἵνα φανερώσωμεν ὅτι τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα εἶναι 9, γρά[φο]μεν οὕτω $2+3+4=9$.

Τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐσχηματίσθη καλεῖται *ἰσότης*.

Ὁ πρὸ τοῦ = ἀριθμὸς καλεῖται α' μέλος, ὁ δὲ μετὰ τὸ = καλεῖται β' μέλος τῆς ἰσότητος.

Ἡ παράστασις $7>5$ καλεῖται ἀνισότης, ὁ 7 πρῶτον καὶ ὁ 5 δεύτερον μέλος τῆς ἀνισότητος.

Εἶναι δὲ εὔκολον (§ 14, 16) νὰ ἐννοήσωμεν ὅτι :

α') Ἂν $\alpha=\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\mu=\beta+\mu$. Ἂν δὲ εἶναι καὶ $\gamma=\delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\gamma=\beta+\delta$.

β') Ἂν $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\gamma>\beta+\delta$. Οὕτως ἐκ τῶν $7>3$, $8>6$ προκύπτει $15>9$.

§ **18. Πρόσθεσις δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν.** Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο μονοψηφίους ἀριθμούς, προσθέτομεν εἰς τὸν ἕνα τὰς μονάδας τοῦ ἄλλου μίαν, μίαν. Συνήθως ὅμως μανθάνομεν καὶ ἐνθυμούμεθα τὸ ἄθροισμα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν. Οὕτω π. χ. λέγομεν ἀμέσως 2 καὶ 3 γίνονται 5 κ.τ. λ.

## Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.

§ **19. Πρόβλημα I.** *Μαθητὴς ἔλαβε κατὰ τὰς ἐξετάσεις εἰς τὰ Ἑλληνικὰ 8, εἰς τὰ Μαθηματικὰ 9 καὶ εἰς τὴν Γεωγραφίαν 6. Ἄλλος μαθητὴς ἔλαβεν εἰς τὰ αὐτὰ μαθήματα κατὰ σειρὰν 9, 6, 8. Ποῖος ἔλαβε μεγαλύτερον ἄθροισμα βαθμῶν εἰς τὰ μαθήματα ταῦτα ;*

*Λύσις.* Τὸ ἄθροισμα $8+9+6$ τῶν βαθμῶν τοῦ α' ἔχει μόνον τὰς μονάδας τοῦ 8, τοῦ 9 καὶ τοῦ 6· ἀλλὰ καὶ τὸ ἄθροισμα $9+6+8$ τῶν βαθμῶν τοῦ β' ἔχει μόνον τὰς μονάδας τῶν ἰδίων προσθετέων. Εἰς κάθε λοιπὸν μονάδα τοῦ α' ἀντιστοιχεῖ μία μονὰς τοῦ β' καὶ τἀνάπαλιν. Ἄρα (§ 14) εἶναι $8+9+6=9+6+8$.

*Γενικῶς* $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\beta+\delta+\alpha+\gamma$. Ἤτοι :

Α'. *Ἡ ἀλλαγὴ τῆς τάξεως τῶν προσθετέων δὲν βλάπτει τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.*

Δι' αὐτὸν τὸν λόγον κάμνομεν ἐνίοτε τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀπὸ τὰ ἄνω πρὸς τὰ κάτω κατὰ τὴν γνωστὴν διάταξιν. Καὶ ἂν αἱ δύο προσθέσεις ἔγειναν χωρὶς λάθος, πρέπει νὰ εὑρίσκωμεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα. Ἡ δευτέρα πρόσθεσις λέγεται δοκιμὴ τῆς πρώτης.

Καὶ γενικῶς : *Δοκιμὴ μιᾶς πράξεως λέγεται ἡ πρᾶξις μὲ τὴν ὁποίαν βεβαιούμεθα ὅτι ἡ α' ἔγεινε χωρὶς λάθος.*

§ **20. Πρόβλημα II.** *Πατὴρ ἔδωκε δι' ἀγορὰν Γραμ-*

*Λύσις*. (Α' τρόπος) Τὰς τρεῖς ἡμέρας διέτρεξε

$$40+32+28=100 \text{ χιλ.}$$

Τὰς δὲ ἄλλας διέτρεξε $35+30=65$ χιλ. Διέτρεξε λοιπὸν τὸ ὅλον $(40+32+28)+(35+30)=100+65=165$ χιλιόμετρα.

(Β' τρόπος). Εὑρίσκομεν προφανῶς τὸ ζητούμενον καὶ ἂν προσθέσωμεν ὅλα τὰ χιλιόμετρα, τὰ ὁποῖα διήνυσε κατὰ τὰς διαφόρους ἡμέρας. Διέτρεξε λοιπὸν $(40+32+28+35+30)$ χιλ. Ἄρα πρέπει νὰ εἶναι $(40+32+28)+(35+30)=40+32+28+35+30$. Ἤτοι:

Ε'. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν διάφορα ἀθροίσματα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν ὅλους τοὺς προσθετέους αὐτῶν καὶ μόνον αὐτούς.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Κατὰ τὴν Γ' ἰδιότητα (§ 20 Γ') τὸ ἄθροισμα

$(40+32+28)+(35+30)=40+32+28+(35+30)$ καὶ

$40+32+28+(35+30)=40+32+28+35+30.$

Ἄρα $(40+32+28)+(35+30)=40+32+28+35+30$. ὅ. ἔ. δ.

***Γενικῶς***: $(\alpha+\beta+\gamma)+(\delta+\varepsilon)=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$.

Ἐπειδὴ $16+27=(10+6)+(20+7)$, κατὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην θὰ εἶναι $16+27=10+6+20+7=(10+20)+(6+7)$.

Δι' αὐτὸ λέγομεν ἀγράφως: 20 καὶ 10 γίνεται 30· ἔπειτα 6 καὶ 7 γίνεται 13· τέλος 30 καὶ 13 γίνεται 43.

§ **23. Πρόσθεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα $145+256+78$. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι (§ 20 Γ').

$$\begin{aligned}145&=100+40+5\\256&=200+50+6\\78&=\phantom{100+}70+8\end{aligned}$$

Ἄρα: Τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι $300+160+19=(1+2)$ ἑκ. $+(4+5+7)$δεκ. $+(5+6+8)$.

Δι' αὐτὸν τὸν λόγον προσθέτομεν χωριστὰ τὰς μονάδας ἑκάστης τάξεως τῶν προσθετέων.

Ἐπειδὴ δὲ $(5+6+8)$μον. $=19$μον $=1$δεκ. $+9$μ, αἱ δεκάδες γίνονται $(4+5+7)+1=17$ δεκ. $=1$ἑκ. $+7$δεκ. Ἄρα αἱ ἑκατοντάδες γίνονται $(1+2)+1=4$ἑκ.

Δι' αὐτὸν τὸν λόγον, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεώς τινος εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν 9, γράφομεν μόνον τὰς ἁπλᾶς μονάδας αὐτοῦ, τὰς δὲ δεκάδας (κρατούμενα) προσθέτομεν μὲ τὰ ψηφία τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

ΣΗΜ. Τὸ ἄθροισμα 20+30 ἰσοῦται πρὸς τὸ
2 δεκ. +3 δεκ.=5δεκ.=50.

Δι' αὐτὸ εὑρίσκομεν τοῦτο ἀγράφως λέγοντες: 2 καὶ 3 ἴσον 5· ἄρα 20+30=50. Ὁμοίως διὰ τὸ 40+50+30 λέγομεν 40 καὶ 50 γίνονται 90· ἔπειτα 90 καὶ 30 γίνονται 120.

***Ἀσκήσεις.*** 28) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀκόλουθα ἀθροίσματα
45+3, 132+6, 396+8, 994+9, 35994+7, 84+397+9+1462, 4053+19108+677+82 + 1009, 53407 + 108212 + 967004 + 106504+873009.

29) Ἔμπορος ἠγόρασε τεμάχιον ὑφάσματος ἀντὶ 7850 δραχμῶν καὶ ἐπώλησεν αὐτὸ μὲ κέρδος 1574 δραχμῶν. Πόσα χρήματα ἔλαβεν ἐκ τῆς πωλήσεως;

30) Ἠγόρασέ τις οἰκίαν ἀντὶ 124500 δραχμῶν, ἐδαπάνησε διὰ νὰ τὴν ἐπισκευάσῃ 27965 καὶ τὴν ἐπώλησε μὲ κέρδος 35780 δραχμῶν. Πόσα χρήματα ἔλαβεν ἐκ τῆς πωλήσεως;

31) Ἐγεννήθη τις τὸ ἔτος 1875 καὶ ἔζησεν 68 ἔτη. Κατὰ ποῖον ἔτος ἀπέθανεν;

32) Ἡ ἐν Μαραθῶνι μάχη ἐγένετο τὸ ἔτος 490 π.Χ., ἡ δὲ ἅλωσις τῆς Κων]πόλεως ὑπὸ τῶν Τούρκων ἔγεινε τὸ ἔτος 1453 π. Χ. Πόσα ἔτη ἐμεσολάβησαν μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἱστορικῶν γεγονότων;

33) Ὁ Φιλόσοφος καὶ Μαθηματικὸς Πυθαγόρας ἀπέθανε 10 ἔτη πρὸ τῆς ἐν Μαραθῶνι μάχης. Κατὰ ποῖον ἔτος ἀπέθανεν ὁ Πυθαγόρας;

34) Ἡ ἀνακάλυψις τῆς ἀτμομηχανῆς ὑπὸ τοῦ Watt ἔγεινε τὸ ἔτος 1799 μ. Χ, ἡ δὲ ἐν Σαλαμῖνι ναυμαχία ἔγεινε τὸ ἔτος 480 π. χ. Πόσα ἔτη ἐμεσολάβησαν μεταξὺ τούτων;

35) Κατὰ τὸ ἔτος 1929 εἰσήχθησαν εἰς τὴν Ἑλλάδα βόες καὶ ταῦροι ἀξίας 122 377 025 δραχμῶν, ἀγελάδες ἀξίας 19 297 075 δραχμῶν, μόσχοι καὶ δαμάλεις ἀξίας 2 558 800 δραχμῶν, πρόβατα καὶ κριοὶ ἀξίας 237 504 550 δραχμῶν. Εἰς πόσον ἀνέρχεται ἡ ἀξία ὅλων τῶν ζῴων τούτων;

36) Κατὰ τὸν Φεβρουάριον τοῦ 1932 εἰσήχθη εἰς τὴν Ἑλλάδα σῖτος ἐκ τῆς Ρωσίας ἀξίας 20 985 450 δραχ. ἐκ τῶν Ἡνωμένων Πολιτειῶν ἀξίας 36 958 775 δραχ, ἐκ Καναδᾶ ἀξίας 24 342 400 δραχμῶν, ἐκ Ρουμανίας ἀξίας 6 719 740 δραχμῶν. Πόση εἶναι ἡ ἀξία τοῦ ἀπὸ τὰς χώρας ταύτας εἰσαχθέντος τούτου σίτου;

37) Κατὰ τὸ ἔτος 1929 ἐξήχθησαν ἐκ τῆς Ἑλλάδος ἔλαια καὶ

ἐλαιώδεις καρποὶ ἀξίας 59 191 000 δραχμῶν, πνευματώδη ποτὰ ἀξίας 73 954 000 δραχμῶν, δασικὰ προϊόντα ἀξίας 12 436 000 δραχμῶν καὶ ὀρυκτὰ ἀξίας 5 445 000 δραχμῶν. Πόση εἶναι ἡ ἀξία ὅλων τῶν ἐξαχθέντων τούτων εἰδῶν ;

38) Οἰνοπώλης ἔχει τρία βαρέλια οἴνου. Τὸ α′ περιέχει 950 ὀκάδας, τὸ β′ 640 ὀκάδας περισσοτέρας τοῦ α′ καὶ τὸ γ′ 375 ὀκάδας περισσοτέρας τοῦ β′. Πόσας ὀκάδας περιέχουσι καὶ τὰ τρία βαρέλια ὁμοῦ ;

39) Μετατρέψατε τὸ ἄθροισμα 23+18 εἰς ἄλλο ἄθροισμα ἴσον μὲ αὐτό, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τρεῖς προσθετέους, ἀπὸ τοὺς ὁποίους εἷς νὰ εἶναι μονοψήφιος καὶ εἷς νὰ λήγῃ εἰς 0.

40) Μετατρέψατε τὸ ἄθροισμα 14+12+8+16 εἰς ἄλλο ἄθροισμα ἴσον μὲ αὐτὸ καὶ τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ δύο προσθετέους, οἱ ὁποῖοι λήγουσιν εἰς 0.

41) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα (5+11+7)+(4+3) ἰσοῦται πρὸς ἄθροισμα μὲ δύο προσθετέους, οἱ ὁποῖοι λήγουσιν εἰς 5.

42) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$4+(2+7+8)+(3+8+9)=16+12+13.$$

## Β′. Ἀφαίρεσις.

§ 24. *Ἐὰν παιδίον ἔχῃ 8 βόλους καὶ δωρήσῃ εἰς φίλον του 3 βόλους, τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον, θὰ μείνωσιν εἰς αὐτὸ κατὰ σειρὰν 7, ἔπειτα 6 καὶ τέλος 5 βόλοι.* Ἡ ἐργασία αὕτη καλεῖται **ἀφαίρεσις** τῶν 3 βόλων ἀπὸ τοὺς 8 βόλους.

Ὥστε : *Ἀφαίρεσις καλεῖται ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν ἐλαττώνομεν ἕνα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος ἀριθμός.*

Ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἐλαττώνομεν, λέγεται *μειωτέος*. Ὁ δὲ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δεικνύει κατὰ πόσας μονάδας πρέπει νὰ ἐλαττώσωμεν τὸν μειωτέον, λέγεται *ἀφαιρετέος*. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως καλεῖται *ὑπόλοιπον* ἢ *διαφορά*.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι : α′) Ὅταν ὁ μειωτέος καὶ ἀφαιρετέος εἶναι συγκεκριμένοι, πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς αὐτούς.

β′) Διὰ νὰ γίνηται ἡ ἀφαίρεσις, πρέπει ὁ ἀφαιρετέος νὰ μὴ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν μειωτέον.

Ἐὰν ὁ ἀφαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ τὸν μειωτέον, τὸ ὑπόλοιπον καλεῖται μηδὲν (0).

Τὴν διαφορὰν τοῦ 3 ἀπὸ τοῦ 8 σημειώνομεν οὕτω 8 − 3.

Τὸ σημεῖον — καλεῖται σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως καὶ ἀναγινώσκεται *πλὴν* ἢ *ἀπό*. Οὕτως 8—3 ἀναγινώσκεται 8 πλὴν 3 ἢ 3 ἀπὸ 8.

Ἀντὶ νὰ ἀφαιρῶμεν μίαν, μίαν τὰς μονάδας τοῦ 3, συνηθίζομεν καὶ εὑρίσκομεν ἀμέσως τὸ ἐξαγόμενον καὶ λέγομεν 3 ἀπὸ 8 γίνεται 5 ἢ 8 πλὴν 3 ἴσον 5.

§ **25. Γενικὸς ὁρισμὸς τῆς ἀφαιρέσεως.** Εὕρομεν προηγουμένως ὅτι $8-3=5$. Ἐὰν δὲ ὁ φίλος τοῦ παιδίου ἐπέστρεφε τοὺς 3 βόλους, τοῦτο θὰ εἶχε πάλιν 8 βόλους, ἤτοι $5+3=8$.

Ἄρα: *Ἐὰν εἰς τὸν ἀφαιρετέον προσθέσωμεν τὸ ὑπόλοιπον, εὑρίσκομεν τὸν μειωτέον.*

Ἀπὸ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν ἐξάγεται ὅτι: *Ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ β ἀπὸ ἄλλον α εἶναι πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἄλλον, ὁ ὁποῖος μαζὺ μὲ τὸν β σχηματίζει τὸν α.*

Κατὰ ταῦτα, ἂν $\alpha-\beta=\gamma$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha=\beta+\gamma$.

Ὅταν θέλωμεν νὰ νοῶμεν τὴν διαφορὰν $\alpha-\beta$ εὑρεθεῖσαν, θέτομεν αὐτὴν ἐντὸς παρενθέσεως οὕτω: $(\alpha-\beta)$. Ἵνα δὲ δηλώσωμεν ὅτι εὑρέθη π. χ. τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν $(\alpha-\beta)$ καὶ $(\gamma+\delta)$, θέτομεν αὐτὸ ἐντὸς ἀγκυλῶν οὕτω: $[(\alpha-\beta)+(\gamma+\delta)]$.

§ **26. Σχέσις ὑπολοίπων ἀφαιρέσεως ἀριθμοῦ ἀπὸ ἴσων ἢ ἀνίσων ἀριθμῶν.** Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἴσων καὶ ἀνίσων ἀριθμῶν ἕπεται εὐκόλως ὅτι:

α΄) Ἂν $\alpha=\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha-\mu=\beta-\mu$.

β΄) Ἂν $\alpha>\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha-\mu>\beta-\mu$.

## Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.

§ **27. Πρόβλημα ΙΙ.** *Παιδίον εἶχε 3 βόλους, ἔδωκε δὲ εἰς αὐτὸ ἡ ἀδελφή του ἄλλους 5 καὶ ὁ ἀδελφός του ἄλλους 2. Ἐχάρισε δὲ ἔπειτα ἀπὸ αὐτοὺς εἰς φίλον του 4 Πόσοι βόλοι ἔμειναν εἰς αὐτό.*

*Λύσις.* (Α΄ τρόπος). Τὸ παιδίον εἶχε $(3+5+2)$ ἤτοι 10 βόλους καὶ ἀπὸ αὐτοὺς ἐδώρησε 4. Ἄρα ἔμειναν εἰς αὐτὸ

$$(3+5+2)-4=10-4=6.$$

(Β΄ τρόπος). Ἂν τὸ παιδίον ἔδιδε τοὺς 4 ἀπὸ τοὺς 5 τῆς ἀδελφῆς του, θὰ ἔμειναν εἰς αὐτὸ $3+1+2=6$ βόλοι.

Ὥστε $(3+5+2)-4=3+1+2$, ἤτοι:

Α΄. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἀπὸ ἕνα μόνον προσθετέον, τοὺς δὲ ἄλλους ἀφήσωμεν, ὅπως ἔχουσιν.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης πειθόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 20 Γ') εἶναι $3+5+2=3+1+2+4$. Ἐπειδὴ δὲ (§ 20 Β') $3+1+2+4=(3+1+2)+4$, ἕπεται ὅτι

$$3+5+2=(3+1+2)+4.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ὁ ἀριθμὸς $(3+1+2)$ μαζὶ μὲ τὸν 4 ἀποτελεῖ τὸν $(3+5+2)$. Καὶ ἑπομένως κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 25) τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι $(3+5+2)-4=3+1+2$. ὅ.ἔ.δ.

*Καὶ γενικῶς* $(\alpha+\beta+\gamma)-\delta=\alpha+(\beta-\delta)+\gamma$.

Δι' αὐτὸ τὴν διαφορὰν π. χ. $15-3$ ἢ $(10+5)-3$ εὑρίσκομεν ἀγράφως λέγοντες τρία ἀπὸ 5 ἴσον 2· 2 καὶ $10=12$.

Ἐὰν τὸ ἄνω παιδίον ἐχάριζε 5 βόλους, εἶναι ὡς νὰ μὴ ἐλάμβανεν ἀπὸ τὴν ἀδελφήν του τίποτε. Θὰ εἶχεν ἑπομένως $3+2$, ἤτοι $(3+5+2)-5=3+2$. Ἄρα :

Β'. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἄθροισμα ἕνα προσθετέον αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτόν.*

Οὕτω $17-7=(10+7)-7=10$, $23-3=(20+3)-3=20$. κτλ.

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης πειθόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα εἶναι

$$(3+5+2)-5=3+(5-5)+2=3+2.$$

*Καὶ γενικῶς :* $(\alpha+\beta+\gamma)-\beta=\alpha+\gamma$.

***Ἀσκήσεις.*** 43) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως αἱ ἀκόλουθοι διαφοραὶ $17-7$, $43-3$, $78-8$, $69-5$.

44) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως αἱ ἀκόλουθοι διαφοραὶ $105-5$, $206-7$, $309-7$, $235-35$.

§ **28. Πρόβλημα II.** *Εἶχέ τις 18 δραχμάς, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἐξώδευσε τὴν πρωΐαν 6 δραχμάς, τὴν μεσημβρίαν 3 καὶ τὸ ἑσπέρας 4. Πόσα χρήματα ἔμειναν εἰς αὐτόν ;*

*Λύσις.* (Α' τρόπος). Κατὰ τὴν σειρὰν τῆς δαπάνης ἔμειναν εἰς αὐτὸν $18-6=12$, $12-3=9$, $9-4=5$ δραχμαί.

(Β' τρόπος). Ἐπειδὴ ἐξώδευσε τὸ ὅλον $6+3+4=13$ δραχ., ἕπεται ὅτι τοῦ ἔμειναν $18-(6+3+4)$ ἢ $18-13=5$ δραχ. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι : $18-(6+3+4)=[(18-6)-3)]-4$. Ἄρα :

Γ'. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ αὐτὸν ἕνα προσθετέον, ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον ἄλλον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρι οὗ τελειώσωσιν ὅλοι οἱ προσθετέοι.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης πειθόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς

Ἐὰν ἀπὸ τὸν 18 ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα $6+3+4$ ἢ τὸν

13, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 5, ἤτοι $18-(6+3+4)=5$, (1)
ὅθεν $18=(6+3+4)+5$.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 20Γ′) εἶναι $(6+3+4)+5=6+3+4+5$, ἕπεται ὅτι $18=6+3+4+5$.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα ταύτην εὑρίσκομεν (§ 27 Β′) $18-6=3+4+5$, ἀπὸ αὐτὴν προκύπτει ἡ ἰσότης $(18-6)-3=4+5$ καὶ ἀπὸ αὐτὴν προκύπτει ἡ $[(18-6)-3)]-4=5$. (2)

Ἀπὸ δὲ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) προκύπτει (§ 14) ἡ ἰσότης
$$18-(6+3+4)=[(18-6)-3]-4. \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

*Καὶ γενικῶς* : $A-(\alpha+\beta+\gamma)=[(A-\alpha)-\beta]-\gamma$.

Δι' αὐτὸν τὸν λόγον τὴν διαφορὰν π. χ. $200-163$ ἢ $200-(100+60+3)$ εὑρίσκομεν καὶ οὕτω $200-100=100$, $100-60=40$, $40-3=37$.

§ **29. Πρόβλημα III.** *Ἡ α′ τάξις σχολείου εἶχε 40 μαθητάς, ἡ δὲ β′ 46 μαθητάς. Ἀπὸ τὴν α′ τάξιν ἀπεφοίτησαν 6 καὶ ἀπὸ τὴν β′ 8 μαθηταί. Πόσοι μαθηταὶ ἔμειναν καὶ εἰς τὰς δύο τάξεις.*

*Λύσις.* (Α′ τρόπος). Κατ' ἀρχὰς αἱ δύο τάξεις μαζὶ εἶχον $40+46=86$ μαθητάς. Ἀπεφοίτησαν δὲ ἀπὸ τὰς δύο τάξεις $6+8=14$ μαθηταί. Ἔμειναν ἄρα εἰς τὰς δύο τάξεις
$(40+46)-(6+8)$ ἢ $86-14=72$ μαθηταί.

(Β′ τρόπος). Εἰς τὴν α′ τάξιν ἔμειναν $40-6$ μαθηταί, εἰς δὲ τὴν β′ $46-8$. Ἑπομένως εἰς τὰς δύο τάξεις ἔμειναν $(40-6)+(46-8)$ ἢ $34+38=72$ μαθηταί. Ἀπὸ τοὺς τρόπους τούτους τῆς λύσεως ἐννοοῦμεν ὅτι

$$(40-6)+(46-8)=(40+46)-(6+8), \text{ ἤτοι}$$

Δ′. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν διαφοράς, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τοὺς μειωτέους καὶ χωριστὰ τοὺς ἀφαιρετέους, ἀπὸ δὲ τοῦ α′ ἀθροίσματος νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης πειθόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ $40-6=34$ καὶ $46-8=38$. (1)
ἕπεται ὅτι : $(40-6)+(46-8)=34+38=72$ (2)
καὶ $40=34+6$, $46=38+8$. (3)

Ἀπὸ δὲ τὰς ἰσότητας (3) εὑρίσκομεν ὅτι
$$40+46=34+6+38+8=(34+38)+(6+8),$$
ὅθεν ἕπεται ὅτι : $(40+46)-(6+8)=34+38=72$.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα ταύτην καὶ ἀπὸ τὴν (2) προκύπτει ὅτι

$(40-6)+(46-8)=40+46)-(6+8)$. ὅ.ἔ.δ.

Γενικῶς : $(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)+(\varepsilon-\zeta)=(\alpha+\gamma+\varepsilon)-(\beta+\delta+\zeta)$.

§ **30. Πρόβλημα IV.** *Ὁ Γεώργιος εἶναι 9 ἐτῶν καὶ ὁ Δημήτριος 6 ἐτῶν. Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν αὐτῶν σήμερον καὶ πόση μετὰ 7 ἔτη ;*

*Λύσις.* Γνωρίζομεν ὅτι, ἐφ' ὅσον δύο ἄνθρωποι ζῶσιν, ἡ διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν εἶναι πάντοτε ἡ ἰδία. Ἐπειδὴ δὲ σήμερον ἡ διαφορὰ εἶναι $9-6$, μετὰ 7 δὲ ἔτη θὰ εἶναι $(9+7)-(6+7)$, συμπεραίνομεν ὅτι : $9-6=(9+7)-(6+7)$, ἤτοι :

Δ'. *Ἐὰν εἰς τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης πειθόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς·
Ἐπειδὴ $7-7=0$, ἕπεται ὅτι $9-6=(9-6)+(7-7)$.
Ἐπειδὴ δὲ (§ 29) $(9-6)+(7-7)=(9+7)-(6+7)$, ἕπεται ὅτι

$$9-6=(9+7)-(6+7) \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

*Καὶ γενικῶς :* $\alpha-\beta=(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)$.

§ **31. Πρόβλημα V.** *Ἐργάτης εἶχεν εἰς τὸ ταμιευτήριον τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης 600 δραχ. Εἰς τὴν ἀρχὴν ἑβδομάδος τινὸς ἀπέσυρε δι' ἐκτάκτους ἀνάγκας του 250 δραχμὰς καὶ εἰς τὸ τέλος τῆς αὐτῆς ἑβδομάδος κατέθεσεν ἄλλας 200 δραχμάς. Πόσα χρήματα εἶχε τότε εἰς τὸ ταμιευτήριον ;*

*Λύσις.* (Α' τρόπος). Ἀφ' οὗ ἀπέσυρε 250 δραχμὰς καὶ ἔπειτα κατέθεσε πάλιν 200 δραχμάς, εἶναι ὡς νὰ ἀπέσυρε $(250-200)$ δραχ. Ἔμειναν λοιπὸν εἰς τὸ ταμιευτήριον $600-(250-200)$ ἢ $600-50=550$ δραχ.

(Β'. τρόπος) Ἐὰν δὲν ἀπέσυρε καθ' ὅλου χρήματα, θὰ εἶχεν εἰς τὸ ταμιευτήριον $(600+200)$ δραχ. Ἐπειδὴ δὲ ἀπέσυρε τὰς 250 δραχμάς, ἔχει $(600+200)-250$ ἢ $800-250=550$. Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν ὅτι $600-(250-200)=(600+200)-250$, ἤτοι :

Ε'. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν διαφορὰν ἀπὸ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν μειωτέον τῆς διαφορᾶς ταύτης.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης πειθόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα εἶναι :

$$600-(250-200)=(600+200)-[(250-200)+200]. \quad (1)$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι

$$(250-200)+200=250$$

ἡ δὲ ἰσότης (1) γίνεται $600-(250-200)=(600+200)-250$. ὅ.ἔ.δ.

*Καὶ γενικῶς* $A-(\alpha-\beta)=(A+\beta)-\alpha$.

## Ἐκτέλεσις τῆς Ἀφαιρέσεως.

§ **32.** *Α'. Ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλον, ὅταν τὸ ὑπόλοιπον εἶναι μονοψήφιον.* Τὴν διαφορὰν δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν καὶ τὸ μονοψήφιον ὑπόλοιπον μονοψηφίου ἀπὸ διψηφίου ἀριθμοῦ μανθάνομεν καὶ ἐνθυμούμεθα ἀμέσως. Εἰς τοῦτο μᾶς βοηθεῖ καὶ ἡ γνῶσις τοῦ ἀθροίσματος δύο οἱωνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν. Εὑρίσκομεν π.χ. ἀμέσως ὅτι $9-3=6$, διότι ἐνθυμούμεθα ὅτι $3+6=9$ καὶ $17-8=9$, διότι $8+9=17$.

§ **33. Ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλου τυχόντος.**

**Πρόβλημα.** *Ἐχρεώστει τις 368 δραχμὰς καὶ ἐπέστρεψε 245 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς χρεωστεῖ ἀκόμη;*

*Λύσις.* Προφανῶς χρεωστεῖ 368 δραχ.—245 δραχ. Παρατηροῦντες ὅτι ἐχρεώστει

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 ἑκτ. | 6 δεκ. | 8 μονόδρχ. |
| καὶ ὅτι ἐπέστρεψε | 2 » | 4 » | 5 » |
| εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι χρεωστεῖ | 1 » | 2 » | 3 » |

ἤτοι 123 δραχ.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸ ψηφίον τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ μειωτέου.

Διάταξις τῆς πράξεως

| | |
|---|---|
| 368 | μειωτέος |
| 245 | ἀφαιρετέος |
| 123 | ὑπόλοιπον |

Ἂν ἐπλήρωνεν 249 δραχμάς, ἔπρεπεν ἀπὸ 3 ἑκατ. 6 δεκ. 8 δραχ. νὰ ἀφαιρέσωμεν 2 » 4 » 9 »

Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ 8 δραχ. δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀφαιρέσωμεν 9 δραχ. ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον 10 δραχ. καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 1 δεκάδραχμον, ὅτε (§ 30 Δ') τὸ ὑπόλοιπον δὲν βλάπτεται. Οὕτω δὲ ὁ μὲν μειωτέος γίνεται

| | |
|---|---|
| | 3 ἑκατ. 6 δεκ. 18 δρχ. |
| ὁ δὲ ἀφαιρετέος | 2 ἑκατ. 5 δεκ. 9 δρχ. |
| τὸ ὑπόλοιπον | 1 ἑκατ. 1 δεκ. 9 δρχ. |

ἤτοι 119 δραχ.

Οὕτως ἐξηγεῖται ὁ γνωστὸς κανών, κατὰ τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ ἀφαίρεσις.

§ **34. Δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως.** Σύμφωνα μὲ τὴν ἐν (§ 25) ἰδιότητα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀφαιρετέον καὶ τὸ ὑπόλοιπον· ἐὰν εὕρωμεν ὡς ἄθροισμα τὸν μειωτέον, ἡ ἀφαίρεσις ἔγεινεν ὀρθῶς.

*Ἀσκήσεις.* 45) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀκόλουθα ὑπόλοιπα: 373—251, 748—536, 987—846, 4567—356, 6984—762, 3467—2156, 28942—3831.

46) Βαρέλιον χωρεῖ 675 ὀκάδας οἴνου. Ἐὰν ῥίψωμεν εἰς αὐτὸ 260 ὀκάδας καὶ ἔπειτα ἄλλας 187 ὀκάδας, πόσας ὀκάδας χωρεῖ ἀκόμη;

47) Πόσα ἔτη παρῆλθον ἀπὸ τῆς ἁλώσεως τῆς Κ)πόλεως ὑπὸ τῶν Τούρκων (1453 μ. Χ.) μέχρι τῆς κηρύξεως τῆς ἑλληνικῆς ἐπαναστάσεως;

48) Ἡ τυπογραφία ἐφευρέθη ὑπὸ τοῦ Γουτεμβέργου (Gutemberg) τὸ ἔτος 1436 μ. Χ. Πόσα ἔτη παρῆλθον ἕως τώρα;

49) Πόσα ἔτη παρῆλθον ἀπὸ τῆς ἀνακαλύψεως τῆς Ἀμερικῆς (1492 μ. Χ.) ὑπὸ τοῦ Χριστοφόρου Κολόμβου, μέχρι τῆς ἐφευρέσεως τοῦ σιδηροδρόμου (1832 μ. Χ.) ὑπὸ τοῦ Στέφενσον (Stephenson);

50) Πόσα ἔτη παρῆλθον ἀπὸ τῆς ἐφευρέσεως τῆς ἀτμομηχανῆς (1799 μ. Χ.) ὑπὸ τοῦ Βὰτ (Watt), μέχρι τῆς ἐφευρέσεως τοῦ σιδηροδρόμου;

51) Γεωργὸς ἔλαβεν ἐκ τῆς πωλήσεως σίτου 3280 δραχμάς, ἀπὸ οἶνον 1345 δραχμὰς καὶ ἀπὸ καπνὸν 42948 δραχμάς. Ἀπὸ τὰ χρήματα αὐτὰ ἔδωκε δι' ἀγορὰν ἵππου 3160 δραχμὰς καὶ δι' ἀγορὰν ἀμπέλου 1967 δραχμάς. Πόσα χρήματα τοῦ ἔμειναν;

52) Παντοπώλης διέθεσεν ἐν ὅλῳ δι' ἀγορὰν καφφὲ καὶ ζακχάρεως 6742 δραχ. ἐδαπάνησε δὲ ἄλλας 245 δραχμὰς διὰ φόρους καὶ μεταφορικὰ αὐτῶν. Ἔπειτα ἐπώλησε τὸν μὲν καφφὲν ἀντὶ 4940 τὴν δὲ ζάκχαριν ἀντὶ 3100 δραχμῶν. Ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη καὶ πόσον;

53) Πόσα ἔτη παρῆλθον ἀπὸ τῆς ἐν Σαλαμῖνι ναυμαχίας, μέχρι τοῦ θανάτου τοῦ μεγάλου Ἀλεξάνδρου (323 π. Χ.);

54) Κατὰ τὸ ἔτος 1928 εἰσήχθησαν εἰς τὴν Ἑλλάδα ὀρυκτὰ ἀξίας 117 790 000 δραχμῶν, μέταλλα καὶ μεταλλικὰ εἴδη ἀξίας 1 345 720 000 δρ. κλωστικαὶ ἶνες καὶ ὑφάσματα ἀξίας 139 076 000 δραχμῶν. Ἐξήχθησαν δὲ ὀρυκτὰ ἀξίας 6 890 000 δραχ. μέταλλα καὶ μεταλλικὰ εἴδη ἀξίας 1 061 000 δραχ. κλωστικαὶ ἶνες καὶ ὑφά-

σματα ἀξίας 2 878 000 δραχ. Ἡ ἀξία τῶν εἰσαχθέντων ἢ ἐξαχθέντων τούτων εἰδῶν εἶναι μεγαλυτέρα καὶ πόσον;

## Συντομίαι κατὰ τὴν ἄγραφον ἐκτέλεσιν τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

§ **35. Α΄. Πρόσθεσις τοῦ 9, 99, 999 κ.τ.λ. καὶ τοῦ 8, 98, 998 κ.τ.λ. εἰς ἄλλον ἀριθμόν.** Α΄. Ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα 18+9 προσθέσωμεν 1, εὑρίσκομεν (§ 21 Δ΄) 18+10. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦτο ἀφαιρέσωμεν 1, πρέπει νὰ εὑρίσκωμεν 18+9. Ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου (§ 27Α΄) εἶναι (18+10)−1=17+10. Ὥστε: 18+9=17+10=27. Ὁμοίως 67+99=66+100=166, κ.τ.λ.

Β΄. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

47+8=45+10=55, 183+98=181+100=281 κ.τ.λ.

*Ἀσκήσεις*. 55) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως καὶ κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τὰ ἀθροίσματα 8+9, 43+9, 347+9, 3478+9, 7+99, 47+99, 8+99, 6+999, 58+999, 6982+999.

56) Νὰ εὑρεθῶσι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τὰ ἀκόλουθα ἀθροίσματα 37+8, 563+8, 17+98, 794+98, 67+998, 3264+997.

§ **36. Γ΄. Ἀφαίρεσις τοῦ 9, 99, 999 κτλ. ἀπὸ ἄλλον.** Ἡ διαφορὰ 47−9 εἶναι (§ 30 Δ΄) ἴση πρὸς 48−10=38. Ὁμοίως 263−99=264−100=164, 135−98=137−100=37 κτλ.

*Ἀσκήσεις*. 57) Νὰ εὑρεθῶσι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον καὶ ἀγράφως αἱ διαφοραὶ 63−9, 87−8, 116−9, 547−8, 273−99, 491−98, 2945−99, 4875−998.

58) Νὰ εὑρεθῶσι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον καὶ ἀγράφως αἱ διαφοραὶ 18475−9999, 89709−9998, 164572−9999.

§ **37. Δ΄. Ἀφαίρεσις τοῦ 11, 101 1001 κτλ. ἀπὸ ἄλλου ἀριθμοῦ.** Ἡ διαφορὰ 56−11 εἶναι (§ 30 Δ΄) ἴση πρὸς 55−10=45. Ὁμοίως εἶναι

683−101=682−100=582 κτλ.

*Ἀσκήσεις*. 59) Νὰ εὑρεθῶσι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον καὶ ἀγράφως αἱ διαφοραὶ 73−11, 245−11, 893−101, 893−101, 2671−1001.

60) Νὰ εὑρεθῶσι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ ἀγράφως αἱ διαφοραὶ 89−12, 793−102, 78−12, 793−102, 7894−1002.

## Γ'. Πολλαπλασιασμός.

§ **38. Πρόβλημα I.** *Ἠγόρασέ τις 3 πήχεις ὑφάσματος πρὸς 8 δραχμὰς τὸν πῆχυν. Πόσα χρήματα ἔδωκεν;*

*Λύσις.* Ἀφ' οὗ διὰ 1 πήχ. ἔδωκεν 8 δραχ. διὰ 2 πήχ.
θὰ δώσῃ 8 δραχ. + 8 δραχ.
καὶ διὰ 3 πήχ. 8 » + 8 » + 8δρ. = 24 δρχ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ζητούμενον, ἐπαναλαμβάνομεν τὰς 8 δραχμὰς 3 φοράς. Τὴν πρᾶξιν ταύτην ὀνομάζομεν πολ]σμὸν τῶν 8 δραχ. ἐπὶ 3.

Γενικῶς: *Πολ]σμὸς εἶναι πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν ἐπαναλαμβάνομεν ἕνα ἀριθμὸν τόσας φοράς, ὅσας ἁπλᾶς μονάδας ἔχει ἄλλος ἀριθμός.*

Ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἐπαναλαμβάνομεν καλεῖται *πολ]στέος*. Ὁ δὲ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος φανερώνει πόσας φορὰς πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν πολ]στέον, καλεῖται *πολ]στής*. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦ πολ]σμοῦ καλεῖται *γινόμενον*. Ὁ πολ]στέος καὶ ὁ πολ]στὴς καλοῦνται ὁμοῦ *παράγοντες* τοῦ γινομένου.

Ὁ πολ]στὴς εἶναι πάντοτε ἀφῃρημένος ἀριθμός, ὁ δὲ πολ]στέος δύναται νὰ εἶναι συγκεκριμένος καὶ ἀφῃρημένος.

Τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς πρὸς τὸν πολ]στέον, διότι γίνεται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτοῦ.

Σημεῖον τοῦ πολ]σμοῦ εἶναι τὸ ×. Τοῦτο ἀναγινώσκεται ἐπὶ καὶ τίθεται μεταξὺ τοῦ πολ]στέου καὶ τοῦ πολ]στοῦ· ἀπὸ αὐτοὺς δὲ ὁ β' γράφεται δεξιὰ τοῦ α'.

ΣΗΜ. Τὸ σημεῖον × ἀντικαθίσταται ἐνίοτε ἀπὸ μίαν τελείαν στιγμήν. Οὕτω ἀντὶ $8 \times 3$ γράφομεν καὶ $8 \,.\, 3$.

Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ 2, 3, 4 κτλ. λέγεται *διπλάσιον*, *τριπλάσιον*, *τετραπλάσιον* κτλ. αὐτοῦ. Τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. ἀριθμοῦ λέγονται μὲ μίαν λέξιν πολλαπλάσια αὐτοῦ.

Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι: α') Ἂν $\alpha = \beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha \times \mu = \beta \times \mu$. β') Ἂν $\alpha > \beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha \times \mu > \beta \times \mu$.

§ **39. Γινόμενον δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν.** Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολ]σμοῦ ἡ εὕρεσις τοῦ $5 \times 3$ ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ $5 + 5 + 5$. Συνήθως ὅμως μανθάνομεν καὶ ἐνθυμούμεθα τὰ τοιαῦτα γινόμενα. Εὑρίσκονται δὲ ταῦτα εἰς τὸν ἀκόλουθον Πυθαγόρειον πίνακα, τοῦ ὁποίου ἡ χρῆσις εἶναι εὔκολος.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 63 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Ἰδιαιτέρως παρατηροῦμεν ὅτι : $1\times5=1+1+1+1+1=5$
καὶ $5\times1=5$, ἤτοι :

*Ὅταν εἷς ἀπὸ τοὺς παράγοντας εἶναι 1, τὸ γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἄλλον παράγοντα.*

**Ἀσκήσεις.** (ἀγράφως). 61) Ἡ ὀκᾶ τῶν σταφυλῶν τιμᾶται 8 δραχ. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ δώσῃ τις, ἵνα ἀγοράσῃ 4 ὀκάδας ἀπὸ αὐτά ;

62) Ἠγόρασέ τις 4 ὀκάδας χόρτα πρὸς 5 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ ἔδωκεν ἓν εἰκοσιπεντάδραχμον. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ ὀπίσω ;

63) Δακτυλογράφος γράφει 8 σελίδας τὴν ὥραν. Πόσας σελίδας θὰ γράψῃ εἰς 6 ὥρας ;

64) Πόσα ῥούπια ἔχουσιν 7 πήχεις ;

65) Πόσας ἡμέρας ἔχουσιν 9 ἑβδομάδες ;

66) Ὁρίσατε τὸ διπλάσιον, τὸ τριπλάσιον, τετραπλάσιον ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν 4, 6, 8, 9.

### Ἰδιότητες τοῦ πολ)σμοῦ.

§ **40. Α΄. Ἀλλαγὴ τῆς τάξεως τῶν παραγόντων.**

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι θέτομεν εἰς μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν 5 βόλους, ὑποκάτω ἄλλους 5 καὶ ὑποκάτω ἄλλους 5.

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \quad 5 \\ \qquad\qquad + \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \quad 5 \\ \qquad\qquad + \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \quad 5 \end{array}\right\} = 5\times3$$

$$3+3+3+3+3=3\times5.$$

Ὅλοι οἱ βόλοι εἶναι $5+5+5$, ἢ $5\times3$. Ἀλλ᾽ ἂν τοὺς μετρήσωμεν κατὰ στήλας, εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι $3\times5$. Ὥστε $5\times3=3\times5$.

*Γενικῶς* $\alpha\times\beta=\beta\times\alpha$. Ἄρα :

*Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλάξῃ ἡ τάξις τῶν παραγόντων.*

## Ἐφαρμογαί.

§ **41. Α΄. Γενόμενον τοῦ ὁποίου εἷς παράγων εἶναι 0.** Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολ]σμοῦ εἶναι $0\times4=0+0+0+0=0$. Ἵνα δὲ ἰσχύῃ ἡ προηγουμένη ἰδιότης καὶ διὰ τὸ γινόμενον $4\times0$, πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι $4\times0=0\times4=0$.

Ἄρα : *Ὅταν ὁ εἷς ἀπὸ τοὺς παράγοντας γινομένου εἶναι μηδέν, τὸ γινόμενον εἶναι μηδέν.*

§ **42. Β΄. Δοκιμὴ πολ]σμοῦ.** Εἰς τὴν ἀλήθειαν τῆς προηγουμένης (§ 40 Α΄) ἰδιότητος στηρίζεται ἡ γνωστὴ δοκιμὴ τοῦ τοῦ πολ]σμοῦ, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐκτελοῦμεν ἐκ νέου τὸν πολ]σμὸν θέτοντες τὸν πολ]στέον ὡς πολ]στὴν καὶ τἀνάπαλιν.

§ **43. Γ΄. Γενόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ 10, 100, 1000 κ.τ.λ.** *Διὰ νὰ μάθωμεν πόσας δεκάρας ἔχουν 4 δραχ. σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.* Ἀφ' οὗ 1 δραχμὴ ἔχει δέκα δεκάρες, αἱ 4 δραχμαὶ θὰ ἔχωσι $10\times4$ δεκ.$=(10+10+10+10)$ δεκ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ μονάδες τῶν προσθετέων ἔχουσιν ἄθροισμα 0, αἱ δὲ δεκάδες 4 ἔπεται ὅτι $10\times4=40$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $10\times74=740$ κ.τ.λ. Ἐπειδὴ δὲ $74\times10=10\times74=740$, ἔπεται ὅτι καὶ $74\times10=740$· ὁμοίως εἶναι $15\times100=100\times15=1500$, $7\times1000=1000\times7=7000$ κ.τ.λ.

Ἄρα : *Ὅταν εἷς ἀπὸ τοὺς παράγοντας εἶναι 10, 100, 1000 κτλ. πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν δεξιὰ τοῦ ἄλλου παράγοντος ἀντιστοίχως, ἕν, δύο, τρία κ.τ.λ. μηδενικά.*

*Ἀσκήσεις.* 67) Πόσα λεπτὰ ἔχουσι 43 δραχμαὶ καὶ πόσα 568 δραχμαί;

68) Ἡ ὀκᾶ τῶν ἀνθράκων τιμᾶται 3 δραχμάς. Πόσον τιμῶνται 100 ὀκάδες καὶ πόσον 1000 ὀκάδες ἀνθράκων;

69) Ὁ στατὴρ ἔχει 44 ὀκ. Πόσας ὀκάδας ἔχουσι 1000 στατῆρες;

70) Πόσα δράμια ἔχουσι 10 ὀκάδες καὶ πόσα 100 ὀκάδες;

71) Τυρέμπορος ἠγόρασε 1000 ὀκάδας τυροῦ, ὅστις ἐκόστισεν εἰς αὐτὸν 27 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Ἔπειτα ἐπώλησεν αὐτὸν πρὸς 36 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσα χρήματα ἐκέρδισεν;

§ **44. Β΄. Πολ]σμὸς ἀθροίσματος ἐπὶ ἀριθμόν. Πρόβλημα.** *Πατὴρ εἶχε 3 υἱοὺς καὶ ἔδωκε διὰ κάθε ἕνα τὰ* *ἑξῆς ποσά. Διὰ τετράδια 8 δραχμάς, διὰ στυπόχαρτον 2 δραχμὰς καὶ διὰ μολύβια 5 δραχμάς. Πόσα χρήματα ἔδωκε τὸ ὅλον;*

*Λύσις.* (Α΄ τρόπος). Ἐπειδὴ διὰ κάθε υἱὸν ἔδωκε 8 δραχ+2 δραχ+5 δρ. διὰ τοὺς 3 υἱοὺς ἔδωκεν (8δρ+2δρ+5δρ)×3=15δρ×3=45 δρ.

(Β΄ τρόπος). Ἐπειδὴ διὰ τὰ τετράδια ἔδωκεν 8δρ×3, διὰ τὰ στυπόχαρτα 2 δρ×3 καὶ διὰ τὰ μολύβια 5 δρ×3, ἔπεται ὅτι ἔδωκε τὸ ὅλον (8δρ×3)+(2δρ×3)+(5δρ×3). Ὥστε

$$(8+2+5)\times 3=(8\times 3)+(2\times 3)+(5\times 3).$$

Ἄρα: *Διὰ νὰ πολ)σωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ πολ)σωμεν ὅλους τοὺς προσθέτους ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ γινόμενα.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης πειθόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολ]σμοῦ εἶναι

$$(8+2+5)\times 3=(8+2+5)+(8+2+5)+(8+2+5).$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 22Ε΄, 20Β΄) εἶναι

$$(8+2+5)+(8+2+5)+(8+2+5)=8+2+5+8+2+5+8+2+5$$
$$=(8+8+8)+(2+2+2)+(5+5+5)$$

ἔπεται ὅτι $(8+2+5)\times 3 = (8\times 3)+(2\times 3)+(5+3)$. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς $(\alpha+\beta+\gamma).\delta=(\alpha.\delta)+(\beta.\delta)+(\gamma.\delta)$.

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον 17×3 ἢ (10+7)×3 ἀγράφως λέγοντες τρὶς δέκα γίνεται 30, τρὶς 7 γίνεται 21, τέλος 30+21=51.

Ὁμοίως τὸ γινόμενον 532×3 εἶναι ἴσον πρὸς

$$(500\times 3)+(30\times 3)+(2\times 3)$$

ἢ 532×3=(5ἑκ.×3)+(3δεκ.×3)+(2μον.×3).

*Δι᾽ αὐτὸν τὸν λόγον, πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον, πολ)ζομεν ἐπὶ τὸν μονοψήφιον πολ)στὴν χωριστὰ ὅλα τὰ ψηφία τοῦ πολ)στέου κ.τ.λ.*

***Ἀσκήσεις.*** 72) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως τὰ ἑξῆς γινόμενα

18×2, 12×5, 27×3, 47×4, 267×3, 592×5.

73) Ἠγόρασέ τις ζάκχαριν, μακαρόνια καὶ ὄρυζαν ἀπὸ 5 ὀκάδας ἐξ ἑκάστου εἴδους. Καὶ τὴν μὲν ζάκχαριν ἠγόρασε πρὸς 22 δρχ. τὴν ὀκᾶν, τὰ μακαρόνια πρὸς 18 δραχ. καὶ τὴν ὄρυζαν πρὸς 16 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσα χρήματα ἔδωκε τὸ ὅλον;

## § 43. Γ΄) Πολ)σμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄθροισμα.

**Πρόβλημα.** *Ἕκαστος ἀπὸ τοὺς μαθητὰς τῶν τριῶν κατωτέρων τάξεων Γυμνασίου προσέφερεν ὑπὲρ ἀσθενοῦντος οἰκογενειάρχου 5 δραχμάς. Ἡ μία ἀπὸ τὰς τάξεις ταύτας ἔχει 42, ἡ ἄλλη 38 καὶ ἡ τρίτη*

*32 μαθητάς. Πόσα χρήματα προσέφερον ὅλοι οἱ μαθηταὶ οὗτοι;*

*Λύσις.* (Α΄ τρόπος). Ἐπειδὴ ὅλοι οἱ μαθηταὶ εἶναι (42+38+32), ἕκαστος δὲ προσέφερεν ἀπὸ 5 δραχμάς, ὅλοι ὁμοῦ προσέφερον 5×(42+38+32) δραχ. ἢ 5×112=560 δραχ.

(Β΄. τρόπος). Οἱ μαθηταὶ τῆς μιᾶς τάξεως προσέφερον 5×42=210 δραχ., τῆς ἄλλης 5×38=190 δραχ. καὶ τῆς τελευταίας 5×32=160 δραχ. Ὅλοι ἄρα ὁμοῦ προσέφερον (5×42)+(5×38)+(5×32) ἢ 210+190+160=560 δραχ.

Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι

$$5\times(42+38+32)=(5\times42)+(5\times38)+(5\times32).$$

Ἄρα: *Διὰ νὰ πολ)σωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄθροισμα, δυνάμεθα νὰ πολ)σωμεν αὐτὸν ἐπὶ ὅλους τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Κατὰ τὴν Α΄ (§ 40) ἰδιότητα εἶναι

$$5\times(42+38+32)=(42+38+32)\times5.$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 44 Β΄) εἶναι

$(42+38+32)\times5=(42\times5)+(38\times5)+(32\times5)$, ἕπεται ὅτι

$5\times(42+38+32)=(42\times5)+(38\times5)+(32\times5)$, ὅθεν

$5\times(42+38+32)=(5\times42)+(5\times38)+(5\times32)$. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς $\alpha\times(\beta+\gamma+\delta)=(\alpha\times\beta)+(\alpha\times\gamma)+(\alpha\times\delta)$.

§ **46. Δ΄. Πολ)σμὸς διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμόν.**

**Πρόβλημα.** *Ἐργάτης ἔχει ἡμερομίσθιον 75 δραχμάς, δαπανᾷ δὲ καθ' ἡμέραν 40 δραχμάς. Πόσα χρήματα τοῦ περισσεύουν εἰς 3 ἡμέρας;*

*Λύσις.* (Α΄ τρόπος). Ἐπειδὴ καθ' ἡμέραν περισσεύουσι (75—40) δραχ. εἰς 3 ἡμέρας περισσεύουσι (75−40)×3=35×3=105 δραχ.

(Β΄ τρόπος). Εἰς τὰς 3 ἡμέρας λαμβάνει 75×3 καὶ δαπανᾷ 40×3 δραχ. περισσεύουσι δὲ (75×3)—(40×3) δραχ.

Ὥστε (75—40)×3=(75×3)—(40×3).

Ἄρα: *Διὰ νὰ πολ/σωμεν διαφορὰν ἐπὶ ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ πολ/σωμεν χωριστὰ τὸν μειωτέον καὶ χωριστὰ τὸν ἀφαιρετέον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα καὶ ὡς ἑξῆς. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολ]σμοῦ εἶναι

$$(75-40)\times3=(75-40)+(75-40)+(75-40).$$

Ἐπειδὴ (§ 29 Δ') εἶναι

$(75-40)+(75-40)+(75-40)=(75+75+75)-(40+40+40)$,

ἕπεται ὅτι $(75-40)\times 3=(75\times 3)-(40\times 3)$. ὅ.ἔ.δ.

*Γενικῶς* $(\alpha-\beta)\times\mu=(\alpha\times\mu)-(\beta\times\mu)$.

*Ἐφαρμογή*. Τὸ γινόμενον $9\times 17$ εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ $9=10-1$, ἕπεται ὅτι

$$9\times 17=(10-1)\times 17=170-17=153.$$

Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι $23\times 99=2300-23=2277$.

Ἄρα: *Ἐὰν ὅλα τὰ ψηφία παράγοντος εἶναι 9, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν δεξιὰ ἀπὸ τὸν ἄλλον παράγοντα μηδενικὰ ἰσάριθμα πρὸς τὰ 9 καὶ ἀπὸ τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἄλλον παράγοντα.*

***Ἀσκήσεις***. 74) Νὰ εὑρεθῶσι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον καὶ ἀγράφως τὰ γινόμενα $9\times 15$, $9\times 73$, $9\times 267$, $99\times 17$, $99\times 86$, $999\times 954$.

75) Νὰ εὑρεθῶσι κατὰ τρόπον ἀνάλογον τὰ γινόμενα

$$8\times 47,\ 8\times 173,\ 98\times 15,\ 998\times 23.$$

## § 47. Ε'. Πολ]σμὸς ἀθροίσματος ἐπὶ ἄθροισμα.

**Πρόβλημα**. *Πατὴρ ἔχει 3 υἱοὺς καὶ 2 θυγατέρας, ἔδωκε δὲ εἰς ἕκαστον 8 δραχμὰς διὰ νὰ ἀγοράσῃ τετράδια, 12 δραχμὰς διὰ νὰ μετάσχῃ ἐράνου ὑπὲρ φιλανθρωπικοῦ σκοποῦ καὶ 4 δραχμὰς διὰ διάφορα μικροέξοδα τῆς ἡμέρας. Πόσα χρήματα ἔδωκε τὸ ὅλον;*

*Λύσις*. (Α' τρόπος). Διὰ κάθε τέκνον ἔδωκε $(8+12+4)$ δραχ. Ἑπομένως διὰ τὰ $(3+2)$ τέκνα ἔδωκε

$$(8+12+4)\times(3+2)=24\times 5=120 \text{ δραχ.}$$

(Β' τρόπος). Εἰς τοὺς υἱοὺς ἔδωκε $(8\times 3)$ δρ. διὰ τετράδια, $(12\times 3)$ διὰ τὸν ἔρανον καὶ $(4\times 3)$ διὰ τὰ μικροέξοδα. Ἤτοι τὸ ὅλον $(8\times 3)+(12\times 3)+(4\times 3)$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὰς θυγατέρας ἔδωκε τὸ ὅλον $(8\times 2)+(12\times 2)+(4\times 2)$ δραχ. Ὥστε

$(8+12+4)\times(3+2)=(8\times 3)+(12\times 3)+(4\times 3)+(8\times 2)+(12\times 2)+(4\times 2)$.

Ἄρα: *Διὰ νὰ πολ]σωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἄλλο ἄθροισμα, δυνάμεθα νὰ πολ]σωμεν ὅλους τοὺς προσθετέους τοῦ α' ἀθροίσματος ἐπὶ ἕκαστον προσθετέον τοῦ β καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ γινόμενα.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ ἄθροισμα $8+12+4$ ὡς εὑρεθέν. κατὰ τὴν γνωστὴν ἰδιότητα (§ 45Γ') θὰ εἶναι:

$$(8+12+4)\times(3+2)=(8+12+4)\times 3+(8+12+4)\times 2.$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 44 Β´) εἶναι

$(8+12+4)\times3=(8\times3)+(12\times3)+(4\times3)$ καὶ

$(8+12+4)\times2=(8\times2)+(12\times2)+(4\times2)$, ἕπεται ὅτι

$(8+12+3)\times(3+2)=(8\times3)+(12\times3)+(4\times3)$
$+(8\times2)+(12\times2)+(4\times2)$. ὅ.ἔ.δ.

*Γενικῶς* $(\alpha+\beta+\gamma)\times(\delta+\varepsilon)=(\alpha\times\delta)+(\beta\times\delta)+(\gamma\times\delta)$
$+(\alpha\times\varepsilon)+(\beta\times\varepsilon)+(\gamma\times\varepsilon)$.

Δι' αὐτὸν τὸν λόγον τὸ γινόμενον $12\times23$ ἢ $(10+2)\times(20+3)$ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀγράφως λέγοντες:
$10\times20=200$, $2\times20=40$, $10\times3=30$, $2\times3=6$, τέλος $200+40+30+6=276$.

***Ἀσκήσεις.*** 76) Νὰ εὑρεθῶσι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον καὶ ἀγράφως τὰ γινόμενα $11\times15$, $15\times13$, $25\times11$, $13\times54$.

77) Γεωργὸς ἔχει 8 στρέμματα ἀγροῦ καὶ 5 στρέμματα ἀμπέλου. Ἐδαπάνησε δὲ 12 δραχμὰς κατὰ στρέμμα διὰ νὰ λιπάνῃ τὰ κτήματα ταῦτα καὶ 90 δραχμὰς τὸ στρέμμα διὰ τὴν καλλιέργειαν αὐτῶν. Πόσα χρήματα ἐδαπάνησε τὸ ὅλον;

## Ἐξήγησις τοῦ κανόνος τοῦ πολ)σμοῦ.

§ **48. Γινόμενον τοῦ ὁποίου εἷς παράγων λήγει εἰς μηδενικά.** Ἐὰν ἡ ὀκᾶ τῆς ζακχάρεως τιμᾶται 20 δραχμάς, αἱ 3 ὀκάδες τιμῶνται 20δραχ$\times3=$20 δραχ$+$20δραχ$+$20δραχ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ μὲν μονάδες ἔχουσιν ἄθροισμα 0, αἱ δὲ δεκάδες ἔχουσιν ἄθροισμα $2+2+2=2\times3=6$, ἕπεται ὅτι $20\times3=60$.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 40 Α´) εἶναι $3\times20=20\times3$, ἕπεται ὅτι $3\times20=60$.

Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $2\times1200=1200\times2$, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $12\times2$ καὶ δεξιὰ αὐτοῦ νὰ γράψωμεν δύο 0. Ἤτοι εἶναι

$$2\times1200=1200\times2=2400.$$

Ἄρα: *Ἐὰν ὁ εἷς ἀπὸ τοὺς παράγοντας γινομένου λήγῃ εἰς μηδενικά, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον, ἀρκεῖ νὰ πολ)σωμεν τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ ἄλλα ψηφία αὐτοῦ, ἐπὶ τὸν ἄλλον παράγοντα καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου νὰ γράψωμεν, ὅσα μηδενικὰ παρελείφθησαν.*

***Ἀσκήσεις.*** 78) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀκόλουθα γινόμενα $19\times50$, $27\times30$, $300\times27$, $400\times34$, $500\times45$, $804\times400$, $1024\times900$.

79) Πόσα δράμια ἔχουσιν 8 ὀκάδες καὶ πόσα 12 ὀκάδες;

80) Πόσα δράμια ἔχει ὁ στατήρ;

81) Ἐργάτης λαμβάνει 70 δραχμὰς καθ' ἑκάστην ἐργάσιμον ἡμέραν καὶ δαπανᾷ 50 δραχμὰς καθ' ἑκάστην. Πόσον περίσσευμα ἔχει καθ' ἑκάστην ἑβδομάδα ; (Τὰς Κυριακὰς δὲν ἐργάζεται.)

82) Ἁμαξοστοιχία διανύει 30 χιλιόμετρα τὴν ὥραν καὶ ἐχρειάσθη διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ Ἀθηνῶν εἰς Λάρισσαν 14 ὥρας· 3 ὥρας ὅμως ἀπὸ αὐτὰς παρέμεινεν εἰς τοὺς ἐνδιαμέσους σταθμούς. Πόσον ἀπέχει ἡ Λάρισσα τῶν Ἀθηνῶν ;

§ **49. Γινόμενον δύο ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι λήγουσιν εἰς μηδενικά.** Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ 1 ὀκᾶ ἔχει 400 δράμια, ἑπομένως αἱ 60 ὀκάδες θὰ ἔχωσι 400 δράμ×60.

Ἐπειδὴ δὲ 4×6=24, ἕπεται (§ 48) ὅτι 400×6=2400 καὶ ἑπομένως (§ 48) 400 δράμ×60=24000 δράμια.

Ἄρα : *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι λήγουσιν εἰς μηδενικά, ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους ἀποτελοῦσι τὰ ἄλλα ψηφία αὐτῶν καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου νὰ γράψωμεν, ὅσα παρελείφθησαν μηδενικά.*

*Ἀσκήσεις.* 83) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως τὰ ἀκόλουθα γινόμενα 30×20, 70×40, 300×20, 800×900, 270×400, 23400×500.

84) Ἡ ὥρα ἔχει 60 πρῶτα λεπτά. Πόσα πρῶτα λεπτὰ ἔχουσιν 70 ὧραι ;

85) Βιβλίον ἔχει 230 σελίδας καὶ ἑκάστη σελὶς ἔχει 30 στίχους. Πόσους στίχους ἔχει τὸ βιβλίον τοῦτο ;

86) Εἰς ἐργοστάσιον ἐργάζονται 70 ἄνδρες, 40 γυναῖκες καὶ 20 παιδία. Λαμβάνει δὲ ἕκαστος ἀνὴρ 80 δραχ, ἑκάστη γυνὴ 60 δραχμὰς καὶ ἕκαστον παιδίον 30 δραχμάς. Πόσα χρήματα λαμβάνουσιν ὅλοι ὁμοῦ τὴν ἡμέραν ;

§ **50. Γινόμενον δύο τυχόντων ἀριθμῶν.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 4967×365, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ 365=300+60+5 ἕπεται ὅτι

4967×365=4967×(300+60+5) ἢ (§ 45 Γ')

4967×365 =(4967×300)+(4967×60)+(4967×5).

| | Διάταξις τῆς πράξεως |
|---|---|
| Ἐπειδὴ δὲ | 4967 |
| | 365 |
| 4967×5=24835 . . . . . . . | 24835 |
| 4967×60=298020=29802 δεκάδες | 29802 |
| 4967×300 =1490100=14901 ἑκατοντάδ. | 14901 |
| ἕπεται ὅτι | |
| 4967×365=1812955 . . . . . . | 1812955. |

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὁ γνωστὸς κανὼν τοῦ πολ]σμοῦ.

ΣΗΜ. Ἐὰν μεταξὺ τῶν ψηφίων τοῦ πολ]στοῦ περιέχηται ἓν ἢ περισσότερα 0, ὁ πολ]σμὸς τοῦ πολ]στέου μὲ ἕκαστον τούτων παραλείπεται. Πρέπει ὅμως νὰ προσέχωμεν νὰ γράφωμεν τὸ ἑπόμενον μερικὸν γινόμενον εἰς τὴν κατάλληλον θέσιν.

*Ἀσκήσεις*. 87) Ἓν κιβώτιον δύναται νὰ περιλάβῃ 65 ὀκ. σάπωνος. Πόσον σάπωνα δύνανται νὰ περιλάβωσι 38 τοιαῦτα κιβώτια ;

88) Πόσας ὥρας ἔχει ἓν κοινὸν ἔτος καὶ πόσας ἓν δίσεκτον ;

89) Πόσας ὀκάδας ἔχουσιν 104 στατῆρες ;

90) Πόσους μῆνας ἔχουσι 15 ἔτη ;

## Χρῆσις τοῦ πολ]σμοῦ εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων.

§ **51**. **Πρόβλημα I**. *Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 56 δραχμάς. Πόσον τιμῶνται 4 πήχεις ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ;*

*Λύσις*. Ἀφ' οὗ 1 πῆχυς τιμᾶται 56 δραχ., οἱ 4 πήχεις τιμῶνται 4 φορὰς περισσότερον, ἤτοι 56 δραχ×4=224 δραχ.

§ **52**. **Πρόβλημα II**. *Κιβώτιον ἔχει βάρος 12 ὀκάδων. Πόσον βάρος ἔχουσι 5 κιβώτια τοιαῦτα ;*

*Λύσις*. Ἀφ' οὗ 1 κιβώτιον ἔχει βάρος 12 ὀκ. τὰ 5 κιβώτια θὰ ἔχωσι βάρος 12 ὀκ. × 5=60 ὀκ.

§ **53**. **Πρόβλημα III**. *Μὲ ἓν πεντάδραχμον ἀγοράζομεν 3 μολυβδοκόνδυλα. Μὲ 7 πεντάδραχμα, πόσα τοιαῦτα μολυβδοκόνδυλα ἀγοράζομεν ;*

*Λύσις*. Ἀφ' οὗ μὲ 1 πεντ. ἀγοράζομεν 3 μολ. μὲ 7 πέν. θὰ ἀγοράζωμεν $3^{\mu} \times 7=21$ μολυβδοκόνδυλα.

Εἰς ἕκαστον ἀπὸ τὰ προηγούμενα προβλήματα εἰς μίαν ὡρισμένην μονάδα ἑνὸς ποσοῦ ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένον πλῆθος μονάδων ἄλλου ποσοῦ. Ζητεῖται δὲ νὰ εὑρεθῇ εἰς ὡρισμένον πλῆθος μονάδων τοῦ πρώτου ποσοῦ ὁμοειδῶν πρὸς τὴν μίαν ἐκείνην μονάδα πόσαι μονάδες τοῦ δευτέρου ποσοῦ ἀντιστοιχοῦσι.

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν τοῦτο συντόμως λέγομεν : *Δίδεται ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων*. Ὅταν δηλ. λέγωμεν ὅτι ἓν κιβώτιον ἔχει βάρος 12 ὀκάδων, θεωροῦμεν τὰς 12 ὀκάδας ὡς τιμὴν τοῦ βάρους ἑνὸς κιβωτίου.

Ἐκ τοῦ τρόπου δὲ τῆς λύσεως τῶν προηγουμένων προβλημάτων συμπεραίνομεν ὅτι :

*Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος καὶ θέλωμεν νὰ εὕ-*

*ρωμεν τὴν τιμὴν πολλῶν μονάδων ὁμοειδῶν πρὸς ἐκείνην, πολ/ζομεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πολλῶν μονάδων.*

Ὥστε, ἂν ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος εἶναι α, ἡ τιμὴ χ τῶν β ὁμοειδῶν μονάδων θὰ εἶναι $\alpha \times \beta$, ἤτοι $\chi = \alpha \times \beta$. (1)

Ἡ ἰσότης αὕτη λέγεται τύπος· δυνάμεθα δὲ μὲ αὐτὴν νὰ λύωμεν κάθε πρόβλημα ὅμοιον πρὸς τὰ προηγούμενα, ἀρκεῖ νὰ θέτωμεν εἰς αὐτὴν ἀντὶ τῶν γραμμάτων α καὶ β τοὺς ὡρισμένους ὑπὸ τοῦ προβλήματος ἀριθμούς. Π. χ. διὰ τὸ Ι πρόβλημα ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται $\chi = 56$ δρ $\times 4 = 224$ δραχ.

***Ἀσκήσεις*** 91) Γεωργὸς ἐπώλησε 435 ὀκάδας καπνοῦ πρὸς 48 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσα χρήματα ἔλαβεν;

92) Ἓν βιβλίον ἔχει 183 σελίδας καὶ κάθε σελὶς 28 στίχους. Πόσους στίχους ἔχει τὸ βιβλίον τοῦτο;

93) Ἔμπορος ἠγόρασεν 65 πήχεις ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον τοῦ ἐκόστισεν 2600 δραχμάς. Ἐὰν πωλήσῃ αὐτὸ πρὸς 48 δραχμὰς τὸν πῆχυν, θὰ κερδίσῃ ἢ θὰ ζημιωθῇ καὶ πόσον;

94) Κιβώτιον ἔχει βάρος κενὸν μὲν 7 ὀκάδων, πλῆρες δὲ σάπωνος 65 ὀκάδων. Πόσας ὀκάδας σάπωνος ἔχουσιν 25 τοιαῦτα κιβώτια;

95) Ζωέμπορος ἠγόρασε 300 ἀρνία πρὸς 285 δραχμὰς ἕκαστον. Ἐκ τούτων ἐπώλησε τὰ μὲν 147 πρὸς 300 δραχμὰς τὸ ἕν, τὰ δὲ ἄλλα πρὸς 308 δραχμὰς τὸ ἕν. Πόσα χρήματα ἐκέρδισεν;

96) Εἰς ἐργοστάσιον ἐργάζονται 18 ἐργάται πρὸς 70 δραχμὰς τὴν ἡμέραν, 40 ἐργάτριαι πρὸς 56 δραχμὰς τὴν ἡμέραν καὶ 20 παιδία πρὸς 43 δραχμὰς τὴν ἡμέραν. Πόσα χρήματα λαμβάνουσιν ὅλοι ὁμοῦ τὴν ἡμέραν;

97) Φιλάνθρωπος διένειμε κατὰ τὴν ἡμέραν τῶν γενεθλίων τοῦ υἱοῦ του ἀπὸ 45 δραχμὰς εἰς 18 πτωχοὺς καὶ ἀπὸ 300 δραχμὰς εἰς τὰ σχολικὰ ταμεῖα τῶν τριῶν σχολείων τῆς πόλεως, εἰς τὴν ὁποίαν ἐγεννήθη ὁ υἱός του. Πόσα χρήματα διένειμε τὸ ὅλον;

98) Ἀπὸ δύο πόλεις ἀναχωροῦσι τὴν αὐτὴν στιγμὴν δύο ὁδοιπόροι καὶ κατευθύνονται ὁ εἷς πρὸς τὸν ἄλλον. Ὁ πρῶτος διανύει 5 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, ὁ δὲ ἄλλος 6 χιλιόμετρα τὴν ὥραν καὶ συνηντήθησαν μετὰ 4 ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς των. Πόσον ἀπέχουσιν αἱ πόλεις, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἐξεκίνησαν;

99) Ἁμαξοστοιχία διανύουσα 28 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, ἀνεχώρησεν ἀπὸ ἕνα σταθμὸν καὶ μετὰ 4 ὥρας εὑρίσκετο 13 χιλιόμετρα μακρὰν ἀπὸ ἄλλον σταθμόν, εἰς τὸν ὁποῖον κατευθύνεται. Πόσον ἀπέχουσιν οἱ σταθμοὶ οὗτοι;

100) Εἰς ἓν σχολεῖον ἐνεγράφησαν ἐφέτος 283 μαθηταὶ καὶ ἐπλήρωσεν ἕκαστος 100 δραχμὰς εἰς τὸ σχολικὸν ταμεῖον. Ἀπὸ τὰ χρήματα αὐτὰ ἡ σχολικὴ ἐπιτροπεία ἠγόρασεν 8 χάρτας πρὸς 25 δραχμὰς ἕκαστον, 3 μελανοπίνακας πρὸς 235 δραχμὰς ἕκαστον, 10 εἰκόνας πρὸς 35 δραχμὰς ἑκάστην, ἐδαπάνησε δὲ διὰ τὸν ὑδροχρωματισμὸν τοῦ σχολείου 560 δραχμάς. Πόσα χρήματα ἔμειναν εἰς τὸ σχολικὸν ταμεῖον;

### Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

§ **34. Πρόβλημα I.** *Δωμάτιον ἔχει 3 παράθυρα, κάθε παράθυρον ἔχει 6 ὑαλοπίνακας καὶ κάθε ὑαλοπίναξ τιμᾶται 12 δραχμάς. Πόσον τιμῶνται ὅλοι οἱ ὑαλοπίνακες τοῦ δωματίου;*

*Λύσις.* Ἀφ' οὗ ὁ 1 ὑαλοπίναξ τιμᾶται 12 δραχ. οἱ 6 ὑαλοπίνακες ἑνὸς παραθύρου τιμῶνται 12×6=72 δραχ. Οἱ δὲ ὑαλοπίνακες τῶν 3 παραθύρων τιμῶνται 72 δραχ×3=216 δραχ.

Τὸ ἐξαγόμενον 216 ὀνομάζεται γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 12, 6 καὶ 3, σημειώνεται δὲ οὕτω: 12×6×3.

Γενικῶς: *Γινόμενον πολλῶν παραγόντων καλεῖται τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἂν πολ]σωμεν τὸν α' παράγοντα ἐπὶ τὸν β', τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν γ' καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ τελειώσουσιν ὅλοι οἱ παράγοντες.*

### Ἰδιότητες τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων.

§ **35. Α'. Ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως.** Προηγουμένως εὕρομεν ὅτι ἡ τιμὴ τῶν παραθύρων τοῦ δωματίου εἶναι

(12×6×3) δραχ.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ λύσωμεν τὸ ἴδιον πρόβλημα καὶ ὡς ἑξῆς.

Τὰ 3 παράθυρα ἔχουσιν (6×3)=18 ὑαλοπίνακας.

Ἐπειδὴ δὲ ἕκαστος τιμᾶται 12 δραχμάς, ὅλοι τιμῶνται (12×18) δραχ. Ἐπειδὴ δὲ 12×18=18×12 καὶ 6×3×12=18×12 κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων, ἕπεται ὅτι ἡ τιμὴ τῶν παραθύρων εἶναι (6×3×12) δραχ. Ὥστε:

12×6×3=6×3×12.

Ἄρα: *Γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλάξῃ ἡ τάξις αὐτῶν.*

§ **36. Β'. Συνθετικὴ ἰδιότης.** Ἀπὸ τοὺς 2 τρόπους τῆς λύσεως τοῦ προηγουμένου προβλήματος ἐννοοῦμεν ὅτι:

12×6×3=12×18.

Ἄρα: *Εἰς πᾶν γινόμενον δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν μερικοὺς παράγοντας μὲ τὸ γινόμενον αὐτῶν.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Κατὰ τὴν προηγουμένην (§ 55 Α') ἰδιότητα εἶναι $12\times6\times3=6\times3\times12$. Ἀλλὰ $6\times3\times12=18\times12$, διότι ἡ ἀντικατάστασις τοῦ $6\times3$ διὰ τοῦ 18 εἶναι μερικὴ ἐκτέλεσις τοῦ πολ]σμοῦ (§ 54). Ἄρα $12\times6\times3=18\times12$ ἢ

$$12\times6\times3=12\times18. \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

Γενικῶς : $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta=\alpha\times(\beta\times\delta)\times\gamma$.

Διὰ τοῦτο $7\times2\times5=7\times10=70$, $4\times3\times25\times2=100\times6=600$

**§ 57. Γ'. Ἀναλυτικὴ ἰδιότης.** Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι

$$12\times18=12\times6\times3 \text{ καὶ } \alpha\times(\beta\times\delta)\times\gamma=\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta.$$

Ἄρα : *Εἰς πᾶν γινόμενον δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν παράγοντά τινα μὲ ἄλλους, οἱ ὁποῖοι ἔχουσι γινόμενον αὐτόν.*

**§ 58. Δ'. Πολ]σμὸς γινομένου ἐπὶ ἀριθμόν.**

**Πρόβλημα I.** *Ἐκαλλιέργησέ τις 3 ἀγροὺς ἀπὸ 8 στρέμματα ἕκαστον. Ἕκαστον στρέμμα ἀπέδωκε 210 ὀκάδας σίτου, τὸν ὁποῖον ἐπώλησεν πρὸς 6 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσα χρήματα ἔλαβεν ;*

*Λύσις.* (Α' τρόπος). Οἱ τρεῖς ἀγροὶ ἔχουσιν 24 στρέμματα. Τὰ στρέμματα ταῦτα ἀπέδοσαν $(210\times24)$ ὀκάδας σίτου. Ἀπὸ αὐτὰς εἰσέπραξε $6\times(210\times24)$ ἢ $(6\times210\times24)$ δραχμὰς

$$=30240 \text{ δραχ.}$$

(Β' τρόπος). Ὁ εἷς ἀγρὸς ἀπέδωκεν $(210\times8)$ ὀκάδας. Ἀπὸ αὐτὰς ἔλαβεν $6\times(210\times8)$ ἢ $(6\times210\times8)$ δραχ. (§ 57 Γ'). Ἀπὸ δὲ τοὺς τρεῖς ἀγροὺς ἔλαβεν $(6\times210\times8)\times3$ δραχ.

Ἀπὸ τοὺς τρόπους τούτους ἐννοοῦμεν ὅτι

$$(6\times210\times8)\times3=6\times210\times24, \text{ ἤτοι :}$$

*Διὰ νὰ πολ]σωμεν γινόμενον ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν ἕνα μόνον παράγοντα τοῦ γινομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ τοὺς ἄλλους νὰ ἀφήσωμεν, ὅπως ἔχουσιν.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Κατὰ τὴν ἀναλυτικὴν ἰδιότητα εἶναι

$$(6\times210\times8)\times3=6\times210\times8\times3.$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 56 Β') εἶναι $6\times210\times8\times3=6\times210\times24$,
ἕπεται ὅτι $(6\times210\times8)\times3=6\times210\times24$. ὅ. ἔ. δ.

*Γενικῶς* $(\alpha\times\beta\times\gamma)\times\delta=\alpha\times(\beta\times\delta)\times\gamma$.

**§ 59. Ε΄. Γινόμενον γινομένων. Πρόβλημα ΙΙ.** *Δύο ἀδελφοὶ εἶχον ἀπὸ 25 πρόβατα ἕκαστος. Ἕκαστον πρόβατον ἀπέδωκε 3 ὀκ. μαλλίου, τὸ ὁποῖον ἐπωλήθη πρὸς 30 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσα χρήματα ἔλαβον;*

*Λύσις.* (Α΄ τρόπος). Τὰ πρόβατα ὅλα ἦσαν $25\times2$. Ἀπὸ τὸ μαλλίον ἑκάστου ἔλαβον $(30\times3)$ δραχ. Ἑπομένως ἀπὸ τὸ μαλλίον ὅλων τῶν προβάτων ἔλαβον $(30\times3)\times(25\times2)$ ἢ $90\times50=4500$ δραχμάς.

(Β΄ τρόπος). Τὰ $25\times2$ πρόβατα ἀπέδωκαν $3\times(25\times2)$ ἢ $3\times25\times2$ (§ 57 Γ΄) ὀκάδας μαλλίου. Ἀπὸ αὐτὰς ἔλαβον

$$30\times(3\times25\times2) \text{ ἢ } 30\times3\times25\times2 \text{ ἢ } 4500 \text{ δραχμάς.}$$

Ἀπὸ τοὺς τρόπους τούτους τῆς λύσεως ἐννοοῦμεν ὅτι:

$$(30\times3)\times(25\times2)=30\times3\times25\times2, \text{ ἤτοι:}$$

*Γινόμενον γινομένων ἰσοῦται πρὸς γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἔχει πάντας τοὺς παράγοντας τῶν γινομένων τούτων καὶ μόνον αὐτούς.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα καὶ ἐνθυμούμενοι ὅτι (§ 57 Γ΄)

$(30\times3)\times(25\times2)=(30\times3)\times25\times2=30\times3\times25\times2$.

*Γενικῶς:* $(\alpha\times\beta\times\gamma)\times(\delta\times\varepsilon)\times(\zeta\times\eta)=\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta\times\varepsilon\times\zeta\times\eta$.

***Ἀσκήσεις.*** 101) Νὰ εὑρεθῇ ἄνευ γραφῆς καὶ διὰ τῆς βοηθείας τῆς συνθετικῆς ἰδιότητος τὸ γινόμενον $2\times12\times25\times4$.

102) Νὰ εὑρεθῇ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ γινόμενον

$$15\times125\times8 \text{ καὶ τὸ } 3\times20\times125\times8.$$

103) Νὰ εὑρεθῶσιν ἄνευ γραφῆς καὶ διὰ τῆς βοηθείας τῆς ἀναλυτικῆς ἰδιότητος τὰ γινόμενα $18\times4$, $15\times8$, $12\times25$ καὶ τὸ $75\times8\times5$.

104) Πόσα δράμια ἔχουσι 10 στατῆρες;

105) Ἡ ὥρα ἔχει 60 πρῶτα λεπτά, τὸ δὲ πρῶτον λεπτὸν ἔχει 60 δεύτερα λεπτά. Πόσα δεύτερα λεπτὰ ἔχει τὸ ἡμερονύκτιον;

106) Βιβλίον ἔχει 165 σελίδας, ἑκάστη σελὶς ἔχει 30 στίχους καὶ κάθε στίχος ἔχει 46 στοιχεῖα. Πόσα στοιχεῖα ἔχει ὅλον τὸ βιβλίον;

107) Κιβώτιον ἔχει 6 στρώματα σάπωνος· κάθε στρῶμα ἔχει 4 σειράς, κάθε σειρὰ ἔχει 5 πλάκας σάπωνος καὶ κάθε πλὰξ τιμᾶται 7 δραχμάς. Πόση εἶναι ἡ ἀξία τοῦ περιεχομένου σάπωνος;

108) Σχολεῖον ἔχει 6 τάξεις, ἑκάστη τάξις ἔχει 20 θρανία κα

εἰς ἕκαστον θρανίον κάθηνται 2 μαθηταί. Πόσους μαθητὰς ἔχει τὸ σχολεῖον τοῦτο;

## Δ΄. Διαίρεσις.

§ **60. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα διαιρέσεως.** Ἂν μοιράσωμεν 20 δραχ. εἰς 4 πτωχοὺς δίδοντες μίαν, μίαν εἰς ἕκαστον, εὑρίσκομεν ὅτι θὰ λάβῃ ὁ καθεὶς ἀπὸ 5 δραχμὰς χωρὶς περίσσευμα· ἤτοι ἡ διαφορὰ $20-(5\times4)=0$. Ἐὰν μοιράσωμεν 23 δραχ. θὰ λάβῃ ὁ καθεὶς ἀπὸ 5 δραχμὰς περισσεύουσι δὲ 3 δραχ. ἤτοι

$$23-(5\times4)=3$$

Ἡ ἐργασία αὕτη ὀνομάζεται μερισμὸς τοῦ 20 ἢ 23 διὰ τοῦ 4.

Ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι διαθέτομεν 20 ἢ 23 δραχ. διὰ νὰ ἀγοράσωμεν ὕφασμα τῶν 4 δραχ. τὸν πῆχυν. Ἐὰν δίδωμεν ἀνὰ 4 δραχ. εὑρίσκομεν ὅτι θὰ λάβωμεν 5 πήχεις τῶν ὁποίων ἡ ἀξία εἶναι $4\times5=20$ δραχ. Ἐπομένως εἰς τὴν α΄ περίπτωσιν οὐδὲν περισσεύει, εἰς δὲ τὴν β΄ περίπτωσιν περισσεύουσι 3 δραχ. ἤτοι

$$20-(4\times5)=0 \quad \text{καὶ} \quad 23-(4\times5)=3.$$

Ἡ ἐργασία αὕτη λέγεται *μέτρησις* τῶν 20 ἢ 23 δραχμῶν διὰ τῶν 4 δραχμῶν.

Τὸν μερισμὸν καὶ τὴν μέτρησιν τοῦ 23 διὰ τοῦ 4 καλοῦμεν *διαίρεσιν* τοῦ 23 διὰ τοῦ 4.

Παρατηροῦντες ὅτι $4\times5=20<23$ ἀλλὰ $4\times6>23$ ἐννοοῦμεν ὅτι:

*Διαίρεσις ἀριθμοῦ δι' ἄλλου καλεῖται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τρίτον, ὁ ὁποῖος πολ)ζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει τὸ μεγαλύτερον ἀπὸ τὰ γινόμενα, τὰ ὁποῖα χωροῦσιν εἰς τὸν πρῶτον.*

Ὁ πρῶτος ἀπὸ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς λέγεται *διαιρετέος* (Δ), ὁ δεύτερος *διαιρέτης* (δ) καὶ ὁ γ΄ *πηλίκον* (π).

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸν διαιρετέον. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως ταύτης καλεῖται καὶ *ὑπόλοιπον* (υ) τῆς διαιρέσεως.

Ἡ διαίρεσις δὲ λέγεται τελεία ἢ ἀτελής, καθ' ὅσον τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 0 ἢ ἄλλος ἀριθμός.

Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν ὅτι: α΄) *Ὁ διαιρετέος τελείας διαιρέσεως εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον.* Ἤτοι $\Delta=\delta\times\pi$.

β΄) *Ὁ διαιρετέος ἀτελοῦς διαιρέσεως ὑπερβαίνει τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον κατὰ τὸ ὑπόλοιπον.* Ἤτοι

$$\Delta=(\delta\times\pi)+\upsilon.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὁ ἑξῆς τρόπος δοκιμῆς τῆς διαιρέσεως. *Προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον τὸ ὑπόλοιπον. Οὕτω πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν διαιρετέον, ἂν ἡ διαίρεσις καὶ ἡ δοκιμὴ ἔγιναν χωρὶς λάθος.*

Ἡ διαίρεσις π. χ. τοῦ 20 διὰ 4 σημειοῦται οὕτω $20:4$ καὶ ἀναγινώσκεται 20 διὰ 4.

Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι: α΄) Ἂν $α=6$, θὰ εἶναι καὶ $α:μ=6:μ$. β΄) Ἂν $α>6$, θὰ εἶναι καὶ $α:μ>6:μ$, ἂν αἱ διαιρέσεις αὗται εἶναι τέλειαι.

ΣΗΜ. Ἰδιαιτέρως παρατηροῦμεν ὅτι $Δ:Δ=1$ καὶ $0:Δ=0$. Τῷ ὄντι: $Δ\times1=Δ$ καὶ $Δ\times0=0$.

§ **61. Πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου.** *Πόσα ψηφία ἔχει τὸ πηλίκον ἑκάστης τῶν διαιρέσεων 3467 : 582 καὶ 7742 : 89;*

Α΄. Ἐπειδὴ $582\times10=5820>3467$ τὸ πηλίκον εἶναι $<10$, ἤτοι εἶναι μονοψήφιον.

Β΄. Ἐπειδὴ $89\times10=890<7842$ καὶ $89\times100=8900>7742$, τὸ πηλίκον εἶναι $>10$ καὶ $<100$, ἤτοι εἶναι διψήφιον.

Ἄρα: *Τὸ πηλίκον ἔχει τόσα ψηφία, ὅσα τὸ ὀλιγώτερον μηδενικὰ πρέπει νὰ γραφῶσι δεξιὰ τοῦ διαιρέτου, διὰ νὰ γείνῃ οὗτος μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν διαιρετέον.*

§ **62. Εὕρεσις τοῦ μονοψηφίου, πηλίκου, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος.** Διὰ νὰ εὕρωμεν π. χ. τὸ πηλίκον 43 : 5, ἐνθυμούμεθα ὅτι $5\times8=40<43$ καὶ $5\times9=45>43$ καὶ συμπεραίνομεν ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι 8 καὶ τὸ ὑπόλοιπον $43-40=3$.

## Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως

### § 63 Α΄. Διαίρεσις ἀθροίσματος δι᾿ ἀριθμοῦ.

**Πρόβλημα 1.** *Πατὴρ ἔδωκεν εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του 15 δραχ., τὴν ἑπομένην ἄλλας 12 καὶ τὴν τρίτην ἡμέραν ἄλλας 21 δραχ. Πόσας δραχμὰς ἔδωκεν εἰς τὸν καθένα;*

*Λύσις.* (Α΄τρόπος). Τὴν α΄ ἡμέραν ἔδωκεν εἰς τὸν καθ᾿ ἕνα ἀπὸ $15:3=5$ δραχ. τὴν β΄ ἀπὸ $12:3=4$ δραχ. καὶ τὴν γ΄ ἀπὸ $21:3=7$ δραχ. Ἄρα ἔδωκεν εἰς τὸν καθ᾿ ἕνα $(5+4+7)=16$ δραχ.

(Β΄ τρόπος) Ἐπειδὴ εἰς τοὺς 3 υἱοὺς ἔδωκεν $(15+12+21)$ δραχ. εἰς τὸν καθ᾿ ἕνα ἔδωκε $(15+12+21):3$.

Ὥστε εἶναι $(15+12+21):3=5+4+7$.

Ἄρα : *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ὅλους τοὺς προσθετέους διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ πηλίκα.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα, ἂν παρατηρήσωμεν ὅτι $(5+4+7)\times 3=15+12+21$, ἤτοι τὸ ἄθροισμα $5+4+7$ πολ]ζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει τὸν διαιρετέον. Εἶναι ἄρα $(15+12+21):3=5+4+7$.

*Γενικῶς* : $(\alpha+\beta+\gamma):\delta=(\alpha:\delta)+(\beta:\delta)+(\gamma:\delta)$,

ἂν αἱ διαιρέσεις αὗται γίνωνται πᾶσαι ἀκριβῶς.

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ πηλίκον π.χ. $46:2$ εὑρίσκομεν ἀγράφως λέγοντες $40:2=20$, $6:2=3$, τέλος $20+3=23$.

**Ἀσκήσεις**. 109) Νὰ εὑρεθῶσι κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον καὶ ἀγράφως τὰ πηλίκα $28:2$, $39:3$, $120:5$, $72:6$, $366:6$, $428:2$, $339:3$, $525:5$.

110) Πατὴρ ἀφῆκε κληρονομίαν εἰς τοὺς 4 υἱούς του μίαν οἰκίαν ἀξίας 160000 δραχμῶν, μίαν ἄμπελον ἀξίας 24000 δραχμῶν καὶ μετρητὰ 10000 δραχμάς. Πόσον εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου;

111) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν εἰς τὸν διαιρετέον τελείας διαιρέσεως προστεθῇ ὁ διαιρέτης, τὸ πηλίκον αὐξάνει κατὰ 1.

## § 64. Β'. Διαίρεσις διαφορᾶς δι' ἀριθμοῦ.

**Πρόβλημα ΙΙ.** *Τέσσαρα ὅμοια κιβώτια εἶναι πλήρη ἀπὸ ἐμπόρευμα καὶ ἔχουσιν ὅλα ὁμοῦ βάρος 684 ὀκάδας, κενὰ δὲ 64 ὀκάδας. Πόσας ὀκάδας ἐμπορεύματος περιέχει τὸ καθ' ἕν ;*

*Λύσις*. (Α' τρόπος). Τὰ 4 κιβ. περιέχουσιν ἐμπόρευμα $(864-64)$ ὀκ.

Ἄρα τὸ καθ' ἓν περιέχει $(864-64):4$ ἢ $800:4=200$ ὀκ.

(Β' τρόπος). Κάθε κιβώτιον ζυγίζει πλῆρες $(864:4)$ ὀκ, κενὸν δὲ $(64:4)$ ὀκ. Περιέχει λοιπὸν ἐμπόρευμα $(864:4)-(64:4)$ ἢ $216-16=200$ ὀκ. Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν ὅτι

$$(864-64):4=(864:4)-(64:4).$$

Ἄρα : *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν διαφορὰν δι' ἀριθμοῦ δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν χωριστὰ τὸν μειωτέον καὶ χωριστὰ τὸν ἀφαιρετέον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἀπὸ τὸ α' πηλίκον νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ β'.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα καὶ ἂν παρατηρήσωμεν ὅτι $(216-16)\times 4=864-64$, ἤτοι ἡ διαφορὰ $(216-16)$ πολ)μένη ἐπὶ τὸν διαιρέτην 4 δίδει τὸν διαιρετέον $(864-64)$. Εἶναι ἄρα $(864-64):4=216-16$.

*Γενικῶς* : $(\alpha-\beta):\delta=(\alpha:\delta)-(\beta:\delta)$,

ἂν αἱ διαιρέσεις αὗται εἶναι τέλειαι.

Διὰ τοῦτο τὸ πηλίκον π. χ. 96 : 2 δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀγράφως λέγοντες 100 : 2=50, 4 : 2=2 καὶ τέλος 50—2=48.

***Ἀσκήσεις.*** 112) Νὰ εὑρεθῶσι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τὰ πηλίκα

98 : 2, 117 : 3, 70 : 5, 588 : 6.

113) Πέντε ἐργάται ἐργασθέντες ὁμοῦ ἔλαβον ὡς ἀμοιβὴν 3600 δραχ. Ἐδαπάνησαν δὲ κατὰ τὸν χρόνον τῆς ἐργασίας ταύτης 1520 δραχ. Ποσα χρήματα ἐπερίσσευσαν εἰς καθένα ;

114) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν ἀπὸ τὸν διαιρετέον ἀτελοῦς διαιρέσεως ἀφαιρεθῇ ὁ διαιρέτης, τὸ πηλίκον ἐλαττοῦται κατὰ 1.

### § 65. Γ'. Διαίρεσις γινομένου δι' ἀριθμοῦ.

**Πρόβλημα ΙΙΙ**. *Κατὰ τὰς ἑορτὰς τῶν Χριστουγέννων οἱ μαθηταὶ τριῶν τάξεων σχολείου προσέφερον ἀπὸ 24 δραχ. ὁ καθείς, διὰ νὰ μοιρασθῶσιν εἰς 4 πτωχὰς οἰκογενείας. Ἑκάστη ἀπὸ τὰς τάξεις αὐτὰς εἶχε 40 μαθητάς. Πόσα χρήματα ἔλαβε κᾶθε οἰκογένεια ;*

*Λύσις.* (Α' τρόπος). Οἱ μαθηταὶ εἶναι 40×3, τὰ δὲ προσφερθέντα χρήματα 24×40×3. Ἄρα κάθε οἰκογένεια ἔλαβεν (24×40×3):4 ἢ 2880 : 4=720 δραχ.

(Β' τρόπος). Κᾶθε μαθητὴς ἔδωκε διὰ κάθε οἰκογένειαν 24 : 4=6 δραχ. Οἱ δὲ 40×3 μαθηταὶ ἔδωκεν (6×40×3) δραχ.=720 δραχ.

Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν ὅτι (24×40×3) : 4=6×40×3. Ἄρα: *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν μόνον ἕνα παράγοντα διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, τοὺς δὲ ἄλλους νὰ ἀφήσωμεν, ὅπως εἶναι.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα καὶ ἂν παρατηρήσωμεν (§ 58 Δ') ὅτι (6×40×3)×4=24×40×3.

*Γενικῶς :* $(\alpha\times\beta\times\gamma):\delta=\alpha\times(\beta:\delta)\times\gamma$.

Δ'. Ἂν αἱ προηγούμεναι οἰκογένειαι, ἦσαν τρεῖς, κᾶθε μία θὰ ἐλάμβανεν (24×40×3) : 3=2880 : 3=960 δραχ. Ἀλλ' εἶναι φανερὸν ὅτι κᾶθε μία θὰ ἐλάμβανε τὰ χρήματα μιᾶς τάξεως, ἤτοι

24×40=960 δραχ.

Εἶναι ἄρα (24×40×3) : 3=24×40, ἤτοι.

*Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτόν.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα, ἄν, κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, διαιρέσωμεν τὸν παράγοντα 3. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι (24×40×3) : 3=24×40×1=24×40.

*Γενικῶς* $(\alpha\times\beta\times\gamma):\beta=\alpha\times\gamma$.

***Ἀσκήσεις.*** 115) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα (4×5×9) : 3.

$(7\times18\times15):6$, $72:3$, $48:3$, $(4\times8\times9):9$, $(7\times8\times2):16$, $(2\times7\times3):6$.

116) Τρεῖς ἀδελφοὶ ἔχουσιν ἐλαιῶνα, ὁ ὁποῖος ἔχει 5 σειρὰς ἐλαιῶν καὶ ἑκάστη σειρὰ ἔχει 12 ἐλαίας. Ἐὰν ἑκάστη ἐλαία ἀπέδωκεν ἔτος τι 20 ὀκ. ἐλαιοκάρπου, πόσας ὀκάδας ἔλαβεν ὁ καθεὶς;

117) Τί πάσχει τὸ πηλίκον τελείας διαιρέσεως, ἂν μόνον ὁ διαιρετέος πολ)σθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν;

§ **66. Πρόβλημα IV.** *Φιλάνθρωπος εἶχε σκοπὸν νὰ δόσῃ εἰς 4 πτωχοὺς 80 δραχμάς. Ἐπειδὴ προσῆλθον καὶ ἄλλοι 4 ἐδιπλασίασε τὰ πρὸς διανομὴν χρήματα. Μετεβλήθη ἢ ὄχι τὸ μερίδιον ἑκάστου;*

*Λύσις.* Κατὰ τὴν α΄ περίπτωσιν τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶναι $80:4=20$ δραχ. Κατὰ τὴν β΄ περίπτωσιν τὸ μερίδιον εἶναι $(80\times2):(4\times2)$. Ἂν ὅμως φαντασθῶμεν ὅτι ἐμοίρασεν εἰς τοὺς 4 πρώτους τὰς 80 δραχ. καὶ εἰς τοὺς ἄλλους 4 τὰς ἄλλας 80 δραχ. ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶναι πάλιν $80:4$. Ὥστε $80:4=(80\times2):(4\times2)$.

Ἂν εἶχε 83 δραχμὰς θὰ ἔδιδεν εἰς καθένα 20 δραχ. καὶ θὰ ἐπερίσσευον 3 δραχ. Καὶ ἀπὸ τὰς ἄλλας δὲ 83 δραχ. οἱ ἄλλοι 4 πτωχοὶ θὰ ἐλάμβανον ἀπὸ 20 δραχ. καὶ θὰ ἐπερίσσευον ἄλλαι 3 δραχμαί. Τῆς διαιρέσεως λοιπὸν $(83\times2):(4\times2)$ τὸ πηλίκον εἶναι 20 καὶ τὸ ὑπόλοιπον $3+3$ ἢ $3\times2$.

Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν ὅτι:

Ε΄. *Ἐὰν πολ]σωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην τελείας διαιρέσεως ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται.*

ΣΤ΄. *Ἐὰν πολ]σωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἀτελοῦς διαιρέσεως ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολ]ζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης πειθόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ τῆς διαιρέσεως $83:4$ τὸ μὲν πηλίκον εἶναι 20, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 3, ἕπεται ὅτι $83=(4\times20)+3$.

Ἐὰν δὲ πολ]σωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ 2, εὑρίσκομεν

$83\times2=(4\times20)\times2+(3\times2)$ ἢ $83\times2=(4\times2)\times20+(3\times2)$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $3\times2<4\times2$, ἕπεται ὅτι τῆς διαιρέσεως $(83\times2):(4\times2)$ τὸ πηλίκον εἶναι 20 καὶ τὸ ὑπόλοιπον $3\times2$.

Γενικῶς: Ἂν $\Delta=(\delta\times\pi)+\upsilon$ καὶ $\upsilon<\delta$, θὰ εἶναι καὶ

$$\Delta\times\lambda=(\delta\times\lambda)\times\pi+(\upsilon\times\lambda) \text{ καὶ } \upsilon\times\lambda<\delta\times\lambda.$$

Ἂν δὲ $υ=0$, προκύπτει ἐκ τῆς $Δ=δ\times π$, ἢ $Δ\times λ=(δ\times λ)\times π$.

§ **67. Πρόβλημα V.** *Χωρικὸς ἔχει τρεῖς σειρὰς ἐλαιοδένδρων καὶ ἑκάστη σειρὰ ἔχει 15 ἐλαιόδενδρα. Κᾶθε ἓν ἀπὸ αὐτὰ παρήγαγε κατὰ τὸ παρελθὸν ἔτος 50 ὀκ. ἐλαιοκάρπου ἐκ τῆς πωλήσεως δὲ αὐτοῦ ἔλαβε 27000 δραχμάς. Πρὸς πόσον ἐπώλησε τὴν ὀκᾶν τὸν ἐλαιόκαρπον ;*

*Λύσις.* (Α'. τρόπος). Ὁ χωρικὸς ἔχει $(15\times 3)$ ἐλαιόδενδρα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἔλαβε $50\times(15\times 3)$ ἢ $(3\times 15\times 50)$ ὀκ. ἐλαιοκάρπου. Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ αὐτὰς τὰς ὀκάδας ἔλαβε 27000 δραχμάς, ἀπὸ κάθε ὀκᾶν ἔλαβεν $27000 : (3\times 15\times 50)$ ἢ $27000 : 2250=12$ δραχ.

(Β'. τρόπος) Ἀπὸ κᾶθε σειρὰν ἐλαιοδένδρων ἔλαβεν $(27000 : 3)=9000$ δραχ. Ἀπὸ κᾶθε δένδρον ἔλαβεν $(27000 : 3) : 15$ ἢ $9000 : 15=600$ δραχ. Καὶ ἀπὸ κάθε ὀκᾶν $[(27000 : 3) : 15] : 50$ ἢ $600 : 50=12$ δραχμάς. Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν ὅτι

$$27000 : (3\times 15\times 50)=[\,27000 : 3) : 15] : 50,$$ ἤτοι :

*Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ γινομένου, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν δι' ἑνὸς παράγοντος, τὸ πηλίκον δι' ἄλλου παράγοντος, τὸ νέον πηλίκον δι' ἄλλου παράγοντος καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ τελειώσωσιν ὅλοι οἱ παράγοντες τοῦ γινομένου.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ $27000 : 2250=12$, ἕπεται ὅτι $27000=2250\times 12$ ἢ

$$27000=3\times 15\times 50\times 12.$$

Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης διὰ 3, εὑρίσκομεν (§ 65 Δ') ὅτι $27000 : 3=15\times 50\times 12$. Ἀπὸ αὐτὴν ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $(27000 : 3) : 15=50\times 12$ καὶ ἀπὸ αὐτὴν εὑρίσκομεν

$$[\,(27000 : 3) : 15] : 50=12.$$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ $27000 :(3\times 15\times 50)=12$, ἕπεται ὅτι

$$27000 : (3\times 15\times 50)=[\,(27000 : 3) : 15] : 50.$$ ὅ.ἔ.δ.

*Γενικῶς* $Δ : (α\times β\times γ)=[\,(Δ : α) : β\,] : γ$.

ΣΗΜ. Ὅλαι αἱ διαιρέσεις αὗται ὑποτίθεται ὅτι εἶναι τέλειαι.

***Ἀσκήσεις*** 118) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(20\times 9) : (5\times 3)=4\times 3$.

119) Ὁμοίως ὅτι $(9\times 4\times 8) : (2\times 4)=40-4$.

120) Ὁμοίως ὅτι $[\,2\times(7+5)\times 24\,] : (8\times 3)=2\times 12$.

**Συντομίαι κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως.**

§ **68. Α'. Διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ 10, 100, 1000** κ.τ.λ. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας δραχμὰς ἀποτελοῦσι 765 λεπτά, ἀρκεῖ νὰ μάθωμεν πόσας φορὰς χωροῦσι τὰ 100 λεπτὰ εἰς τὰ 765 λεπτά, ἤτοι νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν 765 : 100.

Ἐπειδὴ 765=700+65 ἢ 765=(7×100)+65, εἶναι δὲ καὶ 65<100, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ μὲν πηλίκον εἶναι 7, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 65. Ἄρα ἀπὸ τὰ 765 λεπτὰ ἀποτελοῦνται 7 δραχμαί, περισσεύουσι δὲ καὶ 65 λεπτά.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τῆς διαιρέσεως 368 : 10 πηλίκον εἶναι 36 καὶ ὑπόλοιπον 8· τῆς δὲ 43956 : 1000 πηλίκον εἶναι 43 καὶ ὑπόλοιπον 956.

Ἄρα: ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ 10, 100, 1000 κτλ. ἀρκεῖ νὰ ἀποκόψωμεν ἀπὸ τὸ τέλος ἓν δύο, τρία, κτλ. ψηφία. Καὶ τὰ μὲν μένοντα πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφία αὐτοῦ ἀποτελοῦσιν, ὅπως εἶναι γραμμένα, τὸ πηλίκον, τὰ δὲ ἀποκοπέντα ἀποτελοῦσι τὸ ὑπόλοιπον.***

***Ἀσκήσεις.*** 121) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἀγράφως αἱ διαιρέσεις 260 : 10, 253 : 10, 2347 : 10, 364 : 100, 4962 : 100, 15400 : 100, 7386 : 1000, 12400 : 1000, 43005 : 1000, 567932 : 10000, 1273006 : 100000.

122) Μὲ 80 δεκάρες πόσας δραχμὰς ἀποτελοῦμεν καὶ πόσας μὲ 142 δεκάρες;

123) Ἠγόρασέ τις 1000 λεμόνια καὶ ἔδωκε 500 δραχμάς. Πόσα λεπτὰ ἔδωκε διὰ τὸ καθ' ἕν;

124) Τὸ μέτρον ἔχει 100 δακτύλους (πόντους). Πόσα μέτρα ἀποτελοῦσι 37600 δάκτυλοι;

125) Ὁ αἰὼν ἔχει 100 ἔτη. Πόσους αἰῶνας ἀποτελοῦσι 2000 ἔτη;

126) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι 135 : 5=270 : 10 καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον ἑκάστης τῶν ἀκολούθων διαιρέσεων 105 : 5, 150 : 50, 150 : 25, 875 : 125.

127) Κατὰ ἀνάλογον τρόπον νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον καὶ ὑπόλοιπον ἑκάστης τῶν διαιρέσεων 73 : 5, 47 : 2, 75 : 25.

§ **69. Β΄. Διαίρεσις δι' ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος λήγει εἰς μηδενικά.** Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας ὀκάδας ἀποτελοῦσι 2376 δράμια, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὰ 2376 δράμια διὰ 400.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι αἱ 4 ἑκατ. τοῦ διαιρέτου πολ)ζόμεναι ἐπὶ τὸ πηλίκον δίδουσι τὰς 23 ἑκατ. τοῦ διαιρετέου. Τὸ πηλίκον λοιπὸν θὰ εἶναι, ὅσον τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 23 : 4 ἤτοι 5.

Ἐπειδὴ δὲ 4 ἑκατ×5=20 ἑκατ. καὶ 23 ἑκ.—20ἑκ.=3 ἑκατ. τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι 3ἑκατ+76=376.

Ὥστε τὰ 2376 δράμια ἀποτελοῦσι 5 ὀκάδας περισσεύουσι δὲ καὶ 376 δράμια. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω προκύπτει ὁ γνωστὸς σύντομος τρόπος, κατὰ τὸν ὁποῖον ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, ὅταν ὁ διαιρέτης λήγῃ εἰς μηδενικά.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{l|l} 23(76 & 4(00 \\ \hline 376 & 5 \end{array}$$

*Ἀσκήσεις*. 128) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ διαιρέσεις 2400 : 300, 38900 : 2400, 459600 : 28000.

129) Ἠγόρασέ τις βούτυρον πρὸς 80 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἔδωκε 1920 δραχ. Πόσας ὀκάδας ἠγόρασεν;

130) Ὁ ἦχος διανύει εἰς τὸν ἀέρα 340 μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον. Ἐὰν πυροβόλον ἐκπυρσοκροτήσῃ εἰς ἀπόστασιν 6120 μέτρων, μετὰ πόσον χρόνον θὰ ἀκούσωμεν τὸν ἦχον;

§ **70. Γ΄. Διαίρεσις μὲ ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ ψηφία εἶναι 9.** Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ μοιράσωμεν 167945 δραχμὰς εἰς 99 ἀνθρώπους. Ἂν οἱ ἄνθρωποι ἦσαν 100, θὰ ἐλάμβανεν ἕκαστος ἀπὸ 1679 δραχ. καὶ θὰ ἐπερίσσευον 45 δραχ. Ἂν τώρα λάβῃ ἕκαστος ἀπὸ 1679 δραχ, θὰ περισσεύσωσι 45 δραχ. καὶ τὸ μερίδιον τοῦ ἑκατοστοῦ, ἤτοι 45+1679=1724 δραχ. Ἀπὸ αὐτὰς εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι θὰ λάβῃ ὁ καθεὶς ἀπὸ 17 δραχ. καὶ θὰ μείνωσιν 17+24=41 δραχ.

Ὥστε ἕκαστος θὰ λάβῃ τὸ ὅλον 1679+17=1696 καὶ θὰ μείνωσι 41 δραχ.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{l|l} 1679(45 & 99 \\ \hline \phantom{16}45 & 1679 \\ \cline{1-1} 17(24 & \phantom{16}17 \\ \cline{2-2} 24 & 1696 \\ \cline{1-1} 41 & \end{array}$$

*Ἀσκήσεις*. 131) Ἐννέα ἐργάται ἐξετέλεσαν ἓν ἔργον καὶ ἔλαβον ὡς ἀμοιβὴν 742 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος;

132) Ἔμπορος ἠγόρασε τεμάχιον ὑφάσματος ὡς ἀποτελούμενον ἐξ 100 πήχεων πρὸς 198 δραχμὰς τὸν πῆχυν. Ὅταν ὅμως βραδύτερον ἐμέτρησεν αὐτό, εὗρεν ὅτι εἶχε μόνον 99 πήχεις. Πόση εἶναι ἡ πραγματικὴ τιμὴ τοῦ πήχεως;

## Ἐξήγησις τοῦ κανόνος κατὰ τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ διαίρεσις.

§ **71. Α΄. Εὕρεσις μονοψηφίου πηλίκου.** Ἐμάθομεν ἤδη (§ 62) πῶς εὑρίσκομεν τὸ μονοψήφιον πηλίκον, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος.

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι θέλομεν νὰ μοιράσωμεν 58 δραχ. εἰς 27 πτωχούς, ἤτοι νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν 58 : 27. Τὸ μερίδιον ἑκάστου δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ μερίδιον ἑκάστου πτωχοῦ, ἂν οὗτοι ἦσαν 20. Τὸ πηλίκον λοιπὸν τῆς διαιρέσεως 58 : 27 δὲν εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 58 : 20 ἢ (§ 69) ἀπὸ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 5 : 2. Δι' αὐτὸ διαιροῦμεν τὸν 5 διὰ 2 καὶ δοκιμάζομεν, ἂν τὸ πηλίκον 2 εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἐπειδὴ δὲ $27 \times 2 = 54 < 58$, ἕπεται ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι 2 καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $58 - 54 = 4$.

Ἂς ὑποθέσωμεν ἀκόμη ὅτι θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσα πρόβατα δύναται νὰ ἀγοράσῃ χωρικὸς μὲ 1725 δραχμάς, ἂν κάθε πρόβατον τιμᾶται 253 δραχμάς. Εἶναι εὔκολον νὰ ἐννοήσωμεν ὅτι μὲ 1725 δραχμὰς ἀγοράζει τόσα πρόβατα, ὅσας φορὰς χωροῦσιν αἱ 253 δραχ. εἰς τὰς 1725 δραχ, ἤτοι ὅσον τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 1725 : 253.

Ἐπειδὴ δέ, ἂν ἕκαστον πρόβατον ἐτιμᾶτο 200 δραχμάς, θὰ ἠγόραζεν ἢ ὅσα τώρα ἢ καὶ περισσότερα πρόβατα, τὸ ζητούμενον πηλίκον θὰ εἶναι ἴσον ἢ μικρότερον ἀπὸ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 1725 : 200 ἢ 17 : 2 δηλ. 8. Δοκιμάζοντες εὑρίσκομεν ὅτι $253 \times 8 = 2024$ δραχ $> 1725$, $253 \times 7 = 1771 > 1725$ καὶ $253 \times 6 = 1518 < 1725$. Ἀγοράζει λοιπὸν 6 πρόβατα καὶ περισσεύουσιν $1725 - 1518 = 207$ δραχ.

Δι' αὐτὸν τὸν λόγον διαιροῦμεν 17 διὰ 2 κ.τ.λ.

**§ 72. Β'. Εὕρεσις πολυψηφίου πηλίκου.** Α'. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ μοιράσωμεν εἰς 15 πτωχοὺς 3255 δραχμάς, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 3255 δραχ διὰ 15. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι

3255 δραχ. = 32 ἑκατοντάδραχμα + 5 δεκάδραχμα + 5 δραχ.

Ἀπὸ τὰ 32 ἑκ. λαμβάνει ὁ καθεὶς 32 : 15 ἤτοι 2 ἑκ. περισσεύουσι δὲ καὶ 2 ἑκ. Αὐτὰ μὲ τὰ 5 δεκάδραχμα ἀποτελοῦσι 25 δεκ. Ἀπὸ αὐτὰ λαμβάνει ὁ καθεὶς 25 : 15 ἤτοι 1 δεκ. περισσεύουσι δὲ καὶ 10 δεκ. Ταῦτα μαζὶ μὲ τὰς 5 δραχμὰς ἀποτελοῦσι 105 δραχ. Ἀπὸ αὐτὰς λαμβάνει ὁ καθεὶς 105 : 15 ἤτοι 7 δραχ.

Ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι 2 ἑκατ. + 1 δεκ. + 7 δραχ. ἤτοι 217 δραχμαί.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{r|l} 3255 & 15 \\ \cline{2-2} 25 & 217 \\ 105 & \\ 0 & \end{array}$$

Β'. Ἂν μὲ 45 δραχ. ἀγοράζωμεν 1 πῆχυν ὑφάσματος, μὲ 1248 δραχ. θὰ ἀγοράσωμεν τόσους πήχεις, ὅσας φορὰς χωροῦσιν αἱ 45 δραχ εἰς τὰς 1248 δραχ. Πρέπει δηλ. νὰ διαιρέσωμεν τὸν 1248 διὰ 45. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι μὲ 124 δραχμὰς ἀγοράζομεν 124 : 45 ἤτοι 2 πήχεις καὶ περισσεύουσι 34 δραχμαί. Μὲ 124×10 δραχμὰς ἢ 124 δεκάδραχμα ἀγοράζομεν 2×10 πήχεις =20 πήχεις ἢ 2 δεκάδας πήχεων· περισσεύουσι δὲ καὶ 124×10—45×2×10=(124—45×2)×10=34×10 ἤτοι 34 δεκάδραχμα. Αὐτὰ μὲ τὰς 8 δραχμὰς τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσι 348 δραχ, μὲ τὰς ὁποίας ἀγοράζομεν 7 πήχεις καὶ περισσεύουσι 33 δραχμαί. Ὥστε ἀγοράζομεν τὸ ὅλον 27 πήχεις, περισσεύουσι δὲ καὶ 33 δραχμαί. Οὕτως ἐξηγεῖται διατὶ χωρίζομεν ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ διαιρετέου, ὅσα ψηφία ἔχει ὁ διαιρέτης ἢ ἓν περισσότερον, ἂν εἶναι ἀνάγκη, διὰ νὰ σχηματισθῇ ἀριθμὸς μὴ μικρότερος ἀπὸ τὸν διαιρέτην. Διαιροῦμεν τὸν οὕτω σχηματιζόμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ διαιρέτου κ.τ.λ.

Διάταξις τῆς πράξεως

| | |
|---|---|
| 1248 | 45 |
| 348 | 27 |
| 33 | |

**Χρῆσις τῆς διαιρέσεως εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων.**

§ **73 Πρόβλημα Ι.** *Ἑκάστη δωδεκὰς μανδηλίων τιμᾶται 96 δραχμάς. Πόσον τιμᾶται ἕκαστον μανδήλιον ;*

*Λύσις.* Ἀφ' οὗ τὰ 12 μανδήλια τιμῶνται 96 δραχ, τὸ 1 μανδήλιον θὰ τιμᾶται 12 φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι 96 δραχ : 12=8 δραχ.

§ **74. Πρόβλημα ΙΙ.** *Ἁμαξοστοιχία χρειάζεται 16 ὥρας, διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ πόλεως εἰς ἄλλην, ἡ ὁποία ἀπέχει 192 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα διανύει τὴν ὥραν ;*

*Λύσις.* Ἀφ' οὗ εἰς 16 ὥρας διανύει 192 χιλ, εἰς 1 ὥραν διανύει 192 : 16==12 χιλιόμετρα.

Εἰς καθ' ἓν ἀπὸ τὰ προβλήματα ταῦτα δίδεται ἡ τιμὴ (§ 53) πολλῶν μονάδων καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος ὁμοειδοῦς πρὸς ἐκείνας. Ἀπὸ τὸν τρόπον δὲ τῆς λύσεως αὐτῶν συμπεραίνομεν ὅτι :

*Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν πολλῶν μονάδων καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς ἀπὸ αὐτάς, διαιροῦμεν (μερίζομεν) τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων τούτων.*

Ὥστε, ἂν α εἶναι ἡ τιμὴ β μονάδων, ἡ τιμὴ χ μιᾶς μονάδος ἀπὸ αὐτὰς εἶναι α : β, ἤτοι χ=α : β.

§ **75. Πρόβλημα ΙΙΙ.** *Μὲ 3 πήχεις ὑφάσματος κάμνομεν μίαν ἐνδυμασίαν. Πόσας τοιαύτας ἐνδυμασίας κάμνομεν μὲ 75 πήχεις ;*

*Λύσις.* Εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι θὰ κάμωμεν τόσας ἐνδυμασίας, ὅσας φορὰς χωροῦσιν οἱ 3 πήχεις εἰς τοὺς 75 πήχεις, ἤτοι 75 πήχ : 3 πήχ.=25 ἐνδυμασίας.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδεται ἡ τιμὴ (3 πήχεις) μιᾶς μονάδος (1 ἐνδ.) καὶ ἡ τιμὴ (75 πήχ.) πολλῶν μονάδων ὁμοειδῶν πρὸς τὴν μίαν ἐκείνην μονάδα. Ζητεῖται δὲ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τούτων. Ἀπὸ τὸν τρόπον δὲ τῆς λύσεως αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι:

*Ὅταν δίδηται ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος καὶ ἡ τιμὴ πολλῶν μονάδων ὁμοειδῶν πρὸς αὐτήν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πλῆθος τῶν πολλῶν τούτων μονάδων, διαιροῦμεν τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων διὰ τῆς τιμῆς τῆς μιᾶς μονάδος.*

Ὥστε, ἂν β εἶναι ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος καὶ α ἡ τιμὴ πολλῶν μονάδων ὁμοειδῶν πρὸς αὐτήν, τὸ πλῆθος χ τῶν μονάδων τούτων εἶναι α : β, ἤτοι χ=α : β.

ΣΗΜ. Κατὰ τὴν α' περίπτωσιν (μερισμὸς) τὸ πηλίκον εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον. Κατὰ δὲ τὴν β' (μέτρησις), τὸ εἶδος τοῦ πηλίκου ὁρίζεται ἀπὸ τὸ πρόβλημα.

***Ἀσκήσεις.*** 133) Ἐργάτης ἐργασθεὶς 17 ἡμέρας ἔλαβεν 1241 δραχμάς. Πόσον εἶναι τὸ ἡμερομίσθιόν του;

134) Παντοπώλης ἐπώλησε μίαν ἡμέραν 127 ὀκάδας ζακχάρεως καὶ ἔλαβεν 2667 δραχ. Πρὸς πόσον ἐπώλησε τὴν ὀκᾶν;

135) Παρατηρητὴς εὑρισκόμενος 5100 μέτρα μακρὰν πυροβόλου παρετήρησεν ὅτι ἐπέρασαν 15 δευτερόλεπτα ἀπὸ τὴν στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν εἶδε τὴν λάμψιν, μέχρι τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἤκουσε τὸν κρότον τῆς ἐκπυρσοκροτήσεως τοῦ πυροβόλου. Πόσα μέτρα διήνυεν ὁ ἦχος κατὰ δευτερόλεπτον;

136) Ἀτμομηχανὴ ἔκαυσεν εἰς 25 ὥρας 600 ὀκάδας ἀνθράκων. Πόσους ἄνθρακας καίει τὴν ὥραν;

137) Ἡ ἀπόστασις τοῦ Ἡλίου ἀπὸ τῆς Γῆς εἶναι 150 000 000 χιλιόμετρα περίπου, τὸ δὲ φῶς διανύει 300.000 χιλιόμετρα κατὰ δευτερόλεπτον. Πόσα δευτερόλεπτα χρειάζεται τὸ φῶς, διὰ νὰ φθάσῃ ἀπὸ τὸν Ἥλιον εἰς τὴν Γῆν;

## Περὶ δυνάμεων.

**§ 76. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα δυνάμεως.** Πᾶς παράγων τοῦ γινομένου 3×3×3×3 εἶναι 3. Τοῦτο καλεῖται *δύναμις* τοῦ 3.

*Γενικῶς: Δύναμις ἀριθμοῦ καλεῖται πᾶν γινόμενον, τοῦ ὁποίου οἱ παράγοντες εἶναι ὅλοι ἴσοι πρὸς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.*

Ἡ δύναμις ἀριθμοῦ καλεῖται *δευτέρα, τρίτη*, κ.τ.λ. ἂν οἱ παράγοντες εἶναι 2, 3 κτλ.

ΣΗΜ. Ἡ δευτέρα δύναμις ἀριθμοῦ λέγεται καὶ *τετράγωνον* ἡ δὲ τρίτη λέγεται καὶ *κύβος* αὐτοῦ.

Ἕκαστος τῶν ἴσων παραγόντων δυνάμεως λέγεται *βάσις* αὐτῆς. Ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις δηλοῖ τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων δυνάμεως, καλεῖται *ἐκθέτης* αὐτῆς.

Χάριν συντομίας γράφομεν μόνον τὴν βάσιν, δεξιὰ δὲ καὶ ὑπεράνω αὐτῆς τὸν ἐκθέτην μὲ μικρότερον ψηφίον. Οὕτω $5\times5$ γράφεται $5^2$ (5 εἰς τὸ τετράγωνον ἢ εἰς τὴν δευτέραν), $4\times4\times4$ γράφεται $4^3$ (4 εἰς τὸν κύβον ἢ 4 εἰς τὴν τρίτην).

Ἡ εὕρεσις δυνάμεως ἀριθμοῦ λέγεται καὶ *ὕψωσις* τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.

Ἀξιοπαρατήρητον ὅτι $10^2=10\times10=100$,

$$10^3=10\times10\times10=1000,\ 10^4=10000,\ \text{κτλ. ἤτοι :}$$

*Ἑκάστη δύναμις τοῦ 10 ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἀποτελεῖ ἡ 1 ἀκολουθουμένη ἀπὸ μηδενικὰ ἰσάριθμα πρὸς τὰς μονάδας τοῦ ἐκθέτου.*

## Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

§ **77. Α΄. Γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $5^3\times5^2$. Ἐπειδὴ $5^3=5\times5\times5$ καὶ $5^2=5\times5$, ἕπεται ὅτι

$$5^3\times5^2=(5\times5\times5)\times(5\times5).$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 59) $(5\times5\times5)\times(5\times5)=5\times5\times5\times5\times5=5^5$, ἕπεται ὅτι

$$5^3\times5^2=5^5.$$

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι $3^2\times3^4\times3^5=3^{11}$ καὶ γενικῶς

$$\alpha^\mu\times\alpha^\nu\times\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \times\alpha^\rho=\alpha^{\mu+\nu+\ .\ .\ .\ .\ +\rho}.$$

Ἤτοι: *Τὸ γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν αὐτῶν.*

§ **78. Β΄. Δύναμις ἄλλης δυνάμεως.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ὁρίσωμεν τὴν τρίτην τοῦ ἀριθμοῦ $4^2$, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν $(4^2)^3$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων εἶναι $(4^2)^3=4^2\times4^2\times4^2$.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 77 Α΄.), $4^2\times4^2\times4^2=4^{2+2+2}=4^{2\times3}$, ἕπεται ὅτι

$$(4^2)^3=4^{2\times3}.$$

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι $(5^3)^4=5^{3\times4}$ καὶ γενικῶς

$$(\alpha^\mu)^\nu=\alpha^{\mu\times\nu}.$$

Ἤτοι : *Διὰ νὰ ὑψώσωμεν δύναμιν ἀριθμοῦ εἰς ἄλλην δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, ἥτις ἔχει ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν ἐκθετῶν τῶν δυνάμεων τούτων.*

§ **79. Γ΄. Δύναμις γινομένου.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ὁρίσωμεν τὴν 2αν δύναμιν τοῦ γινομένου $2\times3\times5$ ἤτοι τὸν ἀριθμὸν $(2\times3\times5)^2$.

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $(2\times3\times5)^2=(2\times3\times5)\times(2\times3\times5)$ (§ 76), $(2\times3\times5)\times(2\times3\times5)=2\times3\times5\times2\times3\times5=(2\times2)\times(3\times3)\times(5\times5)$ (§ 59, 56) ἕπεται ὅτι $(2\times3\times5)^2=2^2\times3^2\times5^2$.

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι $(5\times3\times7\times4)^3=5^3\times3^3\times7^3\times4^3$ καὶ γενικῶς $(\alpha\times\beta\times\gamma\times....\times\pi)^\nu=\alpha^\nu\times\beta^\nu\times\gamma^\nu\times.....\times\pi^\nu$.

Ἤτοι : *Διὰ νὰ ὑψώσωμεν γινόμενον εἰς δύναμιν, πρέπει νὰ ὑψώσωμεν ὅλους τοὺς παράγοντας εἰς τὴν δύναμιν ταύτην καὶ νὰ πολ]σωμεν τὰς δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι οὕτως εὑρίσκονται.*

§ **80. Δ΄. Πηλίκον δυνάμεως δι' ἄλλης δυνάμεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $7^5 : 7^3$.

Ἐπειδὴ $5=3+2$, ἕπεται ὅτι $7^5=7^{3+2}=7^3\times7^2$. Ἑπομένως

$$7^5 : 7^3=(7^3\times7^2) : 7^2=7^3 \quad (\S\ 65\ \Delta'.).$$

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι $5^7 : 5^3=5^4$ καὶ γενικῶς

$$\alpha^\mu : \alpha^\nu=\alpha^{\mu-\nu}, \quad (\text{ἂν } \mu>\nu).$$

Ἤτοι : *Τὸ πηλίκον δυνάμεως δι' ἄλλης δυνάμεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Ἔχει δὲ ἡ δύναμις αὕτη ἐκθέτην τὴν διαφοράν, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν, ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸν ἐκθέτην τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τὸν ἐκθέτην τοῦ διαιρετέου.*

ΣΗΜ. Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἰσχύῃ ἡ ἰδιότης αὕτη καὶ διὰ τὸ πηλίκον $4^3 : 4^2$, πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι $4^3 : 4^2=4^{3-2}=4^1$.

Ἐπειδὴ ὅμως $4^3=4\times4\times4=4^2\times4$, ἕπεται ὅτι

$$4^3 : 4^2=(4^2\times4) : 4^2=4.$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ δεχθῶμεν ὅτι καὶ $4=4^1$.

Γενικῶς $\alpha^1=\alpha$.

Τὸ σύμβολον $\alpha^1$ καλοῦμεν πρώτην δύναμιν τοῦ α. Ἑπομένως : *Πρώτη δύναμις ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμὸς οὗτος.*

Ὁμοίως, ἂν θέλωμεν νὰ ἰσχύῃ ἡ αὐτὴ ἰδιότης καὶ διὰ τὸ πηλίκον $4^5 : 4^5$, πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι $4^5 : 4^5=4^0$.

Ἐπειδὴ $4^5 : 4^5=1$, συμπεραίνομεν ὅτι πρέπει νὰ ... σύμβολον $4^0$ ἴσον πρὸς 1.

*Γενικῶς* : $\alpha^0=1$, ἤτοι

λῶν. Ἀπὸ 6
ον ἐπώλησε πρὸς
ρήγαγε 1000 ὀκάδας

*Μηδενικὴ δύναμις ἀριθμοῦ ($\neq 0$) καλεῖται ἡ μονάς.*

*Ἀσκήσεις.* 138) Νὰ εὑρεθῇ ἀγράφως τὸ τετράγωνον τοῦ 3, τοῦ 4, τοῦ 6, τοῦ 8, ὁ κύβος τοῦ 2, τοῦ 3, τοῦ 6 καὶ ἡ τετάρτη δύναμις τοῦ 4 καὶ τοῦ 7.

139) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πέμπτη καὶ ἡ ἐννάτη δύναμις τοῦ 18.

140) Νὰ γραφῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 1000, 10 000, 1 000 000 ὡς δυνάμεις τοῦ 10.

141) Νὰ γραφῇ ὡς μία δύναμις ἕκαστον ἀπὸ τὰ γινόμενα

$$2^2 \times 2^3,\ 2^3 \times 2^4 \times 2^5,\ 6^2 \times 6^3 \times 6^4 \times 6^5.$$

142) Νὰ γείνῃ γινόμενον δύο δυνάμεων ἕκαστον ἀπὸ τὰ γινόμενα $2^3 \times 5^2 \times 5^3,\ 3^2 \times 5^3 \times 3^4 \times 5^2,\ 7^2 \times 2^2 \times 7^3 \times 2^5 \times 2^4$.

143) Νὰ τραπῇ ἡ δύναμις $4^3$ εἰς δύναμιν τοῦ 2.

144) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετραπλάσιον τετραγώνου εἶναι τετράγωνον καὶ τὸ ὀκταπλάσιον κύβου εἶναι κύβος.

145) Νὰ γραφῇ τὸ γινόμενον $2^2 \times 4^5$ ὡς μία δύναμις.

146) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(7^3 \times 3^2 \times 5^3)$ : $3^2 = 35^3$.

147) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πηλίκον $(10 \times 10)^4 : (2^2 \times 5^2)$ εἶναι δύναμις τοῦ 10.

## Προβλήματα ἐπὶ τῶν 4 πράξεων.

148) Μικρέμπορος ἠγόρασε 10 δωδεκάδας μανδήλια πρὸς 36 δραχ. τὴν δωδεκάδα. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ ἕκαστον μανδήλιον διὰ νὰ κερδίζῃ ἀπὸ καθ' ἓν 1 δραχμήν;

149) Ἔμπορος ἠγόρασε 5 τεμάχια ὑφάσματος ἀντὶ 15750 δραχμῶν. Ἐὰν ἕκαστον τεμάχιον εἶχεν 70 πήχεις, πόσον ἠγόρασε τὸν πῆχυν;

150) Ὀκτὼ ἐργάται ἐξετέλεσαν ὁμοῦ ἓν ἔργον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἔλαβον ἀμοιβὴν 6400 δραχμάς. Ἐδαπάνησαν δὲ διὰ τὸ κοινὸν συσσίτιον κατὰ τὰς ἡμέρας τῆς ἐργασίας 1800 δραχμάς. Πόσην καθαρὰν ἀμοιβὴν ἔλαβεν ἕκαστος;

151) Γυνὴ ἠγόρασε ραπτομηχανὴν ἀντὶ 3400 δραχμῶν καὶ ἐπλήρωσε μόνον 400 δραχμάς. Ὑπεσχέθη δὲ νὰ πληρώνῃ εἰς τὸ τέλος ἑκάστου μηνὸς 200 δραχμάς, ἕως ὅτου ἀποπληρώσῃ αὐτήν. Μετὰ πόσους μῆνας θὰ ἀποπληρώσῃ αὐτήν;

152) Νὰ μοιρασθῶσι 10840 δραχ. εἰς δύο ἀνθρώπους, οὕτως ... νὰ λάβῃ 1460 δραχ. περισσοτέρας τοῦ ἄλλου.

Ὁμοίως P...κέ τις 1388 δραχμὰς διὰ 44 πήχεις ὑφάσματος δύο ...ς ἠγόρασε πρὸς 25 δραχ. τὸ δὲ β' πρὸς 37 δραχ. τὸν πῆχυν. Πόσους πήχεις ἠγόρασεν ἀπὸ κάθε εἶδος ;

154) Θέλει τις νὰ πληρώση 600 δραχ. μὲ δεκάδραχμα καὶ εἰκοσιπεντάδραχμα τὸ ὅλον 45. Πόσα θὰ δώσῃ ἀπὸ κάθε εἶδος ;

155) Τρεῖς ἀδελφοὶ εἶχον 174 πρόβατα. Ἕκαστον πρόβατον ἔδωκεν ἔτος τι 2 ὀκάδας μαλλίων, τὰ ὁποῖα ἐπώλησαν πρὸς 48 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας δραχ ἔλαβεν ἕκαστος ;

156) Ἔμπορος ἠγόρασε 40 δωδεκάδας ζεύγη χειροκτίων, τὰ ὁποῖα ἐκόστισαν 115200 δραχμάς. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὸ ζεῦγος, διὰ νὰ κερδίσῃ 10 δραχὰς ἀπὸ ἕκαστον ζεῦγος ;

157) Δύο ἐργάται ἔλαβον ὁμοῦ 1610 δραχμὰς διὰ 10 ἡμερομίσθια τοῦ α΄ καὶ 20 ἡμερομίσθια τοῦ β΄. Βραδύτερον ἔλαβον 1320 δραχμὰς διὰ 10 ἡμερομίσθια τοῦ α΄ καὶ 15 τοῦ β΄. Πόσον εἶναι τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου ;

158) Μικροπωλητὴς ἠγόρασεν 115 ποτήρια πρὸς 8 δραχμὰς ἕκαστον, ἀλλ' ἔσπασαν τρία ἐξ αὐτῶν. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὸ καθ' ἓν ἀπὸ τὰ ἄλλα διὰ νὰ κερδίσῃ 300 δροχμάς ;

159) Παντοπώλης ἠγόρασε ζάκχαριν, ὄρυζαν καὶ μακαρόνια εἰς ἴσην ποσότητα καὶ ἔδωκεν δι' ὅλα 3220 δραχ. Ἠγόρασε δὲ τὴν μὲν ζάκχαριν πρὸς 19 δραχμάς, τὴν ὄρυζαν πρὸς 15 δραχμὰς καὶ τὰ μακαρόνια πρὸς 12 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδος ἠγόρασεν ἀπὸ κάθε εἶδος ;

160) Δύο σιδηροδρομικοὶ σταθμοὶ ἀπέχουσιν 220 χιλιόμετρα. Κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἀναχωροῦσιν ἀπὸ αὐτοὺς δύο ἁμαξοστοιχίαι κατευθυνόμεναι πρὸς ἀλλήλας καὶ διανύουσαι 20 χιλ. ἡ μία καὶ 24 χιλ. ἡ ἄλλη τὴν ὥραν. Μετὰ πόσας ὥρας θὰ συναντηθῶσι καὶ εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σταθμοῦ, ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἀνεχώρησεν ἡ πρώτη ἁμαξοστοιχία ;

161) Οἰνοπώλης ἠγόρασε 760 ὀκ. οἴνου, ὅστις ἐκόστισεν εἰς αὐτὸν 5 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Ἐκ τούτων τὰς μὲν 500 ὀκάδας ἐπώλησε πρὸς 7 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, τὰς δὲ ἄλλας ἐπειδὴ ὑπέστησαν μικρὰν βλάβην, ἐπώλησε πρὸς 4 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη καὶ πόσον ;

162) Ἔμπορος ἠγόρασε 50 ἀλεξιβρόχια πρὸς 125 δραχμὰς ἕκαστον. Ἐκ τῆς πωλήσεως δὲ αὐτῶν εἰσέπραξεν 7900 δραχμάς. Πόσον ἐκέρδισεν ἀπὸ καθ' ἓν ;

163) Ἀμπελουργὸς ἐτρύγησε 20796 ὀκάδας σταφυλῶν. Ἀπὸ 6 ὀκάδας σταφυλῶν ἔκαμεν 1 ὀκᾶν οἴνου, τὸν ὁποῖον ἐπώλησε πρὸς 4 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, ἀπὸ δὲ τὰ στέμφυλλα παρήγαγε 1000 ὀκάδας

οἰνοπνεύματος, τὸ ὁποῖον ἐπώλησε πρὸς 6 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσα χρήματα εἰσέπραξε τὸ ὅλον;

164) Ἐργάτης λαμβάνει 456 δραχὰς εἰς 6 ἡμέρας. Πόσας ἡμέρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ λάβῃ 760 δραχμάς;

165) Χωρικὸς ἐπώλησε τρία καλάθια φῶν πρὸς 2 δραχ. τὸ καθὲν. Τὸ α΄ καλάθιον περιεῖχε 54 φά, τὸ β΄ 17 ὀλιγώτερα καὶ τὸ γ΄ ὅσα τὰ δύο πρῶτα ὁμοῦ. Πόσα χρήματα ἔλαβεν;

166) Ἀμπελουργὸς θέλει νὰ ἀγοράσῃ ἀγρὸν μὲ τὰ χρήματα τὰ ὁποῖα θὰ ἀγοράσῃ ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ οἴνου του. Ὑπολογίζει δὲ ὅτι, ἂν πωλήσῃ τὸν οἶνον πρὸς 750 δραχμὰς τὸ βαρέλιον, θὰ περισσεύσωσι 500 δραχμαί· ἂν δὲ πωλήσῃ αὐτὸν πρὸς 600 δραχμὰς τὸ βαρέλιον, θὰ τῷ λείψωσι 400 δραχμαί. Πόσα βαρέλια οἴνου εἶχε καὶ πόση ἡ τιμὴ τοῦ ἀγροῦ;

167) Οἰκογενειάρχης παρετήρησεν ὅτι ἐχρειάζετο 300 δράμια ζακχάρεως κάθε 12 ἡμέρας. Θέλων νὰ κάμῃ οἰκονομίαν περιώρισε τὴν καθημερινὴν δαπάνην, οὕτως ὥστε νὰ περνᾷ 15 ἡμέρας μὲ 300 δράμια. Ἐὰν ἡ τιμὴ τῆς ζακχάρεως εἶναι 20 δραχμαὶ τὴν ὀκᾶν πόσα λεπτὰ οἰκονομεῖ τὴν ἡμέραν;

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

## ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΣ

**§ 81. Ὁρισμοί.** Ὁ ἀριθμὸς 16 διαιρούμενος ἀκριβῶς διὰ 2 λέγεται *διαιρετὸς* διὰ τοῦ 2, ὁ δὲ 2 *διαιρέτης τοῦ 16*.

*Γενικῶς: Ἀριθμὸς λέγεται διαιρετὸς δι᾽ ἄλλου, ἂν διαιρῆται δι᾽ αὐτοῦ ἀκριβῶς.*

*Διαιρέτης ἀριθμοῦ λέγεται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρεῖ αὐτὸν ἀκριβῶς.*

Ἐπειδὴ $16:2=8$, ἔπεται ὅτι $16=2\times8$, ἤτοι ὁ 16 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 2. Ἀντιστρόφως, ἂν $\alpha=2\times\beta$, θὰ εἶναι $\alpha:2=\beta$ ἤτοι ὁ α διαιρεῖται διὰ τοῦ 2.

Ἄρα: *Πᾶς ἀριθμὸς διαιρετὸς δι᾽ ἄλλου εἶναι πολ/σιον αὐτοῦ. Καὶ πᾶν πολ/σιον ἀριθμοῦ εἶναι ἀριθμὸς διαιρετὸς δι᾽ αὐτοῦ.*

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $2\times5=10$, $4\times25=100$, $8\times125=1000$ ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ 10 διαιρεῖται διὰ 2 καὶ 5, ὁ 100 διὰ 4 καὶ 25, ὁ 1000 διὰ 8 καὶ 125.

**§ 82. Κοινοὶ διαιρέται ἀριθμῶν. Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί.** Ὁ 4 διαιρῶν τοὺς 12, 20, 36 καλεῖται *κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν*.

*Γενικῶς : Κοινὸς διαιρέτης δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρεῖ αὐτοὺς ἀκριβῶς.*

Τῶν ἀριθμῶν 16, 24, 32, 40 κ.δ. εἶναι οἱ 1, 2, 4, 8. Ὁ μεγαλύτερος τούτων 8 λέγεται *μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν.*

Γενικῶς : *Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δοθέντων ἀριθμῶν λέγεται ὁ μεγαλύτερος ἀπὸ τοὺς κ. δ αὐτῶν.*

Οἱ ἀριθμοὶ 4, 8, 9, ἔχουσι κ. δ. μόνον τὴν 1, λέγονται δὲ *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Γενικῶς : *Ἀριθμοί τινες λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἐὰν ἔχωσι κ. δ. μόνον τὴν 1.*

***Ἀσκήσεις*** 168) Ποῖος ὁ μ.κ.δ ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ; Ἂν δὲ ἀριθμοὶ ἔχωσι μ.κ.δ. 1, εἶναι ἢ ὄχι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ;

169) Ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 2 εἶναι ἢ οὐχὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ διατί ;

**§ 83. Ἰδιότητες τῶν κοινῶν διαιρετῶν ἀριθμῶν.**

Α΄. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 8, 12, 20 καὶ κοινὸς αὐτῶν διαιρέτης ὁ 4.

Ἐπειδὴ $8:4=2$, $12:4=3$, $20:4=5$, ἔπεται ὅτι $8=4\times 2$, $12=4\times 3$ καὶ $20=4\times 5$, ἄρα $8+12+20=(4\times 2)+(4\times 3)+(4\times 5)$.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 45 Γ') $4\times(2+3+5)=(4\times 2)+(4\times 3)+(4\times 5)$, ἔπεται ὅτι $8+12+20=4\times(2+3+5)$, ἤτοι τὸ ἄθροισμα $8+12+20$ εἶναι πολ)σιον τοῦ 4 Κατ' ἀκολουθίαν (§ 81) ὁ 4 εἶναι διαιρέτης τοῦ $8+12+20$.

*Γενικῶς :* Ἂν α=πολ.δ, β=πολ.δ, γ=πολ.δ, θὰ εἶναι καὶ

$$\alpha+\beta+\gamma=\text{πολ.}\delta.$$

Ἄρα : *Πᾶς κοινος διαιρέτης ἀριθμῶν διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.*

Ἐκ τῆς ἰσότητος $8\times 3=8+8+8$, ἔπεται ὅτι, ὁ 4 διαιρῶν τὸν 8 καὶ ἐπομένως καὶ τὸ ἄθροισμα $8+8+8$ διαιρεῖ καὶ τὸ γινόμενον $8\times 3$.

Ἄρα : Β΄. ***Ἀ****ριθμὸς διαιρῶν ἄλλον διαιρεῖ καὶ πᾶν πολ]σιον αὐτοῦ.*

Γ΄.) Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $20=4\times 5$, $8=4\times 2$ εὑρίσκομεν ὅτι

$$20-8=(4\times 5)-(4\times 2).$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 46) $4\times(5-2)=(4\times 5)-(4\times 2)$, ἔπεται ὅτι

$$20-8=4\times(5-2),$$

ἤτοι ὁ 4 εἶναι διαιρέτης τῆς διαφορᾶς 20—8.

*Γενικῶς* : Ἂν α=πολ.δ, β=πολ.δ, θὰ εἶναι καὶ α−β=πολ.δ

Ἄρα : *Πᾶς κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.*

Δ'. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 264 καὶ 40 καὶ κ. δ. αὐτῶν ὁ 8. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν 264 διὰ 40, εὑρίσκομεν πηλίκον 6 καὶ ὑπόλοιπον 24· εἶναι ἄρα 264=(40×6)+24 καὶ ἑπομένως

$$264-(40\times6)=24.$$

Ὁ 8 διαιρῶν τὸν 264 καὶ τὸν (40×6) (§ 82 Β'), θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν 264−(40×6) ἤτοι τὸν 24. (§ 82 Γ').

*Γενικῶς* : Ἂν εἶναι α=(β×π)+υ καὶ α=πολ.δ, β=πολ.δ, θὰ εἶναι καὶ υ=πολ.δ.

Ἄρα : *Πᾶς κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν διαιρεῖ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ μεγαλυτέρου διὰ τοῦ μικροτέρου τούτων.*

Ε'. Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι 264=(40×6)+24. Ἔστω ἤδη ὁ 4 κοινὸς διαιρέτης τοῦ 40 καὶ τοῦ 24.

Ἐπειδὴ ὁ 4 διαιρεῖ τὸν (40×6) (§ 82 Β') καὶ τὸν 24, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 264.

*Γενικῶς* : Ἂν α=(β×π)+υ, β=πολ.δ, καὶ υ=πολ.δ, θὰ εἶναι καὶ α=πολ.δ.

Ἄρα : *Ἂν ἀριθμὸς διαιρῇ διαιρέτην καὶ ὑπόλοιπον ἀτελοῦς διαιρέσεως, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν διαιρετέον τῆς διαιρέσεως ταύτης.*

Στ'. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 16, 24, 60 καὶ 4 κ. δ. αὐτῶν. Ἐπειδὴ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 60 : 16 εἶναι 12, ὁ 4 θὰ διαιρῇ (§ 82 Δ') τὸν 12. Εἶναι ἄρα ὁ 4 κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 16, 24, 12.

Ἀντιστρόφως. Τυχὼν κ. δ. τῶν 16, 24, 12 π. χ. ὁ 2 διαιρῶν τὸν 16 καὶ 12 θὰ διαιρῇ (§ 82 Ε') καὶ τὸν 60. Θὰ εἶναι ἄρα ὁ 2 κ.δ. τῶν 16, 24, 60. Ὥστε οἱ ἀριθμοὶ 16, 24, 60 καὶ οἱ 16, 24, 12 ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κ. διαιρέτας. Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι καὶ οἱ ἀριθμοὶ 16, 8, 12 ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κ.δ. μὲ τοὺς προηγουμένους.

Ἄρα : *Οἱ κ.δ. ἀριθμῶν δὲν βλάπτονται, ἂν εἷς ἢ περισσότεροι ἀπὸ αὐτοὺς ἀντικατασταθῶσι ἕκαστος μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δι' ἄλλου ἀπὸ αὐτούς.*

Ζ'. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 6, 18, 24. Ὁ μικρότερος ἀπὸ αὐτοὺς 6 διαιρεῖ ὅλους τοὺς ἄλλους· ἐπειδὴ δὲ διαιρεῖ καὶ τὸν 6, εἶναι κ.δ. αὐτῶν. Ἄλλον δὲ μεγαλύτερον τοῦ 6 κ.δ. δὲν ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ ὗτοι, διότι οὐδείς ἀριθμὸς μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 6 διαιρεῖ τὸν 6. Εἶναι λοιπὸν ὁ 6 μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 6, 18, 24.

Ἄρα: *Ἐὰν ὁ μικρότερος ἀπὸ δοθέντας ἀριθμοὺς διαιρῇ ὅλους τοὺς ἄλλους, οὗτος εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν δοθέντων τούτων ἀριθμῶν.*

## Χαρακτῆρες διαιρετότητος.

§ **84. Θεμελιώδης ἰδιότης.** Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀριθμὸς Α εἶναι τοιοῦτος ὥστε ἡ διαφορὰ Α—60 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 8, ἤτοι εἶναι: Α—60=πολ.8, ὅθεν Α=60+πολ.8 (1)

Ἐπειδὴ δὲ 60=(7×8)+4=πολ. 8+4, ἡ ἰσότης (1) γίνεται

Α=πολ.8+πολ.8+4=πολ.8+4.

Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν Α διαιρούμενος διὰ τοῦ 8 ἀφήνει ὑπόλοιπον 4, ὅσον δηλ. καὶ ὁ 60.

Ὥστε: *Ἐὰν ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι πολ|σιον ἄλλου, ἀμφότεροι διαιρούμενοι διὰ τοῦ ἄλλου ἀφήνουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.*

§ **85. Ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 10, 100, 1000** κτλ. Ἀπὸ τὸν τρόπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 10,100, 1000 κτλ. (§ 68) ἐννοοῦμεν ὅτι: *Διὰ τοῦ 10, 100, 1000 κτλ. διαιροῦνται, ὅσοι ἀριθμοὶ λήγουσιν ἀντιστοίχως εἰς 1, 2, 3 κ.τ.λ. τοὐλάχιστον μηδενικά.*

§ **86. Ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 2 καὶ 5. Πρόβλημα.** *Πληρώνονται 78 ἢ 65 δραχμαὶ μόνον μὲ δίδραχμα ἢ μόνον μὲ πεντάδραχμα;*

Παρατηροῦμεν ὅτι 78=70+8=(10×7)+8. Ἑπομένως αἱ 78 δραχμαὶ ἀποτελοῦνται ἀπὸ 7 δεκάδραχμα καὶ ἀπὸ 8 δραχμάς.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ 7 δεκάδραχμα ἔχουσι 5×7 ἢ 35 δίδραχμα καὶ 8 δραχ.=4 δίδραχμα, ἕπεται ὅτι 78δραχ.=39 δίδραχμα. Πληρώνονται λοιπὸν αἱ 78 δραχμαὶ μὲ δίδραχμα μόνον καὶ τὸ ὅλον 39.

Ὁμοίως 65 δραχ.=6 δεκάδραχμα +5 δραχ.=30 δίδρ.+2 δίδρ.+1 δραχ.=32 δίδρ.+1 δραχ. Ἦτοι αἱ 65 δραχμαὶ δὲν πληρώνονται μὲ δίδραχμα μόνον, ἀλλὰ χρειάζεται καὶ μία δραχμή.

Ἐὰν τρέψωμεν τὰ δεκάδραχμα εἰς πεντάδραχμα, εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι 78 δραχ.=(2×7) πεντάδρ.+8 δραχ=14πεν.+1πεν.+3 δραχ. καὶ 65 δραχ.=(2×6) πεντ.+5 δραχ. = 12 πεντ.+1πεντ. = 13 πεντ.

Ἄρα: Αἱ μὲν 65 δραχ. πληρώνονται μὲ πεντάδραχμα μόνον καὶ τὸ ὅλον 13· αἱ δὲ 78 δραχμαὶ δὲν πληρώνονται μὲ πεντάδραχμα μόνον, ἀλλὰ χρειάζονται καὶ 3 δραχμαί.

Ἀπὸ τὴν προσεκτικὴν ἐξέτασιν τούτων συμπεραίνομεν ὅτι :

α΄) *Διὰ τοῦ 2 ἢ 5 διαιροῦνται οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ψηφίον διαιρεῖται διὰ 2 ἢ 5.*

ΣΗΜ. Εἰς τούτους κατατάσσονται καὶ οἱ λήγοντες εἰς 0.

β΄) *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 2 ἢ 5 ἰσοῦται πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 2 ἢ 5 διαιρέσεως τοῦ τελευταίου ψηφίου αὐτοῦ.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῶν ἰδιοτήτων τούτων βεβαιούμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

α΄) Ἔστω ἀριθμός τις 67· ἐπειδὴ $67=60+7$ καὶ $60=6\times10=6\times2\times5$, ἔπεται ὅτι $67=(6\times2\times5)+7$ καὶ ἐπομένως

$$67-7=6\times2\times5.$$

Εἶναι λοιπὸν ἡ διαφορὰ 67—7 πολ)σιον τοῦ 2 καὶ τοῦ 5. Ἄρα (§ 84) οἱ ἀριθμοὶ 67 καὶ 7 διαιρούμενοι διὰ 2 ἀφήνουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον· ὁμοίως δὲ καὶ ἂν διαιρεθῶσι διὰ 5 ἀφήνουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

β΄) Κατὰ ταῦτα, ἂν τὸ τελευταῖον ψηφίον ἀριθμοῦ διαιρῆται 2 ἢ 5 ἤτοι ἀφήνῃ ὑπόλοιπον 0, καὶ ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρούμενος διὰ 2 ἢ 5 θὰ ἀφήνῃ ὑπόλοιπον 0· θὰ διαιρῆται ἄρα καὶ οὗτος διὰ 2 ἢ 5.

Ἀντιστρόφως : Ἂν ἀριθμὸς διαιρῆται διὰ 2 ἢ 5, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 2 ἢ 5 θὰ εἶναι μηδέν. Καὶ τὸ τελευταῖον ἄρα ψηφίον αὐτοῦ διαιρούμενον διὰ 2 ἢ 5 θὰ ἀφήνῃ ὑπόλοιπον μηδὲν (§ 84). Θὰ διαιρῆται λοιπὸν καὶ τοῦτο διὰ 2 ἢ 5.

Πᾶς ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2 καλεῖται *ἄρτιος* ἢ *ζυγός*. Πᾶς δὲ ἀριθμὸς μὴ διαιρετὸς διὰ 2 καλεῖται *περιττός*.

***Ἀσκήσεις***. 170) Ὁρίσατε ὅλους τοὺς μικροτέρους τοῦ 104 ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 10. Ἔπειτα ὅλους τοὺς μεταξὺ 243 καὶ 794 ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 100.

171) Ποῖα ἀπὸ τὰ ποσὰ 568 δραχ, 940 δραχ, 45680 δραχ, 79324 δραχ, 6514000 δραχ, 1849 δραχ, 72300 δραχ. δυνάμεθα νὰ πληρώσωμεν μὲ δεκάδραχμα μόνον, καὶ μὲ πόσα δεκάδραχμα ἕκαστον ;

172) Ἀναγράψατε δεξιὰ τοῦ 35 ἓν ψηφίον, ὥστε νὰ προκύψῃ ἄρτιος ἀριθμός. Πόσους τοιούτους ἀριθμοὺς δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ;

173) Ἀπαγγείλατε ὅλους τοὺς μικροτέρους τοῦ 21 ἀρτίους ἀριθμοὺς καὶ ἔπειτα τοὺς περιττούς.

174) Ποῖα ἀπὸ τὰ ποσὰ 160 δραχ. 375 δραχ. 463 δραχ. 1462 δραχ. 7846 δραχ. δυνάμεθα νὰ πληρώσωμεν μόνον μὲ δίδραχμα καὶ μόνον μὲ πεντάδραχμα;

175) Ποῖον τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 2 ἢ 5 διαιρέσεως ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν 18, 45, 163, 785, 890, 1436;

176) Γράψατε τοὺς μικροτέρους τοῦ 20 ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι διαιρούμενοι διὰ 5 ἀφήνουσιν ὑπόλοιπον 3.

**§ 87. Ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 4 ἢ 25. Πρόβλημα.** *Μοιράζονται ἀκριβῶς 3436 δραχμαὶ εἰς 4 ἢ 25 ἀνθρώπους;*

25

Α΄. Παρατηροῦμεν ὅτι 3436 δραχ.=34ἑκατοντάδρ.+36 δρ. Ἐπειδὴ 100 δραχ : 4=25 δραχμαὶ καὶ 36δραχ : 4=9 δραχ. ὁ καθεὶς ἀπὸ τοὺς 4 ἀνθρώπους λαμβάνει 34 εἰκοσπ. +9 δραχ.

Β΄. Ἐπειδὴ 100 δραχ : 25=4 δραχ. ἡ δὲ διαίρεσις 36 : 25 εἶναι ἀτελὴς (πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον 11) ὁ καθεὶς ἀπὸ τοὺς 25 ἀνθρώπους, θὰ λάβῃ (4×34) δραχ.+1 δραχ. θὰ περισσεύσωσι δὲ 11 δραχ. ἀπὸ τὰς 36 δραχ. Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ 650 διαιρεῖται διὰ 25· ἂν δὲ διαιρεθῇ διὰ 4 ἀφήνει ὑπόλοιπον 2, ἤτοι ὅσον καὶ ὁ 50.

Ἄρα : α΄) *Διὰ 4 ἢ 25 διαιροῦνται οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὰ δύο τελευταῖα ψηφία, ὅπως εἶναι γραμμένα, ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4 ἢ 25.*

β΄) *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 4 ἢ 25 ἰσοῦται πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 4 ἢ 25 διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία, ὅπως εἶναι γραμμένα.*

* Στηριζόμενοι εἰς τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα (§ 84) δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν περὶ τῆς ἀληθείας τῶν ἰδιοτήτων τούτων, ἂν ἐργασθῶμεν, ὅπως διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ 5 (§ 86*).

***Ἀσκήσεις.*** 177) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 127, 216, 450, 875, 1032, 467, 9840, 12400 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 4 καὶ ποῖοι διὰ 25; Ποῖον δὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 4 ἢ 25 ἑκάστου τῶν μὴ διαιρουμένων ἀκριβῶς;

178) Ἀναγράψατε δεξιὰ τοῦ 243 ἓν ψηφίον τοιοῦτον ὥστε νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 4. Πόσους τοιούτους ἀριθμοὺς δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον;

179) Ποῖα ἀπὸ τὰ ποσὰ 1780 δραχ, 3450 δραχ, 16940 δραχ,

64975 δραχ. δύνανται νὰ πληρωθῶσι μόνον μὲ εἰκοσιπεντάδραχμα.

§ **88. Ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 3 ἢ 9. Πρόβλημα.** *Μοιράζονται ἀκριβῶς εἰς 9 ἢ 3 ἀνθρώπους 873 ἢ 1973 δραχ.*

*Λύσις.* Ἀπὸ τὰς ἰσότητας 10=**9**+1, 100=99+1, 1000=999+1 κτλ. καὶ 10=(3×3)+1, 100=(3×33)+1, 1000=(3×333)+1 κτλ. συμπεραίνομεν ὅτι:

*Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 10, 100, 1000 κτλ. διὰ 3 ἢ 9 εἶναι 1.*

Α'. Αἱ 873 δραχ.=8 ἑκ.+7δεκ.+3 δραχ. Ἀπὸ κάθε ἑκατοντάδραχμον ἢ δεκάδραχμον, ὅταν μοιρασθῇ εἰς 3 ἢ 9 ἀνθρώπους περισσεύει 1 δραχμή. Ἄρα ἀπὸ τὰ 8 ἑκ. καὶ τὰ 7 δεκ. περισσεύουσι (8+7) δραχ· ὥστε μένει νὰ μοιράσωμεν (8+7+3) δραχ=18 δραχ, ἀπὸ τὰς ὁποίας δὲν περισσεύει τίποτε.

Β'. Αἱ 1673 δραχ.=1 χιλ.+6ἑκ.+7δεκ.+3δραχ. Ἂν μοιράσωμεν τὰ χιλιόδραχμα, ἑκατοντάδραχμα καὶ δεκάδραχμα, μένουσι πρὸς διανομὴν (1+6+7+3)=17 δραχ. Ἀπὸ αὐτὰς μένουσι 2 ἢ 8 ἂν ἡ διανομὴ γίνηται εἰς 3 ἢ 9 ἀνθρώπους.

Ἄρα: α') *Διὰ τοῦ 3 ἢ 9 διαιροῦνται οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὰ ψηφία ἔχουσιν ἄθροισμα διαιρετὸν διὰ 3 ἢ 9.*

*β') Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 3 ἢ 9 ἰσοῦται πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 3 ἢ 9 διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων αὐτοῦ.*

***Ἀσκήσεις.*** 180) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 162, 543, 1462, 7803, 13893, 8964 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 3 καὶ ποῖοι διὰ 9; Ποῖον τὸ ὑπόλοιπον ἑκάστου τῶν μὴ διαιρετῶν διὰ 3 ἢ 9;

181) Γράψατε δεξιὰ τοῦ 23 ἓν ψηφίον τοιοῦτον ὥστε νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 9.

182) Σχολεῖον ἔχει 388 μαθητάς. Εἶναι δυνατὸν οὗτοι νὰ παραταχθῶσιν εἰς τριάδας ἢ ἐννεάδας ἢ ὄχι; Ἂν ὄχι, πόσοι θὰ περισσεύσωσιν εἰς κάθε περίστασιν;

§ **89. Εὕρεσις τοῦ μ.κ.δ. δοθέντων ἀριθμῶν.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 150 καὶ 25. Ἐπειδὴ ὁ 25 διαιρεῖ τὸν 150, ἕπεται (§ 83 Ζ') ὅτι ὁ 25 εἶναι ὁ ζητούμενος μ. κ. δ.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 120 καὶ 18. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν 120 : 18, ἵνα ἴδωμεν μήπως ὁ μικρότερος διαιρῇ τὸν ἄλλον (§ 83 Ζ'), εὑρίσκομεν πηλίκον 6 καὶ ὑπόλοιπον 12. Δεν εἶναι λοιπὸν ὁ 18 κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 120 καὶ 18.

Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ 120 καὶ 18 ἔχουσι (§ 83 ΣΤ') τοὺς αὐτοὺς κ. δ. μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 12 καὶ 18, ἕπεται ὅτι ἡ εὕρεσις τοῦ ζητουμένου μ. κ. δ. ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. τῶν 12 καὶ 18. Διαιροῦντες τὸν 18 διὰ 12 εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 6 καὶ τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μ.κ.δ. τῶν 6 καὶ 12.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ 6 διαιρεῖ τὸν 12, ἕπεται ὅτι οὗτοι ἔχουσι μ.κ.δ. τὸν 6. Οὗτος ἄρα εἶναι καὶ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν μ.κ.δ.

Ἄρα : *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου· τοῦτον διὰ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου, τὸν νέον διαιρέτην διὰ τοῦ νέου ὑπολοίπου καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν. Ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας διαιρέσεως εἶναι ὁ ζητούμενος μ.κ.δ.*

Γράφοντες ἕκαστον πηλίκον ὑπεράνω τοῦ ἀντιστοίχου διαιρέτου διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἀκολούθως :

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 6 | 1 | 2 |
| 120 | 18 | 12 | 6 |
| 12 | 6 | 0 | |

Β'. Τῶν ἀριθμῶν 9, 27, 63 μ.κ.δ. εἶναι ὁ μικρότερος ἀπὸ αὐτούς, δηλ. ὁ 9, διότι οὗτος διαιρεῖ ὅλους τοὺς ἄλλους (§ 83 Ζ'.).

Ἄς ὑποθέσωμεν ἀκόμη ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 132, 48, 18. Ὁ μικρότερος 18 δὲν διαιρεῖ τοὺς ἄλλους διότι ὁ 132 διαιρούμενος διὰ 18 ἀφήνει ὑπόλοιπον 6, ὁ δὲ 48 ἀφήνει 12.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 83 ΣΤ') οἱ ἀριθμοὶ 132, 48, 18, ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κ.δ. μὲ τοὺς 6, 12, 18, τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 6, 12, 18. Ἀπὸ αὐτοὺς ὁ μικρότερος 6 διαιρεῖ τοὺς ἄλλους, ἄρα ὁ 6 εἶναι μ.κ.δ. αὐτῶν, ἑπομένως καὶ τῶν δοθέντων.

Διάταξις τῆς πράξεως

| | | |
|---|---|---|
| 132 | 48 | 18 |
| 6 | 12 | 18 |
| 6 | 0 | 0 |

Ἄρα : *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. δοθέντων ἀριθμῶν, γράφομεν αὐτοὺς ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς· ὑποκάτω τοῦ μικροτέρου γράφομεν τὸν ἴδιον ἀριθμόν, ὑποκάτω δὲ ἑκάστου τῶν ἄλλων γράφομεν* τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ μικροτέρου. Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν ἐργασίαν ταύτην καὶ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς δευτέρας σειρᾶς καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς σειρὰν ἀριθμοῦ, ὧν ὁ μικρότερος διαιρεῖ πάντας τοὺς ἄλλους. Ὁ μικρότερος οὗτος ἀριθμὸς εἶναι ὁ ζητούμενος μ.κ.δ. διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἂν ὁ τελευταῖος οὗτος διαιρέτης εἶναι 1, οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

*Ἀσκήσεις*. 183) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 16 καὶ 64. ἔπειτα τῶν 47 καὶ 423.

184) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 90, 120, 300 καὶ τῶν ἀριθμῶν 90, 330, 420, 1050.

185) Εἰς πόσας τὸ πολὺ μπομπονιέρας εἶναι δυνατὸν νὰ διανεμηθῶσιν ὁμοίως 105 κουφέτα λευκά, 60 ροδόχροα, καὶ 45 κόκκινα; Πόσα δὲ κουφέτα ἀπὸ κάθε εἶδος θὰ περιέχῃ ἑκάστη;

186) Χορῳδία ἀποτελεῖται ἀπὸ 35 ὑψιφώνους, 63 μέσους καὶ 84 βαρυφώνους. Πόσαι τὸ πολὺ ὅμοιαι κατὰ τὴν σύνθεσιν ὁμάδες δύνανται νὰ σχηματισθῶσιν ἀπὸ αὐτούς;

187) Ἀξιωματικὸς ἔχει ὑπὸ τὰς διαταγάς του 3000 πεζούς, 850 ἱππεῖς καὶ 24 πυροβόλα. Πόσας τὸ πολὺ θέσεις δύναται νὰ ὑποστηρίξῃ ὁμοιομόρφως μὲ τὴν δύναμιν ταύτην; Πόσους πεζούς, ἱππεῖς καὶ πυροβόλα θὰ ἔχῃ κάθε θέσις;

* **§ 90. Ἰδιότητες τοῦ μ.κ. διαιρέτου δοθέντων ἀριθμῶν**. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 132, 48, 18, ὧν μ.κ.δ. εἶναι ὁ 6 (§ 89). Ἐὰν ἀριθμός τις δ εἶναι κ.δ. τούτων, οὗτος θὰ εἶναι (§ 83 ΣΤ') κ.δ. καὶ τῶν ἀριθμῶν ἑκάστης τῶν ἀκολούθων σειρῶν τῆς (ἐν § 89) διατάξεως τῆς πράξεως. Θὰ διαιρῇ λοιπὸν ὁ δ καὶ τὸν 6, ὁ ὁποῖος ἀνήκει εἰς τὴν τρίτην σειράν.

Ἀντιστρόφως. Ἂν ἀριθμός τις δ διαιρῇ τὸν 6, θὰ διαιρῇ καὶ τὰ πολ)σια αὐτοῦ 132, 48, 18.

Ἄρα: Α'. *Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλους, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν μ.κ.δ. αὐτῶν. Καὶ ἀντιστρόφως: Ἂν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸν μ.κ.δ. δοθέντων ἀριθμῶν, θὰ διαιρῇ καὶ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.*

Ἀπὸ τὴν ἰδιότητα ταύτην συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι:

Β'. *Κοινοὶ διαιρέται δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι πάντες οἱ διαιρέται τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν καὶ μόνον αὐτοί.*

Εὕρομεν προηγουμένως (§ 89 διάταξις πράξεως) ὅτι μ.κ.δ. τῶν

32,48, 18 εἶναι ὁ 6. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 132×λ, 48×λ, 18×λ, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ $18<48<132$, ἕπεται ὅτι $18\times\lambda<48\times\lambda<132\times\lambda$ (§ 38), ἤτοι ὁ 18×λ εἶναι μικρότερος τῶν ἀριθμῶν τούτων. Ἕκαστος λοιπὸν ἀπὸ τοὺς ἄλλους θὰ ἀντικατασταθῇ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ 18×λ

Διάταξις τῆς πράξεως

| | | | |
|---|---|---|---|
| 132×λ, | 48×λ, | 18×λ | μ.κ.δ.=6×λ |
| 6×λ, | 12×λ, | 18×λ | |
| 6×λ, | 0 , | 0 | |

Ἐπειδὴ δὲ οἱ 132, 48 διαιρούμενοι διὰ 18 δίδουσιν ἀντιστοίχως ὑπόλοιπα 6 καὶ 12, οἱ ἀριθμοὶ 132×λ καὶ 48×λ διαιρούμενοι διὰ 18×λ θὰ ἀφήνωσιν ὑπόλοιπα 6×λ καὶ 12×λ (§ 66 ΣΤ′). Πρέπει λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 6×λ, 12×λ, 28×λ.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ μικρότερος 6×λ ἀπὸ αὐτοὺς διαιρεῖ τοὺς ἄλλους, ἕπεται ὅτι οὗτος εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν 132×λ, 48×λ, 18×λ. Ἄρα:

*Γ′. Ἐὰν δοθέντες ἀριθμοὶ πολ/σθῶσι πάντες ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν πολ/ζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 400, 1030, 1310, οἱ ὁποῖοι ἔχουσι μ.κ.δ. τὸν 10. Ἂν διαιρέσωμεν αὐτοὺς διά τινος κ. δ. αὐτῶν π.χ. διὰ τοῦ 5, εὑρίσκομεν πηλίκα 80, 206, 262.

Τὸν μ. κ. δ. τούτων εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς. Ἂν οὗτος εἶναι Δ, οἱ ἀριθμοὶ $80\times5=400$, $206\times5=1030$, $262\times5=1310$ θὰ ἔχωσι μ. κ. δ. τὸν $\Delta\times5$.

Ἐπειδὴ ὅμως οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἕνα μόνον ἔχουσι μ. κ. δ. τὸν 10, πρέπει νὰ εἶναι $\Delta\times5=10$, ὅθεν $\Delta=10:5=2$. Ἄρα

*Δ′. Ἐὰν δοθέντες ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι πάντες διὰ τοῦ αὐτοῦ κ. δ. αὐτῶν καὶ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἀπὸ τὴν ἰδιότητα ταύτην προκύπτουσιν εὐκόλως καὶ αἱ ἀκόλουθοι ἰδιότητες :

*Ε′. Ἐὰν δοθέντες ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν, τὰ προκύπτοντα πηλίκα εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

*ΣΤ′. Ἐὰν τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως δοθέντων ἀριθμῶν διά τινος κ. δ. αὐτῶν, εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ κοινὸς οὗτος διαιρέτης εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

*Ἀσκήσεις.* 188) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 18 καὶ 30, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι οἱ 3 καὶ 5 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

189) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 2×λ, 3×λ, 5×λ.

190) Ὁ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν εἶναι 127, ὁ δὲ μεγαλύτερος ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι 1524. Ποῖος εἶναι ὁ μικρότερος ;

***§ 91. Ἰδιότητες τῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀριθμῶν. Α΄.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ γινόμενον $17 \times A$ διαιρεῖ-διὰ τοῦ 6, ὁ ὁποῖος εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 17. Θὰ ἐξετάσωμεν, ἂν ὁ 6 διαιρῇ ἢ οὒ τὸν Α. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 17 καὶ 6 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἔχουσι μ.κ.δ. τὴν 1· οἱ δὲ ἀριθμοὶ $17 \times A$ καὶ $6 \times A$ θὰ ἔχωσι (§ 90 Γ΄) μ.κ.δ. $1 \times A = A$.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ 6 διαιρεῖ τὸν $17 \times A$ ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὸν $6 \times A$ ὡς πολ]σιόν του, ἔπεται (§ 90 Α΄) ὅτι θὰ διαιρῇ καὶ τὸν μ.κ.δ. αὐτῶν Α.

Ἄρα : *Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα ἀπὸ αὐτούς, θὰ διαιρῇ τὸν ἄλλον.*

Β΄. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀριθμός τις Α διαιρεῖται δι' ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5, οἱ ὁποῖοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο. Θὰ ἐξετάσωμεν, ἂν ὁ Α διαιρῆται ἢ οὒ ὑπὸ τοῦ γινομένου $2 \times 3 \times 5$. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἂν $A : 2 = \Pi$, θὰ εἶναι καὶ $A = 2 \times \Pi$. (1)

Ἐπειδὴ δὲ ὁ 3 διαιρεῖ τὸν Α, ἤτοι τὸν $2 \times \Pi$ καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 2, θὰ διαιρῇ τὸν Π. Ἂν δὲ εἶναι $\Pi : 3 = \Pi'$, θὰ εἶναι καὶ $\Pi = 3 \times \Pi'$ (2)

Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ 5 διαιρεῖ τὸν Α ἢ $2 \times \Pi$ καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 2, θὰ διαιρῇ τὸν Π ἢ τὸν $3 \times \Pi'$· ἐπειδὴ δὲ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 3, θὰ διαιρῇ τὸν Π΄. Ἂν δὲ εἶναι $\Pi' : 5 = \Pi''$, θὰ εἶναι καὶ $\Pi' = 5 \times \Pi''$. (3)

Ἐὰν πολ]σωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1), (2) καὶ (3), εὑρίσκομεν ὅτι $A \times \Pi \times \Pi' = 2 \times 3 \times 5 \times \Pi \times \Pi' \times \Pi''$, ὅθεν ἔπεται ὅτι $A = (2 \times 3 \times 5) \times \Pi$. Ἐκ ταύτης γίνεται φανερὸν ὅτι ὁ Α εἶναι πολ]σιον τοῦ $2 \times 3 \times 5$ καὶ ἑπομένως διαιρεῖται ὑπ' αὐτοῦ.

Ἄρα : *Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλων πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.*

*Ἐφαρμογαί.* Ἐπειδὴ $6 = 2 \times 3$ καὶ οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 3 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἔπεται ὅτι : *πᾶς ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ 2 καὶ 3 διαιρεῖται καὶ διὰ 6.* Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι καὶ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 6 ἔχει τὴν μορφὴν $6 \times \Pi$ ἢ $2 \times 3 \times \Pi$. Εἶναι ἄρα οὗτος διαιρετὸς διὰ 2 καὶ 3. Ὥστε :

*Ἵνα ἀριθμὸς διαιρῆται διὰ 6, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διαιρῆται διὰ 2 καὶ διὰ 3.*

Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι : *Ἵνα ἀριθμὸς διαιρῆται διὰ 30, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διαιρῆται διὰ 2 καὶ 3 καὶ 5.*

*Ἀσκήσεις*. 191) Ποῖοι ἀριθμοὶ διαιροῦνται διὰ 12 ;

192) Ποῖοι ἀριθμοὶ διαιροῦνται διὰ 18 ;

193) Ποῖοι ἀριθμοὶ διαιροῦνται διὰ 20 ;

194) Ποῖοι ἀριθμοὶ διαιροῦνται διὰ 90 ;

**§ 92. Κοινὰ πολ]σια ἀριθμῶν**. Ὁ ἀριθμὸς 12 διαιρεῖται ὑπὸ τῶν 2, 3 καὶ 4, ἤτοι εἶναι πολ]σιον ἑκάστου τούτων. Διὰ τοῦτο ὁ 12 λέγεται *κοινὸν πολ]σιον* τῶν 2, 3 καὶ 4. Καὶ οἱ ἀριθμοὶ $12\times2=24$, $12\times3=36$ κτλ. εἶναι κοινὰ πολ]σια τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4.

*Γενικῶς : Κοινὸν πολ]σιον δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρεῖται ὑπ᾽ αὐτῶν.*

Ἐπειδὴ οὐδεὶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 12 εἶναι κοινὸν πολ]σιον τῶν ἀριθμῶν 2, 3, καὶ 4, ὁ 12 λέγεται *ἐλάχιστον κοινὸν πολ]σιον* τῶν 2, 3 καὶ 4.

*Γενικῶς : Ἐλάχιστον κοινὸν πολ]σιον δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται τὸ μικρότερον ἀπὸ τὰ κοινὰ πολ]σια αὐτῶν.*

**§ 93. Εὕρεσις τοῦ ἐλ. κ. πολ. δοθέντων ἀριθμῶν. Πρόβλημα.** *Εἰς πλατεῖαν πόλεως καταλήγουσι τρεῖς γραμμαὶ ἠλεκτροκινήτων ὀχημάτων (τράμ). Ἀπὸ τὴν α΄ φθάνει ὄχημα κάθε 4 λεπτά, ἀπὸ τὴν β΄ κάθε 6 λεπτὰ καὶ ἀπὸ τὴν γ΄ κάθε 9 λεπτά. Ἐὰν μίαν στιγμὴν φθάσωσι συγχρόνως ὀχήματα καὶ ἀπὸ τὰς τρεῖς γραμμάς, μετὰ πόσον χρόνον θὰ φθάσωσιν ἐκ νέου ὀχήματα καὶ ἀπὸ τὰς τρεῖς ταύτας γραμμάς ;*

*Λύσις.* Ἀπὸ τὴν στιγμὴν τῆς συγχρόνου ἀφίξεως θὰ φθάνωσιν ὀχήματα ἀπὸ τὴν α΄ γραμμὴν μετὰ 4, 8, 12. . . ἤτοι μετὰ χρόνον, ὁ ὁποῖος εἶναι πολ]σιον τοῦ 4. Ἀπὸ τὴν β΄ γραμμὴν μετὰ 6, 12, 18, . . ἤτοι μετὰ πολ]σιον 6 χρόνον καὶ ἀπὸ τὴν γ΄ γραμμὴν μετὰ 9, 18, 27... ἤτοι μετὰ πολ]σιον 9 χρόνον. Καὶ ἀπὸ τὰς 3 ἑπομένως γραμμὰς θὰ φθάνωσι συγχρόνως ὀχήματα μετὰ χρόνον, ὅστις εἶναι κ. π. τῶν 4, 6, 9. Ὁ δὲ χρόνος μέχρι τῆς πρώτης νέας συγχρόνου ἀφίξεως θὰ εἶναι τὸ ἐλ. κ. πολ]σιον τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Τὸ ζητούμενον ἐλ. κ. πολ. θὰ εἶναι ἕνας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς $9\times1=9$, $9\times2=18$, $9\times3=27$, $9\times4=36$, $9\times5=45$, κτλ.

Καὶ ἐπειδὴ οἱ 9, 18 καὶ 27 δὲν διαιροῦνται καὶ ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων 4, 6, ὁ δὲ μετ᾽ αὐτοὺς 36 διαιρεῖται ὑπ᾽ αὐτῶν, ἕπεται ὅτι ὁ 36 εἶναι ἐλ. κ. πολ. τῶν 4, 6, 9.

Ἄρα : *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλ. κ. πολ. δοθέντω ἀριθμῶν* *πολ/ζομεν τὸν μεγαλύτερον ἐπὶ 1, 2, 3, κτλ. μέχρις οὗ εὕρωμεν γινόμενον διαιρετὸν ὑπὸ ὅλων τῶν ἄλλων. Τό γινόμενον τοῦτο εἶναι τό ζητούμενον ἐλ. κ. πολ]σιον.*

*Ἀσκήσεις.* 195) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 9 καὶ τῶν ἀριθμῶν 15, 12, 30.

196) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλ. π. τῶν ἀριθμῶν 8, 25, 50, 100.

197) Κώδων κτυπᾷ κάθε 8 πρῶτα λεπτὰ καὶ ἄλλος κάθε 18 πρῶτα λεπτά. Κατά τινα δὲ στιγμὴν ἐκτύπησαν συγχρόνως. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ κτυπήσωσι πάλιν συγχρόνως ;

198) Παιδίον εἶχε βόλους ὀλιγωτέρους τῶν 20. Ἐὰν ἐμέτρα αὐτοὺς ἀνὰ 2 ἢ ἀνὰ 3 ἢ ἀνὰ 4 ἐπερίσσευε πάντοτε 1. Πόσους βόλους εἶχε ;

§ **94. Πρῶτοι καὶ σύνθετοι ἀριθμοί.** Ὁ ἀριθμὸς 5 διαιρεῖται μόνον διὰ 5 καὶ 1, λέγεται δὲ πρῶτος ἀριθμός.

*Γενικῶς : Πρῶτος ἀριθμὸς καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δὲν ἔχει ἄλλον διαιρέτην πλὴν τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς 1.*

*Πᾶς μὴ πρῶτος ἀριθμὸς καλεῖται σύνθετος, ὡς 8, 9, 15 κτλ.*

§ **95. Κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους.** Οἱ μικρότεροι π. χ. τοῦ 100 πρῶτοι ἀριθμοὶ εὑρίσκονται ὡς ἑξῆς. Γράφομεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ 1 ἕως 100 κατὰ τάξιν μεγέθους. Ἔπειτα μετροῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς ἀνὰ 2 ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸν 3 καὶ διαγράφομεν πάντα δεύτερον. Ἔπειτα διαγράφομεν τὸν 9 ἤτοι $3^2$ καὶ ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸν 10 μετροῦμεν αὐτοὺς ἀνὰ 3 καὶ διαγράφομεν πάντα τρίτον. Ἔπειτα διαγράφομεν τὸν $5^2$, ἤτοι 25 καὶ μετροῦντες ἀπὸ τοῦ 26 ἀνὰ 5 διαγράφομεν πάντα πέμπτον. Ἔπειτα διαγράφομεν τὸν $7^2$ ἤτοι 49 καὶ πάντα ζ' ἀπὸ τοῦ 50. Οὕτω διεγράφησαν τὰ πολ)σια τῶν 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Τὸ α' μὴ διαγραφὲν πολ)σιον τοῦ 11 εἶναι $11^2$=121, ὅπερ δὲν ὑπάρχει εἰς τὸν πίνακα. Ἔληξε λοιπὸν ἡ ἐργασία καὶ ὅσοι ἀριθμοὶ ἔμειναν εἶναι ὅλοι πρῶτοι.

Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται *κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους.*

***Ἀσκήσεις.*** 199) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 18, 23, 37, 39, 42 εἶναι πρῶτοι καὶ ποῖοι σύνθετοι ;

200) Ποῖος ἄρτιος ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος ;

201) Εἰς πρῶτον ἀριθμὸν μεγαλύτερον τοῦ 2 προσθέτομεν 1. Τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν εἶναι πρῶτος ἢ σύνθετος ἀριθμὸς καὶ διατί ;

202) Τὸ τετράγωνον ἢ ὁ κύβος ἀριθμοῦ διαφόρου τῆς 1 εἶναι πρῶτος ἢ σύνθετος καὶ διατί ;

§ **96. Δεύτερος διαιρέτης ἀριθμοῦ.** Τοῦ ἀριθμοῦ 12 διαιρέται εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 6, 12. Ἀπὸ αὐτοὺς ἀμέσως μεγαλύτερος τῆς μονάδος εἶναι ὁ 2· οὗτος καλεῖται *δεύτερος διαιρέτης* τοῦ 12.

*Γενικῶς : Δεύτερος διαιρέτης ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀμέσως μεγαλύτερος τῆς μονάδος διαιρέτης αὐτοῦ.*

Ὁ δεύτερος διαιρέτης ἀριθμοῦ Α δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι σύνθετος ἀριθμὸς π. χ. 4.

Διότι ὁ 4 ὡς σύνθετος ἀριθμὸς ἔχει διαιρέτην διάφορον τοῦ 4 καὶ μεγαλύτερον τῆς μονάδος, τὸν 2. Ἂν δὲ ἦτο Α=πολ 4, ὁ 2 θὰ διήρει τὸν Α (§ 83 Β΄) καὶ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ὁ 4 δεύτερος διαιρέτης τοῦ Α.

Ἄρα. *Ὁ δεύτερος διαιρέτης παντὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.*

§ **97. Ἀνάλυσις συνθέτου ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων.** Α΄. Ὁ σύνθετος ἀριθμὸς π. χ. 360 ἔχει δεύτερον διαιρέτην τὸν 2.

Ἐπειδὴ δὲ 360 : 2=180, ἕπεται ὅτι 360=2×180.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$$180=2\times 90,\ 90=2\times 45,\ 45=3\times 15,$$
$$15=3\times 5,\ 5=5\times 1.$$

Διάταξις τῆς πράξεως

| | |
|---|---|
| ~~360~~ | 2 |
| 180 | 2 |
| 90 | 2 |
| 45 | 3 |
| ~~15~~ | 3 |
| ~~5~~ | 5 |
| 1 | |

$300=2^3\times 3^2\times 5$

Εἰς τὰς ἰσότητας ταύτας ὁ α΄ παράγων τοῦ β΄ μέλους εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, διότι εἶναι δεύτερος διαιρέτης ἄλλου ἀριθμοῦ. Ὁ δὲ β΄ παράγων βαίνει ἐλαττούμενος καὶ ἐπὶ τέλους γίνεται 1.

Ἐὰν τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας πολ]σωμεν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$360\times(180\times 90\times 45\times 15\times 5)=$$
$$2\times 2\times 2\times 3\times 3\times 5\times(180\times 90\times 45\times 15\times 5\times 1),$$

ὅθεν $360=2\times 2\times 2\times 3\times 3\times 5$ ἢ $360=2^3\times 3^2\times 5$

Ἄρα : *Διὰ νὰ ἀναλύσωμεν ἀριθμὸν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ δευτέρου διαιρέτου αὐτοῦ. Τὸ πηλίκον διαιροῦμεν διὰ τοῦ δευτέρου διαιρέτου αὐτοῦ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις ὅτου εὕρωμεν πηλίκον 1. Τέλος σημειοῦμεν τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἔχει παράγοντας μόνον τοὺς διαιρέτας τῶν διαιρέσεων τούτων.*

Β΄. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἀναλύηται εὐκόλως εἰς γινόμενον ἄλλω παραγόντων, ἡ ἀνωτέρω ἐργασία γίνεται ἁπλούστερον, ἂν κάθ παράγων ἀναλυθῇ χωριστὰ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντω Οὕτως εἶναι $720=72\times10=8\times9\times10$.

Ἐπειδὴ δὲ $8=2^3$, $9=3^2$, $10=2\times5$, ἕπεται ὅτι

$$720=2^3\times3^2\times2\times5=2^4\times3^2\times5$$

*Ἀσκήσεις.* 203) Νὰ ἀναλυθῇ ἕκαστος ἀπὸ τοὺς ἀριθμο 6, 12, 15, 25, 140, 280, 1650, 3465, 8346 εἰς γινόμενον παρ γόντων πρώτων.

204) Ποῖος ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον $2^2\times3\times5$ κ ποῖος μὲ τὸ $2^3\times2^2\times7$ ;

## Ἐφαρμογαὶ ἀναλύσεως ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας.

§ **98. Α΄. Γινόμενον ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰ πρώτους παράγοντας.** Ἂν $A=2^3\times3^2\times7$, $B=2^2\times3\times$ $\Gamma=2\times3^2\times5^3$, θὰ εἶναι (§ 59) καὶ

$$A\times B\times\Gamma=2^3\times3^2\times7\times2^2\times3\times5\times2\times3^2\times5^3.$$

Ἐπειδὴ δὲ $2^3\times2^2\times2=2^6$, $3^2\times3\times3^2=3^5$, $5\times5^3=5^4$, ἕπετ (§ 56) ὅτι $A\times B\times\Gamma=2^6\times3^5\times5^4\times7$.

Ἄρα : *Τὸ γινόμενον ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους πα ράγοντας περιέχει πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν καὶ μ νον αὐτούς, ἕκαστον δὲ μὲ ἐκθέτην ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκ θετῶν, τοὺς ὁποίους ὁ παράγων οὗτος ἔχει εἰς τοὺς ἀριθμοὺς το τους.*

§ **99. Β΄. Δυνάμεις ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰ πρώτους παράγοντας.** Ἐὰν $A=2^2\times3^3\times5$, θὰ εἶναι

$$A^2=(2^2\times3^3\times5)\times(2^2\times3^3\times5)=2^{2+2}\times3^{3+3}\times5^2=$$
$$2^{2\times2}\times3^{3\times2}\times5^{1\times2}$$
$$A^3=(2^2\times3^3\times5)\times(2^2\times3^3\times5)\times(2^2\times3^3\times5)=$$
$$2^{2\times3}\times3^{3\times3}\times5^{1\times3}$$
$$A^\nu=(2^2\times3^3\times5)\times(2^2\times3^3\times5)\times\ldots\times(2^2\times3^3\times5)=$$
$$2^{2\times\nu}\times3^{3\times\nu}\times5^{1\times\nu}$$

Ἄρα : *Διὰ νὰ ὑψώσωμεν ἀριθμὸν ἀναλελυμένον εἰς πρώτου παράγοντας εἰς τὴν $\nu^{\eta\nu}$ δύναμιν, πολ)ζομεν τοὺς ἐκθέτας πάντα τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ ἐπὶ ν.*

§ **100. Γ΄. Ρίζαι ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώ**

**τοὺς παράγοντας.** Ἐπειδὴ $5^2=25$, ὁ 5 λέγεται *τετραγωνικὴ ῥίζα ἢ δευτέρα ῥίζα* τοῦ 25.

Ὥστε : *Τετρ. ῥίζα ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει αὐτὸν ὡς τετράγωνον.*

Ἐπειδὴ $2^3=8$, ὁ 2 λέγεται *κυβικὴ ἢ τρίτη* ῥίζα τοῦ 8.

Ὥστε : *Κυβικὴ ἢ τρίτη ῥίζα ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει αὐτὸν ὡς κύβον.*

*Γενικῶς* : Ἂν $α^ν=β$, ὁ α λέγεται νυοστὴ ῥίζα τοῦ β καὶ σημειώνεται οὕτω $\sqrt[ν]{β}$.

Τὸ σημεῖον $\sqrt{\ }$ λέγεται *ῥιζικόν*, ὁ ὑποκάτω αὐτοῦ ἀριθμὸς λέγεται *ὑπόρριζον* καὶ ὁ ἐντὸς τῆς γωνίας του ἀριθμὸς λέγεται *δείκτης τῆς ῥίζης*. Ὁ δείκτης 2 οὐδέποτε γράφεται.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $(2^2\times3^3\times5)^ν=2^{2\times ν}\times3^{3\times ν}\times5^{1\times ν}$ προκύπτει ὅτι $\sqrt[ν]{2^{2\times ν}\times3^{3\times ν}\times5^ν}=2^2\times3^3\times5$.

Ἄρα : *Ἐὰν οἱ ἐκθέται ὅλων τῶν πρώτων παραγόντων ἀριθμοῦ διαιροῦνται διὰ ν, εὑρίσκομεν τὴν $ν^{ην}$ ῥίζαν αὐτοῦ, ἂν διαιρέσωμεν διὰ ν τοὺς ἐκθέτας ὅλων τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ.*

***Ἀσκήσεις.*** 205) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετρ. ῥίζα τῶν ἀριθμῶν 144, 324, 441, 5184, 2000.

206) Νὰ εὑρεθῇ ἡ κυβ. ῥίζα τῶν ἀριθμῶν 216, 1728, 1000.

207) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετάρτη ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 1296 καὶ τοῦ 20736.

1296

§ **101. Α΄. Γενικὸς χαρακτὴρ διαιρετότητος.** Τυχὸν πολ)σιον τοῦ 18 π. χ. 18×180 ἢ 3240 διαιρῆται διὰ 18.

Ἐπειδὴ δὲ $18=2\times3^2$, $180=2^2\times3^2\times5$, ἕπεται ὅτι ἡ ἰσότης

$$3240=18\times180 \text{ γίνεται (§ 57 Γ')}$$

$$3240=(2\times3^2)\times(2^2\times3^2\times5)=2^3\times3^4\times5.$$

Περιέχει ἄρα ὁ 3240 ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ 18 καὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην.

Ἔστωσαν τώρα οἱ ἀριθμοὶ 504 ἢ $(2^3\times3^2\times7)$ καὶ 28 ἢ $(2^2\times7)$. Ἀπὸ αὐτοὺς ὁ 504 ἔχει ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ 28 καὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην.

Ἐπειδὴ $2^3 : 2^2=2$, ἕπεται ὅτι $2^3=2^2\times2$ καὶ ἑπομένως $504=2^2\times3^2\times2\times7=(2\times3^2)\times(2^2\times7)$ ἢ $504=18\times28$ καὶ ἑπομένως $504 : 28=18$, ἤτοι ὁ 504 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 28.

Ἄρα : *Διὰ νὰ διαιρῆται ἀριθμὸς δι' ἄλλου πρέπει καὶ ἀρκεῖ* *ὁ πρῶτος νὰ ἔχῃ ὅλους τοὺς παράγοντας τοῦ δευτέρου καὶ οὐδέν με μικρότερον ἐκθέτην.*

Προηγουμένως εὕρομεν ὅτι $504=(2\times3^2)\times(2^2\times7)$ ἢ

$$2^3\times3^2\times7=(2\times3^2)\times(2^2\times7).$$

Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι $(2^3\times3^2\times7):(2^2\times7)=2\times3^2$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$$(2^5\times3^4\times5^2\times11^2):(2^3\times3\times11)=2^2\times3^3\times11\times5^2.$$

Ἄρα: *Ἐὰν ἀριθμὸς ἀναλελυμένος εἰς πρώτους παράγοντας διαιρῆται δι' ἄλλου τοιούτου, τὸ πηλίκον ἔχει πάντας τοὺς παράγοντας τοῦ διαιρετέου καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες τὸν ἐκθέτην αὐτοῦ εἰς τὸν διαιρέτην, ἀπὸ τὸν ἐκθέτην αὐτοῦ εἰς τὸν διαιρετέον.*

ΣΗΜ. Ἐὰν πρῶτος παράγων ἔχῃ τὸν αὐτὸν ἐκθέτην εἰς τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην, εἰς τὸ πηλίκον θὰ ἔχῃ οὗτος ἐκθέτην μηδὲν καὶ θὰ ἰσοῦται ἑπομένως (§ 80) πρὸς τὴν μονάδα, ἥτις παραλείπεται.

Οὕτω $(2^3\times3^2\times5^3):(3^2\times5)=2^3\times3^0\times5^2=2^3\times5^2$.

*Ἀσκήσεις.* 208) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς $2^2\times5^3\times7^3\times11$, $2^3\times5^2\times7^3\times11$, $2^3\times5^4\times7^2\times11^2\times13$, $5^3\times7^4\times11^2\times13$ διαιροῦνται διὰ τοῦ $2^2\times5^2\times7$ καὶ ποῖα τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα;

209) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς $2^5\times5^2\times7^3\times17^2$, $2^4\times5^3\times13^2\times17^3$ καὶ $2^6\times3^4\times5^3\times13^3\times17^5$ διαιροῦνται διὰ τοῦ $2^3\times5^3\times13^2\times17$ καὶ ποῖα τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα;

210) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ τὸ γινόμενον $2^4\times3^2\times5^3$ διαιρεῖται διὰ $2\times3\times5^{\lambda}$;

§ **102. Ε΄. Εὕρεσις τοῦ μ. κ. δ. ἀριθμῶν διὰ τῆς ἀναλύσεως εἰς πρώτους παράγοντας.** Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $A=2^4\times3^2\times5$, $B=2^3\times3^4\times7^2$, $\Gamma=2^5\times3^3\times11$. Τυχὸν κ.δ. αὐτῶν Δ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ πρώτους παράγοντας διαφόρους ἀπὸ τοὺς κοινοὺς αὐτῶν παράγοντας 2 καὶ 3. Διότι, ἂν ὁ Δ εἶχε π. χ. τὸν 11, δὲν θὰ διῄρει τοὺς ἀριθμοὺς Α καὶ Β (§ 101).

Δὲν δύναται δὲ ὁ Δ νὰ ἔχῃ τὸν 2 μὲ ἐκθέτην μεγαλύτερον τοῦ 3, οὐδὲ τὸν 3 μὲ ἐκθέτην μεγαλύτερον τοῦ 2. Διότι, ἂν π. χ. εἶχε τὸν 2 μὲ ἐκθέτην τὸν 4, δὲν θὰ διῄρει τὸν Β.

Κατὰ ταῦτα πᾶς κ.δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν Α, Β, Γ θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν $2^{\mu}\times3^{\nu}$, ἔνθα μ εἶναι 0, ἢ 1, ἢ 2 ἢ 3 καὶ ν εἶναι 0, 1 ἢ 2. Ἑπομένως μ.κ.δ. εἶναι ἐκεῖνος, εἰς τὸν ὁποῖον οἱ ἐκθέται μ καὶ ν ἔχουσι τὴν μεγίστην ἐπιτρεπομένην τιμήν, ἤτοι ὁ $2^3\times3^2$

*Ἄρα : Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. δοθέντων ἀριθμῶν, ἀναλύο-εν αὐτοὺς εἰς πρώτους παράγοντας καὶ σχηματίζομεν γινόμενον, ὁ ὁποῖον ἔχει ὅλους τοὺς κοινοὺς μόνον παράγοντας αὐτῶν καὶ καστον μὲ τὸν ἐλάχιστον ἀπὸ τοὺς ἐκθέτας, τοὺς ὁποίους ἔχει οὗτος ἰς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.*

**§ 103. Στ΄. Εὕρεσις τοῦ ἐλ.κ.π. ἀριθμῶν διὰ τῆς ἀναλύσεως εἰς πρώτους παράγοντας.** Ἔστωσαν οἱ ἀνωτέρω ἀριθμοὶ Α, Β, Γ. Τυχὸν κ.π. αὐτῶν Π πρέπει νὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν· διότι, ἂν δὲν περιεῖχε π.χ. τὸν 11, δὲν θὰ διῃρεῖτο διὰ τοῦ Γ.

Δὲν δύναται δὲ ὁ Π νὰ περιέχῃ τὸν 2 μὲ ἐκθέτην μικρότερον τοῦ 5, τὸν 3 μὲ ἐκθέτην μικρότερον τοῦ 4 καὶ τὸν 7 μὲ ἐκθέτην μικρότερον τοῦ 2. Διότι ἂν εἶχε π. χ. τὸν 3 μὲ ἐκθέτην 3, δὲν θὰ διῃρεῖτο ὑπὸ τοῦ Β (§ 101). Δύναται ὅμως ὁ Π νὰ ἔχῃ καὶ ἄλλους ἀκόμη πρώτους παράγοντας, οἱ ὁποῖοι, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχουσι γινόμενον Λ.

Κατὰ ταῦτα πᾶν κ. π. τῶν Α, Β, Γ θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν $2^{\mu} \times 3^{\nu} \times 5^{\lambda} \times 7^{\rho} \times 11^{\tau} \times \Lambda$, ἔνθα εἶναι

$$\mu \geqq 5,\ \nu \geqq 4,\ \lambda \geqq 1,\ \rho \geqq 2,\ \tau \geqq 1.$$

Ἑπομένως ἐλ. κ. π. εἶναι ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον ἕκαστος ἀπὸ τοὺς ἐκθέτας μ, ν, λ, ρ, τ ἔχει τὴν ἐλαχίστην ἐπιτρεπομένην τιμὴν καὶ $\Lambda = 1$, ἤτοι ὁ $2^5 \times 3^4 \times 5 \times 7^2 \times 11$.

*Ἄρα : Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλ. κ. π. δοθέντων ἀριθμῶν ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς πρώτους παράγοντας καὶ σχηματίζομεν γινόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχει μόνον τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν κοινοὺς καὶ μὴ κοινούς, ἕκαστον δὲ μὲ τὸν μέγιστον ἀπὸ τοὺς ἐκθέτας, τοὺς ὁποίους ἔχει οὗτος εἰς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.*

ΣΗΜ. Οἱ ἀριθμοὶ $2^2 \times 5$, $3^3 \times 7^2$, $11 \times 13^2$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο. Οὐδένα ἑπομένως ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν ἐλ. κ. π. αὐτῶν εἶναι $2^2 \times 5 \times 3^3 \times 7^2 \times 11 \times 13^2$, ἤτοι τὸ γινόμενον αὐτῶν.

*Ἀσκήσεις.* 211) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. καὶ τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 504 καὶ 720.

212) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. καὶ τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 150, 540, ~~[illegible]~~5.

# ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

## ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

### ΕΝΝΟΙΑ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ **104. Κλασματικαὶ μονάδες.** Ἐὰν θέλωμεν νὰ μο ράσωμεν ἐξ ἴσου εἰς δύο πτωχοὺς μίαν μεταλλικὴν δραχμήν, δὲ δυνάμεθα νὰ τὸ πράξωμεν. Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι ἡ δια ρεσις 1 διὰ 2 εἶναι *ἀδύνατος*. Ὁμοίως αἱ διαιρέσεις 2 διὰ 3, 5 διὰ κ.τ.λ. εἶναι ἀδύνατοι.

Ἐὰν ὅμως τὴν δραχμὴν ἀνταλλάξωμεν μὲ 2 πεντηκοντάλεπτα κατορθώνομεν νὰ μοιράσωμεν αὐτὴν εἰς τοὺς δύο πτωχούς, ἂ δώσωμεν εἰς τὸν καθ' ἕνα ἀπὸ ἕνα πεντηκοντάλεπτον.

Τὸ καθ' ἓν ἀπὸ αὐτὰ λέγεται *ἥμισυ ἢ ἓν δεύτερον* τῆς δραχμῆ καὶ γράφεται οὕτω $\frac{1}{2}$. Ὁμοίως, ἂν χωρίσωμεν μίαν ὀκᾶν εἰς ἴσα μέρη, τὸ καθ' ἓν καλεῖται *ἓν τρίτον* τῆς ὀκᾶς καὶ γράφεται $\frac{1}{3}$ Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζεται τὸ *ἓν τέταρτον* $\left(\frac{1}{4}\right)$ ἀμπέλο *ἓν πέμπτον* $\left(\frac{1}{5}\right)$ πήχεως κτλ.

Ὥστε $1 : 2 = \frac{1}{2}$, $1 : 3 = \frac{1}{3}$, $1 : 4 = \frac{1}{4}$ κτλ

Τὸ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ κτλ. λέγονται *κλασματικαὶ μονάδες*.

Γενικῶς: *Κλασματικὴ μονὰς λέγεται ἓν ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη εἰ τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ἀκεραία μονάς*

§ **105. Κλασματικοὶ ἀριθμοί.** Ἂν μοιράσωμεν ἐ ἴσου μίαν, μίαν 3 ὀκ. ζακχάρεως εἰς 4 πτωχούς, εὑρίσκομεν ὅτ τὸ μερίδιον ἑκάστου ἀποτελεῖται ἀπὸ $\frac{1}{4}$ ὀκ. λαμβανόμενον 3 φο ρα. Τὸ μερίδιον τοῦτο ὀνομάζομεν τρία τέταρτα $\left(\frac{3}{4}\right)$. Ὥστε 3κ : 4 = $\frac{3}{4}$ ὀκ. Ἂν μοιράσωμεν 5 πήχεις εἰς 8 ἀνθρώπους, θὰ δώσωμεν εἰς καθ' ἕνα πέντε φορὰς τὸ $\frac{1}{8}$ πήχ. ἤτοι πέντε ὄγδοα $\left(\frac{5}{8}\right)$ πήχ. Ὥστε 5πήχ : 8 = $\frac{5}{8}$ πήχ.

Οἱ ἀριθμοὶ $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ λέγονται *κλάσματα* ἢ *κλασματικοὶ ἀριθμοί*.

Καὶ αἱ κλασματικαὶ μονάδες εἶναι κλασματικοὶ ἀριθμοί.

Γενικῶς: *Κλάσμα ἢ κλασματικὸς ἀριθμὸς καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος γίνεται, ἂν ληφθῇ ἅπαξ, δίς, τρὶς κτλ. κλασματική τις μονάς.*

Κάθε κλάσμα γράφεται μὲ δύο ἀκεραίους· ὁ ἕνας γράφεται ὑποκάτω τοῦ ἄλλου καὶ χωρίζονται μὲ εὐθεῖαν γραμμήν. Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος γράφεται κάτω ἀπὸ τὴν γραμμὴν λέγεται *παρονομαστὴς* καὶ φανερώνει εἰς πόσα ἴσα μέρη διῃρέθη ἡ ἀκεραία μονάς. Ὁ ὑπεράνω τῆς γραμμῆς λέγεται *ἀριθμητὴς* καὶ φανερώνει πόσα ἀπὸ ταῦτα ἐλήφθησαν.

Ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς λέγονται μαζὶ *ὅροι* τοῦ κλάσματος. Ἀναγινώσκονται δὲ ὁ μὲν ἀριθμητὴς ὡς ἀπόλυτον, ὁ δὲ παρονομαστὴς ὡς τακτικὸν ἀριθμητικόν.

Ἀπὸ ὅσα προηγουμένως εἴπομεν προκύπτει ὅτι:

*Κάθε κλάσμα εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.*

Διὰ τῆς ἐπινοήσεως ἑπομένως τῶν κλασμάτων πᾶσα *διαίρεσις εἶναι δυνατὴ καὶ τελεία.*

Π.χ. $7 : 9 = \frac{7}{9}$, $17 : 4 = \frac{17}{4}$ κτλ.

***Ἀσκήσεις***. 213) Πόσον μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι 1, 2, 3, 4, 5 δεκάρες; ἢ 1, 5, 8, 12, 26 λεπτά;

214) Πόσον μέρος τῆς ὀκᾶς εἶναι 1, 8, 17, 23, 142 δράμια;

215) Πόσον μέρος τοῦ πήχεως εἶναι 1, 3, 6, 7 ρούπια;

216) Πόσον μέρος τοῦ στατῆρος εἶναι 1, 3, 15, 19, 36 ὀκάδες;

217) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα τῶν ἀκολούθων διαιρέσεων 3 : 12, 1 : 7, 23 : 37, 32 : 50.

§ **106**. **Σύγκρισις τῶν κλασμάτων πρὸς τὴν ἀκε-**

**ραίαν μονάδα.** Ἂς διαιρέσωμεν δύο ὅμοια μῆλα εἰς 4 ἴσα μέρ
τὸ καθ' ἕν. Τρία ἀπὸ αὐτὰ ἀποτελοῦσι μέρος μικρότερον ἑνὸς μήλο
4 ἀποτελοῦσιν ἓν μῆλον καὶ 7 ἀποτελοῦσι μέρος μεγαλύτερο
μήλου. Ὥστε $\frac{3}{4}<1$, $\frac{4}{4}=1$, $\frac{7}{4}>1$.

Ἄρα: *Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος εἶναι μικρότερος ἴσος, ἢ με γαλύτερος ἀπὸ τὸν παρονομαστήν, τὸ κλάσμα εἶναι ἀντιστοίχως μι κρότερον, ἴσον ἢ μεγαλύτερον ἀπὸ τὴν 1.*

***Ἀσκήσεις.*** (ἀγράφως) 218) Ποῖα ἀπὸ τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖ ἔχουσι παρονομαστὴν 5, εἶναι μικρότερα ἀπὸ τὴν 1; Ποῖον ἰσοῦ ται πρὸς 1; Ὀνομάσατε δύο μεγαλύτερα τῆς 1.

219) Ποῖα ἀπὸ τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἀριθμητὴν 7 εἶναι μεγαλύτερα τῆς 1; Ποῖον ἰσοῦται πρὸς 1; Ὀνομάσατε τρί μικρότερα τῆς 1.

220) Ποῖα ἀπὸ τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{8}{8}$ εἶνα ἴσα, ποῖα μικρότερα καὶ ποῖα μεγαλύτερα ἀπὸ τὴν 1;

221) Πόσα δωδέκατα, ἔννατα, εἰκοστὰ ἔχει ἡ 1;

§ **107. Τροπὴ ἀκεραίου εἰς κλάσμα.** Γνωρίζομε ὅτι 5 πηχ. ἔχουσιν $8\times5=40$ ρούπια· ἄρα 5 πήχ.$=\frac{40}{8}$πήχ. Ὁμοίω

15 δραχ.$=10\times15=150$ δεκάρες$=\frac{150}{10}$ δραχ.

Ἄρα: *Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀκέραιον εἰς κλάσμα μὲ δοθέντα πα ρονομαστήν, πολ/ζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν κα ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφομεν ὡς παρονομαστὴν τὸν δοθέντα.*

*Ἀσκήσεις.* (ἀγράφως) 222) Πόσα ὄγδοα ἔχουσιν 7, 4, 1 πήχεις;

223) Πόσα δέκατα ἢ ἑκατοστὰ ἔχουσι 18, 23, 165 δραχμαί;

224) Πόσα τρίτα καὶ πόσα δωδέκατα ἔχει ἕκαστος ἀπὸ τοὺ ἀριθμοὺς 8, 6, 20;

225) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἴσον πρὸς τὸν 3 καὶ νὰ ἔχῃ παρο νομαστὴν 15.

226) Ποῖον ἀπὸ τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι παρονομαστὴ 12 ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν 3, ποῖον πρὸς τὸν 5 καὶ ποῖον πρὸ τὸν 12;

§ **108. Μικτοὶ ἀριθμοί.** Ἂν μοιράσωμεν 17 δραχμὰ εἰς 3 ἀνθρώπους, θὰ δόσωμεν εἰς καθένα ἀπὸ 5 δραχ. καὶ θὰ μεί ωσι καὶ 2 δραχ. Ἂν δὲ μοιράσωμεν καὶ αὐτάς, θὰ δόσωμεν εἰς καθ' ἕνα ἀπὸ $\frac{2}{3}$ δραχ. Ὥστε τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶναι δραχ + $\frac{2}{3}$ δραχ, ἢ 5 $\frac{2}{3}$ δραχ. Ὁ ἀριθμὸς 5 $\frac{2}{3}$ καλεῖται μικτός.

*Γενικῶς : Μικτὸς ἀριθμὸς καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ποτελεῖται ἀπὸ ἀκέραιον καὶ κλάσμα.*

Ἐπειδὴ ὁ 5 ἔχει (5×3) τρίτα, ὁ 5 $\frac{2}{3}$ ἔχει τὸ ὅλον 5×3)+2=17 τρίτα, καὶ γράφεται $\frac{17}{3}$.

Ἄρα : *Διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν εἰς κλάσμα, πολ]ζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμιστὴν τοῦ κλάσματος. Ὑπὸ τὸ ἄθροισμα δὲ γράφαμεν ὡς παρονομαστὴν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος.*

*Ἀσκήσεις.* (ἀγράφως καὶ γραπτῶς) 227) Νὰ τραπῶσιν εἰς κλάσματα οἱ μικτοὶ $3\frac{1}{5}$, $7\frac{2}{3}$, $6\frac{4}{5}$, $8\frac{1}{5}$, $9\frac{4}{7}$, $2\frac{3}{11}$, $5\frac{7}{15}$, $7\frac{1}{30}$,

$$9\frac{3}{40},\quad 25\frac{4}{5},\quad 25\frac{4}{5},\quad 120\frac{1}{4}.$$

228) Ἠγόρασέ τις $4\frac{3}{8}$ πήχεις ὑφάσματος. Πόσα ὄγδοα ἠγόρασε τὸ ὅλον ;

229) Πόσα τετρακοσιοστὰ τῆς ὀκᾶς ἔχουσιν $5\frac{23}{400}$ ὀκάδες καὶ πόσα $10\frac{37}{400}$ ὀκ. ;

230) Πόσα δέκατα τῆς δραχμῆς ἔχουσι $16\frac{7}{10}$ δραχμαὶ καὶ πόσα $25\frac{9}{10}$ δραχμαί ;

§ **109. Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων κλάσματος.** Ἂν 38 δραχ. μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου εἰς 4 πτωχούς, λαμβάνει ἕκαστος $\frac{38}{4}$ δραχ. (§ 105). Ἐκτελοῦντες δὲ τὴν διαίρεσιν 38 : 4 εὑρίσκομεν ὅτι κάθε μερίδιον εἶναι 9 δραχ, μένουσι δὲ 2 δραχμαί.

Ἀπὸ αὐτὰς λαμβάνει ὁ καθεὶς $\frac{2}{4}$ δραχ. Ὅλον λοιπὸν τὸ μερίδιον εἶναι $9\frac{2}{4}$ δραχ. Εἶναι ἐπομένως $\frac{38}{4}=9\frac{2}{4}$.

Ἄρα: *Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας κλάσματος, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· καὶ τὸ μὲν πηλίκον φανερώνει τὰς περιεχομένας ἀκεραίας μονάδας, τὸ δὲ ὑπόλοιπον φανρώνει τὸ πλῆθος τῶν κλασματικῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι περιέχονται ἀκόμη.*

***Ἀσκήσεις.*** 231) Νὰ ἐξαχθῶσιν αἱ ἀκέραιαι μονάδες τῶν κλασμάτων $\frac{5}{2}$, $\frac{12}{2}$, $\frac{64}{8}$, $\frac{28}{14}$, $\frac{79}{12}$, $\frac{124}{35}$, $\frac{267}{100}$, $\frac{485}{200}$.

232) Εἰς τίνος εἴδους ἀριθμὸν τρέπεται μετὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ἀκεραίων μονάδων καθ' ἓν ἀπὸ τὰ κλάσματα

$$\frac{105}{2},\ \frac{224}{4},\ \frac{307}{3},\ \frac{123}{3},\ \frac{400}{5},\ \frac{1031}{5};$$

## Γενίκευσις τοῦ ὁρισμοῦ τῆς διαιρέσεως.

§ **110. Πρόβλημα I.** Τὸ *ρούπιον ὑφάσματος τιμᾶται* $\frac{3}{4}$ *δραχ. Πόσον τιμῶνται τὰ 4 ἢ 8 ρούπια ἐξ αὐτοῦ;*

*Λύσις.* Α') Ἀφ' 1 ρ. τιμᾶται $\frac{3}{4}$ δραχ. τὰ 4ρ τιμῶνται $\frac{3}{4}$ δρ.$\times 4$

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, ἔπεται ὅτι:

$$\frac{3}{4}\times 4=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\ \hline 1+1+1=3 \text{ δραχ.}\end{array}\right.$$

Ἄρα: *Ἐὰν κλάσμα πολ/σθῇ ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του, δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του.*

Β') Τὰ 8 ρούπια τιμῶνται $\frac{3}{4}$ δρ. $\times 8$. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ 4 ρούπια τιμῶνται 3 δραχ., τὰ 8 ρούπια τιμῶνται 6 δραχ.

Ὥστε $\frac{3}{4}\times 8=6$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{3}{4}\times 12=9$.

Ἄρα : *Ἐὰν κλάσμα πολ/σθῇ ἐπὶ πολ/σιον τοῦ παρονομαστοῦ, δίδει γινόμενον τὸ ἰσοπλ/σιον τοῦ ἀριθμητοῦ.*

§ **111. Γενικὸς ὁρισμὸς τῆς διαιρέσεως.** Ἐπειδὴ $\frac{3}{4}=3:4$ καὶ $\frac{3}{4}\times 4=3$ ἕπεται ὅτι :

*Διαίρεσις ἀριθμοῦ δι' ἄλλου καλεῖται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τρίτον, ὁ ὁποῖος πολ/ζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει τὸν διαιρετέον.*

Κατὰ ταῦτα, ἂν $\alpha\times\beta=\gamma$, θὰ εἶναι καὶ $\gamma:\alpha=\beta$, $\gamma:\beta=\alpha$.

**Ἀσκήσεις.** (ἀγράφως) 233) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα

$\frac{1}{4}\times 7$, $\frac{9}{12}\times 12$, $\frac{2}{5}\times 10$, $\frac{7}{9}\times 27$, $\frac{3}{4}\times 16$, $\frac{5}{4}\times 12$,

$\frac{4}{5}\times 20$, $\frac{9}{12}\times 60$, $\frac{7}{20}\times 20$, $\frac{1}{8}\times 72$.

234) Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολ/σωμεν τὸ κλάσμα $\frac{1}{4}$, διὰ νὰ εὕρωμεν γινόμενον 2 ἢ 4 ἢ 16 ;

235) Ἐὰν ἡ ὀκᾶ τοῦ ἅλατος τιμᾶται $\frac{3}{2}$ δραχ. πόσον τιμῶνται 8 ὀκ. ἅλατος ;

## Σύγκρισις τῶν κλασμάτων πρὸς ἄλληλα.

§ **112. Ἴσα καὶ ἄνισα κλάσματα.** Α΄) Ἂν 8 πτωχοὶ ἐμοίρασαν ἐξ ἴσου ποσὸν χρημάτων καὶ ἔλαβον ἀπὸ $\frac{6}{8}$ δραχ., τὸ μοιρασθὲν ποσὸν ἦτο $\frac{6}{8}\times 8=6$ δραχ. Ἂν δὲ ἔλαβεν ἕκαστος ἀπὸ $\frac{3}{4}$ δραχ., τὸ μοιρασθὲν ποσὸν ἦτο $\frac{3}{4}\times 8=6$ δραχ.

Ἐπειδὴ τὸ αὐτὸ ποσὸν ἐμοιράσθη εἰς τὸ αὐτὸ πλῆθος μεριδίων, ἕπεται ὅτι τὸ μερίδιον εἶναι τὸ αὐτό, ἤτοι $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

Ἄρα : *Δύο κλάσματα λέγονται ἴσα, ἂν ἰσάκις λαμβανόμενα γίνωνται ἀκέραιοι ἴσοι.*

Β΄) Ἐπειδὴ $\frac{3}{4}\times 12=9$, $\frac{4}{6}\times 12=8$, ἕπεται ὅτι $\frac{4}{6}<\frac{3}{4}$.

Ἄρα: *Δύο κλάσματα λέγονται ἄνισα, ἂν ἰσάκις λαμβανόμενα γίνωνται ἀκέραιοι ἄνισοι Μεγαλύτερον δὲ εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον γίνεται μεγαλύτερος ἀκέραιος.*

Συνήθως πολ]ζομεν τὰ πρὸς σύγκρισιν κλάσματα ἐπὶ τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν παρονομαστῶν.

Οὕτως ἐπειδὴ $\frac{4}{6} \times 18 = 12$, $\frac{6}{9} \times 18 = 12$, $\frac{2}{3} \times 18 = 12$,

ἕπεται ὅτι $$\frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Ἐκ τῶν προηγουμένων δὲ ἐξάγονται εὐκόλως καὶ τὰ ἑξῆς ἄμεσα γνωρίσματα.

*α΄) Κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχωσι καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν.*

*β΄) Κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ διαφόρους ἀριθμητὰς εἶναι ἄνισα καὶ μεγαλύτερον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει μεγαλύτερον ἀριθμητήν.*

*γ΄) Κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν καὶ διαφόρους παρονομαστὰς εἶναι ἄνισα καὶ μεγαλύτερον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν μικρότερον παρονομαστήν.*

***Ἀσκήσεις.*** 236) Νὰ τεθῶσι κατὰ τάξιν μεγέθους τὰ κλάσματα $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{7}$ καὶ ἔπειτα τὰ $\frac{3}{9}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{15}$.

237) Νὰ συγκριθῶσι τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{9}{12}$, ἔπειτα δὲ τὰ $\frac{2}{7}$ καὶ $\frac{6}{21}$.

238) Νὰ συγκριθῶσι τὰ κλάσματα $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{6}{8}$, ἔπειτα δὲ τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{7}{8}$.

239) Νὰ τεθῶσι κατὰ τάξιν μεγέθους τὰ κλάσματα

$$\frac{4}{7},\quad \frac{9}{13},\quad \frac{8}{21}.$$

Ὁμοίως τὰ $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{4}$.

240) Εἰς τοὺς δύο ὅρους τυχόντος κλάσματος μικροτέρου τοῦ 1 προσθέσατε τὸν αὐτὸν ἀκέραιον καὶ συγκρίνατε τὸ νέον κλάσμα

ε τὸ πρῶτον. Ἐπαναλάβατε τὰ αὐτὰ μὲ κλάσμα μεγαλύτερον οῦ 1.

§ 113. Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων. Γνωρίζομεν ὅτι $\frac{3}{8}$ πήχ $=3$ ρούπια, $\frac{6}{8}$ πήχ $=6$ ρούπια, τὰ δὲ 6 ρούπια εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὰ 3 ρούπια.

Ἄρα $\frac{6}{8}$ εἶναι διπλάσιον ἀπὸ τὸ $\frac{3}{8}$, τοῦτο δὲ ἥμισυ τοῦ $\frac{6}{8}$.

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι τὸ $\frac{9}{8}$ εἶναι τριπλάσιον ἀπὸ τὸ $\frac{3}{8}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τρίτον τοῦ $\frac{9}{8}$.

Ἄρα : Α′. *Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος πολ/σθῇ ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμόν, τὸ κλάσμα πολ/ζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον.*

Β′. *Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος διαιρεθῇ μὲ ἕνα διαιρέτην αὐτοῦ, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

***Ἀσκήσεις***· (ἀγράφως) 241) Νὰ εὑρεθῇ τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον, πενταπλάσιον ἑκάστου τῶν κλασμάτων

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{9}{23},\ \frac{12}{37},\ \frac{15}{40}.$$

242) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἥμισυ ἑκάστου τῶν κλασμάτων

$$\frac{2}{6},\ \frac{4}{9},\ \frac{6}{10},\ \frac{10}{11},\ \frac{14}{29},\ \frac{40}{53},\ \frac{104}{83}.$$

243) Νὰ εὑρεθῇ τὸ τρίτον ἑκάστου τῶν κλασμάτων

$$\frac{3}{4},\ \frac{6}{11},\ \frac{9}{12}\ \frac{15}{26},\ \frac{21}{38},\ \frac{33}{45},\ \frac{45}{57}.$$

244) Νὰ εὑρεθῇ τὸ τέταρτον ἑκάστου τῶν κλασμάτων

$$\frac{4}{7},\ \frac{8}{15},\ \frac{12}{31},\ \frac{20}{47},\ \frac{28}{55},\ \frac{60}{73}.$$

Γ′. Γνωρίζομεν ὅτι $\frac{7}{10}$ δραχ $=7$ δεκάρες $=14$ πεντάρες καὶ $\frac{7}{20}$ δραχ $=7$ πεντάρες. Εἶναι λοιπὸν $\frac{7}{10}$ διπλάσιον τοῦ $\frac{7}{20}$, τοῦτο δὲ εἶναι ἥμισυ τοῦ $\frac{7}{10}$.

Ἄρα: *Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος πολ/σθῇ ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμόν, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

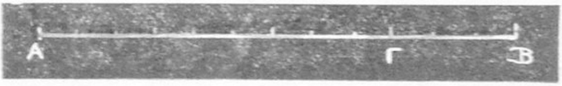
Δ΄. *Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος διαιρεθῇ διὰ διαιρέτου αὐτοῦ, τὸ κλάσμα πολ/ζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

*Ἀσκήσεις* (ἀγράφως) 245) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον καὶ τὸ τέταρτον ἑκάστου τῶν κλασμάτων $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{26}$, $\frac{13}{20}$.

246) Νὰ εὑρεθῇ τὸ τριπλάσιον ἑκάστου τῶν κλασμάτων $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{9}{16}$ χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ὁ ἀριθμητής.

Ε΄. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ καὶ τὸ $\frac{9}{12}$, τὸ ὁποῖον ἔχει τριπλασίους ἀντιστοίχους ὅρους. Ἐὰν πολ/σωμεν ταῦτα ἐπὶ 12, εὑρίσκομεν

$$\frac{3}{4}\times 12=9, \quad \frac{9}{12}\times 12=9. \text{ Ἄρα } \frac{3}{4}=\frac{9}{12}.$$




*(Σχ. 1)*

Περὶ τούτου βεβαιούμεθα καὶ ὡς ἑξῆς: Ἐὰν ΑΒ (Σχ. 1) παριστᾷ τὴν ἀκεραίαν μονάδα, $\frac{3}{4}$ αὐτῆς εἶναι τὸ ΑΓ. Ἀλλὰ καὶ $\frac{9}{12}$ εἶναι πάλιν τὸ ΑΓ. Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι

$$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}, \quad \frac{3}{7}=\frac{12}{28} \text{ κ.τ.λ.}$$

Ἄρα: *Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι κλάσματος πολ/σθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, ἡ ἀξία αὐτοῦ δὲν μεταβάλλεται.*

***Ἀσκήσεις***. 247) Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ εἰς τέταρτα, τὸ $\frac{2}{5}$ εἰς δέκατα καὶ τὸ $\frac{4}{7}$ εἰς δέκατα τέταρτα.

248) Νὰ τραπῶσι τὰ κλάσματα $\frac{3}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, εἰς τρίτα χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία ἑκάστου;

249) Ποῖον ἀπὸ τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἀριθμητὴν 7 εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\frac{21}{24}$;

§ **114. Ἁπλοποίησις κλάσματος.** Ἐὰν διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους κλάσματος π.χ. τοῦ $\frac{4}{6}$ διὰ τοῦ κ.δ. αὐτῶν 2, εὑρίσκομεν $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Ἡ ἐργασία αὕτη λέγεται *ἁπλοποίησις* τοῦ $\frac{4}{6}$.

*Γενικῶς* : *Ἁπλοποίησις δοθέντος κλάσματος λέγεται ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν κλάσμα ἴσον μὲ τὸ δοθὲν καὶ ἔχον μικροτέρους ἀντιστοίχους ὅρους.*

*Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν δὲ δοθὲν κλάσμα, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους του διὰ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.*

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι : *Ἐὰν οἱ ὅροι κλάσματος εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τοῦτο δὲν ἁπλοποιεῖται.*

Πᾶν τοιοῦτον κλάσμα καλεῖται *ἀνάγωγον*. Π. χ. τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$ εἶναι ἀνάγωγα.

*Ἐὰν οἱ ὅροι κλάσματος διαιρεθῶσι διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν, προκύπτει κλάσμα ἀνάγωγον* (§ 90 Ε΄).

*Ἀσκήσεις* 250) Νὰ ἁπλοποιηθῶσι τὰ κλάσματα

$$\frac{2}{4},\ \frac{3}{6},\ \frac{6}{8},\ \frac{10}{12},\ \frac{3}{9},\ \frac{6}{15},\ \frac{18}{8},\ \frac{25}{15},\ \frac{8}{12},\ \frac{6}{18},$$
$$\frac{9}{21},\ \frac{19}{38},\ \frac{15}{35}.$$

251) Νὰ καταστῇ ἀνάγωγον διὰ μιᾶς ἁπλοποιήσεως ἕκαστον ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{12}{18}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{21}{28}$, $\frac{18}{46}$, $\frac{25}{100}$, $\frac{33}{12}$, $\frac{45}{25}$.

252) Ποῖον κλάσμα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\frac{5}{8}$, οἱ δὲ ὅροι του ἔχουσι μ.κ.δ. τὸν 5 ;

§ **115. Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.** Τὰ κλάσματα $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{7}$ ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, λέγονται δὲ *ὁμώνυμα* κλάσματα. Τὰ δὲ $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{10}$ ἔχουσι διαφόρους παρονομαστὰς καὶ λέγονται *ἑτερώνυμα* κλάσματα.

*Γενικῶς: Δύο ἢ περισσότερα κλάσματα λέγονται ὁμώνυμα μέ ἂν ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἑτερώνυμα δέ, ἂν ἔχωσι διαφ ρους παρονομαστάς.*

Α΄. Ἔστωσαν τὰ κλάσματα $\frac{1}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{8}{16}$, τῶν ὁποίω οἱ παρονομασταὶ ἔχουσι ἐ.κ.π. 32. Ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ α΄ πολ]σθῶσ ἐπὶ 8 (δηλ. 32 : 4), τοῦ β΄ ἐπὶ 4 (δηλ. 32 : 8) καὶ τοῦ γ΄ ἐπὶ (δηλ. 32 : 16), προκύπτουσι τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{8}{32}$, $\frac{24}{32}$ $\frac{16}{32}$, τὰ ὁποῖα εἶναι (§ 113 Ε΄) ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ δοθέντ

Ἄρα: *Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμ διαιροῦμεν τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν δι' ἑκάστου παρ νομαστοῦ καὶ πολ]ζομεν τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ ἀ τίστοιχον πηλίκον.*

Εἶναι φανερὸν ὅτι κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον δυνάμεθα νὰ κάμω μεν κοινὸν παρονομαστὴν οἱονδήποτε κοινὸν πολ]σιον τῶν παρον μαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων. Ἂν π. χ. θέλωμεν νὰ κάμω μεν κοινὸν παρονομαστὴν τῶν $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{20}$ τὸ γινόμενον $8 \times 2$ παρατηροῦμεν ὅτι $(8\times20) : 8=20$ καὶ $(8\times20) : 20=8$. Ἔπειτ δὲ πολ]ζομεν τοὺς ὅρους τοῦ α΄ ἐπὶ 20 καὶ τοὺς ὅρους τοῦ β΄ ἐ 8 καὶ εὑρίσκομεν τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{60}{160}$, $\frac{56}{160}$.

Ὁμοίως προκειμένου περὶ τῶν κλασμάτων $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{9}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{4}{5}=\frac{4\times6\times9}{5\times6\times9}=\frac{216}{270}$, $\frac{3}{6}=\frac{3\times5\times9}{5\times6\times9}=\frac{135}{270}$,

$$\frac{2}{9}=\frac{2\times5\times6}{6\times5\times9}=\frac{60}{270}.$$

Ἄρα: *Β΄. Διὰ νὰ τρέψωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα ε ὁμώνυμα, ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν τοὺς ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸν παρ νομαστὴν τοῦ ἄλλου.*

Γ΄. *Διὰ νὰ τρέψωμεν πολλὰ κλάσματα ἑτερώνυμα εἰς ὁμώνυμ ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν τοὺς ὅρους ἑκάστου μὲ τὸ γινόμενον τῶν πα ρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων.*

Ὅταν οἱ παρονομασταὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύ ὅλαι αἱ μέθοδοι αὗται ἄγουσιν εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον (§ 103 Σημ.

Εἰς τὰς ἄλλας περιπτώσεις πρέπει νὰ προτιμᾶται ἡ Α΄ μέθοδος (διατί;)

ΣΗΜ. Ἐνίοτε δι' ἁπλοποιήσεως τῶν δοθέντων κλασμάτων ἢ τινῶν ἐξ αὐτῶν γίνονται ταῦτα ὁμώνυμα. Οὕτως, ἂν ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{1}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{8}{16}$ ἁπλοποιηθῶσι τὰ δύο τελευταῖα, προκύπτουσι τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$.

Διὰ τῆς τροπῆς ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα ἀνάγεται ἡ σύγκρισις αὐτῶν εἰς σύγκρισιν τῶν ἀριθμητῶν αὐτῶν (§ 112).

*Ἀσκήσεις.* 253) Νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα

α΄) $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{5}{8}$ β΄) τὰ $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{7}{12}$, γ΄) τὰ $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{18}$,

δ΄) $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{1}{8}$ δ΄) τὰ $\frac{4}{7}$ καὶ $\frac{1}{3}$, στ΄) τὰ $\frac{3}{8}$ καὶ $\frac{7}{6}$.

254) Νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα

α΄) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, β΄) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, γ΄) $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{1}{15}$.

δ΄) $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{7}{24}$, ε΄) $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{9}{16}$.

255) Νὰ ταχθῶσι κατὰ τάξιν μεγέθους τὰ κλάσματα $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$ καὶ τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$.

256) Νὰ τραπῇ ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς α εἰς κλάσμα μὲ παρονομαστὴν λ.

257) Νὰ τραπῇ ὁ μικτὸς $2\frac{3}{\lambda}$ εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα.

258) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $\frac{2\times\lambda}{3\times\lambda}$ καὶ τὸ $\frac{\alpha}{3\alpha}$.

259) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα $\frac{\alpha}{\beta}\times\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}\times(2\beta)$, $\frac{\alpha}{9\beta}\times3$, $\frac{5\alpha}{3\times\beta^2}\times9\beta^2$ καὶ τὰ πηλίκα $\frac{\mu}{3\lambda}:3$, $\frac{3\mu}{\nu}:6$.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

## ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

### *Α'. Πρόσθεσις.*

§ **116. Ὁρισμὸς τῆς προσθέσεως.—Πρόσθεσι κλασμάτων.** *Πρόσθεσις οἱωνδήποτε δοθέντων ἀριθμῶν καλε ται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν ἄλλον, ὁ ὁποῖος ἔχει ὅλο τὰς μονάδας αὐτῶν καὶ μόνον αὐτάς.*

Οἱ προστιθέμενοι ἀριθμοὶ λέγονται *προσθετέοι*, τὸ δὲ ἐξα γόμενον τῆς προσθέσεως λέγεται *ἄθροισμα*.

Οὕτως, ἂν πτωχὸς ἔλαβε παρὰ διαβάτου $\frac{5}{20}$ δραχμῆς, πα ἄλλου $\frac{3}{20}$ δραχ καὶ παρὰ τρίτου $\frac{6}{20}$ δραχ, ἔλαβε τὸ ὅλο $5+3+6=14$ εἰκοστὰ τῆς δραχμῆς.

$$\text{Ἄρα}\quad \frac{5}{20}+\frac{3}{20}+\frac{6}{20}=\frac{14}{20}.$$

Ἂν δὲ ἔμπορος ἐπώλησε κατὰ σειρὰν τὰ $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{20}$ τε μαχίου ὑφάσματος εἶναι φανερὸν ὅτι ἐπώλησε τὸ ὅλο $\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{1}{20}\right)$ τοῦ ὑφάσματος. Ἐὰν τρέψωμεν τὰ κλάσματ ταῦτα εἰς ὁμώνυμα, εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{1}{20}=\frac{16}{40}+\frac{15}{40}+\frac{2}{40}=\frac{33}{40}$$

Ἄρα : *Διὰ νὰ προσθέσωμεν δοθέντα κλάσματα, τρέπομε αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα (ἂν εἶναι ἑτερώνυμα) καὶ προσθέτομεν τοὺ ἀριθμητὰς τῶν ὁμωνύμων τούτων κλασμάτων, ὑποκάτω δὲ ἀπ τὸ ἄθροισμα γράφομεν ὡς παρονομαστὴν τὸν κοινὸν αὐτῶν παρο νομαστήν.*

*Ἀσκήσεις.* 260) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀθροίσματα α') $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$ β') $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$, γ') $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{4}{8}$, δ') $\frac{3}{12}+\frac{5}{12}+\frac{1}{12}+\frac{2}{12}$

261) Νὰ προστεθῶσι τὰ κλάσματα α') $\frac{2}{6}+\frac{3}{9}$,

β΄) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{7}{15}$, γ΄) $\frac{2}{7}+\frac{3}{15}+\frac{5}{21}+\frac{1}{42}$.

δ΄) $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$.

262) Μικροπωλητὴς ἐπώλησεν ἐκ τεμαχίου κορδέλλας κατὰ σειρὰν $\frac{3}{8}$ πήχ, $\frac{15}{4}$ πήχ, $\frac{17}{2}$ πήχ. Παρετήρησε δὲ ὅτι ἔμειναν καὶ $\frac{5}{8}$ πήχ. Πόσους πήχεις εἶχε κατ' ἀρχὰς τὸ τεμάχιον τοῦτο ;

263) Μία πλευρὰ τετραδίου εἶναι $\frac{8}{100}$ μ, ἡ ἄλλη $\frac{12}{100}$ μ καὶ ἡ ἀπέναντι ἑκάστης τούτων εἶναι ἴση πρὸς αὐτήν. Πόσα μέτρα εἶναι ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ τετραδίου τούτου ;

264) Ὑπάλληλος δαπανᾷ τὰ $\frac{5}{12}$ τοῦ ἡμερομισθίου του διὰ τροφήν, τὸ $\frac{1}{8}$ δι' ἐνοίκιον καὶ τὰ $\frac{3}{8}$ διὰ τὰς ἄλλας αὐτοῦ ἀνάγκας. Πόσον μέρος τοῦ ἡμερομισθίου του δαπανᾷ ;

§ **117. Πρόσθεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.** Ἐὰν παντοπώλης πωλήσῃ εἰς ἕνα 3 ὀκ. βουτύρου, εἰς ἄλλον $\frac{1}{4}$ ὀκ. καὶ εἰς γ΄ $1\frac{1}{8}$ ὀκ. θὰ πωλήσῃ τὸ ὅλον

$$3 \text{ ὀκ.} + \frac{1}{4} \text{ ὀκ.} + 1\frac{1}{8} \text{ ὀκ.}$$

Ἐπειδὴ δὲ 3 ὀκ $=\frac{24}{8}$ ὀκ, $\frac{1}{4}$ ὀκ. $=\frac{2}{8}$ καὶ $1\frac{1}{8}=\frac{9}{8}$ ὀκ. ἕπεται ὅτι

$$3 \text{ ὀκ.} + \frac{1}{4} \text{ ὀκ.} + 1\frac{1}{8} \text{ ὀκ.} = \frac{24}{8} \text{ ὀκ} + \frac{2}{8} \text{ ὀκ} + \frac{9}{8} \text{ ὀκ}$$

$$= \frac{35}{8} \text{ ὀκ} = 4\frac{3}{8} \text{ ὀκ.}$$

Ἄρα : *Διὰ νὰ προσθέσωμεν οἱουσδήποτε ἀριθμούς, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς ὁμώνυμα κλάσματα καὶ προσθέτομεν ταῦτα.*

β΄) Τὸ προηγούμενον ἄθροισμα εὑρίσκομεν καὶ ἂν προσθέσωμεν χωριστὰ τὰς ἀκεραίας ὀκάδας καὶ χωριστὰ τὰ μέρη αὐτῆς,

ἔπειτα δὲ ἑνώσωμεν τὰ δύο ἐξαγόμενα. Οὕτως ἐπειδὴ $3+1=4$ κα
$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ ἔπεται ὅτι $3+\frac{1}{4}+1\frac{1}{8}=4\frac{3}{8}$.

Ἄρα : *Διὰ νὰ προσθέσωμεν οἱουσδήποτε ἀριθμούς, προσθέτο μεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα, ἔπειτα δ ἑνώνομεν τὰ ἐξαγόμενα.*

*Ἀσκήσεις.* 265) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀθροίσματα α΄) $\frac{2}{3}+3\frac{1}{6}$

β΄) $\frac{5}{8}+4+1\frac{7}{12}+\frac{3}{4}$, γ΄) $2\frac{1}{4}+\frac{7}{8}+\frac{3}{16}+1+3\frac{5}{32}$,

δ΄) $3\frac{1}{5}+2\frac{1}{4}+\frac{7}{20}+4\frac{1}{8}$, ε΄) $14\frac{1}{5}+\frac{2}{10}+3\frac{1}{15}+1\frac{3}{45}$,

στ΄) $3\frac{1}{4}+7\frac{2}{6}+4\frac{1}{2}+1\frac{3}{8}$.

266) Οἰκογενειάρχης ἔδωκε μίαν ἡμέραν $45\frac{2}{5}$ δραχ. διὰ ν ἀγοράσῃ κρέας, $23\frac{1}{10}$ δραχ. διὰ νὰ ἀγοράσῃ ἄρτον καὶ 8 δραχμὰ διὰ χόρτα. Πόσα χρήματα ἐδαπάνησε τὴν ἡμέραν ἐκείνην ;

267) Ἔμπορος ἐπώλησεν ἐκ τεμαχίου ὑφάσματος $4\frac{3}{8}$ πή χεις, ἔπειτα ἄλλα $\frac{5}{8}$ καὶ ἔπειτα ἄλλας 5 πήχεις καὶ ἔμεινα ἀκόμη 25 πήχεις. Πόσους πήχεις ἐπώλησε τὸ ὅλον καὶ πόσου εἶχε κατ' ἀρχὰς τὸ τεμάχιον τοῦτο ;

268) Ἐπλήρωσέ τις $265\frac{3}{4}$ δραχμὰς ἀπέναντι χρέους κα χρεωστεῖ ἀκόμη $108\frac{2}{5}$ δραχ. Πόσον ἦτο τὸ ἀρχικὸν χρέος ;

269) Παντοπώλης ἐπώλησε $\frac{3}{4}$ ὀκ. ζακχάρεως καὶ ἔλαβ $16\frac{1}{2}$ δραχ. Ἔπειτα ἐπώλησεν ἄλλα $\frac{5}{8}$ ὀκάδας καὶ ἔλαβ $13\frac{3}{4}$ δραχμάς. Πόσην ζάκχαριν ἐπώλησε καὶ πόσα χρήματ ἔλαβε τὸ ὅλον ;

270) Ἐργάτης σκάπτει ἄμπελον εἰς 4 ἡμέρας, ἄλλος σκάπτ

αὐτὴν εἰς 3 ἡμέρας καὶ γ' εἰς 5 ἡμέρας. Πόσον μέρος τῆς ἀμπέλου σκάπτουσι καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ εἰς 1 ἡμέραν;

271) Εἰς ἐργοστάσιον ἐργάζεται πατήρ, μήτηρ καὶ υἱός. Τὸ ἡμερομίσθιον τοῦ υἱοῦ εἶναι $23\frac{3}{4}$ δραχ., τῆς μητρὸς εἶναι μεγαλύτερον αὐτοῦ κατὰ $12\frac{5}{8}$ δραχ., τοῦ δὲ πατρὸς εἶναι ὅσον τὸ ἄθροισμα τῶν ἡμερομισθίων τῆς μητρὸς καὶ τοῦ υἱοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον τῆς μητρὸς καὶ τοῦ πατρὸς καὶ πόσον λαμβάνουσιν οἱ τρεῖς ὁμοῦ τὴν ἡμέραν.

272) Ἀπὸ βαρέλιον οἴνου ἀφῃρέθησαν μίαν ἡμέραν $35\frac{5}{6}$ ὀκ., τὴν ἄλλην $72\frac{8}{12}$ ὀκ., τὴν τρίτην 100 ὀκ. καὶ τὴν δ' ὅσαι τὴν α' καὶ γ'. Οὕτω δὲ ἔμειναν εἰς αὐτὸ ἀκόμη $55\frac{2}{3}$ ὀκ. Πόσας ὀκάδας εἶχεν ἀρχικῶς τὸ βαρέλιον τοῦτο;

## Β'. Ἀφαίρεσις.

§ **118. Ὁρισμὸς ἀφαιρέσεως.** *Ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ β ἀπὸ ἄλλου α λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τρίτον γ, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν β δίδει τὸν α.*

Ὁ α λέγεται πάλιν *μειωτέος*, ὁ β *ἀφαιρετέος* καὶ ὁ γ *ὑπόλοιπον* ἢ *διαφορά*.

Ἂν μαθητὴς εἶχε $\frac{7}{10}$ δραχμῆς καὶ ἐδαπάνησε δι' ἀγορὰν χάρτου $\frac{3}{10}$ δραχ., ἔμειναν εἰς αὐτὸν $\left(\frac{7}{10} - \frac{3}{10}\right)$ δραχ. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{7}{10}$ δραχ $= 7$ δεκάρες, $\frac{3}{10}$ δραχ $=3$δεκάρες, ἔπεται ὅτι $\frac{7}{10}$ δραχ $-$ $\frac{3}{10}$ δραχ $= 7$ δεκ $- 3$δεκ $=4$δεκ.

Καὶ ἐπειδὴ 4 δεκάρες $= \frac{4}{10}$ δραχ. ἔπεται ὅτι

$$\frac{7}{10} \text{ δραχ} - \frac{3}{10} \text{ δραχ} = \frac{4}{10} \text{ δραχ}.$$

Πράγματι δὲ $\frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$.

Ὁμοίως εἶναι $\frac{12}{20} - \frac{5}{20} = \frac{7}{20}$ καὶ γενικῶς

$$\frac{\alpha}{\mu} - \frac{\beta}{\mu} = \frac{\alpha-\beta}{\mu}.$$

Ἂν ὁ μαθητὴς ἐκεῖνος ἐδαπάνα $\frac{2}{5}$ δραχ. θὰ τοῦ ἔμειναν $\frac{7}{10}$ δραχ — $\frac{2}{5}$ δραχ. ἢ $\frac{7}{10}$ δραχ — $\frac{4}{10}$ δραχ $= \frac{3}{10}$ δρ

Ὥστε $\frac{7}{10} - \frac{2}{5} = \frac{7}{10} - \frac{4}{10} = \frac{3}{10}$.

Ἄρα: *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ κλάσμα, τρέπομε αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα, (ἂν εἶναι ἑτερώνυμα) καὶ ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ μειωτέου, ὑπακάτω δὲ ἀπὸ τὴν διαφορὰν γράφομεν ὡς παρονομαστὴν τὸν κοινὸν παρονομαστὴν αὐτῶν.*

***Ἀσκήσεις.*** 273) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως αἱ διαφοραὶ

α′) $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$, β′) $\frac{7}{12} - \frac{5}{12}$, γ′) $\frac{9}{17} - \frac{3}{17}$

274) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως αἱ διαφοραὶ

α) $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$, β′) $\frac{7}{12} - \frac{5}{12}$, γ′) $\frac{9}{17} - \frac{3}{17}$.

275) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως αἱ διαφοραὶ

α) $\frac{3}{4} - \frac{5}{8}$, β′) $\frac{7}{8} - \frac{3}{4}$, γ′) $\frac{8}{10} - \frac{1}{5}$.

276) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ διαφοραὶ

α′) $\frac{7}{6} - \frac{5}{8}$, β′) $\frac{9}{12} - \frac{1}{8}$, γ′) $\frac{12}{25} - \frac{4}{15}$, δ′) $\frac{17}{20} - \frac{13}{30}$.

277) Κιβώτιον πλῆρες ἐμπορεύματος ἔχει βάρος $\frac{11}{12}$ στατῆρο κενὸν δὲ $\frac{2}{44}$ στ. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ἐμπορεύματος;

278) Τὰ $\frac{8}{9}$ δεξαμενῆς περιέχουσιν ὕδωρ· ἔπειτα ἀνοίγει κρουνὸς αὐτῆς μέχρις οὗ κενωθοῦν τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῆς. Πόσον μέρος τῆ δεξαμενῆς ἔχει τότε ὕδωρ;

§ **119. Ἀφαίρεσις μικτοῦ ἀπὸ μικτοῦ.** Ἐὰν εἶ ις $15\frac{3}{5}$ δραχ. καὶ ἐδαπάνησε $7\frac{1}{3}$ δραχ. ἔμειναν εἰς αὐτὸν $15\frac{3}{5}$ δραχ $-7\frac{1}{3}$ δραχ. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν ταύτην σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

α') Ἐὰν ἐδαπάνα πρῶτον τὰς 7 δραχ. αὐτὰς θὰ ἐλάμβανεν ἀπὸ τὰς 15 δρχ, θὰ ἔμειναν δὲ εἰς αὐτὸν 8 δραχ. καὶ τὰ $\frac{3}{5}$ δραχ. Ἐὰν δὲ νοήσωμεν ὅτι τὸ $\frac{1}{3}$ δραχ. τὸ ὁποῖον ἐδαπάνησε κατόπιν, ἔβγαλεν ἀπὸ τὰ $\frac{3}{5}$ δραχ. ἔμειναν εἰς αὐτὸν αἱ 8 δραχ. καὶ ἀκόμη $\frac{3}{5}-\frac{1}{3}=\frac{4}{15}$ δραχ. Ἦτοι τοῦ ἔμειναν τὸ ὅλον $8\frac{4}{15}$ δραχ.

Γενικῶς: $(\alpha+\frac{\beta}{\mu})-(\delta+\frac{\gamma}{\nu})=(\alpha-\delta)+(\frac{\beta}{\mu}-\frac{\gamma}{\nu})$ ἂν $\frac{\beta}{\mu}>\frac{\gamma}{\nu}$.

β') Ἐπειδὴ $15\frac{3}{5}$ δραχ $=\frac{78}{5}$ δραχ καὶ $7\frac{1}{3}$ δραχ. $=\frac{22}{3}$ δραχ. ἕπεται ὅτι $15\frac{3}{5}-7\frac{1}{3}=\frac{78}{5}-\frac{22}{3}=\frac{124}{15}=8\frac{4}{15}$ δραχ.

Γενικῶς $\left(\alpha+\frac{\beta}{\mu}\right)-\left(\delta+\frac{\gamma}{\nu}\right)=\frac{\alpha.\mu+\beta}{\mu}-\frac{\delta.\nu+\gamma}{\nu}$.

Ἄρα: *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ μικτὸν ἀριθμόν, ἀφαιροῦμεν τὸν ἀκέραιον καὶ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου ἀντιστοίχως ἀπὸ τὸν ἀκέραιον καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ δύο ἐξαγόμενα. Ἢ τρέπομεν αὐτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἀφαιροῦμεν κατὰ τὰ γνωστά.*

Ἐὰν τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν κατὰ τὸν α' τρόπον, αὐξάνομεν τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου κατὰ μίαν ἀκεραίαν μονάδα, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ἀπὸ τὸν ἀκέραιον τοῦ μειωτέου. Οὕτω $6\frac{2}{5}-3\frac{4}{5}=5\frac{7}{5}-3\frac{4}{5}=2\frac{3}{5}$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐξηγοῦνται καὶ αἱ ἀκόλουθοι ἀφαιρέσεις.

α') $15\frac{3}{4}-5=10\frac{3}{4}$ ἢ $15\frac{3}{4}-5=\frac{63}{4}-\frac{20}{4}=\frac{43}{4}=10\frac{3}{4}$.

β') $8\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=8\frac{10}{12}-\frac{9}{12}=8\frac{1}{12}$ ἢ $8\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{106}{12}-\frac{9}{12}$

$$=\frac{97}{12}=8\frac{1}{12}.$$

γ΄) $12\frac{1}{4}-\frac{2}{3}=11\frac{5}{4}-\frac{2}{3}=11\frac{15}{12}-\frac{8}{12}=11\frac{7}{12}$ ἤ

$$12\frac{1}{4}-\frac{2}{3}=\frac{49}{4}-\frac{2}{3}=\frac{147}{12}-\frac{8}{12}=\frac{139}{12}=11\frac{7}{12}.$$

δ΄) $8-\frac{2}{5}=7\frac{5}{5}-\frac{2}{5}=7\frac{3}{5}$ ἢ $8-\frac{2}{5}=\frac{40}{5}-\frac{2}{5}=\frac{38}{5}=7\frac{3}{5}$.

***Ἀσκήσεις.*** 279) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἀγράφως αἱ ἀφαιρέσεις α΄) $8\frac{3}{5}-6$, β΄) $5\frac{4}{5}-\frac{3}{5}$, γ΄) $7-\frac{3}{5}$, δ΄) $10\frac{4}{7}-2\frac{3}{7}$

ε΄) $6-3\frac{4}{7}$, στ΄) $12\frac{1}{8}-\frac{5}{8}$.

280) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀφαιρέσεις α΄) $24\frac{3}{8}-10\frac{5}{8}$, β΄) $2\frac{3}{4}-\frac{1}{8}$, γ΄) $48\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$, δ΄) $19\frac{2}{3}-12\frac{4}{10}$,

ε΄) $46\frac{1}{5}-25\frac{2}{9}$, στ΄) $86-40\frac{3}{17}$.

281) Οἰκογένεια εἰσέπραξε μίαν ἑβδομάδα $968\frac{3}{4}$ δραχ. κα[...] ἐδαπάνησε $785\frac{1}{2}$ δραχ. Πόσον περίσσευμα εἶχε τὴν ἑβδομάδ[α] ταύτην;

282) Πόσαι ὧραι εἶναι ἀπὸ τῆς $5\frac{1}{4}$ ὥρας π. μ. μέχρι τῆς 11 [...] ὥρας π. μ. τῆς ἰδίας ἡμέρας;

283) Πόσαι ὧραι εἶναι ἀπὸ τῆς $7\frac{2}{5}$ ὥρας π.μ. μέχρι τῆ[ς] 12 ὥρας τῆς ἰδίας ἡμέρας;

284) Δοχεῖον γεμάτον βούτυρον ἔχει βάρος $5\frac{3}{8}$ ὀκάδας, κε[...]νὸν δὲ ἔχει βάρος $\frac{1}{4}$ ὀκᾶς. Πόσον βούτυρον περιέχει;

285) Ἠγόρασέ τις $2\frac{1}{8}$ ὀκάδας βουτύρου. Ἀφ' οὗ δὲ ἐκα[...]

θάρισεν αὐτὸ εὗρεν ὅτι περιεῖχε $\frac{3}{5}$ ὀκᾶς ξένας οὐσίας. Πόσον καθαρὸν βούτυρον ἠγόρασεν;

286) Εἰς 3 ὀκάδας θαλασσίου ὕδατος περιέχονται $\frac{3}{10}$ ὀκ. ἅλατος. Πόσον ὕδωρ μόνον περιέχεται εἰς αὐτάς;

**Προβλήματα προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.**

287) Τεμάχιον ὑφάσματος εἶχε 50 πήχεις. Ἀπὸ αὐτὸ ἐπωλήθησαν $8\frac{5}{8}$ πήχεις καὶ ἔπειτα $12\frac{1}{4}$ πήχεις. Πόσοι πήχεις ἔμειναν;

288) Οἰκογενειάρχης ἠγόρασε καφφὲν ἀξίας $11\frac{2}{5}$ δραχ. ζάκχαριν ἀξίας $45\frac{3}{4}$ δραχ καὶ ὄρυζαν ἀξίας $56\frac{3}{10}$ δραχ. Ἔδωκε δὲ εἰς τὸν παντοπώλην δύο ἑκατοντάδραχμα. Ὀφείλει ἀκόμη ἢ πρέπει νὰ λάβῃ ὑπόλοιπον καὶ πόσον;

289) Λόχος στρατιωτῶν διετάχθη νὰ κάμῃ εἰς τρεῖς ἡμέρας πορείαν $80\frac{3}{5}$ χιλιομέτρων. Τὴν α΄ ἡμέραν διήνυσε $35\frac{1}{4}$ χιλιόμετρα καὶ τὴν β΄ $31\frac{2}{5}$ χιλ. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει νὰ διανύσῃ τὴν γ΄ ἡμέραν;

290) Χρυσοχόος ἀνέμιξε χαλκὸν μὲ $18\frac{7}{9}$ δράμια χρυσοῦ καὶ $56\frac{5}{18}$ δράμια ἀργύρου καὶ ἔκαμε κρᾶμα $147\frac{2}{3}$ δραμίων. Πόσον χαλκὸν ἔθεσεν εἰς τὸ κρᾶμα;

291) Ἐργάτης ἐξετέλεσεν εἰς μίαν ἡμέραν τὰ $\frac{2}{8}$ ἔργου τινός, τὴν ἑπομένην τὰ $\frac{5}{12}$ καὶ τὴν γ΄ τὰ $\frac{7}{24}$ αὐτοῦ. Πόσον μέρος τοῦ ἔργου τούτου ἔχει νὰ ἐκτελέσῃ ἀκόμη;

292) Πόσαι ὧραι εἶναι ἀπὸ τῆς $6\frac{1}{4}$ π.μ. μέχρι τῆς $4\frac{1}{2}$ μ. μ. τῆς ἰδίας ἡμέρας;

293) Ἐργάτης ἀρχίζει τὴν ἐργασίαν του εἰς τὰς $7 \frac{3}{4}$ π. μ. καὶ διακόπτει αὐτὴν τὴν μεσημβρίαν. Ἔπειτα ἀρχίζει πάλιν αὐτὴν τὴν $2 \frac{1}{4}$ μ. μ. καὶ διακόπτει τὴν 6 ὥραν μ. μ. Πόσας ὥρας ἐργάζεται τὴν ἡμέραν ;

294) Μικρέμπορος εἰσέπραξεν ἐκ τῆς πωλήσεως ποτηρίων $165 \frac{3}{4}$ δραχμὰς καὶ ἐκ τῆς πωλήσεως φλυτζανίων $48 \frac{2}{5}$ δραχ. Ἐκόστιζον δὲ εἰς αὐτὸν τὰ μὲν ποτήρια $130 \frac{1}{5}$ δραχ. τὰ δὲ φλυτζάνια $38 \frac{1}{2}$ δραχμάς. Πόσα χρήματα ἐκέρδισεν ;

## Γ΄. Πολλαπλασιασμός.

### § 120. Α΄. Πολ]σμὸς κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον.

Ἐὰν μὲ 1 δραχ. ἀγοράζωμεν $\frac{3}{8}$ πήχ κορδέλλας, μὲ 4 δραχ. ἀγοράζομεν $\left(\frac{3}{8} \times 4\right)$ πήχεις.

α) Ἐπειδὴ δὲ $\frac{3}{8}$ = 3 ρούπια, ἕπεται

$$\left(\frac{3}{8}\text{πήχ.}\right) \times 4 = (3 \text{ ρούπια}) \times 4 = 12 \text{ ρούπια}$$

Καὶ ἐπειδὴ 12 ρούπια $= \frac{12}{8}$ πήχ, ἕπεται ὅτι $\frac{3}{8} \times 4 = \frac{12}{8}$.

*Γενικῶς* $\frac{\alpha}{\beta} \times \mu = \frac{\alpha \times \mu}{\beta}$.

β΄) $\frac{3}{8} \times 4 = \frac{12}{8}$ πήχεις $= \frac{3}{2}$ πήχ.

*Γενικῶς* $\frac{\alpha}{\beta} \times \mu = \frac{\alpha}{\beta : \mu}$, *ἂν* $\beta =$ *πολ.* $\mu$.

*Ἄρα : Διὰ νὰ πολ]σωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, πολ]ζομεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ παρονομαστὴν ἀφήνομεν τὸν ἴδιον. Ἢ διαιροῦμεν τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ ἀκεραίου, ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς καὶ ἀριθμητὴν ἀφήνομεν τὸν ἴδιον.*

***Ασκήσεις*** (καὶ ἀγράφως) 295) Πόσον εἶναι τὸ τριπλάσιον ἑκάστου τῶν κλασμάτων $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{12}$.

296) Πόσον εἶναι τὸ ὀκταπλάσιον ἑκάστου τῶν κλασμάτων $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{24}$ καὶ τὸ δεκαπλάσιον ἑκάστου τῶν $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{21}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{17}{50}$, $\frac{42}{90}$, $\frac{56}{100}$;

297) Κρήνη παρέχει $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς ὕδατος εἰς κάθε πρῶτον λεπτόν. Πόσον ὕδωρ χωρεῖ δοχεῖον, τὸ ὁποῖον ἡ κρήνη αὕτη γεμίζει εἰς 10 πρῶτα λεπτά;

§ **121. Β΄. Πολ]σμὸς μικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιον.** Ἐὰν ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται $65\frac{1}{2}$ δραχμάς, 6 πήχεις ἀπὸ αὐτὸ θὰ τιμῶνται $65\frac{1}{2}$ δραχ.$\times 6$.

α΄) Ἐπειδὴ δὲ $65\frac{1}{2}$ δραχ. $= \frac{131}{2}$ δραχ, ἕπεται ὅτι

$$65\frac{1}{2} \times 6 = \frac{131}{2} \times 6 = 393 \text{ δραχ.}$$

*Γενικῶς* $(\alpha + \frac{\beta}{\nu}) \times \mu = \frac{\alpha . \nu + \beta}{\nu} \times \mu$.

β΄) Οἱ 6 πήχ. ἀπὸ 65 δραχμὰς ἕκαστος τιμῶνται 65 δραχ.$\times 6$ $= 390$ δραχ. Οἱ 6 πήχεις ἀπὸ $\frac{1}{2}$ δραχ. ἕκαστος τιμῶνται $\frac{1}{2} \times 6 = 3$ δρ.

Ὥστε $65\frac{1}{2} \times 6 = (65 \times 6) + \left(\frac{1}{2} \times 6\right) = 390 + 3 = 393$.

*Γενικῶς* $\left(\alpha + \frac{\beta}{\nu}\right) \times \mu = (\alpha \times \mu) + \left(\frac{\beta}{\nu} \times \mu\right)$.

Ἄρα: *Διὰ νὰ πολ]σωμεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ πολ]ζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον. Ἢ πολ]ζομεν χωριστὰ ἕκαστον μέρος τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.*

*Ἀσκήσεις.* 298) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως τὰ γινόμενα $3\frac{2}{5} \times 5$,

$7\frac{1}{8} \times 8$, $3\frac{1}{10} \times 10$, $4\frac{3}{5} \times 10$, $6\frac{1}{9} \times 18$, $3\frac{4}{7} \times$

299) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα

$2\frac{1}{3} \times 20$, $8\frac{5}{6} \times 15$, $4\frac{2}{7} \times 23$, $10\frac{1}{3} \times 35$, $15\frac{2}{3} \times$

300) Ἁμαξοστοιχία διανύει $24\frac{3}{5}$ χιλιόμετρα τὴν ὥραν καὶ χρειάζεται 4 ὥρας, διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ Πειραιῶς εἰς Κόρινθ... Πόσον ἀπέχει ἡ Κόρινθος τοῦ Πειραιῶς ;

301) Ἠγόρασέ τις 3 ὀκάδας ὄρυζαν πρὸς $15\frac{1}{2}$ δραχμὰς τ... ὀκᾶν καὶ 4 ὀκάδας ζακχάρεως πρὸς $21\frac{3}{4}$ δραχμὰς τὴν ὀκ... Πόσα χρήματα ἔδωκεν ;

302) Ἀπὸ μίαν πηγὴν ρέουσι $5\frac{3}{4}$ ὀκάδες ὕδατος τὴν ὥρ... Δύναται δὲ αὕτη εἰς 100 ὥρας νὰ γεμίσῃ μίαν δεξαμενήν. Πό... ὕδωρ χωρεῖ ἡ δεξαμενὴ αὕτη ;

**§ 122. Πολ]σμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα. Πρ...βλημα.** *Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται α δραχμάς. Πόσον ...μῶνται τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως ;*

*Λύσις.* Ἀφ' οὗ 1 πῆχυς τιμᾶται α δραχ, τὸ $\frac{1}{8}$ πήχ. θὰ τιμ...ται 8 φορὰς ὀλιγώτερον ἤτοι $\frac{\alpha}{8}$ δραχ καὶ τὰ $\frac{5}{8}$ πήχ. θὰ τιμῶν... $\frac{\alpha}{8}$ δραχ$\times 5$. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ζητούμενον, διαιροῦμεν τ... α δραχμὰς διὰ 8 καὶ τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{8}$ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ ... ἤτοι λαμβάνομεν τὸ ὄγδοον τοῦ α πέντε φοράς.

Τὰς δύο ταύτας πράξεις καλοῦμεν μὲ ἓν ὄνομα *πολλαπλασι...σμὸν* τοῦ α ἐπὶ $\frac{5}{8}$,

$$\text{Ὥστε} \quad \alpha \times \frac{5}{8} = \frac{\alpha}{8} \times 5.$$

*Γενικώτερον* $\alpha \times \frac{\mu}{\nu} = \frac{\alpha}{\nu} \times \mu$.

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν ὅτι :

α΄) *Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς ἀκεραίας μονάδος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν μέρους τῆς μονάδος, πολ]ζομεν τὴν τιμὴν τῆς ἀκεραίας μονάδος ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον φανερώνει τὸ μέρος τοῦτο τῆς μονάδος.*

β΄) *Διὰ νὰ εὕρωμεν μέρος δοθέντος ἀριθμοῦ, πολ]ζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον φανερώνει τὸ μέρος τοῦτο.*

Τώρα διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις, καθ' ὅσον ὁ πολ]στέος α εἶναι ἀκέραιος, κλάσμα ἢ μικτός.

Α΄. Κατὰ τὰ προηγούμενα εἶναι π. χ. $20 \times \frac{4}{5} = \frac{20}{5} \times 4 = \frac{20 \times 4}{5} = 16$. *Γενικῶς* $\alpha \times \frac{\mu}{\nu} = \frac{\alpha \times \mu}{\nu}$

Ἄρα : *Διὰ νὰ πολ]σωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολ]ζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφομεν ὡς παρονομαστὴν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος.*

Β΄. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον π. χ. $\frac{2}{3} \times \frac{5}{8}$ πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{2}{3}$ καὶ νὰ τὸ πολ]σωμεν ἐπὶ 5.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 113 Γ΄) τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{2}{3}$ εἶναι $\frac{2}{3 \times 8}$, ἕπεται ὅτι $\frac{2}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{2}{3 \times 8} \times 5 = \frac{2 \times 5}{3 \times 8} = \frac{10}{24}$.

*Γενικῶς* : $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \times \gamma}{\beta \times \delta}$.

Ἄρα : *Διὰ νὰ πολ]σωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολ]ζομεν ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστήν. Γράφομεν δὲ τὸ μὲν γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν ὡς ἀριθμητήν, τὸ δὲ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν ὡς παρονομαστήν.*

Γ΄. Ἂν $\alpha = 21\frac{1}{5}$ δραχ. $= \frac{106}{5}$ δραχ. ἡ τιμὴ τῶν $\frac{3}{4}$ όκ. θὰ εἶναι $21\frac{1}{5}$ δρχ $\times \frac{3}{4}$ ἢ $\frac{106}{5}$ δρχ. $\times \frac{3}{4}$. Ὥστε

$21\frac{1}{5}$ δραχ $\times\frac{3}{4}=\frac{106}{5}$ δραχ $\times\frac{3}{4}=\frac{318}{20}$ δραχ $=15\frac{18}{20}$ δραχμά

*Γενικῶς :* $\left(\alpha+\frac{\beta}{\gamma}\right)\times\frac{\mu}{\nu}=\frac{\alpha\times\gamma+\beta}{\gamma}\times\frac{\mu}{\nu}$.

Τὸ ζητούμενον εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς. Τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἀπ

21 δραχ τὴν ὀκᾶν τιμῶνται 21 δραχ $\times\frac{3}{4}=15\frac{3}{4}$ δραχ· ἀπὸ $\frac{1}{5}$ δρα

τὴν ὀκᾶν τιμῶνται $\frac{1}{5}$ δραχ $\times\frac{3}{4}=\frac{3}{20}$ δρ.

Ὥστε ἡ ὁλικὴ τιμὴ τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς εἶναι

$$\left(21\times\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}\right)=15\frac{18}{20} \text{ δραχ.}$$

Κατὰ ταῦτα $21\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}=\left(21\times\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}\right)$.

*Γενικῶς :* $\left(\alpha+\frac{\beta}{\gamma}\right)\times\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=\left(\alpha\times\frac{\mu}{\nu}\right)+\left(\frac{\beta}{\gamma}\times\frac{\mu}{\nu}\right)$.

Ἄρα : *Διὰ νὰ πολ)σωμεν μικτὸν ἐπὶ κλάσμα, τρέπομεν αὐτ εἰς κλάσμα καὶ πολ)ζομεν τοῦτο ἐπὶ τὸ δοθὲν κλάσμα. Ἢ πολ)ζ μεν χωριστὰ ἕκαστον μέρος τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸ κλάσμα καὶ πρ σθέτομεν τὰ γινόμενα.*

***Ἀσκήσεις.*** 303) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ 10, τοῦ 2 τοῦ 30. Ὁμοίως τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ 16, 24, 40, 60, 100.

304) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως πόσα δράμια ἔχουσι τὰ $\frac{3}{4}$ τ ὀκᾶς, πόσα ρούπια ἔχουσι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως, πόσα λεπτὰ ἔχουσι $\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς, πόσας ὀκάδας ἔχουσι τὰ $\frac{7}{22}$ τοῦ στατῆρος, πό πρῶτα λεπτὰ ἔχουσι τὰ $\frac{4}{15}$ τῆς ὥρας.

305) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα

α΄) $15 \times \frac{2}{7}$, $8 \times \frac{5}{9}$, $65 \times \frac{4}{10}$, β΄) $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$, $\frac{4}{7} \times \frac{2}{8}$, $\frac{28}{50} \times \frac{9}{14}$, γ΄) $5\frac{1}{6} \times \frac{6}{7}$, $36\frac{1}{8} \times \frac{5}{9}$, $103\frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$.

306) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $\frac{6}{7}$, τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ $\frac{5}{6}$ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ $\frac{2}{9}$.

307) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{5}{7}$ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{6}$ καὶ τὰ $\frac{4}{5}$ τῶν μικτῶν ἀριθμῶν $7\frac{1}{8}$, $9\frac{4}{7}$, $248\frac{3}{4}$.

308) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα

$19\frac{2}{7} \times \frac{7}{9}$, $68\frac{2}{5} \times \frac{36}{24}$, $581\frac{1}{12} \times \frac{66}{24}$, $283\frac{1}{15} \times \frac{72}{95}$.

309) Ἡ ὀκᾶ τοῦ καφὲ τιμᾶται 80 δραχμάς. Πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς καὶ πόσον τὰ $\frac{13}{20}$ τῆς ὀκᾶς;

310) Ἐργάτης λαμβάνει 80 δραχμὰς ἡμερομίσθιον καὶ δαπανᾷ τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτοῦ κάθε ἡμέραν. Πόσον περίσσευμα ἔχει κάθε ἐργάσιμον ἡμέραν;

311) Ὑπάλληλος ἔχει μηνιαῖον μισθὸν 4000 δραχμάς, δαπανᾷ δὲ τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ δι' ἐνοίκιον, τὸ $\frac{1}{2}$ διὰ τροφὴν καὶ τὸ $\frac{1}{8}$ διὰ τὰς ἄλλας ἀνάγκας του. Πόσας δραχμὰς δαπανᾷ τὸν μῆνα;

312) Δοχεῖον περιέχει βούτυρον καὶ λίπος τὸ ὅλον $15\frac{3}{4}$ ὀκάδας. Εἶναι δὲ τὸ βάρος τοῦ λίπους τὰ $\frac{3}{10}$ τοῦ βουτύρου. Πόσον καθαρὸν βούτυρον καὶ πόσον λίπος περιέχει τοῦτο;

§ **123. Πολ]σμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ μικτόν. Πρόβλημα.** *Ἡ ὀκᾶ πράγματος τιμᾶται α δραχμάς. Πόσον τιμῶνται $5\frac{3}{4}$ ὀκάδες ἐξ αὐτοῦ;*

*Λύσις.* α΄) Αἱ 5 ὀκάδες τιμῶνται α δραχ$\times 5$, τὰ δὲ $\frac{3}{4}$ ὀκ. τιμῶνται $\alpha \times \frac{3}{4}$. Ὥστε αἱ $5\frac{3}{4}$ ὀκ. τιμῶνται

$$(\alpha \times 5) + \left(\alpha \times \frac{3}{4}\right) \text{ δραχ.}$$

Τὰς πράξεις ταύτας ὀνομάζομεν μὲ ἓν ὄνομα πολ]σμὸν τοῦ ἐπὶ $5\frac{3}{4}$. Ἄρα: $\alpha \times 5\frac{3}{4} = (\alpha \times 5) + \left(\alpha \times \frac{3}{4}\right)$.

*Γενικώτερον* $\alpha \times \left(\beta + \frac{\gamma}{\delta}\right) = (\alpha \times \beta) + \left(\alpha \times \frac{\gamma}{\delta}\right)$.

β΄) Ἐπειδὴ $5\frac{3}{4}$ ὀκ. $= \frac{23}{4}$ ὀκ, ἕπεται ὅτι (§ 122) ὅτι ἡ ζη-τουμένη τιμὴ εἶναι $\alpha \times \frac{23}{4}$ δραχ, ἤτοι $\alpha \times 5\frac{3}{4} = \alpha \times \frac{23}{4}$.

*Γενικώτερον* $\alpha \times \left(\beta + \frac{\gamma}{\delta}\right) = \alpha \times \frac{\beta \times \delta + \gamma}{\delta}$.

Ἄρα: *Διὰ νὰ πολ]σωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ μικτόν, πολ]ζομεν τὸν ἀριθμὸν χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα. Ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ πολ]ζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπ' αὐτό.*

Κατὰ ταῦτα $4\frac{2}{7} \times 3\frac{5}{6} = \left(4\frac{2}{7} \times 3\right) + \left(4\frac{2}{7} \times \frac{5}{6}\right)$

$$= (4 \times 3) + \left(\frac{2}{7} \times 3\right) + \left(4 \times \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{2}{7} \times \frac{5}{6}\right)$$

Ἄρα: *Διὰ νὰ πολ]σωμεν μικτὸν ἐπὶ μικτὸν ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν ἀμφότερα τὰ μέρη τοῦ ἑνὸς ἐπὶ ἀμφότερα τὰ μέρη τοῦ ἄλλου καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.*

§ **124. Γενίκευσις τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ πολ]σμοῦ.**

Ἐμάθομεν ὅτι α΄) $\alpha \times 3 = \alpha + \alpha + \alpha$, εἶναι δὲ καὶ $3 = 1 + 1 + 1$

β΄) $\alpha \times \frac{3}{4} = \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4}$, εἶναι δὲ καὶ $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

γ΄) $\alpha \times 2\frac{3}{4} = (\alpha \times 2) + \left(\alpha \times \frac{3}{4}\right) = \alpha + \alpha + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4}$,

εἶναι δὲ καὶ

$$2\frac{3}{4} = 1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}.$$

Ἐκ τούτων ὁδηγούμεθα εἰς τὸν ἑξῆς γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολ]σμοῦ.

*Πολ]σμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον καλεῖται ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τρίτον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος γίνεται ἀπὸ τὸν πολ]στέον καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτοῦ, ὅπως ὁ πολ]στὴς γίνεται ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτῆς.*

***Ἀσκήσεις.*** 313) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα

$$5\times 2\frac{1}{5},\quad 64\times 8\frac{7}{8},\quad 75\times 15\frac{3}{25},\quad 103\times 2\frac{1}{4},$$

$$506\times 1\frac{1}{2},\quad 999\times 99\frac{1}{9}.$$

314) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 80 δραχ. Πόσον τιμῶνται 4 $\frac{3}{8}$ πήχεις ἐξ αὐτοῦ ;

315) Πόσα δράμια ἔχουσι 7 $\frac{2}{5}$ ὀκάδες ;

316) Ἐμπορικὴ ἁμαξοστοιχία διανύουσα 22 χιλιόμετρα τὴν ὥραν χρειάζεται 7 $\frac{1}{4}$ ὥρας, διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ Θεσσαλονίκην εἰς Σέρρας. Πόσον ἀπέχουσιν αἱ πόλεις αὗται ;

317) Πόσα πρῶτα λεπτὰ ἔχουσι 8 $\frac{5}{6}$ ὧραι ;

318) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα

$$\frac{3}{4}\times 2\frac{1}{3},\quad \frac{7}{8}\times 9\frac{1}{7},\quad \frac{12}{15}\times 1\frac{1}{12},\quad \frac{8}{9}\times 18\frac{9}{16},\quad \frac{6}{18}\times 14\frac{5}{18}.$$

319) Εἰς ἑκάστην ὀκᾶν οἴνου περιέχεται $\frac{1}{8}$ ὀκᾶς ῥητίνης. Πόσην ῥητίνην περιέχουσι 265 $\frac{3}{4}$ ὀκάδες τοιούτου οἴνου ;

320) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα $3\frac{3}{4}\times 8\frac{4}{9}$, $1\frac{1}{3}\times 3\frac{2}{5}$, $7\frac{2}{3}\times 8\frac{3}{4}$, $12\frac{3}{8}\times 8\frac{24}{27}$, $100\frac{3}{4}\times 25\frac{7}{9}$, $254\frac{2}{5}\times 160\frac{5}{6}$.

321) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 156 $\frac{5}{10}$ δραχ. Πόσον τιμῶνται 4 $\frac{2}{8}$ πήχεις ἀπὸ τὸ ὕφασμα τοῦτο ;

322) Ἠγόρασέ τις $75\frac{3}{4}$ ὀκάδας ἀνθράκων πρὸς $3\frac{1}{5}$ δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, ἔδωκε δὲ ἓν πεντακοσιόδραχμον. Πόσον ὑπόλοιπον θὰ λάβῃ ὀπίσω;

§ **125. Ἀντίστροφοι ἀριθμοί.** Ἐὰν ἀντιστρέψωμ[εν] τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{2}{5}$, προκύπτει ὁ $\frac{5}{2}$. Οἱ ἀριθμοὶ $\frac{2}{5}$ κ[αὶ] $\frac{5}{2}$ λέγονται *ἀντίστροφοι ἀριθμοί*. Ὁμοίως, ἐπειδὴ $6=\frac{6}{1}$, [οἱ] ἀριθμοὶ 6 καὶ $\frac{1}{6}$ εἶναι ἀντίστροφοι.

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}=1$, $6\times\frac{1}{6}=1$ κτλ. ἕπεται ὅτι:

*Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἀντίστροφοι, ἐὰν ἔχωσι γινόμενον 1.*

Τοῦ $3\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$ ἀντιστρόφως εἶναι ὁ $\frac{5}{17}$.

***Ἀσκήσεις.*** 323) Ὀνομάσατε τοὺς ἀντιστρόφους τῶν ἀριθμ[ῶν] $2, 4, 8, 25, 100, \frac{3}{5}, \frac{12}{25}, \frac{65}{42}, 4\frac{1}{5}, 15\frac{3}{4}, 91\frac{7}{9}$.

324) Ὁρίσατε τυχὸν κλάσμα μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ συγκρίνατε τὸν ἀντίστροφον αὐτοῦ ἀριθμὸν πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα. Προσπαθήσατε δὲ νὰ δικαιολογήσητε τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως ταύτης. Ὁρίσατε τυχόντα μικτὸν ἀριθμὸν κ[αὶ] ἐργασθῆτε ὁμοίως.

325) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀντίστροφος ἑκάστου τῶν ἀθροισμάτων $5+3\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}+\frac{1}{8}$, $7\frac{5}{6}+9\frac{1}{2}$, ἑκάστης τῶν διαφορῶν $8-\frac{1}{5}$, $5\frac{2}{3}-4$, $12\frac{3}{7}-8\frac{4}{9}$ καὶ ἑκάστου τῶν γινομένων $5\times\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}$, $7\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}$, $8\frac{3}{4}\times10\frac{1}{2}$.

§ **126. Γινόμενον πολλῶν παραγόντων. Πρό[β]λημα.** *Πατὴρ ἀποθανὼν ἀφῆκεν 60000 δραχ. ὅπως μοιρασθῶσιν ὡς ἑξῆς. Ἡ κόρη του νὰ λάβῃ τὰ $\frac{4}{10}$ τοῦ ποσοῦ τούτου, ὁ υἱός του τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεριδίου τῆς κόρης καὶ ἡ σύζυγός του τ[ὰ]*

$\frac{3}{4}$ *τοῦ μεριδίου τοῦ υἱοῦ· τὸ δὲ ὑπόλοιπον νὰ δοθῇ εἰς τὸ σχολικὸν ταμεῖον τῆς πατρίδος του. Πόσας δραχμὰς ἔλαβε κἄθε κληρονόμος ;*

*Λύσις.* Ἡ κόρη θὰ λάβῃ $60000 \times \frac{4}{10} = 24000$δραχ. (§ 122 β'), ὁ υἱὸς $24000 \times \frac{2}{3} = 16000$ δραχ. ἡ δὲ σύζυγος θὰ λάβῃ $16000 \times \frac{3}{4} = 12000$. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ὀνομάζομεν γινόμενον τῶν 60000, $\frac{4}{10}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ *καὶ* σημειοῦμεν οὕτω $60000 \times \frac{4}{10} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$. Ὁρίζεται λοιπὸν *καὶ* σημειώνεται τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων, ὅπως (§ 54) διὰ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς. Οὕτω $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} = \frac{2 \times 5}{3 \times 6} \times \frac{7}{8} = \frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 6 \times 8}$.

*Γενικῶς* $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta} \times \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\alpha \times \gamma \times \varepsilon}{\beta \times \delta \times \zeta}$.

Ἄρα : *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε κλασμάτων, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν ὡς ἀριθμητὴν καὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν ὡς παρονομαστήν.*

ΣΗΜ. Τοὺς ἀκεραίους ἢ μικτοὺς παράγοντας τρέπομεν, ἂν θέλωμεν εἰς κλάσματα.

***Ἀσκήσεις.*** 326) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα

$\frac{2}{5} \times \frac{9}{8} \times \frac{1}{4}$, $\frac{5}{6} \times \frac{15}{18} \times \frac{3}{5} \times \frac{12}{25}$, $5 \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{5}$,

$8 \times \frac{2}{3} \times 4 \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$, $2\frac{1}{3} \times 4\frac{2}{7} \times 8\frac{3}{5}$.

$6\frac{3}{5} \times 8\frac{1}{27} \times 12\frac{7}{9} \times 20\frac{1}{5}$.

327) Ἐρωτηθεὶς τις τί ὥρα εἶναι ἀπήντησεν. Εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{4}{5}$ τῶν 20 ὡρῶν. Τί ὥρα ἦτο ;

328) Ὁδοιπόρος ἦτο ὑποχρεωμένος νὰ διατρέξῃ 60 χιλιόμετρα.

Κατὰ τὴν α' ἡμέραν διέτρεξε τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτῶν, κατὰ τὴν β' τ $\frac{3}{4}$ τῶν προηγουμένως διανυθέντων καὶ κατὰ τὴν γ' ἡμέραν τ $\frac{4}{7}$ τῶν διανυθέντων κατὰ τὴν δευτέραν ἡμέραν. Πόσα χιλιόμετρα διήνυσε κατὰ τὴν γ' ἡμέραν ;

329) Τρεῖς φίλοι ἔκαμον ἐκδρομήν, εἰς τὴν ὁποίαν ἐδαπάνησα ὁ α' 345 $\frac{3}{4}$ δραχ, ὁ β' τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς δαπάνης τοῦ α' καὶ γ' τὰ $\frac{7}{8}$ τῆς δαπάνης τοῦ β'. Πόσον ἐδαπάνησεν ὁ γ' ;

§ **127. Δυνάμεις τῶν κλασμάτων.** Ὁ γνωστὸς (§ 76) ὁρισμὸς δυνάμεως ἀριθμοῦ διατηρεῖται καὶ ὅταν ὁ ἀριθμὸς (ἡ βάσις) εἶναι κλάσμα. Ὁμοίως διατηροῦνται οἱ ὁρισμοὶ τῶν στοιχείων (βάσις, ἐκθέτης) καὶ ὁ τρόπος τῆς συντόμου γραφῆς ἑκάστης δυνάμεως. Οὕτω

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5},\ \left(\frac{5}{7}\right)^3=\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}.$$

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι

$$\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}=\frac{5\times5\times5}{7\times7\times7}=\frac{5^3}{7^3}$$

συμπεραίνομεν ὅτι $\left(\frac{5}{7}\right)^3=\frac{5^3}{7^3}$

$$\textit{Γενικῶς}\quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu=\frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}.$$

Ἄρα : *Κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἂν καὶ οἱ δύο ὅροι του ὑψωθῶσιν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.*

*Ἀσκήσεις*. 330) Νὰ εὑρεθῇ ἀγράφως τὸ τετράγωνον καὶ ὁ κύβος ἑκάστου τῶν κλασμάτων

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{6},\ \frac{3}{5},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{10}.$$

331) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ δυνάμεις

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4,\left(\frac{2}{5}\right)^5,\left(\frac{4}{7}\right)^3,\left(1\frac{1}{2}\right)^2,\left(3\frac{1}{5}\right)^3,$$
$$\left(2\frac{1}{2}\right)^4.$$

332) Ἐλαστικὴ σφαῖρα ἀναπηδᾷ εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕψους, ἀπὸ τὸ ὁποῖον πίπτει. Ἐὰν ἀρχικῶς ἀφεθῇ ἀπὸ ὕψους $\frac{2}{3}$ μέτρου, εἰς πόσον ὕψος θὰ ὑψωθῇ κατὰ τὴν γ´ ἀναπήδησιν;

333) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3$,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2, \quad 5^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(3\frac{1}{3}\right)^2,$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(5\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{10}\right)^4.$$

## Α´. Σειρὰ προβλημάτων λυομένων διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

**§128. Πρόβλημα I.** *Ἁμαξοστοιχία διανύει 40 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Πόσα χιλιόμετρα διανύει εἰς $\frac{5}{8}$ τῆς ὥρας;*

*Λύσις.* Ἀφ᾽ οὗ εἰς $\frac{8}{8}$ ὥρας (=1ὥρ) διανύει 40 χιλ.

εἰς $\frac{1}{8}$ » διανύει 8 φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι $\frac{40}{8}$ χιλ.

*καὶ* εἰς $\frac{5}{8}$ » διανύει 5 φορὰς περισσότερον,

ἤτοι $\frac{40}{8} \times 5 = 5 \times 5 = 25$ χιλ.

ΣΗΜ. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀμέσως καὶ ἀγράφως τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ 40 καὶ νὰ πολ]σωμεν αὐτὸ ἐπὶ 5.

**§ 129. Πρόβλημα II.** *Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ 30.*

*Λύσις.* Ἀφ᾽ οὗ τὰ $\frac{5}{5}$ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ εἶναι 30, τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{30}{5}$ *καὶ* τὰ $\frac{4}{5}$ θὰ εἶναι $\frac{30}{5} \times 4 = 6 \times 4 = 24$.

ΣΗΜ. Ἀγράφως εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον λέγοντες: τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 30 εἶναι 6, ἄρα τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ εἶναι $6 \times 4 = 24$.

§ **130. Πρόβλημα III.** *Μηχανὴ πλέκει εἰς 1 ὥραν $3\frac{1}{5}$ ὀκάδας νήματος. Πόσον νῆμα πλέκει εἰς $5\frac{1}{4}$ ὥρας;*

*Λύσις*. Παρατηροῦμεν ὅτι $5\frac{1}{4}$ ὧραι $= \frac{21}{4}$ ὥρας καὶ $3\frac{1}{5}$ ὀκ. $= \frac{16}{20}$ ὀκ. Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἀφ' οὗ εἰς $\frac{4}{4}$ ὥρ. ($=1$ ὥρα) πλέκει $\frac{16}{5}$ ὀκ.

εἰς $\frac{1}{4}$ » πλέκει 4 φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι $\frac{16}{5 \times 4}$ ὀκ.

καὶ εἰς $\frac{21}{4}$ » » 21 » περισσότερον ἤτοι

$$\frac{16}{5 \times 4} \times 21 = 16\frac{4}{45} \text{ ὀκ.}$$

*Ἀσκήσεις*. 334) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν ἀριθμῶν 10, 20, 25, 40, καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν 12, 20, 32.

335) Εἶχέ τις 260 δραχ. καὶ ἔδωκε τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῶν πρὸς ἀγορὰν τροφίμων. Πόσα χρήματα τοῦ ἔμειναν;

336) Νὰ εὑρεθῶσι διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα τὰ $\frac{5}{8}$ τῶν ἀριθμῶν 27, 36, 44, τὰ $\frac{7}{9}$ τῶν ἀριθμῶν $\frac{6}{8}$, $\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{8}$, $11\frac{3}{5}$ καὶ τὰ $\frac{5}{9}$ τῶν ἀριθμῶν 29, 38, $\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{5}$, $12\frac{3}{4}$.

337) Τὸ εἰσιτήριον Γ' θέσεως τῶν Ἑλληνικῶν σιδηροδρόμων ἀπ' Ἀθηνῶν μέχρι Λαρίσσης εἶναι $226\frac{1}{2}$ δραχ. Ὅταν οἱ στρατιῶται ταξειδεύωσι πληρώνουσι τὰ $\frac{50}{100}$ τοῦ κανονικοῦ εἰσιτηρίου

Πόσον θὰ πληρώσῃ στρατιώτης διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ τὰς Ἀθήνας εἰς Λάρισσαν ;

## Διάφορα προβλήματα.

338) Δύο συνέταιροι κατέθεσαν δι' ἐπιχείρησιν ὁ μὲν α' 37600 δραχμάς, ὁ δὲ β' τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς καταθέσεως τοῦ α' καὶ ἀκόμη 1000 δραχ. Πόσας δραχμὰς κατέθεσεν ὁ β' καὶ πόσον τὸ κεφάλαιον τῆς ἐπιχειρήσεως ;

339) Ποιμὴν ἠγόρασε 80 πρόβατα πρὸς 150 δραχμὰς ἕκαστον καὶ ἐδαπάνησε διὰ τὴν συντήρησιν ἑκάστου τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ἀγορᾶς αὐτοῦ. Ἔπειτα ἐπώλησε τὰ μὲν $\frac{4}{5}$ τῶν προβάτων πρὸς $247\frac{2}{5}$ δραχμάς, τὰ δὲ ἄλλα πρὸς $210\frac{3}{4}$ δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισεν ;

340) Οἰκία ἔχει 3 πατώματα. Ἀπὸ τὸ α' πάτωμα ὁ ἰδιοκτήτης λαμβάνει ἐνοίκιον 3200 δραχ. τὸν μῆνα, ἀπὸ τὸ β' τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ἐνοικίου τοῦ α' πατώματος καὶ ἀπὸ τὸ γ' τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ ἐνοικίου τοῦ β' πατώματος. Πόσον ἐνοίκιον λαμβάνει ὅλον τὸν μῆνα ;

341) Βαρέλιον περιεῖχε 360 ὀκάδας οἴνου. Ἐξ αὐτοῦ ἐλήφθησαν τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ οἴνου καὶ ἔπειτα τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὑπολοίπου οἴνου. Πόσος οἶνος ἔμεινεν εἰς αὐτό ;

342) Δοχεῖον κενὸν ἔχει βάρος $\frac{3}{4}$ ὀκᾶς καὶ γεμᾶτο μὲ ὕδωρ $2\frac{3}{4}$ ὀκ. Ἐὰν ἐξαχθῶσι τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ περιεχομένου ὕδατος, πόσον βάρος θὰ ἔχῃ τὸ δοχεῖον ;

## *Δ'. Διαίρεσις.*

§ **131. Διαίρεσις κλάσματος καὶ μικτοῦ δι' ἀκεραίου.** Α'. Ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν τὰς ἰδιότητας (Β', Γ' § 110) συμπεραίνομεν ὅτι :

*Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου διαιροῦμεν τὸν ἀρι-*

*θμητὴν διὰ τοῦ ἀκεραίου, ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς, ἢ πολ]ζομεν τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.*

Οὕτω $\frac{6}{7} : 3 = \frac{2}{7}$, $\frac{5}{8} : 2 = \frac{5}{16}$.

*Γενικῶς* $\frac{\alpha}{\beta} : \mu = \frac{\alpha : \mu}{\beta}$ ἂν $\alpha = \pi o\lambda . \mu$ καὶ $\frac{\alpha}{\beta} : \mu = \frac{\alpha}{\beta \times \mu}$.

Β΄. Ἐὰν ὁ πῆχυς μεταξωτῆς κορδέλλας τιμᾶται 8δραχ, μὲ $42 \frac{3}{4}$ δραχ, ἀγοράζομεν τόσους πήχεις, ὅσας φορὰς χωροῦσιν αἱ 8 δραχ εἰς τὰς $42 \frac{3}{4}$ δραχ, ἤτοι $42 \frac{3}{4} : 8$. Τὸ πηλίκον τοῦτο εὑρίσκομεν κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους.

α΄) Ἐπειδὴ $42 \frac{3}{4} = \frac{171}{4}$, ἔπεται ὅτι $42 \frac{3}{4}$ δρ : $8^{\delta\rho}$

$$= \frac{171}{4}^{\delta\rho} : 8^{\delta\rho} = \frac{171}{32} = 5 \frac{11}{32} \text{ πήχ.}$$

*Γενικῶς* : $(\alpha + \frac{\beta}{\gamma}) : \mu = \frac{\alpha . \gamma + \beta}{\gamma} : \mu$.

β΄) Μὲ τὰς 42 δραχμὰς ἀγοράζομεν $\frac{42}{8}$ πήχεις καὶ μὲ $\frac{3}{4}$ δραχ. ἀγοράζομεν $\frac{3}{4} : 8 = \frac{3}{4 \times 8} = \frac{3}{32}$ πήχ. Ὥστε μὲ $42 \frac{3}{4}$ δραχ. ἀγοράζομεν $\frac{42}{8} + \frac{3}{4 \times 8} = 5 \frac{11}{32}$ πήχ.

Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν ὅτι $42 \frac{3}{4} : 8 = (42 : 8) + \left( \frac{3}{4} : 8 \right)$

*Γενικῶς* : $\left( \alpha + \frac{\beta}{\gamma} \right) : \mu = (\alpha : \mu) + \left( \frac{\beta}{\gamma} : \mu \right)$.

Ἄρα : *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν μικτὸν δι' ἀκεραίου, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα, τὸ ὁποῖον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀκεραίου. Ἢ διαιροῦμεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ διὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα πηλίκα.*

***Ἀσκήσεις.*** 343) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα $\frac{3}{4} : 3$, $\frac{9}{11} : 3$, $\frac{1}{2} : 3$, $\frac{3}{7} : 5$, $\frac{17}{27} : 9$, $4 \frac{2}{5} : 2$, $15 \frac{6}{7} : 3$, $3 \frac{1}{4} : 2$, $10 \frac{3}{7} : 6$, $164 \frac{2}{3} : 75$.

344) Ποῖος ἀριθμὸς τριπλασιαζόμενος γίνεται $\frac{6}{9}$ καὶ ποῖος γίνεται $7\frac{1}{5}$ ;

345) Αὐτοκίνητον διατρέχει 24 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Εἰς πόσον χρόνον θὰ διατρέξῃ $\frac{4}{5}$ τοῦ χιλιομέτρου ;

346) Ἠγόρασέ τις 5 ὀκάδας βουτύρου καὶ ἔδωκε 366 $\frac{1}{4}$ δρχ. Πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν ;

347) Ἡ ὀκᾶ τοῦ σάπωνος τιμᾶται 23 δραχμάς. Πόσας ὀκάδας σάπωνος ἀγοράζομεν μὲ 57 $\frac{1}{2}$ δραχμάς ;

348) Γυνὴ ἐπώλησεν 85 ὀκάδας σίτου πρὸς $5\frac{3}{4}$ δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ μὲ τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα ἔλαβεν, ἠγόρασεν ὕφασμα πρὸς 5 δραχμὰς τὸν πῆχυν. Πόσον ὕφασμα ἠγόρασεν ;

349) Ἁμαξοστοιχία ὑποχρεοῦται εἰς 7 ὥρας νὰ διατρέξῃ 196 χιλιόμετρα. Ἂν εἰς τὰς 2 πρώτας ὥρας ἔχῃ ταχύτητα 23 $\frac{1}{4}$ χιλιόμετρα τὴν ὥραν, μὲ πόσην ταχύτητα πρέπει νὰ τρέχῃ τὰς ἄλλας ὥρας ;

**§ 132. Διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ κλάσματος. Πρόβλημα.** *Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν $\frac{3}{4}$ ὀκ ἐμπορεύματος ἐδόσαμεν α δραχμάς. Πρὸς πόσον ἠγοράσαμεν αὐτὸ τὴν ὀκᾶν ;*

*Λύσις.* Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς πολ]ζομένη ἐπὶ $\frac{3}{4}$ πρέπει νὰ δίδῃ γινόμενον α, ἕπεται ὅτι (§ 111) ἡ ζητουμένη τιμὴ εἶναι α δρ : $\frac{3}{4}$. Ἀλλὰ τὴν τιμὴν ταύτην εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς.

Ἀφ' οὗ τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. τιμῶνται α δραχ.

τὸ $\frac{1}{4}$ ὀκ. τιμᾶται $\frac{α}{3}$ δραχ

καὶ τὰ $\frac{4}{4}$ ὀκ. τιμῶνται $\frac{α}{3}$ δραχ$\times$4.

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\alpha}{3} \times 4 = \alpha \times \frac{4}{3}$ ἔπεται ὅτι $\alpha : \frac{3}{4} = \alpha \times \frac{4}{3}$

Ἄρα : *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, πολ]ζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀντεστραμμένον.*

Οὕτω $12 : \frac{3}{4} = 12 \times \frac{4}{3}$, $\frac{5}{6} : \frac{3}{7} = \frac{5}{6} \times \frac{7}{3}$.

*Γενικῶς* $$\alpha : \frac{\mu}{\nu} = \alpha \times \frac{\nu}{\mu}.$$

***Ἀσκήσεις.*** 350) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα

$35 : \frac{5}{7}$, $42 : \frac{4}{9}$, $102 : \frac{6}{7}$, $\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$, $\frac{3}{17} : \frac{5}{34}$,

$2\frac{1}{3} : \frac{2}{5}$, $10\frac{1}{5} : \frac{4}{5}$, $44\frac{2}{7} : \frac{4}{7}$.

351) Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολ]σθῇ ὁ $\frac{2}{3}$ διὰ νὰ γείνῃ 8 ἢ νὰ γείνῃ $1\frac{1}{5}$ ;

352) Αὐτοκίνητον εἰς $\frac{3}{4}$ ὥρας διέτρεξε 30 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα διέτρεξε τὴν ὥραν ;

353) Τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως ὑφάσματος τιμῶνται $120\frac{2}{5}$ δραχμάς. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς τοῦ ὑφάσματος τούτου ;

354) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{3}{4}$ εἶναι 33 καὶ τίνος $36\frac{1}{2}$ ;

355) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{5}{8}$ τῶν $\frac{6}{7}$ εἶναι $12\frac{1}{4}$ ;

## § 133. Διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ μικτοῦ ἀριθμοῦ.

**Πρόβλημα.** *Ἠγόρασέ τις $6\frac{4}{5}$ ὀκ. ζακχάρεως μὲ α δραχμάς. Πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν ;*

*Λύσις.* Ἡ ζητουμένη τιμὴ τῆς ὀκᾶς πολ]ζομένη ἐπὶ $6\frac{4}{5}$ πρέπει νὰ δίδῃ α δραχμάς. Εἶναι ἄρα (§ 111) αὕτη $\alpha : 6\frac{4}{5}$

Ἐπειδὴ δὲ $6\frac{4}{5} = \frac{34}{5}$, ἔπεται ὅτι $\alpha : 6\frac{4}{5} = \alpha : \frac{34}{5}$, *Ἄρα : Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ μικτοῦ, τρέπομεν τὸν εἰς κλάσμα καὶ διαιροῦμεν δι' αὐτοῦ τὸν ἀριθμὸν ἐκεῖνον.*

Οὕτω $6 : 5\frac{1}{3} = 6 : \frac{16}{3} = 6 \times \frac{3}{16} = \frac{18}{16}$.

$$\frac{2}{5} : 2\frac{3}{4} = \frac{2}{5} : \frac{11}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{11} = \frac{8}{55}.$$

*Γενικῶς* $\alpha : (\beta + \frac{\mu}{\nu}) = \alpha : \frac{\nu \times \beta + \mu}{\nu}$.

***Ἀσκήσεις.*** 356) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις

6) : $3\frac{2}{7}$, $\frac{4}{5} : 3\frac{1}{4}$, $\frac{7}{8} : 1\frac{4}{7}$, $5\frac{3}{8} : 2\frac{3}{8}$, $24\frac{1}{5} : 7\frac{2}{10}$.

357) Ἠγόρασέ τις $12\frac{4}{5}$ ὀκάδας ἀνθράκων καὶ ἔδωκε 40 δραχ. Πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν ;

358) Ὡρολόγιον προπορεύεται $\frac{3}{4}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ εἰς $\frac{1}{4}$ ὥρας. Πόσον προπορεύεται τὴν ὥραν ;

359) Κρεοπώλης ἠγόρασεν ἀρνία πρὸς $180\frac{1}{2}$ δραχμὰς τὸ κάθεν καὶ ἔδωκε $9566\frac{1}{2}$ δραχμάς. Πόσα ἀρνία ἠγόρασεν ;

360) Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολ]σωμεν τὸν $8\frac{2}{5}$, διὰ νὰ εὕρωμεν γινόμενον 20 ἢ $16\frac{4}{5}$;

361) Ἁμαξοστοιχία διήνυσεν εἰς $12\frac{3}{4}$ ὥρας $261\frac{3}{8}$ χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα διήνυε τὴν ὥραν ;

362) Ἠγόρασέ τις ὕφασμα πρὸς $245\frac{1}{2}$ δραχμὰς τὸν πῆχυν. Ἔδωκε δὲ ἓν χιλιόδραχμον καὶ ἓν πεντακοσιόδραχμον καὶ ἔλαβεν ὑπόλοιπον $272\frac{1}{2}$ δραχμάς. Πόσους πήχεις ἠγόρασεν ;

§ **134. Σύνθετα κλάσματα.** Ἐμάθομεν ὅτι $5 : 6 = \frac{5}{6}$, $7 : 8 = \frac{7}{8}$ κτλ. Κατ' ἀναλογίαν τὸ πηλίκον

$2 : \frac{1}{5}$ παριστάνομεν οὕτω $\dfrac{2}{\frac{1}{5}}$, τὸ $3\frac{1}{5} : \frac{5}{7}$

οὕτω $\dfrac{3\frac{1}{5}}{\frac{5}{7}}$ κτλ. Αἱ κλασματικαὶ μορφαὶ $\dfrac{2}{\frac{1}{5}}$, $\dfrac{3\frac{1}{5}}{\frac{5}{7}}$

κτλ. λέγονται *σύνθετα κλάσματα*.

Πρὸς διάκρισιν δὲ τὰ μέχρι τοῦδε γνωστὰ κλάσματα καλοῦμε[ν] *ἁπλᾶ κλάσματα*.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι εἰς κᾶθε σύνθετον κλάσμα διαι[ρετέος], λέγεται *ἀριθμητὴς* αὐτοῦ. Ἐκεῖνος δέ, ὁ ὁποῖος εἶνα[ι] διαιρέτης, λέγεται *παρονομαστὴς* αὐτοῦ. Οἱ δύο μαζὶ λέγονται *ὅρο[ι]* τοῦ συνθέτου κλάσματος.

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ πα[ρονομαστοῦ] συνθέτου κλάσματος, τρέπεται τοῦτο εἰς ἁπλοῦν κλά[σμα] ἢ ἀκέραιον. Οὕτω $\dfrac{4}{\frac{2}{5}} = \dfrac{4}{2} \times 5 = 10$,

$$\frac{6\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}} = 6\frac{1}{8} : \frac{3}{4} = \frac{49}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{49}{6} \text{ κτλ.}$$

Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν συνθέτων κλασμάτων γίνονται κατὰ τοὺ[ς] κανόνας τῶν ἁπλῶν κλασμάτων. Εὐκολώτερον ὅμως εἶναι νὰ τρέ[πωνται] ταῦτα εἰς ἁπλᾶ καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελῶνται αὗται.

***Ἀσκήσεις***. 363) Νὰ τραπῶσιν εἰς ἁπλᾶ τὰ σύνθετα κλάσματ[α]

$$\frac{5}{\frac{3}{5}},\ \frac{2}{\frac{3}{4}},\ \frac{9}{\frac{11}{3}},\ \frac{24}{\frac{35}{8}},\ \frac{6}{3\frac{1}{4}},\ \frac{41}{8\frac{1}{2}},$$

$$\frac{15\frac{3}{8}}{12},\ \frac{\frac{2}{3}}{4\frac{1}{5}},\ \frac{\frac{3}{5}}{6\frac{10}{10}},\ \frac{9\frac{4}{5}}{\frac{3}{10}},\ \frac{6\frac{1}{4}}{5\frac{3}{4}},\ \frac{12\frac{1}{2}}{3\frac{5}{6}},\ \frac{10\frac{3}{7}}{2\frac{4}{5}}.$$

364) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις $\dfrac{\frac{7}{5}}{12} + \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}$, $\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{4}} - \dfrac{2\frac{3}{5}}{4}$

$$\frac{\frac{5}{9}}{3\frac{1}{4}} \times \frac{4\frac{2}{7}}{1\frac{1}{14}}, \quad \frac{2\frac{3}{4}}{5\frac{1}{2}} : \frac{6}{3\frac{1}{4}}.$$

365) Νὰ ἁπλοποιηθῶσιν αἱ παραστάσεις $\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{3}{7}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{14}}$,

$$\frac{2\frac{3}{4}-1}{2\frac{3}{4}+1}, \quad \frac{6\frac{2}{5}-\frac{5}{8}}{6\frac{2}{5}+\frac{5}{8}}.$$

## *Β΄ Σειρὰ προβλημάτων λυομένων διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.*

**§ 135. Πρόβλημα Ι.** *Ἠγόρασέ τις $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς καφφὲ καὶ ἔδωκε 48 δραχμάς. Πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν;*

*Λύσις.* Ἀφ' οὗ τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. τιμῶνται 48 δρ., τὸ $\frac{1}{4}$ τιμᾶται $\frac{48}{3}$ δραχ. καὶ τὰ $\frac{4}{4}$ ὀκ. (=1 ὀκ.) τιμᾶται $\frac{48}{3}$δρ$\times 4 = 64$ δραχ.

**§ 136. Πρόβλημα ΙΙ.** *Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{5}{6}$ εἶναι $\frac{7}{8}$;*

*Λύσις.* Ἀφ' οὗ τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι $\frac{7}{8}$, τὸ $\frac{1}{6}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{7}{8\times 5}$, καὶ τὰ $\frac{6}{6}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{7}{8\times 5}\times 6 = \frac{21}{20}$.

**§ 137. Πρόβλημα ΙΙΙ.** *Τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς βουτύρου τιμῶνται $61\frac{1}{2}$ δραχ. Πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{5}{6}$ τῆς ὀκᾶς αὐτοῦ;*

*Λύσις.* Τρέπομεν τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{5}{6}$ εἰς ὁμώνυμα καὶ εὑρίσκομεν $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$, $\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$. Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἀφ' οὗ τὰ $\frac{9}{12}$ ὀκ. τιμῶνται 61 $\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{123}{2}$ δραχ, τὸ $\frac{1}{12}$ ὀκ. θὰ τιμᾶται $\frac{123}{2\times9}$ καὶ τὰ $\frac{10}{12}$ ὀκ. θὰ τιμῶνται $\frac{123}{2\times9}\times 10 =$ $68\frac{1}{3}$ δραχ.

***Ἀσκήσεις.*** 366) Αὐτοκίνητον διήνυσεν εἰς $\frac{3}{4}$ ὥρας $22\frac{7}{8}$ χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα διήνυε τὴν ὥραν ;

367) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{9}{10}$ εἶναι $2\frac{1}{4}$;

368) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 22 ;

369) Τὰ $\frac{5}{8}$ ἀριθμοῦ εἶναι $\frac{1}{2}$. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ;

370) Τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν βόλων παιδίου εἶναι λευκοί, τὸ $\frac{1}{4}$ κόκκινοι, τὸ $\frac{1}{5}$ πράσινοι καὶ οἱ λοιποὶ 13 εἶναι μαῦροι. Πόσους βόλους ἔχει τὸ ὅλον καὶ πόσοι εἶναι ἀπὸ κάθε χρῶμα ;

371) Ἐὰν εἰς τὰ $\frac{3}{10}$ ἀριθμοῦ προσθέσωμεν τὸν 3, εὑρίσκομεν 4 $\frac{1}{4}$. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος ;

372) Ἐργάτης ἐκτελεῖ ἔργον εἰς 8 $\frac{1}{4}$ ὥρας. Πόσον μέρος τοῦ ἔργου ἐκτελεῖ εἰς $\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας ;

373) Ἐργάτης χρειάζεται 8 $\frac{2}{4}$ ὥρας, διὰ νὰ ἐκτελέσῃ τὰ $\frac{3}{4}$ ἔργου. Εἰς πόσας ὥρας δύναται νὰ ἐκτελέσῃ ἔργον διπλάσιον τοῦ ἔργου τούτου ;

374) Ἔμπορος ἐκέρδισεν ἐξ ἐπιχειρήσεως τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα δι' αὐτὴν διέθεσε· εἶχε δὲ μετὰ ταῦτα ἐν ὅλῳ 20000 δραχμάς. Πόσα χρήματα διέθεσε δι' αὐτήν ;

375) Ἐὰν ποιμὴν εἶχε τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν προβάτων

ου, θὰ εἶχε 30 πρόβατα περισσότερα. Πόσα πρόβατα εἶχεν;

376) Κρήνη γεμίζει δεξαμενὴν εἰς 4 ὥρας καὶ ἄλλη γεμίζει αὐτὴν εἰς 6 ὥρας. Εἰς πόσον χρόνον αἱ δύο κρῆναι ὁμοῦ γεμίζουσι τὴν δεξαμενὴν ταύτην;

377) Κατὰ τὸν περὶ χαρτοσήμου νόμον, εἰς τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν ἑκάστου χαρτοσήμου προστίθενται τὰ $\frac{30}{100}$ τῆς ἀξίας ταύτης. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ δόσῃ τις, διὰ νὰ ἀγοράσῃ χαρτόσημον ὀνομαστικῆς ἀξίας 200 δραχμῶν;

378) Ἐπλήρωσέ τις δι' ἀγορὰν χαρτοσήμου 195 δραχμάς. Πόση εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ;

§ **138. Γενίκευσις καὶ χρησιμότης αὐτῆς.** Διὰ νὰ μάθωμεν (§ 132) πῶς διαιρεῖται ἀριθμὸς διὰ κλάσματος ἔπρεπε νὰ λάβωμεν ὡς διαιρετέον ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ νὰ κάμωμεν τοὺς ἀναγκαίους συλλογισμούς, ἵνα φθάσωμεν καὶ διατυπώσωμεν τὸ συμπέρασμα. Ἔπειτα ἔπρεπε νὰ ἐπαναλάβωμεν τὴν αὐτὴν ἐργασίαν μὲ διαιρετέον κλάσμα καὶ ἔπειτα πάλιν μὲ διαιρετέον μικτὸν καὶ νὰ διατυπώσωμεν κάθε φορὰν τὸ ἀντίστοιχον συμπέρασμα. Ἀντὶ τούτων παρεστήσαμεν τὸν διαιρετέον μὲ τὸ γράμμα α καὶ ἐκάμαμεν ἅπαξ τοὺς συλλογισμούς μας χωρὶς νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τίνος εἴδους ἀριθμὸς εἶναι ὁ α. Κατελήξαμεν δὲ εἰς συμπέρασμα γενικὸν καὶ συντόμως διατυπωθέν.

Ὁμοίαν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν διὰ γραμμάτων δυνάμεθα νὰ κάμωμεν καὶ εἰς πρόβλημά τι, τοῦ ὁποίου διατηροῦμεν κατὰ τὰ ἄλλα τὴν αὐτὴν διατύπωσιν.

Οὕτω προκύπτει πρόβλημα, τὸ ὁποῖον λέγεται *γενικόν*.

Γενικὸν π. χ. εἶναι τὸ ἑξῆς πρόβλημα. *Ἐπώλησέ τις β ὀκάδας οἴνου πρὸς α δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ μὲ τὰ ληφθέντα χρήματα ἠγόρασεν ὕφασμα πρὸς γ δραχ. τὸν πῆχυν. Πόσους πήχεις ἠγόρασεν;* Διὰ νὰ λύσωμεν δὲ αὐτὸ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἀφ' οὗ ἡ μία ὀκᾶ ἐπωλήθη α δραχ. αἱ 2 ὀκ. ἐπωλήθησαν $\alpha \times 2$ καὶ αἱ β ὀκ. ἐπωλήθησαν $\alpha \times \beta$ δραχ. Ἀφ' οὗ δὲ μὲ γ δραχμὰς ἀγοράζει 1 πῆχυν, μὲ 1 δραχμὴν ἀγοράζει $\frac{1}{\gamma}$ πήχ. καὶ μὲ $\alpha \times \beta$ ἀγοράζει $(\alpha \times \beta) \times \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha \times \beta}{\gamma}$ πήχεις. Ἂν δὲ χάριν συντομίας παραστήσωμεν τοὺς ἀγνώστους πήχεις μὲ τὸ χ, θὰ εἶναι $\chi = \frac{\alpha \times \beta}{\gamma}$ (1).

Ἡ ἰσότης αὕτη λέγεται τύπος. Κατ' αὐτὸν λύομεν πᾶν πρόβλημα ὅμοιον πρὸς τὸ προηγούμενον, ἂν μόνον θέσωμεν ἀντὶ τῶν α, β, γ τοὺς δεδομένους ἀντιστοίχους ἀριθμοὺς καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς σημειωμένας πράξεις. Οὕτως, ἂν ἡ τιμὴ τοῦ οἴνου α=5 δραχ. αἱ πωληθεῖσαι ὀκάδες β=15 καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ὑφάσματος γ=25 δραχ. ὁ τύπος (1) δίδει $\chi = \frac{5 \times 15}{25} = 3$ πήχ.

***Ἀσκήσεις.*** 379) Δαπανήσας τις τὰ $\frac{\mu}{\nu}$ τῶν χρημάτων του ἔχει α δραχμάς. Πόσα χρήματα εἶχεν ἀρχικῶς; Ἐφαρμογή, ὅταν $\mu=3$, $\nu=7$, $\alpha=5600$.

380) Εἶχέ τις α πήχεις ὑφάσματος καὶ ἐπώλησε β πήχεις ἀπὸ αὐτὰς πρὸς γ δραχμὰς τὸν πῆχυν, τοὺς δὲ ἄλλους πρὸς δ δραχμὰς τὸν πῆχυν. Πόσα χρήματα ἔλαβεν; Ἐφαρμογὴ διὰ α=80 πήχεις $\beta=32\frac{3}{8}$ πήχ. $\gamma=65\frac{1}{4}$ δραχμάς, $\delta=70$ δραχμάς.

381) Ἑκάστη ὁμολογία τοῦ α' ἀναγκαστικοῦ δανείου (1922) ἔχει ὀνομαστικὴν ἀξίαν 100 δραχμῶν, ἔχασε δὲ τὰ $\frac{\mu}{\nu}$ τῆς ἀξίας της. Πόση εἶναι ἡ πραγματικὴ ἀξία της;

Ἐφαρμογὴ διὰ $\mu=2$ καὶ $\nu=5$.

382) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ χ, τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ τύπος $\chi = \frac{(\alpha+\beta).\mu}{\nu}$, ἂν $\alpha=5$, $\beta=3$, $\mu=2$, $\nu=10$.

383) Νὰ εὑρεθῇ ὁ χ, ἂν $\chi = \frac{(\alpha-\beta):2}{3\alpha\beta}$, καὶ $\alpha=7$, $\beta=2$.

## Προβλήματα διάφορα.

384) Κτηματίας εἶναι κύριος τῶν $\frac{5}{8}$ κτήματος, τὸ ὁποῖον ἀξίζει 480000 δραχμάς. Πόσον μέρος τῆς περιουσίας του ταύτης πρέπει νὰ πωλήσῃ διὰ νὰ λάβῃ 30000 δραχμάς, τὰς ὁποίας χρειάζεται;

385) Πατὴρ παρήγγειλεν ὅπως τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς περιουσίας του λάβῃ ἡ σύζυγός του, τὸ δὲ ὑπόλοιπον διανεμηθῶσιν ἐξ ἴσου οἱ

τεῖς υἱοί του. Οὕτω δὲ ἕκαστος υἱὸς ἔλαβε 50000 δραχμάς. Πόση ἦτο ὅλη ἡ περιουσία καὶ πόσα ἔλαβεν ἡ σύζυγος;

386) Ἑκάστη ὁμολογία τοῦ α' ἀναγκαστικοῦ δανείου (1922) τιμᾶται 61 $\frac{1}{2}$ δραχμάς, ἑκάστη δὲ τοῦ β' ἀναγκαστικοῦ (1926) τιμᾶται 51 $\frac{3}{5}$ δραχ. Ἐάν τις δόσῃ 100 ὁμολογίας τοῦ β' καὶ ἀκόμη 051 $\frac{1}{2}$ δραχμάς, πόσας ὁμολογίας τοῦ α' δύναται ν' ἀγοράσῃ;

387) Ἐὰν ποιμὴν εἶχε τὸ $\frac{1}{2}$, τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν προβάτων του, θὰ εἶχε 35 πρόβατα περισσότερα. Πόσα πρόβατα εἶχεν;

388) Δεξαμενὴ περιέχει 200 ὀκάδας ὕδατος, ὅταν δὲ εἶναι γεμάτη, χωρεῖ 983 $\frac{3}{12}$ ὀκάδας. Μία κρήνη ρίπτει εἰς αὐτὴν 15 $\frac{1}{4}$ ὀκ. τὴν ὥραν, ἐν ᾧ ἀπὸ κρουνὸν αὐτῆς χύνονται 8 $\frac{2}{12}$ ὀκάδες. Ἐὰν συγχρόνως ἀνοιχθῇ ἡ κρήνη καὶ ὁ κρουνός, εἰς πόσας ὥρας θὰ γεμίσῃ ἡ δεξαμενή;

389) Χωρικὸς διέθεσεν ὡς ἑξῆς τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα ἔλαβε κατὰ τὸ παρελθὸν ἔτος ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ καπνοῦ του. Τὸ ἥμισυ καὶ 1200 δραχ ἀκόμη κατέθεσεν εἰς τὸ ταμιευτήριον τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης, τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ 3800 δραχ ἔδωκε δι' ἀγορὰν ἀγροῦ καὶ τὸ ὑπόλοιπον $\frac{1}{8}$ ἐδαπάνησε διὰ τὰς οἰκογενειακὰς ἀνάγκας του. Πόσα χρήματα ἔλαβεν ἀπὸ τὸν καπνόν του;

390) Δύο κυρίαι ἠγόρασαν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πήχεων ὑφάσματος διὰ νὰ κάμωσι παραπετάσματα. Ἡ μία ἔκαμε τὰ παραπετάσματά της 2 $\frac{1}{5}$ πήχεων ἕκαστον, ἡ δὲ ἄλλη 3 $\frac{3}{10}$ πήχ. ἕκαστον. Οὕτω δὲ ἡ α' κυρία ἔκαμε 2 παραπετάσματα περισσότερα ἀπὸ τὴν β'. Πόσους πήχεις ἠγόρασεν ἑκάστη;

391) Ὁ σιδηρόδρομος Ἀθηνῶν—Πειραιῶς εἴς τινα διαδρομὴν ἀφῆκεν εἰς Φάληρον τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν ἐπιβατῶν, τοὺς ὁποίους ἔφερεν ἐξ Ἀθηνῶν καὶ παρέλαβεν ἀπὸ ἐκεῖ ἄλλους 80. Οὕτω δὲ ἔφθασεν

εἰς Πειραιᾶ μὲ 380 ἐπιβάτας. Πόσους ἐπιβάτας ἔφερεν ἐξ Ἀθη-
νῶν ἀρχικῶς ;

392) Διευθυντὴς ἑστιατορίου ἠγόρασε παρὰ κρεοπώλου 3
ὀκάδας κρέατος ἀπὸ βοῦν καὶ ἀρνίον. Καὶ τὸ μὲν πρῶτον ἠγό-
ρασε πρὸς $31\frac{2}{5}$ δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, τὸ δὲ β' πρὸς $44\frac{1}{4}$ δραχ-
μάς· ἔδωκε δὲ ἐν ὅλῳ 1199 δραχμάς. Πόσας ὀκάδας ἠγόρασεν ἀπ
κάθε εἶδος ;

393) Χρηματικὸν ποσὸν διενεμήθη εἰς 4 ἀνθρώπους ὡς ἑξῆς
Ὁ α' ἔλαβε τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ, ὁ β' τὸ ἥμισυ τοῦ μεριδίου τοῦ α',
γ' τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ μεριδίου τοῦ β' καὶ ὁ δ' τὰς ὑπολειφθείσας 10
δραχμάς. Πόσα ἦσαν τὰ διανεμηθέντα χρήματα καὶ πόσα ἔλαβε
ἕκαστος τῶν τριῶν πρώτων ;

394) Εἶχέ τις α δραχμάς, ἐκέρδισε δὲ ἀπὸ μίαν ἐπιχείρησιν τ
$\frac{\mu}{\nu}$ τῆς περιουσιας ταύτης. Τὸ $\frac{1}{\lambda}$ ὅλων τῶν χρημάτων τοῦ
τούτων διέθεσε πρὸς ἀγορὰν κτήματος. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμει-
ναν καὶ πόσας δραχμὰς ἔδωκε διὰ τὸ κτῆμα ;

Ἐφαρμογὴ διὰ $\alpha=500000$, $\mu=3$, $\nu=20$, $\lambda=15$.

# ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄

## ΟΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

§ **139. Δεκαδικαὶ κλασματικαὶ μονάδες. — Δεκαδικοὶ ἀριθμοί.** Αἱ κλασματικαὶ μονάδες $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κτλ. ὀνομάζονται *δεκαδικαὶ κλασματικαὶ μονάδες* ἢ ἁπλῶς δεκαδικαὶ μονάδες.

*Γενικῶς : Δεκαδικὴ μονὰς καλεῖται πᾶσα κλασματικὴ μονάς, ὁποία ἔχει παρονομαστὴν τὴν ἀκεραίαν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑπὸ ἓν ἢ περισσότερα μηδενικά.*

Παρατηροῦμεν ὅτι $\frac{1}{100}\times 10=\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\times 10=1,\ 1\times 10=10$.κτλ. Ἑπομένως κάθε μία ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς σειρᾶς

$$\frac{1}{1000},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{10},\ 10,\ 100,\ldots\ldots \qquad (\alpha)$$

λαμβανομένη δέκα φορὰς κάμνει μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Ὁ ἀριθμὸς $\frac{3}{10}$ ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}$, ἤτοι γίνεται ἀπὸ τὴν δεκαδικὴν μονάδα $\frac{1}{10}$, ἂν ἐπαναληφθῇ τρεῖς φοράς. Καλεῖται δὲ οὗτος *δεκαδικὸς κλασματικὸς ἀριθμός*. Ὁμοίως $\frac{23}{100}$, $\frac{1875}{10000}$ εἶναι δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

*Γενικῶς : Δεκαδικὸς ἀριθμὸς καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος γίνεται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως μιᾶς δεκαδικῆς μονάδος.*

Τυχὸν δεκαδικὸς ἀριθμὸς π. χ. ὁ $\frac{475}{100}=\frac{400+70+5}{100}=$ $4+\frac{7}{10}+\frac{5}{100}$, ἤτοι *ἀποτελεῖται ἀπὸ μονάδας διαφόρων τάξεων τῆς σειρᾶς (α) καὶ ἀπὸ οὐδεμίαν περιέχει περισσοτέρας τῶν ἐννέα.*

Ἐὰν λοιπὸν ἐφαρμόσωμεν τὴν γνωστὴν (§ 9) συμφωνίαν δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς χωρὶς παρονομαστά

Πρὸς τοῦτο δεξιὰ τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων γράφομε ὑποδιαστολὴν ( , ) δεξιὰ ταύτης τὰ δέκατα, ἔπειτα τὰ ἑκατοστ κτλ. Ἐὰν δὲν ὑπάρχωσιν ἀκέραιαι μονάδες ἢ ἄλλη δεκαδικὴ μ νὰς ἀνωτέρα τῆς τελευταίας, θέτομεν 0 εἰς τὴν θέσιν της.

Οὕτως ὁ $\frac{475}{100}$ γράφεται 4,75, ὁ $\frac{468}{10000}$ γράφεται 0,0468. Ἡ τοιαύτη μορφὴ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν καλεῖται *δεκαδικ μορφή*.

Ὥστε: *Διὰ νὰ γράψωμεν δεκαδικὸν κλάσμα ὑπὸ δεκαδικὴ μορφήν, γράφομεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ χωρίζομεν μὲ ὑποδιαστο λὴν ἀπὸ τὸ τέλος τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστή Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὴς δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ πρὸς τοῦτο ψηφία γράφομε πρὸ αὐτοῦ, ὅσα χρειάζονται μηδενικά.*

Κατὰ ταῦτα αἱ δεκαδικαὶ μονάδες τῆς σειρᾶς (α) γράφοντ οὕτω : 0,1 0,01 0,001 0,0001 κ.λ.π.

Τὰ πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς ψηφία ἀποτελοῦσι τὸ ἀκέραιον μέ ρος, τὰ δὲ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν ἀποτελοῦσι τὸ δεκαδικὸν μέρ καὶ λέγονται *δεκαδικὰ ψηφία*.

Ἐπειδή, ὡς εἴπομεν $0{,}53=\frac{53}{100}$, $14{,}2=\frac{142}{10}$ ἔπεται ὅτι

*Ἐὰν δοθῇ δεκαδικὸς ἀριθμὸς γραμμένος ὑπὸ δεκαδικὴν μο φήν, διὰ νὰ γράψωμεν αὐτὸν ὡς κοινὸν κλάσμα, παραλείπομεν τὴ ὑποδιαστολὴν καὶ ὑπὸ τὸν προκύπτοντα ἀκέραιον γράφομεν ὡς πα ρονομαστὴν τὴν ἀκεραίαν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ μηδενικ ἰσάριθμα πρὸς τὰ δεκαδικὰ ψηφία.*

**Ἀσκήσεις.** 395) Νὰ γραφῶσιν ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν τὰ δε καδικὰ κλάσματα $\frac{25}{10}$, $\frac{18431}{1000}$, $\frac{167}{10000}$, $\frac{35}{100}$, $\frac{48}{1000}$, $\frac{473}{10000}$, $\frac{302}{100}$.

396) Νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος γίνεται ἀπὸ τὸν $\frac{1}{100}$ ἢ $\frac{1}{1000}$ ἐὰν ἐπαναληφθῇ 5 ἢ 12 ἢ 84 ἢ 204.

§ **140. Ἀπαγγελία δεκαδικῶν ἀριθμῶν.** α') Ἐ πειδὴ $5{,}67=\frac{567}{100}$, οὗτος ἀπαγγέλλεται : *πεντακόσια ἑξήκον ἑπτὰ ἑκατοστά*, ἤτοι : *ἀναγινώσκομεν τὸν ὑπὸ τῶν ψηφίων αὐτ* ἀποτελούμενον ἀκέραιον (ὡς νὰ μὴ ὑπῆρχεν ἡ ὑποδιαστολὴ) καὶ προσαρτῶμεν εἰς τὸ τέλος τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου.

β′) Ἐπειδὴ $5{,}67 = 5 + \frac{6}{10} + \frac{7}{100}$, ἀναγινώσκεται καὶ οὕτω: 5 ἀκέραιαι μονάδες, 6 δέκατα καὶ 7 ἑκατοστά, ἤτοι: ἀναγινώσκομεν χωριστὰ ἕκαστον ψηφίον καὶ προσαρτῶμεν ἀμέσως τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας τοῦτο παριστᾷ.

γ′) Ὁ ἀριθμὸς π.χ. $43{,}56104 = 43 + \frac{56}{100} + \frac{104}{100000}$ καὶ ἀπαγγέλλεται οὕτω: 43 ἀκέραιαι μονάδες, 56 ἑκατοστὰ καὶ 104 ἑκατοντάκις χιλιοστά.

Ἐπειδὴ δὲ $43{,}56104 = 43 + \frac{56104}{100000}$ ἀπαγγέλλεται καὶ οὕτω: 43 ἀκ. μον. καὶ 56104 ἑκατοντάκις χιλιοστά. Ἤτοι:

*Χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς ὅσα θέλομεν τμήματα καὶ ἀναγινώσκομεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τὸν ἀκέραιον ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ ψηφία ἑκάστου τμήματος, προσαρτῶμεν δὲ ἀμέσως καὶ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ τμήματος τούτου.*

***Ἀσκήσεις.*** 397) Νὰ ἀπαγγελθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 1,3 0,7 46,7, 123 0,604, 34,67, 0,068 0,005 0,0604 1763,43 1048,0051.

398) Νὰ ἀπαγγελθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 308,00709 0,17894 178,62501 10,041004.

**§ 141. Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.** Α′. Γνωρίζομεν ὅτι $230\text{λεπτὰ} = \frac{230}{100}\text{δραχ} = 2{,}30\text{δραχ}$, ἢ $230^{\lambda} = 230{:}10 = 23$ δεκάρες $= \frac{23}{10}$ δραχ $= 2{,}3$ δραχ.

Ἄρα: 2, 3=2, 30. Εὐνόητον δὲ ὅτι 4,35=04 35=004, 35 κτλ.

Ἄρα: *Ἡ ἀξία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν βλάπτεται, ἂν γράψωμεν, ὅσα θέλομεν, μηδενικὰ εἰς τὴν ἀρχὴν ἢ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ.*

Β′. Ἂν ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 84,65 δραχ. 10 πήχεις ἀπὸ αὐτὸ τιμῶνται $84{,}65\text{ δραχ} \times 10 = \frac{8465}{100} \times 10 = \frac{8465}{10} = 846{,}5$ δρ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $17{,}635 \times 100 = 1763{,}5$ κτλ.

Ἄρα: *Διὰ νὰ πολ]σωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ. ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τόσας θέσεις, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ πολ]στής.*

Γ'. Ἐπειδὴ 84,65×10=846, 5, ἕπεται ὅτι 846, 5 : 10=84. 6
ἐπειδὴ δὲ 17,635×100=1763, 5 ἕπεται ὅτι 1763, 5 : 100=17. 63

Ἄρα: *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ 10, 10 1000 κτλ. ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τὴν ὑποδι στολὴν τόσας θέσεις, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ διαιρέτης.*

ΣΗΜ. Ἐὰν ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία πρ μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, γράφομεν εἰς τὸ τέλος ἢ τὴν ἀρχ αὐτοῦ, ὅσα χρειάζονται μηδενικά. Π. χ. 1,34 × 1000 = 1,340×1000=1340, 15,68 : 100=015,68 : 100=0,1568.

Ὁμοίως 5×10=5,0×10=50, 37 : 10=37, 0 : 10=3, 7 κτ

*Ἀσκήσεις*. 399) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως τὰ γινόμενα

0,3×10 0,35×10 7,32×10 1,582×100 6,93×100
0,2347×1000 καὶ τὰ πηλίκα 56,3 : 10 0,6 : 10 0,05 : 10
534,7 : 100 62,3 : 100.

400) Ἓν πορτοκάλλιον τιμᾶται 1,80 δραχ. Πόσον τιμῶνται 1 καὶ πόσον 1000 πορτοκάλλια;

401) Ἠγόρασέ τις 100 ὀκάδας ὄρυζαν πρὸς 17,40 δραχμὰς τ ὀκᾶν καὶ 100 ὀκάδες καφφὲ πρὸς 84,30 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Ἔδω δὲ 3 χιλιόδραχμα. Πόσον ὑπόλοιπον θὰ λάβῃ;

402) Ἡ χιλιὰς τῶν λεμονίων τιμᾶται 750 δραχμάς. Πόσον μᾶται τὸ ἕν;

403) Πόσα λεπτὰ ἔχουσιν αἱ 367,45 δραχμαί;

404) Πόσας δραχμὰς ἀποτελοῦσι τὰ 79635 λεπτά;

405) Πόσας δραχμὰς ἀποτελοῦσι 35,4 δεκάρες;

406) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς πράξεις

$$3,45\times100-0,45\times100,\quad \frac{0,31\times10}{31},\ (1+0,98)\times100,$$

$$(1-0,99)\times100,\ \frac{(2-0,98)\times100}{(0,99\times100)+1}.$$

## Πράξεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

§ **142. Πρόσθεσις δεκαδικῶν ἀριθμῶν.** Ἐὰν δαπ νήσῃ τις 87,3 δραχ. τὴν ἄλλην ἡμέραν 96,65 καὶ τὴν γ' 90,4 δρ θὰ δαπανήσῃ τὸ ὅλον

| | | |
|---|---|---|
| | | Διάταξις τῆς πράξεως |
| 87,3δρχ+95,69δρχ+90,40δραχ. | ἢ | 87,3 |
| 8730λεπ.+9565λεπ+9040λ = | | 95,65 |
| 27335λεπ.=273,35δραχ. Ἤτοι | | 90,40 |
| 87,3+95,65+90,4=273,35 δραχ. | | 273,35 |

Οὕτως ἐξηγεῖται ὁ γνωστὸς κανὼν τῆς προσθέσεως τῶν δεκα-
ικῶν ἀριθμῶν.

ΣΗΜ. Ἐὰν μερικοὶ ἀπὸ τοὺς προσθετέους εἶναι ἀκέραιοι, ἡ
πρόσθεσις γίνεται κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον.

*Ἀσκήσεις.* 407) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀθροίσματα 1,45+25,60
+31,75+67,18, 56,17+48,5+106,3+363,34+706,34,
783+25,+0,357+1,6+7, 0,038+100,64+2,0004+0,000008.

408) Πατὴρ ἔλαβεν δι' ἐργασίαν μιᾶς ἑβδομάδος 452,10 δραχ,
υἱός του 374,40 δραχ. καὶ ἡ θυγάτηρ του 310,20 δραχ. Πόσα
χρήματα ἔλαβεν ἡ οἰκογένεια αὕτη;

409) Ἐργάτης κατέθεσεν εἰς τὸ ταμιευτήριον τῆς Ἐθνικῆς
Τραπέζης τὸ α' Σάββατον μηνός τινος 167,30 δραχ. τὸ β' Σάβ-
βατον 208,45 δραχ, τὸ γ' 210,75 δραχ καὶ τὸ δ' 225,65 δραχ.
Πόσα χρήματα κατέθεσεν ὅλον τὸν μῆνα τοῦτον;

410) Οἰκοδεσπότης λαμβάνει μηνιαῖον ἐνοίκιον ἀπὸ μὲν τὸ ἰσό-
γειον 1735,40 δραχ· ἀπὸ τὸ ἄνω πάτωμα 2472,35 δραχ περισσο-
τέρας. Πόσον ἐνοίκιον λαμβάνει τὸ ὅλον;

**§ 143. Ἀφαίρεσις δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλ-
λον.** Ἐὰν ἔχῃ τις 48,75 δραχ. καὶ δαπανήσῃ 23,4 δραχ, θὰ
μείνωσιν εἰς αὐτὸν 48,75δρ — 23,4δραχ = 4875λ — 2340λ =
2535λ=25,35δραχ. Οὕτως ἐξηγεῖται ὁ γνωστὸς κανών, κατὰ τὸν
ὁποῖον καθιστῶμεν ἰσοπλήθη τὰ δεκαδικὰ ψηφία αὐτῶν κ.τ.λ.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{r} 48,75 \\ 23,40 \\ \hline 25,35 \end{array}$$

ΣΗΜ. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον γίνεται ἡ ἀφαίρεσις καὶ ὅταν ὁ
ἕνας ἀπὸ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς εἶναι ἀκέραιος. Οὕτω 20,35—18=20,35—18,00=2,35,
5—2,25=5,00—2, 25=2,75.

*Ἀσκήσεις.* 411) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀφαιρέσεις 54,65—33,15,
142,35—81,60 863,80—658,95 597,8—267,875
3025,75—2901,167 7,2—3 8—6,35 9—7,125 410—9,002.

412) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς πράξεις
85,35—(12,5+31,45+15), (7,25+3,75)—(1,05+2,35+5,45),
103—(0,95×100), (67,85+35,40+21,25)—(0,99×100),
(0,35×10)—1,25 (57,3×100)—(2,815×10).

413) Ἠγόρασέ τις ζάχαριν ἀξίας 37,75 δραχ. καὶ ἔδωκεν εἰς
τὸν παντοπώλην ἓν πεντηκοντάδραχον. Πόσον ὑπόλοιπον θὰ λάβῃ
ὀπίσω;

414) Τὸ εἰσιτήριον α΄ θέσεως τῶν Ἑλληνικῶν Σιδηροδρόμ ἀπὸ Ἀθηνῶν μέχρι Θεσσαλονίκης εἶναι 649,50δραχ, τὸ δὲ εἰσιτ ριον β΄ θέσεως εἶναι 544,50 δραχ. Πόσον εἶναι ἀκριβότερον τὸ εἰσιτήριον ἀπὸ τὸ β΄;

415) Μαθητὴς ἐπήδησεν ἅλμα εἰς ὕψος 2,20 μ, ἄλλος 1,85 Πόσον ὑψηλότερον ἅλμα ἔκαμεν ὁ α΄ ἀπὸ τὸν β΄;

416) Γεωργὸς εἰσέπραξεν ἐκ τῆς πωλήσεως σίτου 8940,80 δρ ἐκ τῆς πωλήσεως κριθῆς 3981,75 δραχμὰς καὶ ἐκ τῆς πωλήσε καπνοῦ 38940 δραχμάς. Ἐκ τούτων ἐπλήρωσεν χρέος εἰς Ἀγροτικὴν Τράπεζαν ἐκ 12567,35 δραχμῶν, ἔδωκε 5300 δραχ. ἀγορὰν ἵππου καὶ ἐπλήρωσεν εἰς τὸν παντοπώλην χρέος 2347,60 δραχμάς. Πόσα χρήματα ἔμειναν εἰς αὐτόν;

§ **144. Πολ)σμὸς δεκαδικοῦ ἐπὶ ἀκέραιον ἢ δε καδικόν.** Ἐὰν ἡ ὀκᾶ τῆς ζακχάρεως τιμᾶται 21,75 δραχμ αἱ 3 ὀκάδες θὰ τιμῶνται

$$21{,}75 \text{ δραχ} \times 3 = \frac{2175}{100} \times 3 = \frac{2175 \times 3}{100} = \frac{5625}{100} = 65{,}25 \text{ δρ}$$

Ἐὰν ἠγόραζέ τις 2,5 ὀκ, θὰ ἔδιδε

$$21{,}75 \text{ δραχ} \times 2{,}5 = \frac{2175}{100} \times \frac{25}{10} = \frac{54375}{100} = 54{,}375 \text{ δραχμ}$$

*Οὕτως ἐξηγεῖται ὁ γνωστὸς κανών, κατὰ τὸν ὁποῖον πολ)μεν αὐτ ὡς νὰ ἦσαν ἀκέραιοι καὶ χωρίζομεν μὲ ὑποδιαστολὴν ἀπὸ τὰ δε τοῦ γινομένου τόσα ψηφία, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχουσι καὶ οἱ παράγοντες.*

***Ἀσκήσεις.*** 417) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις 5,40×4 41,05×18,1 4,62×1,04 2,35×1,4 37,40×8,9 4,537×232 350,004×0,124 3,004×0,07.

418) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς πράξεις

(2,45+3,68+15,75)×3, (81,45—48,51)×9.

419) (21,4+19,75+38,83)×12,5 (68,75×13,42)—(27,75×

21000—(31,05+7,006+0,0063)×100.

420) Νὰ εὑρεθῇ ὁ χ, ἂν χ=(α×10—β×100)×5αβ

α=23,75, β=1,05.

421) Αὐτοκίνητον διανύον 35,7 χιλιόμετρα τὴν ὥραν ἐχρειά 5 ὥρας, διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ Πειραιῶς εἰς Λεβάδειαν. Πόσον ἀ χουσιν αἱ δύο αὗται πόλεις;

422) Ἠγόρασέ τις 4,2 πήχεις ὑφάσματος πρὸς 245,30 δρ τὸν πῆχυν. Πόσα χρήματα ἔδωκεν;

423) Ἠγόρασέ τις 6 μανδήλια πρὸς 12, 60 δραχ. ἕκαστον καὶ 5,50 μέτρα χασὲ πρὸς 10,50 δραχμὰς τὸ μέτρον καὶ ἔδωκεν ἓν πεντακοσιόδραχμον. Πόσον ὑπόλοιπον θὰ λάβῃ ὀπίσω;

§ **143. Διαίρεσις δεκαδικοῦ δι᾿ ἀκεραίου.** Ἐὰν ἁμαξοστοιχία εἰς 8 ὥρας διατρέχῃ 154,80 χιλιόμετρα, εἰς 1 ὥραν θὰ διατρέχῃ προφανῶς 154,80 : 8 ἢ $\frac{15480}{100} : 8 = \frac{15480 : 8}{100} =$

$$\frac{1935}{100} = 19{,}35 \text{ χιλ.}$$

Ὁμοίως $4{,}152 : 12 = \frac{4152 : 12}{1000} = \frac{346}{1000} = 0{,}346$. Ἄρα:

*διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν δι᾿ ἀκεραίου ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς νὰ ἦτο ὁ διαιρετέος ἀκέραιος καὶ γράφομεν ὑποδιαστολὴν μετὰ τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου, τὰ ὁποῖα προέρχονται ἀπὸ τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀκεραίου μέρους.*

Διάταξις τῶν πράξεων

| | | | |
|---|---|---|---|
| 154,80 | 8 | 4,152 | 12 |
| 74 | 19,35 | 55 | 0,346 |
| 28 | | 72 | |
| 40 | | 0 | |
| 0 | | | |

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τοῦτον εἰς τὴν διαίρεσιν 13,46:20, εὑρίσκομεν πηλίκον 0,67, ἐν ᾧ τὸ ἀληθὲς εἶναι 0,67 καὶ $\frac{6}{20}$ τοῦ $\frac{1}{100}$. Ἐὰν ὅμως νοήσωμεν ἓν 0 δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, καταβιβάσωμεν δὲ αὐτὸ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καὶ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν, εὑρίσκομεν ὑπόλιπον 0 καὶ ἀκριβὲς πηλίκον 0,673. Ἐὰν διαιρέσωμεν ὁμοίως

| | |
|---|---|
| 13,46 | 20 |
| 146 | 0,673 |
| 60 | |
| 0 | |

τὸν 1,7 διὰ 3 βλέπομεν ὅτι μένει πάντοτε ὑπόλοιπον 2. Ἐὰν διακόψωμεν τὴν διαίρεσιν μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ψηφίου τῶν χιλιοστῶν, τὸ πηλίκον 0, 566 διαφέρει τοῦ ἀκριβοῦς ὀλιγότερον τοῦ $\frac{1}{1000}$. Δι᾿ αὐτὸ λέγομεν ὅτι πηλίκον εἶναι 0,566 *κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ*.

| | |
|---|---|
| 1,7 | 3 |
| 20 | 0,566 |
| 20 | |
| 2 | |

Ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν, μέχρι τῆς εὑρέσεως καὶ τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατομμυριοστῶν, ὁρίζομεν τὸ πηλίκον κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000000}$.

Ὥστε, ἐὰν κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ ἀνωτέρω κανόνος μέν[ῃ] ὑπόλοιπον, δυνάμεθα νὰ συνεχίσωμεν τὴν διαίρεσιν. Τοιουτοτρόπω[ς] ἢ θὰ εὕρωμεν τὸ ἀκριβὲς πηλίκον ἢ θὰ ὁρίσωμεν αὐτό, μὲ ὅσ[ην] θέλομεν προσέγγισιν.

ΣΗΜ. Ὁ κανὼν οὗτος ἐφαρμόζεται καὶ εἰς ἀκεραίους ὡς παραπλεύρως φαίνεται.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 17,00 | 4 | 3,0 | 5 |
| 10 | 4,25 | 0 | 0,6 |
| 20 | | | |

*Ἀσκήσεις.* 424) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις 6,8 : 2 8,64 : 56,77 : 7 29,233 : 41 488,38 : 62 0,805 : 23 0,002457 : 273.

425) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις $(2,35+0,95\times10) : 5$,
$(37,658\times100-126,476\times10) : 151$.

426) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ χ, ἂν

$$\chi=\left(\frac{\alpha+3.\beta}{\gamma}\right)\times\left(\frac{\alpha-3\beta}{2.\gamma}\right) \text{ καὶ } \alpha=18,75 \quad \beta=5,4 \quad \gamma=5.$$

427) Δέκα πέντε ἐπιβάται γ' θέσεως τῶν Ἑλλ. Σιδηροδρόμ[ων] ἐπλήρωσαν διὰ νὰ μεταβῶσιν ἀπ' Ἀθηνῶν εἰς Θήβας 1837,5 δραχμάς. Πόση εἶναι ἡ τιμὴ ἑκάστου εἰσιτηρίου ;

428) Διὰ νὰ λιπάνῃ τις ἀγρὸν 12 στρεμμάτων ἔρριψεν εἰς α[ὐ]τὸν 427 2 ὀκάδας λιπάσματος. Πόσον λίπασμα ἔρριψε κατ[ὰ] στρέμμα ;

429) Ἡ Λάρισα ἀπέχει ἀπὸ τὸν Βόλον 59,4 χιλιόμετρα. Ε[ἰς] πόσον χρόνον μεταβαίνει ἀπὸ Βόλον εἰς Λάρισαν ἁμαξοστοιχία, ὁποία διανύει 29 χιλ. τὴν ὥραν καὶ παραμένει εἰς τοὺς ἐνδιαμέσου[ς] σταθμοὺς 1 ὥραν ;

§ **146. Διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ δεκαδικοῦ.** Ἐὰ[ν] μὲ 4,23 μέτρα ὑφάσματος κάμνωμεν μίαν ἐνδυμασίαν, μὲ 29,6[1] μέτρα θὰ κάμωμεν τόσας ἐνδυμασίας, ὅσας φορὰς χωροῦσι τ[ὰ] 4,23 μ. εἰς τὰ 29,61 ἤτοι $29,21 : 4,23 = \frac{2961}{100} : \frac{423}{100} = \frac{296[1]}{42[3]}$ $=7$ ἐνδ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $122,8 : 15,35=12280 : 1535=8$

καὶ $63 : 15,75=63 : \frac{1575}{100}=\frac{6300}{1575}=4$.

Ἄρα : *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ δεκαδικοῦ, μεταθέτομε[ν] τὴν ὑποδιαστολὴν ἀμφοτέρων πρὸς τὰ δεξιὰ τόσας θέσεις, ὅσ[ας]* *χρειάζονται διὰ νὰ γείνῃ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος. Ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀκεραίου τούτου διαιρέτου κατὰ τὰ γνωστά.*

ΣΗΜ. α΄) Ἐὰν ὁ διαιρετέος δὲν ἔχῃ ἐπαρκῆ δεκαδικὰ ψηφία πρὸς μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, γράφομεν ὅσα χρειάζονται μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ. Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι ἀκέραιος.

ΣΗΜ. β΄) Τὸ ἀληθὲς ὑπόλοιπον εὑρίσκομεν, ἂν διαιρέσωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἐκτελεσθείσης διαιρέσεως διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, μὲ τὸν ὁποῖον ἐπολ]σαμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην. Πρέπει ὅμως νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἐκτελεσθείσης διαιρέσεως δηλοῖ μονάδας τῆς τάξεως τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ πηλίκου. Οὕτω πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου 26,8 : 3,5 ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν 268 : 35, τῆς ὁποίας πηλίκον 7 καὶ ὑπόλοιπον 23. Τῆς διαιρέσεως ἄρα 26,8 : 3,5 πηλίκον εἶναι 7 καὶ ὑπόλοιπον 2,3.

Ἐὰν ὅμως προχωρήσωμεν τὴν διαίρεσιν 268 : 35, μέχρις οὗ εὕρωμεν πηλίκον 7,65, τὸ μένον ὑπόλοιπον 25 δηλοῖ ἑκατοστά, ἤτοι εἶναι 0,25· τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς 26,8 : 3,5 εἶναι

$$0,25:10=0,025$$

***Ἀσκήσεις*** 430) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ διαιρέσεις 27,69 : 2,13 537,66 : 6,18 104,175 : 23,15 6 : 0,02 174 : 3,48 83,146:0,006.

431) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις $(273\times7\times32,65\times6):2,5$ $(0,99\times10\times0,09\times100):4,5$.

432) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ χ, ἂν εἶναι

$$\chi=\left(\frac{\alpha+3\beta-2.\mu}{\mu+\alpha}\times\frac{3\alpha}{\beta}\right):5\alpha \text{ καὶ } \alpha=10,35 \quad \beta=0,06 \quad \mu=2,1.$$

433) Αὐτοκίνητον διανύει 32,5 χιλ. τὴν ὥραν. Εἰς πόσον χρόνον θὰ μεταβῇ ἀπὸ Πειραιῶς εἰς Λάρισαν, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις εἶναι 348,795 χιλιόμετρα, ἂν δαπανήσῃ διὰ τὰς διαφόρους στάσεις του 3 ὥρας;

434) Τὸ εἰσιτήριον α΄ θέσεως τοῦ σιδηροδρόμου Π—Α—Π ἀπὸ Ἀθηνῶν μέχρι Καλαμῶν εἶναι 522,50 δραχμαί. Εἴς τι ταξείδιον ὁ σταθμάρχης Ἀθηνῶν εἰσέπραξεν ἐξ εἰσιτηρίων α΄ θέσεως διὰ Καλάμας 12017,50 δραχ. Πόσοι ἐπιβάται α΄ θέσεως ἐταξείδευον ἐξ Ἀθηνῶν διὰ Καλάμας;

435) Ἑκάστη ὁμολογία τοῦ α΄ ἀναγκαστικοῦ δανείου τιμᾶται 64,75 δραχμάς, τοῦ δὲ β΄ 51,80. Ἐὰν πωλήσῃ τις 50 ὁμολογίας τοῦ β΄, πόσας ὁμολογίας τοῦ α΄ δύναται νὰ ἀγοράσῃ μὲ τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα ἐκ τῆς πωλήσεως θὰ λάβῃ;

## § 147. Τροπὴ κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικόν.

Γνωρίζομεν ὅτι $3:4=\frac{3}{4}$. Ἐὰν ὅμως ἐκτελέσωμεν, κατὰ τὰ ἀνωτέρω (§ 145 Σημ.), τὴν διαίρεσιν 3 : 4 εὑρίσκομεν πηλίκον 0,75. Ἄρα $\frac{3}{4}=0,75$. Ἡ ἐργασία αὕτη καλεῖται τροπὴ τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Δ.άταξις πράξεως

$$\begin{array}{r|l} 50 & 6 \\ \cline{2-2} 20 & 0,833 \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$$

Ἐὰν ἐργασθῶμεν ὁμοίως διὰ τὸ κλάσμα $\frac{5}{6}$, βλέπομεν ὅτι δὲν ὑπάρχει δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἀκριβῶς ἴσος μὲ αὐτό, διότι ἡ διαίρεσις 5 : 6 οὐδέποτε περατοῦται. Ἂν δὲ σταματήσωμεν τὴν διαίρεσιν, εὐθὺς ὡς εὕρωμεν π. χ. τὸ ψηφίον τῶν χιλιοστῶν, λέγομεν ὅτι τὸ $\frac{5}{6}$ παρίσταται ὑπὸ τοῦ 0,833 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$.

Ἄρα : *Διὰ νὰ τρέψωμεν κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικόν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ θέτοντες ἀνὰ ἓν 0 δεξιὰ ἑκάστου τῶν ἀναφαινομένων ὑπολοίπων μετὰ τὴν ἐξάντλησιν τῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδὲν ἢ μέχρις οὗ ὁρίσωμεν τὸ πηλίκον, μὲ ὅσην θέλομεν προσέγγισιν.*

ΣΗΜ. Ἀπὸ ὅσα εἴπομεν προηγουμένως προκύπτει ὅτι ἄλλα κλάσματα τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς καὶ ἄλλα μὲ προσέγγισιν.

Τὰ εἴδη ταῦτα διακρίνομεν ἀπ' ἀλλήλων ὡς ἑξῆς.

Ἔστω π. χ. τὸ κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{7}{40}$. Ἐπειδὴ $40=2^3\times5$, ἕπεται ὅτι $\frac{7}{40}=\frac{7}{2^3\times5}$. Ἐὰν δὲ πολ)σωμεν τοὺ ὅρους τοῦ β' μέλους ἐπὶ $5^2$, εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{7}{40}=\frac{7\times5^2}{2^3\times5^3}=\frac{7\times25}{(2\times5)^3}=\frac{175}{10^3}=\frac{175}{1000}=0,175.$$

Ὁμοίως εἶναι

$$\frac{6}{25}=\frac{6}{5^2}=\frac{6\times2^2}{5^2\times2^2}=\frac{24}{(5\times2)^2}=\frac{24}{10^2}=\frac{24}{100}=0,24.$$

$$\frac{3}{8}=\frac{3}{2^3}=\frac{3\times5^3}{2^3\times5^3}=\frac{375}{(2\times5)^3}=\frac{375}{10^3}=0,375.$$

Ἀπὸ τὰ παραδείγματα αὐτὰ ἐννοοῦμεν ὅτι: *Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος δὲν ἔχῃ πρώτους παράγοντας διαφόρους τοῦ 2 καὶ 5, τὸ κλάσμα τοῦτο τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.*

Ἀποδεικνύει δὲ ἡ κυρίως Θεωρητικὴ Ἀριθμητικὴ ὅτι τὰ ἀνάγωγα κλάσματα, τὰ ὁποῖα εἶναι διάφορα ἀπὸ αὐτά, τρέπονται εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς κατὰ προσέγγισιν.

***Ἀσκήσεις.*** 436. Νὰ τραπῶσιν εἰς δεκαδικοὺς τὰ κλάσματα

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{5},\ \frac{7}{8},\ \frac{21}{24},\ \frac{23}{40}.$$

437) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς πράξεις

$$\frac{14}{16} + 0{,}35\,,\quad \frac{15}{20} - 0{,}485\,,\quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) - 0{,}356.$$

438) Νὰ τραπῶσιν εἰς δεκαδικοὺς τὰ κλάσματα

$\frac{1}{3}, \frac{13}{17}, \frac{7}{13}, \frac{5}{7}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$

439) Νὰ τραπῇ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν τὸ κλάσμα $\frac{23}{99}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$, εἶτα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10000}$ καὶ τέλος κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000000}$. Τί ἀξιοσημείωτον παρατηρεῖτε εἰς τὸν δεκαδικὸν τοῦτον ἀριθμόν;

**§ 148. Πολ]σμὸς καὶ διαίρεσις δεκαδικοῦ διὰ κλάσματος ἢ μικτοῦ.** Αἱ ἰσότητες

$$\alpha \times \frac{3}{4} = \frac{\alpha \times 3}{4},\quad \alpha \times 5\,\frac{2}{3} = \alpha \times \frac{17}{3}$$

$$\text{ἢ}\quad \alpha \times 5\,\frac{2}{3} = (\alpha \times 5) + \left(\alpha \times \frac{2}{5}\right),\quad \alpha : \frac{3}{4} = \alpha \times \frac{4}{3},$$

$$\alpha : 5\,\frac{2}{3} = \alpha : \frac{17}{3}$$

ἀληθεύουσι καὶ ὅταν ὁ α εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμός. Ἀποδεικνύονται δὲ ὅπως καὶ ὅταν ὁ α εἶναι ἀκέραιος.

***Ἀσκήσεις.*** 440) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 98,40 δραχ. Πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως;

441) Ἡ ὀκᾶ τῆς ὀρύζης τιμᾶται 18,20 δραχ. Πόσον τιμῶνται $3\frac{3}{4}$ ὀκ. αὐτῆς ;

442) Ἠγόρασέ τις $\frac{5}{8}$ πήχ. ὑφάσματος ἀντὶ 80,50 δραχ. Πόσον ἠγόρασε τὸν πῆχυν ;

443) Ἁμαξοστοιχία εἰς $4\frac{2}{5}$ ὥρας διέτρεξε 184,8 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα διέτρεχε τὴν ὥραν ;

§ **149. Περιοδικὰ δεκαδικὰ κλάσματα.** Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{5}{6}$ δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν. Τοῦτο συμβαίνει καὶ διὰ τὸ $\frac{4}{7}$.

$$\begin{array}{l|l} 40 & 7 \\ \hline \;\;50 & 0{,}5714285\ldots \\ \;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\;\;30 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;60 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;40 & \end{array}$$

Ἐὰν δὲ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν, τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ πηλίκου ἀπὸ μίαν τάξιν καὶ ἑξῆς ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν. Αἰτία τούτου εἶναι ἡ ἑξῆς.

Κατὰ τὴν τροπὴν π.χ. τοῦ $\frac{4}{7}$ τὰ δυνατὰ ὑπόλοιπα εἶναι 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ἐπομένως μετὰ 6 τὸ πολὺ διαιρέσεις θὰ ἐμφανισθῇ ἕνα ἀπὸ τὰ προηγούμενα ὑπόλοιπα· ἀπὸ τὴν στιγμὴν δὲ ταύτην θὰ ἐκτελῶμεν προηγουμένας μερικὰς διαιρέσεις καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν. Θὰ εὑρίσκωμεν ἄρα τὰ αὐτὰ ψηφία τοῦ πηλίκου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν.

Ἐὰν φαντασθῶμεν ὅτι ἡ διαίρεσις συνεχίζεται ἐπ' ἄπειρον, προκύπτει πηλίκον 0,571428571428571428.... Τούτου δυνάμεθα νὰ γράψωμεν, ὅσα θέλομεν δεκαδικὰ ψηφία· ἂν δὲ ἀναγράψωμεν ὡρισμένον πλῆθος ἀπὸ τὰ ψηφία ταῦτα, προκύπτει ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὑπάρχει μεγαλύτερος· π.χ. $0{,}57 < 1$, $0{,}57428 < 1$. κτλ. Δι' αὐτοὺς τοὺς λόγους δεχόμεθα ὅτι 0,571428571428571428..... εἶναι ἀριθμός.

Τοῦτον ὀνομάζομεν *δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα*.

Καὶ οἱ ἀριθμοὶ 0,833...., 1,54167167.... εἶναι δεκαδικὰ περιοδικὰ κλάσματα.

Ἄρα : *Δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἀπὸ μίαν τάξιν* καὶ ἑξῆς ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν.

Τὸ σύνολον τῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν, καλεῖται *περίοδος*. Οὕτω τοῦ 0,833... ἡ περίοδος εἶναι 3, τοῦ 1,54167167.... περίοδος εἶναι 167.

Περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα λέγεται *ἁπλοῦν* μέν, ἂν ἡ περίοδος ἀρχίζῃ εὐθὺς μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, μικτὸν δέ, ἂν ἡ περίοδος ἀρχίζῃ μετὰ ἓν ἢ περισσότερα ψηφία μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν. Π. χ. τὸ 0,737373 ... εἶναι ἁπλοῦν, τὸ δὲ 0,8565656.... εἶναι μικτὸν περιοδικόν.

***Ἀσκήσεις***. 444) Ποῖα ἀπὸ τὰ περιοδικὰ δεκαδικὰ κλάσματα 1,3585858....0,671671671...4,060606....12,3104104.... εἶναι ἁπλᾶ καὶ ποῖα μικτά; Ποῖα μεγαλύτερα καὶ ποῖα μικρότερα τῆς ἀκεραίας μονάδος;

445) Γράψατε ἓν ἁπλοῦν καὶ ἓν μικτὸν περιοδικὸν μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, ἡ δὲ περίοδος νὰ ἔχῃ ἓν ψηφίον. Γράψατε ἐπίσης ἓν ἁπλοῦν καὶ ἓν μικτὸν περιοδικὸν μεγαλύτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, ἡ δὲ περίοδος νὰ ἔχῃ τοῦ μὲν ἁπλοῦ 3 ψηφία τοῦ δὲ μικτοῦ 2.

**§ 150. Κοινὸν κλάσμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται δοθὲν περιοδικόν.** Α΄. Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν 0,571428571428... παράγεται ἀπὸ τὸ $\frac{4}{7}$.

Ἐὰν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τούτου πολ|σωμεν ἐπὶ τὸ πηλίκον 571428 : 4 δηλ. ἐπὶ 142857 εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{4}{7}=\frac{571428}{999999}$.

Ἑπομένως $0{,}571428571428.... = \frac{571428}{999999}$. Ἐκ τούτου ἀγόμεθα νὰ ἐξετάσωμεν μήπως καὶ τὸ 0,3737.... γίνεται ἀπὸ τὸ $\frac{37}{99}$.

Πρὸς τοῦτο ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς ἑξῆς: Γράφομεν εἰς τὸ πηλίκον 0 ἀκεραίας μονάδας, τὸ ὑπόλοιπον 37 τρέπομεν εἰς 3700 ἑκατοστά. Ταῦτα διαιροῦμεν ὡς ἐν (§ 70) εἴδομεν καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 37 ἑκατοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 37 ἑκατοστά. Ταῦτα τρέπομεν εἰς δεκάκις χιλιοστὰ καὶ ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν πηλίκον 37 δεκάκις χιλιοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 37 δεκ. χιλιοστά.

$$\begin{array}{r|l} 3700 & 90 \\ \hline 3700 & 0{,}373737.... \\ 3700 & \end{array}$$

Οὕτως ἐξακολουθοῦντες βλέπομεν ὅτι πράγματι ἀπὸ τὸ $\frac{37}{99}$ προκύπτει τὸ 0,373737....

Ἄρα : *Τὸ κοινὸν κλάσμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται ἁπλοῦν περιοδικὸν χωρὶς ἀκέραιον μέρος ἔχει ἀριθμητὴν τὴν περίοδον αὐτοῦ καὶ παρονομαστὴν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὰ ψηφία εἶναι ὅλα 9 καὶ ἰσάριθμα πρὸς τὰ ψηφία τῆς περιόδου.*

ΣΗΜ. Τὸ 0,999. . . κατὰ ταῦτα ἰσοῦται πρὸς $\frac{9}{9}$ ἤτοι πρὸ 1.

Τὸ ἁπλοῦν 2,454545. . . $=2+0,454545. . .=2\frac{45}{99}=\frac{2\times 99+45}{99}$

ΣΗΜ. Τὸ 4,999. . . $= 4 + 0,999. . . . = 5$.

Β΄. Τὸ μικτὸν περιοδικὸν π. χ. 2,35173173. . . ἐπὶ 100 πολλαπλασιαζόμενον γίνεται 235,173173. . . $= 235 + \frac{173}{999} = \frac{234938}{999}$.

Ἑπομένως 2,35173173. . . $= \frac{234938}{99900}$. Ἤτοι :

*Φέρομεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἔμπροσθεν τῆς α΄ περιόδου καὶ ἀφ' οὗ εὕρωμεν τὸ κλάσμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται τὸ προκύπτον ἁπλοῦν περιοδικόν, γράφομεν δεξιὰ τοῦ παρονομαστοῦ τόσα 0, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους.*

***Ἀσκήσεις***. 446) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κοινὸν κλάσμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται ἕκαστον ἀπὸ τὰ περιοδικὰ 0,8181. . . ., 0,777. . . 0,305305305. . . , 2,393939. . . , 10,045045. . . , 23,1089108 9. 4,3515151. . . , 8,205858. . . 0,4666. . . , 0,41050505. . .

447) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα 0,5656 . . . + 0,321321. +0,1717. . . . καὶ ἡ διαφορὰ $\frac{3}{4}$ — 0,555. . .

448) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον 0,353535. . . × 99 καὶ 1,37171. . . . × 990.

449) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ 0,2121. . . . καὶ τὰ $\frac{5}{6}$ 0,1818. . .

450) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{4}{9}$ εἶναι 0,888 ;

# ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄.

# ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

### ΜΕΤΡΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ

§ **151. Ποσόν.** Εἶναι φανερὸν ὅτι ποίμνη προβάτων ὑφίσταται αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν· καλεῖται δὲ αὕτη *ποσόν*. Ὁμοίως τὸ βάρος σώματος, αἱ γραμμαί, αἱ ἐπιφάνειαι, ὁ χρόνος, εἶναι ποσά.

*Γενικῶς : Ποσὸν καλεῖται πᾶν ὅτι ἐπιδέχεται αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν.*

Κατὰ ταῦτα πᾶν πλῆθος (§ 1) εἶναι ποσόν.

Ἐκτὸς ὅμως αὐτῶν ὑπάρχουσι καὶ ποσά, *τῶν ὁποίων τὰ μέρη συνέχονται καὶ ἀποτελοῦσιν ἓν ὅλον.* Ταῦτα ὀνομάζονται *συνεχῆ ποσά.* Αἱ γραμμαὶ π.χ. αἱ ἐπιφάνειαι, οἱ ὄγκοι, τὰ βάρη, ὁ χρόνος εἶναι συνεχῆ ποσά.

Ἐμάθομεν (§ 2) ὅτι ἓν πλῆθος δύναται νὰ μετρηθῇ. Οὕτω καὶ ἓν συνεχὲς ποσὸν δύναται νὰ μετρηθῇ, δηλ. νὰ συγκριθῇ πρὸς ἓν ὡρισμένον καὶ ὁμοειδὲς ποσόν, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονάς. Ἐκ τῆς συγκρίσεως δὲ ταύτης εὑρίσκεται ἀριθμός, ὁ ὁποῖος λέγεται *μέτρον* ἢ *τιμὴ* τοῦ ποσοῦ καὶ δηλοῖ ἀπὸ πόσας μονάδας καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ ποσὸν ἐκεῖνο.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν συνεχῶν ποσῶν γίνεται χρῆσις διαφόρων μονάδων, ἀπὸ τὰς ὁποίας θὰ ἀναγράψωμεν ὅσας συχνότερον μεταχειριζόμεθα.

§ **152. Μονάδες μήκους.** Ἐὰν τὸ πρὸς μέτρησιν ποσὸν εἶναι γραμμή, ἡ τιμὴ αὐτοῦ καλεῖται ἰδιαιτέρως *μῆκος* τῆς γραμμῆς ταύτης. Αἱ δὲ μονάδες, τὰς ὁποίας μεταχειριζόμεθα διὰ τὴν μέτρησιν τῶν γραμμῶν, λέγονται *μονάδες μήκους.*

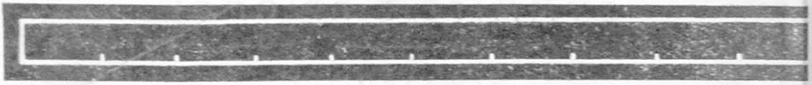
Τούτων συνηθέστεραι εἶναι αἱ ἑξῆς,

Α΄). *Τὸ μέτρον,* τὸ ὁποῖον ἡμεῖς ὀνομάζομεν καὶ *βασιλικὸν πῆχυν.*

Τὸ μέτρον ὡρίσθη ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{40000000}$ τοῦ γηΐνου μεσημβρινοῦ. Διαιρεῖται δὲ εἰς δέκα ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *παλάμαι.* Ἑκάστη παλάμη (Σχ. 2) διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, τὰ

9

ὁποῖα λέγονται *δάκτυλοι* καὶ ἕκαστος δάκτυλος διαιρεῖται εἰς 1
*γραμμάς*.



*(Σχ. 2)*

Β'). Ὁ *μικρὸς πῆχυς Κ]πόλεως* διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑφασμά των. Οὗτος ἰσοῦται πρὸς 0,648 τοῦ μέτρου καὶ διαιρεῖται εἰς 8 ἴσ μέρη, τὰ *ρούπια*.

Γ'). Ὁ *τεκτονικὸς πῆχυς*, ὁ ὁποῖος ἰσοῦται πρὸς 0,75 μέτρο

Εἰς τὴν Ἀγγλίαν καὶ τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας μεταχειρίζο ται τὴν ὑάρδαν =0,914 μ. Αὕτη διαιρεῖται εἰς 3 πόδας, ὁ δὲ πο διαιρεῖται εἰς 12 δακτύλους (ἴντσες).

Δ'). Διὰ τὰς μεγάλας ἀποστάσεις μεταχειρίζονται συνήθως τ ἑξῆς μονάδας. Τὸ *χιλιόμετρον* ἢ στάδιον = 1000 μέτρα, τὸ μυ ριάμετρον = 10000 μέτρα, τὸ ναυτικὸν μίλιον = 1852,22 μέτρ

Ἐνίοτε γίνεται χρῆσις καὶ τῆς γεωγρ. λεύγας, ἥτις ἰσοῦτ πρὸς 4444,44 μ ὡς καὶ τῆς ναυτικῆς λεύγας, ἥτις ἰσοῦται πρ 5555,55 μ.

ΣΗΜ. Τὴν ταχύτητα τῶν πλοίων οἱ ναυτικοὶ εὑρίσκουσιν ε *κόμβους* ἀνὰ 30 δευτερόλεπτα. Εἶναι δὲ ὁ κόμβος τὸ $\frac{1}{120}$ τ ναυτικοῦ μιλίου καὶ ἔχει 15,43 μέτρα. Ὥστε, ἂν πλοῖον εἰς $30^{\delta}$ διανύῃ κ κόμβους εἰς 1 ὥραν, ἤτοι εἰς χρόνον 120 φορὰς μεγαλ τερον ἀπὸ τὰ $30^{\delta}$, θὰ διανύσῃ (κ $\times$ 120) κόμβους, ἤτοι κ ναυ τικὰ μίλια.

**Ἀσκήσεις**. 451) Πόσους μ. π. Κ]πόλεως ἔχει τὸ μέτρον; Π σους δὲ τὰ 80 μέτρα;

452) Πόσον μέρος τοῦ μέτρου εἶναι ἓν ρούπιον; Πόσα ρούπ ἔχει ἓν μέτρον;

453) Πόσους τεκ. πήχεις ἔχει ἓν μέτρον; Πόσους δὲ τὰ 11,47 μέτρα;

454) Πρὸς πόσα μέτρα ἰσοδυναμοῦσιν οἱ 10 ἢ 100 ἢ 32,5 μ. Κ]πόλεως;

455) Πρὸς πόσα μέτρα ἰσοδυναμοῦσι 50,6 τεκ. πήχεις;

456) Πόσα μέτρα (μ) ἔχουσι π μικροὶ πήχεις Κ]πόλεως; Π σοι δὲ μικροὶ πήχεις Κ]πόλεως (π) ἰσοδυναμοῦσι πρὸς μ μέτρα;

457) Πρὸς πόσα μέτρα ἰσοδυναμοῦσι 25,4 ὑάρδαι καὶ πρὸς πόσας ὑάρδας ἰσοδυναμοῦσι 91,4 μέτρα ;

458) Πόσον μέρος τοῦ μέτρου εἶναι ὁ πούς τῆς ὑάρδας καὶ πόσον ὁ δάκτυλος αὐτῆς ;

459) Ἠγόρασέ τις ὕφασμα πρὸς 100 δραχ. τὸ μέτρον καὶ ἔδωκε 352,88 δραχμάς. Ἀπὸ πόσους μ. π. Κ]πόλεως ἀπετελεῖτο τοῦτο ;

460) Δέκα ὑάρδαι ὑφάσματος τιμῶνται 1828 δραχμάς. Πόσον τιμᾶται τὸ μέτρον αὐτοῦ ;

**§ 153. Μονάδες ἐπιφανειῶν.** Ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνεται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν τὴν μονάδα μήκους. Οὕτως, ἂν μονὰς μήκους ληφθῇ τὸ μέτρον, ἡ παλάμη, ὁ δάκτυλος, ἡ γραμμή, ἀντίστοιχος μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν ἑνὸς μέτρου, μιᾶς παλάμης, ἑνὸς δακτύλου, μιᾶς γραμμῆς.

Καλοῦνται δὲ ταῦτα κατὰ σειρὰν *τετραγωνικὸν μέτρον*, *τετραγωνικὴ παλάμη*, *τετραγωνικὸς δάκτυλος*, *τετραγωνικὴ γραμμή*.

Εἶναι δὲ 1 τετρ. μέτρον=100τετρ. παλάμαι=10000 τετρ. δάκτυλοι=1000000 τ. γραμμαί.

Ἐὰν μονὰς μήκους ληφθῇ ὁ τεκτ. πῆχυς, ἀντίστοιχος μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι ὁ *τεκτονικὸς τετραγωνικὸς* πῆχυς, ὅστις ἰσοῦται πρὸς $\frac{9}{16}$ τετρ. μέτρου καὶ χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων.

Ἐὰν μονὰς μήκους ληφθῇ τὸ χιλιόμετρον, ἀντίστοιχος μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι τὸ *τετραγωνικὸν χιλιόμετρον*, τὸ ὁποῖον ἔχει 1000000 τετρ. μέτρα.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἀγρῶν καὶ ἀμπέλων γίνεται παρ' ἡμῖν χρῆσις: α') *Τοῦ βασιλικοῦ στρέμματος*, ὅπερ ἔχει 1000 τετρ. μέτρα καὶ β') *Τοῦ παλαιοῦ στρέμματος* ὅπερ ἔχει 1270 τετρ. μέτρα.

Ἐν Γαλλίᾳ διὰ τὸν αὐτὸν σκοπὸν μεταχειρίζονται τὸ ἄρ (are)=100τμ. καὶ τὸ ἑκτάριον (hectare)=100 ἄρ=10000 τ.μ.

***Ἀσκήσεις.*** 461) Πρὸς πόσα τετρ. μέτρα ἰσοδυναμοῦσι 32 τεκτ. τετρ. πήχεις ;

462) Πόσους τέκ. τετρ. πήχεις ἔχει τὸ τετρ. μέτρον ; Καὶ πόσους τὰ 26,1 τετρ. μέτρα ;

463) Πόσα βασ. στρέμματα ἔχει τὸ παλαιὸν στρέμμα ; Καὶ πόσα τὰ 100 παλαιὰ στρέμματα ;

464) Πόσον μέρος τοῦ παλαιοῦ στρέμματος εἶναι τὸ βασ.

στρέμμα; Καὶ πρὸς πόσα παλαιὰ στρέμματα ἰσοδυναμοῦσι 35,5 βασ. στρέμματα;

465) Πόσα τετρ. μέτρα ἔχουσι σ παλαιὰ στρέμματα; Πόσα δὲ παλαιὰ στρέμματα ἀποτελοῦσι μ τετρ. μέτρα;

466) Πόσα ἄρ ἔχει τὸ βασ. στρέμμα;

467) Πόσα βασ. στρέμματα ἔχει τὸ ἑκτάριον;

468) Ἠγόρασέ τις ἀγρὸν πρὸς 3,7 δραχ. τὸ τετρ. μέτρον καὶ ἔδωκε 18500 δραχμάς; Ἀπὸ πόσα β. στρέμματα ἀπετελεῖτο οὗτος;

469) Οἰκόπεδον ἠγοράσθη πρὸς 40 δραχ. τὸ τετρ. μέτρον ἀντὶ 1126 δραχ. Ἀπὸ πόσας τεκ. τετρ. πήχεις ἀπετελεῖτο τοῦτο;

470) Ἀγρὸς 8 παλαιῶν στρεμμάτων ἐπωλήθη ἀντὶ 2500 δραχμῶν. Πόσον ἐπωλήθη κατὰ βασ. στρέμμα;

**§ 134. Μονάδες ὄγκου καὶ χωρητικότητος.** Ὡς μονὰς ὄγκου λαμβάνεται ὁ κύβος, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀκμὴ ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα μήκους. Οὕτως, ἂν μονὰς μήκους ληφθῇ τὸ μέτρον, ἡ παλάμη, ὁ δάκτυλος, ἡ γραμμή, ἀντίστοιχος μονὰς ὄγκου εἶναι τὸ *κυβικὸν μέτρον*, ἡ *κυβ. παλάμη*, ὁ *κυβ. δάκτυλος*, ἡ *κυβ. γραμμή*.

Εἶναι δὲ 1 κυβ. μέτρον = 1000 κ. παλ. = 1000000 κυβ. δ. = 1000000000 κυβ. γραμμαί.

Μονάδες διὰ τὴν μέτρησιν τῆς χωρητικότητος τῶν δοχείων εἶναι αἱ ἑξῆς:

Ἡ *λίτρα*, ἧς ὁ χῶρος ἔχει ὄγκον μιᾶς κυβ. παλάμης.

Τὸ *ἑκατόλιτρον*, ἢ *μετρικὸν κοιλὸν* = 100 λίτρας.

Τὸ τουρκικὸν κοιλὸν (σταμπόλι) = 35,37 λίτρας.

Ἡ μετρικὴ ὀκᾶ, ἡ ὁποία χωρεῖ ὕδωρ ἀπεσταγμένον 4° βάρους 1 ὀκᾶς. Ἔχει δὲ αὕτη 1,28 λίτρας.

ΣΗΜ. Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς χωρητικότητος τῶν πλοίων μεταχειρίζονται τὸν *τόννον* τῶν πλοίων ἢ *κόρον*, ὁ ὁποῖος ἰσοῦται πρὸς 2,85 κυβ. μέτρα.

*Ἀσκήσεις*. 471) Πόσας λίτρας ἔχει χῶρος, ὁ ὁποῖος ἔχει ὄγκον 2,58 κυβ μέτρα;

472) Τὸ ἐσωτερικὸν δοχείου ἔχει ὄγκον 267 κυβ. δακτύλων. Πόση εἶναι ἡ χωρητικότης αὐτοῦ εἰς λίτρας;

473) Πρὸς πόσας λίτρας ἰσοδυναμοῦσι 7,6 σταμπόλια; Καὶ πρὸς πόσα σταμπόλια ἰσοδυναμοῦσι 466,884 λίτραι;

774) Πρὸς πόσας λίτρας ἰσοδυναμοῦσι 20,4 μετρικαὶ ὀκάδες

Καὶ πρὸς πόσας μετρικὰς ὀκάδας ἰσοδυναμοῦσι 128 λίτραι;

475) Πόσων τόννων εἶναι πλοῖον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐσωτερικὸν ἔχει ὄγκον 905,60 κυβ. μέτρα;

§ **155. Μονάδες βάρους.** Τὰ πλεῖστα τῶν πεπολιτισμένων κρατῶν λαμβάνουσιν ὡς μονάδας βάρους τὸ *γραμμάριον*, τὸ *χιλιόγραμμον* καὶ τὸν *τόννον*.

*Γραμμάριον* εἶναι τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου 4°Κ καὶ ὄγκου 1 κυβ. δακτύλου.

*Χιλιόγραμμον* εἶναι τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου 4°Κ καὶ ὄγκου 1 κυβ. παλάμης.

Ἕκαστον χιλιόγραμμον ἔχει 1000 γραμμάρια.

*Τόννος* εἶναι τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου 4°Κ καὶ ὄγκου 1 κυβ. μέτρου. Εἶναι δὲ 1 τόν=1000 χιλιογρ=1000000 γραμ.

Ἡμεῖς μεταχειριζόμεθα ἀκόμη καὶ τὰς ἀκολούθους μονάδας. Τὴν *ὀκᾶν*, ἥτις ἔχει 1280 γραμμάρια καὶ διαιρεῖται εἰς 400 δράμια καὶ τὸν *στατῆρα*, ὅστις ἔχει 44 ὀκάδας.

Ἐν Πελοποννήσῳ διὰ τὸ βάρος τῆς σταφίδος μεταχειρίζονται τὸ *χιλιόλιτρον*, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ πρὸς 375 ὀκάδας. Ἐν δὲ τῇ Ἑπτανήσῳ μεταχειρίζονται τὴν *ἀγγλικὴν λίτραν*, ἥτις ἰσοδυναμεῖ πρὸς 453,55 γραμμάρια.

ΣΗΜ. Διὰ τοὺς πολυτίμους λίθους λαμβάνεται ὡς μονὰς βάρους τὸ *καράτιον*, τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ πρὸς 0,205 ἢ 0,2 γραμ. περίπου.

*Ἀσκήσεις*. 476) Πόσα χιλιόγραμμα ἔχει ἡ ὀκᾶ καὶ πόσα ὁ στατήρ;

477) Πόσον μέρος τῆς ὀκᾶς εἶναι τὸ χιλιόγραμμον;

478) Πόσα γραμμάρια ἔχει τὸ δράμιον καὶ πόσον μέρος τοῦ δραμίου εἶναι ἓν γραμμάριον;

479) Πόσα δράμια ἔχει τὸ χιλιόγραμμον;

480) Πρὸς πόσα χιλιόγραμμα ἰσοδυναμοῦσι 456,3 ὀκάδες;

481) Πόσας ὀκάδας ἔχουσιν χ χιλιόγραμμα; Πόσα δὲ χιλιόγραμμα ἔχουσιν α ὀκάδες;

482) Ἡ ὀκᾶ τοῦ κρέατος τιμᾶται 46 δραχμάς. Πόσον τιμᾶται τὸ χιλιόγραμμον αὐτοῦ;

483) Τὸ χιλιόγραμμον ζακχάρεως κοστίζει εἰς παντοπώλην 15 δραχμάς. Ἐὰν οὗτος πωλῇ αὐτὴν πρὸς 21,5 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, κερδίζει ἢ ζημιώνεται καὶ πόσον τὴν ὀκᾶν;

484) Τέσσαρα κιβώτια γεμάτα ἀπὸ ἐμπορεύματα ἔχουσι βάρος

3 τόννων. Ἕκαστον δὲ κενὸν ἔχει βάρος 23 ὀκάδων. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ἐμπορεύματος ;

§ **156. Μονάδες χρόνου.** Ἀρχικὴ μονὰς πρὸς μέτρησιν τοῦ χρόνου εἶναι ἡ *ἡμέρα* (ἡμερονύκτιον), ἤτοι *ὁ χρόνος μιᾶς πλήρους περιστροφῆς τῆς Γῆς περὶ τὸν ἄξονά της*.

Ἡ ἡμέρα διαιρεῖται εἰς 24 ὥρας, ἑκάστη ὥρα εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ (π) καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα λεπτὰ (δ).

Πολλαπλάσια τῆς ἡμέρας εἶναι τὸ *πολιτικὸν ἔτος*, ὁ *μὴν* καὶ ἡ *ἑβδομάς*.

Τὸ πολιτικὸν ἔτος εἶναι *κοινὸν* καὶ *δίσεκτον*. Ἕκαστον κοινὸν ἔτος ἔχει 365 ἡμέρας, ἕκαστον δὲ δίσεκτον 366 ἡμέρας.

Δίσεκτα εἶναι τὰ ἔτη τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 4. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται καὶ διὰ 100 εἶναι δίσεκτον ἂν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑκατοντάδων αὐτοῦ διαιρεῖται διὰ 4.

Τὸ ἔτος ἔχει 12 μῆνας, ὧν ἄλλοι ἔχουσιν ἀπὸ 30 ἄλλοι ἀπὸ 31 ἡμέρας, ὁ δὲ Φεβρουάριος τῶν μὲν κοινῶν ἐτῶν ἔχει 28, τῶν δὲ δισέκτων 29 ἡμέρας. Εἰς τὰς ἐμπορικὰς ὅμως συναλλαγὰς ὅλοι οἱ μῆνες λογίζονται ἔχοντες ἀπὸ 30 ἡμέρας ἕκαστος· κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἐμπορικὸν ἔτος θεωρεῖται ἔχον 360 ἡμέρας.

***Ἀσκήσεις***. 485) Πόσα δεύτερα λεπτὰ ἔχει ἡ ὥρα καὶ πόσα ἡ ἡμέρα.

486) Πόσας ὥρας ἔχει ἡ ἑβδομάς. Πόσας δὲ ἑβδομάδας ἀποτελοῦσι 504 ὧραι ;

487) Πόσας ἡμέρας ἔχουσι 3 κοινὰ καὶ ἓν δίσεκτον ἔτος.

488) Πόσας ἑβδομάδας ἔχουσι 7 ἢ 14 ἢ 21 ἐμπορικὰ ἔτη ;

§ **157. Μονάδες τόξων.** Συνήθης μονὰς πρὸς μέτρησιν τῶν τόξων εἶναι ἡ *μοῖρα* ($^0$), ἤτοι τὸ $\frac{1}{360}$ τῆς περιφερείας. Ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ (′) καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα λεπτά (″).

ΣΗΜ. Ἀπό τινων ἐτῶν γίνεται χρῆσις καὶ τοῦ βαθμοῦ (γ) ἤτοι τοῦ $\frac{1}{400}$ τῆς περιφερείας. Ὁ βαθμὸς διαιρεῖται εἰς 100 πρῶτα λεπτὰ καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 100 δεύτερα λεπτά.

***Ἀσκήσεις***. 489) Πόσα δεύτερα λεπτὰ ἔχει ἡ μοῖρα ; Πόσον δὲ μέρος τῆς μοίρας εἶναι τὸ δεύτερον λεπτόν ;

490) Πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ περιφερείας ;

491) Πόσον μέρος τῆς μοίρας εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ μοίρας αἱ βαθμοῦ;

492) Πόσων μοιρῶν εἶναι τόξον $100^{\gamma}$; Πόσων δὲ βαθμῶν εἶναι όξον $270^{0}$;

§ **158. Μονάδες νομισμάτων.** Ἡ Ἑλλὰς προσχωρήασα (1868) εἰς τὴν Λατινικὴν νομισματικὴν ἕνωσιν, ἣν ἀρχικῶς 1865) ἀπετέλεσαν ἡ Γαλλία, Ἰταλία, Ἑλβετία καὶ τὸ Βέλιον, παρεδέχθη ὡς ἀρχικὴν μονάδα νομισμάτων τὸ *φράγκον*, τὸ ποῖον καλεῖται παρ' ἡμῖν *δραχμή*. Αὕτη εἶναι νόμισμα βάρους 5 ραμμαρίων καὶ ἀποτελεῖται κατὰ τὰ 0,835 ἐξ ἀργύρου κατὰ δὲ ,165 ἐκ χαλκοῦ, ἤτοι ἔχει βαθμὸν καθαρότητος 0,835 (1).

Πλὴν ταύτης τὰ κράτη τῆς Λατινικῆς ἑνώσεως ἔκοψαν καὶ τὰ ξῆς ἀκόμη νομίσματα.

Α'). *Χρυσᾶ*: 5δραχμον, 10δραχμον, εἰκοσάδραχμον, πεντηκοντάδραχμον, ἑκατοντάδραχμον. Πάντα ταῦτα ἀποτελοῦνται ἐκ κράματος χρυσοῦ καὶ ἀργυροῦ βαθμοῦ καθαρότητος 0,900.

Β'). *Ἀργυρᾶ*: 5δραχμον, δίδραχμον, 50τάλεπτον, εἰκοσάλεπτον, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦνται ἐκ κράμματος ἀργύρου καὶ χαλοῦ βαθμοῦ καθαρότητος 0,835 πλὴν τοῦ πενταδράχμου, οὗ ὁ βαθμὸς καθαρότητος εἶναι 0,900.

Γ'). *Χαλκᾶ*: Διώβολον (δεκάρα), ὀβολὸς (πεντάρα), δίλεπτον, μοόλεπτον ἀποτελούμενα ἐξ 95 μερῶν χαλκοῦ, 4 μερῶν κασσιτέρου αἱ 1 μέρους ἀντιμονίου.

Ἐκ τούτων οὐδὲν ἤδη κυκλοφορεῖ παρ' ἡμῖν.

Ἀντ' αὐτῶν κυκλοφοροῦσι χαρτονομίσματα τῶν 50, 100, 500, 000, 5000 δραχμῶν, δεκάλεπτα καὶ εἰκοσάλεπτα κέρματα ἐξ λουμινίου, καὶ κέρματα τῶν 50 λεπτῶν, 1 δραχ. καὶ 2 δραχμῶν κ κράμματος νικελίου καὶ χαλκοῦ. Τελευταίως ἐτέθησαν εἰς κυλοφορίαν ἀργυρᾶ νομίσματα τῶν 20 δρ. καὶ 10 δρ., ὡς καὶ νικέινα πεντάδραχμα. Ἐκ τούτων τὰ ἀργυρᾶ εἶναι κρᾶμα ἀργύρου 00 ‰, χαλκοῦ 400 ‰, νικελίου 50 ‰ καὶ ψευδαργύρου 50 ‰. Τὰ πεντάδραχμα εἶναι ἐκ καθαροῦ νικελίου.

Τὰ ἄλλα κράτη τῆς Λατινικῆς ἑνώσεως, εἰς ἃ βραδύτερον προσεχώρησαν ἡ Σερβία, Ρουμανία, Βουλγαρία, Ἱσπανία κτλ., ἔχουσιν ρχικὴν μονάδα τὸ φράγκον, ὃ ἕκαστον ἔθνος ὀνομάζει μὲ ἴδιον ὄνομα.

---

(1) Γενικῶς τίτλος ἢ βαθμὸς καθαρότητος κράμματος καλεῖται τὸ εἰς κάστην μονάδα βάρους περιεχόμενον βάρος τοῦ πολυτίμου μετάλλου.

## Α'. ΠΙΝΑΞ ΜΟΝΑΔΩΝ ΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

| Μονάδες μήκους | Μονάδες ἐπιφανειῶν | Μονάδες ὄγκου | Μονάδες χωρητικότητος |
|---|---|---|---|
| μέτρον (ἀρχ. μονὰς) | τετραγων. μέτρον ἀρχ. μον. | κυβικὸν μέτρον (ἀρχ. μονὰς) | λίτρα (ἀρχ. μονὰς) |
| (παλάμη=0,1μέτρ.) | τετραγ. παλάμη=0,01τ.μ. | κυβ. παλάμη = 0,001 κ.μ. | ἑκατόλιτρον = 100λ |
| (δάκτυλος=0,01μ.) | » δάκτυλος=0,0001τ.μ. | κυβ. δάκτυλος = 0,000001 κ. μ. | Τουρκικὸν κοιλὸν=25,37λ. |
| (γραμμὴ=0,001μ.) | » γραμμὴ=0,000001τ.μ. | κυβ. γραμμὴ = 0,000000001 κ. μ. | μετρικὴ ὀκᾶ = 1,28λ. |
| χιλιόμετρον=1000μ. | » χιλιόμετρον=1000000τ.μ. | | |
| μυριάμετρον=10000μ. | βασ. στρέμμα=1000 τ.μ. | | |
| μ.π. Κ]πόλεως=0,648μ. | παλ. στρέμμα=1270 τ.μ. | | |
| ῥούπιον = $\frac{1}{8}$ π = 0,081μ. | τεκτ. τετρ. πῆχυς= $\frac{9}{16}$ τ. μ. | | |
| τεκτ. πῆχυς=0,75μ. | ἄρ.=100 τ μ. | | |
| Γεωγ. λεύγα=4444,44μ. | ἑκτάριον = 10000 τ. μ | | |
| Ναυτικὴ λεύκα = 5555,55μ. | | | |
| Ναυτικὸν μίλιον = 1852,22μ. | | | |
| κόμβος=15,435μ. | | | |
| ὑάρδα=0,914μ. | | | |
| ποὺς = $\frac{1}{3}$ ὑαρ = 0,3046μ | | | |
| δάκτυλος = $\frac{1}{12}$ ποδ. | | | |

| Μονάδες βάρους | Μονάδες τόξων | Μονάδες χρόνου |
|---|---|---|
| γραμμάριον (ἀρχ. μονάς) | | ἡμέρα (ἀρχ μονάς) |
| χιλιόγραμμον = 1000 γρ. | μοῖρα = $\frac{1}{360}$ περιφ. | ὥρα = $\frac{1}{24}$ ἡμέρας |
| Τόνος = 1000000 γρ. | $1' = \frac{1}{60}$ μοίρας | $1^{\pi} = \frac{1}{60}$ ὥρ. |
| ὀκᾶ = 1280 γρ. | $1'' = \frac{1}{60}$ τοῦ 1'. | $1\delta = \frac{1}{60}$ π. |
| δράμιον = 3,2 γρ. | βαθμός = $\frac{1}{400}$ περιφ. | πολ. ἔτος κοινὸν = 365 ἡμ. |
| στατὴρ = 44 ὀκ. | 1' = 0,1 βαθμοῦ | πολ. ἔτος δίσ. = 366 ἡμ, |
| χιλιόλιτρον Πελ.. = 375 ὀκ. | 1'' = 0,01 | ἐμπορικὸν ἔτος = 360 ἡμ. |
| ἀγγλικὴ λίτρα = 453,35 γραμ. | | ἐμπορικὸς μὴν = 30 ἡμ. |

## Γ'. ΠΙΝΑΞ ΝΟΜΙΣΜΑΤΙΚΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ

| Κράτος Λ. Ἑνώσεως | ἀρχικὴ μονάς | Ἀγγλία | Γερμανία | Ἡνωμέναι Πολιτεῖαι | Τουρκία |
|---|---|---|---|---|---|
| Ἑλλάς | δραχμὴ = 200 λεπτ. | Λίρ. στερ. = 25,22 φρ. | Μάρκον = 1,23 φρ = | δολλάριον = 5,18 φρ. | Λίρα Τουκίας 22, 80 φρ. |
| Γαλλία | φράγκον | σελήνιον $\frac{1}{20}$ λ. | | σέντς= $\frac{1}{100}$ δολ. | γρόσιον=0,01 λίρ. |
| Βέλγιον | φράγκον | | | | Παρᾶς = $\frac{1}{40}$ γρ. |
| Ἑλβετία | φράγκον | | | | |
| Ἰταλία | λιρέττα | πέννα= $\frac{1}{12}$ σ. | | | |
| Ρουμανία | λέϊ | | | | |
| Σερβία | διννάριον | φαρδίνιον= $\frac{1}{4}$ π | | | |
| Βουλγαρία | λέβι | | | | |

Ἐν Ἀγγλίᾳ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ *Λίρα στερλίνα*, ἡ ὁποί[α] ἔχει 25,22 χρυσᾶ φράγκα. Αὕτη διαιρεῖται εἰς 20 *σελίνια*, ἕκα[σ]τον σελίνιον διαιρεῖται εἰς 12 *πέννας* καὶ ἑκάστη πέννα εἰς 4 *φαρδίνια*.

Πρὸ ὀλίγου χρόνου ἡ τιμὴ τῆς στερλίνας παρ' ἡμῖν ἦτο διὰ νό[μ]ου ὡρισμένη εἰς 375 δραχμάς. Ἤδη κατηργήθη ὁ νόμος οὗτο[ς] καὶ ἡ τιμὴ αὐτῆς κυμαίνεται ἀναλόγως τῆς προσφορᾶς καὶ ζητήσεως.

Εἰς τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας τῆς Ἀμερικῆς ἀρχικὴ μονὰς εἶνα[ι] τὸ *δολλάριον*, τὸ ὁποῖον τιμᾶται 5,1825 χρυσᾶ φράγκα Τὸ δολλάριον διαιρεῖται εἰς 100 *σέντς*.

Εἰς τὴν Τουρκίαν ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ *Τουρκικὴ Λίρα* (χρυσῆ) ἔχουσα 22,80 χρυσᾶ φράγκα. Αὕτη διαιρεῖται εἰς 100 *γρόσια*, ἕκαστον δὲ γρόσιον εἰς 40 *παράδες*.

Ἐν Γερμανίᾳ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι τὸ μάρκον, ὅπερ ἔχει 1,23 φράγκα.

***Ἀσκήσεις***. 493) Πόσας δραχμὰς ἔχουσι 8,4 στερλίναι, ἐὰν ἑκάστη στερλίνα ἔχῃ 570,50 δραχμάς;

494) Πόσας στερλίνας ἀποτελοῦσιν αἱ 2557,35 δραχμαὶ πρὸς 568,30 δραχ. τὴν στερλίναν;

495) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 8 σελίνια. Πόσας δραχμὰς θὰ δώσωμεν διὰ 4 πήχεις ἀπὸ τὸ ὕφασμα τοῦτο μὲ τιμὴν τῆς στερλίνας 570 δραχμάς;

496) Πόσας δραχμὰς ἔχει μία πέννα καὶ πόσα λεπτὰ τὸ ἓν φαρδίνιον μὲ τιμὴν στερλίνας 568,60 δραχμῶν;

497) Πόσα μάρκα ἀγοράζομεν μὲ 236 χρυσᾶ φράγκα;

498) Τὸ βάρος τῶν ἀργυρῶν νομισμάτων τῆς Λ. Ν. Σ. ἐκανονίσθη οὕτως ὥστε εἰς ἀξίαν 1 φράγκου ἀντιστοιχεῖ βάρος 5 γραμμαρίων. Πόσον βάρος ἔχει τὸ ἀργυροῦν πεντάδραχμον, καὶ πόσον τὸ ἀργυροῦν δίδραχμον τῆς συμβάσεως ταύτης;

499) Ἐὰν συγχωνεύσωμεν 10 ἀργυρᾶ πεντάδραχμα καὶ 20 ἀργυρᾶ δίδραχμα, πόσον θὰ εἶναι τὸ βάρος τοῦ κράμματος αὐτῶν; Πόσον δὲ θὰ εἶναι τὸ βάρος τοῦ καθαροῦ ἀργύρου, τὸν ὁποῖον θὰ περιέχῃ τοῦτο;

500) Ἕκαστον ἀργυροῦν εἰκοσάδραχμον ἀπὸ τὰ τελευταίως τεθέντα εἰς κυκλοφορίαν ἔχει βάρος $11\frac{1}{3}$ γραμμάρια. Ἐὰν συγχωνεύσωμεν 5 τοιαῦτα, πόσον καθαρὸν ἄργυρον θὰ περιέχῃ τὸ κράμμα;

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

## ΟΙ ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

§ **159. Ὁρισμὸς συμμιγοῦς ἀριθμοῦ.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐμετρήσαμεν μὲ τὸν μικρὸν πῆχυν Κ]πόλεως μίαν πλευρὰν τοῦ πατώματος δωματίου καὶ εὕρομεν ὅτι ὁ μ. π. Κ. χωρεῖ εἰς αὐτὴν 4 φοράς, περισσεύει δὲ καὶ ἓν μέρος ταύτης, εἰς τὸ ὁποῖον τὸ ρούπιον χωρεῖ 3 φοράς. Τὸ μῆκος λοιπὸν τῆς πλευρᾶς ταύτης εἶναι 4 πήχεις καὶ 3 ρούπια. Ἡ τιμὴ αὕτη τῆς πλευρᾶς ταύτης εἶναι ἀριθμὸς συγκείμενος ἀπὸ δύο μέρη· ἕκαστον τούτων γίνεται ἀπὸ ἰδιαιτέραν μονάδα, ἡ μία δὲ ἀπὸ αὐτὰς εἶναι πολ]σιον τῆς ἄλλης καὶ ἑκάστη ἔχει ἴδιον ὄνομα.

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος 4 πήχ. 3 ροῦπ. λέγεται *συμμιγὴς ἀριθμός*.

Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ 3 στατ. 12 ὀκ. 150 δραμ. καὶ 3 ὧραι 12 π. 20 δ. εἶναι συμμιγεῖς ἀριθμοί.

*Γενικῶς : Συμμιγὴς ἀριθμὸς καλεῖται πᾶς συγκεκριμένος ἀριθμὸς σύνθετος ἐξ ἄλλων, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι πολ]σια ἢ ὑποπολλαπλάσια μιᾶς ἀρχικῆς μονάδος, ἑκάστη δὲ ἔχει ἴδιον ὄνομα.*

Πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν συμμιγῶν οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι γίνονται ἀπὸ μίαν μονάδα ἢ καὶ μέρη αὐτῆς, λέγονται ἁπλοῖ ἀριθμοί. Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 15 λίραι, 7 $\frac{3}{8}$ πήχεις, 5,35 δραχμαὶ εἶναι ἁπλοῖ ἀριθμοί.

### Τροπὴ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ εἰς ἁπλοῦν καὶ τἀνάπαλιν.

§ **160. Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς μονάδας τελευταίας τάξεως.** Βάρος 2στατ. 27ὀκ. 150 δραμίων ἐκτιμῶμεν εἰς δράμια ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ 2 στατ. ἔχουσι 44×2=88 ὀκ., τὸ βάρος εἶναι (88+7) ὀκ. καὶ 150 δράμια ἢ 95 ὀκ. καὶ 150 δράμια.

Ἐπειδὴ δὲ 95 ὀκάδες ἔχουσι 400×95=38000 δράμια, ἕπεται ὅτι 95 ὀκ. 150 δράμ. = 38000+150 = 38150 δράμια.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{r} 2\text{στ. } 7 \text{ ὀκ. } 150 \text{ δραχ.} \\ 44 \text{ ὀκ.} \\ \hline 88 \\ 7 \\ \hline 95 \\ 400 \\ \hline 38000 \text{ δραμ.} \\ 150 \\ \hline 38150 \text{ δραμ.} \end{array}$$

Ἀπὸ ταῦτα ὁδηγούμενοι διατυπώνομεν εὐκόλως τὸν σχετικὸν κανόνα.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὁ συμμιγὴς γίνεται ἀκέραιος ἀριθμός.

*Ἀσκήσεις.* 501) Πόσα δράμια ἔχουσι 12 ὀκ. καὶ 180 δράμια;
502) Πόσα ρούπια ἔχουσιν 20 πήχεις καὶ 2 ῥούπια ;
503) Πόσα δευτερόλεπτα ἔχουσι 2ὦρ $10^{\pi}$ $42^{\delta}$ ;
504) Πόσα δεύτερα λεπτὰ περιέχουσι $3^{o}40'15''$ ;
505) Πόσα φαρδίνια ἔχουσι 3στερλ. 10σελ. 5πεν. 2φαρ ;
506) Πόσα δευτερόλεπτα ἔχουσι 3ἡμ 11ὦρ. $17^{\pi}$ $23^{\delta}$ ;

**§ 161. Τροπὴ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ εἰς ἁπλοῦν μονάδων τάξεως διαφόρου τῆς τελευταίας.** Ὁ χρόνος $2^{\omega\rho} \; 15^{\pi} \; 20^{\delta} = 8120^{\delta}$ . Ἵνα ἐκτιμήσωμεν αὐτὸν εἰς πρῶτα λεπτὰ ἢ εἰς ὥρας σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

α') Ἐπειδὴ $1^{\delta} = \dfrac{1^{\pi}}{60}$, ἕπεται ὅτι $8120^{\delta} = \dfrac{8120^{\pi}}{60}$.

β') Ἐπειδὴ 1 ὥρα $= 60 \times 60 = 3600^{\delta}$ , εὑρίσκομεν ὅτι

$$8120^{\delta} = \frac{8120}{3600} \text{ ὥρας.}$$

Ὥστε $2^{\omega\rho} \; 15^{\pi} \; 20^{\delta} = 8120^{\delta} = \dfrac{8120\pi}{60} = \dfrac{8120}{3600}$ ὥρ.

Ἄρα : *Ἕκαστος συμμιγὴς τρέπεται εἰς κλάσμα μονάδων πάσης τάξεως, πλὴν τῆς τελευταίας. Ἕκαστον ἀπὸ τὰ κλάσματα ταῦτα ἔχει ἀριθμητὴν τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν τῶν μονάδων τελευταίας τάξεως, εἰς ὃν τρέπεται ὁ συμμιγής, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος δηλοῖ πόσαι μονάδες τελευταίας τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ὁρισθείσης τάξεως*

ΣΗΜ. Ἐὰν τὸ κλάσμα περιέχῃ ἀκεραίας μονάδας, ἐξάγομεν αὐτάς, ἂν θέλωμεν νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς εἰς μικτὸν ἁπλοῦν ἀριθμόν.

*Ἀσκήσεις.* 507) Πόσους πήχεις ἀποτελοῦσι 7 πήχεις καὶ ... ρούπια ;

508) Πόσας ὀκάδας καὶ πόσους στατῆρας ἀποτελοῦσι 6 στατ. 20 ὀκ. 200 δράμια ;

509) Πόσων μοιρῶν εἶναι τόξον 50' 35'' ἢ τόξον 25° 35' 45''

510) Ὁ συμμιγὴς 5 στερ. 15 σελ. 10 πέν. 2 φαρ. νὰ τραπῇ εἰς κλάσμα πέννας, σελινίου, λίρας.

511) Ὁ συμμιγὴς 2 ἡμ. 10 ὥρ. $20^{\pi}$ $30^{\delta}$ νὰ τραπῇ εἰς κλάσμα τοῦ πρώτου λεπτοῦ, τῆς ὥρας καὶ τῆς ἡμέρας.

**§ 162. Τροπὴ συγκεκριμένου ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῆ.** Ἐὰν φιλόπτωχος ἀδελφότης διανείμῃ ἀπὸ 30 δράμια ὀρύζης εἰς ἑκάστην ἀπὸ τὰς 105 πτωχὰς οἰκογενείας συνοικισμοῦ, εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ διανείμῃ τὸ ὅλον 300×105= 31500 δράμια. Ταῦτα ἀποτελοῦσι τόσας ἀκεραίας ὀκάδας, ὅσας φορὰς χωροῦσι τὰ 400 δράμια εἰς τὰ 31500 δράμια, ἤτοι 78 ὀκάδας, περισσεύουσι δὲ καὶ 300 δράμια. Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι 78 ὀκ. = 1 στατ. καὶ 34 ὀκ. Ὥστε 31500 δράμ =1 στατ. 34 ὀκ. 300 δραμ.

Διάταξις τῆς πράξεως

| | | |
|---|---|---|
| 31500 δρ. | 400 | |
| 3500 | 78 ὀκ. | 44 |
| 300 δρ. | 34 ὀκ | 1στ. |

Ἐντεῦθεν ὁδηγούμενοι διατυπώνομεν τὸν σχετικὸν κανόνα

***Ἀσκήσεις***. 512) Πόσους πήχεις καὶ ρούπια ἀποτελοῦσι τὰ 141 ρούπια ;

513) Πόσας μοίρας, πρῶτα καὶ δεύτερα λεπτὰ ἀποτελοῦσι 18737'' ;

514) Πόσας ἡμέρας, ὥρας, πρῶτα καὶ δεύτερα λεπτὰ ἀποτελοῦσι 297618$^{\delta}$ ;

515) Νὰ τραπῶσιν εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν 8945 φαρδίνια.

**§ 163. Τροπὴ συγκεκριμένου κλάσματος εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.** *Ἐὰν πέντε οἰκογενειάρχαι ἀγοράσωσιν 17 στατῆρας ἀλεύρου καὶ μοιράσωσιν αὐτὸ ἐξ ἴσου,* θὰ λάβῃ ὁ καθεὶς 17 στ. : 5 = $\frac{17}{5}$ στ. Ἐὰν ὅμως διαιρέσωμεν τοὺς 17 στατ. διὰ 5, εὑρίσκομεν ὅτι ἕκαστος λαμβάνει 3 στατῆρας, περισσεύουσι δὲ καὶ 2 στατ = 44 ὀκ × 2 = 88 ὀκ. Ἀπὸ αὐτὰς λαμβάνει ἕκαστος ἀπὸ 17 ὀκ, περισσεύουσι δὲ καὶ 3 ὀκάδες=400 δραμ × 3= 1200 δράμια Ἀπὸ αὐτὰ δὲ λαμβάνει ἕκαστος ἀπὸ 1200 : 5 = 240 δράμια. Ἑπομένως $\frac{17}{5}$ στατ=3στατ. 17 ὀκ. 240 δραμ.

Ἐντεῦθεν ὁδηγούμενοι διατυπώνομεν εὐκόλως τὸν σχετικὸν κανόνα.

***Ἀσκήσεις***. 516) Νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ὁ ἀριθμὸς $\frac{13}{5}$ ἡμέρας καὶ ὁ ἀριθμὸς $7\frac{5}{8}$ ἡμέραι.

517) Νὰ τραπῇ εἰς συμ-

Διάταξις τῆς πράξεως

| | |
|---|---|
| 17 στ. | 5 |
| 2 στ. | 3 στ. 17 ὀκ. 240 δράμ. |
| 44 | |
| 88 ὀκ. | |
| 38 | |
| 3 ὀκ. | |
| 400 | |
| 1200 | |
| 0 | |

μιγῆ ὁ ἀριθμὸς $\frac{2}{5}$ στερλίνας καὶ ὁ $3\frac{7}{8}$ στερλίναι.

518) Νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ὁ ἀριθμὸς $1\frac{1}{3}$ ὑάρδαι.

## Πράξεις ἐπὶ τῶν συμμιγῶν.

§ **164. Α΄. Πρόσθεσις.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μία οἰκογένεια ἔκαυσε τὴν α΄ τριμηνίαν ἑνὸς ἔτους 4 στατ, 15 ὀκ, 200 δραμ. ἀνθράκων, τὴν β΄ 3 στ, 20 ὀκ, 100 δρ. τὴν γ΄ 1 στατ. 25 ὀκ. 150 δρ. καὶ τὴν δ΄ 5 στ. 18 ὀκ. Εἶναι φανερὸν ὅτι ὅλον τὸ ἔτος τοῦτο ἔκαυσεν

$$(4^{\sigma\tau.}\ 15^{\grave{o}\kappa.}\ 200^{\delta\rho\alpha\mu.}) + (3^{\sigma\tau.}\ 20^{\grave{o}\kappa.}\ 100^{\delta\rho.}) + (1^{\sigma\tau.}\ 25^{\grave{o}\kappa.}\ 150^{\delta\rho.}).$$
$$+ (5^{\sigma\tau.}\ 18^{\grave{o}\kappa.}).$$

Ἀλλὰ τὸ ποσὸν τοῦτο ἀ-ἀποτελεῖται ἀπὸ
(4 + 3 + 1 + 5) στατ,
(15 + 20 + 25 + 18) ὀκ,
καὶ (200 + 100 + 150) δράμ.
ἢ $13^{\sigma\tau.}\ 78^{\grave{o}\kappa.}\ 450^{\delta\rho\acute{\alpha}\mu.}$.
Ἐπειδὴ δὲ 450δρ = 1 ὀκ. καὶ 50 δρ, ὁ προηγούμενος ἀριθμὸς γίνεται 13στ. 79ὀκ. 50δρ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ 79 ὀκ. = 1στ, 35 ὀκ, ὁ ἀριθμὸς οὗτος γίνεται 14στ. 35ὀκ. 50δράμ. Ἐντεῦθεν ὁδηγούμενοι διατυπώνομεν εὐκόλως τὸν σχετικὸν κανόνα.

Διάταξις τῆς πράξεως

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | στ. | 15 | ὀκ. | 200 | δραμ. |
| 3 | στ. | 20 | ὀκ. | 100 | δραμ. |
| 1 | στ. | 25 | ὀκ. | 150 | δράμ. |
| 5 | στ. | 18 | ὀκ. | | |
| 13 | στ. | 78 | ὀκ. | 450 | δράμ. |
| 13 | στ. | 79 | ὀκ. | 50 | δρ. |
| 14 | στ. | 35 | ὀκ. | 50 | δρ. |

***Ἀσκήσεις.*** 519) Ἐκ τεμαχίου ὑφάσματος ἔμπορος ἐπώλησε μίαν ἡμέραν 12πήχ, 6ρούπ, τὴν ἄλλην 15π. 7ρ, τὴν ἄλλην 27π. 2ρ καὶ τὴν ἐπομένην 30π, 4ρ. Οὕτω δὲ ἔμειναν ἀκόμη 6πήχ, 2ρ. Πόσον ἦτο ὅλον τὸ τεμάχιον;

520) Ἠγόρασέ τις 2στ. 12ὀκ. καφφὲ καὶ ἔδωκε 6490 δραχμὰς καὶ 70 λεπ· τὴν ἄλλην ἡμέραν ἠγόρασε καὶ ἄλλους 5 στ. 20 ὀκ. 200 δράμ. ἀντὶ 1536 δραχμῶν καὶ 50 λεπ. Πόσον καφφὲν ἠγόρασε τὸ ὅλον καὶ πόσα χρήματα ἔδοσε δι᾽ αὐτόν;

521) Κιβώτιον κενὸν ἔχει βάρος 12 ὀκ. 150 δράμια· χωρεῖ δὲ ἐμπόρευμα βάρους 1 στατ. 35 ὀκ. 300 δραμ. Πόσον βάρος ἔχει ὅταν εἶναι πλῆρες ἀπὸ τὸ ἐμπόρευμα τοῦτο;

§ **165. Ἀφαίρεσις.** Ἐὰν αὐτοκίνητον ἀναχωρῆσαν ἀπὸ τὰς Ἀθήνας τὴν $7^{\check{\omega}\rho.}\ 20^{\pi}\ 15^{\delta}$ π. μ. φθάσῃ εἰς Θήβας τὴν $10^{\omega}$

30π 20δ π. μ. τῆς ἰδίας ἡμέρας, ἐχρειάσθη διὰ τὸ ταξείδιον τοῦτο (10ώρ 30π 20δ )—(7ώρ 20π 15δ ).

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν πρῶτον τὰ 15δ, μένουσι 10ώρ 30π 5δ.

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον αὐτὸ ἀφαιρέσωμεν τὰ 20π, μένουσι 10 ὥρ, 10π, 5δ. Καὶ ἂν ἀπὸ αὐτὸ τὸ ὑπόλοιπον ἀφαιρέσωμεν τὰς 7ὥρας, μένουσι 3ὥρ. 10π. 5δ.

Διάταξις τῆς πράξεως

| | | |
|---|---|---|
| 10 ὥρ. | 30 π. | 20 δ. |
| 7 ὥρ. | 20 | 15 |
| 3 ὥρ. | 10 π. | 5 δ. |

Ἐὰν ἔφθανεν εἰς τὰς 10ὥρ 10π 20δ, ἐπειδὴ τὰ 20π δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τὰ 10π, αὐξάνομεν ταῦτα κατὰ 60π καὶ τὰς 7ὥρ. κατὰ 1 ὥραν

Οὕτως εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 2ὥρ 50π 5δ. Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι διατυπώνομεν εὐκόλως τὸν σχετικὸν κανόνα.

Διάταξις τῆς πράξεως

| | | |
|---|---|---|
| | 70 | |
| 10ὥρ | 10π | 20δ |
| 7ὥρ | 20 | 15δ |
| 2ὥρ | 50π | 5δ. |

ΣΗΜ. Ἠδυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀπὸ τὰς 10ὥρας μίαν ὥραν, τὴν ὁποίαν νὰ προσθέσωμεν μὲ τὰ 10π. Οὕτως ἡ ἀφαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὴν (9ὥρ 70π 20δ) — (7ὥρ 20π 15δ.), ἥτις γίνεται κατὰ τὸ α΄ παράδειγμα.

Ὁμοίως 5ὥρ—(3ὥρ 20π 15δ)=(4ὥρ 59π 60δ)—(3ὥρ. 20π 15δ)=1ὥρ 39π 45δ.

***Ἀσκήσεις***. 522) Κιβώτιον κενὸν μὲν ζυγίζει 5ὀκ 250δρ, πλῆρες δὲ ἐμπορεύματος ζυγίζει 1στ 12ὀκ 300δραμ. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἐμπορεύματος, τὸ ὁποῖον περιέχει ;

523) Τρία τόξα περιφερείας εἶναι κατὰ σειρὰν 35°26΄40΄΄, 45°18΄12΄΄, 70°40΄12΄΄. Πόσον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον μέρος τῆς περιφερείας, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκονται ;

524) Ἀπὸ τεμάχιον ὑφάσματος 75πήχ ἐπωλήθησαν 12πήχ 3ρ, ἔπειτα 16 πήχ 4ρ. καὶ τέλος 22πήχ 5ρούπ. Πόσον ὕφασμα ἔμεινεν ;

525) Μαθητὴς ἐγεννήθη τὴν 7 Μαρτίου 1918. Πόσην ἡλικίαν εἶχε τὴν 20ὴν Μαΐου 1930 ;

526) Πόσαι ὧραι εἶναι ἀπὸ τῆς 7ὥρ 12π 20δ π. μ. μέχρι τῆς μεσημβρίας τῆς ἰδίας ἡμέρας ;

527) Πόσος χρόνος εἶναι ἀπὸ τῆς 6ὥρ 40π 30δ μ. μ. μέχρι τῆς 3ὥρ 10π 20δ μ.μ. τῆς ἰδίας ἡμέρας ;

## Γ'. Πολ]σμὸς καὶ διαίρεσις συμμιγῶν.

§ **166. Πολ]σμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον. Πρόβλημα.** *Κινητὸν κινεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου καὶ διανύει εἰς 1π τόξον 12° 17′ 22″. Πόσον τόξον διανύει εἰς 3π ;*

*Λύσις*. Ἀφ' οὗ εἰς 1π διατρέχει 12° 17′ 22″, εἰς 3π θὰ διατρέχῃ

$(12^\circ\ 17'\ 22'')\times 3=(12^\circ\ 17'\ 22'')+(12^\circ\ 17'\ 22'')+(12^\circ\ 17'\ 22'')$
$=(12^\circ+12^\circ+12^\circ)+(17'+17'+17')+(22''+22''+22'')$
ἢ $(12^\circ\ 17'\ 22'')\times 3=(12^\circ\times 3)+(17'\times 3)+(22''\times 3)=36^\circ\ 51'\ 66''$
$=36^\circ\ 52''\ 6''$

Διάταξις τῆς πράξεως

| | | |
|---|---|---|
| 12° | 17′ | 22″ |
| | | 3 |
| 36° | 51′ | 66″ |
| 36° | 52′ | 6″ |

Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι διατυπώνομεν εὐκόλως τὸν σχετικὸν κανόνα.

*Ἀσκήσεις*. 528) Μία οἰκογένεια χρειάζεται 2 στατ, 12 ὀκ 300 δραμ. ἀλεύρου τὸν μῆνα. Πόσον ἄλευρον χρειάζεται τὸ ἔτος ;

529) Ἁμαξοστοιχία διανύει 1 χιλιόμετρον εἰς 2π 30δ. Εἰς πόσον χρόνον διανύει 18 χιλιόμετρα ;

530) Ἐργάτης λαμβάνει 15 πεντάδ. 2 δραχ. 60 λεπ. τὴν ἡμέραν, Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ, ἂν ἐργασθῇ 12 ἡμέρας ;

§ **167. Διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου** (μερισμός). Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ μοιράσωμεν ἐξ ἴσου εἰς 3 πτωχὰς οἰκογενείας 7στατ 16 ὀκ 300 δράμ. ἀλεύρου. Ἂν μοιράσωμεν πρῶτον τοὺς 7 στατῆρας, θὰ δόσωμεν εἰς κάθε μίαν ἀπὸ 2 στατῆρας καὶ θὰ περισσεύσῃ καὶ 1 στατήρ, ὁ ὁποῖος μὲ τὰς 16 ὀκ. ἀποτελεῖ 44 + 16 = 60 ὀκ. Ἂν μοιράσωμεν καὶ αὐτάς, θὰ δόσωμεν εἰς κάθε μίαν ἀπὸ 20 ὀκ. ἀκριβῶς. Ἂν δὲ τέλος μοιράσωμεν καὶ τὰ 300 δράμια, θὰ δόσωμεν εἰς κάθε μίαν ἀπὸ 100 δράμια. Ὥστε κάθε μία οἰκογένεια θὰ λάβῃ ἀπὸ 2 στατ. 20 ὀκ. 100 δράμ.

Διάταξις τῆς πράξεως

```
7 στατ 16 ὀκ. 300 δρ. | 3
                      |______________________
1 στ.                   2 στ. 20 ὀκ. 100 δράμ.
 44
______
 44 ὀκ.
 16
______
 60 ὀκ.
  300 δρ.
    0
```

Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι διατυπώνομεν εὐκόλως τὸν σχετικὸν κανόνα.

**Ἀσκήσεις**. 531) Οἰκογένεια τρώγει 29 ὀκ. 225 δράμ. ἄρτου εἰς μίαν ἑβδομάδα. Πόσον ἄρτον τρώγει τὴν ἡμέραν;

532) Ὡρολόγιον εἰς 12 ὥρας ἔμεινεν ὀπίσω 25 π 46 δ. Πόσον μένει ὀπίσω τὴν ὥραν;

533) Οἰκογένεια ἔκαυσε κατὰ τοὺς 3 μῆνας τοῦ χειμῶνος 4 στατ 3 ὀκ 100 δρ. ἀνθράκων. Πόσοι ἄνθρακες ἀντιστοιχοῦσ κατὰ τὸν μῆνα;

534) Πατὴρ ἀφῆκεν εἰς τοὺς 2 υἱούς του καὶ τὴν θυγατέρα του 1560 λίρας καὶ 12 σελ. Παρήγγειλε δὲ διὰ τῆς διαθήκης του νὰ λάβῃ ἡ θυγάτηρ του 50 λίρας περισσότερον ἀπὸ κάθε υἱόν. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστον τέκνον;

§ **168. Πολ)σμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ κλάσμα. Πρόβλημα.** *Ἀποθήκη δυναμένη νὰ περιλάβῃ τὸ ὅλον 40 στατ. 25 ὀκ. περιέχει σῖτον μέχρι τῶν $\frac{3}{4}$ αὐτῆς. Πόσον σῖτον περιέχει;*

*Λύσις*. Ἀφ' οὗ ὅλη ἡ ἀποθήκη χωρεῖ 40 στατ. 25 ὀκ, τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῆς θὰ χωρῇ (30 στατ. 25 ὀκ.) : 4 ἢ $\frac{40 \text{ στατ. } 25 \text{ ὀκ.}}{4}$ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτῆς θὰ χωρῶσι $\frac{4 \text{ στατ. } 25 \text{ ὀκ.}}{4} \times 3$. Τὴν πρᾶξιν ταύτην καλοῦμεν (§ 122) πολ)σμὸν τοῦ (40 στατ. 25 ὀκ.) ἐπὶ $\frac{3}{4}$.

$$\text{Ὥστε } (40 \text{ στατ. } 25 \text{ ὀκ.}) \times \frac{3}{4} = \frac{40 \text{ στατ. } 25 \text{ὀκ.}}{4} \times 3 =$$

$$\frac{40\text{στ } 25\text{ὀκ.}}{4} + \frac{40\text{στ } 25\text{ὀκ.}}{4} + \frac{40\text{στ } 25\text{ὀκ.}}{4} = \frac{(40\text{στ } 25\text{ὀκ.}) \times 3}{4} =$$

$$30\text{στατ. } 18\text{ὀκ. } 300\text{δραμ.}$$

Ἄρα: Ἡ ἰσότης $\alpha \times \frac{\mu}{\nu} = \frac{\alpha \times \mu}{\nu}$ ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ πολ]στέος α εἶναι τυχὸν συμμιγής. Εὐκόλως δὲ δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν καὶ τὸν σχετικὸν κανόνα.

**Ἀσκήσεις**. 535) Δι' ἀνδρικὴν ἐνδυμασίαν χρειάζονται 4πήχ. 2ρούπ. ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, διὰ δὲ παιδικὴν ἐνδυμασίαν χρειάζονται τὰ $\frac{5}{6}$ αὐτοῦ. Πόσον ὕφασμα χρειάζεται διὰ τὴν παιδικὴν ἐνδυμασίαν;

536) Τόξον περιφερείας εἶναι $119^0 39' 12''$. Πόσον εἶναι τ $\frac{7}{8}$ αὐτοῦ;

537) Ἐργάτης ἐκτελεῖ ἔργον εἰς 8ὥρ. $15^{\pi}$ $20^{\delta}$. Εἰς πόσο χρόνον ἐκτελεῖ τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτοῦ;

538) Οἰκογένεια εἰς ἕνα μῆνα ἔκαυσε 1στατ. 16ὀκ. 200 δράμ ἀνθράκων.. Πόσους ἄνθρακας ἔκαυσεν εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μηνός;

539) Ἐκ τεμαχίου ὑφάσματος 158 ὑαρδῶν ἐπωλήθησαν τ $\frac{7}{12}$. Πόσον ὕφασμα ἔμεινεν;

540) Ἠγόρασέ τις 3 στατ. 20 ὀκάδ. ἀνθράκων· τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ των ἦτο κόνις. Πόσον ἦτο τὸ βάρος τῶν καθαρῶν ἀνθράκων;

§ **169. Πολ]σμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ μικτόν. Πρό βλημα.** Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 10σελ 8πεν 2φαρδ. Πό σον τιμῶνται $4\frac{3}{8}$ πήχεις ἀπὸ αὐτό;

*Λύσις.* Α΄.) Ἀφ' οὗ ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς πήχεως εἶναι 10σελ. 8πε 2φ. ἡ τιμὴ τῶν $4\frac{3}{8}$πήχ. θὰ εἶναι (10σελ 8πεν2φ)$\times 4\frac{3}{8}$ =

(10σελ 8πεν 2φρ) $\times \frac{35}{8}$ = 2λίρ. 6σελ. 10πεν.$\frac{3}{4}$ φαρδ.

Β΄.) Οἱ 4 πήχεις τιμῶνται (10σελ 8πεν 2φ) $\times 4$ = 2λίρ. 2σελ 10πεν. Τὰ δὲ $\frac{3}{8}$πήχ. τιμῶνται (10σελ. 8πεν. 2φ.)$\times\frac{3}{8}$

=4σελ. 0π. $\frac{3}{4}$φ. Ἄρα οἱ $4\frac{3}{8}$ πήχεις τιμῶνται

2λ. 2σελ· 10π. + 4σελ. 0π. $\frac{3}{4}$φ.=2λ. 6σελ. 10π.$\frac{3}{4}$φ.

Κατὰ ταῦτα (10σελ 8 πεν 2φ) $\times$ $\frac{3}{8}$ = (10σελ 8πεν 2φ)$\times 4$+

(10σ 8πεν 2φ) $\times\frac{3}{8}$.

Ἄρα: Αἱ ἰσότητες $\alpha\times\left(\beta+\frac{\mu}{\nu}\right)=\alpha\times\frac{\nu\times\beta+\mu}{\nu}$.

Καὶ $\alpha\times\left(\beta+\frac{\mu}{\nu}\right)=(\alpha\times\beta)+\left(\alpha\times\frac{\mu}{\nu}\right)$ ἰσχύουσι καὶ ὅταν ὁ α εἶναι τυχὸν συμμιγής. Εὐκόλως δὲ δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν καὶ τὸν σχετικὸν κανόνα.

***Ἀσκήσεις.*** 541) Κιβώτιον περιέχει 35όκ. 250δράμ. σάπωνος. Πόσον σάπωνα περιέχουσι 5 τοιαῦτα κιβώτια γεμάτα καὶ ἓν γεμάτον κατὰ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ ;

542) Εἰς κάθε στρέμμα ἀγροῦ εἶναι ἀνάγκη νὰ ῥιφθῇ λίπασμα 20όκ. 300 δραμ. Πόσον λίπασμα χρειάζεται δι' ἀγρὸν $8\frac{5}{6}$ στρεμμάτων ;

543) Διὰ τὴν καλλιέργειαν 1 στρέμματος ἀμπέλου πρέπει νὰ ἐργασθῶσιν ἐργάται τινὲς 2ἡμ. 6ὥρ. Εἰς πόσον χρόνον οὗτοι δύνανται νὰ καλλιεργήσωσιν ἄμπελον $12\frac{3}{4}$ στρεμμάτων ; (1 ἐργάσιμος ἡμέρα ἔχει 8 ὥρας).

544) Κινητὸν ἐπὶ περιφερείας κινούμενον διανύει εἰς ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν τῆς ὥρας τόξον 20° 18′ 30″. Πόσον τόξον διανύει εἰς $3\frac{5}{8}$ πρῶτα λεπτὰ τῆς ὥρας ;

## § 170. Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ κλάσματος

(μερισμός). **Πρόβλημα.** *Τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἀποστάσεως τῆς Κορίνθου ἀπὸ τῶν* ***Ἀθηνῶν διατρέχει αὐτοκίνητον*** *εἰς 2 ὥρ 15 π 21 δ.* ***Εἰς πόσον χρόνον διατρέχει*** *ὅλην τὴν ἀπόστασιν ταύτην ;*

*Λύσις.* Ἐὰν ἐγνωρίζομεν τὸν χρόνον τοῦτον καὶ ἐπολ]μεν αὐτὸν ἐπὶ $\frac{3}{4}$, ἔπρεπε νὰ εὕρωμεν 2 ὥρ 15 π 21 δ. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν χρόνος εἶναι (2 ὥρ 15 π 21 δ) : $\frac{3}{4}$. Ἀλλὰ τὸν χρόνον τοῦτον εὑρίσκομεν διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ἴσον πρὸς $\frac{2 \text{ ὥρ } 15 \text{ π } 21 \text{ δ.}}{3}\times 4$ ἢ (2 ὥρ 15 π. 21 δ) $\times\frac{4}{3}$. Ὀφείλομεν λοιπὸν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι (2 ὥρ 15 π 21 δ) : $\frac{3}{4}=$

(2 ὥρ 15 π 21 δ) $\times\frac{4}{3}=$ 3 ὥρ 0 π 28 δ.

Ἄρα : Ἡ ἰσότης $α : \frac{μ}{ν} = α \times \frac{ν}{μ}$ ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ α εἶνα
συμμιγής. Ὁ δὲ σχετικὸς κανὼν διατυποῦται εὐκόλως.

*Ἀσκήσεις.* 545) Τὰ $\frac{5}{8}$ σώματος ἔχουσι βάρος 10 ὀκ. 100 δράμ
Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ σώματος τούτου ;

546) Τὰ $\frac{5}{8}$ τεμαχίου ὑφάσματος ἔχουσι μῆκος 26 ὑάρ. 2 πόδ
10 δάκ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ὅλου τοῦ τεμαχίου τούτου ;

547) Τὰ $\frac{4}{9}$ τόξου εἶναι $20^{\circ}\ 32'\ 40''$. Πόσον εἶναι ὅλον τὸ τό
ξον τοῦτο ;

§ **171. Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ μικτοῦ** (μερ
σμός). **Πρόβλημα.** *Ἠγόρασέ τις ἐν Λονδίνῳ 3 $\frac{5}{8}$ πήχεις ὑ
φάσματος καὶ ἔδωκε 1 στερ 6 πέν 2 φ. Πόσον ἠγόρασε τὸ
πῆχυν ;*

*Λύσις.* Ἐὰν ἐγνωρίζομεν τὴν τιμὴν τοῦ 1 πήχ. καὶ ἐπολ]ομ
αὐτὴν ἐπὶ 3 $\frac{5}{8}$, ἔπρεπε νὰ εὕρωμεν 1 στερ 6 πέν 2 φ Ἡ ζη
τουμένη τιμὴ εἶναι λοιπὸν (1 στ 6 π 2 φ) : 3 $\frac{5}{8}$. Ἐπειδὴ

$$3\ \frac{5}{8}\ \text{πήχ} = \frac{29}{8}\ \text{πήχ},$$ ὁ πῆχυς τιμᾶται

$$(1\ \text{στ}\ 6\ \text{πέν}\ 2\ \text{φ}) : \frac{29}{8} = 5\ \text{στερλ}\ 8\ \text{πέν}.$$

Ἄρα : Ἡ ἰσότης $α : (β + \frac{μ}{ν}) = α : \frac{β.\ ν + μ}{ν}$ ἰσχύει κα
ὅταν ὁ α εἶναι συμμιγής. Ὁ σχετικὸς δὲ κανὼν διατυποῦται εὐ
κόλως.

ΣΗΜ. Κάθε μία ἀπὸ τὰς προηγουμένας διαιρέσεις (§ 167, 170
171) εἶναι μερισμὸς καὶ τὸ πηλίκον εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέο

*Ἀσκήσεις.* 548) Διὰ 2 $\frac{3}{4}$ ὀκάδας τυροῦ ἔδωκέ τις 10
δραχ. καὶ 65λεπ. Πρὸς πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν ;

549) Ὡρολόγιον εἰς 5 $\frac{4}{8}$ ὥρας ὑστέρησε $12^{π}$ καὶ $6^{δ}$. Πόσ
ὑστέρησε τὴν ὥραν ;

550) Κινητὸν εἰς $7\frac{1}{4}$ ὥρας διέτρεξε τόξον $60^\circ\ 28'\ 52''$. Πόσον τόξον διατρέχει τὴν ὥραν;

551) Μὲ $2\frac{1}{4}$ στερλίνας ἠγόρασέ τις ἐν Λονδίνῳ 6ύάρ 1π 6δ. ὑφάσματος. Πόσον ὕφασμα ἀγοράζει μὲ μίαν στερλίναν;

552) Οἰκογένεια εἰς $2\frac{3}{5}$ μῆνας ἔκαυσε 9στ 3όκ 150 δράμ. ἀνθράκων. Πόσους ἄνθρακας ἔκαυσε κατὰ μῆνα;

## Μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν.

### *α') Πολλσμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον.*

§ **172. Πρόβλημα.** *Ἀρτοποιὸς διαθέτει διὰ τὴν κατασκευὴν ἄρτου 2στατ 34όκ 350δράμ ἀλεύρου τὴν ἡμέραν. Πόσον ἄλευρον διαθέτει τὸν μῆνα;*

*Λύσις.* Ἀφ' οὗ εἰς 1 ἡμ. διαθέτει 2στατ 33 όκ 350 δράμ,
» 30 ἡμ. » (2στατ 33όκ.350 δράμ)×30.

Τὸ γινόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν κατὰ τὸν γνωστὸν (§ 166) τρόπον καὶ ὡς ἑξῆς ἀκόμη.

Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσον ἄλευρον διαθέτει εἰς 30 ἡμέρας, ἂν διέθετε μόνον 2 στατ. τὴν ἡμέραν, ἤτοι 2στατ×30=60 στατ.

Ἔπειτα εὑρίσκομεν πόσον ἄλευρον διαθέτει τὸν μῆνα πρὸς 33 όκ. τὴν ἡμέραν. Πρὸς τοῦτο, ἀντὶ νὰ εὕρωμεν διὰ μιᾶς τὸ γινόμενον 33όκ×30 ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Χωρίζομεν τὰς 33όκ. εἰς 22όκ $=\frac{1}{2}$ στατ. καὶ εἰς 11όκ $=\frac{1}{2}$ τῶν 22όκ. Ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐὰν διέθετε 1στατ. τὴν ἡμέραν, εἰς τὰς 30 ἡμέρας θὰ διέθετε 30στατ. Ἐὰν δὲ διαθέτῃ 22όκ. ἢ $\frac{1}{2}$στατ εἰς τὰς 30 ἡμέρας θὰ διαθέτῃ τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 30στατ, ἤτοι 15στατ. Πρὸς 11όκ. δὲ τὴν ἡμέραν θὰ διαθέτῃ τὸ $\frac{1}{2}$τῶν 15στατ, ἤτοι 7στατ 22όκ.

Ἔπειτα θὰ εὕρωμεν πόσον ἄλευρον διαθέτει εἰς τὰς 30 ἡμέρας πρὸς 350 δράμ. τὴν ἡμέραν.

Πρὸς τοῦτο χωρίζομεν τὰ 350 δράμ. εἰς 200 δράμ $=\frac{1}{2}$ όκ.

εἰς 100 δράμ. $= \frac{1}{2}$ τῶν 200 δραμ. καὶ εἰς 50 δράμ. $= \frac{1}{2}$ τῶν 100 δραμ. Ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Εἰς 30 ἡμέρας ἀπὸ 1 ὀκ. τὴν ἡμέραν θὰ διέθετε 30 ὀκ. ἄρα ἀπὸ 200 δράμ ἢ $\frac{1}{2}$ ὀκ. θὰ διαθέτῃ $\frac{30^{\text{ὀκ.}}}{2} = 15$ ὀκ.

Ἀπὸ 100 δράμ. ἢ $\frac{1}{2}$ τῶν 200 δρ. τὴν ἡμέραν, θὰ διαθέτῃ εἰς 30 ἡμ. τὸ 1/2 τῶν 15 ὀκ. ἤτοι 7 ὀκ. 200 δράμ.

Καὶ ἀπὸ 100 δράμ. τὴν ἡμέραν θὰ διαθέτῃ εἰς 30 ἡμέρας τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 7 ὀκ. 200 δρ. ἤτοι 3 ὀκ 300 δρ.

Τέλος προσθέτομεν ὅλα τὰ εὑρεθέντα βάρη καὶ εὑρίσκομεν ὅτι διαθέτει εἰς 30 ἡμέρας ἄλευρον 83 στατ. 4 ὀκ. καὶ 100 δράμ,

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 2 στατ. | 33 ὀκ. | 350 δράμ. |
| | | 30 | | |
| ἀπὸ 2 στατ. τὴν ἡμέραν . . . . . . | | 60 στατ. | | |
| ἀπὸ 33 ὀκ. | 22 ὀκ. $= \frac{1}{2}$ στατ. | 15 | | |
| | 11 ὀκ. $= \frac{1}{2}$ τοῦ 22 ὀκ | 7 | 22 ὀκ. | |
| ἀπὸ 350 δράμ. | 200 δράμ. $= \frac{1}{2}$ ὀκ. | 0 | 15 ὀκ. | |
| | 100 δράμ $= \frac{1}{2}$ τῶν 200 δραμ. | 0 | 7 | 200 δρ. |
| | 50 δράμ. $= \frac{1}{2}$ τῶν 100 δραμ | 0 | 3 | 300 |
| | | 83 στατ. | 4 ὀκ. | 100 δράμ. |

Ὁ τρόπος οὗτος τοῦ πολ]σμοῦ προτιμᾶται ἰδίᾳ ὅταν ὁ πολ]στὴς εἶναι μέγας ἀριθμός.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ διάφορα μέρη τοῦ πολ]στέου χωρίζονται εἰς ἁπλᾶ μέρη (ἥμισυ, τρίτον, τέταρτον κτλ.) μονάδας ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ὁ τρόπος οὗτος λέγεται *μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν.*

## β΄. Πολ]σμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ.

§ **173. Πρόβλημα ΙΙ.** *Ἡ ὀκᾶ τοῦ σάπωνος τιμᾶται 24 δραχ. καὶ 60 λεπτά. Πόσον τιμῶνται 10 ὀκ. 300 δράμ ἀπὸ αὐτόν ;*

*Λύσις. Α΄).* Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν τιμὴν τῶν 10 ὀκ. πρὸς 24 δρ. καὶ 60 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν κατὰ τὸν προηγούμενο τρόπον. Ἔπειτα διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῶν 300 δραμίων, χωρίζομεν αὐτὰ εἰς 200 δράμια $= \frac{1}{2}$ ὀκ. καὶ εἰς 100 δράμια $= \frac{1}{4}$ ὀκ. καὶ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Διάταξις τῆς πράξεως

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 24 δραχ. | 60 λεπ. |
| | | 10 ὀκ. | 300 δράμ. |
| ἀξία 10 ὀκ. | πρὸς 24 δραχ . . . . . . . . . | 240 δραχ. | |
| | » 50 λ. $= \frac{1}{2}$ δραχ. . . . . | 5 | |
| | » 10 $= \frac{1}{10}$ δραχ. . . | 1 | |
| ἀξία 300 δρ. | τὰ 200 δράμ. $= \frac{1}{2}$ ὀκ. . . | 12 | 30 λεπ. |
| | » 100 » $= \frac{1}{4}$ ὀκ. . . | 6 | 15 |
| | | 264 | 45 λεπ. |

Ἀφ' οὗ ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 24 δραχ. 60 λεπτ, τὰ 200 δράμ, ἢ $\frac{1}{2}$ ὀκ. θὰ τιμῶνται (24 δ. 60 λ.) : 2 = 12 δρ. 30 λ, τὰ δὲ 100 δράμ. $= \frac{1}{4}$ ὀκ. θὰ τιμῶνται (24 δραχ. 60 λεπ.) : 4 = 6 δραχ. 15 λεπ.

Τέλος προσθέτομεν ὅλας τὰς μερικὰς ταύτας τιμὰς καὶ εὑρίσκομεν ὅτι αἱ 10 ὀκ. 300 δράμ. τιμῶνται 264 δραχ. 45 λεπτά.

Καὶ ὁ τρόπος οὗτος, κατὰ τὸν ὁποῖον εὕρομεν τὸ ζητούμενον, καλεῖται πολ]σμὸς κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

Β΄). Ἐπειδὴ ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 24δραχ. 60λεπ, αἱ δὲ 10 ὀκ. 300δρ. $= 10\frac{3}{4}$ ὀκ, τὸ ζητούμενον εἶναι (24 δραχ. 60 λεπ. $\times\ 10\frac{3}{4}$ = 264 δραχ. 45 λεπτ.

Ὥστε : *Διὰ νὰ πολ]σωμεν συμμιγῆ ἐπὶ συμμιγῆ, ἐκτελοῦμεν τὸν πολ]σμὸν κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν ἢ τρέπομεν τὸν πολ]στὴν εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν μονάδων τῆς τάξεως, τῆς ὁποίας μία μονὰς ἀντιστοιχεῖ πρὸς ὅλον τὸν πολ]στέον. Ἔπειτα δὲ πολ]ζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἁπλοῦν τοῦτον ἀριθμόν.*

**Ἀσκήσεις.** 553) Γεωργὸς ἐπώλησε 564 ὀκάδας σίτου πρὸς 6 δραχμὰς καὶ 60 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν. Πόσα χρήματα ἔλαβεν;

554) Ἡ ὀκᾶ τοῦ καφφὲ τιμᾶται 64 δρ. 80 λεπ. Πόσον τιμῶνται 5 ὀκ. 300 δράμια καφφέ;

555) Ὁ στατὴρ τῆς ζακχάρεως τιμᾶται 880 δραχ. Πόσον τιμῶνται 33ὀκάδες καὶ 300 δράμια ζακχάρεως;

556) Εἰς 1π. κινητὸν διανύει τόξον 20° 3′ 15′′. Πόσον τόξον διανύει εἰς 8π. 2δ;

ΣΗΜ. Αἱ ἑπόμεναι ἀσκήσεις νὰ λυθῶσι πρῶτον ἀγράφως καὶ καὶ ἔπειτα νὰ γίνῃ ἡ διάταξις τῶν πράξεων.

557) Ἡ ὀκᾶ τοῦ βουτύρου τιμᾶται 80δραχ. 60λεπ. Πόσον τιμῶνται 300 δράμια ἐξ αὐτοῦ;

558) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 120 δραχ. Πόσον τιμῶνται 6 ρούπια ἐξ αὐτοῦ;

559) Δι' ἐργασίαν μιᾶς ὥρας ἐργάτης λαμβάνει 10,40 δραχ. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ, ἂν ἐργασθῇ 45π.;

560) Ἡ ὀκᾶ τοῦ κρέατος τιμᾶται 36 δραχ. Πόσα χρήματα θὰ δόσῃ τις, ἂν ἀγοράσῃ 250 δράμια;

561) Ἡ ὀκᾶ τοῦ ἐλαίου τιμᾶται 24 δραχ. Πόσον τιμῶνται 350 δράμια αὐτοῦ;

## Διαίρεσις δι' ἁπλοῦ ἀριθμοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς δοθέντα συμμιγῆ ἀριθμόν.

### α'. *Μερισμός.*

**§. 174. Πρόβλημα Ι.** *Ἠγόρασέ τις 4πήχ. καὶ 2ρούπ. ὑφάσματος καὶ ἔδωκε 258 δραχ. 40 λεπ. Πρὸς πόσον ἠγόρασε τὸν πῆχυν;*

*Λύσις.* Ἐπειδὴ 4πήχ. 2ρ.$=\frac{17}{4}$πήχ, ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ $\frac{17}{4}$ πρέπει νὰ γίνηται 258δρ. 40λεπ. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν τιμὴ τοῦ πήχεως εἶναι (258δραχ. 40λεπ.) : $\frac{17}{4}$ =60δραχ. 80λεπ. (§ 170). Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τῆς τροπῆς τοῦ συμμιγοῦς 4πήχ. 2ρούπια εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν πήχεων ἀνήχθη τὸ ζήτημα εἰς μερισμὸν δι' ἁπλοῦ ἀριθμοῦ.

*β' Μέτρησις.*

§ **175. Πρόβλημα ΙΙ.** *Ὑφάντρια ὑφαίνει εἰς 2ὧρ. 20π. ἕνα πῆχυν ὑφάσματος. Πόσους πήχεις ἐκ τοῦ ὑφάσματος τούτου θὰ ὑφάνῃ εἰς 12ὧρ. καὶ 15π ;*

Ἐπειδὴ εἰς 2 ὥρ. 20π. ἢ εἰς 140π. ὑφαίνει 1 πῆχυν, εἰς 12ὥρ. 15π. ἢ εἰς 735π. θὰ ὑφάνῃ $\frac{735}{140}$ πήχ.=5πήχ. 2 ῥούπ.

β') Ἐπειδὴ 2 ὥρ. 20π =$2\frac{1}{3}$ὥρ. καὶ 12 ὥρ. 15π.=$12\frac{1}{4}$ὥρ, ἕπεται ὅτι τὸ ζητούμενον εἶναι $\left(12\frac{1}{4} : 2\frac{1}{3}\right)$πήχ.=$5\frac{2}{8}$ πήχ.

=5 πήχ. 2 ῥούπ.

Ὥστε διὰ τῆς τροπῆς τῶν δύο δοθέντων καὶ ὁμοειδῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν εἰς ἁπλοῦς ἀριθμοὺς τῆς αὐτῆς τάξεως, ἀνήχθη τὸ ζήτημα εἰς μέτρησιν ἁπλοῦ ἀριθμοῦ δι' ἄλλου τοιούτου.

ΣΗΜ. Εἶναι φανερὸν ὅτι οὕτω γίνεται ἡ μέτρησις καὶ ὅταν ἀρχικῶς ὁ εἷς τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι ἁπλοῦς.

*Ἀσκήσεις.* 562) Διὰ 2 ὀκ. καὶ 100 δράμ. ἐλαίου ἔδωκέ τις 49,50 δραχμάς. Πρὸς πόσον τὸ ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν ;

563) Ἠγόρασέ τις 350 δράμια μακαρόνια καὶ ἔδωκε 21 δραχμάς. Πρὸς πόσον ἠγόρασε ταῦτα τὴν ὀκᾶν ;

564) Ἡ ὀκᾶ τῶν ὀσπρίων τιμᾶται 18 δραχ. καὶ 60 λεπτά. Πόσας ὀκάδας ἀγοράζει τις μὲ 199 δραχ. 60 λεπτά ;

565) Μὲ 8 σελ. ἀγοράζομεν ἕνα πῆχυν ὑφάσματος. Πόσους πήχεις ἐξ αὐτοῦ ἀγοράζομεν μὲ 2 στερλ. καὶ 12 σελίνια ;

## Προβλήματα ἐπὶ συμμιγῶν ἐν γένει.

566) Τρία δοχεῖα ἐντελῶς ὅμοια εἶναι γεμάτα ἀπὸ ἐμπόρευμα τῆς αὐτῆς φύσεως, ἔχουσι δὲ ὁμοῦ βάρος 6στατ. 38ὀκ. 100δραμ. Ἕκαστον δὲ ἀπὸ αὐτὰ κενὸν ἔχει βάρος 6ὀκ. 350δραμ. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ἐντὸς αὐτῶν ἐμπορεύματος καὶ πόσον περιέχῃ τὸ καθ' ἕν ;

567) Ἔδωκέ τις 744δραχ. καὶ 65λεπτὰ καὶ ἠγόρασε 5 πήχεις καὶ 3 ῥούπια ὑφάσματος πρὸς 60δραχ. καὶ 40λεπ. τὸν πῆχυν καὶ β' ὕφασμα κατὰ 9 δραχ. καὶ 60 λεπ. ἀκριβώτερον τὸν πῆχυν. Πόσον ἠγόρασεν ἀπὸ τὸ β' τοῦτο ὕφασμα ;

568) Ἁμαξοστοιχία τῶν Ἑλληνικῶν Σιδηροδρόμων διανύουσα 30

χιλιόμετρα τὴν ὥραν ἀναχωρεῖ ἐξ Ἀθηνῶν τὴν 7 ὥρ. 15′ π. μ. καὶ φθάνει εἰς Λάρισαν τὴν 6 ὥραν μ. μ. τῆς ἰδίας ἡμέρας. Παραμένει δὲ εἰς τοὺς διαφόρους σταθμοὺς 2 ὥρ. $27^{π}$ $54^{δ}$ . Πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς Λαρίσης ἀπὸ τῶν Ἀθηνῶν ;

569) Διευθυντὴς ἑστιατορίου ἠγόρασεν 8 ὀκ. 100 δράμ. κρέατος βοείου καὶ ἀρνίου καὶ ἔδωκε 308 δραχμάς. Ἡ τιμὴ τοῦ βοείου εἶναι 36 δραχ. τὴν ὀκᾶν, τοῦ δὲ ἀρνίου 40 δρ. Πόσον βόειον καὶ πόσον ἄρνιον κρέας ἠγόρασεν ;

570) Ἐκ τεμαχίου ὑφάσματος ἐπωλήθησαν τὰ $\frac{2}{3}$ ἀντὶ 2928 δραχ. Ἔμειναν δὲ 6 ὑάρ. 2 πόδ. 4 δάκ. Πόσον ἦτο ὅλον τὸ ὕφασμα καὶ πρὸς πόσον ἐπωλήθη τὴν ὑάρδαν ;

571) Διανομεὺς ἔχει νὰ διανείμῃ 62 ἐπιστολὰς καὶ ὑπολογίζει ὅτι ἀντιστοιχεῖ διὰ κάθε μίαν χρόνος 4 π. Ἐὰν ἀρχίσῃ τὴν διανομὴν τὴν 8 ὥρ. 16 π. μετὰ μεσημβρίαν, κατὰ ποίαν ὥραν θὰ λήξῃ ;

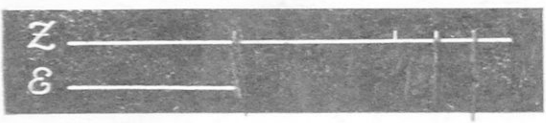
# ΒΙΒΛΙΟΝ Ε΄.

# ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

### ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

§ **176. Λόγος ποσοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς καὶ ριθμοῦ πρὸς ἄλλον.** Ἔστω εὐθ. τμῆμα Ε καὶ ἄλλο Ζ, τὸ ποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 μέρη ἴσα πρὸς τὸ Ε καὶ ἀπὸ 3 μέρη




(Σχ. 3)

σα πρὸς τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ Ε, ἤτοι $Ζ = Ε + Ε + \frac{Ε}{4} + \frac{Ε}{4} + \frac{Ε}{4}$.

Τὸ ποσὸν Ζ ὀνομάζομεν γινόμενον τοῦ Ε ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $2\frac{3}{4}$.

Ἐπειδὴ δὲ $2\frac{3}{4} = 1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, ἕπεται ὅτι:

*Γινόμενον ποσοῦ ἐπὶ ἀριθμὸν καλεῖται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον γίνεται ἀπὸ αὐτὸ καὶ ἀπὸ τὰ μέρη του, ὅπως ὁ ἀριθμὸς γίνεται ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτῆς.*

Ὁ ἀριθμὸς $2\frac{3}{4}$ λέγεται λόγος τοῦ ποσοῦ Ζ πρὸς τὸ Ε.

Ὁμοίως, ἂν ποσὸν Π εἶναι ἴσον πρὸς $Ρ + Ρ + Ρ$ ἢ $Ρ \times 3$, ὁ ἀριθμὸς 3 λέγεται λόγος τοῦ Π πρὸς τὸ Ρ.

*Γενικῶς: Λόγος ποσοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς καλεῖται ὁ ἀριθμός, μὲ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ δεύτερον ποσόν, διὰ νὰ προκύψῃ τὸ πρῶτον.*

Τὸν ὁρισμὸν τοῦτον δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν καὶ εἰς τοὺς ἀριθμούς. Οὕτως, ἐπειδὴ $2 \times 3\frac{1}{2} = 7$, ὁ ἀριθμὸς $3\frac{1}{2}$ λέγεται λόγος τοῦ 7 πρὸς τὸν 2.

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι καὶ $7 : 2 = 3\frac{1}{2}$ προτιμῶμεν τὸν ἑξῆς συντομώτερον ὁρισμόν.

~~Λόγος~~ *ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον καλεῖται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου.*

Τὰ ποσὰ ἢ οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀπαρτίζουσιν ἕνα λόγον, λέγονται *ὅροι* αὐτοῦ.

Οἱ ὅροι λόγου ἀριθμῶν εἶναι ἀφῃρημένοι ἢ συγκεκριμένοι· εἰς τὴν β′ περίπτωσιν πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς. Τὸν λόγον ἀριθμοῦ ἢ ποσοῦ α πρὸς ἄλλο β σημειοῦμεν οὕτω $\alpha : \beta$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ἐὰν δύο λόγοι ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς ὅρους κατ' ἀντίστροφον τάξιν, λέγονται **ἀντίστροφοι** λόγοι. Τοιοῦτοι π. χ. εἶναι οἱ $\frac{2}{6}$ καὶ $\frac{6}{2}$ ὁμοίως οἱ $\frac{\Pi}{P}$ καὶ $\frac{P}{\Pi}$.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι Π καὶ Ρ εἶναι δύο ποσὰ ὁμοειδῆ καὶ ὅτι $\Pi : P = 2$, ἤτοι $\Pi = P + P$. Ἐὰν μετρήσωμεν ταῦτα μὲ μίαν μονάδα Μ καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι αὕτη χωρεῖ 3 φορὰς εἰς τὸ Ρ, εἰς τὸ $P + P$ ἤτοι εἰς τὸ Π θὰ χωρῇ 6 φοράς. Τὸ μέτρον λοιπὸν τοῦ μὲν Π θὰ εἶναι 6, τοῦ δὲ Ρ εἶναι 3.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ $6 : 3 = 2$, συμπεραίνομεν ὅτι $\Pi : P = 6 : 3$. Ἄρα

*Ὁ λόγος δύο ποσῶν ὁμοειδῶν ἰσοῦται πρὸς λόγον τῶν μέτρων αὐτῶν, ὅταν μετρηθῶσι μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.*

§ **177. Ἀναλογίαι καὶ ἰδιότητες αὐτῶν.** Ἐπειδὴ $\frac{6}{2} = 3$ καὶ $\frac{12}{4} = 3$ ἔπεται ὅτι $\frac{6}{2} = \frac{12}{4}$. Ἡ ἰσότης αὕτη λέγεται *ἀναλογία*. Ὁμοίως $\Pi : P = \Sigma : T$ εἶναι ἀναλογία.

Ὥστε : *Ἀναλογία καλεῖται ἰσότης δύο λόγων.*

Οἱ ὅροι τῶν λόγων ἀναλογίας λέγονται *ὅροι* τῆς ἀναλογίας. Οἱ προτασσόμενοι ὅροι ἑκάστου λόγου λέγονται *ἡγούμενοι*, οἱ δὲ ἑπόμενοι λέγονται *ἑπόμενοι*. Ὁ ἡγούμενος τοῦ πρώτου λόγου καὶ ὁ ἑπόμενος τοῦ δευτέρου λέγονται *ἄκροι* ὅροι, οἱ δὲ ἄλλοι λέγονται *μέσοι* ὅροι.

*Ἀναλογία τις καλεῖται συνεχής, ἂν οἱ μέσοι ὅροι εἶναι ἴσοι*

π. χ. $\alpha : \beta = \beta : \gamma$.

*Ὁ μέσος ὅρος συνεχοῦς ἀναλογίας καλεῖται μέσος ἀνάλογος τῶν ἄκρων.*

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι Π : Ρ = Σ : Τ καὶ ὅτι τὰ ποσὰ Π καὶ Ρ μετρηθέντα μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα ἔχουσι μέτρα π καὶ ρ· ἐπίσης τὰ Σ καὶ Τ μετρηθέντα μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα ἂς ἔχωσι μέτρα σ καὶ τ.

Ἐπειδὴ (§ 176) εἶναι Π : Ρ = π : ρ καὶ Σ : Τ = σ : τ, ἔπεται ὅτι π : ρ = σ : τ. Εὐκόλως δὲ ἐννοοῦμεν ὅτι, ἂν π : ρ = σ : τ, θὰ εἶναι καὶ Π : Ρ = Σ : Τ.

Ἄρα : *Ἂν 4 ποσὰ συνιστῶσιν ἀναλογίαν, καὶ τὰ μέτρα αὐτῶν συνιστῶσιν ἀντίστοιχον ἀναλογίαν, ἀρκεῖ οἱ ὅροι ἑκάστου λόγου νὰ μετρηθῶσι μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα. Καὶ ἀντιστρόφως.*

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον θεωροῦμεν συνήθως ἀναλογίας ἀριθμῶν καὶ τοιούτων ἀναλογιῶν θὰ μάθωμεν τὰς σπουδαιοτέρας ἰδιότητας. 20

Α΄. Ἔστω ἡ ἀναλογία $\frac{12}{4} = \frac{6}{2}$. Ἐὰν πολλ... ...ω.χ δραχμάς. Ἂν δὲ
ἀμφότερα τὰ μέλη, εὑρίσκομεν $12 \times 2$ ...νὰ εἶναι ψ=40.χ.

*Γενικῶς* : ἂν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, θὰ εἶν... χ τῶν ἀγοραζομένων ὀκάδων μεταβάλλεται.

Ἄρα : *Εἰς πᾶσαν ἀναλογ*... ...αὶ ψ λέγονται διὰ τοῦτο *συμμεταπρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέσ*...ς τὸ ὁποῖον δίδομεν αὐθαιρέτους τι... *...μεταβλητή*. Τὸ δὲ ποσὸν ψ, τοῦ ὁποίου ἡ

Ἐφαρμογή. Ἂν εἰ... ...τιμὴν τοῦ χ, λέγεται *συνάρτησις* τοῦ χ.
καὶ ἑπομένως χ=180 ... Ε τετραγώνου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν πλευρὰν
ἀναλογίας. ...ιαν ἡ πλευρὰ μεταβληθῇ. Οὕτως, ἂν α=2μ,

Β΄. *Εἰς πᾶσαν συ*...ν α=3μ, θὰ εἶναι Ε=9 τ.μ. κτλ.
*λόγου ἰσοῦται πρὸς τὸ* ...*συνάρτησις* τῆς πλευρᾶς α, ἡ ὁποία λέγεται

Γ΄. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμ... ...ὰ δὲ ποσὰ Ε καὶ α εἶναι *συμμεταβλητά*.
ὥστε $2 \times 9 = 3 \times 6$. Ἐὰ... *...ι συμμεταβλητά*, ἂν *μεταβαλλομένης*
διὰ τοῦ γινομένου $3 \times 9$, εὑ... *...ται καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου*.
*...ποσῶν ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον δίδομεν*

$$\frac{2 \times 9}{3 \times 9} = \frac{\ldots}{\ldots}$$

*...ἀνεξάρτητος μεταβλητή. Τὸ δὲ ἄλλο λέ...*
*...ρτήτου ταύτης μεταβλητῆς*.

Γενικῶς, ἂν οἱ ἀριθμοὶ ... συναρτήσεις περισσοτέρων ἀνεξαρτήτων
$\alpha \times \delta = \beta \times \gamma$, θ... ...εμβαδὸν ὀρθογωνίου εἶναι συνάρτησις τῆς βά...
...ους αὐτοῦ. Τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου εἶναι συνάρτησις

Ἄρα : Ἐὰ... ...αὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ.
*ὥστε τὸ γι*...

**9. Γραφικὴ παράστασις συναρτήσεως.** Α΄. Ἂς
*μέσων, ο*... ...ῶμεν ὅτι ἡ θερμοκρασία τῆς ἀτμοσφαίρας ἡμέραν τινὰ ἐν
κατὰ ...ναις ἦτο

κατὰ τὴν τάξιν 2, 6, 3, 9 βλέπομεν ὅτι $2 \times 9 = 6 \times 3$, ἄρα $2 : 6 = 3 : 9$.

Γενικῶς, ἂν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha : \gamma = \beta : \delta$.

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\delta : \beta = \gamma : \alpha$.

Ἄρα: *Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν δυνάμεθα νὰ ἀνταλλάξωμεν τοὺς μέσους ὅρους, ὁμοίως δὲ καὶ τοὺς ἄκρους ὅρους.*

Ε΄. Ἐὰν τοὺς ὅρους τῆς ἀναλογίας $4 : 5 = 8 : 10$ γράψωμεν κατὰ τὴν σειρὰν 5, 4, 10, 8, βλέπομεν ὅτι $5 \times 8 = 4 \times 10$.

Ἄρα εἶναι $5 : 4 = 10 : 8$.

*Γενικῶς, ἂν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, θὰ εἶναι καὶ $\beta : \alpha = \delta : \gamma$.*

Ἄρα: *Ἐὰν δύο λόγοι εἶναι ἴσοι, καὶ οἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν εἶναι ἴσοι.*

ξιν, λέγονται ἀντιἀναλογίας $6 : 4 = 3 : 2$ ἢ $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ προκύ-

ὁμοίως οἱ $\frac{\Pi}{P}$ καὶ $\frac{P}{\Pi}$. $\frac{3}{2} + 1$ ἢ $\frac{6+4}{4} = \frac{3+2}{2}$.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι Π καὶ Ρ θὰ εἶναι καὶ

$\Pi : P = 2$, ἤτοι $\Pi = P + P$. Ἐὰν μετ $+ \delta) : \delta$.

νάδα Μ καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι αὕτη χωρ καὶ $\alpha > \delta$ καὶ $\alpha : \delta = \gamma : \delta$,

τὸ $P + P$ ἤτοι εἰς τὸ Π θὰ χωρῇ 6 φορ δ.

μὲν Π θὰ εἶναι 6, τοῦ δὲ Ρ εἶναι 3. ς **ἡγουμένους ἀναλογίας**

Ἐπειδὴ δὲ καὶ $6 : 3 = 2$, συμπεραίνομεν ἡ **ἀναλογία διατηρεῖται**

*Ὁ λόγος δύο ποσῶν ὁμοειδῶν ἰσοῦται* π 10, προκύπτει (Ε΄) ἡ

*αὐτῶν, ὅταν μετρηθῶσι μὲ τὴν αὐτὴν μονάδ*

§ **177. Ἀναλογίαι καὶ ἰδιό** :5 (ΣΤ΄) καὶ ἐκ ταύτης

$\frac{6}{2} = 3$ καὶ $\frac{12}{4} = 3$ ἕπεται ὅτι $\frac{6}{2} = \frac{12}{4}$, 0 + 5). θὰ εἶναι καὶ

ἀναλογία. Ὁμοίως $\Pi : P = \Sigma : T$ εἶνα $(\gamma + \delta)$.

Ὥστε: *Ἀναλογία καλεῖται ἰσότης* $> \alpha$ καὶ $\alpha : \delta = \gamma : \delta$, θὰ

Οἱ ὅροι τῶν λόγων ἀναλογίας λέγο

προτασσόμενοι ὅροι ἑκάστου λόγου λέγ**ομένους ἀναλογίας προστεθῇ**

τασσόμενοι λέγονται ἑπόμενοι. Ὁ ἡγ**ἀναλογία διατηρεῖται.**

καὶ ὁ ἑπόμενος τοῦ δευτέρου λέγονται ἄκρ ἀστης τῶν ἀναλογιῶν

λέγονται μέσοι ὅροι. $\frac{x}{} = \frac{8}{4}$,

*Ἀναλογία τις καλεῖται συνεχής, ἂν οἱ μέσοι ὅρ*

*π. χ.* $\alpha : \beta = \beta : \gamma$.

*Ὁ μέσος ὅρος συνεχοῦς ἀναλογίας καλεῖται μέσος* α

*τῶν ἄκρων.*

574) Ὁ λόγος ποσοῦ Α πρὸς ἄλλο Β εἶναι 4 καὶ τὸ μέτρον ποσοῦ Γ εἶναι 8. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ μέτρον ποσοῦ Δ, ὅταν μετρηθῇ μὲ τὴν αὐτὴν καὶ τὸ Γ μονάδα διὰ νὰ εἶναι $Α : Β = Γ : Δ$;

575) Ἂν $\alpha > \beta$ καὶ $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$(\alpha + \beta) : (\alpha - \beta) = (\gamma + \delta) : (\gamma - \delta).$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

## ΜΕΘΟΔΟΙ

§ **178. Συμμεταβλητὰ ποσά.—Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ὀκᾶ τοῦ κρέατος τιμᾶται 40 δραχμάς. Ἂν ἀγοράσωμεν 2 ὀκ, θὰ δόσωμεν $40 \times 2$ ἤτοι 80 δραχμάς· ἂν ἀγοράσωμεν 3 ὀκάδας, θὰ δόσωμεν $40 \times 3 = 120$ δραχμὰς καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

*Γενικῶς :* Διὰ χ μονάδας θὰ δόσωμεν 40.χ δραχμάς. Ἂν δὲ παραστήσωμεν διὰ ψ τὴν τιμὴν ταύτην, θὰ εἶναι $ψ = 40.χ$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, ἂν ὁ ἀριθμὸς χ τῶν ἀγοραζομένων ὀκάδων μεταβληθῇ καὶ ἡ ἀξία ψ αὐτῶν μεταβάλλεται.

Τὰ δύο ταῦτα ποσὰ χ καὶ ψ λέγονται διὰ τοῦτο *συμμεταβλητὰ ποσά*. Τὸ ποσὸν χ, εἰς τὸ ὁποῖον δίδομεν αὐθαιρέτους τιμάς, λέγεται *ἀνεξάρτητος μεταβλητή*. Τὸ δὲ ποσὸν ψ, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ χ, λέγεται *συνάρτησις* τοῦ χ.

Ὁμοίως τὸ ἐμβαδὸν Ε τετραγώνου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν πλευρὰν α καὶ μεταβάλλεται, ὅταν ἡ πλευρὰ μεταβληθῇ. Οὕτως, ἂν $α = 2$μ, θὰ εἶναι $Ε = 4$τ.μ. Ἂν $α = 3$μ, θὰ εἶναι $Ε = 9$ τ.μ. κτλ.

Εἶναι λοιπὸν τὸ Ε *συνάρτησις* τῆς πλευρᾶς α, ἡ ὁποία λέγεται *ἀνεξάρτητος* μεταβλητή. Τὰ δὲ ποσὰ Ε καὶ α εἶναι *συμμεταβλητά*.

Ὥστε : *Δύο ποσὰ λέγονται συμμεταβλητά, ἂν μεταβαλλομένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς μεταβάλληται καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου.*

*Ἐκ δύο συμμεταβλητῶν ποσῶν ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον δίδομεν αὐθαιρέτους τιμάς, λέγεται ἀνεξάρτητος μεταβλητή. Τὸ δὲ ἄλλο λέγεται συνάρτησις τῆς ἀνεξαρτήτου ταύτης μεταβλητῆς.*

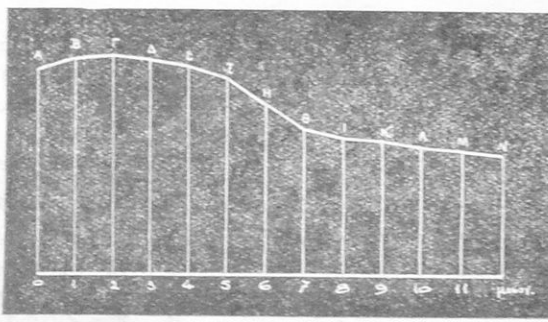
ΣΗΜ. Ὑπάρχουσι καὶ συναρτήσεις περισσοτέρων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. Π. χ. τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου εἶναι συνάρτησις τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ. Τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου εἶναι συνάρτησις τῶν βάσεων καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ.

**§ 179. Γραφικὴ παράστασις συναρτήσεως.** Α΄. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ θερμοκρασία τῆς ἀτμοσφαίρας ἡμέραν τινὰ ἐν Ἀθήναις ἦτο

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| τὴν | Μεσημβρίαν | 24° | Τὴν | 7ην μ. μ. | 17° |
| τὴν | 1ην μ.μ. | 25° | τὴν | 8ην μ. μ. | 16° |
| τὴν | 2αν μ.μ. | 25°,5 | τὴν | 9ην μ. μ. | 15°,5 |
| τὴν | 3ην μ.μ. | 25° | τὴν | 10ην μ. μ. | 15° |
| τὴν | 4ην μ.μ. | 24°,5 | τὴν | 11ην μ. μ. | 14°,5 |
| τὴν | 5ην μ.μ. | 23° | τὸ | μεσονύκτιον | 14° |
| τὴν | 6ην μ.μ. | 20° | | | |

Τὴν τοιαύτην μεταβολὴν τῆς θερμοκρασίας δυνάμεθα νὰ αἰσθητοποιήσωμεν ὡς ἑξῆς.

Γράφομεν εὐθεῖαν ΟΧ (Σχ. 4) καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῆς διαδοχικὰ καὶ ἴσα τμήματα.




*(Σχ. 4)*

Τὰ ἄκρα τῶν τμημάτων τούτων ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰς διαδοχικὰς ὥρας τοῦ ἀνωτέρου πίνακος, αἱ ὁποῖαι καὶ ἀναγράφονται πλησίον τῶν ἄκρων τούτων.

Ἀπὸ ἕκαστον τῶν ἄκρων τούτων ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΧ. Ἐπὶ τῶν καθέτων δὲ τούτων καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΟΧ ὁρίζομεν τμήματα ἀνάλογα πρὸς τὰς θερμοκρασίας τοῦ ἀνωτέρου πίνακος καὶ νὰ ἀρχίζωσιν ὅλα ἀπὸ τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τῆς ΟΧ. Ἐὰν π. χ. ἀπεικονίσωμεν τὴν θερμοκρασίαν 1° μὲ τμῆμα μήκους 2 χιλιοστομέτρων, ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ Ο θὰ ὁρίσωμεν τμῆμα ΟΑ μήκους $2 \times 24 = 48$ χιλιοστομέτρων, ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ 1 θὰ ὁρίσωμεν τμῆμα 1Β μήκους $2 \times 25 = 50$ χιλιοστομέτρων καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ὁρίζομεν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Ζ, . . . Ν.

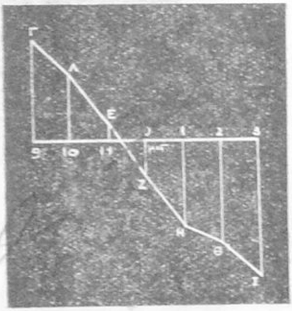
Ἐὰν δὲ χαράξωμεν τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, . . . ΜΝ, σχηματίζομεν τὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΑΒΓ . . . ΜΝ. Αὕτη λέγομεν ὅτι ἀπεικονίζει τὰς μεταβολὰς τῆς θερμοκρασίας αἱ ὁποῖαι ἀνωτέρω ἐσημειώθησαν. Ἐὰν δὲ ῥίψωμεν ἁπλοῦν βλέμμα εἰς αὐτήν, ἀντιλαμβανόμεθα πῶς μετεβλήθη ἡ θερμοκρασία.

Οὕτω παρατηροῦντες ὅτι $ΟΑ < 1Β < 2Γ > 3Δ > 4Ε$ κτλ. ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ θερμοκρασία ἀπὸ τῆς μεσημβρίας ἔβαινεν αὐξανομένη μέχρι τῆς 2ας μ.μ. καὶ ἔπειτα ἠλαττοῦτο.

Ὁμοίως, ἂν παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ $5Ζ—6Η > 2Γ—3Δ$, ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ θερμοκρασία ἠλαττοῦτο ταχύτερον μεταξὺ 5ης καὶ 6ης μ.μ. παρὰ μεταξὺ 2ας καὶ 3ης μ. μ. καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἐὰν ἐσημειώνομεν τὴν θερμοκρασίαν ἀνὰ χρονικὰ διαστήματα μικρότερα μιᾶς ὥρας π.χ. ἀνὰ 5 λεπτὰ ἢ ἀνὰ 1 λεπτόν, θὰ παριστάνομεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον τὰς μεταβολὰς μὲ γραμμήν, ἡ ὁποία θὰ εἶχε περισσοτέρας πλευρὰς καὶ μὲ περισσοτέραν ἀκρίβειαν.

Ἀκριβῆ ἀπεικόνισιν τῶν μεταβολῶν τῆς θερμοκρασίας ἐπιτυγχάνουσιν εἰς τοὺς μετεωρολογικοὺς σταθμούς, ἀστεροσκοπεῖα κ. τ. λ. μὲ τὰ *αὐτόγραφα θερμόμετρα*. Εἰς ταῦτα γραφὶς κινουμένη μὲ κατάλληλον μηχανισμὸν γράφει ἐπὶ καταλλήλως χαραγμένου χάρτου συνεχῆ γραμμήν. Αὕτη ἀπεικονίζει τὴν μεταβολὴν τῆς θερμοκρασίας, κατὰ τὸν χρόνον τῆς λειτουργίας τοῦ ὀργάνου τούτου.



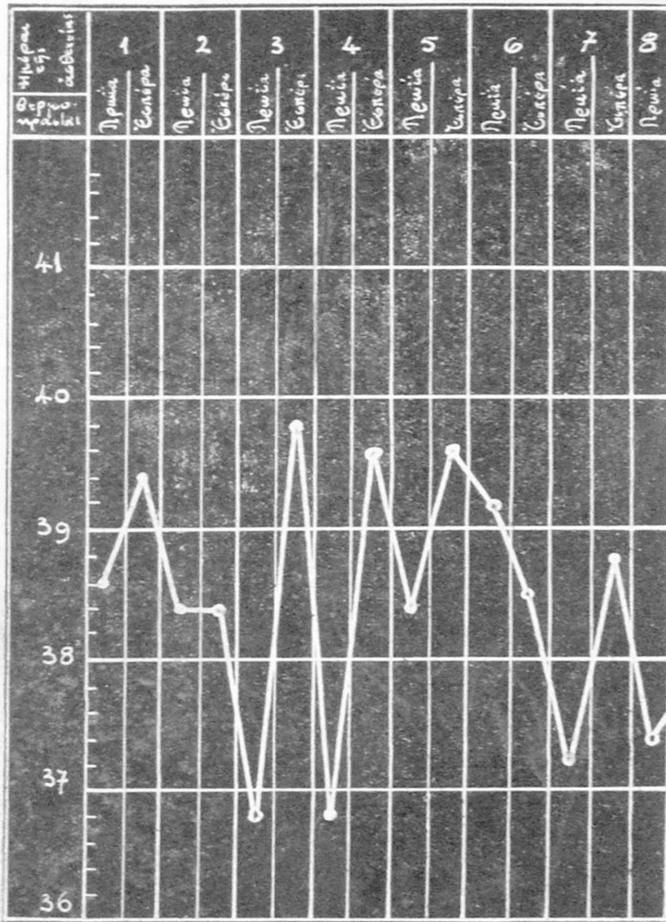

*(Σχ. 5)*

Ἐὰν ἡ θερμοκρασία κατέρχηται καὶ κάτω τοῦ μηδενός, τὰ ἀντίστοιχα τμήματα ἐπὶ τῶν καθέτων εἰς τὴν ΟΧ ὁρίζομεν ἀπὸ τὸ ἕτερον μέρος αὐτῆς.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἡμέραν τινὰ τοῦ χειμῶνος ἐσημειώθησαν αἱ ἑξῆς θερμοκρασίαι.

| | | | |
|---|---|---|---|
| τὴν 9ην μ. μ. | $3^0$ | τὴν 11ην π. μ. τῆς ἄλλης ἡμέρας | $-2^0,5$ |
| τὴν 10ην μ. μ. | $2^0$ | τὴν 2αν π. μ. » » » | $-3^0$ |
| τὴν 11ην μ. μ. | $0,5$ | τὴν 3ην π. μ. » » » | $-4^0$ |
| τὸ μεσονύκτιον $1^0$ ὑπὸ τὸ μηδέν, ἤτοι | $-1^0$. | | |

Ἐὰν ἐργασθῶμεν, ὅπως προηγουμένως, ὁρίζομεν τὰ σημεῖα Γ, Δ, Ε, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰς θερμοκρασίας 3°, 2°, 0°, ὁ καὶ τὰ σημεῖα Ζ, Η, Θ, Ι, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰς θερμοκρα-




(Σχ. 6)

σίας —1°, — 2°, — 5°, — 4°. Ἡ δὲ γραμμὴ ΓΔΕΖΗΘΙ (Σχ. 5) ἀπεικονίζει τὰς μεταβολὰς τῆς θερμοκρασίας.

Β΄) *Γραφικὴ παράστασις θερμοκρασίας ἀσθενοῦς.* Εἰς τὰ νοσοκομεῖα λαμβάνουσι συνήθως τὴνθερμοκρασίαν ἑκάστου ἀσθενοῦς δύο φορὰς τὴν ἡμέραν, ἤτοι τὴν 9ην π. μ. καὶ τὴν 9ην μ.μ. περίπου.

Σημειοῦσι δὲ ταύτην ἐπὶ φύλλου χάρτου, ὁ ὁποῖος εἶναι διῃρημένος εἰς ἰσομεγέθη ὀρθογώνια, καθ' ὃν τρόπον τὸ σχῆμα (6) δεικνύει. Οὕτω μὲ ἓν βλέμμα ὁ ἰατρὸς διακρίνει τὸν τρόπον κατὰ τὸν ὁποῖον μεταβάλλεται ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀσθενοῦς.

Γ') Ἔστω ἡ συνάρτησις 2χ· ἂν θέσωμεν $\psi = 2\chi$, εἰς κάθε τιμὴν τοῦ χ ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ ψ.

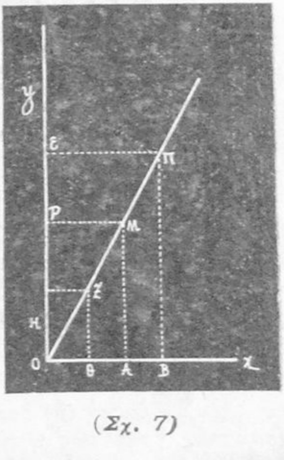
Οὕτω διὰ $\chi = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

εἶναι $\psi = 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots$

Τὴν τοιαύτην μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως ψ μετὰ τοῦ χ αἰσθητοποιοῦμεν ὡς ἑξῆς.

Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας ψΟχ ὁρίζομεν δύο τμήματα ΟΘ, ΟΗ, ἕκαστον ἀπὸ τὰ ὁποῖα λαμβάνεται ὡς μονὰς καὶ ἔχει ἐπομένως μῆκος 1. Τὰς τιμὰς τοῦ χ θεωροῦμεν ὡς μήκη τμημάτων, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Οχ καὶ ἀρχίζουσιν ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ο. Τὰς δὲ τιμὰς τοῦ ψ θεωροῦμεν ὡς μήκη τμημάτων τῆς πλευρᾶς Οψ, τὰ ὁποῖα ἀρχίζουσιν ἀπὸ τὸ Ο. Οὕτως ἡ τιμὴ 2 τοῦ χ εἶναι μῆκος τοῦ τμήματος ΟΑ τῆς πλευρᾶς Οχ, ἡ δὲ ἀντίστοιχος τιμὴ 4 τοῦ ψ εἶναι μῆκος τοῦ τμήματος ΟΔ τῆς πλευρᾶς Οψ.

Ἐὰν ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρωμεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν Οψ, ἀπὸ δὲ τὸ Δ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν Οχ, ὁρίζομεν τὸ σημεῖον Μ, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ παράλληλοι αὗται τέμνονται.



(Σχ. 7)

Τὸ σημεῖον Μ λοιπὸν ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ζεῦγος 2 καὶ 4 τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ χ καὶ ψ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὸ ζεῦγος 1 καὶ 2 ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον Ζ, εἰς τὸ ζεῦγος 0 καὶ 0 ἀντιστοιχεῖ τὸ Ο κ. τ. λ.

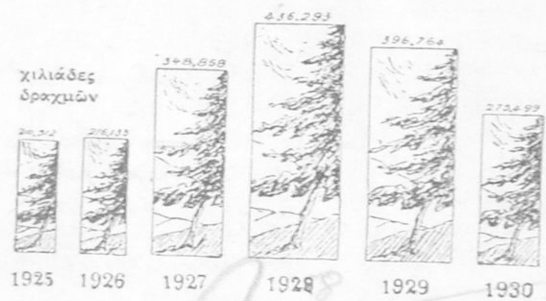
Ἐὰν κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ὁρίσωμεν, ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερα σημεῖα καὶ ἑνώσωμεν ταῦτα διὰ συνεχοῦς γραμμῆς, σχηματίζομεν τὴν γραμμὴν ΟΖΜΠ.

Τὰ μήκη τῶν τμημάτων ΘΖ, ΑΜ, ΒΠ,... εἶναι τιμαὶ τοῦ φ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τιμὰς τοῦ χ, αἱ ὁποῖαι εἶναι μήκη τῶν τμημάτων ΟΘ, ΟΑ, ΟΒ...Ἡ ἁπλῆ ἑπομένως παρατήρησις τοῦ σχήματος δεικνύει ὅτι τοῦ χ αὐξάνοντος καὶ τὸ φ αὐξάνει καὶ μάλιστα ταχύτερον.

Δ') Ἐνίοτε τὰ δεδομένα τῆς στατιστικῆς καθιστῶμεν περισσότερον νοητά, μὲ εἰκόνας ἀναλόγου μεγέθους.

Οὕτως ἡ Ἀνωτάτη Σχολὴ Οἰκονομικῶν καὶ Ἐμπορικῶν Ἐπιστημῶν ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἑλλάς» ἐδημοσίευσε σειρὰν τοιούτων εἰκόνων, ὡς ἡ τοῦ (Σχ. 8), δι' ἧς παρίσταται γραφικῶς ἡ ἀξία τῶν κατὰ τὰ ἔτη 1925—1930 ἀποληφθέντων δασικῶν προϊόντων.

ΔΑΣΙΚΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ




(Σχ. 8)

*Ἀσκήσεις.* 576) Ἡ μέση θερμοκρασία τόπου ἦτο τὴν Κυριακὴν 12°, τὴν Δευτέραν 11,5°, τὴν Τρίτην 11°, τὴν Τετάρτην 11°,8, τὴν Πέμπτην 12°, τὴν Παρασκευὴν 12°,5 καὶ τὸ Σάββατον 11°. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τῆς θερμοκρασίας κατὰ τὰς ἡμέρας ταύτας.

577) Ἡ ταχύτης ἁμαξοστοιχίας κατὰ τὰς διαφόρους ὥρας ἡμέρας τινος ἦτο τὴν μεσημβρίαν 20χιλ, τὴν 1ην μ.μ. 25χιλ, τὴν 2αν 30χιλ, τὴν 3ην 28χιλ, τὴν 4ην μ. μ. 25χιλ, τὴν 5ην μ. μ. 20χιλ, τὴν 6ην μ. μ. 25χιλ, τὴν 7 μ. μ. 30 χιλ. καὶ τὴν 8 μ. μ. 35 χιλ. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ αὐτή.

578) Τὰ φιλοδωρήματα ὑπαλλήλου ζαχαροπλαστείου κατά τινα ἑβδομάδα ἦσαν. Τὴν Δευτέραν 30 δραχ, τὴν Τρίτην 25 δραχ, τὴν Τετάρτην 20 δραχ, τὴν Πέμπτην 40 δραχ, τὴν Παρασκευὴν 30 δραχ, τὸ Σάββατον 50 δραχ. καὶ τὴν Κυριακὴν 80 δραχμαί. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ αὐτη

579) Νὰ παρασταθῶσι γραφικῶς αἱ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως
$$2\chi + 1 \text{ καὶ τῆς } 2.\chi^2.$$

**§ 180. Ἀνάλογα καὶ ἀντίστροφα ποσά.** Α΄. Ἄς ποθέσωμεν ὅτι διὰ 2 ὀκάδας ζακχάρεως δίδομεν 42 δραχ. Εἶναι ανερὸν ὅτι διὰ $2\times 2=4$ ὀκάδας, θὰ δώσωμεν $42\times 2=84$ δραχ, διὰ $\times 3=6$ ὀκ. θὰ δώσωμεν $42\times 3=126$ δραχ. κτλ.

Τὸ βάρος τῆς ζακχάρεως καὶ ἡ ἀξία αὐτῆς λέγονται *ποσὰ ἀνάλογα.*

*Γενικῶς : Δύο ποσὰ λέγονται ἀνάλογα, ἐὰν πολ]μένης τιμῆς ινος τοῦ ἑνὸς ἐπὶ ἕνα ἀριθμὸν καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου τολ]ζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Ὁ λόγος τῶν 6 ὀκ. πρὸς τὰς 2 ὀκ. ζακχάρεως εἶναι $\frac{6\text{ὀκ.}}{2\text{ὀκ.}}=3.$

ὁ δὲ λόγος τῆς ἀξίας τῶν 6 ὀκ. πρὸς τὴν ἀξίαν τῶν 2 ὀκ, εἶναι $\frac{42\times 3}{42}=3$. Εἶναι λοιπὸν $\frac{6\text{ ὀκ.}}{2\text{ ὀκ.}}=\frac{(42\times 3)\text{ δραχ.}}{42\text{ δραχ.}}$.

Ἄρα : *Ἐὰν δύο ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.*

Β΄). Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι 4 ἐργάται τελειώνουσιν ἓν ἔργον εἰς 12 ἡμέρας. Εἶναι φανερὸν ὅτι $4\times 2=8$ ὅμοιοι ἐργάται τελειώνουσι τὸ ἔργον τοῦτο εἰς $12:2=6$ ἡμέρας καὶ $4\times 3=12$ ἐργάται τελειώνουσιν αὐτὸ εἰς $12:3=4$ ἡμέρας κτλ.

Τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἡμερῶν κατὰ τὰς ὁποίας τελειώνουσιν ἓν ἔργον, λέγοντα *ποσὰ ἀντίστροφα* ἢ *ἀντιστρόφως ἀνάλογα.*

Γενικῶς : *Δύο ποσὰ λέγονται ἀντίστροφα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἂν πολ)μένης τιμῆς τοῦ ἑνὸς ἐπί τινα ἀριθμόν, ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου διαιρῆται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Ὁ λόγος τῶν $(4\times 3)$ ἐργατῶν πρὸς τοὺς $(4\times 2)$ ἐργάτας εἶναι $\frac{4\times 3}{4\times 2}=\frac{3}{2}$ Ὁ δὲ λόγος τῶν $12:3=4$ ἡμερῶν πρὸς τὰς $12:2=6$ ἡμέρας εἶναι $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, ἤτοι ἀντίστροφος τοῦ $\frac{3}{2}$.

Ἄρα : *Ἐὰν δύο ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀντίστροφος τοῦ λόγου τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.*

Εἶναι δυνατὸν ἓν ποσὸν νὰ συνδέηται πρὸς πολλὰ ἄλλα ποσὰ καὶ νὰ μεταβάλληται, ὅταν ἐκεῖνα ἢ μερικὰ ἀπὸ αὐτὰ μεταβάλλωνται. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δύο τυχόντα ἀπὸ τὰ ποσὰ ταῦτα λέγονται ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα, ἂν εἶναι τοιαῦτα καὶ ὅταν τὰ ἄλλα μένωσιν ἀμετάβλητα. Π. χ. τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν καὶ τῶν ἀπαιτουμένων ἡμερῶν, ὅπως καλλιεργηθῇ ὑπὸ αὐτῶν ἄμπελος εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα Διότι, ἂν αἱ ἐργάσιμοι ὧραι

ἑκάστης ἡμέρας καὶ ἡ ἔκτασις τῆς ἀμπέλου μείνωσιν ἀμετά-
βλητα, διπλάσιοι, τριπλάσιοι κτλ. ἐργάται χρειάζονται τὸ ἥμισυ,
τρίτον κτλ. τῶν ἡμερῶν. Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ πλῆθος τῶν
ἐργατῶν καὶ ἡ ἔκτασις τῆς ἀμπέλου εἶναι ποσὰ ἀνάλογα.

ΣΗΜ. Εἶναι δυνατὸν δύο ποσὰ συμμεταβλητὰ νὰ μὴ εἶναι ἀνά-
λογα οὐδὲ ἀντίστροφα. Ἡ ἡλικία π. χ. παιδίου καὶ τὸ ἀνάστημα
αὐτοῦ.

## Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.

§ **181. Πρόβλημα I.** *Παντοπώλης ἀγοράσας 45 ὀκάδας καφφὲ ἔδωκε 2700 δραχ. Πόσας δραχμὰς θὰ ἔδιδεν, ἂν ἠγόραζε 52 ὀκ. ἀπὸ τὸν αὐτὸν καφφέν;*

*Λύσις.* α΄) Ἀφ' οὗ διὰ 45 ὀκάδας ἔδωκε 2700 δραχ., διὰ 1 ὀκ. θὰ δόσῃ $\frac{2700}{45}$ δραχ. καὶ διὰ 52 ὀκ. θὰ ἔδιδε $\frac{2700}{45} \times 52 = 3120$ δραχμάς.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδονται δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ (45 ὀκ. καὶ 2700 δραχ.) τῶν ἀναλόγων ποσῶν βάρους καὶ ἀξίας τοῦ καφφὲ καὶ μία νέα τιμὴ (52 ὀκ.) τοῦ βάρους ὁμοειδὴς πρὸς τὴν πρώτην. Ζητεῖται δὲ ποία τιμὴ χ τῆς ἀξίας ὁμοειδὴς πρὸς τὴν δοθεῖσαν τιμὴν αὐτῆς ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν νέαν τιμὴν τοῦ βάρους.

Διάταξις

| | |
|---|---|
| 45 ὀκ. | 2700 δραχ. |
| 52 ὀκ. | χ |

$$\chi = 270 \times \frac{52}{45} = 3120$$

Ἐὰν διατάξωμεν ὡς ἄνω φαίνεται, καὶ παρατηρήσωμεν ὅτι $\frac{2700}{45} \times 52 = 2700 \times \frac{52}{45}$, συμπεραίνομεν ὅτι $\chi = 2700 \times \frac{52}{45}$.

β΄) Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ἀληθεύει (§ 180) ἡ ἀναλογία $45 : 52 = 2700 : \chi$, ὅθεν (§ 177 Α΄) προκύπτει ὅτι

$$45 . \chi = 2700 . 52 \quad \text{καὶ ἑπομένως} \quad \chi = 2700 \times \frac{52}{45}.$$

§ **182. Πρόβλημα II.** *Ὅμιλος ἐργατῶν σκάπτει ἄμπελον εἰς 9 ἡμέρας, ἂν ἐργάζηται 8 ὥρας τὴν ἡμέραν. Εἰς πόσας ἡμέρας οὗτοι σκάπτουσι τὴν ἄμπελον ταύτην, ἂν ἐργάζωνται 6 ὥρας τὴν ἡμέραν;*

*Λύσις.* Ἐὰν ἐργάζωνται 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, χρειάζονται 9 μέρας, ἂν ἐργάζωνται 1 ὥραν τὴν ἡμέραν, χρειάζονται $9 \times 8$ ἡμέρας, καὶ ἂν ἐργάζωνται 6 ὥρας τὴν ἡμέραν χρειάζονται $\frac{9 \times 8}{6} = 12$ ἡμ.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδονται δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ δύο ἀντιστρόφων ποσῶν καὶ μία νέα τιμὴ τοῦ ἑνὸς ὁμοειδὴς πρὸς τὴν πρώτην τιμὴν αὐτοῦ. Ζητεῖται δὲ ποία τιμὴ χ τοῦ ἄλλου ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν νέαν ταύτην τιμὴν τοῦ πρώτου. Ἐὰν διατάξωμεν, ὡς ἄνω φαίνεται καὶ παρατηρήσωμεν ὅτι $\frac{9 \times 8}{6} = 9 \times \frac{8}{6}$, συμπεραίνομεν ὅτι $\chi = 9 \times \frac{8}{6} = 12$ ἡμέραι.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{cc} 8\text{ὥρ.} & 9\text{ἡμ} \\ \hline 6\text{ὥρ.} & \chi\text{ἡμ.} \end{array}$$

$$\chi = 9 \times \frac{8}{6} = 12 \text{ ἡμ.}$$

β΄) Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, ἀληθεύει ἡ ἀναλογία $6 : 8 = 9 : \chi$ καὶ ἑπομένως $\chi = 9 \times \frac{8}{6} = 12$ ἡμ.

Τὰ προβλήματα ταῦτα λέγονται προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Γενικῶς : *Προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν λέγονται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ δύο ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων ποσῶν καὶ μία νέα τιμὴ τοῦ ἑνὸς ὁμοειδὴς πρὸς τὴν πρώτην τιμὴν αὐτοῦ. Ζητεῖται δὲ ἡ πρὸς τὴν νέαν ταύτην τιμὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου καὶ ὁμοιειδὴς πρὸς τὴν πρώτην αὐτοῦ τιμήν.*

Λύονται δὲ ταῦτα διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ἢ μετὰ τὴν ὡς ἄνω διάταξιν καὶ ὡς ἑξῆς.

*Πολ/ομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου χ ἀριθμὸν μὲ τὸν λόγον τῶν δοθεισῶν τιμῶν τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, ἀντεστραμμένον, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὅπως ἔχει δέ, ἂν εἶναι ἀντίστροφα.*

***Ἀσκήσεις.*** 580) Ἠγόρασέ τις 12 πήχεις ὑφάσματος καὶ ἔδωκε 1026 δραχ. Πόσας δραχμὰς θὰ ἔδιδεν, ἂν ἠγόραζε 5 πήχεις ἀπὸ τὸ αὐτὸ ὕφασμα ;

581) Διὰ τὴν καλλιέργειαν 8 βασ. στρεμμάτων σταφίδος εἰργάσθησαν 12 ἐργάται. Πόσοι ἐργάται εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον καλλιεργοῦσι 10 βασ. στρέμματα σταφίδος ;

582) Ἁμαξοστοιχία διανύει 160 χιλιόμετρα εἰς 8 ὥρας. Ει πόσας ὥρας διανύει 240 χιλιόμετρα ;

583) Κρήνη παρέχει 42 ὀκ. ὕδατος εἰς $3^{\pi}$. Εἰς πόσον χρόνο γεμίζει αὐτὴ δοχεῖον, τὸ ὁποῖον χωρεῖ 70 ὀκάδας ;

584) Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἔργου εἰργάσθησαν 12 ἐργάται ἐπὶ 1 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας τελειώνουσιν αὐτὸ 9 ἀπὸ τοὺς ἐργάτα τούτους ;

585) Ἂν ἀγοράσῃ τις 12 ὀκ. 300 δράμ. βουτύρου, θὰ δώσῃ 14 δραχ. Πόσον βούτυρον ἀπὸ αὐτὸ δύναται νὰ ἀγοράσῃ μὲ 10 δραχμάς.

586) Ράβδος κατακόρυφος 1,20 μέτρου ρίπτει κατά τινα στιγμὴν σκιὰν 2 μέτρων. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος δένδρου, τὸ ὁποῖον τὴν αὐτὴν στιγμὴν καὶ εἰς τὸν αὐτὸν τόπον ρίπτει σκιὰν 10 μέτρων ;

587) Διὰ τὴν κατασκευὴν 5 ἐνδυμασιῶν χρειάζονται 21 πήχ. καὶ 2 ρούπια ἀπὸ ὕφασμα, τὸ ὁποῖον ἔχει πλάτος 1 πήχ, καὶ 2 ρούπια. Πόσοι πήχεις χρειάζονται δι' αὐτὰς ἀπὸ ὕφασμα, τὸ ὁποῖον ἔχει πλάτος 1 πῆχυν ;

588) Διὰ τὴν ἐπίστρωσιν αἰθούσης χρειάζονται 25 μέτρα τάπητος πλάτου 1, 20μ. Πόσα μέτρα ἄλλου τάπητος πλάτους 1,50μ. χρειάζονται διὰ τὴν αὐτὴν αἴθουσαν ;

589) Ἐργάται ἐργαζόμενοι εἰς ὀρεινὴν περιοχὴν ἔχουσι τροφὰς διὰ 15 ἡμέρας. Ἐὰν παραστῇ ἀνάγκη νὰ περάσωσι μὲ αὐτὰς 20 ἡμέρας, πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου θὰ λαμβάνῃ ἕκαστος ;

590) Εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς Φυσικῆς ὅτι 100° Κελσίου ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 80° Ρεωμύρου. Πόσοι βαθμοὶ Κελσίου ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 50°,4 Ρεωμύρου ;

591) Ἡ Φυσικὴ διδάσκει ὅτι ὡρισμένη ποσότης ἀερίου ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν καταλαμβάνει ὄγκους ἀντιστρόφους πρὸς τὰς πιέσεις, τὰς ὁποίας δέχεται. Ἐὰν ἀέριον ὑπὸ πίεσιν 0,776 ἔχῃ ὄγκον 3κυβ. παλαμῶν, πόσον ὄγκον λαμβάνει τοῦτο ὑπὸ πίεσιν 0, 750 καὶ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν ;

592) Οἱ δύο βραχίονες πρωτογενοῦς μοχλοῦ ἔχουσι λόγον 8 : 2. Ἐὰν εἰς τὸ ἄκρον τοῦ μικροτέρου βραχίονος ἐνεργῇ δύναμις 30 χιλιογράμμων, πόση δύναμις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον ὅπως ὁ μοχλὸς ἰσορροπῇ ;

ΣΗΜ. Πρέπει νὰ ἐνθυμηθῶμεν ἀπὸ τὴν Φυσικὴν ὅτι : Ὅταν μοχλὸς ἰσορροπῇ, οἱ βραχίονες εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰς δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦσιν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ.

593) Ὡρολόγιον εἰς 8 ὥρ. καὶ 22 π. μένει ὀπίσω 3 π. 5 δ. Πόσον θὰ μείνῃ ὀπίσω εἰς 2 ἡμέρας ;

## Προβλήματα ποσοστῶν.

§ **183. Ποσοστόν.** Ὅταν ἐργοστάσιον πωλῇ προϊόντα του διὰ τῆς μεσολαβήσεως παραγγελιοδόχου, πληρώνει εἰς τοῦτον ὡς ἀμοιβὴν χρηματικόν τι ποσόν. Τὸ ποσὸν τοῦτο εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὴν ἀξίαν τοῦ πωληθέντος ἐμπορεύματος καὶ ὑπολογίζεται ἐπὶ τῇ βάσει συμπεφωνημένης ἀμοιβῆς δι' ἀξίαν ἐμπορεύματος 100 δραχμῶν. Ἂν π. χ. ἡ συμφωνηθεῖσα ἀμοιβὴ εἶναι 6 δραχμαὶ δι' ἐμπορεύματα 100 δραχ. (6 $^0/_0$), διὰ παραγγελίαν 200 δραχμῶν θὰ πληρωθῇ 12 δραχ. κτλ. Τὸ ποσὸν τοῦτο λέγεται *ποσοστόν*.

Οἱ μεσιτεύοντες μεταξὺ πωλητοῦ καὶ ἀγοραστοῦ κτήματος, οἱ εἰσπράκτορες ἑταιρειῶν, καταστημάτων, συλλόγων, τοῦ δημοσίου λαμβάνουσιν ἐπίσης ποσοστὸν διὰ τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα εἰσπράττουσι. Τὰ ἀσφάλιστρα οἰκιῶν, καταστημάτων, πλοίων, ἐμπορευμάτων, προϊόντων, τὰ ὁποῖα πληρώνονται εἰς ἀσφαλιστικὰς ἑταιρείας εἶναι ποσοστόν. Συνήθως τοῦτο ὑπολογίζεται ἐπὶ τῇ βάσει συμπεφωνημένων ἀσφαλίστρων δι' ἀξίαν 1000 δραχ. τοῦ ἀσφαλιζομένου ἀντικειμένου, π. χ. 2 ἐπὶ τοῖς χιλίοις (2 $^0/_{00}$). Τὸ ἀπόβαρον ἐμπορεύματος, ὁσάκις ὑπολογίζεται πρὸς τόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τοῦ μικτοῦ βάρους, δύναται νὰ ὀνομασθῇ ποσοστὸν τοῦ μικτοῦ βάρους. Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πωλητὴς ἐκπίπτει ἀπὸ τὴν ἀξίαν πωλουμένου ἐμπορεύματος, λογίζεται συνήθως πρὸς τόσον ἐπὶ τοῖς 100 καὶ εἶναι ποσοστόν. Παρουσιάζονται λοιπὸν εἰς τὸν βίον προβλήματα ὑπολογισμοῦ ποσοστοῦ ἢ ἄλλου σχετικοῦ ποσοῦ δοθέντος ποσοστοῦ καὶ ἄλλων ἐπαρκῶν στοιχείων. Ὅλα ταῦτα καλοῦνται γενικῶς *προβλήματα ποσοστῶν*. Ὡς παραδείγματα ἔστωσαν τὰ ἑξῆς.

§ **184. Πρόβλημα I.** *Μεσίτης λαμβάνει μεσιτείαν 2$^0/_{00}$, Πόσην μεσιτείαν θὰ λάβῃ διὰ τὴν πώλησιν οἰκίας ἀξίας 356000 δραχμῶν ;*

*Λύσις.* Δι' ἀξίαν 1000 δραχ. λαμβάνει 2 δραχ.
» » 356000 » » χ »

ὅθεν $$\chi = 2 \times \frac{356000}{1000} = 2 \times 356 = 712 \text{ δραχμάς.}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 2 πολ]ται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν χιλιοδράχμων, τὰ ὁποῖα περιέχουσιν αἱ 356000 δραχμαί. Ἐὰν π.χ. κτῆμα πωληθῇ 28975 δραχμάς, τὸ ποσοστὸν πρὸς 2 °/₀₀ εἶναι

$$2 \times 28,975 = 57,95 \text{ δραχ.}$$

§ **185. Πρόβλημα II.** *Δι' ἀσφάλιστρα οἰκίας πρὸς 2 °/₀₀ ἐπληρώθησαν 945,50 δραχ. Ἀντὶ πόσου ποσοῦ ἠσφαλίσθη αὕτη;*

*Λύσις.* Ὅταν τὰ ἀσφάλιστρα εἶναι 2δρ, ἡ ἀξία εἶναι 1000δραχ.
τώρα, ὅτε » » » 945,50 ἡ ἀξία εἶναι χ

ὅθεν $\chi = 1000 \times \frac{945,50}{2} = \frac{945500}{2} = 472750$ δραχ.

§ **186. Πρόβλημα III.** *Ἡ ὀκᾶ τοῦ καφφὲ κοστίζει εἰς ἔμπορον 60 δραχ. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ κερδίζῃ 15°/₀ ἐπὶ τοῦ κόστους;*

*Λύσις.* α') Ἀπὸ καφφὲν ἀξίας 100 δραχ. κερδίζει 15 δραχ.
» » » 60 » » χ

ὅθεν $\chi = 15 \times \frac{60}{100} = 9$ δραχ. Θὰ πωλῇ λοιπὸν τὴν ὀκᾶν πρὸς $60 + 9 = 69$ δραχ.

β') Ἀπὸ καφφὲν κόστους 100 δρ. θὰ λαμβάνῃ 115 δραχ.
» » » 60 » » » χ

ὅθεν $\chi = 115 \times \frac{60}{100} = 69$ δραχμάς.

§ **187. Πρόβλημα IV.** *Παντοπώλης πωλῶν ζάκχαριν πρὸς 22,50 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν κερδίζει 20°/₀ ἐπὶ τοῦ κόστους. Πόσον κοστίζει ἡ ὀκᾶ;*

*Λύσις.* Ζάκχαρις πωλουμένη 120 δραχ. κοστίζει 100 δραχ.
20,50 » » χ

ὅθεν $\chi = 100 \times \frac{22,50}{120} = 18,75$ δραχ.

**188. Πρόβλημα V.** *Ἔμπορος ἀγοράσας ἐμπορεύματα τοῖς μετρητοῖς ἐπλήρωσε 66500 δραχμάς, ἀφ' οὗ ἐγένετο εἰς αὐτὸν ἔκπτωσις 5°/₀ ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν ἐμπορευμάτων τούτων. Πόση ἦτο ἡ ἀξία αὐτῶν;*

*Λύσις.* Ἐὰν ἐπλήρωνεν 95 δραχ. ἡ ἀρχικὴ ἀξία θὰ ἦτο 100δρ.
τώρα, ὅτε πληρώνει 66500 » » » » » » χ

ὅθεν $\chi = 100 \times \frac{66500}{95} = 70000$ δραχμαί.

**'Ασκήσεις.** 594) 'Ησφάλισέ τις τὴν οἰκίαν του ἀντὶ ἀξίας 80000 δραχμῶν πρὸς 2‰. Πόσα ἀσφάλιστρα θὰ πληρώσῃ;

595) Εἰς ἔμπορον ἀγοράσαντα τοῖς μετρητοῖς ἐμπορεύματα ἀξίας 4850 δραχμῶν ἐγένετο ἔκπτωσις πρὸς 5 %. Πόσα χρήματα πλήρωσεν;

596) 'Επλήρωσέ τις δι' οἰκίαν ἀξίας 180000 δραχμῶν ἀσφάλιστρα 450 δραχμάς. Πρὸς πόσον τοῖς ‰ ὑπελογίσθησαν ταῦτα;

597) 'Ο ἀτμ. ἀὴρ περιέχει 21 % ὀξυγόνον κατ' ὄγκον. Πόσον ὀξυγόνον περιέχει ὁ ἀὴρ δωματίου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὄγκον 80 κυβ. μέτρων;

598) 'Εργοληπτικὴ ἑταιρεία ἀνέλαβε τὴν ἐκτέλεσιν ἔργου, ὑπεχρεώθη δὲ νὰ καταθέσῃ ὡς ἐγγύησιν 12 % ἐπὶ τῆς προϋπολογισθείσης δαπάνης. Οὕτω δὲ ἡ ἐγγύησις ἀνῆλθεν εἰς 540000 δραχ. Πόση εἶναι ἡ προϋπολογισθεῖσα δαπάνη;

599) Ἔμπορος πωλῶν ὕφασμα πρὸς 144,60 δραχ. τὸν πῆχυν κερδίζει 20% ἐπὶ τοῦ κόστους. Πόσον κοστίζει ὁ πῆχυς;

600) Κιβώτιον σάπωνος ἔχει βάρος 2στ.12ὀκ.300δράμ. Πόσον εἶναι τὸ καθαρὸν βάρος, ἂν τὸ ἀπόβαρον λογισθῇ πρὸς 6%;

601) Τὸ βάρος ἐλαιοκάρπου ἦτο 5στ.30ὀκ.300δράμ. Μετά τινα δὲ χρόνον εὑρέθη 5στ.20ὀκ. Πόσον % ἐλάττωσιν (φύραν) ὑπέστη τὸ βάρος τοῦτο;

602) Παραγγελιοδόχος εὑρισκόμενος εἰς περιοδείαν λαμβάνει 60 δραχ. τὴν ἡμέραν καὶ 3% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν ἐμπορευμάτων, διὰ τὰ ὁποῖα λαμβάνει παραγγελίας. Μετὰ περιοδείαν 40 ἡμερῶν ἔλαβε τὸ ὅλον 3900 δραχ. Πόσην ἀξίαν ἔχουσι τὰ δι' αὐτοῦ παραγγελθέντα ἐμπορεύματα;

603) Μεταλλουργὸς ἔτηξε μαζὶ πρὸς ἐξαγωγὴν τοῦ περιεχομένου σιδήρου 470 χιλιόγρ. μεταλλεύματος, τὸ ὁποῖον περιεῖχεν 80% σίδηρον, ἄλλα 750 χιλιόγρ. ἄλλου μεταλλεύματος, τὸ ὁποῖον περιεῖχεν 78% σίδηρον καὶ ἄλλα 500 χιλιόγρ. γ' μεταλλεύματος, τὸ ὁποῖον περιεῖχεν 75% σίδηρον. Πόσον σίδηρον ἐξήγαγεν;

604) 'Εὰν τὸ γάλα ἀποδίδῃ 4% βουτύρου, ἀπὸ πόσας ὀκάδας γάλακτος λαμβάνομεν 2ὀκ. 350 δράμια βουτύρου;

605) Τμηματάρχης λαμβάνει 5500 δραχμὰς μηνιαίως καὶ ἀφήνει 192 δραχμὰς εἰς τὸ Ταμεῖον Προνοίας. Εἰς πόσον % ἀνέρχεται ἡ κράτησις αὕτη;

606) 'Ο προϋπολογισμὸς κοινότητος ἀνέγραφε δι' ἔτος τι ἔσοδα 58600 δραχμάς. 'Εκ τούτων ἐπραγματοποιήθησαν μόνον 52740

δραχμαί. Πόσον ἐπὶ τοῖς °/₀ ἐμειώθησαν τὰ προβλεπόμενα ἔσοδα;

607) Κατὰ τὸ ἔτος 1929—30 τὰ ἔξοδα τοῦ Κράτους ἀνῆλθον εἰς 19354 ἑκατομμύρια δραχμῶν. Ἐκ τούτων διετέθησαν διὰ τὴν ἐκπαίδευσιν καὶ τὴν ἐκκλησίαν 871,1 ἑκατομμύρια δραχμῶν. Πόσον °/₀ ποσοστὸν διετέθη διὰ τὴν Ἐκπαίδευσιν καὶ τὴν Ἐκκλησίαν ἐκ τοῦ συνόλου τῶν κρατικῶν ἐξόδων;

608) Κατὰ τὸ ἔτος 1929—30 τὰ ἐξ ἐμμέσων φόρων ἔσοδα τοῦ κράτους ἀνῆλθον εἰς 4 393 721 000 δραχ. Ἐκ τούτων 29,41 °/₀ προῆλθον ἐκ τῆς φορολογίας τοῦ καπνοῦ. Πόσας δραχμὰς εἰσέπραξε τὸ κράτος ἐκ τῆς φορολογίας τοῦ καπνοῦ;

## Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.

**§ 189. Πρόβλημα 1.** *Διὰ τὴν καλλιέργειαν ἀμπέλου 30 βασ. στρεμμάτων εἰργάσθησαν ἐπί τινας ἡμέρας 15 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν. Πόσοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν δύνανται νὰ καλλιεργήσωσιν ἄμπελον 40 βασ. στρεμμάτων εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον;*

*Λύσις.* Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν καλλιεργοῦσιν ἄμπελον 30 βασ. στρεμμάτων. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐὰν ἐργάζωνται

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 ὥρ. | τὴν ἡμέραν, | χρειάζονται | 15 | ἐργάται |
| ἐὰν ἐργάζωνται | 10 » | » | » | ψ | » |

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, εἶναι $\psi = 15 \times \frac{8}{10}$ ἐργάται. Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Διὰ 30 στρεμ. | χρειάζονται | $(15 \times \frac{8}{10})$ | ἐργάται |
| » 40 » | » | χ | » |

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, εἶναι $\chi = 15 \times \frac{8}{10} \times \frac{40}{30} = 16$ ἐργάται.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδονται αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τριῶν ποσῶν, τὰ ὁποῖα ἀνὰ δύο εἶναι ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα, καὶ νέα τιμὴ ὁμοειδὴς πρὸς τὴν πρώτην ἑκατέρου τῶν δύο ποσῶν. Ζητεῖται δὲ ποία τιμὴ γ' ποσοῦ ὁμοειδὴς πρὸς τὴν α' τιμὴν αὐτοῦ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὰ

Διάταξις

| | | |
|---|---|---|
| 15 ἐργ. | 8 ὥρ. | 30 στρέμ. |
| χ | 10 | 40 |

$$\chi = 15 \times \frac{8}{10} \times \frac{40}{30} = 16 \text{ ἐργ.}$$

έας ταύτας τιμὰς τῶν ἄλλων ποσῶν. Διὰ νὰ λύσωμεν δὲ αὐτό, τὸ χωρίσαμεν εἰς δύο προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν. ιὰ τὸν λόγον τοῦτον λέγεται πρόβλημα τῆς *συνθέτου μεθόδου ῶν τριῶν.*

*Γενικῶς ; Προβλήματα συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν λέγονται κεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τριῶν ἢ περισοτέρων ποσῶν ἀνὰ δύο ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων καὶ νέαι ἀντίιχοι τιμαὶ ὁμοειδεῖς πρὸς τὰς πρώτας ἑκάστου τούτων πλὴν ἑνός. Ζητεῖται δὲ ποία τιμὴ τούτου ὁμοειδὴς πρὸς τὴν πρώτην τιμὴν αὐοῦ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰς νέας ταύτας τιμὰς τῶν ἄλλων ποσῶν.*

Ἐὰν διατάξωμεν, ὡς ἀνωτέρω φαίνεται, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ *ἄγνωστος τιμὴ χ εἶναι γινόμενον πολλῶν παραγόντων. Ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι ὁ ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου ἀριθμός, ἕκαστος δὲ ἀπὸ τοὺς ἄλλους εἶναι λόγος τῶν δύο γνωστῶν τιμῶν ἑκάστου ἀπὸ τὰ ἄλλα ποσὰ λαμβανόμενος, ὅπως ἔχει εἰς τὴν διάταξιν, ἢ ἀντεστραμμένος, καθ' ὅσον τὸ ποσὸν τοῦτο εἶναι ἀντίστροφον ἢ ἀνάλογον πρὸς τὸ ποσὸν τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν νέαν τιμήν.*

***Ἀσκήσεις.*** 609) Ἓξ ἐργάται εἰς 10 ἡμέρας ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν ἔλαβον 2000 δραχμάς. Πόσας ἡμέρας πρέπει νὰ ἐργασθῶσι 5 τοιοῦτοι ἐργάται ἐπὶ 9 ὥρας τὴν ἡμέραν διὰ νὰ λάβωσι 2500 δραχμάς ;

610) Δεξαμενὴ μήκους 5 μέτρων, πλάτους 4 μέτρων καὶ βάθους 6 μέτρων χωρεῖ 93750 ὀκάδας ὕδατος. Πόσον ὕδωρ δύναται νὰ χωρέσῃ ἄλλη δεξαμενὴ ἔχουσα μῆκος 6μ, πλάτος 5μ. καὶ βάθος 8 μέτρων ;

611) Τρεῖς ἐργάται εἰς 18 ἡμέρας ἔσκαψαν χάνδακα μήκους 214,50 μέτρων. Πόσοι τοιοῦτοι ἐργάται εἰς 27 ἡμέρας σκάπτουσι τοιοῦτον χάνδακα μήκους 643,50 μέτρων ;

612) Τέσσαρες ἐργάται ἐξετέλεσαν τὰ $\frac{2}{5}$ ἔργου εἰς 3 ἡμέρας ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται τὴν ἡμέραν 3 τοιοῦτοι ἐργάται διὰ νὰ ἀποτελειώσωσι τὸ ἔργον εἰς 6 ἡμέρας ;

613) Βιβλίον ἔχει 10 τυπογραφικὰ φύλλα· ἔχει δὲ ἑκάστη σελὶς 30 στίχους καὶ κάθε στίχος 25 στοιχεῖα. Τὸ αὐτὸ βιβλίον εἰς 2αν ἔκδοσιν ἐτυπώθη οὕτως ὥστε ἑκάστη σελὶς νὰ ἔχῃ 40 στίχους καὶ κάθε στίχος νὰ ἔχῃ 50 στοιχεῖα. Πόσα τυπογραφικὰ φύλλα ἔχει ἡ 2α ἔκδοσις αὐτοῦ ;

614) Ἔργον τι πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ εἰς 26 ἡμέρας. Ἐντὸς 24 ἡμερῶν 15 ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 ὥρας τὴν ἡμέραν ἐξετέλεσαν τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτοῦ. Ἐὰν ἔπειτα προσληφθῶσιν ἄλλοι 3 τοιοῦτοι ἐργάται, πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται ὅλοι τὴν ἡμέραν, ὅπως τελειώσωσι τὸ ἔργον εἰς τὴν ταχθεῖσαν προθεσμίαν ;

615) Δέκα ἐργάται ἀνέλαβον τὴν ἐκτέλεσιν ἔργου τινός. Ὑπελόγισαν δὲ ὅτι τελειώνουσι τοῦτο εἰς 20 ἡμέρας, ἂν εἰργάζοντο 8 ὥρας τὴν ἡμέραν. Μετὰ 12 ὅμως ἡμέρας 2 ἐργάται ἀσθενήσαντες ἔπαυσαν νὰ ἐργάζωνται, οἱ δὲ ἄλλοι ἠναγκάσθησαν νὰ ἐργάζωνται 9 ὥρας τὴν ἡμέραν. Μετὰ πόσας ἡμέρας θὰ ἀποπερατώσωσι τὸ ἔργον ;

616) Διὰ τὴν κατασκευὴν 5 ἐνδυμασιῶν ἀπαιτοῦνται 21π. 2ρ. ἀπὸ ὕφασμα πλάτους 1,5μ. Πόσον ὕφασμα πλάτους 1,3μ. χρειάζεται διὰ τὴν κατασκευὴν 4 τοιούτων ἐνδυμασιῶν ;

## Προβλήματα ποσοστῶν ἀναφερόμενα εἰς τὸν χρόνον.

**§ 190. Πρόβλημα Ι.** *Παντοπώλης ἠγόρασεν ἔλαιον, τὸ ὁποῖον ἐκόστισεν εἰς αὐτὸν 18 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Μετὰ 4 μῆνας, ἐπώλησεν αὐτὸ πρὸς 20 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσον °/₀ ἐκέρδισεν ἐκ τῶν χρημάτων του ἐτησίως ;*

*Λύσις.* Ἀπὸ 18 δραχ. εἰς 4 μῆνας ἐκέρδισεν 2δραχ.
» 100 » » 12 » » χ »

ὅθεν $\chi = 2 \times \frac{100}{18} \times \frac{12}{4} = 33\frac{1}{3}$ °/₀.

**§ 191. Πρόβλημα ΙΙ.** *Ἡ ὀκᾶ τοῦ βουτύρου κοστίζει εἰς παντοπώλην 68δραχ. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ αὐτὸ μετὰ 6 μῆνας, ὥστε νὰ κερδίσῃ ἐκ τῶν χρημάτων του 20 °/₀ ἐτησίως ;*

*Λύσις.* Ἀπὸ 100δρ. εἰς 12μην. κερδίζει 20δραχ.
» 68 » » 6 » » χ

ὅθεν $\chi = 20 \times \frac{68}{100} \times \frac{6}{12} = 6,8$δραχ. Ἄρα θὰ πωλῇ

$68 + 6,8 = 74,8$ δραχμάς.

**§ 192. Πρόβλημα ΙΙΙ.** *Διαθέσας τις ποσὸν χρημάτων εἰς ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν, ἔλαβε μετὰ 3 μῆνας 83200 δραχμάς. Οὕτω δὲ ἐκέρδισε 16°/₀ ἐτησίως ἐκ τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα διέθεσεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Πόσα ἦσαν τὰ χρήματα ταῦτα ;*

*Λύσις*. Αἱ 100δρ. εἰς 3 μῆνας φέρουσι κέρδος 16 : 4=4δρ. Ἐπομένως μετὰ 3μῆνας αἱ 100δραχ. γίνονται 104 δραχ.

χ » » 83200

ὅθεν $\chi=100\times\frac{83200}{104}=80000$ δραχ.

*Ἀσκήσεις*. 617) Ἠγόρασέ τις οἰκίαν ἀντὶ 140000 δραχμῶν· ἐξώδευσε διὰ νὰ τὴν ἐπισκευάσῃ 18000 δραχμὰς καὶ μετὰ 8 μῆνας ἀπὸ τῆς ἀγορᾶς ἐπώλησεν αὐτὴν ἀντὶ 176960 δραχ. Πόσον ἐπὶ τοῖς %<sub></sub> ἐκέρδισεν ἐκ τῶν χρημάτων του ἐτησίως;

618) Ἔμπορος διέθεσε διὰ τὰς ἐμπορικὰς ἐπιχειρήσεις 200000 δραχμάς· παρετήρησε δὲ ὅτι μετὰ 18 μῆνας εἶχε 245000 δραχμάς. Πόσον % ἐτησίως ἐκέρδισεν ἐκ τῶν χρημάτων του;

619) Παντοπώλης ἠγόρασε 3στατ. 12ὀκ. καφφὲ πρὸς 50 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Ἐπεβαρύνθη δὲ οὗτος μὲ ἔξοδα μεταφορᾶς καὶ φόρους 4% ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς. Μετὰ 4 μῆνας ἐπώλησεν αὐτὸν ἀντὶ 7987,20 δραχ. Πόσον % ἐτησίως ἐκέρδισεν ἐκ τῶν χρημάτων του;

620) Καπνέμπορος ἠγόρασε 3000 ὀκ. καπνοῦ πρὸς 28 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἀφοῦ συνεσκεύασεν αὐτὸν μετὰ 3 μῆνας ἐπώλησεν αὐτὸν ἀντὶ 95272,80 δραχμῶν. Οὕτω δὲ ἐκέρδισεν 24% ἐπὶ τοῦ κόστους. Πόσα χρήματα ἐξώδευσε διὰ τὴν σκευασίαν;

## Προβλήματα τόκου.

§ **193. Ὁρισμοί.** Ὅταν δανείζῃ τις εἰς ἄλλον χρήματα, εἶναι δίκαιον νὰ λαμβάνῃ πλὴν τῶν χρημάτων τούτων καὶ ἕνα κέρδος. Τοῦτο λέγεται *τόκος* τῶν δανεισθέντων χρημάτων.

Ὥστε: *Τόκος (Τ) λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ὁ δανείζων χρήματα.*

*Τὸ δανειζόμενον χρηματικὸν ποσὸν καλεῖται κεφάλαιον (Κ).*

Ὁ τόκος 100 νομισματικῶν μονάδων ὁμοειδῶν πρὸς τὰς μονάδας τοῦ κεφαλαίου εἰς 1 χρονικὴν μονάδα λέγεται *ἐπιτόκιον* (Ε).

Τὸ ἐπιτόκιον ὁρίζεται δι' ἰδιαιτέρας συμφωνίας μεταξὺ δανείζοντος καὶ δανειζομένου· δὲν πρέπει δὲ κατὰ νόμον νὰ εἶναι τὸ ἐτήσιον ἐπιτόκιον ἀνώτερον τοῦ 12.

Ἡ διάρκεια τοῦ δανείου καλεῖται *χρόνος* (Χ).

Ἐὰν ἀπὸ τὰ ποσὰ Κ,Τ,Ε,Χ δοθῶσι τρία, εὑρίσκομεν τὸ τέταρτον, ὡς βλέπομεν εἰς τὰ ἑπόμενα προβλήματα.

## *Α΄. Εὕρεσις τοῦ Τόκου.*

§ **194. Πρόβλημα I.** *Πόσον τόκον φέρουσι 3800 δρα εἰς 3 ἔτη πρὸς 8⁰/₀ ἐτησίως ;*

*Λύσις.* Αἱ 100δραχ. εἰς 1 ἔτος φέρουσι τόκον 8δρα
» 3800 » » 3 ἔτη » » χ

Παρατηροῦντες ὅτι ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ κεφάλαιο καὶ πρὸς τὸν χρόνον εὑρίσκομεν ὅτι $\chi = \frac{8 \times 3800 \times 3}{100} = 912$δρα

§ **195. Πρόβλημα II.** *Πόσον τόκον φέρουσι 750 δρα εἰς 3 μῆνας πρὸς 10⁰/₀ ἐτησίως ;*

*Λύσις.* Αἱ 100 δρ. εἰς 12 μ. φέρουσι τόκον 10 δραχ.
» 750 » » 3 » » χ

ὅθεν $$\chi = \frac{10 \times 750 \times 3}{12 \times 100} = 18{,}75 \text{ δραχ.}$$

§ **196. Πρόβλημα III.** *Πόσον τόκον φέρουσι 120 δραχ. εἰς 20 ἡμέρας πρὸς 12 ⁰/₀ ἐτησίως ;*

*Λύσις.* Αἱ 100 δραχ. εἰς 360 ἡμ. φέρουσι τόκον 12 δρα
» 1200 » » 20 » » » χ

ὅθεν $$\chi = \frac{12 \times 1200 \times 20}{360 \times 100} = 8 \text{ δραχ.}$$

Ἄρα : *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον πολ]ομεν τὰ τρία δοθέντ ποσὰ καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 100 ἢ 1200 ἢ 3600, κα ὅσον ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἔτη ἢ μῆνας ἢ ἡμέρας, τὸ δὲ ἐπιτό κιον εἶναι ἐτήσιον.*

Παρατηροῦμεν ὅτι (§ 195)

$$\frac{10 \times 750 \times 3}{12 \times 100} = \frac{10 \times 750 \times \frac{3}{12}}{100} \text{ καὶ ὅτι } \frac{3}{12} \text{ ἔτους } =$$
μῆνες.

Ἐπίσης (§ 196) $$\frac{12 \times 1200 \times 20}{360 \times 100} = \frac{12 \times 1200 \times \frac{20}{360}}{100}$$

καὶ ὅτι $\frac{20}{360}$ ἔτους = 20 ἡμέραι. Ἐὰν λοιπὸν ὁ χρόνος εἶνα ὁμοειδὴς πρὸς τὴν χρονικὴν μονάδα, εἰς τὴν ὁποίαν ἀναφέρετα τὸ ἐπιτόκιον, ἀληθεύει ὁ ἑξῆς γενικὸς κανών.

*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, πολ)ζομεν τὰ τρία δοθέντα ποσ* καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ *100*. Ἦτοι $T = \frac{K.E.X}{100}$.

ΣΗΜ. Πολλάκις εἶναι εὔκολον καὶ ἀγράφως νὰ εὑρίσκωμεν τὸν τόκον. Οὕτω 600 δραχ. ἢ 6 ἑκατοστάρικα φέρουσι πρὸς 7% εἰς ἓν ἔτος τόκον $7 \times 6 = 42$ δραχ· εἰς 8 ἔτη φέρουσιν $42 \times 8 = 336$ δραχ. Εἰς 4 μῆνας φέρουσι $42 : 3 = 14$ δραχ. κτλ.

ΣΗΜ. Ἀπὸ τὰς ἀκολούθους ἀσκήσεις αἱ 5 πρῶται νὰ λυθῶσι ἀγράφως.

***Ἀσκήσεις***. 621) Πόσον τόκον φέρουσιν 300 δραχμ. εἰς 1 ἔτος πρὸς 8% ἐτησίως;

622) Πόσον τόκον φέρουσι 300 δραχ. εἰς 6 μῆνας πρὸς 8% καὶ πόσον πρὸς 12% ἐτησίως;

623) Πόσον τόκον φέρουσι 800 δραχ. εἰς 3 ἔτη πρὸς 6% ἐτησίως;

624) Πόσον τόκον φέρουσι 1000 δραχ. εἰς 1,2,3,5, ἔτη πρὸς 15% ἐτησίως;

625) Πόσον τόκον φέρουσι 1000 δραχμαὶ εἰς 6 μῆνας καὶ πόσον εἰς 4 μῆνας πρὸς 9%;

626) Πόσον τόκον φέρουσι 2460 δραχμαὶ εἰς 5 ἔτη καὶ 2 μῆνας πρὸς 12% ἐτησίως;

627) Πόσον τόκον φέρουσι 8000 δραχ. εἰς 6 μῆνας καὶ 15 ἡμέρας πρὸς 10% ἐτησίως;

628) Ἐδάνεισέ τις 12000 δραχμὰς πρὸς 10% ἐτησίως. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ τὸ ὅλον μετὰ ἓν ἔτος καὶ 3 μῆνας;

629) Ἔχει τις διαθεσίμους 300000 δραχμάς, μὲ τὰς ὁποίας δύναται νὰ ἀγοράσῃ οἰκίαν, ἀπὸ τὴν ὁποίαν θὰ ἔχῃ ἐνοίκιον καθαρὸν 2000 δραχ. τὸν μῆνα. Τί εἶναι προτιμώτερον νὰ κάμῃ τὴν ἀγορὰν ταύτην ἢ νὰ τοκίσῃ τὰ χρήματά του πρὸς $7\frac{1}{2}$% ἐτησίως;

630) Τὴν 15ην Ἰανουαρίου 1928 ἐδανείσθη τις 15680 δραχ. πρὸς 12% ἐτησίως καὶ ἐπλήρωσε τὸ χρέος τοῦτο μὲ τὸν τόκον του τὴν 27ην Νοεμβρίου 1930. Πόσα χρήματα ἔδωκε τὸ ὅλον;

631) Εἶχέ τις κτῆμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐλάμβανε καθαρὸν εἰσόδημα 28000 δραχ. ἐτησίως. Ἔπειτα ἐπώλησεν αὐτὸ ἀντὶ 600000 δραχ, τὰς ὁποίας κατέθεσεν εἰς τὴν Ἐθνικὴν Τράπεζαν πρὸς 5% ἐτησίως. Εἰς ποίαν περίπτωσιν εἶχε περισσότερον ἔσοδον καὶ πόσον;

## Β'. Εὕρεσις τοῦ κεφαλαίου.

§ **197. Πρόβλημα Ι.** *Πόσον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 8 % ἐτησίως φέρει εἰς 4 ἔτη τόκον 1164,80 δραχμάς;*

*Λύσις.* Αἱ 100 δραχ. εἰς 1 ἔτος φέρουσι τόκον 8 δραχ.
» $\chi$ » » 4 ἔτη » » 1164,80 δραχ.

Παρατηροῦμεν ὅτι διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. κεφάλαιον φέρει τὸν αὐτὸν τόκον εἰς τὸ ἥμισυ, τρίτον κτλ. τοῦ χρόνου. Ἄρα τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος εἶναι ἀντίστροφα.

Ὅθεν $\chi = 100 \times \frac{1}{4} \times \frac{1164,80}{8} = \frac{1164,80 \times 100}{4 \times 8} = 3640$ δρχ.

Ἐὰν ὁ χρόνος ἦτο 4 μῆνες, θὰ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\chi = \frac{1164,80 \times 1200}{4 \times 8} = 43680.$$

Ἐὰν δὲ ἦτο 4 ἡμέραι, θὰ εὑρίσκομεν $\chi = \frac{1164,80 \times 36000}{4 \times 8}$.

Ἄρα: *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, πολ/ζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100, ἢ 1200 ἢ 36000, καθ' ὅσον ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἔτη, ἢ μῆνας ἢ ἡμέρας, τὸ δὲ ἐπιτόκιον εἶναι ἐτήσιον, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δοθέντων ποσῶν.*

Ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι $\frac{1164,80 \times 1200}{4 \times 8} = \frac{1164,80 \times 100}{\frac{4}{12} \times 8}$

καὶ $\frac{1164,80 \times 36000}{4 \times 8} = \frac{1164,80 \times 100}{\frac{4}{360} \times 8}$, βλέπομεν ὅτι, ἂν ὁ χρόνος εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς τὴν χρονικὴν μονάδα, εἰς τὴν ὁποίαν ἀναφέρεται τὸ ἐπιτόκιον, ἀληθεύει ὁ ἑξῆς γενικὸς κανών.

*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, πολ/ζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δοθέντων ποσῶν.*

Ἤτοι: $$K = \frac{T.100}{E.X.}.$$

***Ἀσκήσεις.*** 632) Πόσον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 8% ἐτησίως φέρει εἰς 1 ἔτος τόκον 200 δραχμάς;

633) Πόσον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 8% φέρει εἰς 2,5 ἔτη τόκον 200 δραχμάς;

634) Πόσον κεφάλαιον πρέπει νὰ τοκίσῃ τις εἰς 4 μῆνας πρὸς 5% ἐτησίως, διὰ νὰ λάβῃ τόκον 45 δραχμάς;

635) Πόσον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 8% ἐτησίως φέρει εἰς 1 ἔτος καὶ 5 μῆνας τόκον 670 δραχμάς;

636) Πόσα χρήματα τοκιζόμενα πρὸς 6% ἐτησίως φέρουσιν εἰς 2 μῆνας καὶ 20 ἡμέρας τόκον 300 δραχμάς;

637) Τοκίσας τις ποσὸν χρημάτων πρὸς 9% ἐτησίως ἔλαβεν εἰς 5 μῆνας καὶ 18 ἡμέρας τόκον 4 σελίνια καὶ 4 πέννας. Πόσα χρήματα ἐτόκισεν;

## Γ'. Εὕρεσις τοῦ ἐπιτοκίου.

§ **198. Πρόβλημα I.** *Ἐτόκισέ τις 3600 δραχμὰς ἐπὶ 3 ἔτη καὶ ἔλαβε τόκον 864 δραχμάς. Πρὸς πόσον % ἐτησίως ἐτόκισε ταῦτα;*

*Λύσις.* Αἱ 3600 δραχ. εἰς 3 ἔτη φέρουσι τόκον 864δρ,
» 100 » » 1 » » » χ

ὅθεν $$\chi = 864 \times \frac{100}{3600} \times \frac{1}{3} = \frac{864 \times 100}{3600 \times 3} = 8\ \%.$$

Ἄρα: *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, πολ)ζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δοθέντων ποσῶν.*

Ἤτοι $$E = \frac{T.\ 100}{K.\ X.}.$$

Ἐὰν Χ δηλοῖ ἔτη, μῆνας ἢ ἡμέρας, τὸ Ε θὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἐτήσιον, μηνιαῖον ἢ ἡμερήσιον.

***Ἀσκήσεις.*** 638) Πρὸς πόσον % ἐτησίως πρέπει νὰ τοκισθῶσι 4500 δραχμαί, ὅπως εἰς ἓν ἔτος φέρωσι τόκον 315 δραχμάς;

639) Ἐτόκισέ τις 15600 δραχμὰς καὶ μετὰ 4 ἔτη ἔλαβε τόκον καὶ κεφάλαιον 18344 δραχ. Πόσον ἦτο τὸ ἐπιτόκιον;

640) Ἐτόκισέ τις 7200 δραχ. καὶ ἔλαβε μετὰ 3 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας τόκον 170 δραχμάς. Πόσον ἦτο τὸ ἐπιτόκιον;

641) Ἐτόκισέ τις 160000 δραχμὰς καὶ μετὰ 15 ἡμέρας ἔλαβε κεφάλαιον καὶ τόκον 160800. Πόσον ἦτο τὸ ἐπιτόκιον;

642) Ἐτόκισέ τις 25000 δραχμὰς καὶ ἐκ τῶν τόκων αὐτῶν ἐπὶ 3 ἔτη ἠγόρασεν ἀγρὸν 4 στρεμμάτων πρὸς 1687,50 δραχμὰς τὸ στρέμμα. Πρὸς πόσον ἐπιτόκιον εἶχε δανείσει τὰ χρήματά του;

643) Πρὸς πόσον πρέπει νὰ τοκισθῇ κεφάλαιον, ὅπως μετὰ 8 ἔτη διπλασιασθῇ;

644) Κεφάλαιον 12600 δραχ. τοκισθὲν ἀπὸ τῆς 12ης Μαΐου 1929 μέχρι τῆς 2ας Σεπτεμβρίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους ἔγεινε μετὰ

τῶν τόκων του 13062 δραχ. Πόσον ἦτο τὸ ἐτήσιον ἐπιτόκιον;

645) Εἶχέ τις διαθέσιμον κεφάλαιον 60000 δραχ. Τὸ τρίτον τούτων ἐτόκισε πρὸς 8 % ἐπὶ 6 μῆνας, τὸ δὲ $\frac{1}{2}$ ἐπὶ 6 μῆνας πρὸς 9 %. Τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐπὶ 4 μῆνας. Οὕτω δὲ ἔλαβε τὸ ὅλον τόκον 3750 δραχ. Πρὸς % ἐτόκισε τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο τοῦ κεφαλαίου;

## Δ΄. Εὕρεσις τοῦ χρόνου.

§ **199. Πρόβλημα 1.** *Εἰς πόσον χρόνον 1800 δραχμαὶ τοκιζόμεναι πρὸς 6 % ἐτησίως φέρουσι τόκον 324 δρ.;*

*Λύσις.* Αἱ 100 δραχ. εἰς 1 ἔτος φέρουσι τόκον 6 δραχ.
» 1800 » » χ » » » 324 »

ὅθεν $\chi = 1 \times \frac{100}{1800} \times \frac{324}{6} = \frac{324 \times 100}{1800 \times 6} = 3$ ἔτη.

Ἄρα: *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον, πολ]ομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν.*

Ἤτοι:
$$X = \frac{T.\ 100}{K.\ E}.$$

Ὁ Χ παριστᾷ ἔτη, ἢ μῆνας ἢ ἡμέρας, καθ' ὅσον τὸ Ε εἶναι ἀντιστοίχως ἐτήσιον, μηνιαῖον ἢ ἡμερήσιον.

Ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι $\chi = \frac{324 \times 100}{1800 \times 6} = \frac{324}{18 \times 6}$ καὶ ὅτι $18 \times 6$ εἶναι ὁ ἐτήσιος τόκος τῶν 1800 δραχμῶν, συμπεραίνομεν ὅτι:

*Ὁ χρόνος (εἰς ἔτη) εἶναι πηλίκον τοῦ δοθέντος τόκου διὰ τοῦ ἐτησίου τόκου τοῦ δοθέντος κεφαλαίου.*

*Ἀσκήσεις.* 646) Νὰ εὑρεθῇ ἀγράφως καὶ γραπτῶς εἰς πόσον χρόνον 600 δραχ. τοκιζόμεναι πρὸς 8% ἐτησίως φέρουσι τόκον 48 δραχμάς;

647) Νὰ εὑρεθῇ ἀγράφως καὶ γραπτῶς εἰς πόσον χρόνον 840 δραχμαὶ τοκιζόμεναι πρὸς 9% ἐτησίως φέρουσι τόκον 151,20 δραχμάς;

648) Εἰς πόσον χρόνον 600 δραχμαὶ τοκιζόμεναι πρὸς 8% ἐτησίως φέρουσι τόκον 84 δραχμάς;

649) Εἰς πόσον χρόνον 1860 δραχ. τοκιζόμεναι πρὸς $6\frac{1}{2}$% ἐτησίως γίνονται μετὰ τοῦ τόκου 1960,75 δραχμαί;

650) Ἐδάνεισέ τις 6400 δραχ. ἐπὶ 3 μῆνας πρὸς 8 % ἐτησίως. Ἔπειτα τὸ κεφάλαιον τοῦτο μετὰ τοῦ τόκου ἐδάνεισεν εἰς ἄλλον δανειστὴν πρὸς 10 % ἐτησίως καὶ μετά τινα χρόνον ἔλαβε τὸ ὅλον 7344 δραχ. Πόσον χρόνον διήρκεσε τὸ δεύτερον δάνειον;

651) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 15 % ἐτησίως διπλασιάζεται;

652) Τὴν 8ην Σ)βρίου 1929 ἐδάνεισέ τις 4800 δραχμὰς πρὸς 6 % ἐτησίως. Κατὰ δὲ τὴν λῆξιν τῆς προθεσμίας ἔλαβε τὸ ὅλον 5016 δραχμάς. Ποίαν ἡμέραν ἔληξεν ἡ προθεσμία;

§ **200. Μέθοδος τῶν σταθερῶν διαιρετῶν.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν ποσὸν τόκον φέρουσι Κ δραχμαὶ εἰς η ἡμέρας πρὸς 9 % ἐτησίως. Κατὰ τὴν ἰσότητα $T=\frac{K.X.E.}{100}$

εἶναι $T=\frac{K.\frac{\eta}{360}.9}{100}=\frac{K.\eta.9}{36000}=\frac{K.\eta}{4000}$. Τὸ γινόμενον Κ.η τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνον εἰς ἡμέρας λέγεται *τοκάριθμος*.

Ὁ διαιρέτης 4000=36000 : 9 λέγεται *σταθερὸς διαιρέτης* ἀντιστοιχῶν εἰς ἐτήσιον ἐπιτόκιον 9 %.

Κατὰ ταῦτα: *Τὸν εἰς δοθὲν ἐτήσιον ἐπιτόκιον ἀντίστοιχον σταθερὸν διαιρέτην εὑρίσκομεν, ἂν διαιρέσωμεν τὸν 36000 διὰ τοῦ ἐπιτοκίου τούτου.*

*Ἵνα δὲ εὕρωμεν τὸν τόκον, ὅταν ὁ χρόνος δηλοῖ ἡμέρας, διαιροῦμεν τὸν τοκάριθμον διὰ τοῦ ἀντιστοίχου σταθεροῦ διαιρέτου.*

Ἤτοι, ἂν 36000 : Ε=Δ, θὰ εἶναι $T=\frac{K.\eta}{\Delta}$ (1)

Οὕτως 6000 δραχμαὶ εἰς 16 ἡμέρας πρὸς 12 % ἐτησίως φέρουσι τόκον $T=\frac{6000.16}{3000}=32$ δραχ.

*Ἀσκήσεις.* 653) Νὰ εὑρεθῇ ὁ εἰς ἐτήσια ἐπιτόκια 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 18 ἀντιστοιχῶν σταθερὸς διαιρέτης.

654) Πόσον τόκον φέρουσι 1000 δραχ. εἰς 17 ἡμέρας πρὸς 10 % ἐτησίως;

655) Πόσον τόκον φέρουσι 3850 δραχμαὶ εἰς 23 ἡμέρας πρὸς 9 % ἐτησίως;

656) Πρὸς πόσον % ἐτησίως 500 δραχμαὶ φέρουσιν εἰς 25 ἡμέρας τόκον 2, 5 δραχμάς;

657) Εἰς πόσας ἡμέρας 1700 δραχ. τοκιζόμεναι πρὸς 10 % ἐτησίως φέρουσι τόκον 250 δραχμάς;

658) Εἰς πόσας ἡμέρας 750 δραχ. τοκιζόμεναι πρὸς 12 % ἐτησίως γίνονται 761,25 δραχμαί;

## Χρῆσις βοηθητικῶν ποσῶν.

§ **201. Πρόβλημα I.** *Ἐτόκισέ τις ποσὸν χρημάτων πρὸς 8 % καὶ μετὰ 3 μῆνας ἔλαβε τόκον καὶ κεφάλαιον 663 δραχμάς. Πόσα χρήματα ἐδάνεισεν;*

*Λύσις.* Αἱ 100 δραχ. εἰς 3 μῆνας φέρουσι τόκον 8 : 4 = 2δραχ. Γίνονται ἄρα μὲ τὸν τόκον 102 δρ.

Ὥστε 102 δραχ. τόκος καὶ κεφ. προέρχονται ἀπὸ 100 δραχ. κεφ.
663 » » » » » » χ » »

Παρατηροῦμεν ὅτι 200 δραχ. φέρουσαι τόκον 4 δραχ. γίνονται 204· βλέπομεν δηλ. ὅτι διπλάσιον ἄθροισμα κεφαλαίου καὶ τόκου προέρχεται ἀπὸ διπλάσιον κεφάλαιον κτλ.

Ἄρα $$\chi = 100 \times \frac{663}{102} = 650 \text{ δρ.}$$

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἐφαντάσθημεν ὅτι ὡρισμένον κεφάλαιον (100 δραχ.) ἐτοκίσθη μὲ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος καὶ ἐζητήσαμεν πόσον γίνεται τοῦτο μὲ τὸν τόκον του. Ἔπειτα δὲ τὸ πρόβλημα ἀνήχθη εἰς πρόβλημα ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Τὸ κεφάλαιον τοῦτο τῶν 100 δραχμῶν καλοῦμεν *βοηθητικὸν* κεφάλαιον. Εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ εἶναι οἱονδήποτε. Προτιμᾶται δὲ τοῦτο εἰς παρομοίας περιπτώσεις μόνον χάριν εὐκολίας.

§ **202. Πρόβλημα II.** *Ἐτόκισέ τις τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ κεφαλαίου του πρὸς 5% ἐτησίως καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 6% ἐτησίως. Οὕτω δὲ λαμβάνει ἐτήσιον τόκον 1700 δραχμάς. Πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιόν του;*

*Λύσις.* Ἂν ἐτόκιζε μὲ τοὺς ὅρους τούτους 300 δραχμάς, θὰ ἐλάμβανεν ἀπὸ μὲν τὰς 100 δραχμὰς τόκον 5, ἀπὸ δὲ τὰς 200 δραχ. τόκον 12 δραχ. ἤτοι τὸ ὅλον 17 δραχ. Ἂν ἐτόκιζεν 600 δραχ. θὰ ἐλάμβανεν τόκον 10+24=34 δραχ. ἤτοι διπλασίας κτλ. Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἀπὸ 300 δραχ. λαμβάνει τόκον 17 δραχ.
» χ » » » 1700 »

ὅθεν $$\chi = 300 \times \frac{1700}{17} = 30000 \text{ δραχ.}$$

§ **203. Πρόβλημα ΙΙΙ.** *Ἐτόκισέ τις 1200 δραχμὰς ἐπὶ 30 ἡμέρας καὶ ἄλλας 800 δραχμὰς ἐπὶ 30 ἡμέρας μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον. Ἔλαβε δὲ οὕτω ἀπὸ τὸ α' κεφάλαιον 8 δραχμὰς περισσότερον τόκον. Πόσον ἦτο τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον;*

*Λύσις.* Ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον ἦτο 10 %, ἐτησίως, ὁ τόκος θὰ ἦτο 20 δραχ. ἀπὸ τὸ α' καὶ $\frac{20}{3}$ δραχ. ἀπὸ τὸ β', ἡ δὲ διαφορὰ τῶν θὰ ἦτο $20-\frac{20}{3}=\frac{40}{3}$. Ἂν τὸ ἐπιτόκιον ἦτο 20 %, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ διαφορὰ θὰ ἦτο $\frac{80}{3}$ δραχ. κτλ. Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Εἰς διαφορὰν $\frac{40}{3}$ ἀντιστοιχεῖ ἐπιτόκιον 10

» » 8 » » χ

ὅθεν $\chi=10\times\frac{24}{40}=6$ %.

***Ἀσκήσεις.*** 659) Ἐτόκισέ τις ποσὸν χρημάτων πρὸς 9 % ἐτησίως καὶ μετὰ 1 ἔτος καὶ 3 μῆνας ἔλαβε τόκον καὶ κεφάλαιον 17800 δραχμάς. Πόσον ἦτο τὸ τοκισθὲν κεφάλαιον καὶ πόσος ὁ τόκος;

660) Ἐτόκισέ τις τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν χρημάτων του πρὸς 6 %, τὸ δὲ ἄλλο $\frac{1}{2}$ αὐτῶν πρὸς 8 % ἐτησίως. Οὕτω δὲ ἔχει ἐτήσιον τόκον 126 δραχμάς. Πόσα ἦσαν τὰ δανεισθέντα χρήματα;

661) Ἐτόκισέ τις τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν χρημάτων του πρὸς 5%, τὸ δὲ ἄλλο $\frac{1}{2}$ αὐτῶν πρὸς 4,5 % ἐτησίως. Οὕτω δὲ λαμβάνει ἀπὸ τὸ α' μέρος 80 δραχ. περισσότερον τόκον ἢ ἀπὸ τὸ β'. Νὰ εὑρεθῇ τὸ τοκισθὲν κεφάλαιον.

662) Ἐδάνεισέ τις τὸ $\frac{1}{5}$ κεφαλαίου πρὸς 4%, ἄλλα $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ πρὸς 6 % καὶ τὰ ἄλλα $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ πρὸς 8 % ἐτησίως. Οὕτω δὲ λαμβάνει ἐτήσιον τόκον 1312 δραχ. Πόσον ἦτο τὸ δανεισθὲν κεφάλαιον καὶ πόσον τὸ πρὸς 4 %, 6 % καὶ 8 % δανεισθὲν ποσόν;

663) Ἐδάνεισέ τις 1200 δραχ. πρὸς 8 % καὶ ἄλλας 3600 δραχ.

πρὸς 6°/。 καὶ ἀμφότερα εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον. Οὕτω δὲ ἔλαβεν ὁλικὸν τόκον 78 δραχμάς. Πόση εἶναι ἡ διάρκεια τῶν δανείων τούτων;

664) Ἐτόκισέ τις 1700 δραχμὰς ἐπὶ 3 μῆνας καὶ ἄλλας 5100 δραχμὰς ἐπὶ 4 μῆνας πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον. Ἔλαβε δὲ τόκον τὸ ὅλον 212,50 δραχ. Πόσον ἦτο τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον;

## Ὑφαιρέσεις

§ **204. Γραμμάτιον, Συναλλαγματική, ἐπιταγή. Ὑφαιρέσεις.** Ὅταν τις δανείζηται παρ' ἄλλου χρήματα ἢ ἀγοράζῃ ἐμπορεύματα μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ πληρώσῃ αὐτὰ εἰς ὡρισμένην προθεσμίαν, ὑπογράφει καὶ παραδίδει εἰς τὸν πιστωτήν του ἔγγραφον ὁμολογίαν τῆς ὑποχρεώσεώς του ταύτης. Ὑπάρχουσι δὲ οἱ ἀκόλουθοι δύο τύποι τοιούτων ἐγγράφων.

Α΄) *Τὸ γραμμάτιον εἰς διαταγὴν ἔχον οὕτω.*

Ἐν Ἀθήναις τῇ 20ῇ Σεπτεμβρίου 1933

Διὰ δραχ. 7000

Μετὰ τρεῖς μῆνας ἀπὸ σήμερον ὑπόσχομαι νὰ πληρώσω εἰς τὴν διαταγὴν τοῦ κ. Νικ. Ἀρχοντίδου τὸ ἄνω ποσὸν τῶν δραχμῶν (ἑπτὰ χιλιάδων) ἀξίαν ληφθεῖσαν εἰς ἐμπορεύματα.

Ἀναστ. Δημάδης.

Β΄) *Ἡ Συναλλαγματικὴ* διὰ τῆς ὁποίας παραγγέλλει τις εἰς ἄλλον, εἰς τὸν ὁποῖον ἔχει συνήθως διαθέσιμα χρήματά του, νὰ μετρήσῃ διὰ λ]σμόν του εἰς τρίτον πρόσωπον ὡρισμένον ποσόν. Ὁ συνηθέστερος τύπος αὐτῆς εἶναι ὁ ἑξῆς:

Ἐν Ἀθήναις τῇ 20ῇ Σ]βρίου 1933

Διὰ Δραχ. 7000

Μετὰ τρεῖς μῆνας ἀπὸ σήμερον πληρώσατε διὰ ταύτης τῆς μόνης μου συναλλαγματικῆς εἰς τὴν διαταγὴν τοῦ κ. Ν. Ἀρχοντίδου τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν (ἑπτὰ χιλιάδων) ἀξίαν ληφθεῖσαν εἰς μετρητὰ καὶ ἐγγράψατε αὐτὴν εἰς λ]σμόν μου, ὡς εἰδοποιεῖσθε.

Ἀναστ. Δημάδης

Πρὸς τὸν κ. Δημ. Λάσκαν
ἔμπορον εἰς Καλάμας.

Πλὴν τούτων συχνότατα γίνεται χρῆσις καὶ τῆς *ἐπιταγῆς*, διὰ τῆς ὁποίας παραγγέλλεται Τράπεζα ἢ τραπεζικὸν γραφεῖον νὰ πληρώσῃ εἰς τὸν κομιστὴν αὐτῆς ὡρισμένον ποσὸν διὰ λογ]σμὸν τοῦ ἐκδόσαντος αὐτήν.

Ἰδοὺ ἓν ὑπόδειγμα ἐπιταγῆς.

Ἀριθ. 173. Ἐν Ἀθήναις τῇ εἰκοστῇ Σ]βρίου 1930

ΕΘΝΙΚΗ ΤΡΑΠΕΖΑ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΠΛΗΡΩΣΑΤΕ εἰς διαταγὴν τοῦ Διὰ δραχ. 3000
κ. Νικολ. Ἀρχοντίδου τὸ ποσὸν τῶν
(τριῶν χιλιάδων).

Πρὸς τὸ Ὑποκατάστημα τῆς Ἐθνικῆς Ὁ Διευθυντὴς
Τραπέζης εἰς Καρδίτσαν Δροσόπουλος

Συνήθως ὁ κάτοχος γραμματίου ἢ συναλλαγματικῆς π.χ. ὁ κ. Ν. Ἀρχοντίδης δὲν ἀναμένει νὰ ἔλθῃ ἡ προθεσμία διὰ νὰ εἰσπράξῃ τὰς 7000 δραχμάς. Ἀλλὰ πωλεῖ τοῦτο εἰς τράπεζαν. Ὑπογράφων δὲ ὄπισθεν *(ὀπισθογράφησις)* μεταβιβάζει τὰ δικαιώματά του εἰς τὴν Τράπεζαν ταύτην.

Ἡ πρᾶξις αὕτη λέγεται *προεξόφλησις* τοῦ γραμματίου.

Ἡ Τράπεζα κρατεῖ ὡς κέρδος ποσόν τι π.χ. 262,50 δραχ. τὸ ὁποῖον καλεῖται ὑφαίρεσις.

*Γενικῶς : Ὑφαίρεσις καλεῖται ἡ ἔκπτωσις, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται πᾶν χρέος, ὅταν πληρώνητε εἰς τὸν δικαιοῦχον πρὸ τῆς διορίας του.*

Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀναγεγραμμένον εἰς τὸ χρεωστικὸν γραμμάτιον λέγεται *ὀνομαστικὴ ἢ μέλλουσα ἀξία* αὐτοῦ (Μ). Τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον μένει μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἀπὸ Μ τῆς ὑφαιρέσεως (Υ) καλεῖται παροῦσα ἢ *πραγματικὴ* (Π) *ἀξία* τοῦ γραμματίου, ἤτοι

$$Π = Μ - Υ.$$

Διακρίνομεν δὲ δύο εἴδη ὑφαιρέσεων τὴν *ἐξωτερικὴν ἢ ἐμπορικὴν καὶ τὴν ἐσωτερικήν*.

**§ 205. Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις.** *Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις καλεῖται ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας γραμματίου διὰ τὸν χρόνον ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως αὐτοῦ.*

Ὑπολογίζεται δὲ ὁ τόκος οὗτος πρὸς ἐπιτόκιον, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται δι' ἰδιαιτέρας συμφωνίας μεταξὺ τοῦ πωλοῦντος καὶ ἀγοράζοντος τὸ γραμμάτιον.

Συνήθως αἱ μεγάλαι Τράπεζαι ἐνεργοῦσι τὰς προεξοφλήσεις μὲ τὸν νόμιμον προεξοφλητικὸν τόκον 12%.

Κατὰ ταῦτα τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως εἶναι προβλήματα τόκου καὶ λύονται ὡς ἐκεῖνα. Οὕτω τὸ ἄνω γραμμάτιον προεξοφληθὲν 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 15$^o/_o$ ἐτησίως ἔπαθεν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 262,50 δραχ. Ἑπομένως

$$\Pi = 7000 - 262{,}50 = 6737{,}50 \text{ δραχ.}$$

*Ἀσκήσεις* 665) Γραμμάτιον 350 δραχμῶν προεξωφλήθη 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως μὲ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν πρὸς 5 $^o/_o$ ἐτησίως. Πόσην ὑφαίρεσιν ἔπαθε καὶ πόση εἶναι ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ;

666) Γραμμάτιον 540 δραχμῶν προεξωφλήθη πρὸς 4 $^o/_o$ ἐτησίως 25 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του. Πόσην ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἔπαθε καὶ πόση ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ;

667) Γραμμάτιον 1600 δραχμῶν ἐξωφλήθη 20 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6% ἐτησίως. Πόσην ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἔπαθε καὶ πόση εἶναι ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ;

668) Γραμμάτιον 12000 δραχμῶν ἐξωφλήθη 2 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 11800 δραχμῶν. Πρὸς πόσον ἐπὶ τοῖς $^o/_o$ ὑπελογίσθη ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις;

669) Γραμμάτιον 5600 δραχ. ἐξωφλήθη 26 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 5563,60 δραχ. Πρὸς πόσον $^o/_o$ ὑπελογίσθη ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις αὐτοῦ;

670) Γραμμάτιον 18000 δραχμῶν προεξωφλήθη πρὸς 6% ἀντὶ 17820 δραχ. Πόσον χρόνον πρὸ τῆς λήξεώς του ἐξωφλήθη;

671) Πόση εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου, τὸ ὁποῖον ἐξωφληθὲν 40 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12% ἔπαθεν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 12 δραχμάς;

672) Τὴν 16 Ἰανουαρίου 1930 ἐξωφλήθη πρὸς 6% ἀντὶ 1984 δραχμῶν γραμμάτιον 2000 δραχμῶν. Πότε ἔληγεν ἡ προθεσμία αὐτοῦ;

673) Γραμμάτιον λῆγον τὴν 25 Φεβρουαρίου 1930 ἐξωφλήθη πρὸς 8% τὴν 20ην Ἰανουαρίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους ἀντὶ 3572 δραχ. Πόση ἦτο ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ;

§ **206. Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις.** Ἡ προεξόφλησις γραμματίου κατὰ τὸν προηγούμενον τρόπον εἶναι ἄδικος εἰς ὄφελος τοῦ ἀγοράζοντος τὸ γραμμάτιον. Ὁ προεξοφλῶν π. χ. γραμμάτιον 7000 δραχ. ἀντὶ 6737,50 δραχ. κερδίζει τὸν τόκον τῶν 7000 δραχ. ἐν ᾧ αὐτὸς διαθέτει διὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ γραμματίου μόνον 6737,50 δραχ. Ἡ ἀδικία αὕτη ἀποφεύγεται διὰ τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως, ἡ ὁποία ὁρίζεται ὡς ἑξῆς.

*Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας γραμ-*

*ματίου διὰ τὸν χρόνον ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως αὐτοῦ.*

Οὕτω γραμμάτιον 815 δραχ. ἐξοφληθὲν 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8 0/0 ὑφίσταται ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν (υ), τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ 816 — υ = Π, ἕπεται ὅτι 816 = Π + υ. Ἐπειδὴ δέ, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως, υ εἶναι τόκος τοῦ Π, ἕπεται ὅτι 816 εἶναι ἄθροισμα τοῦ κεφαλαίου Π καὶ τοῦ τόκου του. Εὑρίσκομεν (§ 198) λοιπὸν πρῶτον ὅτι αἱ 100 δραχμαὶ φέρουσιν εἰς 3 μῆνας τόκον 2 δραχ.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ἑπομένως | γραμ. | 102 | δρ. | πάσχει | ἐσ. | ὑφαίρεσιν 2 |
| | » | 816 | » | » | » | » χ |

ὅθεν $\chi = 2 \times \frac{816}{102} = 16$ δραχ. Ἡ παροῦσα λοιπὸν ἀξία εἶναι 816 — 16 = 800 δραχμαί.

Ἄρα: *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν γραμματίου πολ/μεν τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν τόκον τῶν 100 δραχ. διὰ τὸν χρόνον ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ τόκου τούτου καὶ τοῦ 100.*

***Ἀσκήσεις.*** 674) Γραμμάτιον 1820,70 δραχ. ἐξωφλήθη 2 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12%. Πόσην ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἔπαθε καὶ πόση ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ;

675) Γραμμάτιον 866,60 δραχ. ἐξωφλήθη 40 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 9% ἐτησίως. Πόσην ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἔπαθε καὶ πόση ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ;

676) Γραμμάτιον 2419,20 δραχ. λῆγον τὴν 18 Μαρτίου 1932 ἐξωφλήθη τὴν 12ην Φεβρουαρίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους πρὸς 8%. Πόσην ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἔπαθε καὶ πόση ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ;

677) Γραμμάτιον ἐξωφλήθη 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν πρὸς 6% ἐτησίως ἀντὶ 1800 δραχμῶν. Πόσην ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἔπαθε καὶ πόση ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ;

678) Γραμμάτιον λῆγον τὴν 5ην Ἰουνίου 1932 ἐξωφλήθη τὴν 5ην Ἀπριλίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους πρὸς 12% ἀντὶ 1500 δραχμῶν. Πόσην ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἔπαθε καὶ πόση ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ;

679) Γραμμάτιον ἐξωφλήθη 25 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του

πρὸς 9 % καὶ ἔπαθεν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν 15 δραχμῶν. Πόση ἡ παροῦσα καὶ πόση ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ;

680) Γραμμάτιον 7904 δραχμῶν ἐξωφλήθη 40 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 7800 δραχ. Πρὸς πόσον % ἐγένετο ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις αὐτοῦ;

681) Γραμμάτιον 24090 δραχ. ἐξωφλήθη ἀντὶ 24000 δραχ. πρὸς 9 % μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν. Πόσον χρόνον πρὸ τῆς λήξεως ἐγένετο ἡ ἐξόφλησις αὐτοῦ;

682) Γραμμάτιον 4646 δραχ. λῆγον τὴν 18 Αὐγούστου 1931 ἐξωφλήθη πρὸς 9 % ἀντὶ 4600 δραχμῶν. Ποίαν ἡμερομηνίαν ἔγεινεν ἡ προεξόφλησις;

683) Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἰσότητος $Μ=Π+υ$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $Υ-υ$ ἰσοῦται μὲ τὸν τόκον τῆς $υ$ διὰ τὸν χρόνον καὶ τὸ ἐπιτόκιον τῆς προεξοφλήσεως.

684) Γραμμάτιον ἐξωφλήθη 18 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν πρὸς 12 % ἀντὶ 6000 δραχμῶν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἐξωτερικῆς καὶ ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως αὐτοῦ;

685) Ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἐξωτερικῆς καὶ ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως γραμματίου ἐξοφλουμένου 25 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8 % εἶναι 4 δραχμαί. Πόση εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ;

## Προβλήματα κοινῆς λήξεως γραμματίων.

§ **207. Πρόβλημα I.** *Χρεωστεῖ τις εἰς τράπεζαν 600 δραχ. πληρωτέας μετὰ 20 ἡμέρας ἀπὸ σήμερον καὶ ἄλλας 800 δραχ. πληρωτέας μετὰ ἕνα μῆνα ἀπὸ σήμερον. Ἐὰν κάμῃ διὰ τὰ χρέη ταῦτα ἓν μόνον γραμμάτιον πληρωτέον μετὰ 2 μῆνας, πόση εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 9 %;*

*Λύσις.* Τὸ γραμμάτιον τοῦτο ὀφείλει νὰ ἔχῃ παροῦσαν ἀξίαν, ὅσην τὰ δύο χρέη ὁμοῦ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξ. ὑφαίρεσις εἶναι 3 δραχ. διὰ τὸ α' καὶ 6 δραχ. διὰ τὸ β' χρέος, ἕπεται ὅτι σήμερον χρεωστεῖ $597+794=1391$ δραχ.

Θὰ ζητήσωμεν λοιπὸν τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν γραμματίου, τὸ ὁποῖον λήγει μετὰ 2 μῆνας καὶ ἔχει παροῦσαν ἀξίαν 1391 δραχ. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι αἱ 100 δραχ. εἰς 2 μῆνας φέρουσι τόκον 1,5 δραχ.

Ἄρα : Γραμμάτ παρούσης ἀξίας 98,5 δρ. ἔχει ὀνομ. ἀξ 100 δρ.
» » 1391 » » » » χ

$$\text{ὅθεν } \chi = \frac{100 \times 1391}{98{,}5} = 1412{,}18 \text{ δραχ. περίπου.}$$

§ **208. Πρόβλημα ΙΙ.** *Γραμμάτιον 1200 δραχμῶν ει μετὰ 30 ἡμέρας, ἄλλο γραμμάτιον 3600 δραχμῶν λήγει ιὰ 20 ἡμέρας καὶ γ' γραμμάτιον 6000 δραχμῶν λήγει μετὰ 15 έρας. Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀντικαταστήσωμεν ταῦτα μὲ ἓν γραμμά- ιν 10800 δραχμῶν, μετὰ πόσον χρόνον θὰ λήγῃ τοῦτο τοῦ ἐπι- κίου ὄντος 9 %;*

*Λύσις.* Εὑρίσκομεν, ὡς προηγουμένως, ὅτι τὰ τρία γραμμάτια ουσι παροῦσαν ἀξίαν 10747,50 δραχ.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ νέον γραμμάτιον πρέπει νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν ροῦσαν ἀξίαν, ἔπεται ὅτι ἡ ἐξωτ. ὑφαίρεσις τούτου εἶναι

10800—10747,50=52,50 δραχ.

Εὑρίσκομεν ἔπειτα ὅτι αἱ 10800 δραχ. πρὸς 9 % τοκιζόμεναι ρουσι τόκον 52,50 δραχ. εἰς 58 ἡμέρας. Τὸ νέον λοιπὸν γραμ- τιον θὰ λήγῃ μετὰ 58 ἡμέρας.

ΣΗΜ. Τὰ προβλήματα ταῦτα ἐλύσαμεν μὲ ἐξωτερικὴν ὑφαίρε- σιν, διότι ταύτης γίνεται χρῆσις ἐν τῇ πράξει. Δύνανται ὅμως οἱ αθηταὶ πρὸς ἄσκησιν νὰ λύσωσι ταῦτα καὶ μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαί- σιν.

*Ἀσκήσεις* 686) Ὀφείλει τις εἰς τὴν Λαϊκὴν Τράπεζαν 800 αχ. πληρωτέας μετὰ 20 ἡμέρας, 600 δραχ. πληρωτέας μετὰ 25 μέρας καὶ 1000 δραχ. πληρωτέας μετὰ 40 ἡμέρας. Ἐὰν κάμῃ ' ὅλα τὰ χρέη ταῦτα ἓν χρεωστικὸν γραμμάτιον ἐκ 2412,02 δραχ- ῶν, μετὰ πόσον χρόνον θὰ λήγῃ τοῦτο, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 9 %;

687) Χρεωστεῖ τις 2000 δραχ. πληρωτέας μετὰ 12 ἡμέρας, 500 δραχμὰς πληρωτέας μετὰ 20 ἡμέρας καὶ ἄλλας 860 δραχμὰς ληρωτέας μετὰ 36 ἡμέρας. Ἐὰν κάμῃ δι' ὅλα τὰ χρέη ταῦτα ἓν ραμμάτιον λῆγον μετὰ 2 μῆνας, πόση θὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ξία αὐτοῦ, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 9 %;

688) Χρωστεῖ τις 2540 δραχ. πληρωτέας μετὰ 110 ἡμέρας καὶ 425 δραχμὰς πληρωτέας μετὰ 84 ἡμέρας, θέλει δὲ νὰ ὑπογράψῃ δι' ὑτὰ ἓν γραμμάτιον πληρωτέον μετὰ 3 μῆνας. Πόση θὰ εἶναι ἡ νομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ, ἂν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 5 %;

689) Ἐχρεώστει τις εἰς τὴν Ἐθνικὴν Τράπεζαν 8400 δραχμὰς ληρωτέας μετὰ 40 ἡμέρας. Πρὸς ἐξόφλησιν μετεβίβασεν εἰς αὐτὴν

δύο γραμμάτια εἰς διαταγήν του ἐκ 4300 δραχμῶν ἕκαστον
πληρωτέα τὸ μὲν ἓν μετὰ 80 ἡμέρας, τὸ δὲ ἄλλο μετὰ 36 ἡμέ
Ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον τῆς προεξοφλήσεως εἶναι 9%, νὰ εὑρεθῇ
ἔχῃ νὰ λάβῃ ἢ χρεωστεῖ ἀκόμη εἰς τὴν τράπεζαν καὶ πόσα.

## Προβλήματα ἀγορᾶς καὶ πωλήσεως τίτλων.

§ **209. Ὁμολογίαι καὶ μετοχαί.** Ὅταν ἓν κρά λάβῃ ἀνάγκην μεγάλου χρηματικοῦ ποσοῦ, δανείζεται τοῦτο τὸ κοινὸν ὡς ἑξῆς. Διαιρεῖ τοῦτο εἰς μικρὰ τμήματα, καὶ ἐκδ πρὸς πώλησιν ἐγγράφους τίτλους. Ἕκαστος τοιοῦτος τίτλος ὡρισμένην ὀνομαστικὴν ἀξίαν π.χ. 100, 200, 500 κτλ. δραχμ λέγεται δὲ *ὁμολογία*, διότι δι' αὐτῆς τὸ κράτος ὁμολογεῖ ὅτι ὀ λει εἰς τὸν κάτοχον αὐτῆς (ὁμολογιοῦχον) τὴν ὀνομαστικὴν ἀξ καὶ τοὺς νομίμους τόκους αὐτῆς.

Ἐπίσης αἱ ἀνώνυμοι ἑταιρεῖαι καὶ Τράπεζαι κατὰ τὴν σύσ σίν των ἢ καὶ βραδύτερον πρὸς αὔξησιν τῶν ἐργασιῶν των ἐκ δουσι πρὸς πώλησιν τίτλους, οἱ ὁποῖοι λέγονται *μετοχαί*, διότι ἀγορασταὶ αὐτῶν μετέχουσιν εἰς τὰς ἐπιχειρήσεις ταύτης καὶ τὰ κέρδη αὐτῆς.

Αἱ ὁμολογίαι καὶ μετοχαὶ λέγονται μὲ ἓν ὄνομα *τίτλοι* καὶ π λοῦνται εἰς τὰ χρηματιστήρια διὰ τῆς μεσολαβήσεως τῶν χρημ τιστῶν. Ἡ τρέχουσα τιμὴ τῶν τίτλων εἶναι μεταβλητή, ἐπιβαρύ ται δὲ καὶ μὲ μεσιτικὰ δικαιώματα, τὰ ὁποῖα εἶναι διάφορα διαφόρους περιστάσεις (1). Αἱ δὲ μετοχαὶ τῶν ἀνωνύμων ἑταιρε καὶ Τραπεζῶν ἐπιβαρύνονται καὶ μὲ φόρον ὑπὲρ τοῦ Δημοσίου. μεσάζων χρηματιστὴς ἐκδίδει πινάκιον λογ)σμοῦ, τὸ ὁποῖον ὑπ γράφων παραδίδει εἰς τὸν ἀγοραστὴν ἢ πωλητὴν τίτλων, ὡς ἀπὸ ἀκόλουθα προβλήματα θὰ φανῇ.

§ **210. Πρόβλημα Ι.** *Ἠγόρασέ τις 100 ὁμολογί τοῦ Α' ἀναγκαστικοῦ δανείου (6,50 %) πρὸς 67,50 δραχ. ἑκάστη Πόσα ἔδωκεν·*

Πινάκιον λ]σμοῦ

| | | |
|---|---|---|
| Δι' ἀξίαν 100 ὁμολογιῶν 67,50 × 100 | = 6750 | δραχ. |
| διὰ μεσιτικὰ πρὸς 0,50 δρ. | = 50 | » |
| Τὸ ὅλον | 6800 | » |

(1) Διὰ τὰ ἐθνικὰ δάνεια μέχρι 200 δραχ. εἶναι 0,50 δραχ. δι' ἑκάστ ὁμολογίαν. Ἀπὸ 201 μέχρι 500 δραχ. εἶναι 0,75 δραχ. δι' ἑκάστην. Ἀ 501 μέχρι 1000 εἶναι 1 δραχ. δι' ἑκάστην καὶ πέραν 3‰.

§ **211. Πρόβλημα ΙΙ.** *Ἠγόρασέ τις 200 ὁμολογίας ... Β' ἀναγκαστικοῦ δανείου (6 %) πρὸς 52,60 δραχ. ἑκάστην. ...ίσον % κερδίζει ἐκ τῶν χρημάτων του γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ἐπιτό... περιωρίσθη εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀρχικοῦ ;*

Πινάκιον λ]σμοῦ

| | | |
|---|---|---|
| Δι' ἀξίαν 200 ὁμολογιῶν | 52,60 × 200 = | 10520 δραχ. |
| ...μεσιτικὰ πρὸς 0,50 δρ. ἑκ. | = | 100 » |
| Τὸ ὅλον | | 10620 » |

Ἀπὸ τὸ ποσὸν τοῦτο λαμβάνει ἐτήσιον τόκον

...× 200 = 900 δραχ. Ἄρα : $E = \frac{900 \times 100}{10620}$ = 8,47 % περίπου.

§ **212. Πρόβλημα ΙΙΙ.** *Ἑκάστη ὁμολογία τοῦ δα...υ τῶν 300 ἑκατομμυρίων (5 %) ἔχει ὀνομαστικὴν ἀξίαν 200 ...χμῶν, ἡ δὲ τρέχουσα σήμερον ἀξία αὐτῶν εἶναι 113,50 δραχ. ...σα χρήματα πρέπει νὰ διαθέσῃ τις πρὸς ἀγορὰν τοιούτων ὁμο...ῶν, αἱ ὁποῖαι νὰ τῷ ἀποδίδωσιν ἐτήσιον τόκον 3000 δραχ ;*

*Λύσις.* Θὰ ἔχῃ τόκον 10 δραχ. ἀπὸ 113,50 δρ.

» » » 3000 » » χ

...ν χ = 113,50 × 300 = 34050 δραχ.

Πινάκιον

| | |
|---|---|
| ...ἀγορὰν 300 ὁμολογιῶν | 34050 δραχ. |
| ...μεσιτικὰ πρὸς 0 50 δρ. ἑκάστην. | 150 |
| Τὸ ὅλον | 34200 |

**213. Πρόβλημα IV.** *Πόσας ὁμολογίας τοῦ Α' ἀναγ...τικοῦ δανείου δύναταί τις νὰ ἀγοράσῃ μὲ 33100 δραχ. πρὸς ...70 δραχ ἑκάστου ;*

*Λύσις.* Διὰ μίαν ὁμολογίαν θὰ δόσῃ ἀξίαν 65,70 καὶ 0, 50 δρ. ...μεσιτείαν ἤτοι 66,20 δραχμάς. Ἄρα θὰ ἀγοράσῃ τὸν ὅλον ...00 : 66, 20=500 ὁμολογίας.

*Ἀσκήσεις.* 690) Ἠγόρασέ τις 80 ὁμολογίας τῶν 30 ἑκατ. ...%) πρὸς 68,30 δραχ. ἑκάστην. Πόσα χρήματα ἔδωκε τὸ ὅλον;

691) Πόσας ὁμολογίας τοῦ Β' ἀναγκαστικοῦ δανείου (6%) ἀγο...ει τις πρὸς 51,50 δραχ. ἑκάστην μὲ 52000 δραχμάς ; Καὶ πόσον ...ερδίζει ἐκ τῶν χρημάτων του ἀγοράζων τοιαύτας μὲ τὴν ῥηθεῖσαν ...ὴν λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ ἐπιτόκιον κατεβιβάσθη εἰς 4, 5% ;

692) Θέλει τις νὰ ἀγοράσῃ τόσας ὁμολογίας τοῦ Α' Ἀναγκαστι... δανείου (6, 5%) πρὸς 65, 10 δραχ. ἑκάστην, ὥστε νὰ ἔχῃ ἀπὸ

αὐτὰς ἐτήσιον τόκον 9750 δραχ. Πόσα χρήματα θὰ διαθέσῃ
τὴν ἀγοράν του λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ ἐπιτόκιον ὑπε
σθη εἰς 4,875%;

693) Ἠγόρασέ τις 200 μετοχὰς τῆς ἑταιρείας οἴνων καὶ
πνευμάτων πρὸς 560 δραχ. ἑκάστην, ἐπλήρωσε δὲ καὶ μεσι
1 δραχμὴν δι' ἑκάστην Ἐπειδὴ δὲ δὲν εἶχεν ὅλα τὰ χρήματα
νείσθη 50000 δραχμὰς πρὸς 12% ἐτησίως. Μετὰ 2 μῆνας
λησε τὰς μετοχὰς ταύτας πρὸς 592 δραχμὰς ἑκάστην καὶ ἐ
πάλιν τὴν ἰδίαν μεσιτείαν. Ἐπλήρωσε δὲ κατὰ τὴν ἀγορὰ
πώλησιν φόρον 400 δραχ. Πόσον ἐκέρδισε;

## Προβλήματα μερισμοῦ ἀριθμῶν εἰς μέρη ἀνάλ ἢ ἀντίστροφα πρὸς δοθέντας ἀριθμούς.

§ **214. Ἀριθμοὶ ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους.** Οἱ
μοὶ $3\times4=12,\ 5\times4=20,\ 6\times4=24.$ (

γίνονται ἀπὸ τοὺς 3,5,6, διὰ πολ)σμοῦ αὐτῶν ἐπὶ 4. Λέ
δὲ οὗτοι *ἀνάλογοι* πρὸς τοὺς 3,5,6.

Ἐπίσης, ἐπειδὴ $12\times\frac{1}{4}=3,\ 20\times\frac{1}{4}=5$ καὶ $24\times\frac{1}{4}$ =

καὶ οἱ 3,5,6 λέγονται ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 12, 20, 24.

*Γενικῶς : Ἀριθμοί τινες λέγονται ἀνάλογοι πρὸς ἄλλου
ρίθμους, ἂν γίνωνται ἀπὸ αὐτοὺς διὰ πολ)σμοῦ ἐπὶ τὸν
ἀριθμόν.*

Οἱ ἐξ ἀλλήλων διὰ πολ)σμοῦ προκύπτοντες ἀριθμοὶ λέ
*ὁμόλογοι ἢ ἀντίστοιχοι ἀριθμοί.* Π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 12 καὶ 3,
5, 24 καὶ 6 εἶναι ὁμόλογοι.

Ἐπειδὴ ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) προκύπτουσιν αἱ

$$12:3=4,\ 20:5=4,\ 24:6=4.$$

καὶ ἐκ τῶν (2) προκύπτουσιν αἱ (1) συμπεραίνομεν ὅτι :

*Ἂν ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἰσαρίθμους,
τῶν ὁμολόγων ἀριθμῶν εἶναι δι' ὅλους ὁ αὐτός. Καὶ ἀντιστ*

Κατὰ ταῦτα, διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι ἀριθμοὶ χ,ψ,ω εἶν
λογοι πρὸς ἄλλους α,β,γ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν ὅτ
γοι τῶν ὁμολόγων ἀριθμῶν εἶναι ἴσοι, ἤτοι $\frac{\chi}{\alpha}=\frac{\psi}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma}$

ἢ καὶ $\frac{\alpha}{\chi}=\frac{\beta}{\psi}=\frac{\gamma}{\omega}.$

§ **215. Πρόβλημα I.** *Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 40 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 5.*

*Λύσις.* Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ 2,3,5 ἔχουσιν ἄθροισμα 10. Ἐὰν ἑπομένως μερίσωμεν τὸν 10 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς 2, 3, 5, τὰ μέρη αὐτοῦ θὰ εἶναι 2,3,5. Ἐὰν μερίσωμεν τὸν 1, τὰ μέρη θὰ εἶναι $\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{5}{10}$. Ἤδη, ὅτε πρόκειται νὰ μερισθῇ ὁ 40, τὰ μέρη αὐτοῦ θὰ εἶναι $\chi=\frac{2\times40}{10}=8$, $\psi=\frac{3\times40}{10}=12$, $\omega=\frac{5\times40}{10}=20$.

Ἂν ἀριθμὸν Α μερίσωμεν εἰς μέρη χ,ψ,ω ἀνάλογα πρὸς τοὺς α,β,γ θὰ εἶναι $\chi=\frac{A.\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}, \psi=\frac{A.\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, \omega=\frac{A.\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$.

Ἄρα: *Διὰ νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς δοθέντας ἀριθμούς, πολ]ζομεν τὸν μεριστέον ἐπὶ ἕκαστον τῶν ἄλλων δοθέντων ἀριθμῶν καὶ τὰ γινόμενα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.*

Ἂς μερίσωμεν τώρα τὸν 40 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς $2\times4$, $3\times4$, $5\times4$. Κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα τὰ μέρη αὐτοῦ εἶναι

$$\chi'=\frac{40\times2\times4}{(2\times4)+(3\times4)+(5\times4)}=\frac{40\times2\times4}{(2+3+5)\times4}=\frac{40\times2}{10}=\chi,$$

$$\psi'=\frac{40\times3\times4}{(2+3+5)\times4}=\frac{40\times3}{10}=\psi \text{ καὶ } \omega'=\frac{40\times5\times4}{(2+3+5)\times4}=\omega.$$

*Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τὰ μέρη τοῦ μεριστέου ἀριθμοῦ δὲν βλάπτονται, ὅταν οἱ ἄλλοι δοθέντες ἀριθμοὶ πολ]σθῶσι πάντες ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Ἂν θέλωμεν νὰ μερίσωμεν τὸν 45 εἰς ἀνάλογα μέρη πρὸς τοὺς $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1$ δυνάμεθα νὰ πολ]σωμεν πάντας ἐπὶ 6 (ἐλ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν) καὶ νὰ μερίσωμεν τὸν 45 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς 4, 5, 6. Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν ὅτι

$$\chi=\frac{45\times4}{15}=12, \psi=\frac{45\times5}{15}=15, \omega=\frac{45\times6}{15}=18$$

***Ἀσκήσεις.*** 694) Νὰ μερισθῇ ἕκαστος ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 70, 60, 20, 100 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 5.

695) Νὰ μερισθῇ ἕκαστος ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{3}{4}$, 0,5, $\frac{40}{24}$ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς 5, 7, 8.

696) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 127 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{15}$.

697) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 182 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1, $\frac{11}{12}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{3}$.

698) Τρία παιδία ἔχουσι κατὰ σειρὰν ἡλικίαν 12, 13, 15 ἐτῶν καὶ πρόκειται νὰ μεταφέρωσι βάρος 10 ὀκάδων ἀναλόγως τῆς ἡλικίας των. Πόσας ὀκάδας θὰ μεταφέρῃ ἕκαστον ;

699) Πατὴρ ἀποθανὼν ἀφῆκε περιουσίαν 413000 δραχμῶν καὶ παρήγγειλε νὰ μοιρασθῇ αὕτη ὡς ἑξῆς. Ἡ σύζυγός του νὰ λάβῃ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μεριδίου τοῦ υἱοῦ της, οὗτος δὲ τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ μεριδίου τῆς ἀδελφῆς του. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος κληρονόμος ;

700) Ποσόν τι ἐμοιράσθη εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τρεῖς ἀριθμούς, ὧν ὁ γ' εἶναι 6, τὰ δὲ μέρη αὐτοῦ εἶναι κατὰ σειρὰν 6000, 10000, 12000. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοί.

701) Τρεῖς ἐργάται ἔλαβον διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἔργου 1540 δραχμάς. Ὁ α' εἰργάσθη 5 ἡμέρας, ὁ β' 7 ἡμέρας καὶ ὁ γ' 10 ἡμέρας. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος ;

702) Δύο ποιμένες ἐνοικίασαν χειμερινὸν λειβάδιον ἀντὶ 3900 δραχμῶν. Ὁ α' ἐβόσκησεν εἰς αὐτὸ 500 πρόβατα, ὁ δὲ β' 800 πρόβατα. Πόσον ἐνοίκιον πρέπει νὰ πληρώσῃ ἕκαστος ;

§ **216. Ἀριθμοὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους.** Οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{4} \times 24 = 6$, $\frac{1}{3} \times 24 = 8$, $\frac{1}{2} \times 24 = 12$ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$.

Ἐπειδὴ δὲ οὗτοι εἶναι ἀντίστροφοι τῶν 4,3,2, οἱ 6, 8, 12 λέγονται *ἀντιστρόφως ἀνάλογοι* πρὸς τοὺς 4, 3, 2.

*Γενικῶς : Ἀριθμοί τινες λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἰσαρίθμους, ἂν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους αὐτῶν.*

*Ἀσκήσεις* 703) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 27 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4.

704) Νὰ μερισθῇ ὁ 627 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$.

705) Πατὴρ ἀποθανὼν ἀφῆκεν 130000 δραχ. καὶ διέταξε διὰ ῆς διαθήκης νὰ μερισθῶσιν ὡς ἑξῆς. Ἡ σύζυγός του νὰ λάβῃ τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτῶν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον νὰ μερισθῇ εἰς τὰ τρία τέκνα των ἀντιτρόφως ἀναλόγως πρὸς τὰς ἡλικίας των. Τὸ α′ τέκνον των εἶναι 0 ἐτῶν, τὸ β′ 25 καὶ τὸ γ′ 20 ἐτῶν. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ άβῃ ἕκαστος κληρονόμος;

## Προβλήματα ἑταιρείας.

§ **217**. **Πρόβλημα I**. *Τρεῖς συνέταιροι κατέβαλον διὰ ιχείρησιν ὁ α′ 60000, ὁ β′ 45000 καὶ ὁ γ′ 35000 δραχ. Ἐὰν ἐπιχείρησις αὕτη ἔδωκε κέρδος 42000 δραχ, πόσον ἀπὸ αὐτὸ θὰ άβῃ ὁ καθείς;*

*Λύσις*. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι 1 δραχ. ἔφερε κέρδος κ δραχμάς, ὰ κέρδη αὐτῶν θὰ εἶναι κατὰ σειρὰν κ. 60000, κ. 45000, . 35000 δραχ. ἤτοι ἀνάλογα πρὸς τὰ κεφάλαια τῶν συνεταίρων. ρέπει λοιπὸν αἱ 42000 δραχ. νὰ μερισθῶσιν εἰς μέρη ἀνάλογα ρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 60000, 45000, 35000.

Ὥστε τὰ μερίδια α,β,γ τῶν συνεταίρων εἶναι

$$=\frac{42000\times 60000}{140000}=18000 \text{ δραχ.} \ \beta=13500 \text{ δραχ. καὶ } \gamma'=10500 \text{ δρχ.}$$

Ἄρα: *Ὅταν τὰ κεφάλαια εἶναι διάφορα, οἱ δὲ χρόνοι ἴσοι, τὸ έρδος (ἢ ἡ ζημία) μερίζεται εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ κεφάλαια.*

§ **218**. **Πρόβλημα II**. *Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν ὲ 25000 δραχ. Μετὰ 4 μῆνας προσέλαβε καὶ συνέταιρον, ὁ ὁποῖος ατέθεσεν 25000 δραχ. Μετὰ 2 μῆνας προσέλαβον καὶ γ′ καταέσαντα 25000 δραχ. Μετὰ ἓν ἔτος εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 22000 ραχ. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ἕκαστος;*

*Λύσις*. Τὸ κεφάλαιον ἑκάστου ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν κατὰ ιρὰν 18, 14, 12 μῆνας. Ἐὰν δὲ εἰς ἕνα μῆνα ἕκαστος κερδίζῃ δραχ, τὰ κέρδη αὐτῶν θὰ εἶναι κατὰ σειρὰν κ.18, κ.14, κ.12 αχ. Πρέπει λοιπὸν αἱ 22000 δραχ. νὰ μερισθῶσιν εἰς μέρη ἀνάγα πρὸς τοὺς 18, 14, 12. Εἶναι ἑπομένως $\alpha=\frac{22000\times 18}{44}=9000$ αχ, $\beta=7000$ δραχ. καὶ $\gamma=600$ δρχ.

Ἄρα: *Ὅταν τὰ κεφάλαια εἶναι ἴσα, οἱ δὲ χρόνοι διάφοροι, τὸ έρδος ἢ ἡ ζημία μερίζεται εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς χρόνους ετρημένους μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.*

§ **219. Πρόβλημα III.** *Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχεί[ρησιν] μὲ 40000 δραχ. Μετὰ 6 μῆνας προσέλαβε συνέταιρον, ὁ ὁ[ποῖος] κατέθεσεν 50000 δραχ. Ἓν ἔτος βραδύτερον εὗρον ζημίαν 22[000] δραχ. Πόσον ἐζημιώθη ὁ καθείς ;*

*Λύσις.* Τὸ κεφάλαιον τοῦ α' ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 1[8 μῆ]νας, τοῦ δὲ β' 12 μῆνας. Ἐὰν δὲ 1 δραχ. κεφαλαίου φέρη [κατὰ] μῆνα ζημίαν κ δραχ., αἱ ζημίαι αὐτῶν θὰ εἶναι $\kappa \times 40000$[×18] καὶ $\kappa \times 50000 \times 12$ δραχ. Πρέπει λοιπὸν αἱ 22000 δραχμαὶ νὰ [με]ρισθῶσιν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς $40000 \times 18$ καὶ $50000$[×12].

Διάταξις τῆς πράξεως

| | |
|---|---|
| α'. $40000 \times 18 = 720000$ | $\alpha = \dfrac{22000 \times 720000}{1320000} = 1200$[0] |
| β'. $50000 \times 12 = \dfrac{600000}{1320000}$ | $\beta = \dfrac{22000 \times 600000}{1320000} = 1000$[0] |

Ἄρα : *Ὅταν καὶ τὰ κεφάλαια καὶ οἱ χρόνοι εἶναι διάφορ[οι, τὸ] κέρδος ἢ ἡ ζημία μερίζεται εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ γινόμενα [τῶν] κεφαλαίων ἐπὶ τοὺς ἀντιστοίχους χρόνους μετρημένους μὲ τὴν [αὐτὴν] μονάδα.*

Τὰ προηγούμενα προβλήματα λέγονται ὅλα *προβλήματα* [ἑται]*ρείας.*

*Γενικῶς : Προβλήματα ἑταιρείας καλοῦνται ἐκεῖνα, εἰς τὰ [ὁποῖα] ζητεῖται νὰ μερισθῇ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία μιᾶς ἐπιχειρήσε[ως με]ταξὺ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἀνέλαβον αὐτήν.*

Τὰ κεφάλαια εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα καὶ μένουσι τὸν αὐτὸν ἢ [δια]φόρους χρόνους εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Δι' αὐτὸ διακρίνονται τὰ [προ]βλήματα ταῦτα εἰς τὰ ἀνωτέρω τρία κυρίως εἴδη.

***Ἀσκήσεις.*** 706) Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμον ἑταιρείαν καὶ κα[τέθε]σαν ὁ α' 68000 δραχ, ὁ β' 82000 καὶ ὁ γ' 56000 δραχ. Μετὰ [...] χρόνον εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 30900 δραχ. Πόσον κέρδος θὰ λά[βῃ] καθείς ;

707) Τρεῖς ἔμποροι συνεταιρισθέντες κατέβαλον ὁμοῦ 1[...] δραχ. καὶ ἐκέρδισαν 56000 δραχ. Ἐκ τούτων ὁ α' ἔλαβε [...] δραχ, ὁ β' 17000 δραχ. καὶ ὁ γ' τὸ ὑπόλοιπον. Πόσον κεφ[άλαιον] κατέθεσεν ἕκαστος ;

708) Δύο συνέταιροι ἵδρυσαν ἐμπορικὸν οἶκον καταθέσα[ντες ὁ] μὲν α' 750000 δραχμὰς καὶ ὁ β' 500000 δραχ. Μετὰ 6 [...] προσέλαβον καὶ γ' συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσεν 600000

Ἓν ἔτος μετὰ ταῦτα εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 250000 δραχ. ἀπὸ τὰς ὁποίας ὁ α' λόγῳ διευθύνσεως τῆς ἑταιρείας θὰ λάβῃ πρὸ τῆς διανομῆς 10 %. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ὁ καθείς;

709) Πτωχεύσας ἔμπορος ἔχει ἐνεργητικὸν 25000 δραχμῶν καὶ ὀφείλει εἰς τὸν Α΄ πιστωτήν του 15000 δραχ. εἰς τὸν Β΄ 30000 δραχ. καὶ εἰς τὸν Γ΄ 5000 δραχ. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ ἕκαστος τούτων;

710) Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 40500 δραχ. Μετὰ 3 μῆνας προσέλαβε συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσε 40500 δραχμάς· μετὰ ἄλλους δὲ 3 μῆνας προσέλαβον καὶ γ΄, ὁ ὁποῖος κατέθεσε 40500 δραχ. Μετὰ ἕξ μῆνας διέλυσαν τὴν ἑταιρείαν μὲ ζημίαν 34000 δραχ. Πόσον ἐζημιώθη ὁ καθείς;

711) Δύο συνέταιροι ἐκέρδισαν ἐκ μιᾶς ἐπιχειρήσεως 20 % ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου των. Ὁ β΄ τούτων καταθέσας τὸ ἥμισυ τῶν χρημάτων τοῦ α΄ ἐκέρδισε 5640 δραχ. Πόσον κέρδος ἔλαβεν ὁ α΄ καὶ πόσον κεφάλαιον κατέθεσεν ἕκαστος;

712) Τρεῖς ἔμποροι ἔφερον μαζὶ ὑφάσματα ἐξ Ἀγγλίας, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἐκέρδισαν 30000 δραχ. Ὁ γ΄ ἔλαβεν ἐκ τοῦ κέρδους 5000 δραχμὰς καὶ εἶχε καταβάλει τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν χρημάτων τοῦ β΄, οὗτος δὲ εἶχε καταβάλλει τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν χρημάτων τοῦ α΄. Πόσα χρήματα κατέθεσεν ἕκαστος καὶ πόσον κέρδος ἔλαβεν ὁ α΄ καὶ β΄;

713) Τρεῖς συνέταιροι ἐκέρδισαν ἀπὸ μίαν ἐπιχείρησιν 98000 δραχ. Τὰ κεφάλαια αὐτῶν ἦσαν ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3 καὶ οἱ χρόνοι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 2, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ὁ καθείς;

## Προβλήματα μέσου ὅρου.

**§ 220. Πρόβλημα I.** *Ἠγόρασέ τις μίαν ὁμολογίαν τοῦ Α΄ ἀναγκαστικοῦ δανείου πρὸς 64 δραχ. Ἔπειτα ἠγόρασεν ἄλλην τοιαύτην πρὸς 62,50 δραχμὰς καὶ βραδύτερον ἄλλην πρὸς 60,10 δραχ. Μὲ ποίαν κοινὴν τιμὴν ἠδύνατο νὰ ἀγοράσῃ αὐτὰς μὲ τὰ αὐτὰ χρήματα;*

*Λύσις.* Ἡ ἀξία τῶν τριῶν ὁμολογιῶν εἶναι (64+62,50+60,10) δραχ. Ἐὰν δὲ ἠγοράζοντο μὲ τὴν αὐτὴν τιμὴν ὅλαι, ἡ τιμὴ ἑκάστης θὰ ἦτο $(64+62{,}50+60{,}10):3=62{,}20$ δραχ.

Ἡ κοινὴ αὕτη τιμὴ καλεῖται *ἀριθμητικὸν μέσον* ἢ *μέσος ὅρος* τῶν 64, 62,50 καὶ 60,10 δραχ

*Γενικῶς: Ἀριθμητικὸν μέσον ἢ μέσος ὅρος συγκεκριμένων καὶ ὁμοειδῶν ἢ ἀφῃρημένων ἀριθμῶν καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος δηλοῖ τὸ πλῆθος αὐτῶν.*

Ἡ χρῆσις τοῦ μέσου ὅρου εἶναι συνηθεστάτη εἰς τὴν στατιστικὴν καὶ τὰς Φυσικὰς Ἐπιστήμας.

***Ἀσκήσεις.*** 714) Γεωργὸς ἔσπειρεν ἔτος τι τρεῖς ἀγροὺς ἐκτάσεως 20 στρεμμάτων τὸ ὅλον. Ὁ α' ἀπέδωκε 920 ὀκ. σίτου, ὁ β' 1350 ὀκ. καὶ ὁ γ' 1410 ὀκάδες. Πόση εἶναι κατὰ μέσον ὅρον ἡ κατὰ στρέμμα ἀπόδοσις τῶν ἀγρῶν τούτων;

715) Διὰ νὰ εὕρῃ Φυσικός τις τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα ἔκαμε 5 σχετικὰ πειράματα. Κατὰ τὸ α' πείραμα εὗρε ταχύτητα 344 μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον, κατὰ τὸ β' 338,50μ, κατὰ τὸ γ' 342 10μ, κατὰ τὸ δ' 338,4μ. καὶ κατὰ τὸ ε' 337μ. Πόση εἶναι κατὰ μέσον ὅρον ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐν τῷ ἀέρι;

716) Εἰς μίαν πόλιν ἀπέθανον τὸν Ἰανουάριον ἔτους τινὸς 25 ἄτομα, τὸν Φεβρουάριον 20, τὸν Μάρτιον 24 καὶ τὸν Ἀπρίλιον 19. Πόσος εἶναι κατὰ τοὺς μῆνας τούτους ὁ μέσος ὅρος τῶν θανάτων κατὰ μῆνα;

717) Ἡ θερμοκρασία ἡμέρας τινὸς ἦτο 10°Κ τὴν 9ην π.μ. ὥραν, 10°,3 τὴν 10 π.μ, 10°,4 τὴν 11π.μ., 10°,6 τὴν 12μ.μ, 11° τὴν 1ηνμ.μ, 11°,5 τὴν 2ανμ.μ, 11°,4 τὴν 3ηνμ.μ, 11°,3 τὴν 4ην μ.μ. καὶ 10°'8 τὴν 5ηνμ.μ. Πόση ἦτο κατὰ μέσον ὅρον ἡ θερμοκρασία κατὰ τὰς ὥρας ταύτας τῆς ἡμέρας ἐκείνης;

718) Τὸ ὕψος τῆς καταπεσούσης βροχῆς εἴς τινα χώραν ἦτο ἔτος τι 0,0599μ, τὸ ἑπόμενον ἔτος 0,0734μ. καὶ τὸ γ' ἔτος 0,0209μ. Πόσος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τοῦ ὕψους τῆς καταπεσούσης βροχῆς κατὰ τὰ τρία ταῦτα ἔτη;

## Προβλήματα μείξεως καὶ κραμμάτων.

§ **221. Πρόβλημα I.** (α' εἴδους). *Οἰνέμπορος ἀνέμιξε 500 ὀκάδας οἴνου τῶν 5 δραχμῶν τὴν ὀκᾶν, μὲ 300 ὀκάδας οἴνου τῶν 5,80 δραχμῶν τὴν ὀκᾶν. Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος;*

*Λύσις.* Τὸ α' εἶδος τιμᾶται 5 δραχ×500=2500 δραχ.
» β' » » 5,80 ×300=1740 »

Ἄρα τὸ μῖγμα τιμᾶται 4240 » καὶ

ἐπομένως κάθε ὀκᾶ τοῦ μίγματος τιμᾶται 4240 : 800=5,30δραχ.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδεται τὸ πλῆθος τῶν ὁμοειδῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι ἀναμιγνύονται ἀπὸ κάθε εἶδος καὶ ἡ τιμὴ μιᾶς τοιαύτης μονάδος ἀπὸ κάθε εἶδος. Ζητεῖται δὲ ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος τοῦ μίγματος ὁμοειδοῦς πρὸς ἐκείνας.

*Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ ταύτην, διαιροῦμεν τὴν τιμὴν τοῦ μίγματος διὰ τοῦ πλήθους τῶν μονάδων αὐτοῦ.*

***Ἀσκήσεις***. 719) Ἀλευρέμπορος ἀνέμιξε 650ὀκ. ἀλεύρου τῶν 4δραχ. τὴν ὀκᾶν μὲ 350ὀκ. ἄλλου ἀλεύρου τῶν 6,60δραχ. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος ;

720) Παντοπώλης ἀνέμιξε 200ὀκ. ἐλαίου τῶν 24δραχ. τὴν ὀκᾶν μὲ 100ὀκ. τῶν 30δραχ. καὶ μὲ 150ὀκ. τῶν 20δρ. Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος ;

721) Οἰνοπώλης ἀνέμιξεν 60 ὀκάδας οἴνου τῶν 6 δραχμῶν μὲ 40 ὀκ. τῶν 4 δραχ. Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος καὶ πόσον πρέπει νὰ πωλῇ ταύτην, ὅπως κερδίζῃ 15 % ἐπὶ τῆς ἀξίας της ;

722) Μὲ 1200 ὀκ. οἴνου τῶν 6,20 δραχμῶν ἀνέμιξεν οἰνοπώλης 150 ὀκ. ὕδατος. Πόσον κοστίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος ;

723) Μὲ 800 ὀκ. οἴνου τῶν 4 δραχ. ἀνέμιξέ τις 200 ὀκ. ἄλλου οἴνου καὶ ἀπετέλεσε μῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 4,25 δραχ. Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ β' εἴδους ;

724) Παντοπώλης εἶχε 1200 ὀκάδας οἴνου, ὅστις ἐκόστιζε 4,80 δραχ. τὴν ὀκᾶν, ἀνέμιξε δὲ μὲ αὐτὸν 200 ὀκ. ὕδατος. Πόσον % κερδίζει, ἂν πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος εἰς τὴν αὐτὴν τιμήν;

**§ 222. Πρόβλημα ΙΙ.** *Χρυσοχόος συνέτηξε 6 γραμμάρια κράμματος χρυσοῦ βαθμοῦ καθαρότητος 0,920 μὲ 10 γραμμάρια ἄλλου χρυσοῦ κράμματος βαθμοῦ καθαρότητος 0,840 καὶ 20 γραμμάρια τρίτου εἴδους χρυσοῦ κράμματος βαθμοῦ καθαρότητος 0,834. Πόσος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ νέου κράμματος ;*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Λύσις*. Τὰ | 6 γρ. | τοῦ α' | ἔχουσι | 0,920 × 6 = 5,52 | γρ. | καθ. χρ. |
| | » 10 » | » β' | » | 0,840 ×10 = 8,40 | » | » » |
| καὶ τὰ | » 20 » | » γ' | » | 0,834 ×20 =16,68 | » | » » |
| Ἄρα | » 36 » | » κράμματος | ἔχουσι | 30,60 | γρ. | » » |

Εἰς κάθε λοιπὸν γραμμάριον τοῦ κράμματος θὰ εἶναι 30,60 : 36=0,850 γρ. καθαρὸς χρυσός, ἤτοι ὁ τίτλος τοῦ τελικοῦ κράμματος εἶναι 0,850.

***Ἀσκήσεις***. 725) Χρυσοχόος συνέτηξε 50 γραμμάρια ἀργυροῦ κράμματος τίτλου 0,830 μὲ 10 γραμμάρια ἄλλου ἀργυροῦ κράμματος τίτλου 0,878. Πόσος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ ἐξ αὐτῶν ἀποτελεσθέντος νέου κράμματος;

726) Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ βάρος τῶν ἀργυρῶν νομισμάτων τῆς Λατινικῆς νομισματικῆς συμβάσεως ἀντιστοιχεῖ 5 γραμμάρια πρὸς ἀξίαν ἑνὸς φράγκου. Ἐὰν συντήξωμεν 3 ἀργυρᾶ πεντάδραχμα, 5 δίδραχμα καὶ 10 φράγκα, πόσος θὰ εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράμματος αὐτῶν;

727) Χρυσοχόος συνέτηξε 5 χιλιόγραμμα κράμματος χρυσοῦ τίτλου 0,920 μὲ 3 χιλιόγραμμα ἄλλου χρυσοῦ κράμματος τίτλου 0,840 καὶ μὲ 4 χιλιόγραμμα τρίτου χρυσοῦ κράμματος τίτλου 0,750. Πόσος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ νέου κράμματος αὐτῶν;

728) Τεμάχιον ἀργυροῦ κράμματος ἔχει βάρος 6,24 χιλ. καὶ τίτλον 0,950, ἕτερον ἔχει βάρος 5,705 χιλ. καὶ τίτλον 0,842 καὶ τρίτον ἔχῃ βάρος 10,5 χιλιόγρ. καὶ τίτλον 0,740. Ἐὰν συντήξωμεν πάντα ταῦτα καὶ μετ' αὐτῶν 1 χιλιόγραμμον καθαροῦ ἀργύρου, πόσος θὰ εἶναι ὁ τίτλος τοῦ νέου αὐτῶν κράμματος;

§ **223. Πρόβλημα III.** (β' εἴδους μείξεως). *Ἔχει τις δύο εἴδη οἴνου· τοῦ α' ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 6,20 δραχ, τοῦ δὲ β' 5,40 δραχ. Πόσας ὀκάδας πρέπει λάβῃ ἀπὸ κάθε εἶδος διὰ νὰ κάμῃ μῖγμα 1600 ὀκ. ἀξίας 6 δραχ. τὴν ὀκᾶν;*

*Λύσις.* Ἑκάστη ὀκᾶ τοῦ α' εἴδους πωλουμένη εἰς τὸ μεῖγμα φέρει ζημίαν 20 λεπ, ἐν ᾧ ἑκάστη τοῦ β' φέρει κέρδος 60 λ. Ἐὰν ἐλάμβανεν 60 ὀκ. ἐκ τοῦ α' θὰ εἶχε ζημίαν $(20 \times 60)$ λ. Ἐὰν δὲ ἐλάμβανεν 20 ὀκ. ἀπὸ τὸ β', θὰ εἶχε κέρδος $(60 \times 20)$. Ἐπειδὴ δὲ $20 \times 60 = 60 \times 20$, οὔτε θὰ ἐκέρδιζεν οὔτε θὰ ἐζημιώνετο.

Διὰ μεῖγμα λοιπὸν 80 ὀκ. θὰ λάβῃ 60 ὀκ. ἐκ τοῦ α'
» » 1600 » » » χ » » »

ὅθεν $\chi = \dfrac{1600 \times 60}{80} = 1200$ ὀκ. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἐκ τοῦ β' εἴδους θὰ λάβῃ $\psi = \dfrac{1600 \times 20}{80} = 400$ ὀκ.

| Διάταξις πράξεως | | | | Ἀναλογία |
|---|---|---|---|---|
| Τιμὴ 1 ὀκ. α' εἴδους 6,20 | > | | 60λεπ κέρδ | 60 ὀκ. α'. μὲ |
| » 1 » μίγματος . . | | 6 | | |
| » 1 » β' εἴδους 5,40 | | < | 20λεπ.ζημία | $\frac{20}{80}$ » β'. |

$\chi = \dfrac{1600 \times 60}{80} = 1200$ὀκ., $\psi = \dfrac{1600 \times 20}{80} = 400$ὀκ.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδεται ἡ ἀξία ὡρισμένης μονάδος ἑκα-
ου τῶν εἰδῶν, τὰ ὁποῖα πρόκειται νὰ ἀναμίξωμεν καὶ ἡ ἀξία
ς ὁμοειδοῦς πρὸς ἐκείνας μονάδος τοῦ μείγματος. Ζητεῖται δὲ
ας τοιαύτας μονάδας πρέπει νὰ λάβωμεν ἀπὸ κάθε εἶδος, διὰ
ἀποτελέσωμεν μεῖγμα, τὸ ὁποῖον περιέχει δοθὲν πλῆθος τοιού-
μονάδων.

*Ἀσκήσεις*. 729) Οἰνοπώλης ἔχει δύο εἴδη οἴνου· τοῦ α' ἡ ὀκᾶ
τίζει 7,40δραχ. τὴν ὀκᾶν, τοῦ δὲ β' 6,20δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας
δας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ κάθε εἶδος, διὰ νὰ κάμῃ μῖγμα 2800
δων, τὸ ὁποῖον νὰ κοστίζῃ 7 δραχ. τὴν ὀκᾶν;

730) Παντοπώλης ἔχει δύο εἴδη ἐλαίου· τοῦ α' ἡ ὀκᾶ κοστίζει
δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ τοῦ β' 20 δραχ. Πόσας ὀκάδας τοῦ α' εἴ-
ς πρέπει νὰ ἀναμίξῃ μὲ 500ὀκ. τοῦ β', ὥστε ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγμα-
νὰ κοστίζῃ 23 δραχμάς;

731) Παντοπώλης ἔχει ἔλαιον, τὸ ὁποῖον κοστίζει 26 δραχ. καὶ
ιο, τὸ ὁποῖον κοστίζει 22 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας πρέ-
νὰ λάβῃ ἀπὸ κάθε εἶδος, διὰ νὰ κάμῃ μεῖγμα 1500ὀκ, τὸ ὁποῖον
πωλῇ πρὸς 28 δραχ. διὰ νὰ κερδίζῃ 20% ἐπὶ τοῦ κόστους;

732) Οἰνοπώλης ἔχει 800ὀκ. οἴνου, ὁ ὁποῖος κοστίζει 6,20 δρχ.
ν ὀκᾶν. Πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ ἀναμίξῃ μὲ αὐτόν, ὥστε πωλῶν
ν ὀκᾶν τοῦ μείγματος πρὸ 5,50 δραχ. νὰ κερδίζῃ 0,54 δραχ. ἀπὸ
θε ὀκᾶν τοῦ μείγματος;

733) Παντοπώλης ἀνέμιξε 600ὀκ. ἐλαίου τῶν 25δραχ. τὴν ὀκᾶν
200 ὀκ. ἄλλου ἐλαίου. Οὕτω δὲ ἐσχημάτησε μεῖγμα, τὸ ὁποῖον ἐκό-
ιζε 23,75 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον ἐτιμᾶτο ἡ ὀκᾶ τοῦ β' εἴδους;

734) Οἰνοπώλης ἐπώλει τὸν οἶνον του πρὸς 5,40 δραχ. τὴν
ᾶν. Ἄλλος γείτων αὐτοῦ εἶχε 400 ὀκ. οἴνου, ὁ ὁποῖος τοῦ ἐκό-
ιζε 5,59 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ ἀναμίξῃ μὲ
τόν, ὥστε νὰ πωλῇ καὶ αὐτὸς τὴν ὀκᾶν, ὅσον ὁ γείτων του καὶ
κερδίζῃ 0,20 δραχ. κατ' ὀκᾶν;

735) Ἀνέμιξέ τις 250 ὀκ. βουτύρου ἀξίας 90 δραχ. τὴν ὀκᾶν
λῖπος ἀξίας 40 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πωλήσας δὲ τὸ μεῖγμα πρὸς
)0 δραχ τὴν ὀκᾶν ἐκέρδισε 3700 δραχ. Πόσας ὀκάδας λίπους
αλεν;

736) Ἔχει τις δύο εἴδη οἴνου· τοῦ α' ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 6,10 δραχ.
ο δὲ β' 5,20δραχ. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου
δους διὰ νὰ ἀποτελέσῃ μεῖγμα 800 ὀκ, τὸ ὁποῖον νὰ πωλήσῃ
ονδρικῶς πρὸς 6,645 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ νὰ κερδίσῃ 20% ἐπὶ
ῆς ἀξίας του;

§ **224. Πρόβλημα IV.** *Χρυσοχόος ἔχει 2 κράμμα χρυσοῦ. Τὸ α΄ ἔχει τίτλον 0,920 καὶ τὸ β΄ 0,880. Πόσον πρέπει λάβῃ ἀπὸ τὸ καθ' ἓν, διὰ νὰ κάμῃ νέον κράμμα 50 γραμ. κ τίτλου 0,896;*

*Λύσις.* Ἀπὸ 1 γραμ. τοῦ α΄ εἴδους, ὅταν εἰσαχθῇ εἰς τὸ νέ κράμμα, περισσεύει καθαρὸς χρυσὸς 0,920 − 0,896 = 0,024 γρα Ἀπὸ 1 δὲ γραμμάριον τοῦ β΄ λείπει 0,896 − 0,880 = 0,016 γρ καθαροῦ χρυσοῦ. Ἂν ἑπομένως λάβῃ 16 γρ. ἀπὸ τὸ α΄, θὰ π ρισσεύῃ χρυσὸς 0,024 × 16 γραμ. Ἂν δὲ λάβῃ 24 γραμ. ἀπὸ τὸ θὰ λείπωσι 0,016 × 24.

Ἐπειδὴ δὲ 0,024 × 16 = 0,016 × 24, ἕπεται ὅτι οὔτε θὰ λείπ οὔτε θὰ περισσεύῃ καθαρὸς χρυσός.

Ὥστε διὰ κράμμα 40 γρ. θὰ θέσῃ 16 γρ. ἀπὸ τὸ α΄
» » 50 » » » χ » » »

ὅθεν
$$\chi = 16 \times \frac{50}{40} = 20 \text{ γραμ.}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἀπὸ τὸ β΄ θὰ λάβῃ $24 \times \frac{50}{40} = 30$ γραμ.

Διάταξις πράξεως

0,920 > 0,896 < 0,016 ἐλ.
0,800 0,024 περ.

Ἀναλογία

16 γρ. τοῦ α΄ μὲ
24 » » β΄
40

ἄρα $\chi = \frac{50 \times 16}{40} = 20$ γραμ. καὶ $\psi = \frac{50 \times 24}{40} = 30$ γραμ.

***Ἀσκήσεις.*** 737) Χρυσοχόος ἔχει δύο κράμματα ἀργύρου. Τ α΄ ἔχει τίτλον 0,900 καὶ τὸ β΄ 0,870. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἀπ τὸ καθ' ἓν διὰ νὰ κάμῃ νέον κράμμα βάρους 30 γραμ. κα τίτλον 0,890;

738) Χρυσοχόος συνέτηξε 50 γραμ. χρυσοῦ κράμματος τίτλου 0,920 μὲ ἄλλο κράμμα τίτλου 0,900. Οὕτω δὲ ἀπετέλεσε νέο κράμμα τίτλου 0,9125. Πόσον ἔθεσεν ἀπὸ τὸ β΄ κράμμα;

739) Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ βάρος τῶν ἀργυρῶν νομισμάτων τῆς Λατινικῆς νομισματικῆς συμβάσεως ἀντιστοιχεῖ 5 γραμμάρια εἰς ἀξίαν ἑνὸς φράγκου. Ἐὰν λοιπὸν συντήξωμεν 3 ἀργυρᾶ πεντάδραχμα, καὶ 5 δίδραχμα μὲ τεμάχιον καθαροῦ ἀργύρου, πόσον πρέπε νὰ εἶναι τὸ βάρος τούτου, διὰ νὰ ἀποτελεσθῇ κράμμα τίτλου 0,910;

# ΒΙΒΛΙΟΝ ΣΤ΄.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

### ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ

§ **223. Ὁρισμοί.** Ἐμάθομεν (§ 76) ὅτι $3^2 = 3 \times 3 = 9$, $5^2 = 5 \times 5 = 25$. Ὁ 3 ἔχων τετράγωνον τὸν 9 λέγεται *τετραγωνικὴ ρίζα* τοῦ 9 καὶ σημειοῦται οὕτω $\sqrt{9}$.

Ὥστε $\sqrt{9} = 3$. Ὁμοίως εἶναι $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{81} = 9$ κτλ.

Γενικῶς : *Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει αὐτὸν ὡς τετράγωνον.*

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶναι τετράγωνα ἄλλων, λέγονται *τέλεια τετράγωνα*. Τοιοῦτοι π. χ. εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 4, 9, 16 κτλ. Ὁ ἀριθμὸς 42 δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Τὸ ἀμέσως μικρότερον αὐτοῦ τέλειον τετράγωνον εἶναι ὁ 36. Οὗτος ἔχει τετρ. ρίζαν 6.

Ὁ 6 λέγεται καὶ *τετραγ. ρίζα* τοῦ 42 *κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος*.

Γενικῶς : *Τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἀκεραίου ἀριθμοῦ καλεῖται ἡ τετρ. ρίζα τοῦ ἀμέσως μικροτέρου αὐτοῦ τελείου τετενώνου*

γούμεν θυμούμενοι τὰ τετράγωνα τῶν μικροτέρων τοῦ 10 ἀριθμῶν
εν ἀμέσως τὴν ἀκριβῆ ἢ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μο·
Ἀπὸ ρίζαν τῶν μικροτερων τοῦ 100 ἀριθμῶν.

**5. Ἐξαγωγὴ τῆς τετρ. ρίζης ἀκεραίου**
ὁποῖος εἰν Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ *μῆκος*
*τετραγώνου, ὅπερ ἔχει ἐμβαδὸν 127449 τετρ. μέτρα.*
τετρ. ρίζα μεν ὅτι τὸ ζητούμενον μῆκος εἶναι χ, τὸ ἐμβαδὸν θὰ
π ὰ εἶναι $\chi^2 = 127449$. Ὁ ἀριθμὸς χ ἔχει λοι-
Γενικῶς : *Τετρ. ρίζα* 9 καὶ ἑπομένως εἶναι ἡ $\sqrt{127449}$, ἤτοι
***τὸ μεγαλύτερον ἀπὸ τὰ κλάι*** ρίζαν τοῦ 127449.
***10 καὶ τῶν ὁποίων τὰ τετ***ξαγωγὴ τῆς τετρ. ρίζης τοῦ 127449,
***τοῦτον.***

**Διὰ νὰ εὕρωμεν π. χ. τὴν** 00 Γ') κανό 28 ομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων καὶ διαιροῦμεν πάν τας τοὺς ἐκθέτας αὐτῶν διὰ 2, ἂν εἶναι ὅλοι ἄρτιοι. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $127449 = 3^2 \times 7^2 \times 17^2$ καὶ $\sqrt{127449} = 3 \times 7 \times 17 = 357$.

Β΄). Χωρίζομεν αὐτὸν ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ εἰς διψήφια τμήματα, (τὸ α΄ πρὸς τὰ ἀριστερὰ δυνατὸν νὰ εἶναι καὶ μονοψήφιον). Εὑρίσκομεν ἔπειτα τὴν τετρ. ῥίζαν τοῦ 12, ἥτις εἶναι 3 (κατὰ προσέγγισιν ἀκ.μ.). Τὸ εὑρεθὲν ψηφίον 3 εἶναι τὸ α΄ ψηφίον τῆς ζητουμένης τετρ. ῥίζης, γράφεται δὲ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 12 τὸν $3^2$ καὶ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 3 καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον διψήφιον τμῆμα 74. Τοῦ ἀριθμοῦ 374 χωρίζομεν τὰς μονάδας, τὰς δὲ δεκάδας 37 διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ 3 ἤτοι διὰ τοῦ 6. Τὸ πηλίκον 6 γράφομεν δεξιὰ τοῦ 6, συγχρόνως δὲ καὶ ὑποκάτω καὶ εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον $66 \times 6 = 396$.

Ἐπειδὴ τοῦτο δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 374, δοκιμάζομεν οὕτω τὸν ἀμέσως μικρότερον ἀκέραιον 5· ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον $65 \times 5 = 325$ ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 374, τὸ β΄ ψηφίον τῆς τετρ. ῥίζης εἶναι 5 καὶ γράφομεν αὐτὸ δεξιὰ τοῦ α΄ 3.

Ἀφαιροῦμεν ἔπειτα τὸ γινόμενον 325 ἀπὸ τοῦ 374 καὶ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 49 καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον διψήφιον τμῆμα 49· οὕτω δὲ προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 4949. Τούτου χωρίζομεν τὰς μονάδας, τὰς δὲ δεκάδας διαιροῦμεν διὰ τοῦ $35 \times 2$ ἤτοι διὰ τοῦ 70. Τὸ πηλίκον 494 : 70 ἤτοι 7 γράφομεν δεξιὰ τοῦ 70, συγχρόνως δὲ καὶ ὑποκάτω καὶ εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον $707 \times 7 = 4949$, ὅπερ ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 4949 καὶ ἀφήνει ὑπόλοιπον 0.

Τὸ 7 εἶναι λοιπὸν τὸ γ΄ ψηφίον τῆς ῥίζης καὶ γράφε[ται δε]ξιὰ τοῦ 5. Οὕτως εὑρέθη ὅτι $\sqrt{127449} = 357$.

Διάταξις τῆς πρά[ξεως]

| | |
|---|---|
| 12/74/62 | 357 |
| 9 | 65 |
| 37/4 | 5 |
| 325 | 325 |
| 496 | |

Ἂν ἐπρόκειτο νὰ εὕρωμεν τὴν $\sqrt{127462}$ θὰ εὑρίσκομεν 357 καὶ θὰ ἔμεινεν ὑπόλοιπον 13. Εἶναι λοιπὸν ὁ 357 τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος τοῦ 127462.

Πρὸς βεβαίωσιν εὑρίσκομεν τὸ $357 \times 357 = 127449$ καὶ προσθέτομεν εἰς αὐτὸ τὸ ὑπόλοιπο[ν ...] θέντα ἀριθμὸν [1]462

ρου. Τ
λάδῃ ἀπ
) γραμ. κα
ιματος τίτλο
πετέλεσε νέ
ιμα ;
ρ, ομισμάτων τῆ
ιστοιχεῖ 5 γραμμάρια ε
ήξωμεν 3 ἀργυρᾶ πεντάδρα
ιθαροῦ ἀργύρου, πόσον πρέπε
τελεσθῇ κράμμα τίτλου 0,910

ΣΗΜ. Ἂν πηλίκον τι τῶν ἐκτελουμένων διαιρέσεων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 9, ἀρχίζομεν τὰς δοκιμὰς ἀπὸ τοῦ 9. Ἂν δὲ πηλίκον τι εἶναι 0, τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τῆς ῥίζης εἶναι 0.

Ἂν ὑπόλοιπόν τι εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ εὑρεθέντα ψηφία τῆς τετραγ. ῥίζης, τὸ τελευταῖον ἀπὸ τὰ ψηφία ταῦτα εἶναι μικρότερον τοῦ ἀληθοῦς καὶ πρέπει νὰ αὐξηθῇ ἀνὰ μίαν, μίαν 1, μέχρις οὗ ἐπιτύχωμεν τὸ ἀληθές.

*Ἀσκήσεις*. 740) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετρ. ῥίζα τῶν ἀριθμῶν 729, 3969, 6604, 11286, 82369, 1435104,

741) Νὰ εὑρεθῇ ἡ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος τετρ. ῥίζα τῶν ἀριθμῶν 372, 2370, 9248, 37102, 4367280.

742) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολ]όμενος ἐπὶ τὸ τέταρτον αὐτοῦ δίδει 729.

743) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος διὰ τοῦ ἀντιστρόφου του δίδει πηλίκον 2601.

## § 227. Τετρ. ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$.

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 2. Ἂν σχηματίσωμεν τὰ τετράγωνα τῶν κλασμάτων $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, .... $\frac{14}{10}$, $\frac{15}{10}$, εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν $\frac{1}{100}$, $\frac{4}{100}$, ... $\frac{196}{100}$, $\frac{225}{100}$. Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους ὁ μὲν $\frac{225}{100} = 2{,}25$ εἶναι μεγαλείτερος τοῦ 2, οἱ δὲ προηγούμενοι ὅλοι εἶναι μικρότεροι τοῦ 2.

Ἀπὸ τούτους δὲ πάλιν μεγαλύτερος εἶναι ὁ $\frac{196}{100}$ ἢ 1,96, ὁ ὁποῖος εἶναι τετράγωνον τοῦ $\frac{14}{10}$ ἢ 1,4. Ὁ ἀριθμὸς 1,4 λέγεται τετρ. ῥίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$.

Γενικῶς: *Τετρ. ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ καλεῖται τὸ μεγαλύτερον ἀπὸ τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι παρονομαστὴν 10 καὶ τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα δὲν ὑπερβαίνουσι τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.*

Διὰ νὰ εὕρωμεν π. χ. τὴν τετρ. ῥίζαν τοῦ 28 κατὰ προσέγγισιν

$\frac{1}{10}$ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Πολ]ζομεν αὐτὸν ἐπὶ $10^2$ ἢ 100 καὶ τοῦ γινομένου 2800 εὑρίσκομεν τὴν κατὰ προσέγγισιν ἀκ. μονάδος τετρ. ῥίζαν 52. Ταύτην δὲ διαιροῦμεν διὰ 10 καὶ τὸ πηλίκον 5,2 εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα.

*Ἀσκήσεις*. 744) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ τῶν ἀριθμῶν 5, 8, 17, 43, 95, 105, 272, 840.

745) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ τῶν ἀριθμῶν 1451, 10860 103608.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

### ΑΠΛΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΛΥΟΜΕΝΑ ΔΙ' ΑΥΤΩΝ

§ **228. Πρόβλημα I.** *Δύο παιδία ἔχουσιν ὁμοῦ 21 βόλους, ἀλλὰ τὸ α' ἔχει διπλασίους ἀπὸ τὸ β'. Πόσους βόλους ἔχει τὸ καθέν;*

*Λύσις.* Ἂν τὸ β' ἔχῃ χ βόλους, τὸ α' θὰ ἔχῃ χ. 2 ἢ χ+χ βόλους καὶ τὰ δύο ὁμοῦ θὰ ἔχωσι χ+χ+χ ἢ χ.3.

Ἄρα πρέπει νὰ εἶναι $\quad χ.3=21. \qquad (1)$

Ἂν δὲ διαιρέσωμεν τοὺς ἴσους τούτους ἀριθμοὺς διὰ 3, εὑρίσκομεν (§ 65 Δ') ὅτι χ=7. Θὰ ἔχῃ λοιπὸν τὸ β' παιδίον 7 βόλους, τὸ δὲ α' 7×2=14 βόλους.

§ **229. Ἐξίσωσις.** Ἡ προηγουμένη ἰσότης (1) ἀληθεύει μόνον, ὅταν εἰς τὴν θέσιν τοῦ χ τεθῇ ὁ 7· λέγεται δὲ αὕτη *ἐξίσωσις*. Ὁ χ λέγεται ἄγνωστος τῆς ἐξισώσεως.

Ἡ ἐργασία, μὲ τὴν ὁποίαν εὕρομεν ὅτι ὁ χ πρέπει νὰ γίνῃ 7, διὰ νὰ ἀληθεύσῃ ἡ ἐξίσωσις, λέγεται *λύσις* τῆς ἐξισώσεως. Ὅπως δὲ εἴδομεν μαζὶ μὲ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπετύχομεν καὶ τὴν λύσιν τοῦ προταθέντος προβλήματος. Εἶναι λοιπὸν σπουδαιοτάτη ἡ γνῶσις τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων.

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν δὲ τὸν μηχανισμὸν τῆς λύσεως τῶν ἁπλουστέρων ἐξισώσεων, θὰ λύσωμεν ἀκόμη τὰ ἑπόμενα προβλήματα.

§ **230. Πρόβλημα II.** *Τὰ ταμεῖα ἐκδρομῶν τῶν τριῶν κατωτέρων τάξεων γυμνασίου ἔχουσιν ὁμοῦ 1860 δραχ. Τὸ ταμεῖον ὅμως τῆς β' τάξεως ἔχει 40 δραχ. περισσοτέρας ἀπὸ τὸ ταμεῖον τῆς α' καὶ τὸ ταμεῖον τῆς γ' τάξεως ἔχει 100 δραχ. περισσοτέρας ἀπὸ τὸ ταμεῖον τῆς β'. Πόσα χρήματα ἔχει τὸ ταμεῖον ἑκάστης τάξεως;*

*Λύσις.* Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ταμεῖον τῆς α' ἔχει χ δραχ., τὸ μεῖον τῆς β' θὰ ἔχῃ ($χ+40$) δραχ. καὶ τὸ ταμεῖον τῆς γ' θὰ ῃ ($χ+40+100$) δραχμάς. Ἑπομένως τὰ τρία ὁμοῦ ταμεῖα θὰ ωσι $χ\,3+180$ δραχ. Πρέπει λοιπὸν νὰ εἶναι $χ.3+180=1860$. ν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοὺς ἴσους τούτους ἀριθμοὺς τὸν 180, ρίσκομεν ὅτι $χ.3=1680$, ὅθεν $χ=560$. Ὥστε τὸ ταμεῖον τῆς α' ξεως ἔχει 560 δραχ, τῆς β' ἔχει $560+40=600$ δραχ. καὶ τῆς γ' $00+100=700$ δραχ.

**231. Πρόβλημα ΙΙΙ.** *Πατὴρ εἶναι 38 ἐτῶν, ὁ δὲ ὸς 6 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι τριπλα α ἀπὸ τὴν ἡλικίαν τοῦ υἱοῦ ;*

*Λύσις.* Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τοῦτο συμβαίνει μετὰ $χ$ ἔτη. Τότε πατὴρ θὰ ἔχῃ ἡλικίαν $38+χ$ ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς $6+χ$ Πρέπει λοιὸν νὰ εἶναι $38+χ=(6+χ).\ 3$.

Ἐπειδὴ δὲ $(6+χ).\ 3=18+χ.3$, ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις γίται $38+χ=18+χ.\ 3$ ὅθεν $20+χ=χ.3$ ἢ $20+χ=χ+χ+χ$ καὶ ομένως $20=χ+χ$ ἢ $20=χ.\ 2$. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $10=χ$. ὸ ζητούμενον λοιπὸν θὰ γείνῃ μετὰ 10 ἔτη. Πράγματι δὲ τότε ὁ ατὴρ θὰ εἶναι 48 ἐτῶν καὶ ὁ υἱὸς 16, εἶναι δὲ $48=16\times3$.

§ **232. Πρόβλημα IV.** *Ἐὰν ἀπὸ τὰ πρόβατα ποιμέ ς ἀφαιρεθῶσι 2 καὶ τετραπλασιασθῶσι τὰ ὑπόλοιπα, γίνονται 92 πρόβατα περισσότερα ἀπὸ ὅσα ἔχει. Πόσα πρόβατα ἔχει ;*

*Λύσις.* Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχει $χ$ πρόβατα, μετὰ τὴν ἀφαίρε ν τῶν 2, θὰ μείνωσι $χ-2$. Ἂν δὲ ταῦτα τετραπλασιασθῶσι, θὰ ίνωσι $(χ-2).\ 4$ Αὐτὰ πρέπει νὰ εἶναι $χ$ καὶ ἀκόμη 292, ἤτοι

$$χ+292.$$

Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $(χ-2).4=χ+292$.

Ἐπειδὴ δὲ $(χ-2).4=χ.4-8$, αὐτη γίνεται $χ.4-8=χ+292$. αὶ ἐπειδὴ ὁ μειωτέος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ οῦ ὑπολοίπου, ἕπεται ὅτι $χ.4=(χ+292)+8$. ἢ (§ 21Δ') $4=χ+300$, ὅθεν $χ.3=300$ καὶ $χ=100$.

**33. Πρόβλημα V.** *Οἰκοδεσπότης λαμβάνει ἀπὸ ίαν 2400 δραχ. ἐνοίκιον τὸν μῆνα. Εἶναι δὲ τὸ ἐνοίκιον ίου τὸ τρίτον τοῦ ἐνοικίου τοῦ ἄνω πατώματος. Πόσον αμβάνει ἀπὸ κάθε διαμέρισμα ;*

Ἂν ἀπὸ τὸ ἄνω πάτωμα λαμβάνῃ ἐνοίκιον $χ$ δραχ, γειον θὰ λαμβάνῃ $\frac{χ}{3}$ δραχ. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$χ+\frac{χ}{3}=2400.$$

Ἐὰν τοὺς δύο τούτους ἴσους πολ)σωμεν ἐπὶ 3, εὑρίσκομ

$$(\chi+\frac{\chi}{3}).3=7200, \text{ὅθεν } (\S\ 44,121)\chi.3+\chi=7200 \text{ ἢ } \chi.4=72$$

καὶ ἑπομένως $\chi=1800$. Λαμβάνει λοιπὸν ἀπὸ τὸ ἄνω πάτω 1800 δραχ. καὶ ἀπὸ τὸ ἰσόγειον $\frac{1800}{3}=600$ δραχ.

§ **34. Πρόβλημα VI.** *Ἐὰν ἀπὸ τὸ ἥμισυ ἀριθμ ἀφαιρέσωμεν 5, εὑρίσκομεν τὸ τέταρτον αὐτοῦ αὐξηθὲν κατὰ Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;*

*Λύσις.* Ἐὰν εἶναι χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός, τὸ ἥμισυ αὐτοῦ εἶ $\frac{\chi}{2}$, τὸ δὲ τέταρτον $\frac{\chi}{4}$. Ἑπομένως κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ π βλήματος εἶναι $\frac{\chi}{2}-5=\frac{\chi}{4}+5$. Ἐὰν δὲ πολ)σωμεν τοὺς ἴσ τούτους ἐπὶ τὸ ἐλ. κ. πολ. 4 τῶν παρονομαστῶν, εὑρίσκο

$$\left(\frac{\chi}{2}-5\right).4=\left(\frac{\chi}{4}+5\right).4, \text{ ἢ } \chi.\ 2-20=\chi+$$

Καὶ ἐπειδὴ ὁ μειωτέος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου τοῦ ὑπολοίπου, ἕπεται ὅτι $\chi.\ 2=(\chi+20)+20$, ἢ $\chi.2=\chi+$ ὅθεν $\chi=40$.

**Ἀσκήσεις.** 746) Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις $\chi+7=$ $2\chi+4=\chi+6$, $7\chi+3=6\chi+6$, $5\chi-1\ldots=5\chi+1\ldots$

747) Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις $3(\chi+1)=6$, $5(\chi-2)=3$ $24-(\chi+1)=19$, $7\chi-(\chi+1)=11$.

748) Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις $\frac{\chi}{2}+1=3$, $\frac{2\chi}{3}-1=$ $\frac{\chi}{2}+3=\frac{\chi}{3}+5$, $\frac{\chi}{2}-1=\frac{\chi}{5}+5$, $\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{4}=\frac{\chi}{2}-$

$$\frac{\chi}{5}-1=\frac{\chi}{4}+\frac{\chi}{2}-23.$$

749) Θέλει τις νὰ πληρώσῃ μὲ δίδραχμα καὶ τὸ αὐτὸ πλῆθος 45 δραχμάς. Πόσα δίδραχμα δραχμα θὰ δώσῃ;

750) Δύο παιδία ἔχουσι 48 βόλους, ἀλλὰ τὸ σίους ἀπὸ τὸ ἄλλο. Πόσους ἔχει κάθε παιδίον;

751) Μὲ 436,8 δραχμὰς ἠγόρασέ τις ἰσάριθμα 5, τῶν 8 καὶ τῶν 15 δραχμῶν. Πόσα ἠγόρασεν ἀ (Ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία ἐπιβαρύνεται μὲ 30 %).

752) Πατὴρ θελήσας νὰ δώσῃ ἀπὸ 4 μῆλα ε

§ 2. μίαν οἰκ. τοῦ ἰσογείου ἐνοίκιον τῶν Λύσις. τὸν τῆς ἴσος τὸ ιως

ὅτι τοῦ ἔλειπον 4 μῆλα. Ἔπειτα ἔδωκεν ἀπὸ 3 καὶ
ωσεν 1. Πόσα τέκνα εἶχεν;

Ἠγόρασέ τις μῆλα πρὸς 18 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ κυδώνια
δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἔδωκε τὸ ὅλον 170 δραχ. Ἦσαν δὲ τὰ
ὶ τὰ κυδώνια ὁμοῦ 12 ὀκ. Πόσαι ὀκάδες ἦσαν τὰ μῆλα
αι τὰ κυδώνια;

Τοκίσας τις τὸ ἥμισυ τῶν χρημάτων του πρὸς 8 % καὶ
ἥμισυ πρὸς 10 % λαμβάνει ἐτήσιον τόκον 7200. Πόσα
ματα ... ὁποῖα ἐτόκισεν;

... χρημάτων πρὸς 10 % καὶ ἄλλο πο-
... σου αὐτοῦ πρὸς 8 % ἐτησίως. Λαμβάνει δὲ
... ον μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν τόκον τοῦ β' κατὰ
... ατα ἐτόκισε πρὸς 10 % καὶ πόσα πρὸς 8 %;

... ροι ἐκέρδισαν ἀπὸ μίαν ἑταιρικὴν ἐπιχείρη-
... κεφάλαιον δὲ τοῦ β' ἦτο τὸ ἥμισυ τοῦ α' καὶ
... ἦτο τὸ ἥμισυ τοῦ β'. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ

Οἰνοπώλης ἔχει 350 ὀκ. οἴνου, ὁ ὁποῖος ἐκόστισεν 6 δραχ.
ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας ὕδατος πρέπει νὰ ἀναμίξῃ μὲ αὐτόν,
ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος κοστίζῃ 5 δραχμάς;

58) Ποιμὴν ἐρωτηθεὶς πόσα πρόβατα ἔχει ἀπήντησεν. Ἐὰν
τὸ ἥμισυ καὶ τὸ τέταρτον καὶ τὰ τρία πέμπτα τῶν προβά-
μου, θὰ εἶχον 39 περισσότερα, ἀπὸ ὅσα ἔχω. Πόσα πρόβατα
;

59) Ἔχει τις 30 γραμμάρια ἀργυροῦ κράμματος τίτλου 0,850.
ν καθαρὸν ἄργυρον πρέπει νὰ συντήξῃ μὲ αὐτό, ὅπως τὸ νέον
μα ἔχῃ τίτλον 0,900;

60) Λαχανοπώλης ἠγόρασε γεώμηλα, τὰ ὁποῖα τοῦ ἐκόστισαν
αχ. τὴν ὀκᾶν. Πωλήσας δὲ τὸ ἥμισυ αὐτῶν πρὸς 6 δραχ. αἱ
ἄλλας πρὸς 6,50 δραχ. τὴν ὀκᾶν ἐκέρδισεν 623 δραχ. Πόσας
ας ἦσαν τὰ γεώμηλα ταῦτα;

...ΕΛΟΣ

...ΦΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

ἀντὶ 684 νὰ γραφῇ 864
» ἀγοράσῃ » λάβῃ

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΝΙΚ. Δ. ΝΙΚΟ

1. **Θεωρητικὴ Ἀριθμητικὴ** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γ καὶ Πρακτικῶν Λυκείων. *Ἡ συντομωτέρα καὶ μεθοδικωτέρα*
2. **Στοιχειώδης Γεωμετρία** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γ καὶ Πρακτικῶν Λυκείων. Τὸ βιβλίον τοῦτο διακρίνεται διὰ το χεστάτους νεωτερισμούς, τὸ εὐμέθοδον καὶ τὸ πλῆθος τῶν στάτων ἀσκήσεων. Εἶναι *ἐγκεκριμένον* διὰ μίαν πενταετίαν σχολικοῦ ἔτους 1931—32. Ἔκδοσις Β΄.
3. **Μεγάλη Στοιχειώδης Γεωμετρία** πρὸς χρῆσιν τῶν ὑποψη τὰς ἀνωτάτας τοῦ Κράτους σχολάς. Ἔκδ. Α΄.
4. **Μεγάλη Στοιχειώδης Ἄλγεβρα** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθη Πρακτικῶν Λυκείων. Τὸ βιβλίον τοῦτο ἐπλήρωσε μέγα κενὸ παρ' ἡμῖν Μαθηματικὴν βιβλιοθήκην. Εἶναι δὲ οὐ μόν εἰς τοὺς ὑποψηφίους διὰ τὰς ἀνωτάτας τοῦ Κρα καὶ ἄριστον βοήθημα διὰ τοὺς διδάσκοντας.
5. **Στοιχεῖα Εὐθυγράμμου Τριγωνομετρίας** πρὸς χρῆ τῶν Γυμνασίων συντεταγμένα κατὰ τὰς τελευταίας ἀ δακτικῆς καὶ τῆς Μαθηματικῆς ἐπιστήμης. *Ἐγκεκρι*
6. **Εὐθύγραμμος Τριγωνομετρία** (μεγάλη) πρὸς χρῆσ τῶν Πρακτικῶν Λυκείων, τῶν σπουδαστῶν τῶν Μα σικῶν τ.τ.λ. Μοναδικὸν εἰς τὸ εἶδός του παρ' ἡμῖν εἶναι ἀπαραίτητον εἰς τοὺς ὑποψηφίους διὰ τὰς ἀνω τους σχολάς. *Ἡ μόνη ἐγκεκριμένη.*
7. **Συμπλήρωμα Γεωμετρίας** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν των Πρ Λυκείων καὶ πάντων τῶν περὶ τὰ Μαθηματικὰ ἀσχολουμένων. φορὰν ἐκδίδεται παρ' ἡμῖν τοιοῦτον βιβλίον.
8. **Στοιχειώδης ἐπίπεδος Ἀναλυτικὴ Γεωμετρία** πρὸς χρῆσιν μαθητῶν τῶν Πρακτικῶν Λυκείων καὶ τῶν σπουδαστῶν τῶν Μα κῶν καὶ Φυσικῶν Ἐπιστημῶν. Τὸ βιβλίον τοῦτο διακρίνεται μεθοδικότητα, ἁπλότητα καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἐπιτυχῶν καὶ κ λως διατεταγμένων ἀσκήσεων. εἶναι δὲ τὸ μόνον τοῦ εἴδους κεκριμένον.
9. **Κοσμογραφία** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων καὶ κῶν Λυκείων. Διακρίνεται διὰ τὴν τάξιν, ἀκρίβειαν καὶ τὰς ἐπ ἀσκήσεις. *Ἐγκεκριμένη.*
10. **Στοιχειώδης Μαθηματικὴ Φυσικὴ** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητ πρακτικῶν Λυκείων καὶ τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς ἀνωτάτας το τους σχολάς. Μοναδικὸν εἰς τὸ εἶδος του διακρίνεται διὰ τὴν ἁπ σαφήνειαν καὶ τὰς ἐπιτυχεῖς ἀσκήσεις.
11. **Πρακτικὴ Γεωμετρία** πρὸς χρῆσιν τῶν Ἡμιγυμνασίων καὶ τῶν τέρων τάξεων τῶν Γυμνασίων καὶ Πρακτικῶν Λυκείων. Τὸ τοῦτο εἶναι μεθοδικώτατον, ἁπλούστερον καὶ συντομώτερον ὅλ ὁμοίων του. Εἶναι δὲ συντεταγμένον κατὰ τρόπον διευκολύνον διδασκαλίαν κατὰ τὴν μέθοδον του σχολείου ἐργασίας.
12. Λύσεις τῶν εἰς τὰς Στοιχειώδεις Γεωμετρίας περιεχομένων ἀσκ
13. Λύσεις τῶν εἰς τὰς νεωτέρας ἐκδόσεις τῶν Τριγωνομετριῶν κ Κοσμογραφίας περιεχομένων ἀσκήσεων. Βιβλίον ἀπου τοὺς ὑποψηφίους διὰ τὰς ἀνωτάτας τοῦ Κράτους Σχολά
14. Λύσεις τῶν ἐν τῇ Μεγάλῃ Ἀλγέβρᾳ ... Ὀγκώδης ἐκ 536 σελίδων τόμος δια... κιλίαν τῶν ἀσκήσεων. Ἀπαραίτητον ... ἀνωτάτας τοῦ Κράτους Σχολάς.
15. Ἀριθμητικὴ πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητ... ξεων τῶν Γυμνασίων καὶ Ἡμιγυμνασ... κατὰ τὸν τελευταῖον διαγωνισμὸν μεγ...

5. τῶν 833—1938. ... ὅραοεν ... ιπὸ τὸ

(Ἡ ὀνομασ... ριθμικοὶ πίνακες καλλιτεχνικ... 0 %). ... ξεως

752) Πα... εἰς τὴν ὅρασιν, μετὰ πλείστο... 4 μῆλα ε... ιαγ, τὸ

208

208
208
416

4367280 | 208
4
0367
3264
4088

408
8
3264

03744
37136

416
9
3744

4371

746

1440
8
416
8
3744

2089
2089
18801
16712
000
4178
4363921

37136
3712

208
208
416

748

717

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ
ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

Ἀριθ. Πρωτ. 41 062
Διεκπ.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 22 Αὐγούστου 1933.

305
305
1525
900
925
93065

**Πρὸς**

**τὸν κ. Ν. Νικολάου, καθηγητὴν**

Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν ὅτι διὰ ταὐταρίθμου ὑπουργικῆς ἀποφάσεως, ἐκδοθείσης τὴν 31 Ἰουλίου 1933 καὶ δημοσιευθείσης τὴν 4—8—1933 εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 77 φύλλον τῆς Ἐφημ. Κυβερνήσεως, στηριζομένης δὲ εἰς τὸ ἄρθρ. 3 τοῦ νόμου 5045 καὶ τὴν ἀπόφασιν τῆς οἰκείας κριτικῆς ἐπιτροπῆς, τὴν περιλαμβανομένην εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 41 πρακτικὸν ταύτης, ἐνεκρίθη ὡς διδακτικὸν βιβλίον πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῆς Α', Β', Γ' τάξεως τῶν Γυμνασίων τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον Ἀριθμητικὴ βιβλίον σας.

*Ἐντολῇ τοῦ Ὑπουργοῦ*

Ὁ Τμηματάρχης

Ν. ΣΜΥΡΝΗΣ

---

*Ἄρθρον 6ον τοῦ ἀπὸ 21 Σεπτεμβρίου 1933 Προεδρικοῦ Διατάγματος περὶ διατιμήσεως τῶν ἐγκεκριμένων διδακτικῶν βιβλίων*

Τὰ διδακτικὰ βιβλία τὰ πωλούμενα μακρὰν τοῦ τόπου τῆς ἐκδόσεώς των ἐπιτρέπεται νὰ πωλῶνται ἐπὶ τιμῇ ἀνωτέρα κατὰ 15 ο]ο τῆς ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ παρόντος Διατάγματος κανονισθείσης ἄνευ βιβλιοσήμου τιμῆς πρὸς ἀντιμετώπισιν τῆς δαπάνης τῆς συσκευῆς ταχυδρομικῶν τελῶν, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅπως ἐπὶ τῆς τελευταίας σελίδος τοῦ ἐξωφύλλου ἐκτυποῦται τὸ παρὸν ἄρθρον.

$2x = 48$

$x = \frac{48}{2}$

$x - 3x = 45$

$x = \frac{45}{3} \quad x = 15$

$x + 3x = 48$

$\frac{4x}{4} = \frac{48}{4}$

$x = 12$