Κ. Ξ. ΠΑΠΑΝΙΚΗΤΟΠΟΥΛΟΥ
Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῷ ἐν Ἀθήναις Διδασκαλείῳ τῶν θηλέων.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Διὰ τὴν Α' Β' καὶ Γ' τάξιν

ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΤΩΝ ΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΩΝ

ΠΑΡΘΕΝΑΓΩΓΕΙΩΝ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΕΚΔΟΤΗΣ: ΙΩΑΝΝΗΣ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΣ,

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ «ΕΣΤΙΑΣ», ΣΤΑΔΙΟΥ 44

1920

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ἰδιόχειρον ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

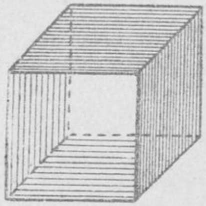
ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΥΒΟΣ

Σῶμα, ἐπιφάνεια καὶ γραμμή.

1. Τὸ πρᾶγμα τοῦτο (1), τὸ ὁποῖον βλέπετε, λέγεται *κύβος*. Ὁ κύβος κατέχει χῶρον (τόπον) τινά, εἰς τὸν ὁποῖον χῶρον



Κύβος.

δὲν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ἄλλο πρᾶγμα, ἂν δὲν ἐκτοπίσωμεν τὸν κύβον.

2. Ἕκαστον πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον κατέχει χῶρόν τινα, λέγεται **σῶμα**. Ὥστε ὁ κύβος, τὸ βιβλίον, ὁ λίθος κτλ. εἶνε σώματα.

Εἶνε φανερόν, ὅτι ὅσος εἶνε ὁ κύβος, τὸ βιβλίον, ὁ λίθος κτλ., τόσος εἶνε καὶ ὁ χῶρος, τὸν ὁποῖον κατέχει τὸ σῶμα τοῦτο. Ἐάν, παραδ. χάριν, ἀπό τινα τοῖχον ἀφαιρέσωμεν ἕνα λίθον, θὰ σχηματισθῇ χάσμα τόσον, ὅσος ἦτο καὶ ὁ ἀφαιρεθεὶς λίθος· τὸ χάσμα τοῦτο παριστᾷ τὸν χῶρον (τόπον), τὸν ὁποῖον κατεῖχεν ὁ λίθος.

3. Ὁ χῶρος, τὸν ὁποῖον κατέχει σῶμά τι, λέγεται *ὄγκος* τοῦ **σώματος**.

---

(1) Ὁ διδάσκων δεικνύει εἰς τοὺς μαθητὰς τὸν κύβον. Ὥστε πρέπει νὰ εἶνε ἐφωδιασμένος μὲ τὰ κυριώτερα στερεὰ σώματα (ἂν δὲν ἔχῃ τὸ σχολεῖον) καὶ ἐπ' αὐτῶν νὰ γίνεται ἡ διδασκαλία.

Θὰ ἐξετάσωμεν τώρα τὰ διάφορα μέρη τοῦ κύβου.

4. Ἐὰν τοποθετήσωμεν τὸν κύβον ἐπὶ τραπέζης, παρατηροῦμεν, ὅτι ἔχει 6 πέρατα ἢ ἄκρα, ἤτοι τὸ ἔμπροσθεν μέρος αὐτοῦ, τὸ ὄπισθεν, τὸ ἄνω, τὸ κάτω (διὰ τοῦ ὁποίου στηρίζεται), τὸ δεξιὸν καὶ τὸ ἀριστερόν. Ἕκαστον τῶν περάτων τούτων λέγεται **ἕδρα** τοῦ κύβου· ὥστε ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρας.

5. Ὅλα ὁμοῦ τὰ πέρατα τοῦ κύβου λέγονται ***ἐπιφάνεια*** αὐτοῦ. Ὡσαύτως ὅλα ὁμοῦ τὰ πέρατα τοῦ πίνακος, τοῦ βιβλίου κτλ. λέγονται ἐπιφάνεια αὐτοῦ. Ὥστε

Ἐπιφάνεια παντὸς σώματος λέγεται τὸ σύνολον τῶν περάτων αὐτοῦ (ἤτοι ὅλον τὸ ἐξωτερικὸν αὐτοῦ).

Ὡσαύτως ὅλον τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ μήλου, τοῦ πορτοκαλλίου κτλ. λέγεται ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

6. Τὰ πέρατα ἑκάστης ἕδρας τοῦ κύβου ἢ ἄλλης τινὸς ἐπιφανείας ἢ καὶ μέρους αὐτῆς λέγονται ***γραμμαί***.

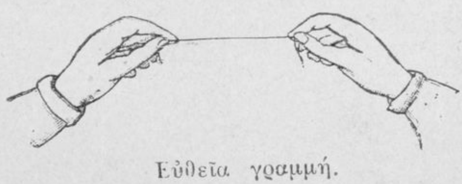
7. Αἱ ἕδραι τοῦ κύβου, ὡς παρατηροῦμεν, συναντῶνται ἀνὰ δύο. Αἱ γραμμαί, κατὰ τὰς ὁποίας γίνεται ἡ συνάντησις δύο ἑδρῶν, λέγονται ***ἀκμαὶ ἢ κόψεις*** τοῦ κύβου.

8. Ὁ κύβος (τοποθετούμενος ἐπὶ τραπέζης) ἔχει 4 ἀκμὰς ἐπὶ τῆς ἄνω ἕδρας, 4 ἐπὶ τῆς κάτω καὶ 4 πέριξ· ἤτοι ἔχει ἐν ὅλῳ 12 ἀκμάς.

ΕΙΔΗ ΓΡΑΜΜΩΝ

Εὐθεῖα, τεθλασμένη, καμπύλη καὶ μικτή.

9. Αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου ἔχουν τὸ αὐτὸ σχῆμα ἢ μορφήν, τὸ ὁποῖον λαμβάνει λεπτότατον νῆμα τεντωμένον (σχ. 1).

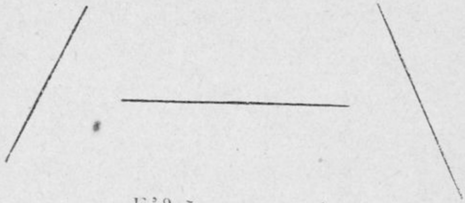


Σχ. 1.

Εὐθεῖα γραμμή.

Τὸ σχῆμα δὲ τοῦτο, τὸ ὁποῖον λαμβάνει λεπτότατον νῆμα (ἢ ἄλλο τι ὅμοιον πρᾶγμα) τεντωμένον καθ' οἱανδήποτε διεύθυνσιν, λέγεται ***εὐθεῖα γραμμὴ*** ἢ ἁπλῶς ***εὐθεῖα***.

Αἱ ἀκμαὶ λοιπὸν τοῦ κύβου εἶναι εὐθεῖαι. Ὡσαύτως εὐθείας παριστῶσι καὶ αἱ κατωτέρω γραμμαὶ (σχ. 2).



Σχ. 2.

Εὐθεῖαι γραμμαί.

10. Δύο ἢ περισσότεραι συνεχόμεναι ἀκμαὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας τοῦ κύβου παρατηροῦμεν, ὅτι δὲν ἀποτελοῦσιν εὐθεῖαν γραμμὴν (δὲν ἔχουσι δηλ. τὸ σχῆμα τεντωμένου νήματος, ὁμοῦ θεωρούμεναι), ἂν καὶ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν χωριστὰ θεωρουμένη εἶνε εὐθεῖα. Αἱ τοιαῦται γραμμαὶ λέγονται ***τεθλασμέναι***. Ὡσαύτως τὸ σχῆμα 3 παριστᾷ τεθλασμένην γραμμήν. Ὥστε

Τεθλασμένη γραμμὴ λέγεται ἡ γραμμή, ἥτις ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας, χωρὶς νὰ εἶνε ὅλη εὐθεῖα.

Σχ. 3.

Τεθλασμένη γραμμή.

Τὰ γράμματα ἐπίσης **M, N** καὶ ἄλλα τινὰ παριστῶσι τεθλασμένας γραμμάς.

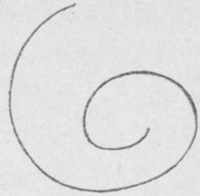
11. Ἐὰν νῆμά τι κρατήσωμεν ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτοῦ, χωρὶς νὰ τεντώσωμεν αὐτὸ (σχ. 4.), τὸ σχηματιζόμενον σχῆμα λέγεται ***καμπύλη γραμμή***.

Σχ. 4.

Καμπύλη γραμμή.

Ὡσαύτως τὰ σχήματα 5 καὶ 6 παριστῶσι καμπύλας γραμμάς.

Σχ. 5.



Σχ. 6.

Καμπύλαι γραμμαί.

Εἰς τὰς καμπύλας ταύτας γραμμὰς παρατηροῦμεν, ὅτι οὐδὲν μέρος αὐτῶν εἶνε εὐθεῖα. Ὥστε

Καμπύλη γραμμὴ λέγεται ἡ γραμμή, τῆς ὁποίας οὐδὲν μέρος εἶνε εὐθεῖα.

Ὅταν γραμμή τις ἀποτελῆται ἀπὸ καμπύλην καὶ ἀπὸ εὐθεῖαν ἢ τεθλασμένην, λέγεται **μικτὴ γραμμή**. Τὸ σχῆμα 7 παριστᾷ μικτὴν γραμμήν.

Σχ. 7.

Μικτὴ γραμμή.

Ἀσκήσεις. 1) Ποῦ βλέπετε εὐθείας, τεθλασμένας καὶ καμπύλας γραμμάς;

2) Τί εἴδους γραμμὰς παριστῶσι τὰ γράμματα

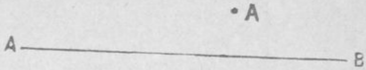
Σ Ο Ω ;

3) Γράψατε ἐπὶ τοῦ πίνακος μίαν εὐθεῖαν (περίπου διὰ μόνης τῆς χειρὸς) ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω καὶ μίαν εὐθεῖαν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά.

4) Γράψατε μίαν τεθλασμένην γραμμήν, μίαν καμπύλην καὶ μίαν μικτὴν γραμμήν.

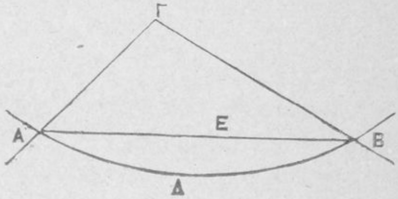
12. Τὰ ἄκρα γραμμῆς (εὐθείας, καμπύλης κτλ.) ἢ μέρους αὐτῆς λέγονται *σημεῖα*.

Τὸ σημεῖον παριστῶμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ ἐπὶ τοῦ πίνακος διὰ μιᾶς στιγμῆς καὶ ὀνομάζομεν τοῦτο δι' ἑνὸς γράμματος τοῦ ἀλφαβήτου, ἤτοι λέγομεν τὸ σημεῖον Α (ἄλφα). Τὴν δὲ γραμμὴν ὀνομάζομεν συνήθως διὰ δύο γραμμάτων, τὰ ὁποῖα γράφομεν εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς, ἤτοι λέγομεν ἡ γραμμὴ ΑΒ (ἄλφα βῆτα).



Σχ. 8.

Ὅταν ὅμως δύο ἢ περισσότεραι γραμμαὶ διέρχωνται διὰ δύο σημείων, τότε πρὸς διάκρισιν γράφομεν εἰς ἑκάστην γραμμὴν ἓν γράμμα ἀκόμη εἰς οἱονδήποτε σημεῖον αὐτῆς· ἤτοι λέγομεν ἡ γραμμὴ ΑΓΒ (ἄλφα γάμμα βῆτα), ἡ γραμμὴ ΑΕΒ, ἡ γραμμὴ ΑΔΒ.



Σχ. 9.

13. Αἱ εἰκόνες διὰ τῶν ὁποίων παριστῶμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου, ἐπὶ τοῦ πίνακος κτλ. τὰ σημεῖα, τὰς γραμμάς, τὰς ἐπιφανείας καὶ τὰ σώματα, λέγονται *σχήματα γεωμετρικά.*

Ἰδιότητες τῆς εὐθείας.

14. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

1ον) Ἀπὸ ἓν σημεῖον εἰς ἄλλο μίαν μόνην εὐθεῖαν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν.

Παραδ. χάριν, ἀπὸ τοῦ σημείου Α εἰς τὸ σημεῖον Β (σχῆμα 9) μίαν μόνην εὐθεῖαν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν, τὴν ΑΕΒ. Διότι ἂν φέρωμεν καὶ ἄλλην, θὰ συμπέσῃ μετ' αὐτῆς καὶ θὰ ἀποτελεσθῇ μία μόνη εὐθεῖα. Καμπύλας δὲ καὶ τεθλασμένας, καθὼς τὰς ΑΓΒ καὶ ΑΔΒ, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ὁσασδήποτε. Ὥστε ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένη, ὅταν δοθῶσι δύο σημεῖα αὐτῆς.

2ον) Τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν δυνάμεθα νὰ τὴν αὐξήσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη της, ὅσον θέλομεν.

3ον) Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶνε μικροτέρα οἱασδήποτε ἄλλης γραμμῆς, ἐχούσης τὰ αὐτὰ ἄκρα.

Ἡ συντομωτέρα δηλ. ὁδὸς μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β (σχ. 9) εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΕΒ, οἱαδήποτε δὲ ἄλλη ὁδὸς μεταξὺ τῶν σημείων τούτων, καθὼς ἡ γραμμὴ ΑΓΒ ἢ ΑΔΒ, εἶνε μεγαλυτέρα αὐτῆς. Διὰ τοῦτο ὡς **ἀπόστασις** δύο σημείων λαμβάνεται ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἀγομένη εὐθεῖα.

Ἰσότης εὐθειῶν καὶ ἄθροισμα αὐτῶν.

15. Διὰ νὰ μάθωμεν, ἂν δύο εὐθεῖαι εἶνε ἴσαι, θέτομεν τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσῃ τὸ ἓν ἄκρον αὐτῶν, ἂν συμπέσῃ τότε καὶ τὸ ἄλλο ἄκρον αὐτῶν, αἱ εὐθεῖαι εἶνε ἴσαι. Ὥστε

Δύο εὐθεῖαι λέγονται *ἴσαι*, ὅταν τὰ ἄκρα αὐτῶν δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσι.

16. Αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου εἶνε ἴσαι μεταξύ των.

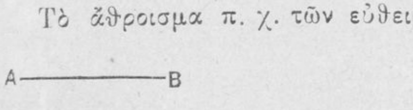
Διότι, ἂν λάβωμεν λεπτὸν εὐθύγραμμον σύρμα ἢ ἄλλο τι, ὅσον εἶνε μία τῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου, καὶ ἐπιθέσωμεν τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ἀκμῶν αὐτοῦ, θὰ ἴδωμεν ὅτι ὅλαι εἶνε ἴσαι μεταξύ των.

Ὅταν ὅμως μία εὐθεῖα εἶνε μέρος ἄλλης εὐθείας, τότε αὗται λέγονται **ἄνισοι**.

17. ***Γενικῶς***. Δύο σχήματα λέγονται ἴσα, ὅταν, ἐπιτιθεμένου τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ἐφαρμόζωσιν ἀκριβῶς καθ' ὅλα τὰ μέρη αὐτῶν. ***Ἄνισα*** δὲ λέγονται, ὅταν τὸ ἓν σχῆμα εἶνε μέρος τοῦ ἄλλου.

18. Ἐὰν δύο ἢ περισσοτέρας εὐθείας θέσωμεν κατὰ σειρὰν τὴν μίαν κατόπιν τῆς ἄλλης οὕτως, ὥστε νὰ ἀποτελεσθῇ μία μόνη εὐθεῖα, αὕτη λέγεται ***ἄθροισμα*** αὐτῶν.

Τὸ ἄθροισμα π. χ. τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶνε ἡ εὐθεῖα ΕΗ (σχ. 10), ἥτις ἀποτελεῖται ἀπὸ ταύτας, ὅταν τεθῶσι κατὰ σειρὰν (εἶνε δὲ ἡ ΕΖ ἴση μὲ τὴν ΑΒ καὶ ἡ ΖΗ μὲ τὴν ΓΔ).



Σχ. 10.

ΕΙΔΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Ἐπίπεδος, τεθλασμένη, καμπύλη.

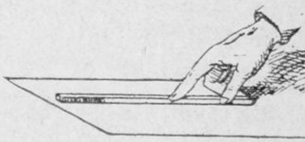
19. Ἐὰν ἐπὶ ἕδρας τινὸς τοῦ κύβου ἐπιθέσωμεν λεπτὸν νῆμα

καλῶς τεντωμένον (ἢ ἄλλο τι ὅμοιον εὐθύγραμμον), θὰ ἴδωμεν ὅτι τοῦτο ἐφαρμόζει πανταχοῦ ἀκριβῶς ἐπ' αὐτῆς, ἤτοι ὅλα τὰ σημεῖα αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῆς ἕδρας· τὸ αὐτὸ θὰ συμβῇ καὶ ἂν ἐπιθέσωμεν τὸ νῆμα ἐπὶ τοῦ πίνακος, ἐπὶ τῆς τραπέζης κτλ. Αἱ τοιαῦται ἐπιφάνειαι λέγονται ***ἐπίπεδοι***. Ὥστε

Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἁπλῶς ***ἐπίπεδον*** λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζει πανταχοῦ ἀκριβῶς.

Αἱ ἕδραι λοιπὸν τοῦ κύβου εἶνε ἐπίπεδα. Ὡσαύτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πατώματος, τῶν τοίχων τοῦ δωματίου, τῆς τραπέζης κτλ. εἶνε ἐπίπεδα.

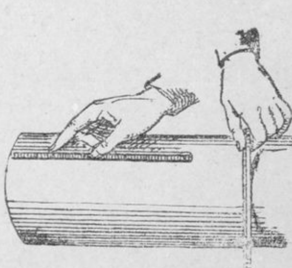
Σημ. Οἱ τεχνῖται διὰ νὰ ἴδωσιν, ἂν ἐπιφάνειά τις εἶνε ἐπίπεδος, ἐφαρμόζουσιν ἐπ' αὐτῆς στενήν τινα εὐθύγραμμον σανίδα, καθὼς π. χ. τὸν ξύλινον χάρακα (ρήγα), καὶ ἂν ἴδωσιν ὅτι οὗτος ἐφαρμόζει πανταχοῦ ἀκριβῶς ἐπ' αὐτῆς, χωρὶς δηλ. νὰ παρουσιάζῃ κυρτώματα ἢ κοιλώματα, συμπεραίνουσιν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶνε ἐπίπεδος· εἰ δὲ μή, καθιστῶσιν αὐτὴν ἐπίπεδον διὰ τῶν ἐργαλείων τῆς τέχνης.



20. Ὅλη ὅμως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου ἢ τοῦ δωματίου δὲν εἶνε ἐπίπεδος, ἀποτελεῖται ὅμως ἀπὸ μέρη ἐπίπεδα. Αἱ τοιαῦται ἐπιφάνειαι λέγονται ***τεθλασμέναι***. Ὥστε

Τεθλασμένη ἐπιφάνεια λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, ἥτις ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα, χωρὶς νὰ εἶνε ὅλη ἐπίπεδος.

Ὑπάρχουσιν ὅμως καὶ ἐπιφάνειαι, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἰς οὐδὲν μέρος ἐφαρμόζει, καθὼς εἶνε π. χ. ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αὐγοῦ, ἢ ἐφαρμόζει μόνον κατὰ μίαν διεύθυνσιν, καθὼς εἶνε π. χ. ἡ ἐπιφάνεια σωλῆνος. Αἱ τοιαῦται ἐπιφάνειαι λέγονται καμπύλαι. Ὥστε



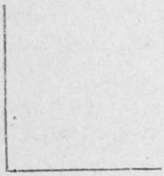
21. ***Καμπύλη ἐπιφάνεια*** λέγεται ἐκείνη, ἥτις οὔτε ἐπίπεδος εἶνε οὔτε τεθλασμένη.

Τὰς καμπύλας ἐπιφανείας διακρίνομεν εἰς ***κυρτὰς*** καὶ εἰς *κοίλας*. Π. χ. ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια τοῦ σωλῆνος εἶνε κυρτή, ἡ δὲ ἐσωτερικὴ αὐτοῦ εἶνε κοίλη.

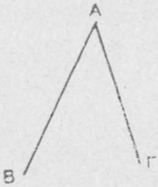
Ὅταν ἐπιφάνειά τις ἀποτελῆται ἀπὸ ἐπίπεδον καὶ ἀπὸ καμπύλην ἐπιφάνειαν, λέγεται *μικτὴ ἐπιφάνεια*.

ΠΕΡΙ ΓΩΝΙΩΝ

22. Αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου ἀνὰ δύο συναντώμεναι σχηματίζουσι τὸ σχῆμα 11, τὸ ὁποῖον λέγεται *γωνία*. Ὡσαύτως τὸ σχῆμα 12, τὸ ὁποῖον σχηματίζουσιν αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ λέγεται γωνία. Ὥστε



Σχ. 11.



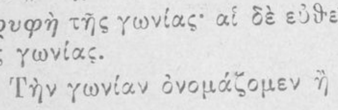
Σχ. 12.

Γωνία λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουσι δύο εὐθεῖαι, ἀρχόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, χωρὶς νὰ ἀποτελῶσι μίαν μόνην εὐθεῖαν.

Τὸ σημεῖον Α, ἐκ τοῦ ὁποίου ἄρχονται αἱ εὐθεῖαι, λέγεται *κορυφὴ* τῆς γωνίας· αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ λέγονται *πλευραὶ* τῆς γωνίας.

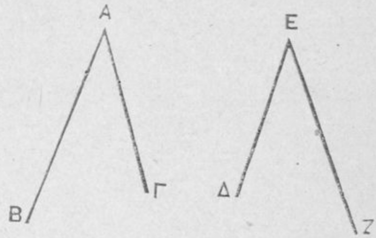
Τὴν γωνίαν ὀνομάζομεν ἢ μὲ ἓν γράμμα, τὸ ὁποῖον γράφομεν πλησίον τῆς κορυφῆς της, ἤτοι λέγομεν ἡ γωνία Α, ἢ μὲ τρία γράμματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν γράφομεν εἰς τὴν κορυφήν της καὶ ἕκαστον τῶν ἄλλων εἰς τὰ ἄκρα τῶν πλευρῶν της, ἀλλὰ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς πρέπει νὰ τὸ γράφωμεν καὶ νὰ τὸ απαγγέλλωμεν πάντοτε μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων γραμμάτων· ἤτοι λέγομεν ἡ γωνία ΒΑΓ ἢ ἡ γωνία ΓΑΒ.

Ὅταν ὅμως δύο ἢ περισσότεραι γωνίαι ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν (σχ. 13), τότε διὰ νὰ διακρίνωμεν αὐτὰς μεταξύ των, ὀνομάζομεν ἑκάστην γωνίαν πάντοτε μὲ τρία γράμματα, ἢ χάριν συντομίας γράφομεν εἰς τὸ ἄνοιγμα ἑκάστης γωνίας ἓν μικρὸν γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου καὶ ὀνομάζομεν αὐτὴν διὰ τοῦ γράμματος τούτου. Ἤτοι λέγομεν ἡ γωνία ΑΒΓ, ἡ γωνία ΓΒΔ, ἡ γωνία ΔΒΕ· ἢ συντόμως ἡ γωνία α, ἡ γωνία β, ἡ γωνία γ.



Σχ. 13.

Ἰσότης γωνιῶν. Διὰ νὰ μάθωμεν, ἂν δύο γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 14) εἶνε ἴσαι, θέτομεν τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης, καὶ ἔστω τὴν γωνίαν ΔΕΖ ἐπὶ τῆς γωνίας ΒΑΓ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ ΔΕ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἀλλὰ τὸ σημεῖον Ε νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Α, ἐὰν πέσῃ τότε καὶ ἡ ΕΖ ἐπὶ τῆς ΑΓ, αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι. Ὥστε



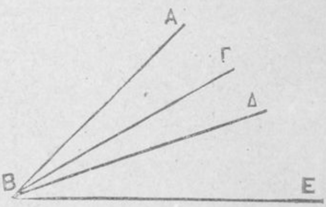
Σχ. 14.

23. Δύο γωνίαι λέγονται ἴσαι, ὅταν αἱ κορυφαὶ καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσιν, ἤτοι ὅταν ἔχουν τὸ αὐτὸ ἄνοιγμα.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν, ἀλλ' ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα αὐτῶν.

Ἐὰν ὅμως κατὰ τὴν ἐπίθεσιν τῶν γωνιῶν ἡ ΕΖ πέσῃ ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΑΓ, τότε ἡ γωνία ΔΕΖ λέγεται μικροτέρα τῆς ΒΑΓ· ἐὰν δὲ πέσῃ ἐκτός, λέγεται μεγαλυτέρα τῆς ΒΑΓ.

24. **Ἄθροισμα γωνιῶν.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων γωνιῶν, θέτομεν αὐτὰς κατὰ σειρὰν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ καὶ μία πλευρὰ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας γωνίας νὰ συμπέσωσιν, αἱ δὲ ἄλλαι πλευραὶ αὐτῶν νὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν αὐτῆς (σχ. 15)· κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον θέτομεν τὴν τρίτην γωνίαν μετὰ τῆς δευτέρας, τὴν τετάρτην μετὰ τῆς τρίτης καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἡ γωνία, ἥτις ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς δύο ἄκρας πλευράς, εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν δοθεισῶν. Παραδ. χάριν, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΕΒΔ, ΔΒΓ, ΓΒΑ εἶνε ἡ γωνία ΑΒΕ.



Σχ. 15.

Σημ. Ἐὰν ὅμως συμβῇ αἱ ἄκραι πλευραὶ νὰ κεῖνται ἀπ' εὐθείας, τότε δὲν σχηματίζεται γωνία, θὰ ἴδωμεν δὲ κατωτέρω μὲ τί ἰσοῦται τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτων.

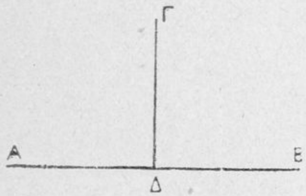
Εἴδη γωνιῶν.

25. Εἴδομεν (ἐδάφιον 22), ὅτι αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου συναντῶ-

μεναι ἀνὰ δύο σχηματίζουσι γωνίαν, ἔχουσαν τὸ σχῆμα 11. Ἡ τοιαύτη γωνία λέγεται **ὀρθή**. Ἑκάστη πλευρὰ αὐτῆς δὲν κλίνει οὔτε πρὸς τὸ ἓν οὔτε πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς ἄλλης πλευρᾶς (αὐξανομένης). Ὥστε

Ὅταν μία εὐθεῖα συναντᾷ ἄλλην εὐθεῖαν καὶ δὲν κλίνῃ οὔτε πρὸς τὸ ἓν οὔτε πρὸς τὸ ἄλλο μέρος αὐτῆς, ἡ σχηματιζομένη γωνία λέγεται *ὀρθή*.

Παραδ. χάριν, ἐὰν ἡ ΓΔ δὲν κλίνῃ οὔτε πρὸς τὸ ἓν οὔτε πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς ΑΒ (σχ. 16), ἡ γωνία ΓΔΒ ἢ ἡ ΓΔΑ λέγεται **ὀρθή**. Ἐὰν ἀποσβέσωμεν τὴν ΑΔ (ἢ τὴν ΔΒ), θὰ μείνῃ μία μόνη ὀρθή, ἡ ΓΔΒ (ἢ ἡ ΓΔΑ).



Σχ. 16

26. ***Ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶνε ἴσαι μεταξύ των.***

Διότι, ἐὰν θέσωμεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν ἐπὶ ἄλλης, θὰ ἴδωμεν ὅτι αἱ πλευραὶ αὐτῶν θὰ ἐφαρμόσωσιν ἀκριβῶς καὶ ἑπομένως ἔχουν τὸ αὐτὸ ἄνοιγμα (ἐδάφ. 23).

27. Ὁ κύβος ἔχει εἰς ἑκάστην ἕδραν αὐτοῦ 4 ὀρθὰς γωνίας, ἑπομένως εἰς τὰς 6 ἕδρας αὐτοῦ ἔχει 24 ὀρθὰς γωνίας.

28. **Ὀξεῖα** γωνία λέγεται ἡ μικροτέρα ὀρθῆς.

Ἀμβλεῖα δὲ ἡ μεγαλυτέρα ὀρθῆς.

Παραδ. χάριν, ἡ γωνία ΕΔΒ (σχ. 17), τῆς ὁποίας τὸ ἄνοιγμα τῶν πλευρῶν της εἶνε μικρότερον τῆς ὀρθῆς ΓΔΒ, εἶνε ὀξεῖα. Ἡ δὲ γωνία ΖΔΒ, τῆς ὁποίας τὸ ἄνοιγμα τῶν πλευρῶν της εἶνε μεγαλήτερον τῆς ὀρθῆς ΓΔΒ, εἶνε ἀμβλεῖα

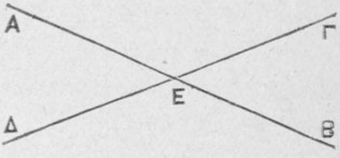
Σχ. 17

Αἱ ὀξεῖαι γωνίαι, καθὼς καὶ αἱ ἀμβλεῖαι, αἵτινες εἶνε διαφόρων μεγεθῶν, συγκρίνονται πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ἥτις ἔχει ὡρισμένον μέγεθος ἢ ἄνοιγμα.

29. ***Κατὰ κορυφὴν*** λέγονται δύο γωνίαι, ὅταν σχηματίζωνται ἐκ τῆς διασταυρώσεως δύο εὐθειῶν καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ οὐδεμίαν πλευρὰν κοινήν.

Τοιαῦται εἶνε αἱ γωνίαι ΑΕΓ καὶ ΔΕΒ (σχ. 18), ὡσαύτως αἱ ΑΕΔ καὶ ΓΕΒ.

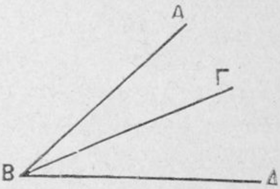
30. Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶνε ἴσαι μεταξύ των.



Σχ. 18.

Διότι, ἂν ἀποκόψωμεν π. χ. τὴν γωνίαν ΑΕΔ καὶ θέσωμεν αὐτὴν ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφήν της ΓΕΒ θὰ ἴδωμεν ὅτι αὗται θὰ ἐφαρμόσωσιν ἀκριβῶς. Τοῦτο λέγομεν καὶ διὰ τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ΑΕΓ καὶ ΔΕΒ.

31. **Ἐφεξῆς** λέγονται δύο γωνίαι, ὅταν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (π. χ. ἐπὶ τοῦ πίνακος) καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, τὰς δὲ μὴ κοινὰς πλευρὰς ἔχουν ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.



Σχ. 19.

Παραδ. χάριν, αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ (σχ. 19) εἶνε ἐφεξῆς.

Ὅλα τὰ εἴδη τῶν ἀνωτέρω γωνιῶν, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, λέγονται ***ἐπίπεδοι γωνίαι.***

Ἀσκήσεις. 1) Ποῦ βλέπετε ἐν τῷ δωματίῳ ὀρθὰς γωνίας. Ποῦ ἀλλοῦ βλέπετε τοιαύτας ;

2) Σχηματίσατε διὰ δύο γραφίδων μίαν ὀρθὴν (περίπου), μίαν ὀξεῖαν καὶ μίαν ἀμβλεῖαν γωνίαν.

3) Γράψατε ἐπὶ τοῦ πίνακος μίαν ὀρθὴν γωνίαν, τῆς ὁποίας τὸ ἄνοιγμα νὰ εἶνε ἐστραμμένον πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ ἄνω, πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ κάτω.

4) Γράψατε ἐπὶ τοῦ πίνακος ὀξεῖαν γωνίαν, τῆς ὁποίας τὸ ἄνοιγμα νὰ εἶνε ἐστραμμένον πρὸς τὰ κάτω, πρὸς τὰ ἄνω, πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ πρὸς τὰ ἀριστερά.

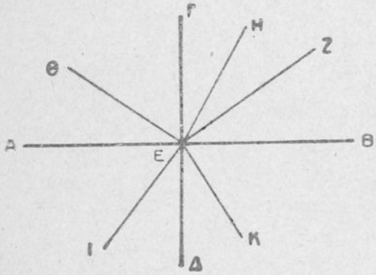
5) Γράψατε ἀμβλεῖαν γωνίαν, τῆς ὁποίας τὸ ἄνοιγμα νὰ εἶνε ἐστραμμένον πρὸς τὰ ἀριστερά, ἄλλην δὲ πρὸς τὰ δεξιά.

6) Ποίαν γωνίαν σχηματίζουσιν οἱ δεῖκται τοῦ ὡρολογίου, ὅταν τοῦτο δεικνύῃ ἀκριβῶς τὴν 2αν τὴν 3ην καὶ τὴν 5ην ὥραν;

7) Σχηματίσατε διὰ δύο γραφίδων κατὰ κορυφὴν γωνίας, ἐκ

τῶν ὁποίων αἱ μὲν δύο νὰ εἶνε ὀξεῖαι, αἱ δὲ ἄλλαι δύο ἀμβλεῖαι. Σχηματίσατε τοιαύτας ὀρθάς.

Παρατήρησις. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 20) διασταυροῦνται οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζωσι γωνίας ὀρθάς, καὶ φέρωμεν ἐκ τοῦ σημείου Ε τῆς τομῆς αὐτῶν εὐθείας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ (καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένας), καθὼς τὰς ΕΖ, ΕΗ καὶ ΕΘ, τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων ἐφεξῆς γωνιῶν ΑΕΘ, ΘΕΓ, ΓΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΒ ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς.



Σχ. 20.

Διότι αἱ μὲν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς ΓΕ σχηματιζόμεναι γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα τὴν ὀρθὴν ΑΕΓ, αἱ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῆς ἔχουν ἄθροισμα τὴν ἄλλην ὀρθὴν ΓΕΒ· ὥστε ὅλαι ὁμοῦ ἔχουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθάς. Ἐὰν δὲ φέρωμεν εὐθείας καὶ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς ΑΒ, καθὼς τὰς ΕΙ καὶ ΕΚ, τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων ἐφεξῆς γωνιῶν ἰσοῦται πάλιν μὲ δύο ὀρθάς. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι

32. *Ὅταν ἐξ ἑνὸς σημείου εὐθείας φέρωμεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς ὁσασδήποτε εὐθείας (ἢ καὶ μίαν μόνην εὐθεῖαν), τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς. Καὶ*

33. ***Ὅταν ἐξ ἑνὸς σημείου φέρωμεν πέριξ αὐτοῦ ὁσασδήποτε εὐθείας, τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν ἰσοῦται μὲ τέσσαρας ὀρθάς.***

Διότι, προσεκβαλλομένης μιᾶς τῶν εὐθειῶν τούτων (πέραν τοῦ σημείου τῆς συναντήσεώς των), αἱ μὲν πρὸς τὸ ἓν μέρος αὐτῆς σχηματιζόμεναι γωνίαι θὰ ἔχουν ἄθροισμα 2 ὀρθάς, αἱ δὲ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος αὐτῆς θὰ ἔχουν ἄθροισμα ἄλλας 2 ὀρθάς, ἤτοι ἐν ὅλῳ 4 ὀρθάς.

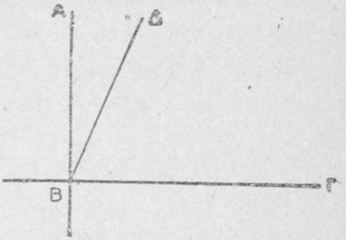
ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑΣ

κάθετοι, πλάγιαι καὶ παράλληλοι.

34. Εὐθεῖά τις λέγεται *κάθετος* ἐπὶ ἄλλην εὐθεῖαν, ὅταν

τὴν συναντᾷ καὶ σχηματίζῃ μετ' αὐτῆς γωνίαν ὀρθὴν (ἐδ. 25). Παραδ. χάριν, ἐὰν ἡ γωνία ΑΒΓ (σχ. 21) εἶναι ὀρθή, ἡ εὐθεῖα ΑΒ λέγεται κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, ὡσαύτως καὶ ἡ ΒΓ λέγεται κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

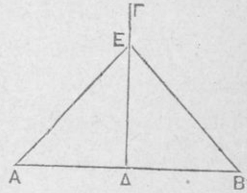
35. Εὐθεῖά τις λέγεται **πλαγία** πρὸς ἄλλην εὐθεῖαν, ὅταν τὴν συναντᾷ καὶ δὲν σχηματίζῃ μετ' αὐτῆς γωνίαν ὀρθήν. Παραδ. χάριν ἡ ΒΔ (σχ. 21) λέγεται πλαγία πρὸς τὴν ΒΓ.



Σχ. 21.

36. **Ἰδιότης τῆς καθέτου.** ***Ἐὰν ἡ ΓΔ εἶνε κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ (σχ 22), πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτῆς.*** Παραδ. χάριν, τὸ σημεῖον Ε τῆς καθέτου ΓΔ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς ΑΒ, ἤτοι ἡ εὐθεῖα ΕΑ εἶνε ἴση μὲ τὴν ΕΒ.

Διότι, ἂν διπλώσωμεν τὸ σχῆμα ΑΕΒ κατὰ τὴν ΕΔ, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ ΕΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΕΑ.

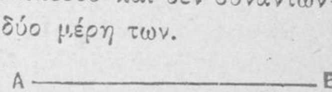


Σχ. 22.

37. Καὶ τἀνάπαλιν. ***Πᾶν σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα εὐθείας, εἶνε σημεῖον τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.***

38. **Παράλληλοι εὐθεῖαι.** Δύο εὐθεῖαι λέγονται ***παράλληλοι***, ὅταν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν ἀπὸ τὰ δύο μέρη των.

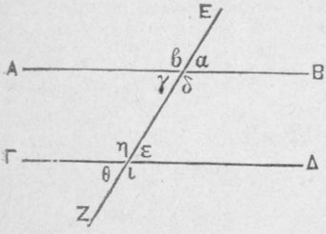
Τὸ σχῆμα 23 παριστᾷ δύο εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ παραλλήλους. Αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ τοῦ κύβου εἶνε παράλληλοι· ὡσαύτως αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ τῶν τετραδίων τῶν μαθητῶν εἶνε παράλληλοι.



Σχ. 23.

Διὰ νὰ μάθωμεν λοιπόν, ἂν δύο εὐθεῖαι εἶνε παράλληλοι, πρέπει νὰ αὐξήσωμεν αὐτὰς ἐπὶ πολὺ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη των, καὶ ἂν ἴδωμεν, ὅτι δὲν συναντῶνται, συμπεραίνομεν τότε ὅτι αὗται εἶνε παράλληλοι. Ἀλλ' ὑπάρχει τρόπος, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, διὰ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ μάθωμεν τοῦτο, χωρὶς νὰ αὐξήσωμεν τὰς εὐθείας.

39. Ἐὰν λάβωμεν δύο εὐθείας παραλλήλους, καθὼς τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 24), καὶ κόψωμεν αὐτὰς διὰ μιᾶς εὐθείας ΕΖ, παρατηροῦμεν ὅτι σχηματίζονται 8 γωνίαι α, β, γ, δ, ε, η, θ, ι.



Σχ. 24.

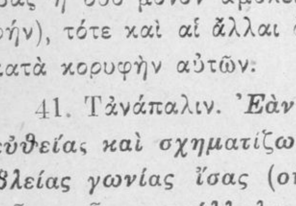
Ἐκ τούτων αἱ 4 γωνίαι α, γ, ε, θ εἶνε ὀξεῖαι, αἱ δὲ ἄλλαι 4 γωνίαι β, δ, η, ι εἶνε ἀμβλεῖαι. Ἐὰν τώρα ἀποκόψωμεν μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν καὶ τὴν ἐπιθέσωμεν ἐπὶ τῶν ἄλλων ὀξειῶν γωνιῶν, θὰ ἴδωμεν ὅτι αὗται εἶνε ἴσαι. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μανθάνομεν, ὅτι καὶ αἱ ἀμβλεῖαι γωνίαι εἶνε ἴσαι. Ἐκ τούτου ἐξάγομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τῶν παραλλήλων εὐθειῶν.

40. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τέμνωνται ὑπὸ τρίτης εὐθείας (πλαγίας) σχηματίζουσιν ὅλας τὰς ὀξείας γωνίας ἴσας, καθὼς καὶ ὅλας τὰς ἀμβλείας γωνίας ἴσας.*

Παρατηρήσεις. Ὅταν σχηματίζωσι δύο μόνον ὀξείας γωνίας ἴσας ἢ δύο μόνον ἀμβλείας γωνίας ἴσας (οὐχὶ τὰς κατὰ κορυφήν), τότε καὶ αἱ ἄλλαι ὀξεῖαι ἢ ἀμβλεῖαι γωνίαι εἶνε ἴσαι ὡς κατὰ κορυφὴν αὐτῶν.

41. Τἀνάπαλιν. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ τρίτης εὐθείας καὶ σχηματίζωσι δύο ὀξείας γωνίας ἴσας ἢ δύο ἀμβλείας γωνίας ἴσας (οὐχὶ τὰς κατὰ κορυφήν), αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶνε παράλληλοι.*

Ἐὰν ἡ τέμνουσα εὐθεῖα σχηματίζῃ μετὰ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν γωνίας ὀρθὰς (ὅτε ὅλαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των), τότε αὕτη εἶνε κάθετος ἐπ' αὐτῶν. Καὶ τἀνάπαλιν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι εἶνε κάθετοι ἐπ' αὐτήν. Ὥστε



Σχ. 25.

42. ***Δύο κάθετοι ΓΔ καὶ ΕΖ (σχ. 25) ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἶνε παράλληλοι.***

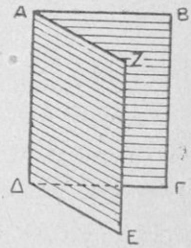
Ἀσκήσεις. 1) Δείξατε τὰς παραλλήλους ἀκμὰς τοῦ κύβου, τοῦ ...

2) Δείξατε ἐπὶ τοῦ δωματίου δύο ἀκμάς, αἱ ὁποῖαι οὔτε συναντῶνται οὔτε παράλληλοι εἶνε.

3) Ἐὰν μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης εὐθείας, εἶνε $\frac{4}{9}$ τῆς ὀρθῆς, πόση εἶναι ἑκάστη τῶν ἄλλων γωνιῶν; (ἴδε καὶ ἐδάφ. 32).

ΔΙΕΔΡΟΙ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

43. Εἴπομεν ἀνωτέρω (ἐδ. 7) ὅτι αἱ ἕδραι τοῦ κύβου συναντῶνται ἀνὰ δύο. Τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουσι δύο ἕδραι συναντώμεναι, λέγεται *δίεδρος γωνία* τοῦ κύβου. Ἐπίσης τὸ σχῆμα 26, τὸ ὁποῖον σχηματίζουσι τὰ δύο ἐπίπεδα ΑΒΓΔ καὶ ΑΖΕΔ, λέγεται δίεδρος γωνία. Ὥστε



Σχ. 26.

Δίεδρος γωνία λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουσι δύο ἐπίπεδα τεμνόμενα καὶ περατούμενα ἐκεῖ, ὅπου τέμνονται.

Τὰ ἐπίπεδα, τὰ σχηματίζοντα τὴν δίεδρον γωνίαν, λέγονται ἐπίσης *ἕδραι* αὐτῆς, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΔ, κατὰ τὴν ὁποίαν τέμνονται αἱ ἕδραι, λέγεται *ἀκμὴ* τῆς διέδρου γωνίας.

44. Ἐὰν παρατηρήσωμεν τὸ ἓν ἄκρον μιᾶς τῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου, βλέπομεν ὅτι εἰς αὐτὸ συναντῶνται τρεῖς ἕδραι τοῦ κύβου. Τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουσι τρεῖς ἕδραι συναντώμεναι, λέγεται *στερεὰ γωνία* τοῦ κύβου. Ἐπίσης τὸ σχῆμα 27, τὸ ὁποῖον σχηματίζουσι τὰ τρία ἐπίπεδα ΑΒΓ, ΓΑΔ καὶ ΒΑΔ, λέγεται στερεὰ γωνία. Ὥστε

Σχ. 27.

Στερεὰ γωνία λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουσι τρία ἢ περισσότερα ἐπίπεδα συναντώμενα εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ περατούμενα ἀνὰ δύο ἐκεῖ, ὅπου τέμνονται.

Τὸ σημεῖον Α, εἰς τὸ ὁποῖον γίνεται ἡ συνάντησις τῶν ἑδρῶν, ἤτοι τῶν ἐπιπέδων, λέγεται *κορυφὴ* τῆς στερεᾶς γωνίας.

Ἡ στερεὰ γωνία λέγεται *τρίεδρος*, ἐὰν ἀποτελῆται ἀπὸ τρεῖς ἕδρας. Αἱ στερεαὶ γωνίαι τοῦ κύβου εἶναι τρίεδροι. Ὁ κύβος ἔχει 8 τριέδρους στερεὰς γωνίας καὶ ἑπομένως 8 κορυφάς.

Ἀσκήσεις. 1) Ποῖον σχῆμα σχηματίζουσιν οἱ τοῖχοι τοῦ δωματίου ἀνὰ δύο συναντώμενοι ;

2) Δείξατε μίαν δίεδρον γωνίαν τοῦ δωματίου. Δείξατε τὰς ἕδρας καὶ τὴν ἀκμὴν αὐτῆς.

3) Ποῦ ἀλλοῦ βλέπετε διέδρους γωνίας ;

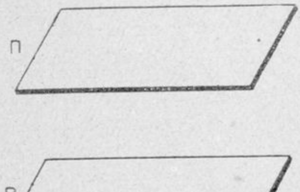
4) Δείξατε μίαν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν τοῦ δωματίου καὶ τοῦ πίνακος. Δείξατε τὰς ἕδρας καὶ τὴν κορυφὴν αὐτῆς.

5) Ποῦ ἀλλοῦ βλέπετε στερεὰς γωνίας ;

ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑ

Παράλληλα, κάθετα καὶ πλάγια.

45. Ὅταν δύο ἐπίπεδα δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσι, λέγονται *παράλληλα*.

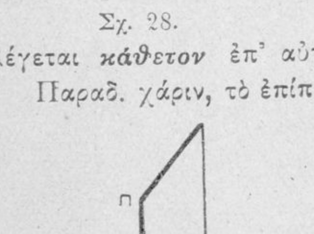


Σχ. 28.

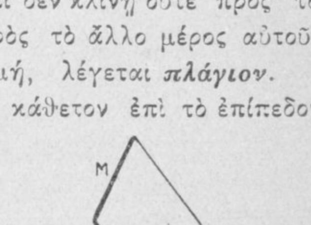
Παραδ. χάριν, τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ (σχ. 28) εἶναι παράλληλα. Ὡσαύτως οἱ ἀπέναντι τοῖχοι τῶν δωματίων, αἱ ἀπέναντι ἕδραι τοῦ κύβου εἶνε ἐπίπεδα παράλληλα.

46. Ὅταν ἐπίπεδόν τι συναντᾷ ἄλλο ἐπίπεδον καὶ δὲν κλίνῃ οὔτε πρὸς τὸ ἓν οὔτε πρὸς τὸ ἄλλο μέρος αὐτοῦ, λέγεται *κάθετον* ἐπ' αὐτό· εἰ δὲ μή, λέγεται *πλάγιον*.

Παραδ. χάριν, τὸ ἐπίπεδον Π εἶνε κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον



Σχ. 29.

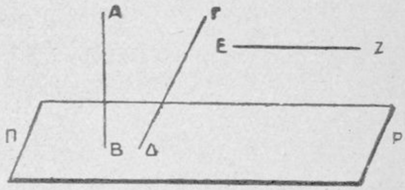


Σχ. 30.

Ρ (σχ. 29)· τὸ δὲ ἐπίπεδον Μ εἶνε πλάγιον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ν (σχ. 30).

47. Καὶ εὐθεῖα λέγεται πρὸς ἐπίπεδον ***παράλληλος***, ὅταν δὲν συναντᾷ αὐτό· ***κάθετος*** δέ, ὅταν πρὸς κανὲν μέρος αὐτοῦ δὲν κλίνῃ· ἄλλως λέγεται ***πλαγία***.

Παραδ. χάριν, πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΠΡ (σχ. 31) ἡ εὐθεῖα ΕΖ εἶνε παράλληλος, ἡ ΑΒ κάθετος καὶ ἡ ΓΔ πλαγία.



Σχ. 31.

Τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον εὐθεῖά τις συναντᾷ ἐπίπεδον, λέγεται ***ποὺς*** τῆς εὐθείας.

Ἀσκήσεις.

1) Ποίαν σχέσιν ἔχουν οἱ τοῖχοι τῶν δωματίων πρὸς τὸ πάτωμα;

2) Ποίαν θέσιν ἔχει ἡ ὀροφὴ (ταβάνι) πρὸς τὸ πάτωμα ;

3) Θέσατε βιβλίον τι καθέτως καὶ πλαγίως ἐπὶ τοῦ θρανίου, ἐπὶ τοῦ πίνακος, ἐπὶ τοῦ τοίχου καὶ ἐπὶ τοῦ πατώματος.

4) Ποίαν θέσιν ἔχουν οἱ πόδες τῆς τραπέζης πρὸς τὸ πάτωμα, ὅπου στηρίζονται ;

5) Ποίαν θέσιν ἔχει ἡ γραφὶς πρὸς τὴν τράπεζαν ἢ τὸ θρανίον, ὅταν γράφωμεν ;

6) Δείξατε τὰς καθέτους ἀκμὰς ἐπὶ μιᾶς ἕδρας τοῦ κύβου, καθὼς καὶ τὰς παραλλήλους πρὸς αὐτήν.

7) Δείξατε τὰς καθέτους ἀκμὰς τοῦ δωματίου ἐπὶ τοῦ πατώματος, καθὼς καὶ τὰς παραλλήλους πρὸς αὐτό.

Στάθμη.

Ἐπίπεδον κατακόρυφον, ὁριζόντιον, κεκλιμένον. Εὐθεῖα κατακόρυφος, ὁριζόντιος, κεκλιμένη.

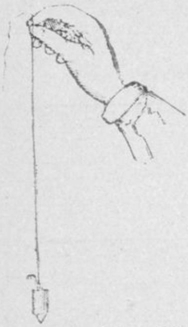
48. Τὸ σχῆμα 32 παριστᾷ γεωμετρικὸν ὄργανον, τὸ ὁποῖον λέγεται ***στάθμη*** [1]).

Ἡ στάθμη ἀποτελεῖται ἀπὸ νῆμα ΑΓ καὶ ἀπὸ τὸ μετάλλινον βάρος αὐτοῦ Β. Ἡ διύθυνσις, τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ νῆμα τῆς στάθμης κρατούμενον ἀπὸ τὸ ἄλλο ἄκρον αὐτοῦ Α, λέγεται ***κατακόρυφος***.

49. Πᾶν ἐπίπεδον, ἔχον τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος τῆς στά-

(1) Οἱ τεχνῖται ὀνομάζουσι τοῦτο ράμμα.

θμης, ἤτοι τῆς κατακορύφου, λέγεται ***κατακόρυφον ἐπίπεδον***.



Σχ. 32

Παραδ. χάριν, οἱ τοῖχοι τῶν δωματίων εἶνε κατακόρυφα ἐπίπεδα· διότι οἱ κτίσται φροντίζουν κατὰ τὴν κτίσιν νὰ δίδουν εἰς αὐτοὺς τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος τῆς στάθμης.

Καὶ πᾶσα εὐθεῖα (ῥάβδος, στήλη κτλ.), ἔχουσα τὴν διεύθυνσιν τῆς κατακορύφου, λέγεται ***κατακόρυφος*** (1).

50. Ἐὰν ἐντὸς δοχείου χύσωμεν ὕδωρ καὶ ἀφήσωμεν αὐτὸ νὰ ἠρεμήσῃ, ἡ διεύθυνσις, τὴν ὁποίαν θὰ λάβῃ ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος, λέγεται ***ὁριζόντιον ἐπίπεδον***.

Πᾶν ἐπίπεδον, ἔχον τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ἐντὸς δοχείου ἠρεμοῦντος ὕδατος, λέγεται ***ὁριζόντιον ἐπίπεδον***. Καὶ πᾶσα εὐθεῖα, ἔχουσα τοιαύτην διεύθυνσιν, λέγεται ***ὁριζόντιος***.

Παραδ. χάριν, τὸ ἐπίπεδον τοῦ πατώματος, τῆς ὀροφῆς (ταβάνι), τῆς τραπέζης κτλ. εἶνε ***ὁριζόντιον***. Ὡσαύτως, τοποθετουμένου τοῦ κύβου ἐπὶ τραπέζης, ἡ ἄνω καὶ κάτω ἕδρα αὐτοῦ εἶνε ὁριζόντιοι, αἱ δὲ ἄλλαι ἕδραι αὐτοῦ εἶνε κατακόρυφοι. Ἐκ τῶν ἀκμῶν δὲ αὐτοῦ αἱ μὲν κείμεναι ἐπὶ τῆς ἄνω καὶ κάτω ἕδρας εἶναι ὁριζόντιοι, αἱ δὲ πέριξ κατακόρυφοι. Τὰ σύρματα τῶν τηλεγράφων καὶ τηλεφώνων παριστῶσι (συνήθως) εὐθείας ὁριζοντίους, οἱ δὲ στῦλοι, ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζονται, εἶναι (συνήθως) κατακόρυφοι.

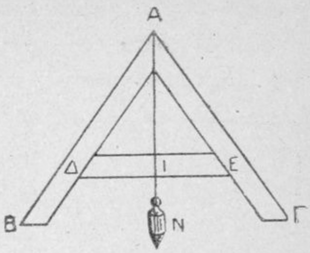
51. Πᾶν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον οὔτε κατακόρυφον εἶνε οὔτε ὁριζόντιον, λέγεται ***κεκλιμένον ἐπίπεδον***. Καὶ πᾶσα εὐθεῖα, ἡ ὁποία οὔτε κατακόρυφος εἶνε οὔτε ὁριζόντιος, λέγεται ***κεκλιμένη***.

Διὰ κεκλιμένων ἐπιπέδων κατασκευάζουσι συνήθως τὴν στέγην τῶν οἰκοδομῶν· ὡσαύτως κεκλιμένον ἐπίπεδον εἶνε καὶ ἡ σανὶς τῶν σχολικῶν θρανίων, ἐπὶ τῆς ὁποίας γράφομεν.

Σημ. Οἱ τεχνῖται διὰ νὰ ἴδωσιν, ἂν ἐπίπεδόν τι εἶνε ὁρι-

(1) Δὲν πρέπει νὰ συγχέωνται τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον πρὸς τὸ κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ ἄλλου καὶ ἡ κατακόρυφος εὐθεῖα πρὸς τὴν κάθετον ἐπὶ ἄλλην εὐθεῖαν.

ζόντιον, μεταχειρίζονται τὸ **ἀλφάδιον** (σχ. 33), τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἴσων στενῶν σανίδων ΑΒ καὶ ΑΓ συνδεομένων διὰ τρίτης τινὸς ΔΕ· ἐκ δὲ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ κρέμαται τὸ νῆμα τῆς μστάθμης ΑΝ. Τοὺς πόδας Β καὶ Γ τοῦ ἀλφαδίου στηρίζουσιν ἐπὶ τοῦ δοκιμαζομένου ἐπιπέδου εἰς διάφορα μέρη αὐτοῦ καί, ἂν τὸ νῆμα τῆς στάθμης διέρχεται



Σχ. 33.

διὰ τῆς ἐν τῷ μέσῳ τῆς σανίδος ΔΕ κεχαραγμένης ἐντομῆς Ι, συμπεραίνουσιν ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶνε ὁριζόντιον· εἰ δὲ μή, ὑψοῦσιν ἢ ταπεινοῦσι τὰ ἄκρα τοῦ ἐπιπέδου ἀναλόγως τῶν περιστάσεων, μέχρι οὗ τὸ νῆμα διέλθῃ διὰ τῆς ἐντομῆς. Διὰ τοιούτων δὲ δοκιμῶν κατασκευάζουσι τὰ πατώματα τῶν οἰκιῶν ὁριζόντια.

Διὰ τὰ ἔχοντα μικρὰς ἐκτάσεις ἐπίπεδα μεταχειρίζονται οἱ τεχνῖται τὴν ἀεροστάθμην (¹).

Ἀσκήσεις.

1) Θέσατε μίαν γραφίδα κατακορύφως, ὁριζοντίως καὶ κεκλιμένως.

2) Θέσατε ἓν βιβλίον κατακορύφως, ὁριζοντίως καὶ κεκλιμένως.

3) Δείξατε τὰς ὁριζοντίους καὶ κατακορύφους ἀκμὰς τοῦ δωματίου.

4) Ποίαν διεύθυνσιν ἔχει ὁ μελανοπίναξ στηριζόμενος ἐπὶ τρίποδος καὶ ποίαν ἐπὶ τοίχου;

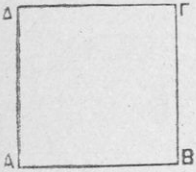
ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΝ

52. Ἐὰν κόψωμεν τεμάχιον χάρτου, ὅση εἶνε ἀκριβῶς ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου, καὶ ἐπιθέσωμεν τοῦτο ἐπὶ ὅλων τῶν ἄλλων ἑδρῶν αὐτοῦ, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἐφαρμόζει ἀκριβῶς ἐπ' αὐτῶν. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι

(1) Ἡ ἀεροστάθμη, ἐὰν δὲν εἶνε γνωστὴ εἰς τοὺς μαθητὰς ἐκ τῆς Φυσικῆς, ἀφίεται ἡ περιγραφὴ αὐτῆς εἰς τὸν διδάσκοντα.

Ὅλαι αἱ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι μεταξύ των (ἐδ. 17), καθὼς καὶ ὅλαι αἱ ἀκμαὶ αὐτοῦ (τοῦτο εἴπομεν καὶ ἐν τῷ ἐδαφίῳ 16).

53. Αἱ ἕδραι τοῦ κύβου ἔχουσι τὸ σχῆμα 34, τὸ ὁποῖον λέγεται ***τετράγωνον***.



Σχ. 34.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ λέγονται ***πλευραὶ*** τοῦ τετραγώνου καὶ εἶνε αὗται ἴσαι μεταξύ των ὡς ἴσαι πρὸς τὰς ἀκμὰς τοῦ κύβου. Αἱ δὲ γωνίαι Α, Β, Γ, Δ εἶνε ὀρθαὶ (ἐδ. 27). Ὥστε τὸ τετράγωνον ἔχει καὶ τὰς τέσσαρας πλευράς του ἴσας μεταξύ των καὶ τὰς γωνίας του ὀρθὰς καὶ ἑπομένως ἴσας (ἐδάφ. 26). Πρὸς δὲ ἔχει καὶ τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους.

Τὸ σχῆμα τοῦ τετραγώνου ἔχουν συνήθως τὰ ῥινόμακτρα (μανδήλια), τὰ χειρόμακτρα (πετσέται), αἱ πλάκες, διὰ τῶν ὁποίων στρώνονται προαύλια, πατώματα κτλ.

ΣΥΓΚΕΦΑΛΑΙΩΣΙΣ ΤΩΝ ΠΕΡΙ ΚΥΒΟΥ

54. Ὁ κύβος περιορίζεται ἀπὸ 6 ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα λέγονται *ἕδραι*.

Αἱ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι τετράγωνα ἴσα μεταξύ των καὶ ἀποτελοῦσιν ὅλα ὁμοῦ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύβου. Αἱ ἀπέναντι ἕδραι τοῦ κύβου εἶνε παράλληλοι, καθὼς καὶ αἱ ἀπέναντι ἀκμαί.

Ὁ κύβος ἔχει 12 ἀκμὰς ἴσας μεταξύ των, 24 ἐπιπέδους γωνίας ὀρθὰς (τέσσαρας εἰς ἑκάστην ἕδραν), 12 διέδρους γωνίας, 8 τριέδρους στερεὰς γωνίας καὶ 8 κορυφάς.

Ὁ κύβος τοποθετούμενος ἐπὶ τραπέζης ἔχει τὴν ἄνω καὶ κάτω ἕδραν αὐτοῦ ὁριζοντίας, τὰς δὲ ἄλλας κατακορύφους. Ἐκ τῶν ἀκμῶν δὲ αὐτοῦ αἱ μὲν κείμεναι ἐπὶ τῆς ἄνω καὶ κάτω ἕδρας εἶνε ὁριζόντιοι, αἱ δὲ πέριξ κατακόρυφοι.

Τὸ σχῆμα τοῦ κύβου ἔχουν κιβώτια, κυτία καὶ ἄλλα τινὰ ἀντικείμενα.

55. Ἀνωτέρω ἐξητάσαμεν τὸ σχῆμα τῶν διαφόρων μερῶν τοῦ κύβου, χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ὕλην, ἐκ τῆς ὁποίας κατεσκευάσθη ὁ κύβος. Ὅταν λοιπὸν ἐξετάζωμεν οὕτω πως σῶ-

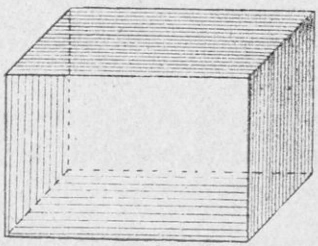
μά τι, χωρὶς νὰ ἐνδιαφερώμεθα περὶ τῆς ὕλης του, καλοῦμεν αὐτὸ **γεωμετρικὸν** ἢ **στερεὸν σῶμα**. Ὥστε ὁ κύβος ὑπὸ τὴν ἔποψιν ταύτην εἶναι στερεὸν σῶμα.

Ἡ ἐξέτασις ἐν γένει τῶν γραμμῶν, τῶν γωνιῶν, τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν στερεῶν σωμάτων ὡς πρὸς τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν εἶνε ἔργον τῆς Γεωμετρίας.

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

Ἐποπτεία αὐτοῦ.

56. Τὸ στερεὸν τοῦτο σῶμα (1) (τὸ σχῆμα 35 παριστᾷ τοῦτο) λέγεται **ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον** καὶ περατοῦται, ὡς παρατηροῦμεν, εἰς 6 ἐπιπέδους ἐπιφανείας ἢ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα λέγονται ἕδραι.



Σχ. 35.

Αἱ 6 ἕδραι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἀποτελοῦσιν ὁμοῦ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ.

Αἱ εὐθεῖαι γραμμαί, κατὰ τὰς ὁποίας συναντῶνται αἱ ἕδραι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἀνὰ δύο λέγονται **ἀκμαὶ** ἢ **κόψεις** καὶ εἶναι 12 τοιαῦται.

Αἱ ἀκμαὶ αὗται συναντώμεναι ἀνὰ δύο σχηματίζουσιν 24 ἐπιπέδους γωνίας ὀρθὰς (τέσσαρας εἰς ἑκάστην ἕδραν). Ὡσαύτως παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει 12 διέδρους γωνίας, 8 τριέδρους στερεὰς γωνίας καὶ 8 κορυφάς.

(1) Ὁ διδάσκων δεικνύει εἰς τοὺς μαθητὰς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τοποθετούμενον ἐπὶ τραπέζης ἔχει τὴν ἄνω καὶ κάτω ἕδραν αὐτοῦ ὁριζοντίαν, τὰς δὲ ἄλλας κατακορύφους. Ἐκ τῶν ἀκμῶν δὲ αὐτοῦ αἱ μὲν κείμεναι ἐπὶ τῆς ἄνω καὶ κάτω ἕδρας εἶνε ὁριζόντιοι, αἱ δὲ πέριξ κατακόρυφοι.

57. Ἐὰν κόψωμεν τεμάχιον χάρτου, ὅση εἶνε ἀκριβῶς ἡ ἄνω ἕδρα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, καὶ ἐπιθέσωμεν τοῦτο ἐπὶ τῶν ἄλλων ἑδρῶν αὐτοῦ, θὰ ἴδωμεν ὅτι μόνον ἐπὶ τῆς κάτω ἕδρας ἐφαρμόζει ἀκριβῶς· ἐὰν κόψωμεν πάλιν τεμάχιον χάρτου, ὅση εἶνε ἀκριβῶς ἡ ἔμπροσθεν ἕδρα αὐτοῦ, θὰ ἴδωμεν ὅτι τοῦτο ἐφαρμόζει ἀκριβῶς μόνον ἐπὶ τῆς ὄπισθεν ἕδρας· ἐὰν τέλος κόψωμεν τεμάχιον χάρτου, ὅση εἶνε ἀκριβῶς ἡ πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἕδρα, θὰ ἴδωμεν ὅτι τοῦτο ἐφαρμόζει ἀκριβῶς μόνον ἐπὶ τῆς δεξιᾶς ἕδρας. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι

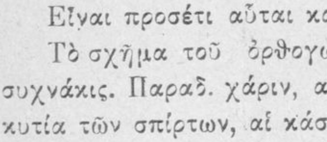
Αἱ ἀπέναντι ἕδραι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι· καθὼς καὶ αἱ ἀπέναντι ἀκμαί.

Εἶναι προσέτι αὗται καὶ παράλληλοι.

Τὸ σχῆμα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἀπαντῶμεν συχνάκις. Παραδ. χάριν, αἱ ὀπτόπλινθοι (τοῦβλα), τὰ ἐν χρήσει κυτία τῶν σπίρτων, αἱ κάσσαι τοῦ πετρελαίου, αἱ ἐν χρήσει πλάκες τοῦ σάπωνος τὰ δωμάτια (συνήθως) κτλ. ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΝ

58. Αἱ ἕδραι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχουν τὸ σχῆμα 36, τὸ ὁποῖον λέγεται ***ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον*** ἢ ἁπλῶς ***ὀρθογώνιον***.



Σχ. 36.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ λέγονται ***πλευραὶ*** τοῦ ὀρθογωνίου καὶ εἶνε ἄνισοι μεταξύ των, μόνον αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶνε ἴσαι καὶ παράλληλοι. Αἱ δὲ γωνίαι του Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὀρθαὶ καὶ ἑπομένως ἴσαι μεταξύ των.

Τὸ σχῆμα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἀπαντῶμεν συχνάκις. Παραδ. χάριν, τὰ φύλλα τῶν βιβλίων, οἱ ὑελοπίνακες (τζάμια), ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πατώματος (συνήθως), τῶν τοίχων, τῶν θυρῶν κτλ. ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου.

Σύγκρισις ὀρθογωνίου καὶ τετραγώνου, ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ κύβου.

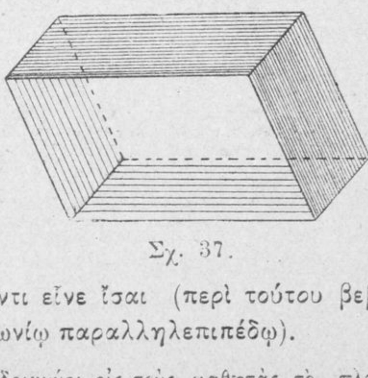
59. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ τὸ τετράγωνον ἔχουν τὰς γωνίας των ὀρθὰς καὶ ἑπομένως ἴσας μεταξύ των, διαφέρουν μόνον κατὰ τὰς πλευράς των· διότι τοῦ τετραγώνου καὶ αἱ τέσσαρες πλευραὶ εἶνε ἴσαι μεταξύ των, τοῦ δὲ ὀρθογωνίου μόνον αἱ ἀπέναντι εἶνε ἴσαι. Ἔχουν δὲ καὶ τὰ δύο σχήματα τὰς ἀπέναντι πλευράς των παραλλήλους.

Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει τόσας ἕδρας, ἀκμάς, ὀρθὰς ἐπιπέδους γωνίας, διέδρους καὶ στερεὰς γωνίας, ὅσας ἔχει καὶ ὁ κύβος. Διαφέρει δὲ τοῦ κύβου μόνον κατὰ τὸ σχῆμα τῶν ἑδρῶν· διότι αἱ ἕδραι τοῦ κύβου ἔχουν σχῆμα τετραγώνου, αἱ δὲ ἕδραι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Πρὸς δὲ αἱ ἕδραι, καθὼς καὶ αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου εἶνε ἴσαι μεταξύ των, τοῦ δὲ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μόνον αἱ ἀπέναντι εἶνε ἴσαι. Ἔχουν δὲ καὶ τὰ δύο στερεὰ τὰς ἀπέναντι ἕδρας αὐτῶν παραλλήλους.

ΠΛΑΓΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

Ἐποπτεία αὐτοῦ.

60. Τὸ στερεὸν τοῦτο σῶμα (¹) (τὸ σχῆμα 37 παριστᾷ τοῦτο) λέγεται ***πλάγιον ἢ κεκλιμένον παραλληλεπίπεδον*** καὶ περατοῦται, ὡς παρατηροῦμεν, εἰς 6 ἐπίπεδα ἢ ἕδρας, ἐκ τῶν ὁποίων



Σχ. 37.

μόνον αἱ ἀπέναντι εἶνε ἴσαι (περὶ τούτου βεβαιούμεθα, ὅπως καὶ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ παραλληλεπιπέδῳ).

1) Ὁ διδάσκων δεικνύει εἰς τοὺς μαθητὰς τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον.

Αἱ 6 ἕδραι τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἀποτελοῦσιν ὁμοῦ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ.

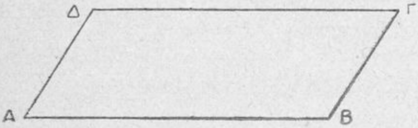
Ἔχει δέ, ὡς ὁ κύβος καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, 12 ἀκμάς, 24 ἐπιπέδους γωνίας οὐχὶ ὀρθὰς (ἀλλὰ 12 ἀμβλείας καὶ 12 ὀξείας), 12 διέδρους γωνίας, 8 τριέδρους στερεὰς γωνίας καὶ 8 κορυφάς.

Τὸ σχῆμα τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἀπαντῶμεν συνήθως εἰς τὰ τεμάχια γλυκισμάτων τινῶν.

Πλάγιον παραλληλόγραμμον.

61. Αἱ ἕδραι τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἔχουν τὸ σχῆμα 38, τὸ ὁποῖον λέγεται *πλάγιον παραλληλόγραμμον*.

Ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ μόνον αἱ ἀπέναντι εἶνε ἴσαι καὶ παράλληλοι.



Σχ. 38.

Ἐπίσης ἐκ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ Α,Β,Γ,Δ μόνον αἱ ἀπέναντι εἶνε ἴσαι. Διότι, ἐὰν ἀποκόψωμεν τὰς γωνίας Α καὶ Β καὶ τὰς θέσωμεν ἐπὶ τῶν ἀπέναντι αὐτῶν γωνιῶν Γ καὶ Δ, θὰ ἴδωμεν ὅτι αἱ πλευραὶ αὐτῶν θὰ ἐφαρμόσωσιν (ἐδ. 23).

Ἀσκήσεις.

1) Κατὰ τί ὁμοιάζει καὶ κατὰ τί διαφέρει τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ὀρθογώνιον τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου;

2) Γράψατε ἐπὶ τοῦ πίνακος ἓν πλάγιον παραλληλόγραμμον, ἓν τετράγωνον (περίπου) καὶ ἓν ὀρθογώνιον.

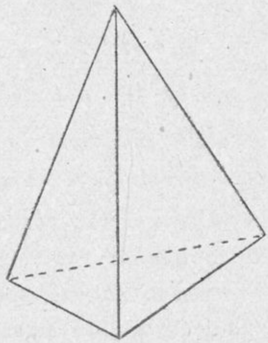
3) Γράψατε ἐπὶ τοῦ πίνακος ἕνα κύβον, ἓν ὀρθογώνιον καὶ ἓν πλάγιον παραλληλεπίπεδον.

ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

1ον ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΣ

Ἐποπτεία αὐτῆς.

62. Τὸ στερεὸν τοῦτο σῶμα [1] (τὸ σχῆμα 39 παριστᾷ τοῦτο) λέγεται ***τριγωνικὴ πυραμὶς*** καὶ περατοῦται, ὡς παρατηροῦμεν, εἰς 4 ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα λέγονται *ἕδραι* αὐτῆς.



Εἰκ. 39.

Αἱ τέσσαρες ἕδραι τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ἀποτελοῦσιν ὁμοῦ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς.

Αἱ εὐθεῖαι, κατὰ τὰς ὁποίας συναντῶνται αἱ ἕδραι αὐτῆς ἀνὰ δύο, λέγονται ***ἀκμαί***. Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει, ὡς παρατηροῦμεν, 6 ἀκμάς, 6 διέδρους γωνίας, 4 τριέδρους στερεὰς γωνίας καὶ 4 κορυφάς.

Ἐὰν τοποθετήσωμεν τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ἐπί τινος τραπέζης διὰ μιᾶς τῶν ἑδρῶν αὐτῆς, τότε ἡ ἕδρα, διὰ τῆς ὁποίας στηρίζεται, λέγεται *βάσις* τῆς πυραμίδος καὶ ἔχει ὁριζοντίαν διεύθυνσιν, αἱ δὲ ἄλλαι ἕδραι αὐτῆς ἔχουν πλαγίαν ἢ κεκλιμένην καὶ συναντῶνται πρὸς τὰ ἄνω εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται κυρίως ***κορυφὴ*** τῆς πυραμίδος. Ἐκ τῶν ἀκμῶν δὲ αὐτῆς αἱ μὲν κείμεναι ἐπὶ τῆς βάσεως εἶνε ὁριζόντιοι, αἱ δὲ πέριξ εἶνε πλάγιαι.

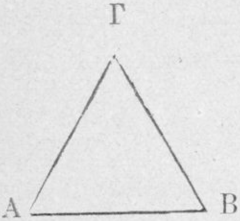
---

1) Ὁ διδάσκων δεικνύει εἰς τοὺς μαθητὰς τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα.

ΤΡΙΓΩΝΟΝ

Εἴδη τριγώνων.

63. Αἱ ἕδραι τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ἔχουν τὸ σχῆμα 40, τὸ ὁποῖον ἔχει τρεῖς γωνίας Α, Β, Γ καὶ τρεῖς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ καὶ ΓΑ, αἵτινες λέγονται *πλευραί*, διὰ τοῦτο τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται ***τρίγωνον*** ἢ ***τρίπλευρον***.

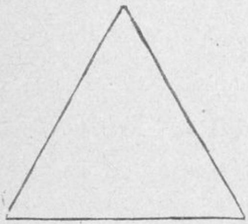


Σχ. 40.

64. Διακρίνομεν διάφορα εἴδη τριγώνων ἐκ τῶν πλευρῶν καὶ ἐκ τῶν γωνιῶν αὐτῶν.

1ον Ἐκ τῶν πλευρῶν τὸ τρίγωνον λέγεται

Ἰσόπλευρον, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας. Τὸ σχῆμα 41 παριστᾷ ἰσόπλευρον τρίγωνον. Τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι αὐτοῦ εἶνε ἴσαι. Διότι, ἂν ἀποκόψωμεν μίαν ἐξ αὐτῶν καὶ τὴν ἐπιθέσωμεν ἐπὶ τῶν ἄλλων γωνιῶν, θὰ ἴδωμεν ὅτι αἱ πλευραὶ αὐτῶν θὰ ἐφαρμόζωσι καὶ ἐπομένως εἶνε ἴσαι (ἐδ. 23).


Σχ. 41.

Ἰσοσκελές, ἐὰν ἔχῃ δύο μόνον πλευρὰς ἴσας. Τὸ σχῆμα 41 παριστᾷ ἰσοσκελὲς τρίγωνον. Τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαι εἶνε ἴσαι. Τοῦτο μανθάνομεν, ὅπως καὶ ἀνωτέρω.

Τὸ σχῆμα τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπαντῶμεν πολλάκις εἰς τὰ ἀετώματα τῶν οἰκοδομῶν, τῶν θυρῶν καὶ παραθύρων (σχ. 42).


Σχ. 42.

Σκαληνόν, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτοῦ ἀνίσους. Τὸ σχῆμα 43 παριστᾷ σκαληνὸν τρίγωνον. Τοῦ σκαληνοῦ τριγώνου καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι του εἶναι ἄνισοι μεταξύ των. Περὶ τούτου βεβαιούμεθα ὡς ἀνωτέρω.

2ον Ἐκ τῶν γωνιῶν τὸ τρίγωνον λέγεται

Ὀξυγώνιον, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς γωνίας αὐτοῦ ὀξείας. Τὰ ἀνωτέρω σχήματα 40 καὶ 41 παριστῶσιν ὀξυγώνια τρίγωνα.

Ὀρθογώνιον, ἐὰν ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθήν. Τὸ σχῆμα 44 παριστᾷ ὀρθογώνιον τρίγωνον. Ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρὰ λέγεται *ὑποτείνουσα* τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

Σχ. 43.

Ἀμβλυγώνιον, ἐὰν ἔχῃ μίαν ἀμβλεῖαν γωνίαν. Τὸ σχῆμα 46 παριστᾷ ἀμβλυγώνιον τρίγωνον.

65. **Περίμετρος** τριγώνου λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του (ἐδ. 18).

Σχ. 44.

66. **Βάσις** τριγώνου λέγεται μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, τοῦ δὲ ἰσοσκελοῦς τριγώνου λαμβάνεται συνήθως ὡς βάσις ἡ πρὸς τὰς ἄλλας ἄνισος πλευρά.

Ὕψος τριγώνου λέγεται ἡ ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη κάθετος ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς. Ἡ κάθετος αὕτη δύναται νὰ πέσῃ ἢ ἐπὶ τὴν βάσιν ἢ ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς αὐτῆς.

Παραδ. χάριν, εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 45), ἂν λάβωμεν ὡς βάσιν τὴν ΑΒ, ὕψος θὰ εἶνε ἡ κάθετος ΓΔ. Εἰς δὲ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ (σχ. 46) ἂν λάβωμεν ὡς βάσιν τὴν ΔΕ, ὕψος θὰ εἶνε ἡ κάθετος ΖΗ, ἥτις πίπτει ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς βάσεως.

Σχ. 45.

Σχ. 46.

Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου βάσιν καὶ ὕψος λαμβάνομεν συνήθως τὰς δύο καθέτους πλευρὰς αὐτοῦ.

67. Τὸ ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἔχει τὴν ἑξῆς ἰδιότητα. ***Διαιρεῖ τὴν βάσιν καὶ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο ἴσα μέρη.***

Παραδ. χάριν, εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 45) εἶνε ἡ ΑΔ ἴση μὲ τὴν ΔΒ καὶ ἡ γωνία ΑΓΔ ἴση μὲ τὴν ΔΓΒ. Διότι, ἐὰν ἀποκόψωμεν τὸ ἐκ χάρτου τρίγωνον ΑΒΓ καὶ διπλώσωμεν αὐτὸ κατὰ τὴν ΓΔ, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ ΔΑ θὰ ἐφαρμόσῃ ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς ΔΒ καὶ ἡ ΓΑ ἐπὶ τῆς ΓΒ.

68. Καὶ τἀνάπαλιν. ***Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου φέρωμεν εὐθεῖαν εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως, αὕτη εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν καὶ διαιρεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο γωνίας ἴσας.***

Περὶ τούτου βεβαιούμεθα, ὅπως καὶ ἀνωτέρω.

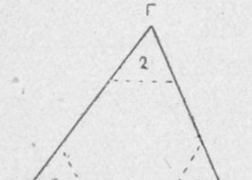
Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν τριγώνων.

69. Πάντα τὰ τρίγωνα ἔχουν τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

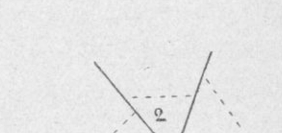
1ον ***Ἑκάστη πλευρὰ παντὸς τριγώνου εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.***

Διότι ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ εἶνε εὐθεῖα, ἐνῷ αἱ δύο ἄλλαι ἀποτελοῦσι τεθλασμένην γραμμὴν καὶ ἑπομένως ἡ εὐθεῖα εἶνε μικροτέρα τῆς τεθλασμένης, τῆς ἐχούσης τὰ αὐτὰ ἄκρα.

2ον ***Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς.***



Σχ. 47.



Σχ. 48.

Διότι, ἐὰν κατασκευάσωμεν ἐκ χάρτου τρίγωνόν τι, ἔστω τὸ ΑΒΓ (σχ. 47), καὶ ἔπειτα ἀποκόψωμεν τὰς γωνίας του Α, Γ, Β καὶ θέσωμεν αὐτὰς ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΕ (σχ. 48) οὕτως, ὥστε νὰ ἐφαρμόσῃ ἡ μία πλευρὰ τῆς γωνίας Α ἐπὶ τῆς ΖΔ, ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης πλευρᾶς αὐτῆς νὰ ἐφαρμόσῃ ἡ μία πλευρὰ τῆς γωνίας Γ, ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης πλευρᾶς αὐτῆς νὰ ἐφαρμόσῃ ἡ μία πλευρὰ τῆς γωνί[illegible]σῃ ἐπὶ τῆς

ΖΕ καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τούτων γωνιῶν, τῶν σημειουμένων διὰ τῶν ψηφίων 1, 2, 3, θὰ εἶνε ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς (ἐδ. 32).

70. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι

Ἐὰν μία γωνία τριγώνου τινὸς εἶναι ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα, αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι αὐτοῦ θὰ εἶνε ὀξεῖαι.

Ἀσκήσεις.

1) Τριγώνου τινὸς ἡ μία γωνία εἶνε $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς, ἡ ἄλλη $\frac{4}{5}$ αὐτῆς. Πόση εἶνε ἡ τρίτη γωνία αὐτοῦ;

Εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε $\frac{8}{15}$ τῆς ὀρθῆς. Ἐὰν καὶ ἄλλο τρίγωνον ἔχῃ τὰς αὐτὰς ἀνωτέρω δοθείσας γωνίας, ἡ τρίτη γωνία αὐτοῦ θὰ εἶνε πάλιν ἡ αὐτή, ἤτοι $\frac{8}{15}$ τῆς ὀρθῆς. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι

71. ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας, θὰ ἔχωσι καὶ τὴν τρίτην γωνίαν ἴσην.***

2) Τριγώνου τινὸς ἡ μία γωνία εἶνε $1\frac{1}{4}$ τῆς ὀρθῆς, ἡ ἄλλη γωνία εἶνε τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς γωνίας ταύτης. Πόση εἶνε ἡ τρίτη γωνία αὐτοῦ; (Λύσις $\frac{1}{4}$ τῆς ὀρθῆς).

3) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶνε $\frac{1}{5}$ τῆς ὀρθῆς. Πόση εἶνε ἡ ἄλλη ὀξεῖα γωνία αὐτοῦ;

4) Ἑκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶνε $\frac{5}{9}$ τῆς ὀρθῆς. Πόση εἶνε ἡ ἄνισος πρὸς αὐτὰς γωνία;

(Λύσις $\frac{8}{9}$ τῆς ὀρθῆς).

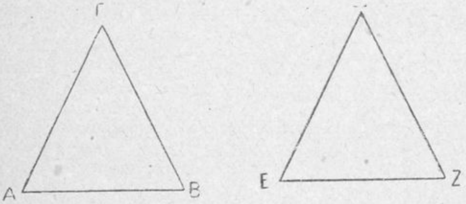
5) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως αὐτοῦ γωνία εἶνε $\frac{3}{8}$ τῆς ὀρθῆς. Πόση εἶναι ἑκάστη τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ; (Λύσις $\frac{13}{16}$ τῆς ὀρθῆς).

Πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶνε ἑκάστη γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ;

ΙΣΟΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

72. Διὰ νὰ μάθωμεν, ἂν δύο τρίγωνα εἶνε ἴσα, πρέπει νὰ ἐπιθέσωμεν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου καί, ἂν ἐφαρμόζωσιν ἀκριβῶς, συμπεραίνομεν ὅτι εἶνε ἴσα (ἐδ. 17). Ἀλλ' ὑπάρχουν καὶ περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ γνωρίζωμεν, ἂν δύο τρίγωνα εἶνε ἴσα, χωρὶς νὰ ἐπιθέσωμεν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Αἱ περιπτώσεις αὗται εἶνε αἱ ἑξῆς.

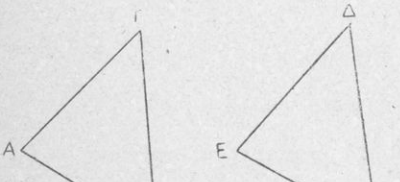
72. ***Δύο τρίγωνα εἶνε ἴσα, ἐὰν ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην.***



Σχ. 49.

Παραδ. χάριν, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 49) θὰ εἶνε ἴσα, ἐὰν εἶνε ἡ πλευρὰ ΑΓ ἴση μὲ τὴν ΔΕ, ἡ ΒΓ ἴση μὲ τὴν ΔΖ καὶ ἡ γωνία Γ ἴση μὲ τὴν Δ.

73. ***Δύο τρίγωνα εἶνε ἴσα, ἐὰν ἔχωσι καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας.***

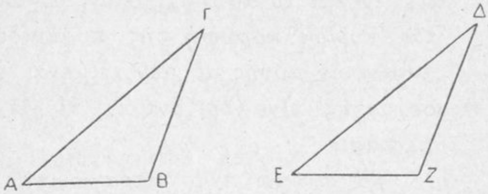


Σχ. 50.

Παραδ. χάριν, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 50) θὰ εἶνε ἴσα, ἐὰν εἶνε ἡ πλευρὰ ΑΒ ἴση μὲ τὴν ΕΖ, ἡ ΑΓ ἴση μὲ τὴν ΔΕ καὶ ἡ ΓΒ ἴση μὲ τὴν ΔΖ.

74. ***Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς κειμένας γωνίας ἴσας.***

Παραδ. χάριν, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 51) θὰ εἶνε ἴσα, ἐὰν εἶνε ἡ πλευρὰ ΑΒ ἴση μὲ τὴν ΕΖ, ἡ γωνία Α ἴση μὲ τὴν γωνίαν Ε καὶ ἡ γωνία Β ἴση μὲ τὴν Ζ.

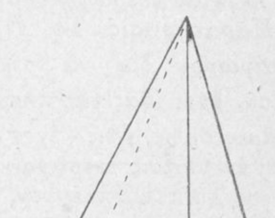


Σχ. 51.

2ον. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΣ

Ἐποπτεία αὐτῆς.

76. Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι τὰ διάφορα ἐπίπεδα τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος λέγονται *ἕδραι* καὶ ἔχουσι σχῆμα τριγώνου. Ὡσαύτως τὰ διάφορα ἐπίπεδα τοῦ στερεοῦ τούτου σώματος (1) (τὸ σχῆμα 52 παριστᾷ τοῦτο) λέγονται *ἕδραι* καὶ ἔχουσι σχῆμα τριγώνου ἐκτὸς μιᾶς ἕδρας, ἥτις ἔχει διάφορον σχῆμα. Τὸ στερεὸν τοῦτο σῶμα λέγεται *τετραγωνικὴ πυραμίς*. ***Βάσις*** αὐτῆς λαμβάνεται ἡ μὴ τριγωνικὴ ἕδρα.



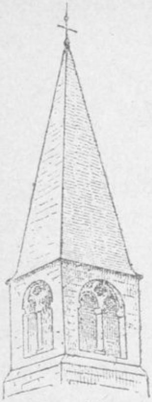
Σχ. 52.

Ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς περατοῦται, ὡς παρατηροῦμεν, εἰς 5 ἕδρας, αἵτινες ἀποτελοῦσιν ὁμοῦ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς. Ἔχει δὲ αὕτη 8 ἀκμάς, 8 διέδρους γωνίας, 5 στερεὰς γωνίας καὶ 5 κορυφάς.

Ἐὰν τοποθετήσωμεν τὴν πυραμίδα ταύτην διὰ τῆς βάσεώς της

(1) Ὁ διδάσκων δεικνύει εἰς τοὺς μαθητὰς τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα.

ἐπὶ τραπέζης, τότε ἡ βάσις της ἔχει διεύθυνσιν ὁριζόντιον, αἱ δὲ ἄλλαι ἕδραι αὐτῆς ἔχουν διεύθυνσιν πλαγίαν ἢ λοξὴν καὶ συναντῶνται πρὸς τὰ ἄνω εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται κυρίως ***κορυφὴ*** τῆς πυραμίδος. Ἐκ τῶν ἀκμῶν δὲ αὐτῆς αἱ μὲν κείμεναι ἐπὶ τῆς βάσεώς της εἶνε ὁριζόντιοι, αἱ δὲ πέριξ εἶνε πλάγιαι.



Σχ. 53.

Τὸ σχῆμα τῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος (ἰδίως) βλέπομεν ἐνίοτε εἰς τὰ κωδωνοστάσια τῶν ἐκκλησιῶν (σχ. 53), ἐπὶ μνημείων, ἐπὶ οἰκοδομῶν καὶ ἀλλαχοῦ καὶ χρησιμεύει τοῦτο πρὸς στολισμόν.

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΝ

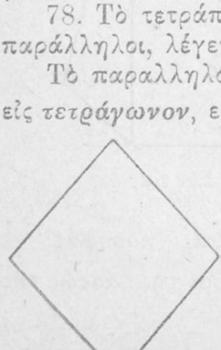
Εἴδη τετραπλεύρων.

77. Ἡ βάσις τῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ἔχει, ὡς παρατηροῦμεν, 4 γωνίας, Α, Β, Γ, Δ, (σχ. 52), καὶ 4 εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ ΔΑ, αἵτινες λέγονται ***πλευραί***, διὰ τοῦτο τὸ σχῆμα αὐτῆς λέγεται ***τετράπλευρον***.

Παρατήρησις. Τὸ τετράπλευρον δὲν λέγεται πάντοτε καὶ ***τετράγωνον***, διὰ νὰ μὴ συγχέεται μὲ τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἴσας τὰς πλευράς του καὶ ἴσας τὰς γωνίας του. Ἡ πυραμὶς ὅμως, ἥτις ἔχει βάσιν τετράπλευρον (οἱονδήποτε), λέγεται ἐν τούτοις ***τετραγωνική***.

78. Τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶνε παράλληλοι, λέγεται ***παραλληλόγραμμον***.

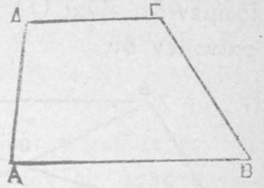
Τὸ παραλληλόγραμμον διακρίνεται εἰς τέσσαρα εἴδη, ἤτοι εἰς ***τετράγωνον***, εἰς ***ὀρθογώνιον***, εἰς ***πλάγιον*** (τὰ ὁποῖα ἐμάθομεν ἐκ τοῦ κύβου, ὀρθογωνίου καὶ πλαγίου παραλληλεπιπέδου) καὶ εἰς ***ῥόμβον*** (σχ.54),τοῦ ὁποίου καὶ αἱ τέσσαρες πλευραὶ εἶναι ἴσαι μεταξύ των, αἱ δὲ γωνίαι του ἄνισοι (αἱ ἀπέναντι μόνον εἶνε ἴσαι).



Σχ. 54.

Τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου δύο μόνον ἀπέναντι πλευραὶ εἶνε παράλληλοι, λέγεται ***τραπέζιον***. Τὸ σχῆμα 55 παριστᾷ τραπέζιον, παράλληλοι δὲ πλευραὶ αὐτοῦ εἶνε αἱ ΑΒ καὶ ΔΓ.

Ἐὰν τὸ τραπέζιον ἔχῃ τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς αὐτοῦ ΑΔ καὶ ΒΓ ἴσας, λέγεται *ἰσοσκελὲς τραπέζιον.*



Σχ. 55.

Τὸ σχῆμα τοῦ τραπεζίου ἀπαντῶμεν συνήθως εἰς τὴν στέγην τῶν οἰκιῶν.

Περίμετρος τοῦ τετραπλεύρου λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του.

Διαγώνιος αὐτοῦ λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἑνώνει δύο κορυφάς, χωρὶς νὰ εἶνε πλευρά. **Παραδ.** χάριν, εἰς τὸ κατωτέρω σχῆμα 56 ἡ ΔΒ εἶνε διαγώνιος.

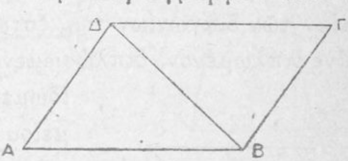
Ἀσκήσεις.

1) Γράψατε ἐπὶ τοῦ πίνακος ἕνα ῥόμβον καὶ ἓν τετράγωνον (περίπου). Κατὰ τί ὁμοιάζουν ταῦτα καὶ κατὰ τί διαφέρουν;

2) Γράψατε ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ ἕνα ῥόμβον. Κατὰ τί ὁμοιάζουν ταῦτα καὶ κατὰ τί διαφέρουν;

Ἰδιότητες τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμου.

79. Ἡ διαγώνιος ΔΒ διαιρεῖ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 56) εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΒΓ. Ἐὰν ἀποκόψωμεν τὰ τρίγωνα ταῦτα καὶ ἐπιθέσωμεν καταλλήλως τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου, θὰ ἴδωμεν ὅτι θὰ ἐφαρμόσωσιν ἀκριβῶς. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.



Σχ. 56.

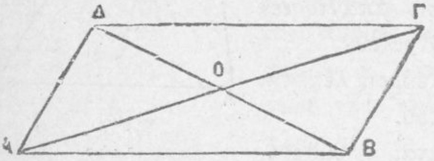
80. *Ἡ διαγώνιος παντὸς παραλληλογράμμου διαιρεῖ τὸ παραλληλόγραμον εἰς δύο τρίγωνα ἴσα.*

Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων συνάγομεν καὶ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

81. *Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι παντὸς παραλληλογράμμου εἶνε ἴσαι.*

82. Ἐὰν φέρωμεν τὰς δύο διαγωνίους ΑΓ καὶ ΔΒ (σχ. 57) τοῦ παραλληλογράμμου καὶ μετρήσωμεν διὰ λεπτοῦ εὐθυγράμ-

μου σύρματος (ἢ δι' ἄλλου τινὸς) τὰ μέρη ΟΑ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΒ, θὰ ἴδωμεν ὅτι εἶναι ΟΑ = ΟΓ καὶ ΟΔ = ΟΒ. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι



Σχ. 57.

Εἰς πᾶν παραλληλόγραμμον ἡ μία διαγώνιος τέμνει τὴν ἄλλην εἰς δύο ἴσα μέρη.

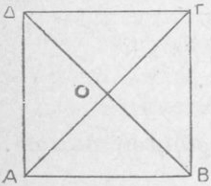
Τὸ σημεῖον Ο, εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται αἱ δύο διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου, λέγεται ***κέντρον*** τοῦ παραλληλογράμμου.

Τὸ ὀρθογώνιον, τὸ τετράγωνον καὶ ὁ ῥόμβος ἔχουν προσέτι καὶ τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

83. ***Αἱ διαγώνιοι παντὸς ὀρθογωνίου, καθὼς καὶ παντὸς τετραγώνου, εἶναι ἴσαι μεταξύ των.*** Περὶ τούτου εὐκόλως βεβαιούμεθα ὡς ἀνωτέρω.

84. ***Αἱ διαγώνιοι παντὸς τετραγώνου καὶ παντὸς ῥόμβου τέμνονται μεταξύ των καθέτως.***

Διότι, ἐὰν ἀποκόψωμεν τὸ ἐκ χάρτου τετράγωνον ΑΒΓΔ σχῆμα 58 (ἢ καὶ ῥόμβον ἂν ἔχωμεν) καὶ διπλώσωμεν αὐτὸ κατὰ μίαν τῶν διαγωνίων του, ἔστω κατὰ τὴν ΑΓ· κατόπιν δέ, ὅπως εἶνε διπλωμένον, διπλώσωμεν αὐτὸ καὶ κατὰ τὴν ΟΒ (ἢ ΟΔ), θὰ ἴδωμεν ὅτι αἱ πλευραὶ τῶν πέριξ τοῦ σημείου Ο σχηματιζομένων τεσσάρων γωνιῶν ἐφαρμόζουσιν ἀκριβῶς, ἑπομένως αἱ γωνίαι αὗται εἶνε ἴσαι. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν πέριξ τοῦ σημείου Ο εἶνε 4 ὀρθαὶ (ἐδ. 33), ἑπομένως ἑκάστη τούτων εἶνε ὀρθὴ καὶ διὰ τοῦτο αἱ διαγώνιοι εἶνε κάθετοι μεταξύ των.



Σχ. 58.

Ἀσκήσεις.

1) Ἡ πλευρὰ τετραγώνου τινὸς εἶνε 1,30 τοῦ μέτρου, αἱ δὲ δύο συναντώμεναι πλευραὶ ὀρθογωνίου εἶνε ἡ μὲν μία 2 μέτρα,

ἡ δὲ αλλη 1,10 τοῦ μ. Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν περιμέτρων αὐτῶν ; (1 μέτρον)

2) Ἡ περίμετρος ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶνε διπλασία τῆς περιμέτρου τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εινε 2,70 τοῦ μέτρου. Πόση εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ τριγώνου ; (7 μ. 20)

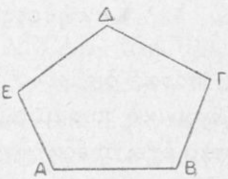
3) Ρόμβος καὶ ὀρθογώνιον ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον· ἡ πλευρὰ τοῦ ῥόμβου εἶνε 1,90 τοῦ μέτρου, τοῦ δὲ ὀρθογωνίου ἡ μία πλευρὰ εἶτε τὰ $\frac{4}{19}$ τῆς περιμέτρου τοῦ ῥόμβου. Πόσον εἶνε αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου ;

(***Λύσις***. Αἱ δύο συναντώμεναι εἶνε 2,20 καὶ 1,60 τοῦ μ.)

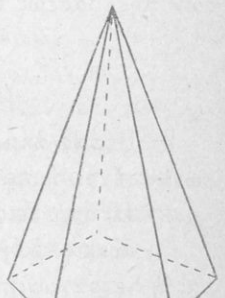
3ον. ΠΕΝΤΑΓΩΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΣ

85. Τὸ στερεὸν τοῦτο σῶμα (1) (τὸ σχῆμα 59 παριστᾷ τοῦτο) λέγεται ***πενταγωνικὴ πυραμίς***.

Βάσις τῆς πυραμίδος ταύτης λαμβάνεται πάλιν ἡ μὴ τριγωνικὴ ἕδρα αὐτῆς, ἥτις ἔχει τὸ σχῆμα 60. Ἡ βάσις αὕτη, ὡς παρατηροῦμεν, ἔχει 5 γωνίας (Α, Β, Γ, Δ, Ε) καὶ 5 εὐθείας (ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ), αἵτινες λέγονται ***πλευραί***, διὰ

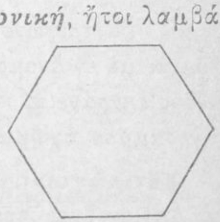


Σχ. 60.



Σχ. 59.

τοῦτο τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται ***πεντάγωνον*** ἢ ***πεντάπλευρον***, ἡ δὲ πυραμὶς ἕνεκα τούτου λέγεται ***πενταγωνική***, ἤτοι λαμβάνει τὸ ὄνομα τοῦ σχήματος τῆς βάσεώς της. Ἐὰν δὲ ἡ βάσις ἔχῃ τὸ σχῆμα 61, ἤτοι ἑξάγωνον, τότε ἡ πυραμὶς αὕτη λέγεται ***ἑξαγωνικὴ*** καὶ οὕτω καθεξῆς.



Σχ. 61.

86. Αἱ ἕδραι ὅλαι τῶν πυραμίδων εἶνε τρίγωνα ἐκτὸς μιᾶς ἕδρας, ἥτις ἔχει διάφορον σχῆμα (τῆς τριγωνικῆς ὅμως πυρα-

(1) Ὁ διδάσκων δεικνύει εἰς τοὺς μαθητὰς τὴν πενταγωνικὴν πυραμίδα.

μίδος ὅλαι αἱ ἕδραι εἶνε τρίγωνα). Ὥστε ὁρίζομεν τὰς πυραμίδας ὡς ἑξῆς.

Πυραμὶς λέγεται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποίου μία ἕδρα εἶνε οἱονδήποτε σχῆμα περατούμενον εἰς εὐθείας γραμμάς, καὶ ἡ ὁποία λαμβάνεται ὡς βάσις τῆς πυραμίδος, ὅλαι δὲ αἱ ἄλλαι ἕδραι εἶνε τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις τὰς πλευρὰς τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος, κορυφὴν δὲ τὴν αὐτήν, κειμένην ἐκτὸς τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος.

Ἡ ἐπιφάνεια, ἥτις ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ πέριξ τῆς βάσεως τρίγωνα, λέγεται ***παράπλευρος ἐπιφάνεια*** τῆς πυραμίδος.

Πᾶσα πυραμὶς ἔχει τόσας ἀκμὰς καὶ τόσας διέδρους γωνίας, ὅσος εἶνε ὁ διπλάσιος ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της, στερεὰς δὲ γωνίας ἔχει μίαν περισσότερον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της, τόσας δὲ ἔχει καὶ κορυφὰς καὶ ἕδρας.

Ἀσκήσεις.

1) Πόσας ἀκμάς, πόσας διέδρους γωνίας καὶ πόσας στερεὰς γωνίας ἔχει ἡ πενταγωνικὴ πυραμίς;

2) Πόσας τοιαύτας ἔχει ἡ ἑξαγωνικὴ πυραμίς;

3) Κατὰ τί ὁμοιάζουν καὶ κατὰ τί διαφέρουν ἡ τριγωνικὴ καὶ ἡ τετραγωνικὴ πυραμίς; Ἡ πενταγωνικὴ καὶ ἡ ἑξαγωγικὴ πυραμίς;

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

87. Τὸ τρίγωνον, τὸ τετράπλευρον, τὸ πεντάγωνον κτλ. λέγονται μὲ ἓν ὄνομα ***εὐθύγραμμα σχήματα***. Καὶ πᾶσα ἄλλη ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, περατουμένη εἰς εὐθείας γραμμάς, λέγεται εὐθύγραμμον σχῆμα ἢ ἐπίπεδον σχῆμα.

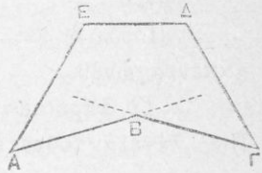
Πολύγωνον λέγεται (συνήθως) πᾶν εὐθύγραμμον σχῆμα' τὸ ὁποῖον ἔχει περισσοτέρας τῶν τεσσάρων γωνιῶν ἢ πλευρῶν.

Πλευραὶ παντὸς εὐθυγράμμου σχήματος λέγονται αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες σχηματίζουσιν αὐτό. ***Γωνίαι*** αὐτοῦ λέγονται αἱ γωνίαι, αἵτινες σχηματίζονται ὑπὸ τῶν πλευρῶν του. ***Κορυφαὶ*** δὲ λέγονται αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν του.

Περίμετρος παντὸς εὐθυγράμμου σχήματος λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του.

Διαγώνιος εὐθυγράμμου σχήματος λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἑνώνει δύο κορυφάς, χωρὶς νὰ εἶνε πλευρά.

Τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται ***κυρτόν***, ἐὰν ὅλαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ αὐξανόμεναι καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη δὲν εἰσέρχονται ἐντὸς τοῦ σχήματος. Τὰ ἀνωτέρω π. χ. εὐθύγραμμα σχήματα εἶνε κυρτά. Τὸ μὴ κυρτὸν σχῆμα λέγεται ***κοῖλον***· τοιοῦτον εἶνε τὸ σχῆμα 62· διότι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ΑΒ καὶ ΒΓ αὐξανόμεναι εἰσέρχονται ἐντὸς αὐτοῦ.

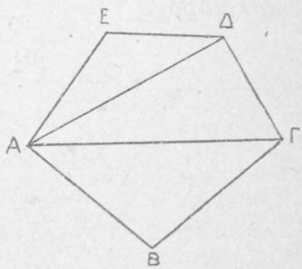


Σχ. 62.

Λέγοντες κατωτέρω εὐθύγραμμον σχῆμα, θὰ ἐννοῶμεν τὸ κυρτόν.

Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν πολυγώνου.

88. Ἔστω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ (σχ. 63). Ἐὰν ἐκ μιᾶς τῶν κορυφῶν του, ἔστω τῆς Α, φέρωμεν τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΑΔ, διαιρεῖται τὸ πολύγωνον εἰς 3 τρίγωνα, ἤτοι εἰς τόσα, ὅσος εἶνε ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του ἠλαττωμένος κατὰ 2 (τοῦτο δὲ συμβαίνει καὶ εἰς πᾶν ἄλλο πολύγωνον). Τῶν τριγώνων δὲ τούτων αἱ γωνίαι ἀποτελοῦσι προφανῶς τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ 2 ὀρθὰς (ἐδ. 69. 2ον), ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν καὶ τῶν τριῶν τριγώνων θὰ εἶνε 3×2, ἤτοι 6 ὀρθαί. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.



Σχ. 63.

89. Διὰ νὰ εὕρωμεν μὲ πόσας ὀρθὰς γωνίας ἰσοῦται τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς πολυγώνου, ἐλαττώνομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν του κατὰ δύο καὶ τὸ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ δύο.

Ἐφαρμογή. Π. χ. τὸ ἑξάγωνον ἔχει 6 πλευράς, ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὸν 6 κατὰ 2 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 4 πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 2, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἰσοῦται μὲ 8 ὀρθάς.

Ἀσκήσεις.

1) Πόσαι ὀρθαὶ γωνίαι εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ ὀκταγώνου ; (*Λύσις*. 12).

2) Πόσαι ὀρθαὶ γωνίαι εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ δεκαπενταγώνου. (*Λύσις*. 26).

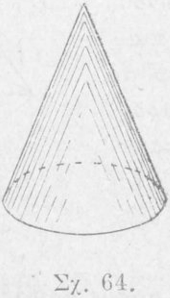
3) Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν πολυγώνου τινὸς εἶνε 10 ὀρθαί. Πῶς λέγεται τοῦτο ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γωνιῶν του ; (Ἑπτάγωνον).

4) Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν πολυγώνου τινὸς εἶνε 16 ὀρθαί. Πῶς λέγεται τοῦτο ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γωνιῶν του ; (Δεκάγωνον).

ΚΩΝΟΣ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

Ἐποπτεία αὐτῶν.

90. Τὰ στερεὰ ταῦτα σώματα [1] (τὰ σχήματα 64 καὶ 65 παριστῶσι ταῦτα) λέγονται τὸ μὲν ἓν *κῶνος*, τὸ δὲ ἄλλο *κύλινδρος*.



Σχ. 64.

Σχ. 65.

Κῶνος. Ὁ κῶνος (σχ. 64), ὡς παρατηροῦμεν, περατοῦται εἰς δύο εἴδη ἐπιφανειῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶνε ἐπίπεδος ἐπι-

(1) Ὁ διδάσκων δεικνύει εἰς τοὺς μαθητὰς τὸν κῶνον καὶ τὸν κύλινδρον.

φάνεια καὶ λέγεται ***βάσις*** τοῦ κώνου, ἡ δὲ ἄλλη οὐχί· διότι δὲν ἐφαρμόζει ἐπ' αὐτῆς πανταχοῦ ἡ εὐθεῖα γραμμή. Λέγεται δὲ αὕτη ***κυρτὴ ἐπιφάνεια*** τοῦ κώνου. Αἱ δύο αὗται ἐπιφάνειαι ἀποτελοῦσιν ὁμοῦ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἀπολήγει εἰς ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται ***κορυφὴ*** τοῦ κώνου. Ἡ δὲ ἐκ τῆς κορυφῆς νοουμένη κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν λέγεται ***ὕψος*** τοῦ κώνου.

Κύλινδρος. Ὁ κύλινδρος (σχ. 65) περατοῦται εἰς τρεῖς ἐπιφανείας, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο εἶνε ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι ἴσαι καὶ παράλληλοι καὶ λέγονται ***βάσεις*** τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ ἄλλη οὐχί· λέγεται δὲ αὕτη ***κυρτὴ ἐπιφάνεια*** τοῦ κυλίνδρου. Αἱ τρεῖς αὗται ἐπιφάνειαι, ἐπίπεδοι καὶ κυρτή, ἀποτελοῦσιν ὁμοῦ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου.

Ὁ κύλινδρος ἔχει πανταχοῦ τὸ αὐτὸ πάχος. Ἡ ἀγομένη κάθετος μεταξὺ τῶν δύο βάσεων τοῦ κυλίνδρου λέγεται ***ὕψος*** αὐτοῦ.

Τὸ σχῆμα τοῦ κώνου ἔχουν τὰ χωνία· ἐπίσης δένδρα τινά, πύργοι τινές, τὸ κατώτερον μέρος αἰχμηρῶν τινων ἀντικειμένων κτλ. Τὸ δὲ σχῆμα τοῦ κυλίνδρου ἀπαντῶμεν συχνάκις. Παραδ. χάριν, τὰ συνήθη δοχεῖα πρὸς μέτρησιν τῶν ὑγρῶν (οἴνου, ἐλαίου κτλ.), διάφοροι σωλῆνες, αἱ ὕελοι (συνήθως) τῶν λαμπῶν, τινὰ μολυβδοκόνδυλα καὶ ποτήρια, διάφοροι στῆλαι κτλ. ἔχουν σχῆμα κυλινδρικόν.

ΚΥΚΛΟΣ

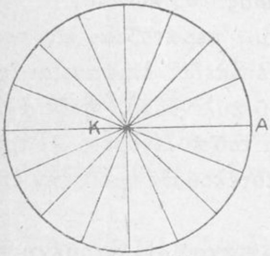
91. Ἡ βάσις τοῦ κώνου καὶ τοῦ κυλίνδρου, ὡς παρατηροῦμεν, δὲν περιορίζεται ἀπὸ εὐθείας γραμμάς, ὅπως τὰ μέχρι τοῦδε ἐξετασθέντα εὐθύγραμμα σχήματα, ἀλλὰ περιορίζεται ἀπὸ καμπύλην γραμμήν, ἤτοι ἔχει τὸ σχῆμα 66, τὸ ὁποῖον λέγεται ***κύκλος***.

Σχ. 66.

Ἡ καμπύλη γραμμή, εἰς τὴν ὁποίαν περατοῦται ὁ κύκλος, λέγεται ***περιφέρεια*** αὐτοῦ. Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἓν σημεῖον Κ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου καὶ λέγεται ***κέντρον*** τοῦ κύκλου. Ὥστε

Κύκλος λέγεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περικλειομένη ὑπὸ καμπύλης γραμμῆς, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἓν σημεῖον κείμενον ἐντὸς αὐτῆς.

Σημ. Ὁ κύκλος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς παραγόμενος ἐκ τῆς περιστροφῆς μιᾶς εὐθείας, καθὼς τῆς ΚΑ (σχ. 67), πέριξ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτῆς Κ καὶ κειμένης πάντοτε ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν της, τότε ἡ μὲν ΚΑ θὰ γράψῃ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου, τὸ δὲ ἄκρον αὐτῆς Α θὰ γράψῃ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ.

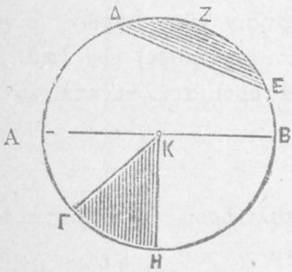


Σχ. 67.

Ἀκτὶς τοῦ κύκλου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἄρχεται ἐκ τοῦ κέντρου καὶ ἀπολήγει εἰς τὴν περιφέρειαν. Καθὼς ἡ ΚΑ, ἡ ΚΒ, ἡ ΚΓ κτλ. (σχ. 68).

92. ***Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶνε ἴσαι μεταξύ των.***

Διότι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ τοῦ κέντρου.



Σχ. 68.

Διάμετρος τοῦ κύκλου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ ἀπολήγει ἑκατέρωθεν εἰς τὴν περιφέρειαν. Καθὼς ἡ ΑΒ.

93. ***Ὅλαι αἱ διάμετροι τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶνε ἴσαι μεταξύ των.***

Διότι ἑκάστη εἶνε διπλασία τῆς ἀκτῖνος.

Τόξον λέγεται μέρος τῆς περιφερείας. Καθὼς τὸ μέρος ΑΓ, ΓΒ κτλ.

Χορδὴ τόξου λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἑνώνει τὰ ἄκρα τοῦ τόξου. Καθὼς ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶνε χορδὴ τοῦ τόξου ΔΖΕ, εἶνε προσέτι χορδὴ καὶ τοῦ τόξου ΔΓΕ.

Τμῆμα κύκλου λέγεται τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τόξου καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ. Καθὼς τὸ μέρος ΔΖΕΔ.

Τομεὺς κύκλου λέγεται τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τόξου καὶ τῶν ἀκτίνων τῶν ἀγομένων εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου. Καθὼς τὸ μέρος ΓΗΚΓ.

94. **Ἰδιότης τῆς διαμέτρου.** ***Πᾶσα διάμετρος διαιρεῖ καὶ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη.***

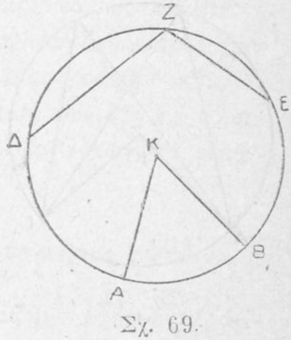
Διότι, ἐὰν ἀποκόψωμεν τὸν ἀνωτέρω κύκλον (σχ. 68) καὶ διπλώσωμεν αὐτὸν κατὰ τὴν διάμετρον ΑΒ, θὰ ἴδωμεν ὅτι τὸ τόξον ΑΔΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἀκριβῶς ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΓΒ· ὥστε τὸ τμῆμα ΑΔΕΒΑ εἶνε ἴσον μὲ τὸ τμῆμα ΑΓΗΒΑ καὶ τὸ τόξον ΑΔΒ ἴσον μὲ τὸ τόξον ΑΓΒ.

Σημ. Τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου λέγεται *ἡμικύκλιον*, τὸ δὲ ἥμισυ τῆς περιφερείας λέγεται *ἡμιπεριφέρεια*.

Το σχῆμα τοῦ κύκλου ἀπαντῶμεν συχνά. Παραδείγματος χάριν, κυκλικὸν σχῆμα ἔχουν τὰ μεταλλικὰ νομίσματα, οἱ τροχοὶ τῶν ἁμαξῶν, τὰ ἄκρα τῶν ποτηρίων, τῶν ὑελῶν τῆς λάμπας, τῶν πινακίων κτλ.

ΕΠΙΚΕΝΤΡΟΙ ΚΑΙ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

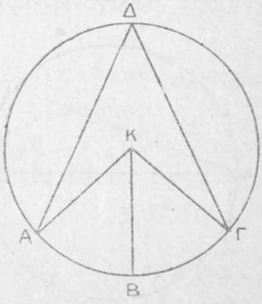
95. **Ἐπίκεντρος γωνία** λέγεται ἡ γωνία, ἥτις ἔχει τὴν κορυφὴν ἐπὶ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, καθὼς ἡ γωνία ΑΚΒ (σχ. 69).



Σχ. 69.

96. **Ἐγγεγραμμένη γωνία** εἰς κύκλον λέγεται ἡ γωνία, ἥτις ἔχει τὴν κορυφὴν ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραί της εἶνε χορδαὶ τοῦ κύκλου, καθὼς ἡ γωνία ΔΖΕ.

97. Ἐὰν τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΒΓ (σχ. 70) εἶνε ἴσα καὶ φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΒ καὶ ΚΓ, σχηματίζονται δύο κυκλικοὶ τομεῖς, οἱ ΑΚΒ καὶ ΒΚΓ. Ἐὰν ἀποκόψωμεν τώρα τὸν ἕνα τούτων, ἔστω τὸν ΑΚΒ, καὶ ἐπιθέσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τοῦ ἄλλου ΒΚΓ οὕτως, ὥστε τὰ ἴσα τόξα αὐτῶν νὰ ἐφαρμόσωσι, θὰ ἴδωμεν ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν ΑΚΒ καὶ ΒΚΓ θὰ ἐφαρμόσωσιν, ἑπομένως αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι. Ὥστε



Σχ. 70.

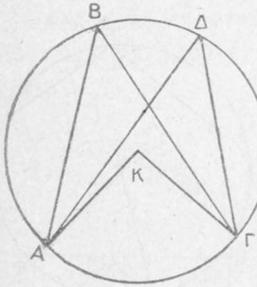
98. ***Εἰς ἴσα τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου (ἢ εἰς ἴσους κύκλους) βαίνουσιν ἴσ***

Ἐὰν φέρωμεν τὰς χορδὰς τῶν ἀνωτέρων ἴσων τόξων ΑΒ καὶ ΒΓ, τότε κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ἴσων τούτων τόξων θὰ ἐφαρμόσωσι καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν· διότι τὰ ἄκρα των θὰ συμπέσωσιν (ἐδ. 14 1ον). Ὥστε

99. ***Τὰ ἴσα τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου (ἢ ἴσων κύκλων) ἔχουν ἴσας χορδάς. Καὶ τἀνάπαλιν, αἱ ἴσαι χορδαὶ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἴσα τόξα.***

Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ἡ γωνία ΑΚΒ εἶνε ἴση μὲ τὴν ΒΚΓ. Ἐὰν ἐπιθέσωμεν τώρα τὴν γωνίαν ΑΚΒ ἐπὶ τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΑΔΓ, τῆς βαινούσης ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΓ, ἐπὶ τοῦ ὁποίου βαίνει καὶ ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΚΓ, θὰ ἴδωμεν ὅτι αὗται θὰ ἐφαρμόσωσιν ἀκριβῶς, ἑπομένως εἶνε ἴσαι καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΑΔΓ εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς ΑΚΓ. Ὥστε

100. ***Πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου γωνίας, τῆς βαινούσης ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου βαίνει καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη.***



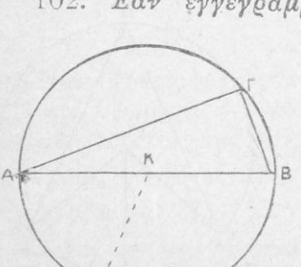
Σχ. 71.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι

101. ***Πᾶσαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι, αἵτινες βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου (ἢ ἐπὶ ἴσων τόξων) εἶναι ἴσαι μεταξύ των.***

Παραδείγματος χάριν, αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ (σχ. 71), αἵτινες βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΓ, εἶνε ἴσαι· διότι ἑκάστη εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου γωνίας ΑΚΓ, τῆς βαινούσης ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΓ.

102. ***Ἐὰν ἐγγεγραμμένη τις γωνία, καθὼς ἡ ΑΓΒ (σχ. 72), βαίνῃ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΔΒ, αὕτη εἶναι ἴση μὲ μίαν ὀρθήν.***



Σχ. 72.

Διότι, ἐὰν φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΚΔ, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐπικέντρων γωνιῶν ΑΚΔ καὶ ΔΚΒ, αἵτινες βαίνουσιν ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΔΒ, ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς (ἐδ. 32), ἑπομένως ἡ ΑΓΒ εἶνε τὸ ἥμισυ τῶν δύο ὀρθῶν, ἤτοι μία ὀρθή.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΛΥΣΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ.

---

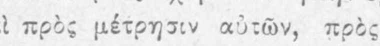
103. Ὅταν ζητῆται, παραδ. χάριν, νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ εὐθεῖάν τινα ἐξ ὡρισμένου σημείου ἢ νὰ κατασκευάσωμεν σχῆμά τι ἔχον δοθείσας ἰδιότητας κτλ., τὸ προτεινόμενον τοῦτο λέγεται ***γεωμετρικὸν πρόβλημα***· ἡ δὲ ἐκτέλεσις αὐτοῦ λέγεται ***λύσις*** τοῦ προβλήματος.

Πρὸς λύσιν ὅμως τοιούτων γεωμετρικῶν προβλημάτων δὲν εἶνε ἀρκετὸν μόνον τὸ βλέμμα καὶ ἡ ἐπιδεξιότης τῆς χειρός, ἀλλ᾽ ἀπαιτοῦνται καὶ γεωμετρικὰ ὄργανα ἢ ἐργαλεῖα, ἄνευ τῶν ὁποίων οὐδὲν δυνάμεθα νὰ κάμωμεν ἀκριβῶς, ὡς ἀπαιτεῖ ἡ ἀνάγκη τῶν τεχνῶν. Κυρίως ἔχομεν ἀνάγκην ὀργάνων πρὸς γραφὴν εὐθειῶν καὶ πρὸς μέτρησιν αὐτῶν, πρὸς γραφὴν κύκλων καὶ πρὸς γραφὴν καὶ μέτρησιν γωνιῶν. Περὶ τῶν ὀργάνων λοιπὸν τούτων καὶ περὶ τοῦ τρόπου τῆς χρήσεως αὐτῶν θὰ εἴπωμεν κατὰ πρῶτον.

Γραφὴ εὐθειῶν γραμμῶν καὶ μέτρησις αὐτῶν.

104. **Γραφὴ εὐθειῶν.** Διὰ τὴν γραφὴν εὐθειῶν γραμμῶν ἐπενόησαν οἱ ἄνθρωποι γεωμετρικὸν ὄργανον, τὸ ὁποῖον λέγεται ***κανών***.

Ὁ κανὼν (ῥῆγα) σχῆμα 73 εἶνε σανὶς λεπτὴ συνήθως καὶ ἐπιμήκης, ἔχουσα τὰς κόψεις ΑΒ καὶ ΓΔ εὐθυγράμμους.



Σχ. 73.

1) Διὰ νὰ γράψωμεν λοιπὸν διὰ τοῦ κανόνος εὐθεῖαν γραμμὴν ἐπὶ τοῦ χάρτου (ἢ ἐπὶ ἄλλης ἐπιπέδου ἐπιφανείας μικρᾶς ἐκτάσεως), τοποθετοῦμεν τὸν κανόνα ἐπὶ τοῦ χάρτου οὕτως, ὥστε ἡ μία κόψις αὐτοῦ ΑΒ νὰ διέρχηται διὰ τῶν δύο σημείων

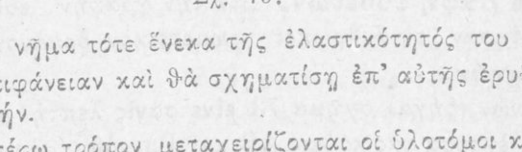
Ε καὶ Ζ (σχ. 74), διὰ τῶν ὁποίων θέλομεν νὰ διέλθῃ ἡ εὐθεῖα γραμμή· ἔπειτα γράφομεν διὰ γραφίδος τὴν εὐθεῖαν ΕΖ ἀκολουθοῦντες τὴν ἑνοῦσαν τὰ δύο ταῦτα σημεῖα κόψιν ΑΒ τοῦ κανόνος.

Σχ. 74.

Σημ. Ὑπάρχουν δὲ κανόνες, τῶν ὁποίων καὶ αἱ δύο κόψεις εἶναι διῃρημέναι εἰς ἑκατοστὰ καὶ χιλιοστὰ τοῦ μέτρου καὶ χρησιμεύουσι συγχρόνως καὶ πρὸς μέτρησιν μικρῶν εὐθειῶν.

2) Διὰ νὰ γράψωμεν εὐθεῖαν γραμμὴν ἐπὶ μεγαλυτέρας ἐπιπέδου ἐπιφανείας (καθὼς ἐπὶ πατώματος, ἐπὶ σανίδος, ἐπὶ δοκοῦ κτλ., ὅτε τὸ μῆκος τοῦ κανόνος δὲν εἶνε ἐπαρκές), πράττομεν ὡς ἑξῆς.

Προσαρμόζομεν εἰς τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Β (σχ. 75), διὰ τῶν ὁποίων θέλομεν νὰ διέλθῃ ἡ εὐθεῖα, τὰ ἄκρα νήματος καλῶς τεταμένου, τὸ ὁποῖον προηγουμένως χρίομεν διὰ χρώματος ἐρυθροῦ συνήθως. Ἔπειτα διὰ τῶν δύο δακτύλων (τοῦ μεγάλου καὶ τοῦ δείκτου) ὑψοῦμεν ἐκ τοῦ μέσου τὸ νῆμα καὶ ἀφίνομεν αὐτὸ



Σχ. 75.

νὰ πέσῃ· τὸ νῆμα τότε ἕνεκα τῆς ἐλαστικότητός του θὰ κτυπήσῃ τὴν ἐπιφάνειαν καὶ θὰ σχηματίσῃ ἐπ' αὐτῆς ἐρυθρὰν εὐθεῖαν γραμμήν.

Τὸν ἀνωτέρω τρόπον μεταχειρίζονται οἱ ὑλοτόμοι καὶ λοιποὶ τεχνῖται (¹).

3) Ὅταν ὅμως πρόκειται νὰ χαράξωμεν εὐθεῖαν γραμμὴν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μικρᾶς ἐκτάσεως, καθὼς ἐπὶ προαυλίου, ἐπὶ κήπου κτλ., ἐμπήγομεν εἰς τὰ σημεῖα, διὰ τῶν ὁποίων θέλομεν νὰ

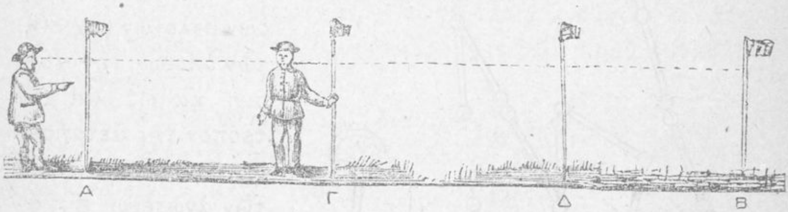
(1) Οἱ μαθηταὶ πρέπει νὰ ἀσκηθῶσιν ὑπὸ τοῦ διδάσκοντος εἰς τὴν γραφὴν εὐθειῶν ἐπὶ τοῦ μελανοπίνακος καὶ ἐπὶ τοῦ πατώματος διὰ νήματος χρισμένου διὰ κιμωλίας.

διέλθῃ ἡ εὐθεῖα, δύο πασσαλίσκους καὶ προσδένομεν εἰς αὐτοὺς σχοινίον τι καλῶς τεταμένον. Ἔπειτα χαράττομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους δι' ἑνὸς αἰχμηροῦ πασσαλίσκου τὴν γραμμὴν ἀκολουθοῦντες πάντοτε τὴν διεύθυνσιν τοῦ σχοινίου.

Διὰ μεγάλας δὲ ἀποστάσεις μεταχειριζόμεθα τὰ ἀκόντια (σχ. 76), ἤτοι ῥάβδους ξυλίνας φερούσας εἰς μὲν τὸ ἓν ἄκρον σιδηρᾶν αἰχμὴν διὰ νὰ ἐμπήγωνται εὐκόλως εἰς τὸ ἔδαφος, εἰς δὲ τὸ ἄλλο ἄκρον μικρὰν σημαίαν ἐρυθρὰν (συνήθως), ἵνα διακρίνωνται μακρόθεν· πρὸς τὸν σκοπὸν δὲ τοῦτον καὶ ὅλη ἡ ῥάβδος χρωματίζεται ἐναλλὰξ δι' ἐρυθροῦ καὶ λευκοῦ χρώματος. Ἡ χάραξις τῆς εὐθείας γίνεται ὡς ἑξῆς.

Σχ. 76.

Ἐμπήγομεν εἰς ἕκαστον τῶν δύο σημείων Α καὶ Β (σχ. 77), διὰ τῶν ὁποίων θέλομεν νὰ διέλθῃ ἡ εὐθεῖα, ἀνὰ ἓν ἀκόντιον κατακόρυφον· ἔπειτα μεταξὺ αὐτῶν ἐμπήγομεν τῇ βοηθείᾳ συνεργάτου ἄλλα ἀκόντια Γ καὶ Δ, ἀπέχοντα ἀρκετὰ ἀπ' ἀλλήλων καὶ οὕτως, ὥστε, ἐὰν σταθῶμεν ὄπισθεν τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν δύο πρώτων ἀκοντίων καὶ σκοπεύσωμεν εἰς τὸ ἄλλο, νὰ κρύπτωνται ὑπ' αὐτοῦ ὅλα τὰ με-



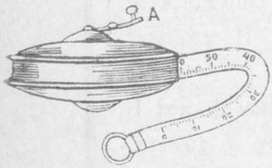
Σχ. 77.

ταξὺ ἀκόντια. Τοῦτο εὐκόλως κατορθοῦμεν κάμνοντες νεῦμα πρὸς τὸν συνεργάτην διὰ τῆς χειρός μας, διὰ νὰ ἐμπήξῃ ἕκαστον ἀκόντιον πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ πρὸς τὰ ἀριστερά, μέχρις οὗ καλυφθῇ ὑπὸ τῶν εὑρισκομένων εἰς τὰ ἄκρα τῆς γραμμῆς ἀκοντίων Α καὶ Β.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνάμεθα καὶ νὰ προσεκβάλωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ πέραν τοῦ σημείου Α ἢ Β τοποθετοῦντες πρὸς τοῦτο ἀκόντια.

Μέτρησις εὐθειῶν. Διὰ νὰ μετρήσωμεν εὐθεῖαν γραμμήν, πρέπει νὰ ἔχωμεν ὡς μονάδα ἄλλην εὐθεῖαν ὡρισμένην, πρὸς τὴν ὁποίαν νὰ τὴν συγκρίνωμεν καὶ νὰ εὕρωμεν οὕτως ἀπὸ πόσας τοιαύτας μονάδας ἢ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται. Ἡ σύγκρισις αὕτη λέγεται ***μέτρησις*** τῆς εὐθείας, τὸ δὲ ἐξαγόμενον ἐκ τῆς μετρήσεως λέγεται ***μῆκος*** αὐτῆς.

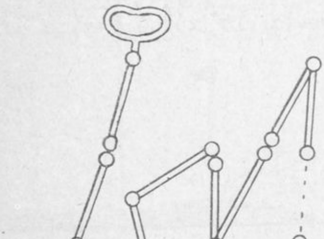
Ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς γνωρίζομεν ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ μήκους λαμβάνομεν ὡς μονάδας μετρήσεως τὸν πῆχυν τοῦ ἐμπορίου καὶ τὸ Γαλλικὸν μέτρον.



Σχ. 78.

Ἀλλ' ὅταν πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος μεγάλης ἀποστάσεως, τότε πρὸς συντομίαν τῆς μετρήσεως μεταχειριζόμεθα καὶ ὄργανα μεγαλύτερα αὐτῶν. Τοιαῦτα δὲ εἶναι (συνήθως) τὰ ἑξῆς·

Ἡ ***ταινία*** (σχ. 78), ἥτις ἔχει μῆκος 10 ἢ 20 μέτρων συνήθως καὶ διαιρεῖται εἰς μέτρα, εἰς δέκατα καὶ εἰς ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου. Καὶ ἡ ***ἄλυσις*** (σχ. 79), ἥτις ἔχει μῆκος 10 μέτρων καὶ συνοδεύεται ὑπὸ 11 σιδηρῶν βελονῶν (σχ. 80) τῶν ὁποίων τὴν χρῆσιν, καθὼς καὶ τὸν τρόπον τῆς μετρήσεως τῶν εὐθειῶν διὰ τῶν ἀνωτέρω ὀργάνων, παραλείπομεν χάριν συντομίας.



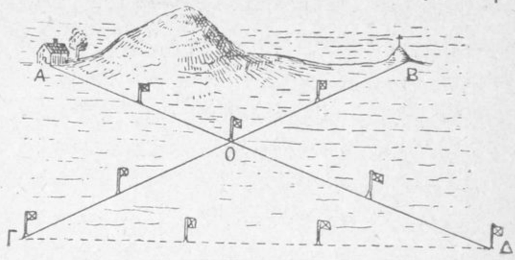
Σχ. 79.

80.

Σημ. Ἐὰν τὸ ἔδαφος εἶνε ἀνώμαλον, πρέπει νὰ μετρῶμεν τὴν ὁριζόντιον ἀπόστασιν.

Ἐφαρμογή. Ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β ἀπόστασιν (σχ. 81), τὴν ὁποίαν δὲν δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν ἀπ' εὐθείας, καθόσον μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχει λόφος.

Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν σημεῖόν τι Ο, ἐκ τοῦ ὁποίου νὰ βλέπωμεν τὰ σημεῖα Α καὶ Β· ἔπειτα εὐθυγραμμοῦμεν ὡς ἀνωτέρω δι' ἀκοντίων τὰς ἀποστάσεις ΟΑ καὶ ΟΒ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς αὐτῶν τὴν ΟΓ ἴσην μὲ τὴν ΟΒ καὶ τὴν ΟΔ ἴσην μὲ τὴν ΟΑ. Ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶνε ἴση μὲ τὴν ΑΒ, διότι τὰ τρίγωνα ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ εἶνε ἴσα



Σχ. 80.

(ἐδ. 72). Ὥστε μετροῦντες τὴν ΓΔ διὰ τῆς ταινίας ἢ τῆς ἀλύσεως εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν.

Γραφὴ κύκλου.

105. Διὰ τὴν γραφὴν κύκλου ἐπενόησαν οἱ ἄνθρωποι γεωμετρικὸν ὄργανον, τὸ ὁποῖον λέγεται *διαβήτης* (κουμπάσο) (σχῆμα 81) καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μετάλλινα συνήθως σκέλη ΑΒ καὶ ΑΓ, ἀπολήγοντα εἰς αἰχμὴν καὶ τὰ ὁποῖα ἑνοῦνται δι' ἄξονος Δ οὕτως, ὥστε οὔτε πολὺ εὐκόλως οὔτε καὶ πολὺ δυσκόλως νὰ περιστρέφωνται.

Διὰ νὰ γράψωμεν διὰ τοῦ διαβήτου κύκλον, ἀνοίγομεν τὰ σκέλη αὐτοῦ τόσον, ὅση θέλομεν νὰ εἶνε ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου. Ἔπειτα στηρίζομεν τὸ ἄκρον τοῦ ἑνὸς σκέλους αὐτοῦ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπιφανείας, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ εἶνε τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, καὶ περιστρέφομεν τὸ ἄκρον τοῦ ἄλλου σκέλους ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, μέχρις οὗ αὕτη ἐπανέλθῃ εἰς τὸ πρῶτον σημεῖον (σχ. 82), προσέχομεν ὅμως νὰ μὴ μεταβληθῇ κατὰ τὴν περιστροφὴν τὸ ἄνοιγμα τῶν σκελῶν· ἡ αἰχμὴ τότε θὰ χαράξῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.

Σχ. 81.

Σημ. Ὑπάρχουν καὶ διαβῆται, τῶν ὁποίων μέρος τι τοῦ ἑνὸς σκέλους δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ δι' ἄλλου, φέροντος γραφίδα. Τοὺς διαβήτας τούτους μεταχειριζόμεθα ὅταν θέλωμεν νὰ γράψωμεν κύκλους ἐπὶ χάρτου, ὅπως εἰς τὸ σχῆμα 82.

Ὅταν ὅμως πρόκειται νὰ γράψωμεν κύκλον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, πράττομεν ὡς ἑξῆς. Ἐμπήγομεν πασσαλίσκον τινὰ εἰς τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ εἶνε τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἔπειτα λαμβάνομεν σχοινίον τόσον, ὅση θέλομεν νὰ εἶνε ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, καὶ κατασκευάζομεν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἀγκύλην (θηλειάν)· εἰς μὲν τὴν μίαν ἀγκύλην διαπερῶμεν τὸν ἐν τῷ κέντρῳ πασσαλίσκον, εἰς δὲ τὴν ἄλλην διαπερῶμεν αἰχμηρὸν πασσαλίσκον, τὸν ὁποῖον καὶ περιστρέφομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἔχοντες κατὰ τὴν περιστροφὴν καλῶς τεταμένον τὸ σχοινίον (σχ. 83). Ἡ αἰχμὴ τότε τοῦ πασσαλίσκου θὰ χαράξῃ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Τὸν τρόπον τοῦτον μεταχειρίζονται οἱ κηπουροί.

Ὁ διαβήτης χρησιμεύει καὶ δι' ἄλλας ἐργασίας· π. χ. διὰ


Σχ. 82.


Σχ. 83.

νὰ ἴδωμεν, ἂν μία εὐθεῖα εἶνε ἴση μὲ ἄλλην εὐθεῖαν, ἀνοίγομεν τὰ σκέλη τοῦ διαβήτου τόσον, ὅση εἶνε ἡ εὐθεῖα, καὶ στηρίζομεν τὴν αἰχμὴν τοῦ ἑνὸς σκέλους αὐτοῦ εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἄλλης εὐθείας, ἐὰν δὲ ἡ αἰχμὴ τοῦ ἄλλου σκέλους πέσῃ ἀκριβῶς ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἄκρου τῆς εὐθείας, συμπεραίνομεν ὅτι αὗται εἶνε ἴσαι· εἰ δὲ μή, εἶνε ἄνισοι.

Μέτρησεις τῶν γωνιῶν.

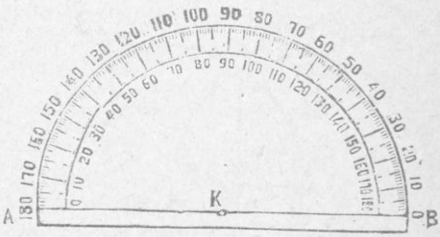
106. Ἡ περιφέρεια παντὸς κύκλου διαιρεῖται εἰς 360 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *μοῖραι*· ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται πρῶτα λεπτὰ τῆς μοίρας, καὶ

ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **δεύτερα λεπτά**. Τὰς μοίρας σημειοῦμεν συντόμως δι' ἑνὸς μηδενικοῦ, γραφομένου δεξιὰ καὶ ὀλίγον ἄνω τοῦ ἀριθμοῦ, τὰ πρῶτα λεπτὰ διὰ μιᾶς ὀξείας καὶ τὰ δεύτερα διὰ δύο ὀξειῶν. Τόξον π. χ. περιέχον 35 μοίρας, 40 πρ. λ. καὶ 50 δεύτερα λ. γράφεται $35^0\ 40'\ 50''$.

Εἴδομεν (ἐδ. 98) ὅτι εἰς ἴσα τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου (ἢ ἴσων κύκλων) βαίνουσιν ἴσαι ἐπέκεντροι γωνίαι. Ὥστε διὰ νὰ μάθωμεν, ἂν δύο γωνίαι εἶνε ἴσαι, πράττομεν καὶ ὡς ἑξῆς. Καθιστῶμεν αὐτὰς ἐπικέντρους τοῦ αὐτοῦ κύκλου, καὶ ἂν τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῶν περιεχόμενον τόξον περιέχῃ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μοιρῶν, συμπεραίνομεν ὅτι αἱ γωνίαι αὗται εἶνε ἴσαι· εἰ δὲ μή, εἶνε ἄνισοι. Ὡς μέτρον λοιπὸν τῶν γωνιῶν δυνάμεθα νὰ λαμβάνωμεν τὰ τόξα, ἐπὶ τῶν ὁποίων βαίνουσιν, ὅταν αὗται γίνωσιν ἐπίκεντροι.

Σημ. Δύο τόξα, ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μοιρῶν, τότε μόνον εἶνε ἴσα, ὅταν ἀνήκωσιν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (ἢ εἰς ἴσους κύκλους), ἐνῷ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι, αἵτινες ἔχουσι τὰ τόξα ταῦτα ὡς μέτρον, εἶνε ἴσαι.

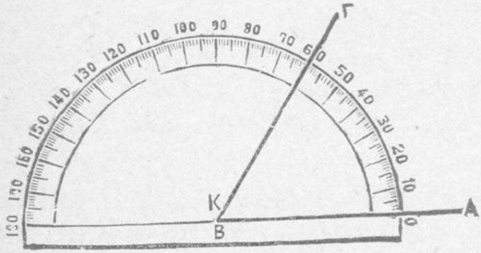
Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν γωνιῶν ἔχομεν γεωμετρικὸν ὄργανον, τὸ ὁποῖον λέγεται *ἀναγωγεὺς* ἢ ***μοιρογνωμόνιον*** (σχ. 84). Ὁ ἀναγωγεὺς ἔχει σχῆμα ἡμικυκλίου ἐκ μετάλλου συνήθως ἢ κέρατος, τοῦ ὁποίου τὸ τόξον εἶνε διῃρημένον ἑκατέρωθεν εἰς 180 μοίρας.



Σχ. 84.

Ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ μετρήσωμεν τὴν γωνίαν ΑΒΓ (σχ. 85)· θέτομεν πρὸς τοῦτο τὸ κέντρον Κ τοῦ ἀναγωγέως (τοῦτο σημειοῦται ἐπὶ τῆς διαμέτρου διὰ μικρᾶς ἐντομῆς) ἐπὶ τῆς κορυφῆς Β τῆς γωνίας οὕτως, ὥστε ἡ διάμετρος αὐτοῦ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΑ τῆς γωνίας, τότε ἡ ἄλλη πλευρὰ αὐτῆς θὰ συναντήσῃ τὸ τόξον τοῦ ἀναγωγέως εἴς τι σημεῖον αὐτοῦ· εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ὑπάρχει ἀριθμός τις, ὅστις δεικνύει τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν τῆς γωνίας. Εἰς τὸ κατωτέρω σχῆμα ἡ γωνία εἶνε 60^0.

Ἡ ὀρθὴ γωνία εἶνε ἴση μὲ 90°, ἑπομένως ἡ 1° εἶνε τὸ $\frac{1}{90}$ τῆς ὀρθῆς, αἱ 2°, 3°, 4° κτλ. εἶνε τὰ $\frac{2}{90}$, $\frac{3}{90}$, $\frac{4}{90}$ κτλ. τῆς ὀρθῆς.



Σχ. 85.

Σημ. Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν γωνιῶν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ὑπάρχουσιν ἰδιαίτερα γεωμετρικὰ ὄργανα, τὰ ὁποῖα στηρίζονται ἐπὶ τρίποδος καὶ φέρουσι διόπτρας, διὰ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ σκοπεύωμεν κατὰ διαφόρους διευθύνσεις.

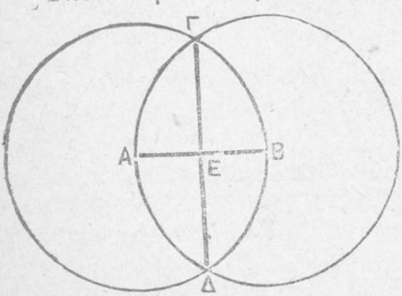
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1ον.

107. ***Νὰ φέρωμεν κάθετον εἰς τὸ μέσον εὐθείας.***

Λύσις. Διὰ τοῦ *διαβήτου* καὶ τοῦ *κανόνος*.

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶνε ἡ ΑΒ (σχ. 86), ἐπὶ τῆς ὁποίας ζητεῖται νὰ φέρωμεν κάθετον εἰς τὸ μέσον.



Σχ. 86.

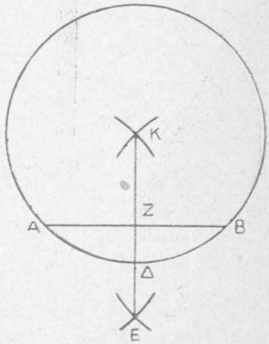
Λαμβάνομεν πρὸς τοῦτο τὸν διαβήτην καὶ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Α καὶ μὲ ἀκτῖνα μεγαλυτέραν τοῦ ἡμίσεος τῆς ΑΒ [1] γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Β καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν κύκλου· αἱ περιφέρειαι αὗται τέμνονται εἰς δύο σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἐὰν ἑνώσωμεν τώρα διὰ τοῦ κανόνος τὰ σημεῖα ταῦτα διὰ τῆς εὐθείας ΓΔ, αὕτη εἶνε ἡ ζητουμένη κάθετος εἰς τὸ μέσον Ε τῆς ΑΒ.

[1] Τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ ἐκτιμῶμεν περίπου [illegible] τος.

Διότι τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ, ἐπειδὴ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς ΑΒ (εἶνε δὲ αἱ ἀποστάσεις ΓΑ, ΓΒ, ΔΒ, ΔΑ ἴσαι ὡς ἀκτῖνες ἴσων κύκλων), εἶνε σημεῖα τῆς καθέτου, τῆς ἀγομένης εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ (ἐδάφ. 37). Ἀλλὰ μεταξὺ τῶν δύο τούτων σημείων μία μόνη εὐθεῖα ἄγεται, ἡ ΓΔ (ἐδ. 14 1ον). Ὥστε αὕτη εἶνε κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.

Σημ. Τὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου δὲν πρέπει νὰ εἶνε μικρότερον τοῦ ἡμίσεος τῆς ΑΒ, διότι τότε αἱ περιφέρειαι δὲν τέμνονται. Οὔτε εἶνε ἀνάγκη νὰ γράφωνται ὁλόκληροι αἱ περιφέρειαι, ὅπως ἀνωτέρω, ἀλλὰ μόνον τόξα ἄνω καὶ κάτω τῆς εὐθείας.

Ἐὰν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ εἶνε χορδὴ κύκλου (σχ. 87) καὶ γράψωμεν ὡς ἀνωτέρω δύο περιφερείας μὲ κέντρα τὰ ἄκρα αὐτῆς καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν τοῦ κύκλου, τότε αὗται θὰ τέμνωνται εἰς τὸ κέντρον Κ τοῦ κύκλου. Ἡ δὲ κάθετος ΚΕ εἰς τὸ μέσον Ζ τῆς χορδῆς ΑΒ θὰ διαιρῇ καὶ τὸ τόξον αὐτῆς εἰς δύο ἴσα μέρη ΑΔ καὶ ΔΒ· διότι αἱ χορδαὶ αὐτῶν μετρούμεναι διὰ τοῦ διαβήτου εἶνε ἴσαι (ἐδ. 99). Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι



Σχ. 87.

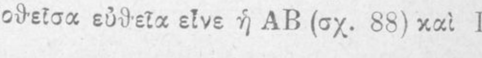
108. *Ἡ ἀγομένη κάθετος εἰς τὸ μέσον χορδῆς διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καὶ προσεκβαλλομένη διαιρεῖ καὶ τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη.*

Πρόβλημα 2ον.

109. ***Ἐκ σημείου κειμένου ἐπὶ δοθείσης εὐθείας νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπ' αὐτήν.***

Λύσις 1η. Διὰ τοῦ *διαβήτου* καὶ τοῦ *κανόνος.*

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶνε ἡ ΑΒ (σχ. 88) καὶ Γ τὸ σημεῖον αὐτῆς, ἐκ τοῦ ὁποίου ζητεῖται νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπ' αὐτήν.

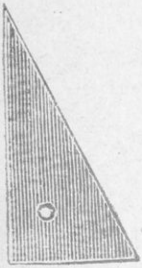


Σχ. 88.

Λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Γ καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ δύο ἴσα μέρη διὰ τοῦ διαβήτου, τὰ ΓΕ καὶ ΓΖ. Ἔπειτα διὰ τοῦ προηγουμένου προβλήματος εὑρίσκομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον Γ τῆς ΕΖ, ἥτις θὰ εἶνε ἡ ζητουμένη.

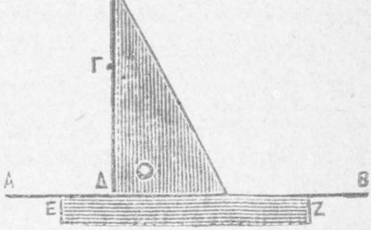
Λύσις 2α. Διὰ τοῦ *γνώμονος*.

110. Διὰ τὴν γραφὴν τῶν καθέτων καὶ λοιπῶν ἐργασιῶν ἐπενόησαν οἱ ἄνθρωποι γεωμετρικὸν ὄργανον, τὸ ὁποῖον λέγεται ***γνώμων*** καὶ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου τριγώνου (σχ. 89) ἢ γωνίας ὀρθῆς (σχ. 90) [1] καὶ εἶνε κατεσκευασμένον ἐκ λεπτῆς σανίδος ἢ ἐκ μετάλλου.



Σχ. 89.

Σχ. 90.



Σχ. 91.

Λαμβάνομεν λοιπὸν τὸν γνώμονα (ἢ τὸν ἕνα ἢ τὸν ἄλλον) καὶ ἐφαρμόζομεν τὴν μίαν πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 91) οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ σημείου Γ· ἔπειτα μεταχειριζόμενοι τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας ὡς κανόνα, γράφομεν διὰ γραφίδος τὴν κάθετον ΓΔ.

Καλὸν ὅμως εἶνε νὰ ἐφαρμόζωμεν προηγουμένως χάριν εὐκολίας ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ τὴν μίαν κόψιν τοῦ κανόνος ΕΖ (σχ. 91) καὶ ἔπειτα νὰ σύρωμεν τὸν γνώμονα ἐπὶ τοῦ κανόνος, μέχρις οὗ ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ σημείου Γ, ἐκ τοῦ ὁποίου ζητεῖται νὰ φέρωμεν κάθετον, διατηροῦντες τὸν κανόνα ἀκίνητον.

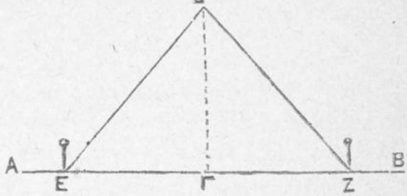
Λύσις 3η. Διὰ ***σχοινίου*** ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.

111. Ὅταν ὅμως ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἐπὶ τῆς ὁποίας ζητεῖται νὰ

(1) Τὸν ὑπὸ τὸ σχῆμα 90 γνώμονα μεταχειρίζονται ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ οἱ λιθοξόοι, διὰ νὰ κόπτωσι κατ' ὀρθὰς γωνίας τὰ μάρμαρα.

φέρωμεν κάθετον, εἶνε κεχαραγμένη ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, μεταχειριζόμεθα τὸν ἑξῆς πρακτικὸν τρόπον.

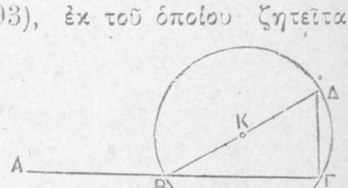
Λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Γ (σχ. 92), ἐκ τοῦ ὁποίου ζητεῖται νὰ φέρωμεν κάθετον, δύο ἴσα μέρη, τὰ ΓΕ καὶ ΓΖ, καὶ ἐμπήγομεν εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ πασσαλίσκους. Ἔπειτα λαμβάνομεν σχοινίον τι μεγαλύτερον τῆς ἀποστάσεως ΕΖ, καὶ ἀφοῦ κατασκευάσωμεν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἀγκύλας (θηλειάς), διαπερῶμεν εἰς ἕκαστον πασσαλίσκον ἑκάστην ἀγκύλην. Ἔπειτα λαμβάνομεν τὸ σχοινίον ἀκριβῶς ἐκ τοῦ μέσου (τὸ ὁποῖον ἔχομεν εὕρει προηγουμένως) καὶ τείνομεν αὐτὸ καλῶς πρὸς τὸ μέρος, ὅπου θέλομεν νὰ φέρωμεν τὴν κάθετον· οὕτω δὲ σχηματίζεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΕΔΖ. Εἰς τὸ σημεῖον Δ, ὅπου εὑρίσκεται τὸ μέσον τοῦ σχοινίου, ἐμπήγομεν πασσαλίσκον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, καὶ ἀφοῦ προσδέσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ ἄκρον ἄλλου σχοινίου (ἢ τοῦ ἰδίου), τείνομεν αὐτὸ καλῶς πρὸς τὸ σημεῖον Γ. Ἡ διεύθυνσις ΓΔ τοῦ σχοινίου εἶνε ἡ ζητουμένη κάθετος (ἐδάφ. 68).



Σχ. 92.

Σημ. Τὴν κάθετον ΓΔ προσεκβάλλομεν ἐν ἀνάγκῃ, ὅσον θέλομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, μεταχειριζόμενοι πρὸς τοῦτο τὸν αὐτὸν τρόπον, διὰ τοῦ ὁποίου χαράττομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εὐθεῖαν γραμμὴν διὰ τῶν ἀκοντίων (ἐδ. 104. 3.)

112. Ἐὰν τὸ σημεῖον Γ (σχ. 93), ἐκ τοῦ ὁποίου ζητεῖται νὰ φέρωμεν κάθετον, εἶνε τὸ ἄκρον τῆς εὐθείας ΑΓ, καὶ ὁ τόπος δὲν ἐπιτρέπει τὴν προσεκβολὴν τῆς ΑΓ, ὅπως ἀκολουθήσωμεν τὸν ἀνωτέρω τρόπον, πράττομεν ὡς ἑξῆς. Λαμβάνομεν σημεῖόν τι Κ ἐκτὸς τῆς ΑΓ καὶ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΓ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἥτις νὰ τέμνῃ τὴν ΑΓ καὶ εἰς ἄλλο σημεῖον Β· ἔπειτα ἐκ τοῦ σημείου Α φέρομεν τὴν διάμετρον ΒΔ καὶ



Σχ. 93.

ἑνώνομεν τὸ σημεῖον Δ μὲ τὸ Γ διὰ τῆς εὐθείας ΔΓ· αὕτη εἶνε ἡ ζητουμένη κάθετος.

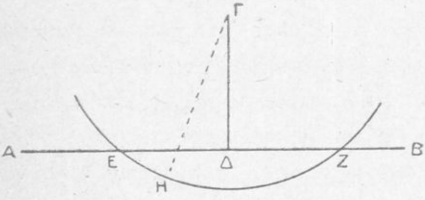
Διότι ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΒΓΔ, ὡς βαίνουσα ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας, εἶνε ὀρθὴ (ἐδ. 102)

Πρόβλημα 3ον.

113. *Ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς εὐθείας νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπ᾽ αὐτήν.*

Λύσις 1η. Διὰ τοῦ *διαβήτου* καὶ τοῦ *κανόνος*.

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶνε ἡ ΑΒ (σχ. 94) καὶ τὸ σημεῖον τὸ ἐκτὸς αὐτῆς κείμενον τὸ Γ, ἐκ τοῦ ὁποίου ζητεῖται νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπ᾽ αὐτήν.

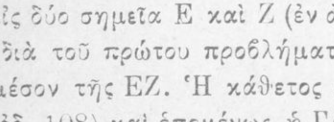


Σχ. 94.

Λαμβάνομεν σημεῖόν τι Η πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς ΑΒ, ὅπου δὲν κεῖται τὸ Γ· κατόπιν μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΓΗ γράφομεν διὰ τοῦ διαβήτου τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον νὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἰς δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ (ἐν ἀνάγκῃ αὐξάνομεν τὴν ΑΒ). Ἔπειτα (διὰ τοῦ πρώτου προβλήματος) εὑρίσκομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΕΖ. Ἡ κάθετος αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Γ (ἐδ. 108) καὶ ἑπομένως ἡ ΓΔ εἶνε ἡ ζητουμένη.

Λύσις 2α. Διὰ τοῦ *γνώμονος*.

114. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ (σχ. 95) ἐφαρμόζομεν τὴν μίαν κόψιν τοῦ κανόνος ΕΖ καὶ ἐπ᾽ αὐτοῦ τὴν μίαν πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ γνώμονος διατηροῦντες τὸν κανόνα ἀκίνητον· ἔπειτα σύρομεν τὸν γνώμονα ἐπὶ τοῦ κανόνος, μέχρις οὗ ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐφαρμόσῃ εἰς τὸ σημεῖον Γ, τότε μεταχειριζόμενοι τὴν πλευρὰν ταύτην ὡς κανόνα, γράφομεν τὴν κάθετον ΓΔ.

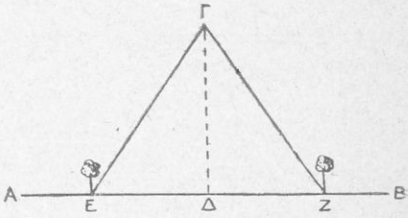


Σχ. 95.

Λύσις 3η. Διὰ *σχοινίου* ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.

115. Ὅταν ὅμως ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Γ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, πράττομεν ὡς ἑξῆς.

Εἰς τὸ σημεῖον Γ (σχ. 96) ἐμπήγομεν πασσαλίσκον καὶ προσδένομεν εἰς αὐτὸ τὸ ἄκρον σχοινίου τινός· ἔπειτα τανύομεν τὸ σχοινίον πρὸς τὸ ἄκρον Α τῆς ΑΒ, μέχρις οὗ τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ σχοινίου (ἢ σημεῖόν τι αὐτοῦ) ἐγγίσῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Ε, εἰς τὸ ὁποῖον ἐμπήγομεν πασσαλίσκον· κατόπιν τανύομεν τὸ σχοινίον πρὸς τὸ ἄλλο ἄκρον Β τῆς ΑΒ, μέχρις οὗ πάλιν τὸ ἄκρον τοῦ σχοινίου (ἢ τὸ αὐτὸ σημεῖον αὐτοῦ) ἐγγίσῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Ζ, εἰς τὸ ὁποῖον ἐμπήγομεν πασσαλίσκον· οὕτω δὲ σχηματίζεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΕΓΖ (διότι εἶνε ἡ ΓΕ ἴση μὲ τὴν ΓΖ). Ἐὰν ἑνώσωμεν τώρα τὸ σημεῖον Γ μὲ τὸ μέσον Δ τῆς ΕΖ διὰ σχοινίου καλῶς τεταμένου, ἡ διεύθυνσις ΓΔ τοῦ σχοινίου εἶνε ἡ ζητουμένη κάθετος (ἐδ. 68).



Σχ. 96.

Σημ. Ὑπάρχουν καὶ ἰδιαίτερα γεωμετρικὰ ὄργανα, διὰ τῶν ὁποίων φέρομεν κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν κεχαραγμένην ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, εἴτε ἐκ σημείου κειμένου ἐπ' αὐτῆς, εἴτε ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς.

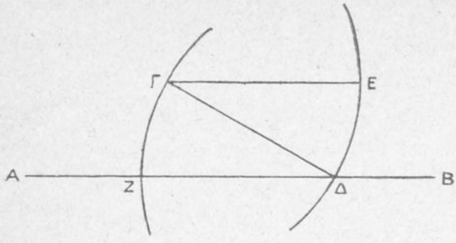
116. Ἡ ἀγομένη κάθετος ἐπὶ εὐθεῖαν ἐκ σημείου ἐκτὸς αὐτῆς λέγεται ***ἀπόστασις*** τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τῆς εὐθείας.

Πρόβλημα 4ον.

117. *Ἐκ δοθέντος σημείου νὰ φέρωμεν παράλληλον δοθείσης εὐθείας.*

Λύσις 1η. Διὰ τοῦ ***διαβήτου*** καὶ τοῦ ***κανόνος***. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶνε ἡ ΑΒ καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Γ (σχ. 97), ἐκ τοῦ ὁποίου ζητεῖται νὰ φέρωμεν παράλληλον τῆς ΑΒ.

Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν τυχοῦσαν γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον νὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Δ· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν ἄλλο τόξον, τὸ ὁποῖον θὰ διέλθη διὰ τοῦ σημείου Γ καὶ θὰ τέμνη τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Ζ. Ἔπειτα λαμβάνομεν τὸ τόξον ΔΕ ἴσον μὲ τὸ τόξον ΖΓ καὶ ἑνώνομεν τὰ σημεῖα Γ καὶ Ε διὰ τῆς εὐθείας ΓΕ· αὕτη εἶνε ἡ ζητουμένη παράλληλος τῆς ΑΒ.

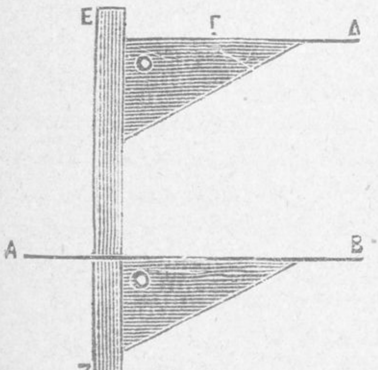


Σχ. 97.

Διότι, ἐὰν ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ διὰ τῆς εὐθείας ΓΔ, σχηματίζονται αἱ ὀξεῖαι γωνίαι ΖΔΓ καὶ ΔΓΕ, αἵτινες εἶνε ἴσαι (ἐδ. 98) καὶ ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι ΓΕ καὶ ΑΒ εἶνε παράλληλοι (ἐδ. 41).

Λύσις 2α. Διὰ τοῦ ***γνώμονος*** καὶ τοῦ ***κανόνος***.

118. Ἐφαρμόζομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ (σχ. 98) τὴν μίαν πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ γνώμονος, ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης τὸν κανόνα ΕΖ. Ἔπειτα σύρομεν τὸν γνώμονα πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ κανόνος, τηροῦντες αὐτὸν ἀκίνητον, μέχρις οὗ ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ γνώμονος ἐφαρμόση εἰς τὸ σημεῖον Γ, τότε δὲ μεταχειριζόμενοι τὴν πλευρὰν ταύτην ὡς κανόνα γράφομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος τῆς ΑΒ.



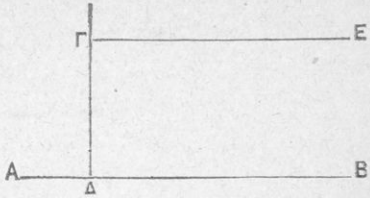
Σχ. 98.

Διότι καὶ αἱ δύο εὐθεῖαι εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὴν κόψιν τοῦ κανόνος καὶ ἑπομένως εἶνε παράλληλοι (ἐδ. 42).

Λύσις 3η. Διὰ ***σχοινίου*** ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.

119. Ὅταν ὅμως ἡ ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Γ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, πράττομεν ὡς ἑξῆς.

Ἐκ τοῦ σημείου Γ (σχ. 99) φέρομεν τὴν κάθετον ΓΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ κατὰ τὸν τρόπον τοῦ ἐδαφίου 115· ἔπειτα ἐκ τοῦ σημείου Γ φέρομεν τὴν κάθετον ΓΕ ἐπὶ τὴν ΓΔ κατὰ τὸν τρόπον τοῦ ἐδαφίου 111. Ἡ ΓΕ εἶνε ἡ ζητουμένη παράλληλος (ἐδ. 42).



Σχ. 99.

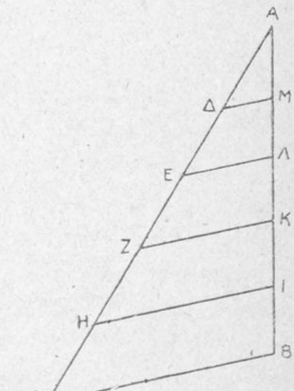
Πρόβλημα 5ον.

120. ***Νὰ διαιρεθῇ δοθεῖσα εὐθεῖα εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη.***

Λύσις. Διὰ τοῦ ***διαβήτου***, τοῦ ***γνώμονος*** καὶ τοῦ ***κανόνος***.

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶνε ἡ ΑΒ (σχ. 100), ἥτις πρόκειται νὰ διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη, καὶ ἔστω εἰς 5.

Πρὸς τοῦτο φέρομεν ἐκ τοῦ σημείου Α τὴν εὐθεῖαν ΑΓ σχηματίζουσαν μετὰ τῆς ΑΒ γωνίαν τινά. Ἔπειτα ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἀρχόμενοι λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΓ διὰ τοῦ διαβήτου πέντε ἴσα μέρη κατ' ἀρέσκειαν, τὰ ΑΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ. Τὸ σημεῖον Θ τοῦ τελευταίου μέρους ἑνώνομεν μὲ τὸ σημεῖον Β διὰ τῆς εὐθείας ΘΒ· ἔπειτα ἐκ τῶν σημείων Η, Ζ, Ε, Δ φέρομεν διὰ τοῦ γνώμονος παραλλήλους τῆς ΘΒ, τὰς ΗΙ, ΖΚ, ΕΛ, ΔΜ, αἵτινες τέμνουσι τὴν ΑΒ εἰς πέντε ἴσα μέρη, ὡς βεβαιούμεθα διὰ τοῦ διαβήτου.

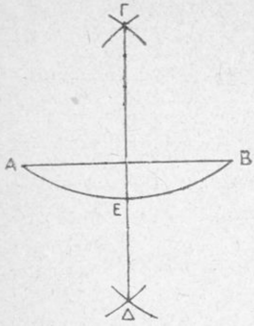


Σχ. 100.

Πρόβλημα 6ον.

121. ***Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη.***

Λύσις. Διὰ τοῦ ***διαβήτου*** καὶ τοῦ ***κανόνος***.



Σχ. 101.

Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ τόξον εἶνε τὸ ΑΒ (σχ. 101). Διὰ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη φέρομεν διὰ τοῦ κανόνος τὴν χορδὴν αὐτοῦ ΑΒ καὶ εὑρίσκομεν κατὰ τὸ πρῶτον πρόβλημα τὴν κάθετον ΓΔ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, ἥτις θὰ διαιρῇ καὶ τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη, τὰ ΑΕ καὶ ΕΒ (ἐδ. 108).

Σημ. Ἐὰν ἕκαστον ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΒ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου εἰς δύο ἴσα μέρη, τότε τὸ τόξον θὰ διαιρεθῇ εἰς 4 ἴσα μέρη· οὕτω πράττοντες δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸ εἰς 8, 16 κτλ. ἴσα μέρη.

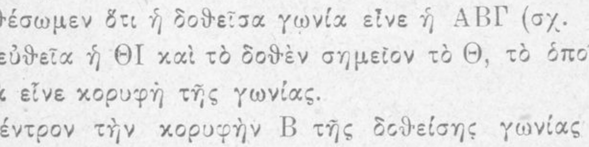
Πρόβλημα 7ον.

122. ***Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση μὲ δοθεῖσαν γωνίαν καὶ νὰ ἔχῃ πλευρὰν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, κορυφὴν δὲ σημεῖόν τι αὐτῆς.***

Λύσις 1η. Διὰ τοῦ *διαβήτου* καὶ τοῦ *κανόνος*.

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δοθεῖσα γωνία εἶνε ἡ ΑΒΓ (σχ. 102), ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΘΙ καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Θ, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ εἶνε κορυφὴ τῆς γωνίας.

Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Β τῆς δοθείσης γωνίας καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν γράφομεν διὰ τοῦ διαβήτου τόξον, τὸ ὁποῖον νὰ τέμνῃ τὰς πλευρὰς αὐτῆς εἰς δύο σημεῖα Δ καὶ Ε·

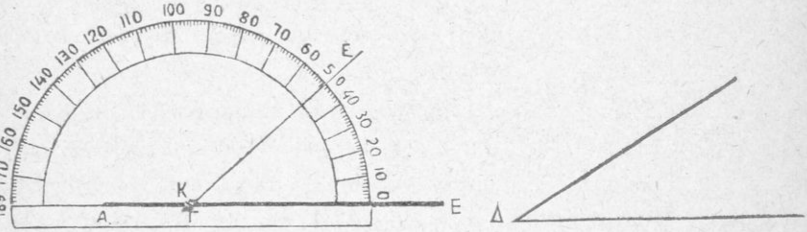


Σχ. 102.

ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Θ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν ἄλλο τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΘΙ εἴς τι σημεῖον Ζ. Ἐπὶ τοῦ τόξου τούτου, ἀπὸ τοῦ Ζ ἀρχόμενοι, λαμβάνομεν τὸ τόξον ΖΗ ἴσον μὲ τὸ τόξον ΔΕ καὶ ἑνώνομεν τὰ σημεῖα Θ καὶ Η διὰ τῆς εὐθείας ΘΗ. Ἡ σχηματιζομένη γωνία ΙΘΚ εἶνε ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν ΑΒΓ. Διότι αἱ γωνίαι αὗται εἶνε ἐπίκεντροι καὶ βαίνουσιν εἰς ἴσα τόξα (ἐδ. 98).

Λύσις 2α. Διὰ τοῦ ***ἀναγωγέως ἢ μοιρογνωμονίου.***

123. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δοθεῖσα γωνία εἶνε ἡ Δ, ἥτις μετρηθεῖσα διὰ τοῦ ἀναγωγέως εὑρέθη 50 μοιρῶν, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶνε ἡ ΑΒ (σχ. 103) καὶ Γ σημεῖόν τι αὐτῆς, τὸ ὁποῖον



Σχ. 103.

θέλομεν νὰ εἶνε κορυφή. Θέτομεν τὸ κέντρον Κ τοῦ ἀναγωγέως εἰς τὸ σημεῖον Γ τῆς εὐθείας ΑΒ οὕτως, ὥστε ἡ διάμετρος τοῦ ἀναγωγέως νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ· ἔπειτα σημειοῦμεν πλησίον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀναγωγέως τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὸν ἀριθμὸν 50 σημεῖόν τι Ε καὶ φέρομεν διὰ τοῦ κανόνος τὴν εὐθεῖαν ΓΕ. Οὕτω δὲ κατεσκευάσθη ἡ γωνία ΒΓΕ, ἥτις εἶνε ἴση μὲ τὴν Δ.

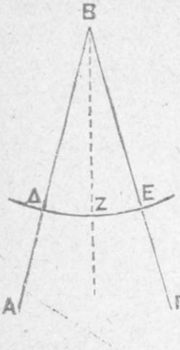
Σημ. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα γωνία δὲν περιέχῃ ἀκριβῶς ἀκέραιον ἀριθμόν τινα μοιρῶν, τότε δὲν δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν διὰ τοῦ ἀναγωγέως ἀκριβῶς τοιαύτην γωνίαν· διότι οἱ τοιοῦτοι ἀναγωγεῖς εἶνε συνήθως διῃρημένοι εἰς μοίρας μόνον.

Πρόβλημα 8ον.

124. ***Νὰ διαιρεθῇ δοθεῖσα γωνία εἰς δύο ἴσα μέρη.***

Λύσις. Διὰ τοῦ ***διαβήτου καὶ τοῦ κανόνος.***

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δοθεῖσα γωνία εἶνε ἡ ΑΒΓ (σχ. 104). Διὰ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη, γράφομεν διὰ τοῦ διαβήτου μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν αὐτῆς Β καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον νὰ τέμνῃ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς δύο σημεῖα Δ καὶ Ε. Τοῦ τόξου τούτου ΔΕ τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας, εὑρίσκομεν διὰ τοῦ 6ου προβλήματος τὸ μέσον Ζ καὶ ἑνώνομεν τοῦτο μὲ τὴν κορυφὴν Β διὰ τῆς εὐθείας ΒΖ, οὕτω δὲ ἡ γωνία ΑΒΓ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσας γωνίας, τὰς ΔΒΖ καὶ ΖΒΕ. Διότι αἱ γωνίαι αὗται εἶνε ἐπίκεντροι καὶ βαίνουσιν εἰς ἴσα τόξα.



Σχ. 104.

Ἡ εὐθεῖα ΒΖ, ἥτις διαιρεῖ τὴν γωνίαν ΑΒΓ εἰς δύο ἴσα μέρη, λέγεται *διχοτόμος*.

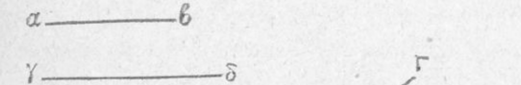
Σημ. Ἐὰν τὸ τόξον ΔΕ διαιρέσωμεν εἰς 4, 8, 16 κτλ. ἴσα μέρη καὶ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως μὲ τὴν κορυφὴν Β δι' εὐθειῶν, ἡ γωνία ΑΒΓ θέλει διαιρεθῇ εἰς 4, 8, 16 κτλ. ἴσα μέρη.

Πρόβλημα 9ον.

125. *Ἐκ δύο πλευρῶν τριγώνου καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.*

Λύσις. Διὰ τοῦ *διαβήτου* καὶ τοῦ *κανόνος*.

Ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ δύο πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶνε αἱ αβ καὶ γδ, ἡ δὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία εἶνε ἡ Δ (σχ. 105).



Σχ. 105.

Ἐπὶ τῆς τυχούσης εὐθείας ΑΒ κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην μὲ τὴν Δ (ἐδ. 122), καὶ ἔστω τὴν ΒΑΓ· ἔπειτα λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ διὰ τοῦ διαβήτου μέρος ἴσον μὲ τὴν πλευρὰν γδ, καὶ ἔστω τὸ ΑΔ, ἐπὶ δὲ τῆς πλευρᾶς ΑΓ λαμβάνομεν τὸ μέρος ΑΕ ἴσον μὲ τὴν ἄλλην πλευρὰν αβ· τέλος ἑνώνομεν τὰ σημεῖα Ε καὶ Δ διὰ τῆς εὐθείας ΕΔ καὶ κατασκευάζεται οὕτω τὸ τρίγωνον ΑΔΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

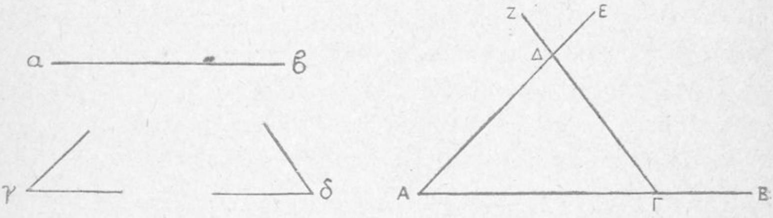
Πρόβλημα 10ον.

126. *Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου καὶ τῶν γωνιῶν τῶν κειμένων εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.*

Λύσις. Διὰ τοῦ **διαβήτου** καὶ τοῦ **κανόνος**.

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ τριγώνου εἶνε ἡ αϐ, αἱ δὲ γωνίαι, αἵτινες κεῖνται εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς, αἱ γ καὶ δ. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτων πρέπει νὰ εἶνε μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν (ἐδ. 69. 2ον), διότι ἄλλως δὲν δύναται νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.

Γράφομεν πρὸς τοῦτο διὰ τοῦ κανόνος εὐθεῖάν τινα ΑΒ (σχ. 106) καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν διὰ τοῦ διαβήτου τὴν ΑΓ ἴσην μὲ



Σχ. 106.

τὴν αϐ· καὶ κατόπιν κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην μὲ τὴν γ, ἔχουσαν πλευρὰν τὴν ΑΓ καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον Α, καὶ ἔστω τὴν ΕΑΓ· ἐπίσης γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δ ἔχουσαν πλευρὰν τὴν ΓΑ καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἔστω τὴν ΖΓΑ. Αἱ εὐθεῖαι ΑΕ καὶ ΓΖ (προεκτεινόμεναι) τέμνονται εἴς τι σημεῖον Δ, οὕτω δὲ κατασκευάζεται τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΓΔ.

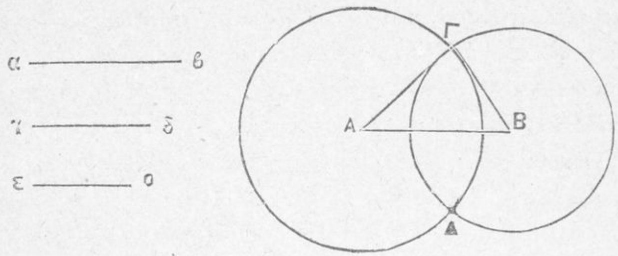
Πρόβλημα 11ον.

127. *Ἐκ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.*

Λύσις. Διὰ τοῦ **διαβήτου** καὶ τοῦ **κανόνος**.

Ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ τρεῖς δοθεῖσαι εὐθεῖαι εἶνε αἱ αβ, γδ, εϛ· ἑκάστη τούτων πρέπει νὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων (ἐδ. 69. 1ον), διότι ἄλλως δὲν δύναται νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον, λαμβάνομεν διὰ τοῦ διαβήτου εὐθεῖάν τινα ἴσην μὲ μίαν τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, καὶ ἔστω τὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν αβ (σχ. 107). Ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ



Σχ. 107.

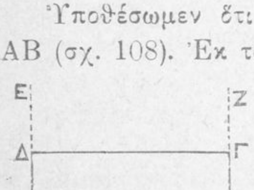
σημεῖον Α καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν γδ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Β καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν εο γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν κύκλου· αἱ περιφέρειαι αὗται τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἐὰν ἑνώσωμεν τώρα τὸ σημεῖον Γ (ἢ τὸ Δ) μὲ τὰ σημεῖα Α καὶ Β διὰ τῶν εὐθειῶν ΓΑ καὶ ΓΒ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶνε τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα 12ον.

128. ***Δοθείσης τῆς πλευρᾶς τετραγώνου, νὰ κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον.***

Λύσις. Διὰ τοῦ ***γνώμονος***, τοῦ ***διαβήτου*** καὶ τοῦ ***κανόνος.***

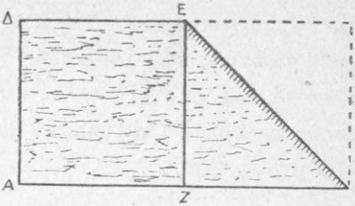
Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δοθεῖσα πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶνε ἡ ΑΒ (σχ. 108). Ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β αὐτῆς φέρομεν διὰ τοῦ γνώμονος τὰς καθέτους ΑΕ καὶ ΒΖ ἐπ᾽ αὐτήν· ἔπειτα λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν καθέτων τούτων διὰ τοῦ διαβήτου τὰ μέρη ΑΔ καὶ ΒΓ ἴσα μὲ τὴν ΑΒ καὶ ἑνώνομεν τὰ σημεῖα Δ καὶ Γ διὰ τῆς εὐθείας ΔΓ· οὕτω δὲ σχηματίζεται τὸ ζητούμενον τετράγωνον ΑΒΓΔ.



Σχ. 108.

129. Διὰ νὰ κόψωμεν τετράγωνον ἐξ ὑφάσματος ἢ ἐκ χάρτου ἔχοντος σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου (σχ. 109), πράττομεν ὡς ἑξῆς.

Στρέφομεν περὶ τὴν κορυφὴν Β τὴν πλευρὰν ΒΓ, μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΒΑ, ὅτε ἡ μὲν ΒΓ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν τῆς ΒΖ, ἡ δὲ ΓΕ τὴν θέσιν τῆς ΕΖ· Κατόπιν ἀποκόπτομεν διὰ ψαλίδος τὸ ὕφασμα ἢ τὸν χάρτην κατὰ τὴν ΕΖ καὶ ἔχομεν τὸ τετράγωνον ΒΓΕΖ.



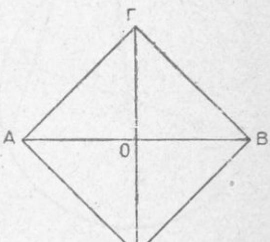
Σχ. 109.

Πρόβλημα 13ον.

130. *Δοθείσης τῆς διαγωνίου τετραγώνου, νὰ κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον.*

Λύσις. Διὰ τοῦ *διαβήτου καὶ τοῦ κανόνος.*

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δοθεῖσα διαγώνιος εἶνε ἡ ΑΒ (σχ. 110). Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τετράγωνον, φέρομεν εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ κάθετον (κατὰ τὸ ἐδάφιον 107), καὶ ἔστω τὴν ΓΔ, ἔπειτα λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Ο δύο μέρη ἴσα μὲ τὸ μέρος ΑΟ ἢ ΟΒ· τέλος ἑνώνομεν τὰ ἄκρα τῶν καθέτων τούτων δι' εὐθειῶν, τὸ δὲ οὕτω σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΑΔΒΓ εἶνε τὸ ζητούμενον τετράγωνον.

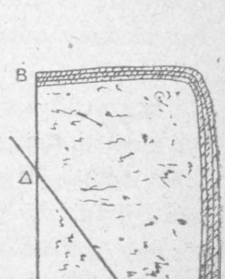


Σχ. 110.

Διότι αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσαι ἐκ κατασκευῆς καὶ τέμνονται μεταξύ των καθέτως (ἐδάφ. 83 καὶ 84).

Σημ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου κατασκευάζομεν ῥόμβον, ὅταν μᾶς δοθῶσιν αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ.

Ὅταν ὅμως πρόκειται νὰ κόψωμεν ἐξ ὑφάσματος ἢ ἐκ χάρτου ῥόμβον, ἔχοντα δοθείσας διαγωνίους, πράττομεν ὡς ἑξῆς. Διπλώνομεν τὸ ὕφασμα ἢ τὸν χάρτην εἰς τέσσαρα μέρη οὕτως, ὥστε νὰ σχηματισθῶσι πέριξ τοῦ σημείου Α τῆς τομῆς



Σχ. 111.

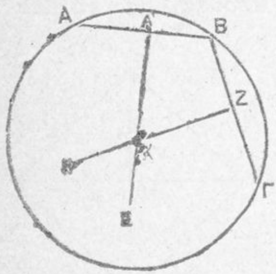
τῶν διπλώσεων τέσσαρες γωνίαι ὀρθαὶ (σχ. 111)· κατόπιν ἐπὶ ἑκάστης τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ λαμβάνομεν μέρος ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ ἑκάστης τῶν δοθεισῶν διαγωνίων, ἔστωσαν δὲ τὰ μέρη ταῦτα τὰ ΑΔ καὶ ΑΕ· τέλος κόπτομεν τὸ ὕφασμα κατὰ τὴν ὑποτείνουσαν ΔΕ. Τὸ ἀποκοπὲν μέρος ΔΑΕ ξεδιπλούμενον εἶνε ὁ ζητούμενος ῥόμβος.

Πρόβλημα 14ον.

131. *Νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου, ἥτις νὰ διέρχηται διὰ τριῶν σημείων μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας.*

Λύσις. Διὰ τοῦ *διαβήτου καὶ τοῦ κανόνος.*

Ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ τρία δοθέντα σημεῖα εἶνε τὰ Α, Β, Γ (σχ. 112) μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, διὰ τῶν ὁποίων ζητεῖται νὰ διέλθῃ περιφέρεια. Ἑνώνομεν πρὸς τοῦτο τὰ σημεῖα Α καὶ Β, Β καὶ Γ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ· ἔπειτα εὑρίσκομεν τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΖΗ εἰς τὸ μέσον αὐτῶν, αἵτινες προεκτεινόμεναι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Κ. Ἐὰν τώρα μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Κ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΚΑ (ἢ ΚΒ ἢ ΚΓ) γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου, αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ.



Σχ. 112.

Διότι τὸ σημεῖον Κ, ἐπειδὴ εἶνε σημεῖον τῶν καθέτων ΔΕ καὶ ΖΗ, τῶν ἀγομένων εἰς τὸ μέσον τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ, ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτῶν (ἐδάφ. 36), ἤτοι αἱ ἀποστάσεις ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ εἶνε ἴσαι.

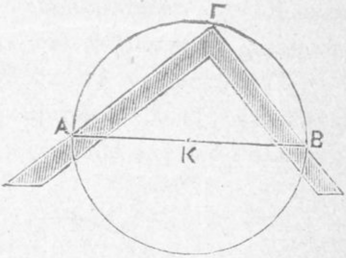
Σημ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου εὑρίσκομεν τὸ κέντρον δοθέντος κύκλου, πρὸς δὲ καὶ τὴν περιφέρειαν, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει δοθὲν τόξον. Ἤτοι λαμβάνομεν τρία σημεῖα ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ ἐπὶ τοῦ τόξου καὶ πράττομεν, ὅπως καὶ ἀνωτέρω, πρὸς εὕρεσιν τοῦ κέντρου Κ.

132. Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ὡς ἑξῆς. Φέρομεν χορδήν τινα καὶ εὑρίσκομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, τὴν ὁποίαν προεκτείνομεν ἑκατέρωθεν μέχρι τῆς περιφερείας· αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ κέντρου (ἐδ. 108) καὶ ἐπο-

μένως θὰ εἶνε διάμετρος. Τὸ μέσον αὐτῆς εἶνε τὸ κέντρον.

Ἢ καὶ ὡς ἑξῆς ἀκόμη, ὅταν ὁ κύκλος εἶνε μικρός.

Ἐφαρμόζομεν τὴν κορυφὴν τοῦ γνώμονος εἴς τι σημεῖον Γ τῆς περιφερείας (σχ. 113)· ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ σημεῖα Α καὶ Β, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ ἐξωτερικαὶ πλευραὶ τοῦ γνώμονος τέμνουσι τὴν περιφέρειαν, διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ. Τὸ μέσον αὐτῆς Κ εἶνε τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.



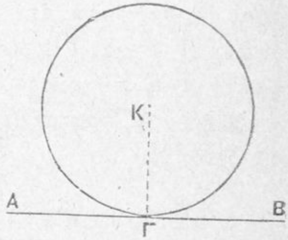
Σχ. 113.

Διότι ἡ γωνία Γ τοῦ γνώμονος, ἐπειδὴ εἶνε ὀρθὴ καὶ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον, βαίνει ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας (ἐδ. 102), ἑπομένως ἡ ΑΒ εἶνε διάμετρος καὶ τὸ μέσον Κ αὐτῆς εἶνε τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ.

133. Εὐθεῖα λέγεται *ἐφαπτομένη* κύκλου, ἐὰν ἔχῃ μὲ τὴν περιφέρειαν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον.

Ἐάν, παραδ. χάριν, ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 114) ἔχῃ μὲ τὴν περιφέρειαν κοινὸν σημεῖον μόνον τὸ Γ, αὕτη λέγεται ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου.



Σχ. 114.

134. ***Πᾶσα ἐφαπτομένη κύκλου εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα, τὴν ἀπολήγουσαν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς*** (περὶ τούτου βεβαιούμεθα διὰ τοῦ γνώμονος). Καὶ ἀντιστρόφως· ***πᾶσα εὐθεῖα κάθετος εἰς τὸ ἄκρον ἀκτῖνος εἶνε ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου.***

Πρόβλημα 13ον.

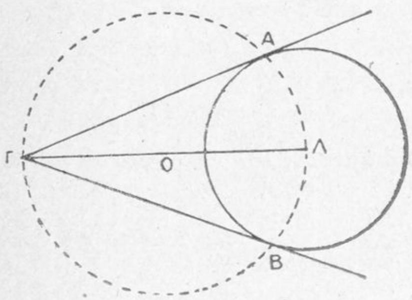
135. ***Ἐκ δοθέντος σημείου νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην δοθέντος κύκλου.***

Λύσις Διὰ τοῦ *διαβήτου* καὶ τοῦ *κανόνος*.

Τὸ δοθὲν σημεῖον δύναται νὰ κεῖται ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ ἐκτὸς τοῦ κύκλου.

1) Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ δοθὲν σημεῖον Γ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας (σχ. 114). Φέρομεν ἐξ αὐτοῦ τὴν κάθετον ΑΒ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΓ τὴν ἀπολήγουσαν εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ αὕτη εἶνε ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη (ἐδ. 134).

2) Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ δοθὲν σημεῖον Γ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου (σχ. 115). Ἑνώνομεν τοῦτο μὲ τὸ κέντρον Λ τοῦ δοθέντος κύκλου διὰ τῆς εὐθείας ΓΛ καὶ μὲ κέντρον τὸ μέσον αὐτῆς Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΟΓ ἢ τὴν ΟΛ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἥτις τέμνει τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Αἱ εὐθεῖαι ΓΑ καὶ ΓΒ εἶνε ἐφαπτόμεναι τοῦ δοθέντος κύκλου.



Σχ. 115.

Διότι, ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΛΑ καὶ ΛΒ, σχηματίζονται αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ΓΑΛ καὶ ΓΒΛ, αἵτινες εἶνε ὀρθαὶ ὡς βαίνουσαι ἐπὶ ἡμιπεριφερείας (ἐδ. 102), ἐπομένως αἱ εὐθεῖαι ΓΑ καὶ ΓΒ, ὡς κάθετοι εἰς τὸ ἄκρον ἀκτῖνος, εἶνε ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου.

Σημ. Αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται εἶνε ἴσαι, ὡς βεβαιούμεθα διὰ τοῦ διαβήτου.

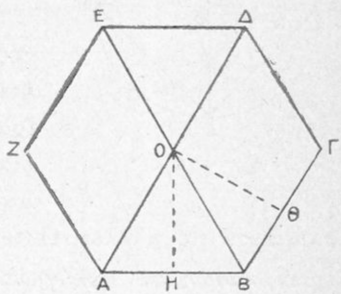
ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΙ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

136. Πολύγωνον λέγεται ***ἐγγεγραμμένον*** εἰς κύκλον, ἐὰν ὅλαι αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτοῦ εἶνε χορδαὶ τοῦ κύκλου.

Παραδ. χάριν, τὸ σχῆμα 120 παριστᾷ πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

Πολύγωνον λέγεται ***κανονικόν***, ἐὰν ἔχῃ ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας καὶ ὅλας τὰς γωνίας του ἴσας. Π. χ. τὸ κατωτέρω πολύγωνον (σχ. 116) εἶνε κανονικόν· ἐπίσης τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶνε κανονικά.

137. ***Κέντρον*** κανονικοῦ πολυγώνου λέγεται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον εἶνε ἐγγεγραμμένον. Ὥστε διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κέντρον κανονικοῦ πολυγώνου, καὶ ἔστω τοῦ ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 116), φέρομεν τὰς καθέτους ΗΟ καὶ ΘΟ εἰς τὸ μέσον δύο παρακειμένων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ, τὸ δὲ σημεῖον Ο τῆς συναντήσεώς των εἶνε τὸ ζητούμενον κέντρον (ἐδ. 131.)



Σχ. 116.

Τὸ κέντρον κανονικοῦ πολυγώνου εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του εἶνε ἄρτιος (ὅπως εἶνε τὸ ἀνωτέρω). Ἑνώνομεν δι' εὐθειῶν τὰς κορυφὰς δύο γωνιῶν, ἔστω τὰς Α καὶ Β, μὲ τὰς κορυφὰς τῶν ἀπέναντι αὐτῶν γωνιῶν Δ καὶ Ε, τὸ δὲ σημεῖον Ο τῆς συναντήσεώς των εἶνε τὸ κέντρον αὐτοῦ.

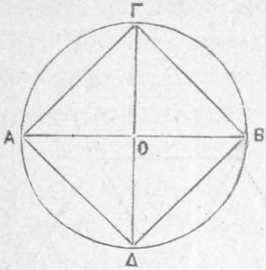
138. Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν πολύγωνον εἰς δοθέντα κύκλον, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶνε αἱ πλευραὶ τοῦ ἐγγραφησομένου πολυγώνου, καὶ ἔπειτα νὰ φέρωμεν χορδὰς τῶν ἴσων τούτων τόξων· τὸ δὲ οὕτω σχηματιζόμενον πολύγωνον θὰ εἶνε κανονικόν. Διότι αἱ μὲν πλευραὶ αὐτοῦ θὰ εἶνε ἴσαι, ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων (ἐδ. 99), αἱ δὲ γωνίαι αὐτοῦ θὰ εἶνε ἴσαι μεταξύ των ὡς ἐγγεγραμμέναι καὶ ἐπὶ ἴσων τόξων βαίνουσαι (ἐδ. 101).

Πρόβλημα 16ον.

139. *Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.*

Λύσις. Διὰ τοῦ *διαβήτου* καὶ τοῦ *κανόνος*.

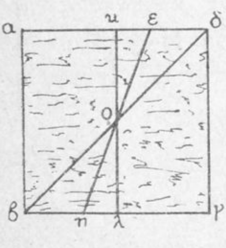
Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν τετράγωνον εἰς κύκλον, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη· τοῦτο δὲ γίνεται ὡς ἑξῆς· Γράφομεν δύο διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 117) καθέτους μεταξύ των (κατὰ τὸ ἐδάφ. 107), οὕτω δὲ διαιρεῖται ἡ περιφέρεια εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη· διότι αἱ πέριξ τοῦ σημείου Ο ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι ἴσαι ὡς ὀρθαί, ἑπομένως καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα αὐτῶν ΑΓ, ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ εἶνε ἴσα. Ἐὰν τώρα ἑνώσωμεν τὰ ἄκρα τῶν διαμέτρων δι' εὐθειῶν, σχηματίζεται τὸ τετράγωνον ΑΓΒΔ, τὸ ὁποῖον εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον.



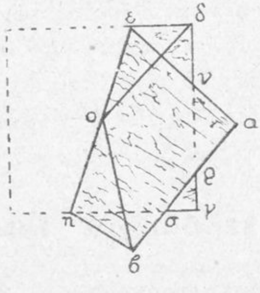
Σχ. 117.

Ἐὰν ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω ἴσων τόξων διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη, ὅτε ἡ περιφέρεια θὰ διαιρεθῇ εἰς 8 ἴσα μέρη, καὶ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως διὰ χορδῶν, θέλομεν σχηματίσει κανονικὸν ὀκτάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Οὕτω πράττοντες δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν πολύγωνον ἔχον 16, 32 κλπ. πλευράς.

Σημ. Ὅταν πρόκειται νὰ κόψωμεν ἐξ ὑφάσματος (ἢ ἐκ χάρτου) κανονικὸν ὀκτάγωνον, πράττομεν ὡς ἑξῆς. Κατασκευάζομεν πρῶτον ἓν τετράγωνον αβγδ, (σχ. 118) κατὰ τὸ ἐδάφιον 129 καὶ σημειοῦμεν ἐπ' αὐτοῦ τὴν διαγώνιον βδ, καθὼς καὶ τὸ μέσον αὐτοῦ κλ. (τοῦτο εὑρίσκομεν, ἂν διπλώσωμεν τὸ ὕφασμα οὕτως, ὥστε νὰ ἐφαρμόσῃ ἡ πλευρὰ αβ ἐπὶ τῆς δγ)· κατόπιν διπλώνομεν τὸ ὕφασμα οὕτως, ὥστε ἡ οκ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς οδ, ὅτε θὰ διπλωθῇ τὸ ὕφασμα κατὰ τὴν διχοτόμον εη (σχ. 119). Ἐὰν ἀποκόψωμεν τώρα τὰ τέσσαρα τρίγωνα εδν, νρα, ργσ, σβη, τὸ απομένον ὕφασμα ξεδιπλούμενον ἔχει σχῆμα κανονικοῦ ὀκταγώνου.



Σχ. 118.



Σχ. 119.

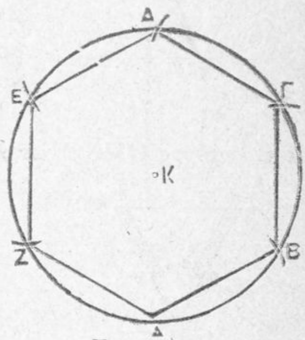
Πρόβλημα 17ον.

140. Νὰ *ἐγγραφῇ κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.*

Λύσις. Διὰ τοῦ ***διαβήτου καὶ τοῦ κανόνος.***

Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς κύκλον, πράττομεν ὡς ἑξῆς.

Ἀνοίγομεν τὸν διαβήτην τόσον, ὅση εἶνε ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου· ἔπειτα μὲ κέντρον σημεῖόν τι Α τῆς περιφερείας (σχ. 120) καὶ μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου γράφομεν ἐπὶ τῆς περιφερείας μικρὰ τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνουσιν αὐτὴν εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Β· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Β καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν μικρὸν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Γ· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν ἄλλο μικρὸν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Δ· τέλος μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Δ γράφομεν ἄλλο τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ε. Οὕτω δὲ διηρέθη ἡ περιφέρεια εἰς 6 ἴσα μέρη· ἐὰν τώρα ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ σχηματίζεται τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ.

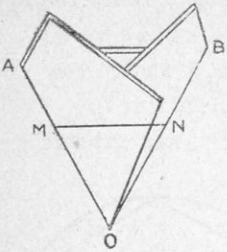


Σχ. 120.

Ἐὰν ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω ἴσων τόξων διαιρέσωμεν εἰς 2 ἴσα μέρη καὶ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα τῶν διαιρέσεων διὰ χορδῶν, σχηματίζομεν κανονικὸν δωδεκάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Οὕτω δὲ ἐξακολουθοῦντες δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν πολύγωνον ἔχον 24, 48 κτλ. πλευρὰς ἢ γωνίας.

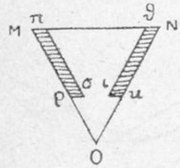
141. Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς δοθέντα κύκλον, ἐγγράφομεν πρῶτον εἰς αὐτὸν κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἐναλλὰξ διὰ χορδῶν. Εἰς τὸ ἀνωτέρω π. χ. κανονικὸν ἑξάγωνον θὰ ἑνώσωμεν τὸ σημεῖον Α μὲ τὸ Γ, τὸ Γ μὲ τὸ Ε καὶ τὸ Ε μὲ τὸ Α· τὸ δὲ οὕτω σχηματιζόμενον τρίγωνον θὰ εἶνε ἰσόπλευρον.

Σημ. Ὅταν πρόκειται νὰ κόψωμεν ἐξ ὑφάσματος (ἢ ἐκ χάρτου) κανονικὸν ἑξάγωνον, πράττομεν ὡς ἑξῆς. Λαμβάνομεν τεμάχιον ὑφάσματος (ἢ χάρτου) ἔχον σχῆμα ὀρθογωνίου καὶ διπλώνομεν αὐτὸ εἰς δύο κατὰ πλάτος· κατόπιν, ὅπως εἶνε διπλωμένον, διπλώνομεν αὐτὸ πέριξ ἑνὸς σημείου Ο (σχῆμα 121) τῆς τομῆς εἰς τρία μέρη οὕτως, ὥστε νὰ σχηματισθῶσι τρεῖς γωνίαι ἴσαι· τέλος λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΟΑ καὶ ΟΒ δύο μέρη ἴσα, τὰ ΟΜ καὶ ΟΝ, καὶ κόπτομεν τὸ ὕφασμα (ἢ τὸν χάρτην) κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΜΝ. Τὸ ἀποκοπὲν μέρος ΟΜΝ ξεδιπλούμενον ἔχει σχῆμα κανονικοῦ ἑξαγώνου.

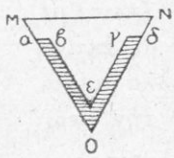


Σχ. 121.

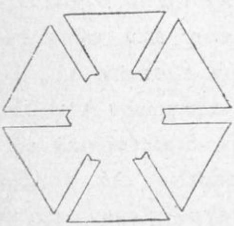
Ἐάν, πρὸ τοῦ ξεδιπλώσωμεν τὸ ἀποκοπὲν μέρος ΟΜΝ, ἀποκόψωμεν τὰ μέρη Μπρσ καὶ Νθιυ (σχ. 122), θέλει προκύψῃ μετὰ τὸ ξεδίπλωμα αὐτοῦ τὸ σχῆμα 124. Ἐκ δὲ τῆς ἀποκοπῆς τῶν μερῶν Οαβε καὶ Οδγε (σχ. 123) θέλει προκύψῃ μετὰ τὸ ξεδίπλωμα τὸ σχῆμα 125. Πρέπει ὅμως νὰ προσέχωμεν, ὥστε τὰ ἀποκοπτόμενα μέρη νὰ εἶνε ἴσα, διὰ τοῦτο ἐκ τῶν προτέρων σημειοῦμεν αὐτὰ δι' εὐθειῶν.

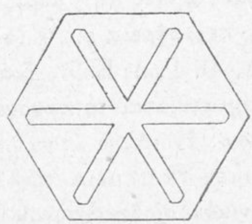


Σχ. 122.



Σχ. 123.


Σχ. 124.


Σχ. 125.

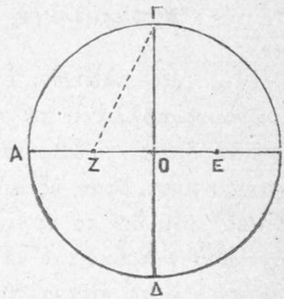
Πρόβλημα 18ον.

142. *Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν πεντάγωνον καὶ δεκάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.*

Λύσις. 1η· Διὰ τοῦ *διαβήτου* καὶ τοῦ *κανόνος*.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΔΒΓ (σχ. 126), εἰς τὸν ὁποῖον ζητεῖται νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν πεντάγωνον καὶ δεκάγωνον. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς πλευρὰς αὐτῶν, πράττομεν ὡς ἑξῆς.

Γράφομεν δύο διαμέτρους καθέτους μεταξύ των, τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ (ἐδ. 107)· ἔπειτα εὑρίσκομεν τὸ μέσον Ε τῆς ἀκτῖνος ΟΒ καὶ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Ε καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν τῶν σημείων Ε καὶ Γ γράφομεν μικρὸν τόξον, τὸ ὁποῖον νὰ τέμνῃ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ εἴς τι σημεῖον Ζ. Ἡ εὐθεῖα ΓΖ εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου, ἡ δὲ ΟΖ εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου. Ἔχοντες τώρα τὰς πλευρὰς ταύτας, ἐγγράφομεν τὸ κανονικὸν πεντάγωνον καὶ δεκάγωνον, ὅπως ἐγράψαμεν καὶ τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον.



Σχ. 126.

Λύσις 2α· Διὰ τοῦ ***ἀναγωγέως καὶ τοῦ κανόνος.***

143. Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια πρέπει νὰ διαιρεθῇ εἰς 5 ἴσα μέρη, διὰ τοῦτο ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων θὰ εἶνε 360° : 5, ἤτοι 72°. Ἔπειτα φέρομεν μίαν ἀκτῖνα τοῦ δοθέντος κύκλου. καὶ ἔχοντες αὐτὴν ὡς πλευρὰν κατασκευάζομεν διὰ τοῦ ἀναγωγέως ἐπίκεντρον γωνίαν 72° (ἐδ. 123). Τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχόμενον τόξον θὰ εἶνε τὸ πέμπτον τῆς περιφερείας, ἡ δὲ χορδὴ αὐτοῦ θὰ εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου.

Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον ἐγγράφομεν δεκάγωνον καὶ ἄλλα τινὰ κανονικὰ πολύγωνα.

Εὕρεσις γωνίας κανονικοῦ πολυγώνου.

144. Ἔστω, παραδ. χάριν, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶνε ἑκάστη γωνία τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου. Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶνε 6 ὀρθαὶ (ἐδ. 89) καὶ ἐπειδὴ ὅλαι αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶνε ἴσαι, διὰ τοῦτο ἑκάστη εἶνε τὰ $\frac{6}{5}$ τῆς ὀρθῆς $\left(\text{ἤτοι } 90^\circ \times \frac{6}{5} \text{ ἢ } 108^\circ\right)$. Ὥστε

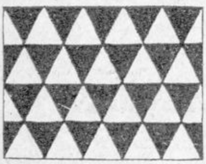
Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶνε ἑκάστη γω-

νία κανονικοῦ τινος πολυγώνου, διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δεικνύοντος τὸ πλῆθος τῶν γωνιῶν ἢ πλευρῶν αὐτοῦ.

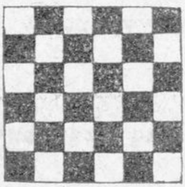
Ἐφαρμογὴ κανονικῶν πολυγώνων.

145. Διὰ πλακῶν, ἐχουσῶν σχῆμα κανονικοῦ πολυγώνου, στρώνουσι πολλάκις τὰ προαύλια καὶ τὰ πατώματα τῶν οἰκιῶν· Ἐπειδὴ ὅμως τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν πέριξ σημείου τινός, ὅταν ἐξ αὐτοῦ ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, εἶνε τέσσαρες ὀρθαὶ (ἐδ. 33), διὰ τοῦτο ἡ γωνία τῶν κανονικῶν πολυγώνων, διὰ τῶν ὁποίων πρόκειται νὰ στρωθῇ ἐπιφάνειά τις, πρέπει νὰ εἶνε τοιαύτη, ὥστε ἐπαναλαμβανομένης νὰ προκύπτωσι τέσσαρες ὀρθαί.

Παραδ. χάριν, ἡ γωνία τῶν ἰσοπλεύρων τριγωνικῶν πλακῶν, ἥτις εἶνε $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς, ὅταν ἐπαναληφθῇ 6 φοράς, προκύπτουσι 4 ὀρθαί. Ὡσαύτως ἡ γωνία τῶν τετραγωνικῶν πλακῶν, ἥτις εἶνε μία ὀρθή, ὅταν ἐπαναληφθῇ 4 φορὰς προκύπτουσι 4 ὀρθαί. Ἡ γωνία ἐπίσης τῶν κανονικῶν ἑξαγώνων πλακῶν, ἥτις εἶνε $\frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς, ὅταν ἐπαναληφθῇ 3 φοράς, προκύπτουν 4 ὀρθαί: Διὰ τοιούτων λοιπὸν κανονικῶν πολυγώνων δυνάμεθα νὰ στρώσωμεν ἐπιφάνειάν τινα, ὡς φαίνεται εἰς τὰ σχήματα 127, 128 καὶ 129,



Σχ. 127.



Σχ. 128.

Σχ. 129.

ἐνῷ διὰ κανονικῶν πενταγώνων π. χ. δὲν δυνάμεθα νὰ πράξωμεν τοῦτο· διότι ἡ γωνία αὐτῶν, ἥτις εἶνε $\frac{6}{5}$ τῆς ὀρθῆς, ὁσασδήποτε φορὰς καὶ ἂν ἐπαναληφθῇ, δὲν προκύπτουσι 4 ὀρθαί. Ἐν τούτοις ὅμως διὰ καταλλήλων συνδυασμῶν κανονικῶν τινων πολυγώνων κατορθοῦται καὶ τοῦτο.

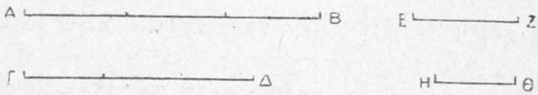
ΠΕΡΙ ΠΟΣΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΝ

146. ***Λόγος*** δύο ποσῶν ἢ μεγεθῶν ὁμοειδῶν λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις προκύπτει ἐκ τῆς μετρήσεως τοῦ πρώτου, ὅταν τὸ δεύτερον ληφθῇ ὡς μονάς.

Ἐὰν μετρήσωμεν π. χ. μίαν εὐθεῖαν ἢ μίαν γωνίαν ἢ μίαν ἐπιφάνειαν δι᾽ ἄλλης ὁμοίας, λαμβανομένης ὡς μονάδος, καὶ εὕρωμεν αὐτὴν ἑξαπλασίαν, τότε ὁ λόγος τῆς πρώτης πρὸς τὴν δευτέραν εἶνε ὁ 6.

147. Δύο ἢ περισσότερα ποσὰ ἢ μεγέθη λέγονται ἀνάλογα πρὸς ἄλλα ἰσάριθμα καὶ ὁμοειδῆ, ἐὰν προκύπτωσιν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἐὰν π. χ. αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ προκύπτωσιν ἐκ τῶν εὐθειῶν ΕΖ καὶ ΗΘ (σχ. 130), ὅταν αὗται πολλαπλασιασθῶσιν



Σχ. 130.

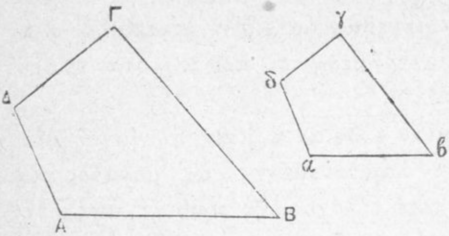
ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ἔστω ἐπὶ 3, ἤτοι ἂν εἶνε $ΑΒ = ΕΖ \times 3$ καὶ $ΓΔ = ΗΘ \times 3$, ὅτε θὰ εἶνε καὶ $\frac{ΑΒ}{ΕΖ} = \frac{ΓΔ}{ΗΘ} = 3$, τότε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ λέγονται ἀνάλογοι πρὸς τὰς εὐθείας ΕΖ καὶ ΗΘ. Καὶ τἀνάπαλιν αἱ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΗΘ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ· διότι εἶνε $ΕΖ = ΑΒ \times \frac{1}{3}$ καὶ $ΗΘ = ΓΔ \times \frac{1}{3}$.

Περὶ ὁμοίων εὐθυγράμμων σχημάτων.

148. Δύο εὐθύγραμμα σχήματα (ἔχοντα ἴσον ἀριθμὸν πλευρῶν ἑπομένως καὶ γωνιῶν) λέγονται *ὅμοια*, ἐὰν ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν, τὰς δὲ πλευράς, εἰς τὰς ὁποίας κεῖνται αἱ ἴσαι γωνίαι, ἀναλόγους.

Αἱ πλευραὶ αὗται, εἰς τὰς ὁποίας κεῖνται αἱ ἴσαι γωνίαι, λέγονται ***ὁμόλογοι***.

Ἐὰν π. χ. τὰ τετράπλευρα ΑΒΓΔ καὶ αϐγδ (σχ.131) ἔχωσι τὴν γωνίαν Α ἴσην μὲ τὴν α, τὴν Β ἴσην μὲ τὴν ϐ, τὴν Γ ἴσην μὲ τὴν γ καὶ τὴν Δ ἴσην μὲ τὴν δ, πρὸς δὲ καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους, ἤτοι $\frac{ΑΒ}{αϐ}=\frac{ΒΓ}{ϐγ}=\frac{ΓΔ}{γδ}=\frac{ΔΑ}{δα}$ τότε τὰ τετράπλευρα ταῦτα εἶναι ὅμοια.



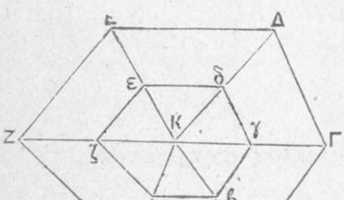
Σχ. 131.

149. ***Δύο τρίγωνα, ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν, εἶνε ὅμοια. Ἤτοι ἔχουσι καὶ τὰς πλευράς των ἀναλόγους.***

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΥΠΟ ΚΛΙΜΑΚΑ

150. Ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν πολύγωνον ὅμοιον μὲ τὸ ἐπὶ τοῦ χάρτου ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 132) καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ ἔχωσι πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς τοῦ δοθέντος λόγον $\frac{1}{2}$.

Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ἐντὸς τοῦ πολυγώνου σημεῖόν τι Κ καὶ ἑνώνομεν τοῦτο μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου διὰ τῶν εὐθειῶν ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ κτλ. Ἔπειτα ἀπὸ τοῦ σημείου Κ ἀρχόμενοι λαμϐάνομεν ἐπ' αὐτῶν τὸ ἥμισυ, ἤτοι τὰ μέρη Κα, Κϐ, Κγ κτλ. καὶ ἑνώνομεν τὰ ἄκρα αὐτῶν διὰ τῶν εὐθειῶν αϐ, ϐγ, γδ κτλ. Οὕτω δὲ σχηματίζεται τὸ πολύγωνον αβγδεζ, τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύεται ὅτι εἶνε ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓΔΕΖ, καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ἔχουσι πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς τοῦ δοθέντος λόγον $\frac{1}{2}$.



Σχ. 132.

Σημ. Ἐὰν θέλωμεν αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου πολυγώνου νὰ ἔχωσι πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς τοῦ δοθέντος λόγον $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ κτλ., τότε πρέπει νὰ λάβωμεν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΚΑ, ΚΒ κτλ. τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον κτλ. Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ ἔχωσι λόγον 2, 3 κτλ., πρέπει τότε νὰ διπλασιάσωμεν, τριπλασιάσωμεν αὐτάς.

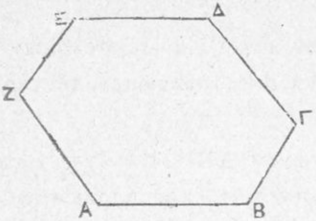
151. Ἐὰν ὅμως τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ ἔχῃ χαραχθῆ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους παριστάνον ἔκτασίν τινα καὶ πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου ὅμοιον μὲ αὐτό, εἶνε ἀνάγκη τότε νὰ σμικρύνωμεν κατὰ πολὺ ὅλας τὰς πλευρὰς αὐτοῦ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν, διατηροῦντες ὅμως τὰς αὐτὰς γωνίας.

Ἡ σχέσις, ἤτοι ὁ λόγος, τὸν ὁποῖον θὰ ἔχουν αἱ ἐπὶ τοῦ χάρτου πλευραὶ τοῦ σχεδίου πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς τοῦ ἐδάφους, λέγεται *ἀριθμητικὴ κλῖμαξ*. Ἡ κλῖμαξ αὕτη παρίσταται ὑπὸ κλασματικῆς μονάδος, ἐχούσης παρονομαστὴν τὸν ἀριθμόν, ὅστις φανερώνει ποσάκις ἡ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους πλευρὰ εἶνε μεγαλυτέρα τῆς ἐπὶ τοῦ χάρτου ὁμολόγου της. Αἱ συνήθεις κλίμακες διὰ τὰ σχέδια εἶνε αἱ ἑξῆς $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ κτλ. καὶ αἱ διπλάσιαι αὐτῶν $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{500}$ κτλ.

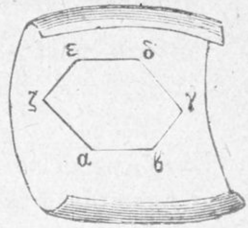
Σημ. Ὅταν αἱ πλευραὶ τοῦ σχεδίου εἶνε ὀλίγον μικρότεραι τοῦ φυσικοῦ, λέγομεν τότε ὅτι τὸ σχέδιον ἔγινεν ὑπὸ μεγάλην κλίμακα, τοὐναντίον δέ, λέγομεν ὅτι ἔγινεν ὑπὸ μικρὰν κλίμακα.

152. Ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου σχῆμα ὅμοιον μὲ τὸ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους χαραγμένον πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 133) καὶ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$.

Κατὰ πρῶτον κατασκευάζομεν ἐπὶ τεμαχίου χάρτου καὶ ἐκ τοῦ προχείρου σχῆμα ὅμοιον περίπου μὲ τὸ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ΑΒΓΔΕΖ· ἔπειτα μετροῦμεν τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου διὰ τῆς ταινίας ἢ τῆς ἁλύσεως, καθὼς καὶ τὰς γωνίας αὐτοῦ διὰ γωνιομετρικοῦ ὀργάνου, καὶ ἐπὶ τοῦ προχείρως κατασκευασθέντος πολυγώνου γράφομεν ἐφ' ἑκάστης πλευρᾶς τὸ εὑρεθὲν μῆκος τῆς ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ὁμολόγου αὐτῆς πλευρᾶς, καθὼς καὶ ἐφ' ἑκάστης γωνίας τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν τῆς ἀντιστοιχούσης.



Σχ. 133.



Σχ. 134.

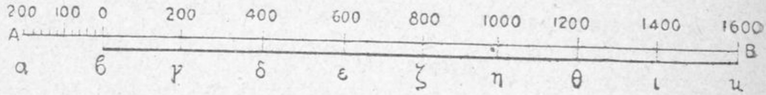
Ἔπειτα ἐπὶ ἄλλου χάρτου, χάρτου τῆς ἀντιγραφῆς καλουμένου (σχ. 134), γράφομεν διὰ τοῦ κανόνος τὴν εὐθεῖαν α β, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὁμόλογον τῆς ΑΒ καὶ ἔχουσαν μῆκος τόσα χιλιοστόμετρα, ὅσα μέτρα εἶνε ἡ ΑΒ (διότι 1 μ. =1000 χιλιοστὰ τοῦ μέτρου)· εἰς δὲ τὸ ἄκρον β αὐτῆς κατασκευάζομεν διὰ τοῦ ἀναγωγέως γωνίαν ἴσην μὲ τὴν Β καὶ λαμβάνομεν τὴν βγ ἴσην μὲ τόσα χιλιοστόμετρα, ὅσα μέτρα εἶνε ἡ ΒΓ. Ἔπειτα εἰς τὸ ἄκρον γ τῆς βγ κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην μὲ τὴν Γ καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τῆς ζα. Τὸ δὲ οὕτω κατασκευαζόμενον πολύγωνον αβγδεζ εἶνε ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓΔΕΖ.

Κατασκευὴ κλίμακος.

153. Εἰς τὰ σχέδια πόλεων, οἰκοδομῶν, γεωγραφικῶν χαρτῶν κτλ. γράφεται συνήθως εἴς τι μέρος τοῦ σχεδίου καὶ ἡ **γραφικὴ κλίμαξ**, ἥτις εἶνε μία εὐθεῖα γραμμὴ διῃρημένη καὶ φανερώνει τὴν σμίκρυνσιν, τὴν ὁποίαν ὑπέστησαν αἱ γραμμαὶ τοῦ σχεδίου.

Πρὸς κατασκευὴν τῆς γραφικῆς ταύτης κλίμακος ὁρίζομεν κατὰ πρῶτον τὸ μῆκος, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ ἔχῃ ἐπὶ τοῦ χάρτου μία εὐθεῖα ἀντιστοιχοῦσα εἰς 100, 200, 500, 1000 κτλ. μέτρα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἑξῆς σχέσις· ἓν ἑκατοστὸν τοῦ μέτρου ἢ 10 χιλιοστὰ τοῦ μέτρου νὰ ἀντιστοιχοῦν πρὸς 200 μέτρα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, καὶ ἐπομένως 1 χιλιοστὸν τοῦ μέτρου θὰ ἀντιστοιχῇ πρὸς 20 μέτρα, ἀλλὰ 20 μέτρα εἶνε 20000 χιλιοστὰ τοῦ μέτρου· ὥστε ἡ ἀριθμητικὴ κλῖμαξ θὰ εἶνε $\frac{1}{20000}$. Κατόπιν γράφομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου λεπτὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ΑΒ (ἔχουσαν μῆκος ἀνάλογον τῶν διαστάσεων τοῦ χάρτου) καὶ διαιροῦμεν αὐτὴν εἰς ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου γράφοντες εἰς τὰς διαιρέσεις τὰ γράμματα α, β, γ κτλ. (σχ. 135)· κάτωθεν τῆς λεπτῆς γραμμῆς γράφομεν ἄλλην πα-

Κλ $\frac{1}{20000}$



Σχ. 135.

χεῖαν, ἀρχομένην ἀπὸ τῆς διαιρέσεως β· εἰς τὴν διαίρεσιν β καὶ ἄνωθεν αὐτῆς γράφομεν Ο, εἰς τὴν διαίρεσιν γ γράφομεν τὸ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἀντίστοιχον μῆκος 200 μέτρα, εἰς τὸ δ 400, εἰς τὸ ε 600 κτλ. Τὸ δὲ πρῶτον ἑκατοστὸν διαιροῦμεν εἰς 10 ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀντιστοιχεῖ εἰς 20 μέτρα. Πλησίον δὲ τῆς γραφικῆς ταύτης κλίμακος γράφομεν καὶ τὴν ἀριθμητικὴν κλίμακα $\frac{1}{20000}$.

Χρήσεις τῆς κλίμακος.

154. Ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου τὴν μεταξὺ δύο σημείων εὐθύγραμμον ἀπόστασιν καὶ ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω κλίμακα $\frac{1}{20000}$. Ἀνοίγομεν τὸν διαβήτην καὶ θέτομεν τὰ σκέλη αὐτοῦ εἰς τὰ δύο ταῦτα σημεῖα· ἔπειτα, ὡς ἔχει ὁ διαβήτης, θέτομεν τὸ ἓν σκέλος αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ μηδενὸς τῆς κλίμακος καὶ ἂν τὸ ἄλλο σκέλος αὐτοῦ πέσῃ εἰς ἀκεραίαν διαίρεσιν, καὶ ἔστω εἰς τὴν 800, τότε ἡ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἀπόστασις τῶν σημείων τούτων εἶνε 800 μέτρα. Ἐὰν ὅμως πέσῃ μεταξὺ τοῦ 800 καὶ τοῦ 1000, τότε θέτομεν τὸ ἓν σκέλος ἐπὶ τῆς διαιρέσεως 800 καὶ παρατηροῦμεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς κλίμακος, ποῦ θὰ πέσῃ τὸ ἄλλο σκέλος, ἔστω ὅτι πίπτει εἰς τὴν τετάρτην διαίρεσιν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ μηδενός, ἥτις ἀντιστοιχεῖ πρὸς 80 μέτρα, τότε ἡ ζητουμένη ἀπόστασις εἶνε 880 μέτρα.

Ἀσκήσεις.

1) Μῆκος 1500 μέτρων ἐπὶ τοῦ ἐδάφους πρὸς ποῖον μῆκος θὰ ἀντιστοιχῇ ἐπὶ τοῦ χάρτου ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{50000}$;

Λύσις. Πρέπει νὰ εἶνε 50000 φορὰς μικρότερον, ἤτοι 1500 : 50000 ἢ 0,03 τοῦ μέτρου.

2) Μῆκος, 0,025 τοῦ μέτρου ἐπὶ τοῦ χάρτου πρὸς ποῖον μῆκος ἀντιστοιχεῖ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{10000}$;

(***Λύσις***. 0,025×10000 ἢ 250 μέτρα).

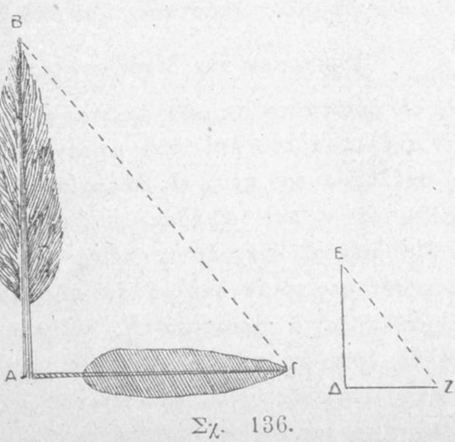
3) Αἴθουσα ἔχουσα μῆκος 6,50 τοῦ μέτρου καὶ πλάτος 5 μέτρα, πρόκειται νὰ ἰχνογραφηθῇ ἐπὶ χάρτου ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{50}$. ποῖον μῆκος καὶ πλάτος θὰ ἔχῃ ἐπὶ τοῦ χάρτου;

(***Λύσις***. 0,13 καὶ 0,10 τοῦ μέτρου)

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

155. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος δένδρου (ἢ κωδωνοστασίου ἢ πύργου κτλ.) ἐκ τῆς σκιᾶς αὐτοῦ.***

Ἔστω π.χ. τὸ δένδρον ΑΒ (σχ. 136), τοῦ ὁποίου ζητεῖται τὸ ὕψος. Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐδάφους, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ὁριζόντιον, ἐμπήγομεν κατακορύφως ῥάβδον τινα ΔΕ· ἔστω δὲ ἡ σκιὰ τοῦ δένδρου ἡ ΑΓ, ἡ δὲ σκιὰ τῆς ῥάβδου ἡ ΔΖ. Οὕτω δὲ ἔχομεν τὰ δύο νοητὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ, τὰ ὁποῖα εἶνε ὅμοια. Διότι ἔχουν τὰς γωνίας Α καὶ Δ ἴσας, ὡς ὀρθάς, τὰς Γ καὶ Ζ ἴσας (διότι κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν αἱ ἡλιακαὶ ἀκτῖνες ΒΓ καὶ ΕΖ σχηματίζουσι μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐδάφους ἴσας γωνίας), ἑπομένως ἔχουν καὶ τὴν τρίτην γωνίαν ἴσην (ἐδ. 71) ἄρα εἶνε ὅμοια (ἐδ. 149).



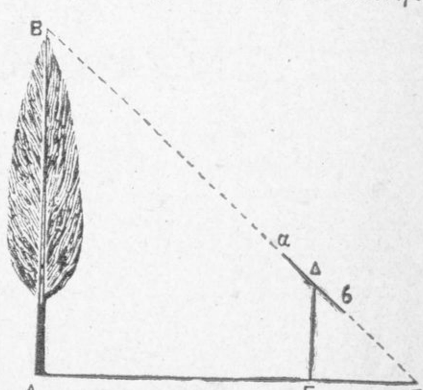
Σχ. 136.

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ἕπεται ὅτι αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς ΔΕ καὶ ΔΖ, ἤτοι εἶνε $\frac{AB}{\Delta E}=\frac{A\Gamma}{\Delta Z}$ ἢ $AB:\Delta E=A\Gamma:\Delta Z$. Ἐὰν ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἡ ΑΓ μετρηθεῖσα εὑρέθη ἴση μὲ $5^{\mu},20$, ἡ ΔΕ ἴση μὲ 1,50 καὶ ἡ ΔΖ ἴση μὲ 0,65, θὰ ἔχωμεν $AB : 1,50 = 5,20 : 0,65$ ἢ $AB=\frac{1,50\times 5,20}{0,65}$ (τοῦτο εἶνε γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς), ἤτοι 12 μ.

Σημ. Ἐπειδὴ ἡ σκιὰ εἶνε ἀνάλογος τοῦ ὕψους, δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα καὶ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν.

Ὅταν ὅμως ὁ καιρὸς εἶνε νεφελώδης, μεταχειριζόμεθα τὸν ἑξῆς τρόπον πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὕψους δένδρου ἢ ἄλλου τινὸς ἀντικειμένου.

Ἐμπήγομεν κατακορύφως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ῥάβδον τινὰ ΓΔ, εἰς τὸ ἄκρον Δ τῆς ὁποίας ἔχομεν προηγουμένως ἀνοίξει ῥῆγμά τι καὶ προσαρμόσει ἐντὸς αὐτοῦ μικρόν τινα κανόνα αϐ (σχ. 137) οὕτως, ὥστε νὰ περιστρέφηται οὗτος εὐκόλως περὶ τὸ ῥῆγμα Δ· Ἔπειτα ἱστάμεθα ὄπισθεν τῆς ῥάϐδου ΓΔ καὶ σκοπεύομεν διὰ τοῦ κανόνος αϐ τὴν κορυφὴν Β τοῦ δένδρου (περιστρέφοντες τὸν κανόνα αϐ, μέχρις οὗ ἔλθῃ εἰς εὐθυγραμμίαν μὲ τὴν κορυφὴν Β τοῦ δένδρου)· ἔπειτα ἀφίνοντες τὸν κανόνα ἀκίνητον ἐρχόμεθα ἔμπροσθεν τῆς ῥάϐδου ΓΔ καὶ σκοπεύομεν διὰ τοῦ κανόνος σημεῖόν τι Ε τοῦ ἐδάφους, εἰς τὸ ὁποῖον διευθύνεται ὁ κανὼν αβ. Οὕτω δὲ ἔχομεν τὰ δύο νοητὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΑΕ καὶ ΔΓΕ, τὰ ὁποῖα εἶνε ὅμοια, ὡς ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν.



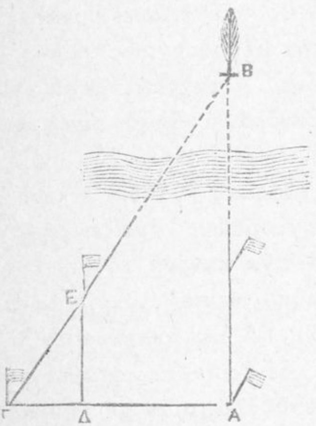
Σχ. 137.

Ἐκ τῶν ὁμοίων τούτων τριγώνων ἔχομεν $AB : \Gamma\Delta = AE : \Gamma E$. Καὶ ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι εἶνε $AE=12$ μέτρα, $\Gamma\Delta = 1,60$ καὶ

ΓΕ=2,40, τότε θὰ ἔχωμεν ΑΒ : 1,60 = 12 : 2,40, ἤτοι ΑΒ= $\frac{12\times1,60}{2,40}$ ἢ 8 μ.

155. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β ἀπόστασις, τὴν ὁποίαν δὲν δυνάμεθα νὰ διατρέξωμεν, καθόσον διέρχεται ποταμός.

Προσδιορίζομεν κατὰ πρῶτον τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 138) δι' ἀκοντίων (ἴδε ἐδάφ. 104 3η)· ἔπειτα φέρομεν ἐπ' αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον Α τὴν κάθετον ΑΓ (ἐδ. 111) καὶ προσδιορίζομεν δι' ἀκοντίων τὴν εὐθεῖαν ΓΒ· ἔπειτα ἐκ σημείου τινὸς Δ τῆς ΑΓ φέρομεν τὴν κάθετον ΔΕ ἐπ' αὐτήν, τὴν ὁποίαν καὶ προσεκβάλλομεν, μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν ΓΒ εἴς τι σημεῖον Ε. Οὕτω δὲ σχηματίζονται τὰ ὅμοια τρίγωνα ΓΔΕ καὶ ΓΑΒ· ὥστε ἔχομεν ΑΒ : ΔΕ = ΓΑ : ΓΔ. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι εἶνε ΓΑ = 50 μέτρα, ΔΕ = 20 μ. καὶ ΓΔ=8 μ., εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε ΑΒ = 125 μ.



Σχ. 138.

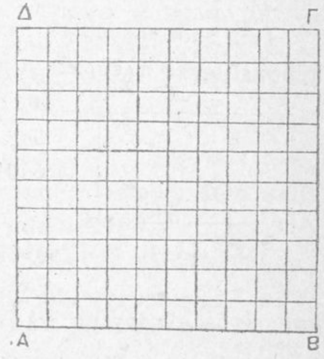
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ, ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΚΑΙ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

156. Διὰ νὰ μετρήσωμεν ἐπιφάνειάν τινα, πρέπει νὰ ἔχωμεν ὡς μονάδα ἄλλην ἐπιφάνειαν ὡρισμένην, πρὸς τὴν ὁποίαν νὰ τὴν συγκρίνωμεν καὶ νὰ εὕρωμεν οὕτως ἀπὸ πόσας τοιαύτας μονάδας ἢ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται. Τὸ δὲ ἐξαγόμενον ἐκ τῆς μετρήσεως λέγεται **ἐμβαδὸν** τῆς ἐπιφανείας.

Ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνεται τὸ **τετραγωνικὸν μέτρον**, ἤτοι τετραγωνικὴ ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ εἶνε ἴση μὲ ἓν μέτρον.

Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ (σχ. 139) παριστᾷ τετραγωνικὸν μέτρον. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ΑΒ,ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εἰς 10 ἴσα μέρη ἑκάστην καὶ ἑνώσωμεν δι' εὐθειῶν τὰ ἀπέναντι σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῶν παραλλήλων πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ, ΑΒ καὶ ΔΓ, θὰ διαιρεθῇ τὸ τετράγωνον εἰς 100 τετραγωνικὰς παλάμας· διότι ἡ πλευρὰ ἑκάστου τετραγωνιδίου θὰ εἶνε τὸ δέκατον τοῦ μέτρου, ἤτοι μία παλάμη. Ἐὰν τὸ αὐτὸ πράξωμεν καὶ εἰς μίαν τετραγωνικὴν παλάμην, τότε αὕτη θὰ διαιρεθῇ εἰς 100 τετρ. δακτύλους. Ἐὰν πάλιν πράξωμεν τὸ αὐτὸ καὶ εἰς ἕνα τετρ. δάκτυλον, τότε οὗτος θὰ διαιρεθῇ εἰς 100 τετραγωνικὰς γραμμάς.



Σχ. 139.

Ὥστε εἶνε

1 τ. μ. = 100 τ. παλ. = 10000 τ. δ. = 1000000 τ. γρ.

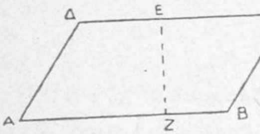
Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων λαμβάνεται συνήθως ὡς μονὰς ὁ **τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς**, ὅστις εἶνε τὰ $\frac{9}{16}$.

τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου. Διὰ δὲ τὰς κτηματικὰς γαίας λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ ***βασιλικὸν στρέμμα***, τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ 1000 τετρ. μέτρα.

Σημ. Αἱ ἀνωτέρω μονάδες τῶν ἐπιφανειῶν δὲν εἶνε πραγματικαί, ἤτοι ὄργανα, ὡς εἶνε τὸ μέτρον καὶ ὁ πῆχυς τοῦ ἐμπορίου, ἀλλὰ νοηταί. Κατωτέρω δὲ θὰ ἴδωμεν τὸν τρόπον, διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν ἐκ πόσων τοιούτων μονάδων ἀποτελεῖται ἐπιφάνειά τις.

157. *Βάσις* παντὸς παραλληλογράμμου λέγεται μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. ***Ὕψος*** δὲ αὐτοῦ λέγεται ἡ ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη κάθετος ἔκ τινος σημείου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς της.

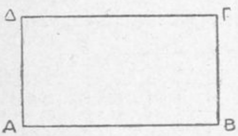
Παραδ. χάριν, ἂν λάβωμεν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (σχ. 140) ὡς βάσιν τὴν ΑΒ, ὕψος θὰ εἶνε ἡ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ΕΖ.



Σχ. 140.

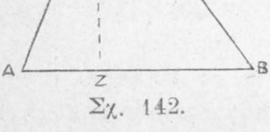
Σημ. Ὅλαι αἱ ἀγόμεναι κάθετοι μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Περὶ τούτου εὐκόλως βεβαιούμεθα διὰ τοῦ διαβήτου.

Τοῦ ὀρθογωνίου (ἢ τετραγώνου) βάσις καὶ ὕψος εἶνε αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ αὐτοῦ. Π. χ., ἂν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ (σχ. 141) λάβωμεν ὡς βάσιν τὴν ΑΒ, ὕψος θὰ εἶνε αἱ ΑΔ (ἢ ἡ ΒΓ), ἥτις εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν.



Σχ. 141.

Ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου λέγονται ὁμοῦ *διαστάσεις*, καὶ ἡ μὲν μεγαλυτέρα διάστασις λέγεται συνήθως ***μῆκος***, ἡ δὲ μικροτέρα ***πλάτος***.



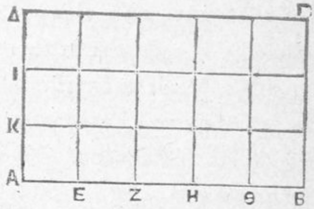
Σχ. 142.

158. ***Βάσεις*** τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ (σχ. 142) λέγονται αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ αὐτοῦ ΑΒ καὶ ΓΔ. ***Ὕψος*** δὲ ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἀγομένη κάθετος ΕΖ.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ

159. Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 143)· ἂν λάβωμεν ὡς βάσιν αὐτοῦ τὴν πλευρὰν ΑΒ, ὕψος θὰ εἶνε ἡ ΑΔ ἢ ἡ ΒΓ. Ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἡ βάσις ΑΒ μετρηθεῖσα εὑρέθη ἴση μὲ 5 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος ΑΔ εὑρέθη ἴσον μὲ 3 μέτρα.

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν βάσιν αὐτοῦ ΑΒ εἰς πέντε ἴσα μέρη (ὅτε ἕκαστον μέρος αὐτοῦ θὰ εἶνε ἐξ ὑποθέσεως ἓν μέτρον), τὸ δὲ ὕψος ΑΔ εἰς τρία ἴσα μέρη, καὶ ἐκ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η, Θ, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ βάσις αὐτοῦ, φέρωμεν παραλλήλους τῆς ΑΔ· ὡσαύτως καὶ ἐκ τῶν σημείων Ι, Κ, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τὸ ὕψος ΑΔ, φέρωμεν παραλλήλους τῆς ΑΒ, τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ θὰ διαιρεθῇ εἰς τετράγωνα ἴσα ἐκ κατασκευῆς, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶνε ἴσον μὲ τὴν μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν, ἤτοι εἶνε τετραγωνικὸν μέτρον. Ἀλλ' ἑκάστη ὁριζόντιος σειρὰ περιέχει 5 τετρ. μέτρα, ἑπομένως αἱ 3 σειραὶ περιέχουν 5×3, ἤτοι 15 τετρ. μέτρα· ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς 15 εἶνε γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 3, τῶν παριστώντων τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους τοῦ ὀρθογωνίου. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.



Σχ. 143.

160. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

Σημ. Ὑπετέθη ἀνωτέρω ὅτι τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους εἶνε ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἀλλὰ τοῦτο ἀληθεύει καὶ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶνε οἱοιδήποτε.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν βάσιν τοῦ ὀρθογωνίου διὰ б καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ διὰ υ, τότε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶνε б×υ. Οὗτος εἶνε ὁ τύπος, διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν του καὶ τὸ ὕψος του.

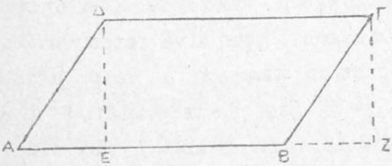
Ἐφαρμογή. Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ βάσις ὀρθογωνίου εἶνε 4, 5 τοῦ μέτρου, ἤτοι β=4,5, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ 2, 7 τοῦ μέτρου, ἤτοι υ = 2,7, τότε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε 4,5 × 2,7, ἤτοι 12,15 τοῦ τετρ. μέτρου.

161. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, πολλαπλασιάζομεν μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της*** (δηλ. τὸν ἀριθμὸν τὸν παριστῶντα τὸ μῆκος αὐτῆς).

Διότι τὸ τετράγωνον εἶνε ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, καὶ ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶνε ἴσαι μεταξύ των, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος μιᾶς τῶν πλευρῶν του ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του. Ἐὰν π. χ. ἡ πλευρὰ τετραγώνου εἶνε 5 μέτρα, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶνε 5×5, ἤτοι 25 τετρ. μέτρα. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον 5×5 γράφεται, ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, καὶ ὡς ἑξῆς 5^2. Καὶ ἐπειδὴ ἡ δευτέρα αὕτη δύναμις τοῦ 5 παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε 5 μέτρα, διὰ τοῦτο ἡ δευτέρα δύναμις οἱουδήποτε ἀριθμοῦ λέγεται καὶ *τετράγωνον*.

162. Καὶ τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται, ὅπως καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου.

Ἔστω π. χ. τὸ πλάγιον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 144)· ἂν λάβωμεν ὡς βάσιν αὐτοῦ τὴν πλευρὰν ΑΒ, ὕψος θὰ εἶνε ἡ κάθετος ΔΕ. Ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἡ ΑΒ μετρηθεῖσα εὑρέθη ἴση μὲ 4 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος ΔΕ εὑρέθη 3 μέτρα, τότε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶνε 4×3, ἤτοι 12 τετρ. μ.



Σχ. 144.

Διότι, ἐὰν ἀποκόψωμεν τὸ τρίγωνον ΑΔΕ καὶ τὸ θέσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ παραλληλογράμμου οὕτως, ὥστε νὰ πέσῃ ἡ ΔΑ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΒΓ, τότε τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ μετασχηματίζεται εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΔΕΖΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὴν ΕΖ, ἥτις εἶνε ἴση μὲ τὴν ΑΒ τοῦ πλαγίου καὶ ὕψος τὴν ΔΕ, ἤτοι τὸ ὕψος τοῦ πλαγίου.

Τὰ ἀνωτέρω σχήματα ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΓΔ, καίτοι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, ἤτοι ἴσην ἐπιφάνειαν, ἐν τούτοις δὲν ἐφαρμόζουσιν ἀκέραια, ἀλλὰ μόνον ὅταν διαιρεθῶσιν εἰς μέρη. Τὰ τοιαῦτα σχήματα πρὸς διάκρισιν τῶν ἐφαρμοζομένων ἀκεραίων λέγονται *ἰσοδύναμα*.

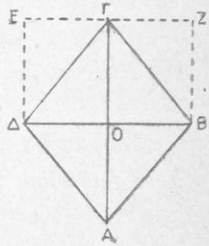
Σημ. Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου εἶνε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του, ἔπεται ὅτι, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν διὰ τῆς βάσεως ἢ διὰ τοῦ ὕψους, εὑρίσκομεν τὸ ὕψος ἢ τὴν βάσιν αὐτοῦ.

163. ***Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶνε ἰσοδύναμα, ἤτοι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν.***

Διότι τὸ ἐμβαδὸν εἶνε γινόμενον τῆς βάσεώς των ἐπὶ τὸ ὕψος των· καὶ ἐπειδὴ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος αὐτῶν εἶνε ἴσα, ἔπεται ὅτι καὶ τὰ γινόμενα αὐτῶν, ἤτοι τὰ ἐμβαδά, εἶνε ἴσα.

Ἐφαρμογή. Εὐκόλως δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν οἰκόπεδόν τι ἢ ἄλλο τι, ἔχον σχῆμα παραλληλογράμμου, εἰς ἴσα μέρη· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ διαιρέσωμεν δύο ἀπέναντι πλευρὰς αὐτοῦ εἰς ἴσα μέρη καὶ κατόπιν νὰ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα τῶν διαιρέσεων αὐτῶν διὰ σχοινίου καλῶς τεταμένου. Διότι τὰ οὕτω σχηματιζόμενα παραλληλόγραμμα θὰ ἔχωσιν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη.

164. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ῥόμβου δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ἐκ τῶν διαγωνίων του. Διότι διὰ τῶν διαγωνίων του ΑΓ καὶ ΒΔ (σχ. 145) διαιρεῖται εἰς 4 ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα. Ἐὰν τώρα τὰ τρίγωνα ΑΟΒ καὶ ΑΟΔ θέσωμεν τὸ μὲν ΑΟΒ εἰς τὴν θέσιν τοῦ ΔΓΕ, τὸ δὲ ΑΟΔ εἰς τὴν θέσιν τοῦ ΒΖΓ, θὰ σχηματισθῇ τὸ ὀρθογώνιον ΔΒΖΕ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὴν μίαν διαγώνιον τοῦ ῥόμβου, ἤτοι τὴν ΔΒ, καὶ ὕψος τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης. Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι



Σχ. 145.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ῥόμβου εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν δύο διαγωνίων του.

Ἐφαρμογή. Ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ διαγώνιοι ῥόμβου τινὸς εἶνε 5 καὶ 3 μέτρα, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶνε, $\frac{5\times3}{2}$, ἤτοι 7,50 τοῦ τετρ. μέτρου.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

1) Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν ἀμπέλου, ἐχούσης σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶνε 140 μέτρα, ἡ δὲ ἄλλη 60,50 τοῦ μέτρου;

(*Λύσις*. 8470 τ. μ. ἢ 8 στρέμ. 470 τ. μ.)

2) Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν προαυλίου σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν μῆκος εἶνε 7, 9 τοῦ μέτρου, τὸ δὲ πλάτος 6, 5 τοῦ μέτρου ;

(*Λύσις*. 51,35 τοῦ τετρ. μέτρου ἢ 51 τ. μ. 35 τ. παλ.)

3) Τὸ μῆκος τοῦ πατώματος δωματίου τινὸς εἶνε 4,7 τοῦ μέτρου, τὸ δὲ πλάτος 3,μ·95 Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ;

(*Λύσις*. 18,565 τοῦ τ.μ. ἢ 18 τ. μ. 56 τ. παλ. 50 τ. δ.)

4) Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τετραγωνικοῦ κήπου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶνε 88 μέτρα ;

(*Λύσις*. 484 τ. μ).

5) Ἡ περίμετρος ὀρθογωνίου χωραφίου εἶνε 596 μέτρα, ἡ δὲ μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ εἶνε 175 μ. Ἐκ πόσων στρεμμάτων ἀποτελεῖται ;

(*Λύσις*. 21 στρ. καὶ 525 τ.μ.)

6) Τὸ ἐμβαδὸν οἰκοπέδου σχήματος παραλληλογράμμου εἶνε 49,68 τοῦ τετρ. μέτρου, ἡ δὲ βάσις αὐτοῦ εἶνε 9,20 τοῦ μέτρου. Πόσον εἶνε τὸ ὕψος αὐτοῦ ;

(*Λύσις*. 5,μ 40).

7) Χωραφίου, ἔχοντος σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε 10 στρέμ. καὶ 769 τ. μέτρα, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶνε 60,μ 50. Πόση εἶνε ἡ βάσις αὐτοῦ ;

(*Λύσις*. 178 μ.)

8) Τὸ μῆκος ὀρθογωνίου οἰκοπέδου εἶνε 50 πήχεις καὶ ἠγοράσθη ἀντὶ 15750 δραχμῶν. Πόσον εἶνε τὸ πλάτος αὐτοῦ, ἂν ὁ τετραγ. πῆχυς ἠγοράσθη πρὸς 7,δρ·50 ;

(*Λύσις* 42 π.)

9) Τὸ ἐμβαδὸν πλαγίου παραλληλογράμμου εἶνε 162 τ. μέτρα, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶνε 9 μέτρα καὶ ἡ περίμετρος 65 μέτρα. Πόση εἶνε ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ ;

(*Λύσις*. 18 μ. καὶ 14, 50 μ.)

10) Δωμάτιον ἔχον μῆκος 6 μέτρα καὶ πλάτος 4,50 τοῦ μέτρου πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ τάπητος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶνε 0,90 τοῦ μέτρου. Πόσα μέτρα χρειάζονται ;

(*Λύσις*. 30 μ.)

11) Δωμάτιον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶνε 25 τετρ. πήχεων

(τοῦ ἐμπορίου), ἔχει στρωθῆ διὰ τάπητος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶνε 5 ῥούπια. Πόσοι πήχεις ἐχρειάσθησαν;

(*Λύσις*. 40).

12) Θέλει τις νὰ κατασκευάσῃ 6 σινδόνας, τῶν ὁποίων τὸ μῆκος νὰ εἶνε 4 πήχεις καὶ τὸ πλάτος $3 \frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως. Πόσας πήχεις χασὲ θὰ χρειασθῆ, ἂν τὸ πλάτος αὐτοῦ εἶνε $1 \frac{2}{8}$ τοῦ πήχεως;

(**Λύσις**. 60 πήχ.)

13) Προαύλιον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶνε 72 τετρ. μέτρα, ἔχει στρωθῆ διὰ πλακῶν, τῶν ὁποίων τὸ μῆκος εἶνε 0,25 τοῦ μέτρου καὶ τὸ πλάτος 0,10. Πόσαι πλάκες ὑπάρχουν;

Λύσις. Ὅσας φορὰς τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς τῶν πλακῶν χωρεῖ εἰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ προαυλίου, τόσαι πλάκες ὑπάρχουν, ἤτοι 2,880.

14) Πρόκειται νὰ πατωθῆ δωμάτιον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶνε 6 μέτρα καὶ τὸ πλάτος 5, διὰ σανίδων, τῶν ὁποίων τὸ μῆκος εἶνε 2 μέτρα καὶ τὸ πλάτος 0,25 τοῦ μέτρου. Πόσαι σανίδες χρειάζονται;

(**Λύσις** 60).

15) Προαύλιον ἔχει στρωθῆ διὰ 900 τετραγωνικῶν πλακῶν, τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ εἶνε 0,40 τοῦ μέτρου. Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ προαυλίου;

(**Λύσις** 144 τ.μ.)

16) Αἴθουσά τις ἔχει ἐν τῷ σχεδίῳ μῆκος 0,195 τοῦ μέτρου καὶ πλάτος 0,10 ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{100}$. Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς;

(**Λύσις**. 195 τ. μ.)

17) Τὸ ἐμβαδὸν χωραφίου, σχήματος τετραγώνου, εἶνε 7 στρέμ. 396 τ. μ. Πόση εἶνε ἡ πλευρὰ αὐτοῦ;

(**Λύσις**. 86 μ.)

18) Δημοσία ὁδὸς διελθοῦσα διά τινος χωραφίου καὶ ἔχουσα πλάτος 4 μέτρα, κατέλαβεν ἐπ' αὐτοῦ μῆκος 150 μέτρα. Ἐὰν ἕκαστον τετραγ. μέτρον ἀποζημιωθῆ πρὸς 2,50 δραχμάς, πόσον θὰ λάβῃ ὁ ἰδιοκτήτης;

(**Λύσις**. 1500 δρ.)

19) Οἰκόπεδόν τι, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶνε 225 τετρ. μέτρα, ἐπωλήθη πρὸς 5 δραχ. ὁ τεκτονικὸς πῆχυς. Πόση εἶνε ἡ ἀξία αὐτοῦ;

(***Λύσις***. 2000 δρ.)

20) Εἶνε δίκαιον νὰ ἀνταλλάξωμεν τετραγωνικὸν χωράφιον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε 100 μέτρα, μὲ ἄλλο χωράφιον τῆς αὐτῆς ποιότητος καὶ τῆς αὐτῆς περιμέτρου, ἀλλὰ σχήματος ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶνε 120 μέτρα;

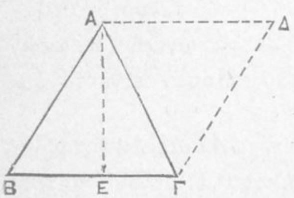
(***Λύσις***. Οὐχί. Διότι τὸ α΄ εἶνε κατὰ 400 τ. μ. μεγαλύτερον).

21) Πλατεῖα, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶνε 45 μέτρα καὶ τὸ πλάτος 40, πρόκειται νὰ στρωθῇ πέριξ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματισθῇ πεζοδρόμιον πλάτους 2,50 τοῦ μέτρου. Πόσον θὰ κοστίσῃ ἡ πλακόστρωσις, ἐὰν τὸ τετραγωνικὸν μέτρον πληρωθῇ πρὸς 3 δραχμάς; Καὶ πόση ἔκτασις θὰ μείνῃ ἐντός;

(***Λύσις***. 1200 δραχμάς, 1400 τ. μ.)

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

165. Ἄς λάβωμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 146), τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος ΑΓ διαιρεῖ αὐτὸ εἰς τὰ δύο ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ (ἐδάφ. 80.) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου εἶνε κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ΒΓ ἐπὶ τὸ ὕψος του ΑΕ· ἀλλ' ἡ ΒΓ καὶ ἡ ΑΕ εἶνε βάσις καὶ ὕψος καὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι



Σχ. 146.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου διὰ β καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ διὰ υ, τότε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε $\frac{\beta \times \upsilon}{2}$. Οὗτος εἶνε ὁ τύπος, διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν του καὶ τὸ ὕψος του.

Ἐφαρμογή. Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ βάσις τριγώνου εἶνε 6 μέτρα, ἤτοι $\beta=6$, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ 7 μέτρα, ἤτοι $\upsilon=7$, τότε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τύπον εἶνε $\frac{6\times7}{2}$, ἤτοι 21 τετρ. μέτρα.

Σημ. Ἐπειδὴ γινόμενόν τι διαιρεῖται, ἐὰν διαιρέσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ, διὰ τοῦτο τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εὑρίσκεται καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ἢ τὸ ὕψος ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεώς του. Ὥστε, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου διὰ τῆς βάσεώς του, εὑρίσκομεν τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους του· ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ὕψους του, εὑρίσκομεν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεώς του.

166. ***Τὰ τρίγωνα, τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη,*** εἶνε ***ἰσοδύναμα,*** ἤτοι ***ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν.***

Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαί.

1) Χωραφίου τριγωνικοῦ ἡ βάσις του εἶνε 120 μέτρα καὶ τὸ ὕψος του 50· ἐκ πόσων στρεμμάτων ἀποτελεῖται;

(***Λύσις***. Ἐκ 3).

2) Ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ αὐτοῦ εἶνε ἡ μὲν μία 60 μέτρα, ἡ δὲ ἄλλη 20μ,46. Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

(***Λύσις***. 613,80 τ.μ. ἢ 613 τ.μ. 80 τετρ. παλάμαι).

3) Τὸ ἐμβαδὸν τριγωνικοῦ οἰκοπέδου εἶνε 347,60 τετρ. μέτρα, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶνε 158μ. Πόση εἶνε ἡ βάσις του;

(***Λύσις***. 44 μέτρα).

4) Τὸ ἐμβαδὸν τριγωνικῆς ἀμπέλου εἶνε 7 στρέμ. 200 τετρ. μέτρα, ἡ δὲ βάσις εἶνε 180 μέτρα. Πόσον εἶνε τὸ ὕψος;

(***Λύσις***. 80 μέτρα).

5) Ἡ περίμετρος ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶνε 30μ,60, τὸ δὲ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε 43,86 τοῦ τετρ. μέτρου. Πόσον εἶνε τὸ ὕψος του;

(Λύσις. 8,6 μ.).

6) Ἔχει τις δύο χωράφια τῆς αὐτῆς ἐκτάσεως· τὸ ἓν ἔχει σχῆμα τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶνε 166,84 τοῦ μέτρου καὶ

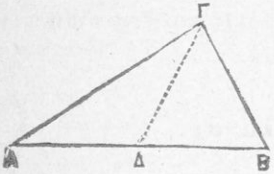
τὸ ὕψος 160 μέτρα· τὸ δὲ ἄλλο ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶνε 95 μέτρα. Πόσον εἶνε τὸ μῆκος αὐτοῦ;

(Λύσις. $140^{\mu},50$).

7) Ἀντήλλαξέ τις μίαν ἄμπελον, ἔχουσαν σχῆμα τετραγώνου καὶ περίμετρον 342 μέτρα, μὲ χωράφιον τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας, ἀλλ' ἔχον σχῆμα ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ περίμετρον τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς περιμέτρου τῆς ἀμπέλου. Πόσον εἶνε τὸ ὕψος τῆς ἀμπέλου;

(Λύσις. $160^{\mu},31$)

8) Νὰ μοιρασθῇ τὸ τριγωνικὸν προαύλιον ΑΒΓ (σχ. 147) εἰς δύο κληρονόμους ἐξ ἴσου καὶ νὰ ἔχωσι κοινὸν τὸ εἰς τὴν κορυφὴν Γ ὑπάρχον φρέαρ.



Σχ. 147.

Λύσις. Λαμβάνομεν ὡς βάσιν τὴν ΑΒ καὶ ἑνώνομεν τὸ μέσον Δ αὐτῆς μὲ τὴν κορυφὴν Γ διὰ σχοινίου καλῶς τεταμένου. Οὕτω δὲ τὸ προαύλιον διαιρεῖται εἰς δύο τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΓΔΒ ἰσοδύναμα (ἐδ. 166).

Σημ. Διὰ νὰ μοιράσωμεν τὸ αὐτὸ προαύλιον, εἰς 3,4 κτλ. ἴσα μέρη, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν βάσιν εἰς 3,4 κτλ. ἴσα μέρη καὶ ἔπειτα νὰ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως μὲ τὴν κορυφὴν Γ διὰ σχοινίου καλῶς τεταμένου.

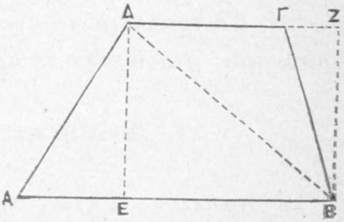
9) Νὰ μοιρασθῇ τὸ τριγωνικὸν χωράφιον ΑΒΓ (σχ. 148), τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶνε 21 στρέμ. 600 τ. μ. εἰς τρία τρίγωνα ἐκ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ Γ, τὰ ὁποῖα νὰ εἶνε ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 6, 5, 4. Τὸ ὕψος ΓΖ τοῦ τριγώνου εἶνε 120 μέτρα.

Σχ. 148.

Λύσις. Τὰ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν τριγώνων θὰ εἶνε 8640,7200, 5760 τετρ. μέτρα. Ἡ βάσις τοῦ πρώτου τριγώνου (κατὰ τὴν σημείωσιν τοῦ ἐδαφίου 165) εὑρίσκεται ὅτι εἶνε 144 μέτρα, τοῦ δευτέρου 120 μ. καὶ τοῦ τρίτου 96 μ. Διαιροῦμεν κατόπιν τὴν βάσιν ΑΒ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἀρχόμενοι εἰς τρία μέρη ἴσα μὲ τὰ μήκη ταῦτα, ἔστωσαν τὰ ΑΔ, ΔΕ καὶ ΕΒ· τέλος ἑνώνομεν τὰ σημεῖα Δ καὶ Γ, Ε καὶ Γ διὰ σχοινίου καλῶς τεταμένου, καὶ οὕτω τὸ χωράφιον διαιρεῖται εἰς τὰ ζητούμενα τρίγωνα.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ

167. Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 149). Ἐὰν φέρωμεν τὴν διαγώνιον ΔΒ, διαιρεῖται τὸ τραπέζιον εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ. καὶ τοῦ μὲν τριγώνου ΑΒΔ, ἂν λάβωμεν ὡς βάσιν τὴν ΑΒ, ὕψος θὰ εἶνε ἡ ΔΕ, ἥτις εἶνε καὶ τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου (ἐδ. 158)· τοῦ δὲ τριγώνου ΒΓΔ, ἂν λάβωμεν ὡς βάσιν τὴν ΓΔ, ὕψος θὰ εἶνε ἡ ΒΖ, ἥτις εἶνε ἴση μὲ τὴν ΔΕ (ἐδ. 157 σημ.) Διὰ νὰ εὕρωμεν τώρα τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριγώνων τούτων, θὰ πολλαπλασιάσωμεν ἑκάστου χωριστὰ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος ΔΕ (ἐδ. 165 σημ.) καὶ κατόπιν θὰ προσθέσωμεν ταῦτα διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον θὰ εὕρωμεν, ἐὰν πρῶτον προσθέσωμεν τὰς δύο βάσεις τῶν τριγώνων, ἤτοι τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου, καὶ ἔπειτα τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ὕψος ΔΕ, ἤτοι $\frac{ΑΒ+ΓΔ}{2} \times ΔΕ$. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.



Σχ. 149.

168. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο βάσεών του ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν μεγαλυτέραν βάσιν τοῦ τραπεζίου διὰ Β καὶ τὴν μικροτέραν διὰ β, τὸ δὲ ὕψος διὰ υ, τότε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶνε $\frac{Β+β}{2} \times υ$. Οὗτος εἶνε ὁ τύπος, διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς δύο βάσεις του καὶ τὸ ὕψος του.

Ἐφαρμογή. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μεγαλυτέρα βάσις τοῦ τραπεζίου εἶνε 70 μέτρα, ἤτοι $B=70$, ἡ δὲ μικροτέρα 40 μέτρα, ἤτοι $\beta=40$, τὸ δὲ ὕψος του 50 μέτρα, ἤτοι $\upsilon=50$· τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τύπον εἶνε $\frac{70+40}{2} \times 50$ ἢ 2750 τετρ. μ.

Σημ. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω κανόνος ἕπεται ὅτι, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου διὰ τοῦ ἡμίσεος ἀθροίσματος τῶν βάσεών του, εὑρίσκομεν τὸ ὕψος· ἢ ἐὰν διαιρέσωμεν αὐτὸ διὰ τοῦ ὕψους, εὑρίσκομεν τὸ ἥμισυ ἄθροισμα τῶν βάσεών του.

169. ***Τὰ τραπέζια, τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶνε ἰσοδύναμα, ἤτοι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν.***

Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαί.

1) Ἄμπελός τις ἔχει σχῆμα τραπεζίου, τοῦ ὁποίου αἱ παράλληλοι πλευραὶ εἶνε ἡ μὲν μία 180 μέτρα, ἡ δὲ ἄλλη 120, τὸ δὲ ὕψος 100 μ. Ἐκ πόσον στεμμάτων ἀποτελεῖται αὕτη;

(*Λύσις.* 15).

2) Χωραφίου, ἔχοντος σχῆμα τραπεζίου, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε 16 στρέμ. καὶ 560 τετρ. μέτρα, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν βάσεών του εἶνε 368 μέτρα. Πόσον εἶνε τὸ ὕψος του;

(*Λύσις.* 90 μ.).

3) Οἰκοπέδου, ἔχοντος σχῆμα τραπεζίου, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε 720 τετρ. μέτρα, τὸ δὲ ὕψος 20 μέτρα. Πόσον εἶναι αἱ βάσεις αὐτοῦ, ἐὰν ἡ μία εἶνε μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης κατὰ 22 μέτρα;

(*Λύσις.* 25 καὶ 47).

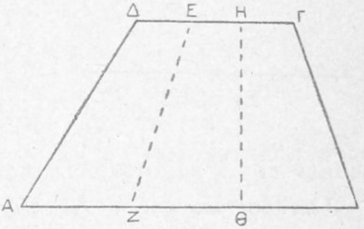
4) Τραπέζιον καὶ παραλληλόγραμμον ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, ἤτοι 4 μέτρα, καὶ τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν· ἐὰν αἱ βάσεις τοῦ τραπεζίου εἶνε 5 καὶ 8 μέτρα, πόση εἶνε ἡ βάσις τοῦ παραλληλογράμμου;

(*Λύσις.* 6μ,5),

5) Ἀπὸ ἀμπέλου τινός, ἐχούσης σχῆμα τριγώνου, διέρχεται ὁδὸς παράλληλος τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. Ἡ ἐντὸς τῆς ἀμ-

πέλου ὁδὸς εἶνε τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, ἥτις εἶνε 195 μέτρα, τὸ δὲ μεταξὺ τῆς ὁδοῦ καὶ τῆς βάσεως ἐμβαδὸν τῆς ἀμπέλου εἶνε 18 στρέμ. 720 τ μ. Πόση εἶνε ἡ ἀπόστασις τῆς ὁδοῦ ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου; (Λύσις. 120 μ.)

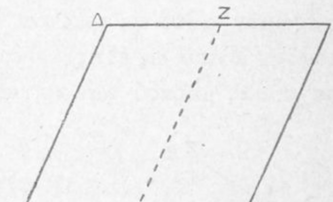
6) Νὰ μοιρασθῇ τὸ χωράφιον ΑΒΓΔ (σχ. 150), τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα τραπεζίου, εἰς τρεῖς κληρονόμους ἐξ ἴσου.



Σχ. 150.

Λύσις. Διαιροῦμεν τὰς βάσεις αὐτοῦ εἰς τρία ἴσα μέρη, καὶ ἑνώνομεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως Ε καὶ Ζ, Η καὶ Θ διὰ σχοινίου καλῶς τεταμένου (ἢ προσδιορίζομεν τὰς εὐθυγράμμους διευθύνσεις ΕΖ καὶ ΗΘ δι' ἀκοντίων, ἂν εἶνε μεγάλαι). Οὕτω δὲ διαιρεῖται τὸ χωράφιον εἰς τρία ἴσα μέρη (ἐδ. 169).

7) Νὰ μοιρασθῇ τὸ προαύλιον ΑΒΓΔ (σχ. 151), τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα παραλληλογράμμου, εἰς δύο κληρονόμους ἐξ ἴσου καὶ νὰ ἔχωσι κοινὴν εἴσοδον εἰς τὸ σημεῖον Ε.



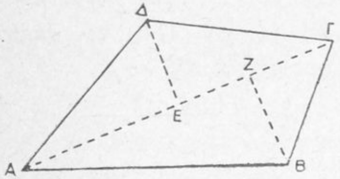
Σχ. 151.

Λύσις. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ μῆκός τι ΑΕ· ἔπειτα λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΔΓ, ἀπὸ τοῦ σημείου Γ ἀρχόμενοι, τὸ μῆκος ΓΖ ἴσον μὲ τὸ ΑΕ καὶ ἑνώνομεν τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ διὰ σχοινίου καλῶς τεταμένου· οὕτω δὲ διαιρεῖται τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὰ δύο ἴσα τραπέζια ΑΕΖΔ καὶ ΕΒΓΖ.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

170. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν πολυγωνικοῦ οἰκοπέδου, χωραφίου κτλ., διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς τρίγωνα· ἔπειτα εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τριγώνου χωριστά, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν ἀποτελεῖ τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν.

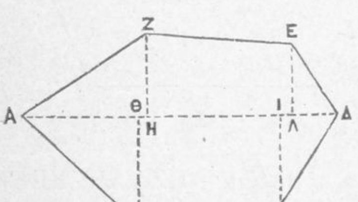
1ον. Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 152), τοῦ ὁποίου ζητεῖται τὸ ἐμβαδόν. Ἐκ μιᾶς τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, καὶ ἔστω τῆς Α, φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ (ἐπὶ μικρᾶς ἀποστάσεως χαράττομεν αὐτὴν διὰ σχοινίου, ἐπὶ μεγάλης δὲ δι' ἀκοντίων)· οὕτω δὲ διαιρεῖται τὸ τετράπλευρον εἰς δύο τρίγωνα. Ἔπειτα ἐκ τῶν ἀπέναντι αὐτῆς κορυφῶν Δ. καὶ Β φέρομεν ἐπ' αὐτὴν τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΒΖ (κατὰ τὸ ἐδ. 115) καὶ μετροῦμεν τὴν διαγώνιον ΑΓ, καθὼς καὶ τὰς καθέτους ΔΕ ΒΖ.



Σχ. 152.

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ΑΓ εὑρέθη 30 μέτρα, ἡ ΔΕ 10 μέτρα καὶ ἡ ΒΖ 12 μ. Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τοῦ τριγώνου ΑΓΔ εἶνε $\frac{30\times10}{2}$, ἤτοι 150 τετρ. μέτρα, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΓΒ εἶνε $\frac{30\times12}{2}$, ἤτοι 180 τ. μ. Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου εἶνε 150+180 ἢ 330 τ. μ.

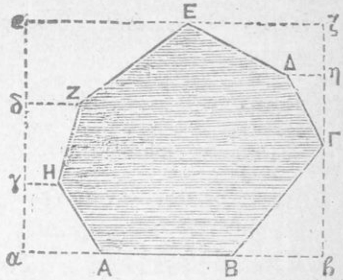
2ον Ἔστω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 153). Ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸ εἰς τρίγωνα δυνάμεθα, συντόμως νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ὡς ἑξῆς. Ἑνώνομεν τὰς περισσότερον τῶν ἄλλων ἀπεχούσας μεταξύ των κορυφὰς αὐτοῦ Α καὶ Δ διὰ τῆς εὐθείας ΑΔ· ἔπειτα ἐκ τῶν ἀπέναντι κορυφῶν της φέρομεν ἐπ' αὐτὴν τὰς καθέτους ΖΗ, ΕΛ, ΒΘ, ΓΙ· οὕτω δὲ διαιρεῖται τὸ πολύγωνον εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα καὶ εἰς τραπέζια, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ἀποτελεῖ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου.



Σχ. 153.

3ον. Ἐὰν τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖΗ (σχ. 154) εἶνε λίμνη ἢ ἕλος, εἰς τὸ ὁποῖον δὲν δυνάμεθα νὰ εἰσέλθωμεν, τότε πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ πράττομεν ὡς ἑξῆς.

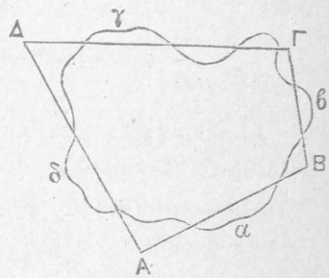
Προεκτείνομεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη δι' ἀκοντίων μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, καὶ ἔστω τὴν ΑΒ, καὶ κατασκευάζομεν ἐπὶ τῆς αϐ τὸ ὀρθογώνιον αβζε, ἐντὸς τοῦ ὁποίου νὰ περιέχηται τὸ πολύγωνον· ἔπειτα ἐκ τῶν κορυφῶν του πολυγώνου φέρομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τὰς καθέτους Ηγ, Ζδ, Δη καί, ἀφοῦ εὕρωμεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν σχηματιζομένων τραπεζίων καὶ ὀρθογωνίων τριγώνων, ἀφαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου αϐζε, ἡ δὲ διαφορὰ θέλει παριστᾷ τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΗ.



Σχ. 154.

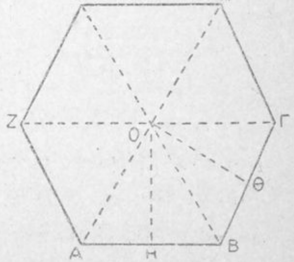
4ον. Τὸ ἐμβαδὸν ἐπιφανείας, περιοριζομένης ὑπὸ καμπύλης, ὡς εἶνε ἡ αϐγδ (σχ. 155), εὑρίσκομεν κατὰ προσέγγισιν ὡς ἑξῆς συντόμως.

Κόπτομεν τὴν καμπύλην δι᾿ εὐθειῶν, καὶ ἔστω ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ οὕτως, ὥστε ἡ περιεχομένη ἐπιφάνεια ἐκτὸς τῆς καμπύλης καὶ ἐντὸς τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ νὰ εἶνε ἴση περίπου μὲ τὴν περιεχομένην ἐπιφάνειαν ἐντὸς τῆς καμπύλης καὶ ἐκτὸς τοῦ τετραπλεύρου. Τούτου γενομένου, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου, τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν περίπου τῆς περιοριζομένης ἐπιφανείας ὑπὸ τῆς καμπύλης αϐγδ.



Σχ. 155.

5ον. Ἐὰν τέλος τὸ πολύγωνον, τοῦ ὁποίου πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδόν, εἶνε κανονικὸν (σχ. 156), φέρομεν ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ Ο (τοῦτο εὑρίσκομεν κατὰ τὸ ἐδάφιον 137) τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ. ΟΓ κτλ, οὕτω δὲ διαιρεῖται τὸ πολύγωνον εἰς 6 τρίγωνα (ὅσαι δηλ. εἶνε καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ), τὰ ὁποῖα εἶνε ἴσα, ὡς ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας.



Σχ. 156.

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τῶν τριγώνων τούτων, ἔστω τοῦ ΑΟΒ, εἶνε $ΑΒ \times \frac{ΟΚ}{2}$· ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν καὶ τῶν 6 τριγώνων, ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου, εἶνε $6 \times ΑΒ \times \frac{ΟΚ}{2}$· ἀλλὰ $6 \times ΑΒ$ ἢ $ΑΒ \times 6$ εἶνε ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου. Ἐκ τούτου λοιπὸν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

171. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου, πολλαπλασιάζομεν τὴν περίμετρον αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς καθέτου, τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ πολυγώνου ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.***

Ἐφαρμογή. Ὑποθέσωμεν ὅτι εἶνε ΑΒ=4 μέτρα, ὅτε ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶνε 4×6 ἢ 24 μέτρα, καὶ ΟΚ=3 μέτρα· τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε $24 \times \frac{3}{2}$, ἤτοι 36 τ. μ.

Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαί.

1) Χωραφίου τετραπλεύρου αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται καθέτως· τὸ σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν ἀπέχει ἀπὸ μὲν τὰς δύο ἀπέναντι κορυφὰς 60 καὶ 80 μέτρα, ἀπὸ δὲ τὰς ἄλλας δύο ἀπέναντι κορυφὰς 70 καὶ 90 μέτρα. Ἐκ πόσων στρεμμάτων ἀποτελεῖται τὸ χωράφιον ;

(*Λύσις*. 11 στρ. 200 τ. μ.)

2) Ἀμπέλου τετραπλεύρου ἡ ἐπιφάνεια εἶνε 6 στρέμματα· ἡ μία διαγώνιος αὐτῆς εἶνε 120 μέτρα καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τῆς μιᾶς τῶν ἀπέναντι κορυφῶν εἶνε 40 μ. Πόση εἶνε ἡ ἀπ' αὐτῆς ἀπόστασις τῆς ἄλλης κορυφῆς.

(*Λύσις*. 60 μ.)

3) Χωράφιον, ἔχον σχῆμα τετραπλεύρου, ἐμοιράσθη εἰς δύο κληρονόμους δι' αὔλακος ἀκολουθούσης τὴν διεύθυνσιν μιᾶς τῶν διαγωνίων. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωραφίου, μὴ συμπεριλαμβανομένης τῆς αὔλακος, εἶνε 6 στρέμ. 300 τ. μέτρα, αἱ δὲ ἀποστάσεις τῆς αὔλακος ἐκ τῶν ἀπέναντι κορυφῶν εἶνε 40 καὶ 50 μέτρα. Πόσον εἶνε τὸ μῆκος τῆς αὔλακος ;

(*Λύσις*. 140 μέτρα.)

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

1ον. **Μῆκος τῆς περιφερείας αὐτοῦ.**

172. Ἐὰν περιβάλωμεν (μίαν φορὰν) διὰ νήματος τὴν περιφέρειαν κύκλου τινός, καὶ ἔστω μεταλλικοῦ νομίσματος, τροχοῦ κτλ., καὶ ἔπειτα τεντώσωμεν τὸ νῆμα καὶ μετρήσωμεν αὐτό, εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας. Ἀλλ᾽ ὁ τρόπος οὗτος δὲν εἶνε πάντοτε δυνατός, ἐκτὸς τούτου εἶνε καὶ ἐπίπονος. Διὰ τοῦτο θὰ μεταχειρισθῶμεν ἄλλον τρόπον, διὰ τοῦ ὁποίου πάντοτε καὶ εὐκόλως εὑρίσκομεν τὸ μῆκος πάσης περιφερείας.

Ἐὰν λάβωμεν διαφόρους κύκλους καὶ μετρήσωμεν καλῶς, ὡς ἀνωτέρω, τὰς περιφερείας των, καθὼς καὶ τὰς διαμέτρους αὐτῶν, ἔπειτα δὲ παρατηρήσωμεν ποσάκις τὸ μῆκος ἑκάστης διαμέτρου χωρεῖ εἰς τὸ μῆκος τῆς ἀντιστοίχου περιφερείας της, θὰ ἴδωμεν ὅτι εὑρίσκεται πάντοτε ὁ ἴδιος ἀριθμὸς ὡς πηλίκον τῆς διαιρέσεως (μετρήσεως) ταύτης. Ὁ σταθερὸς οὗτος ἀριθμός, ἤτοι ***ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον*** (ἐδ. 146), ἰσοῦται μὲ τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 3,1415 περίπου καὶ παρίσταται συντόμως εἰς τὰ βιβλία τῶν ἐθνῶν διὰ τοῦ Ἑλληνικοῦ γράμματος π, ἤτοι εἶνε $\pi = 3,1415$.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς π, ἤτοι ὁ 3,1415, εἶνε πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ μήκους πάσης περιφερείας διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου αὐτῆς, διὰ τοῦτο

173. ***Τὸ μῆκος πάσης περιφερείας εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν διάμετρον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν π, ἤτοι ἐπὶ 3,1415.***

Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος κύκλου τινὸς διὰ τοῦ γράμματος α, ὅτε ἡ διάμετρος αὐτοῦ θὰ εἶνε $2 \times \alpha$, τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του θὰ εἶνε κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα $2 \times \alpha \times \pi$. Οὗτος εἶνε ὁ τύπος, διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας παντὸς κύκλου, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν διάμετρον ἢ τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ.

Ἐφαρμογή. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ διάμετρος κύκλου τινὸς εἶνε 4 μέτρα καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν πόση εἶνε ἡ περιφέρεια αὐτοῦ.

Πρὸς τοῦτο θέτομεν ἐν τῷ τύπῳ $2\times\alpha\times\pi$ ἀντὶ τῆς διαμέτρου $2\times\alpha$ τὸ ἴσον της 4 καὶ ἀντὶ τοῦ π τὸ ἴσον του 3,1415 καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ περιφέρεια εἶνε $4\times3{,}1415$, ἤτοι 12,566 τοῦ μέτρου.

Ἔστω προσέτι καὶ τὸ ἑξῆς. *Ἡ ἀκτὶς κύκλου τινὸς εἶνε 3 μέτρα· πόση εἶνε ἡ περιφέρεια αὐτοῦ ;*

Θέτοντες ἐν τῷ τύπῳ $2\times\alpha\times\pi$ ἀντὶ τῆς ἀκτῖνος α τὸ ἴσον της 3 καὶ ἀντὶ τοῦ π τὸ ἴσον του 3,1415 εὑρίσκομεν ὅτι ἡ περιφέρεια εἶνε $2\times3\times3{,}1415$, ἤτοι 18,849 τοῦ μέτρου.

174. Ὅταν γνωρίζωμεν τὸ μῆκος $2\times\alpha\times\pi$ περιφερείας τινός, εὑρίσκομεν τὴν διάμετρον $2\times\alpha$ ἢ τὴν ἀκτῖνα α τοῦ κύκλου, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του διὰ τοῦ ἀριθμοῦ π (ἤτοι διὰ 3,1415) ἢ διὰ τοῦ $2\times\pi$. Διότι εἶνε $\frac{2\times\alpha\times\pi}{\pi}=2\times\alpha$ καὶ $\frac{2\times\alpha\times\pi}{2\times\pi}=\alpha$.

175. Ὅταν γνωρίζωμεν τὸ μῆκος περιφερείας τινός, εὐκόλως εὑρίσκομεν διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα καὶ τὸ μῆκος τόξου τινὸς αὐτῆς ἢ τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν αὐτοῦ.

Ἔστωσαν π. χ. τὰ ἑξῆς προβλήματα.

Ἡ περιφέρεια κύκλου τινὸς εἶνε 60 μέτρα· πόσον εἶνε τὸ μῆκος τόξου 15 μοιρῶν;

Κατάταξις. Αἱ 360^0 ἔχουν μῆκος 60^{μ}.
αἱ 15^0 $\times$

Λύοντες τοῦτο διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα (ἢ καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν) εὑρίσκομεν ὅτι ἔχει μῆκος 2,50 τοῦ μέτρου.

Τὸ μῆκος τόξου τινὸς εἶνε 0,60 τοῦ μέτρου, τὸ δὲ μῆκος τῆς περιφερείας (τῆς ὁποίας εἶνε μέρος) εἶνε 5,40 τοῦ μέτρου. Πόσον μοιρῶν εἶνε τὸ τόξον τοῦτο ;

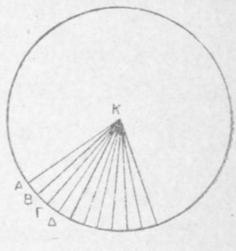
Κατάταξις. Αἱ 360^0 ἔχουν μῆκος $5{,}40^{\mu}$.
$\times$ 0,60

Λύοντες τοῦτο, ὅπως καὶ τὸ ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε 40 μοῖραι.

2ον. Ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

176. Ἔστω ὁ κύκλος Κ· ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειάν

του εἰς πολὺ μικρὰ ἴσα τόξα καὶ φέρωμεν εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ κτλ. (σχ. 157), θὰ διαιρεθῇ ὁ κύκλος εἰς πολὺ μικροὺς τομεῖς, τῶν ὁποίων τὰ τόξα ἕνεκα τῆς σμικρότητός των δύνανται νὰ ἐξομοιωθῶσι πρὸς εὐθείας καὶ ἑπομένως οἱ τομεῖς δύνανται νὰ ἐξομοιωθῶσι πρὸς τρίγωνα ἴσα (ὡς ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας), τῶν ὁποίων τὸ ἐμβαδὸν ἀποτελεῖ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου. Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν τριγώνων τούτων εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του (βάσις εἶνε ἓν τῶν μικρῶν τούτων τόξων καὶ ὕψος ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, διότι τὸ ὕψος ἕνεκα τῆς σμικρότητος τῆς βάσεως θὰ συμπέσῃ ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος)· ἀλλ' ὅλαι ὁμοῦ αἱ βάσεις τῶν τριγώνων τούτων ἀποτελοῦν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Ὥστε



Σχ. 157.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κύκλου εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιφερείας του ἐπὶ τὴν ἀκτῖνά του.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος κύκλου τινὸς διὰ α, ὅτε ἡ περιφέρεια αὐτοῦ θὰ εἶνε $2\times\alpha\times\pi$, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶνε κατὰ ἀνωτέρω $\frac{2\times\alpha\times\pi\times\alpha}{2}$ ἢ $\alpha\times\pi\times\alpha$ ἢ $\pi\times\alpha\times\alpha$ ἢ καὶ $\pi\times\alpha^2$, ἤτοι γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ π (=3,1415) ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνός του. Οὗτος λοιπὸν εἶνε ὁ τύπος, διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κύκλου, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνά του.

Ἔστω, ὡς παράδειγμα τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Ἡ ἀκτὶς κύκλου τινὸς εἶνε 6 μέτρα· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ;

Λύσις. Θέτομεν ἐν τῷ τύπῳ $\pi\times\alpha^2$ ἀντὶ τοῦ α τὸ ἴσον του 6 καὶ ἀντὶ τοῦ π τὸ ἴσον του 3,1415· εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε $3{,}1415\times6^2$ ἢ $3{,}1415\times36$, ἤτοι 113, 094 τοῦ τετραγ. μέτρου.

177. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κυκλικοῦ τομέως εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ μήκους τοῦ τόξου του ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα.

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Τὸ τόξον κυκλικοῦ τομέως εἶνε 8 μέτρα, ἡ δὲ ἀκτὶς 5 μέτρα· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

Λύσις. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα ἔχομεν $\frac{8 \times 5}{2}$, ἤτοι 20τ.μ.

Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαί.

1) Ἡ ἀκτὶς κύκλου τινὸς εἶνε 10 μέτρα· πόση εἶνε ἡ περιφέρεια αὐτοῦ καὶ πόσον τὸ ἐμβαδόν;

(***Λύσις***. 62,83 μ. καὶ 314,15 τ. μ).

2) Τὸ μῆκος περιφερείας κύκλου τινὸς εἶνε $20^{\mu},42$· πόση εἶνε ἡ διάμετρος αὐτοῦ;

(***Λύσις***. 6,50 μ).

3) Ἡ περιφέρεια κύκλου τινὸς εἶνε $20^{\mu},16$· πόσον εἶνε τὸ μῆκος τόξου 80 μοιρῶν;

(***Λύσις***. $4^{\mu},46$ περίπου).

4) Τὸ μῆκος τόξου τινὸς εἶνε $6^{\mu},30$, ἡ δὲ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει, εἶνε 5 μέτρα· πόσων μοιρῶν εἶνε τὸ τόξον τοῦτο; Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν περιφέρειαν.

(***Λύσις***. $72^0\ 11'\ 41''$).

5) Ἡ ἀκτὶς κύκλου τινὸς εἶνε $5^{\mu},76$· πόσον εἶνε τὸ τόξον 60 μοιρῶν; (***Λύσις***. $6^{\mu},031$).

6) Ἡ διάμετρος κύκλου τινὸς εἶνε 0,92 τοῦ μέτρου· πόσον εἶνε τὸ μῆκος τόξου $18^0\ 26'$;

(***Λύσις*** $0^{\mu},148$.

7) Ἡ διάμετρος τοῦ βαρούλκου φρέατός τινος εἶνε 0,30 τοῦ μέτρου· πόσον εἶνε τὸ βάθος φρέατος, ἐὰν τὸ σχοινίον τὸ φθάνον μέχρι τοῦ πυθμένος περιελίσσεται 20 φορὰς περὶ τὸ βαροῦλκον;

(***Λύσις***. 18,849 τοῦ μ.).

8) Ὁ τροχὸς ἁμάξης τινὸς κάμνει 1000 περιστροφάς, ἵνα ἡ ἅμαξα διατρέξῃ 2513,2 τοῦ μέτρου· πόση εἶνε ἡ διάμετρος τοῦ τροχοῦ;

(***Λύσις***. 0,8 τοῦ μέτρου)

9) Κύκλου τινὸς ἡ διάμετρος εἶνε 8 μέτρα· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ; (***Λύσις***. 50,264 τοῦ τετρ. μέτρου).

10) Κύκλου τινὸς ἡ περιφέρεια εἶνε 25,132 τοῦ μέτρου· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

(*Λύσις*. Ἡ ἀκτὶς εἶνε $\frac{25,132}{2\times\pi}$ (ἐδ. 174), ἤτοι 4 μέτρα, ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου $\pi\times\alpha^2$ ὅτι εἶνε $3,1415\times4^2$ ἢ 50,264 τοῦ τετρ. μέτρου).

11) Ἡ ἀκτὶς ἡμικυκλίου τινὸς εἶνε 3 μέτρα· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

(*Λύσις*. 14,136 τοῦ τ. μ.)

12) Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως, τοῦ ὁποίου τὸ τόξον εἶνε 18 μοιρῶν, ἡ δὲ περιφέρεια τοῦ κύκλου 31,40 τοῦ μέτρου; (*Λύσις*. 3,917 τοῦ τ. μ).

13) Ἡ ἀκτὶς κύκλου τινὸς εἶνε 12 μέτρα, ἄλλου δὲ κύκλου, ἔχοντος τὸ αὐτὸ κέντρον, ἡ ἀκτὶς εἶνε 8 μέτρα· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεταξὺ τῶν δύο τούτων κύκλων περιεχομένης ἐπιφανείας;

(*Λύσις*. 251,32 τοῦ τ. μ.).

14) Τὸ ἐμβαδὸν κύκλου τινὸς εἶνε 0,50 τοῦ τετρ. μέτρου· πόση εἶνε ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ;

(*Λύσις*. 0,39 τοῦ μέτρου).

15) Ἡ ἀκτὶς κύκλου τινὸς εἶνε 10 μέτρα· πόσων μοιρῶν εἶνε τὸ τόξον κυκλικοῦ τομέως, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶνε 65,45 τοῦ τετρ. μέτρου;

(*Λύσις*. 75 μοιρῶν).

16) Ἡ ἐπίκεντρος γωνία κυκλικοῦ τομέως εἶνε 40 μοῖραι, ἡ δὲ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶνε 2 μέτρα. Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως;

(*Λύσις*. 1,396 τοῦ τ. μ.).

17) Εἶνε γνωστόν, ὅτι τὸ ἀλεξικέραυνον δύναται νὰ προφυλάξῃ ἀπὸ τοῦ κεραυνοῦ κυκλικὴν ἐπιφάνειαν, ἔχουσαν κέντρον τὴν βάσιν τοῦ κοντοῦ καὶ ἀκτῖνα διπλασίαν περίπου τοῦ ὕψους τοῦ κοντοῦ. Ζητεῖται πόσην κυκλικὴν ἐπιφάνειαν δύναται νὰ προφυλάξῃ ἀλεξικέραυνον, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶνε 1,50 τοῦ μέτρου. (*Λύσις*. 28,2735 τοῦ τ. μ.).

18) Ἐν τῷ μέσῳ προαυλίου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶνε 10 μέτρα καὶ τὸ πλάτος 8, ὑπάρχει κυκλικὸς ἀνθών, τοῦ ὁποίου ἡ

ἀκτὶς εἶνε 4 μέτρα· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ προαυλίου τοῦ κειμένου ἐκτὸς τοῦ ἀνθῶνος; (*Λύσις*. 29,736 τοῦ τ. μ.).

19) Πέριξ κυκλικοῦ ἀνθῶνος ὑπάρχει ὁδὸς τοῦ αὐτοῦ πλάτους· ἡ περιφέρεια τοῦ ἀνθῶνος εἶνε 25,132 τοῦ μέτρου, ἡ δὲ ἐξωτερικὴ περιφέρεια τῆς ὁδοῦ εἶνε 30,159 τοῦ μέτρου. Πόσον εἶνε τὸ πλάτος τῆς ὁδοῦ; (*Λύσις* 0,80 τοῦ μ.)

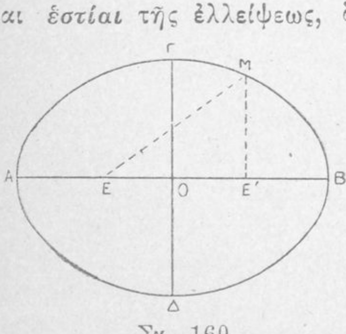
* ΕΛΛΕΙΨΙΣ

178. Ἐὰν κόψωμεν κύλινδρον δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονά του, ἡ τομὴ θὰ εἶνε κύκλος ἴσος μὲ τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Ἐὰν ὅμως κόψωμεν αὐτὸν δι' ἐπιπέδου πλαγίου πρὸς τὸν ἄξονά του (σχ. 158), ἡ τομὴ δὲν θὰ εἶνε κύκλος, ἀλλ' ἄλλη τις ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περικλειομένη ὑπὸ καμπύλης γραμμῆς, ἤτοι θὰ ἔχῃ τὸ σχῆμα 159. Ἡ τοιαύτη ἐπιφάνεια λέγεται ***ἔλλειψις*** καὶ ἔχει τὴν ἑξῆς ἰδιότητα. ***Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἑκάστου σημείου τῆς καμπύλης ἀπὸ δύο σημείων κειμένων ἐντὸς αὐτῆς εἶνε τὸ αὐτὸ πάντοτε.***

Σχ. 158.

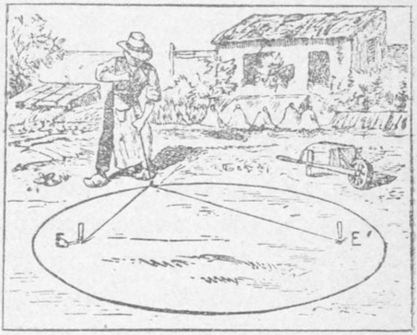
Σχ. 159.

Ἐὰν δηλ. λάβωμεν σημεῖόν τι Μ (σχ. 160) τῆς καμπύλης καὶ ἑνώσωμεν αὐτὸ μὲ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ε΄, τὰ ὁποῖα λέγονται *ἑστίαι* τῆς ἐλλείψεως, διὰ τῶν εὐθειῶν ΜΕ καὶ ΜΕ΄, τὸ ἄθροισμα ΜΕ+ΜΕ΄ εἶνε τὸ αὐτὸ πάντοτε δι' ὅλα τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν ἑστιῶν καὶ περατοῦται ἑκατέρωθεν εἰς τὴν καμπύλην, λέγεται ***μέγας ἄξων*** τῆς ἐλλείψεως, ἡ δὲ κάθετος ΓΔ εἰς τὸ μέσον Ο τοῦ μεγάλου ἄξονος λέγεται ***μικρὸς ἄξων*** τῆς ἐλλείψεως, τὸ δὲ σημεῖον Ο τῆς τομῆς λέγεται ***κέντρον*** τῆς ἐλλείψεως.



Σχ. 160.

Γραφὴ τῆς ἐλλείψεως. Διὰ νὰ γράψωμεν ἔλλειψιν ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας, ἔστω ἐπὶ τοῦ πατώματος, ἐμπήγομεν δύο καρφίδας εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ε΄, τὰ ὁποῖα θέλομεν νὰ εἶνε αἱ ἑστίαι, καὶ προσδένομεν εἰς αὐτὰς τὰ ἄκρα νήματος, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος νὰ εἶνε τόσον, ὅσος θέλομεν νὰ εἶνε ὁ μέγας ἄξων τῆς ἐλλείψεως· ἔπειτα διὰ μολυβδοκονδύλου τεντώνομεν τὸ νῆμα καὶ περιφέρομεν τὸ μολυβδοκόνδυλον ἐπὶ τοῦ πατώματος καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους προσέχοντες νὰ εἶνε τὸ νῆμα πάντοτε καλῶς τεντωμένον, τότε ἡ αἰχμὴ τοῦ μολυβδοκονδύλου θὰ γράφῃ τὴν ἔλλειψιν. Οἱ κηπουροὶ χαράττουσι τὰς ἐλλείψεις ἐπὶ τοῦ ἐδάφους διὰ πασσαλίσκου (σχ. 161).



Σχ. 161.

Σημ. Ὅσῳ περισσότερον πλησιάζουν αἱ ἑστίαι πρὸς τὸ κέντρον, τόσῳ περισσότερον ἡ ἔλλειψις πλησιάζει νὰ γίνῃ κύκλος· ὅσῳ δὲ περισσότερον ἀπομακρύνονται τοῦ κέντρου, τόσῳ ἐπιμηκεστέρα γίνεται ἡ ἔλλειψις.

Ἐμβαδὸν ἐλλείψεως. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἡμιαξόνων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν* π $(=3,1415)$.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ α καὶ β τοὺς ἡμιάξονας, τότε ὁ τύπος, διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως, εἶνε $\alpha \times \beta \times \pi$.

Ἐφαρμογή. Ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ μέγας ἄξων εἶνε 4 μέτρα, ὁ δὲ μικρὸς 3,20 τοῦ μέτρου, οἱ ἡμιάξονες θὰ εἶνε $\alpha=2$ καὶ $\beta=1,60$ τοῦ μέτρου, ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως θὰ εἶνε $2\times1,60\times3,1415$, ἤτοι 10,0528 τοῦ τετραγ. μέτρου.

ΠΟΛΥΕΔΡΑ

179. Τὰ στερεὰ σώματα, ἤτοι κύβος, ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, πλάγιον παραλληλεπίπεδον καὶ πυραμίδες, τὰ ὁποῖα

ἐξητάσαμεν εἰς τὸ Α΄ βιβλίον, περατοῦνται πανταχόθεν εἰς ἐπίπεδα ἢ ἕδρας, ἐνῷ τοῦτο δὲν συμβαίνει εἰς τὸν κύλινδρον καὶ τὸν κῶνον.

Πᾶν στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον περατοῦται πανταχόθεν εἰς ἐπίπεδα ἢ ἕδρας, λέγεται γενικῶς ***πολύεδρον***.

Τὸ πολύεδρον, ἐὰν περατοῦται εἰς τέσσαρας ἕδρας, λέγεται ***τετράεδρον***· ἐὰν εἰς πέντε ἕδρας, λέγεται ***πεντάεδρον***· ἐὰν εἰς ἓξ ἕδρας, λέγεται ***ἑξάεδρον*** καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς εἶνε τετράεδρον· ἐὰν δὲ ἀποκόψωμεν μίαν τῶν κορυφῶν αὐτῆς (δι᾿ ἐπιπέδου τομῆς) θὰ σχηματισθῇ πεντάεδρον. Τὸ ὀρθογώνιον καὶ τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον, καθὼς καὶ ὁ κύβος, εἶνε ἑξάεδρα, καὶ ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον εἶνε κανονικὸν σχῆμα, διὰ τοῦτο ὁ κύβος λέγεται καὶ ***κανονικὸν ἑξάεδρον***.

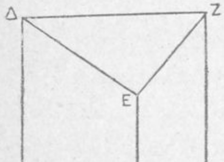
180. ***Ἐπιφάνεια*** τοῦ πολυέδρου λέγεται ἡ ἐπιφάνεια ὅλων τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ. ***Ἀκμαὶ ἢ πλευραὶ*** τοῦ πολυέδρου λέγονται αἱ εὐθεῖαι, κατὰ τὰς ὁποίας συναντῶνται αἱ ἕδραι αὐτοῦ ἀνὰ δύο. ***Γωνίαι*** τοῦ πολυέδρου λέγονται αἱ στερεαὶ γωνίαι αὐτοῦ. ***Κορυφαὶ*** αὐτοῦ λέγονται αἱ κορυφαὶ τῶν στερεῶν γωνιῶν του.

Ἐκ τῶν πολυέδρων τὰ κυριώτερα εἶνε τὰ ***πρίσματα*** καὶ αἱ ***πυραμίδες***.

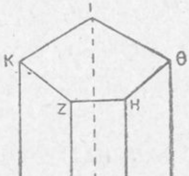
ΠΡΙΣΜΑΤΑ

181. Τὸ στερεὸν τοῦτο σῶμα (1) (τὸ σχῆμα 162 παριστᾷ τοῦτο) περατοῦται, ὡς παρατηροῦμεν, εἰς ἐπίπεδα ἢ ἕδρας, ἑπομένως εἶνε πολύεδρον. Ἐκ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ δύο ἀπέναντι ἕδραι (αἱ ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ) εἶνε ἴσα καὶ παράλληλα τρίγωνα, αἱ δὲ λοιπαὶ ἕδραι εἶνε παραλληλόγραμμα.

Ὡσαύτως τὸ στερεὸν τοῦτο σῶμα (τὸ σχῆμα 163 παριστᾷ



Σχ. 162.



Σχ. 163.

(1) Ὁ διδάσκων δεικνύει εἰς τοὺς μαθητὰς τὸ τριγωνικὸν πρίσμα καὶ κατόπιν τὸ πολυγωνικόν.

τοῦτο) εἶνε πολύεδρον. Ἐκ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ δύο ἀπέναντι ἕδραι (αἱ ΑΒΓΔΕ καὶ ΖΗΘΙΚ) εἶνε ἴσα καὶ παράλληλα πολύγωνα, αἱ δὲ λοιπαὶ ἕδραι εἶνε παραλληλόγραμμα. Τὰ τοιαῦτα πολύεδρα λέγονται ἰδίως *πρίσματα*. Ὥστε

182. **Πρίσμα** λέγεται τὸ πολύεδρον, τοῦ ὁποίου δύο ἕδραι εἶνε ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ λοιπαὶ εἶνε παραλληλόγραμμα.

Ὁ κύβος λοιπόν, τὸ ὀρθογώνιον καὶ τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον εἶνε πρίσματα.

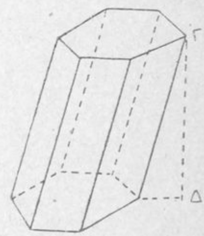
183. **Βάσεις** τοῦ πρίσματος λέγονται αἱ δύο ἴσαι καὶ παράλληλοι ἕδραι αὐτοῦ. *Ὕψος* δὲ λέγεται ἡ κάθετος, ἥτις ἄγεται ἐκ σημείου τινὸς τῆς μιᾶς βάσεως ἐπὶ τὴν ἄλλην (1).

184. Ἡ ἐπιφάνεια, ἥτις ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ πέριξ τῶν βάσεων παραλληλόγραμμα, λέγεται παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος.

Ἐὰν ἡ βάσις τοῦ πρίσματος εἶνε τρίγωνον, τετράπλευρον καὶ γενικῶς πολύγωνον, τὸ πρίσμα λέγεται *τριγωνικόν, τετραγωνικὸν* καὶ γενικῶς *πολυγωνικόν*.

185. Τὸ πρίσμα λέγεται *ὀρθόν*, ἐὰν αἱ ἀκμαὶ ἢ πλευραί, αἵτινες ἑνώνουν τὰς ἀντιστοίχους κορυφὰς τῶν βάσεων, εἶνε κάθετοι ἐπὶ τῶν βάσεων, ὅτε αἱ πέριξ ἕδραι εἶνε ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα· εἰ δὲ μή, λέγεται *πλάγιον*.

Τὰ σχήματα 162 καὶ 163 παριστῶσι πρίσματα ὀρθά, τὸ δὲ σχῆμα 164 παριστᾷ πλάγιον.



Σχ. 164.

Σημ. Εἰς τὸ ὀρθὸν πρίσμα ὕψος αὐτοῦ εἶνε μία τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του.

Πᾶν πρίσμα ἔχει τόσας ἀκμὰς καὶ διέδρους γωνίας, ὅσος εἶνε ὁ τριπλάσιος ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς του· στερεὰς δὲ γωνίας ἔχει τόσας, ὅσος εἶνε ὁ διπλάσιος ἀριθμὸς αὐτῶν.

Ἐξ ὅλων τῶν πρισμάτων τὸ συχνάκις ἀπαντώμενον εἰς ἀντικείμενα εἶνε τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον (ὡς εἴπομεν ἄλλοτε, ἐδ. 57). Ἐπίσης συχνὰ ἀπαντῶμεν καὶ τὸ σχῆμα τοῦ ὀρθοῦ

(1) Ὅλαι αἱ ἀγόμεναι κάθετοι μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων εἶνε ἴσαι μεταξύ των.

πρίσματος, τοῦ ἔχοντος βάσιν τετράγωνον· τοιοῦτον σχῆμα ἔχουν οἱ δοκοὶ (καδρόνια), οἱ ξύλινοι χάρακες (ρῆγαι), στῆλαι (κολῶναι) σιδηραῖ ἢ λίθιναι χρησιμεύουσαι ὡς ἐρείσματα κτλ. Τινὰ δὲ τῶν μολυβδοκονδύλων ἔχουν σχῆμα ἑξαγωνικοῦ καὶ ὀκταγωνικοῦ ὀρθοῦ πρίσματος.

Ἀσκήσεις.

1) Πόσας ἀκμάς, πόσας διέδρους γωνίας καὶ πόσας στερεὰς γωνίας ἔχει τὸ τριγωνικὸν πρίσμα;

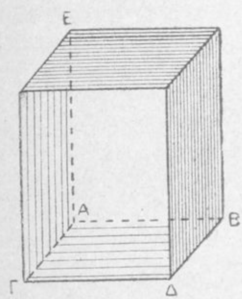
2) Πόσας τοιαύτας ἔχει τὸ πενταγωνικὸν πρίσμα;

3) Πρίσμα τι ἔχει 24 ἀκμάς, πῶς λέγεται ἐκ τῆς βάσεώς του;

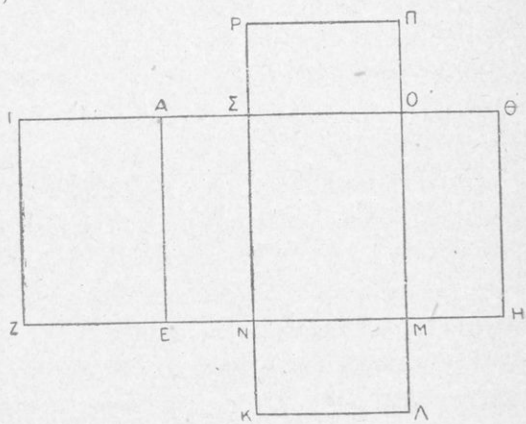
ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΥ

1ον. Ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

186. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 165) καλύπτεται ὑπὸ λεπτοῦ χάρτου· ἐὰν τὴν



Σχ. 165.



Σχ. 166.

ἐκ χάρτου ταύτην ἐπιφάνειαν ἀναπτύξωμεν (ξεδιπλώσωμεν) ἐπὶ ἐπιπέδου, θὰ λάβωμεν τὸ σχῆμα 166, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ μεγάλου ὀρθογωνίου ΖΗΘΙ καὶ ἐκ δύο μικρῶν ὀρθογωνίων ΚΛΜΝ καὶ ΟΠΡΣ. Καὶ τὸ μὲν ὀρθογώνιον ΖΗΘΙ παριστᾷ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ παραλληλεπιπέδου καὶ ἔχει τοῦτο τὴν βάσιν ΖΗ ἴσην μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τοῦ παραλληλεπιπέδου, ὕψος δὲ τὸ αὐτό· τὰ δὲ μικρὰ ὀρθογώνια παριστῶσι τὰς δύο βάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

187. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζομεν τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

Ἐὰν δὲ εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας προσθέσωμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του.

Ἵνα δὲ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοῦτο ἐπὶ 6 (διότι καὶ αἱ 6 ἕδραι τοῦ κύβου εἶνε ἴσαι μεταξύ των).

188. Καὶ οἱουδήποτε ἄλλου ὀρθοῦ πρίσματος ἐὰν ἀναπτύξωμεν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειάν του ἐπὶ ἐπιπέδου, θὰ λάβωμεν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, ἔχον βάσιν ἴσην μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς του καὶ ὕψος τὸ αὐτό. Ἐκ τούτου συνάγομεν, ὅτι

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας παντὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶνε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν περίμετρον τῆς βάσεως του διὰ Π καὶ τὸ ὕψος του διὰ υ, τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας παντὸς ὀρθοῦ πρίσματος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\Pi \times \upsilon$.

2ον. Ὄγκος αὐτοῦ.

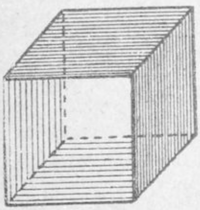
189. Τὰ σώματα ἐκτείνονται κατὰ τρεῖς διευθύνσεις ἢ διαστάσεις, αἵτινες λέγονται *μῆκος, πλάτος* καὶ *ὕψος*. Τὸ ὕψος ἐνίοτε λέγεται καὶ *πάχος* ἢ *βάθος*· π. χ. λέγομεν τὸ πάχος τοῦ βιβλίου, τὸ βάθος τῆς τάφρου.

Τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου αἱ τρεῖς ἀκμαὶ αὐτοῦ, αἵτινες ἄρχονται ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς, παριστῶσι τὰς τρεῖς διαστάσεις αὐτοῦ· π. χ. ἡ μὲν ΑΒ (σχ. 165) λέγεται μῆκος, ἡ ΑΓ πλάτος καὶ ἡ ΑΕ ὕψος.

Σημ. Ἐκ τῶν τριῶν τούτων διαστάσεων ἡ ἐπιφάνεια ἔχει μόνον μῆκος καὶ πλάτος, ἡ γραμμὴ μόνον μῆκος, τὸ δὲ σημεῖον οὐδεμίαν.

Ὡς μονὰς μετρήσεως τοῦ ὄγκου (ἐδ. 3) τῶν στερεῶν σωμάτων λαμβάνεται τὸ κυβικὸν μέτρον, ἤτοι κύβος ἔχων ἀκμὴν ἢ πλευρὰν ἴσην μὲ ἓν μέτρον.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ κατωτέρω σχῆμα εἶνε κυβικὸν μέτρον καὶ διαιρέσωμεν αὐτὸ κατὰ μῆκος εἰς 10 ἴσα μέρη, ἔπειτα κατὰ πλάτος εἰς 10 ἴσα μέρη, καὶ ἔπειτα



κατὰ ὕψος εἰς 10 ἴσα μέρη, θὰ προκύψωσι 1000 κυβικαὶ παλάμαι· διότι ἑκάστη θὰ ἔχῃ πλευρὰν ἴσην μὲ μίαν παλάμην. Ἐὰν τὸ αὐτὸ πράξωμεν καὶ εἰς μίαν κυβικὴν παλάμην, θὰ προκύψωσι 1000 κυβικοὶ δάκτυλοι· διότι ἡ πλευρὰ ἑκάστου θὰ εἶνε ἴση μὲ ἕνα δάκτυλον. Ὥστε εἶνε

1 κυβ. μ. = 1000 κ. παλ. = 1000000 κ. δ.

Σημ. Ὅπως αἱ μονάδες τῆς ἐπιφανείας δὲν εἶνε πραγματικαί, οὕτω καὶ αἱ μονάδες τοῦ ὄγκου. Κατωτέρω ὅμως θὰ ἴδωμεν τὸν τρόπον, διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν ἐκ πόσων τοιούτων μονάδων ἀποτελεῖται ὄγκος τις.

190. Ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως ΑΒΓΔ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 165) εἶνε ἡ μὲν ΑΒ 5 μέτρα, ἡ δὲ ΑΓ 4 μέτρα, τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως θὰ εἶνε (κατὰ τὸ ἐδάφιον 160) 5×4, ἤτοι 20 τετραγωνικὰ μέτρα. Ἐὰν ἐπὶ ἑκάστου τετραγωνικοῦ μέτρου τῆς βάσεώς του τοποθετήσωμεν ἓν κυβικὸν μέτρον, θὰ ἔχωμεν στρῶμα ἐξ 20 κυβικῶν μέτρων· ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ὕψος ΑΕ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶνε 6 μέτρα, τότε δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν 6 τοιαῦτα στρώματα κυβικῶν μέτρων· ὥστε ἐν ὅλῳ θὰ ἔχωμεν 20×6 ἢ $5\times4\times6$, ἤτοι 120 κυβικὰ μέτρα. Ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ 5, 4, 6 παριστῶσι τὰς τρεῖς διαστάσεις (μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος) τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

191. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζομεν μεταξύ των τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς τοὺς παριστῶντας τὰς διαστάσεις αὐτοῦ.***

Ἐὰν παραστήσωμεν τὰς τρεῖς διαστάσεις διὰ α, β, γ, τότε ὁ ὄγκος παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\alpha \times \beta \times \gamma$.

Παρατηρήσεις. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν δύο διαστάσεων τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου 5 καὶ 4, ἤτοι ὁ 20, παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του, διὰ τοῦτο ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς.

192. ***Ὁ ὄγκος παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶνε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

193. Ὁ ὄγκος τοῦ κύβου εὑρίσκεται συντόμως ὡς ἑξῆς. Μετροῦμεν μίαν τῶν διαστάσεων αὐτοῦ καὶ σχηματίζομεν γινόμενον ἐκ τριῶν ἀριθμῶν ἴσων μὲ τὸ μῆκος τῆς διαστάσεως ταύτης (διότι καὶ αἱ τρεῖς διαστάσεις αὐτοῦ εἶνε ἴσαι μεταξύ των).

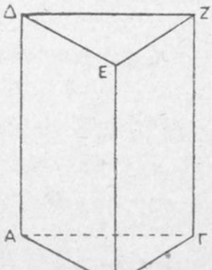
Ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι μία τῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου (ἥτις παριστᾷ καὶ μίαν τῶν διαστάσεων αὐτοῦ) μετρηθεῖσα εὑρέθη 5 μέτρα, τότε ὁ ὄγκος αὐτοῦ θὰ εἶνε $5 \times 5 \times 5$, ἤτοι 125 κυβ. μέτρα.

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $5 \times 5 \times 5$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς 5^3. Καὶ ἐπειδὴ ἡ τρίτη αὕτη δύναμις τοῦ 5 παριστᾷ τὸν ὄγκον τοῦ κύβου, ὅστις ἔχει πλευρὰν 5, διὰ τοῦτο ἡ τρίτη δύναμις οἱουδήποτε ἀριθμοῦ λέγεται καὶ ***κύβος***.

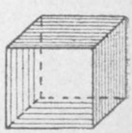
194. Καὶ ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος εὑρίσκεται κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα τοῦ ἐδαφίου 192. Περὶ τούτου δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν ὡς ἑξῆς.

Κατασκευάζομεν δύο δοχεῖα ἐκ λευκοσιδήρου (τενεκέ), ἀλλὰ τὸ μὲν ἓν δοχεῖον νὰ ἔχῃ σχῆμα πρίσματος οἱουδήποτε, ἔστω τριγωνικοῦ σχ. 167, τὸ δὲ ἄλλο κυβικῆς παλάμης σχ. 168 (ἀνοικτῶν πρὸς τὰ ἄνω).

Ἐὰν ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι, διὰ νὰ πληρωθῇ ὕδατος τὸ πρισματικὸν δοχεῖον, πρέπει νὰ χύσωμεν εἰς αὐτὸ 7 φορὰς πλῆρες ὕδατος τὸ κυβικὸν δοχεῖον, τότε ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος εἶνε 7 κυβικαὶ παλάμαι. Ἀλλὰ τὸν αὐτὸν ὄγκον θὰ εὕρωμεν καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ



Σχ. 167.


Σχ. 168.

ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ΑΒΓ ἢ ΔΕΖ ἐπὶ τὸ ὕψος του. Ὥστε

195. **Ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος εἶνε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.**

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του διὰ ε, τὸ δὲ ὕψος του διὰ υ, τότε ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου ε×υ.

Ἐφαρμογή. Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως πολυγωνικοῦ πρίσματος εἶνε 2,25 τοῦ τετραγ. μέτρου καὶ τὸ ὕψος του 3 μέτρα, ὁ ὄγκος του θὰ εἶνε 2,25×3, ἤτοι 6,75 τοῦ κυβ. μέτρου.

Κατασκευὴ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Ὁδηγούμενοι ἐκ τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 166) δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἐκ χαρτονίου. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἔχῃ τοῦτο μῆκος 0,15 τοῦ μέτρου, πλάτος 0,10 καὶ ὕψος 0,08. Γράφομεν ἐπὶ χαρτονίου τὸ ὀρθογώνιον ΜΝΣΟ, ἔχον μῆκος 0,15 καὶ πλάτος 0,10· ἐπὶ δὲ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ γράφομεν τὰ ὀρθογώνια ΜΗΘΟ, ΟΠΡΣ, ΣΔΕΝ, ΝΚΛΜ, ἔχοντα πλάτος 0,08· τέλος πλησίον τοῦ ΣΔΕΝ (ἢ τοῦ ΜΗΘΟ) γράφομεν τὸ ὀρθογώνιον ΔΙΖΕ ἴσον μὲ τὸ ΜΝΣΟ. Κατόπιν ἀποκόπτομεν τὸ σχῆμα 166 καί, ἀφοῦ χαράξωμεν ἐλαφρῶς διὰ μαχαιριδίου τὰς εὐθείας ΝΜ, ΜΟ, ΟΣ, ΣΝ, ΔΕ πρὸς εὐκολίαν τῶν περιστροφῶν τῶν ὀρθογωνίων, κρατοῦμεν τὸ ΜΝΣΟ ἐπί τινος τραπέζης καὶ ἀνυψοῦμεν τὰ ἄλλα, τὸ δὲ ΔΙΖΕ περιστρέφομεν περὶ τὴν ΔΕ, ἵνα καλυφθῇ τὸ ἄνω μέρος τοῦ παραλληλεπιπέδου. Τέλος εἰς τὰς ἀκμὰς τοῦ οὕτω σχηματισθέντος στερεοῦ ἐπικολλῶμεν ταινίας, ἵνα διατηρηθῇ τὸ σχῆμά του.

Διὰ τὴν κατασκευὴν κύβου γράφομεν ἐπὶ χαρτονίου 6 τετράγωνα ἴσα ἀντὶ τῶν ἀνωτέρω 6 ὀρθογωνίων.

Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαί.

1) Πόσα κοιλὰ σίτου χωρεῖ ἀποθήκη, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶνε 8 μέτρα, τὸ πλάτος 5 καὶ τὸ ὕψος 6,70; Τὸ κοιλὸν εἶνε ἴσον μὲ τὸ δέκατον τῆς χωρητικότητος τοῦ κυβικοῦ μέτρου.

(*Λύσις*. 2680)

2) Προαύλιον, ἔχον μῆκος 8 μέτρα καὶ πλάτος 6,40, πρόκειται νὰ στρωθῇ δι' ἄμμου πάχους 0,10 τοῦ μέτρου. Πόσα κυβικὰ μέτρα ἄμμου χρειάζονται; (*Λύσις*. 5,120 τοῦ κ. μ.).

3) Πόσος εἶνε ὁ ὄγκος τοῦ κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε 3, 10 τοῦ μέτρου καὶ πόση ἡ ἐπιφάνειά του;

(*Λύσις*. 29,791 κ. μ. καὶ 57,66 τ.μ)

4) Ἡ χωρητικότης δωματίου τινὸς εἶνε 428,4 τοῦ κυβ. μέτρου, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του εἶνε 84 τ. μ. Πόσον εἶνε τὸ ὕψος του;

(*Λύσις*. 428,4 : 84, ἤτοι 5,1 τοῦ μ.).

5) Δωματίου τινός, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶνε 6 μέτρα, τὸ πλάτος 5 καὶ τὸ ὕψος 4, πρόκειται νὰ ἐλαιοχρωματισθῶσιν οἱ μὲν τοῖχοι αὐτοῦ πρὸς 2 δραχμὰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον, ἡ δὲ ὀροφὴ πρὸς 3 δρ. Τὸ δωμάτιον τοῦτο ἔχει μίαν θύραν ἔχουσαν ὕψος 2 $^{\mu}$,50, πλάτος 0 $^{\mu}$,90 καὶ 2 παράθυρα ἔχοντα ὕψος 1,50 καὶ πλάτος 0,80. Πόσον θὰ κοστίσῃ ὁ ἐλαιοχρωματισμός;

(*Λύσις*. 256, 70 δρ.).

6) Πόσαι ὀπτόπλινθοι (τοῦβλα) χρειάζονται διὰ νὰ κτισθῇ τοῖχος, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος νὰ εἶνε 6 μέτρα, τὸ πάχος 0,40 καὶ τὸ ὕψος 3 μέτρα; Ἑκάστη ὀπτόπλινθος ἔχει μῆκος 0,20 τοῦ μέτρου, πλάτος 0,10 καὶ πάχος 0,05 (συμπεριλαμβανομένης καὶ τῆς ἀμμοκονίας).

Λύσις. Ὅσας φορὰς ὁ ὄγκος μιᾶς ὀπτοπλίνθου χωρεῖ εἰς τὸν ὄγκον τοῦ τοίχου, τόσαι ὀπτόπλινθοι χρειάζονται.

7) Κτίστης τις ἔκτισε τοῖχον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶνε 9 μέτρα, τὸ πάχος 0,60 καὶ τὸ ὕψος 2 μέτρα. Πόσον θὰ λάβῃ, ἂν συνεφωνήθη ὁ κυβικὸς τέκτον. πῆχυς πρὸς 2,50 δραχμάς; Εἶνε δὲ γνωστόν, ὅτι ὁ κυβ. τεκτ. πῆχυς εἶνε τὰ $\frac{27}{64}$ τοῦ κυβ. μέτρου.

(*Λύσις*. 64 δραχ.).

8) Κτίσται τινὲς ἔκτισαν μίαν οἰκίαν ἔχουσαν μῆκος 8 μέτρα, πλάτος 5 καὶ ὕψος 6, τὸ δὲ πάχος τῶν τοίχων εἶνε 0,70 τοῦ μέτρου. Ἡ οἰκία αὕτη ἔχει 7 παράθυρα καὶ 2 θύρας· ἕκαστον παράθυρον ἔχει ὕψος 1,20 τοῦ μέτρου καὶ πλάτος 0,80· ἑκάστη δὲ θύρα ἔχει ὕψος 2 μέτρα καὶ πλάτος 1,10. Πόσος ενε ὁ ὄγκος τῶν τοίχων;

(*Λύσις*. 89,656 τοῦ κυβ. μέτρου).

9) Πρόκειται νὰ καλυφθῇ δι' ὑφάσματος τὸ ἐσωτερικὸν κιβωτίου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶνε 1,50 τοῦ μέτρου, τὸ πλάτος 0,70

καὶ τὸ ὕψος 0,90. Πόσον ὕφασμα χρειάζεται, ἐὰν τὸ πλάτος αὐτοῦ εἶνε 0,80 τοῦ μέτρου;

(*Λύσις*. 7,575 τοῦ μέτρου).

10) Δοχεῖόν τι πρισματικὸν ἔχει βάσιν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε 0,23 τοῦ μέτρου, τὸ δὲ ὕψος του 0,34. Ζητεῖται πόσας ὀκάδας πετρελαίου χωρεῖ. Τὸ εἰδικὸν βάρος (1) τοῦ πετρελαίου εἶνε 0,891.

Λύσις. Ὁ ὄγκος ἢ ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου εἶνε 0,017986 τοῦ κυβικοῦ μέτρου ἢ 17,986 τῆς κυβικῆς παλάμης ἢ λίτρας· Ἐὰν ἦτο πλῆρες ὕδατος, τὸ βάρος τοῦ ὕδατος θὰ ἦτο 17,986 τοῦ χιλιογράμμου ἢ 17,986×312,5 δράμια· διότι τὸ βάρος μιᾶς κυβικῆς παλάμης ἢ λίτρας ὕδατος (καθαροῦ καὶ εἰς θερμοκρασίαν 4 βαθμῶν) εἶνε 1 χιλιόγραμμον ἢ 312,5 δράμια. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ πετρελαίου εἶνε 0,891, διὰ τοῦτο τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου πετρελαίου εἶνε 17,986×312,5×0,891 δράμια, ἤτοι 12 ὀκ. 207 δράμ.

11) Πόσον εἶνε τὸ βάρος πλακὸς μαρμάρου ἐχούσης μῆκος 1,40 τοῦ μέτρου, πλάτος 0,50 καὶ πάχος 0,15; Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ μαρμάρου εἶνε 2,84.

(***Λύσις***. 232 ὀκ. 387 δρ.).

ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

196. Εἴδομεν εἰς τὸ Α' βιβλίον, ὅτι ***βάσις*** τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος λαμβάνεται μία τῶν ἑδρῶν αὐτῆς, τῶν δὲ ἄλλων πυραμίδων λαμβάνεται ἡ μὴ τριγωνικὴ ἕδρα αὐτῆς. ***Ὕψος*** τῆς πυραμίδος λέγεται ἡ κάθετος, ἥτις ἄγεται ἐπὶ τὴν βάσιν ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς, ἥτις κορυφὴ λέγεται καὶ ***κορυφὴ*** τῆς πυραμίδος.

Παραδ. χάριν, εἰς τὸ κατωτέρω σχῆμα 170 βάσις εἶνε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴ τὸ σημεῖον Ο καὶ ὕψος ἡ κάθετος ΟΔ.

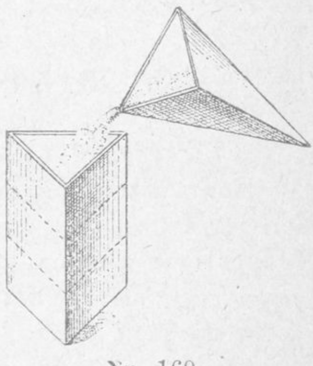
Σημ. Ἡ κάθετος δύναται νὰ πέσῃ ἢ ἐπὶ τὴν βάσιν ἢ ἐπὶ τὴν προέκτασιν αὐτῆς.

(1) Εἰδικὸν βάρος σώματος λέγεται ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ σώματος εἰς θερμοκρασίαν 0 πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4 βαθμῶν Κελσίου.

197. Ἡ πυραμὶς λέγεται *κανονική*, ἐὰν ἡ βάσις αὐτῆς εἶνε οἱονδήποτε κανονικὸν εὐθύγραμμον σχῆμα, ἡ δὲ ἐκ τῆς κορυφῆς ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν πίπτει εἰς τὸ κέντρον τῆς βάσεως καὶ λέγεται τότε αὕτη ἄξων τῆς κανονικῆς πυραμίδος.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΠΥΡΑΜΙΔΩΝ

198. Ἐὰν κατασκευάσωμεν ἐκ λευκοσιδήρου δοχεῖον ἔχον σχῆμα τριγωνικοῦ πρίσματος καὶ ἓν ἄλλο δοχεῖον ἔχον σχῆμα τριγωνικῆς πυραμίδος, τῆς αὐτῆς ὅμως βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους (σχ. 169), θὰ ἴδωμεν, ὅτι διὰ νὰ πληρωθῇ ὕδατος τὸ πρισματικὸν δοχεῖον, πρέπει νὰ χύσωμεν εἰς αὐτὸ τρεῖς φορὰς ἀκριβῶς πλῆρες ὕδατος τὸ πυραμιδικὸν δοχεῖον. Τοῦτο θὰ συμβῇ καὶ διὰ πᾶν ἄλλο δοχεῖον ἔχον σχῆμα πολυγωνικῆς πυραμίδος, ἀρκεῖ μόνον νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ πρισματικὸν δοχεῖον. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος εἶνε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του (ἐδ. 195), διὰ τοῦτο.

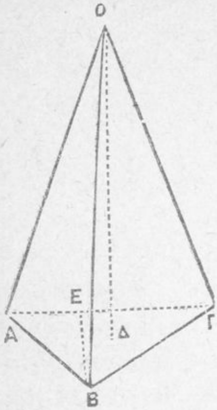


Σχ. 169.

Ὁ ὄγκος πάσης πυραμίδος εἶνε ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος της.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως πυραμίδος διὰ ε, τὸ δὲ ὕψος της διὰ υ, τότε ὁ ὄγκος πάσης πυραμίδος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\frac{1}{3}\times ε \times υ$.

Ἐφαρμογή. Ἔστω, παραδ. χάριν, ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓ (σχ. 170). Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της ΑΒΓ, λαμβάνομεν ὡς βάσιν τοῦ τριγώνου μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, καὶ ἔστω τὴν ΑΓ, ὕψος τότε θὰ εἶνε ἡ ἐπ' αὐτὴν κά-



Σχ. 170.

θετος ΒΕ. Ἐὰν ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι ἡ βάσις ΑΓ εἶνε 4 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος ΒΕ $2^{\mu},40$, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ θὰ εἶνε (κατὰ τὸ ἐδάφ. 165) $\frac{4 \times 2,40}{2}$, ἤτοι 4,80 τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου· ἐὰν δὲ τὸ ὕψος ΟΔ τῆς πυραμίδος ὑποτεθῇ ὅτι εἶνε 9 μέτρα, τότε ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶνε $\frac{1}{3} \times 4,80 \times 9$, ἤτοι 14,40 τοῦ κυβ. μέτρου.

Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαί.

1) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως κανονικῆς τινος πυραμίδος εἶνε 10 τετραγ. μέτρα, τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς εἶνε 3,6 τοῦ μέτρου. Πόσος εἶνε ὁ ὄγκος αὐτῆς ; (*Λύσις*. 12 κυβ. μέτρα).

2) Ἡ μεγαλυτέρα πυραμὶς τῆς Αἰγύπτου ἔχει βάσιν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε 232,75 τοῦ μέτρου, τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς εἶνε 146 μέτρα. Πόσος εἶνε ὁ ὄγκος της ;

Λύσις. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶνε $232,75^2$ ἢ 54182,562 τετρ. μέτρα, ἑπομένως ὁ ὄγκος της εἶνε $\frac{1}{3} \times 54182,562 \times 146$ ἤτοι 2636398 κυβ. μέτρα περίπου.

Μὲ τὸ ὑλικὸν τῆς πυραμίδος ταύτης δύνανται νὰ κτισθῶσιν 29406 οἰκίαι ὅμοιαι μὲ τὴν ἀναφερομένην εἰς τὸ πρόβλημα 8ον τῆς σελίδος 113.

3) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως πυραμίδος εἶνε 26,8 τετρ. μέτρα ὁ δὲ ὄγκος της 46,9 κυβ. μέτρα. Πόσον εἶνε τὸ ὕψος της ;

(*Λύσις*. $46,9 : \frac{2,68}{3}$, ἤτοι $5^{\mu},25$).

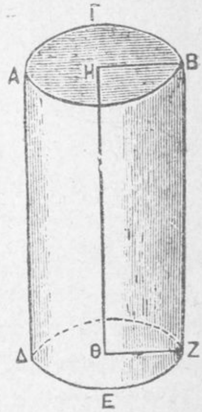
4) Ὁ ὄγκος πυραμίδος τινὸς εἶνε 45 κυβ. μέτρα, τὸ δὲ ὕψος της $4^{\mu},50$. Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της ;

(*Λύσις*. 30 τ. μ.).

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

199. Ὁ κύλινδρος, τὸν ὁποῖον ἐξητάσαμεν ἐν τῷ ἐδαφίῳ 90, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς παραγόμενος ἐκ τῆς περιστροφῆς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν πάντοτε φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν προτέραν του θέσιν.

Ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΗΘΖΒ (σχ. 171) περιστρέφεται περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΗΘ, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν προτέραν του θέσιν· τότε ἡ μὲν πλευρὰ ΒΖ θὰ γράψῃ τὴν ***κυρτὴν ἐπιφάνειαν*** τοῦ κυλίνδρου, αἱ δὲ πλευραὶ ΗΒ καὶ ΘΖ θὰ γράψωσι τοὺς δύο ἴσους κύκλους ΑΒΓΑ καὶ ΔΕΖΔ, οἵτινες, ὡς εἴπομεν ἄλλοτε, λέγονται ***βάσεις*** τοῦ κυλίνδρου. Ἡ δὲ ἀκίνητος πλευρὰ ΗΘ τοῦ ὀρθογωνίου (ἥτις ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν βάσεων) λέγεται ***ἄξων*** τοῦ κυλίνδρου καὶ παριστᾷ τὸ ***ὕψος*** αὐτοῦ. Ἀλλὰ καὶ πᾶσα ἄλλη κάθετος μεταξὺ τῶν βάσεων αὐτοῦ ἀγομένη, καθὼς ἡ ΑΔ καὶ ἡ ΒΖ, λέγεται ὕψος τοῦ κυλίνδρου.



Σχ. 171.

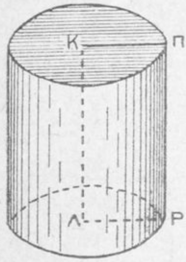
ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

1ον. **Ἐπιφάνεια αὐτοῦ.**

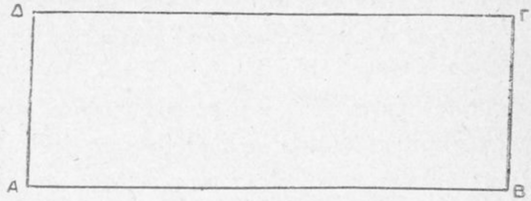
200. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου (σχ. 172) καλύπτεται ὑπὸ λεπτοῦ χάρτου· ἐὰν τὴν ἐκ χάρτου ταύτην ἐπιφάνειαν κόψωμεν κατά τινα εὐθεῖαν ΠΡ καὶ ἀναπτύξωμεν αὐτὴν ἐπὶ ἐπιπέδου, θὰ λάβωμεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ (σχ. 173), τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΑΒ εἶνε ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ ΑΔ εἶνε τὸ ὕψος ΚΛ τοῦ κυλίνδρου. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

201. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, πολλαπλασιάζομεν τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

Ὁ τύπος τῆς περιφερείας εἶνε $2 \times \pi \times \alpha$ (ἐδ. 173)· ἐὰν παραστήσωμεν τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου διὰ υ, τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $2 \times \pi \times \alpha \times \upsilon$.



Σχ. 172.



Σχ. 173.

Ἐφαρμογή. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως κυλίνδρου τινὸς εἶνε $2,^{\mu}40$, τὸ δὲ ὕψος του 0,60 τοῦ μέτρου, τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ εἶνε $2,40 \times 0,60$, ἤτοι 1,44 τοῦ τετρ. μέτρου.

Ἐὰν δὲ εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου προσθέσωμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του.

2ον **Ὄγκος αὐτοῦ.**

202. Διὰ νὰ μάθωμεν πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου, κατασκευάζομεν ἐκ λευκοσιδήρου δύο δοχεῖα· τὸ ἓν νὰ ἔχῃ σχῆμα κυλίνδρου, τὸ δὲ ἄλλο σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἀλλὰ καὶ τὰ δύο νὰ ἔχωσι τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν βάσεως (1). Ἐὰν τώρα πληρώσωμεν ἀκριβῶς τὸ ἓν τῶν δοχείων τούτων δι' ὕδατος καὶ χύσωμεν αὐτὸ εἰς τὸ ἄλλο, θὰ ἴδωμεν ὅτι τὸ ἄλλο δοχεῖον θὰ πληρωθῇ ἀκριβῶς. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι καὶ τὰ δύο δοχεῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν ὄγκον. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο συμβαίνει καὶ διὰ πᾶν ἄλλο πρισματικὸν δοχεῖον, ἔχον τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν βάσεως μὲ τὸ κυλινδρικόν, καὶ ἐπειδὴ ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος εἶνε ἴσος μὲ

(1) Ἂν π. χ. αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ τῆς βάσεως τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶνε 0,10 καὶ 0,05 τοῦ μέτρου, ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου εἶνε 0,04· αἱ βάσεις των θὰ ἔχωσι τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν σχεδόν.

τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του (ἐδ. 195), διὰ τοῦτο

203. **Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶνε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.**

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\pi \times \alpha^2$ (ἐδ. 176)· ἐὰν παραστήσωμεν τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου διὰ υ, τότε ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\pi \times \alpha^2 \times \upsilon$.

Ἐφαρμογή. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κυλίνδρου τινὸς εἶνε 3 μέτρα, ἤτοι $\alpha=3$, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ 5 μέτρα, ἤτοι $\upsilon=5$. Ὁ ὄγκος αὐτοῦ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τύπον θὰ εἶνε $3{,}1415 \times 3^2 \times 5$ ἢ $3{,}1415 \times 9 \times 5$, ἤτοι 141,3675 τοῦ κυβικοῦ μέτρου.

Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαί.

1) Στήλη κυλινδρική, τῆς ὁποίας τὸ ὕψος εἶνε 5 μέτρα, ἡ δὲ διάμετρος τῆς βάσεώς της 0,80, πρόκειται νὰ χρωματισθῇ πρὸς 2 δρ. τὸ τετράγων. μέτρον. Πόσον θὰ κοστίσῃ ὁ χρωματισμὸς αὐτῆς ; (*Λύσις*. 25,13 δρ.)

2) Πρόκειται νὰ περιτυλίξωμεν ἀγγεῖον κυλινδρικόν, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶνε 0,80 τοῦ μέτρου, ἡ δὲ περιφέρειά του 2,50 μὲ ὕφασμα, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶνε 0,50 τοῦ μέτρου. Πόσον ὕφασμα χρειαζόμεθα ; (*Λύσις*. 4 μ.)

3) Πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ σωλὴν ἐκ λευκοσιδήρου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος νὰ εἶνε 6 μέτρα καὶ ἡ διάμετρός του 0,40 τοῦ μέτρου. Πόσος λευκοσίδηρος χρειάζεται ;

(*Λύσις*. 7,539 τοῦ τ. μ.)

4) Πόσος εἶνε ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶνε 2 μέτρα καὶ τὸ ὕψος 5 ;

(*Λύσις*. 62,83 κυβ. μ.)

5) Πόσον ὕψος πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς κυλινδρικὸν δοχεῖον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶνε 0,40 τοῦ μέτρου, διὰ νὰ χωρῇ 754 λίτρας ὑγροῦ ;

(*Λύσις*. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶνε 0,50264 τ. μ., ἑπομένως τὸ ὕψος εἶνε $0,^{\kappa.\mu.}754 : 0{,}50264$, ἤτοι $1,^{\mu.}50$.

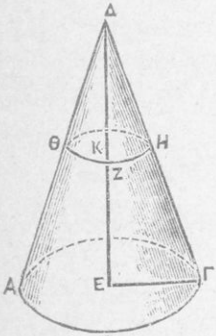
6) Πόσον βάρος ἔχει στήλη κυλινδρικὴ ἐκ μαρμάρου, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶνε 0,40 τοῦ μέτρου καὶ τὸ ὕψος 2 μέτρα ; Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ μαρμάρου εἶνε 2,84.

(*Λύσις*. 713 χιλιόγρ. 748 γρ.)

ΚΩΝΟΣ

204. Ὁ κῶνος, τὸν ὁποῖον ἐξητάσαμεν ἐν τῷ ἐδαφίῳ 90, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς παραγόμενος ἐκ τῆς περιστροφῆς ὀρθογωνίου τριγώνου περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ κατὰ τὴν αὐτὴν πάντοτε φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν προτέραν του θέσιν.

Ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΕΓ (σχ. 174) περιστρέφεται περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΔΕ, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν προτέραν του θέσιν· τότε ἡ μὲν ὑποτείνουσα ΔΓ θὰ γράφῃ τὴν ***κυρτὴν ἐπιφάνειαν*** τοῦ κώνου, ἡ δὲ πλευρὰ ΕΓ θὰ γράφῃ τὸν κύκλον ΑΒΓΑ, ὅστις λέγεται ***βάσις*** τοῦ κώνου· ἡ δὲ ἀκίνητος πλευρὰ ΔΕ λέγεται ***ἄξων*** καὶ παριστᾷ τὸ ***ὕψος*** τοῦ κώνου.



Σχ. 174.

Πλευρὰ τοῦ κώνου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἑνώνει τὴν κορυφὴν αὐτοῦ Δ μὲ σημεῖόν τι τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του, καθὼς ἡ ΔΑ, ἡ ΔΓ. Ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ κώνου εἶνε ἴσαι μεταξύ των (διότι αὗται παριστῶσι τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐκ τοῦ ὁποίου παρήχθη ὁ κῶνος).

205. **Κόλουρος κῶνος.** Ἐὰν κόψωμεν κῶνόν τινα δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονά του, καθὼς ὑπὸ τοῦ ΘΖΗ, ἡ τομὴ θὰ εἶνε κύκλος, ἔχων τὸ κέντρον Κ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΔΕ, τὸ δὲ περιλαμβανόμενον μέρος τοῦ κώνου μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς βάσεως λέγεται ***κόλουρος κῶνος*** (κολοβός), καθὼς τὸ μέρος ΑΒΓΘΖΗ.

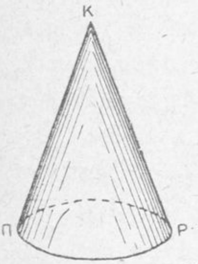
Βάσεις τοῦ κολούρου κώνου λέγονται οἱ δύο κύκλοι αὐτοῦ ΑΒΓΑ καὶ ΘΖΗΘ. ***Ὕψος*** δὲ ἡ συνδέουσα τὰ κέντρα αὐτῶν εὐθεῖα ΚΕ ἢ καὶ πᾶσα ἄλλη κάθετος μεταξὺ τῶν βάσεων αὐτοῦ ἀγομένη. ***Πλευρὰ*** δὲ λέγεται τὸ μεταξὺ τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ περιεχόμενον μέρος τῆς πλευρᾶς τοῦ ὅλου κώνου, καθὼς ἡ ΗΓ, ἡ ΘΑ.

Τὸ σχῆμα τοῦ κολούρου κώνου ἔχουσιν αἱ γάστραι, ποτήρια καὶ δοχεῖά τινα, δακτυλῆθραι, κάδοι κτλ.

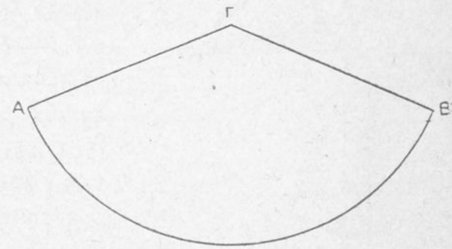
ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΚΩΝΟΥ

1ον. Ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

206. Ὑποθέσωμεν πάλιν ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου (σχ. 175) καλύπτεται ὑπὸ λεπτοῦ χάρτου· ἐὰν τὴν ἐκ χάρτου ταύτην ἐπιφάνειαν κόψωμεν κατὰ μίαν πλευρὰν αὐτοῦ ΚΠ καὶ ἀναπτύξωμεν αὐτὴν ἐπὶ ἐπιπέδου, θὰ λάβωμεν τὸν κυκλικὸν



Σχ. 175.



Σχ. 176.

τομέα ΑΒΓ (σχ. 176), τοῦ ὁποίου τὸ τόξον ΑΒ εἶνε ἴσον μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἡ δὲ ἀκτὶς αὐτοῦ ΓΑ εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου, ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου εὑρίσκεται, ὅπως καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως (ἐδ. 177), ἤτοι

207. ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὴν πλευράν του.***

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν πλευρὰν αὐτοῦ διὰ ρ, τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$\frac{1}{2} \times 2 \times \pi \times \alpha \times \rho$ ἢ $\pi \times \alpha \times \rho$.

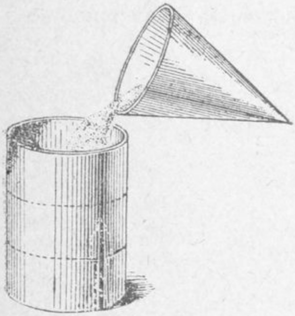
Ἐφαρμογή. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως κώνου τινὸς εἶνε 20 μέτρα, ἡ δὲ πλευρὰ αὐτοῦ 10 μέτρα, τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του θὰ εἶνε κατὰ τὰ ἀνωτέρω

$\frac{1}{2} \times 20 \times 10$, ἤτοι 100 τετρ. μ.

Ἐὰν δὲ εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου προσθέσωμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

2ον Ὄγκος αὐτοῦ.

208. Ἐὰν κατασκευάσωμεν ἐκ λευκοσιδήρου δοχεῖον κυλινδρικὸν καὶ ἓν ἄλλο κωνικὸν τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους (σχ. 177), θὰ ἴδωμεν ὅτι διὰ νὰ πληρωθῇ ὕδατος τὸ κυλινδρικὸν δοχεῖον, πρέπει νὰ χύσωμεν εἰς αὐτὸ τρεῖς φορὰς ἀκριβῶς πλήρες ὕδατος τὸ κωνικὸν δοχεῖον. Καὶ ἐπειδὴ ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶνε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του, διὰ τοῦτο



Σχ. 177.

Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶνε ἴσος, μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸ ὕψος του διὰ υ, τότε ὁ ὄγκος τοῦ κώνου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\frac{1}{3} \times \pi \times \alpha^2 \times \upsilon$.

Ἐφαρμογή. Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως κώνου τινὸς εἶνε 10,50 τοῦ τετρ. μέτρου, τὸ δὲ ὕψος του 8 μέτρα, τότε ὁ ὄγκος τοῦ κώνου θὰ εἶνε $\frac{1}{3} \times 10{,}50 \times 8$, ἤτοι 28 κυβ. μέτρα.

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΚΑΙ ΟΓΚΟΣ ΚΟΛΟΥΡΟΥ ΚΩΝΟΥ

209. ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς πλευρᾶς του ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο περιφερειῶν τῶν βάσεών του.***

Ἐφαρμογή. Ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἡ πλευρὰ κολούρου κώνου εἶνε 3 μέτρα, αἱ δὲ περιφέρειαι τῶν βάσεών του εἶνε ἡ μὲν μία 5 μέτρα, ἡ δὲ ἄλλη 4 μέτρα, τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ εἶνε $\frac{3 \times 9}{2}$, ἤτοι 13,5 τοῦ τετρ. μέτρου.

210. Ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου εὑρίσκεται ὑπὸ τοῦ τύπου.

$$\frac{1}{3}\times\pi\times\upsilon\times(A^2+\alpha^2+A\alpha)$$

ἔνθα π παριστᾷ τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, υ τὸ ὕψος τοῦ κολούρου κώνου, Α καὶ α τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεών του.

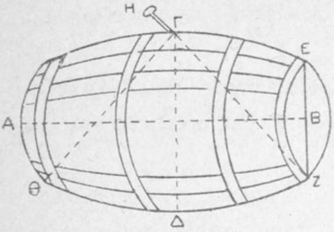
Ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι τὸ ὕψος κάδου, ἔχοντος σχῆμα κολούρου κώνου, εἶνε 2 μέτρα, αἱ δὲ ἀκτῖνες τῶν βάσεών του εἶνε 0,5 καὶ 0,3 τοῦ μέτρου, τότε ὁ ὄγκος αὐτοῦ θὰ εἶνε $\frac{1}{3}\times 3,1415$ $\times 2\times(0,25+0,09+0,15)$ ἢ $\frac{1}{3}\times 3,1415\times 2\times 0,49$, ἤτοι 0,693 τοῦ κυβ. μέτρου περίπου.

211. **Ὄγκος βυτίου ἢ βαρελίου.** Ἡ εὕρεσις τοῦ ὄγκου ἢ τῆς χωρητικότητος τῶν βυτίων ἢ βαρελίων ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ὄγκου τοῦ κολούρου κώνου· διότι τὸ βυτίον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποτελούμενον ἐκ δύο κολούρων κώνων, ἐχόντων μεγάλην βάσιν τὸν μεσαῖον κύκλον τοῦ βυτίου καὶ μικρὰν τοὺς μικροὺς κύκλους αὐτοῦ. Ἀλλὰ τοῦτο ἀφ' ἑνὸς μὲν εἶνε ἐπίπονον, ἀφ' ἑτέρου δὲ καὶ ἐσφαλμένον ἕνεκα τῆς κυρτότητος τῶν δουγιῶν, διὰ τοῦτο ἐπενοήθησαν διάφοροι τρόποι πρὸς εὕρεσιν τῆς χωρητικότητος αὐτῶν. Ἐν Ἀγγλίᾳ π. χ. ἔχουσι τὸν τύπον.

$$\frac{1}{3}\times\pi\times\upsilon\times(2A^2+\alpha^2)$$

ἔνθα π εἶνε ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, υ τὸ ἐσωτερικὸν μῆκος ΑΒ τοῦ βυτίου (σχ. 178), Α ἡ ἀκτὶς τῆς μεσαίας βάσεως ΓΔ αὐτοῦ, καὶ α ἡ ἀκτὶς τῆς μικρᾶς βάσεως ΕΖ. Ἐν Γαλλίᾳ δὲ ἔχουν ἄλλον τύπον.

Ὁ πρακτικώτερος ὅμως τρόπος ὁ καὶ ἐν χρήσει ἐν Ἑλλάδι, Τουρκίᾳ καὶ ἄλλαις χώραις εἶνε ἡ διὰ τοῦ ***βαρελομετρίου*** καταμέτρησις τῶν βυτίων (καὶ ἰδίως διὰ τὸν οἶνον. Τὸ βαρελομέτριον εἶνε ράβδος ἐκ ξύλου ἢ σιδήρου διῃρημένη εἰς μέρη ἀναλόγως ἐλαττούμενα πρὸς τὰ κάτω, ἑκάστη δὲ διαίρεσις φανερώνει τὸν ἀριθμὸν τῶν περιεχομένων βαρελῶν ἐν τῷ βυτίῳ· ἡ δὲ βαρέλα ἔχει χωρητικότητα 0,064 τοῦ κυβ. μέτρου ἢ 64 λίτρας, τῶν ὁποίων τὸ βάρος εἶνε κατὰ μέσον ὅρον 48 ὀκάδες. Διὰ νὰ καταμετρήσωμεν τώρα τὸ βυτίον (σχ. 178), εἰσάγομεν ἐκ τοῦ στομίου Γ τὴν ράβδον ΗΖ, μέχρις οὗ συναντήσῃ τὸ κάτω ἄκρον Ζ τῆς βάσεως τοῦ βυτίου, ὁ ἀριθμὸς τότε τῆς ράβδου ὁ συμπίπτων εἰς τὸ μέσον τοῦ στομίου Γ παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν τῶν βαρελῶν τῆς χωρητικότητος τοῦ βυτίου. Ἐὰν π. χ. εἶνε ὁ ἀριθμὸς 8, τότε τὸ βυτίον χωρεῖ 64$\times$8 ἢ 512 λίτρας, ἢ 48$\times$8, ἤτοι 384 ὀκάδας.



Σχ. 178.

Σημ. Ἐὰν τὸ μῆκος ΓΖ δὲν εἶνε ἴσον μὲ τὸ μῆκος ΓΘ, λαμβάνομεν τότε τὸν μέσον ὅρον αὐτῶν.

Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαί.

1) Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε 4 μέτρα, ἡ δὲ διάμετρος τῆς βάσεώς του 2 μέτρα; (*Λύσις.* 12,566 τοῦ τ. μ.)

2) Πόσον ὕφασμα χρειάζεται, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶνε 0,60 τοῦ μέτρου, διὰ νὰ κατασκευασθῇ κωνικὴ σκηνή, ἔχουσα πλευρὰν 5 μέτρα καὶ περιφέρειαν βάσεως 12 μέτρα;

(*Λύσις.* 50 μ.)

3) Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως κώνου τινὸς εἶνε 0,40 τοῦ μέτρου, τὸ δὲ ὕψος του 2 μέτρα. Πόσος εἶνε ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

(*Λύσις.* 0,0837 τοῦ κυβ. μ.)

4) Πόσος εἶνε ὁ ὄγκος κώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶνε 6 μέτρα, ἡ δὲ περιφέρεια τῆς βάσεώς σου 31,^{μ}4;

(*Λύσις.* 156,45 κ. μ.)

5) Ὁ ὄγκος κώνου τινὸς εἶνε 0,0327 τοῦ κυβ. μέτρου, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του εἶνε 0,2023 τ.μ. Πόσον εἶνε τὸ ὕψος του;

(*Λύσις.* 0,^{μ}485).

6) Ἡ πλευρὰ κολούρου κώνου εἶνε 4 μέτρα, αἱ δὲ ἀκτῖνες τῶν βάσεών του εἶνε ἡ μὲν μία 2 μέτρα, ἡ δὲ ἄλλη 1 μέτρον. Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ;

(*Λύσις.* 37,698 τοῦ τ. μ.)

7) Αἱ δύο περιφέρειαι τῶν βάσεων κολούρου κώνου εἶνε ἡ μὲν μία 6,$^{\mu}$283, ἡ δὲ ἄλλη 1,$^{\mu}$·885, τὸ δὲ ὕψος του εἶνε 5 μ. Πόσος εἶνε ὁ ὄγκος του ;

(*Λύσις*. 7,277 τοῦ κ. μ.)

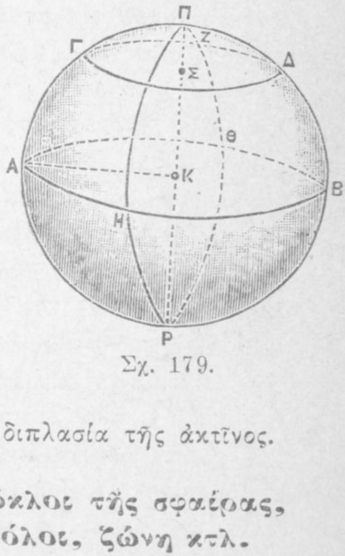
ΣΦΑΙΡΑ

212. **Σφαῖρα** λέγεται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον, κείμενον ἐντὸς αὐτοῦ, ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας του.

Τὸ σημεῖον τοῦτο λέγεται *κέντρον* τῆς σφαίρας. Τὸ σχῆμα 179 παριστᾷ σφαῖραν, τὸ δὲ ἐντὸς αὐτῆς σημεῖον Κ εἶνε τὸ κέντρον.

Σημ. Ἡ σφαῖρα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς παραγομένη ἐκ τῆς περιστροφῆς ἡμικυκλίου, καθὼς τοῦ ΠΒΡ, περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ΠΡ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν πάντοτε φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν προτέραν του θέσιν.

Ἀκτὶς τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἄρχεται ἐκ τοῦ κέντρου καὶ ἀπολήγει εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, καθὼς ἡ ΚΑ, ἡ ΚΠ, ἡ ΚΡ. Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶνε ἴσαι μεταξύ των.



Σχ. 179.

Διάμετρος τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ ἀπολήγει ἑκατέρωθεν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, καθὼς ἡ ΠΡ. Ὅλαι αἱ διάμετροι τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶνε ἴσαι μεταξύ των, διότι ἑκάστη εἶνε διπλασία τῆς ἀκτῖνος.

Μέγιστοι καὶ μικροὶ κύκλοι τῆς σφαίρας, παράλληλοι κύκλοι, πόλοι, ζώνη κτλ.

213. Ἐὰν σφαιρικόν τι σῶμα, καὶ ἔστω πορτοκάλλιον, κόψωμεν ὁπωσδήποτε, ἀλλ' οὕτως, ὥστε ἡ γενομένη τομὴ νὰ εἶνε ἐπίπεδος, θέλομεν ἴδει, ὅτι αὕτη εἶνε κύκλος.

Ἐκ τῶν διαφόρων κύκλων, τοὺς ὁποίους δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν διὰ τοιούτων τομῶν, ὁ μεγαλύτερος ὅλων σχηματίζεται, ὅταν ἡ τομὴ περάσῃ ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ λέγεται οὗτος ***μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας***, οἱ δὲ ἄλλοι λέγονται ***μικροὶ κύκλοι τῆς σφαίρας***.

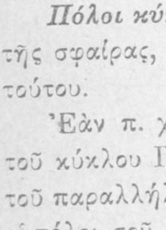
Οἱ κύκλοι ΑΗΒΘΑ καὶ ΠΗΡΘΠ (σχ. 179) εἶνε μέγιστοι καὶ ἔχουσι κέντρον καὶ ἀκτῖνα τὰ τῆς σφαίρας, ὁ δὲ κύκλος ΓΖΔΓ εἶνε μικρός.

Οἱ μέγιστοι κύκλοι τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶνε ἴσοι μεταξύ των καὶ ἕκαστος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ***ἡμισφαίρια***. Οἱ δὲ διάφοροι μικροὶ κύκλοι τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶνε ἄνισοι μεταξύ των, διότι, ὅσον περισσότερον ἀπέχει ἡ τομὴ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τόσον μικρότερος εἶνε ὁ διὰ τῆς τομῆς σχηματιζόμενος κύκλος [1].

Παράλληλοι κύκλοι τῆς σφαίρας λέγονται οἱ κύκλοι, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶνε παράλληλα· καθὼς οἱ κύκλοι ΑΗΒΘΑ καὶ ΓΖΔΓ.

Πόλοι κύκλου τῆς σφαίρας λέγονται τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας, ἥτις εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου τούτου.

Ἐὰν π. χ. ἡ διάμετρος ΠΡ εἶνε κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου ΓΖΔΓ (ὅτε θὰ εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ παραλλήλου κύκλου ΑΗΒΘΑ), τὰ ἄκρα αὐτῆς Π καὶ Ρ εἶνε οἱ πόλοι τοῦ κύκλου ΓΖΔΓ (καθὼς καὶ τοῦ ΑΗΒΘΑ).



Σχ. 180.

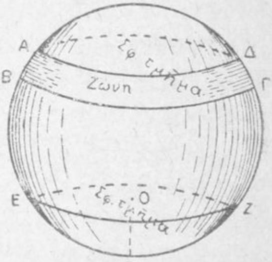
Οἱ πόλοι ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τῆς σφαίρας, τοῦ ὁποίου εἶνε πόλοι.

Σημ. Διὰ νὰ γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου ἐπὶ σφαίρας, μεταχειριζόμεθα τὸν ***σφαιρικὸν διαβήτην*** (σχ. 180), τοῦ ὁποίου τὰ σκέλη εἶνε καμπύλα. Πρὸς τοῦτο στηρίζομεν τὸ ἄ-

(1) Ὁ διδάσκων πρέπει νὰ κόπτῃ ἐνώπιον τῶν μαθητῶν πορτοκάλλιον ἢ ἄλλο τι σφαιρικὸν σῶμα, ἵνα κατανοήσωσιν οἱ μαθηταὶ τοὺς μεγίστους καὶ μικροὺς κύκλους τῆς σφαίρας, καθὼς τοὺς παραλλήλους κύκλους αὐτῆς, τὰς ζώνας κτλ.

κρον τοῦ ἑνὸς σκέλους αὐτοῦ εἴς τι σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ περιστρέφομεν τὸ ἄκρον τοῦ ἄλλου σκέλους ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὸ πρῶτον σημεῖον· οὕτω δὲ θὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου, τοῦ ὁποίου πόλος εἶνε τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἐστηρίζετο τὸ ἄκρον τοῦ ἑνὸς σκέλους.

Σφαιρικὸν τμῆμα. Ἐὰν κόψωμεν σφαῖραν διὰ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, τὸ μεταξὺ τῶν παραλλήλων τούτων ἐπιπέδων περιλαμβανόμενον μέρος τῆς σφαίρας λέγεται ***σφαιρικὸν τμῆμα***· τοιοῦτον εἶνε τὸ μέρος ΑΒΓΔ. (σχ. 181). Σφαιρικὸν τμῆμα λέγεται προσέτι καὶ πᾶν μέρος τῆς σφαίρας ἀποκοπτόμενον δι' ἑνὸς μόνον ἐπιπέδου· καθὼς τὸ μέρος ΕΠΖΕ.



Σχ. 181.

Βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος λέγονται οἱ δύο κύκλοι, εἰς τοὺς ὁποίους περατοῦται. Ὅταν ὅμως περατοῦται εἰς ἕνα μόνον κύκλον, τότε ὁ κύκλος οὗτος λέγεται βάσις αὐτοῦ.

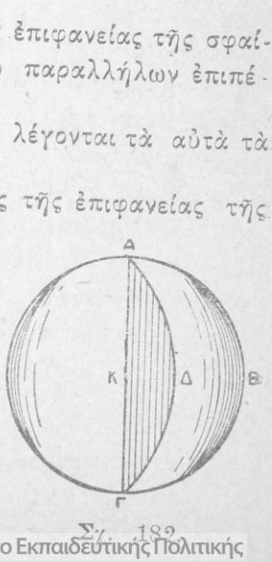
Ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος λέγεται ἡ μεταξὺ τῶν βάσεων αὐτοῦ ἀγομένη κάθετος. Ὅταν ὅμως ἔχῃ μίαν μόνον βάσιν, τότε ὕψος αὐτοῦ εἶνε ἡ ἀγομένη κάθετος ἀπὸ τοῦ πόλου τῆς βάσεώς του εἰς τὸ κέντρον τῆς βάσεως· καθὼς ἡ ΟΠ.

Σφαιρικὴ ζώνη λέγεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων· καθὼς ἡ ἐπιφάνεια ΑΒΓΔ.

Βάσεις καὶ ὕψος τῆς σφαιρικῆς ζώνης λέγονται τὰ αὐτὰ τὰ τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

Σφαιρικὸς ἄτρακτος λέγεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο ἡμικυκλίων μεγίστων κύκλων περατουμένων εἰς τὴν κοινὴν αὐτῶν διάμετρον.

Παραδ. χάριν, τὸ μέρος ΑΒΓΔΑ (σχ. 182) τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ἡμικυκλίων ΑΒΓΑ καὶ ΑΔΓΑ εἶνε σφαιρικὸς ἄτρακτος.



Σχ. 182.

Τὸ δὲ μέρος τῆς σφαίρας ΑΒΔΓΑ, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν αὐτῶν ἡμικυκλίων, λέγεται ***σφαιρικὸς ὄνυξ***.

Βάσις τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος λέγεται ὁ ἄτρακτος αὐτοῦ.

Κύκλοι νοούμενοι ἐπὶ τῆς Γῆς.

214. Ἡ Γῆ εἶναι σχεδὸν σφαιρικὴ καὶ στρέφεται περὶ μίαν τῶν διαμέτρων της ἐκ δυσμῶν πρὸς ἀνατολὰς ἐκτελοῦσα μίαν ὁλόκληρον περιστροφὴν ἐντὸς 24 ὡρῶν. Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ σχῆμα 179 παριστᾷ τὴν Γῆν καὶ ὅτι αὕτη περιστρέφεται περὶ τὴν διάμετρον ΠΡ, τότε ἡ νοητὴ αὕτη διάμετρος λέγεται ***ἄξων*** τῆς Γῆς. Τὰ δὲ ἄκρα αὐτῆς Π καὶ Ρ λέγονται ***πόλοι*** τῆς Γῆς, ***βόρειος*** (ὁ πρὸς τὰ ἄνω) καὶ ***νότιος*** (ὁ πρὸς τὰ κάτω).

Οἱ μέγιστοι κύκλοι τῆς Γῆς, οἱ διερχόμενοι διὰ τῶν δύο πόλων αὐτῆς, λέγονται ***μεσημβρινοὶ*** τῆς Γῆς. Τοιοῦτοι εἶνε οἱ ΠΑΡ καὶ ΠΗΡ. Ὁ δὲ διερχόμενος μεσημβρινὸς διά τινος τόπου τῆς Γῆς λέγεται μεσημβρινὸς τοῦ τόπου τούτου, ὅπως ὁ ΠΗΡ εἶνε μεσημβρινὸς τοῦ τόπου Η. Λέγεται δὲ μεσημβρινός, διότι, ὅταν οὗτος εὑρεθῇ ἀκριβῶς ἀπέναντι τοῦ Ἡλίου κατὰ τὴν ἡμερησίαν κίνησιν τῆς Γῆς, ὅλοι οἱ τόποι, οἱ εὑρισκόμενοι ἐπὶ τοῦ ἡμίσεος αὐτοῦ (τοῦ ἐστραμμένου πρὸς τὸν Ἥλιον), ἔχουν μεσημβρίαν· ἐνῷ οἱ εὑρισκόμενοι ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἡμίσεος ἔχουν μεσονύκτιον κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμήν.

Ὁ μέγιστος κύκλος ΑΗΒ τῆς Γῆς, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον εἶνε κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς Γῆς, λέγεται ***ἰσημερινὸς*** τῆς Γῆς καὶ διαιρεῖ τὴν Γῆν εἰς δύο ἡμισφαίρια, ***βόρειον*** καὶ ***νότιον***. Ἕκαστον σημεῖον τῆς περιφερείας του ἀπέχει ἀπὸ τοὺς πόλους 90 μοίρας. Λέγεται δὲ ἰσημερινός, διότι ὅλοι οἱ τόποι, οἱ εὑρισκόμενοι ἐπ᾿ αὐτοῦ, ἔχουν καθ᾿ ὅλον τὸ ἔτος τὴν ἡμέραν ἴσην μὲ τὴν νύκτα. Οἱ δὲ παράλληλοι τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλοι λέγονται ἁπλῶς ***παράλληλοι***· τοιοῦτος εἶνε ὁ ΓΔ.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

Ἐπιφάνεια καὶ ὄγκος αὐτῆς.

215. ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας*** εἶνε ἴσον

μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου αὐτῆς ἐπὶ τὴν διάμετρόν της.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας διὰ α, ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου αὐτῆς θὰ εἶνε $2\times\pi\times\alpha$, καὶ ἡ διάμετρός της $2\times\alpha$, ἑπομένως ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας θὰ εἶνε κατὰ τὰ ἀνωτέρω $2\times\pi\times\alpha\times2\times\alpha$ ἢ $4\times\pi\times\alpha^2$. Οὗτος εἶνε ὁ τύπος, διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας πάσης σφαίρας, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς.

Ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἡ ἀκτὶς σφαίρας εἶνε 3 μέτρα, τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς θὰ εἶνε $4\times3,1415\times3^2$, ἤτοι 113,094 τοῦ τ. μ.

216. ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης εἶνε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς ζώνης.***

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ υ τὸ ὕψος τῆς ζώνης, τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $2\times\pi\times\alpha\times\upsilon$.

Ἐφαρμογή. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου σφαίρας εἶνε $10,^{\mu}70$, τὸ δὲ ὕψος τῆς ζώνης εἶνε $1,^{\mu}50$, τότε τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς εἶνε $10,70\times1,50$, ἤτοι 16,05 τ. μ.

217. Ὁ ***ὄγκος τῆς σφαίρας εἶνε ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας της ἐπὶ τὴν ἀκτῖνά της.***

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ α τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς θὰ εἶνε $4\times\pi\times\alpha^2$ καὶ ἑπομένως ὁ ὄγκος αὐτῆς θὰ εἶνε $\frac{1}{3}\times4\times\pi\times\alpha^2\times\alpha$ ἢ $\frac{4}{3}\times\pi\times\alpha^3$. Οὗτος εἶνε ὁ τύπος, διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον πάσης σφαίρας, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνά της.

Ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἡ ἀκτὶς σφαίρας εἶνε 2 μέτρα, τότε ὁ ὄγκος αὐτῆς θὰ εἶνε $\frac{4}{3}\times 3,1415\times2^3$ ἢ $\frac{4}{3}\times3,1415\times 8$, ἤτοι 33,509 τοῦ κυβ. μέτρου.

Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαί.

1) Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶνε 0,10 τοῦ μέτρου;

(Λύσις. 1,2566 τοῦ τετρ. μέτρου).

2) Ἡ διάμετρος σφαίρας εἶνε $6^{\mu},20$· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της;

(Λύσις. 120,759 τοῦ τετρ. μ).

Σημ. Ὅταν δὲν γνωρίζωμεν τὴν διάμετρον σφαίρας, εὑρίσκομεν αὐτὴν πρακτικῶς ὡς ἑξῆς· θέτομεν ἐπ' αὐτῆς ἐπίπεδόν τι (π. χ. τεμάχιον χαρτονίου) παραλλήλως πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου στηρίζεται ἡ σφαῖρα, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τούτων ἀγομένη κάθετος εἶνε ἡ ζητουμένη διάμετρος, τὸ δὲ ἥμισυ αὐτῆς εἶνε ἡ ἀκτίς.

3) Ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου σφαίρας εἶνε $31^{\mu},496$. Πόση εἶνε ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας

(Λύσις. 8,196 τοῦ μ.).

4) Σφαῖρά τις, κυλισθεῖσα ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας, διέτρεξεν ἐπ' αὐτῆς $10^{\mu},06$· ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἶνε 0,05 τοῦ μέτρου, πόσας περιστροφὰς ἔκαμε περὶ τὸν ἄξονά της;

(Λύσις. 32 περίπου).

5) Πόση εἶνε ἡ ἐσωτερικὴ ἐπιφάνεια κλιβάνου (φούρνου) ἡμισφαιρικοῦ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶνε $1^{\mu},50$;

(*Λύσις*. 14,136 τοῦ τ. μ).

6) Ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου τῆς Γῆς (ὑποτιθεμένης σφαιρικῆς) εἶνε 40000 χιλιόμετρα περίπου. Πόση εἶνε ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς;

Λύσις. Ἡ διάμετρος τῆς Γῆς εὑρίσκεται ὅτι εἶνε 12733 χιλιόμετρα περίπου, ἑπομένως ἡ ἐπιφάνειά της εἶνε 509320000 τετρ. χιλιόμετρα περίπου.

7) Ἑκάστη τῶν εὐκράτων ζωνῶν τῆς Γῆς ἔχει ὕψος 3305 χιλιόμ. περίπου. Πόση εἶνε ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστης ζώνης;

(*Λύσις*. 132200000 τετρ. χιλιόμ.)

8) Ἡ ἀκτὶς σιδηρᾶς σφαίρας εἶνε 0,20 τοῦ μέτρου. Πόσον εἶνε τὸ βάρος της; Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χυτοῦ σιδήρου εἶνε 7,6.

(*Λύσις*. 254,67 χιλιόγρ).

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΕΚ ΤΟΥ ΒΑΡΟΥΣ ΑΥΤΩΝ

218. Ὅταν τὸ σῶμα, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ ὄγκος, δὲν ἔχῃ γνωστὸν γεωμετρικὸν σχῆμα, ὅπως εὕρωμεν τὸν ὄγκον αὐτοῦ διὰ τῶν γνωστῶν κανόνων, πράττομεν ὡς ἑξῆς.

Εὑρίσκομεν τὸ βάρος τοῦ σώματος εἰς χιλιόγραμμα καὶ διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ σώματος τούτου, τὸ δὲ πηλίκον παριστᾷ τὸν ζητούμενον ὄγκον εἰς κυβικὰς παλάμας.

Π. χ. Τὸ βάρος μαρμάρου εἶνε 553,80 χιλιόγραμμα, τὸ δὲ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ εἶνε 2,84, ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ μαρμάρου εἶνε 553,80 : 2,84 ἤτοι 195 κυβ. παλάμαι.

Καὶ τἀνάπαλιν. ***Ὅταν γνωρίζωμεν τὸν ὄγκον σώματός τινος εἰς κυβικὰς παλάμας, εὑρίσκομεν τὸ βάρος αὐτοῦ εἰς χιλιόγραμμα, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὄγκον του ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος του.***

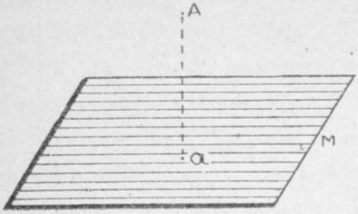
Σημ. Ὅταν ὅμως τὸ σῶμα, τοῦ ὁποίου τὸ βάρος ζητοῦμεν, δὲν ἔχει γνωστὸν γεωμετρικὸν σχῆμα, ὅπως εὕρωμεν τὸν ὄγκον του καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ βάρος του, πράττομεν ὡς ἑξῆς. Ἐμβαπτίζομεν τὸ σῶμα τοῦτο ἐντὸς ἀγγείου πεπληρωμένου ὕδατος καὶ τὸ ἐκχυθὲν ὕδωρ συλλέγομεν εἰς ἄλλο ἀγγεῖον, τὸ ὁποῖον χύνομεν εἰς ἀγγεῖον ἔχον γνωστὸν γεωμετρικὸν σχῆμα. Ἔπειτα εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τοῦ περιεχομένου ὕδατος ἐν τῷ ἀγγείῳ τούτῳ, καὶ ὁ ὄγκος οὗτος παριστᾷ τὸν ὄγκον τοῦ σώματος.

ΠΕΡΙ ΠΡΟΒΟΛΩΝ

212. Ὅταν ἐπὶ μελανοπίνακος ἢ ἐπὶ τοῦ χάρτου ἰχνογραφῶμεν τὸ σχῆμα στερεοῦ τινός, καὶ ἔστω πυραμίδος τινός, τὸ σχῆμα τοῦτο παραμορφώνει τὸ ἀντικείμενον· διότι, ἐνῷ ἀκμή τις ἢ ἕδρα τῆς πυραμίδος εἶνε μεγαλυτέρα ἄλλης, ἐν τῷ σχήματι φαίνεται μικροτέρα αὐτῆς ἐν ᾧ πάλιν γωνία τις τῆς βάσεως εἶναι ὀξεῖα, ἐν τῷ σχήματι φαίνεται ἀμβλεῖα. Ὅλα δὲ ταῦτα συμβαίνουσι, διότι τὰ διάφορα μέρη τῆς πυραμίδος δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ὑπάρχει ὅμως τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ γνωρίζωμεν ἀκριβῶς τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῶν διαφόρων μερῶν τῆς πυραμίδος ἢ καὶ ἄλλου τινὸς ἀντικειμένου. Ὁ τρόπος οὗτος εἶναι ὁ διὰ τῶν ***προβολῶν*** γενόμενος.

213. ***Προβολὴ σημείου*** τινὸς ἐπὶ ἐπιπέδου λέγεται ὁ ***ποὺς*** τῆς ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἀγομένης καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο (ἐδ. 47) Π[illegible] ἐπὶ τὸ

ἐπίπεδον Μ (σχ. 183) εἶνε ὁ πούς α τῆς ἀγομένης καθέτου Αα.

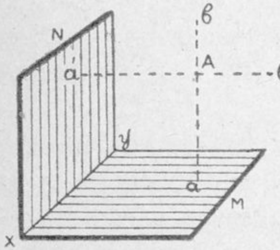


Σχ. 183.

Ἡ κάθετος αυτη λέγεται **προβάλλουσα**, τὸ δὲ ἐπίπεδον Μ λέγεται **προβολικόν**.

Διὰ μιᾶς καὶ μόνης προβολῆς δὲν δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ἐντελῶς τὴν θέσιν σημείου τινὸς ἐν τῷ διαστήματι, ἤτοι τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου, ἐκτὸς ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀπόστασιν ταύτην. Ὅταν π. χ. μᾶς δοθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Μ ἡ προβολὴ α, δὲν γνωρίζομεν τίνος σημείου προβολὴ εἶνε τοῦτο· διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ α ἀχθῇ ἡ κάθετος Αα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Μ, ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἀπεριορίστου ταύτης καθέτου ἔχουσιν ὡς προβολὴν τὸ αὐτὸ σημεῖον α. Ὥστε ἡ Αα μόνον τὴν διεύθυνσιν τοῦ σημείου Α ἐν τῷ διαστήματι ὁρίζει.

Ἵνα δὲ ὁρισθῇ ἐντελῶς ἡ θέσις σημείου τινὸς ἐν τῇ διαστήματι, πρέπει νὰ ἔχωμεν δύο προβολικὰ ἐπίπεδα κάθετα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ἀλλὰ τὸ μὲν ἓν νὰ εἶνε ὁριζόντιον, τὸ δὲ ἄλλο κατακόρυφον. Παραδείγμ. χάριν, τὸ σχῆμα 184 παριστᾷ δύο ἐπίπεδα κάθετα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου· καὶ τὸ μὲν ἐπίπεδον Μ ὑποτίθεται ὅτι κεῖται ἐπὶ τραπέζης καὶ ἑπομένως εἶνε ὁριζόντιον, τὸ δὲ ἐπίπεδον Ν εἶνε κατακόρυφον· ἡ τομὴ αὐτῶν χψ λέγεται *γραμμὴ τοῦ ἐδάφους*.

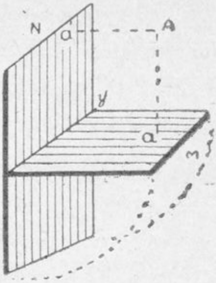


Σχ. 184.

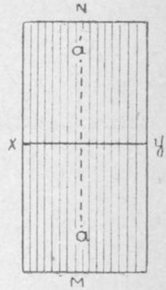
Μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων τίθεται τὸ σημεῖον Α (καθὼς καὶ πᾶν ἄλλο ἀντικείμενον) καὶ ἐπ' αὐτῶν προβάλλεται· ἔστωσαν α καὶ α' αἱ προβολαὶ τοῦ σημείου Α· ἡ μὲν α λέγεται **ὁριζόντιος προβολή**, ἡ δὲ α' **κατακόρυφος προβολή**.

Ὅταν δοθῶσιν αἱ δύο αὗται προβολαὶ α καὶ α', ὁρίζεται ἐντελῶς ἡ θέσις τοῦ σημείου Α ἐν τῷ διαστήματι· διότι, ἐὰν φέρωμεν ἐκ τῶν σημείων τούτων τὰς καθέτους αβ καὶ α'β' ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα Μ καὶ Ν, τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως αὐτῶν εἶνε τὸ σημεῖον Α.

Ἐὰν περιστρέψωμεν τώρα τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον Μ (σχ. 185) περὶ τὴν χψ πρὸς τὰ κάτω, μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου Ν, θὰ σχηματισθῇ τότε ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον, τὸ ΝΜ (σχ. 186), ἡ δὲ προβολὴ α θὰ εὑρεθῇ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους χψ. Μετὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ ἐπιπέδου ἀποδεικνύεται ὅτι :



Σχ. 185.



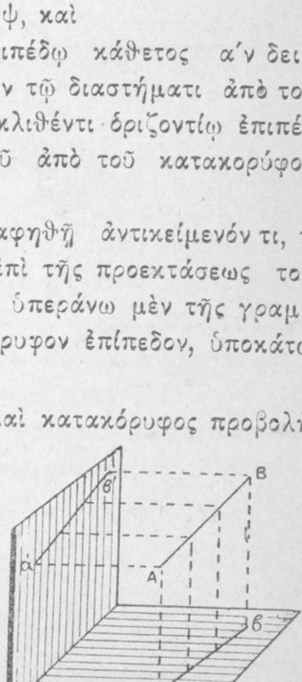
Σχ. 186.

1ον). Αἱ δύο προβολαὶ α καὶ α' κεῖνται ἐπὶ εὐθείας αα' καθέτου ἐπὶ τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους χψ, καὶ

2ον). Ἡ μὲν ἐν τῷ κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ κάθετος α'ν δεικνύει τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου Α ἐν τῷ διαστήματι ἀπὸ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἡ δὲ ἐν τῷ κατακλιθέντι ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ α ν δεικνύει τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου.

Ὅταν λοιπὸν πρόκειται νὰ ἰχνογραφηθῇ ἀντικείμενόν τι, ἡ κατάκλισις αὕτη τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ἄλλου ὑποτίθεται ὅτι ὑπάρχει καὶ ὅτι ὑπεράνω μὲν τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους εὑρίσκεται τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον, ὑποκάτω δὲ τὸ ὁριζόντιον.

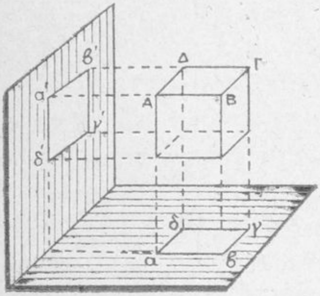
214. Διὰ νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁριζόντιος καὶ κατακόρυφος προβολὴ τῆς ἐν τῷ διαστήματι εὑρισκομένης εὐθείας ΑΒ (σχ. 187), ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν ἐξ ὅλων τῶν σημείων αὐτῆς καθέτους ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου καὶ κατακορύφου ἐπιπέδου. Ἡ εὐθεῖα αβ, ἥτις ἑνώνει τοὺς πόδας ὅλων τῶν καθέτων, εἶνε ἡ ὁριζόντιος προβολὴ τῆς ΑΒ, ἡ δὲ α'β' εἶνε ἡ κατακόρυφος προβολή.



Σχ. 187.

215). Όταν αἱ προβολαὶ τοῦ σχήματος γίνωνται διὰ καθέτων ἐπὶ τῶν προβολικῶν ἐπιπέδων (ὅπως ἀνωτέρω) λέγονται **ὀρθαὶ προβολαί**. Όταν δὲ γίνωνται διὰ πλαγίων παραλλήλων, λέγονται **πλάγιαι προβολαί**. Τὰς πλαγίας προβολὰς μεταχειριζόμεθα ὡς ἐπὶ τὸ πολύ, ὅταν παριστῶμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ τοῦ πίνακος τὰ στερεὰ σώματα· διότι τότε βλέπομεν περισσοτέρας ἕδρας τοῦ στερεοῦ καὶ ἑπομένως λαμβάνομεν σαφεστέραν ἰδέαν τούτου.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς προβολὰς στερεοῦ τινός, καὶ ἔστω κύβου, τοῦ ὁποίου μία ἕδρα εἶνε παράλληλος τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἄλλη δὲ παράλληλος τοῦ κατακορύφου, φέρομεν ἐκ τῶν κορυφῶν του καθέτους ἐπὶ τῶν προβολικῶν ἐπιπέδων καὶ ἑνώνωμεν τοὺς πόδας αὐτῶν δι' εὐθειῶν· καὶ τὸ μὲν σχηματιζόμενον τετράγωνον αβγδ (σχ. 188) ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου λέγεται ὁριζόντιος προβολὴ τοῦ κύβου, ἢ **κάτοψις** τοῦ κύβου, τὸ δὲ ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπίπεδον α΄β΄γ΄δ΄ λέγεται κατακόρυφος προβολὴ ἢ **πρόσοψις**. Διὰ τῶν δύο τούτων προβολικῶν ἐπιπέδων ὁρίζεται τὸ σχῆμα, τὸ μέγεθος καὶ ἡ ἐν τῷ διαστήματι θέσις στερεοῦ τινος.



Σχ. 188.

Όταν θέλωμεν νὰ γνωρίσωμεν τὸ ἐσωτερικὸν στερεοῦ τινος, καὶ ἔστω οἰκίας, φανταζόμεθα αὐτὴν τεμνομένην ὑπὸ κατακορύφου ἢ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἰχνογραφοῦμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς τομῆς. Διὰ τοιούτων δὲ τομῶν δυνάμεθα μετ' ἀκριβείας νὰ γνωρίσωμεν τὸ ἐσωτερικὸν τῆς οἰκίας ἢ καὶ ἄλλου τινὸς ἀντικειμένου.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ

ΑΙ ΩΝ ΕΥΡΙΣΚΟΜΕΝ ΤΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΟΓΚΟΥΣ

Τύποι ἐπιφανειῶν.

Τύποι ὄγκων.