ΝΙΚ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ πρῴην καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῇ προτύπῳ Βαρβακείῳ σχολῇ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΗΜΙΓΥΜΝΑΣΙΩΝ ΚΑΙ
ΤΩΝ ΚΑΤΩΤΕΡΩΝ ΤΑΞΕΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΗ ΚΑΤΑ ΤΟ ΤΕΛΕΥΤΑΙΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΚΑΙ
ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΔΙΑ ΤΗΝ ΠΕΝΤΑΕΤΙΑΝ 1932—1937

ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΝΝΑΤΗ

Ἀντίτυπα 3000

Ἀριθ. ἐγκριτ. ἀποφάσεως 14229/15215/9|9/32

Τιμᾶται μετὰ βιβλιοσήμου καὶ φόρου	Δρ.	27.70
Βιβλιόσημον	»	7.30
Ἀναγκαστικὸν Δάνειον	»	2.20
Ἀριθ. ἀδείας κυκλοφορίας 72158/17/8/938		

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
Δ. Ν. ΤΖΑΚΑ, ΣΤΕΦ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ Σ[ΙΑ]
81Α ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 81Α
ΑΘΗΝΑΙ 1938

ΝΙΚ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ πρώην καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῇ προτύπῳ Βαρβακείῳ σχολῇ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΗΜΙΓΥΜΝΑΣΙΩΝ ΚΑΙ
ΤΩΝ ΚΑΤΩΤΕΡΩΝ ΤΑΞΕΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΗ ΚΑΤΑ ΤΟ ΤΕΛΕΥΤΑΙΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΚΑΙ
ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΔΙΑ ΤΗΝ ΠΕΝΤΑΕΤΙΑΝ 1932—1937

ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΝΝΑΤΗ

Ἀντίτυπα 3000

Ἀριθ. ἐγκριτ. ἀποφάσεως 44229/15215/9|9/32

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
ΔΗΜΗΤΡ. Ν. ΤΖΑΚΑ ΚΑΙ ΣΤΕΦ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ
81Α ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 81Α
1938

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τῶν ἐκδοτῶν.

ΕΚΔΟΤΙΚΟΝ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
Ν. ΤΖΑΚΑ κ. Σ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΤΥΠΟΙΣ ΑΘ. ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΥ
Ὁδὸς Λέκα—Στοὰ Σιμοπούλου

ΑΠΟΣΠΑΣΜΑΤΑ

ΕΚ ΤΩΝ ΕΚΘΕΣΕΩΝ ΤΩΝ Κ. Κ. ΕΙΣΗΓΗΤΩΝ

«Τὸ βιβλίον τοῦτο ἀποτελούμενον ἐξ ἑπτὰ τυπογραφικῶν φύλλων εἶναι συμφωνότατον πρὸς τὸ ἐπίσημον πρόγραμμα περιλαμβάνον ἅπασαν τὴν ἐν αὐτῷ ἀναγραφομένην ὕλην μετ' ἐπιμελείας καὶ μεθοδικότητος διεξαγομένην. Μεθ' ἑκάστην ἑνότητα ἔχει τὰς ἀναγκαιούσας ἀσκήσεις πρὸς ἐμπέδωσιν τῆς συνήθους ὕλης, αἵτινες ἔχουσιν ἐκλεγῆ καὶ ἐκ τῶν ἐφαρμογῶν τῆς Γεωμετρίας ἐν τῷ κοινωνικῷ βίῳ».

Γ. ΤΖΑΜΑΛΟΥΚΑΣ

«... Τὴν μὲν ὕλην πραγματεύεται ὁ συγγραφεὺς λίαν ἐπιτυχῶς ἀπὸ μεθοδικῆς καὶ γλωσσικῆς ἀπόψεως μὴ ἀφιστάμενος τῶν κεντρικῶν γραμμῶν τῶν διαγραφομένων εἰς τὸ ἀναλυτικὸν πρόγραμμα, τὴν δὲ ἐκλογὴν τῶν ἀσκήσεων λίαν προσιτῶν εἰς μικροὺς μαθητὰς κάμνει μὲ ζηλευτὴν ἐπιμέλειαν....»

Θ. ΠΑΣΣΑΣ

«Τὸ βιβλίον εἶναι ἄρτιον καὶ δύναται νὰ ἀνταποκριθῇ εἰς τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προγράμματος».

ΣΟΥΧΛΕΡΗΣ

«Γενικῶς ἡ διάταξις τῆς ὕλης εἶναι καλὴ καὶ μεθοδικὴ καὶ ἡ ἔκθεσις γίνεται εἰς γλῶσσαν ἁπλῆν καὶ ὁμαλήν. Αἱ ἀποδείξεις τῶν διαφόρων προτάσεων εἶναι ἁπλαῖ καὶ κατὰ τὸ πλεῖστον ἐκ τῆς ἐμπειρίας εἰλημμέναι, εὐκόλως κατανοηταὶ ὑπὸ τῶν μαθητῶν. Περιέχει πλῆθος ἀσκήσεων μεθοδικῶς τακτοποιημένων ἐκ τῶν ἁπλουστέρων πρὸς τὰς συνθετοτέρας».

Α. ΚΝΙΘΑΚΗΣ

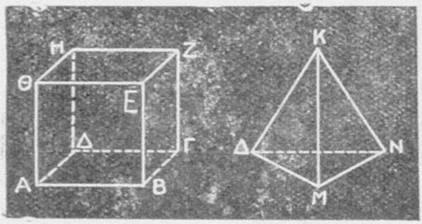
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§ **1. Διάστημα.**—Τὸ σῶμα ΔΕ (Σχ. 1) ὡς καὶ πᾶν ἄλλο σῶμα εὑρίσκεται εἰς τὴν ἄπειρον ἔκτασιν, ἡ ὁποία εὑρίσκεται γύρω μας.

Ἡ ἄπειρος αὕτη ἔκτασις καλεῖται ***διάστημα.***

Ἕκαστον ἀπὸ τὰ σώματα ΔΕ, ΚΔΜΝ (Σχ. 1) καταλαμβάνει ἕνα μέρος ἀπὸ τὸ διάστημα τοῦτο.

§ **2. Ἐπιφάνεια σώματος. — Εἴδη ἐπιφανειῶν.** — Παρατηροῦντες τὸ σῶμα ΔΕ ἀπὸ τὰ ἔμπροσθεν, ὄπισθεν, δεξιά, ἀριστερά, ἄνω καὶ κάτω βλέπομεν ὅλα τὰ ἄκρα αὐτοῦ· ταῦτα ὁμοῦ ἀποτελοῦσι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σώματος τούτου.



Σχ. 1.

Γενικῶς: ***Ἐπιφάνεια σώματος καλεῖται τὸ σύνολον τῶν ἄκρων αὐτοῦ.***

Α΄. Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια.—Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σώματος ΔΕ (Σχ. 1) ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓξ μέρη. Εἰς καθ' ἓν ἀπὸ αὐτὰ ἐφαρμόζει πανταχοῦ νῆμα καλῶς τεντωμένον μεταξὺ τῶν χειρῶν μας χωρὶς νὰ παραμορφωθῇ τοῦτο.

Πᾶσα ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας νῆμα καλῶς τεντωμένον μεταξὺ τῶν χειρῶν μας ἐφαρμόζει πανταχοῦ ἄνευ παραμορφώσεως, καλεῖται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἁπλῶς ἐπίπεδον.

Ἡ ἐπιφάνεια ὑαλοπίνακος, ὁμαλοῦ τοίχου ἢ πατώματος, ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ἠρεμοῦντος ὑγροῦ μικρᾶς ἐκτάσεως καὶ μακρὰν τῶν παρειῶν τοῦ δοχείου εἶναι ἐπίπεδος ἐπιφάνεια.

Β΄. Τεθλασμένη ἢ πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια.— Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σώματος ΔΕ (Σχ. 1) ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα, ἀλλὰ δὲν εἶναι ὅλη ὁμοῦ ἐπίπεδον. Αὕτη καλεῖται ***πολυεδρικὴ ἢ τεθλασμένη ἐπιφάνεια.***

Γενικῶς: ***Πᾶσα ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται μὲν ἀπὸ***

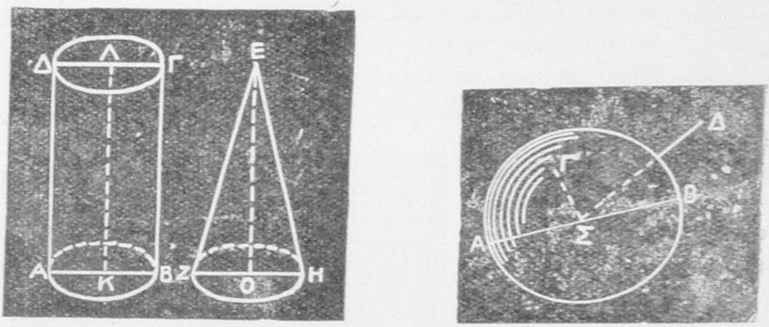
ἐπίπεδα, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἐπίπεδον, καλεῖται τεθλασμένη ἢ πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια.

Πᾶν δὲ σῶμα, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι τεθλασμένη, καλεῖται ***πολύεδρον.***

Τὰ σώματα λοιπὸν ΑΖ, ΚΔΜΝ εἶναι πολύεδρα.

Τὰ ἐπίπεδα μέρη, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀποτελεῖται ἡ ἐπιφάνεια πολυέδρου, λέγονται ἕδραι αὐτοῦ.

Γ΄. Καμπύλη ἐπιφάνεια.—Τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος Σ (Σχ. 2) οὐδὲν μέρος εἶναι ἐπίπεδον· ἡ ἐπιφάνεια αὕτη καλεῖται



Σχ. 2.

καμπύλη ἐπιφάνεια. Καὶ ἡ ἐπιφάνεια ᾠοῦ εἶναι καμπύλη ἐπιφάνεια.

Γενικῶς: ***Πᾶσα ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας οὐδὲν μέρος εἶναι ἐπίπεδον, καλεῖται καμπύλη ἐπιφάνεια.***

Δ΄. Μικτὴ ἐπιφάνεια.—Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σώματος ΑΒΓΔ (Σχ. 2) ἀποτελεῖται ἀπὸ μέρη ἐπίπεδα καὶ ἀπὸ μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν· αὕτη καλεῖται διὰ τοῦτο ***μικτὴ ἐπιφάνεια.***

Γενικῶς: ***Πᾶσα ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα καὶ καμπύλα μέρη, καλεῖται μικτὴ ἐπιφάνεια.***

Ἀσκήσεις. 1) Ἀναγνωρίσατε τὸ εἶδος τῆς ἐπιφανείας τῆς κασετίνας σας ἢ τῶν συνήθων κυτίων τῆς κιμωλίας.

2) Ἀναγνωρίσατε τὸ εἶδος τῆς ἐπιφανείας τῶν βόλων σας, ᾠοῦ, τῆς ἐλαστικῆς σφαίρας σας.

3) Ἀναγνωρίσατε τὸ εἶδος τῆς ἐπιφανείας τῶν συνήθων δοχείων, μὲ τὰ ὁποῖα μετροῦμεν τὰ ὑγρά.

4) Ἀναγνωρίσατε τὸ εἶδος τῆς ἐπιφανείας τῆς γλάστρας.

5) Ὀνομάσατε διάφορα ἄλλα ἀντικείμενα καὶ καθορίσατε τὸ εἶδος τῆς ἐπιφανείας ἑκάστου.

§ **3. Γραμμαί. Εἴδη γραμμῶν.** — Τὰ δύο μέρη, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀποτελεῖται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σώματος ΕΖΗ (Σχ. 2) τέμνονται, ἡ δὲ τομὴ αὐτῶν καλεῖται ***γραμμή***. Ὁμοίως ἡ τομὴ ΑΒ τῶν δύο μερῶν ΑΒΕΘ καὶ ΑΒΓΔ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος ΔΕ (Σχ. 1) εἶναι γραμμή.

Γενικῶς: ***Γραμμὴ καλεῖται ἡ τομὴ δύο ἐπιφανειῶν.***

Α΄. Εὐθεῖα γραμμή. — Ἁπλουστέρα ἀπὸ τὰς γραμμὰς εἶναι ***ἡ εὐθεῖα γραμμή***. Εἰκόνα ταύτης σχηματίζομεν, ἂν παρατηρήσωμεν νῆμα ἢ τρίχα καλῶς τεντωμένην μεταξὺ τῶν χειρῶν μας, τὴν τομὴν δύο τοίχων κ τ.λ.

Πᾶν μέρος εὐθείας γραμμῆς ὀνομάζεται ἰδιαιτέρως ***εὐθύγραμμον τμῆμα***.

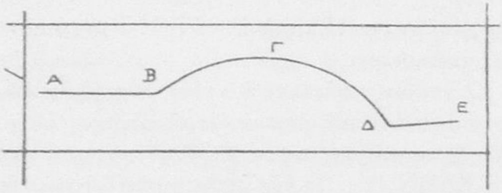
Β΄. Τεθλασμένη γραμμή. — Ἡ γραμμὴ ΔΜΝ (Σχ. 1) ἀποτελεῖται μὲν ἀπὸ εὐθείας, ἀλλὰ δὲν εἶναι εὐθεῖα γραμμή. Αὕτη καλεῖται ***τεθλασμένη γραμμή***. Ὁμοίως αἱ γραμμαὶ ΒΕΖ, ΚΔΜΝ (Σχ. 1) εἶναι τεθλασμέναι γραμμαί.

Γενικῶς: ***Τεθλασμένη γραμμὴ καλεῖται πᾶσα γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται μὲν ἀπὸ εὐθείας, ἀλλὰ δὲν εἶναι εὐθεῖα γραμμή.***

Γ΄. Καμπύλη γραμμή. — Παρατηρήσατε τὴν γραμμὴν ΑΒ, εἰς τὴν ὁποίαν περατοῦται τὸ μέρος Κ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος ΑΒΓΔ (Σχ. 2). Οὐδὲν μέρος ταύτης εἶναι εὐθεῖα γραμμή· καλεῖται δὲ αὕτη ***καμπύλη γραμμή***. Ὁμοίως αἱ γραμμαί, εἰς τὰς ὁποίας περατοῦται φύλλον δάφνης, αἱ ὄψεις μεταλλικοῦ νομίσματος κτλ. εἶναι καμπύλαι γραμμαί.

Γενικῶς: ***Καμπύλη γραμμὴ καλεῖται πᾶσα γραμμή, τῆς ὁποίας οὐδὲν μέρος εἶναι εὐθεῖα γραμμή.***

Δ΄. Μικτὴ γραμμή. — Ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔΕ (Σχ. 3) ἀπο-



Σχ. 3.

τελεῖται ἀπὸ δύο εὐθείας καὶ μίαν καμπύλην γραμμήν. Καλεῖται δὲ διὰ τοῦτο ***μικτὴ γραμμή***.

Γενικῶς: ***Μικτὴ γραμμὴ καλεῖται πᾶσα γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμάς.***

Ἀσκήσεις. 6) Δείξατε ἓν μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς κασετίνας σας καὶ καθορίσατε τὸ εἶδος ἑκάστης τῶν γραμμῶν, εἰς τὰς ὁποίας περατοῦται τὸ μέρος τοῦτο.

7) Καθορίσατε τὸ εἶδος τῆς γραμμῆς ΔΑΚΒ (Σχ. 2).

8) Καθορίσατε τὸ εἶδος τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν ἀποτελεῖ ἕκαστον τῶν κεφαλαίων γραμμάτων, Ζ, Λ, Μ, Π, Ο, Ρ.

9) Καθορίσατε τὸ εἶδος τῆς γραμμῆς ΘΕΒΓ (Σχ. 1).

10) Τείνατε λεπτὸν νῆμα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ᾠοῦ καὶ καθορίσατε τὸ εἶδος τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν τοῦτο ἀποτελεῖ τότε.

11) Τυλίξατε περὶ τὴν καμπύλην ἐπιφάνειαν τοῦ σώματος ΑΓ (Σχ. 2) λεπτὸν νῆμα καὶ καθορίσατε τὸ εἶδος τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν τοῦτο ἀποτελεῖ τότε.

Περιληπτικὸς πίναξ ἐπιφανειῶν καὶ γραμμῶν.

Εἴδη ἐπιφανειῶν.	Εἴδη γραμμῶν.
Α΄. ***Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἐπίπεδον.***	Α΄. ***Εὐθεῖα γραμμή.***
Β΄. ***Τεθλασμένη ἐπιφάνεια*** (ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἐπίπεδον)	Β΄. ***Τεθλασμένη γραμμή.*** (ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας, ἀλλὰ δὲν εἶναι εὐθεῖα γραμμή).
Γ΄. ***Καμπύλη ἐπιφάνεια*** (οὐδὲν μέρος αὐτῆς εἶναι ἐπίπεδον).	Γ΄. ***Καμπύλη γραμμή.*** (οὐδὲν μέρος αὐτῆς εἶναι εὐθεῖα γραμμή).
Δ΄. ***Μικτὴ ἐπιφάνεια*** (ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπιπέδους καὶ καμπύλας ἐπιφανείας).	Δ΄. ***Μικτὴ γραμμή.*** (ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμάς).

§ 4. **Σημεῖον.**—Ἡ τομὴ Β τῶν δύο γραμμῶν ΒΓ καὶ ΒΕ (Σχ. 1) καλεῖται σημεῖον.

Γενικῶς: ***Σημεῖον καλεῖται ἡ τομὴ δύο γραμμῶν.*** Ἕκαστον σημεῖον παρίσταται ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ τοῦ πίνακος μὲ μίαν στιγμήν.

§ 5. **Σχῆμα σώματος.—Εἴδη σχημάτων.**—Τὰ σώματα ΔΕ καὶ ΚΔΜΝ (Σχ. 1) δὲν περατοῦνται κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἐξωτερικῶς. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ταῦτα ἔχουσι διάφορον σχῆμα.

Ὥστε: ***Σχῆμα σώματος καλεῖται ὁ τρόπος, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ σῶμα τοῦτο περατοῦται ἐξωτερικῶς.***

Τοῦ σχήματος ΑΒΓΔ (Σχ. 1) ὅλα τὰ σημεῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Λέγεται δὲ τοῦτο ***ἐπίπεδον σχῆμα***.

Ἑκάστου ὅμως τῶν σχημάτων ΔΕ καὶ ΚΔΜΝ (Σχ. 1) τὰ σημεῖα δὲν δύνανται νὰ τεθῶσι συγχρόνως καὶ ὅλα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Τὰ τοιαῦτα σχήματα καλοῦνται ***στερεὰ σχήματα***.

Ὥστε: ***Ἐπίπεδα σχήματα καλοῦνται τὰ σχήματα, τῶν ὁποίων ὅλα τὰ σημεῖα εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.***

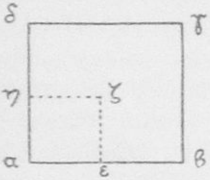
Στερεὰ σχήματα καλοῦνται τὰ σχήματα, τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα δὲν κεῖνται ὅλα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Ἂς θέσωμεν τὸ σῶμα ΔΕ (Σχ. 1) οὕτως ὥστε τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου π. χ. τραπέζης. Ἐὰν ἔπειτα σύρωμεν τὴν γραφίδα κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν εὐθειῶν, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ θὰ σχηματισθῇ νέον σχῆμα αϐγδ (Σχ. 4), μὲ τὸ ὁποῖον ἐφαρμόζει τὸ ΑΒΓΔ.

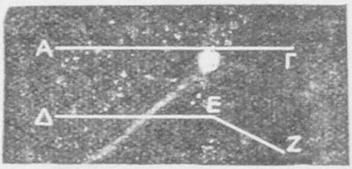
Τὰ σχήματα αϐγδ καὶ ΑΒΓΔ λέγονται ἴσα. Καὶ γενικῶς: ***Δύο σχήματα λέγονται ἴσα, ἂν καταλλήλως ἐπιτιθέμενα ἐφαρμόζωσι καὶ ἀποτελοῦσιν ἓν σχῆμα.***

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι: ***Ἐὰν δύο σχήματα εἶναι ἴσα πρὸς τρίτον σχῆμα, θὰ εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσα.***

Τὰ σχήματα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (Σχ. 5) ἀκέραια δὲν ἐφαρμόζουσιν.



Σχ. 4.



Σχ. 5.

Τὸ μέρος ὅμως ΑΒ τοῦ α′ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ ΔΕ τοῦ β′ καὶ τὸ ΒΓ τοῦ α′ ἐπὶ τοῦ ΕΖ τοῦ β′. Ὥστε τὰ σχήματα ταῦτα ἐφαρμόζουσιν, ἀφ' οὗ διαιρεθῶσιν εἰς μέρη. Λέγονται δὲ ταῦτα ***ἰσοδύναμα ἢ ἴσα κατὰ μέρη***.

Γενικῶς: ***Δύο σχήματα λέγονται ἰσοδύναμα ἢ ἴσα κατὰ μέρη, ἂν ἀκέραια μὲν δὲν ἐφαρμόζωσιν, ἐφαρμόζουσιν ὅμως, ἂν διαιρεθῶσι καταλλήλως εἰς μέρη.***

Τὸ σχῆμα αεζη ἐφαρμόζει εἰς μέρος τοῦ αϐγδ. Τὸ αεζη λέγεται ***μικρότερον*** ἀπὸ τὸ αϐγδ, τὸ δὲ αϐγδ λέγεται μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ αεζη. Ὁμοῦ δὲ ταῦτα λέγονται ***ἄνισα σχήματα***.

Γενικῶς. ***Δύο σχήματα λέγονται ἄνισα, ἂν τὸ ἓν ἐφαρμόζῃ εἰς μέρος τοῦ ἄλλου.***

Ἐκ τούτων ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἐφαρμόζει εἰς μέρος τοῦ ἄλλου, λέγεται ***μικρότερον*** ἀπὸ τὸ ἄλλο. Τὸ δὲ ἄλλο τοῦτο λέγεται ***μεγαλύτερον*** τοῦ πρώτου.

Ἀσκήσεις. 12) Τὸ σχῆμα τῆς κασετίνας σας εἶναι στερεὸν ἢ ἐπίπεδον σχῆμα ;

13) Τὸ σχῆμα βόλου εἶναι στερεὸν ἢ ἐπίπεδον σχῆμα ;

14) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας ἓν κεφαλαῖον δέλτα καὶ καθορίσατε, ἂν τὸ σχῆμα αὐτοῦ εἶναι στερεὸν ἢ ἐπίπεδον.

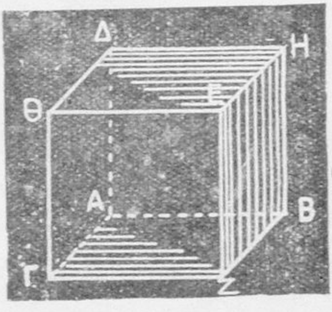
15) Τὸ σχῆμα τοῦ καμπύλου μέρους τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος ΕΖΗ εἶναι στερεὸν ἢ ἐπίπεδον ;

16) Τὸ σχῆμα μήλου, ᾠοῦ, τυχόντος λίθου εἶναι στερεὸν ἢ ἐπίπεδον σχῆμα ;

Ἐποπτεία κυριωτέρων στερεῶν.

§ 6. Ἐποπτεία κύβου. Τὸ πολύεδρον ΑΕ (Σχ. 6) λέγεται ***κύβος***.

Α΄. Ἐπιφάνεια κύβου. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου εἶναι τεθλασμένη ἐπιφάνεια. Ἀποτελεῖται δὲ ἀπὸ ἓξ ἕδρας.



Σχ. 6.

Β΄. Στερεαὶ καὶ δίεδραι γωνίαι κύβου. Αἱ τρεῖς ἕδραι ΑΒΖΓ, ΑΔΗΒ, ΑΔΘΓ, διέρχονται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α· ἀποτελοῦσι δὲ σχῆμα, τὸ ὁποῖον λέγεται ***στερεὰ γωνία***. Τὰ ἐπίπεδα ΑΒΖΓ, ΑΔΗΒ, ΑΔΘΓ λέγονται ἕδραι καὶ τῆς στερεᾶς ταύτης γωνίας· τὸ δὲ σημεῖον Α λέγεται ***κορυφὴ*** αὐτῆς. Αἱ τομαὶ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ τῶν ἑδρῶν τῆς στερεᾶς γωνίας Α λέγονται ***ἀκμαὶ*** τῆς στερεᾶς ταύτης γωνίας.

Ὁ κύβος ἔχει καὶ ἄλλας τοιαύτας στερεᾶς γωνίας μὲ κορυφὰς Β, Γ κτλ.

Αἱ κορυφαὶ καὶ ἀκμαὶ τῶν στερεῶν γωνιῶν κύβου λέγονται καὶ ***κορυφαὶ*** καὶ ***ἀκμαὶ*** τοῦ κύβου.

Ἐὰν κάθε στερεὰν γωνίαν κύβου θέσωμεν καταλλήλως ἐπὶ μιᾶς στερεᾶς γωνίας ἀνοικτοῦ κυτίου, βλέπομεν ὅτι ὅλαι ἐφαρμόζουσι μὲ αὐτήν. Ἄρα: ***Αἱ στερεαὶ γωνίαι κύβου εἶναι ὅλαι ἴσαι.***

Δύο ἕδραι π. χ. αἱ ΑΒΖΓ, ΑΒΗΔ τῆς στερεᾶς γωνίας Α ἀποτελοῦσι σχῆμα, τὸ ὁποῖον λέγεται ***δίεδρος γωνία.*** Τοιαύτας διέδρους γωνίας ἡ στερεὰ γωνία Α ἔχει τρεῖς.

Αἱ δίεδροι γωνίαι τῶν στερεῶν γωνιῶν κύβου λέγονται καὶ δίεδροι γωνίαι τοῦ κύβου τούτου.

Τὰ ἐπίπεπεδα, τὰ ὁποῖα σχηματίζουσι δίεδρον γωνίαν λέγονται ***ἕδραι*** αὐτῆς. Ἡ δὲ τομὴ τῶν ἑδρῶν διέδρου γωνίας λέγεται ***ἀκμὴ*** αὐτῆς.

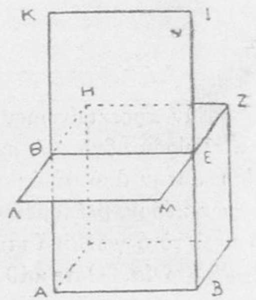
Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ ἀκμαὶ τῶν διέδρων γωνιῶν κύβου εἶναι καὶ ἀκμαὶ τοῦ κύβου τούτου.

Μὲ τὴν βοήθειαν τεντωμένου νήματος βεβαιούμεθα εὐκόλως ὅτι: ***Αἱ ἀκμαὶ κύβου εἶναι ὅλαι ἴσαι.***

Ἐὰν θέσωμεν καταλλήλως μίαν μετὰ τὴν ἄλλην ὅλας τὰς διέδρους γωνίας κύβου ἐπὶ τῆς αὐτῆς διέδρου γωνίας ἀνοικτοῦ κυτίου βλέπομεν ὅτι ὅλαι ἐφαρμόζουσι πρὸς αὐτήν, Ἄρα :

Αἱ δίεδροι γωνίαι κύβου εἶναι ἴσαι.

Ἐπί ἐπιπέδου χαρτονίου ΑΒΙΚ (Σχ. 7) ἂς χαράξωμεν εὐθύγραμμον σχισμὴν ΘΕ. Ἂς διαπεράσωμεν δὲ δι᾽ αὐτῆς ἄλλο ἐπίπεδον χαρτόνιον ΗΖΜΛ. Οὕτω σχηματίζεται ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα ταῦτα χαρτόνια 4 δίεδροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι κοινὴν ἀκμὴν ΘΕ. Ἂς διαθέσωμεν δὲ τὰ χαρτόνια ταῦτα, οὕτως ὥστε μία ἀπὸ τὰς διέδρους γωνίας αὐτῶν νὰ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ μιᾶς διέδρου γωνίας κύβου. Ἂν ἔπειτα θέσωμεν καταλλήλως καὶ εἰς τὰς 3 ἄλλας διέδρους γωνίας οἱανδήποτε δίεδρον γωνίαν κύβου βλέπομεν ὅτι αὕτη ἐφαρμόζει μὲ ὅλας.



Σχ. 7.

Αἱ τέσσαρες λοιπὸν δίεδροι γωνίαι, τὰς ὁποίας ἐσχηματίσαμεν μὲ τὰ χαρτόνια εἶναι ἴσαι. Κάθε μία ἀπὸ αὐτὰς καλεῖται ***ὀρθὴ δίεδρος γωνία.*** Τὰ δύο δὲ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα σχηματίζουσιν αὐτάς, λέγονται ***κάθετα πρὸς ἄλληλα.***

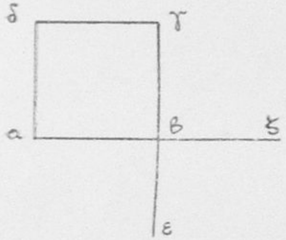
Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι : α΄) ***Αἱ δίεδροι γωνίαι κύβου εἶναι ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι***, β΄) ***Αἱ τεμνόμεναι ἕδραι κύβου εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.***

Γ΄. Αἱ ἕδραι κύβου. Κάθε ἕδρα κύβου εἶναι μέρος ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τέσσαρας ἀκμὰς αὐτοῦ, ἤτοι ἀπὸ εὐθ.

τμήματα. Διὰ τοῦτο κάθε ἕδρα κύβου λέγεται ***εὐθύγραμμον σχῆμα.*** Αἱ ἀκμαὶ κύβου, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς ἕδρας, λέγονται ἰδιαιτέρως ***πλευραὶ*** τῆς ἕδρας ταύτης. Οὕτως αἱ ἀκμαὶ ΑΒ, ΒΖ, ΓΖ, ΓΑ εἶναι πλευραὶ τῆς ἕδρας ΑΒΖΓ. Ἐπειδὴ δὲ κάθε ἕδρα κύβου ἔχει 4 πλευράς, λέγεται ἰδιαιτέρως ***τετράπλευρον***. Αἱ κορυφαὶ κύβου, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ μιᾶς ἕδρας αὐτοῦ, λέγονται ἰδιαιτέρως καὶ ***κορυφαὶ*** τῆς ἕδρας ταύτης.

Αἱ πλευραὶ ἕδρας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ μίαν κορυφὴν αὐτῆς, σχηματίζουσι σχῆμα τὸ ὁποῖον λέγεται ***γωνία***. Τὸ σχῆμα π. χ. ΓΑΒ εἶναι γωνία.

Ἂς θέσωμεν ἐπὶ ἐπιπέδου μίαν ἕδραν κύβου π. χ. ΑΒΖΓ καὶ ἂς σύρωμεν τὴν γραφίδα κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν πλευρῶν τῆς ἕδρας ταύτης. Θὰ σχηματισθῇ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τετράπλευρον αβγδ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΖΓ (Σχ. 8). Ἐὰν ἐπὶ τοῦ αβγδ θέσωμεν καταλλήλως τὴν μίαν μετὰ τὴν ἄλλην ὅλας τὰς ἄλλας ἕδρας τοῦ κύβου, βλέπομεν ὅτι ὅλαι ἐφαρμόζουσι μὲ αὐτήν. Ἄρα: ***Αἱ ἕδραι κύβου εἶναι ὅλαι ἴσαι.***



Σχ. 8.

Ἐὰν προεκτείνωμεν δύο τεμνομένας πλευρὰς αβ καὶ βγ τοῦ τετραπλεύρου αβγδ, θὰ σχηματισθῶσι καὶ τρεῖς ἄλλαι γωνίαι. Ἐὰν εἰς ἑκάστην ἀπὸ αὐτὰς θέσωμεν οἱανδήποτε ἀπὸ τὰς γωνίας τῶν ἑδρῶν κύβου, βλέπομεν ὅτι αὕτη ἐφαρμόζει μὲ ὅλας. Εἶναι λοιπὸν αἱ 4 περὶ τὸ β γωνίαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Κάθε μία ἀπὸ αὐτὰς λέγεται ***ὀρθὴ*** γωνία. Ὥστε κάθε ἕδρα κύβου εἶναι τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ὅλαι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι ὅλαι ὀρθαί. Λέγεται δὲ ἰδιαιτέρως ***τετράγωνον.*** Ἄρα: ***Αἱ ἕδραι κύβου εἶναι τετράγωνα ἴσα.***

Αἱ ἕδραι ΑΒΖΓ καὶ ΘΕΗΔ τοῦ κύβου ΑΕ δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν προεκταθῶσι. Λέγονται δὲ διὰ τοῦτο ***παράλληλοι ἕδραι.***

Ὁ κύβος ἔχει τρία ζεύγη παραλλήλων ἑδρῶν.

Αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΖ τῆς ἕδρας ΑΒΖΓ δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν προεκταθῶσι. Λέγονται δὲ αὗται ***παράλληλοι πλευραί.***

Κάθε ἕδρα κύβου ἔχει δύο ζεύγη παραλλήλων πλευρῶν.

§ 7. Γενικοὶ ὁρισμοί.—Ἀπὸ τὴν προηγουμένην ἐξέτασιν τοῦ κύβου ἐξάγονται οἱ ἑξῆς γενικοὶ ὁρισμοί.

α΄) ***Δύο ἐπίπεδα λέγονται κάθετα, ἐὰν αἱ δίεδροι γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουσιν εἶναι ὅλαι ἴσαι.***

β΄) ***Ὀρθὴ δίεδρος γωνία λέγεται πᾶσα δίεδρος γωνία, τῆς ὁποίας αἱ ἕδραι εἶναι κάθετοι.***

γ΄) ***Δύο ἐπίπεδα λέγονται παράλληλα, ἂν δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν προεκταθῶσιν.***

δ΄) ***Δύο εὐθεῖαι λέγονται παράλληλοι, ἂν κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν προεκταθῶσιν.***

Ἀσκήσεις. 17) Ἀριθμήσατε δεικνύοντες μίαν πρὸς μίαν τὰς ἕδρας τοῦ κύβου ΑΕ.

18) Ἀριθμήσατε κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον τὰς στερεὰς γωνίας καὶ τὰς κορυφὰς τοῦ αὐτοῦ κύβου.

19) Δείξατε τὰς ἀκμὰς τῆς στερεᾶς γωνίας Ε τοῦ κύβου ΑΕ.

20) Δείξατε τὰ ζεύγη τῶν παραλλήλων ἑδρῶν τοῦ κύβου ΑΕ.

21) Δείξατε τὰ ζεύγη τῶν παραλλήλων πλευρῶν τῆς ἕδρας ΔΗΒΑ τοῦ κύβου ΑΕ.

22) Δείξατε ἐν τῇ αἰθούσῃ τῆς διδασκαλίας ἐπίπεδα κάθετα.

23) Τοποθετήσατε ἐπίπεδον τεμάχιον χαρτονίου, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ πίνακος.

24) Δείξατε ἐν τῇ αἰθούσῃ τῆς διδασκαλίας ἐπίπεδα παράλληλα.

25) Κρατήσατε ἐπίπεδον τεμάχιον χαρτονίου, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ πάτωμα, πρὸς τὸν ἔμπροσθέν σας τοῖχον καὶ τέλος πρὸς τὸν δεξιόν σας τοῖχον.

26) Δείξατε ἐν τῇ αἰθούσῃ τῆς διδασκαλίας εὐθείας παραλλήλους.

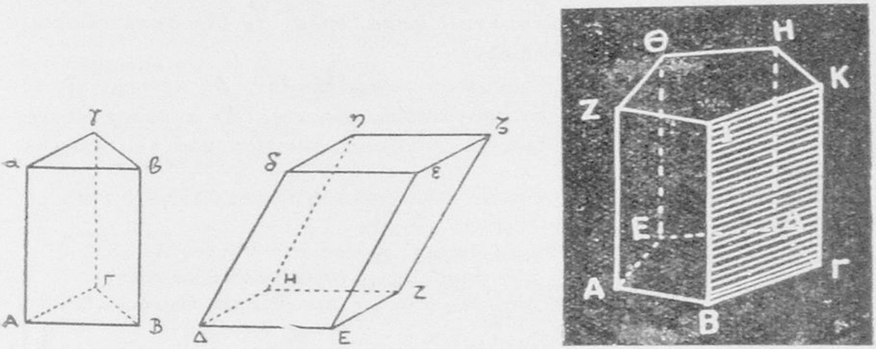
27) Αἱ ἀκμαὶ ΑΔ καὶ ΘΕ τοῦ κύβου ΑΕ συναντῶνται, ἂν προεκταθῶσιν ἢ οὐχί; Εἶναι αὗται παράλληλοι ἢ οὐχί; Δείξατε τοιαύτας εὐθείας εἰς τὴν αἴθουσαν τῆς διδασκαλίας.

§ 8. Ἐποπτεία τῶν ἄλλων πρισμάτων.—Ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστου τῶν σωμάτων ΑΒΓαβγ, Δζ, ΑΗ (Σχ. 9) εἶναι τεθλασμένη. Εἶναι λοιπὸν ταῦτα πολύεδρα.

Αἱ ἕδραι ΑΒΓ καὶ αβγ, τοῦ πολυέδρου ΑΒΓαβγ εἶναι παράλληλοι. Ἐὰν ἐργασθῶμεν μὲ αὐτάς, ὅπως εἰργάσθημεν διὰ τὰς ἕδρας κύβου βεβαιούμεθα ὅτι αἱ δύο αὗται ἕδραι εἶναι ἴσαι. Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι αἱ παράλληλοι ἕδραι ΔΕΖΗ, δεζη τοῦ πολυέδρου Δζ εἶναι ἴσαι· καὶ αἱ παράλληλοι ἕδραι ΑΒΓΔΕ, ΗΘΖΙΚ τοῦ πολυέδρου ΑΗ εἶναι ἴσαι.

Ἕκαστον λοιπὸν ἀπὸ τὰ πολύεδρα ταῦτα ἔχει δύο ἕδρας ἴσας καὶ παραλλήλους. Τὰς ἴσας καὶ παραλλήλους ἕδρας ἑκάστου τῶν πολυέδρων τούτων ὀνομάζομεν ***βάσεις*** αὐτοῦ. Τὰς δὲ ἄλλας ἕδρας ὀνομάζομεν ***παραπλεύρους*** ἕδρας αὐτοῦ.

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἑκάστη βάσις ἢ παράπλευρος ἕδρα τῶν πολυέδρων τούτων είναι εὐθύγραμμον σχῆμα, ἤτοι μέρος ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα. Ὅπως δὲ κάθε ἕδρα κύβου οὕτω καὶ κάθε ἓν ἀπὸ τὰ εὐθύγραμμα ταῦτα σχήματα ἔχει πλευράς, γωνίας καὶ κορυφάς.



Σχ. 9.

Αἱ παράπλευροι ἕδραι ὅλων τῶν πολυέδρων τούτων εἶναι ὅλαι τετράπλευρα. Τοῦ τετραπλεύρου ΑΒβα αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι, Διὰ τοῦτο τὸ τετράπλευρον τοῦτο λέγεται ἰδιαιτέρως ***παραλληλόγραμμον***. Καὶ αἱ ἄλλαι παράπλευροι ἕδραι τῶν ἀνωτέρω πολυέδρων ἔχουσι τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους, ἤτοι εἶναι καὶ αὗται παραλληλόγραμμα.

Αἱ βάσεις τοῦ πολυέδρου ΑΒΓαβγ ἔχουσιν ἀπὸ τρεῖς πλευρὰς καὶ τρεῖς γωνίας· λέγονται δὲ αὗται ***τρίπλευρα*** ἢ συνηθέστερον ***τρίγωνα***.

Αἱ βάσεις τοῦ Δζ εἶναι τετράπλευρα, αἱ δὲ βάσεις τοῦ ΑΗ ἔχουσιν ἀπὸ 5 πλευρὰς καὶ 5 γωνίας, λέγονται δὲ ***πεντάπλευρα*** ἢ συνηθέστερον ***πεντάγωνα***.

Ὥστε ἕκαστον ἀπὸ τὰ πολύεδρα ΑΒΓαβγ, Δζ, ΑΗ ἔχει δύο ἕδρας ἴσας καὶ παραλλήλους, αἱ δὲ ἄλλαι ἕδραι αὐτοῦ εἶναι παραλληλόγραμμα. Τὰ πολύεδρα ταῦτα λέγονται ἰδιαιτέρως ***πρίσματα***.

Γενικῶς: ***Πρίσμα καλεῖται πᾶν πολύεδρον, τοῦ ὁποίου δύο ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ ἄλλαι εἶναι παραλληλόγραμμα***.

Τὰ πρίσματα ἀπὸ τὸ εἶδος τῶν βάσεων ὀνομάζονται ***τριγωνικά***, ***τετραγωνικά***, ***πενταγωνικὰ*** κτλ.

Εἰς δίεδρον γωνίαν ἀνοικτοῦ κυτίου ἂς θέσωμεν καταλλήλως τὴν μίαν μετὰ τὴν ἄλλην τὰς διέδρους γωνίας τοῦ πρίσματος ΑΗ, ἑκάστη ἀπὸ τὰς ὁποίας σχηματίζεται ἀπὸ μίαν βάσιν καὶ ἀπὸ μίαν παράπλευρον ἕδραν. Θὰ ἴδωμεν οὕτω ὅτι ὅλαι ἐφαρμόζουσι μὲ ἐκείνην. Εἶναι λοιπὸν αἱ δίεδροι αὗται ***ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι*** καὶ ἑπομένως αἱ παράπλευροι ἕδραι τοῦ πρίσματος τούτου εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις.

Τὸ πρίσμα ΑΗ λέγεται διὰ τοῦτο ***ὀρθὸν πρίσμα***. Καὶ τὸ πρίσμα ΑΒΓαβγ εἶναι ὀρθὸν πρίσμα.

Ἐὰν ἐπιθέσωμεν εἰς τὰς γωνίας τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν ὀρθοῦ πρίσματος μίαν γωνίαν ἕδρας τινὸς κύβου, βλέπομεν ὅτι αὕτη ἐφαρμόζει μὲ ὅλας. Ἄρα αἱ γωνίαι τῶν τετραπλεύρων ἑδρῶν ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ὅλαι ὀρθαί. Διὰ τοῦτο αἱ παράπλευροι αὗται ἕδραι λέγονται ***ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα*** ἢ ἁπλῶς ***ὀρθογώνια***.

Ἡ δίεδρος γωνία δΔΕΗ καὶ ἡ δηζΖ τοῦ πρίσματος Δζ ἐφαρμόζει εἰς μέρος διέδρου κυτίου. Ἡ δὲ δίεδρος γωνία ΔΗΖζ καὶ ἡ Δδεζ δὲν χωρεῖ εἰς δίεδρον γωνίαν ἀνοικτοῦ κυτίου. Δὲν εἶναι λοιπὸν αἱ ἕδραι ΔΕεδ καὶ ΗΖζη κάθετοι πρὸς τὰς βάσεις τοῦ πρίσματσς Δζ. Περὶ αὐτῶν λέγομεν ὅτι εἶναι ***πλάγιαι*** πρὸς τὰς βάσεις. Τὸ δὲ πρίσμα Δζ λέγεται ***πλάγιον πρίσμα***.

Ἐπὶ ἐπιπέδου χαρτονίου ἂς χαράξωμεν εὐθύγραμμον σχισμὴν καὶ ἂς διαπεράσωμεν δι' αὐτῆς ἄλλο ἐπίπεδον χαρτόνιον. Ἄς διαθέσωμεν δὲ ταῦτα οὕτως ὥστε μία τῶν διέδρων γωνιῶν αὐτῶν νὰ ἐφαρμόζῃ μὲ τὴν δίεδρον γωνίαν Δδεζ τοῦ πλαγίου πρίσματος Δζ (Σχ. 9). Ἐὰν δι' ἐπιθέσεως συγκρίνωμεν τὰς διέδρους γωνίας αὐτῶν πρὸς ὀρθὴν δίεδρον γωνίαν κύβου, βλέπομεν ὅτι δύο ἀπὸ αὐτὰς εἶναι μεγαλύτεραι καὶ δύο μικρότεραι ἀπὸ τὴν ὀρθὴν δίεδρον γωνίαν. Δὲν εἶναι λοιπὸν αἱ δίεδροι γωνίαι τῶν ἐπιπέδων τούτων ὅλαι ἴσαι.

Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα λέγονται ***πλάγια***.

§ 9. Γενικοὶ ὁρισμοί. — Ἀπὸ τὴν προηγουμένην ἐξέτασιν τῶν πρισμάτων ἐξάγονται οἱ ἑξῆς γενικοὶ ὁρισμοί.

α') ***Εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται πᾶν μέρος ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ εὐθ. τμήματα.***

β') ***Παραλληλόγραμμον λέγεται πᾶν τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι.***

Παραλληλόγραμμόν τι λέγεται ***ὀρθογώνιον***, ἐὰν ὅλαι αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ὀρθαί.

γ΄) *Δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα λέγονται πλάγια, ἂν αἱ δίεδροι γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουσι, δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι.*

δ΄) *Ὀρθὸν πρίσμα λέγεται πᾶν πρίσμα, τοῦ ὁποίου αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις αὐτοῦ.*

ε΄) *Πλάγιον πρίσμα λέγεται πᾶν πρίσμα, τοῦ ὁποίου αἱ παράπλευροι ἕδραι δὲν εἶναι ὅλαι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις αὐτοῦ.*

Ἀσκήσεις. 28) Πόσας στερεὰς γωνίας καὶ πόσας κορυφὰς ἔχει ἕκαστον τριγωνικὸν πρίσμα ;

29) Πόσας ἀκμὰς καὶ πόσας διέδρους γωνίας ἔχει ἕκαστον τριγωνικὸν πρίσμα ;

30) Πόσας στερεὰς γωνίας, κορυφάς, ἀκμὰς καὶ διέδρους γωνίας ἔχει ἕκαστον τετραγωνικὸν πρίσμα ;

31) Πόσας στερεὰς γωνίας, κορυφάς, ἀκμὰς καὶ διέδρους γωνίας ἔχει ἕκαστον πενταγωνικὸν ἢ ἑξαγωνικὸν πρίσμα ;

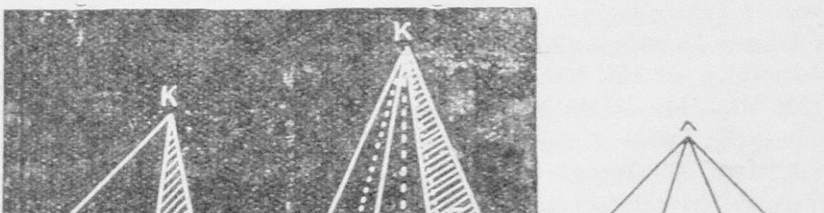
32) Πόσας ἕδρας ἔχει ἕκαστον τριγωνικόν, τετραγωνικόν, πενταγωνικόν, ἑξαγωνικὸν πρίσμα ;

33) Ὁ κύβος εἶναι πρίσμα ἢ οὐχί ;

34) Ὀνομάσατε ἀντικείμενα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι σχῆμα πρίσματος.

35) Διαθέσατε ἐπίπεδον τεμάχιον χαρτονίου πλαγίως πρὸς τὸ πάτωμα, πρὸς τὸν τοῖχον, πρὸς τὸν πίνακα.

§ 10. Ἐποπτεία πυραμίδων.—Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α τοῦ πολυέδρου Κ.ΑΒΓΔΕΖ (Σχ. 10) διέρχονται τρεῖς ἕδραι αὐτοῦ.



Σχ. 10.

Αὗται σχηματίζουσι στερεὰν γωνίαν. Στερεὰς γωνίας μὲ τρεῖς ἕδρας παρετηρήσαμεν καὶ εἰς τὸν κύβον καὶ εἰς τὰ ἄλλα πρίσματα.

Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Κ τοῦ πολυέδρου Κ.ΑΒΓΔΕΖ διέρχονται ἓξ ἕδραι, ἀπὸ δὲ τὴν κορυφὴν Λ τοῦ πολυέδρου Λ.ΑΒΓΔ διέρχονται 4 ἕδραι. Καὶ τὰ σχήματα, τὰ ὁποῖα αἱ ἕδραι αὗται σχηματίζουσι, λέγονται ***στερεαὶ γωνίαι***. Ὑπάρχουσι λοιπὸν καὶ στερεαὶ γωνίαι μὲ ἕδρας περισσοτέρας ἀπὸ τρεῖς.

Αἱ ἕδραι τῆς στερεᾶς γωνίας Κ εἶναι ὅλαι τρίγωνα. Ἀπέναντι τῆς κορυφῆς τῆς στερεᾶς ταύτης γωνίας κεῖται ἡ ἕδρα ΑΒΓΔΕΖ. Αὕτη τέμνει ὅλας τὰς ἀκμὰς τῆς στερεᾶς γωνίας χωρὶς νὰ περνᾷ ἀπὸ τὴν κορυφήν. Ἡ ἕδρα ΑΒΓΔΕΖ λέγεται ἐπίπεδος τομὴ τῆς στερεᾶς γωνίας Κ.

Τὸ πολύεδρον Κ. ΑΒΓΔΕΖ λέγεται ***πυραμίς***. Καὶ τὰ πολύεδρα Λ. ΑΒΓΔ, Κ. ΑΒΓ εἶναι πυραμίδες.

Ὥστε: ***Κάθε πυραμὶς εἶναι πολύεδρον, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τὰς ἕδρας μιᾶς στερεᾶς γωνίας καὶ ἀπὸ μίαν ἐπίπεδον τομὴν αὐτῆς, ἡ ὁποία τέμνει ὅλας τὰς ἀκμὰς τῆς στερεᾶς γωνίας, χωρὶς νὰ διέρχηται ἀπὸ τὴν κορυφὴν αὐτῆς.***

Ἡ κορυφὴ τῆς στερεᾶς γωνίας, τῆς ὁποίας αἱ ἕδραι μαζὶ μὲ μίαν ἐπίπεδον τομήν της περικλείουσι πυραμίδα, λέγεται ἰδιαιτέρως καὶ ***κορυφὴ*** τῆς πυραμίδος ταύτης.

Ἡ ἀπέναντι τῆς κορυφῆς ἕδρα πυραμίδος λέγεται βάσις αὐτῆς. Οὕτω τῆς πυραμίδος Κ. ΑΒΓΔΕΖ κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Κ, βάσις δὲ τὸ εὐθ. σχῆμα ΑΒΓΔΕΖ.

Ἡ βάσις πυραμίδος δύναται νὰ εἶναι τρίγωνον, τετράπλευρον, πεντάγωνον, ἑξάγωνον κλπ.

Ἀπὸ τὸ εἶδος δὲ τῆς βάσεως ὀνομάζομεν τὴν πυραμίδα ***τριγωνικὴν*** (ὅπως ἡ Κ, ΑΒΓ), ***τετραγωνικὴν*** (ὅπως ἡ Λ. ΑΒΓΔ), ***πενταγωνικήν***, ***ἑξαγωνικὴν*** (Κ. ΑΒΓΔΕΖ) κτλ.

Αἱ ἄλλαι ἕδραι (ἐκτὸς τῆς βάσεως) πυραμίδος λέγονται ***παράπλευροι*** ἕδραι αὐτῆς. Αἱ παράπλευροι ἕδραι πυραμίδος εἶναι ὅλαι τρίγωνα.

Ἀσκήσεις. 36) Πόσας ἕδρας ἔχει κάθε τριγωνική, πενταγωνική, ἑξαγωνικὴ κ.τ.λ. πυραμίς; Πόσαι ἀπὸ αὐτὰς εἶναι παράπλευροι ἕδραι εἰς κάθε μίαν ἀπὸ τὰς πυραμίδας ταύτας;

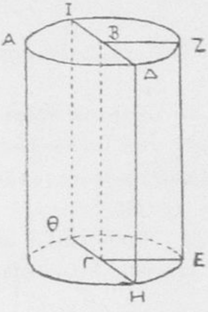
37) Πόσας ἀκμὰς καὶ διέδρους γωνίας ἔχει κάθε τριγωνική, τετραγωνικὴ πενταγωνικὴ κτλ. πυραμίς;

38) Πόσας στερεὰς γωνίας ἔχει κάθε τριγωνική, τετραγωνικὴ κ.λ.π. πυραμίς;

39) Συγκρίνατε τὴν δίεδρον γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ βάσις τῆς πυραμίδος Λ. ΑΒΓΔ μὲ τὴν ἕδραν ΛΑΒ, πρὸς μίαν δίεδρον γωνίαν ἀνοικτοῦ κυτίου. Καθορίσατε δὲ ἔπειτα, ἂν αἱ ἕδραι αὐτῆς εἶναι κάθετοι ἢ πλάγιαι. Ἐπαναλάβετε δὲ τὴν αὐτὴν ἐργασίαν διὰ τὰς ἄλλας διέδρους τῆς αὐτῆς πυραμίδος.

§ 11. Ἐποπτεία κυλίνδρου.—Τὸ σῶμα ΑΕ (Σχ. 11) λέγεται κύλινδρος.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι μικτή· ἀποτελεῖται δὲ ἀπὸ δύο ἐπίπεδα μέρη Γ καὶ Β καὶ ἀπὸ μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων μερῶν.



Σχ. 11.

Ἡ καμπύλη ἐπιφάνεια κυλίνδρου καλεῖται ἰδιαιτέρως ***κυρτὴ*** ἐπιφάνεια αὐτοῦ. Τὰ δὲ ἐπίπεδα μέρη τῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου λέγονται ***βάσεις*** αὐτοῦ.

Ἂς στηρίξωμεν διὰ τῆς μιᾶς βάσεως κύλινδρον ἐπάνω εἰς τράπεζαν ἢ εἰς τὸ πάτωμα. Ἂς θέσωμεν δὲ ἔπειτα ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην βάσιν ἐπίπεδον χαρτόνιον. Θὰ ἴδωμεν οὕτως ὅτι, ὅσον μέγα καὶ ἂν εἶναι τὸ χαρτόνιον, δὲν συναντᾷ τὴν τράπεζαν ἢ τὸ πάτωμα. Ἄρα : ***Αἱ βάσεις κυλίνδρου εἶναι παράλληλοι.***

Ἑκάστη βάσις κυλίνδρου περικλείεται ὑπὸ μίαν καμπύλην γραμμήν.

Ἐὰν σύρωμεν γραφίδα ἐπὶ τῆς τραπέζης ἀκολουθοῦντες μὲ αὐτὴν τὴν καμπύλην τῆς βάσεως, ἥτις κεῖται ἐπὶ τῆς τραπέζης, θὰ σχηματισθῇ ἐπὶ τῆς τραπέζης ἕνα σχῆμα ἴσον μὲ τὴν βάσιν ταύτην. Ἐὰν δὲ εἰς τὸ σχῆμα τοῦτο θέσωμεν καταλλήλως καὶ τὴν ἄλλην βάσιν τοῦ αὐτοῦ κυλίνδρου, βλέπομεν ὅτι καὶ αὕτη ἐφαρμόζει μὲ αὐτό. Ἄρα : ***Αἱ βάσεις κυλίνδρου εἶναι ἴσαι.***

Ὁ κύλινδρος ΑΕ εἶναι διῃρημένος εἰς δύο μέρη, τὰ ὁποῖα κρατοῦνται ἡνωμένα μὲ μίαν βίδαν. Δυνάμεθα δὲ νὰ χωρίσωμεν αὐτά. Ἂς στηρίξωμεν ἔπειτα τὸ ἓν ἀπὸ αὐτὰ ΕΗΘΙ ἐπὶ τῆς τραπέζης, οὕτως ὥστε ἡ καμπύλη ΗΕΘ νὰ ἐφαρμόσῃ εἰς μέρος τῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν προηγουμένως ἐγράψαμεν ἐπὶ τῆς τραπέζης. Μὲ τὴν βοήθειαν νήματος ὁρίζομεν ἐπὶ τοῦ εὐθ. τμήματος ΗΘ σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα ΓΗ ἴσον πρὸς τὸ ΓΘ. Ἂς ἑνώσωμεν ἔπειτα, ὅπως πρότερον, τὰ δύο μέρη τοῦ κυλίνδρου καὶ ἂς στηρίξωμεν εἰς τὸ Γ τὸ ἓν ἄκρον νήματος, τοῦ ὁποίου τὸ ἄλλο ἄκρον φθάνει μέχρι τῆς καμπύλης γραμμῆς. Ἐὰν στρέψωμεν τὸ νῆμα τοῦτο περὶ τὸ Γ χωρὶς νὰ ἐξέλθῃ ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως Γ, βλέπομεν ὅτι τὸ ἄλλο ἄκρον αὐτοῦ μένει διαρκῶς εἰς τὴν καμπύλην γραμμὴν καὶ τὸ νῆμα γράφει ἓν ἐπίπεδον μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο μέρος λέγεται ***κύκλος***. Ἡ καμπύλη γραμμή, εἰς τὴν ὁποίαν περατοῦται ὁ κύκλος, λέγεται ***περιφέρεια*** τοῦ κύκλου.

Τὸ σημεῖον Γ λέγεται ***κέντρον*** τοῦ κύκλου τούτου. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον βεβαιούμεθα ὅτι καὶ τὸ ἄλλο ἐπίπεδον μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου εἶναι κύκλος μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Β.

Ὥστε: ***Αἱ βάσεις κυλίνδρου εἶναι κύκλοι ἴσοι καὶ παράλληλοι.***

Τὸ εὐθ. τμῆμα ΒΓ, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὰ κέντρα τῶν βάσεων κυλίνδρου, λέγεται ***ὕψος*** ἢ ***ἄξων*** τοῦ κυλίνδρου.

Ἄς τεντώσωμεν καλῶς μεταξὺ τῶν χειρῶν μας λεπτὸν νῆμα· ἄς θέσωμεν δὲ αὐτό, οὕτως ὥστε μέρος του νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου χωρὶς παραμόρφωσιν καὶ ἀπὸ τὴν μίαν βάσιν, ἕως τὴν ἄλλην. Βλέπομεν οὕτω ὅτι τὸ νῆμα τοῦτο εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου.

Ἄν δὲ προηγουμένως χρωματίσωμεν τὸ νῆμα μὲ χρῶμα ὑγρόν, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου θὰ γραφῇ εὐθεῖα χρωματιστὴ καὶ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου.

Ἄρα: ***Αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα κυλίνδρου καὶ συνδέουσι σημεῖα τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων, κεῖνται ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.***

Ἀσκήσεις. 40) Ὀνομάσατε ἀντικείμενα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι σχῆμα κυλίνδρου.

41) Σχηματίσατε μὲ μεταλλικὰ νομίσματα κύλινδρον.

42) Περιτυλίξατε φύλλον τοῦ τετραδίου σας, οὕτως ὥστε τοῦτο νὰ λάβῃ σχῆμα κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου.

43) Μὲ τὴν βοήθειαν κυλίνδρου ἀπὸ μεταλλικὰ νομίσματα προσπαθήσατε νὰ ἐννοήσητε τί σχῆμα ἔχει ἐπίπεδος τομὴ κυλίνδρου παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις αὐτοῦ.

§ 12. Γεωμετρία.—Ὁ κύβος, τὰ πρίσματα, αἱ πυραμίδες, οἱ κύλινδροι, τὰ ὁποῖα ἐγνωρίσαμεν προηγουμένως, εἶναι στερεὰ σχήματα. Ἐπάνω εἰς αὐτὰ παρετηρήσαμεν καὶ διάφορα ἄλλα ἐπίπεδα σχήματα.

Τὰς ἰδιότητας τῶν σχημάτων καὶ τὸν τρόπον τῆς μετρήσεως αὐτῶν διδάσκει ἡ ***Γεωμετρία***.

Τὸ μέρος τῆς Γεωμετρίας, τὸ ὁποῖον ἐξετάζει τὰ ἐπίπεδα σχήματα λέγεται ***ἐπιπεδομετρία***· τὸ δὲ μέρος, τὸ ὁποῖον ἐξετάζει τὰ στερεὰ σχήματα καλεῖται ***στερεομετρία***.

Ἡ γεωμετρία ἐξετάζει τὰ διάφορα σχήματα τῶν σωμάτων χωρὶς νὰ λαμβάνῃ ὑπ᾿ ὄψιν τὴν ὕλην, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦνται τὰ σώματα ταῦτα. Καλοῦνται δὲ συνήθως τότε ταῦτα ***Γεωμετρικὰ σώματα***.

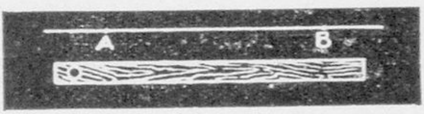
ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ — ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

§ 13. Κανών.—Χάραξις εὐθείας.—Ὁ κανὼν (Σχ. 12) εἶναι λεπτόν, ἐπίμηκες καὶ ὀρθὸν τετραγωνικὸν πρίσμα ἐκ σανίδος. Ἐὰν θέσωμεν τὸν κανόνα οὕτως ὥστε μία ἀπὸ τὰς πλατυτέρας ἕδρας του νὰ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ φύλλου χάρτου (ἢ τοῦ πίνακος) καὶ σύρωμεν τὴν γραφίδα κατὰ μῆκος τοῦ κανόνος, χαράσσομεν εὐθεῖαν γραμμήν.



Σχ. 12.

Ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ ἐπὶ μικρῶν ἰδίᾳ ἐκτάσεων, π. χ. κήπων, προαυλίων κλπ. χαράσσομεν εὐθεῖαν γραμμὴν ὡς ἀκολούθως.

Ἐμπήγομεν εἰς δύο σημεῖα τοῦ ἐδάφους δύο πασσάλους, εἰς τοὺς ὁποίους προσδένομεν νῆμα καλῶς τεντωμένον. Ἔπειτα σύρομεν κατὰ μῆκος τοῦ νήματος τούτου αἰχμηρὸν πάσσαλον. Ἡ αἰχμὴ τούτου χαράσσει ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εὐθεῖαν γραμμήν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα ἐνεπήχθησαν οἱ πάσσαλοι.

Οἱ τεχνῖται ἐνίοτε χαράττουσιν ἐπὶ σανίδος εὐθεῖαν ὡς ἀκολούθως. Μεταξὺ δύο σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα θέλουσι νὰ διέλθῃ ἡ εὐθεῖα, στερεοῦσι νῆμα καλῶς τεντωμένον καὶ προσφάτως χρωματισθὲν δι' ἐρυθροῦ συνήθως χρώματος. Ἀνυψώνουσιν ἔπειτα τὸ νῆμα κατὰ τὸ μέσον αὐτοῦ περίπου καὶ ἀφήνουσι πάλιν αὐτὸ νὰ πέσῃ ἀποτόμως ἐπὶ τῆς σανίδος. Τοιουτοτρόπως προσκολλᾶται ἐπὶ τῆς σανίδος χρωματιστὴ ὕλη, ἡ ὁποία ὁρίζει εὐθεῖαν γραμμήν.

§ 14. Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης εὐθείας γραμμῆς.—Ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Β (Σχ. 12) διέρχεται ἡ εὐθεῖα

AB, τὴν ὁποίαν εὐκόλως χαράσσομεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος.

Ἐὰν θελήσωμεν νὰ γράψωμεν καὶ ἄλλην εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ διέρχηται ἀπὸ τὰ ἴδια σημεῖα A καὶ B, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αὕτη συμπίπτει μὲ τὴν AB καὶ ἀποτελεῖ μὲ αὐτὴν μίαν εὐθεῖαν γραμμήν. Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἐκφράζομεν οὕτω :

Ἀπὸ δύο σημεῖα μία μόνον εὐθεῖα γραμμὴ διέρχεται.

Ἢ καὶ οὕτω :

Δύο σημεῖα ὁρίζουσι τὴν θέσιν μιᾶς εὐθείας γραμμῆς.

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἑκάστην εὐθεῖαν ὀνομάζομεν μὲ τὰ γράμματα δύο σημείων αὐτῆς. Λέγοντες π. χ. εὐθεῖαν AB (Σχ. 12) νοοῦμεν τὴν ὡρισμένην καὶ μόνην εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B.

Ἀσκήσεις. 44) Ὁρίσατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας δύο σημεῖα καὶ χαράξατε τῇ βοηθείᾳ τοῦ κανόνος τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ αὐτά.

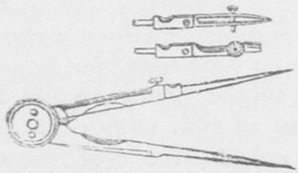
45) Ὁρίσατε ἐπὶ τοῦ πατώματος τῆς αἰθούσης τῆς διδασκαλίας δύο σημεῖα καὶ τῇ βοηθείᾳ νήματος χρωματισθέντος μὲ τὴν κόνιν τῆς κιμωλίας γράψατε τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα ταῦτα.

46) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας (ἢ τοῦ πίνακος) εὐθεῖαν, ὁρίσατε ἑκατέρωθεν αὐτῆς δύο σημεῖα τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ γράψατε τὴν εὐθεῖαν ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα ταῦτα. Παρατηρεῖτε κοινόν τι εἰς τὰς εὐθείας ταύτας ;

47) Ὁρίσατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας ἢ τοῦ πίνακος τρία σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας καὶ γράψατε πάσας τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας ταῦτα ἀνὰ δύο λαμβανόμενα ὁρίζουσι.

48) Ὁρίσατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας (ἢ τοῦ πίνακος) ἓν σημεῖου A καὶ γράψατε δύο εὐθείας, αἱ ὁποῖαι νὰ διέρχωνται ἀπὸ τὸ σημεῖον τοῦτο. Ὁρίσατε ἔπειτα ἐπὶ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν τούτων δύο σημεῖα, τὰ ὁποῖα νὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ A καὶ χαράξατε ὅλας τὰς ἄλλας εὐθείας, τὰς ὁποίας ὁρίζουσι τὰ τέσσαρα ταῦτα σημεῖα ἀνὰ δύο λαμβανόμενα.

§ 13. Διαβήτης.—Ὁ διαβήτης ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἴσα σκέλη ἐκ ξύλου ἢ μετάλλου. Δύο δὲ ἄκρα αὐτῶν συνδέονται μεταξύ των διὰ κοχλίου (βίδας). Περὶ τὸν κοχλίαν τοῦτον δύνανται νὰ στρέφωνται τὰ σκέλη τοῦ διαβήτου ἀνοίγοντα ἢ κλείοντα.



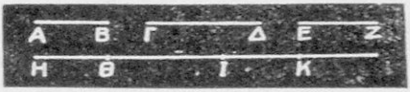
Σχ. 13.

Μὲ τὸν κοχλίαν δὲ δυνάμεθα ἐπίσης νὰ στερεώσωμεν τὰ σκέλη ταῦτα, οὕτως ὥστε τὸ ἄνοιγμα αὐτῶν νὰ μένῃ ἀμετάβλητον.

Τὰ ἐλεύθερα ἄκρα τῶν σκελῶν καταλήγουσιν εἰς ὀξείας αἰχμάς.

Συνήθως δὲ τὸ ἓν ἀπὸ αὐτὰ ἀνταλλάσσεται μὲ γραμμοσύρτην ἢ μὲ στέλεχος, τὸ ὁποῖον φέρει θήκην, εἰς τὴν ὁποίαν προσαρμόζεται γραφὶς ἢ κιμωλία.

§ 16. Εὐθύγραμμα τμήματα. — Εὐθεῖάν τινα π. χ. τὴν ΑΒ (Σχ. 12) νοοῦμεν ἑκατέρωθεν καὶ ἐπ' ἄπειρον ἐκτεινομένην. Ἵνα δὲ ἀπὸ τῆς ἀπεράντου εὐθείας ΑΒ (Σχ. 12) διακρίνωμεν τὸ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β περιεχόμενον μέρος αὐτῆς, καλοῦμεν αὐτὸ εὐθύγραμμον τμῆμα (§ 3Α΄).



Σχ. 14.

Τὰ δύο σημεῖα, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ἕκαστον εὐθ. τμῆμα καλοῦνται ἄκρα αὐτοῦ. Οὕτω τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ (Σχ. 12) ἄκρα εἶναι τὰ σημεῖα Α καὶ Β.

Ἐὰν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου συγκρίνωμεν τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ πρὸς τὰ ΕΖ καὶ ΓΔ (Σχ. 14), βλέπομεν ὅτι ΑΒ = ΕΖ καὶ ΑΒ < ΓΔ (§ 5).

Ἐπὶ εὐθείας ἂς λάβωμεν κατὰ σειρὰν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου τμήματα ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ (Σχ. 14) ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ. Οὕτως ἀποτελεῖται ὑπ' αὐτῶν τμῆμα ΗΚ, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν ***ἄθροισμα*** τῶν τμημάτων ΑΒ ΓΔ, ΕΖ.

Τμῆμά τι λέγεται ***διπλάσιον, τριπλάσιον*** κτλ. ἄλλου, ἂν εἶναι ἄθροισμα δύο, τριῶν κλπ, τμημάτων ἴσων πρὸς τὸ ἄλλο.

Ἑκάστη τεθλ. γραμμὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθ. τμήματα. Ταῦτα λέγονται ***πλευραὶ*** αὐτῆς.

Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τεθλ. γραμμῆς καλεῖται ***περίμετρος*** ~~αὐτῆς.~~

Ἐὰν ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον Θ εὐθ. τμήματος ΘΚ ἀποκόψωμεν τμῆμα ΘΙ ἴσον πρὸς τὸ ΓΔ, μένει τὸ τμῆμα ΙΚ. Τοῦτο ὀνομάζομεν ***διαφορὰν*** τῶν ἀνίσων τμημάτων ΘΚ καὶ ΓΔ.

Γενικῶς : ***Διαφορὰ δύο ἀνίσων εὐθυγράμμων τμημάτων καλεῖται τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον μένει, ἂν ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου καὶ ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτοῦ ἀποκόψωμεν τμῆμα ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον.***

Ἀσκήσεις. 49) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας (ἢ τοῦ πίνακος) εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ τυχὸν εὐθ. τμῆμα. Ὁρίσατε ἔπειτα ἐπὶ τῆς εὐθείας ἄλλο εὐθ. τμῆμα ἴσον πρὸς ἐκεῖνο.

50) Ὁρίσατε ἐπὶ εὐθείας τμῆμα διπλάσιον ἄλλου δοθέντος εὐθ. τμήματος καὶ ἄλλο τριπλάσιον τούτου.

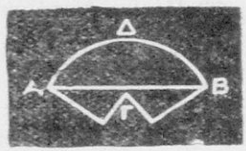
51) Γράψατε τεθλασμένην γραμμήν, ἡ ὁποία νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ τρεῖς πλευρὰς ἴσας.

52) Γράψατε τεθλασμένην γραμμὴν μὲ τέσσαρας πλευράς, ὧν ἑκάστη εἶναι διπλασία τῆς προηγουμένης.

53) Γράψατε δύο εὐθείας, αἱ ὁποῖαι νὰ ἀρχίζωσιν ἀπὸ ὡρισμένον σημεῖον Α. Ἔπειτα ὁρίσατε ἐπὶ τῆς μιᾶς τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης ὁμοίως ἄλλα δύο ΑΔ, ΔΕ καὶ τοιαῦτα ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ=ΑΔ καὶ ΑΕ=ΑΓ. Χαράξατε ἔπειτα τὰ εὐθ. τμήματα ΓΔ καὶ ΒΕ, συγκρίνατε ταῦτα πρὸς ἄλληλα καὶ ἀνεύρετε τὴν μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουσαν σχέσιν μεγέθους.

54) Γράψατε δύο εὐθείας, αἱ ὁποῖαι νὰ διέρχωνται ἀπὸ ἓν σημεῖον Α καὶ ὁρίσατε ἐπὶ τῆς μιᾶς εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ ἴσα πρὸς ἄλληλα. Ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης δύο ἄλληλα εὐθ. τμήματα ΑΔ καὶ ΑΕ ἐπίσης ἴσα. Χαράξατε ἔπειτα τὰ εὐθ. τμήματα ΒΔ,ΔΓ,ΓΕ,ΕΒ· συγκρίνατε πρὸς ἄλληλα τὰ ἀπέναντι κείμενα καὶ ἀνεύρετε τὴν μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουσαν σχέσιν.

§ 17. Σχέσεις εὐθ. τμημάτων πρὸς ἄλλας γραμμὰς ἐχούσας τὰ αὐτὰ πέρατα. Ἔστω ΑΒ (Σχ. 15) ἓν εὐθ. τμῆμα. Ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτοῦ εἶναι δυνατὸν νὰ διέρχωνται ἄπειροι τεθλασμέναι, καμπύλαι καὶ μικταὶ γραμμαί. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα ἀποτελεῖ τὸν συντομώτερον δρόμον, ὁ ὁποῖος φέρει ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον αὐτοῦ εἰς τὸ ἄλλο. Τοῦτο ἐκφράζομεν διὰ τῆς ἀκολούθου προτάσεως.



Σχ. 15.

Ἕκαστον εὐθ. τμῆμα εἶναι μικρότερον πάσης ἄλλης γραμμῆς, ἡ ὁποία ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα.

Ἀπόστασις δύο σημείων.— ***Ἀπόστασις δύο σημείων καλεῖται τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζουσι τὰ σημεῖα ταῦτα.***

§ 18. Μέτρησις εὐθ. τμημάτων.— Διὰ νὰ μετρήσωμεν ἕνα εὐθ. τμῆμα, συγκρίνομεν αὐτὸ πρὸς ἄλλο εὐθ. τμῆμα ὡρισμένον καὶ γνωστόν, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν ***μονάδα***. Διὰ τῆς συγκρίσεως ταύτης εὑρίσκομεν ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ μετρούμενον εὐθ. τμῆμα.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ πλῆθος τοῦτο τῶν μονάδων ἢ μερῶν αὐτῆς, καλεῖται ***μῆκος*** τοῦ εὐθ. τμήματος.

§ 19. Κυριώτεραι μονάδες μήκους.— Αἱ διάφοροι μονάδες, μὲ τὰς ὁποίας μετροῦμεν τὰ εὐθ. τμήματα καὶ ἐν γένει τὰς γραμμάς, καλοῦνται ***μονάδες μήκους***.

Ἡ συνηθεστέρα μονὰς τοῦ μήκους εἶναι τὸ ***μέτρον*** ἢ ὁ ***βασιλικὸς πῆχυς***. Ὁ β. πῆχυς ὑποδιαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται παλάμαι· ἑκάστη παλάμη διαιρεῖται εἰς δέκα δακτύλους καὶ ἕκαστος δάκτυλος εἰς 10 γραμμάς.

Ὥστε: 1 μέτρ.=10 παλ.=100 δακ.=1000 γραμ.
1 παλ.=10 δακ.=100 γραμ.
1 δακ.=10 γραμ.

Εἰς τὴν πρᾶξιν μεταχειριζόμεθα τὸ διπλοῦν ὑποδεκάμετρον, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 0,20 μ. καὶ τὴν ταινίαν, ἡ ὁποία ἔχει συνήθως μῆκος 10 μ ἢ 20 μ. Τὴν χρῆσιν τούτων παραλείπομεν, διότι εἶναι ἁπλουστάτη.

Ἐὰν ἡ πρὸς μέτρησιν γραμμὴ εἶναι πολὺ μεγάλη, μεταχειριζόμεθα μεγαλυτέραν μονάδα, τὸ ***στάδιον*** ἢ ***χιλιόμετρον***, τὸ ὁποῖον ἔχει 1000 μέτρα καὶ τὸ μυριάμετρον, τὸ ὁποῖον ἔχει 10 στάδια ἢ 10000 μέτρα.

Ἀσκήσεις. 55) Πόσους δακτύλους καὶ πόσας γραμμὰς ἔχει τὸ μέτρον;

56) Πόσους δακτύλους ἔχουσι 7 μέτρα καὶ πόσας γραμμὰς ἔχουσι 12 μέτρα;

57) Πόσας γραμμὰς ἔχει ἡ παλάμη καὶ πόσας γραμμὰς ἔχουσι 17 παλάμαι;

58) Πόσους δακτύλους ἔχουσι 35,7 μέτρα καὶ πόσας γραμμὰς ἔχουσι 45, 35 μέτρα;

59) Πόσας γραμμὰς ἔχουσι 7,3 παλάμαι;

60) Πόσα μέτρα ἀποτελοῦσι 3600 δάκτυλοι καὶ πόσας παλάμας ἀποτελοῦσι 14700 γραμμαί;

61) Πόσα μέτρα ἀποτελοῦσι 3165 δάκτυλοι καὶ πόσα μέτρα ἀποτελοῦσιν 25460 γραμμαί;

62) Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ καὶ τῆς τεθλ. γραμμῆς ΑΓΒ τοῦ σχήματος 15.

63) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ ὁρίσατε ἐπ᾿αὐτῆς εὐθύγραμμον τμῆμα μήκους 0,12 μ, ἄλλο μήκους 9 δακτύλων καὶ ἄλλο μήκους 50 γραμμῶν.

64) Γράψατε ἐπὶ τοῦ πίνακος εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ ὁρίσατε ἐπ᾿αὐτῆς εὐθύγραμμον τμῆμα μήκους 2,7 παλαμῶν, ἄλλο μήκους 30 δακτύλων καὶ ἄλλο μήκους 400 γραμμῶν.

65) Γράψατε τεθλασμένην γραμμήν, τῆς ὁποίας μία πλευρὰ νὰ ἔχῃ μῆκος 3,03 μ., ἄλλη 0,04 μ. καὶ ἄλλη 0,05 μ.

66) Γράψατε τεθλ. γραμμήν, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ ἔχουσι κατὰ σειρὰν μήκη 2 δακτύλων, 4 δακτύλων καὶ 7 δακτύλων. Γράψατε ἔπειτα καὶ μετρήσατε τὴν ἀπόστασιν τῶν ἄκρων αὐτῆς.

67) Μετρήσατε ὅλας τὰς πλευρὰς τῆς ἐμπροσθίας ἐπιφανείας τοῦ μελανοπίνακος.

68) Μετρήσατε ὅλας τὰς πλευρὰς τοῦ πατώματος τῆς αἰθούσης τῆς διδασκαλίας καὶ τοῦ δωματίου του ἕκαστος.

69) Μετρήσατε τὸ ὕψος τῆς ἕδρας.

70) Γράψατε τεθλασμένην γραμμήν, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δύο πλευρὰς καὶ μίαν ἄλλην τεθλασμένην γραμμήν, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ τὰ αὐτὰ ἄκρα καὶ νὰ περικλείῃ τὴν πρώτην. Νὰ εὕρητε τὴν περίμετρον ἑκάστης καὶ νὰ συγκρίνητε πρὸς ἀλλήλας τὰς περιμέτρους ταύτας.

71) Μετρήσατε τὰς πλευρὰς συνήθους τραπέζης γραφείου καὶ συγκρίνατε τὰ μήκη τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.

72) Ἐκτιμήσατε διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ τὸ ὕψος καὶ τὸ πλάτος τῆς θύρας τῆς αἰθούσης διδασκαλίας καὶ τοῦ δωματίου του ἕκαστος. Μετρήσατε ἔπειτα τὰς αὐτὰς γραμμὰς καὶ καθορίσατε τὸ λάθος σας.

73) Τὴν προηγουμένην ἐργασίαν ἂς ἐπαναλάβῃ ἕκαστος διὰ τὸ ὕψος καὶ πλάτος τῶν παραθύρων τοῦ δωματίου του.

74) Μετρήσατε τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος ἑκάστης βαθμίδος (σκαλοπάτι) τῆς κλίμακος τοῦ σχολείου ἢ τῆς οἰκίας του ἕκαστος. Εὕρετε δὲ ἀκόμη πόσον κάθε βαθμὶς κεῖται ὑψηλότερον ἀπὸ τὴν προηγουμένην.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

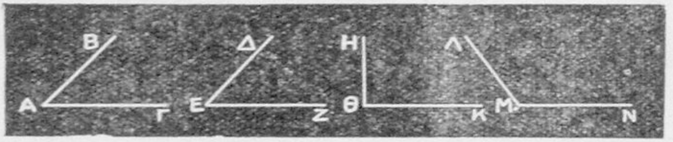
ΓΩΝΙΑΙ — ΚΑΘΕΤΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

§ 20. Ὁρισμὸς γωνίας καὶ τῶν στοιχείων αὐτῆς. Ἐπὶ τῶν διαφόρων πολυέδρων, τὰ ὁποῖα ἐξητάσαμεν, παρετηρήσαμεν διαφόρους γωνίας. Καὶ τὰ σχήματα Α, Ε, Θ, Μ (Σχ. 16) εἶναι γωνίαι.

Γενικῶς: ***Γωνία καλεῖται πᾶν σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσι δύο εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουσιν ἀπὸ ἓν σημεῖον καὶ δὲν ἀποτελοῦσιν εὐθεῖαν γραμμήν.***

Αἱ εὐθεῖαι γραμμαί, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦσι γωνίαν τινά, καλοῦνται ***πλευραὶ*** τῆς γωνίας ταύτης. Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν πλευρῶν γωνίας καλεῖται ***κορυφὴ*** αὐτῆς.

Ἑκάστην γωνίαν ὀνομάζομεν μὲ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς ἢ μὲ



Σχ. 16.

τρία γράμματα· ἐκ τούτων τὸ ἓν τίθεται πλησίον τῆς κορυφῆς καὶ ἀναγιγνώσκεται εἰς τὸ μέσον, τὰ δὲ ἄλλα τίθενται ἀνὰ ἓν εἰς ἄλλα σημεῖα τῶν πλευρῶν.

ΣΗΜ. Τὸ σύμβολον $\widehat{BAΓ}$ δηλοῖ γωνίαν, ἡ ὁποία ἔχει κορυφὴν τὸ σημεῖον Α καὶ πλευρὰς τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ.

Ἀπὸ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῶν ἴσων καὶ ἀνίσων σχημάτων (§ 5) προκύπτει εὐκόλως ὅτι: ***Δύο γωνίαι λέγονται ἴσαι, ἂν καταλλήλως ἐπιτιθέμεναι ἐφαρμόζωσι καὶ ἀποτελοῦσι μίαν γωνίαν.*** Π. χ. αἱ γωνίαι Α καὶ Ε (Σχ. 16) εἶναι ἴσαι.

Δύο γωνίαι λέγονται ἄνισοι, ἂν ἡ μία ἐφαρμόζῃ εἰς μέρος τῆς ἄλλης. Ἀπὸ αὐτὰς ἐκείνη, ἡ ὁποία ἐφαρμόζει εἰς μέρος τῆς ἄλλης, λέγεται ***μικροτέρα*** ἀπὸ αὐτήν· αὕτη δὲ λέγεται ***μεγαλυτέρα*** ἀπὸ τὴν πρώτην. Π. χ. ἡ γωνία Α (Σχ. 16) ἐφαρμόζει εἰς μέρος τῆς Θ. Εἶναι λοιπὸν αὗται ἄνισοι καὶ ἡ Α μικροτέρα ἀπὸ τὴν Θ, ἡ δὲ Θ μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν Α.

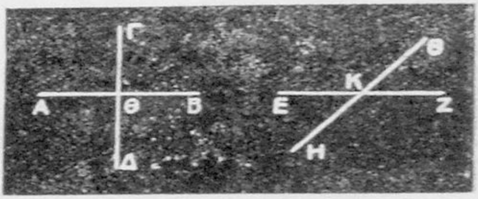
Ἀσκήσεις. 75) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας ἢ τοῦ πίνακος γωνίαν καὶ ὀνομάσατε αὐτὴν καθ' ὅλους τοὺς γνωστοὺς τρόπους.

76) Διαθέσατε δύο εὐθύγραμμα ξυλάρια, οὕτως ὥστε νὰ σχηματίζωσι γωνίαν.

77) Ἀναγνώσατε καθ' ὅλους τοὺς γνωστοὺς τρόπους ἑκάστην γωνίαν τοῦ σχήματος 16.

78) Γράψατε ἐπὶ τοῦ πίνακος εὐθεῖαν καὶ διαθέσατε εὐθύγραμμον ξυλάριον, οὕτως ὥστε νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν εὐθεῖαν ταύτην γωνίαν, τὸ δὲ ξυλάριον νὰ μὴ κεῖται ὅλον ἐπὶ τοῦ πίνακος.

§ **21. Κάθετοι καὶ πλάγιαι εὐθεῖαι.**—Ἂς θέσωμεν τὸν κύβον ΔΕ (Σχ. 1) ἐπὶ φύλλου χάρτου, οὕτως ὥστε νὰ ἐφαρμόζῃ ἐπ' αὐτοῦ τὸ μέρος ΑΒΕΘ τῆς ἐπιφανείας του. Ἂν σύρωμεν ἔπειτα τὴν γραφίδα κατὰ μῆκος τῶν εὐθειῶν ΘΕ καὶ ΘΑ αὐτῆς, σχηματίζομεν γωνίαν ΑΘΔ (Σχ. 17) ἴσην πρὸς τὴν ΑΘΕ (Σχ. 1). Ἂν δὲ προεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς ΑΘ καὶ ΔΘ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς κορυφῆς, σχηματίζονται ἄλλαι τρεῖς γωνίαι. Ἂν ἐπιθέσωμεν τὴν γωνίαν ΑΘΕ ἐπὶ ἑκάστης τούτων βλέπομεν ὅτι ὅλαι εἶναι ἴσαι πρὸς αὐτήν. Αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν ΑΒ καὶ ΓΔ σχηματίζουσι 4 γωνίας ἴσας· λέγονται δὲ αὗται ***κάθετοι*** πρὸς ἀλλήλας.



Σχ. 17.

Γενικῶς: ***Δύο εὐθεῖαι λέγονται κάθετοι πρὸς ἀλλήλας, ἐὰν αἱ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.***

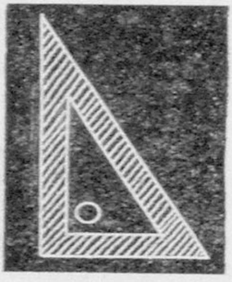
Ἔχομεν πολλὰ παραδείγματα καθέτων εὐθειῶν. Τὸ σημεῖον +

τῆς ἀριθμητικῆς, τὰ δύο σκέλη σταυροῦ, αἱ σιδηραῖ ῥάβδοι τῶν παραθύρων σχηματίζονται ἀπὸ εὐθείας καθέτους.

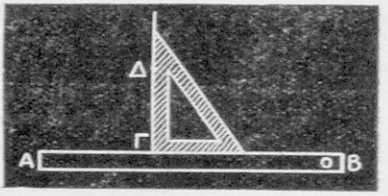
Ἐὰν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον γράψωμεν γωνίαν ΕΚΗ (Σχ. 17) ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν ΓΑΒ τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος ΑΒΓαβγ (Σχ. 8) καὶ προεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς αὐτῆς πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς κορυφῆς σχηματίζονται ἄλλαι τρεῖς γωνίαι. Δι' ἐπιθέσεως ἐπ' αὐτῶν τῆς ΓΑΒ βεβαιούμεθα ὅτι ἀπὸ αὐτὰς ἡ μὲν ΘΚΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΑΒ, αἱ δὲ ἄλλαι εἶναι μεγαλύτεραι ἀπὸ αὐτήν. Ὥστε αἱ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΕΖ καὶ ΗΘ, δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· λέγονται δὲ αἱ εὐθεῖαι αὗται ***πλάγιαι***.

Γενικῶς: ***Δύο εὐθεῖαι λέγονται πλάγιαι, ἐὰν αἱ ἐπ' αὐτῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι δὲν εἶναι πᾶσαι ἴσαι.***

§ 22. Χάραξις καθέτων εὐθειῶν. Γνώμων. Διὰ τὴν χάραξιν καθέτων εὐθειῶν γίνεται χρῆσις τοῦ γνώμονος (Σχ. 18),



Σχ. 18.



Σχ. 19.

τοῦ ὁποίου αἱ δύο μικρότεραι πλευραὶ εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

Πρὸς τοῦτο ἀφοῦ χαραχθῇ μία εὐθεῖα, τοποθετεῖται ὁ γνώμων οὕτως ὥστε ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ νὰ συμπέσῃ μὲ αὐτὴν καὶ σύρεται ἔπειτα ἡ γραφὶς κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς αὐτοῦ.

Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία τοιουτοτρόπως γράφεται εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν πρώτην,

Ἐὰν θέλωμεν νὰ γράψωμεν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ διέρχηται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Δ καὶ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ (Σχ. 19), ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Τοποθετοῦμεν τὸν κανόνα οὕτως ὥστε μία πλευρὰ αὐτοῦ νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ, τὸν δὲ γνώμονα εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς εὐθείας καὶ τοῦ σημείου Δ καὶ οὕτως ὥστε ἡ μία (συνήθως ἡ μικροτέρα) τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ νὰ ἐφαρμόζῃ εἰς τὴν αὐτὴν πλευρὰν τοῦ κανόνος. Τηροῦμεν ἔπειτα τὸν κανόνα ἀκίνητον καὶ μεταθέτομεν κατὰ μῆκος αὐτοῦ τὸν γνώμονα, μέχρις οὗ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ διέλθῃ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου. Σύρομεν τέλος κατὰ μῆκος τῆς καθέτου ταύτης πλευρᾶς τοῦ γνώμονος τὴν γραφίδα.

ΣΗΜ. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ σημεῖον δύναται νὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας ἢ καὶ ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν, ὅπως τὸ Γ.

Ἀσκήσεις. 79) Ὀνομάσατε ἀριθμητικὸν σημεῖον τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ καθέτους εὐθείας καὶ ἄλλο, ὅπερ σχηματίζεται ἀπὸ πλαγίας εὐθείας.

80) Δείξατε ἐντὸς τῆς αἰθούσης τῆς διδασκαλίας καθέτους εὐθείας.

81) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας (ἢ τοῦ πίνακος) εὐθεῖαν καὶ ὁρίσατε ἓν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς καὶ ἓν ἐκτὸς αὐτῆς, Γράψατε ἔπειτα τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην, ἥτις διέρχεται ἀπὸ καθ' ἓν ἀπὸ τὰ ὁρισθέντα σημεῖα.

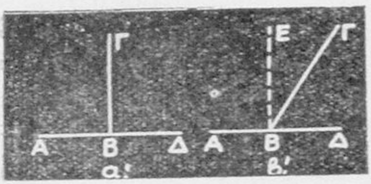
82) Ὁρίσατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας (ἢ τοῦ πίνακος) τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα νὰ μὴ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Γράψατε ἔπειτα τὴν κάθετον, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ καθὲν ἀπὸ τὰ σημεῖα ταῦτα ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν ὁρίζουσι τὰ ἄλλα δύο σημεῖα.

83) Διαθέσατε δύο ξυλάρια καθέτως πρὸς ἄλληλα καὶ ἔπειτα πλαγίως πρὸς ἄλληλα.

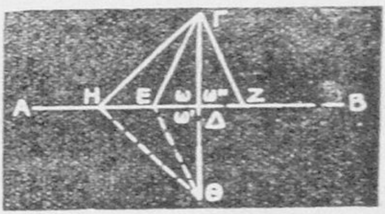
84) Γράψατε ἐπὶ τοῦ πίνακος εὐθεῖαν καὶ διαθέσατε ξυλάριον, οὕτως ὥστε νὰ μὴ κεῖται ἐν τῷ πίνακι καὶ νὰ εἶναι κάθετον ἢ πλάγιον πρὸς τὴν γραφεῖσαν εὐθεῖαν.

85) Ὀνομάσατε κεφαλαῖα γράμματα, τῶν ὁποίων τὸ σχῆμα περιέχει καθέτους εὐθείας καὶ ἄλλα, τῶν ὁποίων τὸ σχῆμα περιέχει πλαγίας εὐθείας.

§ 23. Ἰδιότητες τῶν καθέτων εὐθειῶν. Α΄. Ἔστω εὐθεῖα ΑΔ καὶ σημεῖον αὐτῆς Β ἢ ἄλλο Ε ἐκτὸς αὐτῆς κείμενον (Σχ. 20). Ἐὰν ἐργασθῶμεν, ὅπως προηγουμένως εἴπομεν, γράφομεν εὐθεῖαν ΒΓ (ἢ ΕΒ) κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΔ. Ἐὰν προσπαθήσωμεν νὰ



Σχ. 20.



Σχ. 21.

γράψωμεν καὶ ἄλλην κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΔ καὶ νὰ περνᾷ ἀπὸ τὸ Β (ἢ Ε), παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη συμπίπτει μετὰ τὴν α΄.

Ἄρα : ***Ἀπὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ εὐθείας ἢ ἐκτὸς αὐτῆς, ἄγεται μία μόνον κάθετος ἐπ' αὐτήν.***

Τὰ κοινὰ σημεῖα εὐθείας ΑΔ μὲ τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι φέρονται πρὸς αὐτήν, λέγονται **πόδες** αὐτῶν. Οὕτω τὸ Β (Σχ. 20 β΄) εἶναι ποὺς τῆς καθέτου ΕΒ καὶ τῆς πλαγίας ΒΓ.

Β΄. Ἔστω εὐθεῖα ΑΒ καὶ σημεῖον Γ ἐκτὸς αὐτῆς (Σχ. 21). Ἂς γράψωμεν δὲ τὴν κάθετον ΓΔ καὶ τυχούσης εὐθείας ΓΕ, ΓΖ, ΓΗ πλαγίας πρὸς τὴν ΑΒ. Ἐὰν συγκρίνωμεν διὰ τοῦ διαβήτου τὰ εὐθ. τμήματα, ΓΔ, ΓΕ, ΓΖ, ΓΗ, βλέπομεν ὅτι ΓΔ < ΓΕ, ΓΔ < ΓΖ, ΓΔ < ΓΗ.

Ἄρα: ***Ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται πρὸς εὐθεῖαν ἀπὸ σημεῖον κείμενον ἐκτὸς αὐτῆς, εἶναι μικροτέρα ἀπὸ πᾶσαν πλαγίαν, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ καταλήγει εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.***

Τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ σημεῖον κείμενον ἐκτὸς εὐθείας καὶ ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου τούτου πρὸς τὴν εὐθεῖαν, καλεῖται ἀπόστασις τοῦ σημείου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν.

Οὕτω τὸ εὐθ. τμῆμα ΓΔ (Σχ. 21) εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Γ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

Γ΄. Ἐὰν ὁρίσωμεν ἐπὶ τῆς ΑΒ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ οὕτως ὥστε νὰ εἶναι ΔΕ=ΔΖ, βεβαιούμεθα διὰ τοῦ διαβήτου ὅτι ΓΕ=ΓΖ.

Ἄρα: ***Ἐὰν οἱ πόδες δύο πλαγίων ἀπέχωσιν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, αἱ πλάγιαι αὗται εἶναι ἴσαι.***

Ἀπὸ τὴν ἰδιότητα ταύτην προκύπτει ἡ ἑξῆς ἰδιότης.

Δ΄. ***Ἐὰν εὐθεῖα τέμνῃ εὐθ. τμῆμα καθέτως καὶ εἰς τὸ μέσον, πᾶν σημεῖον αὐτῆς ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ εὐθυγράμμου τούτου τμήματος.***

Ε΄. Ἐὰν ὁρίσωμεν ἐπὶ τῆς ΑΒ (Σχ. 21) σημεῖον Η, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι ΔΗ > ΔΖ, βεβαιούμεθα εὐκόλως μὲ τὸν διαβήτην ὅτι ΓΗ > ΓΖ.

Ἄρα: ***Ἐὰν οἱ πόδες δύο πλαγίων ἀπέχωσιν ἄνισον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, αἱ πλάγιαι αὗται εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἐκείνη, τῆς ὁποίας ὁ ποὺς ἀπέχει περισσότερον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου.***

Ἀσκήσεις. 86) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας (ἢ τοῦ πίνακος) εὐθεῖαν καὶ δύο καθέτους πρὸς αὐτήν. Ἐξετάσατε, ἂν αἱ κάθετοι αὗται εἶναι παράλληλοι ἢ τέμνωνται.

87) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας (ἢ τοῦ πίνακος) εὐθεῖαν, ὁρίσατε ἐπ' αὐτῆς δύο ἴσα τμήματα ΔΑ, ΑΒ καὶ γράψατε τὴν ΑΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΒ.

Ὁρίσατε ἓν σημεῖον Ε ἐκτὸς τῆς ΑΓ καὶ συγκρίνατε τὰς ἀποστάσεις ΕΔ καὶ ΕΒ πρὸς ἀλλήλας.

88) Γράψατε τυχοῦσαν εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας (ἢ τοῦ πίνακος) καὶ ὁρίσατε ἐπ' αὐτοῦ σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν 0,03 μ.

89) Ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς γωνίας Α ὁρίσατε τμῆμα ΑΒ ἔχον μῆκος 0,04μ. Νὰ ὁρίσητε ἔπειτα ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς σημεῖον Γ τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι ΓΑ=ΓΒ.

90) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας (ἢ τοῦ πίνακος) εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ὁρίσατε σημεῖον Γ ἐκτὸς αὐτῆς. Γράψατε ἔπειτα ἐκ τοῦ Γ πρὸς τὴν ΑΒ δύο πλαγίας ἴσας. Ἔπειτα ἄλλην μικροτέραν ἀπὸ κάθε μίαν ἐξ αὐτῶν καὶ ἄλλην μεγαλυτέραν ἀπὸ ὅλας τὰς ἄλλας ταύτας.

91) Γράψατε δύο εὐθείας, αἱ ὁποῖαι νὰ τέμνωνται καθέτως εἴς τι σημεῖον Ο. Ὁρίσατε ἐπὶ τῆς μιᾶς τούτων δύο τμήματα ΟΑ, ΟΒ καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης ἄλλα δύο ΟΓ, ΟΔ ὅλα ἴσα πρὸς ἄλληλα. Γράψατε ἔπειτα τὰ εὐθ. τμήματα ΑΓ, ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ· συγκρίνατε ταῦτα πρὸς ἄλληλα, εὕρετε τὴν μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουσαν σχέσιν μεγέθους καὶ τὴν αἰτίαν τῆς σχέσεως ταύτης.

92) Γράψατε δύο εὐθείας καθέτως τεμνομένας εἴς τι σημεῖον Ο, ὁρίσατε ἐπὶ τῆς μιᾶς τμήματα ΟΑ, ΟΒ μήκους 0,03μ ἕκαστον καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης τμήματα ΟΓ, ΟΔ μήκους 0,04μ ἕκαστον. Μὲ ὅσον τὸ δυνατὸν ὀλιγωτέρας μετρήσεις νὰ εὕρητε τὸ μῆκος ἑκάστου τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΓ, ΓΒ, ΒΔ καὶ ΔΑ.

93) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν γωνίας Α ὁρίσατε τμήματα ΑΒ, ΑΓ ἴσα. Ἔπειτα γράψατε ἐκ τοῦ Β κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἐκ δὲ τοῦ Γ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ. Συγκρίνατε ἔπειτα τὰς ἀποστάσεις τῶν ποδῶν Β καὶ Γ ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν καθέτων τούτων.

94) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν γωνίας Α ὁρίσατε τμήματα ΑΒ, ΑΓ ἴσα καὶ χαράξατε ἐκ τῶν Β καὶ Γ καθέτους ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἐὰν Δ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν καθέτων τούτων, γράψατε τὴν εὐθεῖαν ΑΔ καὶ τὴν ΒΓ καὶ καθορίσατε τῇ βοηθείᾳ τοῦ καταλλήλου γεωμετρικοῦ ὀργάνου ἂν αὗται εἶναι κάθετοι ἢ πλάγιαι ὡς καὶ τὴν θέσιν τοῦ κοινοῦ σημείου Ε αὐτῶν ἐπὶ τοῦ εὐθ. τμήματος ΒΓ.

95) Κατασκευάσατε τυχοῦσαν γωνίαν Α, ὁρίσατε ἐντὸς αὐτῆς σημεῖον Ο καὶ φέρετε ἐξ αὐτοῦ καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας. Παρατηρήσατε, ἂν αὗται συμπίπτωσιν ἢ οὒ καὶ ἀνεύρετε τὸν λόγον διὰ τὸν ὁποῖον συμβαίνει τοῦτο.

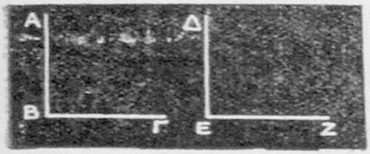
96) Γράψατε δύο εὐθείας, αἱ ὁποῖαι τέμνονται καθέτως εἴς τι σημεῖον Ο καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς τούτων ὁρίσατε τμήματα ΟΑ, ΟΒ ἴσα πρὸς ἄλληλα. Νὰ εὕρητε σημεῖα τοιαῦτα ὥστε καθ' ἓν νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἀπὸ τὴν ΑΒ νὰ ἀπέχῃ 0,03μ.

Εἴδη γωνιῶν.

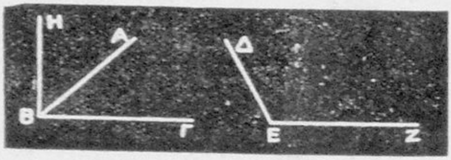
§ **24. Α'. Ὀρθαὶ γωνίαι.**—Ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρὰς τοῦ γνώμονος, λέγεται ***ὀρθὴ γωνία***. Ὁμοίως ἑκάστη ἀπὸ τὰς γωνίας Β καὶ Ε (Σχ. 22), τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας, εἶναι ὀρθὴ γωνία

Γενικῶς: ***Ὀρθὴ γωνία καλεῖται πᾶσα γωνία, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.***

Ἐὰν τὴν τυχοῦσαν ὀρθὴν γωνίαν Ε (Σχ. 22) θέσωμεν ἐπὶ ἄλλης ὀρθῆς γωνίας Β, οὕτως ὥστε αἱ κορυφαὶ καὶ δύο πλευραὶ αὐτῶν νὰ συμπέσωσι, παρατηροῦμεν ὅτι καὶ αἱ ἄλλαι αὐτῶν πλευραὶ συμπί-



Σχ. 22.



Σχ. 23.

πτουσι. Διότι ἂν δὲν συνέπιπτον, θὰ διήρχοντο ἀπὸ ἓν σημεῖον δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, τὸ ὁποῖον εἶναι ψευδὲς (§ 23 Α΄).

Ἄρα: ***Ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι.***

Ἔχει λοιπὸν ἡ ὀρθὴ γωνία σταθερὸν μέγεθος· διὰ τοῦτο δὲ λαμβάνεται ὡς μονὰς πρὸς μέτρησιν τῶν γωνιῶν.

§ 25. Ὀξεῖαι καὶ ἀμβλεῖαι γωνίαι.—Ἡ γωνία ΑΒΓ (Σχ. 23) εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας, καλεῖται δὲ ***ὀξεῖα*** γωνία. Ἡ δὲ γωνία Ε εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς, καλεῖται δὲ ***ἀμβλεῖα*** γωνία.

Γενικῶς: ***Ὀξεῖα γωνία καλεῖται πᾶσα γωνία μικροτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας.***

Ἀμβλεῖα γωνία καλεῖται πᾶσα γωνία μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας.

Ἀσκήσεις. 97) Ὁρίσατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας ἓν σημεῖον καὶ κατασκευάσατε ὀρθὴν γωνίαν, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ κορυφὴν τὸ σημεῖον τοῦτο. Πόσας τοιαύτας γωνίας δύνασθε νὰ κατασκευάσητε;

98) Κατασκευάσατε ὀρθὴν γωνίαν, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ μίαν πλευρὰν εὐθ. τμῆμα ἐκ τῶν προτέρων γραφὲν καὶ κορυφὴν τὸ ἓν ἄκρον αὐτοῦ.

99) Γράψατε τυχέως δύο εὐθείας τεμνομένας καὶ ἐξελέγξατε μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ καταλλήλου γεωμετρικοῦ ὀργάνου τὸ εἶδος ἑκάστης τῶν ὑπ᾿ αὐτῶν σχηματιζομένων γωνιῶν.

100) Ὁρίσατε ἐντὸς ὀρθῆς γωνίας σημεῖον καὶ γράψατε ἐξ αὐτοῦ καθέτους πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτῆς. Καθορίσατε ἔπειτα τὸ εἶδος τῆς γωνίας τῶν εὐθειῶν τούτων.

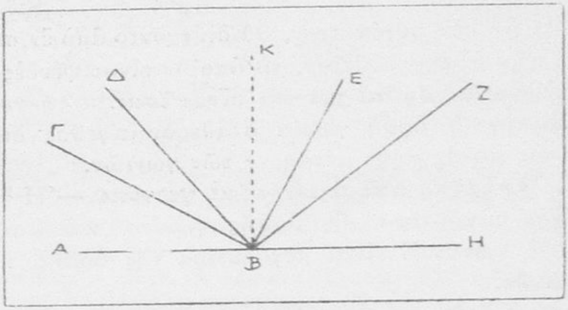
101) Κατασκευάσατε ὀξεῖαν γωνίαν, ὁρίσατε ἐντὸς αὐτῆς σημεῖον καὶ γράψατε ἐξ αὐτοῦ καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας. Καθορίσατε τὸ εἶδος τῆς γωνίας τῶν καθέτων τούτων.

102) Γράψατε δύο εὐθείας καθέτως τεμνομένας εἴς τι σημεῖον Ο. Ὁρίσατε ἐπὶ τῆς μιᾶς τμήματα ΟΑ, ΟΒ καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης ΟΓ, ΟΔ πάντα ἴσα. Γράψατε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ καὶ καθορίσατε τὸ εἶδος τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἀπὸ ταῦτα. Ἐπαναλάβατε τὸ αὐτὸ εἰς πλαγίας εὐθείας.

§ **26. Ἐφεξῆς καὶ διαδοχικαὶ γωνίαι.**— Αἱ γωνίαι ΓΒΑ,ΑΒΗ (Σχ. 23) ἔχουσι κορυφὴν κοινήν, τὴν πλευρὰν ΒΑ κοινήν, αἱ δὲ πλευραὶ ΒΓ, ΒΗ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ΒΑ. Λέγονται δὲ αὗται ***ἐφεξῆς*** γωνίαι.

Γενικῶς: ***Δύο γωνίαι λέγονται ἐφεξῆς, ἐὰν ἔχωσι κορυφὴν κοινὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, αἱ δὲ μὴ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς πλευρᾶς.***

Ἑκάστη ἀπὸ τὰς γωνίας ΑΒΓ,ΓΒΔ,ΔΒΕ (Σχ. 24) εἶναι ἐφεξῆς μὲ τὴν ἑπομένην. Λέγονται δὲ αὗται ***διαδοχικαὶ γωνίαι.***



Σχ. 24.

Γενικῶς: ***Γωνίαι τινὲς (περισσότεραι τῶν δύο) λέγονται διαδοχικαί, ἐὰν ἑκάστη μὲ τὴν ἑπομένην εἶναι ἐφεξῆς γωνίαι.***

103) Κατασκευάσατε δύο ἐφεξῆς γωνίας, αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχωσι κοινὴν πλευρὰν ὡρισμένην εὐθεῖαν.

104) Αἱ γωνίαι ΓΒΑ, ΓΒΗ (Σχ. 23) εἶναι ἐφεξῆς ἢ οὔ καὶ διατί;

105) Ἐκ τῆς κορυφῆς γωνίας γράψατε ἐντὸς αὐτῆς τρεῖς εὐθείας. Πῶς λέγονται πᾶσαι αἱ γωνίαι εἰς τὰς ὁποίας θὰ διαιρεθῇ ἡ πρώτη;

106) Γράψατε τυχοῦσαν εὐθεῖαν καὶ ὁρίσατε ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α. Κατασκευάσατε ἔπειτα τέσσαρας διαδοχικὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχωσι κορυφὴν τὸ σημεῖον Α καὶ δύο πλευραὶ αὐτῶν νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς γραφείσης εὐθείας.

107) Πόσα ζεύγη ἐφεξῆς γωνιῶν σχηματίζονται ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας;

§ **27. Ἄθροισμα γωνιῶν.**—Αἱ πλευραὶ ΒΓ, ΒΗ (Σχ. 23) τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν ΓΒΑ, ΑΒΗ σχηματίζουσι τὴν γωνίαν ΓΒΗ. Αὕτη ὀνομάζεται ***ἄθροισμα*** τῶν ΓΒΑ, ΑΒΗ ἤτοι

ΓΒΑ+ΑΒΓ=ΓΒΗ

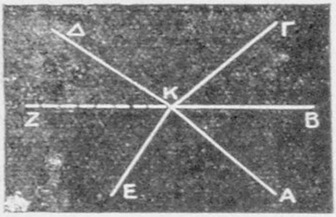
Γενικῶς : ***Ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς γωνιῶν καλεῖται ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζουσιν αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν.***

Κατὰ ταῦτα εἶναι (Σχ. 24) ΑΒΓ+ΓΒΔ=ΑΒΔ, ΑΒΔ+ΔΒΕ=ΑΒΕ, ΑΒΕ+ΕΒΖ=ΑΒΖ. Διὰ τοῦτο δεχόμεθα ὅτι

ΑΒΓ+ΓΒΔ+ΔΒΕ+ΕΒΖ=ΑΒΖ.

Γενικῶς : ***Ἄθροισμα διαδοχικῶν γωνιῶν καλεῖται ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς. Προσθέτομεν τὰς δύο πρώτας, εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν προσθέτομεν τὴν τρίτην καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις ὅτου προστεθῶσιν ὅλαι αἱ γωνίαι αὗται.***

§ 28. Ἀξιοσημείωτα ἀθροίσματα γωνιῶν. Σύμφωνα μὲ τὰ προηγούμενα πρέπει τὸ ἄθροισμα γωνιῶν νὰ εἶναι μία γωνία. Εἰς τὰς ἀκολούθους ὅμως περιπτώσεις τὸ ἄθροισμα γωνιῶν δὲν εἶναι μία γωνία.



Σχ. 25.

Α΄. Ἂς φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον Β εὐθείας ΑΗ (Σχ. 24) εὐθείας ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, ΒΖ ὅλας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΗ. Κατὰ τὰ προηγούμενα πρέπει $A\widehat{B}\Gamma + \Gamma\widehat{B}\Delta + \Delta\widehat{B}E$ $E\widehat{B}Z + Z\widehat{B}H$ νὰ εἶναι γωνία ἔχουσα πλευρὰς ΒΑ καὶ ΒΗ· τοιαύτη δὲ γωνία δὲν ὑπάρχει.

Ἂν ὅμως ἀχθῇ ἡ ΒΚ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΗ, εὐκόλως βλέπομεν

ὅτι $A\widehat{B}\Gamma + \Gamma\widehat{B}\Delta + \Delta\widehat{B}E + E\widehat{B}Z + Z\widehat{B}H = A\widehat{B}K + K\widehat{B}H =$ 2 ὀρθαί.

Ἄρα : ***Τὸ ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται, ὅταν ἀπὸ ἓν σημεῖον εὐθείας ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς κείμεναι, εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι.***

Β΄. Ἂς φέρωμεν ἀπὸ σημεῖον Κ (Σχ. 25) εὐθείας ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΕ καὶ ἂς προεκτείνωμεν τὴν ΚΒ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ Κ. Ἐπειδὴ $Z\widehat{K}\Delta + \Delta\widehat{K}\Gamma + \Gamma\widehat{K}B =$ 2 ὀρθ. καὶ $Z\widehat{K}E + E\widehat{K}A + A\widehat{K}B =$ 2 ὀρθ, ἕπεται ὅτι $A\widehat{K}B + B\widehat{K}\Gamma + \Gamma\widehat{K}\Delta + \Delta\widehat{K}E + E\widehat{K}A =$ 4 ὀρθαί.

Ἄρα: ***Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται, ὅταν ἀπὸ ἓν σημεῖον ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι, εἶναι τέσσαρες ὀρθαὶ γωνίαι.***

§ 29. Διαφορὰ δύο ἀνίσων γωνιῶν. — Ἂν ἀπὸ τὴν γωνίαν ΗΒΓ (Σχ. 23) ἀποκοπῇ ἡ γωνία ΗΒΑ, μένει ἡ ΑΒΓ. Αὕτη λέγεται διαφορὰ τῶν ΗΒΓ καὶ ΗΒΑ.

Γενικῶς: ***Διαφορὰ δύο ἀνίσων γωνιῶν λέγεται ἡ γωνία, ἡ ὁποία μένει, ἂν ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν ἀποκοπῇ γωνία ἴση μὲ τὴν μικροτέραν καὶ νὰ ἔχῃ μὲ τὴν μεγαλυτέραν μίαν πλευρὰν κοινήν.***

Ἀσκήσεις. 108) Ἐὰν ἡ γωνία ΑΒΓ (Σχ. 24) εἶναι $\frac{1}{3}$ ὀρθῆς, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς γωνίας ΓΒΚ;

109) Ἀπὸ τὴν κορυφὴν ὀρθῆς γωνίας καὶ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς ἄγεται εὐθεῖα, ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ τὴν μίαν πλευρὰν αὐτῆς γωνίαν ἴσην πρὸς $\frac{4}{7}$ ὀρθῆς. Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν ἡ αὐτὴ εὐθεῖα σχηματίζει μὲ τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς ὀρθῆς;

110) Ἀπὸ ἓν σημεῖον εὐθείας ***ἤχθησαν*** πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς δύο εὐθεῖαι. Ἐὰν ἡ μία ἀπὸ τὰς σχηματισθείσας γωνίας εἶναι $\frac{1}{4}$ ὀρθῆς, αἱ δὲ ἄλλαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τούτων;

111) Ἐὰν ἀχθῶσιν ἀπὸ ἓν σημεῖον τρεῖς εὐθεῖαι, σχηματίζονται τρεῖς γωνίαι. Ἐὰν αὗται εἶναι ὅλαι ἴσαι, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης;

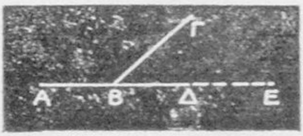
112) Ἀπὸ ἓν σημεῖον εὐθείας ἄγεται πρὸς ἓν μέρος αὐτῆς ἄλλη εὐθεῖα. Ἐὰν ἡ μία ἀπὸ τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης;

113) Κατασκευάσατε ὀξεῖαν γωνίαν καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῆς ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας.

114) Κατασκευάσατε ἀμβλεῖαν γωνίαν καὶ τὴν διαφορὰν τῆς ὀρθῆς ἀπὸ ταύτης.

115) Τὸ ἄθροισμα τριῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι $1\frac{1}{8}$ ὀρθῆς. Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης;

§ 30. Συμπληρωματικαὶ καὶ παραπληρωματικαὶ γωνίαι. Αἱ γωνίαι ΗΒΑ, ΑΒΓ (Σχ. 23) ἔχουσιν ἄθροισμα τὴν ὀρθὴν ΗΒΓ. λέγονται δὲ αὗται ***συμπληρωματικαὶ γωνίαι.*** Αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΓΒΔ (Σχ. 26) ἔχουσιν ἄθροισμα 2 ὀρθὰς γωνίας· λέγονται δὲ αὗται παραπληρωματικαὶ γωνίαι.



Σχ. 26.

Γενικῶς: ***Δύο γωνίαι λέγονται συμπληρωματικαὶ μέν, ἂν ἔχωσιν ἄθροισμα μίαν ὀρθήν, παραπληρωματικαὶ δέ, ἂν ἔχωσιν ἄθροισμα δύο ὀρθὰς γωνίας.***

Ἀσκήσεις. 116) Κατασκευάσατε μίαν ὀξεῖαν γωνίαν καὶ ἔπειτα τὴν συμπληρωματικὴν αὐτῆς.

117) Ἐὰν μία γωνία εἶναι $\frac{2}{5}$ ὀρθῆς, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς συμπληρωματικῆς της;

118) Κατασκευάσατε τυχοῦσαν γωνίαν καὶ ἔπειτα τὴν παραπληρωματικήν της.

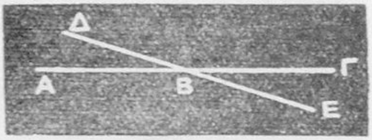
119) Ἐὰν μία γωνία εἶναι $1\frac{1}{3}$ ὀρθῆς, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς παραπληρωματικῆς της;

120) Τί εἴδους γωνία εἶναι ἡ παραπληρωματικὴ ὀξείας ἢ ἀμβλείας ἢ ὀρθῆς γωνίας;

121) Ἀπὸ τὴν κορυφὴν ὀρθῆς γωνίας ἄγομεν ἐντὸς αὐτῆς μίαν εὐθεῖαν. Ἐὰν αὕτη σχηματίζῃ μὲ τὴν μίαν πλευρὰν γωνίαν ἴσην πρὸς $\frac{3}{4}$ ὀρθῆς, πόσην γωνίαν θὰ σχηματίζῃ ἡ προέκτασις αὐτῆς μὲ κάθε μίαν πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας;

122) Ἐὰν ἡ μία τῶν παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι τριπλασία τῆς ἄλλης, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης;

§ 31. Κατὰ κορυφὴν γωνίαι. Αἱ γωνίαι ΑΒΔ, ΓΒΕ (Σχ. 27) ἔχουσι κορυφὴν κοινήν, αἱ δὲ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης. Λέγονται δὲ αὗται ***κατὰ κορυφὴν*** γωνίαι.



Σχ. 27.

Γενικῶς: ***Δύο γωνίαι λέγονται κατὰ κορυφήν, ἐὰν ἔχωσι κορυφὴν κοινήν, αἱ δὲ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.***

Ἐὰν ἐπιθέσωμεν καταλλήλως τὴν γωνίαν ΑΒΔ ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφήν της ΓΒΕ, παρατηροῦμεν ὅτι ἐφαρμόζουσιν.

Ἄρα: ***Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.***

Ἀσκήσεις. 123) Κατασκευάσατε τυχοῦσαν γωνίαν καὶ ἔπειτα ἄλλην ἴσην μὲ αὐτὴν καὶ νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν κορυφήν.

124) Πόσα ζεύγη κατὰ κορυφὴν γωνιῶν σχηματίζονται ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας;

125) Εἶναι δυνατὸν μία τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν νὰ εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ ἄλλη ἀμβλεῖα; Καὶ διατί;

126) Ἐὰν ἀπὸ τὰς τέσσαρας γωνίας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν, μία εἶναι $\frac{3}{4}$ ὀρθῆς, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης τῶν ἄλλων;

127) Ἐὰν μία ἀπὸ τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἀπὸ δύο τεμνο-

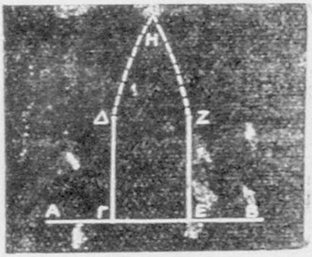
μένας εὐθείας εἶναι ὀρθή, αἱ εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἢ πλάγιαι καὶ διατί;

128) Νοήσατε τὴν γωνίαν ΓΒΕ (Σχ. 27) στρεφομένην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς περὶ τὴν κορυφήν της, ὅπως στρέφονται οἱ δεῖκται ὡρολογίου καὶ μέχρις οὗ μία πλευρὰ αὐτῆς ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της. Ποίαν θέσιν θὰ καταλάβῃ τότε ἡ ἄλλη πλευρὰ αὐτῆς καὶ διατί;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

§ **32. Ὁρισμὸς παραλλήλων εὐθειῶν.— Εὐκλείδειον αἴτημα.** Ἐμάθομεν ὅτι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἑκάστης ἕδρας κύβου δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν προεκταθῶσι. Λέγονται δὲ αὗται διὰ τοῦτο ***παράλληλοι*** εὐθεῖαι. Καὶ αἱ κάθετοι ΔΓ, ΖΕ ἐπὶ τὴν ΑΒ (Σχ. 28) εἶναι παράλληλοι. Τῷ ὄντι· αὗται κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ δὲν τέμνονται, ὅσον καὶ ἂν προεκταθῶσι. Διότι, ἂν ἐτέμνοντο, ἀπὸ τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον Η θὰ ἤγοντο δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ. Τοῦτο δὲ εἶναι ψευδές.



Σχ. 28.

Γενικῶς: ***Δύο εὐθεῖαι λέγονται παράλληλοι, ἐὰν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν προεκταθῶσιν.***

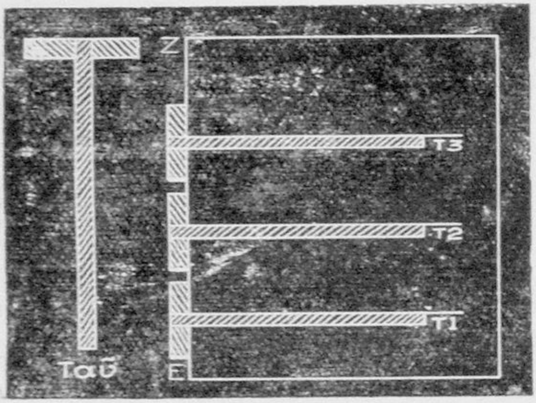
Ἐὰν ἡ ΕΖ (Σχ. 28) στραφῇ κατ' ἐλάχιστον περὶ τὸ Ε, παύει νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἐκ τῶν διὰ τοῦ Ε διερχομένων εὐθειῶν μία μόνον, ἡ ΕΖ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ. Τοῦτο ἐκφράζομεν διὰ τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

Διὰ παντὸς σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας, μία μόνον εὐθεῖα παράλληλος πρὸς αὐτὴν διέρχεται.

Ἡ πρότασις αὕτη ὀφείλεται εἰς τὸν Ἕλληνα μαθηματικὸν Εὐκλείδην (320 π. Χ.) καὶ καλεῖται ***Εὐκλείδειον αἴτημα***.

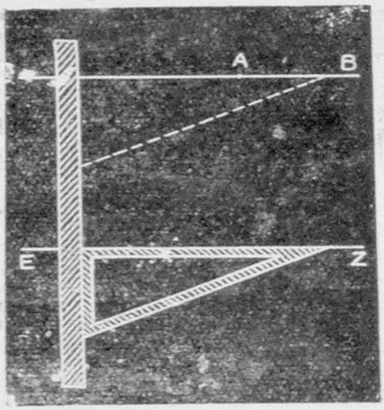
§ **33. Ταῦ.** Τὸ ὄργανον Ταῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἀνίσους κανόνας ξυλίνους ἢ μεταλλικούς. Τὸ ἓν ἄκρον τοῦ μεγαλυτέρου κανόνος στερεοῦται εἰς τὸ μέσον τοῦ μικροτέρου καὶ οὕτως ὥστε οἱ δύο κανόνες εἶναι κάθετοι. Ὁ μικρότερος κανὼν λέγεται ***κεφαλή***, ὁ δὲ μεγαλύτερος λέγεται ***βραχίων*** τοῦ Ταῦ.

§ **34. Χάραξις παραλλήλων εὐθειῶν.** α΄) Ἐπὶ τοῦ πίνακος, τραπέζης, ἰχνογραφικῆς σανίδος κτλ. χαράσσομεν παραλλήλους εὐθείας ὡς ἀκολούθως. Τοποθετοῦμεν ἐπὶ τοῦ πίνακος (τρα-



Σχ. 29.

πέζης κτλ.) τὸ Ταῦ εἰς θέσιν τινὰ T_1 (Σχ. 29) καὶ σύρομεν τὴν γραφίδα κατὰ μῆκος τῆς μιᾶς ἢ καὶ τῶν δύο ἐπιμηκεστέρων πλευρῶν τοῦ βραχίονος αὐτοῦ. Ὠθοῦμεν ἔπειτα τὸ ταῦ κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΕΖ τοῦ πίνακος καὶ φέρομεν αὐτὸ εἰς διαφόρους θέσεις T_2, T_3 κτλ. Εἰς ἑκάστην δὲ ἀπὸ τὰς θέσεις ταύτας σύρομεν τὴν γραφίδα, ὡς καὶ προηγουμένως. Ὅλαι αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι χαράσσονται τοιουτοτρόπως εἶναι παράλληλοι. (Διατί;).



Σχ. 30.

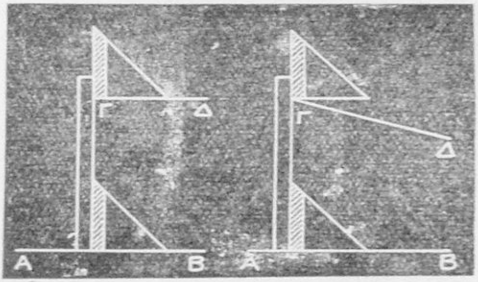
Δι' ὡρισμένου σημείου Γ ἄγεται παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΕΖ κατὰ μίαν τῶν ἀκολούθων μεθόδων.

β') Ἄγομεν τὴν ΓΕ (Σχ. 28) κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΖ καὶ τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΕ. Ἡ ΓΔ εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ. (Διατί;)

γ΄) Ἐφαρμόζομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΖ τὴν μεγαλυτέραν συνήθως ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρὰς τοῦ γνώμονος· κατὰ μῆκος δὲ τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς αὐτοῦ ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα προσέχοντες, ὅπως ὁ γνώμων καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον Α κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κανόνος (Σχ. 30). Τηροῦμεν ἔπειτα ἀκίνητον τὸν κανόνα καὶ μετακινοῦμεν κατὰ μῆκος αὐτοῦ τὸν γνώμονα, μέχρις οὗ ἡ ἑτέρα κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ διέλθῃ διὰ τοῦ Α. Σύρομεν τέλος τὴν γραφίδα κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς ταύτης τοῦ γνώμονος καὶ γράφομεν τὴν ζητουμένην εὐθεῖαν. (Διατί ;)

§ 35. Ἔλεγχος τῆς παραλληλίας δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.

Ἔστωσαν ΑΒ, ΓΔ (Σχ. 31) εὐθεῖαι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐφαρμόζομεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῶν τὸν γνώμονα καὶ οὕτως ὥστε ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ νὰ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ. Τοποθετοῦμεν ἔπειτα τὸν κανόνα κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς τοῦ γνώμονος καὶ κρατοῦντες αὐτὸν ἀκίνητον μετακινοῦμεν κατὰ μῆκος αὐτοῦ τὸν γνώμονα, μέχρις οὗ ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ ἔλθῃ ἐπὶ τῆς ΓΔ. Ἐὰν εἰς τὴν θέσιν ταύτην ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς ΓΔ ἡ ἐπὶ τὸν κανόνα κάθετος πλευρὰ τοῦ γνώμονος, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι· ἄλλως αὗται δὲν εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 31.

Ἀσκήσεις. 129) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας δύο σειρὰς παραλλήλων εὐθειῶν καὶ αἱ εὐθεῖαι τῆς μιᾶς σειρᾶς νὰ τέμνωσι τὰς εὐθείας τῆς ἄλλης σειρᾶς.

130) Ὁρίσατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα νὰ μὴ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Γράψατε ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία περνᾷ ἀπὸ τὸ καθ' ἓν ἀπὸ αὐτὰ καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν τὰ ἄλλα ὁρίζουσιν.

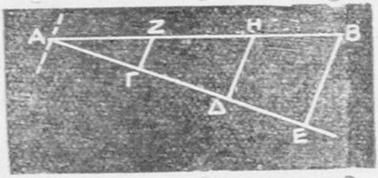
131) Γράψατε δύο εὐθείας παραλλήλους πρὸς τρίτην εὐθεῖαν καὶ ἐξελέγξατε τὴν παραλληλίαν τῶν εὐθειῶν ἐκείνων. Νὰ εὕρητε δὲ καὶ τὸν λόγον, διὰ τὸν ὁποῖον αὗται εἶναι ἢ οὐ παράλληλοι.

132) Γράψατε δύο εὐθείας παραλλήλους καὶ τυχοῦσαν τρίτην εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν μίαν ἀπὸ αὐτάς. Ἐξελέγξατε ἔπειτα τὴν παραλληλίαν

ἢ μὴ τῆς τρίτης ταύτης καὶ τῆς ἄλλης τῶν παραλλήλων εὐθειῶν καὶ εὕρετε τὸν λόγον ταύτης.

133) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας (ἢ τοῦ πίνακος) τυχοῦσαν εὐθεῖαν καὶ ὁρίσατε ἐπ' αὐτῆς δύο σημεῖα Α καὶ Β. Γράψατε ἔπειτα δι' αὐτῶν δύο εὐθείας παραλλήλους καὶ ὁρίσατε ἐπ' αὐτῶν τμήματα ΑΓ, ΒΔ ἴσα καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ Γράψατε τὴν εὐθεῖαν ΓΔ ἐξελέγξατε τὴν παραλληλίαν ἢ μὴ ταύτης πρὸς τὴν ΑΒ.

§ 36. Πρόβλημα. ***Νὰ διαιρεθῇ τὸ δοθὲν τμῆμα ΑΒ εἰς 3 ἴσα μέρη.***



Σχ. 32.

Λύσις. Ἄγομεν εὐθεῖαν ΑΕ, ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ τὴν ΑΒ γωνίαν. Λαμβάνομεν ἔπειτα ἐπ' αὐτῆς τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ ἴσα πρὸς ἄλληλα καὶ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΒ. Τέλος ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ, Δ, ἄγομεν τὰς εὐθείας ΓΖ, ΔΗ παραλλήλους πρὸς τὴν ΕΒ. Ἐὰν συγκρίνωμεν τὰ εὐθ. τμήματα ΑΖ, ΖΗ, ΗΒ, βλέπομεν ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ἀσκήσεις. 134) Γράψατε τὴν ἀπόστασιν δοθέντος σημείου Α ἀπὸ δοθείσης εὐθείας ΒΓ. Διαιρέσατε τὴν ἀπόστασιν ταύτην εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως γράψατε παραλλήλους πρὸς τὴν ΒΓ. Συγκρίνατε δὲ πρὸς ἄλληλα τὰ μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ παράλληλοι αὗται διαιροῦσι τὴν ἀπόστασιν τοῦ Α ἀπὸ τυχόντος σημείου τῆς ΒΓ.

135) Ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς γωνίας Α ὁρίσατε τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ πάντα ἴσα· ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης ὁρίσατε τμῆμα ΑΗ μήκους 0,35 μ. καὶ γράψατε τὴν εὐθεῖαν ΖΗ. Γράψατε ἔπειτα ἐκ τῶν Β, Γ, Δ, Ε, παραλλήλους πρὸς τὴν ΖΗ καὶ ὁρίσατε ἄνευ μετρήσεως τὸ μῆκος ἑκάστου τῶν τμημάτων εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τὸ ΑΗ.

§ 37. Παράλληλος μετάθεσις. Ὅταν χαράσσωμεν παραλλήλους εὐθείας μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνώμονος (§ 34 γ'), δίδομεν εἰς αὐτὸν κίνησιν, καθ' ἣν παρατηροῦμεν ὅτι:

α') Ἓν μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ γνώμονος ὀλισθαίνει διαρκῶς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ χαράσσομεν τὰς παραλλήλους εὐθείας.

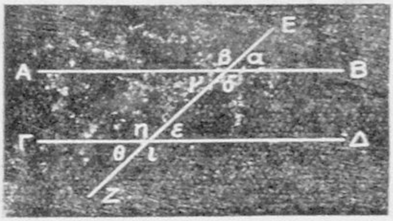
β') Ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ μέρους τούτου τοῦ γνώμονος ἡ μία ὀλισθαίνει ἐπὶ τῆς ἀκινήτου εὐθείας τοῦ κανόνος, μὲ τὴν ὁποίαν συμπίπτει, ἡ δὲ ΕΖ (Σχ. 30) μένει πάντοτε παράλληλος πρὸς τὸν ἑαυτόν της.

γ') Εἶναι εὔκολον νὰ βεβαιωθῶμεν ὅτι καὶ ἡ τρίτη πλευρά, ὅπως καὶ πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα τῆς ὀλισθαινούσης ἐπιφανείας, μένει παράλληλος πρὸς τὸν ἑαυτόν της. Ἡ κίνησις αὕτη τοῦ γνώμονος καλεῖται **παράλληλος μετάθεσις**.

Ἡ εὐθεῖα τοῦ κανόνος, ἐπὶ τῆς ὁποίας ὀλισθαίνει ἡ μία πλευρὰ τῆς κινουμένης ἐπιφανείας καλεῖται **ὁδηγός**.

Ὁμοίως ἡ κίνησις, εἰς τὴν ὁποίαν ὑποβάλλομεν τὸ Ταῦ (Σχ. 29), ὅταν θέλωμεν νὰ γράψωμεν εὐθείας παραλλήλους, εἶναι παράλληλος μετάθεσις αὐτοῦ μὲ ὁδηγὸν τὴν πλευρὰν ΕΖ, κατὰ μῆκος τῆς ὁποίας ὀλισθαίνει ἡ κεφαλὴ τούτου.

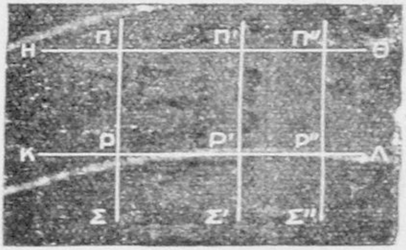
§ 38. Ἰδιότητες τῶν παραλλήλων εὐθειῶν. Ἔστωσαν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται πλαγίως ὑπὸ τῆς ΕΖ (Σχ. 33).



Σχ. 33.

Ἀπὸ τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται τοιουτοτρόπως αἱ μὲν α, γ, ε, θ εἶναι ὀξεῖαι, αἱ δὲ ἄλλαι β, δ, η, ι εἶναι ἀμβλεῖαι.

Ἐὰν ὑποβάλωμεν εἰς παράλληλον μετάθεσιν μὲ ὁδηγὸν ΕΖ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ε καθὼς καὶ τὴν ἀμβλεῖαν η, βλέπομεν ὅτι ἡ μὲν ε ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς α, ἡ δὲ η ἐπὶ τῆς β. Εἶναι ἄρα ε=α καὶ η=β. Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ ε=α καὶ τῶν α=γ, ε=θ, συμπεραίνομεν ὅτι α=γ=ε=θ. Ἐκ δὲ τῶν η=β, β=δ, η=ι, συμπεραίνομεν ὅτι β=δ=η=ι.



Σχ. 34.

Ἄρα: ***Α΄. Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τμηθῶσι πλαγίως ὑπὸ τρίτης, πᾶσαι αἱ σχηματιζόμεναι ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ αἱ ἀμβλεῖαι ἐπίσης εἶναι πᾶσαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.***

Β΄. Ἐπειδὴ η+ε=2 ὀρθαὶ (§ 28 Α΄) καὶ η=δ, ἕπεται ὅτι δ+ε=2 ὀρθαί.

Ἄρα: ***Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τμηθῶσιν ὑπὸ τρίτης***

πλαγίως, μία ἀπὸ τὰς ὀξείας γωνίας αὐτῶν καὶ μία ἀπὸ τὰς ἀμβλείας εἶναι παραπληρωματικαί.

Γ') Ἔστωσαν ΗΘ, ΚΛ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ ΣΡ (Σχ. 34) κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΛ. Ἐὰν τὴν ὀρθὴν γωνίαν Ρ ὑποβάλλωμεν εἰς παράλληλον μετάθεσιν, βλέπομεν, ὅτι ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς Π.

Ἄρα: ***Πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ μίαν τῶν παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.***

§ 39. Ἀπόστασις δύο παραλλήλων εὐθειῶν.

Ἔστωσαν ΗΘ, ΚΛ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ Σ, Σ', Σ'', κάθετοι ἐπ' αὐτάς. Ἐὰν συγκρίνωμεν τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων τμήματα ΠΡ, Π'Ρ', Π''Ρ'' τῶν καθέτων τούτων, βλέπομεν ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα.

Ἕκαστον δὲ τούτων καλεῖται ***ἀπόστασις*** τῶν εὐθειῶν ΗΘ, ΚΛ.

Γενικῶς: ***Ἀπόστασις δύο παραλλήλων εὐθειῶν καλεῖται τὸ τμῆμα τυχούσης κοινῆς καθέτου αὐτῶν, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν παραλλήλων τούτων εὐθειῶν.***

Ἀσκήσεις. 136) Ἐκ τῶν ἄκρων εὐθ. τμήματος ΑΒ γράψατε εὐθείας ΑΓ καὶ ΒΔ παραλλήλους. Γράψατε εἶτα τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΔ καὶ καθορίσατε τὴν σχέσιν μεγέθους, τὴν ὁποίαν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας αἱ γωνίαι ΒΔΑ καὶ ΔΑΓ.

137) Ἐὰν ἡ γωνία ΑΒΔ τοῦ προηγουμένου ζητήματος εἶναι $\frac{4}{5}$ ὀρθῆς, πόσον θὰ εἶναι τὸ μέγεθος τῆς ΒΑΓ;

138) Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τέμνονται ὑπὸ τρίτης οὕτως ὥστε μία τῶν γωνιῶν αὐτῶν εἶναι $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς. Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης τῶν ἄλλων;

139) Γράψατε εὐθεῖαν καὶ παράλληλον πρὸς αὐτήν, ἡ ὁποία νὰ ἀπέχῃ 0,03 μ. ἀπὸ αὐτήν. Πόσας τοιαύτας εὐθείας δύνασθε νὰ γράψητε;

140) Γράψατε δύο εὐθείας παραλλήλους καὶ ἄλλην παράλληλον πρὸς αὐτὰς καὶ νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ αὐτάς.

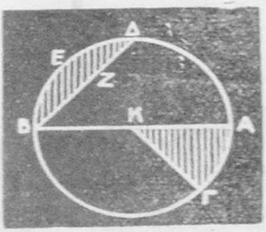
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΚΥΚΛΟΣ.

§ 40. Κύκλος καὶ στοιχεῖα αὐτοῦ. Κατὰ τὴν ἐξέτασιν τοῦ κυλίνδρου παρετηρήσαμεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἔχει καὶ δύο ἐπίπεδα μέρη, τὰ ὁποῖα ἐκαλέσαμεν κύκλους. Ἕκαστος κύκλος εἴδομεν ὅτι περικλείεται ἀπὸ μίαν γραμμήν, τὴν ὁποίαν ὠνομάσαμεν περιφέρειαν αὐτοῦ. Περιφέρειαν κύκλου γράφομεν ἐπὶ τοῦ πίνακος ὡς ἑξῆς. Δένομεν εἰς τὸ ἄκρον τοῦ νήματος τεμάχιον κιμωλίας καὶ στερεοῦμεν τὸ ἄλλο ἄκρον αὐτοῦ εἰς ὡρισμένον σημεῖον Κ τοῦ πίνακος. Ἔπειτα κρατοῦντες διὰ τῆς χειρός μας τὴν κιμωλίαν περιστρέφομεν τεντωμένον τὸ νῆμα περὶ τὸ Κ, προσέχοντες νὰ μὴ ἐξέλθῃ τὸ νῆμα ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τοῦ πίνακος. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ κιμωλία θὰ γράψῃ περιφέρειαν κύκλου.

Συνηθέστερον γράφομεν περιφέρειαν κύκλου ὡς ἑξῆς.

Στερεώνομεν τὰ δύο σκέλη διαβήτου, οὕτως ὥστε νὰ μὴ μεταβάλληται ἡ ἀπόστασις τῶν αἰχμῶν αὐτῶν. Στηρίζομεν δὲ ἔπειτα τὴν αἰχμὴν τοῦ ἑνὸς σκέλους εἰς σημεῖον Κ ἐπιπέδου τινὸς (π. χ. τοῦ πίνακος ἢ φύλλου χάρτου) καὶ στρέφομεν τὸν διαβήτην περὶ τὸ Κ, οὕτως ὥστε ἡ γραφίς, τὴν ὁποίαν φέρει τὸ ἄλλο σκέλος, νὰ ἐγγίζῃ πάντοτε τὸ ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ κεῖται τὸ Κ. Οὕτως αὕτη γράφει περιφέρειαν ΑΔΒΓ (Σχ. 35).



Σχ. 35.

Ταύτης ἕκαστον σημεῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ Κ ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν αἰχμῶν τοῦ διαβήτου.

Τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τὴν περιφέρειαν ΑΔΒΓ εἶναι κύκλος. Τὸ σημεῖον Κ καλεῖται ***κέντρον*** τοῦ κύκλου τούτου.

Γενικῶς. ***Κύκλος καλεῖται μέρος ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς, εἰς τὴν ὁποίαν τοῦτο περατοῦται.***

Περιφέρεια κύκλου καλεῖται ἡ γραμμή, εἰς τὴν ὁποίαν οὗτος περατοῦται.

Κέντρον κύκλου καλεῖται τὸ σημεῖον αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας αὐτοῦ.

Ἀκτὶς κύκλου καλεῖται πᾶν εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἀρχίζει ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ καταλήγει εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ. Π. χ. τὰ εὐθ. τμήματα ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ (Σχ. 35) εἶναι ἀκτῖνες τοῦ κύκλου Κ.

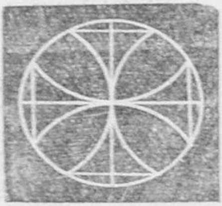
Διάμετρος κύκλου καλεῖται πᾶν εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ περατοῦται ἑκατέρωθεν εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ. Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ π. χ. εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Κ.

Ἀσκήσεις. 141) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας περιφέρειαν κύκλου ἀκτῖνος 0,03μ καὶ ἐπὶ τοῦ πίνακος ἄλλην περιφέρειαν ἀκτῖνος 0,2μ.

142) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας περιφέρειαν 0,04μ καὶ δύο διαμέτρους καθέτους πρὸς ἀλλήλας.

143) Γράψατε δύο ὁμοκέντρους περιφερείας μὲ ἀκτῖνας 0,06μ. καὶ 0,03μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τμήματος ἀκτῖνος τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν περιφερειῶν τούτων;

144) Γράψατε περιφέρειαν κύκλου, ὁρίσατε ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ σημεῖον ἐντὸς τοῦ κύκλου, ἄλλο ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ τρίτον ἐκτὸς τοῦ κύκλου. Συγκρίνατε ἔπειτα τὴν ἀπόστασιν ἑκάστου ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν ἀκτῖνα.



Σχ. 36.

145) Ἰχνογραφήσατε τὸ σχῆμα (36).

§ 41. Μέρη περιφερείας καὶ κύκλου. Ἡ γραμμὴ ΔΕΒ (Σχ. 35) εἶναι μέρος τῆς περιφερείας Κ. Καλεῖται δὲ αὕτη *τόξον*.

Γενικῶς: ***Τόξον καλεῖται τυχὸν μέρος περιφερείας.*** Τὸ εὐθ. τμῆμα ΔΖΒ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τόξου ΔΕΒ· λέγεται δὲ χορδὴ τοῦ τόξου ΔΕΒ.

Γενικῶς: ***Χορδὴ τόξου καλεῖται τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζουσι τὰ ἄκρα τοῦ τόξου τούτου.***

Ἄξιον παρατηρήσεως εἶναι ὅτι ἕκαστον τόξον ἔχει μίαν χορδὴν (§ 14), ἐν ᾧ εἰς ἑκάστην χορδὴν ἀντιστοιχοῦσι δύο τόξα.

Τὸ μέρος ΔΕΒΖΔ τοῦ κύκλου Κ περικλείεται ἀπὸ τὸ τόξον ΒΕΔ καὶ ἀπὸ τὴν χορδὴν αὐτοῦ. Καλεῖται δὲ τοῦτο ***τμῆμα κύκλου***.

Γενικῶς: ***Τμῆμα κύκλου καλεῖται πᾶν μέρος αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ ἓν τόξον καὶ ἀπὸ τὴν χορδὴν αὐτοῦ.***

Τὸ μέρος ΑΚΓ (Σχ. 35) τοῦ κύκλου Κ περιέχεται μεταξὺ τοῦ τόξου ΑΓ καὶ τῶν ἀκτίνων ΚΑ καὶ ΚΓ. Καλεῖται δὲ τοῦτο ***κυκλικὸς τομεύς***.

Γενικῶς: ***Κυκλικὸς τομεὺς καλεῖται πᾶν μέρος κύκλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ ἑνὸς τόξου καὶ τῶν ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι καταλήγουσιν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ.***

Τὸ τόξον κυκλικοῦ τομέως λέγεται ***βάσις*** αὐτοῦ. Ἡ δὲ γωνία τῶν ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι καταλήγουσιν εἰς τὰ ἄκρα τῆς βάσεως λέγεται ***γωνία τοῦ τομέως***.

Ἀσκήσεις. 146) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα 0,02μ. καὶ χαράξατε δύο διαμέτρους καθέτους. Εἰς πόσα σχήματα διαιρεῖται τοιουτοτρόπως ὁ κύκλος καὶ πῶς λέγονται ταῦτα;

147) Γράψατε ἐπὶ τοῦ πίνακος περιφέρειαν ἀκτῖνος 0,3μ. ὁρίσατε ἐπ' αὐτῆς τόξον ἔχον χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα καὶ κατασκευάσατε τὸν κυκλικὸν τομέα, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν τὸ τόξον τοῦτο.

148) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας περιφέρειαν ἀκτῖνος 0,03μ. καὶ χωρίσατε τὸν κύκλον, τὸν ὁποῖον αὕτη ὁρίζει, εἰς δύο τμήματα κύκλου, τὰ ὁποῖα ἔχουσι χορδὴν 0,03μ.

149) Γράψατε δύο ὁμοκέντρους περιφερείας μὲ ἀκτῖνας 0,04 καὶ 0,02μ. Χαράξατε δύο ἀκτῖνας τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας καθέτους πρὸς ἀλλήλας καὶ γράψατε τὰς χορδὰς τῶν μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένων τόξων. Συγκρίνατε τὰς χορδὰς ταύτας καὶ ἐξελέγξατε τὴν παραλληλίαν ἢ μὴ τούτων. Ἐπαναλάβετε τὴν αὐτὴν ἐργασίαν μὲ ἀκτῖνας πλαγίας.

§ 45. Κυκλικαὶ ἰδιότητες. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ κύκλου ἕπεται ὅτι :

Α΄. ***Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες ἑκάστου κύκλου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.***

Ἐκ τούτου δὲ προκύπτει εὐκόλως ὅτι :

Β΄. ***Ὅλαι αἱ διάμετροι ἑκάστου κύκλου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.***

Γ΄. Ἂν κόψωμεν κύκλον ἐκ χαρτονίου κατὰ μῆκος μιᾶς διαμέτρου, διαιρεῖται οὗτος εἰς δύο μέρη· ἂν τὸ ἓν ἀπὸ αὐτὸ θέσωμεν ἐπὶ τοῦ ἄλλου καταλλήλως, παρατηροῦμεν ὅτι ταῦτα καὶ τὰ τόξα αὐτῶν ἐφαρμόζουσιν ἀντιστοίχως τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

Ἄρα : ***Πᾶσα διάμετρος κύκλου διαιρεῖ αὐτὸν καὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εἰς δύο ἴσα μέρη.***

Τὸ καθ' ἓν ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη τοῦ κύκλου λέγεται ***ἡμικύκλιον,*** τῆς δὲ περιφερείας λέγεται ***ἡμιπεριφέρεια.***

Δ΄. Ἂς γράψωμεν ἐπὶ φύλλου χάρτου δύο περιφερείας μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα. Ἐὰν ἔπειτα τὸν ἕνα ἀπὸ τοὺς κύκλους τούτους θέσωμεν ἐπὶ τοῦ ἄλλου, οὕτως ὥστε νὰ συμπέσωσι τὰ κέντρα αὐτῶν, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ περιφέρειαι αὐτῶν ἐφαρμόζουσι καὶ οἱ κύκλοι ὁμοίως.

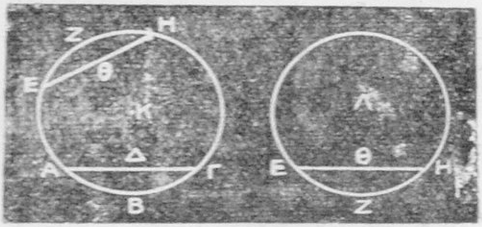
Ἄρα : ***Ἐὰν αἱ ἀκτῖνες δύο κύκλων εἶναι ἴσαι καὶ οἱ κύκλοι εἶναι ἴσοι καὶ αἱ περιφέρειαι ἐπίσης ἴσαι.***

Ε΄. Εἰς ἕνα κύκλον Κ ἢ εἰς ἴσους κύκλους Κ καὶ Λ (Σχ. 37) ἐκ χαρτονίου ἂς χαράξωμεν δύο ἴσας χορδὰς ΑΓ καὶ ΕΗ. Ἂν δὲ ἀποκόψωμεν τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΕΖΗΘ καὶ θέσωμεν αὐτὸ καταλλήλως ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔ, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τόξα αὐτῶν ἐφαρμόζουσιν.

Ἀντιστρόφως : Ἐὰν νοήσωμεν δύο ἴσα τόξα ἐπιτιθέμενα, ὥστε νὰ ἐφαρμόζωσιν, ἐννοοῦμεν (§ 14) εὐκόλως ὅτι καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν ἐφαρμόζουσιν.

Ἄρα : ***Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους τὰ ἴσα***

τόξα ἔχουσιν ἴσας χορδάς· καὶ εἰς ἴσας χορδὰς ἀντιστοιχοῦσιν ἴσα τόξα, ἀρκεῖ νὰ εἶναι καὶ τὰ δύο μικρότερα ἡμιπεριφερείας ἢ καὶ τὰ δύο μεγαλύτερα ἡμιπεριφερείας.



Σχ. 37.

Διὰ τοῦτο, ἵνα ὁρίσωμεν ἐπὶ περιφερείας ἢ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τόξα ἴσα, ἀρκεῖ νὰ ὁρίσωμεν τὰ ἄκρα ἴσων χορδῶν. Ὄντως ταῦται εἶναι καὶ ἄκρα ἴσων τόξων.

Ἀσκήσεις. 150) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας ἢ τοῦ πίνακος περιφέρειαν, ὁρίσατε ἐπ' αὐτῆς τόξον μικρότερον ἡμιπεριφερείας, ἄλλο ἴσον πρὸς αὐτὸ καὶ ἄλλο διπλάσιον τοῦ πρώτου.

151) Ἐπὶ περιφερείας ὁρίσατε τόξον μικρότερον ἡμιπεριφερείας, καὶ τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς. Προσπαθήσατε νὰ εὕρητε ἀπὸ πόσα τοιαῦτα τόξα ἀποτελεῖται ἡ περιφέρεια.

152) Γράψατε δύο ἴσας χορδὰς κύκλου καὶ τὰς ἀποστάσεις τοῦ κέντρου ἀπὸ αὐτάς. Συγκρίνατε τὰς ἀποστάσεις ταύτας καὶ εὕρετε ποία σχέσις μεγέθους ὑπάρχει μεταξύ των.

153) Ἐπὶ δύο ἀκτίνων ΚΑ, ΚΒ κύκλου Κ ὁρίσατε τμήματα ΚΓ, ΚΔ ἴσα καὶ τῆς ἀκτῖνος μικρότερα. Ἐκ τοῦ ἄκρου ἑκάστου γράψατε χορδὴν κάθετον ἐπ' αὐτὸ καὶ συγκρίνατε τὰς χορδὰς ταύτας πρὸς ἀλλήλας.

154) Ἐπὶ περιφερείας ὁρίσατε τόξον μικρότερον ἡμιπεριφερείας καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς. Ὁρίσατε ἔπειτα ἄλλο τόξον διπλάσιον αὐτοῦ, γράψατε τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς χορδῆς τούτου καὶ συγκρίνατε αὐτὴν πρὸς τὴν ἀκτῖνα.

155) Γράψατε δύο ὁμοκέντρους περιφερείας μὲ ἀκτῖνα καὶ 0,06 μ. καὶ 0,03 μ. Γράψατε ἔπειτα δύο τυχούσας ἀκτῖνας τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας καὶ συγκρίνατε τὰς χορδὰς τῶν μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένων τόξων.

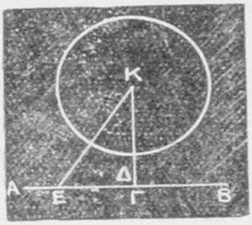
§ 43. Θέσις εὐθείας πρὸς περιφέρειαν κύκλου. Ἐφαπτομένη περιφερείας καὶ ἰδιότητες αὐτῆς. Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου Κ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ (Σχ. 38) οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον.

Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου Κ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ (Σχ. 39) ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον.

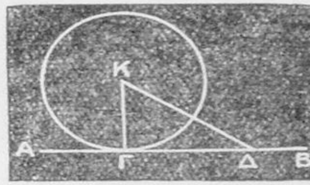
Τέλος ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου Κ καὶ ἡ εὐθεῖα χψ (Σχ. 40) ἔχουσι δύο κοινὰ σημεῖα τὸ Α καὶ τὸ Β. Αἱ θέσεις ἄρα, τὰς ὁποίας μία εὐθεῖα δύναται νὰ λάβῃ πρὸς περιφέρειαν κύκλου εἶναι τρεῖς.

Α΄. Εὐθεῖα καὶ περιφέρεια κύκλου δύνανται νὰ μὴ ἔχωσιν οὐδὲν κοινὸν σημεῖον.

Β΄. Εὐθεῖα καὶ περιφέρεια δύνανται νὰ ἔχωσιν ἓν μόνον



Σχ. 38.

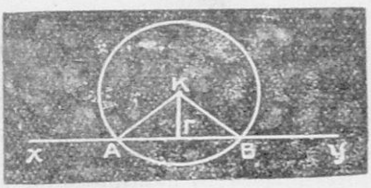


Σχ. 39.

κοινὸν σημεῖον,

Γ΄. Εὐθεῖα καὶ περιφέρεια δύνανται νὰ ἔχωσι δύο κοινὰ σημεῖα (τέμνουσα).

Πᾶσα εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἔχει μὲ περιφέρειαν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, καλεῖται ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας ταύτης.



Σχ. 40.

Τὸ κοινὸν σημεῖον ἐφαπτομένης καὶ περιφερείας καλεῖται σημεῖον ***ἐπαφῆς***.

Ἡ ἐφαπτομένη περιφερείας ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας,

Α΄. Ἔστω Γ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς καὶ Δ τυχὸν ἄλλο σημεῖον ἐφαπτομένης ΑΒ περιφερείας Κ (Σχ. 39). Ἐπειδὴ ἡ ΚΓ εἶναι ἀκτίς, τὸ δὲ Δ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ, ἕπεται ὅτι ΚΓ < ΚΔ.

Ἄρα: ***Ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα ἐφαπτομένης ὀλιγώτερον ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον τὸ σημεῖον ἐπαφῆς.***

Β΄. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνώμονος βεβαιούμεθα εὐκόλως ὅτι αἱ γωνίαι ΑΓΚ, ΚΓΒ εἶναι ὀρθαί.

Ἄρα: ***Πᾶσα ἐφαπτομένη περιφερείας εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς.***

Γ΄. Ἂς γράψωμεν εὐθεῖαν ΑΒ κάθετον ἐπὶ ἀκτῖνα ΚΓ εἰς τὸ ἄκρον Γ αὐτῆς. Ἐὰν Δ εἶναι ἄλλο σημεῖον τῆς ΑΒ καὶ συγκρίνωμεν τὰ εὐθ. τμήματα ΚΓ καὶ ΚΔ, βεβαιούμεθα ὅτι ΚΔ>ΚΓ. Κεῖται λοιπὸν τὸ Δ ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἡ δὲ ΑΒ ἔχει μὲ τὴν περιφέρειαν κοινὸν σημεῖον μόνον τὸ Γ.

Ἄρα : ***Ἡ κάθετος εἰς τὸ κέντρον ἀκτῖνος εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας.***

Δ΄. Ἀπὸ τὴν ἰδιότητα ταύτην, ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν καὶ τὴν ἰδιότητα (§ 23 Α΄) συμπεραίνομεν ὅτι :

Ἀπὸ κάθε σημεῖον περιφερείας διέρχεται μία μόνον ἐφαπτομένη αὐτῆς.

§ 44. Πρόβλημα. ***Νὰ γραφῇ ἐφαπτομένη περιφερείας εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς.***

Λύσις. Ἄγομεν τὴν ἀκτῖνα, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον. Ἔπειτα ἄγομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ταύτην, ἡ ὁποία νὰ διέρχηται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον. Ἡ κάθετος αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη (§ 43 Γ΄.).

Ἀσκήσεις. 156) Γράψατε περιφέρειαν καὶ εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ μὴ ἔχῃ μετ' αὐτῆς κοινὰ σημεῖα. Γράψατε ἔπειτα τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου ἀπ' αὐτῆς καὶ συγκρίνατε αὐτὴν πρὸς τὴν ἀκτῖνα.

157) Γράψατε εὐθεῖαν, ἡ ὁποία ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον περιφερείας ἀπόστασιν μικροτέραν τῆς ἀκτῖνος. Πόσα κοινὰ σημεῖα ἔχει αὕτη μὲ τὴν περιφέρειαν ;

158) Γράψατε περιφέρειαν κύκλου, μίαν διάμετρον αὐτῆς καὶ ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς. Ἐξελέγξατε τὴν παραλληλίαν ἢ μὴ τῶν ἐφαπτομένων τούτων καὶ προσπαθήσατε νὰ εὕρητε τὸν λόγον τοῦ συμπεράσματος, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ καταλήξητε.

159) Γράψατε περιφέρειαν κύκλου, δύο ἀκτῖνας καθέτους καὶ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν. Ἀναγνωρίσατε δὲ τὸ εἶδος τῆς γωνίας τῶν ἐφαπτομένων τούτων.

160) Γράψατε δύο ὁμοκέντρους περιφερείας καὶ δύο χορδὰς τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται τῆς ἐσωτερικῆς. Συγκρίνατε δὲ πρὸς ἀλλήλας τὰς χορδὰς ταύτας.

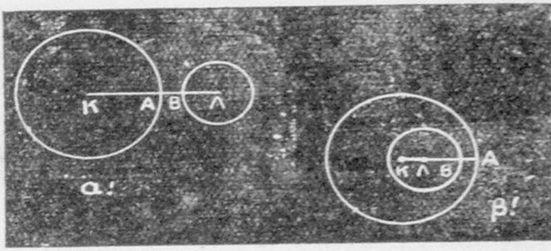
161) Νά γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα 0,03μ καὶ νὰ ἐφάπτηται δοθείσης εὐθείας εἰς ὡρισμένον σημεῖον αὐτῆς. Πόσαι τοιαῦται περιφέρειαι εἶναι δυνατὸν νὰ γραφῶσι ;

163) Ἡ διάμετρος περιφερείας εἶναι 6,86μ. Πόσον ἀπέχει τὸ κέντρον ἀπὸ τυχούσης ἐφαπτομένης ;

§ 45. Θέσεις δύο περιφερειῶν πρὸς ἀλλήλας. Αἱ δύο περιφέρειαι Κ καὶ Λ (Σχ. 41 α΄) οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον καὶ κάθε μία κεῖται ὅλη ἐκτὸς τοῦ κύκλου, τὸν ὁποῖον ὁρίζει ἡ ἄλλη.

Αἱ δύο περιφέρειαι Κ καὶ Λ (Σχ. 41 β΄) οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον· κεῖται δὲ ἡ μία (Λ) ἐντὸς τοῦ κύκλου, τὸν ὁποῖον ὁρίζει ἡ ἄλλη.

Αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Λ (Σχ. 42 α΄) ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν

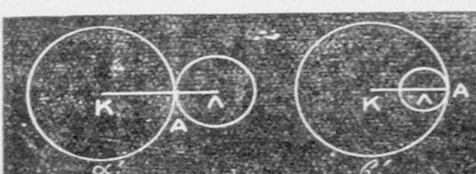


Σχ. 41.

σημεῖον Α καὶ κάθε μία κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, τὸν ὁποῖον ὁρίζει ἡ ἄλλη.

Αἱ τοιαῦται περιφέρειαι λέγονται ὅτι ***ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐκτός***.

Αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Λ (Σχ. 42 β΄) ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον Α· ὅλα δὲ τὰ ἄλλα σημεῖα τῆς μιᾶς (Λ) κεῖνται ἐντὸς τοῦ κύκλου, τὸν ὁποίον ὁρίζει ἡ ἄλλη.



Σχ. 42.

Περὶ τῶν τοιούτων περιφερειῶν λέγομεν ὅτι ***ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός***.

Αἱ περιφέρεια Κ καὶ Λ (Σχ. 43) ἔχουσι δύο κοινὰ σημεῖα τὰ Α καὶ Α΄. Περὶ τούτων λέγομεν ὅτι ***τέμνονται***.

Κατὰ ταῦτα αἱ θέσεις δύο περιφερειῶν εἶναι αἱ ἀκόλουθοι πέντε. Α΄. ***Ἑκατέρα περιφέρεια δύναται νὰ κεῖται ὅλη ἐκτὸς τοῦ κύκλου, τὸν ὁποῖον ἡ ἄλλη ὁρίζει.***

Β΄. ***Ἡ μία δύναται νὰ κεῖται ὅλη ἐντὸς τοῦ κύκλου, τὸν ὁποῖον ὁρίζει ἡ ἄλλη.***

Εἰς τὰς δύο ταύτας περιπτώσεις αἱ περιφέρειαι οὐδὲν ἔχουσι κοινόν σημεῖον.

Γ΄. ***Αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐκτός.***

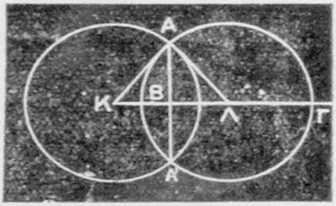
Δ΄. ***Αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός.***

Εἰς τὰς δύο ταύτας περιπτώσεις αἱ περιφέρειαι ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον.

Ε΄. ***Αἱ περιφέρειαι τέμνονται*** (δύο κοινὰ σημεῖα).

Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ κέντρα δύο περιφερειῶν, καλεῖται ***διάκεντρος*** αὐτῶν.

Τὸ κοινὸν σημεῖον δύο ἐφαπτομένων περιφερειῶν καλεῖται ***σημεῖον ἐπαφῆς***.



Σχ. 43.

Τὸ σημεῖον ἐπαφῆς δύο περιφερειῶν κεῖται πάντοτε ἐπὶ τῆς διακέντρου.

Ἀσκήσεις. 164) Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα εὐθ. τμήματος μήκους 0,02μ γράψατε δύο περιφερείας, μίαν μὲ ἀκτῖνα 0,02μ, τὴν δὲ ἄλλην μὲ ἀκτῖνα 0,05μ. Ποία ἡ θέσις αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας ;

165) Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα εὐθ. τμήματος μήκους 0,03μ γράψατε δύο περιφερείας ἐφαπτομένας ἐκτὸς καὶ ἄλλας δύο ἐφαπτομένας ἐντός.

166) Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα εὐθ. τμήματος μήκους 0,05μ καὶ ἀκτῖνας 0,02μ. καὶ 0,03μ γράψατε περιφερείας. Ποία ἡ θέσις αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας ;

167) Συγκρίνατε τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων δύο κύκλων, ὧν ἑκάτερος κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἄλλου ἢ ἐφάπτεται τοῦ ἄλλου ἐκτὸς πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

168) Συγκρίνατε τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων δύο κύκλων, ὧν ὁ εἷς κεῖται ἐντὸς τοῦ ἄλλου ἢ ἐφάπτεται αὐτοῦ ἐντὸς πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

169) Συγκρίνατε τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων δύο τεμνομένων περιφερειῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα καὶ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

§ 46. Κοινὴ χορδὴ δύο περιφερειῶν. Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΑ΄ (Σχ. 43) εἶναι χορδὴ τόξων τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ. Λέγεται δὲ διὰ τοῦτο ***κοινὴ χορδὴ*** αὐτῶν.

Γενικῶς: ***Κοινὴ χορδὴ δύο περιφερειῶν λέγεται τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζουσι τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῶν.***

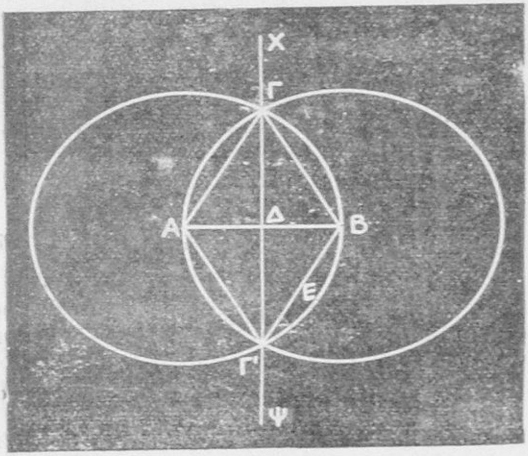
Α΄. Ἔστω Β ἡ τομὴ τῆς ΑΑ΄ καὶ ΚΛ. Τῇ βοηθείᾳ καταλλήλων γεωμ. ὀργάνων βεβαιούμεθα ὅτι ΑΒ=Α΄Β καὶ $\widehat{ABK}$=1 ὀρθή.

Ἄρα: ***Ἡ κοινὴ χορδὴ δύο περιφερειῶν τέμνεται ὑπὸ τῆς διακέντρου καθέτως καὶ εἰς τὸ μέσον.***

Β΄. Ἐὰν αἱ τεμνόμεναι περιφέρειαι Κ καὶ Λ εἶναι ἴσαι, εὐκόλως βεβαιούμεθα ὅτι ΚΒ=ΒΛ.

Ἄρα: *Ἡ κοινὴ χορδὴ δύο ἴσων περιφερειῶν διχοτομεῖ τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων αὐτῶν.*

§ **47. Πρόβλημα Ι.** *Νὰ γραφῇ εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ εἰς τὸ μέσον καὶ καθέτως δοθὲν εὐθ. τμῆμα ΑΒ.*



Σχ. 44.

Λύσις. Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα Α καὶ Β καὶ ἀκτῖνα ΑΒ γράφομεν δύο περιφερείας. Ἄγομεν ἔπειτα τὴν κοινὴν χορδὴν αὐτῶν ΓΓ΄, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα· τὸ κοινὸν δὲ σημεῖον Δ αὐτῶν εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΑΒ.

Σημ. Ἡ ἀκτὶς τῶν περιφερειῶν Α καὶ Β δύναται νὰ εἶναι διάφορος ἀπὸ τὸ τμῆμα ΑΒ ἀρκεῖ μόνον αἱ περιφέρειαι νὰ τέμνωνται.

Ἀσκήσεις. 170) Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ διάμετρον δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

171) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας εὐθ. τμῆμα καὶ ὁρίσατε σημεῖον τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ εὐθ. τμῆμα. Πόσα τοιαῦτα σημεῖα ὑπάρχουσιν;

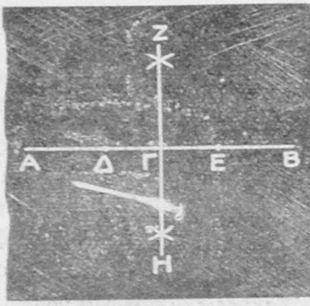
172) Γράψατε τυχοῦσαν εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ τετραδίου ἢ τοῦ πίνακος· ὁρίσατε ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου δύο σημεῖα καὶ γράψατε περιφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ διέρχηται ἀπὸ τὰ σημεῖα ταῦτα καὶ τὸ κέντρον της νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς γραφείσης εὐθείας (§ 23 Δ΄).

§ **48. Πρόβλημα ΙΙ.** *Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Γ εὐθείας ΑΒ νὰ ἀχθῇ κάθετος πρὸς αὐτήν.*

Λύσις. Ὁρίζομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ (Σχ. 45) τμήματα ΓΔ, ΓΕ ἴσα καὶ κατασκευάζομεν τὴν ΖΗ κάθετον εἰς τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΔΕ. Αὕτη εἶναι προφανῶς ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

§ **49. Ἰδιότητες τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον χορδῆς.**

Α΄. Ἐὰν μὲ κέντρα τὰ ἄκρα χορδῆς ΑΒ (Σχ. 46) καὶ ἀκτῖνα ΚΑ γράψωμεν περιφερείας, αὗται τέμνονται εἰς δύο σημεῖα Κ καὶ Λ· εἶναι δὲ ἡ ΚΛ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.

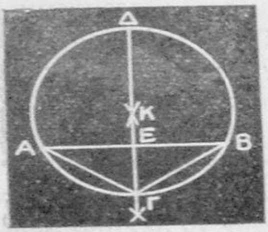


Σχ. 45.

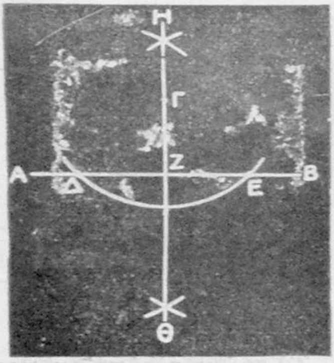
Ἄρα: ***Ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον χορδῆς διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.***

Β΄. Ἔστωσαν Γ καὶ Δ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς περιφερείας καὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον χορδῆς ΑΒ. Ἐπειδὴ ΑΓ=ΒΓ, ΑΔ=ΔΒ (§ 23 Δ΄) ἕπεται (§ 42 Ε΄) ὅτι

$$\widehat{ΑΓ}=\widehat{ΓΒ} \text{ καὶ } \widehat{ΑΔ}=\widehat{ΔΒ}.$$



Σχ. 46.



Σχ. 47.

Ἄρα: ***Ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον χορδῆς διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὰ εἰς αὐτὴν ἀντίστοιχα τόξα.***

§ **50. Πρόβλημα I.** ***Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη.***

Λύσις. Κατασκευάζομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς αὐτοῦ. Αὕτη τέμνει τὸ τόξον εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ.

'Ασκήσεις. 173) Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τόξον εἰς 4 ἴσα μέρη.

174) Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ δοθείσης περιφερείας τόξον, τὸ ὁποῖον ἔχει χορδὴν τὰ $\frac{3}{2}$ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ καὶ νὰ διαιρεθῇ τοῦτο εἰς 4 ἴσα μέρη.

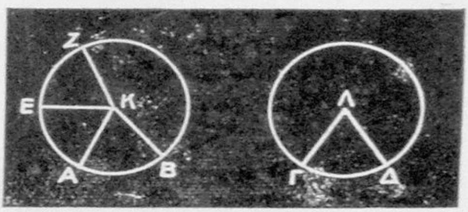
§ 51. Πρόβλημα ΙΙ. ***'Απὸ σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας ΑΒ νὰ ἀχθῇ κάθετος πρὸς αὐτήν.***

Λύσις. Μὲ κέντρον Γ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ μὲ τὴν ΑΒ δύο κοινὰ σημεῖα Δ καὶ Ε (Σχ. 47). Ἔπειτα γράφομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΘ, ἡ ὁποία τέμνει καθέτως καὶ εἰς τὸ μέσον τὴν χορδὴν ΔΕ. Ἡ ΓΘ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα· διότι εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, διέρχεται δὲ καὶ διὰ τοῦ Γ (§ 49).

'Ασκήσεις. 175) Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία ὁρίζει ἐπὶ δοθείσης εὐθείας χορδὴν 0,04 μ. καὶ ἔχει κέντρον ὡρισμένον σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας ταύτης.

176) Γράψατε τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ὁρίσατε ἐκτὸς αὐτῆς σημεῖον καὶ γράψατε περιφέρειαν, ἥτις ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ ἐφαπτομένην τὴν γραφεῖσαν εὐθεῖαν.

§ 52. 'Επίκεντροι γωνίαι. Τῆς γωνίας ΑΚΒ (Σχ. 48) κορυφὴ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου Κ. Αὕτη καλεῖται ***ἐπίκεντρος*** γωνία. Τὸ δὲ τόξον ΑΒ, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς, λέγεται ***ἀντίστοιχον τόξον αὐτῆς.***



Σχ. 48.

Γενικῶς: ***'Επίκεντρος γωνία καλεῖται πᾶσα γωνία, ἡ ὁποία ἔχει ὡς κορυφὴν τὸ κέντρον κύκλου τινός.***

Τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν ἐπικέντρου γωνίας, καλεῖται ἀντίστοιχον αὐτῆς τόξον.

Αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ἔχουσι τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

Α΄. Ἔστωσαν ΑΒ, ΓΔ (ἢ ΕΖ) δύο ἴσα τόξα τῆς αὐτῆς ἢ δύο ἴσων περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἐγράφησαν ἐπὶ φύλλου χάρτου. Ἐὰν ἀποκόψωμεν τὸν κυκλικὸν τομέα ΓΛΔ (ἢ ΕΚΖ) καὶ θέσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τοῦ ΑΚΒ, οὕτως ὥστε νὰ ἐφαρμόζωσι τὰ ἴσα τόξα αὐτῶν, παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ αἱ γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΓΛΔ (ἢ ΕΚΖ) ἐφαρμόζουσιν.

῎Αρα : ***Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους εἰς ἴσα τόξα βαίνουσιν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι.***

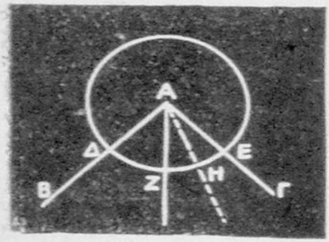
Β΄. ῎Αν αἱ γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΓΛΔ (ἢ ΕΚΖ) εἶναι ἴσαι, ἐπιθέσωμεν δὲ πάλιν τὸν ἕνα κυκλικὸν τομέα ἐπάνω εἰς τὸν ἄλλον, οὕτως ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσιν αἱ ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι, εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα ἐφαρμόζουσιν.

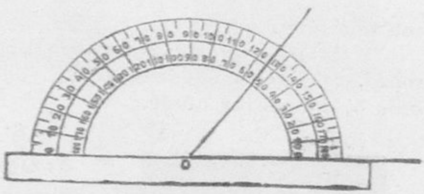
῎Αρα : ***Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι βαίνουσιν εἰς ἴσα τόξα.***

Γ΄. ᾿Απὸ τὰς ἰδιότητας ταύτας συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι :

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους εἰς τόξον διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. ἄλλου τόξου βαίνει διπλασία, τριπλασία κτλ. γωνία. Καὶ ἀντιστρόφως : ᾿Επίκεντρος γωνία διπλασία, τριπλασία κτλ. ἄλλης βαίνει εἰς διπλάσιον, τριπλάσιον κλπ. τόξον.

§ 53. Μοιρογνωμόνιον—Μέτρησις γωνίας. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, ὅσας φορὰς ἓν τόξον ΗΕ (Σχ. 49) χωρεῖ εἰς ἄλλο τόξον ΔΗ (τῆς αὐτῆς περιφερείας) τόσας φορὰς καὶ ἡ





Σχ. 49.

ἐπίκεντρος γωνία ΗΑΕ χωρεῖ εἰς τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν ΔΑΗ. ᾿Εὰν λοιπὸν τὸ μὲν τόξον ΗΕ ληφθῇ ὡς μονὰς πρὸς μέτρησιν τῶν τόξων, ἡ δὲ ἐπίκεντρος γωνία ΗΑΕ ὡς μονὰς πρὸς μέτρησιν τῶν γωνιῶν, εἶναι φανερὸν ὅτι ἐκ τῆς μετρήσεως τοῦ τόξου ΔΗ καὶ τῆς γωνίας ΔΑΗ θὰ προκύψῃ ὁ αὐτὸς ἀριθμός. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον πρὸς μέτρησιν γωνίας ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν τὸ τόξον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου βαίνει αὕτη, ὅταν καταστῇ ἐπίκεντρος εἰς τὸν κύκλον, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει ἡ μονὰς τῶν τόξων.

Πρὸς τοῦτο χρησιμεύει τὸ ***μοιρογνωμόνιον***. (Σχ. 47). Τοῦτο εἶναι ἡμικύκλιον συνήθως μεταλλικόν, τοῦ ὁποίου ἡ ἡμιπεριφέρεια εἶναι διῃρημένη εἰς 180 ἴσα μέρη.

Εἰς τὸ μέσον τῆς διαμέτρου τοῦ ἡμικυκλίου ὑπάρχει μία μικρὰ χαραγή, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ κέντρον τοῦ μοιρογνωμονίου.

Ἕκαστον ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι διῃρημένη ἡ ἡμιπεριφέρεια τοῦ ὀργάνου καλεῖται ***μοῖρα***. Ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60′ καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60″.

Ἵνα διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου μετρήσωμεν γωνίαν τινὰ (Σχ. 49) ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς ;

Τοποθετοῦμεν τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας καὶ ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τῆς γωνίας, τὴν διὰ τῆς ἀρχῆς τῆς διαιρέσεως διερχομένην ἀκτῖνα τοῦ ὀργάνου. Προσέχομεν δὲ τὸ ὄργανον νὰ εὑρίσκηται πρὸς τὸ μέρος τῆς ἄλλης πλευρᾶς τῆς γωνίας.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι γραμμένος εἰς τὴν τομὴν τῆς δευτέρας ταύτης πλευρᾶς τῆς γωνίας καὶ τῆς ἡμιπεριφερείας τοῦ ὀργάνου, δεικνύει πόσον μοιρῶν κτλ. εἶναι ἡ γωνία.

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως τῆς γωνίας λέγεται ***μέτρον αὐτῆς***.

Ἀσκήσεις. 177) Κατασκευάσατε τυχοῦσαν γωνίαν καὶ μετρήσατε αὐτήν.

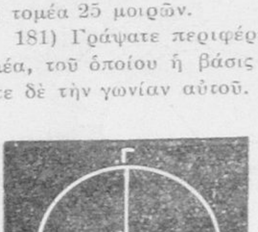
178) Μετρήσατε τὰς ἐπικέντρους γωνίας τοῦ σχήματος (48).

179) Μετρήσατε τὴν γωνίαν ε τοῦ σχήματος (33) καὶ ὑπολογίσατε ἔπειτα τὰς ἄλλας γωνίας αὐτοῦ.

180) Γράψατε περιφέρειαν κύκλου ἀκτῖνος 0,03μ καὶ χωρίσατε ἐπ' αὐτοῦ τομέα 25 μοιρῶν.

181) Γράψατε περιφέρειαν κύκλου καὶ χωρίσατε ἐπ' αὐτοῦ κυκλικὸν τομέα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις νὰ ἔχῃ χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα. Μετρήσατε δὲ τὴν γωνίαν αὐτοῦ.

§ 54. Πρόβλημα 1. *Νὰ διαιρεθῇ περιφέρεια κύκλου εἰς 4 ἴσα τόξα.*



Σχ. 50.

Λύσις. Γράφομεν δύο διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ καθέτους πρὸς ἀλλήλας (Σχ. 50). Τὰ τόξα ΑΓ, ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ, εἰς τὰ ὁποῖα ὑπὸ τῶν καθέτων τούτων διαιρεῖται ἡ περιφέρεια, εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, διότι βαίνουσιν εἰς αὐτὰ ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι, ὡς ὀρθαί.

Ἕκαστον ἀπὸ τὰ ἴσα ταῦτα τόξα καλεῖται ***τεταρτημόριον*** περιφερείας. Βαίνει δὲ εἰς ἕκαστον ἀπὸ αὐτὰ ὀρθὴ ἐπίκεντρος γωνία.

183) Πόσων μοιρῶν εἶναι μία γωνία ἴση πρὸς $\frac{2}{5}$ ὀρθῆς ;

184) Πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι γωνία 50°;

185) Πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι γωνία $35^\circ\ 45'$;

186) Πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι $40^\circ\ 20'\ 30''$;

187) Πόσων μοιρῶν κλπ. εἶναι γωνία ἴση πρὸς $2\frac{3}{4}$ ὀρθῆς γωνίας;

188) Ἐκ δύο συμπληρωματικῶν γωνιῶν ἡ μία εἶναι $43^\circ\ 15'\ 17''$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέτρον τῆς ἄλλης.

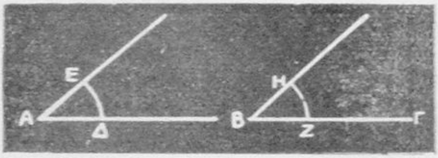
189) Ἐκ δύο παραπληρωματικῶν γωνιῶν ἡ μία εἶναι $58^\circ\ 25'\ 50''$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἄλλη,

190) Δύο εὐθεῖαι τέμνονται οὕτως ὥστε μία τῶν ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένων γωνιῶν εἶναι $27^\circ\ 35'\ 45''$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέτρον ἑκάστης τῶν τριῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτῶν.

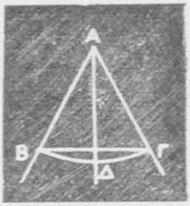
191) Νὰ διαιρεθῇ περιφέρεια κύκλου εἰς 8 ἴσα μέρη.

§ 55. Πρόβλημα ΙΙ. ***Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν Α καὶ νὰ ἔχῃ κορυφὴν δοθὲν σημεῖον Β.***

Λύσις. Καθιστῶμεν τὴν Α ἐπίκεντρον καὶ ἔστω ΔΕ τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς τόξον. Ἔπειτα μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα ΑΔ γράφο-



Σχ. 51.



Σχ. 52.

μεν περιφέρειαν· ἐπὶ ταύτης ὁρίζομεν τόξον ΖΗ ἴσον πρὸς τὸ ΔΕ καὶ γράφομεν τὰς εὐθείας ΒΖ, ΒΗ. Ἡ γωνία ΗΒΖ εἶναι ἡ ζητουμένη. (Διατί;)

§ 56. Πρόβλημα ΙΙΙ. ***Νὰ διαιρεθῇ δοθεῖσα γωνία Α εἰς δύο ἴσας γωνίας.***

Λύσις. Καθιστῶμεν τὴν Α (Σχ. 52) ἐπίκεντρον καὶ ἄγομεν εὐθεῖαν ΑΔ κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς τοῦ ἀντιστοίχου τόξου (§ 50). Οὕτως εἶναι ΒΑΔ=ΔΑΓ. (Διατί;).

§ 57. Διχοτόμος γωνίας. Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία διαιρεῖ γωνίαν εἰς δύο ἴσας γωνίας, καλεῖται ***διχοτόμος*** αὐτῆς. Οὕτως ἡ ΑΔ (Σχ. 52) εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ.

Ἀσκήσεις. 192) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς γωνίας.

193) Νὰ διαιρεθῇ γωνία εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη.

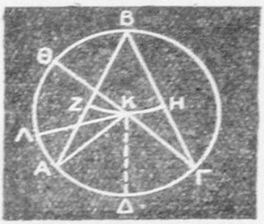
194) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς $\frac{3}{4}$ ὀρθῆς γωνίας.

195) Κατασκευάσατε δύο ἐφεξῆς γωνίας, αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχωσι τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς ἐπ' εὐθείας. Διχοτομήσατε ταύτας καὶ ἀναγνωρίσατε τῇ βοηθείᾳ τοῦ καταλλήλου γεωμετρικοῦ ὀργάνου τὸ εἶδος τῆς γωνίας τῶν διχοτόμων τούτων.

196) Διχοτομήσατε δύο κατὰ κορυφὴν γωνίας, καὶ ἀναγνωρίσατε τὸ εἶδος τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ διχοτόμοι αὐτῶν.

§ 58. Ἐγγεγραμμέναι εἰς κύκλον γωνίαι. Τῆς γωνίας ΑΒΓ (Σχ. 53) ἡ κορυφὴ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ, αἱ δὲ πλευραὶ εἶναι χορδαὶ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον. Καλεῖται δὲ αὕτη ***ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία.***

Τὸ τόξον ΑΔΓ καλεῖται ***ἀντίστοιχον τόξον τῆς ΑΒΓ.***



Σχ. 53.

Γενικῶς: ***Ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία καλεῖται πᾶσα γωνία, τῆς ὁποίας ἡ μὲν κορυφὴ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραὶ εἶναι χορδαὶ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.***

Τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν ἐγγεγραμμένης εἰς κύκλον γωνίας καλεῖται ἀντίστοιχον αὐτῆς τόξον.

Αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ἔχουσι τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας.

Α΄. Ἔστω Β ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία καὶ ΑΚΓ ἡ ἐπίκεντρος, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ αὐτὸ τόξον. Ἂς καταστήσωμεν τὴν Β ἐπίκεντρον εἰς κύκλον (Β,ΒΚ) καὶ ἔστω ΖΗ τὸ ἀντίστοιχον τόξον. Ἐὰν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου συγκρίνωμεν τὰ τόξα ΖΗ καὶ ΑΓ, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ΑΓ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΖΗ. Ἐπομένως (§ 52 Γ΄) ἡ γωνία Β εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΚΓ. Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι

$\widehat{B} = \frac{\Theta\widehat{K}\Lambda}{2}$, ἂν $\widehat{\Theta\Lambda} = \widehat{A\Gamma}$.

Ἄρα ***Πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι τὸ ἥμισυ ἐπικέντρου γωνίας, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἐπὶ ἴσου τόξου.*** Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι:

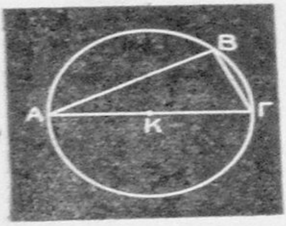
Β΄. ***Πᾶσαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, αἱ ὁποῖαι βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἐπὶ ἴσων τόξων εἶναι ἴσαι.***

Γ΄. Ἔστω ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΒΓ, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ ἡμιπεριφερείας (Σχ. 57). Τῇ βοηθείᾳ τοῦ γνώμονος βεβαιούμεθα ὅτι αὕτη εἶναι ὀρθή.

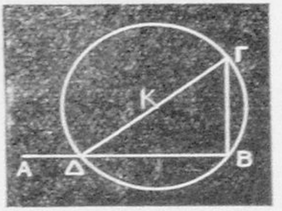
Ἄρα: ***Πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία βαίνουσα ἐπὶ ἡμιπεριφερείας εἶναι ὀρθή.***

Ἀσκήσεις. 197) Πόσον εἶναι τὸ μέτρον ἐγγεγραμμένης γωνίας, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τεταρτημόριον περιφερείας;

198) Ἐὰν ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς γωνίας, πόσον εἶναι τὸ μέτρον τῆς ἐπικέντρου γωνίας, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ αὐτὸ τόξον;



Σχ. 54.



Σχ. 55.

199) Πόσων μοιρῶν κτλ. εἶναι ἐγγεγραμμένη γωνία, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τόξου 42° 15';

200) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἐγγεγραμμένη γωνία, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ ὀγδόου περιφερείας;

201) Πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ τόξον, ἐφ' οὗ βαίνει ἐγγεγραμμένη γωνία ἴση πρὸς $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς γωνίας;

202) Ἔστω Κ σημεῖον ἐκτὸς εὐθείας ΑΒ καὶ Δ τὸ σημεῖον, εἰς ὃ ἡ περιφέρεια (Κ. ΚΒ) τέμνει τὴν ΑΒ. Ἂς ἀχθῇ δὲ ἡ διάμετρος ΔΚΓ καὶ ἡ χορδὴ ΓΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ [Σχ. 55].

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

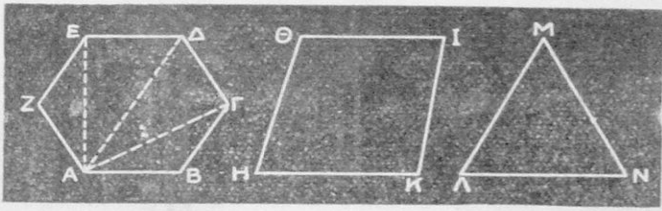
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

§ 39. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα εὐθυγράμμου σχήματος. Κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῶν πρισμάτων καὶ πυραμίδων (§ 8 καὶ 10 παρετηρήσαμεν ὅτι αἱ ἕδραι αὐτῶν εἶναι ἐπίπεδα σχήματα, τὰ ὁποῖα περικλείονται ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα.

Καὶ τὸ σχῆμα ΑΒΓΔΕΖ (Σχ. 56) εἶναι ***εὐθύγραμμον σχῆμα***. Τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ καλοῦνται ***πλευραὶ*** αὐτοῦ. Αἱ γωνίαι Α, Β, Γ κτλ., αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἀπὸ τὰς πλευράς, λέγονται καὶ ***γωνίαι*** τοῦ εὐθ. σχήματος. Αἱ δὲ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ λέγονται καὶ ***κορυφαὶ*** τοῦ εὐθ. σχήματος.

Γενικῶς: ***Εὐθύγραμμον σχῆμα καλεῖται πᾶν μέρος ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περικλείεται πανταχόθεν ἀπὸ εὐθ. τμήματα. Πλευραὶ εὐθ. σχήματος καλοῦνται τὰ εὐθ. τμήματα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα περικλείεται τοῦτο.***

Γωνίαι εὐθ. σχήματος καλοῦνται αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουσιν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ.



Σχ. 56.

Κορυφαὶ εὐθ. σχήματος καλοῦνται αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

Ἕκαστον εὐθ. σχῆμα ἔχει ἴσον ἀριθμὸν πλευρῶν, γωνιῶν καὶ κορυφῶν. Ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ δὲ τῶν γωνιῶν ἢ πλευρῶν αὐτῶν διαιροῦνται εἰς ***τρίγωνα*** ἢ ***τρίπλευρα, τετράπλευρα, πεντάπλευρα***, ἢ ***πεντάγωνα, ἑξάγωνα*** κτλ. Τὰ πεντάγωνα, ἑξάγωνα κτλ. καλοῦνται συνήθως ***πολύγωνα***.

Διαγώνιος εὐθ. σχήματος καλεῖται πᾶν εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον συνδέει δύο κορυφὰς μὴ διαδοχικάς. Αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ π. χ. εἶναι διαγώνιοι τοῦ ΑΒΓΔΕΖ (Σχ. 56).

Τὰ τρίγωνα δὲν ἔχουσι διαγωνίους, (διατί;)

Περίμετρος εὐθ. σχήματος καλεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Ἐὰν π. χ. αἱ πλευραὶ τριγώνου ἔχωσι κατὰ σειρὰν μήκη 369^{μ} 81^{μ}, 360^{μ}, ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι $369+81+360=810^{\mu}$.

Ἀσκήσεις. 203) Γράψατε ἓν τρίγωνον καὶ ἓν τετράπλευρον καὶ εὕρετε τὴν περίμετρον ἑκάστου.

204) Τριγώνου μία πλευρὰ ἔχει μῆκος 5,65 μ., ἄλλη 4,50 μ. καὶ ἡ περίμετρος εἶναι 14 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς αὐτοῦ.

205) Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ εἶναι 12,36μ, ἑτέρα διπλασία ταύτης, ἡ τρίτη τὸ ἥμισυ τῆς πρώτης καὶ ἡ δ′ διπλασία τῆς τρίτης.

256) Τίνος εἴδους γραμμὴν ἀποτελοῦσι τέσσαρες συνεχεῖς πλευραὶ ἑξαγώνου;

207) Πόσας διαγωνίους ἔχει ἕκαστον τετράπλευρον;

208) Κατασκευάσατε πεντάγωνον, χαράξατε τὰς διαγωνίους αὐτοῦ καὶ μετρήσατε ταύτας.

209) Κατασκευάσατε τυχὸν τετράπλευρον, χαράξατε καὶ μετρήσατε τὰς διαγωνίους αὐτοῦ. Εὕρετε τὴν περίμετρον αὐτοῦ καὶ συγκρίνατε τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων πρὸς τὴν περίμετρον αὐτοῦ καὶ τὴν ἡμιπερίμετρον αὐτοῦ.

210) Γράψατε εὐθ. σχῆμα καὶ ἐντὸς αὐτοῦ ἄλλο. Εὕρετε τὴν περίμετρον ἑκάστου καὶ καθορίσατε ποία εἶναι μεγαλυτέρα. Προσπαθήσατε νὰ ἴδητε, ἂν τὸ πόρισμα τοῦτο εἶναι γενικὸν ἢ μή.

Α΄ ΤΡΙΓΩΝΑ

ΕΙΔΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

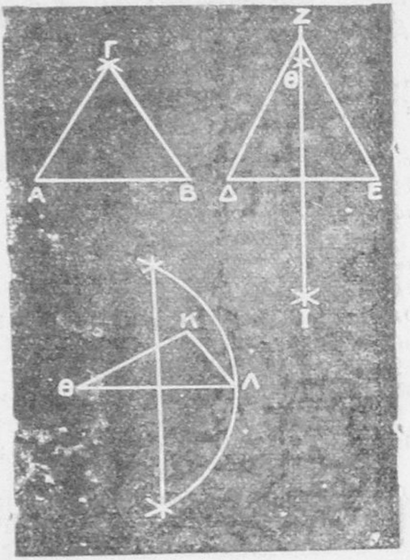
§ 60. Ἰσόπλευρα, ἰσοσκελῆ καὶ σκαληνὰ τρίγωνα.

Α΄. Ἔστω Γ κοινὸν σημεῖον τῶν περιφερειῶν (Α, ΑΒ) καὶ (Β, ΑΒ). Ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι λοιπὸν ΑΒ=ΑΓ=ΒΓ. Διὰ τοῦτο τὸ ΑΒΓ λέγεται ***ἰσόπλευρον*** τρίγωνον. Γενικῶς: ***Ἰσόπλευρον τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι πᾶσαι ἴσαι.***

Β΄. Ἐν τῷ τριγώνῳ ΔΕΖ εἶναι ΔΖ=ΖΕ>ΔΕ. Καλεῖται δὲ τοῦτο ***ἰσοσκελὲς*** τρίγωνον.

Γενικῶς: ***Ἰσοσκελὲς τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δύο μόνον πλευραὶ εἶναι ἴσαι.***

Γ΄. Τοῦ τριγώνου ΘΚΛ ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἄνισοι· τοῦτο καλεῖται σκαληνόν.



Σχ. 57.

Γενικῶς: ***Σκαληνὸν τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἄνισοι.***

§ 61. Ὀξυγώνια, ὀρθογώνια καὶ ἀμβλυγώνια τρίγωνα.

Α΄. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 57) ἔχον ὅλας τὰς γωνίας ὀξείας καλεῖται ***ὀξυγώνιον*** τρίγωνον.

Γενικῶς: ***Ὀξυγώνιον τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι.***

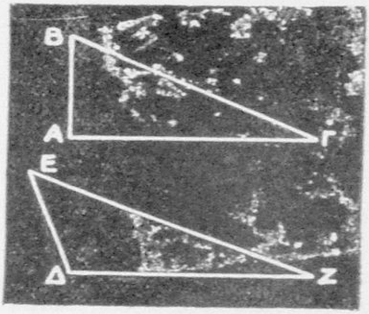
Β΄. Ἔστω Α ὀρθὴ καὶ Δ ἀμβλεῖα γωνία. Ἐὰν τὰς πλευρὰς αὐτῶν τμήσωμεν μὲ εὐθείας εἰς σημεῖα διάφορα τῶν κορυφῶν, σχηματίζονται τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ.

Τούτων τὸ πρῶτον περιέχον τὴν ὀρθὴν γωνίαν Α καλεῖται ὀρθογώνιον, τὸ δὲ ΔΕΖ καλεῖται **ἀμβυγώνιον.**

Γενικῶς: ***Ὀρθογώνιον τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία γωνία εἶναι ὀρθή.***

Ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου καλεῖται **ὑποτείνουσα** αὐτοῦ.

Ἀμβλυγώνιον τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία γωνία εἶναι ἀμβλεῖα.



Σχ. 58.

Ἀσκήσεις. 211) Κατασκευάσατε ἰσόπλευρον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ νὰ ἔχῃ μῆκος 0,05μ.

212) Κατασκευάσατε τρίγωνον ἰσοσκελές, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ νὰ ἔχῃ μῆκος 0,03 μ, κάθε δὲ μία ἀπὸ τὰς ἄλλας ἀνὰ 0,05 μ.

213) Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας νὰ ἔχωσι μήκη 0,03 μ. ἡ μία καὶ 0,04 μ. ἡ ἄλλη. Μετρήσατε δὲ καὶ τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ.

214) Κατασκευάσατε ἀμβλυγώνιον τρίγωνον, οὗ αἱ πλευραὶ τῆς ἀμβλείας γωνίας νὰ ἔχωσι μήκη 0,02 μ. καὶ 0,04 μ.

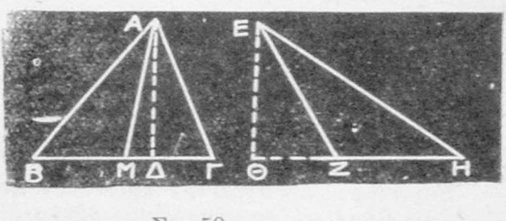
215) Ἐὰν ἡ περίμετρος ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 182,25 μ. πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς αὐτοῦ;

216) Τριγώνου ἡ περίμετρος εἶναι 0,09 μ. μία πλευρὰ 0,03 μ. καὶ ἡ ἄλλη 0,02 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς αὐτοῦ;

217) Ἡ περίμετρος ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 107,60 μ., ἡ δὲ ἄνισος πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι 50μ. Πόσον μῆκος ἔχει κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλα πλευρὰς αὐτοῦ;

218) Ἡ περίμετρος ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 197,60 μ. ἑκατέρα δὲ τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 80,30μ. Πόσον μῆκος ἔχει ἡ τρίτη πλευρὰ αὐτοῦ;

219) Μετρήσατε τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὰς τοῦ τριγώνου ΔΕΖ (Σχ. 58).



Σχ. 59.

§ 62. Βάσις, ὕψος καὶ διάμεσος τριγώνου. ***Βάσις τριγώνου καλεῖται μία οἱαδήποτε πλευρὰ αὐτοῦ.*** Ἄς ληφθῇ ὡς βάσις τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 59) ἡ ΒΓ. Ἡ ἀπόστασις ΑΔ τῆς κορυφῆς Α ἀπὸ τῆς βάσεως ΒΓ καλεῖται ***ὕψος*** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ὁμοίως, ἂν ΖΗ εἶναι ἡ βάσις τοῦ ΕΖΗ, ὕψος αὐτοῦ θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις ΕΘ τῆς κορυφῆς Ε ἀπὸ τῆς ΖΗ.

Γενικῶς: ***Ὕψος τριγώνου καλεῖται ἡ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀπόστασις τῆς ἀπέναντι κορυφῆς.***

Εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ὡς βάσις καὶ ὕψος λαμβάνονται συνήθως αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας· εἰς δὲ τὰ ἰσοσκελῆ ὡς βάσις λαμβάνεται ἡ ἄνισος πλευρὰ ἑκάστου.

Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΜ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς. Καλεῖται δὲ τοῦτο ***διάμεσος*** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Γενικῶς: ***Διάμεσος τριγώνου λέγεται πᾶν εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζει μία κορυφὴ καὶ τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς αὐτοῦ.***

Ἀσκήσεις. 220) Μετρήσατε τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὸ ὕψος ΕΘ τοῦ τριγώνου ΕΖΗ (Σχ. 59).

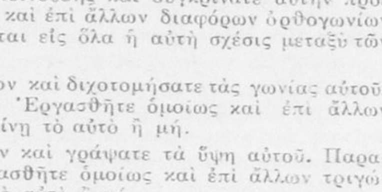
211) Κατασκευάσατε τυχὸν τρίγωνον καὶ γράψατε τὰς τρεῖς διαμέσους αὐτοῦ. Παρατηρεῖτε κοινόν τι εἰς τὰς διαμέσους ταύτας; Ἐργασθῆτε ὁμοίως καὶ ἐπὶ ἄλλων τριγώνων καὶ παρατηρήσατε, ἂν πάντοτε συμβαίνῃ τὸ αὐτό.

222) Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον τρίγωνον, γράψατε τὴν διάμεσον, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης καὶ συγκρίνατε αὐτὴν πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν. Ἐργασθῆτε ὁμοίως καὶ ἐπὶ ἄλλων διαφόρων ὀρθογωνίων τριγώνων καὶ ἀποφανθῆτε, ἂν ὑφίσταται εἰς ὅλα ἡ αὐτὴ σχέσις μεταξὺ τῶν συγκρινομένων εὐθ. τμημάτων.

223) Κατασκευάσατε τυχὸν τρίγωνον καὶ διχοτομήσατε τὰς γωνίας αὐτοῦ. Παρατηρεῖτε κοινόν τι μεταξὺ αὐτῶν; Ἐργασθῆτε ὁμοίως καὶ ἐπὶ ἄλλων τριγώνων καὶ παρατηρήσατε ἂν συμβαίνῃ τὸ αὐτὸ ἢ μή.

224) Κατασκευάσατε τυχὸν τρίγωνον καὶ γράψατε τὰ ὕψη αὐτοῦ. Παρατηρεῖτε κοινόν τι μεταξὺ αὐτῶν; Ἐργασθῆτε ὁμοίως καὶ ἐπὶ ἄλλων τριγώνων καὶ παρατηρήσατε, ἂν συμβαίνῃ τὸ αὐτὸ ἢ μή.

§ 63. Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν τριγώνων. Α΄. Ἔστω τυχὸν ἐκ χάρτου τρίγωνον ΑΒΓ. Ἄς ἀποχωρήσωμεν τὰς γωνίας Α καὶ Β αὐτοῦ καὶ ἃς θέσωμεν αὐτὰς εἰς τὰς θέσεις ΑΓΔ καὶ ΔΓΕ. Παρατηροῦμεν οὕτως ὅτι αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ ΓΕ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας



Σχ. 60.

καὶ ἑπομένως (§ 28 Α΄) $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=2$ ὀρθαί.

Ἄρα: ***Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας.***

Β΄. Ἐκ τούτου ἕπεται εὐκόλως ὅτι: ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν, τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουσι καὶ τὰς ἄλλας αὐτῶν γωνίας ἴσας.***

Γ΄. Ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν τὴν ἰδιότητα (§ 17) συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι: ***Ἑκάστη πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων.***

Ἀσκήσεις. 225) Τριγώνου τινὸς δύο γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα $1\frac{2}{5}$ ὀρθ. Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς τρίτης γωνίας αὐτοῦ;

226) Τριγώνου τινὸς δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ κάθε μία εἶναι $\frac{4}{7}$ ὀρθ. Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς τρίτης γωνίας αὐτοῦ;

227) Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων (πλὴν τῆς ὀρθῆς) γωνιῶν ὀρθογωνίου τριγώνου; Ποῖον τὸ εἶδος τῶν γωνιῶν τούτων;

228) Ὀρθογωνίου τριγώνου μία γωνία εἶναι $\frac{4}{5}$ ὀρθ. Πόσον μέγεθος ἔχει κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας γωνίας αὐτοῦ;

229) Τριγώνου δύο γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα 87°35΄. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη γωνία αὐτοῦ.

230) Δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἑκάστη εἶναι 62°20΄. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη γωνία αὐτοῦ.

231) Ὀρθογωνίου τριγώνου μία γωνία εἶναι 38°15΄20΄΄. Νὰ εὑρεθῇ ἑκάστη τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ.

232) Μία γωνία τριγώνου εἶναι 46° 18΄ 20΄΄, αἱ δὲ ἄλλαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Πόσων μοιρῶν κτλ. εἶναι κάθε μία ἀπὸ αὐτάς;

233) Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ μίαν γωνίαν 60°. Συγκρίνατε τὴν μικροτέραν πλευράν του μὲ τὴν ὑποτείνουσαν καὶ εὕρετε ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ αὐτῶν.

234) Μετρήσατε τὰς γωνίας Α καὶ Β τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 60) καὶ τὴν γωνίαν ΑΓΕ. Συγκρίνατε δὲ ταύτην πρὸς τὸ ἄθροισμα Α+Β.

§ **64. Πρόβλημα 1.** ***Ἐὰν δοθῶσιν αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ φ τριγώνου (Σχ. 61), νὰ κατασκευασθῇ ἡ τρίτη γωνία αὐτοῦ.***

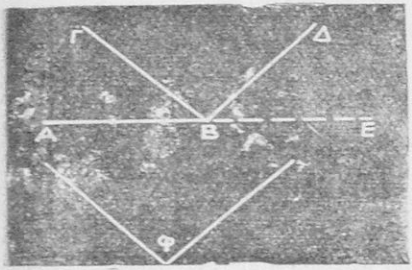
Λύσις. Πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς ΒΓ κατασκευάζομεν γωνίαν ΓΒΔ ἴσην πρὸς τὴν φ καὶ προεκτείνομεν τὴν ΑΒ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς κορυφῆς. Οὕτω σχηματίζεται ἡ γωνία ΔΒΕ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη. Διότι πράγματι εἶναι ΑΒΓ+φ+ΔΒΕ=2 ὀρθ.

ΣΗΜ. Τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν, μόνον ὅταν ΑΒΓ+φ<2 ὀρθ.

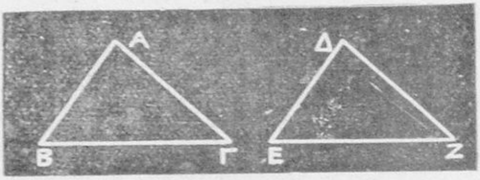
§ 65. Γενικαὶ περιπτώσεις ἰσότητος τριγώνων. ***Δύο τρίγωνα λέγονται ἴσα, ἐὰν ἐφαρμόζωσι καὶ σχημματίζωσι***

ἓν μόνον τρίγωνον, ὅταν τεθῇ καταλλήλως τὸ ἓν ἐπάνω εἰς τὸ ἄλλο.

Α΄. Ἔστω ΑΒΓ τυχὸν ἐκ χαρτονίου τρίγωνον. Ἂς κατασκευάσωμεν γωνίαν Δ ἴσην πρὸς τὴν Α καὶ ἃς λάβωμεν εἰς τὰς πλευρὰς αὐτῆς τμῆμα ΔΕ=ΑΒ καὶ ΔΖ=ΑΓ· ἃς χαράξωμεν δὲ τὸ ΕΖ. Ἂν διὰ ψαλίδος ἀποχωρίσωμεν τὸ ΑΒΓ καὶ θέσωμεν αὐτὸ ἐπὶ τοῦ ΔΕΖ οὕτως ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσιν αἱ γωνίαι Α καὶ Δ καὶ αἱ ἴσαι πλευραὶ



Σχ. 61.



Σχ. 62.

αὐτῶν, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ἐφαρμόζουσιν.

Ἄρα : ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.***

Β΄. Ἂς ὁρίσωμεν εὐθ. τμῆμα ΕΖ ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ ἃς κατασκευάσωμεν τρίγωνον ΔΕΖ μὲ πλευρὰν ΕΖ καὶ γωνίας Ε=Β καὶ Ζ=Γ. Ἐὰν ἐπιθέσωμεν τὸ ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ ΔΕΖ οὕτως ὥστε ἡ κορυφὴ Β νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς Ε καὶ ἡ ΒΓ ἐπὶ τῆς ΕΖ, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ἐφαρμόζουσιν.

Ἄρα : ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς εἰς ταύτην προσκειμένας γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.***

Ἂν πάλιν ὁρίσωμεν εὐθύγραμμον τμῆμα ΕΖ=ΒΓ καὶ γράψωμεν τὰς περιφερείας (Ε, ΒΑ) καὶ (Ζ, ΓΑ) ὁρίζομεν τὴν κορυφὴν Δ τριγώνου ΕΔΖ. Ἐὰν τοῦτο ἐπιθέσωμεν καταλλήλως ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ, παρατηροῦμεν ὅτι ἐφαρμόζει ἐπ᾽ αὐτοῦ.

Ἄρα : ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσιν ὅλας τὰς πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.***

ΣΗΜ. Δύο ἴσα τρίγωνα ἔχουσιν ἓν πρὸς ἓν ὅλα τὰ ὁμοειδῆ αὐτῶν στοιχεῖα. Εἶναι δὲ ἴσαι αἱ γωνίαι ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι κεῖται ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν.

Διὰ τῶν κατασκευῶν, μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ὁποίων ἐφθάσαμεν τὰ προηγούμενα συμπεράσματα, λύομεν τὰς ἑξῆς προβλήματα.

§ **66. Πρόβλημα Ι.** ***Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν καὶ τῆς γωνίας αὐτῶν.***

§ **67. Πρόβλημα ΙΙ.** ***Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἀπὸ μίαν πλευρὰν καὶ ἀπὸ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας.***

§ **68. Πρόβλημα ΙΙΙ.** ***Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἀπὸ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ.***

'Ασκήσεις. 235) 'Εὰν αἱ κάθετοι πλευραὶ δύο ὀρθογωνίων τριγώνων εἶναι ἴσαι μία πρὸς μίαν, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. Διατί ;

236) 'Εὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσι τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν ἀπὸ τὰς ὀξείας γωνίας ἴσας, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. Διατί ;

237) 'Εὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσι μίαν ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρὰς ἴσην καὶ μίαν ἀπὸ τὰς ὀξείας γωνίας ἴσην, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα Διατί;

238) Κατασκευάσατε τυχὸν τρίγωνον καὶ γράψατε τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα ὁρίζουσι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Συγκρίνατε δὲ τὰ τρίγωνα, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ ἀρχικὸν τρίγωνον.

ΣΗΜ. Θὰ συγκριθῶσιν αἱ πλευραὶ τοῦ μεσαίου πρὸς τὰς πλευρὰς ἑκάστου τῶν ἄλλων.

239) Κατασκευάσατε γωνίαν Α καὶ ὁρίσατε ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ ἴσα. Γράψατε ἔπειτα τὴν διχοτόμον τῆς Α, ὁρίσατε ἐπ' αὐτῆς τυχὸν σημεῖον Δ καὶ γράψατε τὰ εὐθ. τμήματα ΔΒ, ΔΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΓΔ εἶναι ἴσα.

240) Διχοτομήσατε γωνίαν Α καὶ γράψατε τὰς ἀποστάσεις τυχόντος σημείου της διχοτόμου ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας. Συγκρίνατε τὰς ἀποστάσεις ταύτας πρὸς ἀλλήλας καὶ προσπαθήσατε νὰ εὕρητε τὸν λόγον τῆς μεταξὺ αὐτῶν ὑπαρχούσης σχέσεως.

241) Κατασκευάσατε τρίγωνον τοῦ ὁποίου μία γωνία 60°, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς ἔχουσι μήκη 0,06μ ἡ μία καὶ 0,06 ἡ ἄλλη.

242) Κατασκευάσατε τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ ἔχει μῆκος 0,04μ καὶ αἱ προσκείμεναι εἰς αὐτὴν γωνίαι $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς ἡ μία καὶ 35° ἡ ἄλλη. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς τρίτης γωνίας.

243) Κατασκευάσατε τρίγωνον μὲ πλευρὰς 0,03μ, 0,04μ καὶ 0,05μ. Μετρήσατε δὲ καὶ ὅλας τὰς γωνίας αὐτοῦ καὶ καθορίσατε ἐκ τούτων τὸ εἶδος τοῦ τριγώνου.

§ **69. Ἰδιότητες τῶν ἰσοσκελῶν καὶ ἰσοπλεύρων τριγώνων.** Ἔστω ΑΒΓ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν ΒΓ. Ἐὰν φέρωμεν τὴν διάμεσον ΑΔ, διαιρεῖται τοῦτο εἰς δύο τρίγωνα ἴσα (§ 65 Γ΄) καὶ ἑπομένως συμπεραίναμεν ὅτι : $\widehat{Β} = \widehat{Γ}$ $Β\widehat{Α}Δ = Δ\widehat{Α}Γ$ καὶ $Α\widehat{Δ}Β = Α\widehat{Δ}Γ = 1$ ὀρθ.

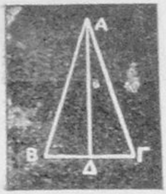
Ἄρα : ***Αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.***

Β΄. ***Ἡ διάμεσος ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν.***

Ἐκ τούτων ἕπεται εὐκόλως ὅτι :

Α΄.) ***Πᾶν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.***

Β΄.) ***Αἱ διάμεσοι ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι καὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν αὐτοῦ καὶ ὕψη αὐτοῦ.***



Σχ. 63.

Ἀσκήσεις. 244) Πόσον μέγεθος ἔχει κάθε μία ἀπὸ τὰς γωνίας ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου;

245) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνίαι εἶναι $\frac{2}{7}$ ὀρθῆς γωνίας. Πόσον εἶναι τὸ μέτρον ἑκάστης τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ;

246) Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία γωνία νὰ εἶναι 45°, εὕρετε τὰ μέτρα τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ καὶ συγκρίνατε πρὸς ἀλλήλας διὰ τοῦ διαβήτου τὰς καθέτους πλευρὰς αὐτοῦ.

247) Μετρήτατε τὴν γωνίαν Β τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 63) καὶ ὑπολογίσατε ἔπειτα τὰς ἄλλας γωνίας αὐτοῦ.

248) Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης τῶν γωνιῶν ἰσοπλεύρου τριγώνου;

249) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς γωνίας.

250) Νατασκευασθῇ γωνία 30°.

251) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου μία τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν εἶναι 53° 20΄ 37΄΄. Νὰ ὑπολογισθῇ ἑκάστη τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ.

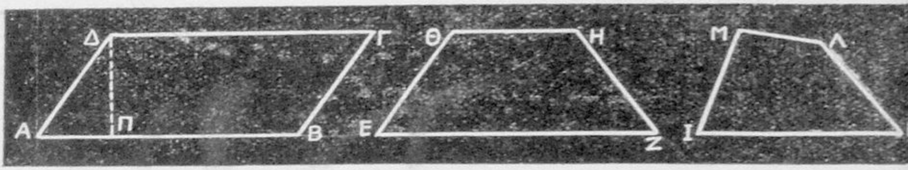
Τετράπλευρα

§ 70. Εἴδη τετραπλεύρων. Κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῶν πρισμάτων εἴδομεν ὅτι ἑκάστης παραπλεύρου ἕδρας αὐτῶν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι. Ἐκαλέσαμεν δὲ τὰς ἕδρας ταύτας παραλληλόγραμμα. Καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 64) ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους, ἤτοι εἶναι καὶ αὐτὸ ***παραλληλόγραμμον.***

Γενικῶς: ***Παραλληλόγραμμον καλεῖται πᾶν τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι.***

Βάσις παραλληλογράμμου καλεῖται τυχοῦσα πλευρὰ αὐτοῦ.

Ὕψος παραλληλογράμμου καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῆς βάσεως ἀπὸ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς αὐτοῦ. Π. χ. ἂν ΑΒ εἶναι ἡ βάσις τοῦ ΑΒΓΔ, ὕψος αὐτοῦ εἶναι τὸ τμῆμα ΔΠ.



Σχ. 64.

Τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ ἔχει δύο μόνον πλευρὰς παραλλήλους· καλεῖται δὲ τοῦτο **τραπέζιον**. Γενικῶς:

Τραπέζιον καλεῖται πᾶν τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο μόνον πλευρὰς παραλλήλους.

Αἱ παράλληλοι πλευραὶ τραπεζίου καλοῦνται **βάσεις** αὐτοῦ.

Ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων τραπεζίου καλεῖται **ὕψος** αὐτοῦ.

Ὑπάρχουσι δὲ καὶ τετράπλευρα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουσι παραλλήλους πλευράς. Ταῦτα ἑπομένως δὲν εἶναι παραλληλόγραμμα οὐδὲ τραπέζια. Τοιοῦτον π. χ. εἶναι τὸ ΙΚΛΜ (Σχ. 64).

Ἀσκήσεις. 252) Κατασκευάσατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας ἀνὰ ἓν παραλληλόγραμμον καὶ τραπέζιον. Γράψατε δὲ ἔπειτα τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ τραπεζίου.

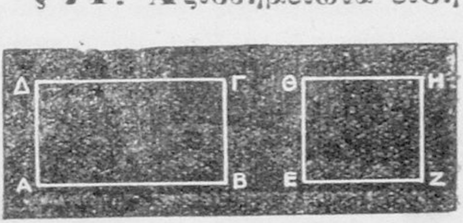
253) Κατασκευάσατε τυχοῦσαν γωνίαν Α καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς λάβετε δύο τμήματα, τὰ ὁποῖα νὰ ἀρχίζωσιν ἀπὸ τὴν κορυφὴν καὶ νὰ ἔχωσι μήκη 0,05μ τὸ ἓν καὶ 0,03 μ τὸ ἄλλο. Ἔπειτα κατασκευάσατε παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου μία γωνία νὰ εἶναι ἡ Α καὶ δύο πλευραὶ τὰ ὁρισθέντα τμήματα τῶν πλευρῶν αὐτῆς.

254) Κατασκευάσατε ἐπὶ τοῦ πίνακος παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου μία γωνία νὰ εἶναι 60°, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς νὰ ἔχωσι μήκη 0,4μ ἡ μία καὶ καὶ 0,3 μ ἡ ἄλλη.

255) Κατασκευάσατε παραλληλόγραμμον μὲ βάσιν 0,05μ, ὕψος 0,03μ καὶ ἡ μία τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν νὰ εἶναι 30°.

256) Κατασκευάσατε τραπέζιον, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ νὰ εἶναι καὶ ὕψος αὐτοῦ, αἱ δὲ βάσεις νὰ ἔχωσι μήκη 0,05μ ἡ μία καὶ 0,03μ ἡ ἄλλη. Μετρήσατε ἔπειτα τὰς μὴ ὀρθὰς γωνίας αὐτοῦ καὶ εὕρετε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

§ 71. Ἀξιοσημείωτα εἴδη παραλληλογράμμων.



Σχ. 65.

Α΄) Κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῶν ὀρθῶν πρισμάτων παρετηρήσαμεν ὅτι αἱ παράπλευροι ἕδραι αὐτῶν εἶναι παραλληλόγραμμα, τῶν ὁποίων ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Καὶ τῶν παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ

(Σχ. 65) αἱ γωνίαι εἶναι ὅλαι ὀρθαί, ἤτοι καὶ ταῦτα εἶναι ***ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα*** ἢ ἁπλῶς ***ὀρθογώνια***.

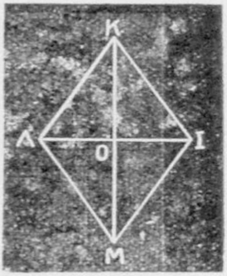
Γενικῶς: ***Ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καλεῖται πᾶν παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαί.***

Βάσις καὶ ***ὕψος*** ὀρθογωνίου εἶναι δύο προσκείμεναι πλευραὶ αὐτοῦ.

Κατὰ τὴν ἐξέτασιν τοῦ κύβου εἴδομεν ὅτι αἱ ἕδραι του ἔχουσιν ὅλας τὰς γωνίας ὀρθὰς καὶ τὰς πλευρὰς ἴσας. Ἐκαλέσαμεν δὲ αὐτὰς τετράγωνα. Καὶ τοῦ ὀρθογωνίου ΕΖΗΘ (Σχ. 65) αἱ πλευραὶ εἶναι ὅλαι ἴσαι, ἤτοι καὶ τοῦτο εἶναι ***τετράγωνον.***

Γενικῶς: ***Τετράγωνον καλεῖται πᾶν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι.***

Β΄) Τοῦ παραλληλογράμμου ΙΚΛΜ (Σχ. 66) αἱ πλευραὶ εἶναι ὅλαι ἴσαι, αἱ δὲ γωνίαι εἶναι διάφοροι ὀρθῆς· τοῦτο καλεῖται ***ῥόμβος.***



Σχ. 66.

Γενικῶς: ***Ῥόμβος καλεῖται πᾶν παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ γωνίαι δὲν εἶναι ὀρθαί.***

Ὑπάρχουσι καὶ παραλληλόγραμμα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουσιν ὀρθὰς γωνίας, οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἴσας. Ἑπομένως ταῦτα δὲν εἶναι ὀρθογώνια, οὐδὲ ῥόμβοι (Σχ. 67).

Ἀσκήσεις. 257) Κατασκευάσατε τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 0,04μ καὶ χαράξατε τὰς διαγωνίους αὐτοῦ.

258) Μετρήσατε τὰς γωνίας, εἰς τὰς ὁποίας ἑκάστη γωνία τετραγώνου διαιρεῖται ὑπὸ τῆς ἀντιστοίχου διαγωνίου, ἀνεύρετε τὴν μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουσαν σχέσιν καὶ τὸν λόγον ταύτης.

269) Ἐὰν ἑκάστη πλευρὰ τετραγώνου ἔχῃ μῆκος 15,35μ, πόση εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ;

260) Ἐὰν ἑκάστη πλευρὰ ῥόμβου εἶναι $\frac{3}{4}$ μέτρου, πόση εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ;

261) Ἡ περίμετρος τετραγωνικῆς ἀμπέλου εἶναι 265,40μ. Πόσον μῆκος ἔχει κάθε πλευρὰ αὐτοῦ;

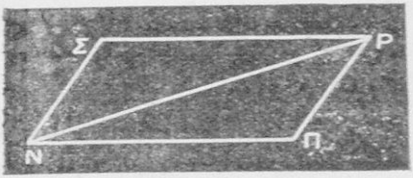
262) Ἡ περίμετρος ῥόμβου εἶναι $21\frac{3}{5}$ μέτρα. Πόση εἶναι ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ;

§ 72. Ἰδιότητες τῶν παραλληλογράμμων. Ἂς κόψωμεν τυχὸν ἐκ χάρτου παραλληλόγραμμον ΝΠΡΣ (Σχ. 67) κατὰ μῆκος τυχούσης διαγωνίου ΝΡ αὐτοῦ. Ἐὰν ἐπιθέσωμεν καταλλήλως τὰ τρίγωνα ΝΠΡ καὶ ΝΡΣ, παρατηροῦμεν ὅτι ἐφαρμόζουσιν. Ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας:

Α΄) ***Ἑκατέρα διαγώνιος παραλληλογράμου διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο τρίγωνα ἴσα.***

Β΄) ***Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶν ι ἴσαι.***

Γ΄) Ἔστω Ο ἡ τομὴ τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμου ΙΚΛΜ. Ἐὰν συγκρίνωμεν διὰ τοῦ διαβήτου τὰ τμήματα αὐτῶν, βλέπομεν ὅτι ΟΙ=ΟΛ καὶ ΟΚ=ΟΜ. (Σχ. 66).



Σχ. 67.

Ἄρα: ***Αἱ διαγώνιοι παντὸς παραλληλογράμμου διχοτομοῦσιν ἀλλήλας.***

Δ΄) Ἄς γράψωμεν δύο εὐθείας τεμνομένας εἴς τι σημεῖον Ο (Σχ. 66) καὶ ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς μιᾶς τμήματα ΟΛ καὶ ΟΙ ἴσα καὶ τὰ ἐπὶ τῆς ἄλλης ΟΚ καὶ ΟΜ ἴσα πρὸς ἄλληλα. Ἐὰν γράψωμεν τὰ εὐθ. τμήματα ΙΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΙ καὶ ἐξελέγξωμεν καταλλήλως τὰς ἀπέναντι πλευράς, βλέπομεν ὅτι αὗται εἶναι παράλληλοι.

Ἄρα: ***Ἐὰν αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου διχοτομοῦσιν ἀλλήλας, τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.***

Ἀσκήσεις. 236). Ἡ περίμετρος παραλληλογράμμου εἶναι 191,40μ, μία δὲ πλευρὰ αὐτοῦ 23,10μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ;

264) Ἡ μία τῶν προσκειμένων πλευρῶν παραλληλογράμμου εἶναι 17,45μ, ἡ δὲ ἄλλη διπλασία ταύτης. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος αὐτοῦ.

265) Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον ἔχον βάσιν 0,05μ καὶ περίμετρον 0,16μ

266) Παραλληλογράμμου δύο προσκείμεναι πλευραὶ ἔχουσι μῆκος 12,60μ. ἡ μία καὶ 10,40μ ἡ ἄλλη. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος αὐτοῦ.

267) Δύο προσκείμεναι πλευραὶ παραλληλογράμμου ἔχουσιν ἄθροισμα 48,50μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος αὐτοῦ.

268) Παραλληλογράμμου μία γωνία εἶναι $\frac{1}{5}$ ὀρθῆς. Πόσον εἶναι τὸ μέτρον τῆς ἀπέναντι γωνίας εἰς μοίρας;

269) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν αἱ προσκείμεναι πλευραὶ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι, τοῦτο εἶναι τετράγωνον.

270) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν αἱ προσκείμεναι πλευραὶ παραλληλογράμμου μὴ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι, τοῦτο εἶναι ῥόμβος.

271) Συγκρίνατε τὰς διαγωνίους ὀρθογωνίου καὶ ἀνεύρετε τὴν μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουσαν σχέσιν.

272) Γράψατε δύο εὐθείας τεμνομένας πλαγίως καὶ ἀπὸ τῆς τομῆς αὐτῶν ἀρχόμενοι λάβετε ἐπ' αὐτῶν τμήματα ΟΑ, ΟΓ ἐπὶ τῆς μιᾶς ΟΒ, ΟΔ, ἐπὶ τῆς ἄλλης ὅλα ἴσα. Γράψατε ἔπειτα τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

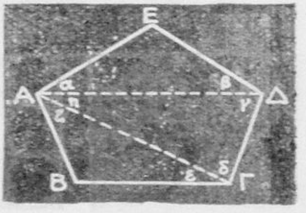
καὶ ἐξελέγξατε τῇ βοηθείᾳ καταλλήλου γεωμετρικοῦ ὀργάνου τὸ εἶδος τοῦ σχηματιζομένου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

273) Γράψατε δύο εὐθείας καθέτως τεμνομένας, ὁρίσατε ἐπ' αὐτῶν 4 εὐθ. τμήματα ἴσα πρὸς ἄλληλα καὶ ἀπὸ τῆς τομῆς ἀρχόμενα. Καθορίσατε τὸ εἶδος τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ ἄκρα τῶν τμημάτων τούτων.

274) Ἐπαναλάβετε τὴν αὐτὴν ἐργασίαν προσέχοντες μόνον νὰ εἶναι τὰ ἐπὶ ἑκάστης εὐθείας τμήματα ἴσα πρὸς ἄλληλα ἀλλὰ διάφορα ἀπὸ τὰ τμήματα τῆς ἄλλης.

275) Κατασκευάσατε ῥόμβον, ὅστις νὰ ἔχῃ διαγωνίους 0,06 καὶ 0,04μ.

§ 73. Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς εὐθ. σχήματος. Ἔστω τυχὸν εὐθ. σχῆμα ΑΒΓΔΕ, τὸ ὁποῖον ἔχει 5 πλευράς. Ἂν φέρωμεν τὰς ἐκ τοῦ Α ἀγομένας διαγωνίους, διαιρεῖται τοῦτο εἰς $5 - 2 = 3$ τρίγωνα. Αἱ γωνίαι ἄρα αὐτοῦ ἔχουσιν ἄθροισμα 2 ὀρθ. $\times (5-2) = (2 \times 5 - 4)$ ὀρθ. $= 6$ ὀρθὰς γωνίας. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι ἑκάστου τετραπλεύρου αἱ γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα $2 \times (4-2) = (2 \times 4 - 4) = 4$ ὀρθ., ἑκάστου ἑξαγώνου $2 \times (6-2) = (2 \times 6 - 4) = 8$ ὀρθ. κτλ. Ἐπειδὴ δὲ καὶ 2 ὀρθ. $= (3 \times 2 - 4)$ ὀρθαί, ἕπεται γενικῶς ὅτι: ***Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς εὐθ. σχήματος εἶναι τόσαι ὀρθαὶ γωνίαι, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν ἠλαττωμένον κατὰ 4.***



Σχ. 68.

Ἀσκήσεις. 276) Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς ὀκταγώνου ἢ δωδεκαγώνου;

277) Ἐὰν μία γωνία παραλληλογράμμου εἶναι $\frac{8}{5}$ ὀρθῆς, πόσον εἶναι τὸ μέτρον ἑκάστης τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ;

278) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν μία γωνία παραλληλογράμμου εἶναι ὀρθή, τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

279) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀπέναντι γωνιῶν παραλληλογράμμου εἶναι $75^o\ 40'\ 24''$. Πόσον εἶναι τὸ μέτρον ἑκάστης γωνίας αὐτοῦ;

280) Ἐὰν μία γωνία ῥόμβου εἶναι $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς, πόσον εἶναι τὸ μέτρον ἑκάστης τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ; Πόσην δὲ γωνίαν σχηματίζει ἑκάστη διαγώνιος μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ ῥόμβου τούτου;

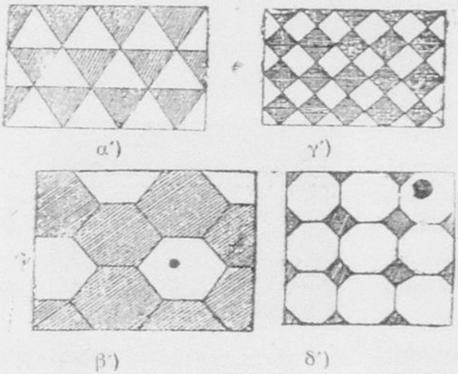
281) Τραπεζίου μία ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις. Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ ὀρθῶν γωνιῶν αὐτοῦ; Ἐὰν μία ἀπὸ αὐτὰς εἶναι $110^o\ 40'\ 52''$, πόσον εἶναι ἡ ἄλλη;

282) Ἐὰν ὅλαι αἱ γωνίαι ἑξαγώνου εἶναι ἴσαι, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης;

§ 74. Κανονικὰ εὐθ. σχήματα. Ἕκαστον τετράγωνον ἔχει ὅλας τὰς πλευρὰς ἴσας καὶ ὅλας τὰς γωνίας ἴσας. Διὰ τοῦτο λέγεται ***κανονικὸν εὐθ. σχῆμα***. Ὁμοίως τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι κανονικὸν εὐθ. σχῆμα.

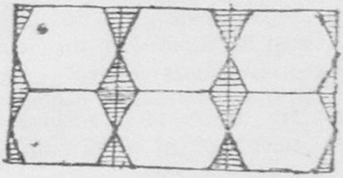
Γενικῶς: ***Κανονικὸν εὐθ. σχῆμα καλεῖται πᾶν εὐθ. σχῆμα, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ καὶ ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.***

Αἱ πλάκες, μὲ τὰς ὁποίας στρώνουσι διαδρόμους, αἰθούσας, αὐλάς, μαγειρεῖα κτλ. εἶναι κανονικὰ εὐθ. σχήματα. Εἰς τὰ σχήματα ταῦτα πρέπει αἱ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν ἓν σημεῖον τοῦ ἐδάφους, νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 4 ὀρθάς, ἵνα μὴ μένῃ μεταξὺ αὐτῶν χάσμα (§ 28 Β΄). Οὕτως, ἐπειδὴ 4 ὀρθ. : 1 ὀρθ. = 4 καὶ 4 ὀρθ. = 1 ὀρθ. × 4, ἔπεται ὅτι 4 γωνίαι τετραγώνου καλύπτουσι τὸ ἔδαφος. Τὰ τετράγωνα λοιπὸν εἶναι κατάλληλα πρὸς ἐπίστρωσιν ἐδάφους.



Σχ. 69.

Ὁμοίως, ἐπειδὴ ἑκάστη γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι $\frac{2}{3}$ ὀρθ καὶ 4 ὀρθ : $\frac{2}{3}$ ὀρθ. = 6, ἔπεται ὅτι $\frac{2}{3}$ ὀρθ × 6 = 4 ὀρθαί, ἤτοι 6 γωνίαι ἰσοπλεύρου τριγώνου καλύπτουσι τὸ ἔδαφος. Τὰ ἰσόπλευρα λοιπὸν τρίγωνα εἶναι κατάλληλα πρὸς ἐπίστρωσιν.



Σχ. 70.

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι καὶ τὰ κανονικὰ ἑξάγωνα εἶναι πρὸς τοῦτο κατάλληλα.

Συνηθέστατα δὲ γίνεται χρῆσις κανονικῶν ὀκταγώνων καὶ τετραγώνων (Σχ. 69 δ΄)· ἐπίσης κανονικῶν ἑξαγώνων καὶ ἰσοπλεύρων τριγώνων (Σχ. 70).

Ἀσκήσεις. 283) Ποῖα ἀπὸ τὰ τετράπλευρα εἶναι σχήματα κανονικά; Ποῖα ἀπὸ τὰ τρίγωνα;

284) Πόσον εἶναι τὸ μέτρον ἑκάστης γωνίας κανονικοῦ δεκαγώνου ἢ δωδεκαγώνου ;

285) Πλάκες σχήματος κανονικοῦ δεκαγώνου εἶναι κατάλληλοι πρὸς ἐπίστρωσιν ἢ ὄχι καὶ διατί ;

286) Κανονικοῦ πολυγώνου αἱ γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα 32 ὀρθάς. Πόσας πλευρὰς ἔχει τοῦτο ; Δυνάμεθα μὲ τοιαῦτα πολύγωνα νὰ ἐπιστρώσωμεν αἴθουσαν ;

287) Εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ κανονικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἢ ὄχι καὶ διατί ;

288) Οἱ ῥόμβοι εἶναι κανονικὰ σχήματα ἢ ὄχι καὶ διατί ;

289) Τίνος κανονικοῦ εὐθ. σχήματος αἱ γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα 720° ;

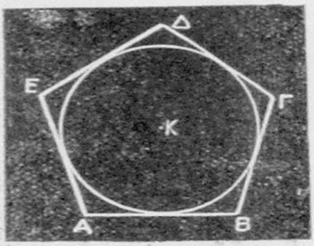
290) Ἰχνογραφήσατε τὸ σχῆμα (69α΄) καὶ τὸ σχῆμα (69γ΄).

291) Κατασκευάσατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας ὀρθογώνιον ἔχον διαστάσεις 3 δακτύλων καὶ 5 δακτύλων καὶ διαιρέσατε αὐτὸ εἰς ἴσα τετράγωνα. Χρωματίσατε δὲ κάθε δεύτερον τετράγωνον διὰ χρώματος μέλανος.

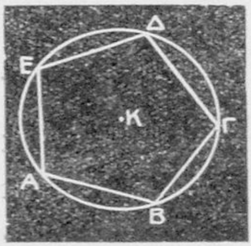
§ 75. Περιγεγραμμένα καὶ ἐγγεγραμμένα εἰς κύκλον κανονικὰ εὐθ. σχήματα. Τοῦ εὐθ. σχήματος ΑΒΓΔΕ (Σχ. 71) ὅλαι αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται τοῦ κύκλου Κ.

Τὸ ΑΒΓΔΕ λέγεται ***περιγεγραμμένον*** περὶ τὸν κύκλον Κ, οὗτος δὲ λέγεται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ΑΒΓΔΕ.

Γενικῶς : ***Εὐθ. σχῆμα λέγεται περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, ἐὰν ὅλαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ἐφάπτωνται τοῦ κύκλου. Κύ-***



Σχ. 71.



Σχ. 72.

κλος λέγεται ἐγγεγραμμένος εἰς εὐθ. σχῆμα, ἂν τοῦτο εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον.

Τοῦ εὐθ. σχήματος ΑΒΓΔΕ (σχ. 72) αἱ πλευραὶ εἶναι ὅλαι χορδαὶ εἰς τὸν κύκλον Κ. Τοῦτο καλεῖται ***ἐγγεγραμμένον*** εἰς τὸν Κ, οὗτος δὲ καλεῖται ***περιγεγραμμένος*** περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ

Γενικῶς : ***Εὐθ. σχῆμα λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, ἂν ὅλαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι χορδαὶ εἰς τὸν κύκλον τοῦτον. Κύκλος λέγεται περιγεγραμμένος περὶ εὐθ. σχῆμα, ἂν τοῦτο εἶναι ἐγγνγραμμένον εἰς τὸ κύκλον τοῦτον.***

Ἐὰν ἐγγεγραμμένον εὐθ. σχῆμα ΑΒΓΔΕ εἶναι κανονικόν, τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ θὰ εἶναι (§ 42 Ε΄) ὅλα ἴσα. Ἀντιστρόφως· ἐὰν τὰ τόξα ταῦτα εἶναι ἴσα, αἱ χορδαὶ αὐτῶν εἶναι ὅλαι ἴσαι (§ 42 Ε΄) καὶ αἱ γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔΕ εἶναι ἐπίσης ἴσαι (§ 58 Β΄).

Τὸ ἐγγεγραμμένον λοιπὸν εὐθ. σχῆμα ΑΒΓΔΕ εἶναι κανονικόν. Ἐὰν δὲ διὰ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως τῆς περιφερείας φέρωμεν ἐφαπτομένας πρὸς αὐτήν, περιγράφεται εὐθ. σχῆμα, ὅπερ εἶναι κανονικόν, ὡς εὐκόλως βεβαιούμεθα διὰ τῆς συγκρίσεως τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

Ἄρα : ***Ἵνα ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον κανονικὸν εὐθ. σχῆμα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς ἰσάριθμα πρὸς τὰς πλευράς του ἴσα τόξα καὶ νὰ φέρωμεν τὰς χορδὰς αὐτῶν. Ἵνα δὲ περιγράψωμεν περὶ κύκλον κανονικὸν εὐθ. σχῆμα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν διὰ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἐφαπτομένας εἰς τὴν περιφέρειαν.***

Ἀσκήσεις 292) Χαράξατε περιφέρειαν κύκλου ἀκτῖνος 0,03μ. καὶ ἐγγράψατε εἰς αὐτὸν τετράγωνον.

293) Χαράξατε περιφέρειαν κύκλου ἀκτῖνος 0,02 μ. καὶ περιγράψατε περὶ αὐτὸ τετράγωνον.

294) Χαράξατε τυχοῦσαν περιφέρειαν κύκλου καὶ ἐγγράψατε καὶ περιγράψατε περὶ αὐτὸν κανονικὸν ὀκτάγωνον.

295) Κατασκευάσατε τετράγωνον πλευρᾶς 0,04μ καὶ ἐγγράψατε εἰς αὐτὸ κύκλον. Εἰς τὸν κύκλον τοῦτον ἐγγράψατε τετράγωνον.

296) Γράψατε περιφέρειαν κύκλου, ἐγγράψατε εἰς αὐτὸν τετράγωνον καὶ εἰς αὐτὸ ἐγγράψατε κύκλον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄.

ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

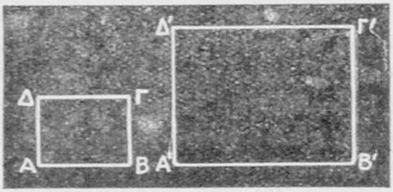
§ 76. Εὐθ. τμήματα ἀνάλογα πρὸς ἄλληλα. Ἂς γράψωμεν ἐπὶ τοῦ τετραδίου δύο εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἀντιστοίχως μήκη 3 δακ. καὶ 5 δακ. Ἂς γράψωμεν δὲ καὶ δύο ἄλλα, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχωσι μήκη $(3\times2)=6$ δακτ. καὶ $(5\times2)=10$ δακ. Τὰ δύο τελευταῖα τμήματα καλοῦνται ***ἀνάλογα*** πρὸς τὰ δύο πρῶτα.

Ὁμοίως τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι μήκη $(2\times3)=6$ δακ. $(4\times3)=12$ δακ. $(5\times3)=15$ δακ. λέγονται ἀνάλογα πρὸς τὰ ἔχοντα μήκη 2 δακ. 4 δακ. 5 δακτύλων.

Γενικῶς : ***Δύο ἢ πλείονα εὐθ. τμήματα λέγονται ἀνάλογα πρὸς ἄλλα ἰσάριθμα, ἂν τὰ μήκη αὐτῶν προκύπτωσι διὰ πολ)σμοῦ τῶν μηκῶν τῶν ἄλλων ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***

Παρατηροῦντες ὅτι $6 \times \frac{1}{3} = 2$, $12 \times \frac{1}{3} = 4$, $15 \times \frac{1}{3} = 5$ συμπεραίνομεν ὅτι καὶ τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι μήκη 2 δακ. 4 δακ, 5 δακ, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἔχοντα μήκη 6 δακ, 12 δακ, 15 δακ. Τὰ δύο εὐθ. τμήματα, τῶν ὁποίων τὰ μήκη γίνονται ἐξ ἀλλήλων διὰ πολ)σμοῦ καλοῦνται ***ἀντίστοιχα*** ἢ ***ὁμόλογα*** τμήματα.

§ 77. Ὅμοια εὐθ. σχήματα. Ἔστωσαν δύο ὀρθογώνια ΑΒΓΔ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄, ὧν τὸ β΄ ἔχει βάσιν (Α΄Β΄)=(ΑΒ)×2 καὶ ὕψος (Α΄Δ΄)=(ΑΔ)×2.



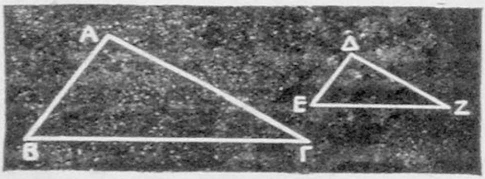
Σχ. 73.

Παρατηροῦντες ὅτι Β΄Γ΄=Α΄Δ΄, Γ΄Δ΄=Α΄Β΄ ΒΓ=ΑΔ καὶ ΔΓ=ΑΒ συμπεραίνομεν ὅτι καὶ (Β΄Γ΄) = (ΒΓ) × 2, (Γ΄Δ΄) = (ΓΔ) × 2. Ἔχουσι λοιπὸν ταῦτα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους. Εἶναι δὲ προφανὲς ὅτι ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν. Τὰ ὀρθογώνια ταῦτα λέγονται ***ὅμοια***.

Γενικῶς : ***Δύο εὐθ. σχήματα λέγονται ὅμοια, ἐὰν αἱ γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν, αἱ δὲ πλευραί, εἰς τὰς ὁποίας πρόσκεινται ἴσαι γωνίαι, εἶναι ἀνάλογοι.***

Αἱ πλευραὶ δύο ὁμοίων σχημάτων, εἰς τὰς ὁποίας πρόσκεινται ἴσαι γωνίαι, λέγονται ὁμόλογοι πλευραί.

§ 78. Ὅμοια τρίγωνα. Α΄) Ἔστω ΔΕΖ τυχὸν τρίγωνον καὶ ΒΓ εὐθ. τμῆμα διπλάσιον τῆς πλευρᾶς ΕΖ. Ἄς κατασκευάσωμεν δὲ γωνίαν Β=Ε καὶ Γ=Ζ. Οὕτω σχηματίζεται τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Α=Δ (§ 63 Β΄) Ἐὰν συγκρίνωμεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ πρὸς τὰς ΔΕ, ΔΖ, βλέπομεν ὅτι ΑΒ=ΔΕ×2 καὶ ΑΓ=ΔΖ×2. Εἶναι λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ὅμοια.



Σχ. 74.

Ἄρα : ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ὅμοια.***

Β΄. Ἔστω τυχὸν τρίγωνον ΔΕΖ καὶ ἄλλο ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον κατεσκευάσαμεν οὕτως ὥστε νὰ ἔχῃ ΒΓ=ΕΖ×2, ΑΒ=ΔΕ×2, ΑΓ=ΔΖ×2. Ἐὰν τὰς γωνίας Δ, Ε, Ζ συγκρίνωμεν πρὸς τὰς Α, Β, Γ, βλέπομεν ὅτι Δ=Α, Ε=Β, Ζ=Γ. Εἶναι λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα ὅμοια.

Ἄρα : ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.***

Β΄. Ἔστω ΔΕΖ τυχὸν τρίγωνον καὶ Α γωνία ἴση πρὸς τὴν Δ. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς Α ἂς ὁρίσωμεν τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς ΔΕ×2 καὶ ΔΖ×2. Ἐὰν γράψωμεν τὸ εὐθ. τμῆμα ΒΓ καὶ συγκρίνωμεν αὐτὸ πρὸς τὴν πλευρὰν ΕΖ, βλέπομεν ὅτι ΒΓ=ΕΖ×2. Ἔχουσι λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα εἶναι ὅμοια

Ἄρα : ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῆς ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.***

Εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν· ἴσαι δὲ γωνίαι αἱ κείμεναι ἀπέναντι ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἀσκήσεις. 297) Κατασκευάσατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας τυχὸν τρίγωνον καὶ ἄλλο ὅμοιον πρὸς αὐτὸ ἄνευ κατασκευῆς γωνιῶν.

298) Κατασκευάσατε τυχὸν τρίγωνον καὶ γράψατε τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζουσι τὰ μέσα δύο πλευρῶν αὐτοῦ. Συγκρίνατε ἔπειτα τοῦτο πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν αὐτοῦ καὶ προσπαθήσατε νὰ δικαιολογήσητε τὸ συμπέρασμα τῆς συγκρίσεως ταύτης.

299) Κατασκευάσατε τυχὸν τρίγωνον καὶ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Προσπαθήσατε νὰ βεβαιωθῆτε, ἂν ταῦτα εἶναι ἢ οὐχὶ ὅμοια.

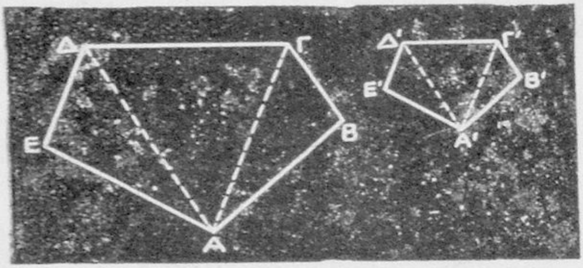
300) Ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι 3μ ἡ μία καὶ 4μ ἡ ἄλλη. Ἄλλο δὲ ὀρθογώνιον τρίγωνον ὅμοιον μὲ αὐτὸ ἔχει μίαν κάθετον πλευρὰν 6μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης τοῦ δευτέρου τούτου τριγώνου ;

301) Κατασκευάσατε τρίγωνον καὶ ἄλλο, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὰς πλευρὰς παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ πρώτου. Προσπαθήσατε δὲ νὰ βεβαιωθῆτε, ἂν ταῦτα εἶναι ἢ οὐχὶ ὅμοια.

302) Κατασκευάσατε δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν αὐτῶν καθέτους μίαν πρὸς μίαν. Προσπαθήσατε δὲ νὰ βεβαιωθῆτε, ἂν ταῦτα εἶναι ἢ οὐχὶ ὅμοια.

§ 79. Ἀνάλυσις ὁμοίων πολυγώνων εἰς ὅμοια τρίγωνα. Ἔστωσαν δύο ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄

τοιαῦτα ὥστε ΑΒ=Α΄Β΄×2, ΒΓ=Β΄Γ΄×2 κτλ. Ἂν φέρωμεν τὰ διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ, Α΄Γ΄, Α΄Δ΄ αὐτῶν καὶ συγκρίνωμεν ταύτας μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου, βλέπομεν ὅτι ΑΓ=Α΄Γ΄×2 καὶ



Σχ. 75.

ΑΔ=Α΄Δ΄×2. Τὰ τρίγωνα ὅθεν ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ εἶναι (§ 78 Β΄) ὅμοια ἓν πρὸς ἓν πρὸς τὰ Α΄Β΄Γ΄, Α΄Γ΄Δ΄, Α΄Δ΄Ε΄.

Ἄρα: ***Αἱ διαγώνιοι δύο ὁμοίων πολυγώνων, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ ὁμολόγους κορυφὰς αὐτῶν, διαιροῦσι ταῦτα εἰς τρίγωνα ἰσάριθμα καὶ ὅμοια ἓν πρὸς ἕν.***

Ἀπεικόνισις ἐπιπέδων σχημάτων ἐπὶ χάρτου.

§ 80. Διάγραμμα εὐθ. σχήματος. Πολλάκις λαμβάνομεν ἀνάγκην νὰ ἀπεικονίσωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου γήπεδον, τὸ ὁποῖον ὁ χάρτης δὲν δύναται νὰ περιλάβῃ. Τότε γράφομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου σχῆμα ὅμοιον πρὸς ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον λέγεται ***διάγραμμα*** ἐκείνου.

ΣΗΜ. Εἰς τὰ ἀκόλουθα θὰ σημειώνωμεν μὲ κεφαλαῖα γράμματα πᾶν σχῆμα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους θεωρούμενον μὲ τὰ ἀντίστοιχα δὲ μικρὰ τὸ διάγραμμα αὐτοῦ. Ἡ ἀπεικόνισις δὲ γίνεται ὡς ἀκολούθως.

§ 81. Α΄) Ἀπεικόνισις τριγώνου. Ἡ συνηθεστέρα καὶ ἁπλουστέρα μέθοδος ἀπεικονίσεως τριγώνου εἶναι ἡ ἀκόλουθος. Κατασκευάζομεν τρίγωνον μὲ πλευρὰς ἴσας πρὸς ὡρισμένον ὑποπολλαπλάσιον $\left(\text{π. χ. τὸ } \frac{1}{10000}\right)$ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ ἀπεικονίσωμεν (§ 78 Β΄).

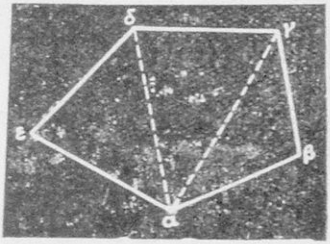
ΣΗΜ. Ἡ κλασματικὴ μονὰς $\frac{1}{10000}$ καλεῖται ***κλῖμαξ*** ἢ ***σμίκρυνσις***. Ὁ παρονομαστὴς αὐτῆς δεικνύει πόσας φορὰς εὐθ. τμῆμα τοῦ ἀπεικονιζομένου σχήματος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἐπὶ τοῦ διαγράμματος ὁμολόγου. Αἱ συνήθεις κλίμακες εἶναι $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ κτλ. καὶ αἱ $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{50}$ $\frac{1}{500}$ κλπ.

Ἀσκήσεις. 303) Ἀγρὸς ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι 60 μέτρα ἡ μία καὶ 80 μ. ἡ ἄλλη. Νὰ ἀπεικονισθῇ οὗτος ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$.

304) Τρίγωνον ἔχει πλευρὰς 3400 μ., 1800 μ., 2000 μ. Νὰ ἀπεικονισθῇ τοῦτο ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{100000}$ καὶ νὰ μετρηθῶσιν αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

305) Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα 1 : 10000 τρίγωνον τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 50000 μ.

§ 82. Β΄). Ἀπεικόνισις οἱωνδήποτε εὐθ. σχημάτων. Ἡ ἀπεικόνισις τυχόντος εὐθ. σχήματος ΑΒΓΔΕ γίνεται συνήθως ὡς ἑξῆς. Κατασκευάζομεν τρίγωνον αβγ ἀπεικονίζον τὸ ΑΒΓ ὑπὸ ὡρισμένην κλίμακα π. χ. $\frac{1}{10000}$.



Σχ. 76

Ἔπειτα ὑπὸ τὴν αὐτὴν κλίμακα ἀπεικονίζομεν τὸ ΑΓΔ διὰ τοῦ αγδ καὶ τέλος τὸ ΑΔΕ διὰ τοῦ αδε. Τὸ αβγδε εἶναι τὸ διάγραμμα τοῦ ΑΒΓΔΕ.

Ἀσκήσεις. 306) Ἄμπελος ἔχει σχῆμα τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου (ΑΓ)=450 μέτρα, (ΑΒ)=350μ., (ΒΓ)=180μ., (ΔΓ)=250μ. καὶ (ΔΑ)=260μ. Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα 1 : 1000.

307) Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα 1 : 1000 τραπέζιον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσεις 50μ. καὶ 35μ. ἡ δὲ τρίτη πλευρὰ εἶναι 12 μ. καὶ σχηματίζει μετὰ τῆς μεγαλυτέρας βάσεως γωνίαν $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς.

308) Παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἡ βάσις ΑΒ εἶναι 1400 μέτρα, ἡ πλευρὰ ΑΔ εἶναι 1360 μέτρα καὶ ἡ διαγώνιος ΑΓ εἶναι 1500 μέτρα. Νὰ ἀπεικονισθῇ τοῦτο ὑπὸ κλίμακα 1 : 10000.

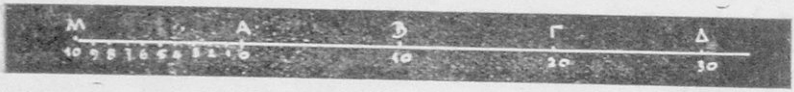
§ 83. Γ΄). Ἀπεικόνισις κύκλου καὶ κυκλικοῦ τομέως. Κυκλικὸς ἀγρὸς ἀπεικονίζεται διὰ κύκλου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα ὡρισμένον ὑποπολλαπλάσιον τῆς ἀκτῖνος ἐκείνου. Κυκλικὸς δὲ τομεὺς ἀπεικονίζεται διὰ κυκλικοῦ τομέως ἴσης γωνίας καὶ ἀκτῖνος ἴσης πρὸς ὡρισμένον ὑποπολλαπλάσιον τῆς ἀκτῖνος ἐκείνου.

Ἀσκήσεις. 309) Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα 1 : 1000 κύκλος ἀκτῖνος 8μ.

310) Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα 1 : 1000 κυκλ. τομεὺς 60° καὶ ἀκτῖνος 5μ.

§ 84. Γραφικὴ κλῖμαξ. Ἡ ἀπεικόνισις εὐθ. τμήματος ὑπὸ ὡρισμένην κλίμακα ἢ ἡ εὕρεσις τοῦ πραγματικοῦ μήκους εὐθ. τμήματος, τὸ ὁποῖον ἀπεικονίζεται ὑπὸ ὡρισμένην κλίμακα, γίνεται πολλάκις καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐπὶ εὐθείας ὁρίζομεν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰς δεξιὰ τμήματα ΑΒ ΒΓ, ΓΔ κτλ. μήκους 0,01 μ. Ἕκαστον ἀπὸ αὐτὰ ἀπεικονίζει εὐθ. τμῆμα τοῦ ἐδάφους μήκους 0,01.1000 = 10 μ. Εἰς τὴν ἀρχὴν δὲ τούτων γράφομεν κατὰ σειρὰν τοὺς ἀριθμούς, 0, 10, 20, 30 κ.τ.λ.



Σχ. 77.

Προεκτείνομεν δὲ τὴν εὐθεῖαν ταύτην καὶ πρὸς τὰ ἀριστερά, τοῦ 0 καὶ ὁρίζομεν τμῆμα ΜΑ μήκους 0,01 μ. Διαιροῦμεν δὲ τοῦτο εἰς δέκα ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα ἀριθμοῦμεν ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, Τὸ καθ' ἓν λοιπὸν ἀπὸ τὰ μέρη τοῦτα εἶναι $\frac{1}{10}$ τοῦ ΑΒ καὶ ἀπεικονίζει εὐθ. τμῆμα ἐδάφους μήκους $10\mu.\frac{1}{10}=1$ μ.

Ἡ εὐθεῖα αὕτη ΜΑΔ καλεῖται γραφικὴ κλῖμαξ.

Ἐὰν ἡ ἀριθμητικὴ κλῖμαξ εἶναι 1 : 100, τὰ μεγάλα τμήματα τῆς γραφικῆς ταύτης κλίμακος παριστῶσι μέτρα, τὰ δὲ μικρὰ δέκατα τοῦ μέτρου.

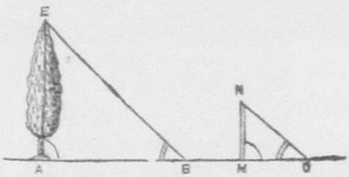
Ἂν τώρα θέλωμεν νὰ ὁρίσωμεν ἐπὶ εὐθείας τοῦ σχεδιαγράμματος (1 : 1000) εὐθ. τμῆμα μήκους 37 μ, θέτομεν τὸ ἓν ἄκρον διαβήτου εἰς τὴν διαίρεσιν 30, τὸ δὲ ἄλλο εἰς τὴν διαίρεσιν 7 τοῦ ΑΜ. Τὴν ἀπόστασιν δὲ ταύτην τῶν ἄκρων τοῦ διαβήτου μεταφέρομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας τοῦ σχεδιαγράμματος.

Τὸ δὲ μῆκος εὐθ. τμήματος, τὸ ὁποῖον εἰς τὸ σχεδιάγραμμα ἀπεικονίζεται μὲ εὐθ. τμῆμα αβ εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς. Θέτομεν τὸ ἓν σκέλος τοῦ διαβήτου, εἰς τὸ α τὸ δὲ ἄλλο εἰς β. Ἔπειτα στερεώνομεν τὰ σκέλη τοῦ διαβήτου ὥστε νὰ μὴ μεταβληθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν ἄκρων αὐτοῦ καὶ μεταφέρομεν ταῦτα ἐπὶ τῆς γραφικῆς κλίμακος καὶ τὸ μὲν ἓν εἰς 0, τὸ δὲ ἄλλο δεξιὰ αὐτοῦ. Ἐὰν τὸ β' τοῦτο ἄκρον πέσῃ ἐπὶ τῆς διαιρέσεως π. χ. 30 τὸ ζητούμενον μῆκος εἶναι 30 μέτρα. Ἐὰν δὲ πέσῃ μεταξὺ 20 καὶ 30, θέτομεν τὸ ἓν ἄκρον τοῦ διαβήτου εἰς τὴν διαίρεσιν 20, τὸ δὲ ἄλλο πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς διαιρέσεως ταύτης. Ἐὰν τὸ ἄκρον τοῦτο πέσῃ ἐπὶ τῆς διαιρέσεως 6 τοῦ ΑΜ, τὸ ζητούμενον μῆκος εἶναι 26 μέτρα. Ἂν δὲ πέσῃ μεταξὺ τῶν διαιρέσεων 6 καὶ 7 τοῦ ΑΜ, τὸ μῆκος θὰ ὑπερβαίνῃ τὰ 26 μέτρα κατὰ μέρος τοῦ μέτρου, τὸ ὁποῖον διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἐκτιμῶμεν.

Ἐφαρμογαὶ ὁμοίων σχημάτων.

§ 85. Πρόβλημα Ι. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος δένδρου ἐκ τῆς σκιᾶς αὐτοῦ.***

Λύσις. Ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, εἰς τὸ ὁποῖον ὑψοῦται τὸ δένδρον καὶ τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται ὁριζόντιον, ἐμπήγομεν κατακόρυφον ῥάβδον



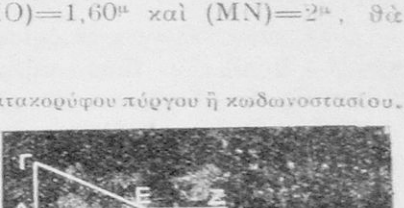
Σχ. 78.

ΜΝ, ἡ ὁποία ῥίπτει σκιὰν ΜΟ, τῆς ὁποίας μετροῦμεν τὸ μῆκος. Ἐπειδὴ αἱ ἡλιακαὶ ἀκτῖνες ΕΒ καὶ ΝΟ θεωροῦνται παράλληλοι ἕνεκα τῆς μεγάλης ἀποστάσεως τοῦ Ἡλίου, εἶναι (§ 38 Α′) Β=Ο· ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ Α=Μ, ἕπεται ὅτι καὶ Ε=Ν, τὰ δὲ τρίγωνα ΑΒΕ, ΜΟΝ εἶναι ὅμοια (§ 78 Α′). Ἐὰν λοιπὸν εἶναι (ΑΒ)=(ΜΟ)×ρ, (1), θὰ εἶναι καὶ (ΑΕ)=(ΜΝ)×ρ. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς (1) προκύπτει ὅτι $\rho=\frac{(AB)}{(MO)}$ ἕπεται ὅτι $(AE)=MN\times\frac{(AB)}{(MO)}$ (2).

Ἂν π.χ. εἶναι $(AB)=8^{\mu}$, $(MO)=1{,}60^{\mu}$ καὶ $(MN)=2^{\mu}$, θὰ εἶναι $(AE)=2\times\frac{8}{1{,}6}=10\mu$.

ΣΗΜ. Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὸ ὕψος κατακορύφου πύργου ἢ κωδωνοστασίου.

§ 86. Πρόβλημα. ***II. Νὰ εὕρωμεν τὸ πλάτος ποταμοῦ χωρὶς νὰ μεταβῶμεν εἰς τὴν ἀπέναντι ὄχθην.***



Σχ. 79.

Λύσις. Εἰς σημεῖον Α τῆς ὄχθης στηρίζομεν κατακορύφως κανόνα ΑΓ ὀλίγον μικρότερον ἀπὸ τὸ ἀνάστημά μας. Κατὰ μῆκος αὐτοῦ μετακινοῦμεν καθέτως πρὸς αὐτὸν ἄλλον κανόνα ΔΖ, μέχρις οὗ θέτοντες εἰς τὸ Γ τὸν ὀφθαλμόν μας νὰ βλέπωμεν σημεῖον Β τῆς ἀπέναντι ὄχθης διὰ μέσου ὀπῆς Ε τοῦ κανόνος ΔΖ.

Ἕνεκα τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ, ΔΓΕ (§ 78 Α΄) εὑρίσκομεν, προηγουμένως, ὅτι $(\text{ΑΒ})=(\text{ΔΕ})\times\frac{(\text{ΑΓ})}{(\text{ΓΔ})}$. Ἐὰν π. χ. εἶναι (ΑΓ)= 1,40 μ., (ΔΕ=) 1μ. καὶ (ΓΔ)=0,40, εὑρίσκομεν ὅτι

$(\text{ΑΒ})=1\times\frac{1,40}{0,40}=3,5$ μέτρα.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

311) Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα 1 : 1000 ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν 700μ. καὶ ὕψος 200μ. Τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαγράμματος αὐτοῦ νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου τοῦ ὀρθογωνίου τούτου.

312) Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα 1 : 50 τετραγωνικὴ ἄμπελος, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ εἶναι 4 μέτρα.

313) Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα 1 : 1000 ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 60 μέτρων.

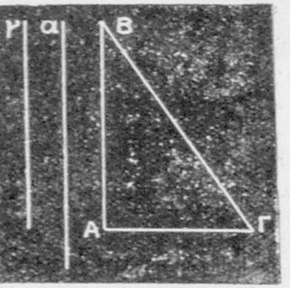
314) Τραπεζίου αἱ βάσεις εἶναι 140μ. καὶ 35μ. ἡ δὲ μία ἀπὸ τὰς ἄλλας πλευρὰς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις καὶ εἶναι 32μ. Νὰ ἀπεικονισθῇ τοῦτο ὑπὸ κλίμακα 1 : 1000.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

§ 87. Πρόβλημα I. ***Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὑποτείνουσαν καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσας πρὸς δοθέντα εὐθ. τμήματα α,γ.***

Λύσις. Ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς ὀρθῆς γωνίας Α ὁρίζομεν τμῆμα ΑΒ=γ. Ἔπειτα γράφομεν τὴν περιφέρειαν (Β, α) ἥτις τέμνει τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἴς τι σημεῖον Γ. Ἄγομεν τέλος τὴν ΒΓ καὶ σχηματίζεται τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.



Σχ. 80.

ΣΗΜ. Ἵνα ὑπάρχῃ λύσις, πρέπει νὰ εἶναι α>γ.

Ἀσκήσεις. 715) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθ. τρίγωνον ἔχον ὑποτείνουσαν 0,06μ. καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν 0,03μ. Μετρήσατε τὰς ὀξείας γωνίας αὐτοῦ καὶ παρατηρήσατε μήπως ὑπάρχει σχέσις τις μεταξὺ αὐτῶν διάφορος τῆς παρεχούσης τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

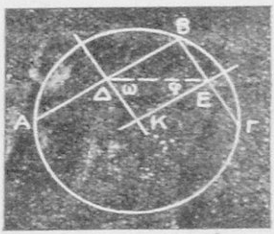
316) Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία γωνία εἶναι $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς γωνίας καὶ ἡ ὑποτείνουσα ἔχει μῆκος 0,05 μ.

317) Κατασκευάσατε τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία γωνία εἶναι $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς γωνίας, αἱ δύο πλευραί της ἔχουσι μήκη 0,02μ. ἡ μία καὶ 0,15μ. ἡ ἄλλη. Μετρήσατε ἔπειτα τὴν τρίτην πλευρὰν καὶ τὰς ἄλλας γωνίας αὐτοῦ.

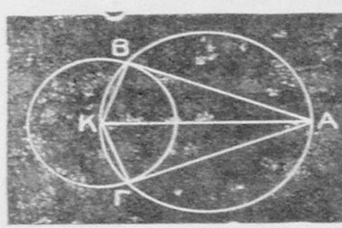
318) Εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ τριγώνου μὲ πλευρὰς 0,01μ. 0,02μ. καὶ 0,03 μ. ἢ ὄχι καὶ διατί;

§ 88. Πρόβλημα. II. ***Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τρία σημεῖα Α, Β, Γ, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ὅλα εἰς μίαν εὐθεῖαν.***

Λύσις. Ἄγομεν τὰς καθέτους εἰς τὰ μέσα τῶν ΑΒ καὶ ΒΓ ἔστω δὲ Κ ἡ τομὴ αὐτῶν. Μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΑ γράφο-



Σχ. 81.



Σχ. 82.

μεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία προφανῶς περνᾷ ἀπὸ τὸ Α. Ἐπειδὴ δὲ (§ 23 Δ′) εἶναι ΚΑ=ΚΒ=ΚΓ, αὕτη διέρχεται καὶ ἀπὸ τὰ Β καὶ Γ· εἶναι ἄρα ἡ ζητουμένη.

Ἀσκήσεις. 319) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον τόξου.

320) Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία ὁρίζει ἐπὶ δοθείσης εὐθείας χορδὴν μήκους 0,03 μ καὶ διέρχεται ἀπὸ ὡρισμένον σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας ταύτης.

321) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας Α ὁρίσατε τμήματα ΑΒ μήκους 0,03 μ καὶ ΑΓ μήκους 0,04 μ. Γράψατε ἔπειτα τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, μετρήσατε τὴ διάμετρον αὐτῆς καὶ συγκρίνατε αὐτὴν πρὸς τὸ εὐθ. τμῆμα ΒΓ.

§ 89. Πρόβλημα III. ***Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς δοθέντος κύκλου Κ, νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ.***

Λύσις. Γράφομεν τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον ΑΚ· ἔστωσαν δὲ Β, Γ τὰ κοινὰ σημεῖα ταύτης καὶ τῆς δοθείσης περιφερείας. Γράφομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ, αἵτινες εἶναι ἀμφότεραι ἐφαπτόμεναι εἰς τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν. Πράγματι ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΒΚ εἶναι ὀρθὴ (§ 58 Γ΄), ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΒ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς. Εἶναι ἄρα (§ 43 Γ΄) ἡ ΑΒ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Κ. Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ τὴν ΑΓ.

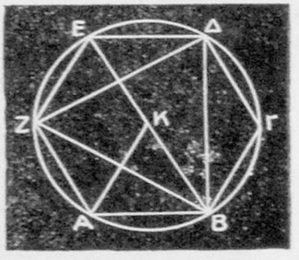
Ἀσκήσεις. 322) Συγκρίνατε τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ τῶν ἐφαπτομένων (Σχ. 82) καὶ ἀνεύρετε τὴν μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουσαν σχέσιν μεγέθους. Δοκιμάσατε ἂν αὕτη διατηρεῖται, ὅταν τὸ Α ἢ ὁ κύκλος ἢ καὶ ἀμφότερα μεταβάλλωνται.

323) Μετρήσατε τὴν γωνίαν ΒΑΓ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τὴν ΒΚΓ. Εὕρετε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν. Μετρήσατε καὶ συγκρίνατε τὰς γωνίας ΒΑΚ καὶ ΚΑΓ ὡς καὶ τὰς ΒΚΑ καὶ ΓΚΑ.

§ 90. Πρόβλημα IV. ***Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον.***

Ἐὰν $\widehat{AB}$ εἶναι ἕκτον περιφερείας θὰ εἶναι $A\widehat{K}B = 360^\circ : 6 = 60^\circ$ καὶ ἑπομένως $\widehat{A} + \widehat{B} = 120^\circ$, ἄρα $\widehat{A} = \widehat{B} = A\widehat{K}B = 60$ (Σχ. 83).

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΚΒ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἑπομένως ΑΒ=ΚΑ. Ἵνα λοιπὸν διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 6 ἴσα μέρη, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ἐπ᾿ αὐτῆς διαδοχικῶς τόξα, ὧν ἕκαστον ἔχει χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα καὶ νὰ εἶναι μικρότερον ἡμιπεριφερείας. Ἐὰν φέρωμεν εἶτα τὰς χορδὰς τῶν τόξων τούτων, σχηματίζομεν τὸ ζητούμενον κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ.



Σχ. 83.

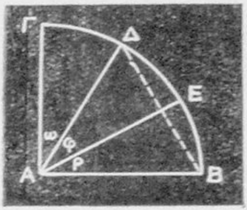
§ 91. Πρόβλημα V. ***Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κύκλον ἰσόπλευρον τρίγωνον.***

Λύσις. Ἐὰν $\widehat{AB} = \widehat{B\Gamma} = \widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{\Delta E} = \widehat{EZ} = \widehat{ZA} = \frac{1}{6}$ περιφερείας θὰ εἶναι $\widehat{B\Gamma\Delta} = \widehat{\Delta EZ} = \widehat{ZAB} = \frac{1}{3}$ περιφερείας. Ἐὰν ἄρα φέρωμεν τὰς χορδὰς τῶν τόξων τούτων, σχηματίζεται τὸ ζητούμενον ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΔΖ.

§ 92. Πρόβλημα VI. ***Νὰ διαιρεθῇ ὀρθὴ γωνία Α εἰς τρία ἴσα μέρη.***

Λύσις. Καθιστῶμεν τὴν γωνίαν Α ἐπίκεντρον καὶ ἔστω ΒΓ τὸ ἀντίστοιχον τόξον. Ἐπ' αὐτοῦ ὁρίζομεν τὰ τόξα ΒΔ καὶ ΓΕ ἴσα πρὸς τὸ ἕκτον τῆς περιφερείας καὶ ἄγομεν τὰς ΑΕ, ΑΔ. Οὕτως ἡ Α διηρέθη εἰς τὰς γωνίας ω, φ, ρ. Λέγω ὅτι ω=φ=ρ=30°. Πράγματι· ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΔΒ εἶναι ἰσόπλευρον, θὰ εἶναι φ+ρ=60°, ἄρα ω=30°. Ὁμοίως ἕνεκα τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΓΕ εἶναι ω+φ=60° καὶ ἑπομένως ρ=30°. Εἶναι δὲ

$$φ=90°-(ω+ρ)=30°.$$



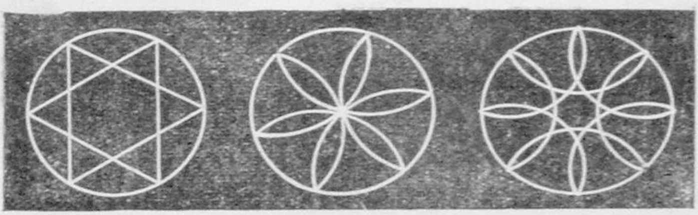
Σχ. 84.

Ἀσκήσεις. 324) Γράψατε μὲ ἀκτῖνα 0,03μ περιφέρειαν κύκλου καὶ ἐγγράψατε καὶ περιγράψατε περὶ αὐτὸν κανονικὸν ἑξάγωνον.

325) Γράψατε μὲ ἀκτῖνα 0,02μ περιφέρειαν κύκλου καὶ ἐγγράψατε καὶ περιγράψατε περὶ αὐτὸν ἰσόπλευρον τρίγωνον. Συγκρίνατε δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πρὸς τὴν τοῦ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

326) Εἰς δοθέντα κύκλον ἐγγράψατε κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ἰσόπλευρον τρίγωνον. Χαράξατε τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου ἀπὸ τὴν πλευρὰν ἑκάστου καὶ συγκρίνατε ἑκάστην τῶν ἀποστάσεων τούτων πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἄλλου.

327) Γράψατε μὲ ἀκτῖνα 0,04μ περιφέρειαν κύκλου καὶ ἐγγράψατε εἰς



Σχ. 85.

αὐτὸν κανονικὸν δωδεκάγωνον. Εὕρετε δὲ πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη γωνία αὐτοῦ.

328) Περιγράψατε περὶ κύκλον ἀκτῖνος 0,04μ κανονικὸν δωδεκάγωνον.

329) Κανονικὸν ἑξάγωνον ἔχει πλευρὰν 600 μέτρων. Νὰ ἀπεικονισθῇ τοῦτο ὑπὸ κλίμακα 1: 1000.

330) Ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχει πλευρὰν 3600 μέτρων. Νὰ ἀπεικονισθῇ τοῦτο ὑπὸ κλίμακα 1 : 100000.

331) Ἰχνογραφήσατε τὰ σχήματα 85.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

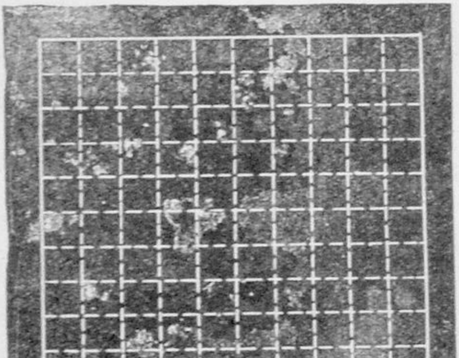
ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1ον. Μέτρησις τῶν εὐθ. σχημάτων

§ **93. Μονάδες ἐπιφανειῶν.** Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν ἐπιφάνειαν, συγκρίνομεν αὐτὴν πρὸς ὡρισμένην καὶ γνωστὴν ἐπιφάνειαν. Τὴν ὡρισμένην καὶ γνωστὴν ταύτην ἐπιφάνειαν καλοῦμεν ***μονάδα***. Διὰ τῆς συγκρίσεως ταύτης εὑρίσκομεν ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἐμετρήθη. Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ πλῆθος τοῦτο τῶν μονάδων ἢ καὶ μερῶν αὐτῆς, καλεῖται ***ἐμβαδὸν*** τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

ΣΗΜ. Συνήθως τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἐπιφανείας σημειοῦμεν μὲ τὰ γράμματα αὐτῆς κλεισμένα ἐντὸς παρενθέσεως Π.χ. (ΑΒΓΔ) σημαίνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ΑΒΓΔ.

Αἱ διάφοροι μονάδες, μὲ τὰς ὁποίας μετροῦμεν τὰς ἐπιφανείας, καλοῦνται ***μονάδες ἐπιφανειῶν***. Συνηθέστεραι μονάδες ἐπιφανειῶν εἶναι αἱ ἑξῆς: α΄) ***Τὸ τετραγωνικὸν μέτρον***, τὸ ὁποῖον εἶναι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν ἴσην πρὸς ἓν μέτρον.



Σχ. 86.

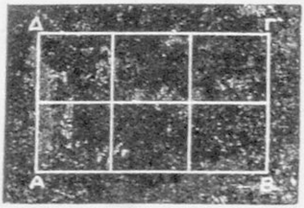
β΄) Τὰ ὑποπολλαπλάσια τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου, τὰ ὁποῖα εἶναι: ***ἡ τετραγωνικὴ παλάμη*** $= \frac{1}{100}$ τετρ. μέτρου· ***ὁ τετρ. δάκτυλος*** =

$\frac{1}{100}$ τετρ. παλ.$=\frac{1}{10000}$ τετρ. μέτρου· ***ἡ τετρ. γραμμὴ***$=\frac{1}{100}$ τετρ. δακ.$=\frac{1}{10000}$ τετρ. παλ.$=\frac{1}{1000000}$ τ. μέτρου.

γ΄) Τὰ πολλαπλάσια τοῦ τετρ. μέτρου, τὰ ὁποῖα εἶναι: ***Τὸ Βασιλικὸν*** στρέμμα$=1000$ τετρ. μέτρα. ***Τὸ παλαιὸν στρέμμα*** $=1270$ τετρ. μέτρα. Τὸ τετρ. χιλιόμετρον$=1000000$ τετρ. μέτρα.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων γίνεται συνήθως χρῆσις τοῦ τεκτονικοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως, ὁ ὁποῖος ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{16}$ τοῦ τετρ. μέτρου.

§ **94. Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ μετρήσωμεν τυχὸν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ. Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι μετρήσαντες τὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ ὕψος ΑΔ αὐτοῦ εὕρομεν $(ΑΒ)=3^{μ}$ καὶ $(ΑΔ)=2^{μδ}$. Ἂς διαιρέσωμεν τὴν μὲν ΑΒ εἰς 3, τὴν δὲ ΑΔ εἰς 2 ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας ἂς φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν ἄλλην. Βλέπομεν οὕτω ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ διαιρεῖται εἰς $3\times2=6$ τετρ. μέτρα.



Σχ. 87.

Ἂν ὀρθογωνίου ἡ βάσις εἶναι $15,35^{μ}=1535^{δ}$ καὶ τὸ ὕψος $3,7^{μ}=370^{δ}$, ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ $1535\times370=567950$ τ. δ.$=\frac{567950}{10000}$τ. μ.$=56,7950$ τ.μ.$=(15,35\times3,7)$ τ.μ.

Ἄρα ***Τὸ ἐμβαδὸν (Ε) παντὸς ὀρθογωνίου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως (β) ἐπὶ τὸ ὕψος (υ) αὐτοῦ:***

Ἤτοι $Ε=β\times υ$.

Ἀσκήσεις. 332) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν μὲν 25,05 μ. ὕψος δὲ 10 μ;

333) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν 100 μ. καὶ ὕψος 73,34μ;

334) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν περίμετρος εἶναι 40μ, μία δὲ πλευρὰ αὐτοῦ 8 μ;

335) Πρόκειται νὰ φυτευθῇ ἄμπελος σχήματος ὀρθογωνίου καὶ ἐμβαδοῦ 600 τ. μέτρων. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ πλάτος αὐτῆς, ἂν τὸ μῆκος εἶναι 30 μέτρων;

336) 'Ορθογωνίου τὸ μὲν ἐμβαδὸν εἶναι 3675,6 τετρ. μέτρα, ἡ δὲ βάσις 100 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ ;

337) 'Επώλησέ τις ἀγρὸν ὀρθογώνιον ἔχοντα μῆκος 50 μέτρων καὶ πλάτος 30 μ. πρὸς 400 δραχμὰς τὸ βασιλικὸν στρέμμα. Πόσα χρήματα ἔλαβεν ;

338) 'Ορθογώνιον οἰκόπεδον ἔχει βάσιν 150 μέτρων καὶ ὕψος 63 μέτρων. 'Εκ πόσων τετραγωνικῶν τεκτονικῶν πήχεων ἀποτελεῖται τοῦτο ;

339) 'Ηγόρασέ τις οἰκόπεδον πρὸς 50 δραχμὰς τὸν τεκτονικὸν τετραγωνικὸν πῆχυν. Τὸ οἰκόπεδον τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἔχει βάσιν 200 μ καὶ ὕψος 135 μ. Πόσα χρήματα ἔδωκεν ;

340) Δωματίου τὸ μῆκος εἶναι 5μ καὶ τὸ πλάτος 4μ. Πόσοι πήχεις τάπητος πλάτους 2μ χρειάζονται διὰ νὰ στρωθῇ τὸ πάτωμα αὐτοῦ ;

341) Κατασκευάσατε ἐπὶ τοῦ πίνακος ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν 15 τετρ. δακτύλων καὶ βάσιν 5 δακτύλων.

342) Κατασκευάσατε ἐπὶ τοῦ πίνακος ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν 0,0020 τετρ. μέτρου καὶ ὕψος 0,04 μ.

343) Κατασκευάσατε ἐπὶ τοῦ πίνακος ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ βάσιν 3 παλαμῶν καὶ ὕψος 15 δακτύλων καὶ ὑπολογίσατε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

§ 95. 'Εμβαδὸν τετραγώνου. 'Επειδὴ πᾶν τετράγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ὅλαι ἴσαι, ἕπεται εὐκόλως ὅτι :

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τετραγώνου εἶναι γινόμενον τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της.

'Εὰν π.χ. τετράγωνόν τι ἔχῃ πλευρὰν 5μ, τὸ ἐμβαδόν του εἶναι $5 \times 5 = 25$ τετρ. μέτρα.

ΣΗΜ. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ γινόμενον παντὸς ἀριθμοῦ α ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του καλεῖται καὶ τετράγωνον τοῦ α. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ α σημειοῦται οὕτω α^2.

Κατὰ ταῦτα, ἂν α εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τετραγώνου καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶναι $E = \alpha^2$.

'Ασκήσεις. 344) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἔχει μῆκος 8,05μ ;

345) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 105,36μ ;

346) Τετράγωνον ἔχει ἐμβαδὸν 144 τετρ. μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ;

347) Τετράγωνον ἔχει ἐμβαδὸν 225 τετρ. μέτρα. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ ;

348) Διάδρομος ὀρθογώνιος ἔχει μῆκος 8μ, πλάτος 3μ καὶ εἶναι στρωμένος μὲ τετραγωνικὰς πλάκας. 'Εὰν ἡ πλευρὰ ἑκάστης πλακὸς εἶναι 2 παλάμαι, πόσας πλάκας ἔχει ὁ διάδρομος οὗτος ;

349) Τετράγωνον οἰκόπεδον πλευρᾶς 30μ, 20 ἐπωλήθη πρὸς 45 δραχμὰς τὸν τετκ. τετραγωνικὸν πῆχυν. 'Αντὶ πόσων χρημάτων ἐπωλήθη τὸ ὅλον ;

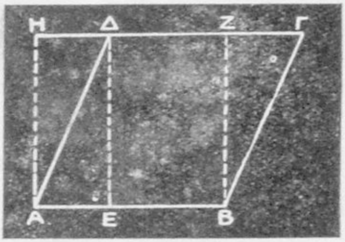
350) Κατασκευάσατε τετράγωνον πλευρᾶς 3 παλαμῶν καὶ εὕρετε πόσον μέρος τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου εἶναι τοῦτο.

351) 'Εντὸς τετραγώνου πλευρᾶς 1μ κατασκευάζομεν 4 τετράγωνα, καθ'

ἓν τῶν ὁποίων ἔχει μίαν γωνίαν κοινὴν μὲ τὸ ἀρχικὸν τετράγωνον καὶ πλευρὰν 6 δακτύλων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία μένει, ἂν ἀπὸ τὸ ἀρχικὸν τετράγωνον ἀφαιρεθῶσι τὰ τετράγωνα ταῦτα.

352) Κατασκευάσατε τετράγωνον πλευρᾶς 6 παλαμῶν καὶ μὲ βάσεις τὰς πλευρὰς αὐτοῦ καὶ ὕψη 6 δακτύλων κατασκευάσατε ὀρθογώνια ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία καλύπτεται ἀπὸ τὸ ἀρχικὸν τετράγωνον καὶ ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια ταῦτα.

§ 96. Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ μετρήσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΒΓΖ ὑποβάλλωμεν εἰς παράλληλον μετάθεσιν κατὰ τὴν ὁδηγὸν ΓΔ, μέχρις οὗ ἡ ΓΒ καταλάβῃ τὴν θέσιν ΔΑ, τὸ τρίγωνον ΒΓΖ καταλαμβάνει τὴν θέσιν ΑΔΗ. Οὕτω δὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ μετασχηματίζεται εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΖΗ. Ἐπειδὴ δὲ (ΑΒΓΔ)=(ΑΒΖΗ) καὶ (ΑΒΖΗ)=(ΑΒ).(ΔΕ), ἕπεται ὅτι καὶ (ΑΒΓΔ)=(ΑΒ).(ΔΕ).



Σχ. 88.

Ἄρα: ***Τὸ ἐμβαδὸν (Ε) παντὸς παραλληλογράμμου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως (β) ἐπὶ τὸ ὕψος (υ) αὐτοῦ. Ἤτοι Ε=β×υ.***

Ἀσκήσεις. 353) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν μὲν 12,2 μ. ὕψος δὲ 5,7 μ.

354) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν 274 μέτρα καὶ ὕψος 75 παλάμας.

355) Δύο ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου ἔχουσιν ὁμοῦ μῆκος 28,46 μ, ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν εἶναι 8,76 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

356) Παραλληλόγραμμον ἔχει ἐμβαδὸν 5 βασιλικῶν στρεμμάτων καὶ βάσιν 100 μέτρων. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ;

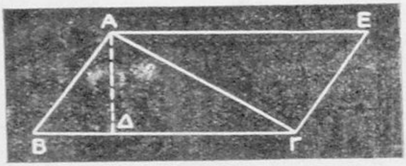
357) Ἡ περίμετρος ῥόμβου εἶναι 65,40 μ, ἡ δὲ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 10 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

358) Τὸ ἐμβαδὸν ῥόμβου εἶναι 0,3 βασ. στρέμματος καὶ ἡ ἀπόστασις δύο ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 12 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος τοῦ ῥόμβου τούτου.

359) Κατασκευάσατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας ῥόμβον, ὅστις νὰ ἔχῃ περίμετρον 12 δακτύλων καὶ μία γωνία του νὰ εἶναι 45°. Νὰ εὕρητε ἔπειτα καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

§ 97. Ἐμβαδὸν τριγώνου. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ μετρήσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐὰν ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α καὶ Γ φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὰς ΒΓ καὶ ΑΒ, σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (§ 65, Α΄). Ἐπειδὴ δὲ (ΑΒΓΕ)=(ΒΓ)×(ΑΔ), ἕπεται ὅτι

$$(ΑΒΓ)=\frac{(ΒΓ)\times(ΑΔ)}{2}$$



Σχ. 89.

Ἄρα: ***Τὸ ἐμβαδὸν (Ε) τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως (β) ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ (υ).***

Ἤτοι εἶναι $Ε=\frac{β\times υ}{2}$.

Ἀσκήσεις. 360) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ εἶναι 27μ, ἡ δὲ ἀπόστασις τῆς ἀπέναντι κορυφῆς ἀπὸ ταύτης εἶναι 12μ.

361) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου μία ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρὰς εἶναι 25μ, ἡ δὲ ἄλλη 46, 30μ.

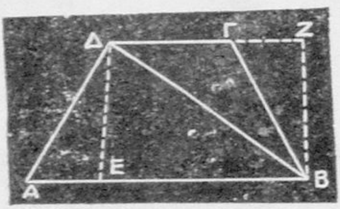
362) Τρίγωνον ἔχει ἐμβαδὸν 2 παλαιῶν στρεμμάτων καὶ ὕψος 40μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς βάσεως αὐτοῦ.

363) Ἀγρὸς τριγωνικὸς καὶ ἄλλος τετραγωνικὸς ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν. Τοῦ μὲν τριγωνικοῦ ἡ βάσις εἶναι 400μ, τοῦ δὲ τετραγωνικοῦ ἡ πλευρὰ εἶναι 200μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου ἀγροῦ καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγωνικοῦ.

364) Κατασκευάσατε τετράγωνον πλευρᾶς δύο δακτύλων καὶ τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου τούτου καὶ νὰ συγκριθῇ πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀρχικοῦ τετραγώνου.

365) Ἠγόρασέ τις ἀντὶ 15000 δραχμῶν τριγωνικὸν οἰκόπεδον πρὸς 11,25 δραχμὰς τὸν τεκτονικὸν τετραγωνικὸν πῆχυν. Ἐὰν ἡ βάσις του εἶναι 50 μέτρα, πόσον εἶναι τὸ ὕψος του;

366) Κατασκευάσατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας τυχὸν τρίγωνον, διαιρέσατε μίαν πλευρὰν εἰς ὅσα θέλετε ἴσα μέρη (§ 36) καὶ φέρετε ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς εὐθείας πρὸς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως. Νὰ εὕρητε ἔπειτα ποίαν σχέσιν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα διῃρέθη τὸ ἀρχικὸν τρίγωνον.



Σχ. 90.

§ 98. Ἐμβαδὸν τραπεζίου. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ. Ἂν φέρωμεν τὴν διαγώνιον ΒΔ, διαιρεῖται τὸ τραπέζιον εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ $(ΑΒΔ)=\frac{(ΑΒ)\times(ΔΕ)}{2}$ καὶ $(ΒΓΔ)=\frac{(ΔΓ)\times(ΒΖ)}{2}$ καὶ ΔΕ=ΒΖ, ἕπεται ὅτι $(ΑΒΓΔ)=\frac{(ΔΓ)\times(ΔΕ)}{2}+\frac{(ΑΒ)\times(ΕΔ)}{2}=\frac{(ΑΒ)+(ΔΓ)}{2}(ΔΕ)$.

Ἄρα: ***Τὸ ἐμβαδὸν (Ε) τραπεζίου εἶναι γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν βάσεων [Β καὶ β] ἐπὶ τὸ ὕψος (υ αὐτοῦ).***

Ἤτοι:
$$Ε=\frac{Β+β}{2}\times υ.$$

Ἀσκήσεις. 367) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, τοῦ ὁποίου μία τῶν παραλλήλων πλευρῶν ἔχει μῆκος 45, ἡ ἄλλη 20μ καὶ τὸ ὕψος εἶναι 12,5μ;

368) Ἀπὸ πόσα β. στρέμματα ἀποτελεῖται ἀγρὸς σχήματος τραπεζίου, τοῦ ὁποίου μία τῶν παραλλήλων πλευρῶν ἔχει μῆκος 62μ, ἡ ἄλλη 85μ καὶ τὸ ὕψος εἶναι 20μ;

369) Τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου εἶναι 1,265 βασιλ. στρέμματα, ἡ μία βάσις του ἔχει μῆκος 60, 40μ καὶ ἡ ἄλλη 40, 80μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος του.

370) Τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου εἶναι 0,7 βασ. στρέμματα, τὸ ὕψος 20μ καὶ μία βάσις 40μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἄλλης βάσεως.

371) Κατασκευάσατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΑΒ ἔχει μῆκος 10 δακτύλων καὶ ἡ ΑΔ 6 δακτύλων. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΓΔ ὁρίσατε δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ τοιαῦτα ὥστε νὰ εἶναι (ΓΕ)=1δ καὶ (ΔΖ)=1δ. Γράψατε ἔπειτα τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΖΑ καὶ ΕΒ καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος ΑΒΕΖ.

372) Κατασκευάσατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ βάσιν ΒΓ ἴσην πρὸς 1, 2 παλ. καὶ ὕψος ΑΔ ἴσον πρὸς 8 δακτύλους. Γράψατε τὸ εὐθ. τμῆμα ΕΖ, τὸ ὁποῖον ὁρίζουσι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος ΒΓΖΕ.

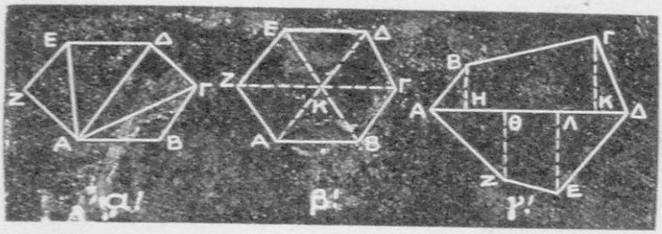
§ 99. Ἐμβαδὸν οἱωνδήποτε εὐθυγράμμων σχημάτων. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τυχόντος τετραπλεύρου ἢ πολυγώνου, διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς τρίγωνα, ὡς τὰ σχήματα α´ καὶ β´ (ἀριθμ. 91) δεικνύουσιν. Εὑρίσκομεν ἔπειτα τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν τριγώνων τούτων καὶ προσθέτομεν τὰ ἐμβαδὰ ταῦτα. Συνήθως ἄγομεν τὴν μεγαλυτέραν διαγώνιον (Σχ. 91 γ´) καὶ ἀπὸ τὰς ἄλλας κορυφὰς καθέτους ἐπ᾽ αὐτήν. Οὕτω τὸ πολύγωνον διαιρεῖται οὐ μόνον εἰς τρίγωνα ἀλλὰ καὶ εἰς τραπέζια καὶ ὀρθογώνια ἐνίοτε.

Ἀσκήσεις. 373) Ἀγρός τις ἔχει σχῆμα τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος ἔχει μῆκος 80μ, αἱ δὲ ἀποστάσεις τῶν λοιπῶν κορυφῶν ἀπὸ ταύτης εἶναι 5μ ἡ μὲν καὶ 35μ ἡ ἄλλη. Ἀπὸ πόσα βασιλ. στρέμματα ἀποτελεῖται ὁ ἀγρὸς οὗτος;

374) Πενταγώνου αἱ πλευραὶ εἶναι κατὰ σειρὰν 10μ, 20μ, 30μ, 40μ, 50μ. Ἓν δὲ σημεῖον αὐτοῦ ἀπέχει ἀπὸ τὰς πλευρὰς κατὰ σειρὰν 23μ, 25μ, 20μ, 17μ, καὶ 10μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

375) Κανονικοῦ ἑξαγώνου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 2 μέτρα, ἡ δὲ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ ἑκάστης πλευρᾶς εἶναι 1,73μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

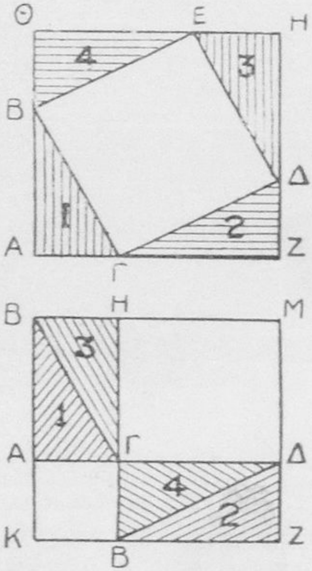
376) Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 3 δακτύλων περιγράψατε τετράπλευρον. Με-



Σχ. 91.

τρήσατε τὰς πλευρὰς αὐτοῦ καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου τούτου.

§ 100. Σχέσεις μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου. α') Ἔστω ΑΖΗΘ τετράγωνον καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἂς ὁρίσωμεν τὰ τμήματα ΑΓ, ΖΔ, ΗΕ ΘΒ ὅλα ἴσα πρὸς ἄλληλα. Ἐὰν γράψωμεν τὰ εὐθ. τμήματα ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ ΕΒ σχηματίζονται 4 ἴσα τρίγωνα 1, 2, 3, 4, καὶ τὸ ΒΓΔΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι τετράγωνον, ὡς εὐκόλως πειθόμεθα τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαβήτου καὶ γνώμονος. Λέγεται δὲ τοῦτο τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης τοῦ ὀρθ. ὀριγώνου ΑΒΓ. Ἂς κατασκευάσωμεν τώρα τετράγωνον ΚΖΜΒ ἴσον πρὸς τὸ ΑΖΗΘ. Ἂς κόψωμεν δὲ ἀπὸ τὸ ΑΖΗΘ τὰ τρίγωνα 1, 2, 3, 4 καὶ ἂς τοποθετήσωμεν αὐτὰ ἐπὶ τοῦ ΚΖΜΒ, ὅπως εἰς τὸ σχῆμα φαίνεται. Οὕτω βλέπομεν ὅτι τὸ τετράγωνον ΚΖΜΒ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ 4 ταῦτα τρίγωνα καὶ ἀπὸ τὰ τετράγωνα ΑΓΒΚ καὶ ΓΔΜΗ τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΒ. Ἐὰν συγκρίνωμεν τὰ μέρη, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦντα τὰ δύο ἴσα τετρά-



Σχ. 92.

γωνα ΑΖΗΘ, ΚΖΜΒ συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι (ΓΔΕΒ)=(ΑΓΒΚ)+(ΓΔΜΗ), ἤτοι:

Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀνεκαλύφθη ὑπὸ τοῦ Πυθαγόρα καὶ λέγεται διὰ τοῦτο ***Πυθαγόρειον θεώρημα***. Ἐκφράζεται δὲ συντόμως διὰ τῆς ἰσότητος: $(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2$ (1)

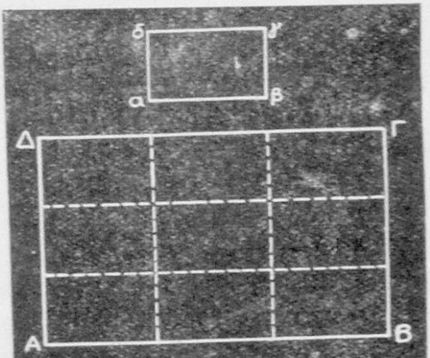
β΄) Ἀφ᾽ οὗ τὸ (ΓΔΕΒ) ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ (ΑΓΒΚ) καὶ (ΓΔΜΗ), ἂν ἀπὸ τὸ (ΓΔΕΒ) ἀφαιρέσωμεν τὸ ἓν ἀπὸ αὐτά, μένει τὸ ἄλλο, ἤτοι: $(ΑΒ)^2=(ΒΓ)^2-(ΑΓ)^2$ καὶ $(ΑΓ)^2=(ΒΓ)^2-(ΑΒ)^2$. (2)

Ἄρα: ***Ἐὰν ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου ἀφαιρεθῇ τὸ τετράγωνον μιᾶς καθέτου πλευρᾶς αὐτοῦ, μένει τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς αὐτοῦ.***

Βοηθούμενοι ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν μίαν πλευρὰν ὀρθ. τριγώνου, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς ἄλλας.

Π. χ. ἂν $(ΑΒ)=8^μ$ καὶ $(ΑΓ)=6^μ$, θὰ εἶναι $(ΒΓ)^2=8^2+6^2=64+36=100$ καὶ ἐπομένως $(ΑΓ)=10^μ$.

Ἐὰν δὲ $(ΒΓ)=15^μ$, $(ΑΒ)=12^μ$, θὰ εἶναι $(ΑΓ)^2=15^2-12^2=225-144=81$ καὶ ἐπομένως $(ΑΓ)=9^μ$.



Σχ. 93.

Ἀσκήσεις. 377) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μία κάθετος πλευρὰ εἶναι 3 μέτρα, ἡ δὲ ἄλλη 4 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ;

378) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 10 μέτρα, μία δὲ ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ εἶναι 8 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἄλλης πλευρᾶς αὐτοῦ;

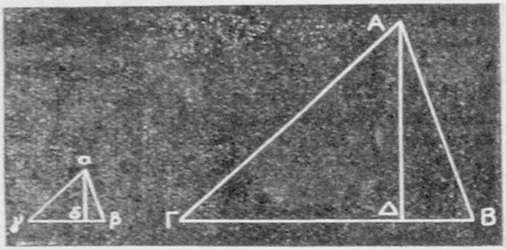
379) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 30 μέτρα, μία δὲ ἀπὸ τὰς ἄλλας πλευρὰς εἶναι 18 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς αὐτοῦ;

380) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ βάσις εἶναι 6 μέτρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι 5 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

§ 101. Σχέσεις μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων σχημάτων. Ἔστωσαν δύο ὅμοια ὀρθογώνια αβγδ, ΑΒΓΔ τοιαῦτα ὥστε ΑΒ=αβ×3, ΑΔ=αδ×3 κλπ. Ἄς διαιρέσωμεν τὰς ΑΒ, ΑΔ εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἑκάστης ἄς φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν ἄλλην. Βλέπομεν οὕτω ὅτι

ΑΒΓΔ=αβγδ×9.

Ἔστωσαν δεύτερον τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ τοιαῦτα ὥστε
ΑΒ = αβ × 4,
ΒΓ = βγ × 4,
ΑΓ = αγ × 4,



Σχ. 94.

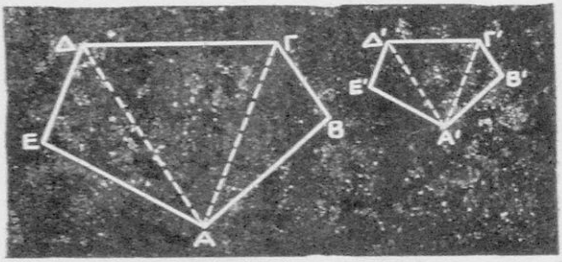
Ἐὰν γράψωμεν τὰ ὁμόλογα ὕψη ΑΔ, αδ καὶ συγκρίνωμεν ταῦτα μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου, βλέπομεν ὅτι ΑΔ=αδ × 4. Ἡ γνωστὴ (§ 97) ἄρα ἰσότης

$(ΑΒΓ)=\frac{(ΒΓ)\times(ΑΔ)}{2}$ γίνεται $(ΑΒΓ)=\frac{(βγ)\times 4\times(αδ)\times 4}{2}$ ἢ

$(ΑΒΓ)=\frac{(βγ)\times(αδ)}{2}\times 16$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $(αβγ)=\frac{(βγ)\times(αδ)}{2}$

ἕπεται ὅτι (ΑΒΓ)=(αβγ)×16.

Ἔστωσαν τέλος τὰ ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α′Β′Γ′Δ′Ε′ (Σχ. 95), εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι ΑΒ=Α′Β′×2, ΒΓ=Β′Γ′×2 κτλ.



Σχ. 95.

Ἐπειδὴ (§ 79) τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοια πρὸς τὰ Α′Β′Γ′, Α′Γ′Δ′, Α′Δ′Ε′ ἕπεται ὅτι (ΑΒΓ)= =(Α′Β′Γ′)×4, (ΑΓΔ)=(Α′Γ′Δ′)×4 καὶ (ΑΔΕ)=(Α′Δ′Ε′)×4. Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν τὰ ἀντίστοιχα μέλη τῶν ἰσοτήτων τούτων, εὑρίσκομεν ὅτι (ΑΒΓΔΕ)=(Α′Β′Γ′Δ′)×4.

Ἄρα: ***Ἐὰν αἱ πλευραὶ εὐθ. σχήματος Σ εἶναι γινόμενα τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν ὁμοίου εὐθ. σχήματος σ ἐπί τινα ἀριθμὸν λ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Σ εἶναι γινόμενον τοῦ (σ) ἐπὶ $λ^2$.***

Ἀσκήσεις. 381) Ἐὰν ὅλαι αἱ πλευραὶ τριγώνου πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 7, πόσας φορὰς τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ γίνεται μεγαλύτερον;

382) Ἑκάστη πλευρὰ τετραγώνου εἶναι 12 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ ἐννεαπλασίου τετραγώνου;

383) Κατασκευάσατε ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ πλευρὰν 2 δακ. καὶ ἄλλο τετραπλάσιον αὐτοῦ.

384) Τετράγωνον ἔχει πλευρὰν ἑξαπλασίαν ἀπὸ τὴν πλευρὰν ἄλλου τετραγώνου. Πόσας φορὰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ α΄ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δευτέρου;

385) Τρίγωνον ἔχει πλευρὰς 5μ., 6μ., 8μ. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ἄλλου τριγώνου ὁμοίου πρὸς αὐτὸ καὶ εἰκοσιπενταπλασίου αὐτοῦ;

386) Τρίγωνον ἔχει ἐμβαδὸν 20 τετρ. μέτρων. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ;

387) Κατασκευάσατε τυχὸν τρίγωνον καὶ ἀπὸ κάθε κορυφήν του γράψατε εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευράν. Προσπαθήσατε δὲ νὰ εὕρητε πόσας φορὰς τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς τὰς παραλλήλους ταύτας, εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἀρχικὸν τρίγωνον.

2ον. **Μέτρησις περιφερείας καὶ τόξου.**

§ 102. Μῆκος περιφερείας. Ἄς κατασκευάσωμεν ἐκ χαρτονίου ἢ λεπτῆς σανίδος κύκλον, ἄς περιβάλωμεν δὲ μίαν φορὰν ὅλην τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ μὲ νῆμα. Ἐὰν ἔπειτα μετρήσωμεν τὸ νῆμα τοῦτο, εὑρίσκομεν τὸ μῆκος αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι μὲ ἀρκετὴν προσέγγισιν τὸ μῆκος γ τῆς περιφερείας. Ἐὰν δὲ τὸ μῆκος τοῦτο διαιρέσωμεν διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου $2\times\alpha$ εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον 3,14159 (1). Ἐπειδὴ τοῦτο συμβαίνει διὰ πάντα κύκλον, συμπεραίνομεν ὅτι· ***Εἰς πάντα κύκλον τὸ πηλίκον τῆς περιφερείας διὰ τῆς διαμέτρου αὐτοῦ εἶναι 3,14159.***

Ἤτοι $\gamma : (2\times\alpha) = 3{,}14159.$ (1)

Ἐκ ταύτης ἕπεται εὐκόλως ὅτι $\gamma = 2\times\alpha\times 3{,}14159$ (2)

καὶ $2\times\alpha = \gamma : 3{,}14159$ (3)

δι᾿ ὧν εὑρίσκεται τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἐκ τῆς ἀκτῖνος καὶ ἀντιστρόφως τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος ἐκ τοῦ μήκους τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

Ἀσκήσεις. 388) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα 3 μέτρων;

389) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου, ὅστις ἔχει διάμετρον 4 μέτρων;

390) Ἡ πλευρὰ κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι 5 δάκτυλοι. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένης περιφερείας;

391) Ἡ περιφέρεια κύκλου ἔχει μῆκος 26,5 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου αὐτοῦ;

---

1. Τὰ δεκαδικὰ ψηφία αὐτοῦ ἀναγράφομεν ἐνθυμούμενοι ὅτι: «Ἕνα 4 καὶ ἕνα 5 κάμνουν 9».

√392) Τροχὸς μὲ μίαν ὁλόκληρον στροφὴν διανύει 2,55 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ ;

√393) Ἡ περίμετρος κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι 19,20 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ;

394) Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου εἶναι 12,56636 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ πλευρά τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου ;

395) Κατασκευάσατε ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 5 δακτύλων, περιγράψατε ἔπειτα περὶ αὐτὸ περιφέρειαν, μετρήσατε τὴν ἀκτῖνα καὶ ὑπολογίσατε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ταύτης.

§ 103. Μῆκος τόξου. Τὸ μῆκος τόξου 50°, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς περιφέρειαν μήκους 8 π. χ. μέτρων εὑρίσκομεν σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς :

Τόξον 360° τῆς περιφερ. ταύτης ἔχει μῆκος 8 μέτρων

» 1° » » » » » $\frac{8}{360}$ τοῦ μ.

» 50° » » » » » $\frac{8}{360}\times 50=$

$8\times\frac{50}{360}=1,111$ μέτρα.

Γενικῶς : ***Ἂν γ εἶναι τὸ μῆκος περιφερείας καὶ τ τὸ μῆκος τόξου μ° αὐτῆς, ἀληθεύει ἡ ἰσότης*** $\tau=\gamma\times\frac{\mu}{360}$.

ΣΗΜ. Ἂν τὸ τόξον περιέχῃ καὶ πρῶτα ἢ δεύτερα λεπτά, τρέπομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{\mu}{360}$ εἰς μονάδας τῆς κατωτάτης εἰς τὸ μ περιεχομένης μονάδος καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν προηγούμενον τύπον.

Ἀσκήσεις. 396) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τόξου 15° εἰς περιφέρειαν ἀκτῖνος 8 μέτρων ;

397) Ἡ ἀκτὶς περιφερείας εἶναι 2,5 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τόξου 28° αὐτῆς ;

√398) Ἡ περιφέρεια κύκλου ἔχει μῆκος 18 μέτρων. Πόσον μῆκος ἔχει τόξον 25° 36′ 40″ αὐτῆς ;

√399) Ἡ διάμετρος περιφερείας εἶναι 6,5 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τόξου 46° 20′ 18″ αὐτῆς ;

√400) Τόξον 35° ἔχει μῆκος 2 μέτρα. Πόσον μῆκος ἔχει ὅλη ἡ περιφέρεια, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ τόξον τοῦτο ;

401) Τόξον 100° 40′ 30″ ἔχει μῆκος 4,6 μέτρων. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τοῦτο ;

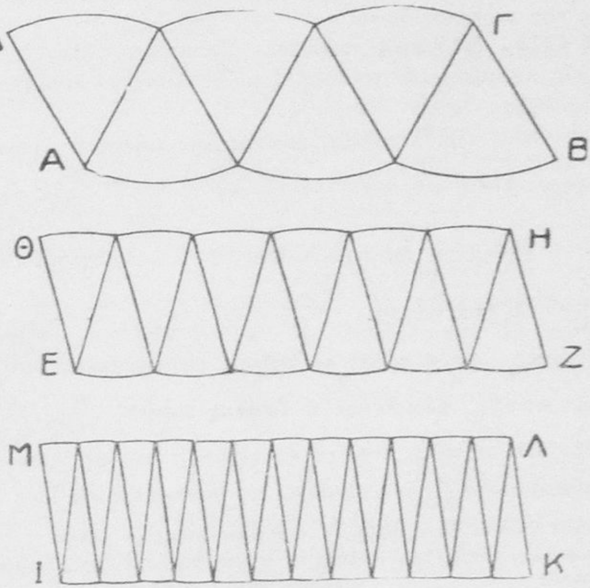
402) Τὸ τόξον, ὅπερ ἔχει χορδὴν τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἔχει μῆκος 5,25 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει ;

403) Τὸ τόξον, ὅπερ ἔχει χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἔχει μῆκος 6,7 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ ἑξαγώνου τούτου ;

404) Ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία 45° βαίνει εἰς τόξον, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 2,5 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ διάμετρος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τούτου;

3ον. Μέτρησις κύκλου καὶ κυκλικοῦ τομέως.

§ 104. Ἐμβαδὸν κύκλου. Ἂς διαιρέσωμεν κύκλον ἐκ χαρτονίου εἰς 6 ἴσους τομεῖς καὶ ἀποκόπτοντες αὐτοὺς ἂς θέσωμεν τὸν ἕνα παρὰ τὸν ἄλλον, οὕτως ὥστε μὲ τὴν κορυφὴν ἑκάστου νὰ συνάπτηται ἡ βάσις τοῦ ἑπομένου. Οὕτως ἀποτελεῖται τὸ σχῆμα



Σχ. 96.

ΑΒΓΔ (Σχ. 96), τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ αὐτὸ μὲ τὸν κύκλον ἐμβαδόν. Ἐὰν ἄλλον ἴσον μὲ τὸν προηγούμενον κύκλον διαιρέσωμεν εἰς 12, ἄλλον εἰς 24 ἴσους τομεῖς καὶ θέσωμεν τούτους τὸν ἕνα παρὰ τὸν ἄλλον, κατὰ τὸν προηγούμενον τρόπον, ἀποτελοῦνται τὰ σχήματα ΕΖΗΘ, ΙΚΛΜ, τὸ καθὲν τῶν ὁποίων ἔχει τὸ αὐτὸ μὲ τὸν κύκλον ἐμβαδόν. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι τὰ σχήματα ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, ΙΚΛΜ τείνουσι βαθμηδὸν καὶ κατ᾽ ὀλίγον, ἐφ᾽ ὅσον αὐξάνει ὁ ἀριθμὸς τῶν τομέων, νὰ ἐξομοιωθῶσι πρὸς ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις τείνει νὰ ἐξισωθῇ πρὸς τὴν ἡμιπεριφέρειαν καὶ τὸ ὕψος πρὸς τὴν ἀκτῖνα.

Ἄρα: ***Τὸ ἐμβαδὸν (Ε) κύκλου εἶναι γινόμενον τῆς ἡμιπεριφερείας ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα (α) αὐτοῦ.*** Ἤτοι εἶναι

$$E=(\alpha\times 3{,}14159)\times\alpha \quad \text{ἢ} \quad E=3{,}14159\times\alpha^{2}. \qquad (1)$$

Ἡ ἰσότης (1) ἐκφράζει ὅτι :

Τὸ ἐμβαδὸν κύκλου εἶναι γινόμενον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ ἐπὶ 3,14159.

Ἀσκήσεις. 405) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα 2 μέτρα.

406) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ ἁλωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀκτῖνα 5 μέτρων.

√ 407) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια ἔχει μῆκος 32,5 μ.

408) Εἰς κύκλον εἶναι ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρά ἔχει μῆκος 6 δακτύλων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τούτου.

√ 409) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ βάσις εἶναι 6 μέτρα καὶ κάθε μία ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς εἶναι 5 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει κέντρον τὴν κορυφὴν καὶ ἀκτῖνα τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τούτου.

410) Κύκλος ἔχει ἐμβαδὸν 12,56036 τ. μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ ;

411) Κυκλικὸν ἁλώνιον ἔχει ἀκτῖνα 3,5 μέτρων. Ἐὰν τοῦτο στρωθῇ δι' ἀμμοκονιάματος πρὸς 30,75 δραχμὰς τὸ τετρ. μέτρον, πόσα χρήματα θὰ ἀπαιτηθῶσι πρὸς τοῦτο ;

√ 412) Δύο ὁμόκεντροι κύκλοι ἔχουσιν ἀκτῖνα 5 μ. ὁ εἷς καὶ 3μ. ὁ ἄλλος. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία περικλείεται μεταξὺ τῶν περιφερειῶν αὐτῶν ;

§ **105. Ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως.** Ἔστω ὅτι κυκλικὸς τομεὺς 45° ἀνήκει εἰς κύκλον, ὁ ὁποῖος ἔχει ἐμβαδὸν 4 τετρ. μέτρων. Ἐὰν σκεφθῶμεν, ὅπως καὶ ἐν § 103, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τούτου τομέως εἶναι $4 \times \frac{45}{360}$ τ. μ.

Γενικῶς: Ἂν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, τομεὺς αὐτοῦ μ^0 ἔχει ἐμβαδὸν

$$\varepsilon = E \times \frac{\mu}{360} \qquad (1)$$

Ἂν δὲ τ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τόξου τοῦ τομέως τούτου θὰ εἶναι $\tau = \gamma \times \frac{\mu}{360}$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $E = \gamma \times \frac{\alpha}{2}$, ἔπεται ὅτι ἡ (1) γίνεται

$$\varepsilon = \gamma \times \frac{\alpha}{2} \times \frac{\tau}{\gamma} = \frac{\tau}{2} \times \alpha \qquad (2)$$

Ἀσκήσεις. 413) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως 100° εἰς κύκλον, ὅστις ἔχει ἐμβαδὸν 3,14159 τ. μέτρα ;

414) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως 30° καὶ ἀκτῖνος 4 μέτρων;

415) Μὲ κέντρον μίαν κορυφὴν ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς 0,04 μέτρου γράφομεν τόξον ἔχον χορδὴν τὴν ἀπέναντι πλευρὰν αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου κυκλικοῦ τομέως.

416) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως 25° 30' καὶ ἀκτῖνος 5 μέτρων ;

417) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως 72° 40' 20'' καὶ ἀκτῖνος 10 μέτρων ;

418) Κυκλικὸς τομεὺς 90° ἔχει ἐμβαδὸν 3,14159 τ. μέτρα. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ ;

Συνοπτικὴ ἀνακεφαλαίωσις τῶν προηγουμένων.

Ἐμβαδὸν Ε παραλληλογρ. βασ. β καὶ ὕψος υ :) $E=\beta\times\upsilon$.

Ἐμβαδὸν Ε τετραγώνου πλευρᾶς α $E=\alpha^2$

Ἐμβαδὸν Ε τριγώνου βάσεως β καὶ ὕψους υ :) $E=\frac{\beta\times\upsilon}{2}$

Ἐμβαδὸν τραπεζίου βάσεων Β καὶ β ὕψους υ :) $E=\frac{B+\beta}{2}\times\upsilon$

Σχέσις μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης α καὶ τῶν ἄλλων πλευρῶν β καὶ γ ὀρθ. τριγώνου : $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$, $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2$.

Μῆκος γ περιφερείας ἀκτῖνος α :) $\gamma=2\times\alpha\times3{,}14159$.

Μῆκος α ἀκτῖνος περιφ. μήκ. γ :) $\alpha=\gamma:(2\times3{,}14159)$.

Μῆκος τ τόξου μ° περιφ. μήκους γ :) $\tau=\gamma\times\frac{\mu}{360}$

Ἐμβαδὸν Ε κύκλου ἀκτῖνος α $E=3{,}14159\times\alpha^2$.

Ἐμβαδὸν ε κυκλικοῦ τομ. μ° κύκλ. ἐμβαδοῦ Ε :) $\varepsilon=E\times\frac{\mu}{360}$.

Ἐμβαδὸν ε κυκλ. τομ. βάσ. τ. καὶ ἀκτ. α :) $\varepsilon=\frac{\tau}{2}\times\alpha$.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

419) Ἐκ πόσων βασιλικῶν στεμμάτων ἀποτελεῖται τετραγωνικὸς ἀγρός, ὁ ὁποῖος ἔχει περίμετρον 600 μέτρα ;

420) Ἐκ πόσων παλαιῶν στρεμμάτων ἀποτελεῖται τριγωνικὴ ἄμπελος, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν 127 μέτρα καὶ ὕψος 40 μέτρα ;

421) Ἐκ πόσων τεκτονικῶν τετραγωνικῶν πήχεων ἀποτελεῖται οἰκόπεδος σχήματος ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶναι 25 μ., τὸ δὲ ὕψος 8,2 μ. ;

422) Πεζοδρόμιον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου μήκους 150 μέτρων καὶ πλάτους 15 μέτρων. Τοῦτο εἶναι ἐστρωμμένον μὲ τετραγωνικὰς πλάκας, τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ εἶναι 0,75 μ. Πόσας πλάκας περιέχει τοῦτο ;

423) Ἀγρὸς ἔχει σχῆμα παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 65 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος 22 μέτρα. Πόσον τιμᾶται ὁ ἀγρὸς οὗτος, ἂν ἕκαστον παλαιὸν στρέμμα αὐτοῦ τιμᾶται 3000 δραχμάς ;

424) Τριγωνικοῦ ἀγροῦ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 750 τετρ. μέτρα, ἡ δὲ βάσις 50 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ ;

425) Δωμάτιον μήκους 5 μέτρων καὶ πλάτους 3,60 μέτρων πρόκειται νὰ πατωθῇ διὰ σανίδων· ἑκάστη σανὶς ἔχει μετὰ τὴν ἐπεξεργασίαν ὑπὸ τοῦ τε-

χνίτου μῆκος 1,80 μέτρα, πλάτος δὲ 0,25 μ. Πόσαι τοιαῦται σανίδες χρειάζονται ;

426) Οἱ πρόσθιοι τροχοὶ ἁμάξης κάμνουσιν ἀπὸ 1000 στροφὰς ὁ καθείς, ὅταν ἡ ἅμαξα διανύῃ 1884,9 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς ἑκάστου τροχοῦ ;

427) Γύρω ἀπὸ κυκλικὴν τράπεζαν διαμέτρου 1,95 μ. κάθηνται 8 ἄνθρωποι. Πόσον μέρος τῆς περιφερείας ἀναλογεῖ διὰ τὸν καθ' ἕνα ;

428) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα $3{,}30^{\mu}$;

429) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ ἀγροῦ, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος ἔχει μῆκος 48,60 μέτρα ;

430) Πόσας δραχμὰς θὰ πληρώσῃ τις διὰ τὴν ἀμμοκονίασιν τοῦ πυθμένος κυκλικῆς δεξαμενῆς, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι 12,6 μέτρα, ἐὰν πληρώνῃ 8,50 δραχμὰς κατὰ τετρ. μέτρον ;

431) Κύκλος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τετράγωνον πλευρᾶς 3 μέτρων. Πόσον ἐμβαδὸν ἔχει κυκλικὸς τομεὺς $75^{\circ}\ 30'$ αὐτοῦ ;

432) Δύο ὁμόκεντροι κύκλοι ἔχουσιν ἀκτῖνας 4 μέτρα ὁ εἷς καὶ $2{,}5^{\mu}$ ὁ ἄλλος. Ἐκ τοῦ κέντρου αὐτῶν ἄγονται δύο εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουσι γωνίαν 60°. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τούτων καὶ τῶν μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένων τόξων τῶν περιφερειῶν ;

433) Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τραπεζίου, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐμβαδὸν 525 τετρ. μέτρων, μίαν βάσιν 60 μέτρων καὶ τὴν ἄλλην 40 μέτρων ;

434) Διὰ νὰ πατώσωμεν τετραγωνικὸν δωμάτιον πρὸς 60 δραχ. τὸ τετρ. μέτρον ἐδαπανήσαμεν 866,40 δραχμάς. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ δωματίου τούτου ;

435) Ἐκ πόσων παλαιῶν στρεμμάτων ἀποτελεῖται τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶναι 137,70 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος 100 μέτρα ;

436) Ἠγόρασέ τις ἄμπελον πρὸς 1624 δραχμὰς τὸ βασιλικὸν στρέμμα. Ἡ ἄμπελος ἔχει σχῆμα τραπεζίου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν μία βάσις εἶναι 29,50 μέτρα, ἡ ἄλλη 38,20 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος 47, 30 μέτρα. Πόσα χρήματα ἔδωκεν ;

437) Εἰς περιφέρειαν κύκλου ἀκτῖνος 3,40 μέτρων ὁρίζομεν τόξον $128^{\circ}\ 20'\ 40''$ καὶ ἄγομεν ἀκτῖνας εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ οὕτω σχηματιζομένου κυκλικοῦ τομέως.

438) Κύκλος ἀκτῖνος 5 μέτρων εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τετράγωνον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ τετραγώνου, ἡ ὁποία κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου.

439) Οἰκόπεδόν τι ἐπωλήθη πρὸς 45 δραχμὰς τὸν τεκτονικὸν τετραγωνικὸν πῆχυν· ἡ δὲ ὁλικὴ ἀξία αὐτοῦ ἦτο 160000 δραχμαί. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἰς βασιλικὰ στρέμματα ;

440) Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα 1 : 500 κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς $17{,}5^{\mu}$ καὶ τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαγράμματος νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

441) Ὁ κύκλος Κ (Σχ. 35) ἀπεικονίζει ἁλώνιον ὑπὸ κλίμακα 1 : 500. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἁλωνίου τούτου.

442) Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 89) ἀπεικονίζει ἄμπελον ὑπὸ κλίμακα 1 : 1000. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία αὐτῆς πρὸς 2000 δραχ. τὸ βασιλικὸν στρέμμα.

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄.

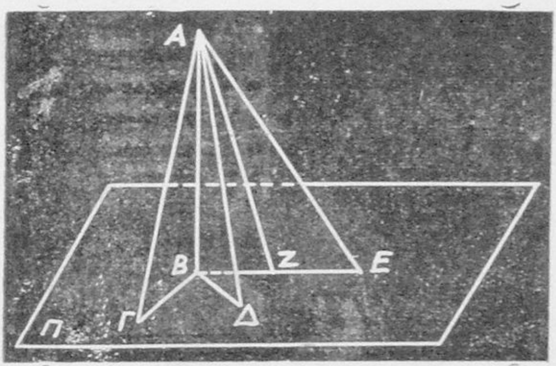
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΟΛΥΕΔΡΑ

§ 106. Θέσεις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον. Ἡ εὐθεῖα ΓΔ (Σχ. 1) κεῖται ὅλη εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ. Ἡ εὐθεῖα ΕΘ (Σχ. 1) οὐδέποτε συναντᾷ τὸ ΑΒΓΔ· αὕτη καλεῖται παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ.

Γενικῶς: ***Μία εὐθεῖα λέγεται παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον, ἐὰν ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον οὐδέποτε συναντῶνται, ὅσῳ καὶ ἂν προεκταθῶσι.***

Ἡ εὐθεῖα ΕΒ (Σχ. 1) διαπερᾷ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ καὶ ἔχει μὲ αὐτὸ ἓν κοινὸν σημεῖον τὸ Β. Περὶ ταύτης λέγομεν ὅτι τέμνει τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ. Κατὰ ταῦτα εἶναι δυνατὸν μία εὐθεῖα. α΄) ***Νὰ κεῖται ὅλη ἐπὶ ἐπιπέδου, β΄) Νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτὸ καὶ γ΄) Νὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον.***



Σχ. 97.

§ 107. Εὐθεῖαι κάθετοι καὶ πλάγιαι πρὸς ἐπίπεδον. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ τοῦ ἐπιπέδου Π καθὼς καὶ ἐπὶ πᾶσαν ἄλλην εὐθεῖαν τοῦ Π, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ Β (Σχ. 97). Αὕτη καλεῖται κάθετος ἐπὶ τὸ Π. Ὁμοίως ἡ ΓΖ (Σχ. 1) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ.

Γενικῶς: ***Μία εὐθεῖα λέγεται κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, ἐὰν***

εἶναι κάθετος πρὸς ὅλας τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῆς καὶ τοῦ ἐπιπέδου.

Ἡ εὐθεῖα ΑΓ τέμνει τὸ Π καὶ δὲν εἶναι κάθετος πρὸς αὐτό. Αὕτη λέγεται ***πλαγία*** πρὸς τὸ Π. Ὁμοίως αἱ ΚΔ, ΚΜ, ΚΝ (Σχ. 1) εἶναι πλάγιαι πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΔΜΝ.

Γενικῶς : ***Πᾶσα εὐθεῖα, ἡ ὁποία τέμνει ἐπίπεδον καὶ δὲν εἶναι κάθετος πρὸς αὐτὸ καλεῖται πλαγία πρὸς αὐτό.***

Τὸ κοινὸν σημεῖον ἐπιπέδου καὶ εὐθείας τεμνούσης αὐτὸ καλεῖται πούς τῆς εὐθείας ταύτης.

Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐξ ἑνὸς σημείου καὶ τέμνουσιν ἐπίπεδον ἔχουσι τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας.

Α΄) Εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον Α ἢ Β ἂς κρατήσωμεν τὸ ἄκρον νήματος καὶ ἂς τείνωμεν δὲ ἔπειτα τὸ νῆμα τοῦτο κατὰ διαφόρους διευθύνσεις, αἱ ὁποῖαι νὰ τέμνωσι τὸ δοθὲν ἐπίπεδον Π. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνώμονος βεβαιούμεθα εὐκόλως ὅτι εἰς μίαν μόνον θέσιν ΑΒ εἶναι τοῦτο κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. (Σχ. 97).

Ἄρα : ***Ἀπὸ ἕκαστον σημεῖον ἄγεται μία μόνον κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον.***

Β΄) Ἂς ὁρίσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π ἐκτὸς τοῦ ποδὸς Β τῆς καθέτου ΑΒ καὶ ἄλλα σημεῖα Γ, Δ, Ε κτλ.

Ἐὰν κρατήσωμεν τὸ ἄκρον νήματος εἰς τὸ Α καὶ τεντώσωμεν τὸ νῆμα, παρατηροῦμεν ὅτι χρειάζεται περισσότερον νῆμα, ὅπως τοῦτο φθάσῃ εἰς ἓν ἀπὸ τὰ Γ, Δ, Ε κτλ. παρὰ εἰς τὸ Β.

Ἄρα : ***Ἡ ἐκ σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς ἐπιπέδου, ἀγομένη κάθετος ἐπ᾽ αὐτὸ εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.***

Τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ ἓν σημεῖον καὶ ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἐξ αὐτοῦ πρὸς ἐπίπεδον, καλεῖται ***ἀπόστασις*** τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου.

Ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς πυραμίδος ἢ κώνου ἀπὸ τῆς βάσεως λέγεται ἰδιαιτέρως ***ὕψος*** τῆς πυραμίδος ἢ τοῦ κώνου.

Γ΄) Ἂς ὁρίσωμεν ἐπὶ ἐπιπέδου Π τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ οὕτως ὥστε εἶναι ΒΓ=ΒΔ. Μὲ τὴν βοήθειαν νήματος βεβαιούμεθα εὐκόλως ὅτι ΑΓ=ΑΔ. Ἄρα :

Ἐὰν οἱ πόδες δύο πλαγίων ἀπέχωσιν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, αἱ πλάγιαι αὗται εἶναι ἴσαι.

Δ΄) Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον βεβαιούμεθα ὅτι, ἂν ΒΕ>ΒΓ θὰ εἶναι καὶ ΑΕ>ΑΓ. ἤτοι : ***Ἂν οἱ πόδες δύο πλαγίων ἀπέχωσιν ἄνισον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, αἱ πλάγιαι εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἐκείνη, τῆς ὁποίας ὁ πούς ἀπέχει περισσότερον.***

Ἀσκήσεις. 443) Δείξατε ἐν τῇ αἰθούσῃ τῆς διδασκαλίας εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὸ πάτωμα καὶ ἄλλας παραλλήλους πρὸς τὸν δεξιά σας τοῖχον.

444) Τείνατε νῆμα παραλλήλως πρὸς τὸ πάτωμα αἰθούσης καὶ ἔπειτα παραλλήλως πρός τινα τοῖχον αὐτῆς.

445) Δείξατε ἐν τῇ αἰθούσῃ τῆς διδασκαλίας εὐθείας καθέτους πρὸς τὸ πάτωμα καὶ ἄλλας καθέτους πρὸς τὸν ἔμπροσθέν σας τοῖχον.

446) Στηρίξατε τὸν γνώμονα οὕτως ὥστε μία ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ νὰ εἶναι κάθετος πρὸς τὸ πάτωμα.

437) Στηρίξατε ἐπὶ τοῦ μελανοπίνακος τὸν γνώμονα, οὕτως ὥστε μία πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ νὰ εἶναι κάθετος πρὸς τὸν μελανοπίνακα.

§ 108. Ἀπόστασις δύο παραλλήλων ἐπιπέδων.— Ἑκάστη ἀπὸ τὰς εὐθείας ΒΕ, ΓΖ, ΔΗ, ΑΘ (Σχ. 1) εἶναι κάθετος καὶ πρὸς τὰ δύο παράλληλα ἐπίπεδα ΑΒΓΔ, ΘΕΖΗ. Τὰ δὲ τμήματα αὐτῶν, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τούτων εἶναι ὅλα ἴσα, ὡς εὐκόλως διὰ τοῦ διαβήτου πειθόμεθα. Καλεῖται δὲ ἕκατον τούτων ***ἀπόστασις*** τῶν δύο τούτων παραλλήλων ἐπιπέδων.

Γενικῶς: ***Ἀπόστασις δύο παραλλήλων ἐπιπέδων καλεῖται τὸ μεταξὺ αὐτῶν περιεχόμενον τμῆμα τυχούσης κοινῆς αὐτῶν καθέτου.***

Ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων πρίσματος καλεῖται ἰδιαιτέρως ***ὕψος*** τοῦ πρίσματος.

Ἀσκήσεις. 448) Μετρήσατε τὴν ἀπόστασιν τῶν παραλλήλων ἑδρῶν ΑΒΓΔ, ΘΕΖΗ τοῦ κύβου ΑΖ (Σχ. 1)

449) Μετρήσατε τὴν ἀπόστασιν τῶν βάσεων τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος ΑΒΓαβγ (Σχ. 9).

450) Μετρήσατε τὴν ἀπόστασιν δύο ἀπέναντι τοίχων τῆς αἰθούσης τῆς διδασκαλίας.

Ἀξιοσημείωτα πρίσματα.

§ 109. Παραλληλεπίπεδα. Τοῦ πρίσματος Δζ (Σχ. 9) αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα. Ὅλαι ἄρα αἱ ἕδραι αὐτοῦ εἶναι παραλληλόγραμμα. Τοῦτο καλεῖται ἰδιαιτέρως ***παραλληλεπίπεδον***.

Καὶ τὸ ΡΣ (Σχ. 98) εἶναι παραλληλεπίπεδον.

Γενικῶς. ***Πᾶν πρίσμα, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα, καλεῖται παραλληλεπίπεδον.***

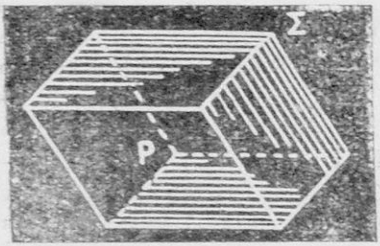
Τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΕ (Σχ. 99) ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια. Τοῦτο καλεῖται ***ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.***

Γενικῶς. ***Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καλεῖται πᾶν παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια.***

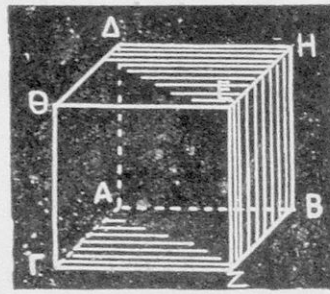
Αἱ ἀκμαὶ ΑΓ, ΑΒ, ΑΔ τοῦ ΑΕ (Σχ. 99) λέγονται ***διαστάσεις αὐτοῦ.***

Γενικῶς: ***Διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καλοῦνται αἱ τρεῖς ἀκμαί, αἱ ὁποῖαι συναντῶνται εἰς τὴν αὐτὴν κορυφὴν αὐτοῦ.***

Ἡ μία ἀπὸ αὐτὰς καλεῖται **μῆκος**, ἡ ἄλλη **πλάτος** καὶ ἡ τρίτη εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ.

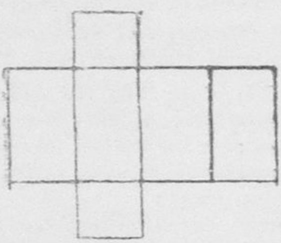


Σχ. 98.

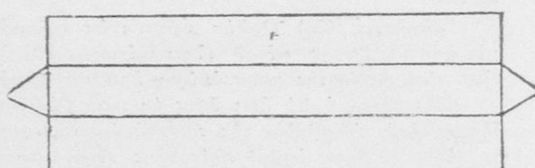


Σχ. 99.

Ἐπειδὴ πᾶν τετράγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, αἱ δὲ ἕδραι κύβου εἶναι τετράγωνα (§ 6) συμπεραίνομεν ὅτι :



Σχ. 100 α΄)



Σχ. 100 β΄)

Κύβος καλεῖται πᾶν παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι τετράγωνα.

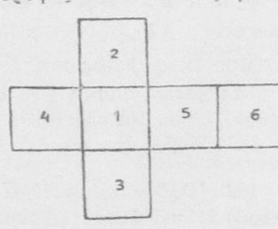
Ἀσκήσεις. 451) Πόσας ἕδρας, ἀκμάς, κορυφὰς καὶ ἐπιπέδους γωνίας ἔχει ἕκαστον παραλληλεπίπεδον.

452) Τῇ βοηθείᾳ τοῦ σχεδίου (Σχ. 100 γ΄) κατασκευάσατε ἐκ χαρτονίου κύβον.

453) Τῇ βοηθείᾳ τοῦ σχεδίου (Σχ. 100 β΄) κατασκευάσατε ἐκ χαρτονίου ὀρθὸν τριγωνικὸν πρίσμα.

454) Τῇ βοηθείᾳ τοῦ σχεδίου (Σχ. 100α΄) κατασκευάσατε ὀρθογών. παραλληλεπίπεδον.

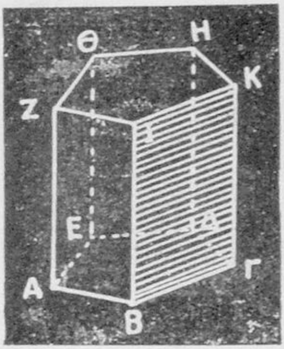
455) Εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ διαφορὰ μεταξὺ ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου καὶ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.



Σχ. 100 γ΄)

Μέτρησις τῶν πρισμάτων καὶ πυραμίδων.

§ 110. Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ε τῆς παραπλεύρου ἐπιφαφανείας τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος ΑΚ (Σχ. 101). Ἔστω δὲ ὅτι (ΑΖ)=5 μ, (ΑΒ)=2μ, (ΒΓ)=3μ, (ΓΔ)=1μ, (ΔΕ)=2,5μ. καὶ (ΑΕ)=1,μ.



Σχ. 101.

Ἐπειδὴ (ΑΒΙΖ)=2×5 τ. μ, (ΒΓΚΙ)=3×5 τ. μ, (ΓΔΗΚ)= 1×5 τ. μ, (ΔΕΘΗ) = 2,5 × 5 τ. μ. καὶ (ΑΕΘΖ)=1,5×2 τ. μ, ἕπεται ὅτι ε=(2×5) + (3×5) + (1×5) + (2,5×5)+(1,5×5)= (2+3+1+2,5+1,5)×5=50 τ. μ.

Ἄρα : ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.***

Ἀσκήσεις. 456) Ὀρθὸν τριγωνικὸν πρίσμα ἔχει ὕψος 2,5μ καὶ κάθε μία ἀπὸ τὰς βάσεις αὐτοῦ εἶναι τρίγωνον ἰσόπλευρον πλευρᾶς 2μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτοῦ ;

457) Στήλη ὀρθὴ ἔχει ὕψος 4μ καὶ βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 0,05μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτῆς ;

458) Ἡ βάσις ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι κανονικὸν πεντάγωνον πλευρᾶς 0,60μ, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτῆς εἶναι 5 τ.μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ ;

459) Πρισματικὴ στήλη ἔχει ὕψος 2,6 μέτρων καὶ βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 0,40μ. Πόσον θὰ στοιχίσῃ ὁ χρωματισμὸς τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτῆς πρὸς 20 δραχμὰς τὸ τετρ. μέτρον ;

§ 111. Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος. Αὕτη εἶναι προφανῶς ἄθροισμα τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν βάσεων αὐτοῦ.

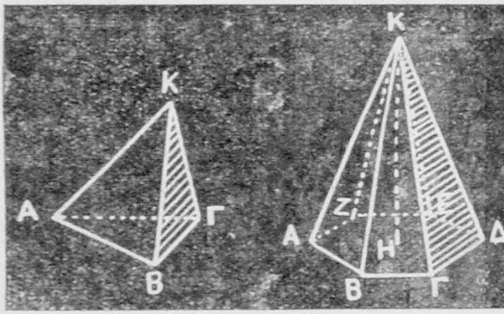
Ἀσκήσεις. 460) Ὀρθὴ στήλη ἔχει ὕψος 4 μ. καὶ βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 0,06μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.

461) Κύβος ἔχει ἀκμὴν 0,40μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

462) Ὀρθὸν πρίσμα ἔχει ὕψος 2,80μ καὶ βάσεις τρίγωνα ἰσόπλευρα πλευρᾶς 2μ καὶ ὕψους 1,732μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ ;

§ 112. Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας πυραμίδων. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας πυραμίδος, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐμβαδὰ ὅλων τῶν ἑδρῶν αὐτῆς.

§ 113. Κανονικαὶ πυραμίδες. — Τῆς πυραμίδος Κ.ΑΒΓΔΕΖ (Σχ. 102) ἡ βάσις εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον, ὁ δὲ



Σχ. 102.

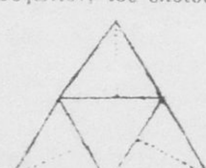
ποὺς Η τοῦ ὕψους ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλας τὰς κορυφὰς τῆς βάσεως. Ἡ πυραμὶς αὕτη λέγεται ***κανονικὴ*** πυραμίς· τὸ δὲ σημεῖον Η λέγεται ***κέντρον*** τῆς βάσεως.

Γενικῶς : ***Κανονικὴ πυραμὶς καλεῖται πᾶσα πυραμίς, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν κανονικὸν εὐθ. σχῆμα, τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς διέρχεται ἀπὸ τὸν κέντρον τῆς βάσεως.***

Ἐὰν κανονικὴ πυραμὶς εἶναι τριγωνικὴ καὶ αἱ ἕδραι αὐτῆς εἶναι ὅλαι ἴσαι, αὕτη λέγεται ἰδιαιτέρως ***κανονικὸν τετράεδρον***.

Ἀσκήσεις. 463) Πυραμίδος ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 9,60μ, ἡ δὲ κορυφὴ ἀπέχει ἀπὸ κάθε πλευρὰν τῆς βάσες 1,5μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ;

464) Πυραμὶς τριγωνικὴ ἔχει βάσιν τρίγωνον ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι 3μ. ἡ μία καὶ 4μ. ἡ ἄλλη Ἡ πλευρὰ τῆς πυραμίδος, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν καὶ ἔχει μῆκος 1,50μ., ἡ δὲ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος ἀπὸ τὴν ὑποτείνουσαν τῆς βάσεως εἶναι 5,02μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος ταύτης ;



Σχ. 103.

465) Ἡ βάσις κανονικῆς πυραμίδος εἶναι τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει περίμετρον 8,60 μ. Ἡ δὲ κορυφὴ τῆς πυραμίδος ἀπέχει ἀπὸ κάθε πλευρὰν τῆς βάσεως 3,5μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.

466) Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ σχεδίου (Σχ. 103) κατασκευάσατε ἐκ χαρτονίου τριγωνικὴν πυραμίδα.

§ 114. Μονάδες ὄγκου.—Ὄγκος σώματος. Γνωρίζομεν (§ 1) ὅτι κάθε σῶμα καταλαμβάνει ἕνα μέρος τοῦ διαστήματας. Διὰ νὰ μετρήσωμεν τοῦτο, συγκρίνομεν αὐτὸ πρὸς τὸ μέρος τοῦ διαστήματος, τὸ ὁποῖον καταλαμβάνει ὡρισμένον καὶ γνωστὸν σῶμα. Τὸ μέρος τοῦτο τοῦ διαστήματος καλοῦμεν ***μονάδα***.

Διὰ τῆς συγκρίσεως ταύτης εὑρίσκομεν ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ μετρηθὲν μέρος τοῦ διαστήματος. ***Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος φανερώνει τὸ πλῆθος τοῦτο τῶν μονάδων ἢ καὶ μερῶν αὐτῆς, καλεῖται ὄγκος τοῦ σώματος.***

Αἱ διάφοροι μονάδες, μὲ τὰς ὁποίας ἐκφράζομεν τὸν ὄγκον τῶν σωμάτων, καλοῦνται ***μονάδες ὄγκου***.

Αἱ συνήθεις μονάδες ὄγκου εἶναι αἱ ἑξῆς: ***Τὸ κυβικὸν μέτρον***, τὸ ὁποῖον εἶναι κύβος ἀκμῆς 1 μέτρου. β΄) Τὰ ὑποπολλαπλάσια τοῦ κυβικοῦ μέτρου, τὰ ὁποῖα εἶναι:

Ἡ κυβικὴ παλάμη $=\frac{1}{1000}$ τοῦ κυβ. μέτρου.

Ὁ κυβικὸς δάκτυλος $=\frac{1}{1000}$ κ. π. $=\frac{1}{1000000}$ κ. μ. καὶ

Ἡ κυβικὴ γραμμὴ $=\frac{1}{1000}$ κ. δ. $=\frac{1}{1000000}$ κ. π. $=$ $\frac{1}{1000000000}$ κ. μ.

Ἀσκήσεις. 467) Πόσας κυβικὰς παλάμας, κυβικοὺς δακτύλους, κυβικὰς γραμμὰς ἔχουσιν 7 κυβικὰ μέτρα;

468) Πόσας κυβικὰς παλάμας, κυβ. δακτύλους, κυβ. γραμμὰς ἔχουσι 13,4 κυβ. μέτρα;

469) Πόσους κυβ. δακτύλους, κυβικὰς γραμμὰς ἔχουσι 136 κυβικαὶ παλάμαι;

470) Πόσα κυβικὰ μέτρα ἀποτελοῦσι 3476 κυβικαὶ παλάμαι καὶ πόσα κ. μ. ἀποτελοῦσι 76942 κυβ. δάκτυλοι;

471) Πόσας κυβικὰς γραμμὰς ἀποτελοῦσι 12 κ. μ. 35 κυβ. παλ. καὶ 456 κυβ. δάκτυλοι;

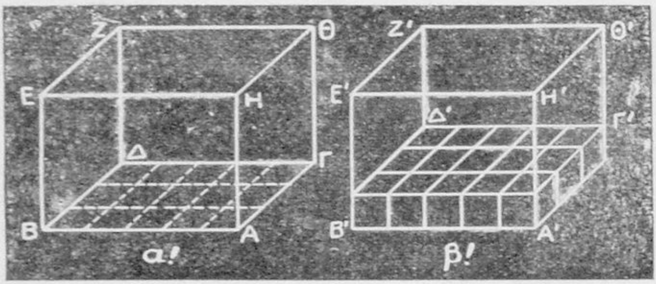
§ 115. Ὄγκος ὀρθ. παραλληλεπιπέδου. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου ΒΘ. (Σχ. 104). Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι αἱ διαστάσεις του εἶναι (ΒΑ)=5μ., (ΒΔ)=3 μ., (ΒΕ)=4 μ. Ἂς νοήσωμεν τὴν βάσιν ΑΒΔΓ αὐτοῦ διῃρημένην εἰς 5×3=15 τετρ. μέτρα. Ἂς φαντασθῶμεν δὲ ὅτι ἐπὶ ἑκάστου τῶν τετρ. μέτρων τούτων τοποθετεῖται ἓν κυβ. μέτρον, Οὕτω θὰ ἀποτελεσθῇ τὸ ὀρθ. παραλληλεπίπεδον Α΄Δ΄, τὸ ὁποῖον ἔχει ὕψος 1 μέτρου. Χωροῦσιν ἄρα εἰς τὸ Β΄Θ΄ 4 τοιαῦτα ὀρθ. παραλληλεπίπεδα, ἤτοι ὁ ὄγκος τοῦ ΒΘ εἶναι 15×4=5×3×4=60 κυβ. μέτρα.

Ἐὰν ὀρθ. παραλληλεπιπέδου αἱ διαστάσεις εἶναι 2,35μ=235 δάκ, 3,40μ=340 δάκ, 5μ=500 δάκ, ὁ ὄγκος εἶναι

$$235\times340\times400 \text{ κυβ. δάκ.}=\frac{235\times340\times500}{1000000}=2{,}35\times2{,}40\times5 \text{ κυβ. μέτρα.}$$

Ἄρα : ***Ὁ ὄγκος παντὸς ὀρθ. παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεων αὐτοῦ.***

Ἐπειδὴ δὲ καὶ πᾶς κύβος εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ἕπεται εὐκόλως ὅτι : ***Ὁ ὄγκος κύβου εἶναι γινόμενον τριῶν παραγόντων ἴσων πρὸς τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς αὐτοῦ.***



Σχ. 104.

ΣΗΜ. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ γινόμενον τριῶν παραγόντων ἴσων πρὸς ἀριθμὸν α καλεῖται καὶ κύβος τοῦ α. Ὁ κύβος τοῦ α σημειοῦται οὕτω $α^3$.

Ἀσκήσεις. 472) Αἴθουσα ἔχει μῆκος 6μ πλάτος 5μ. καὶ 4μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος, τὸν ὁποῖον χωρεῖ.

473) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κύβου, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀκμὴ ἔχει μῆκος 2,30 μέτρα ;

474) Πόση εἶναι ἡ ἀκμὴ κύβου, ὅστις ἔχει ὄγκον 27 κυβ. μέτρων ;

475) Πλατεῖα τετραγωνική, ἡ ὁποία ἔχει πλευρὰν 80 μέτρων πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ σκῦρα εἰς ὕψος 0,6μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τῶν σκύρων, τὰ ὁποῖα χρειάζονται ;

476) Ὁ ὄγκος ὀρθ. παραλληλεπιπέδου εἶναι 74,06 κυβ. μέτρα, ἡ δὲ βάσις εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 4,6 μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ ;

477) Δεξαμενὴ ἔχει σχῆμα ὀρθ. παραλληλεπιπέδου. Ἡ βάσις αὐτῆς ἔχει διαστάσεις 3,5μ καὶ 2,5μ. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ βάθος αὐτῆς, ὅπως χωρῇ 35 κυβ. μέτρα ὕδατος ;

478) Κιβώτιον ἐσωτερικοῦ μήκους 1 μέτρου, πλάτου 2,20 καὶ ὕψους 0,70 μ. εἶναι πλῆρες σάπωνος, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλὰξ ἔχει μῆκος 0,14μ, πλάτος δὲ καὶ ὕψος ἀνὰ 0,05μ. Πόσας τοιαύτας πλάκας περιέχει ;

479) Πόσα κοιλὰ σίτου χωρεῖ ἀποθήκη σχήματος ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος, 6μ, πλάτος 4μ καὶ ὕψος 3μ ;

ΣΗΜ. Κοιλὸν εἶναι τὸ δέκατον τοῦ κύβ. μέτρου.

§ 116. Μονάδες βάρους. Ὅλα τὰ πεπολιτισμένα ἔθνη παρεδέχθησαν τὰς ἀκολούθους μονάδας βάρους. α') Τὸ ***γραμμάριον,*** ἤτοι τὸ βάρος ἑνὸς κύβ. δακτύλου ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ 4°Κ.
β') Τὸ ***χιλιόγραμμον,*** ἤτοι τὸ βάρος μιᾶς κυβ. παλάμης ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ 4°Κ. Εἶναι δὲ 1 χιλιογρ.=1000 γραμ.
γ') Τὸν ***τόννον,*** ἤτοι τὸ βάρος ἑνὸς κυβ. μέτρου ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ 4°Κ. Εἶναι δὲ 1 τόν.=1000 χιλιόγ.=1000000 γραμ.

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸν ὄγκον ὕδατος ἀπεσταγμένου 4°Κ εἰς κυβ. δακτύλους, κυβ. παλάμας, κυβ. μέτρα, ἐκφράζει καὶ τὸ βάρος τοῦ αὐτοῦ ὕδατος ἀντιστοίχως εἰς γραμμάρια, χιλιόγραμμα, τόννους. Οὕτω τοιοῦτον ὕδωρ ὄγκου 12 κ.δ. ἔχει βάρος 12 γραμ, ἐν ᾧ, ἂν ἔχῃ ὄγκον 145 κ. παλαμῶν, θὰ ἔχῃ βάρος 145 χιλιογράμμων· ἐὰν δὲ ἔχῃ ὄγκον 5 κυβ. μέτρων, θὰ ἔχῃ βάρος 5 τόννων.

§ 117. Εἰδικὸν βάρος σώματος. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι κύβος ἐξ ὑάλου ἀκμῆς 0,05 ἔχει βάρους 311 γραμ. Ὕδωρ ἀπεσταγμένον 4°Κ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν αὐτὸν ὄγκον, ἤτοι 125 κ. δάκ. ἔχει βάρος 125 γραμ. Εἶναι λοιπὸν ἡ ὕαλος αὕτη βαρυτέρα ἴσου ὄγκου ὕδατος (ἀπ. 4°Κ) κατὰ 311 γραμμ : 125 γρ.=2,488. Τὸν ἀριθμὸν 2,488 ὀνομάζομεν ***εἰδικὸν βάρος*** τῆς ὑάλου ταύτης.

Γενικῶς : ***Εἰδικὸν βάρος σώματος καλεῖται τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ βάρος τεμαχίου τοῦ σώματος διὰ τοῦ βάρους ἴσου ὄγκου ὕδατος ἀπεσταγμένου 4°Κ.***

Ἐὰν δὲ ἐνθυμηθῶμεν (§ 116) ὅτι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος (ἀπ. 4°Κ) ἐκφράζεται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, μὲ τὸν ὁποῖον ἐκφράζεται καὶ ὁ ὄγκος του, ἤτοι καὶ ὁ ὄγκος τοῦ σώματος, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦτον καὶ ὡς ἑξῆς : ***Εἰδικὸν βάρος σώματος καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ βάρους διὰ τοῦ ὄγκου αὐτοῦ.***

Ἐὰν δηλ. σῶμα 100 κυβ. παλ. ἔχῃ βάρος 778,8 χιλιογρ. τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ θὰ εἶναι 778,8:100=7,788. Σῶμα δὲ 38 κ.δ. ἔχον βάρος 105,48 γραμ. ἔχει εἰδικὸν βάρος 105,48:30=3,516.

Ὁ ἀκόλουθος πίναξ παρέχει τὰ εἰδ. βάρη μερικῶν σωμάτων

Χρυσὸς	19,258	Ἀδάμας	3,516	Πλετέα	0,800	Οἶνος	0,994
Μόλυβδος	11,358	Μάρμαρον	2,837	Ἐλάτη	0,676	Ἔλαιον	0,915
Ἄργυρος	10,474	Ὕαλος	2,488	Φελλὸς	0,240	Ἀὴρ	0,001292
Χαλκὸς	8,788	Θεῖον	2,070	Ὑδράργ.	13,596		
Σίδηρος	7,788	Πάγος	0,930	Γάλα	1,030		

§ 118. Σχέσεις ὄγκου καὶ βάρους τῶν σωμάτων. Ἄς παραστήσωμεν διὰ τοῦ Β τὸ βάρος εἰς γραμμάρια ἢ χιλιόγραμμα ἢ τόννους τεμαχίου σώματος καὶ διὰ τοῦ Σ τὸν ὄγκον αὐτοῦ ἀντιστοίχως εἰς κ. δακτύλους ἢ κ. παλάμας ἢ κ. μέτρα. Ἔστω δὲ ε τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς ὕλης αὐτοῦ. Σύμφωνα μὲ τὸν προηγούμενον ὁρισμὸν θὰ εἶναι Β : Σ=ε (1)

Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι : Β=Σ×ε (2)

Ἄρα : ***Τὸ βάρος σώματος εὑρίσκεται, ἂν ὁ ὄγκος πολ)σθῇ ἐπὶ τὸ εἰδ. βάρος αὐτοῦ.***

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς (2) προκύπτει εὐκόλως ἡ ἰσότης Σ=Β : ε (3), ἕπεται ὅτι : ***Ὁ ὄγκος σώματος εὑρίσκεται, ἂν τὸ βάρος διαιρεθῇ διὰ τοῦ εἰδ. βάρους αὐτοῦ.***

ΣΗΜ. Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3) πρέπει νὰ ἐνθυμώμεθα ὅτι : Ἂν Β παριστᾷ γραμμάρια ἢ χιλιόγραμμα, ἢ τόννους, Σ θὰ παριστάνῃ ἀντιστοίχως κ. δακτύλους, κ. παλάμας, κ. μέτρα καὶ τἀνάπαλιν.

Ἀσκήσεις. 480) Αἱ διαστάσεις ὀρθ. παραλληλεπιπέδου ἐκ μαρμάρου εἶναι 1μ., 2μ. καὶ 3μ. Πόσον εἶναι τὸ βάρος αὐτοῦ ;

481) Κύβος ἐκ σιδήρου ἔχει ἀκμὴν 0,05μ. Πόσον εἶναι τὸ βάρος αὐτοῦ ;

482) Ἐὰν κύβον ἀκμῆς 0,03μ. ρίψωμεν ἐντὸς δοχείου πλήρους ὕδατος (ἀπ 4° Κ), πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον θὰ χυθῇ ;

483) Τεμάχιον ἐλάτης ἔχει βάρος 24 χιλιογράμμων. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ ;

484) Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἀέρος, ὁ ὁποῖος περιέχεται εἰς δωμάτιον μήκους 3μ., πλάτους 2μ. καὶ ὕψους 4 μέτρων ;

485) Κύβος ἐκ χρυσοῦ ἀκμῆς 2 δακτ. εἶναι βυθισμένος ἐντὸς ὑδραργύρου. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὑδραργύρου, τὸ ὁποῖον ἐκτοπίζει ;

486) Πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ δεξαμενὴ σχήματος ὀρθ. παραλληλεπιπέδου, ἡ ὁποία νὰ χωρῇ 60000 χιλιόγραμμα ὕδατος. Ὁ πυθμὴν αὐτῆς ἔχει διαστάσεις 5μ. καὶ 4μ. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ βάθος αὐτῆς ;

487) Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἐλαίου, τὸ ὁποῖον χωρεῖ ἡ δεξαμενή, περὶ τῆς ὁποίας ὁμιλεῖ ἡ προηγουμένη ἄσκησις ;

§ 119. Ὄγκος πρίσματος. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν πρισματικὸν δοχεῖον, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ὕψος εἶναι 6 δακ. ἡ δὲ βάσις ἔχει ἐμβαδὸν 15 τετρ. δακτύλων. Ἐὰν ζυγίσωμεν τοῦτο πρῶτον κενὸν καὶ ἔπειτα πλῆρες ὕδατος (ἀπ. 4°Κ), εὑρίσκομεν ὅτι τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ὕδατος εἶναι 90 γραμ. Ὁ ὄγκος ἄρα αὐτοῦ ἑπομένως καὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ δοχείου εἶναι 90 κ. δ.=15×6. Πρίσμα ἐκ πτελέας ἔχον βάσιν 3 τετρ. δακ. καὶ ὕψος 5 δακ. ἔχει βάρος 120 γραμ. Ὁ ὄγκος ἑπομένως αὐτοῦ εἶναι 120 : 0,8=15 κ. δακ.=3×5 κυβ. δακ.

Ἄρα : ***Ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.***

Ἀσκήσεις. 488) Πρίσματος ἐκ σιδήρου τὸ μὲν ὕψος εἶναι 10,5μ., ἡ δὲ βάσις ἔχει ἐμβαδὸν 20 τ. μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος καὶ τὸ βάρος αὐτοῦ ;

489) Πρίσμα ἔχει ὕψος μὲν 10μ., βάσιν δὲ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ

ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι 12μ. ἡ μία καὶ 15μ. ἡ ἄλλη. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

490) Πόσον εἶναι τὸ ὕψος πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ὄγκον 850 κυβ. μέτρων καὶ βάσιν 100 τ. μέτρων;

491) Πρίσμα ἔχει ὄγκος 36 κυβ. μέτρων, ὕψος 4 μέτρων καὶ βάσιν τετράγωνον. Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τούτου;

492) Κυβικοῦ δοχείου ἑκάστη ἀκμὴ εἶναι 0,5μ. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος (ἀπ. 4°Κ) ἢ τοῦ ἐλαίου τὸ ὁποῖον χωρεῖ;

493) Πρίσμα ἐξ ὑάλου ἔχει ὕψος 7 δακτ. καὶ βάσιν 7 τ. δακτ. Ἕτερον πρίσμα ἐκ πτελέας ἔχει ὕψος 12 δακ. καὶ βάσιν 20 τ. δακ. Ποῖον ἀπὸ αὐτὰ εἶναι βαρύτερον καὶ πόσον;

§ **120. Ὄγκος πυραμίδος.** Ἔστω τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΚ (Σχ. 105) ἀπὸ ὁμοιομερὲς ξύλον. Ἐὰν εὕρωμεν τὸ βάρος του ἀκριβῶς καὶ ἀποσπάσωμεν ἔπειτα τὴν πυραμίδα Κ. ΑΒΓ, παρατηροῦμεν ὅτι βάρος αὐτῆς εἶναι τὸ τρίτον του βάρους τοῦ πρίσματος. Ἐπειδὴ δὲ τὰ δύο σώματα ἔχουσι τὸ αὐτὸ εἰδ. βάρος, ἕπεται ὅτι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος Κ. ΑΒΓ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΚ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὴν πυραμίδα.

Ἄρα. ***Ὁ ὄγκος πάσης τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.***

Ἡ πολυγωνικὴ πυραμὶς Κ.ΑΒΓΔΕ (Σχ. 105) ἀποτελεῖται ἀπὸ

Σχ. 105.

τὰς Κ.ΑΒΕ, Κ.ΒΔΕ, Κ.ΓΒΔ, αἱ ὁποῖαι ἔχουσιν ὕψος ΚΗ. Ὁ ὄγκος ἄρα Θ αὐτῆς εἶναι

$$\frac{(ΑΒΕ)\times(ΚΒ)}{3}+\frac{(ΒΕΔ)\times(ΚΗ)}{3}+\frac{(ΒΓΔ)\times(ΚΗ)}{3}$$

ἤτοι $$Θ=\frac{[(ΑΒΕ)+(ΒΕΔ)+(ΒΓΔ)]\times(ΚΗ)}{3}=\frac{(ΑΒΓΔΕ)\times(ΚΗ)}{3}$$

Ἄρα : ***Ὁ ὄγκος πάσης πυραμίδος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.***

Ἀσκήσεις. 494) Πυραμίδος τὸ ὕψος εἶναι 6μ, ἡ δὲ βάσις εἶναι ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει διαστάσεις 10μ. καὶ 3μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος αὐτῆς.

495) Πυραμὶς ἐξ ἐλάτης ἔχει ὕψος 6 δακ. καὶ βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 3 δακ. Πόσον εἶναι τὸ βάρος αὐτῆς ;

496) Πυραμὶς ἔχει ὕψος 3μ. βάσιν δὲ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη κάθετος πλευρὰ ἔχει μῆκος 3,70μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτῆς ;

497) Πόσον εἶναι τὸ ὕψος πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει ὄγκον 50 κ. δ. καὶ βάσιν 30 τ. μ. ;

498) Πυραμὶς ἔχει ὕψος 6 μ. καὶ βάσιν τραπέζιον, τοῦ ὁποίου ἡ μία τῶν παραλλήλων πλευρῶν εἶναι 4 μ, ἡ ἄλλη 8 μ. καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν 3 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ταύτης ;

499) Πυραμὶς ἔχει ὄγκον 16 κ. μ. ὕψος 3 μ. καὶ βάσιν τετράγωνον. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου τούτου ;

500) Δύο πυραμίδες ἔχουσιν ὕψος 3 παλ. καὶ ἡ βάσις τῆς μὲν μιᾶς εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 4 παλ. τῆς δὲ ἄλλης εἶναι ὀρθογώνιον διαστάσεων 20 δακ. καὶ 8 παλ. Ποία σχέσεις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ὄγκων αὐτῶν ;

501) Πυραμὶς ἐξ ἐλάτης ἔχει ὕψος 32 δακ, ἑτέρα δὲ ἐκ πτελέας ἔχει ἴσην βάσιν μὲ τὴν προηγουμένην καὶ τὸ αὐτὸ μὲ αὐτὴν βάρος. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τῆς β' πυραμίδος ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ—ΚΩΝΟΣ—ΣΦΑΙΡΑ

Ι. Κύλινδρος.

§ 121. Σχηματισμὸς κυλίνδρου. Α') Ἐὰν θέσωμεν ἴσα μεταλλικὰ νομίσματα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου, οὕτως ὥστε αἱ περιφέρειαι αὐτῶν νὰ συμπέσωσι, παρατηροῦμεν ὅτι σχηματίζεται ὑπ' αὐτῶν κύλινδρος (§ 11).

Βάσεις τούτου εἶναι αἱ ἀκάλυπτοι ὄψεις τῶν ἄκρων νομισμάτων.
Ἑκάστη δὲ ὄψις τυχόντος ἄλλου ἀπὸ τὰ νομίσματα ταῦτα εἶναι τομὴ τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις ἢ καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου.

Ἐκ τούτου ἐννοοῦμεν ὅτι : ***Ἡ τομὴ κυλίνδρου ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ εἶναι κύκλος ἴσος πρὸς τὰς βάσεις αὐτοῦ.***

Ἐὰν ἤδη ἀφαιρεθῶσι τὰ ὑπεράνω τοῦ α΄ νομίσματα καὶ μετακινηθῇ τὸ α΄, ὥστε νὰ διέρχηται ἀπὸ τὰς θέσεις τῶν ἄλλων, εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ γράψῃ τὸν προηγούμενον κύλινδρον.

Ἄρα. ***Ὁ κύλινδρος γεννᾶται, ἂν κύκλος μετακινηθῇ παραλλήλως πρὸς ἑαυτὸν καὶ οὕτως ὥστε τὸ κέντρον νὰ γράψῃ εὐθεῖαν κάθετον ἐπ᾽ αὐτόν.***

Β΄) Ὁ κύλινδρος ΑΕ (Σχ. 11) εἶναι σχισμένος εἰς δύο μέρη δι᾽ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸν ἄξονα αὐτοῦ. Ἂν ἀποχωρήσωμεν αὐτὰ ἀπ᾽ ἀλλήλων, βλέπομεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ χωρισμοῦ αὐτῶν εἶναι ὀρθογώνιον ΗΘΙΔ.

Ἄρα. ***Ἡ τομὴ κυλίνδρου ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ εἶναι ὀρθογώνιον ἰσοϋψὲς μὲ τὸν κύλινδρον.***

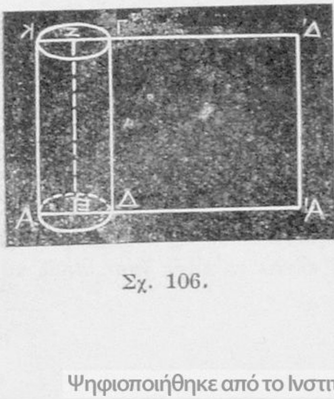
Τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ ἄξονος ΒΓ τοῦ κυλίνδρου εἰς δύο ἴσα ὀρθογώνια ΒΓΗΔ καὶ ΓΒΙΘ. Ἄς νοήσωμεν τὸ ἓν τούτων π.χ. τὸ ΒΓΗΔ στρεφόμενον περὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν του. Τὸ σύνολον τῶν θέσεων, ἀπὸ τὰς ὁποίας διέρχεται τοῦτο ἀποτελεῖ τὸν κύλινδρον.

Ὥστε: ***Ὁ κύλινδρος σχηματίζεται ἀπὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ μίαν πλευράν του κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν του.***

Ἡ πλευρά, περὶ τὴν ὁποίαν στρέφεται τὸ ὀρθογώνιον καὶ ἥτις μένει ἀκίνητος, εἶναι τὸ ***ὕψος*** ἢ ὁ ***ἄξων*** τοῦ κυλίνδρου.

Αἱ προσκείμεναι εἰς τὸν ἄξονα πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου γράφουσι τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Ἡ ἀπέναντι τοῦ ἄξονος πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου γράφει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου. Διὰ τοῦτο αὕτη λέγεται καὶ ***γεννέτειρα*** τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

§ 122. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου. Ἄς περιτυλίξωμεν ἀκριβῶς καὶ μίαν φορὰν ὅλην τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κυλίνδρου μὲ λεπτὸν χάρτην. Οὗτος ἐκτυλισσόμενος λαμβάνει σχῆμα ὀρθογωνίου ΔΓΔ΄Α΄, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν ε τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. Ἐπειδὴ δὲ



Σχ. 106.

(ΔΓΔ΄Α΄) = (ΔΑ΄)×(ΔΓ), ἕπεται ὅτε ε = (ΔΑ΄)×(ΔΓ). Ἐὰν δὲ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ πλευρὰ ΔΑ΄

ἐφήρμοζε προηγουμένως ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Ε, συμπεραίνομεν ὅτι :

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου εἶναι γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα, ἂν θέσωμεν (ΕΔ)=α, (ΔΓ)=υ, θὰ εἶναι

$$\varepsilon=2\times\alpha\times3,14159\times\upsilon. \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ ἐνθυμηθῶμεν ὅτι αἱ βάσεις ἔχουσι ἐμβαδὸν $2\times3,14159\times\alpha^2$, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν Ε ὅλης τῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου εἶναι $2\times\alpha\times3,14159\times\upsilon+2\times3,14159\times\alpha^2$, ἤτοι :

$$E=(2\times\alpha\times3,14159\times\upsilon)+(2\times3,14159\times\alpha^2)=$$
$$2\times\alpha\times3,14159\times(\upsilon+\alpha). \qquad (2)$$

Ἀσκήσεις. 502) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος 4μ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,40μ.

503) Πρόκειται μὲ ὕφασμα πλάτους 1μ νὰ καλυφθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κυλινδρικῆς στήλης, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος 3μ. καὶ διάμετρον βάσεως 0,65 μ. Πόσα μέτρα χρειάζονται ;

504) Κυλινδρικὴ στήλη ἔχει ὕψος 2μ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,37μ. Πόσα χρήματα ἀπαιτοῦνται πρὸς χρωματισμὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτῆς, ἂν δι' ἕκαστον τετρ. μέτρον ἀπαιτοῦνται 20 δραχμαί ;

505) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος μὲν 0,60μ ἀκτῖνα δὲ βάσεως 0,3μ. ;

506) Πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ κυλινδρικὸν δοχεῖον ἐκ λευκοσιδήρου ὕψους 2 παλ. καὶ ἀκτῖνος βάσεως 10 δακτύλων. Πόσος λευκοσίδηρος χρειάζεται ;

507) Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κυλίνδρου ἔχει ἐμβαδὸν 3,14159 τετρ. δακτύλων, ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 5 δακ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου τούτου ;

508) Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κυλίνδρου εἶναι 5 δακ. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ ὕψος του, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῶν βάσεων αὐτοῦ ;

§ 123. Ὄγκος κυλίνδρου. Κύλινδρος ἐκ πτελέας ὕψους 10 δακ. καὶ διαμέτρου βάσεως 7 δακ. ἔχει βάρος 307,872 γραμ. Ὁ ὄγκος Θ ὅθεν αὐτοῦ εἶναι 307,872 : 0,8=384,84 κυβ. δάκ. Παρατηροῦντες δὲ ὅτι ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου τούτου ἔχει ἐμβαδὸν $B=3,14159\times3,5^2=38,484$ τ.δ. καὶ ὅτι $384,84=38,484\times10$ συμπεραίνομεν ὅτι $\Theta=B\times\upsilon$.

Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ αὐτὸ καταλήγομεν συμπέρασμα μὲ οἱονδήποτε κύλινδρον καὶ ἂν ἐργασθῶμεν ὁμοίως, ἕπεται ὅτι : ***Ὁ ὄγκος κυλίνδρου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*** Ἂν α εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως, θὰ εἶναι $\Theta=3,14159\times\alpha^2\times\upsilon$.

Ἀσκήσεις. 509) Κύλινδρος ἔχει ὕψος 5μ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 1μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

510) Ὁ ὄγκος κυλίνδρου εἶναι 20 κυβ. μέτρα, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ 5 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ;

511) Κύλινδρος ἐκ σιδήρου ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 5 δακ. καὶ ὕψος 10 δακ. Πόσον εἶναι τὸ βάρος αὐτοῦ;

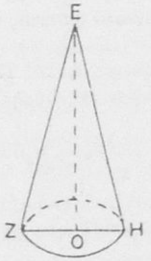
512) Κύλινδρος ἐκ πτελέας ἔχει βάρος 251,3272 γραμ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 5 δακ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος του;

513) Πόσον εἶναι τὸ βάρος ὕδατος (ἀπ. 4° Κ), τὸ ὁποῖον χωρεῖ κυλινδρικὸς κάδος, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος 2,5μ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,6 μ;

514) Πρόκειται ἐπὶ κυκλικῆς βάσεως 3,2 τ. μ. νὰ κατασκευασθῇ κυλινδρικὸς κάδος χωρητικότητος 5000 ὀκάδων ὕδατος (4° Κ). Πόσον ὕψος πρέπει νὰ ἔχῃ ὁ κάδος οὗτος;

2. Κῶνος.

§ 124. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα κώνου.—Τὸ σῶμα ΕΗΖ (Σχ. 107) περατοῦται εἰς ἕνα κύκλον Ο καὶ εἰς μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία ἀπὸ τοῦ κύκλου βαίνει βαθμηδὸν στενουμένη καὶ καταντᾷ σημεῖον Ε. Ἡ εὐθεῖα ΕΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν κύκλον Ο. Τὸ σῶμα τοῦτο καλεῖται ***κῶνος.***



Σχ. 107.

Ὁ κῶνος δύναται νὰ νοηθῇ σχηματιζόμενος ὡς ἑξῆς. Ὀρθ. τρίγωνον ΕΟΗ νοεῖται στρεφόμενον κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν περὶ τὴν ΕΟ, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν του. Τὸ σύνολον τῶν θέσεων, ἀπὸ τὰς ὁποίας διέρχεται, ἀποτελεῖ τὸν κῶνον.

Ὥστε: ***Κῶνος καλεῖται πᾶν στερεόν, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ ὀρθ. τρίγωνον, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν του κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν του.***

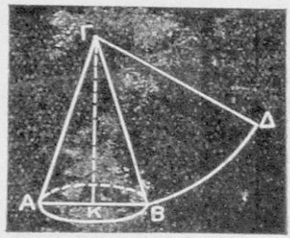
Ἡ πλευρὰ ΕΟ, περὶ τὴν ὁποίαν στρέφεται τὸ ὀρθ. τρίγωνον καὶ ἥτις μένει ἀκίνητος, καλεῖται ***ἄξων*** ἢ ***ὕψος*** τοῦ κώνου.

Ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ τοῦ ὀρθ. τριγώνου γράφει κύκλον, ὁ ὁποῖος καλεῖται ***βάσις*** τοῦ κώνου.

Ἡ ὑποτείνουσα γράφει τὴν καμπύλην ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, τὴν ὁποίαν ἰδιαιτέρως καλοῦμεν ***κυρτὴν*** ἐπιφάνειαν. Διὰ τοῦτο ἡ ὑποτείνουσα λέγεται ***γεννέτειρα*** τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας.

Ἡ γεννέτειρα λέγεται καὶ ***πλευρὰ*** τοῦ κώνου. Τὸ κοινὸν σημεῖον (Ε) τοῦ ἄξονος καὶ τῆς γεννετείρας κώνου καλεῖται ***κορυφὴ*** τοῦ κώνου.

§ 125. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κώνου. Ἂς περιτυλίξωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κώνου μὲ χάρτην, ὡς ἀκριβῶς ἐπράξαμεν (§ 122) διὰ τὸν κύλινδρον. Ὁ χάρτης ἐκτυλισσόμενος λαμβάνει σχῆμα κυκλ. τομέως ΓΒΔ, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν ε μὲ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου καὶ ἀκτῖνα (λ) τὴν πλευρὰν ΓΒ τοῦ κώνου.



Σχ. 108.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 105) $\varepsilon = \frac{(\widehat{B\Delta})}{3} \times \lambda$

καὶ $(\widehat{B\Gamma}) = 2 \times 3{,}14159 \times \alpha$, ἂν $\alpha = (KB)$, ἕπεται ὅτι :

$$\varepsilon = 3{,}14159 \times \alpha \times \lambda. \quad (1),$$

ἤτοι : ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου εἶναι γινόμενον τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.***

Τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου εἶναι $3{,}14159 \times \alpha \times \lambda + 3{,}14159 \times \alpha^2$ ἤτοι $E = 314159 \times \alpha \times (\alpha + \lambda)$. (2)

Ἀσκήσεις. 515) Κῶνος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 9,35μ καὶ πλευρὰν 2,25μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ ;

516) Κῶνος ἔχει πλευρὰν 3 μ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,40μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ ;

517) Κυκλικὸς τομεὺς 45^0 καὶ ἀκτῖνος 0,04μ ἐκ χαρτονίου περιτυλίσσεται εἰς σχῆμα κώνου. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ;

518) Κύλινδρος καὶ κῶνος ἔχουσιν ἴσας βάσεις, τὸ δὲ ὕψος τοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ κωνου. Ποίαν σχέσιν ἔχουσι τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν ;

519) Κῶνος ἔχει κυρτὴν ἐπιφάνειαν 31,1459 τ. μ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 2 δακ. Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ;

520) Τὸ ὕψος κώνου εἶναι 3 δακ. ἡ δὲ πλευρὰ αὐτοῦ 5 δακ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ ;

§ 126. Ὄγκος κώνου. Κυλινδρικὸν ποτήριον χωρεῖ ὕδωρ (ἀπ. 4°Κ) τριπλασίου βάρους ἀπὸ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον χωρεῖ κωνικὸν δοχεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει μὲ αὐτὸ ἴσην βάσιν καὶ ὕψος. Καὶ ὁ ὄγκος κατ' ἀκολουθίαν τοῦ ὑδατίνου κώνου εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ὄγκου τοῦ ὑδατίνου κυλίνδρου.

Ἄρα : ***Ὁ ὄγκος κώνου εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.***

Κατὰ ταῦτα κῶνος ἔχων ὕψος υ καὶ ἀκτῖνα βάσεως α ἔχει ὄγκον

$$\Theta = \frac{3{,}14159 \times \alpha^2 \times \upsilon}{3} \quad (1)$$

Ἀσκήσεις. 521) Κῶνος ἔχει ὕψος 1μ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,25μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ ;

522) Κῶνος ἔχει ὕψος 2μ.καὶ διάμετρον βάσεως 1μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ ;

523) Κῶνος ἔχει διάμετρον βάσεως 12μ, καὶ πλευρὰν 10 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ ;

524) Κῶνος ἔχει κυρτὴν ἐπιφάνειαν 47,12185 τετρ. μέτρων καὶ πλευρὰν 5 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ ;

525) Κῶνος ἔχει ὕψος 8 μ. καὶ ὄγκον 75,39816 κυβ. μέτρων. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ ;

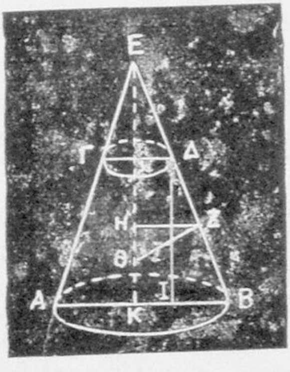
526) Κῶνος ἐκ σιδήρου ἔχει ὕψος 0,40 μ. διάμετρον βάσεως 0,30μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος αὐτοῦ.

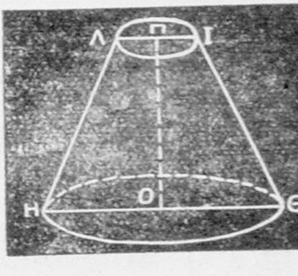
527) Ἔχει τις τεμάχιον μολύβδου βάρους 3,14159 γραμ. καὶ θέλει, ἀφ' οὗ τήξῃ αὐτόν, νὰ χύσῃ εἰς τύπον, ὥστε νὰ λάβῃ σχῆμα κώνου ἀκτῖνος βάσεως 1 δακτ. Πόσον ὕψος θὰ ἔχῃ ὁ κῶνος οὗτος ;

3. Κόλουρος Κῶνος.

§ 127. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα κολούρου κώνου.

Ἐὰν τὸν τυχόντα κῶνον ΕΑΒ (σχ. 109) τμήσωμεν δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ, μένει μεταξὺ τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ τῆς βάσεως τὸ στερεὸν ΑΒΓΔ· τὸ στερεὸν τοῦτο καλεῖται





Σχ. 109.

κόλουρος κῶνος. Ὁμοίως τὸ στερεὸν ΗΘΙΛ (Σχ. 109) εἶναι κόλουρος κῶνος·

Γενικῶς : ***Κόλουρος κῶνος καλεῖται μέρος κώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεως τοῦ κώνου τούτου καὶ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸν κῶνον καὶ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ.***

Ἡ τομὴ ἑκάστου κώνου ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν καὶ μὴ διερχομένου διὰ τῆς κορυφῆς εἶναι κύκλος μικρότερος τῆς βάσεως αὐτοῦ. Κατ' ἀκολουθίαν τούτου ὁ κόλουρος κῶνος περατοῦται εἰς δύο κύκλους καὶ εἰς μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν.

Οἱ δύο κύκλοι, εἰς τοὺς ὁποίους περατοῦται ὁ κόλουρον κῶνος, καλοῦνται ***βάσεις*** αὐτοῦ.

Ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων κολούρου κώνου καλεῖται ***ὕψος*** αὐτοῦ.

Πλευραὶ κολούρου κώνου καλοῦνται τὰ μέρη τῶν πλευρῶν τοῦ κώνου, ἐκ τοῦ ὁποίου παρήχθη, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν βάσεων αὐτοῦ. Π. χ. ΛΗ καὶ ΙΘ εἶναι δύο πλευραὶ τοῦ κολούρου κώνου ΗΛΙΘ.

§ 128. Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας κολούρου κώνου.— Ἡ θεωρητικὴ γεωμετρία ἀποδεικνύει τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου ἰσοῦναι πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἡμίσεος τῆς πλευρᾶς ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα, ἂν παραστήσωμεν διὰ λ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς, διὰ Α καὶ α τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεων κολούρου κώνου καὶ διὰ ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας, ἀληθεύει ἡ ἰσότης,

$$\varepsilon=\frac{\lambda}{2}\times(2\times3{,}14159\times\mathrm{A}+2\times3{,}14159\times\alpha) \quad \text{ἢ}$$

$$\varepsilon=3{,}14159\times\lambda\times(\mathrm{A}+\alpha) \qquad (1)$$

Τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου εὑρίσκομεν, ἂν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας προσθέσωμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ. Ὥστε:

$$\mathrm{E}=3{,}14159\times\lambda\times(\mathrm{A}+\alpha)+3{,}14159\times\mathrm{A}^2+3{,}14159\times\alpha^2 \quad \text{ἢ}$$

$$\mathrm{E}=3{,}14159\times[\mathrm{A}^2+\alpha^2+\lambda\times(\mathrm{A}+\alpha)] \qquad (2)$$

Ἀσκήσεις. 528) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει πλευρὰν 2μ. καὶ ἀκτῖνας βάσεων 0,45μ. καὶ 0,25μ.

529) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει πλευρὰν 1μ. καὶ ἀκτῖνας βάσεων 0,60μ. καὶ 0,40.

§ 129. Ὄγκος κολ. κώνου. — Ἡ θεωρητικὴ γεωμετρία ἀποδεικνύει ὅτι ὁ ὄγκος Θ κολ. κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος υ καὶ ἀκτῖνας βάσεων Α καὶ α, παρέχεται ὑπὸ τῆς ἰσότητος·

$$\Theta=\frac{1}{3}\times3{,}14159\times\upsilon\times(\mathrm{A}^2+\mathrm{A}\times\alpha+\alpha^2) \qquad (1)$$

Πρακτικῶς δυνάμεθα νὰ πεισθῶμεν περὶ τῆς ἀληθείας ταύτης ὡς ἀκολούθως. Λαμβάνομεν ποτήριον, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα κολ. κώνου καὶ μετροῦμεν τὸ ἐσωτερικὸν ὕψος καὶ τὰς ἀκτῖνας τῶν ἐσωτερικῶν βάσεων αὐτοῦ. Ἔστω δὲ ὅτι $\upsilon=10^{\delta}$, $A=4^{\delta}$ καὶ $\alpha=3^{\delta}$. Ὑπολογίζοντες τὸν κενὸν ὄγκον αὐτοῦ κατὰ τὴν ἰσότητα (1) εὑρίσκομεν

$$\Theta=\frac{1}{3}\times3{,}14159\times10\times(16+12+9)=387{,}46 \text{ κ. δ.}$$

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ποτήριον τοῦτο ὀφείλει νὰ χωρῇ ὕδωρ ἀπεσταγμένον 4° K βάρους 387,46 γραμμαρίων· πράγματι δὲ ζυγίζοντες αὐτὸ πρῶτον μὲν κενόν, ἔπειτα δὲ πλῆρες τοιούτου ὕδατος ἀνευρίσκομεν ὅτι χωρεῖ ὕδωρ 387,46 γραμμαρίων.

Ἀσκήσεις. 530) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κολ. κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος 0,30μ καὶ ἀκτῖνας βάσεων 0,12μ. καὶ 0,08μ.

531) Κώνου ἡ μὲν βάσις ἔχει διάμετρον 0,12μ., τὸ δὲ ὕψος εἶναι 0,16μ. Ἐὰν οὗτος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν καὶ ἀπέχοντος ἀπ' αὐτῆς 0,08μ., σχηματίζεται τομὴ αὐτοῦ ἔχουσα διάμετρον 0,06μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ οὕτω σχηματιζομένου κολ. κώνου.

§ 130. Χωρητικότης πίθου. Πρὸς εὕρεσιν τῆς χωρητικότητος πίθου, ἤτοι τοῦ ὄγκου τοῦ περιεχομένου ὑγροῦ, ὅταν ὁ πῖθος εἶναι πλήρης, ἐργαζόμεθα κατὰ μίαν τῶν ἀκολούθων μεθόδων.

Αον — Μὴ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν κυρτότητα τοῦ πίθου θεωροῦμεν αὐτὸν ὡς συγκείμενον ἐκ δύο κολ. κώνων. Ὑπολογίζοντες ὅθεν τὸν ὄγκον ἑνὸς ἐκ τῶν κολ. κώνων κατὰ τὸν τύπον (1) (§ 129) καὶ διπλασιάζοντες αὐτὸν εὑρίσκομεν τὴν χωρητικότητα τοῦ πίθου.

Βον. — Θεωροῦμεν τὸν πῖθον μὲ ἀρκοῦσαν προσέγγισιν ὡς ἴσον κατ' ὄγκον πρὸς κύλινδρον, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τοῦ πίθου καὶ διάμετρον βάσεως τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῆς διαμέτρου ἑνὸς τῶν ἄκρων κύκλων, εἰς τοὺς ὁποίους περατοῦται ὁ πῖθος, καὶ τοῦ διπλασίου τῆς διαμέτρου Δ τοῦ μέσου τοῦ πίθου. Κατὰ ταῦτα, ἂν κληθῇ Θ ὁ ὄγκος πίθου, ἔχοντος μῆκος υ, διάμετρον τοῦ μέσου Δ καὶ τοῦ ἄκρου δ, θὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης

$$\Theta=3{,}14159\times\left(\frac{\delta+2\times\Delta}{6}\right)^2\times\upsilon \qquad (1)^*$$

Ἂν ὁ πῖθος δὲν εἶναι πλήρης ὑγροῦ ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως

(*) Εἰς τὸ αὐτὸ περίπου ἐξαγόμενον ἄγει καὶ ὁ ἀκόλουθος τύπος τοῦ Oughtred

$$\Theta=\frac{1}{12}\times3{,}14159\times(2\Delta^2+\delta^2)\times\upsilon. \qquad (2)$$

Υ:Δ	Χ
1,0	1,
0,9	0,95
0,8	0,89
0,7	0,75
0,6	0,63
0,5	0,50
0,4	0,37
0,3	0,25
0,2	0,14
0,1	0,85

῾Υπολογίζομεν πρῶτον, κατὰ τὸν προηγούμενον τύπον, ὅλην τὴν χωρητικότητα τοῦ πίθου καὶ ἔστω αὕτη 1800 κ. π. Διὰ ῥάβδου δέ, τὴν ὁποίαν διὰ τοῦ στομίου τοῦ πίθου εἰσάγομεν εἰς τὸν πῖθον, μετροῦμεν τὸ ὕψος τοῦ περιεχομένου ὑγροῦ, ἔστω δὲ τοῦτο 1,5 μ. Ἐὰν ἤδη διαιρέσωμεν τὸ ὕψος τοῦτο 1,5 διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου τοῦ μέσου, ὅπερ ἔστω 3,75 μ. εὑρίσκομεν πηλίκον 0,4. Εἰς τὸ εὑρεθὲν τοῦτο πηλίκον, ὅπερ εὑρίσκομεν ἀναγεγραμμένον ἐν τῇ πρώτῃ στήλῃ τοῦ παρακειμένου πίνακος ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 0,37 τῆς στήλης Χ τοῦ αὐτοῦ πίνακος. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ὅλην χωρητικότητα 1800 κ.π. τοῦ πίθου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 0,37 εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ περιεχομένου ὑγροῦ εἶναι 666 κ. παλαμῶν (1).

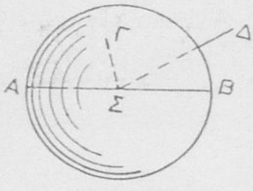
Ἀσκήσεις. 532) Πόση εἶναι ἡ ὁλικὴ χωρητικότης πίθου, ὁ ὁποῖος ἔχει μῆκος 2 μέτρων, ἄκραν διάμετρον 1 μέτρου καὶ μεσαίαν 1,68 μ ;

533) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ περιεχομένου ὑγροῦ ἐν τῷ αὐτῷ πίθῳ, ἂν τοῦτο ἔχῃ ὕψος 0,80μ. ;

4. Σφαῖρα.

§ 131. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα σφαίρας. Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος Σ ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τὸ σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς αὐτοῦ. Τὸ σῶμα τοῦτο καλεῖται ***σφαῖρα***. Τὸ σημεῖον Σ καλεῖται ***κέντρον*** τῆς σφαίρας ταύτης.

Γενικῶν : ***Σφαῖρα καλεῖται πᾶν σῶμα, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.***



Σχ. 110.

Κέντρον σφαίρας καλεῖται τὸ σημεῖον αὐτῆς, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.

Τὸ εὐθ. τμῆμα ΣΑ ἀρχίζει ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας Σ καὶ καταλήγει εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς. Καλεῖται δὲ τοῦτο ***ἀκτὶς*** τῆς σφαίρας Σ. Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΣΒ διέρχεται ἀπὸ τὸ Σ καὶ καταλήγει ἑκατέρωθεν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ταύτης. Καλεῖται δὲ τοῦτο ***διάμετρος*** τῆς σφαίρας ταύτης.

(1) Ἐὰν τὸ πηλίκον ***Υ : Δ*** περιέχῃ δεκαδικὰ ψηφία πλείονα τοῦ ἑνός, παραλείπομεν τὰ λοιπὰ πλὴν τοῦ πρώτου.

Γενικῶς: ***Ἀκτὶς σφαίρας καλεῖται πᾶν εὐθ. τμῆμα, τὸ ἄρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ καταλήγει εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς.***

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς σφαίρας ἐννοῦμεν εὐκόλως ὅτι: ***Πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες σφαίρας εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.***

Διάμετρος σφαίρας καλεῖται πᾶν εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ καταλήγει ἑκατέρωθεν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς.

Ἀσκήσεις. 534) Ποία σχέσις μεγέθους ὑπάρχει μεταξὺ ἑκάστου τῶν εὐθ. τμημάτων ΣΔ καὶ ΣΓ (Σχ. 110) καὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας Σ;

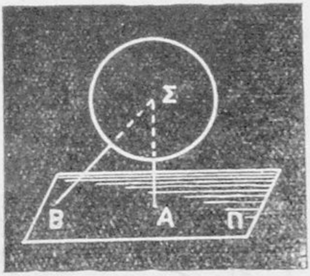
535) Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ διαμέτρου καὶ τῆς ἀκτῖνος σφαίρας;

536) Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν διαμέτρων τῆς αὐτῆς σφαίρας;

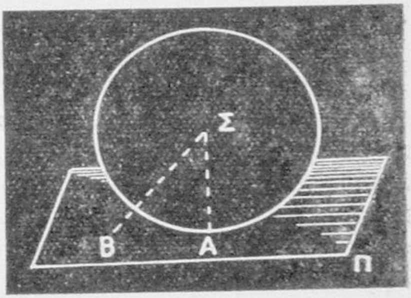
537) Ποῖα σημεῖα ἀπέχουσιν ἀπὸ τὸ κέντρον σφαίρας ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς.

§ 132. Θέσεις ἐπιπέδου πρὸς σφαῖραν. Τὸ ἐπίπεδον Π (Σχ. 111) οὐδόλως συναντᾷ τὴν σφαῖραν Σ.

Τὸ ἐπίπεδον (Σχ. 112) ἐγγίζει τὴν σφαῖραν εἰς ἓν μόνον ση-



Σχ. 111.



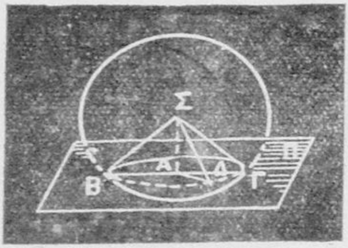
Σχ. 112.

μεῖον Α. Λέγεται δὲ ***ἐφαπτόμενον*** εἰς τὴν σφαῖραν ἐπίπεδον.

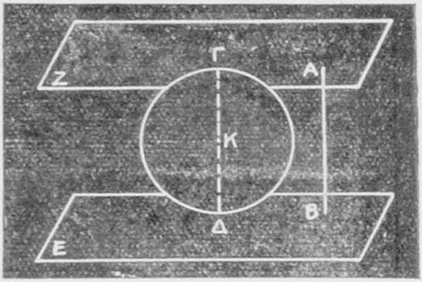
Τὸ ἐπίπεδον Π (Σχ. 113) εἰσχωρεῖ μέσα εἰς τὴν σφαῖραν Σ καὶ χωρίζει αὐτὴν εἰς δύο μέρη. Περὶ τούτου λέγομεν ὅτι τέμνει τὴν σφαῖραν.

Ὥστε ἓν ἐπίπεδον δύναται: α΄) Νὰ μὴ συναντᾷ οὐδόλως μίαν σφαῖραν. β΄) Νὰ ἐφάπτηται τῆς σφαίρας καὶ γ΄) Νὰ τέμνῃ αὐτήν.

§ 133. Εὕρεσις τῆς ἀκτῖνος σφαίρας. Τοποθετοῦμεν τὴν σφαῖραν Κ (Σχ. 114) ἐπὶ ὁριζοντίου τραπέζης Ε καὶ στηρίζομεν ἔπειτα ἐπὶ τῆς σφαίρας τεμάχιον Ζ χαρτονίου, οὕτως ὥστε νὰ ἐφάπτηται τῆς σφαίρας καὶ νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ε. Μετροῦμεν ἔπειτα τὴν ἀπόστασιν ΑΒ τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ Ζ καὶ



Σχ. 113



Σχ. 114.

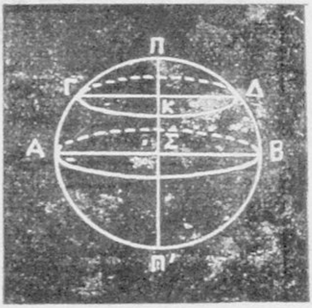
διαιροῦντες ταύτην διὰ 2 εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἀκτῖνα. Περὶ τούτου πειθόμεθα παρατηροῦντες ὅτι ἡ διάμετρος ΓΔ τῆς σφαίρας ἰσοῦται πρὸς ΑΒ.

§ 134. Κύκλοι σφαίρας. Ἐὰν ἐπίπεδον τέμνῃ σφαῖραν, ἔχει μετ' αὐτῆς ἓν κοινὸν μέρος. Τοῦτο εἶναι ***κύκλος*** ἤτοι:

Ἡ τομὴ σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου εἶναι κύκλος.

Μέγιστος κύκλος σφαίρας καλεῖται πᾶς κύκλος σφαίρας, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς.

Ὁ κύκλος ΑΒ π. χ. εἶναι μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας Σ (Σχ. 115). Οἱ μεγ. κύκλοι σφαίρας ἔχουσι τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας.



Σχ. 115.

α') ***Πᾶς μέγ. κύκλος σφαίρας ἔχει κέντρον καὶ ἀκτῖνα τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.***

β') ***Πᾶς μέγ. κύκλος σφαίρας διαιρεῖ τὴν σφαῖραν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς εἰς δύο ἴσα μέρη.***

Καθ' ἓν ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη τῆς σφαίρας καλεῖται ***ἡμισφαίριον.***

Μικρὸς κύκλος σφαίρας, καλεῖται πᾶς κύκλος σφαίρας, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς.

Ὁ κύκλος ΓΔ π.χ. εἶναι μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας Σ (Σχ. 115).

Παράλληλοι κύκλοι σφαίρας καλοῦνται οἱ κύκλοι, κατὰ τοὺς ὁποίους αὕτη τέμνεται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων. Τοιοῦτοι π.χ. εἶναι οἱ κύκλοι ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 115).

Ἀσκήσεις. 538) Ἡ ἀκτὶς σφαίρας εἶναι 0,03μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας καὶ τὸ ἐμβαδὸν μεγίστου κύκλου αὐτῆς ;

539) Μέγιστος κύκλος σφαίρας ἔχει περιφέρειαν 31,4159μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας ταύτης ;

540) Τὸ ἐμβαδὸν μεγίστου κύκλου σφαίρας εἶναι 314,159 τετρ. δάκτυλοι. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτῆς ;

541) Ἡ ἀκτὶς σφαίρας εἶναι 5 παλ., ἡ δὲ ἀπόστασις τοῦ κέντρου αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου μικροῦ κύκλου αὐτῆς εἶναι 30 δάκτυλοι. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ μικροῦ τούτου κύκλου ;

542) Ἡ περιφέρεια μικροῦ κύκλου σφαίρας ἔχει μῆκος 28,27431 δ, ἡ δὲ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπὸ τοῦ μικροῦ τούτου κύκλου εἶναι 4 δάκτυλοι. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας ταύτης ;

§ 135. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν σφαῖραν ἐκ λεπτοῦ φύλλου ψευδαργύρου ἀκτῖνος 0,03 μ, ἥτις εἶναι ἐσωτερικῶς κοίλη. Ἄς κατασκευάσωμεν δὲ ἐκ φύλλου τῆς αὐτῆς ὕλης καὶ πάχους κύκλον, ὅστις νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα 0,03μ. Ἄν ζυγίσωμεν τὰ δύο ταῦτα σώματα μετ᾽ ἀκριβείας, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ βάρος τῆς σφαίρας εἶται τετραπλάσιον τοῦ βάρους τοῦ κύκλου.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ σώματα ταῦτα σύγκεινται ἐκ τῆς αὐτῆς ὕλης καὶ ἔχουσι τὸ αὐτὸ πάχος, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι τετραπλασία ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου.

Ἄρα : ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τεσσάρων μεγίστων κύκλων αὐτῆς.***

Ἄν Ε εἶναιτὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας καὶ α ἡ ἀκτὶς αὐτῆς θὰ εἶναι

$$E = 4 \times 3,14159 \times \alpha^2 \qquad (1)$$

Ἀσκήσεις. 543) Ἡ ἀκτὶς σφαίρας εἶναι 0,35μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ;

544) Ἡ διάμετρος σφαίρας εἶναι 3,50 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ;

545) Ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας ἔχει ἐμβαδὸν 50,25644 τ. δάκ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτῆς ;

546) Ἡ ἀκτὶς σφαίρας, τὸ ὕψος κυλίνδρου καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως αὐτῆς ἔχουσι μῆκος ἀνὰ 0,2μ. ἕκαστον. Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ;

§ 136. Ὄγκος σφαίρας. Ἡ θεωρητικὴ γεωμετρία ἀποδεικνύει ὅτι :

Ὁ ὄγκος σφαίρας εἶναι γινόμενον τῆς ἐπιφανείας ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος (α) αὐτῆς.

Ἤτοι : $\Theta=4\times3{,}14159\times\alpha^2\times\frac{\alpha}{3}=\frac{4}{3}\times3{,}14159\times\alpha^3$.

Πρακτικῶς βεβαιούμεθα περὶ τῆς ἀληθείας ταύτης ὡς ἑξῆς. Σφαῖρα ἐκ μολύβδου π. χ. ἀκτῖνος 1 δακ. ὀφείλει κατὰ τὴν προηγουμένην ἰσότητα νὰ ἔχῃ ὄγκον $\frac{4}{3}\times3{,}14159\times2^3$κ. δάκ. $=33{,}51$ κ. δάκ. Ὀφείλει ἄρα νὰ ἔχῃ βάρος $33{,}51\times11{,}353=380{,}439$ γραμμάρια. Πράγματι ζυγίζοντες ταύτην εὑρίσκομεν ὅτι ἔχει βάρος 380,439 γραμ. Ὁμοίως κοίλη σφαῖρα ἐσωτερικῆς ἀκτῖνος 10 δακ. ὀφείλει κατὰ τὴν ἄνω ἰσότητα νὰ ἔχῃ χωρητικότητα $\frac{4}{3}\times3{,}14159$ $\times10^3=4188{,}76$ κυβ. δακ. Πρέπει ἄρα νὰ χωρῇ ὕδωρ 4188,76 γραμ. Βεβαιούμεθα δὲ περὶ τούτου ζυγίζοντες ταύτην πρῶτον μὲ κενήν, ἔπειτα δὲ πλήρη ὕδατος (ἀπ. 4° Κ).

Ἀσκήσεις. 547) Ἡ διάμετρος σφαίρας εἶναι 1,2 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτῆς ;

548) Ὁ ὄγκος σφαίρας εἶναι 4,18876 κ. μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτῆς ;

549) Ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας ἔχει ἐμβαδὸν 314,159 τ. παλ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτῆς ;

550) Ἂν ἡ σφαῖρα, περὶ τῆς ὁποίας ὁμιλεῖ ἡ προηγουμένη ἄσκησις, εἶναι ἀπὸ ἐλάτην, πόσον εἶναι τὸ βάρος αὐτῆς ;

551) Σφαῖρα ἐκ μολύβδου ἔχει διάμετρον 0,3μ. Πόσον εἶναι τὸ βάρος αὐτῆς ;

552) Αἱ ἕδραι κύβου ἀκμῆς 3 δακ. ἐφάπτονται σφαίρας. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ χώρου, ὁ ὁποῖος περιέχεται μεταξὺ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν σωμάτων τούτων ;

§ 137. Σφαιρικὴ ζώνη. Ἔστω σφαῖρα Σ (Σχ. 115) καὶ ΑΒ, ΓΔ δύο παράλληλοι κύκλοι αὐτῆς. Μεταξὺ τῶν κύκλων τούτων περιέχεται ἓν μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας Σ. Τὸ μέρος τοῦτο καλεῖται ***σφαιρικὴ ζώνη***.

Γενικῶς. ***Σφαιρικὴ ζώνη καλεῖται πᾶν μέρος τῆς ἐπιφανείας σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο παραλλήλων κύκλων αὐτῆς.***

Οἱ κύκλοι, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται σφαιρικὴ ζώνη, λέγονται ***βάσεις*** αὐτῆς.

Ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων σφ. ζώνης λέγεται ***ὕψος*** αὐτῆς. Οὕτω τῆς σφ. ζώνης ΑΒΓΔ (Σχ. 115) βάσεις μὲν εἶναι οἱ κύκλοι ΑΒ καὶ ΓΔ ὕψος δὲ τὸ εὐθ. τμῆμα ΣΚ.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ κύκλος ΓΔ διαρκῶς ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὸν ΑΒ, ἀλλὰ μένει πάντοτε παράλληλος πρὸς αὐτόν. Οὕτως ἔρχεται στιγμή, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ ἐφάπτεται τῆς σφαίρας εἰς τὸ σημεῖον Π, ὅτε ὁ κύκλος καταντᾷ σημεῖον Π. Τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τοῦ σημείου Π καὶ τοῦ κύκλου ΑΒ, καλεῖται ἐπίσης σφαιρικὴ ζώνη. Αὕτη ἔχει μίαν βάσιν ΑΒ καὶ ὕψος ΠΣ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Κατασκευάζομεν κοίλην σφαῖραν ἐκ λεπτοῦ φύλλου λευκοσιδήρου ἀκτῖνος 3 δακ. καὶ ἀποκόπτομεν ἀπ' αὐτῆς σφαιρικὴν ζώνην ὕψους 2 δακ. Κατασκευάζομεν ἔπειτα ἀπὸ τὸ αὐτο φύλλον λευκοσιδήρου ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὕψος 2 δακ. καὶ βάσιν ἴσην πρὸς τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας. Ἐὰν τὰ δύο ταῦτα σώματα ζυγίσωμεν, βλέπομεν ὅτι ἔχουσι τὸ αὐτὸ βάρος. Συμπεραίνομεν ὅθεν ὅτι ἔχουσι καὶ ἴσας ἐπιφανείας.

Ἄρα: ***Τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης εἶναι γινόμενον τοῦ ὕψους αὐτῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει.***

Ἀσκήσεις. 553) Σφαιρικὴ ζώνη ἔχει ὕψος 5 δακ. καὶ ἀνήκει εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος 3 δακ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς;

554) Σφαιρικὴ ζώνη ἔχει ἐμβαδὸν 62,8318 τετρ. δακτύλων ἀνήκει εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος 5 δακ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτῆς;

555) Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν δύο σφαιρικῶν ζωνῶν τῆς αὐτῆς σφαίρας, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος;

Συνοπτικὴ ἀνακεφαλαίωσις προηγουμένων.

Ἐμβαδὸν Ε ὁλικῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος ὕψους υ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ἔχει περίμετρον τ καὶ ἐμβαδὸν β·

$$Ε=(τ\times υ)+(β\times 2).$$

Ὄγκος Θ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου διαστάσεων α, β, γ:

$$Θ=α\times β\times γ.$$

Ὄγκος Θ κύβου ἀκμῆς α: $Θ=α^3$.

Σχέσεις μεταξὺ βάρους Β, ὄγκου Σ καὶ εἰδ. βάρος ε σώματος:

$$Β : Σ=ε,\quad Β=Σ\times ε,\quad Σ=Β : ε.$$

Ὄγκος Θ πρίσματος ὕψους υ καὶ βάσεως ἐμβαδοῦ β') $Θ=β\times υ$.

Ὄγκος Θ πυραμίδος ὕψους υ καὶ βάσεως ἐμβαδοῦ β) $Θ=\frac{β\times υ}{3}$.

Ἐβαδὸν ε κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ὕψους υ καὶ ἀκτῖνος βάσεως α $ε=2\times α\times 3,14159\times υ$.

Ἐμβαδὸν Ε ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ αὐτοῦ κυλίνδρου

$$Ε=2\times α\times 3,14159\times(υ+α).$$

Ὄγκος Θ τοῦ αὐτοῦ κυλίνδρου : $Θ=3,14159\times α^2\times υ.$

Ἐμβαδὸν ε κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου πλευρᾶς λ καὶ ἀκτῖνος βάσεως α $ε=3,14159\times α\times λ.$

Ἐμβαδὸν Ε ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ αὐτοῦ κώνου:

$$Ε=3,14159\times α\times(α+λ).$$

Ὄγκος Θ κώνου ὕψους υ καὶ ἀκτῖνος βάσεως α) $Θ=\frac{3,14159\times α^2\times υ}{3}$

Ἐμβαδὸν Ε ἐπιφανείας σφαίρας ἀκτῖνος α) $Ε=4\times 3,14159\times α^2.$

Ὄγκος Σ σφαίρας ἀκτῖνος α) $Σ=\frac{3}{4}\times 3,14159\times α^3.$

Ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης ὕψους υ σφαίρας ἀκτῖνος α

$$ε=2\times 3,14159\times α\times υ.$$

Διάφορα ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

556) Πρίσμα ἔχει ὕψος 9 μ. καὶ βάσιν τρίγωνον. Τοῦ τριγώνου τούτου μία πλευρὰ ἔχει μῆκος 0,40 μ, ἡ δὲ ἀπέναντι κορυφὴ ἀπέχει ἀπ' αὐτῆς 0,25μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ ;

557) Ἐργάται ἔσκαψαν τάφρον μήκους 30 μ, βάθους 2 μ, καὶ πλάτους 0,80μ. Πόσας δραχμὰς ἔλαβον διὰ τὴν ἐργασίαν ταύτην, ἂν εἶχον συμφωνήσει νὰ πληρώνωνται 20 δραχ. δι' ἕκαστον κυβ. μέτρον τοῦ χώματος, τὸ ὁποῖον θὰ ἐξήγαγον ;

558) Πυραμὶς ἔχει ὕψος 6μ, ἡ δὲ βάσις εἶναι ὀρθογώνιον. Τοῦ ὀρθογωνίου τούτου αἱ διαστάσεις εἶναι 2,4 μ ἡ μία καὶ 0,85 ἡ ἄλλη. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ταύτης ;

559) Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος (ἀπ. 4° Κ), τὸ ὁποῖον χωρεῖ κάδος ὕψους 2,5 μ. καὶ ἀκτῖνος βάσεως 0.60 μ ;

560) Τεμάχιον θείου ἔχει βάρος 23,84 χιλιόγραμμα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ ;

561) Πόσον εἶναι τὸ βάρος σιδηρᾶς σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι 0,02 μ ;

562) Κῶνος ἔχει ὕψος 3μ. καὶ ὄγκον 0,156639 κυβ. μέτρου. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως αὐτοῦ ;

563) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ἀκτῖνος 6 μ.

664) Σφαιρικὴ ζώνη σφαίρας ἀκτῖνος 3 δακ. ἔχει ὕψος 2 δακ. Πόσον κοστίζει ὁ χρωματισμὸς αὐτῆς πρὸς 12 δραχμὰς τὴν τετρ. παλάμην ;

565) Σφαῖρα καὶ κύλινδρος ἀποτελοῦνται ἐκ σιδήρου. Ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας καὶ τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου εἶναι 1 παλάμη, τὸ δὲ ὕψος τοῦ κυλίνδρου εἶναι 2 παλάμαι. Ποῖον ἀπὸ τὰ δύο ταῦτα σώματα εἶναι βαρύτερον ἀπὸ τὸ ἄλλο καὶ πόσας φοράς;

ΤΕΛΟΣ

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΚΥΡΙΩΤΕΡΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ.—ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

ΓΩΝΙΑΙ.—ΚΑΘΕΤΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

ΚΥΚΛΟΣ

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΤΡΙΓΩΝΑ

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΠΟΛΥΕΔΡΑ

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ—ΚΩΝΟΣ—ΣΦΑΙΡΑ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΛΠ.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 9 Σεπτεμβρίου 1932

Ἀριθ. Πρωτοκ. 43229/15215
» Διεκπ. . . . .

Πρὸς
τοὺς ἐκδότας κ. κ. Δ. Τζάκαν καὶ Στέφ.
Δελαγραμμάτικαν

Πανεπιστημίου 81

Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν ὅτι διὰ ταὐταρίθμου ὑπουργικῆς ἀποφάσεως ἐκδοθείσης τὴν 12 Αὐγούστου ἐ. ἔ. καὶ δημοσιευθείσης τὴν 29 Αὐγούστου εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 80 φύλλον τῆς Ἐφημ. Κυβερνήσεως, ἐνεκρίθη συμφώνως πρὸς τὰς διατάξεις τοῦ νόμου 5045 καὶ τὴν ἀπόφασιν τῆς οἰκείας κριτικῆς ἐπιτροπῆς, τὴν περιλαμβανομένην εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 404 πρακτικὸν τοῦ Ἐκπαιδευτικοῦ Γνωμοδοτικοῦ Συμβουλίου, τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον «Πρακτικὴ Γεωμετρία» τοῦ Ν. Δ. Νικολάου βιβλίον του ὡς διδακτικὸν βιβλίον πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῆς Α' καὶ Β' τάξεως τῶν Γυμνασίων διὰ μίαν πενταετίαν, ἀρχομένην ἀπὸ τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1932—33 ὑπὸ τὸν ὅρον ὅπως κατὰ τὴν ἐκτύπωσιν τοῦ βιβλίου τούτου συμμορφωθῆτε πρὸς τὰς ὑποδείξεις τῆς κριτικῆς ἐπιτροπῆς.

Ἐντολῇ τοῦ Ὑπουργοῦ
Ὁ Διευθυντὴς
Ε. ΚΑΚΟΥΡΟΣ

Ἄρθρον 9 τοῦ ἀπὸ 26 Ἰουλίου 1929 Προεδρικοῦ Διατάγματος.

«Περὶ τοῦ τρόπου τῆς διατιμήσεως τῶν ἐγκεκριμένων διδακτικῶν βιβλίων».

Τὰ διδακτικὰ βιβλία τὰ πωλούμενα μακρὰν τοῦ τόπου τῆς ἐκδόσεώς των ἐπιτρέπεται νὰ πωλῶνται ἐπὶ τιμῇ ἀνωτέρᾳ κατὰ 15 % τῆς ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ παρόντος Διατάγματος κανονισθείσης ἄνευ βιβλιοσήμου τιμῆς πρὸς ἀντιμετώπισιν τῆς δαπάνης συσκευῆς καὶ ταχυδρομικῶν τελῶν, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅπως ἐπὶ τῆς τελευταίας σελίδος τοῦ ἐξωφύλλου ἐκτυποῦται τὸ παρὸν ἄρθρον.