Ἀργυρᾶκος

Acropole Palace
Hôtel

Athènes

ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΕΝ ΤΩ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΩ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΠΙΠΕΔΟΣ
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΑ ΓΥΜΝΑΣΙΑ

ΜΕΤΑ 49 ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΕΝ ΤΩ ΚΕΙΜΕΝΩ

Ἐγκριθεῖσα διὰ τοῦ ὑπ' ἀριθ. 21008 τῆς 7-6-1927 ἐγγράφου τοῦ Ὑπουργείου τῆς παιδείας

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΣΙΔΕΡΗ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ - ΣΤΑΔΙΟΥ 46
ΚΑΤΩΘΕΝ ΑΡΣΑΚΕΙΟΥ

Τύποις «Ἐκδοτικῆς» (Μπλαζουδάκη) Εὐριπίδου 3

ΕΠΙΠΕΔΟΣ
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΑ ΓΥΜΝΑΣΙΑ

Ἐγκεκριμένη ὑπὸ τοῦ Ὑπουργείου τῆς Παιδείας

ΜΕΤΑ 49 ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΕΝ ΤΩ ΚΕΙΜΕΝΩ

Ἀριθ. Πράξεως Ἐκπ. Συμβ. $\frac{198}{27\text{-}9\text{-}27}$
μετὰ βιβλιοσ. καὶ φόρου δρ. 24,45

ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΕΝ ΤΩ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΩ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΠΙΠΕΔΟΣ
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΑ ΓΥΜΝΑΣΙΑ

ΜΕΤΑ 49 ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΕΝ ΤΩ ΚΕΙΜΕΝΩ

Ἐγκριθεῖσα διὰ τοῦ ὑπ' ἀριθ. 21008 τῆς 7-6-1927
ἐγγράφου τοῦ Ὑπουργείου τῆς Παιδείας

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΣΙΔΕΡΗ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ - ΣΤΑΔΙΟΥ 46
ΚΑΤΩΘΕΝ ΑΡΣΑΚΕΙΟΥ

Τύποις «Ἐκδοτικῆς» (Μπλαζουδάκη) Εὐριπίδου 3

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως θεωρεῖται κλεψίτυπον.

Ιωάν. Γ. Αργυρόπουλος

ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κεφάλαιον I.

Περὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τόξου ἢ γωνίας.

Κεφάλαιον ΙΙ.

Σχέσεις μεταξὺ τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν

Κεφάλαιον ΙΙΙ.

Περὶ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων

Κεφάλαιον IV.

Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τριγώνου.

Κεφάλαιον V.

Περὶ ἐπιλύσεως τριγώνων

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ

Σελὶς	9	στοίχος	26	τὸ	διὰ	εἰς	δὲ
»	10	»	3	»	$\sqrt{2}\,2:2$	»	$\sqrt{2}:2.$
»	15	»	29	»	ο,16×8	»	ο,16×ο,8
»	29	»	9	»	σφ20	»	$σφ20^0$
»	30	»	9	»	$σφ^3θ$	»	$σφ^2θ$
»	32	»	30	»	—εφω	»	εφω
»	35	»		»	(ΟΜ)	»	(ΟΠ)
»	39	»		»	$2εφ^2\frac{φ}{2}$	»	$2εφ\frac{φ}{2}$

Σημείωσις διὰ τὸν διδάσκοντα. Αἱ παράγραφοι, αἱ φέρουσαι ἀστερίσκον εἰς τὸν πίνακα τῶν περιεχομένων, τοῦ βιβλίου ἀναφέρονται εἰς ὕλην τῆς ὁποίας ἡ διδασκαλία δύναται νὰ παραλείπεται εἰς τὰ κλασικὰ γυμνάσια καὶ μάλιστα ἂν δὲν ἐπαρκῇ ὁ χρόνος, ἢ καὶ νὰ διδάσκεται ἐν γένει ὑπὸ μορφὴν ἀσκήσεων. Ἡ ὕλη αὐτὴ ἔχει ἐκτυπωθῆ διὰ μικροτέρων στοιχείων ἐν τῷ κειμένῳ.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπὸς τῆς Τριγωνομετρίας.

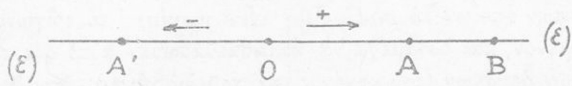
1. Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Γεωμετρίας), ὅτι εἰς ἓν τρίγωνον διακρίνομεν τρεῖς πλευρὰς καὶ τρεῖς γωνίας, καλοῦμεν δὲ ταύτας *πρωτεύοντα στοιχεῖα* αὐτοῦ, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ ἄλλων τοιούτων (καθὼς π. χ. τῶν ὑψῶν καὶ τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου, τῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας αὐτοῦ, τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἢ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου κλπ), τὰ ὁποῖα καλοῦνται *δευτερεύοντα στοιχεῖα* τοῦ τριγώνου. Γνωρίζομεν ἐπίσης, ὅτι ὅταν δίδωνται τρία ἐκ τῶν πρωτευόντων στοιχείων ἑνὸς τριγώνου, ἐκ τῶν ὁποίων *τὸ πολὺ δύο εἶνε γωνίαι*, τὸ τρίγωνον εἶνε ἐν γένει ὡρισμένον, καὶ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωσεν αὐτὸ διὰ τῶν κυρίως γεωμετρικῶν ὀργάνων (τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου)· ἤτοι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν διὰ γεωμετρικῶν κατασκευῶν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου. Ἀλλὰ τὰ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα οὕτω προκύπτουν, δὲν εἶνε ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον τελείως ἀκριβῆ, ἕνεκα τῆς ἀτελείας τῶν ὀργάνων, τὰ ὁποῖα μεταχειριζόμεθα. Εἶνε γνωστὸν ἀκόμη, ὅτι δὲν δυνάμεθα πάντοτε νὰ λύσωμεν ἓν τοιοῦτον πρόβλημα μόνον διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ (ὅστις δίδει ἐξαγόμενα ἀκριβῆ) καὶ μὲ τὴν βοήθειαν τῶν γνώσεων, τὰς ὁποίας ἔχομεν, εἰ μὴ μόνον εἰς περιπτώσεις τινάς. Οὕτω π, χ. ὅταν γνωρίζωμεν τὰ μήκη τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ· ἐκ τῶν μηκῶν τῶν μερῶν εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ὑπὸ τοῦ ὕψους αὐτοῦ (τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν ὑποτείνουσαν), εὑρίσκομεν τὸ ὕψος τοῦτο καὶ τὰ μήκη τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ· ἐκ τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν τριγώνου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰ ὕψη αὐτοῦ, τὰ μήκη τῶν διαμέσων καὶ τῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας αὐτοῦ κλπ. Ἐὰν ὅμως εἰς ἓν πρόβλημα μεταξὺ τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα δίδονται ἢ ζητοῦνται νὰ ὑπολογισθοῦν, ὑπάρχουν καὶ γωνίαι, τότε δὲν δυνάμεθα ἐν γένει νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ, καὶ μόνον διὰ τῶν μέχρι τοῦδε γνώσεων ἡμῶν. Τοῦτο ὀφείλεται κυρίως εἰς τὸ ὅτι, δὲν γνωρίζομεν νὰ ἐκφράσωμεν διὰ τύπων τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὴν ἐξάρτησιν μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου.

2. *Σκοπὸς τῆς Τριγωνομετρίας* * *εἶνε ἡ εὕρεσις διὰ τοῦ λογισμοῦ τῶν ἀγνώστων στοιχείων τριγώνου, ὅταν δίδωνται ἐπαρκῆ δεδομένα, μὲ τὴν βοήθειαν τύπων, οἵτινες ἐκφράζουν σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων αὐτῶν.*

3. Ἡ Τριγωνομετρία λέγεται *ἐπίπεδος* μέν, ἂν ἐξετάζωνται δι᾽ αὐτῆς τρίγωνα ἐπίπεδα, *σφαιρικὴ* δέ, ἂν ἐξετάζωνται σφαιρικὰ τρίγωνα.

Περὶ τμημάτων καὶ ἀνυσμάτων εὐθείας.

4. Ἐπὶ πάσης εὐθείας (τὴν ὁποίαν ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον φανταζόμεθα ἐκτεινομένην ἐπ᾽ ἄπειρον) διακρίνομεν δύο *φοράς*, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν μία θεωρεῖται ὡς *θετική*, ἡ δ᾽ ἄλλη ὡς *ἀρνητική*. Οὕτω, ἐπὶ τῆς εὐθείας (Ε) ἡ μὲν μία φορὰ εἶνε ἡ ἐκ τοῦ σημείου Ο πρὸς τὸ Α, ἡ δ᾽ἄλλη ἡ ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ Α′, καὶ ἂν ἡ πρώτη θεωρῆται ὡς θετική, ἡ δευτέρα θεωρεῖται ὡς ἀρνητική.



5. Καλοῦμεν *τμῆμα* εὐθείας πᾶν μέρος ταύτης περατούμενον εἰς δύο σημεῖα αὐτῆς. Π.χ. τὸ μέρος ΑΒ τῆς εὐθείας (Ε), τὸ περατούμενον εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β λέγεται τμῆμα ΑΒ ἢ καὶ ΒΑ τῆς εὐθείας (Ε). Τὰ σημεῖα Α καὶ Β λέγονται *ἄκρα* τοῦ τμήματος ΑΒ.

6. Καλοῦμεν *ἄνυσμα* τμῆμα εὐθείας, ὅταν μεταξὺ τῶν ἄκρων σημείων τούτου διακρίνωμεν ποῖον εἶνε *πρῶτον ἢ ἀρχὴ* καὶ ποῖον *δεύτερον ἢ πέρας* αὐτοῦ, καλεῖται δὲ οὕτω, διότι ὑποτίθεται ὅτι διανύεται ὑπὸ κινητοῦ, ἀναχωροῦντος ἐκ τῆς ἀρχῆς καὶ διευθυνομένου πρὸς τὸ πέρας τούτου. Εἰς ἕκαστον ἄνυσμα διακρίνομεν τὰ ἄκρα αὐτοῦ καὶ τὴν φοράν, τὴν ὁποίαν ὁρίζει ἡ σειρὰ τούτων.

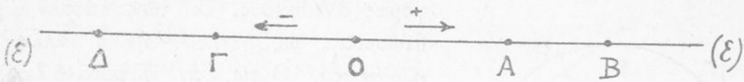
Οὕτω τὸ ἄνυσμα ΑΒ ἔχει ἄκρα τὰ Α καὶ Β καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β. Κατὰ ταῦτα τὰ σημεῖα Α καὶ Β τῆς εὐθείας (Ε) ὁρίζουν ἓν τμῆμα αὐτῆς, τὸ ΑΒ ἢ ΒΑ, ἔχον ἄκρα τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ἀλλὰ τὰ αὐτὰ σημεῖα ὁρίζουν δύο ἀνύσματα, τὰ ΑΒ καὶ ΒΑ, ἔχοντα τὸ μὲν ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Β, τὸ δὲ ἀρχὴν τὸ Β καὶ πέρας τὸ Α. Αἱ φοραὶ τῶν δύο τούτων ἀνυσμάτων λέγονται *ἀντίθετοι*.

7. Ἄνυσμά τι λέγεται *θετικὸν* μέν, ἂν ἔχῃ τὴν θετικὴν φορὰν τῆς

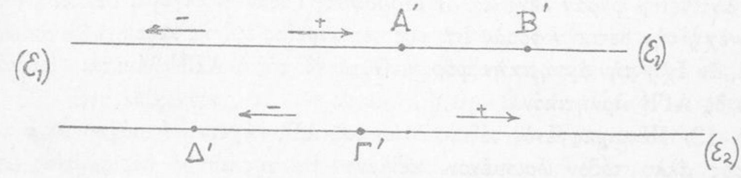
---

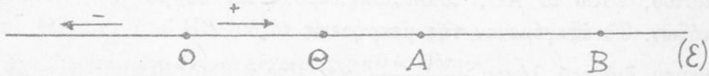
* Ἡ Τριγωνομετρία διεμορφώθη τὸ πρῶτον ἐπιστημονικῶς ὑπὸ τοῦ Ἱππάρχου τοῦ ἐκ Νικαίας (161—126 π.Χ.).

εὐθείας ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται, *ἀρνητικὸν* δέ, ἂν ἔχῃ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν αὐτῆς. Οὕτω τὸ ἄνυσμα ΑΒ τῆς εὐθείας (Ε) λέγεται θετικόν, τὸ δὲ ΓΔ ἀρνητικόν.



8. Τμήματα ἢ ἀνύσματα λέγονται *παράλληλα,* ἂν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἢ ἐπὶ εὐθειῶν παραλλήλων. Ἀνύσματα λέγονται *ὁμόρροπα* μέν, ἂν εἶνε παράλληλα καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν, *ἀντίρροπα* δέ, ἂν εἶνε παράλληλα καὶ ἔχουν ἀντιθέτους φοράς. Οὕτω τὰ ἀνύσματα ΑΒ καὶ ΔΓ, κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (Ε), εἶνε ὁμόρροπα, ἐνῶ τὰ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶνε ἀντίρροπα. Ἐπίσης τὰ ἀνύσματα Α′Β′ καὶ Γ′Δ′ εἶνε ἀντίρροπα, ὡς κείμενα ἐπὶ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ($Ε_1$) καὶ ($Ε_2$) καὶ ἔχοντα φορὰς ἀντιθέτους.



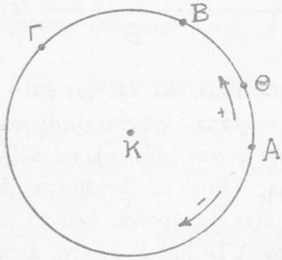


9. *Μέτρησις* ἑνὸς ἀνύσματος, π.χ. τοῦ ΑΒ, λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς ἄλλο ἄνυσμα ὡρισμένον, κείμενον ἐπὶ τῆς αὐτῆς (ἢ παραλλήλου) εὐθείας μετ᾽ αὐτοῦ, ἔστω τὸ ΟΘ, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονὰς τῆς μετρήσεως. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως ἀνύσματος ΑΒ ὑπὸ τοῦ ΟΘ σημειώνομεν διὰ τοῦ λόγου $\frac{AB}{O\Theta}$ καὶ εἶνε ἀριθμὸς θετικὸς μέν, ἂν τὸ ΑΒ εἶνε ὁμόρροπον πρὸς τὸ ΟΘ, ἀρνητικὸς δέ, ἂν εἶνε ἀντίρροπον αὐτοῦ. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως ἑνὸς ἀνύσματος ΑΒ καλεῖται *μῆκος τοῦ ἀνύσματος* τούτου, παριστάνομεν δ᾽ αὐτὸ καὶ οὕτω (ΑΒ). Οὕτω θέτομεν $\frac{AB}{O\Theta}=(AB)$.

10. Ἂν τὰ ἄκρα ἑνὸς ἀνύσματος συμπίπτουν, λέγομεν ὅτι τὸ ἄνυσμα τοῦτο ἰσοῦται μὲ μηδὲν καὶ παριστάνεται διὰ τοῦ 0. Οὕτω τὸ ἄνυσμα ΑΑ ἔχει ἄκρα τὰ Α καὶ Α, συμπίπτοντα εἰς ἓν σημεῖον, τὸ Α, καὶ ἔχει μῆκος μηδέν· ἤτοι εἶνε (ΑΑ)=0.

Τόξα κύκλου καὶ γωνίαι.

11. Ἔστω περιφέρεια κύκλου, ἔχουσα κέντρον τὸ σημεῖον Κ. Ἐπὶ ταύτης, καθὼς καὶ ἐπὶ πάσης ἄλλης, ἢ ἐπὶ τόξου αὐτῆς, διακρίνομεν δύο φορὰς ἀντιθέτους, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία θεωρεῖται ὡς *θετική*, ἡ δ᾽ ἄλλη ὡς *ἀρνητική*. Οὕτω, ἂν ἡ φορὰ ἡ ἐκ τοῦ σημείου Α πρὸς τὸ Β καὶ Γ τῆς περιφερείας εἶνε θετική, ἡ ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Γ καὶ Β εἶνε ἀρνητική. Συνήθως θεωροῦμεν ὡς θετικὴν φορὰν ἐπὶ τῆς περιφερείας τὴν ἀντίθετον πρὸς τὴν κίνησιν τῶν δεικτῶν ὡρολογίου (τὴν τοῦ βέλους τοῦ φέροντος τὸ σημεῖον + εἰς τὸ παρακείμενον σχῆμα).



12. Τόξα κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἐπὶ ὁμοκέντρων περιφερειῶν καὶ ἔχοντα τὴν αὐτὴν μὲν φορὰν λέγονται *ὁμόρροπα*, ἔχοντα δ᾽ ἀντίθετον φορὰν λέγονται *ἀντίρροπα*. Τόξον τι λέγεται *θετικὸν* μέν, ἂν ἔχῃ τὴν θετικὴν φορὰν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐφ᾽ ἧς κεῖται, *ἀρνητικὸν* δέ, ἂν ἔχῃ τὴν ἀρνητικὴν φοράν. Οὕτω τὸ τόξον ΑΒΓ λέγεται θετικόν, τὸ δὲ ΑΓΒ ἀρνητικόν.

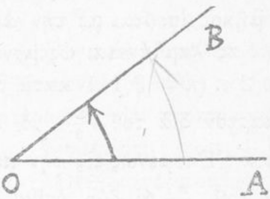
13. Μέτρησις ἑνὸς τόξου, ἔστω τοῦ ΑΒ, λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς ἄλλο τόξον ὡρισμένον, κείμενον ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας μετ᾽ αὐτοῦ, ἔστω τὸ ΑΘ, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονὰς μετρήσεως τῶν τόξων. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως τόξου ΑΒ ὑπὸ τοῦ ΑΘ, σημειώνομεν διὰ τοῦ λόγου $\frac{\text{τόξ. ΑΒ}}{\text{τόξ. ΑΘ}}$ καὶ εἶνε ἀριθμὸς θετικὸς μέν, ἂν τὸ ΑΒ εἶνε ὁμόρροπον πρὸς τὸ ΑΘ, ἀρνητικὸς δέ, ἂν εἶνε ἀντίρροπον αὐτοῦ. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως ἑνὸς τόξου ΑΒ καλεῖται *μῆκος τοῦ τόξου* τούτου, παριστάνομεν δ᾽αὐτὸ συμβολικῶς καὶ οὕτω (τοξ. ΑΒ). Οὕτω ἔχομεν

$$\frac{\text{τοξ. ΑΒ}}{\text{τοξ. ΑΘ}} = (\text{τοξ. ΑΒ}).$$

14. Τόξον (μικρότερον περιφερείας) τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα συμπίπτουν εἰς ἓν σημεῖον λέγομεν ὅτι ἰσοῦται μὲ μηδέν, καὶ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ 0.

15. *Ἴσα* μὲν λέγονται δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας, ἂν εἶνε ἰσομήκη καὶ ὁμόρροπα, *ἀντίθετα* δέ, ἂν εἶνε ἰσομήκη καὶ ἀντίρροπα, καὶ *διαδοχικά*, ἂν τὸ πέρας τοῦ ἑνὸς εἶνε ἡ ἀρχὴ τοῦ ἑπομένου αὐτοῦ.

16. Ἔστω γωνία τις ΑΟΒ. Ὑποθέτομεν ὅτι αὕτη διαγράφεται ὑπὸ εὐθείας, ἥτις κειμένη κατ᾽ἀρχὰς ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΟΑ στρέφεται περὶ τὴν κορυφὴν O (ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς γωνίας) μέχρις ὅτου πέσῃ ἐπὶ τῆς πλευ-OB. Ἡ γωνία αὕτη λέγεται *θετικὴ* μέν, ἂν ἡ στροφὴ τῆς εὐθείας γίνεται κατὰ φορὰν ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν ὡρολογίου, *ἀρνητικὴ* δέ, ἂν τοὐναντίον. Ἐκ τῶν δύο πλευρῶν τῆς γωνίας A O B ἡ O A καλεῖται *πρώτη* ἡ δὲ O B *δευτέρα πλευρὰ* αὐτῆς. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ δι᾿ οἱανδήποτε ἄλλην δοθεῖσαν γωνίαν. Πρὸς ἀκριβῆ ὁρισμὸν γωνίας τινὸς εἶνε ἀνάγκη· 1) νὰ γνωρίζωμεν ποία ἐκ τῶν δύο δοθεισῶν πλευρῶν αὐτῆς εἶνε ἡ πρώτη, καὶ 2) πῶς καὶ πόσον ἡ διαγράφουσα αὐτὴν εὐθεῖα (ἥτις ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς πρώτης πλευρᾶς διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν δευτέραν) στρέφεται συνεχῶς κατὰ φορὰν θετικὴν ἢ ἀρνητικήν.



17. Δύο γωνίαι λέγονται ὁμόσημοι μέν, ἂν εἶνε θετικαὶ ἢ ἀρνητικαί, ἑτερόσημοι δέ, ἂν ἡ μία εἶνε θετικὴ καὶ ἡ ἄλλη ἀρνητική.

18. Δοθείσης γωνίας τινὸς δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν αὐτὴν ὡς ἐπίκεντρον περιφερείας κύκλου, γραφομένης μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν αὐτῆς καὶ ἀκτῖνα οἱανδήποτε. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, ἂν ἡ γωνία εἶνε *θετικὴ* ἢ *ἀρνητική*, καὶ τὸ ἀντίστοιχον εἰς αὐτὴν τόξον τῆς περιφερείας, εἰς τὴν ὁποίαν εἶνε ἐπίκεντρος, θὰ εἶνε *θετικὸν* ἢ *ἀρνητικόν*. Καὶ ἀντιστρόφως· ἂν τόξον τι τῆς περιφερείας κύκλου εἶνε *θετκὸν* ἢ *ἀρνητικόν*, καὶ ἡ ἀντίστοιχος αὐτοῦ ἐπίκεντρος γωνία θὰ εἶνε *θετικὴ ἢ ἀρνητική*.

19. Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Γεωμετρίας) ὅτι,

«εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ ἴσους κύκλους αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι εἶνε ἀνάλογοι τῶν ἀντιστοίχων αὐτῶν τόξων».

Διὰ τοῦτο, ἂν ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν ληφθῇ ἡ γωνία, ἥτις ὡς ἐπίκεντρος εἰς τυχόντα κύκλον βαίνει ἐπὶ τόξου, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν τόξων τοῦ κύκλου, τότε ὁ ἀριθμὸς ὅστις παριστάνει τυχοῦσαν γωνίαν, θεωρουμένην ὡς ἐπίκεντρον εἰς τὸν κύκλον τοῦτον, ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τὸν μετροῦντα τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς τόξον. Οὕτω π.χ. ἂν AOM εἶνε ἐπίκεντρος γωνία καὶ AM τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς τόξον, καὶ ὡς μονὰς τῶν τόξων ληφθῇ τὸ τόξον AΘ, ὡς μονάς, δὲ τῶν γωνιῶν ἡ γωνία AOΘ, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\text{γων. AOM}}{\text{γων. AOΘ}} = \frac{\text{τοξ. AM}}{\text{τοξ. AΘ}},$$

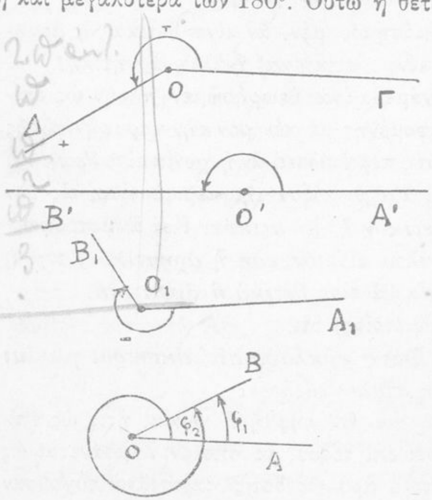
καὶ ὁ μὲν πρῶτος τῶν ἴσων τούτων λόγων παριστάνει τὴν γωνίαν AOM, ὁ δὲ δεύτερος τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς τόξον AM.

$\log \frac{\varpi}{8} = \log \frac{180^0}{8} = \log 22^0\,30'$ γων 50^0 $\frac{\text{γων } 50^0}{360^0} = 29.$

20. Πρὸς μέτρησιν ἑνὸς κυκλικοῦ τόξου λαμβάνομεν συνήθως ὡς μονάδα τὴν μοῖραν, ἤτοι (τὸ ἓν τριακοσιοστὸν ἑξηκοστὸν μέρος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἐφ᾽ οὗ κεῖται), τὸ πρῶτον λεπτὸν (ἑξηκοστὸν τῆς μοίρας) καὶ τὸ δεύτερον λεπτὸν (ἑξηκοστὸν τοῦ πρώτου λεπτοῦ), ἢ τὸ τόξον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα. Καθ᾽ ἣν περίπτωσιν ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας λαμβάνεται ὡς μονάς, τὸ μῆκος τῆς περιφερείας παρίσταται διὰ τοῦ $2\,\pi$ ($\pi = 3{,}141$ κατὰ προσέγγισιν)· τὸ ἥμισυ αὐτῆς διὰ τοῦ π· τὸ τέταρτον διὰ τοῦ $\frac{\pi}{2}$, τὸ ὄγδοον τοῦ μήκους τῆς περιφερείας διὰ $\frac{\pi}{4}$ κ.ο.κ. Ἑπομένως εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἡ ὀρθὴ γωνία παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{\pi}{2}$ αἱ δύο ὀρθαὶ διὰ τοῦ π, αἱ τρεῖς διὰ τοῦ $\frac{3\,\pi}{2}$, αἱ τέσσαρες ὀρθαὶ διὰ τοῦ 2π κ.ο.κ.

21. Γωνία τις δύναται νὰ εἶνε κατ᾽ ἀπόλυτον μέγεθος μικροτέρα, ἴση ἢ καὶ μεγαλυτέρα τῶν 180^o. Οὕτω ἡ θετικὴ γωνία ΓΟΔ, ὑποτίθεται ὅτι διαγράφεται ὑπὸ εὐθείας, ἀναχωρούσης ἐκ τῆς θέσεως ΟΓ, ὅταν στραφῇ κατὰ θετικὴν φορὰν περὶ τὸ Ο ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς γωνίας, μέχρις ὅτου ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν τῆς ΟΔ, προφανῶς δ᾽ εἶνε μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος δύο ὀρθῶν γωνιῶν ἢ τῶν 180^o. Ἡ γωνία $A'O'B'$ εἶνε θετικὴ γωνία, καὶ διαγράφεται ὑπὸ εὐθείας, ἀναχωρούσης ἐκ τῆς θέσεως $O'A'$ καὶ στρεφομένης περὶ τὸ O' κατὰ θετικὴν φοράν, μέχρις ὅτου φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν τῆς $O'B'$.

$360^0 = 2\varpi$ ἐπ.
$180^0 = \varpi$
$90 = \frac{\varpi}{2}$
$60 = \frac{\varpi}{3}$



ἰσοῦται δὲ αὕτη μὲ τὸ ἄθροισμα δύο ὀρθῶν γωνιῶν ἢ μὲ 180^o (ὑποτιθεμένου ὅτι τὰ σημεῖα A', O', B' κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας). Ἡ γωνία $A_1O_1B_1$ εἶνε ἀρνητικὴ καὶ ἀπολύτως μεγαλυτέρα τῶν δύο ὀρθῶν γωνιῶν ἢ τῶν 180^o.

22. Ὅταν δοθῇ γωνία τις διὰ τῆς σειρᾶς τῶν πλευρῶν αὐτῆς καὶ τῆς φορᾶς καθ᾽ ἣν διαγράφεται, ὑπάρχουν ἄπειροι γωνίαι ὁμόσημοι μὲ τὴν δοθεῖσαν καὶ ἔχουσαι τὰς αὐτὰς πλευρὰς μὲ αὐτήν, διαφέρουν δ᾽αὗται κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον τῶν 4 ὀρθῶν ἢ τῶν 360^o. Οὕτω π. χ. ἂν μία γωνία ΑΟΒ εἶνε ἡ διαγραφομένη ὑπὸ τῆς εὐθείας, ἥτις ἀναχωρεῖ συν $\frac{100φ}{360}$ - συν $\frac{5φ}{18}$ / λογ $\frac{φ}{7}$ - λογ $\frac{180}{7}$ - λογ 25°42'51''

ἐκ τῆς θέσεως OA καὶ στρέφεται περὶ τὸ O μέχρις ὅτου φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν OB, ἄλλη γωνία AOB εἶνε ἡ διαγραφομένη ὑπὸ τῆς κινουμένης εὐθείας, ἥτις ἀναχωρεῖ μὲν ἐκ τῆς θέσεως OA, στρέφεται δὲ περὶ τὸ O ὁλόκληρον περιφορὰν φθάνουσα εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν ἐκ τῆς ὁποίας ἀνεχώρησε, καὶ ἐξακολουθεῖ στρεφομένη μέχρις ὅτου φθάσῃ διὰ δευτέραν φορὰν εἰς τὴν θέσιν τῆς OB. Προφανῶς ἡ γωνία αὕτη ὑπερβαίνει τὴν προηγουμένην κατὰ τὸ ἄθροισμα 4 ὀρθῶν γωνιῶν ἢ 360°.

Ἐὰν λοιπὸν σημειώσωμεν τὴν μὲν μικροτέραν ἢ τὴν πρώτην γωνίαν AOB διὰ τοῦ $φ_1$, τὴν δὲ δευτέραν διὰ τοῦ $φ_2$, ἔχομεν ὅτι $φ_2 = φ_1 + 360°$.

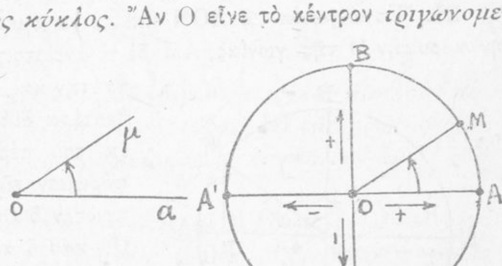
Καθ' ὅμοιον τρόπον ἔχομεν ἄλλην γωνίαν AOB, διαγραφομένην ὑπὸ τῆς στρεφομένης εὐθείας, ἀφοῦ κάμῃ αὕτη δύο, τρεῖς...ὁλοκλήρους περιφορὰς καὶ φθάσῃ ἐπὶ τέλους εἰς τὴν θέσιν τῆς OB. Ἐκ τῶν ἀπείρων καὶ ὁμοσήμων γωνιῶν, αἵτινες ἔχουν τὰς αὐτὰς πλευράς, θὰ ἐννοοῦμεν ἐν τοῖς ἑξῆς τὴν μικροτέραν ἐξ αὐτῶν (ἐκτὸς ἂν ρητῶς ἀναφέρεται τὸ ἐναντίον).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I.

Περὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τόξου ἢ γωνίας.

Τριγωνομετρικὸς κύκλος.

23. Πᾶς κύκλος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς λαμβάνεται ὡς μονὰς μήκους, λέγεται *τριγωνομετρικὸς κύκλος*. Ἂν O εἶνε τὸ κέντρον *τριγωνομετρικοῦ κύκλου*, ὁρίζομεν ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ ἓν σημεῖον, ἔστω τὸ A, ὡς ἀρχὴν τῶν τόξων αὐτῆς, καθὼς καὶ τὴν θετικὴν φορὰν ἐπ' αὐτῆς. Φέρομεν τὴν διάμετρον AOA′ τῆς περιφερείας, τὴν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς A τῶν τόξων καὶ τὴν κάθετον ἐπ' αὐτῆς BOB′, ὅτε ἡ περιφέρεια διαιρεῖται εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη. Ἐκ τούτων τὸ μὲν AB λέγεται *πρῶτον τεταρτημόριον*, τὸ BA′ *δεύτερον*, τὸ A′ B′ *τρίτον* καὶ τὸ B′A *τέταρτον τεταρ-*

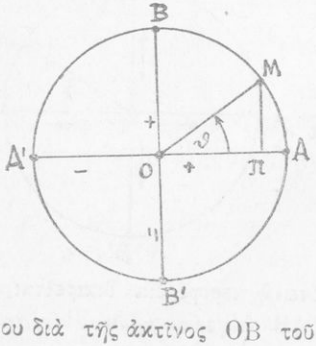


τημόριον. Αἱ διάμετροι ΑΟΑ′ καὶ ΒΟΒ′ λέγονται συνήθως *πρώτη* καὶ *δευτέρα* διάμετρος τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου. Λαμβάνομεν ὡς *θετικὴν φορὰν* ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης διαμέτρου τὴν ἐκ τοῦ κέντρου Ο πρὸς τὸ σημεῖον Α, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ Β. Οὕτω πᾶν ἄνυσμα ὁμόρροπον μὲν πρὸς τὸ ΟΑ ἢ πρὸς τὸ ΟΒ θὰ θεωρῆται θετικόν, πᾶν ἀντίρροπον δὲ πρὸς ἓν ἐκ τούτων ὡς ἀρνητικόν. Ἔστω γωνία τις α ο μ. Κατασκευάζομεν ἐπίκεντρον γωνίαν ἴσην κατὰ μέγεθος πρὸς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν α ο μ, ἔχουσαν ὡς πρώτην πλευρὰν αὐτῆς τὴν ἀκτῖνα ΟΑ τῆς περιφερείας καὶ θετικὴν μέν, ἂν ἡ δοθεῖσα εἶνε θετική, ἀρνητικὴν δέ, ἂν ἡ δοθεῖσα εἶνε ἀρνητική. Ἔστω αὕτη ἡ γωνία Α Ο Μ. Τὸ τόξον ΑΜ, ἔχον ἀρχὴν τὸ σημεῖον Α καὶ πέρας τὸ Μ θὰ εἶνε θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, ἂν ἡ δοθεῖσα γωνία εἶνε θετικὴ ἢ ἀρνητική. Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἀντίστοιχον τόξον πρὸς ἄλλην δοθεῖσαν γωνίαν ἐπὶ τριγωνομετρικοῦ κύκλου.

24. Συνήθως κατασκευάζομεν τριγωνομετρικὸν κύκλον μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς δοθείσης γωνίας, καὶ ὁρίζομεν ὡς ἀρχὴν μὲν τῶν τόξων ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ τὸ σημεῖον καθ᾽ ὃ ἡ πρώτη πλευρὰ τῆς γωνίας τέμνει τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὡς μονάδα δὲ μετρήσεως τῶν γωνιῶν, τὴν γωνίαν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν μονάδα τῆς μετρήσεως τῶν τόξων. Οὕτω ἡ γωνία καὶ τὸ ἀντίστοιχον τόξον αὐτῆς παριστάνονται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ (κατὰ τὴν παράγραφον 19).

Ὁρισμὸς ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου τόξου ἢ γωνίας.

25. Ἔστω γωνία τις ΑΟΜ καὶ τριγωνομετρικὸς κύκλος μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Ο τῆς γωνίας, ΑΜ δὲ τὸ ἀντίστοιχον τόξον εἰς τὴν γωνίαν ταύτην καὶ ΑΟΑ′, ΒΟΒ′ ἡ πρώτη καὶ δευτέρα διάμετρος τοῦ κύκλου. Ἂν ἐκ τοῦ πέρατος Μ τοῦ τόξου ΑΜ φέρωμεν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν πρώτην διάμετρον ΑΟΑ′, τὸ σημεῖον Π, καθ ὃ αὗται τέμνονται, καλεῖται προβολὴ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου ἐπὶ τὴν πρώτην διάμετρον. Οὕτω ἔχομεν δύο ἀνύσματα, τὰ ΠΜ καὶ ΟΠ. Τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος ΠΜ, μετρουμένου διὰ τῆς ἀκτῖνος ΟΒ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, καλεῖται *ἡμίτονον* τοῦ τόξου ΑΜ, ἢ τῆς γωνίας ΑΟΜ, καὶ πάσης ἴσης καὶ ὁμο-



σήμου πρὸς αὐτήν, καὶ γράφομεν τοῦτο ὡς ἑξῆς συμβολικῶς,

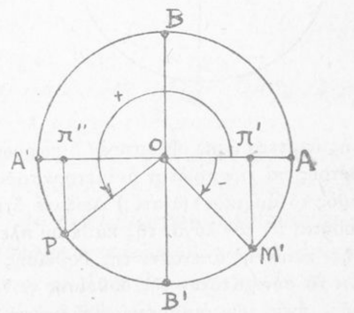
ημ (ΑΜ) $= \frac{\text{ΠΜ}}{\text{ΟΒ}} =$ (ΠΜ) ἢ ημθ $=$ (ΠΜ), ἂν διὰ τοῦ θ παραστήσωμεν τὸ τόξον ΑΜ ἢ τὴν ἀντίστοιχον εἰς αὐτὸ γωνίαν ΑΟΜ.

Τὸ ἄνυσμα ΠΜ καλεῖται *ἄνυσμα τοῦ ἡμιτόνου* τοῦ τόξου ΑΜ ἢ τῆς γωνίας ΑΟΜ.

26. Τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος ΟΠ, μετρουμένου διὰ τῆς ἀκτῖνος ΟΑ τοῦ κύκλου, καλεῖται *συνημίτονον* τοῦ τόξου ΑΜ ἢ τῆς γων. ΑΟΜ, καθὼς καὶ πάσης ἴσης καὶ ὁμοσήμου πρὸς αὐτήν, καὶ γράφεται ὡς ἑξῆς συμβολικῶς, συν (ΑΜ)$= \frac{\text{ΟΠ}}{\text{ΟΑ}} =$(ΟΜ), ἢ συνθ$=$(ΟΠ).

Τὸ ἄνυσμα ΟΠ καλεῖται *ἄνυσμα τοῦ συνημιτόνου* τοῦ τόξου ΑΜ ἢ τῆς γωνίας ΑΟΜ.

Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον οἱουδήποτε τόξου ἢ δοθείσης γωνίας καὶ ἔχομεν τοὺς ἑξῆς ὁρισμούς.



\+ **27.** «*Ἡμίτονον τόξου (ἢ τῆς ἀντιστοίχου αὐτοῦ γωνίας) λέγεται τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν μὲν τὴν προβολὴν τοῦ πέρατος τοῦ τόξου ἐπὶ τῆς πρώτης διαμέτρου τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, πέρας δὲ τὸ πέρας τοῦ τόξου (ὅταν ὡς μονὰς μετρήσεως ληφθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου)*».

\+ **28.** «*Συνημίτονον τόξου λέγεται τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν μὲν τὸ κέντρον τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, πέρας διὰ τὴν προβολὴν τοῦ πέρατος τοῦ τόξου ἐπὶ τῆς πρώτης διαμέτρου αὐτοῦ (ὅταν ὡς μονὰς μετρήσεως ληφθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου)*».

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω τῆς ἀρνητικῆς γωνίας ΑΟΜ′ ἡμίτονον μὲν εἶνε τὸ μῆκος (Π′Μ′), συνημίτονον δὲ τὸ μῆκος (ΟΠ′). Τῆς θετικῆς γωνίας ΑΟΡ (τοῦ ἀνωτέρω σχήματος), ἥτις εἶνε μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ὀρθῶν γωνιῶν ἡμίτονον μὲν εἶνε τὸ μῆκος (Π″Ρ), συνημίτονον δὲ τὸ (ΟΠ″).

29. Παρατηρητέον ὅτι, πᾶν τόξον, ἔχον τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὸ αὐτὸ πέρας πρὸς ἄλλο δοθέν, ἔχει τὸ αὐτὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον πρὸς αὐτό.

Γεώργιος

Ἀσκήσεις.

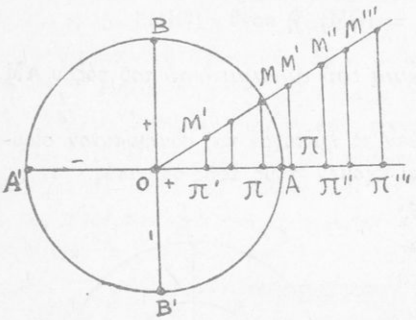
1) Κατασκευάσατε τριγωνομετρικὸν κύκλον ἢ καὶ γωνίαν 45°. Δείξατε ὅτι τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον 45° ἰσοῦται μὲ $\sqrt{2}:2$.

2) Δείξατε ὅτι τὸ μὲν ἡμίτονον—45°=μὲ—$\sqrt{2}:2$, τὸ δὲ συν—45°=$\sqrt{2}:2$.

3) Μὲ τὴν βοήθειαν τριγωνομετρικοῦ κύκλου ἐξετάσατε πόσον εἶνε τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον —90°, —180°, —270°, —360°.

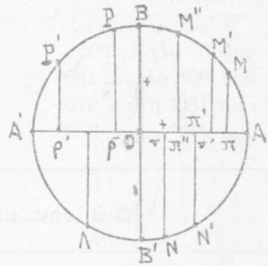
4) Δείξατε μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, ὅτι ἂν δύο τόξα εἶνε ἀντίθετα ἔχουν ἡμίτονα ἀντίθετα, ἀλλὰ συνημίτονα ἴσα.

5) Κατασκευάσατε τριγωνομετρικὸν κύκλον καὶ εὕρετε τὰ ἀνύσματα τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου μιᾶς γωνίας ὀξείας, δοθείσης. Παρατηρήσατε ὅτι, τὸ ἡμίτονον εἶνε ὁ λόγος τῆς καθέτου πλευρᾶς ὀρθογωνίου τριγώνου (ἔχοντος ὑποτείνουσαν τὴν ἀκτῖνα, ἥτις λαμβάνεται ἴση μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους, καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν τὴν δοθεῖσαν), τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς γωνίας, διὰ τῆς ὑποτεινούσης. Ὁμοίως ὅτι τὸ συνημίτονον εἶνε ὁ λόγος τῆς καθέτου πλευρᾶς τοῦ ἐν λόγῳ τριγώνου, τῆς παρακειμένης εἰς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν, διὰ τῆς ὑποτεινούσης. Φέρατε ἐκ διαφόρων σημείων τῆς ἀκτῖνος (προεκτεινομένης) καθέτους ἐπὶ τὴν πρώτην διάμετρον τοῦ κύκλου. Οὕτω σχηματίζονται ὅμοια τρίγωνα πρὸς τὸ ἀρχικὸν (διατί;) Δείξατε ὅτι τὸ ἡμίτονον τῆς δοθείσης ὀξείας γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς καθέτου πλευρᾶς ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων τούτων τριγώνων, τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς δοθείσης γωνίας, πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ, καὶ ὅτι τὸ συνημίτονον τῆς δοθείσης γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς καθέτου πλευρᾶς, ἑνός τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τῆς παρακειμένης εἰς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν, πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ.



Περὶ μεταβολῆς τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου μετὰ τοῦ τόξου.

30. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν τὸ πέρας Μ τοῦ τόξου ΑΜ κινῆται συνεχῶς κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἀπὸ τοῦ σημείου Α πρὸς τὸ Β, λαμβάνον τὰς θέσεις Μ′, Μ″,... τὸ ἄνυσμα τοῦ ἡμιτόνου θὰ εἶνε ΠΜ, Π′Μ′, Π″ Μ″... καὶ τέλος ΟΒ· ἤτοι αὐξάνεται τὸ ἡμίτονον ἀπὸ ο μέχρις $+1$. Ἂν τὸ Μ κινῆται συνεχῶς ἐπὶ τοῦ δευτέρου τεταρτημορίου, ἀπὸ τοῦ Β μέχρι τοῦ Α′, τὸ ἡμίτονον εἶνε μὲν θετικόν, ἀλλ᾽ ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ $+1$, γίνεται δὲ μηδέν, ὅταν τὸ Μ φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον Α′, καὶ τὸ τόξον γίνῃ 180°. Ἤτοι ἔχομεν ημ180°=0. Κινουμένου τοῦ M συνεχῶς ἀπὸ τοῦ σημείου B′ ἐπὶ τοῦ τρίτου τεταρτημορίου, τὸ ἡμίτονον θὰ εἶνε ἀρνητικόν, ἀλλ᾽ αὐξάνεται ἀπολύτως ἀπὸ τῆς τιμῆς μηδέν, γίνεται δ᾽ ἴσον μὲ —1, ὅταν τὸ κινούμενον σημεῖον φθάσῃ εἰς τὸ B′, τὸ δὲ τόξον ABA′B′ εἶνε ἴσον μὲ 270°. Δηλαδὴ εἶνε ημ 270°=—1.



Τέλος κινουμένου τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ B′ συνεχῶς ἐπὶ τοῦ τετάρτου τεταρτημορίου, τὸ ἡμίτονον εἶνε ἀρνητικόν, ἀλλὰ ἐλαττοῦται ἀπολύτως, καὶ ὅταν τὸ κινητὸν φθάσῃ εἰς τὸ A, τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου 360° ἰσοῦται μὲ μηδέν. Οὕτω θὰ ἔχωμεν τὴν ἑξῆς πορείαν τῆς μεταβολῆς τοῦ ἡμιτόνου μετὰ τοῦ τόξου εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ.

«Ὅταν τὸ τόξον αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ 0° μέχρις 90°, τὸ ἡμίτονον αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ 0 μέχρις +1. Αὐξανομένου τοῦ τόξου ἀπὸ 90° συνεχῶς μέχρις 180°, τὸ ἡμίτονον ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ +1 μέχρις τοῦ 0· αὐξανομένου τοῦ τόξου συνεχῶς ἀπὸ 180° μέχρις 270°, τὸ ἡμίτονον ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ 0 μέχρις —1. Αὐξανομένου τέλος συνεχῶς τοῦ τόξου ἀπὸ 270° μέχρι 360°, τὸ ἡμίτονον αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τὸ —1 μέχρι τοῦ μηδενός».

31. Διὰ τὴν μεταβολὴν τοῦ συνημιτόνου μετὰ τοῦ τόξου εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ, ἐργαζόμεθα ὁμοίως, καὶ ἔχομεν ὅτι, *«ὅταν τὸ τόξον αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ 0° μέχρις 90°· τὸ συνημίτονον ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ +1 μέχρι 0· αὐξανομένου συνεχῶς τοῦ τόξου ἀπὸ 90° μέχρις 180°, τὸ συνημίτονον ἐλαττοῦται ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ —1. Αὐξανομένου τοῦ τόξου ἀπὸ 180° μέχρι 270°, τὸ συνημίτονον αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ —1 μέχρι τοῦ 0· τέλος αὐξανομένου συνεχῶς τοῦ τόξου ἀπὸ 270° μέχρι 360°, τὸ συνημίτονον αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ + 1».*

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ τόξα ἔχοντα τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουν ἡμίτονα καὶ συνημίτονα ἴσα, παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον οἱουδήποτε τόξου δὲν ὑπερβαίνει τὴν +1, οὐδὲ εἶνε μικρότερον τῆς —1.

32. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑπόμενον πίνακα διὰ τὰς τιμὰς τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου γωνίας ἢ τόξου φ.

Διὰ τὴν μεταβολὴν τοῦ ἡμιτόνου.

Ὅταν τὸ φ μεταβάλλεται συνεχῶς	*τὸ ημ φ μεταβάλλεται συνεχῶς*
ἀπὸ 0^0 μέχρις 90^0	ἀπὸ 0 μέχρι τῆς $+1$
ἀπὸ 90^0 μέχρις 180^0	ἀπὸ $+1$ μέχρι τοῦ 0
ἀπὸ 180^0 μέχρι 270^0	ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ -1
ἀπὸ 270^0 μέχρι 360^0	ἀπὸ -1 μέχρι τοῦ 0

Διὰ τὴν μεταβολὴν τοῦ συνημιτόνου.

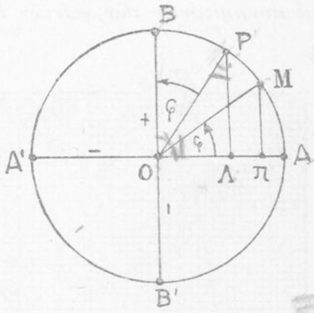
Ὅταν τὸ φ μεταβάλλεται συνεχῶς	*τὸ συν φ μεταβάλλεται συνεχῶς*
ἀπὸ 0^0 μέχρις 90^0	ἀπὸ $+1$ μέχρι τοῦ 0
ἀπὸ 90^0 μέχρις 180^0	ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ -1
ἀπὸ 180^0 μέχρι 270^0	ἀπὸ -1 μέχρι τοῦ 0
ἀπὸ 270^0 μέχρι 360^0	ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ $+1$

33. Ἐκ τῆς μεταβολῆς τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου, ὅταν τὸ τόξον μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ 0^0 μέχρι 360^0, παρατηροῦμεν, ἐν γένει, ὅτι τὸ ἄνυσμα τοῦ ἡμιτόνου εἶνε θετικὸν μέν, ὅταν τὸ πέρας αὐτοῦ κεῖται ἄνω τῆς διαμέτρου ΑΟΑ΄, ὡς ἔχον τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ παραλλήλου πρὸς αὐτὸ ἀνύσματος ΟΒ, ἀρνητικὸν δέ, ἂν ἔχῃ τὸ πέρας αὐτοῦ κάτω τῆς ΑΟΑ΄. Ἑπομένως, πᾶσα γωνία, τῆς ὁποίας τὸ ἀντίστοιχον τόξον ἔχει τὸ πέρας αὐτοῦ ἄνω τῆς διαμέτρου ΑΟΑ΄, ἔχει ἡμίτονον θετικόν, πᾶν δ' ἔχον τὸ πέρας αὐτοῦ κάτω τῆς ΑΟΑ΄ ἔχει ἡμίτονον ἀρνητικόν. Ἄρα, *«τόξον ἔχον ἀρχὴν τὸ Α καὶ τὸ πέρας αὐτοῦ εἰς τὸ πρῶτον ἢ τὸ δεύτερον τεταρτημόριον, ἔχει ἡμίτονον θετικόν, ἂν δ' ἔχῃ τὸ πέρας αὐτοῦ εἰς τὸ τρίτον ἢ τὸ τέταρτον τεταρτημόριον ἔχει ἡμίτονον ἀρνητικόν»*.

34. Ὁμοίως παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ ἄνυσμα τοῦ συνημιτόνου εἶνε θετικὸν μέν, ἂν ἔχῃ τὸ πέρας αὐτοῦ δεξιὰ τῆς διαμέτρου ΒΟΒ΄, ὡς ἔχον τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ ἀνύσματος ΟΑ, ἀρνητικὸν δέ, ἂν ἔχῃ τὸ πέρας αὐτοῦ ἀριστερὰ τῆς ΒΟΒ΄. Ἑπομένως, *«τόξον ἔχον ἀρχὴν τὸ Α καὶ τὸ πέρας αὐτοῦ εἰς τὸ πρῶτον ἢ τέταρτον τεταρτημόριον ἔχει συνημίτονον θετικόν, ἂν δ' ἔχῃ τὸ πέρας αὐτοῦ εἰς τὸ δεύτερον ἢ τρίτον τεταρτημόριον ἔχει συνημίτονον ἀρνητικόν»*.

Σχέσις ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου συμπληρωματικῶν τόξων.

35. Ἔστωσαν δύο γωνίαι ΑΟΜ καὶ ΜΟΒ ἐφεξῆς καὶ συμπληρωματικαὶ (τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶνε 90°) ἐν τῷ τριγωνομετρικῷ κύκλῳ. Ἂν ἡ πρώτη παρασταθῇ διὰ τοῦ φ, ἡ ἄλλη θὰ ἰσοῦται μὲ (90°—φ). Ἀφαιροῦντες λοιπὸν ἀπὸ τὴν γωνίαν ΑΟΒ, ἥτις ἰσοῦται μὲ 90°, τὴν γωνίαν ΡΟΒ, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ἴσην μὲ τὴν φ, ἔχομεν τὴν ΑΟΡ ἴσην μὲ τὴν (90°—φ), ἥτις εἶνε συμπληρωματικὴ τῆς φ. Τὰ ἀντίστοιχα τόξα ΑΜ καὶ ΑΜΡ τῶν συμπληρωματικῶν τούτων γωνιῶν λέγονται ἐπίσης *συμπληρωματικά*, μεταξὺ



δὲ τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων αὐτῶν ὑπάρχει ἡ ἑξῆς σχέσις

$$\boxed{\text{ημ}\,(90^\circ-\varphi)=\text{συν}\,\varphi,\quad \text{συν}\,(90^\circ-\varphi)=\text{ημ}\varphi}$$

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Π καὶ Λ αἱ προβολαὶ τῶν ἄκρων Μ καὶ Ρ τῶν τόξων ΑΜ καὶ ΑΜΡ ἐπὶ τῆς πρώτης διαμέτρου ΑΟΑ'. Ἔχομεν, (ΛΡ)=ημ (90°—φ), (ΟΛ)=συν (90°—φ), (ΠΜ)=ημ φ, (ΟΠ)=συν φ. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΠΜ καὶ ΟΛΡ εἶνε ἴσα (ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας αὐτῶν ἴσας καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, τὴν ΠΟΜ μὲ τὴν ΟΡΛ, διότι ἡ ΟΡΛ ἰσοῦται μὲ τὴν ΡΟΒ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ παραλλήλων, ἥτις κατεσκευάσθη ἴση μὲ τὴν ΠΟΜ). Ἑπομένως ἔχομεν, ἐπειδὴ ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν κεῖνται ἴσαι πλευραί, (ΛΡ)=(ΟΠ), καὶ (ΟΛ)=(ΠΜ). Ἄρα εἶνε ημ(90°—φ)=συν φ, καὶ συν(90°—φ)=ημ φ. Ἤτοι ἔχομεν ὅτι,

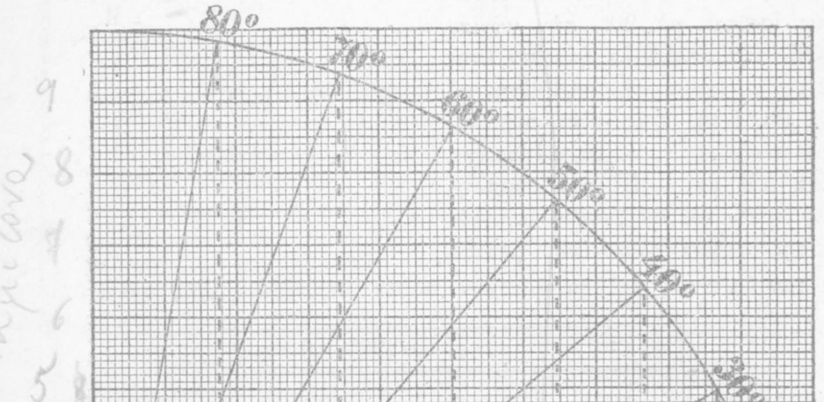
«ἐὰν δύο τόξα εἶνε συμπληρωματικά, τὸ ἡμίτονον τοῦ ἑνὸς ἰσοῦται μὲ τὸ συνημίτονον τοῦ ἄλλου».

Γραφικὴ εὕρεσις τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου ὀξειῶν γωνιῶν.

36. *Τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον γωνίας ὀξείας ἀκεραίου ἀριθμοῦ μοιρῶν εὑρίσκομεν κατὰ προσέγγισιν ὡς ἑξῆς γραφικῶς.*

Κατασκευάζομεν τεταρτοκύκλιον ΟΑΒ μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον Ο καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους. Διαιροῦμεν τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ τόξον ΑΒ, τὸ ὁποῖον εἶνε 90^0, εἰς 9 ἴσα μέρη, ὅτε ἕκαστον αὐτῶν ἰσοῦται μὲ 10^0, καὶ σημειώνομεν εἰς τὰ ἄκρα τῶν μερῶν κατὰ σειρὰν τοὺς ἀριθμοὺς 0^0, 10^0, 20^0, 30^0, 40^0, 50^0, 60^0, 70^0, 80^0, καὶ 90^0. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΒ, προβάλλομεν δὲ τὰ ἄκρα τῶν ἐννέα τούτων ἴσων τόξων ἐπὶ τῆς ΟΑ, σημειοῦντες δι' ἐστιγμένων εὐθειῶν γραμμῶν τὰς ἐκ τῶν ἄκρων τῶν τόξων καθέτους ἐπὶ τὴν Ο Α. Οὕτω ἔχομεν τὰ ἀνύσματα τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων τῶν γωνιῶν ἢ τῶν ἀντιστοίχων αὐτῶν τόξων, τῶν δια-

Β



Ο συν φ Α

φερουσῶν κατὰ 10^0, ἀπὸ τοῦ 0^0 μέχρι τῶν 90^0. Μετροῦντες τὰ ἀνύσματα ταῦτα, ἔχομεν τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν ἐν λόγῳ γωνιῶν. Ἀρκεῖ ὅμως νὰ εὕρωμεν μόνον τὰ ἡμίτονα ἢ μόνον τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν τούτων, διότι ἂν εὕρωμεν μόνον τὰ ἡμίτονα π. χ., ἔχομεν καὶ τὰ συνημίτονα τῶν συμπληρωματικῶν πρὸς αὐτὰς γωνιῶν. Οὕτω π.χ. ἂν εὕρωμεν τὸ ἡμίτονον τῶν 20^0, αὐτὸ θὰ εἶνε καὶ τὸ συνημίτονον τῶν 70^0· ἂν εὕρωμεν τὸ ἡμίτονον τῶν 80^0, αὐτὸ θὰ εἶνε καὶ συνημίτονον τῶν 10^0 κ.ο.κ. Ὁ κατωτέρω πίναξ δίδει τὸ ἡμίτονον και συνημίτονον τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, διαφερουσῶν κατὰ 10° καὶ κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ, σχηματίζεται δ' ὡς εἴπομεν ἐκ τῆς μετρήσεως τῶν ἀνυσμάτων τῶν ἡμιτόνων ἢ τῶν συνημιτόνων τῶν ἐν λόγῳ γωνιῶν.

Αἱ δύο πρῶται στῆλαι τοῦ πίνακος ἔχουν τὰς μοίρας καὶ τὰ ἡμίτονα αὐτῶν πρὸς τὰ δεξιά. Ἡ τελευταία στήλη ἔχει τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν τῶν τόξων καὶ ἀριστερὰ τούτων ἀντιστοιχοῦν τὰ συνημίτονα αὐτῶν. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἡμίτονον ἢ συνημίτονον ἄλλης γωνίας ὀξείας ἀκεραίου ἀριθμοῦ μοιρῶν π.χ. 37°, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ημ 30° = 0,50 (ἐκ τοῦ πίνακος), τὸ δὲ ημ 40° = 0,64. Ἑπομένως, εἰς αὔξησιν τῆς γωνίας κατὰ 10° ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς κατὰ 0,64 − 0,50 = 0,14 τῆς μονάδος. Εἰς αὔξησιν τῆς γωνίας κατὰ 1° θὰ ἀντιστοιχῇ (κατὰ προσέγγισιν) αὔξησις τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς 0,14 : 10 = 0,014, καὶ εἰς

μοῖραι	ἡμίτονα	μοῖραι
0	0,00	90
10	0,17	80
20	0,34	70
30	0,50	60
40	0,64	50
50	0,77	40
60	0,87	30
70	0,94	20
80	0,98	10
90	1 00	0
μοῖραι	συνημίτονα	μοῖραι

αὔξησιν τῆς γωνίας 7°, θὰ ἀντιστοιχῇ αὔξησις τοῦ ἡμιτόνου κατὰ $0{,}014 \times 7 = 0{,}098$, ἢ κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ 0,10. Ἦτοι θὰ εἶνε ημ 37° = 0,50 + 0,10 = 0,60 (κατὰ προσέγγισιν). Ἐὰν θέλωμεν τὸ συν 62°, παρατηροῦμεν ὅτι ἔχομεν εἰς τὸν πίνακα συν 70° = 0,34 καὶ συν 60° = 0,50. Ἄρα, εἰς ἐλάττωσιν τῆς γωνίας κατὰ 10° ἔχομεν αὔξησιν τοῦ συνημιτόνου αὐτῆς κατὰ 0,16· εἰς ἐλάττωσιν 8° τῆς γωνίας (διὰ νὰ ἔχωμεν τὰς 62°), θὰ ἀντιστοιχῇ αὔξησις τοῦ συνημιτόνου αὐτῆς κατὰ $0{,}16 \times 8/10 = 0{,}16 \times 8 = 0{,}128$ ἢ κατὰ 0,13 περίπου. Ἦτοι τὸ συν 62° = 0,34 + 0,13 = 0,47 (κατὰ προσέγγισιν).

Ἀσκήσεις.

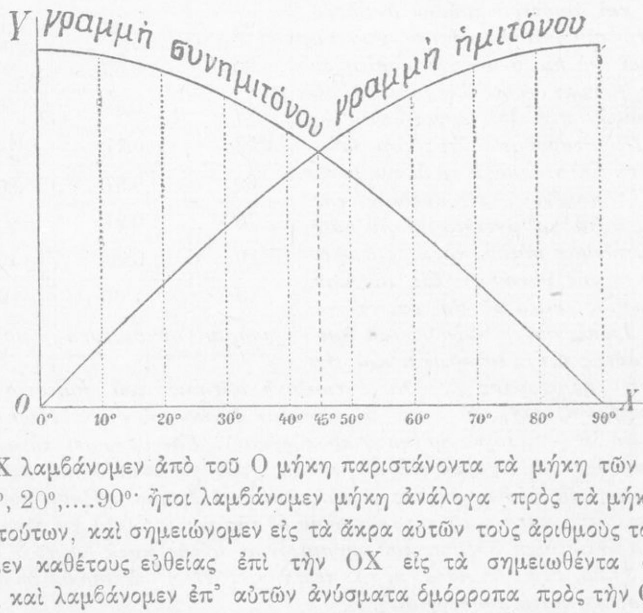
Ὁμὰς πρώτη. 1) Εὕρετε μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ πίνακος τοὺς ἑξῆς ἀριθμούς. α') ημ 27°, ημ 59°, ημ 83°, ημ 3°, ημ 7°, ημ 18°, ημ 9°. β') συν 48°, συν 73°, συν 87°, συν 2°, συν 8°, συν 25°, συν 18°.

2) Ἐξετάσατε μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὴν μεταβολὴν τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου, ὅταν τὸ τόξον μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ 0° μέχρις −90°, ἔπειτα μέχρις −180° καὶ συνεχῶς ἐκεῖθεν μέχρι −270° καὶ −360°.

Ὁμὰς δευτέρα. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τεταρτοκυκλίου, διὰ τοῦ ὁποίου κατεσκευάσθη ὁ ἀνωτέρω πίναξ, εὕρετε τὴν ὀξεῖαν γωνίαν εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ· 1) ἡμίτονον α') 2/3, β') 5/7, γ') 0,4, δ') 0,28. 2) συνημίτονον α') 1/2, β') 0,51, γ') 0,82· δ') 0,38, ε') 0,99 στ') 0,7. 3) Τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἥτις ἔχε συνημίτονον τετραπλάσιον τοῦ ἡμιτόνου. 4) Διατὶ ἡ γωνία 45° πρέπει νὰ ἔχῃ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ἴσα;

Γραφικὴ παράστασις τῆς μεταβολῆς τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου τόξου.

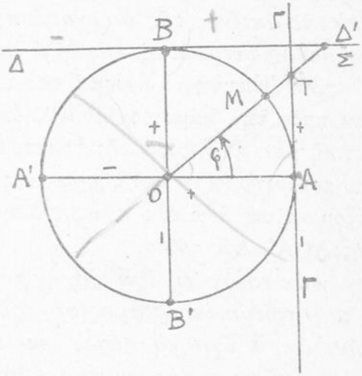
37. Τὴν πορείαν τῆς μεταβολῆς τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου τόξου παριστάνομεν ὡς ἑξῆς γραφικῶς. Λαμβάνομεν δύο εὐθείας ΟΧ καὶ ΟΥ καθέτους ἐπ' ἀλλήλας εἰς τὸ Ο, αἵτινες λέγονται καὶ ἄξονες. Ἐπὶ τοῦ ἄξο-



νος ΟΧ λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ Ο μήκη παριστάνοντα τὰ μήκη τῶν τόξων 0°, 10°, 20°,....90°· ἤτοι λαμβάνομεν μήκη ἀνάλογα πρὸς τὰ μήκη τῶν τόξων τούτων, καὶ σημειώνομεν εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους. Φέρομεν καθέτους εὐθείας ἐπὶ τὴν ΟΧ εἰς τὰ σημειωθέντα σημεῖα αὐτῆς, καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῶν ἀνύσματα ὁμόρροπα πρὸς τὴν ΟΥ καὶ ἔχοντα μήκη ἀφ' ἑνὸς μὲν ἴσα μὲ τὰ ἡμίτονα, ἀφ' ἑτέρου δὲ μὲ τὰ συνητονα τῶν ἀντιστοίχων τόξων. Τὰ ἄκρα τῶν οὕτω σχηματιζομένων ἀνυσμάτων τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων συνδέομεν ἑκάστοτε διὰ συνεχοῦς γραμμῆς, καὶ οὕτω λαμβάνομεν δύο γραμμὰς καμπύλας, μίαν *γραμμὴν τοῦ ἡμιτόνου* καὶ ἄλλην *γραμμὴν τοῦ συνημιτόνου*, καλουμένην. Ἡ γραμμὴ τοῦ ἡμιτόνου ἔχει ἄκρα τὸ σημεῖον Ο τῆς τομῆς τῶν ἀξόνων καὶ τὸ ἄκρον ἀνύσματος ἔχοντος μῆκος 1 καὶ καθέτου ἐπὶ τὸ ἄξονα ΟΧ εἰς τὸ σημεῖον 90°. Ἡ γραμμὴ τοῦ συνημιτόνου διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τοῦ ἄξονος ΟΥ, τοῦ ἀπέχοντος ἀπὸ τοῦ Ο κατὰ μῆκος ἴσον μὲ τὴν μονάδα καὶ διὰ τοῦ σημείου 90° τοῦ ἄξονος ΟΧ. Αἱ δύο αὗται γραμμαὶ τέμνονται εἰς σημεῖον κείμενον εἰς τὸ ἄκρον ἀνύσματος καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα ΟΧ καὶ εἰς τὸ σημεῖον 45°.

Ὁρισμὸς ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης τόξου.

38. Ἔστω γωνία τις ΑΟΜ. Κατασκευάζομεν τριγωνικὸν κύκλον μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Ο τῆς γωνίας, ἔστωσαν δὲ Α καὶ Μ τὰ σημεῖα καθ᾿ ἃ τέμνεται ἡ περιφέρεια ὑπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας. Ὁρίζομεν τὸ σημεῖον Α ὡς ἀρχὴν τῶν τόξων ἐπὶ τῆς περιφερείας, καὶ ΑΜ εἶνε τὸ ἀντίστοιχον τόξον εἰς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ΑΟΜ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΓΑΓ′ καὶ ΔΒΔ′ ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ πρώτου τεταρτημορίου ΑΒ. Προεκτείνομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΜ(ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου ΑΜ) μέχρις ὅτου τμήσῃ τὰς εὐθείας ΓΓ′ καὶ ΔΔ′, ἔστω εἰς τὰ σημεῖα Τ καὶ Σ. Οὕτω ἔχομεν τὰ ἀνύσματα ΑΤ καὶ ΒΣ.



Τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος ΑΤ καλεῖται *ἐφαπτομένη* τοῦ τόξου ΑΜ ἢ τῆς ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὸ γωνίας ΑΟΜ, ὅταν μετρηθῇ ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος ΟΒ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, σημειώνεται δὲ συμβολικῶς ὡς ἑξῆς,

$$\varepsilon\varphi\ (\mathrm{AM})=\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{OB}}=(\mathrm{AT}),\ \text{ἢ}\ \varepsilon\varphi\varphi=(\mathrm{AT}),$$

ἂν διὰ τοῦ φ παραστήσωμεν τὸ τόξον ΑΜ ἢ τὴν γωνίαν ΑΟΜ. Τὸ ἄνυσμα ΑΤ καλεῖται *ἄνυσμα τῆς ἐφαπτομένης* τοῦ τόξου ΑΜ ἢ τῆς γωνίας ΑΟΜ.

Τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος ΒΣ καλεῖται *συνεφαπτομένη* τοῦ τόξου ΑΜ ἢ τῆς γωνίας ΑΟΜ, ὅταν μετρηθῇ ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος ΟΑ καὶ σημειώνεται ὡς ἑξῆς συμβολικῶς,

$$\sigma\varphi\ (\mathrm{AM})=\frac{\mathrm{B\Sigma}}{\mathrm{OA}}=(\mathrm{B\Sigma}),\ \text{ἢ}\ \sigma\varphi\varphi=(\mathrm{B\Sigma}).$$

Τὸ ἄνυσμα ΒΣ καλεῖται *ἄνυσμα τῆς συνεφαπτομένης* τοῦ τόξου ΑΜ ἢ τῆς γωνίας ΑΟΜ.

Κατ᾿ ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν τὴν ἐφαπτομένην καὶ συνεφαπτομένην οἱασδήποτε γωνίας.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν τοὺς ἑξῆς ὁρισμούς.

«Ἐφαπτομένη τόξου τινὸς ἢ γωνίας ἀντιστοίχου εἰς αὐτὸ καλεῖται τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος, τοῦ ἔχοντος ἀρχὴν μὲν τὴν ἀρχὴν τοῦ τόξου ἐν τῷ τριγωνομετρικῷ κύκλῳ, πέρας δὲ τὴν

τομὴν τῆς ἐφαπτομένης εὐθείας εἰς τὴν ἀρχὴν ταύτην τοῦ τόξου ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος τῆς διερχομένης διὰ τοῦ πέρατος αὐτοῦ (ὅταν ὡς μονὰς μετρήσεως ληφθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου)».

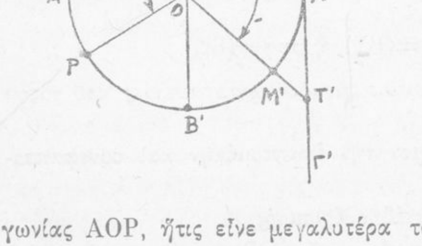
«Συνεφαπτομένη τόξου τινὸς (ἢ γωνίας ἀντιστοίχου εἰς αὐτὸ) καλεῖται τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος, τοῦ ἔχοντος ἀρχὴν μὲν τὸ πέρας τοῦ πρώτου τεταρτημορίου τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, πέρας δὲ τὴν τομὴν τῆς ἐφαπτομένης εὐθείας εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος τῆς διερχομένης διὰ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου (ὅταν ὡς μονὰς μετρήσεως ληφθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου)».

39. Ἐπειδὴ τὸ ἄνυσμα τῆς ἐφαπτομένης τόξου ΑΜ εἶνε παράλληλον πρὸς τὴν διάμετρον ΒΟΒ′, ἕπεται ὅτι, ἡ ἐφαπτομένη τούτου εἶνε θετικὴ μέν, ἂν ἡ τομὴ τῆς ἐφαπτομένης εὐθείας εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου τεταρτημορίου ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος τῆς διερχομένης διὰ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου κεῖται ἄνω τῆς πρώτης διαμέτρου ΑΟΑ′, ἀρνητικὴ δέ, ἂν κάτω τῆς ΑΟΑ′. Διὰ τοῦτο,

«ἂν τόξον τι ἔχῃ ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας μὲν ἐπὶ τοῦ πρώτου ἢ τοῦ τρίτου τεταρτημορίου τοῦ κύκλου, ἔχει ἐφαπτομένην θετικήν, ἂν δ' ἔχῃ τὸ πέρας ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἢ τοῦ τετάρτου τεταρτημορίου, ἡ ἐφαπτομένη αὐτοῦ εἶνε ἀρνητική».

40. Ὁμοίως παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ συνεφαπτομένη τόξου τινὸς εἶνε θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἂν ἡ τομὴ τῆς ΔΒΔ′ ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος ΟΜ κεῖται δεξιὰ τῆς διαμέτρου ΒΟΒ′ ἢ ἀριστερὰ αὐτῆς. Ἐπομένως,

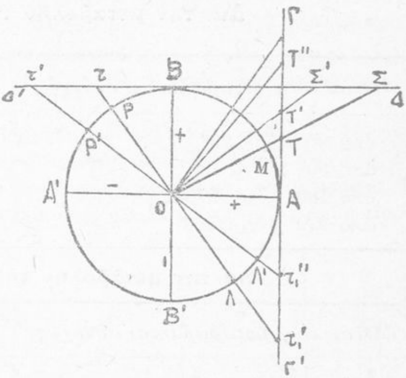
«ἂν τόξον τι ἔχῃ ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας ἐπὶ τοῦ πρώτου ἢ τρίτου τεταρτημορίου, ἔχει συνεφαπτομένην θετικήν, ἂν δ' ἔχῃ τὸ πέρας ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἢ τοῦ τετάρτου τεταρτημορίου, ἔχει συνεφαπτομένην ἀρνητικήν».



Κατὰ τ' ἀνωτέρω ἡ μὲν ἐφαπτομένη τῆς ἀρνητικῆς γωνίας ΑΟΜ′ εἶνε ὁ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς (ΑΤ′), ἡ δὲ συνεφαπτομένη αὐτῆς ὁ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς (ΒΣ′). Τῆς θετικῆς γωνίας ΑΟΡ, ἥτις εἶνε μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος δύο ὀρθῶν γωνιῶν ἢ τῶν 180°, ἡ μὲν ἐφαπτομένη εἶνε ὁ θετικὸς ἀριθμὸς (ΑΤ), ἡ δὲ συνεφαπτομένη ὁ θετικὸς ἀριθμὸς (ΒΣ).

Περὶ τῆς μεταβολῆς τῆς ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης μετὰ τοῦ τόξου.

41. Ἂν τὸ πέρας Μ τοῦ τόξου τῆς γωνίας ΑΟΜ κινῆται συνεχῶς κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἀπὸ τοῦ σημείου Α πρὸς τὸ Β, λαμβάνον διαφόρους θέσεις ἐπ᾽ αὐτῆς, τὸ μὲν ἄνυσμα τῆς ἐφαπτομένης θὰ εἶνε τὸ ΑΤ, ΑΤ′,... τῆς δὲ συνεφαπτομένης τὸ ΒΣ, ΒΣ′,... Ὅταν τὸ πέρας πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β, ὅτε τὸ τόξον θὰ εἶνε 90°, τὸ μὲν μῆκος τοῦ ἀνύσματος τῆς ἐφαπτομένης αὐτοῦ εἶνε θετικὸν καὶ ὑπερβαίνει πάντα ἀριθμόν, ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς ΟΒ εἶνε παράλληλος πρὸς τὴν ΑΤ, τὸ δὲ τῆς συνεφαπτομένης ἰσοῦται μὲ μηδέν. Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ σύμβολου ∞ τὴν ἄπειρον θετικὴν τιμήν, θὰ ἔχωμεν εφ $90^\circ = \infty$, καὶ σφ $90^\circ = 0$.



Ὅταν τὸ πέρας συμπίπτῃ μὲ τὸ Α, τότε ἡ μὲν ἐφαπτομένη τοῦ τόξου 0° ἰσοῦται μὲ μηδέν, ἡ δὲ συνεφαπτομένη μὲ ∞. Διότι ἡ ἀκτὶς ΟΑ (ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ πέρας Α τοῦ τόξου τούτου) εἶνε παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΔ, ἄρα τὸ ἄνυσμα τῆς συνεφαπτομένης 0° εἶνε θετικὸν καὶ τὸ μῆκος αὐτοῦ ὑπερβαίνει πάντα ἀριθμόν.

Ὅταν τὸ πέρας τοῦ τόξου κινῆται ἀπὸ τοῦ Β συνεχῶς ἐπὶ τοῦ δευτέρου τεταρτημορίου μέχρι τοῦ Α′, τὸ ἄνυσμα τῆς ἐφαπτομένης τοῦ τόξου εἶνε ἀρνητικὸν καὶ ἐλαττοῦται ἀπολύτως. Ὅταν τὸ πέρας πέσῃ ἐπὶ τοῦ Α′, ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου 180° ἰσοῦται μὲ μηδέν. Ἤτοι ἔχομεν εφ $180^\circ = 0$. Ὁμοίως παρατηροῦμεν ὅτι καὶ τὸ ἄνυσμα τῆς συνεφαπτομένης τοῦ τόξου εἶνε ἀρνητικόν, ὅταν τὸ Μ κινῆται συνεχῶς ἐπὶ τοῦ δευτέρου τεταρτημορίου, καὶ τὸ μῆκος αὐτοῦ, ἀπολύτως θεωρούμενον, αὐξάνεται, ἂν τὸ Μ κινῆται ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α′, ὑπερβαίνει δὲ πάντα ἀριθμόν, ὅταν τὸ τόξον γίνῃ 180°. Οὕτω ἔχομεν σφ $180^\circ = -\infty$.

Ὁμοίως προχωροῦντες εὑρίσκομεν ὅτι, ὅταν τὸ Μ κινῆται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ Α′ μέχρι τοῦ Β′ ἐπὶ τοῦ τρίτου τεταρτημορίου, ἡ μὲν ἐφαπτομένη τοῦ τόξου ΑΜ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τοῦ ∞, ἡ δὲ συνεφαπτομένη αὐτοῦ ἐλαττοῦται ἀπὸ τοῦ ∞ μέχρι τοῦ μηδενός. Ἐὰν τέλος τὸ Μ κινῆται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ Β΄ πρὸς τὸ Α ἐπὶ τοῦ τετάρτου τεταρτημορίου, ἡ μὲν ἐφαπτομένη τοῦ τόξου ΑΜ, οὖσα ἀρνητική, μεταβάλλεται ἀπὸ — ∞ μέχρι τοῦ μηδενός, ἡ δὲ συνεφαπτομένη ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τοῦ — ∞.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τοὺς ἑξῆς πίνακας, ἂν παραστήσωμεν διὰ φ τὸ τόξον ΑΜ ἢ τὴν ἀντίστοιχον αὐτοῦ γωνίαν ΑΟΜ.

Διὰ τὴν μεταβολὴν τῆς ἐφαπτομένης

Ὅταν τὸ φ μεταβάλλεται συνεχῶς	*ἡ εφ φ μεταβάλλεται συνεχῶς*
ἀπὸ 0^0 μέχρις 90^0	ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ + ∞
ἀπὸ 90^0 μέχρις 180^0	ἀπὸ — ∞ μέχρι τοῦ 0
ἀπὸ 180^0 μέχρι 270^0	ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ + ∞
ἀπὸ 270^0 μέχρι 360^0	ἀπὸ — ∞ μέχρι τοῦ 0

διὰ τὴν μεταβολὴν τῆς συνεφαπτομένης

Ὅταν τὸ φ μεταβάλλεται συνεχῶς	*ἡ σφ φ μεταβάλλεται συνεχῶς*
ἀπὸ 0^0 μέχρις 90^0	ἀπὸ + ∞ μέχρι τοῦ θ
ἀπὸ 90^0 μέχρις 180^0	ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ — ∞
ἀπὸ 180^0 μέχρι 270^0	ἀπὸ + ∞ μέχρι τοῦ 0
ἀπὸ 270^0 μέχρι 360^0	ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ — ∞

42. Παρατηροῦμεν ὅτι ὄχι μόνον ἴσα τόξα (ἔχοντα τὰ αὐτὰ πέρατα) ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην καὶ συνεφαπτομένην, ἀλλὰ καὶ πάντα τὰ τόξα, τὰ διαφέροντα κατὰ 180^0 ἢ κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον τῶν 180^0. Διότι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι ἀκτῖνες εἰς τὰ πέρατα τοιούτων τόξων κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Οὕτω τὰ τόξα ΑΜ΄ καὶ ΑΡ΄ (βλέπε τὸ σχῆμα τῆς σελίδος 18) διαφέροντα κατὰ 180^0, ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην (ΑΤ΄) καὶ τὴν αὐτὴν συνεφαπτομένην (ΒΣ΄).

43. ***Τέμνουσα καὶ συντέμνουσα.*** Καλοῦμεν *τέμνουσαν* μὲν τόξ- γωνίας τινὸς φ τὸν λόγον $\frac{1}{\text{συνφ}}$, *συντέμνουσαν* δὲ τὸν λόγον $\frac{1}{\text{ημφ}}$ παριστάνομεν τὴν μὲν πρώτην διὰ τοῦ τεμ. φ, τὴν δὲ δευτέραν διὰ τοῦ συντ.φ. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν τεμ.φ$= \frac{1}{\text{συνφ}}$, συντ.φ $= \frac{1}{\text{ημφ}}$.

44. Οἱ ἀριθμοὶ *ἡμίτονον, συνημίτονον, ἐφαπτομένη, συνεφαπτομένη, τέμνουσα* καὶ *συντέμνουσα* τόξου τινὸς ἢ τῆς ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὸ γωνίας λέγονται καὶ ἁπλῶς *οἱ ἓξ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ* τοῦ τόξου ἢ τῆς ἀντιστοίχου αὐτοῦ γωνίας. Ἐκ τούτων χρησιμοποιοῦνται οἱ τέσσαρες πρῶτοι, ἐλάχιστα δὲ ἡ τέμνουσα καὶ συντέμνουσα, καὶ διὰ τοῦτο δὲν θὰ ἐξετάσωμεν αὐτὰς λεπτομερῶς κατωτέρω.

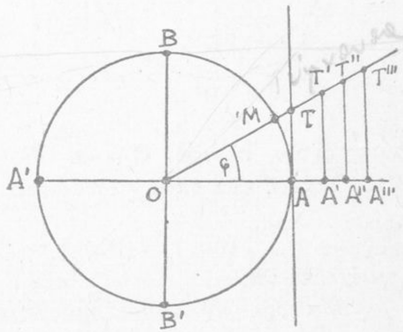
Ἀσκήσεις.

1) Κατασκευάσατε τριγωνομετρικὸν κύκλον καὶ γωνίαν 45^0. Δείξατε ὅτι ἡ ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη 45^0 εἶνε ἴση μὲ $+1$. Τίνων ἄλλων γωνιῶν ἡ ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη ἰσοῦται μὲ $+1$;

2) Δείξατε ὅτι ἡ εφ. $-45^0 = -1$, σφ $-45^0 = -1$. Τίνων ἄλλων γωνιῶν ἡ ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη ἰσοῦται μὲ -1;

3) Δείξατε μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου ὅτι, ἂν δύο τόξα εἶνε ἀντίθετα, ἔχουν ἐφαπτομένας καὶ συνεφαπτομένας ἀντιθέτους.

4) Κατασκευάσατε τριγωνομετρικὸν κύκλον καὶ εὕρετε τὰ ἀνύσματα ΑΤ καὶ ΒΣ τῆς ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης ὀξείας τινὸς γωνίας ΑΟΜ. Παρατηρήσατε ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας εἶνε ὁ λόγος τῆς καθέτου πλευρᾶς ΑΤ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΟΤ (ἔχοντος καθέτους πλευρὰς τὸ ἄνυσμα ΑΤ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ ἴσην μὲ τὴν μονάδα), τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς δοθείσης γωνίας, διὰ τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς αὐτοῦ. Φέρατε ἐκ τῶν διαφόρων σημείων τῆς ἀκτῖνος ΟΜ (προεκτεινομένης) καθέτους ἐπὶ τὴν ΟΑ (προεκτεινομένην), ὅτε σχηματίζονται



ὀρθογώνια τρίγωνα, ὅμοια πρὸς τὸ ἀρχικὸν ΟΑΤ. Δείξατε ὅτι· α΄) «*ἡ ἐφαπτομένη τῆς δοθείσης ὀξείας γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς καθέτου πλευρᾶς ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων τούτων τριγώνων, τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς γωνίας, πρὸς τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν αὐτοῦ*»· β΄) «*ἡ συνεφαπτομένη τῆς γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς καθέτου πλευρᾶς τῆς παρακειμένης εἰς τὴν γωνίαν πρὸς τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν οἱουδήποτε ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων*».

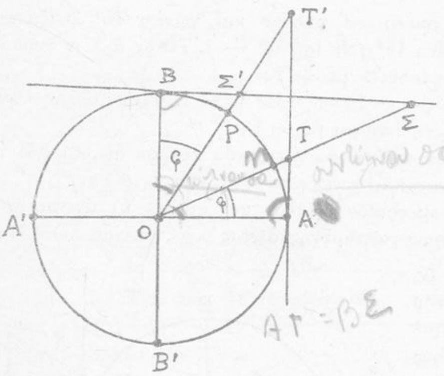
Σχέσεις μεταξὺ ἐφαπτομένων καὶ συνεφαπτομένων συμπληρωματικῶν τόξων.

45. Ἔστωσαν ΑΟΜ $=\varphi$ καὶ ΑΟΡ $=90^0-\varphi$ δύο γωνίαι συμπληρωματικαὶ ἐν τῷ τριγωνομετρικῷ κύκλῳ, ἔχουσαι τὴν ΟΑ ὡς πρώτην πλευράν, ΑΜ καὶ ΑΡ τ' ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα, πρὸς δὲ (ΑΤ),(ΑΤ΄) καὶ

(ΒΣ), (ΒΣ′) αἱ ἐφαπτόμεναι καὶ συνεφαπτόμεναι αὐτῶν. Θὰ δείξωμεν ὅτι μεταξὺ τούτων ὑπάρχουν αἱ ἑξῆς σχέσεις

$$\text{εφ}\,(90^\circ - \varphi) = \text{σφ}\,\varphi, \quad \text{σφ}\,(90^\circ - \varphi) = \text{εφ}\varphi.$$

Ἀπόδειξις. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΑΤ καὶ ΟΒΣ′ εἶνε ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς καθέτους πλευρὰς ΟΑ καὶ ΟΒ ἴσας καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ΑΟΜ καὶ ΡΟΒ ἴσας (ἐκ κατασκευῆς). Ἑπομένως ἔχομεν (ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν πλευρῶν τῶν κειμένων ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν) (ΒΣ′) = (ΑΤ) ἢ σφ $(90^\circ - \varphi)$ = εφφ. Ἐπίσης ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΑΤ′ καὶ ΟΒΣ εἶνε ἴσα (ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν πλευρῶν ΟΑ καὶ ΟΒ καὶ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ΑΟΤ′ καὶ ΒΟΣ, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἰσοῦται μὲ $(90^\circ - \varphi)$ ἔχομεν



$$(\text{ΑΤ}') = (\text{ΒΣ}) \text{ ἢ εφ } (90^\circ - \varphi) = \text{σ φ φ}..$$

ἤτοι ἔχομεν ὅτι,

«*ἐὰν δύο τόξα εἶνε συμπληρωματικά, ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἑνὸς ἰσοῦται μὲ τὴν συνεφαπτομένην τοῦ ἄλλου*».

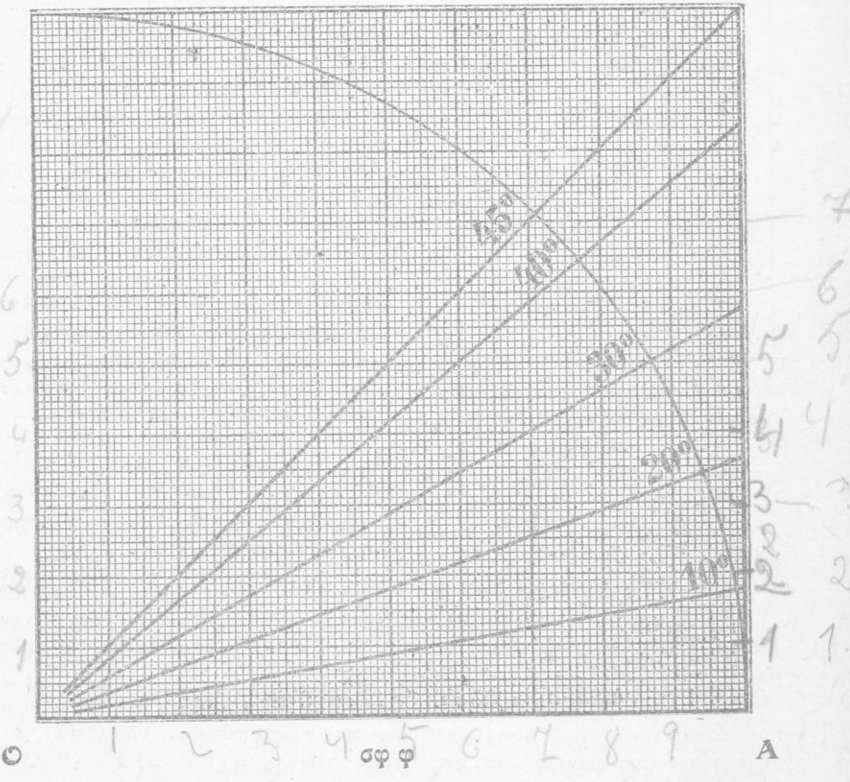
Γραφικὴ εὕρεσις τῶν ἐφαπτομένων καὶ συνεφαπτομένων ὀξειῶν γωνιῶν.

46. *Ἡ ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη γωνιῶν ὀξειῶν ἀκεραίου ἀριθμοῦ μοιρῶν εὑρίσκεται (κατὰ προσέγγισιν) ὡς ἑξῆς γραφικῶς.*

Κατασκευάζομεν τεταρτοκύκλιον ΟΑΒ μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν μονάδα τοῦ μήκους. Διαιροῦμεν τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ τόξον ΑΒ εἰς ἐννέα ἴσα μέρη, ὅτε ἕκαστον αὐτῶν ἰσοῦται μὲ 10°, καὶ σημειώνομεν εἰς τὰ ἄκρα τῶν μερῶν κατὰ σειράν 0°, 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80° καὶ 90°: Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΒ καὶ τὰς ἐφαπτομένας εὐθείας εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ τόξου Α Β, καθὼς καὶ τὰς ἀκτῖνας εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἴσων τόξων. Εὑρίσκομεν τὰς τομὰς τῶν ἀκτίνων τούτων, προεκτεινομένων, μὲ τὰς ἐφαπτομένας εὐθείας εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, καὶ μετροῦντες τ' ἀνύσματα τῆς ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης ἑκάστου τῶν τόξων 10°, 20°, ... ἔχομεν τοὺς ζητουμένους ἀριθμούς.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν μόνον τὰς ἐφαπτομένας τῶν τόξων, ὅτε ἔχομεν καὶ τὰς συνεφαπτομένας τῶν συμπληρωματικῶν πρὸς αὐτὰ τόξων. Εἰς τὸ κατωτέρω σχῆμα εἶνε χαραγμένα τὰ ἀνύσματα τῶν ἐφαπτομένων τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἀπὸ 0⁰ μέχρι 45⁰ (ἤτοι τῶν 0⁰, 10⁰, 20⁰ 30⁰,

B



O σφ φ A

40⁰, 45⁰), οὕτω δὲ ἔχομεν ἐκ τῆς μετρήσεως αὐτῶν τὰς ἐφαπτομένας τῶν γωνιῶν τούτων καὶ τὰς συνεφαπτομένας τῶν συμπληρωματικῶν πρὸς αὐτὰς γωνιῶν (ἤτοι τῶν 90⁰, 80⁰ 70⁰, 60⁰, 50⁰ καὶ 45⁰), αἵτινες δίδονται ὑπὸ τοῦ κάτωθι πίνακος (βλέπε εἰς τὴν σελίδα 24).

Αἱ μὲν δύο πρῶται στῆλαι τοῦ πίνακος τούτου ἔχουν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν μοιρῶν τῶν τόξων ἀνὰ 10⁰, καὶ τὰς ἐφαπτομένας αὐτῶν πρὸς τὰ δεξιά, ἡ δὲ τρίτη στήλη ἔχει τοὺς ἀριθμοὺς τῶν μοιρῶν πρὸς τ' ἀριστερὰ δ' αὐτῶν ἀναγράφονται αἱ συνεφαπτόμεναι τούτων.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἐφαπτομένης ὀξείας γωνίας μικροτέρας τῶν 45⁰, καὶ μὴ περιεχομένης εἰς τὸν πίνακα καθὼς καὶ τῆς συνεφαπτομένης ὀ-

ξείας γωνίας μεγαλυτέρας τῶν 45°, ἐργαζόμεθα καθὼς καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου.

Ἐὰν π. χ. θέλωμεν τὴν ἐφ. 38°, παρατηροῦμεν ὅτι ἐφ 30°=0,58 καὶ ἐφ 40°=0,84· ἄρα, εἰς αὔξησιν τῆς γωνίας κατὰ 10°, ἔχομεν αὔξησιν τῆς ἐφαπτομένης 0,26 καὶ εἰς αὔξησιν 8°, θὰ ἀντιστοιχῇ αὔξησις κατὰ προσέγγισιν 0,26 × 8 : 10=0,208 ἢ 0,21 (κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ). Δηλαδὴ εἶνε ἐφ 38°=0,79.

μοῖραι	ἐφαπτ.	μοῖραι
0	0,00	90
10	0,18	80
20	0,36	70
30	0.58	60
40	0,84	50
50	1,19	40
60	1,73	30
70	2,75	20
80	5,67	10
90	∞	0
μοῖραι	συνεφαπτ.	μοῖραι

Προκειμένου ὅμως περὶ τῆς ἐφαπτομένης ὀξείας γωνίας μεγαλυτέρας τῶν 45° δὲν ἰσχύει ἡ μέθοδος αὕτη. Διότι αἱ μεταβολαὶ τῶν ἐφαπτομένων καὶ συνεφαπτομένων, αἱ προκύπτουσαι ἐκ τῶν διαφορῶν τῶν γωνιῶν, δὲν εἶνε οὔτε κατὰ προσέγγισιν ἀνάλογοι. Διὰ τοῦτο διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἐφαπτομένης τοιούτων γωνιῶν, καθὼς καὶ οἱασδήποτε γωνίας, μεταχειριζόμεθα τύπους, οἵτινες δίδουν τὴν ἐφαπτομένην καὶ συνεφαπτομένην ἑνὸς τόξου, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον αὐτοῦ, καὶ περὶ τῶν ὁποίων θὰ γίνῃ λόγος κατωτέρω.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Εὕρετε μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ἀνωτέρω πίνακος.α΄) εφ 18° εφ 43°, εφ 27°, εφ 12°, εφ 7°. β΄) σφ 56°, σφ 88°, σφ 79°, σφ 86°, σφ 56°.

2) Διατὶ ἡ ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη 45° εἶνε ἴσαι;

3) Ἐξετάσατε τὴν μεταβολὴν τῆς ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, ὅταν τὸ τόξον μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ 0° μέχρις— 90°, — 180°, — 270°, — 360°.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τεταρτοκυκλίου διὰ τοῦ ὁποίου κατασκευάζεται ὁ πίναξ τῶν ἐφαπτομένων καὶ συνεφαπτομένων τῶν ὀξειῶν γωνιῶν εὕρετε τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἥτις ἔχει ἐφαπτομένην α΄) 0,75. β΄) 1,5. γ΄) 0,68, δ΄) 2,26, ε΄) 0,5.

2) Ποῖαι γωνίαι ἔχουν τοὺς προηγουμένους ἀριθμοὺς ὡς συνεφαπτομένας;

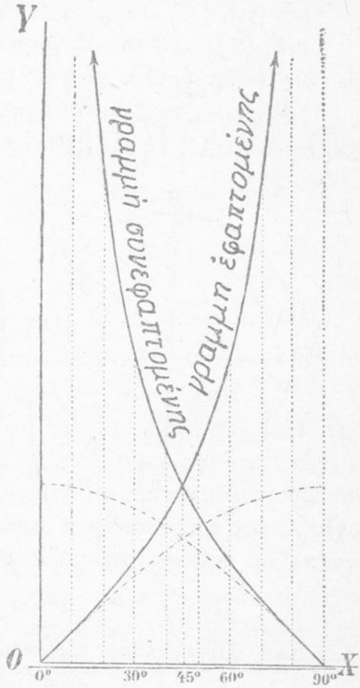
3) Ὁμοίως εὕρετε τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἥτις ἔχει συνεφαπτομένην α΄) 0,8 β΄) 2,25. γ΄) 0,6, δ΄) 1,42.

4) Εὕρετε ὁμοίως τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, τὴν ἔχουσαν ἐφαπτομένην διπλάσιον, ἢ τριπλάσιον, ἢ 1,5 φορὰς τὸ ἡμίτονον αὐτῆς.

Ἰωαν. Γ. Ἀργυραῖος

Γραφικὴ παράστασις τῆς μεταβολῆς τῆς ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης τόξου.

47. *Διὰ νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τῆς ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης μετὰ τοῦ τόξου, λαμβάνομεν δύο εὐθείας ΟΧ καὶ ΟΥ, τεμνομένας καθέτως εἰς τὸ Ο αἵτινες λέγονται ἄξονες. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΧ λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ Ο μήκη ἀνάλογα πρὸς τὰ μήκη τῶν τόξων 0⁰, 10⁰, 20⁰,...... 90⁰, καὶ σημειώνομεν εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους. Φέρομεν καθέτους εὐθείας ἐπὶ τὴν ΟΧ εἰς τὰ σημειωθέντα σημεῖα αὐτῆς καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν ἀνύσματα ὁμόρροπα πρὸς τὴν ΟΥ καὶ ἔχοντα μήκη ἴσα μὲ τὰς ἐφαπτομένας ἀφ' ἑνὸς καὶ μὲ τὰς συνεφαπτομένας ἀφ' ἑτέρου τῶν τόξων, τῶν ὁποίων αἱ μοῖραι εἶνε σημειωμέναι εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτῶν. Τὰ ἄκρα τῶν ἀνυσμάτων τῶν ἐφαπτομένων συνδέομεν διὰ γραμμῆς, καθὼς καὶ τὰ τῶν συνεφαπτομένων, καὶ οὕτω προκύπτουν δύο γραμμαὶ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη λέγεται γραμμὴ τῆς ἐφαπτομένης ἡ δὲ δευτέρα γραμμὴ τῆς συνεφαπτομένης. Καθὼς παρατηροῦμεν ἑκάστη τῶν γραμμῶν τούτων ἐκτείνεται εἰς ἄπειρον, καὶ ἡ μὲν πρώτη διέρχεται*



διὰ τοῦ Ο, ἡ δὲ δευτέρα διὰ τοῦ σημείου τὸ ὁποῖον φέρει τὸν ἀριθμὸν 90⁰ τοῦ ἄξονος ΟΧ, τέμνονται δὲ αἱ γραμμαὶ αὐταὶ εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ἀνύσματος τῆς ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης τῶν 45⁰. Ἐπὶ τοῦ ἀνύσματος αὐτοῦ τέμνονται, ὡς εἴδομεν, καὶ αἱ γραμμαὶ τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου τῆς γωνίας τῶν 45⁰. Ἐκ τῆς γραμμῆς τῆς ἐφαπτομένης παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ μὲν ἐφαπτομένη αὐξάνεται πολὺ ταχέως, ὅταν ἡ γωνία ὑπερβῇ τὰς 45⁰, ἡ δὲ συνεφαπτομένη ἐλαττοῦται βραδέως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ.

Σχέσις μεταξὺ τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

Σχέσις μεταξὺ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου γωνίας.

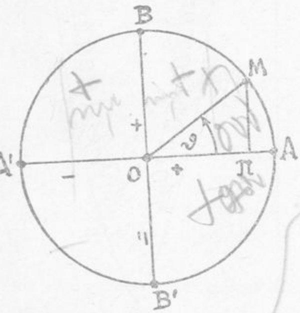
48. Ἔστω γωνία τις ἐπίκεντρος ἐν τῷ τριγωνομετρικῷ κύκλῳ ΑΟΜ=θ. Θὰ δείξωμεν ὅτι μεταξὺ τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου τῆς γωνίας ταύτης ὑπάρχει ἡ σχέσις

$$\textbf{ημ}^2\,\theta + \textbf{συν}^2\,\theta = 1$$

ἤτοι ὅτι,

«τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου γωνίας τινὸς ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα».

Ἀπόδειξις. Ἔστω Π ἡ προβολὴ τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τῆς πρώτης διαμέτρου ΑΟΑ′. Τὸ μὲν (ΠΜ)=μὲ τὸ ημθ, τὸ δὲ (ΟΠ)=μὲ τὸ συνθ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΠΜ ἔχομεν(κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα),



$$(\text{ΠΜ})^2 + (\text{ΟΠ})^2 = 1.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα τὸ $(\text{ΠΜ})^2$ καὶ $(\text{ΟΠ})^2$ διὰ τῶν ἴσων αὐτῶν εὑρίσκομεν

$$\eta\mu^2\,\theta + \sigma\upsilon\nu^2\,\theta = 1.$$

Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἀνωτέρω σχέσεως εὑρίσκομεν τὸν ἕνα ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν, ὅταν δοθῇ ὁ ἄλλος.

Οὕτω π.χ., λύοντες τὴν ἀνωτέρω σχέσιν ὡς πρὸς τὸ $\eta\mu^2\,\theta$ εὑρίσκομεν, $\eta\mu^2\theta = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta$ καὶ ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῶν ἴσων τούτων

$$\eta\mu\theta = \pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}.$$

Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \pm\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}.$$

Ἐκ τῶν δύο σημείων τοῦ ριζικοῦ λαμβάνομεν τὸ + ἢ τὸ — παρατηροῦντες τὴν θέσιν τοῦ πέρατος τοῦ τόξου, τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν γωνίαν. Οὕτω τὸ ἡμίτονον θὰ εἶνε θετικὸν μέν, ἂν τὸ πέρας κεῖται εἰς τὸ πρῶτον ἢ τὸ δεύτερον τεταρτημόριον, ἀρνητικὸν δέ, ἂν εἰς τὸ τρίτον ἢ τὸ τέταρτον. Τὸ συνημίτονον εἶνε θετικόν, ἂν τὸ πέρας κεῖται εἰς τὸ πρῶτον ἢ τὸ τέταρτον τεταρτημόριον, ἄλλως ἀρνητικόν.

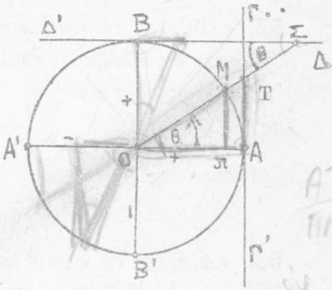
Ἐφαρμογή. *Ἂν εἶνε ημ $30^0 = 0{,}5$ νὰ εὑρεθῇ τὸ συν 30^0.*

Κατὰ τ᾽ ἀνωτέρω ἔχομεν συν $30^0 = \sqrt{1-0{,}25} = \sqrt{3}:2$

Ἔκφρασις τῆς ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης γωνίας διὰ τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου αὐτῆς.

49. Ἔστω γωνία τις ΑΟΜ = θ ἐν τῷ τριγωνομετρικῷ κύκλῳ, (ΠΜ) καὶ (ΟΠ) τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον, (ΑΤ) ἡ ἐφαπτομένη καὶ (ΒΣ) ἡ συνεφαπτομένη τῆς γωνίας. Τὰ τρίγωνα ΟΠΜ καὶ ΟΑΤ εἶνε ὅμοια (ὡς ὀρθογώνια ἔχοντα τὴν γωνίαν θ κοινήν), ἑπομένως ἔχομεν (τὴν ἀναλογίαν τῶν ὁμολόγων πλευρῶν),

$$\frac{(\mathrm{AT})}{(\Pi\,\mathrm{M})}=\frac{(\mathrm{OA})}{(\mathrm{O}\Pi)}.$$



Ἀντικαθιστῶντες τὸ μὲν (ΟΑ) διὰ τῆς μονάδος, τὸ δὲ (ΑΤ), (ΠΜ) καὶ (ΟΠ) διὰ τῶν ἴσων αὐτῶν, εὑρίσκομεν $\frac{\text{εφθ}}{\text{ημθ}}=\frac{1}{\text{συνθ}}$ καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰ ἴσα ἐπὶ ημθ ἔχομεν

$$\boxed{\text{εφθ}=\frac{\text{ημθ}}{\text{συνθ}}} \qquad (1)$$

Ἤτοι, *«ἡ ἐφαπτομένη γωνίας τινὸς ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ ἡμιτόνου διὰ τοῦ συνημιτόνου τῆς γωνίας».*

Παρατηρητέον ὅτι ἡ ἀνωτέρω σχέσις ἀληθεύει οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε ἡ δοθεῖσα γωνία θ. Διότι, ἂν π.χ. τὸ πέρας τοῦ τόξου τῆς γωνίας κεῖται ἐν τῷ δευτέρῳ τεταρτημορίῳ, τὰ ἀνύσματα τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ συνημιτόνου αὐτῆς θὰ εἶνε ἀρνητικά, καὶ οἱ ἀνωτέρω λόγοι θὰ εἶνε ἴσοι ὄχι μόνον ἀπολύτως ἀλλὰ καὶ κατὰ σημεῖον.

50. Καθ' ὅμοιον τρόπον παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΟΠΜ καὶ ΟΒΣ εἶνε ὅμοια (ὡς ὀρθογώνια ἔχοντα τὰς γωνίας ΠΟΜ καὶ ΒΣΟ ἴσας ὡς ἐντὸς ἐνναλὰξ παραλλήλων εὐθειῶν). Ἑπομένως ἔχομεν (τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν τῶν ὁμολόγων πλευρῶν) $\frac{(\mathrm{B}\Sigma)}{(\mathrm{O}\Pi)}=\frac{(\mathrm{OB})}{(\Pi\mathrm{M})}$. Ἀλλ' εἶνε (ΒΣ)==σφθ, (ΟΠ)=συνθ, (ΟΒ) = 1, (ΠΜ) = ημθ καὶ ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν (ἀφοῦ πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἴσα ἐπὶ συνθ)

$$\boxed{\text{σφθ}=\frac{\text{συνθ}}{\text{ημθ}}} \qquad (2)$$

Ἤτοι, *«ἡ συνεφαπτομένη γωνίας τινὸς ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ συνημιτόνου διὰ τοῦ ἡμιτόνου τῆς γωνίας».*

51. Συγκρίνοντες τὰς ἀνωτέρω τιμὰς (1) καὶ (2) τῆς εφθ καὶ σφθ παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ μία τούτων ἰσοῦται μὲ τὴν ἀντίστροφον τιμὴν τῆς ἄλλης. Πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν

$$\boxed{\text{εφθ. σφθ}=1.} \qquad (3)$$

Ἤτοι, *«τὸ γινόμενον τῆς ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης γωνίας τινὸς ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα».*

Ἔκφρασις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν δι' ἑνὸς ἐξ αὐτῶν.

52. «*Δίδεται τὸ ημθ καὶ ζητοῦνται οἱ συνθ, εφθ, σφθ*».

Ἔχομεν ὡς ἐδείξαμεν (σελὶς 26) $\text{συν}\,\theta = \pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\,\theta}$.

Ἑπομένως εἶνε καὶ

$$\text{εφ}\theta = \frac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta} = \frac{\text{ημ}\theta}{\pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\theta}}$$

$$\text{σφ}\theta = \frac{\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta} = \frac{\pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\theta}}{\text{ημ}\theta}.$$

53. «*Δίδεται τὸ συνθ καὶ ζητοῦνται οἱ ημθ, εφθ, σφθ*»,

Ἔχομεν ὡς ἐδείξαμεν (σελὶς 26). $\text{ημ}\theta = \pm\sqrt{1-\text{συν}^2\,\theta}$.

Ἑπομένως εἶνε καὶ

$$\text{εφ}\theta = \frac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta} = \frac{\pm\sqrt{1-\text{συν}^2\theta}}{\text{συν}\theta}$$

$$\text{σφ}\theta = \frac{\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta} = \frac{\text{συν}\theta}{\pm\sqrt{1-\text{συν}^2\theta}}.$$

54. «*Δίδεται ἡ εφθ καὶ ζητοῦνται οἱ ημθ, συνθ, σφθ*».

Ἔχομεν ὡς γνωστὸν (σελὶς 26) $\text{ημ}^2\,\theta + \text{συν}^2\,\theta = 1$,

καὶ (σελὶς 27) $\dfrac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta} = \text{εφ}\theta.$

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων ὡς πρὸς τὸ συνθ ἔχομεν $\text{συν}^2\theta.\ \text{εφ}^2\theta + \text{συν}^2\,\theta = 1$,

ἢ $\text{συν}^2\theta\,(1 + \text{εφ}^2\,\theta) = 1$,

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν (διαιροῦντες τὰ ἴσα διὰ $1 + \text{εφ}^2\theta$ καὶ ἐξάγοντες τὴν ῥίζαν)

5 $$\boxed{\text{συν}\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\text{εφ}^2\theta}}}.$$

Διὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ ἡμιτόνου διὰ τῆς ἐφαπτομένης, ἀντικαθιστῶμεν τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ συνθ εἰς τὴν ἰσότητα $\text{ημ}\theta = \text{εφ}\theta.\ \text{συν}\theta$ καὶ εὑρίσκομεν

6 $$\boxed{\text{ημ}\theta = \frac{\text{εφ}\theta}{\pm\sqrt{1+\text{εφ}^2\theta}}}.$$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς σφθ ἔχομεν $\text{σφ}\theta.\ \text{εφ}\theta = 1$ ὡς εὕρομεν (σελὶς 27) ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\text{σφ}\theta = \dfrac{1}{\text{εφ}\theta}$.

55. «*Δίδεται ἡ σφθ καὶ ζητοῦνται ἡ εφθ, συνθ, ημθ*».

Διὰ τὴν εφθ ἔχομεν ἐκ τῆς σχέσεως $\text{εφ}\theta.\ \text{σφ}\theta = 1$,

$$\text{εφ}\theta = \frac{1}{\text{σφ}\theta}.$$

Διὰ τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ἔχομεν

$$ημ^2θ = \frac{ημ^2θ}{1} = \frac{ημ^2θ}{ημ^2θ+συν^2θ} = \frac{1}{1+\frac{συν^2θ}{ημ^2θ}} = \frac{1}{1+σφ^2θ},$$

Ἄρα εἶνε
$$ημ\,θ = \frac{1}{\pm\sqrt{1+σφ^2θ}}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν
$$συν\,θ = \frac{σφθ}{\pm\sqrt{1+σφ^2θ}}.$$

56. Ἐφαρμογαί. *1) Δίδεται ὅτι εἶνε ημ 30°=0,5. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου 30°.*

Ἔχομεν $συν\,30^0 = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$

$$εφ\,30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \quad \text{καὶ } σφ\,30^0 = \sqrt{3}.$$

2) «Ἂν εἶνε σφ 20=2,75 νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας 20°».

Ἔχομεν $εφ\,20^0 = 1:2,75 = 0,364 = 0,36$ (περιοριζόμενοι εἰς τὰ δύο πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία). Ἐπίσης ἔχομεν

$$ημ\,20^0 = 1:\sqrt{1+(2,75)^2} = 0,34..$$

καὶ
$$συν\,20^0 = \sqrt{1-(0,342)^2} = 0,94..$$

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λοιποὶ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί, ὅταν δίδεται εἷς ἐξ αὐτῶν διὰ τῶν κατωτέρω ἰσοτήτων.

1) $ημθ = 0,64.$ 2) $ημθ = \frac{4}{5}$. 3) $ημθ = \sqrt{\frac{λ^2-8}{λ^2+1}}$

4) $συνθ = 0,87.$ 5) $συνθ = \frac{12}{13}$, 6) $συνθ = \sqrt{\frac{α^2}{α^2+1}}$

7) $εφθ = 1,19.$ 8) $εφθ = \frac{5}{12}$, 9) $εφθ = \sqrt{\frac{2ϱτ}{ϱ^2+τ^2}}$

10) $σφθ = 0,36.$ 11) $σφθ = \frac{11}{60}$. 12) $σφθ = \sqrt{\frac{2μ^2+1}{2μ^2-1}}$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ ἐκφρασθοῦν διὰ τοῦ ημφ αἱ κάτωθι παραστάσεις.

α′) $2\,συν^2φ-1$. β′) $\frac{2\,συνφ}{εφφ+σφφ}$. γ′) $\frac{1-εφ^2φ}{1+εφ^2φ}$. δ′) $\frac{σφφ}{εφφ} - \frac{εφφ}{σφφ}$.

ε′) $\frac{εφφ}{ημφ} - συνφ$. στ′) $ημφ + \frac{εφφ}{συνφ}$.

2) Ἐκφράσατε διὰ τοῦ συν ω τὰς ἑξῆς παραστάσεις.

α′) $1-2\eta\mu^2\omega$. β′) $\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\,\omega}{\eta\mu^2\omega}$. γ′) $\dfrac{\sigma\varphi\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}-\eta\mu\,\omega$. δ′) $\sigma\upsilon\nu\,\omega+\dfrac{\sigma\varphi\,\omega}{\eta\mu\,\omega}$

ε′) $\sigma\upsilon\nu\omega+\dfrac{\varepsilon\varphi\omega}{\eta\mu\omega}$. στ′) $\eta\mu^2\,\omega-\dfrac{\varepsilon\varphi\omega}{\sigma\varphi\omega}$. ζ′) $\dfrac{2\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}-\eta\mu\omega.\varepsilon\varphi\omega+\dfrac{\varepsilon\varphi\omega}{\eta\mu\omega}$.

3) Ἐκφράσατε διὰ τῆς εφθ τὰς ἑξῆς παραστάσεις.

α′) $\dfrac{\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}\pm\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta}$. β′) $\dfrac{\eta\mu^2\theta+3\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta+5\,\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}$

γ′) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta}\pm\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta}$.

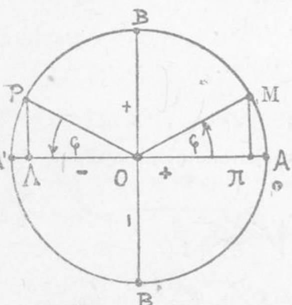
Ὁμὰς τρίτη. Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν κάτωθι ἰσοτήτων.

1) $\eta\mu^2\vartheta=(1+\sigma\upsilon\nu\vartheta)\,(1-\eta\mu\theta)$. 2) $\varepsilon\varphi\vartheta=\sqrt{\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}{1-\eta\mu^2\theta}}$

3) $\dfrac{\varepsilon\varphi^2\theta}{1+\varepsilon\varphi^2\theta}+\dfrac{\sigma\varphi^2\theta}{1+\sigma\varphi^2\theta}=1$. 4) $\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\varphi^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta\;\varepsilon\varphi^2\theta=1$.

Γωνίαι καὶ τόξα παραπληρωματικά.

57. Ἂν φ καὶ ω παριστάνουν δύο παραπληρωματικὰς γωνίας (ἐχούσας ἄθροισμα δύο ὀρθὰς γωνίας ἢ 180°, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶνε ὀξεῖα, ἂν δὲν εἶνε ὀρθαί), ἢ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα, καλούμενα τότε *παραπληρωματικά*, θὰ ἔχωμεν, $\omega+\varphi=180^\circ$, καὶ $\omega=180^\circ-\varphi$.



Θὰ δείξωμεν ὅτι μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν γωνιῶν τούτων ὑπάρχουν αἱ ἑξῆς σχέσεις,

$$\textbf{ημ}\,(180^\circ-\varphi)=\textbf{ημ}\,\varphi,\quad \textbf{συν}\,(180^\circ-\varphi)=-\textbf{συν}\,\varphi,$$
$$\textbf{εφ}(180^\circ-\varphi)=-\textbf{εφ}\varphi,\quad \textbf{σφ}\,(180^\circ-\varphi)=-\textbf{σφ}\,\varphi.$$

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΟΜ ἡ δοθεῖσα ὀξεῖα γωνία φ ἐν τῷ τριγωνομετρικῷ κύκλῳ, καὶ (ΠΜ) = ημφ, (ΟΠ) = συνφ. Ἐὰν ἐκ τοῦ τόξου ΑΒΑ′ τῶν 180° ἀφαιρέσωμεν τὸ τόξον ΡΑ′, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἴσον μὲ τὸ ΑΜ, τὸ τόξον ΑΒΡ θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὴν γωνίαν 180° — φ. Ἂν Λ εἶνε ἡ προβολὴ τοῦ σημείου Ρ ἐπὶ τῆς πρώτης διαμέτρου ΑΟΑ′, θὰ εἶνε (ΛΡ) = ημ (180° — φ) καὶ (ΟΛ) = συν (180° — φ). Τὰ τρίγωνα ΟΠΜ καὶ

ΟΛΡ εἶνε ἴσα (ὡς ὀρθογώνια ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας καὶ τὰς ὀξείας γωνίας αὐτῶν ΠΟΜ καὶ ΛΟΡ ἴσας ἐκ κατασκευῆς). Ἄρα αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευραὶ εἶνε (ἀπολύτως) ἴσαι· ἤτοι ἔχομεν

$$(\text{ΛΡ}) = (\text{ΠΜ}), \text{ ἐνῶ } (\text{ΟΛ}) = -(\text{ΟΠ}),$$

Διότι τὰ μὲν ἀνύσματα ΠΜ καὶ ΛΡ εἶνε ὁμόρροπα, τὰ δὲ ΟΛ καὶ ΟΠ ἀντίρροπα. Ἐπομένως ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς ἰσότητας ταύτας τὰς ἀνωτέρω τιμὰς τῶν (ΛΡ), (ΠΜ), (ΟΛ) καὶ (ΟΠ) ἔχομεν

$$\text{ημθ } (180^\circ - \varphi) = \text{ημ}\varphi, \quad \text{συν } (180^\circ - \varphi) = -\text{ συν}\varphi.$$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν δύο ἄλλων τύπων ἔχομεν

$$\text{εφ } (180^\circ - \varphi) = \frac{\text{ημ } (180^\circ - \varphi)}{\text{συν } (180^\circ - \varphi)} = \frac{\text{ημ}\varphi}{-\text{συν}\varphi} = -\text{εφ}\varphi.$$

$$\text{σφ } (180^\circ - \varphi) = \frac{\text{συν}(180^\circ - \varphi)}{\text{ημ } (180^\circ - \varphi)} = \frac{-\text{συν } \varphi}{\text{ημ}\varphi} = -\text{σφ}\varphi.$$

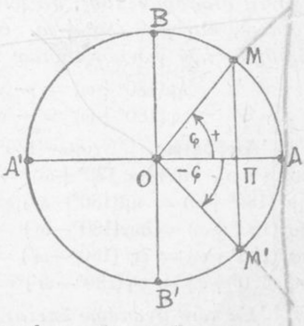
58. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα. «*Ἐὰν δύο γωνίαι ἢ τόξα εἶνε παραπληρωματικά, ἔχουν ἡμίτονα ἴσα καὶ συνημίτονα ἀντίθετα, ἐφαπτομένας δὲ καὶ συνεφαπτομένας ἀντιθέτους*».

Γωνίαι ἢ τόξα ἀντίθετα.

59. Ἔστωσαν ΑΟΜ = φ καὶ ΑΟΜ′ = — φ δύο γωνίαι ἀντίθετοι ἢ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα. Θὰ δείξωμεν ὅτι μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τούτων ὑπάρχουν αἱ ἑξῆς σχέσεις

$$\textbf{ημ}(-\varphi) = -\textbf{ημ}\,\varphi, \quad \textbf{συν}\,(-\varphi) = \textbf{συν}\,\varphi,$$
$$\textbf{εφ}\,(-\varphi) = -\textbf{εφ}\varphi, \quad \textbf{σφ}\,(-\varphi) = -\,\textbf{σφ}\varphi.$$

Ἀπόδειξις. Ἂν Π εἶνε ἡ προβολὴ τοῦ Μ ἐπὶ τῆς πρώτης διαμέτρου ΑΟΑ′, τὸ Π θὰ εἶνε προβολὴ καὶ τοῦ Μ′ ἐπὶ τῆς ΑΟΑ′. Ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΜ′ εἶνε (ἀπολύτως) ἴσον πρὸς τὸ ΑΜ καὶ ἡ διάμετρος ΑΟΑ′, διερχομένη διὰ τοῦ μέσου τοῦ τόξου ΜΑΜ′, εἶνε κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς τούτου ΜΜ′. Οὕτω τὰ ἀνύσματα ΠΜ καὶ ΠΜ′ εἶνε ἀπολύτως μὲν ἴσα, ἀλλ᾽ ἀντίθετα καὶ ἔχομεν



(ΠΜ′) = —(ΠΜ) ἢ ημ(—φ) = —ημ φ,

καὶ (ΟΠ) = συνφ = συν (—φ).

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν δύο ἄλλων ἀνωτέρω τύπων ἔχομεν

$$\varepsilon\varphi\,(-\varphi) = \frac{\eta\mu\,(-\varphi)}{\sigma\upsilon\nu\,(-\varphi)} = \frac{-\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = -\,\varepsilon\varphi\varphi,$$

$$\sigma\varphi\,(-\varphi) = \frac{\sigma\upsilon\nu\,(-\varphi)}{\eta\mu\,(-\varphi)} = \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{-\,\eta\mu\varphi} = -\,\sigma\varphi\varphi.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι, *«ἐὰν δύο γωνίαι ἢ τόξα εἶνε ἀντίθετα, ἔχουν ἡμίτονα ἀντίθετα καὶ συνημίτονα ἴσα, τὰς δ' ἐφαπτομένας καὶ συνεφαπτομένας αὐτῶν ἀντιθέτους»*.

Γωνίαι ἢ τόξα διαφέροντα κατὰ 90°.

60. *Ἐὰν φ καὶ ω παριστάνουν δύο γωνίας ἢ τ' ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα, διαφέροντα κατὰ 90°, ἔχομεν $\varphi - \omega = 90^0$, ἂν φ εἶνε τὸ μεγαλύτερον ἐκ τούτων, καὶ $\varphi = 90^0 + \omega$. Θὰ δείξομεν ὅτι μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν δύο τοιούτων τόξων ὑπάρχουν αἱ ἑξῆς σχέσεις*

$$\eta\mu\,(90^0+\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega, \quad \sigma\upsilon\nu\,(90^0+\omega) = -\,\eta\mu\omega,$$
$$\varepsilon\varphi\,(90^0+\omega) = -\,\sigma\varphi\omega, \quad \sigma\varphi\,(90^0+\omega) = -\,\varepsilon\varphi\omega.$$

Ἀπόδειξις. *Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ $90^0 + \omega$ γράφεται καὶ οὕτω $90^0-(-\omega)$. Θέτομεν ἀντὶ τοῦ $(-\omega)$ τὸ ω', ὅτε ἔχομεν $90^0+\omega=90^0-\omega'$, καὶ (κατὰ τὴν παράγραφον 35 σελ. 13 καὶ τὴν 45 σελ. 22.)*

$$\eta\mu\,(90^0+\omega) = \eta\mu\,(90^0-\omega') = \sigma\upsilon\nu\omega' = \sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega,$$
$$\sigma\upsilon\nu\,(90^0+\omega) = \sigma\upsilon\nu(90^0-\omega') = \eta\mu\omega' = \eta\mu\,(-\omega) = -\,\eta\mu\omega,$$
$$\varepsilon\varphi\,(90^0+\omega) = \varepsilon\varphi\,(90^0-\omega') = \sigma\varphi\omega' = \sigma\varphi\,(-\omega) = -\,\sigma\varphi\omega,$$
$$\sigma\varphi\,(90^0+\omega) = \sigma\varphi\,(90^0-\omega') = \varepsilon\varphi\omega' = \varepsilon\varphi\,(-\omega) = -\,\varepsilon\varphi\omega.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι «ἂν δύο γωνίαι ἢ τόξα διαφέρουν κατὰ 90°, τὸ ἡμίτονον τοῦ $90^0 + \omega$ ἰσοῦται μὲ τὸ συνημίτονον τοῦ ω, τὸ συνημίτονον τοῦ $90^0+\omega$ μὲ τὸ ἀντίθετον τοῦ ἡμιτόνου τοῦ ω, ἡ δὲ ἐφαπτομένη τοῦ ἑνὸς τούτων μὲ τὴν ἀντίθετον συνεφαπτομένην τοῦ ἄλλου».

Γωνίαι ἢ τόξα διαφέροντα κατὰ 180°.

61. *Ἂν φ καὶ ω παριστάνουν δύο γωνίας ἢ τ' ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα, ἔχοντα διαφορὰν 180°, θὰ εἶνε $\varphi - \omega = 180^0$, ἂν φ εἶνε τὸ μεγαλύτερον τούτων, καὶ $\varphi = 180^0 + \omega$. Θὰ δείξωμεν ὅτι μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν γωνιῶν τούτων ὑπάρχουν αἱ ἑξῆς σχέσεις*

$$\eta\mu(180^0+\omega) = -\,\eta\mu\omega, \quad \sigma\upsilon\nu(180^0+\omega) = -\,\sigma\upsilon\nu\omega,$$
$$\varepsilon\varphi(180^0+\omega) = \varepsilon\varphi\omega, \quad \sigma\varphi\,(180^0+\omega) = \sigma\varphi\omega.$$

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν $180^0+\omega=180^0-(-\omega)$. Θέτοντες ω' ἀντὶ τοῦ $(-\omega)$, θὰ εἶνε $180^0+\omega = 180^0-(-\omega) = 180^0-\omega'$, καὶ

$$\eta\mu\,(180^0+\omega) = \eta\mu(180^0-\omega') = \eta\mu\omega' = \eta\mu\,(-\omega) = -\,\eta\mu\omega,$$
$$\sigma\upsilon\nu(180^0+\omega) = \sigma\upsilon\nu(180^0-\omega') = -\,\sigma\upsilon\nu\omega' = -\,\sigma\upsilon\nu\,(-\omega) = -\,\sigma\upsilon\nu\omega,$$
$$\varepsilon\varphi\,(180^0+\omega) = \varepsilon\varphi\,(180^0-\omega') = -\,\varepsilon\varphi\omega' = -\,\varepsilon\varphi\,(-\omega) = \varepsilon\varphi\omega,$$
$$\sigma\varphi\,(180^0+\omega) = \sigma\varphi(180^0-\omega') = -\,\sigma\varphi\omega' = -\,\sigma\varphi\,(-\omega) = \sigma\varphi\omega.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι, «ἂν δύο γωνίαι ἢ τόξα διαφέρουν κατὰ 180°, ἔχουν ἡμίτονα καὶ συνημίτονα ἀντίθετα, ἐφαπτομένας δὲ καὶ συνεφαπτομένας ἴσας».

62. *Παρατήρησις.* Σπουδαία σημασία τῶν προηγουμένων τύπων (57—61) συνίσταται εἰς τοῦτο, ὅτι «*μὲ τὴν βοήθειαν αὐτῶν δυνάμεθα ν' ἀναγάγωμεν τὴν εὕρεσιν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν γωνίας ἢ τόξου μεγαλυτέρου τῶν 90° εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ὀξείας γωνίας ἢ τόξου μικροτέρου τῶν 90°*».

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ ἑξῆς παραστάσεις. 1) $3\,συν\,(90^0-ω)+7συν\,(90^0+ω)-ημ\,135^0$.

2) $7\,συν\,(90^0+φ).\,ημ\,270^0+ημ\,(90^0-φ).\,συν\,(180^0-φ)$.

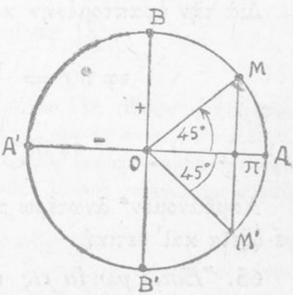
3) $-\dfrac{8\,ημ(180^0+ω)-15\,ημ(90^0-ω)}{8\,εφ(180^0+ω)+15\,εφ(90^0+ω)}$. 4) $\dfrac{7\,ημ\,(90^0+ω).\,συν\,(90^0-ω)}{2\,συν\,(180^0+ω)}+\dfrac{6\,ημ\,(180^0-ω)\,συν\,(90^0+ω)}{5\,ημ\,(180^0+ω)}$.

5) $\dfrac{6\,εφ\,(90^0+ω).\,συν\,(-ω).\,συν\,(90-ω)-4\,ημ\,(270^0+ω)}{σφ\,(180^0-ω).\,συν\,(180^0-ω).\,συν\,(180^0+ω)+6σφ\,(270^0+ω)}$.

6) $\dfrac{3}{συν\,180^0}-7\,ημ\,270^0+\dfrac{21}{ημ\,90^0}-\dfrac{7\,συν\,180^0}{ημ\,270^0}$.

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τόξων 45°, 30°, 60° ~~18°~~.

63. *Ἔστω ἡ γωνία ΑΟΜ=μὲ 45°*, (ΠΜ) καὶ (ΟΠ) δὲ τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον αὐτῆς. Ἐπειδὴ αἱ ὀξεῖαι γωνίαι ὀρθογωνίου τριγώνου εἶνε συμπληρωματικαί, ἡ γωνία ΟΜΠ εἶνε 45°, τὸ δὲ τρίγωνον ΟΠΜ εἶνε ἰσοσκελές. Ἤτοι εἶνε (ΟΠ) = (ΠΜ). Ἔχομεν ὅμως (κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα) ὅτι $(ΠΜ)^2+(ΟΠ)^2=(ΟΜ)^2$, ἢ $2\,(ΠΜ)^2=(ΟΜ)^2=1$, καὶ $(ΠΜ)^2=(ΟΠ)^2=\frac{1}{2}$. Ἄρα $(ΠΜ)=(ΟΠ)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. (ἐπειδὴ ἡ γωνία 45° εἶνε ὀξεῖα καὶ θετικὴ καὶ ἔχει ἡμίτονον καὶ συνημίτονον θετικόν).



Ὥστε ἔχομεν

9

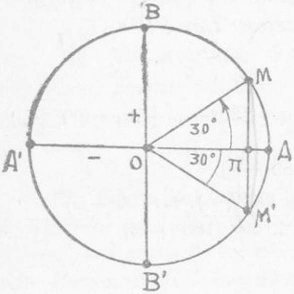
$$\boxed{ημ\,45^0=συν\,45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

Διὰ τὴν ἐφαπτομένην καὶ συνεφαπτομένην 45° ἔχομεν,

10

$$\boxed{εφ\ \ 45^0=\frac{ημ\,45^0}{συν\,45^0}=1,\ σφ\,45^0=\frac{συν\,45^0}{ημ\,45^0}=1.}$$

64. *Ἔστω ἡ γωνία ΑΟΜ = μὲ 30°*, (ΠΜ) καὶ (ΟΠ) δὲ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον αὐτῆς. Προεκτείνομεν τὴν ΠΜ (κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ) μέχρις ὅτου τμήσῃ τὴν περιφέρειαν, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Μ′.



Ἐπειδὴ ἡ ΑΟ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴ χορδὴν ΜΜ′, διέρχεται διὰ τοῦ μέσου αὐτῆς, τὰ τρίγωνα ΟΠΜ καὶ ΟΠΜ′ εἶνε ἴσα (ὡς ὀρθογώνια ἔχοντα τὰς καθέτους πλευρὰς αὐτῶν ἴσας). Ἄρα θὰ εἶνε ἡ μὲν γωνία ΠΟΜ′ ἀπολύτως ἴση μὲ τὴν ΠΟΜ, ἡ δὲ ΜΟΜ′ εἶνε διπλασία τῆς δοθείσης, ἤτοι 60°. Ἀλλ' εἰς ἐπίκεντρον γωνίαν 60° ἀντιστοιχεῖ χορδὴ ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου (πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου). Ἤτοι τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΜΜ′ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα, ἥτις λαμβάνεται ἴση μὲ τὴν 1, καὶ ἑπομένως εἶνε (ΠΜ) $= \frac{1}{2}$. Οὕτω ἔχομεν

$$\frac{a\sqrt{\rho}}{2} \qquad 11 \qquad \text{ημ } 30^0 = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ συν 30° ἔχομεν, 12

$$\text{συν } 30^0 = \sqrt{1 - \text{ημ}^2\, 30^0} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Διὰ τὴν ἐφαπτομένην καὶ συνεφαπτομένην 30° ἔχομεν,

$$\text{εφ } 30^0 = \frac{\text{ημ } 30^0}{\text{συν } 30^0} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad 13$$

$$\text{σφ } 30^0 = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}. \qquad 14$$

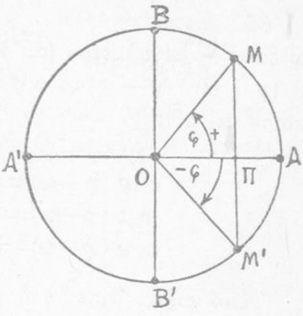
Λαμβάνομεν ἀνωτέρω τὸ σημεῖον + τοῦ ῥιζικοῦ ἐπειδὴ ἡ γωνία εἶνε ὀξεῖα καὶ θετική.

65. *Ἔστω γωνία τις 60°*. Ἐπειδὴ αὕτη εἶνε συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας τῶν 30°, ἔχομεν (κατὰ τὰ ἐν παραγράφῳ 35 σελὶς 13).

$$15 \qquad \text{ημ } 60^0 = \text{συν } 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{συν } 60^0 = \text{ημ } 30^0 = 0{,}5$$

$$\text{εφ } 60^0 = \text{σφ } 30^0 = \sqrt{3}, \quad \text{σφ} 60^0 = \text{εφ} 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

66. *Παρατήρησις.* Ἡ ἀνωτέρω χρησιμοποιηθεῖσα μέθοδος πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἡμιτόνου τῶν 30^0 δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἡμιτόνου οἱασδήποτε ὀξείας γωνίας. Πράγματι, ἔστω ΑΟΜ τυχοῦσα ὀξεῖα γωνία, (ΠΜ) καὶ (ΟΜ) δὲ τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον αὐτῆς. Ἂν ἡ κάθετος ΠΜ ἐπὶ τὴν ΑΑ', προεκτεινομένη, τέμνῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Μ', τὸ ΜΠ θὰ εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ ΜΜ' (ἐπειδὴ ἡ κάθετος διάμετρος ΑΟΑ' ἐπὶ τὴν χορδὴν ΜΜ' διέρχεται διὰ τοῦ μέσου αὐτῆς Π). Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,



«τὸ ἡμίτονον ὀξείας γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τόξον διπλάσιον τοῦ δοθέντος».

67. *Ἔστω ὅτι δίδεται γωνία* 18^0. Τὸ ημ 18^0=μὲ τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς τοῦ τόξου 36^0. Ἤτοι ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ πλευρᾶς κανονικοῦ δεκαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν τριγωνομετρικὸν κύκλον.

Ἄρα εἶνε ημ $18^0=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2.2}$. Διὰ τὸ συν 18^0 εὑρίσκομεν

$$\text{συν}\, 18^0 = \sqrt{1-\text{ημ}^2\, 18^0} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 0{,}9511...$$

Εὐκόλως εὑρίσκομεν τώρα τὴν εφ 18^0 καὶ σφ 18^0.

Ἀσκήσεις.

1) Εὕρετε τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τόξου 72^0. (Παρατηρήσατε ὅτ $72^0 = 90^0 - 18^0$ καὶ εἶνε ημ 72^0=συν 18^0=0,9511 ..., συν 72^0=ημ 18^0=0,309...

2) Εὕρετε τὸ ἡμίτονον 36^0, τῇ βοηθείᾳ τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου ἐγγεγραμμένου ὡς κύκλον, καθὼς καὶ τοὺς ἄλλους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ταύτης.

3) Εὕρετε τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς γωνίας 54^0.

4) Εὕρετε τὸ ημ $22{,}5^0$ τῇ βοηθείᾳ τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ ὀκταγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ρ $\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$, καθὼς καὶ τοὺς ἄλλους τριγωνωμετρικοὺς ἀριθμοὺς ταύτης.

5) Εὕρετε τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς γωνίας $67{,}5^0$.

6) Εὕρετε τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς 15^0 μὲ τὴν βοήθειαν τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ δωδεκαγώνου $\left(\,ρ\sqrt{2-\sqrt{3}}\,\right)$ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον.

7) Εὕρετε τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς γωνίας 75^0.

8) Ὁμοίως γωνίας 120^0.

9) Ὁμοίως 135^0.

10) Ὁμοίως γωνίας 162^0, 150^0,

11) Ὁμοίως 108^0, 126^0. 165^0.

Εὕρεσις τῶν τριγωνικῶν ἀριθμῶν ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς δύο γωνιῶν.

68. Ἔστωσαν ΑΟΜ $=\varphi$ καὶ ΜΟΡ $=\omega$ δύο γωνίαι ἐκ τῶν ὁποίων ἡ φ ἔστω ἡ μεγαλυτέρα (ἂν δὲν εἶνε ἴσαι) ἐν τῷ τριγωνομετρικῷ κύκλῳ καὶ $(\varphi+\omega)$, $(\varphi-\omega)$ τὸ ἄθροισμα καὶ ἡ διαφορὰ τούτων. Θὰ δείξωμεν πρῶτον ὅτι εἶνε

16

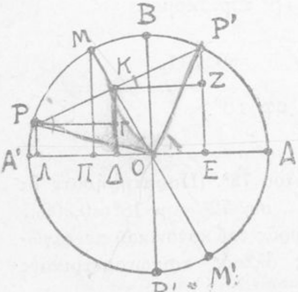
$$\left.\begin{aligned} \text{ημ}\,(\varphi+\omega) &= \text{ημ}\varphi.\ \text{συν}\omega+\text{ημ}\omega.\ \text{συν}\varphi \\ \text{συν}\,(\varphi+\omega) &= \text{συν}\varphi.\ \text{συν}\omega-\text{ημ}\varphi.\ \text{ημ}\omega \\ \text{ημ}\,(\varphi-\omega) &= \text{ημ}\varphi.\ \text{συν}\omega-\text{ημ}\omega.\ \text{συν}\varphi \\ \text{συν}\,(\varphi-\omega) &= \text{συν}\varphi.\ \text{συν}\omega+\text{ημ}\varphi.\ \text{ημ}\omega \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΟΡ ἰσοῦται μὲ $(\varphi+\omega)$, ἂν Π καὶ Λ εἶνε αἱ προβολαὶ τῶν σημείων Μ καὶ Ρ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΟΑ΄, ἔχομεν

$$(\text{ΠΜ})=\text{ημ}\varphi,\ (\text{ΟΠ})=\text{συν}\varphi,\ (\text{ΛΡ})=\text{ημ}(\varphi+\omega),\ (\text{ΟΛ})=\text{συν}(\varphi+\omega).$$

Ἂν Κ εἶνε ἡ προβολὴ τοῦ πέρατος Ρ τοῦ τόξου ΜΡ (τῆς γωνίας ΜΟΡ $=\omega$) ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΜΟΜ΄ ἔχομεν (ΚΡ) $=$ ημω, (ΟΚ) $=$ συνω.

Προεκτείνομεν τὴν ΡΚ (κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΜ) μέχρις ὅτου τμήσῃ τὴν περιφέρειαν, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Ρ΄. Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΜΟΡ΄ θὰ εἶνε (ἀπολύτως) ἴση μὲ τὴν ΜΟΡ $=\omega$ (ὡς ἀντιστοιχοῦσα εἰς τόξον ΜΡ΄ ἴσον μὲ τὸ ΜΡ, ἀφοῦ ἡ ἀκτὶς ΟΜ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΡΡ΄), ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΑΟΡ΄ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῆς ΑΟΜ—Ρ΄ΟΜ ἢ μὲ $(\varphi-\omega)$. Ἂν Ε εἶνε ἡ προβολὴ τοῦ Ρ΄ ἐπὶ τῆς πρώτης διαμέτρου ΑΟΑ΄, ἔχομεν



$$\text{ημ}(\varphi-\omega)=(\text{ΕΡ΄}),\ \text{συν}\,(\varphi-\omega)=(\text{ΟΕ}).$$

Φέρομεν ἐκ μὲν τοῦ Κ τὴν ΚΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΟΑ΄ (ἥτις θὰ εἶνε παράλληλος τῆς Ρ΄Ε), καὶ τὴν ΚΖ κάθετον ἐπὶ τὴν Ρ΄Ε, ἐκ δὲ τοῦ Ρ τὴν ΡΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΔ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΡΚΓ καὶ ΚΡ΄Ζ εἶνε ἴσα. Διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας αὐτῶν ΡΚ καὶ ΚΡ΄ ἴσας (ἐπειδὴ ἡ διάμετρος ΜΟΜ΄ κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν χορδὴν ΡΡ΄ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου ταύτης), καὶ τὰς γωνίας ΚΡΓ καὶ Ρ΄ΚΖ ἴσας (ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΡΓ καὶ ΚΖ· εἶνε δ᾽ αὗται παράλληλοι ὡς κάθετοι ἐπὶ τὰς παραλλήλους ΚΔ καὶ Ρ΄Ε). Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων τούτων ἔχομεν

$$(\text{ΓΚ})=(\text{ΖΡ΄}),\ \text{καὶ}\ (\text{ΡΓ})=(\text{ΚΖ}).$$

Τώρα παρατηροῦμεν ὅτι ἔχομεν τὰς ἑξῆς ἰσότητας

$$\left.\begin{aligned} ημ\,(φ+ω)&=(ΛΡ)=(ΔΓ)=(ΔΓ)+(ΓΚ)-(ΓΚ)=(ΔΚ)+(ΚΓ),\\ συν(φ+ω)&=(ΟΛ)=(ΟΔ)+(ΔΛ)=(ΟΔ)+(ΓΡ)=(ΟΔ)-(ΡΓ),\\ ημ\,(φ-ω)&=(ΕΡ')=(ΕΖ)+(ΖΡ')=(ΔΚ)+(ΓΚ)=(ΔΚ)-(ΚΓ),\\ συν(φ-ω)&=(ΟΕ)=(ΔΕ)-(ΔΟ)=(ΚΖ)-(ΔΟ)=(ΡΓ)+(ΟΔ).\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

(ἐπειδὴ εἶνε (ΕΖ)=(ΔΚ) ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων).

Τὰ τρίγωνα ΟΜΠ καὶ ΚΡΓ εἶνε ὅμοια (ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθέτους ἀνὰ μίαν), καὶ ἔχομεν

$$\frac{(ΚΡ)=ημω}{(ΟΜ)=1}=\frac{(ΡΓ)}{(ΠΜ)=ημφ}=\frac{(ΚΓ)}{(ΟΠ)=συνφ}.$$

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν (λαμβάνοντες τὴν ἰσότητα τῶν δύο πρώτων καὶ ἔπειτα τῶν δύο ἄκρων λόγων)

$$(ΡΓ)=ημφ.\,ημω,\quad (ΚΓ)=συνφ.\,ημω,$$

Τὰ τρίγωνα ΟΠΜ καὶ ΟΔΚ εἶνε ὅμοια (ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους) καὶ ἔχομεν

$$\frac{(ΟΚ)=συνω}{(ΟΜ)=1}=\frac{(ΟΔ)}{(ΟΠ)=συνφ}=\frac{(ΔΚ)}{(ΠΜ)=ημφ}$$

Λαμβάνοντες τοὺς δύο πρώτους ἴσους λόγους καὶ ἔπειτα τοὺς δύο ἄκρους εὑρίσκομεν

$$(ΟΔ)=συν\,φ.\,συν\,ω,\ (ΔΚ)=ημφ.\,συν\,ω.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τῶν (ΡΓ), (ΚΓ), (ΟΔ) καὶ (ΔΚ) εἰς τὰς ἰσότητας (2) εὑρίσκομεν τοὺς τύπους (1).

69. Πρὸς εὕρεσιν τῆς εφ (φ±ω) ἔχομεν

$$εφ\,(φ\pm ω)=\frac{ημ\,(φ\pm ω)}{συν\,(φ\pm ω)}=\frac{ημφ.\,συνω \pm ημω.\,συνφ}{συνφ.\,συνω \mp ημφ.\,ημω}$$

κατὰ τοὺς ἀνωτέρω (σελὶς 36) ἀποδειχθέντας τύπους (1).

Διαιροῦμεν ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ τοῦ τελευταίου κλάσματος διὰ τοῦ συνφ. συνω καὶ εὑρίσκομεν

$$εφ(φ\pm ω)=\frac{\dfrac{ημφ.συνω}{συνφ.\,συνω}\pm\dfrac{ημω.συνφ}{συνω.\,συνφ}}{\dfrac{συνφ.\,συνω}{συνφ.\,συνω}\mp\dfrac{ημφ.ημω}{συνφ.\,συνω}}=\frac{εφφ\pm εφω}{1\mp εφφ.εφω}.$$

Ἤτοι $\quad$ **εφ (φ±ω) =** $\dfrac{\mathbf{εφφ \pm εφω}}{\mathbf{1 \mp εφφ.εφω}}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\quad$ **σφ (φ±ω) =** $\dfrac{\mathbf{σφφ.\ σφω \mp 1}}{\mathbf{σφω \pm σφφ}}$. $\quad$ (3)

17

70. Ἐφαρμογαί. *1) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ γωνίας 48°.*

Ἐπειδὴ εἶνε $48^\circ = 30^\circ + 18^\circ$, ἔχομεν

$$\text{ημ}48^\circ = \text{ημ}(30^\circ + 18^\circ) = \text{ημ}30^\circ\ \text{συν}18^\circ + \text{ημ}18^\circ\ \text{συν}30^\circ,$$
$$\text{συν}48^\circ = \text{συν}(30^\circ + 18^\circ) = \text{συν}30^\circ\ \text{συν}18^\circ - \text{ημ}30^\circ\ \text{ημ}18^\circ,$$

καὶ ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν 18° καὶ 30°.

Τῇ βοηθείᾳ τῶν τύπων $\text{εφ}48^\circ = \dfrac{\text{ημ}48^\circ}{\text{συν}48^\circ}$ καὶ $\text{σφ}48^\circ = \dfrac{\text{συν}48^\circ}{\text{ημ}48^\circ}$

εὑρίσκομεν τὴν ἐφαπτομένην καὶ συνεφαπτομένην 48°.

2) Ἐπειδὴ ἡ γωνία 42° εἶνε συμπληρωματικὴ τῆς τῶν 48°, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν εὐκόλως καὶ τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς γωνίας 42°.

3) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ γωνίας 27°.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε $27^\circ = 45^\circ - 18^\circ$, ἑπομένως ἔχομεν

$$\text{ημ}27^\circ = \text{ημ}(45^\circ - 18^\circ) = \text{ημ}45^\circ\ \text{συν}18^\circ - \text{συν}45^\circ\ \text{ημ}18^\circ,$$
$$\text{συν}27^\circ = \text{συν}(45^\circ - 18^\circ) = \text{συν}45^\circ\ \text{συν}18^\circ + \text{ημ}45^\circ\ \text{ημ}18^\circ.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὴν ἐφαπτομένην καὶ συνεφαπτομένην 27° ὡς ἀνωτέρω. Ἐφαρμόζοντες τοὺς τύπους περὶ τῶν συμπληρωματικῶν γωνιῶν εὑρίσκομεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς γωνίας 63°, ἐπειδὴ εἶνε $63^\circ = 90^\circ - 27^\circ$.

Ἀσκήσεις.

Νὰ δειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν κάτωθι ἰσοτήτων.

1) $\text{ημ}(\varphi+\omega).\ \text{συν}(\varphi-\omega) + \text{συν}(\varphi+\omega).\ \text{ημ}(\varphi-\omega) = \text{ημ}2\varphi.$

2) $\text{συν}(\varphi+\omega).\ \text{συν}(\varphi-\omega) - \text{ημ}(\varphi+\omega).\ \text{ημ}(\varphi-\omega) = \text{συν}2\varphi.$

3) $\text{ημ}3\varphi = 3\ \text{ημ}\varphi - 4\ \text{ημ}^3\varphi.$ 4) $\text{ημ}\,31^\circ + \text{ημ}\,29^\circ = \text{συν}\,1^\circ.$

5) $\text{συν}3\varphi = 4\ \text{συν}^3\varphi - 3\ \text{συν}\varphi.$ 6) $\text{συν}\,(60^\circ+\varphi) + \text{συν}\,(60^\circ-\varphi) = \text{συν}\ \varphi.$

7) $\text{εφ}3\varphi\ (1 - 3\ \text{εφ}^2\varphi) = 3.\text{εφ}\varphi - \text{εφ}^3\varphi.$ 8) $\text{ημ}(30^\circ+\varphi) + \text{ημ}\,(30^\circ-\varphi) = \text{συν}\ \varphi.$

9) $\text{σφ}3\varphi\ (3\ \text{σφ}^2\varphi - 1) = \text{σφ}^3\varphi - 3\ \text{σφ}\varphi.$

10) $1 \pm \text{εφ}\varphi\ \text{εφ}\omega = \text{συν}(\varphi \mp \omega) : \text{συν}\varphi.\ \text{συν}\omega.$

11) $1 - \text{εφ}^2\varphi.\ \text{εφ}^2\omega = \text{συν}(\varphi+\omega).\ \text{συν}(\varphi-\omega) : \text{συν}^2\varphi\ \text{συν}^2\omega.$

12) $\text{ημ}(\varphi-\omega) + \text{συν}\varphi.\ \text{ημ}\omega = \text{εφ}\varphi[\text{συν}(\varphi+\omega) + \text{ημ}\varphi.\ \text{ημ}\omega].$

13) $2\,\text{ημ}\varphi.\ \text{ημ}\omega + \text{συν}(\varphi+\omega) = -\text{συν}(\varphi+\omega) + 2\ \text{συν}\varphi.\text{συν}\omega.$

14) $\text{εφ}\varphi + \text{σφ}\varphi = 2 : \text{ημ}2\varphi.$

15) $\text{συν}(120^\circ+\omega) + \text{συν}(120^\circ-\omega) = -\text{συν}\omega.$

16) $\text{ημ}\,62^\circ - \text{ημ}\,58^\circ = \text{ημ}\,20^\circ.$

Ἔκφρασις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθρῶν γωνίας διὰ τοιούτων τοῦ ἡμίσεως τῆς γωνίας.

71. Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους

$$\eta\mu\ (\varphi+\omega)=\eta\mu\varphi\ \sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\omega\ \sigma\upsilon\nu\varphi,$$

καὶ

$$\sigma\upsilon\nu\ (\varphi+\omega)=\sigma\upsilon\nu\varphi\ \sigma\upsilon\nu\omega-\eta\mu\varphi\ \eta\mu\omega$$

θέσωμεν ω = φ, εὑρίσκομεν

$$\eta\mu\ 2\varphi=\eta\mu\varphi\ \sigma\upsilon\nu\varphi+\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\varphi=2\ \eta\mu\varphi.\sigma\upsilon\nu\varphi,$$

$$\sigma\upsilon\nu\ 2\varphi=\sigma\upsilon\nu\varphi.\sigma\upsilon\nu\varphi-\eta\mu\varphi.\ \eta\mu\varphi=\sigma\upsilon\nu^2\varphi-\eta\mu^2\varphi.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς ἰσότητας ταύτας τὸ 2φ διὰ τοῦ φ καὶ τὸ φ διὰ τοῦ $\frac{\varphi}{2}$ εὑρίσκομεν,

$$\boxed{\begin{aligned}\eta\mu\varphi&=2\eta\mu\frac{\varphi}{2}\ \sigma\upsilon\nu\ \frac{\varphi}{2},\\ \sigma\upsilon\nu\varphi&=\sigma\upsilon\nu^2\ \frac{\varphi}{2}-\eta\mu^2\ \frac{\varphi}{2}.\end{aligned}}$$

18

72. Διὰ τὴν εφ φ καὶ σφ φ ἔχομεν

$$\boxed{\varepsilon\varphi\varphi=\frac{\eta\mu\ \varphi}{\sigma\upsilon\nu\ \varphi}=\frac{2\ \eta\mu\ \frac{\varphi}{2}\ \ \sigma\upsilon\nu\ \frac{\varphi}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\ \frac{\varphi}{2}-\eta\mu^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\varphi}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\ \frac{\varphi}{2}}}$$

19

$$\text{καὶ } \sigma\varphi\varphi=\frac{\sigma\upsilon\nu\ \varphi}{\eta\mu\ \varphi}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\ \frac{\varphi}{2}-\ \eta\mu^2\ \frac{\varphi}{2}}{2\ \eta\mu\ \frac{\varphi}{2}\ \sigma\upsilon\nu\ \frac{\varphi}{2}}=\frac{\sigma\varphi^2\ \frac{\varphi}{2}-1}{2\ \sigma\varphi\ \frac{\varphi}{2}}.$$

Ἔκφρασις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν γωνίας διὰ τοῦ συνημιτόνου τῆς διπλασίας γωνίας.

73. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ημ $\frac{\varphi}{2}$ καὶ τοῦ συν $\frac{\varphi}{2}$ διὰ τοῦ συνημιτόνου τῆς φ ἔχομεν

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\ \varphi=\sigma\upsilon\nu^2\ \frac{\varphi}{2}-\eta\mu^2\ \frac{\varphi}{2}}$$

καὶ

$$\boxed{1=\eta\mu^2\ \frac{\varphi}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\ \frac{\varphi}{2}.}$$

Προσθέτοντες μὲν ταύτας κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\boxed{1+\sigma\upsilon\nu\varphi=2\ \sigma\upsilon\nu^2\ \frac{\varphi}{2}.}$$

Ἀφαιροῦντες δ᾽ ἐκ τῆς δευτέρας τὴν πρώτην (κατὰ μέλη) εὑρίσκομεν

$$\boxed{1-\sigma\upsilon\nu\varphi=2\ \eta\mu^2\ \frac{\varphi}{2}.}$$

Ἐκ τούτων δ' εὑρίσκομεν

$$\eta\mu\,\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\,\varphi}{2}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\,\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\,\varphi}{2}}.$$

74. Διὰ διαιρέσεως τῶν ἀνωτέρω τύπων κατὰ μέλη εὑρίσκομεν τὴν εφ $\frac{\varphi}{2}$ καὶ σφ $\frac{\varphi}{2}$ διὰ τοῦ συνημιτόνου τῆς φ.

Ἤτοι $\varepsilon\varphi\,\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\varphi}{1+\sigma\upsilon\nu\varphi}}$, $\sigma\varphi\,\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\,\varphi}{1-\sigma\upsilon\nu\varphi}}$.

75. ***Ἐφαρμογαί.*** *Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ γωνίας 9°.* Ἔχομεν

$$\eta\mu\,9^\circ = \pm\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 18^\circ}{2}},\quad \sigma\upsilon\nu 9^\circ = \pm\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\,18^\circ}{2}}.$$

Εὐκόλως εὑρίσκομεν διὰ διαιρέσεως τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων τὴν εφ 9^0 καὶ σφ 9^0.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί· α') $22^\circ\,30'$. β') 15^0. γ') $4^\circ\,30'$. δ') $7^\circ\,30'$.

2) Εὕρετε τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς· α') ημ4φ β') συν4φ. γ') εφ 4φ. δ') σφ4φ διὰ τῶν τῆς γωνίας φ.

3) Ἀποδείξατε τὴν ἀλήθειαν τῶν κάτωθι ἰσοτήτων· α') $\eta\mu 2\varphi = 2\,\varepsilon\varphi\varphi.\,\sigma\upsilon\nu^2 2\varphi$. β') $\eta\mu\,2\varphi = 2\sigma\varphi\varphi.\,\eta\mu^2\varphi$. γ') $\sigma\upsilon\nu\,2\varphi.\,(\sigma\varphi^2\varphi+1) = \sigma\varphi^2\varphi - 1$. δ') $\eta\mu\,2\varphi\,(1+\varepsilon\varphi^2\varphi) = 2\,\varepsilon\varphi\varphi$. ε') $\eta\mu 2\varphi = \varepsilon\varphi\varphi.(1+\sigma\upsilon\nu 2\varphi)$. στ') $\eta\mu\,2\varphi = \sigma\varphi\varphi\,(1-\sigma\upsilon\nu 2\varphi)$ ζ') $2\,\sigma\upsilon\nu 2\varphi = (1-\varepsilon\varphi^2)\,(1+\sigma\upsilon\nu 2\varphi)$. η') $2\,\sigma\upsilon\nu 2\varphi = (1-\sigma\upsilon\nu 2\varphi).(\sigma\varphi^2\varphi - 1)$.
θ') $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi-\eta\mu\varphi} - \frac{\sigma\upsilon\nu\,2\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi+\eta\mu\varphi} = 2\,\eta\mu\varphi.$

Τροπὴ ἀθροισμάτων εἰς γινόμενα.

76. Ὑπάρχουν οἱ ἑξῆς τύποι, οἵτινες δίδουν τὸ ἄθροισμα καὶ τὴν διαφορὰν τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων δύο γωνιῶν διὰ τοῦ διπλασίου γινομένου ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου τοῦ ἡμιαθροίσματος καὶ τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν γωνιῶν τούτων,

$$\left.\begin{aligned}
\eta\mu\,\alpha+\eta\mu\,\beta &= 2\eta\mu\,\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\eta\mu\,\alpha-\eta\mu\,\beta &= 2\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\eta\mu\,\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\sigma\upsilon\nu\,\alpha+\sigma\upsilon\nu\,\beta &= 2\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu.\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\sigma\upsilon\nu\,\alpha-\sigma\upsilon\nu\,\beta &= -2\eta\mu\,\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\eta\mu\,\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

Πρὸς εὕρεσιν τῶν τύπων τούτων παρατηροῦμεν ὅτι ἔχομεν (ὡς εὕρομεν εἰς τὴν παράγραφον 68 τῆς σελίδος 36)

$$\eta\mu\,(\varphi+\omega)=\eta\mu\,\varphi\;\sigma\upsilon\nu\,\omega+\eta\mu\,\omega\;\sigma\upsilon\nu\,\varphi,$$
$$\eta\mu\,(\varphi-\omega)=\eta\mu\,\varphi\;\sigma\upsilon\nu\,\omega-\eta\mu\,\omega\;\sigma\upsilon\nu\,\varphi,$$
$$\sigma\upsilon\nu\,(\varphi+\omega)=\sigma\upsilon\nu\,\varphi\;\sigma\upsilon\nu\,\omega-\eta\mu\,\varphi\;\eta\mu\,\omega,$$
$$\sigma\upsilon\nu\,(\varphi-\omega)=\sigma\upsilon\nu\,\varphi\;\sigma\upsilon\nu\,\omega+\eta\mu\,\varphi\;\eta\mu\,\omega.$$

Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ ἔπειτα ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη πρῶτον μὲν τὰς δύο πρώτας ἔπειτα δὲ τὰς δύο τελευταίας ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων, λαμβάνομεν τὰ ἑξῆς ἐξαγόμενα,

$$\left.\begin{aligned}\eta\mu\,(\varphi+\omega)+\eta\mu\,(\varphi-\omega)&=2\,\eta\mu\,\varphi\;\sigma\upsilon\nu\,\omega,\\ \eta\mu\,(\varphi+\omega)-\eta\mu\,(\varphi-\omega)&=2\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi\;\eta\mu\,\omega,\\ \sigma\upsilon\nu\,(\varphi+\omega)+\sigma\upsilon\nu\,(\varphi-\omega)&=2\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi\;\sigma\upsilon\nu\,\omega,\\ \sigma\upsilon\nu\,(\varphi+\omega)-\sigma\upsilon\nu\,(\varphi-\omega)&=-2\,\eta\mu\,\varphi\;\eta\mu\,\omega.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τῶν τύπων τούτων ἐκφράζεται τὸ γινόμενον ἡμιτόνων ἢ καὶ συνημιτόνων δύο γωνιῶν δι' ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς ἡμιτόνων ἢ συνημιτόνων τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν γωνιῶν τούτων. Ἐὰν εἰς τὰς ἀνωτέρω τελευταίας ἰσότητας θέσωμεν,

$$(\varphi+\omega)=\alpha \quad , \qquad (\varphi-\omega)=\beta,$$

εὑρίσκομεν (προσθέτοντες καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦντες ταύτας κατὰ μέλη)

$$\varphi=\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad \omega=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὰς τέσσαρας ἀνωτέρω τελευταίας ἰσότητας (2) εὑρίσκομεν τοὺς τέσσαρας τύπους (1).

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Δείξατε τὴν ἀλήθειαν τῶν ἑξῆς ἰσοτήτων.

α′) $\varepsilon\varphi\varphi \pm \varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu(\varphi\pm\omega)}{\sigma\upsilon\nu\varphi.\ \sigma\upsilon\nu\omega}$ · β′) $\sigma\varphi\varphi + \sigma\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu(\varphi+\omega)}{\eta\mu\varphi.\ \eta\mu\omega}$

γ′) $\sigma\varphi\varphi - \sigma\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu(\omega-\varphi)}{\eta\mu\varphi.\ \eta\mu\omega}$.

2) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τύπων (1) τῆς σελίδος 40 εὕρετε τοὺς τύπους

α′) $1+\sigma\upsilon\nu\beta=2\,\sigma\upsilon\nu^2\,\dfrac{\beta}{2}$, β′) $1-\sigma\upsilon\nu\beta=2\eta\mu^2\,\dfrac{\beta}{2}$.

γ′) $1+\eta\mu\beta=2\,\sigma\upsilon\nu^2\left(45^0-\dfrac{\beta}{2}\right)$. δ′) $1-\eta\mu\beta=2\eta\mu^2\left(45^0-\dfrac{\beta}{2}\right)$.

(Θέσατε ἀνωτέρω εἰς τοὺς τελευταίους τῶν (1) $\alpha = o$ καὶ εἰς τοὺς πρώτους $\alpha = 90^0$).

3) Δείξατε τὴν ἀλήθειαν τῶν κατωτέρω ἰσοτήτων.

α') $ημφ + συνφ = ημ(45^0+φ).\sqrt{2}$. β') $ημφ—συνφ = συν(45^0+φ).\sqrt{2}$.

γ') $συνφ = συν45^0.\sqrt{1+συν2φ}$. δ') $\sqrt{2}\,συνφ = σφφ.\sqrt{1—συν2φ}$.

Ὁμὰς δευτέρα. Τρέψατε τὰς κάτωθι παραστάσεις εἰς γινόμενα παραγόντων. 1) $\frac{ημφ}{1—συνφ} \pm \frac{1+συνφ}{ημφ}$. 2) $1\pm εφφ$. 3) $\frac{1+συνφ}{1—συνφ} \pm \frac{1—συνφ}{1+συνφ}$.

4) $1 \pm σφφ$. 5) $\frac{1+εφφ}{1—εφφ}$. 6) $εφφ + σφφ$. 7) $σφφ—εφφ$. 8) $σφφ—σφ2φ$.

9) $ημ^2φ—ημ^2ω$. 10) $συν^2φ—συν^2ω$. 11) $εφ^2φ—εφ^2ω$. 12) $\frac{ημφ — ημω}{ημφ + ημω}$.

13) $\frac{συνφ+συνω}{συνφ—συνω}$. 14) $\frac{ημφ — ημω}{συνφ—συνω}$. 15) $\frac{συνφ + συνω}{ημφ + ημω}$.

Ὁμὰς τρίτη. Νὰ τραποῦν οἱ κάτωθι τύποι εἰς ἄλλους γινομένων.

1) $\frac{1+2\,συνφ}{1—2\,συνφ}$. 2) $1 \pm 2\,ημφ$. 3) $1 \pm 2\,συνφ$. 4) $\sqrt{3} \pm 2\,ημφ$.

5) $\sqrt{3} \pm 2\,συνφ$. 6) $\sqrt{2} \pm 2ημφ$. 7) $\sqrt{2} \pm 2συνφ$. 8) $\frac{2ημφ+1}{2συνφ—1}$.

9) $3\,ημφ + 4\,συνφ$.

Ὁμὰς τετάρτη. Ἐὰν ἔχωμεν $Α + Β + Γ = 180^0$, νὰ δειχθῇ ὅτι εἶνε,

1) $ημΑ + ημ\,Β + ημΓ = 4\,συν\frac{Α}{2}.\,συν\frac{Β}{2}.\,συν\frac{Γ}{2}$.

2) $ημΑ + ημΒ — ημΓ = 4\,ημ\frac{Α}{2}.\,ημ\frac{Β}{2}.\,συν\frac{Γ}{2}$.

3] $εφΑ+εφΒ+εφΓ=εφΑ.\,εφΒ.\,εφΓ$.

4) $σφ\frac{Β}{2} + σφ\frac{Γ}{2} + σφ\frac{Α}{2} = σφ\frac{Β}{2}.\,σφ\frac{Γ}{2}.\,σφ\frac{Α}{2}$.

5) $ημ2Α + ημ2Β + ημ2Γ = 4ημΑ.\,ημΒ.\,ημΓ$.

6) $συν\frac{Α}{2} + συν\frac{Β}{2} + συν\frac{Γ}{2} = 4\,συν\frac{Α+Β}{2}.\,συν\frac{Α+Γ}{2}.\,συν\frac{Β+Γ}{2}$.

7) $ημΑ + συνΑ + 1 = 2\sqrt{2}.\,συν\frac{Α}{2}.\,συν\left(45^0—\frac{Α}{2}\right)$.

8) $ημΑ + συνΑ — 1 = 2\sqrt{2}.\,ημ\frac{Α}{2}.\,ημ\left(45^0—\frac{Α}{2}\right)$.

9) $ημΑ — συνΑ + 1 = 2\sqrt{2}.\,ημ\frac{Α}{2}.\,ημ\left(45^0—\frac{Α}{2}\right)$.

10) $—ημΑ + συνΑ + 1 = 2\sqrt{2}.\,συν\frac{Α}{2}.\,ημ\left(45^0—\frac{Α}{2}\right)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

Περὶ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.

77. Διὰ τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν δὲν δυνάμεθα ἐν γένει νὰ εὕρωμεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς οἱασδήποτε δοθείσης ὀξείας γωνίας (ὅτε εὑρίσκομεν καὶ τοὺς τοιούτους ἀριθμοὺς οἱασδήποτε γωνίας), οὐδὲ πᾶσαν γωνίαν ὀξεῖαν, τῆς ὁποίας δίδεται εἷς τριγωνομετρικὸς ἀριθμός. Διὰ τὴν γενικὴν λύσιν ἑνὸς τῶν προβλημάτων τούτων συνήθως κάμνομεν χρῆσιν τῶν λογαρίθμων. Ἂν π.χ. ζητῆται τὸ ημ $35^0\ 25'$ παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν θέσωμεν ημ $35^o\ 25' = x$ καὶ λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων, ἔχομεν λογ. ημ $35^o\ 25' =$ λογ. x. Ἐὰν γνωρίσωμεν ποῖος εἶνε ὁ λογάριθμος τοῦ ημ $35^o\ 25'$ καὶ εὕρωμεν τὸν ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμὸν εἰς τὸν λογάριθμον τοῦτον, αὐτὸς παριστάνει τὴν τιμὴν τοῦ ημ$35^o\ 25'$. Ἀντιστρόφως· ἂν δοθῇ π.χ. ημ $\varphi=0,75$ καὶ ζητῆται ἡ γωνία φ, ἔχομεν, ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων, λογ. ημ φ=λογ. 0,75. Ἐὰν εὕρωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 0,75 αὐτὸς θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ημ φ. Ἂν τώρα γνωρίσωμεν εἰς ποῖον τόξον ἀντιστοιχεῖ λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου αὐτοῦ ἴσος μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ 0,75, ἔχομεν τὸ ἄγνωστον τόξον ἢ τὴν γωνίαν φ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι, εἶνε ἀνάγκη νὰ δυνάμεθα νὰ εὑρίσκωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, καθὼς καὶ τὰς γωνίας, τῶν ὁποίων ὡρισμένοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν δοθέντα λογάριθμον. Πράγματι,ὑπάρχουν πίνακες τοιοῦτοι, ἡ χρῆσις τῶν ὁποίων διευκολύνει τὴν λύσιν τῶν ἐν λόγῳ προβλημάτων, συνήθως δ' οἱ πίνακες αὐτοὶ περιέχονται εἰς βιβλίον, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν (περὶ τῶν ὁποίων πραγματεύεται ἡ Ἄλγεβρα).

Οἱ λογαριθμικοὶ πίνακες τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν περιέχουν τοὺς λογαρίθμους αὐτῶν μὲ πέντε δεκαδικὰ ψηφία τῶν τόξων τῶν ὀξειῶν γωνιῶν (ἀπὸ 0^o μέχρις 90^o), τὰ ὁποῖα προχωροῦν κατὰ 1'.

Διάταξις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.

78. Εἰς τοὺς πίνακας (τοῦ Dupuis) προηγεῖται πίναξ εἰς τὸν ὁποῖον ἀναγράφονται οἱ λογάριθμοι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν μὲ πέντε δεκαδικὰ ψηφία, ἕπεται δὲ ἄλλος, ὅστις περιλαμβάνει τοὺς λογαρίθμους τῶν τεσσάρων

τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τόξων, τὰ ὁποῖα προβαίνουν αὐξανόμενα κατὰ 1′ ἀπὸ 0° μέχρις 90°. Ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν τῶν τόξων ἀπὸ 0° μέχρι 44° εἶνε γραμμένος εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς σελίδος, ὁ δὲ τῶν πρώτων λεπτῶν εἰς τὴν πρώτην στήλην, ἥτις φέρει ἄνω τὸ σύμβολον (′) καὶ ἀπὸ 0′ μέχρι 30′ εἰς τὰς πρὸς τ᾽ ἀριστερὰ σελίδας καὶ ἀπὸ 30′ μέχρις 60′ εἰς τὰς πρὸς τὰ δεξιά. Τέσσαρες στῆλαι φέρουν ἐπιγραφὰς sin., tang., cotg., cos. αἵτινες φανερώνουν ἡμίτονον, ἐφαπτομένη, συνεφαπτομένη, συνημίτονον, προκύπτουν δ᾽ αὗται ἐκ συγκοπῆς τῶν λέξεων sinus, tangente, contangente, cosinus. Ἑκάστη τῶν στηλῶν τούτων περιέχει τοὺς λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους φανερώνει ἡ ἐπιγραφὴ αὕτη. Ἕκαστος δὲ τῶν λογαρίθμων αὐτῶν ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν, αἱ ὁποῖαι ἀναγράφονται εἰς τὴν σελίδα καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν πρώτων λεπτῶν τῆς πρώτης στήλης πρὸς τὰ ἀριστερά, ὅστις κεῖται εἰς τὴν αὐτὴν γραμμὴν τοῦ λογαρίθμου.

Ἡ διάταξις τῶν λογαρίθμων εἰς τοὺς πίνακας εἶνε ὁμοία μὲ τὴν τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν (περὶ τῶν ὁποίων γίνεται λόγος εἰς τὴν Ἄλγεβραν). Ἐπειδὴ οἱ λογάριθμοι τῶν ἡμιτόνων, ἐφαπτομένων, συνεφαπτομένων καὶ συνημιτόνων τῶν τόξων ἀπὸ 0° μέχρι 45° εἶνε καὶ οἱ λογάριθμοι τῶν συνημιτόνων, συνεφαπτομένων, ἐφαπτομένων καὶ ἡμιτόνων τῶν συμπληρωματικῶν τόξων ἀπὸ 90° μέχρι 45°, αἱ στῆλαι ὑπεράνω τῶν ὁποίων εἶνε ἡ ἐπιγραφὴ sin., φέρουν κάτω τὴν cos., ἡ ἔχουσα ἄνω τὸ tang. φέρει κάτω τὸ cotg., ἡ τὸ cos. κάτω τὸ sin., ἡ φέρουσα ἄνω τὸ cotg. φέρει κάτω τὸ tang. Κάτω ἑκάστης σελίδος εἶνε γραμμένος ὁ ἀριθμός, ὅστις μὲ τὸν γραμμένον εἰς τὸ ἄνω μέρος αὐτῆς ἔχει ἄθροισμα 89°, εἰς δὲ τὴν τελευταίαν στήλην καὶ κάτω ἑκάστης σελίδος ὑπάρχει τὸ σύμβολον (′) τῶν πρώτων λεπτῶν, εἶνε δὲ γραμμένοι εἰς αὐτὴν οἱ ἀριθμοί, προχωροῦντες αὐξανόμενοι ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω κατὰ 1′ ἀπὸ 0′ μέχρι 30′, εἰς τὴν δεξιὰν σελίδα, καὶ ἀπὸ 30′ μέχρι 60′ εἰς τὴν ἀριστεράν. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς τῶν ὑποκάτω γραμμένων μοιρῶν μετὰ τῶν εἰς ἑκάστην γραμμὴν τῆς τελευταίας στήλης λεπτῶν εἶνε τὸ συμπλήρωμα τῶν ὑπεράνω τοῦ πίνακος ἀριθμοῦ μοιρῶν μετὰ τῶν εἰς τὴν αὐτὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν λεπτῶν τῆς πρώτης στήλης. Μετὰ τὴν στήλην τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων ὑπάρχουν στῆλαι, αἱ ὁποῖαι φέρουν τὴν ἐπιγραφὴν D (Differences = Διαφοραί), καθὼς καὶ ἄλλη μεταξὺ τῶν στηλῶν τῶν ἐφαπτομένων καὶ συνεφαπτομένων. Αἱ στῆλαι αὗται περιέχουν τὰς διαφορὰς δύο διαδοχικῶν λογαρίθμων τοῦ πίνακος, ἐκπεφρασμένας εἰς μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως.

Περὶ τῆς χρήσεως τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων.

Ἡ χρῆσις τῶν πινάκων τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν συνίσταται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἑξῆς δύο προβλημάτων.

79. Πρόβλημα 1).«*Δοθέντος τόξου (μὴ ὑπερβαίνοντος τὰς 90°) νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τριγωνομετρικοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ*».

Ἂν τὸ δοθὲν τόξον ἔχῃ μόνον μοίρας ἢ καὶ πρῶτα λεπτά, οἱ λογάριθμοι τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν αὐτοῦ ὑπάρχουν εἰς τοὺς πίνακας, καὶ εὑρίσκονται εἰς τὰς στήλας, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς καὶ εἰς τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν εἰς τὴν ὁποίαν ἀναγράφονται τὰ διδόμενα πρῶτα λεπτά. Οὕτω π.χ. ἂν ζητῆται ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμ. 64° 44′, εὑρίσκομεν εἰς τοὺς πίνακας ὅτι ἰσοῦται μὲ $\bar{1}$, 95633.

Ἂν τὸ δοθὲν τόξον ἔχῃ καὶ δεύτερα λεπτά, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἔστω π.χ. ὅτι ζητεῖται ὁ λογάριθμος τοῦ ημ 27° 38′ 45″. Ἐπειδὴ τὸ τόξον αὐτὸ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ τόξου 27° 38′ καὶ τοῦ 27° 39′, ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου αὐτοῦ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων τῶν τόξων τούτων. Ἀλλ᾽ οἱ λογάριθμοι τῶν ἡμιτόνων τῶν τόξων αὐτῶν ὑπάρχουν εἰς τοὺς πίνακας καὶ εἶνε $\bar{1}$,66634 καὶ $\bar{1}$,66658. Ἡ διαφορὰ τούτων (γραμμένη εἰς τὴν στήλην τὴν φέρουσαν ἄνω τὸ D) εἶνε 24 μονάδες τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως. Δεχόμεθα τώρα ὅτι, *αἱ μεταβολαὶ τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εἶνε ἀνάλογοι (κατὰ προσέγγισιν) πρὸς τὰς μεταβολὰς τῶν τόξων, ὅταν αὗται εἶνε μικρότεραι ἑνὸς λεπτοῦ.* Κατὰ ταῦτα, ἐπειδὴ εἰς αὔξησιν ἑνὸς λεπτοῦ ἀπὸ τοῦ τόξου 27° 38′ εἰς τὸ τόξον 27° 39′, ηὐξήθη ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου κατὰ 24 ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστοῦ, δεχόμεθα ὅτι εἰς αὔξησιν 45″ ἢ $^{45}/_{60}$ ἀπὸ τοῦ τόξου 27° 38′ εἰς τὸ 27° 38′45″, ὁ λογάριθμος θὰ αὐξηθῇ κατὰ $24 \times \frac{45}{60} = 18$ ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστοῦ. Ὥστε, θὰ προσθέσωμεν 18 μονάδας τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξεως εἰς τὸν λογάριθμον τοῦ ημ 27° 38′, διὰ νὰ ἔχωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ ημ 27° 38′ 45″. Ἤτοι ἔχομεν λογ. ημ 27° 38′ 45″ $= \bar{1},66634$

$$\begin{array}{r} +18 \\ \hline =\bar{1},66652. \end{array}$$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, ὅταν ζητῆται ὁ λογάριθμος τῆς ἐφαπτομένης τόξου τινός, καθὼς καὶ ὅταν πρόκειται περὶ τοῦ λογαρίθμου τοῦ συνημιτόνου ἢ τῆς συνεφαπτομένης ἑνὸς τόξου, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι· ἐπειδὴ τὸ συνημίτονον καὶ ἡ συνεφαπτομένη τόξου περιλαμβανομένου μεταξὺ 0° καὶ 90°, ἐλαττοῦται, ὅταν τὸ τόξον αὐξάνεται, καὶ τοὐναντίον, θὰ λαμβάνωμεν ἐκ τῶν πινάκων τὸν λογάριθμον τοῦ συνημιτόνου (ἢ τῆς συνεφαπτομένης) τοῦ τόξου, τοῦ ἀμέσως μεγαλυτέρου ἀπὸ τὸ δοθέν, καὶ θὰ εὕρωμεν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν αὔξησιν τοῦ λογαρίθμου τοῦ συνημιτόνου (ἢ τῆς συνεφαπτομένης), ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἐλάττωσιν τοῦ τόξου, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ μεταξὺ τοῦ δοθέντος τόξου καὶ τοῦ ἀμέσως μεγαλυτέρου αὐτοῦ καὶ ἀναγεγραμμένου εἰς τοὺς πίνακας.

80. Πρόβλημα 2). *«Δοθέντος τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ, ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτὸν τόξον»*.

Ἐὰν ὁ δοθεὶς λογάριθμος εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας, εὑρίσκομεν τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτὸν τόξον εἰς τοὺς πίνακας, ἀλλὰ διὰ νὰ εὑρίσκωμεν αὐτὸ ταχέως, εἶνε ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης ὅτι εἶνε λογ. ημ 45^0=λογ. συν $45^0=\bar{1},84949$, καὶ λογ. εφ 45^0=λογ. σφ 45^0= λογ. $1=0$. Διότι μὲ τὴν βοήθειαν αὐτῶν ὁδηγούμεθα εἰς τὸ πότε πρέπει νὰ ἀναζητῶμεν τὸν δοθέντα λογάριθμον εἰς τὰς στήλας, αἱ ὁποῖαι φέρουν ὑπεράνω τὸ ὄνομα τοῦ δοθέντος τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ, καὶ πότε ὑποκάτω. Πρὸς τοῦτο λοιπὸν πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ὅτι· ἐὰν μὲν δοθῇ λογάριθμος ἡμιτόνου μικρότερος τοῦ $\bar{1},84949$, τὸ ἀντίστοιχον εἰς αὐτὸν τόξον θὰ εἶνε μικρότερον τῶν 45^0, καὶ διὰ τοῦτο ὁ λογάριθμος πρέπει νὰ ἀναζητηθῇ εἰς τὰς στήλας, ὑπεράνω τῶν ὁποίων εἶνε τὸ sin., ἐὰν δὲ δοθῇ λογάριθμος ἡμιτόνου μεγαλύτερος τοῦ $\bar{1},84949$, τὸ ἀντίστοιχον τόξον θὰ εἶνε μεγαλύτερον τῶν 45^0, καὶ ὁ λογάριθμος θὰ ἀναζητηθῇ εἰς τὰς στήλας, κάτω τῶν ὁποίων εἶνε τὸ sin. Ἀκριβῶς ἀντιθέτως ἐργαζόμεθα, ὅταν δοθῇ λογάριθμος συνημιτόνου (διότι αὐξανομένου τοῦ τόξου ἐλαττοῦται τὸ συνημίτονον, ἄρα καὶ ὁ λογάριθμος αὐτοῦ).

Ὅταν δοθῇ λογάριθμος ἐφαπτομένης ἀρνητικός, ἀναζητοῦμεν αὐτὸν εἰς τὰς στήλας, αἱ ὁποῖαι φέρουν ὑπεράνω τὸ tang., διότι τόξου μικροτέρου τῶν 45^0 ἡ ἐφαπτομένη εἶνε μικροτέρα τῆς μονάδος, καὶ ὁ λογάριθμος αὐτῆς εἶνε ἀρνητικός. Ἂν ὅμως ὁ δοθεὶς λογάριθμος τῆς ἐφαπτομένης εἶνε θετικός, ἀναζητοῦμεν αὐτὸν εἰς τὰς στήλας, κάτω τῶν ὁποίων εἶνε τὸ tang. Ἀκριβῶς ἀντιθέτως ἐργαζόμεθα, ὅταν δοθῇ λογάριθμος συνεφαπτομένης, ὅταν δηλαδὴ ὁ λογάριθμος εἶνε ἀρνητικός, ἀναζητοῦμεν αὐτὸν εἰς τὰς στήλας κάτω τῶν ὁποίων εἶνε τὸ cotg., ὑπεράνω δὲ ὅταν εἶνε θετικός. Οὕτω π.χ. εὑρίσκομεν εἰς τοὺς πίνακας ὅτι εἶνε $\varphi=12^0 44'$, ἂν δοθῇ λογ.ημ $\varphi=\bar{1},34324$. Ἐπίσης $\omega=66^0\ 11'$, ἂν δοθῇ λογ. συνω= $=\bar{1},60618$. Ἂν δοθῇ λογ. ἐφ $\varphi=0,65008$, εὑρίσκομεν $\varphi=77^0 23'$.

Ἐὰν ὁ δοθεὶς λογάριθμος τριγωνομετρικοῦ τινος ἀριθμοῦ δὲν περιέχεται εἰς τοὺς πίνακας, δεχόμεθα ὅτι ἡ αὔξησις τοῦ λογαρίθμου εἶνε ἀνάλογος πρὸς τὴν αὔξησιν τοῦ τόξου, (ὅταν ἡ αὔξησις τούτου εἶνε μικρά), καὶ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἔστω ὅτι δίδεται λογ. εφ ω $= \overline{1},69985$, καὶ ζητεῖται ἡ γωνία ω. Ἐπειδὴ ὁ δοθεὶς λογάριθμος εἶνε ἀρνητικός, τὸ ἀντίστοιχον εἰς αὐτὸν τόξον εἶνε μικρότερον τῶν 45°, καὶ ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον εἰς τὰς στήλας ἄνω τῶν ὁποίων εἶνε τὸ tang. Εὑρίσκομεν λοιπὸν ὅτι *ὁ πλησιέστερος ἀλλὰ μικρότερος* πρὸς τὸν δοθέντα λογάριθμον εἶνε ὁ $\overline{1},69963$, ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ τόξον $26^{0}\ 36'$, καὶ διαφέρει ἀπὸ τὸν ἀμέσως ἑπόμενον αὐτοῦ τοῦ πίνακος κατὰ 32 μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως. Λέγομεν τώρα. Εἰς αὔξησιν τοῦ λογαρίθμου κατὰ 32 ἑκατοστὰ χιλιοστοῦ, αὐξάνεται τὸ τόξον κατὰ $1'$ ἢ $60''$, εἰς αὔξησιν τοῦ λογαρίθμου 22 ἑκατοστῶν χιλιοστοῦ, ἥτις προκύπτει, ὅταν λαμβάνωμεν ἀντὶ τοῦ $\overline{1},69963$ τὸν δοθέντα, ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ τόξου κατὰ $60'' \times 22/32 = 41''$ (περίπου). Πρέπει λοιπὸν νὰ προσθέσωμεν $41''$ εἰς τὸ τόξον $26^{0}\ 36'$, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον. Ἤτοι εἶνε ω $= 26^{0}\ 36'\ 41''$.

Ἀκριβῶς ὁμοίως πρὸς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἐργαζόμεθα, ὅταν δοθῇ ὁ λογάριθμος ἡμιτόνου καὶ ζητεῖται τὸ τόξον. Ἂν ὅμως δοθῇ ὁ λογάριθμος συνημιτόνου, π.χ. ὅτι λογ. συν. φ $= \overline{1},89775$, εὑρίσκομεν εἰς τοὺς πίνακας τὸν *πλησιέστερον ἀλλὰ μεγαλύτερον* λογάριθμον πρὸς τὸν δοθέντα. Αὐτὸς εἶνε $\overline{1},89781$ καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ τόξον $37^{0}\ 47'$.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι, εἰς ἐλάττωσιν 10 ἑκατοστῶν χιλιοστοῦ τοῦ λογαρίθμου τούτου, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀμέσως ἑπόμενον αὐτοῦ εἰς τοὺς πίνακας, τὸ τόξον αὐξάνεται κατὰ $1' = 60''$· εἰς ἐλάττωσιν 6 ἑκατοστῶν χιλιοστοῦ τοῦ λογαρίθμου, διὰ νὰ ἔχωμεν τὸν δοθέντα λογάριθμον, ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ τόξου κατὰ $60'' \times 6/10 = 36''$. Πρέπει λοιπὸν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ τόξον $37^{0}\ 47'$ καὶ $26''$, διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ ζητούμενον. Ἤτοι εἶνε φ $= 37^{0}\ 47' 36''$. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν δοθῇ ὁ λογάριθμος συνεφαπτομένης.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ εὑρεθοῦν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν πινάκων οἱ κάτωθι ζητούμενοι λογάριθμοι.

1) λογ.ημ $25^{0}17'$. 2) λογ.συν. $44^{0}52'$. 3) λογ.ημ $65^{0}8'12''$. 4) λογ.συν. $18^{0}\ 9'\ 48''$. 5) λογ. ημ $72^{0}\ 9'$. 6) λογ. συν. $5^{0}\ 44'\ 11''$. 7) λογ. ημ $1^{0}\ 3'\ 4''$. 8) λογ. συν $3^{0}\ 44'\ 11''$. 9) λογ. ημ $2'\ 18''$. 10) λογ. συν. $5'\ 25''$. 11) λογ.εφ $36^{0}52'$. 12) λογ.σφ $10^{0}\ 52'$. 13) λογ. σφ $83^{0}\ 4'\ 14''$. 14) λογ.σφ $45^{0}\ 27'\ 55''$. 15) λογ. σφ $54'\ 55''$.

Ὁμὰς δευτέρα. Εὕρετε τὰς γωνίας διὰ τὰς ὁποίας δίδονται· 1) λογ. ημφ = $\bar{1}$, 36395. 2) λογ. συν φ = $\bar{1}$, 98746. 5) λογ. συν φ = $\bar{1}$, 22005. 4) λογ. συνφ = $\bar{1}$, 92781 ἢ $\bar{1}$, 45651, ἢ $\bar{3}$,97215. 5) λογ. συν. φ = $\bar{1}$, 07829, ἢ $\bar{2}$,65728, ἢ $\bar{3}$,46809. 6) λογ. εφω = $\bar{1}$, 64312, ἢ $\bar{1}$, 92718 ἢ 3,46922. 7) λογ. σφ = $\bar{1}$,01675 ἢ $\bar{1}$, 95812 ἢ $\bar{2}$, 43407. 8) λογ. σφ =1,42835 ἢ 2, 55672.

Ὁμὰς τρίτη. Ὑπολογίσατε μὲ τὴν βοήθειαν τῶν λογαριθμικῶν πινάκων. 1) 17 × ημ 38^0 10′. 2) 24 × συν 52^0 22′14″. 3)0, 825×εφ 10^0 33′ 52″. 4) 227× ημ. 19^0 2′3. 5) 27, 04 × εφ 1^0 17′ 33″. 6)0, 947 × σφ 3^0 28′ 45″.

Περὶ τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων.

81. *Καλοῦμεν τριγωνομετρικὰς ἐξισώσεις τὰς ἐξισώσεις, αἵτινες ἔχουν τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ἀγνώστων γωνιῶν. Οὕτω π. χ. τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις εἶνε ἡ ἑξῆς, ἥτις περιέχει τὴν ἐφαπτομένην καὶ συνεφαπτομένην τῆς ἀγνώστου γωνίας* x, *εφ* x+*σφ* x=*4*.

Λύσις τριγωνομετρικῆς *ἐξισώσεως λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων γωνιῶν, αἵτινες περιέχονται εἰς τὴν ἐξίσωσιν. Οὕτω ἡ εὕρεσις τῆς γωνίας* x, *διὰ τὴν ὁποίαν εἶνε εφ*x+*σφ*x= *4, λέγεται λύσις τῆς ἐξισώσεως ταύτης.*

Ἐὰν τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις περιέχουν μίαν ἄγνωστον γωνίαν, μετασχηματίζομεν αὐτὴν καταλλήλως, ὥστε νὰ εἰσέρχεται εἷς καὶ μόνος τριγωνομετρικὸς ἀριθμὸς τῆς ἀγνώστου, καὶ ἀκολούθως εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν συνήθως μὲ τὴν βοήθειαν καὶ τῶν λογαρίθμων.

82. Ἐφαρμογαί. *Οὕτω διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως ἔχομεν* $εφx + \frac{1}{εφx} = 4$, *ἢ* $εφ^2 x - 4\, εφ\, x + 1 = 0$.

Θέτομεν $εφx = ω$ *καὶ ἔχομεν* $ω^2 - 4\,ω + 1 = 0$.

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ εὑρίσκομεν $ω = 2 \pm \sqrt{3} = 3{,}73205$ *ἢ* $ω = 0{,}26795$.

Οὕτω ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις $εφx = 3{,}73205$, *καὶ* $εφx = 0{,}26795$.

Εὑρίσκομεν ἀκολούθως τὴν γωνίαν x *μὲ τὴν βοήθειαν τῶν λογαρίθμων καὶ ἔχομεν* $x = 75^0$, *καὶ* $x = 15^0$.

2) *Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις* $ημ\, x = 3\, συν\, x$.

Διαιροῦμεν τὰ ἴσα διὰ συν x, *ὅτε εὑρίσκομεν,* $εφ\, x = 3$, *μὲ τὴν βοήθειαν δὲ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκομεν* $x = 71^0 35' 5''$.

3) *Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις* $εφ\, x = ημ\, 2x$.

*Ἔχομεν ἀναπτύσσοντες τὸ ημ*2x, $εφ\, x = 2ημ\, x\, συν\, x$,

ἢ θέτοντες $εφ\, x = ημ\, x / συν\, x$ *καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰ ἴσα ἐπὶ συν* x, *εὑρίσκομεν* $ημ\, x = 2ημ\, x\, συν^2 x$.

Οὕτω ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις $ημ\, x = 0$ *καὶ* $x = 0$, *ἢ* $= 180^0$.

ἢ $συν\, x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ *καὶ* $x = 45^0$, *ἢ* $= 135^0$.

Jean G. Argyriadis

4) Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $5\,\eta\mu\, x + 3\,\sigma\upsilon\nu\, x = 4\sqrt{2}$.

Διαιροῦμεν διὰ 5 τὰ ἴσα καὶ ἔχομεν $\eta\mu\, x + 3/5\,\sigma\upsilon\nu\, x = 4/5.\sqrt{2}$.

Θέτομεν τώρα $3/5 = \varepsilon\varphi\, \omega$, (ἐνῷ τὸ ω εἶνε ἄγνωστον)

καὶ ἔχομεν $$\eta\mu\, x + \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\,\sigma\upsilon\nu\, x = 4/5.\sqrt{2}$$

ἢ $$\frac{\eta\mu\,(x+\omega)}{\sigma\upsilon\nu\,\omega} = 4/5.\sqrt{2}$$

ἢ $$\eta\mu\,(x+\omega) = 4/5.\sqrt{2}.\,\sigma\upsilon\nu\,\omega.$$

Διὰ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν ω ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\varepsilon\varphi\omega=3/5$ καὶ εἶνε $\omega = 30^0\, 57'\, 5''$. Οὕτω εὑρίσκομεν καὶ τὸ συν ω καὶ ἀκολούθως ὅτι $(x+\omega)$ ἰσοῦται μὲ $75^0\, 58'$, ἢ $104^0\, 2'$ καὶ ἑπομένως $x = 45^0$ ἢ $x = 73^0\, 4'$.

Μέθοδος τῆς βοηθητικῆς γωνίας.

83. Ἡ μέθοδος διὰ τῆς ὁποίας ἐλύθη ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις λέγεται *μέθοδος διὰ τῆς βοηθητικῆς γωνίας*. Τὴν μέθοδον ταύτην μεταχειριζόμεθα συνήθως ὅταν ἔχωμεν νὰ λύσωμεν σύστημα ἐξισώσεων μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους. Ἔστω π. χ. πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$x + y = 75^0,$$

$$\eta\mu x.\,\sigma\upsilon\nu y = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

Ἔχομεν $\eta\mu\,(x-y) = \eta\mu\, x\,\sigma\upsilon\nu\, y - \sigma\upsilon\nu\, x\,\eta\mu\, y$, καὶ τοῦτο ἕνεκα τῆς δευτέρας τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων = μὲ $\sqrt{6}/4 - \sigma\upsilon\nu\, x\,\eta\mu\, y$,

ἢ $\eta\mu\,(x-y) = 0,61237 - \sigma\upsilon\nu\, x\,\eta\mu\, y$.

Ἔχομεν ἀκόμη $\eta\mu\,(x+y) = \eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu\, y + \sigma\upsilon\nu\, x\,\eta\mu\, y$,

ἢ ἐπειδὴ $\eta\mu\,(x+y) = \eta\mu\, 75^0 = 0,96593$ (μὲ τὴν βοήθειαν τῶν πινάκων), ἔχομεν $0,96593 = 0,61237 + \sigma\upsilon\nu\, x\,\eta\mu\, y$.

Ἑπομένως εἶνε $0,35356 = \sigma\upsilon\nu\, x\,\eta\mu\, y$.

$$\eta\mu\,(x-y) = 0,25881 \text{ καὶ } (x-y) = 15^0,$$

ἢ $x-y = 165^0$.

Οὕτω ἔχομεν τὸ σύστημα $x+y = 75^0$,

$x-y = 15^0$, ἢ 165^0 καὶ εὑρίσκομεν διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη τὰς τιμὰς τῶν x καὶ y.

Ἤτοι $x = 45^0$ καὶ $y = 36^0$.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις.

1) $\sigma\upsilon\nu\, x = 2\,\eta\mu\, x$. 2) $\sigma\upsilon\nu\, x = \varepsilon\varphi\, x$. 3) $\eta\mu x = 3\,\sigma\upsilon\nu^2\, x$. 4) $3\,\eta\mu\, x = 4\sigma\varphi\, x$. 5) $\varepsilon\varphi\, x + 4\sigma\varphi\, x = 4$. 6) $\sigma\upsilon\nu\, x + \sigma\varphi\, x = 1 + \eta\mu\, x$. 7) $\sqrt{3}\,\eta\mu\, x + \sigma\upsilon\nu\, x = \sqrt{3}$. 8) $15\,\sigma\upsilon\nu^2\, x - 7\,\eta\mu^2 x = 4$. 9) $4\,\eta\mu\, x + 3\,\sigma\upsilon\nu\, x = 1$. 10) $4\,\eta\mu^2\, x - 3\eta\mu\, x = 1$. 11) $3\,\eta\mu^2\, x + 4\,\eta\mu\, x\,\sigma\upsilon\nu\, x + 5\,\sigma\upsilon\nu^2\, x = 3$. 12) $\eta\mu^2\, x + 2\,\eta\mu\, x\,\sigma\upsilon\nu\, x - 3\,\sigma\upsilon\nu^2\, x = 0$. 13) $2(\eta\mu\, x + 2\,\sigma\upsilon\nu\, x) : 5\,(3\eta\mu\, x - 4\sigma\upsilon\nu\, x)$. 14) $1 + \varepsilon\varphi\, x = (1 + \sigma\varphi\, x).\sqrt{3}$. 15) $(3\,\varepsilon\varphi\, x + 2\,\sigma\varphi\, x) : (3\,\varepsilon\varphi\, x + 4\,\sigma\varphi\, x) = 2 : 3$.

Ὁμὰς δευτέρα. Λύσατε τὰς κάτωθι τριγωνομετρικὰς ἐξισώσεις.

1) $\eta\mu\ \varphi\ \sigma\upsilon\nu\ \varphi = 1/2$. 2) $2\eta\mu\ 2\varphi = 3\ \eta\mu\ \varphi$. 3) $3\eta\mu\ 2x = 2\,\varepsilon\varphi x$. 4) $3\ \eta\mu\ 2\varphi = 5\ \sigma\upsilon\nu^2\ \varphi$. 5) $\sigma\upsilon\nu\ \varphi - \sigma\upsilon\nu\ 2\varphi = 1$. 6) $\eta\mu\ \varphi + \sigma\upsilon\nu\ 2\varphi = 1$. 7) $1 + \sigma\upsilon\nu\ 2\varphi = 6\ \eta\mu^2\ \varphi$. 8) $1 - \sigma\upsilon\nu\ 2\varphi = \sqrt{3}.\ \eta\mu\ 2\varphi$. 9) $\varepsilon\varphi\ \varphi + \varepsilon\varphi\ 2\varphi = \sigma\varphi\ \varphi$. 10) $6\ \eta\mu^2\ \varphi - 8\ \sigma\upsilon\nu^2\varphi = \eta\mu\ 2\varphi$. 11) $\eta\mu\ 3\ \varphi = 2\ \eta\mu\ \varphi$. 12) $\varepsilon\varphi\ 3\varphi = \eta\mu\, 6\varphi$.

Ὁμὰς τρίτη. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα.

1) $x + \psi = 45^0$, $\eta\mu\ x + \eta\mu\ \psi = 0{,}74422$· 2) $x + \psi = 90^0$, $\sigma\upsilon\nu\ x + \sigma\upsilon\nu\ \psi = 1{,}36603$· 3) $x - \psi = 20^0$, $\eta\mu\ x\eta\mu\ \psi = 0{,}93969$·

4) $x + \psi = 30^0$, $\sigma\upsilon\nu\ x.\ \sigma\upsilon\nu\ \psi = \sqrt{3} : 2$· 5) $\eta\mu x + \eta\mu\ \psi = 1$, $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu\ \psi = 3:2$. 6) $\eta\mu\ x : \eta\mu\ y = \sqrt{3} : 2$, $\sigma\upsilon\nu\ x : \sigma\upsilon\nu\ y = \sqrt{2} : 2$.

7) $x - \psi = 20^0$, $\varepsilon\varphi\ x\ \varepsilon\varphi\ \psi = 0{,}46631$. 8) $x - \psi = 30^0$, $\varepsilon\varphi\ x = 3\varepsilon\varphi\ \psi$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV.

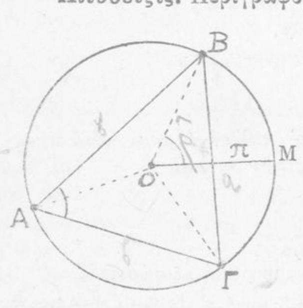
Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τριγώνου.

Θεώρημα περὶ τῶν ἡμιτόνων τῶν γωνιῶν τριγώνου.

84. Ἂν (ΑΒ) = γ, (ΒΓ)=α, (ΓΑ)=β, εἶνε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου τινὸς ΑΒΓ καὶ αἱ ἀπέναντι τούτων γωνίαι παριστάνωνται διὰ τῶν Γ, Α, καὶ Β, θὰ δείξωμεν τὴν ἑξῆς σπουδαίαν σχέσιν τῶν στοιχείων τούτων

$$\boxed{\frac{\alpha}{\eta\mu \mathrm{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu \mathrm{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις. Περιγράφομεν κύκλον εἰς τὸ τρίγωνον, ἔστω δὲ Ο τὸ κέντρον καὶ Ρ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ. Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΒ καὶ ΟΓ, τὸ μὲν τρίγωνον ΟΒΓ εἶνε ἰσοσκελές, ἡ δὲ γωνία ΓΟΒ ἰσοῦται μὲ 2Α (ὡς ἐπίκεντρος βαίνουσα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου μετὰ τῆς ἐγγεγραμμένης Α). Ἂν ἐκ τοῦ Ο φέρωμεν τὴν ΟΠΜ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΒ, αὕτη διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς ΓΟΒ καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Π τῆς ΓΒ· ἤτοι εἶνε $(\Pi\mathrm{B}) = \frac{\alpha}{2}$.



Ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα μετρήσεως τοῦ ἀνύσματος ΠΒ τὴν ἀκτῖνα Ρ, τὸ μῆκος αὐτοῦ εἶνε τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας ΠΟΒ ἢ τῆς ἴσης πρὸς αὐτὴν Α· ἤτοι ἔχομεν

$$\frac{\Pi\mathrm{B}}{\mathrm{P}} = \eta\mu\mathrm{A},\ \text{ἢ}\ \frac{\alpha}{2\mathrm{P}} = \eta\mu\mathrm{A},\ \text{ἢ}\ \frac{\alpha}{\eta\mu\mathrm{A}} = 2\mathrm{P}.$$

Παρατηρητέον ὅτι ἡ σχέσις αὕτη ἰσχύει οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε ἡ γωνία Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν $\frac{\beta}{\eta\mu B} = 2P$ καὶ $\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$, ἐκ δὲ τῆς συγκρίσεως τῶν ἴσων τούτων λόγων ἔχομεν τὰς ἀνωτέρω ἀναλογίας (1), αἵτινες γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς συμβολικῶς

$$\boldsymbol{\alpha : \beta : \gamma = \eta\mu A : \eta\mu B : \eta\mu \Gamma}$$

ἐκφράζουν δὲ τὸ ἑξῆς θεώρημα.

«Τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου εἶνε ἀνάλογα τῶν ἡμιτόνων τῶν ἀπέναντι αὐτῶν γωνιῶν, καὶ οἱ λόγοι οὗτοι εἶνε ἴσοι μὲ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον».

85. *Περίπτωσις ὀρθογωνίου τριγώνου.* Ἐὰν τὸ δοθὲν τρίγωνον εἶνε ὀρθογώνιον καὶ ἔχῃ τὴν γωνίαν Α ὀρθήν, θὰ εἶνε ημΑ = ημ 90° = 1, καὶ αἱ ἀνωτέρω σχέσεις γίνονται

$$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2P,$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἔχομεν

$$\boxed{\begin{array}{ll} \boldsymbol{\beta = \alpha.\ \eta\mu\ B}, & \boldsymbol{\gamma = \alpha.\ \eta\mu\ \Gamma}, \\ \boldsymbol{\beta = \alpha.\ \sigma\upsilon\nu\,\Gamma}, & \boldsymbol{\gamma = \alpha.\ \sigma\upsilon\nu\,B}, \end{array}}$$

καὶ

24

ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶνε συμπληρωματικαί. Ἤτοι· *«εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν καθέτων πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι ἢ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς παρακειμένης εἰς αὐτὴν γωνίας».*

86. Ἐὰν τὰς ἰσότητας β=α ημ Β, καὶ γ = α συν Β διαιρέσωμεν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B} = \varepsilon\varphi\ B, \text{ ἢ } \beta = \gamma.\ \varepsilon\varphi\ B$$

καὶ ὁμοίως γ=β. εφ Γ. Ἐπειδὴ δὲ εἶνε εφ Β=σφ Γ καὶ εφ Γ=σφ Β (ἀφοῦ αἱ Β καὶ Γ εἶνε συμπληρωματικαί), ἕπεται ὅτι ἔχομεν

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{\beta = \gamma.\ \varepsilon\varphi\ B = \gamma.\ \sigma\varphi\ \Gamma}, \\ \boldsymbol{\gamma = \beta.\ \varepsilon\varphi\ \Gamma = \beta.\ \sigma\varphi\ B}. \end{array}}$$

25

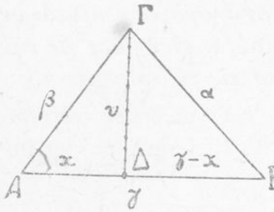
Ἤτοι, *«εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀπέναντι ἢ ἐπὶ τὴν συνεφαπτομένην τῆς παρακειμένης εἰς αὐτὴν γωνίας».*

Θεώρημα περὶ τοῦ συνημιτόνου γωνίας τριγώνου.

87. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ὑπάρχουν αἱ ἑξῆς σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \text{ συν } A, \\ \beta^2 &= \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \text{ συν } B, \\ \gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \text{ συν } \Gamma. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ἀπόδειξις. 1) Ἔστω ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει τὴν γωνίαν Α ὀξεῖαν. Ἂν ΓΔ εἶνε ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς Γ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒ τοῦ



τριγώνου καὶ τεθῇ $(\Delta\Gamma) = \upsilon$, $(A\Delta) = x$, $(\Delta B) = (\gamma - x)$, ἐκ μὲν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ ἔχομεν $\upsilon^2 = \beta^2 - x^2$, ἐκ δὲ τοῦ ΒΔΓ ὅτι $\alpha^2 = \upsilon^2 + (\gamma - x)^2$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἰσότητα ταύτην τὸ υ^2 διὰ τοῦ ἴσου αὐτοῦ $\beta^2 - x^2$ καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εὑρίσκομεν

$$\alpha^2 = \beta^2 - x^2 + \gamma^2 - 2\gamma x + x^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma x.$$

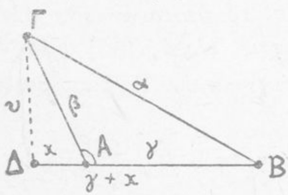
Ἀλλ' εἶνε (ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ) $\quad x = \beta \text{ συν } A$.

Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ x ἀνωτέρω εὑρίσκομεν

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \text{ συν } A. \qquad (2)$$

Ὁμοίως ἀνταποδεικνύεται ὁ ἀνωτέρω τύπος καὶ ὅταν τὸ Δ κεῖται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς βάσεως ΑΒ τοῦ τριγώνου.

2) Ἂν ἡ γωνία Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶνε ἀμβλεῖα, θὰ ἔχωμεν ἐκ μὲν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΔΓ



$\alpha^2 = \upsilon^2 + (\gamma + x)^2 = \upsilon^2 + \gamma^2 + x^2 + 2\gamma x$,

ἐκ δὲ τοῦ ΑΔΓ ὅτι $\upsilon^2 = \beta^2 - x^2$.

Ἀντικαθιστῶντες ἀνωτέρω τὸ υ^2 διὰ τοῦ ἴσου αὐτοῦ, εὑρίσκομεν

$$\alpha^2 = \beta^2 - x^2 + \gamma^2 + x^2 + 2\gamma x = \beta^2 + \gamma^2 + 2\gamma x.$$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΔΑ ἔχομεν $x = \beta.\text{συν } (\Delta A\Gamma) = \beta \text{ συν } (180^\circ - A) = -\beta \text{ συν } A$. Ἀντικαθιστῶντες τὸ x εἰς τὴν τελευταίαν ἰσότητα ἔχομεν τὸν ἀνωτέρω τύπον (2).

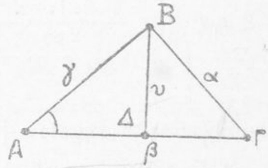
Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύονται καὶ οἱ δύο ἄλλοι τύποι (1), ἕκαστος δὲ τούτων ἐκφράζει τὸ ἑξῆς θεώρημα.

«Τὸ τετράγωνον τοῦ μήκους μιᾶς τῶν πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μηκῶν τῶν δύο ἄλλων αὐτοῦ πλευρῶν, ἠλαττωμένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας».

Περὶ ἐμβαδοῦ τριγώνου.

88. *« Τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου τινὸς ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν μηκῶν δύο πλευρῶν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς περιεχομένης ὑπ' αὐτῶν γωνίας».*

Θὰ δείξωμεν δηλαδὴ ὅτι, ἂν Ε παριστάνῃ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου τινὸς ΑΒΓ, θὰ εἶνε $E = \frac{\beta\gamma}{2}$ ημ Α.



Ἀπόδειξις. Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Γεωμετρίας) ὅτι, τὸ $E = \frac{\beta . \upsilon}{2}$, ἂν υ παριστάνῃ τὸ ὕψος (ΔΒ) τοῦ τριγώνου. Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ ἔχομεν, $\upsilon = \gamma$ ημ Α. Ἀντικαθιστῶντες ἀνωτέρω τὸ υ διὰ τοῦ ἴσου αὐτοῦ εὑρίσκομεν, $E = \frac{\beta\gamma}{2}$ ημ Α.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $E = \frac{\alpha\beta}{2}$ ημΓ, καὶ $E = \frac{\alpha\gamma}{2}$ ημ Β.

Ἤτοι ἔχομεν, $\boxed{\mathbf{E} = \frac{\alpha\beta}{2}\,\text{ημ}\,\Gamma = \frac{\alpha\gamma}{2}\,\text{ημ}B = \frac{\beta\gamma}{2}\,\text{ημ}\,A.}$

89. *«Ἐμβαδὸν τριγώνου διὰ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ».*

Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶνε *

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\mathbf{E} = \sqrt{\tau.(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}} \\ \alpha+\beta+\gamma = 2\tau. \end{array}\right\} \quad (1)$$

ἐὰν ἔχωμεν

Ἀπόδειξις. Γνωρίζομεν ὅτι εἶνε $E = \frac{1}{2}$ βγ ημ Α,

καὶ
$$\text{ημ}\,A = 2\,\text{ημ}\frac{A}{2}\,\text{συν}\frac{A}{2}.$$

Ἄρα,
$$E = \beta\gamma\,\text{ημ}\frac{A}{2}.\,\text{συν}\frac{A}{2} \qquad (2)$$

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν τὸ ημ $\frac{A}{2}$ καὶ συν $\frac{A}{2}$ διὰ τῶν πλευρῶν α,β,γ, λαμβάνομεν τὸν τύπον $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma$ συν Α.

Ἐκ τούτου εὑρίσκομεν, λύοντες ὡς πρὸς τὸ συν Α,

$$\text{συν}\,A = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} \qquad (3)$$

Προσθέτομεν εἰς τὰ ἴσα τὴν μονάδα καὶ εὑρίσκομεν

$$1 + \text{συν}\,A = 1 + \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\,\beta\gamma} = \frac{(2\beta\gamma+\beta^2+\gamma^2)-\alpha^2}{2\,\beta\gamma} = \frac{(\beta+\gamma)^2-\alpha^2}{2\,\beta\gamma}.$$

* Ὁ κατωτέρω τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου εὑρέθη ὑπὸ τοῦ Ἵερωνος τῆς Ἀλεξανδρείας περὶ τὰ 100 π. Χ.

Ἀλλ'εἶνε, ὡς εὕρομεν(73,σελὶς 39) $1+\sigma\upsilon\nu A = 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2}$· Ἑπομένως ἔχομεν $2\,\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} = \frac{(\beta+\gamma)^2-\alpha^2}{2\,\beta\gamma} = \frac{(\beta+\gamma+\alpha)(\beta+\gamma-\alpha)}{2\,\beta\gamma}$.

Θέτοντες $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$, καὶ ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὰ ἴσα ταῦτα τὸ 2α, εὑρίσκομεν $\beta+\gamma-\alpha=2\tau-2\alpha=2(\tau-\alpha)$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα καὶ ἔχομεν

$2\,\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} = \frac{2\,.\,2\tau\,(\tau-\alpha)}{2\,\beta\gamma}$, ἢ $\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} = \frac{\tau\,(\tau-\alpha)}{\beta\,\gamma}$· Ἄρα,

$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\ \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{\tau(\tau-\alpha)}}{\beta\,\gamma}} \qquad (4)$$

(λαμβάνοντες τὸ σημεῖον + ἐκ τῶν δύο σημείων τῆς ῥίζης).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ημ $\frac{A}{2}$, ἀφαιροῦμεν ἕκαστον τῶν ἴσων τῆς ἰσότητος (3) ἀπὸ τὴν μονάδα καὶ ἔχομεν

$$1 - \sigma\upsilon\nu\,A = 1 - \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\,\beta\gamma} = \frac{2\beta\gamma-\beta^2-\gamma^2+\alpha^2}{2\,\beta\gamma} = \frac{\alpha^2-(\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma)}{2\,\beta\gamma}$$

$= \frac{\alpha^2-(\beta-\gamma)^2}{2\,\beta\gamma} = \frac{(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}{2\,\beta\gamma}$. Ἀλλ'εἶνε $1-\sigma\upsilon\nu\,A = 2\eta\mu^2 \frac{A}{2}$,

ἄρα ἔχομεν, ἂν ἀντικαταστήσωμεν ἀνωτέρω καὶ θέσωμεν

$$\alpha+\beta+\gamma = 2\tau$$
$$\alpha-\beta+\gamma = 2(\tau-\beta)$$
$$\alpha+\beta-\gamma = 2(\tau-\gamma),$$

$$2\eta\mu^2 \frac{A}{2} = 4\,\frac{(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{2\,\beta\gamma},$$

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν

$$\boldsymbol{\eta\mu\ \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}}. \qquad (5)$$

Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς τοῦ ημ $\frac{A}{2}$ καὶ συν $\frac{A}{2}$ εἰς τὴν (2) εὑρίσκομεν τὸν τύπον (1).

90. «Ἐμβαδὸν τριγώνου διὰ μιᾶς πλευρᾶς καὶ δύο παρακειμένων εἰς αὐτὴν γωνιῶν».

Ἔχομεν $E = \frac{\alpha\beta}{2}\,\eta\mu\,\Gamma$. *Ἀλλ εἶνε*

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\,A} = \frac{\beta}{\eta\mu\,B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\,\Gamma} = 2P, \text{ καὶ } A+B+\Gamma = 180^0.$$

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν $\beta = \frac{\alpha}{\eta\mu\,A}\cdot\eta\mu\,B$, *καὶ* $A = 180^0-(B+\Gamma)$,

$\eta\mu\ A = \eta\mu\ [180^0 - (B+\Gamma)] = \eta\mu\ (B+\Gamma)$. *Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν πρώτην ἰσότητα εὑρίσκομεν*

$$E = \frac{\alpha^2\ \eta\mu B\ \eta\mu \Gamma}{2\ \eta\mu\ (B+\Gamma)}.$$

91. **«Ἐμβαδὸν τριγώνου διὰ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου».**

Ἔχομεν $E = \frac{\alpha\beta}{2}\ \eta\mu\ \Gamma$, *καὶ* $\frac{\alpha}{\eta\mu\ A} = \frac{\beta}{\eta\mu\ B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\ \Gamma} = 2P$.

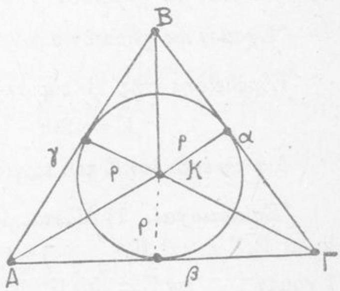
Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν $\alpha = 2P\ \eta\mu\ A$, $B = 2P\ \eta\mu\ B$ *καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον τοῦ ἐμβαδοῦ ἔχομεν* $\mathbf{E = 2P^2\ \eta\mu\ A\ \eta\mu\ B\ \eta\mu\ \Gamma}$.

92. **«Ἐμβαδὸν τριγώνου διὰ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου».**

Ἂν ρ παριστάνῃ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (βλέπε τὸ κατωτέρω σχῆμα) φέρωμεν δὲ τὰς εὐθείας ΚΑ, ΚΒ καὶ ΚΓ ἐκ τοῦ κέντρου εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου, ἔχομεν ὅτι,

$$E = \frac{1}{2}\alpha\varrho + \frac{1}{2}\beta\varrho + \frac{1}{2}\gamma\varrho = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma).\ \varrho$$

(ἐπειδὴ τὸ ΑΒΓ διαιρεῖται εἰς τρία τρίγωνα, ἔχοντα βάσεις τὰς πλευρὰς α, β, γ *καὶ ὕψος* ϱ, *ἢ ἂν τεθῇ* $\alpha+\beta+\gamma = 2\tau$, *εἶνε* **Ε=τρ.**



Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Δείξατε τὴν ἀλήθειαν τῶν κάτωθι τύπων

$$\tau = 4P\ \sigma\upsilon\nu\ \frac{A}{2}\ \sigma\upsilon\nu\ \frac{B}{2}\ \sigma\upsilon\nu\ \frac{\Gamma}{2}.$$

$$\varrho = 4P\ \eta\mu\ \frac{A}{2}\ \eta\mu\ \frac{B}{2}\ \eta\mu\ \frac{\Gamma}{2}.$$

$$E = 2P\varrho\ \sigma\upsilon\nu\ \frac{A}{2}\ \sigma\upsilon\nu\ \frac{B}{2}\ \sigma\upsilon\nu\ \frac{\Gamma}{2}.$$

Ὁμὰς δευτέρα. Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποίου δίδονται τὰ ἑξῆς στοιχεῖα·

1) $\alpha = 6{,}45$μ., $A = 112^0 27', 48''$, $B = 35^0\ 55'\ 32''$.

2) $\alpha = 33, 2$ μ., $\beta = 11, 4$ μ., $\Gamma = 125^0\ 17'\ 34''$.

3) $\alpha = 12, 94$ μ., $\beta = 40, 18$ μ., $B = 108^0\ 7'\ 9''$.

4) $\alpha = 48$ δ., $\beta = 41$ δ., $\gamma = 51$ δ.

Θ. (Α. Σγόμνου

Β' ἑξάμηνον

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V.

Περὶ ἐπιλύσεως τριγώνων.

93. Καλοῦμεν *ἐπίλυσιν* τριγώνου τὴν εὕρεσιν τῶν στοιχείων αὐτοῦ διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ, ὅταν γνωρίζωμεν ἐπαρκῆ στοιχεῖα τούτου.

Ἐπίλυσις ὀρθογωνίων τριγώνων.

94. Ἐπειδὴ ὀρθογώνιον τρίγωνον κατασκευάζεται ὅταν γνωρίζωμεν δύο πλευρὰς αὐτοῦ (τὰς καθέτους ἢ μίαν κάθετον καὶ τὴν ὑποτείνουσαν), ἢ μίαν πλευρὰν (κάθετον ἢ τὴν ὑποτείνουσαν) καὶ μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ, διὰ τοῦτο ἔχομεν τέσσαρας περιπτώσεις διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοιούτου τριγώνου, παριστάνομεν δὲ διὰ τῶν α, β, γ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τούτου καὶ διὰ $A = 90^\circ$, B, Γ τὰς ἀπέναντι τούτων γωνίας.

95. Περίπτωσις πρώτη. «*Δίδονται αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ β καὶ γ ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ ζητοῦνται τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ Β, Γ, α καὶ τὸ ἐμβαδὸν Ε*».

Ἔχομεν ὡς γνωστὸν $\beta = \gamma$ εφ B, ἐξ οὗ $\quad$ εφ $B =$ σφ$\Gamma = \dfrac{\beta}{\gamma}$.

Εὑρεθείσης τῆς B εὑρίσκομεν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα ἐκ τῶν τύπων

$$\Gamma = 90^\circ - B, \quad \beta = \alpha \,\text{ημ}\, B.$$

Διὰ τὸ ἐμβαδὸν E τοῦ τριγώνου ἔχομεν $\quad E = \dfrac{1}{2}\beta\gamma$.

Ἐφαρμογαί. 1) Δίδεται $\beta = 255{,}6$μ. καὶ $\gamma = 132{,}7$ μ. καὶ ζητοῦνται τὰ B, Γ, α καὶ E.

Ἔχομεν $\quad$ εφ $B = 255{,}6 : 132{,}7$, $\Gamma = 90^\circ - B$, $\alpha = 255{,}6 :$ ημ B,

$$E = \frac{1}{2}\, 255{,}6 \times 132{,}7.$$

Ὑπολογισμὸς τῶν Β καὶ Γ.

λογ. εφ Β=λογ. 255.6—λογ. 132,7.

λογ. 255,6=	2,40 756
λογ. 132,7=	2,12 287
λογ. εφ Β=	0,28 469
καὶ Β=	62° 33′ 46″.

Ὑπολογισμὸς τῆς α.

λογ.α = λογ.255,6—λογ.ημ 62°33′46″.

λογ. 255,6=	2,40 756
λογ.ημ62°33′46″=	$\bar{1}$,94 818
λογ. α =	2,45 938
καὶ α =	287,99μ.

Διὰ τὴν Γ ἔχομεν

$$\Gamma = \begin{cases} 90^0 = 89^0\,59'\,60'' \\ -B = -62^0\,33'\,46'' \end{cases}$$

$$\Gamma = 27^0\,26'\,14''.$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε.

λογ. 2Ε=λογ. 255,6+λογ. 132,7.
λογ. 255,6=2,40 756
λογ. 132,7=2,12 287

λογ. 2Ε=4,53 043
καὶ Ε =16959, 06 (μ²).

2) Δίδονται β=8,5 μ., γ=13,2μ. καὶ ζητοῦνται τὰ Β,Γ,α καὶ Ε.

Ὑπολογισμὸς τῆς Β καὶ Γ.

Ἔχομεν εφ Β=8,5 : 13,2.
λογ. εφ Β=λογ.8,5—λογ. 13,2.
λογ. 8,5= 0,92 942
λογ. 13,2= 1,12 057

λογ. εφΒ= $\bar{1}$,80 885
Β= 32° 46′ 45″

$$\Gamma = \begin{cases} 89^0\,59'\,60'' \\ -32^0\,46'\,45'' \end{cases}$$

$$\Gamma = 57^0\,13'\,15''.$$

Ὑπολογισμὸς τῆς α.

Διὰ τὴν α δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν καὶ τὸν τύπον
$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ (ὅταν οἱ β καὶ γ εἶνε μικροὶ ἀριθμοί).
$\alpha^2 = 8{,}5^2 + 13{,}2^2 = 246{,}49$
$\alpha = 15{,}7$ μ.

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε.

Ἔχομεν $E = \frac{1}{2}\,8{,}5.\ 13{,}2 = 8{,}5.\ 6{,}6 = 56{,}1$ (μ²).

96. **Περίπτωσις δευτέρα.** «*Δίδεται ἡ ὑποτείνουσα α καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ β ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ ζητοῦνται τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ Β, Γ, γ, καὶ Ε*»,

Ἔχομεν $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = \sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$ καὶ $\gamma = \sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$.

$$\beta = \alpha\ \eta\mu\ B, \text{ καὶ } \eta\mu\ B = \sigma\upsilon\nu\ \Gamma = \frac{\beta}{\alpha}.$$

$$\varepsilon\varphi\ \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\ \Gamma}{1+\sigma\upsilon\nu\ \Gamma}} = \sqrt{\frac{1-\beta/\alpha}{1+\beta/\alpha}} = \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}.$$

Ἐφαρμογαί. 1) Ἔστω ὅτι εἶνε α=9,7 μ., β=6,5 μ.

Ἔχομεν $\alpha+\beta=16{,}2$· $\alpha-\beta=3{,}2$, $\gamma=\sqrt{16{,}2.\ 3{,}2}=7{,}2$ μ.

Ὑπολογισμὸς τῆς Β.

ημ Β=συν Γ=6,5 : 9,7.
λογ. ημ Β=λογ.6,5—λογ. 9,7
λογ. 6,5=0,81 291
λογ. 9,7=0,98 677

λογ.ημΒ=$\bar{1}$,82 614
Β=42° 4′ 30″.

Ὑπολογισμὸς τῆς Γ.

$$\Gamma \begin{cases} 90^0 = 89^0\,59'\,60'' \\ -B = -42^0\,4'\,30'' \end{cases}$$

$$\Gamma = 47^0 55'\,30''.$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε.

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma = \frac{1}{2}\ 6{,}5.\ 7{,}2 = 23{,}4\ (\mu^2).$$

2) Ἔστω ὅτι εἶνε $\alpha=99{,}94$ μ., $6=57{,}52$ μ.

Ἔχομεν $\alpha+6=157{,}46$, $\alpha-6=42{,}42$.

Ὑπολογισμὸς τῆς γ.

$\gamma=\sqrt{157{,}46.\ 42{,}42}$

2. λογ. γ=λογ. 157,46+λογ.42,42.

λογ. 157,46=2,19 717

λογ. 42,42=1,62 757

2.λογ. γ =3,82 474

λογ. γ =1,91 237

καὶ $\gamma = 81{,}728$ μ.

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε.

$$E=\frac{57{,}52\times 81{,}728}{2}$$

$=37{,}76\times 81{,}728$ (μ.²).

Ὑπολογισμὸς τῶν Β καὶ Γ.

ημ Β= 57,52 : 99,94.

λογ. ημ Β=λογ. 57,52— λογ. 99,94.

λογ. 57,52 =1,75 982

λογ. 99,94 =1,99 974

λογ. ημ Β = $\overline{1}$,76 008

$B = 35^0\ 8'\ 16''$

$$\Gamma=\begin{cases}90^0 = 89^0\ 59'\ 60''\\ -B = -35^0\ 8'\ 16''\end{cases}$$

$B = 54^0\ 51'\ 44''$.

97. **Περίπτωσις τρίτη.** *«Δίδεται μία τῶν καθέτων πλευρῶν 6 καὶ ἡ μία ὀξεῖα γωνία Β ὀρθογωνίου τριγώνου, καὶ ζητοῦνται τὰ ἄλλα στοιχεῖα αὐτοῦ α, γ, Γ καὶ Ε».*

Ἔχομεν $\Gamma=90^0-B$, $\alpha=\dfrac{6}{\eta\mu B}$, $\gamma = 6$ σφ $B = 6$ εφ Γ,

$E = {}^1/_2\, 6.\gamma = {}^1/_2.\ 6^2$ σφ Β.

Ἂν δοθῇ ἡ γωνία Γ, εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν Β (καὶ εἶνε $B=90^0-\Gamma$) καὶ ἐφαρμόζομεν τοὺς αὐτοὺς τύπους.

Ἐφαρμογή. Ἔστω ὅτι εἶνε $6=308$ μ., $B=76^0\ 18'\ 52''$.

Ὑπολογισμὸς τῆς γ.

γ= 308. σφ$76^0 18' 52''$

λογ.γ=λογ.308+λογ.σφ$76^0 18' 52''$.

λογ. 308 =2,48 855

λογ. σφ.$76^0 18' 52''$=$\overline{1}$,38 651

λογ. γ =1,87 505

καὶ γ=75 μ.

Ὑπολογισμὸς τῆς α.

α= 308 : ημ $76^0 18' 52''$.

λογ.α=λογ.308—λογ.ημ$76^0 18' 52''$

λογ. 308 =2,48 855

λογ. ημ $76^0 18' 52''$=$\overline{1}$,98 749

λογ. α =2,50 106

καὶ α=317 μ,

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε καὶ τῆς Γ.

2Ε= 308^2 σφ$76^0 18' 52''$

λογ.2Ε=2.λογ.308+λογ σφ $76^0 18' 52''$.

$\Gamma=90^0-76^0\ 18'\ 52''$

$= 13^0\ 41'\ 8''$.

2. λογ. 308=2×2,48 855=4,97 710

λογ. σφ $76^0 18' 52''$ =$\overline{1}$,38 651

λογ. 2Ε= 4,36 361

2 Ε=23100 (μ²), Ε=11550 (μ²).

98. Περίπτωσις τετάρτη. *«Δίδεται ἡ ὑποτείνουσα α καὶ ἡ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν Γ ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ ζητοῦνται τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ β, γ, Β καὶ Ε»*.

Ἔχομεν $\gamma = \alpha \eta\mu \Gamma$, $\beta = \alpha \sigma\upsilon\nu \Gamma$, $B = 90^0 - \Gamma$, $E = \frac{\beta\gamma}{2} = \frac{\alpha^2 \eta\mu\Gamma . \sigma\upsilon\nu\Gamma}{2}$.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα ἂν δοθῇ ἡ γωνία Β, ὅτε εἶνε $\Gamma = 90^0 - B$.

Ἐφαρμογή. Ἔστω ὅτι εἶνε $\alpha = 769\mu.$, $\Gamma = 38^0\ 43'\ 5''$.

Ὑπολογισμὸς τῆς γ.

$\gamma = 769.\ \eta\mu 38^0\ 43'\ 5''$.

$\lambda o\gamma . \gamma = 769 + \lambda o\gamma .\ \eta\mu 38^0\ 43'\ 5''$

$\lambda o\gamma .\ 769 \qquad = 2,88\ 593$

$\lambda o\gamma .\ \eta\mu\ 38^0 43' 5'' = \bar{1},79\ 622$

$\lambda o\gamma .\ \gamma = 2,68\ 215$

καὶ $\gamma = 481\ \mu.$

Ὑπολογισμὸς τῆς β.

$\beta = 769.\ \sigma\upsilon\nu 38^0\ 43'\ 5''$.

$\lambda o\gamma . \beta = \lambda o\gamma . 769 + \lambda o\gamma . \sigma\upsilon\nu 38^0 43' 5''$

$\lambda o\gamma .\ 769 \qquad = 2,88\ 593$

$\lambda o\gamma . \sigma\upsilon\nu 38^0 43' 5'' = \bar{1},89\ 222$

$\lambda o\gamma .\ \beta \qquad = 2,77\ 815$

καὶ $\beta = 600\ \mu.$

Ὑπολογισμὸς τῆς Β.

$$B = \left\{ \begin{array}{l} 90^0 = 89^0\ 59'\ 60'' \\ -\Gamma = -\ 38^0\ 43'\ 5'' \end{array} \right.$$

$B = \quad 51^0\ 16'\ 55''$.

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε.

$2\,E = 769^2.\ \eta\mu 38^0\ 43'\ 5''.\ \sigma\upsilon\nu 38^0\ 43'\ 5''$.

$\lambda o\gamma .\ 2\,E = 2\ \lambda o\gamma .\ 769 + \lambda o\gamma .\ \eta\mu\ 38^0 43' 5'' + \lambda o\gamma .\ \sigma\upsilon\nu\ 38^0\ 43'\ 5''$.

$2 . \lambda o\gamma .\ 769 = 2 .\ 2,88\ 593 = 5,77\ 186$

$\lambda o\gamma .\ \eta\mu\ 38^0 43' 5'' \qquad = \bar{1},79\ 622$

$\lambda o\gamma .\ \sigma\upsilon\nu\ 38^0 43' 5'' \qquad = \bar{1},89\ 222$

$\lambda o\gamma .\ 2E = 5,46\ 030$

$2E = 288600\ (\mu^2.)$

καὶ $E = 144300\ (\mu^2.)$

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον διὰ τὸ ὁποῖον δίδονται $\beta = 4,82$ μ., $\Gamma = 37^0$.

2) Ὁμοίως ὅταν δίδωνται $\gamma = 2,75$ μ., καὶ $\Gamma = 72^0$.

3) Ἐπίσης ὅταν δίδωνται $\beta = 3,04$ μ., καὶ $\gamma = 4,71$ μ.

4) Ὀρθογωνίου τριγώνου δίδεται τὸ ὕψος $\upsilon = 6,85$ μ. καὶ $B = 46^0$. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

5) Δύο δυνάμεις 17 χρ. καὶ 25 χρ. ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ εἶνε κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας. Πόση εἶνε ἡ συνιστάμενη αὐτῶν καὶ τίνας γωνίας σχηματίζει μὲ ἑκάστην τούτων.

6) Δύο δυνάμεις, αἵτινες ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου εἶνε κάθετοι ἐπ' ἄλληλας. Ἡ μία ἔχει ἔντασιν 172 χρ. καὶ σχηματίζει μὲ τὴν συνισταμένην αὐτῶν γωνίαν 42^0· πόση εἶνε ἡ ἄλλη;

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ὀρθογωνίου τριγώνου δίδεται τὸ ἄθροισμα μ τῶν μηκῶν τῆς ὑποτεινούσης α καὶ τῆς καθέτου πλευρᾶς γ, $\alpha+\gamma= \mu= 12,6$ μ. καὶ ἡ γωνία $B = 27^0$. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

2) Ὀρθογωνίου τριγώνου δίδεται ἡ περίμετρος ἴση μὲ 92, 5 μ. καὶ $\Gamma = 25^0$. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

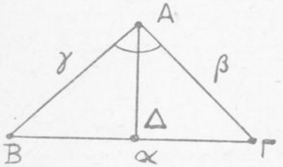
3) Ὀρθογωνίου τριγώνου δίδεται τὸ ἐμβαδὸν $E=480,2$ (μ^2) καὶ $\Gamma=56^0,40'$. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

4) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον διὰ τὸ ὁποῖον δίδεται $\alpha+\gamma=37,14$μ., $\beta=10,82$ μ.

5) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα διὰ τὰ ὁποῖα δίδωνται α') $\gamma-\beta = 16,2$ μ., $\Gamma=53^0$. β') $\gamma+\beta=5,03$ μ., καὶ $B = 38^0$. γ') $\alpha-\gamma = 205$ δ., $B = 28^0$. δ') $\gamma+\beta-\alpha=16,8$ μ., $\Gamma=73^0$. ε') $\alpha-\gamma=8,23$ μ., $\beta=36,25$, στ') $E=25,7$ ($\mu.^2$) καὶ $\Gamma = 52^0\ 47'$.

Ἐπίλυσις ἰσοσκελῶν τριγώνων.

99. *Ἡ ἐπίλυσις τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ἀνάγεται εἰς τὴν τῶν ὀρθογωνίων, ἐπειδὴ χωρίζονται διὰ τοῦ ὕψους, τοῦ διερχομένου διὰ τῆς κορυφῆς αὐτῶν, εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα.*



1) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου $A\ B\ \Gamma$ δίδεται ἡ πλευρὰ $a = 3,18$ δ. καὶ ἡ γωνία $A = 46^0$. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

Ἔχομεν $\beta=\gamma$ καὶ $B=\Gamma$.

$$\text{Προφανῶς εἶνε } B = \Gamma = \left(\frac{180^0 - A}{2}\right) = 67^0.$$

$$(B\Delta) = (\Gamma\Delta) = \frac{a}{2} = \beta \text{ ημ } \frac{A}{2}, \text{ καὶ } \beta = \frac{a}{2 \text{ ημ } \frac{A}{2}} = \gamma = 3,18:0,78 = 4,18.$$

2) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου δίδονται $\beta=\gamma=47,23$ δ. καὶ $\upsilon=30,75$ δ. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

Ἔχομεν ημ $\Gamma = \dfrac{\upsilon}{\gamma} = 0{,}651$, ἐξ οὗ εὑρίσκσμεν $\Gamma = 98^0\ 4'$.

Ἐπειδὴ εἶνε $\dfrac{\alpha}{2} = \beta$ συν Γ, θὰ ἔχωμεν $\alpha = 2\beta$ συν $\Gamma = 71{,}7$δ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν $E = \dfrac{\alpha.\upsilon.}{2} = 1102$ (δ²).

3) «Ἰσοσκελοῦς τριγώνου δίδονται τὸ ἐμβαδὸν $E = 28{,}25$ (δ.²) καὶ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς $A = 82^0\ 40'$. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον».

Ἔχομεν $B = \Gamma = [(180^0 - A) = (180^0 - 82^0\,40')]: 2 = 97^0\,20' : 2 = 48^0\ 40'$,

$$E = \frac{\alpha\upsilon}{2} = \left(\frac{\alpha^2}{4}\right).\quad \sigma\varphi\frac{A}{2}.$$

Ἐπομένως $\alpha = 2\sqrt{\dfrac{E}{\sigma\varphi\dfrac{A}{2}}} = 2\sqrt{E.\,\varepsilon\varphi\dfrac{A}{2}} = 2\sqrt{28{,}25.0{,}879}$

$= 10$ δ. Ἐπειδὴ εἶνε $\dfrac{\alpha}{2} = \beta$ ημ$\dfrac{A}{2}$, ἔχομεν $\beta = \gamma = \dfrac{\alpha}{2\eta\mu\dfrac{A}{2}}$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε ἴσον μὲ 7,6 δ.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα διὰ τὰ ὁποῖα δίδονται.

α′) Ἡ βάσις καὶ ἡ παρακειμένη εἰς αὐτὴν γωνία.

β′) Μία τῶν ἴσων πλευρῶν καὶ μία τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν.

γ′) Μία τῶν ἴσων πλευρῶν καὶ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς.

δ′) Τὸ ὕψος καὶ μία τῶν γωνιῶν.

ε′) Ἡ βάσις $\alpha = 22{,}7$ μ. καὶ ἡ πλευρὰ $\beta = 5{,}8$ μ.

στ′) Ἡ βάσις $\alpha = 6{,}5$ μ., καὶ τὸ ὕψος (τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτὴν) $\upsilon_1 = 6{,}3$ μ.

ζ′) Μία τῶν ἴσων πλευρῶν $\beta = 6{,}8$ δ. καὶ τὸ ὕψος 43 δ.

η′) Ἡ βάσις $\alpha = 48$ δ. καὶ ἓν τῶν ὑψῶν, τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς 40 δ.

θ′) Μία τῶν ἴσων πλευρῶν $\beta = 7{,}2$ μ. καὶ ἓν τῶν ὑψῶν τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς 4,15 μ.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Εἰς ἰσοσκελὲς τραπέζιον αἱ παράλληλοι πλευραὶ ἔχουν μήκη $\alpha = 18{,}25$ μ., $\gamma = 11{,}47$μ., ἑκάστη δὲ τῶν ἴσων πλευρῶν 9, 87 μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

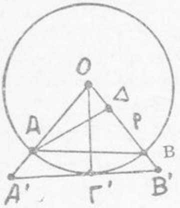
2) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου (τοῦ προηγουμένου προβλήματος), ἐὰν ἀντὶ τῶν ἴσων πλευρῶν δίδεται τὸ ὕψος αὐτοῦ $\upsilon = 7{,}92$ μ.

3) Κατασκευάσατε περιφέρειαν κύκλου καὶ χαράξατε ὡρισμένην χορδὴν αὐτοῦ, ὑπολογίσατε δὲ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς ταύτην ἐπίκεντρον γωνίαν.

Ἐπίλυσις κανονικῶν πολυγώνων.

100. *Καθὼς γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Γεωμετρίας) κανονικόν τι πολύγωνον χωρίζεται εἰς ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ τρίγωνα διὰ τῶν ἀκτίνων, τῶν ἀγομένων εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου. Διὰ τοῦτο, ἡ ἐπίλυσις κανονικοῦ τινος πολυγώνου ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων.*

Ἐφαρμογαί. 1) «Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίμετρος καὶ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου, ἔχοντος ν κορυφὰς ἐὰν εἶνε ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου».



Ἐὰν $(AB) = a$ *εἶνε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καὶ O τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, θὰ εἶνε γων.*

$AOB = \frac{360^0}{\nu}$, $(AB) = 2.\varrho \,\eta\mu \frac{180^0}{\nu}$ *καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ* $\Sigma = 2\varrho\nu.\,\eta\mu \frac{180^0}{\nu}$. *Διὰ τὸ ἐμβαδὸν E' τοῦ τριγώνου AOB ἔχομεν,*

$E' = \frac{(OB)}{2} \cdot (A\Delta) = \frac{\varrho}{2} \cdot \varrho \,\eta\mu \frac{360^0}{\nu} = \frac{\varrho^2}{2}, \eta\mu \frac{360^0}{\nu}$. *Ἄρα διὰ τὸ ἐμβαδὸν E τοῦ πολυγώνου ἔχομεν*

$$E = \frac{\nu\varrho^2}{2} \,\eta\mu \frac{360^0}{\nu}.$$

2) «Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίμετρος και τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου ἔχοντος ν πλευράς, ἂν ρ' εἶνε ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν κύκλου».

Ἄν A'B' εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἔχομεν ἐκ τοῦ τριγώνου A'B'O,

$$\frac{(A'B')}{\varrho'} = 2 \frac{(\Gamma'B')}{\varrho'} = 2.\,\varepsilon\varphi\, \Gamma'OB' = 2.\,\varepsilon\varphi \frac{180^0}{\nu}.$$

Ἐπομένως εἶνε $(A'B') = 2.\,\varrho'.\varepsilon\varphi \frac{180^0}{\nu}$, *ἡ δὲ περίμετρος Σ' τοῦ πολυγώνου εἶνε* $\Sigma' = 2\varrho'\, \nu.\,\varepsilon\varphi \frac{180^0}{\nu}$.

Τὸ μὲν ἐμβαδὸν E' τοῦ τριγώνου A'B'O εἶνε $E' = \frac{(A'B')}{2} .\,\varrho' = \varrho'^2 \varepsilon\varphi \frac{180^0}{\nu}$, *τὸ δὲ E τοῦ πολυγώνου τούτου* $E = \nu\varrho'^2 \,\varepsilon\varphi \frac{180^0}{\nu}$.

Ἀσκήσεις.

1) Ἐκ τῶν κάτωθι δεδομένων κανονικοῦ πολυγώνου, ἐὰν ν παριστάνῃ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν, α τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ, ρ' τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ ρ τῆς τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἄλλα στοιχεῖα αὐτοῦ.

α') $\begin{cases} \varrho' = 27{,}4 \text{ δ.}, \\ \nu = 9 \text{ (ἢ 15)}. \end{cases}$ β') $\begin{cases} \alpha = 56{,}4 \text{ δ.}, \\ \nu = 8, \text{ (ἢ 10)}. \end{cases}$ γ') $\begin{cases} \varrho = 257 \text{ δ.} \\ \nu = 5 \text{ (ἢ 12)} \end{cases}$ δ') $\begin{cases} \alpha = 21{,}61 \text{δ.}, \\ \varrho = 72{,}1 \text{δ.} \end{cases}$

ε') $\begin{cases} \alpha = 8{,}64 \text{ μ.}, \\ \varrho' = 20{,}3 \text{ μ.} \end{cases}$ στ') $\begin{cases} \varrho' = 2{,}449 \text{ μ.} \\ \varrho = 2{,}479 \text{ μ.} \end{cases}$

2) Νὰ εὑρεθῇ ἂν τὰ ἀνωτέρω προβλήματα ἀπὸ τοῦ δ' μέχρι τοῦ στ' εἶνε δυνατὰ δι' οἱασδήποτε τιμὰς τῶν δεδομένων.

3) Ὁμοίως ὡς καὶ ἐν τῷ 1) ὅταν δίδωνται·

α΄) $\alpha = 22{,}7$ δ., $\nu = 15$. β΄) $\varrho' = 18{,}4$ δ., $\nu = 12$.

γ΄) $\varrho = 827$δ., $\nu = 20$, δ΄) $\alpha = 15{,}12$ δ., $\varrho = 43{,}47$ δ.

ε΄) $\alpha = 16{,}1$δ., $\varrho' = 60{,}93$δ. στ΄) $\varrho' = 0{,}3499$ μ., $\varrho = 35{,}41$μ.

4) Κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ὀκτάγωνον ἔχουν ἴσας περιμέτρους (ἢ ἐμβαδά)· τίνα σχέσιν ἔχουν τὰ ἐμβαδὰ (ἢ αἱ περίμετροι) αὐτῶν;

5) Κανονικὸν πολυγώνου μὲ ν πλευρὰς ($\nu = 10$π.χ) ἐμβαδὸν ἔχει 1000 (μ^2). Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου.

Ἐπίλυσις οἱωνδήποτε τριγώνων.

101. Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Γεωμετρίας) ὅτι ἓν τρίγωνον εἶνε ὡρισμένον, ὅταν δίδωνται μία πλευρὰ καὶ δύο γωνίαι, ἢ δύο πλευραὶ καὶ μία γωνία (περιεχομένη ὑπὸ τῶν πλευρῶν ἢ ἀπέναντι μιᾶς αὐτῶν), ἢ αἱ τρεῖς πλευραὶ αὐτοῦ. Διὰ τοῦτο ἔχομεν τὰς ἑξῆς τέσσαρας περιπτώσεις ἐπιλύσεως τυχόντος τριγώνου.

102. Περίπτωσις I. «*Δίδονται μία πλευρὰ καὶ δύο γωνίαι τριγώνου καὶ ζητοῦνται τὰ λοιπὰ πρωτεύοντα στοιχεῖα καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ*».

Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις ὅτι ἡ τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου εὑρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως $A+B+\Gamma=180^0$.

Διὰ τοῦτο, οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχουν αἱ δοθεῖσαι γωνίαι πρὸς τὴν δοθεῖσαν πλευράν, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι δίδεται μία πλευρά, π.χ. ἡ α, καὶ αἱ παρακείμεναι εἰς αὐτὴν γωνίαι Β καὶ Γ, αἵτινες πρέπει νὰ ἔχουν ἄθροισμα μικρότερον τῶν 180^0, ἵνα τὸ πρόβλημα εἶνε δυνατόν. Πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀγνώστων στοιχείων β καὶ γ λαμβάνομεν τὰς σχέσεις

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma},$$

$a = \frac{\gamma\, \eta\mu A}{\eta\mu (A+B)}$

ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν

$$\beta = \frac{\alpha.\, \eta\mu B}{\eta\mu A}, \quad \gamma = \frac{\alpha.\, \eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}.$$

Διὰ τὸ ἐμβαδὸν Ε ἔχομεν τὸν ἑξῆς τύπον, ὅστις δίδει αὐτὸ (διὰ μιᾶς πλευρᾶς καὶ δύο γωνιῶν παρακειμένων εἰς αὐτήν)

$$E = \frac{\alpha.\beta.\, \eta\mu\Gamma}{2} = \frac{\alpha^2 \eta\mu\, B\, \eta\mu\Gamma}{2\, \eta\mu A} = \frac{\alpha^2 \eta\mu B\, \eta\mu \Gamma}{2\, \eta\mu(B+\Gamma)},$$

ἐπειδὴ ἡ $A=180^0-(B+\Gamma)$, καὶ $\eta\mu\, A = \eta\mu\,[180^0-(B+\Gamma)] = \eta\mu(B+\Gamma)$,

Ἐφαρμογή. Ἔστω ὅτι δίδονται $\alpha = 15$ δ., $B = 49^o 58'$, $\Gamma = 87^o 32'$.

Ὑπολογισμὸς τῆς Α.

$$B + \Gamma = 49^o\,58' + 87^o\,32' = 137^o\,30'$$

$$A = 180^o - (B + \Gamma) = 179^o\,60' - 137^o\,30'$$

ἢ $A = 42^o\,30'$.

Ὑπολογισμὸς τῆς β.

$$\beta = \frac{15 . \eta\mu 49^o\,58'}{\eta\mu 42^o\,30'}$$

λογ. β=λογ.15+λογ. ημ 49° 58′ —λογ. ημ. 42° 30′.

λογ. 15	$=1,17\,609$
λογ. ημ49° 58′	$=\bar{1},88\,404$
ἄθροισμα	$=1,06\,013$
λογ. 42°30′	$=\bar{1},82\,968$
λογ. β	$=1,23\,045$

καὶ β = 17δ.

Ὑπολογισμὸς τῆς γ.

$$\gamma = \frac{15, \eta\mu 87^o\,32'}{\eta\mu 42^o\,30''}$$

λογ. γ=λογ. 15 + λογ. ημ 87°32′—λογ. ημ 42°30′

λογ. 15	$=1,17\,609$
λογ. ημ87°32′	$=\bar{1},99\,960$
ἄθροισμα	$=1,17\,569$
λογ. ημ42°30′	$=\bar{1},82\,968$
λογ. γ	$=1,34\,601$

γ=22,182 δ.

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε.

$$2E = \frac{15^2 . \eta\mu\, 49^o\,58' . \eta\mu\, 87^o 32'}{\eta\mu\, 137^o\,30'}$$

λογ. 2 Ε=2. λογ. 15+λογ. ημ 49°58′+λογ. ημ87°32′—λογ. 137°30′.

2. λογ. 15=2. 1,17 609=2,35 218

λογ. ημ 49° 58′	$=\bar{1},88\,404$
λογ. ημ 87° 32′	$=\bar{1},99\,960$
ἄθροισμα	$=2,23\,582$
λογ.ημ 137° 30′	$=\bar{1},82\,968$
λογ. 2Ε	$=2,40\,614$

2Ε=254,77 (μ^2) καὶ Ε=127,38 (δ^2).

Ἀσκήσεις.

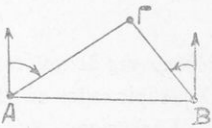
Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον διὰ τὸν ὁποῖον δίδονται,

1) $\alpha = 20{,}75$δ., $B = 68^\circ 22' 48''$, $\Gamma = 25^\circ 45' 33''$.

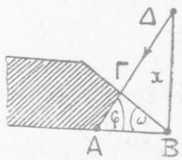
2) $\gamma = 417, 6$μ., $A = 52^\circ 49' 36''$, $A = 71^\circ 17' 30''$.

3) Ἂν παρὰ τὴν πλευρὰν μήκους 430, 2 δ. κεῖνται αἱ γωνίαι $27^\circ 40' 12''$ καὶ $69^\circ\ 52'\ 14''$.

4) Ἂν ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἀποκλίνῃ κατὰ 44° πρὸς ἀνατολὰς ἀπὸ τῆς διευθύνσεως τοῦ βορρᾶ εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ἡ ΒΓ κατὰ 38° πρὸς δυσμὰς ἀπὸ τοῦ βορρᾶ εἰς τὸ Β, πόσαι εἶνε αἱ ἀποστάσεις ΓΑ καὶ ΓΒ, ἐὰν τὸ Β κεῖται 1200 βήματα ἀνατολικῶς τοῦ Α;



5) Ἡ σκιὰ ΒΓ, τὴν ὁποίαν ῥίπτει πύργος ΒΔ ἐπὶ ὁμαλῆς καὶ ἀνωφερικῆς ἐπιφανείς Β τοῦ ἐδάφους εἶνε 13,6μ. Ἐὰν αἱ ἡλιακαὶ ἀκτῖνες πίπτουν ὑπὸ γωνίαν $\varphi = 54^\circ$, καὶ αἱ γραμμαί, τῆς σκιᾶς ἔχουν κλίσιν πρὸς τὴν ὁριζοντίαν ἐπιφάνειαν $\omega = 39^\circ$. πόσον εἶνε τὸ ὕψος τοῦ πύργου.



103. Περίπτωσις ΙΙ. *«Δίδονται δύο πλευραὶ α καὶ β καὶ ἡ περιεχομένη ὑπ' αὐτῶν γωνία τριγώνου, καὶ ζητοῦνται τὰ ἄλλα στοιχεῖα Α, Β' γ καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ Ε».*

Ἔχομεν (1) $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\beta}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$, καὶ $A + B + \Gamma = 180^\circ$.

Ἄρα εἶνε $\quad A + B = 180^\circ - \Gamma, \quad \dfrac{A+B}{2} = 90^\circ - \dfrac{\Gamma}{2}$.

Προσθέτοντες τοὺς ὁμωνύμους ὅρους τῶν δύο πρώτων κλασμάτων, καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦντες αὐτούς, εὑρίσκομεν

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\alpha+\beta}{\eta\mu A + \eta\mu B} = \frac{\alpha-\beta}{\eta\mu A - \eta\mu B}.$$

Ἐναλλάσσομεν τοὺς μέσους ὅρους τῆς ἀναλογίας τῶν δύο τελευταίων λόγων καὶ ἔχομεν

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\eta\mu A + \eta\mu B}{\eta\mu A - \eta\mu B} = \frac{2\eta\mu\, \dfrac{A+B}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\, \dfrac{A-B}{2}}{2\sigma\upsilon\nu\, \dfrac{A+B}{2} \cdot \eta\mu\, \dfrac{A-B}{2}} = \varepsilon\varphi\, \frac{A+B}{2} \cdot \sigma\varphi\, \frac{A-B}{2}$$

ἢ $$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\varepsilon\varphi\left(90^\circ - \dfrac{\Gamma}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\, \dfrac{A-B}{2}} = \frac{\sigma\varphi\, \dfrac{\Gamma}{2}}{\varepsilon\varphi\, \dfrac{A-B}{2}}.$$

Ἑπομένως εἶνε

$$\varepsilon\varphi \frac{A-B}{2} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \cdot \sigma\varphi \frac{\Gamma}{2}.$$

Ἐκ ταύτης προσδιορίζομεν τὴν γωνίαν $\frac{A-B}{2}$, ἑπομένως καὶ τὴν $A-B$, ἔστω δ᾽ αὕτη ω. Οὕτω ἔχομεν

$$A + B = 180^\circ - \Gamma$$
$$A - B = \omega,$$

προθέτοντες δὲ πρῶτον καὶ ἀφαιροῦντες ἔπειτα τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν τὰ 2Α καὶ 2Β, ἄρα καὶ τὰς γωνίας Α καὶ Β.

Εὑρεθείσης τῆς γωνίας Α, εὑρίσκομεν καὶ τὴν πλευρὰν γ ἐκ τῆς ἀναλογίας (1). Οὕτω ἔχομεν

$$\gamma = \frac{\alpha\ \eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}.$$

Διὰ τὸ ἐμβαδὸν Ε ἔχομεν

$$E = \frac{1}{2}\alpha\beta\ \eta\mu\Gamma,$$

καὶ

$$2\ E = \alpha\beta\ \eta\mu\Gamma.$$

Ἐφαρμογή. Ἔστω ὅτι εἶνε $\alpha = 75$ δ., $\beta = 73$ δ. καὶ $\Gamma = 40^\circ$.

Ἔχομεν $\frac{A+B}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$, $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \frac{1}{74}$,

$$\varepsilon\varphi \frac{A-B}{2} = \frac{1}{74}\ \sigma\varphi\ 20^\circ, \text{ καὶ } \lambda o\gamma.\ \varepsilon\varphi \frac{A-B}{2} = \lambda o\gamma.\sigma\varphi\ 20^\circ - \lambda o\gamma.74$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma.\ \sigma\varphi\ 20^\circ &= 0{,}43\ 893 \\ \lambda o\gamma.\ 74 &= \underline{1{,}86\ 923} \\ \lambda o\gamma.\ \varepsilon\varphi \frac{A-B}{2} &= \bar{2}{,}56\ 970, \\ \frac{A-B}{2} &= 2^\circ\ 7'\ 38''. \end{aligned}$$

Οὕτω ἔχομεν $A+B = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

$$\begin{aligned} A-B &= \underline{\quad 4^\circ\ 15'\ 16''} \\ 2A &= 144^\circ\ 15'\ 16'' \end{aligned}$$

$$A = 72^\circ\ 7'\ 38'' \text{ καὶ } B = 67^\circ\ 52'\ 22''.$$

Διὰ τὴν γ ἔχομεν $\gamma = \frac{75.\ \eta\mu\ 40^\circ}{\eta\mu\ 72^\circ\ 7'\ 38''}$.

Ἄρα λογ. γ=λογ. 75+λογ. ημ 40^0—λογ. ημ $72^0\,7'38''$.

λογ. 75	$=1,87\ 506$
λογ. ημ 40^0	$=\bar{1},80\ 807$
ἄθροισμα	$1,68\ 313$
λογ. ημ $72^0\,7'38''$	$=\bar{1},97\ 852$
λογ. γ	$=1,70\ 461$
καὶ γ	$=50,66$ δ.

Διὰ τὸ Ε ἔχομεν 2Ε=75.73.ημ40^0.
λογ. 2Ε=λογ. 75+λογ.73+λογ. ημ 40^0.

λογ. 75	$=1,87\ 506$
λογ. 73	$=1,86\ 332$
λογ.ημ 40^0	$=\bar{1},80\ 807$
λογ. 2Ε	$=3,54\ 645$
2Ε	$=3519,25$ (δ^2)
καὶ Ε	$=1759,62$ (δ^2).

Ἀσκήσεις.

Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον διὰ τὸ ὁποῖον δίδονται τὰ κάτωθι στοιχεῖα καὶ ἐκ τῶν ὁποίων τὰ υ_1, υ_2 υ_3 παριστάνουν τὰ ὕψη τὰ ἀντιστοιχοῦνα εἰς τὰς πλευρὰς αὐτοῦ α,β,γ.

1) $\alpha=3,5$ μ., $\beta=1,9$ μ., $\Gamma=34^0\ 36.'$. 2) $\alpha=56,84$ μ., $\gamma=24,71$ μ., $B=47^0\ 11'\ 34''$

3) Ἂν αἱ δύο πλευραὶ αὐτοῦ μήκους 95,04δ. καὶ 112,85δ. σχηματίζουν γωνίαν $47^0\ 16'\ 24''$.

4) Ἂν ἡ μία πλευρὰ εἶνε τριπλασία ἄλλης μετὰ τῆς ὁποίας σχηματίζει γωνίαν $138^0\ 32'\ 17''$.

5) $\alpha=35$ δ., $\beta=103$ δ. $\upsilon_2=22$ δ. 6) $\beta=50,41$ μ.,$\upsilon_2=41,75$ μ., $\Gamma=32^0\ 28'\ 41''$.

7) $\upsilon_1=90,5$ δ., $\upsilon_2=80,7$ δ., $\Gamma=40^0.17'33''$.

8) Ἐπὶ σημείου ἐνεργοῦν δύο δυνάμεις 28 χρ. καὶ 37 χρ. σχηματίζουσαι γωνίαν 53^0. Πόση εἶνε ἡ συνισταμένη αὐτῶν;

104. Περίπτωσις ΙΙΙ. *«Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται δύο πλευραὶ καὶ μία γωνία, κειμένη ἀπέναντι μιᾶς τῶν πλευρῶν τούτων».*

Ἔστω ὅτι δίδονται αἱ πλευραὶ α, β καὶ ἡ γωνίαι Α, κειμένη ἀπέναντι τῆς α, καὶ ζητοῦνται τὰ στοιχεῖα γ,Β,Γ καὶ τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τριγώνου.

Ἔχομεν $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$, καὶ $A+B+\Gamma=180^0$.

Ἂν λάβωμεν τὴν ἰσότητα τῶν δύο πρώτων λόγων καὶ λύσωμεν αὐτὴν πρὸς τὸ ημΒ, εὑρίσκομεν,

$$\eta\mu B=\frac{\beta\ \eta\mu A}{\alpha}.$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν Β καὶ ἀκολούθως τὴν Γ ἐκ τῆς $Γ = 180^0 - (Α + Β)$.

Διὰ τὴν πλευρὰν γ ἔχομεν (ἐκ τῆς ἰσότητος τοῦ πρώτου καὶ τρίτου λόγου τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας)

$$γ = \frac{α ημ Γ}{ημ Α}.$$

Διὰ τὸ ἐμβαδὸν Ε ἔχομεν $Ε = \frac{1}{2}\, αβ ημ Γ$.

105. ***Διερεύνησις*** Ἐπειδὴ ἡ γωνία Β θὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ $\frac{β\, ημ Α}{α}$, πρέπει νὰ εἶνε $ημ Β = \frac{β\, ημΑ}{α} \leq 1$, ἢ $β.ημΑ \leq α$ (εἶνε δὲ τὰ α, β καὶ ημΑ θετικά, ἐπειδὴ εἶνε $Α < 180^0$). Ἂν εἶνε $β.ημΑ = α$, θὰ εἶνε $ημΒ = 1$, καὶ $Β = 90^0$, τὸ δὲ πρόβλημα εἶνε δυνατόν, ἂν εἶνε $Α < 90^0$.

Ἐὰν εἶνε $β.ημΑ < α$, ἐπειδὴ θὰ εἶνε τὸ $ημΒ < 1$, ἡ γωνία Β θὰ εἶνε ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα. Ἂν ἡ ἐκ τῶν πινάκων εὑρισκομένη ὀξεῖα γωνία ὡς τιμὴ τῆς Β παρασταθῇ διὰ τοῦ φ, ἡ ἄλλη τιμὴ αὐτῆς θὰ εἶνε $180^0 - φ$ (ἐπειδὴ αὗται θὰ ἔχουν ἴσα ἡμίτονα). Ἑκάστη τῶν τιμῶν τούτων, φ καὶ $180 - φ$, θὰ εἶνε δεκτὴ ὡς λύσις τοῦ προβλήματος, ἂν τιθεμένη εἰς τὴν ἰσότητα $Γ = 180^0 - (Α + Β)$ ἀντὶ τοῦ Β, δίδει διὰ τὴν γωνίαν Γ τιμὴν θετικὴν καὶ διάφορον τοῦ μηδενός· δηλαδὴ ἂν εἶνε

$$180^0 - (Α + φ) > 0 \text{ καὶ } 180^0 - [Α - (180^0 - φ)] \text{ ἢ } φ - Α > 0 \text{ ἢ } φ > Α.$$

Καὶ ἂν μὲν εἶνε $Α < 90^0$, θὰ εἶνε καὶ $Α + φ < 180^0$, καὶ τότε ἡ μὲν τιμὴ φ τῆς Β ἁρμόζει εἰς τὸ πρόβλημα, ἡ δὲ $180^0 - φ$ θὰ ἁρμόζῃ, ἂν εἶνε $φ > Α$, ἢ $ημφ > ημΑ$, ἢ $\frac{β\, ημΑ}{α} > ημΑ$, ἄρα καὶ $β > α$. Δηλαδὴ ἂν πληροῦται καὶ ἡ σχέσις $α > β$, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

Ἂν δ' εἶνε $Α > 90^0$ ἡ τιμὴ φ δίδει λύσιν τοῦ προβλήματος, ἂν εἶνε

$$Α + φ < 180^0 \text{ ἢ } φ < 180^0 - Α, \text{ ἢ } ημφ < ημΑ,$$

ὅτε εἶνε καὶ $\frac{β.ημΑ}{α} < ημΑ$, ἄρα καὶ $β < α$.

Προφανῶς ἡ ἄλλη τιμὴ τῆς Β, ἥτις εἶνε ἡ ἀμβλεῖα γωνία $180^0 - φ$, δὲν δίδει λύσιν τοῦ προβλήματος, ἀφοῦ ὑπετέθη καὶ Α ἀμβλεῖα.

Ἐὰν τέλος εἶνε $Α = 90^0$, τὸ δοθὲν τρίγωνον εἶνε ὀρθογώνιον καὶ ἡ ἐπίλυσις αὐτοῦ ἀνάγεται τὴν ἐπίλυσιν τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.

Ἐφαρμογή. Ἔστω ὅτι εἶνε $\alpha=48$ δ., $\beta=18$ δ., $A=78^0\ 40'$.

Διὰ τὴν B ἔχομεν $\eta\mu B = \dfrac{18.\eta\mu 78^0\ 40'}{48}$

λογ. ημB=18+λογ.78⁰ 40′—λογ 48

λογ. 18	=	$1,25\,527$
λογ. ημ 78^0 40′	=	$\bar{1},99\,145$
ἄθροισμα	=	$1,24\,672$
λογ. 48	=	$1,68\,124$
λογ.ημB	=	$\bar{1},56\,548$

καὶ $B=21^0\ 34'\ 2''$. Ἡ ἄλλη τιμὴ τοῦ B δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν, διότι εἶνε $\alpha>\beta$.

Διὰ τὴν Γ ἔχομεν

$$
\begin{array}{rl}
A+B = & 78^0\ 40' \\
+ & 21^0\ 34'\ 2'' \\
\hline
& 100^0\ 14'\ 2'' \\
\Gamma = & 179^0\ 59'\ 60'' \\
- & 100^0\ 14'\ 2'' \\
\hline
\Gamma = & 79^0\ 45'\ 58''
\end{array}
$$

Διὰ τὴν πλευρὰν γ ἔχομεν $\gamma=\dfrac{48.\eta\mu\ 79^0\ 45'58''}{\eta\mu\ 78^0\ 40'}$.

λογ. γ=λογ 48+ λογ. ημ 79⁰45′58″— λογ. ημ 78⁰40′.

λογ. 48	=	$1,68\,124$
λογ. ημ$79^0 45'68''$	=	$\bar{1},99\,304$
ἄθροισμα	=	$1,67\,428$
λογ. ημ$78^0 40'$	=	$\bar{1},99\,145$
λογ. γ	=	$1,68\,283$
γ	=	48,17 δ.

$2E=48.18\,\eta\mu\,79^0\,45'\,58''$.

λογ. 2 E=λογ. 48+λογ. 18 + λογ. ημ 79^0 45′ 58″.

λογ. 48	=	1,68124
λογ. 18	=	1,25527
λογ. ημ $79^0 45'58''$	=	$\bar{1}$,99304
λογ. 2 E	=	2, 92 955
2 E	=	850, 24 (δ^2)
E	=	425, 12 (δ^2).

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ ἐπλυθῇ τὸ τρίγωνον διὰ τὸ ὁποῖον δίδονται,

1) $\alpha = 223{,}4$ δ. $\beta = 191{,}2$ δ., $A=96^0\ 12'\ 24''$.

2) $\beta = 651$ μ., $\gamma = 436{,}2$ μ., $B=68^0 4'36''$.

3) $\alpha = 875{,}4$ μ., $\beta = 584{,}2$ μ., $A = 68^0\ 20'\ 4''$.

4) Ἐπὶ σημείου ἐνεργοῦν δύο δυνάμεις 105 χρ. καὶ 230 χρ.· ἐὰν ἡ συνισταμένη αὐτῶν σχηματίζῃ γωνίαν 75^0 μὲ τὴν πρώτην, τίνα ἔντασιν ἔχει αὐτὴ καὶ πόση εἶνε ἡ γωνία τῶν δοθεισῶν δυνάμεων;

5) Ἔστω ὅτι εὐθεῖά τις A B διέρχεται διὰ χώρου ἀδιαβάτου, κειμένου μεταξὺ τῶν A καὶ B, καὶ λαμβάνομεν σημεῖόν τι Γ, κείμενον ἐκτὸς τῆς εὐθείας A B, ἔχομεν δὲ (A Γ) = 125 μ., (B Γ)=149 μ. καὶ $A=58^0\ 30^0$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων A καὶ B.

106. Περίπτωσις IV. *«Δίδονται τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου καὶ ζητεῖται νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον».*

Ἂν α,β,γ εἶνε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, Α,Β,Γ αἱ ἀπέναντι τούτων γωνίαι καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, ἔχομεν ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας τῶν (5) καὶ (4) τῆς σελίδος 54, ἐνῶ θέτομεν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$,

$$\varepsilon\varphi\,\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\tau\,(\tau-\alpha)}}$$ · Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὡς γνωστὸν (...)

$$\varepsilon\varphi\,\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\,(\tau-\gamma)}{\tau\,(\tau-\beta)}},\qquad \varepsilon\varphi\,\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)}{\tau\,(\tau-\gamma)}}.$$

Διὰ δὲ τὸ ἐμβαδὸν Ε ἔχομεν ὡς γνωστὸν (88, σελὶς 53)

$$E=\sqrt{\tau\,(\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}.$$

Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν λογαρίθμων ὑπολογίζομεν τὸ ἐμβαδὸν Ε καὶ τὰς γωνίας $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{\Gamma}{2}$, ἀκολούθως δὲ τὰς Α, Β, Γ, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ 180° (λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν τυχὸν γινομένων προσεγγίσεων).

Παρατήρησις. Ἑκάστη μὲν τῶν δοθεισῶν πλευρῶν πρέπει νὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων, αἱ δὲ γωνίαι θὰ εὑρεθοῦν δι' ὑπολογισμοῦ, ἑκάστη ἐκ τοῦ ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὴν τύπου ἐκ τῶν ἀνωτέρω· δὲν πρέπει δὲ ἀφοῦ ὑπολογισθοῦν αἱ δύο ἐξ αὐτῶν νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη δι' ἀφαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἐκ τοῦ 180°.

Ἐφαρμογαί. 1) Ἔστω ὅτι εἶνε $\alpha=13$ μ. $\beta=14$ μ., $\gamma=15$ μ.

Ἔχομεν $\tau=21$, $\tau-\alpha=8$, $\tau-\beta=7$, $\tau-\gamma=6$.

Ἑπομένως εἶνε

$$\varepsilon\varphi\,\frac{A}{2}=\frac{1}{2},\ \varepsilon\varphi\,\frac{B}{2}=\frac{4}{7},\ \varepsilon\varphi\,\frac{\Gamma}{2}=\frac{2}{3}.$$

Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν λογαρίθμων εὑρίσκομεν

$$\frac{A}{2}=26^\circ 33'\,54'',\ \frac{B}{2}=29^\circ\,44'\ \ \frac{\Gamma}{2}=33^\circ\,41'\,24,5'',$$

καὶ ἀκολούθως $A=53^\circ 7'\,48''$, $B=59^\circ 29^\circ\,22''$, $\Gamma=67^\circ\,22'\,49'$·

$A+B+\Gamma=179^\circ\,59'\,59''$· ἡ διαφορὰ τοῦ 1'' ὀφείλεται εἰς τὰς γενομένας προσεγγίσεις.

2) Ἔστω ὅτι εἶνε $\alpha=317$ μ., $\beta=533$ μ., $\gamma=510$ μ.

Ἔχομεν $\tau=680$, $\tau-\alpha=363$, $\tau-\beta=147$, $\tau-\gamma=170$.

Ὑπολογισμὸς τῆς Α.

$$\text{εφ}\ \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{147.\ 170}{680.\ 363}},$$

$$2.\ \text{λογ. εφ}\ \frac{A}{2}=\text{λογ.}\ 147+\text{λογ.}\ 170-\text{λογ.}\ 680-\text{λογ.}\ 363.$$

λογ. 147=2,16 732,	λογ. 680=2,83 251
λογ. 170=2,23 045,	λογ. 363=2,55 991
ἄθροισμα=4,39 777,	ἄθροισμα=5,39 242,
μεῖον=5,39 242	

$$2\ \text{λογ.}\ \frac{A}{2}=\bar{1},00\ 535,\ \text{λογ. εφ}\ \frac{A}{2}=\bar{1},50\ 267$$

$$\frac{A}{2}=17^{\circ}\ 39',\ A=35^{\circ}\ 18'.$$

Ὑπολογισμὸς τῆς Β.

$$\text{εφ}\ \frac{B}{2}=\sqrt{\frac{363.\ 170}{680.\ 147}},$$

$$2.\ \text{λογ. εφ}\ \frac{B}{2}=\text{λογ.}\ 363+\text{λογ.}\ 170-\text{λογ.}680-\text{λογ.}\ 147.$$

λογ. 363 = 2,55 991,	λογ. 680 =2,83 251
λογ. 170 = 2,23 045,	λογ. 147 =2,16 732
ἄθροισμα = 4,79 036,	ἄθροισμα =4,99 983,
μεῖον 4,99 983	

$$2\ \text{λογ. εφ.}\ \frac{B}{2}=\bar{1},79\ 053,\ \text{εφ λογ.}\ \frac{B}{2}=\bar{1},\ 89\ 526,$$

$$\frac{B}{2}=38^{\circ}\ 8'\ 25'',4,\ B=79^{\circ}\ 18'\ 50'',8.$$

Ὑπολογισμὸς τῆς Γ.

$$\text{ε φ}\ \frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{363.\ 147}{680.\ 170}},$$

$$2.\ \text{λογ.}\ \frac{\Gamma}{2}=\text{λογ.}363+\text{λογ.}147-\text{λογ.}680-\text{λογ.}170.$$

λογ. 363 = 2, 55 991,	λογ, 680 = 2,83 251
λογ. 147 = 2, 16 732,	λογ. 170 = 2,23 045
ἄθροισμα = 4, 72 723,	ἄθροισμα = 5,06 296.
μεῖον = 5, 06 296	

$$2.\ \text{λογ.}\ \frac{\Gamma}{2}=\bar{1},\ 66\ 427,\ \text{λογ. εφ}\ \frac{\Gamma}{2}=\bar{1},83\ 213,$$

$$\frac{\Gamma}{2}=34^{\circ}\ 11'\ 33,3'',\ \Gamma=68^{\circ}\ 23'\ 6'',6.$$

$A+B+\Gamma=179^{0}\ 59'\ 57'',4$ (ἡ διαφορὰ τούτου ἀπὸ τῶν 180° ὀφείλεται εἰς τὰς γενομένας προσεγγίσεις).

Ἀσκήσεις.

Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον διὰ τὸ ὁποῖον δίδονται.

1) $\alpha=48{,}95$ μ., $\beta=34{,}29$ μ., $\gamma=18{,}65$.

2) Ἂν αἱ πλευραὶ εἶνε ἀνάλογοι τῶν 8, 11 καὶ 15.

3) Δύο δυνάμεις 48 χρ. καὶ 23 χρ. ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ δίδουν συνισταμένην 43 χρ.· τίνες αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζουν μεταξύ των καὶ ἑκάστη μὲ τὴν συνισταμένην αὐτῶν;

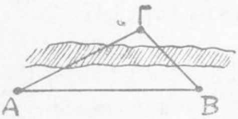
4) Τρεῖς δυνάμεις 418 γρ., 625 γρ., καὶ 843 γρ. ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ ἰσορροποῦν· νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν.

5) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τριγώνου ἔχοντος πλευρὰς ἀναλόγους τῶν 3, $3\sqrt{2}$, $5.\sqrt{3}$

6) Εὕρετε τὰς γωνίας τριγώνου, τοῦ ὁποίου δίδονται $\beta=0{,}4\alpha \cdot \gamma=0{,}75\alpha$.

Τοπογραφικαὶ ἐφαρμογαί.

107. *«Σημεῖόν τι Γ κεῖται πέραν τῆς μιᾶς ὄχθης ποταμοῦ τινος, φαίνεται δὲ ἐκ δύο σημείων Α καὶ Β κειμένων πρὸς τὸ μέρος τῆς ἄλλης ὄχθης αὐτοῦ κατὰ τὰς εὐθείας ΑΓ καὶ ΒΓ, σχηματιζούσας γωνίας Α = 65° 8′ 53″, Β=73′ 44′ 23″ μετὰ τῆς ΑΒ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀποστάσεις (ΑΓ) καὶ (ΑΒ), ἂν εἶνε (ΑΒ)=γ=50 μ.».*



Ἔχομεν
$$A+B = \begin{array}{r} 65^\circ\ 8'\ 53'' \\ +\ 73^\circ 44'\ 23'' \\ \hline =138^\circ 53'\ 16''. \end{array} \qquad \Gamma = \left| \begin{array}{r} 179^\circ 59' 60'' \\ -138^\circ 53' 16'' \\ \hline \end{array} \right. \quad \Gamma = 41^\circ\ 6' 44''.$$

Διὰ τὴν (ΑΓ)=β ἔχομεν

$$\beta = \frac{\gamma\ \eta\mu B}{\eta\mu\Gamma} = \frac{50.\ \eta\mu\ 73^\circ 44'\ 23''}{\eta\mu\ 41^\circ 6'\ 44''}$$

$\lambda o\gamma.\ \beta=\lambda o\gamma.\ 50+\lambda o\gamma.\ \eta\mu\ 73^\circ 44' 23''-\lambda o\gamma.\ \eta\mu\ 41^\circ 6' 44''.$

$=1{,}69\ 897+\bar{1}{,}98\ 227 - \bar{1}{,}81\ 792= 1{,}86\ 332$, καὶ **β=73 μ.,**

Διὰ τὴν α ἔχομεν

$$\alpha = \frac{\gamma\ \eta\mu A}{\eta\mu\Gamma} = \frac{50.\ \eta\mu\ 65^\circ 8' 53''}{\eta\mu\ 41^\circ 6' 44''}.$$

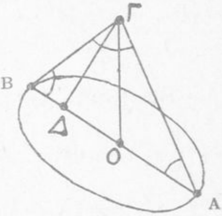
$\lambda o\gamma.\ \alpha=\lambda o\gamma.\ 50+\lambda o\gamma.\ \eta\mu\ 65^\circ 8' 52''-\lambda o\gamma.\ \eta\mu\ 41^\circ 6' 44$

$=1{,}69\ 897+\bar{1}{,}95\ 780-\bar{1}{,}81\ 792=1{,}83\ 885$, καὶ **α=69 μ.**

Ἰωάν. Γ. Γρηγορᾶκος

108. Καλοῦμεν *πλάγιον κυκλικὸν κῶνον* τὸν κῶνον εἰς τὸν ὁποῖον ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὴν κορυφὴν μὲ τὸ κέντρον τῆς βάσεως αὐτοῦ εἶνε πλαγία πρὸς αὐτὴν (αἱ δὲ γενέτειραι αὐτοῦ εἶνε ἄνισοι μεταξύ των).

109. «*Νὰ εὑρεθῇ ὁ πλάγιος κυκλικὸς κῶνος ἂν ἡ βραχυτέρα γενέτειρα τούτου ἔχῃ μῆκος 82 δ. καὶ ἡ μακροτέρα 89 δ., σχηματίζουν δ'αὗται γωνίαν 38°40'10''*»,



Ἂν τεθῇ $\alpha=82\delta.$, $\beta=89$ δ. καὶ $\Gamma=38^\circ 40' 10''$, θὰ εἶνε $\beta+\alpha=171$ δ., $\beta-\alpha=7$ δ., $A+B=141^\circ 19' 50''$ καὶ $\frac{A+B}{2}=70^\circ\ 39'\ 55''$.

Οὕτω ἔχομεν

$$\varepsilon\varphi\ \frac{B-A}{2}=\frac{7}{171}\cdot \varepsilon\varphi 70^\circ 39' 55''$$

$$\lambda o\gamma.\ \varepsilon\varphi\ \frac{B-A}{2}=\lambda o\gamma.\ 7+\lambda o\gamma.\ \varepsilon\varphi\ 70^\circ 39' 55''-\lambda o\gamma.\ 171$$

$$=0,\ 84\ 510+0,45\ 485-2,23\ 300.$$

$$=\bar{1},\ 06\ 695,$$

καὶ $\frac{B-A}{2}=6^\circ\ 39'16''$. Ἐπειδὴ δὲ εἶνε

καὶ $\frac{B+A}{2}=70^\circ\ 39'55''$

εὑρίσκομεν $\mathbf{B=77^\circ\ 19'11''}$ **καὶ** $\mathbf{A=64^\circ\ 39''}$

Διὰ τὸ μῆκος γ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἡ ὁποία εἶνε διάμετρος τοῦ κυκλικοῦ κώνου, ἔχομεν

$$\gamma=\frac{82.\ \eta\mu\ 38^\circ\ 40'\ 10''}{\eta\mu\ 64^\circ\ 39''}$$

$$\lambda o\gamma.=\lambda o\gamma.\ 82+\lambda o\gamma.\ \eta\mu\ 38^\circ 40' 10''-\lambda o\gamma.\ \eta\mu\ 64^\circ 39''$$

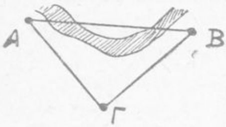
$$=1,\ 91\ 381+\bar{1},79\ 576-\bar{1},95\ 370=1,\ 75\ 587$$

καὶ $\mathbf{\gamma=\ 57\ \delta.}$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ὁ πλάγιος κυκλικὸς κῶνος ἔχει διάμετρον 57δ, καὶ ἡ κλίσις τῆς μὲν μακροτέρας γενετείρας πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ εἶνε 64° 39'', τῆς δὲ βραχυτέρας 77° 19'11''.

110. *«Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις δύο σημείων Α καὶ Β μεταξὺ τῶν ὁποίων ὑπάρχει τόπος ἀπρόσιτος».*

Λαμβάνομεν σημεῖόν τι Γ κείμενον ἐκτὸς τοῦ ἀπροσίτου τόπου καὶ



τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ ἔστω ὅτι εἶνε (ΒΓ)$=\alpha=40$ μ., (ΑΓ)$=\beta=28$ μ. καὶ γωνία ΑΓΒ$=55^0$.

Ἔχομεν (διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς γωνίας Α καὶ Β) $\alpha-\beta=12$ μ., $\alpha+\beta=68$ μ,

$$A+B=180^0-55^0=125^0,\quad \frac{1}{2}(A+B)=62^0 30'.$$

$$\text{εφ}\,\frac{1}{2}(A-B)=\frac{12}{68}\cdot \text{εφ}\,62^0\,30'=\frac{3}{17}\,\text{εφ}\,62^0\,30'.$$

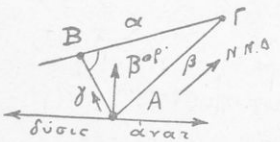
$$\text{λογ. εφ}\,\frac{1}{2}(A-B)=\text{λογ.}\,3+\text{λογ. εφ}\,62^0\,30'-\text{λογ.}\,17$$
$$=0{,}47\,712+0{,}28\,352-1{,}23\,045$$
$$=\bar{1}{,}53\,019.$$
$$\frac{1}{2}(A-B)=18^0\,43'\,34'',$$
$$\frac{1}{2}(A+B)=62^0\,30',\,A=81^0\,13'\,34''.$$

Διὰ τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν γ ἔχομεν,

$$\gamma=\frac{40.\ \text{ημ}\,55^0}{\text{ημ}\,81^0\,13'34''}.$$

$$\text{λογ.}\,\gamma=\text{λογ.}\,40+\text{λογ. ημ}\,55^0-\text{λογ. ημ}\,81^0 13'34''$$
$$=1,\,60\,206+\bar{1}{,}91\,336-\bar{1}{,}99\,489$$
$$=1{,}52\,053$$ καὶ $\boldsymbol{\gamma=33{,}15}$ **μ.**

111. *Πλοῖον πλέει πρῶτον ἐκ τῆς θέσεως Α πρὸς βορειοδυτικὰ μέχρι τῆς Β, ἀπεχούσης ἀπ' αὐτῆς 2,5 μίλια, καὶ ἔπειτα πρὸς ἄλλην διεύθυνσιν μέχρι τῆς θέσεως Γ, ἀπεχούσης ἀπὸ τῆς Β 3,75 μίλια. Ἐκ τοῦ Γ φαίνεται ἡ θέσις Α κατὰ διεύθυνσιν νοτιο νοτιοδυτικήν· πόσον ἀπέχει ἐκ τῆς Α καὶ κατὰ πόσας μοίρας μετεβλήθη ἡ διεύθυνσις ΑΒ;»*



Ἔχομεν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὴν (ΑΒ)$=\gamma=2{,}5$ μιλ., τὴν (ΒΓ)$=\alpha=3{,}75$ μιλ. καὶ τὴν γωνίαν ΒΑΓ $=A=45^0+22,\,5^0=67{,}5^0$. Ζητεῖται ἡ (ΑΓ)$=\beta$ καὶ ἡ γωνία (ΑΒΓ) $=$ Β.

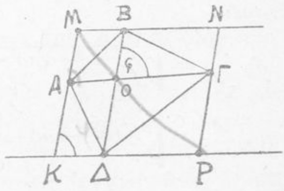
Ἔχομεν
$$\text{ημ}\ \Gamma=\frac{2{,}5}{3{,}75}\ \text{ημ.}67{,}5^0.$$

$$\lambda o\gamma.\ \eta\mu\ \Gamma = \lambda o\gamma.\ 2{,}5 + \lambda o\gamma.\ \eta\mu\ 67^{\circ}30' - \lambda o\gamma.\ 3{,}75$$
$$= 0{,}39\ 794 + \bar{1},\ 96\ 562 - 0{,}57\ 403$$
$$= \bar{1}{,}78\ 953 \text{ καὶ } \mathbf{\Gamma = 38^{\circ}\ 1'\ 11''}.$$
$$A + \Gamma = 67^{\circ}\ 30' + 38^{\circ}\ 1'\ 1'' = 105^{\circ}\ 31'\ 11''.$$
$$\mathbf{B} = 179^{\circ}\ 59'\ 60'' - 105^{\circ}\ 31'\ 11'' = \mathbf{74^{\circ}\ 28'\ 49''}.$$
$$\beta = \frac{3{,}75.\ \eta\mu\ 74^{\circ}\ 28'\ 49''.}{\eta\mu\ 67^{\circ}\ 30'}$$
$$\lambda o\gamma.\ \beta = \lambda o\gamma.\ 3{,}75 + \lambda o\gamma.\ 74^{\circ}\ 28'\ 49'' - \lambda o\gamma.\ \eta\mu\ 67^{\circ}\ 30',$$
$$= 0{,}57\ 403 + \bar{1},\ 98\ 387 - \bar{1},\ 96\ 562$$
$$= 0{,}59\ 225, \text{ καὶ } \beta = \mathbf{3{,}916\ \mu\iota\lambda.}$$

Ἐμβαδὸν τετραπλεύρου.

112. *«Τὸ ἐμβαδὸν τυχόντος τετραπλεύρου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν μηκῶν τῶν διαγωνίων αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς περιεχομένης ὑπ' αὐτῶν γωνίας».*

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ. Διὰ τῶν κορυφῶν Α καὶ Γ φέρομεν δύο εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὴν διαγώνιον ΒΔ καὶ διὰ τῶν Β καὶ Δ ἄλλας δύο παραλλήλους πρὸς τὴν διαγώνιον ΑΓ, ὅτε σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΜΝΡΚ, τὸ ὁποῖον ἐγκλείει τὸ δοθὲν τετράπλευρον. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ δοθὲν τετράπλευρον εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ κατασκευασθέντος παραλληλογράμμου. Διότι, ἂν Ο



εἶνε ἡ τομὴ τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου, τὸ σχῆμα ΒΝΓΟ εἶνε παραλληλόγραμμον (ἐκ κατασκευῆς) καὶ διὰ τῆς εὐθείας ΒΓ χωρίζεται εἰς δύο ἴσα τρίγωνα (ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀνὰ μίαν ἴσας)· ἤτοι τὸ τρίγωνον ΒΟΓ εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΒΟΓΝ. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ δι' ἕκαστον τῶν ἄλλων τριῶν τριγώνων ΑΟΔ, ΑΒΟ, καὶ ΔΟΓ τοῦ τετραπλεύρου ὡς πρὸς τὰ παραλληλόγραμμα ΑΚΔΟ, ΜΒΑΟ καὶ ΔΡΟΓ.

Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ΜΝΚΡ, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ (ΚΡ) (ΚΜ) ημφ, ἂν φ εἶνε ἡ γωνία ΜΚΡ ἢ ἡ ἴση αὐτῆς ΒΟΓ (ὡς διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΜΚΡ).

Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{2}$ (ΑΓ) $\times$ (ΒΔ) $\times$ ημφ (ἐπειδὴ εἶνε (ΚΡ) = (ΑΓ) καὶ (ΚΜ) = (ΒΔ) ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων).

Ἐμβαδὸν τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον.

113. Ἔστω ὅτι τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον μὲ μήκη τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (βλέπε τὸ σχῆμα τῆς σελίδος 75)

$$(AB)=a,\ (B\Gamma)=\beta,\ (\Gamma\Delta)=\gamma,\ (\Delta A)=\delta.$$

Ἂν ἡ μὲν γωνία $BA\Delta$ παρασταθῇ διὰ τοῦ A, ἡ δὲ ἀπέναντι ταύτης $B\Gamma\Delta$ διὰ τοῦ Γ (ἥτις ἰσοῦται μὲ 180^0-A) καὶ E παριστάνῃ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου τούτου ἔχομεν,

$$E=\frac{a\delta}{2}\ \eta\mu\ A+\frac{\beta\gamma}{2}\ \eta\mu\ (180^0-A)=\frac{a\delta+\beta\gamma}{2}.\ \eta\mu A.$$

Ἀλλ' εἶνε $(B\Delta)^2=a^2+\delta^2-2\ a\delta\ \sigma\upsilon\nu\ A$ (ἐκ τοῦ τριγώνου $BA\Delta$), καὶ $(B\Delta)^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ \Gamma=\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma\ \sigma\upsilon\nu A$ (ἐκ τοῦ τριγώνου $B\Gamma\Delta$).

Ἄρα εἶνε καὶ

$$a^2+\delta^2-2a\delta\ \sigma\upsilon\nu\ A=\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A.$$

Ἑπομένως ἔχομεν

$$\sigma\upsilon\nu\ A=\frac{a^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2}{2\ (a\delta+\beta\gamma)}.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε $\eta\mu\ \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\ A}{2}}$, καὶ $\sigma\upsilon\nu\ \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\ A}{2}}$,

ἔχομεν

$$\eta\mu\ \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{-a^2+2a\delta-\delta^2+(\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2)}{4\ (a\delta+\beta\gamma)}}=\sqrt{\frac{-(a-\delta)^2+(\beta+\gamma)^2}{4\ (a\delta+\beta\gamma)}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\ \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(a^2+2a\delta+\delta^2)-(\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2)}{4\ (a\delta+\beta\gamma)}}=\sqrt{\frac{(a+\delta)^2-(\beta-\gamma)^2}{4\ (a\delta+\beta\gamma)}}$$

ἢ $\eta\mu\ \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(-a+\beta+\gamma+\delta)\ (a+{}^{a}+\gamma-\delta)}{4\ (a\delta+\beta\gamma)}}$,

$$\sigma\upsilon\nu\ \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(a+\beta-\gamma+\delta)\ (a-\beta+\gamma+\delta)}{4\ (a\delta+\beta\gamma)}}.$$

Ἐὰν θέσωμεν $a+\beta+\gamma+\delta=2\tau$, εὑρίσκομεν

$$-a+\beta+\gamma+\delta=2\ (\tau-a),\ a-\beta+\gamma+\delta=2\ (\tau-\beta)$$
$$a+\beta-\gamma+\delta=2\ (\tau-\gamma),\ a+\beta+\gamma-\delta=2\ (\tau-\delta).$$

Καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας εὑρίσκομεν

$$\eta\mu\ \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-a)(\tau-\delta)}{a\delta+\beta\gamma}},\quad \sigma\upsilon\nu\ \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}{a\delta+\beta\gamma}}.$$

Ἑπομένως $\eta\mu\ A=\frac{2}{a\delta+\beta\gamma}\cdot\sqrt{(\tau-a)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}$

καὶ $$E=\sqrt{(\tau-a)\ (\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)\ (\tau-\delta)}$$

Ἀσκήσεις.

1) Δείξατε ὅτι εἰς παραλληλόγραμμον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

2) Τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου τινὸς εἶνε 450 ($\mu.^2$), αἱ δὲ διαγώνιοι αὐτοῦ ἔχουν μήκη 22,6 μ. καὶ 56,7 μ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν καὶ αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

3) Ἰσοσκελοῦς τραπεζίου τὰ μήκη τῶν δύο παραλλήλων πλευρῶν εἶνε 104 δ. καὶ 87 δ., τῶν δὲ σκελῶν 46,9δ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν, τῶν διαγωνίων, καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

4) Εἰς ἰσοσκελὲς τραπέζιον ἡ μία τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ἔχει μῆκος 451 δ., μία τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν εἶνε $71^0\ 35'$ καὶ ἡ βάσις αὐτὴ ἔχει μῆκος 785 δ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἄλλαι πλευραί, αἱ γωνίαι καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

5) Κατασκευάσατε τραπέζιον, μετρήσατε τὰς πλευρὰς αὐτοῦ καὶ ὑπολογίσατε ἀκολούθως τὰς γωνίας καὶ τὰ μήκη τῶν διαγωνίων τούτου.

6) Εἰς ἰσοσκελὲς τραπέζιον τὸ μῆκος τῆς βάσεως αὐτοῦ εἶνε $\alpha=7{,}82$ δ., τῶν ἴσων πλευρῶν $\beta=5{,}47$ δ., καὶ ἑκάστη τῶν διαγωνίων 6,93 δ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἄλλαι πλευραί, αἱ γωνίαι καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

Ἐπίλυσις τριγώνων καὶ ἐκ δευτερευόντων στοιχείων.

Τρίγωνόν τι εἶνε δυνατὸν νὰ ἐπιλυθῇ καὶ ὅταν δίδωνται πρωτεύοντα καὶ ἐπαρκῆ δευτερεύοντα στοιχεῖα αὐτοῦ, ὡς φαίνεται καὶ ἐκ τῶν ἑξῆς προβλημάτων.

114. Πρόβλημα. «Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ περίμετρος καὶ δύο γωνίαι».

Ἂν 2τ εἶνε τὸ διπλάσιον τῆς περιμέτρου τριγώνου, δίδωνται δὲ καὶ αἱ γωνίαι A καὶ B αὐτοῦ, ἔχομεν ἐκ τῶν

$$a : \beta : \gamma = \eta\mu\, A : \eta\mu\, B : \eta\mu\, \Gamma$$

προσθέτοντες τοὺς ἀριθμητὰς καὶ παρονομαστὰς τῶν ἴσων κλασμάτων $\dfrac{\alpha}{\eta\mu\, A} = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma=2\tau}{\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}$ *καὶ*

$$a = \frac{2\tau.\ \eta\mu\, A}{4\,\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{A}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{B}{2}.\ \sigma\upsilon\nu\,\dfrac{\Gamma}{2}} = \frac{\tau\ \eta\mu\dfrac{A}{2}}{\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{B}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{\Gamma}{2}}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ καὶ ἀκολούθως τὸ ἐμβαδὸν E.

115. Πρόβλημα. «Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ διαφορὰ $\alpha+\beta-\gamma=\lambda$ καὶ αἱ γωνίαι A καὶ B».

Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν

$$a = \frac{2\lambda.\ \eta\mu\, A}{\eta\mu\, A+\eta\mu\, B-\eta\mu\, \Gamma} = \frac{\lambda\ \sigma\upsilon\nu\,\dfrac{A}{2}}{\eta\mu\,\dfrac{B}{2}\ \sigma\upsilon\nu\,\dfrac{\Gamma}{2}}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὰς β καὶ γ.

116. Πρόβλημα. «Τριγώνου τινὸς δίδεται μία πλευρά, τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων καὶ ἡ ἀπέναντι τῆς δοθείσης πλευρᾶς γωνία. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον».

Ἂν a, $\beta \pm \gamma$, *καὶ* A *εἶνε τὰ δεδομένα στοιχεῖα, ἔχομεν ὡς γνωστόν,* $a : \beta : \gamma = \eta\mu\, A : \eta\mu\, B : \eta\mu\, \Gamma$. *Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν*

$$\frac{\beta+\gamma}{a} = \frac{\eta\mu B + \eta\mu\Gamma}{\eta\mu\, A} = \frac{2\eta\mu\, \frac{B+\Gamma}{2}\ \sigma\upsilon\nu\ \frac{B-\Gamma}{2}}{2\ \eta\mu\, \frac{A}{2}\ \sigma\upsilon\nu\ \frac{A}{2}} = \frac{\sigma\upsilon\nu\ \frac{B-\Gamma}{2}}{\eta\mu\ \frac{A}{2}}$$

διότι εἶνε $B+\Gamma = 180 - A$, $\frac{B+\Gamma}{2} = 90^0 - \frac{A}{2}$, *καὶ* $\eta\mu \frac{B+\Gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu\ \frac{A}{2}$

Οὕτω ἔχομεν $\dfrac{\beta+\gamma}{a} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\ \frac{B-\Gamma}{2}}{\eta\mu\ \frac{A}{2}}$, *ἐκ τοῦ ὁποίου προσδιορίζομεν τὸ* $B-\iota$. *Ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν καὶ τὸ* $B+\Gamma$, *εὑρίσκομεν τὰ* B *καὶ* Γ, *καὶ οὕτω ἔχομεν ἐπαρκῆ πρωτεύοντα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου διὰ τὴν ἐπίλυσιν αὐτοῦ. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ἂν δίδεται τὸ* $\beta-\gamma$.

$$\frac{\beta-\gamma}{a} = \frac{\eta\mu\ \frac{B-\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\ \frac{A}{2}}.$$

117. Πρόβλημα. «Τριγώνου τινὸς δίδεται μία πλευρὰ τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων καὶ ἡ ἀπέναντι τῆς μιᾶς τούτων γωνία. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον».

Ἔστω ὅτι δίδεται τὸ $\beta+\gamma=\lambda$ *καὶ ἡ γωνία* B, *κειμένη ἀπέναντι τῆς* β.

Ἔχομεν ἐργαζόμενοι καθὼς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα,

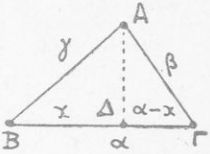
$$\frac{\beta+\gamma=\lambda}{a} = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}{\eta\mu\ \frac{A}{2}} = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\ \frac{B+\Gamma}{2}}$$

$$\kappa\alpha\grave{\iota}\quad \frac{\lambda+a}{\lambda-a} = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)} = \frac{\sigma\varphi\ \frac{B}{2}}{\varepsilon\varphi\ \frac{\Gamma}{2}}$$

Ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν $\varepsilon\varphi\ \frac{\Gamma}{2} = \frac{\lambda-a}{\lambda+a}\ \sigma\varphi\ \frac{B}{2}$ *καὶ προσδιορίζομεν τὴν γωνίαν* Γ, *ὅτε ἔχομεν ἐπαρκῆ πρωτεύοντα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου διὰ τὴν ἐπίλυσιν αὐτοῦ.*

118. Πρόβλημα. «Τριγώνου τινὸς δίδεται μία πλευρά, ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία καὶ τὸ ἀντίστοιχον εἰς αὐτὴν ὕψος. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον».

Ἔστω ὅτι δίδονται τὰ α, Α καὶ τὸ ὕψος υ_1 *ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πλευρὰν α, Ἔχομεν, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ* x *τὸ μῆκος τοῦ μέρους ΒΔ, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐπὶ τῆς ΒΓ ὑπὸ τῆς καθέτου ἐπ' αὐτὴν ΑΔ,*



$x = \upsilon_1 \, \sigma\varphi \, B$ *καὶ* $(\alpha - \chi) = \upsilon_1 \, \sigma\varphi \, \Gamma$.

Ἄρα εἶνε, $\alpha = \upsilon_1 \, (\sigma\varphi \, B + \sigma\varphi \Gamma) =$

$$\frac{\upsilon_1 \eta\mu \, (B+\Gamma)}{\eta\mu \, B \; \eta\mu \, \Gamma} = \frac{\upsilon_1 \; \eta\mu \; A}{\eta\mu \; B \; \eta\mu \; \Gamma} \quad (\text{ἐπειδὴ εἶνε } B+\Gamma = 180^0 - A),$$

καὶ $\eta\mu \, B \; \eta\mu I = \dfrac{\upsilon_1 \eta\mu A}{\alpha} . \quad B + I = 180^0 - A.$

Ἀλλὰ τὸ $2\eta\mu B \;\; \eta\mu\Gamma = \sigma\upsilon\nu \; (B-\Gamma) - \sigma\upsilon\nu \; (B+\Gamma) = \sigma\upsilon\nu \, (B-\Gamma) + \sigma\upsilon\nu \; A$, *καὶ προσδιορίζεται τὸ Β—Γ, ἀκολούθως δὲ τὰ Β καὶ Γ.*

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον ὅταν δίδονται $\alpha+\beta = 85{,}72$ δ., $A = 53^0 \, 12'$, $B = 81^0 \, 18'$.

2) $\alpha - \beta = 11{,}23$ δ., $B = 75^0 \, 9' \, 11''$, $\Gamma = 16^0 \, 8' \, 27''$.

3) $\alpha + \beta = 112{,}9$ δ., $\gamma = 39{,}2$ δ., $A - B = 13^0 \, 17'$.

4) $\beta - \alpha = 1{,}84$ μ., $\gamma = 3{,}47$ μ., $\upsilon_1 = 3{,}02$ μ.

5) $\alpha + \gamma = 7{,}51$ δ.. $\upsilon_1 = 3{,}82$ δ., $\Gamma = 42^0 \, 18'$.

6) $\alpha - \beta + \gamma = 2{,}5$ μ., $A = 50^0 \, 8' \, 22''$, $B = 79^0 \, 25' \, 12''$.

7) $\alpha + \beta + \gamma = 152{,}6$ μ., $\upsilon_1 = 32{,}9$ μ., $B = 125^0 29'$.

8) $\alpha + \beta + \gamma = 14{,}47$ δ., $\upsilon_3 = 2{,}82$ δ., $\Gamma = 72^0 \, 39' \, 11''$.

9) $\alpha = 35{,}6$μ., $\beta = 22{,}9$ μ., $A - B = 16^0 \, 27'$.

10) $\varrho' = 12{,}7$ δ., $A = 34^0 \, 9' \, 10''$, $\Gamma = 83^0 \, 11' \, 22''$.

Ὁμὰς δευτέρα. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον διὰ τὸ ὁποῖον δίδονται,

1) $E = 240$ (μ^2) $\beta + \gamma = 53$ μ., $A = 67^0 \, 22' \, 49''$.

2) $E = 18{,}92$ (μ^2), $\beta - \gamma = 1{,}723$ μ., $\alpha = 3{,}756$ μ.

3) $\alpha^2 + \beta^2 = 216{,}5$ (μ^2) $\alpha\beta = 36{,}25$ (μ^2), $\Gamma = 96^0 \, 43' \, 58''$.

4) $\alpha^2 - \beta^2 = 204$ (μ^2), $\gamma = 23{,}6$ μ., $\Gamma = 69^0 \, 12' \, 45''$.

Jean G. Arghiracos

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ

ὑπὸ ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ

Α΄ Σχολικὰ (ἐγκεκριμένα)

1) **Πρακτικὴ Ἀριθμητικὴ** (διὰ τὰ Ἑλληνικὰ σχολεῖα τὰ ἀστικὰ καὶ τὰ ἀνώτερα Παρθεναγωγεῖα)
2) **Πρακτικὴ Γεωμετρία** » » »
3) **Στοιχειώδης Ἄλγεβρα** διὰ τὰ Γυμνάσια καὶ Λύκεια
4) **Στοιχειώδης Γεωμετρία** » » » » »
5) **Ἐπίπεδος Τριγωνομετρία** » » » » »

Β΄. Πανεπιστημιακὰ

1) **Στοιχεῖα Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας** μέρος Α΄.
2) » » » μέρος Β΄.
3) **Πρακτικὴ Γεωμετρία** (λιθόγραφος)
4) **Προβολικὴ Γεωμετρία**
5) **Μηχανικὴ Μέρος Α΄** (στατικὴ τοῦ σημείου καὶ σώματος καὶ κινητικὴ τοῦ σημείου).

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

Ἀριθ. πρωτ. 21008

Ἐν Ἀθήναις τῇ 7 Ἰουνίου 1927.

ΠΡΟΣ

Τὸν κ. Ν. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ

Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν, ὅτι δι' ἡμετέρας πράξεως τῇ 12 τοῦ φθίνοντος μηνὸς ἐκδοθείσης καὶ τῇ 18 τοῦ αὐτοῦ δημοσιευθείσης ἐν τῷ ὑπ' ἀριθ. 18 φύλλῳ τῆς Ἐφημερίδος τῆς Κυβερνήσεως ἐνεκρίθη τὸ βιβλίον ὑμῶν «**Τριγωνομετρία**» πρὸς χρῆσιν τῶν γυμνασίων διὰ μίαν δεκαετίαν, λογιζομένην ἀπὸ τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1927—28, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅπως συμμορφωθῆτε πρὸς τὰς ἐν ταῖς σχολικαῖς ἐκθέσεσιν ὑποδείξεις τῆς κριτικῆς ἐπιτροπείας.

Ἐντολῇ τοῦ Ὑπουργοῦ

Ὁ Διευθυντὴς

Ε. ΚΑΚΟΥΡΟΣ

Τύποις «Ἐκδοτικῆς» Α. Ε. Εὐριπίδου 3