465
25
390

415
355
60

35
25
60

200
120
320
15
335
20
355
35
390

50
35
85

415
335
80

415
35
380

415

415
355
60

Αριθμητική

ΠΡΑΚΤΙΚΗ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΘΕΝΑΓΩΓΕΙΩΝ

ΕΓΚΡΙΘΕΙΣΑ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΝ ΤΟΥ 1895

ΥΠΟ

ΔΙΟΝΥΣΙΟΥ Ρ. ΡΗΓΟΠΟΥΛΟΥ

Καθηγητοῦ τῶν μαθηματικῶν ἐν τῷ Βαρβακείῳ γυμνασίῳ

Ἐκδότης

ΜΙΧΑΗΛ Ι. ΣΑΛΙΒΕΡΟΣ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ Ο «ΕΡΜΗΣ» Μ. Ι. ΣΑΛΙΒΕΡΟΥ

38 — ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ — 38

1895

ΠΡΑΚΤΙΚΗ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΘΕΝΑΓΩΓΕΙΩΝ

ΥΠΟ

ΔΙΟΝΥΣΙΟΥ Ρ. ΡΗΓΟΠΟΥΛΟΥ

Διδάκτορος τῶν μαθηματικῶν

Ἐκδότης

ΜΙΧΑΗΛ Ι. ΣΑΛΙΒΕΡΟΣ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ Ο «ΕΡΜΗΣ» Μ. Ι. ΣΑΛΙΒΕΡΟΥ

38 — ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ — 38

1895

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουσι τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ ΑΛΕΞ. ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ
3 — Ὁδὸς Ὀφθαλμιατρείου — 3

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἂν ἀπόφοιτοι Γυμνασίων προσκρούωσιν εἰς τὴν λύσιν καὶ τοῦ ἁπλουστέρου ἀριθμητικοῦ ζητήματος, τὸ σφάλμα δὲν κεῖται εἰς τὰ Γυμνάσια, ἀλλ' εἰς τὰ Ἑλληνικὰ Σχολεῖα, διότι ἐνταῦθα ἐπὶ τριετίαν ὅλην διδάσκεται ἡ Ἀριθμητικὴ καὶ ἐνταῦθα πρέπει νὰ ἀποκτῶσιν οἱ μαθηταὶ τὴν ἀπαιτουμένην ἱκανότητα πρὸς λύσιν παντὸς ἐν τῷ καθ' ἡμέραν βίῳ παρουσιαζομένου ἀριθμητικοῦ προβλήματος. Ἀλλὰ διὰ τὸ σπουδαιότατον τοῦτο τῶν μαθημάτων δὲν εἶχεν ἐξευρεθῆ τὸ κατάλληλον σύστημα Ἀριθμητικῆς. Τούτου δ' ἕνεκεν ἀφ' ἑνὸς μὲν ἀποθάρρυνσις διδασκάλοις τε καὶ διδασκομένοις ἐπήρχετο, ἀφ' ἑτέρου δὲ οὐχὶ εὐάρεστοι καρποὶ ἀπὸ τῆς διδασκαλίας τοῦ μαθήματος τούτου συνεκομίζοντο. Τὴν ἔλλειψιν ταύτην κατιδόντες εὐθὺς ὡς κατηρξάμεθα τοῦ διδασκαλικοῦ ἡμῶν σταδίου ἔγνωμεν νὰ θεραπεύσωμεν· καὶ πρὸς τοῦτο δημοσιεύομεν ἤδη τὴν παροῦσαν Ἀριθμητικήν. Ἂν δ' ἐπετύχομεν τοῦ σκοποῦ ἡμῶν, οἱ ἐπαΐοντες κρινέτωσαν.

Διὰ τοῦ ἡμετέρου συστήματος τῆς Ἀριθμητικῆς ἐπιδιώξαντες τὸ ἁπλοῦν καὶ σαφὲς καὶ τὴν ἀποκάθαρσιν τῶν κακῶς ἐχόντων ἠναγκάσθημεν νὰ νεωτερίσωμεν ἐν πολλοῖς, διότι καὶ τὰ κακῶς ἔχοντα πολλὰ ὑπῆρχον. Καὶ δὴ ἐνεωτερίσαμεν κατὰ τὸν καταρτισμὸν τοῦ συστήματος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἐκθέσαντες αὐτὸ κατὰ τρόπον πρακτικὸν καὶ πρόσφορον εἰς τὰς νεαρὰς διανοίας τῶν μαθητῶν τῆς πρώτης τάξεως τοῦ Ἑλληνικοῦ Σχολείου, εἰς οὓς τοῦτο διδάσκεται. Ἐνεωτερίσαμεν δ' ὡσαύτως κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος, διὰ νὰ ὑπαγάγωμεν εἰς τοῦτον α') *τὴν διαίρεσιν τοῦ παρονομαστοῦ κλάσματος δι' ἀκεραίου* καὶ β') *τὴν μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς πρὸς τὰ δεξιά, ὅταν πολλαπλασιάζωμεν δεκαδικόν τινα ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000* κ.τ.λ., διότι αἱ πράξεις αὗται οὐδαμῶς ὑπάγονται εἰς τὸν συνήθως διδόμενον ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καθ' ὃν «δέον νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστὴς» ἢ εἰς ἐκεῖνον, καθ' ὃν «δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις γίνεται ἐκ τοῦ πρώτου, ὅπως ὁ δεύτερος ἔγεινεν ἐκ τῆς μονάδος», διότι καὶ κατὰ τοῦτον τὸν ὁρισμὸν πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος, διὰ νὰ προκύψῃ τὸ γινόμενον. Ἀλλὰ διὰ τῆς ἐν λόγῳ ἐπαναλήψεως ἐπέρχεται *αὔξησις τοῦ πλήθους τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου εἰς τὸ γινόμενον* ἄνευ οὐδεμιᾶς μεταβολῆς τῆς *μονάδος* τοῦ πολλαπλασιαστέου. Τὸ τοιοῦτον ὅμως οὐδαμῶς συμβαίνει εἰς τὰς δύο προεκτεθείσας περιπτώσεις, διότι εἰς αὐτὰς προκύπτει τὸ γινόμενον οὐχὶ διὰ τῆς αὐξήσεως τοῦ πλήθους τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἀλλὰ *διὰ τῆς μεγεθύνσεως ἑκάστης μονάδος αὐτοῦ* κατὰ τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστὴς ἄνευ οὐδεμιᾶς μεταβολῆς τοῦ *πλήθους* τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου. Διὰ τοῦτο ἢ πρέπει τὰς πράξεις ἐκείνας ν' ἀποκλείσωμεν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἢ νὰ καταστήσωμεν, ὡς ἐπράξαμεν, τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἱκανὸν νὰ περιλάβῃ καὶ τὰς πράξεις ταύτας. Προσέτι δὲ ὁ ὁρισμὸς τὸν ὁποῖον διετυπώσαμεν ἄγει ἡμᾶς εἰς τὸ ν' ἀποδείξωμεν φυσικώτατα τὸ ἀμετάβλητον τοῦ γινομένου μεταβαλλομένης τῆς τάξεως τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ πολλαπλασιαστοῦ.

Διὰ τοῦ ἡμετέρου συστήματος διεκρίναμεν, ὅτι τὸ πηλίκον (ἀπολύτως θεωρούμενον) προκύπτει ἢ ἐλαττουμένων τῶν μονάδων τοῦ διαιρετέου κατὰ τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος διαιρέτης, ἢ σμικρυνομένων τῶν μονάδων τοῦ διαιρετέου κατ' ἰσαρίθμους φορὰς καὶ ὅπερ συμβαίνει α') κατὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ πηλίκου ἀκεραίου δι' ἀκεραίου ὑπὸ μορφὴν κλασματικήν, ϐ') κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ παρονομαστοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον διαιρέτην καὶ γ') κατὰ τὴν μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς πρὸς τὰ ἀριστερά, ὅταν διαιρῶμεν δεκαδικόν τινα ἀριθμὸν διὰ 10, 100, 1000 κ.τ.λ.

Ἐν τῇ ἡμετέρᾳ Ἀριθμητικῇ ἀπερρίψαμεν ὡς ἐσφαλμένην τὴν διάκρισιν τῆς διαιρέσεως τῶν συμμιγῶν εἰς συμμιγεῖς ὁμοειδεῖς καὶ ἑτεροειδεῖς, διότι οὔτε *ὅλα* τὰ προβλήματα τῶν ὁμοειδῶν συμμιγῶν λύονται διὰ τοῦ κανόνος τῆς διαιρέσεως τῶν ὁμοειδῶν συμμιγῶν, ὅστις ἄλλως τε καὶ ὡς πρὸς τὰ δι' αὐτοῦ λυόμενα προβλήματα εἶναι ἀτελής, οὔτε *μόνα* τὰ προβλήματα τῶν ἑτεροειδῶν συμμιγῶν λύονται διὰ τοῦ κανόνος τῆς διαιρέσεως τῶν ἑτεροειδῶν συμμιγῶν.

Παράδειγμα 1ον. Ἔμπορός μὲ 15εικ. 3ταλ. 3δρ. ἐκέρδησεν 2 εικ. 4 δρ. ἐξ ἐπιχειρήσεώς τινος. Πόσον κέρδος ἀναλογεῖ εἰς τὸ ἓν τάλληρον τοῦ κεφαλαίου του;

Παράδειγμα 2ον. Ὡρολόγιόν τι εἰς 12 ωρ. 5' μένει ὀπίσω 8' 15''. Πόσον μένει ὀπίσω τὴν ὥραν;

Τὰ προβλήματα ταῦτα, καὶ τὰ τούτοις ὅμοια, λύονται ὡς τὰ τῆς διαιρέσεως τῶν ἑτεροειδῶν συμμιγῶν, διότι καὶ εἰς ταῦτα, ὡς εἰς ἐκεῖνα ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος. Διὰ τοῦτο πρέπει εἰς μὲν τὸ πρῶτον πρόβλημα νὰ τρέψωμεν τὰ 15 εικ. 3 ταλ. 3 δρ. εἰς τάλληρα, εἰς δὲ τὸ δεύτερον πρόβλημα τὰ 12ωρ. 5' εἰς ὥρας καὶ ἔπειτα νὰ διαιρέσωμεν δι' αὐτῶν.

Ἀλλ' ἐκτὸς τούτων ἐν τῷ συγγράμματι ἡμῶν τούτῳ καθωρίσαμεν ἐπακριβῶς τὰς διαφόρους μορφὰς τῶν προβλημάτων τῶν λυομένων διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διαιρέσεως, διακρίναντες δύο τοιαύτας εἰς τὰ προβλήματα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τέσσαρας εἰς τὰ προβλήματα τῆς διαιρέσεως, ἐξ ὧν δύο τῶν προβλημάτων τοῦ μερισμοῦ καὶ δύο τῶν τῆς μετρήσεως, καὶ διετυπώσαμεν κανόνας δι' ὧν διακρίνομεν τὰς διαφόρους ταύτας μορφὰς τῶν προβλημάτων (§§ 188, 189, 190, 191, 192, 193) καὶ κανόνας δι' ὧν τροποποιοῦμεν ἐν ἀνάγκῃ τοὺς ἀριθμοὺς πρὸ τῆς ἐκτελέσεως τῶν ἐν ἑκάστῳ προβλήματι ἀπαιτουμένων πράξεων πολλαπλασιασμοῦ ἢ διαιρέσεως (§§ 251, 255, 258). Ὡρίσαμεν δὲ προσέτι ἐκ ποίας ποσότητος πρέπει νὰ γίνηται ἡ ἔναρξις τῆς *διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα* λύσεως τῶν προβλημάτων καὶ ἐγενικεύσαμεν τὸν τρόπον τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα καὶ ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων προβλημάτων τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν. Ἀλλ' ἐκτὸς τούτων ἐγενικεύσαμεν προσέτι τοὺς κανόνας, δι' ὧν λύονται τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς καὶ συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, οὕτως ὥστε νὰ ἰσχύωσιν οὗτοι καὶ ὅταν ὁ ἄγνωστος X τεθῇ ἐν τῇ πρώτῃ ὁριζοντίᾳ συμφώνως πρὸς τὴν ἀπαγγελίαν τοῦ προβλήματος, ἵνα μὴ ἀναγκαζώμεθα νὰ τροποποιῶμεν τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος κατὰ τὴν κατάστρωσιν τῶν ποσῶν, πρὸς τὸν σκοπὸν νὰ θέτωμεν τὸν ἄγνωστον ἐν τῇ δευτέρᾳ ὁριζοντίᾳ, ὅταν οὗτος ἕνεκα τῆς ἐκφράσεως τοῦ προβλήματος φέρηται ἐν τῇ πρώτῃ ὁριζοντίᾳ.

Ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ ἡμῶν ταύτῃ περιελάβομεν ἐν ἰδιαιτέρῳ κεφαλαίῳ ἐπικληθέντι «Προβλήματα τοῦ τόσον τοῖς ἑκατὸν ἢ τοῖς χιλίοις» τὰ προβλήματα ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα δὲν θὰ διέφερον τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου, ἐὰν μεταξὺ τῶν δεδομένων ἢ εἰς τὸ ζητούμενον ὑπῆρχε καὶ ὁ χρόνος. Ἐπράξαμεν δὲ τοῦτο, διότι τὰ προβλήματα ταῦτα, ἐλλείποντος τοῦ χρόνου, κακῶς περιλαμβάνονται μεταξὺ τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου, ἐν ᾧ ἁπλούστατα λύονται ὡς προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Εἰς δὲ τὰ προβλήματα τοῦ τόκου διετυπώσαμεν ἕνα καὶ μόνον κανόνα πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου, τοῦ χρόνου δεδομένου εἴτε εἰς ἔτη, εἴτε εἰς μῆνας, εἴτε εἰς ἡμέρας.

Διὰ τοῦ ἡμετέρου συστήματος καθωρίσαμεν ἐπακριβῶς τὰ *δύο* διάφορα εἴδη τῶν προβλημάτων τοῦ μερισμοῦ καὶ ὑπηγάγομεν εἰς ταῦτα καὶ τὰ προβλήματα τῆς Ἑταιρείας. Προσέτι δ' ἀπεδείξαμεν, ὅτι δὲν εἶνε ἀληθές, ὅτι πάντα τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως οὐδόλως διαφέρουσι τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου, διότι, ὅταν ἐπὶ παραδείγματι ζητῆται ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου τινὸς καὶ δίδηται ὁ χρόνος τῆς προεξοφλήσεως, τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἡ ἀξία αὐτοῦ ἐξωτερικῶς, τὸ τοιοῦτον πρόβλημα οὐδόλως εἶναι τοῦ τόκου. Καὶ τέλος ἐπραγματεύθημεν μετὰ πάσης ἀκριβείας καὶ τὸ περὶ ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως· προσέτι δὲ διεκρίναμεν τρία εἴδη προβλημάτων τῆς μίξεως ἀντὶ δύο, ὡς εἴθισται, καὶ διετυπώσαμεν τρόπους πρὸς λύσιν ἑκάστου τούτων.

Περατοῦντες τὸν πρόλογον ἡμῶν τοῦτον, νομίζομεν, ὅτι δὲν περιαυτολογοῦμεν λέγοντες, ὅτι ἐν τῷ συγγράμματι ἡμῶν τούτῳ εἰργάσθημεν μετὰ πάσης τῆς ἐπιστημονικῆς ἀκριβείας καὶ δὴ ἐλάβομεν τὴν ἀντίθετον ὁδὸν ἐκείνης, ἣν ἔλαβεν ὁ συγγραφεὺς Ἀριθμητικῆς ἐπ' ἐσχάτων τὸ πρῶτον ἐκδοθείσης, ὅστις ἐπιζητῶν ἔν τισι νὰ νεωτερίσῃ κατώρθωσε νὰ εἰσαγάγῃ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν νέα σφάλματα. Καὶ ἵνα μὴ θεωρηθῶμεν, ὅτι ἐπὶ καθαρῶς ἐπιστημονικῶν ζητημάτων ἀοριστολογοῦμεν, ἀναγράφομέν τινα ἐκ τῶν νέων σφαλμάτων, τὰ ὁποῖα ἐπροθυμοποιήθη νὰ εἰσαγάγῃ.

α'.) Τὸ σύμβολον τῆς διαιρέσεως, λέγει, εἶναι ἐκτὸς τοῦ : καὶ τὸ —, ἄνωθεν τοῦ ὁποίου γράφεται ὁ διαιρετέος κάτωθεν δὲ ὁ διαιρέτης. Π. χ. $8 : 4$ ἢ $\frac{8}{4}$.

Προφανῶς λανθάνει τὸν συγγραφέα τῆς ἐν λόγῳ Ἀριθμητικῆς, ὅτι τὸ $\frac{8}{4}$ δὲν δηλοῖ, ὅτι πρέπει τὸ 8 νὰ διαιρεθῇ διὰ 4, ἀλλ' ὅτι ἡ διαίρεσις τοῦ 8 διὰ 4 ἔχει ἤδη ἐκτελεσθῇ καὶ ὅτι τὸ $\frac{8}{4}$ εἶναι τὸ ὑπὸ κλασματικὴν μορφὴν πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης. Φαίνεται δὲ ὅτι ὡς πηλίκον τοῦ $8 : 4$ ὁ συγγραφεὺς θεωρεῖ μόνον τὸ 2, ὅπερ εἶναι ἑτέρα μορφὴ τοῦ πηλίκου, ἀγνοῶν ὅτι, ἡ μὲν μορφὴ $8 : 4 = \frac{8}{4}$ προκύπτει διὰ τῆς σμικρύνσεως τῶν μονάδων τοῦ διαιρετέου εἰς τὸ πηλίκον, χωρὶς τὸ πλῆθος αὐτῶν νὰ μεταβληθῇ, ἡ δὲ μορφὴ $8:4=2$ προκύπτει διὰ τῆς ἐλαττώσεως τοῦ πλήθους τῶν μονάδων τοῦ διαιρετέου, χωρὶς ἡ μονὰς αὐτοῦ νὰ μεταβληθῇ.

β'.) Πάντα δεκαδικὸν ἀριθμόν, λέγει, ἀπαγγέλλομεν κατὰ πέντε τρόπους. Τὸ τοιοῦτον δὲν εἶνε ἀληθές, διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν τρόπων τῆς ἀπαγγελίας τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν δὲν δύναται νὰ ὁρισθῇ, ἅτε αὐξανόμενος μετὰ τοῦ πλήθους τῶν ψηφίων τοῦ ἑκάστοτε δεκαδικοῦ. Π. Χ. τὸν 5,7 δὲν δυνάμεθα ειμὴ κατὰ δύο μόνον τρόπους ν' ἀπαγγείλωμεν, ἤτοι 57 δέκατα ἢ 5 ἀκεραίας μονάδας καὶ 7 δέκατα.

γ'.) Ὁ ἐν λόγῳ συγγραφεὺς ἐν τῷ κεφαλαίῳ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν λύει ὅλα τὰ προβλήματα διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα χωρὶς νὰ διατυπώσῃ τοὺς δύο πρακτικοὺς κανόνας, δι' ὧν κατορθοῦται ἡ λύσις τῶν ἐν λόγῳ προβλημάτων, ἐξ ὧν ὁ εἷς ἰσχύει, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὁ δὲ ἕτερος, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Οὕτω δὲ φρονεῖ βεβαίως ὁ συγγραφεύς, ὅτι ὡμίλησε περὶ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ἐν ᾧ ἁπλῶς ἀσκεῖ ἡμᾶς ἐκ δευτέρου εἰς λύσιν προβλημάτων διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

δ'.) Ἐν ᾧ ὁ συγγραφεὺς τοῦ ἐν λόγῳ βιβλίου καλεῖ ὡς κεφάλαιον τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον δίδεται εἰς δάνειον, δὲν δυσκολεύεται εἰς τὰ προβλήματα τῆς ὑφαιρέσεως νὰ θεωρῇ ὡς κεφάλαιον τὸ ποσὸν, τὸ ὁποῖον ἀναγράφει τὸ γραμμάτιον, ὅπερ, ὡς γνωστόν, εἶναι τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ τόκος ὁμοῦ ἀπὸ τῆς ἐκδόσεως μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου. Προσέτι δὲ διατυποῖ εἰς τὰ περὶ Ἐσωτερικῆς Ὑφαιρέσεως καὶ τὸν ἑξῆς ἐσφαλμένον κανόνα πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐπιτοκίου.

«Ἵνα εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, λέγει, εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον τῆς ὑφαιρέσεως ἐπὶ 100 καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον (ἐκπεφρασμένον εἰς μονάδα ἔτους) καὶ τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τῆς πληρωθείσης ποσότητος, τὸ δ' οὕτω προκῦπτον πηλίκον εἶνε τὸ ζητούμενον».

Ὁ ἐν λόγῳ συγγραφεὺς διατυποῖ τὸν ἐσφαλμένον τοῦτον κανόνα, διότι, φαίνεται, ἀγνοεῖ, ὅτι τὸ πρόβλημα, εἰς ὃ δίδεται ἡ πληρωθεῖσα ἀξία τοῦ γραμματίου (ἐσωτερικῶς), ὁ χρόνος τῆς προεξοφλήσεως καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον εἶναι ἁπλούστατον πρόβλημα τόκου.

Ἐν τέλει κρίνομεν ἐπάναγκες ν' ἀναγράψωμεν, ὅτι ἐν τῷ ἡμετέρῳ συστήματι τῆς Ἀριθμητικῆς οὐδὲν ἀνεγράφη ἐξ ἐκείνων, ὧν τὴν ἀνάγκην δὲν ἤθελεν αἰσθανθῇ ὁ ἀπόφοιτος τοῦ Ἑλληνικοῦ Σχολείου εἰς τὸν πρακτικὸν βίον, ἢ δὲν ἤθελε συντελέσῃ πρὸς διασάφησιν ἑπομένων ζητημάτων. Προσέτι δ' ἐσημειώσαμεν δι' *ἀστερίσκου* μέρη τινὰ τῆς Ἀριθμητικῆς, ἵνα διδάσκωνται ταῦτα ἐν τῇ ἀνωτέρᾳ τάξει, ὅπως οὕτως ἐξοικειῶται τὸ πνεῦμα τοῦ μαθητοῦ καὶ πρὸς τὴν Θεωρητικὴν Ἀριθμητικὴν καὶ μὴ μεταπίπτῃ εἰς αὐτὴν ἐν τῇ πρώτῃ Γυμνασιακῇ τάξει ὅλως ἀποτόμως. Ἐπραγματεύθημεν δὲ μεθ' ὅλης τῆς δυνατῆς ἀκριβείας τὰς διαφόρους μεθόδους, ἵνα μὴ μένῃ τὸ ἀσαφὲς καὶ ἀκατάληπτον εἰς τὸ πνεῦμα τοῦ μαθητοῦ, διότι ἐν αὐταῖς κυρίως γίνεται ἡ σπουδὴ τῶν προβλημάτων τῶν ἀπαντώντων ἐν τῷ πρακτικῷ βίῳ.

Τοιοῦτο κατὰ γενικωτάτας γραμμὰς τὸ τῆς Ἀριθμητικῆς σύστημα ἡμῶν, τὸ ὁποῖον εὐχόμεθα καὶ ἐλπίζομεν νὰ συντελέσῃ εἰς τελειοτέραν καὶ εὐκολωτέραν σπουδὴν τῆς Ἀριθμητικῆς.

Ἔγραφον τῇ 11 Αὐγούστου 1895.

ΔΙΟΝ. ΡΗΓΟΠΟΥΛΟΣ

Καθηγητὴς τῶν μαθηματικῶν ἐν τῷ Βαρβακείῳ γυμνασίῳ.

ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α'.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Προκαταρκτικαὶ ἔννοιαι.

1. Μονὰς λέγεται τὸ ἓν ἐκ πολλῶν πραγμάτων ἢ καὶ τὸ σύνολον πολλῶν πραγμάτων, ὡς ἓν ὅλον θεωρούμενον.

Π. χ. Ὅταν θέλωμεν νὰ μετρήσωμεν πολλὰ μῆλα, τὸ ἓν ἐκ τῶν μήλων λέγεται μονάς, ὅταν δὲ πολλοὺς σωροὺς μήλων, ὁ εἷς ἐκ τῶν σωρῶν λέγεται μονάς. Ὁμοίως, ὅταν θέλωμεν νὰ μετρήσωμεν πολλοὺς στρατιώτας, ὁ εἷς ἐκ τῶν στρατιωτῶν λέγεται μονάς, ὅταν δὲ πολλὰς *τετράδας* στρατιωτῶν, ἑκάστη *τετρὰς* στρατιωτῶν λέγεται μονάς.

2. Ἀριθμὸς λέγεται τὸ σύνολον πολλῶν μονάδων ἢ καὶ μία μονάς.

3. Ἀριθμητικὴ καλεῖται ἡ ἐπιστήμη ἡ πραγματευομένη περὶ τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν ἐπ' αὐτῶν πράξεων.

Περὶ τοῦ συστήματος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

4. Ἐπειδὴ πάντα ἀριθμὸν ἢ θὰ τὸν ἴδωμεν γεγραμμένον ἢ θ' ἀκούσωμεν αὐτὸν ἀπαγγελλόμενον, διὰ τοῦτο ἐξετάζομεν τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους.

Α'.) Πῶς δυνάμεθα νὰ *ὀνομάσωμεν* ἀριθμόν τινα *γεγραμμένον*.

Β'.) Πῶς δυνάμεθα νὰ *γράψωμεν* ἀριθμόν τινα *ἀπαγγελλόμενον*.

Σημείωσις. Πρὸς εὐκολωτέραν ἐξέτασιν τῶν ἀριθμῶν χωρίζομεν αὐτοὺς ὡς ἑξῆς :

α'.) Εἰς ἀριθμοὺς μὴ ἔχοντας ψηφία περισσότερα τῶν τριῶν.

β'.) Εἰς ἀριθμοὺς ἔχοντας ψηφία περισσότερα τῶν τριῶν.

Ὀνομασία ἀριθμοῦ γεγραμμένου μὴ ἔχοντος ψηφία περισσότερα τῶν τριῶν.

Ὀνομασία μονοψηφίων ἀριθμῶν.

5. Πᾶς ἀριθμὸς γράφεται διὰ τῶν ἑξῆς συμβόλων. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 καὶ 0. Τὰ σύμβολα δὲ ταῦτα λέγονται *ἀριθμητικὰ ψηφία*. Ἐκ τούτων δὲ τὰ μὲν

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

λέγονται καὶ ἀριθμοὶ *μονοψήφιοι* ἢ καὶ *σημαντικὰ ψηφία* καὶ ὀνομάζονται κατὰ σειρὰν ὡς ἑξῆς:

μία (μονὰς) ἢ *ἕν*
δύο (μον.) » *δύο*, ὅπερ γίνεται, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸ *ἓν* καὶ ἄλλο *ἕν*
τρεῖς (μον.) » *τρία*, » » » » » *δύο* » » »
τέσσαρες (μον.) *τέσσαρα*,» » » » » *τρία* » » »
....
ἐννέα (μονάδες) ἢ *ἐννέα* » » » » *ὀκτὼ* » » »

Τὸ δὲ 0 λέγεται μηδὲν καὶ σημαίνει τὴν ἔλλειψιν πάσης μονάδος.

Ὀνομασία διψηφίων ἀριθμῶν.

6. Ἂν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἑκάστου τῶν ψηφίων 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 καὶ 0, ὑπάρχῃ καὶ δεύτερον ψηφίον, τοῦτο θὰ λέγωμεν, ὅτι σημαίνει *δεκάδας*.

Παράδειγμα 1ον. Ἂν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 0 ὑπάρχῃ ὁποιονδήποτε σημαντικὸν ψηφίον, τότε θὰ ἔχωμεν ἀριθμοὺς τοιούτους

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἔχουσι κατὰ σειρὰν 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *δεκάδας* καὶ ἕκαστος τούτων ὀνομάζεται μὲ τὸ ὄνομα τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων του μόνον ἢ μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας τοῦτο παριστᾷ, ἤτοι ὡς ἑξῆς:

μία (δεκὰς)	ἤτοι	*δέκα* (μονάδες)
δύο (δεκάδες)	»	*εἴκοσι* (μονάδες)
τρεῖς (δεκάδες)	»	*τριάκοντα* (μονάδες)
τέσσαρες (δεκάδες)	»	*τεσσαράκοντα* (μονάδες)
πέντε (δεκάδες)	»	*πεντήκοντα* (μονάδες)

ἕξ (δεκάδες) ἤτοι *ἑξήκοντα* (μονάδες)
ἑπτὰ (δεκάδες) » *ἑβδομήκοντα* (μονάδες)
ὀκτὼ (δεκάδες) » *ὀγδοήκοντα* (μονάδες)
ἐννέα (δεκάδες) » *ἐνενήκοντα* (μονάδες)

Σημείωσις. Ἡ μία δεκὰς μορφοῦται, ἐὰν λάβωμεν δέκα μονάδας ὁμοῦ, δηλ. ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὰς ἐννέα μονάδας μίαν μονάδα ἀκόμη.

Παράδειγμα 2ον. Ἂν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ὁποιουδήποτε ἀριθμητικοῦ ψηφίου ὑπάρχῃ σημαντικὸν ψηφίον, τότε θὰ ἔχωμεν ἀριθμοὺς τοιούτους 57, 84, 38, 72, 15, 60, 41, 88 κ.τ.λ.

Ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων ὀνομάζομεν, προσκολλῶντες εἰς τὸ ὄνομα τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων του (ἢ τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας τοῦτο παριστᾷ), τὸ ὄνομα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων του, ἤτοι ὡς ἑξῆς:
πέντε (δεκάδες) καὶ *ἑπτὰ* (μονάδες) ἤτοι *πεντήκοντα ἑπτὰ* (μονάδες)
ὀκτὼ (δεκάδες) καὶ *τέσσαρες* (μονάδες) » *ὀγδοήκοντα τέσσαρες* »
τρεῖς (δεκάδες) καὶ *ὀκτὼ* (μονάδες) » *τριάκοντα ὀκτὼ* (μονάδες)
καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Σημείωσις. Οἱ ἀριθμοὶ 11 καὶ 12 ὀνομάζονται κατ' ἐξαίρεσιν *ἕνδεκα* (μονάδες), *δώδεκα* (μονάδες) ἀντὶ *δέκα-μία* (μονάδες), *δέκα-δύο* (μονάδες).

Παρατήρησις.—Ἂν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ὁποιουδήποτε μονοψηφίου ἀριθμοῦ γράψωμεν 0, οὐδένα νέον ἀριθμὸν σχηματίζομεν.

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 3 καὶ 03 εἶναι οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί, διότι καὶ ὁ εἷς καὶ ὁ ἄλλος ἔχουσι τρεῖς μονάδας ἐν ὅλῳ.

7. Διψήφιοι ἀριθμοὶ λέγονται οἱ γραφόμενοι μὲ δύο ἀριθμητικὰ ψηφία, ἐξ ὧν τὸ μὲν ἐκ δεξιῶν εἶναι τῶν μονάδων, τὸ δὲ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τούτου τῶν δεκάδων.

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 15, 75, 60, κ.τ.λ. εἶναι διψήφιοι ἀριθμοί.

Ὀνομασία τριψηφίων ἀριθμῶν.

8. Ἂν πρὸς τὰ ἀριστερὰ δύο ἀριθμητικῶν ψηφίων ὑπάρχῃ καὶ τρίτον, τοῦτο θὰ λέγωμεν, ὅτι σημαίνει *ἑκατοντάδας*.

Παράδειγμα 1ον. Ἂν πρὸς τὰ ἀριστερὰ δύο μηδενικῶν ὑπάρχῃ σημαντικὸν ψηφίον, τότε θὰ ἔχωμεν ἀριθμοὺς τοιούτους

100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900.

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἔχουσι κατὰ σειρὰν 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ἑκατοντάδας. Ἕκαστος δὲ τῶν ἀριθμῶν τούτων ὀνομάζεται μὲ τὸ ὄνομα τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων του μόνον (ἢ τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας τοῦτο παριστᾷ), ἤτοι ὡς ἑξῆς:

μία (ἑκατοντὰς)	ἤτοι	*ἑκατὸν* (μονάδες)
δύο (ἑκατοντάδες)	»	*διακόσιαι* (μονάδες)
τρεῖς (ἑκατοντάδες)	»	*τριακόσιαι* (μονάδες)
....	....	....
....	....	....
....	....	....
ἐννέα (ἑκατοντάδες)	»	*ἐννεακόσιαι* (μονάδες).

Σημείωσις. Ἡ μία ἑκατοντὰς δύναται νὰ μορφωθῇ, ἐὰν λάβωμεν δέκα μονάδας ὁμοῦ.

Παράδειγμα 2ον. Ἂν εἰς τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἔχουσι τρία ψηφία, τὸ μεσαῖον εἶναι μηδέν, τότε θὰ ἔχωμεν ἀριθμοὺς τοιούτους

502, 707, 408, 101, κ.τ.λ.

Ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων ὀνομάζομεν, προσκολλῶντες εἰς τὸ ὄνομα τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων του (ἢ τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας τοῦτο παριστᾷ), τὸ ὄνομα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων του, ἤτοι ὡς ἑξῆς:

πέντε (ἑκατοντάδες) καὶ *δύο* (μονάδες) ἤτοι *πεντακόσιαι δύο* (μον.)
ἑπτὰ (ἑκατοντάδες) καὶ *ἑπτὰ* (μονάδες) » *ἑπτακόσιαι ἑπτὰ* »
καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Παράδειγμα 3ον. Ἂν πρὸς τὰ ἀριστερὰ παντὸς διψηφίου ἀριθμοῦ ὑπάρχῃ σημαντικὸν ψηφίον, τότε θὰ ἔχωμεν ἀριθμοὺς τοιούτους

849, 230, 555, κ.τ.λ.

Ἕκαστον δὲ τῶν ἀριθμῶν τούτων ὀνομάζομεν, προσκολλῶντες εἰς τὸ ὄνομα τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων του (ἢ τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας τοῦτο παριστᾷ), τὸ ὄνομα τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων του (ἢ τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας τοῦτο παριστᾷ) καὶ εἰς ταῦτα τὸ ὄνομα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων του, ἤτοι ὡς ἑξῆς:

ὀκτὼ (ἑκατοντάδες) *τέσσαρες* (δεκάδες) καὶ *ἐννέα* (μονάδες) ἤτοι
ὀκτακόσιαι-τεσσαράκοντα-ἐννέα (μονάδες)

δύο (ἑκατοντάδες) καὶ *τρεῖς* (δεκάδες) ἤτοι
διακόσιαι-τριάκοντα (μονάδες)

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Παρατήρησις. — Ἂν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ὁποιουδήποτε διψηφίου ἀριθμοῦ γράψωμεν 0, οὐδένα νέον ἀριθμὸν σχηματίζομεν.

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 35 καὶ 035 οὐδόλως διαφέρουσι, διότι ἕκαστος τούτων ἔχει 3 δεκάδας καὶ 5 μονάδας, ἤτοι τριάκοντα πέντε (μονάδας).

9. Τριψήφιοι ἀριθμοὶ λέγονται οἱ γραφόμενοι μὲ τρία ψηφία, ἐξ ὧν τὸ μὲν ἐκ δεξιῶν εἶναι τῶν μονάδων, τὸ δὲ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τούτου τῶν δεκάδων καὶ τὸ τρίτον τῶν ἑκατοντάδων.

Σημείωσις. Πάντα ἀριθμὸν ὀνομάζομεν συνήθως μὲ τὸ ὄνομα τῶν ὅλων του μονάδων.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

10. *Διὰ νὰ ὀνομάσωμεν διψήφιον ἢ τριψήφιον ἀριθμὸν γεγραμμένον, ἀρχόμεθα ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ἐκφωνοῦμεν ἑκάστου σημαντικοῦ ψηφίου τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας παριστᾷ.*

Π. χ. Νὰ ὀνομάσωμεν τοὺς διψηφίους ἀριθμοὺς 50, 36, 44.

Ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων ὁ 50, ἐπειδὴ ἔχει 5 δεκάδας ἤτοι *πεντήκοντα* (μονάδας) καὶ δὲν ἔχει ἄλλας μονάδας, ὀνομάζεται *πεντήκοντα* (μονάδες). Ὁ δὲ 36, ἐπειδὴ ἔχει 3 δεκάδας, ἤτοι *τριάκοντα* (μονάδας) καὶ ἔχει ἀκόμη καὶ *ἓξ μονάδας*, διὰ τοῦτο ὀνομάζεται *τριάκοντα ἓξ* (μονάδες). Ὁμοίως ὁ 44 ὀνομάζεται *τεσσαράκοντα-τέσσαρες* (μονάδες).

Ἤδη ἂς ὀνομάσωμεν τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς 425, 507, 660, 333.

Κατὰ τὸν κανόνα (10)

ὁ μὲν	425	ὀνομάζεται	*τετρακόσιαι-εἴκοσι-πέντε* (μονάδες)
ὁ δὲ	507	»	*πεντακόσιαι-ἑπτὰ* (μονάδες)
ὁ δὲ	660	»	*ἑξακόσιαι-ἑξήκοντα* (μονάδες)
καὶ ὁ	333	»	*τριακόσιαι-τριάκοντα-τρεῖς* (μονάδες).

Γυμνάσματα.

1) Πόσας *δεκάδας* καὶ *μονάδας* ἔχει ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν

40, 56, 47, 50, 98;

(4 δεκάδας, 5 δεκάδας καὶ 6 μονάδας, κ.τ.λ.)

2) Πόσας μονάδας ἐν ὅλῳ ἔχει ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν

40, 56, 47, 50, 98,

(*τεσσαράκοντα, πεντήκοντα ἕξ*, κ.τ.λ)

3) Πόσας ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας ἔχει ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 357, 408, 550, 666, κ.τ.λ.
(3 ἑκατ. 5 δεκάδ. καὶ 7 μονάδας, 4 ἑκατ. καὶ 8 μονάδας, κ.τ.λ.)

4) Πόσας μονάδας ἐν ὅλῳ ἔχει ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν
357, 408, 550, 666, κ.τ.λ.
(τριακοσίας-πεντήκοντα-ἑπτά, κ.τ.λ.)

Γραφὴ ἀριθμοῦ ἀπαγγελλομένου μὴ ἔχοντος ψηφία περισσότερα τῶν τριῶν.

Γραφὴ μονοψηφίων ἀριθμῶν.

11. Οἱ μονοψήφιοι ἀριθμοὶ γράφονται, ὡς εἴδομεν, κατὰ σειρὰν ὡς ἑξῆς : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Τὸ δὲ *μηδὲν* γράφεται 0.

Γραφὴ διψηφίων ἀριθμῶν.

12. *Διὰ νὰ γράψωμεν πάντα διψήφιον ἀριθμὸν ἀπαγγελλόμενον, γράφομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων του καὶ δεξιὰ τούτου τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων του. Ἂν δὲ ἐκτὸς τῶν δεκάδων δὲν ἔχῃ καὶ μονάδας, τότε γράφομεν μηδὲν εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων.*

Π. χ. Νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμὸς *πεντήκοντα.*

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς πεντήκοντα ἔχει 5 *δεκάδας* καὶ δὲν ἔχει καὶ *μονάδας*, διὰ τοῦτο γράφομεν πρῶτον τὸν 5 καὶ δεξιὰ τούτου γράφομεν 0 διὰ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, ὅτε ὁ ἀπαγγελθεὶς ἀριθμὸς γράφεται ὡς ἑξῆς 50.

Ἤδη ἂς γράψωμεν τοὺς ἀριθμούς, *πεντήκοντα-ἑπτά*, *τριάκοντα-τρία*, *ἑβδομήκοντα.*

Ὁ *πεντήκοντα-ἑπτὰ* ἔχει 5 δεκάδας καὶ 7 μονάδας. Διὰ τοῦτο γράφομεν πρῶτον τὸν 5 καὶ δεξιὰ τούτου τὸν 7, ὅτε γράφεται 57.

Ὁμοίως ὁ *τριάκοντα-τρία* καὶ *ἑβδομήκοντα* γράφονται 33, 70.

Γραφὴ τριψηφίων ἀριθμῶν.

13. *Διὰ νὰ γράψωμεν πάντα τριψήφιον ἀριθμὸν ἀπαγγελλόμενον, γράφομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑκατοντάδων του*

καὶ δεξιὰ τούτου τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων του καὶ τῶν μονάδων του. Ἂν δὲ δὲν ἔχῃ δεκάδας ἢ μονάδας, γράφομεν μηδὲν εἰς τὰς θέσεις των.

Π. χ. Νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμὸς *τετρακόσια.*

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς *τετρακόσια* ἔχει 4 ἑκατοντάδας καὶ δὲν ἔχει δεκάδας καὶ μονάδας, διὰ τοῦτο γράφομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν 4 καὶ δεξιὰ τούτου δύο μηδενικὰ διὰ τὰς δεκάδας καὶ μονάδας, ὅτε ὁ ἀπαγγελθεὶς ἀριθμὸς γράφεται 400.

Ἤδη ἂς γράψωμεν τοὺς ἀριθμοὺς *πεντακόσια-πεντήκοντα, ἑξακόσια-ἕξ, τριακόσια-ἑβδομήκοντα-τρία.*

Ὁ *πεντακόσια-πεντήκοντα*, ἐπειδὴ ἔχει 5 ἑκατοντάδας 5 δεκάδας καὶ δὲν ἔχει μονάδας, γράφεται 550.

Ὁ *ἑξακόσια ἕξ*, ἐπειδὴ ἔχει 6 ἑκατοντάδας, 0 δεκάδας καὶ 6 μονάδας, γράφεται 606.

Ὁ *τριακόσια-ἑβδομήκοντα-τρία*, ἐπειδὴ ἔχει 3 ἑκατοντάδας, 7 δεκάδας καὶ 3 μονάδας, γράφεται 373 [1].

Γυμνάσματα.

1) Ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν *πεντακόσια-πεντήκοντα-ἑπτά, ὀγδοήκοντα, πεντακόσια-ἑπτὰ* πόσας περιέχει ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας;
(5 ἑκ. 5 δεκάδ. καὶ 7 μονάδας, 8 δεκάδας, 5 δεκ. καὶ 7 μονάδας).

2) Νὰ γραφῶσιν οἱ ἀριθμοὶ *τετρακόσια-τέσσαρα, ἑπτακόσια-ἑβδομήκοντα, ἑξακόσια-ἑξήκοντα-ἕξ.* (404, 770, 666, .—)

Ὀνομασία ἀριθμοῦ γεγραμμένου ἔχοντος ψηφία περισσότερα τῶν τριῶν.

14. Παράδειγμα 1ον. Ἂν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τριῶν μηδενικῶν γράψωμεν μονοψήφιον ἢ διψήφιον ἢ τριψήφιον ἀριθμόν, τότε θὰ ἔχωμεν ἀριθμοὺς τοιούτους.

[1] Οἱ μαθηταὶ πρέπει ν' ἀσκηθῶσιν ἀρκούντως εἰς τὴν γραφὴν μονοψηφίων, διψηφίων καὶ τριψηφίων ἀριθμῶν, διότι εἰς τούτους ἀνάγεται καὶ ἡ γραφὴ ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ.

α'.)	1.000	β'.)	10.000	γ'.)	100.000
	2.000		20.000		200.000
	.....		......		....
	.....		......		....
	.....		......		....
	.....		......		....
	.....		......		....
	9.000		90.000		900.000
			25.000		450.000
					506.000
					275.000

Καὶ ἤδη ἑκάστου ἀριθμοῦ τὸ μὲν πρῶτον ἐκ δεξιῶν τριψήφιον τμῆμα ὀνομάζομεν *τμῆμα μονάδων*, τὸ δὲ δεύτερον *τμῆμα χιλιάδων*. Ἔπειτα, διὰ νὰ ὀνομάσωμεν ἕκαστον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ἀρκεῖ ν' ἀρχίσωμεν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ν' ἀπαγγείλωμεν ἑκάστου ἀριθμοῦ μόνον τὸν ἀριθμὸν τοῦ τμήματος τῶν χιλιάδων μετὰ τοῦ ὀνόματος τοῦ τμήματός του, (διότι εἰς τὸ τμῆμα τῶν μονάδων οὐδεὶς ἀριθμὸς ὑπάρχει), ὅτε οἱ γραφέντες ἀριθμοὶ ἀπαγγέλλονται κατὰ σειρὰν ὡς ἑξῆς:

α'.) *μία* (χιλιὰς) β'.) *δέκα* (χιλιάδες) γ'.) *ἑκατὸν* (χιλιάδες)
δύο (χιλιάδες) *εἴκοσι* (χιλιάδες) *διακόσιαι* (χιλιάδες)
καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἤδη ἂς ὀνομάσωμεν ὁποιονδήποτε *τετραψήφιον*, *πενταψήφιον* ἢ *ἑξαψήφιον* ἀριθμόν.

Ἔστωσαν π.χ. οἱ ἀριθμοὶ

2574, 35007, 850400, 807000, κ.τ.λ.

Χωρίζομεν ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἑκάστου ἀριθμοῦ τὸ τριψήφιον τμῆμα τῶν μονάδων, ὅτε τὸ ἑπόμενον τμῆμα εἶναι τῶν χιλιάδων καὶ οὕτως ἔχομεν

2.574, 35.007, 850.400, 807.000.

Καὶ ἤδη ἀπαγγέλλομεν τὸν ἀριθμὸν ἑκάστου τμήματος μετὰ τοῦ ὀνόματος τοῦ τμήματός του, ὅτε

ὁ μὲν 2.574 ὀνομάζεται 2 χιλιάδες καὶ 574 μονάδες
ὁ δὲ 35.007 » 35 χιλιάδες καὶ 7 μονάδες

ὁ 850.400 ὀνομάζεται 850 χιλιάδες καὶ 400 μονάδες
ὁ 807.000 » 807 χιλιάδες.

Παρατήρησις.—Ὅταν οἱ μαθηταὶ ἀσκηθῶσιν ἀρκούντως, δὲν πρέπει νὰ χωρίζωσι τὸν ἀριθμὸν τῶν χιλιάδων δι' ὑποδιαστολῆς, διότι ἐπέρχεται οὕτω σύγχυσις πρὸς ἄλλους ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους θὰ μάθωμεν κατωτέρω.

Σημείωσις. Ἡ μία χιλιὰς δύναται νὰ μορφωθῇ, ἐὰν λάβωμεν δέκα ἑκατοντάδας ὁμοῦ, ἡ μία δεκὰς χιλιάδων, ἐὰν λάβωμεν δέκα χιλιάδας, ἡ μία ἑκατοντὰς χιλιάδων, ἐὰν λάβωμεν δέκα δεκάδας χιλιάδων.

Παράδειγμα 2ον. Ἂν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἓξ μηδενικῶν γράψωμεν μονοψήφιον ἢ διψήφιον ἢ τριψήφιον ἀριθμόν, τότε θὰ ἔχωμεν ἀριθμοὺς τοιούτους.

α'.) 1.000.000	β'.) 10.000.000	γ'.) 100.000.000
2.000.000	20.000.000	200.000.000
....	....	....
....	....	....
....	....	....
9.000.000	90.000.000	900.000.000
	45.000.000	250.000.000
		308.000.000
		425.000.000

Καὶ ἤδη ἑκάστου ἀριθμοῦ τὸ μὲν πρῶτον ἐκ δεξιῶν τριψήφιον τμῆμα ὀνομάζομεν *τμῆμα μονάδων*, τὸ δὲ δεύτερον *τμῆμα χιλιάδων*, τὸ δὲ τρίτον *τμῆμα ἑκατομμυρίων*. Ἔπειτα, διὰ νὰ ὀνομάσωμεν ἕκαστον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ἀρκεῖ ν' ἀρχίσωμεν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ν' ἀπαγγείλωμεν ἑκάστου ἀριθμοῦ μόνον τὸν ἀριθμὸν τοῦ τμήματος τῶν ἑκατομμυρίων μετὰ τοῦ ὀνόματος τοῦ τμήματός του, (διότι εἰς τὸ τμῆμα τῶν χιλιάδων καὶ μονάδων οὐδεὶς ἀριθμὸς ὑπάρχει), ὅτε οἱ γραφέντες ἀριθμοὶ ἀπαγγέλλονται κατὰ σειρὰν ὡς ἑξῆς:

α'.) *ἓν* (ἑκατομμύριον) β'.) *δέκα* (ἑκατομ.) γ'.) *ἑκατὸν* (ἑκατομ.)
δύο (ἑκατομμύρια) *εἴκοσι* (ἑκατομ.) *διακόσια* (ἑκατομ.)
καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἤδη ἂς ὀνομάσωμεν ὁποιονδήποτε *ἑπταψήφιον*, *ὀκταψήφιον* ἢ *ἐννεαψήφιον* ἀριθμόν.

Ἔστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ

2574382, 20005042, 405780100, 505080000, 945000000.

Χωρίζομεν πρῶτον ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ εἰς τὸ τμῆμα τῶν μονάδων, χιλιάδων καὶ ἑκατομμυρίων, ἤτοι ὡς ἑξῆς:

2.574.382,20.005.042,405.780.100,505.080.000,945.000.000

Καὶ ἤδη ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸν ἀριθμὸν ἑκάστου τμήματος μετὰ τοῦ ὀνόματος τοῦ τμήματός του, ὅτε

ὁ	2.574.382	ὀνομάζεται	2 (ἑκ.)	574 (χιλ.)	καὶ	382 (μον.)
ὁ	20.005.042	»	20 (ἑκ.)	5 (χιλ.)	καὶ	42 (μον.)
ὁ	405.780.100	»	405 (ἑκ.)	780 (χιλ.)	καὶ	100 (μον.)
ὁ	505.080.000	»	505 (ἑκ.)	80 (χιλ.)		
ὁ	945.000.000	»	945 (ἑκατομμύρια).			

Παράδειγμα 3ον. Ἂν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἐννέα μηδενικῶν γράψωμεν μονοψήφιον ἢ διψήφιον ἢ τριψήφιον ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν ἀριθμοὺς τοιούτους

α'.) 1.000.000.000	β'.) 10.000 000.000	γ'.) 100.000.000.000
2.000.000.000	20 000.000.000	200.000.000.000
....	....	....
....	....	....
....	....	....
9.000.000.000	90.000 000.000	900.000.000.000
	17.000.000.000	250.000 000 000
		307.000.000.000
		654.000.000.000

Καὶ ἤδη ἑκάστου ἀριθμοῦ τὸ μὲν πρῶτον ἐκ δεξιῶν τριψήφιον τμῆμα εἶναι τῶν *μονάδων*, τὸ δὲ δεύτερον τῶν *χιλιάδων*, τὸ τρίτον τῶν *ἑκατομμυρίων*, τὸ τέταρτον τῶν *δισεκατομμυρίων*· ἕκαστος δὲ τῶν γραφέντων ἀριθμῶν ὀνομάζεται μόνον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ τμήματος τῶν *δισεκατομμυρίων*, (διότι εἰς τὰ λοιπὰ τμήματα οὐδεὶς ἀριθμὸς ὑπάρχει), ἤτοι ὡς ἑξῆς:

α'.) *ἓν* (δισεκατομ.) β'.) *δέκα* (δισεκατομ.) γ'.) *ἑκατὸ* (δισεκατομ.)
δύο (δισεκατομ.) *εἴκοσι* (δισεκατομ.) *διακόσια* (δισεκατομ.)
καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἤδη ἄς ὀνομάσωμεν ὁποιονδήποτε *δεκαψήφιον*, *ἐνδεκαψήφιον* ἤ *δωδεκαψήφιον* ἀριθμόν.

Ἔστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ

2005740014, 25734256789, 300087000000

Ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων χωρίζομεν εἰς τὸ τμῆμα τῶν μονάδων, χιλιάδων, ἑκατομμυρίων, δισεκατομμυρίων καὶ οὕτως ἔχομεν

2.005.740.014, 25.734.256.789, 300.087.000.000

Ἔπειτα ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸν ἀριθμὸν ἑκάστου τμήματος μετὰ τοῦ ὀνόματος τοῦ τμήματός του, ὅτε

ὁ μὲν 2.005.740.014 ὀνομάζεται 2 (δισεκ.) 5 (ἑκ.) 740 (χιλ.) καὶ 14 (μον.)
ὁ δὲ 25.734.256.789 » 25 (δισεκ.) 734 (ἑκ.) 256 (χιλ.) καὶ 789 (μον.)
καὶ ὁ 300.087.000.000 » 300 (δισεκ.) καὶ 87 (ἑκατομμύρια).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

15. *Διὰ νὰ ὀνομάσωμεν ὁποιονδήποτε ἀριθμὸν γεγραμμένον, ἀρχόμεθα ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα, ὅτε τὸ τελευταῖον τμῆμα δύναται νὰ εἶναι διψήφιον ἢ καὶ μονοψήφιον. Καὶ τὸ μὲν πρῶτον τμῆμα ἐκ δεξιῶν ὀνομάζομεν τμῆμα μονάδων, τὸ δὲ δεύτερον τμῆμα χιλιάδων, τὸ δὲ τρίτον τμῆμα ἑκατομμυρίων, τὸ τέταρτον τμῆμα δισεκατομμυρίων καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἔπειτα δὲ ἀρχόμενοι ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸν ἀριθμὸν ἑκάστου τμήματος μετὰ τοῦ ὀνόματος τοῦ τμήματός του.*

Π. χ. Ἄς ὀνομάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 20570000852.

Χωρίζομεν πρῶτον τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς τριψήφια τμήματα (15), ὅτε ἔχομεν 20.570.000.852.

Ἔπειτα ἀρχόμενοι ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸν ἀριθμὸν ἑκάστου τμήματος μετὰ τοῦ ὀνόματος τοῦ τμήματός του, ὅτε ὁ γραφεὶς ἀριθμὸς ὀνομάζεται οὕτω· 20 (δισεκατομμύρια) 570 (ἑκατομ.) καὶ 852 (μονάδες).

Σημείωσις. Εἰς ἕκαστον τριψήφιον τμῆμα ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ, τὸ πρῶτον ψηφίον ἐκ δεξιῶν εἶναι τῶν *μονάδων*, τὸ δὲ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τούτου τῶν *δεκάδων* καὶ τὸ τρίτον τῶν *ἑκατοντάδων* τοῦ τμήματος.

Π. χ. Εἰς τὸν ἀνωτέρω ἀριθμὸν 20.570.000.852 τὸ τμῆμα τῶν ἑκατομμυρίων περιέχει 0 *μονάδας ἑκατομμυρίων*, 7 *δεκάδας ἑκατομμυρίων* καὶ 5 *ἑκατοντάδας ἑκατομμυρίων*.

Παρατήρησις. Ἂν ὁ γεγραμμένος ἀριθμὸς εἶναι μέγας, διὰ νὰ ὀνομάσωμεν αὐτὸν ταχύτερον, ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, μετροῦμεν τὰ τμήματα αὐτοῦ καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν ἐλαττοῦμεν κατὰ δύο (δηλ. τὸ τμῆμα τῶν μονάδων καὶ χιλιάδων), ὅτε εὑρίσκοντες τὸν ἀριθμὸν 1 ἢ 2 ἢ 3 κ.τ.λ. συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ τελευταῖον τμῆμα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ εἶναι τῶν *ἑκατομμυρίων* ἢ *δισεκατομμυρίων* ἢ *τρισεκατομμυρίων* κ.τ.λ. Τοιουτοτρόπως ἐντεῦθεν εὐκόλως ὀνομάζομεν ὅλον τὸν ἀριθμόν.

Π. χ. Διὰ νὰ ὀνομάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 1457006080056, χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τμήματα, ὡς ἀνωτέρω, καὶ οὕτως ἔχομεν

1.457.006.080.056.

Ἔπειτα δὲ παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν τμημάτων εἶναι 5· τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐλαττοῦντες κατὰ 2 εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 3· ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ δὲ 3 συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ τελευταῖον τμῆμα, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει ὁ 1, εἶναι τῶν τρισεκατομμυρίων. Ὅθεν ὁ γραφεὶς ἀριθμὸς ὀνομάζεται ὡς ἑξῆς· 1 (τρισεκατομ.) 457 (δισεκατομ.) 6 (ἑκατομ.) 80 (χιλιάδ.) καὶ 56 (μονάδες).

Σημείωσις. Πάντα ἀριθμὸν γεγραμμένον δυνάμεθα ν' ἀπαγγείλωμεν κατὰ πολλοὺς τρόπους. Ὁ γενικὸς κανὼν τῆς ἀπαγγελίας ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ εἶναι ὁ ἑξῆς.

16. *Διὰ ν' ἀπαγγείλωμεν ὁποιονδήποτε ἀριθμὸν γεγραμμένον, δυνάμεθα ἢ ν' ἀπαγγείλωμεν αὐτὸν ὁλόκληρον ἢ νὰ τὸν χωρίσωμεν εἰς ὁσαδήποτε τμήματα ἰσοψήφια ἢ ἀνισοψήφια καὶ ν' ἀπαγγείλωμεν χωριστὰ τὸν ἀριθμὸν ἑκάστου τμήματος μετὰ τοῦ ὀνόματος τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν κατέχει τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ τμήματος.*

Π. χ. Τὸν ἀριθμὸν 257543 δυνάμεθα ν' ἀπαγγείλωμεν κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους·

α'.) 257543 μονάδας.
β'.) 25754 δεκάδας καὶ 3 μονάδας.
γ'.) 2575 ἑκατοντάδας καὶ 43 μονάδας.
δ'.) 257 χιλιάδας καὶ 543 μονάδας.
ε'.) 25 δεκάδας χιλιάδων καὶ 7543 μονάδας.
ς'.) 2 ἑκατοντάδας χιλιάδων καὶ 57543 μονάδας.

ζ'.) 25 δεκάδας χιλιάδων 75 έκατοντάδας καὶ 43 μονάδας, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Σημείωσις. Αἱ διάφοροι ἀπαγγελίαι ἀριθμοῦ τινος χρησιμεύουσι, διὰ νὰ ὁρίσωμεν πόσας ἐν ὅλῳ *μονάδας* ἢ *δεκάδας* ἢ *ἑκατοντάδας* ὁποιουδήποτε τμήματος ἔχει ὁ δοθεὶς ἀριθμός.

Π. χ. Ὁ ἀριθμὸς 2534.

α'.) πόσας περιέχει *μονάδας* ; (2534 μονάδας).

β'.) πόσας *χιλιάδας* καὶ *μονάδας* ; (2 χιλ. καὶ 534 μον.)

γ'.) πόσας *δεκάδας* καὶ *μονάδας* ; (253 δεκάδ. καὶ 4 μον.)

δ'.) πόσας *ἑκατοντάδας*, *δεκάδας* καὶ *μονάδας* ;
(25 ἑκατον. 3 δεκάδ. καὶ 4 μονάδας), καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Γραφὴ ἀπαγγελλομένου ἀριθμοῦ ἔχοντος ψηφία περισσότερα τῶν τριῶν.

17. Διὰ νὰ γράψωμεν ὁποιονδήποτε ἀριθμὸν ἀπαγγελλόμενον, ἀρχόμεθα ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ γράφομεν τὸν εἰς τὸ πρῶτον τμῆμα ἀπαγγελθέντα ἀριθμόν, εἰς ἕκαστον δὲ τῶν ἑπομένων τριψηφίων τμημάτων γράφομεν τὸν ἀπαγγελθέντα τριψήφιον ἀριθμόν· ἂν δὲ εἰς τμῆμά τι οὐδεὶς ἀριθμὸς ἀπηγγέλθη, γράφομεν τρία μηδενικά· ἂν δὲ ἀπηγγέλθη ἀριθμὸς *μονοψήφιος* ἢ *διψήφιος*, γράφομεν αὐτὸν ὡς τριψήφιον, θέτοντες μηδενικὰ πρὸς τὰ ἀριστερά του.

Π. χ. Νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμὸς 70 *δισεκατομμύρια* 600 *ἑκατομμύρια* καὶ 45 *μονάδες*.

Πρὸς τοῦτο γράφομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν 70, ὁ ὁποῖος θ' ἀνήκῃ εἰς τὸ τμῆμα τῶν *δισεκατομμυρίων*, εἰς δὲ τὸ ἑπόμενον τμῆμα τῶν ἑκατομμυρίων γράφομεν τὸν ἀπαγγελθέντα ἀριθμὸν 600, εἰς δὲ τὸ ἑπόμενον τμῆμα τῶν χιλιάδων γράφομεν τρία μηδενικά, διότι οὐδεὶς ἀριθμὸς χιλιάδων ἀπηγγέλθη, καὶ τέλος εἰς τὸ ἑπόμενον τμῆμα τῶν μονάδων γράφομεν τὸν ἀπαγγελθέντα ἀριθμὸν 45, ἀφ'οὗ τὸν κάμωμεν τριψήφιον, γράφοντες μηδενικὸν πρὸς τὰ ἀριστερά του. Κατὰ ταῦτα λοιπόν, ὁ ἀπαγγελθεὶς ἀριθμὸς γράφεται ὡς ἑξῆς 70.600.000.045.

18. Πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ προκύψῃ ἐκ τῆς μονάδος διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῆς.

Π. χ. Ὁ 5000 δύναται νὰ προκύψῃ ἐκ τῆς μονάδος 1, ἐὰν ἐπαναλάβωμεν αὐτὴν *πέντε χιλιάδας φοράς*.

19. Ἡ μονὰς 1 λέγεται *ἀκεραία*. Διὰ τοῦτο καὶ οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῆς λέγονται ἀκέραιοι ἀριθμοί.

20. Τὸ σύστημα τοῦτο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν λέγεται δεκαδικόν, διότι γίνεται ἐκ τῆς μονάδος, δεκάδος, ἑκατοντάδος κ.τ.λ., τῶν ὁποίων ἑκάστη εἶναι δεκαπλασία τῆς προηγουμένης της.

21. Πᾶς ἀριθμὸς εἶναι *συγκεκριμένος* ἢ *ἀφῃρημένος*.

22. Συγκεκριμένος λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀναφέρεται εἰς πρᾶγμά τι.

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 5 μῆλα, 10 ἄνθρωποι, λέγονται συγκεκριμένοι ἀριθμοί.

23. Ἀφῃρημένος λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἰς οὐδὲν ἀναφέρεται.

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 5, 6, 10, λέγονται ἀφῃρημένοι.

24. Οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ εἶναι *ὁμοειδεῖς* ἢ *ἑτεροειδεῖς*.

25. *Ὁμοειδεῖς* λέγονται οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ἡ μονὰς ἀναφέρεται εἰς τὸ αὐτὸ πρᾶγμα.

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 4 *μῆλα*, 8 *μῆλα*, εἶναι ἀριθμοὶ *ὁμοειδεῖς*. Ὡσαύτως, οἱ ἀριθμοὶ 5 *ἄνθρωποι μέλανες*, 10 *ἄνθρωποι μέλανες*, εἶναι ἀριθμοὶ *ὁμοειδεῖς*.

26. *Ἑτεροειδεῖς* λέγονται οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ἡ μονὰς ἀναφέρεται εἰς *διάφορα πράγματα*.

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 5 *μῆλα*, 10 *κάστανα*, εἶναι *ἑτεροειδεῖς*.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ὁ ἀριθμὸς 4578920 πόσας περιέχει α') *δεκάδας καὶ μονάδας*; β') πόσας *ἑκατοντάδας* καὶ *μονάδας*;
(457892 δεκάδας καὶ 0 μονάδ.—45789 ἑκατον. καὶ 20 μονάδ.)

2) Ποῖοι ἀριθμοὶ ἔχουσι 15 ἑκατοντάδας καὶ 4 δεκάδας;
(1540, 1541, 1542, ...1549.—)

3) Ὁ ἀριθμὸς 45 δεκάδες πόσας *δεκάδας* καὶ *ἑκατοντάδας* ἔχει;
(5 δεκάδας καὶ 4 ἑκατοντάδας).

4) Ὁ ἀριθμὸς 45 ἑκατοντάδες πόσας *ἑκατοντάδας* καὶ *χιλιάδας* ἔχει; (5 ἑκατοντάδας καὶ 4 χιλιάδας).

5) Ὁ ἀριθμὸς 87 χιλιάδες πόσας *χιλιάδας* καὶ *δεκάδας χιλιάδων* ἔχει; (7 χιλιάδας καὶ 8 δεκάδ. χιλιάδων).

Πρόσθεσις.

27. *Πρόσθεσις εἶναι ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἐκ πασῶν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας ἔχουσι δύο ἢ περισσότεροι δοθέντες ἀριθμοί.*

28. Οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι πρέπει νὰ προστεθῶσι λέγονται *προσθετέοι.*

29. Ὁ ἀριθμὸς τὸν ὁποῖον σχηματίζομεν ἐκ πασῶν τῶν μονάδων τῶν προσθετέων λέγεται *ἄθροισμα* ἢ *κεφάλαιον.*

Σημείωσις. Οἱ προσθετέοι πρέπει νὰ εἶναι ἀριθμοὶ *ὁμοειδεῖς* ἢ *ἀφῃρημένοι.*

30. Τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως εἶναι τὸ $+$, τὸ ὁποῖον τίθεται μεταξὺ τῶν προσθετέων καὶ ὀνομάζεται *σὺν* ἢ *πλέον.*

Π. χ. Τὸ $3+5$ σημαίνει, ὅτι εἰς τὸ 3 πρέπει νὰ προστεθῇ τὸ 5 καὶ ἀναγινώσκεται 3 σὺν 5 ἢ 3 πλέον 5.

31. Τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος εἶναι τὸ $=$, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται *ἴσον.*

Π. χ. $1+1$ ἴσον 2, ἤτοι $1+1=2$.

32. Εἰς τὴν πρόσθεσιν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α΄.) Ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι *μονοψήφιοι.*

Β΄.) Ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι *ὁποιοιδήποτε.*

Πρόσθεσις μονοψηφίων.

33. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους μονοψηφίους ἀριθμούς, προσθέτομεν εἰς ἕνα ἐξ αὐτῶν τὰς μονάδας ἑνὸς ἄλλου ἐκ τῶν προσθετέων καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα τούτων προσθέτομεν τὰς μονάδας ἑτέρου προσθετέου καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.*

Π. χ. Διὰ νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 4, 2 καὶ 7, προσθέτομεν εἰς τὸ 4 διαδοχικῶς τὰς μονάδας τοῦ 2, λέγοντες 4 καὶ 1 κάμνουν 5 καὶ 1 κάμνουν 6, εἰς δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦτο προσθέτομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ τὰς μονάδας τοῦ 7.

Σημείωσις. Ἐν τῇ πράξει τὸ ἄθροισμα τῶν μονοψηφίων εὑρίσκομεν, προσθέτοντες ἀπὸ μνήμης ἀμέσως εἰς τὸν ἕνα τῶν προσθετέων τὸν ἕτερον καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα τούτων τὸν τρίτον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Π. χ. Διὰ νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 8, 2, 3, 4 καὶ 9, λέγομεν 8 καὶ 2 κάμνουν 10 καὶ 3 κάμνουν 13 καὶ 4 κάμνουν 17 καὶ 9 κάμνουν 26. Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν 8, 2, 3, 4 καὶ 9 εἶναι 26, ἤτοι $8+2+3+4+9=26$.

Πρόσθεσις ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν.

34. Ἡ πρόσθεσις δύο ἢ περισσοτέρων ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν γίνεται, ἐὰν προσθέσωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας των, τὰς δεκάδας των, τὰς ἑκατοντάδας των καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 55746, 2425, 70857 καὶ 48.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 55746 \\ 2425 \\ 70857 \\ 48 \\ \hline 129076 \end{array}$$

Γράφομεν τοὺς προσθετέους οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες των, αἱ δεκάδες των, κ.τ.λ. νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ καὶ ὑπ' αὐτοὺς ἄγομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν. Ἔπειτα, προσθέτοντες πρῶτον τὰς ἁπλᾶς μονάδας, εὑρίσκομεν ἄθροισμα 26 μονάδας, αἱ ὁποῖαι κάμνουν 6 μονάδας καὶ 2 δεκάδας. Διὰ τοῦτο γράφομεν τὸν 6 ὑποκάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων, τὸν δὲ 2 προσθέτομεν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων· οὕτω δ' εὑρίσκομεν ἄθροισμα 17 δεκάδας, αἱ ὁποῖαι κάμνουν 7 δεκάδας καὶ 1 ἑκατοντάδα. Διὰ τοῦτο γράφομεν τὸν 7 ὑποκάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων, τὸ δὲ 1 προσθέτομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων καὶ οὕτως εὑρίσκομεν ἄθροισμα 20 ἑκατοντάδας, αἱ ὁποῖαι κάμνουν 0 ἑκατοντάδας καὶ 2 χιλιάδας. Διὰ τοῦτο γράφομεν 0 ὑποκάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων, τὸν δὲ 2 προσθέτομεν εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων· καὶ οὕτω δ' εὑρίσκομεν 9, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑποκάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων. Τέλος, προσθέτοντες τὰς δεκάδας τῶν χιλιάδων, εὑρίσκομεν ἄθροισμα 12 δεκάδας χιλιάδων, αἱ ὁποῖαι κάμνουν 2 δεκάδας χιλιάδων καὶ 1 ἑκατοντάδα χιλιάδων· διὰ τοῦτο γράφομεν τὸ 2 ὑποκάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων χιλιάδων, τὸ δὲ 1 γράφομεν πρὸ τοῦ 2, δηλ. εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων χιλιάδων.

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

35. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν ὁποιουσδήποτε ἀριθμούς, γράφομεν αὐτοὺς οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες των, αἱ δεκάδες των κ.τ.λ. νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ καὶ ὑπ' αὐτοὺς ἄγοντες γραμμὴν ὁριζοντίαν προσθέτομεν χωριστὰ τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης, ἀρχόμενοι ἐκ τῆς στήλης τῶν μονάδων καί, ἂν τὸ ἄθροισμα τούτων δὲν ὑπερβαίνῃ τὸ 9, γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων, ἄλλως ἐξάγομεν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τούτου τὰς δεκάδας καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων, τὰς δὲ ὑπολοίπους μονάδας τὰς γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων ἢ ἐν ἐλλείψει τοιούτων γράφομεν 0 καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω τὴν πρόσθεσιν μέχρι τῆς τελευταίας στήλης.*

Παραδείγματα.

35	45784	2057
257	5	408
6	4525	454
40	17	87420
42584	354	200
42922	50685	90539

Παρατήρησις. Ἡ πρόσθεσις *ὁποιωνδήποτε* ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν *μονοψηφίων* ἀριθμῶν, διότι προσθέτοντες κατὰ στήλας ἀπαντῶμεν εἰς ἑκάστην στήλην μόνον *μονοψηφίους* ἀριθμούς.

Βάσανος τῆς προσθέσεως.

36. *Βάσανος ἢ δοκιμὴ λέγεται πρᾶξίς τις, διὰ τῆς ὁποίας βεβαιούμεθα, ὅτι ἄλλη πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.*

37. *Τὴν δοκιμὴν τῆς προσθέσεως κάμνομεν, προσθέτοντες κατὰ*

διάφορον τάξιν ἐκείνης, κατὰ τὴν ὁποίαν προσετέθησαν τὸ πρῶτον οἱ προσθετέοι, καὶ ἂν εὕρωμεν πάλιν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Π. χ. Ἀφ' οὗ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 2056, 45784 καὶ 107,

$$\begin{array}{r} 2056 \\ 45784 \\ 107 \\ \hline 47947 \end{array}$$

τὴν δοκιμὴν τῆς προσθέσεως ταύτης κάμνομεν, προσθέτοντες τοὺς προσθετέους κατ' *ἄλλην τάξιν* καὶ ἔστω ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ὅτε εὑρίσκομεν ὡς ἄθροισμα πάλιν τὸν ἀριθμὸν 47947. Ἄρα ἡ πρόσθεσις τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Σημείωσις. Διὰ τῆς δοκιμῆς δὲν βεβαιούμεθα ἀδιστάκτως, ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἢ μὴ ἄνευ λάθους, διότι πιθανὸν καὶ κατὰ τὴν δοκιμὴν νὰ περιπέσωμεν εἰς σφάλμα, ὥστε ἡ ἀρίστη δοκιμὴ πάσης ἀριθμητικῆς πράξεως εἶναι ἡ μετὰ προσοχῆς ἐπανάληψις αὐτῆς.

Παραδείγματα.

$$\begin{array}{r} 20 \\ 200 \\ 1000 \\ 180 \\ \hline 1400 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2000 \\ 213000 \\ 7000 \\ 154000 \\ \hline 376000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 457843 \\ 25743 \\ 10 \\ 4070 \\ \hline 487666 \end{array}$$

Σημείωσις. Ὅταν ἔχωμεν προσθετέους λήγοντας εἰς μηδενικά, ἀφίνομεν πρὸς τὸ τέλος ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ἰσάριθμα μηδενικὰ καὶ προσθέτομεν τὰ λοιπὰ ψηφία, εἰς δὲ τὸ ἄθροισμά των γράφομεν καὶ τὰ παραλειφθέντα μηδενικὰ ἐξ ἑνὸς τούτων.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πόσον ἐτῶν εἶναι πατήρ τις, τοῦ ὁποίου ὁ υἱὸς εἶναι 18 ἐτῶν καὶ ἐγεννήθη, ὅτε ὁ πατήρ του ἦτο 30 ἐτῶν; (48 ἐτῶν).

2) Μαθητής τις παίζων βόλους μετὰ συμμαθητοῦ του ἔχασε κατ' ἀρχὰς 10, ἔπειτα 4 καὶ τέλος 7, εἶχε δὲ ἀκόμη 15 βόλους. Πόσους εἶχεν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ παιγνιδίου καὶ πόσους ἔχασεν;

(Εἶχε 36 καὶ ἔχασεν 21).

3) Ἄνθρωπός τις, εἰσελθὼν εἰς κατάστημα, ἠγόρασεν ἐνδύματα ἀξίας 125 δραχμῶν, καπέλλον ἀξίας 20 δρχ. καὶ λαιμοδέτην 5 δρχ. τοῦ ἔμειναν δὲ 107 δρχ. Ζητεῖται πόσα εἶχε. (257 δρχ.)

4) Πλοῖόν τι ἐπωλήθη 45000 δρχ. ἤτοι 8543 δρχ. ὀλιγώτερον ἀφ' ὅσα ἠγοράσθη. Ζητεῖται πόσα ἠγοράσθη. (53543 δρχ.).

5) Οἰνοπώλης ἠγόρασε τρία βαρέλια οἴνου, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μὲν πρῶτον περιέχει 854 ὀκάδας οἴνου, τὸ δὲ δεύτερον 453 ὀκάδας περισσοτέρας τοῦ πρώτου καὶ τὸ τρίτον 7030 ὀκδ. περισσοτέρας τοῦ δευτέρου. Ζητεῖται πόσας ὀκάδας οἴνου περιέχει ἕκαστον βαρέλιον καὶ πόσας τὰ τρία βαρέλια ὁμοῦ.

(α^{ον} 854 ὀκδ. β^{ον} 1307 ὀκδ. γ^{ον} 8337 ὀκδ. τὸ ὅλον 10498 ὀκδ.).

6) Τέσσαρες ἀδελφοὶ ἐμοιράσθησαν τὴν περιουσίαν τοῦ πατρός των ὡς ἑξῆς. Ὁ πρῶτος ἔλαβε 3704 δρχ., ὁ δεύτερος ἔλαβε 4503 δρχ. περισσοτέρας τοῦ πρώτου καὶ ὁ τρίτος ἔλαβεν ὅσας καὶ οἱ δύο ὁμοῦ καὶ 100 δραχ. ἀκόμη. Ζητεῖται πόση ἦτο ἡ περιουσία καὶ πόσα ἔλαβεν ἕκαστον τῶν τέκνων;

(α^{ος} 3704 δρχ. β^{ος} 8207 δρχ. γ^{ος} 12011 δρχ. ἡ περ. 23922 δρχ.).

7) Ἄνθρωπός τις ἐδαπάνησε δι' ἀγορὰν λινοῦ 20 δραχ. διὰ τσόχαν δύο φορὰς τόσον, διὰ μεταξωτὸν 8 δρχ. περισσοτέρας τῶν ὅσα ἔδωκε διὰ τὸ λινὸν καὶ τὴν τσόχαν. Πόσας ἔδωκεν ἐν ὅλῳ; (128 δρχ.).

8) Ἐκ τεσσάρων υἱῶν ὁ μεγαλήτερος ὑπερτερεῖ τὸν δεύτερον κατὰ 2 ἔτη, οὗτος δὲ τὸν τρίτον κατὰ 3 ἔτη καὶ οὗτος τὸν τέταρτον, ὅστις εἶναι 7 ἐτῶν, κατὰ 1 ἔτος. Τῶν υἱῶν τούτων, ὁ μὲν πατὴρ ἔχει ἡλικίαν ὅσην ὁμοῦ τὰ τέκνα, ἡ δὲ μήτηρ ὅσην τὰ τρία μεγαλήτερα. Ζητεῖται πόση εἶναι ἡ ἡλικία ἑκάστου τῶν τέκνων καὶ πόση ἡ τοῦ πατρὸς καὶ ἡ τῆς μητρός.

(α^{ον} 13 ἐτ. β^{ον} 11 ἐτ. γ^{ον} 8 ἐτ. δ^{ον} 7 ἐτ. ὁ πατὴρ 39 ἐτ. ἡ μήτηρ 32 ἐτ.).

9) Ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς εὑρίσκονται 5 δένδρα ἀπέχοντα μεταξύ των ἀνὰ 3 μέτρα, εἰς τὸ ἄκρον δὲ τούτων εὑρίσκεται φρέαρ ἀπέχον 10 μέτρα ἀπὸ τοῦ τελευταίου δένδρου. Ζητεῖται πόσα μέτρα θὰ διατρέξῃ ὁ κηπουρός, ἀναχωρῶν ἐκ τοῦ φρέατος καὶ καταλήγων εἰς αὐτό, διὰ νὰ τὰ ποτίσῃ ὅλα τὰ δένδρα; (160 μέτρα).

10) Οἰκία τις ἐνῳκιάσθη κατὰ τὸ 1890, 1891, 1892 ὡς ἑξῆς. Τῷ 1892 ἐνῳκιάσθη 230 δρχ. περισσότερον τοῦ 1890, κατὰ τὸ ὁποῖον ἐνῳκιάσθη 150 δρχ. περισσότερον τοῦ 1891, κατὰ τὸ ὁποῖον ἐνῳκιάσθη 1200 δραχμάς. Ζητεῖται πόσον ἦτο τὸ ἐτήσιον ἐνοίκιον τῆς οἰκίας καὶ πόσον τὸ ὁλικόν;

(Τὸ 1890=1350 δχ. τὸ 1891=1200 δχ. τὸ 1892=1580 δχ. τὸ ὁλικὸν 4130 δχ.).

Ἀφαίρεσις.

38. *Ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐλαττοῦμεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.*

39. Ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος πρόκειται νὰ ἐλαττωθῇ λέγεται *μειωτέος*, ὁ δὲ ἄλλος λέγεται *ἀφαιρετέος*.

40. Ὁ ἀριθμὸς κατὰ τὸν ὁποῖον ὑπερτερεῖ ὁ *μειωτέος* τὸν ἀφαιρετέον λέγεται *διαφορὰ* ἢ *ὑπόλοιπον*.

Σημείωσις. Ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος πρέπει νὰ εἶναι ἀριθμοὶ *ὁμοειδεῖς* ἢ *ἀφῃρημένοι*.

41. Τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως εἶνε τὸ —, τὸ ὁποῖον τίθεται μεταξὺ μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου καὶ ὀνομάζεται *μεῖον* ἢ *πλήν*.

Π. χ. Τὸ 9—4 σημαίνει ἀπὸ 9 ν' ἀφαιρεθῇ 4 καὶ ἀναγινώσκεται 9 *μεῖον* 4 ἢ 9 *πλὴν* 4.

42. Εἰς τὴν ἀφαίρεσιν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α'.) Τὴν ἀφαίρεσιν *μονοψηφίου* ἀπὸ *μονοψηφίου* ἢ *διψηφίου*.

Β'.) Τὴν ἀφαίρεσιν *ὁποιουδήποτε* ἀριθμοῦ ἀπὸ *πολυψηφίου*.

Ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀπὸ μονοψηφίου ἢ διψηφίου.

43. Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν *μονοψήφιον* ἀπὸ *μονοψηφίου* ἢ *διψηφίου*, ἀφαιροῦμεν ἐκ τοῦ μειωτέου διαδοχικῶς τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου.

Π. χ. Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 7 τὸν 2, λέγομεν 7 πλὴν 1 μένουν 6 πλὴν 1 μένουν 5. Ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶνε 5 καὶ γράφεται 7—2=5. Ὁμοίως, διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ 20 τὸ 6, ἀφαιροῦμεν διαδοχικῶς ἀπὸ τὸν 20 τὰς μονάδας τοῦ 6, ὅτε εὑρίσκομεν διαφορὰν 14.

Σημείωσις. Ἐν τῇ πράξει τὴν *διαφορὰν μονοψηφίου* ἀπὸ *μονοψηφίου* ἢ *διψηφίου* εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες ἀμέσως ἀπὸ μνήμης τὸν ἀφαιρετέον ἀπὸ τοῦ μειωτέου.

Π. χ. Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν τὸ 2 ἀπὸ 7, λέγομεν ἀμέσως 7 πλὴν 2 ἴσον 5. Ὁμοίως, 10 πλὴν 4 ἴσον 6.

Ἀφαίρεσις ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ ἀπὸ πολυψηφίου.

44. Ἡ ἀφαίρεσις δύο *ὁποιωνδήποτε* ἀριθμῶν γίνεται, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας των, τὰς δεκάδας των, τὰς ἑκατοντάδας των καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Παράδειγμα 1ον. Ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ **458** ὁ ἀριθμὸς **231**. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 458 \\ \underline{231} \\ 227 \end{array}$$

Γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες των, αἱ δεκάδες των κ.τ.λ. νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ. Μετὰ ταῦτα ἀφαιροῦντες πρῶτον τὰς ἁπλᾶς μονάδας των, εὑρίσκομεν διαφορὰν 7, ἔπειτα δέ, ἀφαιροῦντες τὰς δεκάδας των, εὑρίσκομεν διαφορὰν 2· τέλος δέ, ἀφαιροῦντες τὰς ἑκατοντάδας των, εὑρίσκομεν διαφορὰν 2. Ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι **227**.

Σημείωσις. Ὅταν ψηφίον τι τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τοῦ μειωτέου, τότε διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν στηριζόμεθα εἰς τὴν ἑξῆς πρότασιν.

45. ***Ἂν προσθέσωμεν εἰς τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.***

Π. χ. Ὁ 4 ἀπὸ 7 δίδει διαφορὰν 3. Ἀλλὰ καὶ ἂν εἰς τὸν 4 καὶ 7 προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, π. χ. τὸν 2, ὅτε γίνονται 6 καὶ 9, θὰ ἔχωμεν διαφορὰν τοῦ 6 ἀπὸ 9 πάλιν τὸν 3. Ὥστε ἡ διαφορὰ δὲν μετεβλήθη.

Παράδειγμα 2ον. Ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ **40349** ὁ ἀριθμὸς **5267**. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται οὕτω·

$$\begin{array}{r} 40349 \\ \underline{5267} \\ 35082 \end{array}$$

Ἀφαιροῦμεν πρῶτον τὰς 7 ἁπλᾶς των μονάδας ἀπὸ 9, ὅτε εὑρίσκομεν διαφορὰν 2. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰς 6 δεκάδας ἀπὸ 4 καί, ἐπειδὴ δὲν ἀφαιροῦνται, προσθέτομεν 10 δεκάδας εἰς τὸ 4 καὶ οὕτω γίνεται 14, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀφαιροῦμεν τὸ 6 καὶ ἔχομεν διαφορὰν 8. Ἔπειτα προσθέτομεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον τὰς 10 δεκάδας ἢ ἀντ' αὐτῶν 1 ἑκατοντάδα (§ 45), λέγοντες 1 τὸ κρατούμενον καὶ 2 κάμνουν 3· τοῦτο δὲ ἀφαιροῦντες ἀπὸ 3 ἔχομεν διαφορὰν 0. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰς 5 χιλιάδας των ἀπὸ 0 καί, ἐπειδὴ δὲν ἀφαιροῦνται, προσθέτομεν 10 χιλιάδας, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀφαιροῦντες τὸ 5 ἔχομεν διαφορὰν 5 καὶ ἔπειτα προσθέτομεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον τὰς 10 χιλιάδας ἢ ἀντ' αὐτῶν 1 δεκάδα χιλιάδων (§ 45), λέγοντες 1 τὸ κρατούμενον ἀπὸ 4 ἔχομεν διαφορὰν 3. Ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι 35082.

Ἐκ τούτων μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

46. *Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν δύο ὁποιουσδήποτε ἀριθμούς, ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τὰς μονάδας των, τὰς δεκάδας των, τὰς ἑκατοντάδας των κ.τ.λ. Ἐὰν ὅμως ψηφίον τι τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τοῦ μειωτέου, προσθέτομεν εἰς τὸ τοιοῦτον ψηφίον τοῦ μειωτέου 10 καὶ αὐξάνομεν κατὰ μονάδα τὸ ἀμέσως ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου (§ 45) καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν.*

Παραδείγματα.

257432	352408		3⁽¹⁰⁾524⁽¹⁰⁾0⁽¹⁰⁾8
20021	61239	ἤ	61239
237411			291169

Σημείωσις α'. Ἡ ἀφαίρεσις δύο ἀριθμῶν *ὁποιωνδήποτε* ἀνάγεται εἰς τὴν ἀφαίρεσιν *μονοψηφίων* ἀριθμῶν, διότι ἀφαιροῦντες κατὰ στήλας ἀπαντῶμεν εἰς ἑκάστην στήλην μόνον μονοψηφίους ἀριθμούς.

Σημείωσις β'. Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι *ἀδύνατος*, ὅταν ὁ ἀφαιρετέος εἶναι *μεγαλήτερος* τοῦ μειωτέου.

Π. χ. Ὁ 2 μεῖον 4 δὲν ἀφαιρεῖται.

Σημείωσις γ'. Ὅταν ὁ μειωτέος ἢ ὁ ἀφαιρετέος ἢ καὶ οἱ δύο συγχρόνως ἔχωσιν ἀριθμοὺς περισσοτέρους τοῦ ἑνός, τότε προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ μειωτέου καὶ χωριστὰ τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰ προκύπτοντα ἀθροίσματα.

Π. χ. Ἀπὸ τοῦ 2574368 ν' ἀφαιρεθῶσιν οἱ 257, 3568, 1571. Προσθέτοντες πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ ἀφαιρετέου ἔχομεν

$$257+3568+1571=5396.$$

Καὶ ἤδη, τὸ ἄθροισμα 5396 ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ μειωτέου 2574368, ἔχομεν

$$\begin{array}{r} 2574368 \\ 5396 \\ \hline 2568972 \end{array}$$

ὅτε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι 2568972.

Ὁμοίως, ἐκ τῶν ἀριθμῶν 14578, 1857, 48357 ν' ἀφαιρεθῶσιν οἱ 15, 7008, 15045.

Κατὰ τὴν (Σημ. γ'.) ἔχομεν

$$14578+1857+48357=64792$$

καὶ

$$15+7008+15045=22068$$

ὅθεν ἔχομεν

$$\begin{array}{r} 64792 \\ 22068 \\ \hline 42724 \end{array}$$

Βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως.

47. *Τὴν δοκιμὴν τῆς ἀφαιρέσεως κάμνομεν προσθέτοντες τὴν διαφορὰν εἰς τὸν ἀφαιρετέον καὶ ἂν εὕρωμεν τὸν μειωτέον, ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.*

Π. χ. Ἀφ' οὗ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 20005701 ὁ ἀριθμὸς 1005924,

$$\begin{array}{r} 20005701 \\ 1005924 \\ \hline 18999777 \end{array}$$

Τὴν δοκιμὴν κάμνομεν, προσθέτοντες τὴν διαφορὰν 18999777 εἰς τὸν ἀφαιρετέον 1005924, ὅτε ἔχομεν ἄθροισμα 20005701, καὶ ἐπειδὴ οὕτως εὑρέθη ὁ μειωτέος 20005701, ἄρα ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Σημείωσις. Ἐπειδὴ προσθέτοντες τὴν διαφορὰν εἰς τὸν ἀφαιρετέον, εὑρίσκομεν τὸν μειωτέον, διὰ τοῦτο ἡ ἀφαίρεσις δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς ἑξῆς.

48. *Ἀφαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις, δι' ἧς, δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν δεύτερον παράγει τὸν πρῶτον.*

Γυμνάσματα.

1) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις

325—125+300—100 ἤτοι 400.
10000—9004+104 ἤτοι 1100.
1+10000—9999—1 ἤτοι 1.

2) Νὰ προστεθῇ ὁ 9 εἰς ὁποιονδήποτε ἀριθμόν.

Παρατήρησις. Διὰ νὰ προσθέσωμεν τὸν 9 εἰς ὁποιονδήποτε ἀριθμόν, εὐκολυνόμεθα περισσότερον, προσθέτοντες τὸ 10 καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος ἀφαιροῦντες μίαν μονάδα.

Π. χ. Διὰ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ 6 τὸ 9, λέγομεν 6 καὶ 10 κάμνουν 16 πλὴν 1 κάμνουν 15.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ προσθέσεις 158+9, 7+9, 405+9.

3) Ν' ἀφαιρεθῇ ὁ 9 ἀπὸ ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ.

Παρατήρησις. Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν τὸ 9 ἀπό τινος ἀριθμοῦ, εὐκολυνόμεθα περισσότερον, ἀφαιροῦντες τὸ 10 καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέτοντες μίαν μονάδα.

Π. χ. Διὰ ν' ἀφαιρέσω ἀπὸ τοῦ 28 τὸ 9, λέγω 28 μεῖον 10 κάμνουν 18 καὶ *ἓν* 19.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀφαιρέσεις 254—9, 107—9, 43—9.

4) Νὰ προστεθῇ εἰς τὸν 429 ὁ 15, ἀπὸ μνήμης.

Παρατήρησις. Ὅταν ἀριθμός τις λήγῃ εἰς 9, προσθέτομεν μίαν μονάδα καὶ ἔπειτα εὐκολώτερον προσθέτομεν ἀπὸ μνήμης τὸν δοθέντα ἀριθμόν, ἐκ δὲ τοῦ ἀθροίσματος ἀφαιροῦμεν ἔπειτα τὴν προστεθεῖσαν μονάδα.

Π. χ. Διὰ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ 429 τὸ 15, λέγομεν 430 καὶ 15 κάμνουν 445 μεῖον ἑνὸς 444.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἀπὸ μνήμης αἱ προσθέσεις 429+28, 19+37, 209+37.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πόσον ὑπερτερεῖ ὁ 50743 τὸν 27004 ; (23739)

2) Ποῖος πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὸν 3574, διὰ νὰ δώσῃ τὸν ἀριθμὸν 4857 ; (ὁ 1283)

3) Ἄνθρωπός τις ἐγεννήθη τῷ 1871 καὶ ἀπέθανε τῷ 1893, πόσων ἐτῶν ἀπέθανε ; (22 ἐτῶν)

4) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶνε 1057· ὁ εἷς δὲ τούτων εἶναι ὁ 508, ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος ;

Σημείωσις. Ἂν ὁ 1057 ληφθῇ ὡς μειωτέος, ὁ δὲ 508 ὡς ἀφαιρετέος, ὁ ζητούμενος θὰ εἶναι ἡ διαφορά. (ὁ 549)

5) Ἐκ δύο ἀριθμῶν ὁ μικρότερος εἶναι 57, ἡ δὲ διαφορά των 15, ποῖος εἶναι ὁ μεγαλήτερος ; (ὁ 72)

6) Ἄνθρωπός τις ἠγόρασεν οἰκίαν ἀντὶ 15000 δρχ. πωλήσας δὲ αὐτὴν ἐζημιώθη 1327 δρχ. Πόσον τὴν ἐπώλησε ; (13673 δρχ.)

7) Ἐργάτης τις κατὰ τὰς 365 ἡμ. τοῦ ἔτους δὲν εἰργάσθη 52 Κυριακὰς, 20 ἑορτὰς καὶ 15 ἡμέρας κακοκαιρίας. Πόσας ἡμέρας εἰργάσθη ; (278 ἡμ.)

8) Μαθητής τις ἔχων 50 δρχ. ἀφῆκε 10 δρχ. καὶ ἔλαβε τὰς ὑπολοίπους, ἐκ τῶν ὁποίων μὲ 32 δρχ. ἠγόρασεν ἐπανωφόριον, τὰς δὲ λοιπὰς ἔδωκεν εἰς τὴν ἀδελφήν του. Πόσας τῇ ἔδωκε ; (8 δρχ.)

9) Ἄνθρωπός τις, ἐρωτηθεὶς ποίας ἡλικίας εἶναι, ἀπεκρίθη· ὅταν ἐγεννήθην, ἡ μήτηρ μου ἦτο 30 ἐτῶν καὶ ἀπέθανε κατὰ τὸν τοκετὸν πρὸ 8 ἐτῶν. Ποίας ἡλικίας ἦτο ὁ ἐρωτηθείς ; (8 ἐτῶν).

10) Πλοῖόν τι ἀναχωρῆσαν ἐκ Πειραιῶς εἶχεν ὡς πλήρωμα 4 ἄνδρας μετὰ τοῦ πλοιάρχου, τούτων δὲ τὸ σύνολον τῶν ἡλικιῶν ἦτο 170 ἔτη. Μετὰ δύο ἔτη ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως ἀποθνήσκει ὁ πλοίαρχος, ζητεῖται εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανεν οὗτος, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι δύο ναῦται ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἡλικίαν καὶ ὑπερτεροῦν ὁμοῦ κατὰ τὴν ἀναχώρησίν των ἐκ Πειραιῶς τὸν τρίτον ναύτην, ὅστις ἦτο 52 ἐτῶν, κατὰ 26 ἔτη. (42 ἐτῶν).

Πολλαπλασιασμός.

49. *Πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας μεγεθύνομεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τόσας φορὰς, ὅσας ἀκεραίας μονάδας ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.*

50. Ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος πρόκειται νὰ μεγεθυνθῇ λέγεται *πολλαπλασιαστέος*, ὁ δὲ ἄλλος λέγεται *πολλαπλασιαστής*.

51. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ λέγεται *γινόμενον*.

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον εἶναι τόσας φορὰς μεγαλήτερον τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὅσας ἀκεραίας μονάδας ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής.

52. Τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι τὸ $\times$, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται *ἐπὶ* καὶ τίθεται μεταξὺ πολλαπλασιαστέου καὶ πολλαπλασιαστοῦ.

Π. χ. Τὸ 5×4 σημαίνει, ὅτι πρέπει ὁ 5 νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 4, ἀναγινώσκεται δὲ 5 ἐπὶ 4, ἔνθα ὁ μὲν 5 εἶναι ὁ *πολλαπλασιαστέος*, ὁ δὲ 4 εἶναι ὁ *πολλαπλασιαστής*.

53. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α΄.) Τὸν πολλαπλασιασμὸν *μονοψηφίων* ἀριθμῶν.

Β΄.) Τὸν πολλαπλασιασμὸν *πολυψηφίου* ἐπὶ *οἱονδήποτε ἀριθμόν*.

Γενικὸς κανὼν πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου.

54. Παράδειγμα 1ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τοῦ 4 ἐπὶ 3· ἔνθα 4 εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ 3 ὁ πολλαπλασιαστής.

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ 4 πρέπει νὰ γείνῃ 3 φορὰς μεγαλήτερος (50 Σημ.) ἀρκεῖ τὸν 4 νὰ προσθέσωμεν 3 φορὰς, ὅτε ἔχομεν

$$4+4+4 \text{ ἤτοι } 12$$

ὥστε τὸ ζητούμενον γινόμενον τοῦ 4 ἐπὶ 3 εἶναι 12.

Ἢ καὶ ἄλλως.

Τὸ 4 δύναται νὰ γείνῃ τρεῖς φορὰς μεγαλήτερον καὶ ἂν ἑκάστην μονάδα τοῦ 4 ἐπαναλάβωμεν *τρεῖς* φορὰς, ὅτε ἐξ ἑκάστης μονάδος τοῦ 4 θὰ προκύψῃ ὁ ἀριθμὸς 3. Ἄρα ἐκ τῶν 4 μονάδων θὰ προκύψῃ 4 φορὰς τὸ 3 ἤτοι

$$3+3+3+3, \text{ ἤτοι } 12.$$

Ὥστε τὸ ζητούμενον γινόμενον τοῦ 4 ἐπὶ 3 εἶναι 12.

Ἐκ τούτου ἐξάγομεν τοὺς ἑξῆς κανόνας.

55. *Τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν εὑρίσκομεν, προσθέτοντες τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν τόσας φορὰς, ὅσας ἀκεραίας μονάδας ἔχει ὁ ἄλλος.*

56. *Τὸ γινόμενον δὲν μεταβάλλεται καὶ ἂν ἀνταλλάξωμεν τὰς θέσεις τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ πολλαπλασιαστοῦ.*

Π.χ. Τὸ γινόμενον τοῦ 4×3 εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 3×4. Ὁ λόγος δὲ εἶναι, διότι εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις τὸ γινόμενον θὰ εὕρωμεν προσθέτοντες τὸν ἕνα τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἄλλος, ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ μετὰ τὴν ἀνταλλαγὴν τῶν θέσεών των δὲν μετεβλήθησαν, διὰ τοῦτο καὶ τὸ γινόμενόν των δὲν μετεβλήθη.

Πολλαπλασιασμὸς μονοψηφίων.

57. *Τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν εὑρίσκομεν, προσθέτοντες τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν τόσας φορὰς, ὅσας ἀκεραίας μονάδας ἔχει ὁ ἄλλος.*

Π. χ. Ὁ 2×3 δίδει γινόμενον $2+2+2$, ἤτοι 6,

ἢ καὶ $2\times3=3+3$, ἤτοι 6

58. Διὰ ν' ἀποφύγωμεν τὴν πρόσθεσιν, ὅταν πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν, καταρτίζομεν τὸν λεγόμενον *Πυθαγόρειον πίνακα*, εἰς τὸν ὁποῖον θὰ εὑρίσκωμεν τὰ γινόμενα μεταξὺ τῶν ἐννέα ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ἀνὰ δύο, ἕως ὅτου τὰ ἀποστηθίσωμεν.

59. Ὁ Πυθαγόρειος πίναξ καταρτίζεται ὡς ἑξῆς.

Θέτομεν κατὰ σειρὰν τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμούς.

Εἰς δευτέραν σειρὰν γράφομεν τὰ διπλάσιά των, ἤτοι τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 2.

Εἰς τρίτην σειρὰν γράφομεν τὰ τριπλάσιά των, ἤτοι τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 3.

Εἰς τετάρτην σειρὰν γράφομεν τὰ τετραπλάσιά των, ἤτοι τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 4.

Εἰς πέμπτην σειρὰν γράφομεν τὰ πενταπλάσιά των, ἤτοι τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 5, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ὥστε ὁ Πυθαγόρειος πίναξ εἶναι ὁ ὄπισθεν·

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

60. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν ἐκ τοῦ Πυθαγορείου πίνακος, εὑρίσκομεν εἰς τὴν πρώτην ὁριζοντίαν τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν καὶ εἰς τὴν πρώτην κατακόρυφον τὸν ἄλλον, ὅτε τὸ γινόμενόν των εὑρίσκεται ἐκεῖ, ἔνθα συναντῶνται αἱ δύο σειραί, αἱ ὁποῖαι ἄρχονται ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Π.χ. Τὸ γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ 7, ἤτοι 42 εὑρίσκεται ἐκεῖ ἔνθα, συναντῶνται ἡ *ἕκτη* ὁριζοντία σειρὰ μὲ τὴν *ἑβδόμην* κατακόρυφον ἢ ἡ *ἑβδόμη* ὁριζοντία μὲ τὴν *ἕκτην* κατακόρυφον.

Σημείωσις. Ἂν ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὴν μονάδα, εὑρίσκομεν γινόμενον αὐτὸν τὸν πολλαπλασιαζόμενον ἀριθμόν, ἂν δὲ τὸν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ *μηδὲν* εὑρίσκομεν γινόμενον *μηδέν*.

Π. χ. Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 5 ἐπὶ 1.

Κατὰ τὸν κανόνα (57) ἔχομεν

$$5\times1=1+1+1+1+1, \text{ ἤτοι } 5$$

Ὁμοίως, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ 5 ἐπὶ 0, κατὰ τὸν κανόνα (57) θὰ ἔχωμεν $5\times0=0+0+0+0+0\cdot$

ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖται ἐξ ὅλων τῶν μονάδων τῶν προσθετέων καὶ ἐπειδὴ οἱ προσθετέοι $0+0+0+0+0$ οὐδεμίαν μονάδα περιέχουσι, διὰ τοῦτο καὶ τὸ ἄθροισμά των οὐδεμίαν μονάδα θὰ ἔχῃ, ἤτοι θὰ εἶναι *μηδὲν*, ἄρα $5\times 0=0$.

Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμόν.

61. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν *πολυψηφίου* ἐπὶ *οἱονδήποτε* ἀριθμὸν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α΄.) Τὸν πολλαπλασιασμὸν *πολυψηφίου* ἐπὶ *μονοψήφιον*.

Β΄.) Τὸν πολλαπλασιασμὸν *πολυψηφίου* ἐπὶ *πολυψήφιον*.

Αη περίπτωσις.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 653 ἐπὶ 2.

Κατὰ τὸν κανόνα (56) ἀρκεῖ τὸν 653 νὰ προσθέσωμεν 2 φορὰς ἤτοι

$$\begin{array}{r} 653 \\ 653 \\ \hline \end{array}$$

ἔνθα βλέπομεν ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 653 ἐπὶ 2, πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὰς *μονάδας*, τὰς *δεκάδας*, τὰς *ἑκατοντάδας* τοῦ 653 ἀπὸ 2 φορὰς ἢ ἀντὶ τούτων νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ 653 ἐπὶ 2, ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 653 \\ 2 \\ \hline 1306 \end{array}$$

Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑποκάτω τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ ὑπ' αὐτοὺς ἄγομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν. Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζοντες τὸ ψηφίον 3 τῶν μονάδων ἐπὶ τὸ 2, εὑρίσκομεν γινόμενον 6 μονάδας, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑποκάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων. Ἔπειτα πολλαπλασιάζοντες τὸ ψηφίον 5 τῶν δεκάδων ἐπὶ τὸ 2, εὑρίσκομεν γινόμενον 10 δεκάδας, αἱ ὁποῖαι κάμνουν 0 δεκάδας καὶ 1 ἑκατοντάδα, διὰ τοῦτο δὲ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς γράφομεν τὸ 0 πρὸ τοῦ 6 (δηλ. εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων) καὶ κρατοῦμεν τὴν 1 ἑκατοντάδα καὶ τὴν προσθέτομεν εἰς τὸ ἀκόλουθον γινόμενον τῶν 6 ἑκατοντάδων ἐπὶ 2, ἤτοι εἰς τὰς 12 ἑκατοντάδας, ὅτε γίνονται 13 ἑκατοντάδες. Ἀλλ' αἱ ἑκατοντάδες αὗται κάμνουν 3 ἑκατοντάδας καὶ 1 χιλιάδα, διὰ τοῦτο ὑποκάτω τῆς γραμμῆς γράφομεν τὸ 3 πρὸ τοῦ 0 (δηλ. εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων), τὸ δὲ 1 πρὸ τοῦ 3 (δηλ. εἰς τὴν θέσιν τῶν χιλιάδων). Ὥστε τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι 1306.

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

62. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ μονοψήφιον, γράφομεν τὸν μονοψήφιον ὑποκάτω τοῦ πολυψηφίου καὶ ὑπ' αὐτοὺς ἄγομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν. Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολυψηφίου ἐπὶ τὸν μονοψήφιον, ἀρχόμενοι ἐκ τῶν ἁπλῶν μονάδων, καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον αὐτῶν δὲν ὑπερβαίνῃ τὸ 9, γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων, ἐὰν δὲ ὑπερβαίνῃ τὸ 9, ἐξάγομεν τὰς δεκάδας καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὸ ἀκόλουθον γινόμενον, τὰς δὲ ὑπολοίπους μονάδας τὰς γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων ἢ ἐν ἐλλείψει τοιούτων γράφομεν 0, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.*

Βα περίπτωσις.

63. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν, στηριζόμεθα εἰς τὰς ἑξῆς δύο προτάσεις.

Αη). *Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ 10, 100, 1000, κ.τ.λ. εὑρίσκομεν γράφοντες πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τὰ μηδενικά, ἐκ τῶν ὁποίων ἀκολουθεῖται ἡ μονάς.*

Π. χ. Ὁ 357 ἐπὶ	10	δίδει γινόμενον		3570
ὁ 357 ἐπὶ	100	»	»	35700
ὁ 357 ἐπὶ	1000	»	»	357000

* Ὁ λόγος δὲ τούτου εἶναι διότι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 357 ἐπὶ 10, ἀρκεῖ τὸν 357 νὰ ἐπαναλάβωμεν 10 φοράς. Διὰ νὰ γείνῃ δὲ τοῦτο ἀρκεῖ ἑκάστην μονάδα τοῦ 357 νὰ τὴν ἐπαναλάβωμεν *δέκα* φορὰς (54), ὅτε γίνεται 1 *δεκάς*. Ἄρα αἱ 357 μονάδες γίνονται 357 *δεκάδες*· οὗτος δὲ ὁ ἀριθμὸς γράφεται 3570. Ὁμοίως, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 357 ἐπὶ 100, ἀρκεῖ ἑκάστην μονάδα τοῦ 357 νὰ τὴν ἐπαναλάβωμεν ἑκατὸν φοράς, ὅτε γίνεται 1 ἑκατοντάς. Ἄρα αἱ 357 μονάδες γίνονται 357 *ἑκατοντάδες*· οὗτος

δὲ ὁ ἀριθμὸς γράφεται 35700. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ὁ 357 ἐπὶ 1000 δίδει γινόμενον 357000.

Βα). *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ ἄλλον, τοῦ ὁποίου τὸ πρῶτον ψηφίον εἶναι σημαντικὸν καὶ ἀκολουθεῖται ἀπὸ μηδενικά, πολλαπλασιάζομεν τὰ σημαντικὰ ψηφία τῶν ἀριθμῶν καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου γράφομεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.*

Π.χ. Διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τοῦ 2507 ἐπὶ 500,

$$\begin{array}{r} 2507 \\ 500 \\ \hline \end{array} \qquad \text{ἤ} \qquad \begin{array}{r} 2507 \\ 5[00 \\ \hline 1253500 \end{array}$$

πολλαπλασιάζομεν τὸν 2507 ἐπὶ 5 καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 12535· πρὸς δὲ τὰ δεξιὰ τούτου γράφομεν τὰ παραλειφθέντα δύο μηδενικά, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν γινόμενον 1253500.

* Ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον εὑρίσκεται οὕτω τὸ γινόμενον, εἶναι ὁ ἑξῆς. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν π. χ. τὸν 2507 ἐπὶ 500, ἀρκεῖ τὸν 2507 νὰ τὸν προσθέσωμεν 500 φορὰς (§ 57) ἤ, ὅπερ τὸ ἴδιον, 5 φορὰς ἀπὸ 100, ὅτε ἔχομεν

$$\begin{array}{r} 250700 \\ 250700 \\ 250700 \\ 250700 \\ 250700 \\ \hline \end{array}$$

Ἀλλ' ἐνταῦθα ἀντὶ νὰ προσθέσωμεν τὸν 2507 πέντε φορὰς καὶ πρὸς τὰ δεξιά του νὰ γράψωμεν τὰ παραλειφθέντα δύο μηδενικά, εἶναι τὸ ἴδιον νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 2507 ἐπὶ 5 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου νὰ γράψωμεν τὰ παραλειφθέντα δύο μηδενικά, ὅτε εὑρίσκομεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.

64. Τὸ γινόμενον ἤδη δύο πολυψηφίων ἀριθμῶν εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 2379 ἐπὶ 456.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 2379 ἐπὶ 456, ἀρκεῖ τὸν 2379 νὰ τὸν προσθέσωμεν 456 φορὰς (§ 57) ἤ, ὅπερ τὸ ἴδιον, νὰ προσθέσωμεν αὐτὸν πρῶτον μὲν 6 φοράς, ἔπειτα δὲ 50 καὶ ἔπειτα 400 φοράς· τοῦτο δὲ κατορθοῦται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν 2379 πρω-τον ἐπὶ 6, ἔπειτα ἐπὶ 50 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 400 καὶ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα, ἤτοι

$$\begin{array}{r}2379\\6\\\hline 14274\end{array}\qquad\begin{array}{r}2379\\50\\\hline 118950\end{array}\qquad\begin{array}{r}2379\\400\\\hline 951600\end{array}$$

Ἀφ' οὗ δὲ προσθέσωμεν τὰ οὕτως εὑρεθέντα γινόμενα, ἔχομεν

$$\begin{array}{r}14274\\118950\\951600\\\hline 1084824\end{array}$$

Ὥστε τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι 1084824.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{r}2379\\456\\\hline 14274\\118950\\951600\\\hline 1084824\end{array}$$

καὶ ἐπειδὴ τὰ μηδενικὰ τῶν γινομένων 118950 καὶ 951600 δὲν λαμβάνουσι μέρος εἰς τὴν πρόσθεσιν, δύνανται νὰ παραλείπωνται, ὅτε ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{r}2379\\456\\\hline 14274\\11895\\9516\\\hline 1084824\end{array}$$

Ὅθεν παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ 2379 ἐπὶ 456 ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ 2379 ἐπὶ ἕκαστον ψηφίον τοῦ 456, προσέχοντες μόνον νὰ γράφωμεν ἕκαστον γινόμενον, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸ ψηφίον τῶν *μονάδων*, *δεκάδων*, *ἑκατοντάδων* κ.τ.λ. τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, οὕτως ὥστε τὸ τελευταῖόν του ψηφίον ν' ἀνήκῃ εἰς τὴν αὐτὴν στήλην μὲ τὸ ψηφίον τῶν *μονάδων*, *δεκάδων*, *ἑκατοντάδων* κ.τ.λ. τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

65. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὁποιονδήποτε ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον, γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑποκάτω τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ ὑπ' αὐτοὺς ἄγομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν, τὰ δὲ προκύπτοντα γινόμενα γράφομεν οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον ἑκάστου νὰ εὑρίσκηται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ μὲ τὸ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἐπὶ τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ ὑπ' αὐτὰ ἄγοντες γραμμὴν προβαίνομεν εἰς τὴν πρόσθεσιν· τὸ δὲ προκῦπτον ἄθροισμα εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.*

Παραδείγματα.

```
  35478        450042         27056
     45           154          2003
 ------      --------      --------
 177390       1800168         81168
141912       2250210      54112
-------      450042       ---------
1596510      ---------     54193168
             69306468
```

Παράγοντες καὶ πολλαπλάσια.

66. *Παράγοντες ἀριθμοῦ τινος λέγονται οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι δίδουσιν αὐτὸν πολλαπλασιαζόμενοι.*

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 3 εἶναι παράγοντες τοῦ 6, διότι 2×3 δίδουσιν 6.

Σημείωσις. Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς λέγονται καὶ παράγοντες τοῦ γινομένου.

67. *Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν δύο ἐξ αὐτῶν καὶ τὸ γινόμενόν των ἐπὶ τρίτον, καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ τέταρτον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.*

Π. χ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν 2, 3, 5 καὶ 7, ἤτοι τῶν

$$2\times3\times5\times7.$$

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν 2 ἐπὶ 3, ὅτε εὑρίσκομεν 6· τοῦτο δὲ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 5, ὅτε εὑρίσκομεν 30, καὶ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 7, ὅτε εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον γινόμενον, ὅπερ εἶναι 210, ἤτοι $2\times3\times5\times7=210$.

68. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἐπί τινα ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἕνα τῶν παραγόντων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.*

Π.χ. Τὸ γινόμενον 2×3×4, ἤτοι 24, νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5. Ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ 24 ἐπὶ 5, ὅτε εὑρίσκομεν γινόμενον 120, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ 2×3×4 ἐπὶ 5, ὅτε θὰ ἔχωμεν τὸ αὐτὸ γινόμενον· καὶ ὄντως 2×3×4 ἐπὶ 5 δίδει οὕτω γινόμενον 10×3×4 ἤτοι 120.

69. *Πολλαπλάσιον ἀριθμοῦ τινος λέγεται τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἐπὶ ἄλλον.*

Π. χ. Ὁ 2 ἐπὶ 6 δίδει γινόμενον 12· ἄρα τὸ 12 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 2 καὶ τοῦ 6.

Σημείωσις α'. Τὰ πολλαπλάσια ἀριθμοῦ τινος εἶναι ἄπειρα καὶ τὰ εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες αὐτὸν ἐπὶ 2, 3, 4, 5, 6, 7, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Π. χ. Τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2 εἶναι 2×2, 2×3, 2×4, 2×5, 2×6, ἤτοι 4, 6, 8, 10, 12. Ὥστε τὰ πολλαπλάσια ἀριθμοῦ τινος εἶναι τὸ *διπλάσιον*, *τριπλάσιον*, *τετραπλάσιον* κ.τ.λ. αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ.

Σημείωσις β'. Τὸ γινόμενον λέγεται καὶ πολλαπλάσιον τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ πολλαπλασιαστοῦ.

70. *Μέγιστον πολλαπλάσιον δοθέντος ἀριθμοῦ περιεχόμενον εἰς ἄλλον ἀριθμὸν λέγεται τὸ μεγαλήτερον τῶν πολλαπλασίων αὐτοῦ, ἐξ ὅσων περιέχονται εἰς τὸν ἄλλον ἀριθμόν.*

Π. χ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ 6 τὸ περιεχόμενον εἰς τὸν 28.

Τὰ πολλαπλάσια τοῦ 6 κατὰ σειρὰν εἶναι 12, 18, 24, 30, 36,... Ἐκ τούτων τὰ περιεχόμενα εἰς τὸν 28 εἶναι τὰ 12, 18, 24, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μεγαλήτερον εἶναι τὸ 24. Ἄρα τὸ 24 εἶναι τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ 6 τὸ περιεχόμενον εἰς τὸν 28. Ὁμοίως τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ 7, τὸ περιεχόμενον εἰς τὸν 43, εἶναι ὁ ἀριθμὸς 42, διότι ἐκ τῶν πολλαπλασίων τοῦ 7, ἤτοι τῶν

14, 21, 28, 35, 42, 49,...

τὰ περιεχόμενα εἰς τὸν 43 εἶναι τὰ 14, 21, 28, 35, 42, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μέγιστον εἶναι τὸ 42.

Γυμνάσματα.

1) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πολλαπλάσια τοῦ 15, τὰ μικρότερα τοῦ 100. (15, 30, 45, 60, 75, 90).

2) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μέγιστα πολλαπλάσια τοῦ 4, τὰ περιεχόμενα εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 5, 9, 17, 36, 39. (4, 8, 16, 36, 36).

3) Ἐπὶ ποῖον ἀριθμὸν πολλαπλασιαζόμενος ὁ 9 δίδει τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον, τὸ περιεχόμενον εἰς τὸν 38 ; (ἐπὶ τὸν 4).

Ὁμοίως ἐπὶ ποίους ἀριθμοὺς πολλαπλασιαζόμενος ὁ 7 δίδει τὰ μέγιστα πολλαπλάσια τὰ περιεχόμενα εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 9, 15, 20, 23, 28, 32. (Ἐπὶ τοὺς 1, 2, 2, 3, 4, 4).

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 5, 8, 10, 24. ($5\times8\times10\times24=9600$)·

5) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί.

$1500\times20=30000$	$4500\times400=1800000$
$3700\times15000=55500000$	$2700\times20=54000$
$7000\times100=700000$	$1080\times900=972000$
$375\times2000=750000$	$100\times457=457000$

6) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί.

$25743\times2574=66262482$

$25008\times30004=750340032$.

Κανόνες προβλημάτων πολλαπλασιασμοῦ.

Πρόβλημα 1ον. Ἡ ὀκᾶ πράγματός τινος ἀξίζει 5 δρχ. Πόσον ἀξίζουν αἱ 27 ὀκάδες τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ *μία* ὀκᾶ ἀξίζει 5 δρχ., αἱ 27 ὀκάδες θ' ἀξίζουν 27 φορὰς περισσότερον τῶν 5 δραχμῶν. Ὥστε πρέπει νὰ λάβωμεν 27 φορὰς τὸ 5 ἤ, ὅπερ τὸ ἴδιον, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ 5 ἐπὶ 27, ὅτε εὑρίσκομεν 135. Ὥστε αἱ 27 ὀκάδες ἀξίζουν 135 δρχ.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου μορφοῦμεν τοὺς ἑξῆς κανόνας.

71. *Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῶν ὁσωνδήποτε μονάδων διὰ πολλαπλασιασμοῦ.*

Π.χ. Ἡ ὀκᾶ πράγματός τινος τιμᾶται 2 δρχ., πόσον τιμῶνται αἱ 15 ὀκάδες; (2×15 ἤτοι 30 δρχ.)

Ὁμοίως. Ὁ 1πηχ. τιμᾶται 5δχ. οἱ 7πηχ. πόσον;—(5×7 ἤτοι 35δρχ.)
» Μὲ 1δχ. ἀγοράζω 8 πορτοκάλ. μὲ 15δχ. πόσα;-(8×15 ἤτοι 120 πορτ.)
» Τὸ 1 ἀρνίον τιμᾶται 15δχ. τὰ 10 ἀρνία πόσον;-(15×10 ἤτοι 150δρχ.)

Σημείωσις. Τὴν τιμὴν τῶν ὁσωνδήποτε μονάδων εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες ταύτας ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος των.

Πρόβλημα 2ον. Ποῖον εἶναι τὸ ἑξαπλάσιον τῶν 9 δρχ;

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ ἑξαπλάσιον τῶν 9 δρχ. εὑρίσκεται, ἐὰν λάβωμεν 6 φορὰς τὰς 9 δραχ., τοῦτο δὲ κατορθοῦται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ 9 ἐπὶ 6, ὅτε εὑρίσκομεν 54, ἄρα τὸ ἑξαπλάσιον τῶν 9 δραχ. εἶναι 54 δραχμαί.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

72. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον κ.τ.λ. δοθέντος ἀριθμοῦ, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 2, 3, κ.τ.λ.*

Π.χ. Ποῖον εἶναι τὸ 9πλάσιον τῶν 7 ὀκδ.; (7×9 ἤτοι 63 ὀκδ.)

Ὁμοίως. Ποῖον εἶναι τὸ 10πλάσιον τῶν 10 προβάτων; (100 προβ.)

Σημείωσις. Ἡ σημασία τοῦ γινομένου ὁρίζεται ἐκ τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος. Εἶναι δὲ αὕτη ὁμοειδὴς πρὸς τὸν πολλαπλασιαστέον, διότι διὰ τῆς μεγεθύνσεως τούτου εὑρίσκεται τὸ γινόμενον.

Γυμνάσματα ἀπὸ μνήμης.

1) Ἡ ὀκᾶ πράγματός τινος ἀξίζει 2 δραχ. Πόσον ἀξίζουν αἱ 16 ὀκάδες; (32 δραχ.)

2) Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος ἀξίζει 3 δρχ. Πόσον ἀξίζουν αἱ 30 πήχεις; (90 δραχ.)

3) Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν 10 ὀκάδ. πράγματός τινος. Μὲ 1000 δρχ. πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν; (10000 ὀκάδ.)

4) Ποῖον εἶναι τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ 400; (3200)

5) Ἄνθρωπός τις ἔχει 15 δρχ. Πόσας ἔχει ἕτερος ἄνθρωπος, ὅστις ἔχει πενταπλασίας τοῦ πρώτου; (75 δραχ.)

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τὸ εἰκοσάφραγκον τιμᾶται 29 δρχ. Πόσον τιμῶνται τὰ 2008 εἰκοσάφραγκα; (58232 δρχ.)

2) Ποῖος ἀριθμὸς εἶναι 3003 φορὰς μεγαλήτερος τοῦ 2002; (ὁ 6012006).

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ τριπλάσιον τοῦ διπλασίου τοῦ 402.— (402×2×3 ἤτοι 2412)

4) Οἰκία τις ἔχει 4 πατώματα, ἕκαστον δὲ πάτωμα ἔχει 12 δω-

μάτια καὶ ἕκαστον δωμάτιον 5 καθίσματα. Πόσα καθίσματα ἔχει ἡ οἰκία; (240 καθ.)

5) Βιβλίον τι ἔχει 250 σελίδας, ἑκάστη σελὶς ἔχει 32 στίχους καὶ ἕκαστος στίχος ἔχει 16 γράμματα. Πόσα γράμματα ἔχει τὸ βιβλίον; (128000).

6) Ἄνθρωπός τις ἠγόρασε 3 πήχεις ὑφάσματος πρὸς 8 δρχ., ἑτέρους δὲ 12 πήχεις πρὸς 2 δρχ., προσέτι 2 πίλους πρὸς 15 δρχ· ἕκαστον, τοῦ ἐπερίσσευσαν δὲ 42 δραχμαί. Ζητεῖται πόσας δραχμὰς εἶχεν ἐν ὅλῳ. (120 δρχ.).

7) Ἔμπορός τις ἠγόρασε 250 πήχεις ὑφάσματος πρὸς 8 δρχ. τὸν πῆχυν, ἐπώλησε δὲ ἐξ αὐτῶν τοὺς 100 πήχ. πρὸς 10 δρχ. τὸν πῆχυν, τοὺς 75 πήχ. πρὸς 9 δρχ. καὶ τοὺς ὑπολοίπους πρὸς 7 δρχ. Ζητεῖται πόσας δραχμὰς ἐκέρδησεν. (200 δρχ.)

8) Δεξαμενὴ χωρητικότητος 40000 ὀκάδων ὕδατος εἶχε πληρωθῆ μέχρι τοῦ ἡμίσεος, πρόκειται δὲ νὰ κενωθῆ ὑπὸ δύο κρουνῶν καὶ ἐκ μὲν τοῦ πρώτου ῥέουσιν 120 ὀκδ. καθ' ὥραν, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 165 ὀκδ. Πόσον ὕδωρ θὰ ἐκρεύσῃ καὶ ἐκ τῶν δύο κρουνῶν μετὰ 15 ὥρας καὶ πόσον ὕδωρ θὰ μείνῃ εἰς τὴν δεξαμενήν;

(Θὰ ἐκρεύσῃ 4275 ὀκδ. καὶ θὰ μείνῃ 15725 ὀκδ.).

Διαίρεσις.

73. *Διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει γινόμενον τὸν πρῶτον.*

74. Ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὁ πρῶτος λέγεται *διαιρετέος*, ὁ δὲ δεύτερος *διαιρέτης*.

75. Ὁ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον, λέγεται *πηλίκον*.

Σημείωσις. Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῆ ἐπὶ τὸν διαιρέτην, διὰ νὰ δώσῃ τὸν διαιρετέον (δηλ. πρέπει τὸ πηλίκον νὰ μεγεθυνθῆ κατὰ τόσας φοράς, ὅσας ἀκεραίας μονάδας ἔχει ὁ διαιρέτης), ἄρα τὸ πηλίκον *ἀπολύτως* ἐξεταζόμενον εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρετέου κατὰ τόσας φοράς, ὅσας ἀκεραίας μονάδας ἔχει ὁ διαιρέτης.

76. Τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶναι : καὶ ἀναγινώσκεται *διά*, τίθεται δὲ μεταξὺ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου.

Π. χ. Τὸ 15 : 3 σημαίνει, ὅτι πρέπει ὁ 15 νὰ διαιρεθῆ διὰ 3 καὶ ἀναγινώσκεται 15 διὰ 3. Ἔνθα ὁ μὲν 15 εἶναι ὁ διαιρετέος, ὁ δὲ ὁ διαιρέτης.

77. Εἰς τὴν διαίρεσιν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Αη). Ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι *μονοψήφιον*.

Βα). Ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι *πολυψήφιον*.

Εὕρεσις τοῦ πηλίκου.

78. Παράδειγμα 1ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τοῦ 16 διὰ 8.

Λύσις. Ἐπειδὴ πρέπει νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος νὰ εἶναι φορὰς μικρότερος τοῦ 16 (§ 75 Σημ.), διὰ τοῦτο ἀρκεῖ τὸν 16 τὸν χωρίσωμεν εἰς 8 ἴσα μέρη καὶ νὰ λάβωμεν τὸ ἓν ἐκ τῶν μερῶν τούτων. Πρὸς τοῦτο δὲ λαμβάνομεν ἐκ τῶν 16 μονάδων πρῶτον μονάδας καὶ τὰς γράφομεν ἀνὰ μίαν κατὰ σειρὰν ὡς ἑξῆς·

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

Ἔπειτα λαμβάνομεν ἄλλας 8 μονάδας, (ὅτε ἐν ὅλῳ θὰ ἔχωμεν λάβη 16 μονάδας) καὶ θέτομεν ἑκάστην τούτων κάτωθεν τῶν προηγουμένων ὡς ἑξῆς

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

Οὕτω τὰς 16 μονάδας τοῦ διαιρετέου ἐθέσαμεν εἰς 8 κατακορύφους, τῶν ὁποίων ἑκάστη ἔχει 2 μονάδας. Ἄρα αἱ 16 μονάδες τοῦ διαιρετέου ἐχωρίσθησαν εἰς 8 ἴσα μέρη καὶ τὸ ἓν ἐκ τῶν μερῶν τούτων εἶναι τὸ 2, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον 16. Ἄρα ὁ 2 εἶναι τὸ ζητούμενον *πηλίκον* (§ 75).

Ἢ καὶ ἄλλως·

λαμβάνομεν διὰ 8 μονάδας τοῦ διαιρετέου 1 μονάδα ὡς πηλίκον, καὶ ἔπειτα διὰ τὰς ἄλλας 8 μονάδας τοῦ διαιρετέου, ἄλλην μίαν μονάδα. Τοιουτοτρόπως θὰ ἔχωμεν δύο μονάδας ὡς πηλίκον, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν 2. Τοῦτ' αὐτὸ ὅμως γίνεται καὶ ἂν ἐξετάσωμεν πόσας φορὰς ὁ 16 περιέχει τὸν 8· κατορθοῦμεν δὲ τοῦτο ἀφαιροῦντες διαδοχικῶς ἀπὸ τοῦ 16 τὸν 8, ὁπότε μετὰ δύο διαδοχικὰς ἀφαιρέσεις θὰ ἔχωμεν διαφορὰν μηδὲν (ἤτοι $16-8=8$ καὶ $8-8=0$). Ἐπειδὴ λοιπὸν διαδοχικὰς ἀφαιρέσεις ἐκάμαμεν δύο, ἄρα τὸ πηλίκον εἶναι 2.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τοῦ 17 διὰ 5.

Λύσις. Ἐὰν ζητήσωμεν νὰ χωρίσωμεν τὸν 17 εἰς 5 ἴσα μέρη, παρατηροῦμεν, ὅτι δὲν κατορθοῦμεν τοῦτο, διότι ἐκ τοῦ 17 περισσεύουσι δύο μονάδες καὶ μόνον αἱ 15 μονάδες αὐτοῦ χωρίζονται εἰς 5 μέρη ἴσα, τὸ ἓν δὲ ἐκ τῶν ἴσων τούτων μερῶν εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 5 δὲν δίδει τὸν διαιρετέον, ἀλλὰ τὸν ἀριθμὸν 15, ὁ ὁποῖος εἶναι *τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου* 5, τὸ περιεχόμενον εἰς τὸν διαιρετέον 17. Διὰ τοῦτο ὁ 3 δὲν εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον (§ 75). Ὅθεν ἡ διαίρεσις αὕτη λέγεται *ἀτελής*, τὸ δὲ 2, τὸ ὁποῖον ἐπερίσσευσεν ἐκ τοῦ διαιρετέου, λέγεται *ὑπόλοιπον*.

Σημείωσις. Ἠδυνάμεθα καὶ ἐνταῦθα πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου νὰ ἐξετάσωμεν πόσας φορὰς ὁ διαιρετέος 17 περιέχει τὸν διαιρέτην 5, ὅτε εὑρίσκομεν ἐπίσης, ὅτι τὸ περιέχει 3 φορὰς καὶ περισσεύει ὁ 2 ἐκ τοῦ διαιρετέου.

Ἐκ τῶν παραδειγμάτων τούτων ἐξάγομεν τὰ ἑξῆς.

79. Ἡ διαίρεσις εἶναι *τελεία* ἢ *ἀτελής*.

Τελεία λέγεται ἡ διαίρεσις, ὅταν εὑρεθῇ τὸ ἀκριβὲς πηλίκον, δηλ. ὅταν δὲν μείνῃ μέρος τι ἐκ τοῦ διαιρετέου.

Ἀτελὴς λέγεται ἡ διαίρεσις, ὅταν δὲν εὑρεθῇ τὸ ἀκριβὲς πηλίκον, διότι μένει μέρος τι ἐκ τοῦ διαιρετέου.

80. *Ὑπόλοιπον* λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος μένει ἐκ τοῦ διαιρετέου κατὰ τὴν *ἀτελῆ* διαίρεσιν.

Σημείωσις α'. Τὸ ὑπόλοιπον εἶναι πάντοτε μικρότερον τοῦ διαιρέτου.

Σημείωσις β'. Κατὰ τὴν τελείαν διαίρεσιν τὸ ὑπόλοιπον εἶναι μηδέν.

81. *Ὡς πηλίκον τῆς ἀτελοῦς διαιρέσεως λαμβάνομεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου, τὸ περιεχόμενον εἰς τὸν διαιρετέον.*

Παρατήρησις. Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, ἡ διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος· θὰ καταστῇ δὲ ἡ διαίρεσις αὕτη δυνατὴ κατωτέρω διὰ τῆς εἰσαγωγῆς καὶ ἄλλων μονάδων μικροτέρων τῆς ἀκεραίας, ὅτε καὶ τὴν ἀτελῆ διαίρεσιν θὰ καθιστῶμεν τελείαν, δηλ. θὰ δυνάμεθα νὰ εὑρίσκωμεν πάντοτε τὸ ἀκριβὲς πηλίκον.

Πηλίκον μονοψήφιον.

82. Παράδειγμα 1ον. Νὰ διαιρεθῇ ὁ 8 διὰ 2.

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης 2 πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 4 δίδει τὸν διαιρετέον 8, ἄρα τὸ πηλίκον εἶναι 4 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 0, ἤτοι ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία.

Ὁμοίως. Ὁ 9 : 3 δίδει πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 0
» ὁ 24 : 3 » » 8 » » 0
» ὁ 20 : 4 » » 5 » » 0

Αἱ πράξεις διατάσσονται οὕτω·

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ \hline 0 & 4 \end{array}, \quad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ \hline 0 & 3 \end{array}, \quad \begin{array}{r|l} 24 & 3 \\ \hline 0 & 8 \end{array}, \quad \begin{array}{r|l} 20 & 4 \\ \hline 0 & 5 \end{array}$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ διαιρεθῇ ὁ 53 διὰ 6.

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης 6 πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 9 δίδει ἀριθμὸν μεγαλήτερον τοῦ διαιρετέου, ἐπὶ δὲ 8 δίδει τὸν ἀριθμὸν 48, ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρετέου 53, ἄρα ὁ 48 εἶναι τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ 6, τὸ περιεχόμενον εἰς τὸν 53. Διὰ τοῦτο ὡς πηλίκον λαμβάνομεν τὸν 8, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι 53—48, ἤτοι 5. Ἐπομένως ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι *ἀτελής*.

Ὁμοίως. Ὁ 17 : 3 δίδει πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 2
» ὁ 47 : 6 » » 7 » » 5

Αἱ πράξεις διατάσσονται οὕτω·

$$\begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ \hline 2 & 5 \end{array}, \quad \begin{array}{r|l} 47 & 6 \\ \hline 5 & 7 \end{array}, \quad \begin{array}{r|l} 8 & 3 \\ \hline 2 & 2 \end{array}, \quad \begin{array}{r|l} 5 & 4 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ διαιρεθῇ ὁ 1248 διὰ τοῦ 405.

Λύσις. Χωρίζομεν δι' ἑνὸς τόνου ἐξ ἀριστερῶν τοῦ διαιρετέου, ὅσα ψηφία ἔχει ὁ διαιρέτης, ὅτε ἔχομεν

$$\begin{array}{r|l} 124'8 & 405 \\ \hline \end{array}$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ χωρισθεὶς ἀριθμὸς 124 δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ διαιρέτου 405, χωρίζομεν καὶ ἕτερον ψηφίον, ὅτε ἔχομεν

$$\begin{array}{r|l} 12'4'8 & 405 \\ \hline \end{array}$$

καὶ διαιροῦμεν τὸν 1248 διὰ 405 ἢ *τὸν 12 διὰ 4*, ὅτε εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον 3, ὅπερ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸν διαιρέτην 405 ἔχομεν γινόμενον 1215, τὸ ὁποῖον ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὸν διαιρετέον 1248 εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 33, ἤτοι

$$\begin{array}{r|l} 1248 & 405 \\ \cline{2-2} 1215 & 3 \\ \hline 33 & \end{array}$$

Ὁμοίως ὁ 4475 : 1115 δίδει πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 15.

Ὁμοίως ὁ 375 : 125 δίδει πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 0.

Πηλίκον πολυψήφιον.

83. *Ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον, εὑρίσκεται τοῦτο διὰ τῆς ἀναλύσεως τῆς διαιρέσεως εἰς ἄλλας, τῶν ὁποίων ἑκάστη ἔχει πηλίκον μονοψήφιον.*

Παράδειγμα 1ον. Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 253257 διὰ 315.

Λύσις. Χωρίζομεν δι' ἑνὸς τόνου ἐξ ἀριστερῶν τοῦ διαιρετέου, ὅσα ψηφία ἔχει ὁ διαιρέτης, ὅτε ἔχομεν

$$\begin{array}{r|l} 253'257 & 315 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ χωρισθεὶς ἀριθμὸς 253 δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ διαιρέτου 315, χωρίζομεν καὶ ἕτερον ψηφίον, ὅτε ἔχομεν

$$\begin{array}{r|l} 253'2'57 & 315 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

καὶ διαιροῦμεν τὸν 2532 διὰ 315 ἢ τὸν 25 διὰ 3, ὅτε εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον 8, ὅπερ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἔχομεν γινόμενον 2520, τὸ ὁποῖον ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὸ χωρισθὲν μέρος 2532 τοῦ διαιρετέου, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 12, ἤτοι

$$\begin{array}{r|l} 253'2'57 & 315 \\ \cline{2-2} 2520 & 8 \\ \hline 12 & \end{array}$$

Ἔπειτα καταβιβάζοντες καὶ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρέτου εἰς τὸ ὑπόλοιπον, εὑρίσκομεν τὸν 125, ἤτοι

$$\begin{array}{r|l} 253'2'5'7 & 315 \\ \cline{2-2} 2520 & 8 \\ \hline 125 & \end{array}$$

Ἀλλὰ τὸ 125 διὰ 315 δὲν διαιρεῖται. Διὰ τοῦτο γράφομεν 0, ὡς δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου καὶ καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἑπόμενον ψηφίον, ὅτε ἔχομεν

$$
\begin{array}{r|l}
253257 & 315 \\
\cline{2-2}
2520 & 80 \\
\cline{1-1}
1257 &
\end{array}
$$

καὶ ἤδη διαιροῦμεν τὸν 1257 διὰ 315 ἢ τὸ 12 διὰ 3, ὅτε εὑρίσκομεν πηλίκον 4, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸν διαιρέτην 315 εὑρίσκομεν γινόμενον 1260, ἤτοι ἀριθμὸν μεγαλήτερον τοῦ διαιρεθέντος 1257, διὰ τοῦτο δὲ ἐλαττοῦμεν τὸ εὑρεθὲν ψηφίον 4 κατὰ μονάδα, ὅτε γίνεται 3, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸν διαιρέτην εὑρίσκομεν γινόμενον 945, ὅπερ ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ 1257 εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 312, ἤτοι

$$
\begin{array}{r|l}
253257 & 315 \\
\cline{2-2}
2520 & 803 \\
\cline{1-1}
1257 & \\
945 & \\
\cline{1-1}
312 &
\end{array}
$$

Οὕτω λοιπὸν διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ 253257 διὰ 315 εὕρομεν ὡς πηλίκον 803 καὶ ὑπόλοιπον 312.

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

84. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν ὁποιωνδήποτε, χωρίζομεν ἐξ ἀριστερῶν τοῦ διαιρετέου, ὅσα ψηφία ἔχει ὁ διαιρέτης καί, ἂν τὸ χωρισθὲν μέρος διαιρῆται διὰ τοῦ διαιρέτου, τότε διαιροῦμεν τὸ πρῶτον ψηφίον αὐτοῦ διὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τοῦ διαιρέτου· ἂν δὲ δὲν διαιρῆται, χωρίζομεν καὶ ἕτερον ψηφίον καὶ διαιροῦμεν τὰ δύο πρῶτα ψηφία αὐτοῦ διὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τοῦ διαιρέτου, ὅτε ὁ προκύπτων ἀριθμὸς θὰ εἶναι τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου· πάντως ὅμως ὁ ἀριθμὸς οὗτος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην πρέπει νὰ δίδῃ γινόμενον ἢ αὐτὸ τὸ χωρισθὲν μέρος τοῦ διαιρετέου ἢ μικρότερον τούτου· ἄλλως ἐλαττοῦμεν αὐτὸν διαδοχικῶς κατὰ μονάδα, ἕως ὅτου τὸ γινόμενόν του ἐπὶ τὸν διαιρέτην γείνῃ ἴσον ἢ μικρότερον*

τοῦ χωρισθέντος μέρους τοῦ διαιρετέου καὶ τότε τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τούτου καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ προκύπτοντος ὑπολοίπου καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ διαιροῦμεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμόν, ὡς ἀνωτέρω. Ἂν ὅμως οὗτος εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, τότε γράφομεν 0 ὡς δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου καὶ καταβιβάζοντες καὶ τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς ἀνωτέρω.

Παραδείγματα.

```
16206012 | 3                 854376 | 25
15         5402004           75       34175
 12                          104
 12                          100
  006                         43
    6                         25
    0012                      187
      12                      175
       0                       126
                               125
                                 1
```

Παρατήρησις. Διὰ νὰ εὑρίσκωμεν ταχύτερον τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου, ἕκαστον ψηφίον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὸ *πρῶτον* ἢ *τὰ δύο πρῶτα ψηφία* τοῦ διαιρουμένου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τοῦ διαιρέτου, τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ πρῶτον καὶ ἐπὶ τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ διαιρέτου καὶ λαμβάνοντες τὰ κρατούμενα ἐκ τοῦ δευτέρου γινομένου τὰ προσθέτομεν εἰς τὸ πρῶτον γινόμενον, ὅτε πρέπει νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ διαιρεθέντος· ἄλλως ἐλαττοῦμεν τὸ εὑρεθὲν ψηφίον κατὰ μονάδα καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δοκιμάζομεν καὶ τὸ οὕτω προκῦπτον ψηφίον.

Π. χ. Νὰ διαιρέσωμεν τὸν 17504 διὰ 245.

```
17504 | 245
1715    7
  35
```

Ἐπειδὴ ὁ 175 δὲν διαιρεῖται διὰ 245, ἐχωρίσαμεν καὶ ἕτερον ψηφίον καὶ διαιροῦμεν τὸν 1750 διὰ 245 ἢ τὸν 17 διὰ 2, εὑρίσκομεν δ' οὕτως ὡς πηλίκον 8. Τὸ πηλίκον τοῦτο πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸ πρῶτον ψηφίον 2 τοῦ διαιρέτου, εὑρίσκομεν γινόμενον 16, ἐπὶ δὲ τὸ δεύτερον ψηφίον 4, εὑρίσκομεν γινόμενον 32. Ἐκ τοῦ γινομένου δὲ 32, λαμβάνοντες τὰ 3 κρατούμενα τὰ προσθέτομεν εἰς τὸ πρῶτον γινόμενον 16 καὶ οὕτως ἀναβιβάζεται εἰς 19, ἤτοι εἰς ἀριθμὸν μεγαλήτερον τοῦ διαιρεθέντος 17. Διὰ τοῦτο ἐλαττοῦμεν τὸ εὑρεθὲν ψηφίον 8 κατὰ μονάδα, ὅτε εὑρίσκομεν 7· τοῦτο δὲ τὸ 7 δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρέτου, ὅτε ἔχομεν γινόμενον 14, καὶ ἐπὶ τὸ δεύτερον, ὅτε ἔχομεν γινόμενον 28, τοῦ ὁποίου τὰ δύο κρατούμενα ἀναβιβάζουσι τὸ γινόμενον 14 εἰς 16, ἤτοι εἰς ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ διαιρεθέντος 17. Διὰ τοῦτο δοκιμάζομεν τὸ 7, ἂν εἶναι καὶ τὸ ζητούμενον ψηφίον τοῦ πηλίκου. Ὅθεν πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην, καὶ ἐπειδὴ εὑρίσκομεν γινόμενον 1715, ἤτοι ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ διαιρεθέντος μέρους, διὰ τοῦτο ὁ 7 εἶναι τὸ ζητούμενον ψηφίον τοῦ πηλίκου· οὕτω δὲ πράττομεν μέχρι πέρατος τῆς πράξεως.

85. Ἀριθμός τις λέγεται διαιρετὸς δι' ἄλλου, ὅταν διαιρῆται δι' αὐτοῦ ἀκριβῶς, δηλ ὅταν τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 0.

Π. χ. Ὁ 15 εἶναι διαιρετὸς διὰ 5 καὶ 3, διότι τὸ ὑπόλοιπον τοῦ 15 διὰ 3 ἢ διὰ 5 εἶναι 0.

86. Διαιρέτης ἀριθμοῦ τινος λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος τὸν διαιρεῖ.

Π. χ. Τοῦ 15 διαιρέται εἶναι ὁ 3 καὶ ὁ 5.

Βάσανος διαιρέσεως.

87. *Τὴν δοκιμὴν τῆς διαιρέσεως κάμνομεν πολλαπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτοντες καὶ τὸ ὑπόλοιπον* (ἂν ὑπάρχῃ). *Ἂν δ' εὕρωμεν τὸν διαιρετέον, ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.*

Π.χ. Ὁ 253257 διὰ 315 δίδει πηλίκον 803 καὶ ὑπόλοιπον 312.

Ἡ δοκιμὴ γίνεται ὡς ἑξῆς·

Τὸ πηλίκον 803 ἐπὶ τὸν διαιρέτην 315 δίδει γινόμενον 252945, εἰς ὃ προσθέτοντες καὶ τὸ ὑπόλοιπον 312 εὑρίσκομεν τὸν 253257, ἤτοι τὸν διαιρετέον. Ἄρα ἡ διαίρεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

*Ἀρχαὶ τῆς διαιρέσεως.

88. *Ἐὰν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Π.χ. Ὁ 22 : 4 δίδει πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 2.

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 22 καὶ τὸν 4 ἐπὶ 3, εὑρίσκομεν τοὺς ἀριθμοὺς 66 καὶ 12, ὅτε εὑρίσκομεν, ὅτι

ὁ 66 : 12 δίδει πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 6·
τὸ μὲν πηλίκον δηλ. ἔμεινε τὸ αὐτὸ 5, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἀπὸ 2 ἔγεινεν 6, δηλ. ἐπολλαπλασιάσθη καὶ αὐτὸ ἐπὶ 3.

Ἂν δὲ τὸν 22 καὶ τὸν 4 διαιρέσωμεν διὰ 2, εὑρίσκομεν τοὺς ἀριθμοὺς 11 καὶ 22, ὅτε προκύπτει, ὅτι

Ὁ 11 : 2 δίδει πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 1.

Τὸ μὲν πηλίκον δηλ. ἔμεινε καὶ οὕτω τὸ αὐτὸ 5, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἀπὸ 2 ἔγεινεν 1, δηλ. διῃρέθη καὶ αὐτὸ διὰ 2.

89. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον τῶν προσθετέων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.*

Π.χ. Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ $3+5+6$, ἤτοι ὁ 14 ἐπὶ 2.

Ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 14 ἐπὶ 2, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον τῶν προσθετέων αὐτοῦ 3, 5, 6 ἐπὶ 2, καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα, ἤτοι

$$14 \text{ ἐπὶ } 2 \text{ ἢ } (3+5+6) \text{ ἐπὶ } 2=3\times2+5\times2+6\times2$$

Ὁ λόγος δὲ τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς. Διότι ἀντὶ νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸ 14 δύο φοράς, εἶναι τὸ αὐτὸ νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸ $3+5+6$ δύο φοράς, ὅτε ἔχομεν

$$\begin{array}{c} 3+5+6 \\ 3+5+6 \\ \hline 3\times2+5\times2+6\times2 \end{array}$$

ἤτοι $(3+5+6)$ ἐπὶ $2=3\times2+5\times2+6\times2$.

90. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν προσθετέων αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὰ προκύπτοντα πηλίκα.*

Π. χ. Νὰ διαιρεθῇ ὁ $100+50+5$, ἤτοι ὁ 155 διὰ 5.

Ὁ 155 : 5 δίδει πηλίκον 31.

Ἀλλὰ κατὰ τὸν κανόνα

$100+50+5 : 5$ δίδουσι πηλίκα $20+10+1$ (§ 90), ἤτοι πάλιν 31.

91. *Ἐὰν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τότε καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Ὁ λόγος δὲ τούτου εἶναι διότι, κάμνοντες ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ ἀθροίσματος τόσας φορὰς μικρότερον, ὅσας ἀκεραίας μονάδας ἔχει ὁ διαιρέτης, ἐκάμαμεν οὕτω τὸ ὅλον ἄθροισμα κατ' ἰσαρίθμους φορὰς μικρότερον. Ἄρα εὕρομεν οὕτω τὸ *ἀκριβὲς πηλίκον* τοῦ ἀθροίσματος.

Π.χ. Ὁ 40, 32 καὶ 28 διαιροῦνται διὰ 4 καὶ δίδουσι πηλίκα 10, 8, 7 ἤτοι 25. Ἀλλὰ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν 40+32+28, ἤτοι 100 διαιρεῖται ἐπίσης διὰ 4 καὶ δίδει πηλίκον 25.

92. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων διά τινος ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἕνα τῶν παραγόντων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.*

Π.χ. Τὸ γινόμενον $2\times4\times15$ ἤτοι 120 νὰ διαιρεθῇ διὰ 3. Ὁ 120 διὰ 3 δίδει πηλίκον 40.

Ἀλλὰ κατὰ τὸν κανόνα (§ 92) καὶ

$2\times4\times15$ διὰ 3 δίδει πηλίκον $2\times4\times5$ ἤτοι πάλιν 40.

Ὁμοίως $2\times7\times3:7=2\times1\times3=2\times3$ ἄρα

Τὸ πηλίκον τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων διὰ τοῦ ἑνὸς τούτων εὑρίσκομεν ἐξαλείφοντες τὸν παράγοντα τοῦτον.

Συντομίαι.

93. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ 10, 100, 1000, κ.τ.λ. χωρίζομεν ἐκ δεξιῶν τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὡς ὑπόλοιπον, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ διαιρέτης, τὰ δὲ λοιπὰ ψηφία εἶναι τὸ πηλίκον.*

Π χ. Νὰ διαιρεθῇ ὁ 2320 διὰ 10, 100, 1000 κ.τ.λ.

Κατὰ τὸν κανόνα (§ 93) ἔχομεν

Ὁ 2320 : 10 δίδει 232(0 ἤτοι πηλίκον 232 καὶ ὑπόλοιπον 0

» 2320 : 100 » 23(20 » » 23 » » 20

94. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα δι' ἄλλου ἔχοντος εἰς τὸ τέλος μηδενικά, χωρίζομεν τὰ μηδενικὰ ταῦτα καὶ ἐκ δεξιῶν τοῦ διαιρετέου χωρίζομεν ἰσάριθμα ψηφία καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τὰ μένοντα ψηφία εἰς δὲ τὸ ὑπόλοιπον καταβιβάζομεν καὶ τὰ χωρισθέντα ψηφία, τοῦ διαιρετέου.*

Π.χ. Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 257830 διὰ τοῦ 2500.

Κατὰ τὸν κανόνα (§ 94) ἔχομεν

$$\begin{array}{r|l} 2578(30 & 25(00 \\ \cline{2-2} 25 & 103 \\ \cline{1-1} =78 & \\ 75 & \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

Ὥστε ὁ 257830 διὰ 2500 δίδει πηλίκον 103 καὶ ὑπόλοιπον 330, ὅπερ εὑρίσκομεν καταβιβάζοντες εἰς τὸ εὑρεθὲν ὑπόλοιπον 3 (τῆς διαιρέσεως τοῦ 2578 διὰ 25) τὸ χωρισθὲν μέρος 30 τοῦ διαιρετέου.

Περὶ τῶν διαιρετῶν 2, 3, 4, 5, 9, 25.

95. *Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 2 ἢ διὰ 5, ἐὰν τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον εἶναι διαιρετὸν διὰ 2 ἢ διὰ 5, ἢ ὅταν λήγῃ εἰς 0.*

Π. χ. Ὁ 328 διαιρεῖται διὰ 2, διότι τὸ 8 διαιρεῖται διὰ 2.

Ὁ 6445 διαιρεῖται διὰ 5, διότι τὸ τελευταῖον ψηφίον 5 διαιρεῖται διὰ 5.

Ὁ 3570 διαιρεῖται διὰ 2 καὶ 5, διότι λήγει εἰς μηδέν.

* Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς. Διότι χωρίζοντες τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς τὰς δεκάδας του καὶ τὰς μονάδας του ἑκάστη δεκάς, ἤτοι ἕκαστον 10, διαιρεῖται διὰ 2 καὶ 5· ἂν λοιπὸν καὶ αἱ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ διαιρῶνται διὰ 2 ἢ διὰ 5, τότε καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς (§ 91). Ὅταν δὲ λήγῃ εἰς *μηδέν*, τότε μόνον δεκάδας ἔχει ὁ ἀριθμός. Ἄρα εἶναι διαιρετὸς διὰ 2 καὶ 5.

96. *Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 ἢ διὰ 25, ὅταν τὰ δύο τελευταῖα αὐτοῦ ψηφία ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4 ἢ διὰ 25, ἢ ὅταν λήγῃ εἰς δύο μηδενικά.*

Π. χ. Ὁ 548 διαιρεῖται διὰ 4, διότι ὁ 48 διαιρεῖται διὰ 4.

Ὁ 4675 διαιρεῖται διὰ 25, διότι ὁ 75 διαιρεῖται διὰ 25.

Ὁ 67800 διαιρεῖται διὰ 4 καὶ 25, διότι λήγει εἰς δύο μηδενικά.

* Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς. Διότι χωρίζοντες τὰς ἑκατοντάδας τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ παρατηροῦμεν, ὅτι ἑκάστη ἑκατοντάς, ἤτοι ἕκαστον 100, διαιρεῖται διὰ 4 καὶ 25. Ἂν λοιπὸν καὶ ὁ μένων διψήφιος ἀριθμὸς διαιρῆται διὰ 4 ἢ διὰ 25, τότε καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς (§ 91). Ὅταν δὲ λήγῃ εἰς δύο μηδενικά, τότε μόνον ἑκατοντάδας περιέχει ὁ ἀριθμός. Ἄρα εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 καὶ 25.

97. *Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 ἢ διὰ 9, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ, ὡς μονάδων θεωρουμένων, ἀποτελῇ ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 3 ἢ διὰ 9.*

Π.χ. Ὁ 402 διαιρεῖται διὰ 3, διότι τὸ ἄθροισμα $4+0+2$, ἤτοι 6, διαιρεῖται διὰ 3.

Ὁ 430524 διαιρεῖται διὰ 3 καὶ 9, διότι τὸ ἄθροισμα 4+30+5+2+4, ἤτοι 18 διαιρεῖται διὰ 3 καὶ 9.

* Ὁ λόγος δὲ τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 462. Ἑκάστη δεκὰς τούτου, ἤτοι ἕκαστον 10, διαιρούμενον διὰ 3 ἢ 9 δίδει ὑπόλοιπον 1 μονάδα. Ὅθεν ἐὰν ἐκ τοῦ 462 ἀφήσωμεν τὰς 2 μονάδας, αἱ 46 δεκάδες θὰ δώσωσιν ὡς ὑπόλοιπον 46 μονάδας. Ἐὰν δ' ἐκ τούτων ἀφήσωμεν τὰς 6 μονάδας, αἱ 4 δεκάδες θὰ δώσωσιν ὡς ὑπόλοιπον 4 μονάδας. Ἐν ὅλῳ λοιπὸν μένουσιν ὡς ὑπόλοιπον οἱ ἀριθμοὶ 2, 6 καὶ 4, ἤτοι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ 462 ὡς μονάδων θεωρουμένων. Τοῦτο δὲ ἂν εἶναι διαιρετὸν διὰ 3 ἢ 9, τότε οὐδὲν ὑπόλοιπον μένει, ἤτοι ὅλος ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετός.

Σημείωσις α'. Διὰ τοῦ 6 διαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 2 καὶ 3.

Π. χ. Ὁ 1302 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 2 καὶ 3. Ἄρα εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ 6.

Σημείωσις β'. Διὰ τοῦ 12 διαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 3 καὶ 4.

Π.χ. Ὁ 324 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 3 καὶ 4, ἄρα καὶ διὰ τοῦ 12.

Κανόνες προβλημάτων διαιρέσεως.

Ὁρισμοί.

98. Εἰς τὴν διαίρεσιν ὑπάγονται τὰ προβλήματα τοῦ *μερισμοῦ* καὶ τῆς *μετρήσεως*.

99. *Μερισμὸς ἀριθμοῦ τινος εἰς ἴσα μέρη λέγεται ὁ χωρισμὸς αὐτοῦ εἰς ἴσα μέρη.*

100. *Μέτρησις ἀριθμοῦ τινος δι' ἄλλου λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ πρὸς τὸν ἄλλον.*

Σημείωσις. Σκοπὸς τῆς μετρήσεως εἶναι νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς ἀριθμός τις περιέχει ἄλλον ἀριθμόν.

Κανόνες προβλημάτων μερισμοῦ.

Πρόβλημα 1ον. Αἱ 5 ὀκάδες τοῦ καφὲ τιμῶνται 30 δρχ., πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ;

Λύσις. Προφανῶς διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ, ἀρκεῖ νὰ χωρίσωμεν τὰς 30 δρχ. εἰς 5 ἴσα μέρη καὶ νὰ λάβωμεν τὸ ἕν, κατορθοῦται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς.

Λαμβάνομεν ἐκ τῶν 30 δρχ. πρῶτον 5 δρχ. καὶ τὰς θέτομεν κατὰ σειρὰν ἀπὸ μίαν ὡς ἑξῆς·

1 δρχ. 1 δρχ. 1 δρχ. 1 δρχ. 1 δρχ.

Ἔπειτα ἐξακολουθοῦμεν νὰ λαμβάνωμεν ἀπὸ 5 δρχ. καὶ νὰ τὰς θέτωμεν ἀπὸ μίαν κάτωθεν τῶν προηγουμένων, ὅτε μετὰ 6 φορὰς θὰ λάβωμεν καὶ τὰς 30 δρχ. καὶ θὰ τὰς ἔχωμεν θέση ὡς ἑξῆς·

1 δρχ.	1 δρχ.	1 δρχ.	1 δρχ.	1 δρχ.
1 δρχ.	1 δρχ.	1 δρχ.	1 δρχ.	1 δρχ.
1 δρχ.	1 δρχ.	1 δρχ.	1 δρχ.	1 δρχ.
1 δρχ.	1 δρχ.	1 δρχ.	1 δρχ.	1 δρχ.
1 δρχ.	1 δρχ.	1 δρχ.	1 δρχ.	1 δρχ.
1 δρχ.	1 δρχ.	1 δρχ.	1 δρχ.	1 δρχ.
6 δρχ.	6 δρχ.	6 δρχ.	6 δρχ.	6 δρχ.

Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς ἑκάστην κατακόρυφον ὑπάρχουσιν ἐν ὅλῳ 6 δρχ., ἔχομεν δὲ ἐν ὅλῳ 5 κατακορύφους. Ἄρα αἱ 30 δρχ. ἐχωρίσθησαν εἰς 5 ἴσα μέρη καὶ τὸ ἓν τῶν μερῶν τούτων εἶναι 6 δρχ., συνεπῶς ἡ 1 ὀκᾶ ἀξίζει 6 δραχμάς.

Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν καὶ ἂν διαιρέσωμεν τὰς 30 δρχ. διὰ 5 ὀκ. (δηλ. τὰς 30 : 5 καὶ τὸ πηλίκον ὀνομάσωμεν δραχμάς).

Ἐκ τῆς λύσεως τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

101. *Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν ὁσωνδήποτε μονάδων, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος τούτων διὰ διαιρέσεως.*

Σημείωσις. Εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην θέτομεν διαιρέτην τὸν ἀριθμὸν τοῦ ὁποίου τὴν τιμὴν τῆς μονάδος ζητοῦμεν.

Π. χ.	Αἱ 4 ὀκ. τιμῶνται	20 δρχ.	πόσον ἡ ὀκᾶ ;	(5 δρχ.)
Ὁμοίως.	Οἱ 7 πηχ. »	49 δρχ.	» ὁ πῆχυς ;	(7 δρχ.)
»	Οἱ 8 στατ. »	48 δρχ.	» ὁ στατήρ;	(6 δρχ.)

Πρόβλημα 2ον. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ τριπλάσιον εἶναι 21;

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ τριπλάσιον τοῦ ἀγνώστου ἀριθμοῦ εἶναι 21, ἄρα ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς ἐλήφθη 3 φορὰς διὰ νὰ δώσῃ τὸν 21. Διὰ τοῦτο εὑρίσκομεν αὐτόν, ἐὰν χωρίσωμεν τὸν 21 εἰς 3 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν τὸ ἕν, ὅτε εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 7, ὡς τὸν ζητούμενον ἀριθμόν.

Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν καὶ ἂν διαιρέσωμεν τὸν 21 διὰ 3.

Ἐκ τῆς λύσεως τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

102. *Ὅταν δίδηται τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον, κ.τ.λ. ἀγνώστου ἀριθμοῦ, διαιροῦντες τοῦτο διὰ 2, 3, κ.τ.λ. εὑρίσκομεν τὸν ἄγνωστον τοῦτον ἀριθμόν.*

Π.χ. Ὁ 24 εἶναι τὸ τριπλάσιον ἀριθμοῦ τινος· ποῖος εἶναι οὗτος;
(24 : 3 ἤτοι 8).

Ὁμοίως. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ ἑπταπλάσιον εἶναι 45; (ὁ 6 περίπου).

Παρατήρησις. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ τὸ πηλίκον ὁρίζεται ἐκ τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος καὶ εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὸν διαιρετέον.

Κανόνες προβλημάτων μετρήσεως.

Πρόβλημα 1ον. Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζει τις 4 πηχ. ὑφάσματός τινος, αἱ 20 πήχεις πόσας δραχμὰς ἀξίζουν;

Λύσις. Ἐπειδὴ διὰ 4 πηχ. δίδομεν μίαν δραχμήν, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον τιμῶνται αἱ 20 πηχ., ἀρκεῖ προφανῶς νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς ὁ 20 περιέχει τὸν 4, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες διαδοχικῶς ἀπὸ τοῦ 20 τὸν 4. Καὶ ἐπειδὴ εὑρίσκομεν οὕτως, ὅτι ὁ 20 περιέχει 5 φορὰς ἀκριβῶς τὸν 4, ἄρα αἱ 20 πήχεις ἀξίζουν 5 δραχ.

Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν καὶ ἂν διαιρέσωμεν τοὺς 20 πηχ. διὰ 4 πηχ. (δηλ. τὸν 20 διὰ 4 καὶ τὸ πηλίκον ὀνομάσωμεν δραχμάς).

Ἐκ τῆς λύσεως τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

103. *Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος, εὑρίσκομεν πόσας φορὰς περιέχεται αὕτη εἰς ἄλλην δοθεῖσαν τιμὴν διὰ διαιρέσεως.*

Σημείωσις. Εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην θέτομεν διαιρέτην τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος.

Π. χ. Ἡ 1 ὀκ. ἀξίζει 3 δχ., μὲ 18 δχ. πόσας ὀκάδας ἀγοράζω; (6 ὀκ.)

Ὁμοίως. Ὁ 1 πχ. ἀξίζει 5 δχ., μὲ 22 δχ. πόσους πήχεις ἀγοράζω;
(4 πηχ. περίπου).

Ὁμοίως μὲ 1 δχ. ἀγοράζω 2 βιβλία, τὰ 16 βιβλία πόσον ἀξίζουν; (8 δχ.)

Πρόβλημα 2ον. Πόσας φορὰς εἶναι μεγαλήτερος ὁ 24 τοῦ 6;

Λύσις. Προφανῶς ἐνταῦθα ζητεῖται πόσας φορὰς ὁ 24 περιέχει τὸν 6. Εὑρίσκομεν δὲ τοῦτο ἀφαιροῦντες διαδοχικῶς τὸν 6 ἀπὸ τοῦ 24, ὅτε βλέπομεν, ὅτι ὁ 24 περιέχει 4 φορὰς ἀκριβῶς τὸν 6. Ἄρα ὁ 24 εἶναι 4 φορὰς μεγαλήτερος τοῦ 6, ἤτοι εἶναι *τετραπλάσιον* τοῦ 6.

Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον 4 εὑρίσκομεν καὶ ἂν διαιρέσωμεν τὸν 24 διὰ τοῦ 6.

Ἐκ τῆς λύσεως τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

104. *Ὅταν δίδηται ἀριθμός τις, εὑρίσκομεν ποῖον μέρος εἶναι ἄλλου δοθέντος ἀριθμοῦ διὰ διαιρέσεως.*

Σημείωσις. Εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην θέτομεν διαιρέτην ἐκεῖνον, πρὸς τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ σύγκρισις.

Π. χ. Ποῖον πολλαπλάσιον τῶν 7 δρχ. εἶναι αἱ 35 δραχμαί;
(35:7=5 ἤτοι τὸ πενταπλάσιον).

Ὁμοίως. Πόσας φορὰς εἶναι ὁ 45 μεγαλήτερος τοῦ 5; (45:5 ἤτοι 9 φοράς).

Ὁμοίως. Ποῖον μέρος τοῦ 7 εἶναι ὁ 21; (21:7=3 ἤτοι τὸ τριπλάσιον).

Παρατήρησις. Εἰς τὰ προβλήματα τῆς *μετρήσεως* τὸ πηλίκον ὁρίζεται ἐκ τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος.

Γυμνάσματα ἀπὸ μνήμης.

1) Αἱ 5 ὀκ. πράγματός τινος ἀξίζουν 45 δρχ. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ;
(45:5 ἤτοι 9 δρχ.).

2) Οἱ 3 πηχ. ὑφάσματός τινος ἀξίζουν 12 δρχ. Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς;
(4 δρχ.).

3) Τὸ τετραπλάσιον ἀριθμοῦ τινος εἶναι 48. Ποῖος εἶναι ὁ ἄγνωστος ἀριθμός; (ὁ 12).

4) Τὸ ἑπταπλάσιον ἀριθμοῦ τινος εἶναι 14. Ποῖος εἶναι οὗτος ὁ ἀριθμός; (ὁ 2).

5) Ὁ εἷς πῆχυς ὑφάσματός τινος ἀξίζει 6 δρχ. Πόσους πήχεις ἀγοράζομεν μὲ 54 δραχμάς; (9 πηχ.).

6) Ἡ ὀκᾶ πράγματός τινος τιμᾶται 4 δρχ. Πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν μὲ 32 δραχμάς; (8 ὀκ.).

7) Πόσας φορὰς εἶναι ὁ 81 μεγαλήτερος τοῦ ἀριθμοῦ 9; (9 φοράς).

8) Ὁ 17 ποῖον μέρος εἶναι τοῦ ἀριθμοῦ 8; (Τὸ διπλάσιον περίπου).

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Αἱ 5 ὀκ. τοῦ καφὲ ἀξίζουν 60 δρχ. Πόσον ἀξίζουν αἱ 3 ὀκάδες; (36 δραχ.).

2) Πόσας σελίδας ἔχει βιβλίον, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐξ 128400 τυπογραφικῶν στοιχείων καὶ τοῦ ὁποίου ἑκάστη σελὶς ἔχει 30 σειρὰς καὶ ἑκάστη σειρὰ 40 στοιχεῖα; (107 σελ.).

3) Δύο ἐργάται ἐργαζόμενοι ὁμοῦ ἐπὶ 14 ἡμέρας ἐκέρδησαν 154 δρχ. Ἐὰν τὸ ἡμερομίσθιον τοῦ ἑνὸς ἦτο 7 δρχ., πόσον ἦτο τοῦ ἄλλου; (4 δρχ.).

4) Ἔμπορός τις ἠγόρασε 257 πήχεις ὑφάσματος ἀντὶ 412 δρχ., ἐπλήρωσε δὲ δι' ἔξοδα μεταφορᾶς 3 δρχ. καὶ διὰ φόρον 99 δρχ. Πόσον τοῦ ἐστοίχισεν ὁ πῆχυς; (2 δρχ.).

5) Ἔμπορός τις ἠγόρασε 257 πήχεις ὑφάσματος ἀντὶ 412 δρχ., ἐπλήρωσε δὲ δι' ἔξοδα μεταφορᾶς 3 δρχ. καὶ διὰ φόρον 99 δρχ. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὸν πῆχυν διὰ νὰ κερδήσῃ ἐξ ὅλου τοῦ ὑφάσματος 257 δραχμάς; (3 δρχ.)

6) Ἔχομεν δύο τεμάχια ὑφάσματος, τῶν ὁποίων ἕκαστον σύγκειται ἀπὸ 30 μέτρα. Καὶ τὸ μὲν πρῶτον τεμάχιον στοιχίζει 90 δραχμὰς περισσότερον τοῦ δευτέρου, τὰ δύο δὲ ὁμοῦ στοιχίζουν 570 δρχ. Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ μέτρου ἑκάστου τεμαχίου ὑφάσματος;

(Τοῦ πρώτου 11 δρχ. καὶ τοῦ δευτέρου 8 δρχ.)

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.

Περὶ κλασμάτων.

105. *Ἐὰν τὴν ἀκεραίαν μονάδα κόψωμεν εἰς ὁσαδήποτε ἴσα τεμάχια, τὸ ἓν ἐκ τῶν ἴσων τούτων τεμαχίων λέγεται κλασματικὴ μονάς.*

Π. χ. Ἐὰν τὴν ἀκεραίαν μονάδα ὑποθέσωμεν κομμένην εἰς 2 ἢ 3 ἢ 4 ἢ 5 . . . . . . ἢ 1000, κ.τ.λ. ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν ἀνὰ ἓν ἐξ αὐτῶν, τότε μορφοῦμεν ἀπείρους κλασματικὰς μονάδας, τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν κατὰ σειρὰν *ἓν* δεύτερον, *ἓν* τρίτον, *ἓν* τέταρτον, . . . *ἓν* χιλιοστὸν κ.τ.λ. καὶ γράφομεν αὐτὰς κατὰ σειρὰν ὡς ἑξῆς·

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \cdots\cdots \frac{1}{100}, \cdots \frac{1}{1000} \text{ κ.τ.λ}$$

106. *Κλασματικοὶ ἀριθμοὶ* ἢ ἁπλῶς *κλάσμα* λέγεται τὸ σύνολον πολλῶν κλασματικῶν μονάδων ἢ καὶ μία κλασματικὴ μονάς.

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 2 τρίτα, 2 τέταρτα, 2 πέμπτα, 10 ἕβδομα, 1 ὄγδοον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, λέγονται κλασματικοὶ ἀριθμοὶ ἢ ἁπλῶς κλάσματα καὶ γράφονται ὡς ἑξῆς·

$$\frac{2}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{2}{5},\ \frac{10}{7},\ \frac{1}{8}$$

ἔνθα ὁ ἄνωθεν τῆς γραμμῆς ἀριθμὸς λέγεται *ἀριθμητής*, ὁ δὲ κάτωθεν *παρονομαστής*.

107. Ὁ *ἀριθμητὴς* παντὸς κλάσματος ἀπαγγέλλεται ὡς *ἀπόλυτος* ἀριθμός, ὁ δὲ *παρονομαστὴς* ὡς τακτικός.

Π. χ. Τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{9}$ ἀπαγγέλλονται *δύο τρίτα, πέντε ἕβδομα, ἓξ ἔνατα*.

108. Ὁ *ἀριθμητὴς* σημαίνει τὸ πλῆθος τῶν κλασματικῶν μονάδων, τὰς ὁποίας περιέχει τὸ κλάσμα.

Π. χ. Τὸ $\frac{2}{3}$ περιέχει *δύο* κλασματικὰς μονάδας. Ὁμοίως τὸ $\frac{5}{7}$ περιέχει *πέντε*.

109. Ὁ *παρονομαστὴς* σημαίνει εἰς πόσας κλασματικὰς μονάδας ἐκόπη ἡ ἀκεραία μονὰς καὶ χρησιμεύει, ὅπως δίδῃ τὸ ὄνομα τῶν κλασματικῶν μονάδων τοῦ ἀριθμητοῦ.

Π. χ. εἰς τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ ἐκ μὲν τοῦ ἀριθμητοῦ μανθάνομεν, ὅτι τοῦτο ἔχει δύο κλασματικὰς μονάδας, ἐκ δὲ τοῦ παρονομαστοῦ μανθάνομεν, ὅτι ἡ ἀκεραία μονὰς ἐκόπη εἰς 3 ἴσα μέρη, ὅθεν ἑκάστη ἐκ τῶν 2 μονάδων τοῦ κλάσματος εἶναι τὸ *τρίτον* (ἤτοι τὸ $\frac{1}{3}$) τῆς ἀκεραίας μονάδος, δι' ὃ καὶ ἀπαγγέλλεται *δύο τρίτα*.

110. Ὁ *ἀριθμητὴς* καὶ ὁ *παρονομαστὴς* καλοῦνται ὁμοῦ ὅροι τοῦ κλάσματος.

Περὶ γενέσεως τῶν κλασμάτων.

111. Καθὼς ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος 1 δυνάμεθα νὰ μορφώσωμεν τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῆς πολλάκις, οὕτω καὶ ἐξ ἑκάστης κλασματικῆς μονάδος δυνάμεθα νὰ μορφώσωμεν ἀντίστοιχα κλάσματα.

Π. χ. Ἐκ τῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{2}$ δυνάμεθα ἐπαναλαμβάνοντες αὐτὴν $2, 3, 4, 5, 6, \ldots 100, \ldots 1000$ φορὰς κ.τ.λ. νὰ μορφώσωμεν τὰ κλάσματα

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \ldots \frac{100}{2}, \ldots \frac{1000}{2} \text{ κ.τ.λ.}$$

Ὁμοίως. Ἐκ τῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{3}$ μορφοῦμεν τὰ κλάσματα $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \ldots \frac{1000}{3}$, κ.τ.λ.

Ὁμοίως. Ἐκ τῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{100}$ μορφοῦμεν τὰ κλάσματα $\frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \frac{3}{100}, \frac{4}{100}, \ldots \frac{1000}{100}$ κ.τ.λ.

Ἐκ τούτων δὲ παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς·

α'.) *Τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς, γίνονται ἐκ τῆς ἰδίας κλασματικῆς μονάδος.*

Π.χ. Τὰ $\frac{4}{7}, \frac{8}{7}, \frac{3}{7}$ γίνονται ἀπὸ τὴν κλασματικὴν μονάδα $\frac{1}{7}$.

β'.) *Τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι διαφόρους παρονομαστάς, γίνονται καὶ ἀπὸ διαφόρους κλασματικὰς μονάδας.*

Π. χ. Τὰ $\frac{2}{6}, \frac{5}{12}, \frac{4}{3}$ γίνονται ἀπὸ τὰς κλασματικὰς μονάδας $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{3}$.

112. Ἑκάστη κλασματικὴ μονὰς εἶναι τοσούτῳ *μεγαλητέρα*, καθ' ὅσον ὁ παρονομαστὴς αὐτῆς εἶναι *μικρότερος*, τοσούτῳ δὲ *μικροτέρα*, καθ' ὅσον ὁ παρονομαστὴς αὐτῆς εἶναι *μεγαλήτερος*.

Π. χ. Αἱ κλασματικαὶ μονάδες $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ κατὰ σειρὰν μεγέθους ἔρχονται ὡς ἑξῆς $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι, διότι, καθ' ὅσον ὁ παρονομαστὴς εἶναι μικρότερος, ἐπὶ τοσούτῳ ἡ ἀκεραία μονὰς ἐκόπη εἰς ὀλιγώτερα ἴσα κομμάτια καὶ διὰ τοῦτο ταῦτα θὰ εἶναι μεγαλήτερα.

Σύγκρισις τῶν κλασμάτων πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

113. *Πᾶν κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἴσοι.*

Π. χ. Τὰ κλάσματα

$$\frac{2}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{5}{5},\ \frac{6}{6},\ \frac{20}{20},\ \frac{82}{82},\ \frac{100}{100},\ \text{κ.τ.λ.}$$

εἶναι ἴσα μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

Ὁ λόγος δὲ τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς. Διότι ἕκαστον τῶν τοιούτων κλασμάτων περιέχει ὅλας τὰς κλασματικὰς μονάδας, εἰς τὰς ὁποίας ἐκόπη ἡ ἀκεραία μονάς.

114. *Πᾶν κλάσμα εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ.*

Π. χ. Τὰ κλάσματα

$$\frac{2}{3},\ \frac{5}{7},\ \frac{6}{9},\ \frac{3}{14},\ \frac{18}{21},\ \frac{89}{110}\ \text{κ.τ.λ.}$$

εἶναι μικρότερα τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι, διότι ἕκαστον τῶν τοιούτων κλασμάτων περιέχει ὀλιγωτέρας κλασματικὰς μονάδας ἀπὸ ἐκείνας, εἰς τὰς ὁποίας ἐκόπη ἡ ἀκεραία μονάς.

115. *Πᾶν κλάσμα εἶναι μεγαλήτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλήτερος τοῦ παρονομαστοῦ.*

Π. χ. Τὰ κλάσματα

$$\frac{7}{5},\ \frac{18}{12},\ \frac{20}{15},\ \frac{7}{6},\ \frac{80}{79}\ \text{κ.τ.λ.}$$

εἶναι μεγαλήτερα τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Ὁ λόγος δὲ τούτου εἶναι, διότι ἕκαστον τῶν τοιούτων κλασμάτων περιέχει περισσοτέρας κλασματικὰς μονάδας ἀπὸ ἐκείνας, εἰς τὰς ὁποίας ἐκόπη ἡ ἀκεραία μονάς.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἀπαντήσατε ἐπὶ τῶν κλασμάτων

$$\frac{2}{3},\ \frac{5}{6},\ \frac{8}{9},\ \frac{4}{5},\ \frac{6}{9},\ \frac{28}{47},\ \frac{8}{8},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{17},\ \frac{15}{9},\ \frac{8}{17}$$

εἰς τὰς ἑξῆς ἐρωτήσεις.

α΄.) Πόσας κλασματικὰς μονάδας ἔχει ἕκαστον;

(2, 5, 8, 4, 6, 28, 8, 7, 17, 15, 8).

β΄.) Ἀπὸ ποίαν κλασματικὴν μονάδα γίνεται ἕκαστον;

$$\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{47},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{17},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{17}\right)$$

γ'.) Πῶς ἔρχονται κατὰ σειρὰν μεγέθους αἱ κλασματικαὶ αὐτῶν μονάδες;

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{17}, \frac{1}{47}\right)$$

δ'.) Ποῖα κλάσματα ἔχουσι τὸ αὐτὸ πλῆθος μονάδων καὶ πόσας;

$$\left(\text{Τὰ } \frac{8}{9}, \frac{8}{8}, \frac{8}{17}. \text{ Ἀπὸ ὀκτὼ ἕκαστον.}\right)$$

ε'.) Ποῖα γίνονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν κλασματικὴν μονάδα καὶ ἀπὸ ποίαν;

$$\begin{cases} \text{Τὰ } \frac{8}{9}, \frac{6}{9}, \frac{15}{9} \text{ ἀπὸ τὴν } \frac{1}{9} \\ \text{καὶ τὰ } \frac{4}{5}, \frac{7}{5} \text{ ἀπὸ τὴν } \frac{1}{5} \end{cases}$$

ϛ'.) Ποῖα γίνονται ἀπὸ διαφόρους κλασματικὰς μονάδας καὶ ἀπὸ ποίας;

$$\left(\text{Τὰ } \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{8}{9}, \frac{4}{5}, \frac{28}{47}, \frac{17}{17}\right)$$

$$\left(\text{καὶ ἀπὸ } \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{5}, \frac{1}{47}, \frac{1}{17}\right)$$

ζ'.) Ποῖα εἶναι ἴσα μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα; $\left(\text{Τὰ } \frac{8}{8}, \frac{17}{17}\right)$

Παρατήρησις. Ἡ μόνη διαφορὰ τῶν $\frac{8}{8}$ καὶ $\frac{17}{17}$ ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα εἶναι, ὅτι ἡ ἀκεραία μονὰς εἶναι ὁλόκληρος, ἐν ᾧ εἰς μὲν τὸ $\frac{8}{8}$ ἔχει αὕτη κοπῆ εἰς 8 ἴσα μέρη, εἰς δὲ τὸ $\frac{17}{17}$ ἔχει κοπῆ εἰς 17 ἴσα μέρη.

η'.) Ποῖα εἶναι μικρότερα τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ κατὰ πόσας κλασματικὰς μονάδας;

$$\text{Τὰ } \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{8}{9}, \frac{4}{5}, \frac{6}{9}, \frac{28}{47}, \frac{8}{17}$$

τὰ ὁποῖα εἶναι μικρότερα κατὰ

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{5}, \frac{3}{9}, \frac{19}{47}, \frac{9}{17}$$

θ'.) Ποῖα εἶναι μεγαλήτερα τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ κατὰ πόσας κλασματικὰς μονάδας; Τὰ $\frac{8}{5}, \frac{15}{9}$

τὰ ὁποῖα εἶναι μεγαλήτερα κατὰ $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{9}$.

Τροπὴ ἀκεραίου εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα.

116. *Ἰσοδύναμοι λέγονται οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι εἶναι ἴσοι κατὰ τὴν ἀξίαν, ἀλλὰ γίνονται ἀπὸ διαφόρους μονάδας.*

Π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 1, $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{10}{10}$ εἶναι ἰσοδύναμοι ἀριθμοί.

117. *Τροπὴ ἀκεραίου εἰς κλάσμα λέγεται ἡ εὕρεσις κλάσματος ἰσοδυνάμου πρὸς τὸν ἀκέραιον.*

118. *Ἀκέραιον ἀριθμὸν ὁποιονδήποτε τρέπομεν εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα, τὸ ὁποῖον νὰ γίνηται ἀπὸ δεδομένην κλασματικὴν μονάδα, ἀφ' οὗ ἐξετάσωμεν πόσας τοιαύτας κλασματικὰς μονάδας κάμνει ἡ ἀκεραία μονὰς καὶ πολλαπλασιάσωμεν ταύτας ἐπὶ τὸν δοθέντα ἀκέραιον.*

Π. χ. Νὰ τραπῇ ὁ 4 εἰς *ἕβδομα*.

Ἐπειδὴ ἡ 1 ἀκεραία μονὰς ἔχει $\frac{7}{7}$, ἤτοι 7 ἕβδομα, αἱ 4 ἀκέραιαι μονάδες θὰ ἔχωσι 4 φορὰς 7 ἕβδομα, ἤτοι 28 ἕβδομα, ὅπερ γράφεται $\frac{28}{7}$.

Ὁμοίως. Ὁ 9 τρεπόμενος εἰς *πέμπτα* δίδει τὸ κλάσμα $\frac{45}{5}$.

Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων κλάσματος.

119. *Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου δι' ἀκεραίου δύναται νὰ ληφθῇ ὡς κλάσμα, τοῦ ὁποίου ἀριθμητὴς νὰ εἶναι ὁ διαιρετέος καὶ παρονομαστὴς ὁ διαιρέτης.*

Π. χ. Τὸ πηλίκον τοῦ 2 διὰ 3 εἶναι $\frac{2}{3}$.

Ὁμοίως. Τὸ πηλίκον τοῦ 15 διὰ τοῦ 4 ὑπὸ μορφὴν κλασματικὴν εἶναι $\frac{15}{4}$.

* Ὁ λόγος δὲ τούτου εἶναι, διότι, διὰ νὰ διαιρέσωμεν π. χ. τὸν 2 διὰ 3, τρέπομεν τὸν 2 εἰς *τρίτα*, ὅτε γίνεται 6 *τρίτα*, τὰ ὁποῖα διαιροῦντες διὰ 3 εὑρίσκομεν πηλίκον 2 *τρίτα*, ἤτοι $\frac{2}{3}$.

* Ὁμοίως τὸ πηλίκον τοῦ 15 διὰ 4 ὑπὸ κλασματικὴν μορφὴν εὑ-

ρίσκομεν τρέποντες τὸν διαιρετέον 15 εἰς *τέταρτα*, ὅτε εὑρίσκομεν 60 τέταρτα καὶ ἔχομεν 60 τέταρτα : 4=15 τέταρτα, ἤτοι $\frac{15}{4}$.

Παρατήρησις. Τὸ πηλίκον ἀκεραίου τινὸς διαιρετοῦ δι' ἄλλου ἀκεραίου δύναται νὰ ληφθῇ ὑπὸ δύο μορφάς.

Π. χ. Τὸ 8 διὰ 2 δίδει πηλίκον 4.

Ἀλλὰ καὶ

Τὸ 8 διὰ 2 δίδει πηλίκον $\frac{8}{2}$.

Καὶ ἡ μὲν πρώτη μορφὴ τοῦ πηλίκου ἤτοι τὸ 4 προκύπτει διὰ τῆς *ἐλαττώσεως* τῶν μονάδων τοῦ διαιρετέου κατὰ τόσας φοράς, ὅσας δεικνύει ὁ διαιρέτης· ἡ δὲ δευτέρα μορφὴ τοῦ πηλίκου ἤτοι τὸ $\frac{8}{2}$ προκύπτει διὰ τῆς *σμικρύνσεως* τῶν μονάδων τοῦ διαιρετέου κατ' ἰσαρίθμους φοράς, χωρὶς τὸ πλῆθος αὐτῶν νὰ μεταβληθῇ.

120. *Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας κλάσματός τινος, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.*

Π. χ. Νὰ ἐξαχθῶσιν αἱ ἀκέραιαι μονάδες τοῦ $\frac{17}{5}$.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \hline 2 & 3\ \frac{2}{5} \\ 0 & \end{array}$$

ὥστε τὸ $\frac{17}{5}$ περιέχει 3 ἀκεραίας μονάδας καὶ $\frac{2}{5}$ τῆς ἀκεραίας μονάδος.

* Ὁ λόγος δὲ τούτου εἶναι, διότι τὸ κλάσμα $\frac{17}{5}$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πηλίκον τοῦ ἀκεραίου 17 διὰ 5 (§ 116). Ἀλλὰ τὸ πηλίκον τῶν ἀριθμῶν τούτων εὑρίσκομεν καὶ ὑπὸ ἄλλην μορφὴν διαιροῦντες ὡς εἰς τοὺς ἀκεραίους, ὅτε λαμβάνομεν ὡς πηλίκον 3 ἀκεραίας μονάδας καὶ ὑπόλοιπον 2 ἀκεραίας μονάδας, τὰς 2 δὲ ταύτας μονάδας τρέποντες εἰς πέμπτα εὑρίσκομεν 10 *πέμπτα*· ταῦτα δὲ διαιροῦντες διὰ 5 εὑρίσκομεν πηλίκον 2 πέμπτα, ἤτοι $\frac{2}{5}$. Ἄρα τὸ

ἀκριβὲς πηλίκον τοῦ 17 διὰ 5 εἶναι οὕτω $3\frac{2}{5}$ ὥστε $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$.

Σημείωσις. Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ γραφῇ ὡς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα.

Π. χ. Ὁ ἀριθμὸς 2 δύναται νὰ γραφῇ $\frac{2}{1}$, διότι ἐξάγοντες τὰς ἀκεραίας μονάδας τοῦ $\frac{2}{1}$ εὑρίσκομεν 2.

Σύγκρισις κλασμάτων μεταξύ των.

121. *Μεταξὺ κλασμάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, μεγαλήτερον εἶναι τὸ ἔχον ἀριθμητὴν μεγαλήτερον.*

Π. χ. Ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{8}$ καὶ $\frac{6}{8}$ μεγαλήτερον εἶναι τὸ $\frac{6}{8}$, διότι ἔχει μεγαλήτερον ἀριθμητὴν καὶ ἑπομένως περισσοτέρας κλασματικὰς μονάδας.

122. *Μεταξὺ κλασμάτων τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν μεγαλήτερον εἶναι τὸ ἔχον μικρότερον παρονομαστήν.*

Π. χ. Ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{8}$ καὶ $\frac{3}{4}$ μεγαλήτερον εἶναι τὸ $\frac{3}{4}$, διότι ἔχει παρονομαστὴν μικρότερον καὶ ἑπομένως αἱ κλασματικαί του μονάδες εἶναι μεγαλήτεραι.

123. *Ἐὰν καὶ τοὺς δύο ὅρους κλάσματός τινος πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται.*

Π. χ. Τὸ $\frac{3}{4}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{3\times6}{4\times6}$ ἤτοι $\frac{18}{24}$.

Ὁμοίως. Τὸ $\frac{6}{8}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{6:2}{8:2}$ ἤτοι $\frac{3}{4}$.

* Ὁ λόγος τούτου εἶναι, διότι καθ' ὅσας φορὰς αὐξάνομεν τὸ ποσὸν τῶν κλασματικῶν μονάδων διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ἀριθμητοῦ, κατὰ τόσας φορὰς σμικρύνομεν καὶ ἑκάστην ἐκ τῶν προκυπτουσῶν τούτων μονάδων διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ. Ἑπομένως ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος μένει ἀμετάβλητος. Τὸ ἀντίστροφον δὲ συμβαίνει διαιροῦντες καὶ τοὺς δύο ὅρους μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Περὶ ἁπλοποιήσεως.

124. *Ἁπλοποίησις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐκ δοθέντος κλάσματος εὑρίσκομεν ἄλλο ἰσοδύναμον, ἀλλὰ μὲ μικροτέρους ὅρους.*

125. *Διὰ ν' ἁπλοποιήσωμεν κλάσμα τι, διαιροῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Π. χ. Ν' ἁπλοποιηθῇ τὸ $\frac{4}{6}$.

Διαιροῦντες καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{4}{6}$ διὰ 2, εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον κλάσμα $\frac{2}{3}$.

Ὁμοίως. Ἁπλοποιοῦντες τὰ κλάσματα

$$\frac{5}{15},\ \frac{4}{20},\ \frac{15}{12},\ \frac{7}{14},\ \frac{27}{9},\ \frac{4}{12}$$

εὑρίσκομεν ὡς ἰσοδύναμα τὰ κλάσματα

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{5}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{3}$$

Σημείωσις α'. Κλάσμα τι δύναται ν' ἁπλοποιῆται καὶ μὲ περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς ἀριθμούς.

Π. χ. Τὸ κλάσμα $\frac{12}{24}$ ἁπλοποιεῖται διὰ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 6, 12, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν ὡς ἰσοδύναμα τοῦ $\frac{12}{24}$ τὰ κλάσματα

$$\frac{6}{12},\ \frac{4}{8},\ \frac{3}{6},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{2}$$

Σημείωσις β'. Ὅταν κλάσματός τινος δὲν διαιρῶνται καὶ οἱ δύο ὅροι μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τότε τὸ κλάσμα δὲν ἁπλοποιεῖται.

Π. χ. Τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{17}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ δὲν ἁπλοποιοῦνται.

Τροπὴ κλασμάτων εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς.

126. Τὰ κλάσματα διακρίνομεν εἰς *ὁμώνυμα* καὶ *ἑτερώνυμα*.

127. *Ὁμώνυμα λέγονται τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.*

Π. χ. Τὰ $\frac{5}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{21}{3}$, ἢ τὰ $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$ λέγονται ὁμώνυμα.

128. *Ἑτερώνυμα λέγονται τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι διαφόρους παρονομαστάς.*

Π. χ. Τὰ $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, κ.τ.λ. λέγονται ἑτερώνυμα.

129. Εἰς τὴν τροπὴν τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α΄) Ὅταν τὰ κλάσματα εἶναι *δύο*.

Β΄) Ὅταν τὰ κλάσματα εἶναι *ὁσαδήποτε*.

Α΄. Περίπτωσις.

130. Δύο ἑτερώνυμα κλάσματα τρέπονται εἰς ὁμώνυμα κατὰ δύο τρόπους.

Α΄. Τρόπος.

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἑτέρου.

Β΄. Τρόπος.

Ἐξετάζομεν τὸν μεγαλήτερον τῶν παρονομαστῶν ἂν διαιρῆται διὰ τοῦ ἑτέρου. Καὶ ἂν μὲν διαιρῆται, τὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ἑτέρου κλάσματος καὶ μὲ τὸ προκῦπτον πηλίκον πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος τούτου. Ἂν δὲ δὲν διαιρῆται, τὸν διπλασιάζομεν, τὸν τριπλασιάζομεν καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ἕως ὅτου εὕρωμεν ἀριθμὸν διαιρετὸν καὶ διὰ τῶν δύο παρονομαστῶν καὶ τότε πράττομεν ὡς πρότερον.

Π. χ. Νὰ τραπῶσι τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς.

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 6 τοῦ ἑτέρου κλάσματος καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{5}{6}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 4 τοῦ ἄλλου κλάσματος, ὅτε ἔχομεν

$$\overset{6}{\frac{3}{4}},\ \overset{4}{\frac{5}{6}},\ \text{ἤτοι}\ \frac{18}{24},\ \frac{20}{24}$$

ἢ καὶ ἄλλως

ἐπειδὴ ὁ μεγαλήτερος παρονομαστὴς 6 τῶν κλασμάτων $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ ἑτέρου παρονομαστοῦ, διὰ τοῦτο τὸν διπλασιάζομεν, ὅτε γίνεται 12, τὸ ὁποῖον διαιρεῖται. Μετὰ ταῦτα τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{3}{4}$ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ 12 διὰ 4, ἤτοι 3. Ὁμοίως τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{5}{6}$ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ 12 διὰ 6, ἤτοι 2, ὅτε ἔχομεν

$$\overset{3}{\frac{3}{4}} \quad \overset{2}{\frac{5}{6}} \text{ ἤτοι } \frac{9}{12} \quad \frac{10}{12}$$

Οὕτω τρέψαντες τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς, κατὰ μὲν τὸν ἕνα τρόπον εὕρομεν ὡς ἰσοδύναμα (§ 123) τὰ κλάσματα $\frac{18}{24}$ $\frac{20}{24}$, κατὰ δὲ τὸν ἄλλον τρόπον τὰ $\frac{9}{12}$ $\frac{10}{12}$.

Β'. Περίπτωσις.

131. *Ὁσαδήποτε ἑτερώνυμα κλάσματα τρέπονται εἰς ὁμώνυμα κατὰ δύο τρόπους.*

Α'. Τρόπος.

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων.

Β'. Τρόπος.

Ἐξετάζομεν τὸν μεγαλήτερον τῶν παρονομαστῶν ἐὰν διαιρῆται δι' ὅλων τῶν παρονομαστῶν. Καὶ ἂν μὲν διαιρῆται, τὸν διαιροῦμεν δι' ἑκάστου τῶν ἄλλων παρονομαστῶν καὶ μὲ τὸ προκῦπτον πηλίκον πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος. Ἐὰν δὲ δὲν διαιρῆται, τὸν διπλασιάζομεν, τὸν τριπλασιάζομεν καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ἕως ὅτου εὕρωμεν ἀριθμὸν διαιρετὸν δι' ὅλων τῶν παρονομαστῶν καὶ τότε πράττομεν ὡς πρότερον.

Π. χ. Νὰ τραπῶσι τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς.

Πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{2}{3}$ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν παρονομαστῶν 4 καὶ 6, ἤτοι 24, ὁμοίως τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν παρονομαστῶν 3 ἐπὶ 6, ἤτοι 18, ὁμοίως τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{5}{6}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν παρονομαστῶν 3 ἐπὶ 4, ἤτοι 12, ὅτε

ἔχομεν $\overset{24}{\frac{2}{3}}\ \overset{18}{\frac{3}{4}}\ \overset{12}{\frac{5}{6}}$, ἤτοι $\frac{48}{72}\ \frac{54}{72}\ \frac{60}{72}$

ἢ καὶ ἄλλως

ἐπειδὴ ὁ μεγαλήτερος παρονομαστὴς 6 δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 4, διπλασιάζομεν τὸν 6, ὅτε γίνεται 12, τὸ ὁποῖον διαιρεῖται δι' ὅλων τῶν παρονομαστῶν. Μετὰ ταῦτα τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{2}{3}$ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ 12 διὰ 3, ἤτοι 4, ὁμοίως τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ 12 διὰ 4, ἤτοι 3, καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{5}{6}$ ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ 12 διὰ 6, ἤτοι 2,

ὅτε ἔχομεν $\overset{4}{\frac{2}{3}}\ \overset{3}{\frac{3}{4}}\ \overset{2}{\frac{5}{6}}$ ἤτοι $\frac{8}{12}\ \frac{9}{12}\ \frac{10}{12}$.

Οὕτω τρέψαντες εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστὰς τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{5}{6}$ εὕρομεν ὡς ἰσοδύναμα (§ 123) κατὰ μὲν τὸν ἕνα τρόπον τὰ $\frac{48}{72}\ \frac{54}{72}\ \frac{60}{72}$, κατὰ δὲ τὸν ἕτερον τρόπον τὰ $\frac{8}{12}\ \frac{9}{12}\ \frac{10}{12}$.

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν δύο τρόπων τῆς τροπῆς τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα ὁ δεύτερος τρόπος εἶναι προτιμότερος, διότι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον παρέχει κλάσματα μὲ μικροτέρους ὅρους.

Σημείωσις. Διὰ νὰ συγκρίνωμεν δύο ἢ περισσότερα κλάσματα μεταξύ των, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς.

Π. χ. Νὰ εὕρωμεν ποῖον ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{2}{3}\ \frac{4}{6}\ \frac{3}{4}$ εἶναι μεγαλήτερον.

Τρέποντες τὰ δοθέντα κλάσματα εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστὰς εὑρίσκομεν τὰ $\frac{8}{12}$ $\frac{8}{12}$ $\frac{9}{12}$

ἐξ ὧν παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{6}$ ἔδοσαν τὸ αὐτὸ κλάσμα $\frac{8}{12}$, ἄρα τὸ $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{6}$ εἶναι ἴσα, τὸ δὲ $\frac{3}{4}$ εἶναι μεγαλήτερον τούτων, διότι ἔδωκε τὸ $\frac{9}{12}$, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλήτερον τοῦ $\frac{8}{12}$.

Πρόσθεσις.

132. *Πρόσθεσις εἶναι ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἐκ πασῶν τῶν μονάδων (ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν), τὰς ὁποίας ἔχουσι δύο ἢ περισσότεροι δοθέντες ἀριθμοί.*

133. Ἄθροισμα ἢ κεφάλαιον λέγεται ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον σχηματίζομεν ἐκ πασῶν τῶν μονάδων (ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν) τῶν προσθετέων.

134. Εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν κλασμάτων διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α΄) Ὅταν οἱ προσθετέοι γίνωνται ἐκ τῆς *αὐτῆς μονάδος*.

Β΄) Ὅταν οἱ προσθετέοι γίνωνται ἐκ *διαφόρων μονάδων*.

Α΄ περίπτωσις.

135. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσματα γινόμενα ἀπὸ τὴν ἰδίαν κλασματικὴν μονάδα, προσθέτομεν μόνον τοὺς ἀριθμητὰς καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα θέτομεν παρονομαστὴν τὸν ἴδιον.*

Π.χ. Νὰ προστεθῶσι τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{6}{4}$.

Κατὰ τὸν κανόνα (§ 135) τὰ

$\frac{3}{4}+\frac{5}{4}+\frac{6}{4}$ δίδουν ἄθροισμα $\frac{14}{4}$, ἤτοι $3\frac{2}{4}$.

Ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον προσθέτομεν μόνον τοὺς ἀριθμητὰς εἶναι, διότι μόνον εἰς αὐτοὺς ὑπάρχει τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἑκάστου κλάσματος, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ζητεῖται (§ 133). Θέτομεν δὲ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα παρονομαστὴν τὸν ἴδιον διὰ νὰ σημάνωμεν, ὅτι ἡ μονὰς ἐκ τῆς ὁποίας γίνεται τὸ ἄθροισμα εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν μονάδα ἐκ τῆς ὁποίας γίνονται οἱ προσθετέοι.

Β' περίπτωσις.—Γενικὸς κανὼν προσθέσεως.

136. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, γι-ομένους ἐκ διαφόρων μονάδων, κάμνομεν πρῶτον αὐτοὺς νὰ ίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος καὶ ἔπειτα τοὺς προσθέτομεν.*

Ὁ λόγος δὲ τούτου εἶναι, διότι ἀριθμοὶ γινόμενοι ἐκ διαφόρων ονάδων δὲν δύνανται νὰ προστεθῶσι. Τοῦτο δὲ γνωρίζομεν καὶ ἐκ ῶν ἀκεραίων, διότι διὰ νὰ προσθέσωμεν π. χ. δεκάδας εἰς μονάδας πρεπε πρῶτον νὰ τρέψωμεν τὰς δεκάδας εἰς μονάδας καὶ ἔπειτα νὰ ὰς προσθέσωμεν.

Π. χ. Διὰ νὰ προσθέσωμεν 2 δεκάδας εἰς 5 μονάδας, τρέπομεν ρῶτον τὰς 2 δεκάδας εἰς μονάδας, ὁπότε γίνονται 20 μονάδες, καὶ ἰς ταύτας προσθέτομεν ἔπειτα τὰς 5 μονάδας, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν ν ὅλῳ 25 μονάδας.

Πρακτικοὶ κανόνες προσθέσεως.

137. Στηριζόμενοι εἰς τὸν γενικὸν κανόνα (§ 136), δυνάμεθα εὐκό-ως νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρόσθεσιν ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ προστεθῶσι τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}.$$

Λύσις. Τρέπομεν πρῶτον τὰ κλάσματα εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονο-μαστάς, (διὰ νὰ κάμωμεν αὐτὰ νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος), ὅτε ὑρίσκομεν τὰ

$$\frac{8}{12}+\frac{9}{12}+\frac{10}{12}.$$

Ἔπειτα, προσθέτοντες τὰ κλάσματα ταῦτα, εὑρίσκομεν τὸ ζητού-μενον ἄθροισμα $\frac{27}{12}$ ἤτοι $2\ \frac{3}{12}$.

Ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

138. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλά-σματα, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα τὰ προσ-θέτομεν.*

Π. χ. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{27}{12}=2\ \frac{3}{12}$

139. *Μικτὸς ἀριθμὸς λέγεται ὁ συγκείμενος ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος.*

Π. χ. Οἱ $2+\frac{3}{4}$ καὶ $3+\frac{4}{5}$ εἶναι μικτοὶ ἀριθμοί, καὶ οἱ όποῖ
συντόμως γράφονται $2\frac{3}{4}$ καὶ $3\frac{4}{5}$.

140. *Τροπὴ μικτοῦ εἰς κλασματικὸν λέγεται ἡ εὕρεσις κλά σματος ἰσοδυνάμου πρὸς τὸν μικτόν.*

141. *Ἡ τροπὴ μικτοῦ εἰς κλασματικὸν γίνεται, ἐὰν προσθέσω μεν τὸν ἀκέραιον εἰς τὸ κλάσμα.*

Παράδειγμα 2ον. Νὰ τραπῇ ὁ μικτὸς $4\frac{3}{5}$ εἰς ἰσοδύναμ κλασματικόν.

Λύσις. Πρὸς τοῦτο προσθέτομεν τὸν 4 εἰς τὸ $\frac{3}{5}$. Δι' ὃ κάμνομ πρῶτον τὸν 4 νὰ γίνηται ἀπὸ τὴν κλασματικὴν μονάδα $\frac{1}{5}$ (§ 136) ὅτε γίνεται $\frac{20}{5}$. Τοιουτοτρόπως λοιπὸν θὰ ἔχωμεν

$$\frac{20}{5}+\frac{3}{5}=\frac{23}{5}$$

ὥστε ὁ μικτὸς $4\frac{3}{5}$ τρεπόμενος εἰς κλάσμα γίνεται $\frac{23}{5}$.

ἢ καὶ ἄλλως

Γράφομεν τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ ὑπὸ μορφὴν κλασματικήν, θ τοντες παρονομαστὴν τὴν μονάδα, ὅτε ἔχομεν

$$4\frac{3}{5}=\frac{4}{1}+\frac{3}{5}$$

καὶ ἤδη τρέποντες τὰ κλάσματα εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστὰς κ προσθέτοντες ἔχομεν

$$4\frac{3}{5}=\frac{\overset{5}{4}}{1}+\frac{\overset{1}{3}}{5}=\frac{20}{5}+\frac{3}{5}=\frac{23}{5}.$$

Τοιουτοτρόπως λοιπὸν καὶ πάλιν ἐκ τοῦ μικτοῦ $4\frac{3}{5}$ εὕρομεν κλάσμα $\frac{23}{5}$.

Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον $\frac{23}{5}$ εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ $4\frac{3}{5}$, καὶ ἐὰν τ έραιον 4 τοῦ μικτοῦ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 5 ῦ κλάσματός του καὶ τὸ γινόμενον 20 προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμητὴν 3 τοῦ κλάσματος.

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

142. *Διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος καὶ τὸ γινόμενον νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμητήν.*

Π. χ. Ὁ μικτὸς $7\frac{4}{5}$ τρέπεται οὕτως εἰς τὸ κλάσμα $\frac{39}{5}$.

Παράδειγμα 3ον. Νὰ προστεθῶσιν οἱ μικτοὶ

$$2\frac{3}{4}+3\frac{4}{5}+5\frac{2}{10}$$

Προσθέτοντες χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα, ἐκ μὲν τῶν ἀκεραίων $2+3+5$ ἔχομεν ἄθροισμα 10, ἐκ δὲ τῶν κλασμάτων ἔχομεν

$$\overset{5}{\frac{3}{4}}+\overset{4}{\frac{4}{5}}+\overset{2}{\frac{2}{10}}=\frac{15}{20}+\frac{16}{20}+\frac{4}{20}=\frac{35}{20}=1\frac{15}{20}.$$

Μετὰ ταῦτα προσθέτοντες τὸ ἄθροισμα $1\frac{15}{20}$ τῶν κλασμάτων εἰς τὸ ἄθροισμα 10 τῶν ἀκεραίων, ἔχομεν τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα $11\frac{15}{20}$.

ἢ καὶ ἄλλως

Ἐπειδὴ $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$, $3\frac{4}{5}=\frac{19}{5}$ καὶ $5\frac{2}{10}=\frac{52}{10}$

ἄρα ἔχομεν ἀντὶ τῶν μικτῶν τὰ κλάσματα

$$\overset{5}{\frac{11}{4}}+\overset{4}{\frac{19}{5}}+\overset{2}{\frac{52}{10}}=\frac{55}{20}+\frac{76}{20}+\frac{104}{20}=\frac{235}{20}=11\frac{15}{20}.$$

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

143. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν ὁσουσδήποτε μικτούς, ἢ προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα ἢ τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα προσθέτομεν αὐτά.*

Ἀφαίρεσις.

144. *Ἀφαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐλαττοῦμεν*

τὸν μειωτέον κατὰ τόσας μονάδας (ἀκεραίας ἢ κλασματικάς), ὅσας περιέχει ὁ ἀφαιρετέος.

145. Διαφορὰ ἢ ὑπόλοιπον λέγεται ὁ ἀριθμός, κατὰ τὸν ὁποῖον ὑπερτερεῖ ὁ μειωτέος τὸν ἀφαιρετέον.

146. Εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν κλασμάτων διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α΄.) Ὅταν ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος γίνωνται *ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος.*

Β΄.) Ὅταν ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος γίνωνται *ἐκ διαφόρων μονάδων.*

Α΄ περίπτωσις.

147. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσματα γινόμενα ἀπὸ τὴν ἰδίαν κλασματικὴν μονάδα ἀφαιροῦμεν μόνον τοὺς ἀριθμητὰς καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν θέτομεν παρονομαστὴν τὸν ἴδιον.*

Π. χ. Ν' ἀφαιρεθῇ ἐκ τοῦ $\frac{5}{6}$ τὸ $\frac{3}{6}$.

Κατὰ τὸν κανόνα (§ 145) τὰ κλάσματα

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{6} \text{ δίδουν διαφορὰν } \frac{2}{6}.$$

Ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον ἀφηρέσαμεν μόνον τοὺς ἀριθμητὰς εἶναι, διότι μόνον εἰς αὐτοὺς ὑπάρχει τὸ πλῆθος τῶν εἰς ἕκαστον κλάσμα ὑπαρχουσῶν κλασματικῶν μονάδων, τῶν ὁποίων τὴν διαφορὰν ζητοῦμεν (§ 144). Θέτομεν δὲ ὑπὸ τὴν διαφορὰν παρονομαστὴν τὸν ἴδιον, διὰ νὰ σημάνωμεν ὅτι ἡ μονὰς ἐκ τῆς ὁποίας γίνεται ἡ διαφορὰ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν μονάδα ἐκ τῆς ὁποίας γίνεται ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος.

Β΄ περίπτωσις.—Γενικὸς κανὼν ἀφαιρέσεως.

148. *Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν δύο ἀριθμοὺς γινομένους ἀπὸ διαφόρους μονάδας, κάμνομεν πρῶτον αὐτοὺς νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος καὶ ἔπειτα τοὺς ἀφαιροῦμεν.*

Ὁ λόγος τούτου εἶναι, διότι ἀριθμοὶ γινόμενοι ἐκ διαφόρων μονάδων δὲν δύνανται ν' ἀφαιρεθῶσι.

Πρακτικοὶ κανόνες ἀφαιρέσεως.

149. Στηριζόμενοι εἰς τὸν γενικὸν κανόνα (§ 148), δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν εὐκόλως τὴν ἀφαίρεσιν ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἀφαιρεθῇ ἐκ τοῦ $\frac{5}{6}$ τὸ $\frac{2}{3}$.

Λύσις. Τρέπομεν πρῶτον τὰ κλάσματα εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστὰς (διὰ νὰ κάμωμεν αὐτὰ νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος), ὅτε εὑρίσκομεν τὰ $\frac{5}{6}-\frac{4}{6}$.

Ἔπειτα, ἀφαιροῦντες ταῦτα, εὑρίσκομεν διαφορὰν $\frac{1}{6}$.

Ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

150. *Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα τὰ ἀφαιροῦμεν.*

Π. χ. $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{15}{20}-\frac{8}{20}=\frac{7}{20}$.

Παράδειγμα 2ον. Ν' ἀφαιρεθῇ ἐκ τοῦ μικτοῦ $4\frac{2}{3}$ ὁ μικτὸς $1\frac{3}{7}$.

Λύσις. Ἀφαιροῦντες τοὺς ἀκεραίους ἔχομεν διαφορὰν 3. Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν δὲ καὶ τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}-\frac{3}{7}$ τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα (§ 148), ὅτε ἔχομεν $\frac{14}{21}-\frac{9}{21}$. Ἀφαιροῦντες δὲ ταῦτα, εὑρίσκομεν διαφορὰν $\frac{5}{21}$. Ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν $4\frac{2}{3}-1\frac{3}{7}$ εἶναι $2\frac{5}{21}$.

ἢ καὶ ἄλλως

Ἐπειδὴ $4\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$ καὶ $\frac{13}{7}=\frac{10}{7}$

ἄρα ἀντὶ τῶν μικτῶν ἔχομεν τὰ κλάσματα

$$\frac{14}{3}-\frac{10}{7}=\frac{98}{21}-\frac{30}{21}=\frac{68}{21}=3\frac{5}{21}.$$

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

151. *Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ μικτοῦ, ἢ ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα, ἢ τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν αὐτά.*

Π. χ. $3\frac{4}{5}-2\frac{3}{4}=1\frac{16}{20}-\frac{15}{20}=1\frac{1}{20}$

ἢ καὶ $3\frac{4}{5}-2\frac{3}{4}=\frac{19}{5}-\frac{11}{4}=\frac{76}{20}-\frac{55}{20}=\frac{21}{20}=1\frac{1}{20}$.

Παρατήρησις. Ὅταν τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλήτερον τοῦ κλάσματος τοῦ μειωτέου, τότε ἢ πρέπει τοὺς ὑπάρχοντας μικτοὺς νὰ τρέψωμεν εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν, ἢ νὰ λάβωμεν μίαν μονάδα ἐκ τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ μειωτέου καὶ νὰ τὴν προσθέσωμεν εἰς τὸ κλάσμα του καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν.

Π.χ. Ν' ἀφαιρεθῇ ἐκ τοῦ $5\,\frac{3}{7}$ ὁ $2\,\frac{3}{4}$.

Τρέποντες τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦντες αὐτὰ ἔχομεν $\frac{38}{7}-\frac{11}{4}=\frac{152}{28}-\frac{77}{28}=\frac{75}{28}=2\,\frac{19}{28}$

ἢ καὶ ἄλλως.

Τρέποντες τὰ κλάσματα τῶν μικτῶν εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς, ἔχομεν

$$5\,\frac{3}{7}-2\,\frac{3}{4}=5\,\frac{12}{28}-2\,\frac{21}{28}.$$

Ἔπειτα, ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{21}{28}$ τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλήτερον τοῦ κλάσματος $\frac{12}{28}$ τοῦ μειωτέου, λαμβάνομεν μίαν μονάδα ἐκ τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ μειωτέου καὶ τὴν προσθέτομεν εἰς τὸ κλάσμα του, ὅτε γίνεται $\frac{28}{28}+\frac{12}{28}=\frac{40}{28}$ καὶ ἔχομεν $4\,\frac{40}{28}-2\,\frac{21}{28}$.

Μετὰ δὲ ταῦτα, ἀφαιροῦντες χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα, εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν $2\,\frac{19}{28}$.

Παράδειγμα 3ον. Ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου 2 τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$.

Λύσις. Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 2 τὸ $\frac{3}{4}$, λαμβάνομεν μίαν μονάδα ἐκ τοῦ ἀκεραίου 2 καὶ τὴν κάμνομεν τέταρτα, ὅτε ἔχομεν $2-\frac{3}{4}=1\,\frac{4}{4}-\frac{3}{4}$. Ἔπειτα δέ, ἀφαιροῦντες εὑρίσκομεν διαφορὰν $1\,\frac{1}{4}$.

Ὁμοίως. Ὁ $4-\frac{2}{7}=3\,\frac{7}{7}-\frac{2}{7}=3\,\frac{5}{7}$.

Παράδειγμα 4ον. Νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 9 ὁ μικτὸς $2\frac{3}{5}$.

Λύσις. Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 9 τὸν $2\frac{3}{5}$ λαμβάνομεν μίαν μονάδα ἐκ τοῦ μειωτέου 9 καὶ τὴν τρέπομεν εἰς πέμπτα, ὅτε ἔχομεν $9-2\frac{3}{5}=8\frac{5}{5}-2\frac{3}{5}$.

Ἔπειτα δέ, ἀφαιροῦντες χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὸ κλάσματα, εὑρίσκομεν διαφορὰν $6\frac{2}{5}$.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν παραδειγμάτων τούτων μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

152. *Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἢ μικτὸν ἀπὸ ἀκέραιον, τρέπομεν μίαν μονάδα τοῦ ἀκεραίου εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν.*

Π. χ. $15-5\frac{2}{3}=14\frac{3}{3}-5\frac{2}{3}=9\frac{1}{3}$.

Σημείωσις. Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι ἀδύνατος, ὅταν ὁ ἀφαιρετέος εἶναι μεγαλήτερος τοῦ μειωτέου.

Ζητήματα.

1) Ποῖος ἀριθμὸς προστιθέμενος εἰς τὸν $\frac{2}{3}$ δίδει τὸν $\frac{3}{4}$; $\left(\text{ὁ } \frac{1}{12}\right)$

2) Τὸ $\frac{1}{20}$ ἀριθμοῦ τινος κατὰ 30 αὐξηθὲν γίνεται ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ. Ζητεῖται ποῖον μέρος τοῦ ἀγνώστου ἀριθμοῦ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 30; $\left(\text{Τὰ } \frac{3}{40}\right)$

Σημείωσις. Τὸ μὲν $\frac{1}{8}$ ἐπειδὴ εἶναι ἄθροισμα τοῦ $\frac{1}{20}$ τοῦ ἀγνώστου πλέον 30, ἤτοι $\frac{1}{20}+30$, δύναται νὰ ληφθῇ ὡς μειωτέος, ὅτε, ἐὰν λάβωμεν τὸ $\frac{1}{20}$ ὡς ἀφαιρετέον, ἡ διαφορά των θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸν 30.

Πολλαπλασιασμός.

153. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α'.) *Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος.*

Β'.) *Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλάσμα.*

Σημείωσις. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μικτὸς, δηλ. ἀκέραιος καὶ κλάσμα, τότε ἢ ἐφαρμόζομεν καὶ τὰς δύο ταύτας περιπτώσεις ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἐφαρμόζομεν μόνον τὴν δευτέραν περίπτωσιν.

Α' περίπτωσις. **Πολλαπλασιαστὴς ἀκέραιος.**

154. *Πολλαπλασιασμὸς λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας μεγεθύνομεν τὸν πολλαπλασιαστέον κατὰ τόσας φοράς, ὅσας ἀκεραίας μονάδας ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής.*

155. Γινόμενον λέγεται τὸ ἐξαγόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον εἶναι τόσας φορὰς μεγαλήτερον τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστής.

* Γενικὸς κανὼν πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου.

156. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον εἶναι τόσας φορὰς μεγαλήτερον, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστής, δύναται νὰ εὑρεθῇ κατὰ δύο τρόπους.

α') Προσθέτομεν τὸν πολλαπλασιαστέον τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστής.

β') Μεγεθύνομεν ἑκάστην μονάδα τοῦ πολλαπλασιαστέου κατὰ τόσας φορὰς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστής.

Παραδείγματα ἐπὶ τοῦ πρώτου τρόπου.

1) Νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ $\frac{5}{12}$ ἐπὶ τὸν 4.

Λύσις. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{5}{12}$ ἐπὶ 4, ἤτοι ἀριθμὸν 4 φορὰς μεγαλήτερον τοῦ $\frac{5}{12}$, ἀρκεῖ τὸν $\frac{5}{12}$ νὰ προσθέσωμεν 4 φορὰς (§ 156, α'), ὅτε ἔχομεν

$$\frac{5}{12}+\frac{5}{12}+\frac{5}{12}+\frac{5}{12}=\frac{20}{12}.$$

Ὥστε τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{5}{12}$ ἐπὶ 4 εἶναι $\frac{20}{12}$.

2) Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ μικτὸς $2\frac{3}{4}$ ἐπὶ 5.

Λύσις. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου ἀρκεῖ τὸν $2\frac{3}{4}$ νὰ προσθέσωμεν 5 φορὰς (§ 156, α΄), ὅτε ἔχομεν

$$2\frac{3}{4}+2\frac{3}{4}+2\frac{3}{4}+2\frac{3}{4}+2\frac{3}{4}=10\frac{15}{4}=13\frac{3}{4}$$

ἢ καὶ ἄλλως

ἐπειδὴ $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$, ἄρα δυνάμεθα τὸν $\frac{11}{4}$ νὰ προσθέσωμεν 5 φοράς,

ὅτε ἔχομεν $$\frac{11}{4}+\frac{11}{4}+\frac{11}{4}+\frac{11}{4}+\frac{11}{4}=\frac{55}{4}=13\frac{3}{4}.$$

Παράδειγμα ἐπὶ τοῦ δευτέρου τρόπου.

Νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ $\frac{5}{12}$ ἐπὶ τὸν 4.

Λύσις. Διὰ νὰ εὕρωμεν κατὰ τὸν Β΄ τρόπον τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{5}{12}$ ἐπὶ 4, ἤτοι ἀριθμὸν 4 φορὰς μεγαλήτερον τοῦ $\frac{5}{12}$, ἀρκεῖ ἑκάστην μονάδα τοῦ $\frac{5}{12}$ νὰ κάμωμεν 4 φορὰς μεγαλητέραν (§ 156, β΄). Τοῦτο δὲ κατορθοῦμεν διαιροῦντες τὸν παρονομαστὴν τοῦ $\frac{5}{12}$ διὰ 4, ὅτε εὑρίσκομεν $\frac{5}{3}$. Ὅτε παρατηροῦμεν, ὅτι τοῦ $\frac{5}{3}$ ἑκάστη μονὰς εἶναι 4 φορὰς μεγαλητέρα ἑκάστης μονάδος τοῦ $\frac{5}{12}$, (διότι πρέπει ἡ μονὰς $\frac{1}{12}$ νὰ προστεθῇ 4 φορὰς διὰ νὰ δώσῃ τὴν κλασματικὴν μονάδα $\frac{1}{3}$, ἤτοι $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.) Ὥστε τὸ ζητούμενον γινόμενον τοῦ $\frac{5}{12}$ ἐπὶ 4 εἶναι $\frac{5}{3}$.

Σημείωσις Ὁ τρόπος οὗτος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον δὲν εἶναι γενικός, διότι ἐφαρμόζεται μόνον, ὅταν ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος διαιρῆται διὰ τοῦ ἀκεραίου πολλαπλασιαστοῦ.

157. Ἐκ τῆς εὑρέσεως, ὡς ἀνωτέρω, τοῦ γινομένου κλάσματος ἢ μικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιον, μορφοῦμεν καὶ ἰδιαιτέρους πρακτικοὺς κανόνας, ὅπως εὑρίσκωμεν ταχύτερον τὰ ἐξαγόμενα.

Οὕτω π. χ. ἐκ τοῦ ὅτι·

Τὸ $\frac{5}{12}$ ἐπὶ 4 ἔδωκε γινόμενον $\frac{20}{12}$, διὰ δὲ τῆς διαιρέσεως τοῦ παρονομαστοῦ

Τὸ $\frac{5}{12}$ ἐπὶ 4 ἔδωκε γινόμενον $\frac{5}{3}$, μορφοῦμεν τὸν κατωτέρω κανόνα (§ 158).

Ὁμοίως ἐκ τοῦ ὅτι ὁ $2\frac{3}{4}$ ἐπὶ 5 ἔδωκε γινόμενον $10\frac{15}{4}$

ἢ καὶ ἄλλως

ἐπειδὴ $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$ ἄρα καὶ

Τὸ $\frac{11}{4}$ ἐπὶ 5 ἔδωκε γινόμενον $\frac{55}{4}$, μορφοῦμεν τὸν κατωτέρω κανόνα (§ 159).

Πρακτικοὶ κανόνες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὄντος ἀκεραίου.

158. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἢ διαιροῦμεν τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀκεραίου* (ἂν διαιρῆται).

Π. χ. Τὸ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ 2 δίδει γινόμενον $\frac{3\times 2}{4}$ ἤτοι $\frac{6}{4}$

ἢ καὶ ἄλλως

Τὸ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ 2 δίδει γινόμενον $\frac{3}{4:2}$ ἤτοι $\frac{3}{2}$.

Ὁμοίως. Τὸ $\frac{2}{3}$ ἐπὶ 2 δίδει γινόμενον $\frac{4}{3}$.

Παρατήρησις. Ὅταν πολλαπλασιάζωμεν τὸν ἀριθμητὴν κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον, αὐξάνει τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τοῦ κλάσματος κατὰ τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος, χωρὶς ἡ μονὰς τοῦ κλάσματος νὰ μεταβληθῇ. Ὅταν δὲ διαιρῶμεν τὸν παρονομαστὴν κλάσματος δι' ἀκεραίου, μεγαλώνει ἑκάστη μονὰς τοῦ κλάσματος κατὰ τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος, χωρὶς τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τοῦ κλάσματος νὰ μεταβληθῇ.

Π. χ. Πολλαπλασιάζοντες τὸν *ἀριθμητὴν* τοῦ $\frac{5}{12}$ ἐπὶ 4, ἔχομεν γινόμενον $\frac{20}{12}$.

Ἀλλὰ ἐκ τοῦ $\frac{5}{12}$ καὶ $\frac{20}{12}$ παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ μονὰς καὶ τῶν δύο τούτων κλασμάτων εἶναι ἡ αὐτὴ $\frac{1}{12}$, τὸ πλῆθος ὅμως τῶν μονάδων, τοῦ μὲν πρώτου εἶναι *πέντε*, τοῦ δὲ δευτέρου *εἴκοσι*, ἤτοι 4 φορὰς περισσότεραι.

Ἂν ὅμως διαιρέσωμεν τὸν *παρονομαστὴν* τοῦ $\frac{5}{12}$ διὰ 4, ἔχομεν γινόμενον $\frac{5}{3}$.

Ἐκ δὲ τοῦ $\frac{5}{12}$ καὶ $\frac{5}{3}$ παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ μονάδες καὶ εἰς τὸ ἓν καὶ εἰς τὸ ἕτερον εἶναι *πέντε*, ἡ μονὰς ὅμως τοῦ πρώτου εἶναι $\frac{1}{12}$, τοῦ δὲ δευτέρου $\frac{1}{3}$, ἤτοι 4 φορὰς μεγαλητέρα τῆς μονάδος $\frac{1}{12}$.

159. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον πολλαπλασιαστὴν καὶ ἑνοῦμεν τὰ προκύπτοντα δύο γινόμενα ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἐκτελοῦμεν ἔπειτα τὸν πολλαπλασιασμόν.*

Π. χ. Ὁ $2\frac{3}{4}$ ἐπὶ 5 δίδει γινόμενον $10\frac{15}{4}$, ἤτοι $13\frac{3}{4}$

ἢ καὶ ἄλλως

Ἐπειδὴ $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$ ἄρα

$$2\frac{3}{4}\times 5=\frac{11}{4}\times 5=\frac{55}{4}=13\frac{3}{4}.$$

Σημείωσις. Πᾶν κλάσμα πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του, γίνεται ἀκέραιος ἀριθμὸς ἴσος μὲ τὸν ἀριθμητήν του.

Π. χ. Τὸ $\frac{3}{4}$ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 4 γίνεται $\frac{3}{1}$ ἤτοι 3.

Διαίρεσις.

160. Εἰς τὴν διαίρεσιν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α'.) *Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος.*

Β'.) *Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι κλάσμα.*

Σημείωσις. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μικτόν, τρέποντες αὐτὸν εἰς κλάσμα, ἀνάγομεν τὴν διαίρεσιν εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν.

Α' περίπτωσις. **Διαιρέτης ἀκέραιος.**

161. *Διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει γινόμενον τὸν πρῶτον.*

162. Ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὁ πρῶτος λέγεται διαιρετέος, ὁ δὲ δεύτερος λέγεται διαιρέτης.

163. Πηλίκον λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον.

Σημείωσις. Τὸ πηλίκον εἶναι *ἀπολύτως* τόσας φορὰς μικρότερον τοῦ διαιρετέου, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος διαιρέτης.

* Γενικὸς κανὼν πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου.

164. Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον εἶναι ἀπολύτως (δηλ. μὴ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς σημασίας του) τόσας φορὰς μικρότερον τοῦ διαιρετέου, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος διαιρέτης, διὰ τοῦτο δύναται νὰ εὑρεθῇ κατὰ δύο τρόπους.

α') *Σμικρύνομεν ἑκάστην μονάδα τοῦ διαιρετέου κατὰ τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος διαιρέτης.*

β') *Ἐλαττοῦμεν τὰς μονάδας τοῦ διαιρετέου κατὰ τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος διαιρέτης.*

Παράδειγμα ἐπὶ τοῦ Α' τρόπου.

1) Νὰ διαιρεθῇ τὸ $\frac{6}{7}$ διὰ 2.

Λύσις. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{6}{7}$ διὰ 2, ἤτοι ἀριθμὸν 2 φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{6}{7}$, ἀρκεῖ ἑκάστην μονάδα τοῦ $\frac{6}{7}$ νὰ κάμωμεν 2 φορὰς μικροτέραν (§ 164, α'). Τοῦτο δὲ κατορθοῦμεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ $\frac{6}{7}$ ἐπὶ 2, ὅτε εὑρίσκομεν τὸ $\frac{6}{14}$. Ὅτε παρατηροῦμεν ὅτι τοῦ $\frac{6}{14}$ ἑκάστη κλασματικὴ μονὰς εἶναι 2 φορὰς μικροτέρα ἑκάστης μονάδος τοῦ $\frac{6}{7}$, (διότι πρέπει ἡ μονὰς $\frac{1}{14}$ νὰ προστεθῇ 2 φορὰς διὰ νὰ δώσῃ τὴν κλασματικὴν μονάδα $\frac{1}{7}$, ἤτοι $\frac{1}{14}+\frac{1}{14}=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}$). Ὥστε τὸ ζητούμενον ηλίκον τοῦ $\frac{6}{7}$ διὰ 2 εἶναι $\frac{6}{14}$.

2) Νὰ διαιρεθῇ ὁ 2 διὰ 5.

Λύσις. Γράφομεν πρῶτον τὸν διαιρετέον 2 ὑπὸ μορφὴν κλασμα-ικὴν, θέτοντες παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἤτοι $\frac{2}{1}$.

Ἔπειτα κατὰ τὸ προηγούμενον παράδειγμα, πολλαπλασιάζομεν όν παρονομαστήν του ἐπὶ τὸν διαιρέτην 5, ὅτε ἔχομεν

$$\frac{2}{1} : 5 = \frac{2}{1 \times 5} = \frac{2}{5}.$$

Ὥστε τὸ πηλίκον τοῦ 2 διὰ 5 εἶναι $\frac{2}{5}$.

3) Νὰ διαιρεθῇ ὁ μικτὸς $3\frac{2}{3}$ διὰ 4.

Λύσις. Διαιροῦμεν, κατὰ τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα, τὸν ἀκέ-αιον καὶ κλάσμα τοῦ μικτοῦ διὰ τοῦ ἀκεραίου διαιρέτου 4,ὅτε ἔχομεν

$$3\frac{2}{3} : 4 = \frac{3}{4} + \frac{2}{12} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}.$$

ἢ καὶ ἄλλως

πειδὴ $3\frac{2}{3} = \frac{11}{3}$ ἄρα καὶ $\frac{11}{3} : 4 = \frac{11}{12}$.

Παράδειγμα ἐπὶ τοῦ Β′ τρόπου.

1) Νὰ διαιρεθῇ τὸ $\frac{6}{7}$ διὰ τοῦ 2.

Λύσις. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸ $\frac{6}{7}$ διὰ 2 κατὰ τὸν Β′ τρόπον, ρκεῖ νὰ ἐλαττώσωμεν τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τοῦ κλάσματος κατὰ 2 φορὰς (§ 164 β′). Πρὸς τοῦτο δὲ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ λάσματος $\frac{6}{7}$ διὰ 2 (διότι εἰς τὸν ἀριθμητὴν κεῖται τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἑκάστου κλάσματος), ὅτε εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον τηλίκον $\frac{3}{7}$.

Σημείωσις. Ὁ τρόπος οὗτος τῆς διαιρέσεως κλάσματος δι' ἀκεραίου δὲν εἶναι γενικὸς, διότι ἐφαρμόζεται μόνον, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος διαι-ρῆται διὰ τοῦ ἀκεραίου διαιρέτου.

Ἐκ τῆς εὑρέσεως τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως *ἀκεραίου*, *κλά-*

σματος καὶ μικτοῦ δι' ἀκεραίου διαιρέτου μορφοῦμεν καὶ ἰδιαιτέρους πρακτικοὺς κανόνας, ὅπως εὑρίσκωμεν ταχύτερον τὰ ἐξαγόμενα.

Π. χ. Ἐκ τοῦ ὅτι

Τὸ 2 διὰ 5 ἔδωκε πηλίκον $\frac{2}{5}$, μορφοῦμεν τὸν κατωτέρω κανόνα (§ 165).

Ὁμοίως. Ἐκ τοῦ ὅτι,

Τὸ $\frac{6}{7}$ διὰ 2 ἔδωκε πηλίκον $\frac{6}{14}$ διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ.

Καὶ προσέτι τὸ $\frac{6}{7}$ διὰ 2 ἔδωκε πηλίκον $\frac{3}{7}$ διὰ διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ, μορφοῦμεν τὸν κατωτέρω κανόνα (§ 166).

Ὁμοίως. Ἐκ τοῦ ὅτι ὁ $2\frac{3}{4}$ διὰ 5 ἔδωκε πηλίκον $\frac{2}{5}+\frac{3}{20}$, ἤτοι $\frac{11}{20}$

ἢ καὶ ἄλλως

Ἐπειδὴ $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$, δι' ὃ καὶ $\frac{11}{4}$ διὰ 5 ἔδωκε πηλίκον $\frac{11}{20}$, μορφοῦμεν τὸν κανόνα (§ 167).

Πρακτικοὶ κανόνες διαιρέσεως, τοῦ διαιρέτου ὄντος ἀκεραίου.

165. *Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου δι' ἀκεραίου εἶναι κλάσμα, τοῦ ὁποίου ἀριθμητὴς ὁ διαιρετέος καὶ παρονομαστὴς ὁ διαιρέτης.*

Π. χ. Ὁ 15 διὰ 7 δίδει οὕτω πηλίκον $\frac{15}{7}$, ἤτοι $2\frac{1}{7}$.

166. *Κλάσμα διαιρεῖται δι' ἀκεραίου, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἢ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήν του* (ἂν διαιρῆται).

Π. χ. Τὸ $\frac{4}{5}$ διὰ 2 δίδει οὕτω πηλίκον $\frac{4}{10}$.

ἢ καὶ ἄλλως

Διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν τοῦ $\frac{4}{5}$ διὰ 2 εὑρίσκομεν πηλίκον $\frac{2}{5}$.

Παρατήρησις. Ὅταν πολλαπλασιάζωμεν τὸν παρονομαστὴν κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον, σμικρύνεται ἑκάστη μονὰς τοῦ κλάσματος κατὰ τόσας φορὰς ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος, χωρὶς τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τοῦ κλάσματος νὰ μεταβληθῇ. Ὅταν δὲ διαιρῶμεν τὸν ἀριθμητὴν κλάσματος δι' ἀκεραίου, ἐλαττοῦται τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τοῦ κλάσματος κατὰ τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος, χωρὶς ἡ μονὰς τοῦ κλάσματος νὰ μεταβληθῇ.

Π. χ. Πολλαπλασιάζοντες τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος $\frac{4}{7}$ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 2, εὑρίσκομεν πηλίκον $\frac{4}{14}$.

Ἐκ δὲ τοῦ $\frac{4}{7}$ καὶ $\frac{4}{14}$ παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον κλάσμα ἔχουσιν ἀπὸ 4 μονάδας, ἡ μονὰς ὅμως τοῦ πρώτου εἶναι $\frac{1}{7}$, τοῦ δὲ δευτέρου εἶναι $\frac{1}{14}$, ἤτοι 2 φορὰς μικροτέρα τῆς μονάδος $\frac{1}{7}$.

Ἂν ὅμως διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ $\frac{4}{7}$ διὰ τοῦ διαιρέτου 2, ἔχομεν πηλίκον $\frac{2}{7}$.

Ἐκ δὲ τοῦ $\frac{4}{7}$ καὶ $\frac{2}{7}$ παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ μονὰς καὶ τῶν δύο εἶναι ἡ αὐτὴ $\frac{1}{7}$, ἀλλὰ τὸ μὲν πρῶτον ἔχει *τέσσαρας* μονάδας, τὸ δὲ δεύτερον ἔχει *δύο*, ἤτοι 2 φορὰς ὀλιγωτέρας.

167. *Μικτὸς διαιρεῖται δι' ἀκεραίου, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀκέραιον καὶ τὸ κλάσμα τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀκεραίου διαιρέτου καὶ ἑνώσωμεν τὰ προκύπτοντα δύο πηλίκα, ἢ ἐὰν τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν.*

Π. χ. Ὁ $3\frac{4}{5} : 7 = \frac{3}{7} + \frac{4}{35} = \frac{15}{35} + \frac{4}{35} = \frac{19}{35}$.

ἢ καὶ ἄλλως

ἐπειδὴ $3\frac{4}{5} = \frac{19}{5}$, ἄρα καὶ $3\frac{4}{5} : 7 = \frac{19}{5} : 7 = \frac{19}{35}$.

Πολλαπλασιαστὴς κλάσμα.

168. *Πολλαπλασιασμὸς λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου τὸ μέρος, τὸ ὁποῖον δηλοῦται ὑπὸ τοῦ κλασματικοῦ πολλαπλασιαστοῦ.*

169. Γινόμενον λέγεται τὸ ἐξαγόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον εἶναι τὸ μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου, τὸ ὁποῖον δηλοῦται ὑπὸ τοῦ κλάσματος τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

Π.χ. Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 2 ἐπὶ $\frac{3}{4}$.

Τοῦτο σημαίνει νὰ λάβωμεν τοῦ 2 τὰ $\frac{3}{4}$, τὸ δὲ ἐξαγόμενον θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

*Γενικὸς κανὼν πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου.

170. *Τὸ γινόμενον δύο ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἕνα καὶ διαιρέσωμεν τὸν ἄλλον διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ.*

Ὁ λόγος τούτου εἶναι, διότι τὸ γινόμενον τῶν δύο παραγόντων αὐξάνει μέν, ὅταν πολλαπλασιασθῇ ὁ εἷς τῶν παραγόντων ἐπί τινα ἀκέραιον κατὰ τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος, ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἑτέρου παράγοντος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου σμικρύνεται κατ' ἰσαρίθμους φοράς. Ὥστε ἡ ἀξία τοῦ γινομένου τῶν δύο ἀρχικῶν παραγόντων οὐδεμίαν μεταβολὴν ἔπαθε.

Π. χ. Τὸ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ 5 δίδει γινόμενον $\frac{15}{4}$.

Ἀλλὰ καὶ ἂν τὸν 5 πολλαπλασιάσωμεν ἐπί τινα ἀριθμόν, π.χ. τὸν 2, ὅτε γίνεται 10, καὶ τὸν $\frac{3}{4}$ διαιρέσωμεν διὰ 2, ὅτε γίνεται $\frac{3}{8}$ τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{3}{8}$ ἐπὶ 10 θὰ εἶναι $\frac{30}{8}$, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ $\frac{15}{4}$. Ἄρα καὶ οὕτω τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ 5 δὲν μετεβλήθη.

Σημείωσις. Στηριζόμενοι εἰς τὴν πρότασιν (§ 170), δυνάμεθα ν' ἀναγάγωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος διὰ τοῦ ἑξῆς κανόνος.

171. *Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα, τρέπομεν πρῶτον τὸν κλασματικὸν πολλαπλασιαστὴν εἰς ἀκέραιον, πολλαπλασιάζοντες αὐτὸν ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του καὶ διαιροῦντες τὸν πολλαπλασιαστέον διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ.*

Παράδειγμα 1ον. Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 2 ἐπὶ $\frac{3}{4}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζοντες τὸν πολλαπλασιαστὴν $\frac{3}{4}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του 4, γίνεται 3, καὶ διαιροῦντες τὸν πολλαπλασιαστέον 2 διὰ τοῦ 4 διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ τὸ γινόμενον (§ 170) εὑρίσκομεν $\frac{2}{4}$, ὅτε ἔχομεν 2 ἐπὶ $\frac{3}{4}=\frac{2}{4}$ ἐπὶ 3. Καὶ ἐπειδὴ γνωρίζομεν ὅτι $\frac{2}{4}$ ἐπὶ $3=\frac{6}{4}$, ἄρα καὶ $2\times\frac{3}{4}=\frac{6}{4}$.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ $\frac{4}{5}$ ἐπὶ $\frac{2}{3}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζοντες τὸν πολλαπλασιαστὴν $\frac{2}{3}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του 3 γίνεται 2 καὶ διαιροῦντες τὸν πολλαπλασιαστέον $\frac{4}{5}$ διὰ τοῦ αὐτοῦ 3 γίνεται $\frac{4}{15}$, ὅτε ἔχομεν $\frac{4}{5}$ ἐπὶ $\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$ ἐπὶ 2. Καὶ ἐπειδὴ γνωρίζομεν ὅτι $\frac{4}{15}$ ἐπὶ $2=\frac{8}{15}$, ἄρα καὶ $\frac{4}{5}$ ἐπὶ $\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$.

Παράδειγμα 3ον. Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ $4\frac{2}{5}$ ἐπὶ $\frac{3}{7}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζοντες τὸν πολλαπλασιαστὴν $\frac{3}{7}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του 7 γίνεται 3 καὶ διαιροῦντες τὸν πολλαπλασιαστέον $4\frac{2}{5}$ διὰ τοῦ 7 εὑρίσκομεν $\frac{4}{7}+\frac{2}{35}$, ὅτε ἔχομεν

$$4\frac{2}{5} \text{ ἐπὶ } \frac{3}{7}=\frac{4}{7}+\frac{2}{35} \text{ ἐπὶ } 3.$$

Καὶ ἐπειδὴ γνωρίζομεν ὅτι $\frac{4}{7}+\frac{2}{35}$ ἐπὶ $3=\frac{12}{7}+\frac{6}{35}$, ἄρα καὶ $4\frac{2}{5}$ ἐπὶ $\frac{3}{7}=\frac{12}{7}+\frac{6}{35}$ ἤτοι $\frac{66}{35}$

ἢ καὶ ἄλλως

ἐπειδὴ $4\frac{2}{5}=\frac{22}{5}$ ἄρα καὶ $4\frac{2}{5}$ ἐπὶ $\frac{3}{7}=\frac{22}{5}$ ἐπὶ $\frac{3}{7}$, ὅπερ κατὰ τὰ ἀνωτέρω δίδει γινόμενον $\frac{66}{35}$.

172. Ἐκ τῆς εὑρέσεως δὲ τοῦ γινομένου, *ἀκεραίου*, *κλάσματος* *καὶ μικτοῦ*, ἐπὶ κλάσμα μορφοῦμεν καὶ ἰδιαιτέρους πρακτικοὺς κανόνας, ὅπως εὑρίσκωμεν ταχύτερον τὰ ἐξαγόμενα.

Π. χ. Ἐκ τοῦ ὅτι ὁ 2 ἐπὶ $\frac{3}{4}$ ἔδωκε γινόμενον $\frac{6}{4}$, μορφοῦμεν τὸν κατωτέρω κανόνα (§ 173).

Ὁμοίως. Ἐκ τοῦ ὅτι

Τὸ $\frac{4}{5}$ ἐπὶ $\frac{2}{3}$ ἔδωκε γινόμενον $\frac{8}{15}$, μορφοῦμεν τὸν κατωτέρω κανόνα (§ 174).

Ὁμοίως. Ἐκ τοῦ ὅτι ὁ $4\frac{2}{5}$ ἐπὶ $\frac{3}{7}$ ἔδωκε γινόμενον $\frac{12}{7}+\frac{6}{35}$, ἤτοι $\frac{66}{35}$ ἢ καὶ ἄλλως

ἐπειδὴ $4\frac{2}{5}=\frac{22}{5}$, ἄρα καὶ ὁ $4\frac{2}{5}$ ἐπὶ $\frac{3}{7}=\frac{22}{7}$ ἐπὶ $\frac{3}{7}=\frac{66}{35}$ μορφοῦμεν τὸν κατωτέρω κανόνα (§ 175).

Πρακτικοὶ κανόνες πολλαπλασιασμοῦ, τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὄντος κλάσματος.

173. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον θέτομεν παρονομαστὴν τὸν ἴδιον.*

Π. χ. Ὁ 4 ἐπὶ $\frac{2}{3}$ δίδει οὕτω γινόμενον $\frac{8}{3}$ ἤτοι $2\frac{2}{3}$.

174. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστήν, καὶ τὸ μὲν γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν γράφομεν ἀριθμητήν, τὸ δὲ τῶν παρονομαστῶν παρονομαστήν.*

Π. χ. Τὸ $\frac{2}{3}$ ἐπὶ $\frac{4}{5}$ δίδει οὕτω γινόμενον $\frac{8}{15}$.

175. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ κλάσμα ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ ἑνοῦμεν τὰ προκύπτοντα δύο γινόμενα ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν αὐτά.*

Π. χ. ὁ $3\frac{4}{5}$ ἐπὶ $\frac{2}{3}$ δίδει οὕτω γινόμενον $\frac{6}{3}+\frac{8}{15}=\frac{30}{15}+\frac{8}{15}=\frac{38}{15}=2\frac{8}{15}$. ἢ καὶ ἄλλως

Ἐπειδὴ $3\frac{4}{5}=\frac{19}{5}$ ἄρα καὶ $3\frac{4}{5}$ ἐπὶ $\frac{2}{3}=\frac{19}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{38}{15}=2\frac{8}{15}$.

Σημείωσις. Ὅταν πολλαπλασιαστὴς εἶναι *κλασματικὴ μονάς*, ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπ' αὐτὴν καταντᾷ διαίρεσις διὰ τοῦ παρονομαστοῦ της.

Π.χ. Ὁ 10 ἐπὶ $\frac{1}{2}$ δίδει γινόμενον $\frac{10}{2}$ ἤτοι 5·

ἀλλὰ καὶ

ὁ 10 διὰ 2 δίδει πηλίκον ἐπίσης 5.

Ὁμοίως. Τὸ $\frac{4}{5}$ ἐπὶ $\frac{1}{3}$ δίδει γινόμενον $\frac{4}{15}$.

ἀλλὰ καὶ

Τὰ $\frac{4}{5}$ διὰ 3 δίδει πηλίκον ἐπίσης $\frac{4}{15}$.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ μικτὸς $2\frac{3}{4}$ ἐπὶ τὸν $4\frac{6}{7}$

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος καὶ κλάσμα (§ 152 Σημ.), διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζοντες τὸν πολλαπλασιαστέον $2\frac{3}{4}$ πρῶτον ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 4, ἔχομεν $8+\frac{12}{4}$, ἔπειτα δὲ καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{6}{7}$, ἔχομεν $\frac{12}{7}+\frac{18}{28}$. Μετὰ δὲ ταῦτα ἑνοῦντες τὰ τέσσαρα ταῦτα γινόμενα εὑρίσκομεν·

$$8+\overset{7}{\frac{12}{4}}+\overset{4}{\frac{12}{7}}+\overset{1}{\frac{18}{28}}=8\frac{84}{28}+\frac{48}{28}+\frac{18}{28}=8\frac{150}{28}=13\frac{10}{28}$$

ἢ καὶ ἄλλως

ἐπειδὴ $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$ καὶ $4\frac{6}{7}=\frac{34}{7}$

ἄρα $2\frac{3}{4}\times 4\frac{6}{7}=\frac{11}{4}\times\frac{34}{7}=\frac{374}{28}=13\frac{10}{28}$.

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

176. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ μικτόν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον καὶ τὸ κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστέου*

πρῶτον ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ ἔπειτα ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ ἑνοῦμεν τὰ προκύπτοντα τέσσαρα γινόμενα ἢ τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν αὐτά.

Π.χ. Ὁ $7\frac{3}{8}\times 2\frac{4}{6}=14+\frac{6}{8}+\frac{28}{6}+\frac{12}{48}$, ἐξ ὧν εὑρίσκομεν $19\frac{2}{3}$

ἢ καὶ ἄλλως

ἐπειδὴ $7\frac{3}{8}=\frac{59}{8}$ καὶ $2\frac{4}{6}=\frac{16}{6}$

ἄρα καὶ $7\frac{3}{8}\times 2\frac{4}{6}=\frac{59}{8}\times\frac{16}{6}=\frac{944}{48}=19\frac{32}{48}=19\frac{2}{3}$.

Παρατήρησις. Τὸ γινόμενον εἶναι *μεγαλήτερον* ἢ *μικρότερον* τοῦ πολλαπλασιαστέου, καθ' ὅσον ὁ *πολλαπλασιαστὴς* εἶναι *μεγαλήτερος* ἢ *μικρότερος* τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Π. χ. Ὁ 2 ἐπὶ $\frac{3}{4}$ θὰ δώσῃ γινόμενον μικρότερον τοῦ πολλαπλασιαστέου. Καὶ ὄντως $2\times\frac{3}{4}=\frac{6}{4}=1\frac{2}{4}$, ὅπερ εἶναι μικρότερον τοῦ πολλαπλασιαστέου 2.

Ὁμοίως. Ὁ 2 ἐπὶ $\frac{5}{4}$ θὰ δώσῃ γινόμενον μεγαλήτερον τοῦ πολλαπλασιαστέου. Καὶ ὄντως $2\times\frac{5}{4}=\frac{10}{4}=2\frac{2}{4}$, ὅπερ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ πολλαπλασιαστέου 2.

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

177. Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν δύο ἐξ αὐτῶν, τὸ δὲ γινόμενον τούτων ἐπὶ τρίτον καὶ τὸ προκῦπτον γινόμενον ἐπὶ τέταρτον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Π. χ. Νὰ πολλαπλασιασθῶσι τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$.

Λύσις. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὸ $\frac{2}{3}$ ἐπὶ $\frac{3}{4}$, ὅτε εὑρίσκομεν γινόμενον $\frac{6}{12}$. Πολλαπλασιάζοντες δὲ τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ $\frac{4}{5}$, εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον γινόμενον $\frac{24}{60}$, ἤτοι

$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{6}{12}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{60}$ ἤτοι δι' ἁπλοποιήσεως $\frac{2}{5}$.

Παρατήρησις. Ὅταν πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων, χάριν εὐκολίας, πρῶτον μὲν σημειοῦμεν ἐπ' αὐτῶν τὰς πράξεις, ἔπειτα δὲ προβαίνομεν εἰς τὰς δυνατὰς ἁπλοποιήσεις καὶ τέλος εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον τούτων.

Π. χ. Νὰ πολλαπλασιασθῶσι τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$.

Πρὸς τοῦτο ἔχομεν $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times3\times4}{3\times4\times5}$. Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἁπλοποιεῖται πρῶτον διὰ τοῦ 3, ὅτε ἔχομεν $\frac{2\times1\times4}{1\times4\times5}$.

Ἔπειτα διὰ 4, ὅτε ἔχομεν $\frac{2\times1\times1}{1\times1\times5}$, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν $\frac{2}{5}$.

Ὥστε τὸ γινόμενον τῶν κλασμάτων $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}$ εἶναι $\frac{2}{5}$.

Διαιρέτης κλάσμα.

178. *Διαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει τὸν πρῶτον.*

179. Ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὁ πρῶτος λέγεται *διαιρετέος*, ὁ δὲ δεύτερος *διαιρέτης*.

180. *Πηλίκον* λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον.

* Γενικὸς κανὼν πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου.

181. *Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται.*

Ἔστω διαιρετέος ὁ $\frac{3}{4}$ καὶ διαιρέτης ὁ $\frac{2}{5}$, τὸ δὲ πηλίκον τούτων π, τότε κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 178) θὰ ἔχωμεν

$$\frac{3}{4}=\frac{2}{5}\times\pi$$

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{2}{5}\times$ π εἶναι ἴσοι, διὰ τοῦτο, ἐὰν τοὺς πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἔστω τὸν 6, καὶ τὰ γινόμενά των θὰ εἶναι ἴσα, ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$\frac{18}{4}=\frac{12}{5}\times\pi$$

Ἀλλὰ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τούτου παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ μὲν διαιρετέος $\frac{3}{4}$ ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ 6 καὶ ἔγεινεν $\frac{18}{4}$, ὁ δὲ διαιρέτης $\frac{2}{5}$ ἐπολλαπλασιάσθη ἐπίσης ἐπὶ 6 καὶ ἔγεινε $\frac{12}{5}$, τὸ πηλίκον ὅμως ἔμεινε τὸ αὐτὸ π, ἤτοι δὲν μετεβλήθη.

Σημείωσις. Στηριζόμενοι ἤδη εἰς τὴν πρότασιν (§ 181), δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὴν διαίρεσιν ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ κλάσματος εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος διὰ τοῦ ἑξῆς κανόνος.

182. *Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ κλάσματος τρέπομεν πρῶτον τὸν κλασματικὸν διαιρέτην εἰς ἀκέραιον, πολλαπλασιάζοντες διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ διαιρέτου.*

Παράδειγμα 1ον. Νὰ διαιρεθῇ ὁ 2 διὰ $\frac{3}{4}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζοντες τὸν διαιρετέον 2 καὶ τὸν διαιρέτην $\frac{3}{4}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 4 τοῦ διαιρέτου, ὁ μὲν διαιρετέος γίνεται 8, ὁ δὲ διαιρέτης 3, ὅτε κατὰ τὸν κανόνα (§ 181) ἔχομεν

$$2 \text{ διὰ } \frac{3}{4}=8 \text{ διὰ } 3.$$

Καὶ ἐπειδὴ γνωρίζομεν ὅτι $8 : 3=\frac{8}{3}$, ἄρα καὶ 2 διὰ $\frac{3}{4}=\frac{8}{3}$.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ διαιρεθῇ ὁ $\frac{4}{5}$ διὰ $\frac{2}{3}$.

Λύσις. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν $\frac{4}{5}$ καὶ τὸν $\frac{2}{3}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 3 τοῦ διαιρέτου, ὁ μὲν $\frac{4}{5}$ γίνεται $\frac{12}{5}$, ὁ δὲ $\frac{2}{3}$ γίνεται 2 καὶ ἔχομεν

$$\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=\frac{12}{5}:2$$

Καὶ ἐπειδὴ γνωρίζομεν, ὅτι $\frac{12}{5} : 2 = \frac{12}{10}$,

ἄρα καὶ $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{12}{10}$

Παράδειγμα 3ον. Νὰ διαιρεθῇ ὁ $4\frac{2}{5}$ διὰ $\frac{3}{7}$.

Λύσις. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 7 διαιρετέον καὶ διαιρέτην, ὁ μὲν διαιρετέος γίνεται $28\frac{14}{5}$, ὁ δὲ διαιρέτης γίνεται 3, ὅτε ἔχομεν

$$4\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = 28\frac{14}{5} : 3$$

Καὶ ἐπειδὴ γνωρίζομεν, ὅτι

$$28\frac{14}{5} : 3 = \frac{28}{3} + \frac{14}{15},$$

ἄρα καὶ $4\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{28}{3} + \frac{14}{15}$.

183. Ἐκ τῆς εὑρέσεως δὲ τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως *ἀκεραίου*, *κλάσματος* καὶ *μικτοῦ* διὰ κλάσματος μορφοῦμεν ἰδιαίτερον πρακτικὸν κανόνα διὰ νὰ εὑρίσκωμεν ταχύτερον τὰ πηλίκα.

Π.χ. Ἐκ τοῦ ὅτι ὁ 2 διὰ $\frac{3}{4}$ ἔδωκε πηλίκον $\frac{8}{3}$

ὁ δὲ $\frac{4}{5}$ διὰ $\frac{2}{3}$ ἔδωκε πηλίκον $\frac{12}{10}$

καὶ ὁ $4\frac{2}{5}$ διὰ $\frac{3}{7}$ ἔδωκε πηλίκον $\frac{28}{3} + \frac{14}{15}$

μορφοῦμεν τὸν κατωτέρω πρακτικὸν κανόνα (§ 184).

Πρακτικὸς κανὼν πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου, τοῦ διαιρέτου ὄντος κλάσματος.

184. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου καὶ ἀντὶ διαιρέσεως κάμνομεν πολλαπλασιασμόν.*

Π. χ. ὁ $2 : \frac{3}{4}$ δίδει πηλίκον $2 \times \frac{4}{3}$ ἤτοι $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

Ὁμοίως ὁ $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$ » » $\frac{4}{5} \times \frac{3}{2}$ » $\frac{12}{10} = 1\frac{2}{10} = 1\frac{1}{5}$

» ὁ $4\frac{2}{5} : \frac{3}{7}$ » » $4\frac{2}{5} \times \frac{7}{3}$ ἐξ οὗ εὑρίσκομεν $10\frac{4}{15}$

Σημείωσις. Ὁ κανὼν (§ 184) ἐφαρμόζεται καὶ ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος· ἀρκεῖ τότε νὰ γράψωμεν τοῦτον ὡς κλάσμα, ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα.

Π. χ. Τὸ $\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4} : \frac{5}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$.

185. *Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μικτός, τρέπομεν τοῦτον εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν.*

Π. χ. Ὁ $2 : 3\frac{2}{5} = 2 : \frac{17}{5} = 2 \times \frac{5}{17} = \frac{10}{17}$.

Ὁμοίως. Ὁ $\frac{2}{3} : 2\frac{3}{4} = \frac{2}{3} : \frac{11}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{11} = \frac{8}{33}$.

Ὁμοίως. Ὁ $3\frac{4}{5} : 1\frac{2}{3} = 3\frac{4}{5} : \frac{5}{3} = 3\frac{4}{5} \times \frac{3}{5}$ καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εὑρίσκομεν πηλίκον τοῦ $3\frac{4}{5} : 1\frac{2}{3} =$ τὸ $2\frac{7}{25}$.

Παρατήρησις. Τὸ πηλίκον εἶναι *μικρότερον* ἢ *μεγαλήτερον* τοῦ διαιρετέου, καθ' ὅσον ὁ διαιρέτης εἶναι *μεγαλήτερος* ἢ *μικρότερος* τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Π. χ. Ὁ $7 : \frac{5}{4}$ θὰ δώσῃ πηλίκον μικρότερον τοῦ διαιρετέου, διότι ὁ διαιρέτης $\frac{5}{4}$ εἶναι μεγαλήτερος τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Καὶ ὄντως $7 : \frac{5}{4} = 7 \times \frac{4}{5} = \frac{28}{5} = 5\frac{3}{5}$, ὅπερ εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρετέου 7.

Ὁμοίως. Ὁ $7 : \frac{4}{5}$ θὰ δώσῃ πηλίκον μεγαλήτερον τοῦ διαιρετέου, διότι τὸ $\frac{4}{5}$ εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Καὶ ὄντως $7 : \frac{4}{5} = 7 \times \frac{5}{4} = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}$, ὅπερ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ διαιρετέου 7.

Σημείωσις. Τὸ πηλίκον εἶναι τὸ μέρος τοῦ διαιρετέου, τὸ ὁποῖον δηλοῦται ὑπὸ τοῦ ἀντιστρόφου ἀριθμοῦ τοῦ διαιρέτου, διότι ἐπὶ τοῦτον πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον.

Π. χ. Τὸ $7 : \frac{5}{4}$ ἔδωκε πηλίκον $5\frac{3}{5}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ 7.

Περὶ ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Πρόβλημα 1ον. Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος ἀξίζει $\frac{2}{3}$ δρχ. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{4}{5}$ πηχ.;

Λύσις. Γράφομεν τοὺς εἰς τὸ πρόβλημα ἀριθμοὺς κατὰ σειρὰν ὡς ἑξῆς·

$$1 \text{ πηχ.} \quad \frac{2}{3} \text{ δρχ.} \quad \frac{4}{5} \text{ πηχ.} \;;$$

καὶ ἤδη σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ ὁ 1 πηχ. ἀξίζει $\frac{2}{3}$ δρχ.

ἄρα τὸ $\frac{1}{5}$ πηχ. τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ *πέμπτον* τοῦ 1 πηχ. θ' ἀξίζῃ καὶ 5 φορὰς ὀλιγώτερον ἤτοι $\frac{2}{3}$ δρχ. $: 5 = \frac{2}{3\times5}$ δρχ.

καὶ τὰ $\frac{4}{5}$ πηχ. τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ τετραπλάσιον τοῦ $\frac{1}{5}$ πχ. θ' ἀξίζουν καὶ 4 φορὰς περισσότερον ἤτοι· $\frac{2}{3\times5}$ δχ. $\times 4 = \frac{2\times4}{3\times5}$ δρχ. ἤτοι $\frac{8}{15}$ δρ.

Σημείωσις. Σημειοῦμεν δι' ἐρωτηματικοῦ τὴν ποσότητα, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ζητοῦμεν, διὰ νὰ εὑρίσκομεν εὐχερῶς τὴν ὁμοειδῆ ταύτῃ, ἐξ ἧς κάμνομεν ἔναρξιν πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος.

Πρόβλημα 2ον. Ἡ $1\frac{2}{3}$ ὀκ. πράγματός τινος πόσον ἀξίζει, ὅταν μὲ $\frac{3}{7}$ δρχ. ἀγοράζωμεν $2\frac{3}{4}$ ὀκ.;

Σημείωσις. Πρὸς εὐκολίαν τοὺς ὑπάρχοντας μικτοὺς τρέπομεν εἰς κλάσματα, ὅτε γίνονται $1\frac{2}{3}$ ὀκ. $= \frac{5}{3}$ ὀκ. καὶ $2\frac{3}{4}$ ὀκ. $= \frac{11}{4}$ ὀκ.

Λύσις. Γράφομεν τοὺς εἰς τὸ πρόβλημα ἀριθμοὺς κατὰ σειρὰν ὡς ἀνωτέρω ἤτοι

$$\frac{5}{3} \text{ ὀκ.} \;; \quad \frac{3}{7} \text{ δρχ.} \quad \frac{11}{4} \text{ ὀκ.}$$

καὶ ἤδη σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

'Επειδὴ τὰ $\frac{11}{4}$ ὀκ. ἀξίζουν $\frac{3}{7}$ δρχ.

ἄρα τὸ $\frac{1}{4}$ ὀκ. τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ *ἑνδέκατον* τῶν $\frac{11}{4}$ ὀκ. θ' ἀξίζῃ καὶ 11 φορὰς *ὀλιγώτερον* ἤτοι $\frac{3}{7}$ δρ. $: 11 = \frac{3}{7 \times 11}$ δρχ.

καὶ τὰ $\frac{4}{4}$ ὀκ. (ἤτοι ἡ 1 ὀκ.) τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ *τετραπλάσιον* τοῦ $\frac{1}{4}$ ὀκ. θ' ἀξίζουν καὶ 4 φορὰς *περισσότερον* ἤτοι $\frac{3}{7 \times 11}$ δρ. $\times 4 = \frac{3 \times 4}{7 \times 11}$ δρχ.

καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ ὀκ. τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ *τρίτον* τῆς 1 ὀκ. θ' ἀξίζῃ καὶ 3 φορὰς *ὀλιγώτερον* ἤτοι $\frac{3 \times 4}{7 \times 11}$ δρχ. $: 3 = \frac{3 \times 4}{7 \times 11 \times 3}$ δρχ.

καὶ τὰ $\frac{5}{3}$ ὀκ. τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ *πενταπλάσιον* τοῦ $\frac{1}{3}$ ὀκ. θ' ἀξίζουν 5 φορὰς *περισσότερον* ἤτοι $\frac{3 \times 4}{7 \times 11 \times 3}$ δρχ. $\times 5 = \frac{3 \times 4 \times 5}{7 \times 11 \times 3}$ δρχ. ἤτοι $\frac{20}{77}$ δχ.

Ὁ τρόπος οὗτος, καθ' ὃν λύονται προβλήματά τινα, λέγεται *ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα*, διότι εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος τῆς ποσότητος, ἧς τὴν τιμὴν ζητοῦμεν.

186. *Διὰ νὰ λύσωμεν πρόβλημά τι διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ἀναχωροῦμεν ἐκ τῆς ποσότητος τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν γνωρίζομεν καὶ ἡ ὁποία εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς ἐκείνην, ἧς τὴν τιμὴν ζητοῦμεν. Ταύτης δὲ, ἀφοῦ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τῆς μονάδος της* (ἂν δὲν ἐδόθη), *εὑρίσκομεν ἔπειτα τὴν τιμὴν τῶν ὅλων της μονάδων.*

Σημείωσις. Πρὸς εὐκολίαν, τοὺς ὑπάρχοντας μικτοὺς τρέπομεν εἰς κλάσματα.

Παρατήρησις α'. Ὅταν πρόβλημά τι ἐκτὸς τῶν πράξεων πολλαπλασιασμοῦ ἢ διαιρέσεως ἀπαιτῇ καὶ *πρόσθεσιν* ἢ *ἀφαίρεσιν*, πρέπει αἱ πράξεις αὗται νὰ ἐκτελῶνται ἰδιαιτέρως, διότι διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα λύονται μόνον τὰ προβλήματα τοῦ *πολλαπλασιασμοῦ* καὶ τῆς *διαιρέσεως* ἢ καὶ τῶν δύο συγχρόνως τούτων πράξεων.

Παρατήρησις β'. Εἰς τὰ προβλήματα τὰ λυόμενα διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ὑπάρχουσι πάντοτε δύο ἐκ ταυτότητος ὁμοειδεῖς ἀριθμοί. Ὥστε καὶ ἂν εἰς πρόβλημά τι δὲν παρουσιάζωνται καταφανῶς οὗτοι, πρέπει πρῶτον νὰ διακρίνωμεν αὐτοὺς καὶ ἔπειτα, ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα (§ 186), νὰ προβαίνωμεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Π. χ. Τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. ἀξίζουν 8 δρχ. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ;

Λύσις. Διατάσσομεν κατὰ σειρὰν τὰ ποσὰ τοῦ προβλήματος ὡς ἑξῆς·

$$\frac{3}{4}\text{ὀκ.}\quad 8\ \text{δρχ.}\quad 1\ \text{ὀκᾶ}\ ;$$

Καὶ ἤδη, ἐπειδὴ ὁμοειδὴς πρὸς 1 ὀκ. εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ὀκ., ἀναχωροῦμεν ἐκ τούτων καὶ ἔχομεν

Τὰ $\frac{3}{4}$ὀκ. ἀξίζουν 8δρχ.

Τὸ $\frac{1}{4}$ὀκ. θ' ἀξίζῃ $\frac{8}{3}$δρχ.

καὶ τὰ $\frac{4}{4}$ὀκ. (ἤτοι ἡ 1ὀκ.) θ' ἀξίζῃ $\frac{8\times4}{3}$δραχ. ἤτοι $\frac{32}{3}$ δραχ. $= 10\frac{2}{3}$ τῆς δραχ.

Ὁμοίως. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ 36.

Λύσις. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδεται ὁ ἀριθμὸς 36 καὶ ζητοῦνται τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ, δηλ. δίδονται τὰ $\frac{3}{3}$ τοῦ 36 καὶ ζητοῦνται τὰ $\frac{2}{3}$. δι' ὃ ἔχομεν

Τὰ $\frac{3}{3}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 36.

Τὸ $\frac{1}{3}$ θὰ εἶναι $\frac{36}{3}$

καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ θὰ εἶναι $\frac{36\times2}{3}$ ἤτοι ὁ 24.

Πρόβλημα 3ον. Τὰ $\frac{2}{3}$ ὀκ. πράγματός τινος ἀξίζουν 3 $\frac{4}{5}$δρ. Πόσον ἀγοράζομεν μὲ 2 $\frac{3}{4}$δρχ.;

Λύσις. Διατάσσομεν τὰ ποσὰ τοῦ προβλήματος κατὰ σειρὰν ὡς ἑξῆς· $\frac{2}{3}$ὀκ. $3\frac{4}{5}$δρχ. $2\frac{3}{4}$δρχ.;

Ἔπειτα τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα, ὅτε ἔχομεν

$\frac{2}{3}$ὀκ. $\frac{19}{5}$δρχ. $\frac{11}{4}$δρχ.;

Καὶ ἤδη, ἐπειδὴ ὁμοειδὴς πρὸς $\frac{11}{4}$ δρχ. εἶναι τὰ $\frac{19}{5}$ δρχ., ἀναχωροῦντες ἐκ τούτου (§ 186) ἔχομεν

Μὲ $\frac{19}{5}$δρχ. ἀγοράζομεν $\frac{2}{3}$ὀκ.

» $\frac{1}{5}$δρχ. θ' ἀγοράσωμεν $\frac{2}{3\times19}$ὀκ.

μὲ $\frac{5}{5}$δρχ. (ἤτοι 1δρχ.) θ' ἀγοράσωμεν $\frac{2\times5}{3\times19}$ὀκ.

» $\frac{1}{4}$δρχ. θ' ἀγοράσωμεν $\frac{2\times5}{3\times19\times4}$

» $\frac{11}{4}$δρχ. » $\frac{2\times5\times11}{3\times19\times4}$ὀκ. ἤτοι $\frac{110}{228}$ὀκ.

Πρόβλημα 4ον. Πόσον ἀξίζουν αἱ $20\frac{3}{4}$ ὀκ. πράγματός τινος, ὅταν μὲ $2\frac{3}{5}$δρχ. ἀγοράζωμεν $1\frac{2}{3}$ὀκ. ;

Λύσις. Διατάσσομεν τὰ ποσὰ τοῦ προβλήματος κατὰ σειρὰν ὡς ἑξῆς·

$20\frac{3}{4}$ὀκ. ; $2\frac{3}{5}$δρχ. $1\frac{2}{3}$ὀκ.

Ἔπειτα τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα, ὅτε ἔχομεν

$\frac{83}{4}$ὀκ. ; $\frac{13}{5}$δρ. $\frac{5}{3}$ὀκ.

Καὶ ἤδη, ἐπειδὴ ὁμοειδὴς πρὸς τὸ $\frac{83}{4}$ὀκ. εἶναι τὸ $\frac{5}{3}$ὀκ., ἀναχωροῦντες ἐκ τούτου καταστρώνομεν τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς·

Τὰ $\frac{5}{3}$ὀκ. ἀξίζουν $\frac{13}{5}$δρχ.

Τὸ $\frac{1}{3}$ θ' ἀξίζῃ $\frac{13}{5\times5}$

καὶ τὰ $\frac{3}{3}$ὀκ. (ἤτοι ἡ 1ὀκ.) θ' ἀξίζῃ $\frac{13\times3}{5\times5}$

καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ὀκ. θ' ἀξίζῃ $\frac{13\times 3}{5\times 5\times 4}$

καὶ τὰ $\frac{83}{4}$ὀκ. θ' ἀξίζουν $\frac{13\times 3\times 83}{5\times 5\times 4}$ ἤτοι $32\frac{37}{100}$δρχ.

Γενίκευσις τῶν κανόνων πρὸς λύσιν τῶν προβλημάτων πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως.

187. Διὰ τὰ προβλήματα τὰ λυόμενα δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ ἢ μιᾶς διαιρέσεως (ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν), μορφοῦμεν ἰδιαιτέρους κανόνας, ὅπως εὑρίσκωμεν ταχύτερον τὰ ἐξαγόμενα.

Κανόνες προβλημάτων πολλαπλασιασμοῦ.

Πρόβλημα 1ον. Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος ἀξίζει $\frac{2}{3}$δρχ., πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως;

Λύοντες τὸ πρόβλημα τοῦτο διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, εὑρίσκομεν ὅτι, ὅταν

ὁ 1πηχ. ἀξίζῃ $\frac{2}{3}$δρχ. τὰ $\frac{3}{4}$πηχ. θ' ἀξίζουν $\frac{2\times 3}{3\times 4}$δρχ. ἤτοι $\frac{1}{2}$ δρ.

Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ $\frac{2}{3}$ ἐπὶ $\frac{3}{4}$ ἤτοι $\frac{2\times 3}{3\times 4}$δρχ. $=\frac{1}{2}$δρχ.

Ἐκ τῆς λύσεως τούτου γενικεύομεν τὸν κανόνα (§ 71) ὡς ἑξῆς.

188. *Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῶν ὁσωνδήποτε μονάδων ἢ μέρους τῆς μονάδος διὰ πολλαπλασιασμοῦ.*

Π. χ. Μὲ 1 δρ. ἀγοράζομεν $\frac{4}{5}$ ὀκ. Μὲ $\frac{3}{4}$ δχ. πόσον; $\left(\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}\text{ὀκ.}\right)$

Ὁμοίως. Ὁ 1 πηχ. ἀξίζει $2\frac{3}{4}$ δρ. Οἱ $4\frac{2}{3}$ πχ. πόσον; $\left(12\frac{5}{6}\text{δρχ.}\right)$

» Ἡ 1 δρχ. ἔχει 100 λεπτ. Αἱ $2\frac{3}{4}$ δρχ. πόσα; (275 λεπτὰ)

» Τὸ 1 ταλ. ἔχει 5 δρχ. Τὰ $2\frac{4}{5}$ ταλ. πόσας; (14 δρχ.)

Πρόβλημα 2ον. Πόσα εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ $2\frac{3}{5}$

Ἐπειδὴ τὰ $\frac{4}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι $2\frac{3}{5}$ ἤτοι $\frac{13}{5}$

ἄρα τὸ $\frac{1}{4}$ » » θὰ εἶναι $\frac{13}{5\times4}$

καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ » » » » $\frac{13\times3}{5\times4}$ » $\frac{39}{20}$.

Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν καὶ ἀμέσως, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν $\frac{13}{5}$ ἐπὶ $\frac{3}{4}$, ὅτε ἔχομεν $\frac{39}{20}$.

Ἐκ τῆς λύσεως τούτου γενικεύομεν τὸν κανόνα (§ 72) ὡς ἑξῆς.

189. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον κ.τ.λ. ἢ ὁποιονδήποτε μέρος δοθέντος ἀριθμοῦ, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 2, 3, κ.τ.λ. ἢ ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος δεικνύει ποῖον μέρος ζητοῦμεν.*

Π. χ. Πόσα εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ 5; $\left(5\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}\right)$

Ὁμοίως Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν $5\frac{15}{20}$ δρχ. $\left(5\frac{15}{20}\times\frac{1}{5}=1\frac{3}{20}\text{ δρχ.}\right)$

Ὁμοίως Πόσον εἶναι τὸ διπλάσιον καὶ τὰ $\frac{4}{5}$ τῶν 100 ὀκ. βουτύρου;

$$\left(100\times2\frac{4}{5}=280\text{ ὀκδ.}\right)$$

Ὁμοίως Πόσον εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ $\frac{1}{10}$; $\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{30}\right)$

Κανόνες προβλημάτων μερισμοῦ.

Πρόβλημα 1ον. Τὰ $\frac{2}{3}$ πηχ. ὑφάσματός τινος ἀξίζουν $\frac{4}{5}$ δρχ., πόσον ἀξίζει ὁ 1 πῆχυς;

Λύοντες τὸ πρόβλημα τοῦτο διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, εὑρίσκομεν ὅτι, ὅταν

Τὰ $\frac{2}{3}$ πηχ. ἀξίζουν $\frac{4}{5}$ δρχ., ὁ 1 πηχ. ἀξίζει $\frac{4\times3}{5\times2}$ δχ. ἤτοι $1\frac{1}{5}$ δρ.

Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν ἀμέσως καὶ ἂν διαιρέσωμεν τὸ $\frac{4}{5}$ διὰ $\frac{2}{3}$, ὅτε εὑρίσκομεν $\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}$ δρχ. ἤτοι $1\frac{1}{5}$ δρχ.

Ἐκ τῆς λύσεως τούτου γενικεύομεν τὸν κανόνα (§ 101) ὡς ἑξῆς.

190. *Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν ὁσωνδήποτε μονάδων ἢ ...ρους τῆς μονάδος, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς ἀκεραίας μονάδος ...ὰ διαιρέσεως.*

Σημείωσις. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ, εἰς τὰ ὁποῖα ...τεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, θέτομεν διαιρέτην τὸν ἀριθμόν, ...ῦ ὁποίου ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ζητεῖται.

...χ. Μὲ $\frac{3}{4}$ δρχ. ἀγοράζω $\frac{2}{3}$ ὀκ. Μὲ 1 δρχ. πόσον; $\left(\frac{8}{9}\text{ ὀκ.}\right)$

...μοίως Τὰ $\frac{5}{8}$ πηχ. ἀξίζουν 1 δρχ. Ὁ 1 πηχ. πόσον; $\left(1\frac{3}{5}\text{ δρχ.}\right)$

» Αἱ $2\frac{3}{4}$ ὀκ. ἀξίζουν 5 δρχ. Ἡ 1 ὀκ. πόσον; $\left(1\frac{9}{11}\text{ δρχ.}\right)$

» Μὲ $3\frac{2}{5}$ δρχ. ἀγοράζομεν $3\frac{4}{5}$ ὀκ. Ἡ 1 ὀκ. πόσον; $\left(\frac{17}{19}\text{ δρ.}\right)$

Πρόβλημα 2ον. Τὰ $\frac{2}{3}$ ἀριθμοῦ τινος ἀγνώστου εἶ...αι $\frac{5}{7}$, ποῖος εἶναι ὁ ἄγνωστος οὗτος ἀριθμός;

Λύσις. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδονται τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀγνώστου ἀ...θμοῦ, ὅτι εἶναι $\frac{5}{7}$ καὶ ζητεῖται ὅλος ὁ ἄγνωστος, δηλ. ζητοῦνται ...ὰ $\frac{3}{3}$ τοῦ ἀγνώστου, ἄρα ἔχομεν

Ἐπειδὴ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀγνώστου εἶναι $\frac{5}{7}$,

...ρα τὸ $\frac{1}{3}$ θὰ εἶναι $\frac{5}{7\times2}$

...αὶ τὰ $\frac{3}{3}$ » » $\frac{5\times3}{7\times2}$ ἤτοι $\frac{15}{14}$.

Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν ἀμέσως καὶ ἂν διαιρέσω...εν τὸν $\frac{5}{7}$ διὰ $\frac{2}{3}$, ὅτε εὑρίσκομεν $\frac{5\times3}{7\times2}$ ἤτοι $\frac{15}{14}$.

Ἐκ τῆς λύσεως τούτου γενικεύομεν τὸν κανόνα (§ 102) ὡς ἑξῆς·

191. *Ὅταν δίδηται τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον κ.τ.λ. ἢ μέρος ...γνώστου ἀριθμοῦ, διαιροῦντες τοῦτο διὰ 2, 3, κ.τ.λ. ἢ διὰ τοῦ*

ἀριθμοῦ ὁ ὁποῖος δεικνύει ποῖον μέρος τοῦ ἀγνώστου ἐδόθη, εὑρί-σκομεν τὸν ζητούμενον ἄγνωστον ἀριθμόν.

Π. χ. Τὰ $\frac{2}{3}$ ἀριθμοῦ τινος εἶναι 6, ποῖος εἶναι οὗτος ὁ ἀριθμός ; (ὁ 9)

Ὁμοίως. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{4}{3}$ ἰσοῦνται μὲ 1; $\left(ὁ\ \frac{3}{4}\right)$

Ὁμοίως. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τριπλάσιον καὶ $\frac{1}{5}$ ἰσοῦ-ται μὲ $2\frac{3}{4}$; $\left(2\frac{3}{4} : 3\frac{1}{5} = \frac{55}{64}\right)$

Ὁμοίως. Πόσας ὀκάδας ἐλαίου ἔχει τις, ὅταν τὸ πενταπλάσιον πλέον $\frac{2}{3}$ εἶναι 100 ὀκάδες ; $\left(100 : 5\frac{2}{3} = 17\frac{11}{17}\ ὀκ.\right)$

Παρατήρησις. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ τὸ πηλίκον ὁρίζεται ἐκ τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος καὶ εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὸν διαιρετέον.

Κανόνες προβλημάτων μετρήσεως.

Πρόβλημα 1ον. Ἡ ὀκᾶ πράγματός τινος ἀξίζει $\frac{3}{5}$ δρχ. Πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν μὲ $\frac{4}{7}$ δραχμῆς ;

Λύοντες τὸ πρόβλημα τοῦτο διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα εὑρίσκομεν ὅτι, ὅταν

ἡ 1ὀκ. ἀξίζῃ $\frac{3}{5}$ δρχ. μὲ $\frac{4}{7}$ δρχ. ἀγοράζομεν $\frac{4\times5}{7\times3}$ ὀκ. ἤτοι $\frac{20}{21}$ ὀκ.

Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν ἀμέσως καὶ ἂν διαιρέσωμεν τὸ $\frac{4}{7}$ διὰ $\frac{3}{5}$, ὅτε εὑρίσκομεν $\frac{20}{21}$ ὀκ.

Ἐκ τῆς λύσεως τούτου ἔχομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

192. *Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος, εὑρίσκομεν πόσας φορὰς περιέχεται αὕτη εἰς ἄλλην δοθεῖσαν τιμὴν διὰ διαιρέσεως.*

Σημειώσεις. Εἰς τὰ προβλήματα ταῦτα τῆς μετρήσεως θέτομεν διαιρέτην τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος.

Π. χ. Ἡ ὀκᾶ πράγματός τινος ἀξίζει 3 δρχ. Πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν μὲ $\frac{6}{5}$ δραχμῆς ; $\left(\frac{6}{5} : 3\ ἤτοι\ \frac{2}{5}\ ὀκ.\right)$

Ὁμοίως. Μὲ 1 δρχ. ἀγοράζομεν 2 πηχ. Τὰ $\frac{6}{8}$ πηχ. πόσον ἀξίζουν;

$$\left(\frac{6}{8} : 2 = \frac{3}{8} \text{ δρχ.}\right)$$

Ὁμοίως. Ὁ πῆχυς ὑφάσματος ἀξίζει $2\frac{5}{10}$ δχ. Μὲ 100 δρχ. πόσους πήχεις ἀγοράζομεν; $\left(100 : 2\frac{5}{10} \text{ ἤτοι } 40 \text{ πηχ.}\right)$

Πρόβλημα 2ον. Ποῖον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{8}{9}$ εἶναι ὁ $\frac{5}{7}$;

Λύσις. Ἐπειδὴ

ὁ $\frac{8}{9}$ εἶναι *ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς*

Τὸ $\frac{1}{9}$ θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{8}$ τούτου

καὶ τὰ $\frac{9}{9} = 1$ » » $\frac{1 \times 9}{8}$ »

» τὸ $\frac{1}{7}$ » » $\frac{1 \times 9}{8 \times 7}$ »

» τὰ $\frac{5}{7}$ » » $\frac{1 \times 9 \times 5}{8 \times 7}$ »

ὥστε ὁ ἀριθμὸς $\frac{5}{7}$ εἶναι τὰ $\frac{1 \times 9 \times 5}{8 \times 7}$ ἤτοι τὰ $\frac{45}{56}$ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{8}{9}$.

Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν ἀμέσως καὶ ἂν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν $\frac{5}{7}$ διὰ τοῦ $\frac{8}{9}$, ὅτε εὑρίσκομεν

$$\frac{5}{7} : \frac{8}{9} = \frac{5}{7} \times \frac{9}{8} \text{ ἤτοι } \frac{45}{56}.$$

Ἐκ τῆς λύσεως τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

193. *Ὅταν δίδηται ἀριθμός τις, εὑρίσκομεν ποῖον μέρος εἶναι ἄλλου δοθέντος ἀριθμοῦ διὰ διαιρέσεως.*

Σημείωσις. Εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην θέτομεν διαιρέτην ἐκεῖνον, πρὸς τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ σύγκρισις.

Π. χ. Ποῖον μέρος τοῦ 5 εἶναι ὁ 8; $\left(8 : 5 \text{ ἤτοι τὰ } \frac{8}{5}\right)$.

Ὁμοίως. Ποῖον μέρος τοῦ $\frac{2}{3}$ εἶναι ὁ $\frac{4}{3}$;

$$\left(\frac{4}{3} : \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} = 2, \text{ ἤτοι τὸ διπλάσιον}\right)$$

Ὁμοίως. Ὁ ἀριθμὸς $3\frac{1}{5}$ ποῖον μέρος εἶναι τοῦ 4 ; $\left(\text{τὰ } \frac{4}{5}\right)$

Παρατήρησις. Εἰς τὰ προβλήματα τῆς μετρήσεως τὸ πηλίκον ὁρίζεται ἐκ τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν ἀπὸ μνήμης.

1) Ἡ ὀκᾶ ἔχει 400 δρμ., πόσα εἶναι τὰ $\frac{2}{80}$ τῆς ὀκᾶς; (10 δρμ.)

2) Πόσα ρούπια εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως ; (6 ρουπ.)

Σημείωσις. Ὁ πῆχυς ἔχει 8 ρούπια.

3) Πόσα εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $\frac{3}{4}$; $\left(\frac{6}{12}\right)$

4) Τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. ἀξίζουν 1 δρχ. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ ; $\left(\frac{4}{3}\text{ δρχ.}\right)$

5) Τὰ $\frac{4}{5}$ ἀριθμοῦ τινος εἶναι 2. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος; $\left(\frac{10}{4}\right)$

6) Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος ἀξίζει 2 δρχ., πόσον ἀγοράζομεν μὲ $\frac{3}{4}$ δρ ;

$\left(\frac{3}{8}\text{ πηχ. ἤτοι 3 ρουπ.}\right)$

7) Ποῖον μέρος τοῦ 5 εἶναι τὸ $\frac{3}{4}$; $\left(\text{τὰ } \frac{3}{20}\right)$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος ἀξίζει $2\frac{3}{4}$ δρχ. Πόσον ἀξίζουν οἱ $8\frac{2}{3}$ πηχ ; $\left(23\frac{5}{6}\text{ δρχ. ἤτοι 23 δρχ. 83 λεπ. } \frac{1}{3}\right)$

Σημείωσις. Ἡ δραχμὴ ἔχει 100 λεπτά.

2) Ἡ ὀκᾶ πράγματός τινος ἀξίζει $\frac{3}{4}$ δρχ. Πόσον ἀξίζουν αἱ $2\frac{3}{4}$ ὀκ; $\left(2\frac{1}{16}\text{ δρχ. ἤτοι 2 δρχ. 6 λεπ. } \frac{1}{4}\right)$

3) Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν $\frac{3}{5}$ ὀκ. πράγματός τινος. Μὲ $\frac{2}{7}$ δρχ. πόσον ἀγοράζομεν ; $\left(\frac{6}{35}\right.$ ἤτοι 68 δρμ. $\left.\frac{4}{7}\right)$.

4) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $3\frac{4}{5}$; $\left(2\frac{8}{15}\right)$

5) Πόσα εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ $\frac{2}{3}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

6) Πόσον εἶναι τὸ διπλάσιον καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{3}{5}$; $\left(1\frac{13}{20}\right)$

7) Πόσα εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{4}{5}$ τῶν 60 δραχ ; (24 δρ.)

Σημ. Τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{1}{2}$, ἔπειτα τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{4}{5}$ εἶναι $\frac{2}{5}$ καὶ τέλος τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν 60 δρχ. εἶναι 24 δρχ.

8) Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως ἀξίζουν $2\frac{3}{5}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς ; $\left(3\frac{7}{15}\right.$ δρχ. ἤτοι 3 δρ. 46 λεπ. $\left.\frac{2}{3}\right)$

9) Αἱ $2\frac{3}{4}$ ὀκ. ἀξίζουν 1 δρχ. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ ;
$\left(\frac{4}{11}\right.$ δρχ. ἤτοι 36 λεπ. $\left.\frac{4}{11}\right)$

10) Οἱ 8 πηχ. ἀξίζουν $15\frac{3}{5}$ δρχ. Πόσους πήχεις ἀγοράζομεν μὲ 1 δραχμήν ; $\left(\frac{20}{39}\right.$ πήχεως ἤτοι 4 ρουπ. $\left.\frac{4}{39}\right)$

11) Τὸ διπλάσιον καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ δηλ. τὰ $2\frac{3}{4}$ ἀριθμοῦ τινος εἶναι $\frac{4}{5}$. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος ; $\left(\text{ὁ } \frac{16}{55}\right)$

12) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον εἶναι $\frac{3}{5}$; $\left(\frac{3}{10}\right)$

13) Τὰ $\frac{4}{5}$ ἀριθμοῦ τινος εἶναι ἡ ἀκεραία μονάς. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος ; $\left(\text{ὁ } 1\frac{1}{4}\right)$

14) Πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν μὲ $15\frac{3}{4}$ δρχ., ὅταν ἡ 1 ὀκ. ἀξίζῃ $2\frac{3}{4}$ δραχμῆς; $\left(5\frac{8}{11}\right.$ ὀκ. ἤτοι 290 δρχ. $\left.\frac{10}{11}\right)$

15) Μὲ 1 δρχ. ἀγοράζομεν $\frac{2}{3}$ πηχ. ὑφάσματός τινος. Πόσας δραχμὰς ἀξίζουν οἱ $7\frac{4}{5}$ πηχ.; $\left(11\frac{7}{10}\right.$ δρχ. ἤτοι 11 δρχ. 70 λ. $\left.\right)$

16) Μὲ 8 δρχ. ἀγοράζομεν 1 πῆχυν ὑφάσματός τινος. Πόσους πήχεις ἀγοράζομεν μὲ 2 δραχμάς; $\left(\frac{2}{8}\right.$ τοῦ πηχ. ἤτοι 2 ρούπ. $\left.\right)$

17) Ποῖον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ $2\frac{3}{4}$ εἶναι ὁ $\frac{3}{4}$; (τὰ $\frac{3}{11}$)

18) Ποῖον μέρος εἶναι ὁ $2\frac{3}{4}$ τοῦ $\frac{3}{4}$; (τὰ $3\frac{2}{3}$;)

19) Πόσας φορὰς μικρότερος εἶναι ὁ $\frac{3}{7}$ τοῦ $\frac{4}{5}$; (κατὰ $\frac{15}{28}$)

20) Πόσας φορὰς μεγαλήτερος εἶναι ὁ $\frac{4}{5}$ τοῦ $\frac{3}{7}$;

($1\frac{13}{15}$ ἤτοι ὁ $\frac{4}{5}$ περιέχει τὸν $\frac{3}{7}$ καὶ τὰ $\frac{13}{15}$ αὐτοῦ)

21) Ἐρωτηθείς τις τί ὥρα εἶναι, ἀπεκρίθη, ὅτι εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{4}{5}$ τῶν $\frac{6}{10}$ τῶν 24 ὡρῶν, ποία ὥρα ἦτο; ($7\frac{17}{25}$ ὥρ.)

22) Τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς πράγματός τινος ἀξίζουν 7 δρχ. Πόσον ἀξίζουν αἱ $5\frac{2}{3}$ ὀκ. ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

Λύσις. Ἐπειδὴ $\frac{2}{5}$ ὀκ. ἀξίζουν 7 δχ., ἄρα 1 ὀκ. ἀξίζει 7δρχ. $:\frac{2}{5}$ ὀκ. ἤτοι $\frac{35}{2}$ δρ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ 1 ὀκ. ἀξίζει $\frac{35}{2}$ δρ., ἄρα αἱ $5\frac{2}{3}$ ὀκ. ἀξίζουν $\frac{35}{2} \times 5\frac{2}{3}$ ἤτοι $99\frac{1}{6}$ δρχ.

ἢ καὶ ἄλλως

ἐπειδὴ $\frac{2}{5}$ ὀκ. ἀξίζουν 7 δχ., ἄρα μὲ 1 δχ. ἀγοράζομεν $\frac{2}{5}$ ὀκ. :7 δχ.

ἤτοι $\frac{2}{35}$ ὀκ. Καὶ ἐπειδὴ μὲ 1 δρχ. ἀγοράζομεν $\frac{2}{35}$ ὀκ., ἄρα αἱ $5\frac{2}{3}$ ὀκ. ἀξίζουν $5\frac{2}{3} : \frac{2}{35}$ ἤτοι $99\frac{1}{6}$ δρχ.

23) Οἱ $3\frac{3}{4}$ πηχ. ἀξίζουν $4\frac{2}{3}$ δρχ. Πόσον ἀξίζουν οἱ $10\frac{3}{5}$ τοῦ πήχεως; $\left(13\frac{43}{225}\text{ δρχ.}\right)$

24) Τὰ $\frac{2}{3}$ ἀριθμοῦ τινος εἶναι 100. Πόσα εἶναι τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ; (ὁ 60)

Λύσις. Ἐπειδὴ τὰ $\frac{2}{3}$ εἶναι 100, ἄρα ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς θὰ εἶναι $100 : \frac{2}{3}$ ἤτοι 150. Ὅθεν τὰ $\frac{2}{5}$ τούτου θὰ εἶναι $150 \times \frac{2}{5}$ ἤτοι 60.

25) Τὸ διπλάσιον καὶ τὰ $\frac{4}{5}$ ἤτοι τὰ $2\frac{4}{5}$ ἀριθμοῦ τινος εἶναι $\frac{4}{5}$. Πόσον εἶναι τὸ τριπλάσιον καὶ $\frac{1}{2}$ ἤτοι τὰ $3\frac{1}{2}$ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ; (ἡ μονάς).

26) Αἱ $5\frac{2}{3}$ πηχ. ὑφάσματός τινος ἀξίζουν 10 δρχ. Πόσους πήχεις ἀγοράζομεν ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος μὲ $8\frac{4}{5}$ δρχ.; $\left(4\text{ πχ. }\frac{74}{75}\right)$

27) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ $\frac{1}{2}$ αὐξηθὲν κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ κατὰ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 55; $\left(\text{ὁ } 50\frac{10}{13}\right)$

28) Ἐκ 5448 δρχ. ἐδόθησαν τὰ ἑξῆς μερίδια εἰς τρεῖς ἀνθρώπους. Εἰς τὸν πρῶτον ἐδόθη τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 5448 δρχ. εἰς τὸν δεύτερον τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ εἰς τὸν τρίτον τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ δευτέρου ὑπο-

λοίπου. Ζητεῖται πόσα ἐδόθησαν εἰς ἕκαστον καὶ πόσα ἐπερίσσευσ

Εἰς τὸν Αον $5448 \times \frac{1}{2}$, Βον $2724 \times \frac{1}{3}$, Γον $1816 \times \frac{1}{4}$ καὶ ἐπερίσσευσαν 1362 δρχ.

29) Δύο κρουνοὶ γεμίζουσι δεξαμενὴν εἰς 3 ὥρας, μόνος δὲ ὁ τούτων γεμίζει τὴν δεξαμενὴν εἰς 15 ὥρ. Εἰς πόσας ὥρας γεμί τὴν δεξαμενὴν ὁ ἕτερος τῶν κρουνῶν;

Σημείωσις. Πρέπει νὰ εὕρωμεν εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ποῖον μέρος τῆς ξαμενῆς πληροῦσι καὶ οἱ δύο ὁμοῦ κρουνοὶ καὶ ποῖον μέρος ὁ ἕτερος τούτ ἵνα δι' ἀφαιρέσεως ορισθῶμεν τὸ μέρος, τὸ ὁποῖον πληροῖ ὁ μένων κρου εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον.

Εἰς 1 ὥρ. οἱ δύο ὁμοῦ κρουνοὶ γεμίζουν τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς δεξ.

» 1 ὥρ. ὁ εἷς τούτων γεμίζει τὸ $\frac{1}{15}$ τῆς δεξ.

ἄρα ὁ μένων κρουνὸς

εἰς 1 ὥρ. θὰ γεμίσῃ τὸ $\frac{1}{3}-\frac{1}{15}$ ἤτοι $\frac{4}{15}$ δεξ. ὅθεν τὰ $\frac{15}{15}$ δεξ.

θὰ τὰ γεμίσῃ εἰς ὥρας $\frac{15}{15} : \frac{4}{15}$ ἤτοι $\frac{15}{4}$ ὥρ $=3\frac{3}{4}$ ὥρ.

30) Ἐρωτηθείς τις πόσα πρόβατα ἔχει, ἀπεκρίθη, «ἐὰν μοῦ δώ σητε τὸ $\frac{1}{3}$, τὸ $\frac{1}{4}$, καὶ τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτῶν, μοὶ δίδετε 15 πρόβατ περισσότερα τῶν ἰδικῶν μου». Ζητεῖται, πόσα πρόβατα εἶχε; (18 πρόβατα).

31) Ἄνθρωπός τις διένειμε τὴν περιουσίαν του ὡς ἑξῆς. Τὸ $\frac{1}{3}$ ἔδωκεν εἰς τὸν πρῶτον τῶν υἱῶν του, τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ πρώτου ἔδωκεν ε τὸν δεύτερον, καὶ τὸ διπλάσιον καὶ $\frac{2}{5}$ τοῦ δευτέρου ἤτοι τὰ $2\frac{2}{5}$ τοῦ δευτέρου ἔδωκεν εἰς τὸν τρίτον· ἔμειναν δὲ αὐτῷ 3500 δρχ., τ ὁποίας ἔδωκεν εἰς τὴν σύζυγόν του. Ζητεῖται, πόση ἦτο ἡ περιουσί

$\left(9130\frac{10}{23}\right.$ δρχ.$\left.\right)$

32) Ἀποθανών τις διέθεσε τὴν περιουσίαν του ὡς ἑξῆς. Ὁ πρ

τος τῶν υἱῶν του νὰ λάβῃ τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς περιουσίας του, ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ μεριδίου τοῦ πρώτου καὶ ἀκόμη 200 δρχ., ὁ τρίτος τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ δευτέρου καὶ ἀκόμη 500 δρχ., εἰς δὲ τὴν σύζυγόν του ἀφῆκε 4000 δρχ. Ζητεῖται πόσα ἔλαβεν ἕκαστος τῶν υἱῶν του καὶ πόση ἦτο ἡ περιουσία του;

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ Α′ θὰ λάβῃ τὸ $\frac{1}{5}$, ὁ Β′ τὸ $\frac{1}{10}$ + 200 δραχ. καὶ ὁ Γ′ τὰ $\frac{3}{40}$ + 650 δρχ., ἡ δὲ σύζυγος 4000 δρχ., ἄρα ὅλη ἡ περιουσία εἶναι $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{3}{40}+$ 4850 δραχμάς, ὅθεν ἔχομεν ὅτι τὰ $\frac{25}{40}$ τῆς περιουσίας ἰσοῦνται μὲ 4850 δρχ. καὶ ἐντεῦθεν εὑρίσκομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν ὅτι ἡ περιουσία εἶναι 7760 δραχ., ἀφ' ἑτέρου δὲ ὅτι ὁ Α′ θὰ λάβῃ 1552 δρχ., ὁ Β′ 976 δρχ. καὶ ὁ Γ′ 1232 δρχ.

Δεκαδικὸν σύστημα τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

194. *Δεκαδικὴ κλασματικὴ μονὰς λέγεται πᾶσα κλασματικὴ μονάς, τῆς ὁποίας ὁ παρονομαστὴς εἶναι 10, 100, 1000 καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.*

Π. χ. Ἐὰν ἐκ τῶν ἀπείρων κλασματικῶν μονάδων

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{50},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{200},\ \frac{1}{1000},\ \text{κ.τ.λ.}$$

λάβωμεν ἐκείνας, τῶν ὁποίων παρονομαστὴς εἶναι 10, 100, 1000 καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ἔχομεν τὰς κλασματικὰς μονάδας

$$\frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{10000},\ \frac{1}{100000}.$$

Αὗται δὲ εἶναι αἱ δεκαδικαὶ κλασματικαὶ μονάδες.

195. *Δεκαδικὸς κλασματικὸς ἀριθμὸς ἢ ἁπλῶς δεκαδικὸν κλάσμα λέγεται τὸ σύνολον πολλῶν δεκαδικῶν κλασματικῶν μονάδων ἢ καὶ μία τοιαύτη μονάς.*

Π. χ. Τὰ κλάσματα

$$\frac{5}{10},\ \frac{45}{100},\ \frac{17}{1000},\ \frac{1}{10},\ \frac{15}{10000},\ \text{κ.τ.λ.}$$

λέγονται δεκαδικοὶ κλασματικοὶ ἀριθμοί.

Σημείωσις α'. Ὁ σκοπὸς διὰ τὸν ὁποῖον χωρίζομεν τὰ δεκαδικὰ κλάσματα τῶν λοιπῶν καὶ τὰ ἐξετάζομεν ἰδιαιτέρως εἶναι, διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν αὐτὰ ὑπὸ *μορφὴν ἀκεραίων*, ὅτε τὰς διαφόρους ἐπ' αὐτῶν πράξεις ἐκτελοῦμεν σχεδὸν ὡς ἐπὶ ἀκεραίων· τοῦτο δὲ εἶναι πολὺ εὐκολώτερον ἢ αἱ πράξεις ἐπὶ κλασμάτων.

Σημείωσις β'. Ἡ γραφὴ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ὑπὸ μορφὴν ἀκεραίων λέγεται *δεκαδικὴ μορφή*.

Γραφὴ δεκαδικῶν κλασμάτων ὑπὸ μορφὴν δεκαδικήν.

196. Ἡ συνθήκη ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζεται ἡ γραφὴ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ὑπὸ μορφὴν ἀκεραίων εἶναι ἡ ἑξῆς.

Γράφομεν πρῶτον τὸν ἀκέραιον ἢ ἂν δὲν ἔχωμεν ἀκέραιον, γράφομεν 0 καί, ἀφοῦ τὸ χωρίσωμεν δι' ὑποδιαστολῆς, γράφομεν τὰ δέκατα καὶ δεξιὰ τούτων τὰ ἑκατοστὰ καὶ τούτων πάλιν δεξιὰ τὰ χιλιοστά, ἔπειτα τὰ δεκάκις χιλιοστὰ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἂν δὲ ἐν τῷ μεταξὺ δὲν ἔχωμεν μονάδας τάξεώς τινος, γράφομεν εἰς τὴν θέσιν των 0 καὶ κατόπιν γράφομεν τὰς μονάδας τῆς ἑπομένης τάξεως.

Π. χ. Νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμὸς $257+\frac{8}{10}+\frac{5}{100}+\frac{7}{1000}$ ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν.

Γράφομεν τὸν ἀκέραιον 257 καὶ τὸν χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς, μετὰ τὴν ὁποίαν γράφομεν τὰ 8 *δέκατα*, ἔπειτα τὰ 5 *ἑκατοστά*, καὶ κατόπιν τὰ 7 *χιλιοστά*, ὅτε ὁ δοθεὶς δεκαδικὸς γράφεται οὕτω 257,857.

Ὁμοίως. Νὰ γραφῇ ὁ $\frac{4}{10}+\frac{5}{1000}+\frac{9}{1000000}$ ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν.

Ἐπειδὴ δὲν ἔχομεν ἀκέραιον, γράφομεν ἀντ' αὐτοῦ 0 καὶ τὸ χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς. Ἔπειτα γράφομεν τὰ 4 *δέκατα*, καὶ δεξιὰ τούτων γράφομεν 0 διὰ τὰ ἑκατοστά, (ἐπειδὴ δὲν ἔχομεν τοιαῦτα), ἔπειτα γράφομεν τὰ 5 χιλιοστὰ καὶ ἀκολούθως γράφομεν 0 διὰ τὰ δεκάκις χιλιοστὰ καὶ 0 διὰ τὰ ἑκατοντάκις χιλιοστὰ καὶ τέλος γράφομεν τὰ 9 ἑκατομμυριοστά. Ὁ δοθεὶς δηλ. ἀριθμὸς γράφεται οὕτω 0,405009.

Σημείωσις. Τὸ σύστημα τοῦτο τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν λέγεται δεκαδικόν, διότι γίνεται ἐκ τῶν μονάδων $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ κ.τ.λ, τῶν ὁποίων ἑκάστη εἶναι δεκαπλασία τῆς ἑπομένης της.

Ἀπαγγελία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

197. *Διὰ ν' ἀπαγγείλωμεν ὁποιονδήποτε δεκαδικὸν ἀριθμὸν γεγραμμένον, ἢ ἀπαγγέλλομεν αὐτὸν ὁλόκληρον ἢ τὸν χωρίζομεν εἰς ὁσαδήποτε τμήματα ἰσοψήφια ἢ ἀνισοψήφια καὶ ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸν ἀριθμὸν ἑκάστου τμήματος μετὰ τοῦ ὀνόματος τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν κατέχει τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ τμήματος* (§ 16).

Π. χ. Ὁ δεκαδικὸς 17,5743 δύναται κατὰ τὸν κανόνα (§ 197) ν' ἀπαγγελθῇ ὡς ἑξῆς.

α'.) 175743 δεκάκις χιλιοστὰ (τῆς ἀκεραίας μονάδος).

β'.) 17 ἀκέραιαι μονάδες καὶ 5743 δεκάκις χιλιοστὰ (τῆς ἀκεραίας μονάδος).

γ'.) 17 ἀκέραιαι μονάδες, 5 δέκατα, 7 ἑκατοστά, 4 χιλιοστά, καὶ 3 δεκάκις χιλιοστά.

δ'.) 175 δέκατα, 74 χιλιοστά, 3 δεκάκις χιλιοστά.

ε'.) 1757 ἑκατοστὰ καὶ 43 δεκάκις χιλιοστά.

ς'.) 17574 χιλιοστὰ καὶ 3 δεκάκις χιλιοστά.

Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Σημείωσις. Αἱ διάφοροι αὗται ἀπαγγελίαι δεκαδικοῦ τινος ἀριθμοῦ χρησιμεύουσι, διὰ νὰ ὁρίζωμεν πόσας μονάδας ἑκάστης δεκαδικῆς τάξεως ἔχει ὁ δοθεὶς δεκαδικὸς ἀριθμός.

Π. χ. Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 5,3056.

α'.) Πόσα ἐν ὅλῳ περιέχει δέκατα;

(53 δέκατα καὶ μένουν ἀκόμη 56 δεκάκις χιλιοστά)

β'.) Πόσα ἑκατοστά; (530 ἑκατοστὰ καὶ ἀκόμη 56 δεκάκις χιλιοστά)

γ'.) Πόσα χιλιοστά; (5305 χιλιοστὰ καὶ ἀκόμη 6 δεκάκις χιλιοστά)

δ'.) Πόσα δεκάκις χιλιοστά; (53056 δεκάκις χιλιοστά)

ε'.) Πόσα δέκατα καὶ πόσα χιλιοστά;

(53 δέκατα, 5 χιλιοστὰ καὶ ἀκόμη 6 δεκάκις χιλιοστά)

ς'.) Πόσας ἀκεραίας μονάδας, πόσα δέκατα, ἑκατοστά, χιλιοστά, δεκάκις χιλιοστά; (5 ἀκεραίας μονάδας, 3 δέκατα, 0 ἑκατοστά, 5 χιλιοστὰ καὶ 6 δεκάκις χιλιοστά)

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Γραφὴ ἀπαγγελλομένου δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ γραφῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 2 χιλιάδες 45 ἑκατοστά.

Γράφομεν πρῶτον τὸν ἀπαγγελθέντα ἀριθμὸν ὡς ἀκέραιον, ἤτοι ὡς ἑξῆς 2045. Ἔπειτα, ἐπειδὴ ὁ 5 πρέπει νὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν τῶν ἑκατοστῶν, ὁ δὲ 4 τὴν θέσιν τῶν δεκάτων, θέτομεν πρὸ τούτου ὑποδιαστολήν. Κατὰ ταῦτα ὁ ἀπαγγελθεὶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς γράφεται οὕτω 20,45.

Ὁμοίως. Νὰ γραφῇ ὁ 57 δεκάκις χιλιοστά.

Γράφομεν πρῶτον αὐτὸν ὡς ἀκέραιον, ἤτοι 57. Ἔπειτα, ἐπειδὴ ὁ 7 πρέπει νὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν τῶν δεκάκις χιλιοστῶν, ὁ δὲ 5 τὴν θέσιν τῶν χιλιοστῶν, διὰ τοῦτο πρὸ τοῦ 5 γράφομεν 0 διὰ τὰ ἑκατοστὰ καὶ 0 διὰ τὰ δέκατα· πρὸ δὲ τῶν δεκάτων γράφομεν ὑποδιαστολὴν καὶ 0 διὰ τὸ ἀκέραιον μέρος. Κατὰ ταῦτα ὁ ἀπαγγελθεὶς ἀριθμὸς γράφεται 0,0057.

Ἐκ τούτων μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

198. *Διὰ νὰ γράψωμεν δεκαδικόν τινα ἀριθμὸν ἀπαγγελλόμενον, γράφομεν αὐτὸν πρῶτον ὡς ἀκέραιον καὶ ἔπειτα θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ νὰ καταλάβῃ τὴν ἀπαγγελθεῖσαν τάξιν.*

Σημείωσις. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν θέσιν εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ τεθῇ ἡ ὑποδιαστολή, ὅπως καταλάβῃ τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ τὴν ἀπαγγελθεῖσαν τάξιν, ἀρχόμεθα ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον ψηφίον χωριστὰ μέχρι τῶν δεκάτων, πρὸ τῶν ὁποίων θέτομεν ὑποδιαστολήν. Ἂν δὲ ἀπό τινος τάξεως ὁ ἀριθμὸς παύσῃ νὰ ἔχῃ ψηφία, συμπληροῦμεν τὰς λοιπὰς θέσεις μέχρι τῶν δεκάτων διὰ μηδενικῶν, πρὸ τῶν ὁποίων θέτομεν ὑποδιαστολὴν καὶ 0 διὰ τὸ ἀκέραιον μέρος.

Π. χ. Νὰ γραφῇ ὁ 15 χιλιάδες 457 χιλιοστά.

Κατὰ τὸν κανόνα (§ 198) γράφεται 15,457.

Παρατήρησις α΄. Εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς αἱ χιλιάδες δὲν πρέπει νὰ χωρίζωνται δι' ὑποδιαστολῆς, διότι ἐπέρχεται σύγχυσις πρὸς τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

Π. χ. Ὁ ἀριθμὸς 40 χιλιάδες πρέπει νὰ γράφηται 40000 καὶ οὐχὶ 40,000, διότι οὗτος ὀνομάζεται 40 χιλιάδες χιλιοστά.

Παρατήρησις β΄. Ἡ ἑβδόμη θέσις μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν κακῶς θεωρεῖται ὡς ἡ θέσις τῶν δεκάκις ἑκατομμυριοστῶν, διότι τούτων ἡ θέσις εἶναι ἡ τριακοστὴ τρίτη μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν. Πρὸς ἀποφυγὴν λοιπὸν τοιούτων συγχύσεων προτιμῶμεν μετὰ τὰ ἑκατομμυριοστὰ τὰς ἑξῆς ὀνομασίας· δέκατα τοῦ ἑκατομμυριοστοῦ, ἑκατοστὰ τοῦ ἑκατομμυριοστοῦ, δισεκατομμυριοστά, δέκατα τοῦ δισεκατομμυριοστοῦ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Π. χ. Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 0,0200754 πρέπει ν' ἀπαγγελθῇ 200754 δέκατα τοῦ ἑκατομμυριοστοῦ καὶ οὐχὶ δεκάκις ἑκατομμυριοστά.

* Ὁ λόγος δὲ τούτου εἶναι, διότι ἐκ τῆς γραφῆς τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν μηδενικῶν τοῦ 10, 100, 1000, κ.τ.λ. ἐμφαίνει τὴν θέσιν τῶν δεκάτων, ἑκατοστῶν, χιλιοστῶν, κ.τ.λ. Ἄρα ὁ ἀριθμὸς τῶν μηδενικῶν τοῦ ἑνὸς ἑκατομμυρίου, τοῦ ἑνὸς δισεκατομμυρίου,... τοῦ ἑνὸς δεκάκις ἑκατομμυρίου θὰ ἐμφαίνῃ τὴν θέσιν τῶν ἑκατομμυριοστῶν, δισεκατομμυριοστῶν,... δεκάκις ἑκατομμυριοστῶν. Καὶ ἐπειδὴ τὸ δεκάκις ἑκατομμύριον γράφεται μὲ 33 μηδενικά, ἄρα ἡ θέσις τῶν δεκάκις ἑκατομμυριοστῶν θὰ εἶναι ἡ τριακοστὴ τρίτη μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν.

199. Διὰ νὰ γράψωμεν δεκαδικόν τινα ἀριθμὸν ὑπὸ κλασματικὴν μορφήν, ἀρκεῖ ν' ἀπαγγείλωμεν αὐτὸν ὅλον ὁμοῦ καὶ κατὰ ταύτην τὴν ἀπαγγελίαν νὰ τὸν γράψωμεν κλασματικῶς.

Π. χ. Ὁ δεκαδικὸς 252,7 νὰ γραφῇ ὑπὸ κλασματικὴν μορφήν.

Ἀπαγγέλλοντες αὐτὸν ὅλον ὁμοῦ ἔχομεν 2527 δέκατα. Ταῦτα δὲ γράφονται κλασματικῶς, ὡς γνωστόν, οὕτω $\frac{2527}{10}$.

Ὁμοίως. Τὸν δεκαδικὸν 0,0027 ἀπαγγέλλοντες ὅλον ὁμοῦ ἔχομεν 27 δεκάκις χιλιοστά. Ταῦτα δὲ γράφοντες κλασματικῶς ἔχομεν τὸ κλάσμα $\frac{27}{10000}$.

Σύγκρισις δεκαδικῶν.

200. Ἡ ἀξία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται, ὁσαδήποτε μηδενικὰ καὶ ἂν γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ κλασματικοῦ μέρους τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

Π. χ. Ἔστω ὁ δεκαδικὸς 5,43.

Γράφοντες ἤδη πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 5,43 ὁσαδήποτε μηδενικά, μορφοῦμεν τοὺς ἰσοδυνάμους δεκαδικοὺς 5,430, 5,4300, κ.τ.λ.

* Ὁ λόγος τούτου εἶναι, διότι ἡ ἀξία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν κατέχει τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολήν, ἡ δὲ θέσις του αὕτη δὲν μεταβάλλεται καὶ μετὰ τὴν προσθήκην μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ. Ἄρα ἡ ἀξία τοῦ δεκαδικοῦ μένει ἀμετάβλητος.

* **Σημείωσις.** Ἡ προσθήκη ἑνός, δύο, κ.τ.λ. μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ κλασματικοῦ μέρους δεκαδικοῦ τινος ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλει μὲν τὴν ἀξίαν αὐτοῦ, ἀλλὰ τὸ σύνολον αὐτοῦ γίνεται ἐκ μονάδος δεκάκις, ἑκατοντάκις κ.τ.λ

μικροτέρας καὶ διὰ τοῦτο κατὰ τὸ ποσὸν αἱ μονάδες θὰ εἶναι δεκάκις, ἑκατοντάκις, κ.τ.λ. περισσότεραι.

Π. χ. Οἱ 5,43 καὶ 5,430 εἶναι ἴσοι κατὰ τὴν ἀξίαν, ἀλλὰ τὸ σύνολον τοῦ πρώτου γίνεται ἀπὸ τὴν μονάδα 0,01, τοῦ δὲ δευτέρου ἀπὸ τὴν μονάδα 0,001. Διὰ τοῦτο ὁ πρῶτος ἔχει 543 ἑκατοστά, ἐν ᾧ ὁ δεύτερος 5430 χιλιοστὰ δηλ. δεκάκις περισσοτέρας μονάδας.

201. Διὰ νὰ κάμωμεν δύο ἢ περισσοτέρους δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, ἀρκεῖ νὰ καταστήσωμεν τὰ κλασματικά των μέρη ἰσοψήφια διὰ τῆς προσθήκης μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ν' ἀπαγγείλωμεν τὸ σύνολον ἑκάστου.

Π. χ. Νὰ κάμωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 1,5, 2,07 καὶ τὸν 4 νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος.

Κατὰ τὸν κανόνα (§ 201) οὗτοι γίνονται 1,50 2,07 4,00 καὶ ἀπαγγέλλοντες τὸ σύνολον τῶν μονάδων ἑκάστου ἔχομεν

150 ἑκατοστά, 207 ἑκατοστά, 400 ἑκατοστά.

Οὕτω καὶ οἱ τρεῖς γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, ἤτοι τοῦ *ἑνὸς ἑκατοστοῦ*.

202. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας ἐν συνόλῳ μονάδας τάξεώς τινος περιέχει δεκαδικὸς ἀριθμός, ἀρκεῖ ν' ἀπαγγείλωμεν τοῦτον μέχρι τῆς ὁρισθείσης τάξεως καὶ τὸ ὑπόλοιπον μέρος νὰ τρέψωμεν εἰς κλάσμα τῆς αὐτῆς μονάδος. Ἂν δὲ ὁ δοθεὶς δεκαδικὸς δὲν ἔχῃ ψηφία μέχρι τῆς ὁρισθείσης τάξεως, συμπληροῦμεν τὰς ὑπολοίπους θέσεις διὰ μηδενικῶν.

Π. χ. Οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ

45 17,58 0,4576 2,00043 πόσα χιλιοστὰ ἔχουσι;

ὁ μὲν 4,5 ἔχει 4.500 ἤτοι 4500 χιλιοστά.

ὁ 17,58 » 17,580 » 17580 »

ὁ 0,4576 » 0,457 $\frac{6}{10}$ ἤτοι 457 χιλιοστὰ καὶ $\frac{6}{10}$ τοῦ χιλιοσ.

ὁ 2,00043 » 2,000 $\frac{43}{100}$ » 2000 » καὶ $\frac{43}{100}$ » »

203. Διὰ νὰ συγκρίνωμεν δύο ἢ περισσοτέρους δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς κάμνομεν αὐτοὺς νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς δεκαδικῆς μονάδος.

Π. χ. Ποῖος ἐκ τῶν δεκαδικῶν 0,0835 0,1 καὶ 0,09 εἶναι μεγαλήτερος;

Κάμνοντες αὐτοὺς νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος (§ 201) ἔχομεν 0,0835 0,1000 0,0900, ἐκ τῶν ὁποίων βλέπομεν ὅτι

ὁ 0,0835	ἔχει	835	δεκάκις	χιλιοστὰ
ὁ 0,1000	»	1000	»	»
ὁ 0,0900	»	900	»	»

Ἄρα μεγαλήτερος εἶναι ὁ 0,1000· ἔπειτα ἔρχεται ὁ 0,0900 καὶ τέλος ὁ 0,0835, ἤτοι εἶναι μεγαλήτερος ὁ 0,1· ἔπειτα ἔρχεται ὁ 0,09 καὶ τέλος ὁ 0,0835.

204. Διὰ νὰ λάβωμεν δεκαδικόν τινα ἀριθμὸν κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς δεκάτου, ἑνὸς ἑκατοστοῦ κ.τ.λ., ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν μέχρι τῶν δεκάτων, ἑκατοστῶν κ.τ.λ. καὶ νὰ παραλείψωμεν τὰ ἑπόμενα ψηφία, ὅτε αὐξάνομεν καὶ τὸ τελευταῖον διατηρούμενον ψηφίον κατὰ μονάδα, ἂν τὸ ἀμέσως παραλειφθὲν ἦτο 5, 6, 7, 8 ἢ 9· ἄλλως ἀφήνομεν αὐτὸ ἀμετάβλητον.

Π. χ. Ἕκαστος τῶν δεκαδικῶν 0,1352 0,1367 0,137 0,138 λαμβανόμενος κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ θὰ δώσῃ τὸν δεκαδικὸν 0,14.

Ὁμοίως. Ἕκαστος τῶν δεκαδικῶν 0,1306 0,1315 0,1326 0,133 0,1349 λαμβανόμενος κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ θὰ δώσῃ τὸν δεκαδικὸν 0,13.

Πρόσθεσις.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ προστεθῶσιν οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ

$$15,43+0,7+4,358+232,0076$$

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 15,43 \\ 0,7 \\ 4,358 \\ 232,0076 \\ \hline \end{array}$$

Γράφομεν αὐτοὺς οὕτως, ὥστε αἱ ὑποδιαστολαί των νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ καὶ πρὸς εὐκολίαν τῆς προσθέσεως γράφομεν μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιά, μέχρις ὅτου κάμωμεν ἰσοψήφια τὰ κλασματικά των μέρη, ὅτε ἔχομεν

$$\begin{array}{r} 15,4300 \\ 0,7000 \\ 4,3580 \\ 232,0076 \\ \hline \end{array}$$

Μετὰ ταῦτα προσθέτοντες τούτους ὡς ἀκεραίους καὶ πρὸ τοῦ ψηφίου, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν δεκάτων, θέτοντες ὑποδιαστολὴν ἔχομεν τὸ ζητούμενον ἄθροισμα 252,4956.

Παρατήρησις. Ἡ προσθήκη μηδενικῶν εἰς τοὺς προσθετέους χρησιμεύει ἁπλῶς πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεως κατὰ τὴν πρόσθεσιν. Διὰ τοῦτο δυνάμεθα ν' ἀποφύγωμεν αὐτὰ προσέχοντες, ὅπως ἐν ἑκάστῃ στήλῃ εὑρίσκωνται ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ ἡ ὑποδιαστολὴ τῶν δεκαδικῶν νὰ εὑρίσκηται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ.

Π. χ. Νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ $0,15+4,8+15,4387$.

Γράφοντες τούτους οὕτως, ὥστε ἡ ὑποδιαστολή των νὰ εὑρίσκηται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ καὶ ἐκτελοῦντες ἔπειτα τὴν πρόσθεσιν, ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω, ἔχομεν

$$\begin{array}{r} 0,15 \\ 4,8 \\ 15,4387 \\ \hline 20,3887 \end{array}$$

Ἐκ τούτων μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

205 *Διὰ νὰ προσθέσωμεν ὁσουσδήποτε δεκαδικοὺς ἀριθμούς, γράφομεν αὐτοὺς οὕτως, ὥστε αἱ ὑποδιαστολαί των νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ. Μετὰ ταῦτα ἄγοντες ὑπ' αὐτοὺς γραμμὴν ὁριζοντίαν, ἀρχόμεθα ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ προσθέτομεν αὐτοὺς ὡς ἀκεραίους, πρὸ δὲ τοῦ ψηφίου τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν δεκάτων θέτομεν ὑποδιαστολήν.*

Ἀφαίρεσις.

Παράδειγμα 1ον. Ν' ἀφαιρεθῇ ἐκ τοῦ δεκαδικοῦ 0,15, ὁ 0,09458.
Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς

$$\begin{array}{r} 0,15 \\ 0,09458 \\ \hline \end{array}$$

Γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον καὶ κάμνομεν τὰ κλασματικά των μέρη ἰσοψήφια, ὅτε ἔχομεν

$$\begin{array}{r} 0,15000 \\ \underline{0,09458} \end{array}$$

Καὶ ἤδη ἀφαιροῦμεν αὐτοὺς ὡς ἀκεραίους καὶ θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸ τοῦ ψηφίου, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τῶν δεκάτων, ὅτε ἔχομεν

$$\begin{array}{r} 0,15000 \\ \underline{0,09458} \\ 0,05542 \end{array}$$

Οὕτως ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι 0,05542.

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

206. *Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀπὸ δεκαδικοῦ, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε αἱ ὑποδιαστολαί των νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ καὶ ἄγοντες ὑπ' αὐτοὺς γραμμὴν ὁριζοντίαν ἀρχόμεθα ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ ἀφαιροῦμεν αὐτοὺς ὡς ἀκεραίους· πρὸ δὲ τοῦ ψηφίου τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τῶν δεκάτων θέτομεν ὑποδιαστολήν. Ἂν δὲ ὁ μειωτέος ἔχῃ ὀλιγώτερα ψηφία τοῦ ἀφαιρετέου εἰς τὸ κλασματικόν του μέρος ἢ εἶναι ἀκέραιος, συμπληροῦμεν τὰς ἐλλειπούσας θέσεις διὰ μηδενικῶν.*

Παραδείγματα.

$$\begin{array}{r} 25,045 \\ \underline{3,178} \\ 21,867 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 3,5 \\ \underline{2,943} \end{array} \text{ ἢ } \begin{array}{r} 3,500 \\ \underline{2,943} \\ 0,557 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 15 \\ \underline{0,25} \end{array} \text{ ἢ } \begin{array}{r} 15,00 \\ \underline{0,25} \\ 14,75 \end{array}$$

Πολλαπλασιασμός.

207. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἐπὶ δεκαδικὸν ἢ ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ὡς ἀκεραίους μὴ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ὑποδιαστολήν, ἀπὸ δὲ τοῦ γινομένου χωρίζομεν ὡς κλασματικὸν μέρος τόσα ψηφία, ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο παράγοντες.

Π. χ. Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 2,5 ἐπὶ τὸν 0,008.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 2,5 \\ \underline{0,008} \\ 0,0200 \end{array}$$

Γράφομεν τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον καὶ ἄγοντες ὑπ' αὐτοὺς γραμμὴν ὁριζοντίαν πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ὡς ἀκεραίους, μὴ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ὑποδιαστολήν, ὅτε οἱ ἀνωτέρω δεκαδικοὶ γίνονται 25 καὶ 8. Τούτους λοιπὸν πολλαπλασιάζοντες, εὑρίσκομεν γινόμενον 200, ἀπὸ τοῦ ὁποίου, χωρίζοντες ὡς κλασματικὸν μέρος τέσσαρα ψηφία (§ 207), εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον γινόμενον 0,0200.

Παραδείγματα

$$\begin{array}{r} 1,25 \\ 0,4 \\ \hline 0,500 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1,25 \\ 15 \\ \hline 625 \\ 125 \\ \hline 18,75 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,0015 \\ 0,04 \\ \hline 0,000060 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2,576 \\ 100 \\ \hline 257,600 \end{array}$$

* Ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον χωρίζομεν ἀπὸ τοῦ γινομένου ὅσα ψηφία ἔχουσι καὶ οἱ δύο παράγοντες εἰς τὸ κλασματικόν των μέρος εἶναι, διότι τὸ αὐτὸ γινόμενον εὑρίσκομεν καὶ ἂν τοὺς παράγοντας ἐγράφομεν ὑπὸ κλασματικὴν μορφήν.

Π. χ. Ὁ $2,5 \times 0,008 = \frac{25}{10} \times \frac{8}{1000} = \frac{200}{10000}$ ἤτοι 0,0200.

Ὁμοίως. Ὁ $1,25 \times 15 = \frac{125}{100} \times 15 = \frac{1875}{100}$ ἤτοι 18,75.

Συντομία.

208. Δεκαδικὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολήν του μίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιά, ἐπὶ 100 δύο θέσεις, ἐπὶ 1000 τρεῖς θέσεις καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς (§ 155 6').

Π. χ. Ὁ 5,457 ἐπὶ 10 δίδει οὕτω γινόμενον 54,57.

Ὁμοίως. Ὁ 5,457 ἐπὶ 100, 1000, κ.τ.λ. δίδει γινόμενα 545,7 5457.

Σημείωσις. Ὅταν ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ εἰς τὸ κλασματικόν του μέρος ψηφία, ὅσα χρειάζεται διὰ νὰ μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολή, τότε συμπληροῦμεν τὰς ὑπολοίπους θέσεις διὰ μηδενικῶν.

Π. χ. Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 5,4 ἐπὶ 10000.

Ἐπειδὴ ἡ ὑποδιαστολὴ πρέπει νὰ μετατεθῇ κατὰ τέσσαρας θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, συμπληροῦμεν τὰς ἐλλειπούσας θέσεις διὰ μηδενικῶν καὶ ἔχομεν 5,4000 ἐπὶ 10000=54000.

Διαίρεσις.

209. Εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α') *Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος.*

Β') *Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι δεκαδικός.*

Α'. περίπτωσις.—Διαιρέτης ἀκέραιος.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τοῦ 5,25 διὰ 7 ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 5,25 & 7 \\ \hline 35 & 0,75 \\ 0 & \end{array}$$

Ἐπειδὴ ὁ ἀκέραιος 5 διὰ 7 δὲν διαιρεῖται (δηλ. δὲν δίδει πηλίκον ἀκέραιον), διὰ τοῦτο γράφομεν 0 ὡς ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου καὶ χωρίζομεν καὶ ἕτερον ψηφίον ἐκ τοῦ διαιρετέου, ὅτε διαιροῦμεν τὰ 52 δέκατα διὰ 7 καὶ εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον 7 δέκατα καὶ ὑπόλοιπον 3 δέκατα, τὰ ὁποῖα τρέπομεν εἰς ἑκατοστὰ καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν 30 ἑκατοστά· εἰς ταῦτα δὲ προσθέτοντες καὶ τὰ 5 ἑκατοστὰ τοῦ δεκαδικοῦ θὰ ἔχωμεν 35 ἑκατοστά· ταῦτα δὲ τὰ 35 διαιροῦμεν διὰ 7 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 5 ἑκατοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 0, ἤτοι 5,25 : 7 =0,75.

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

210. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου, διαιροῦμεν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀκεραίου διαιρέτου καὶ τὸ προκῦπτον ἀκέραιον πηλίκον χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς ἢ ἐν ἐλλείψει τοιούτου γράφομεν 0, ὅπερ χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς εἰς τοὺς ἀκεραίους. Ἂν δὲ ἡ διαίρεσις ἀφήσῃ ὑπόλοιπον, δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν τρέποντες τὸ ὑπόλοιπον εἰς δεκαδικὰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως.*

Παραδείγματα.

```
135,58 | 8                0,125 | 4
 55     16,9475            5     0,03125
  75                        10
   38                        20
    6 ἑκατοστὰ                0
    60 χιλιοστὰ
     4 χιλ.
     40 δεκ. χιλ.
      0
```

Σημείωσις. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δύναται νὰ διαιρεθῇ καὶ ἀκέραιος δι' ἀκεραίου καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν.

Π.χ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τοῦ 14 διὰ 5 ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

```
14   | 5
40δ.   2,8
 0
```

Ὁ 14 διὰ 5 δίδει ὡς ἀκέραιον πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 4. Ὅθεν, χωρίζοντες δι' ὑποδιαστολῆς τὸ πηλίκον καὶ τρέποντες τὸ ὑπόλοιπον 4 εἰς δέκατα διὰ τῆς προσθήκης ἑνὸς μηδενικοῦ, εὑρίσκομεν 4,0 ἤτοι 40 δέκατα. Διαιροῦντες δὲ ταῦτα διὰ τοῦ 5, εὑρίσκομεν πηλίκον 8 δέκατα καὶ ὑπόλοιπον 0. Ὥστε τὸ ζητούμενον πηλίκον τοῦ 14 διὰ 5 ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν εἶναι 2,8.

Σημείωσις. Ὅταν ἐξακολουθοῦντες τὴν διαίρεσιν δὲν εὑρίσκωμεν ὑπόλοιπον 0, τότε δυνάμεθα ἢ νὰ σταματήσωμεν τὸ πηλίκον εἰς δεκαδικήν τινα τάξιν ἢ νὰ λάβωμεν καὶ τὸ ἐπίλοιπον αὐτοῦ μέρος ὑπὸ κλασματικὴν μορφήν.

Π. χ. Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τοῦ 4 διὰ 7 ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, ἤτοι $4:7=0{,}57142857\ldots$ διὰ τοῦτο ἐὰν μὲν σταματήσωμεν τὴν διαίρεσιν μέχρι τῶν χιλιοστῶν, θὰ ἔχωμεν ὡς πηλίκον 0,571 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ. Ἂν ὅμως θέλωμεν τὸ ἀκριβὲς πηλίκον μέχρι τῶν χιλιοστῶν, τοῦτο εἶναι 0,571 καὶ $\frac{3}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ.

211. Διὰ νὰ λάβωμεν κλάσμα τι ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

Π. χ. Τὸ $\frac{4}{5}$ γίνεται οὕτω 0,8.

Συντομία.

212. Δεκαδικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 10, ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολήν του μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἀριστερά, διὰ 100 δύο θέσεις, διὰ 1000 τρεῖς θέσεις καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς (§ 163 α').

Π. χ. Ὁ 15,3 διὰ 10 δίδει οὕτω πηλίκον 1,53.

Ὁμοίως. Ὁ 2578,4 διὰ 100, 1000, κ.τ.λ. δίδει πηλίκα 25,784 2,5784.

Σημείωσις. Ὅταν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν ἔχῃ ψηφία, ὅσα χρειάζεται διὰ νὰ μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολή, τότε συμπληροῦμεν τὰς ἐπιλοίπους θέσεις διὰ μηδενικῶν.

Π. χ. Νὰ διαιρεθῇ ὁ 5,4 διὰ 10000.

Ἐπειδὴ ἡ ὑποδιαστολὴ πρέπει νὰ μετατεθῇ κατὰ τέσσαρας θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά, συμπληροῦμεν τὰς ἐπιλοίπους θέσεις διὰ μηδενικῶν καὶ ἔχομεν 00005,4 διὰ 10000=0,00054.

Β'. περίπτωσις.—Διαιρέτης δεκαδικός.

215. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν *ὁποιονδήποτε* ἀριθμὸν διὰ δεκαδικοῦ, τρέπομεν πρῶτον τὸν διαιρέτην εἰς ἀκέραιον, πολλαπλασιάζοντες διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (§ 181), ἤτοι ἐπὶ 10, 100, 1000, κ.τ.λ., καθόσον ὁ διαιρέτης ἔχει ἕν, δύο, τρία κ.τ.λ. δεκαδικὰ ψηφία εἰς τὸ κλασματικόν του μέρος.

Π. χ. Νὰ διαιρεθῇ ὁ 4 διὰ 0,05.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$4 \;\big|\; \underline{0{,}05} \qquad \text{ἢ} \qquad 400 \;\big|\; \underline{5} \qquad \begin{array}{l} 0 \quad 80 \end{array}$$

Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης γίνεται ἀκέραιος, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 100, διὰ τοῦτο ἐπολλαπλασιάσαμεν καὶ τὸν διαιρετέον ἐπὶ 100, ὅτε ἀντὶ τοῦ 4 : 0,05 εὕρομεν 400 : 5, τούτους δὲ διαιρέσαντες εὕρομεν τὸ ζητούμενον πηλίκον 80. Ὥστε τὸ πηλίκον τοῦ 4 διὰ 0,05 εἶναι 80.

Γυμνάσματα.

Νὰ διαιρεθῇ ὁ 0,015 διὰ 4.

Παρατήρησις. Δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἀπ' εὐθείας τὸ 15 διὰ 4, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι τὸ 15 σημαίνει χιλιοστὰ καὶ νὰ θέσωμεν τὸ προκῦπτον πηλίκον 3 εἰς τὴν θέσιν τῶν χιλιοστῶν καὶ ἔπειτα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν ὡς ἀνωτέρω, ἤτοι

$$\begin{array}{r|l} 0,015 & 4 \\ \hline 30 & 0,00375 \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

ὥστε τὸ πηλίκον τοῦ 0,015 : 4 εἶναι 0,00375.

2) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς πράξεις·

$\frac{2}{5} \times 1,5 = \frac{3,0}{5} = 0,6$

$2,5 : \frac{5}{4} = 2,5 \times \frac{4}{5} = \frac{10,0}{5} = 2,0$ ἤτοι 2

$\frac{3}{5} : 0,4 = \frac{30}{5} : 4 = \frac{30}{20} = \frac{3}{2} = 1,5$

$15 : 0,002 = 15000 : 2 = 7500$

$2,5 : 0,4 = 25 : 4 = 6,25$

$0,0001 : 2,5 = 0,001 : 25 = 0,00004$

$15,005 : 0,001 = 15005 : 1 = 15005$

$3,1 : 0,031 = 3100 : 31 = 100$

$7,15 : 40 = 0,17875$

$3\frac{4}{5} : 0,04 = 300\frac{400}{5} : 4 = 380 : 4 = 95$

3) Νὰ τραπῇ ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $3\frac{4}{5}$ εἰς χιλιοστά. (3,800)

Προβλήματα

1) Ποῖος ἀριθμὸς αὐξηθεὶς κατὰ 4,008 γίνεται ἴσος μὲ 5,1 ; (ὁ 1,092)

2) Ἡ μία ὀκᾶ πράγματός τινος ἀξίζει 25,5 δρχ. Πόσον ἀξίζουν αἱ $15\frac{3}{4}$ ὀκᾶς ; (401,625 δχ. ἤτοι 401 δρχ. $62\frac{1}{2}$ λεπτ.)

3) Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος ἀξίζει 0,75 δρχ. Πόσους πήχεις ἀγοράζομεν μὲ 750,75 δρχ. ; (1001 πήχεις).

4) Πόσα εἶναι τὰ 2,5 τῶν 15,75 δραχμῶν;

(39,375 δρχ. ἤτοι 39 δρχ. $37\frac{1}{2}$ λεπτ.)

5) Ἄνθρωπός τις ἠγόρασε πράγματα ἀξίας 175 δρχ. καὶ τῷ γίνεται ἔκπτωσις 5 δρχ. εἰς τὰς 100 δρχ. Ζητεῖται πόσον τοῦ ἐκπίπτουσιν.

Σημείωσις. Διὰ νὰ ἐκπέσωμεν ἀπὸ ποσόν τι 5 ἢ 6 ἢ 7 ἢ 8 ἢ 9 ἢ 10 κ.τ.λ. ἐπὶ τοῖς ἑκατόν, ἀρκεῖ νὰ ἐκπέσωμεν τὰ 0,05 ἢ 0,06 ἢ 0,07 ἢ 0,08 ἢ 0,09 ἢ 0,10 κ.τ.λ. αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ. (175 δρ.×0,05 ἤτοι 8,75 δρχ.)

6) Ἄνθρωπός τις ἠγόρασε πράγματα ἀξίας 175 δρχ. καὶ τῷ γίνεται ἔκπτωσις 5 δρχ. εἰς τὰς 100 δρχ. Πόσα θὰ πληρώσῃ;

Σημείωσις Πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν ἔκπτωσιν, ἡ ὁποία τῷ γίνεται, καὶ νὰ τὴν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰς 175 δρχ. ἢ νὰ ζητήσωμεν ἀπ' εὐθείας τὰ 0,95 τῶν 175 δραχμῶν, ὅτε θὰ ἔχωμεν (175×0,95 ἤτοι 166,25 δρχ.).

7) Ἄνθρωπός τις ἐξώδευσε 1500 δρχ. πρὸς ἀγορὰν ἴσης ποσότητος ἐλαίου καὶ ζακχάρεως. Καὶ τὸ μὲν ἔλαιον ἐτιμᾶτο 1,15 δρχ. τὴν ὀκᾶν, ἡ δὲ ζάκχαρις 1,85 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Ἀπὸ πόσας ὀκάδας θὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους καὶ πόσα θὰ δώσῃ διὰ τὸ ἔλαιον καὶ πόσα διὰ τὴν ζάκχαριν;

(ἀπὸ 500 ὀκδ.—575 δρχ. τὸ ἔλαιον.—925δρχ. ἡ ζάκχ.).

8) Ἐπώλησέ τις πρόβατα πρὸς 10,80 δρχ. ἕκαστον καὶ ἠγόρασεν ἵππον, ὅτε τῷ ἐπερίσσευσαν 50 δρχ. Ἐὰν ἐπώλει τὰ πρόβατα πρὸς 12,20 δρχ. θὰ τῷ ἐπερίσσευον 78 δρχ., πόσα πρόβατα ἐπώλησε καὶ πόσον ἠγόρασε τὸν ἵππον;

(20 πρόβατα.—166 δρχ. τὸν ἵππον).

9) Ὑπάλληλός τις λαμβάνει μισθὸν 160 δρχ. κατὰ μῆνα, ἐκ τῶν ὁποίων λόγῳ συντάξεως τῷ γίνεται κράτησις 12 δρχ. Ἐὰν ἐργασθῇ 17 ἡμέρας, πόσα θὰ λάβῃ καὶ πόσα θὰ τῷ κρατήσωσι;

(Θὰ λάβῃ 83 δρχ., $86\frac{2}{3}$.—ἡ κράτησις 6,80 δρχ.)

Σημείωσις. Ὁ μὴν θεωρεῖται ἔχων 30 ἡμέρας.

10) Ἐμπορορράπτης τις ἔχει 45 πανταλόνια, τῶν ὁποίων ἕκαστον τῷ στοιχίζει 21,75 δρχ. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ ἕκαστον, διὰ κερδίζῃ ἐκ τῶν 45 πανταλονίων τὸ τριπλάσιον τῆς ἀξίας τοῦ ἑνός;

(23,20 δρχ. ἕκαστον).

11) Ἐργάτης τις λαμβάνει ἡμερομίσθιον 1,75 δρχ. ἐκτὸς τῆς

τροφῆς του, ὅταν δὲ δὲν λαμβάνῃ τροφήν, τὸ ἡμερομίσθιόν του εἶναι 3,20 δρχ. Ὁ ἐργάτης οὗτος εἰργάσθη 85 ἡμέρας καὶ ἔλαβε 202,40 δρχ. Ζητεῖται πόσας ἡμέρας ἔλαβε τροφήν.

Λύσις. Ἂν δὲν ἐλάμβανε τροφήν, θὰ ἐπληρώνετο 3,20×85 ἤτοι 272 δρχ., ἤδη ὅμως ἔλαβε 202,40 δρχ. ἄρα τοῦ ἐκράτησαν διὰ τροφὴν 69,60 δρχ., ἐπειδὴ δὲ ἐπλήρωσε 3,20—1,75 ἤτοι 1,45 δρχ. τὴν ἡμέραν διὰ τροφήν, ἄρα ἔλαβε τροφὴν ἐπὶ ἡμέρας 69,60 : 1,45 ἤτοι 48 ἡμέρας, τὰς δὲ λοιπὰς 37 ἡμέρας δὲν ἔλαβε τροφὴν εἰς τὴν ἐργασίαν του.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'.

Περὶ συμμιγῶν ἀριθμῶν.

Ὁρισμοί.

214. *Ποσὸν λέγεται πᾶν τὸ ὁποῖον ἐπιδέχεται αὔξησιν καὶ ἐλάττωσιν.*

215. *Μέτρησις ποσοῦ λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς ποσόν, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονάς.*

Σημείωσις. Ἡ μονὰς τῆς μετρήσεως δι' ἕκαστον ποσὸν ὄχι μόνον δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς ὅλα τὰ ἔθνη, ἀλλ' οὐδὲ ἡ ὑποδιαίρεσις τῆς ἀρχικῆς μονάδος γίνεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Ἡ ἁπλουστέρα δὲ ὑποδιαίρεσις τῆς ἀρχικῆς μονάδος εἰς ἄλλας μονάδας εἶναι ἡ δεκαδική, διότι τότε τὰ ἐξαγόμενα τῆς μετρήσεως δύνανται νὰ γραφῶσιν ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, ὅτε αἱ πράξεις ἐπ' αὐτῶν γίνονται εὐκολώτερον.

216. *Δεκαδικὸν μετρικὸν σύστημα λέγεται τὸ σύστημα τῆς μετρήσεως, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποδιαίρεσις τῆς ἀρχικῆς μονάδος γίνεται κατὰ δεκαδικὸν τρόπον.*

(Δηλ. ἑκάστη μονὰς εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ ἢ τὸ $\frac{1}{100}$ ἢ τὸ $\frac{1}{1000}$ κ.τ.λ. τῆς ἀρχικῆς μονάδος).

217. *Συμμιγὴς ἀριθμὸς λέγεται ὁ ἀποτελούμενος ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἕκαστος ἔχει ἴδιον ὄνομα καὶ γίνεται ἀπὸ ἰδίαν μονάδα, ἡ ὁποία εἶναι πολλαπλάσιον ἢ μέρος τῆς ἀρχικῆς μονάδος.*

Π.χ. Ὁ 2 ὀκ. 250 δρμ. λέγεται συμμιγής.

218. Τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμοὺς διακρίνομεν εἰς δύο κατηγορίας.

Α') *Εἰς συμμιγεῖς μὲ δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις.*

Β') *Εἰς συμμιγεῖς ἄνευ δεκαδικῶν ὑποδιαιρέσεων.*

Μονάδες συμμιγῶν μὲ δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις.

219. Εἰς τοὺς συμμιγεῖς μὲ δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις διακρίνομεν α΄) *μονάδας μήκους*, β΄) *μονάδας ἐπιφανείας*, γ΄) *μονάδας χωρητικότητος ἢ ὄγκου*, δ΄) *μονάδας βάρους* καὶ ε΄) *μονάδας νομισμάτων*.

Α΄. Μονάδες μήκους.

220. Ἡ ἀρχικὴ μονὰς τῆς μετρήσεως μήκους εἶνε τὸ *Γαλλικὸν μέτρον*, ἢ *Βασιλικὸς πῆχυς*.

Σημείωσις. Τὸ Γαλλικὸν μέτρον εἶναι τὸ $\frac{1}{40000000}$ τοῦ γηΐνου μεσημβρινοῦ καὶ ἔχει τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις.

1) *Τὴν παλάμην* (ἢ δεκατόμετρον ἢ ὑποδεκάμετρον). Ἡ παλάμη εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου. Ἄρα τὸ μέτρον ἔχει 10 παλάμας.

2) *Τὸν δάκτυλον* (ἢ ἑκατοστόμετρον ἢ ὑφεκατόμετρον). Ὁ δάκτυλος εἶναι τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ μέτρου. Ἄρα τὸ μέτρον ἔχει 100 δακτύλους.

3) Τὴν *γραμμὴν* ἢ *χιλιοστόμετρον*. Ἡ γραμμὴ εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ μέτρου. Ἄρα τὸ μέτρον ἔχει 1000 γραμμάς.

Παράδειγμα 1ον. Συμμιγὴς ἐκ τοιούτων μονάδων εἶναι π. χ. ὁ 2μετ. 4παλ. 8δακ. 5γραμ.

Σημείωσις. Διὰ τὰ μεγάλα μήκη, ὁποῖα εἶναι τὰ μήκη ὁδῶν, διωρύγων σιδηροδρομικῶν γραμμῶν κ.τ.λ. μεταχειριζόμεθα, ὡς μονάδα, τὸ *χιλιόμετρον* ἢ *στάδιον*, τὸ ὁποῖον ἔχει 1000 μέτρα.

Β΄. Μονάδες ἐπιφανείας.

221. Ἡ ἀρχικὴ μονὰς τῆς μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν, δηλαδὴ ἡ μονὰς τὴν ὁποίαν μεταχειριζόμεθα πρὸς καταμέτρησιν τῆς ἐκτάσεως τοῦ ἐξωτερικοῦ μέρους τῶν σωμάτων, εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι ἓν μέτρον.

Σημείωσις. Τετράγωνον λέγεται ἐπιφάνεια ἐπίπεδος περικλειομένη ὑπὸ τεσσάρων εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι καὶ κάθετοι μεταξύ των.

322. Τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ἔχει τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις.

1) Τὴν *τετραγωνικὴν παλάμην*. Ἡ τετραγωνικὴ παλάμη εἶναι

τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου. Ἄρα τὸ τ. μέτρον ἔχει 100 τ. παλάμας.

2) Τὸν *τετραγωνικὸν δάκτυλον*. Ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος εἶναι τὸ $\frac{1}{10000}$ τοῦ τ. μέτρου. Ἄρα τὸ τ. μέτρον ἔχει 10000 τ. δακτύλους.

3) Τὴν *τετραγωνικὴν γραμμήν*. Ἡ τετραγωνικὴ γραμμὴ εἶναι τὸ $\frac{1}{1000000}$ τοῦ τετραγ. μέτρου. Ἄρα τὸ τ. μέτρον ἔχει 1000000 τ. γραμμάς.

Παράδειγμα 1ον. Συμμιγὴς ἐκ τοιούτων μονάδων εἶναι π.χ. ὁ 3 τ. μ. 8 τ. παλ. 9 τ. δακ. 7 τ. γραμ.

Σημείωσις α'. Διὰ τὰς μεγάλας ἐπιφανείας μεταχειριζόμεθα ὡς μονάδα τὸ *τετραγωνικὸν χιλιόμετρον*, τὸ ὁποῖον ἔχει 1000000 τ. μέτρα. Διὰ δὲ τὰς ἀγροτικὰς ἐπιφανείας καὶ ἐν γένει διὰ τὰ ἐδάφη λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ *Βασιλικὸν στρέμμα*, τὸ ὁποῖον ἔχει 1000 τ. μέτρα.

Παρατήρησις. Διὰ νὰ εὕρωμεν ἐκ τῶν ὑποδιαιρέσεων τοῦ ἁπλοῦ μέτρου τὰς ἀντιστοίχους ὑποδιαιρέσεις τοῦ τ. μέτρου, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν ἑκάστης ὑποδιαιρέσεως τοῦ ἁπλοῦ μέτρου ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του.

Π.χ. Τὸ ἁπλοῦν μέτρον ἔχει 10 παλάμας, 100 δακτύλους, 1000 γραμμάς. Ἄρα τὸ τετραγωνικὸν μέτρον θὰ ἔχῃ 10×10 ἤτοι 100 τ. παλάμας, 100×100 ἤτοι 10000 τ. δακτύλους καὶ 1000×1000 ἤτοι 1000000 τ. γραμμάς.

Γ'. Μονάδες ὄγκου ἢ χωρητικότητος.

223. Ἡ ἀρχικὴ μονὰς τῆς μετρήσεως τοῦ ὄγκου τῶν σωμάτων εἶναι τὸ κυβικὸν μέτρον.

Σημείωσις. Τὸ κυβικὸν μέτρον εἶναι στερεόν, τὸ ὁποῖον περικλείεται ὑπὸ ἓξ τετραγωνικῶν μέτρων, ἅτινα εἶναι κάθετα μεταξύ των. Ἔχει δὲ τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις.

1) Τὴν *κυβικὴν παλάμην*. Ἡ κυβικὴ παλάμη εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ κ. μέτρου. Ἄρα τὸ κ. μέτρον ἔχει 1000 κ. παλάμας.

2) Τὸν *κυβικὸν δάκτυλον*. Ὁ κυβικὸς δάκτυλος εἶναι τὸ $\frac{1}{1000000}$ τοῦ κυβ. μέτρου. Ἄρα τὸ κ. μέτρον ἔχει 1000000 κ. δακτύλους.

Παράδειγμα 1ον. Συμμιγὴς δὲ ἐκ τοιούτων μονάδων εἶναι π. χ. ὁ 4 κ. μ. 3 κ. π. 2 κ. δακτυλ.

Παρατήρησις. Διὰ νὰ εὕρωμεν ἐκ τῶν ὑποδιαιρέσεων τοῦ ἁπλοῦ Γαλλικοῦ μέτρου τὰς ἀντιστοίχους ὑποδιαιρέσεις τοῦ κ. μέτρου, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τρεῖς φορὰς τὸν ἀριθμὸν ἑκάστης ὑποδιαιρέσεως τοῦ ἁπλοῦ μέτρου καὶ νὰ τοὺς πολλαπλασιάσωμεν.

Π. χ. Τὸ ἁπλοῦν μέτρον ἔχει 10 παλάμας, 100 δακτύλους. Ἄρα τὸ κυβικὸν μέτρον θὰ ἔχῃ $10 \times 10 \times 10$ ἤτοι 1000 κ. παλάμας καὶ $100 \times 100 \times 100$ ἤτοι 1000000 κ. δακτύλους.

224. Τὰ μέτρα χωρητικότητος τὰ ὁποῖα μεταχειριζόμεθα ὡς μονάδας πρὸς καταμέτρησιν τῶν ὑγρῶν, δημητριακῶν καρπῶν ἢ ἄλλων ξηρῶν ὑλῶν, εἶναι τὰ ἑξῆς.

Ὁ *τόννος χωρητικότητος*. Ὁ τόννος εἶναι ἡ χωρητικότης ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου· μεταχειριζόμεθα δ' αὐτὸν διὰ τὰς χωρητικότητας πλοίων καὶ ἀναλόγων ἀντικειμένων. Ἔχει δὲ ὁ τόννος χωρητικότητος τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις.

1) Τὸ *κοιλόν*. Τὸ κοιλὸν εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ τόννου χωρητικότητος. Ἄρα ὁ τόννος χωρητικότητος ἔχει 10 κοιλά.

2) Τὴν *λίτραν*. Ἡ λίτρα (ἥτις εἶναι ἐν χρήσει διὰ τὰ ὑγρὰ) εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ τόννου χωρητικότητος (ἤτοι ἡ χωρητικότης μιᾶς κ. παλάμης). Ἄρα ὁ τόννος χωρητικότητος ἔχει 1000 λίτρας.

Παράδειγμα 1ον. Συμμιγὴς δὲ ἐκ τοιούτων μονάδων εἶναι π.χ. ὁ 4 τον. χωρ. 3 κοιλ. 5 λιτρ.

Δ΄. Μονάδες βάρους.

225. Τὰ βάρη, τὰ ὁποῖα μεταχειριζόμεθα πρὸς στάθμησιν διαφόρων σωμάτων, εἶναι τὰ ἑξῆς

Ὁ *τόννος βάρους*. Ὁ τόννος βάρους εἶναι τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4 βαθμῶν τοῦ ἑκατονταβάθμου θερμομέτρου. Ἔχει δὲ τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις.

1) Τὸ *χιλιόγραμμον*. Τὸ χιλιόγραμμον εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ τόννου (ἤτοι τὸ βάρος τοῦ ἀνωτέρω ἀπεσταγμένου ὕδατος, τὸ ὁποῖον χωρεῖ ἡ κ. παλάμη). Ἄρα ὁ τόννος βάρους ἔχει 1000 χιλιόγραμμα.

2) Τὸ *γραμμάριον* ἢ *δραχμήν*. Τὸ γραμμάριον εἶναι τὸ $\frac{1}{1000000}$

τοῦ τόννου βάρους (ἤτοι τὸ βάρος τοῦ ἀνωτέρω ἀπεσταγμένου ὕδατος, τὸ ὁποῖον χωρεῖ ὁ κ. δάκτυλος). Ἄρα ὁ τόννος ἔχει 1000000 γραμ.

Παράδειγμα 1ον. Συμμιγὴς δὲ ἐκ τοιούτων μονάδων εἶναι π. χ. ὁ 4 τον. βάρ. 7 χιλ. 8 γραμ.

Σημείωσις. Τὰ χιλιόγραμμα καὶ αἱ λίτραι τοῦ τόννου εἶναι ὅσαι αἱ κ. παλάμαι. Τὰ δὲ γραμμάρια ὅσοι οἱ κ. δάκτυλοι.

Ε'. Μονάδες νομισμάτων.

226. Ἡ *δραχμή*. Ἡ δραχμὴ ἔχει τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις.

1) Τὸ *διώβολον* (δεκάλεπτον). Τὸ δεκάλεπτον εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς δραχμῆς. Ἄρα ἡ δραχμὴ ἔχει 10 δεκάλεπτα.

2) Τὸ *λεπτόν*. Τὸ λεπτὸν εἶναι τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς δραχμῆς. Ἄρα ἡ δραχμὴ ἔχει 100 λεπτά.

Παράδειγμα 1ον. Συμμιγὴς δὲ ἐκ τοιούτων μονάδων εἶναι π. χ. ὁ 5 δρχ. 8 δεκλ. 5 λεπτ.

Γραφὴ συμμιγῶν (μὲ ὑποδιαιρέσεις δεκαδικὰς) ὑπὸ μορφὴν δεκαδικὴν καὶ τ' ἀνάπαλιν.

Παράδειγμα 1ον. Ὁ συμμιγὴς 5 μ. 2 π. 3 δ. 4 γρ. νὰ γραφῇ ὑπὸ μορφὴν δεκαδικήν.

Λύσις. Ἀφ' οὗ γράψωμεν τὸν ἀριθμὸν 5 μ. ὡς ἀκέραιον τοῦ δεκαδικοῦ, αἱ 2 παλ. πρέπει νὰ γραφῶσιν εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάτων, $\left(\text{διότι ἡ παλάμη εἶναι τὸ } \frac{1}{10} \text{ τοῦ μέτρου}\right)$, αἱ 3 δακ. πρέπει νὰ γραφῶσιν εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοστῶν, $\left(\text{διότι ὁ δάκτυλος εἶναι τὸ } \frac{1}{100}\right.$ τοῦ μέτρου), αἱ 4 γραμ. πρέπει νὰ γραφῶσιν εἰς τὴν θέσιν τῶν χιλιοστῶν, $\left(\text{διότι ἡ γραμμὴ εἶναι τὸ } \frac{1}{1000} \text{ τοῦ μέτρου}\right)$, ἄρα ὁ δοθεὶς συμμιγὴς 5 μ. 2 π. 3 δ. 4 γ. γράφεται ὡς δεκαδικὸς οὕτω 5μέτ, 234.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ γραφῇ ὁ συμμιγὴς 5 τ. μ. 2 τ. παλ. 3 τ. δ. 4 τ. γρ. ὑπὸ μορφὴν δεκαδικήν.

Λύσις. Γράφοντες τὸν 5 τ. μετρ. ὡς ἀκέραιον τοῦ δεκαδικοῦ, τὰς δὲ 2 τ. π. εἰς τὰ ἑκατοστά, $\left(\text{διότι ἡ τ. παλάμη εἶναι τὸ } \frac{1}{100} \text{ τοῦ}\right.$ τ. μέτρου) καὶ τοὺς 3 τ. δ. εἰς τὰ δεκάκις χιλιοστά· (διότι ὁ τ. δάκτυλος εἶναι τὸ $\frac{1}{10000}$ τοῦ τ. μέτρου) καὶ τὰς 4 τ. γρμ. εἰς τὰ ἑκατομμυριοστά, (διότι ἡ τ. γραμμὴ εἶναι τὸ $\frac{1}{1000000}$ τοῦ τ. μέτρου) καὶ γράφοντες μηδενικὰ εἰς τὰς θέσεις τοῦ δεκαδικοῦ, εἰς τὰς ὁποίας δὲν ἀντιστοιχοῦσι μονάδες τοῦ συμμιγοῦς, εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ δοθεὶς συμμιγὴς 5τ. μ., 2 τ. π. 3 τ. δ. 4 τ. γρ. γράφεται ὡς δεκαδικὸς οὕτω 5 τ.μ., 020304.

Ἐκ τούτων μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

227. *Οἱ συμμιγεῖς οἱ ἔχοντες δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις εὐκόλως γράφονται ὑπὸ μορφὴν δεκαδικήν, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος γίνεται ἐκ τῆς μεγαλητέρας μονάδος τοῦ συμμιγοῦς, ὡς ἀκέραιον τοῦ δεκαδικοῦ ἢ ἐν ἐλλείψει τούτου 0, τοὺς δὲ λοιποὺς ἀριθμοὺς τοῦ συμμιγοῦς εἰς τὰς ἀντιστοίχους ὑποδιαιρέσεις τοῦ δεκαδικοῦ, συμπληροῦντες διὰ μηδενικῶν τὰς θέσεις τοῦ δεκαδικοῦ, εἰς τὰς ὁποίας δὲν ἀντιστοιχοῦσι μονάδες τοῦ συμμιγοῦς.*

Π. χ. Ὁ συμμιγὴς 5 κ. μ. 2 κ. π. 3 κ. δ. νὰ γραφῇ ὑπὸ μορφὴν δεκαδικήν.

Κατὰ τὸν κανόνα (§ 227) ὁ δοθεὶς συμμιγὴς γράφεται ὡς δεκαδικὸς οὕτω 5κ. μ., 002003.

Ὁμοίως. Ὁ συμμιγὴς 5 τ. χωρ. 2 κοιλ. 3 λίτρ. γράφεται δεκαδικῶς οὕτω 5τ. χωρ., 203.

Ὁμοίως. Ὁ 5 τον. 2 χιλ. 3 γρμ. γράφεται 5τον., 002003.

Ὁμοίως. Ὁ 5 δρχ. 2 λεπτ. γράφεται 5δρχ., 02.

228. *Πάντα δεκαδικὸν ἀριθμὸν γινόμενον ἐκ μονάδος τοῦ δεκαδικοῦ μετρικοῦ συστήματος δυνάμεθα νὰ τὸν γράψωμεν ὡς συμμιγῆ, γράφοντες χωριστὰ τὰς μονάδας τοῦ δεκαδικοῦ, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦσιν εἰς μονάδας τοῦ συμμιγοῦς.*

Π. χ. Ὁ δεκαδικὸς 5,237 τοῦ μέτρου νὰ γραφῇ ὡς συμμιγής.

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου εἶναι ἡ παλάμη καὶ τὸ $\frac{1}{100}$ αὐτοῦ εἶναι ὁ δάκτυλος καὶ τὸ $\frac{1}{1000}$ ἡ γραμμή, διὰ τοῦτο ὁ 5 μ., 237 ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν συμμιγῆ 5 μ. 2 π. 3 δ. 7 γρμ.

Ὁμοίως. Ὁ δεκαδικὸς 5,237 τοῦ τ. μέτρου ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν συμμιγῆ 5 τ. μ. 23 τ. παλ. 70 τ. δακτ.

Ὁμοίως. Ὁ 6,35078 τοῦ κ. μέτρου ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν συμμιγῆ 6 κ. μ. 350 κ. π. 780 κ. δ.

Ὁμοίως Ὁ 15,1584 τοῦ τον. χωρητικότητος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν συμμιγῆ 15 τ.χ. 1 κοιλ. 58 λιτρ. $\frac{4}{10}$.

Ὁμοίως. Ὁ 15,1584 τοῦ τον. βάρους ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν συμμιγῆ 15 τ. βαρ. 158 χιλ. 400 γραμ.

Ὁμοίως. Ὁ 15,357 τῆς δραχμῆς ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν συμμιγῆ 15 δρχ. 35 λεπ. $\frac{7}{10}$.

Τροπὴ συμμιγοῦς μὲ ὑποδιαιρέσεις δεκαδικὰς εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος αὐτοῦ.

229. *Διὰ νὰ τρέψωμεν συμμιγῆ τοῦ δεκαδικοῦ μετρικοῦ συστήματος εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος αὐτοῦ, τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς δεκαδικὸν καὶ ἔπειτα ἀπαγγέλλομεν τοῦτον μέχρι τῆς θέσεως, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ὁρισθεῖσαν μονάδα τοῦ συμμιγοῦς, τὸ δὲ ἐπίλοιπον μέρος (ἂν ὑπάρχῃ) τὸ ἐκφράζομεν κλασματικῶς. Ἂν δὲ ὁ εὑρεθεὶς δεκαδικὸς δὲν ἔχῃ ψηφία μέχρι τῆς εἰρημένης θέσεως, συμπληροῦμεν τὰς ἐπιλοίπους θέσεις διὰ μηδενικῶν.*

Π. χ. Ὁ συμμιγὴς 5 μ. 2. π. 3 δ. 7. γρ. νὰ τραπῇ εἰς μέτρα ἢ παλάμας ἢ δακτύλους ἢ γραμμάς.

Πρὸς τοῦτο γράφομεν τὸν συμμιγῆ πρῶτον ὡς δεκαδικόν, ὅτε ἔχομεν 5μ., 237.

Κατὰ δὲ τὸν κανόνα (§ 229) ἔχομεν, ὅτι

ὁ 5 μ., 237 ἔχει ἐν συνόλῳ 5 μέτρα καὶ $\frac{237}{1000}$ τοῦ μέτρου

ὁ 5 μ., 237 » » » 52 παλ. καὶ $\frac{37}{100}$ τῆς παλάμης

ὁ 5 μ., 237 » » » 523 δακτ. καὶ $\frac{7}{10}$ τοῦ δακτύλου

ὁ 5 μ., 237 » » » 5237 γραμμάς.

Ὁμοίως. Τὸν συμμιγῆ 20τον. βαρ. 17χιλ. 150γρμ. τρέπομεν εἰς τὰς διαφόρους αὐτοῦ μονάδας ὡς ἑξῆς.

Γράφομεν πρῶτον τὸν συμμιγῆ ὡς δεκαδικόν, ὅτε γίνεται 20τον. βαρ., 017150. Οὕτω δ' ἔχομεν, ὅτι

ὁ 20τον.,017150 ἔχει ἐν συνόλῳ 20τον. καὶ $\frac{17150}{1000000}$ τοῦ τόννου

ὁ 20τον.,017150 » » » 20017χιλιογραμ. καὶ $\frac{150}{1000}$ τοῦ χιλγρ.

ὁ 20τον.,017150 » » » 20017150 γραμμάρια.

Ὁμοίως ὁ συμμιγὴς 15δχ. 35 λεπτ. γίνεται

15δχ. 35λεπτ.=15δχ., 35=15δχ. $\frac{35}{100}$=153δεκλ. $\frac{5}{10}$=1535λεπτ.

Μονάδες συμμιγῶν ἄνευ δεκαδικῶν ὑποδιαιρέσεων

230. Εἰς τοὺς συμμιγεῖς ἄνευ δεκαδικῶν ὑποδιαιρέσεων διακρίνομεν α'.) *μονάδας μήκους*, β'.) *μονάδας βάρους*, γ'.) *μονάδας νομισμάτων* καὶ δ'.) *μονάδας χρόνου*.

Α'. Μονάδες μήκους.

α'.) Ἡ *ὀργυιά*. Ἡ ὀργυιὰ ἔχει τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις.

1) Τὸν *πόδα*. Ὁ ποὺς εἶναι τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς ὀργυιᾶς. Ἄρα ἡ ὀργυιὰ ἔχει 6 πόδας.

2) Τὸν *δάκτυλον*. Ὁ δάκτυλος εἶναι τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ποδός. Ἄρα ὁ ποὺς ἔχει 12 δακτύλους.

3) Τὴν *γραμμήν*. Ἡ γραμμὴ εἶναι τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ δακτύλου. Ἄρα ὁ δάκτυλος ἔχει 12 γραμμάς.

Σημείωσις. Ἡ μονὰς αὕτη μετὰ τῶν ὑποδιαιρέσεών της ἤρχισε νὰ μεταπίπτῃ εἰς ἀχρηστίαν.

β'.) Ὁ *πῆχυς*. Ὁ πῆχυς ἔχει ὑποδιαίρεσιν τὸ *ῥούπιον*, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως. Ἄρα ὁ πῆχυς ἔχει 8 ῥούπια.

Β'. Μονάδες βάρους.

231. *Ὁ στατήρ*. Ὁ στατὴρ ἔχει τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις.

1) *Τὴν ὀκᾶν*. Ἡ ὀκᾶ εἶναι τὸ $\frac{1}{44}$ τοῦ στατῆρος. Ἄρα ὁ στατὴρ ἔχει 44 ὀκάδας.

2) *Τὸ δράμιον*. Τὸ δράμιον εἶναι τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς. Ἄρα ἡ ὀκᾶ ἔχει 400 δράμια.

232. Ἑτέρας μονάδας βάρους ἔχομεν τὰς ἑξῆς.

1) Τὴν *Ἐνετικὴν λίτραν*, ἡ ὁποία ἔχει 150 δράμια.

2) Τὸ *Τουρκικὸν κοιλόν*, τὸ ὁποῖον ἔχει 22 ὀκάδας.

Γ΄. Μονάδες νομισμάτων.

233. Νομίσματα ἔχομεν τεσσάρων εἰδῶν· α΄) *χαλκᾶ*, β΄) *νίκελ*, γ΄) *ἀργυρᾶ* καὶ δ΄) *χρυσᾶ*.

α΄) Χαλκᾶ νομίσματα ἔχομεν 1 λεπτοῦ, 2 λεπτῶν, 5 λεπτῶν (κοινῶς πεντάρα), 10 λεπτῶν (κοινῶς δεκάρα), ἕκαστον δὲ τούτων ζυγίζει τόσα γραμμάρια, ὅσα λεπτὰ ἔχει.

β΄) Νικέλινα νομίσματα ἔχομεν 5 λεπτῶν, 10 λεπτῶν, καὶ 20 λεπτῶν.

γ΄) Ἀργυρᾶ νομίσματα ἔχομεν 20 λεπτῶν, 50 λεπτῶν, 1 δραχμῆς, 2 δραχμῶν, 5 δραχμῶν.

δ΄) Χρυσᾶ νομίσματα ἔχομεν τῶν 5 δραχ., 10 δραχ., 20 δραχ., 50 δραχ., 100 δραχμῶν.

Σημείωσις. Τὸ εἰκοσάδραχμον ἢ εἰκοσάφραγκον ἔχει 4 τάλληρα. Τὸ δὲ τάλληρον ἔχει 5 δραχμάς.

Δ΄. Μονάδες χρόνου.

234. Τὸ *ἔτος*. Τὸ ἔτος ἔχει 365 ἡμ. Ὅταν ὅμως εἶναι δίσεκτον, ἔχει 366 ἡμ. Ἐμπορικῶς δὲ λογίζεται πρὸς εὐκολίαν, ὅτι ἔχει 360 ἡμέρας·

Ὁ *μήν*. Ὁ μὴν εἶναι τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ἔτους. Ἄρα τὸ ἔτος ἔχει 12 μῆνας.

Σημείωσις. Ἕκαστος μὴν λογίζεται ἐμπορικῶς, ὅτι ἔχει 30 ἡμέρας· πραγματικῶς ὅμως τινὲς ἔχουσι 30 ἡμέρας, τινὲς δὲ 31 ἡμέρας, ὁ δὲ Φεβρουάριος 28 μέν, ὅταν δὲν εἶναι τὸ ἔτος δίσεκτον, 29 δέ, ὅταν τὸ ἔτος εἶναι δίσεκτον.

Παρατήρησις. Τοὺς μῆνας, οἵτινες ἔχουσι 30 ἢ 31 ἡμέρας, εὑρίσκομεν εὐχερῶς, ἐὰν σφίγγοντες τὴν χεῖρά μας εἰς πυγμὴν ἀρχίσωμεν ἐκ τοῦ τελευταίου ἄκρου τοῦ δείκτου νὰ ἐκφωνῶμεν τοὺς μῆνας ἀπὸ τοῦ Ἰανουαρίου διαδοχικῶς ἐπὶ τῶν ἐξοχῶν καὶ τῶν κοίλων μερῶν τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν τελευταίων ἄκρων δύο διαδοχικῶν δακτύλων. Οὕτω δὲ οἱ πίπτοντες ις ἐξοχὴν ἔχουσι 31 ἡμέρας, οἱ δὲ πίπτοντες εἰς κοῖλον ἔχουσι 30 ἡμέρας, κτὸς τοῦ Φεβρουαρίου.

235. Ἡ *ἡμέρα* ἢ τὸ *ἡμερονύκτιον*, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἑξῆς ὑποιαιρέσεις.

1) Τὴν *ὥραν*. Ἡ ὥρα εἶναι τὸ $\frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας. Ἄρα ἡ ἡμέρα χει 24 ὥρας.

2) Τὸ *πρῶτον λεπτόν*. Τὸ ἓν πρῶτον λεπτὸν εἶναι τὸ $\frac{1}{60}$ τῆς ὥας. Ἄρα ἡ ὥρα ἔχει 60 πρῶτα λεπτά.

3) Τὸ *δεύτερον λεπτόν*. Τὸ ἓν δεύτερον λεπτὸν εἶναι τὸ $\frac{1}{60}$ οῦ πρώτου λεπτοῦ. Ἄρα τὸ πρῶτον λεπτὸν ἔχει 60 δευτερόλεπτα.

Σημείωσις α′. Τὰ πρῶτα λεπτὰ σημαίνονται διὰ μιᾶς ὀξείας, τὰ δὲ δεύρα διὰ δύο.

Π. χ. 5 πρῶτα λεπτὰ καὶ 7 δεύτερα λεπτὰ γράφονται 5′ 7″.

Σημείωσις β′. Ἡ ἐργάσιμος ἡμέρα, ἂν δὲν ὁρισθῇ ἐκ τοῦ προβλήματος, γίζεται ὅτι ἔχει 12 ὥρας.

Σύγκρισις μονάδων τινῶν μεταξύ των.

236. Ὁ *μικρὸς πῆχυς Κωνσταντινουπόλεως*, ὅστις ὀνομάζεται *δεζὲ* καὶ ἔχει 8 ρούπια, εἶναι τὰ 0,648 τοῦ μέτρου.

Ὁ *μέγας πῆχυς Κωνσταντινουπόλεως*, ὅστις ὀνομάζεται *ἀρσὲν* ἔχει 8 ρούπια, εἶναι τὰ 0,669 τοῦ μέτρου.

Ἡ 1 ὀκᾶ ἔχει 1280 γραμμάρια. Τούτου δὲ δοθέντος εὑρίσκομεν ς ἑξῆς σχέσεις.

α′.) Τὸ 1 δράμιον ἔχει 3 $^1/_5$ γραμμάρια.

β′.) Τὸ χιλιόγραμμον ἔχει 312 $^1/_2$ δράμια.

Τὰς σχέσεις ταύτας εὑρίσκομεν λύοντες τὰ ἑξῆς προβλήματα.

Πρόβλημα 1ον. Τὰ 400 δράμια ἔχουσι 1280 γραμμάρια. Τὸ ράμιον πόσα γραμμάρια ἔχει; (1280:400 ἤτοι 3 $^1/_5$ γραμ.)

Πρόβλημα 2ον. Τὰ 1280 γραμμάρια ἔχουσι 400 δράμια. Τὰ 00 γραμ. πόσα δράμια ἔχουσι;

$$\left(\frac{400}{1280}\times1000, \text{ ἐξ οὗ εὑρίσκομεν } 312\ ^1/_2 \text{ δραμ.}\right)$$

337. Ὁ τεκτονικὸς πῆχυς εἶναι τὰ 0,75 τοῦ μέτρου. Τούτου δὲ έντος εὑρίσκομεν τὰς ἑξῆς σχέσεις.

α'.) Ὁ 1 τ. τεκτν. πῆχυς εἶναι τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τ. μέτρου.

β'.) Τὸ 1 τ. μέτρον εἶναι τὰ $\frac{16}{9}$ τοῦ τ. τεκτν. πήχεως.

Τὰς σχέσεις ταύτας εὑρίσκομεν λύοντες τὰ ἑξῆς προβλήματα.

Πρόβλημα 1ον. Τὸ 1 τ. μέτρον ἔχει 100×100 τ. δακτύλο[υς]

Οἱ 75×75 τ. δάκτυλοι ἤτοι ὁ 1 τ. τεκτν. πῆχυς πόσα τ. μέτ[ρα] ἔχει;

$$\left\{\begin{array}{l} 75\times75:100\times100 \text{ ἤτοι } \frac{75\times75\text{τ.μ.}}{100\times100}=\frac{3\times3\text{τ.μ.}}{4\times4}=\frac{9\text{τ.μ.}}{16} \\ \text{ἤτοι ὁ 1 τ. τεκτν. πῆχυς}=\text{μὲ } \frac{9}{16} \text{ τοῦ τ. μέτρου.} \end{array}\right.$$

Πρόβλημα 2ον. Ὁ 1 τεκτν. πῆχυς ἔχει 75×75 τ. δακτύλου[ς]

Οἱ 100×100 τ. δάκτυλοι ἤτοι τὸ 1 τ. μέτρον πόσους τ. τεκτ[ν.] πήχεις ἔχει;

$$\left\{\begin{array}{l} 100\times100:75\times75 \text{ ἤτοι } \frac{100\times100\text{τ.τεκ.πηχ.}}{75\times75}=\frac{4\times4}{3\times3}=\frac{16\text{τ.τεκ.πη[χ.]}}{9} \\ \text{ἤτοι τὸ 1 τ. μέτρον}=\text{μὲ } \frac{16}{9} \text{ τοῦ τ. τεκτν. πήχεως.} \end{array}\right.$$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ποῖον εἶναι τὸ βάρος τῆς μονάδος τοῦ τόννου; $\left(781\ \frac{1}{4}\right.$ ὀκ.

2) Ποῖον εἶναι τὸ βάρος εἰς χιλιόγραμμα τῶν 45,6782 κυβικ[ῶν] μέτρων ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4 βαθμῶν

($45678{,}2$ χιλγρ. ἤτοι 45678 χιλγρ. καὶ $\frac{2}{10}$ τοῦ χιλγρ.)

3) Αἱ 1500 ὀκάδες ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας [4] βαθμῶν πόσα κυβικὰ μέτρα πληροῦσι; (1500 : $781\ \frac{1}{4}$ ὀκ., ἐξ ἧ[ς] εὑρίσκομεν 1,92 τον. χωρ. ἤτοι 1 κ. μ. καὶ 920 κ. παλ.).

4) Αἱ 1500 ὀκάδες ἐλαίου πόσους τόννους βάρους μᾶς κάμνουν;

(1,92 τον. βάρ. ἤτοι 1 τόννον καὶ 920 χιλιόγραμμα).

Σημείωσις. Οἱ εὑρεθέντες τόννοι βάρους 1,92 ἐλαίου δὲν ἕπεται, ὅτι πλ[η]ροῦσι καὶ 1,92 τόννους χωρητικότητος δηλ. κυβικὰ μέτρα. Τοῦτο θὰ συ[νέ]βαινεν, ἂν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου συνέπιπτε μὲ τὸ τοῦ ὕδατος ἀπεστα[γ]μένου καὶ θερμοκρασίας 4 βαθμῶν.

5) Τὰ 927 τ. μέτρα μὲ πόσους τ. τεκτ. πήχεις ἰσοδυναμοῦν;

$\left(927 \times \frac{16}{9}\right.$ ἤτοι 1648 τ. τεκτ. πηχ.$\left.\right)$

6) Οἱ 927 τ. τεκτν. πηχ. μὲ πόσα τ. μέτρα ἰσοδυναμοῦν;

(521,4375τ. μετ.)

Τροπὴ συμμιγῶν ἄνευ δεκαδικῶν ὑποδιαιρέσεων εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 5εἰκ. 3ταλ. 2δρχ. 45λεπ. εἰς εἰκοσάδραχμα ἢ τάλληρα ἢ δραχμὰς ἢ λεπτά.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

5εἰκ. 3ταλ. 2δρχ. 45λεπ.	
4τ.	
20τ.	ὁ 5εἰκ. 3ταλ. 4δρχ. 45λεπ. = 11745λεπ.
3τ.	
23τ.	» » » » » $=$ 5εἰκ. $\frac{1745}{2000}$
5δ.	
115δ.	» » » » » $=$ 23ταλ. $\frac{245}{500}$
2δ.	
117δ.	» » » » » $=$ 117δχ. $\frac{45}{100}$
100λ.	
11700λ.	
45λ.	
11745λ.	

Ἂν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ 5εἰκ. 3ταλ. 2δχ. 45λεπ. εἰς λεπτὰ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ 1εἰκ. ἔχει 4ταλ., τὰ 5εἰκ. τοῦ συμμιγοῦς ἔχουσι 4×5 ἤτοι 20ταλ., εἰς τὰ ὁποῖα προσθέτοντες καὶ τὰ 3ταλ. τοῦ συμμιγοῦς εὑρίσκομεν 23ταλ. Ὁμοίως ἐπειδὴ 1ταλ. ἔχει 5 δρχ., ἄρα τὰ 23ταλ. θὰ ἔχωσι 23×5 ἤτοι 115δρχ. καὶ 2δχ. αἱ τοῦ συμμιγοῦς γίνονται 117δρχ. Ὁμοίως ἐπειδὴ 1δρχ. ἔχει 100λεπ. αἱ 117 δρχ. θὰ ἔχωσιν 11700λεπ. προστιθεμένων δὲ καὶ τῶν 45λεπ. τοῦ συμμιγοῦς εὑρίσκομεν 11745λεπ.

Ἂν θέλωμεν τὸν συμμιγῆ 5εἰκ. 3ταλ. 2δρχ. 45λεπ. νὰ τρέψωμεν εἰς εἰκοσάδραχμα, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐκ τοῦ 5εἰκ. 3τάλ. 2δρχ. 45λεπ. ἀφήνομεν τὰ 5εἰκ. καὶ τρέπομεν τὸν 3ταλ. 2δρχ. 45λεπ. εἰς λεπτά, ὅτε εὑρίσκομεν 1745λεπ. Μετὰ ταῦτα τρέποντες καὶ 1εἰκ. εἰς λεπτὰ ἤτοι 2000λεπ. σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ἀφοῦ τὸ 1εἰκ. ἔχει 2000λεπ., τὰ 1745λεπ. πόσα εἰκοσάδραχμα κάμνουν;

$$1745 : 2000 \text{ ἤτοι } \frac{1745\text{εἰκ.}}{2000}$$

Ἄρα ὁ 5εἰκ. 3ταλ. 2δρχ. 45λεπ.$=$5εἰκ. $\frac{1745}{2000}$.

Ἂν ἤδη τὸν 5εἰκ. 3ταλ. 2δρχ. 45λεπ. θέλωμεν νὰ τρέψωμεν εἰς τάλληρα, λαμβάνομεν ἐκ τοῦ συμμιγοῦς τὸν 5εἰκ. 3ταλ. καὶ τὸν τρέπομεν εἰς τάλληρα, ὅτε εὑρίσκομεν 23ταλ., τὸν δὲ ἐπίλοιπον 2δρχ. 45λεπ., ὅστις γίνεται ἀπὸ μονάδας μικροτέρας τοῦ ταλλήρου, τρέπομεν εἰς λεπτά, ὅτε εὑρίσκομεν 245 λεπτά. Ἔπειτα δὲ τρέποντες 1ταλ. εἰς λεπτά, ἤτοι 500λεπ. σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Τὸ 1ταλ. ἔχει 500λεπ., τὰ 245λεπ. πόσα τάλληρα κάμνουν;

$$245 : 500 \text{ ἤτοι } \frac{245\text{ταλ.}}{500}$$

Ἄρα ὁ 5εἰκ. 3ταλ. 2δρχ. 45λεπ.$=$23ταλ. $\frac{245}{500}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ συμμιγὴς

5εἰκ. 3ταλ. 2δρχ. 45λεπ.$=$117δρχ. $\frac{45}{100}$.

Ἐκ τούτων μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

238. *Διὰ νὰ τρέψωμεν συμμιγῆ εἰς ἀριθμὸν μιᾶς οἱασδήποτε μονάδος αὐτοῦ, ἀρχόμεθα ἐξ ἀριστερῶν καὶ τρέπομεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ συμμιγοῦς μέχρι τῆς ὁρισθείσης μονάδος εἰς ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν τῆς μονάδος ταύτης, τοὺς δὲ ἐπιλοίπους ἀριθμοὺς τοῦ συμμιγοῦς, ἐὰν ἔχῃ τοιούτους, εἰς κλάσμα τῆς αὐτῆς μονάδος. Τὸ κλάσμα δὲ τοῦτο θὰ ἔχῃ ἀριθμητὴν μὲν τὸν ἀκέραιον, εἰς τὸν ὁποῖον τρέπονται οἱ ἀριθμοὶ τοῦ συμμιγοῦς, οἱ ὁποῖοι γίνονται ἐκ μονάδων μικροτέρων τῆς ὁρισθείσης, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἀριθμὸν τοιούτων μονάδων, ὅστις ἀποτελεῖ μίαν μονάδα τῆς ὁρισθείσης τάξεως τοῦ συμμιγοῦς.*

Παραδείγματα.

1) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 125ἡμ. καὶ 8μην. εἰς κλάσμα ἔτους, οἱ δὲ 50λεπ. καὶ 3δρχ. εἰς κλάσμα ταλλήρου.

$\Big(\frac{125}{365}$ ἢ $\frac{125^{\acute{\epsilon}\tau.}}{360}$ τοῦ ἔτους $\frac{8^{\acute{\epsilon}\tau.}}{12}$ καὶ $\frac{50^{\tau\acute{\alpha}\lambda.}}{500}$ $\frac{3^{\tau\acute{\alpha}\lambda.}}{5}$

2) $2^{\sigma\tau.}\ 3^{\grave{o}\kappa.} = \frac{91^{\ \sigma\tau.}}{44} = 91^{\grave{o}\kappa.} = 36400^{\delta\rho\mu.}$

$2^{\dot{\eta}\mu.}\ 3^{\acute{\omega}\rho.} = 2^{\dot{\eta}\mu.}\ \frac{3}{24} = 51^{\acute{\omega}\rho.} = 3060' = 183600''$

$2^{\epsilon\grave{\iota}\kappa.}\ 2^{\tau\alpha\lambda.} = 2^{\epsilon\grave{\iota}\kappa.}\ \frac{2}{4} = 10^{\tau\alpha\lambda.} = 50^{\delta\rho\chi.} = 5000^{\lambda\epsilon\pi.}$

Τροπὴ κλάσματος εἰς συμμιγῆ.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{2}{7}$ τοῦ στατῆρος εἰς συμμιγῆ.

$$\begin{array}{r|l}
2^{\sigma\tau.} & 7 \\ \cline{2-2}
44^{\grave{o}\kappa.} & 12^{\grave{o}\kappa.}\ 228^{\delta\rho\mu.}\frac{4}{7} \\ \cline{1-1}
88^{\grave{o}\kappa.} & \\
18^{\grave{o}\kappa.} & \\
4^{\grave{o}\kappa.} & \\
400^{\delta\mu.} & \\ \cline{1-1}
1600^{\delta\mu.} & \\
20 & \\
60 & \\
4 & \\
0 &
\end{array}$$

Ἐπειδὴ οἱ $2^{\sigma\tau.}$ δὲν διαιροῦνται διὰ 7, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς ὀκάδας, ὅτε εὑρίσκομεν $88^{\grave{o}\kappa.}$ Ταύτας δὲ τὰς $88^{\grave{o}\kappa.}$ διαιροῦμεν διὰ 7 καὶ εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον 12 ὀκάδας, καὶ ὑπόλοιπον $4^{\grave{o}\kappa.}$. Μετὰ ταῦτα τρέποντες τὰς 4 ταύτας ὀκάδας εἰς δράμια, εὑρίσκομεν $1600^{\delta\rho\mu.}$ τὰ ὁποῖα διαιροῦντες διὰ 7 εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον $228^{\delta\mu.}$ καὶ ὑπόλοιπον $4^{\delta\mu.}$ Τούτων δὲ τὸ πηλίκον διὰ 7 εἶναι $\frac{4^{\ \delta\mu.}}{7}$ καὶ ὑπόλοιπον μηδέν.

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

239. *Διὰ νὰ τρέψωμεν κλάσμα τι εἰς συμμιγῆ, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Ἔπειτα, τὸ προκῦπτον ὑπόλοιπον, τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἑπομένης ὑποδιαιρέσεως τοῦ συμμιγοῦς καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω τὴν διαίρεσιν μέχρι*

τῶν μονάδων τῆς κατωτάτης ὑποδιαιρέσεως (ἂν δὲν εὕρωμεν ἐν τῷ μεταξὺ ὑπόλοιπον μηδέν).

Π.χ. Τὸ $\frac{3\text{ εἰκ.}}{2}$=1εἰκ. 2ταλ. Τὰ $\frac{2\text{ ἡμ.}}{3}$=16ὥρ.—

Σημείωσις. Ἂν ἡ μονὰς τοῦ συμμιγοῦς, εἰς τὴν ὁποίαν ἀναφέρεται τὸ δοθὲν κλάσμα, ἔχῃ ὑποδιαιρέσεις δεκαδικάς, προτιμότερον εἶναι νὰ τρέπωμεν τὸ κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν. Τὸν δεκαδικὸν δὲ τοῦτον τρέπομεν ἔπειτα εὐκόλως δι' ἀπαγγελίας εἰς συμμιγῆ ἢ εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος τοῦ συμμιγοῦς.

Π. χ. Νὰ τραπῇ τὸ $\frac{2}{7}$ τοῦ τόννου εἰς συμμιγῆ.

Λύσις. Ἐπειδὴ αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ τόννου εἶναι δεκαδικαί, διὰ τοῦτο τὸ $\frac{2\text{ τον.}}{7}$ τρέπομεν εἰς δεκαδικὸν καὶ σταματῶμεν τὴν διαίρεσιν εἰς τὰ ἑκατομμυριοστὰ (ἔνθα εἶναι ἡ κατωτάτη ὑποδιαίρεσις τοῦ τόννου), ὅτε εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ $\frac{2\text{τον.}}{7}$ ἰσοῦνται μὲ 0,285714 καὶ $\frac{2}{7}$ τοῦ ἑκατομμυριοστοῦ. Ἐντεῦθεν δὲ ἐξάγομεν ὅτι

0,285714 $\frac{2}{7}$ περιέχει 285 χιλιόγραμ. καὶ 714 γραμ. $\frac{2}{7}$,

ἢ καὶ εἰς γραμμάρια 285714 $\frac{2}{7}$.

Ὁμοίως. Ὁ $\frac{3}{4}$ χιλιογράμμου=0,75 χιλγρ. ἤτοι 750 γραμ.

Πρόσθεσις.

240. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν ὁσουσδήποτε συμμιγεῖς ἀριθμούς, θέτομεν αὐτοὺς οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ καὶ ἔπειτα ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ προσθέτομεν αὐτούς, ἐκ δὲ τοῦ ἀθροίσματος ἑκάστης στήλης ἐξάγομεν τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὴν στήλην των.*

Π. χ. Νὰ προστεθῶσιν οἱ συμμιγεῖς 1ὥρ. 25''+2ἡμ. 3ὥρ. 40' 17''+15ἡμ. 8ὥρ.+22ὥρ. 45''.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

	1ὥρ.		25''
2ἡμ.	3ὥρ.	40'	17''
15ἡμ.	8ὥρ.		
	22ὥρ.		45''
18ἡμ.	10ὥρ.	41'	27''

Προσθέτοντες τὰ δευτερόλεπτα εὑρίσκομεν 87'', τὰ ὁποῖα κάνουν 1' καὶ 27''. Ἐκ τούτων δὲ τὰ μὲν 27'' γράφομεν ὑποκάτω ῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν δευτερολέπτων, τὸ δὲ 1' προσθέτοεν εἰς τὰ πρῶτα λεπτὰ καὶ ἔχομεν 41'. Ταῦτα δὲ τὰ 41', ἐπειδὴ ὲν κάμνουν ὥραν, τὰ γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν πρώτων λετῶν. Ἔπειτα προσθέτοντες τὰς ὥρας εὑρίσκομεν 34ώρ., αἱ ὁποῖαι άμνουν 1ἡμ. καὶ 10ώρ. Καὶ τὰς μὲν 10ώρ. γράφομεν ὑπὸ τὰς ὥρας, ὴν δὲ 1ἡμ. τὴν προσθέτομεν εἰς τὰς ἡμέρας, ὅτε εὑρίσκομεν 18ἡμ. Ωστε τὸ ζητούμενον ἄθροισμα τῶν συμμιγῶν εἶναι 18ἡμ. 10ώρ. 1' 27''.

Σημείωσις α'. Ἂν οἱ προστιθέμενοι συμμιγεῖς ἀνεφέροντο εἰς ἐργασίμους μέρας, θὰ ἐλογίζομεν, ὅτι ἡ ἡμέρα ἔχει 12 ὥρας, ἐκτὸς ἂν ὡρίζοντο εἰς τὸ ρόβλημα αἱ ἐργάσιμοι ὧραι καθ' ἑκάστην.

Π. χ. Ἐργάτης τις συμφωνήσας νὰ ἐργάζηται 7ώρ. τὴν ἡμέραν, ργάσθη τὴν μὲν πρώτην ἡμέραν 6ώρ. 15', τὴν δὲ δευτέραν 9ώρ. 0'. Πόσον εἰργάσθη ἐν ὅλῳ; (2ἡμ. 1ώρ. 55').

Σημείωσις β'. Διὰ νὰ προσθέσωμεν συμμιγῆ εἰς χρονολογίαν ἢ εἰς διαφόρους ρονολογίας, πρέπει νὰ τρέψωμεν πρῶτον τὰς χρονολογίας εἰς συμμιγεῖς ἀριθοὺς *τελείων ἐτῶν, μηνῶν, ἡμερῶν, ὡρῶν* καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν τοὺς ροκύπτοντας συμμιγεῖς.

Π. χ. Ἀνεχώρησέ τις ἐκ τῆς πατρίδος του τῷ 1891 εἰς τὰς 15 Ιουνίου τῇ 3ὥρ μ. μ. καὶ ἐταξείδευεν ἐπὶ 3ἔτ. 2μην. 25ἡμ. 13ὥρ. ἰς ποίαν χρονολογίαν ἐπανῆλθε;

Λύσις. Τρέποντες τὴν χρονολογίαν 1891 τῇ 15 Ἰουνίου 3ὥρ. .μ. εἰς συμμιγῆ εὑρίσκομεν 1890ἔτ. 5μην. 14ἡμ. 15ὥρ. εἰς ὃν προσέτοντες τὸν χρόνον 3ἔτ. 2μην. 25ἡμ. 13ὥρ. καθ' ὃν ἐταξείδευεν, ὑρίσκομεν τὴν συμμιγῆ, 1893ἔτ. 7μην. 40ἡμ. 4ὥρ. Καὶ ἐπειδὴ μετὰ ὸν 7ον μῆνα ἔρχεται ὁ Αὔγουστος, ὅστις ἔχει 31ἡμ., διὰ τοῦτο ἐκ ῶν 40ἡμ. ἀφήνοντες τὰς 9ἡμ. καὶ προσθέτοντες 1μην. εἰς τοὺς μην. εὑρίσκομεν 1893 ἔτ. 8μην. 9ἡμ. 4ὥρ. Μετὰ δὲ ταῦτα τρέποεν τοῦτον εἰς χρονολογίαν ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ παρῆλθε τὸ 1893, ἄρα ὑρισκόμεθα εἰς τὸ 1894· καὶ ἐπειδὴ παρῆλθεν ὁ 8ος μήν, ὅστις εἶναι Αὔγουστος, ἄρα εὑρισκόμεθα εἰς τὸν Σεπτέμβριον· καὶ ἐπειδὴ παῆλθεν ἡ 9η ἡμέρα, ἄρα εὑρισκόμεθα εἰς τὴν 10ην καὶ ἐπειδὴ ἐκ ταύης μόνον 4ώρ. παρῆλθον, ἄρα εὑρισκόμεθα εἰς τὰς 4ώρ. π. μ., ὥστε

ἐπέστρεψεν εἰς τὴν πατρίδα του κατὰ τὸ 1894 εἰς τὰς 10 Σεπτεμ-
βρίου τῇ 4ώρ. π.μ.

Ἀφαίρεσις.

Παράδειγμα 1ον. Ἐκ τοῦ συμμιγοῦς 3εἰκ. 3δρχ. 50 λεπ. ν' ἀφαιρεθῇ ὁ συμμιγὴς 2ταλ. 4δρχ. 25λεπ.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

3εἰκ.		3δρχ.	50λεπ.
	2ταλ.	4δρχ.	20λεπ.
2εἰκ.	1ταλ.	4δρχ.	30λεπ.

Γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ. Μετὰ ταῦτα ἀφαιροῦμεν τὰ 20λεπ. ἀπὸ τὰ 50λεπ., ὅτε εὑρίσκομεν διαφορὰν 30λεπ. Ἔπειτα, ἐπειδὴ αἱ 4δρχ. δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τὰς 3δρχ., προσθέτομεν εἰς τὰς 3δρχ. ἓν τάλληρον, ἀφ' οὗ τὸ τρέψωμεν εἰς δραχμάς, ὅτε γίνονται 8 δρχ. Ἐκ τούτων δὲ τῶν 8 δραχμῶν ἀφαιροῦντες τὰς 4 δρχ. τοῦ ἀφαιρετέου, εὑρίσκομεν διαφορὰν 4 δρχ. Ἔπειτα προσθέτομεν εἰς τὰ 2ταλ. τοῦ ἀφαιρετέου ἓν τάλληρον (§ 45), ὁπότε γίνονται 3ταλ., τὰ ὁποῖα, ἐπειδὴ δὲν ἔχουν ἀντίστοιχον ἀριθμὸν ταλλήρων εἰς τὸν μειωτέον, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰ 4 τάλληρα, τὰ ὁποῖα κάμνει ἓν εἰκοσάδραχμον καὶ ἔχομεν οὕτω διαφορὰν 1ταλ. Μετὰ ταῦτα προσθέτομεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον ἓν εἰκοσάδραχμον (§ 45), τὸ ὁποῖον ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὰ 3εἰκ. τοῦ μειωτέου εὑρίσκομεν διαφορὰν 2εἰκ. Ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι 2εἰκ. 1ταλ. 4δρχ. 30λεπ.

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

241. *Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν δύο συμμιγεῖς, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ. Ἔπειτα, ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν, ἀφαιροῦμεν ὡς εἰς τοὺς ἀκεραίους· ἂν δὲ ἀριθμός τις τοῦ ἀφαιρετέου δὲν ἔχῃ ἀντίστοιχον ἀριθμὸν εἰς τὸν μειωτέον ἢ ἔχῃ ἀριθμὸν μικρότερον, τότε αὐξάνομεν τοῦτον κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας κάμνει μία μονὰς τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Ταύτης δὲ τῆς τάξεως προσθέτομεν ἔπειτα μίαν μονάδα καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν*

Π. χ. Ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ 4ὡρ. ὁ 8''.

Ἐπειδὴ ὁ μειωτέος δὲν ἔχει τάξιν δευτέρων λεπτῶν, λέγομεν 8'' ἀπὸ 60'' (τὰ ὁποῖα κάμνει τὸ 1') ἔχομεν διαφορὰν 52''. Ἔπειτα λέγομεν τὸ 1' κρατούμενον ἀπὸ 60' (τὰ ὁποῖα κάμνει μία ὥρα), ἔχομεν διαφορὰν 59' καὶ τέλος 1ὡρ. τὸ κρατούμενον ἀπὸ 5ὡρ., ἔχομεν διαφορὰν 4ὡρ. Ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι 4ὡρ. 59' 52''.

Σημείωσις. Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν δύο χρονολογίας, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰς εἰς συμμιγεῖς τελείων ἐτῶν, μηνῶν, ἡμερῶν, ὡρῶν καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν αὐτούς.

Π. χ. Ἀπὸ τοῦ 1874 τῆς 15 Σεπτεμβρίου 5ὡρ. μ. μ. μέχρι τοῦ 1895 τῆς 10 Ὀκτωβρίου 3ὡρ. μ. μ. πόσος χρόνος παρῆλθε;

(21ἐτ. 24ἡμ. 22ὡρ.)

Πολλαπλασιασμός.

242. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν συμμιγῶν διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

Α') *Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος.*

Β') *Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλάσμα.*

Γ') *Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι συμμιγής.*

Σημείωσις. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μικτὸς δηλαδὴ ἀκέραιος καὶ κλάσμα, τότε, ἢ ἐφαρμόζομεν τὰς δύο πρώτας περιπτώσεις, ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἐφαρμόζομεν μόνον τὴν δευτέραν περίπτωσιν.

Πολλαπλασιαστὴς ἀκέραιος.

243. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον, ἀρχόμεθα ἐκ δεξιῶν καὶ πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ τὸν ἀκέραιον πολλαπλασιαστὴν καὶ ἐξ ἑκάστου γινομένου ἐξάγομεν τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὸ ἑπόμενον γινόμενον τῶν μονάδων τῆς αὐτῆς τάξεως.*

Πρόβλημα 1ον. Ἓν βαρέλιον ζακχάρεως χωρεῖ 5στ. 20ὀκ. 250δρμ. Πόσον χωροῦν 8 τοιαῦτα βαρέλια;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ (§ 188) καὶ δὴ

5στ.	20ὀκ.	250δρμ.
		8
43στ.	33ὀκ.	0δρμ.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν 250δρμ. ἐπὶ 8, καὶ εὑρίσκομεν 2000δρμ.

τὰ ὁποῖα κάμουν 5όκ. Τὰς ὀκάδας δὲ ταύτας προσθέτομεν εἰς τὸ ἑπόμενον γινόμενον 160όκ. (δηλ. τῶν 20όκ.×8), ὅτε γίνονται 165όκ., αἱ ὁποῖαι κάμνουν 3στ. καὶ μένουν 33όκ. Ἐκ τούτων τὰς μὲν 33όκ. γράφομεν ὑπὸ τὰς ὀκάδας, τοὺς δὲ 3στ. προσθέτομεν εἰς τὸ ἑπόμενον γινόμενον 40στ. (δηλ. τῶν 5στ.×8) καὶ οὕτω γίνονται 43στ. Ὥστε τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι 43στ. 33όκ..

Διαίρεσις

244. Εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν συμμιγῶν διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

Α΄.) *Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος.*

Β΄.) *Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι κλάσμα.*

Γ΄.) *Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι συμμιγής.*

Διαιρέτης ἀκέραιος.

Πρόβλημα 1ον. Οἱ 4 πηχ. ὑφάσματός τινος ἀξίζουν 3εἰκ. 1ταλ. 25λεπ., πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται διὰ διαιρέσεως (§ 190) καὶ δὴ

3εἰκ. 1ταλ. 25 λεπ.	4
4τ.	3ταλ. 1δχ. 31λεπ. $\frac{1}{4}$
12τ.	
1τ.	
13τ.	
1τ.	
5δ.	
5δ.	
1δ.	
100λ.	
100λ.	
25λ.	
125λ.	
5λ.	
1λ.	
0	

Ἐπειδὴ τὰ 3εἰκ. δὲν διαιροῦνται διὰ 4, τὰ τρέπομεν εἰς τάλληρα, ὁπότε γίνονται 12 τάλληρα. Εἰς ταῦτα δὲ τὰ 12 τάλ. προσθέτομεν καὶ τὸ 1 τάλ. τοῦ συμμιγοῦς καὶ οὕτως ἔχομεν 13 τάλληρα. Ταῦτα δὲ τὰ 13 τάλ. διαιροῦμεν διὰ τοῦ 4 καὶ εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον 3 τάλ. καὶ ὑπόλοιπον 1 τάλ. Τοῦτο δὲ τὸ τάλληρον τρέπομεν εἰς δραχμὰς καὶ οὕτως ἔχομεν 5 δραχμάς. Ταύτας δὲ τὰς 5 δρχ. διαιροῦμεν διὰ τοῦ 4 καὶ οὕτως εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον 1 δρχ. καὶ ὑπόλοιπον 1 δρχ. Τέλος δὲ τὴν δραχμὴν ταύτην τρέπομεν εἰς λεπτὰ καὶ οὕτως ἔχομεν 100 λεπτά. Εἰς ταῦτα δὲ τὰ 100λεπ. προσθέτομεν καὶ τὰ 25 λεπ. τοῦ συμμιγοῦς καὶ οὕτως ἔχομεν 125 λεπ. τὰ ὁποῖα καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ 4, ὁπότε εὑρίσκομεν πηλίκον 31 $\frac{1}{4}$ λεπ. καὶ ὑπόλοιπον 0.

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

245. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι' ἀκεραίου, ἀρχόμεθα ἐξ ἀριστερῶν καὶ διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ἀριθμὸν τοῦ διαιρετέου διὰ*

τοῦ ἀκεραίου διαιρέτου καὶ λαμβάνομεν οὕτω τὸν πρῶτον ἀριθμὸν τοῦ πηλίκου, τὸ δὲ προκῦπτον ὑπόλοιπον τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας ὑποδιαιρέσεως καὶ προσθέτομεν εἰς ταύτας καὶ τὰς ἀντιστοίχους μονάδας τοῦ συμμιγοῦς (ἂν ἔχῃ τοιαύτας), καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω τὴν διαίρεσιν μέχρι τέλους.

Π. χ. Ἐργασθείς τις 3ἡμ. 5ὥρ. ἔλαβε 5 δρχ. Πόσον πρέπει νὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ λάβῃ 1 δραχμήν; (8ὥρ. 12′).

Πολλαπλασιαστὴς κλάσμα.

246. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.*

Πρόβλημα 1ον. Εἰς μίαν ἡμέραν ὑφαίνει τις 5πηχ. 3ρ. Πόσον ὑφαίνει εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἡμέρας;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ (§ 188). Ἐφαρμόζοντες δὲ τὸν κανόνα (§ 246) ἔχομεν

5πηχ. 3ρουπ.
3

16πηχ. 1ρ	4
0	4πηχ. $\frac{1}{4}$
1ρ	
0	

Ὥστε εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ ἡμ. θὰ ὑφάνῃ 4πχ. $\frac{1}{4}$.

247. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ μικτόν, πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ καὶ ἑνοῦμεν τὰ δύο γινόμενα ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν.*

Πρόβλημα 1ον. Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος ἀξίζει 2δρ. 35λεπ. Πόσον ἀξίζουν $4\frac{3}{8}$ πηχ; $\left(10\text{δρχ. } 28\text{λεπ. } \frac{1}{8}\right)$

Σημείωσις. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ δεκαδικόν, γράφομεν τὸν δεκαδικὸν ὑπὸ μορφὴν κλάσματος καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν ὡς ἀνωτέρω.

Διαιρέτης κλάσμα.

248. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφο-*

μεν τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου καὶ ἀντὶ διαιρέσεως κάμνομεν πολλαπλασιασμόν.

Πρόβλημα 1ον. Τὰ $\frac{2}{3}$ πήχ. ἀξίζουν 4δρχ. 75λεπ. Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς; (1ταλ. 2δρχ. 12λεπ. $^1/_2$)

249. *Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μικτὸς, τὸν τρέπομεν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν.*

Πρόβλημα 2ον. Μὲ $2\frac{3}{5}$δρχ. ἀγοράζομεν 2στ. 5όκ. 150 δρμ. πράγματός τινος. Πόσον ἀγοράζομεν μὲ μίαν δραχμήν; $\left(35\text{όκ. } 365 \text{ δρμ. } \frac{5}{13}\right)$

Σημείωσις. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ δεκαδικοῦ, τρέπομεν τὸν δεκαδικὸν εἰς ἀκέραιον πολλαπλασιάζοντες διαιρετέον καὶ διαιρέτην μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ γράφομεν τὸν δεκαδικὸν ὑπὸ μορφὴν κλάσματος καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς ἀνωτέρω.

Πολλαπλασιαστὴς συμμιγής.

Πρόβλημα 1ον. Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος ἀξίζει 2δρχ. 25λεπ. Πόσον ἀξίζουν οἱ 4πηχ. 2ρουπ;

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ πρόβλημα τοῦτο θὰ ἐλύετο εὐκόλως, ἂν οἱ 4πηχ. 2ρουπ. ἦσαν μόνον πήχεις, διότι τότε θὰ εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ 2δρχ. 25λεπ. ἐπὶ ἀκέραιον ἢ κλάσμα (§ 188), τοὺς ὁποίους πολλαπλασιασμοὺς εὐκόλως ἐκτελοῦμεν, διὰ τοῦτο τρέπομεν τὸν συμμιγῆ 4πηχ. 2ρουπ. εἰς πήχεις, ὅτε εὑρίσκομεν 4πηχ.$\frac{1}{4}$ καὶ ἤδη ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 2δρχ.25λεπ. ἐπὶ $4\,^1/_4 =$ 9δρχ. 56λεπ. $\frac{1}{4}$. Ὥστε οἱ 4πηχ. 2ρουπ. ἀξίζουν 9δρχ. 56λεπ. $\frac{1}{4}$.

Πρόβλημα 2ον. Τὸ ρούπιον ὑφάσματός τινος ἀξίζει 2δρχ. 25λεπ. Πόσον ἀξίζουν οἱ 4πηχ. 2ρουπ.;

Λύσις. Ἂν οἱ 4πηχ. 2ρουπ. ἦσαν μόνον ρούπια, τὸ πρόβλημα θὰ ἐλύετο εὐκόλως (§ 188). Διὰ τοῦτο τρέποντες τὸν 4πηχ. 2ρουπ. εἰς ρούπια, εὑρίσκομεν 34ρούπ., ὅτε ἔχομεν 2δρχ. 25λεπ. ἐπὶ 34=76δρχ. 50λεπ.

Ἐκ τούτων μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

250. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο συμμιγεῖς, κάμνομεν πρῶτον τὸν συμμιγῆ τοῦ ὁποίου τὴν τιμὴν ζητοῦμεν, νὰ γίνηται ἐκ τῆς μονάδος τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν γνωρίζομεν καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.*

Π. χ. Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν 4στ. πράγματός τινος. Πόσον ἀγοράζομεν μὲ 2ταλ. 10λεπ. (40στ. 17όκ. 240δρμ.)

Γενικεύοντες τὸν κανόνα (§ 250) ἔχομεν τὸν ἑξῆς.

251. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ὁποιουσδήποτε ἀριθμούς, κάμνομεν πρῶτον ἐκεῖνον τοῦ ὁποίου τὴν τιμὴν ζητοῦμεν νὰ γίνηται ἐκ τῆς μονάδος τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν γνωρίζομεν καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.*

Π. χ. Τὸ δράμιον μαλλίου τιμᾶται 6 λεπτά. Πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ; (1800 λεπ. ἤτοι 18 δρχ.)

Ὁμοίως. Τὸ ἓν τάλληρον ἔχει 500 λεπτ. Τὰ $\frac{3}{4}$ εἰκ. πόσα λεπτὰ ἔχουσι ; (1500 λεπτά)

Ὁμοίως. Ὁ εἷς πῆχυς ἀξίζει 16 δρχ. Πόσον ἀξίζουν τὰ 5 ρούπια ; (10 δραχμάς)

Διαιρέτης συμμιγής.

252. Εἰς τὴν διαίρεσιν δύο συμμιγῶν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α' περίπτωσις. *Ὅταν οἱ συμμιγεῖς εἶναι ὁμοειδεῖς καὶ ὁ εἷς εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος.*

Σημείωσις. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὑπάγονται τὰ προβλήματα τῆς μετρήσεως.

Β' περίπτωσις. *Ὅταν οἱ συμμιγεῖς εἶναι ἑτεροειδεῖς ἢ ὁμοειδεῖς καὶ ζητῆται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος.*

Σημείωσις. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὑπάγονται τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ.

253. Α' περίπτωσις.

Πρόβλημα 1ον. Ἐργάτης τις λαμβάνει διὰ μίαν ἡμέραν 4δρχ. 25λεπ. Πόσας ἡμέρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ λάβῃ 150δρχ. 75λεπ. ;

Λύσις. Προφανῶς ὁ ἐργάτης θὰ ἐργασθῇ τόσας ἡμέρας, ὅσας φορὰς περιέχει ὁ 150δρχ. 75λεπ. τὸν 4δρχ. 25λεπ., καὶ ἐπειδὴ τοῦτο θὰ εὑρίσκομεν εὐκόλως, διὰ μιᾶς διαιρέσεως, ἐάν, ἀντὶ τῶν δοθέντων συμμιγῶν, εἴχομεν *ἀκεραίους* ἢ κλάσματα, τὰ ὁποῖα νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς συγκεκριμένης μονάδος (§ 192), διὰ τοῦτο τρέπομεν τοὺς συμμιγεῖς 150δρχ. 75λεπ. καὶ τὸν 4δρχ. 25λεπ. εἰς δραχμὰς ἢ λεπτά, καὶ ἔστω εἰς λεπτά, ὅτε ὁ μὲν γίνεται 15075λεπ. ὁ δὲ 425λεπ. Ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, θέτοντες τὸν ἀριθμὸν 425λεπ. ὡς διαιρέτην (§ 192, Σημ.), ὅτε εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον, ἤτοι

$15075:425 = 35^{\text{ἡμ.}}\ 5^{\text{ὥρ.}}\ 38'\ 49''\ \frac{7}{17}$.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

254. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δύο συμμιγεῖς ὁμοειδεῖς, τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, τρέπομεν πρῶτον καὶ τοὺς δύο συμμιγεῖς εἰς ἀριθμοὺς μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς συγκεκριμένης μονάδος, καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν.*

Σημείωσις. Πρὸς εὐκολίαν, ὅπου εἶναι δυνατόν, τρέπομεν καὶ τοὺς δύο συμμιγεῖς εἰς ἀκεραίους.

Π. χ. Μὲ 1δρχ. ἀγοράζομεν 2πηχ. ὑφάσματός τινος. Πόσας δραχμὰς ἀξίζουν οἱ 3πηχ. 5ρουπ. $\left(1^{\text{δρχ.}}\ 81^{\text{λεπ.}}\ \frac{1}{4}\right)$

Γενικεύοντες ἤδη τὸν κανόνα (§ 254) ἔχομεν τὸν ἑξῆς.

255. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ὁποιουσδήποτε ἀριθμούς, τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, τρέπομεν πρῶτον αὐτοὺς εἰς ἀριθμοὺς μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς συγκεκριμένης μονάδος καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν.*

Π. χ. Τὸ δράμιον μαλλίου ἀξίζει 5λεπ. Πόσα δράμια ἀγοράζομεν μὲ $\frac{3}{4}$δρχ; (15 δράμια).

256. Β' περίπτωσις.

Πρόβλημα 1ον. Οἱ 5πηχ. 6ρουπ. ὑφάσματός τινος τιμῶνται 3ταλ. 2δρχ. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ πρόβλημα τοῦτο θὰ ἐλύετο εὐκόλως, ἂν ἀντὶ τοῦ συμμιγοῦς 5πηχ. 6ρουπ. εἴχομεν *ἀκέραιον* ἀριθμὸν ἢ *κλάσμα* πήχεων, διότι τότε θὰ εἴχομεν νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι' ἀκεραίου ἢ κλάσματος (§ 190), διὰ τοῦτο τὸν συμμιγῆ 5πηχ. 6ρουπ τρέπομεν εἰς πήχεις, ὅτε εὑρίσκομεν 5πηχ. $\frac{6}{8}$ ἢ 5πηχ. $\frac{3}{4}$ καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, θέτοντες διαιρέτην τὸν 5 $\frac{3}{4}$ (§ 190, Σημ.). Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον, ἤτοι 2δρχ. 95λεπ. $\frac{15}{23}$.

Πρόβλημα 2ον. Ὡρολόγιόν τι εἰς 12ὡρ. 5′ μένει ὀπίσω 1ὡρ. 4′ 2″. Πόσον μένει ὀπίσω τὴν ὥραν;

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ πρόβλημα τοῦτο θὰ ἐλύετο εὐκόλως, ἂν ἀντὶ τοῦ συμμιγοῦς 12ὡρ. 5′ εἴχομεν ἀκέραιον ἀριθμὸν ἢ κλάσμα ὡρῶν (§ 190), διότι τότε θὰ εἴχομεν νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι' ἀκεραίου ἢ κλάσματος, διὰ τοῦτο τρέπομεν τὸν 12ὡρ. 5′ εἰς ἀριθμὸν ὡρῶν, ὅτε εὑρίσκομεν 12ὡρ. $\frac{5}{60}$ ἤτοι 12ὡρ. $\frac{1}{12}$. Ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, θέτοντες διαιρέτην τὸν 12ὡρ. $\frac{1}{12}$ (§ 190, Σημ.). Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον ἤτοι 5′ 17″ $\frac{139}{145}$. Ὥστε εἰς 1ὡρ. μένει ὀπίσω 5′ 17″ $\frac{139}{145}$.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων τούτων μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

257. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δύο συμμιγεῖς ὁμοειδεῖς ἢ ἑτεροειδεῖς, ὅταν ζητῆται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, τρέπομεν πρῶτον τὸν συμμιγῆ, τοῦ ὁποίου τὴν τιμὴν τῆς μονάδος ζητοῦμεν, εἰς ἀριθμὸν γινόμενον ἐκ τῆς μονάδος ταύτης καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν.*

Π. χ. Οἱ 5πηχ 6ρουπ. ὑφάσματός τινος τιμῶνται 3ταλ. 2δρχ. Πόσον τιμᾶται τὸ ρούπιον. $\left(36\text{λεπ.}\ \frac{44}{46}\right)$

Γενικεύοντες ἤδη τὸν κανόνα (§ 257) ἔχομεν τὸν ἑξῆς.

258. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δύο ὁποιουσδήποτε ἀριθμούς, ὅταν ζητῆται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, τρέπομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τοῦ ὁποίου τὴν τιμὴν τῆς μονάδος ζητοῦμεν εἰς ἀριθμὸν γινόμενον ἐκ τῆς μονάδος ταύτης καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν.*

Π. χ. Τὰ 5 ρούπια ὑφάσματός τινος τιμῶνται 75 λεπ. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς; (120 λεπτά.)

Ὁμοίως. Αἱ 25 δραχμαὶ ἔχουσι 2500 λεπ. Πόσα λεπτὰ ἔχει τὸ τάλληρον; (500 λεπτά.)

Γενίκευσις τοῦ τρόπου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

259. Τὰ προβλήματα τῶν *ἀκεραίων, κλασματικῶν καὶ συμμιγῶν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως* ἢ καὶ τῶν δύο συγχρόνως τούτων πράξεων λύονται διὰ τοῦ τρόπου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ἀφ' οὗ οὗτος γενικευθῇ ὡς ἑξῆς.

260. *Διὰ νὰ λύσωμεν πρόβλημά τι διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, κάμνομεν πρῶτον τὰς ὁμοειδεῖς ποσότητας νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς συγκεκριμένης μονάδος. Ἔπειτα καταστρώνοντες τὸ πρόβλημα, ἀναχωροῦμεν ἐκ τῆς ποσότητος τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν γνωρίζομεν καὶ ἡ ὁποία εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς ἐκείνην τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ζητοῦμεν. Ταύτης δὲ ἀφ' οὗ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τῆς μονάδος της* (ἂν δὲν ἐδόθη), *εὑρίσκομεν ἔπειτα τὴν τιμὴν τῶν ὅλων της μονάδων.*

Πρόβλημα 1ον. Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος τιμᾶται 2 δρχ. 25 λεπ. Πόσον τιμῶνται οἱ 4 πηχ. 2 ρούπια;

Λύσις. Κατατάσσομεν πρῶτον τὰ ποσὰ τοῦ προβλήματος κατὰ σειρὰν ὡς ἑξῆς.

1πηχ. 2δρχ. 25λεπ. 4πηχ. 2ρουπ. ;

Καὶ ἤδη κάμνομεν τοὺς ὁμοειδεῖς 1πηχ. καὶ 4πηχ. 2ρ. νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος (§ 260), καὶ ἔστω ἐκ τοῦ ρουπίου, ὅτε εὑρίσκομεν 8ρουπ. 2δρχ. 25λεπ. 34ρουπ. ;

Καὶ ἤδη ἀναχωροῦντες ἐκ τοῦ 8ρ., διότι οὗτος εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς τὸν 34ρ., τοῦ ὁποίου τὴν τιμὴν ζητοῦμεν (§ 260) ἔχομεν

Ὅταν τὰ 8ρ. τιμῶνται 2δρχ. 25λεπ.

Τὸ 1ρ. θὰ τιμᾶται $\dfrac{2\text{δρχ. } 25\text{λεπ.}}{8}$

καὶ τὰ 34ρ. θὰ τιμῶνται $\dfrac{2\text{δρχ. } 25\text{λεπ.} \times 34}{8}$

Ἐκτέλεσις πράξεως.

$$
\begin{array}{ll|l}
2^{\delta\rho\chi}. & 25^{\lambda\epsilon\pi}. & \\
 & 34 & \\
\hline
76^{\delta\rho\chi}. & 50^{\lambda\epsilon\pi}. & 8 \\
\cline{3-3}
72\delta. & & 9^{\delta}\chi.\ 56^{\lambda\epsilon\pi}.\frac{2}{8} \\
\cline{1-1}
4\delta. & & \\
100\lambda. & & \\
\cline{1-1}
400\lambda. & & \\
50\lambda. & & \\
\cline{1-1}
450\lambda. & & \\
50\lambda. & & \\
2\lambda. & & \\
0 & &
\end{array}
$$

Ὥστε τὰ 34ρ. ἤτοι οἱ 4πηχ. 2ρ. τιμῶνται 9δχ. 56λ. $\frac{2}{8}$.

Πρόβλημα 2ον. Ἐργάτης τις λαμβάνει διὰ μίαν ἡμέραν 4δρχ. 25λεπ., πόσας ἡμέρας θὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ λάβῃ 150δρχ. 75λεπ. ;

Λύσις. Κατατάσσομεν τὰ ποσὰ τοῦ προβλήματος κατὰ σειρὰν ὡς ἑξῆς· 1ἡμ. 4δρ. 25λεπ. 150δρ. 75λεπ. ;

Καὶ ἤδη κάμνομεν τοὺς ὁμοειδεῖς 4δρ. 25λεπ. καὶ 150δρχ. 75λ. νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, καὶ ἔστω ἐκ τοῦ λεπτοῦ, ὅτε ἔχομεν· 1ἡμ. 425λ. 15075λ. ;

Καὶ ἤδη ἀναχωροῦντες ἀπὸ τῶν 425λ. (§ 260), ἔχομεν.

Ἀφοῦ διὰ 425 λεπ. ἐργάζεται 1ἡμ.

» 1λεπ. θὰ ἐργασθῇ $\frac{1}{425}$ ἡμ.

καὶ διὰ 15075λ. » » $\frac{1\times 15075\text{ἡμ.}}{425}=35$ἡμ. 5ὥρ. 38′ 49″ $\frac{7}{17}$

Πρόβλημα 3ον. Οἱ 5πηχ. 6ρ. ὑφάσματός τινος τιμῶνται 3ταλ. 2δχ. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς ; $\left(2\text{δχ. } 95\text{λεπ. } \frac{30}{46}\right)$

Πρόβλημα 4ον. Ὡρολόγιόν τι εἰς 12 ὥρ. 5′ μένει ὀπίσω 1 ὥρ. 4′ 2″. Πόσον μένει ὀπίσω τὴν ὥραν;

12ὥρ. 5′ 1ὥρ. 4′ 2″ 1ὥρ. ;

Καὶ τρέποντες ὅλους εἰς δευτερόλεπτα ἔχομεν (§ 260).

43500″ 3842″ 3600″ ;

Καὶ ἤδη λύομεν τὸ πρόβλημα οὕτω.

Ἐπειδὴ εἰς 43500″ μένει ὀπίσω 3842″

ἄρα εἰς 1″ θὰ μένῃ $\frac{3842''}{43500}$

καὶ εἰς 3600″ θὰ μένῃ $\frac{3842 \times 3600}{43500} = 317''\frac{417}{435}$

Ὥστε εἰς 3600″ ἤτοι εἰς 1 ὥρ. θὰ μένῃ ὀπίσω τὸ ὡρολόγιον 317″ $\frac{417}{435}$ ἤτοι 5′ 17″ $\frac{139}{145}$.

Πρόβλημα 5ον. Τὸ δράμιον μαλλίου ἀξίζει 5 λεπ. Πόσα δράμια ἀγοράζομεν μὲ $\frac{3}{4}$ δρχ.; (15 δρμ.)

Πρόβλημα 6ον. Μὲ $\frac{2}{3}$ ταλ. πόσον ἀγοράζομεν ἐξ ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὰ 5 ρούπ. τιμῶνται $\frac{3}{4}$ δχ. ;

$\left(22\text{ρ.}\ \frac{2}{9}\ \text{ἤτοι}\ 2\text{πηχ.}\ 6\text{ρ.}\frac{2}{9}\right)$

Πρόβλημα 7ον. Μὲ 4 δρχ. 80 λεπ. ἀγοράζομεν 2 πηχ. 3 ρ. ἐξ ὑφάσματός τινος. Πόσον τιμῶνται οἱ 7 πηχ. 5 ρ.;

4δρχ. 80λ. 2πηχ. 3ρ. 7πηχ. 5ρ. ;

ἢ καὶ 4δρχ. 80λ. 19ρ. 61ρ ;

ὅθεν ἔχομεν τὰ 19ρ. τιμῶνται 4δρχ. 80λεπ.

Τὸ 1ρ. τιμᾶται $\frac{4\text{δρχ. } 80\text{λεπ.}}{19}$

καὶ τὰ 61ρ. τιμῶνται $\frac{4\text{δρχ.}80\text{λεπ.}\times 61}{19} = 15\text{δρχ. } 41\text{λεπ.}\frac{1}{19}$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πόσον εἶναι τὸ διπλάσιον καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν 5είκ. 2ταλ. 3δρχ. (15είκ. 2ταλ. 75λεπ.).

2) Τρεῖς ἐργάται συνεφώνησαν νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος 5δρχ. 25λεπ. διὰ 9 ὥρ. τὴν ἡμέραν, εἰργάσθη δὲ ὁ μὲν εἷς 3ἡμ. 8ὥρ. 20′, ὁ δὲ

ἕτερος 1ἡμ. 7ὡρ. 50′ καὶ ὁ τρίτος 2ἡμ. 8ὡρ. 40′. Πόσα θὰ λάβωσι καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ ; $\left(45^{\delta\rho\chi}.\ 98^{\lambda\epsilon\pi}.\frac{11}{18}\right)$

3) Εἰς μίαν ὥραν ὑφαίνει τις 7ρουπ. Πόσον ὑφαίνει εἰς 4ἡμ. 30′; $\left(42^{\pi\eta\chi}.\ 3^{\rho o\upsilon\pi}.\ \frac{1}{2}\right)$

4) Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος ἀξίζει 50λεπ. Πόσους πήχεις ἀγοράζομεν μὲ $2\ \frac{3}{4}$δρχ; $\left(5^{\pi\eta\chi}.\ \frac{1}{2}\right)$

5) Οἱ 2πηχ. 3ρουπ. τιμῶνται 5δρχ. 75λεπ. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς ; $\left(2^{\delta\rho\chi}.\ 42^{\lambda\epsilon\pi}.\ \frac{2}{19}\right)$

6) Ἔμπορός τις εἶχε 5στατ. 250δρμ. καφὲ καὶ ἐπώλησε 35ὀκ. 300δρμ. πρὸς 5δρχ. 25λεπ. τὴν ὀκᾶν. Πόσα χρήματα εἰσέπραξε καὶ πόσος καφὲς τοῦ ἔμεινε ;

(εἰσέπραξεν 187δρχ. 68λεπ. $\frac{3}{4}$, τῷ ἔμειναν 4στατ. 8ὀκ. 350δρμ.)

7) Ἐργάτης τις κτίζει καθ᾽ ἑκάστην τοῖχον 5κ.μ. 2κ.παλ. Πόσον κτίζει τὴν ὥραν ; (0κ.μ., 416833 $\frac{1}{3}$ ἤτοι 416κ.π. 833κ.δ. $\frac{1}{3}$)

8) Ὁ στατὴρ ἀνθράκων τιμᾶται 5δρχ. 25λεπ. Πόσον τιμῶνται αἱ 70ὀκ. 250δρμ ; $\left(8^{\delta\rho\chi}.\ 42^{\lambda\epsilon\pi}.\ \frac{241}{352}\right)$

9) Ἔμπορός τις ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 9εἰκ. 5ταλ. καὶ ἐκέρδησε 12εἰκ. 4δρχ. Ζητεῖται πόσον κέρδος ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον τάλληρον τῆς καταθέσεώς του $\left(5^{\delta\rho\chi}.\ 95^{\lambda}.\ \frac{5}{41}\right)$

Περὶ ποσῶν ἀναλόγων.

261. Ἐὰν εἰς δύο ποσὰ συμβαίνῃ, ὅταν διπλασιάζηται, τριπλασιάζηται κ.τ.λ. τὸ ἓν τότε καὶ τὸ ἄλλο νὰ διπλασιάζηται, νὰ τριπλασιάζηται κ.τ.λ. ἢ ἐὰν τὸ ἓν γίνηται τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κ.τ.λ. τότε καὶ τὸ ἄλλο νὰ γίνηται τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, κ.τ.λ. τὰ ποσὰ ταῦτα λέγονται *ἀνάλογα*.

Π.χ. Ἐὰν μὲ 10δρχ. ἀγοράζωμεν 2ὀκ. καφέ, μὲ διπλασίας δραχμὰς θ᾽ ἀγοράσωμεν διπλασίας ὀκάδας καφέ. Ἄρα τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν μὲ τὸ ποσὸν τῶν ὀκάδων εἶναι ἀνάλογα.

262. Ἐὰν εἰς δύο ποσὰ συμβαίνῃ, ὅταν διπλασιάζηται, τριπλασιάζηται, κ.τ.λ. τὸ ἕν, τὸ ἄλλο νὰ γίνηται τὸ ἥμισυ τὸ τρίτον κ.τ.λ., τότε τὰ ποσὰ ταῦτα λέγονται *ἀντιστρόφως ἀνάλογα*.

Π. χ. Μὲ 18 ἐργάτας ἐκτελοῦμεν ἔργον τι εἰς 20 ἡμέρας, μὲ διπλασίους ἐργάτας θὰ ἐκτελέσωμεν τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς τὸ ἥμισυ τῶν 20 ἡμερῶν. Ἄρα ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ ἡμερῶν εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Παρατήρησις α'. Τὰ μὲν ἀνάλογα ποσὰ συναυξάνουσι καὶ συνελαττοῦνται. Τὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα ὅμως ποσά, ὅταν αὐξάνῃ τὸ ἕν, τὸ ἄλλο ἐλαττοῦται.

Παρατήρησις β'. Πάντα τὰ ποσὰ τὰ ὁποῖα συναυξάνουσι καὶ συνελαττοῦνται δὲν εἶναι καὶ ἀνάλογα, ὡς καὶ πάντα τὰ ποσὰ εἰς τὰ ὁποῖα, ὅταν αὐξάνῃ τὸ ἕν, τὸ ἄλλο ἐλαττοῦται, δὲν εἶναι καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Π. χ. Ἄνθρωπός τις μὲ βάρος 20 ὀκάδων διανύει διάστημά τι εἰς 2ἡμ. Ἂν εἶχε διπλάσιον βάρος, διὰ νὰ διανύσῃ τὸ αὐτὸ διάστημα, θὰ ἐχρειάζετο περισσοτέρας ἡμέρας, ὄχι ὅμως ἀκριβῶς διπλασίας. Ἄρα ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν δὲν εἶναι ποσὰ ἀνάλογα. Ὁμοίως ὁ αὐτὸς ἄνθρωπος εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον μὲ διπλάσιον βάρος ἤθελε διανύσῃ ὀλιγώτερον διάστημα, ὄχι ὅμως ἀκριβῶς τὸ ἥμισυ, ἄρα ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων μὲ τὸ διάστημα δὲν εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.

263. Μέθοδος λέγεται τρόπος τις γενικός, κατὰ τὸν ὁποῖον λύονται προβλήματά τινα.

264. Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν λέγεται ἐκείνη, διὰ τῆς ὁποίας λύονται τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα μεταβάλλεται ἓν ποσὸν καὶ ζητεῖται ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ ἑτέρου ποσοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνάλογον ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογον πρὸς ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον μετεβλήθη.

Σημείωσις. Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται τῶν τριῶν, διότι ἡ ἄγνωστος τιμὴ εὑρίσκεται ἐκ *τριῶν* ἄλλων δεδομένων ἀριθμῶν.

265. Τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν εἶναι δύο εἰδῶν.

Α') Τὰ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.

Β') Τὰ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Α΄ εἴδους πρόβλημα. Οἱ 3πηχ. ὑφάσματός τινος τιμῶνται 5δρχ. 25λεπ., πόσον τιμῶνται οἱ 4πηχ. 3ρουπ. ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;

Λύσις. Ἀφοῦ παραστήσωμεν τὴν ἄγνωστον τιμὴν διὰ **X** καὶ θέσωμεν τὰ δύο πρῶτα ποσὰ εἰς μίαν σειρὰν καὶ ὑποκάτω τὰ ὁμοειδῆ των, ἔχομεν.

$$\frac{3\pi\eta\chi.}{4\pi\eta\chi.\ 3\rho o\upsilon\pi.} \qquad \frac{5\delta\rho\chi.\ 25\lambda\epsilon\pi.}{X\,\delta\rho\chi.}$$

Καὶ ἤδη κάμνομεν τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, ὅτε ἔχομεν

$$\frac{24\rho.}{35\rho.} \qquad \frac{5\delta\rho\chi.\ 25\lambda\epsilon\pi.}{X}$$

Λύοντες δὲ τὸ πρόβλημα διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, εὑρίσκομεν·

Ἐπειδὴ τὰ 24ρ. τιμῶνται 5δρχ. 25λεπ.

τὸ 1ρ. θὰ τιμᾶται $\frac{5\delta\rho\chi.\ 25\lambda\epsilon\pi.}{24}$

καὶ τὰ 35ρ. θὰ τιμῶνται $\frac{5\delta\rho\chi.\ 25\lambda\epsilon\pi.\times 35}{24}$

ὥστε ἡ ζητουμένη τιμὴ τοῦ ἀγνώστου εἶναι

$$X\,\delta\rho\chi. = \frac{5\delta\chi.\ 25\ \lambda\epsilon\pi.\times 35}{24}$$

Παρατηροῦντες δέ, ὅτι τὸ ποσὸν τοῦ ὑφάσματος πρὸς τὴν τιμήν του εἶναι ποσὰ ἀνάλογα (διότι διπλάσια ρούπια ὑφάσματος θ' ἀξίουν διπλασίαν τιμήν), ἐξάγομεν ἐκ τῆς εὑρεθείσης τιμῆς

$$X\,\delta\rho\chi. = \frac{5\delta\chi.\ 25\lambda\epsilon\pi.\times 35}{24}$$

(κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ ὁμοειδὴς τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸς 5δρ. **25 λεπ.** πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{35}{24}$), τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

266. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὁμοειδῆ τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ ὁποίου ὡς παρονομαστὴς λαμβάνεται ὁ εὑρισκόμενος εἰς τὴν αὐτὴν σειρὰν μὲ τὸν ὁμοειδῆ τοῦ ἀγνώστου.*

Β΄ εἴδους πρόβλημα. Εἰς 6 ἡμ. 4 ὥρ. τελειώνουσιν ἔργον τι 8 ἐργάται. Πόσοι ἐργάται τελειώνουσι τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 12 ἡμ. 8 ὥρ.;

Λύσις. Ἀφ' οὗ παραστήσωμεν τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν τῶν ἐργατῶν διὰ X καὶ θέσωμεν τὰ δύο πρῶτα ποσὰ εἰς μίαν σειρὰν καὶ ὑποκάτω τὰ ὁμοειδῆ των, ἄγομεν γραμμὰς μεταξύ των καὶ ἔχομεν

$$\frac{6\text{ἡμ. } 4\text{ὥρ.}}{12\text{ἡμ. } 8\text{ὥρ.}} \qquad \frac{8\text{ἐργ.}}{X}$$

Ἀφ' οὗ δὲ κάμωμεν τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, εὑρίσκομεν

$$\frac{76\text{ὥρ.}}{152\text{ὥρ.}} \qquad \frac{8\text{ἐργ.}}{X}$$

καὶ λύοντες τὸ πρόβλημα διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, εὑρίσκομεν, ὅτι

ἐπειδὴ εἰς 76 ὥρ. τελειώνουσιν ἔργον τι 8 ἐργάται

εἰς 1 ὥρ. θὰ τὸ τελειώσωσιν 8×76 ἐργάται

καὶ εἰς 152 ὥρ. » » » $\frac{8\times76}{152}$ ἐργάται.

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἰς τῶν ἐργατῶν εἶναι X ἐργ.$=8\times\frac{76}{152}$.

Παρατηροῦντες ἤδη ὅτι, ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐργατῶν εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα (διότι εἰς διπλασίας ὥρας θὰ τελειώσωσι τὸ αὐτὸ ἔργον οἱ ἡμίσεις ἐργάται), ἐξάγομεν ἐκ τῆς εὑρεθείσης τιμῆς,

$$X \text{ ἐργ.}=8\times\frac{76}{152}$$

(κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ ὁμοειδὴς τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸς 8 ἐργ. πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{76}{152}$), τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

267. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὁμοειδῆ τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ ὁποίου ὡς ἀριθμητὴς λαμβάνεται ὁ εὑρισκόμενος εἰς τὴν αὐτὴν σειρὰν μὲ τὸν ὁμοειδῆ τοῦ ἀγνώστου.*

Πρόβλημα 1ον. Εἴς τι φρούριον ἦσαν 400 στρατιῶται καὶ εἶχον τροφὰς διὰ 40 ἡμέρας, ἦλθε δὲ εἰς αὐτοὺς ἐπικουρία ἐξ 100 στρατιωτῶν μὲ 5 ἡμερῶν τροφάς. Ποῖον μέ ρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος διὰ νὰ ἐπαρκέσουν αἱ τροφαί των διὰ 40 πάλιν ἡμέρας;

Λύσις. Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, πρέπει νὰ καταστρώσωμεν αὐτὸ οὕτως, ὥστε νὰ μεταβάλληται ἓν μόνον ποσὸν καὶ νὰ ζητῆται ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ σιτηρεσίου. Πρὸς τοῦτο δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἂν εἴχομεν ἐξ ἀρχῆς 400+100 ἤτοι 500 στρατιώτας, διὰ νὰ περάσουν οὗτοι 40 ἡμ. λαμβάνοντες 1 σιτηρέσιον καθ' ἑκάστην, ἔπρεπε νὰ εἶχον 500×40 ἤτοι 20000 σιτηρέσια, ἀλλ' ἤδη οἱ 500 στρ. διὰ νὰ περάσουν 40 ἡμ. ἔχουν σιτηρέσια 16000+500 ἤτοι 16500, ποῖον λοιπὸν μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνωσι;

$$\begin{array}{llll} 500\text{σιτηρ.} & 40\text{ἡμ.} & \frac{1\text{σιτηρ.}}{X} & \frac{20000\text{ σιτηρ.}}{16500} \\ \text{»} & \text{»} & & \end{array}$$

ὅθεν κατὰ τὸν κανόνα (§ 266) εὑρίσκομεν ὅτι

$$X = 1 \times \frac{16500}{20000} \text{ ἤτοι } \frac{165}{200} \text{ τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου}$$

Πρόβλημα 2ον. 200 στρατιῶται εἶχον τροφὰς διὰ 50 ἡμέρας. Ἐὰν οὗτοι αὐξηθῶσι κατὰ 250 στρατιώτας, ποῖον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος διὰ νὰ περάσωσι πάλιν 50 ἡμέρας;

$$\begin{array}{lll} \frac{200\text{ στρατ.}}{450} & \begin{array}{c}50\text{ ἡμ.}\\ \text{»}\end{array} & \frac{1\text{ σιτηρ.}}{X} \end{array} \quad \text{ὅθεν } X = 1 \times \frac{200}{450} = \frac{4}{9} \text{ τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου.}$$

Πρόβλημα 3ον. 200 στρατιῶται ἔχουσι τροφὰς διὰ 50 ἡμέρας. Ἐὰν οὗτοι αὐξηθῶσι κατὰ 250 στρατιώτας, πόσας ἡμέρας θὰ περάσωσι; $\left(22 \text{ ἡμ. } \frac{2}{9}\right)$

Σημείωσις α'. Διὰ τὰ $\frac{2}{9}$ τῆς ἡμέρας χρειάζονται οἱ 450 στρατιῶται σιτηρέσια $450 \times \frac{2}{9}$ ἤτοι 100 σιτηρέσια.

Σημείωσις β'. Διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν λύονται τὰ προβλήματα (τῶν ἀκεραίων, κλασματικῶν ἢ συμμιγῶν), τὰ ὁποῖα ἀπαιτοῦσι πολλαπλασιασμὸν ἢ διαίρεσιν ἢ καὶ τὰς δύο συγχρόνως ταύτας πράξεις, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν πρῶτον τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ ὑπὸ τὰ ὁμοειδῆ καὶ νὰ κάμωμεν αὐτὰ νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς συγκεκριμένης μονάδος καὶ ἔπειτα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα (§ 266) ἢ τὸν κανόνα (§ 267), καθ' ὅσον τὰ ποσὰ εἶναι *ἀνάλογα* ἢ *ἀντιστρόφως ἀνάλογα*.

Παράδειγμα 1ον. Ὁ στατὴρ ἀνθράκων τιμᾶται 6 δρχ. 30 λεπ., πόσον τιμῶνται αἱ 68 ὀκάδες;

$$\frac{1 \text{ στατ.}}{68 \text{ όκ}} \quad \frac{6 \text{ δχ. } 30 \text{ λ.}}{X} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{44 \text{ όκ.}}{68 \text{ όκ.}} \quad \frac{6 \text{ δχ. } 30 \text{ λ.}}{X}$$

Καὶ ἤδη ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα (§ 266) εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ 68 ὀκάδες τιμῶνται 6 δχ. 30 λ. $\times \frac{44}{68}$ ἤτοι 9 δχ. 73 λ. $\frac{7}{11}$.

Παράδειγμα 2ον. Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν 2 πηχ. 2 ρ. ὑφάσματός τινος. Πόσον ἀξίζουν οἱ 18 πήχεις; (8 δραχμάς).

Παράδειγμα 3ον. Ὅταν αἱ 5 ὀκ. 200 δρμ. τοῦ καφὲ στοιχίζουν 27 δχ. 50 λεπ. πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ; (5 δραχμάς).

Προβλήματα.

Δύο ἀντικείμενα εἶναι εἰς φωτογραφικὴν πλάκα, τὸ μὲν 0,25 τοῦ μέτρου, τὸ δὲ 0,3 τοῦ μέτρου. Τὸ φυσικὸν μέγεθος τοῦ δευτέρου εἶναι 27 μέτρα. Ζητεῖται ποῖον εἶναι τὸ φυσικὸν μέγεθος τοῦ πρώτου ἀντικειμένου; (22,5 μέτρα).

2) Ἐκ τινος ὑφάσματος πλάτους $\frac{5\text{πηχ.}}{8}$ στρώνομεν δωμάτιόν τι μὲ 15 πηχ. 3ρουπ. Πόσους πήχεις θὰ χρειασθῶμεν διὰ τὸ αὐτὸ δωμάτιον ἐξ ὑφάσματος πλάτους $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως; $\left(12\text{πηχ. } 6\text{ρουπ.} \frac{1}{2}\right)$

$$\frac{\frac{5\text{πηχ.πλ.}}{8}}{\frac{3\text{πηχ.πλ.}}{4}} \quad \frac{15\text{πηχ. } 3\text{ρουπ.}}{X \text{ πηχ.}} \quad \text{ὅθεν } X\text{πηχ.} = 15\text{πηχ. } 3\text{ρουπ.} \times \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}}$$

Καὶ διαιροῦντες τὸ $\frac{5}{8}$ διὰ $\frac{3}{4}$ εὑρίσκομεν ὅτι

$$X \text{ πηχ.} = 15\text{πηχ. } 3\text{ρπ.} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{3} = 15\text{πχ. } 3\text{ρπ.} \times \frac{20}{24} = 12\text{πχ.}6\text{ρπ}\frac{1}{2}$$

3) Δωμάτιόν τι ἀποτελεῖται ἀπὸ 21 τετραγωνικοὺς πήχεις. Πόσους πήχεις θὰ χρειασθῶμεν διὰ νὰ στρώσωμεν τὸ αὐτὸ δωμάτιον, ἐὰν τὸ ὕφασμα ἔχῃ πλάτος $\frac{2}{3}$ τοῦ πήχεως; $\left(31\text{πηχ. } \frac{1}{2}\right)$

Σημείωσις. Ἂν τὸ ὕφασμα εἶχε πλάτος 1πηχ., θὰ ἐχρειαζόμεθα 21πηχ. διὰ νὰ στρώσωμεν τὸ δωμάτιον.

4) Κωδωνοστάσιόν τι ῥίπτει σκιὰν 8 πήχεων, ῥάβδος δὲ ὀρθία μήκους 1πηχ. 3ρουπ. ῥίπτει σκιὰν 5ρουπ. Ποῖον ὕψος ἔχει τὸ κωδω-

νοστάσιον ; $\left(17\text{πηχ. } 4\text{ρουπ. } \frac{4}{5}\right)$

5) Είς μῆκός τι ὡρισμένον φυτεύομεν κατὰ σειρὰν 10 δένδρα, ἀπέχοντα μεταξύ των κατὰ 3 μέτρα. Ἂν θέλωμεν εἰς τὸ αὐτὸ μῆκος νὰ φυτεύσωμεν 60 δένδρα, ποία θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δένδρων; $\left(\frac{1}{2}\text{ μέτρον}\right)$

6) Εἰς μῆκος 60 μέτρων φυτεύομεν 10 δένδρα ἀπέχοντα μεταξύ των 6 μέτρα. Εἰς πόσον μῆκος ἠθέλομεν φυτεύσῃ 10 δένδρα, ἂν ἀπεῖχον μεταξύ των $1/_2$ μέτρον ; (15 μέτρα).

9) Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν 2πηχ. 3ρουπ. ὑφάσματός τινος. Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς ; $\left(42\text{λεπ. } \frac{2}{19}\right)$

10) Μία μάνδρα εἶναι 56 τετ. μέτρων. Ζητεῖται πόσας πλάκας χρειάζεται διὰ νὰ στρωθῇ, ὅταν ἑκάστη πλὰξ εἶναι 0,70 τοῦ τετρ. μέτρου. (80 πλάκας).

Σημείωσις. Ἂν εἶχε πλάκας ἑνὸς τετρ. μέτρου, θὰ ἐχρειάζετο 56 πλάκας.

Προβλήματα τοῦ τόσον τοῖς ἑκατὸν ἢ τοῖς χιλίοις.

268. Εἰς πλείστας ἐμπορικὰς συναλλαγὰς καὶ εἰς ἄλλας ἰδιωτικὰς χρηματικὰς ὑποθέσεις κανονίζεται τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία ποσοῦ τινος ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ κέρδους ἢ τῆς ζημίας, τὴν ὁποίαν ὑπέστη ἑκάστη ἑκατοντὰς μονάδων τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ ἢ ἐνίοτε ἑκάστη χιλιάς.

Σημείωσις. Τὰ προβλήματα τοῦ τόσον τοῖς ἑκατὸν ἢ τοῖς χιλίοις λύονται κατὰ τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἐμπορεύματα ἀξίας 500 δρχ. καὶ μεταπωλήσας αὐτὰ ἐκέρδησε 10 δρχ. ἐπὶ τοῖς ἑκατόν. Ζητεῖται πόσον ἐκέρδησε. $\left(X=10\times\frac{500}{100}=50\text{δρχ.}\right)$

Σημείωσις. Τὸ 10 ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν κέρδος ἢ ζημία γράφεται συμβολικῶς 10 %.

2) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἐμπορεύματα ἀντὶ 550 δρχ. καὶ ἐκέρδησε 10 % ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς των ἀξίας. Ζητεῖται πόσον τοῦ ἐστοίχιζον τὰ ἐμπορεύματα. $\left(X=100\times\frac{550}{110}=500\text{δρχ.}\right)$

3) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἐμπορεύματα καὶ ἐκέρδησε 10 °/₀ ἐπὶ τῆς ἀξίας αὐτῶν, τὸ ὅλον του δὲ κέρδος ἦτο 50 δρχ. Ζητεῖται πόσον ἐπώλησε τὰ ἐμπορεύματα ταῦτα. $\left(X=110 \times \frac{50}{10}=550\text{δρχ.}\right)$

4) Εἴς τινα ἀγοράσαντα ἐμπορεύματα ἀξίας 400 δραχμῶν γίνεται ἔκπτωσις 5 °/₀. Ζητεῖται πόση θὰ εἶναι ἡ ἔκπτωσις.

$$\left(X=5 \times \frac{400}{100}=20\text{δρχ.}\right)$$

5) Εἴς τινα ἀγοράσαντα ἐμπορεύματα ἀξίας 400 δρχ. γίνεται ἔκπτωσις 5 °/₀ Ζητεῖται πόσα θὰ πληρώσῃ.

$$\left(X=95\times\frac{400}{100}=380\text{δρχ.}\right)$$

6) Ἠγόρασέ τις ἔλαιον πρὸς 120 λεπ. τὴν ὀκᾶν καὶ τὸ ἐπώλησε πρὸς 150 λεπ. τὴν ὀκᾶν. Ζητεῖται πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδησεν.

$$\left(X=30\times\frac{100}{120}=25\ \%\right)$$

7) Ἠγόρασέ τις οἰκόπεδον 1000 τ. πήχεων πρὸς 25 δρχ. τὸν τ. πῆχυν. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ ἕκαστον πῆχυν, ἐὰν θέλῃ νὰ κερδήσῃ 15 °/₀ ;

$$\left(X=115 \times \frac{25}{100}=28{,}75\ \text{δρχ.}\right)$$

8) Οἰνοπώλης εἶχεν ἀγοράσῃ 2000 ὀκδ. οἴνου καὶ τὸν μετεπώλησε πρὸς 92 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν κερδήσας 15 °/₀ Πόσον εἶχεν ἀγοράσῃ τὸν οἶνον ; $\left(X=100 \times \frac{92}{115}=80\ \text{λεπτά.}\right)$

9) Ἠγόρασέ τις τὸ χιλιόγραμμον ἐμπορεύματός τινος πρὸς 4 δχ. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν, ἐὰν θέλῃ νὰ κερδίζῃ 8 °/₀ ;

(5,52. . .δρχ.)

Σημείωσις. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἀξίαν τῆς ὀκᾶς καὶ ταύτην αὐξάνομεν κατὰ 8 °/₀.

10) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἐκ Θεσσαλίας 5000 ὀκδ. σίτου πρὸς 35 λεπτ. τὴν ὀκᾶν. Ἐκ τῶν ὀκάδων δὲ τούτων 400 μὲν ἐχύθησαν κατὰ τὴν μέχρι Βόλου μεταφοράν των, 1200 δὲ ἐβράχησαν κατὰ τὸν ἀπὸ Βόλου μέχρι Πειραιῶς πλοῦν. Ἐπώλησε δὲ εἰς Πειραιᾶ τὸν μὲν βεβρεγμένον σῖτον πρὸς 20 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, τὸν δὲ μείναντα πρὸς

45 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν. Ζητεῖται πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδησεν ἢ ἐζημιώθη. (ἐκέρδησεν 1,14...%)

11) Ἠσφάλισέ τις τὴν οἰκίαν του ἀντὶ 70000 δραχ. πρὸς 2,50 δρχ. ἐπὶ τοῖς χιλίοις. Πόσον θὰ πληρώσῃ δι' ἀσφάλιστρα ; (175 δρχ.)

Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.

269. Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν λέγεται ἐκείνη, διὰ τῆς ὁποίας λύονται προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα μεταβάλλονται δύο ἢ περισσότερα ποσὰ καὶ ζητεῖται ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ ἑτέρου ποσοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνάλογον ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογον πρὸς ἕκαστον τῶν μεταβληθέντων ποσῶν.

Σημείωσις. Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν, διότι τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα λύονται διὰ ταύτης, ἀναλύονται εἰς δύο ἢ περισσότερα προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Πρόβλημα 1ον. 10 ναῦται εἰς 20ἡμ. ἐδαπάνησαν 45δρχ. 75λεπ., εἰς πόσας ἡμέρας 17 ναῦται δαπανῶσι 51 δραχμάς ;

Λύσις. Κατατάσσομεν πρῶτον τὰ ποσὰ εἰς δύο σειρὰς ὡς ἑξῆς.

$$\frac{10\text{ναυτ.}}{17} \qquad \frac{20\text{ἡμ.}}{X} \qquad \frac{45\text{δχ. } 75\text{λεπ.}}{51\text{δρχ.}}$$

Ἔπειτα κάμνομεν τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, ὅτε ἔχομεν

$$\frac{10\text{ναυτ.}}{17} \qquad \frac{20\text{ἡμ.}}{X} \qquad \frac{4575\text{λεπ.}}{5100}$$

Καὶ τέλος διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, ἀναλύομεν αὐτὸ εἰς προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς.

«Οἱ 10 ναῦται εἰς 20 ἡμ. ἐδαπάνησαν 4575 λ., οἱ 17 ναῦται εἰς πόσας ἡμέρας θὰ δαπανήσουν τὸ αὐτὸ ποσόν ;» ἤτοι

$$\begin{array}{ccc} \text{ναυτ.} & \text{ἡμ.} & \text{λεπ.} \\ \frac{10}{17} & \frac{20}{X} & \begin{array}{c}4575\\ »\end{array} \end{array}$$

Καὶ ἐπειδὴ διπλάσιοι *ναῦται* εἰς τὸ ἥμισυ τῶν 20 ἡμερῶν θὰ δαπανήσωσι τὸ ποσὸν τῶν 4575 λεπ., ἄρα ὁ ἀριθμὸς τῶν ναυτῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Ἐφαρμόζοντες δὲ τὸν κανόνα (§ 267) εὑρίσκομεν $X = 20 \times \frac{10}{17}$ ἡμ.

Ἤτοι οἱ 17 ναυτ. θὰ δαπανήσωσι τὰ 4575 λεπτὰ εἰς $20 \times \frac{10}{17}$ ἡμέρ. Μετὰ ταῦτα μεταβάλλομεν καὶ τὸ ποσὸν τῶν λεπτῶν ἀπὸ 4575 λ. εἰς 5100 λεπ. καὶ ζητοῦμεν τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τῶν ἡμερῶν σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς.

«Οἱ 17 ναυτ. εἰς $20 \times \frac{10}{17}$ ἡμέρας δαπανῶσι 4575 λεπτά. Οἱ αὐτοὶ ναῦται εἰς πόσας ἡμέρας θὰ δαπανήσουν 5100 λεπτά ;»

ναυτ.	ἡμ.	λεπ.
17	$20 \times \frac{10}{17}$	4575
»	X	5100

Καὶ ἐπειδὴ οἱ αὐτοὶ 17 ναῦται εἰς διπλασίας *ἡμέρας* θὰ δαπανῶσι διπλάσια *λεπτά*, ἄρα ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν λεπτῶν εἶναι ποσὰ ἀνάλογα. Ἐφαρμόζοντες δὲ τὸν κανόνα (§ 266) εὑρίσκομεν

$$X \text{ἡμ.} = 20 \times \frac{10}{17} \times \frac{5100}{4575}$$

Ἤτοι οἱ 17ναῦται τὰ 5100 λεπτὰ δαπανῶσιν εἰς $20 \times \frac{10}{17} \times \frac{5100}{4575}$ ἡμέρας, ἤτοι 13 ἡμ. $\frac{7}{61}$.

Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

270. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὁμοειδῆ τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸν ἐπὶ ἕκαστον κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμὸς ὁ εὑρισκόμενος εἰς τὴν αὐτὴν σειρὰν μὲ τὸν ὁμοειδῆ τοῦ ἀγνώστου, λαμβάνεται ὡς παρονομαστὴς μέν, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὡς ἀριθμητὴς δέ, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα.*

Πρόβλημα 2ον. 15 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν ἐχρειάσθησαν 25 ἡμέρας διὰ νὰ σκάψωσι τάφρον 180 πήχ. μήκους 5 πηχ. πλάτους καὶ 2 πηχ. βάθους. Εἰς πόσας ἡμέρας 40 ἐργάται ἐργαζόμενοι 10 ὥρ. τὴν ἡμέραν θὰ σκάψωσι τάφρον 120 πηχ. μήκ. 3 πήχ. πλάτους καὶ 4 πηχ. βάθους ;

Λύσις. Κατατάσσομεν τὰ ποσὰ εἰς δύο σειρὰς ὡς ἀνωτέρω, ἤτοι

ἐργ.	ὥρ.	ἡμ.	π.μ.	π.πλ.	π.β.
15	8	25	180	5	2
40	10	X	120	3	4

Καὶ ἐπειδὴ διπλάσιοι ἐργάται τῶν 15 θὰ ἐτελείωνον τὴν τάφρον εἰς τὸ ἥμισυ τῶν 25 ἡμερῶν, ἄρα ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Κατ' ἀκολουθίαν συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα (§ 270) ἔχομεν Χ ἡμ.$=25\times\frac{15}{40}$.

Καὶ ἐπειδή, ἐὰν εἰργάζοντο διπλασίας ὥρας τὴν ἡμέραν, θὰ ἐτελείωνον τὴν τάφρον εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν, ἄρα αἱ ὧραι κατὰ τὰς ὁποίας ἐργάζονται τὴν ἡμέραν, καὶ αἱ ἡμέραι κατὰ τὰς ὁποίας τελειώνει τὸ ἔργον, εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Κατ' ἀκολουθίαν συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα (§ 270) εὑρίσκομεν

$$\text{Χ ἡμ.}=20\times\frac{15}{40}\times\frac{8}{10}$$

Καὶ ἐπειδή, ἐὰν ἡ τάφρος ἦτο διπλασία κατὰ μῆκος, θὰ ἐχρειάζετο διπλασίας ἡμέρας διὰ νὰ τελειώσῃ, διὰ τοῦτο τὸ μῆκος τῆς τάφρου καὶ αἱ ἡμέραι εἶναι ποσὰ ἀνάλογα. Ἐπομένως ἔχομεν

$$\text{Χ ἡμ.}=20\times\frac{15}{40}\times\frac{8}{10}\times\frac{120}{180}$$

Καὶ ἐπειδή, ἐὰν ἡ τάφρος εἶχε διπλάσιον πλάτος, θὰ ἐχρειάζετο διπλασίας ἡμέρας διὰ νὰ τελειώσῃ, διὰ τοῦτο τὸ πλάτος καὶ αἱ ἡμέραι εἶναι ποσὰ ἀνάλογα. Ἐπομένως εὑρίσκομεν

$$\text{Χ ἡμ.}=20\times\frac{15}{40}\times\frac{8}{10}\times\frac{120}{180}\times\frac{3}{5}$$

Καὶ τέλος ἐπειδὴ τὸ βάθος τῆς τάφρου καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν λαμβάνομεν ὡς ποσὰ ἀνάλογα, εὑρίσκομεν

$$\text{Χ ἡμ.}=25\times\frac{15}{40}\times\frac{8}{10}\times\frac{120}{180}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{2}$$

Ἁπλοποιοῦντες δὲ εὑρίσκομεν Χ ἡμ.$=\frac{1\times1\times1\times1\times3\times2}{1\times1\times1\times1}=\frac{6}{1}$ἡμ. ἤτοι 6 ἡμέρας.

Ὥστε οἱ 40 ἐργ. ἐργαζόμενοι 10 ὥρ. τὴν ἡμέραν σκάπτουσι τάφρον 120 πηχ. μήκους 3 πηχ. πλάτους 4 πηχ. βάθους εἰς 6 ἡμέρας.

Παρατήρησις. Τὸ βάθος τῆς τάφρου πρὸς τὰς ἡμέρας δὲν εἶναι ποσὰ ἀνάλογα, διότι διὰ διπλάσιον βάθος δαπανῶμεν διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν χωμάτων πλέον τοῦ διπλασίου χρόνου ἢ πρότερον. Τὴν τοιαύτην ὅμως διαφορὰν τοῦ χρόνου παραλείπομεν καὶ διὰ τοῦτο θεωροῦμεν ἀνάλογον τὸν χρόνον πρὸς τὸ βάθος.

Παρατήρησις.

271. Πολλάκις πρόβλημά τι δύναται νὰ λυθῇ διὰ διαφόρων πράξεων.

Παράδειγμα. Εἴς τι φρούριον ἦσαν 700 στρατιῶται καὶ εἶχον τροφὰς διὰ 50 ἡμέρας. Ἐκ τῶν στρατιωτῶν δὲ τούτων ἔφυγον 240 στρατ. μὲ 3 ἡμερῶν τροφάς. Πόσας ἡμέρας θὰ φθάσωσι τώρα αἱ τροφαὶ εἰς τοὺς μείναντας στρατιώτας;

Λύσις. Ἐπειδὴ οἱ 700στρ. εἶχον τροφὰς διὰ 50ἡμ., ἄρα εἶχον σιτηρέσια 700×50 ἤτοι 35000 σιτηρ. Ἐκ τούτων ὅμως οἱ 240στρ. διὰ 3ἡμ. ἔλαβον μεθ' ἑαυτῶν 240×3 ἤτοι 720 σιτηρέσια· ἄρα διὰ τοὺς μείναντας 700στρ.—240στρ. ἤτοι 460 στρατιώτας, ἔμειναν σιτηρέσια $35000-720$ ἤτοι 34280. Καὶ ἤδη τὸ πρόβλημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ λύσωμεν κατὰ τρεῖς διαφόρους τρόπους.

α') Διὰ μιᾶς διαιρέσεως, σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς.

«Ἐπειδὴ διὰ 1ἡμ. οἱ μείναντες στρατιῶται χρειάζονται 460 σιτηρέσια, πόσας ἡμέρας θὰ περάσουν μὲ τὰ 34280 σιτηρέσια;»

(34280 : 460 ἤτοι 74ἡμ. καὶ θὰ μείνωσι 240σιτηρ.)

β') Διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν· ἀρκεῖ νὰ διατυπώσωμεν αὐτὸ οὕτως, ὥστε νὰ μεταβάλληται ἓν ποσὸν καὶ νὰ ζητῆται ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῶν ἡμερῶν. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

«Οἱ μείναντες 460στρ. διὰ ἡμέρας τινάς, καὶ ἔστω 50ἡμ., χρειάζονται σιτηρέσια 460×50 ἤτοι 23000. Πόσας ἡμέρας θὰ περάσωσιν οἱ αὐτοὶ στρατιῶται μὲ 34280 σιτηρέσια;»

$$\begin{array}{lcc} 460\text{στρ.} & \dfrac{50\text{ἡμ.}}{X} & \dfrac{23000\text{σιτ.}}{34280} \\ \text{»} & & \end{array} \quad \text{ὅθεν } X\text{ἡμ.} = 50 \times \frac{34280}{23000} = 74\text{ἡμ.}\ \frac{12}{23}.$$

γ') Διὰ τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν· ἀρκεῖ νὰ διατυπώσωμεν αὐτὸ οὕτως, ὥστε νὰ μεταβάλλωνται περισσότερα τοῦ ἑνὸς ποσὰ καὶ νὰ ζητῆται ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῶν ἡμερῶν. Καὶ λοιπὸν

«Οἱ 700στρ. διὰ 50ἡμ. χρειάζονται 35000σιτ., οἱ 460στρ. μὲ 34280σιτηρ. πόσας ἡμέρας θὰ περάσουν;»

$$\frac{700\text{στρ.}}{460} \quad \frac{50\text{ἡμ.}}{X} \quad \frac{35000\text{σιτ.}}{34280}$$

ὅθεν εὑρίσκομεν

$$X\text{ἡμ.} = 50 \times \frac{700}{460} \times \frac{34280}{35000} = 74\text{ἡμ.}\ \frac{12}{23}.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ πόσα σιτηρέσια χρειάζονται διὰ τὰ $\frac{12}{23}$ τῆς ἡμέρας, ἀρκεῖ νὰ σκεφθῶμεν, ὅτι οἱ 460 στρατιῶται διὰ μίαν ἡμέραν χρειάζονται 460 σιτηρέσια, ἄρα διὰ τὰ $\frac{12\text{ἡμ.}}{23}$ θὰ χρειασθῶσι $460 \times \frac{12}{23}$ ἤτοι 240 σιτηρέσια.

Προβλήματα.

1) Τεμάχιον ὑφάσματος 200πηχ. μήκους καὶ 5ρουπ. $\frac{1}{3}$ πλάτους τιμᾶται 2000δρχ. Πόσον ὕφασμα τῆς αὐτῆς ποιότητος καὶ πλάτους 6 ρουπίων πρέπει νὰ μᾶς δώσωσι μὲ 675 δραχμάς; (60 πηχ.)

2) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ὕφασμα 200πηχ. μήκους καὶ πλάτους 5 ρουπ. $\frac{1}{3}$ ἀντὶ 2000 δραχμῶν. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ 60πηχ. ὑφάσματος τῆς αὐτῆς ποιότητος πλάτους ὅμως 6ρουπ; (675 δρχ.)

3) Οἰκόπεδόν τι εἶναι 257,25 τ. μέτρα. Ζητεῖται πόσας πλάκας θέλει νὰ στρωθῇ, ὅταν ἑκάστη πλὰξ ἔχῃ μῆκος 0,75 καὶ πλάτος 0,18; $\left(1905 \ \frac{5}{9} \ \text{πλάκας}\right)$

Σημείωσις. Ἂν τὸ μῆκος καὶ πλάτος ἑκάστης πλακὸς ἦτο ἓν μέτρον, τότε θὰ ἐχρειάζοντο 257,25 πλάκες, ἤτοι 257 τ. πλάκες καὶ 0,25 τῆς τ. πλακός.

4) Βιβλίον τι ἔχει 250 σελίδας, ἑκάστη σελὶς ἔχει 32 στίχους καὶ ἕκαστος στίχος ἔχει 40 γράμματα. Ἐὰν τὸ βιβλίον τοῦτο τυπωθῇ οὕτως, ὥστε εἰς ἑκάστην σελίδα νὰ εἶναι 36 στίχοι καὶ εἰς ἕκαστον στίχον 45 γράμματα, ἐκ πόσων σελίδων θὰ σύγκειται τὸ βιβλίον; $\left(197\text{σελ.}\ 19\text{στιχ.}\ 3\text{γραμ.}\ \frac{8}{9}\right)$

5) Ἔργον τι πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ εἰς 12ὧρ. Πρὸς τοῦτο ἐμισθώθησαν 15 ἐργάται, οἵτινες ἐξετέλεσαν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἔργου εἰς 10 ἡμ. Δύνανται οὗτοι νὰ ἐκτελέσωσι τὸ ἔργον ἐντὸς τῆς τεταγμένης προθεσμίας καί, ἂν δὲν δύνανται, πόσοι ἐργάται πρέπει νὰ μισθωθῶσιν ἀκόμη; (10 ἐργάται ἀκόμη).

6) Ἄνθρωπός τις ἐργαζόμενος 6ὡρ. τὴν ἡμέραν, ἐξετέλεσε τὰ $\frac{2}{5}$ ἔργου τινὸς εἰς 25ἡμ. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζηται τὴν ἡμέραν,

διὰ νὰ ἐκτελέσῃ τὸ ἐπίλοιπον ἔργον εἰς 20 ἡμέρας; $\left(11 \text{ ὡρ. } \frac{1}{4}\right)$

Προβλήματα τόκου. Ὁρισμοί.

272. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου διακρίνομεν τὰ ἑξῆς ποσά. α΄) Τὸν τόκον. β΄) Τὸ ἐπιτόκιον. γ΄) Τὸ κεφάλαιον καὶ δ΄) Τὸν χρόνον.

Τόκος λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον λαμβάνει, ὅστις δανείζει χρήματα.

Ἐπιτόκιον λέγεται ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν εἰς ἓν ἔτος.

Κεφάλαιον λέγεται τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα δανείζομεν.

Χρόνος λέγεται ἡ διάρκεια τοῦ δανείου.

273. Ὁ τόκος εἶναι δύο εἰδῶν.

Α΄) *Ἁπλοῦς* τόκος καὶ Β΄) Σύνθετος τόκος.

Περὶ ἁπλοῦ τόκου.

274. Ἁπλοῦς λέγεται ὁ τόκος, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ ἐν ὅσῳ διαρκεῖ τὸ δάνειον.

275. Τὰ προβλήματα τοῦ τόκου λύονται διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, διότι ὁ *τόκος*, τὸ *ἐπιτόκιον*, τὸ *κεφάλαιον* καὶ ὁ *χρόνος* εἶναι μεταξύ των ἀνάλογα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Σημείωσις. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου πάντοτε θὰ εἶναι ἄγνωστος ἢ ὁ *τόκος* ἢ τὸ *κεφάλαιον* ἢ τὸ *ἐπιτόκιον* ἢ ὁ *χρόνος* καὶ γνωστὰ τὰ λοιπά.

Πρόβλημα 1ον. Αἱ 500 δρχ. εἰς 2 ἔτ. 3 μην. πόσον τόκον φέρουσι πρὸς 9 %;

Σημείωσις. Τὸ σύμβολον 9 % (δηλ. 9 ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν) σημαίνει ὅτι αἱ 100 δρχ. εἰς 1 ἔτος φέρουσι τόκον 9 δραχμάς.

Λύσις. Κατατάσσομεν τὰ ποσὰ εἰς δύο σειράς, ὡς ἑξῆς·

$$\frac{500 \text{ δρχ. κεφ.}}{100} \qquad \frac{2\text{έτ. } 3\text{μην.}}{1\text{έτ.}} \qquad \frac{\text{Χτόκ.}}{9}$$

Ἔπειτα κάμνομεν τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, ὅτε ἔχομεν

$$\frac{500 \text{ δρχ. κεφ.}}{100} \qquad \frac{27\text{μην.}}{12} \qquad \frac{\text{Χτοκ}}{9}$$

Καὶ τέλος ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα (§ 270), εὑρίσκομεν

$$\text{Χτοκ.} = 9 \times \frac{500}{100} \times \frac{27}{12} = 101{,}25 \text{δρχ.}$$

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ τὸ δάνειον διήρκεσε 2ἐτ. 3μην. ἤτοι 27μην. οἱ ὁποῖοι τρεπόμενοι εἰς ἔτη δίδουσι $\frac{27}{12}$ τοῦ ἔτους, διὰ τοῦτο εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ Χ τὸ $\frac{27}{12}$ σημαίνει ἔτη· ἐπειδὴ δὲ ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ Χ δύναται νὰ γραφῇ $\text{Χτοκ.}=\dfrac{9\,\%\times 500\text{κεφ.}\times\left(\frac{27}{12}\right)^{\text{ἐτ.}}}{100}$ μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

276. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον* (τετραμμένον εἰς ἔτη ἢ κλάσμα τοῦ ἔτους) *καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100*,

Παραδείγματα.

α'.) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος τῶν 850 δρχ. εἰς 3 ἐτ. πρὸς 10 %.

$$\left(\frac{850\times10\times3}{100}=\frac{85\times1\times3}{1}=255\text{δρχ.}\right)$$

β'.) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος τῶν 150 δρχ. εἰς 6 μῆνας πρὸς 12 %.

$$\left(\frac{150\times12\times\frac{6}{12}}{100}=\frac{15\times1\times6}{10}=9{,}0\ \text{δρ. ἤτοι 9 δρχ.}\right)$$

γ'.) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος 5000 δρχ. εἰς 292 ἡμέρας πρὸς 10 %.

Σημείωσις. Ἐὰν λάβωμεν τὸ ἔτος μὲ 360 ἡμέρας, ὁ τόκος εἶναι ὁ ἑξῆς·

$$\left(\frac{5000\times10\times\frac{292}{360}}{100}=\frac{5000\times10\times292}{100\times360}=\frac{50\times1\times292}{1\times36}=405{,}55\ldots\text{δρχ}\right)$$

Ἂν ὅμως λάβωμεν τὸ ἔτος μὲ 365 ἡμ., τότε ὁ ζητούμενος τόκος εἶναι ὁ ἑξῆς·

$$\left(\frac{5000\times10\times\frac{292}{365}}{100}=\frac{5000\times10\times292}{100\times365}=\frac{50\times10\times292}{1\times365}=400\ \text{δρχ.}\right)$$

Πρόβλημα 2ον. Ποῖον κεφάλαιον εἰς 3 ἐτ. 2 μην. φέρει τόκον 45 δρχ. πρὸς 12 % ;

$$\frac{\text{Χκεφ.}}{100}\quad\frac{\text{3ἐτ.2μην.}}{\text{1ἐτ.}}\quad\frac{\text{45δρ. τοκ.}}{12}$$

Κάμνομεν πρῶτον τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, ὅτε ἔχομεν

$$\frac{\text{Χκεφ.}}{100}\quad\frac{\text{38μην.}}{12}\quad\frac{\text{45δρχ. τοκ.}}{12}$$

Ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα (§ 270), ὅτε εὑρίσκομεν

$$X\kappa\varepsilon\varphi. = 100\times\frac{45}{12}\times\frac{12}{38} = 118{,}42...\delta\rho\chi.\ \text{ἤτοι}\ 118\delta\rho\chi.\ 42\ \lambda\varepsilon\pi.$$

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ X δύναται γραφῆ ὡς ἑξῆς $X\kappa\varepsilon\varphi. = \dfrac{45\tau o\kappa. \times 100}{12\ {}^0/_0 \times \left(\dfrac{38}{12}\right)\acute{\varepsilon}\tau.}$

μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

277. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, πολλαπλασιάζομεν τ τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομέν τῶν λοιπῶν γνωστῶν* [δηλ. τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον (εἰς ἔτη

Παραδείγματα.

α'.) Ποῖον κεφάλαιον ἔδωκε τόκον 100 δρχ. εἰς 5 ἔτη πρὸς 10 $^0/_0$;

$$\left(\frac{100\tau o\kappa.\times 100}{10\times 5} = 200\ \delta\rho\chi.\ \kappa\varepsilon\varphi\alpha\lambda.\right)$$

β'.) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον τὸ ὁποῖον εἰς 6 μην. δίδει τόκον 9 δρχ.

$$\frac{9\tau o\kappa.\times 100}{12\times\frac{6}{12}} = \frac{9\times 100}{6} = \frac{3\times 100}{2} = 150\ \delta\rho\chi.)$$

γ'.) Ποῖον κεφάλαιον εἰς 100 ἡμέρας πρὸς 5 $^0/_0$ ἔδωκε τόκον 50 δρχ;

Σημείωσις. Ἂν τὸ ἔτος ληφθῇ πρὸς 360 ἡμέρας, τὸ κεφάλαιον εἶναι τὸ ἐξ

$$\left(\frac{50\times 100}{5\times\frac{100}{360}} = \frac{50\times 100\times 360}{5\times 100} = \frac{10\times 1\times 360}{1\times 1} = 3600\delta\rho\chi.\right)$$

Ἂν ὅμως τὸ ἔτος ληφθῇ πρὸς 365 ἡμέρας, τὸ κεφάλαιον θὰ εἶναι

$$\left(\frac{50\times 100}{5\times\frac{100}{365}} = \frac{50\times 100\times 365}{5\times 100} = \frac{10\times 1\times 365}{1\times 1} = 3650\delta\rho\chi.\right)$$

Πρόβλημα 3ον. Κεφάλαιον 800 δρχ. εἰς 2 ἐτ. 1 μη δίδει τόκον 128,50 δρχ. ποῖον εἶναι τὸ ἐπιτόκιον;

$$\frac{800\kappa\varepsilon\varphi.}{100}\quad\frac{2\acute{\varepsilon}\tau.\ 1\mu\eta\nu.}{1\acute{\varepsilon}\tau.}\quad\frac{128{,}50\tau o\kappa.}{X}\qquad \text{ἢ}\qquad \frac{800\kappa\varepsilon\varphi.}{100}\quad\frac{25\mu\eta\nu.}{12}\quad\frac{128{,}50\tau o\kappa.}{X}$$

Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα (§ 270) εὑρίσκομεν

$$X\acute{\varepsilon}\pi\iota\tau. = 128{,}50\times\frac{100}{800}\times\frac{12}{25} = 7{,}71\ {}^0/_0$$

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ Xέπιτ. δύνα νὰ γραφῇ $$X\acute{\epsilon}\pi\iota\tau.=\frac{128{,}50\tau o\chi.\times 100}{800\times\left(\frac{25}{12}\right)\acute{\epsilon}\tau.}$$

μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα·

278. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν λοιπῶν γνωστῶν*, [δηλ. τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνον (εἰς ἔτη).

Παραδείγματα.

α') Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον κεφάλαιον 200δρχ. εἰς 5 ἔτη ἔδωκε τόκον 100δρχ;

$$\left(\frac{100\tau.\times 100}{200\ \times 5}=10\ o/o\right)$$

β') Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον κεφάλαιον 150δρχ. εἰς 6μην. ἔδωκε τόκον 9δρχ;

$$\left(\frac{9\times 109}{150\times\frac{6}{12}}=\frac{9\times 100\times 12}{150\times 6}=12\delta\rho\chi.\ o/o\right)$$

γ') Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον κεφάλαιον 3650δρχ. εἰς 100ἡμερ. ἔδωκε τόκον 50 δραχμάς;

Σημείωσις. Ἂν τὸ ἔτος ληφθῇ πρὸς 360ἡμ., τότε τὸ ἐπιτόκιον θὰ εἶναι

$$\left(\frac{50\times 100}{3650\times\frac{100}{360}}=\frac{50\times 100\times 360}{3650\times 100}=4{,}93...\delta\rho\chi.\ o/o\right)$$

Ἂν δὲ τὸ ἔτος ληφθῇ πρὸς 365ἡμ., τότε τὸ ἐπιτόκιον θὰ εἶναι

$$\left(\frac{50\times 100}{3650\times\frac{100}{365}}=\frac{50\times 100\times 365}{3650\times 100}=5\delta\rho\chi.\ o/o\right)$$

Πρόβλημα 4ον. Κεφάλαιον 1575 δρχ. εἰς πόσον χρόνον δίδει τόκον 472,50 δρχ. πρὸς 10 o/o;

$$\frac{1575\delta\rho\chi.\ \kappa\epsilon\varphi.}{100}\qquad\frac{X\acute{\epsilon}\tau.}{1\acute{\epsilon}\tau.}\qquad\frac{472{,}50\tau o\kappa.}{10}$$ ὅθεν εὑρίσκομεν

$$X\acute{\epsilon}\tau.=1\times\frac{100}{1575}\times\frac{472{,}50}{10}=3\ \check{\epsilon}\tau\eta$$

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ Χέτ. δύναται νὰ γραφῇ $X\acute{\epsilon}\tau.=\frac{472{,}50\tau o\kappa.\times 100}{15751K\epsilon\varphi.\times 10\ o/o}$ μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

279. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον* (εἰς ἔτη), *πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν λοιπῶν γνωστῶν* (δηλ. τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον).

Παραδείγματα.

α') Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 200 δρχ. πρὸς 10 ο/ο δίδει τόκον 100δρχ;

$$\left(\frac{100\times100}{200\times10}=5\text{ἔτη}\right)$$

β') Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 150δρχ. πρὸς 12 ο/ο δίδει 9δρχ. τόκον;

$$\left(\frac{9\times100}{150\times12}=\frac{1}{2}\ \text{τοῦ ἔτους ἤτοι 6 μῆνας}\right)$$

γ') Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 3600δρχ. πρὸς 5 ο/ο δίδει τόκον 50 δρχ;

$$\frac{50\times100}{3600\times5}=\frac{5}{18}\ \text{τοῦ ἔτους}$$

Καὶ ἂν τὸ ἔτος ληφθῇ πρὸς 360ἡμ. τότε τὰ $\frac{5}{18}=100$ἡμ.

ἂν δὲ πρὸς 365ἡμ. τότε τὰ $\frac{5\text{έτ.}}{18}=101$ἡμ. $\frac{7}{18}$.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πόσον τόκον φέρουσι 8500δρ. πρὸς 5 ο/ο δι'ἓν ἔτος; (425δρ.)

2) Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν κεφάλαιον 5500 δρχ. δι' 1ἔτ. 6μην. δίδει τόκον 250 δραχμῶν; (3,03....δρχ. ο/ο).

3) Πόσον τόκον φέρουσι 15650,75 δρχ. πρὸς 10 $^0/_0$ εἰς 2 ἐτ. 27 ἡμέρας; (3245,92.. δχ.)

Σημείωσις Τὸ ἔτος ἐλήφθη πρὸς 365 ἡμέρας.

4) Κεφάλαιον 6000 δρχ. πρὸς 10 $^0/_0$ εἰς πόσον χρόνον δίδει τόκον 100 δραχμῶν; (εἰς 2 μῆνας)

5) Πόσον τόκον φέρουσι 15650,75 δρχ. πρὸς 8 $^0/_0$ εἰς 4 ἐτ. 3 μην; (5321, 25 $^1/_2$ δρχ.)

6) Ἠγόρασέ τις ἔλαιον πρὸς 1,12 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ τὸ πωλεῖ μετὰ 5 μῆνας πρὸς 1,45 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον τοῖς ἑκατὸν κερδίζει;

Σημείωσις. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἄγνωστον εἶναι τὸ *ἐπιτόκιον* καὶ γνωστὰ ὁ *χρόνος* 5 μην. τὸ *κεφάλαιον* 1,12 δρχ., ὁ *τόκος*, 1,45 δρχ.—1,12 δχ. ἤτοι 0,33 δρχ. Τούτων δὲ δοθέντων, εὐκόλως εὑρίσκομεν τὸ ἄγνωστον ἐπιτόκιον, ὅπερ εἶναι τὸ ἑξῆς

$$\left(\frac{0,33\times100}{1,12\times\frac{5}{12}}=\frac{33\times12}{1,12\times5}=70,71...\text{δρχ.}\ ^0/_0\right)$$

7) Ἠγόρασέ τις 500 πηχ. ὑφάσματος ἀντὶ 225 δρχ., μετὰ ἓν

δὲ ἔτος τοὺς πωλεῖ 255,50 δραχμάς. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδησεν;
(3,55...δρχ. %).

8) Εἰς πόσα ἔτη κεφάλαιον 750 δραχμῶν πρὸς 8 % διπλασιάζεται (δηλ. ὁ τόκος του γίνεται 750 δραχμάς); (12 $^{1}/_{2}$ ἔτη)

9) Οἰνοπώλης ἠγόρασε 1000 ὀκδ. οἴνου πρὸς 40 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν μετὰ ἓν ἔτος διὰ νὰ κερδήσῃ 15 %; (46 λεπτὰ)

10) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν 850 ὀκδ. ζακχάρεως πρὸς 1,20 δρχ., ἐπώλησε δὲ αὐτὴν μετὰ 8 μῆνας πρὸς 1,42 δχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδησεν; (27,50 %)

11) Ἠγόρασέ τις οἰκόπεδον πρὸς 25 δρχ. τὸν τετραγ. τεκτονικὸν πῆχυν καὶ μετὰ 8 μῆνας θέλει νὰ τὸ πωλήσῃ μὲ τὸ τετραγ. μέτρον καὶ νὰ κερδήσῃ 10 % ἐπὶ τῶν χρημάτων του. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ τετραγ. μέτρον;

Σημείωσις. Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσον τοῦ στοιχίζει τὸ τ. μέτρον καὶ τὴν τιμὴν ταύτην αὐξάνομεν κατὰ τὸν τόκον της πρὸς 8 % διὰ 8 μῆνας.

$$\left(44^{\delta\chi.}\frac{4}{9} + 2\frac{26}{27} \text{ ἤτοι } 47^{\delta\rho\chi.}\frac{11}{27}\right)$$

12) Ὁμολογία τις φέρει ἐτήσιον εἰσόδημα 25 χρυσᾶ φράγκα, ἠγοράσθη δὲ 350 δρχ. εἰς χαρτονομίσματα. Πόσον τοῖς % κερδίζει, ὅταν 20 φράγκα ἰσοδυναμῶσι πρὸς 28,50δρχ.;

Σημείωσις. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὰ 25 φράγκα μὲ πόσας δραχμὰς ἰσοδυναμοῦσι καὶ ταύτας θεωροῦμεν ὡς τόκον τῶν 350 δραχμῶν. (10,17... %)

13) Τὸ χιλιόγραμμον ἐμπορεύματός τινος στοιχίζει 5,65 δρ. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν μετὰ ἓν ἔτος διὰ νὰ κερδήσῃ 9 %;
(7,88...δχ.)

14) Ἠγόρασέ τις τὴν ὀκᾶν τοῦ καφὲ ἀντὶ 5,25 δρχ. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ χιλιόγραμμον μετὰ 2 ἔτη, διὰ νὰ κερδήσῃ 15 %;
(5,33...δχ.)

Περὶ ὑφαιρέσεως.

280. Ὅταν δανείζηταί τις χρήματα πληρωτέα μετὰ ὡρισμένον χρόνον, ὑπολογίζεται διὰ τὸν χρόνον τοῦτον ὁ τόκος των, ὅστις προστίθεται εἰς τὰ δανεισθέντα χρήματα καὶ ἐκδίδεται διὰ τὸ προκῦπτον ποσὸν γραμμάτιον, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πληρωθῇ κατὰ τὴν λῆξιν τοῦ ὁρισθέντος χρόνου.

281. Ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου τινὸς λέγεται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἀναγράφεται ἐν τῷ γραμματίῳ.

Σημείωσις. Ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου γίνεται πραγματικὴ τὴν ἡμέραν κατὰ τὴν ὁποίαν λήγει τὸ γραμμάτιον.

282. Ὑφαίρεσις λέγεται τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον ἐκπίπτεται ἀπὸ τὸ γραμμάτιον, ὅπερ πληρώνεται πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας του.

283. Ὑφαιρέσεις ὑπάρχουσι δύο εἰδῶν. α΄.) Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ β΄.) Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις.

Περὶ ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως.

284. *Πραγματικὴ ἀξία γραμματίου τινὸς πρὸ τῆς λήξεώς του λέγεται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πληρώσωμεν πρὸς ἐξόφλησιν αὐτοῦ πρὸ τῆς λήξεως.*

Σημείωσις. Ἡ πραγματικὴ ἀξία γραμματίου τινὸς πρὸ τῆς λήξεώς του αὐξανομένη κατὰ τὸν τόκον της διὰ τὸν χρόνον, ὅστις παρέρχεται ἀπὸ τὴν ἡμέραν τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως αὐτοῦ, πρέπει νὰ δίδῃ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου.

285. *Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις λέγεται ὁ τόκος τῆς πραγματικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως αὐτοῦ.*

Πρόβλημα 1ον. Γραμμάτιόν τι 500 δρχ. ἐξοφλεῖται 3 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 %. Ζητεῖται ἡ πραγματική του ἀξία καὶ ἡ ἐσωτερική του ὑφαίρεσις.

Λύσις Μορφοῦμεν πρῶτον ἄλλο γραμμάτιον, τὸ ὁποῖον νὰ λήγῃ, καθὼς τὸ δοθέν, μετὰ 3μην. καὶ νὰ γνωρίζωμεν τούτου τὴν πραγματικήν του ἀξίαν καὶ τὴν ἐσωτερικήν του ὑφαίρεσιν εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν τριῶν μηνῶν πρὸς 12 %. Πρὸς τοῦτο δὲ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Λαμβάνομεν αὐθαιρέτως ὡς πραγματικὴν ἀξίαν γραμματίου τινὸς ποσόν τι χρημάτων, καὶ ἔστω 100 δραχμάς. Τὰς δραχμὰς ταύτας τοκίζομεν διὰ 3 μην. πρὸς 12 %, ὅτε εὑρίσκομεν τόκον 3 δρχ. Τὰς 3 ταύτας δραχμὰς προσθέτομεν εἰς τὰς 100 δχ. καὶ οὕτως ἔχομεν γραμμάτιον 103 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον λήγει, ὡς τὸ δοθὲν εἰς τὸ πρόβλημα, μετὰ 3 μῆνας ἀπὸ σήμερον. Τούτου δὲ τοῦ γραμματίου γνωρίζομεν σήμερον, ὅτι ἡ πραγματική του ἀξία εἶναι 100 δρχ., ἡ δὲ ἐσωτερική του ὑφαίρεσις 3 δραχμαί.

Καὶ ἤδη διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν πραγματικὴν ἀξίαν καὶ τὴν ἐσωτε-
κὴν ὑφαίρεσιν τοῦ γραμματίου, τὸ ὁποῖον ἐδόθη εἰς τὸ πρόβλημα,
οκεῖ νὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς.

1) Γραμμάτιόν τι 103 δραχμῶν ἔχει πραγματικὴν ἀξίαν σήμε-
ν 100 δρχ. Ποία εἶναι ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου 500
αχμῶν;

$$\frac{103^{\delta\rho\chi.}}{500} \quad \frac{100^{\pi\rho.\acute{\alpha}\xi.}}{X} \quad \text{ἐξ ἧς } X_{\pi\rho\alpha\gamma\mu.\acute{\alpha}\xi.} = 100 \times \frac{500}{103} = 485^{\delta\rho\chi.}\frac{45}{103}$$

2) Γραμμάτιόν τι 103 δραχμῶν ἔχει ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν σή-
ερον 3 δρχ. Ποία εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου 500δχ.;

$$\frac{103^{\delta\rho\chi.}}{500} \quad \frac{3^{\grave{\epsilon}\sigma.\grave{\upsilon}\varphi.}}{X} \quad \text{ὅθεν ἐσ. ὑφ.} X = 3 \times \frac{500}{103} = 14^{\delta\chi.}\frac{58}{103}.$$

Ὥστε ἡ μὲν πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου τῶν 500 δρχ.
ληρωτέου 3μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 %, εἶναι $485^{\delta\chi.}\frac{45}{103}$,
δὲ ἐσωτερική του ὑφαίρεσις εἶναι $14^{\delta\rho\chi.}\frac{58}{103}$.

Τὴν πραγματικὴν ἀξίαν γραμματίου τινὸς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν
ὶ διὰ τοῦ ἑξῆς πρακτικοῦ κανόνος.

286. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν πραγματικὴν ἀξίαν γραμματίου τινός,
ολλαπλασιάζομεν τὴν ὀνομαστικήν του ἀξίαν ἐπὶ 100 καὶ τὸ
νόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ 100 καὶ τοῦ γινο-
ένου τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον τῆς προεξοφλήσεως* (εἰς ἔτη).

Τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν γραμματίου τινὸς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν
ὶ διὰ τοῦ ἑξῆς πρακτικοῦ κανόνος.

287. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν γραμματίου τι-
ς, πολλαπλασιάζομεν τὴν ὀνομαστικήν του ἀξίαν ἐπὶ τὸ ἐπιτό-
ον καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον τῆς προεξοφλήσεως* (εἰς ἔτη) *καὶ τὸ γι-
μενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ 100 καὶ τοῦ γινομέ-
ου τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον* (εἰς ἔτη).

Π. χ. Ποία εἶναι ἡ πραγματικὴ ἀξία καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις
αμματίου 410 δραχ. πληρωτέου 5 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του
ὸς 6 ο/ο.

Λύσις. Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα (§ 286) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ πραγματικὴ ἀξία εἶναι·

$$\text{Χπργ. ἀξ.} = \frac{410\times100}{100+6\times\frac{5}{12}} = \frac{410\times100}{102^1/_2} = \frac{410\times100}{\frac{205}{2}} = 400\text{δρχ.}$$

Κατὰ δὲ τὸν κανόνα (§ 287) εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι

$$\text{Χ ἐσ.ὑφ.} = \frac{410\times6\times\frac{5}{12}}{100+6\times\frac{5}{12}} = \frac{410\times\frac{5}{2}}{102^1/_2} = \frac{410\times\frac{5}{2}}{\frac{205}{2}} = \frac{410\times5}{205} = 10\text{δρχ.}$$

Πρόβλημα 2ον. Ποία εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου, τοῦ ὁποίου ἡ πραγματικὴ ἀξία 5 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 ο/ο εἶναι 500 δραχμαί;

Λύσις. Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἢ εὑρίσκομεν τὸν τόκον τῶν 500 δρχ. διὰ 5μην. πρὸς 12 ο/ο καὶ τὸν προσθέτομεν εἰς τὰς 500 δρχ. καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν ζητουμένην ὀνομαστικὴν ἀξίαν, ἢ λαμβάνομεν αὐθαιρέτως ποσόν τι καὶ ἔστω 100δρχ. καὶ τὸ τοκίζομεν διὰ 5 μην. πρὸς 12 ο/ο. Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν τόκον 5δρχ., τὸν ὁποῖον προσθέτομεν εἰς τὰς 100 δρχ., ὁπότε γίνονται 105 δρχ. Ἔπειτα δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

«Αἱ 100 δρχ. μετὰ 5 μην. πρὸς 12 ο/ο γίνονται 105 δρχ. Αἱ 500 δρχ. πόσαι γίνονται;»

$$\frac{100\text{δρχ.}}{500}\quad\frac{105\text{δρχ.}}{\text{Χ}}\quad \text{ὅθεν Χὀνομ.ἀξ.} = \frac{105\times500}{100} = 525\text{δρχ.}$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι 525δρ.

Τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν γραμματίου τινὸς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ διὰ τοῦ ἑξῆς πρακτικοῦ κανόνος.

288. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν γραμματίου τινος πολλαπλασιάζομεν τὴν πραγματικὴν αὐτοῦ ἀξίαν ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ 100 καὶ τοῦ γινομένου τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον τῆς προεξοφλήσεως* (εἰς ἔτη) *καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100.*

Σημείωσις. Κατὰ τὸ πρόβλημα τοῦτο λύονται καὶ τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος καὶ τὸ κεφάλαιον ὁμοῦ.

Π.χ. Πόσον γίνεται κεφάλαιον 500δρχ. μετὰ 5μην. πρὸς 12 ο/ο;

Λύσις. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα (§ 288), θεωροῦντες ὡς πραγματικὴν ἀξίαν τὰς 500 δρχ. καὶ ὡς ὀνομαστικὴν ἀξίαν τὸν ζητούμενον *τόκον καὶ τὸ κεφάλαιον* ὁμοῦ, ὅτε εὑρίσκομεν τὸ ἑξῆς·

$$\frac{500\text{δρχ.}\times\left(100+12\times\frac{5}{12}\right)}{100}=\frac{500\times(100+5)}{100}=\frac{500\times105}{100}=525\text{δρχ.}$$

Ὥστε τὸ ζητούμενον κεφάλαιον καὶ ὁ τόκος ὁμοῦ εἶναι 525 δρχ;

Σημείωσις. Ὅταν εἰς πρόβλημά τι τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως εἶναι ἄγνωστος ἢ ἡ *πραγματικὴ ἀξία* ἢ ἡ *ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις* ἢ ὁ *χρόνος τῆς προεξοφλήσεως* ἢ τὸ *ἐπιτόκιον* καὶ γνωστὰ τὰ λοιπὰ τρία ἐκ τούτων, τότε τὸ τοιοῦτον πρόβλημα εἶναι πρόβλημα τόκου.

Τοιαῦτα προβλήματα εἶναι τὰ κατωτέρω 2ον, 3ον, 4ον καὶ 5ον ζητήματα εἰς τὰ προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

Παρατηρήσεις.

289. Ὅταν δίδηται ἡ πραγματικὴ ἀξία γραμματίου τινός, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἐσωτερικήν του ὑφαίρεσιν κατὰ δύο τρόπους.

Α΄ τρόπος.

Ἀφαιροῦμεν τὴν πραγματικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου ἀπὸ τὴν ὀνομαστικήν του ἀξίαν.

Π. χ. Τοῦ ἐν τῷ πρώτῳ προβλήματι ἐξετασθέντος γραμματίου τῶν 500 δραχ. ἡ πραγματική του ἀξία 3 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 ο/ο εἶναι 485 δρχ. $\frac{45}{103}$. Ἄρα ἡ ἐσωτερική του ὑφαίρεσις θὰ εἶναι 500 δρχ.—485 δρχ. $\frac{45}{103}$, ἤτοι 14δρχ. $\frac{58}{103}$.

Β΄ τρόπος.

Ζητοῦμεν τὸν τόκον τῆς πραγματικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου διὰ τὸν χρόνον τῆς προεξοφλήσεως.

Π. χ. Τοῦ ἀνωτέρω γραμματίου τῶν 500 δραχ. ἡ πραγματικὴ ἀξία 3μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 ο/ο εἶναι 485 δρχ. $\frac{45}{103}$.

Ὁ τόκος δὲ τούτων διὰ 3 μην. πρὸς 12 ο/ο εἶναι

$$\frac{485\frac{45}{103}\times 12\times\frac{3}{12}}{100}=\frac{485\frac{45}{103}\times 3}{100}=\frac{\frac{50000}{103}\times 3}{100}=$$

$$=\frac{50000\times 3}{100\times 103}=14\text{δρχ.}\ \frac{58}{103}.$$

Σημείωσις. Ἡ εὕρεσις τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως ὡς τόκου τῆς πραγματικῆς ἀξίας δύναται νὰ χρησιμεύσῃ καὶ ὡς δοκιμὴ τοῦ προβλήματος.

290. Ὅταν δίδηται ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου τινός, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν πραγματικήν του ἀξίαν, ἀφαιροῦντες τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου.

Π. χ. Τοῦ ἀνωτέρω γραμματίου τῶν 500 δρχ. ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι 14 δρχ. $\frac{58}{103}$. Ἄρα ἡ πραγματική του ἀξία θὰ εἶναι

$$500^{\text{δρχ.}}-14^{\text{δρχ.}}\ \frac{58}{103},\ \text{ἤτοι}\ 485^{\text{δχ.}}\ \frac{45}{103}.$$

Σημείωσις. Συμφώνως πρὸς τὰ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις ἢ ἡ πραγματικὴ ἀξία γραμματίου τινὸς λύονται καὶ τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ὁ *τόκος καὶ τὸ κεφάλαιον ὁμοῦ* καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ *κεφάλαιον* ἢ ὁ περιεχόμενος *τόκος*.

Π. χ. Ἐδάνεισέ τις χρήματα πρὸς 9 ο/ο καὶ μετὰ 3 ἔτ. 4 μην. ἔλαβε κεφάλαιον καὶ τόκον ὁμοῦ 12800 δρχ. Πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιον καὶ πόσος ὁ τόκος;

Λύσις. Λαμβάνομεν αὐθαιρέτως ὡς κεφάλαιον ποσόν τι, καὶ ἔστω 100 δρχ., καὶ τὰς τοκίζομεν πρὸς 9 ο/ο διὰ 3 ἔτ. 4 μην., ὅτε εὑρίσκομεν τόκον 30 δρχ. Τὸν τόκον τοῦτον προσθέτομεν εἰς τὰς 100 δρχ., ὁπότε γίνονται 130 δρχ. Μετὰ δὲ ταῦτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

«Αἱ 130 δρχ. εἶχον κεφάλαιον 100 δρχ. Αἱ 12800 δρχ. πόσον κεφάλαιον εἶχον;»

$$\frac{130^{\text{δρχ.}}}{12800}\quad \frac{100^{\text{δχ. κεφ.}}}{X}\quad \text{ὅθεν}\ X^{\text{κεφ.}}=100\times\frac{12800}{130}=9846^{\text{δχ.}}\frac{2}{13}$$

Καὶ ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιον ἦτο 9846 δρχ. $\frac{2}{13}$, ἄρα ὁ περιεχόμενος τόκος θὰ εἶναι 12800 δρχ. $-9846\frac{2}{13}$ ἤτοι 2953δρχ. $\frac{11}{13}$.

Σημείωσις. Τὸ ζητούμενον κεφάλαιον καὶ τὸν περιεχόμενον τόκον ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ διὰ τῶν κανόνων (§ 286) καὶ (§ 287), θεωροῦντες ὡς ὀνομαστικὴν ἀξίαν τὰς 12800 δρχ. καὶ ζητοῦντες τὴν πραγματικήν των ἀξίαν καὶ τὴν ἐσωτερικήν των ὑφαίρεσιν διὰ 3 ἔτ. 4 μην. πρὸς 9 ο/ο.

Περὶ ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως.

291. Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις λέγεται ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεώς του.

292. Ἀξία γραμματίου τινὸς πρὸ τῆς λήξεώς του ἐξωτερικῶς λέγεται τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἀφ' οὗ ἀφαιρέσωμεν τὴν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου.

Σημείωσις. Ἡ ἐξωτερικῶς εὑρισκομένη ἀξία τοῦ γραμματίου δὲν εἶναι ἡ ἀληθής, ἂν καὶ γίνεται συχνὴ χρῆσις αὐτῆς εἰς τὰς συναλλαγάς.

Πρόβλημα 1ον. Γραμμάτιόν τι 500 δρχ. ἐξοφλεῖται 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 ο/ο. Ζητεῖται ἡ ἐξωτερική του ὑφαίρεσις καὶ ἡ ἀξία τοῦ γραμματίου ἐξωτερικῶς.

Λύσις. Λαμβάνομεν τὸν τόκον τῶν 500 δρχ. διὰ 3 μην. πρὸς 12 ο/ο, ὅτε εὑρίσκομεν 15 δραχμάς. Ὥστε ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις τοῦ γραμματίου τῶν 500 δρχ. 3 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 ο/ο εἶναι 15 δρχ. Ἄρα ἡ ἀξία τοῦ γραμματίου ἐξωτερικῶς θὰ εἶναι 500 δρχ.—15 δρ., ἤτοι 485 δρχ.

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ 485 δρχ. $\frac{45}{103} + 14 \frac{58}{103} = 500$ δρχ. (δηλ. ἐπειδὴ ἡ πραγμ. ἀξία πλέον τῆς ἐσωτερ. ὑφαιρέσεως δίδει τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου) καὶ ἐπειδὴ *ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις* εἶναι ὁ τόκος τῶν 500 δρχ. (δηλ. ὁ τόκος τῆς πραγματικῆς ἀξίας καὶ τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως ὁμοῦ), ἐν ᾧ *ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις* εἶναι ὁ τόκος τῶν 485 δρχ. $\frac{45}{103}$ (δηλ. ὁ τόκος μόνον τῆς πραγματικῆς ἀξίας), διὰ τοῦτο ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις περιλαμβάνει πλέον τοῦ δικαίου τὸν τόκον τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως, κατὰ τὸν ὁποῖον ζημιοῦται ἐκεῖνος εἰς τὸν ὁποῖον χρεωστεῖται τὸ γραμμάτιον καὶ τὸ προεξοφλεῖ.

Σημείωσις. Ὅταν εἰς πρόβλημά τι τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως εἶναι ἄγνωστος ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου (ὡς κεφάλαιον) ἢ ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις (ὡς τόκος) ἢ ὁ χρόνος τῆς προεξοφλήσεως ἢ τὸ ἐπιτόκιον καὶ γνωστὰ τὰ λοιπὰ τρία ἐξ αὐτῶν, τότε τὸ τοιοῦτον πρόβλημα οὐδόλως διαφέρει τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου. Ἂν ὅμως εἶναι ἄγνωστος π. χ. ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία καὶ γνωστὰ ὁ χρόνος τῆς προεξοφλήσεως, τὸ ἐπιτόκιον, καὶ ἡ ἀξία τοῦ γραμματίου ἐξωτερικῶς, τὸ τοιοῦτον πρόβλημα οὐδόλως εἶναι τοῦ τόκου, διότι τὸ ἄγνωστον μετὰ τῶν τριῶν γνωστῶν δὲν ἀποτελεῖ τὰ τέσσαρα ποσὰ τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου, (δηλ. τὸ κεφάλαιον, τὸ ἐπιτόκιον, τὸν χρόνον καὶ τὸν τόκον).

Π. χ. Ποία εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀξία ἐξωτερικῶς 5 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 ο/ο εἶναι 498,75 δρχ.;

Λύσις. Λαμβάνομεν αὐθαιρέτως ὡς ὀνομαστικὴν ἀξίαν γραμματίου τινὸς ποσόν τι, καὶ ἔστω 100 δρχ., καὶ τὰς τοκίζομεν διὰ 5 μην. πρὸς 12 ο/ο, ὅτε εὑρίσκομεν τόκον 5 δρχ. Τοῦτον δὲ τὸν τόκον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰς 100 δρχ. καὶ εὑρίσκομεν 95 δρχ. Αὗται δὲ αἱ 95 δρχ. εἶναι ἡ ἀξία ἐξωτερικῶς τοῦ γραμματίου τῶν 100 δρχ. ἐξοφληθέντος 5 μηνῶν πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 ο/ο. Μετὰ δὲ ταῦτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

«Αἱ 95 δρχ. ἔχουσιν ὀνομαστικὴν ἀξίαν 100 δρχ. Αἱ 498,75 δρχ. πόσην ἔχουσιν ὀνομαστικὴν ἀξίαν ;»

$$\frac{95\text{δρχ.}}{498{,}75} \quad \frac{100\text{ὀνμ. ἀξ.}}{X} \quad \text{ὅθεν } X \text{ ὀνομ.ἀξ.}=100\times\frac{498{,}75}{95}=525 \text{ δρ.}$$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Γραμματίου τινὸς 525 δρχ. ὀνομαστικῆς ἀξίας πληρωθέντος 5 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 $^0/_0$ ζητεῖται

α') Ποία εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ καὶ ἐξωτερικὴ αὐτοῦ ὑφαίρεσις.

$$\text{ἐσωτ. ὑφαιρ.}\quad \frac{525\times12\times\frac{5}{12}}{100+12\times\frac{5}{12}}=\frac{525\times5}{105}=25\text{δρχ.} \qquad \text{ἐξωτ. ὑφαιρ.}\quad \left(\frac{525\times12\times\frac{5}{12}}{100}=26{,}25\text{δχ.}\right)$$

β') Ποία εἶναι ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου καὶ ἡ ἀξία του ἐξωτερικῶς.

$$\left(\text{πργμ. ἀξ. } \frac{525\times100}{100+12\times\frac{5}{12}}=500 \text{ δρχ.. Ἀξ. ἐξωτρ. } 498{,}75\right)$$

γ') Κατὰ πόσον διαφέρει ἡ ἐσωτερικὴ τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως καὶ ἡ πραγματικὴ ἀξία τῆς ἀξίας ἐξωτερικῶς καὶ τί εἶναι ἡ διαφορὰ αὕτη ;

(διαφέρουσι κατὰ 1,25 δρχ. καὶ εἶναι ὁ τόκος τῆς ἐσωτρ. ὑφαιρ.)

δ') Κατὰ πόσους τρόπους δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν ;

1) Διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.
2) Δι' ἀφαιρέσεως τῆς πραγματικῆς ἀξίας ἀπὸ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ δοθέντος γραμματίου.
3) Ὡς τόκον τῆς πραγματικῆς ἀξίας τοῦ δοθέντος γραμματίου.

ε΄) Κατὰ πόσους τρόπους δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν πραγματικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου;

1) Διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.
2) Δι' ἀφαιρέσεως τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως ἀπὸ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ δοθέντος γραμματίου.

2) Γραμμάτιόν τι 525 δρχ. ἐξοφλεῖται 5μην. πρὸ τῆς λήξεως του ἀντὶ 500 δρχ. Ζητεῖται πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐγένετο ἡ προεξόφλησις ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς.

$$\left(\text{ἐσωτερ. } \frac{25\text{τόκ.}\times 100}{500\text{κεφ.}\times\frac{5}{12}}=12\,\%,\ \text{Ἐξωτερ. } \frac{25\text{τόκ.}\times 100}{525\text{κεφ.}\times\frac{5}{12}}=11\frac{9}{21}\,\%\right)$$

3) Γραμμάτιόν τι 525 δρχ. ἐξοφλεῖται πρὸς 12 % ἀντὶ 500δχ. Πρὸ πόσου χρόνου ἐγένετο ἡ προεξόφλησις ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς;

$$\left(\text{Ἐσωτρ.} \frac{25\text{τοκ}\ \times 100}{500\text{κεφ.}\times 12}=\frac{5}{12}=5\text{μην. Ἐξωτρ. } \frac{25\text{τ.}\ \times 100}{525\text{κ.}\times 12}=4\text{μην.}\frac{16}{21}\right)$$

4) Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου τινος πληρωθέντος 5 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 ο/ο εἶναι 25 δρχ. Ποία εἶναι ἡ πραγματική του ἀξία;

$$\left(\text{Πραγμ. ἀξία } \frac{25\times 100}{12\times\frac{5}{12}}=500\text{ δχ.}\right)$$

5) Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου τινὸς εἶναι 25 δρχ., ἡ δὲ ἐξωτερική του εἶναι 26,25 δρχ. 5 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐγένοντο αἱ ὑφαιρέσεις;

$$\left(\frac{1{,}25\times 100}{25\times\frac{5}{12}}=12\text{ ο/ο}\right)$$

6) Ἐδάνεισέ τις χρήματα πρὸς 8 ο/ο καὶ μετὰ 4ἐτ. 3μην. ἔλαβε κεφάλαιον καὶ τόκον ὁμοῦ 1574,25 δρχ. Πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιον καὶ πόσος ὁ τόκος;

(Κεφαλ. 1174,81...δρχ. τόκος 399,44δρχ.).

Μέθοδος τοῦ μερισμοῦ.

293. Μέθοδος μερισμοῦ λέγεται τρόπος τις γενικός, κατὰ τὸν ὁποῖον μοιράζομεν ἀριθμόν τινα ἀναλόγως δύο ἢ περισσοτέρων ἄλλων ἀριθμῶν.

294. Προβλήματα μερισμοῦ διακρίνομεν δύο εἰδῶν.

Πρώτου εἴδους. Ὅταν ζητῆται νὰ μοιράσωμεν ἀριθμόν τινα ἀναλόγως δύο ἢ περισσοτέρων ἀ κ ε ρ α ί ω ν, κ λ α σ μ α τ ι κ ῶ ν ἢ σ υ μ μ ι γ ῶ ν.

Δευτέρου εἴδους. Ὅταν ζητῆται νὰ μοιράσωμεν ἀριθμόν τινα ἀναλόγως δύο ἢ περισσοτέρων σ υ ν θ έ τ ω ν ἀ ρ ι θ μ ῶ ν.

Σημ. Σύνθετον ἀριθμὸν καλοῦμεν τὸν ἀποτελούμενον ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὑπάρχει τις τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς οὐδεμίαν σχέσιν ἔχει πρὸς τὰς μονάδας τῶν ἄλλων ἀριθμῶν.

Π. χ. Ὁ 2 ἐτ. 50 δρχ. 25 λεπ. λέγεται σύνθετος, διότι τὸ 1 ἔτ. οὐδεμίαν σχέσιν ἔχει, οὔτε πρὸς τὴν 1 δρχ. οὔτε πρὸς τὸ 1 λεπτόν.

Ὁμοίως ὁ 100 ὀκ. 5 σταδ., ὁ 150 δρχ. 2 ἡμ. 3 ὡρ. καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς εἶναι σύνθετοι ἀριθμοί.

Προβλήματα πρώτου εἴδους.

Πρόβλημα 1ον. Νὰ μοιρασθῇ ὁ ἀριθμὸς 120 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν, 2, 3 καὶ 5.

Λύσις. Διὰ νὰ μοιράσωμεν τὸν ἀριθμὸν 120 ἀναλόγως τῶν 2, 3 καὶ 5, προσθέτομεν πρῶτον τοὺς $2+3+5$, ὅτε εὑρίσκομεν 10. Ἔπειτα δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

«Ἐπειδὴ εἰς τὸν 10 ἀναλογεῖ ὁ ἀριθμὸς 120, εἰς τὸν 2 πόσον ἀναλογεῖ;»

$$\frac{10}{2} \quad \frac{120}{X} \quad \text{ὅθεν} \quad X=120\times\frac{2}{10}=24$$

Ὁμοίως. «Ἐπειδὴ εἰς τὸν 10 ἀναλογεῖ ὁ ἀριθμὸς 120, εἰς τὸν 3 πόσον ἀναλογεῖ ;»

$$\frac{10}{3} \quad \frac{120}{X} \quad \text{ὅθεν} \quad X=120\times\frac{3}{10}=36$$

Ὁμοίως. «Ἐπειδὴ εἰς τὸν 10 ἀναλογεῖ ὁ ἀριθμὸς 120, εἰς τὸν 5 πόσον ἀναλογεῖ ;»

$$\frac{10}{5} \quad \frac{120}{X} \text{ ὅθεν } X = 120 \times \frac{5}{10} = 60$$

Ὥστε ὁ 120 ἐμοιράσθη ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 5· τὰ δ' ἀνάλογα τούτων μέρη εἶναι ὁ 24, 36 καὶ 60.

Πρόβλημα 2ον. Νὰ μοιρασθῇ ὁ 15 ἀναλόγως τῶν $\frac{2}{3}$, 3 καὶ $2\frac{1}{2}$.

Λύσις. Κατὰ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα $\frac{2}{3}+3+2\frac{1}{2}=6\frac{1}{6}$· ἔπειτα δὲ σκεπτόμεθα ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, ἤτοι

Εἰς τὸν $6\frac{1}{6}$ ἀναλογεῖ ὁ 15

» » $\frac{2}{3}$ $\frac{}{X}$, ὅθεν $X = 15 \times \frac{\frac{2}{3}}{6\frac{1}{6}} = 1\frac{23}{37}$

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸν 3 θ' ἀναλογῇ $7\frac{11}{37}$ καὶ εἰς τὸν $2\frac{1}{2}$ θ' ἀναλογῇ $6\frac{3}{37}$.

Πρόβλημα 3ον. Συνεφωνήθησαν τρεῖς ἐργάται ἀντὶ 150 δραχ. πρὸς ἀποπεράτωσιν ἔργου τινός. Ἐκ τῶν ἐργατῶν τούτων ὁ εἷς εἰργάσθη 4ἡμ. 8ὥρ, ὁ ἕτερος 3ἡμ. 10ὥρ. καὶ ὁ τρίτος 2ἡμ. 5ὥρ. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος ἀναλόγως τῆς ἐργασίας του;

Λύσις. Κάμνομεν πρῶτον τοὺς συμμιγεῖς 4ἡμ. 8ὥρ. καὶ 3ἡμ. 10ὥρ. καὶ 2ἡμ. 5ὥρ. νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς συγκεκριμένης μονάδος, καὶ ἔστω ὥρας, ὅτε εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ πρῶτος εἰργάσθη 56ὥρ., ὁ δεύτερος 46ὥρ. καὶ ὁ τρίτος 29ὥρ. Μετὰ ταῦτα μοιράζομεν τὰς 150δρχ. ἀναλόγως τῶν ὡρῶν τούτων τῆς ἐργασίας των, δι' ὃ κατὰ τὰ ἀνωτέρω προβλήματα εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα 56ὥρ.+46ὥρ.+29ὥρ. ἤτοι 131ὥρ. καὶ ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Διὰ 131ὥρ. θὰ δοθῶσι 150 δρχ.,

» 56 $\frac{}{X}$ ὅθεν $X = 150 \times \frac{56}{131} = 64\delta.\frac{16}{131}$

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸν ἐργασθέντα 46ὥρ. θὰ δοθῶσι 52δρχ. $\frac{88}{131}$ καὶ εἰς τὸν ἐργασθέντα 29ὥρ. θὰ δοθῶσι 33δρχ. $\frac{27}{131}$.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων τούτων μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

295. *Διὰ νὰ μοιράσωμεν ποσόν τι ἀναλόγως δύο ἢ περισσοτέρων ἄλλων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸ μεριστέον ποσὸν ἐπὶ ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.*

Σημείωσις. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ ἀναλόγως τῶν ὁποίων μοιράζεται ποσόν τι εἶναι συμμιγεῖς ἢ γίνωνται ἐκ διαφόρων συγκεκριμένων μονάδων, τότε κάμνομεν πρῶτον αὐτοὺς νὰ γίνωνται ἐκ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς συγκεκριμένης μονάδος, καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν (§ 295) κανόνα.

Π. χ. Νὰ μοιρασθῶσιν 100 δραχμαὶ εἰς τέσσαρας ναύτας, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς ἔμεινεν ἐν τῷ πλοίῳ 4ἡμ., ὁ ἕτερος 3ἡμ. 8ὥρ., ὁ τρίτος 2ἡμ. 8ὥρ. καὶ ὁ τέταρτος 18ὥρ. Πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Λύσις. Κάμνομεν πρῶτον τοὺς συμμιγεῖς 4ἡμ. καὶ 3ἡμ. 8ὥρ. καὶ 2ἡμ. 8ὥρ. καὶ 18 ὥρ. νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς συγκεκριμένης μονάδος, καὶ ἔστω ὥρας, ὅτε εὑρίσκομεν 96ὥρ. 80ὥρ. 56ὥρ. καὶ 18ὥρ. Ἐφαρμόζοντες δ' ἤδη τὸν κανόνα (§ 295) εὑρίσκομεν ὅτι, ὁ πρῶτος θὰ λάβῃ 38,40δρχ., ὁ δεύτερος 32δρχ., ὁ τρίτος 22,40δρχ. καὶ ὁ τέταρτος 7,20δρχ.

Προβλήματα δευτέρου εἴδους.

Πρόβλημα 1ον. Πρὸς ἀποπεράτωσιν οἰκοδομῆς τινος εἰργάσθησαν 20 ἐργάται 10ὥρ. τὴν ἡμέραν, 25ἐργ. 12ὥρ. τὴν ἡμέραν καὶ 40 ἐργ. 8 ὥρ. τὴν ἡμέραν. Ἐπληρώθησαν δὲ ὅλοι ὁμοῦ 50000 δρχ. Πόσας θὰ λάβωσιν οἱ 20 ἐργάται, πόσας οἱ 25ἐργ. καὶ πόσας οἱ 40 ἐργάται;

Λύσις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι τοῦ δευτέρου εἴδους, διότι αἱ 50000 δρχ. πρέπει νὰ μοιρασθῶσιν ἀναλόγως τῶν συνθέτων ἀριθμῶν 20ἐργ. ἐργαζομένων πρὸς 10ὥρ. τὴν ἡμέραν καὶ 25ἐργ. πρὸς 12ὥρ. τὴν ἡμέραν καὶ 40ἐργ. πρὸς 8ὥρ. τὴν ἡμέραν.

Καὶ ἤδη, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἀνάγομεν αὐτὸ εἰς πρόβλημα τοῦ πρώτου εἴδους, σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς.

Οἱ 20ἐργ. ἐργαζόμενοι 10ὥρ. τὴν ἡμέραν θὰ λάβωσιν ἐκ τῶν 50000 δρχ. μερίδιον ὅποιον οἱ 20×10 ἤτοι 200ἐργ. ἐργαζόμενοι 1ὥρ. τὴν ἡμέραν. Ὁμοίως οἱ 25 ἐργάται ἐργαζόμενοι 12ὥρ. τὴν ἡμέραν θὰ λάβωσιν ὅσα 25ἐργ.×12 ἤτοι 300ἐργ. ἐργαζόμενοι 1ὥρ.

τὴν ἡμέραν. Ὁμοίως οἱ 40 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8ὥρ. τὴν ἡμέραν θὰ λάβωσιν ὅσα 40×8 ἤτοι 320ἐργ. ἐργαζόμενοι 1ὥρ. τὴν ἡμέραν.

Κατ' ἀκολουθίαν τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους, ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ μοιράσωμεν τὰς 50000 δρχ. ἀναλόγως τῶν 200ἐργ. 300ἐργ. καὶ 320ἐργ., οἱ ὁποῖοι λαμβάνουσι τὸ αὐτὸ μερίδιον μὲ τοὺς 20ἐργ., οἱ ὁποῖοι ἐργάζονται 10ὥρ. τὴν ἡμέραν, τοὺς 25ἐργ., οἱ ὁποῖοι ἐργάζονται 12ὥρ. τὴν ἡμέραν, καὶ τοὺς 40ἐργ., οἱ ὁποῖοι ἐργάζονται 8ὥρ. τὴν ἡμέραν.

Ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα (§ 295) εὑρίσκομεν ὅτι

οἱ 20ἐργ. θὰ λάβωσι $\dfrac{50000\times200}{820}=12195\delta\chi.\dfrac{5}{41}$

οἱ 25ἐργ. θὰ λάβωσι $\dfrac{50000\times300}{820}=18292\delta\chi.\dfrac{28}{41}$

οἱ 40ἐργ. θὰ λάβωσι $\dfrac{50000\times320}{820}=19512\delta\chi.\dfrac{8}{41}$

Σημείωσις. Ἂν τὴν πρώτην τιμὴν διαιρέσωμεν διὰ 20, τὴν δευτέραν διὰ 25 καὶ τὴν τρίτην διὰ 40, εὑρίσκομεν πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος τῶν ἐργατῶν.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

296. *Διὰ νὰ μοιράσωμεν ποσόν τι ἀναλόγως δύο ἢ περισσοτέρων συνθέτων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς ἑκάστου συνθέτου καὶ ἐπὶ τὸ προκῦπτον γινόμενον πολλαπλασιάζομεν τὸ μεριστέον ποσόν, τὸ δὲ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων, τὰ ὁποῖα προέκυψαν ἐκ τῶν συνθέτων.*

Σημείωσις. Τοὺς συνθέτους ἀριθμούς, ἀναλόγως τῶν ὁποίων μοιράζεται ποσόν τι, κάμνομεν πρῶτον ν' ἀποτελῶνται ἀπὸ δύο μόνον ἀριθμοὺς (οἱ ὁποῖοι νὰ γίνωνται ἐκ τῶν αὐτῶν συγκεκριμένων μονάδων), καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν (§ 296) κανόνα.

Π. χ. Ἐὰν μοιράσωμεν 81δρχ. εἰς 5 ἐργάτας, ἐκ τῶν ὁποίων οἱ 2ἐργ. εἰργάσθησαν 4ἡμ. 6ὥρ. ἀνὰ 12ὥρ. τὴν ἡμέραν, οἱ δὲ 3ἐργ. εἰργάσθησαν 7ἡμ. 3ὥρ. ἀνὰ 6ὥρ. τὴν ἡμέραν, πόσας θὰ λάβωσιν οἱ 2 ἐργάται καὶ πόσας οἱ 3 ἐργάται;

Λύσις. Ἐπειδὴ αἱ 81δρχ. πρέπει νὰ μοιρασθῶσιν ἀναλόγως τῶν συνθέτων ἀριθμῶν 2ἐργ. 4ἡμ. 6ὥρ. καὶ 3ἐργ. 7ἡμ. 3ὥρ., διὰ τοῦτο κάμνομεν πρῶτον τούτους νὰ ἀποτελῶνται ἀπὸ δύο καὶ μόνον ἀριθτρέποντες τοὺς συμμιγεῖς 4ἡμ. 6ὥρ. καὶ 7ἡμ. 3ὥρ. εἰς ὥρας, ὅτε .. γίνονται 54ὥρ. καὶ 45ὥρ. Οὕτω δὲ ἔχομεν ἤδη νὰ μοιράσωμεν τὰς 81δρχ. ἀναλόγως τῶν συνθέτων ἀριθμῶν 2ἐργ. 54ὥρ. καὶ 3ἐργ. 45ὥρ., ὅτε κατὰ τὸν κανόνα (§ 296) εὑρίσκομεν, ὅτι οἱ 2ἐργ. θὰ λάβωσι 36δρχ., οἱ δὲ 3ἐργ. θὰ λάβωσι 45 δραχμάς.

Σημείωσις α'. Ἂν διαιρέσωμεν τὰς 36 δρχ. διὰ 2 καὶ τὰς 45 δρχ. διὰ 3, εὑρίσκομεν καὶ ὅτι ἕκαστος τῶν πρώτων 2 ἐργατῶν, θὰ λάβῃ 18 δρχ. καὶ ἕκαστος τῶν 3 ἐργατῶν θὰ λάβῃ 15 δρχ. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ καὶ πόσον λαμβάνει ἕκαστος τὴν ἡμέραν, ἀρκεῖ τὸ μερίδιον τοῦ ἑνὸς τῶν 2 ἐργατῶν νὰ διαιρέσωμεν διὰ $\frac{54}{12}$ ἡμ. καὶ τὸ μερίδιον τοῦ ἑνὸς τῶν 3 ἐργατῶν νὰ διαιρέσωμεν διὰ $\frac{45}{6}$ ἡμ. Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν, ὅτι ἕκαστος τῶν 2 ἐργατῶν λαμβάνει 4 δρχ. τὴν ἡμέραν καὶ ἕκαστος τῶν 3 ἐργ. λαμβάνει 2 δρχ. τὴν ἡμέραν.

Σημείωσις β'. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου εἴδους τοῦ μερισμοῦ πρέπει τὰ μερίδια ὅλα προστιθέμενα νὰ δίδωσι τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἐμοιράσθη.

Παρατήρησις. Ὅταν οἱ σύνθετοι ἀριθμοὶ διαφέρωσι μεταξύ των κατ' ἀριθμοὺς μὴ συνθέτους, τότε δύναται ὁ μερισμὸς νὰ γείνῃ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ τὸ πρόβλημα νὰ ὑπαχθῇ ἀμέσως εἰς τὰ τοῦ πρώτου εἴδους.

Π. χ. 15 ἐργάται ἐτελείωσαν ἔργον τι καὶ ἔλαβον 150 δρχ. Ἐκ τῶν ἐργατῶν τούτων οἱ 5 εἰργάσθησαν 4 ἡμ. 8 ὥρ., οἱ ἄλλοι 5 εἰργάσθησαν 3 ἡμ. 10 ὥρ. καὶ οἱ ἄλλοι 5 εἰργάσθησαν 2 ἡμ. 5 ὥρ. Πόσας θὰ λάβωσιν οἱ πρῶτοι, πόσας οἱ δεύτεροι καὶ πόσας οἱ τρίτοι ἐργάται ;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι τοῦ δευτέρου εἴδους, ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν καὶ τοὺς 5 ἐργ., διότι τότε πρέπει αἱ 150 δρχ. νὰ μοιρασθῶσιν ἀναλόγως τῶν συνθέτων ἀριθμῶν 5 ἐργ. 4 ἡμ. 8 ὥρ. καὶ 5 ἐργ. 3 ἡμ. 10 ὥρ. καὶ 5 ἐργ. 2 ἡμ. 5 ὥρ. Ἂν ὅμως δὲν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ἐξ ὅλων τοὺς 5 ἐργ., τότε λύεται ὡς πρόβλημα τοῦ πρώτου εἴδους, διότι πρέπει τὰς 150 δρχ. νὰ μοιράσωμεν ἀναλόγως τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν 4 ἡμ. 8 ὥρ. καὶ 3 ἡμ. 10 ὥρ. καὶ 2 ἡμ. 5 ὥρ.

297. Ὅταν ἀριθμόν τινα θέλωμεν νὰ μοιράσωμεν *ἀντιστρόφως ἀναλόγως* δύο ἢ περισσοτέρων ἄλλων ἀριθμῶν, ἀρκεῖ νὰ τὸν μοιράσωμεν ἀναλόγως τῶν ἀντιστρόφων των.

Σημείωσις. Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἀντίστροφοι, ὅταν τὸ γινόμενόν των εἶναι ἴσον μὲ τὴν μονάδα.

Π. χ. Νὰ μοιρασθῇ ὁ 76 ἀντιστρόφως ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 2, 4 καὶ 5.

Λύσις. Λαμβάνομεν πρῶτον τοὺς ἀντιστρόφους τῶν ἀριθμῶν 2, 4 καὶ 5 ἤτοι τῶν $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{1}$ καὶ $\frac{5}{1}$ καὶ οἱ ὁποῖοι εἶναι $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{5}$

Ἤδη ἀρκεῖ τὸν 76 νὰ μοιράσωμεν ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{5}$, ὅτε εὑρίσκομεν 40, 20 καὶ 16. Ὥστε τὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα μέρη τῶν ἀριθμῶν 2, 4 καὶ 5 εἶναι 40, 20 καὶ 16.

Μέθοδος τῆς ἑταιρείας.

298. Μέθοδος τῆς ἑταιρείας λέγεται τρόπος τις γενικὸς κατὰ τὸν ὁποῖον δύο ἢ περισσότεροι συνέταιροι μοιράζονται μεταξύ των κέρδος ἢ ζημίαν ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων ἑκάστου καὶ τοῦ χρόνου κατὰ τὸν ὁποῖον ἔμειναν ταῦτα εἰς τὴν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν.

Σημείωσις. Τὰ προβλήματα τῆς ἑταιρείας ὑπάγονται εἰς τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ. Καὶ ὅταν μὲν τὰ κεφάλαια τῶν συνεταίρων ἔμειναν τὸν αὐτὸν χρόνον εἰς τὴν ἐπιχείρησιν, τότε ὑπάγονται εἰς τὰ προβλήματα τοῦ *πρώτου εἴδους τοῦ μερισμοῦ*, ὅταν δὲ ἔμειναν ἀνίσους χρόνους εἰς τὴν ἐπιχείρησιν, τότε ὑπάγονται εἰς τὰ προβλήματα τοῦ *δευτέρου εἴδους τοῦ μερισμοῦ*.

Πρόβλημα πρώτου εἴδους.

Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν, ὁ μὲν 5000 δρχ. ὁ δὲ 8000 δρχ. καὶ ὁ τρίτος 10000 δρχ. καὶ μετά τινα χρόνον ἐκέρδησαν 3500 δρχ. Πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος ἀναλόγως τῆς καταθέσεώς του;

Κατὰ τὸν κανόνα (§ 295) εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ πρῶτος θὰ λάβῃ 760 δρχ. $\frac{20}{23}$, ὁ δεύτερος 1217 δρχ. $\frac{9}{23}$ καὶ ὁ τρίτος 1521 δρχ. $\frac{17}{23}$.

Πρόβλημα δευτέρου εἴδους.

Ἄνθρωπός τις ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 5000 δρχ. καὶ μετὰ 8 μην. προσέλαβε συνέταιρον, ὅστις κατέθεσεν 8000 δρχ. καὶ μετὰ 6 μην. προσέλαβε δεύτερον συνέταιρον, ὅστις κατέθεσεν 10000 δρχ. Μετὰ 3 δ' ἔτη ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως εὗρον, ὅτι ἐκέρδησαν 8200 δρχ. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων του καὶ τοῦ χρόνου κατὰ τὸν ὁποῖον ἔμειναν ταῦτα εἰς τὴν ἐπιχείρησιν;

Λύσις. Προφανῶς αἱ 5000 δρχ. ἔμειναν 36 μην. εἰς τὴν ἐπιχείρησιν, αἱ δὲ 8000 δρχ. ἔμειναν 36μην — 8μην. ἤτοι 28μην. καὶ αἱ 10000 δρχ. ἔμειναν 28μην — 6μην. ἤτοι 22μην. Ἄρα τὸ κέρδος τῶν 8200 δρχ. πρέπει νὰ μοιρασθῇ ἀναλόγως τῶν συνθέτων ἀριθμῶν 5000 δρχ. 36 μην. καὶ 8000 δρχ. 28 μην. καὶ 10000 δρχ. 22 μην. Ἑπομένως τὸ πρόβλημα εἶναι τοῦ δευτέρου εἴδους τοῦ μερισμοῦ. Ἐφαρμόζοντες λοιπὸν τὸν κανόνα (§ 296) εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ πρῶτος θὰ λάβῃ 2365 δρχ. $\frac{15}{39}$ ὁ δεύτερος 2943 $\frac{23}{39}$ καὶ ὁ τρίτος 2891 $\frac{1}{39}$ δρχ.

Προβλήματα.

1) Δύο καραγωγεῖς ἔλαβον 275 δρχ. διὰ μετακόμισιν ἐμπορευμάτων. Ἐκ τῶν καραγωγέων τούτων ὁ μὲν μετεκόμισε 1520 χιλιόγραμμα, ὁ δὲ 3560 χιλιόγραμμα. Ζητεῖται, πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος;

(α'. 82 δρχ. $\frac{36}{127}$, β'. 192 δρχ. $\frac{91}{127}$)

2) Τρεῖς ἄνθρωποι ἐμοιράσθησαν 2650 δρχ. οὕτως, ὥστε ὁ εἷς ἔλαβε *δύο* μερίδια, ὁ ἄλλος *τρία* καὶ ὁ τρίτος *πέντε*. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Σημείωσις. Ἀρκεῖ νὰ μοιρασθῇ ὁ 2650 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5.

(α'. 530 δχ., β'. 795 δχ., γ'. 1325 δχ.)

3) Τρεῖς ἔμποροι ἠγόρασαν φορτίον ἐλαίου. Καὶ ὁ μὲν πρῶτος κατέβαλε 3500 δρχ., ὁ δὲ δεύτερος 7300 δρχ., ὁ δὲ τρίτος 1200 δρχ. ἐκέρδησαν δὲ ἐκ τοῦ ἐλαίου 3500 δρχ. Πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος;

(α'. 1020 δρχ. $\frac{5}{6}$, β'. 2129 δρχ. $\frac{1}{6}$, γ'. 350 δρχ.)

4) Τρεῖς ἔμποροι ἐζημιώθησαν ἔκ τινος ἐπιχειρήσεως 4500 δρχ. Εἰς τὴν ἐπιχείρησιν ταύτην ὁ εἷς εἶχε καταβάλῃ 5000 δρχ. διὰ 4 μην., ὁ ἄλλος 7500 δρχ. διὰ 8 μην. καὶ ὁ τρίτος 8500 δρχ. διὰ 2 μην. Ζητεῖται πόσον θὰ ζημιωθῇ ἕκαστος;

(α'. 927 δρχ. $\frac{81}{97}$, β'. 2783 δρχ. $\frac{49}{97}$ γ'. 788 δρχ. $\frac{64}{97}$)

5) Δύο καραγωγεῖς ἔλαβον 100 δρχ. διὰ τὴν μεταφορὰν ἐμπορευμάτων. Καὶ ὁ μὲν εἷς μετέφερε 1000 ὀκδ. ἐξ ἀποστάσεως 4 σταδίων, ὁ δὲ ἄλλος 500 ὀκδ. ἐξ ἀποστάσεως 2 σταδίων. Πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος; (α'. 80 δρχ., β'. 20 δρχ.)

6) Τρεῖς ἔμποροι εἶχον συνεταιρισμὸν ἐπὶ 2 ἔτη. Ἐκ τούτων ὁ μὲν πρῶτος κατέβαλεν 250 δρχ. ὁ δὲ δεύτερος 200 δρχ. καὶ μετὰ

6μην. ἄλλας προσέτι 350 δρ., ὁ δὲ τρίτος κατέβαλε 500 δρχ. καὶ μετὰ 5 μην. ἄλλας προσέτι 450 δραχμάς· ἐκέρδησαν δὲ 3765 δρχ. Πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος;

(α'. 600 δρχ., β'. 1110 δρχ., γ'. 2055 δρχ.)

7) Ἔργον τι ἐτελείωσαν 10 ἐργάται καὶ ἔλαβον 800 δρχ. ἐκ τῶν ἐργατῶν τούτων οἱ 2 εἰργάσθησαν 2μην. 3 ἡμ., οἱ 5 εἰργάσθησαν 20ἡμ. καὶ οἱ λοιποὶ εἰργάσθησαν 1μην. Πόσας θὰ λάβῃ ἑκάστη ὁμάς;

$\left(\alpha'.\ 318\ \delta\chi.\ \frac{156}{158},\ \beta'.\ 253\ \delta\chi.\ \frac{26}{158},\ \gamma'.\ 227\ \delta\rho\chi.\frac{134}{158}\right)$

8) Πατήρ τις διέταξε διὰ διαθήκης νὰ μοιρασθῇ ἡ ἐκ 58000 δρχ. περιουσία του ἀντιστρόφως ἀναλόγως τῆς ἡλικίας τῶν τέκνων του. Ἐκ τῶν τέκνων του τούτων τὸ πρῶτον ἦτο 15 ἐτῶν, τὸ δεύτερον 6 ἐτῶν καὶ τὸ τρίτον 4 ἐτῶν. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστον;

(τὸ α'. 8000 δρχ., τὸ β'. 20000 δρχ. καὶ γ'. 30000 δρχ.)

Προβλήματα μίξεως.

299. Προβλήματα τῆς μίξεως διακρίνομεν τριῶν εἰδῶν.

300. *Προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους τῆς μίξεως εἶναι ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος δύο ἢ περισσοτέρων ὡρισμένων ποσῶν καὶ τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἐδόθη.*

Πρόβλημα 1ον. Οἰνοπώλης ἀνέμιξε 200 ὀκδ. οἴνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 28 λεπ. μὲ 120 ὀκδ. οἴνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 40 λεπ. καὶ μὲ 300 ὀκδ. οἴνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 26 λεπ. Ζητεῖται πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος τούτου.

Λύσις. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν τιμὴν ἑκάστου τῶν ποσῶν, τὰ ὁποῖα θὰ ἀναμίξωμεν καὶ ἔπειτα τὴν τιμὴν τοῦ ὅλου μίγματος ὡς ἑξῆς.

Αἱ	200ὀκδ.	πρὸς	28λεπ.	τιμῶνται	5600λεπ.
αἱ	120 »	»	40 »	»	4800 »
αἱ	300 »	»	26 »	»	7800 »
	620 »				18200 »

Μετὰ ταῦτα προσθέτομεν τὰ πρὸς μῖξιν ποσὰ καθὼς καὶ τὰς τιμάς των καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ 620 ὀκδ. (ἤτοι τὸ ὅλον μῖγμα) τιμῶνται 18200 λεπ. Ἄρα ἡ 1 ὀκ. τοῦ μίγματος θὰ τιμᾶται

$$18200 : 620 = 29^{\lambda\epsilon\pi.}\ \frac{11}{31}$$

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

301. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῆς μονάδος τοῦ μίγματος δύο ἢ περισσοτέρων ὡρισμένων ποσῶν, διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν των διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν πρὸς μῖξιν ποσῶν.*

Π. χ. Ἐὰν ἀναμίξωμεν 300 ὀκδ. ἐλαίου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 1,15 δρχ. μὲ 275 ὀκδ. ἐλαίου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 1,25 δρχ. Πόσον θὰ ἀξίζῃ ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος; $\left(1{,}19\frac{18}{23}\ \delta\rho\chi.\right)$

Σημείωσις α'. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους τῆς μίξεως ὑπάγονται καὶ τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ τίτλος τοῦ κράματος πολυτίμων μετάλλων.

302. *Τίτλος τοῦ κράματος πολυτίμου μετάλλου λέγεται τὸ ποσὸν τοῦ πολυτίμου μετάλλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὴν μονάδα τοῦ κράματος.*

Π. χ. Ὅταν λέγωμεν, ὅτι ὁ τίτλος τῶν χρυσῶν νομισμάτων εἶναι 0,900 ἐννοοῦμεν, ὅτι ἐκ τοῦ ὅλου βάρους των μόνον τὰ $\frac{900}{1000}$ εἶναι καθαρὸς χρυσός, τὰ δὲ λοιπὰ $\frac{100}{1000}$ εἶναι ἄλλα μέταλλα.

Πρόβλημα 1ον. Ἐὰν ἀναμίξωμεν 150 δρμ. ἀργύρου, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος εἶναι 0,950, μὲ 100 δρμ. ἀργύρου, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος εἶναι 0,750, ποῖος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ μίγματος;

Τὰ 150 δρμ.	ἔχουν καθαρὸν ἄργυρον	$150 \times 0{,}950$	ἤτοι	142,500 δρμ.
Τὰ 100 »	» » »	$100 \times 0{,}750$	»	75 »
250 »				217,500

Ἐπομένως τὸ μῖγμα τῶν 250 δρμ. περιέχει καθαρὸν ἄργυρον 217,500 δρμ. Ἄρα ὁ τίτλος τοῦ μίγματος θὰ εἶναι 217,500 : 258 ἤτοι 0,870.

Σημείωσις. Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους τῆς μίξεως λύονται καὶ προβλήματά τινα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ἀποτελέσωσιν ἰδιαίτερον εἶδος.

Π. χ. Χρυσοχόος θέλων νὰ κατασκευάσῃ ἀργυροῦν στέφανον βάρους 4000 γραμμαρίων καὶ τίτλου 0,850 διαθέτει α') 800 γραμ. ἀργύρου ἔχοντος τίτλον 0,850, β') 1150 γραμ. ἀργύρου ἔχοντος τίτλον 0,900 καὶ γ') 1500 γραμμ. ἀργύρου ἔχοντος τίτλον 0,800. Ζητεῖται ποίου τίτλου ἄργυρον πρέπει νὰ προμηθευθῇ ὁ χρυσοχόος διὰ τὰ ἐπίλοιπα 550 γραμμάρια;

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ καθαρὸς ἄργυρος, ὁ ὁποῖος θὰ περιέχηται εἰς τὰ διάφορα ποσὰ ἀργύρου, τὰ ὁποῖα θὰ ἀναμίξωμεν, πρέπει νὰ ἰσῶται μὲ τὸν καθαρὸν ἄργυρον, ὁ ὁποῖος θὰ περιέχηται εἰς τὰ 4000 γραμ. ἀργύρου ἔχοντος τίτλον 0,850, διὰ τοῦτο θὰ ἔχωμεν

800γρ.×0,850=	680,000	γραμμ. καθαρ. ἄργυρ.
1150γρ.×0,900=	1035,000	» » »
1500γρ.×0,800=	1200,000	» » »
550γρ.× Κ =	. . . . . .	» » »
4000γρ.×0,850=	3400,000	» » »

Ἄρα ὁ καθαρὸς ἄργυρος τῶν 550 γραμ. δέον νὰ ἰσῶται μὲ 3400γρ. — (680+1035+1200), ἤτοι 3400γρμ.—2915γρμ.= 485γρ. Διὰ τοῦτο ὁ τίτλος τῶν 550γραμ. ἀργύρου, τὸν ὁποῖον θὰ προμηθευθῶμεν, πρέπει νὰ εἶναι 485:550=0,881....

§ 303. Προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους τῆς μίξεως εἶναι ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἀπὸ πόσον πρέπει νὰ λάβωμεν ἐκ διαφόρων ποιοτήτων διὰ νὰ μορφώσωμεν μῖγμά τι ἀπροσδιορίστου ἢ προσδιωρισμένου ποσοῦ, τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς νὰ ἔχῃ δεδομένην τιμήν.

§ 304. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους τῆς μίξεως διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α') Ὅταν τὸ μῖγμα ἀποτελῆται ἐκ δύο ποιοτήτων.

Β') Ὅταν τὸ μῖγμα ἀποτελῆται ἐκ περισσοτέρων τῶν δύο ποιοτήτων.

Σημείωσις. Ἐνταῦθα θὰ ὁμιλήσωμεν μόνον περὶ τῆς πρώτης περιπτώσεως.

Πρόβλημα 1ον. Σιτέμπορός τις ἔχει δύο ποιότητας σίτου, καὶ τῆς μὲν πρώτης ποιότητος ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 45 λεπτά, τῆς δὲ δευτέρας 37 λεπ. Ζητεῖται πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστης ποιότητος διὰ νὰ μορφώσῃ μῖγμά τι, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ν' ἀξίζῃ 40 λ.

Λύσις. Κατατάσσομεν πρῶτον, πρὸς εὐκολίαν, τὰς τιμὰς τῶν δύο ποιοτήτων εἰς μίαν κάθετον καὶ παραπλεύρως τὴν τιμὴν τῆς μονάδος τοῦ μίγματος ὡς ἑξῆς.

α′ 45λεπ.
β′ 37λεπ. μίγμ. 40λεπ.

Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι

διὰ 1όκ. τοῦ α′ εἴδους ζημιοῦται ἐν τῷ μίγματι 5λεπ.

» 1όκ. » β′ » κερδίζει » » » 3λεπ.

Ἄρα ἂν λάβῃ

ἐκ μὲν τοῦ α′ εἴδους 3όκ., θὰ ζημιῶται ἐν τῷ μίγματι 5λεπ.×3=15λεπτ.

ἐκ δὲ τοῦ β′ » 5όκ. θὰ κερδίζῃ » » » 3λεπ.×5=15λεπτ.

Ὥστε συμπεραίνομεν, ὅτι

ἂν ἀναμίξῃ { 3όκ. τοῦ α′ εἴδους / 5όκ. τοῦ β′ εἴδους

θὰ κάμῃ μῖγμα 8 ὀκάδων.

Πωλῶν δὲ τὸ μῖγμα τοῦτο τῶν 8 ὀκδ. πρὸς 40 λεπτ. τὴν ὀκᾶν οὔτε κέρδος οὔτε ζημίαν θὰ ἔχῃ.

Τὸ οὕτω μορφωθὲν μῖγμα τῶν 8 ὀκάδων καλοῦμεν βάσιν τοῦ μίγματος. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου συνάγομεν τὰ ἑξῆς.

305. *Βάσις τοῦ μίγματος καλεῖται τὸ ἀρχικὸν μῖγμα, τὸ ὁποῖον μορφοῦται καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς ἔχει δεδομένην τιμήν.*

Σημείωσις. Τὴν βάσιν τοῦ μίγματος μορφοῦμεν λαμβάνοντες, τόσον ἐκ τῆς μιᾶς ποιότητος (εἰς ὀκάδας ἢ δράμια κ.τ.λ. ἀναλόγως τοῦ μίγματος) ὅση εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς τιμῆς τῆς μονάδος τῆς ἄλλης ποιότητος καὶ τῆς τιμῆς τῆς μονάδος τοῦ μίγματος.

Πρόβλημα 2ον. Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει ν' ἀναμίξῃ τις οἶνον τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 85 λεπτὰ μετὰ ὕδατος, ἵνα καταβιβάσῃ τὴν τιμήν του εἰς 75 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν;

Λύσις. Κατατάσσομεν πρῶτον τὰς τιμὰς ὡς ἀνωτέρω καὶ οὕτως ἔχομεν·

οἶνος 85
ὕδωρ 0 μῖγμα 75.

Ἤδη ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τοὺς προσθετέους τῆς βάσεως τοῦ μίγματος (§ 305 Σημ.), οἵτινες εἶναι οἱ ἑξῆς·

Ἐκ μὲν τοῦ οἴνου 75—0 ἤτοι 75 μέρη.
Ἐκ δὲ τοῦ ὕδατος 85—75 » 10 μέρη.

Ὥστε εἰς 75 μέρη οἴνου (δηλ. ὀκάδας ἢ δράμια κ.τ.λ.) πρέπει νὰ θέτωμεν 10 μέρη ὕδατος.

Πρόβλημα 3ον. Σιτέμπορός τις ἔχει δύο ποιότητας σίτου. Καὶ τῆς μὲν πρώτης ποιότητος ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 45 λεπτά, τῆς δὲ δευτέρας ποιότητος ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 37 λεπτά. Ζητεῖται, πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστης ποιότητος διὰ νὰ μορφώσωμεν μῖγμα 750ὀκδ., τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ν' ἀξίζῃ 40 λεπτά.

Λύσις. Κατατάσσομεν πρῶτον τὰς τιμάς, ὡς ἀνωτέρω, καὶ ἔχομεν·

α' 45
β' 37 μῖγμα 40.

Μετὰ ταῦτα μορφοῦντες τὴν βάσιν τοῦ μίγματος εὑρίσκομεν, ὅτι πρέπει νὰ λάβωμεν·

Ἐκ τῆς α' ποιότητος 40—37 ἤτοι 3 ὀκάδας.
» » β' » 45—40 » 5 ὀκάδας.

Οὕτω ἡ βάσις εἶναι 8 ὀκάδων.

Ἤδη δὲ τὸ δοθὲν πρόβλημα λύεται διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Πρὸς τοῦτο δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Διὰ 8 ὀκ. μίγμ. θέτομεν 3 ὀκ. ἐκ τῆς α' ποιότητος.
» 750 » X » » » »

Ὅθεν $X = 3 \times \frac{750}{8} = 281 \frac{1}{4}$ ὀκ. ἐκ τῆς α' ποιότητος.

Ὁμοίως διὰ 8ὀκ. μιγμ. θέτομεν 5ὀκ. ἐκ τῆς β' ποιότητος
» 750 » X » » » »

Ὅθεν $X = 5 \times \frac{750}{8} = 468 \frac{3}{4}$ ὀκ. ἐκ τῆς β' ποιότητος.

Ὥστε τὸ μῖγμα τῶν 750ὀκ. μορφοῦμεν, ἀφοῦ ἀναμίξωμεν 281ὀκ. $\frac{1}{4}$ ἐκ τῆς α' ποιότητος καὶ 468ὀκ. $\frac{3}{4}$ ἐκ τῆς β' ποιότητος.

Δοκιμὴ τοῦ προβλήματος.

Αἱ 281ὀκ. $\frac{1}{4}$ πρὸς 45 λεπ. τιμῶνται 12656 λεπ. $\frac{1}{4}$.

Αἱ 468ὀκ. $\frac{3}{4}$ » 37 λεπ. » 17343 λεπ. $\frac{3}{4}$.

750ὀκ. 30000 λεπ.

Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τῶν προσθετέων τοῦ μίγματος εἶναι 30000 λεπτά. Ἀλλὰ καὶ τὸ μῖγμα τῶν 750 ὀκάδων πρὸς 40 λεπ. τιμᾶται 750×40 ἤτοι 30000 λεπτά. Ἄρα τὸ πρόβλημα ἐλύθη ἄνευ λάθους.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου ἐξάγομεν τὰ ἑξῆς.

306. *Διὰ νὰ εὕρωμεν ἀπὸ πόσον πρέπει νὰ λάβωμεν ἐκ δύο ποιοτήτων, ἵνα μορφώσωμεν μῖγμα ὡρισμένου ποσοῦ, τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς νὰ ἔχῃ δεδομένην τιμήν, ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν πρόβλημά τι τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν ἀποτελούμενον α΄) ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῆς βάσεως τοῦ μίγματος, β΄) ἐκ τοῦ ἑνὸς τῶν προσθετέων τῆς βάσεως, καὶ γ΄) ἐκ τοῦ ὅλου ποσοῦ τοῦ μίγματος.*

Παρατήρησις. Ὅταν εὕρωμεν τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ λάβωμεν ἐκ τῆς μιᾶς ποιότητος, ἀφαιροῦμεν τοῦτο ἐκ τοῦ ὅλου ποσοῦ τοῦ μίγματος καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ λάβωμεν ἐκ τῆς ἄλλης ποιότητος.

Π.χ. Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, ἀφ᾽ οὗ εὕρομεν, ὅτι ἐκ τῆς πρώτης ποιότητος θὰ λάβωμεν 281 ὀκ. $\frac{1}{4}$, ἄρα ἐκ τῆς δευτέρας ποιότητος θὰ λάβωμεν 750 ὀκ. -281ὀκ. $\frac{1}{4}$, ἤτοι $468\frac{3}{4}$.

307. **Δοκιμή.** Ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ ὅλου μίγματος εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τῶν προσθετέων αὐτοῦ, τὸ πρόβλημα ἐλύθη ἄνευ λάθους.

308. *Προβλήματα τοῦ τρίτου εἴδους τῆς μίξεως εἶναι ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται κατὰ πόσον πρέπει ν᾽ αὐξήσωμεν ποσὸν ὡρισμένον ἐκ ποσοῦ διαφόρου ποιότητος, ἵνα ἡ μονὰς τοῦ μίγματος λάβῃ δεδομένην τιμήν.*

309. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τρίτου εἴδους τῆς μίξεως διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α'. Όταν τὸ μῖγμα ἀποτελῆται ἐκ δύο ποιοτήτων.

Β'. Όταν τὸ μῖγμα ἀποτελῆται ἐκ περισσοτέρων τῶν δύο ποιοτήτων.

Σημείωσις. Ἐνταῦθα θὰ ὁμιλήσωμεν μόνον περὶ τῆς πρώτης περιπτώσεως.

Πρόβλημα 1ον. Οἰνοπώλης ἔχει 3500 ὀκδ. οἴνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 80 λεπ. Πόσον πρέπει νὰ θέσῃ ἐξ οἴνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 50 λεπ., διὰ νὰ μορφώσῃ μῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ν' ἀξίζῃ 70 λεπτά;

α'. 80
6'. 50 μιγμ. 70

Μετὰ ταῦτα μορφοῦμεν τοὺς *προσθετέους* τῆς βάσεως τοῦ μίγματος (§ 305, Σημ.) ὡς ἑξῆς.

Ἐκ τῆς α'. ποιότητος 70—50 ἤτοι 20 ὀκ.
» » 6'. » 80—70 » 10 ὀκ.

καὶ ἤδη σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ εἰς 20 ὀκ. τῆς α'. ποιότητος πρέπει νὰ θέσωμεν 10 ὀκ. τῆς 6'. ποιότητος (πρὸς μόρφωσιν μίγματός τινος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ν' ἀξίζῃ 70 λεπ.) εἰς 3500 ὀκ. τῆς α'. ποιότητος, πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ θέσωμεν ἐκ τῆς 6'. ποιότητος;

Εἰς 20 ὀκ. τῆς α'. ποιότητος θέτομεν 10 ὀκ. τῆς 6'. ποιότητος
» 3500 » » » X » » »

Ὅθεν $X=10\times\frac{3500}{20}=1750$ ὀκ. τῆς 6'. ποιότητος.

Ὥστε τὸ ζητούμενον μῖγμα θ' ἀποτελῆται ἀπὸ 3500 ὀκ. οἴνου τῆς α'. ποιότητος καὶ 1750 ὀκ. οἴνου τῆς 6'. ποιότητος. Ἐπομένως θὰ εἶναι 3500 ὀκ.+1750 ὀκ. ἤτοι 5250 ὀκάδων.

Δοκιμὴ τοῦ προβλήματος.

Αἱ	3500 ὀκ. τῆς α'. ποιότητος	πρὸς 80 λεπ.	τιμῶνται	280000 λεπ.
»	1750 ὀκ. » 6'. »	» 50 λεπ.	»	87500 λεπ.
μιγμ.	5250 ὀκ.			367500 λεπ.

ἐκ τούτων παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τῶν προσθετέων τοῦ μίγματος εἶναι 367500 λεπ. ἀλλὰ καὶ τὸ μῖγμα τῶν 5250 ὀκ. πρὸς 70 λεπ. τιμᾶται 70 λεπ. ×5250 ἤτοι 367500 λεπ. ἄρα τὸ πρόβλημα ἐλύθη ἄνευ λάθους.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

310. *Διὰ νὰ εὕρωμεν κατὰ πόσον πρέπει ν' αὐξήσωμεν ποσὸν*

ὡρισμένον ἐκ ποσοῦ διαφόρου ποιότητος, ὅπως μορφώσωμεν μῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς νὰ ἔχῃ δεδομένην τιμήν, ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν πρόβλημά τι τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν ἀποτελούμενον ἐκ τῶν δύο προσθετέων τῆς βάσεως τοῦ μίγματος καὶ τοῦ πρὸς αὔξησιν ποσοῦ.

Πρόβλημα 2ον. Οἰνοπώλης ἔχει 3500 ὀκ. οἴνου, τὸν ὁποῖον πωλεῖ 80 λεπ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας ὕδατος πρέπει νὰ θέσῃ, ἵνα ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος τιμᾶται 70 λεπ.

Οἶνος 80
Ὕδωρ 0 μιγμ. 70.

Οἱ δὲ προσθετέοι τῆς βάσεως τοῦ μίγματος (§ 305, Σημ.) εἶναι·

Ἐκ τοῦ οἴνου 70—0 ἤτοι 70 ὀκ.

Ἐκ τοῦ ὕδατος 80—70 ἤτοι 10 ὀκ.

Καὶ ἤδη σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς (§ 310).

Εἰς $\overline{70}$ὀκ. οἴνου θέτομεν $\overline{10}$ὀκ. ὕδατος
» $\overline{3500}$ὀκ. » X

Ὅθεν $X=10\times\frac{3500}{70}=500$ὀκ. ὕδατος

Ὥστε τὸ ζητούμενον μῖγμα εἶναι 3500 ὀκ. οἰν.+500 ὀκ. ὕδατ. ἤτοι 4000 ὀκάδων.

Πρόβλημα 3ον. Ἔχει τις 85δρμ. ἀργύρου, τοῦ ὁποίου ὁ βαθμὸς καθαρότητος εἶναι 0,900· διὰ ν' ἀναβιβάσῃ δὲ τὸν βαθμὸν καθαρότητος αὐτοῦ εἰς 0,975, πόσον καθαρὸν ἄργυρον πρέπει νὰ θέσῃ.

Λύσις. Κατατάσσομεν τοὺς τίτλους τῶν δύο ποιοτήτων τοῦ ἀργύρου καθὼς κατετάξαμεν τὰς τιμὰς εἰς τὰ προηγούμενα προβλήματα.

Οὕτω δ' ἔχομεν τίτλ. ἀκαθάρτ. ἀργύρου 0,900
» καθαροῦ » 1,000 μιγμ. 0,975

Καὶ ἤδη μορφοῦμεν τοὺς προσθετέους τῆς βάσεως τοῦ μίγματος ὡς ἑξῆς.

Ἐκ τοῦ ἀκαθάρτου ἀργύρου 1,000—0,975 ἤτοι 0,025 δρμ.
» » καθαροῦ » 0,975—0,900 » 0,075 »

Μετὰ δὲ ταῦτα σκεπτόμεθα (§ 310) ὡς ἑξῆς.

Εἰς $\overline{0{,}025}$δρμ. ἀκαθρ. ἀργ. θέτομεν $\overline{0{,}075}$δρμ. καθαρ. ἀργ.
85 » X » »

Ὅθεν $X=0{,}075\times\frac{85}{0{,}025}=255$ δρμ. καθαροῦ ἀργύρου, ὥστε τὸ ζητούμενον μῖγμα εἶναι 85 δρμ. ἀκαθ.$+$255 δρμ., καθαρ. ἤτοι 340 δρμ.

Σημείωσις α'. Ἡ δοκιμὴ γίνεται κατ' ἀναλογίαν ὡς ἀνωτέρω (§ 307).

Σημείωσις β'. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου εἴδους τῆς μίξεως ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος πρέπει νὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ τῆς τιμῆς τῆς πρώτης καὶ τῆς τελευταίας ποιότητος.

Προβλήματα.

1) Ἀνεμίχθησαν 250 δρμ. ἀργύρου βαθμοῦ καθαρότητος 0,900 μετὰ 125 δραμίων ἀργύρου βαθμοῦ καθαρότητος 0,835. Ποῖος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος; $\left(0{,}878\,\frac{1}{3}\right)$

2) Ἔχει τις 50 ὀκ. οἴνου, τὸν ὁποῖον πωλεῖ πρὸς 29 λεπ. τὴν ὀκᾶν, καὶ ἄλλας 80 ὀκ. οἴνου, τὸν ὁποῖον πωλεῖ πρὸς 70 λεπ. τὴν ὀκᾶν, καὶ θέλει νὰ κάμῃ μῖγμα 155 ὀκ. οἴνου καὶ νὰ τὸν πωλῇ πρὸς 60 λεπ. Ζητεῖται ποίας τιμῆς πρέπει νὰ εἶναι ὁ ἐπίλοιπος οἶνος τῶν 25 ὀκάδων. (90 λεπ. τὴν ὀκᾶν).

3) Οἰνοπώλης ἔχει 1500 ὀκ. οἴνου, τὸν ὁποῖον πωλεῖ πρὸς 60 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν. Ἐὰν θέσῃ εἰς αὐτὸν 150 ὀκ. ὕδατος, πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν; $\left(54 \text{ λεπ.}\frac{6}{11}\right)$

4) Οἰνοπώλης ἔχει 2700 ὀκ. οἴνου, τὸν ὁποῖον πωλεῖ πρὸς 80λπ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ θέσῃ, διὰ ν' ἀξίζῃ ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος 60 λεπτά; (900 ὀκ. ὕδατος)

5) Ἔμπορός τις ἔχει 600 ὀκ. ἐλαίου, τὸ ὁποῖον πωλεῖ 1,40 δρχ. καὶ 300 ὀκ. κατωτέρου ἐλαίου, τὸ ὁποῖον πωλεῖ πρὸς 0,95 δρχ. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστης ποιότητος διὰ νὰ μορφώσῃ μῖγμα 250ὀκ., τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ν' ἀξίζῃ 1,20 δρχ;

$$\left(\alpha'\ 138\text{ὀκ.}\ \frac{8}{9}.\ \beta'\ 111\text{ὀκ.}\ \frac{1}{9}\right)$$

Περὶ μέσου ὅρου.

311. Κατὰ τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους τῆς μίξεως λύονται καὶ τὰ προβλήματα τοῦ μέσου ὅρου.

312. Μέσος ὅρος καλεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ ἀθροίσματος

δύο ἢ περισσοτέρων ὡρισμένων ποσῶν ὁμοειδῶν ἢ ἡ μέση τιμὴ πράγματός τινος ἔχοντος διαφόρους τιμάς.

Προβλήματα μέσου ὅρου ὑπάρχουσι δύο εἰδῶν.

313. Προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους τοῦ μέσου ὅρου εἶναι ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἢ περισσοτέρων ποσῶν ὁμοειδῶν.

Πρόβλημα 1ον. Δωμάτιόν τι ἐνῳκιάσθη τοὺς πρώτους 3 μῆνας πρὸς 45 δρχ. κατὰ μῆνα, τοὺς ἑπομένους 5 μην. πρὸς 40 δρχ. τὸν μῆνα καὶ τοὺς ἑπομένους 4 μην. πρὸς 35 δρχ. Ζητεῖται πόσον ἐνῳκιάσθη κατὰ μέσον ὅρον τὸν μῆνα ;

Λύσις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι τοῦ πρώτου εἴδους τοῦ μέσου ὅρου καὶ λύεται κατὰ τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους τῆς μίξεως ὡς ἑξῆς·

Οἱ	3μην.	πρὸς	45δρχ.	δίδουν	135δρχ.
»	5μην.	»	40δρχ.	»	200δρχ.
»	4μην.	»	35δρχ.	»	140δρχ.
	12μην.				475δρχ.

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν εἰσπραχθέντων ποσῶν κατὰ τοὺς 12 μῆνας εἶναι 475 δρχ., ἄρα εἰς τὸν ἕνα μῆνα ἀντιστοιχοῦσι 475 : 12 ἤτοι 39,58...δρ.

Ὥστε κατὰ μέσον ὅρον τὸ δωμάτιον ἐνῳκιάσθη τὸν μῆνα 39,58.

314. Προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους τοῦ μέσου ὅρου εἶναι ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ μέση τιμὴ πράγματός τινος ἔχοντος διαφόρους τιμάς.

315. Ὁ μέσος ὅρος δύο ἢ περισσοτέρων ποσῶν ὁμοειδῶν εὑρίσκεται, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν διὰ τοῦ πλήθους αὐτῶν.

Πρόβλημα 1ον. Φοιτητής τις ἐπλήρωσε δι' ἐνοίκιον τὸν μὲν πρῶτον μῆνα 45 δρχ., τὸν δὲ δεύτερον 40 δρχ., τὸν δὲ τρίτον 35 δρχ. Πόσον ἐπλήρωσε κατὰ μέσον ὅρον τὸν μῆνα ;

Λύσις. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μέσον ὅρον τῶν ὁμοειδῶν ποσῶν 45 δρχ. 40 δρχ. καὶ 35 δρχ., κατὰ τὸν κανόνα (§ 315) ἔχομεν 45 δχ. +40 δχ. +35 δχ. ἤτοι 120 δχ. Μετὰ ταῦτα διαιροῦντες τὰς 120 δχ. διὰ 3 εὑρίσκομεν, ὅτι ἐπλήρωσε κατὰ μέσον ὅρον 40 δρχ. τὸν μῆνα.

Προβλήματα.

1) Οἰκία τις ἐνοικιάσθη ἐπὶ 2 ἔτη πρὸς 120 δρχ. τὸν μῆνα, ἐπὶ ἕτερα 2 ἔτη 160 δρχ. τὸν μῆνα καὶ ἐπὶ ἓν ἔτος πρὸς 100 δρχ. τὸν μῆνα. Ζητεῖται πόσον κατὰ μέσον ὅρον ἐνοικιάσθη κατ' ἔτος καὶ πόσον κατὰ μῆνα; (1584 δρχ. κατ' ἔτος, 132 δρχ. κατὰ μῆνα).

2) Ἐμετρήθη οἰκόπεδόν τι καὶ εὑρέθη ἔχον ἔκτασιν 225 τ. μέτρων· μετρηθὲν δὲ πάλιν εὑρέθη ἔχον ἔκτασιν 227,75 τ. μέτρων· τέλος δὲ μετρηθὲν καὶ ἐκ τρίτου εὑρέθη ἔχον ἔκτασιν 221,85 τ. μέτρων. Πόσον εἶναι κατὰ μέσον ὅρον τὸ οἰκόπεδον; (224,86...τ.μ.)

3) Κτῆμά τι ἐνοικιάσθη ἐφέτος μὲν 850 δρχ. πέρυσι δὲ 950 δρ., κατὰ δὲ τὸ προπαρελθὸν ἔτος 750 δρχ. Πόσον κατὰ μέσον ὅρον ἐνοικιάσθη κατ' ἔτος; (850 δρχ.)

4) Μαθητής τις ἔχει εἰς μὲν τὰ ἑλληνικὰ βαθμὸν 6, εἰς τὰ μαθηματικὰ 5, εἰς τὴν γεωγραφίαν 8, εἰς τὴν ἱστορίαν 9 καὶ εἰς τὰ ἱερὰ 8. Ποῖος εἶναι κατὰ μέσον ὅρον ὁ βαθμὸς τῆς προόδου τοῦ μαθητοῦ; $\left(\text{ὁ } 7\frac{1}{5} \right)$

Προσθήκη. Ἂν κατὰ νόμον ὁ βαθμὸς τῶν ἑλληνικῶν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 10, ὁ δὲ τῶν μαθηματικῶν ἐπὶ 8, καὶ ὁ τῆς γεωγραφίας, ἱστορίας καὶ ἱερῶν ἐπὶ 5. Ποῖος θὰ ἦτο ὁ βαθμὸς τῆς ἱκανότητος τοῦ μαθητοῦ κατὰ μέσον ὅρον; $\left(225 : 33 \text{ ἤτοι } 6\frac{9}{11}\right)$

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελ. 9	στίχ.	21	ἀντὶ	5 δεκ.	γράφε	5 ἐκ.
» 15	»	4	»	ἐν ὅλῳ	»	ἐν συνόλῳ ἢ κατὰ μέρος
» 15	»	4	»	τμή-	»	ἐκ τῶν τριψηφίων τμη-
» 15	»	5	»	ματος	»	μάτων (15, Σημ.)
» 28	»	22	»	(50, Σημ.)	»	(51, Σημ.)
» 31	»	12	»	(56)	»	(57)
» 36	»	16	»	2×6	»	2×6, κ.τ.λ.
» 36	»	16	»	12	»	12, κ.τ.λ.
» 47	»	28	»	κανόνα	»	κανόνα (90)
» 50	»	1	»	$4+30+$	»	$4+3+0+$
» 71	»	16	»	$\frac{13}{7}$	»	$1\frac{3}{7}$
» 85	»	14	»	(152, Σημ.)	»	(153, Σημ.)
» 87	»	23	»	(§ 178)	»	(§ 180)
« 99	»	8	»	ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς	»	ὁ ἀριθμὸς πρὸς ὃν γίνεται ἡ σύγκρισις.
» 114	»	22	»	(§ 155, ϐ'.)	»	(§ 156, ϐ')
» 117	»	7	»	(§ 163, α'.)	»	(§ 164, α')

45 - 20

4 - 31

19 - 20 - 9

9 × 1 = 9

28 - 20 8

32

23 - 15 = 8

9 - 1 - 8