ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΚΑΤΗ ΟΓΔΟΗ

Τιμᾶται μετὰ τοῦ βιβλιοσήμου καὶ φόρου δραχ. 33.65
(Ἀξία βιβλιοσήμου καὶ Φόρος Ἀναγκ. Δανείου 13.95)
Ἀριθμὸς ἐγκριτικῆς ἀποφάσεως 25.956
Ἀριθμὸς ἀδείας κυκλοφορίας 136 19 Ἀπριλίου 1927

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΑΙ: ΙΩΑΝΝΗΣ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΣ ΚΑΙ ΣΙΑ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ „ΕΣΤΙΑΣ„
44 — Ὁδὸς Σταδίου — 44
1927

ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

Κ Ε Χ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΚΑΤΗ ΟΓΔΟΗ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΑΙ ΙΩΑΝΝΗΣ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΣ ΚΑΙ ΣΙΑ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ „ΕΣΤΙΑΣ„
44 — Ὁδὸς Σταδίου

μιά 7
ἀριθμὸν ὀκτώ 8
ὸν ἀριθμὸν ἐννέα 9

ΣΚΕΥΑ ΛΕΩΝΗ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ
ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄
ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Προκαταρκτικαὶ ἔννοιαι.

1. Ἡ ἔννοια ἑνὸς πράγματος καὶ πολλῶν πραγμάτων εἶναι εἰς πάντας γνωστή.

Μονὰς λέγεται ἕκαστον πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ὡς ἓν ὅλον.

Ἀριθμὸς δὲ λέγεται πλῆθος μονάδων (ἢ καὶ μία μονάς).

Παραδείγματος χάριν, ὅταν θεωρῶ τοὺς κατοίκους χωρίου τινός, μονὰς εἶναι ὁ ἄνθρωπος, καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἀνθρώπων τούτων ἀποτελεῖ ἀριθμόν· ὅταν δὲ θεωρῶ πολλὰ χωρία, μονὰς εἶναι τὸ χωρίον, καὶ τὸ πλῆθος τῶν χωρίων τούτων ἀποτελεῖ ἀριθμόν.

Ἀριθμητικὴ λέγεται ἡ ἐπιστήμη, ἥτις πραγματεύεται περὶ τῶν ἀριθμῶν.

Ὀνομασία καὶ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν μέχρι τοῦ χίλια.

2. Ἡ μονάς, ὅταν θεωρῆται ὡς ἀριθμός, λέγεται ἓν καὶ γράφεται διὰ τοῦ σημείου **1**.

Ἐὰν εἰς τὴν μονάδα προστεθῇ καὶ ἄλλη μονάς, σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς δύο, ὅστις γράφεται διὰ τοῦ σημείου **2**.

Ἐὰν δὲ εἰς τὸ δύο προστεθῇ καὶ ἄλλη μονάς, σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς τρία, ὅστις γράφεται **3**.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον (δηδαδὴ προσθέτοντες τὴν μονάδα) σχηματίζομεν ἐξ ἑκάστου ἀριθμοῦ τὸν ἀμέσως μεγαλύτερόν του.

Τρία καὶ ἓν σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν τέσσαρα **4**
Τέσσαρα καὶ ἓν σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν πέντε **5**
Πέντε καὶ ἓν σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν ἕξ **6**
Ἓξ καὶ ἓν σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν ἑπτά **7**
Ἑπτὰ καὶ ἓν σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν ὀκτώ **8**
Ὀκτὼ καὶ ἓν σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν ἐννέα **9**

Ἐννέα καὶ ἓν σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν δέκα, ὅστις γράφεται ὡς ἑξῆς· **10.**

Σημείωσις. Τὰ σημεῖα, μὲ τὰ ὁποῖα γράφομεν τοὺς ἀριθμούς, λέγονται ψηφία, εἶναι δὲ δέκα, τὰ ἑξῆς· **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.**

Τὸ τελευταῖον, τὸ **0,** λέγεται ***μηδὲν*** ἢ ***μηδενικόν***.

Ὁ ἀριθμὸς δέκα θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται ***δεκάς***.

3. Καθὼς ἡ μονὰς **1,** οὕτω καὶ ἡ δεκὰς παράγει ἀριθμοὺς διὰ τῆς ἐπαναλήψεως.

Δύο δεκάδες σχηματίζουσιν ἀριθμόν, ὅστις λέγεται εἴκοσι καὶ γράφεται ὡς ἑξῆς· **20.**

Τρεῖς δεκάδες σχηματίζουσιν ἀριθμόν, ὅστις λέγεται τριάκοντα καὶ γράφεται **30.**

Τέσσαρες δεκάδες σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν τεσσαράκοντα. **40**
Πέντε δεκάδες σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν πεντήκοντα..... **50**
Ἓξ δεκάδες σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν ἑξήκοντα........ **60**
Ἑπτὰ δεκάδες σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν ἑβδομήκοντα... **70**
Ὀκτὼ δεκάδες σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν ὀγδοήκοντα.... **80**
Ἐννέα δεκάδες σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν ἐνενήκοντα.... **90**
Δέκα δεκάδες σχηματίζουσιν ἀριθμόν, ὅστις λέγεται ἑκατὸν καὶ γράφεται ὡς ἑξῆς.......................... **100**

Ὁ ἑκατὸν θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται ***ἑκατοντάς***.

4. Καὶ ὁ ἑκατὸν παράγει ὁμοίως ἀριθμούς, ὡς ἑξῆς·

Δύο ἑκατοντάδες, ἤτοι διακόσια.................... **200**
Τρεῖς ἑκατοντάδες, ἤτοι τριακόσια.................. **300**
Τέσσαρες ἑκατοντάδες, ἤτοι τετρακόσια............. **400**
Πέντε ἑκατοντάδες, ἤτοι πεντακόσια................ **500**
Ἓξ ἑκατοντάδες, ἤτοι ἑξακόσια..................... **600**
Ἑπτὰ ἑκατοντάδες, ἤτοι ἑπτακόσια.................. **700**
Ὀκτὼ ἑκατοντάδες, ἤτοι ὀκτακόσια.................. **800**
Ἐννέα ἑκατοντάδες, ἤτοι ἐνακόσια.................. **900**

Δέκα δὲ ἑκατοντάδες σχηματίζουσιν ἀριθμόν, ὅστις λέγεται χίλια καὶ γράφεται ὡς ἑξῆς· **1000.**

Ὁ ἀριθμὸς χίλια θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται ***χιλιάς***.

5. Ὁ ἀριθμὸς ἓν λέγεται μονὰς πρώτης τάξεως, ὁ δέκα λέγεται μονὰς δευτέρας τάξεως, ὁ ἑκατὸν τρίτης τάξεως καὶ ὁ χίλια τετάρτης.

6. Πᾶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ χίλια δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς μονάδας, εἰς δεκάδας (ἐὰν ἔχῃ) καὶ εἰς ἑκατοντάδας (ἐὰν ἔχῃ), ἤτοι εἰς μο-

νάδας διαφόρων τάξεων, καὶ αἱ μονάδες ἑκάστης τάξεως νὰ μὴ εἶναι περισσότεραι τῶν ἐννέα.

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ μονάδας περισσοτέρας τῶν ἐννέα, ἑνοῦμεν αὐτὰς ἀνὰ δέκα δέκα καὶ σχηματίζομεν δεκάδα· τότε, ἢ δὲν θὰ περισσεύσῃ καμμία μονάς, ἢ θὰ περισσεύσουν, ἀλλ' ὄχι περισσότεραι τῶν ἐννέα (διότι, ἂν ἐπερίσσευον περισσότεραι, θὰ ἐγίνετο καὶ ἄλλη δεκάς). Ἐὰν δὲ καὶ αἱ δεκάδες εἶναι περισσότεραι τῶν ἐννέα, ἑνοῦμεν αὐτὰς ἀνὰ δέκα δέκα καὶ σχηματίζομεν ἑκατοντάδας· τότε, ἢ δὲν θὰ μείνῃ δεκάς, ἢ θὰ μείνουν, ἀλλ' ὄχι περισσότεραι τῶν ἐννέα. Αἱ δὲ ἑκατοντάδες, τὰς ὁποίας ἐσχηματίσαμεν, δὲν θὰ εἶναι περισσότεραι τῶν ἐννέα· διότι, ἂν ἦσαν δέκα, θὰ ἐσχημάτιζον τὸν ἀριθμὸν χίλια, ἐνῷ ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἐλάβομεν, εἶναι μικρότερος τοῦ χίλια.

Ἀνελύθη λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς εἰς μονάδας, δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας, καὶ εἰς ἑκάστην τάξιν δὲν εἶναι μονάδες περισσότεραι τῶν ἐννέα.

7. Διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων εὐκολύνεται μεγάλως καὶ ἡ ὀνοματοθεσία τῶν ἀριθμῶν καὶ ἡ γραφὴ αὐτῶν, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς·

1) Οἱ ἀριθμοί, οἵτινες ὑπάρχουσι μεταξὺ τοῦ δέκα καὶ τοῦ ἑκατόν, ἔχουσι δεκάδας, δύνανται δὲ νὰ ἔχωσι καὶ μονάδας· καὶ τὸ ὄνομα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν σχηματίζεται ἀπὸ τὸ ὄνομα τῶν δεκάδων του καὶ ἀπὸ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων του (ἂν ἔχῃ). Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει ἑπτὰ δεκάδας (ἑβδομήκοντα) καὶ τρεῖς μονάδας, λέγεται ἑβδομήκοντα τρία· ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις ἔχει ὀκτὼ δεκάδας (ὀγδοήκοντα) καὶ μίαν μονάδα, λέγεται ὀγδοήκοντα ἕν.

Σημείωσις. Ἀντὶ δέκα ἕν, λέγομεν ἕνδεκα, καὶ ἀντὶ δέκα δύο, λέγομεν δώδεκα.

Διὰ νὰ γράψωμεν δὲ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους, γράφομεν πρῶτον τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον δεικνύει πόσαι εἶναι αἱ δεκάδες τοῦ ἀριθμοῦ, ἔπειτα, πλησίον αὐτοῦ (πρὸς τὰ δεξιὰ) τὸ ψηφίον τῶν μονάδων του (ἐὰν δὲ δὲν ἔχῃ μονάδας, γράφομεν εἰς τὸν τόπον αὐτῶν τὸ 0).

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἑβδομήκοντα τρία γράφεται 73, ὁ δὲ ὀγδοήκοντα ἓν γράφεται 81, ὁ δὲ ἑξήκοντα γράφεται (ὡς πρὶν εἴδομεν) 60.

2) Οἱ ἀριθμοί, οἵτινες ὑπάρχουσι μεταξὺ τοῦ ἑκατὸν καὶ τοῦ χίλια, ἔχουσιν ἑκατοντάδας, δύνανται δὲ νὰ ἔχωσι καὶ δεκάδας καὶ μονάδας, καὶ τὸ ὄνομα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν γίνεται ἀπὸ τὸ ὄνομα τῶν ἑκατοντάδων του καὶ ἀπὸ τὸ ὄνομα τῶν δεκάδων του (ἂν ἔχῃ) καὶ ἀπὸ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων του (ἂν ἔχῃ).

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει πέντε ἑκατοντάδας (πεντακόσια) καὶ τρεῖς δεκάδας (τριάκοντα) καὶ ἑπτὰ μονάδας, λέγεται πεντακόσια τριάκοντα ἑπτά· ὁ δὲ ἔχων δύο ἑκατοντάδας καὶ τρεῖς μονάδας, λέγεται διακόσια τρία.

Διὰ νὰ γράψωμεν δὲ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους, γράφομεν πρῶτον τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων (ἤγουν, τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον φανερώνει πόσας ἑκατοντάδας ἔχει ὁ ἀριθμός), ἔπειτα τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων (ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ δεκάδας, γράφομεν εἰς τὸν τόπον αὐτῶν τὸ **0** καὶ ἔπειτα τὸ ψηφίον τῶν μονάδων· ἂν δὲ ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ μονάδας, γράφομεν εἰς τὸν τόπον αὐτῶν τὸ **0**).

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς ἑπτακόσια ἑξήκοντα τρία γράφεται 763· ὁ διακόσια ὀγδοήκοντα γράφεται 280, ὁ δὲ ἑξακόσια (ὡς εἴδομεν) γράφεται 600.

Σχηματισμὸς τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων.

8. Εἴδομεν ἀνωτέρω πῶς ἐσχηματίσθησαν αἱ μονάδες ἕν, δέκα, ἑκατὸν καὶ χίλια· διὰ τοῦ ἰδίου τρόπου δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ὅσας θέλομεν ἄλλας· ἤγουν, δέκα μονάδες ἑκάστης τάξεως σχηματίζουσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ὡς φαίνεται εἰς τὸν ἑξῆς πίνακα·

δέκα μονάδες σχηματίζουσι μίαν δεκάδα.	**10**
δέκα δεκάδες μίαν ἑκατοντάδα	**100**
δέκα ἑκατοντάδες μίαν χιλιάδα...	**1 000**
δέκα χιλιάδες μίαν δεκάδα χιλ.	**10 000**
δέκα δεκάδες χιλιάδων μίαν ἑκατ. χιλιάδ.	**100 000**
δέκα ἑκατοντάδες χιλιάδων, ἤτοι χίλιαι χιλιάδες, σχηματίζουσιν ἓν ἑκατομμύρ.	**1 000 000**
δέκα ἑκατομ. μίαν δεκάδα ἑκατομμυρίου	**10 000 000**
δέκα δεκάδες ἑκατομ μίαν ἑκατ. ἑκατ..	**100 000 000**
δέκα ἑκατοντάδες ἑκατ. ἤτοι χίλια ἑκατ. σχηματίζουσιν ἓν δισεκατομμύριον..	**1 000 000 000**
δέκα δισεκατ. μίαν δεκάδα δισεκατομ..	**10 000 000 000**
δέκα δεκάδες δισεκ. μίαν ἑκατοντ. δισεκ.	**100 000 000 000**

δέκα ἑκατοντάδες δισεκατομ. ἤτοι χίλια δισεκατομμύρια, σχηματίζουσιν ἓν τρισεκατομ. **1 000 000 000 000** καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐκ τῶν μονάδων τούτων αἱ ἑξῆς λέγονται ***ἀρχικαὶ*** ἢ ***πρωτεύουσαι***·

ἕν, χίλια, ἑκατομμύριον, δισεκατομμύριον, τρισεκατομμύριον κτλ. Ἑκάστη ἀρχικὴ μονὰς σχηματίζεται ἀπὸ χιλίας μονάδας τῆς προηγουμένης.

Ὀνομασία καὶ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ χίλια καὶ ἐφεξῆς.

9. Ὁ ἀριθμὸς χίλια εἶναι ἀρχικὴ μονάς. Διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῆς παράγονται ἀριθμοὶ χιλιάδων.

Τὰ ὀνόματα αὐτῶν γίνονται ἀπὸ τὸ ὄνομα τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις φανερώνει πόσας φορὰς ἐλάβομεν τὸν χίλια, εἰς τὸ ὁποῖον προσαρτᾶται ἡ λέξις «χιλιάδες»· οἷον, δύο χιλιάδες, τρεῖς χιλιάδες, τέσσαρες χιλιάδες, τριάκοντα χιλιάδες, τεσσαράκοντα ἑπτὰ χιλιάδες, ἑκατὸν δώδεκα χιλιάδες κτλ.

Διὰ νὰ γράψωμεν δὲ αὐτοὺς μὲ ψηφία, γράφομεν πρῶτον τὸν ἀριθμόν, ὅστις φανερώνει πόσαι εἶναι αἱ χιλιάδες, καὶ κατόπιν αὐτοῦ τρία μηδενικά· οἷον

δύο χιλιάδες γράφεται.......................... **2 000**
δεκαπέντε χιλιάδες.......................... **15 000**
τριάκοντα χιλιάδες.......................... **30 000**
διακόσιαι πεντήκοντα ἓξ χιλιάδες.......................... **256 000**
πεντακόσιαι χιλιάδες.......................... **500 000**
χίλιαι χιλιάδες, ἤτοι ἓν ἑκατομμύριον......... **1 000 000**

Ὁ ἀριθμὸς χίλιαι χιλιάδες ἢ ἓν ἑκατομμύριον, εἶναι ἀρχικὴ μονάς· διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτοῦ σχηματίζονται ἀριθμοὶ ἑκατομμυρίων. Τὰ ὀνόματα αὐτῶν γίνονται ἀπὸ τὸ ὄνομα τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις φανερώνει, πόσας φορὰς ἐλάβομεν τὸ ἑκατομμύριον, εἰς δὲ τὸ ὄνομα τοῦτο προσαρτῶμεν τὴν λέξιν «ἑκατομμύρια»· οἷον, δύο ἑκατομμύρια, τρία ἑκατομμύρια, δέκα ὀκτὼ ἑκατομμύρια, διακόσια τριάκοντα ἑκατομμύρια κτλ.

Διὰ νὰ γράψωμεν δὲ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους, γράφομεν πρῶτον τὸν ἀριθμόν, ὅστις φανερώνει πόσα εἶναι τὰ ἑκατομμύρια, καὶ κατόπιν αὐτοῦ ἓξ μηδενικά· οἷον

δύο ἑκατομμύρια γράφεται........... **2 000 000**
εἰκοσιπέντε ἑκατομμύρια............. **25 000 000**
τετρακόσια ὀκτὼ ἑκατομμύρια......... **408 000 000**
χίλια ἑκατομμύρια, ἤτοι ἓν δισεκατομμύριον **1 000 000 000**

Ὁ ἀριθμὸς ἓν δισεκατομμύριον εἶναι καὶ αὐτὸς ἀρχικὴ μονάς· ἐξ αὐτοῦ σχηματίζονται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως ἀριθμοὶ δισεκατομμυρίων. Ἡ ὀνομασία καὶ ἡ γραφὴ αὐτῶν εἶναι εὐκολωτάτη (μὲ ἐννέα μηδενικά).

10. Ὁ σχηματισμὸς τῶν ἀρχικῶν μονάδων εὐκολύνει μεγάλως τὴν ὀνομασίαν καὶ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς·

1) Οἱ μεταξὺ τοῦ χίλια καὶ τοῦ ἑκατομμυρίου ὑπάρχοντες ἀριθμοὶ ἔχουσι χιλιάδας τινὰς (αἱ ὁποῖαι θὰ εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν χιλίων· διότι χίλιαι χιλιάδες σχηματίζουσιν ἓν ἑκατομμύριον), δύνανται δὲ νὰ ἔχωσι καί τι μέρος μικρότερον τοῦ χίλια· καὶ τὸ ὄνομα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν γίνεται ἀπὸ τὸ ὄνομα τῶν χιλιάδων του καὶ ἀπὸ τὸ ὄνομα τοῦ μέρους, ὅπερ εἶναι μικρότερον τοῦ χίλια (ἂν ἔχῃ)· οἷον, διακόσιαι ὀκτὼ χιλιάδες καὶ ὀκτακόσια εἴκοσι πέντε, δεκαεπτὰ χιλιάδες καὶ πεντακόσια τριάκοντα ἕξ, τρεῖς χιλιάδες καὶ ἑξακόσια κτλ.

Ἡ δὲ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν τούτων γίνεται ὡς ἑξῆς· γράφομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν χιλιάδων καὶ ἔπειτα πλησίον αὐτοῦ (πρὸς τὰ δεξιὰ) τὸν ἀριθμὸν τὸν μικρότερον τοῦ χίλια (ἂν ὑπάρχῃ). Προσέχομεν ὅμως κατόπιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν χιλιάδων νὰ εὑρίσκωνται πάντοτε τρία ψηφία· ἂν λοιπὸν ὁ ἀριθμός, ὁ μικρότερος τοῦ χίλια, δὲν ἔχῃ τρία ψηφία, προτάσσομεν αὐτοῦ τόσα μηδενικά, ὅσα ψηφία τοῦ λείπουν· οἷον, ὁ ἀριθμὸς τριάκοντα ἑπτὰ χιλιάδες καὶ ἐνακόσια δώδεκα γράφεται 37 912, ὁ δὲ ἀριθμὸς τρεῖς χιλιάδες καὶ δεκαεπτὰ γράφεται 3 017, ὁ δὲ ἀριθμὸς ἑκατὸν χιλιάδες καὶ ἑπτὰ μονάδες γράφεται 100 007.

2) Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὑπάρχοντες μεταξὺ τοῦ ἑκατομμυρίου καὶ τοῦ δισεκατομμυρίου, ἔχουσιν ἑκατομμύριά τινα (ὀλιγώτερα τῶν χιλίων), ἔτι δὲ καὶ ἀριθμόν τινα μικρότερον τοῦ χίλια.

Καὶ τὸ μὲν ὄνομα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν γίνεται ἀπὸ τὸ ὄνομα τῶν ἑκατομμυρίων καὶ ἀπὸ τὸ ὄνομα τῶν χιλιάδων του (ἂν ἔχῃ) καὶ ἀπὸ τὸ ὄνομα τοῦ μικροτέρου τοῦ χίλια ἀριθμοῦ (ἂν ἔχῃ)· οἷον, τεσσαράκοντα τρία ἑκατομμύρια ὀκτακόσιαι δύο χιλιάδες καὶ τετρακόσιαι μονάδες.

Ἡ δὲ γραφὴ αὐτῶν γίνεται ὡς ἑξῆς· γράφομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑκατομμυρίων, ἔπειτα κατόπιν αὐτοῦ (πρὸς τὰ δεξιὰ) τὸν ἀριθμὸν τῶν χιλιάδων (ἂν ὑπάρχῃ) καὶ κατόπιν τούτου τὸν ἀριθμὸν τὸν μικρότερον τοῦ χίλια (ἂν ὑπάρχῃ). Προσέχομεν ὅμως κατόπιν τῶν ἑκατομμυρίων νὰ εὑρίσκωνται ἓξ ψηφία, κατόπιν δὲ τῶν χιλιάδων τρία. Ἂν λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς τῶν χιλιάδων δὲν ἔχῃ τρία ψηφία, προτάσσομεν αὐτοῦ τόσα μηδενικά, ὅσα ψηφία τοῦ λείπουν (οἷον, ἀντὶ 17 γράφομεν

017, ἀντὶ 8 γράφομεν 008)· τὸ αὐτὸ δὲ κάμνομεν καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν μικρότερον τοῦ χίλια· οἷον, ὁ ἀριθμὸς τεσσαράκοντα ἑκατομμύρια ἑκατὸν εἴκοσι πέντε χιλιάδες καὶ πεντακόσια ἑπτά, γράφεται 40 125 507, ὁ δὲ ἀριθμὸς τετρακόσια πέντε ἑκατομμύρια δέκα ὀκτὼ χιλιάδες, γράφεται 405 018 000, ὁ δὲ ἀριθμὸς τριακόσια ἑκατομμύρια καὶ δέκα πέντε μονάδες γράφεται 300 000 015.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐννοοῦμεν, πῶς γράφονται καὶ οἱ ἀριθμοί, οἱ μεγαλύτεροι τοῦ δισεκατομμυρίου καὶ πῶς σχηματίζονται τὰ ὀνόματα αὐτῶν.

Σημείωσις α΄. Ἐκ τῶν προηγουμένων βλέπομεν, ὅτι πάντες οἱ ἀριθμοὶ γράφονται διὰ τῶν ἑξῆς δέκα σημείων ἢ ψηφίων·

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 καὶ **0***

Ἐκ τούτων τὸ ψηφίον 0 δὲν παριστάνει κανένα ἀριθμόν· διὸ καὶ λέγεται (ὡς εἴπομεν καὶ πρὶν) μηδὲν ἢ μηδενικόν· χρησιμεύει ὅμως εἰς τὸ νὰ λαμβάνῃ τὴν θέσιν τῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι λείπουσι· πρὸς διάκρισιν δὲ ἀπ᾽ αὐτοῦ λέγονται τὰ ἄλλα ἐννέα ψηφία, σημαντικὰ ψηφία.

Σημείωσις β΄. ***Μονοψήφιοι*** λέγονται οἱ ἀριθμοί, οἱ δι᾽ ἑνὸς ψηφίου γραφόμενοι, οἷον, ὁ 6· διψήφιοι οἱ διὰ δύο, οἷον 45· τριψήφιοι οἱ διὰ τριῶν, ὡς 120 καὶ πολυψήφιοι οἱ διὰ περισσοτέρων.

Παρατήρησις.

11. Ἡ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν διὰ τῶν ψηφίων εἶναι μία ἐκ τῶν εὐφυεστάτων ἐπινοήσεων τῶν ἀνθρώπων· διότι καὶ σύντομος εἶναι καὶ δέκα μόνον σημεῖα χρειάζεται (διὰ τοῦτο καὶ τὰς πράξεις τῶν ἀριθμῶν, ὡς θὰ μάθωμεν κατόπιν, καθιστᾷ εὐκολωτέρας)· ἐν ᾧ ἡ διὰ λέξεων γραφὴ αὐτῶν καὶ μακροτέρα εἶναι καὶ μέγα πλῆθος διαφόρων λέξεων ἀπαιτεῖ.

Στηρίζεται δὲ ἡ διὰ τῶν ψηφίων γραφή, πρῶτον μὲν ἐπὶ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων, καὶ δεύτερον ἐπὶ τῆς ἑξῆς συμφωνίας· ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον παριστᾷ ὄχι μόνον ἁπλᾶς μονάδας, ἀλλὰ καὶ δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας καὶ χιλιάδας καὶ μονάδας πάσης τάξεως, ***κατὰ τὴν θέσιν του·*** οἷον, τὸ ψηφίον 5, ἐὰν μὲν εἶναι μόνον του, παριστᾷ πέντε μονάδας, ἐὰν δὲ ἔχῃ ἓν οἱονδήποτε ψηφίον κατόπιν του, παριστᾷ πέντε δεκάδας ἢ ***πεντήκοντα*** (ὡς 50, 51, 58), ἐὰν δὲ ἔχῃ δύο οἱαδήποτε ψηφία κατόπιν του, παριστᾷ ἑκατοντάδας (ὡς

* Τὰ ψηφία ταῦτα λέγονται καὶ ἀραβικοὶ χαρακτῆρες· διότι ἡμεῖς ἐμάθομεν αὐτὰ παρὰ τῶν Ἀράβων (περὶ τὸν 12ον αἰῶνα μ. Χ). Ἡ ἐφεύρεσις ὅμως αὐτῶν καὶ ἡ μέθοδος τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἐπινόησις τῶν Ἰνδῶν, παρὰ τῶν ὁποίων ἔμαθον αὐτὴν οἱ Ἄραβες.

500, 505, 520, 541), ἐὰν δὲ τρία, χιλιάδας (ὡς 5000, 5080), ἐὰν τέσσαρα, δεκάδας χιλιάδων (ὡς 54 801), ἐὰν ἕξ, ἑκατομμύρια καὶ οὕτω καθεξῆς· καὶ γενικῶς, ***πᾶν ψηφίον, γραφόμενον ὄπισθεν (πρὸς τὰ ἀριστερὰ) ἄλλου, παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως ἢ τὸ ἄλλο ψηφίον.***

Ἡ μέθοδος αὕτη καὶ ἡ ἀνάλυσις τῶν ἀριθμῶν εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων ἀποτελοῦσι τὸ λεγόμενον σύστημα ἀριθμήσεως. Ὁ ἀριθμὸς δέκα, ὅστις δεικνύει πόσαι μονάδες ἑκάστης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας, λέγεται βάσις τοῦ συστήματος τούτου, τὸ ὁποῖον διὰ τοῦτο λέγεται ***δεκαδικὸν σύστημα***.

Περὶ τῆς ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν.

12. Ἀριθμόν, γεγραμμένον διὰ ψηφίων, ἀπαγγέλλομεν κατὰ τοὺς ἑξῆς κανόνας·

1) ***Ἐὰν τὰ ψηφία δὲν εἶναι περισσότερα τῶν τριῶν, ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον χωριστὰ μετὰ τοῦ ὀνόματος τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας παριστάνει, ἀρχίζομεν δὲ ἀπὸ τὸ πρῶτον.***

Οἷον, ὁ ἀριθμὸς 422 ἀπαγγέλλεται, τέσσαρες ἑκατοντάδες, δύο δεκάδες καὶ δύο μονάδες ἢ συντομώτερον, τετρακόσια εἴκοσι δύο· ὁ ἀριθμὸς 705 ἀπαγγέλλεται ἑπτακόσια πέντε, ὁ δὲ 72 ἑβδομήκοντα δύο.

2) Ἐὰν τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι περισσότερα τῶν τριῶν, τὰ μὲν τρία τελευταῖα παριστῶσι τὰς ἁπλᾶς μονάδας, τὰς δεκάδας καὶ τὰς ἑκατοντάδας, τὰ τρία ὄπισθεν τούτων παριστῶσι τὰς χιλιάδας, τὰ δὲ τρία ὄπισθεν τούτων παριστῶσι τὰ ἑκατομμύρια κτλ. διὰ τοῦτο ***χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τμήματα τριψήφια*** (ἀρχίζοντες ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων) ***καὶ μετὰ ταῦτα ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον τμῆμα χωριστά, ὡς νὰ ἦτο εἷς ἀριθμός, προσαρτῶντες καὶ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, ἃς παριστᾷ·*** εἰς τὴν ἐκφώνησιν ἀρχίζομεν ἀπὸ τὸ τμῆμα τῶν ἀνωτάτων μονάδων, ὅπερ δυνατὸν νὰ εἶναι καὶ διψήφιον ἢ μονοψήφιον.

Οἷον, ὁ ἀριθμὸς 15 107 ἀπαγγέλλεται, δεκαπέντε χιλιάδες καὶ ἑκατὸν ἑπτά, ὁ δὲ ἀριθμὸς 18 030 601 ἀπαγγέλλεται, δέκα ὀκτὼ ἑκατομμύρια τριάκοντα χιλιάδες καὶ ἑξακόσια ἓν καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πῶς γράφονται διὰ ψηφίων οἱ ἑξῆς ἀριθμοί· ὀκτακόσιαι τρεῖς χιλιάδες, πεντήκοντα ἑκατομμύρια καὶ ἑκατὸν τρεῖς μονάδες;

2) Πῶς ἀπαγγέλλονται οἱ ἑξῆς ἀριθμοί·

850· 1650· 12107· 1001· 100001· 50800· 800107;

3) Νὰ γραφῇ διὰ ψηφίων ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 12 δεκάδας καὶ 7 μονάδας. ('Απ. 127).

4) Νὰ γραφῶσιν ὅλοι οἱ ἀριθμοί, ὅσοι ἔχουν 142 δωδεκάδας τὸ ὅλον.

5) Ἐκ πασῶν τῶν μονάδων τοῦ ἀριθμοῦ 1252, πόσαι δεκάδες καὶ πόσαι ἑκατοντάδες σχηματίζονται ; ('Απ. δεκ. 125 ἑκατ. 12).

Ἑλληνικὴ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν.

Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν ἐγνώριζον τὰ ἰνδικὰ ψηφία, μετεχειρίζοντο δὲ διὰ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν τὰ 24 γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, θέτοντες πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῶν καὶ ὀλίγον ὑπεράνω ἕνα τόνον. Καὶ τὰς μὲν μονάδας **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** παρίστανον διὰ τῶν γραμμάτων ἀπὸ τοῦ α μέχρι τοῦ θ· ἐπειδὴ ὅμως τὰ γράμματα ταῦτα εἶναι μόνον ὀκτώ, μετεχειρίζοντο πρὸς παράστασιν τοῦ ἀριθμοῦ 6 τὸ σημεῖον ϛ (στίγμα)· ὥστε οἱ ἀριθμοὶ **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,**
παριστάνοντο α', β', γ', δ', ε', ϛ', ζ', η', θ'.

Τὰς δὲ δεκάδας **10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90** παρίστανον διὰ τῶν γραμμάτων ἀπὸ τοῦ ι μέχρι τοῦ π· ἐπειδὴ δὲ καὶ ταῦτα εἶναι ὀκτώ, μετεχειρίζοντο τὸ σύμβολον ϟ (ὅπερ λέγεται κόππα) πρὸς παράστασιν τοῦ ἀριθμοῦ 90· ὥστε οἱ ἀριθμοὶ

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90
παριστάνοντο ι', κ', λ', μ', ν', ξ', ο', π', ϟ'.

Τὰς δὲ ἑκατοντάδας **100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900** παρίστανον διὰ τῶν ἐπιλοίπων ὀκτὼ γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου καὶ διὰ τοῦ σημείου ϡ (ὅπερ λέγεται σαμπὶ) ὡς ἑξῆς·

100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900
ρ', σ', τ', υ', φ', χ', ψ', ω', ϡ'.

Τοὺς ἐκ μονάδων καὶ δεκάδων συγκειμένους ἀριθμοὺς παρίστανον γράφοντες πρῶτον τὸ γράμμα τῶν δεκάδων καὶ ἔπειτα τὸ γράμμα τῶν μονάδων· οἷον, 47 ἐγράφετο μζ', 53 νγ'. Ὁμοίως καὶ τοὺς συγκειμένους ἐκ μονάδων, δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων· οἷον, οἱ ἀριθμοὶ **312, 507, 609** ἐγράφοντο ὡς ἑξῆς·
τιβ', φζ', χθ'.

Διὰ τὰς χιλιάδας μετεχειρίζοντο τὰ αὐτὰ γράμματα, θέτοντες τὸν τόνον ὄπισθεν καὶ ὀλίγον ὑποκάτω· οἷον, ὁ 1 000 ἐγράφετο ͵α, ὁ 3 000 ͵γ, ὁ 100 000 ͵ρ κτλ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

13. ***Ἡ πρόσθεσις εἶναι πρᾶξις, δι᾽ ἧς σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἐκ πασῶν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας ἔχουσι δύο ἢ περισσότεροι ἄλλοι ἀριθμοί.***

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, θέλω νὰ εὕρω ***πόσα μῆλα ἔλαβεν ἓν παιδίον, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ πατήρ του ἔδωκεν 8 μῆλα, ἡ δὲ μήτηρ του 9, ὁ δὲ πάππος του 2***, πρέπει νὰ ἑνώσω 8 μονάδας, 9 μονάδας καὶ 2 μονάδας καὶ νὰ σχηματίσω ἐξ αὐτῶν ἕνα ἀριθμόν· τοῦτο δὲ εἶναι πρόσθεσις.

Οἱ ἀριθμοί, οἵτινες πρέπει νὰ προστεθῶσι, λέγονται ***προσθετέοι.*** Τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως, ἤτοι ὁ δι᾽ αὐτῆς εὑρισκόμενος ἀριθμός, λέγεται ***κεφάλαιον*** ἢ ***ἄθροισμα***.

Ἡ πρόσθεσις σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου +, τὸ ὁποῖον ἀναγινώσκεται ***σὺν*** καὶ γράφεται μεταξὺ τῶν προσθετέων ἀριθμῶν· οἷον 5+3 παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 3· ἀναγινώσκεται δὲ ***πέντε σὺν τρία.***

Ὅταν προσθέτωμεν ἀριθμούς, ὑποθέτομεν, ὅτι εἶναι ὁμοειδεῖς, δηλαδὴ ὅτι αἱ μονάδες των παριστάνουν ὅλαι τὸ αὐτὸ πρᾶγμα· δυνάμεθα π.χ. νὰ προσθέσωμεν τρία μῆλα καὶ δύο μῆλα, ἢ τρεῖς μῆνας καὶ δύο μῆνας, ἢ τρεῖς ὥρας καὶ δύο ὥρας· ἀλλὰ δὲν δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν τρία μῆλα καὶ δύο μῆνας, ἢ τρία ἔτη καὶ δύο μῆνας, διότι ταῦτα εἶναι ἑτεροειδῆ· ἐπειδὴ ὅμως ὅ,τι πρᾶγμα καὶ ἂν παριστάνωσιν αἱ μονάδες, πάντοτε τρία καὶ δύο κάμνουν πέντε (ἤτοι, τρία μῆλα καὶ δύο μῆλα κάμνουν πέντε μῆλα, τρεῖς ἄνθρωποι καὶ δύο ἄνθρωποι κάμνουν πέντε ἀνθρώπους, τρεῖς δραχμαὶ καὶ δύο δραχμαὶ κάμνουν πέντε δραχμάς), διὰ τοῦτο δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἠξεύρωμεν, τί παριστάνωσιν αἱ μονάδες τῶν προσθετέων· ἀρκεῖ νὰ παριστάνωσιν ὅλαι τὸ αὐτὸ πρᾶγμα.

Σημείωσις. Ὅταν δὲν ὁρίζωμεν τὸ πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον παριστάνουσιν οἱ ἀριθμοί, τότε οἱ ἀριθμοὶ λέγονται ***ἀφῃρημένοι·*** ὅταν δὲ ὁρίζωμεν αὐτό, τότε οἱ ἀριθμοὶ λέγονται ***συγκεκριμένοι·*** οἷον, οἱ ἀριθμοὶ 8, 9 εἶναι ἀφῃρημένοι, οἱ δὲ ἀριθμοὶ 8 μῆλα, 9 σῦκα εἶναι συγκεκριμένοι.

Εἰς τὴν πρόσθεσιν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις· α΄) ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι μονοψήφιοι· β΄) ὅταν εἶναι οἱοιδήποτε.

Πρόσθεσις ἀριθμῶν μονοψηφίων.

14. Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν δύο μονοψηφίους

ἀριθμούς· οἷον τοὺς 8 καὶ 4. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα, προσθέτομεν εἰς τὸν 8 τὰς μονάδας τοῦ 4, ἀπὸ μίαν μίαν, ἤγουν λέγομεν, ὀκτὼ καὶ ἓν κάμνουν ἐννέα, ἐννέα καὶ ἓν κάμνουν δέκα, δέκα καὶ ἓν κάμνουν ἕνδεκα, ἕνδεκα καὶ ἓν κάμνουν δώδεκα· ἄρα τὸ ἄθροισμα εἶναι ὁ ἀριθμὸς 12.

Ἀντὶ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 8 τὰς μονάδας τοῦ 4, δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 4 τὰς μονάδας τοῦ 8, καὶ εἶναι προφανές, ὅτι θὰ εὕρωμεν ὡς ἄθροισμα πάλιν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 12· διότι τὸ ἄθροισμα σχηματίζεται ἀπὸ 8 μονάδας καὶ ἀπὸ 4 μονάδας, εἶναι δὲ ἀδιάφορον κατὰ ποῖον τρόπον θὰ ἑνωθῶσιν αἱ μονάδες αὗται.

Σημείωσις. Τὴν πρόσθεσιν δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν ἐκτελοῦμεν ἀμέσως ἀπὸ μνήμης, διότι εὐκόλως μανθάνομεν νὰ ἐνθυμώμεθα τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν· ὥστε λέγομεν εὐθύς, ὀκτὼ καὶ τέσσαρα (ἢ τέσσαρα καὶ ὀκτὼ) κάμνουν δώδεκα, 5 καὶ 6 κάμνουν 11 κλπ.

Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολλοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς, προσθέτομεν δύο ἐξ αὐτῶν· ἔπειτα εἰς τὸ ἄθροισμα τούτων προσθέτομεν ἕνα ἄλλον, εἰς τὸ νέον ἄθροισμα ἕνα ἄλλον καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις ὅτου λάβωμεν πάντας τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Ἐὰν π.χ. ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 6, 8, 2, 5, 6, 9, λέγομεν 6 καὶ 8 κάμνουν 14, 14 καὶ 2 κάμνουν 16, 16 καὶ 5 κάμνουν 21, 21 καὶ 6 κάμνουν 27 καὶ τέλος 27 καὶ 9 κάμνουν 36 (τὰς διαδοχικὰς ταύτας προσθέσεις ἐκτελοῦμεν ἢ ἀπὸ μνήμης, ἢ προσθέτοντες τὰς μονάδας τοῦ μονοψηφίου εἰς τὸν πολυψήφιον ἀπὸ μίαν μίαν). Τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι λοιπὸν 36.

Σημειωτέον δέ, ὅτι καὶ κατ' ἄλλην τάξιν, ἂν λάβωμεν τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τοὺς προσθέσωμεν, πάλιν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα θὰ εὕρωμεν· διότι τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς μονάδας τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· εἶναι δὲ ἀδιάφορον κατὰ ποῖον τρόπον θὰ ἑνωθῶσιν αἱ μονάδες αὗται. Λόγου χάριν, ἠδυνάμεθα νὰ ἑνώσωμεν αὐτὰς ὡς ἑξῆς· Λαμβάνομεν μίαν μονάδα τοῦ 6 καὶ τὴν προσθέτομεν εἰς τὸ 9, ὅτε τοῦτο γίνεται 10 καὶ τὸ 6 γίνεται 5, τότε τὰ δύο 5 κάμνουν ἄλλα 10 καὶ τὰ 8 καὶ 2 κάμνουν ἄλλα 10· ἔχομεν λοιπὸν 30· τοῦτο μὲ τὸ ἄλλο 6 ἀποτελεῖ τέλος τὸν 36.

Πρόσθεσις ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν.

15. Πᾶσα πρόσθεσις ἀνάγεται εἰς τὴν ἁπλῆν πρόσθεσιν μονοψηφίων ἀριθμῶν· διότι φανερὸν εἶναι, ὅτι διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀριθμούς,

ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας αὐτῶν, χωριστὰ τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας κτλ. καὶ νὰ ἑνώσωμεν πάντα ταῦτα τὰ ἀθροίσματα.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 4507, 9813 καὶ 552. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 4507 \\ 9813 \\ 552 \\ \hline 14872 \end{array}$$

Γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν κατακόρυφον στήλην· ἔπειτα ἄγομεν ὑπ᾽ αὐτοὺς ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς ταύτης γράφομεν τὰ ψηφία τοῦ ἀθροίσματος καθόσον εὑρίσκομεν αὐτά.

Κατὰ πρῶτον προσθέτομεν τὰς ἁπλᾶς μονάδας, λέγοντες, 2 καὶ 3 κάμνουν 5 καὶ 7 κάμνουν 12· τὸ ἄθροισμα τῶν ἁπλῶν μονάδων εἶναι λοιπὸν 12 μονάδες· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἔχει δύο μονάδας καὶ μίαν δεκάδα, γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ἁπλῶν μονάδων μόνον τὸ ψηφίον 2 τῶν μονάδων καὶ κρατοῦμεν τὴν μίαν δεκάδα, διὰ νὰ τὴν ἑνώσωμεν μὲ τὰς δεκάδας τῶν προσθετέων ἀριθμῶν.

Μεταβαίνοντες εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων, λέγομεν, 1 τὸ κρατούμενον καὶ 5 κάμνουν 6 καὶ 1 κάμνουν 7. Τὸ ἄθροισμα τῶν δεκάδων εἶναι λοιπὸν 7 δεκάδες· γράφομεν αὐτὰς εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων.

Μεταβαίνοντες ἔπειτα εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων, λέγομεν, 5 καὶ 8 κάμνουν 13 καὶ 5 κάμνουν 18. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἑκατοντάδων εἶναι λοιπὸν 18 ἑκατοντάδες· καὶ ἐπειδὴ 18 ἑκατοντάδες σχηματίζουσι μίαν χιλιάδα καὶ 8 ἑκατοντάδας, γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων μόνον τὸ ψηφίον 8 τῶν ἑκατονταδων καὶ κρατοῦμεν τὴν μίαν χιλιάδα, διὰ νὰ τὴν ἑνώσωμεν μὲ τὰς χιλιάδας τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Μεταβαίνοντες τέλος εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων, λέγομεν, 1 τὸ κρατούμενον καὶ 9 κάμνουν 10 καὶ 4 κάμνουν 14· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν χιλιάδων εἶναι 14 χιλιάδες, καὶ ἐπειδὴ 14 χιλιάδες ἀποτελοῦσι μίαν δεκάδα χιλιάδων καὶ 4 χιλιάδας, γράφομεν 4 εἰς τὴν θέσιν τῶν χιλιάδων καὶ ὄπισθεν αὐτοῦ (ἤτοι εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων χιλιάδων) τὸ ψηφίον 1.

Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι 14872.

Κανὼν τῆς προσθέσεως

16. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς προσθέσεως·

Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, γράφομεν αὐτοὺς τὸν ἕνα ὑποκάτω τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες ἑκάστης τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην· ἔπειτα ἄγομεν ὑπ᾽ αὐτοὺς ὁριζοντίαν γραμμήν, διὰ νὰ ἀποχωρίσωμεν αὐτοὺς ἀπὸ τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον θὰ γραφῇ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς. Ἔπειτα προσθέτομεν χωριστὰ τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων· καὶ ὅταν μὲν τὸ ἄθροισμα μιᾶς στήλης δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν 9, γράφομεν αὐτὸ ὑποκάτω τῆς ἰδίας στήλης, ἐὰν ὅμως ὑπερβαίνῃ τὸν 9 (ὅτε θὰ ἔχῃ δεκάδας καὶ μονάδας), γράφομεν μόνον τὰς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος ὑποκάτω τῆς στήλης, τὰς δὲ δεκάδας προσθέτομεν εἰς τὴν ἀκόλουθον πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλην καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τῆς τελευταίας στήλης.

Σημείωσις. Ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἰς ἑκάστην στήλην δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν 9, εἶναι ἀδιάφορον ἂν ἀρχίζωμεν τὴν πρᾶξιν ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἢ ἂν ἀρχίζωμεν πρὸς τὰ δεξιά· τοῦτο συμβαίνει π.χ. εἰς τὴν ἑξῆς πρόσθεσιν·

$$\begin{array}{r} 521 \\ 314 \\ 123 \\ \hline 958 \end{array}$$

Ἀλλ᾽ ὅταν τὸ ἄθροισμα μιᾶς στήλης (ἢ καὶ περισσοτέρων) ὑπερβαίνῃ τὸν 9, ἐὰν ἀρχίζωμεν ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης τάξεως, θὰ εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ ἀλλάξωμεν τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον ἐγράψαμεν· π. χ. εἰς τὴν ἑξῆς πρόσθεσιν·

$$\begin{array}{r} 89\,592 \\ 4\,721 \\ 25\,491 \\ 1\,592 \\ \hline 121\,396 \end{array}$$

Τὸ ἄθροισμα τῆς στήλης τῶν δεκάδων χιλιάδων εἶναι μόνον 10, ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῆς στήλης τῶν χιλιάδων καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῆς στήλης τῶν ἑκατοντάδων λαμβάνομεν ἀκόμη 2 δεκάδας χιλιάδων, ὥστε τὸ 10 πρέπει νὰ γίνῃ 12· διὰ τοῦτο ἀρχίζομεν τὴν πρόσθεσιν πάντοτε ἀπὸ τὴν στήλην τῶν ἁπλῶν μονάδων.

Σημείωσις. Τὴν πρόσθεσιν δύο διψηφίων ἀριθμῶν ἐκτελοῦμεν εὐκόλως ἀπὸ μνήμης, ὅταν ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν λήγῃ εἰς 0 (ἢ καὶ οἱ δύο)· οἷον, 60+20 εἶναι 80, 32+40 κάμνουν 72 κτλ.

Μικρὰ δὲ ἄσκησις ἀρκεῖ διὰ νὰ προσθέτῃ τις πάντοτε ἀπὸ μνήμης τοὺς διψηφίους ἀριθμούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

17. ***Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι᾿ ἧς ἐλαττώνομεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος τις δοθεὶς ἀριθμός.***

Ἐὰν π. χ. θέλω νὰ εὕρω ***πόσαι δραχμαὶ θὰ μοῦ μείνουν, ὅταν ἀπὸ τὰς 9 δραχμάς, τὰς ὁποίας ἔχω, δώσω τὰς 4,*** πρέπει νὰ ἐλαττώσω τὸν 9 κατὰ τέσσαρας μονάδας, ἤγουν νὰ ἐκβάλω ἀπὸ τοῦ 9 τέσσαρας μονάδας· τοῦτο εἶναι ἀφαίρεσις.

Ὁ πρῶτος ἀριθμός, ὅστις πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ, λέγεται ***μειωτέος,*** ὁ δὲ δεύτερος ***ἀφαιρετέος·*** ὁ δὲ ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως προκύπτων ἀριθμὸς λέγεται ***ὑπόλοιπον ἢ ὑπεροχὴ ἢ διαφορά.***

Ὁ μειωτέος εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς. Διότι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως, ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ 6 ἀπὸ τοῦ 8 εἶναι 2, τοῦτο σημαίνει, ὅτι ὁ 8 περιέχει 6 μονάδας καὶ 2 μονάδας· δηλαδὴ σύγκειται ἀπὸ τὸν 6 καὶ ἀπὸ τὸν 2, ἢ εἶναι ἄθροισμα αὐτῶν.

Ἡ ἀφαίρεσις σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου —, τὸ ὁποῖον γράφεται μεταξὺ τοῦ μειωτέου καὶ τοῦ ἀφαιρετέου (γράφεται δὲ πρῶτος ὁ μειωτέος) καὶ ἀναγινώσκεται ***πλήν·*** οἷον, 8—6 σημαίνει, ὅτι ἀπὸ τοῦ 8 πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 6, καὶ ἀναγινώσκεται ***ὀκτὼ πλὴν ἕξ.***

Σημείωσις. Καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν οἱ ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν.

Ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀπὸ ἄλλον ἀριθμόν.

18. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν μονοψήφιον ἀπὸ ἄλλον ἀριθμόν, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ αὐτὸν τὰς μονάδας τοῦ μονοψηφίου, ἀπὸ μίαν μίαν,

ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις μένει, ὅταν καὶ ἡ τελευταία μονὰς τοῦ ἀφαιρετέου ἀφαιρεθῇ, εἶναι τὸ ὑπόλοιπον.

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ ἀφαιρέσω 5 ἀπὸ 14, λέγω, 14 πλὴν 1 μένουν 13, 13 πλὴν 1 μένουν 12, 12 πλὴν 1 μένουν 11, 11 πλὴν 1 μένουν 10, 10 πλὴν 1 μένουν 9· ἄρα τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶναι 9.

Διὰ νὰ ἀφαιρέσω 6 ἀπὸ τὸν 147 ἀφαιρῶ αὐτὸν μόνον ἀπὸ τὰς 7 μονάδας τοῦ 147 καὶ εὑρίσκω τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον 141.

Ὅταν ὁ μειωτέος δὲν εἶναι πολὺ μεγάλος ἀριθμός, αἱ ἀφαιρέσεις αὗται γίνονται ἀμέσως ἀπὸ μνήμης· ὥστε λέγομεν ἀμέσως, 9 ἀπὸ 15 μένουν 6, 8 ἀπὸ 17 μένουν 9 καὶ οὕτω καθεξῆς.

Σημείωσις. Ὅταν ἔχω νὰ ἀφαιρέσω 9, ἀφαιρῶ 10 καὶ ἔπειτα προσθέτω 1· οἷον, 9 ἀπὸ 537 μένουν 528· ὁμοίως, ὅταν ἔχω νὰ προσθέσω 9, προσθέτω 10 καὶ ἔπειτα ἀφαιρῶ 1· οἷον, 165 καὶ 9 κάμνουν 174.

Ἀφαίρεσις πολυψηφίου ἀπὸ πολυψήφιον.

19. Ἡ ἀφαίρεσις πολυψηφίου ἀπὸ πολυψήφιον στηρίζεται εἰς τὰς ἑξῆς δύο ἀρχάς·

1) Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα ἀπὸ ἄλλον, δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας του, τὰς δεκάδας του, τὰς ἑκατοντάδας του κτλ. ἤγουν, διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν πάντα τὰ μέρη του.

Ἐάν, λ.χ. ἔχω νὰ ἀφαιρέσω τὸν 15 ἀπὸ ἄλλον ἀριθμόν, ἔστω ἀπὸ τὸν 28, δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω τὰς 5 μονάδας (ὅτε μένει 23) καὶ ἔπειτα ἀπὸ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον μένει, νὰ ἀφαιρέσω τὴν μίαν δεκάδα (ὅτε μένει 13).

2) Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ὁ μειωτέος ὑπερβαίνῃ τὸν ἀφαιρετέον κατὰ ἑπτὰ μονάδας, φανερὸν εἶναι, ὅτι καὶ ἂν προσθέσωμεν καὶ εἰς τοὺς δύο ἀπὸ μίαν μονάδα, πάλιν ἡ διαφορά των θὰ μείνῃ ἑπτά, καὶ ἂν ἔπειτα προσθέσωμεν καὶ ἄλλην μονάδα, ἡ διαφορὰ θὰ μείνῃ πάλιν 7, ὥστε ὅσας μονάδας καὶ ἂν προσθέσωμεν ἐξ ἴσου καὶ εἰς τοὺς δύο, ἡ διαφορά των δὲν ἀλλάσσει.

20. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα ἀπὸ ἄλλον, γράφομεν αὐτὸν ὑποκάτω τοῦ ἄλλου, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν· ἔπειτα κάμνομεν ὡς εἰς τὰ ἑξῆς παραδείγματα·

Παράδειγμα Α΄. Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 425 ἀπὸ τὸν 957.

$$\begin{array}{r} 957 \\ \underline{425} \\ 532 \end{array}$$

Ἀφαιροῦμεν τὰς 5 μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς 7 μονάδας τοῦ μειωτέου (λέγοντες, 5 ἀπὸ 7 μένουν 2) καὶ γράφομεν τὰς δύο μονάδας, αἱ ὁποῖαι μένουν, εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰς 2 δεκάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς 5 δεκάδας τοῦ μειωτέου (λέγοντες, 2 ἀπὸ 5 μένουν 3) καὶ γράφομεν τὰς 3 δεκάδας, αἵτινες μένουν, εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων· τέλος ἀφαιροῦμεν τὰς 4 ἑκατοντάδας ἀπὸ τὰς 9 ἑκατοντάδας καὶ γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων τὰς 5 ἑκατοντάδας, αἱ ὁποῖαι μένουν· ὥστε τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶναι 532· διότι τοῦτο εὑρήκαμεν, ἀφοῦ ἀφῃρέσαμεν ἀπὸ τὸν μειωτέον πάντα τὰ μέρη τοῦ ἀφαιρετέου.

Σημείωσις. Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο ἠδυνάμεθα νὰ ἀρχίσωμεν τὴν πρᾶξιν ἀπὸ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἑκατοντάδων καὶ ἔπειτα νὰ κάμωμεν τὴν ἀφαίρεσιν τῶν δεκάδων καὶ ἔπειτα τῶν μονάδων.

Παράδειγμα Β΄. Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 8 492 ἀπὸ τὸν 75 853.

$$\begin{array}{r} 75\,853 \\ 8\,492 \\ \hline 67\,361 \end{array}$$

Λέγομεν, δύο μονάδες (ἀφαιρούμεναι) ἀπὸ τρεῖς μονάδας δίδουν μίαν μονάδα, 9 δεκάδες ἀπὸ 5 δεκάδας, δὲν ἀφαιροῦνται· διὰ νὰ δυνηθῶμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν, προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον 10 δεκάδας, ὥστε γίνονται αἱ 5 δεκάδες του 15, καὶ ἔπειτα λέγομεν 9 ἀπὸ 15 μένουν 6· τώρα πρέπει νὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 10 δεκάδας (διὰ νὰ μὴ ἀλλάξῃ ἡ διαφορὰ) ἢ ἀντ᾽ αὐτῶν μίαν ἑκατοντάδα· λέγομεν λοιπόν, ἓν τὸ κρατούμενον καὶ 4 κάμνουν 5, ἀπὸ 8 μένουν 3· ἔπειτα 8 (χιλιάδες) ἀπὸ 5 χιλιάδας δὲν ἀφαιροῦνται· προσθέτομεν λοιπὸν 10 χιλιάδας εἰς τὸν μειωτέον, ὥστε ἔχει τώρα 15 χιλιάδας, καὶ λέγομεν 8 ἀπὸ 15 μένουν 7· πρέπει τώρα νὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον τὰς 10 χιλιάδας (διὰ νὰ μὴ ἀλλάξῃ ἡ διαφορὰ) ἢ μίαν δεκάδα χιλιάδων· ὥστε ὁ ἀφαιρετέος ἔχει τώρα μίαν δεκάδα χιλιάδων, καὶ ἂν τὴν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰς 7 δεκάδας χιλιάδων, ἃς ἔχει ὁ μειωτέος, μένουν 6 δεκάδες χιλιάδων· ὥστε τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶναι 67 361.

Καὶ ἡ ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀπὸ πολυψήφιον δύναται νὰ γίνῃ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς φαίνεται εἰς τὰ ἑξῆς παραδείγματα

$$\begin{array}{r} 497 \\ 5 \\ \hline 492 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 191 \\ 6 \\ \hline 185 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1002 \\ 7 \\ \hline 995 \end{array}$$

Κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως.

21. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς ἀφαιρέσεως· ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα ἀπὸ ἄλλον ἀριθμόν, γράφομεν αὐτὸν ὑποκάτω τοῦ ἄλλου, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν· ἔπειτα, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας, ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τοῦ μειωτέου. Ἐὰν δὲ ψηφίον τι τοῦ μειωτέου εἶναι μικρότερον τοῦ ἀντιστοιχοῦντος ψηφίου τοῦ ἀφαιρετέου, προσθέτομεν εἰς αὐτὸ 10, ἀλλ' ἔπειτα, ἐρχόμενοι εἰς τὸ ἀκόλουθον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου, αὐξάνομεν αὐτὸ κατὰ μίαν μονάδα, πρὶν τὸ ἀφαιρέσωμεν. Τὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν τούτων ἀφαιρέσεων εἶναι τὰ ψηφία τοῦ ζητουμένου ὑπολοίπου.***

22. Ὅταν ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν πολλοὺς ἄλλους, ἢ ἀφαιροῦμεν αὐτοὺς χωριστά, τὸν ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου, ἢ προσθέτομεν αὐτοὺς προηγουμένως καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀντὶ αὐτῶν τὸ ἄθροισμά των (διότι, κατὰ τὴν πρώτην ἀρχήν, καὶ οἱ δύο τρόποι θὰ δώσουν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον).

Παραδείγματος χάριν, ἂν ἀπὸ τὸν 15 458 πρόκειται νὰ ἀφαιρεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 455, 892, 2 500, θὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 15\,458 \\ 455 \\ \hline 15\,003 \\ 892 \\ \hline 14\,111 \\ 2\,500 \\ \hline 11\,611 \end{array} \qquad \text{ἢ} \qquad \begin{array}{r} 455 \\ 892 \\ 2\,500 \\ \hline 3\,847 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15\,458 \\ 3\,847 \\ \hline 11\,611 \end{array}$$

Βάσανος τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως.

23. ***Βάσανος ἢ δοκιμὴ μιᾶς πράξεως ἀριθμητικῆς λέγεται ἄλλη πρᾶξις, τὴν ὁποίαν κάμνομεν, διὰ νὰ ἴδωμεν, ἂν ἡ πρώτη ἔγινε χωρὶς λάθος.***

Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν βάσανον τῆς προσθέσεως, ἐπαναλαμβάνομεν τὴν πρόσθεσιν κατ' ἄλλην τάξιν· οἷον, προσθέτομεν τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἐὰν προηγουμένως ἐκάμαμεν τὴν πρόσθεσιν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, ἢ γράφομεν τοὺς προσθετέους κατ' ἄλλην σειράν· ἐὰν εὕρωμεν πάλιν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, εἶναι πιθανόν, ὅτι δὲν ἔγινε λάθος.

Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν βάσανον τῆς ἀφαιρέσεως, προσθέτομεν τὸν ἀφαιρετέον καὶ τὸ ὑπόλοιπον· ἐὰν ὡς ἄθροισμά των εὕρωμεν τὸν μειωτέον, εἶναι πιθανόν, ὅτι δὲν ἔγινε λάθος εἰς τὴν ἀφαίρεσιν.

Ἀσκήσεις (ἀπὸ μνήμης),

1) Νὰ ἀπαγγελθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ πέντε εἰς πέντε (μέχρι τοῦ 100).

2) Παιδίον τι εἶναι 12 ἐτῶν· ποίαν ἡλικίαν θὰ ἔχῃ μετὰ πέντε ἔτη, ποίαν μετὰ 10 καὶ ποίαν μετὰ 20;

3) Εἶχον 95 δραχμάς, καὶ ἐξ αὐτῶν ἐξώδευσα τὰς 10· πόσαι μοῦ ἔμειναν; καὶ ἂν ἀκόμη ἐξωδεύσω 15, πόσαι θὰ μοῦ μείνουν;

4) Βοσκός τις εἶχεν 80 πρόβατα, ἀλλὰ τὸν χειμῶνα τοῦ ἐψόφησαν 20, πόσα τοῦ ἔμειναν; καὶ πόσα πρέπει νὰ ἀγοράσῃ διὰ νὰ τὰ κάμῃ 100;

5) Εἰς ἓν βαρέλλιον ἦσαν 63 ὀκάδες οἴνου καὶ ἐβάλαμεν ἀκόμη 25 ὀκάδας· πόσαι ὀκάδες εἶναι τώρα;

Προβλήματα.

1) Γεωργός τις εἰσέπραξεν ἐκ τοῦ σίτου του 1050 δραχμάς, ἐκ τοῦ οἴνου του 822 καὶ ἐκ τοῦ βάμβακός του 2500 δραχμάς· πόσας δραχμὰς εἰσέπραξε τὸ ὅλον; (Ἀπ. 4372)

2) Ἐρωτηθείς τις περὶ τῆς ἡλικίας του, εἶπεν· «ὅταν ἐγεννήθη ὁ υἱός μου, ἤμην 28 ἐτῶν· καὶ τώρα ἔχω ἡλικίαν διπλασίαν τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ μου»· πόσον ἐτῶν εἶναι; (Ἀπ. 56)

3) Ἡ ἐν Σαλαμῖνι ναυμαχία ἐγένετο τῷ 480 π. Χ. πόσα ἔτη εἶναι μέχρι σήμερον (1927 μ. Χ.);

4) Ἄνθρωπός τις ἠγόρασε κτῆμα δι᾽ 7720 δραχμῶν καὶ τὸ ἐπώλησεν ὕστερον 8519 δρ. πόσας δραχμὰς ἐκέρδισε; (Ἀπ. 799)

5) Ἐὰν παιδίον τι γεννηθῇ σήμερον, πότε θὰ εἶναι 32 ἐτῶν;

6) Ἄνθρωπός τις ἀπέθανε τῷ 1879 εἰς ἡλικίαν 85 ἐτῶν· εἰς ποῖον ἔτος ἐγεννήθη; (Ἀπ. 1794)

7) Μία οἰκογένεια σύγκειται ἐκ τοῦ πατρός, ἐκ τῆς μητρὸς καὶ ἐκ δύο τέκνων· αἱ ἡλικίαι τῶν τεσσάρων ὁμοῦ πέρυσιν ἀπετέλουν τὸν ἀριθμὸν 127· ἐφέτος ὁ πατὴρ ταξιδεύει, καὶ τῶν ἄλλων αἱ ἡλικίαι ὁμοῦ ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 72· πόσων ἐτῶν εἶναι ὁ πατήρ; (Ἀπ. 55)

8) Πόσαι ὧραι εἶναι ἀπὸ τῆς 9ης πρὸ μεσημβρίας μέχρι τῆς 11ης μετὰ μεσημβρίαν (τῆς αὐτῆς ἡμέρας); (Ἀπ. 14)

9) Πόσαι ὧραι εἶναι ἀπὸ τῆς 2ας μ. μ. μέχρι τῆς 9ης μετὰ μεσημβρίαν τῆς ἑπομένης ἡμέρας; (Ἀπ. 31)

10) Γυνὴ χήρα, ἐρωτηθεῖσα εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανεν ὁ σύζυγός της, ἀπεκρίθη· «τοῦτο μὲν δὲν ἐνθυμοῦμαι, γνωρίζω ὅμως, ὅτι, ὅταν μὲ ἐνυμφεύθη, ἐγὼ μὲν ἤμην 20 ἐτῶν, αὐτὸς δὲ 30, τώρα δὲ ἔχω

ἡλικίαν 62 ἐτῶν καὶ εἶμαι χήρα ἀπὸ 3 ἐτῶν»· εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανεν ὁ σύζυγός της; ('Απ. 69 ἐτῶν)

11) Χωρικός τις ἐπῆγεν εἰς τὴν πόλιν διὰ νὰ ἀγοράσῃ διάφορα πράγματα, τὰ ὁποῖα τοῦ ἐχρειάζοντο, ἔφερε δὲ μαζί του 120 δραχμὰς καὶ ἐπέστρεψε μὲ 2 δραχμάς, ἀλλ' ἔμεινε καὶ χρεώστης εἰς ἕνα ἔμπορον 12 δραχμάς· πόσας ἐξώδευσε;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

24. ***Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς ἐπαναλαμβάνομεν ἕνα ἀριθμὸν πολλάκις καὶ σχηματίζομεν ἐξ αὐτοῦ ἄλλον ἀριθμόν.***

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, θέλω νὰ εὕρω πόσας ἡμέρας ἔχουν τρεῖς ἑβδομάδες, πρέπει νὰ ἐπαναλάβω τὸν 7 τρεῖς φοράς, ἤτοι νὰ προσθέσω 7 καὶ 7 καὶ 7· τοιουτοτρόπως σχηματίζω ἐκ τοῦ 7 τὸν ἀριθμὸν 21· τοῦτο δὲ εἶναι πολλαπλασιασμός.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι ***πρόσθεσις ἀλλεπάλληλος ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς τὸν ἑαυτόν του.***

Εἰς ἕκαστον πολλαπλασιασμὸν δίδονται δύο ἀριθμοί· ὁ εἷς πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ, ἤγουν νὰ πολλαπλασιασθῇ, καὶ λέγεται διὰ τοῦτο ***πολλαπλασιαστέος,*** ὁ δὲ ἄλλος δεικνύει, πόσας φορὰς θὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πρῶτος, καὶ λέγεται ***πολλαπλασιαστής.***

Ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ σχηματιζόμενος ἀριθμός, ἤτοι τὸ ἐξαγόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, λέγεται ***γινόμενον.***

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ 7, πολλαπλασιαστὴς ὁ 3 καὶ γινόμενον ὁ 21.

Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς λέγονται καὶ μὲ ἓν ὄνομα ***παράγοντες τοῦ γινομένου.***

Ὁ πολλαπλασιασμὸς σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου $\times$, τὸ ὁποῖον ἀναγινώσκεται ***ἐπί***· οἷον, 5×7 σημαίνει, ὅτι ὁ 5 πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν 7, ἤτοι νὰ ἐπαναληφθῇ ἑπτάκις· ἀναγινώσκεται δὲ ***πέντε ἐπὶ ἑπτά.***

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον, διότι γίνεται ἐκ τούτου διὰ προσθέσεως. Ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς θεωρεῖται πάντοτε ὡς ἀριθμὸς ἀφῃρημένος· διότι σημαίνει μόνον πόσας φορὰς θὰ λάβωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον.

25. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις·

1) Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μονοψήφιοι.

2) ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι πολυψήφιος, ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς μονοψήφιος,

3) ὅταν ἀμφότεροι εἶναι πολυψήφιοι.

Α΄) Πολλαπλασιασμὸς μονοψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ μονοψήφιον.

26. Ὁ πολλαπλασιασμὸς μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον γίνεται εὐκόλως διὰ τῆς προσθέσεως, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· ἐὰν π. χ. ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 6 ἐπὶ 5, δηλαδὴ νὰ εὕρω τὸ ἄθροισμα $6+6+6+6+6$,
λέγω, 6 καὶ 6 κάμνουν 12 καὶ 6 κάμνουν 18 καὶ 6 κάμνουν 24 καὶ 6 γίνονται 30· λοιπὸν τὸ γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ 5 εἶναι 30.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε μονοψηφίων. Εἶναι δὲ τὰ γινόμενα ταῦτα κατατεταγμένα εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα, ὅστις λέγεται πυθαγόρειος, διότι, ὡς λέγουσιν, ὁ Πυθαγόρας ἐπενόησεν αὐτόν.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Ἡ πρώτη ὁριζοντία σειρὰ περιέχει τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμούς, ἡ δευτέρα περιέχει τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 2, ἤτοι τὰ διπλάσια αὐτῶν, καὶ ἡ τρίτη τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 3, ἤτοι τὰ τριπλάσια αὐτῶν, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Διὰ νὰ εὕρωμεν εἰς τὸν πίνακα τοῦτον τὸ γινόμενον δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν, ζητοῦμεν τὸν πολλαπλασιαστέον εἰς τὴν πρώτην κατακόρυφον, τὸ γινόμενον εὑρίσκεται ἐκεῖ, ὅπου συναντῶνται αἱ δύο σειραί, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουσιν ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.

Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον 35, τοῦ 5×7, εὑρίσκεται ἐκεῖ, ὅπου συναντᾶται ἡ πέμπτη κατακόρυφος σειρὰ μὲ τὴν ἑβδόμην ὁριζοντίαν.

Σημείωσις. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι 1, τὸ γινόμενον εἶναι τὸ ἴδιον μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον· δηλαδὴ 5×1 εἶναι 5, 8×1 εἶναι 8 κτλ.

Παρατήρησις. Πᾶς πολλαπλασιασμός, ὡς θὰ ἴδωμεν ἀκολούθως, ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον· διὰ τοῦτο, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ἐκ στήθους τὰ εἰς τὸν πίνακα τοῦτον περιεχόμενα γινόμενα.

Β΄) Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

27. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 8726 ἐπὶ 5. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν ἑξῆς πρόσθεσιν· $8726+8726+8726+8726+8726$

$$\begin{array}{r} 8726 \\ 8726 \\ 8726 \\ 8726 \\ 8726 \\ \hline \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{r} 8726 \\ 5 \\ \hline 43630 \end{array}$$

Εἰς τὴν πρόσθεσιν ταύτην βλέπομεν, ὅτι αἱ 6 μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ λαμβάνονται πεντάκις, ἤτοι πολλαπλασιάζονται ἐπὶ 5· καὶ αἱ δύο δεκάδες τοῦ ἀριθμοῦ ἐπίσης λαμβάνονται πέντε φοράς, ἤτοι πολλαπλασιάζονται ἐπὶ 5· καὶ αἱ 7 ἑκατοντάδες ἐπίσης καὶ αἱ 8 χιλιάδες ἐπίσης. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τῶν 6 μονάδων ἐπὶ πέντε (30 μονάδας) εὑρίσκομεν εἰς τὸν πυθαγόρειον πίνακα (ἢ τὸ ἠξεύρομεν ἐκ στήθους), ὁμοίως καὶ τὸ γινόμενον τῶν δύο δεκάδων ἐπὶ 5 (10 δεκάδας), ὁμοίως ἠξεύρομεν καὶ τὸ γινόμενον τῶν 7 ἑκατοντάδων ἐπὶ 5 (35 ἑκατοντάδας) κτλ. Διὰ τοῦτο συντομεύομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς· γράφομεν ἅπαξ τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ ὑποκάτω αὐτοῦ τὸν πολλαπλασιαστὴν 5, καὶ ἀφοῦ σύρωμεν ὑποκάτω ὁριζοντίαν γραμμήν, λέγομεν, 6 μονάδες ἐπὶ 5 γίνονται 30 μονάδες, δηλαδὴ 3 δεκάδες καὶ 0 μονάδες· ὅθεν γράφομεν 0 ὑποκάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων καὶ κρατοῦμεν τὰς 3 δεκάδας, διὰ νὰ τὰς ἑνώσωμεν μὲ τὸ ἀκόλουθον γινόμενον τῶν δεκάδων. Ἐρχόμενοι ἔπειτα εἰς τὰς δεκάδας, λέγομεν, 2 δεκάδες ἐπὶ 5, γίνονται 10 δεκάδες, καὶ 3 αἱ κρατούμεναι, γίνονται 13 δεκάδες, δηλαδὴ μία ἑκατοντὰς καὶ 3 δεκάδες· ὅθεν γράφομεν καὶ τὰς τρεῖς δεκάδας ὑποκάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων καὶ κρατοῦμεν τὴν μίαν ἑκατοντάδα, διὰ νὰ τὴν ἑνώσωμεν μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἑκατοντάδων· 7 ἑκατοντάδες ἐπὶ 5, γίνονται 35 ἑκατοντάδες καὶ μία ἡ κρατουμένη, γίνονται 36 ἑκατοντάδες, ἤτοι 6 ἑκατοντάδες καὶ 3 χιλιάδες· λοιπόν, γράφομεν τὰς 6 ἑκατοντάδας εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων καὶ κρατοῦμεν τὰς 3 χιλιάδας, διὰ νὰ τὰς ἑνώσωμεν μὲ τὸ γινόμενον τῶν χιλιάδων· τέλος λέγομεν, 8 χιλιάδες ἐπὶ 5, γίνονται 40 χιλιάδες καὶ 3 αἱ κρατούμεναι, γίνονται 43 χιλιάδες, τὰς ὁποίας γράφομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν ἑκατοντάδων. Οὕτω δὲ εὑρήκαμεν τὸ ζητούμενον γινόμενον 43 630, τὸ ὁποῖον ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ πολλαπλασιαστέου 8726 πεντάκις εἰς τὸν ἑαυτόν του.

28. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ μονοψήφιον, γράφομεν τὸν μονοψήφιον ὑποκάτω τοῦ πολυψηφίου καὶ ἄγομεν ὑπ᾽ αὐτοὺς ὁριζοντίαν γραμμήν· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων. Καὶ ἂν μὲν γινόμενόν τι εἶναι μονοψήφιον, γράφομεν αὐτὸ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς καὶ εἰς τὴν στήλην τοῦ ψηφίου, τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσαμεν· ἐὰν δὲ τὸ γινόμενον εἶναι διψήφιον, γράφομεν ἐκεῖ μόνον τὰς μονάδας αὐτοῦ, τὰς δὲ δεκάδας ἑνώνομεν μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀκολούθου ψηφίου καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παραδείγματα.

678 508	4 490 091	πολλαπλασιαστέος
6	8	πολλαπλασιαστὴς
4 071 048	35 920 728	γινόμενον.

Σημείωσις. Ἐὰν ψηφίον τι τοῦ πολλαπλασιαστέου εἶναι 0, καὶ τὸ γινόμενόν του εἶναι 0.

Γ΄) Πολλαπλασιασμὸς οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

29. Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν πῶς εὑρίσκεται τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, πρέπει πρῶτον νὰ μάθωμεν τὰς ἑξῆς συντομίας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ·

1η) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 10, γράφομεν δεξιὰ αὐτοῦ ἓν μηδενικόν· διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 100, γράφομεν δύο μηδενικά· διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 1000, γράφομεν τρία καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παραδείγματα.

Τὸ γινόμενον	5×10 εἶναι	50	7×100 εἶναι	700
	18×10 εἶναι	180	103×100 εἶναι	10300
	407×10 εἶναι	4070	5914×100 εἶναι	591400

. . . .

Ὁ δὲ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον κάμνομεν τοῦτο, εἶναι ὁ ἑξῆς· Διὰ νὰ πολλαπλασιάσω ἀριθμόν τινα, ἔστω τὸν 593, ἐπὶ 10, ἤγουν διὰ νὰ ἐπαναλάβω τὸν 593 δέκα φοράς, πρέπει νὰ ἐπαναλάβω δέκα φορὰς τὰς 3 μονάδας του, ἐπίσης 10 φορὰς τὰς 9 δεκάδας του καὶ καθεξῆς· τουτέστι πρέπει νὰ ἐπαναλάβω 10 φορὰς ὅλα τὰ μέρη του. Ἀλλ' ὅταν λάβω τὴν ἁπλῆν μονάδα 10 φοράς, γίνεται δεκάς· ἄρα, ὅταν λάβω τὰς τρεῖς μονάδας δέκα φοράς, γίνονται 3 δεκάδες· ὁμοίως, ὅταν λάβω μίαν δεκάδα δέκα φοράς, προκύπτει μία ἑκατοντάς· ἄρα, ὅταν λάβω τὰς 9 δεκάδας τοῦ ἀριθμοῦ δέκα φοράς, γίνονται 9 ἑκατοντάδες. Ἐπίσης δεικνύω, ὅτι αἱ 5 ἑκατοντάδες γίνονται 5 χιλιάδες· ὥστε, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω ἐπὶ 10, προβιβάζω τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ ὅλα κατὰ μίαν τάξιν, τὰς μονάδας κάμνω δεκάδας, τὰς δεκάδας ἑκατοντάδας κτλ. Ἀλλὰ τοῦτο γίνεται, ὅταν τὸ μηδενικὸν γραφῇ εἰς τὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ καὶ λάβῃ τὴν θέσιν τῶν μονάδων.

2α) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ ἄλλον, τοῦ ὁποίου τὸ πρῶτον ψηφίον εἶναι σημαντικόν, τὰ δὲ ἄλλα μηδενικά (οἷον, 400, 500 κτλ.), πολλαπλασιάζομεν μόνον ἐπὶ τὸ σημαντικὸν ψηφίον καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου γράφομεν τὰ μηδενικὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

Παραδείγματα

12×30 εἶναι	360	12×3 εἶναι 36	
125×60 εἶναι	7 500	125	4508
4508×800 εἶναι	3 606 400	6	8
		750	36064

Ὁ δὲ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον κάμνομεν τοῦτο, εἶναι ὁ ἑξῆς.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσω, λόγου χάριν, τὸν ἀριθμὸν 159 ἐπὶ 400, πρέπει νὰ ἐπαναλάβω τὸν 159 τετρακοσίας φοράς· τοῦτο δὲ ἠμπορῶ νὰ τὸ κάμω ὡς ἑξῆς·

ἐπαναλαμβάνω τὸν 159 κατὰ πρῶτον 100 φορὰς καὶ εὑρίσκω 15 900
ἔπειτα ἐπαναλαμβάνω αὐτὸν ἄλλας 100 φορὰς καὶ εὑρίσκω 15 900
ἔπειτα ἄλλας 100 φορὰς καὶ εὑρίσκω πάλιν 15 900
καὶ τέλος ἄλλας 100 φορὰς καὶ εὑρίσκω 15 900

Τώρα πρέπει νὰ προσθέσω τοὺς τέσσαρας τούτους ἀριθμοὺς καὶ θὰ ἔχω τὸν 159 τετρακοσίας φοράς· ὅ ἐστι, θὰ ἔχω τὸ γινόμενον τοῦ 159 ἐπὶ 400· ἀλλὰ βλέπω, ὅτι θὰ εὕρω τὸ ἴδιον καὶ ἂν προσθέσω τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς

$$\begin{array}{r} 159 \\ 159 \\ 159 \\ 159 \\ \hline 636 \end{array}$$

καὶ δεξιὰ τοῦ ἀθροίσματος 636 γράψω τὰ δύο μηδενικά· ἀλλὰ τὸ δεύτερον τοῦτο ἄθροισμα εἶναι τὸ γινόμενον 159×4· πολλαπλασιάζω λοιπὸν τὸν 159 ἐπὶ 4 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου γράφω δύο μηδενικά.

30 Δυνάμεθα τώρα νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ὁποιουσδήποτε ἀριθμούς.

— Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 4897 ἐπὶ 875· κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν ἀριθμὸν 4897 ὀκτακοσίας ἑβδομήκοντα πέντε φοράς, καὶ ὁ ἀριθμός, ὅστις θὰ σχηματισθῇ ἐκ τῆς ἐπαναλήψεως ταύτης, θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον. Ἀλλ' ἀντὶ νὰ λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν 875 φοράς, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν αὐτὸν κατὰ πρῶτον 800 φορὰς μόνον, ἔπειτα 70 φορὰς καὶ ἔπειτα 5 φορὰς (διότι ὁ 875, ἐὰν ἀναλυθῇ κατὰ τὴν ἀξίαν τῶν ψηφίων του, εἶναι 800+70+5· ὅ ἐστι, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν κατὰ πρῶτον ἐπὶ 800, ἔπειτα χωριστὰ ἐπὶ 70 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 5, καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὰ τρία γινόμενα.

Ἰδοὺ οἱ τρεῖς οὗτοι πολλαπλασιασμοὶ

4897	4897	4897
5	70	800
24485	342790	3917600

πρῶτον γινόμενον	24485
δεύτερον γινόμενον	342790
τρίτον γινόμενον	3917600
	4284875 γινόμενον τοῦ 4897 ἐπὶ 875.

Πρὸς συντομίαν διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς·

4897	πολλαπλασιαστέος	
875	πολλαπλασιαστὴς	
24485	μερικὸν γινόμενον ἐπὶ	5
342790	μερικὸν γινόμενον ἐπὶ	70
3917600	μερικὸν γινόμενον ἐπὶ	800
4284875	ἄθροισμα τῶν μερικῶν γινομένων, ἤγουν τὸ ὁλικὸν γινόμενον·	

Τὰ μηδενικά, τὰ ὁποῖα γράφομεν δεξιὰ τῶν μερικῶν γινομένων (τοῦ δευτέρου, τρίτου κλπ.), δὲν λαμβάνουσι κανὲν μέρος εἰς τὴν πρόσθεσιν αὐτῶν, ἑπομένως δυνάμεθα νὰ τὰ παραλείπωμεν, ἀρκεῖ μόνον νὰ ἀφήνωμεν κενὸν τὸν τόπον αὐτῶν· πρὸς τοῦτο γράφομεν ἕκαστον μερικὸν γινόμενον οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον του νὰ εἶναι ὑποκάτω τοῦ ψηφίου μὲ τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσαμεν· τότε δὲ ἡ πρᾶξις ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάζωμεν διαδοχικῶς τὸν πολλαπλασιαστέον 4897 ἐφ' ἕκαστον τῶν σημαντικῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, πρῶτον ἐπὶ 5, ἔπειτα ἐπὶ 7 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 8, καὶ νὰ γράφωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἄλλο, ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν.

31. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ·

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ ἄλλον γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ ὑποκάτω ἄγομεν ὁριζοντίαν γραμμήν· πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον χωριστὰ μὲ ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἀρχίζοντες ἐκ δεξιῶν, καὶ γράφομεν ἕκαστον μερικὸν γινόμενον οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον του νὰ εἶ-

ναι ὑποκάτω τοῦ ψηφίου, μὲ τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσαμεν· ἔπειτα ἄγομεν γραμμὴν καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα· τὸ προκῦπτον ἄθροισμα εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Παραδείγματα πολλαπλασιασμοῦ.

56042	1462	175004
77	801	30013
392294	1462	525012
392294	11696	175004
4315234	1171062	525012
		5252395052

Συντομία. Ὅταν εἷς ἐκ τῶν παραγόντων, ἢ καὶ οἱ δύο, λήγωσιν εἰς μηδενικά, συντομεύεται ὁ πολλαπλασιασμὸς ὡς ἑξῆς· πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμοὺς χωρὶς τὰ μηδενικὰ καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου γράφομεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 87000 ἐπὶ 900, πολλαπλασιάζω 87×9 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου 783 γράφω τὰ πέντε μηδενικά, τὰ ὁποῖα παρέλειψα, 78300000. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσω 907000 ἐπὶ 380, πολλαπλασιάζω 907×38 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου 34466 γράφω τρία μηδενικά, 34466000.

Δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ τοῦ σταυροῦ.

32. Προσθέτομεν ὅλα τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ ἐὰν τὸ ἄθροισμά των δὲν εἶναι μονοψήφιος ἀριθμός, προσθέτομεν καὶ αὐτοῦ τὰ ψηφία· καὶ τοῦτο κάμνομεν, ἕως οὗ εὕρωμεν ἄθροισμα μονοψήφιον. Τὸ αὐτὸ κάμνομεν καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιαστὴν καὶ εἰς τὸ γινόμενον· οὕτω θὰ ἔχωμεν τρεῖς μονοψηφίους ἀριθμούς· ἔπειτα γράφομεν τοὺς δύο πρώτους, τοὺς ὁποίους εὑρήκαμεν ἐκ τῶν δύο παραγόντων, εἰς τὰς δύο ἐπάνω γωνίας τοῦ σταυροῦ, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς καὶ τοῦ γινομένου (ἂν δὲν εἶναι μονοψήφιον) προσθέτομεν τὰ ψηφία, ἕως ὅτου εὑρεθῇ ἀριθμὸς μονοψήφιος· τὸν ἀριθμὸν τοῦτον γράφομεν εἰς μίαν τῶν ὑποκάτω γωνιῶν τοῦ σταυροῦ, τὸν δὲ μονοψήφιον ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἔδωκε τὸ γινόμενον, γράφομεν εἰς τὴν ἄλλην γωνίαν. Ἐὰν οἱ δύο τελευταῖοι ἀριθμοί, οἱ ὑποκάτω εὑρισκόμενοι, δὲν εἶναι ἴσοι, ὁ πολλαπλασιασμὸς ἔχει λάθος, ἐὰν δὲ εἶναι ἴσοι, εἶναι πιθανόν, ὅτι ὁ

πολλαπασιασμὸς ἔγινε χωρὶς λάθος (τὴν ἀπόδειξιν τούτου ἰδὲ εἰς τὴν μεγάλην μου ἀριθμητικήν, ἐδ. 92).

Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὴν δοκιμὴν ταύτην εἰς τὸν ἑξῆς πολλαπλασιασμόν·

$$\begin{array}{r} 254807 \\ 142 \\ \hline 509614 \\ 1019228 \\ 254807 \\ \hline 36182594 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 8 & 7 \\ \hline 2 & 2 \end{array}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστέου εἶναι 26 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ 26 εἶναι 8· ὁμοίως εὑρίσκομεν ἐκ τῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τὸν ἀριθμὸν 7.

Τὸ γινόμενον τῶν ψηφίων τούτων εἶναι 56· καὶ ἐξ αὐτοῦ εὑρίσκομεν τὸν μονοψήφιον 2· τὸν αὐτὸν δὲ εὑρίσκομεν καὶ ἐκ τοῦ γινομένου, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ γινομένου εἶναι 38 καὶ τούτου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 11 καὶ τούτου πάλιν 2.

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

33. Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολλοὺς ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν δύο ἐξ αὐτῶν, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸ γινόμενον ἐπὶ ἕνα ἄλλον καὶ τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ ἕνα ἄλλον καὶ οὕτω καθεξῆς, ἕως οὗ λάβωμεν πάντας τοὺς ἀριθμούς.

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ εὕρω τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 5,6,7,12 (τὸ ὁποῖον σημειοῦται ὡς ἑξῆς, $5\times6\times7\times12$), πολλαπλασιάζω τὸν 5 ἐπὶ 6 καὶ εὑρίσκω 30, ἔπειτα πολλαπλασιάζω τὸν 30 ἐπὶ τὸν 7 καὶ εὑρίσκω 210· τέλος πολλαπλασιάζω τὸν 210 ἐπὶ 12 καὶ εὑρίσκω 2520· τοῦτο δὲ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν 5,6,7,12.

Γενικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

34. Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἔχει δύο γενικὰς ἰδιότητας, τὰς ὁποίας καλὸν εἶναι νὰ ἠξεύρωμεν, διότι ἔχουσι πολλὰς ἐφαρμογάς· εἶναι δὲ αἱ ἑξῆς·

1η) Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται ὁποιοσδήποτε καὶ ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἄλλον.

Δηλαδή, εἴτε τὸν 5 πολλαπλασιάσω ἐπὶ 7, εἴτε τὸν 7 ἐπὶ 5, τὸ αὐτὸ γινόμενον θὰ εὕρω.

Διὰ νὰ δείξω τοῦτο, ἀναλύω τὸν 7 εἰς τὰς μονάδας του καὶ γράφω αὐτὰς εἰς μίαν σειράν, ἐπαναλαμβάνω δὲ τὴν σειρὰν ταύτην πέντε φοράς, ὡς ἑξῆς·

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσιν ὅλαι αὐταὶ αἱ μονάδες, εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ 5, διότι ἀποτελεῖται ἀπὸ 7 μονάδας, τὰς ὁποίας λαμβάνομεν πέντε φοράς· ἀλλ' αἱ αὐταὶ μονάδες ἀποτελοῦσι καὶ τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 7, διότι αἱ πέντε μονάδες μιᾶς κατακορύφου στήλης ἐπαναλαμβάνονται ἑπτὰ φορὰς (διότι εἶναι ἑπτὰ στῆλαι)· ἄρα τὸ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ 5 καὶ τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 7 εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δεικνύεται ἡ ἰδιότης αὐτη, ὁποιοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ δύο ἀριθμοί.

Σημείωσις. Ὅταν θέλω νὰ δείξω, ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι, γράφω μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον =, ὅπερ ἀπαγγέλλεται ***ἴσον***. Παραδείγματος χάριν, ἡ ἀποδειχθεῖσα ἰδιότης δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ σημείων ὡς ἑξῆς·

$$7\times5=5\times7.$$

Καὶ πολλῶν ἀριθμῶν τὸ γινόμενον δὲν ἀλλάσσει, καθ' ὁποιανδήποτε σειρὰν καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσι. Δηλαδή, ἐὰν ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς ἀριθμοὺς 5, 6, 2, 4, δύναμαι νὰ εἴπω 5×2 εἶναι 10 10×4 εἶναι 40 καὶ 40×6 εἶναι 240· τοῦτο δὲ τὸ γινόμενον θὰ εὕρω καὶ ἂν τοὺς λάβω μὲ τὴν σειράν, καθ' ἣν εἶναι γεγραμμένοι.

Ἡ ἐλευθερία αὕτη εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εὐκολύνει πολλάκις τὴν πρᾶξιν· διότι δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν τὸν εὐκολώτερον τρόπον τῆς ἐκτελέσεως. Ἐάν, λόγου χάριν, ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω δύο ἀριθμούς, οἷον τοὺς 54 καὶ 27198, λαμβάνω ὡς πολλαπλασιαστέον τὸν μεγαλύτερον (διότι τότε θὰ ἔχω νὰ κάμω ὀλιγωτέρους μερικοὺς πολλαπλασιασμούς), ἐὰν δὲ ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς ἀριθμοὺς

2, 13, 7, 5, 5, 2,

λέγω 2×5 εἶναι 10, 10×5 εἶναι 50, 50×2 εἶναι 100, 100×13 εἶναι 1300, 1300×7 εἶναι 9100. Δύναμαι μάλιστα καὶ νὰ συγχωνεύσω δύο ἢ περισσοτέρους παράγοντας εἰς ἕνα μόνον, πολλαπλασιάζων αὐτούς. Λόγου χάριν, εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα δύναμαι, ἀντὶ τῶν παραγόντων 2 καὶ 5, νὰ θέσω τὸ 10 (τὸ γινόμενόν των) καὶ ἀντὶ τῶν

ἄλλων δύο, 2 καὶ 5, νὰ θέσω 10, ὅτε ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς ἀριθμοὺς 10 10 7 13·
καὶ ἂν οἱ δύο παράγοντες 10 καὶ 10 συγχωνευθῶσι καὶ αὐτοὶ εἰς ἕνα, θὰ ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς ἀριθμοὺς 100 7 13·
καὶ ἐπειδὴ 13×7 εἶναι 91, τὸ ζητούμενον γινόμενον θὰ εἶναι

91×100, ἤτοι 9100.

Ὁμοίως εὑρίσκω εὐκολώτατα, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν

6, 2, 2, 5, 5, 2, 5, 8 εἶναι 48000.

Παρατήρησις. Εἰς τὴν ἰδιότητα ταύτην τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στηρίζεται ἡ ἑξῆς δοκιμὴ αὐτοῦ· Ἀφοῦ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἀριθμούς, διὰ νὰ δοκιμάσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, ἐπαναλαμβάνομεν αὐτόν, λαμβάνοντες ὡς πολλαπλασιαστὴν τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν δὲν ἔγινε λάθος, πρέπει νὰ εὑρεθῇ τὸ ἴδιον γινόμενον.

2α) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέρη του.

Ἐάν, π. χ. ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω τὸ ἄθροισμα $3 + 8 + 9$ ἐπὶ ἀριθμόν τινα, οἷον τὸν 11, ἢ πολλαπλασιάζω ἕκαστον τῶν μερῶν του (τὸ 3, τὸ 8 καὶ τὸ 9) καὶ προσθέτω ἔπειτα τὰ γινόμενα $33 + 88 + 99$, ἢ εὑρίσκω τὸ ἄθροισμα 20 καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, 20×11.

Διότι, ὅταν λαμβάνω τὸν ἀριθμὸν $3 + 8 + 9$ πολλὰς φοράς, λαμβάνω καὶ τὰ μέρη του· καὶ ἕκαστον μέρος τὸ λαμβάνω τόσας φοράς, ὅσας καὶ τὸν ὅλον ἀριθμόν.

Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἐγνωρίσαμεν καὶ ἐφηρμόσαμεν ἤδη εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον· διότι ἀνελύσαμεν τὸν πολυψήφιον πολλαπλασιαστέον εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν διαφόρων μονάδων του.

Προβλήματα.

1) Πόσον ἀξίζουν 32 πήχεις ἑνὸς ὑφάσματος, ἐὰν ὁ πῆχυς τιμᾶται 3 δραχμάς;

Λύσις. Ἀφοῦ ὁ εἷς πῆχυς ἀξίζει 3 δραχμάς, οἱ δύο θὰ ἀξίζουν δύο φορὰς 3 δραχμάς, ἤτοι $3 + 3$ ἢ 3×2, οἱ τρεῖς θὰ ἀξίζουν τρεῖς φορὰς 3 δραχμάς· ἤτοι $3 + 3 + 3$ ἢ 3×3, καὶ οἱ 32 θὰ ἀξίζουν 32 φορὰς 3 δραχμάς· πρέπει λοιπὸν νὰ ἐπαναλάβω 32 φορὰς τὸν 3, ἤγουν νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸν ἐπὶ 32. Τὸ γινόμενον 3×32 εἶναι 96· τόσον λοιπὸν ἀξίζουν οἱ 32 πήχεις.

Παρατήρησις.

᾿Απὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα· ***᾿Εὰν ἠξεύρωμεν πόσον ἀξίζει ἡ μονὰς ἑνὸς πράγματος (ἤγουν ὁ εἷς πῆχυς ἢ ἡ μία ὀκᾶ κτλ.), διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν πολλῶν μονάδων τοῦ ἰδίου πράγματος, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μονάδος ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἐκφράζει πόσαι εἶναι αἱ μονάδες.***

2) Βιβλίον τι ἔχει 120 σελίδας· ἑκάστη σελὶς ἔχει 35 στίχους καὶ ἕκαστος στίχος ἔχει 40 γράμματα· πόσα γράμματα ἔχει ὅλον τὸ βιβλίον;

Λύσις. Ἑκάστη σελὶς ἔχει 40×35 γράμματα, καὶ τὸ βιβλίον ὅλον ἔχει 40×35×120 γράμματα, ἤγουν 168000.

3) ᾿Ηγόρασέ τις 725 ὀκάδας ἐξ ἑνὸς πράγματος πρὸς 5 δραχ. τὴν ὀκᾶν· ἐπλήρωσε δὲ 2585 δραχμάς· πόσας ὀφείλει νὰ πληρώσῃ ἀκόμη;

Λύσις. Συλλογιζόμενοι, ὡς εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ἀξία τῶν 725 ὀκάδων εἶναι 5×725, ἤτοι 3625 δραχ. καὶ ἐπειδὴ ἐπλήρωσε τὰς 2585, μένει ὀφειλέτης δραχ. 1040.

4) ῎Εμπορός τις ἠγόρασεν 70 σάκκους ἀλεύρου πρὸς 24 δραχ. τὸν σάκκον· ἐπώλησε δὲ τὸν κάθε σάκκον 32 δραχ.· πόσον ἐκέρδισε;

Λύσις. ᾿Αφοῦ ἀπὸ κάθε σάκκον ἐκέρδισεν 8 δραχμάς, ἀπὸ τοὺς 70 σάκκους ἐκέρδισεν 8×70, ἤτοι 560 δραχμάς.

Σημείωσις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἠμπορεῖ νὰ λυθῇ καὶ ὡς ἑξῆς· Εὑρίσκομεν πόσον ἐπλήρωσε διὰ τὴν ἀγορὰν τῶν σάκκων, ἔπειτα πόσον ἔλαβεν ἐκ τῆς πωλήσεως, καὶ ἀφαιροῦμεν.

5) ῎Εμπορός τις ἠγόρασεν 6252 ὀκάδας σίτου πρὸς 25 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· ἐξ αὐτῶν ὅμως ἐπώλησε 5480 ὀκ. πρὸς 30 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, τὰς δὲ ἐπιλοίπους πρὸς 28· πόσον ἐκέρδισε;

Λύσις. Τὴν πρώτην φορὰν ἐπώλησε 5480 ὀκ. καὶ ὠφελήθη ἀπὸ κάθε ὀκᾶν 5 λεπτά· ὥστε ἐκέρδισεν ἀπὸ αὐτὰς 5×5480, ἤτοι 27400 λεπτά. Τὴν δευτέραν φορὰν ἐπώλησεν ὀκάδας 6252—5480, ἤτοι 772, καὶ ὠφελήθη ἀπὸ κάθε μίαν λεπτὰ 3, ὥστε ἐκέρδισε 3×772, ἤτοι λεπτὰ 2316

ὥστε ἐκέρδισε τὸ ὅλον λεπτὰ 29716.

6) ᾿Ηγόρασέ τις 128 πρόβατα πρὸς 22 δραχ. τὸ καθέν· ἐξ αὐτῶν ἔθανον τὰ 12, τὰ δὲ ἐπίλοιπα ἐπώλησε πρὸς 27 δραχμάς· ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη; καὶ πόσον;

Λύσις. Ἀπὸ τὰ 12, τὰ ὁποῖα ἀπέθανον, ἔχασεν 22×12, ἤτοι 264 δραχ. Ἀπὸ τὰ 116, τὰ ὁποῖα ἐπώλησεν, ἐκέρδισεν εἰς τὸ καθὲν 5 δραχ. ὥστε διὰ τὰ 116 ἐκέρδισε 5×116, ἤτοι 580 δραχμάς· ἐπομένως τὸ κέρδος του εἶναι 580—264 δραχμαί, ἤτοι 316.

7) 15 ἄνθρωποι ἐμοίρασαν χρήματα καὶ ἔλαβεν ἕκαστος 850 δρ. πόσα ἦσαν τὰ μοιρασθέντα χρήματα; (Ἀπ. 850×15, ἤτοι 12750)

8) Πόσας ἡμέρας ἔχουσι 18 ἑβδομάδες; (Ἀπ. 7×18)

9) Ὁ στατὴρ (κοινῶς καντάρι) ἔχει 44 ὀκάδας καὶ ἑκάστη ὀκᾶ ἔχει 400 δράμια· πόσα δράμια ἔχουν 8 στατῆρες; (Ἀπ. 400×44×8)

10) Ἀτμάμαξά τις, διατρέχουσα 10 μέτρα εἰς ἓν δευτερόλεπτον, φθάνει ἀπὸ μιᾶς πόλεως εἰς ἄλλην εἰς 5 ὥρας· πόσα μέτρα ἀπέχουν αἱ δύο πόλεις ἀπ' ἀλλήλων; (Ἀπ. 10×60×60×5, ἤτοι 180000)

Σημείωσις. Ἑκάστη ὥρα ἔχει 60 πρῶτα λεπτὰ καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν ἔχει 60 δεύτερα.

11) Ἄνθρωπός τις ἔζησεν 80 ἔτη· πόσας ὥρας ἔζησε;

Σημείωσις. Τὸ ἔτος ἔχει 365 ἡμέρας (τὰ δίσεκτα 366)· ἡ δὲ ἡμέρα 24 ὥρας.

12) Πόσα λεπτὰ κάμνουν 72 δραχμαί;

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ μία δραχμὴ ἔχει 100 λεπτά, αἱ 72 δραχμαὶ κάμνουν 100×72, ἤτοι 7200 λεπτά.

Ἐκ τούτου βλέπω, ὅτι διὰ νὰ τρέψω τὰς δραχμὰς εἰς λεπτά, γράφω εἰς τὸ τέλος δύο μηδενικά.

13) Ἀπὸ τὴν στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν εἶδέ τις τὴν ἀστραπήν, μέχρι τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἤκουσε τὴν βροντήν, ἐπέρασαν 12 δεύτερα λεπτά· ἠξεύρομεν δέ, ὅτι τὸ μὲν φῶς ἔρχεται σχεδὸν τὴν ἰδίαν στιγμήν, ὁ δὲ ἦχος διατρέχει 340 μέτρα εἰς ἕκαστον δεύτερον λεπτόν· πόσον μακρὰν ἦτο τὸ σύννεφον, εἰς τὸ ὁποῖον ἐβρόντησε;
(Ἀπ. 12×340 ἢ 4080)

14) Ἡ τουρκικὴ λίρα ἔχει 23 δραχμάς· πόσας δραχμὰς κάμνουν 182 λίραι; (Ἀπ. 23×182 ἢ 4186)

15) Οἰκογένειά τις συνέκειτο ἐκ πέντε ἀνθρώπων καὶ αἱ ἡλικίαι αὐτῶν ἀπετέλουν ποτὲ τὸν ἀριθμὸν 98. Μετὰ 30 ἔτη ἀπέθανεν ὁ πατὴρ καὶ τότε αἱ ἡλικίαι τῶν ἄλλων ἀπετέλουν τὸν ἀριθμὸν 165· εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανεν ὁ πατήρ; (Ἀπ. 83)

16) Πόσους μῆνας ἔχουν 18 ἔτη; (Ἀπ. 12×18)

17) Παιδίον τι ἔκοψεν ἓν μῆλον εἰς πέντε μέρη, ἔπειτα πάλιν ἔκοψε τὸ καθὲν εἰς τέσσαρα· εἰς πόσα μέρη εἶναι διῃρημένον τὸ μῆλον;

18) Ὑπηρέτης τις λαμβάνει μισθὸν 48 δραχ. κατὰ μῆνα, στέλλει δὲ ἐξ αὐτοῦ εἰς τοὺς γέροντας γονεῖς του 20 δραχ. τὸν μῆνα καὶ εἰς τὴν ἀδελφήν του 15· πόσα τοῦ μένουν κατ' ἔτος; ('Απ. 13×12)

19) Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζει τις 8 ᾠά· πόσα ἀγοράζει μὲ 198 δραχμάς; ('Απ. 8×198)

20) Πόσον ἀξίζουν 8 στατῆρες ἐξ ἑνὸς πράγματος, ἂν ἡ ὀκᾶ ἀξίζῃ 5 δραχμάς; καὶ πόσον, ἂν 1 δραχμήν;

('Απ. Ἂν 5 δρ. 5 δρ.×44×8· ἂν 1 δρ. 1 δρ.×44×8)

Παρατήρησις.

Τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον, διότι εἶναι ἐπανάληψις αὐτοῦ, ἤγουν γίνεται ἐξ αὐτοῦ πολλάκις λαμβανομένου, ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς θεωρεῖται πάντοτε ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμὸς καὶ δείκνυει πόσας φορὰς θὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

35. ***Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας μοιράζομεν ἀριθμόν τινα εἰς μέρη ἴσα.***

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν θέλωμεν νὰ μοιράσωμεν 18 δραχ. εἰς 3 ἀνθρώπους ἐξ ἴσου, ἡ πρᾶξις, τὴν ὁποίαν θὰ κάμωμεν, εἶναι διαίρεσις.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ μοιρασθῇ, λέγεται ***διαιρετέος***, ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις φανερώνει εἰς πόσα μέρη θὰ μοιρασθῇ ὁ ἄλλος, λέγεται ***διαιρέτης***· τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς διαιρέσεως λέγεται ***πηλίκον.***

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα διαιρετέος εἶναι ὁ 18, διαιρέτης δὲ ὁ 3 καὶ πηλίκον ὁ 6.

Ὁ μερισμὸς δὲν γίνεται πάντοτε ἀκριβῶς, * ἀλλὰ περισσεύει πολλάκις ἀριθμός τις· ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται ***ὑπόλοιπον.***

Ἐάν, π. χ. θέλω νὰ μοιράσω 16 δραχ. εἰς 3 ἀνθρώπους ἐξ ἴσου, βλέπω εὐκόλως, ὅτι ἕκαστος ἄνθρωπος θὰ λάβῃ 5 δραχμὰς καὶ θὰ περισ-

---

* Εἰς τὸ δεύτερον βιβλίον θα μάθωμεν, ὅτι ἡ διαίρεσις γίνεται πάντοτε ἀκριβῶς διὰ τῶν κλασμάτων.

σεύση καὶ μία δραχμή. Εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην διαιρετέος μὲν εἶναι ὁ 16, διαιρέτης ὁ 3, πηλίκον δὲ (ὄχι ἀκριβὲς) ὁ 5 καὶ ὑπόλοιπον 1.

Σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶναι τὸ ἑξῆς : (ὅπερ ἐπαγγέλλεται **διά**). Γράφεται δὲ τὸ σημεῖον τοῦτο κατόπιν τοῦ διαιρετέου καὶ μετ' αὐτὸ γράφεται ὁ διαιρέτης, οἷον 15 : 3 σημαίνει ὅτι ὁ 15 πρέπει νὰ διαιρεθῇ εἰς 3 ἴσα μέρη, ἤτοι νὰ διαιρεθῇ διὰ 3· ὁμοίως 8 : 4 σημαίνει, ὅτι ὁ 8 πρέπει νὰ διαιρεθῇ εἰς τέσσαρα μέρη ἴσα, ἤτοι νὰ διαιρεθῇ διὰ 4· ὡσαύτως 125 : 7 σημαίνει, ὅτι ὁ 125 πρέπει νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 7.

36. Καθὼς ὁ πολλαπλασιασμὸς ἠμπορεῖ νὰ ἐκτελεσθῇ διὰ τῆς ἀλλεπαλλήλου προσθέσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς τὸν ἑαυτόν του, οὕτω καὶ ἡ διαίρεσις ἠμπορεῖ νὰ ἐκτελεσθῇ διὰ τῆς ἀλλεπαλλήλου ἀφαιρέσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ. Διότι, ἂν ἔχωμεν π. χ. νὰ μοιράσωμεν 65 δραχμὰς εἰς 7 ἀνθρώπους, ἠμποροῦμεν νὰ δώσωμεν εἰς καθένα πρῶτα ἀπὸ μίαν δραχμήν· τότε θὰ μείνουν 65—7, ἤτοι 58 δραχμαί· ἔπειτα, ἀπὸ τὰς 58 δραχμὰς (αἱ ὁποῖαι ἔμειναν) νὰ δώσωμεν πάλιν εἰς καθένα ἀπὸ μίαν δραχμήν· τότε θὰ μείνουν 58—7, ἤγουν 51 καὶ οὕτω καθεξῆς· εἰς τὸ τέλος ἢ δὲν θὰ μείνῃ τίποτε ἢ θὰ μείνῃ ἀριθμός τις δραχμῶν μικρότερος τοῦ 7.

65	
7	1
58	
7	1
51	
7	1
44	
7	1
37	
7	1
30	
7	1
23	
7	1
16	
7	1
9	
7	1
2	

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τῆς διαιρέσεως γίνεται φανερόν, ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ τόσας δραχμάς, ὅσας φορὰς ἀφῃρέσαμεν τὸν 7· δηλαδὴ ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 7 εἰς τὸν 65. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως·

Ἡ διαίρεσις εἶναι ***πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν πόσας φορὰς χωρεῖ εἷς ἀριθμὸς εἰς ἄλλον.***

Σημείωσις α'. Ὅταν ἡ μονὰς εἶναι διαιρέτης, τὸ πηλίκον εἶναι ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον· ἐάν, π. χ. ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν 15 διὰ τοῦ 1, φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ μονὰς χωρεῖ 15 φορὰς εἰς τὸν 15· ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι 15.

Σημείωσις β'. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἴσος μὲ τὸν διαιρετέον, τὸ πηλίκον εἶναι 1· ἂν λ. χ. ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν 18 διὰ τοῦ 18, ἤτοι νὰ μοιράσωμεν 18 δραχμὰς εἰς 18 ἀνθρώπους, φανερὸν εἶναι, ὅτι ὁ καθεὶς θὰ λάβῃ μίαν δραχμήν· ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι 1.

Τελεία διαίρεσις.

37. Ἡ διαίρεσις λέγεται **τελεία**, ὅταν ὁ διαιρετέος μοιράζεται εἰς ἴσα μέρη, χωρὶς νὰ μένῃ τίποτε· π. χ. ἡ διαίρεσις 18 : 3 εἶναι τελεία καὶ πηλίκον εἶναι ὁ 6· διότι $18=6+6+6$.

Ἐπειδὴ δὲ $6+6+6$ εἶναι τὸ γινόμενον 6×3, συμπεραίνομεν, ὅτι εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν ***ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου.***

Ἀτελὴς διαίρεσις.

38. ***Ἀτελὴς*** λέγεται ἡ διαίρεσις, ἐὰν ἀφήνῃ ὑπόλοιπον.

Π. χ. ἡ διαίρεσις 17 : 3 εἶναι ἀτελής· διότι ἀφαιροῦντες τὸν 3 ἀπὸ τὸν 17, ὅσας φορὰς εἶναι δυνατὸν (5 φοράς), εὑρίσκομεν, ὅτι μένει ὑπόλοιπον 2 (ἂν δηλ. 3 ἄνθρωποι ἔχουσι νὰ μοιρασθῶσι 17 δραχμάς, θὰ λάβῃ ἕκαστος 5 δραχμὰς καὶ θὰ μείνουν καὶ 2 δραχμαί)· ὥστε ἡ διαίρεσις 17 : 3 δίδει πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 2.

Ἐπειδὴ εἰς τὴν διαίρεσιν 17 : 3 ἀφῃρέσαμεν τὸν 3 πέντε φορὰς ἀπὸ τὸν 17 καὶ ἔμεινε 2, τοῦτο σημαίνει, ὅτι ὁ 17 σύγκειται ἀπὸ τὸν 3, λαμβανόμενον 5 φοράς, καὶ ἀπὸ τὸν 2, ἤτοι

$$17=3+3+3+3+3+2$$
ἢ
$$17=3\times5+2$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι
εἰς πᾶσαν ἀτελῆ διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, ὅταν εἰς τὸ γινόμενον τοῦτο προστεθῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον.

Σημείωσις. Κατὰ τὰ λεχθέντα εἰς τὸ ἐδ. 37, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι πάντοτε μικρότερον τοῦ διαιρέτου.

Παρατήρησις.

Ἡ διαίρεσις δύναται νὰ γίνῃ καὶ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸν 44 διὰ τοῦ 8. Πολλαπλασιάζω τὸν διαιρέτην 8 ἐπὶ 1, ἐπὶ 2, ἐπὶ 3 κτλ. κατὰ σειρὰν καὶ εὑρίσκω

$8\times1=8$, $8\times2=16$, $8\times3=24$, $8\times4=32$, $8\times5=40$, $8\times6=48$.

Ἐκ τούτων βλέπω, ὅτι, ἂν ἔχω νὰ μοιράσω 44 δραχμὰς εἰς 8 ἀνθρώπους, δύναμαι νὰ δώσω εἰς ἕκαστον ἀπὸ 5 δραχμάς, διότι τότε θὰ λάβωσιν ὅλοι 5×8, ἤτοι 40 δραχμάς, καὶ θὰ περισσεύσουν καὶ 4 δραχμαί· ἀλλὰ δὲν δύναμαι νὰ δώσω εἰς καθένα ἀπὸ 6, διότι τότε ἔπρεπε νὰ εἶναι αἱ δραχμαὶ 6×8, ἤγουν 48. Λοιπὸν ἡ διαίρεσις ἐξετελέσθη· καὶ πηλίκον μὲν εἶναι 5, ὑπόλοιπον δὲ 4.

Ἀλλὰ καὶ ὁ τρόπος οὗτος, καθὼς καὶ ὁ ἄλλος, ὅστις ἀπαιτεῖ ἀλλεπαλλήλους ἀφαιρέσεις, δὲν εἶναι κατάλληλος, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι μεγάλοι, διότι καὶ καιρὸν ἀπαιτοῦσι καὶ κόπον πολύν. Διὰ τοῦτο ἐπενόησαν ἄλλον τρόπον συντομώτερον, μὲ τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ διαίρεσις καὶ τὸν ὁποῖον θὰ μάθωμεν εἰς τὰ ἑπόμενα.

Ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου.

39. Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πόσα ψηφία θὰ ἔχῃ τὸ πηλίκον (πρὶν ἀκόμη κάμωμεν τὴν διαίρεσιν), κάμνομεν ὡς ἑξῆς·

Γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου τόσα μηδενικά, ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ γίνῃ ὁ διαιρέτης μεγαλύτερος τοῦ διαιρετέου· ὅσα μηδενικὰ χρειάζονται διὰ νὰ γίνῃ τοῦτο, τόσα ψηφία θὰ ἔχῃ τὸ πηλίκον.

Διότι, ἔστω ἡ διαίρεσις 175 : 18.

Ἐὰν γράψω δεξιὰ τοῦ 18 ἓν μηδενικόν (δηλαδή, ἂν τὸν πολλαπλασιάσω ἐπὶ 10), γίνεται 180 καὶ ὑπερβαίνει τὸν διαιρετέον 175· ἐπειδὴ δὲ τὸ δεκαπλάσιον τοῦ διαιρέτου 18 ὑπερβαίνει τὸν διαιρετέον 175, τοῦτο σημαίνει, ὅτι δὲν ἐμπεριέχεται ὁ διαιρέτης 18 εἰς τὸν διαιρετέον 10 φοράς, ἀλλ᾿ ὀλιγώτερον· ἄρα τὸ πηλίκον δὲν εἶναι 10, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ 10 καὶ διὰ τοῦτο εἶναι μονοψήφιον.

Ἔστω καὶ ἡ διαίρεσις 1855 : 43.

Διὰ νὰ γίνῃ ὁ διαιρέτης 43 μεγαλύτερος τοῦ διαιρετέου 1855, χρειάζονται δύο μηδενικά (διότι ὁ 4300 ὑπερβαίνει τὸν 1855, ἀλλ᾿ ὁ 430 εἶναι μικρότερος τοῦ 1855)· ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ διαιρετέος 1855 περιέχει τὸν διαιρέτην 10 φοράς, οὐχὶ ὅμως 100 φοράς· ἄρα τὸ πηλίκον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 10, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ 100· ἑπομένως θὰ ἔχῃ δύο ψηφία.

Διὰ τοῦ ἰδίου συλλογισμοῦ εὑρίσκω, ὅτι
τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 141 192 : 37 ἔχει 4 ψηφία,
τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 197 004 : 1091 ἔχει 3 καὶ οὕτω καθεξῆς.

Περὶ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν γίνεται ἡ διαίρεσις.

40. Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν, πῶς γίνεται ἡ διαίρεσις, διακρίνομεν τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις·

1) Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος,

2) ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι οἱοσδήποτε.

α΄) Διαίρεσις, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος.

41. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἂν εἶναι καὶ τὸ πηλίκον μονοψήφιον (καὶ τοῦτο διακρίνεται εὔκολα, ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν), ἡ διαίρεσις γίνεται ἀπὸ μνήμης· διότι ἐκ τοῦ πυθαγορείου πίνακος ἐνθυμούμεθα ἀμέσως τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς μονοψηφίους ἀριθμοὺς καὶ εὑρίσκομεν ἀμέσως τὸ μέγιστον γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἐμπεριέχεται εἰς τὸν διαιρετέον.

Ἂν, π. χ. πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸν 17 διὰ 5, ἐνθυμούμεθα ἀμέσως, ὅτι εἶναι $5\times3=15$ (ἀλλὰ $5\times4=20$)· ἄρα πηλίκον εἶναι ὁ 3· ἀφαιροῦντες τὸν 15 ἀπὸ τὸν 17 εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 2.

Ὁμοίως, ἂν πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸν 75 δι' 8, ἐνθυμούμεθα ἀμέσως, ὅτι εἶναι $8\times9=72$ (ἀλλὰ $8\times10=80$)· ἄρα πηλίκον εἶναι ὁ 9· τὸ δὲ ὑπόλοιπον εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὸν διαιρετέον 75 τὸ γινόμενον 72· εἶναι λοιπὸν 3.

Σημείωσις. Εἰς τὴν ἁπλῆν ταύτην διαίρεσιν θὰ ἴδωμεν, ὅτι ἀνάγεται πᾶσα διαίρεσις· ὥστε ὁ μαθητὴς πρέπει νὰ ἀσκηθῇ καλῶς εἰς αὐτὴν καὶ νὰ ἐκτελῇ αὐτὴν ταχέως ἀπὸ μνήμης.

42. Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸν 14865 διὰ τοῦ μονοψηφίου 4, ἤτοι νὰ μοιράσωμεν 14865 δραχμὰς εἰς 4 ἀνθρώπους. Τὸ πηλίκον ἐνταῦθα εἶναι πολυψήφιον (ἔχει 4 ψηφία)· καὶ διὰ νὰ εὕρω αὐτό, ἐργάζομαι ὡς ἑξῆς·

Λαμβάνω ἀπὸ τὸν διαιρετέον τόσα μόνον ψηφία (ἀπὸ τὴν ἀρχήν), ὅσα χρειάζονται, διὰ νὰ ἔχω πηλίκον μονοψήφιον.

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο βλέπω, ὅτι πρέπει νὰ λάβω τὰ δύο πρῶτα ψηφία, ἤτοι τὰς 14 χιλιάδας τοῦ διαιρετέου 14865 (διὰ νὰ ἔχω πηλίκον μονοψήφιον).

Μοιράζω λοιπὸν κατ' ἀρχὰς εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους τὰς 14 χιλιάδας καὶ εὑρίσκω, ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος 3 χιλιάδας καὶ θὰ μείνουν καὶ 2 χιλιάδες.

Αἱ δύο αὗται χιλιάδες ὁμοῦ μὲ τὰς 865 μονάδας, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν, ἀποτελοῦσι 2865 δραχμάς, αἱ ὁποῖαι μένουν ἀκόμη νὰ μοιρασθῶσιν εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους. Τοῦτο θὰ γίνῃ διὰ νέας διαιρέσεως˙ ὥστε ἔχω τώρα νὰ κάμω τὴν διαίρεσιν 2865 : 4.

Λαμβάνω πάλιν τὰ δύο πρῶτα ψηφία 28 (διὰ νὰ ἔχω μονοψήφιον πηλίκον) καὶ μοιράζω τὰς 28 ἑκατοντάδας εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους˙ ἕκαστος θὰ λάβῃ 7 ἑκατοντάδας (ἤτοι 700) χωρὶς νὰ μείνῃ καμμία ἑκατοντάς.

Μένει ὅμως ἀκόμη νὰ μοιράσω τὰς 65 μονάδας (τὰς ὁποίας ἀφῆκα) εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους, ἤτοι νὰ κάμω τὴν διαίρεσιν 65 : 4.

Λαμβάνω τώρα τὸ πρῶτον μόνον ψηφίον τοῦ διαιρέτου, ἤτοι τὰς 6 δεκάδας (διότι αὐτὸ ἀρκεῖ διὰ νὰ ἔχω πηλίκον μονοψήφιον) καὶ μοιράζω τὰς 6 δεκάδας εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους˙ ἕκαστος θὰ λάβῃ 1 δεκάδα (ἤτοι δέκα δραχμὰς) καὶ μένουν καὶ δύο δεκάδες.

Αἱ δύο αὗται δεκάδες ὁμοῦ μὲ τὰς 5 μονάδας (τὰς ὁποίας ἀφῆκα) ἀποτελοῦσιν 25 μονάδας, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ μοιράσω εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους, ἤτοι νὰ κάμω τὴν διαίρεσιν 25 : 4˙ ἕκαστος θὰ λάβῃ 6 δραχμὰς καὶ θὰ μείνῃ καὶ μία δραχμή.

Ὥστε εὑρήκαμεν, ὅτι, ἂν μοιράσωμεν 14865 δραχμὰς εἰς 4 ἀνθρώπους, θὰ λάβῃ ἕκαστος 3 χιλιάδας, 7 ἑκατοντάδας, 1 δεκάδα καὶ 6 μονάδας, τουτέστι 3716 δραχ. καὶ θὰ μείνῃ καὶ ὑπόλοιπον 1.

Σημείωσις. Ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου ἐννοοῦμεν, ὅτι ἑκάστη διαίρεσις ἀναλύεται εἰς ἄλλας μερικὰς διαιρέσεις, ἐξ ὧν ἑκάστη ἔχει πηλίκον μονοψήφιον.

Ἡ πρᾶξις δύναται νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς˙

14΄865	4
12	3000
28΄65	700
28	10
06΄5	6
4	
25	
24	
1	

Ἀφοῦ γράψωμεν τὸν διαιρετέον καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τὸν διαιρέτην, χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ γραμμῆς κατακορύφου καὶ σύρομεν ὑποκάτω τοῦ διαιρετέου γραμμὴν ὁριζοντίαν· ὑπὸ τὴν γραμμὴν ταύτην γράφομεν τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου καθόσον εὑρίσκομεν αὐτά.

Χωρίζομεν διὰ μικρᾶς γραμμῆς τὰ δύο πρῶτα ψηφία τοῦ διαιρετέου (τὰ ὁποῖα χρειάζονται, διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον) ἀπὸ τὰ ἄλλα ψηφία (τὰ 865), τὰ ὁποῖα δὲν χρειάζονται διόλου εἰς τὴν πρώτην διαίρεσιν.

Διαιροῦμεν τὸν 14 διὰ 4, λέγοντες, τὸ 4 εἰς τὸ 14 περιέχεται 3 φορὰς (ἢ 4 ἄνθρωποι νὰ μοιρασθῶσι 14 δραχμάς, λαμβάνει ἕκαστος 3) καὶ γράφομεν τὸ πηλίκον 3 (χιλιάδας· διότι χιλιάδας ἐμοιράσαμεν) εἰς τὴν θέσιν του· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ τὸ γινόμενον 12 (χιλιάδας) ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰς 14 χιλιάδας καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 2 (χιλιάδας).

Δεξιὰ τοῦ 2 καταβιβάζομεν τώρα καὶ τὰ ἄλλα ψηφία τοῦ διαιρετέου, ὅσα ἀφήκαμεν εἰς τὴν πρώτην διαίρεσιν, καὶ προκύπτει ὑπόλοιπον 2865, τὸ ὁποῖον πρέπει ἀκόμη νὰ μοιράσωμεν εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους· ὥστε τώρα εἰς τὴν δευτέραν αὐτὴν διαίρεσιν διαιρετέος εἶναι ὁ 2865. Καὶ εἰς τὴν δευτέραν ταύτην διαίρεσιν κάμνομεν καθὼς καὶ εἰς τὴν πρώτην (μόνον τὸν διαιρέτην 4 δὲν γράφομεν πλέον, διότι εἶναι ἤδη γεγραμμένος), χωρίζομεν δηλαδὴ τὰ δύο πρῶτα ψηφία 28 καὶ διαιροῦμεν τὸν 28 διὰ 4· τὸ 4 περιέχεται εἰς τὸν 28, 7 φοράς· γράφομεν τὸ πηλίκον 7 (ἑκατοντάδας) εἰς τὴν θέσιν του, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 4 καὶ τὸ γινόμενον 28 ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ χωρισθὲν μέρος 28· ὅθεν εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0.

Καταβιβάζομεν δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου, ὅσα ψηφία ἀφήκαμεν καὶ προκύπτει ὑπόλοιπον τὸ 65, τὸ ὁποῖον πρέπει ἀκόμη νὰ μοιρασθῇ· ὥστε εἰς τὴν τρίτην αὐτὴν διαίρεσιν διαιρετέος εἶναι ὁ 65.

Χωρίζω τώρα τὸ πρῶτον μόνον ψηφίον (τὸ 6), διότι αὐτὸ φθάνει διὰ νὰ ἔχω πηλίκον μονοψήφιον, καὶ διαιρῶ αὐτὸ διὰ 4 καὶ εὑρίσκω πηλίκον 1 (δεκάδα), ὅπερ γράφω εἰς τὴν θέσιν του· ἔπειτα πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 4 καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιρῶ ἀπὸ τὸ χωρισθὲν ψηφίον καὶ εὑρίσκω ὑπόλοιπον 2 (δεκάδας). Δεξιὰ τοῦ 2 καταβιβάζω τέλος καὶ τὸ ψηφίον 5, τὸ ὁποῖον ἀφῆκα προηγουμένως, καὶ προκύπτει ὑπόλοιπον τὸ 25, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ μοιρασθῇ εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους.

Εἰς τὴν τετάρτην ταύτην διαίρεσιν διαιρετέος εἶνε ὁ 25· λαμβάνω δὲ αὐτὸν ὅλον· διότι τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον δίδει, εἶναι μονοψήφιον· διαιρῶ τὸν 25 : 4 καὶ εὑρίσκω πηλίκον 6 (μονάδας) καὶ ὑπόλοιπον 1.

Ὥστε ἡ διαίρεσις 14865 : 4 ἐτελείωσε καὶ ἔδωκε πηλίκον 3716 καὶ ὑπόλοιπον 1.

Παρατηρήσεις.

1) Δεξιὰ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου 2 δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ καταβιβάζωμεν ὅλα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου, ὅσα ἀφήκαμεν εἰς τὴν πρώτην διαίρεσιν, ἤτοι τὰ 865, ἀλλὰ μόνον τὸ πρῶτον (τὸ 8), διότι αὐτὸ μόνον χρειάζεται εἰς τὴν δευτέραν διαίρεσιν, διότι εἰς αὐτὴν μόνον τὸν 28 διαιροῦμεν, τὰ δὲ ἄλλα ψηφία τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 2865 τὰ ἀφήνομεν. Ἐπίσης δεξιὰ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου 0 δυνάμεθα νὰ καταβιβάσωμεν μόνον τὸ πρῶτον ἀπὸ τὰ παραλειφθέντα ψηφία, ἤτοι τὸ 6, διότι αὐτὸ μόνον διαιροῦμεν εἰς τὴν τρίτην διαίρεσιν, τὸ δὲ 5 τὸ ἀφήνομεν· ἑπομένως ***εἰς κάθε νέαν μερικὴν διαίρεσιν καταβιβάζομεν ἀπὸ ἓν ψηφίον τοῦ διαιρετέου μὲ τὴν σειράν του.***

2) Καὶ τὰ μηδενικά, τὰ ὁποῖα ἐγράψαμεν δεξιὰ τοῦ ψηφίου 3, διὰ νὰ σημάνῃ τρεῖς χιλιάδας, καὶ δεξιὰ τοῦ ψηφίου 7, διὰ νὰ σημάνῃ ἑπτὰ ἑκατοντάδας, καὶ δεξιὰ τοῦ 1, διὰ νὰ γίνῃ δεκάς, τὰ μηδενικά, λέγω, ταῦτα ἠμποροῦν νὰ παραλείπωνται, ἐὰν γράφωμεν τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου εἰς μίαν σειρὰν κατὰ τάξιν, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκονται, ἤγουν ἐὰν γράψωμεν 3716· διότι τότε τὸ 3 σημαίνει χιλιάδας, τὸ 7 σημαίνει ἑκατοντάδας κτλ.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἡ πρᾶξις διατάσσεται συντομώτερον ὡς ἑξῆς·

```
14865 | 4
12     ----
----   3716
 28
 28
----
  06
   4
  ---
   25
   24
   ---
    1
```

Ἀλλ᾽ ὅταν διατάσσωμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον, πρέπει νὰ προσέχωμεν εἰς τὸ ἑξῆς· ***ἂν εἰς μερικήν τινα διαίρεσιν, ἀφοῦ καταβιβάσωμεν ἓν ψηφίον τοῦ διαιρετέου, δὲν εὕρωμεν πηλίκον*** (ἂν δηλαδὴ ὁ διαιρέτης δὲν χωρεῖ εἰς τὸν προκύπτοντα τότε ἀριθμόν), ***πρέπει νὰ γράψωμεν ἓν μηδενικὸν δεξιὰ τῶν εὑρεθέντων ψηφίων τοῦ πηλίκου*** καὶ τοῦτο διὰ νὰ διατηρῆται ἡ ἀξία των.

Τοῦτο συμβαίνει εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα·

15452	7
14	2207
14	
14	
052	
49	
3	

Τὸ πηλίκον δὲν ἔχει δεκάδας· ἐγράψαμεν λοιπὸν 0 εἰς τὴν θέσιν των· ἄλλως τὸ πρῶτον 2 δὲν θὰ ἐσήμαινε χιλιάδας, οὔτε τὸ δεύτερον θὰ ἐσήμαινεν ἑκατοντάδας.

Παραδείγματα.

897	8	20'00	3	21'014	7
8	112	18	666	21	3002
09		20		0014	
8		18		14	
17		20		00	
16		18			
1		2			

Σημείωσις. Πρὸς συντομίαν δυνάμεθα νὰ ἀφαιρῶμεν τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου, χωρὶς νὰ τὰ γράφωμεν· τότε ἡ πρᾶξις λαμβάνει τὴν ἑξῆς διάταξιν·

897	8	2000	3	21014	7
09	112	20	666	0014	3002
17		20		0	
1		2			

β΄) Διαίρεσις δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

1) Ἐὰν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον.

43. Ἐὰν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον (ἐὰν δηλαδὴ ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου, ἀλλ᾽ ὄχι μικρότερος αὐτοῦ), εὑρίσκομεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς·

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 3892 διὰ τοῦ 800, ἤτοι νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 800 εἰς τὸν 3892· τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον (διότι δέκα φορὰς 800 γίνεται 8000, τοῦτο δὲ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου 3892, ὥστε δὲν χωρεῖ ὁ διαιρέτης 800 εἰς τὸν διαιρετέον 3892 δέκα φοράς, ἀλλ᾽ ὀλιγώτερον).

Διὰ νὰ εὕρω δὲ τὸ πηλίκον, σκέπτομαι ὡς ἑξῆς· αἱ 8 ἑκατοντάδες τοῦ διαιρετέου δὲν περιέχονται εἰς τὰς μονάδας, οὔτε εἰς τὰς δεκάδας τοῦ διαιρέτου, ἀλλὰ μόνον εἰς τὰς 38 ἑκατοντάδας αὐτοῦ· περιέχονται δὲ 4 μόνον φοράς (διότι τὸ 8 εἰς τὸ 38 περιέχεται 4 φοράς)· λοιπὸν συμπεραίνω, ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι 4· πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 800 καὶ εὑρίσκω τὸ γινόμενον 3200, ἀφαιρῶν δὲ ἀπὸ τὸν διαιρετέον τὸ γινόμενον 3200 τοῦ πηλίκου 4 ἐπὶ τὸν δεαιρέτην, εὑρίσκω 692, τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Διὰ νὰ δώσωμεν ἄλλο παράδειγμα, ἔστω ἡ διαίρεσις

$$8975 : 2891$$

Τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον (διότι 2891×10 εἶναι 28910, μεγαλύτερον τοῦ διαιρέτου), καὶ διὰ νὰ τὸ εὕρω, παρατηρῶ, ὅτι αἱ δύο χιλιάδες τοῦ διαιρέτου χωροῦσιν εἰς τὸν διαιρετέον (δηλαδὴ εἰς τὰς χιλιάδας του) 4 φορὰς μόνον· λοιπὸν καὶ ὅλος ὁ διαιρέτης 2891 δὲν ἠμπορεῖ νὰ χωρῇ εἰς τὸν διαιρετέον περισσοτέρας ἀπὸ 4 φοράς· ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι ἢ 4 ἢ μικρότερον τοῦ 4. Διὰ νὰ δοκιμάσω τὸ 4, πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 2891 καὶ εὑρίσκω γινόμενον 11564 μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου· ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι μικρότερον τοῦ 4 Διὰ νὰ δοκιμάσω τὸ 3, πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ εὑρίσκω γινόμενον 8673, μικρότερον τοῦ διαιρετέου· λοιπὸν τὸ πηλίκον εἶναι 3.

Ἀφαιρῶ τώρα τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου 3 καὶ τοῦ διαιρέτου 2891 ἀπὸ τὸν διαιρετέον καὶ εὑρίσκω τὸ ὑπόλοιπον 302 καὶ οὕτως ἐξετελέσθη ἡ διαίρεσις.

```
8975 | 2891
8673   3
 302
```

44. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών·

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν, ὅταν εἶναι μονοψήφιον, λαμβάνομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρέτου καὶ μὲ αὐτὸ διαιροῦμεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρετέου (ἂν ἔχωσι καὶ οἱ δύο ἴσον ἀριθμὸν ψηφίων) ἢ τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ δύο πρῶτα ψηφία αὐτοῦ (ἂν ἔχῃ ὁ διαιρετέος ἓν ψηφίον περισσότερον)· τὸ πηλίκον, ὅπερ εὑρίσκομεν, θὰ εἶναι ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ ζητουμένου.

Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν δὲ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην· καὶ ἂν μὲν τὸ προκῦπτον γινόμενον χωρῇ εἰς τὸν διαιρετέον, τότε αὐτὸ εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον καὶ οὕτω καθεξῆς, ἕως οὗ εὕρωμεν ἓν ψηφίον, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον νὰ περιέχηται εἰς τὸν διαιρετέον.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως εἶνε ἡ ἰδία ὡς καὶ προηγουμένως (σελ.42).

Παραδείγματα.

```
6083 | 714      56946 | 8101      1000 | 125
5712   8        56707   7         1000   8
 371              239                0
```

Σημείωσις. Ὅταν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ διαιρέτου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 5, προτιμότερον εἶναι νὰ αὐξάνωμεν τὸ πρῶτον ψηφίον κατὰ μονάδα, πρὶν διαιρέσωμεν δι' αὐτοῦ τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρετέου (ἢ τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ δύο πρῶτα), διότι τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν ταχύτερον τὸ πηλίκον· ἰδοὺ παράδειγμα· Ἂς διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 8197 διὰ τοῦ 2938. Αἱ 2 χιλιάδες τοῦ διαιρέτου περιέχονται εἰς τὰς 8 χιλιάδας τοῦ διαιρετέου 4 φοράς· ὥστε τὸ πηλίκον θὰ εἶνε ἢ 4 ἢ μικρότερον τοῦ 4· δοκιμάζοντες, εὑρίσκομεν, ὅτι εἶνε 2. Τοῦτο θὰ εὑρίσκομεν ταχύτερον, ἐὰν ἐσκεπτόμεθα, ὅτι ὁ διαιρέτης ἔχει σχεδὸν 3 χιλιάδας καὶ αἱ 3 χιλιάδες χωροῦσιν εἰς τὰς 8 χιλιάδας 2 φοράς· ὥστε τὸ πηλίκον θὰ εἶνε ἢ 2 ἢ μεγαλύτερον τοῦ 2.

2) Ἐὰν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον.

45. Ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον, ἡ διαίρεσις ἀναλύεται εἰς ἄλλας, ἐκ τῶν ὁποίων ἑκάστη ἔχει πηλίκον μονοψήφιον.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν 45897 : 38, ἤτοι πρόκειται νὰ μοιράσωμεν 45897 δραχ. εἰς 38 ἀνθρώπους.

$$\begin{array}{r|l} 45'897 & 38 \\ \cline{2-2} 38 & 1 \\ \cline{1-1} 78'97 & \end{array}$$

Λαμβάνω ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται, διὰ νὰ ἔχω πηλίκον μονοψήφιον· λαμβάνω λοιπὸν τὰς 45 χιλιάδας καὶ μοιράζω αὐτὰς εἰς τοὺς 38 ἀνθρώπους· εἰς τὴν μερικὴν αὐτὴν διαίρεσιν διαιρετέος εἶναι ὁ 45 (χιλιάδες), πηλίκον 1 (χιλιὰς) καὶ κατάλοιπον 7 (χιλιάδες).

Αἱ 7 χιλιάδες, αἱ ὁποῖαι ἔμειναν, ὁμοῦ μὲ τὰς 897 μονάδας, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν ἐξ ἀρχῆς, ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 7897, ὁ ὁποῖος μένει ἀκόμη νὰ μοιρασθῇ εἰς τοὺς 38 ἀνθρώπους.

Καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν λαμβάνω ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ διαιρετέου τὰ δύο πρῶτα ψηφία, ἤγουν τὰς 78 ἑκατοντάδας (διὰ νὰ ἔχω πηλίκον μονοψήφιον), καὶ μοιράζω αὐτὰς εἰς τοὺς 38 ἀνθρώπους· εὑρίσκω δὲ πηλίκον 2 ἑκατοντάδας καὶ ὑπόλοιπον 2 ἑκατοντάδας, αἱ ὁποῖαι, ὁμοῦ μὲ τὰς 97 μονάδας, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν, ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 297, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ μοιράσωμεν ἀκόμη εἰς τοὺς 38 ἀνθρώπους.

Εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην λαμβάνω ὅλον τὸν διαιρετέον 297 (μονάδας), διότι δίδει πηλίκον μονοψήφιον· διαιρῶ τὸν 297 διὰ 38 καὶ εὑρίσκω πηλίκον μὲν 7, ὑπόλοιπον δὲ 31. Ὥστε ἡ διαίρεσις 45897 : 38 ἐτελείωσε, καὶ πηλίκον μὲν ἔδωκε τὸν ἀριθμὸν 1207, ὑπόλοιπον δὲ 31.

Παρατήρησις. Διὰ τοὺς λόγους, τοὺς ὁποίους εἴπομεν εἰς τὸ ἐδ. 43, καταβιβάζομεν δεξιὰ ἑκάστου ὑπολοίπου ἀπὸ ἓν ψηφίον τοῦ διαιρετέου κατὰ σειρὰν (οἷον, δεξιὰ τοῦ πρώτου ὑποκοίπου 7 καταβιβάζω μόνον τὸ πρῶτον ἐκ τῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα ἀφῆκα, ἤγουν τὸ 8, διότι αὐτὸ μόνον χρειάζεται εἰς τὴν δευτέραν διαίρεσιν)· ἐπίσης γράφομεν τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου κατὰ σειράν, πρῶτα τὸ πρῶτον, ἔπειτα τὸ δεύτερον, τὸ τρίτον καὶ καθεξῆς, διότι τότε ἡ ἀξία ἑκάστου ψηφίου διατηρεῖται· μόνον, ἀφοῦ καταβιβάσωμεν ἓν ψηφίον τοῦ διαιρετέου, ἐὰν δὲν ἐμπεριέχηται ὁ διαιρέτης εἰς τὸν ἀποτελούμενον ἀριθμόν (τότε λέγομεν, ὅτι τὸ μονοψήφιον πηλίκον εἶναι 0), γράφομεν 0 δεξιὰ τῶν εὑρεθέντων ψηφίων τοῦ πηλίκου.

Τὴν διάταξιν τῆς πράξεως δεικνύει τὸ ἑξῆς παράδειγμα·

```
1151'6769 | 459
 918      |_______
 ----       25091
 2336
 2295
 ----
  4176
  4131
  ----
    459
    459
    ---
      0
```

Χωρίζω τὰ τέσσαρα ψηφία τοῦ διαιρετέου (διὰ νὰ ἔχω πηλίκον μονοψήφιον) καὶ διαιρῶ τὸν ἀριθμὸν αὐτῶν, ἤτοι τὸν 1151, διὰ τοῦ διαιρέτου 459· πηλίκον εὑρίσκω 2 καὶ ὑπόλοιπον 233· δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου καταβιβάζω τὸ πρῶτον ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα ψηφία τοῦ διαιρετέου, ἤτοι τὸ 6, καὶ διαιρῶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν 2336 διὰ τοῦ διαιρέτου 459· τὸ πηλίκον 5 γράφω δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου 2, εὑρίσκω δὲ καὶ κατάλοιπον 41· δεξιὰ αὐτοῦ καταβιβάζω τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, ἤτοι τὸ 7, καὶ ἐπειδὴ ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 417 δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ διαιρέτου 459, γράφω 0 εἰς τὸ πηλίκον καὶ καταβιβάζω καὶ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 6· διαιρῶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν 4176 διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκω πηλίκον 9, τὸ ὁποῖον γράφω δεξιὰ τῶν ἄλλων ψηφίων τοῦ πηλίκου, καὶ κατάλοιπον 45· τέλος καταβιβάζω δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον 9 καὶ διαιρῶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν 459 διὰ τοῦ διαιρέτου, ὅτε εὑρίσκω πηλίκον 1 (τὸ ὁποῖον γράφω δεξιὰ τῶν ἄλλων ψηφίων τοῦ πηλίκου) καὶ κατάλοιπον 0.

Κανὼν τῆς διαιρέσεως.

46. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς διαιρέσεως·

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα δι' ἄλλου ἀριθμοῦ, χωρίζομεν ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον (πρὸς τοῦτο χωρίζομεν ἢ τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης, ἢ ἓν περισσότερον), ***διαιροῦμεν τὸ μέρος, τὸ ὁποῖον ἐχωρίσαμεν, καὶ εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ ψηφίον τοῦτο καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ ἴδιον μέρος, δεξιὰ δὲ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου. Τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ***

τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου, τὸ ὁποῖον, ἀφοῦ τὸ γράψωμεν δεξιὰ τοῦ πρώτου, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν ἴδιον ἀριθμόν· ἔπειτα καταβιβάζομεν δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ διαιροῦμεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ διαιρέτου· ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως, μέχρις οὗ καταβιβάσωμεν ὅλα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου. Ἐὰν δὲ εἴς τινα μερικὴν διαίρεσιν, ἀφοῦ κατοβιβάσωμεν τὸ ἁρμόδιον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, δὲν διαιρῆται ὁ προκύπτων ἀριθμὸς διὰ τοῦ διαιρέτου, γράφομεν Ο εἰς τὸ πηλίκον καὶ καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν.

Παραδείγματα.

58923'4	8153	2716'793	543
57071	72	2715	5003
18524		1793	
16306		1629	
2218		164	

Παρατήρησις. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι πολυψήφιος, προτιμότερον εἶναι νὰ γράφωμεν τὸ γινόμενον αὐτοῦ μὲ καθὲν ψηφίον τοῦ πηλίκου καὶ ἔπειτα νὰ τὸ ἀφαιρῶμεν, ὡς εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα φαίνεται. Τινὲς διὰ συντομίαν πολλαπλασιάζουσιν ἕκαστον ψηφίον τοῦ διαιρέτου μὲ τὸ ψηφίον τοῦ πηλίκου καὶ ἀφαιροῦσι τὸ γινόμενον ἀμέσως ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τοῦ διαιρετέου. Ἀλλ' ὁ τρόπος οὗτος, ὄχι μόνον εἶναι δυσκολώτερος καὶ επομένως ὑπόκειται εἰς περισσότερα σφαλματα, ἀλλ' ἔχει καὶ τὰ ἑξῆς ἐλαττώματα· 1) ὅταν τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον δοκιμάζομεν, δὲν εἶναι τὸ ἀληθές, δὲν ἀνακαλύπτομεν ἀμέσως τὸ λάθος, εἰ μὴ ἀφοῦ φθάσωμεν εἰς τὴν τελευταίαν ἀφαίρεσιν· ὥστε κάμνομεν περισσότερον κόπον· 2) ἂν συμβῇ νὰ ἐπαναληφθῇ εἰς τὸ πηλίκον πολλάκις τὸ αὐτὸ ψηφίον, πρέπει πάλιν νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμὸς κάθε φορὰν ἐκ νέου, ἐνῷ τοῦτο δὲν γίνεται, ἐὰν ἔχωμεν τὸ γινόμενον γεγραμμένον.

Συντομίαι.

1η

47. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι 10, ἡ διαίρεσις γίνεται τάχιστα ὡς ἑξῆς· *Χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ διαιρετέου· τότε τὰ ἄλλα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελοῦσι τὸ πηλίκον, τὸ δὲ χωρισθὲν ψηφίον εἶναι τὸ κατάλοιπον. Οἷον,*

ἡ διαίρεσις 5894 : 10 δίδει πηλίκον 589 καὶ κατάλοιπον 4,

ἡ διαίρεσις 890 : 10 δίδει πηλίκον 89 καὶ κατάλοιπον 0.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς·

Διὰ νὰ διαιρέσω τὸν 5894 διὰ τοῦ 10, πρέπει νὰ εὕρω πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 10 εἰς τὸν 5894, ἤγουν πόσας δεκάδας ἔχει ὁ 5894· ἀλλ᾽ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει 589 δεκάδας καὶ 4 μονάδας· λοιπὸν τὸ πηλίκον εἶναι 589, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι αἱ 4 μονάδες.

Σημείωσις. Ὁ ἀριθμὸς 5894 ἔχει 589 δεκάδας, διότι αἱ 8 ἑκατοντάδες του κάμνουν 80 δεκάδας (μία ἑκατοντὰς κάμνει 10 δεκάδας) καὶ αἱ 5 χιλιάδες του κάμνουν 50 ἑκατοντάδας ἢ 500 δεκάδας·

Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι 100, ἡ διαίρεσις γίνεται τάχιστα, ὡς ἑξῆς· ***Χωρίζομεν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ διαιρετέου· τότε τὰ ἄλλα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελοῦσι τὸ πηλίκον, τὰ δὲ χωρισθέντα τὸ ὑπόλοιπον.***

Καὶ γενικῶς, ὅταν ὁ διαιρέτης ἀποτελῆται ἀπὸ τὴν μονάδα καὶ ἀπὸ μηδενικά, χωρίζομεν ἀπὸ τὸ τέλος τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ διαιρέτης (κατόπιν τῆς μονάδος)· τότε τὰ ἄλλα ψηφία τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσι τὸ πηλίκον, τὰ δὲ χωρισθέντα τὸ κατάλοιπον.

Παραδείγματα 6897 : 100, πηλίκον 68, κατάλοιπον 97
16978 : 1000, πηλίκον 16, κατάλοιπον 978
6800 : 100, πηλίκον 68, κατάλοιπον 0.

Ὁ δὲ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς· Εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα πρέπει νὰ εὕρωμεν, πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 100 εἰς τὸν 6897· ἤτοι πόσας ἑκατοντάδας ἔχει ὁ 6897· ἔχει δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος 68 ἑκατοντάδας. Εἰς τὸ δεύτερον πρέπει νὰ εὕρωμεν πόσας χιλιάδας ἔχει ὁ ἀριθμὸς 16 978· ἔχει δὲ 16, καὶ οὕτω καθεξῆς.

2α

48. Ὅταν ὁ διαιρέτης ἔχῃ εἰς τὸ τέλος μηδενικά, ἀφήνομεν αὐτά· ἀφήνομεν ὅμως καὶ ἴσον ἀριθμὸν ψηφίων ἀπὸ τὸ τέλος τοῦ διαιρετέου· τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον τότε εὑρίσκομεν, εἶναι τὸ ζητούμενον· ἀλλὰ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀληθὲς ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, πρέπει δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς συντομευθείσης διαιρέσεως νὰ γράψωμεν καὶ τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου, τὰ ὁποῖα ἀφήκαμεν.

Ἂς ὑποθέσωμεν, π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3897521 διὰ τοῦ 45000. Διὰ νὰ εὕρω τὸ πηλίκον, πρέπει νὰ ἀφαιρέσω τὰς 45000 ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 3897521, ὅσας φορὰς δύναμαι· ἐπειδὴ ὅμως αἱ χιλιάδες δὲν ἠμποροῦν νὰ ἀφαιρεθοῦν ἀπὸ μονάδας, οὔτε ἀπὸ δεκάδας, οὔτε ἀπὸ ἑκατοντάδας, πρέπει νὰ ἀφαιρέσω τὰς 45 χιλιάδας ἀπὸ τὰς 3897 χιλιάδας τοῦ διαιρετέου ὅσας φορὰς δύναμαι, ἤτοι πρέπει νὰ διαιρέσω τὸν ἀριθμὸν 3897 διὰ τοῦ 45, διὰ νὰ εὕρω τὸ πηλίκον.

τὸ δὲ ὑπόλοιπον θὰ ἀπαρτίζηται ἀπὸ χιλιάδας, αἱ ὁποῖαι θὰ μείνουν, καὶ ἀπὸ τὰς 521 μονάδας, τὰς ὁποίας ἐξ ἀρχῆς ἀφήκαμεν.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων·

389′7(521)	45(00
360	86
297	
270	
27521	

1410(00	3(00
21	470
00	

3η

49. Ὅταν τὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου εἶναι ὅλα 9, ἡ διαίρεσις συντομεύεται ὡς ἑξῆς·

Ἂς ὑποθέσωμεν, λ. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν 1897405 : 999, ἤτοι νὰ μοιράσωμεν 1897405 δραχμὰς εἰς 999 ἀνθρώπους.

Διὰ νὰ εὐκολύνω τὴν διαίρεσιν, παραδέχομαι ἀκόμη ἕνα ἄνθρωπον καὶ γίνονται 1000 ἄνθρωποι· τότε (κατὰ τὴν 1ην συντομίαν) θὰ πάρῃ ἕκαστος 1897 δραχμὰς καὶ θὰ περισσεύσουν καὶ 405.

Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ὁ εἷς ἄνθρωπος εἶναι φανταστικός, τὸ μερίδιόν του (ἤγουν 1897 δραχμαὶ) δὲν τὸ ἔλαβε κανείς, ἔμεινε λοιπὸν τὸ μερίδιον τοῦτο ὁμοῦ μὲ τὸ ὑπόλοιπον 405, ἤτοι ἔμειναν 2302 δραχμαὶ καὶ πρέπει νὰ μοιρασθῶσιν ἀκόμη καὶ αὐταὶ εἰς τοὺς 999 ἀνθρώπους· γίνεται δὲ τοῦτο διὰ νέας διαιρέσεως 2302 : 999.

Καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν κάμνω τὴν ἰδίαν συντομίαν κα εὑρίσκω ὁμοίως, ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος ἐκ τῶν 999 ἀνθρώπων 2 δραχμὰς καὶ θὰ μείνουν 304 δραχμαὶ ὑπόλοιπον. Ὥστε ἡ διαίρεσις ἐξετελέσθη, καὶ πηλίκον μὲν ἔδωκε 1897+2, ἤτοι 1899, ὑπόλοιπον δὲ 304

Ἡ διάταξις δὲ τῆς πράξεως ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ ὡς ἑξῆς·

1897′405	999
405	1897
2′302	2
2	1899
304	

3598′54	99
54	3598
36′52	36
36	3634
88	

Σημείωσις. Ὅταν τὸ πηλίκον μέλλῃ νὰ ἔχῃ πολλὰ ψηφία, εἶναι δὲ καὶ ὁ διαιρέτης πολυψήφιος, σχηματίζομεν κατὰ πρῶτον πίνακα, ὁ ὁποῖος περιέχει τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου μὲ τοὺς 9 μονοψηφίους ἀριθμοὺς κατὰ σειράν· τότε, βλέποντες τὸν πίνακα τοῦτον, εὑρίσκομεν ἀμέσως εἰς ἑκάστην μερικὴν διαίρεσιν τὸ ψηφίον τοῦ πηλίκου. Οὕτω δὲ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν καὶ συντομώτερον καὶ ἀσφαλέστερον. Τὸ αὐτὸ δὲ πρέπει νὰ κάμνωμεν, ὅταν δι᾽ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν πολλὰς διαιρέσεις, διότι τότε ὁ πίναξ, τὸν ὁποῖον ἅπαξ ἐσχηματίσαμεν, χρησιμεύει εἰς πάσας ταύτας τὰς διαιρέσεις.

Βάσανος τῆς διαιρέσεως.

50. Ἀφοῦ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, ἂν θέλωμεν νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμήν της, ***πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ἂν ἔμεινεν· ἐὰν τότε εὑρεθῇ ὁ διαιρετέος, συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος.***

Σημείωσις. Διὰ τῆς διαιρέσεως ἠμποροῦμεν νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς ἑξῆς· Διαιροῦμεν τὸ εὑρεθὲν γινόμενον διὰ τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν παραγόντων, καὶ ἂν ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος, πρέπει νὰ εὕρωμεν ὡς πηλίκον τὸν ἄλλον παράγοντα, ὑπόλοιπον δὲ 0.

Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

51. Ἡ διαίρεσις ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, διότι πολλάκις χρησιμεύουσι·

1) ***Ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὰ μέρη του χωριστὰ καὶ ἔπειτα νὰ ἑνώσωμεν τὰ πηλίκα.***

Τὴν ἰδιότητα ταύτην μετεχειρίσθημεν ἤδη, διὰ νὰ ἐξηγήσωμεν τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, εἶναι δὲ φανερά, διότι, ἂν ἔχω, λ. χ. νὰ μοιράσω 1868 δραχμὰς εἰς 4 ἀνθρώπους, δύναμαι βέβαια νὰ μοιράσω εἰς αὐτοὺς πρῶτον τὰς 1000 δραχμάς, ἔπειτα τὰς 800, ἔπειτα τὰς 60 καὶ τέλος τὰς 8.

2) ***Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δὲν βλάπτεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην ἐπὶ ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμόν.***

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι, ὅταν λ.χ. ἔχωμεν νὰ μοιράσωμεν 120 δραχ. εἰς 8 ἀνθρώπους, ἂν ἔλθωσι καὶ ἄλλοι 8 ἄνθρωποι καὶ συγχρόνως ἄλλαι 120 δραχμαί, δηλαδὴ ἂν διπλασιασθῶσιν οἱ ἄνθρωποι, ἀλλὰ νὰ διπλασιασθῶσι καὶ αἱ δραχμαί, τὸ μερίδιον ἑκάστου ἀνθρώπου θὰ μείνῃ τὸ αὐτό, εἴτε χωριστὰ μοιράσουν οἱ 8 τὰς 120 καὶ οἱ ἄλλοι 8 τὰς ἄλλας 120, εἴτε ὁμοῦ μοιράσουν τὰς διπλασίας 120×2 οἱ διπλάσιοι 8×2.

Ὁμοίως πειθόμεθα, ὅτι, ἂν τριπλασιασθῶσιν οἱ ἄνθρωποι καὶ συγχρόνως τριπλασιασθῶσιν αἱ δραχμαί, πάλιν τὸ μερίδιον ἑκάστου δὲν ἀλλάσσει καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἂν π. χ. ἔχω νὰ διαιρέσω ἀριθμόν τινα διὰ τοῦ 5, διπλασιάζω τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ ἔπειτα διαιρῶ διὰ 10. Ὁμοίως, ἂν ἔχω νὰ διαιρέσω ἀριθμόν τινα δι' 25, πολλαπλασιάζω αὐτὸν ἐπὶ 4 καὶ διαιρῶ ἔπειτα διὰ τοῦ 100.

3) ***Διὰ νὰ διαιρέσω γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψω τὸν παράγοντα τοῦτον.***

Ἐάν, π. χ. ἔχω νὰ διαιρέσω τὸ γινόμενον 8×2×5 διὰ τοῦ 5, ἀρκεῖ νὰ παραλείψω τὸν παράγοντα 5· τὸ πηλίκον θὰ εἶναι 8×2. Διότι, ἂν πολλαπλασιάσω τὸν 8×2 ἐπὶ τὸν διαιρέτην 5, εὑρίσκω πάλιν τὸν διαιρετέον 8×2×5.

Ἀσκήσεις (ἀπὸ μνήμης).

1) Ἐκ δύο ἀδελφῶν, ὁ εἷς ἔχει 120 πρόβατα, ὁ δὲ ἄλλος 70· πόσα πρέπει νὰ δώσῃ ὁ πρῶτος εἰς τὸν δεύτερον, διὰ νὰ ἔχωσιν ἴσα;
2) 18 δραχμαὶ πόσας δεκάρας ἔχουν καὶ πόσας πεντάρας;
3) Οἰκογένειά τις ἐξοδεύει καθ' ἑκάστην 20 δραχμάς· πόσας ἐξοδεύει εἰς 5 ἑβδομάδας;
4) Τὸ ἡμερομίσθιον ἑνὸς ἐργάτου εἶναι 15 δραχμαί· πόσα θὰ λάβῃ, ἂν ἐργασθῇ 40 ἡμέρας;
5) Εὑρὲ τὸ ἥμισυ τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν·
   48, 24, 16, 100, 120, 180, 1000, 1200
6) Πόσας ὥρας κάμνουν 6000 πρῶτα λεπτά;
7) Μία ἅμαξα ἐνοικιάζεται 160 δραχμὰς διὰ 5 ἡμέρας· πόσον ἔχει τὴν ἡμέραν;
8) Μία οἰκία ἐνοικιάζεται κατὰ μῆνα 120 δραχμάς· πόσον εἶναι τὸ ἐνοίκιον τῶν 10 μηνῶν καὶ πόσον τοῦ ἔτους;
9) 2000 στρατιῶται εἶναι παρατεταγμένοι εἰς τετράδας (τέσσαρες τέσσαρες)· πόσας τετράδας κάμνουν;
10) 50 ἄνθρωποι ἐξώδευσαν ἀπὸ κοινοῦ εἰς ἓν ταξίδιον 1200 δραχμάς· πόσα ἐξώδευσεν ὁ καθείς;

Προβλήματα.

1) 75 ὀκάδες ἑνὸς πράγματος ἀξίζουν 1125 δραχμάς· πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ;

Λύσις. Οἱ 1125 δραχμαὶ εἶναι ἡ ἀξία τῶν 75 ὀκάδων· λοιπὸν διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς ὀκᾶς, πρέπει νὰ μοιράσωμεν τὰς 1125 δραχμὰς εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ ὀκάδες, ἤτοι εἰς 75 ἴσα μέρη, καὶ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς. Διαιροῦντες, εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ζητουμένη ἀξία τῆς ὀκᾶς εἶναι 15 δραχμαί.

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

Ὅταν ἠξεύρωμεν τὴν ἀξίαν πολλῶν μονάδων ἑνὸς πράγματος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος τοῦ ἰδίου πράγματος, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν γνωστὴν ἀξίαν τῶν μονάδων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἐκφράζει πόσαι εἶναι αἱ μονάδες.

2) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 76 δραχμάς· πόσας ὀκάδας ἀγοράζω μὲ 1125 δραχμάς ;

Λύσις. Ἂν ἀπὸ τὰς 1125 δραχμὰς δώσω 75, θὰ ἀγοράσω μίαν ὀκᾶν καὶ θὰ ἔχω δραχμὰς 1050· ἂν ἔπειτα δώσω ἄλλας 75, θὰ ἀγοράσω καὶ ἄλλην ὀκᾶν καὶ θὰ μοῦ μείνουν 975 δραχμαί. Ἐκ τούτων βλέπω, ὅτι τόσας ὀκάδας θὰ ἀγοράσω, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 75 εἰς τὸν 1125. Διὰ νὰ λύσω λοιπὸν τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ διαιρέσω τὸν 1125 δι᾽ 75· διαιρῶ καὶ εὑρίσκω 15· ὥστε 15 ὀκάδας δύναμαι νὰ ἀγοράσω.

Παρατήρησις. Τὸ δεύτερον τοῦτο πρόβλημα ἔχει τοὺς ἰδίους ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους ἔχει καὶ τὸ πρῶτον, καὶ μὲ τὴν ἰδίαν πρᾶξιν ἐλύθη. Ἀλλ᾽ εἰς μὲν τὸ πρῶτον πρόβλημα ἐμοιράσαμεν τὸν 1125 εἰς 75 ἴσα μερίδια· διὰ τοῦτο ἕκαστον μερίδιον εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον· εἰς δὲ τὸ δεύτερον ἐξητάσαμεν, πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς 75 εἰς τὸν 1125, δηλαδὴ ἀπὸ πόσα 75 σύγκειται ὁ 1125· οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν τώρα θεωροῦνται ἀφῃρημένοι· διὰ τοῦτο καὶ τὸ πηλίκον αὐτῶν, ὡς ἐξαγόμενον τῆς πράξεως, εἶναι ἀριθμὸς ἐπίσης ἀφῃρημένος, λαμβάνει δὲ ἔπειτα τὴν σημασίαν, τὴν ὁποίαν ὁρίζει τὸ πρόβλημα καὶ ἥτις δύναται νὰ εἶναι ὁποιαδήποτε.

Διὰ νὰ διακρίνω τὰς δύο ταύτας διαιρέσεις, θὰ λέγω τὴν μὲν πρώτην ***μερισμὸν*** καὶ τὸ πηλίκον αὐτῆς ***μερίδιον***, τὴν δὲ δευτέραν ***μέτρησιν*** (διότι μετροῦμεν τὸν ἕνα ἀριθμὸν διὰ τοῦ ἄλλου) καὶ τὸ πηλίκον αὐτῆς ***λόγον*** (ὑποθέτω τὰς διαιρέσεις τελείας).

3) Ἐὰν ὁ διαιρετέος εἶναι 1411 καὶ τὸ πηλίκον 83, τίς εἶναι ὁ διαιρέτης ; (Ἀπ. 17)

4) Ἁμαξά τις διέτρεξεν εἰς 18 ὥρας 126 στάδια· πόσα στάδια διέτρεχε κάθε ὥραν; (Ἀπ. 7)

5) Πόσας δραχμὰς ἀποτελοῦσιν 78955 λεπτά;

('Απ. 789 δραχ. καὶ περισσεύουν 55 λεπτά)

Σημείωσις. Διὰ νὰ τρέψω λεπτὰ εἰς δραχμὰς (ὅταν εἶναι περισσότερα ἀπὸ 100), χωρίζω τὰ δύο τελευταῖα ψηφία· ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον τὰ ἄλλα σχηματίζουσιν, εἶναι δραχμαί (ἴδε ἐδ. 47).

6) Νὰ τραπῶσιν 97870 δράμια εἰς ὀκάδας.

('Απ. 244 ὀκάδες καὶ περισσεύουν 270 δράμια)

7) Οἰκία τις δίδει ἐνοίκιον 1800 δραχμὰς τὸ ἔτος· πόσον δίδει κατὰ μῆνα;

8) 'Ατμόπλοιόν τι διανύει 90 μίλια εἰς 8 ὥρας· ἓν ἄλλο διανύει 250 μίλια εἰς 28 ὥρας· ποῖον ἐκ τῶν δύο εἶναι ταχύτερον;

('Απ. τὸ πρῶτον· διότι διανύει κάθε ὥραν 11 μίλια καὶ ὀλίγον τι, ὁ δὲ δεύτερον δὲν διανύει οὔτε 9).

9) Θέλει τις νὰ ἀγοράσῃ σῖτον, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 35 λεπτά· διὰ νὰ λάβῃ χρήματα, πωλεῖ 1073 ὀκάδας ἐλαίου πρὸς 1 δραχ. καὶ 12 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· πόσας ὀκάδας σίτου θὰ ἀγοράσῃ μὲ τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα θὰ λάβῃ ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ ἐλαίου;

Λύσις. 'Εκ τῆς πωλήσεως τοῦ ἐλαίου θὰ λάβῃ λεπτὰ 112×1073 (διότι ἡ μία ὀκᾶ ἀξίζει 112 λεπτά), δηλαδὴ 120176 λεπτά· εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ὁ 35 χωρεῖ 3433 φορὰς (μὲ ὑπόλοιπον 21)· ὥστε θὰ ἀγοράσῃ 3433 ὀκάδας σίτου καὶ θὰ τοῦ μείνουν καὶ 21 λεπτά.

10) Ἱππεὺς καταδιώκει πεζόν, ὅστις ἀνεχώρησεν 20 ὥρας πρὸ αὐτοῦ· καὶ ὁ μὲν πεζὸς διατρέχει καθ' ὥραν 6 στάδια, ὁ δὲ ἱππεὺς 10· πόσας ὥρας χρειάζεται ὁ ἱππεὺς διὰ νὰ φθάσῃ τὸν πεζόν;

Λύσις. Τὴν στιγμήν, καθ' ἣν ἀναχωρεῖ ὁ ἱππεύς, ἀπέχει ἀπὸ τοῦ πεζοῦ 120 στάδια (διότι τόσα διατρέχει ὁ πεζὸς εἰς 20 ὥρας). 'Αφοῦ δὲ ἀναχωρήσῃ, κάθε ὥραν πλησιάζει τὸν πεζὸν κατὰ 4 στάδια· ὥστε ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 4 εἰς τὸν 120, τόσαι ὧραι χρειάζονται, δηλαδὴ 30.

11) 'Εὰν εἷς ἄνθρωπος ἀρχίσῃ νὰ ἀπαγγέλλῃ τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ σειρὰν καὶ χρειάζεται δι' ἕκαστον ἀριθμὸν ἓν δεύτερον λεπτόν, πόσον χρόνον χρειάζεται διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν ἀριθμὸν 1 000 000 000; ('Απ. 11574 ἡμ. 1 ὥραν, 46 πρῶτα λεπτὰ καὶ 4 δεύτερα ἢ περίπου 31 ἔτη).

Σημείωσις. Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι 60 δεύτερα λεπτὰ κάμνουν 1 πρῶτον λεπτὸν καὶ 60 πρῶτα λεπτὰ κάμνουν 1 ὥραν καὶ 24 ὧραι κάμνουν 1 ἡμέραν.

12) 18 ἄνθρωποι ἐμοιράσθησαν ποσόν τι χρημάτων ἐξ ἴσου· οἱ 14

ἐξ αὐτῶν ἔλαβον ὁμοῦ 210 δραχμάς· πόσα ἦσαν τὰ μοιρασθέντα χρήματα καὶ πόσα ἔλαβεν ὁ καθείς;

Λύσις. Ἐπειδὴ οἱ 14 ἄνθρωποι ἔλαβον τὸ ὅλον 210 δραχ. διὰ νὰ εὕρω τὸ μερίδιον ἑκάστου, διαιρῶ τὸν 210 εἰς 14 ἴσα μέρη καὶ εὑρίσκω, ὅτι ἕκαστος ἔλαβε 15 δραχμάς· ἐπειδὴ δὲ ὅλοι ἔλαβον ἐξ ἴσου, τὰ μοιρασθέντα χρήματα ἦσαν 15×18, ἤτοι 270 δραχμαί.

13) Ἐργάτης ἐργάζεται καθ' ἑκάστην, πλὴν τῶν Κυριακῶν, καὶ λαμβάνει ἡμερομίσθιον 8 δραχ. ἐξοδεύει ὅμως διὰ τὴν συντήρησίν του καθ' ἡμέραν τρεῖς δραχμάς· εἰς πόσας ἡμέρας θὰ οἰκονομήσῃ 810 δραχ.;

Λύσις. Εἰς μίαν ἑβδομάδα οἰκονομεῖ 27 δραχ. διότι λαμβάνει 48 καὶ ἐξοδεύει 21· λοιπὸν διὰ νὰ οἰκονομήσῃ 810 δραχ. πρέπει νὰ περάσουν τόσαι ἑβδομάδες, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 810 τὸν 27, ἤτοι 30.

14) Ἠγόρασέ τις 240 πρόβατα πρὸς 28 δραχ. τὸ καθὲν καὶ θέλει τώρα νὰ πωλήσῃ καὶ νὰ κερδίσῃ ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτῶν 1200 δραχμάς· πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ καθέν;

Λύσις. Ἐπειδὴ θέλει νὰ κερδίσῃ 1200 δραχμὰς ἀπὸ τὰ 240 πρόβατα, πρέπει νὰ κερδίσῃ ἀπὸ τὸ καθὲν 5 δραχ. (ὅπερ εὑρίσκω διαιρῶν τὸ κέρδος 1200 εἰς 240 ἴσα μερίδια) καὶ διὰ τοῦτο πρέπει νὰ πωλῇ τὸ καθὲν πρὸς 33 δραχμάς.

15) Ἐργάτης τις λαμβανει δι' ἑκάστην ἡμέραν ἐργασίας 11 δραχμάς ἐξοδεύει δὲ καθ' ἡμέραν πρὸς συντήρησίν του 5 δραχμάς· εἰς τὸ διάστημα ἑνὸς ἔτους τοῦ ἐπερίσσευσαν 727 δραχμαί· πόσας ἡμέρας εἰργάσθη καὶ πόσας ἔμεινεν ἄεργος;

Λύσις. Εἰς τὰς 365 ἡμέρας τοῦ ἔτους ἐξώδευσε 5×365, ἤτοι 1825 δραχ. τοῦ ἔμειναν καὶ 727, λοιπὸν καθ' ὅλον τὸ ἔτος εἰσέπραξε 1825 + 727, ἤτοι 2552 δραχ. καὶ ἐπειδὴ ἐργάζεται μίαν ἡμέραν διὰ νὰ λαβῃ 11 δραχ. διὰ νὰ λάβῃ τὰς 2552 δραχ. πρέπει νὰ εἰργάσθῃ τόσας ἡμέρας, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 2552 τὸν 11, ἤτοι 232.

16) Ἔχω εἰς ἓν καλάθιον μῆλα καὶ ῥοδάκινα τὸ ὅλον 48· ἐὰν πωλήσω τὰ μῆλα πρὸς 5 λεπτὰ τὸ καθὲν καὶ τὰ ῥοδάκινα πρὸς 10, θὰ λάβω 3 δραχμάς· πόσα μῆλα ἔχω καὶ πόσα ῥοδάκινα;

Λύσις. Ἂν ἦσαν ὅλα μῆλα, θὰ ἐλάμβανα ἐκ τῆς πωλήσεως 5×48, ἤτοι 240 λεπτά· λαμβάνω ὅμως 60 λεπτὰ περιπλέον· αὐτὰ προέρχονται ἀπὸ τὰ ῥοδάκινα· καὶ ἐπειδὴ ἀπὸ κάθε ἓν ῥοδάκινον λαμβάνω περιπλέον 5 λεπτά, διὰ νὰ λάβω τὰ 60 περιπλέον, πρέπει νὰ πωλήσω τόσα ῥοδάκινα, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 60 τὸν 5, ἤτοι 12· ὥστε τὰ μὲν ῥοδάκινα εἶναι 12, τὰ δὲ μῆλα 48—12, ἤτοι 36.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V.

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ.

5/2/35

Ὁρισμοί.

52. ***Διαιρετὸς*** λέγεται ἀριθμός τις δι᾽ ἄλλου, ἐὰν διαιρῆται δι᾽ αὐτοῦ ἀκριβῶς (ἤγουν χωρὶς νὰ μένῃ ὑπόλοιπον).

Οἷον, ὁ 15 εἶναι διαιρετὸς διὰ 5, ὁ 20 εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 κτλ.

Ὁ διαιρῶν ἀκριβῶς ἀριθμόν τινα λέγεται διαιρέτης αὐτοῦ· π. χ. ὁ 3 εἶναι διαιρέτης τοῦ 15, ὁ 4 εἶναι διαιρέτης τοῦ 20 κτλ.

Ἀριθμός τις λέγεται πολλαπλάσιον ἄλλου ἀριθμοῦ, ἐὰν γίνεται ἐξ αὐτοῦ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· οἷον, ὁ 15 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5 (διότι $15=5\times3$)· ὁ 24 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6 (διότι $24=6\times4$) κτλ. Ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος παράγει ἄλλον, λέγεται παράγων αὐτοῦ, οἷον ὁ 5 εἶναι παράγων τοῦ 15, ὁ 6 εἶναι παράγων τοῦ 24 κτλ.

Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖ ἀκριβῶς τὰ πολλαπλάσιά του καὶ μόνον αὐτά·

Οἱ διαιρέται παντὸς ἀριθμοῦ καὶ οἱ παράγοντες αὐτοῦ εἶναι οἱ ἴδιοι ἀριθμοί.

Ἄρτιοι (ἢ ζυγοὶ) λέγονται ὅσοι ἀριθμοὶ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2· ***περιττοὶ*** δέ (ἢ μονοί), ὅσοι δὲν διαιροῦνται διὰ τοῦ 2· π. χ. ὁ 10 εἶναι ἄρτιος, ὁ δὲ 5 περιττός.

Πρῶτος λέγεται ἀριθμός τις, ἐὰν δὲν ἔχῃ κανένα διαιρέτην παρὰ μόνον τὴν μονάδα καὶ τὸν ἑαυτόν του· τοιοῦτοι εἶναι ὁ 5, ὁ 7, ὁ 13 κτλ.

Πρῶτοι ἀριθμοὶ ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 100 εἶναι οἱ ἑξῆς·

1	11	23	31	41	53	61	71	83	97
2	13	29	37	43	59	67	73	89	
3	17			47			79		
5	19								
7									

Γενικαὶ ἀρχαὶ τῆς διαιρετότητος.

53. ***Ἐὰν εἷς ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.***

Παραδείγματος χάριν, ἐπειδὴ ὁ 5 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 15 καὶ 25, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $15+25$, ἤγουν 40.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς·

Ὁ 15 καὶ ὁ 25 εἶναι καὶ οἱ δύο πολλαπλάσια τοῦ 5· ἤτοι σύγκεινται ἀπὸ πολλὰ πέντε (ἐπειδὴ διαιροῦνται δι' αὐτοῦ)· καὶ ὁ μὲν 15 εἶναι 5+5+5, ὁ δὲ 25 εἶναι 5+5+5+5+5· ἄρα τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 5+5+5+5+5+5+5+5, ἤγουν σύγκειται ἀπὸ πολλὰ πέντε, ὥστε εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5.

54. Ἐκ τῆς ἀρχῆς ταύτης συμπεραίνομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα·

Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῇ ἄλλον ἀριθμόν, διαιρεῖ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ.

Παραδείγματος χάριν, ἐπειδὴ ὁ 9 διαιρεῖ τὸν 27, θὰ διαιρῇ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, ἤτοι τὸ διπλάσιον αὐτοῦ 27×2, τὸ τριπλάσιον 27×3 κτλ.

Διότι τὸ 27×2 εἶναι 27+27, τὸ 27×3 εἶναι 27+27+27 κτλ.

55. ***Ἐὰν εἷς ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.***

Παραδείγματος χάριν, ἐπειδὴ ὁ 3 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 18 καὶ 12, θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν 18—12, ἤγουν 6.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὅμοιος τῷ προηγουμένῳ.

Χαρακτηριστικὰ τῆς διαιρετότητος διὰ τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 5, 4 καὶ 25, 3 καὶ 9.

Πολλάκις εἶναι ὠφέλιμον νὰ ἠξεύρωμεν, ἂν ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλου (μάλιστα δὲ διὰ τῶν ἀνωτέρω μικρῶν ἀριθμῶν), χωρὶς νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν. Εἰς τοῦτο βοηθούμεθα διὰ τῶν ἑξῆς κανόνων·

Κανὼν διὰ τοὺς 2 καὶ 5.

56. ***Διὰ τοῦ 2 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν τὸ τελευταῖον ψηφίον διαιρῆται διὰ 2. Τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει καὶ περὶ τοῦ 5.***

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι

διὰ τοῦ 2 διαιροῦνται οἱ ἀριθμοί, ὅσοι ἔχουσι τελευταῖον ψηφίον ἢ 2 ἢ 4 ἢ 6 ἢ 8 ἢ 0.

Διὰ τοῦ 5 διαιροῦνται, ὅσοι ἔχουσι τελευταῖον ψηφίον ἢ 5 ἢ 0.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 1025 διαιρεῖται διὰ 5, διότι λήγει εἰς 5, ὁ 128 διαιρεῖται διὰ 2, διότι λήγει εἰς 8· ὁ δὲ 1027 δὲν διαιρεῖται διὰ 2, διότι λήγει εἰς 7.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς·

Ἕκαστος ἀριθμὸς (ἐὰν δὲν εἶναι μονοψήφιος) σύγκειται ἀπὸ μονάδας καὶ ἀπὸ δεκάδας· καὶ τὰς μὲν δεκάδας τὰς διαιρεῖ ὁ 2 (καὶ ὁ 5), διότι ἑκάστη δεκάς, ἤτοι 10, διαιρεῖται διὰ τοῦ 2 (καὶ διὰ τοῦ 5)· ἐὰν λοιπὸν διαιρῶνται καὶ αἱ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 2 (ἢ διὰ τοῦ 5), θὰ διαιρῆται καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς διὰ τοῦ 2 (ἢ διὰ τοῦ 5, ἐδ. 53).

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 1875 σύγκειται ἀπὸ 187 δεκάδας καὶ ἀπὸ 5 μονάδας· ἑκάστη δεκὰς διαιρεῖται διὰ 5 (καὶ δίδει πηλίκον 2)· ἄρα αἱ 187 δεκάδες διαιροῦνται διὰ τοῦ 5 (καὶ δίδουσι πηλίκον 2×187, ἤτοι 374)· ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ (αἱ 5) διαιροῦνται διὰ τοῦ 5, συμπεραίνομεν, ὅτι καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ 5 (καὶ τὸ πηλίκον εἶναι 374+1, ἤγουν 375).

Κανὼν διὰ τοὺς 4 καὶ 25.

57. ***Διὰ τοῦ 4 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ σχηματίζωσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4· τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει καὶ διὰ τὸν 25.***

Ἐπομένως διὰ τοῦ 25 διαιροῦνται, ὅσοι ἀριθμοὶ λήγουν εἰς 00 ἢ εἰς 25 ἢ εἰς 50 ἢ εἰς 75.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 187544 διαιρεῖται διὰ 4, διότι καὶ ὁ ἀριθμὸς 44, τὸν ὁποῖον σχηματίζουσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του, διαιρεῖται διὰ τοῦ 4· ὁ δὲ ἀριθμὸς 1945050 διαιρεῖται διὰ τοῦ 25, διότι καὶ ὁ 50 διαιρεῖται διὰ τοῦ 25· ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς 25746 δὲν διαιρεῖται διὰ 4· διότι καὶ ὁ 46 δὲν διαιρεῖται διὰ 4· ὁ δὲ ἀριθμὸς 58715 δὲν διαιρεῖται δι' 25, διότι καὶ ὁ 15 δὲν διαιρεῖται δι' 25.

Ὁ δὲ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς· Αἱ ἑκατοντάδες παντὸς ἀριθμοῦ διαιροῦνται διὰ 4 (καὶ δι' 25), διότι ἑκάστη ἑκατοντάς, ἤτοι 100, διαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ διὰ 4 καὶ δι' 25 (100=4×25)· ἐὰν λοιπὸν αἱ δεκάδες καὶ αἱ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ ὁμοῦ διαιρῶνται διὰ 4, καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς θὰ διαιρῆται διὰ 4.

Τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει προδήλως καὶ περὶ τοῦ 25.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 875975 σύγκειται ἀπὸ δύο μέρη, ἀπὸ 8759 ἑκατοντάδας καὶ ἀπὸ 75 μονάδας· ἑκάστη ἑκατοντάς, ἤτοι 100, διαιρεῖται δι' 25 (καὶ δίδει πηλίκον 4)· ἄρα καὶ αἱ 8759 ἑκατοντάδες διαιροῦνται δι' 25 (καὶ δίδουσι πηλίκον 8759×4)· ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ 75 μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ διαιροῦνται διὰ τοῦ 25, συμπεραίνομεν, ὅτι καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' 25 (καὶ δίδει πηλίκον 8759×4 καὶ 3).

Κανὼν διὰ τοὺς 3 καὶ 9.

58'. ***Διὰ τοῦ 9 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 9· τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει καὶ περὶ τοῦ 3.***

Εἰς τὸ ἄθροισμα ὅλα τὰ ψηφία λαμβάνονται ὡς ἁπλαῖ μονάδες.

Παραδ. χάριν, διὰ νὰ δοκιμάσωμεν, ἂν ὁ ἀριθμὸς 58973 διαιρῆται διὰ τοῦ 9, εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του 5+8+9+7+3, ἤτοι 32, καὶ ἐπειδὴ τοῦτο δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 9, οὐδὲ ὁ ἀριθμὸς 58973 διαιρεῖται δι' 9. Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν, ἂν ὁ ἀριθμὸς 1845 διαιρῆται δι' 9, εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του 1+8+4+5, ἤτοι 18, καὶ ἐπειδὴ τοῦτο διαιρεῖται δι' 9, καὶ ὁ ἀριθμὸς 1845 θὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 9.

Διὰνὰ δοκιμάσωμεν, ἂν ὁ ἀριθμὸς 85107 διαιρῆται διὰ 3, εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του 8+5+1+7, ἤτοι 21· καὶ ἐπειδὴ τοῦτο διαιρεῖται διὰ 3, καὶ ὁ ἀριθμὸς 85107 θὰ διαιρῆται διὰ 3.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς· Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 8975· ὁ ἀριθμὸς οὗτος σύγκειται ἀπὸ 897 δεκάδας καὶ ἀπὸ 5 μονάδας· ἂν ἀπὸ ἑκάστην δεκάδα (ἤτοι 10) ἀφαιρέσωμεν τὸν 9, μένει ὑπόλοιπον μία μονάς, ἤτοι ἡ δεκὰς γίνεται ἁπλῆ μονάς· ἂν λοιπὸν ἀπὸ τὰς 897 δεκάδας τοῦ ἀριθμοῦ 8975 ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ κάθε μίαν τὸν 9, θὰ μείνουν εἰς τὸν ἀριθμὸν 897 μονάδες καὶ 5 μονάδες· ἤτοι θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς 897+5· ἐὰν δὲ πάλιν ἀπὸ τὰς 89 δεκάδας τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ κάθε μίαν τὸν 9, θὰ μείνουν 89 μονάδες καὶ 7 μονάδες καὶ 5 μονάδες, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς 89+7+5· καὶ τέλος, ἂν ἀπὸ τὰς 8 δεκάδας τούτου ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ κάθε μίαν τὸν 9, θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς 8+9+7+5.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 8975 σύγκειται ἀπὸ πολλὰ 9 (ἤτοι ἀπὸ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 9) καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα 8+9+7+5, ἤτοι εἶναι 8975=8+9+7+5+ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 9· ὥστε, ἂν τὸ ἄθροισμα 8+9+7+5 διαιρῆται δι' 9, καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς θὰ διαιρῆται δι' 9.

Ὁμοίως σκεπτόμεθα καὶ διὰ τὸν 3· στηριζόμεθα δὲ εἰς τοῦτο ὅτι, ἂν ἀπὸ μίαν δεκάδα ἀφαιρέσωμεν τρεῖς φορὰς τὸν 3, μένει ὑπόλοιπον 1, ἤτοι μία μονὰς ἁπλῆ.

Σημείωσις α΄. Διὰ τοῦ 6 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 3.

Σημείωσις β΄. Διὰ τοῦ 12 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 4.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ

Ὁρισμοί.

59. ***Κοινὸς διαιρέτης*** δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ἀριθμός τις, ἐὰν τοὺς διαιρῇ ὅλους ἀκριβῶς.

Παραδείγματος χάριν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν· 16 24 56 20 κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ 2· διότι τοὺς διαιρεῖ ὅλους· τῶν αὐτῶν δὲ ἀριθμῶν κοινὸς διαιρέτης εἶναι καὶ ὁ 4.

Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται (ὡς καὶ τὸ ὄνομα αὐτοῦ φανερώνει) ὁ μέγιστος ἐκ τῶν κοινῶν διαιρετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ 16 24 40 ἔχουσι τοὺς ἑξῆς κοινοὺς διαιρέτας· 1, 2, 4, 8 καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν εἶναι ὁ 8.

Ἐὰν ἀριθμοί τινες δὲν ἔχωσι κανένα κοινὸν διαιρέτην, πλὴν τοῦ 1, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι λέγονται ***πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους***.

Τοιοῦτοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 3, 4, 9.

Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν. Κανών.

60. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἀριθμῶν, διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου· καὶ ἂν μὲν ἡ διαίρεσις γίνῃ ἀκριβῶς, τότε ὁ μικρότερος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης. Ἂν ὅμως μείνῃ ὑπόλοιπον, διαιροῦμεν τὸν μικρότερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου· ἐὰν ἡ δευτέρα αὕτη διαίρεσις γίνῃ ἀκριβῶς, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι ὁ διαιρέτης αὐτῆς· εἰ δὲ μή, διαιροῦμεν τὸν διαιρέτην αὐτῆς διὰ τοῦ ὑπολοίπου της καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως διαιροῦντες ἕκαστον διαιρέτην διὰ τοῦ ἀντιστοίχου ὑπολοίπου, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0. Ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας διαιρέσεως εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.***

Παραδείγματα.

1ον) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 84 καὶ 21. Διαιροῦμεν

84	21
84	4
0	

καὶ ἐπειδὴ ὁ μικρότερος (ὁ 21) διαιρεῖ τὸν μεγαλύτερον (τὸν 84), αὐτός, ὁ μικρότερος, θὰ εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν 84 καὶ 21.

2ον) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγ. κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν 128 καὶ 40. Διαιροῦμεν

128	40		40	8
120	3.	διαιροῦμεν ἔπειτα	40	5
8			0	

ὥστε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 128 καὶ 40 εἶναι ὁ 8.

3ον) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγ. κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 1600 καὶ 60. Διαιροῦμεν

1600	60	60	40	40	20
120	26	40	1	40	2
400		20		0	
360					
40					

ὥστε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 1600 καὶ 60 εἶναι ὁ 20.

Διάταξις τῆς πράξεως.

Πρὸς συντομίαν διατάσσεται ἡ πρᾶξις ὡς ἑξῆς· γράφεται δηλαδὴ τὸ πηλίκον ἑκάστης διαιρέσεως ὑπεράνω τοῦ διαιρέτου καὶ χωρίζεται ἀπ᾿ αὐτοῦ διὰ γραμμῆς ὁριζοντίας· ἡ δὲ θέσις ὑποκάτω τοῦ διαιρέτου φυλάσσεται διὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἑπομένης διαιρέσεως.

	26	1	2
1600	60	40	20
120	40	40	20
400	20	0	
360			
40			

Σημείωσις. Ἂν ὡς μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εὑρεθῇ ἡ μονάς, τοῦτο σημαίνει, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ μόνον αὐτὴν ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην, ἤτοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης πολλῶν ἀριθμῶν.

61. Τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς·

Ἀφοῦ γράψωμεν τοὺς ἀριθμοὺς εἰς μίαν σειράν, λαμβάνομεν τὸν μικρότερον ἐξ αὐτῶν καὶ διαιροῦμεν δι᾽ αὐτοῦ ὅλους τοὺς ἄλλους καὶ γράφομεν ὑποκάτω ἑκάστου τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἀφήνει ἡ διαίρεσίς του.

Ἂν ὅλα τὰ ὑπόλοιπα εἶναι 0, ὁ διαιρέτης, διὰ τοῦ ὁποίου διῃρέσαμεν, εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης· εἰ δὲ μή, κάμνομεν τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὴν νέαν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν (τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσι τὰ ὑπόλοιπα καὶ ὁ διαιρέτης) καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως, μέχρις οὗ εὕρωμεν ἀριθμόν, ὅστις, διαιρῶν τοὺς ἄλλους τῆς σειρᾶς του, νὰ ἀφήνῃ ὅλα τὰ ὑπόλοιπα 0· ὁ διαιρέτης οὗτος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Παράδειγμα.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν·

36	40	48	56	24	(διὰ τοῦ 24)
12	16	0	8	24	(διὰ τοῦ 8)
4	0	0	8	0	(διὰ τοῦ 4)
4	0	0	0	0	

ὁ 4 εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΥ.

Ἀριθμός τις λέγεται κοινὸν πολλαπλάσιον ἄλλων ἀριθμῶν, ἐὰν εἶναι πολλαπλάσιον ἑκάστου ἐξ αὐτῶν· οἷον, ὁ 24 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 4, 8 καὶ 12, διότι εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 4 καὶ τοῦ 8 καὶ τοῦ 12.

Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, λέγεται (ὡς καὶ τὸ ὄνομα δηλοῖ) ὁ μικρότερος ἐξ ὅλων τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν τούτων· οἷον, ὁ 24 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τοῦ 6 καὶ τοῦ 8, διότι εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τοῦ 6 καὶ τοῦ 8 καὶ ἄλλος ἀριθμός, μικρότερος, δὲν ὑπάρχει, ὅστις νὰ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δεδομένων ἀριθμῶν, κάμνομεν ὡς ἑξῆς·

Γράφομεν τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς εἰς μίαν σειράν· ἔπειτα παρατηροῦμεν, ἂν δύο ἢ περισσότεροι ἐξ αὐτῶν ἔχουν κοινόν τινα διαιρέτην πρῶτον ἀριθμόν· καὶ ἂν ἔχωσι, διαιροῦμεν αὐτοὺς διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου των καὶ γράφομεν ὑποκάτω ἑκάστου τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον δίδει διαιρούμενος· ἐπίσης γράφομεν ὑποκάτω καὶ ἐκείνους, οἵτινες δὲν διαιροῦνται (διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, δι' οὗ διῃρέσαμεν)· οὕτως ἔχομεν μίαν νέαν σειρὰν ἀριθμῶν (δηλαδὴ τοὺς μὴ διαιρετοὺς καὶ τὰ πηλίκα ἐκείνων, οἵτινες διῃρέθησαν)· καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην σειρὰν κάμνομεν τὸ ἴδιον καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως, ἕως οὗ εὕρωμεν μίαν σειρὰν ἀριθμῶν, εἰς τὴν ὁποίαν νὰ μὴ ὑπάρχωσιν ἀριθμοὶ ἔχοντες κοινόν τινα διαιρέτην (πλὴν τῆς μονάδος). Τότε οἱ ἀριθμοὶ τῆς τελευταίας ταύτης σειρᾶς καὶ πάντες οἱ διαιρέται, δι' ὧν διῃρέσαμεν, πολλαπλασιαζόμενοι, δίδουσι τὸ ζητούμενον ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.

Παραδείγματα.

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλ. κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 6, 9.

Διαιρέται	ἀριθμοί
	2, 3, 6, 9
2	1, 3, 3, 9
3	1, 1, 1, 3

Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶναι $2 \times 3 \times 3$, ἤτοι 18.

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 12, 21, 28.

Διαιρέται	ἀριθμοί
	12, 21, 28
2	6, 21, 14
2	3, 21, 7
3	1, 7, 7
7	1, 1, 1

Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶναι $2 \times 2 \times 3 \times 7$, ἤτοι 84.

Σημείωσις. Καλὸν εἶναι νὰ ἀρχίζωμεν ἀπὸ τῶν μικρῶν διαιρετῶν 2, 2, 5 κτλ.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Ὁρισμοί.

62. Ἐὰν μοιράσωμεν τὴν μονάδα 1 εἰς ἴσα μέρη, τὸ καθὲν ἐκ τῶν μερῶν τούτων λέγεται ***κλασματικὴ μονάς***, αὐτὴ δὲ ἡ μονὰς 1 λέγεται ***ἀκεραία***.

Καὶ ἂν μὲν ἡ μονὰς 1 διαιρεθῇ εἰς δύο ἴσα, τὸ καθὲν λέγεται ἥμισυ καὶ γράφεται ὡς ἑξῆς· $\frac{1}{2}$, ἂν δὲ εἰς τρία, τὸ καθὲν λέγεται τρίτον καὶ γράφεται $\frac{1}{3}$, ἂν δὲ εἰς τέσσαρα, τὸ καθὲν λέγεται τέταρτον καὶ γράφεται $\frac{1}{4}$ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παραδείγματος χάριν, ἂν δύο ἄνθρωποι μοιρασθῶσιν ἓν μῆλον, τὸ μερίδιον ἑκάστου λέγεται ἥμισυ (τοῦ μήλου) καὶ γράφεται $\frac{1}{2}$, ἂν 5 ἄνθρωποι μοιρασθῶσιν ἕνα ἄρτον, τὸ μερίδιον ἑκάστου λέγεται ἓν πέμπτον $\left(\frac{1}{5}\right)$, ἂν δέκα ἄνθρωποι μοιρασθῶσι μίαν δραχμήν, τὸ μερίδιον ἑκάστου λέγεται ἓν δέκατον (τῆς δραχμῆς) καὶ γράφεται $\frac{1}{10}$.

Ἀκέραιοι ἀριθμοὶ λέγονται ὅσοι γίνονται ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1 διὰ τῆς ἐπαναλήψεως ὡς $1+1$ ἢ 2, $1+1+1$ ἢ 3 κτλ. ἔτι δὲ καὶ αὐτὴ ἡ μονὰς 1.

Κλασματικοὶ ἀριθμοὶ ἢ ἁπλῶς ***κλάσματα*** λέγονται οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι γίνονται ἀπὸ μίαν κλασματικὴν μονάδα διὰ τῆς ἐπαναλήψεως· οἷον $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ ἤτοι δύο τρίτα, ἔτι δὲ καὶ αἱ κλασματικαὶ μονάδες.

Ὥστε πᾶς ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα μονάδων ἢ καὶ μία μονάς, οἱ δὲ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἓν ἢ πολλὰ μέρη τῆς μονάδος 1.

Γραφὴ τῶν κλασμάτων.

63. Τὸ κλάσμα γράφεται διὰ δύο ἀκεραίων· καὶ ὁ μὲν πρῶτος φανερώνει πόσας μονάδας (κλάσματος) ἔχει τὸ κλάσμα, ὁ δὲ δεύτερος δηλοῖ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τούτων, ἤγουν δεικνύει εἰς πόσα ἴσα μέρη διῃρέθη ἡ ἀκεραία μονὰς καὶ ἔδωκε τὴν κλασματικήν· καὶ ὁ μὲν πρῶτος λέγεται **ἀριθμητής**, ὁ δὲ δεύτερος (ὁ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων δηλῶν) λέγεται **παρονομαστής**· οἱ δύο ὁμοῦ λέγονται **ὅροι** τοῦ κλάσματος. Γράφεται δὲ ὁ παρονομαστὴς ὑποκάτω τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ χωρίζεται ἀπ' αὐτοῦ διὰ γραμμῆς, οἷον

τὸ ἓν πέμπτον γράφεται (ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν) $\frac{1}{5}$.

ὁ ἀριθμὸς δύο τρίτα, ἤτοι $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, γράφεται $\frac{2}{3}$,

ὁ ἀριθμὸς τέσσαρα πέμπτα, ἤτοι $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$, γράφεται $\frac{4}{5}$,

ὁ ἀριθμὸς τρία δεύτερα, ἤτοι $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, γράφεται $\frac{3}{2}$ κλπ.

Σημείωσις. Ὅταν ἀπαγγέλλωμεν τὸ κλάσμα, τὸν μὲν ἀριθμητὴν ἀπαγγέλλομεν ὡς ἀριθμητικὸν ἀπόλυτον ὄνομα, τὸν δὲ παρονομαστὴν ὡς τακτικόν· οἷον, τρία ὄγδοα $\left(\frac{3}{8}\right)$, πέντε ἕβδομα $\left(\frac{5}{7}\right)$ κλπ.

Παρατήρησις.

Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος εἶναι ἴσοι, ὡς $\frac{5}{5}\ \frac{2}{2}\ \frac{3}{3}$, τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1, διότι, ἂν ἑνώσωμεν ὅλα τὰ μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα διῃρέσαμεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1, θὰ ἔχωμεν βεβαίως πάλιν τὴν ἀκεραίαν μονάδα· καὶ ἂν μὲν μοιρασθῇ ἡ μονὰς εἰς δύο ἴσα μέρη, θὰ σύγκειται ἀπὸ δύο ἡμίση ἢ δύο δεύτερα, ὥστε εἶναι $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}$, ἂν δὲ μοιρασθῇ εἰς τρία, θὰ σύγκειται ἀπὸ τρία τρίτα, ὥστε εἶναι $1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}$, ἂν δὲ εἰς τέσσαρα, θὰ σύγκειται ἀπὸ τέσσαρα τέταρτα· ὥστε

$$1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4} \text{ κλπ.}$$

Ὅταν δὲ ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος· διότι π. χ. τὸ $\frac{3}{5}$ εἶναι $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ καὶ χρειάζονται ἀκόμη δύο πέμπτα, $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$, διὰ νὰ γίνῃ ἴσον μὲ τὴν μονάδα 1.

Ὅταν δὲ ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος.

Διότι π. χ. τὸ $\frac{7}{6}$ σύγκειται ἀπὸ $\frac{6}{6}$ (ὅπερ εἶναι ἴσον μὲ τὴν μονάδα) καὶ ἀπὸ $\frac{1}{6}$ ὥστε ὑπερβαίνει τὴν μονάδα 1.

Τροπὴ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἰς κλάσματα.

64. Ἡ ἀκεραία μονὰς 1 δύναται, ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν, νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα, ἔχον ἴσους ὅρους, ὡς $\frac{5}{5}$, $\frac{3}{3}$ κτλ.

Καὶ πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται, νὰ τραπῇ εἰς κλάσμα, ἐὰν αἱ μονάδες του τραπῶσιν εἰς κλάσματα.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, θέλω νὰ τρέψω τὸν ἀκέραιον 8 εἰς πέμπτα (ἤτοι εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὸν 5) ἀρκεῖ νὰ ἐνθυμηθῶ, ὅτι ἑκάστη ἀκεραία μονὰς ἔχει 5 πέμπτα· ἄρα αἱ δύο ἀκέραιαι μονάδες ἔχουσι 10 πέμπτα (2 φορὰς πέντε), αἱ τρεῖς ἔχουσι 15 πέμπτα καὶ αἱ 8 ἔχουσιν 8 φορὰς 5 πέμπτα, ἤτοι 8×5 πέμπτα·

ὥστε εἶναι $8 = \frac{8 \times 5}{5} = \frac{40}{5}$.

65. Ἐξ οὗ βλέπω, ὅτι

διὰ νὰ τρέψω ἀκέραιον εἰς κλάσμα, ἔχον δοθέντα παρονομαστήν, πολλαπλασιάζω τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφω παρονομαστὴν τὸν δοθέντα.

Περὶ τῶν μεικτῶν ἀριθμῶν.

Τροπὴ τῶν μεικτῶν εἰς κλάσματα.

66. Μεικτὸς ἀριθμὸς λέγεται ὁ συγκείμενος ἀπὸ ἀκέραιον καὶ κλάσμα· οἷον οἱ ἀριθμοὶ $2\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{5}$ κτλ.

Ὅταν π. χ. 2 ἄνθρωποι μοιρασθῶσι 5 δραχμάς, λαμβάνει ὁ καθεὶς 2 ἀκεραίας δραχμὰς καὶ περισσεύει καὶ μία, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ὁ καθεὶς λαμβάνει τὸ ἥμισυ· ὥστε τὸ μερίδιον τοῦ καθενὸς εἶναι $2\frac{1}{2}$

Ὁ μεικτὸς ἀριθμὸς τρέπεται εἰς κλασματικόν, διότι τὸ ἀκέραιον μέρος του γίνεται κλάσμα.

Ἔστω λ. χ. ὁ μεικτὸς ἀριθμὸς $5\frac{2}{3}$·

διὰ νὰ τρέψω αὐτὸν εἰς κλάσμα, τρέπω πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος 5 εἰς κλάσμα μὲ παρονομαστὴν 3 (διότι καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μεικτοῦ ἔχει παρονομαστὴν 3). Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ῥηθέντα ὁ 5, τρεπόμενος εἰς τρίτα, γίνεται $\frac{5\times3}{3}$ ἢ $\frac{15}{3}$, ὥστε ὁ μεικτὸς γίνεται $\frac{15}{3}$ καὶ $\frac{2}{3}$· ἀλλὰ 15 τρίτα καὶ 2 τρίτα κάμνουν 17 τρίτα (καθὼς 15 δραχμαὶ καὶ 2 δραχμαὶ κάμνουν 17 δραχμάς, 15 μῆλα καὶ 2 μῆλα κάμνουν 17 μῆλα καὶ οὕτω καθεξῆς)· ὥστε ὁ μεικτὸς ἀριθμὸς $5\frac{2}{3}$ γίνεται $\frac{17}{3}$· δηλαδὴ εἶναι

$$5\frac{2}{3}=\frac{17}{3}.$$

67. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

Διὰ νὰ τρέψωμεν μεικτὸν ἀριθμὸν εἰς κλασματικόν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιόν του ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα γράφομεν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων τοῦ κλάσματος.

Ἐὰν κλάσμα τι περιέχῃ ἀκεραίας μονάδας (ὅτε ὁ ἀριθμητής του εἶναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ του), δυνάμεθα νὰ ἀποχωρίσωμεν αὐτάς.

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{15}{7}$. Τοῦτο περιέχει ἀκεραίας μονάδας, διότι ὁ ἀριθμητής του 15 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ 7· ἐπειδὴ δὲ μία ἀκεραία μονὰς ἔχει 7 ἕβδομα, ἐὰν ἀπὸ τὰ 15 ἕβδομα λάβωμεν τὰ 7 ἕβδομα, σχηματίζομεν ἐξ αὐτῶν μίαν ἀκεραίαν μονάδα, μένουσι δὲ ἀκόμη 15—7, ἤτοι 8 ἕβδομα· ἐὰν δὲ καὶ ἀπὸ τὰ 8 ἕβδομα λάβωμεν τὰ 7, σχηματίζομεν ἄλλην μίαν ἀκεραίαν μονάδα, καὶ μένει καὶ $\frac{1}{7}$ (ὅπερ εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος)· ὥστε ὁ ἀριθμὸς $\frac{15}{7}$ ἀνελύθη εἰς 2 ἀκέραια καὶ $\frac{1}{7}$, ἤτοι εἶναι $\frac{15}{7}=2+\frac{1}{7}$ ἢ $2\frac{1}{7}$.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τόσαι ἀκέραιαι μονάδες σχηματίζονται ἐκ τοῦ δοθέντος κλάσματος, ὅσας φορὰς δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν ἀπὸ τὸν ἀριθμητήν του, ἤτοι ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ παρονομαστὴς εἰς τὸν ἀριθμητήν· ὥστε τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ κλάσματος εὑρίσκεται ὡς πηλίκον, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

68. ***Διὰ νὰ ἀποχωρίσωμεν ἀπὸ κλάσμα τι τὸν ἀκέραιον,***

τὸν ὁποῖον περιέχει, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· καὶ τὸ μὲν εὑρεθὲν πηλίκον εἶναι ὁ ἀκέραιος, τὸν ὁποῖον περιέχει τὸ κλάσμα, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἂν μείνῃ) εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ μένοντος κλάσματος (τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ παρονομαστὴν τὸν αὐτὸν μὲ τὸ δοθὲν κλάσμα).

69. Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ ἀκέραιον ἀριθμόν.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον τρέπονται τὰ ἑξῆς κλάσματα εἰς μεικτοὺς ἢ ἀκεραίους (εἰς ἀκεραίους μέν, ἂν ἡ διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς, εἰς μεικτοὺς δέ, ἂν μένῃ ὑπόλοιπον)·

$$\frac{13}{5}=2\,\frac{3}{5},\qquad \frac{18}{7}=2\,\frac{4}{7},\qquad \frac{31}{8}=3\,\frac{7}{8}$$

$$\frac{28}{4}=7,\qquad \frac{49}{7}=7,$$

Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

70. ***Πᾶν κλάσμα, ἐὰν ἐπαναληφθῇ τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ παρονομαστής του, γίνεται ἀκέραιος ἀριθμός, ἴσος μὲ τὸν ἀριθμητήν του.***

Ἔστω λ. χ. τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$, ἤτοι $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$.

Ἂς ἐπαναλάβωμεν αὐτὸ τρεῖς φορὰς

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\qquad \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\qquad \frac{1}{3}+\frac{1}{3},$$

τὸ $\frac{1}{3}$, ὅταν ἐπαναληφθῇ τρεῖς φοράς, γίνεται 1 ἀκέραιον καὶ τὸ ἄλλο $\frac{1}{3}$ γίνεται ἐπίσης 1· ὥστε τὰ δύο τρίτα γίνονται 2 ἀκέραια.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 24), ὅταν εἷς ἀριθμὸς ἐπαναλαμβάνεται, πολλαπλασιάζεται ἐπί τινα ἀκέραιον ἀριθμόν· ὥστε ἡ ἀνωτέρω δειχθεῖσα ἰδιότης δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς·

71. ***Πᾶν κλάσμα, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν παρανομαστήν του, δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του.***

Δηλαδὴ $\frac{5}{6}\times 6=5$, $\frac{7}{8}\times 8=7$ κλπ.

72. Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης συμπεραίνομεν ἀμέσως τὴν ἑξῆς·

Πᾶν κλάσμα εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρανομαστοῦ του.

Π. χ. τὸ $\frac{5}{6}$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 5 διὰ τοῦ 6.

Διότι τὸ $\frac{5}{6}$, ὅταν ἐπαναληφθῇ 6 φοράς, γίνεται 5· ἤτοι

$$\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}=5.$$

ἐμοιράσθη λοιπὸν ὁ 5 εἰς 6 ἴσα μέρη καὶ ἓν ἐκ τούτων εἶναι τὸ $\frac{5}{6}$.

Σημείωσις. Εἰς τὸ ἴδιον συμπέρασμα φθάνομεν καὶ ὡς ἑξῆς· Ἂν πρόκειται νὰ μοιράσωμεν 5 δραχμὰς εἰς 6 ἀνθρώπους, φανερὸν εἶναι, ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ μοιράσωμεν αὐτὰς χωριστὰ μίαν μίαν. Ἀλλὰ ἀπὸ κάθε μίαν δραχμὴν θὰ λάβῃ ἕκαστος τῶν 6 ἀνθρώπων $\frac{1}{6}$ (τῆς δραχμῆς)· λοιπὸν ἀπὸ 5 δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{5}{6}$. ὥστε τὸ $\frac{5}{6}$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 5 : 6.

Παρατήρησις. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ἡ διαίρεσις δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν γίνεται τώρα τελεία καὶ τὸ πηλίκον γράφεται ἐν γένει ὡς κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην· π. χ. τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 29 : 9 γράφεται ὡς ἑξῆς· $\frac{29}{9}$ ἢ $3\,\frac{2}{9}$, τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 12 : 3 γράφεται $\frac{12}{3}$ ἢ 4, ὥστε, ἂν μὲν ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον εἶναι κλάσμα μὴ περιέχον ἀκεραίας μονάδας· ἂν δὲ ὁ διαιρετέος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον περιέχει ἀκεραίας μονάδας, καὶ ταύτας εὑρίσκομεν ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν, ὡς ἐμάθομεν εἰς τὸ Α΄ βιβλίον. Τὸ ἀκριβὲς ὅμως πηλίκον σύγκειται ἐκ τοῦ ἀκεραίου πηλίκου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν διὰ τῆς πράξεως, καὶ ἐκ τοῦ κλάσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην.

73. ***Ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν καὶ οἱ δύο ὅροι του πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ διαιρεθῶσι δι᾽ ἑνὸς ἀριθμοῦ.***

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$ καὶ ἂς πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ὅροι του, ὁ 2 καὶ ὁ 5, μὲ ἕνα ἀριθμόν, οἷον τὸν 3· τότε τὸ κλάσμα γίνεται $\frac{6}{15}$· λέγω δὲ ὅτι τὸ $\frac{2}{5}$ καὶ τὸ $\frac{6}{15}$ ἔχουσιν ἴσην ἀξίαν.

Διὰ νὰ δείξω τοῦτο, ἐπαναλαμβάνω καὶ τὰ δύο κλάσματα 15 φορὰς (ἤγουν τὰ πολλαπλασιάζω ἐπὶ 15)· κατὰ τὰ ἀνωτέρω ῥηθέντα τὸ $\frac{6}{15}$ θὰ γίνῃ τότε 6, ἀλλὰ καὶ τὸ $\frac{2}{5}$ θὰ γίνῃ καὶ αὐτὸ 6· διότι, ἂν τὸ λάβω

5 φοράς, γίνεται 2· λοιπόν, ἂν τὸ λάβω 10 φοράς, θὰ γίνῃ 4, καὶ ἂν τὸ λάβω 15 φοράς, θὰ γίνῃ 6. Ἐκ τούτου βλέπω, ὅτι καὶ τὸ $\frac{2}{5}$ καὶ τὸ $\frac{6}{15}$ παριστάνουσι τὸ 15ον μέρος τοῦ 6, ἤγουν τὸ μερίδιον, τὸ ὁποῖον θὰ λάβῃ ἕκαστος, ὅταν 15 ἄνθρωποι μοιρασθῶσιν 6 δραχμάς· ὥστε τὰ δύο ταῦτα κλάσματα ἔχουσιν ἴσην ἀξίαν, ἤτοι εἶναι ἴσα.

Σημείωσις. Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἠμποροῦμεν νὰ δείξωμεν καὶ ὡς ἑξῆς·

Τὸ $\frac{2}{5}$ εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου ἀνθρώπου, ὅταν 5 ἄνθρωποι μοιρασθῶσι 2 δραχμάς· ἀλλ' ἐὰν τριπλασιασθῶσιν αἱ δραχμαί, τριπλασιασθῶσι δὲ καὶ οἱ ἄνθρωποι, φανερὸν εἶναι, ὅτι τὸ μερίδιον θὰ μείνῃ τὸ ἴδιον· λοιπὸν τὰ $\frac{6}{15}$ εἶναι ἴσα μὲ $\frac{2}{5}$.

Καὶ ἂν διαιρεθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν βλάπτεται· διότι τὸ $\frac{6}{15}$ καὶ τὸ $\frac{2}{5}$ εἶναι ἴσα· προκύπτει δὲ τὸ δεύτερον ἐκ τοῦ πρώτου, ἐὰν διαιρεθῶσιν οἱ ὅροι του διὰ 3.

74. ***Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμόν, καὶ ὅλον τὸ κλάσμα*** (δηλαδὴ ἡ ἀξία αὐτοῦ) ***πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν· ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὴς διαιρεθῇ ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διαιρεῖται.***

Δηλαδή, ἐὰν διπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής, καὶ ὅλον τὸ κλάσμα διπλασιάζεται καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$· ἐὰν διπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής του, γίνεται $\frac{6}{8}$· εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι τὰ 6 ὄγδοα εἶναι διπλάσια τῶν 3 ὀγδόων, διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων ἐδιπλασιάσθη.

Ὁμοίως $\frac{9}{8}$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ $\frac{3}{8}$, διότι ἐτριπλασιάσθη ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων του (ἀπὸ 3 ἔγιναν 9).

Σημείωσις. Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἐννοοῦμεν ἀμέσως, ἂν ἐνθυμηθῶμεν, ὅτι ὁ παρονομαστὴς δὲν εἶναι ἄλλο, εἰ μὴ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, ἐξ ὧν γίνεται ὁ ἀριθμός, ὁ δὲ ἀριθμητὴς δηλοῖ πόσας μονάδας ἔχει ὁ ἀριθμός.

Ἐὰν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητής, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Διότι π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ $\frac{6}{8}$.

75. ***Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διαιρεῖται διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ· ἐὰν δὲ ὁ παρονομαστὴς διαιρεθῇ, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάζεται.***

Δηλαδή, ἐὰν διπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ 2, ἤτοι γίνεται τὸ ἥμισυ τοῦ πρίν, ἐὰν τριπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ 3, ἤτοι γίνεται τρὶς μικρότερον καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$· ἐὰν τριπλασιάσω τὸν παρονομαστὴν 8, γίνεται τὸ κλάσμα $\frac{5}{24}$· λέγω δέ, ὅτι τὸ νέον τοῦτο κλάσμα $\frac{5}{24}$ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ $\frac{5}{8}$, ἤτοι πρέπει νὰ ληφθῇ τρεῖς φορὰς $\frac{5}{24}+\frac{5}{24}+\frac{5}{24}$, διὰ νὰ δώσῃ τὸ $\frac{5}{8}$· καὶ τῷ ὄντι, ἐὰν τὸ λάβω τρεῖς φοράς, $\frac{5}{24}+\frac{5}{24}+\frac{5}{24}$, εὑρίσκω $\frac{15}{24}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{5}{8}$, διότι προκύπτει ἐκ τοῦ $\frac{5}{8}$, ὅταν πολλαπλασιασθῶσι καὶ οἱ δύο ὅροι ἐπὶ 3.

Ἐὰν διαιρεθῇ ὁ παρονομαστὴς δι' ἀριθμοῦ, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Διότι π. χ. τὸ $\frac{5}{8}$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ $\frac{5}{24}$· προκύπτει δὲ ἐξ αὐτοῦ ἐὰν διαιρεθῇ ὁ παρονομαστὴς 24 διὰ 3.

Σημείωσις. Ἐκ τῶν προηγουμένων βλέπομεν, ὅτι, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς μόνον πολλαπλασιασθῇ, πολλαπλασιάζεται ὅλον τὸ κλάσμα, ὅταν δὲ ὁ παρονομαστὴς μόνον πολλαπλασιασθῇ, διαιρεῖται ὅλον τὸ κλάσμα, ὅταν δὲ ἀμφότεροι πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, οὔτε πολλαπλασιάζεται τὸ κλάσμα, οὔτε διαιρεῖται, ἀλλὰ μένει ἴσον· δηλαδὴ ἡ αὔξησις, τὴν ὁποίαν προξενεῖ ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ, ἐξουδετερώνεται ἀπὸ τὴν ἐλάττωσιν, τὴν ὁποίαν προξενεῖ ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ παρονομαστοῦ. Ἐν γένει δέ, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐξήσῃ, τὸ κλάσμα αὐξάνει (διότι ἔχει περισσοτέρας μονάδας)· οἷον $\frac{3}{8}$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\frac{2}{8}$· ἀλλ' ὅταν ὁ παρονομαστὴς αὐξήσῃ, τὸ κλάσμα ἐλαττοῦται (διότι αἱ μονάδες του μικραίνουν)· π. χ. τὸ $\frac{5}{8}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{5}{7}$, διότι τὸ $\frac{1}{8}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{7}$.

Ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων.

76. **Ἁπλοποίησις** τοῦ κλάσματος λέγεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκομεν ἄλλο κλάσμα ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ ἔχον μικροτέρους ὅρους.

Ἡ ἁπλοποίησις γίνεται, ὅταν οἱ ὅροι τοῦ δοθέντος κλάσματος ἔχουσι κοινόν τινα διαιρέτην· διότι, διαιροῦντες δι' αὐτοῦ καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος, εὑρίσκομεν ἄλλο κλάσμα, ἔχον ὅρους μικροτέρους, καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ δοθέν.

Παραδείγματα.

Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{18}{20}$, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην τὸν 2· ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους διὰ τοῦ 2, εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{9}{10}$, ὅπερ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{18}{20}$ (κατὰ τὸ ἐδ. 74) καὶ ἁπλούστερον αὐτοῦ· διότι ἔχει μικροτέρους ὅρους.

Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{12}{18}$, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι διαιροῦνται καὶ οἱ δύο δι' 6· ἐὰν διαιρέσωμεν αὐτούς, εὑρίσκομεν τὸ ἁπλούστερον κλάσμα $\frac{2}{3}$, ὅπερ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{12}{18}$.

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρανομαστοῦ $\left(\text{ὡς } \frac{4}{2}, \frac{8}{2}, \frac{15}{5}\right)$, ἁπλοποιούμενον τὸ κλάσμα, λαμβάνει παρανομαστὴν τὴν μονάδα $\left(\frac{2}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{1}\right)$, ἀλλὰ τότε τὸ κλάσμα παριστᾷ ἀκέραιον ἀριθμόν (ἐδ. 69).

Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν τοὺς ἀκεραίους καὶ ὡς κλάσματα, ἔχοντα παρανομαστὴν τὴν μονάδα 1.

Ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος δὲν ἔχωσι κανένα κοινὸν διαιρέτην, δὲν δύναται τὸ κλάσμα νὰ ἁπλοποιηθῇ καὶ λέγεται **ἀνάγωγον**· τοιαῦτα εἶναι τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ κτλ.

Σημείωσις. Διὰ νὰ εὑρίσκωμεν τοὺς κοινοὺς διαιρέτας τῶν ὅρων, πρέπει νὰ ἐνθυμώμεθα τοὺς κανόνας τῆς διαιρετότητος (ἐδ. 56—58).

Διὰ νὰ καταστήσωμεν δὲ τὸ δοθὲν κλάσμα ἀνάγωγον, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους του διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.

Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

77. ***Ὁμώνυμα*** λέγονται ὅσα κλάσματα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἤτοι ὅσα γίνονται ἀπὸ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν κλασματικὴν μονάδα $\left(\text{ὡς } \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$· ***ἑτερώνυμα*** δὲ λέγονται τὰ ἔχοντα διαφόρους παρονομαστάς, ἤτοι ὅσα γίνονται ἀπὸ διαφόρους κλασματικὰς μονάδας $\left(\text{ὡς } \frac{2}{5}, \frac{3}{8}\right)$.

78. Τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα τρέπονται εἰς ὁμώνυμα χωρὶς νὰ βλαφθῇ ἡ ἀξία αὐτῶν. Ἡ τροπὴ αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἰδιότητος τῶν κλασμάτων (ἐδ. 73) καὶ γίνεται κατὰ τοὺς ἑξῆς κανόνας·

1) ***Διὰ νὰ τρέψωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ καθενὸς ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου.***

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα τὰ ἑξῆς κλάσματα·

$\frac{2}{5}, \frac{3}{7}$ χωρὶς νὰ βλάψωμεν τὴν ἀξίαν αὐτῶν.

Κατὰ τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τοῦ ἐδαφίου 73, τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$ δὲν βλάπτεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι καὶ οἱ δύο του ὅροι ἐπὶ 7 (ὅπερ 7 εἶναι ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἄλλου)· τότε τὸ $\frac{2}{5}$ γίνεται $\frac{2\times7}{5\times7}$ ἢ $\frac{14}{35}$.

Ἐπίσης καὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{7}$ δὲν βλάπτεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι καὶ οἱ δύο ὅροι του ἐπὶ 5 (ὅπερ 5 εἶναι ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἄλλου κλάσματος)· τότε δὲ γίνεται $\frac{3\times5}{7\times5}$ ἢ $\frac{15}{35}$.

ὥστε τὰ δύο κλάσματα $\frac{2}{5}, \frac{3}{7}$

ἔγιναν ὁμώνυμα, $\frac{14}{35}, \frac{15}{35}$, χωρὶς νὰ βλαφθῇ ἡ ἀξία αὐτῶν.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τρέπονται τὰ κλάσματα $\frac{3}{8}, \frac{5}{9}$,

εἰς ὁμώνυμα $\frac{27}{72}, \frac{40}{72}$.

καὶ τὰ κλάσματα $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$,

τρέπονται εἰς $\frac{5}{15}, \frac{3}{15}$.

2) Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, ὁσαδήποτε καὶ ἂν εἶναι, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ καθενὸς μὲ τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τοὺς παρονομαστὰς ὅλων τῶν ἄλλων κλασμάτων.

Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὰ ἑξῆς κλάσματα·

$$\frac{3}{5}, \quad \frac{2}{7}, \quad \frac{1}{8}$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 7×8 (δηλαδὴ ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν, πλὴν τοῦ ἰδικοῦ του), δὲν βλάπτεται ἡ ἀξία του καὶ γίνεται

$$\frac{3\times7\times8}{5\times7\times8} \quad ἢ \quad \frac{168}{280}.$$

Ὁμοίως, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{2}{7}$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 5×8 (δηλ. ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν, πλὴν τοῦ ἰδικοῦ του), δὲν βλάπτεται ἡ ἀξία του καὶ γίνεται

$$\frac{2\times5\times8}{7\times5\times8} \quad ἢ \quad \frac{80}{280}.$$

Καὶ τέλος ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{1}{8}$ μὲ τὸ γινόμενον 5×7, δὲν βλάπτεται ἡ ἀξία του καὶ γίνεται $\frac{5\times7}{8\times7\times5}$ ἢ $\frac{35}{280}$.

Ὥστε τὰ δοθέντα κλάσματα $\frac{3}{5}, \frac{2}{7}, \frac{1}{8}$

ἐτράπησαν εἰς $\frac{168}{280}, \frac{80}{280}, \frac{35}{280}$,

ἤτοι εἰς ὁμώνυμα, χωρὶς νὰ βλαφθῇ ἡ ἀξία αὐτῶν.

Ὁμοίως τρέπονται τὰ κλάσματα $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}$,

εἰς τὰ ἑξῆς ὁμώνυμα· $\frac{5\times4}{3\times5\times4}, \frac{3\times4}{5\times3\times4}, \frac{3\times5}{4\times3\times5}$.

ἤ, ἂν ἐκτελέσωμεν τοὺς πολλαπλασιασμούς, $\frac{20}{60}, \frac{12}{60}, \frac{15}{60}$.

Σημείωσις. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον κοινὸς παρονομαστὴς γίνεται τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν.

3) ***Ὅταν ἠξεύρωμεν ἀριθμόν τινα, τὸν ὁποῖον νὰ διαιρῶσιν ὅλοι οἱ παρονομασταί, δυνάμεθα νὰ κάμωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον κοινὸν παρονομαστὴν τῶν δοθέντων κλασμάτων. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος μὲ τὸ***

πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, διαιροῦντες τὸν ῥηθέντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος τούτου.

Ἔστωσαν, ὡς παραδείγματα, τὰ ἑξῆς κλάσματα·

$$\frac{1}{2},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{4}{9},\quad \frac{1}{6}.$$

Ὁ ἀριθμὸς 18 διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ὅλων τῶν παρονομαστῶν· δυνάμεθα λοιπὸν νὰ κάμωμεν αὐτὸν κοινὸν παρονομαστήν· τοῦτο γίνεται ὡς ἑξῆς·

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ πηλίκον 18 : 2, ἤτοι ἐπὶ 9, καὶ εὑρίσκομεν $\frac{9}{18}$.

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ πηλίκον 18 : 3, ἤτοι ἐπὶ 6, καὶ εὑρίσκομεν $\frac{12}{18}$.

Ὁμοίως πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸ πηλίκον 18 : 9, ἤτοι 2, καὶ εὑρίσκομεν $\frac{8}{18}$.

Τέλος πολλαπλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ τετάρτου ἐπὶ τὸ πηλίκον 18 : 6, ἤτοι 3, καὶ εὑρίσκομεν $\frac{3}{18}$.

Ὥστε τὰ δοθέντα κλάσματα $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{9},\ \frac{1}{6}$

ἔγιναν ὁμώνυμα $\frac{9}{18},\ \frac{12}{18},\ \frac{8}{18},\ \frac{3}{18}$.

Σημείωσις. Εἰς τὸν τελευταῖον τοῦτον κανόνα περιλαμβάνονται καὶ οἱ ἄλλοι· διότι τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν εἶναι προφανῶς διαιρετὸν δι' ἑκάστου ἐξ αὐτῶν καὶ τοῦτο γίνεται κοινὸς παρονομαστής, κατὰ τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον κανόνα· ἀλλ' ἐνίοτε εὑρίσκεται ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν καὶ διαιρετὸς δι' αὐτῶν· τότε ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι προτιμότερος. Ὁ μικρότερος δὲ παρονομαστής, τὸν ὁποῖον δύνανται τὰ κλάσματα νὰ ἀποκτήσωσιν, ὅταν γίνωσιν ὁμώνυμα, εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν (ἐὰν εἶναι ἀνάγωγα).

79. Ὅταν εἷς ἐκ τῶν δοθέντων παρονομαστῶν διαιρῆται δι' ὅλων τῶν ἄλλων, κάμνομεν αὐτὸν κοινὸν παρονομαστήν, κατὰ τὸν ἀνωτέρω λεχθέντα τρόπον.

Ἔστωσαν, ὡς παράδειγμα, τὰ κλάσματα $\frac{3}{8},\ \frac{5}{16}$.

Ὁ μεγαλύτερος παρονομαστὴς 16 διαιρεῖται διὰ τοῦ ἄλλου 8 καὶ δίδει πηλίκον 2. Πολλαπλασιάζοντες λοιπὸν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{3}{8}$ ἐπὶ 2 τρέπομεν αὐτὸ εἰς τὸ $\frac{6}{16}$· ὥστε τὰ δοθέντα κλάσματα $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{16}$ ἔγιναν ὁμώνυμα $\frac{6}{16}$, $\frac{5}{16}$.

Ἔστωσαν τέλος τὰ ἑξῆς κλάσματα·

$$\frac{1}{6},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{24}.$$

Ὁ μεγαλύτερος παρονομαστὴς 24 διαιρεῖται δι᾽ ὅλων τῶν ἄλλων· διότι 24 : 6 εἶναι 4, 24 : 3 εἶναι 8, 24 : 4 εἶναι 6.

Πολλαπλασιάζοντες λοιπὸν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ 4 (διότι 24 : 6 εἶναι 4) τρέπομεν αὐτὸ εἰς $\frac{4}{24}$.

Πολλαπλασιάζοντες δὲ καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου ἐπὶ 8 (διότι 24 : 3 εἶναι 8) τρέπομεν αὐτὸ εἰς $\frac{16}{24}$.

Τέλος πολλαπλασιάζοντες καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ τρίτου ἐπὶ 6 (διότι 24 : 4 εἶναι 6) τρέπομεν αὐτὸ εἰς $\frac{6}{24}$.

Ὥστε τοιουτοτρόπως τὰ δοθέντα κλάσματα $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{24}$ ἔγιναν ὁμώνυμα $\frac{4}{24}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{6}{24}$, $\frac{5}{24}$.

Παρατήρησις. Ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα χρησιμεύει 1) εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν τῶν κλασμάτων, ὡς ἀμέσως θὰ ἴδωμεν, καὶ 2) εἰς τὸ νὰ διακρίνωμεν ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων κλασμάτων ποῖον εἶνε τὸ μεγαλύτερον. Διότι, τρέποντες αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα, βλέπομεν ἀμέσως ποῖον ἔχει τὸν μεγαλύτερον ἀριθμητήν, ὅπερ εἶνε μεγαλύτερον.

Ἂν, παραδείγματος χάριν, πρόκειται νὰ διακρίνω, ποῖον ἐκ τῶν δύο κλασμάτων $\frac{5}{16}$ καὶ $\frac{1}{3}$ εἶναι μεγαλύτερον, τρέπω αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα $\frac{15}{48}$ καὶ $\frac{16}{48}$, ἐξ οὗ βλέπω ἀμέσως, ὅτι τὸ $\frac{1}{3}$ εἶνε μεγαλύτερον τοῦ $\frac{5}{16}$ κατὰ $\frac{1}{48}$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

Ὁρισμοί.

80. ***Ἡ πρόσθεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἐκ πασῶν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας ἔχουσι δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοί.***

Τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἐδώκαμεν καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ἐδ. 13)· ἐδῶ πρέπει νὰ ἐνθυμώμεθα τοῦτο, ὅτι αἱ μονάδες, τὰς ὁποίας ἔχουσιν οἱ ἀριθμοί, δύνανται νὰ εἶναι ἢ ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί.

Ἄθροισμα ἢ ***κεφάλαιον*** λέγεται καὶ πάλιν τὸ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως, οἱ δὲ εἰς πρόσθεσιν δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται ὁμοίως ***προσθετέοι.***

81. Διὰ νὰ προστεθῶσι δύο ἢ καὶ περισσότερα κλάσματα, πρέπει νὰ εἶναι ὁμώνυμα, ἤγουν νὰ γίνωνται ὅλα ἀπὸ τὴν ἰδίαν μονάδα. Διὰ τοῦτο, ὅταν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν κλάσματα, ***ἐὰν δὲν εἶναι ὁμώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμώνυμα.***

Ἡ πρόσθεσις τότε ἐκτελεῖται κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα·

82. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσματα ὁμώνυμα, προσθέτομεν μόνον τοὺς ἀριθμητάς των, ὁ δὲ παρανομαστὴς μένει ὁ ἴδιος.***

Ἂς ὑποθέσωμεν, π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ ἑξῆς ὁμώνυμα κλάσματα· $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$.

εἶναι φανερόν, ὅτι 1 ὄγδοον καὶ 3 ὄγδοα καὶ 5 ὄγδοα κάμνουν 9 ὄγδοα (καθὼς 1 μῆλον καὶ 3 μῆλα καὶ 5 μῆλα κάμνουν 9 μῆλα, ἢ 1 μὴν καὶ 3 μῆνες καὶ 5 μῆνες κάμνουν 9 μῆνας)· ὥστε

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{9}{8}=1\frac{1}{8} \qquad \text{(ἐδ. 68).}$$

Παραδείγματα.

Ὁμώνυμα.

$$\frac{2}{7}+\frac{1}{7}+\frac{4}{7}=\frac{7}{7}=1.$$

$$\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9}=\frac{12}{9}=1\frac{3}{9}=1\frac{1}{3}.$$

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}.$$

Ἑ τ ε ρ ώ ν υ μ α.

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$· τρέπω πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα (εἰς ἕκτα) καὶ εὑρίσκω $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}$ καὶ προσθέτων, εὑρίσκω $\frac{6}{6}$ ἢ 1·

ὅθεν $$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1.$$

2) $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$· τρέπω πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ εὑρίσκω $\frac{6}{30}+\frac{5}{30}$ καὶ προσθέτων, εὑρίσκω $\frac{11}{30}$· ὥστε $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{11}{30}$.

3) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{5}{18}$· τρέπω πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα (εἰς δέκατα ὄγδοα) καὶ εὑρίσκω (ἐδ. 79) $\frac{6}{18}+\frac{3}{18}+\frac{2}{18}+\frac{5}{18}$ καὶ προσθέτων, εὑρίσκω $\frac{16}{18}$ ἢ $\frac{8}{9}$, ὥστε $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{5}{18}=\frac{8}{9}$.

Σημείωσις. Τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀκεραίου καὶ κλάσματος δίδει μεικτὸν ἀριθμόν, ὡς $1+\frac{1}{2}$ γράφεται ὡς ἑξῆς $1\frac{1}{2}$ κτλ.

Πρόσθεσις μεικτῶν.

83. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν μεικτοὺς ἀριθμούς, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο ἀθροίσματα.***

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς μεικτοὺς ἀριθμοὺς
$$3\,\frac{1}{8} \text{ καὶ } 5\,\frac{2}{9}.$$

Οἱ ἀκέραιοι, χωριστὰ προσθετόμενοι, δίδουν 8, τὰ δὲ κλάσματα γίνονται κατὰ πρῶτον ὁμώνυμα $\frac{9}{72}$ καὶ $\frac{16}{72}$

καὶ προσθετόμενα δίδουσιν $\frac{25}{72}$

ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν μεικτῶν εἶναι $8\,\frac{25}{72}$.

Ὁμοίως, ἂν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς μεικτοὺς
$$15\,\frac{1}{3} \text{ καὶ } 2\,\frac{4}{5},$$

τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων εἶναι 17,

τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων εἶναι $\frac{17}{15}$, ἤτοι $1\frac{2}{15}$·

ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν μεικτῶν εἶναι $17+1+\frac{2}{15}$, ἤτοι $18\,\frac{2}{15}$.

Παραδείγματα.

1) Νὰ προστεθῶσιν οἱ μεικτοὶ ἀριθμοὶ

$5\frac{1}{2}$ καὶ $10\frac{2}{9}$ καὶ $3\frac{5}{9}$. Ἄθροισμα $19\frac{5}{18}$.

2) Νὰ προστεθῶσιν οἱ μεικτοὶ

$2\frac{2}{3}$ καὶ $5\frac{1}{7}$ καὶ $1\frac{4}{21}$. Ἄθροισμα 9.

Σημείωσις. Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀκέραιον καὶ μεικτόν, προσθέτομεν τὸν ἀκέραιον εἰς τὸν ἀκέραιον τοῦ μεικτοῦ· οἷον

$$5\frac{1}{7}+3=8\frac{1}{7}.$$

Διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσμα καὶ μεικτόν, προσθέτομεν τὸ κλάσμα εἰς τὸ κλάσμα τοῦ μεικτοῦ· οἷον

$$5\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=5+1=6, \qquad 2\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=2\frac{8}{15}.$$

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

84. ***Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι᾽ ἧς ἐλαττώνομεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος ἀριθμός.***

Αἱ μονάδες δυνατὸν νὰ εἶναι ἢ ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί.

Ὁ πρῶτος τῶν δεδομένων ἀριθμῶν λέγεται πάλιν ***μειωτέος***, ὁ δὲ δεύτερος ***ἀφαιρετέος***, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως λέγεται ***ὑπόλοιπον ἢ διαφορά.***

Ἐὰν ἑνώσωμεν τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τοῦ ὑπολοίπου, θὰ ἀποτελέσωμεν προδήλως τὸν μειωτέον. Ὅθεν ***ὁ μειωτέος εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τοῦ ὑπολοίπου.***

Ἀφαίρεσις κλασμάτων.

85. ***Διὰ νὰ ἀφαιρεθῇ κλάσμα ἀπὸ ἄλλο, πρέπει νὰ εἶναι ὁμώνυμον μὲ αὐτό. Διὰ τοῦτο, ὅταν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ ἄλλο, ἐὰν δὲν εἶναι ὁμώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμώνυμα.***

Ἡ ἀφαίρεσις τότε γίνεται κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα·

86. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ ἄλλο ὁμώνυμον, ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ μειωτέου καὶ ὑποκάτω τοῦ ὑπολοίπου γράφομεν τὸν ἴδιον παρονομαστήν.***

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $\frac{5}{12}$ ἀπὸ $\frac{7}{12}$· εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ 7 δωδέκατα ἀφαιρέσωμεν 5 δωδέκατα, θὰ μείνουν 2 δωδέκατα (καθώς, ὅταν ἀπὸ 7 μῆνας ἀφαιρέσωμεν 5 μῆνας, μένουν 2 μῆνες καὶ οὕτω καθεξῆς)· ἄρα

$$\frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{2}{12} \text{ ἢ } \frac{1}{6}.$$

Ἄς ὑποθέσωμεν δεύτερον, ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ $\frac{1}{5}$ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{1}{4}$.

Ἐπειδὴ τὰ κλάσματα ταῦτα εἶναι ἑτερώνυμα, τρέπομεν πρῶτον εἰς ὁμώνυμα· καὶ ὁ μὲν ἀφαιρετέος $\frac{1}{5}$ γίνεται $\frac{4}{20}$, ὁ δὲ μειωτέος $\frac{1}{4}$ γίνεται $\frac{5}{20}$· ὥστε $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{5}{20} - \frac{4}{20} = \frac{1}{20}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{6}{9} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}, \qquad \frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}.$$

Ἀφαίρεσις μεικτῶν.

87. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μεικτὸν ἀπὸ μεικτοῦ, ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα, καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο ὑπόλοιπα.***

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ἔχω νὰ ἀφαιρέσω τὸν μεικτὸν ἀριθμὸν $5\frac{1}{8}$ ἀπὸ τὸν μεικτὸν $8\frac{5}{12}$, ἀφαιρῶ τοὺς ἀκεραίους χωριστά· $8-5=3$·

Ἔπειτα τὰ κλάσματα χωριστὰ $\frac{5}{12} - \frac{1}{8} = \frac{10}{24} - \frac{3}{24} = \frac{7}{24}$·

ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι $3\frac{7}{24}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$5\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}, \quad 8\frac{1}{3} - 4\frac{1}{3} = 4, \quad 3\frac{1}{2} - 3\frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Παρατήρησις. Ἐὰν τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου, ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων δὲν γίνεται. Διὰ νὰ ὑπερνικήσωμεν τὸ ἐμπόδιον τοῦτο, λαμβάνομεν ***μίαν ἀκεραίαν μονάδα τοῦ μειωτέου καὶ τὴν ἑνώνομεν μὲ τὸ κλάσμα αὐτοῦ, ἀφοῦ τὴν τρέψωμεν καὶ αὐτὴν εἰς κλάσμα ὁμώνυμον.***

Ἔστω, π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $1\frac{2}{9}$ ἀπὸ $5\frac{1}{8}$.

Ἂν τὰ κλάσματα γίνωσιν ὁμώνυμα, θὰ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $1\frac{16}{72}$ ἀπὸ $5\frac{9}{72}$· καὶ ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{16}{72}$ (τοῦ ἀφαιρετέου) δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{9}{72}$ (τοῦ μειωτέου), λαμβάνω μίαν ἀκεραίαν μονάδα τοῦ μειωτέου καὶ τρέπω αὐτὴν εἰς ἑβδομηκοστὰ δεύτερα· τότε θὰ ἔχω νὰ ἀφαιρέσω τὸν μεικτὸν $1+\frac{16}{72}$ ἀπὸ $4+\frac{72}{72}+\frac{9}{72}$, δηλαδὴ ἀπὸ $4+\frac{81}{72}$.

Ἀφαιρῶ τότε, κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα, καὶ εὑρίσκω ὑπόλοιπον $3\frac{65}{72}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $3\frac{1}{5}-2\frac{2}{7}=\frac{32}{35}$, $12\frac{1}{2}-8\frac{2}{3}=3\frac{5}{6}$.

Τὸ αὐτὸ κάμνομεν καὶ ὅταν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν μεικτὸν ἀπὸ ἀκέραιον· οἷον, $5-2\frac{1}{8}=4+\frac{8}{8}-2\frac{1}{8}=2\frac{7}{8}$.

Σημείωσις. Ἐὰν ἀπὸ μεικτὸν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀκέραιον, ἀφαιροῦμεν αὐτὸν ἀπὸ τὸν ἀκέραιον τοῦ μεικτοῦ· οἷον, $5\frac{1}{7}-3=2\frac{1}{7}$.

Ἐὰν δὲ ἀπὸ μεικτὸν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα, ἀφαιροῦμεν αὐτὸ ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μεικτοῦ, ἂν δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ· οἷον $3\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=3\frac{1}{6}$· ἄλλως ἀφαιροῦμεν αὐτὸ ἀπὸ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον προκύπτει, ὅταν μία μονὰς τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ μειωτέου προστεθῇ εἰς τὸ κλάσμα αὐτοῦ.

Οἷον, $3\frac{1}{7}-\frac{2}{3}=2\frac{8}{7}-\frac{2}{3}=2\frac{10}{21}$.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ (ἐπὶ ἀκέραιον).

Ὁρισμοί.

88. ***Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἡ ἐπανάληψις αὐτοῦ πολλάκις.***

Ὁ ἀριθμός, ὅστις πρόκειται νὰ ἐπαναληφθῇ πολλάκις, λέγεται ***πολλαπλασιαστέος***, ὁ δὲ ἀκέραιος ἀριθμός, ὅστις δεικνύει πόσας φορὰς θὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πρῶτος, λέγεται ***πολλαπλασιαστής***· τὸ δὲ ἐξαγόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ λέγεται ***γινόμενον.***

Παραδείγματος χάριν, 6×4 εἶναι ἡ ἐπανάληψις τοῦ 6 τέσσαρας φοράς, ἤτοι $6+6+6+6$·

$\frac{7}{8}\times3$, εἶναι ἡ ἐπανάληψις τοῦ $\frac{7}{8}$ τρεῖς φοράς· $\frac{7}{8}+\frac{7}{8}+\frac{7}{8}$.

Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος.

89. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν μόνον τὸν ἀριθμητήν του, τὸν δὲ παρονομαστὴν ἀφήνομεν τὸν ἴδιον.***

Παραδείγματος χάριν, $\frac{2}{5}\times3$ εἶναι $\frac{6}{5}$ (κατὰ τὸ ἐδ. 74),

ἢ διαιροῦμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ (ἐὰν διαιρῆται) ***καὶ ἀφήνομεν τὸν ἴδιον ἀριθμητήν.***

Παραδείγματος χάριν, $\frac{7}{20}\times 4$ εἶναι $\frac{7}{5}$,

διότι $\frac{7}{20}\times 4$ εἶναι ἴσον $\frac{7\times 4}{20}$· καὶ ἐπειδὴ ἀμφότεροι οἱ ὅροι τούτου διαιροῦνται διὰ τοῦ 4, ἁπλοποιοῦντες, εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον ἴσον μὲ $\frac{7}{5}$.

Σημείωσις. Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἴσος μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, τὸ γινόμενον εἶναι ὁ ἀριθμητής (ἐδ. 71)· οἷον,

$$\frac{5}{8}\times 8=5 \qquad\qquad \frac{3}{5}\times 5=3 \text{ κτλ.}$$

Πολλαπλασιασμὸς μεικτοῦ.

90. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μεικτόν, πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος του καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα του καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο γινόμενα.***

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν μεικτὸν $12\frac{2}{3}$ ἐπὶ 4, θὰ ἔχωμεν $12\times 4=48$ καὶ $\frac{2}{3}\times 4=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$· ἄρα τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι $50\frac{2}{3}$.

Σημείωσις. Ὁ λόγος τῆς πράξεως ταύτης εἶναι ἁπλούστατος· ὅταν ἐπαναλαμβάνωμεν ἕνα ἀριθμόν, φανερὸν εἶναι, ὅτι ἐπαναλαμβάνομεν καὶ τὰ μέρη του (ἰδὲ ἐδ. 34).

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ (δι' ἀκεραίου).

91. ***Ἡ διαίρεσις εἶναι μερισμὸς ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς ἴσα μέρη.***

Ὁ ἀριθμός, ὅστις πρόκειται νὰ μερισθῇ, λέγεται **διαιρετέος,** ὁ δὲ ἀκέραιος ἀριθμός, ὅστις δεικνύει εἰς πόσα μέρη θὰ διαιρεθῇ, λέγεται **διαιρέτης,** τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς διαιρέσεως λέγεται ***πηλίκον.***

Ἐάν, ἀφοῦ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς ἴσα μέρη, ἑνώσωμεν πάλιν ὅλα τὰ μέρη, θὰ ἀποτελεσθῇ βέβαια ὁ διαιρετέος· ὥστε ὁ διαιρετέος προκύπτει ἐκ τοῦ πηλίκου διὰ τῆς ἐπαναλήψεως, ***ἤγουν εἶναι γινόμενον τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην.***

Διαίρεσις ἀκεραίου.

92. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀκέραιον, γράφομεν αὐτὸν ὡς ἀριθμητὴν καὶ ὑποκάτω γράφομεν ὡς παρονομαστὴν τὸν δοθέντα διαιρέτην· τὸ οὕτω σχηματιζόμενον κλάσμα εἶναι τὸ πηλίκον*** (κατὰ τὸ ἐδάφ. 72).

Οἷον, τὸ πηλίκον τοῦ 5 διὰ τοῦ 6 εἶναι $\frac{5}{6}$· τὸ πηλίκον τοῦ 12 διὰ 3 εἶναι $\frac{12}{3}$ ἢ 4 καὶ τὸ πηλίκον τοῦ 15 δι' 7 εἶναι $\frac{15}{7}$ ἢ $2\frac{1}{7}$.

Διαίρεσις κλάσματος.

93. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ διαιρέτου*** (ἐὰν διαιρῆται) ***ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν παρανομαστήν του ἐπὶ τὸν διαιρέτην.***

Ἐὰν λ. χ. ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{15}{28}$ διὰ τοῦ 5, τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{3}{28}$, διότι τοῦτο, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5, γίνεται $\frac{15}{28}$.

Ἐὰν δὲ ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$ διὰ 3, τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{5}{24}$ (κατὰ τὸ ἐδάφιον 75).

Διαίρεσις μεικτοῦ.

94. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν μεικτόν, διαιροῦμεν τὰ δύο μέρη του χωριστὰ*** (ἤγουν τὸ ἀκέραιον καὶ τὸ κλάσμα) ***καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο πηλίκα.***

Παραδείγματος χάριν, ἵνα διαιρέσω τὸν μεικτὸν $15\frac{1}{5}$ διὰ 3, διαιρῶ πρῶτον τὸν 15 διὰ 3 καὶ εὑρίσκω πηλίκον 5, ἔπειτα τὸ $\frac{1}{5}$ διὰ 3 καὶ εὑρίσκω πηλίκον $\frac{1}{15}$· ἄρα τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι $5\frac{1}{15}$.

Ἐὰν δὲ ἔχω νὰ διαιρέσω τὸν μεικτὸν $12\frac{4}{9}$ διὰ τοῦ 8, τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{12}{8}+\frac{4}{72}$ ἢ ἁπλοποιούμενον $\frac{3}{2}+\frac{1}{18}$ καὶ προσθέτοντες ταῦτα, εὑρίσκομεν πηλίκον τὸ $\frac{28}{18}$ ἢ $\frac{14}{9}$ ἢ $1\frac{5}{9}$.

Ὁμοίως εὑρίσκω, ὅτι τὸ $5\frac{1}{3}:12$ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{16}{36}$ ἢ $\frac{4}{9}$ καὶ ὅτι τὸ $18\frac{3}{7}:3$ εἶναι $6\frac{1}{7}$.

Παρατήρησις.

Ἐπειδὴ οἱ μεικτοὶ τρέπονται εἰς κλάσματα, δύναταί τις νὰ ἀποφύγῃ τὰς πράξεις τῶν μεικτῶν, ἐὰν τρέπῃ πρὶν αὐτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα ἐκτελῇ τὰς πράξεις. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι δυσκολώτερον· ὅθεν προτιμότερον εἶναι νὰ ἐκτελῶνται αἱ πράξεις τῶν μεικτῶν, ὡς ἀνωτέρω διελάβομεν.

Προβλήματα.

1) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 12 δραχμάς· πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ πήχεως;

Λύσις. Ἀφοῦ ὁ πῆχυς ἀξίζει 12 δραχμάς, τὸ ἓν πέμπτον αὐτοῦ ἀξίζει τὸ πέμπτον τῶν 12 δραχμῶν, ἤτοι $\frac{12}{5}$ τῆς δραχμῆς, καὶ ἑπομένως τὰ 3 πέμπτα τοῦ πήχεως ἀξίζουν τρεῖς φορὰς τὸ $\frac{12}{5}$, ἤτοι $\frac{12}{5}\times 3$ ἢ $\frac{36}{5}$ τῆς δραχμῆς, τουτέστιν 7 δραχμὰς καὶ $\frac{1}{5}$ τῆς δραχμῆς (ἢ 7 δραχμὰς καὶ 20 λεπτά).

2) Πόσον ἀξίζουν 5 ὀκάδες καὶ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 70 λεπτά;

Λύσις. Εὑρίσκω πρῶτον τὴν ἀξίαν τῶν 5 ὀκάδων καὶ ἔπειτα τὴν ἀξίαν τῶν $\frac{2}{3}$ τῆς ὀκᾶς.

Αἱ 5 ὀκάδες ἀξίζουν 70×5 ἢ 350 λεπτά· τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν $\frac{70\times 2}{3}$ ἢ $\frac{140}{3}$ ἢ $46\,\frac{2}{3}$, διότι τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζει λεπτὰ $\frac{70}{3}$.

Ὥστε αἱ 5 ὀκάδες καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν $396\,\frac{2}{3}$ λεπτά, ἤτοι 3 δραχμάς, 96 λεπτὰ καὶ $\frac{2}{3}$ τοῦ λεπτοῦ.

3) Ἐργάτης τις τελειώνει ἔργον τι εἰς 7 ὥρας· πόσον μέρος τοῦ ἔργου θὰ τελειώσῃ εἰς τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας;

Λύσις. Εἰς 7 ὥρας τελειώνει ὅλον τὸ ἔργον· ἄρα εἰς μίαν ὥραν θὰ τελειώσῃ τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ ἔργου καὶ εἰς $\frac{1}{5}$ τῆς ὥρας θὰ τελειώσῃ τὸ πέμπτον τοῦ $\frac{1}{7}$, ἤτοι $\frac{1}{7\times 5}$ τοῦ ἔργου· ἄρα εἰς τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας θὰ τελειώσῃ τέσσαρας φορὰς τὸ $\frac{1}{7\times 5}$, ἤτοι $\frac{4}{7\times 5}$ ἢ $\frac{4}{35}$ τοῦ ἔργου.

4) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει $\frac{3}{8}$ τῆς δραχμῆς· πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{7}{10}$ τῆς ὀκᾶς;

Λύσις. Ἀφοῦ ἡ ὀκᾶ ἀξίζει $\frac{3}{8}$ τῆς δραχμῆς, τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζει τὸ δέκατον τῶν $\frac{3}{8}$, ἤτοι $\frac{3}{8\times10}$ τῆς δραχμῆς, καὶ τὰ $\frac{7}{10}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν 7 φορὰς $\frac{3}{8\times10}$, ἤτοι $\frac{3\times7}{8\times10}$ ἢ $\frac{21}{80}$ τῆς δραχμῆς.

5) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει $2\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς· πόσον ἀξίζουν 18 πήχεις καὶ $\frac{3}{10}$ τοῦ πήχεως;

Λύσις. Θὰ εὕρω πρῶτον, πόσον ἀξίζουν οἱ 18 πήχεις καὶ ἔπειτα πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{10}$ τοῦ πήχεως.

Οἱ 18 πήχεις πρὸς 2 δρ. ἀξίζουν δραχμὰς 36.

» » » πρὸς $\frac{2}{5}$ τῆς δρ. ἀξίζουν 18 φορὰς τὸ $\frac{2}{5}$, ἤτοι $\frac{36}{5}$, ἤτοι δρ. $7\frac{1}{5}$· ὥστε οἱ 18 πήχεις ἀξίζουν 43 δραχ. καὶ $\frac{1}{5}$ τῆς δραχμῆς.

Τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ πήχεως ἀξίζει τὸ δέκατον τῶν $2\frac{2}{5}$, ἤτοι $\frac{2}{10}+\frac{2}{50}$ τῆς δραχ. καὶ τὰ $\frac{3}{10}$ τοῦ πήχεως ἀξίζουν τρεῖς φορὰς τόσα, ἤτοι $\frac{6}{10}+\frac{6}{50}$ τῆς δρ. ἄρα οἱ 18 πήχεις καὶ τὰ $\frac{3}{10}$ ἀξίζουν 43 δραχ. $\frac{1}{5}+\frac{6}{10}+\frac{6}{50}$, ἤτοι 43 δραχ. $\frac{10}{50}+\frac{30}{50}+\frac{6}{50}=$ 43 δραχ. $\frac{46}{50}$ δρ. $=$ 43 δραχμὰς καὶ 92 λεπτά (διότι τὸ $\frac{1}{50}$ τῆς δραχμῆς εἶναι 2 λεπτά).

6) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει $\frac{7}{8}$ τῆς δραχμῆς· πόσον ἀγοράζω μὲ $\frac{3}{5}$ τῆς δραχμῆς;

Λύσις. Μὲ $\frac{7}{8}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζω 1 ὀκᾶν

μὲ $\frac{1}{8}$ » » » $\frac{1}{7}$ τῆς ὀκᾶς

μὲ $\frac{8}{8}$, ἤτοι μὲ μίαν δραχμήν, ἀγοράζω $\frac{8}{7}$ » »

καὶ μὲ $\frac{1}{5}$ τῆς δραχμῆς » $\frac{8}{7\times5}$.

ἄρα μὲ $\frac{3}{5}$ » » » $\frac{8\times3}{7\times5}$.

7) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος πωλεῖται $\frac{4}{5}$ τῆς δραχμῆς· πόσας ὀκάδας ἀγοράζω μὲ 122 δρ. καὶ $\frac{8}{9}$ τῆς δραχμῆς;

Λύσις Μὲ $\frac{4}{5}$ τῆς δρ. ἀγοράζω 1 ὀκᾶν, μὲ $\frac{1}{5}$ τῆς δρ. ἀγοράζω $\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς καὶ μὲ $\frac{5}{5}$, ἤτοι μὲ μίαν δρ. ἀγοράζω $\frac{5}{4}$ τῆς ὀκᾶς. Λοιπὸν μὲ 122 δρ. θὰ ἀγοράσω $\frac{5}{4}\times 122$ τῆς ὀκᾶς, ἤγουν $\frac{610}{4}$ ἢ $152\frac{1}{2}$.

Ἐπειδὴ δὲ μὲ 1 δρ. ἀγοράζω $\frac{5}{4}$ τῆς ὀκᾶς, μὲ $\frac{1}{9}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζω $\frac{5}{36}$, καὶ μὲ $\frac{8}{9}$ τῆς δραχμῆς 8 φορὰς $\frac{5}{36}$ ἢ $\frac{40}{36}$ τῆς ὀκᾶς, ἤτοι $1\frac{1}{9}$· ὥστε μὲ 122 δρ. καὶ $\frac{8}{9}$ τῆς δρ. ἀγοράζω ὀκάδας $153\frac{1}{2}+\frac{1}{9}$ ἢ $153\frac{11}{18}$.

8) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ 52.

Λύσις. Τὸ 1 πέμπτον τοῦ 52 εἶναι $\frac{52}{5}$· ἄρα τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ εἶναι

$$\frac{52\times2}{5} \text{ ἢ } \frac{104}{5}, \text{ ἤτοι } 20\frac{4}{5}.$$

9) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ μεικτοῦ ἀριθμοῦ $6\frac{1}{3}$.

Λύσις. Τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ μεικτοῦ $6\frac{1}{3}$ εἶναι $\frac{6}{8}+\frac{1}{3\times8}$ καὶ τὰ $\frac{5}{8}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{6\times5}{8}+\frac{5}{8\times3}$ ἢ $\frac{30}{8}+\frac{5}{24}$ ἢ $\frac{95}{24}=3\frac{23}{24}$.

10) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{2}{5}$ εἶναι 40;

Λύσις. Ἀφοῦ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ εἶναι 40, τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{40}{2}$, ἤτοι 20, καὶ τὰ $\frac{5}{5}$, ἤτοι ὁ ἀριθ. ὅλος, θὰ εἶναι 20×5, ἤτοι 100.

11) Τὰ $\frac{3}{4}$ ἀριθμοῦ τινος εἶναι 120, πόσα εἶναι τὰ $\frac{5}{8}$ αὐτοῦ;

Λύσις. Ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 120, τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἰδίου θὰ εἶναι $\frac{120}{3}$ καὶ τὰ $\frac{4}{4}$ αὐτοῦ, ἤτοι ὅλος ὁ ἀριθμός, θὰ εἶναι $\frac{120\times4}{3}$, ἤτοι 160. Τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ζητοῦνται τὰ $\frac{5}{8}$· τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ 160 εἶναι $\frac{160}{8}$, ἤτοι 20· ἄρα τὰ $\frac{5}{8}$ αὐτοῦ εἶναι 20×5, ἤτοι 100.

12) Ἄνθρωπός τις ἐξώδευσε τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς περιουσίας του εἰς ἀγορὰν οἰκίας καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτῆς εἰς ἀγορὰν κτήματος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον μέρος τῆς περιουσίας του, τὸ ὁποῖον ἦτο 12000 δραχμαί, ἐδάνεισε· πόση ἦτο ἡ περιουσία του καὶ πόσα ἔδωκε διὰ τὴν οἰκίαν καὶ διὰ τὸ κτῆμα;

Λύσις. Θὰ εὕρω πρῶτον, τί μέρος τῆς περιουσίας ἦσαν αἱ 12000 δρ. Τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ παντὸς πράγματος κάμνουν τὰ $\frac{5}{6}$ αὐτοῦ (διότι $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$)· καὶ ἐπειδὴ ἡ περιουσία (ὡς καὶ κάθε ἄλλο πρᾶγμα) ἔχει $\frac{6}{6}$, συμπεραίνω, ὅτι τὸ ἐπίλοιπον μέρος ἦτο $\frac{1}{6}$ τῆς περιουσίας. Ἀφοῦ δὲ τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς περιουσίας ἦτο 12000 δρ. τὰ $\frac{6}{6}$, ἤτοι ὅλη ἡ περιουσία, ἦτο 12000×6, ἤτοι 72000 δραχμαί, καὶ διὰ μὲν τὴν οἰκίαν ἔδωκε τὸ $\frac{1}{2}$, ἤτοι 36000, διὰ δὲ τὸ κτῆμα τὸ $\frac{1}{3}$, ἤτοι 24000 δραχ.

13) Νὰ τραπῶσιν $\frac{7}{10}$ τῆς ὀκᾶς εἰς δράμια.

Λύσις. Ἡ ὀκᾶ ἔχει 400 δράμια, τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς ὀκᾶς ἔχει δράμια $\frac{400}{10}$ καὶ τὰ $\frac{7}{10}$ ἔχουσι δράμια $\frac{400\times 7}{10}$ ἢ $40\times 7=280$ δράμια.

14) Θέλει τις νὰ ἀλλάξῃ 17 πήχεις τσόχας, τῆς ὁποίας ὁ πῆχυς ἀξίζει 12 δραχ. μὲ μεταξωτὸν ὕφασμα, τοῦ ὁποίου ὁ πῆχυς ἀξίζει 8 δραχμάς· πόσους πήχεις θὰ λάβῃ ὡς ἀντάλλαγμα; $\left(\text{Ἀπ. } 25\frac{1}{2}\right)$

15) Ἐργάτης τις τελειώνει ἓν ἔργον εἰς 12 ἡμέρας· ἄλλος τις ἐργάτης τελειώνει τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 18 ἡμέρας· ἐὰν οἱ δύο οὗτοι ἐργάται ἐργάζωνται συγχρόνως, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον;

Λύσις. Θὰ εὕρω πρῶτον, πόσον μέρος τοῦ ἔργου κάμνουν οἱ δύο ἐργάται εἰς μίαν ἡμέραν.

Ὁ πρῶτος ἐκτελεῖ τὸ ἔργον εἰς 12 ἡμέρας· ἄρα εἰς μίαν ἡμέραν κάμνει τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ἔργου.

Ὁ δεύτερος τελειώνει τὸ ἔργον εἰς 18 ἡμέρας· ἄρα εἰς μίαν ἡμέραν κάμνει τὸ $\frac{1}{18}$ τοῦ ἔργου.

Ὅταν λοιπὸν ἐργάζωνται καὶ οἱ δύο συγχρόνως, θὰ κάμουν εἰς μίαν ἡμέραν τὸ $\frac{1}{12}+\frac{1}{18}$ τοῦ ἔργου, ἤτοι τὰ $\frac{5}{36}$ τοῦ ἔργου.

Ἀφοῦ ηὗρα τοῦτο, σκέπτομαι ὡς ἑξῆς·

Διὰ νὰ κάμουν τὰ $\frac{5}{36}$ τοῦ ἔργου, χρειάζονται 1 ἡμέραν,

διὰ νὰ κάμουν τὸ $\frac{1}{36}$ » » θὰ χρειάζονται $\frac{1}{5}$ τῆς ἡμέρας

καὶ διὰ νὰ κάμουν τὰ $\frac{36}{36}$, ἤτοι ὁλόκληρον τὸ ἔργον, χρειάζονται $\frac{36}{5}$ τῆς ἡμέρας· ἤγουν 7 ἡμέρας καὶ $\frac{1}{5}$.

16) Ἀτμόπλοιόν τι ἀνεχώρησεν ἐκ Πειραιῶς διὰ Σῦρον τὴν 7ην ὥραν π. μ. καὶ διανύει 8 $\frac{1}{2}$ μίλια τὴν ὥραν· μετὰ 2 ὥρας ἀνεχώρησεν ἄλλο ἀτμόπλοιον ἐκ Πειραιῶς καὶ ἔφθασε τὸ πρῶτον, ἀφοῦ ἐταξίδευσε 5 ὥρας· πόσην ταχύτητα εἶχε τὸ δεύτερον τοῦτο ἀτμόπλοιον;

Λύσις. Τὸ δεύτερον ἀτμόπλοιον διέτρεξεν εἰς 5 ὥρας τόσα μίλια, ὅσα διέτρεξε τὸ πρῶτον εἰς 7 ὥρας, ἤτοι 7 φορὰς 8 $\frac{1}{2}$ μίλια, δηλαδὴ 56 μίλια καὶ $\frac{7}{2}$ τοῦ μιλίου ἢ 59 $\frac{1}{2}$ μίλια· διὰ νὰ εὕρω λοιπόν, πόσα μίλια διήνυσεν εἰς 1 ὥραν (διότι τοῦτο λέγεται ταχύτης τοῦ ἀτμοπλοίου), πρέπει νὰ διαιρέσω τὸ 59 $\frac{1}{2}$ εἰς 5 ἴσα μέρη· οὕτως εὑρίσκω, ὅτι τὸ δεύτερον διήνυε καθ' ὥραν 11 μίλια καὶ $\frac{4}{5}+\frac{1}{10}$ τοῦ μιλίου, ἤτοι 11 $\frac{9}{10}$ μίλια.

× 17) Ἀντήλλαξέ τις 460 ὀκάδας σίτου μὲ 780 ὀκάδας κριθῆς· ἡ τιμὴ τοῦ σίτου εἶναι ἑκάστης ὀκᾶς 43 λεπτά· ποία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς κριθῆς;

(Ἀπ. 25 $\frac{14}{39}$) ×

× 18) Ἔμπορός τις ἐκέρδισεν ἐφέτος ἐκ τῆς πωλήσεως ὑφασμάτων κέρδος ἴσον πρὸς τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ κεφαλαίου του καὶ ἔχει τώρα τὸ ὅλον 11800 δραχμάς· πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιόν του; ×

Λύσις. Τὸ κεφάλαιον ἔχει 5 πέμπτα, εἰς αὐτὸ προσετέθησαν καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ του· ὥστε αἱ 11800 δρ. εἶναι τὰ $\frac{7}{5}$ τοῦ κεφαλαίου· ἀφοῦ δὲ

τὰ $\frac{7}{5}$ τοῦ κεφαλαίου εἶναι 11800 δραχμαί,

τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{11800}{7}$ »

καὶ τὰ $\frac{5}{5}$, ἤτοι ὅλον τὸ κεφάλαιον, εἶναι δραχμαὶ $\frac{11800\times5}{7}$, ἤτοι 8428 $\frac{4}{7}$.

Γενίκευσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

95. Ἀπὸ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων ὁδηγούμενοι οἱ ἄνθρωποι, ἔφθασαν εἰς τὴν ἰδέαν νὰ γενικεύσωσι τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, δηλαδὴ νὰ δώσωσιν εἰς τὸ ὄνομα **«πολλαπλασιασμὸς»** ἄλλην σημασίαν, γενικωτέραν ἐκείνης, τὴν ὁποίαν εἶχε πρίν.

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν τοῦτο, πρέπει νὰ ἐνθυμηθῶμεν τὸν ἑξῆς κανόνα (σελ. 32) τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων·

Ὅταν ἠξεύρωμεν τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος ἑνὸς πράγματος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν ὁσωνδήποτε μονάδων τοῦ αὐτοῦ πράγματος πρέπει νὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμὸν (δηλαδὴ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων).

Ἐὰν π. χ. ἡ ἀξία τῆς μιᾶς ὀκᾶς εἶναι 5 δραχμαί, ἡ ἀξία τῶν 7 ὀκάδων θὰ εἶναι 5×7 δραχμαί.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς, ὅταν ἡ ὀκᾶ ἀξίζῃ 5 δραχμάς;

Καὶ τώρα ἡ πρᾶξις, τὴν ὁποίαν θὰ κάμωμεν (διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα), πρέπει νὰ ὀνομάζεται **πολλαπλασιασμὸς** (διότι μόνον τὸ ποσὸν τῶν ὀκάδων ἤλλαξεν· ἀντὶ 7 ὀκάδων ἔχομεν τώρα $\frac{7}{8}$).

Διὰ νὰ εὕρωμεν ὅμως τὸ ζητούμενον, πρέπει, σύμφωνα μὲ τὰ ἀνωτέρω ῥηθέντα (ἰδὲ πρόβλ. 1, σελ. 83), νὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς·

Ἀφοῦ ὅλη ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 5 δραχμάς, τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζει τὸ ὄγδοον τῶν 5 δραχμῶν, ἤτοι $\frac{5}{8}$ τῆς δραχμῆς (κατὰ τὸ ἐδ. 92), καὶ ἀφοῦ τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζει $\frac{5}{8}$ τῆς δραχμῆς, τὰ $\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν ἑπτὰ φορὰς τὰ $\frac{5}{8}$, ἤτοι $\frac{5}{8} \times 7$, ἢ $\frac{35}{8}$ τῆς δραχμῆς.

Διὰ νὰ λύσωμεν λοιπὸν τὸ πρόβλημα, ἐκάμαμεν τώρα δύο πράξεις· πρῶτον ἐμερίσαμεν τὸν ἀριθμὸν 5 εἰς 8 ἴσα μέρη καὶ ἔπειτα ἐπανελάβομεν τὸ ἓν μέρος (τὸ $\frac{5}{8}$) ἑπτὰ φοράς, ἤτοι ἐπολλαπλασιάσαμεν αὐτὸ ἐπὶ 7.

Αἱ δύο αὗται πράξεις ὁμοῦ πρέπει νὰ ὀνομασθῶσι **πολλαπλασιασμός** (κατὰ τὴν νέαν, τὴν γενικὴν σημασίαν τῆς λέξεως), διὰ νὰ ἀληθεύῃ ὁ ἀνωτέρω εἰρημένος κανών, οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων (εἴτε ἀκέραιος, εἴτε κλασματικός).

96. Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα πρέπει νὰ δώσωμεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν·

Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα εἶναι ἐπανάληψις μέρους τινὸς τοῦ ἀριθμοῦ.

Ποῖον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου θὰ ἐπαναληφθῇ, δεικνύει ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος, τὸ ὁποῖον εἶναι πολλαπλασιαστής· ποσάκις δὲ θὰ ἐπαναληφθῇ, δεικνύει ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ.

Ὥστε γενικῶς ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον οἱονδήποτε πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς ἑξῆς·

97. ***Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς ἐπαναλαμβάνομεν ἕνα ἀριθμὸν ἢ μέρος τι αὐτοῦ καὶ σχηματίζομεν νέον ἀριθμόν.***

Ὁ πολλαπλασιαστέος ἐπαναλαμβάνεται ὅλος, ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος· οἷον, 7×4 σημαίνει $7+7+7+7$· ἐπαναλαμβάνεται δὲ μέρος τι αὐτοῦ, ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλάσμα· οἷον,

$$7\times\frac{4}{5} \text{ σημαίνει } \frac{7}{5}+\frac{7}{5}+\frac{7}{5}+\frac{7}{5}.$$

Σημείωσις. Ὁ πολλαπλασιασμὸς καταντᾷ μερισμός, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλασματικὴ μονάς.

Διότι π.χ. τὸ γινόμενον $8\times\frac{1}{4}$ εἶναι $\frac{8}{4}$ ἢ 2.

Παρατήρησις.

Κατὰ τὸν νέον τοῦτον πολλαπλασιασμόν, ὁ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιάζεται, αὐξάνει μέν, ἂν πολλαπλασιάζηται ἐπὶ ἀριθμὸν μεγαλύτερον τῆς μονάδος 1, ἐλαττοῦται δέ, ἂν πολλαπλασιάζηται ἐπὶ ἀριθμὸν μικρότερον τῆς μονάδος (μένει δὲ ὁ ἴδιος, ἐὰν πολλαπλασιάζηται ἐπὶ τὴν μονάδα 1).

Καὶ τῷ ὄντι, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 8 ἐπὶ $\frac{5}{3}$, πρέπει νὰ ἐπαναλάβω 5 φορὰς τὸ τρίτον τοῦ 8, ἀλλὰ τὸ τρίτον τοῦ 8, ὅταν ληφθῇ τρεῖς φοράς, δίδει τὸν 8 (ὡς καὶ τὸ τρίτον παντὸς πράγματος, ὅταν ληφθῇ τρεῖς φοράς, δίδει ὁλόκληρον τὸ πρᾶγμα)· ἄρα, ὅταν ληφθῇ πέντε φοράς, θὰ δώσῃ περισσότερον τοῦ 8. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσω δὲ τὸν 8 ἐπὶ $\frac{2}{3}$, πρέπει νὰ λάβω δύο φορὰς τὸ τρίτον τοῦ 8· ἀλλὰ τὸ τρίτον τοῦ 8 πρέπει νὰ ληφθῇ τρεῖς φοράς, διὰ νὰ δώσῃ τὸν 8· ἄρα, ὅταν ληφθῇ δύο μόνον φοράς, δίδει ὀλιγώτερον τοῦ 8.

Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα.

98. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλα-***

σιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφομεν παρονομαστὴν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος·

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον 12 ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$. Κατὰ τὸν ὁρισμόν (ἐδάφ. 97), πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ πέμπτον τοῦ 12 καὶ νὰ ἐπαναλάβωμεν αὐτὸ δίς. Ἀλλὰ τὸ πέμπτον τοῦ 12 εἶναι $\frac{12}{5}$ (ἐδάφ. 72). Ἐὰν δὲ τὸ $\frac{12}{5}$ ληφθῇ δίς, ἤτοι, ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2, γίνεται (ἐδάφ. 74) $\frac{12\times2}{5}$ ἢ $\frac{24}{5}$ ἢ $4\frac{4}{5}$.

Σημείωσις. Εἴτε τὸν 12 πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\frac{2}{5}$ εἴτε τὸ $\frac{2}{5}$ ἐπὶ 12, τὸ αὐτὸ γινόμενον εὑρίσκομεν.

Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα.

99. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστήν, καὶ τὸ μὲν γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν γράφομεν ἀριθμητήν, τὸ δὲ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν παρονομαστήν.***

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ ἐπὶ τὸ $\frac{7}{8}$· κατὰ τὸν ὁρισμόν (ἐδ. 97), πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{3}{5}$ καὶ νὰ ἐπαναλάβωμεν αὐτὸ ἑπτάκις.

Τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{3}{5}$ εἶναι $\frac{3}{5\times8}$ (κατὰ τὸ ἐδ. 75), τὸ δὲ ἑπταπλάσιον τοῦ $\frac{3}{5\times8}$ εἶναι $\frac{3\times7}{5\times8}$· ἄρα τὸ ζητούμενον γινόμενον τοῦ κλάσματος $\frac{3}{5}$ ἐπὶ $\frac{7}{8}$ εἶναι $\frac{3\times7}{5\times8}$ ἢ $\frac{21}{40}$.

Σημείωσις. Ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι εἶναι $\frac{3}{5}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{8}\times\frac{3}{5}$.

Παρατήρησις.

Εἰς τὸν κανόνα τοῦτον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων περιλαμβάνονται καὶ οἱ δύο ἀνωτέρω· ἤτοι οἱ κανόνες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον (ἐδ. 89) καὶ ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα (ἐδ. 98)· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ παριστάνωνται οἱ ἀκέραιοι ὡς κλάσματα μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα.

Καὶ τῷ ὄντι, $5\times\frac{3}{8}=\frac{5}{1}\times\frac{3}{8}=\frac{5\times3}{1\times8}=\frac{5\times3}{8}$.

$\frac{5}{6}\times7=\frac{5}{6}\times\frac{7}{1}=\frac{5\times7}{6\times1}=\frac{5\times7}{6}$.

Πολλαπλασιασμὸς μεικτοῦ ἐπὶ κλάσμα.

100. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μεικτόν, πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος του καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα του καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο γινόμενα.***

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν μεικτὸν $4\frac{5}{8}$ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{4}{3}$. Κατὰ τὸν ὁρισμόν (ἐδ. 97), πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ τρίτον τοῦ μεικτοῦ (ἤτοι νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν διὰ 3) καὶ ἔπειτα νὰ λάβωμεν αὐτὸ τετράκις.

Τὸ τρίτον τοῦ μεικτοῦ $4\frac{5}{8}$ εἶναι $\frac{4}{3}+\frac{5}{8\times3}$ (ἐδ. 94), τὸ δὲ τετραπλάσιον τοῦ $\frac{4}{3}+\frac{5}{8\times3}$ εἶναι $\frac{4\times4}{3}+\frac{5\times4}{8\times3}$. Τοῦτο δὲ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ἀκεραίου μέρους 4 ἐπὶ $\frac{4}{3}$ καὶ τὸ γινόμενον τοῦ κλάσματος $\frac{5}{8}$ ἐπὶ $\frac{4}{3}$.

Παραδείγματα.

1) $3\frac{5}{8}$ ἐπὶ $\frac{2}{3}$. Τὸ γινόμενον εἶναι $3\times\frac{2}{3}+\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}$, ἤτοι $2+\frac{10}{24}$ ἢ $2\frac{5}{12}$

2) $2\frac{1}{2}$ ἐπὶ $\frac{1}{2}$. Τὸ γινόμενον εἶναι $2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$, ἤτοι $1+\frac{1}{4}$.

3) $5\frac{1}{6}\times\frac{6}{5}=5\times\frac{6}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{6}{5}=6+\frac{1}{5}$.

Πολλαπλασιασμὸς μεικτοῦ ἐπὶ μεικτόν.

101. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο μεικτούς, πολλαπλασιάζομεν***

1) ***τοὺς δύο ἀκεραίους,***

2) ***τὰ δύο κλάσματα,***

3) ***τὸν ἀκέραιον τοῦ πρώτου μὲ τὸ κλάσμα τοῦ δευτέρου καὶ***

4) ***τὸν ἀκέραιον τοῦ δευτέρου μὲ τὸ κλάσμα τοῦ πρώτου καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ τέσσαρα ταῦτα γινόμενα.***

Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον τῶν δύο μεικτῶν $3\frac{1}{8}$ καὶ $5\frac{2}{3}$ εἶναι 3×5 καὶ $\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}$ καὶ $3\times\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{1}{8}\times5$,

ἤτοι $15+\frac{2}{24}+2+\frac{5}{8}$, ἤτοι $17+\frac{2}{24}+\frac{15}{24}$ ἢ $17\frac{17}{24}$.

Ὁ δὲ λόγος τῆς πράξεως ταύτης εἶναι ὁ ἑξῆς·

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἠγόρασέ τις 3 ὀκάδας καὶ $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 5 δραχμὰς καὶ $\frac{2}{3}$ τῆς δραχμῆς· διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον θὰ πληρώσῃ, φανερὸν εἶναι, ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς $5\frac{2}{3}$ ἐπὶ $3\frac{1}{8}$ (κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα τοῦ ἐδ. 95)· ἀλλὰ δύναμαι νὰ εὕρω τὸ ζητούμενον καὶ ὡς ἑξῆς·

Κατὰ πρῶτον εὑρίσκω πόσον ἀξίζουν αἱ 3 ὀκάδες χωριστὰ καὶ ἔπειτα πόσον ἀξίζει τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκᾶς.

Αἱ 3 ὀκάδες πρὸς 5 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν ἀξίζουν 5×3.

Αἱ 3 ὀκάδες πρὸς $\frac{2}{3}$ τῆς δραχμῆς ἡ ὀκᾶ ἀξίζουν $\frac{2}{3} \times 3$·

τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκᾶς πρὸς 5 δραχμὰς ἡ ὀκᾶ ἀξίζει $5 \times \frac{1}{8}$·

τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκᾶς πρὸς $\frac{2}{3}$ τῆς δραχμῆς ἡ ὀκᾶ ἀξίζει $\frac{2}{3} \times \frac{1}{8}$·

λοιπὸν αἱ 3 ὀκάδες καὶ τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκᾶς πρὸς 5 δραχμὰς καὶ $\frac{2}{3}$ τῆς δραχμῆς ἀξίζουν 5×3 καὶ $\frac{2}{3} \times 3$ καὶ $5 \times \frac{1}{8}$ καὶ $\frac{2}{3} \times \frac{1}{8}$· ταῦτα δὲ εἶναι τὰ ἀνωτέρω ῥηθέντα τέσσαρα γινόμενα.

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

102. Τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται, ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους (ἐδ. 37).

Παραδείγματα.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{7}$.

Τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων εἶναι $\frac{2 \times 3}{3 \times 5}$, τὸ γινόμενον τούτου καὶ τοῦ τρίτου εἶναι $\frac{2 \times 3 \times 7}{3 \times 5 \times 8}$ καὶ τέλος τὸ γινόμενον τούτου καὶ τοῦ τετάρτου εἶναι $\frac{2 \times 3 \times 7 \times 1}{3 \times 5 \times 8 \times 7}$· τοῦτο δὲ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων κλασμάτων.

Τὸ δὲ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{3}$, $5\frac{2}{3}$ εἶναι $\frac{1 \times 5 \times 2}{3 \times 3}$.

103. Ἐκ τῶν παραδειγμάτων τούτων γίνεται φανερόν, ὅτι ***τὸ γινόμενον πολλῶν κλασμάτων εἶναι κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν***

μὲν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

Τοῦτο δὲ ἀληθεύει καὶ ὅταν τινὲς τῶν παραγόντων εἶναι ἀκέραιοι, ἀρκεῖ νὰ γράφωνται ὡς κλάσμα μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1.

Σημείωσις. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων συμβαίνουσι πολλάκις ἁπλοποιήσεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ κάμνωμεν· παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ ἀνωτέρω εὑρεθὲν γινόμενον $\frac{2\times3\times7\times1}{3\times5\times8\times7}$ δύναμαι νὰ διαιρέσω καὶ τοὺς δύο ὅρους διὰ 3, ἔπειτα δι᾽ 7 καὶ εὑρίσκω $\frac{2\times1}{5\times8}$, ἐὰν δὲ καὶ τούτου διαιρέσω καὶ τοὺς δύο ὅρους διὰ 2, εὑρίσκω

$$\frac{1}{5\times4} \text{ ἢ } \frac{1}{20}.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἀριθμητὴν καὶ ἕνα παρονομαστὴν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· ἂν λοιπὸν εἷς ἀριθμὸς εἶναι καὶ ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστής, παραλείπεται.

Γενικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

104. Αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων (ἐδ. 34) ἀληθεύουσι καὶ διὰ τὰ κλάσματα.

Π.χ. εἶναι $\frac{3}{8}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{6}\times\frac{3}{8}$, $\frac{4}{5}\times\frac{3}{8}\times\frac{7}{9}=\frac{3}{8}\times\frac{7}{9}\times\frac{4}{5}$,

$$\left(\frac{5}{7}+\frac{3}{8}+1\right)\times\frac{2}{3}=\frac{5}{7}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}+1\times\frac{2}{3}.$$

Περὶ τῆς διαιρέσεως ἐν γένει.

105. Τὴν διαίρεσιν ὁρίζομεν γενικῶς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς ἑξῆς·

Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι᾽ ἧς, δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον (ἢ πολλαπλασιάζων αὐτὸν) δίδει τὸν πρῶτον.

Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς λέγεται ***πηλίκον.*** Ἐκ δὲ τῶν δοθέντων ὁ μὲν πρῶτος λέγεται ***διαιρετέος,*** ὁ δὲ δεύτερος ***διαιρέτης.***

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον τῆς διαιρέσεως, ***ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου.***

Παραδείγματος χάριν, 12:3 σημαίνει νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 3, ἤτοι τρεῖς φορὰς ἐπαναλαμβανόμενος, νὰ δίδῃ

12· φανερὸν εἶναι, ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος εὑρίσκεται, ἂν μερισθῇ ὁ 12 εἰς 3 ἴσα μέρη.

Ἡ δὲ διαίρεσις $2:\frac{1}{3}$ σημαίνει νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸ $\frac{1}{3}$ νὰ δίδῃ 2. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ὁ 6, διότι $6\times\frac{1}{3}=2$.

Κανὼν γενικὸς τῆς διαιρέσεως.

106. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.***

Ἂς ὑποθέσωμεν, π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν $\frac{3}{8}$ διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{2}{5}$.

Κατὰ τὸν νέον ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως,πρέπει νὰ εὕρω ἕνα ἀριθμόν, ὅστις,πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ $\frac{2}{5}$,νὰ δίδῃ γινόμενον τὸ $\frac{3}{8}$· ἀλλὰ διὰ νὰ πολλαπλασιάσω οἱονδήποτε ἀριθμὸν ἐπὶ $\frac{2}{5}$, πρέπει νὰ λάβω τὸ πέμπτον αὐτοῦ δίς, ἤτοι τὰ δύο πέμπτα αὐτοῦ.

Ὥστε τὰ δύο πέμπτα τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ εἶναι $\frac{3}{8}$·
ἄρα τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{3}{8\times 2}$ (ἐδ. 75)
καὶ τὰ 5 πέμπτα, ἤτοι ὅλος ὁ ἀριθμός, θὰ εἶναι $\frac{3\times 5}{8\times 2}$ ἢ $\frac{3}{8}\times\frac{5}{2}$.

Καὶ τῷ ὄντι, ἂν πολλαπλασιασθῇ τὸ γινόμενον τοῦτο $\frac{3}{8}\times\frac{5}{2}$ ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{2}{5}$, δίδει $\frac{3}{8}\times\frac{5}{2}\times\frac{2}{5}$ ἢ $\frac{3\times5\times2}{8\times2\times5}$, ἤτοι (ἐδ. 76) $\frac{3}{8}$· εὑρέθη λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς $\left(\text{ὁ } \frac{3}{8}\times\frac{5}{2}\right)$, ὅστις πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{2}{5}$ ἔδωκε τὸν διαιρετέον $\frac{3}{8}$· ἄρα ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τὸ πηλίκον.

Παραδείγματα.

$12:\frac{1}{8}=12\times\frac{8}{1}=12\times8=96$, $10:\frac{2}{5}=10\times\frac{5}{2}=\frac{50}{2}=25$.

$5:\frac{7}{6}=5\times\frac{6}{7}=\frac{30}{7}=4\frac{2}{7}$, $\frac{2}{9}:\frac{5}{9}=\frac{2}{9}\times\frac{9}{5}=\frac{2\times9}{9\times5}=\frac{2}{5}$.

$$\left(8+\frac{1}{3}\right):\frac{2}{7}=\left(8+\frac{1}{3}\right)\times\frac{7}{2}=8\times\frac{7}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{7}{2}=28+\frac{7}{6}=29\frac{1}{6}.$$

107. Διὰ μεικτοῦ ἀριθμοῦ δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἄλλως, ἢ τρέποντες αὐτὸν εἰς κλάσμα.

Π. χ. $2:\left(1+\frac{1}{5}\right)=2:\frac{6}{5}=2\times\frac{5}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$.

$$\frac{1}{8}:2\frac{3}{5}=\frac{1}{8}:\frac{13}{5}=\frac{1}{8}\times\frac{5}{13}=\frac{5}{104}.$$

Σημείωσις. Ὁ ἀνωτέρω ρηθεὶς κανὼν ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν δι᾿ ἀκεραίου, ἀρκεῖ ὁ ἀκέραιος διαιρέτης νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα.

Διότι π. χ. εἶναι $\frac{2}{5}:3=\frac{2}{5}:\frac{3}{1}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$.

Γενικαὶ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

108. Αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀληθεύουσι καὶ διὰ τοὺς κλασματικούς.

Π. χ. εἶναι $\left(5+\frac{1}{8}+12\right):3=\frac{5}{3}+\frac{1}{8\times3}+\frac{12}{3}$ (ἐδ. 51, 1)

$\frac{2}{5}:\frac{3}{8}=\left(\frac{2}{5}\times\frac{6}{7}\right):\left(\frac{3}{8}\times\frac{6}{7}\right)$ (ἐδ. 51,2)

$\frac{4}{5}\times\frac{3}{8}\times\frac{7}{9}:\frac{3}{8}=\frac{4}{5}\times\frac{7}{9}$ (ἐδ. 51, 3).

Προβλήματα.

1) Ἑνὸς ὑφάσματος ὁ πῆχυς ἀξίζει $\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς· πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως;

Λύσις. Κατὰ τὸν νέον ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἡ ἀξία τῶν $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως εἶναι $\frac{2}{5}\times\frac{3}{8}$ ἢ $\frac{3}{20}$ τῆς δραχμῆς· καὶ ἐπειδὴ τὸ εἰκοστὸν τῆς δραχμῆς εἶναι 5 λεπτά, τὰ $\frac{3}{20}$ εἶναι 15 λεπτά.

2) Ἐξ ἑνὸς πράγματος ἠγόρασέ τις $\frac{3}{16}$ τῆς ὀκᾶς μὲ $\frac{5}{12}$ τῆς δραχμῆς· πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ;

Λύσις. Ἡ ζητουμένη ἀξία τῆς ὀκᾶς εἶναι ὁ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν $\frac{3}{16}$, δίδει $\frac{5}{12}$ τῆς δραχ. ἄρα εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{5}{12}:\frac{3}{16}$, τουτέστι $\frac{5}{12}\times\frac{16}{3}=\frac{20}{9}$ τῆς δραχμῆς $=2\frac{2}{9}$.

Παρατήρησις.

Κατὰ τὸν νέον ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως, ἀληθεύουσι πάντοτε οἱ ἑξῆς κανόνες (ἰδὲ σελ. 32 καὶ 52)·

α') Ἔχοντες τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος οἱουδήποτε πράγματος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν ὁσωνδήποτε μονάδων τοῦ αὐτοῦ πράγματος, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων.

β') Ἔχοντες τὴν ἀξίαν μονάδων τινῶν οἱουδήποτε πράγματος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν ἀξίαν τῶν μονάδων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν.

3) Μὲ 8 δραχμὰς ἀγοράζει τις $\frac{5}{9}$ τοῦ πήχεως· πόσους πήχεις ἀγοράζει μὲ 45 δραχμάς;

Λύσις. Θὰ εὕρω πρῶτον, πόσον ἀγοράζει μὲ 1 δραχμήν.

Μὲ ὀκτὼ δραχμὰς ἀγοράζει $\frac{5}{9}$ τοῦ πήχεως·

μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζει $\frac{5}{9\times 8}$ ἢ $\frac{5}{72}$ τοῦ πήχεως

καὶ μὲ 45 δραχμὰς ἀγοράζει $\frac{5\times 45}{9\times 8}$ ἢ $\frac{25}{8}=3\frac{1}{8}$.

4) Νὰ εὕρωμεν τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ ἀριθμοῦ 40.

Λύσις. Τὸ ἔνατον τοῦ 40 εἶναι $\frac{40}{9}$ καὶ τὰ 4 ἔνατα αὐτοῦ εἶναι

$$\frac{40\times 4}{9} \text{ ἢ } \frac{160}{9}=17\frac{7}{9}.$$

5) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{3}{8}$ εἶναι 62;

Λύσις. Ἀφοῦ τὰ 3 ὄγδοα εἶναι 62, τὸ 1 ὄγδοον θὰ εἶναι $\frac{62}{3}$ καὶ τὰ 8 ὄγδοα, ἤτοι ὅλος ὁ ἀριθμός, θὰ εἶναι $\frac{62\times 8}{3}$.

Παρατήρησις.

Ἐκ τῶν δύο τελευταίων προβλημάτων συνάγομεν τοὺς ἑξῆς κανόνας·

α') Διὰ νὰ εὕρωμεν οἱουδήποτε ἀριθμοῦ δοθέν τι μέρος, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν μὲ τὸ κλάσμα, δι' οὗ ἐκφράζεται τὸ μέρος.

β') Διὰ νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν, ἔχοντες μέρος τι αὐτοῦ, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ μέρος τοῦτο διὰ τοῦ κλάσματος, δι' οὗ ἐκφράζεται τὸ μέρος.

6) νὰ τραπῶσι $\frac{4}{15}$ τῆς ὀκᾶς εἰς δράμια.

Ἐπειδὴ ἡ ὀκᾶ ἔχει 400 δράμια, τὸ $\frac{1}{15}$ αὐτῆς θὰ ἔχῃ δράμια $\frac{400}{15}$ καὶ τὰ $\frac{4}{15}$ αὐτῆς θὰ εἶναι δράμια $\frac{400\times4}{15}=\frac{80\times4}{3}=\frac{320}{3}=106\ \frac{2}{3}$.

Σημείωσις. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι διὰ νὰ τρέψωμεν ἀριθμόν τινα ὀκάδων οἱωνδήποτε εἰς δράμια, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ 400.

7) Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{4}{15}$ εἰς τετρακοσιοστά.

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ ἀκεραία μονὰς ἔχει 400 τετρακοσιοστά, τὸ $\frac{1}{15}$ αὐτῆς θὰ ἔχῃ $\frac{400}{15}$ τετρακοσιοστὰ καὶ τὰ $\frac{4}{15}$ αὐτῆς θὰ ἔχωσι $\frac{400\times4}{15}$ τετρακοσιοστὰ ἢ 106 τετρακοσιοστὰ καὶ $\frac{2}{3}$ τοῦ τετρακοσιοστοῦ.

Σημείωσις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο δὲν διαφέρει διόλου ἀπὸ τὸ προηγούμενον, διότι τὸ δράμιον εἶναι τὸ τετρακοσιοστὸν τῆς ὀκᾶς, καὶ ἀντὶ νὰ εἴπω, ὅτι πρέπει νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{4}{15}$ τῆς ὀκᾶς εἰς δράμια, ἠδυνάμην νὰ εἴπω, ὅτι πρέπει νὰ τραπῇ εἰς τετρακοσιοστὰ τῆς ὀκᾶς.

Ἐκ τοῦ προβλήματος τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

Διὰ νὰ τρέψω οἱονδήποτε ἀριθμὸν εἰς κλάσμα, ἔχον δοθέντα παρονομαστήν, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸν μὲ τὸν δοθέντα παρονομαστήν.

Διὰ νὰ τρέψω, π. χ. τὸν ἀριθμὸν $5\ \frac{1}{7}$ εἰς εἰκοστά, πολλαπλασιάζω αὐτὸν ἐπὶ 20 καὶ εὑρίσκω, ὅτι σύγκειται ἀπὸ 102 εἰκοστὰ καὶ $\frac{6}{7}$ τοῦ εἰκοστοῦ.

8) Ἐάν τις δι' ἑκάστην ὥραν ἐργασίας λαμβάνῃ $\frac{3}{5}$ τοῦ ταλλήρου, πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ λάβῃ 30 τάλληρα;

(Ἀπ. $30 : \frac{3}{5}$ ἢ $30\times\frac{5}{3}=50$ ὥρας)

9) Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ καφέ, ὅταν 108 ὀκ. καὶ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκ. ἐπωλήθησαν 596 δρ. καὶ $\frac{1}{5}$ τῆς δραχμῆς; (Ἀπ. $596\frac{1}{5} : 108\frac{2}{5}$ ἤτοι $5\frac{1}{2}$ δρ.)

10) Πατήρ τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ λάβῃ ὁ υἱός του τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς περιουσίας του, ἡ δὲ θυγάτηρ του τὰ $\frac{4}{9}$ αὐτῆς, καὶ ὅ,τι

περισσεύη νὰ λάβη ἡ σύζυγός του. Ἡ σύζυγος ἔλαβεν 7500 δραχμ. πόσα ἔλαβον τὰ τέκνα καὶ πόση ἦτο ἡ περιουσία ;

Ἀπ. ἡ περιουσία ἦτο $\frac{7500 \times 45}{7}$, ἤτοι $48214 \frac{2}{7}$· ὁ υἱὸς ἔλαβε $19285 \frac{5}{7}$, ἡ δὲ θυγάτηρ $21428 \frac{4}{7}$).

11) Ἔχων τις νὰ λάβη παρ᾽ ἄλλου ποσόν τι χρημάτων, ἐχάρισεν εἰς αὐτὸν τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ποσοῦ καὶ ἀκόμη 100 δραχμάς, ἔλαβε δὲ τὰ ἐπίλοιπα, τὰ ὁποῖα ἦσαν 1560 δραχμαί· πόσα εἶχε νὰ λάβη ;

(Ἀπ. 2075 δρ. ἐχάρισε δὲ 515 δρ.).

12) Ἀγοράσας τις 12000 ὀκάδας σίτου πρὸς 40 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, ἐπώλησε τὰς 8500 ὀκάδας πρὸς 50 λεπτὰ ἑκάστην· πόσον τοῦ κοστίζει ἡ ὀκᾶ ἐκ τῶν ἐπιλοίπων ; (Ἀπ. $15 \frac{5}{7}$ λεπτά).

13) Τὸ ἓν τρίτον κτήματός τινος ἐπωλήθη 7250 δραχ. τὸ δὲ ἐπίλοιπον μέρος 14400· ποῖον μέρος ἐπωλήθη ἀκριβότερον ;

(Ἀπ. τὸ πρῶτον· διότι ἀφοῦ τὰ $\frac{2}{3}$ ἐπωλήθησαν 14400, τὸ $\frac{1}{3}$ ἔπρεπε νὰ πωληθῇ 7200· ἐπωλήθη δὲ 7250).

14) Τίνος ἀριθμοῦ τὸ $\frac{1}{20}$, κατὰ 30 αὐξηθέν, γίνεται ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ ; (Ἀπ. 400).

15) Δεξαμενή τις πληροῦται ὑπὸ 2 κρουνῶν, ὅταν ρέωσι συγχρόνως, εἰς 20 ὥρας· ὁ εἷς ἐκ τῶν κρουνῶν μόνος γεμίζει τὴν δεξαμενὴν εἰς 30 ὥρας· εἰς πόσας ὥρας ὁ ἄλλος θὰ γεμίση αὐτήν ;

Λύσις. Εἰς μίαν ὥραν οἱ δύο, ὁμοῦ ρέοντες, γεμίζουν τὸ $\frac{1}{20}$ τῆς δεξαμενῆς, ὁ δὲ εἷς μόνος εἰς μίαν ὥραν γεμίζει τὸ $\frac{1}{30}$· ἄρα ὁ ἄλλος γεμίζει εἰς μίαν ὥραν $\frac{1}{20} - \frac{1}{30}$, ἤτοι τὸ $\frac{1}{60}$, ἑπομένως γεμίζει τὴν δεξαμενὴν εἰς 60 ὥρας.

16) Ἀτμόπλοιον, διανύον 8 μίλια τὴν ὥραν, καταδιώκει ἄλλο, ἀναχωρῆσαν 15 ὥρας πρὸ αὐτοῦ καὶ διανύον $6 \frac{1}{2}$ μίλια τὴν ὥραν· μετὰ πόσας ὥρας θὰ τὸ φθάση ; (Ἀπ. 65).

17) Ὁδοιπόρος τις ἔχει νὰ διατρέξη 700 στάδια εἰς 30 ἡμέρας, διέτρεξε δὲ τὰς 12 πρώτας ἡμέρας τὰ 350 στάδια· πόσα ἔχει νὰ διατρέχη τώρα καθ᾽ ἡμέραν ; (Ἀπ. $\frac{350}{18}$, ἤτοι $19 \frac{4}{9}$).

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ὁρισμοί.

109. Ἐκ τῶν κλασματικῶν μονάδων, ὅσαι ἔχουσι παρονομαστὴν 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ. ὅσαι δηλαδὴ προκύπτουσιν, ὅταν ἡ ἀκεραία μονὰς διαιρεθῇ εἰς 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ. ἴσα μέρη, λέγονται ***δεκαδικαὶ μονάδες.***

Αἱ κλασματικαὶ δεκαδικαὶ μονάδες εἶναι κατὰ σειρὰν αἱ ἑξῆς·

$$\frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{10000},\ldots\ldots$$

Δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται, ὅσοι γίνονται ἀπὸ μίαν δεκαδικὴν κλασματικὴν μονάδα διὰ τῆς ἐπαναλήψεως· οἷον, $\frac{175}{100}$ ἢ $1\ \frac{75}{100}$, $\frac{3}{10}$....... εἶναι δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ὑπάγονται εἰς τὰ κλάσματα· καὶ ὅσα περὶ τῶν κλασμάτων ἐμάθομεν, ἀληθεύουσι καὶ περὶ τῶν δεκαδικῶν. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων τούτων εἶναι ἢ 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ. αἱ πράξεις των εἶναι πολὺ εὐκολώτεραι παρὰ αἱ πράξεις τῶν ἄλλων κλασμάτων (τὰ ὁποῖα πρὸς διάκρισιν λέγονται ***κοινά***). Διὰ τοῦτο διαλαμβάνομεν περὶ αὐτῶν ἰδιαιτέρως.

Γραφὴ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

110. Ἂν φαντασθῶμεν εἰς μίαν σειρὰν τὰς ἀκεραίας μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων (ἤτοι τὰς ἁπλᾶς μονάδας, τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας κτλ.) καὶ τὰς δεκαδικὰς κλασματικὰς μονάδας ὡς ἑξῆς·

$$\ldots\ldots..1000,\ 100,\ 10,\ 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{10000}\ldots\ldots\ldots.,$$

ἑκάστη τῶν μονάδων τούτων εἶναι δεκαπλασία τῆς ἀκολούθου, ἤτοι 1 ἀκεραία μονὰς κάμνει 10 δέκατα$\left(1=\frac{10}{10}\right)$, ἓν δέκατον κάμνει 10 ἑκατοστὰ $\left(\frac{1}{10}=\frac{10}{100}\right)$, ἓν ἑκατοστὸν κάμνει 10 χιλιοστὰ $\left(\frac{1}{100}=\frac{10}{1000}\right)$ καὶ οὕτω καθεξῆς. Διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς, ὡς καὶ τοὺς ἀκεραίους, στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀρχήν, ***ὅτι πᾶν ψηφίον, γραφόμενον κατόπιν ἄλλου, σημαίνει μονάδας τῆς ἀμέσως ἑπομένης τάξεως*** (ἐδ. 11).

Κατὰ τὴν ἀρχὴν αὐτήν, κατόπιν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων γράφομεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων, κατόπιν τούτου τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοστῶν καὶ οὕτω καθεξῆς. Πρέπει ὅμως νὰ διακρίνωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων, καὶ πρὸς τοῦτο γράφομεν κατόπιν του ὑποδιαστολήν· ἡ ὑποδιαστολὴ χωρίζει τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ τὸ κλασματικὸν αὐτοῦ μέρος.

Παραδείγματα.

Ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 2 δεκάδες, 3 μονάδες (ἢ 23 μονάδας ἀκεραίας) καὶ 5 δέκατα, γράφεται, κατὰ τὰ ἀνωτέρω ρηθέντα, ὡς ἑξῆς· 23,5, ἀντὶ $23\frac{5}{10}$. Ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 4 ἀκεραίας μονάδας, 3 δέκατα καὶ 8 ἑκατοστά, γράφεται ὡς ἑξῆς· 4,38, ἀντὶ $4\frac{38}{100}$.

Ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 15 ἀκέραια καὶ 6 ἑκατοστὰ καὶ 4 χιλιοστά, γράφεται ὡς ἑξῆς· 15,064, ἀντὶ $15\frac{6}{100}+\frac{4}{1000}$ ἢ $15\frac{64}{1000}$.

Ἐγράψαμεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάτων, διότι ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχει δέκατα· κάμνομεν δηλαδή, ὅτι κάμνομεν καὶ εἰς τὴν γραφὴν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (οἷον, 105, 2007 κτλ.).

Ὅταν ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἀκέραιον μέρος, γράφομεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν ἀκεραίων μονάδων καὶ κατόπιν αὐτοῦ θέτομεν τὴν ὑποδιαστολήν, οἷον ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 7 δέκατα καὶ 2 ἑκατοστὰ καὶ 5 δεκάκις χιλιοστά γράφεται ὡς ἑξῆς· 0,7205, ἀντὶ $\frac{7}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{10000}$ ἢ $\frac{7205}{10000}$.

Δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ λέγονται ὅσα εἶναι κατόπιν τῆς ὑποδιαστολῆς.

Πῶς ἀπαγγέλλεται δεκαδικὸς ἀριθμὸς γεγραμμένος ὡς ἀκέραιος.

111. Κατὰ πολλοὺς τρόπους ἠμποροῦμεν νὰ ἀπαγγείλωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν γεγραμμένον διὰ ψηφίων.

1) Δυνάμεθα νὰ ἀπαγγείλωμεν χωριστὰ ἕκαστον ψηφίον μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων του· οἷον, 5,805 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς· 5 ἀκέραια, 8 δέκατα καὶ 5 χιλιοστά.

Σημείωσις. Ὁ τρόπος οὗτος δὲν εἶναι συνήθης διὰ πολυψηφίους ἀριθμούς, διότι δὲν εἶναι σύντομος.

2) Δυνάμεθα νὰ ἀπαγγείλωμεν τὰ ψηφία, ὡς νὰ ἐσχημάτιζον ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν (ἤγουν χωρὶς νὰ προσέξωμεν εἰς τὴν ὑποδιαστολήν), νὰ προσαρτήσωμεν ὅμως κατόπιν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου· οἷον 5,75 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς· 575 ἑκατοστά.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς·

τὰ 5 ἀκέραια=50 δέκατα=500 ἑκατοστὰ
7 δέκατα= 70 ἑκατοστὰ
ἔχομεν καὶ 5 ἑκατοστὰ

ὥστε 5,75 εἶναι 575 ἑκατοστὰ

Σημείωσις. Καὶ ὁ τρόπος οὗτος εἶναι χρήσιμος, μόνον ὅταν τὰ ψηφία εἶναι ὀλίγα, ὅταν ὅμως εἶναι πολλά, μεταχειριζόμεθα τὸν ἑπόμενον γενικὸν τρόπον·

3) Ἀναλύομεν τὸν ἀριθμόν, εἰς ὅσα θέλομεν τμήματα, καὶ ἀπαγγέλλομεν αὐτὰ κατὰ σειρὰν ἕκαστον χωριστά, ὡς νὰ ἦτο εἷς ἀκέραιος ἀριθμός· προσαρτῶμεν ὅμως κατόπιν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ τμήματος.

Οἷον, 375,125987 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς· 375 ἀκέραια, 125 χιλιοστὰ καὶ 987 ἑκατομμυριοστὰ ἢ καὶ ὡς ἑξῆς· 375 ἀκέραια, 12 ἑκατοστά, 59 δεκάκις χιλιοστὰ καὶ 87 ἑκατομμυριοστὰ ἢ καὶ ὡς ἑξῆς· 375 ἀκέραια, 1259 μυριοστὰ καὶ 87 ἑκατομμυριοστά.

Σημείωσις. Συνήθως χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς δύο τμήματα, τὸ ἀκέραιον καὶ τὸ δεκαδικόν, καὶ ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον χωριστά· οἷον, 17,587 ἀπαγγέλλεται 17 ἀκέραια καὶ 587 χιλιοστά.

Παρατήρησις.

Διὰ νὰ γράφωμεν εὐκόλως ἀπαγγελλόμενον δεκαδικὸν ἀριθμόν, ἢ καὶ τὸ ἐναντίον, διὰ νὰ ἀπαγγέλλωμεν γεγραμμένον δεκαδικὸν ἀριθμόν, καλὸν εἶναι νὰ ἐνθυμώμεθα τὰ ἑξῆς·

Τὰ δέκατα γράφονται μὲ ἓν μόνον δεκαδικὸν ψηφίον· ὥστε 125 δέκατα γράφεται ὡς ἑξῆς· 12,5· τὰ ἑκατοστὰ γράφονται μὲ δύο δεκαδικὰ ψηφία· ὥστε 52 ἑκατοστὰ γράφονται 0,52· καὶ 6 ἑκατοστὰ γράφονται 0,06.

Τὰ χιλιοστὰ γράφονται μὲ τρία δεκαδικὰ ψηφία, τὰ δεκάκις χιλιοστὰ (ἢ μυριοστὰ) μὲ τέσσαρα, τὰ ἑκατοντάκις χιλιοστὰ μὲ πέντε, τὰ ἑκατομμυριοστὰ μὲ ἓξ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Πῶς γράφονται οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ὡς κοινὰ κλάσματα.

112. Ἐπειδὴ οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι κλάσματα, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν αὐτοὺς καὶ μὲ παρονομαστήν, ὡς καὶ τὰ ἄλλα κλάσματα· πρὸς τοῦτο ἔχομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

Διὰ νὰ γράψωμεν δοθὲν δεκαδικὸν κλάσμα ὡς κοινόν, παραλείπομεν τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ γράφομεν τὸν τότε προκύπτοντα ἀκέραιον ὡς ἀριθμητήν, ὑποκάτω δ' αὐτοῦ γράφομεν παρονομαστὴν τὴν μονάδα, ἀκολουθουμένην ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, ὁ ἀριθμὸς 1,5· οὗτος ἔχει 15 δέκατα, ἄρα γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς· $\frac{15}{10}$.

Ἔστω προσέτι ὁ ἀριθμὸς 13,705· οὗτος ἔχει 13705 χιλιοστὰ (ἰδὲ ἐδ. 111)· ἄρα γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς· $\frac{13705}{1000}$.

Καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν δοθῇ κοινὸν κλάσμα, ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα, ἀκολουθουμένην ἀπὸ μηδενικὰ (ἤτοι 10 ἢ 100 ἢ 1000 . . .), διὰ νὰ γράψωμεν αὐτὸ ὡς δεκαδικόν, γράφομεν τὸν ἀριθμητὴν χωριστὰ καὶ ἔπειτα χωρίζομεν πρὸς τὸ τέλος αὐτοῦ δι' ὑποδιαστολῆς τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ δοθεὶς παρονομαστής.

Παραδείγματος χάριν, τὸ κλάσμα $\frac{17}{10}$ γράφεται 1,7· καὶ τὸ κλάσμα $\frac{1801}{100}$ γράφεται 18,01

Ἐὰν δὲν ἔχῃ ὁ ἀριθμητὴς ἀρκετὰ ψηφία, γράφομεν μηδενικὰ εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ (ὅπερ δὲν βλάπτει αὐτόν)· οἷον, τὸ κλάσμα $\frac{13}{1000}$ γράφεται $\frac{0013}{1000}$, ἤτοι 0,013.

Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

113. ***Ἡ ἀξία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν γραφῶσιν ὁσαδήποτε μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ.***

Διότι ἡ ἀξία ἑκάστου ψηφίου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν θέσιν του ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολὴν (ἐδάφ. 110)· ἡ θέσις δὲ αὕτη δὲν ἀλλάσσει διὰ τῆς γραφῆς τῶν μηδενικῶν εἰς τὸ τέλος, ὥστε ἕκαστον ψηφίον διατηρεῖ τὴν ἀξίαν του.

Π. χ. 3,8 εἶναι ἴσον μὲ 3,80 ἢ μὲ 3,800, διότι ὁ καθεὶς ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων ἔχει τρεῖς ἀκεραίας μονάδας καὶ 8 δέκατα.

Ὁμοίως, ἀντὶ τοῦ ἀκεραίου 5, δύναμαι νὰ γράψω 5,0 ἢ 5,00 κτλ.

Σημείωσις. Ἡ ἰδιότης αὕτη τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν συνάγεται καὶ ἐκ τῆς γενικῆς ἰδιότητος τῶν κλασμάτων (ἐδ. 73), φαίνεται δὲ τοῦτο ἀμέσως, ἐὰν γραφῶσιν οἱ δεκαδικοὶ ὡς κλάσματα.

Τῷ ὄντι, $3\frac{8}{10}=3\frac{80}{100}=3\frac{800}{1000}$· ὁμοίως $5=\frac{50}{10}=\frac{500}{100}$ κλπ.

114. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ. ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἐμπρὸς (διὰ τὸ 10), δύο (διὰ τὸ 100), τρεῖς (διὰ τὸ 1000) κτλ.***

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δὲ δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ 10, 100 κτλ. ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν θέσιν πρὸς τὰ ὀπίσω (διὰ τὸ 10), δύο (διὰ τὸ 100 κτλ.).

Παραδείγματος χάριν, 5,871 × 10 γίνεται 58,71
35,905 × 100 » 3590,5
16,59 : 10 εἶναι 1,659.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς· Ὅταν εἰς τὸν ἀριθμὸν 5,871 μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἐμπρός, προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 58,71. Καὶ αἱ μὲν 5 μονάδες γίνονται 5 δεκάδες (ἤτοι δεκαπλασιάζονται), τὰ 8 δέκατα γίνονται 8 ἀκέραια (ἤτοι δεκαπλασιάζονται, διότι 1 ἀκέραιον = 10 δέκατα), τὰ δὲ 7 ἑκατοστὰ γίνονται 7 δέκατα καὶ τὸ 1 χιλιοστὸν γίνεται 1 ἑκατοστόν· ὥστε πάντα τὰ μέρη τοῦ 5,871 ἐδεκαπλασιάσθησαν· ἄρα καὶ ὁ ἀριθμὸς ὅλος ἐδεκαπλασιάσθη.

Ὁμοίως, ὅταν εἰς τὸν ἀριθμὸν 35,905 μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν δύο θέσεις πρὸς τὰ ἐμπρός, ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ ἑκατονταπλασιάζεται· ἄρα καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς ἑκατονταπλασιάζεται.

Διὰ τὴν διαίρεσιν δεικνύεται ἡ ἰδιότης ὁμοίως.

Σημείωσις. Δυνατὸν νὰ συμβῇ ὁ ἀριθμὸς νὰ μὴ ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία, ὥστε νὰ ἠμπορῇ νὰ μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολή. Ἡ δυσκολία αὕτη αἴρεται, ἐὰν γράψωμεν μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ ἢ εἰς τὴν ἀρχήν του (ὅπου χρειάζονται), ὅπερ δὲν βλάπτει τὸν ἀριθμόν.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 1,2 × 1000, πρέπει νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ ἐμπρός, ἀλλὰ δὲν ἠμποροῦμεν, διότι εἶναι ἐμπρὸς ἓν μόνον ψηφίον (τὸ 2)· ἐὰν ὅμως γράψωμεν τὸν ἀριθμὸν 1,2 ὡς ἑξῆς· 1,200, μετατίθεται ἡ ὑποδιαστολὴ καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 1200.

Ὁμοίως, ἂν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν 0,15 : 1000 πρέπει νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ ὀπίσω· διὰ νὰ γίνῃ τοῦτο, γράφομεν τὸν ἀριθμὸν 0,15 ὡς ἑξῆς· 000,15 (ὅπερ οὐδόλως βλάπτει αὐτόν)· τότε μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 0,00015.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

115. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμούς, κάμνομεν πρῶτον νὰ ἔχωσιν ἴσον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων· γίνεται δὲ τοῦτο, ἂν γράψωμεν εἰς τὸ τέλος τινῶν ἐξ αὐτῶν ἓν ἢ περισσότερα μηδενικά. Ἔπειτα προσθέτομεν αὐτούς, ὡς καὶ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς (δηλαδὴ προσθέτομεν τὰ ψηφία ἑκάστης τάξεως χωριστά)· εἰς δὲ τὸ ἄθροισμα θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἀμέσως μετὰ τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν ἁπλῶν μονάδων τῶν ἀριθμῶν.***

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως φαίνεται ἐκ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων·

1) Νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 51,809 12,65 1,0591.

$$\begin{array}{lr} & 51{,}8090 \\ & 12{,}6500 \\ & 1{,}0591 \\ \hline \text{ἄθροισμα} & 65{,}5181 \end{array}$$

2) Νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 0,001 2,1 155 75.

$$\begin{array}{lr} & 0{,}001 \\ & 2{,}100 \\ & 155{,}750 \\ \hline \text{ἄθροισμα} & 157{,}851 \end{array}$$

Ὁ δὲ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον κάμνομεν οὕτως, ἐδόθη εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ἰδὲ ἐδ. 15).

Σημείωσις. Ἡ γραφὴ τῶν μηδενικῶν εἰς τὸ τέλος τῶν ἀριθμῶν εἶναι περιττή· διότι ταῦτα εἰς τὴν πρόσθεσιν δὲν δίδουσι τίποτε. Διὰ τοῦτο συνήθως γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εἶναι εἰς μίαν κατακόρυφον στήλην· ἑπομένως καὶ αἱ ὑποδιαστολαὶ νὰ εὑρίσκωνται εἰς μίαν κατακόρυφον στήλην καὶ ἔπειτα προσθέτομεν, ὡς καὶ πρίν.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως γίνεται τότε ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r@{,}l} 1 & 597 \\ 21 & 7 \\ 54 & \\ 3 & 0001 \\ \hline 80 & 2971 \end{array}$$

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

116. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλον, κάμνομεν πρῶτον αὐτοὺς νὰ ἔχωσιν ἰσάριθμα δεκαδικὰ ψηφία, ἔπειτα ἀφαιροῦμεν, ὡς νὰ ἦσαν ἀκέραιοι· εἰς δὲ τὸ ὑπόλοιπον θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἀμέσως μετὰ τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον δίδει ἡ ἀφαίρεσις τῶν ἁπλῶν μονάδων.***

Ἂς ὑποθέσωμεν, π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 15,0983 ἀπὸ τοῦ 27,001.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{lr} & 27,0010 \\ & 15,0983 \\ \hline \text{ὑπόλοιπον} & 11,9027 \end{array}$$

Ὁ δὲ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον κάμνομεν οὕτω τὴν ἀφαίρεσιν, ἐδόθ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ἰδὲ ἐδ. 19).

Σημείωσις. Δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν καὶ χωρὶς νὰ γράφωμεν μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος· ἡ πρᾶξις τότε διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 1,059 \\ 0,37 \\ \hline 0,689 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21,58 \\ 12 \\ \hline 9,58 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 52,7 \\ 25,132 \\ \hline 27,568 \end{array}$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

117. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο δεκαδικοὺς ἀριθμούς, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον, ὡς νὰ μὴ ὑπῆρχον αἱ ὑποδιαστολαί, ἔπειτα χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς εἰς τὸ γινόμενον τόσα ψηφία δεκαδικά, ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο παράγοντες ὁμοῦ.***

Ἂς ὑποθέσωμεν, π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 7,5 καὶ 12,28· ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{lr} & 1228 \\ & 75 \\ \hline & 6140 \\ & 8596 \\ \hline \text{γινόμενον} & 92,100 \end{array}$$

Ὁ δὲ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον κάμνομεν τὸν πολλαπλαπλασιασμὸν τοιουτοτρόπως, εἶναι ὁ ἑξῆς·

Ὁ ἀριθμὸς 12,28 εἶναι ἴσος μὲ τὸ κλάσμα $\frac{1228}{100}$, ὁ δὲ ἀριθμὸς 7,5 εἶναι ἴσος μὲ $\frac{75}{10}$· διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δὲ τὰ δύο ταῦτα κλάσματα (ἰδὲ ἐδάφιον 99), πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς 1228×75 (δηλαδὴ τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς χωρὶς ὑποδιαστολὴν) καὶ τὸ γινόμενον νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν, ἤτοι διὰ τοῦ 1000· τοῦτο δὲ γίνεται, ἐὰν χωρίσωμεν εἰς τὸ τέλος τοῦ γινομένου τρία δεκαδικὰ ψηφία δι' ὑποδιαστολῆς, ἤτοι ὅσα δεκαδικὰ ἔχουσιν ὁμοῦ οἱ δύο παράγοντες.

Παραδείγματα.

$$\begin{array}{r} 32,79 \\ 5 \\ \hline 163,95 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,15 \\ 0,00008 \\ \hline 0,0000120 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 158 \\ 1,8 \\ \hline 1264 \\ 158 \\ \hline 284,4 \end{array}$$

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ γινόμενον δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία, ὅσα δηλαδὴ μέλλομεν νὰ χωρίσωμεν, γράφομεν εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ ὅσα μηδενικὰ θέλομεν· τοῦτο ἐκάμαμεν εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα.

Παρατήρησις. Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἐφαρμόζεται προφανῶς καὶ ὅταν ὁ εἷς παράγων εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

1) Διαίρεσις δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου.

118. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 21,876 διὰ τοῦ ἀκεραίου 12. Φανερὸν εἶναι, ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ διαιρέσωμεν πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος 21 καὶ ἔπειτα τὸ κλασματικόν. Διαιροῦντες τὸ ἀκέραιον μέρος 21 διὰ τοῦ 12, εὑρίσκομεν πηλίκον 1 καὶ κατάλοιπον 9 ἀκέραια, ὅπερ πλέον δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 12. Τὰ 9 ταῦτα ἀκέραια, τὰ ὁποῖα ἔμειναν, τρέπομεν εἰς δέκατα (1 ἀκέρ.=10 δέκατα) καὶ εὑρίσκομεν 90 δέκατα, τὰ ὁποῖα, ὁμοῦ μὲ τὰ 8 δέκατα τοῦ διαιρετέου, ἀποτελοῦσιν 98 δέκατα (τὸν ἀριθμὸν τοῦτον τῶν 98 δεκάτων σχηματίζομεν ἀμέσως καταβιβάζοντες τὸ ψηφίον 8 δεξιὰ τοῦ καταλοίπου 9)· διαιροῦντες καὶ τὰ 98 δέκατα διὰ τοῦ 12, εὑρίσκομεν πηλίκον 8 δέκατα καὶ κατάλοιπον 2 δέκατα· τὰ δύο αὐτὰ δέκατα (=20 ἑκατοστά), ὁμοῦ μὲ τὰ 7 ἑκατοστὰ τοῦ διαιρετέου, ἀποτελοῦσιν 27 ἑκατοστά, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ διαιρέσωμεν διὰ 12· διαιροῦντες καὶ αὐτὰ εὑρίσκομεν πηλίκον 2 ἑκατοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 3 ἑκατοστά· τὰ 3 ταῦτα

ἑκατοστά, ὁμοῦ μὲ τὰ 6 χιλιοστὰ τοῦ διαιρετέου, ἀποτελοῦσι 36 χιλιοστά, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ διαιρεθῶσι διὰ 12· διαιροῦντες καὶ αὐτά, εὑρίσκομεν πηλίκον 3 χιλιοστὰ καὶ κατόλοιπον 0· ὥστε ἡ διαίρεσις ἐτελείωσε καὶ τὸ πηλίκον εἶναι 1,823.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

```
21,876 | 12
  98   | 1,823
   27
    36
     0
```

119. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ῥηθέντων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι᾽ ἀκεραίου, ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν, ὡς νὰ μὴ ὑπῆρχεν ἡ ὑποδιαστολή, ἤτοι ὡς νὰ ἦτο ὁ διαιρετέος ἀκέραιος, καὶ ὅσα μὲν ψηφία τοῦ πηλίκου προέρχονται ἀπὸ τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ διαιρετέου, εἶναι ἀκέραια, τὰ δὲ λοιπὰ εἶναι δεκαδικά.

Παραδείγματα.

```
0,15 | 3             0,000158 | 7
  15 | 0,05               18  | 0,000022
   0                       4
```

Τὸ πηλίκον τῆς δευτέρας διαιρέσεως εἶναι 0,000022 καὶ $\frac{4}{7}$ ἑκατομμυριοστοῦ· καὶ ἂν λάβωμεν ὡς πηλίκον μόνον τὸ 0,000022, θὰ κάμωμεν λάθος μικρότερον τοῦ ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ· τουτέστι θὰ ἔχωμεν τὸ πηλίκον μὲ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ.

Σημείωσις. Ἐὰν ἡ διαίρεσις ἀφήσῃ ὑπόλοιπον, δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν πρᾶξιν τρέποντες τὸ ὑπόλοιπον εἰς δεκαδικὰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως (πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν ἓν μηδενικὸν δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου) καὶ διαιροῦντες τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ διαιρέτου. Οὕτω προχωροῦντες, ἐὰν δὲν εὕρωμεν κανὲν ὑπόλοιπον 0, δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν ὅσον θέλομεν καὶ ἑπομένως νὰ προσδιορίσωμεν τὸ πηλίκον μὲ ὅσην προσέγγισιν θέλομεν.

Παραδείγματα.

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ 125,75 δι᾽ 7 μὲ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ.

```
125,75 | 7
55       17,964...
 67
  45
  30
   2
```

τὸ ἀκριβὲς πηλίκον εἶναι 17,964 καὶ $\frac{2}{7}$ ἑνὸς χιλιοστοῦ· ὥστε παραλείποντες τὸ κλάσμα τοῦτο τοῦ χιλιοστοῦ, ἔχομεν τὸ πηλίκον μὲ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ.

```
1,6038 | 6
16       0,26...
 40
  4
```

Σημείωσις. Ὅταν τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον παραλείπομεν, ὑπερβαίνῃ τὸ ἥμισυ (ὅταν δηλαδὴ τὸ κατάλοιπον ὑπερβαίνῃ τὸ ἥμισυ τοῦ διαιρέτου), ἐὰν κάμωμεν αὐτὸ 1, προσεγγίζομεν περισσότερον εἰς τὸ ἀληθὲς πηλίκον. Οὕτω, π. χ. εἰς τὴν τελευταίαν διαίρεσιν τὸ πηλίκον ὡς ἔγγιστα εἶναι 0,27, προσεγγίζει δὲ τοῦτο εἰς τὸ ἀληθὲς πηλίκον περισσότερον ἢ τὸ 0,26· καὶ τὸ μὲν 0,26 εἶναι μικρότερον τοῦ ἀληθοῦς, τὸ δὲ 0,27 μεγαλύτερον.

Παρατήρησις.

120. Καὶ ἀκέραιος δι' ἀκεραίου διαιρεῖται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, διότι ὁ ἀκέραιος διαιρετέος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δεκαδικός, τοῦ ὁποίου τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶναι μηδενικά.

Ἂς διαιρεθῇ, π. χ. ὁ ἀκέραιος 17 διὰ τοῦ 20.

```
 17 | 20
170   0,85
100
  0
```

Ἐπειδὴ τὸ αὐτὸ πηλίκον εἶναι ἴσον μὲ τὸ κλάσμα $\frac{17}{20}$, ἕπεται, ὅτι τὸ κλάσμα τοῦτο $\frac{17}{20}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸν δεκαδικὸν 0,85. Τρέπομεν δηλαδὴ τὸ κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρανομαστοῦ του· ἡ δὲ τροπὴ θὰ γίνῃ ἢ ἀκριβὴς (ἄν ποτε εὑρεθῇ ὑπόλοιπον 0) ἢ κατὰ προσέγγισιν (ἄν ποτε δὲν εὑρίσκεται ὑπόλοιπον 0).

Π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν.

$$\begin{array}{l|l} 2 & 3 \\ \cline{2-2} 20 & 0,666\ldots \\ \ \ 20 & \\ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ 2 & \end{array}$$

εὑρίσκεται ὅμως δεκαδικὸν κλάσμα προσεγγίζον εἰς τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$, ὅσον θέλομεν, διότι τὸ 0,666 διαφέρει τοῦ $\frac{2}{3}$ κατὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ χιλιοστοῦ, ἤτοι ὀλιγώτερον τοῦ ἑνὸς χιλιοστοῦ. Ὁμοίως τὸ δεκαδικὸν 0,666666 διαφέρει τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον τοῦ ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ. Ἂν π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ εἶναι τῆς δραχμῆς, τρεπόμενον εἰς δεκαδικόν, γίνεται 0,66, ἤτοι 66 λεπτὰ (διότι τὸ ἑκατοστὸν τῆς δραχμῆς λέγεται λεπτὸν) καὶ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἑκατοστοῦ, ἤτοι τοῦ λεπτοῦ· ἡ δὲ προσέγγισις αὕτη μέχρι τῶν ἑκατοστῶν τῆς δραχμῆς ἀρκεῖ διὰ τὰς συνήθεις περιστάσεις.

Διαίρεσις δεκαδικοῦ διὰ δεκαδικοῦ.

121. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ δεκαδικοῦ μεταθέτομεν πρῶτον τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ εἰς τοὺς δύο, ἴσας θέσεις πρὸς τὰ ἐμπρός, ὥστε νὰ γίνῃ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος· ἔπειτα διαιροῦμεν κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα.***

Ἐὰν ὁ διαιρετέος δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ δεκαδικὰ ψηφία, διὰ νὰ μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολή, γράφομεν μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ.

Παραδείγματα.

1) Νὰ διαιρεθῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 15,897 διὰ τοῦ 3,1.

Μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ εἰς τοὺς δύο ἀπὸ μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἐμπρός, τουτέστι πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ἐπὶ 10· τὸ πηλίκον αὐτῶν δὲν βλάπτεται (ἐδ. 51)· τοιουτοτρόπως ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν

$$\begin{array}{r|l} 158,97 & 31 \\ \cline{2-2} 39 & 5,12 \\ 87 & \\ 25 & \end{array}$$

2) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 0,37 διὰ 1,897.

Μεταθέτομεν τὰς ὑποδιαστολὰς τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ ἐμπρός, ἤτοι πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ἐπὶ 1000· τὸ πηλίκον αὐτῶν δὲν βλάπτεται καὶ ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν ἀκέραιον δι᾽ ἀκεραίου·

370	1897
3700	0,19 . . .
1897	
18030	
17073	
957	

3) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 1,51 διὰ τοῦ 2,61.

Μεταθέτομεν τὰς ὑποδιαστολὰς δύο θέσεις πρὸς τὰ ἐμπρός, τουτέστ πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ἐπὶ 100· τὸ πηλίκον αὐτῶν δὲν βλάπτεται καὶ ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν

151	261
1510	0,57 . . .
1305	
2050	
1827	
223	

Τὸ πηλίκον εἶναι 0,57 ἢ μᾶλλον 0,58 μὲ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$.

Προβλήματα.

1) Χρεωστεῖ τις εἴς τινα 85 δραχμὰς καὶ 30 λεπτά, εἰς ἄλλον 67 δραχμὰς καὶ 45 λεπτὰ καὶ εἰς τρίτον 128 δραχμὰς καὶ 65 λεπτά· πόσα χρεωστεῖ ;

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ λεπτὸν εἶναι τὸ ἑκατοστὸν τῆς δραχμῆς, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὰ ἀνωτέρω ποσὰ διὰ δεκαδικῶν ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς·

85,30 67,45 128,65·

Προσθέτοντες δὲ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ὅλον χρέος εἶναι 281,40.

2) Ἐάν τις χρεωστῇ δραχ. 1812,25 καὶ πληρώσῃ 697,90, πόσα χρεωστεῖ ἀκόμη ; (Ἀπ. 1114,35)

3) Ἐάν τις οἰκονομῇ καθ᾽ ἡμέραν δραχ. 5,25, πόσας θὰ οἰκονομήσῃ εἰς ἓν ἔτος ; (Ἀπ. 1916,25)

4) Ἐργάτης τις λαμβάνει δι᾽ ἑκάστην ὥραν ἐργασίας δραχ. 1,75· πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ, διὰ νὰ λάβῃ 127 δραχ. καὶ 75 λεπτά; (Ἀπ. 73 ὥρας)

5) Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{7}{9}$ τῆς δραχμῆς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν. (Ἀπ. 0,777..., ἤτοι 77 λεπτὰ καὶ $\frac{7}{9}$ τοῦ λεπτοῦ· σχεδὸν 0,78, ἤτοι 78 λεπτά).

6) Νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ $\frac{3}{4}$ καὶ 0,275.

7) Νὰ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ $2\frac{1}{2}$ καὶ 4,8.

8) Ἐὰν ἡ ἀξία ἑνὸς πράγματος εἶναι εἰς χρυσὸν 2,15 δρ. πόση εἶναι ἡ ἀξία αὐτοῦ εἰς χαρτονομίσματα, ὅταν τὸ χρυσοῦν φράγκον εἶναι ἴσον μὲ 1,36 χάρτινα;

Λύσις. Ἐπειδὴ 1 φράγκον ἀξίζει 1,36 χαρτίνας δραχμάς,
2,15 » » $1,36 \times 2,15$ ἢ 2,92....

9) Βιβλίον τι ἔχει 320 σελίδας καὶ τὸ πάχος αὐτοῦ, ὅταν σφιγχθῇ καλῶς, εἶναι 0,015 τοῦ μέτρου· πόσον εἶναι τὸ πάχος ἑκάστου φύλλου; (τὰ φύλλα ὑποθέτω, ὅτι ἔχουν ὅλα ἴσον πάχος).

(Ἀπ. 0,015 : 160, ἤτοι 0,000094. . . .)

10) Ἠγόρασέ τις παρὰ κρεοπώλου ὁλόκληρον ἀρνίον μὲ δραχ. 18, 80· τὸ ἀρνίον ἐζύγιζεν $8\frac{1}{2}$ ὀκάδας· πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν;

(Ἀπ. $18,80 : 8\frac{1}{2}$, ἤτοι 2,21 . . . .)

11) Ποία εἶναι ἡ πραγματικὴ ἀξία ἑνὸς χαρτονομίσματος τῶν 100 δραχμῶν, ὅταν τὸ χρυσοῦν εἰκοσάφραγκον ἰσοδυναμῇ μὲ 32,60 χαρτίνας δραχμάς;

Λύσις. Ἐπειδὴ αἱ χάρτιναι δρχ. 32 60 ἰσοδυναμοῦν πρὸς 20 χρυσᾶς, ἡ μία χαρτίνη δραχμὴ ἰσοδυναμεῖ πρὸς $\frac{20}{32,60}$

καὶ αἱ 100 ἰσοδυναμοῦν πρὸς $\frac{20 \times 100}{32,60}$, ἤτοι 61,35 . . .

12) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν 75 πήχεις ὑφάσματος πρὸς δρ. 8, 75 τὸν πῆχυν· ἐὰν πωλήσῃ τὸ ὕφασμα τοῦτο πρὸς δρ. 9, 10 τὸν πῆχυν, πόσα θὰ κερδίσῃ;

13) Πωλήσας ἔμπορός τις 500 ὀκ. κριθῆς πρὸς $20\frac{1}{2}$ λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, ἐζημιώθη 120 δραχ. πρὸς πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὴν κριθήν;

ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΚΑΙ ΡΙΖΩΝ

122. ***Δύναμις*** λέγεται τὸ γινόμενον παραγόντων ἴσων, οἷον, 5×5, $2\times2\times2$ εἶναι δυνάμεις.

Ἐὰν εἶναι δύο οἱ παράγοντες, τὸ γινόμενον λέγεται ***δευτέρα δύναμις ἢ τετράγωνον,*** ἐὰν τρεῖς ***τρίτη δύναμις ἢ κύβος*** καὶ οὕτω καθεξῆς. Τὰς δυνάμεις γράφομεν συντόμως ὡς ἑξῆς· γράφομεν μόνον τὸν ἕνα παράγοντα, ἔπειτα δεξιὰ αὐτοῦ καὶ ὀλίγον ὑπεράνω γράφομεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει, πόσοι εἶναι οἱ παράγοντες (ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται ***ἐκθέτης***)· οἷον, 2^3 σημαίνει $2\times2\times2$, 5^4 σημαίνει $5\times5\times5\times5$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ σημαίνει $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ κτλ.

Τὰ τετράγωνα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 12) εἶναι κατὰ σειρὰν τὰ ἑξῆς·

ἀριθμοὶ	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12
τετράγωνα	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100,	121,	144.

Ὁρισμοί.

123. ***Τετραγωνικὴ ῥίζα*** ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει αὐτὸν τετράγωνον.

Παραδείγματος χάριν, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 81 εἶναι ὁ 9, διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 9 εἶναι 81· ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{25}{36}$ εἶναι τὸ $\frac{5}{6}$, διότι τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{5}{6}$ εἶναι $\frac{25}{36}$ κτλ.

Τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν παριστῶμεν διὰ τοῦ σημείου $\sqrt{\ }$, τὸ ὁποῖον λέγεται ***ῥιζικόν***· οἷον $\sqrt{49}$ σημαίνει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 49, ἤτοι τὸ 7, καὶ $\sqrt{\frac{1}{4}}$ σημαίνει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ $\frac{1}{4}$, ἤτοι τὸ $\frac{1}{2}$.

124. ***Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος*** λέγεται ὁ μέγιστος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος· οἷον τοῦ 58 τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 7, διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 7 εἶναι 49 (καὶ χωρεῖ εἰς τὸν 58), τοῦ δὲ 8 εἶναι 64, τουτέστι μεγαλύτερον τοῦ 58. Ὁμοίως τοῦ 17 τετραγωνικὴ ῥίζα

κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 4 καὶ τοῦ $17\frac{1}{2}$ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὡσαύτως ὁ 4· τοῦ δὲ 25 τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 5.

125. Τετραγωνικὴ δὲ ρίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ λέγεται ἐκ τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἔχουσι παρονομαστὴν τὸν 10, τὸ μέγιστον, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

Παραδείγματος χάριν, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ εἶναι $\frac{14}{10}$, διότι τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{14}{10}$, ἤτοι τὸ $\frac{196}{100}$, χωρεῖ εἰς τὸν ἀριθμὸν 2, ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{15}{10}$ δὲν χωρεῖ εἰς τὸν 2, διότι εἶναι $\frac{225}{100}$ ἢ 2,25.

126. Ἐπίσης τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ λέγεται ἐκ τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἔχουσι παρονομαστὴν τὸν 100, τὸ μέγιστον, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος. Καὶ γενικῶς·

127. Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν κλασματικῆς μονάδος λέγεται τὸ μεγαλύτερον πολλαπλάσιον αὐτῆς, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ

128. Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης δοθέντος ἀριθμοῦ λέγεται ἡ πρᾶξις, δι᾽ ἧς εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν αὐτοῦ ἢ τὴν ἀκριβῆ (ἂν εἶναι τέλειον τετράγωνον) ἢ τὴν κατὰ προσέγγισιν ὡρισμένην.

Πρὶν ἢ μάθωμεν πῶς ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, ἀναφέρομεν τοὺς ἑξῆς πρακτικοὺς κανόνας, διὰ τῶν ὁποίων διακρίνομεν πότε ἀριθμός τις δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον·

1) Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγῃ εἰς ἓν ἐκ τῶν ψηφίων

2, 3, 7, 8,

δὲν εἶναι τετράγωνον.

2) Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγῃ εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν (ὡς οἱ 50, 15000 κτλ.) δὲν εἶναι τετράγωνον.

Α' Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

129. Ἂν μὲν ὁ δοθεὶς ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ 100, ἡ

τετραγωνικὴ ρίζα αὐτοῦ (ἢ ἡ ἀκριβὴς ἢ ἡ κατὰ κατὰ προσέγγισιν μονάδος) θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 100, ἤτοι μικροτέρα τοῦ 10· ἄρα θὰ εἶναι μονοψήφιος· εὑρίσκομεν δ' αὐτὴν ἀμέσως ἀπὸ μνήμης, διότι ἐκ τοῦ πυθαγορείου πίνακος ἐνθυμούμεθα ἀμέσως τὰ τετράγωνα πάντων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν.

Παραδείγματος χάριν, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 49 εἶναι 7, διότι $7\times7=49$· ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 35 (κατὰ πρασέγγισιν μονάδος) εἶναι ὁ 5, διότι τὸ τετράγωνον αὐτοῦ (ἤτοι τὸ 25) χωρεῖ εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμὸν καὶ μένει καὶ ὑπόλοιπον 10, ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀμέσως μεγαλυτέρου ἀκεραίου (τοῦ 6) δὲν χωρεῖ.

130. Ἂν δὲ ὁ δοθεὶς ἀκέραιος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 100, εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν (ἐὰν δὲν εἶναι προφανής, ὅπως π. χ. τοῦ $10000=(100)^2$ διὰ τῆς ἑξῆς πράξεως·

Ἔστω π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 3854.

38΄54	62
36	122
25΄4	2
24΄4	244
10	

Ὁ μηχανισμὸς τῆς πράξεως ταύτης ἔχει ὡς ἑξῆς· α΄) χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα διψήφια ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας, β΄) ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ πρώτου τμήματος, ὅπερ εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἀριθμοῦ καί, εἰς τὸ παράδειγμά μας, εἶναι διψήφιον (τὸ 38)· ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ τμήματος τούτου θὰ εἶναι τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης ρίζης (τὸ 6), γ΄) ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ρίζης (τὸ 36) ἀπὸ τοῦ τμήματος, ἐξ οὗ εὑρέθη (τὸ 38), καὶ δεξιὰ τοῦ μένοντος ὑπολοίπου (2) καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον τμῆμα (τὸ 54), ὅτε σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς 254, δ΄) τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἀποχωρίζομεν τὰς ἁπλᾶς μονάδας (4) καὶ διαιροῦμεν τὰς δεκάδας του (25) διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῆς ρίζης (12), ε΄) διὰ νὰ δοκιμάσωμεν, ἂν τὸ πηλίκον τῆς τελευταίας ταύτης διαιρέσεως (τὸ 2) εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ζητουμένης ρίζης, τὸ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου αὐτῆς (τοῦ 12) καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν (τὸν 122) πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ἴδιον πηλίκον 2, τὸ δὲ γινόμενον (244) ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 254· τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 10 καὶ λέγεται ***ὑπόλοιπον τῆς ὅλης πράξεως***· δηλαδὴ εἶναι $3854=(62)^2+10$ καὶ ἑπομένως ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3854 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 62.

Παρατηρήσεις.

1) Εἶναι ἐνδεχόμενον εἰς ἄλλα παραδείγματα τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον σχηματίζομεν κατὰ τὸ ἐδάφιον 130, νὰ μὴ ἀφαιρῆται ἀπὸ τὸν σχηματισθέντα ἀριθμόν, τότε δοκιμάζομεν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν ψηφίον δίδον γινόμενον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀφαιρῆται· τὸ τελευταῖον τοῦτο ψηφίον εἶναι τὸ ζητούμενον ψηφίον τῆς ρίζης.

2) Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἔμεινεν ὑπόλοιπον (τὸ 10). Δυνατὸν εἰς ἄλλα παραδείγματα νὰ μὴ μείνῃ· τότε ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι τέλειον τετράγωνον καὶ ἡ ἐξαχθεῖσα τετραγωνικὴ ρίζα εἶναι ἡ ἀκριβής· τοῦτο π. χ. συμβαίνει εἰς τὸν ἀριθμὸν 289· ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικήν του ρίζαν, κατὰ τὸν κανόνα, εὑρίσκομεν $\sqrt{289}=17$

3) Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἀνελύθη εἰς δύο μόνον διψήφια τμήματα· ἂν ὅμως ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος, π. χ. ὀκταψήφιος ἢ ἑπταψήφιος κτλ. ἀναλυόμενος δίδει τμήματα διψήφια, τρία ἢ τέσσαρα ἢ καὶ περισσότερα· τότε διὰ μὲν τὸ πρῶτον τμῆμα ἐκτελοῦμεν τὰ τοῦ ἐδαφίου 130, εἶτα διὰ τὰ λοιπὰ τμήματα μέχρι τοῦ τελευταίου ἐφαρμόζομεν ὅσα ἐκεῖ εἴπομεν διὰ τὸ δεύτερον τμῆμα, διαιροῦντες τὰς δεκάδας τοῦ ἑκάστοτε σχηματιζομένου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ διπλασίου του ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν ὅλα τὰ εὑρεθέντα ψηφία τῆς ρίζης.

Β΄ Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

131. Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ δεκαδικοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος λέγεται ἡ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ ἀκεραίου μέρους του· π. χ. τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 58742,34 ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 242, δηλαδὴ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ ἀριθμοῦ· ἐὰν ὅμως θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μὲ μεγαλυτέραν προσέγγισιν, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς· ἔστω ὁ ἀριθμὸς 587,42· πρῶτον παρα-

τηροῦμεν, ἂν ἔχῃ ἄρτιον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων, ὡς συμβαίνει ἐνταῦθα (ἂν δὲ ἔχῃ περιττόν, προσθέτομεν ἓν μηδενικὸν εἰς τὸ τέλος του, ὅπερ δὲν βλάπτει αὐτόν), εἶτα ἐξάγομεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ 58742, ὡς ἐὰν ἦτο ἀκέραιος, παραβλέποντες δηλαδὴ τὸ κόμμα, καὶ εὑρίσκομεν 242 κατὰ προσέγγισιν μονάδος· τέλος, εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν τετραγωνικὴν ρίζαν χωρίζομεν ἀπὸ τοῦ τέλους δεκαδικὰ ψηφία δύο φορὰς ὀλιγώτερα ἐκείνων, ἅτινα ἔχει ὁ ἀριθμὸς 587,42, καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 24,2· ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς δεκάτου, δηλαδὴ κατὰ προσέγγισιν τῆς τελευταίας δεκαδικῆς κλασματικῆς μονάδος τοῦ ἀριθμοῦ 24,2.

Παρατήρησις.

Ἐπειδὴ πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δεκαδικὸς μὲ δεκαδικὰ ψηφία ὅλα μηδέν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν κατὰ τὸν προηγούμενον τρόπον τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν οἱουδήποτε ἀκεραίου κατὰ προσέγγισιν τῆς τυχούσης κλασματικῆς δεκαδικῆς μονάδος. Π. χ. διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 5 κατὰ προσέγγισιν 0,01, τὸν γράφομεν ὡς ἑξῆς· 5,0000 καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν προηγούμενον κανόνα, εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 2,23. Τὸν ἴδιον κανόνα δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν πρὸς εὕρεσιν τῆς τετραγωνικῆς του ρίζης κατὰ προσέγγισιν οἱασδήποτε δεκαδικῆς κλασματικῆς μονάδος, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν ἀνάλογον ἀριθμὸν μηδενικῶν εἰς τὸ τέλος του ἢ καὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν δεκαδικὰ ψηφία, ἐὰν περισσεύουν.

Γ' Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

132. 1) Ἂν τύχῃ τοῦ δοθέντος κλάσματος καὶ οἱ δύο ὅροι νὰ εἶναι ἢ νὰ γίνωνται δι' ἁπλοποιήσεως τετράγωνα ἀκεραίων, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ κλάσματος εὑρίσκεται ἀκριβῶς καὶ εἶναι ἴση πρὸς κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ δοθέντος καὶ παρονομαστὴν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ παρονομαστοῦ.

Ἂν τὸ προηγούμενον δὲν συμβαίνῃ.

2) Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ κλάσματος κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀκεραίου μέρους του. Π. χ.

$\sqrt{1\frac{5}{8}} = 1$, $\sqrt{65\frac{2}{3}} = 8$,

$\sqrt{25\frac{1}{2}} = 5$, $\sqrt{\frac{4}{7}} = 0$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν ὅμως μὲ μεγαλυτέραν προσέγγισιν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν, τρέπομεν τὸ δοθὲν κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικὸν καὶ ἔπειτα ἐργαζόμεθα κατὰ τοὺς κανόνας τῆς περιπτώσεως τῶν δεκαδικῶν.

Παράδειγμα

$$\sqrt{17\frac{3}{4}} = 4{,}21 \text{ κατὰ προσέγγισιν } 0{,}01.$$

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν ὅλοι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ μέχρι τοῦ 100, ὅσοι εἶναι τετράγωνα ἄλλων ἀκεραίων.

2) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι, αἱ ἀκριβεῖς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, τῶν ἑξῆς ἀκεραίων· 18, 26, 38, 48, 64, 75, 86, 99, 100.

3) Νὰ εὑρεθοῦν κατὰ προσέγγισιν 0,1 αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν·

$$28,\ 3{,}05,\ \frac{3}{5},\ \frac{36}{400}.$$

4) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἑξῆς τετραγωνικαὶ ρίζαι·

$\sqrt{8{,}34}$ κατὰ προσέγγισιν 0,1

$\sqrt{9432}$ » » 0,01

$\sqrt{47\frac{2}{3}}$ » » 0,1

$\sqrt{\frac{9}{7}}$ » » 0,01.

5) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τετραγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 575 τετραγ. μέτρα.

6) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ μία κάθετος πλευρὰ εἶναι 12 μ. καὶ ἡ ἄλλη 6.

('Απόκρ. $\sqrt{12^2+6^2} = \sqrt{180}$.

7) Μὲ 400 δραχμὰς ἠγόρασα τόσας ὀκάδας ἑνὸς πράγματος, ὅσα λεπτὰ ἐστοίχιζεν ἡ ὀκᾶ· πόσας ὀκάδας ἠγόρασα;

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ
ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'

Μετρικόν Σύστημα

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ὁρισμοί.

133. ***Ποσὸν*** λέγεται κάθε πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον ἐπιδέχεται αὔξησιν καὶ ἐλάττωσιν.

Μέτρησις τοῦ ποσοῦ λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδές, ὡρισμένον καὶ γνωστόν, τὸ ὁποῖον λέγεται **μονάς.** Διὰ τῆς συγκρίσεως ταύτης εὑρίσκομεν, πόσαι μονάδες ἢ μέρη τῆς μονάδος ἀποτελοῦσι τὸ ποσὸν καὶ παριστάνομεν αὐτὸ δι' ἀριθμοῦ. Ἐάν, παραδείγματος χάριν, τὸ ποσὸν ἀποτελῆται ἀπὸ τὴν μονάδα καὶ ἀπὸ τὸ ἥμισυ αὐτῆς, θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $1\frac{1}{2}$, ἐὰν δὲ ἀποτελῆται ἀπὸ τὴν μονάδα λαμβανομένην πέντε φοράς, θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ 5.

Διὰ νὰ ἀποφύγωσι τὰ κλάσματα, ἔδωκαν εἴς τινα μέρη τῆς ἀρχικῆς μονάδος ἰδιαίτερα ὀνόματα καὶ ἐθεώρησαν αὐτὰ ὡς νέας μονάδας· παραδείγματος χάριν, τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς ὠνόμασαν ***δράμιον*** καὶ ἐπομένως ἀντὶ νὰ λέγωσιν, ὅτι βάρος τι εἶναι 27 ὀκάδες καὶ $\frac{150}{400}$ τῆς ὀκᾶς, λέγουσιν, ὅτι εἶναι 27 ὀκάδες καὶ 150 δράμια· ὁμοίως τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως ὠνόμασαν ***ρούπιον,*** τὸ $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας ὠνόμασαν ***λεπτὸν πρῶτον,*** τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς δραχμῆς ***λεπτὸν*** καὶ τὸ $\frac{1}{40}$ τοῦ γροσίου (τουρκικοῦ νομίσματος) ***παρᾶν***.

Ἐπίσης διὰ νὰ ἀποφύγωσι τοὺς μεγάλους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι προκύπτουσιν, ὅταν τὸ ποσὸν εἶναι πολὺ μέγα ὡς πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα, ἔλαβον πολλαπλάσιά τινα αὐτῆς ὡς νέας μονάδας καὶ ἔδωκαν εἰς αὐτὰ ἰδιαίτερα ὀνόματα· ἐάν, π.χ. πρόκειται νὰ μετρήσωμεν τὸ μῆκος ἑνὸς τοίχου, ἀρκεῖ ὁ πῆχυς, ἀλλ' ἐὰν ἔχωμεν νὰ μετρήσωμεν τὴν ἀπόστασιν τῶν Ἀθηνῶν ἀπὸ τῆς Κωνσταντινουπόλεως, λαμβάνομεν 1000 πήχεις, ὡς μίαν μονάδα, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν ***στάδιον***.

134. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἠμπορεῖ ποσόν τι νὰ παριστάνηται δι᾿ ἀριθμοῦ συγκειμένου ἐκ πολλῶν ἄλλων, ὁμοειδῶν μέν, ἀλλ᾿ ἐχόντων διαφόρους μονάδας· ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς λέγεται ***συμμιγὴς*** ἀριθμός.

Ἐκ τούτων ὁδηγούμεθα εἰς τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τῶν συμμιγῶν·

135. ***Συμμιγὴς ἀριθμὸς εἶναι ἀριθμὸς σύνθετος ἐξ ἄλλων, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι πολλαπλάσια μιᾶς ἀρχικῆς μονάδος ἢ μέρη αὐτῆς, ἔχοντα ἴδιον ὄνομα ἕκαστον.***

Οἷον, 7 ὀκάδες καὶ 250 δράμια εἶναι συμμιγὴς ἀριθμός.

Σημείωσις. Οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοὶ εἶναι πάντοτε συγκεκριμένοι.

136. Πρὶν μάθωμεν, πῶς γίνονται αἱ πράξεις τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, πρέπει νὰ μάθωμεν τὰ διάφορα εἴδη αὐτῶν.

Τὰ διάφορα ἔθνη δὲν λαμβάνουσι δι᾿ ἕκαστον ποσὸν οὔτε τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν μονάδα, οὔτε τὰς αὐτὰς ὑποδιαιρέσεις αὐτῆς· διὰ τοῦτο ἐκθέτομεν ἐν τοῖς ἑξῆς τὰ κυριώτερα εἴδη τῶν συμμιγῶν, μάλιστα δέ, ὅσα ἡμεῖς μεταχειριζόμεθα.

Μονάδες μήκους.

1) *Γαλλικὸν μέτρον ἢ βασιλικὸς πῆχυς.*

Ἡ κυριωτέρα μονὰς τοῦ μήκους, τῆς ὁποίας ἡ χρῆσις ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐξαπλοῦται, εἶναι τὸ ***γαλλικὸν μέτρον.***

Ἡ μονὰς αὕτη συνδέεται πρὸς τὸ μέγεθος τῆς γῆς· διότι ὡρίσθη οὕτως, ὥστε ἡ περιφέρεια τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς νὰ ἔχῃ μῆκος 40000000 μέτρων.

Ἐν Ἑλλάδι τὸ γαλλικὸν μέτρον ὠνομάσθη ***βασιλικὸς πῆχυς.***

Μέτρον ἢ βασιλικὸς πῆχυς, ἀρχικὴ μονάς.

Παλάμη $=\frac{1}{10}$ τοῦ πήχεως. ***Στάδιον*** $=1000$ μέτρα.

Δάκτυλος $=\frac{1}{10}$ τῆς παλάμης.

Γραμμὴ $=\frac{1}{10}$ τοῦ δακτύλου.

Λοιπὸν 1 πῆχ. $=$ 10 παλ. $=$ 100 δάκτ. $=$ 1000 γραμμαί.
1 παλ. $=$ 10 δάκτ. $=$ 100 γραμμαί.
1 δάκτ. $=$ 10 γραμμαί.

Τὸ ἀπέναντι σχῆμα παριστᾷ μίαν παλάμην διῃρημένην εἰς δακτύλους.

Καθὼς βλέπομεν, αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου εἶναι δεκαδικαί· τοῦτο δὲ ἔγινε διὰ τὴν εὐκολίαν τῶν πράξεων.

Διότι πᾶς ἀριθμός, ὅστις παριστᾷ μῆκος, ἤτοι σύγκειται ἐκ μέτρων, παλαμῶν, δακτύλων καὶ γραμμῶν, παρίσταται καὶ ὡς δεκαδικὸς ἀριθμός, ἔχων ἀκέραιον μέρος τοὺς πήχεις, δέκατα τὸν ἀριθμὸν τῶν παλαμῶν, ἑκατοστὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν δακτύλων καὶ χιλιοστὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν γραμμῶν· οἷον, 15 πήχ. 2 παλ. 3 δακτ. 5 γραμμ. εἶναι=15 πήχ. 235.

Ἑπομένως αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν συμμιγῶν τούτων ἀριθμῶν ἀνάγονται εἰς τὰς πράξεις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 15 πήχ. 235 ἀπαγγέλλεται, κατὰ τὰ λεχθέντα περὶ ἀπαγγελίας τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν (ἐδ. 111), καὶ ὡς ἑξῆς· 152 παλάμαι καὶ 35 γραμμαί, ἢ 15235 γραμμαί, ἢ 1523 δάκτυλοι καὶ 5 γραμμαὶ κτλ.

2) *Τεκτονικὸς πῆχυς.*

Ὁ τεκτονικὸς πῆχυς εἶναι τὰ 75 ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου· μεταχειρίζονται δὲ αὐτὸν εἰς τὰς οἰκοδομὰς καὶ εἰς τὰ οἰκόπεδα.

3) *Πήχεις τοῦ ἐμπορίου.*

Εἰς τὸ ἐμπόριον διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑφασμάτων μεταχειρίζονται τὸν μικρὸν πῆχυν τῆς Κωνσταντινουπόλεως, ὅστις ὀνομάζεται ***ἐνδεζὲ καὶ*** εἶναι 0,648 πήχ. (ἤτοι 648 χιλιοστὰ τοῦ γαλλικοῦ μέτρου), καὶ τὸν μεγαλύτερον, ὅστις λέγεται ***ἀρσὶν*** καὶ εἶναι 0,669 τοῦ μέτρου· διαιρεῖται δὲ ἕκαστος τούτων εἰς 8 ***ρούπια.***

4) *Ὀργυιά.*

Ἡ ὀργυιὰ εἶναι παλαιοτέρα ἀρχικὴ μονὰς τοῦ μήκους· ἔχει δὲ τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις·

Ὀργυιά, ἀρχικὴ μονάς· ***Ποὺς***$=\frac{1}{6}$ τῆς ὀργυιᾶς.

Δάκτυλος$=\frac{1}{12}$ τοῦ ποδός. ***Γραμμὴ***$=\frac{1}{12}$ τοῦ δακτύλου.

Ἡ χρῆσις τῆς ὀργυιᾶς καὶ τῶν ὑποδιαιρέσεων αὐτῆς ἤρχισεν ἤδη νὰ γίνηται σπανιωτέρα.

Ἡ σχέσις αὐτῆς πρὸς τὸ μέτρον εἶναι ἡ ἑξῆς·

1 ὀργ. = 1,94904 μέτρ. καὶ 1 μέτρ. = 0 ὀργ. 3 πόδ. 21 γρ. $\frac{296}{1000}$

1 ποὺς = 0,32484 τοῦ μέτρου.

Σημείωσις. Οἱ Ἄγγλοι μεταχειρίζονται ὡς ἀρχικὴν μονάδα μήκους τὴν ***ὑάρδαν·*** ἑκάστη ὑάρδα διαιρεῖται εἰς 3 πόδας, ἕκαστος δὲ ποὺς ὑποδιαιρεῖται εἰς 12 δακτύλους.

Ἡ σχέσις αὐτῆς πρὸς τὸ μέτρον εἶναι ἡ ἑξῆς· 1 ὑάρδα=0,91439 τοῦ μέτρου.

Οἱ Ἰταλοὶ καὶ οἱ Γερμανοὶ παρεδέχθησαν τὸ γαλλικὸν μέτρον· οἱ δὲ Ρῶσοι ἔχουσι μονάδα μήκους τὸ ***ἀρσὶν*** = 0,μ. 711 τοῦ μέτρου.

5) *Μίλια.*

Τὸ γεωγραφικὸν ἢ γερμανικὸν μίλιον εἶναι 7420,4407 μέτρα (περιέχεται δὲ 5400 φορὰς εἰς τὸν μεσημβρινὸν τῆς γῆς, τουτέστιν ὅλη ἡ περιφέρεια τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς εἶναι 5400 γεωγραφικὰ μίλια.

Τὸ ἀγγλικὸν μίλιον εἶναί 1760 ὑάρδαι ἢ μέτρα 1609,3295.

Τὸ ναυτικὸν μίλιον δι᾿ ὅλα τὰ ἔθνη εἶναι μέτρα 1852· περίπου τὸ τέταρτον τοῦ γεωγραφικοῦ μιλίου.

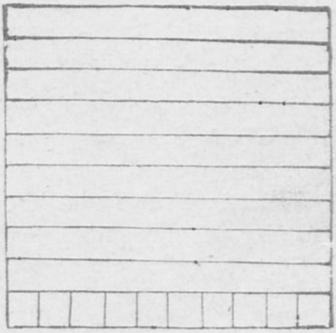
Τὸ ρωσικὸν βέρστιον ἔχει 1500 ἀρσίν, ἤτοι 1066 μ. 79.

Μονάδες ἐπιφανείας.

Μονάδες ἐπιφανειῶν εἶναι τὰ τετράγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι πλευρὰς τὰς μονάδας τοῦ μήκους.

Εἶναι δὲ τὸ τετράγωνον ἐπιφάνεια ἐπίπεδος, περικλειομένη ὑπὸ τεσσάρων ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουσιν ὀρθὰς γωνίας

Τετραγωνικὸς πῆχυς λέγεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ ἕνα πῆχυν.



Τετραγωνικὴ παλάμη λέγεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι μία παλάμη ($=\frac{1}{10}$ τοῦ πήχεως)· εἶναι δὲ ἡ τετραγωνικὴ παλάμη τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως. Ἐάν, τῷ ὄντι, θέσωμεν 10 τετραγωνικὰς παλάμας εἰς μίαν σειρὰν καὶ προσαρμόσωμεν αὐτάς, θὰ ἀποτελεσθῇ ἓν ὀρθογώνιον, ἔχον βάσιν 1 πῆχυν καὶ ὕψος $\frac{1}{10}$ τοῦ πήχεως, ἤτοι μίαν παλάμην, ἐὰν δὲ 10 τοιαῦτα ὀρθογώνια προσκολλήσωμεν (κατὰ τὰς μεγαλυτέρας πλευράς των), θὰ ἀποτελεσθῇ ὁ τετραγωνικὸς πῆχυς· ὥστε ὁ τετραγωνικὸς πῆχυς περιέχει 10×10, ἤτοι 100 τετραγωνικὰς παλάμας.

Τετραγωνικὸς δάκτυλος λέγεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι εἷς δάκτυλος $\left(= \frac{1}{10}\right.$ τῆς παλάμης $= \frac{1}{100}$ τοῦ πήχεως$\left.\right)$. εἶναι δὲ ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς τετραγωνικῆς παλάμης καὶ τὸ $\frac{1}{10000}$ τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως.

Καὶ ἐνταῦθα αἱ ὑποδιαιρέσεις εἶναι δεκαδικαί· ὥστε πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος παριστᾷ ἐπιφάνειαν, ἤτοι σύγκειται ἐκ τετραγωνικῶν πήχεων, τετραγωνικῶν παλαμῶν, τετραγωνικῶν δακτύλων γράφεται καὶ ὡς δεκαδικὸς ἀριθμός· οἷον, 3 τ.π. 15 τ.πλ. 2 τ.δ. γράφεται 3 τ.π. 1502· ἀπαγγέλλεται δὲ (σύμφωνα μὲ τὰ λεχθέντα ἐν τῷ ἐδ. 111) κατὰ πολλοὺς τρόπους· π.χ. 3 τετρ. πήχ. 15 τετρ. παλ. καὶ 2 τετρ. δάκτ. ἢ 315 τετρ. παλ. καὶ 2 τετρ. δάκτυλοι, ἢ 31502 τετρ. δάκτυλοι κτλ.

Τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς εἶναι τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι εἷς τεκτονικὸς πῆχυς· εἶναι δὲ ἐν χρήσει διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων.

Ἡ σχέσις αὐτοῦ πρὸς τὸ τετρ. μέτρον εἶναι ἡ ἑξῆς· 1 τεκ. τετ. π. $=\frac{9}{16}$ τοῦ τετραγ. πήχ. καὶ ἐπομένως 1 τετραγ. π. $=\frac{16}{9}$ τοῦ τετραγ. τεκτ. πήχ.

Διὰ τὰς μεγάλας ἐπιφανείας μεταχειρίζονται ἐν Γαλλίᾳ, Γερμανίᾳ καὶ Ἀγγλίᾳ ὡς μονάδα τὸ καλούμενον ἄρουρα (are). Εἶναι δὲ τοῦτο τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 10 μέτρα· ἐπομένως περιέχει 100 τετραγωνικὰ μέτρα.

Τὸ ἑκτάριον εἶναι 100 ἄρουραι· εἶναι δὲ τετράγωνον, ἔχον πλευρὰς ἐξ 100 μέτρων.

Ἐν Ἑλλάδι διὰ τὰς μεγάλας ἐκτάσεις μεταχειρίζονται ὡς μονάδα ***τὸ βασιλικὸν στρέμμα***, τὸ ὁποῖον ἔχει 1000 τετραγωνικὰ μέτρα· ἐὰν νοηθῇ ὡς τετράγωνον, αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι περίπου μέτρα 31,6 . . .

Τὸ παλαιὸν στρέμμα εἶναι τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 55 πήχεις Κωνσταντινουπόλεως μικροὶ (ἐνδεζέ).

Εἶναι δὲ τὸ παλαιὸν στρέμμα ἴσον μὲ 1,27 βασιλ. στρ. ἐπομένως τὸ βασιλικὸν στρέμμα εἶναι ἴσον μὲ 0,787 τοῦ παλαιοῦ στρέμματος.

Μονάδες ὄγκου ἢ χωρητικότητος.

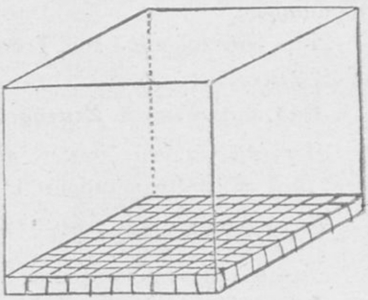
Μονάδες τοῦ ὄγκου εἶναι οἱ κύβοι, τῶν ὁποίων πλευραὶ εἶναι αἱ μονάδες τοῦ μήκους.

Εἶναι δὲ ὁ κύβος στερεόν, περικλειόμενον ὑπὸ ἓξ ἴσων τετραγώνων.

Καὶ ἂν μὲν ἡ μονὰς τοῦ μήκους εἶναι τὸ μέτρον, ἡ μονὰς τῶν ὄγκων λέγεται ***κυβικὸν μέτρον***, ἂν δὲ ἡ μονὰς τοῦ μήκους εἶναι ἡ παλάμη, ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου λέγεται ***κυβικὴ παλάμη*** κτλ.

Ἡ κυβικὴ παλάμη εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ κυβικοῦ μέτρου.

Ἐάν, τῷ ὄντι, θέσωμεν εἰς μίαν σειρὰν 10 κυβικὰς παλάμας καὶ προσαρμόσωμεν αὐτάς, σχηματίζομεν στερεόν, ὅπερ ἔχει μῆκος 1 πῆχυν, πλάτος ὅμως καὶ ὕψος μίαν παλάμην· ἐὰν δὲ δέκα τοιαῦτα στερεὰ θέσωμεν ἐπί τινος ἐπιπέδου καὶ προσαρμόσωμεν αὐτὰ κατὰ τὰς ἐπιμήκεις ἐπιφανείας των, σχηματίζομεν στερεόν, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος καὶ πλάτος ἴσα μὲ ἕνα πῆχυν, ὕψος ὅμως μίαν παλάμην· ἐὰν τέλος 10 τοιαῦτα στερεὰ θέσωμεν ἐπ' ἀλλήλων καὶ προσαρμόσωμεν αὐτά, σχηματίζομεν τὸ κυβικὸν μέτρον. Ὥστε τὸ κυβικὸν μέτρον σύγκειται ἐκ 1000 κυβικῶν παλαμῶν, ἢ ἡ κυβικὴ παλάμη εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ κυβικοῦ πήχεως.



Ὁμοίως σύγκειται ἡ κυβικὴ παλάμη ἐκ 1000 κυβικῶν δακτύλων, καὶ ὁ κυβικὸς δάκτυλος εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τῆς κυβικῆς παλάμης.

Λίτρα λέγεται ἡ χωρητικότης τῆς κυβικῆς παλάμης, ἤτοι ἡ χωρητικότης κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μία παλάμη. Εἰς ἓν κυβικὸν μέτρον περιέχονται, κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα, 1000 λίτραι.

Ἡ λίτρα εἶναι ἐν χρήσει διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑγρῶν.

Κοιλὸν λέγεται τὸ δέκατον τοῦ κυβικοῦ πήχεως, ἤτοι ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον ἔχουσιν 100 κυβικαὶ παλάμαι· γίνεται δὲ ἡ χρῆσις τούτου ἰδίως εἰς τοὺς δημητριακοὺς καρπούς.

Μονάδες βάρους.

Οἱ Γάλλοι, παραδεχθέντες τὸ μέτρον ὡς ἀρχικὴν μονάδα τοῦ μήκους, ἐσχέτισαν πρὸς ταύτην καὶ τὰς λοιπὰς μονάδας· ὅθεν καὶ τὰς μονάδας τοῦ βάρους. Διὰ τοῦτο παρεδέχθησαν τὰς ἑξῆς μονάδας βάρους·

Γραμμάριον ἢ δραχμὴ (gramme).

Τοῦτο εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, ὅσον χωρεῖ εἰς ἕνα κυβικὸν δάκτυλον (τὸ ὕδωρ πρέπει νὰ εἶναι καθαρόν, ἀπεσταγμένον καὶ εἰς θερμοκρασίαν 4° τοῦ κοινοῦ θερμομέτρου).

Χιλιόγραμμον (kilogramme) = 1000 γραμμάρια.

Τὸ χιλιόγραμμον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, ὅσον χωρεῖ 1 κυβικὴ παλάμη, ἤτοι τὸ βάρος μιᾶς λίτρας ὕδατος.

Τόννος λέγεται τὸ βάρος 1000 χιλιογράμμων, ἤτοι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, ὅσον χωρεῖ εἰς ἓν κυβικὸν μέτρον.

Τὰς μονάδας ταύτας τοῦ βάρους παρεδέχθησαν καὶ οἱ Βέλγοι καὶ οἱ Ὁλλανδοί, ἔτι δὲ καὶ οἱ Γερμανοί, πλὴν τοῦ ὅτι ἀντὶ τοῦ χιλιογράμμου μεταχειρίζονται τὸ **πφούντιον** (pfund), ὅπερ ἔχει βάρος 500 γραμμαρίων.

Παρ' ἡμῖν καὶ παρὰ τοῖς Τούρκοις μονάδες βάρους ἐν χρήσει εἶναι αἱ ἑξῆς·

Ὀκᾶ, ἀρχικὴ μονάς. ***Στατὴρ***=44 ὀκάδ. ***Δράμιον***=$\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς.

Ἡ σχέσις τῆς ὀκᾶς πρὸς τὸ χιλιόγραμμον εἶναι ἡ ἑξῆς·

1 ὀκᾶ = 1280 γραμμάρια· 1 δράμιον = 3,2 γραμμάρια·

Τὸ δὲ χιλιόγραμμον εἶναι 312 $\frac{1}{2}$ δράμια = 0,78 . . τῆς ὀκᾶς

1 λίτρα ὕδατος εἶναι λοιπὸν 312 $\frac{1}{2}$ δράμια.

Διὰ τὰ φάρμακα μεταχειρίζονται τὰς ἑξῆς μονάδας βάρους·

Κόκκος ἡ ἐλαχίστη μονάς. ***Γράμμα*** (σκρούπουλον) = 20 κόκκοι. ***Δραχμὴ***=3 γραμ.=60 κόκκοι. ***Οὐγγία***=8 δραχ. ***Λίτρα***=12 οὐγγίαι.

Ἡ λίτρα τῶν φαρμακείων εἶναι περίπου 115 δράμια τῆς ὀκᾶς.

Μονάδες νομισμάτων. [1]

1) *Τῆς λατινικῆς ἑνώσεως.*

Ἡ Γαλλία, ἡ Ἰταλία, ἡ Ἑλβετία, τὸ Βέλγιον καὶ ἡ Ἑλλὰς παρεδέχθησαν διὰ συμβάσεως νὰ κόπτωσι νομίσματα ὅμοια καὶ ἴσης ἀξίας, διὰ νὰ εὐκολύνωσι τὸ ἐμπόριον. Κατὰ τὴν σύμβασιν ταύτην (ἥτις λέγεται ***λατινικὴ νομισματικὴ σύμβασις)*** ἀρχικὴ μονὰς τῶν νομισμάτων εἶναι τὸ ***φράγκον,*** ὅπερ ἐν Ἑλλάδι λέγεται ***δραχμή.*** Εἶναι δὲ τοῦτο νόμισμα ἀργυροῦν, ἔχον βάρος 5 γραμμαρίων (ἓν δράμιον καὶ $\frac{9}{16}$ τοῦ δραμίου), τοῦ ὁποίου ὁ βαθμὸς καθαρότητος εἶναι 0,835, δηλαδὴ μόνον τὰ $\frac{835}{1000}$ αὐτοῦ εἶναι καθαρὸς ἄργυρος, τὰ δὲ ἄλλα $\frac{165}{1000}$ εἶναι χαλκὸς ἢ καὶ ἄλλα μέταλλα. Διαιρεῖται δὲ τὸ φράγκον εἰς 100 ἴσα μέρη, ἐξ ὧν ἕκαστον παρ' ἡμῖν λέγεται ***λεπτόν.***

Τὰ νομίσματα τῆς ἑνώσεως ταύτης εἶναι χαλκᾶ, ἀργυρᾶ καὶ χρυσᾶ. Καὶ ἐκ χαλκοῦ μὲν εἶναι τὰ ἑξῆς· τὸ μονόλεπτον, τὸ δίλεπτον, ὁ ὀβολὸς (κοινῶς πεντάρα) καὶ τὸ διώβολον (κοινῶς δεκάρα).

Τὸ βάρος τοῦ διωβόλου εἶναι 10 γραμμάρια, τοῦ δὲ ὀβολοῦ 5.

Ἐξ ἀργύρου δὲ εἶναι τὰ ἑξῆς·

---

[1]) Αἱ τιμαὶ αὐτῶν δὲν εἶναι σταθεραί, ἀλλ' ὑφίστανται διακυμάνσεις.

1) Τὸ εἰκοσάλεπτον=20 λεπτὰ (βάρος 1 γραμμάριον).

2) Τὸ ἥμισυ τῆς δραχμῆς=50 λεπτὰ (βάρος $2\frac{1}{2}$ γραμμάρια)

3) Ἡ δραχμὴ (βάρος 5 γραμμάρια).

4) Τὸ δίδραχμον (βάρος 10 γραμμάρια).

5) Τὸ πεντάδραχμον (βάρος 25 γραμμάρια).

Τοῦ τελευταίου τούτου βαθμὸς καθαριότητος ὡρίσθη διὰ τῆς συμβάσεως εἰς 0,900, τῶν δὲ ἄλλων εἰς 0,835.

Ἐκ χρυσοῦ δὲ εἶναι τὰ ἑξῆς·

Πεντάδραχμον (βάρος 1 γρ. 61290), δεκάδραχμον (βάρος 3 γρ. 2258), εἰκοσάδραχμον (βάρος 6 γρ. 45161), πενηντάδραχμον (βάρος 16 γρ. 12903) καὶ ἑκατοντάδραχμον (βάρος 32 γρ. 25806).

Τούτων ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος εἶναι 0,900.

Σημείωσις. Ἐν Ἑλλάδι ὑπάρχουσι καὶ νομίσματα ἐκ νικελίου τῶν 5,10 καὶ 20 λεπτῶν.

2) *Ἀγγλικαί.*

Ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ ***ἀγγλικὴ λίρα.*** Αὕτη ὑποδιαιρεῖται εἰς 20 σελλίνια, καὶ τὸ σελλίνιον εἰς 12 ***πέννυ***· ἕκαστον δὲ πέννυ εἰς 4 ***φαρδίνια.*** Τὸ βάρος τῆς ἀγγλικῆς λίρας εἶναι 7 γρ. 988.

Ἡ ἀγγλικὴ λίρα ἔχει ἀξίαν 25 δραχμῶν· ὥστε τὸ σελλίνιον ἔχει ἀξίαν 1,25 δρ. καὶ τὸ πέννυ $10\frac{5}{12}$ λεπτά.

Χρυσᾶ νομίσματα εἶναι ἡ λίρα καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς (=10 σελλίνια), ἔτι 2 καὶ 5 λιρῶν· βαθμὸν δὲ καθαρότητος ἔχουσιν $\frac{11}{12}$.

Ἀργυρᾶ εἶναι διὰ 2, 3, 4, 6 πέννυ, ἔτι δὲ διὰ 1, 2, $2\frac{1}{2}$, 5 σελλίνια.

Βαθμὸς δὲ καθαρότητος αὐτῶν εἶναι $\frac{37}{40}$.

Χαλκᾶ εἶναι τὸ φαρδίνιον, 2 φαρδίνια καὶ τὸ πέννυ.

3) *Γερμανικαί.*

Ἐν Γερμανίᾳ μονὰς τῶν νομισμάτων εἶναι τὸ ***μάρκον.***

Ὑποδιαιρεῖται δὲ εἰς 100 ἴσα μέρη, ἅτινα λέγονται ***πφένιχ.***

Ἡ ἀξία τοῦ μάρκου εἶναι 1 δρ. 25 (ἀκριβέστερον 1,234), τὸ δὲ βάρος εἶναι 6 γρ. 55.

Ἀργυρᾶ νομίσματα εἶναι τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ μάρκου, τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ, τὸ μάρκον, τὸ δίμαρκον καὶ τὸ πεντάμαρκον. Χρυσᾶ δὲ εἶναι τῶν 5,10 καὶ 20 μάρκων.

Βαθμὸς καθαρότητος πάντων τούτων εἶναι 0,900.

4) *Αὐστριακαί.*

Ἐν Αὐστρίᾳ μονὰς τῶν νομισμάτων εἶναι ἡ ***κορώνα,*** ἥτις ἔχει ἀξίαν 1 δρ. 05, διαιρεῖται δὲ εἰς 100 ἕλλερ.

Ἀργυρᾶ νομίσματα εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$, 1 καὶ 2 φιορίνια (ἓν φιορίνιον=2 δρ.50).

Χρυσᾶ δὲ 10 καὶ 20 κορῶναι, 4 καὶ 8 φιορίνια, ἔτι δὲ τὸ δουκᾶτον (=11 δρ. 85) καὶ τὸ τετραπλοῦν δουκᾶτον.

5) ***Τουρκικαί.***

Ἐν Τουρκίᾳ μονὰς τῶν νομισμάτων εἶναι τὸ ***γρόσιον***, τὸ ὁποῖον διαιρεῖται εἰς 40 ***παράδες*** καὶ ὁ παρᾶς εἰς 3 ***ἄσπρα.*** Τὸ γρόσιον εἶναι ἴσον περίπου μὲ 23 λεπτά. Χρυσοῦν νόμισμα σύνηθες εἶναι ἡ ***λίρα***=100 γρόσια, ἀργυρᾶ δὲ τὸ τάλληρον (μετζήτιον=20 γρ.) τὸ ἥμισυ καὶ τέταρτον αὐτοῦ.

6) ***Ρωσικαί.***

Ἀρχικὴ μονὰς ***ρούβλιον***=4 δρ. διαιρεῖται δὲ εἰς 100 ***καπίκια.***

Χρυσᾶ νομίσματα εἶναι τὸ ***πὼλ ἰμπεριὰλ***=5 ρούβλια, τὸ ***ἰμπεριὰλ***=10 ρούβλια καὶ τὸ ***δουκᾶτον***=3 ρούβλια.

7) ***Ἡνωμέναι πολιτεῖαι.***

Μονὰς τῶν νομισμάτων ἐν ταῖς Ἡνωμέναις πολιτείαις εἶναι τὸ ***δολλάριον***=5 δρ. 18· διαιρεῖται δὲ εἰς 100 ἴσα μέρη (ἑκατοστά).

Χρυσᾶ νομίσματα εἶναι ὁ ***ἀετὸς***=10 δολλάρια, ὁ ***διπλοῦς ἀετός,*** ἔτι τῶν 5, 3, $2\frac{1}{2}$ καὶ 1 δολλαρίου. Ἀργυρᾶ δὲ τὸ δολλάριον, τὸ ἥμισυ αὐτοῦ, τὸ πέμπτον καὶ τὸ δέκατον.

Μονάδες χρόνου

(ἐν χρήσει εἰς ὅλα τὰ πεπολιτισμένα ἔθνη).

Ἀρχικὴ μονὰς τοῦ χρόνου εἶναι ἡ ***ἡμέρα*** ἢ τὸ ***ἡμερονύκτιον*** (ἢ καὶ ***νυχθήμερον).***

Ὥρα $= \frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας

Μὴν =30 ἡμέραι

Ἔτος=12 μῆνες

Λεπτὸν πρῶτον $= \frac{1}{60}$ τῆς ὥρας

Λεπτὸν δεύτερον $= \frac{1}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ $= \frac{1}{3600}$ τῆς ὥρας.

Σημείωσις. Οἱ 12 μῆνες τοῦ ἔτους ὀνομάζονται κατὰ σειρὰν Ἰανουάριος, Φεβρουάριος, Μάρτιος, Ἀπρίλιος, Μάιος, Ἰούνιος, Ἰούλιος, Αὔγουστος, Σεπτέμβριος, Ὀκτώβριος, Νοέμβριος, Δεκέμβριος.

Ἐκ τούτων 4 ἔχουσι 30 ἡμέρας οἱ ἑξῆς·

Ἀπρίλιος, Ἰούνιος, Σεπτέμβριος καὶ Νοέμβριος, εἷς δέ, ὁ Φεβρουάριος, ἔχει 28 ἡμέρας εἰς τὰ κοινὰ ἔτη (ἅτινα ἔχουσι 365 ἡμέρας), 29 δὲ εἰς τὰ ***ἐμβόλιμα*** ἢ ***δίσεκτα*** (ἅτινα ἔχουσι 366 ἡμέρας), οἱ δὲ ὑπόλοιποι 7 μῆνες ἔχουσι 31 ἡμέρας.

Ἀπὸ τέσσαρα συνεχῆ ἔτη τὸ ἓν εἶναι δίσεκτον, ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4· οἷον ἐκ τῶν ἐτῶν 1902, 1903, 1904, 1905 δίσεκτον εἶναι τὸ 1904.

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ πόσας ἡμέρας ἔχει εἷς μὴν (ὅταν δὲν ἐνθυμώμεθα), γράφομεν τοὺς ἑπτὰ πρώτους ἀριθμοὺς εἰς ἕνα γῦρον ὡς ἑξῆς·

1
7 2
6 3
5 4

καὶ ἔπειτα ἀπαγγέλλομεν τοὺς μῆνας κατὰ σειράν, δίδοντες εἰς ἕκαστον μῆνα τὸν ἀντίστοιχόν του ἀριθμὸν (Ἰανουάρ. 1, Φεβρουάρ. 2, Μάρτ. 3 κτλ.)· ἐὰν ὁ μὴν πέσῃ εἰς περιττὸν ἀριθμόν, ἔχει 31 ἡμέρας, ἐὰν δὲ εἰς ἄρτιον, ἔχει 30 (πλὴν τοῦ Φεβρουαρίου).

Ἡ ἑβδομὰς ἔχει 7 ἡμέρας.

Σημείωσις. Ἡ ἐργάσιμος ἡμέρα θεωρεῖται ἴση μὲ 12 ὥρας, ἐκτὸς ἂν εἰς τὸ πρόβλημα ὁρίζηται ἄλλως.

Σημείωσις. Τὰ πρῶτα λεπτὰ σημειοῦνται διὰ μιᾶς ὀξείας· οἷον 15′, τὰ δὲ δεύτερα διὰ δύο· οἷον 20″.

Τροπὴ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ εἰς ἁπλοῦν, ἤτοι εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος.

137. α′) ***Ἐὰν ὁ συμμιγὴς τραπῇ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του, γίνεται ἀκέραιος ἀριθμός.***

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 5 ὥρ. 27′· ἂς τραπῇ δὲ εἰς λεπτὰ πρῶτα (εἰς τὴν τελευταίαν τάξιν του).

Ἐπειδὴ ἡ μία ὥρα ἔχει 60 λεπτὰ πρῶτα, αἱ δύο ὧραι ἔχουσι δύο φορὰς 60, ἤτοι 60×2, αἱ 3 ἔχουσιν 60×3 καὶ αἱ 5 ὧραι ἔχουσιν 60×5, ἤτοι 300 πρῶτα λεπτά, ἐὰν δὲ εἰς τὰ 300 ταῦτα πρῶτα λεπτὰ προσθέσωμεν καὶ τὰ 27′ τοῦ δοθέντος συμμιγοῦς, εὑρίσκομεν 327′· ὥστε ὁ δοθεὶς συμμιγὴς 2 ὧραι 27′ ἐτράπη εἰς 327′.

Ἂς λάβωμεν, ὡς δεύτερον παράδειγμα, τὸν σύμμιγῆ 12 στατ. 18 ὀκάδ. 250 δράμ. ὅστις πρόκειται νὰ τραπῇ εἰς δράμια.

Κατὰ πρῶτον τρέπομεν τοὺς στατῆρας εἰς ὀκάδας καὶ ἔπειτα τὰς ὀκάδας εἰς δράμια· σκεπτόμεθα δὲ ὡς ἑξῆς·

Ἐπειδὴ 1 στατὴρ ἔχει 44 ὀκάδας, οἱ 12 στατῆρες ἔχουσι 44×12 ἢ 528 ὀκάδας· ἔχει ἀκόμη ὁ συμμιγὴς 18 ὀκάδας· ὥστε οἱ 12 στατῆρες καὶ αἱ 18 ὀκάδες γίνονται 546 ὀκάδες.

Ἐπειδὴ 1 ὀκᾶ ἔχει 400 δράμια, αἱ 546 ὀκάδες ἔχουσι 400×546 δράμια, ἤτοι 218400 δράμια· ἔχει δὲ ἀκόμη ὁ συμμιγὴς 250 δράμια· ὥστε γίνονται τὸ ὅλον 218650 δράμια· ἐτράπη λοιπὸν ὁ δοθεὶς συμμιγὴς εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του.

Διάταξις τῆς πράξεως.

Πρὸς εὐκολίαν, διατάσσεται ἡ πρᾶξις ὡς ἑξῆς·

12 στ.		18 ὀκ.	250 δρ.
44			
48			
48			
528	ὀκάδες		
18	ὀκάδες		
546	ὀκάδες		
400	δράμια		
218400	δράμια		
250	δράμια		
218650	δράμια.		

β') ***Ἐὰν ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς τραπῇ εἰς μονάδας ἄλλης τάξεως*** (ἀνωτέρας ἢ ἡ τελευταία), ***γίνεται κλασματικὸς ἀριθμὸς ἢ καὶ μεικτός.***

Ἄς λάβωμεν, ὡς παράδειγμα, τὸν συμμιγῆ 25 ὀκ. 150 δρ. καὶ ἄς τρέψωμεν αὐτὸν εἰς ἀριθμὸν ὀκάδων.

Ὁ ἀριθμὸς 25 εἶναι ὀκάδες· ὥστε θὰ μείνῃ ὡς εἶναι.

Ὁ ἀριθμὸς 150 δράμια πρέπει καὶ αὐτὸς νὰ τραπῇ εἰς ἀριθμὸν ὀκάδων (ἤτοι εἰς κλάσμα ὀκᾶς), τοῦτο δὲ γίνεται εὐκολώτατα, ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν, ὅτι δράμιον σημαίνει τὸ τετρακοσιοστὸν τῆς ὀκᾶς (ἤτοι 1 δράμ. $=\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς)· ὥστε, ἀντὶ νὰ εἴπω 150 δράμια, δύναμαι νὰ εἴπω $\frac{150}{400}$ τῆς ὀκᾶς.

Ὥστε ὁ δοθεὶς συμμιγὴς 25 ὀκ. 150 δρ. ἐτράπη εἰς ὀκάδας καὶ ἔγινεν $25\,\frac{150}{400}$ ὀκάδες, ἢ $25\,\frac{15}{40}$ ἢ ὀκάδες $25\,\frac{3}{8}$.

Ἄς λάβωμεν, ὡς δεύτερον παράδειγμα, τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν 8 ὀργ. 5 πόδ. 3 δάκ. 10 γραμμ. καὶ ἄς τρέψωμεν αὐτὸν εἰς ἀριθμὸν ποδῶν.

Αἱ μὲν ὀργυιαὶ καὶ οἱ πόδες γίνονται ἀκέραιος ἀριθμὸς ποδῶν, ὡς ἀνωτέρω διελάβομεν·

8 ὀργ.	ὥστε αἱ 8 ὀργ. 5 πόδ. = 53 πόδ. τὸ δὲ ἄλλο	3 δάκ.
6	μέρος τοῦ συμμιγοῦς (ἤτοι τοὺς 3 δακ. 10	12
48 πόδ.	γρ.), τρέπομεν κατὰ πρῶτον εἰς γραμμάς.	36 γρ.
5		10
53 πόδ.		46 γρ.

Μένει τώρα νὰ τρέψωμεν τὰς 46 γραμμὰς εἰς πόδας (ἢ μέρη τοῦ ποδός)· πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι ἀρκεῖ νὰ μάθωμεν, πόσον μέρος τοῦ ποδὸς εἶναι μία γραμμή, δηλαδὴ πόσας γραμμὰς ἔχει εἰς πούς.

$$1 \text{ π.} = 12 \text{ δ.} = 12 \times 12 \text{ γρ.} = 144 \text{ γρ.}$$

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μία γραμμὴ εἶναι τὸ $\frac{1}{144}$ τοῦ ποδός, αἱ 46 γραμμαὶ εἶναι τὰ $\frac{46}{144}$ ἢ $\frac{23}{72}$ τοῦ ποδός.

Ἄρα ὁ δοθεὶς συμμιγὴς ἐτράπη εἰς ἀριθμὸν ποδῶν $53\frac{23}{72}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 15 ὥρ. 24′, 10″ τρέπεται εἰς ἀριθμὸν ὡρῶν $15\frac{29}{72}$.

Ὁ αὐτὸς συμμιγὴς τρέπεται εἰς ἀριθμὸν λεπτῶν $924'\frac{1}{6}$.

Ὁ αὐτὸς συμμιγὴς τρέπεται εἰς ἀριθμὸν ἡμερῶν $\frac{1109}{1728}$.

Ἀπὸ τὰ παραδείγματα ταῦτα συμπεραίνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

138. ***Διὰ νὰ τρέψωμεν συμμιγῆ ἀριθμὸν εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος του, τρέπομεν τὰ μέρη, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι μεγαλύτεραι τῆς δοθείσης, εἰς ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν τῆς μονάδος ταύτης, τὰ δὲ μέρη, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι μικρότεραι τῆς δοθείσης, τρέπομεν εἰς κλάσμα τῆς αὐτῆς μονάδος. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ κλάσματος τούτου τρέπομεν πρῶτον τὰ μέρη ταῦτα εἰς τὸ τελευταῖον ἐξ αὐτῶν καὶ ἔπειτα ὑπὸ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν γράφομεν παρονομαστὴν τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει, πόσαι μονάδες τῆς τελευταίας τάξεως ἀποτελοῦσι τὴν ὁρισθεῖσαν μονάδα.***

Παραδείγματα.

$$3 \text{ ὀργ. } 2 \text{ πόδ. } 6 \text{ δακτ.} = 3\frac{5}{12} \text{ τῆς ὀργυιᾶς} = 20\frac{1}{2} \text{ πόδ.} = 246 \text{ δάκτ.}$$

$$6 \text{ ὥρ. } 40', 20'' = 6\frac{121}{180} \text{ ὥρ.} = 400'\frac{1}{3} = 24020''.$$

Τροπὴ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῆ.

139. Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται κλασματικός τις ἀριθμός, οἷον $\frac{13}{5}$ τῆς ὀκᾶς, νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ.

Τὸ κλάσμα τοῦτο $\frac{13}{5}$ εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου ἀνθρώπου, ὅταν 5 ἄνθρωποι μοιρασθῶσι 13 ὀκάδας. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν 13:5, βλέπομεν, ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος 2 ὀκάδας καὶ θὰ περισσεύουν καὶ 3 ὀκάδες.

Διὰ νὰ μοιράσωμεν καὶ τὰς 3 ὀκάδας εἰς τοὺς 5 ἀνθρώπους, τρέπομεν αὐτὰς εἰς δράμια καὶ γίνονται 400×3, ἤτοι 1200 δράμια· μοιράζομεν λοιπὸν τὰ 1200 δράμια εἰς τοὺς 5 ἀνθρώπους καὶ βλέπομεν, ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος 240 δράμια, χωρὶς νὰ περισσεύσῃ τίποτε· ὥστε ὁ μερισμὸς ἐτελείωσεν. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι εἶναι

$$\frac{13}{5} \text{ τῆς ὀκᾶς} = 2 \text{ ὀκ. } 240 \text{ δράμια.}$$

Διάταξις τῆς πράξεως.

Πρὸς συντομίαν διατάσσεται ἡ πρᾶξις ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l}
13 \text{ ὀκ} & 5 \\ \cline{2-2}
3 & 2 \text{ ὀκ. } 240 \text{ δρ.} \\
400 & \\ \cline{1-1}
1200 \text{ δράμ.} & \\
20 & \\
00 &
\end{array}$$

Ὁμοίως τρέπεται καὶ τὸ κλάσμα $\frac{24}{7}$ τῆς ὀργυιᾶς εἰς συμμιγῆ.

$$\begin{array}{r|l}
24 \text{ ὀρ.} & 7 \\ \cline{2-2}
3 & 3 \text{ ὀρ. } 2^{\pi.}\ 6^{\delta.}\ 10\gamma\rho.\ \frac{2}{7} \\
6 & \\ \cline{1-1}
18 \ \pi. & \\
4 & \\
12 & \\ \cline{1-1}
48 \ \delta. & \\
6 & \\
12 & \\ \cline{1-1}
72 \ \gamma\rho. & \\
2 &
\end{array}$$

140. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

Διὰ νὰ τρέψωμεν κλασματικὸν ἀριθμὸν εἰς συμμιγῆ, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρανομαστοῦ· τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸ κλάσμα· τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης (ἂν μείνῃ) τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· τὸ πηλίκον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως παριστᾷ μονάδας τῆς τάξεως ταύτης καὶ γράφεται πλησίον τοῦ πρώτου πηλίκου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἂν

μείνῃ) τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως· τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως.

Παραδείγματα.

$\frac{18}{5}$ τῆς ὀκᾶς=3 ὀκ. 240 δρ. $\frac{3}{5}$ τοῦ στατῆρος=26 ὀκ. 160 δρ.

$\frac{6}{7}$ τῆς ἡμέρας=20 ὥρ. 34΄, 17″ $\frac{1}{7}$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

141. Ἡ πρόσθεσις τῶν συμμιγῶν γίνεται, ὡς καὶ ἡ πρόσθεσις τῶν ἀκεραίων· δηλαδὴ προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἑκάστης τάξεως ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως· καὶ ὅταν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων μιᾶς τάξεως δὲν ἀποτελῇ ἀριθμὸν τῆς ἀνωτέρας τάξεως, γράφομεν αὐτὸ ὁλόκληρον· ὅταν ὅμως ἀποτελῇ, τότε διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει, πόσαι μονάδες τῆς τάξεως ταύτης κάμνουσι μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας· καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀθροίσματος, τὸ δὲ πηλίκον ἑνώνομεν μὲ τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Σημείωσις. Πρὸς εὐκολίαν τῆς πράξεως γράφομεν τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε οἱ ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην.

Παραδείγματα.

						6	12	12
18 ὥρ.	28΄ 53″	56 στ.	28 ὀκ.	150 δρ.	8 ὀργ.	3 π.	9 δ.	6 γρ.
6	3΄ 20″		40	280	13		6	7
5	25″						5	10
	8΄ 35″	18	22	160				11
29 ὥρ.	41΄ 13″	76 στ.	3 ὀκ.	190 δρ.	21 ὀργ.	4 π.	10 δ.	10 γρ.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

142. Καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν συμμιγῶν γίνεται, ὡς καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων· δηλαδὴ ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμὸν τοῦ μειωτέου, ἀρχίζοντες ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς τελευταίας τάξεως. Ἐὰν δὲ ἀριθμός τις τοῦ μειωτέου εἶναι μικρότερος τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ τοῦ ἀφαιρετέου, αὐξάνομεν αὐτὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσαι ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, φρον-

τίζοντες ὅμως νὰ προσθέσωμεν ἔπειτα μίαν μονάδα εἰς τὴν ἀμέσως ἀνωτέραν τάξιν τοῦ ἀφαιρετέου (κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἐδ. 19).

Σημείωσις. Πρὸς εὐκολίαν τῆς πράξεως γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου οὕτως, ὥστε οἱ ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ νὰ εὑρίσκωνται εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν στήλην.

Παραδείγματα.

18 ἡμ.	5 ὤρ.	22'	40''
4	12	52'	20''
13 ἡμ.	16 ὥρ.	30'	20''

125 στ.	28 ὀκ.	
8	40	150 δρ.
116 στ.	31 ὀκ.	250 δρ.

8 ὀργ.		5 δακ.	10 γρ.
	5 π.	10	6
7 ὀργ.	0 π.	7 δάκ.	4 γρ.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον.

143. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον*** (ἤτοι διὰ νὰ ἐπαναλάβωμεν συμμιγῆ πολλὰς φοράς), ***πολλαπλασιάζομεν τὰ μέρη του καθ' ἓν χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.***

Παρατήρησις. Ἂν εἰς μερικόν τι γινόμενον περιέχωνται μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἐξάγομεν αὐτὰς καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὸ ἀκόλουθον μερικὸν γινόμενον (δηλ. κατατάσσομεν τὰς μονάδας τοῦ συμμμιγοῦς, ὡς πρέπει)· διὰ τοῦτο ἀρχίζομεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀπὸ τὴν τελευταίαν τάξιν.

Παραδείγματα.

Πρόβλημα. *Ἔχομεν 8 βαρέλλια ζακχάρεως, ἐξ ὧν ἕκαστον ἔχει 5 στ. 28 ὀκ. 160 δρ. πόσην ζάκχαριν ἔχουσιν ὅλα ὁμοῦ ;*

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος πρέπει προφανῶς νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 8, ἤτοι νὰ λάβωμεν τὸν συμμιγῆ ὀκτάκις.

5 στ.	28 ὀκ.	160 δρ.
		8
40 στ.	224 ὀκ.	1280 δρ.

Κατάταξις τῶν μονάδων. Τὰ 1280 δρ. κάμνουν 3 ὀκ. καὶ 80 δρ. αἱ 224 + 3 ἢ 227 ὀκάδες κάμνουν 5 στατ. καὶ 7 ὀκάδας· ὥστε τὸ γινόμενον γράφεται ὡς ἑξῆς· 45 στατ. 7 ὀκ. 80 δρ.

Πρόβλημα. *Ἵνα διατρέξῃ τις ἓν στάδιον, χρειάζεται 1 ὥραν 12' καὶ 20''· πόσας ὥρας χρειάζεται, ἵνα διατρέξῃ 12 στάδια ;*

1 ὥρ.	12′	20″
		12
12 ὥρ.	144′ : 60	240″ : 60

Κατάταξις, 240″ κάμνουν 4′,
144′+4′ ἢ 148′ κάμνουν 2 ὥρας καὶ 28′·
ὥστε τὸ γινόμενον εἶναι 14 ὧραι, 28′.

Διαίρεσις συμμιγοῦς δι᾽ ἀκεραίου.

144. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι᾽ ἀκεραίου*** (ἤτοι διὰ νὰ μερίσωμεν συμμιγῆ εἰς ἴσα μέρη), ***διαιροῦμεν χωριστὰ ἕκαστον τῶν μερῶν του διὰ τοῦ ἀκεραίου.***

Ὅταν δὲ ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ τινος συμμιγοῦς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον, τρέπομεν αὐτὸ εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ ἑνώνομεν αὐτὰς μὲ τὰς ὁμοίας μονάδας τοῦ συμμιγοῦς πρὶν διαιρέσωμεν αὐτάς.

Διὰ τοῦτο ἀρχίζομεν τὴν διαίρεσιν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῆς ἀνωτάτης τάξεως καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰς κατωτέρας.

Παράδειγμα.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ μοιράσωμεν 180 στ. 20 ὀκ. 250 δρ. ἑνὸς πράγματος εἰς 12 ἀνθρώπους. Κατὰ πρῶτον μοιράζομεν τοὺς 180 στ. καὶ εὑρίσκομεν ὅτι λαμβάνει ἕκαστος ἄνθρωπος 15 στατ. χωρὶς νὰ μείνῃ ὑπόλοιπον· ἔπειτα μοιράζομεν καὶ τὰς 20 ὀκ. καὶ λαμβάνει ἕκαστος 1 ὀκᾶν, μένουσι δὲ 8 ὀκάδες· τὰς 8 αὐτὰς ὀκάδας τὰς κάμνομεν δράμια καὶ γίνονται 400×8 ἢ 3200 δράμια· πρέπει δὲ νὰ μοιράσωμεν αὐτὰ εἰς τοὺς 12 ἀνθρώπους· ἔχομεν ὅμως νὰ μοιράσωμεν καὶ 250 δράμια· ὥστε ἔχομεν τὸ ὅλον δρ. 3450. Μοιράζοντες τέλος καὶ αὐτὰ εἰς τοὺς 12 ἀνθρώπους, εὑρίσκομεν, ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος 287 ½ δράμια· ὥστε ἡ διαίρεσις ἐτελείωσε καὶ τὸ πηλίκον εἶναι 15 στ. 1 ὀκ. 287½ δράμ.

Διάταξις τῆς πράξεως.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται χάριν εὐκολίας ὡς ἑξῆς·

180 στ.	20 ὀκ.	350 δρ.	12
60			15 στ. 1 ὀκ. 287 ½ δρ.
0			
20 ὀκ.			
8			
400			
3200			
250 δρ.			
3450 δρ.			
105			
90			
6			

Ὡς παράδειγμα τῆς διαιρέσεως ταύτης, ἂς λύσωμεν καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Ἀτμόπλοιόν τι διήνυσεν 90 μίλια εἰς 11 ὥρας 55′ καὶ 40″ εἰς πόσον χρόνον διανύει τὸ ἓν μίλιον;

Φανερὸν εἶναι, ὅτι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν συμμιγῆ διὰ τοῦ 90.

```
  11     55′     40″   | 90
  60                   |--------------------
-----                    0 ὥρ.  7′  57″ 1/9
 660
  55
-----
 715′
  85
   60
-----
 5100
   40
-----
 5140″
  640
   10
```

ὥστε τὸ ἓν μίλιον τὸ διανύει εἰς 7′,57″ καὶ 1/9 τοῦ δευτέρου λεπτοῦ.

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

145. Ὁ πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ καὶ κατὰ τὴν ἑξῆς μέθοδον; ἥτις λέγεται ***μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν*** (προτιμᾶται δὲ ἡ μέθοδος αὕτη, ὅταν ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστὴς εἶναι πολυψήφιος ἀριθμός)·

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ 6 ὥρ. 40′, 50″ ἐπὶ τὸν 240.

Καθὼς καὶ πρίν, πολλαπλασιάζομεν καὶ πάλιν κάθε μέρος τοῦ συμμιγοῦς χωριστά· καὶ αἱ μὲν 7 ὧραι, πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ τὸν 240, γίνονται ὧραι 7×240 ἢ 1680.

Τώρα, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ 40′ ἐπὶ τὸν 240, παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 60′ (δηλ. 1 ὥρ.) ἐπὶ 240, θὰ εὑρίσκομεν γινόμενον 240 ὥρας· δηλαδὴ 60′×240=240 ὧραι, λοιπὸν 30′×240=120 ὧραι, διότι τὰ 30′ εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 60′ καὶ 10′×240= 40 ὧραι, διότι τὰ 10′ εἶναι τὸ τρίτον τῶν 30′. ὥστε 40′×240=160 ὧραι.

Εὑρήκαμεν δηλαδὴ τὸ γινόμενον τῶν 40′ ἐπὶ 240 ἀναλύσαντες αὐτὰ εἰς 30′ (ἥμισυ τῆς ὥρας) καὶ εἰς 10′ (τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ τρίτον τῶν 30′) ἀνελύσαμεν δηλαδὴ τὰ 40′ εἰς ἁπλᾶ μέρη τῆς ὥρας, ἤτοι τοιαῦτα, ὥστε

νὰ πολλαπλασιάζωνται εὐκόλως. Μένει ἀκόμη νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ 50″ ἐπὶ 240 καὶ πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·
τὰ 10′×240 δίδουν γινόμενον 40 ὥρας·
λοιπὸν τὸ 1′×240=4 ὧραι·
ἄρα τὰ 30″×240=2 ὧραι, διότι 30″ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ 1′
καὶ τὰ 20″×240=1 $\frac{1}{3}$ ὧραι, διότι 20″ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ 1′·
λοιπὸν τὰ 50″×240=3 ὥρ. 20′ $\left(\frac{1}{3}\right.$ ὥρας $\left.=20'\right)$.

Ἀφοῦ ἐπολλαπλασιάσαμεν τὰ μέρη τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ 240, δὲν μένει τώρα ἄλλο, παρὰ νὰ προσθέσωμεν τὰ εὑρεθέντα μερικὰ γινόμενα.

7 ὥρ.×240=	1680 ὥρ.	
40′ ×240=	160 ὥρ.	
50″ ×240=	3 ὥρ.	20′
λοιπὸν τὸ γινόμενον εἶναι	1843 ὥρ.	20′

Διάταξις τῆς πράξεως.

Πρὸς συντομίαν διατάσσεται ἡ πρᾶξις ὡς ἑξῆς·

		7 ὥρ.	40′	50″
		240		
		1680 ὥρ.		
40′	30′=ἥμισυ τῆς ὥρας δίδει	120		
	10′=ἓν τρίτον τῶν 30′,	40		
50″	30″=ἥμισυ τοῦ 1′,	2	(1′ δίδει 4 ὥρ.)	
	20″=ἓν τρίτον τοῦ 1′,	1	20′	
		1843 ὥρ.	20′	

Διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου λύομεν καὶ τὸ ἑξῆς προβλήματα·

1) ***Μὲ 1 τάλληρον ἀγοράζει τις ἐξ ἑνὸς πράγματος 2 στ. 35 ὀκ. 250 δρ. πόσον θὰ ἀγοράσῃ μὲ 280 τάλληρα ;***

Φανερὸν εἶναι, ὅτι πρέπει νὰ ληφθῇ ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 280 φοράς, ἤγουν νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 280.

		2 στ.	35 ὀκ.	250 δρ.
		280		
		560		
35 ὀκ.	22=ἥμισυ τοῦ στατ.	140		
	11=ἥμισυ τῶν 22 ὀκ.	70		
	2 ἓν ἑνδέκατον τῶν 22	12	32 ὀκ.	
		(1 ὀκ. δίδει 6 στ. 16 ὀκ.)		
250 δρ.	200=ἥμισυ τῆς ὀκᾶς	3	8	
	50=ἓν τέταρτον τῶν 200 δρ.	0	35	
		786 στ.	31 ὀκ.	

2) ***Ὁ στατὴρ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 6 δρ. 30 λεπτά· πόσον ἀξίζουν 520 στατῆρες;***

	6 δρ.	30 λεπ.
	520	
	3120	
20 λεπ.=ἓν πέμ. τῆς δραχ.	104	
10 λεπ.=ἥμισυ τῶν 20 λεπ.	52	
	3276 δρ.	

3) ***Κτίστης τις κτίζει εἰς μίαν ὥραν 1 ὀργ. 5 πόδ. καὶ 6 δακτ. πόσον θὰ κτίσῃ εἰς 120 ὥρας ;***

	1 ὀργ	5 πόδ.	6 δακτ.
	120		
	120		
3 π.=ἥμισυ τῆς ὀργυιᾶς	60		
1 π.=ἓν τρίτον τῶν 3 ποδῶν	20		
1 π.=ἓν τρίτον τῶν 3 ποδῶν	20		
6 δάκτ.=ἥμισυ τοῦ ποδὸς	10		
	230 ὀργ.		

4) ***Ὑπηρέτης λαμβάνει κατὰ μῆνα 8 τάλλ. 3 δρ. 40 λεπ· πόσα θὰ λάβῃ εἰς 5 ἔτη ;***

Ἐπειδὴ τὸ ἔτος ἔχει 12 μῆνας, τὰ πέντε ἔτη ἔχουσι 12×5, ἤτοι 60 μῆνας· πρέπει λοιπὸν νὰ ληφθῇ ὁ δοθεὶς συμμιγὴς 60 φοράς, ἤτοι νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 60.

	8 τάλλ.	3 δρ.	40 λεπτ.
	60		
	480		
$2\frac{1}{2}$ δρ.=ἥμισυ τοῦ ταλλ.	30		
$\frac{1}{2}$ δρ.=ἓν δέκατον τοῦ ταλλ.	6	(1 δρ. δίδει 12 τάλλ.).	
20 λεπ.=ἓν πέμπτον τῆς δραχμῆς	2	2 δρ.	
20 λεπ.= » »	2	2 δρ.	
	520 τάλλ.	4 δρ.	

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ κλασματικὸν καὶ ἐπὶ μεικτόν.

146. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.***

Σημείωσις. Τὸ κλάσμα δύναται νὰ εἶναι κοινὸν ἢ καὶ δεκαδικόν. Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν συμμιγῆ 5 ὧραι 18′ 20″ ἐπὶ $\frac{3}{4}$, πολλαπλασιάζω πρῶτον αὐτὸν ἐπὶ 3 καὶ ἔπειτα διαιρῶ τὸ γινόμενον διὰ 4. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

5 ὥρ. 18′ 20″ ἐπὶ $\frac{3}{4}$
3
15 ὥρ. 54′ 60″ | 4
3 | 3 ὥρ. 58′ 45″
60
180′
54′
234′
34′
2′
60″
120″
60″
180″
20
0

Τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι 3 ὥρ. 58′, 45″.

2 πήχ. 5 ρ. ἐπὶ $\frac{5}{6}$
5
10 π. 25 ρ. | 6
4 | 1 π. 9 ρ. $\frac{3}{6}$
8
32 ρ   ἢ 2 π. 1 ρ. $\frac{1}{2}$
25 ρ.
57 ρ.
3

Τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι 2 π. 1 ρ. $\frac{1}{2}$.

Ὁ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον κάμνομεν οὕτω τὸν πολλαπλασιασμὸν συμμιγοῦς ἐπὶ κλάσμα, εἶναι ὁ ἑξῆς·

Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 98), διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν οἱονδήποτε ἐπὶ $\frac{3}{4}$, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ τέταρτον αὐτοῦ τρεῖς φοράς, ἢ τὸ τέταρτον τοῦ τριπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ.

Πρὸς ἐφαρμογήν, ἂς λύσωμεν καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Ἐργάτης ἐκτελεῖ ἔργον τι εἰς 18 ὥρας 50′, 40″· εἰς πόσας ὥρας θὰ ἐκτελέσῃ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ἔργου ;

Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου θὰ τὸ ἐκτελέσῃ εἰς τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ συμμιγοῦς, ἤγουν εἰς τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν 18 ὡρ. 50′, 40″, τὰ δὲ $\frac{2}{5}$ τοῦ ἔργου θὰ τὰ ἐκτελέσῃ εἰς τὰ

$\frac{2}{5}$ τοῦ συμμιγοῦς· ὥστε πρέπει νὰ λάβωμεν δύο φορὰς τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ συμμιγοῦς, ἤτοι νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ $\frac{2}{5}$.

18 ὥρ.	50′	40″		
		2		
36 ὥρ.	100′	80″	5	
1			7 ὥρ.	32′ 16″
60′				
60′				
100				
160				
10				
0				
80″				
30				
0				

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος εἶναι περιττὸν νὰ κατατάσσωμεν, ὅταν τὸ κλάσμα, ἐφ' ὃ πολλαπλασιάζομεν, εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος.

147. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ μεικτόν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον τοῦ μεικτοῦ, ἔπειτα καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα αὐτοῦ καὶ ἑνώνομεν τὰ δύο γινόμενα.***

Πρόβλημα. Ἐὰν μία μηχανὴ ὑφαίνῃ καθ' ἡμέραν 158 πήχ. 3 ρούπ. ἑνὸς ὑφάσματος, πόσον θὰ ὑφάνῃ εἰς 5 ½ ἡμέρας;

Φανερὸν εἶναι, ὅτι διὰ νὰ εὕρω τὸ ζητούμενον, πρέπει νὰ λάβω τὸ πενταπλάσιον τοῦ συμμιγοῦς καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ, ἤγουν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸν ἐπὶ 5 $\frac{1}{2}$.

	158 π. 3 ρ.	158 π. 3 ρ.	2	
	5.	18	79 π. 1 ρ. $\frac{1}{2}$	
	790 π. 15 ρ.	0		
Κατάταξις γινομένου	791 π. 7 ρ.			

Ἕνωσις τῶν δύο γινομένων	791 π.	7 ρ.
	79	1 $\frac{1}{2}$
	871 π.	$\frac{1}{2}$ ρ.

Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ κλάσματος.

148. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸ ἀντεστραμμένον κλάσμα.*

Ὁ λόγος τούτου ἐδόθη εἰς τὴν διαίρεσιν ἀριθμοῦ διὰ κλάσματος (ἰδὲ ἐδάφ. 106).

149. *Διὰ μεικτοῦ ἀριθμοῦ δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν κανένα ἀριθμόν, ἀλλὰ τρέπομεν τὸν μεικτὸν (διαιρέτην) εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν*

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ.

150. Ὁ πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ γίνεται ὡς ἑξῆς· *Πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον μὲ ἕκαστον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστοῦ χωριστὰ καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ μερικὰ γινόμενα.*

Τὸν πολλαπλασιαστέον διακρίνομεν ἐκ τούτου, ὅτι εἶναι ὁμοειδὴς μὲ τὸ γινόμενον, ἤτοι σημαίνει τὸ αὐτὸ πρᾶγμα (διότι τὸ γινόμενον γίνεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως).

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ μὲ καθὲν ἐκ τῶν μερῶν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἢ τρέπομεν τὰ μέρη ταῦτα εἰς ἀριθμοὺς μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μονάδος (τὴν ὁποίαν ὁρίζει τὸ πρόβλημα, διότι κατὰ τὸ πρόβλημα δι' ἑκάστην τοιαύτην μονάδα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ λαμβάνεται εἰς τὸ γινόμενον ὅλος ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ δι' ἕκαστον μέρος αὐτῆς λαμβάνεται εἰς τὸ γινόμενον τὸ ὁμώνυμον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου) ἢ μεταχειριζόμεθα τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν (ὅπερ εἶναι συνήθως εὐκολώτερον).

Καθὼς εἰς πάντα πολλαπλασιασμόν, οὕτω καὶ ἐνταῦθα τὰ μέρη τοῦ πολλαπλασιαστοῦ θεωροῦνται ὡς ἀφῃρημένοι ἀριθμοί.

Πρόβλημα. Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 5 δρ. 20 λ. πόσον ἀξίζουν 12 π. 6 ρ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ;

Πολλαπλασιαστέος μὲν εἶναι αἱ 5 δρ. 20 λεπ. πολλαπλασιαστὴς δὲ οἱ 12 π. 6 ρ. (ἢ $12\frac{6}{8}$), διότι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου πρέπει νὰ λάβωμεν ὅλον τὸν συμμιγῆ 5 δρ. 20 λ. δώδεκα φορὰς καὶ τὸ ὄγδοον αὐτοῦ ἓξ φοράς. Οἱ 12 πήχεις ἀξίζουν 12 φορὰς 5 δρ. 20 λ. διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὴν ἀξίαν τῶν 12 πήχεων, πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ 5 δρ. 20 λεπ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 12 καὶ εὑρίσκομεν

62 δρ. 40 λεπτά.

Διὰ νὰ εὕρω, πόσον ἀξίζουν τὰ 6 ρούπ. ἢ τρέπω αὐτὰ εἰς πήχεις (διότι τοῦ πήχεως ἡ ἀξία ἐδόθη), ὅτε γίνονται $\frac{6}{8}$ ἢ $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως, καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζω τὸν συμμιγῆ ἐπὶ $\frac{3}{4}$, ἢ μεταχειρίζομαι τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν ὡς ἑξῆς·

τὰ 8 ρούπια ἀξίζουν..................	5 δρ.	20 λεπ.
τὰ 4 » »	2	60
τὰ 2 » »	1	30
ἄρα τὰ 6 » »	3	90
ὥστε οἱ 12 π. καὶ τὰ 6 ρούπια ἀξίζουν.......	66	30

Ἡ πρᾶξις διατάσεται ὡς ἑξῆς·

	5 δρ.		20 λ.
	12 π.		6 ρ.
ἀξία τῶν 12 π.	πρὸς 5 δρ.	60	
	πρὸς 20 λ.	2	40
ἀξία τῶν 6 ρ.	τῶν 4,	2	60
	τῶν 2,	1	30
	γινόμενον	66 δρ.	30.

Πρόβλημα. Τὸ ρούπιον ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 5 δρ. 20 λ. πόσον ἀξίζουν 12 π. καὶ 6 ρ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ;

Οἱ συμμιγεῖς εἶναι οἱ ἴδιοι· ἀλλὰ τώρα πρέπει ὁ πολλαπλασιαστέος 5 δρ. 20 λ. νὰ ληφθῇ τόσας φοράς, ὅσα ρούπια ἔχει ὁ συμμιγής (ἤτοι 102 φοράς), διότι ἕκαστον ρούπιον ἀξίζει 5 δρ. 20 λ. Ἐνταῦθα λοιπὸν πολλαπλασιαστὴς εἶναι ὁ ἀκέραιος 102· ἐκτελοῦντες δὲ τὸν πολλαπλασιασμόν, εὑρίσκομεν 530 δρ. 40 λ.

Πρόβλημα. Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 8 δρ. 40 λ. πόσον ἀξίζουν 20 ὀκ. 150 δράμ. τοῦ ἰδίου πράγματος ;

Πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ συμμιγὴς 8 δρ. 40 λ. πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ συμμιγὴς 20 ὀκ. 150 δρ. (ἢ 20 $\frac{150}{400}$).

		8 δρ.	40 λεπ.
		20 ὀκ.	150 δράμ.
ἀξία τῶν 20 ὀκ.	πρὸς 8 δρ.	160 δρ.	
	πρὸς 40 λ.	8	
ἀξία τῶν 150 δρ.	τῶν 100 δρ. $= \frac{1}{4}$ ὀκᾶς,	2	10 λ.
	τῶν 50 δρ. $= \frac{1}{2}$ τῶν 100,	1	05
	γινόμενον	171 δρ.	15 λ.

Πρόβλημα. Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζει τις 20 ὀκ. 150 δρ. ἐξ ἑνὸς πράγματος· πόσον ἀγοράζει μὲ 8 δρ. 40 λεπτά ;

Οἱ συμμιγεῖς εἶναι οἱ ἴδιοι τοῦ προηγουμένου προβλήματος· ἀλλ᾽ ἐδῶ ζητοῦμεν ὀκάδας, ἤγουν τὸ γινόμενον μέλλει νὰ εἶναι ὀκάδες· ὥστε τώρα πολλαπλασιαστέος εἶναι αἱ 20 ὀκ. 150 δρ. πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ 8 δρ. 40 λ. $\left(\text{ἢ } 8\ \frac{2}{5} \right)$.

		20 ὀκ.	150 δράμ.
		8 δρ.	40 λ.
ἀγοράζει μὲ 8 δρ.	ἀπὸ 20 ὀκ.	160 ὀκ.	
	ἀπὸ 100 δράμ.	2 ὀκ.	
	ἀπὸ 50 δράμ.	1	
ἀγοράζει μὲ 40 λ.	μὲ 20 λ. $= \frac{1}{5}$ δρ.	4	30 δράμ.
	μὲ 20 λ. $= \frac{1}{5}$ δρ.	4	30 δράμ.
		171	60 δράμ.

Πρόβλημα. Κρήνη τις παρέχει κάθε ὥραν 850 ὀκ. 275 δρ. ὕδατος· πόσον θὰ δώσῃ εἰς 18 ὥρ. καὶ 40′;

		850 ὀκ.	275 δράμ.
		18 ὥρ.	40′
θὰ δώσῃ εἰς 18 ὥρας	ἀπὸ 850 ὀκ.	6800 ὀκ.	
		850	
	ἀπὸ 200 δρ.	9	
	ἀπὸ 50 δρ.	2	100 δράμ.
	ἀπὸ 25 δρ.	1	50
θὰ δώσῃ εἰς 40′	εἰς 30′ $= \frac{1}{2}$ ὥρ.	425	$137\ \frac{1}{2}$
	εἰς 10′ $= \frac{1}{3}$ τῶν 30′	141	$312\ \frac{1}{2}$
	τὸ ὅλον	15879 ὀκ.	200 δρ.

Πρόβλημα. Εἷς ὑφαντὴς χρειάζεται 1 ὥρ. 12′ διὰ νὰ ὑφάνῃ ἕνα πῆχυν ὑφάσματος· πόσας ὥρας χρειάζεται διὰ νὰ ὑφάνῃ 22 π. 5 ρ. ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

		1 ὥρ.	12′
		22 π.	5 ρ.
Διὰ τοὺς 22 π. χρειάζεται	ἀπὸ 1 ὥρ.	22 ὥρ.	
	ἀπὸ 12′ $= \frac{1}{5}$ ὥρ.	4	24′
Διὰ τὰ 5 ρούπ. χρειάζεται	τὰ 4 ρ. $= \frac{1}{2}$ πήχ.	0 ὥρ.	36′
	τὸ 1 ρ. $= \frac{1}{4}$ τῶν 4	0	9′
	τὸ ὅλον	27 ὥρ.	9′

Πρόβλημα. *Μία οἰκογένεια χρειάζεται 580 ὀκ. 300 δρ. σίτου δι' ἓν ἔτος· πόσον χρειάζεται δι' 9 μῆνας καὶ 15 ἡμέρας;*

		580 ὀκ.	300 δράμ.
		9 μ.	15 ἡμ.
Διὰ τοὺς 9 μῆνας χρειάζεται	διὰ τοὺς 6 μ. $= \frac{1}{2}$ ἔτους,	290 ὀκ.	150 δράμ.
	διὰ τοὺς 3 μ. $= \frac{1}{2}$ τῶν 6,	145	75
Διὰ τὰς 15 ἡμέρας $= \frac{1}{6}$ τῶν 3 μ. χρειάζεται		24	$79 \frac{1}{6}$
	τὸ ὅλον χρειάζεται	459 ὀκ.	$304 \frac{1}{6}$ δρ.

Πρόβλημα. *Μία ὀκᾶ σίτου ἀνταλλάσσεται μὲ 1 ὀκ. 250 δρ. κριθῆς· μὲ πόσας ὀκάδας κριθῆς θὰ ἀνταλλαχθῶσι 12 ὀκ. 100 δράμ. σίτου;*

Πολλαπλασιαστέος μὲν εἶναι ὁ συμμιγὴς 1 ὀκ. 250 δρ. κριθῆς, διότι ὀκάδες κριθῆς θὰ εἶναι τὸ γινόμενον· πολλαπλασιαστὴς δὲ εἶναι αἱ 12 ὀκ. 100 δρ. ἢ $12 \frac{1}{4}$, διότι πρέπει νὰ λάβωμεν 12 φορὰς τὸν συμμιγῆ 1 ὀκ. 250 δρ. καὶ τὸ τέταρτον αὐτοῦ ἅπαξ·

	1 ὀκ.	250 δρ.
	12	100
αἱ 12 ὀκάδες θὰ ἀνταλλαχθῶσι μὲ	19 ὀκ.	200 δρ.
τὰ 100 δρ. $= \frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἀνταλλάσσονται μὲ	0	$162 \frac{1}{2}$ δρ.
τὸ ὅλον	19 ὀκ.	$362 \frac{1}{2}$ δρ.

Δυνατὸν ὁ πολλαπλασιαστέος νὰ ἔχῃ καὶ ἕνα μόνον ἀριθμόν, ὡς συμβαίνει εἰς τὰ ἑξῆς προβλήματα·

Πρόβλημα. *Ὁ στατὴρ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 8 δραχ. πόσον ἀξίζουν 5 στ. 28 ὀκ.;*

Πολλαπλασιαστέος εἶναι ἐδῶ αἱ 8 δραχμαί, πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ συμμιγὴς 5 στ. 28 ὀκ. $\left(\text{ἢ ὁ } 5 \frac{28}{44} \right)$

		8 δρ.	
		5 στ.	28 ὀκ.
ἀξία τῶν 5 στ.	....	40 δρ.	
τῶν 28 ὀκ.	τῶν $22 = \frac{1}{2}$ στ.	4	
	τῶν $4 = \frac{1}{11}$ στ.	0	72 λεπ. $\frac{8}{11}$
	τῶν 2	0	36 » $\frac{4}{11}$
γινόμενον ἢ ἀξία τοῦ ὅλου		45 δρ.	9 λεπ. $\frac{1}{11}$

Πρόβλημα. Ἐργάτης τις λαμβάνει κάθε ὥραν 4 δραχ. πόσον λαμβάνει, ἂν ἐργασθῇ 15 ὥρ. 20′ ;

	4 δρ.	
	15 ὥρ.	20′
διὰ τὰς 15 ὥρας	60 δρ.	
διὰ τὸ τρίτον τῆς ὥρας	1	33 λεπ. $\frac{1}{3}$
τὸ ὅλον	61 δρ.	33 λεπ. $\frac{1}{3}$.

Πρόβλημα. Ὁ πῆχυς μιᾶς τσόχας ἔχει βάρος 250 δράμια· πόσον βάρος ἔχουσι 18 π. 5 ρ. ἐκ τῆς αὐτῆς τσόχας;

	250	
	18 πήχ.	5 ρ.
βάρος τῶν 18 πήχ.	2000 δράμ.	
	250	
βάρος τῶν 5 ρ. { τῶν 4 ρ. $= \frac{1}{2}$ πήχ.	125	
τοῦ 1 ρ. $= \frac{1}{4}$ τῶν 4,	31 $\frac{1}{4}$	
τὸ ὅλον δρ.	4656 $\frac{1}{4}$ ἢ 11 ὀκ. 256 δρ. $\frac{1}{4}$.	

Πρόβλημα. Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 6 δραχ. πόσον ἀξίζουν τὰ 350 δράμια ;

ἀξία τῶν 200 δρ. = 3 δρ.
» » 100 δρ. = 1 50 λ.
» » 50 δρ. = 0 75 ἄρα ἀξία τῶν 350 δρ. = 5 δρ. 25.

Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς.

151. Συμμιγὴς διαιρέτης δὲν ἠμπορεῖ νὰ διαιρέσῃ κανένα ἀριθμόν· ὥστε ἐνταῦθα ὁ διαιρέτης τρέπεται εἰς ἀκέραιον ἢ κλάσμα μιᾶς τῶν μονάδων του.

152. Ὁ συμμιγὴς διαιρετέος θὰ εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ ζητουμένου πηλίκου, ὁ δὲ ζητούμενος οὗτος ἀριθμὸς δύναται νὰ εἶναι ἐν τῷ γινομένῳ ἢ πολλαπλασιαστὴς ἢ πολλαπλασιαστέος· καὶ κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ὁ ζητούμενος ἀριθμός, πολλαπλασιάζων τὸν διαιρέτην, δίδει τὸν διαιρετέον· ἑπομένως ὁ διαιρετέος γίνεται ἐκ τοῦ διαιρέτου καὶ ἐκ τῶν μερῶν του καὶ εἶναι διὰ τοῦτο ὁμοειδὴς πρὸς αὐτὸν καὶ ἡ τοιαύτη διαίρεσις εἶναι μέτρησις· κατὰ δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν ὁ ζητούμενος ἀριθμός, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην, δίδει τὸν διαιρετέον· ἑπομένως ὁ διαιρετέος γίνεται

τότε ἐκ τοῦ πηλίκου καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ καὶ εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς αὐτό, πρὸς δὲ τὸν διαιρέτην διάφορος· ἡ δὲ τοιαύτη διαίρεσις εἶναι μερισμός.
Διὰ τοῦτο διακρίνομεν δύο εἴδη προβλημάτων διαιρέσεως.

Διακρίνομεν δὲ εὐκόλως τὸ εἶδος τῆς διαιρέσεως, ἂν δηλαδὴ εἶναι μέτρησις ἢ μερισμός, ἐὰν ἐξετάσωμεν τὸ αὐτὸ πρόβλημα λαμβάνοντες, ἀντὶ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, οἱουσδήποτε ἀκεραίους.

Προβλήματα μετρήσεως.

Εἰς τὰ προβλήματα ταῦτα ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ὁμοειδεῖς·

Πρόβλημα. Ἐργάτης τις λαμβάνει καθ' ἡμέραν 6 δρ. 50 λ. εἰς πόσας ἡμέρας ἐργαζόμενος θὰ λάβῃ 152 δρ. 80 λ.;

Ἂν ἀντὶ τῶν συμμιγῶν εἴχομεν ἀκεραίους ἀριθμούς, ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου θὰ ἦτο εὐκολωτάτη· ἂν π. χ. ἐλάμβανε καθ' ἡμέραν 6 δρ. καὶ ἐζητεῖτο, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ λάβῃ 152 δρ. φανερὸν εἶναι, ὅτι τόσαι ἡμέραι θὰ ἐχρειάζοντο, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 6 εἰς τὸν 152 δρ ἀλλ' εἶναι εὔκολον νὰ κάμωμεν, ὥστε οἱ δοθέντες συμμιγεῖς νὰ γίνωσιν ἀκέραιοι, ἐὰν τρέψωμεν αὐτοὺς εἰς λεπτά· τὸ πρόβλημα τότε καταντᾷ εἰς τὸ ἑξῆς·

Ἐργάτης λαμβάνει καθ' ἡμέραν 650 λεπτά· εἰς πόσας ἡμέρας ἐργαζόμενος θὰ λάβῃ 15280 λεπτά;

Φανερὸν εἶναι, ὅτι τόσαι ἡμέραι ἐργασίας χρειάζονται, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς 650 εἰς τὸν 15280· εἶναι λοιπὸν πρόβλημα μετρήσεως (σελ. 52, παρατήρ.), καὶ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 15280 διὰ τοῦ 650 θεωροῦντες τοὺς δύο τούτους ἀκεραίους ἀριθμοὺς ὡς ἀφῃρημένους· τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{15280}{650}$ ἢ $\frac{1528}{65}$ καὶ πρέπει νὰ θεωρηθῇ, ὅτι παριστᾷ (ὡς τὸ πρόβλημα λέγει) ἡμέρας· ἐὰν δὲ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν ἡμερῶν, γίνεται

$$23 \text{ ἡμ. } 12 \text{ ὥρ. } 11', 4'' \frac{8}{13}.$$

Ἔστω προσέτι καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ διαιρετέος ἔχει ἕνα μόνον ἀριθμόν·

Μὲ ἓν τάλληρον ἀγοράζει τις ἐξ ἑνὸς πράγματος 15 ὀκ. 350 δρ. πόσα τάλληρα χρειάζεται, διὰ νὰ ἀγοράσῃ 5 στατῆρας ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

Ἐὰν τρέψωμεν καὶ τοὺς δύο εἰς δράμια, τὸ πρόβλημα καταντᾷ εἰς τὸ ἑξῆς·

Μὲ ἓν τάλληρον ἀγοράζει τις ἐξ ἑνὸς πράγματος 6350 δράμια· πόσα τάλληρα χρειάζονται διὰ νὰ ἀγοράσῃ 88000 δράμια ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

Φανερὸν εἶναι, ὅτι τόσα τάλληρα θὰ χρειασθῇ, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 6350 εἰς τὸν 88000· διὰ νὰ εὕρωμεν τοῦτο, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 88000 διὰ τοῦ 6350 (ὡς ἀφῃρημένους ἀριθμούς)· τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{88000}{6350}$ ἢ $\frac{1760}{127}$ καὶ θεωρεῖται ὡς παριστῶν τάλληρα (ὡς ὁρίζει τὸ πρόβλημα)· ἐὰν δὲ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν ταλλήρων, γίνεται

$$13 \text{ τάλλ. } 4 \text{ δρ. } 29 \text{ λεπτ. } \frac{17}{127}.$$

Εἰς τὸ ἑξῆς πρόβλημα ἔχει ὁ διαιρέτης ἕνα μόνον ἀριθμόν·

Μία μηχανὴ ὑφαίνει κάθε ὥραν 5 π. ἑνὸς ὑφάσματος· πόσας ὥρας χρειάζεται διὰ νὰ ὑφάνῃ 1870 πήχεις καὶ 2 ρούπια τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;

Οἱ 5 π. κάμνουν ρούπια 40, οἱ δὲ 1870 πήχεις καὶ 2 ρούπια γίνονται ρούπια 14962· ὥστε πρέπει νὰ εὕρωμεν, πόσας φορὰς χωροῦσι τὰ 40 ρούπια εἰς τὰ 14962 (διότι τόσαι ὧραι χρειάζονται), ἤτοι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 14962 διὰ τοῦ 40. Τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{14962}{40}$ ἢ $\frac{7481}{20}$ καὶ θεωρεῖται ὡς παριστῶν ὥρας (ὡς ὁρίζει τὸ πρόβλημα)· ἐὰν δὲ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν ὡρῶν, γίνεται 374 ὧραι καὶ 3′.

153. Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι

διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι' ἄλλου, ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι μέτρησις, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς ἀκεραίους ὁμοειδεῖς καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τοὺς ἀκεραίους τούτους· τὸ δὲ εἶδος τοῦ πηλίκου προσδιορίζεται ἐκ τοῦ προβλήματος.

Τρέπεται δὲ ὁ συμμιγὴς εἰς ἀκέραιον, ἐὰν τραπῇ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του (ἐδ. 137).

Προβλήματα μερισμοῦ.

Εἰς τὰ προβλήματα ταῦτα ὁ διαιρετέος εἶναι ὁμοειδὴς μὲ τὸ ζητούμενον πηλίκον, διάφορος δὲ τοῦ διαιρέτου.

Πρόβλημα. Ἐργασθείς τις 8 ὥρ. 15′ 20″ ἔλαβεν ὡς ἀμοιβὴν 59 δρ. 65 λ. πόσας ἔλαβε δι' ἑκάστην ὥραν;

Ἂν ἐλάμβανε τὰς 59 δρ. 65 λ. δι' ἐργασίαν 8 ὡρῶν μόνον, θὰ ἦτο εὔκολος ἡ λύσις, διότι εἶναι προφανές, ὅτι τότε ἤρκει νὰ μερίσωμεν τὰς 59 δρ. 65 λ. εἰς 8 ἴσα μερίδια καὶ ἕκαστον μερίδιον θὰ ἦτο ἡ ἀμοιβὴ διὰ τὴν ἐργασίαν 1 ὥρας· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ 8 ὥρ. 15′ 20″ εἰς ἀριθμὸν ὡρῶν· τότε τὸ πρόβλημα καταντᾷ εἰς τὸ ἑξῆς·

Ἐργασθείς τις $\frac{743}{90}$ τῆς ὥρας ἔλαβεν ὡς ἀμοιβὴν 59 δρ. 65 λ. πόσας ἔλαβε δι' ἑκάστην ὥραν;

Λύεται δὲ ἁπλούστατα ὡς ἑξῆς·

Ἀφοῦ διὰ τὰ 743 ἐνενηκοστὰ τῆς ὥρας ἔλαβε 59 δρ. 65 λ. διὰ τὸ 1 ἐνενηκοστὸν ἔλαβε τὸ 743ον μέρος τοῦ 59 δρ. 65 λ. καὶ δι' 90 ἐνενηκοστά, ἤτοι διὰ μίαν ὥραν, ἔλαβεν ἐνενήκοντα φορὰς τὸ 743ον μέρος τοῦ 59 δρ. 65 λ. ἤτοι τὸ γινόμενον τοῦ 59 δρ. 65 λ. ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{90}{743}$· ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμόν, εὑρίσκομεν, ὅτι δι' ἑκάστην ὥραν ἔλαβεν 7 δρ. 22 λ. $\frac{404}{743}$

Πρόβλημα. *Ἁμαξά τις εἰς 7 ὥρ. 45' διέτρεξε 52 στάδ. 428 μέτρα· πόσον διατρέχει καθ' ὥραν;*

Ἐπειδὴ εἰς $\frac{31}{4}$ τῆς ὥρας διέτρεξε τὰ 52 στ. 428 μέτρα, εἰς 1 τέταρτον τῆς ὥρας διέτρεξε τὸ 31ον μέρος τῶν 52 στ. 428 μ. καὶ εἰς μίαν ὥραν διέτρεξε τὰ $\frac{4}{31}$ τῶν 52 στ. 428 μ. ἤτοι τὸ γινόμενον

52 στ. 428 μ. ἐπὶ $\frac{4}{31}$,

ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμόν, εὑρίσκομεν, ὅτι καθ' ὥραν διατρέχει

6 στ. 764 μ. $\frac{28}{31}$.

Πρόβλημα. *Μὲ 1875 δρ. ἠγόρασέ τις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος 254 πήχεις καὶ 3 ρούπια· πρὸς πόσον ἠγόρασε τὸν πῆχυν;*

Οἱ 254 πήχεις καὶ τὰ 3 ρούπια γίνονται 2035 ρούπια· ἐπειδὴ δὲ τὰ 2035 ρούπια ἀξίζουν 1875 δραχμάς, τὸ ἓν ρούπιον θὰ ἀξίζῃ $\frac{1875}{2035}$ τῆς δρ. καὶ ὁ πῆχυς θὰ ἀξίζῃ $\frac{1875 \times 8}{2035}$ τῆς δρ. ἤτοι 7 δρ. 37 λ. $\frac{41}{407}$.

Πρόβλημα. *Σιδηρόδρομός τις διήνυσε 306 στάδια εἰς 12 ὥρας καὶ 45'· πόσον διανύει εἰς 1';*

Αἱ 12 ὥρ. 45' κάμνουν 765', καὶ ἐπειδὴ εἰς 765' διήνυσε 306 στάδια, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον διανύει εἰς 1', πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 306 στ. διὰ τοῦ 765· διαιροῦντες εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς 1' διανύει 400 μ.

Πρόβλημα. *Εἴς τινα ἀγρὸν ἐσπάρησαν 25 ὀκ. 300 δρ. σίτου καὶ παρήγαγον 452 ὀκ. 120 δρ. πόσον παρήγαγεν ἑκάστη ὀκᾶ;*

Ἐνταῦθα γίνεται διάκρισίς τις τῶν δύο συμμιγῶν· ὁ πρῶτος σημαίνει τὸν σπόρον, ὁ δὲ δεύτερος τὸ προϊόν. Τρέποντες τὸν διαιρέτην 25 ὀκ. 300 δρ. εἰς κλάσμα τῆς ὀκᾶς (διότι τὸ προϊὸν τῆς μιᾶς ὀκᾶς ζητεῖται), εὑρίσκομεν $25\frac{3}{4}$ ἢ $\frac{103}{4}$ καὶ διαιροῦντες δι' αὐτοῦ τὸν συμμιγῆ διαιρετέον, εὑρίσκομεν, ὅτι ἑκάστη ὀκᾶ παρήγαγε 17 ὀκ. 226 δρ. $\frac{2}{103}$.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν ἀκόλουθον κανόνα·

154. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι' ἄλλου, ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι μερισμός, τρέπομεν τὸν διαιρέτην εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος του (ἐκείνης, ἣν ὁρίζει τὸ πρόβλημα) καὶ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διαιροῦμεν τὸν διαιρετέον (ἐδάφ. 148).***

Προβλήματα.

1) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 8 δραχμὰς καὶ 75 λεπτά· πόσον ἀξίζουν 18 πήχεις καὶ 6 ῥούπια; (Ἀπ. 164 δρ. 6 λεπ. $\frac{1}{4}$)

2) Ὁ στατὴρ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 5 δρ. καὶ 20 λεπτά· πόσον ἀξίζουν 16 στ. 25 ὀκ. καὶ 240 δράμια; (Ἀπ. 86 δρ. 22 λεπ. $\frac{6}{11}$)

3) Ἀτμόπλοιόν τι διατρέχει εἰς μίαν ὥραν $14\frac{1}{2}$ μίλια· πόσα θὰ διατρέξῃ εἰς 8 ὥρας 15′, 20″; (Ἀπ. 119 μίλια $\frac{127}{180}$)

4) Ἓν βαρέλλιον χωρεῖ 320 ὀκάδας οἴνου καὶ 300 δράμια· πόσον θὰ χωρέσουν 8 βαρέλλια ἴσα μὲ αὐτό; (Ἀπ. 2566 ὀκάδας)

5) Μία μηχανὴ καίει καθ' ἡμέραν δύο τόννους ἀνθράκων καὶ 500 χιλιόγραμμα· πόσον θὰ καύσῃ εἰς 7 ἡμέρας; (Ἀπ. $17\frac{1}{2}$ τόννους)

6) Κτίστης τις κτίζει εἰς μίαν ὥραν τοῖχον 5 ποδῶν, 6 δακτύλων καὶ 5 γραμμῶν· εἰς πόσας ὥρας θὰ κτίσῃ 120 ὀργυιάς; (Ἀπ. 130 ὥρ. 5′ 16″ $\frac{148}{797}$)

7) Ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος ἐπωλήθησαν 18 πήχεις καὶ 3 ῥούπια δι' 70 δρ. καὶ 15 λ. πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς; (Ἀπ. 3 δρ. 81 λ. $\frac{113}{147}$)

8) Ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος ἐπώλησαν δύο ἔμποροι, ὁ μὲν εἰς 15 ὀκ. 300 δράμ. ἀντὶ 52 δραχ. 60 λεπτῶν, ὁ δὲ ἄλλος 152 ὀκ. 250 δράμ. ἀντὶ 500 δραχ. Τίς ἐκ τῶν δύο ἐπώλησεν εὐθηνότερα;

(Ἀπ. Ὁ πρῶτος 3 δρ. 33 λ. $\frac{61}{63}$· ὁ δεύτερος 3 δρ. 27 λ. $\frac{733}{1221}$)

9) Ἄνθρωπός τις ἐγεννήθη τὴν 21 Ἰανουαρίου 1855 καὶ ἀπέθανε τὴν 15 Ἰουλίου 1870· πόσα ἔτη, πόσους μῆνας καὶ πόσας ἡμέρας ἔζησε;

10) Ὡρολόγιόν τι εἰς διάστημα 24 ὡρῶν ἔμεινεν ὀπίσω 8′ καὶ 40″· πόσον μένει ὀπίσω κάθε ὥραν; (Ἀπ. 21″ $\frac{2}{3}$)

11) Σιδηροῦ τινος ἐλάσματος ὁ πῆχυς ἔχει βάρος 90 ὀκ. 150 δράμ. πόσον βάρος ἔχουσι 2 πήχ. 6 ῥούπ. ἐκ τοῦ ἰδίου ἐλάσματος; (Ἀπ. 248 ὀκ. $212\frac{1}{2}$ δράμ.)

12) Μία οἰκογένεια ἐξώδευσε 42 ὀκ. 200 δράμ. ζάκχαριν εἰς 5 μῆνας καὶ 20 ἡμέρας· πόσην ζάκχαριν ἐξοδεύει καθ' ἑκάστην, πόσην τὸν μῆνα καὶ πόσην χρειάζεται κατ' ἔτος; (Ἀπ. Καθ' ἑκάστην 100 δράμια, κατὰ μῆνα 7 ὀκ. 200 δράμ. κατ' ἔτος 90 ὀκ.).

13) Ἐὰν τὸ μέτρον ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζῃ 2 δραχ. 40 λεπτά, πόσον ἀξίζει ὁ μικρὸς πῆχυς; (Ἀπ. 155 λ. $\frac{13}{25}$)

14) Ἠγόρασέ τις βούτυρον 108 ὀκ. 150 δράμ. πρὸς 4,90 δραχ. τὴν ὀκᾶν, ἐπλήρωσε δὲ 95.20 δραχ. πόσα θὰ πληρώσῃ ἀκόμη; (Ἀπ. 435 δρ. 83 λ. $\frac{3}{4}$)

15) Μὲ 12 δραχ. 60 λεπτ. ἠγόρασέ τις 7 ὀκ. 250 δράμ. ἐξ ἑνὸς πράγματος· πόσον ἀγοράζει μὲ 55 δρ. 60 λεπτά; (Ἀπ. 33 ὀκ. 258 δράμ.)

Προβλήματα
τροπῆς παλαιῶν μονάδων εἰς νέας καὶ ἀντιστρόφως.

1) Νὰ τρέψωμεν $7\frac{3}{8}$ μικροὺς πήχεις Κωνσταντινουπόλεως εἰς μέτρα.

Λύσις. Ὁ μικρὸς πῆχυς τῆς Κωνσταντινουπόλεως εἶναι 0,648 τοῦ μέτρου διὰ τοῦτο οἱ 7 πήχεις$=0,648\times7$ τοῦ μέτρου καὶ τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτοῦ $=0,648\times\frac{3}{8}$ τοῦ μέτρου.

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, εὑρίσκομεν 4,779 μέτρα.

2) Νὰ τρέψωμεν 85,3 μέτρα εἰς μικροὺς πήχεις Κωνσταντινουπόλεως.

Λύσις. 0,648 μέτρ. = 1 πήχ. μικρός,

ὅθεν 648 μέτρ. = 1000 πήχ. μικροὶ

καὶ 1 μέτρ. $=\frac{1000}{648}$

καὶ 85,3 μέτρ. $=\frac{1000}{648}\times85,3=\frac{100}{648}\times853$ πήχ.

καὶ ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, εὑρίσκομεν 131 πήχεις, 5 ῥούπια $\frac{7}{81}$.

3) Νὰ τρέψωμεν 15 ὀκ. καὶ 250 δράμ. εἰς χιλιόγραμμα.

Λύσις. Ἡ ὀκᾶ ἔχει 1280 γραμμάρια· 15 ὀκ.$=1280\times15$ γραμμάρια·

200 δράμια= 640

50 δράμια= 160·

ἄρα 15 ὀκ. 250 δράμια=20000 γραμμάρια=20 χιλιόγραμμα.

4) Νὰ τρέψωμεν 8 χιλιόγραμμα καὶ 562 γραμμάρια εἰς ὀκάδας.

Λύσις. Ἐπειδὴ 1 χιλιόγρ. $=312\frac{1}{2}$ δράμια καὶ 1 γραμμάριον$=$

$$\frac{312^1/_2}{1000}=\frac{625}{2000}=\frac{5}{16}$$ τοῦ δραμίου,

ἕπεται, ὅτι 8562 γραμμ. $=\frac{5}{16}\times8562$ δράμια καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων, εὑρίσκομεν 6 ὀκ. 275 δράμ. $\frac{5}{8}$.

5) Νὰ τρέψωμεν 505 τεκτον. τετραγ. πήχεις εἰς τετραγ. μέτρα. (Ἀπ. $505\times\frac{9}{16}$)

6) Νὰ τρέψωμεν 612 τετραγ. πήχεις εἰς τεκτον. τετρ. πήχεις. (Ἀπ. $612\times\frac{16}{9}$)

7) Νὰ τρέψωμεν 120 παλαιὰ στρέμματα εἰς βασιλικά.

Λύσις. Ἐπειδὴ 1 παλαιὸν στρέμμα=1,27 βασιλικά, 120 παλαιὰ$=1,27\times120$ βασιλικά· ἐὰν δὲ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, εὑρίσκομεν 152,4 βασιλικὰ στρέμματα.

8) Νὰ τρέψωμεν 160 βασιλικὰ στρέμματα εἰς παλαιά.

Λύσις. Ἐπειδὴ 1 βασιλικὸν στρέμμα=0,787 τοῦ παλαιοῦ, 160 βασιλικὰ$=0,787\times160$ παλ. καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων, εὑρίσκομεν 125,92 παλ. στρέμματα.

9) Πόσας δραχμὰς κάμνουν 162 μάρκα;

Λύσις. Ἐπειδὴ 1 μάρκον=1 δρ. 25, 162 μάρκα$=1,25\times162=202$ δρ. καὶ 50 λ.

10) Πόσα μάρκα κάμνουσι 3000 δραχμαί;

Λύσις. Ἐπειδὴ 1 μάρκον κάμνει 1,25 ἢ $1\frac{1}{4}$ δραχμῆς, 4 μάρκα κάμνουσι 5 δραχμάς, καὶ $\frac{4}{5}$ τοῦ μάρκου κάμνουν 1 δραχμήν, ἄρα 3000 δραχμαὶ κάμνουν μάρκα $\frac{4}{5}\times3000$, ἤτοι μετὰ τὰς πράξεις 2400 μάρκα.

11) Πόσα στάδια κάμνουν 800 ναυτικὰ μίλια;

12) Πόσα μέτρα κάμνουν 5080 ὑάρδαι;

13) Πόσα χιλιόγραμμα κάμνουν ἕνα στατῆρα;

Προσθῆκαι.

Α΄

Πῶς εὑρίσκεται ποία ἡμέρα εἶναι ἡ πρώτη οἱουδήποτε ἔτους μ. Χ.

Ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τοῦ ἔτους ἀφαιροῦμεν μίαν μονάδα καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ 28· εἰς τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ μένει, προσθέτομεν τὸ τέταρτον αὐτοῦ (παραλείποντες τὸ κλασματικὸν μέρος, ἐὰν εἶναι)· τὸ ἄθροισμα διαιροῦμεν τέλος διὰ τοῦ 7 καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης δεικνύει τὴν ἡμέραν τῆς ἑβδομάδος, ἥτις θὰ εἶναι ἢ ἦτο ἡ πρώτη τοῦ ἔτους ἐκείνου· δεικνύει δὲ αὐτὴν ὡς ἑξῆς· ἂν μείνῃ ὑπόλοιπον 1, θὰ εἶναι Κυριακή· ἂν 2, θὰ εἶναι Δευτέρα· ἂν 3, Τρίτη· ἂν 4, Τετάρτη· ἂν 5, Πέμπτη· ἂν 6, Παρασκευή· ἂν 0, Σάββατον.

Παραδείγματα.

1) Νὰ εὕρωμεν ποία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος ἦτο ἡ πρώτη τοῦ ἔτους 1844.

Ἀφαιροῦμεν 1 καὶ μένει 1843.

Διαιροῦμεν τὸ 1843 διὰ τοῦ 28 καὶ μένει ὑπόλοιπον 23.

Προσθέτομεν εἰς τὸ ὑπόλοιπον 23 τὸ τέταρτον αὐτοῦ 5 (τὸ ἀκέραιον μέρος) καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα 28.

Διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα 28 δι᾽ 7 καὶ μένει ὑπόλοιπον 0· ὥστε ἡ πρώτη ἡμέρα τοῦ ἔτους 1844 ἦτο Σάββατον.

2) Νὰ εὕρωμεν ποία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος ἦτο ἡ πρώτη τοῦ ἔτους 1921.

Ἀφαιροῦμεν 1 καὶ μένει 1920.

Διαιροῦμεν τὸ 1920 διὰ τοῦ 28 καὶ μένει ὑπόλοιπον 16.

Προσθέτομεν εἰς τὸ 16 τὸ τέταρτον αὐτοῦ 4 καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα 20.

Διαιροῦμεν τὸ 20 διὰ 7 καὶ μένει ὑπόλοιπον 6. Ὥστε ἡ πρώτη ἡμέρα τοῦ ἔτους 1921 ἦτο Παρασκευή.

Σημείωσις. Ἐπειδὴ αἱ 365 ἡμέραι, ἃς ἔχουσι τὰ κοινὰ ἔτη, κάμνουν 52 ἑβδομάδας καὶ μίαν ἡμέραν περιπλέον, διὰ τοῦτο ἡ πρώτη τοῦ ἔτους ἀπὸ κάθε κοινὸν ἔτος εἰς τὸ ἑπόμενόν του μετακινεῖται καὶ προχωρεῖ κατὰ μίαν ἡμέραν τῆς ἑβδομάδος· ἀλλὰ ἀπὸ κάθε δίσεκτον εἰς τὸ ἑπόμενόν του ἔτος προχωρεῖ ἡ πρώτη τοῦ ἔτους κατὰ δύο ἡμέρας τῆς ἑβδομάδος· οἷον ἡ πρώτη ἡμέρα τοῦ 1895 ἦτο Κυριακή, ἡ πρώτη τοῦ 1896 Δευτέρα· ἀλλ᾽ ἡ πρώτη τοῦ 1897 Τετάρτη.

Μετὰ παρέλευσιν 28 ἐτῶν αἱ ἡμέραι τῆς ἑβδομάδος ἐπανέρχονται αἱ ἴδιαι κατὰ τὰς αὐτὰς ἡμερομηνίας· ἑπομένως ἡ 1η Ἰανουαρίου τῶν ἐτῶν 1844, 1872, 1900 κτλ. εἶναι ἡ ἰδία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος.

Β'

Πῶς εὑρίσκεται ποία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος εἶναι, ὅταν δοθῇ τὸ ἔτος, ὁ μὴν καὶ ἡ ἡμερομηνία.

Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῆς πρώτης τοῦ ἔτους καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον προσθέτομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν ἑκάστου μηνὸς (παραλείποντες τὰς 28 ἡμέρας ἑκάστου) ἀπὸ τοῦ Ἰανουαρίου καὶ ἐφεξῆς κατὰ σειρὰν μέχρι τοῦ μηνός, ὅστις προηγεῖται τοῦ δοθέντος· προσθέτομεν ἀκόμη καὶ τὴν δεδομένην ἡμερομηνίαν ἠλαττωμένην κατὰ 1. Τὸ προκῦπτον ἄθροισμα διαιροῦμεν δι' 7 καὶ τὸ ὑπόλοιπον δεικνύει τὴν ἡμέραν τῆς ἑβδομάδος.

Παραδείγματα.

1) Νὰ εὑρεθῇ ποία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος ἦτο ἡ 1 Ἀπριλίου τοῦ 1844.

Ἡ πρώτη ἡμέρα τοῦ 1844 ἦτο Σάββατον	= 0	
ἡμέραι τοῦ Ἰανουαρίου	= 3	
» » Φεβρουαρίου	= 1	(διότι εἶχεν 29)
» » Μαρτίου	= 3	
» » Ἀπριλίου 1 — 1	= 0	
ἄθροισμα	7	

Διαιροῦμεν τὸ 7 δι' 7 καὶ μένει 0· ὥστε ἡ 1 Ἀπριλίου τοῦ 1844 ἦτο Σάββατον.

2) Νὰ εὑρεθῇ ποία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος ἦτο ἡ 25 Μαρτίου τοῦ 1821.

Θὰ εὕρω πρῶτον, ποία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος ἦτο ἡ 1η Ἰανουαρίου 1821. Ἀφαιρῶ 1 καὶ μένει 1820. Διαιρῶ τὸν 1820 δι' 28 καὶ μένει 0· προσθέτω τὸ τέταρτον τοῦ 0 καὶ ἔχω πάλιν 0, διαιρῶ δι' 7 καὶ μένει 0· ὥστε ἡ 1η τοῦ ἔτους 1821 ἦτο Σάββατον.

πρώτη τοῦ ἔτους Σάββατον	= 0
ἡμέραι Ἰανουαρίου	= 3
» Φεβρουαρίου	= 0
» Μαρτίου 25 — 1	= 24
ἄθροισμα	27

Διαιρῶ τὸ 27 δι' 7 καὶ μένει 6· ὥστε ἡ 25 Μαρτίου τοῦ 1821 ἦτο Παρασκευή.

Σημείωσις. Ἡ 1η καὶ ἡ 8η (1 + 7) καὶ ἡ 15η (8 + 7) καὶ ἡ 22α (15 + 7) καὶ ἡ 29η (22 + 7) ἑκάστου μηνὸς εἶναι ἡ ἰδία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'

ΠΕΡΙ ΜΕΘΟΔΩΝ

Ὁρισμοί.

Ποσὰ ἀνάλογα.

155. Δύο ποσὰ λέγονται **ἀνάλογα,** ἐὰν ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν προξενῇ πολλαπλαπλασιασμὸν καὶ τοῦ ἄλλου ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν· δηλαδή, ὅταν διπλασιάζηται τὸ ἕν, πρέπει νὰ διπλασιάζηται καὶ τὸ ἄλλο καὶ ὅταν τριπλασιάζηται τὸ ἕν, νὰ τριπλασιάζηται καὶ τὸ ἄλλο καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παραδείγματα. Ἂν 2 ὀκάδες ἐξ ἑνὸς πράγματος ἀξίζουν 7 δραχ. αἱ 4 (2×2) ὀκάδες τοῦ ἰδίου πράγματος ἀξίζουν 14 δρ. (7×2), αἱ 6 ὀκάδες (2×3) ἀξίζουν 21 (7×3) δρ. καὶ καθεξῆς· ὥστε ἡ ἀξία ἑνὸς πράγματος καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων του εἶναι ἀνάλογα· ὁμοίως ἡ ἀξία ἑνὸς ὑφάσματος καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεών του εἶναι ἀνάλογα.

Ἂν ἐργάτης τις λαμβάνῃ ἡμερομίσθιον 3 δραχμάς, διὰ δύο ἡμέρας θὰ λάβῃ 6 (3×2) δραχμάς, διὰ 3 θὰ λάβῃ 9 (3×3) καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε τὸ ἡμερομίσθιον τοῦ ἐργάτου καὶ αἱ ἡμέραι τῆς ἐργασίας του εἶναι ἀνάλογα.

Ἂν ὁδοιπόρος τις διανύῃ εἰς μίαν ὥραν 6 στάδια, εἰς 2 ὥρας θὰ διανύσῃ (6×2), ἤτοι 12 στάδια, εἰς 3 ὥρας θὰ διανύσῃ 6×3 ἢ 18 στάδια καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε αἱ ὧραι τῆς ὁδοιπορίας καὶ τὰ διανυόμενα στάδια εἶναι ἀνάλογα.

Ἂν μοιρασθοῦν 1000 δρ. εἰς 5 ἀνθρώπους, θὰ λάβῃ ἕκαστος 200 δρ. ἂν μοιρασθοῦν διπλάσιαι, ἤτοι δρχ. 2000, θὰ λάβῃ ἕκαστος διπλασίας, ἤτοι 400 δρ. ἂν μοιρασθοῦν τριπλάσιαι, ἤτοι 3000, θὰ λάβῃ ἕκαστος τριπλασίας, ἤτοι 600 καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον διανέμεται, καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου ἀνθρώπου εἶναι ἀνάλογα (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων πρέπει νὰ μένῃ ὁ ἴδιος).

Σημείωσις. Δὲν πρέπει νὰ νομίζωμεν, ὅτι, ὅταν δύο ποσὰ συναυξάνωσιν, εἶναί καὶ ἀνάλογα· διότι, παραδείγματος χάριν, τὸ ἀνάστημα τοῦ παιδίου καὶ τὰ ἔτη αὐτοῦ συναυξάνουν καὶ ὅμως δὲν εἶναι ἀνάλογα.

156. Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται **ἀνάλογοι** πρὸς ἄλλους ἴσους τὸ πλῆθος, ὅταν προκύπτωσιν ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μὲ ἕνα ἀριθμόν· π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 10, 12, 20 εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 5, 6, 10, διότι προκύπτουσιν ἐκ τούτων, πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ 2·

Ποσὰ ἀντίστροφα.

157. Δύο ποσὰ λέγονται **ἀντιστρόφως ἀνάλογα** ἢ **ἀντίστροφα**, ἐὰν ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν προξενῇ διαίρεσιν τοῦ ἄλλου διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, δηλαδή, ὅταν τὸ ἓν διπλασιασθῇ, τὸ ἄλλο γίνεται τὸ ἥμισυ καὶ ὅταν τὸ ἓν τριπλασιασθῇ, τὸ ἄλλο γίνεται τὸ τρίτον καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παραδείγματα. Ἐὰν εἷς ἐργάτης τελειώνῃ ἓν ἔργον εἰς 18 ἡμέρας, δύο ἐργάται θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον τοῦτο εἰς 9 μόνον ἡμέρας, 3 ἐργάται θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον εἰς $\frac{18}{3}$, ἤτοι εἰς 6 ἡμέρας καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, εἰς τὰς ὁποίας τελειώνουν ἔργον τι, εἶναι ἀντίστροφα ποσά.

Ἐὰν 5 ἄνθρωποι μοιράσουν 1000 δρ. θὰ λάβῃ ἕκαστος 200 δρ· ἐὰν 10 ἄνθρωποι μοιράσουν τὰς ἰδίας δραχμάς, θὰ λάβῃ ἕκαστος 100 μόνον (τὸ ἥμισυ τοῦ πρώτου μεριδίου), ἐὰν 15 ἄνθρωποι μοιράσουν τὰ ἴδια χρήματα, θὰ λάβῃ καθεὶς $\frac{200}{3}$ ἤτοι 66 $\frac{2}{3}$ καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων, οἱ ὁποῖοι θὰ μοιράσουν πρᾶγμά τι, καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα.

Σημείωσις. Δὲν πρέπει νὰ νομίζωμεν, ὅτι, ὅταν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἀνομοίως (δηλαδὴ τὸ ἓν αὐξάνει καὶ τὸ ἄλλο ἐλαττώνεται) εἶναι καὶ ἀντίστροφα· διότι π. χ. ἂν μία ἅμαξα, συρομένη ὑπὸ 2 ἵππων, διατρέχῃ τὸ ἀπ' Ἀθηνῶν εἰς Πειραιᾶ διάστημα εἰς μίαν ὥραν, συρομένη ὑπὸ 4, δὲν θὰ διατρέξῃ αὐτὸ εἰς $\frac{1}{2}$ ὥραν, οὔτε συρομένη ὑπὸ 8 θὰ διανύσῃ αὐτὸ εἰς $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας.

ΠΕΡΙ ΛΟΓΟΥ

158. ***Λόγος*** τοῦ ἀριθμοῦ α πρὸς τὸν ἀριθμὸν β λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις δεικνύει πῶς ἀποτελεῖται ὁ α ἐκ τοῦ β καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ.

Ὁ λόγος σύγκειται ἀπὸ τὴν μονάδα 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς, καθ' ὃν τρόπον σύγκειται ὁ α ἐκ τοῦ β καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ.

Ἐὰν π. χ. εἶναι $α = β + β + \frac{β}{2}$, ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι $1 + 1 + \frac{1}{2}$, ἤτοι $\frac{5}{2}$.

Σημείωσις. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ὁρίζεται καὶ ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε ὁμοειδῶν ποσῶν.

159. Ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι τὸ πηλίκον $\frac{α}{β}$.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι $2\frac{3}{5}$· τοῦτο σημαίνει, ὅτι εἶναι $α = β + β + \frac{β}{5} + \frac{β}{5} + \frac{β}{5}$

$$\text{ἢ } α = (1 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5})\, β.$$

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ἂν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ β

$$\frac{α}{β} = 1 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 2\frac{3}{5}.$$

ὥστε ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ α διὰ β.

Διὰ τοῦτο ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{α}{β}$ ἢ καὶ διὰ τοῦ $α : β$.

Περὶ ἀναλογιῶν.

160. Ἀναλογία εἶναι ἡ ἰσότης δύο λόγων·

οἷον $\frac{12}{8} = \frac{6}{4}$ ἢ $12 : 8 = 6 : 4$ εἶναι ἀναλογία.

Σημείωσις. Ὅταν ἡ ἀναλογία γράφηται διὰ τεσσάρων ἀριθμῶν, ὡς ἑξῆς· $12 : 8 = 6 : 4$, οἱ εἰς τὰ ἄκρα εὑρισκόμενοι ἀριθμοὶ (οἱ 12 καὶ 4) λέγονται ***ἄκροι*** τῆς ἀναλογίας, οἱ δὲ ἄλλοι δύο λέγονται ***μέσοι***· καὶ οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ λέγονται ***ὅροι*** τῆς ἀναλογίας. Πρὸς τούτοις οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ τῶν δύο λόγων (ὁ 12 καὶ ὁ 6) λέγονται ***ἡγούμενοι,*** οἱ δὲ δεύτεροι λέγονται ***ἑπόμενοι.***

161. Ἐπειδὴ αἱ ἀναλογίαι ὑπάγονται εἰς τὰς ἰσότητας, αἱ ἰδιότητες αὐτῶν εὑρίσκονται ἐκ τῶν γενικῶν ἰδιοτήτων τῆς ἰσότητος· ὥστε εἶναι περιττὸν νὰ γίνηται μακρότερος λόγος περὶ αὐτῶν· διὰ τοῦτο ἀρκούμεθα εἰς τὰς ἑξῆς δύο ἰδιότητας·

1) ***Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων.***

Ἔστω ἡ ἀναλογία $5 : 8 = 10 : 16$ ἢ $\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο ἴσα ἐπὶ 8×16, εὑρίσκομεν

$$\frac{5}{8}\times8\times16=\frac{10}{16}\times16\times8$$

ἢ $5\times16=8\times10$· καὶ αὐτὸ ἐπρόκειτο νὰ δείξωμεν.

Καὶ ἀντιστρόφως· ἐκ τῆς ἰσότητος $5\times16=8\times10$, ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ ἴσα διὰ τοῦ 8×16, προκύπτει

$$\frac{5\times16}{8\times16}=\frac{8\times10}{8\times16} \text{ ἢ } \frac{5}{8}=\frac{10}{16} \text{ ἢ } 5:8=10:16$$

ὥστε, ἐὰν τέσσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον δύο, ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι συνιστῶσιν ἀναλογίαν, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἄκροι εἶναι οἱ παράγοντες τοῦ ἑνὸς γινομένου, μέσοι δὲ οἱ παράγοντες τοῦ ἄλλου.

2) ***Ἐὰν προστεθῶσιν οἱ ὁμοταγεῖς ὅροι ὁσωνδήποτε λόγων ἴσων, προκύπτει λόγος ἴσος.***

Ἔστωσαν ἴσοι οἱ λόγοι

$$\frac{3}{5},\ \frac{6}{10},\ \frac{12}{20}$$

Ἐπειδὴ τὰ κλάσματα ταῦτα εἶναι ἴσα, ἐὰν προσθέσωμεν τοὺς ὁμωνύμους ὅρους αὐτῶν, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{3+6+12}{5+10+20}=\frac{21}{35}$, τὸ ὁποῖον προφανῶς εἶναι ἴσον πρὸς τὰ προηγούμενα· τουτέστιν ὁ λόγος τοῦ $3+6+12$ πρὸς τὸ $5+10+20$ εἶναι ἴσος πρὸς τοὺς δοθέντας ἴσους λόγους.

162. Ὅταν εἷς ὅρος μιᾶς ἀναλογίας εἶναι ἄγνωστος, δυνάμεθα νὰ τὸν εὕρωμεν. Π. χ. ἐὰν ζητῆται ὁ δ' ὅρος, τὸν ὁποῖον παριστῶμεν διὰ τοῦ χ, τῆς ἀναλογίας

$$10:2=15:\chi,$$

θὰ ἔχωμεν $10\times\chi=2\times15$.

Ὥστε $\chi=\frac{2\times15}{10}=3.$

Ἐπίσης ἐκ τῆς ἀναλογίας $12:3=\chi:9$

εὑρίσκομεν $3\times\chi=12\times9$, ὥστε $\chi=\frac{12\times9}{3}=36$

Μέθοδοι.

163. ***Μέθοδος*** λέγεται τρόπος τις γενικός, διὰ τοῦ ὁποίου λύομεν εἶδός τι προβλημάτων.

Στοιχειώδη προβλήματα λέγονται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ ἐξ αὐτῶν εὑρίσκεται ὁ ἄγνωστος διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διὰ διαιρέσεως.

Τοιαῦτα εἶναι λ. χ. τὰ ἑξῆς δύο γενικὰ προβλήματα·

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία πολλῶν μονάδων (ἑνὸς πράγματος), ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ ἀξία μιᾶς μονάδος.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος (ἑνὸς πράγματος), ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ ἀξία πολλῶν μονάδων.

Διότι τὸ μὲν πρῶτον λύεται δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ, τὸ δὲ δεύτερον διὰ μιᾶς διαιρέσεως.

Μέθοδος τῶν τριῶν.

164. ***Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν*** λύει τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ, τί γίνεται ἓν ποσόν, ὅταν ἄλλο ποσόν, ἀνάλογον τούτου ἢ ἀντίστροφον, μεταβληθῇ.

Λέγεται δὲ μέθοδος τῶν τριῶν, διότι εἰς αὐτὴν δίδονται τρεῖς ἀριθμοὶ (αἱ δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν δύο ποσῶν καὶ ἡ νέα τιμὴ τοῦ μεταβληθέντος) καὶ ἐξ αὐτῶν ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος.

Τὰ τοιαῦτα προβλήματα ἀναλύονται εἰς δύο στοιχειώδη καὶ λύονται, ὡς φαίνεται ἀπὸ τὰ ἑξῆς παραδείγματα·

Πρόβλημα. Ὀκτὼ ὀκάδες ἑνὸς πράγματος ἀξίζουν 25 δραχμάς· πόσον ἀξίζουν 75 ὀκάδες τοῦ ἰδίου πράγματος;

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν δύο ποσὰ ἀνάλογα τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀκάδων καὶ τὰς δραχμάς· πρῶτα ἦσαν 8 ὀκάδες καὶ 25 δραχμαί, τώρα αἱ ὀκάδες ἔγιναν 75, πόσαι θὰ γίνουν αἱ δραχμαί;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ἀφοῦ αἱ 8 ὀκάδες ἀξίζουν 25 δρ. ἡ μία ὀκᾶ ἀξίζει $\frac{25}{8}$ τῆς δραχμῆς· ἀφοῦ δὲ ἡ μία ὀκᾶ ἀξίζει $\frac{25}{8}$ τῆς δραχμῆς, αἱ 75 ὀκάδες ἀξίζουν $\frac{25}{8} \times 75$, ἤτοι 234 δρ. $\frac{3}{8}$.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι τὸ δοθὲν πρόβλημα ἀνελύθη εἰς τὰ ἑξῆς δύο στοιχειώδη·

1) Αἱ 8 ὀκάδες ἀξίζουν 25 δραχμάς· πόσον ἀξίζει ἡ μία;

2) Ἡ μία ὀκᾶ ἀξίζει $\frac{25}{8}$ τῆς δραχμῆς· πόσον ἀξίζουν αἱ 75;

Πρόβλημα. Μὲ 60 δραχμὰς ἠγόρασέ τις 18 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος· πόσους πήχεις ἀγοράζει μὲ 155 δραχμάς;

Καὶ εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν δύο ποσὰ ἀνάλογα, τοὺς πήχεις καὶ τὰς δραχμάς· πρῶτα ἦσαν 60 δραχμαὶ καὶ 18 πήχεις, τώρα αἱ δραχμαὶ ἔγιναν 155· πόσοι θὰ γίνουν οἱ πήχεις ;

Θὰ εὕρωμεν κατὰ πρῶτον, πόσον ἀγοράζει μὲ μίαν δραχμήν, καὶ πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Μὲ 60 δραχμὰς ἀγοράζει τις 18 πήχεις· ἄρα μὲ μίαν δραχμὴν θὰ ἀγοράσῃ $\frac{18}{60}$ τοῦ πήχεως (ἤτοι τὸ ἑξηκοστὸν τῶν 18 πήχεων).

Ἀφοῦ εὑρήκαμεν πόσον ἀγοράζει ἡ μία δραχμή, λέγομεν· ἡ μία δραχμὴ ἀγοράζει $\frac{18}{60}$ τοῦ πήχεως, ἄρα αἱ 155 δραχμαὶ ἀγοράζουσι $\frac{18}{60}\times155$ πήχεις, ἤτοι $46\frac{1}{2}$ πήχεις.

***Πρόβλημα.* Ἐργάτης τις, ἐργαζόμενος 8 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἐτελείωσεν ἔργον τι εἰς 12 ἡμέρας· ἂν εἰργάζετο 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας ἤθελε τελειώσει τὸ ἔργον ;**

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν δύο ποσὰ ἀντίστροφα· τὰς ὥρας τῆς καθημερινῆς ἐργασίας καὶ τὰς ἡμέρας, εἰς τὰς ὁποίας τελειώνει τὸ ἔργον· πρῶτα αἱ ὧραι ἦσαν 8 καὶ αἱ ἡμέραι 12, τώρα αἱ ὧραι ἔγιναν 9· πόσαι θὰ γίνουν αἱ ἡμέραι ;

Πρῶτον θὰ εὕρωμεν, πόσας ἡμέρας χρειάζεται, ἂν ἐργάζηται 1 ὥραν μόνον καθ' ἡμέραν· καὶ πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ὅταν εἰργάζετο 8 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἐχρειάσθη 12 ἡμέρας διὰ νὰ τελειώσῃ τὸ ἔργον· ἂν λοιπὸν εἰργάζετο μόνον 1 ὥραν καθ' ἡμέραν, θὰ ἐχρειάζετο ὀκταπλασίας ἡμέρας, ἤτοι 12×8 ἡμέρας.

Ἀφοῦ δέ, ὅταν ἐργάζηται μίαν ὥραν καθ' ἡμέραν χρειάζεται 12×8 ἡμέρας ἂν ἐργάζηται 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, θὰ χρειασθῇ ἡμέρας $\frac{12\times8}{9}$ ἤτοι $\frac{96}{9}$ ἢ 10 ἡμέρας ἐργασίας καὶ $\frac{6}{9}$, ἤτοι 16 ὥρας.

Σημείωσις. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα δύναται καὶ ἄλλως νὰ λυθῇ, ὡς ἑξῆς· Διὰ νὰ τελειώσῃ τὸ ἔργον ὁ ἐργάτης, εἰργάζετο 12 ἡμέρας ἀπὸ 8 ὥρας καθ' ἡμέραν· ἄρα εἰργάσθη τὸ ὅλον ὥρας 12×8· τὸ ἔργον λοιπὸν ἀπαιτεῖ ἐργασίαν 12×8 ὡρῶν· ἂν λοιπὸν θέλῃ τις νὰ ἐργάζηται καθ' ἡμέραν 9 ὥρας, θὰ χρειασθῇ ἡμέρας $\frac{12\times8}{9}$.

***Πρόβλημα.* Εἴς τι φρούριον εἶναι 500 στρατιῶται καὶ ἔχουσι τροφὰς δι' 70 ἡμέρας. Ἐὰν γίνῃ ἀνάγκη νὰ περάσουν 90 ἡμέ-**

ρας μὲ τὰς ἰδίας τροφάς, πόσον μέρος τοῦ πρώτου σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος;

Σιτηρέσιον λέγεται τὸ μερίδιον τῆς τροφῆς, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ἕκαστος στρατιώτης καθ' ἡμέραν.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν δύο ἀντίστροφα· τὸ σιτηρέσιον καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν, εἰς τὰς ὁποίας φθάνουν αἱ τροφαί (διότι, ἂν διπλασιασθῇ τὸ σιτηρέσιον, αἱ ἡμέραι τῆς διαρκείας τῶν τροφῶν γίνονται τὸ ἥμισυ, ἂν τριπλασιασθῇ, αἱ ἡμέραι γίνονται τὸ τρίτον καὶ οὕτω καθεξῆς).

Τὸ ἀρχικὸν σιτηρέσιον θὰ παραστήσω διὰ τῆς μονάδος 1 καὶ θὰ εὕρω πρῶτον, πόσον θὰ ἐλάμβανεν ἕκαστος, ἂν ἐπρόκειτο αἱ τροφαὶ νὰ διαρκέσουν μόνον μίαν ἡμέραν.

Ἐὰν θέλουν νὰ διαρκέσουν αἱ τροφαὶ 70 ἡμέρας, λαμβάνει ἕκαστος 1· ἐὰν θέλουν νὰ διαρκέσουν 1 ἡμέραν, θὰ λάβῃ ἕκαστος 1×70 (ἤτοι 70 φορὰς περισσότερον).

Ἂν θέλουν νὰ διαρκέσουν αἱ τροφαὶ μίαν ἡμέραν, θὰ λάβῃ ἕκαστος 70· ἄρα, ἂν θέλουν νὰ διαρκέσουν 90 ἡμέρας, θὰ λαμβάνῃ ἕκαστος 90 φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι $\frac{70}{90}$ ἢ $\frac{7}{9}$.

Ἂν, π. χ. ἐλάμβανε πρὶν ἕκαστος 200 δράμια ἄρτου (τότε τὰ 200 δράμια παριστᾷ ἡ μονὰς 1), τώρα θὰ λαμβάνῃ τὰ $\frac{7}{9}$ τῶν 200 δραμίων, ἤγουν $\frac{1400}{9}$ ἢ $155\frac{5}{9}$ δράμια.

Σημείωσις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ ἁπλούστερον ὡς ἑξῆς·

Ἕκαστος στρατιώτης ἔχει ἰδικά του 70 σιτηρέσια, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ φάγῃ εἰς 90 ἡμέρας· πρέπει λοιπὸν νὰ μοιράσῃ αὐτὰ εἰς 90 μερίδια ἴσα καὶ νὰ λαμβάνῃ καθ' ἡμέραν ἓν μερίδιον· ὥστε θὰ λαμβάνῃ καθ' ἑκάστην $\frac{70}{90}$ τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου.

Σημείωσις Ὁ ἀριθμὸς 500 τῶν στρατιωτῶν δὲν ἐμβαίνει διόλου εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος· δηλαδή, ἡ λύσις θὰ ἦτο ἡ ἰδία, ὅσοι καὶ ἂν ἦσαν οἱ στρατιῶται.

Κανὼν γενικός.

165. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα βλέπομεν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εὑρίσκεται ἐκ τῶν τριῶν δοθέντων, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο καὶ

τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἄλλου. Διὰ νὰ διακρίνωμεν δέ, ποῖοι πρέπει νὰ πολλαπλασιάζωνται, κάμνομεν τὸ ἑξῆς·

Γράφομεν εἰς ἕνα στίχον τὰς πρώτας τιμὰς τῶν δύο ποσῶν, ἔπειτα εἰς δεύτερον στίχον τὴν νέαν τιμὴν τοῦ ἑνὸς καὶ τὴν ζητουμένην νέαν τιμὴν τοῦ ἄλλου, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος χ· φροντίζομεν δέ, ὥστε οἱ ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ νὰ εἶναι εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ γραμμῆς ὁριζοντίας.

Τότε διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον χ, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν (τὸν ὁμοειδῆ του) ***μὲ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς δύο ἄλλους, ὡς εἶναι γεγραμμένοι, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, ἢ μὲ τὸ κλάσμα αὐτὸ ἀντεστραμμένον, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.***

Π. χ. Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ 1ον πρόβλημα, γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{cc} \text{ὀκάδες} & \text{δραχμαὶ} \\ \dfrac{8}{75} & \dfrac{25}{\chi} \end{array}$$

καὶ ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα (πολλαπλασιάζομεν δηλαδὴ τὸν ὁμοειδῆ τοῦ χ, ἤγουν τὸν 25, μὲ τὸ κλάσμα $\frac{8}{75}$ ἀντεστραμμένον (διότι τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα) καὶ εὑρίσκομεν $\chi = 25 \times \frac{75}{8}$.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ 3ον πρόβλημα, γράφομεν πάλιν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{cc} \text{ὧραι ἐργ.} & \text{ἡμέραι} \\ \dfrac{8}{9} & \dfrac{12}{\chi} \end{array}$$

καὶ ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα, ὅτε εὑρίσκομεν $\chi = 12 \times \frac{8}{9}$· ἐνταῦθα πολλαπλασιάζομεν τὸν ὁμοειδῆ τοῦ χ ἐπὶ τὸ κλάσμα τῶν δύο ἄλλων, ὡς εἶναι γεγραμμένοι, διότι τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

Παρατήρησις. Καὶ ὅταν οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ δὲν εἶναι ἀκέραιοι (ἀλλὰ κλασματικοὶ ἢ μεικτοὶ ἢ συμμιγεῖς), πάλιν ὁ ἴδιος κανὼν ἐφαρμόζεται.

Ἐάν, π. χ. δοθῇ τὸ ἑξῆς πρόβλημα· $7\,^1/_2$ πήχεις ὑφάσματός τινος ἀξίζουν 82 δρ. πόσον ἀξίζουν $18\,^1/_2$ πήχεις τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;

Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα, γράφομεν $\frac{7\,^1/_2}{18\,^1/_2}$ πήχεις $\frac{82}{\chi}$ ἀξία·

καὶ ἑπομένως πρὸς εὕρεσιν τοῦ χ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὁμοειδῆ τοῦ ἀγνώστου (τὸν 82) ἐπὶ $18\,^1/_2$ καὶ τὸ γινόμενον νὰ διαιρέσωμεν δι᾿ $7\,^1/_2$.

166. ***Λύσις διὰ τῶν ἀναλογιῶν.*** Εἰς τὸν ἴδιον κανόνα φθάνομεν καὶ διὰ τῶν ἀναλογιῶν. Π. χ. εἰς τὸ α' πρόβλημα τῆς παραγράφου 164 γράφομεν

8 ὀκ. 25 δρ.
75 χ

καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐπειδὴ τὰ δύο ποσά, ὀκάδες καὶ δραχμαί, εἶναι ἀνάλογα, οἱ λόγοι $\frac{8}{75}$ καὶ $\frac{25}{\chi}$ πρέπει νὰ εἶναι ἴσοι· δηλαδὴ ἔχομεν

$$8 : 75 = 25 : \chi$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν $8 \times \chi = 75 \times 25$

$$\text{καὶ } \chi = \frac{75 \times 25}{8}$$

Ἐπίσης εἰς τὸ γ' πρόβλημα τῆς αὐτῆς παραγράφου γράφομεν

8 ὥρ. 12 ἡμ.
9 ὥρ. χ

καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐπειδὴ τὰ δύο ποσά, ὧραι ἐργάσιμοι καὶ ἡμέραι χρειαζόμεναι διὰ τὴν ὅλην ἐργασίαν, εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα, ὁ λόγος $\frac{8}{9}$ θὰ εἶναι ἀντίστροφος τοῦ $\frac{12}{\chi}$ δηλαδὴ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{8}{9} = \frac{\chi}{12},$$

ὅθεν προκύπτει $\chi = \frac{8 \times 12}{9}$.

Προβλήματα.

1) Οἰκογένειά τις χρειάζεται 428 ὀκάδας ἀλεύρου τὸ ἔτος· πόσον χρειάζεται δι' 8 μῆνας; ('Απ. $\frac{428 \times 8}{12} = 285$ ὀκ. 133 δράμ. $\frac{1}{3}$)

2) 50 δράμια μετάξης ἀξίζουν $12\frac{1}{2}$ δραχμάς· πόσον ἀξίζουν 2 ὀκ. 150 δράμ.; ('Απ. 237 δρ. 50).

3) Μὲ 40 δραχμὰς ἀγοράζει τις $5\frac{1}{2}$ ὀκάδας βουτύρου· πόσον ἀγοράζει μὲ 125 δρ. 25 λ.; ('Απ. 17 ὀκ. 88 δρ. $\frac{7}{41}$)

4) Ῥάβδος τις, ἔχουσα μῆκος 1 μέτρου καὶ 80 ἑκατοστῶν τοῦ μέτρου, ὀρθία ρίπτει σκιὰν 3 μέτρων καὶ 12 ἑκατοστῶν· πόσον ὕψος ἔχει ἓν κωδωνοστάσιον, τὸ ὁποῖον τὴν αὐτὴν στιγμὴν ρίπτει σκιὰν 22 μέτρων καὶ 88 ἑκατοστῶν; ('Απ. 13 μ. 20 ἑκ.).

Σημείωσις. Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, παραδεχόμεθα, ὅτι αἱ σκιαὶ τῶν δύο ὀρθίων πραγμάτων εἰς τὴν αὐτὴν στιγμὴν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν.

5) Ταχυδρόμος, βαδίζων 5 ὥρας καθ' ἡμέραν, διανύει ἀπόστασίν τινα εἰς

12 ἡμέρας· ἂν βαδίζῃ καθ' ἑκάστην 6 ὥρας, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ διανύσῃ τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν ;

6) Διὰ τὴν ἐνδυμασίαν 80 ἀνθρώπων ἐχρειάσθησαν 312 πήχεις καὶ 2 ρούπια ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει πλάτος 6 ρούπια· πόσοι πήχεις χρειάζονται διὰ τὴν ἐνδυμασίαν τῶν ἰδίων ἀνθρώπων ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει πλάτος ἕνα πῆχυν ;

7) Εἴς τι φρούριον ἦσαν 700 ἄνδρες, ἔχοντες τροφὰς διὰ 50 ἡμέρας· ἦλθεν εἰς αὐτοὺς ἐπικουρία συγκειμένη ἀπὸ 200 στρατιώτας μὲ 2 ἡμερῶν τροφάς των. Ἐὰν τώρα θέλουν νὰ φθάσουν αἱ τροφαὶ πάλιν 50 ἡμέρας, πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ὁ καθεὶς ;

Λύσις. Οἱ πρῶτοι ἔχουσι σιτηρέσια 700×50, ἤγουν 35000· οἱ δεύτεροι ἔχουσι 400· ὥστε τὰ σιτηρέσια ὅλα εἶναι 35400 καὶ πρέπει νὰ διαρκέσουν εἰς τοὺς 900 ἀνθρώπους 50 ἡμέρας· λοιπὸν θὰ λαμβάνῃ ἕκαστος $\frac{354}{450}$.

8) Ἐκ δύο ἀγρῶν τῆς αὐτῆς ποιότητος, ὁ μὲν εἷς δίδει κατ' ἔτος φόρον 120 δραχμάς, ὁ δὲ ἄλλος 78· εἶναι δὲ ὁ μὲν πρῶτος 14 στρέμματα, ὁ δὲ δεύτερος $7\frac{1}{2}$· τίς ἐκ τῶν δύο ἀγρῶν φορολογεῖται βαρύτερον ;

Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.

167. Ἡ μέθοδος αὕτη λύει τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ, τί γίνεται ἓν ποσόν, ὅταν μεταβληθῶσιν ἄλλα, μὲ καθὲν ἐκ τῶν ὁποίων εἶναι ἢ ἀνάλογον ἢ ἀντίστροφον.

Τοιαῦτα προβλήματα ἀναλύονται εἰς δύο ἢ περισσότερα προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν· διὰ τοῦτο δὲ ἡ μέθοδος, διὰ τῆς ὁποίας λύομεν αὐτά, λέγεται ***σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν*** (ἡ δὲ μέθοδος τῶν τριῶν πρὸς διάκρισιν λέγεται ***ἁπλῆ***).

Ὁ τρόπος τῆς λύσεως τῶν τοιούτων προβλημάτων γίνεται φανερὸς διὰ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων·

Πρόβλημα.

Διὰ τὴν τροφὴν 50 στρατιωτῶν εἰς 18 ἡμέρας ἐχρειάσθησαν 800 δραχμαί· πόσαι δραχμαὶ χρειάζονται διὰ τὴν τροφὴν 140 στρατιωτῶν εἰς 65 ἡμέρας ;

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν τρία ποσά· τοὺς ἀνθρώπους, τὰς ἡμέρας καὶ τὰς δραχμάς, τὰς ὁποίας ἐξοδεύουσι· πρῶτα ἦσαν οἱ ἄνθρωποι 50, αἱ ἡμέραι 18 καὶ τὰ ἔξοδα 800 δραχμαί, τώρα οἱ ἄνθρωποι ἔγιναν 140 καὶ αἱ ἡμέραι 65, ζητεῖται δέ, πόσα θὰ γίνουν τὰ ἔξοδα. Τὸ ποσὸν τῶν ἐξόδων εἶναι ἀνάλογον πρὸς τοὺς ἀνθρώπους (διότι διπλάσιος ἀριθμὸς ἀνθρώπων διπλάσια ἐξοδεύει κτλ.) καὶ πρὸς τὰς ἡμέρας (διότι εἰς διπλασίας ἡμέρας τὰ ἔξοδα γίνονται διπλάσια κτλ).

Διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο, κατατάσσω τὰ δεδομένα καὶ τὸν ἄγνωστον (τὸν ὁποῖον παριστῶ διὰ τοῦ χ), ὡς καὶ εἰς τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν,

ἄνθρωποι	ἡμέραι	ἔξοδα δρ.
$\frac{50}{140}$	$\frac{18}{65}$	$\frac{800}{\chi}$

καὶ ἔπειτα σκέπτομαι ὡς ἑξῆς·

Ἂν μόνον οἱ ἄνθρωποι ἀπὸ 50 γίνουν 140 (ἀλλ' αἱ ἡμέραι νὰ μείνουν αἱ ἴδιαι 18), τὰ ἔξοδά των θὰ γίνουν (κατὰ τὸν κανόνα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν) $800\times\frac{140}{50}$, διότι οἱ ἄνθρωποι καὶ τὰ ἔξοδα εἶναι ἀνάλογα ποσά.

Τόσα ἐξοδεύουν οἱ 140 ἄνθρωποι εἰς 18 ἡμέρας.

Ἂν δὲ ἔπειτα μεταβληθῇ καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν καὶ ἀπὸ 18 γίνῃ 65, τὰ ἔξοδα τῶν 140 ἀνθρώπων (δηλ. ὁ ἀριθμὸς $800\times\frac{140}{50}$) κατὰ τὸν ἴδιον κανόνα θὰ πολλαπλασιασθῶσι μὲ $\frac{65}{18}$ καὶ θὰ γίνουν $800\times\frac{140}{50}\times\frac{65}{18}$, ἤτοι $\frac{800\times14}{5}\times\frac{65}{18}$ ἢ $\frac{800\times7\times13}{9}=8088\ \frac{8}{9}$.

Τόσαι εἶναι αἱ δραχμαί, τὰς ὁποίας θὰ ἐξοδεύσουν οἱ 140 στρατιῶται εἰς 65 ἡμέρας (ἐὰν ἐξοδεύσουν ἀναλόγως τῶν ἄλλων).

Σημείωσις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται καὶ ἁπλούστερον ὡς ἑξῆς·

Οἱ 50 στρατιῶται ἐξώδευσαν εἰς 18 ἡμέρας 800 δραχ. ἄρα οἱ 50 καθ' ἡμέραν ἐξοδεύουν δραχ. $\frac{800}{18}$ καὶ ἕκαστος ἐξώδευε δραχ. $\frac{800}{18\times50}$.

Λοιπὸν οἱ 140 θὰ ἐξοδεύουν καθ' ἡμέραν δραχ. $\frac{800\times140}{18\times50}$ καὶ εἰς 65 ἡμέρας θὰ ἐξοδεύσουν (οἱ 140 ἄνθρωποι) δραχ. $\frac{800\times140\times65}{18\times50}$.

Πρόβλημα.

12 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἐχρειάσθησαν 25 ἡμέρας διὰ νὰ σκάψωσι τάφρον, ἔχουσαν μῆκος 200 πήχεων, πλάτος 4 καὶ βάθος 2. Εἰς πόσας ἡμέρας 50 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἑκάστην, θὰ σκάψουν τάφρον ἔχουσαν μῆκος 80 πήχεων, πλάτος 8 καὶ βάθος 1;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, κατατάσσομεν πρῶτον τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον,

ἐργ.	ὡρ.	ἡμέρ.	μῆκ.	πλάτ.	βάθ.
$\frac{12}{50}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{25}{x}$	$\frac{200}{80}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{1}$

ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ἂν μόνον οἱ ἐργάται ἀπὸ 12 γίνουν 50 (τὰ δὲ ἄλλα νὰ μείνουν ὡς ἦσαν), ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ (κατὰ τὸν κανόνα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν) μὲ $\frac{12}{50}$ (διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ αἱ ἡμέραι εἶναι ἀντίστροφα) καὶ θὰ γίνῃ $25 \times \frac{12}{50}$: τόσας λοιπὸν ἡμέρας χρειάζονται οἱ 50 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν διὰ νὰ σκάψουν τάφρον, ἔχουσαν μῆκος 200 πήχεις, πλάτος 4 καὶ βάθος 2.

Ἂν ἔπειτα μεταβληθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν τῆς καθημερινῆς ἐργασίας καὶ ἀπὸ 8 γίνῃ 9 (νὰ μείνουν ὅμως οἱ ἄνθρωποι 50 καὶ ἡ τάφρος ἡ ἰδία), ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸ κλάσμα $\frac{8}{9}$ (διότι αἱ ὧραι τῆς καθημερινῆς ἐργασίας καὶ αἱ ἡμέραι, καθ' ἃς διαρκεῖ ἡ ἐργασία, εἶναι ἀντίστροφα) καὶ θὰ γίνῃ $25 \times \frac{12}{50} \times \frac{8}{9}$· τόσας λοιπὸν ἡμέρας χρειάζονται οἱ 50 ἄνθρωποι, ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, διὰ νὰ σκάψουν τὴν πρώτην τάφρον.

Ἂν κατόπιν μεταβληθῇ τὸ μῆκος τῆς τάφρου καὶ ἀπὸ 200 γίνῃ 80, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{80}{200}$ (διότι τὸ μῆκος τῆς τάφρου καὶ αἱ ἡμέραι εἶναι ἀνάλογα) καὶ θὰ γίνῃ

$$25 \times \frac{12}{50} \times \frac{8}{9} \times \frac{80}{200}$$

τόσας λοιπὸν ἡμέρας χρειάζονται οἱ 50 ἄνθρωποι, ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, διὰ νὰ σκάψουν τάφρον, ἔχουσαν μῆκος 80 πήχεων, πλάτος 4 καὶ βάθος 2.

Ἂν ἔπειτα μεταβληθῇ τὸ πλάτος τῆς τάφρου καὶ ἀπὸ 4 γίνῃ 8, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸ $\frac{8}{4}$ καὶ θὰ γίνῃ

$$25 \times \frac{12}{50} \times \frac{8}{9} \times \frac{80}{200} \times \frac{8}{4}$$

τόσας λοιπὸν ἡμέρας χρειάζονται 50 ἄνθρωποι, ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἑκάστην, διὰ νὰ σκάψουν τάφρον, ἔχουσαν μῆκος 80 πήχεων, πλάτος 8 καὶ βάθος 2.

Ἂν τέλος μεταβληθῇ καὶ τὸ βάθος, καὶ ἀπὸ 2 γίνῃ 1, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ $\frac{1}{2}$ καὶ θὰ γίνῃ

$$25 \times \frac{12}{50} \times \frac{8}{9} \times \frac{80}{200} \times \frac{8}{4} \times \frac{1}{2}.$$

τόσας λοιπὸν ἡμέρας χρειάζονται οἱ 50 ἄνθρωποι, ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, διὰ νὰ σκάψουν τὴν νέαν τάφρον· τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ εὕρωμεν.

Ἁπλοποιοῦντες τὸ γινόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν

$$6 \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{20} \text{ ἢ } 2\times \frac{8}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{32}{15} = 2 \text{ ἡμ. } \frac{2}{15}.$$

ὅθεν ἡ ἐργασία θὰ διαρκέσῃ 2 ἡμέρας καὶ τῆς τρίτης ἡμέρας τὰ $\frac{2}{15}$, ἤτοι 1 ὥρ. καὶ 12′ (διότι ἡ καθημερινὴ ἐργασία διαρκεῖ 9 ὥρας).

Παρατήρησις. Αἱ πράξεις πρέπει νὰ σημειώνωνται μόνον, ἀλλὰ νὰ μὴ ἐκτελῶνται, παρὰ εἰς τὸ τέλος, διότι εἶναι δυνατὸν νὰ γίνωνται ἁπλοποιήσεις, ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν.

Σημείωσις. Αἱ ἡμέραι, κατὰ τὰς ὁποίας διαρκεῖ ἡ ἐργασία, δὲν εἶναι ἀκριβῶς ἀνάλογοι πρὸς τὸ βάθος τῆς τάφρου, διότι ὅσον γίνεται βαθυτέρα ἡ τάφρος, τόσον γίνεται δυσκολωτέρα ἡ ἐκφορὰ τῶν χωμάτων· ἀλλὰ τὴν διαφορὰν ταύτην παραβλέπομεν.

168. Ἐὰν τώρα συγκρίνωμεν εἰς τὰ λυθέντα προβλήματα τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου χ μὲ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος, ὡς τὰ κατετάξαμεν, συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὁμοειδῆ αὐτοῦ ἀριθμὸν (τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ) ***μὲ ἕκαστον τῶν κλασμάτων, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰς δύο τιμὰς ἑκάστου ποσοῦ, ἀντιστρέφομεν ὅμως προηγουμένως τὸ κλάσμα, ἐὰν τὸ ποσόν του εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου.***

Σημείωσις. Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου, καθὼς καὶ τῆς ἁπλῆς. Π. χ. εἰς τὸ πρῶτον πρόβλημα, ἀντὶ νὰ μεταβάλωμεν διὰ μιᾶς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνθρώπων ἀπὸ 50 εἰς 140, κάμνομεν αὐτὸν πρῶτον 1 καὶ ἔπειτα ἀπὸ 1 κάμνομεν αὐτὸν 140· σκεπτόμεθα δηλ. ὡς ἑξῆς· Οἱ 50 ἄνθρωποι χρειάζονται 800 δραχ. λοιπὸν εἷς μόνος χρειάζεται $\frac{800}{50}$ (εἰς 18 ἡμέρας) καὶ οἱ 140 χρειάζονται 140 φορὰς περισσότερον, ἤτοι $\frac{800}{50} \times 140$· ταῦτα χρειάζονται διὰ 18 ἡμέρας· ἄρα διὰ μίαν ἡμέραν χρειάζονται $\frac{800 \times 140}{50 \times 18}$ καὶ δι' 65 ἡμέρας χρειάζονται 65 φορὰς περισσότερον, δηλαδὴ $\frac{800 \times 140 \times 65}{50 \times 18}$.

Ὁ τρόπος οὗτος εἶναι διὰ τοὺς ἀρχαρίους εὐκολώτερος.

Προβλήματα.

1) Ταχυδρόμος τις, βαδίζων 5 ὥρας τὴν ἡμέραν, διέτρεξεν εἰς 12 ἡμέρας 420 στάδια· ὁ αὐτὸς ταχυδρόμος, ἐὰν βαδίζῃ 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ διατρέξῃ 1200 στάδια; (Ἀπ. 21 ἡμ. $\frac{3}{7}$)

2) Τάπης τις, ἔχων μῆκος 8 πήχεων καὶ πλάτος $4\frac{1}{2}$, ἀξίζει 350 δραχμάς· πόσον ἀξίζει ἄλλος τάπης τῆς αὐτῆς ποιότητος, ἔχων μῆκος μὲν $6\frac{1}{2}$ πήχεων, πλάτος δὲ 5; (Ἀπ. 315,97 $\frac{2}{9}$)

Σημείωσις. Ἡ ἀξία τοῦ τάπητος εἶναι ἀνάλογος τοῦ μήκους του καὶ τοῦ πλάτους του.

3) 42 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἐξετέλεσαν εἰς 15 ἡμέρας τὰ $\frac{2}{5}$ ἔργου τινός· πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται τὴν ἡμέραν, διὰ νὰ ἐκτελέσωσι τὸ ἐπίλοιπον ἔργον εἰς 18 ἡμέρας; (Ἀπ. 10)

4) Σιδηρᾶ τις πλάξ, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι 1,20 πήχ. τὸ πλάτος 0,43 καὶ τὸ πάχος 0,025, ἔχει βάρος 72 ὀκ. καὶ 50 δράμια· πόσον βάρος ἔχει ἄλλη τις σιδηρᾶ πλάξ, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι 1,70, τὸ πλάτος 0,65 καὶ τὸ πάχος 0,018; (Ἀπ. 111 ὀκ. 82 δρ.)

Σημείωσις. Τὸ βάρος εἶναι ἀνάλογον καὶ πρὸς τὸ μῆκος καὶ πρὸς τὸ πλάτος καὶ πρὸς τὸ πάχος.

5) Εἴς τι φρούριον ἦσαν 700 στρατιῶται, ἔχοντες τροφὰς διὰ 50 ἡμέρας, ἐξαπέστειλε δὲ ὁ φρούραρχος 240 στρατιώτας, φέροντας τροφὰς διὰ τρεῖς ἡμέρας· πόσας ἡμέρας θὰ φθάσουν τώρα αἱ τροφαὶ εἰς τοὺς μείναντας στρατιώτας; (Ἀπ. 74 ἡμ. θὰ περισσεύσουν δὲ καὶ 240 σιτ.)

Προβλήματα ποσοστῶν.

Συνήθως ὁ μεσάζων μεταξὺ πωλητοῦ καὶ ἀγοραστοῦ καὶ διευκολύνων τὴν πώλησιν λαμβάνει ὡς ἀμοιβὴν ὡρισμένον τι μέρος ἐκ τῆς ἀξίας τοῦ πράγματος (λόγου χάριν, ἓν ἐπὶ τοῖς ἑκατόν, ἓν τέταρτον ἐπὶ τοῖς ἑκατόν)· ἐπίσης ὁ εἰσπράττων χρήματα τοῦ Δημοσίου ἢ καὶ ἰδιωτῶν λαμβάνει ποσοστόν τι ἐπίσης, οἱ ὑπάλληλοι τῶν καταστημάτων λαμβάνουσι ποσοστόν τι τῆς ἀξίας τῶν ὑπ' αὐτῶν πωλουμένων κτλ. κτλ.

Τὰ προβλήματα τῶν ποσοστῶν οὐδόλως διαφέρουσι τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος·

Μεσίτης τις ἐπώλησεν οἰκίαν ἀντὶ 42000 δραχμῶν, λαμβάνει δὲ διὰ τὴν μεσιτείαν του $\frac{1}{2}$ ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς οἰκίας· πόσα θὰ λάβῃ;

Ἐκ τῶν 100 λαμβάνει $\frac{1}{2}$ δρ.

ἐκ τῶν 42000 » χ

ἐπειδὴ δὲ τὸ ποσόν, ὅπερ λαμβάνει, εἶναι ἀνάλογον τῆς ἀξίας τοῦ πωληθέντος πράγματος ἕπεται

$$\chi = \frac{1}{2} \times \frac{42000}{100} = \frac{1}{2} \times 420 = 210 \text{ δρ.}$$

Προβλήματα τόκου.

169. ***Τόκος*** λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον λαμβάνει, ὅστις δανείζει χρήματα.

Τὸ κέρδος τῶν 100 δραχμῶν εἰς ἓν ἔτος, ἤτοι ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν εἰς ἓν ἔτος, λέγεται ***ἐπιτόκιον.*** Ὁρίζεται δὲ τὸ ἐπιτόκιον διὰ συμφωνίας ἰδιαιτέρας μεταξὺ τοῦ δανείζοντος καὶ τοῦ δανειζομένου.

Το ποσὸν τῶν δανειζομένων χρημάτων λέγεται ***κεφάλαιον.***

Ὁ τόκος εἶναι ***ἁπλοῦς,*** ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ ἴδιον, ἐν ὅσῳ διαρκεῖ τὸ δάνειον, ***σύνθετος*** δὲ λέγεται ὁ τόκος, ὅταν ὁ τόκος ἑκάστου ἔτους δίδῃ καὶ αὐτὸς τόκον εἰς τὰ ἑπόμενα ἔτη· ὥστε εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους (ἢ καὶ ἄλλου χρονικοῦ διαστήματος) ὁ τόκος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐκ τῆς προσθέσεως προκῦπτον ποσὸν λαμβάνεται ὡς κεφάλαιον διὰ τὸ ἑπόμενον ἔτος. Ἐάν τις π.χ. δανεισθῇ 200 δραχμὰς μὲ ἐπιτόκιον 10 καὶ μὲ ἁπλοῦν τόκον, εἰς μὲν τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ χρεωστῇ 220 δραχμὰς (200 κεφάλαιον καὶ 20 τόκον), εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους 240 (200 κεφάλαιον καὶ 40 τόκον), εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ τρίτου 260 καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐὰν ὅμως ὁ τόκος εἶναι σύνθετος, εἰς μὲν τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ χρεωστῇ 220 δρ. (200 κεφ. καὶ 20 τόκ.), εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου θὰ χρεωστῇ 242 δρ. (220 κεφ. καὶ 22 τόκ.), εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου θὰ χρεωστῇ 266,20 (242 κεφ. καὶ 24,20 τόκον) καὶ οὕτω καθεξῆς.

Εἰς τὰ ἑπόμενα διαλαμβάνομεν μόνον περὶ τοῦ ἁπλοῦ τόκου.

170. Εἰς ἕκαστον πρόβλημα τόκου παρουσιάζονται 4 ποσά·

1) τὸ κεφάλαιον,

2) ὁ τόκος,

3) τὸ ἐπιτόκιον,

4) ὁ χρόνος, ἤτοι ἡ διάρκεια τοῦ δανείου.

Ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος πρὸς καθὲν ἀπὸ τὰ ἄλλα, διότι διπλάσιον κεφάλαιον φέρει διπλάσιον τόκον κτλ. Ὁμοίως εἰς διπλάσιον χρόνον ὁ τόκος γίνεται διπλάσιος κτλ. Ὁμοίως μὲ διπλάσιον ἐπιτόκιον φέρει τὸ αὐτὸ κεφάλαιον εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον διπλάσιον τόκον κτλ.

Τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος εἶναι ἀντίστροφα, διότι, ἂν π.χ. κεφάλαιον 500 δραχμῶν χρειάζεται 2 ἔτη διὰ νὰ φέρῃ τόκον 50 δραχμῶν (πρὸς 5 τοῖς ἑκατόν), διπλάσιον κεφάλαιον, δανειζόμενον μὲ τὸ ἴδιον ἐπιτόκιον, διὰ νὰ φέρῃ τὸν ἴδιον τόκον, χρειάζεται μόνον 1 ἔτος.

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν, ὅτι τὰ προβλήματα τοῦ τόκου θὰ λύωνται κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν (ἁπλῆν ἢ σύνθετον).

Εἰς ἕκαστον πρόβλημα τόκου δίδονται τρία ἐκ τῶν ἀνωτέρω ποσῶν καὶ ζητεῖται τὸ τέταρτον. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ζητούμενον δύναται νὰ εἶναι ἢ ὁ τόκος ἢ τὸ κεφάλαιον ἢ τὸ ἐπιτόκιον ἢ τέλος ὁ χρόνος, συμπεραίνομεν, ὅτι τὰ προβλήματα τοῦ τόκου εἶναι τεσσάρων εἰδῶν.

Εἰς τὰ ἑπόμενα λύομεν ἓν ἐξ ἑκάστου εἴδους.

Πρόβλημα 1ον (ἄγνωστος ὁ τόκος).

Πόσον τόκον φέρουσιν 850 δραχμαὶ εἰς τρία ἔτη πρὸς 9 τοῖς ἑκατόν; (ὅπερ γράφεται 9 %).

Διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, γράφω τὰ δεδομένα του καὶ τὸ ζητούμενον ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{ccc} \text{κεφ.} & \text{ἔτ.} & \text{τόκ.} \\ \dfrac{100}{850} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{9}{\chi} \end{array}$$

ἔπειτα ἐφαρμόζω τὸν κανόνα τοῦ ἐδαφ. 168 καὶ εὑρίσκω

$$\chi = 9 \times \frac{850}{100} \times \frac{3}{1} = \frac{9 \times 85 \times 3}{10} = 229,50.$$

Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ χωρὶς τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, ***ἂν εὕρωμεν τὸν τόκον τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος.*** Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Αἱ 100 δραμαὶ φέρουν εἰς 1 ἔτος τόκον 9,

ἡ 1 δραχμὴ θὰ φέρῃ εἰς 1 ἔτος τόκον $\frac{9}{100}$,

ἄρα αἱ 850 δραχ. θὰ φέρουν εἰς 1 ἔτος τόκον $\frac{9}{100} \times 850$

καὶ εἰς 3 ἔτη θὰ φέρουν τόκον τριπλάσιον, ἤτοι $\frac{9}{100} \times 850 \times 3$.

Ἐὰν παρατηρήσωμεν ποίας πράξεις ἐκτελοῦμεν ἐπὶ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον, φθάνομεν εἰς τὸν ἑξῆς κανόνα·

171. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ τρία δεδομένα (ἤγουν τὸ κεφάλαιον, τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν χρόνον) καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον δι' 100.***

Σημείωσις. Ὁ χρόνος, ἤγουν ἡ διάρκεια τοῦ δανείου, ὑποτίθεται εἰς τὸν κανόνα τοῦτον ἀριθμός τις ἐτῶν. Ἂν ὁ χρόνος δοθῇ εἰς μῆνας, ἢ τρέπομεν αὐτὸν εἰς κλάσμα τοῦ ἔτους (διαιροῦντες διὰ 12) καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα, ἢ εὑρίσκομεν τὸν τόκον τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἕνα μῆνα καὶ ἔπειτα λύομεν τὸ πρόβλημα ὡς ἀνωτέρω.

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Πόσον τόκον φέρουσιν 750 δρχ. εἰς 5 ἔτη καὶ 2 μῆνας πρὸς 7°/₀;

Αἱ 100 δραχμαὶ φέρουσιν εἰς ἓν ἔτος $\frac{7}{100}$ τῆς δραχμῆς·

ἢ 1 δραχμὴ θὰ φέρῃ εἰς 1 μῆνα $\frac{7}{12\times100}$ τῆς δραχμῆς·

ἄρα αἱ 750 δραχμαὶ θὰ φέρουν εἰς 1 μῆνα $\frac{7\times750}{12\times100}$

καὶ εἰς 62 μῆνας θὰ φέρουν τόκον $\frac{7\times750\times62}{12\times100}$.

Ὁμοίως κάμνομεν καὶ ὅταν ὁ χρόνος δοθῇ εἰς ἡμέρας.

Πρόβλημα 2ον (ἄγνωστον τὸ κεφάλαιον).

Ποῖον κεφάλαιον, τοκισθὲν ἐπὶ 5 ἔτη πρὸς 12°/₀, ἔφερε τόκον 1500 δραχμάς;

Διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο κατὰ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν, γράφω τὰ δεδομένα καὶ τὸν ἄγνωστον ὡς ἑξῆς·

κεφ.	ἔτ.	τόκ.
$\frac{100}{\chi}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{12}{1500}$

καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζω τὸν κανόνα τοῦ ἐδ. 168 καὶ εὑρίσκω

$\chi=100\times\frac{1}{5}\times\frac{1500}{12}$ καὶ ἁπλοποιῶν εὑρίσκω

$$\chi=100\times\frac{300}{12}=100\times\frac{100}{4}=100\times25=2500.$$

Ἂν θέλω νὰ λύσω τὸ πρόβλημα χωρὶς τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, σκέπτομαι ὡς ἑξῆς·

Κατὰ πρῶτον θὰ εὕρω ποῖον κεφάλαιον φέρει εἰς ἓν ἔτος τόκον 1 δραχμήν.

Τόκος 12 δρ. χρειάζεται δι᾿ ἓν ἔτος κεφάλαιον 100 δραχμάς.

Τόκος 1 δρ. χρειάζεται δι᾿ ἓν ἔτος κεφάλαιον $\frac{100}{12}$.

λοιπὸν τόκος 1500 δρ. χρειάζεται δι᾿ ἓν ἔτος κεφάλαιον $\frac{100}{12}\times1500$

καὶ διὰ 5 ἔτη χρειάζεται κεφάλαιον πεντάκις μικρότερον, ἤτοι

$\frac{100}{12}\times\frac{1500}{5}$ ἢ $\frac{100}{12}\times300$ ἢ $\frac{100}{4}\times100=25\times100=2500.$

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

172. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δεδομένων*** (ἐπιτοκίου καὶ χρόνου).

Πρόβλημα 3ον (ἄγνωστος ὁ χρόνος).

Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 18890 δραχμῶν, τοκιζόμενον πρὸς 6%, θὰ φέρῃ τόκον 981,55 ;

Διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο κατὰ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν, γράφω τὰ δεδομένα καὶ τὸν ἄγνωστον ὡς ἑξῆς·

κεφάλ.	ἔτη	τόκος
100	1	6
18890	χ	981,55

καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζω τὸν γνωστὸν κανόνα καὶ εὑρίσκω

$$\chi = \frac{100}{18890} \times \frac{981,55}{6}, \text{ ἤτοι } \chi = \frac{981,55 \times 100}{6 \times 18890} \text{ τοῦ ἔτους}$$

$$\text{ἢ} \qquad \chi = \frac{981,55 \times 100 \times 2}{18890 \times 1} \text{ μῆνας·}$$

ὅθεν $\chi = 10$ μῆνες, 12 ἡμ. περίπου.

Ἂν θέλω νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο χωρὶς τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, σκέπτομαι ὡς ἑξῆς·

Κατὰ πρῶτον θὰ εὕρω εἰς πόσα ἔτη 1 δραχμὴ φέρει τόκον 1 δραχ.

Αἱ 100 δραχμαὶ διὰ νὰ φέρουν τόκον 6, χρειάζεται 1 ἔτος,
ἡ μία δραχμή, διὰ νὰ φέρῃ 6, χρειάζονται 100 ἔτη,
ἡ μία δραχμή, διὰ νὰ φέρῃ 1, » $\frac{100}{6}$ ἔτη·
ἄρα αἱ 18890 δρ. διὰ νὰ φέρουν 1, χρειάζονται $\frac{100}{6 \times 18890}$ τοῦ ἔτους
καὶ αἱ 18890 δρ. διὰ νὰ φέρουν 981,55 » $\frac{100 \times 981,55}{6 \times 18890}$ » »

Ὅπως καὶ ἂν λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, εὐκόλως φθάνομεν εἰς τὸν ἑξῆς κανόνα·

173. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δεδομένων*** (κεφαλαίου καὶ ἐπιτοκίου).

Πρόβλημα 4ον (ἄγνωστον τὸ ἐπιτόκιον).

Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 812 δραχμῶν καὶ ἔφερεν εἰς 7 ἔτη καὶ 3 μῆνας τόκον 547 δραχμάς ;

Διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο κατὰ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν, γράφω τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον ὡς ἑξῆς·

Κεφάλαιον	χρόνος	τόκος
812	$7\frac{1}{4}$	547
100	1	χ

καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζω τὸν κανόνα καὶ εὑρίσκω

$$\chi = 547 \times \frac{100}{812} \times \frac{1}{7^1/_4} \text{ ἢ } \chi = 547 \times \frac{100}{812} \times \frac{4}{26}$$

καὶ ἐκτελῶν τὰς πράξεις, εὑρίσκω $\chi = 9{,}29 \ldots\ldots {}^0/_0$.

Διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο χωρὶς τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, σκέπτομαι ὡς ἑξῆς·

Αἱ 812 δραχμαὶ ἔφεραν εἰς 87 μῆνας τόκον 547 δρ.

αἱ 812 δραχμαὶ θὰ φέρουν εἰς 1 μῆνα τόκον $\frac{547}{87}$

καὶ ἡ μία δραχμὴ θὰ φέρῃ εἰς 1 μῆνα τόκον $\frac{547}{87 \times 812}$

ἄρα αἱ 100 δραχμαὶ φέρουν εἰς 1 μῆνα τόκον $\frac{547 \times 100}{87 \times 812}$

καὶ αἱ 100 δραχμαὶ φέρουν εἰς 1 ἔτος τόκον $\frac{547 \times 100 \times 12}{87 \times 812}$.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου συμπεραίνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

174. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δεδομένων*** (κεφαλαίου καὶ χρόνου).

Παρατήρησις.

Καὶ οἱ τέσσαρες κανόνες, τοὺς ὁποίους εὑρήκαμεν διὰ τὰ προβλήματα τοῦ τόκου, περιλαμβάνονται εἰς ἕνα, τὸν ἑξῆς·

175. ***Ἂν μὲν ζητῆται ὁ τόκος, πολλαπλασιάζομεν τὰ τρία δεδομένα καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν δι' 100.***

Ἂν δὲ ζητῆται ἄλλο τι, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δεδομένων.

Τοκάριθμοι καὶ σταθεροὶ διαιρέται.

Εἰς τὸ ἐμπόριον μεταχειρίζονται, χάριν συντομωτέρας διεξαγωγῆς τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ τόκου, τὴν ἑξῆς πρακτικὴν μέθοδον·

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ζητεῖται πόσον τόκον φέρουσιν 900 δραχ. εἰς 20 ἡμέρας πρὸς 8 %. Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα ὑπολογίζοντες, καθὼς οἱ ἔμποροι, τὸ ἔτος συγκείμενον ἐκ 360 μόνον ἡμερῶν, ἔχομεν

$$\text{τόκος} = \frac{900 \times 20 \times 8}{36000} = \frac{900 \times 20}{36000 : 8} = \frac{900 \times 20}{4500} = 4 \text{ δραχ.}$$

Τὸ γινόμενον τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὰς ἡμέρας ὀνομάζομεν **τοκάριθμον**, τὸ δὲ πηλίκον τοῦ 36000 διὰ τοῦ ἐπιτοκίου **σταθερὸν διαιρέτην**.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προηγουμένου προβλήματος ἕπεται ὁ ἑξῆς πρακτικὸς κανών, ἐν χρήσει εἰς τὸ ἐμπόριον·

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον ἑνὸς κεφαλαίου διά τινας ἡμέρας, διαιροῦμεν τὸν τοκάριθμον διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πόσον τόκον φέρουσι κατ᾿ ἔτος 7875 δραχμαὶ πρὸς 4 %;

(Ἀπ. 315 δραχ.).

2) Πόσον τόκον φέρουσι 12590 δραχμαὶ πρὸς 7 % εἰς 8 μῆνας;

(Ἀπ. 587 δραχ. $53\frac{1}{3}$).

3) Πόσον τόκον φέρουσιν 87521,55 δρ. εἰς 90 ἡμέρας, τοκιζόμεναι πρὸς 5 %;

Λύσις. Εἰς ἓν ἔτος φέρουσι τόκον $\frac{87521,55\times5}{100}$

εἰς μίαν ἡμέραν » $\frac{87521,55\times5}{100\times365}$

καὶ εἰς 90 ἡμέρας φέρουσι τόκον $\frac{87521,55\times5\times90}{100\times365} = 1079$ δρ. 03.

4) Εἰς πόσα ἔτη κεφάλαιον 500 δραχμῶν, τοκιζόμενον πρὸ 8 %, διαπλασιάζεται (δηλαδὴ ὁ τόκος γίνεται ἴσος μὲ τὸ κεφάλαιον);

(Ἀπ. $12\frac{1}{2}$ ἔτη).

5) Ἔμπορός τις ἠγόρασε 5000 ὀκάδας σίτου πρὸς 40 λεπ. τὴν ὀκᾶν· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν, μετὰ ἓν ἔτος, διὰ νὰ ὠφεληθῇ 15 %;

Λύσις. Τὰ 40 λεπτά (ἤγουν ἡ ἀξία τῆς μιᾶς ὀκᾶς), τοκιζόμενα εἰς ἓν ἔτος πρὸς 15 %, δίδουν τόκον $\frac{40\times15}{100}$ ἢ 6 λεπτά· ἐπειδὴ δὲ θέλει νὰ λάβῃ καὶ τὰ 6 ταῦτα λεπτὰ ἀπὸ κάθε μίαν ὀκᾶν, θὰ πωλῇ πρὸς 46 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν.

Σημείωσις. Ἠμπορεῖ τις νὰ εὕρῃ πρῶτον, πόσας δραχ. ἔδωκεν εἰς τὴν ἀγορὰν τοῦ σίτου καὶ ἔπειτα τὸν τόκον αὐτῶν πρὸς 15 % καὶ νὰ προσθέσῃ αὐτὸν εἰς τὸ κεφάλαιον, τὸ δὲ προκῦπτον ποσὸν νὰ μοιράσῃ εἰς τὰς 5000 ὀκάδας· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι δυσκολώτερον.

6) Ἔμπορός τις ἠγόρασε 518 ὀκάδας ἐλαίου πρὸς 75 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν καὶ μετὰ 5 μῆνας ἐπώλησεν αὐτὸ πρὸς 1,20· πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισε;

Λύσις. Εἰς ἑκάστην ὀκᾶν ἐκέρδισε 45 λεπτά· ταῦτα δὲ εἶναι ὁ τόκος τῶν 75 λεπτῶν εἰς 5 μῆνας. Λοιπὸν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι

$$\frac{45\times100\times12}{75\times5} \text{ ἤτοι } 144\ \%.$$

7) Ἠγόρασέ τις οἰκόπεδον πρὸς 20 δραχμὰς τὸν τεκτονικὸν τετρ. πῆχυν· μετὰ ἓξ μῆνας θέλει νὰ πωλήση αὐτὸ καὶ νὰ κερδίση 7 % ἐπὶ τῶν χρημάτων του· πρὸς πόσον θὰ πωλῇ τὸν πῆχυν ;

Λύσις. Θὰ εὕρω τὸν τόκον τῶν 20 δραχμῶν (μὲ τὰς ὁποίας ἠγόρασεν ἕκαστον πῆχυν) εἰς 6 μῆνας πρὸς 7 % καὶ θὰ προσθέσω αὐτὸν εἰς τὰς 20 δραχμάς· τὸ προκῦπτον θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως·

8) Οἰνοπώλης τις ἠγόρασε 5500 ὀκάδας οἴνου πρὸς 25 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν. Ἐκ τούτων ἐχύθησαν 150 καὶ ἐξίνισαν 1250, μετὰ 8 δὲ μῆνας ἐπώλησε τὸ μὲν ὄξος πρὸς 15 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, τὸν δὲ οἶνον πρὸς 40· πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισε ;

Λύσις. Θὰ εὕρωμεν πρῶτον, πόσας δραχμὰς ἐκέρδισε, καὶ τὸ κέρδος τοῦτο θὰ θεωρήσωμεν ὡς τόκον τῶν χρημάτων του (μὲ τὰ ὁποῖα ἠγόρασε τὸν οἶνον) εἰς 8 μῆνας καὶ θὰ ζητήσωμεν τὸ ἐπιτόκιον.

9) Ἐδάνεισέ τις χρήματα πρὸς 9 % καὶ μετὰ 3 ἔτη καὶ 4 μῆνας ἔλαβε κεφάλαιον καὶ τόκον ὁμοῦ δραχμὰς 12800 πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιον καὶ πόσος ὁ τόκος;

Λύσις. Ἂν ἐδάνειζεν 100 δραχμάς, θὰ ἐλάμβανε μετὰ 3 ἔτη καὶ 4 μῆνας 130 (διότι ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν εἰς 3 ἔτη καὶ 4 μῆνας πρὸς 9 % εἶναι 30).

Ὥστε, ἂν ἐλάμβανεν 130 δραχμάς, θὰ ἦτο 100 κεφάλαιον καὶ 30 τόκος· ἂν ἐλάμβανε 1 δραχμήν, θὰ ἦτο $\frac{100}{130}$ κεφάλαιον καὶ $\frac{30}{130}$ τόκος.

Ἐπειδὴ δὲ τώρα ἔλαβε 12800 δραχμάς, θὰ εἶναι

κεφάλαιον $\frac{100}{130} \times 12800$ καὶ τόκος $\frac{30}{130} \times 12800$.

10) Δανείσας τις χρήματα εἰς ἄλλον πρὸς 5 % διὰ 2 ἔτη, ἐκράτησεν εὐθὺς τὸν τόκον καὶ ἔδωκεν εἰς αὐτὸν τὰ ἐπίλοιπα, ἅτινα ἦσαν 1350 δραχμαί· πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιον ;

Λύσις. Ἂν ἦτο τὸ κεφάλαιον 100 δραχμαί, θὰ ἐκράτει τὰς 10 (διότι 10 δρ. εἶναι ὁ τόκος τῶν 100 εἰς δύο ἔτη πρὸς 5 %) καὶ θὰ ἔδιδε μόνον 90 δρ. ὥστε, ἂν ἔδιδεν 90 δρ. θὰ ἦτο κεφάλαιον 100, ἂν ἔδιδε 1 δραχμήν, θὰ ἦτο κεφάλαιον $\frac{100}{90}$ καὶ ἐπειδὴ ἔδωκε 1350 δρ. τὸ κεφάλαιον ἦτο $\frac{100}{90} \times 1350$, ἤτοι 1500 δρ.

11) Τὸ χιλιόγραμμον ἑνὸς ἐμπορεύματος κοστίζει εἰς ἔμπορον δραχμὰς 5,60· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν, ἐὰν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 9 % ;

(Ἀπ. 7,81 . . .).

12) Ἔχει τις κεφάλαιόν τι εἰς τόκον πρὸς 6 %, καὶ λαμβάνει κατὰ μῆνα τόκον 125 δρ. Ἐὰν τοκίσῃ αὐτὸ πρὸς $7\frac{1}{2}$ %, πόσον τόκον θὰ λαμβάνῃ ἐκ τοῦ αὐτοῦ κεφαλαίου; ('Απ. 156,25 δρ.)

13) Τὸ φορτίον ἑνὸς πλοίου ἀξίζει 7000 τάλληρα, ὁ δὲ κύριος αὐτοῦ θέλει νὰ τὸ ἀσφαλίσῃ· πόσον θὰ πληρώσῃ δι' ἀσφάλιστρα, ὅταν τὰ ἀσφάλιστρα εἶναι $2\frac{1}{2}$ ἐπὶ τοῖς χιλίοις; ('Απ. $17\frac{1}{2}$ τάλλ.)

14) Ἠσφάλισέ τις τὴν οἰκίαν του διὰ 4 ἔτη καὶ ἐπλήρωσεν 105 δραχμάς. Τὰ ἀσφάλιστρα εἶναι $\frac{3}{4}$ ἐπὶ τοῖς χιλίοις κατ' ἔτος· διὰ πόσον ποσὸν ἠσφάλισε τὴν οἰκίαν; ('Απ. 35000 δρ.)

15) Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ τοκίσῃ τις σήμερον πρὸς 9 %, διὰ νὰ λάβῃ μετὰ 2 ἔτη καὶ 6 μῆνας 1500 δρ. διὰ κεφάλαιον καὶ τόκους ὁμοῦ;

16) Κράτος τι ἐδανείσθη 100 000 000 δραχ. πρὸς 6 %, ἔλαβεν ὅμως μόνον τὰ $88\frac{1}{2}$ ἑκατομμύρια· πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐδανείσθη πραγματικῶς;

Περὶ ὑφαιρέσεως.

176. Ὁσάκις δανείσωμεν εἰς ἄλλον χρήματα, ἢ ἀσφαλίζομεν τὸ δανεισθὲν ποσὸν ἐγγράφοντες ὑποθήκην ἐπὶ τῆς ἀκινήτου περιουσίας τοῦ ὀφειλέτου μας ἢ ζητοῦμεν νὰ μᾶς δώσῃ ἔγγραφον ἀπόδειξιν τοῦ χρέους του μὲ τὴν ὑπόσχεσιν νὰ τὸ πληρώσῃ εἰς ὡρισμένην ἡμέραν. Τὸ ἔγγραφον αὐτὸ ὀνομάζεται ***χρεωστικὸν γραμμάτιον***. Τὸ ποσόν, ὅπερ ἀναφέρεται εἰς αὐτό, ὅτι θὰ πληρωθῇ τὴν ὡρισμένην ἡμέραν, λέγεται ***ὀνομαστικὴ (ἢ μέλλουσα)*** ἀξία τοῦ γραμματίου. Ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία ἑνὸς γραμματίου εἶναι προφανῶς τὸ ἄθροισμα τοῦ ποσοῦ, ὅπερ ἐδανείσαμεν, καὶ τοῦ τόκου τοῦ ποσοῦ τούτου κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα ἀπὸ τῆς συνάψεως τοῦ δανείου μέχρι τῆς ὡρισμένης ἡμέρας τῆς πληρωμῆς, δηλ. μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου.

Ἂν ὅμως ὁ κάτοχος τοῦ γραμματίου θέλῃ νὰ ***προεξοφλήσῃ*** τὸ γραμμάτιόν του, δηλαδὴ νὰ τὸ πωλήσῃ εἰς ἄλλον πρὸ τῆς λήξεώς του, τὸ χρηματικὸν ποσόν, ὅπερ θὰ λάβῃ κατὰ τὴν πώλησιν, ὀνομάζεται ***παροῦσα ἀξία*** τοῦ γραμματίου καὶ εἶναι προφανῶς μικρότερον τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας κατὰ τὸν τόκον τῆς παρούσης ἀξίας ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως. Ὁ τόκος οὗτος λέγεται ***ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις***. Εἰς τὸ ἐμπόριον ὅμως ἐν Ἑλλάδι συνηθίζεται ὁ ***ἐξαργυρώνων***, δηλαδὴ ὁ ἀγοράζων τὸ γραμμάτιον, νὰ ὑπολογίζῃ τὸν τόκον τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς ἐξαργυρώσεως μέχρι τῆς λήξεως μὲ τὸ συμφωνηθὲν ἐπιτόκιον, καὶ τὸ ποσὸν τοῦτο ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν ὡς ***ἐξωτερικὴν*** ὑφαίρεσιν. Ἡ ὑφαίρεσις λέγεται κοινῶς ***σκόντο.***

α΄) Ὑφαίρεσις ἐξωτερική.

Τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως εἶναι προφανῶς προβλήματα τόκου (μόνον ἀντὶ **τόκος** λέγεται **ὑφαίρεσις**)· ὡς παράδειγμα ἔστω τὸ ἑξῆς·

Προβλήματα.

Γραμμάτιον 1800 δραχμῶν ἐξαργυροῦται 5 μῆνας πρὸ τῆς διορίας του πρὸς 8 °/₀ ἐπιτόκιον· πόση εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσίς του;

Τὸ ζητούμενον εἶναι ὁ τόκος τῶν 1800 δραχμῶν εἰς 5 μῆνας πρὸς 8 °/₀· ὁ τόκος οὗτος εἶναι

$$\frac{1800\times5\times8}{12\times100} \text{ ἢ } \frac{18\times40}{12} \text{ ἢ } 6\times10=60\text{·}$$

ὥστε τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου (ἤτοι αἱ 1800 δρ.) θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ 60 δραχμάς, ἑπομένως θὰ πληρωθῇ μὲ μόνον 1740 δραχμάς.

Σημείωσις. Ἐκ τῶν 1800 δραχμῶν πληρώνονται μόνον αἱ 1740, καὶ ὅμως κρατεῖται ὁ τόκος τῶν 1800. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις δὲν εἶναι δικαία, ἀλλ᾿ οἱ ἔμποροι μεταχειρίζονται αὐτὴν διὰ τὴν εὐκολίαν, δικαιολογεῖται δὲ αὕτη διὰ τῆς ἀμοιβαιότητος.

Εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως ἐμβαίνουσι τὰ ἑξῆς τέσσαρα ποσά· τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου, ὁ χρόνος, τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἡ ὑφαίρεσις· τὰ δὲ 4 προβλήματα, ἐν οἷς ζητεῖται ἓν ἐκ τῶν 4 τούτων καὶ δίδονται τὰ τρία ἄλλα, δὲν διαφέρουσι διόλου ἀπὸ τὰ 4 προβλήματα τοῦ τόκου.

β΄) Ὑφαίρεσις ἐσωτερική.

Διὰ νὰ μάθωμεν, πῶς εὑρίσκεται ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις, ἂς λάβωμεν τὸ ἑξῆς παράδειγμα·

Γραμμάτιον 1500 δραχμῶν ἐξαργυροῦται 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του· ποία εἶναι ἡ ὑφαίρεσίς του πρὸς 8 °/₀;

Ἡ ζητουμένη ὑφαίρεσις δὲν εἶναι τώρα ὁ τόκος τῶν 1500 δραχμῶν (εἰς 3 μῆνας), ἀλλ᾿ ὀλιγωτέρων, δηλαδὴ ἐκείνων, τὰς ὁποίας θὰ πληρώσῃ ὁ ἐξαργυρῶν τὸ γραμμάτιον.

Διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο, εὑρίσκω πρῶτον τὸν τόκον τῶν 100 δραχμῶν διὰ 3 μῆνας πρὸς 8 °/₀· ὁ τόκος οὗτος εἶναι

$$\frac{100\times3\times8}{12\times100} \text{ ἢ } \frac{24}{12}, \text{ ἤτοι 2 δραχμαί,}$$

ἔπειτα σκέπτομαι ὡς ἑξῆς·

100 δραχμαί, τοκιζόμεναι σήμερον, γίνονται μετὰ 3 μῆνας 102.

Ἂν λοιπὸν ἔχῃ τις νὰ λάβῃ μετὰ 3 μῆνας 102 δραχμὰς καὶ πωλήσῃ σήμερον τὸ γραμμάτιόν του, θὰ λάβῃ μόνον 100 καὶ θὰ χάσῃ τὰς 2 (αἵτινες εἶναι ὁ τόκος τῶν 100)· ὥστε 102 δραχμαὶ χάνουν 2· ἡ μία δραχμὴ χάνει $\frac{2}{102}$ καὶ ἑπομένως αἱ 1500 δραχμαὶ θὰ χάσουν

$$\frac{2}{102} \times 1500 \text{ ἢ } \frac{1500}{51} = 29 \text{ δρ. } 41\,\frac{3}{17}.$$

Σημείωσις. Ἡ ὑφαίρεσις καὶ τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου εἶναι ἀνάλογα· δυνάμεθα λοιπόν, ἀφοῦ εὕρωμεν, ὅτι αἱ 102 δραχμαὶ χάνουν 2, νὰ μεταχειρισθῶμεν καὶ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, διὰ νὰ εὕρωμεν, πόσον θὰ χάσουν αἱ 1500 δραχμαί.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα διὰ τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν·

177. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν, πολλαπλασιάζομεν τὸ εἰς τὸ γραμμάτιον περιεχόμενον ποσὸν μὲ τὸν τόκον τῶν 100 δραχμῶν εἰς τὸν χρόνον, ὅστις παρέρχεται ἀπὸ τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ τόκου τούτου καὶ τοῦ 100.***

Σημείωσις. Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πληρώνεται σήμερον διὰ τὸ γραμμάτιον, λέγεται παροῦσα ἀξία αὐτοῦ. Εὑρίσκεται δὲ ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὴν ὑφαίρεσιν ἀπὸ τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου. Λόγου χάριν, εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου εἶναι 1500 δρ. ἡ ὑφαίρεσις εἶναι 29 δρ. 41 $\frac{3}{17}$· ἑπομένως ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι $1470{,}58\frac{14}{17}$.

Ἂν θέλωμεν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὴν παροῦσαν ἀξίαν τοῦ γραμματίου, δηλαδὴ χωρὶς νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὴν ὑφαίρεσιν.

Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν, ὡς καὶ πρίν, τὸν τόκον τῶν 100 δραχμῶν διὰ 3 μῆνας, ὅστις εἶναι 2 δραχμαί, ἔπειτα παρατηροῦμεν, ὅτι 102 δρ. πληρωτέαι μετὰ 3 μῆνας, ἀξίζουν σήμερον 100 δραχμάς.

Ἂν λοιπὸν τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου ἦτο 102, ἡ παροῦσα ἀξία του θὰ ἦτο 100· ἂν ἦτο 1, ἡ παροῦσα ἀξία του θὰ ἦτο $\frac{100}{102}$, ἐπειδὴ δὲ εἶναι 1500, ἡ παροῦσα ἀξία του θὰ εἶναι $\frac{100}{102} \times 1500$ ἢ

$$\frac{50}{51} \times 1500 \text{ ἢ } \frac{50 \times 500}{17}, \text{ ἤτοι } 1470{,}58\,\frac{14}{17}.$$

Προβλήματα.

1) Συνάλλαγμα 800 δραχμῶν προεξωφλήθη 8 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ ἀντὶ 780 δρ. πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἔγινεν ἡ ὑφαίρεσις;

Σημείωσις. Αἱ 20 δραχμαί, τὰς ὁποίας ἔχασε τὸ συνάλλαγμα, εἶναι ὁ τόκος τῶν 780 δι' 8 μῆνας· ὥστε τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ 4ον τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου.

2) Δανείσας τις πρὸ δύο ἐτῶν κεφάλαιόν τι πρὸς 6 %, ἔλαβε σήμερον τόκον καὶ κεφάλαιον ὁμοῦ 560 δραχμάς· πόσον ἦτο τὸ δανεισθὲν κεφάλαιον καὶ πόσος ὁ τόκος;

Σημείωσις. Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι, ἂν ἐδάνειζεν 100 δραχμὰς πρὸ 2 ἐτῶν πρὸς 6 %, θὰ ἐλάμβανε σήμερον 112.

3) Εἰς πτωχεύσαντα ἔμπορον ἐχάρισαν οἱ δανεισταί του 30 % ἀπὸ τὸ χρέος του, συμποσούμενον εἰς 1500 δραχμάς· μὲ πόσας δραχμὰς ἐξοφλεῖ τὸ χρέος του; ('Απ. μὲ 1050)

4) Ποία εἶναι ἡ σημερινὴ ἀξία γραμματίου 800 δραχμῶν, λήγοντος μετὰ 4 μῆνας, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 5,50 %;

5) Γραμμάτιον 1200 δραχμῶν, λῆγον μετά τινας μῆνας, ἐπωλήθη σήμερον ἀντὶ 1150 δραχ. πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἔγινεν ἡ προεξόφλησις;

Προβλήματα ἑταιρείας.

178. ***Προβλήματα ἑτερείας*** λέγονται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ μοιρασθῇ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία μιᾶς ἐπιχειρήσεως εἰς ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι τὴν ἀνέλαβον.

Τοιαῦτα προβλήματα εἶναι τὰ ἑξῆς·

Πρόβλημα 1ον.

Τρεῖς ἄνθρωποι ἔκαμαν ἑταιρείαν διά τινα ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν καὶ κατέβαλον τὰ ἑξῆς χρήματα· Ὁ πρῶτος 5500 δραχμάς, ὁ δεύτερος 8000 καὶ ὁ τρίτος 2500 δραχμάς. Ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκέρδισαν 800 δραχ. πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Φανερὸν εἶναι, ὅτι δὲν πρέπει νὰ λάβουν ἐξ ἴσου, διότι δὲν ἔβαλαν ἴσα χρήματα· ἀλλὰ πρέπει νὰ λάβῃ ὁ καθεὶς ἀναλόγως τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα ἔβαλε· δηλαδή, ἂν ἔβαλέ τις διπλάσια ἑνὸς ἄλλου, θὰ λάβῃ καὶ διπλάσιον κέρδος, ἂν ἔβαλε τριπλάσια θὰ λάβῃ καὶ τριπλάσιον κέρδος κτλ.

Διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο, σκέπτομαι ὡς ἑξῆς·

Ἂν εὕρω πόσον κερδίζει ἡ μία δραχμή, θὰ εὕρω εὐκόλως καὶ πόσον κερδίζουν αἱ δραχμαὶ ἑκάστου.

Τὰ χρήματα, μὲ τὰ ὁποῖα ἔκαμαν τὴν ἐπιχείρησιν, ἦσαν ὅλα ὁμοῦ 5500 καὶ 8000 καὶ 2500, ἤτοι 16000 δραχμαί.

Αἱ 16000 δραχμαὶ ἐκέρδισαν τὰς 800 δραχμάς·

ἄρα ἡ μία δραχμὴ κερδίζει $\frac{800}{16000}$ τῆς δραχμῆς.

Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ μία δραχμὴ κερδίζει $\frac{800}{16000}$,

αἱ 5500 δρ. τοῦ πρώτου κερδίζουν $\frac{800}{16000} \times 5500$

$$\text{ἢ } \frac{1}{20} \times 5500 \text{ ἢ } \frac{1}{2} \times 550 = 275 \text{ δραχμάς.}$$

Αἱ 8000 δρ. τοῦ δευτέρου κερδίζουν $\frac{800}{16000} \times 8000$

$$\text{ἢ } \frac{1}{2} \times 800 = 400.$$

Καὶ αἱ 2500 δρ. τοῦ τρίτου κερδίζουν $\frac{800}{16000} \times 2500$

$$\text{ἢ } \frac{1}{2} \times 250 = 125\cdot$$

ὥστε ὁ πρῶτος θὰ λάβῃ 275 δρ. ὁ δεύτερος 400 καὶ ὁ τρίτος 125.

Σημείωσις. Τὰ μερίδια ὅλα πρέπει, προστιθέμενα, νὰ δίδουν τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἐμοιράσθη.

Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

179. ***Διὰ νὰ μοιράσωμεν τὸ κέρδος ἢ τὴν ζημίαν ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων, τὰ ὁποῖα κατέβαλον οἱ συνέταιροι, πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἑκάστου μὲ τὸ κέρδος ἢ τὴν ζημίαν καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν κεφαλαίων.***

Πρόβλημα 2ον.

Ἔμπορός τις ἀρχίζει μίαν ἐπιχείρησιν μὲ 8600 δραχμάς, μετὰ 8 δὲ μῆνας προσλαμβάνει καὶ συνέταιρον, ὅστις καταβάλλει 14000 δραχμάς· 10 δὲ μῆνας μετὰ ταῦτα προσλαμβάνει καὶ ἄλλον, ὅστις καταβάλλει 7500 δραχμάς. Τρία ἔτη μετὰ τὴν ἔναρξιν τῆς ἐπιχειρήσεως ἐλο-

γαριάσθησαν καὶ εὗρον, ὅτι ἐκέρδισαν 5000 δραχμάς· πόσας πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο διαφέρει ἀπὸ τὸ προηγούμενον, διότι τὰ κεφάλαια τῶν συνεταίρων δὲν ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν ἴσους χρόνους, ἀλλὰ τοῦ μὲν πρώτου ἔμειναν 3 ἔτη, τοῦ δὲ δευτέρου 28 μῆνας, τοῦ δὲ τρίτου 18 μόνον· πρέπει λοιπὸν τὸ κέρδος νὰ μοιρασθῇ ὄχι μόνον ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων, ἀλλὰ καὶ ἀναλόγως τῶν χρόνων, διότι τὰ ἴδια χρήματα εἰς διπλάσιον χρόνον πρέπει νὰ φέρωσι διπλάσιον κέρδος καὶ εἰς τριπλάσιον τριπλάσιον κτλ.

Διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο σκέπτομαι ὡς ἑξῆς·

Αἱ 8600 δραχμαὶ τοῦ πρώτου εἰς 36 μῆνας φέρουν τὸ ἴδιον κέρδος, τὸ ὁποῖον φέρουν 8600×36 δρ. εἰς ἕνα μῆνα· ὁμοίως αἱ 14000 δρ. τοῦ δευτέρου εἰς 28 μῆνας φέρουν τὸ ἴδιον κέρδος, τὸ ὁποῖον φέρουν 14000×28 δραχμαὶ εἰς 1 μῆνα, καὶ τέλος αἱ 7500 δρ. τοῦ τρίτου εἰς 18 μῆνας φέρουν τόσον κέρδος, ὅσον φέρουν 7500×18 δραχμαὶ εἰς ἕνα μῆνα.

Εἶναι λοιπὸν τὸ ἴδιον, ὡς νὰ κατέβαλον δι᾿ ἕνα μῆνα

ὁ μὲν πρῶτος 8600×36, ἤτοι 309600 δραχμάς,

ὁ δὲ δεύτερος 14000×28, ἤτοι 392000 δραχμάς,

ὁ δὲ τρίτος 7500×18, ἤτοι 135000 δραχμάς.

Διὰ τοῦτο πρέπει νὰ μοιράσωμεν τὸ κέρδος ἀναλόγως τῶν τριῶν τούτων ἀριθμῶν. Ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν, ὅσα εἴπομεν εἰς τὸ 1ον πρόβλημα, εὑρίσκομεν ὅτι θὰ λάβουν

ὁ μὲν πρῶτος $\dfrac{5000\times3096}{8366}$, ἤτοι 1850,34. . . δρ.

ὁ δὲ δεύτερος $\dfrac{5000\times3920}{8366}$, ἤτοι 2342,81. . . δρ.

ὁ δὲ τρίτος $\dfrac{5000\times1350}{8366}$, ἤτοι 806,83. . . δρ.

Ἄλλη λύσις. Ἂς ὑποθέσωμεν πρὸς στιγμήν, ὅτι τὸ κέρδος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἕνα μῆνα εἶναι 1 λεπτόν· τότε τὸ κέρδος τῶν 8600 δρ. τοῦ πρώτου εἰς ἕνα μῆνα θὰ εἶναι 8600 λ. καὶ τὸ κέρδος τῶν ἰδίων 8600 δρ. εἰς 36 μῆνας θὰ εἶναι λ. 8600×36 ἢ δρ. 3096· ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ κέρδος τῶν 14000 δ. τοῦ δευτέρου εἰς 28 μῆνας θὰ εἶναι λ. 14000×28, ἤτοι δρ. 3920, καὶ τὸ κέρδος τῶν χρημάτων τοῦ τρίτου θὰ εἶναι λ. 7500×18 ἢ δρ. 1350· ὥστε, ἂν εἴχομεν νὰ μοιράσωμεν κέρδος ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα 3096+3920+1350 δρ. ἤτοι 8366 δρ. θὰ ἐλάμβανεν ὁ πρῶτος 3096, ὁ δεύτερος 3920 καὶ ὁ τρίτος 1350· ἂν τὸ κέρδος ἦτο 1 δρ. τὰ μερίδια θὰ ἦσαν $\dfrac{3096}{8366}$ $\dfrac{3920}{8366}$ καὶ $\dfrac{1350}{8366}$ δρ. καὶ ἐπειδὴ τὸ κέρδος εἶναι 5000 δρ. τὰ μερίδια θὰ εἶναι

$$\frac{3096}{8366}\times5000, \quad \frac{3920}{8366}\times5000, \quad \frac{1350}{8366}\times5000.$$

180. Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι τὰ κυριώτερα προβλήματα τῆς ἑταιρείας εἶναι δύο εἰδῶν·

α') Εἰς τὸ πρῶτον εἶδος ὑπάγονται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ὅλα τὰ κεφάλαια τῶν συναιτέρων μένουν τὸν αὐτὸν χρόνον εἰς τὴν ἐπιχείρησιν.

β') Εἰς τὸ δεύτερον εἶδος ὑπάγονται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα τὰ κεφάλαια τῶν συνεταίρων δὲν μένουν τὸν αὐτὸν χρόνον εἰς τὴν ἐπιχείρησιν.

Προβλήματα.

1) Πατήρ τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ μοιρασθῇ ἡ περιουσία του μεταξὺ τῶν 2 τέκνων του οὕτως, ὥστε νὰ λάβῃ ἡ κόρη του διπλάσια ἢ ὁ υἱός του· ἡ περιουσία ἦτο 12000 δρ. πόσα θὰ λάβῃ ὁ καθείς;

Σημείωσις. Ἐπειδὴ ἡ κόρη θὰ λάβῃ διπλᾶ, εἶναι τὸ ἴδιον ὡς νὰ ἦσαν δύο κόραι καὶ ἐλάμβανε τὸ μερίδιον καὶ τῶν δύο ἡ μία· πρέπει λοιπὸν νὰ μοιρασθῇ ἡ περιουσία εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ νὰ λάβῃ τὸ ἓν τρίτον ὁ υἱός, τὰ δὲ δύο τρίτα ἡ κόρη.

2) Τέσσαρες ἐργάται ἐξετέλεσαν ἔργον τι, διὰ τὸ ὁποῖον ἐπληρώθησαν 120 δραχμάς· καὶ ὁ μὲν α' εἰργάσθη 12 ὥρας, ὁ δὲ β' 18, ὁ γ' 10 καὶ ὁ δ' 8· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος;

(Ἀπ. α' 30, β' 45, γ' 25, δ' 20).

3) Πρὸς κατασκευὴν 21 ὀκάδων πυρίτιδος πρέπει νὰ ἀναμειχθῶσι 16 ὀκάδες νίτρου, 3 ἄνθρακος καὶ 2 θείου. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν 2000 ὀκάδας πυρίτιδος, πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστης τῶν ὑλῶν τούτων;

$$\left(\text{Ἀπ. νίτρου } \frac{16}{21} \times 2000, \text{ ἄνθρ. } \frac{3}{21} \times 2000, \text{ θείου } \frac{2}{21} \times 2000\right).$$

4) Ἔμπορός τις, χρεωκοπήσας, παραχωρεῖ τὴν περιουσίαν του συγκειμένην ἀπὸ 52000 δραχμὰς εἰς τοὺς τρεῖς δανειστάς του· χρεωστεῖ δὲ εἰς μὲν τὸν πρῶτον 40000, εἰς δὲ τὸν δεύτερον 24000 καὶ εἰς τὸν τρίτον 80000· πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος;

$$\left(\text{Ἀπ. ὁ α' } 14444\frac{4}{9}, \text{ ὁ β' } 8666\frac{6}{9} \text{ καὶ ὁ γ' } 28888\frac{8}{9}\right),$$

5) Τρεῖς ἁμαξηλάται μετέφεραν ἐμπόρου τινός, ὁ μὲν α' 800 ὀκάδας σίτου ἐξ ἀποστάσεως 8 σταδίων, ὁ δὲ β' 1000 ὀκάδας ἐξ ἀποστάσεως 5 σταδίων καὶ ὁ γ' 2000 ὀκάδας ἐξ ἀποστάσεως 4 σταδίων· ἔλαβον δὲ καὶ οἱ τρεῖς 250 δραχμάς· πόσας θὰ λάβῃ ὁ καθείς;

$$\left(\text{Ἀπ. ὁ α' } 82\frac{46}{97}, \text{ ὁ β' } 64\frac{42}{97}, \text{ ὁ γ' } 103\frac{9}{97}\right).$$

≠18,32

6) Ἔμπορός τις ἤρχισεν ἐπιχείρησίν τινα μὲ κεφάλαιον 18000 δραχμῶν· μετὰ ἓν ἔτος προσέλαβε καὶ συνέταιρον, ὅστις κατέβαλεν ἐπίσης 18000 δραχμάς· τρία ἔτη μετὰ ταῦτα εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 5000 δραχμὰς ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως· πόσας θὰ λάβῃ ὁ καθείς;

Σημείωσις. Ἐνταῦθα τὰ κεφάλαια εἶναι ἴσα, ἀλλ' οἱ χρόνοι διαφέρουσι, διότι τοῦ πρώτου τὸ κεφάλαιον ἐνήργει εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 4 ἔτη, τοῦ δὲ δευτέρου μόνον 3· πρέπει λοιπὸν νὰ λάβῃ 4 μερίδια ὁ πρῶτος καὶ 3 ὁ δεύτερος· δηλαδὴ νὰ μοιρασθῇ τὸ κέρδος ἀναλόγως τῶν χρόνων.

7) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 120 εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5· δηλαδή, εἰς τρία μέρη τοιαῦτα, ὥστε νὰ γίνωνται ἴσα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 5, ὅταν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπί τινα ἀριθμόν.

Ἂν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς ἦτο ὁ 10, τὰ μέρη θὰ ἦσαν προφανῶς 2, 3 καὶ 5· ἂν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς ἦτο 1, τὰ μέρη θὰ ἦσαν δεκάκις μικρότερα, ἤτοι $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{10}$· ἐπειδὴ δὲ ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶναι 120, τὰ μέρη θὰ εἶναι $\frac{2}{10}\times 120$, $\frac{3}{10}\times 120$, $\frac{5}{10}\times 120$, ἤτοι 24, 36, 60.

8) Ἄνθρωπός τις, θέλων νὰ ἐκτελέσῃ ἐργασίαν τινά, ἐμίσθωσε πρὸς τοῦτο 10 ἐργάτας· τὴν ἐπιοῦσαν προσέλαβε καὶ ἄλλους 9 ἐργάτας καὶ τὴν ἑπομένην ἡμέραν ἄλλους 4. Οὕτως ἐξετελέσθη τὸ ἔργον εἰς 12 ἡμέρας (ὥστε οἱ τελευταῖοι 4 εἰργάσθησαν μόνον 10 ἡμέρας). Διὰ τὴν ἐργασίαν ταύτην ἔλαβον οἱ ἐργάται ὅλοι ὁμοῦ 518 δραχμάς· πῶς θὰ μοιρασθῶσιν αὐτάς;

(Ἀπ. Ἕκαστος ἐκ τῶν πρώτων θὰ λάβῃ 24 δρ. ἕκαστος ἐκ τῶν δευτέρων 22 καὶ ἕκαστος ἐκ τῶν ἄλλων 20).

9) Τρεῖς ἐργάται ἔλαβον 125 δρ. δι' ἔργον τι, ὅπερ ἐξετέλεσαν ὁμοῦ εἰς 75 ὥρας· ἐκ τούτων ὁ α' ἔλαβεν 25 δρ. ὁ β' 20 καὶ ὁ τρίτος τὰς ἐπιλοίπους 80· πόσας ὥρας εἰργάσθη ἕκαστος εἰς τὸ ἔργον τοῦτο;

(Ἀπ. ὁ α' 15, ὁ β' 12 καὶ ὁ γ' 48).

10) Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν ἑταιρείαν καὶ κατέβαλον ὁ μὲν α' 8000 δρ. ὁ δὲ β' 5000 καὶ ὁ γ' 3500· ὅταν δὲ μετὰ ταῦτα ἐμοιράσθησαν τὰ κέρδη, ἔλαβεν ὁ α' 400 δραχμάς· πόσας ἔλαβεν ἑκάτερος τῶν ἄλλων;

(Ἀπ. ὁ β' 250, ὁ γ' 175).

11) Δύο ἔμποροι ἔκαμαν ἑταιρείαν, ἥτις ἔφερε κέρδος 1200 δραχμῶν. Κατὰ τὴν διανομὴν τοῦ κέρδους τούτου ὁ α' ἔλαβεν 100 δραχμὰς περισσοτέρας, διότι εἶχε καταβάλει 560 δραχμὰς περισσοτέρας τοῦ ἄλλου·

πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιον ἑκάστου ἐξ αὐτῶν καὶ πόσον ἐκ τοῦ κέρδους ἔλαβεν ἕκαστος ;

12) Διαλυθείσης ἑταιρείας τινός, ἥτις εἶχε 3 μετόχους, εὑρέθη κέρδος 500 δραχμῶν. Ἐκ τούτων δὲ οἱ δύο πρῶτοι ἔλαβον ὁμοῦ τὰς 200 δραχμάς, ὁ δὲ 3ος, ὅστις εἶχε καταβάλει 2600 δραχ. ἔλαβε τὰς ἐπιλοίπους 300. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον τῶν δύο πρώτων μετόχων.

13) Ἔμπορός τις ἤρχισεν ἐπιχείρησιν, διὰ τὴν ὁποίαν κατέβαλεν 7000 δραχ. Μετὰ 2 ἔτη προσέλαβε καὶ συνέταιρον, ὅστις κατέβαλε 12000 δραχ. Μετὰ 3 ἔτη ὁ α' κατέβαλε πάλιν 4000 δραχ. ἓν δὲ ἔτος μετὰ ταῦτα διελύθη ἡ ἑταιρεία καὶ εὑρέθη κέρδος 2000 δραχ. Πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος ;

Προβλήματα ἀναμείξεως.

181. Τὰ προβλήματα τῆς ἀναμείξεως εἶναι δύο εἰδῶν·

1) Ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μείγματος πραγμάτων, τῶν ὁποίων δίδονται αἱ ποσότητες καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου ἐξ αὐτῶν.

Τοιοῦτον εἶναι τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Οἰνοπώλης τις ἀνέμειξε τριῶν εἰδῶν οἴνους. Ἐκ τοῦ πρώτου οἴνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 35 λεπτά, ἔλαβεν 800 ὀκάδας, ἐκ τοῦ δευτέρου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 40 λεπτά, ἔλαβεν 120 ὀκάδας καὶ ἐκ τοῦ τρίτου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 60 λεπτά, ἔλαβεν 100 ὀκάδας· ζητεῖται, πόσον θὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μείγματος διὰ νὰ λάβῃ τὰ ἴδια χρήματα ;

Διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο, θὰ εὕρω πρῶτον πόσον ἀξίζει ἕκαστος τῶν ἀναμειχθέντων οἴνων· ἔπειτα πόσον ἀξίζει ὅλον τὸ μεῖγμα· μετὰ δὲ ταῦτα θὰ μοιράσω τὴν ἀξίαν τοῦ μείγματος εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ ὀκάδες αὐτοῦ· τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς τοῦ μείγματος.

Ὁ πρῶτος οἶνος ἀξίζει	λεπτὰ	35×800	ἢ δρ.	280
ὁ δεύτερος ἀξίζει	λεπτὰ	40×120	ἢ δρ.	48
ὁ τρίτος ἀξίζει	λεπτὰ	60×100	ἢ δρ.	60
λοιπὸν τὸ μεῖγμα ἀξίζει			δρ.	388

Τὸ μεῖγμα σύγκειται ἀπὸ $800+120+100$, ἤτοι ἀπὸ 1020 ὀκάδας.

Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ 1020 ὀκάδες τοῦ μείγματος ἀξίζουν 388 δραχμάς, ἡ μία ὀκᾶ ἀξίζει $\frac{388}{1020}$ τῆς δρ. ἤτοι 38 λεπτὰ καὶ $\frac{2}{51}$ τοῦ λεπτοῦ.

2) Ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ τιμαὶ τῆς μονάδος δύο πραγμάτων καὶ ζητεῖται, πόσον θὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου εἴδους διὰ νὰ σχηματίσωμεν μεῖγμα ὡρισμένον καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς θὰ ἔχῃ δεδομένην τιμήν.

Τοιοῦτον εἶναι τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Σιτέμπορός τις ἔχει δύο εἴδη σίτου· τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 45 λεπτά, τοῦ δὲ δευτέρου 25· θέλει δὲ νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν μεῖγμα 2400 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 30 λεπτά· πόσον θὰ βάλῃ ἀπὸ κάθε εἶδος;

Διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο, σκέπτομαι ὡς ἑξῆς·

Μία ὀκᾶ τοῦ πρώτου εἴδους ἐπωλεῖτο χωριστὰ 45 λεπτά· τώρα εἰς τὸ μεῖγμα εὑρισκομένη, θὰ πωλῆται μόνον 30 λεπτά· ὥστε διὰ κάθε ὀκᾶν, τὴν ὁποίαν θὰ βάλῃ ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους, θὰ ζημιώνεται ὁ ἔμπορος 15 λεπτά· ἀλλὰ πάλιν θὰ ὠφελῆται ἀπὸ κάθε ὀκᾶν τοῦ δευτέρου εἴδους 5 λεπτὰ (διότι χωριστὰ ἐπωλεῖτο 25 λεπτὰ καὶ τώρα, εἰς τὸ μεῖγμα εὑρισκομένη, θὰ πωλῆται 30).

Λοιπὸν 1 ὀκᾶ τοῦ α′ εἴδους χάνει 15 λεπτά,
1 ὀκᾶ τοῦ β′ εἴδους κερδίζει 5 λεπτά,

ἄρα, ἂν βάλῃ ἀπὸ τὸ α′ εἶδος 5 ὀκάδας, θὰ χάσῃ λεπτὰ 15×5· ἂν δὲ βάλῃ ἀπὸ τὸ β′ εἶδος 15 ὀκάδας, θὰ κερδίσῃ 5×15· καὶ ἐπειδὴ 15×5 εἶναι ἴσον μὲ 5×15, συμπεραίνω, ὅτι οὔτε κέρδος οὔτε ζημίαν θὰ ἔχῃ, ἂν ἀναμείξῃ

5 ὀκάδας ἀπὸ τὸ α′ εἶδος
καὶ 15 ὀκάδας ἀπὸ τὸ β′ εἶδος·

ὥστε, ἂν ἤθελε νὰ κάμῃ μεῖγμα 20 ὀκάδων, ἔπρεπε νὰ βάλῃ

ἐκ τοῦ α′ εἴδους 5
καὶ ἐκ τοῦ β′ εἴδους 15·

ἂν ἤθελε νὰ κάμῃ μεῖγμα 1 ὀκᾶς, ἔπρεπε νὰ βάλῃ

ἀπὸ τὸ α′ εἶδος $\frac{5}{20}$ τῆς ὀκᾶς
καὶ ἀπὸ τὸ β′ εἶδος $\frac{15}{20}$ » »

Λοιπόν, διὰ νὰ κάμῃ μεῖγμα 2400 ὀκάδων, πρέπει νὰ βάλῃ

ἀπὸ τὸ α′ $\frac{5}{20}\times2400$ ἢ $\frac{1}{4}\times2400=600$ ὀκάδας,
ἀπὸ τὸ β′ $\frac{15}{20}\times2400$ ἢ $\frac{3}{4}\times2400=1800$ ὀκάδας·

τότε, πωλῶν τὴν ὀκᾶν πρὸς 30 λεπτά, οὔτε κέρδος θὰ ἔχῃ οὔτε ζημίαν.

182. Εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἀναμείξεως ἀνάγονται καὶ τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ τίτλος τοῦ κράματος πολυτίμου τινὸς μετάλλου, οἷον ἀργύρου ἢ χρυσοῦ, μὲ ἄλλο τι μέταλλον· λέγεται δὲ **τίτλος** τὸ ποσὸν τοῦ πολυτίμου μετάλλου, τὸ περιεχόμενον εἰς μίαν μονάδα τοῦ κράματος. Παραδείγματος χάριν, ὅταν λέγωμεν ὅτι ὁ τίτλος τῶν χρυσῶν νομισμάτων εἶναι 0,900, ἐννοοῦμεν ὅτι μόνον τὰ $\frac{900}{1000}$ αὐτῶν εἶναι καθαρὸς χρυσός, τὰ δὲ ἄλλα $\frac{100}{1000}$ εἶναι ἄλλα μέταλλα (συνήθως χαλκός).

Ὡς παράδειγμα τοιούτου προβλήματος ἔστω τὸ ἑξῆς·

Ποῖος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος 150 δραμίων ἀργύρου, ἔχοντος τίτλον 0,950 καὶ 50 δραμίων ἀργύρου ἔχοντος τίτλον 0,750 ;

Διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο, θὰ εὕρω πρῶτον, πόσος καθαρὸς ἄργυρος ὑπάρχει εἰς καθὲν ἐκ τῶν δύο εἰδῶν τοῦ ἀργύρου καὶ ἑπομένως, πόσος καθαρὸς ἄργυρος ὑπάρχει εἰς τὸ διὰ τῆς ἀναμείξεως αὐτῶν προκῦπτον κρᾶμα. Ἔπειτα θὰ διαιρέσω τὸ ποσὸν τοῦτο εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσα εἶναι τὰ δράμια τοῦ κράματος. Τὸ πηλίκον θὰ εἶναι τὸ ποσὸν τοῦ καθαροῦ ἀργύρου, τὸ περιεχόμενον εἰς ἓν δράμιον τοῦ κράματος, θὰ εἶναι δηλαδὴ ὁ τίτλος τοῦ κράματος.

Ἕκαστον δράμιον τοῦ α΄ ἀργύρου ἔχει ἄργυρον καθαρὸν 0,950 τοῦ δραμίου, ἄρα τὰ 150 δράμια περιέχουσιν ἄργυρον καθαρὸν δράμια $0{,}950 \times 150$, ἤτοι 142,50.

Ἕκαστον δράμιον τοῦ β΄ ἀργύρου ἔχει ἄργυρον καθαρὸν 0,750 τοῦ δραμίου, ἄρα τὰ 50 δράμια ἔχουσιν ἄργυρον καθαρὸν $0{,}750 \times 50$, ἤτοι δράμια 37,50· ἑπομένως τὸ κρᾶμα ἔχει καθαρὸν ἄργυρον δράμια 180· καὶ ἐπειδὴ τὸ κρᾶμα ἔχει 200 δράμια, ἕκαστον δράμιον αὐτοῦ θὰ ἔχῃ ἄργυρον καθαρὸν $\frac{180}{200}$ τοῦ δραμίου ἢ $\frac{90}{100}$ ἢ 0,900· ὥστε ὁ τίτλος τοῦ κράματος θὰ εἶναι 0,900.

Προβλήματα.

1) Οἰνοπώλης ἔχει 800 ὀκάδας οἴνου, τὸν ὁποῖον πωλεῖ πρὸς 80 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· ἐὰν ἀναμείξῃ μετ' αὐτοῦ 100 ὀκάδας ὕδατος, πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν ; ('Απ. 71 $^1/_9$)

2) Οἰνοπώλης ἔχει 3500 ὀκάδας οἴνου, τὸν ὁποῖον πωλεῖ πρὸς 80

λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ ἀναμείξῃ, ὥστε ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος νὰ ἀξίζῃ 70 λεπτά ;

Λύσις. Ἡ ἀξία ὅλου τοῦ μείγματος εἶναι λεπτὰ 80×3500 καὶ τόσα πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτοῦ· ἐπειδὴ δὲ ἑκάστη ὀκᾶ θὰ λαμβάνῃ 70 λεπτά, συμπεραίνομεν, ὅτι πρέπει νὰ πωλήσῃ ὀκάδας $\frac{3500 \times 80}{70}$ ἤτοι 50×80 ἢ 4000· ὥστε πρέπει νὰ προσθέσῃ 500 ὀκάδας ὕδατος.

3) Ἐὰν ὁ αὐτὸς οἰνοπώλης θέλῃ νὰ κερδίσῃ ἐκ τῆς ἀναμείξεως 10% ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μείγματος (ἂν δηλ. τὸ μεῖγμα ἀξίζῃ 100 δρ. νὰ λάβῃ 110), πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ βάλῃ ;

Λύσις. Ἡ ἀξία τοῦ μείγματος εἶναι 80×3500 λεπτά, ἤτοι 2800 δραχμαί, θέλει ὅμως ἐκ τῆς πωλήσεως νὰ λάβῃ αὐτὰς καὶ τὸν τόκον των πρὸς 10%, ἤτοι δρ. 280, ὥστε πρέπει νὰ λάβῃ δρ. 3080· καὶ ἐπειδὴ πωλεῖ τὴν ὀκᾶν πρὸς 70 λεπτά, πρέπει νὰ πωλήσῃ ὀκ. 4400· ὥστε πρέπει νὰ προσθέσῃ 900 ὀκάδας ὕδατος.

4) Ἔμπορός τις ἔχει 2 εἴδη σίτου· τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 32 λεπτά, τοῦ δὲ δευτέρου 26· πόσας ὀκάδας τοῦ πρώτου εἴδους πρέπει νὰ ἀναμείξῃ μὲ 1200 ὀκάδας τοῦ δευτέρου, διὰ νὰ κάμῃ μεῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 30 λεπτά ;

Λύσις. Ἑκάστη ὀκᾶ τοῦ δευτέρου εἴδους πωλεῖται χωριστὰ 26 λεπτά· τώρα, εἰς τὸ μεῖγμα εὑρισκομένη, θὰ πωλῆται 30· ὥστε κερδίζει 4 λεπτά, καὶ ἐπειδὴ ἔχει τὸ μεῖγμα 1200 ὀκάδας τοῦ εἴδους τούτου, κερδίζει 4×1200 ἢ 4800 λεπτά· ἐπειδὴ ὅμως ἐκ τῆς ἀναμείξεως οὔτε κέρδος θέλει νὰ ἔχῃ οὔτε ζημίαν, πρέπει νὰ χάνῃ ἐκ τοῦ πρώτου σίτου τὰ 4800 λεπτά, τὰ ὁποῖα κερδίζει ἐκ τοῦ δευτέρου· ἀλλ' ἐξ ἑκάστης ὀκᾶς τοῦ πρώτου σίτου (εὑρισκομένης εἰς τὸ μεῖγμα) χάνει δύο λεπτά· διὰ νὰ χάσῃ λοιπὸν 4800 λεπτὰ πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ μεῖγμα $\frac{4800}{2}$ ἢ 2400 ὀκάδας τοῦ πρώτου εἴδους.

5) Ἐὰν ὁ αὐτὸς ἔμπορος θέλῃ ἐκ τῆς ἀναμείξεως νὰ κερδίσῃ 20 δρ. πόσας ὀκάδας ἐκ τοῦ α' εἴδους πρέπει νὰ βάλῃ ; (Ἀπ. 1400)

Παραλλαγὴ τῶν προβλημάτων τούτων εἶναι ἐκεῖνα, ἐν οἷς δίδεται ἡ ἀναμειγνυομένη ποσότης τοῦ ἑνὸς εἴδους ἀντὶ νὰ δοθῇ ἡ ποσότης τοῦ μείγματος.

Τοιοῦτο λ. χ. εἶναι τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Παντοπώλης τις ἔχει 200 ὀκ. βουτύρου ἁγνοῦ, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ὀκᾶ ἀξίζει 6 δρ. θέλει δὲ νὰ ἀναμείξῃ μὲ αὐτὸ λίπος, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ὀκᾶ ἀξίζει 2,40, ὥστε νὰ ἀποτελεσθῇ μεῖγμα, οὗτινος ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 5,40· πόσον λίπος πρέπει νὰ βάλῃ;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ σκεφθῶμεν, ὅτι ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ ἁγνοῦ βουτύρου ζημιοῦται ὁ παντοπώλης 120 δραχ. (διότι ἑκάστη ὀκᾶ ἁγνοῦ βουτύρου φέρει ζημίαν 60 λεπτῶν). Τὴν ζημίαν ταύτην πρέπει νὰ προλάβῃ διὰ τῆς ἀναμείξεως τοῦ λίπους, καὶ ἐπειδὴ ἐξ ἑκάστης ὀκᾶς λίπους ἔχει κέρδος 3 δραχ. συμπεραίνομεν, ὅτι τόσας ὀκάδας λίπους θὰ βάλῃ, ὅσας φορὰς χωροῦν αἱ 3 δραχ. εἰς τὰς 120 δραχ. ἤτοι 40 ὀκάδας.

Περὶ τῶν ἀριθμητικῶν μέσων.

183. ***Ἀριθμητικὸν μέσον ἢ μέσος ὅρος*** διαφόρων ποσῶν ὁμοειδῶν λέγεται τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν, ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 8 εἶναι $\frac{4+8}{2}$ ἤτοι 6· ὁ δὲ μέσος ὅρος τῶν τριῶν ἀριθμῶν 12, 18, 30 εἶναι ὁ $\frac{12+18+30}{3}$ ἢ 20.

Τοὺς μέσους ὅρους μεταχειριζόμεθα εἰς πολλὰς περιστάσεις.

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἐμετρήσαμεν τὸ μῆκος μιᾶς γραμμῆς τρεῖς φοράς, καὶ τὴν μὲν πρώτην φορὰν εὑρήκαμεν 12625 μέτρα, τὴν δὲ δευτέραν 12628 καὶ τὴν τρίτην 12621· εὑρήκαμεν δὲ διαφόρους ἀριθμοὺς εἰς τὰς τρεῖς καταμετρήσεις διὰ τὰ λάθη, τὰ ὁποῖα, χωρὶς νὰ θέλωμεν, ἐκάμαμεν εἰς τὴν ἐργασίαν ταύτην.

Τότε ὡς πιθανωτέραν τιμὴν τοῦ μήκους τῆς γραμμῆς λαμβάνομεν τὸν μέσον ὅρον τῶν τριῶν εὑρεθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι

$$\frac{1}{3}\,(12625+12628+12621) \text{ ἢ } 12624,6.$$

Ὡς παραδείγματα τῶν μέσων ὅρων ἔστωσαν καὶ τὰ ἑξῆς·

1) Κτῆμά τι ἔφερε κατὰ τὸ παρὸν ἔτος εἰσόδημα 780 δραχμῶν, πέρυσι δὲ 870 καὶ προπέρυσι 497· ποῖος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τοῦ εἰσοδήματος τοῦ κτήματος τούτου κατὰ τὰ τρία ταῦτα ἔτη;

Ἂν προσθέσωμεν τὰ εἰσοδήματα τῶν τριῶν ἐτῶν ἀνευρίσκομεν 2147 δρ. καὶ διαιροῦντες διὰ 3, εὑρίσκομεν τὸν μέσον ὅρον $715\frac{2}{3}$ ἢ δραχμὰς 715,66.

2) Οἰκογένειά τις ἐπλήρωνεν ἐπὶ 5 ἔτη δι᾿ ἐνοίκιον 70 δραχ. κατὰ μῆνα· μετὰ ταῦτα ἐπὶ 3 ἔτη 80 καὶ μετὰ ταῦτα ἐπὶ δύο ἔτη 100· πόσον εἶναι τὸ μέσον ἐνοίκιον αὐτῆς κατὰ τὰ 10 ταῦτα ἔτη;

Προφανῶς πρέπει νὰ εὕρωμεν ὅλα, ὅσα ἐπλήρωσε δι᾿ ἐνοίκιον κατὰ τὰ 10 ἔτη καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ ποσὸν τοῦτο εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσοι εἶναι οἱ μῆνες τῶν 10 ἐτῶν, ἤτοι 120.

Εἰς τὰ 5 ἔτη, ἤγουν 60 μῆνας, ἔδωκεν	70×60 ἢ 4200,
εἰς τὰ 3 ἔτη, ἤγουν 36 μῆνας, ἔδωκεν	80×36 ἢ 2880
καὶ εἰς τὰ 2 ἔτη, ἤγουν 24 μῆνας, ἔδωκεν	100×24 ἢ 2400,
ὥστε εἰς τοὺς 120 μῆνας ἔδωκε τὸ ὅλον	9480·

ἄρα ὁ μέσος ὅρος τοῦ ἐνοικίου εἰς τὰ 10 ταῦτα ἔτη εἶναι

$$\frac{9480}{120} \text{ ἢ } \frac{948}{12} \text{ ἢ } \frac{237}{3} \text{ ἢ } 79 \text{ δραχμαί.}$$

3) Πλοῖόν τι διέτρεξε τὴν πρώτην ἡμέραν ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του 10 μίλια, τὴν δευτέραν 8 καὶ τὴν τρίτην 7, τὰς δὲ ἑπομένας 10 ἡμέρας διέτρεχε καθ᾿ ἑκάστην ἀπὸ 4· πόσα μίλια διέτρεχε καθ᾿ ἑκάστην κατὰ μέσον ὅρον; ('Απ. 5)

4) Τρεῖς ἐκτιμηταὶ ἐξετίμησαν χωριστὰ μίαν οἰκίαν· ὁ πρῶτος ἐξετίμησεν αὐτὴν διὰ 4200 δρ. ὁ δεύτερος διὰ 4000 καὶ ὁ τρίτος διὰ 4500· ποῖος εἶναι ὁ μέσος ὅρος; ('Α $4233\frac{1}{3}$)

5) Ὁ μέσος ὅρος τῶν ἐνοικίων μιᾶς οἰκίας κατὰ τοὺς τρεῖς μῆνας τοῦ θέρους ἦτο 65 δρ. κατὰ δὲ τοὺς ἐπιλοίπους ἐννέα μῆνας ὁ μέσος ὅρος 55 δρ. πόσος εἶναι ὁ μέσος ὅρος ὅλου τοῦ ἔτους;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΤΙΧΟΓΡΑΦΙΑΣ

Περὶ ἐμπορίου καὶ ἐμπορικῶν πράξεων.

Ἐμπόριον ὀνομάζεται ἡ ἐνέργεια ἀνταλλαγῶν διαφόρων ἀξιῶν μὲ τελικὸν σκοπὸν τὸ κέρδος.

Ἐμπορεύματα ὀνομάζονται τὰ φυσικὰ ἢ καὶ βιομηχανικὰ προϊόντα, τὰ πωλούμενα εἰς τὰ καταστήματα, τὰς ἀγορὰς κ.τ.λ.

Κύριαι ἐμπορικαὶ πράξεις εἶναι ἡ ἀγορὰ καὶ ἡ πώλησις.

Ἀγορὰ εἶναι ἡ πρᾶξις, δι᾿ ἧς ὑποχρεοῦταί τις νὰ πληρώσῃ ἀμέσως ἢ μετὰ καιρὸν ποσόν τι ἐπ᾿ ἀνταλλαγῇ ἀντικειμένου τινός.

Πώλησις εἶναι ἡ πρᾶξις, καθ᾿ ἣν παραδίδει τις ἀντικείμενον ἐπ᾿ ἀνταλλαγῇ χρήματος, εἰσπραττομένου ἀμέσως ἢ μετά τινα χρόνον.

Ἀγορὰ ἢ πώλησις τοῖς μετρητοῖς ὀνομάζεται ἡ πρᾶξις ἐκείνη, καθ᾿ ἣν τὸ ἀντίτιμον εἰς χρῆμα τοῦ πωλουμένου ἀντικειμένου ὀφείλει νὰ καταβληθῇ εἰς τὸν πωλητὴν ἅμα τῇ παραλαβῇ τοῦ ἀντικειμένου τούτου ὑπὸ τοῦ ἀγοραστοῦ.

Ἐπὶ προθεσμίᾳ ἢ πιστώσει πώλησις ὀνομάζεται ἡ πρᾶξις, καθ᾿ ἣν τὸ εἰς χρῆμα ἀντίτιμον τοῦ πωλουμένου ἀντικειμένου ὀφείλει νὰ καταβληθῇ ὑπὸ τοῦ ἀγοραστοῦ εἰς τὸν πωλητὴν ἐντὸς ὡρισμένης προθεσμίας ἀπὸ τῆς παραλαβῆς του.

Ἔμπορος ὀνομάζεται πᾶς ὁ ἐκτελῶν ἐμπορικὰς ἐργασίας, ὁ ἔχων ταύτας ὡς εἰδικὸν ἐπάγγελμα.

Περὶ γραμματίων.

Γραμμάτιον ὀνομάζεται τὸ ἔγγραφον, δι᾿ οὗ ἀναλαμβάνει τις τὴν ὑποχρέωσιν νὰ πληρώσῃ εἰς ἄλλον ἢ εἰς διαταγὴν τοῦ ἄλλου τούτου ποσόν τι εἰς ὡρισμένον χρόνον.

Εἰς διαταγὴν τοῦ ἄλλου σημαίνει, εἰς οἱονδήποτε τρίτον ἤθελεν ὁ πρὸς ὃν ἐξεδόθη τὸ γραμμάτιον ὑποδείξει εἰς τὸν ἐκδώσαντα (ὑπογράψαντα) αὐτό.

Τὰ γραμμάτια χρησιμεύουσιν ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον εἰς τὸν διακανονισμὸν τῶν ἐπὶ προθεσμίᾳ πράξεων.

Γραμματίων διακρίνομεν τρία εἴδη·
τὸ εἰς διαταγὴν γραμμάτιον,
τὴν συναλλαγματικήν,
τὴν ἐπιταγήν.

Γραμμάτιον εἰς διαταγὴν εἶναι τὸ ἔγγραφον, δι᾽ οὗ ὁ χρεώστης ὑπόσχεται νὰ πληρώση εἰς διαταγὴν τοῦ πιστωτοῦ του τὴν ὀφειλήν του εἰς ὡρισμένον χρόνον.

Τὸ εἰς διαταγὴν γραμμάτιον, διὰ νὰ εἶναι ἐν τάξει, πρέπει νὰ περιέχῃ

1) τὸν τόπον καὶ τὴν ἡμερομηνίαν τῆς ἐκδόσεως,
2) τὴν λῆξιν (ἤτοι τὴν ἡμερομηνίαν πληρωμῆς) ὁλογράφως,
3) τὴν ἔκφρασιν ἀναλήψεως ὑποχρεώσεως πληρωμῆς,
4) τὸ ὄνομα τοῦ εἰς οὗ τὴν διαταγὴν θὰ πληρωθῇ,
5) τὸ πληρωτέον ποσὸν ὁλογράφως,
6) τὸ εἶδος τῆς ὑπὸ τοῦ χρεώστου ληφθείσης ἀξίας,
7) τὴν ὑπογραφὴν καὶ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἐκδίδοντος (ὑπογράφοντος) τὸ γραμμάτιον.

Ὑπόδειγμα γραμματίου εἰς διαταγήν.

(1) Ἀθῆναι τῇ 10ῃ Μαρτίου 1918. Διὰ Δρχ. 1000

(2) Τὴν δεκάτην προσεχοῦς Ἰουλίου / (3) ὑπόσχομαι καὶ ὑποχρεοῦμαι νὰ πληρώσω / (4) εἰς διαταγὴν τοῦ κ. Ἰωσ. Ἰωάννου / (5) χιλίας δραχμάς, / (6) ἃς παρ᾽ αὐτοῦ ἔλαβον εἰς ἐμπορεύματα.

(7) Γ. Γεωργίου
Ὁδὸς Βήσης 15.

Συναλλαγματικὴ ὀνομάζεται τὸ ἔγγραφον, δι᾽ οὗ ὁ ἔχων λαμβάνειν διατάσσει τὸν ὀφειλέτην του νὰ πληρώσῃ εἰς τρίτον τινὰ ἢ εἰς διαταγὴν τοῦ τρίτου τούτου τὸ ὀφειλόμενον ποσόν.

Ἡ συναλλαγματικὴ δέον νὰ περιέχῃ

1) τὸν τόπον καὶ τὴν ἡμερομηνίαν τῆς ἐκδόσεως.
2) τὴν λῆξιν (ἤτοι τὴν ἡμερομηνίαν πληρωμῆς),
3) τὴν πρόσκλησιν πρὸς πληρωμήν,
4) τὸ ὄνομα τοῦ εἰς διαταγὴν τίνος θὰ πληρωθῇ,
5) τὸ πληρωτέον ποσόν,
6) τὸ εἶδος τῆς προμηθευθείσης εἰς τὸν χρεώστην ἀξίας,

7) τὴν ὑπογραφὴν τοῦ δίδοντος τὴν διαταγήν,
8) τὸ ὄνομα καὶ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ὀφείλοντος νὰ πληρώσῃ αὐτήν.

Α΄ ὑπόδειγμα συναλλαγματικῆς.

(1) Ἀθῆναι 15 Μαρτίου 1918. Διὰ δραχ. 1000

(2) Τὴν δεκάτην προσεχοῦς Ἰουλίου / (3) πληρώσατε διὰ τῆς παρούσης (4) εἰς διαταγὴν τοῦ κ. Β. Βασιλείου / (5) δραχμὰς χιλίας, / (6) ἃς παρ᾽ ἐμοῦ ἐλάβατε εἰς μετρητά.

(7) Ἰ. Ἰωάννου

(8) Πρὸς τὸν κ. Γ. Γεωργίου
Ὁδὸς Βήσης 15.

Ὁ εἰς οὗ τὴν διαταγὴν ἐκδίδεται ἡ συναλλαγματικὴ παρουσιάζει αὐτὴν εἰς τὸν ἐφ᾽ οὗ ἐξεδόθη, ἵνα οὗτος τὴν ἀποδεχθῇ.

Ἀποδέχομαι συναλλαγματικὴν σημαίνει, ἀναγνωρίζω τὸ χρέος καὶ ἀναλαμβάνω τὴν ὑποχρέωσιν νὰ τὸ πληρώσω· ἡ πρᾶξις δὲ αὕτη ἐγγράφεται εἰς ἓν οἱονδήποτε περιθώριον τῆς συναλλαγματικῆς καὶ ὑπογράφεται ὑπὸ τοῦ ὀφειλέτου ὡς ἑξῆς·

Δεκτὴ
Γ. Γεωργίου

Β΄ ὑπόδειγμα συναλλαγματικῆς.

Ἀθῆναι 15 Μαρτίου 1918. Διὰ δραχ. 1000

Μεθ᾽ ἡμέρας τριάκοντα ἀπὸ τῆς παρουσιάσεως πληρώσατε εἰς διαταγὴν τοῦ κ. Β. Βασιλείου δραχμὰς χιλίας, ἃς παρ᾽ ἐμοῦ ἐλάβατε εἰς μετρητά.

Ἰ. Ἰωάννου

Πρὸς τὸν κ. Γ. Γεωργίου
Ὁδὸς Βήσης 15.

Δεκτὴ
Ἀθῆναι 20 Μαρτίου 1918
Γ. Γεωργίου

Ὡς βλέπομεν ἐν τῷ δευτέρῳ ὑποδείγματι, ἡ πρᾶξις τῆς ἀποδοχῆς συνοδεύεται ὑπὸ τῆς ἡμερομηνίας, καθ᾽ ἣν αὕτη ἔλαβε χώραν, τοῦτο δέ, διότι ἀπὸ τῆς ἡμερομηνίας ταύτης, οὔσης ἡμερομηνίας παρουσιάσεως, θὰ καθορισθῇ ἡ λῆξις τῆς συναλλαγματικῆς.

Ἐπιταγὴ ὀνομάζεται τὸ ἔγγραφον, δι' οὗ ὁ πιστωτὴς διατάσσει τὸν ὀφειλέτην νὰ πληρώσῃ ἅμα τῇ εἰς αὐτὸν παρουσιάσει τοῦ ἐγγράφου εἰς τρίτον ἢ εἰς διαταγὴν τούτου ἢ ἁπλῶς εἰς τὸν φέροντα ποσόν τι.

Ὑπόδειγμα ἐπιταγῆς.

Ἀθῆναι 10 Ἰουλίου 1918. Διὰ δραχ. 1000.

Πληρώσατε ἐπὶ τῇ ἐμφανίσει εἰς διαταγὴν τοῦ κ. Ἰ. Ἰωάννου δραχμὰς χιλίας εἰς χρέωσιν τοῦ παρ' ὑμῖν λογαριασμοῦ μου.

Πρὸς τὴν Τράπεζαν Ἀνατολῆς
Ἐνταῦθα Γ. Γεωργίου

Γενικὰ περὶ γραμματίων.

Ὀπισθογράφησις λέγεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς ὁ εἰς διαταγὴν οὗ ἐξεδόθη τὸ γραμμάτιον ἐντέλλεται εἰς τὸν ὀφειλέτην νὰ πληρώσῃ εἰς τρίτον ἢ τὴν διαταγὴν τούτου τὸ ὀφειλόμενον ποσόν. Λέγεται ὀπισθογράφησις, διότι ἀναγράφεται ἐπὶ τῆς ὀπισθίας ὄψεως τοῦ γραμματίου ἔχει δὲ ὡς ἑξῆς·

Ἀντ' ἐμοῦ πληρώσατε εἰς διαταγὴν τοῦ
κ. Κ. Παπαλέξη.
Ἐν Ἀθήναις τῇ 26ῃ Μαρτίου 1918
Ἰ. Ἰωάννου

Διαμαρτύρησις ὀνομάζεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς ὁ κομιστὴς τοῦ γραμματίου διαμαρτύρεται ἐνώπιον τῆς ἀρχῆς, διὰ τὴν μὴ πληρωμὴν τοῦ γραμματίου ὑπὸ τοῦ ὀφειλέτου ἢ διὰ τὴν μὴ ἀποδοχὴν τῆς συναλλαγματικῆς ὑπὸ τοῦ ἐφ' οὗ ἐξεδόθη αὕτη.

Διακρίνομεν ὅθεν δύο εἰδῶν διαμαρτυρήσεις· τὴν λόγῳ μὴ πληρωμῆς καὶ τὴν λόγῳ μὴ ἀποδοχῆς.

Ἡ διαμαρτύρησις γίνεται διὰ πράξεως συμβολαιογράφου, εἰς ὃν τὸ πρὸς διαμαρτύρησιν γραμμάτιον δέον νὰ παραδοθῇ τὴν ἑπομένην τῆς λήξεώς του. Ἐν περιπτώσει, καθ' ἣν ἡ διαμαρτύρησις δὲν γίνῃ ἐντὸς τῆς ὑπὸ τοῦ νόμου τασσομένης προθεσμίας, οἱ τυχὸν ὀπισθογράφοι τοῦ γραμματίου, οἵτινες εἶναι ἀλληλεγγύως μετὰ τοῦ ἀρχικοῦ ὀφειλέτου ὑπεύθυνοι διὰ τὴν πληρωμὴν αὐτοῦ, παύουσι τοῦ νὰ ὑπέχωσι τοιαύτην εὐθύνην.

Ἐκδότης διὰ μὲν τὰ εἰς διαταγὴν γραμμάτια ὀνομάζεται ὁ ἀναλαμβάνων τὴν ὑποχρέωσιν νὰ πληρώσῃ εἰς διαταγὴν τοῦ ἄλλου, διὰ δὲ τὰς συναλλαγματικὰς ὁ ἐντελλόμενος εἰς ἄλλον τὴν πληρωμήν.

Ἀποδέκτης ὀνομάζεται ὁ ἐφ᾽ οὗ ἐξεδόθη ἡ συναλλαγματική, ἀφοῦ ἀποδεχθῇ αὐτήν.

Περὶ λογιστικῆς καὶ λογιστικῶν βιβλίων.

Λογιστικὴ ὀνομάζεται ἡ τέχνη τοῦ ἐγκαθιστᾶν καὶ τηρεῖν τοὺς λογαριασμοὺς τῶν ἐμπορικῶν οἴκων.

Λογιστικὰ βιβλία εἶναι τὰ διὰ τὴν τήρησιν τῶν τοιούτων λογαριασμῶν ἀπαιτούμενα.

Ἐν αὐτοῖς ὁ ἔμπορος ἐγγράφει ἁπάσας τὰς ἐμπορικάς του πράξεις κατὰ τρόπον, ὥστε νὰ δύναται ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν νὰ γνωρίζῃ τὴν ἐμπορικήν του κατάστασιν.

Κατάστασις ἑνὸς ἐμπόρου ὀνομάζεται τὸ τί ἔχει εἰς χεῖράς του ἢ ὑπὸ τὴν ἄμεσον κυριότητά του καὶ τὸ τί ἔχει λαμβάνειν ἀφ᾽ ἑνός, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ τὸ τί ὀφείλει· καὶ ὅ,τι μὲν ἔχει ὑπὸ τὴν κατοχήν του ἢ ἔχει λαμβάνειν ὀνομάζεται **ἐνεργητικόν,** ὅ,τι δὲ ὀφείλει ὀνομάζεται **παθητικόν.**

Τὸ ὑπερβάλλον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ποσῶν τοῦ ἐνεργητικοῦ ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ποσῶν τοῦ παθητικοῦ ἀποτελεῖ τὴν καθαρὰν περιουσίαν τοῦ ἐμπόρου, δηλαδὴ τὸ **κεφάλαιόν του.**

Παράδειγμα.

Καταμετροῦμεν τὴν περιουσίαν τοῦ ἐμπόρου ἐλαίων Λ. Λαδάκη καὶ εὑρίσκομεν·

Ἐν τῇ ἀποθήκῃ του ἔλαια ἀξίας δρ. 40000· ἐν τῷ καταστήματί του ἔπιπλα ἀξίας δρ. 2000· ἐν τῷ ταμείῳ του δρ. 2000· ἐν τῷ χαρτοφυλακίῳ του γραμμάτια ὑπογραφῶν διαφόρων πελατῶν του ἀξίας δρ. 10000

Ἐκ δὲ τῶν βιβλίων του ὅτι ἔχει·

Ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν λαμβάνειν παρὰ τῆς Τραπέζης Ἀνατολῆς ἐκ καταθέσεων δρ. 20000 καὶ παρὰ τοῦ Ἰ. Ἰωάννου ἐξ ἀξίας πωληθέντων αὐτῷ ἐμπορευμάτων δρ. 1000.

Ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐκκρεμῆ ὀφειλὴν εἰς τὸν Δ. Δημητρίου δι' ἐμπορεύματα, ἅτινα παρ' αὐτοῦ ἔλαβε, δρ. 15000, καὶ ὅτι ἔχει ἐκδώσει γραμμάτια εἰς διαταγὴν διαφόρων ἐκ δρ. 25000, ἅτινα ὀφείλει νὰ πληρώση εἰς τὴν λῆξίν των.

Ἡ καταμέτρησις αὕτη ὀνομάζεται ***ἀπογραφή***.

Μὲ τὴν ἀπογραφὴν προβαίνομεν εἰς τὴν κατάστρωσιν τῆς καταστάσεως τοῦ ἐμπόρου. Ἐπειδὴ δέ, ὡς εἴπομεν, ἡ κατάστασις ἑνὸς ἐμπόρου ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὸ ἐνεργητικὸν αὐτοῦ, ἤτοι τὸ τί ἔχει καὶ τὸ τί ἔχει λαμβάνειν, καὶ τὸ παθητικόν του, ἤτοι τὸ τί ὀφείλει, γράφομεν·

Ἐνεργητικόν.

Ἐμπορεύματα, 20000 ὀκ. ἔλαιον πρὸς δρ. 2	Δρ.	40000	
Ἔπιπλα, ἀξίας	»	2000	
Ταμεῖον μετρητὰ	»	2000	
Γραμμάτια πρὸς εἴσπραξιν	»	10000	
Τράπεζα Ἀνατολῆς, κατάθεσις	»	20000	
Ἰ. Ἰωάννου, ὀφειλή του	»	1000 =	δρ. 75000

Παθητικόν.

Δ. Δημητρίου, ὅσα ἔχει λαμβάνειν	δρ.	15000	
Γραμμάτια πρὸς πληρωμὴν	»	25000=	δρ. 40000
ὑπερβάλλον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ποσῶν τοῦ ἐνεργητικοῦ ἐπὶ τῶν τοῦ παθητικοῦ, ἤτοι ***κεφάλαιον***			δρ. 35000

Δηλαδή, ἐὰν ὁ Λ. Λαδάκης σήμερον πωλήση τὰ ἔλαιά του καὶ εἰσπράξη τὰ ὅσα ἔχει λαμβάνειν, πληρώση δὲ τὰ ὅσα ὀφείλει, θὰ μείνη μὲ περιουσίαν καθαρὰν δρ. 35000.

Λογιστικὰ βιβλία. Τὰ λογιστικὰ βιβλία διαιροῦνται εἰς δύο· εἰς κύρια καὶ εἰς βοηθητικά.

Κύρια βιβλία εἶναι τὸ ***ἡμερολόγιον*** καὶ τὸ βιβλίον τῶν ***ἀπογραφῶν***. Τὰ δύο ταῦτα βιβλία δέον νὰ ὦσι χαρτοσημασμένα καὶ μονογραφημένα ὑπὸ τοῦ προέδρου τῶν πρωτοδικῶν ἢ τοῦ νομίμου ἀναπληρωτοῦ του.

Ἐν τῷ ἡμερολογίῳ ὁ ἔμπορος ὀφείλει νὰ ἐγγράφη καθ' ἑκάστην ἁπάσας τὰς ἐμπορικάς του πράξεις μὲ πᾶσαν δυνατὴν λεπτομέρειαν.

Ἐν τῷ βιβλίῳ τῶν ἀπογραφῶν ἐγγράφεται τοὐλάχιστον ἅπαξ τοῦ ἔτους ἡ κατάστασις τοῦ ἐμπόρου, ὡς προηγουμένως εἴδομεν.

ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΟΝ ΤΟΥ Λ. ΛΑΔΑΚΗ

Ἰανουάριος 1918

	1η	Δρ.
Τ. / Π. Λ.	Κατάθεσις εἰς τὸ ταμεῖόν μου διὰ κεφάλαια............	50000
	ἰδία	
Ἐπ. / Τ.	Ἐπλήρωσα δι' ἐνοίκιον ἑνὸς μηνὸς τοῦ μαγαζείου μου	100
	2	
Ἐπ. / Τ.	Ἠγόρασα τοῖς μετρητοῖς δύο τραπέζια, δύο καρέκλες καὶ μίαν πλάστιγγα..................................	800
	4	
Ἐμπ. / Τ.	Ἠγόρασα τοῖς μετρητοῖς 4000 ὀκάδες ἐλαίου πρὸς δρ. 2	8000
	7	
Ἐμπ. / Π. Λ.	Ἠγόρασα ἐπὶ πιστώσει ἀπὸ Ἰ. Ἰωάννου 10000 ὀκάδας οἴνου πρὸς δραχμὴν 1..............................	10000
	8	
Τ. / Ἐμπ.	Ἐπώλησα τοῖς μετρητοῖς 1000 ὀκάδας οἴνου πρὸς δρ. 1,10	1100
	10	
Ἐμπ. / Π. Λ.	Ἠγόρασα ἀπὸ Δ. Δημητρίου ἐπὶ πιστώσει 5000 ὀκάδας ἐλαίου πρὸς δραχμὰς 2..............................	10000
	11	
Π. Λ. / Ἐμπ.	Ἐπώλησα ἐπὶ πιστώσει εἰς τὸν Ἐ. Εὐστρατίου 1000 ὀκάδας ἐλαίου πρὸς δραχμὰς 2,40.........................	2400
	13	
Π. Λ. / Τ.	Ἐπλήρωσα εἰς τὸν Ἰ. Ἰωάννου ἔναντι χρέους μου......	5000
	15	
Π. Λ. / Γ. Π.	Ὑπέγραψα εἰς διαταγὴν τοῦ Δ. Δημητρίου γραμμάτιον λήξεως 10 Ἀπριλίου 1918 καὶ τοῦ ἔδωκα............	10000
	18	
Τ. / Π. Λ.	Εἰσέπραξα ἀπὸ Ἐ. Εὐστρατίου ἔναντι χρέους του........	1000
	19	
Τ. / Ἐμπ.	Ἐπώλησα τοῖς μετρητοῖς 100 ὀκάδας ἐλαίου πρὸς δρ. 2,40	240
	20	
Π. Λ. / Ἐμπ.	Ἐπώλησα ἐπὶ πιστώσει εἰς τὸν Ζ. Ζάννον 4000 ὀκάδας οἴνου πρὸς δραχμὰς 1,20............................	4800
	ἄθροισμα εἰς μεταφορὰν....	103440

	ἐκ μεταφορᾶς..........		103440	—
	23			
Τ. / Ἐμπ.	Ἐπώλησα μετρητοῖς 500 ὀκ. ἐλαίου πρὸς δρ. 2,30 δρ. 1150 καὶ 1000 ὀκ. οἴνου » » 1,10 » 1100		2250	—
	26			
Γ. Εἰσ. / Γ. Λ.	Ἔλαβον ἀπὸ Ζ. Ζάννον γραμμάτιόν του εἰς διαταγήν μου λῆγον τὴν 20 Φεβρουαρίου 1918....................		4000	—
	31			
Ἔξ. / Τ.	Ἐπλήρωσα μισθὸν ὑπαλλήλου » διάφορα ἔξοδα μηνὸς	δρ. 100 » 200	300	—
	ἄθροισμα τοῦ μηνός..........		109990	—

Βοηθητικὰ βιβλία. Τὰ βοηθητικὰ βιβλία εἶναι τὰ βιβλία ἐκεῖνα, εἰς ἃ μεταφέρονται αἱ πράξεις τοῦ ἡμερολογίου, μεταφερόμεναι ἑκάστη εἰς δύο ἢ πλείονα ἐξ αὐτῶν ἰδιαιτέρως, ἀναλόγως τῆς πράξεως.

Τὰ βοηθητικὰ βιβλία εἶναι ἠριθμημένα εἰς διπλᾶς σελίδας· τὴν ἀριστερὰν καὶ τὴν δεξιάν.

Ἡ μὲν ἀριστερὰ σελὶς ἀντιπροσωπεύει τὴν εἰσαγωγὴν ἢ χρέωσιν ἢ δοῦναι τοῦ βιβλίου, ἡ δὲ δεξιὰ τὴν ἐξαγωγὴν ἢ πίστωσιν ἢ λαβεῖν αὐτοῦ (δηλ. τοῦ ἐν τῷ βιβλίῳ ἐγγραφομένου λογαριασμοῦ).

Ὁ ἀριθμὸς τῶν βοηθητικῶν βιβλίων κανονίζεται ἀναλόγως τοῦ εἴδους τῆς ἐργασίας τοῦ ἐμπόρου. Τινὰ ὅμως ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀπαραίτητα εἰς πάντα ἔμπορον. Ταῦτα εἶναι

1ον) ***τὸ βιβλίον ταμείου***, ἐν τῷ ὁποίῳ ἐγγράφομεν πᾶσαν χρηματικὴν κίνησιν, τὰς μὲν εἰσπράξεις εἰς τὴν ἀριστερὰν σελίδα, ἤτοι τὴν χρέωσιν, τὰς δὲ πληρωμὰς εἰς τὴν δεξιάν, ἤτοι τὴν πίστωσιν,

2ον) ***τὸ βιβλίον ἐμπορευμάτων***, ἐν τῷ ὁποίῳ ἐγγράφομεν πᾶσαν κίνησιν τῶν ἐμπορευμάτων, τὰς μὲν εἰσαγωγὰς εἰς τὸ ἀριστερὸν ἢ τὴν χρέωσιν, τὰς δὲ ἐξαγωγὰς εἰς τὸ δεξιὸν ἢ τὴν πίστωσιν· Ἐὰν ἔχωμεν πολλῶν εἰδῶν ἐμπορεύματα, ἀνοίγομεν δι' ἕκαστον εἶδος ἰδιαιτέραν διπλῆν σελίδα ἐν τῷ αὐτῷ βιβλίῳ.

3ον) ***τὸ βιβλίον ἐπίπλων καὶ σκευῶν,*** ἐν τῷ ὁποίῳ ἐγγράφομεν εἰς μὲν τὴν ἀριστερὰν σελίδα ἢ χρέωσιν πάντα τὰ ἐν τῷ καταστήματι ἢ γραφείῳ μας εἰσαγόμενα ἔπιπλα ἢ σκεύη ἐργασίας μας, εἰς δὲ τὴν δεξιὰν αὐτοῦ σελίδα ἢ πίστωσιν πάντα τὰ λόγῳ πωλήσεως ἢ καὶ καταστροφῆς ἐξερχόμενα ἔπιπλα ἢ σκεύη, 4ον) ***τὸ βιβλίον γραμματίων πρὸς εἴσπραξιν***, ἐν τῷ ὁποίῳ ἐγγράφομεν πάντα τὰ ὑπὸ τρίτων διδόμενα ἡμῖν εἰς διαταγήν μας γραμμάτια, ὅταν μὲν τὰ λαμβάνωμεν, εἰς τὴν ἀριστερὰν σελίδα ἢ χρέωσιν ἢ εἰσαγωγήν, ὅταν δὲ εἰσπράξαντες τὴν ἀξίαν αὐτῶν τὰ ἐπιστρέφωμεν εἰς τὸν ἐκδώσαντα αὐτά, εἰς τὴν ἐξαγωγὴν ἢ πίστωσιν, ἤτοι τὴν δεξιὰν σελίδα τοῦ βιβλίου,

5ον) ***τὸ βιβλίον τῶν γραμματίων πρὸς πληρωμήν***, ἐν τῷ ὁποίῳ ἐγγράφομεν πάντα τὰ ὑφ' ἡμῶν ἐκδιδόμενα γραμμάτια, ὅταν μὲν τὰ ἐκδίδωμεν, εἰς τὴν ἐξαγωγὴν ἢ πίστωσιν, ὅταν δέ, ἀφ' οὗ τὰ πληρώσωμεν, μᾶς ἐπιστραφῶσιν, εἰς τὴν εἰσαγωγήν, ἤτοι τὴν ἀριστερὰν σελίδα τοῦ βιβλίου,

6ον) ***τὸ βιβλίον τῶν προσωπικῶν λογαριασμῶν.*** Ἐν τῷ βιβλίῳ τούτῳ ἀνοίγομεν δι' ἕκαστον πρόσωπον, μετὰ τοῦ ὁποίου εὑρισκόμεθα εἰς συναλλαγάς, ἰδιαιτέραν διπλῆν σελίδα, γράφοντες εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς σελίδος τὸ ὄνομα τοῦ προσώπου, εἰς ὃ ἀνήκει ὁ λογαριασμός· καὶ ὅσα μὲν ποσὰ ἢ ἀξίας δίδομεν εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τὰ ἐγγράφομεν εἰς τὴν χρέωσίν του, ὅσα δὲ λαμβάνομεν παρ' αὐτοῦ τὰ ἐγγράφομεν εἰς τὴν πίστωσίν του,

7ον) ***τὸ βιβλίον τῶν ἐξόδων***, ἐν τῷ ὁποίῳ ἐγγράφομεν ἅπαντα τὰ λόγῳ τῆς ἐργασίας γινόμενα ἔξοδα, ἤτοι μισθοὺς ὑπαλλήλων, ἐνοίκια, μικροεπισκευὰς κλπ. καταχωρίζοντες ταῦτα εἰς τὴν χρέωσιν τοῦ βιβλίου.

Χρέωσις καὶ πίστωσις τῶν διαφόρων βιβλίων ἢ λογαριασμῶν.

Ὡς ἐκ τῶν προλεχθέντων εἴδομεν, ὅταν εἰσάγεται παρὰ τῷ ἐμπόρῳ ἀξία τις, ἤτοι μετρητά, ἐμπορεύματα, γραμμάτια κλπ. τὸ εἰς χρῆμα ἀντίτιμον αὐτῶν καταχωρίζεται εἰς τὴν χρέωσιν τοῦ βιβλίου, εἰς ὃ ἡ ἀξία αὕτη ὑπάγεται, ὅταν δὲ παρὰ τοῦ ἐμπόρου ἐξέγεται ἀξία τις, τὸ ἀντίτιμον αὐτῆς καταχωρίζεται εἰς τὴν πίστωσιν τοῦ βιβλίου, εἰς ὃ ἡ ἀξία αὕτη ὑπάγεται.

Ἐὰν λοιπὸν προσωποποιήσωμεν τὰ διάφορα ταῦτα βιβλία καὶ εἴπωμεν ὅτι,

ὅταν εἰσάγωμεν μετρητὰ εἰς τὸ ταμεῖον, τοῦτο λαμβάνει τὰ χρήματα (καταχωρίζομεν δὲ ταῦτα εἰς τὴν χρέωσιν τοῦ βιβλίου ταμείου),

ὅταν εἰσάγωμεν ἐμπορεύματα εἰς τὴν ἀποθήκην, τὰ ἐμπορεύματα λαμβάνουσι (καταχωρίζομεν δὲ ταῦτα εἰς τὴν χρέωσιν τοῦ βιβλίου των),

ὅταν εἰσάγωμεν γραμμάτια εἰς τὸ χαρτοφυλάκιον, τὰ γραμμάτια λαμβάνουσι (καταχωρίζομεν δὲ ταῦτα εἰς τὴν χρέωσιν τοῦ βιβλίου των) καὶ οὕτω καθεξῆς,

βλέπομεν ὅτι, ὅταν εἰσάγεται ἀξία τις παρὰ τῷ ἐμπόρῳ, τὸ βιβλίον, ὅπερ ὑποτίθεται ὅτι ***λαμβάνει*** τὴν ἀξίαν ταύτην, ***χρεοῦται***·

ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ ὅτι,

ὅταν ἐξάγωμεν μετρητὰ ἐκ τοῦ ταμείου, τοῦτο δίδει τὰ χρήματα (καταχωρίζομεν δὲ ταῦτα εἰς τὴν πίστωσιν τοῦ βιβλίου ταμείου),

ὅταν ἐξάγωμεν ἐμπορεύματα ἐκ τῆς ἀποθήκης, τὰ ἐμπορεύματα δίδουσι (καταχωρίζομεν δὲ τὴν ἀξίαν των εἰς τὴν πίστωσιν τῶν βιβλίων ἐμπορευμάτων) καὶ οὕτω καθεξῆς,

βλέπομεν ὅτι, ὅταν ἐξάγῃ ἀξίαν τινὰ ὁ ἔμπορος, τὸ βιβλίον, ὅπερ ὑποτίθεται ὅτι ***δίδει*** τὴν ἀξίαν ταύτην, ***πιστοῦται.***

Ἐπίσης εἴδομεν, ὅτι εἰς τὸ βιβλίον, ὅπερ κρατοῦμεν διὰ τοὺς λογαριασμοὺς τῶν μεθ᾽ ὧν συναλλασσόμεθα, ἤτοι τὸ βιβλίον τῶν προσωπικῶν λογαριασμῶν, τὰ ποσὰ ἢ τὴν ἀξίαν τῶν εἰδῶν, τὰ ὁποῖα οὗτοι ***λαμβάνουσι*** παρ᾽ ἡμῶν, καταχωρίζομεν εἰς τὴν χρέωσίν των, τὰ δὲ ποσὰ ἢ τὴν ἀξίαν τῶν εἰδῶν, ἅτινα μᾶς δίδουσι, καταχωρίζομεν εἰς τὴν πίστωσίν των.

Συνάγομεν ὅθεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων τὸν ἑξῆς θεμελιώδη κανόνα τῆς λογιστικῆς·

Εἰς τὰ λογιστικὰ βιβλία πᾶς λαμβάνων (πρόσωπον ἢ λογαριασμὸς) χρεοῦται, πᾶς δὲ δίδων (πρόσωπον ἢ λογαριασμὸς) πιστοῦται.

Ἐν ἀρχῇ εἴπομεν, ὅτι ἐμπόριον εἶναι ἡ ἀνταλλαγὴ διαφόρων ἀξιῶν. Ἑκάστη τοιαύτη ἀνταλλαγὴ εἶναι μία δοσοληψία. Ἐν ἑκάστῃ δοσοληψίᾳ ὑπάρχουσι τοὐλάχιστον δύο ἐνεργοῦντες, ὁ δίδων καὶ ὁ λαμβάνων.

Ἐπειδή, ὡς εἴπομεν, πᾶς λαμβάνων χρεοῦται καὶ πᾶς δίδων πιστοῦται, συνάγομεν τὸν ἕτερον θεμελιώδη κανόνα τῆς λογιστικῆς, ὑπαγορεύοντα ὅτι :

Εἰς τὰ λογιστικὰ βιβλία πᾶσα χρέωσις βιβλίου ἢ λογαριασμοῦ προϋποθέτει καὶ συνεπάγεται σύγχρονον καὶ ἰσάξιον πίστωσιν ἄλλου βιβλίου ἢ λογαριασμοῦ, καὶ τἀνάπαλιν, πᾶσα πίστωσις βιβλίου ἢ λογαριασμοῦ προϋποθέτει καὶ συνεπάγεται σύγχρονον καὶ ἰσάξιον χρέωσιν ἄλλου βιβλίου ἢ λογαριασμοῦ.

Τὸ βιβλίον (ἢ λογαριασμὸς) Γενικῶν ἐξόδων χρεοῦται μὲ τὰ ἐξοδευόμενα χρήματα, διότι θεωρεῖται λαμβάνον τὰ χρήματα, ἅτινα τὸ ταμεῖον δίδει.

Ἐγγραφὴ τῶν πράξεων τοῦ ἡμερολογίου εἰς τὰ βοηθητικὰ βιβλία.

Ἵνα μεταφέρωμεν τὰς πράξεις ἐκ τοῦ ἡμερολογίου εἰς τὰς βοηθητικὰ βιβλία, ὀφείλομεν πρὸ πάσης ἐγγραφῆς νὰ θέτωμεν τὰ ἑξῆς ἐρωτήματα·

Τίς λαμβάνει; Τίς δίδει;

Ἀφοῦ δὲ εὕρωμεν τούτους, νὰ χρεώσωμεν τὸν λαμβάνοντα καὶ νὰ πιστώσωμεν τὸν δίδοντα.

Τούτων δοθέντων, ἀρχόμεθα τῆς καταχωρίσεως τῶν πράξεων τοῦ Γ. Λαδάκη εἰς τὰ βοηθητικά του βιβλία.

Πρᾶξις 1η. Ὁ Γ. Λαδάκης κατέθεσεν (ἔδωκεν) εἰς τὸ ταμεῖόν του δραχ. 50000. Τίς λαμβάνει; Τὸ ταμεῖον. Ἐγγράφομεν λοιπὸν εἰς τὴν χρέωσιν τοῦ ταμείου τὰς 50000 δραχμάς.

Τίς δίδει; Ὁ Γ. Λαδάκης. Ἀνοίγομεν λοιπὸν εἰς τὸ βιβλίον τῶν προσωπικῶν λογαριασμῶν μίαν μερίδα μὲ ἐπικεφαλίδα Γ. Λαδάκης καὶ ἐγγράφομεν εἰς τὴν πίστωσιν τῆς μερίδος ταύτης τὰς 50000 δραχμάς.

2α. Ἐπληρώθησαν δι᾽ ἐνοίκιον δρ. 100.

Τὸ ἐνοίκιον εἶναι ἔξοδον. Ἄρα ὁ λαμβάνων εἶναι τὸ βιβλίον ἐξόδων, εἰς τὴν χρέωσιν τοῦ ὁποίου καταχωρίζομεν τὰς 100 δραχμάς.

Τίς δίδει; Τὸ ταμεῖον. Ἄρα πιστώνομεν τὸ βιβλίον ταμείου μὲ τὸ αὐτὸ ποσόν.

Σημ. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ γεννᾶται ἡ ἀπορία, διατί, ἀφοῦ τὰς 100 δραχμὰς ἔλαβεν ὁ ἰδιοκτήτης δὲν χρεώνεται αὐτός, ἀλλὰ τὰ ἔξοδα. Διότι ὁ ἰδιοκτήτης ἔλαβε μὲν τὰ χρήματα, ἀντ᾽ αὐτῶν ὅμως παρέχει τὸ κατάστημά του εἰς τὸν Λαδάκην, συνεπῶς οὔτε χρεωστεῖ οὔτε ἔχει λαμβάνειν, ὡς ἐκ τούτου δὲν τὸν ἀναφέρομεν εἰς τὰ βιβλία.

3η. Ἐπληρώθησαν δι᾽ ἀγορὰν διαφόρων ἐπίπλων δρχ. 800.

Τίς λαμβάνει; Τὰ ἔπιπλα, τὰ ὁποῖα εἰσήχθησαν εἰς τὸ κατάστημα. Ἄρα χρεώνομεν τὸ βιβλίον ἐπίπλων.

Τίς δίδει; Τὸ ταμεῖον, τὸ ὁποῖον ἐπλήρωσε τὴν ἀξίαν αὐτῶν. Καταχωρίζομεν ὅθεν τὰς 800 δρ. εἰς πίστωσιν τοῦ ταμείου.

4η. Ἠγοράσθησαν, παρελήφθησαν καὶ ἐπληρώθησαν 4000 ὀκάδες ἐλαίου ὁλικῆς ἀξίας δρ. 8000.

Τίς λαμβάνει; Τὸ ἔλαιον εἶναι ἐμπόρευμα, τὸ ὁποῖον εἰσήχθη εἰς τὴν ἀποθήκην, ἄρα χρεώνομεν τὸ βιβλίον ἐμπορευμάτων εἰς μερίδα ἐλαίου.

Τίς δίδει ; Τὸ ταμεῖον, τὸ ὁποῖον ἐπλήρωσε τὴν ἀξίαν τοῦ ἐλαίου. Ἄρα πιστώνομεν τὸ βιβλίον ταμείου.

5η. Ἔλαβα ἀπὸ τὸν Ἰ. Ἰωάννου 10000 ὀκ. οἴνου ἀξίας δρ. 10000. Τίς λαμβάνει ; Τὰ ἐμπορεύματα, τὰ ὁποῖα χρεώνομεν μὲ τὴν ἀξίαν τοῦ ἀγορασθέντος οἴνου, ἀνοίγοντες ἐντὸς τοῦ βιβλίου μερίδα οἴνου.

Τίς δίδει ; Ὁ Ἰ. Ἰωάννου, ὁ ὁποῖος ἔδωκε τὸν οἶνον χωρὶς νὰ εἰσπράξῃ τὴν ἀξίαν του. Συνεπῶς ἀνοίγομεν εἰς τὸ βιβλίον προσωπικῶν λογαριασμῶν μίαν μερίδα διὰ τὸν Ἰ. Ἰωάννου, εἰς τῆς ὁποίας μερίδος τὴν πίστωσιν καταχωρίζομεν τὴν ἀξίαν τοῦ οἴνου, δηλαδὴ πιστώνομεν τὸν Ἰ. Ἰωάννου.

6η. Ἐπώλησα τοῖς μετρητοῖς 1000 ὀκ. οἴνου· δηλ. ἔδωκα ἐμπόρευμα καὶ ἔλαβον χρήματα.

Τ ς λαμβάνει ; Τὸ ταμεῖον· ἄρα τὸ χρεώνομεν.

Τίς δίδει ; Τὰ ἐμπορεύματα· ἄρα τὰ πιστώνομεν.

7η. Ἠγόρασα ἀπὸ Δ. Δημητρίου 5000 ὀκ. ἐλαίου ἀξίας δρ. 10000 Τίς λαμβάνει ; Τὰ ἐμπορεύματα. Τίς δίδει ; Ὁ Δ. Δημητρίου. Χρεώνω ὅθεν τὰ ἐμπόρευματα καὶ πιστώνω τὸν Δημητρίου.

8η. Ἐπώλησα εἰς τὸν Ε. Εὐστρατίου 1000 ὀκ. ἐλαίου ἀξίας δρ. 2400. Τίς λαμβάνει ; Ὁ Εὐστρατίου. Τίς δίδει ; Τὰ ἐμπορεύματα. Χρεώνομεν λοιπὸν τὸν Εὐστρατίου καὶ πιστώνομεν τὰ ἐμπορεύματα.

9η. Ἐπλήρωσα εἰς τὸν Ἰ. Ἰωάννου ἔναντι χρέους μου δρχ. 5000. Τίς λαμβάνει ; Ὁ Ἰωάννου. Τίς δίδει ; Τὸ ταμεῖον. Ἄρα χρεώνομεν τὸν Ἰωάννου καὶ πιστώνομεν τὸ ταμεῖον.

10η. Ἔδωκα εἰς τὸν Δ. Δημητρίου εἰς ἐξόφλησιν τοῦ χρέους μου γραμμάτιον εἰς διαταγήν του δρχ. 10000.

Τίς λαμβάνει ; Ὁ Δημητρίου. Τίς δίδει ; Τὰ γραμμάτια πληρωτέα. Χρεώνομεν ὅθεν τὸν Δημητρίου καὶ πιστώνομεν τὰ γραμμάτια πληρωτέα.

11η. Ὁ Ε. Εὐστρατίου μοὶ ἔδωκεν ἔναντι τοῦ χρέους του δρχ. 1000. Τὸ ταμεῖον λαμβάνει· συνεπῶς τὸ χρεώνω. Ὁ Εὐστρατίου δίδει, συνεπῶς τὸν πιστώνω.

12η. Ἐπώλησα τοῖς μετρητοῖς 100 ὀκ. ἐλαίου καὶ εἰσέπραξα δρ. 240. Χρεώνομεν τὸ ταμεῖον, ὅπερ λαμβάνει, καὶ πιστώνομεν τὰ ἐμπορεύματα, ἅτινα δίδουσι.

13η. Ἐπώλησα εἰς Ζ. Ζάννον 4000 ὀκ. ἐλαίου δρ. 4800. Χρεώνομεν τὸν Ζ. Ζάννον, ὅστις ἔλαβε τὸ ἔλαιον, καὶ πιστώνομεν τὰ ἐμπορεύματα.

14η. Ἐπώλησα 500 ὀκ. ἐλαίου τοῖς μετρητοῖς ἀντὶ δρ. 1150
καὶ 1000 » οἴνου » » » » 1100
τὸ ὅλον. . . » 2250

Τὸ ταμεῖον εἰσέπραξεν· ἄρα τὸ χρεώνομεν. Τὰ ἐμπορεύματα ἔδωκαν· ἄρα τὰ πιστώνομεν.

15η. Ὁ Ζάννος μοῦ ἔδωκε τὸ γραμμάτιόν του δρ. 4000. Χρεώνομεν τὰ γραμμάτια εἰσπρακτέα, ἅτινα ἔλαβον τὸ γραμμάτιον, καὶ πιστώνομεν τὸν Ζάννον, ὅστις τὸ ἔδωκε.

16η. Ἐπληρώθησαν τὰ ἑξῆς ἔξοδα·

Διὰ μισθὸν ὑπαλλήλου δρ. 100
Μικρὰ ἔξοδα μηνὸς » 200=300.—

Εἴπομεν, ὅτι διὰ τῶν ἐξόδων τοῦ καταστήματος χρεώνομεν τὸ βιβλίον γενικῶν ἐξόδων, πιστώνομεν δὲ ἐκεῖνον, ὅστις τὰ πληρώνει, δηλαδὴ τὸ ταμεῖον.

Σημείωσις. Ἵνα πειθώμεθα, ὅτι ὅλαι αἱ πράξεις τοῦ ἡμερολογίου καταχωρίζονται εἰς τὰ οἰκεῖα βοηθητικὰ βιβλία, εἰς τὴν χρέωσιν τοῦ ἑνὸς καὶ εἰς τὴν πίστωσιν τοῦ ἄλλου, ἐγγράφομεν εἰς τὴν πρώτην στήλην τοῦ ἡμερολογίου τὰ ἀρχικὰ ψηφία ἑκάστου βοηθητικοῦ βιβλίου ἔναντι ἑκάστης πράξεως, χωρίζοντες αὐτὰ διὰ μιᾶς γραμμῆς. Καὶ ἄνωθεν μὲν τῆς γραμμῆς ταύτης γράφομεν τὰ ἀρχικὰ τοῦ χρεουμένου βιβλίου, κάτωθεν, δὲ αὐτῆς τὰ ἀρχικὰ τοῦ πιστωνομένου τοιούτου.

Μηνιαῖος ἔλεγχος. Εἴπομεν, ὅτι ὅλαι αἱ πράξεις τοῦ ἡμερολογίου καταχωρίζονται εἰς τὰ βοηθητικὰ βιβλία, ἑκάστη εἰς ὃ βιβλίον ὑπάγεται. Ἑκάστη πρᾶξις εἶναι μία δοσοληψία, ἄρα δι᾿ ἑκάστην πρᾶξιν ἐγένετο μία χρέωσις (ἡ τοῦ λαβόντος) καὶ μία πίστωσις (ἡ τοῦ δώσαντος).

Ἐὰν ὅθεν ἀθροίσωμεν ὅλα τὰ ἐν τῷ ἡμερολογίῳ ἐγγραφέντα ποσὰ ἀφ᾿ ἑνός, ἀφ᾿ ἑτέρου δὲ τὰ ποσὰ τῶν χρεώσεων ὅλων τῶν βοηθητικῶν βιβλίων καὶ ἐκ τρίτου ὅλα τὰ ποσὰ τῶν πιστώσεων αὐτῶν, αἱ τρεῖς αὗται ἀθροίσεις δέον νὰ εἶναι μέχρι λεπτοῦ ὅμοιαι.

Ἀθροίζομεν ὅθεν πρῶτον τὰ ποσὰ τοῦ ἡμερολογίου καὶ εὑρίσκομεν ὁλικὸν ἄθροισμα δρ. 109990. Μετὰ ταῦτα λαμβάνομεν ἓν ἕκαστον ἐκ τῶν βιβλίων καὶ κάμνομεν τὰς ἀθροίσεις τῆς χρεώσεως καὶ τῆς πιστώσεως ἑνὸς ἑκάστου αὐτῶν διὰ μολυβδίδος ἐλαφρά, ὥστε νὰ σβέννυνται μετὰ ταῦτα δι᾿ ἐλαστικοῦ κόμμεος, τὰς δὲ ἀθροίσεις ταύτας ἐγγράφομεν εἰς φύλλον χάρτου μὲ διπλᾶς στήλας χρεώσεως καὶ πιστώσεως, ὡς τὸ κατωτέρω ὑπόδειγμα. Ἀφ᾿ οὗ ἐγγράψωμεν τὰς ἀθροίσεις ὅλων τῶν βιβλίων εἰς τὸ φύλλον τοῦτο, ἑκάστην ἄθροισιν εἰς τὴν στήλην, εἰς ἣν ὑπάγεται (στήλην χρεώσεως ἢ πιστώσεως), ἀθροίζομεν τὰ ἐγγραφέντα ποσὰ καὶ βλέπομεν, ὅτι αἱ ἀθροίσεις τῶν δύο στηλῶν. χρεώσεως καὶ πιστώσεως, εἶναι ὅμοιαι οὐ μόνον πρὸς ἀλλήλας, ἀλλὰ καὶ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν τοῦ ἡμερολογίου.

	Μερικαὶ		Ὁλικαὶ	
	χρεώσεις	πιστώσεις	χρεώσεις	πιστώσεις
Ταμεῖον			54590 —	14200 —
Ἐμπορεύματα				
Ἔλαια	18000 —	3790 —		
Οἶνοι.	10000 —	7000 —	28000 —	10790 —
Ἔξοδα			400 —	
Ἔπιπλα καὶ σκεύη			800 —	
Προσωπικοὶ λογαριασμοὶ				
Γ. Λαδάκης		50000 —		
Ι. Ἰωάννου	5000 —	10000 —		
Ε. Εὐστρατίου	2400 —	1000 —		
Δ. Δημητρίου	10000 —	10000 —		
Ζ. Ζάννος	4800 —	4000 —	22200 —	75000 —
Γραμμάτια εἰσπρακτέα .			4000 —	
Γραμμάτια πληρωτέα . . .				10000 —
			109990 —	109990 —

Τὸ ὡς ἄνω φύλλον ὀνομάζεται ***ἰσολογισμὸς ἐξελέγξεως.***

Ἐὰν ὑπάρχῃ διαφορά τις μεταξὺ τῶν ἀθροίσεων τοῦ ἰσολογισμοῦ τούτου ἢ μεταξὺ αὐτῶν καὶ τῆς ἀθροίσεως τοῦ ἡμερολογίου, τοῦτο σημαίνει, ὅτι ἢ κατὰ τὰς ἐγγραφὰς τοῦ ἡμερολογίου εἰς τὰ βοηθητικὰ ἢ εἰς τὰς ἀθροίσεις τοῦ ἡμερολογίου ἢ εἰς τὰς τῶν βοηθητικῶν ἐγένετο λάθος, ὅπερ δέον νὰ ἀνεύρωμεν καὶ διορθώσωμεν.

Κλείσιμον βιβλίων ἄνοιγμα αὐτῶν εἰς νέον καὶ συνέχισις τῶν πράξεων. Ὁ ἔμπορος ὀφείλει τοὐλάχιστον ἅπαξ τοῦ ἔτους νὰ κάμνῃ ἀπογραφὴν τῆς ἐμπορικῆς του περιουσίας, ἤτοι νὰ καταστρώνῃ τὴν ἐμπορικήν του καταστασιν, ἵνα ἐξ αὐτῆς ἀντιλαμβάνηται, ἐὰν χάνῃ ἢ ἐὰν κερδίζῃ καὶ πόσα. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ κάμῃ

1ον) ἰσολογισμὸν ἐξελέγξεως, ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν, 2ον) νὰ καταγράψῃ τὰ ἐν τῇ ἀποθήκῃ του ἐμπορεύματα.

3ον) νὰ κάμῃ δεύτερον ἰσολογισμὸν ἐξελέγξεως, παρουσιάζοντα μόνον τὰς μεταξὺ τῆς χρεώσεως καὶ πιστώσεως ἑκάστου βιβλίου ὑφισταμένας διαφορὰς ἢ ὑπόλοιπα. Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον λογαριασμοῦ τινος προέρχεται ἐκ πλεονάσματος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ποσῶν τῆς χρεώσεως ἐπὶ τῶν τοῦ τῆς πιστώσεως, λέγομεν, ὅτι τὸ παρουσιαζόμενον ὑπόλοιπον εἶναι χρεωστικὸν καὶ ἐγγράφομεν αὐτὸ εἰς τὴν στήλην χρεώσεως, ἐὰν συμβαίνῃ τὸ ἐναντίον, λέγομεν, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον εἶναι πιστωτικὸν καὶ ἐγγράφομεν αὐτὸ εἰς τὴν στήλην πιστώσεως τοῦ φύλλου ἰσολογισμοῦ ὡς ἑξῆς·

			Ὑπόλοιπα	
			χρεωστικὰ	πιστωτικὰ
Ταμεῖον			40390 —	
Ἐμπορεύματα				
Ἔλαια ἐν ἀποθήκῃ ὀκ.	7400	14210		
Οἶνοι » » »	4000	3000	17210 —	
Ἔξοδα			400 —	
Ἔπιπλα καὶ σκεύη			800 —	
Προσωπικοὶ λογ/σμοί				
Γ. Λαδάκης		50000 —		
Ι. Ἰωάννου				
Ε Εὐστρατίου	1400 —	5000 —		
Δ. Δημητρίου	— —			
Ζ. Ζάννος	800 —			
	2200 —	55000 —		52800
Γραμμάτια εἰσπρακτέα			4000 —	—
» πληρωτέα				10000 —
			62800 —	62800

4ον) Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὑπολοίπων τούτων νὰ κλείσῃ τὰ βιβλία, ὡς ἐν ἑκάστῳ τούτων ὑποδεικνύεται.

5ον) νὰ καταστρώσῃ νέον ἰσολογισμὸν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν εἰς νέον ὑπολοίπων καὶ τῶν ἀθροισμάτων τῶν μὴ τυχὸν κλεισθέντων λογαριασμῶν (π. χ. λογ/σμὸς ἐπίπλων) ὡς ἑξῆς·

			Ὑπόλοιπα	
			χρεωστικὰ	πιστωτικὰ
Ταμεῖον			40390 —	
Ἐμπορεύματα				
Ἔλαια ὀκ.	7400	14800.—		
Οἶνοι »	4000	4000.—	18800 —	
Ἔπιπλα καὶ σκεύη			800 —	
Προσωπικοὶ λογ/σμοὶ				
		51190 —		
Γ. Λαδάκης				
Ἰ. Ἰωάννου				
Ε. Εὐστρατίου	1400 —	5000 —		
Ζ. Ζάννος	800 —	—		
	2200 —	56190 —		
				53990 —
Γραμμάτια εἰσπρακτέα			4000 —	
» πληρωτέα				10000 —
			63990 —	63990 —

6ον) Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω ὑπολοίπων καταστρώνομεν τὸ ἐνεργητικὸν καὶ παθητικὸν τοῦ ἐμπόρου ὡς ἑξῆς·

Ἐνεργητικόν.

Μετρητὰ ἐν τῷ ταμείῳ		δρ. 40390.—
Ἐμπορεύματα ἐν ἀποθήκῃ·		
Ἔλαια ὀκ. 7400 δρ. 2.—	δρ. 14800.—	
Οἶνοι » 4000 » 1.—	» 4000.—	» 18800.—
Ἔπιπλα ἐν καταστήματι		800.—
Διάφοροι χρεῶσται :		
Ε. Εὐστρατίου	δρ. 1400.—	
Ζ. Ζάννος	» 800.—	» 2200,—
Γραμμ. εἰσπρ. Γρ. Ζάννου λήξεως 20.2.18		» 4000,—
		δρ. 66190.—

Παθητικὸν

Πιστωταὶ διάφοροι·		
Ἰ. Ἰωάννου	δρ. 5000.—	
Γραμμάτια πληρωτέα·		
Γραμμάτια Ζάννου λήξεως 10.4.18	» 10000.—	δρ. 15000,—
Γ. Λαδάκης καθαρὸν κεφάλαιον		» 51190,—
		δρ. 66190,—

Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν λογαριασμῶν.

Ταμεῖον. Τὰ ἐν τῷ ταμείῳ εἰσαγόμενα χρήματα καταχωρίζονται εἰς τὴν χρέωσιν, τὰ δὲ ἐξ αὐτοῦ ἐξερχόμενα εἰς τὴν πίστωσιν. Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν χρήματα ἐκ τοῦ ταμείου, δέον τοῦτο νὰ ἔχῃ ταῦτα· καὶ διὰ νὰ ἔχῃ, πρέπει νὰ ἔχωσι προηγουμένως εἰσαχθῇ ἐν τῷ ταμείῳ χρήματα.

Τὸ ταμεῖον ὅθεν δέον νὰ παρουσιάζῃ πάντοτε χρεωστικὸν ὑπόλοιπον, οὐδέποτε δὲ πιστωτικόν, διότι ἐν τῇ τελευταίᾳ ταύτῃ περιπτώσει θὰ εἴχομεν τὸ ὀξύμωρον σχῆμα τῆς ἐξαγωγῆς χρημάτων ἐκεῖθεν, ὅπου δὲν ὑπάρχουσι.

Ἐμπορεύματα. Ὁ λογ/σμὸς ἐμπορευμάτων ἀπαρτίζεται ἀπὸ δύο μέρη· τὸ ὑλικὸν (ἐμπορεύματα, εἴδη) καὶ τὸ χρηματικὸν (ἀξία αὐτῶν).

Καὶ εἰς μὲν τὸ ὑλικὸν μέρος τοῦ λογ/σμοῦ τούτου παρατηρεῖται ὅ,τι καὶ εἰς τὸ ταμεῖον, δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξαχθέντων ἐμπορευμάτων δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τῶν εἰσαχθέντων.

Εἰς τὸ χρηματικὸν ὅμως μέρος τοῦ λογαριασμοῦ δὲν συμβαίνει τὸ ἴδιον, διότι ἡ ἀξία τῶν ἐξαγομένων εἶναι πάντοτε μεγαλυτέρα τῆς τῶν εἰσαγομένων, ἐκτὸς ἐὰν ὁ ἔμπορος πωλῇ μὲ ζημίαν.

Ἄρα εἰς τὸν λογαριασμὸν ἐμπορευμάτων δύναται ἡ πίστωσις νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς χρεώσεως, συνεπῶς δὲ καὶ τὸ ὑπόλοιπον νὰ εἶναι πιστωτικόν.

Γραμμάτια εἰσπρακτέα. Εἰς τὸν λογ/σμὸν τοῦτον τὸ ὑπόλοιπον δέον νὰ εἶναι πάντοτε χρεωστικόν, δι' οὓς λόγους καὶ ὁ λογ/σμὸς ταμείου.

Γραμμάτια πληρωτέα. Εἰς τὸν λογ/σμὸν τοῦτον τὸ ὑπόλοιπον, ἐὰν ὑπάρχῃ, δέον νὰ εἶναι πάντοτε πιστωτικόν, διότι ἀντιθέτως πρὸς τὰ γραμμάτια εἰσπρακτέα τὰ γραμμάτια πληρωτέα ἐξέρχονται, ὅταν κατὰ πρῶτον ἐκδίδωνται, ἐπανεισέρχονται δέ, ὅταν πληρωθῶσι. Διὰ νὰ παρουσιάζῃ ὁ λογ/σμὸς οὗτος ὑπόλοιπον, πρέπει νὰ ὑπάρχωσι γραμμάτια τοῦ ἐμπόρου ἀπλήρωτα εἰσέτι, ἐπειδὴ δὲ τὰ ἀπλήρωτα γραμμάτια εὑρίσκονται ἐγγεγραμμένα εἰς τὴν ἐξαγωγὴν ἢ πίστωσιν, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι πιστωτικόν.

Ἔξοδα. Ὁ λογ/σμὸς ἐξόδων εἶναι πάντοτε χρεωστικός, διότι ὑποτίθεται, ὡς εἴπομεν, ὅτι λαμβάνει τὰ ὑπὸ τοῦ ταμείου δι' ἔξοδα πληρωνόμενα χρήματα, οὐδέποτε δὲ δίδει, ὥστε νὰ πιστωθῇ.

Ἔπιπλα καὶ σκεύη. Ὁ λογ/σμὸς οὗτος δύναται νὰ παρουσιάσῃ πιστωτικὸν ὑπόλοιπον, μόνον εἰς ἣν περίπτωσιν πωλήσωμεν τὰ ἔπιπλα ἢ σκεύη εἰς τιμὴν ἀκριβοτέραν τῆς ἀγορᾶς των.

Προσωπικοὶ λογαριασμοί. Οἱ προσωπικοὶ λογ/σμοὶ δύνανται νὰ εἶναι χρεωστικοὶ ἢ πιστωτικοὶ ἀναλόγως τῶν δοσοληψιῶν, ἃς μετ᾿ αὐτῶν ἔχει ὁ ἔμπορος, ὁ λογ/σμὸς ὅμως τοῦ ἐμπόρου δὲν δύναται νὰ εἶναι χρεωστικὸς ἢ μόνον ὅταν οὗτος χάσῃ ἅπασαν τὴν περιουσίαν του καὶ μείνῃ ὀφειλέτης εἰς διαφόρους πιστωτάς του.

ΤΑΜΕΙΟΝ

Σελὶς 1. Σελὶς 1.

Δοῦναι (χρέωσις, εἰσπράξεις) (πίστωσις, πληρωμαὶ) ***Λαβεῖν***

1918				1918			
Ἰαν.	1	Εἰς Γ. Λαδάκην	50000 —	Ἰαν.	1	Ἀπὸ ἐνοίκιον Ἰανουαρ.	100 —
»	8	» πώλησιν οἴνου	1100 —	»	2	» ἀγορὰν ἐπίπλων	800 —
»	18	» Ἐ. Εὐστρατίου	1000 —	»	4	» ἀγορὰν ἐλαίου	8000 —
»	19	» πώλησιν ἐλαίου	240 —	»	13	» Ἰ. Ἰωάννου ἔναντι	5000 —
»	23	» » »	1150 —	»	31	» μισθοὺς 100	
»	»	» » οἴνου	1100 —	»	»	» μικροέξοδα 200	300 —
						Ὑπόλοιπον ταμείου	40390 —
		ἄθροισις	54590 —			ἄθροισις	54590 —

Σημείωσις. Ὑπόλοιπον ταμείου ὀνομάζεται τὸ πλεόνασμα τῶν εἰσπράξεων ἐπὶ τῶν πληρωμῶν.

Κλείσιμον βιβλίου. Ἵνα κλείσωμεν τὸ βιβλίον ταμείου, φέρομεν εἰς τὴν πίστωσιν τὸ ὑπόλοιπον αὐτοῦ, ἤτοι ἰσολογίζομεν τὰς δύο στήλας χρεώσεως καὶ πιστώσεως, κάμνομεν τὰς προσθέσεις καὶ κλείομεν ταύτας διὰ δύο γραμμῶν.

Ἄνοιγμα εἰς νέον. Διὰ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὰς ταμειακὰς πράξεις τὸν ἑπόμενον μῆνα, φέρομεν εἰς τὴν στήλην χρεώσεως τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ταμείου γράφοντες ὡς ἑξῆς·

Φεβρ. 1. Ὑπόλοιπον εἰς νέον 40390

καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὰς πράξεις.

ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΑ

Σελ. 1. Σελ. 1.

Δοῦναι (χρέωσις, εἰσαγωγαὶ) ΕΛΑΙΑ (πίστωσις, ἐξαγωγαὶ) ***Λαβεῖν***

			ὀκ.	τιμὴ	ἀξία				ὀκ.	τιμὴ	ἀξία
1918						1918					
Ἰαν.	4	Ἀγορὰ μετρητοῖς	4000	2	8000	Ἰαν.	11	Πώλ. εἰς Εὐστρατίου	1000	2,40	2400
»	10	» ἀπὸ Δημητρίοο	5000	2	10000	»	19	Πώλ. μετρητ.	100	»	240
		Κέρδος μεταφερόμενον λ/σμὸν Λαδάκη			590	»	23	» »	500	2,30	1150
								Ἔλαια ἐν ἀποθήκῃ	7400	2	14800
			9000		18590				9000		18590

Σελ. 2. Σελ. 2.

Δοῦναι (χρέωσις, εἰσαγωγαὶ) ΟΙΝΟΙ (πίστωσις, ἐξαγωγαὶ) ***Λαβεῖν***

			ὀκ.	τιμ.	ἀξία				ὀκ.	τιμ.	ἀξία
1918 Ἰαν.	7	Ἀγορὰ ἀπὸ Ἰωάννου	10000	1	10000	1918 Ἰαν.	8	Πώλ. μετρητοῖς	1000	110	1100
		Κέρδος μεταφερόμενον λο-γ/μὸν Λαδάκη			1000	»	20	» εἰς Ζάννον	4000	120	4800
						»	23	» μετρητοῖς	1000	110	1100
								Οἶνοι ἐν τῇ ἀποθήκῃ	4000	1—	4000
			10000		11000				10000		11000

Σημείωσις. Διὰ νὰ κλείσωμεν τὸ βιβλίον ἐμπορευμάτων, ὀφείλομεν πρῶτον νὰ εὕρωμεν τὸ ἐξ αὐτῶν προκῦψαν κέρδος. Τοῦτο εὑρίσκομεν, ἐὰν ἐκτιμήσωμεν τὰ ἐν τῇ ἀποθήκῃ ἐμπορεύματα εἰς τὴν ἀγοραίαν αὐτῶν τιμήν (χονδρικῆς πωλήσεως), φέρωμεν ταῦτα ὡς πωληθέντα εἰς τὴν ἐξαγωγήν, ἀθροίσωμεν τὰ ποσὰ χρεώσεως καὶ πιστώσεως καὶ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῆς πρώτης ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῆς δευτέρας. Τὸ ὑπερβάλλον τοῦτο τῆς πιστώσεως ἐπὶ τῆς χρεώσεως εἶναι τὸ κέρδος, διότι τὰ πωληθέντα ἐμπορεύματα (πίστωσις, ἐξαγωγὴ) ἐπωλήθησαν ἀκριβότερα παρ᾽ ὅσον ἠγοράσθησαν. Ἐὰν συνέβαινε τὸ ἀντίθετον, θὰ προήρχετο ζημία, ὁπότε τὰ ποσὰ τῆς χρεώσεως θὰ ἦσαν μεγαλύτερα τῶν ποσῶν τῆς πιστώσεως.

Κλείσιμον τοῦ βιβλίου. Ἐν τῇ παρούσῃ περιπτώσει προέκυψε κέρδος, ἵνα δὲ κλείσωμεν τοὺς λ/σμοὺς ἐμπορευμάτων, χρεώνομεν ἕκαστον ἐμπόρευμα μὲ τὸ κέρδος, ὅπερ ἀπέδωκεν· ἐπειδὴ τὰ κέρδη ταῦτα ἀνήκουσιν εἰς τὸν Γ. Λαδάκην, εἰς ὃν ἀνήκει ἡ ὅλη ἐπιχείρησις, πιστώνομεν τὸν λογαριασμόν του μὲ τὰ κέρδη ταῦτα. Μετὰ ταῦτα κάμνομεν τὰς προσθέσεις τῶν τε ὀκάδων καὶ τῶν δραχμῶν καὶ κλείομεν ταύτας διὰ δύο γραμμῶν.

Ἄνοιγμα εἰς νέον. Ἵνα ἐξακολουθήσωμεν τὰς πράξεις μας, δέον νὰ φέρωμεν ἐκ νέου εἰς τὴν χρέωσιν (εἰσαγωγὴν) τοῦ βιβλίου τὰ ἐν τῇ ἀποθήκῃ ὑπάρχοντα ἐμπορεύματα, ἕκαστον εἰς τὸν λογ/σμόν του μὲ τὴν τιμὴν τῆς ἐκτιμήσεως.

Σελ. 1. ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΞΟΔΩΝ Σελ. 1.

Δοῦναι (χρέωσις) (πίστωσις) ***Λαβεῖν***

1918 Ἰαν.	1	Ἐνοίκιον Ἰανουαρίου	100	—	1918 Ἰαν.	31	Εἰς χρέωσιν Λαδάκη	400	—
»	31	Μισθὸς ὑπαλλήλου	100	—					
»	»	Διάφορα μικροέξοδα	200	—					
			400	—				400	—

Κλείσιμον τοῦ βιβλίου. Τὰ ὡς ἄνω γενόμενα ἔξοδα ἐπιβαρύνουσι τὴν ἐπιχείρησιν τοῦ Γ. Λαδάκη. Διὰ νὰ κλείσωμεν ὅθεν τὸ βιβλίον ἐξόδων, πιστώνομεν αὐτὸ μὲ τὸ ἄθροισμά των καὶ χρεώνομεν δι' αὐτοῦ τὸν λογ/σμὸν τοῦ Λαδάκη. Ὁ λογ/σμὸς οὗτος δὲν ἀνοίγεται εἰς νέον, συνεχίζομεν δὲ τὰς πράξεις μας ὡς ἐν ἀρχῇ.

Σελ. 1. ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΠΙΠΛΩΝ ΚΑΙ ΣΚΕΥΩΝ Σελ. 1.

Δοῦναι (χρέωσις) (πίστωσις) ***Λαβεῖν***

1918 'Ιαν.	2	Διὰ 2 τραπέζια πρὸς δρ.	50	100
		» 2 καθέκλας » »	15	30
		» 1 πλάστιγγα »		670

Σημείωσις. Τὸ βιβλίον τοῦτο δὲν κλείομεν, διότι ἡ ἀξία τῶν ἐπίπλων ἢ σκευῶν δὲν ὑπέστη καμμίαν αὐξομείωσιν.

Ἐὰν ἐπωλοῦμέν τι ἐξ αὐτῶν ἢ ἐὰν κατεστρέφετό τι, θὰ ἐφέρομεν τὴν ἀξίαν αὐτοῦ εἰς τὴν πίστωσιν (ἐξαγωγὴν) μὲ χρέωσιν μὲν τοῦ ταμείου, ἐὰν ἐπωλεῖτο καὶ εἰσεπράττομεν τὴν ἀξίαν του, μὲ χρέωσιν δὲ τοῦ Λαδάκη, ἐὰν κατεστρέφετο, διότι ὁ Λαδάκης θὰ ὑφίστατο τὴν ἐκ τῆς καταστροφῆς ζημίαν. Ἐν τῇ μιᾷ δὲ ἢ τῇ ἄλλῃ περιπτώσει μὲ τὴν ἀξίαν τῶν ὑπολειπομένων θὰ ἐκλείομεν τὸ βιβλίον (ὡς εἰς τὸ βιβλίον ἐμπορευμάτων) καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀξίαν θὰ ἠνοίγομεν τὸ βιβλίον εἰς νέον.

Σελ. 1. ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΟΣΩΠΙΚΩΝ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΩΝ Σελ. 1.

Δοῦναι (χρέωσις) ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΛΑΔΑΚΗΣ (πίστωσις) ***Λαβεῖν***

1918	31	Ζημία ἐξ ἐξόδων	400	—	1918	1	Κατάθεσίς του		50000	—
'Ιαν.		Πρὸς ἐξίσωσιν	51190	—	'Ιαν.	31	Κέρδος ἐξ ἐλαίου δρ.	590		
							» » » »	1000	1590	—
			51590	—					51590	—
					Φεβ.	1	Εἰς νέον		51590	—

Σημείωσις. Ὡς βλέπομεν, ὁ λογ/σμὸς τοῦ Γ. Λαδάκη ἐπιβαρύνεται διὰ τῶν ζημιῶν (αἵτινες καταχωρίζονται εἰς τὴν χρέωσίν του) καὶ ὠφελεῖται ἐκ τῶν κερδῶν (ἅτινα καταχωρίζονται εἰς τὴν πίστωσίν του).

Κλείσιμον. Ἵνα κλείσωμεν τὸν λογ/σμόν, εὑρίσκομεν τὴν μεταξὺ χρεώσεως καὶ πιστώσεως διαφορὰν καὶ φέρομεν αὐτὴν εἰς τὴν ἀσθενεστέραν στήλην· μεθ' ὃ κάμνομεν τὰς προσθέσεις καὶ κλείομεν αὐτὰς διὰ δύο γραμμῶν.

Ἄνοιγμα εἰς νέον. Ἵνα ἀνοίξωμεν εἰς νέον τὸν λογαριασμόν, φέρομεν τὸ ἐξισῶσαν τὸν λογαριασμὸν ὑπόλοιπον εἰς τὴν ἀντίθετον πρὸς τὴν ἐξισωθεῖσαν στήλην καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν ἐγγραφὴν τῶν νέων πράξεων.

Καθαρὸν κέρδος. Ἐκ τοῦ ἄνω λογ/σμοῦ βλέπομεν, ὅτι ἡ περιουσία τοῦ Λαδάκη, ἥτις εἰς τὰς ἀρχὰς τῆς ἐπιχειρήσεως ἦτο δρ. 50000, ηὐξήθη εἰς δρ. 51190. Ἡ διαφορὰ αὕτη τῶν 1190 δραχμῶν ἀποτελεῖ τὸ καθαρὸν αὐτοῦ κέρδος.

Σελ. 2. ΙΩΑΝΝΗΣ ΙΩΑΝΝΟΥ Σελ. 2.

Δοῦναι (χρέωσις) (πίστωσις) ***Λαβεῖν***

1918					1918		Ἀξία 10000 ὀκ. οἴνου		
Ἰαν.	13	Μετρητὰ	5000	—	Ἰαν.	7	πρὸς δρ. 1	10000	—
	31	Πρὸς ἐξίσωσιν	5000	—					
			10000	—				10000	—
Κλείσιμον καὶ ἄνοιγμα ὡς ἀνωτέρω εἰς νέον					Φεβ.	1	Εἰς νέον	5000	—

Σελ. 3. ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΥ Σελ. 3.

Δοῦναι (χρέωσις) (πίστωσις) ***Λαβεῖν***

1918		Ἀγορά του 1000 ὀκ.			1918		Ἐμέτρ. ἔναντι λ/σμοῦ	1000	—
Ἰαν.	11	ἐλαίου	2400	—	Ἰαν.	18	Ὑπόλ. πρὸς ἐξίσωσιν	1400	—
			2400	—		31			
Φεβ.		Ὑπόλοιπον εἰς νέον	1400	—				2400	—

Σημείωσις. Κλείσιμον καὶ ἄνοιγμα εἰς νέον ὡς ἀνωτέρω.

Σελ. 4. ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Σελ. 4.

Δοῦναι (χρέωσις) (πίστωσις) ***Λαβεῖν***

1918					1918				
Ἰαν.	15	Γραμ/όν μου διαταγήν του	10000	—	Ἰαν.	10	Πώλησίς του 5000 ὀκ. ἐλαίου	10000	—

Σημείωσις. Ὁ Δ. Δημητρίου εἶναι χρεωμένος μὲ 10000 καὶ πιστωμένος μὲ ἄλλας τόσας, ἄρα οὔτε χρεωστεῖ, οὔτε ἔχει λαμβάνειν. Κλείομεν ὅθεν τὸν λογαριασμόν του.

Σελ. 5. Σελ. 5.

Δοῦναι (χρέωσις) ΖΑΝΝΟΣ ΖΑΝΝΟΣ (πίστωσις) ***Λαβεῖν***

1918 Ἰαν.	20	Ἀγορά του 4000 ὀκ. ἐλαίου	4800	—	1918 Ἰαν.	1	Γραμμάτιόν του διαταγήν μου	4000	—
							Ὑπόλ. πρὸς ἐξίσ.	800	—
			4800	—				4800	—
Φεβ.	1	Ὑπόλοιπον εἰς νέον	800	—					

Σημείωσις. Κλείσιμον καὶ ἄνοιγμα εἰς νέον ὡς εἰς τοὺς προηγουμένους λογ/σμούς.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ ΕΙΣΠΡΑΚΤΕΩΝ

Σελ. 1. Σελ. 1.

Δοῦναι (εἰσαγωγὴ) (ἐξαγωγὴ) ***Λαβεῖν***

1918 Ἰαν.	Γραμμ. Ζάννου λήξ. 20.2.18	4000	—	1918 Ἰαν.	31	Πρὸς ἐξίσωσιν	4000	—
Φεβ.	Εἰς νέον	4000	—					

Σημείωσις. Ὁ λογ/σμὸς οὗτος παρουσιάζει μόνον χρέωσιν. Ἵνα τὸν κλείσωμεν, φέρομεν εἰς τὴν πίστωσιν ὅλον τὸ ποσὸν τῆς χρεώσεως, σύρομεν τὰς δύο γραμμὰς καὶ τὸν ἀνοίγομεν πάλιν εἰς νέον.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ ΠΛΗΡΩΤΕΩΝ

Σελ. 1. Σελ. 1.

Δοῦναι (εἰσαγωγὴ) (ἐξαγωγὴ) ***Λαβεῖν***

1918 Ἰαν.	Πρὸς ἐξίσωσιν	10000	—	1918 Ἰαν.	15	Γραμμ/όν μου δ/γὴν Δημητρίου	10000	—
				Φεβ.	1	Εἰς νέον	10000	—

Σημείωσις. Ἡ περίπτωσις τοῦ λογ/σμοῦ τούτου εἶναι ἐν ἀντιθέτῳ ὁμοία πρὸς τὴν τοῦ ἀνωτέρω.

Τ Ε Λ Ο Σ

Ιωάννης
Ν. Δενάρης

96
3

2880 | 32
= 0090

Τμῆμα Γ' — Ἐν Ἀθήναις τῇ 20 Ἰουλίου 1918.
Ἀριθ. Πρωτ. 24956

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Πρὸς

τὸν ***Κύριον Ἰωάννην Χατζιδάκιν***

Γνωστὸν ποιοῦμεν ὑμῖν, ὅτι δι' ἡμετέρας πράξεως τῇ 2α τοῦ ἱσταμένου μηνὸς ἐκδοθείσης καὶ τῇ 7η τοῦ αὐτοῦ καταχωρισθείσης ἐν τῷ ὑπ' ἀριθμὸν 52 φύλλῳ τῆς Ἐφημερίδος τῆς Κυβερνήσεως, ἐνεκρίθη ἀπὸ τοῦ προσεχοῦς σχολικοῦ ἔτους 1918—1919 καὶ ἐφεξῆς τὸ ὑποβληθὲν ὑμέτερον βιβλίον «**Στοιχειώδης Ἀριθμητική**» διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν Ἑλληνικῶν Σχολείων, ὑποχρεούμενος ὅπως ἐν προσεχεῖ ἐκδόσει τοῦ βιβλίου ὑμῶν συμμορφωθῆτε πρὸς τὰς ἐν ταῖς σχετικαῖς ἐκθέσεσι τοῦ Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου περιλαμβανομένας ὑποδείξεις.

Ὁ Ὑπουργὸς
ΔΗΜ. ΔΙΓΚΑΣ

Η. ΖΑΓΑΝΙΑΡΗΣ

Συνεπείᾳ τῆς ὑπ' ἀριθ. 690/22-8-24 πράξεως τῶν γενικῶν συνεδριῶν τοῦ Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου αὐξάνεται ἡ τελικὴ τιμὴ τῶν διδακτικῶν βιβλίων τῶν σχολείων τῆς μέσης καὶ δημοτικῆς ἐκπαιδεύσεως κατὰ 10 % ἐφ' ὅσον ταῦτα μεταφέρονται ἐκ τῆς πόλεως, ἐν ᾗ ἐξεδόθησαν, εἰς ἄλλας πόλεις.

18,70