γεωμετρια

ΤΑΞΙΣ Ε΄ - ΣΤ΄

12

ΠΡΟΜΗΘΕΥΣ ΣΧΟΛΙΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΑΛΙΚΙΩΤΗ
ΣΤΑΔΙΟΥ 41 • ΑΘΗΝΑΙ • ΑΡΙΣΤΕΙΔΟΥ 6

Σ. ΜΕΓΑΛΟΠΟΥΛΟΥ — ΣΤ. ΔΑΣΚΑΛΟΓΙΑΝΝΗ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Διὰ τὴν Ε′ καὶ ΣΤ′ τάξιν τοῦ Δημοτικοῦ

Ε Γ Κ Ε Κ Ρ Ι Μ Ε Ν Η
διὰ τῆς ὑπ’ ἀριθ. 61452/12-6-52
ἀποφ. τοῦ Ὑπουργείου Παιδείας

ΣΧΟΛΙΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΑΛΙΚΙΩΤΗ
"Ο ΠΡΟΜΗΘΕΥΣ"
ΣΤΑΔΙΟΥ 41 • ΑΘΗΝΑΙ • ΑΡΙΣΤΕΙΔΟΥ 6

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Δ)νσις Διδακτικῶν Βιβλίων

Ἐν Ἀθήναις τῇ 20-6-1952

Ἀριθμ. πρωτ. 61330

Πρὸς τοὺς κ. κ.

Σ. Μεγαλόπουλον — Στ. Δασκαλογιάννην

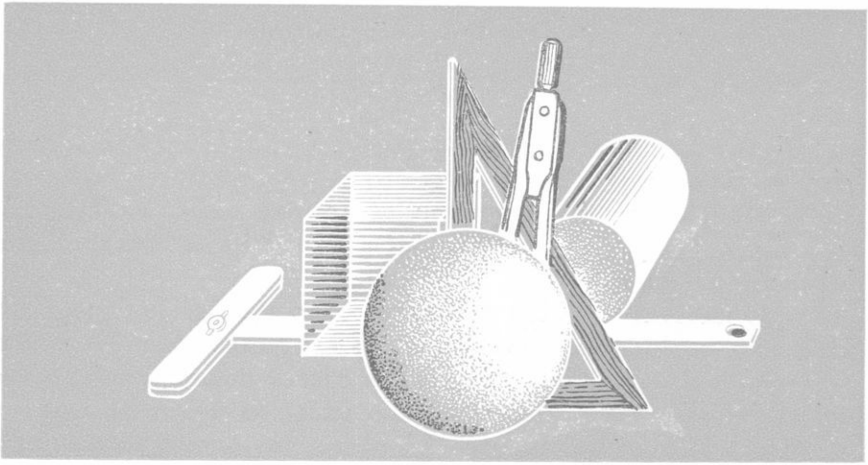
Ἀβέρωφ 2 — Ἀθήνας

Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν ὅτι διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 64452/12-6-52 ἀποφάσεως τοῦ Ὑπουργείου μετὰ σύμφωνον γνωμοδότησιν τοῦ Κ.Γ.Δ.Σ.Ε. ἐνεκρίθη διὰ μίαν τριετίαν ἀρχομένην ἀπὸ 1—9—52, τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον «ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ» βιβλίον σας, ὡς βοηθητικὸν τοῦ μαθήματος τῆς Γεωμετρίας, διὰ τοὺς μαθητὰς τῆς Ε' καὶ ΣΤ' τάξεως τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου.

Παρακαλοῦμεν ὅθεν, ὅπως προβῆτε εἰς τὴν διόρθωσιν τοῦ βιβλίου σας κατὰ τὰς ὑποδείξεις τῶν οἰκείων Ἐπιτροπῶν καὶ μετὰ τὴν θεώρησιν αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ ἁρμοδίου Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβούλου ἐκτυπώσητε τοῦτο, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ ἔγκρισις αὕτη παρέχεται ὑπὸ τὸν ὅρον τῆς διορθώσεως τῶν σφαλμάτων καὶ δύναται νὰ ἀνακληθῇ ἀνὰ πᾶσαν στιγμήν.

Πᾶν βιβλίον μὴ φέρον αὐτολεξεὶ τὴν παροῦσαν δὲν εἶναι ἐγκεκριμένον.

Ἐντολῇ Ὑπουργοῦ
Ὁ Διευθυντὴς
Χ. ΜΟΥΣΤΡΗΣ



Ε Ι Σ Α Γ Ω Γ Η

1. Γεωμετρία—Γεωμετρικὰ σώματα.

῾Η παραγωγὴ τῆς λέξεως «Γεωμετρία» μᾶς λέγει τί εἶναι.
Τί λοιπὸν εἶναι ;

῾Ο Χαράλαμπος εἶπε : — Μοῦ φαίνεται ὅτι δὲν μᾶς ἀποδίδει πολὺ καλὰ ἡ λέξις τὴ δουλειὰ τῆς Γεωμετρίας.

— Δὲν μετροῦμε μόνο τὴ γῆ, χωράφια, κήπους, λίμνες κλπ. ἀλλὰ καὶ διάφορα σώματα, ποὺ εἶναι ἐπάνω στὴ γῆ, σπίτια, καράβια, δεξαμενές, κιβώτια κτλ.

Πολλὰ σώματα φυσικά, ὅπως βουνά, φυτά, ζῶα, ἔχουν ἰδικόν τους μέγεθος καὶ σχῆμα. Εἰς πολλὰ ὅμως τεχνικὰ σώματα, δίδομεν ἡμεῖς τὸ σχῆμα καὶ τὸ μέγεθος. Αὐτὰ τὰ λέγομεν γεωμετρικὰ ἢ στερεὰ σώματα.

2. Ἔννοια τοῦ χώρου

α΄. Τί εἶναι χῶρος

Εἰς τὸ ἄκουσμα τῆς λέξεως χῶρος, ὁ Δημήτρης ἐσήκωσε τὸ χέρι νὰ εἴπη κάτι :

— Προχθὲς εἴχαμε μπῆ τόσοι πολλοὶ στὸ τράμ, ποὺ ἕνας κύριος ἔλεγε ζωηρά : « Τί χάλια εἶναι αὐτά ! ἐδῶ παραβιάζεται ἡ ἔννοια τοῦ χώρου».

—Ὁ καθένας μας εἶχε πιάσει τὸν τόπο του (χῶρο ὡρισμένο), ἀλλὰ τόσο στρίμωγμα εἴχαμε, ποὺ λὲς καὶ ἤμαστε ὅλοι ἕνα σῶμα.

—Αὐτὸ δὲν συμβαίνει μὲ τὰ ἄλλα στερεὰ σώματα, ποὺ καθένα πιάνει ἕναν ὡρισμένο χῶρο σ' ὅποιο μέρος κι ἂν τὸ βάλωμε.

Ὥστε χῶρος εἶναι τὸ μέρος, ὁ τόπος, τὸν ὁποῖον καταλαμβάνουν τὰ σώματα.

Ἀσκήσεις. 1. Ποῖος εἶναι ὁ χῶρος τῆς αἰθούσης μας;

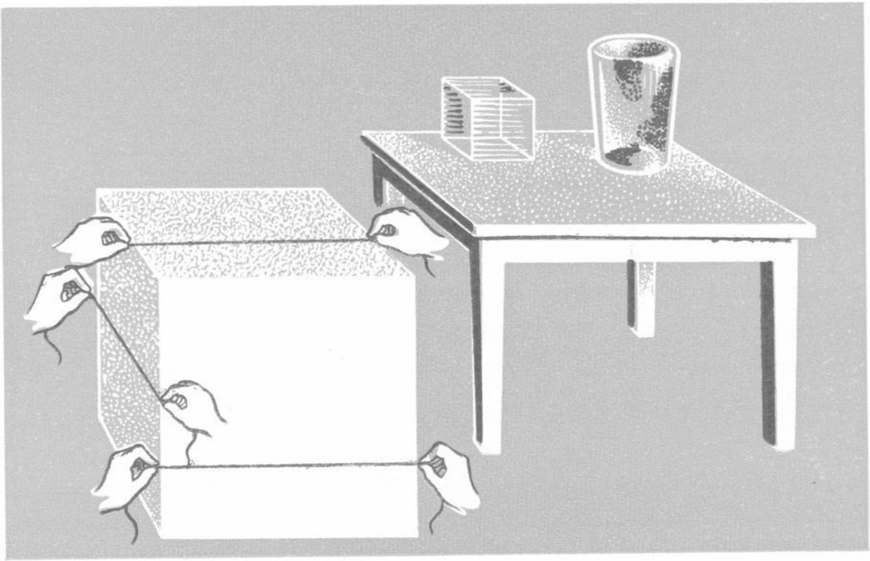
2. Ποῖος εἶναι τῆς αὐλῆς μας;

3. Τί βλέπετε εἰς τὸν χῶρον τῆς πόλεώς μας;

4. Κοιτάξετε εἰς τὸν χάρτην τὸν χῶρον τοῦ νομοῦ σας, τῆς πατρίδος μας.

5. Εἰς τὴν σφαῖραν ποίους ἄλλους μεγαλυτέρους χώρους βλέπετε ;

6. Μὲ τὸν νοῦν σας, μὲ τὰ μάτια σας, τὴν ἡμέραν καὶ τὴν νύκτα, ποίους ἄλλους χώρους αἰσθάνεσθε καὶ βλέπετε;



ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

Α΄. ΚΥΒΟΣ

Ὁ Γιάννης ἔφερεν ἀπὸ τὸ γραφεῖον ἕνα κιβώτιον μὲ διάφορα γεωμετρικὰ σχήματα. Ὅταν ἐβγάλαμεν τὸ πρῶτο σῶμα, ἀμέσως τὰ παιδιὰ τὸ ἀνεγνώρισαν.— Αὐτὸ εἶναι κύβος, λέγει ὁ Ἀλκιβιάδης.

—Ἀκριβῶς τὸ ἴδιο σχῆμα, ἀλλὰ σὲ μικρότερο μέγεθος εἶναι τὰ ζάρια, ποὺ παίζουν στὸ τάβλι.

1. Ἐπιφάνειαι

Τὸ ἐξωτερικὸν κάθε σώματος λέγεται ἐ π ι φ ά ν ε ι α.

α΄. Ἐπίπεδος

Εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ κύβου παρατηροῦμεν, ὅτι ὑπάρχουν 6 λεῖαι ἐπιφάνειαι. Ἂν ἐπάνω εἰς κάθε μίαν ἀπὸ αὐτὰς θέσωμεν μίαν τεντωμένην κλωστήν, θὰ ἴδωμεν ὅτι εἰς ὅλα αὐτὰ τὰ σημεῖα των ἀκουμβᾶ συγχρόνως. Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ λέγεται ἐπίπεδος.

Αἱ ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι λέγονται καὶ ἕδραι τοῦ κύβου.

Ὁ Σπῦρος ἐμέτρησε τὰς ἐπιπέδους ἐπιφανείας τοῦ κύβου μὲ τὴν κλωστὴν καὶ μὲ τὸ ὑποδεκάμετρόν του καὶ τὰς εὗρεν ὅλας ἴσας.

Ὥστε αἱ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι ὅλαι ἴσαι μεταξύ των.

Ἀσκήσεις. 1) Δοκιμάσατε καὶ σεῖς μὲ μίαν τεντωμένην κλωστὴν εἰς μίαν ἐπιφάνειαν τοῦ κύβου. 2) Πόσας ἐπιπέδους ἐπιφανείας ἔχει ὁ κύβος ; Πόσας ἕδρας ; 3) Τί εἶναι μεταξύ των ;

2. Διευθύνσεις ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν

α'. Ὁριζοντία

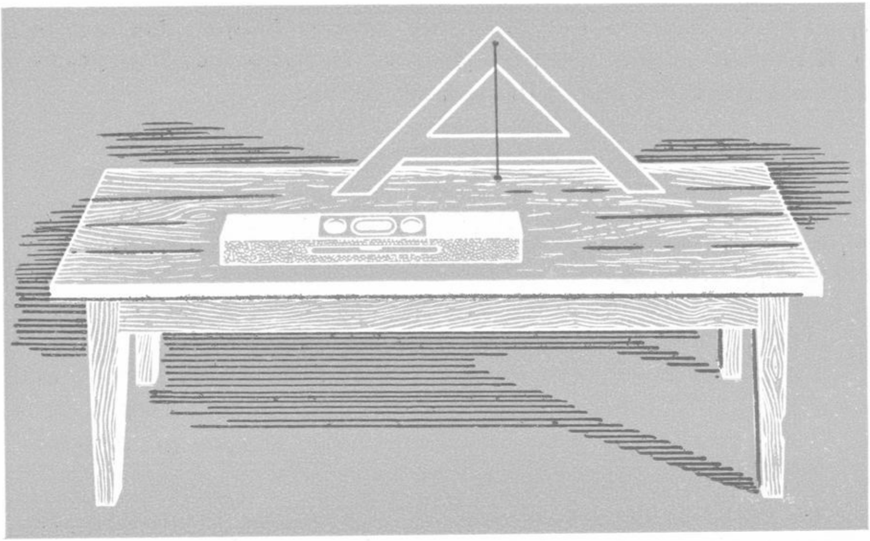
Ὁριζοντία ἐπιφάνεια λέγεται ἡ ἕδρα ὅπου στηρίζεται ὁ κύβος καὶ ἡ ἀπέναντί της.

Τὴν ὀνομασίαν αὐτὴν τὴν ἐπήραμεν ἀπὸ τὴν διεύθυνσιν ἠρεμοῦντος νεροῦ ἐντὸς δοχείου.

Οἱ διάφοροι τεχνῖται ἔχουν δύο ὄργανα ποὺ εὑρίσκουν, ἐὰν μία ἐπιφάνεια εἶναι ὁριζοντία. Τὸ ἀλφάδι καὶ τὴν ἀεροστάθμη.

Ὁ Κώστας καὶ ὁ Τέλης ἔφεραν ὁ πρῶτος ἕνα ἀλφάδι καὶ ὁ δεύτερος μίαν ἀεροστάθμην.

—Ὁ πατέρας μου, λέγει ὁ Κώστας, προσέχει πολὺ στὰ τραπέζια πολυτελείας ποὺ κάμνει. Δὲν πρέπει στὸ παραμικρὸ νὰ λαθεύῃ ἡ ἐπιφάνειά τους. Δοκιμάζει μὲ τὸ ἀλφάδι παντοῦ τὰ τραπέζια. Ἂν σὲ κανένα μέρος δῇ τὸ σχοινάκι μὲ τὸ βαρίδι, ποὺ βλέπετε στὸ ἀλφάδι, νὰ φεύγῃ ἀπὸ τὸ αὐλάκι, ποὺ εἶναι πίσω του χαραγμένον, θὰ πῇ ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τραπεζιοῦ δὲν εἶναι ὁριζοντία. Τότε γλύφει μὲ τὰ ἐργαλεῖα του τὸ μέρος ἐκεῖνο, ὥσπου, ὅταν βάλῃ τὸ ἀλφάδι, τὸ σχοινάκι σκεπάζει τελείως τὸ αὐλάκι ποὺ εἶναι πίσω του.



β'. Πλαγία ἐπιφάνεια

Ὁ Τέλης ἔφερε τὴν ἀεροστάθμην καὶ τὴν ἔβαλεν ἐπάνω εἰς τὸ θρανίον.

— Βλέπετε, λέγει, ἡ φουσκαλίτσα, ποὺ ἔχει μέσα ὁ γυάλινος σωλήνας τῆς ἀεροστάθμης, δὲν στέκεται στὴ μέση· πάει δεξιὰ καὶ ἀριστερά. Αὐτὴν τὴν λέγει ὁ πατέρας μου *πλαγία ἐπιφάνεια.*

Δοκιμάζομεν μὲ τὴν ἀεροστάθμην τὸ τραπέζι τῆς ἕδρας τοῦ διδασκάλου· βλέπομεν τὴν φουσκαλίτσα νὰ στέκεται στὴ μέση ἀκριβῶς.

— Νά, λέγει ὁ Τέλης. Αὐτὴ εἶναι *ὁριζοντία ἐπιφάνεια.*

— Πόσο εὐχαριστήθηκα σήμερα, λέγει ἡ Ἀριστέα. Ἔβλεπα τὸν μαραγκὸ τῆς γειτονιᾶς μας νὰ δοκιμάζῃ μὲ τὴν ἀεροστάθμη του κάθε τόσο τὰ ἔπιπλα, ποὺ ἔκαμνε καὶ δὲν ἐννοοῦσα τὴν αἰτία. Τώρα σκέπτομαι, ἐὰν δὲν εἶχαν βρῆ οἱ ἄνθρωποι τὴν Γεωμετρία, δὲν θὰ εἴχαμε τόσο ὡραῖα πράγματα. Οὔτε καὶ ὁ πολιτισμός μας, σὲ τόσα πράγματα ποὺ θαυμάζομε, θὰ εἶχεν ἀναπτυχθῆ.

Ἀσκήσεις. 1) Προσέξατε καλὰ τὸ ἀλφάδι καὶ τὴν ἀεροστάθμη. Ἰχνογραφήσατέ τα. 2) Ποῖος ἀπὸ τοὺς θεοὺς τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἦτο τεχνίτης; 3) Ἡ ἐργασία καὶ ἡ τέχνη τί καλὰ φέρουν εἰς τὸν κόσμον ; 4) Πόσας ὁριζοντίας ἐπιφανείας ἔχει ὁ κύβος ; Πόσας ἡ αἴθουσά μας ;

γ'. Κατακόρυφος ἐπίπεδος ἐπιφάνεια

Αἱ ἄλλαι 4 ἐπιφάνειαι (ἕδραι) τοῦ κύβου λέγονται κατακόρυφοι. Τὴν ὀνομασίαν τὴν ἐπήραμεν ἀπὸ τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος τῆς στάθμης.

Ὁ διδάσκαλος ἔβγαλεν ἀπὸ τὸ τραπέζι ἕνα σπάγγον, ποὺ κάτωθεν ἦτο δεμένον ἕνα βαρίδιον.

Τὰ παιδιὰ ἐγνώρισαν ἀμέσως τὸ ὄργανον τοῦ κτίστου, ποὺ δοκιμάζει κάθε τόσο ἂν ὁ τοῖχος εἶναι κατακόρυφος. Τότε φυσικὰ θὰ εἶναι, ὅταν λαμβάνῃ τὴν διεύθυνσιν τοῦ σπάγγου μὲ τὸ βαρίδι ποὺ λέγεται νῆμα τῆς στάθμης.

Ἀσκήσεις. 1) Εἰς τὴν αἴθουσάν μας, ποίας λέγομεν κατακορύφους ἐπιφανείας ; 2) Κάμετε καὶ σεῖς τὸ νῆμα τῆς στάθμης.

3. Ὀνομασία τῶν ἑδρῶν ἀπὸ τὴν θέσιν των

α'. Παράλληλοι ἕδραι ἢ ἐπιφάνειαι

Αἱ δύο ἀπέναντι ἕδραι τοῦ κύβου, ὅσον καὶ ἂν τὰς μεγαλώσωμεν πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις, δὲν συναντῶνται· δοκιμάσατε.

Τὰ ἕδρας αὐτὰς τὰς λέγομεν *παραλλήλους*.

Ἐρωτήσεις. 1) Ποίας λοιπὸν λέγομεν παραλλήλους ἕδρας ἢ ἐπιφανείας ἢ ἐπίπεδα ; 2) Εὕρετε τοιαῦτα.

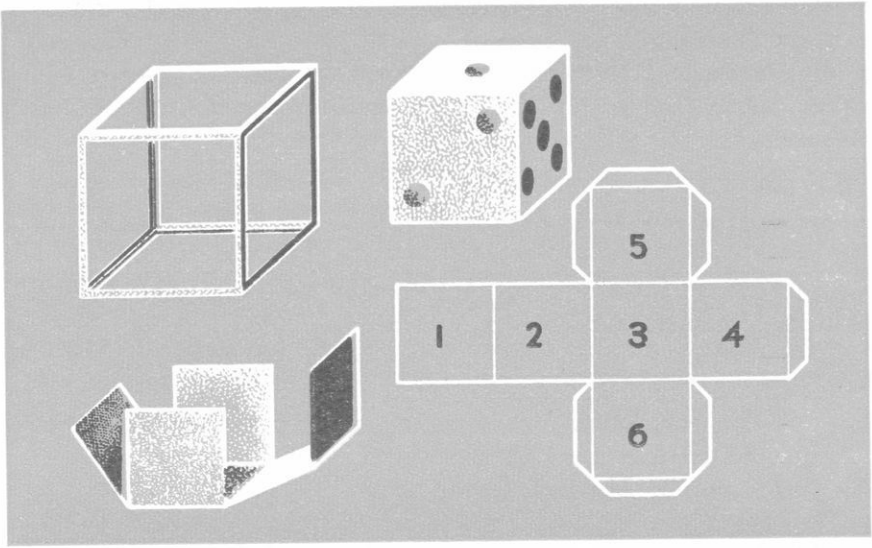
β'. Βάσεις τοῦ κύβου

Ἡ ἕδρα ὅπου στηρίζεται ὁ κύβος καὶ ἡ ἀπέναντί της λέγονται *βάσεις* τοῦ κύβου.

Αἱ ἕδραι αὗται, ὅπως εἴδομεν, εἶναι ὁριζόντιαι.

γ'. Κάθετοι ἕδραι

Αἱ τέσσαρες ἕδραι, ποὺ τὰς ὠνομάσαμεν κατακορύφους, εἶναι *κάθετοι* ἐπὶ τῶν βάσεων.



Σημ. Τὰς τέσσαρας αὐτὰς τὰς λέγομεν καὶ παραπλεύρους ἕδρας τοῦ κύβου.

Ὁ Ἀντώνης ἔκαμε κύβον ἀπὸ ἕνα χαρτόνι.

Ἐρώτησις. Ποίας λέγομεν καθέτους ἐπιφανείας;

Γενικαὶ ἐρωτήσεις. 1) Πόσαι εἶναι αἱ ἕδραι τοῦ κύβου; 2) Πόσα εἴδη ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν ἔχομεν; 3) Μὲ ποῖα ὄργανα δοκιμάζομεν τὰς ὁριζοντίους ἐπιφανείας; 4) Μὲ ποῖον ὄργανον τὰς κατακορύφους; 5) Αἱ ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι ἀπὸ τὴν θέσιν των τί εἶναι; 6) Νὰ κάμετε ἕνα κύβον.

4. Κατασκευὴ κύβου

—Ἐὰν θέλετε, λέγει, νὰ κάμετε κύβο εὔκολα, ἰχνογραφήσετε στὸ χαρτόνι ἕνα σχῆμα ἔτσι: Ἕνα σταυρὸ μὲ ἕξ ἴσα χαραγμένα λίγο στὴν ἄκρη τους τετραγωνάκια, γιὰ νὰ μποροῦν νὰ διπλωθοῦν. Νά, βλέπετε τὸ σχῆμα. Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ὁριζόντια τετραγωνάκια νὰ περισσεύῃ ἀπὸ τὸν σταυρὸ πρὸς τὸ δεξιὸ μέρος. Ξεχωρίστε τώρα ὅλο τὸ σχῆμα ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπο χαρτόνι. Σπάσετε ἔπειτα τὰ τετραγωνάκια πρὸς τὸ ἄλλο μέρος. Τὶς ἄκρες τους τὶς ἐλεύθερες ἀλείψετε μὲ κόλλα. Ἑνώσετε τώρα τὰ ἐπάνω καὶ τὰ κάτω τετράγωνα (καπάκια) καὶ ἔγινε ὁ κύβος.

Ὅταν τὸ ἐξεδίπλωσεν, ἐφάνη τὸ σχῆμα. Τὸ σχῆμα ἐδῶ εἶναι *ἀνεπτυγμένον*. Τὸ συνέπτυξε πάλιν καὶ μᾶς εἶπε, τί βλέπει ἐπάνω εἰς τὸν κύβον.

α΄. Ἀκμαὶ

— Πρῶτον, λέγει ὁ Ἀντώνης, ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρας.

— Αὐτό, λέγει ὁ Θανάσης, τὸ εἴπαμεν.

Τότε παρακάλεσε τὸν διδάσκαλον νὰ εἴπῃ πῶς λέγεται τὸ μέρος, ὅπου συναντῶνται δύο ἕδραι.

— Αὐτὲς ἡ μητέρα μου, ὅταν ἔκανα τὸν κύβο, μοῦ τὶς εἶπε κόψεις.

— Σωστά, λέγει ὁ διδάσκαλος, ἀλλὰ στὴ Γεωμετρία συνηθίσαμεν τὰ σημεῖα αὐτὰ νὰ τὰ ὀνομάζωμεν *ἀκμάς*.

Τί λοιπὸν λέγομεν ἀκμάς ;

Μετροῦμεν τὰς ἀκμὰς τοῦ κύβου καὶ τὰς εὑρίσκομεν ἐν ὅλῳ 12. Αἱ 8 εἶναι ὁριζόντιοι καὶ οἱ 4 κατακόρυφοι. Κάθε ἀκμὴ τοῦ κύβου εἶναι κάθετος ἐπὶ τῶν ἀκμῶν, ποὺ συναντᾶ. Ἐπίσης καὶ παράλληλος μὲ τὰς ἀπέναντί της.

β΄. Κορυφαὶ

Τὸ σημεῖον πάλι, ὅπου συναντῶνται τρεῖς ἕδραι τοῦ κύβου, λέγεται κορυφή. Ὁ Σωκράτης ἐμέτρησε τὰς κορυφὰς καὶ τὰς εὗρηκεν 8.

Τί λέγεται λοιπὸν κορυφὴ τοῦ κύβου ;

Ἄσκησις. Πόσας ἕδρας, ἀκμὰς καὶ κορυφὰς ἔχει ὁ κύβος ;

5. Σχῆμα τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου καὶ σχέσεις μεταξύ των

α΄. Τετράγωνον

Ὁ Σπῦρος εἶχε μετρήσει προχθὲς τὰς ἕδρας τοῦ κύβου καὶ τὰς εὗρεν ἴσας ἀναμεταξύ των.

Ἐπήραμεν τὸν κύβον, τὸν ἐστηρίξαμεν καλὰ εἰς μίαν ἕδραν (τὴν βάσιν του) καὶ ἐσύραμεν μὲ τὴν κιμωλίαν γραμμάς, ἀκολουθοῦντες τὰς ἀκμὰς τῆς βάσεώς του. Ἔγινε τὸ σχῆμα.

Σημείωσις. Σχῆμα λέγεται ὁ τρόπος, κατὰ τὸν ὁποῖον παρουσιάζεται ἕνα σῶμα.

Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται *τετράγωνον*. Αἱ γραμμαὶ ποὺ τὸ περικλείουν λέγονται *πλευραί*. Τὰς μετροῦμεν καὶ βλέπομεν ὅτι εἶναι 4 καὶ ὅλαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

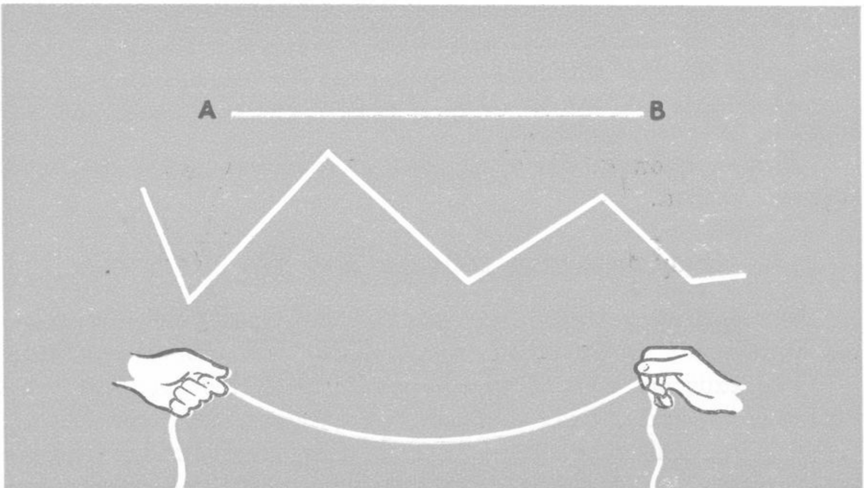
Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι. Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν λέγεται *περίμετρος*.

Ἀσκήσεις. 1) Τί λέγεται τετράγωνον; 2) Πόσα τετράγωνα ἔχει ὁ κύβος; 3) Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 5 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του; 4) Ὅταν ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 225 μέτρα πόσον εἶναι ἡ κάθε πλευρά του ; 5) Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγωνικοῦ οἰκοπέδου εἶναι 75 μέτρα. Πόσα μέτρα σύρματος θὰ χρειασθοῦν διὰ νὰ κάμωμεν γύρω φράκτην μὲ 5 σειρὰς σύρματος ;

6. Γραμμαὶ

α'. Εὐθεῖα γραμμὴ

Κάθε πλευρὰ τοῦ τετραγώνου παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι μία γραμμή.



— Γραμμαί, λέγει ὁ Θανάσης, εἶναι τὰ ἀκρινὰ μέρη τῶν ἐπιφανειῶν.

— Σωστά.

Ἕνα ἐλάχιστον τῆς γραμμῆς εἶναι τὸ σημεῖον, μία τελεία. Πολλὰ τέτοια συνεχῆ σημεῖα ἀποτελοῦν τὴν γραμμήν.

Εὐθεῖα γραμμὴ λέγεται αὐτή, ποὺ ἀκολουθεῖ τὴν διεύθυνσιν μιᾶς καλὰ τεντωμένης κλωστῆς

Κάθε εὐθεῖαν τὴν ὀνομάζομεν μὲ δύο γράμματα.

Τὰς εὐθείας ἡμεῖς τὰς γράφομεν μὲ τὸν κανόνα (ρίγα).

β'. Τεθλασμένη γραμμὴ

Λέγεται αὐτή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ τμήματα εὐθείας, τὰ ὁποῖα ὅμως δὲν σχηματίζουν εὐθεῖαν.

γ'. Καμπύλη γραμμὴ

Λέγεται ἡ γραμμή, ποὺ δίνει τὸ σχῆμα κλωστῆς χαλαρωμένης. Τότε κανένα κομμάτι της δὲν ἀποτελεῖ εὐθεῖαν γραμμήν.

7. Διευθύνσεις εὐθειῶν γραμμῶν

Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος τῆς στάθμης, λέγεται *κατακόρυφος*.

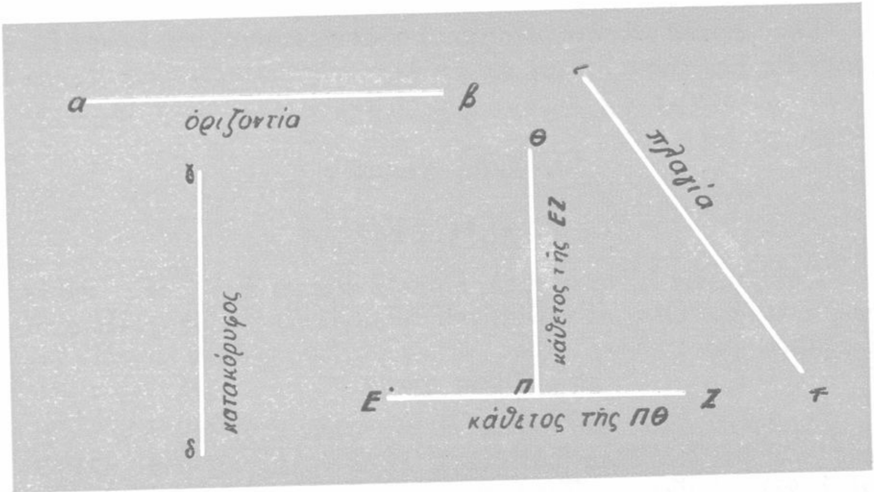
Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἔχει τὴν διεύθυνσιν ἠρεμοῦντος νεροῦ ἐντὸς δοχείου, λέγεται *ὁριζοντία*.

Ἐκείνη ἡ ὁποία δὲν εἶναι οὔτε κατακόρυφος οὔτε ὁριζοντία λέγεται *πλαγία*.

8. Ὀνομασία τῶν εὐθειῶν ἀπὸ τὴν θέσιν των

Μία ὁριζοντία εὐθεῖα καὶ μία κατακόρυφος ὅταν συναντῶνται (ὅπως καὶ τὰ ἐπίπεδα) σχηματίζουν δύο *καθέτους εὐθείας*.

Τὰς καθέτους εὐθείας τὰς δοκιμάζομεν μὲ τὸν γνώμονα (γωνία) τῶν τεχνιτῶν, ὅταν θέσωμεν τὸν γνώμονα ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρά του νὰ πέσῃ ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς. Ἂν ἡ εὐθεῖα ἀκολουθήσῃ τὴν ἄλλην κάθετον τοῦ γνώμονος, αἱ δύο αὐταὶ εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι.



Δύο εὐθεῖαι, ποὺ εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ὅσον δὲ καὶ ἂν τὰς προεκτείνωμεν οὐδέποτε συναντῶνται, λέγονται *παράλληλοι*. Παραλλήλους εὐθείας γράφομεν μὲ τὸ γεωμετρικὸν ὄργανον Ταῦ.

Ἀσκήσεις. 1) Πόσα εἴδη γραμμῶν ἔχομεν; 2) Πόσα εἴδη εὐθειῶν γραμμῶν ἔχομεν; 3) Πῶς λέγονται ἀπὸ τὴν θέσιν, ποὺ ἔχουν μεταξύ των αἱ εὐθεῖαι γραμμαί; 4) Μὲ ποῖον ὄργανον δοκιμάζομεν δύο γραμμάς, ἂν εἶναι κάθετοι; 5) Τί θὰ εἶναι μεταξύ των αἱ συνεχόμεναι ἀκμαὶ καὶ ἕδραι τοῦ κύβου. 6) Τί θὰ εἶναι μεταξύ των αἱ συνεχόμεναι (γραμμαὶ) πλευραὶ τοῦ τετραγώνου ;

9. Γωνίαι

Ὁ Τάκης μᾶς εἶπε τὴν ἄλλην ἡμέραν, ὅτι αἱ συνεχόμεναι εὐθεῖαι τοῦ τετραγώνου εἶναι κάθετοι. Ὁ Τέλης τοῦ εἶπε νὰ ἐξηγήσῃ, τί θὰ εἰπῇ συνεχόμεναι.

— Νά, ἐκεῖ ποὺ σμίγουν.

— Καὶ σμίγουν δύο-δύο.

Ἐκεῖ σχηματίζουν καὶ ἀπὸ μίαν γωνίαν. Ἀφοῦ σμίγουν εἰς τέσσαρα σημεῖα, φυσικὰ θὰ σχηματίζουν καὶ τέσσαρας γωνίας.

Τὸ σημεῖον, ποὺ σμίγουν αἱ εὐθεῖαι, λέγεται *κορυφὴ* τῆς γωνίας. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι τὴν ἀποτελοῦν, λέγονται *πλευραὶ* τῆς γωνίας.

Τὴν γωνίαν τὴν ὀνομάζομεν μὲ τρία γράμματα τὰ ὁποῖα θέτομεν εἰς τὴν κορυφὴν καὶ εἰς τὰ ἄκρα τῶν πλευρῶν καὶ προσέχομεν τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς νὰ τὸ ἐκφωνῶμεν πάντοτε εἰς τὸ μέσον.

10. Εἴδη γωνιῶν

α΄. Ὀρθὴ γωνία

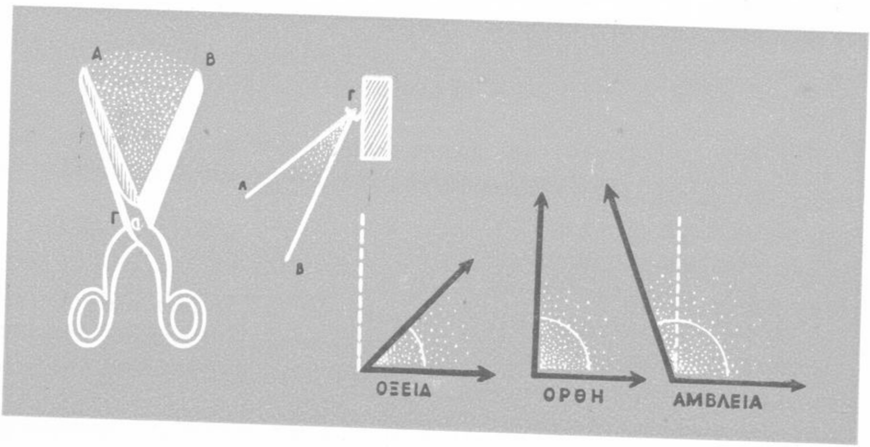
Ὀρθὴ γωνία λέγεται αὐτή, ἡ ὁποία γίνεται ἀπὸ τρεῖς καθέτους πλευράς. Ὅλαι αἱ γωνίαι τοῦ τετραγώνου τί εἶναι ; Πῶς τὸ ἐξακριβώνομεν ;

β΄. Ὀξεῖα γωνία

Συμβαίνει ὅμως μία γωνία νὰ μὴν ἔγινε π.χ. ἀπὸ δύο καθέτους πλευρὰς (εὐθείας γραμμάς), ἀλλὰ ἡ μία νὰ εἶναι πλαγία καὶ ἡ ἄλλη ὁριζοντία. Τότε τὸ ἄνοιγμά τους, ἀναλόγως μὲ τὸν τρόπον, ποὺ ἔσμιξαν αἱ πλευραί, θὰ εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα τῆς ὀρθῆς. Ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται ὀξεῖα γωνία.

γ΄. Ἀμβλεῖα γωνία

Ἐὰν ὅμως τὸ ἄνοιγμά της εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα τῆς ὀρθῆς, τότε ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται ἀμβλεῖα.



Τὰς γωνίας τὰς μετροῦμεν ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα τῶν πλευρῶν των καὶ ὄχι ἀπὸ τὸ μῆκος των.

Ἄσκησις. 1) Κάμετε τρεῖς διαφόρους γωνίας καὶ ὀνομάσατέ τας. 2) Ποία γωνία λέγεται; α) ὀρθή; β) ὀξεῖα; γ) ἀμβλεῖα; 3) Κάμετε ἕνα γνώμονα ἀπὸ χαρτόνι, ξύλον ἢ τσίγκον.

11. Γωνίαι τοῦ κύβου

α΄. Ὀρθαὶ γωνίαι τοῦ κύβου

Ὁ Ἐπαμεινώνδας ἐμέτρησε τὰς ὀρθὰς γωνίας τοῦ κύβου καὶ τὰς εὗρεν 24.

— Αὐτὸ τὸ εὑρίσκει κανεὶς καὶ ἀπέξω, εἶπεν ὁ Θανάσης.

Ἀφοῦ ὁ κύβος ἔχει 6 τετραγωνικὰς ἕδρας, ποὺ κάθε μία ἔχει 4 ὀρθάς, ὅλαι μαζὶ θὰ ἔχουν 24 ὀρθὰς γωνίας.

β΄. Δίεδροι γωνίαι

Ἐξωτερικῶς δύο ἕδραι τοῦ κύβου, ὅταν συναντῶνται, σχηματίζουν ἀκμήν. Ἂν τὸν ἀνοίξωμεν ἀπὸ μέσα του, ἐκεῖ ποὺ δύο συνεχόμεναι ἕδραι του συναντῶνται καὶ κόπτουν ἡ μία τὴν ἄλλην σχηματίζεται *δίεδρος γωνία.*

Ὁ κύβος λοιπὸν ἔχει 12 διέδρους γωνίας. Ὅσας δηλαδὴ καὶ ἀκμάς.

Τί λοιπὸν λέγεται δίεδρος γωνία ;

Αἱ δίεδροι γωνίαι εἶναι ὅλαι ὀρθαί, διότι γίνονται ἀπὸ καθέτους ἕδρας.

Ἄσκησις. Εὕρετε εἰς τὴν αἴθουσάν μας διέδρους γωνίας.

γ΄. Στερεαὶ γωνίαι

Ὁ κύβος βλέπομεν ὅτι ἔχει 8 κορυφάς. Ἡ κορυφή του γίνεται ἐκεῖ, ὅπου συναντῶνται 3 συνεχόμεναι ἕδραι τοῦ κύβου. Ἂν ἀνοίξωμεν ἀπὸ μέσα τὸν κύβον, θὰ ἴδωμεν ὅτι εἰς τὸ μέρος αὐτὸ συναντῶνται 3 συνεχόμεναι ἕδραι, εἰς ἓν κοινὸν σημεῖον. Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται *στερεὰ* ἢ *τρίεδρος γωνία.*

Ὁ κύβος ἐπειδὴ ἔχει 8 κορυφάς, ἔχει καὶ 8 τριέδρους γωνίας ἢ στερεάς.

Ἐρωτήσεις. 1) Ποία λέγεται στερεὰ ἢ τρίεδρος γωνία; 2) Πόσας ὀρθάς, διέδρους καὶ στερεὰς γωνίας ἔχει ὁ κύβος;

12. Διαστάσεις τῶν σωμάτων

Κάθε στερεὸν σῶμα, π.χ. ἕνα κιβώτιον, ἔχει μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος. Ἡ αἴθουσα τῆς διδασκαλίας μας ἔχει τὸ *μῆκος* της, τὸ *πλάτος* της καὶ τὸ *ὕψος* της. Τὰ τρία αὐτὰ λέγονται *διαστάσεις* τῶν σωμάτων. Τὰ λέγομεν καὶ *ἀποστάσεις*.

Σημ. Αἱ ἐπιφάνειαι ἔχουν μόνον δύο διαστάσεις, μῆκος καὶ πλάτος. Ὅπως τὰ χωράφια, οἰκόπεδα, τὸ ἐξωτερικὸν τῶν σωμάτων.

13. Μέτρα μήκους

Πῶς μετροῦμεν τὰς διαστάσεις τῶν στερεῶν σωμάτων

α΄. Τὸ μέτρον ἢ Γαλλικὸν μέτρον

Ὅλοι γνωρίζομεν τὸ μέτρον. Κατὰ πρῶτον τὸ μετεχειρίσθησαν οἱ Γάλλοι. Εἶναι τὸ 1/40.000.000 τοῦ Μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ Παρίσι.

1 μέτρον χωρίζεται εἰς δέκα ἴσα μέρη, τὰς παλάμας.

1 παλάμη χωρίζεται εἰς δέκα ἴσα μέρη, τοὺς δακτύλους (πόντους).

1 δάκτυλος χωρίζεται εἰς δέκα ἴσα μέρη, τὰς γραμμάς.

Ἔτσι 1 μ. ἔχει 10 παλάμας ἢ δέκατα, 100 δακτ. ἢ ἑκατοστά, 1000 γραμ. ἢ χιλιοστά. 1 παλάμη ἔχει 10 δακτύλους ἢ ἑκατοστά, 100 γραμ. ἢ χιλιοστά. 1 δάκτυλος ἔχει 10 γραμμὰς ἢ χιλιοστά.

Τὸ μέτρον μὲ τὰς μικροτέρας ὑποδιαιρέσεις του τὸ χρησιμοποιοῦμεν διὰ μικρὰς ἀποστάσεις καὶ τὰς γράφομεν καὶ ἀπαγγέλλομεν ὅπως τοὺς δεκαδικούς· π.χ.

2 παλάμαι γράφονται 0,2μ.
15 δάκτυλοι γράφονται 0,15 μ.
1 γραμμὴ γράφεται 0,001 μ.

Ὅταν ὅμως πρόκειται νὰ μετρήσωμεν μεγάλας ἀποστάσεις μεταχειριζόμεθα τὴν κορδέλλαν, ποὺ λέγεται δεκάμετρον, ἑκατόμετρον, χιλιόμετρον. Δηλαδὴ τὰ πολλαπλάσια τοῦ μέτρου. Τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τὸ μέτρημα τότε τῶν διαστάσεων, ποὺ εἶναι παραπάνω ἀπὸ τὸ μέτρον, τοὺς γράφομεν καὶ ἀπαγγέλλομεν, ὅπως τοὺς ἀκεραίους, π.χ.

1 μέτρον γράφεται 1 μετ.
1 δεκάμετρον γράφεται 1 δμ.
1 ἑκατόμετρον γράφεται 1 ἑκ.
1 χιλιόμετρον γράφεται 1 χμ.

β'. Ὁ πῆχυς

Εἰς τὴν Ἑλλάδα μεταχειριζόμεθα τὸν πῆχυν, διὰ τὸ μέτρημα τῶν διαστάσεων τῶν ὑφασμάτων μόνον.

1 πῆχυς ἰσοῦται μὲ 0,64 τοῦ μέτρου.

1 πῆχυς διαιρεῖται εἰς 8 ἴσα μέρη, τὰ ὄγδοα ἢ ρούπια.

γ'. Τεκτονικὸς πῆχυς

Οἱ κτίσται διὰ τὴν μέτρησιν τῶν τοίχων καὶ τῶν οἰκοδομῶν, μεταχειρίζονται τὸν τεκτονικὸν πῆχυν. Οὗτος εἶναι τὰ 0,75 τοῦ μέτρου ἢ 3/4 τοῦ μέτρου.

Ἀσκήσεις. 1) Ἕνα τετράγωνον ἔχει πλευρὰν 17 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του; 2) Πόσα δέκατα, ἑκατοστὰ καὶ χιλιοστὰ ἔχει ἕνα μέτρον; 3) Πόσας παλάμας ἔχει τὸ μέτρον; Πόσας γραμμάς; 4) Πόσους δακτύλους ἔχει κάθε παλάμη; Πόσας γραμμάς; 5) Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 60 μ. Πόση εἶναι ἡ πλευρά του ;

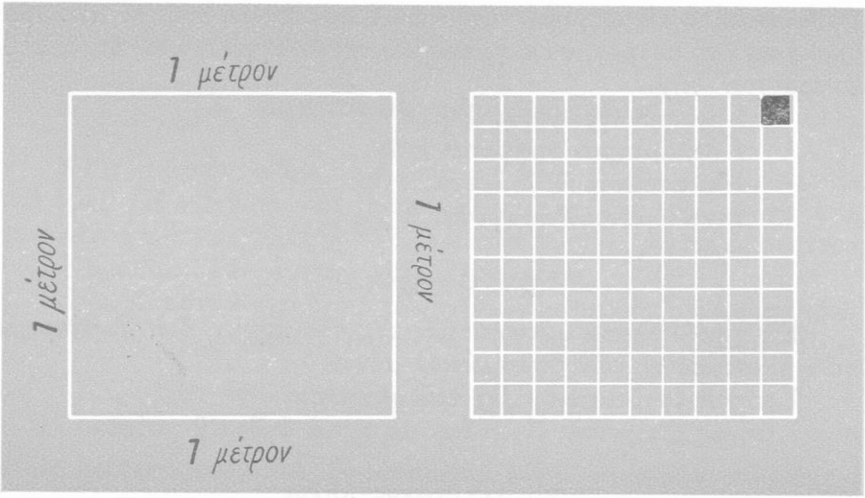
Ἐργασίαι. Κάμετε ἕνα μέτρον μὲ τὰς ὑποδιαιρέσεις του.

14. Μέτρα ἐπιφανείας

α'. Τετραγωνικὸν μέτρον

Διὰ τὴν μέτρησιν λοιπὸν τοῦ μήκους, τοῦ πλάτους καὶ τοῦ ὕψους ἑνὸς σώματος μεταχειριζόμεθα τὸ μέτρον. Ὅταν ὅμως θέλωμεν νὰ μετρήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς σώματος, μεταχειριζόμεθα τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Αὐτὸ εἶναι ἕνα τετράγωνον, ποὺ κάθε του πλευρὰ εἶναι ἕνα μέτρον.

Τὸ ἁπλοῦν μέτρον εἶχε 10 παλάμας. Τὸ τετραγωνικὸν ὅμως



θὰ εἶναι τετράγωνον, ποὺ κάθε του πλευρὰ θὰ εἶναι 1 μέτρον. Αὐτὸ τὸ ἐννοοῦμεν καλύτερα ἂν χωρίσωμεν κάθε πλευρὰν τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου εἰς 10 ἴσα μέρη. Ἑνώνομεν ἔπειτα τὰ ἀπέναντι καὶ ἔτσι βλέπομεν ὅτι ἐσχηματίσθησαν 100 τετράγωνα. Κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτὰ ἔχει πλευρὰν μιᾶς παλάμης.

Ἡ τετραγωνικὴ λοιπὸν παλάμη εἶναι 0,01 τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου. Τὸ ἴδιον καὶ κάθε τετραγωνικὴ παλάμη θὰ ἔχῃ 100 τετραγωνικοὺς δακτύλους. Τὸ τετραγωνικὸν μέτρον θὰ ἔχῃ τότε 10.000 τετραγωνικοὺς δακτύλους. Καὶ κάθε τετραγωνικὸς δάκτυλος θὰ ἔχῃ 100 τετραγωνικὰς γραμμάς. Τὸ τετραγωνικὸν λοιπὸν μέτρον θὰ ἔχῃ 1.000.000 τετραγωνικὰς γραμμάς, ὡς ἑξῆς:

Ἔτσι :

1 τετρ. μέτρ. ἔχει 100 τ. παλ. ἢ ἑκατοστά, 10.000 τ.δ. ἢ δεκάκις χιλ., 1.000.000 τ.γ. ἢ ἑκατομμυριοστά.

1 τετρ. παλ. ἔχει 100 τ.δ. ἢ δεκάκις χιλιοστά, 10.000 τετρ. γρ. ἢ ἑκατομμυριοστά.

1 τετρ. δάκτ. ἔχει 100 τετρ. γρ. ἢ ἑκατομμυριοστὰ τοῦ τ.μ.

Ὁ Σωτήρης παρετήρησεν ὅτι:–Κάθε μονάδα κατωτέρα ἐπιφανείας εἶναι 100 φορὰς μικροτέρα ἀπὸ τὴν ἀμέσως ἀνωτέρα της.

Γράφομεν τὰς ὑποδιαιρέσεις τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου καὶ τὰς ἀπαγγέλλομεν μὲ δεκαδικούς.

Π.χ. 1 τετρ. παλάμη = 0,01 τ.μ.
1 τετρ. δάκτυλ. = 0,0001 τ.μ.
1 τετρ. γραμμὴ = 0,000001 τ.μ.

Τὰ πολλαπλάσια τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου τὰ γράφομεν καὶ ἀπαγγέλλομεν μὲ ἀκεραίους.

1 τετρ. μέτρον εἶναι τετράγωνον ποὺ κάθε του πλευρὰ εἶναι 1 μ.
τ. δ. τετρ. δεκάμετρον εἶναι τετράγωνον ποὺ ἡ κάθε του πλευρὰ εἶναι 10 μ.
τ. ε. τετρ. ἑκατόμετρον εἶναι τετράγωνον ποὺ κάθε του πλευρὰ εἶναι 100 μ.
τ.χ. τετρ. χιλιόμετρον εἶναι τετράγωνον ποὺ κάθε του πλευρὰ εἶναι 1000 μ.

Διὰ νὰ μετρῶμεν τὰ χωράφια, τὰ ἀμπέλια, τοὺς κήπους καὶ τὰ κτήματα γενικὰ μεταχειριζόμεθα τὸ στρέμμα = 1000 τετραγωνικὰ μέτρα.

β΄. Τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς

Ἀκόμη διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων μεταχειρίζονται τὸν τεκτονικὸν τετραγωνικὸν πῆχυν. Ὁ τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς εἶναι ἕνα τετράγωνον, ποὺ ἔχει πλευρὰν ἕνα τεκτονικὸν πῆχυν, 0,75 μ. ἢ 3/4 τοῦ μέτρου. Εἶναι λοιπὸν ὁ τεκτονικὸς τετραγ. πῆχυς

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου.

Π. χ. θέλομεν νὰ τρέψωμεν 150 τετραγ. μέτρα εἰς τεκτον. τετρ. πήχεις. Διαιροῦμεν τὰ 150 τ.μ. διὰ τοῦ 9/16.

$$150 : \frac{9}{16} = 150 \times \frac{16}{9} = 266\frac{6}{9} \text{ τ.τ. πηχ.}$$

2. Θέλομεν νὰ τρέψωμεν 320 τ.τ. πήχεις εἰς τετραγ. μέτρα. Πολλαπλασιάζομεν τοὺς τ. τετρ. πήχεις ἐπὶ τὸ 9/16.

$$320 \times \frac{9}{16} = \frac{2880}{16} = 180 \text{ τ. μέτρα.}$$

Ἄσκησις. Κάμετε μίαν τετραγωνικὴν παλάμην ἀπὸ χαρτόνι.

15. Ἐμβαδὸν

α΄. Ἐμβαδὸν τετραγώνου

Ὁ Ἀντώνης ἔφερε μίαν τετραγωνικὴν παλάμην, ποὺ ἡ κάθε πλευρά της ἦτο ἡ μία παλάμη τοῦ ἁπλοῦ μέτρου. Μετροῦμεν μὲ αὐτὴν τὴν αἴθουσάν μας. Ἀρχίζομεν ἀπὸ τὴν μίαν πλευράν. Μετροῦμεν κάτω τὸ πάτωμα καὶ φθάνομεν μέχρι τῆς ἄλλης. Προσέχομεν καλὰ σημειοῦντες μὲ γραμμὰς τὸ εὐθὺ μέρος, ποὺ ἐμετρήσαμεν. Τὸ μέτρημα ἄργησεν ὀλίγον, ἀλλὰ συνεχίσαμεν καὶ τὴν ἄλλην ὥραν. Εὕρομεν, ὅτι ἡ αἴθουσά μας εἶχεν ἐν ὅλῳ 4900 τετρ. παλάμας. Διαιροῦμεν τὶς 4900 τετρ. παλάμας διὰ 100, διότι κάθε τετρ. μέτρον ἔχει 100 τετραγωνικὰς παλάμας, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ αἴθουσά μας εἶναι 49 τετρ. μέτρα. Ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν τῶν τετρ. μέτρων, ὁ ὁποῖος χωρεῖ εἰς κάθε ἐπιφάνειαν, λέγεται *ἐμβαδόν*, λέγει ὁ διδάσκαλος.

—Ἠμπορούσαμεν, λέγει ὁ διδάσκαλος, νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς αἰθούσης μας ἀμέσως καὶ χωρὶς νὰ μετρήσωμεν μὲ τὴν τετραγωνικὴν παλάμην.

— Φέρε τὸ ἁπλὸ μέτρο σου, Νῖκο. Μέτρησε τὰς πλευρὰς τῆς αἰθούσης μας.

Ὁ Νῖκος μετρᾷ καὶ εὑρίσκει, ὅτι ὅλαι εἶναι ἀπὸ 7 μέτρα ἡ κάθε μία.

Ὁ Τέλης λέγει ὅτι ἡ αἴθουσά μας ἔχει σχῆμα τετραγώνου, διότι ὅλαι αἱ πλευραί της εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

— Λοιπόν, λέγει ὁ διδάσκαλος, σημείωσε μὲ κιμωλίαν, ἐνῷ μετρᾷς τὰς πλευράς, τὴν ἀπόστασιν κάθε μέτρου. Τώρα ἕνωσε τὰς διαιρέσεις τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τῆς ἐπιφανείας τῆς αἰθούσης. Τί βλέπεις ;

—Ἐσχηματίσθησαν τετράγωνα, ποὺ τὸ καθένα εἶναι ἴσον μὲ ἕνα τετραγωνικὸν μέτρον.

— Πόσα τέτοια ἐσχηματίσθησαν ;

Ὁ Νῖκος μετρᾷ καὶ εὑρίσκει 49 ἐν ὅλῳ. Δηλαδὴ ὅσα καὶ τὸ μέτρημα μὲ τὴν τετραγωνικὴν παλάμην. Ἐκεῖ ὅμως ἐχάσαμεν πολλὴν ὥραν. Ἐνῷ ἐδῶ ἀμέσως τὸ εὕρομεν.

Ὁ Δημήτρης παρετήρησεν εὐκολώτερον τρόπον εὑρέσεως τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου :

—Ἀντὶ νὰ μετρῶμεν καὶ νὰ σύρωμεν γραμμὰς στὶς ἀπέναντι πλευρὲς γιὰ νὰ γίνωνται τὰ τετραγωνικὰ μέτρα, νά: Εὑρίσκομεν τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου καὶ τὴν πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν ἑαυτόν της: $7 \times 7 = 49$ τ.μ.

ΚΑΝΩΝ.—Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, πολλαπλασιάζομεν τὴν πλευρὰν ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της.

Ἐρωτήσεις. 1) Τί λέγεται ἐμβαδόν; 2) Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου;

Προβλήματα. 1) Ἕνας κῆπος ἔχει σχῆμα τετραγωνικόν. Ἡ πλευρά του εἶναι 65,5 μέτρα. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κήπου;

2) Ἕνα τετραγωνικὸν δωμάτιον ἔχει περίμετρον 32 μέτρα. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

3) Ἕνας τετραγωνικὸς χῶρος μὲ πλευρὰν 12 μέτρων, πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ πλακάκια τετραγωνικά. Τὸ κάθε ἕνα πλακάκι ἔχει ἀκμὴν 0,2 μ. Πόσα πλακάκια θὰ χρειασθοῦν;

β΄. Ἐμβαδὸν τοῦ κύβου

Πρόβλημα. Ἕνα κιβώτιον κυβικὸν ἔχει ἀκμὴν 2,5 μέτρα. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου;

Ὁ Σωτήρης εἶπεν ὅτι ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρας. Κάθε ἕδρα ἔχει σχῆμα τετραγωνικὸν καὶ ὅλες εἶναι μεταξύ των ἴσες. Ὅταν λοιπὸν εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς, τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 6 καὶ ἔχομεν τότε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου. Σωστά.

— Οἱ ἀκμὲς εἶναι πάλι ὅλες ἴσες. Ἐπίσης, ἐπειδὴ εἶναι τὸ τέλος τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου κατ' ἀνάγκην εἶναι καὶ οἱ γραμμὲς (πλευρὲς) τῶν τετραγωνικῶν ἐπιφανειῶν τοῦ κύβου.

—Ἔτσι, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀκμὴν τοῦ κύβου, γνωρίζομεν καὶ τὴν πλευρὰν τῶν τετραγωνικῶν ἐπιφανειῶν του.

Λύσις: 1) $2{,}5 \times 2{,}5 = 6{,}25$ τ.μ. τὸ Ε. μιᾶς ἕδρας κύβου.
2) $6{,}25 \times 6 = 37{,}50$ τ.μ. τὸ Ε. ὅλης τῆς ἐπιφανείας του.

Προβλήματα. 1) Μία δεξαμενὴ ἔχει σχῆμα κύβου. Ἡ ἀκμή της εἶναι 13 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας της;

2) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς δωματίου, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα κύβου, εἶναι 96 τ.μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κάθε ἕδρας καὶ πόση ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου;

3) Ἕνα κιβώτιον σχηματίζει κύβον, ἔχει δὲ ἀκμὴν 1,8μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας καὶ πόσον εἶναι ὅλου τοῦ κιβωτίου ;

4) Ἕνα οἰκόπεδον τετραγωνικὸν ἔχει πλευρὰν 28 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του καὶ πόσον στοιχίζει ἐν ὅλῳ, ἐὰν κάθε τεκτον. τετραγωνικὸς πῆχυς στοιχίζῃ 59 δραχμάς ;

5) Ἕνα οἰκόπεδον 570 τ.τ. πήχεων πωλεῖται πρὸς 45 δραχμὰς τὸ τετρ. μέτρον. Πόσα χρήματα ἀξίζει;

16. Τί λέγομεν ὄγκον. Μέτρα ὄγκου

Ὁ πατέρας τοῦ Θεμιστοκλῆ ἠγόρασε δύο καρπούζια καὶ ἕνα πεπόνι. Εἶχε τὸ καλάθι του καὶ ἐδοκίμασε νὰ τὰ βάλῃ μέσα. Τὰ καρπούζια ὅμως ἔπιασαν ὅλον τὸν χῶρον τοῦ καλαθιοῦ καὶ τὸ πεπόνι δὲν ἐχωροῦσεν. Ἔβγαλε τὸ ἕνα καρπούζι καὶ ἔβαλε τὸ πεπόνι, ἀλλὰ τώρα ἔμενεν ἔξω τὸ ἄλλο καρπούζι. Γιατί δὲν χωράει τὸ ἄλλο ;

Ὁ Σπῦρος τότε λέγει :

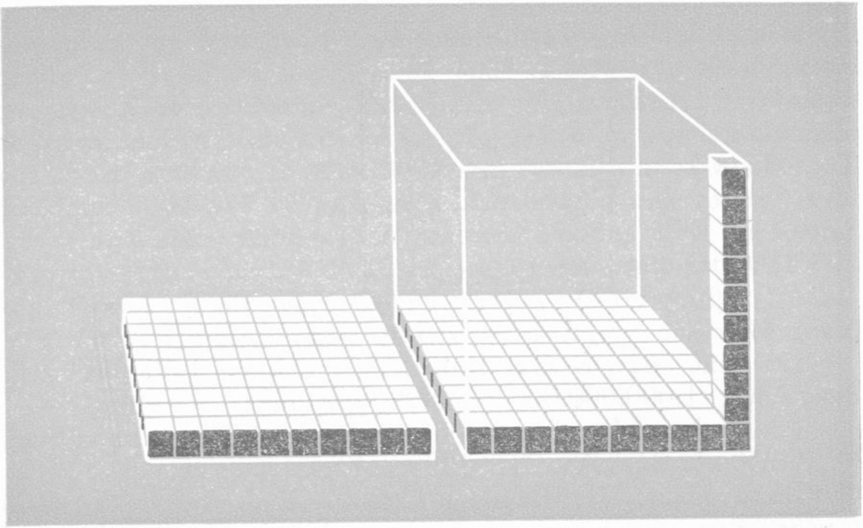
— Κάθε πρᾶγμα ἔχει τὸν ὄγκον του. Ἀφοῦ τὸ ἕνα καρπούζι καὶ τὸ πεπόνι ἔπιασαν μὲ τὸν ὄγκον τους τὸν χῶρον τοῦ καλαθιοῦ, φυσικὰ τὸ ἄλλο καρπούζι ἔμεινεν ἔξω. 1) *Ὥστε ὄγκος τῶν σωμάτων λέγεται ὁ χῶρος, ποὺ καταλαμβάνει κάθε σῶμα.* 2) Τὸν ἴδιον χῶρον δὲν δύνανται νὰ καταλάβουν δύο σώματα.

Τὰ παιδιὰ ἔφεραν πολλὰ ἄλλα παραδείγματα. Ὅπως τὰς θέσεις τοῦ αὐτοκινήτου μὲ τὰ ἄτομα, τὸ μπουκάλι μὲ τὸ λάδι, τὰ κιβώτια μὲ τὰ πορτοκάλια, μὲ τὰ σταφύλια, τὰ μπαοῦλα μὲ τὰ ροῦχα, τὸ κάρρον μὲ τὴν ἄμμον, πέτρας κτλ.

17. Τὸ κυβικὸν μέτρον

Διὰ τὰς ἀποστάσεις τῶν σωμάτων εἴδομεν, ὅτι μεταχειριζόμεθα τὸ ἁπλοῦν μέτρον. Διὰ τὰς ἐπιφανείας αὐτῶν τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Διὰ τὸν ὄγκον ;

Ὁ Σωτήρης ἐσήκωσε τὸ χέρι καὶ εἶπεν : — Ἐμεῖς ἔχομεν μάντρα καὶ πωλοῦμεν εἴδη οἰκοδομῶν. Ὅταν οἱ πελάται μας ἀγοράζουν ἄμμο, τὸν πωλοῦμεν μὲ τὸ *κυβικόν*. Εἶναι ἕνα κιβώτιο



κυβικό, ἀνοικτὸ ἀπὸ τὶς δυὸ βάσεις του. Ἡ κάθε του ἕδρα εἶναι ἕνα τετραγωνικὸ μέτρο. Αὐτὸ τὸ γεμίζομε ἄμμο. Ἔπειτα σηκώνομε τὸ ἀνοικτὸ ξύλινο κιβώτιο καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ἄμμου εἶναι ἀκριβῶς ἕνα κυβικό.

— Γιὰ τὸ νερὸ ἔχομε τὸ ἴδιο σχέδιο τοῦ κυβικοῦ μέτρου, ἀλλὰ σιδερένιο καὶ μὲ κάνουλα. Ὅταν γεμίζῃ ἀπὸ τὴν βρύση μας, τὸ ἀδειάζουν οἱ πελάτες σὲ δικά τους κιβώτια.

—Ἕνα κυβικὸ νεροῦ, λέγει ὁ διδάσκαλος, χωρεῖ 871 ὀκάδας καὶ 100 δράμια, ἢ 1000 χιλιόγραμμα (κιλά).

—Ὥστε, λέγει ὁ Ἀντώνης, τὸ κυβικὸ μέτρο, ἐπειδὴ μετρᾶ τὸν ὄγκο τῶν σωμάτων, ἔχει μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος. Ἡ κάθε του ἀκμὴ εἶναι 1 μέτρο. Τότε διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ὑποδιαιρέσεις του χωρίζομεν τὴν βάσιν του, ἡ ὁποία εἶναι ἓν τετραγ. μέτρον, εἰς 100 ἴσα μέρη, τὰς τετραγ. παλάμας. Ἐπίσης καὶ τὴν ἐπάνω βάσιν εἰς 100 ἴσα μέρη, τετρ. παλάμας. Ἑνώνομεν μὲ κλωστὰς τὰ ἑκατὸν τετραγωνίδιά των. Τώρα ὁ κύβος ἔχει ὕψος ποὺ ἡ ἀκμή του ἀπὸ τὴν μίαν βάσιν ἕως τὴν ἄλλην εἶναι 1 μέτρον. Τὸ ἕνα μέτρον ἔχει 10 παλάμας. Ἀπὸ κάθε λοιπὸν παλάμην δένομεν μίαν κλωστὴν καὶ τὴν ἑνώνομεν μὲ τὰς ἀπέναντι πλευράς. Τότε θὰ ἴδωμεν ὅτι ἐσχηματίσθησαν 10 σειραὶ ἀπὸ 100 τετραγωνίδια ἡ κάθε μία, ἤτοι ἐν ὅλῳ 1000 μικροὶ κύβοι. Κάθε κύβος ἀπὸ αὐτοὺς ἔχει ἕδραν μίαν τετραγωνικὴν παλάμην, ποὺ ἡ ἀκμή της εἶναι μία παλάμη τοῦ ἁπλοῦ μέτρου. Αὗται εἶναι αἱ κυβικαὶ παλάμαι Τὸ κυβικὸν λοιπὸν μέτρον ἔχει 1000 κυβικὰς παλάμας. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον καὶ ἡ κάθε κυβικὴ παλάμη θὰ ἔχῃ 1000 κυβικοὺς δακτύλους. Κάθε κυβικὸς δάκτυλος 1000 κυβικὰς γραμμάς.

Ἡ κάθε κυβικὴ παλάμη χωρεῖ 312,5 δράμια ἢ 1000 γραμμάρια. Ἡ κυβικὴ παλάμη λέγεται καὶ χιλιόγραμμον ἢ κιλόν. Ὁ κυβικὸς δάκτυλος χωρεῖ 1 γραμμάριον· ἑπομένως :

1 κυβικὸν μέτρον ἔχει 1000 κυβ. παλάμας, 1.000.000 κυβ. δακτύλους, 1.000.000.000 κυβικὰς γραμμάς.

1 κυβικὴ παλάμη ἔχει 1000 δακτύλους, 1.000.000 γραμμάς.

1 κυβικὸς δάκτυλος ἔχει 1000 κυβικὰς γραμμάς.

Παρατήρησις. Ὁ Βασίλης λέγει : —Ἐγὼ σκέφθηκα : ἀφοῦ ὁ κύβος ἔχει κάθε ἀκμήν του 1 μέτρον, λοιπὸν ἔχει 10 παλάμας. Πολλαπλασιάζω ἐπὶ 10 παλάμας καὶ βρίσκω τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας. Ὅ,τι βρῶ, πάλι ἐπὶ 10, γιὰ νὰ βρῶ πόσα τέτοια τετραγωνίδια θὰ γίνουν στὸ χῶρο τοῦ ὕψους τοῦ ἑνὸς μέτρου. 10 × 10 × 10 = 1000 κυβ. παλάμας καὶ τὰς παλάμας εἰς δακτύλους κτλ.

γ΄. Γραφὴ καὶ ἀπαγγελία τῶν ὄγκων

Τὰ κυβικὰ μέτρα γράφονται μὲ ἀκεραίους, π.χ. 1 κ.μ., 5 κ.μ., 8 κ.μ. κλπ. Ἐνῶ αἱ ἄλλαι ὑποδιαιρέσεις τοῦ κυβικοῦ μέτρου, μὲ δεκαδικούς. Χωρίζομεν ὅμως αὐτοὺς εἰς τριψήφια τμήματα. Τὸ πρῶτον παριστάνει τὰς κ. παλάμας, τὸ δεύτερον τοὺς κ. δακτύλους καὶ τὸ τρίτον τὰς κ. γραμμάς.

1) Π.χ. γράφεται ἔτσι ὁ 5,236,785,5 καὶ ἀπαγγέλλεται ἔτσι : 5 κ. μέτρα, 236 κ. παλάμαι, 785 κ. δάκτυλοι, 500 κ. γραμμαί.

Παρατήρησις. Ὁ Ἀλκιβιάδης λέγει : Οἱ παλάμες εἶναι χιλιοστὰ τοῦ κ. μ., οἱ δάκτυλοι ἑκατομμυριοστά. Σωστά.

2) Κάθε μονάδα ὄγκου κατωτέρα εἶναι 1000 φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὴν ἀνώτερή της. Π.χ. Ἡ κυβικὴ παλάμη 1000 φορὲς μικρότερη τοῦ κυβ. μέτρου. Ὁ κυβ. δάκτυλος 1000 φορὲς μικρότερος τῆς κυβ. παλάμης.

᾿Ασκήσεις. 1) Γράψατε μαζὶ τοὺς ἀριθμούς : 1 κ. μ. 56 κ.π. καὶ 356 κ. δάκτυλοι. 2) ᾿Επίσης 485 κυβ. παλάμαι, 12 κυβ. δάκτυλοι καὶ 256 κυβ. γραμμ. 3) Τὰς 2365 κυβ. παλάμας καὶ 500 κυβ. δακτύλους νὰ τοὺς γράψετε ὅπως ἐμάθομεν. 4) Τὰς 547 κυβ. παλάμας νὰ τὰς τρέψετε εἰς κυβικὰ μέτρα.

Προβλήματα. 1) Τὸ ντεπόζιτο τῆς κατοικίας μας περιέχει 3.256 κυβ. μέτρα νερόν. Εἴμεθα εἰς τὴν κατοικίαν 14 ἄτομα. Πόσαι ὀκάδες νεροῦ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν καθένα ;

2) Αἱ ᾿Αθῆναι ἔχουν πληθυσμὸν μαζὶ μὲ τὸν Πειραιᾶ 1.475.000 ἄτομα. ῾Η ῾Εταιρεία ῾Υδάτων παρέχει καθημερινῶς 45.000 κυβικὰ μέτρα νεροῦ. Πόσα χιλιόγραμμα ἀντιστοιχοῦν διὰ κάθε ἄτομον;

18. ῾Ο ὄγκος τοῦ κύβου

Πρόβλημα. Μία δεξαμενὴ σχήματος κύβου ἔχει ἀκμὴν 12 μέτρα. Πόσα κυβικὰ μέτρα νεροῦ χωρεῖ ; Θέλομεν λοιπὸν νὰ εὕρωμεν πόσα κυβικὰ μέτρα χωρεῖ αὐτὸς ὁ χῶρος. ῞Οπως ἐμάθομεν θὰ γίνουν εἰς τὴν ἕδραν τῆς βάσεως τοῦ χώρου αὐτοῦ 12 × 12 = 144 τετρ. μέτρα. Τὸ ὕψος τοῦ κύβου εἶναι πάλιν 12 μέτρα. ᾿Απὸ κάθε λοιπὸν μέτρον τοῦ ὕψους σύρομεν γραμμὰς καὶ ἑνώνομεν τὰς ἀπέναντι ἕδρας. Θὰ σχηματισθοῦν 12 σειραὶ ἀπὸ 144 κυβικὰ μέτρα ἡ κάθε μία. ῎Ητοι : 144 × 12 = 1728 κυβικὰ μέτρα.

Παρατήρησις. ῾Ο Γιῶργος λέγει —῞Οπως βλέπω, ἐδῶ εὑρήκαμεν πρῶτα τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ κύβου (ποὺ εἶναι τετράγωνη) καὶ αὐτὸ τὸ ἐπολλαπλασιάσαμεν ἐπὶ τὸ ὕψος. ᾿Επειδὴ ὅμως καὶ τὸ ὕψος τοῦ κυβικοῦ σώματος εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὴν πλευρὰν τῆς βάσεως, ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἴδιος. Π.χ. 12 × 12 × 12 =1728 κ.μ.

ΚΑΝΩΝ.—Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κύβου πολλαπλασιάζομεν τὸν μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος ἐπὶ τὸ ὕψος. Καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος φανερώνει τὸ μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος τοῦ κύβου εἶναι ὁ αὐτός, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του. ᾿Επὶ τὸν ἴδιον πάλιν τὸ γινόμενον τὸ ὁποῖον θὰ προκύψῃ.

Προβλήματα. 1. ῞Ενα κυβικὸν δωμάτιον ἔχει πλάτος 6,5 μέτρα. Τὸ δωμάτιον αὐτὸ χρησιμεύει ὡς ἕδρα διδασκαλίας 40 μαθητῶν. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα ἀντιστοιχοῦν εἰς κάθε μαθητήν; Πόσα κυβικά ;

2. ῞Ενα κυβ. δοχεῖον 0,6 μ. πόσα κυβικὰ μέτρα νεροῦ χωρεῖ ;

3. Πόσα κυβικὰ μέτρα ἔχει ὁ κύβος, ποὺ ἔκαμεν ὁ Γιῶργος ἀπὸ πηλόν, ἀφοῦ ἡ ἀκμή του εἶναι 0,2 μέτρα ;

4. Τὸ ἐμβαδὸν ὅλου τοῦ κύβου τῆς στέρνας τοῦ ἀγροτικοῦ σπιτιοῦ τοῦ κ. Χάλαρη εἶναι 216 τ.μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ; Πόσας ὀκάδας νεροῦ χωρεῖ; Καὶ πόση εἶναι ἡ ἀκμή της ;

5. Μία κυβικὴ παλάμη πόσα δράμια νεροῦ χωρεῖ ; Πόσα γραμμάρια ; Πόσα κιλά ;

6. Τὸ κυβ. μέτρον πόσας ὀκάδας νεροῦ χωρεῖ ; Πόσα χιλιόγραμμα ;

19. Εἰδικὸν βάρος τῶν σωμάτων

Τὴν ἄλλην ἡμέραν ὁ Στράτος ἐρώτησε τὸν διδάσκαλον :

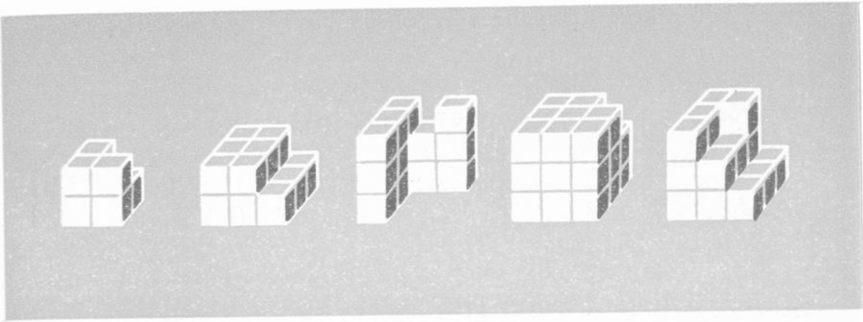
— Στὰ δοχεῖα, μόνον τὸ νερὸ θὰ μετροῦμε, πόσα κυβικὰ εἶναι; Τὸ λάδι, τὸ κρασί, τὸ γάλα καὶ τόσα ἄλλα δὲν μποροῦμε νὰ τὰ ὑπολογίσωμε, ὅταν εἶναι μέσα π.χ. σὲ ἕνα κυβικὸ δοχεῖο, πόσας ὀκάδας ἢ χιλιόγραμμα θὰ εἶναι ;

Ὁ διδάσκαλος τότε εἶπεν :

—Ὅλων, παιδιά, τῶν σωμάτων δυνάμεθα ἀπὸ τὸν ὄγκο τους νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ βάρος τους. Μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν τοῦ κάθε σώματος, τὸ *εἰδικὸν βάρος*. Διὰ βάσιν ἔχουν πάρει οἱ ἄνθρωποι μίαν κυβικὴν παλάμην νεροῦ, ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4°. Αὐτὴ ζυγίζει ἕνα χιλιόγραμμον (1000 γραμμάρια), δηλαδὴ 312,5 δράμια. Ἂν τὴν κυβικὴν τώρα παλάμην τὴν γεμίσωμεν μὲ ἔλαιον, θὰ ἴδωμεν ὅτι ζυγίζει 915 γραμμάρια. Διαιροῦμεν τὸ βάρος τοῦ ἐλαίου μὲ τὸ βάρος ἴσου ὄγκου νεροῦ, 915 : 1000 = 0,915. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς λέγεται *εἰδικὸν βάρος* τοῦ ἐλαίου. Ὁ ἴδιος ὁ ὄγκος μιᾶς κυβικῆς παλάμης σιδήρου ζυγίζει 7600 γραμμάρια. Τὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ 1000 γραμμάρια ἴσου ὄγκου νεροῦ 7600 : 1000 = 7,6 χιλιόγραμμα (κιλά). Εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σιδήρου.

—Ὥστε, λέγει ὁ Σωκράτης, *ὅταν ἠξεύρω τὸν ὄγκον ἑνὸς σώματος τὸν πολλαπλασιάζω μὲ τὸ εἰδικὸν βάρος του καὶ εὑρίσκω τὸ βάρος τοῦ σώματος.*

Π.χ. Ὁ ὄγκος σιδήρου εἶναι 6 κυβικαὶ παλάμαι. Πόσον εἶναι τὸ βάρος του ;



Λύσις

6 κ. π. × 7,6 τὸ εἰδ. βάρος του = 45,6 κιλὰ

Ἡ Οὐρανία τότε παρετήρησεν, ὅτι καὶ ἀπὸ τὸ βάρος ἑνὸς σώματος, ὅταν τὸ διαιρέσωμεν μὲ τὸ εἰδικὸν βάρος του, εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον του. Εἰς τὸ ἴδιον παράδειγμα : Διαιροῦμεν τὰ 45,6 κιλὰ (τὸ βάρος τοῦ σιδήρου) διὰ τοῦ εἰδικοῦ του βάρους 7,6 καὶ εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τοῦ σιδήρου.

Λύσις: 45,6 : 7,6 = 6 κ.π.

$$\begin{array}{r|l} 456 & 76 \\ \hline =0 & 6 \end{array}$$

2ον παράδειγμα. 49,41 κιλὰ ἐλαίου πόσον ὄγκον ἑνὸς δοχείου θὰ καταλάβουν ;

Λύσις. Διαιροῦμεν τὸ βάρος τοῦ ἐλαίου διὰ τοῦ εἰδικοῦ του βάρους.

49,41 : 0,915 = 54 κ.π.

$$\begin{array}{r|l} 49410 & 915 \\ \cline{2-2} 3660 & 54 \text{ κ.π.} \\ 000 & \end{array}$$

Ἂν τὸ πρόβλημα ἔχει δοθῇ εἰς ὀκάδας, δράμια κ.λ.π. ἢ τὰ κάμνω κιλὰ ἢ τὰ ὑπολογίζω πάλιν μὲ δράμια. Διότι ἠξεύρω ὅτι ἕνα κιλὸ ἰσοῦται μὲ 312,5 δράμια.

Πίναξ τοῦ εἰδικοῦ βάρους τῶν πλέον συνηθισμένων σωμάτων

Πλατίνα	21.5	Νερὸ καθαρὸν	1.000
Χρυσὸς	19.33	Νερὸ θαλάσσης	1.020
Μόλυβδος	11.38	Γάλα	1.030
Ἄργυρος	10.5	Οἶνος	0.990
Χαλκὸς	8.8	Μπύρα	0.980
Νικέλιον	8.28	Πάγος	0.990
Ἀτσάλι	7.7	Ἔλαιον	0.915
Σίδηρος	7.6	Οἰνόπνευμα	0.900
Καλάϊ	7.29	Πετρέλαιον	0.840
Ἀδάμας	3.5	Φελλὸς	0.240
Μάρμαρον	2.84		
Ὕαλος	2.5		

1) Γενικὰ λοιπὸν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ εἰδικὸν βάρος ἑνὸς σώματος, διαιροῦμεν τὸ βάρος μὲ τὸν ὄγκον του.

2) Ὡς μονάδα μετρήσεως διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ εἰδικοῦ βάρους τῶν σωμάτων ἔλαβον οἱ ἄνθρωποι τὴν χωρητικότητα μιᾶς κυβικῆς παλάμης.

Αὐτὴ χωρεῖ 1 κιλὸ (χιλιόγραμμον) καθαρὸν νερὸν 4^0.

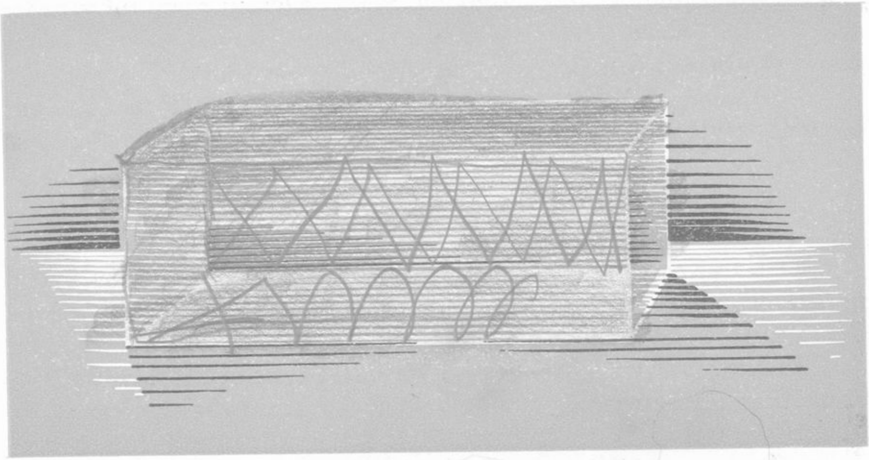
Προβλήματα. 1) Ἕνα κυβικὸν ντεπόζιτο ἔχει ἀκμὴν 3 μ. Πόσα κιλὰ πετρελαίου χωρεῖ; Πόσα, τὸ ἴδιον, γάλακτος;

2) Ἕνας τενεκὲς κυβικὸς ἔχει ἀκμὴν 0,8 μέτρα. Πόσας ὀκάδας οἴνου χωρεῖ; Πόσα οἰνοπνεύματος ;

3) 65 κιλὰ χρυσοῦ, πόσον ὄγκον ἔχουν;

4) 235 ὀκάδες μολύβδου, πόσον ὄγκον ἔχουν ;

5) Ὄγκος σιδήρου 567 κ.π. πόσα κιλὰ καὶ πόσες ὀκάδες ζυγίζει ;



Β΄. ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

1. Τί εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον

Ὁ Ἀριστομένης εἶχε πέσει ἔξω στὴν κατασκευὴν τοῦ κύβου του.

Ὁ Βασίλης καὶ τὰ ἄλλα παιδιά, ποὺ τὸν εἶδαν, τοῦ εἶπαν ὅτι τὸ σχῆμα ποὺ εἶχε κάμει ἀπὸ σύρμα, δὲν ἦτο κύβος. Μετροῦν μὲ τὸ ὑποδεκάμετρόν τους καὶ ἡ μία ἀκμή του ἦτο 0,18 τοῦ μέτρου. Τόσον ἦτο καὶ ἡ ἀπέναντί της. Ἡ ἄλλη ὅμως ἀκμή του ἦτο 0,16 μ. καθὼς καὶ ἡ ἀπέναντί της. Ὁμοία ἦτο καὶ ἡ ἄλλη βάσις. Ἀπὸ τὰς τέσσαρας παραπλεύρους ἐπιφανείας ἡ μία καὶ ἡ ἀπέναντί της εἶχαν ἀκμὰς 0,16 μ. καὶ 0,15 μ. καὶ τὸ ἴδιον τὰς ἀπέναντί των. Καὶ αἱ ἄλλαι δύο εἶχαν 0,18 καὶ 0,15 τὰς ἀπέναντί των.

— Βλέπεις, Ἀριστομένη· ὁ κύβος πρέπει νὰ ἔχῃ ὅλας τὰς ἀκμὰς ἴσας μεταξύ των. Τὸ σχῆμα τὸ δικό σου ἔχει μόνον τὰς ἀπέναντι ἴσας. Τέτοιο σχῆμα εἶναι τὰ διάφορα κουτιὰ ἀπὸ τὰ λουκούμια, γλυκά, τὰ κιβώτια μὲ κονσέρβες, αἱ αἴθουσαι τοῦ σχολείου μας κλπ. Ὁ διδάσκαλος τοὺς εἶπε τότε ὅτι τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται *ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον*. Αἱ ἕδραι του θὰ ἴδωμεν, ὅτι λέγονται παραλληλόγραμμα. Ὁ Κώστας λέγει:

— Πολὺ μοιάζει μὲ τὸν κύβον, γιατὶ ἔχει κι αὐτὸ 6 ἐπίπεδες ἐπιφάνειες. Ἔχει μῆκος, πλάτος, ὕψος, ἀκμές, κορυφές, γωνίες, ὅ,τι δηλαδὴ καὶ ὁ κύβος.

— Ἂς δοῦμε λοιπὸν μὲ τὴν σειράν, λέγει ὁ διδάσκαλος, ποῦ ὁμοιάζει καὶ ποῦ διαφέρει τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἀπὸ τὸν κύβον.

α΄. Ἕδραι

Ὁ Βασίλης λέγει ὅτι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει 6 ἐπιπέδους ἐπιφανείας, ὅπως ὁ κύβος. Λοιπὸν τὰς ἐπιφανείας αὐτάς, ὅπως καὶ τοῦ κύβου, τὰς ὀνομάζομεν *ἕδρας*, λέγει ὁ διδάσκαλος.

Ὁ Σωτήρης προσθέτει : — Ἐνῶ ὅμως ὅλες οἱ ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι ἴσες μεταξύ τους, τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μόνον αἱ ἀπέναντι εἶναι ἴσες. Ἐπίσης ἔχει, ὅπως καὶ ὁ κύβος, τὰς ἀπέναντι ἕδρας παραλλήλους. Αἱ δύο βάσεις του εἶναι ὁριζόντιες καὶ οἱ ἄλλες παράπλευρες ἕδρες κατακόρυφες. Οἱ ἴδιες οἱ 4 εἶναι κάθετες ἐπὶ τὶς βάσεις.

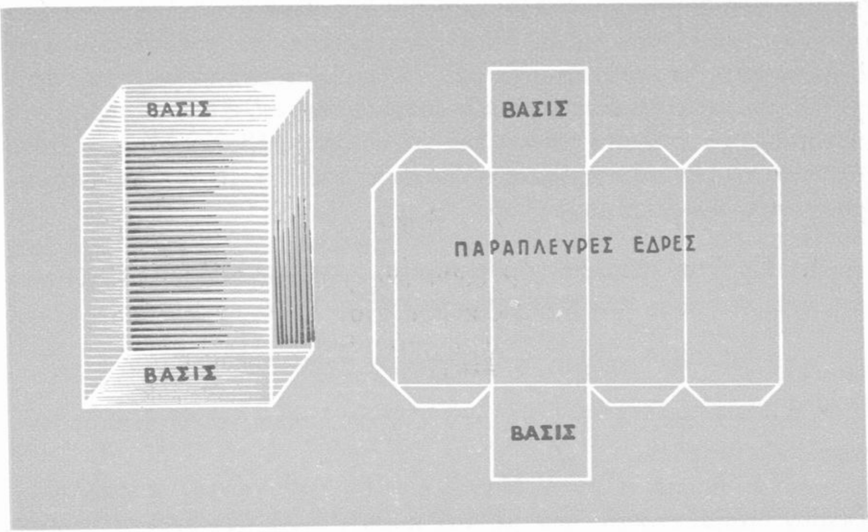
β΄. Ἀκμαὶ

— Τὸ μέρος ποὺ συναντῶνται δύο ἕδρες τοῦ κύβου, λέγεται *ἀκμή*, λέγει ὁ Θανάσης. — Τὸ ἴδιον καὶ διὰ τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον ἰσχύει, λέγει ὁ διδάσκαλος.

Τότε κι αὐτὸ ἔχει 12 ἀκμές, ἀλλὰ δὲν εἶναι μεταξύ τους ἴσες· μόνον οἱ ἀπέναντι. Ἐπίσης οἱ ἀπέναντι εἶναι, ὅπως καὶ στὸν κύβον, παράλληλες. Οἱ 8 εἶναι ὁριζόντιες καὶ οἱ 4, ὅπως καὶ εἰς τὸν κύβον, κατακόρυφες. Κάθε ἀκμὴ τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου, ὅπως καὶ εἰς τὸν κύβον, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ποὺ συναντᾶ.

γ΄. Κορυφαὶ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει, ὅπως καὶ ὁ κύβος, 8 *κορυφάς*. Ἀπὸ κάθε κορυφήν, ὅπως καὶ εἰς τὸν κύβον, ξεκινοῦν 3 ἀκμαί. Αἱ ἀκμαὶ αὗται δεικνύουν τὰς διαστάσεις τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου, μῆκος, πλάτος, ὕψος. Εἰς τὸν κύβον αἱ διαστάσεις αὗται εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Εἰς τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον διάφοροι.



δ΄. Γωνίαι τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου

Παρατηρήσατε ἀπὸ τί γίνονται ὅλαι αἱ γωνίαι τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου :

Ὁ Θανάσης λέγει : —Ὅπως ὁ κύβος εἶχεν 24 ὀρθὲς γωνίες ἔτσι καὶ τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον ἔχει 24 ὀρθὲς γωνίες. Οἱ γωνίες ὅλες αὐτὲς γίνονται ἀπὸ καθέτους πλευρὰς καὶ γι᾽ αὐτὸ εἶναι ὀρθές. Ἐπίσης ἔχει ὅσες καὶ ὁ κύβος, 12 διέδρους καὶ 8 τριέδρους ἢ στερεὲς γωνίες.

Ἐρωτήσεις. 1) Τί λέγεται λοιπὸν ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον; 2) Εἰς τί ὁμοιάζει καὶ εἰς τί διαφέρει ἀπὸ τὸν κύβον ; 3) Κάμετε ἀπὸ ἕνα ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον μὲ ὅ,τι ὁ καθεὶς θέλει.

ε΄. Κατασκευὴ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου

Ὁ Ἄλκης λέγει :—Τώρα πιὰ δὲν δυσκολεύθηκα στὴν κατασκευὴ τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου. Τὸ ἀνάπτυγμα κάθε σώματος, τὸ κατασκευάζω ἀμέσως. Ὁ κύβος τοῦ Ἀριστομένη, ποὺ ἀπὸ τὴν βιασύνη του ἔγινε παραλληλεπίπεδο, μὲ ἐδίδαξε ἀμέσως γιὰ νὰ κάμω τὸ σχῆμα μου. —Ἐχάραξα ἐπάνω στὸ χαρτόνι μου ἔξη παραλληλόγραμμα. Τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἀπέναντί του μόνο. Ξεχώρισα ἔπειτα τὸ σχέδιό μου ἀπὸ τὸ ἄλλο χαρτόνι, ποὺ δὲν μοῦ χρειάζεται. Ἔσπασα τὸ χαρτόνι μὲ τὸ σχέδιό μου στὰ χαράγματα τῶν ἀκμῶν, ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος. Στὶς ἄκρες, ἀφοῦ τὶς ἔξυσα λιγάκι γιὰ νὰ κολλοῦν, ἔβαλα κόλλα. Ἔτσι κόλλησα τὰ ἀσύνδετα ἄκρα τῶν συνεχομένων ἑδρῶν καὶ νά τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον.

2. Σχῆμα ἑδρῶν ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ σχέσεις μεταξύ των

α΄. Ὀρθογώνιον ἢ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον

Ὅλα τὰ παιδιὰ ἔφεραν τὴν ἄλλην ἡμέραν ἀπὸ ἕνα ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον.

— Νά, Κύριε, εἶπε ὁ Μανώλης. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ὁμοιάζει καθ' ὅλα μὲ τὸν κύβον, ἀλλὰ δὲν ἔχει τὶς ἀκμές του ὅλες ἴσες οὔτε τὶς ἕδρες του. Ἐπίσης οἱ ἕδρες δὲν εἶναι τετράγωνες, ὅπως τοῦ κύβου.

Ὅπως ἔχετε τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδόν σας, βάλετε ἀπὸ κάτω ἀπὸ τὴν βάσιν του μίαν κόλλαν χαρτί. Σύρτε γραμμὰς μὲ τὸ μολύβι σας ἀκολουθοῦντες τὰς γραμμὰς τῆς βάσεως. Τί ἐσχηματίσθη ; — Τὸ σχῆμα τῆς ἕδρας τῆς βάσεως τοῦ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου. Τί παρατηρεῖτε ; — Ἔχει 4 πλευρὲς κάθετες ἀνὰ δύο. — Ἀπ' αὐτὲς οἱ ἀπέναντι εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες. Ὅλες οἱ γωνίες του εἶναι ὀρθές. Τὸ σχῆμα αὐτό, λέγει ὁ διδάσκαλος, λέγεται *ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον* ἢ ἁπλῶς *ὀρθογώνιον*. Τί λέγεται λοιπὸν ὀρθογώνιον ἢ ὀρθογ. παραλληλόγραμμον;

β΄. Ὁμοιότητες καὶ διαφοραὶ μὲ τὸ τετράγωνον

Ὁ Σωτήρης παρετήρησεν ὅτι τὸ ὀρθογ. παραλληλόγραμμον ὁμοιάζει μὲ τὸ τετράγωνον : 1) Διότι ἔχει, ὅπως ἐκεῖνο, 4 γωνίας ὀρθάς. 2) Ἔχει 4 πλευράς, ὅπως ἐκεῖνο.—Διαφέρει ὅμως ἀπὸ τὸ τετράγωνο, γιατὶ οἱ πλευρές του δὲν εἶναι ὅλες ἴσες μεταξύ τους, ἀλλὰ μόνον οἱ ἀπέναντι.

Ἄσκησις. Κάμετε ἕνα ὀρθογώνιον.

γ΄. Μῆκος, πλάτος, περίμετρος, διαγώνιος

Ὁ Ἀλκιβιάδης εἶχε κάμει ἕνα τέλειον ὀρθογ. παραλληλόγραμμον. Ἐπρόσεξεν, εἶπε, πολύ. Ἔσυρε πρῶτον μίαν ὁριζοντίαν εὐθεῖαν. Εἰς τὰς δύο της ἄκρας ἔσυρε δύο καθέτους εὐθείας καὶ τὰς ἕνωσε μὲ μίαν ἄλλην εὐθεῖαν. Ἡ μία ἀπὸ τὰς δύο μεγάλας πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου λέγεται *βάσις* ἢ *μῆκος*. Καὶ ἡ μία ἀπὸ τὰς δύο μικρὰς πλευρὰς *πλάτος* ἢ *ὕψος*. Ὅπως εἰς τὸ τετράγωνον, ἔτσι καὶ εἰς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πλευρῶν λέγεται *περίμετρος*. Τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος προστιθέμενα μᾶς δίδουν τὴν ἡμιπερίμετρον τοῦ ὀρθογωνίου.

Ἐὰν λοιπὸν διπλασιάσωμεν τὴν ἡμιπερίμετρον, θὰ εὕρωμεν τὴν περίμετρον. Ἔτσι, ὅταν ἕνα ὀρθογώνιον ἔχῃ πλάτος 60 μ. καὶ μῆκος 100 μ., ἡ περίμετρός του θὰ εἶναι :

$$100 + 60 = 160$$
$$160 \times 2 = 320 \text{ μ.}$$

—Ἐγώ, λέγει ἡ Καίτη, μποροῦσα κι ἀλλοιῶς νὰ βρῶ τὴν περίμετρο τοῦ ὀρθογωνίου: α) Διπλασιάζω τὴν βάσι ἢ τὸ μῆκος, γιατὶ τόσο θὰ εἶναι ἡ ἀπέναντί της $100 \times 2 = 200$, β) διπλασιάζω καὶ τὸ πλάτος ἢ τὸ ὕψος $60 \times 2 = 120$ καὶ γ) προσθέτω τὰ δύο γινόμενα $200 + 120 = 320$ μ. ἡ περίμετρος

Ὁ Μίμης ἐπρόσθεσε καὶ τὰς τέσσαρας πλευρὰς καὶ εὗρε πάλιν τὸ ἴδιον $100 + 100 + 60 + 60 = 320$ μ. Λύσατε τὰ δύο προβλήματα μὲ τὸν συντομώτερον τρόπον.

1) Ὁ κῆπος τοῦ Μιλτιάδη ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου. Πόσα μέτρα σύρμα θὰ χρειασθῇ γιὰ νὰ τὸν περιφράξῃ μὲ 4 σειράς, ἐὰν τὸ μῆκος του εἶναι 45 μέτρα καὶ τὸ πλάτος του 19 μέτρα ;

2) Ἡ περίμετρος τῆς αὐλῆς μας εἶναι 56 μ. Τὸ μῆκος εἶναι 18 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ πλάτος της ;

Διαγώνιος λέγεται ἡ εὐθεῖα, ποὺ ἑνώνει δύο ἀπέναντι γωνίας. Ὅλαι αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

3. Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου.

Ἡ αἴθουσα τῆς πρώτης τάξεως, λέγει ὁ Θανάσης, ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου. Παρεκαλέσαμεν τὴν διδασκάλισσαν τῆς πρώτης τάξεως εἰς τὸ διάλειμμα καὶ ἐμετρήσαμεν τὴν βάσιν της. Εἶχε 8 μέτρα μῆκος καὶ πλάτος 6 μέτρα. Τὰ ἴδια μέτρα εἶχε καὶ ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως πλευρά, καθὼς καὶ ἡ ἀπέναντι τοῦ πλάτους. Εἰς κάθε μέτρον τοῦ μήκους ἐσύραμεν μίαν γραμμὴν ἕως τὴν ἀπέναντι πλευράν, ποὺ συναντήθη ἀκριβῶς μὲ τὸ σημαδάκι, ποὺ ἐβάλαμεν ὅταν ἐμετρούσαμεν. Τὸ ἴδιον ἐκάναμε καὶ ἀπὸ τὴν πλευρὰν τοῦ πλάτους. Ἐσύραμεν εὐθείας γραμμὰς εἰς τὴν ἀπέναντί της. Εἴδομεν ὅτι ἐσχηματίσθησαν 48 τετραγωνικὰ μέτρα.

Εἶναι τετραγωνικά, διότι ἐμετρήσαμεν καὶ εἴδομεν, ὅτι κάθε τους πλευρὰ εἶναι 1 μέτρον. Ὁ Σπῦρος τότε εἶπεν : — Τὸ ἴδιο ἔγινεν, ὅταν εὑρήκαμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τετραγώνου. Ἐκεῖ ὅμως ἐπολλαπλασιάσαμεν τὴν πλευρὰν ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της, γιατὶ ὅλες οἱ πλευρὲς τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσες. Ἐδῶ, ὅπως βλέπω, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν ἢ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος ἢ ὕψος.

Ἤτοι 8 μ. × 6 μ. = 48 μ.

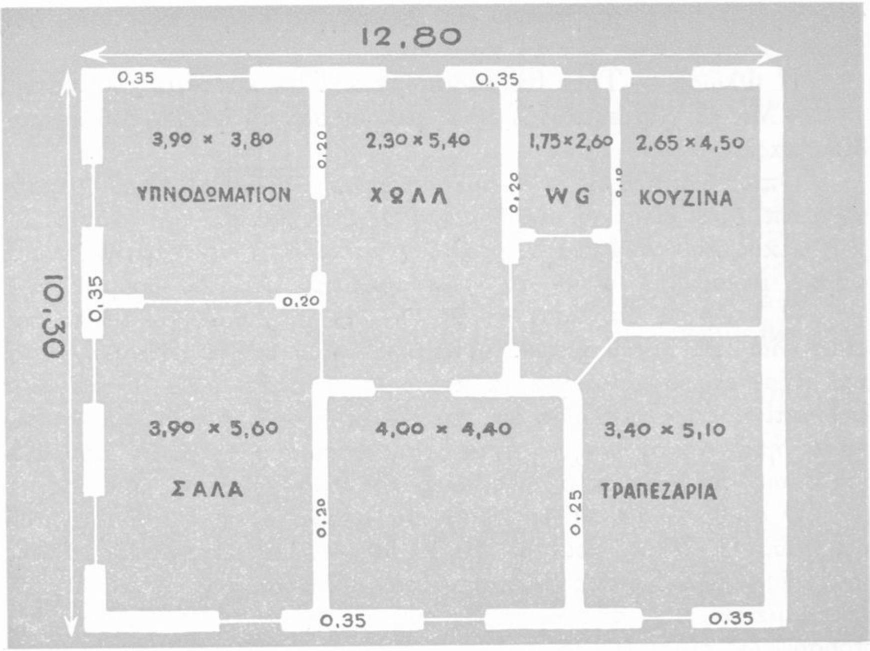
ΚΑΝΩΝ.—Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος του.

Προβλήματα. 1) Ὁ κύριος Σωκράτης ἐπώλησεν ἓν οἰκόπεδον σχήματος ὀρθογωνίου ἀντὶ 96 δραχμῶν τὸ τετραγ. μέτρον. Τὸ μῆκος τοῦ οἰκοπέδου ἦτο 76 μ. καὶ τὸ πλάτος 16 μ. Πόσα λεπτὰ θὰ πάρῃ ;

2. Τὸ πάτωμα τῆς Βας τάξεως τοῦ σχολείου μας ἔχει μῆκος 6,75 μ. καὶ πλάτος 4,65 μ. Ἐμετρήσαμεν ἓν ἀπὸ τὰ πλακάκια μὲ τὰ ὁποῖα εἶναι στρωμένον τὸ πάτωμα καὶ ἔχει μῆκος 0,35 μ. καὶ πλάτος 0,20 μ. Πόσα πλακάκια ἔχει ὅλον τὸ πάτωμα ;

3. Τὸ γραφεῖον τοῦ σχολείου μας ἔχει μῆκος 4 μ. καὶ πλάτος 3,25 μ. Εἶναι στρωμένον μὲ σανίδας. Κάθε σανὶς ἔχει μῆκος 6 μ. καὶ πλάτος 0,25 μ. Πόσαι σανίδες ἐχρειάσθησαν ;

4. Ὁ κ. Θεμιστοκλῆς θέλει νὰ βάλῃ εἰς τὸ κτῆμα του δένδρα ροδακινιᾶς. Τὸ κτῆμα του ἔχει μῆκος 235 μ. καὶ πλάτος 15 μ. Ὁ Γεωπόνος τοῦ εἶπε, ὅτι τὸ κάθε δένδρο νὰ ἀπέχῃ 4 μ. εἰς τὸ μῆκος καὶ 3 μ. εἰς τὸ πλάτος. Πόσα δένδρα θὰ χωρέσῃ τὸ κτῆμα του ;



4. Κλῖμαξ

α΄. Τί εἶναι κλῖμαξ

Ὁ διδάσκαλος ἔδειξεν εἰς τὰ παιδιὰ μίαν φωτογραφίαν τῶν Ἀθηνῶν ἀπὸ ἀεροπλάνον. Οἱ δρόμοι καὶ τὰ οἰκήματα φαίνονται πολὺ μικρά. Ἕνας, ποὺ ἔχει ἴδει εἰς μεγαλυτέρας εἰκόνας τὰ ἀξιοθέατα τῶν Ἀθηνῶν, ἠμπορεῖ μὲ τὴν φωτογραφίαν νὰ ὁδηγηθῇ διὰ νὰ γυρίσῃ τὴν Ἀθήνα. Δὲν εἶναι ὅμως εὔκολον νὰ ἔχωμεν αὐτὰς τὰς εἰκόνας. Οὔτε καὶ ἕνας ξένος νὰ ὁδηγηθῇ μὲ ἀσφάλειαν μὲ αὐτάς.

Ὁ Γιῶργος τότε εἶπε: — Στὰ περίπτερα πωλοῦν σχέδια τῆς Ἀθήνας. Νά, εἶναι κάτι μικροὶ χάρτες. Στοὺς χάρτες αὐτοὺς εἶναι σχεδιασμένη ὅλη ἡ Ἀθήνα. Πολλοὶ γράφουν καὶ τὰ σπουδαιότερα σημεῖα τῆς Ἀθήνας. Τὴν Ὁμόνοιαν καὶ γύρω της ὅλους τοὺς δρόμους, ποὺ πηγαίνουν στὸ Σύνταγμα, στὴν 'Ακρόπολι, στὴ Βουλὴ κλπ. καὶ σὲ ὅλα τὰ προάστια.

'Η Φλώρα — Τότε θὰ βαδίσωμε καὶ θὰ κυττᾶμε τὸ χάρτη ;

— Μὰ οἱ χάρτες αὐτοὶ εἶναι μικροὶ σὰν τὸ φύλλο τοῦ τετραδίου μας.

Ὅπως λοιπὸν εἰς τὴν φωτογραφίαν φαίνονται πολὺ μικρότερα ἀπ' ὅ, τι εἶναι τὰ οἰκοδομήματα, ἔτσι καὶ εἰς τὸν χάρτην. Οἱ μηχανικοί, ποὺ τὸν ἔκαμαν, γράφουν κάτω ἀπὸ τὸ χάρτην πόσας φορὰς μικρότερα εἶναι τὰ οἰκοδομήματα καὶ οἱ δρόμοι της.

'Ο Γιῶργος ἐσήκωσε τὸ χέρι.— Νὰ σᾶς πῶ ἐγὼ κάτι, ποὺ εἶδα ἐδῶ καὶ λίγον καιρό. 'Ο πατέρας μου ἐπῆγε στὸν μηχανικὸ καὶ πῆρε ἕνα σχέδιο, γιὰ νὰ κτίσωμε τὸ σπίτι μας. Ὅταν ἦλθε στὸ σπίτι, τὸ ξεδίπλωσε καὶ τὸ ἔδειξε στὴ μαμά. Τέτοιο πάνω κάτω ἦταν τὸ σχῆμα, τὸ ἔχω ξεσηκώσει στὸ τετράδιό μου. Εἶναι ὅπως τὸ βλέπετε στὴν εἰκόνα τῆς προηγουμένης σελίδος.

'Ο ἀριθμὸς 12,80 δείχνει πόσα μέτρα εἶναι ἡ πρόσοψι τοῦ σπιτιοῦ. 'Ο ἄλλος ἀριθμὸς 10,30 δείχνει τὰ μέτρα τῆς ἄλλης πλευρᾶς. 'Αλλά, ὅπως βλέπετε, ὅταν μετρήσωμεν ἐδῶ στὸ χαρτὶ τὰ μέτρα π.χ. τῆς δευτέρας πλευρᾶς εἶναι 0,103 μ. Καὶ τῆς προσόψεως εἶναι 0,128 μ.

Κι ἐγὼ τότε ποὺ τὸ εἶδα ἐρώτησα μὲ ἀπορία τὸν πατέρα μου. Τόσο μικρό ! Ποιὸς θὰ πρωτομπῆ !

— Γιὰ κοίταξε, λέγει ὁ μπαμπᾶς μου. 'Απὸ κάτω λέγει : Κλῖμαξ 1 : 100. Λοιπὸν αὐτὸ θὰ πῆ κάθε γραμμή, ποὺ σημειώνεται στὸ σχέδιο, θὰ γίνη 100 φορὲς μεγαλύτερη.

—'Επειδὴ ὁ μηχανικὸς δὲν ἦταν δυνατὸν νὰ κάμῃ τὸ σχέδιο σὲ χαρτὶ ὀρθογώνιο μὲ μῆκος 12,80 μ. καὶ πλάτος 10,30 μ. τὸ ἔκαμε σ' ἐλάχιστο χαρτί.— 'Αλλὰ ἐσημείωσε ἀπὸ κάτω πόσες φορὲς μικρότερο ἔκαμε τὸ σχέδιο στὸ χαρτί. Ἤτοι 100 φορὲς μικρότερο. 'Εμεῖς τώρα θὰ τὸ κάνωμε σύμφωνα μὲ τὴν ὁδηγία του 100 φορὲς μεγαλύτερο. Ἔτσι στὸ χτίσιμο τὰ 0,103 θὰ γίνουν $0{,}103 \times 100 = 10{,}30$ μ. καὶ τὰ $0{,}128 \times 100 = 12{,}80$ μ.

—Ὅπως καὶ στὸ σχέδιο τὸ ἀντίθετο τὰ 10,30μ. ἔγιναν 0,103μ. καὶ τὰ 12,80 μ. ἔγιναν 0,128 μ.

Ὥστε, κλῖμαξ λέγεται, ἡ ὑπὸ σμίκρυνσιν παράστασις εἰς σχέδιον τοῦ πραγματικοῦ πράγματος.

β'. Διάφοροι κλίμακες

—'Εγώ, λέγει ὁ Γιῶργος, θέλω νὰ κάμω τὴν κλίμακα : 1 : 10.

— Ναί, ἀλλὰ θέλει μεγάλο χαρτὶ γιὰ νὰ σχεδιάσῃς, τοῦ λέγει ὁ Τέλης.

— Νά, στὸν πίνακα νὰ σχεδιάσωμε τὴν αἴθουσά μας.

Τὰ παιδιὰ βάζουν τὸν πίνακα κατὰ τὸν Βορρᾶν ὁριζοντίως κάτω εἰς τὸ πάτωμα. Δεξιὰ εἶναι ἡ 'Ανατολή, κάτω ὁ Νότος καὶ ἀριστερὰ ἡ Δύσις. "Ολα τὰ ἰχνογραφοῦν 10 φορὲς μικρότερα ἀπὸ ὅ, τι εἶναι. Μετροῦμεν καλὰ ὅμως καὶ προσεκτικὰ τὸ καθένα. 'Η βόρειος καὶ νότιος πλευρὰ εἶναι 7 μέτρα. Στὸ σχέδιο θὰ γίνῃ 7 : 10 = 0,7 μ.

'Η ἀνατολικὴ καὶ ἡ δυτικὴ 9 μέτρα. Εἰς τὸ σχέδιον θὰ γίνῃ 9 : 10 = 0,9 μ.

"Ετσι καὶ ὅλα τὰ ἀντικείμενα τῆς αἰθούσης γίνονται 10 φορὰς μικρότερα.

Παρατήρησις. 1) Εἰς τὴν κλίμακα 1 : 10 τὰ ἀντικείμενα παριστάνονται μεγαλύτερα ἀπὸ ὅ, τι εἰς τὴν κλίμακα 1 : 100. 2) Εἰς τὴν κλίμακα 1 : 10 διὰ κάθε μέτρον σύρομεν γραμμὴν 0,1 μ. Εἰς τὴν κλίμακα 1 : 100 διὰ κάθε μέτρον σύρομεν γραμμὴν 0,01 μ. 'Η κλῖμαξ ἠμπορεῖ νὰ παρασταθῇ καὶ ἔτσι : 1 : 10 ἢ 1 : 100 κλπ.

'Ο Σωτήρης λέγει : —'Εγὼ θέλω εἰς τὴν κλίμακα 1 : 1000. Δηλαδὴ κάθε πρᾶγμα νὰ εἶναι 1000 φορὲς μικρότερον ἀπὸ ὅ,τι εἶναι στὴν πραγματικότητα.

Τότε ὁ διδάσκαλος ἐπρόσθεσεν, ὅτι καὶ 1 : 10000 καὶ 1 : 100.000 καὶ 1 : 1.000.000 καὶ 1 : 10.000.000 ἀκόμη ἔχομεν κλίμακας. 'Αρκεῖ κάθε πρᾶγμα, ποὺ θέλομεν νὰ παρασταθῇ, νὰ μετρηθῇ καλά.

'Ασκήσεις. 1) "Ενας μηχανικὸς ἔκαμε ἕνα σχέδιον οἰκοδομῆς οἰκίας μὲ κλίμακα 1 : 10. "Οταν μετρήσωμεν τὴν ἀνατολικὴν πλευρὰν μὲ τὸ μέτρον μας εὑρίσκομεν 0, 9 μ. Τὴν νοτίαν 0,6 μ. Ποῖαι θὰ εἶναι αἱ διαστάσεις τῆς οἰκοδομῆς ;

2) Νὰ κάμετε τὸ σχέδιον τῆς περιοχῆς τοῦ σχολείου σας μὲ κλίμακα 1:100.

3) Νὰ κάμετε ἕνα σχέδιον ἀνεγέρσεως μονωρόφου οἰκίας εἰς οἰκόπεδον τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρκετὸν χῶρον. 'Η βόρειος πλευρὰ νὰ εἶναι 16 μ., ἡ ἀνατολικὴ 25 μ. μὲ κλίμακα 1 : 1000. Τὰς θύρας καὶ τὰ παράθυρα τοποθετήσατε ὅπου νομίζετε σεῖς καλύτερον.

4) Ἕνα κτῆμα ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου τριγώνου. Ἡ μία πλευρά του εἶναι 100 μ., ἡ ἄλλη 200 μ. καὶ ἡ τρίτη 300 μ. Ἰχνογραφήσατέ το εἰς τὸ τετράδιόν σας μὲ κλίμακα 1 : 10.000.

γ'. Χάρται. Γεωγραφικοὶ χάρται

Εἰς ἕνα φύλλον τοῦ τετραδίου μας δυνάμεθα νὰ κάμωμεν τὸν χάρτην τῆς πόλεώς μας ἢ τοῦ χωρίου μας. Αὐτοὶ οἱ χάρται λέγονται καὶ *σχεδιαγραφήματα*. Χρειάζεται ὅμως προσοχὴ εἰς τὴν μέτρησιν τῶν δρόμων, τῶν πλατειῶν, οἰκοδομημάτων, πρὶν τὰ παραστήσωμεν εἰς τὴν θέσιν των. Ἀλλὰ καὶ προηγουμένως μία γενικὴ καταμέτρησις ὅλης τῆς περιοχῆς, διὰ νὰ ἴδωμεν ἂν μᾶς παίρνῃ τὸ χαρτὶ μὲ τὴν κλίμακα ποὺ ἔχομεν ὑπ' ὄψιν μας. Ἄλλως νὰ σμικρύνωμεν ἀκόμη τὴν κλίμακα διὰ νὰ μᾶς χωρέσῃ εἰς τὸ χαρτὶ ποὺ θέλομεν νὰ σχεδιάσωμεν τὴν περιοχήν.

Ὅταν ὅμως παριστάνωνται μεγάλαι περιοχαί, ὡς νομοί, χῶραι κλπ., αὐτοὶ οἱ χάρται λέγονται *γεωγραφικοί*. Οἱ γεωγραφικοὶ χάρται εἶναι μὲ πολὺ μικρὰν κλίμακα. Διὰ νὰ εἶναι εὔχρηστοι ἀφ' ἑνὸς καὶ ἀφ' ἑτέρου νὰ χωρέσουν τὰς τεραστίας περιοχάς. Τοὺς χάρτας αὐτοὺς πρέπει νὰ τοὺς προσέχωμεν, διότι τὰ διάφορα χρώματα καὶ σημάδια μᾶς ὁδηγοῦν καταλλήλως. Π.χ. Εἰς τὴν ἄκρην των σημειώνουν ὅτι τὸ πράσινον χρῶμα παριστάνει πεδιάδας. Τὸ κίτρινον, μικρὰ ὑψώματα κτλ.

Εἰς τοὺς γεωγραφικοὺς χάρτας γίνεται χρῆσις τῶν κάτωθι κλιμάκων.

α) 1 : 25.000. Τότε 1 ἑκατοστ. τοῦ μέτρου εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι 250 μ.

β) 1 : 50.000. Τότε 1 ἑκατοστ. τοῦ μέτρου εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι 500 μ.

γ) 1 : 100.000. Τότε 1 ἑκατ. τοῦ μέτρου εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι 1 χιλιόμετρον.

δ) 1 : 200.000. Τότε 1 ἑκατ. τοῦ μέτρου εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι 2 χιλιόμετρα.

ε) 1 : 500.000. Τότε εἰς τὴν πραγματικότητα 1 ἑκατ. τοῦ μέτρου εἶναι 5 χιλιόμετρα.

στ) 1 : 1.000 .000. Τότε 1 χιλιοστὸν τοῦ μέτρου εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι 1 χιλιόμετρον.

ζ) 1 : 5.000.000. Τότε 1 χιλιοστὸν τοῦ μέτρου εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι 5 χιλιόμετρα.

η) 1 : 10.000.000. Τότε 1 χιλιοστὸν τοῦ μέτρου εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι 10 χιλιόμετρα.

Ἀσκήσεις. 1) Ὁ χάρτης τῆς Ἑλλάδος ποὺ ἔχεις ἐμπρός σου, εἶναι μὲ κλίμακα 1 : 5.000.000. Μέτρησε μὲ τὸ ὑποδεκάμετρόν σου τὴν ἀπόστασιν Ἀθηνῶν—Θεσ/νίκης. Εὗρε πόσα χιλιόμετρα ἀπέχουν μεταξύ των αἱ δύο πόλεις κατ' εὐθεῖαν γραμμήν.

2) Μέτρησε εἰς τὸν ἴδιον χάρτην τὴν ἀπόστασιν Ἀθηνῶν—Καλαμῶν. Πόσα χιλιόμετρα ἀπέχουν ;

3) Ἐπίσης τὴν ἀπόστασιν Καβάλας—Δράμας. Πόσα χιλιόμετρα ἀπέχουν ; (κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν ἀπὸ τὸν ἀέρα).

4) Ἐπίσης τὴν ἀπόστασιν Ἀθηνῶν καὶ τῆς ἰδιαιτέρας σου πατρίδος καὶ εὗρε τὰ χιλιόμετρα (κατ'εὐθεῖαν γραμμήν).

Ἡ μέτρησις αὐτὴ σὰν νὰ ἦταν ὁ δρόμος ὁλόϊσος, χωρὶς ἐμπόδια. Τοῦτο σπάνια συμβαίνει. Οἱ δρόμοι ὅμως ἔχουν στροφάς. Ὅταν λοιπὸν θέλωμεν νὰ εἴμεθα ἀκριβεῖς εἰς τὴν μέτρησιν, κάμνομεν ἔτσι : παίρνομεν κλωστὴν καὶ μὲ καρφίτσαν τὴν καρφώνομεν εἰς τὴν ἀφετηρίαν. Ἔπειτα ἀκολουθοῦμεν μὲ ὑπομονὴν καὶ προσοχὴν τὴν πορείαν τοῦ δρόμου· κάθε τόσον, ποὺ ἀλλάζει ἡ πορεία τοῦ δρόμου, βάζομεν καρφίτσας ἐπάνω εἰς τὴν κλωστήν, διὰ νὰ μὴ χάνῃ τὸ ζίγκ-ζάγκ τοῦ δρόμου. Ὅταν φθάσωμεν εἰς τὸ μέρος, ὅπου θέλομεν, σημειώνομεν τὴν κλωστήν. Τὴν ξεκαρφώνομεν ἀπὸ τὸν χάρτην καὶ τὴν μετροῦμεν μὲ τὸ μέτρον ἢ ὑποδεκάμετρόν μας. Ἔτσι μὲ ἀκρίβειαν πλέον ὑπολογίζομεν τὴν ἀπόστασιν ἑνὸς τόπου ἀπὸ ἄλλον.

4. ᾿Εμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

α΄. Παραπλεύρου ἐπιφανείας

᾿Επήραμεν τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον τοῦ ᾿Αριστομένη καὶ ἐδιπλώσαμεν μὲ ἕνα λευκὸν χαρτόνι τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειάν του. Ἔπειτα ἐξεδιπλώσαμεν τὸ χαρτὶ καὶ εἴδομεν, ὅτι ἐσχηματίσθη ἕνα σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

Μετροῦμεν τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τοῦ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι εἶναι ἴση εἰς τὸ μῆκος καὶ ὕψος μὲ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του.

ΚΑΝΩΝ—Ὥστε: Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος.

Παράδειγμα. Ἡ δεξαμενὴ τῆς πόλεώς μας ἔχει μῆκος 36 μέτρων, πλάτος 25 καὶ ὕψος 12 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τὴν ὁποίαν ὁ Δήμαρχος θὰ βάλῃ νὰ ἀσπρίσουν;

Σκέψις. Ἡ βάσις τῆς δεξαμενῆς ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου. Συμφώνως μὲ τὸν κανόνα ἡ περίμετρος τῆς βάσεως τῆς δεξαμενῆς εἶναι 36 μ. ἡ μία πλευρὰ + 36 μ. ἡ ἀπέναντι + 25 μ. (τὸ πλάτος της) ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς βάσεως + 25 μ. ἡ ἀπέναντί της.

Λύσις. Ἤτοι, συντόμως:

$36 + 36 + 25 + 25 = 122$ μ. ἡ περίμετρος τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς δεξαμενῆς, 122 μ. $\times\ 12 = 1464$ τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς δεξαμενῆς.

2ος τρόπος. Ὁ Γιῶργος λέγει: —᾿Εγὼ θὰ εὕρισκα δύο-δύο χωριστὰ καὶ θὰ ἕνωνα ἔπειτα τὰ γινόμενα. Νά:

1) $36 \times 2 = 72$ $\quad 72 \times 12 = 864$ τ.μ.
2) $25 \times 2 = 50$ $\quad 50 \times 12 = 600$ τ.μ.
3) $864 + 600 = 1464$ τ.μ.

Ἡ ᾿Αλεξάνδρα εἶπεν:— Εἶναι καλὸ νὰ ἠξεύρωμε πῶς εὑρίσκεται ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια, γιατὶ καμμιὰ φορὰ αὐτὴ μᾶς χρειάζεται περισσότερο ἀπὸ ὅλο τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο.

Προβλήματα. 1) Ἡ κ. Πολυξένη ἔδωσε νὰ ἀσπρίσουν ἀπ' ἔξω τὴν οἰκίαν της μὲ 2 χιλιόδραχμα τὸ τετρ. μέτρον. Ἡ οἰκία ἔχει μῆκος 12 μ., πλάτος 9 καὶ ὕψος 6 μ. Πόσον θὰ στοιχίσῃ ;

2) Ὁ κ. Γεράσιμος ἐσκέπασε τοὺς παραπλεύρους τοίχους τοῦ δωματίου του τῆς ὑποδοχῆς μὲ εὐθηνοὺς τάπητας. Τὸ μῆκος τοῦ δωματίου ἦτο 4,25 μ. τὸ πλάτος 3,8 καὶ τὸ ὕψος 3,75 μ. Πόσα τ.μ. ἦσαν οἱ τάπητες ;

β'. Ὅλης τῆς ἐπιφανείας

Ὁ Θανάσης λέγει : —Καλὸ θὰ εἶναι νὰ μάθωμε γιὰ ὅλο τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου καὶ ὄχι μόνον τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας.

Ὁ Σωτήρης τότε εἶπε : — Θὰ προσθέσωμε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων.

Ἀφοῦ τὸ σχῆμα τῶν βάσεων εἶναι ὀρθογώνιον, εὑρίσκομεν πρῶτον τῆς μιᾶς βάσεως καὶ ἔπειτα τὸ διπλασιάζομεν.

Σημ. Ἐπειδὴ ἡ βάσις εἶναι ὀρθογ. παραλληλόγραμμον, ἔχει φυσικὰ μῆκος καὶ πλάτος.

Παράδειγμα. Ποῖον εἶναι ὁλόκληρον τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κιβωτίου, ποὺ ἔχει μῆκος 3 μ., πλάτος 2 μ. καὶ ὕψος 1,5 μ.;

1) Ἡ περίμετρος τῆς βάσεως $3 + 3 + 2 + 2 = 10$ μ.

2) Ἐμβαδὸν παραπλεύρ. ἐπιφ. $10 \times 1,5 = 15$ τ.μ.

3) Ἐμβαδὸν βάσεως $3 \times 2 = 6$ τ.μ. ($\times$ 2 διὰ τὰς δύο)
$6 \times 2 = 12$ τ.μ.

4) Προσθέτομεν τὰ δύο ἐμβαδὰ τῶν βάσεων καὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας, $15 + 12 = 27$ τ.μ.

2ος τρόπος (ὅπως εἶπεν ὁ Γιῶργος).

1) $3 \times 2 = 6$ τ.μ. $\quad 6 \times 2 = 12$ τ.μ. ἐμβ. τῶν 2 βάσεων
2) $2 \times 1,5 = 3$ τ.μ. $\quad 3 \times 2 = 6$ τ.μ. ἐμβ. δύο ἀπέναντι ἑδρ.
3) $3 \times 1,5 = 4,5$ τ.μ. $\quad 4,5 \times 2 = 9$ τ.μ. ἐμβαδὸν τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι ἑδρῶν.

27 τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

᾿Ασκήσεις. 1) Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου ; ᾿Αναφέρατε καὶ τοὺς δύο τρόπους.

2) Παρατηρήσατε τὴν κασετίνα σας. Τὸ ἀνάπτυγμα ἐπίσης τοῦ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου τοῦ σχήματος τοῦ Γιώργου. Καθὼς καὶ ἄλλα παραλληλεπίπεδα καὶ λέγετε :

α) Διατί αἱ βάσεις ἔχουν μῆκος καὶ πλάτος μόνον ; β) Διατί αἱ ὑπ' ἀριθμ. 5 καὶ 6 ἐπιφάνειαι τοῦ παραλληλεπιπέδου ἔχουν διαστάσεις τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου; καὶ γ) Διατί αἱ ἐπιφάνειαι 1 καὶ 3 ἔχουν διαστάσεις τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ; Παρατηρήσατε καὶ τὸ σχῆμα τοῦ κιβωτίου, ποὺ εἴπομεν εἰς τὸ πρόβλημα.

Προβλήματα. 1) Ἡ αἴθουσα τῆς Α' τάξεως τοῦ σχολείου μας ἔχει μῆκος 7 μ., πλάτος 5 μ. καὶ ὕψος 4 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τῆς αἰθούσης ;

2) Ὁ κ. Μανώλης ὁ κιβωτοποιὸς ἠθέλησε νὰ καλύψῃ ἐξωτερικὰ 10 μπαοῦλα μὲ δέρμα. Τὸ κάθε μπαοῦλο εἶχε μῆκος 2,5 μ., πλάτος 1,7 μ. καὶ ὕψος 1,6 μ. Πόσα τετραγ. μέτρα δέρμα θὰ χρειασθῇ ;

3) Εὕρετε τὰς ἐπιφανείας τῆς κασετίνας σας.

4) Κάμετε καὶ σεῖς δύο ἰδικά σας παρόμοια προβλήματα.

5. Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Παράδειγμα. Ἡ ἀποθήκη τοῦ σχολείου ἔχει μῆκος 9 μ., πλάτος 7 καὶ ὕψος 5 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ; Ἡ Σόνια λέγει :

— Νὰ βροῦμε πρῶτα τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της.

Χωρίζομεν λοιπὸν τὴν βάσιν της εἰς 9 μέρη (μέτρα) καὶ φέρομεν εὐθείας εἰς τὴν ἀπέναντί της πλευράν. Ἔπειτα χωρίζομεν τὸ πλάτος εἰς 7 μέρη (μέτρα) καὶ φέρομεν εὐθείας εἰς τὴν ἀπέναντι πλευράν. Βλέπομεν ὅτι ἐσχηματίσθησαν εἰς τὴν βάσιν 63 τετράγωνα. Τὰ τετράγωνα αὐτὰ ἰσοῦνται τὸ καθένα μὲ ἕνα τετραγωνικὸν μέτρον, διότι κάθε του πλευρὰ εἶναι ἕνα μέτρον. Τὰ ἴδια τετράγωνα θὰ εἶναι εἰς τὴν ἄλλην βάσιν. Τώρα εἰς κάθε μέτρον τοῦ ὕψους τῆς ἀποθήκης θὰ ἔχωμεν 63 κύβους, ποὺ ἡ κάθε τους ἕδρα εἶναι ἕνα τετραγωνικὸν μέτρον καὶ ἡ κάθε ἀκμὴ 1 μέτρον. Ἐπειδὴ ἐδῶ ἔχομεν 5 μέτρα ὕψος, θὰ ἔχωμεν 5 σειρὰς μίαν ἐπάνω στὴν ἄλλην, ἀπὸ 63 κύβους. Ἤτοι 63 × 5 = 315 κυβ. μέτρα. Ἔτσι θὰ γεμίση ὅλος ὁ χῶρος τῆς ἀποθήκης ἀπὸ κύβους ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου.

Ὁ Ἀλκιβιάδης λέγει : — Τὸ ἴδιο ἐκάναμε καὶ μὲ τὸν κυβισμὸ τῶν κυβικῶν σωμάτων. Μόνον ἐκεῖ τὸ μῆκος, πλάτος, ὕψος εἶναι ἴσα. Ἐδῶ εἶναι διάφορα, ἀλλὰ πάλι πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ εὑρίσκομεν τὸν ὄγκο τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων.

Κανών. Πῶς εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ; Κάμετέ τον μόνοι σας.

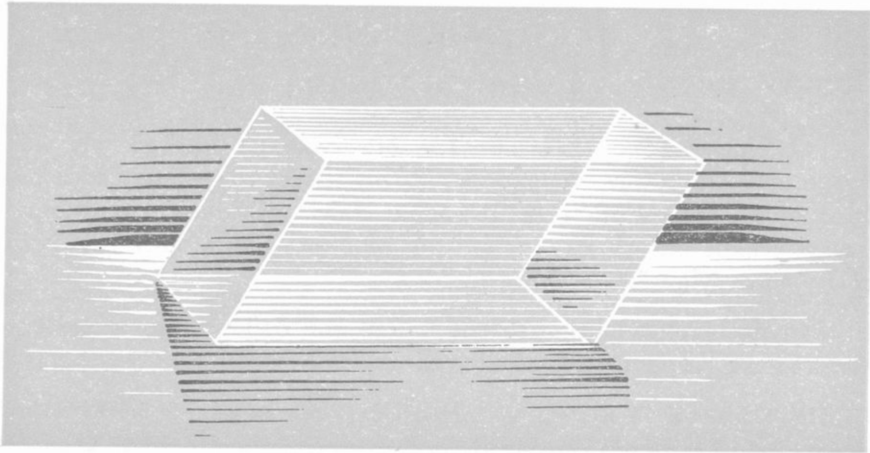
Προβλήματα. 1) Εἰς τὸν κ. Ἀθανασούλην ἔφεραν πέτραν διὰ νὰ κτίση τὸ σπίτι του. Τὴν πέτραν ἐτακτοποίησαν οἱ ἐργάται εἰς τὸ οἰκόπεδον. Ὁ σωρὸς τῆς πέτρας εἶχε μῆκος 36 μ., πλάτος 29 καὶ ὕψος 1,8 μέτρα. Πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι ; Πόσον στοιχίζει ὅλη ἡ πέτρα, ἂν τὸ κυβικὸν ἠγοράσθη πρὸς 65 δραχμάς ;

2) Ἕνα κιβώτιον ἔχει μῆκος 0,8 μ., πλάτος 0,7 καὶ ὕψος 0,6 μ. Θέλομεν νὰ τὸ γεμίσωμεν λουκούμια, ποὺ τοῦ καθενὸς ἡ ἀκμὴ εἶναι 0,08 μ. Πόσα λουκούμια θὰ χωρέση τὸ κιβώτιον ;

3) Δεξαμενὴ μήκους 13 μ., πλάτους 10 μ. καὶ ὕψους 8 μέτρων πόσα κιλὰ πετρελαίου χωρεῖ ;

4) Εἰς κιβώτιον σχήματος παραλληλεπιπέδου μήκους 2,5 μ., πλάτους 1,8 καὶ ὕψους 1,5 μ. ἔχομεν ἔλαιον. Πόσα κιλὰ (χιλιόγραμμα) ἐλαίου ὑπάρχουν ; Πόσαι ὀκάδες ;

5) Μάρμαρον μήκους 4 μ., πλάτους 3,5 μ. καὶ πλάτους 2,7 μ. πόσα κιλὰ ζυγίζει ;



Γ'. ΠΛΑΓΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

1. Γενικὴ αὐτοῦ ἐπισκόπησις

α'. Ἐπιφάνεια αὐτοῦ. Ἕδραι

Ὁ Κώστας ἔφερεν ἀπὸ τὸ γραφεῖον τὸ κιβώτιον μὲ τὰ στερεὰ σώματα. Ἐβγάλαμεν ἕνα σῶμα, ποὺ ὁμοιάζει πολὺ μὲ τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον.

— Αὐτὸ ὁμοιάζει μὲ τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον, λέγει ἡ Κατίνα. Ἔχει ὅμως λίγο πλαγιαστὲς τὶς ἕδρες του. Κατὰ τὰ ἄλλα ἔχει κι αὐτὸ 6 ἐπίπεδες ἐπιφάνειες (ἕδρες). Ἡ ἕδρα ποὺ στηρίζεται, ὅπως τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου, λέγεται βάσις ὡς καὶ ἡ ἀπέναντί της. Οἱ ἄλλες παράπλευρες.

β'. Θέσις ἑδρῶν καὶ ἀκμῶν αὐτοῦ

Ἡ Ἁγνὴ παρατηρεῖ ὅτι αἱ ἀπέναντι ἕδραι καὶ αἱ ἀκμαὶ τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (ὅπως τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου). Ὅμως αἱ ἕδραι καὶ αἱ ἀκμαὶ δὲν εἶναι κάθετοι (ὅπως εἰς τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον καὶ τὸν κύβον), ἀλλὰ πλάγιαι.

γ'. Γωνίαι, ἀκμαί, κορυφαὶ αὐτοῦ

—Ἐγὼ παρατηρῶ τώρα, λέγει ὁ Γιάννης, ὅτι αὐτὸ τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο, δὲν ἔχει καθόλου ὀρθὲς γωνίες. Νά, σὲ κάθε του ἕδρα βλέπομε 2 ἀμβλεῖες καὶ 2 ὀξεῖες γωνίες. Τοῦτο φυσικὰ γίνεται, γιατὶ οἱ ἀκμές του δὲν εἶναι κάθετες μεταξύ τους.— Ἔτσι τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο ἔχει 12 ἀμβλεῖες καὶ 12 ὀξεῖες γωνίες. Ὅλες οἱ ἀμβλεῖες εἶναι ἴσες μεταξύ τους καθὼς καὶ οἱ ὀξεῖες. Τὶς μετροῦμεν μὲ τὴν γωνίαν ἢ μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον (ποὺ θὰ μάθωμεν) καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ὄντως ἔτσι εἶναι.

Ἀκμαί. Αἱ ἀκμαὶ τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 12, ὅπως τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ κύβου καὶ αἱ ἀπέναντι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Κορυφαί. Ἔχει 8, ὅπως ὁ κύβος καὶ τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον. Τί λοιπὸν διαφέρει τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἀπὸ τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον ;

Βγάλτε τώρα τὸν κανόνα, τί λέγεται πλάγιον παραλληλεπίπεδον, καὶ γράψετέ τον. Κάνετε ἕνα πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἀπ' ὅ, τι θέλετε.

δ'. Κατασκευὴ πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Ὁ Γιάννης ἔκαμε τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδόν του ἀπὸ χαρτόνι. —Ἰχνογράφησα τὸ ἀνάπτυγμά μου. Κάθε του ἕδρα εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμο, πλαγιαστὸ ὅμως. Οἱ ἀπέναντι ἕδρες εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες. Βλέπετε, οἱ ἀκμὲς δὲν εἶναι κάθετες, ἀλλὰ πλαγιαστές, γι' αὐτὸ κάνουν σὲ κάθε ἕδρα δυὸ ὀξεῖες καὶ δυὸ ἀμβλεῖες γωνίες. Κατὰ τὰ ἄλλα ἔκαμα ὅ ,τι καὶ στὸν κύβο καὶ στὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο.

2. Σχῆμα ἑδρῶν πλαγίου παραλληλεπιπέδου

α'. Πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἢ παραλληλόγραμμον

Τὴν ἄλλην ἡμέραν τὰ παιδιὰ εἶχον ὅλα τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδόν των. Ἔθεσαν τὴν βάσιν του κάτω ἀπὸ ἕνα λευκὸν χαρτὶ καὶ ἔσυραν τεθλασμένην γραμμὴν γύρω της, ἀκολουθοῦντες τὰς ἀκμάς της. Ὅταν ἐσήκωσαν τὸ στερεὸν σῶμα, εἶδαν ὅτι ἐσχηματίσθη τὸ σχῆμα. Ὁ Τέλης καὶ ἡ Βάσω, ἀντὶ τῆς βάσεως, ἔθεσαν μίαν ἀπὸ τὰς παραπλεύρους ἐπιφανείας. Καὶ αὗται τοιοῦτον σχῆμα ἔκαμαν.

Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται παραλληλόγραμμον.

Ἡ Ἑλένη τότε λέγει :

— Μοιάζει μὲ τὸ ὀρθογώνιον, γιατὶ κι αὐτὸ ἔχει 4 πλευρές. Οἱ ἀπέναντι πλευρὲς (γραμμὲς) εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες. Ἔχει 4 γωνίες. Διαφέρει ὅμως ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον, γιατὶ οἱ πλευρὲς δὲν εἶναι κάθετες καὶ οἱ γωνίες δὲν εἶναι ὀρθές, ἀλλὰ οἱ δύο εἶναι ὀξεῖες καὶ οἱ ἄλλες δύο ἀμβλεῖες. Μετροῦμεν μὲ τὴν γωνίαν καὶ μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον τὰς ὀξείας καὶ εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Ἐπίσης καὶ αἱ ἀμβλεῖαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Ὁ Εὐριπίδης εἶπε καὶ τὸν κανόνα:

ΚΑΝΩΝ.—Παραλληλόγραμμον λέγεται τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει τὶς ἀπέναντι πλευρὲς ἴσες καὶ παράλληλες, καὶ τὶς δύο γωνίες ὀξεῖες καὶ ἴσες καὶ τὶς ἄλλες δύο ἀμβλεῖες καὶ ἴσες.

β'. Ἡ περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου

Εὑρίσκεται ὅπως τοῦ ὀρθογωνίου.

Ἡ Σωτηρία λέγει, ὅτι πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν ὅπως καὶ εἰς τὸ ὀρθογώνιον, τὸ μῆκος τῶν δύο γειτονικῶν πλευρῶν του. Σωστά.

Ὁ Γιῶργος εἶπε τότε :—Ἐνῶ στὸ τετράγωνο, μία ἂν ξέρωμε, μᾶς φθάνει.

Παράδειγμα. Αἱ γειτονικαὶ πλευραὶ τοῦ οἰκοπέδου τῆς θείας Νίτσας εἶναι ἡ μία 38 καὶ ἡ ἄλλη 27 μ. Ποιὰ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ οἰκοπέδου ; Ὁ Σωτήρης τὸ ἔλυσε σύντομα ἔτσι :

$38 + 27 = 65$

$65 \times 2 = 130$ μ. περίμετρος.

— Πρῶτα βρῆκα λέγει τὴν ἡμιπερίμετρον 65 καὶ τὴν ἐδιπλασίασα.

Ὁ Γιάννης ἐπρόσθεσεν ὅλας τὰς πλευράς.

$38 + 38 + 27 + 27 = 130$ μ. περίμετρος.

Προβλήματα. 1) Αἱ γειτονικαὶ πλευραὶ ἑνὸς μεγάλου κτήματος σχήματος παραλληλογράμμου εἶναι ἡ μία 4.365 μ. καὶ ἡ ἄλλη 2.965 μ. Ποία εἶναι ἡ ἡμιπερίμετρος καὶ ποία ἡ περίμετρός του;

2) Ἰχνογραφήσατε ἕνα παραλληλόγραμμον, ποὺ οἱ γειτονικὲς πλευρές του νὰ εἶναι ἡ μία 0,13 κ. καὶ ἡ ἄλλη 0,08 μ. α) Εὕρετε τὴν περίμετρόν του. β) Μετρήσατε μὲ τὸν γνώμονά σας τὰς ἀμβλείας καὶ ὀξείας του γωνίας.

3. Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου

Εἰς τὸ παραλληλόγραμμον, ποὺ ἐκάματε, φέρετε μίαν κάθετον ἀπὸ τὴν κορυφὴν εἰς τὴν βάσιν. Τὸ τρίγωνον ποὺ ἐσχηματίσθη, κόψατέ το καὶ κολλήσατέ το εἰς τὴν ἀπέναντι πλευράν.

Ὁ Γιῶργος τότε λέγει.—Ἔγινε τώρα ἕνα ὀρθογώνιο, ποὺ εἶναι ἴσο μὲ τὸ παραλληλόγραμμο. Ὥστε διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος.

Βάσις εἶναι ἡ μία ἀπὸ τὰς πλευράς του.

Ὕψος εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς βάσεως ἀπὸ τὴν ἀπέναντί της παράλληλον πλευράν.

Παράδειγμα. Ὁ κῆπος τοῦ Σωτήρη ἔχει σχῆμα παραλληλογράμμου. Ἡ βάσις του εἶναι 89 μ. Τὸ ὕψος του 20 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

Ὁ Τέλης εἶπεν νὰ ἐργασθῶμεν, ὅπως εἰς τὸ τετράγωνον. Νὰ κάμωμεν εἰς τὸ χαρτί μας 100 φορὰς μικρότερον τὸν κῆπον. Ἀφοῦ τὰ μέτρα θὰ εἶναι 100 φορὰς μικρότερα, θὰ σύρωμεν γραμμὰς εἰς τὰς ἀπέναντι πλευράς. Ὅ,τι εὕρομεν θὰ τὸ μεγαλώσωμεν 100 φοράς, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πραγματικόν. Ὁ Σωκράτης ὅμως εἶπεν: Αὐτὰ τὰ ἐκάμαμεν μὲ ὁλόκληρα τὰ μέτρα εἰς τὴν τάξιν. Τώρα ξεύρομε πιά. Ὅ,τι βροῦμε μὲ τόση δουλειά, ποὺ θὰ κάμωμεν, τὸ εὑρίσκομεν ἀμέσως μὲ μίαν μόνο πρᾶξιν.

Λύσις. $89 \times 20 = 1780$ τ.μ. Εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κήπου.

Προβλήματα. 1) Ἡ βάσις ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι 3,25 μ. τὸ δὲ ὕψος 2,1 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

2) Ὁ κ. Στέφανος ἠγόρασεν ἕνα οἰκόπεδον ἀντὶ 12.000 δραχ. Τὸ οἰκόπεδον εἶχε σχῆμα παραλληλογράμμου μὲ βάσιν 54 μ. καὶ ὕψος 25 μ. Πόσον στοιχίζει τὸ τετραγωνικὸν μέτρον; Πόσον ὁ τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς;

3) Κάμετε καὶ σεῖς δύο προβλήματα.

4. Ἐμβαδὸν πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Ὁ Ἀλκιβιάδης ἐνεθυμήθη τὸν τρόπον ποὺ ἔλυσε τὸ πρόβλημα τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογων. παραλληλεπιπέδου.

— Βρίσκομεν, λέγει, τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ τὸ διπλασιάζομεν. Ἔπειτα τῆς μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας καὶ τῆς γειτονικῆς καὶ τὰ διπλασιάζομεν. Τέλος προσθέτομεν τὰ τρία γινόμενα.

— Ἔτσι θὰ εἶναι, λέγει ὁ διδάσκαλος, ἀφοῦ κάθε του ἕδρα εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπέναντί της. Θὰ πρέπει ὅμως κάθε ἕδρας νὰ ἠξεύρωμεν τὸ μῆκος καὶ τὸ ὕψος. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον ἡ μία πλευρὰ εἶναι τὸ μῆκος καὶ ἡ ἄλλη ἡ κάθετος τὸ πλάτος (ὕψος). Εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ὅμως, τὸ ὕψος του εἶναι ἡ κάθετος ἀπὸ τὴν κορυφὴν εἰς τὴν βάσιν. Δὲν ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ἡ κεκλιμένη (πλαγιαστὴ) γειτονική πλευρά της. Ἐπειδὴ τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου αἱ ἕδραι εἶναι ὅλαι παραλληλόγραμμα, πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν τοὐλάχιστον τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος της. Καθὼς καὶ τῆς γειτονικῆς της ἕδρας τὸ μῆκος καὶ τὸ ὕψος της. Τῆς ἄλλης τὸ μῆκος θὰ εἶναι ὅσον τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος ὅσον τῆς γειτονικῆς.

Τὰ παιδιὰ παρετήρησαν καλὰ τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον καὶ διεπίστωσαν ὅτι ἔτσι εἶναι.

Παράδειγμα. Τὸ μῆκος τῆς βάσεως πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 15 μ. καὶ τὸ ὕψος της 10 μ. Τῆς γειτονικῆς ἕδρας τὸ μῆκος εἶναι 8 μ. καὶ τὸ ὕψος 5 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ παραλληλεπιπέδου ;

Λύσις.

1) Ἐμβαδὸν βάσεων $= 15 \times 10 = 150$ τ.μ. $150 \times 2 = 300$ τ.μ.

2) Ἐμβαδὸν γειτονικῶν ἑδρῶν $8 \times 5 = 40$ τ.μ. $40 \times 2 = 80$ τ.μ.

3) Ἐμβαδὸν τῶν ἄλλων γειτον. πλευρῶν

$15 \times 5 = 75$ τ.μ. $\quad 75 \times 2 = 150$ τ.μ.

Σύνολον 530 τ.μ.

εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης ἐπιφανείας τοῦ πλαγίου παραλληλεπ.

2ος τρόπος:

Ὁ Σωτήρης, ἔλυσε τὸ πρόβλημα, ἀφοῦ εὗρεν, ὅπως εἰς τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον, τὸ ἐμβαδὸν τῶν βάσεων καὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας. Καὶ ἔπειτα ἐπρόσθεσε τὰ δύο γινόμενα.

1) Ἐμβ. βάσεων $15 \times 10 = 150$ τ.μ. $150 \times 2 = 300$ τ.μ.
2) Ἐμβ. παραπλεύρου ἐπιφανείας
$8 + 15 + 8 + 15 = 46$ μ., $46 \times 5 = 230$ τ. μ.
530 τ.μ.

εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ πλαγίου παραλληλεπ.

Παρατήρησις. 1) Ὁ Βαγγέλης λέγει: —Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογων. παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὀρθογωνίου, ποὺ ἔχει μῆκος ἴσο μὲ τὴν περίμετρο τῆς βάσεως τοῦ ὀρθογων. παραλληλεπιπέδου. Ὕψος ἴσο μὲ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου.

—Ἐδῶ ὅμως, ἐὰν ἔχωμε τοποθετημένο, κατὰ τὴ μέτρησι, τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο μὲ βάσι τὴ μεγαλύτερη σὲ μῆκος καὶ ὕψος ἕδρα, οἱ ἄλλες δὲν θὰ ἔχουν τὴν ἴδια σχέσι μὲ τὴ βάσι ὅπως στὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο. Γιατὶ τὸ ὕψος τῶν ἄλλων διαφέρει. Ἐπειδὴ δὲν τυχαίνει, ὅπως στὸ ὀρθογώνιο, νὰ εἶναι γιὰ τὸ ὕψος τῆς βάσεως τὸ πλάτος τῆς πλευρᾶς, ἀλλὰ ἡ κάθετος ἀπὸ τὴν κορυφὴ στὴ βάσι.

—Ἔτσι, ἂν εἶναι τοποθετημένο τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο στὴ μεγαλύτερη κατὰ τὸ μῆκος καὶ ὕψος ἕδρα του, πρέπει νὰ γνωρίζωμε καὶ τῆς γειτονικῆς ἕδρας τὸ μῆκος καὶ τὸ ὕψος. Ἐὰν σὲ μιὰ ἀπὸ τὶς ἄλλες, πρέπει νὰ γνωρίζωμε κατὰ σειρὰ καὶ τῶν δύο ἄλλων ἑδρῶν τὸ μῆκος καὶ τὸ ὕψος των.

ΚΑΝΩΝ.—Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας πλαγίου παραλληλεπιπέδου, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ τὸ διπλασιάζομεν. Ἔπειτα (ἐὰν τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον εἶναι τοποθετημένον μὲ βάσιν τὴν μεγαλυτέραν εἰς μῆκος καὶ ὕψος ἕδραν του), τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καὶ προσθέτομεν τὰ δύο ἐμβαδά. Ἢ εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν ἀπὸ τὴν βάσιν τὰς διαστάσεις (μῆκος καὶ ὕψος) τῶν τριῶν ἑδρῶν. Ἔπειτα τὸ ἐμβαδὸν κάθε μιᾶς ἕδρας καὶ τὸ διπλασιάζομεν. Τέλος προσθέτομεν τὰ τρία ἐμβαδά.

Προβλήματα. 1) Ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἡ βάσις εἶναι 65 μ. καὶ τὸ ὕψος της 30 μ. Τῆς γειτονικῆς ἕδρας τὸ μῆκος εἶναι 35 μ. καὶ τὰ ὕψος 16 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του;

2) Ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἡ βάσις εἶναι 80 μ. καὶ τὸ ὕψος της

55 μ. Ἡ γειτονική της ἕδρα ἔχει μῆκος 120 μ. καὶ ὕψος 55 μ. Ἡ μεγαλυτέρα ἕδρα ἔχει μῆκος 120 μ. καὶ ὕψος 75 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του ;

5. Ὄγκος πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Ὅπως εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου, ἔτσι εὑρίσκομεν καὶ τὸν ὄγκον τοῦ πλαγίου.

Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τοῦ Γιάννη τὸ ἐγεμίσαμεν νερό. Ἔπειτα τὸ ἀδειάσαμεν εἰς τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδόν του, ποὺ εἶχε διαστάσεις ἴδιες μὲ τὸ πρῶτον. Εἴδαμεν ὅτι οὔτε σταγόνα ὀλιγώτερον ἢ περισσότερον ἐχώρει τὸ ἕν ἀπὸ τὸ ἄλλο.

Παράδειγμα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου, ποὺ ἡ βάσις του εἶναι 8 μ. καὶ ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴν βάσιν ἕως τὴν ἄλλην βάσιν εἶναι 12 μ. καὶ τὸ ὕψος τῆς βάσεως 12 μ.; $8 \times 12 = 96$ τ.μ. ἐμβ. βάσεως. Ὄγκος $= 96 \times 12 = 1152$ κ.μ.

Σημείωσις. Ὕψος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴν μίαν βάσιν ἕως τὴν ἄλλην.

ΚΑΝΩΝ.—Ὁ ὄγκος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Παρατηρήσεις : 1) Τὸ ὕψος τῆς βάσεως συμπίπτει ἐδῶ μὲ τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου.

2) Ὡς βάσις δύναται νὰ ληφθῇ οἱαδήποτε ἕδρα. Ἀπὸ τὴν θέσιν αὐτὴν θὰ κάμωμεν τὰς μετρήσεις τῶν ἀποστάσεων.

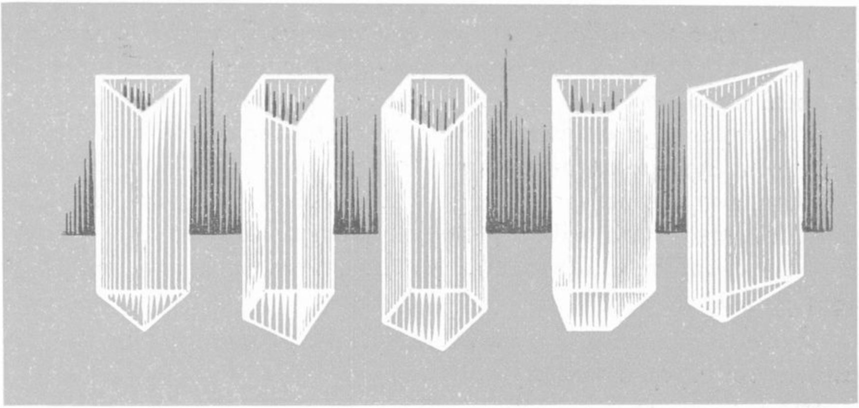
3) Ὁ Γιῶργος λέγει : — Νὰ χωρίσωμεν τὴν βάσιν καὶ μὲ τὸ ὕψος νὰ γεμίσωμεν τὸν χῶρον μὲ κλωστές, ὅπως στὰ ἄλλα δύο σώματα.

Ὁ Σωτήρης λέγει, ὅτι περιττεύει ἡ δουλειὰ αὐτή, ἀφοῦ εἶναι γνωστόν, ὅτι θὰ σχηματισθοῦν κύβοι μὲ ἀπανωτὰς σειράς, ὅσας μᾶς λέγει τὸ ὕψος.

Προβλήματα. 1) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κιβωτίου σχήματος πλαγίου παραλληλεπιπέδου, ποὺ ἡ βάσις του ἔχει μῆκος 0,75 μ. καὶ πλάτος 0,5 μ., τὸ δὲ ὕψος του εἶναι 1,35μ. ;

2) Πόσα χιλιόγραμμα θαλασσίου ὕδατος χωρεῖ τὸ ντεπόζιτο σχήματος πλαγίου παραλληλεπιπέδου, ποὺ ἔχει μῆκος βάσεως 6 μ., πλάτος 4 μ. καὶ ὕψος 8μ. ;

3) Πόσον ζυγίζει ὄγκος χρυσοῦ σχήματος πλαγίου παραλληλεπιπέδου, ποὺ ἔχει μῆκος βάσεως 0,15 μ., πλάτος 0,12 μ. καὶ ὕψος 0,35 μ. ;



Δ'. ΠΡΙΣΜΑΤΑ

α'. Ὀρθά, πλάγια

—Ἄνοιξε, Νῖκο, τὰς παραπλεύρους ἐπιφανείας τοῦ κύβου σου, λέγει ὁ διδάσκαλος.

Παρετηρήσαμεν ὅλοι, ὅτι αἱ παράπλευροι ἐπιφάνειαι τοῦ κύβου ἔγιναν ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον.

Ὁ Σωτήρης ἀνοίγει τὰς παραπλεύρους ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου του παραλληλεπιπέδου καὶ βλέπομεν, ὅτι πάλι ἔγιναν ὀρθογ. παραλληλόγραμμα.

Ἡ Ἀλίκη ἀναπτύσσει τὰς παραπλεύρους ἕδρας τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου της καὶ γίνεται παραλληλόγραμμον.

Αὐτὰ τὰ στερεὰ σώματα ποὺ ἔχουν τὰς βάσεις ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι των ἀναπτύσσονται εἰς παραλληλόγραμμα λέγονται *πρίσματα*.

Ὅσα ἔχουν τὰς παραπλεύρους ἕδρας καθέτους ἐπὶ τὰς βάσεις των (κύβος, ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον), λέγονται *ὀρθὰ πρίσματα*.

β'. Τριγωνικὰ πρίσματα

Ὁ διδάσκαλος ἔβγαλεν ἀπὸ τὸ κιβώτιον μὲ τὰ στερεὰ σώματα, ἕνα σῶμα. Ἀμέσως τὰ παιδιὰ ἐνεθυμήθησαν, ὅτι τέτοιο σχῆμα εἶδαν εἰς τοὺς ὑαλίνους πολυελαίους τῶν ἐκκλησιῶν.

Ὁ Παντελῆς μᾶς λέγει, ὅτι τὸ πρῖσμα ἔχει πέντε ἐπίπεδα (ἕδρας). Ἡ βάσις τοῦ πρίσματος καὶ ἡ ἀπέναντί της ἕδρα εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι καὶ ἔχουν σχῆμα τριγώνου. Αἱ 3 ἄλλαι ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια καὶ εἶναι αἱ παράπλευροι ἕδραι τοῦ πρίσματος. Ὑπάρχουν πρίσματα μὲ 5 ἕδρας, 6 κτλ.

Ὁ Σωτήρης λέγει: — Τὸ πρῖσμα εἶναι ὀρθό, γιατὶ οἱ παράπλευρες ἕδρες εἶναι κάθετες ἐπὶ τὶς βάσεις.

Ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴν μίαν βάσιν εἰς τὴν ἄλλην.

Κανών. Τί λέγεται τριγωνικὸν πρῖσμα ; Εὕρετε μόνοι σας τὸν κανόνα τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος.

Ἐρωτήσεις. 1) Παρατηρήσατε : Πόσας ἕδρας, ἀκμάς, κορυφὰς καὶ γωνίας ἔχει τὸ πρῖσμα ; 2) Ἀπὸ ποῦ ἔλαβε τὸ ὄνομα ὅλον τὸ πρῖσμα (δηλαδὴ τὸ εἴπαμεν τριγωνικόν ;)

γ΄. Τρίγωνον

Κάμετε ὅλοι ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον. Σύρατε μίαν διαγώνιον.

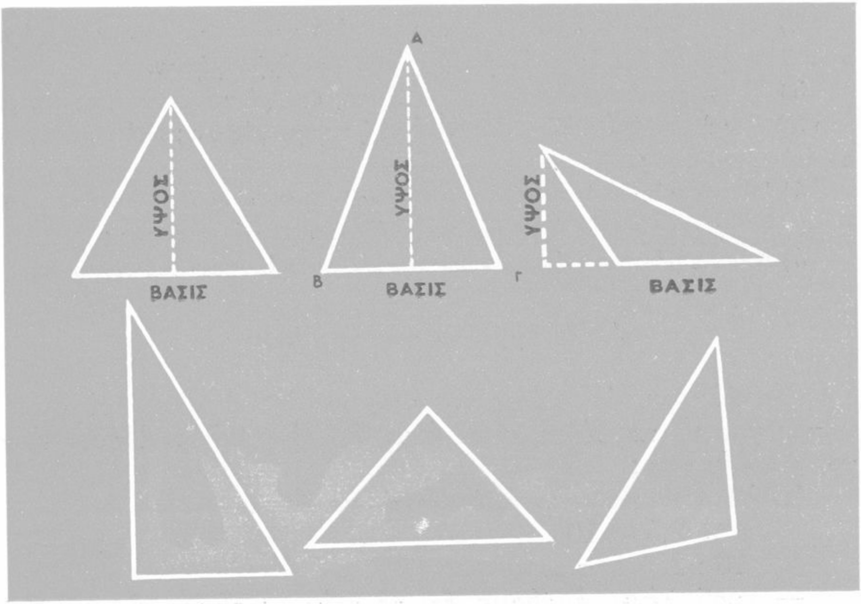
Παρατηροῦμεν, λέγει ὁ Εὐστάθιος, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ἐχωρίσθη εἰς δύο νέα ἴσα σχήματα. Ὁμοιάζουν μὲ τὸ σχῆμα τῶν βάσεων τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος καὶ θὰ λέγωνται καὶ αὐτὰ *τρίγωνα*.

Παρατηρήσεις : Ὁ Σωτήρης ἔκοψεν ὅπως εἶχε χωρίσει τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὴν μέσην. Μετρᾷ χωριστὰ τὰ δύο τρίγωνα, ποὺ ἔγιναν καὶ τὰ εὗρε μεταξύ των ἴσα. Ἔχουν ἴσας πλευρὰς καὶ ἴσας γωνίας. Ἔμεινεν ἀπὸ μία μόνον ὀρθὴ γωνία εἰς τὸ καθένα. Αἱ δύο ἄλλαι ἐχωρίσθησαν ἀπὸ τὴν διαγώνιον εἰς τὸ μέσον καὶ ἔγιναν ὀξεῖαι, ἀλλὰ πάλιν ἴσαι.

Ὁ Γιῶργος λέγει : Ὁποιοδήποτε παραλληλόγραμμον καὶ ἂν κόψωμεν εἰς τὴν μέσην, θὰ μοιραστῇ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα. Καὶ ἔκοψε τὸ πλάγιον παραλληλόγραμμόν του.

ΚΑΝΩΝ.—Κάθε τρίγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἔτσι βάσις τοῦ τριγώνου εἶναι μία ἀπὸ τὰς 3 πλευράς του. Ὕψος ἡ εὐθεῖα ποὺ φέρομεν ἀπὸ τὴν κορυφὴν εἰς τὴν βάσιν του.

Ὁ Σωτήρης λέγει : Τὸ τρίγωνον ἔχει τρεῖς πλευρὰς καὶ τρεῖς γωνίας.



δ΄. Ὀνομασία τῶν τριγώνων ἀπὸ τὰς πλευράς των

1) Ἰσόπλευρον ὀνομάζομεν τὸ τρίγωνον, ποὺ ἔχει καὶ τὰς τρεῖς πλευράς του ἴσας.

2) Ἰσοσκελές, ὅταν ἔχῃ δύο πλευρὰς ἴσας.

3) Σκαληνόν, ὅταν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἀνίσους.

Σημ. Περίμετρος τοῦ τριγώνου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του.

ε΄. Ὀνομασία τῶν τριγώνων ἀπὸ τὰς γωνίας των

1) Ὀρθογώνιον ὀνομάζομεν τὸ τρίγωνον, ποὺ ἔχει μίαν γωνίαν του ὀρθήν.

2) Ὀξυγώνιον, ποὺ ἔχει καὶ τὰς τρεῖς ὀξείας.

3) Ἀμβλυγώνιον, ποὺ ἔχει μίαν ἀμβλεῖαν.

Ἀσκήσεις. 1) Τί ἐπιφάνεια εἶναι τὸ τρίγωνον ; Ἀπὸ πόσας γραμμὰς περικλείεται ; Πῶς λέγομεν τὰς γραμμάς του ;

2) Ἰχνογραφήσατε ἀπὸ ἕνα ἰσόπλευρον, ἰσοσκελὲς καὶ σκαληνὸν τρίγωνον. Ἐπίσης ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιον, ὀξυγώνιον καὶ ἀμβλυγώνιον.

3) Τὸ τριγωνικὸν οἰκόπεδον τοῦ κ. Στάθη ἔχει μίαν ἀπὸ τὰς ἴσας πλευράς του 52 μ. καὶ τὴν ἄλλην 23 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του; Καὶ πῶς λέγεται τὸ τρίγωνον αὐτό;

4) Ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγωνικοῦ κήπου εἶναι 72 μ. Πόσα μέτρα σύρμα θὰ χρειασθῶμεν διὰ νὰ τὸν περιφράξωμεν μὲ πέντε σειράς;

5) Κάμετε μόνοι σας ἄσκησιν διὰ τὴν ἄλλην περίπτωσιν τοῦ τριγώνου.

στ΄. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου

Παράδειγμα. Ἡ βάσις τῆς τριγωνικῆς πρασιᾶς, ποὺ ἔχει ὁ κῆπος μας μὲ πανσέδες, εἶναι 4 μ. Τὸ ὕψος 2,5 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

Ὁ Ἀντώνης ἔλυσεν ἀμέσως τὸ πρόβλημα.

$4 \times 2{,}5 = 10$

$10 : 2 = 5$ τ.μ.

—Ἀφοῦ, λέγει, ἐμάθαμε, ὅτι τὸ τρίγωνο εἶναι τὸ μισὸ ἀπὸ ἕνα παραλληλόγραμμο, ποὺ ἔχει τὴν αὐτὴ βάσι καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, τότε: Ἡ βάσι τοῦ τριγώνου εἶναι καὶ τοῦ παραλληλογράμμου. Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι καὶ τοῦ παραλληλογράμμου. Εὑρίσκω λοιπὸν μὲ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον εἶναι τὸ μισό, διαιρῶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου διὰ 2.

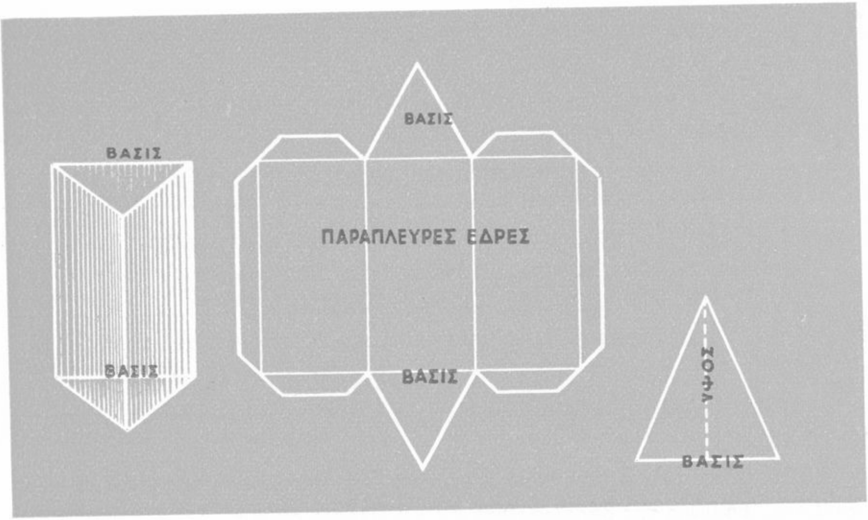
Ὁ Γιῶργος εἶπε τὸν κανόνα:

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος διὰ 2.

Προβλήματα: 1) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγωνικοῦ κτήματος τοῦ κ. Στασινοῦ ποὺ ἡ βάσις του εἶναι 268 μ. καὶ τὸ ὕψος του 350 μ.; Πόσον στοιχίζει σήμερον, ἐὰν τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ὑπολογίζεται εἰς 52 δραχμάς;

2) Ἡ βάσις ὀρθογωνίου τριγωνικῆς αὐλῆς εἶναι 35,3 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος 25,5 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

3) Κάμετε ἕνα τριγωνικὸν πρῖσμα ἀπὸ χαρτὶ καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριγωνικῶν βάσεών του μόνον.



Κατασκευὴ πρίσματος

Τὰ παιδιὰ μὲ βάσιν τὸ ἀνάπτυγμα ἔκαμαν τὸ πρῖσμα των. Πολλοὶ μὲ χαρτόνι. Ἡ Ἀλίκη μὲ πηλόν. Ὁ Σωτήρης μὲ σύρμα. Ὁ Τέλης μὲ πάφιλα· τοῦ τὸ ἐκόλλησεν ὁ ἀδελφός του, ποὺ εἶναι σιδηρουργός.

ζ'. Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας τριγωνικοῦ πρίσματος

Ὁ Ἄλκης, λέγει, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ὅλου τώρα τοῦ πρίσματος, ἀπὸ τὸ σχῆμα φαίνεται, ὅτι θὰ εὑρεθῇ, ὅπως τοῦ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου. Πρῶτον τῶν δύο βάσεων, ποὺ εἶναι τρίγωνα. Δεύτερον τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας. Τέλος θὰ ἑνώσωμεν τὰ δύο γινόμενα. Ἀφαιροῦμεν λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα τοῦ πρίσματος. Ἀνοίγομεν ἔπειτα τὸ χαρτὶ τοῦ πρίσματος τοῦ Ἄλκη καὶ ἔχομεν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος. Αἱ παράπλευροι ἕδραι κάμνουν ἕνα παραλληλόγραμμον. Αὐτὸ ἔχει βάσιν τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος καὶ ὕψος, τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.

Πρόβλημα. Ἑνὸς ὑαλίνου τριγωνικοῦ πρίσματος αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως εἶναι 0,6 μ. καὶ 0,8 μ. Ἡ βάσις 0,9 καὶ τὸ ὕψος 0,7 μ.

Πόσον εἶναι τὸ ἔμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας του ἐὰν τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 1,7 μ. ;

Λύσις: Ἐμβαδὸν τριγωνικῶν βάσεων $= 0{,}9 \times 0{,}7 = 0{,}63$

$0{,}63 : 2 = 0{,}315$

$0{,}315 \times 2 = 0{,}63$ τ.μ.

Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας (παραλληλογράμμου)

$= 0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}6 = 2{,}3 \quad 2{,}3 \times 1{,}7 = 3{,}91$

Σύνολον 4,54 τ.μ. τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφαν. τοῦ πρίσματος.

Κανών. Γράψατε μόνοι σας τὸν κανόνα. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τριγωνικοῦ πρίσματος;

Ἀσκήσεις. 1) Πῶς κατασκευάζομεν ἕνα πρῖσμα ἀπὸ χαρτί, ξύλον, σύρμα;

2) Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος; Μὲ τί ὁμοιάζει;

3) Ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ πλευρὰν 2,5 μ. Τὸ ὕψος τῆς βάσεως εἶναι 2,15 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ; Πόσον ὅλου τοῦ πρίσματος, ἐὰν τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 3,05 μ. ;

η'. Ὁ ὄγκος τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος

Ὁ Βασίλης λέγει :—Ὅπως καταλάβαμε καλά, τὸ πρῖσμα σὲ ὅλα μοιάζει μὲ τὰ ἄλλα πρίσματα, ποὺ ἐμάθαμεν. Λοιπόν, ὅπως καὶ στὰ ἄλλα, ὁ ὄγκος του θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος του. — Σωστά.

Προβλήματα. Ἕνα τριγωνικὸ πρῖσμα ἔχει βάσιν 3 μ., ὕψος βάσεως 2,5 μ., ὕψος πρίσματος 3,5 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

Ἐμβαδὸν βάσεως $3 \times 2{,}5 = 7{,}5$ τ.μ.

Ὄγκος πρίσματος $7{,}5 \times 3{,}5 = 1315$ κ.μ.

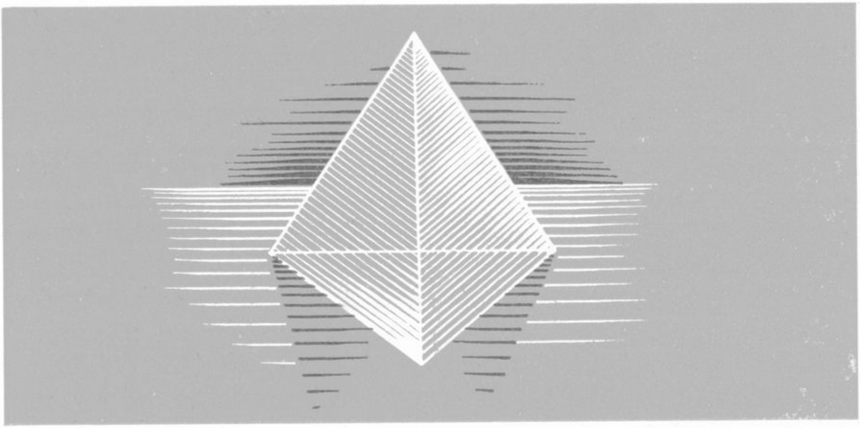
2) Ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι τρίγωνον, καὶ εἶναι 1,13 μ. καὶ τὸ ὕψος της 0,9 μ. Τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 1,5 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος; Πόσον ἔλαιον χωρεῖ ;

3) Τὰ πρίσματα ἀπὸ ποῦ λαμβάνουν τὴν ὀνομασίαν τους;

4) Πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος ;

5) Πῶς εὑρίσκεται ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος ὅλων τῶν στερεῶν σωμάτων ποὺ ἐμάθαμεν ;

6) Κυττάξετε, ἐὰν ἔχετε κάνει ὅλα τὰ στερεὰ σώματα ποὺ ἐμάθαμεν ; Εἰς τί ὁμοιάζουν καὶ εἰς τί διαφέρουν μεταξύ των ;



Ε΄. ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

1. Τριγωνικὴ πυραμὶς

α΄. Τί λέγεται τριγωνικὴ πυραμὶς

Ὅταν ἐβγάλαμεν ἀπὸ τὸ κιβώτιον ἕνα νέον στερεὸν σῶμα. τὰ περισσότερα παιδιὰ ἤξευραν καὶ τὸ ὄνομά του : «Πυραμίς».

Ὁ Γιῶργος, ποὺ κάθεται πλησίον εἰς τὸν στρατῶνα, εἶχεν ἰδεῖ τοὺς στρατιώτας, ποὺ εἰς τὰ διαλείμματα τῶν ἀσκήσεών τους ἐτοποθετοῦσαν τὰ ὅπλα των ὄρθια, εἰς σχῆμα πυραμίδος.

Τὸ ὄνομά της τὸ ἐπῆρε, λέγει ὁ διδάσκαλος, ἀπὸ τὸ σχῆμα τῆς φλόγας τοῦ πυρὸς (φωτιᾶς). Τὰς πυραμίδας ἔκαμαν πρῶτοι οἱ ἀρχαῖοι Αἰγύπτιοι διὰ τοὺς τάφους τῶν βασιλέων τους. Εἰς τὴν Αἴγυπτον σώζονται ἀκόμη. Ἀπὸ τὸ σχῆμα τῆς βάσεως λαμβάνει ἡ πυραμὶς τὴν ὀνομασίαν της, τριγωνική, τετραγωνική, πενταγωνική, ἑξαγωνικὴ κλπ.

Τὰ παιδιὰ παρατηροῦν ὅτι ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει 4 ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα λέγονται ἕδραι αὐτῆς. Αὐτὰ ἀποτελοῦν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος. Ἡ ἕδρα, ποὺ στηρίζεται ἡ πυραμίς, λέγεται βάσις αὐτῆς.

Αἱ ἄλλαι τρεῖς ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος καὶ δὲν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς βάσεως. Αἱ παράπλευροι ἕδραι καταλήγουν εἰς τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος.

Τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν, ποὺ τελειώνουν αἱ ἕδραι τῆς πυραμίδος, λέγονται ἀκμαὶ αὐτῆς. Ἡ τριγων. πυραμὶς ἔχει 6 ἀκμάς.

β΄. Σχῆμα ἑδρῶν τριγωνικῆς πυραμίδος

Ὅπως βλέπετε, ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 τρίγωνα. Ὥστε ὅλαι αἱ ἕδραι ἔχουν σχῆμα τριγωνικόν. Ἐπειδὴ τὸ κάθε τρίγωνον ἔχει καὶ τὴν κορυφήν του, ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει 4 κορυφάς.

Ὁ Γιῶργος λέγει : — Μὰ εἴπαμε, ὅτι ἐκεῖ, ποὺ τελειώνουν οἱ παράπλευρες ἐπιφάνειες τῆς πυραμίδος, λέγεται κορυφή.

— Φυσικά. Αὐτὴ εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς πυραμίδος, δι' ὅλας τὰς παραπλεύρους. Ἀλλὰ ἐπειδὴ τὸ κάθε τρίγωνον ἔχει καὶ τὴν κορυφήν του εἰς ἄλλα μέρη τῆς πυραμίδος, μετροῦμεν καὶ εὑρίσκομεν 4 ἐν ὅλῳ κορυφάς.

γ΄. Ὕψος τῆς πυραμίδος

Ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἕως τὴν βάσιν.

Κανών. Ἀπ' ὅσα βλέπομεν καὶ ἐμάθαμεν διὰ τὴν πυραμίδα, κάμετε τὸν κανόνα : Τί λέγεται πυραμίς ;

δ΄. Ἐμβαδὸν τριγωνικῆς πυραμίδος

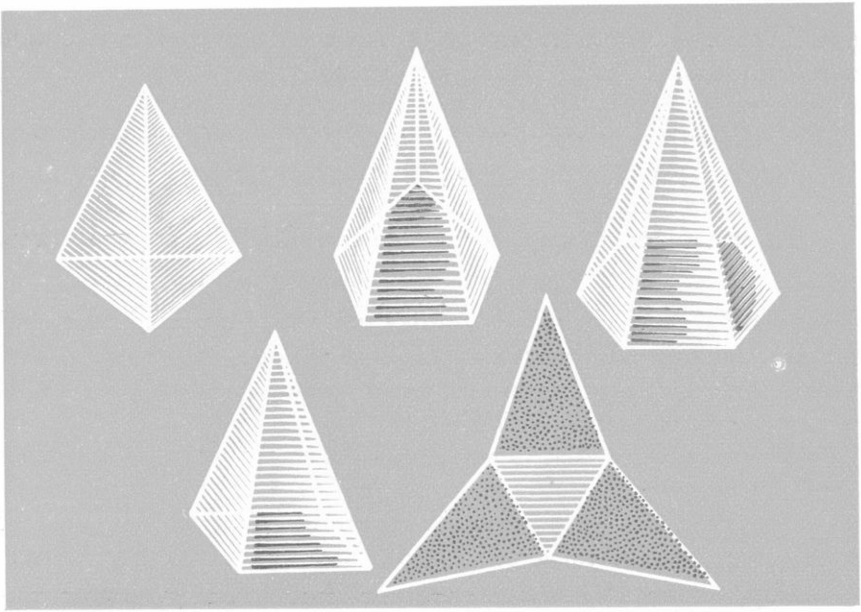
Ὁ Γιῶργος παρατηρεῖ, ὅτι τὰ 4 τρίγωνα τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος δὲν εἶναι ἴσα μεταξύ των.

Ὥστε διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος θὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν κάθε τριγώνου καὶ θὰ προσθέσωμεν ἔπειτα τὰ 4 ἐμβαδά. Σωστά.

Παράδειγμα. Τὸ τρίγωνον τῆς βάσεως τριγωνικῆς πυραμίδος ἔχει 4 μέτρα μῆκος καὶ ὕψος 2,6 μ. Τὰ τρίγωνα κατὰ σειρὰν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἔχουν τὸ πρῶτον μῆκος βάσεως 3 μ. καὶ ὕψος 2,5 μ. Τὸ δεύτερον 3,5 μ. μῆκος βάσεως καὶ ὕψος 2,8 μ. καὶ τὸ τρίτον μῆκος βάσεως 3,2 καὶ ὕψος 2,7 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς πυραμίδος ;

— Ἐπειδὴ τὸ πρόβλημα εἶναι εὔκολον τὰ παιδιὰ ἀνέλαβαν νὰ τὸ λύσουν μόνα των.

Ἀσκήσεις. 1) Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ἀποτελεῖται ἀπὸ ἰσόπλευρα τρί-



γωνα. Ἡ πλευρὰ κάθε ἑνὸς εἶναί 2,3 μέτρα καὶ τὸ ὕψος 1,95 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

2) Κάμετε δύο ἰδικά σας προβλήματα παρόμοια.

3) Κάμετε ὅλοι ἀπὸ μίαν πυραμίδα ἀπὸ ὅ, τι θέλετε. Ὁ Κώστας καὶ ὁ Θανάσης νὰ ἐργασθοῦν μαζί. Ὁ Κώστας νὰ κάμῃ μίαν τριγωνικὴν πυραμίδα καὶ ὁ Θανάσης μὲ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν ἕνα πρῖσμα.

ε΄. Κατασκευὴ τριγωνικῆς πυραμίδος

Ὁ Κώστας ἔφερεν ἀπὸ κόντρα-πλακέ, μίαν ὡραίαν τριγωνικὴν πυραμίδα.

— Παιδεύτηκα λιγάκι. Πρῶτα ὅμως τὴν ζωγράφισα σὲ χαρτί. Ἔκαμα ἕνα μεγάλο τρίγωνο. Βρῆκα τὸ μέσο τῶν πλευρῶν του. Ἔσυρα εὐθείας γραμμάς στὰ σημεῖα τῶν μέσων τῶν 3 πλευρῶν του. Ἔτσι ἔγιναν 4 τρίγωνα. Τὸ μεσαῖο ἔμεινε βάσις, τὰ ἄλλα τὰ τσάκισα στὶς βάσεις τους καὶ τὰ σήκωσα ἐπάνω. Ἔγινε τότε ἡ πυραμίδα μου, ἀφοῦ κόλλησα στὴν κορυφὴ τὶς 3 κορυφὲς τῶν 3 τριγώνων. Ἐγὼ ὅμως τότε τόσο ἱκανοποιήθηκα, ποὺ τὴν ἐφεύρεσί μου θέλησα νὰ τὴν τελειοποιήσω. Πάνω σὲ κόντρα-πλακὲ ἔκαμα πάλι τὸ ἴδιο. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν τσακίζεται τὸ κόντρα-πλακέ, ἔκοψα τὰ τρίγωνα. Κάτω στὶς βάσεις τους ἔβαλα καρφάκια καὶ κάρφωσα κάθε τρίγωνο σὲ μιὰ πλευρὰ τοῦ τριγώνου τῆς βάσεως. Καὶ πάνω στὴν κορυφὴ τὰ κάρφωσα, γιὰ νὰ μὴν τὰ δέσω καὶ φαίνονται ἄσχημα.

Τὰ παιδιὰ συνεχάρησαν τὸν Κώστα διὰ τὴν ἐργασίαν του.

στ΄. Ὄγκος τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος

Τὴν ἄλλην ἡμέραν ἐγεμίσαμεν μὲ νερὸ τὴν πυραμίδα τοῦ Κώστα καὶ τὴν ἀδειάσαμεν εἰς τὸ ἴσον πρῖσμα τοῦ Θανάση. Διὰ νὰ γεμίσῃ τὸ πρῖσμα, ἐχρειάσθη νὰ ἀδειάσωμεν μέσα τρεῖς φορὲς γεμάτην τὴν πυραμίδα τοῦ Κώστα.

Ὥστε ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος εἶναι τρεῖς φορὰς μικρότερος ἀπὸ τὸν ὄγκον τοῦ πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό. Ἀφοῦ γνωρίζομεν πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος, εὔκολα τώρα θὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος.

Παράδειγμα. Ὁ θόλος γοτθικῆς ἐκκλησίας σχήματος τριγωνικῆς πυραμίδος ἔχει μῆκος βάσεως 2,5 μ. καὶ ὕψος βάσεως 2,8 μ. Τὸ ὕψος ὅλης τῆς πυραμίδος εἶναι 4 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ;

Ὅλα σχεδὸν τὰ παιδιὰ τὸ ἔλυσαν.

Λύσις : α) $2,5 \times 2,8 = 7$ τ.μ.

$7 : 2 = 3,5$ τ.μ. ἐμβαδὸν βάσεως πυραμίδος.

β) $3,5 \times 4 = 14$ τ.μ.

$14 : 3 = 4,\ 2/3$ κ.μ. ὄγκος πυραμίδος.

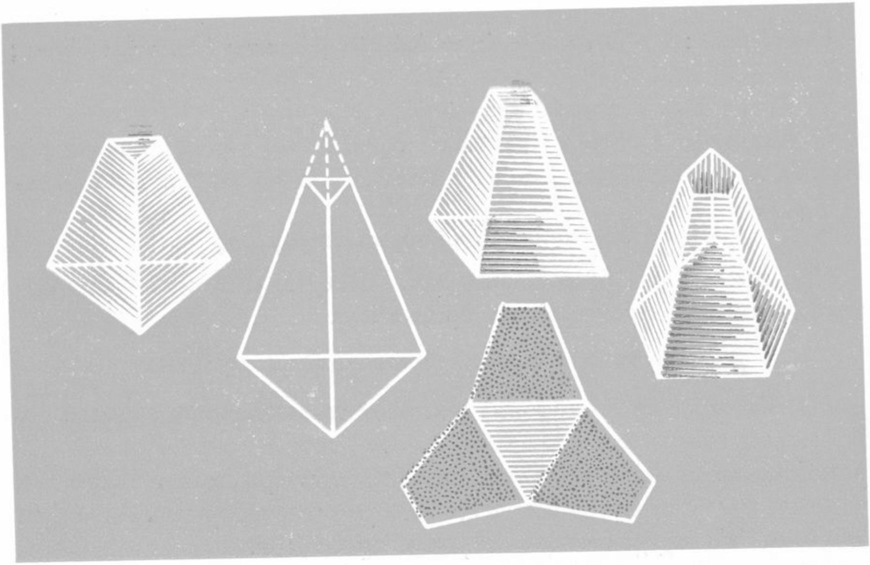
Ὁ Ἄλκης εἶχε γράψει καὶ τὸν κανόνα :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον μιᾶς πυραμίδος εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της καὶ τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ὕψος της. Ὅ,τι θὰ εὕρωμεν τὸ διαιροῦμεν διὰ 3.

Προβλήματα. 1) Ἡ βάσις τριγωνικῆς πυραμίδος ἔχει μῆκος 6 μ. καὶ ὕψος 5 μ. .Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 7 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

2) Μία πυραμὶς τῆς Αἰγύπτου ἔχει βάσιν τριγωνικὴν ποὺ ἡ πλευρά της εἶναι 116 μ. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 90 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

3) Πυραμὶς ἀπὸ πλατίνα ἔχει βάσιν τριγώνου ποὺ τὸ μῆκος του εἶναι 0,13 μ. τὸ δὲ ὕψος του 0,20 μ. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 0,68 μ. Πόσον ζυγίζει;



2. Κόλουρος πυραμὶς

α΄. Τί εἶναι κόλουρος πυραμὶς

Ὁ διδάσκαλος ἔβγαλεν ἀπὸ τὸ κιβώτιον ἕνα στερεὸν σῶμα. Τὰ παιδιὰ ἀμέσως εἶπαν ὅτι καὶ αὐτὴ εἶναι πυραμίς.

Τῆς λείπει ὅμως ἡ κορυφή. Εἶναι ἀκρωτηριασμένη. Δι᾿ αὐτὸ λέγεται καὶ κόλουρος. Αὐτὸ εἶναι ἕνα μέρος ἀπὸ τὴν βάσιν ἕως τὸ κόψιμον. Τὸ κανονικὸν μέρος τῆς πυραμίδος, ποὺ ἔχει ὅλην τὴ μορφὴ τῆς πυραμίδος, τὸ ἀφήρεσα. Ἀντὶ κορυφῆς ἔχει ἕνα τρίγωνον, μικρότερον ἀπὸ τὸ τρίγωνον τῆς βάσεως. Ἡ πυραμὶς αὐτὴ λέγεται *κόλουρος πυραμίς*. Αἱ πυραμίδες αὗται ἔχουν δύο βάσεις, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἡ μία εἶναι μικροτέρα τῆς ἄλλης. Ὅ,τι σχῆμα ἔχει ἡ μία βάσις ἔχει καὶ ἡ ἄλλη· τριγωνικόν, τετραγωνικὸν κλπ. Ἡ ἁπλουστέρα κόλουρος πυραμὶς εἶναι αὐτή, ποὺ ἔχει βάσεις τριγωνικάς. Αἱ πυραμίδες αὗται περικλείονται ἀπὸ 5 ἐπίπεδα, τὰς ἕδρας. Αἱ δύο ἕδραι εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν σχῆμα τριγώνου. Εἶναι καὶ αἱ βάσεις τῆς πυραμίδος. Αἱ ἄλλαι ἕδραι λέγονται παράπλευροι ἐπιφάνειαι ἢ ἕδραι τῆς πυραμίδος.

Ἀσκήσεις. : 1) Τί εἶναι αἱ ἀκμαὶ ἐπὶ τῶν βάσεων, κάθετοι ἢ πλάγιαι; Πόσαι εἶναι αἱ ἀκμαί;

2) Πόσαι εἶναι αἱ κορυφαὶ τῆς κολούρου πυραμίδος;

3) Κάμετε μὲ ὅ,τι θέλετε κόλουρον πυραμίδα καὶ εὕρετε μόνοι σας τὰς ἕδρας, ἀκμὰς καὶ κορυφάς της. Κάμετε μόνοι σας τὸν κανόνα τί λέγεται κόλουρος πυραμίς.

Κατασκευὴ κολούρου πυραμίδος

Τὰ παιδιὰ δὲν ἐδυσκολεύθησαν. Ἔκαμαν μίαν κανονικὴν πυραμίδα καὶ τὴν ἠκρωτηρίασαν ὁριζοντίως.

β'. Σχῆμα τῶν παραπλεύρων αὐτῆς ἐπιφανειῶν

Ὁ Τέλης εἶπεν, ὅτι τὸ σχῆμα τῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι ὅλων τετράπλευρον. Αὐτὰ δὲν ὁμοιάζουν ὅμως μὲ ὅσα ἄλλα τετράπλευρα ἐμάθαμεν. Κάθε ἕνα ἀπ' αὐτὰ ἔχει δύο μόνον ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους. Αἱ ἄλλαι δὲν εἶναι. Τὸ σχῆμα τοῦτο λέγεται *τραπέζιον*.

Εὕρετε μόνοι σας τί λέγεται τραπέζιον.

Βάσεις λέγονται αἱ παράλληλοι πλευραὶ τοῦ τραπεζίου. *Ὕψος* ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴν μίαν βάσιν ἕως τὴν ἄλλην. *Περίμετρος* λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ τραπεζίου.

γ'. Σύγκρισις τραπεζίου—παραλληλογράμμου

Ὁ Γιάννης λέγει : Ἔχουν καὶ τὰ δύο 4 πλευρές. Τὸ τραπέζιον ἔχει μόνον δύο παράλληλες πλευρές. Αἱ ἀπέναντί του δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι. Αἱ δύο βάσεις οὐδέποτε εἶναι ἴσαι. Ὅταν τὸ τραπέζιον ἔχῃ τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς ἴσας, τότε λέγεται καὶ ἰσοσκελές.

δ'. Ἐμβαδὸν τραπεζίου

Λαμβάνομεν ἕνα τραπέζιον. Φέρομεν τὴν διαγώνιον. Παρατηροῦμεν ὅτι ἐχωρίσθη εἰς δύο τρίγωνα. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο τριγώνων, ποὺ ἠξεύρομεν πῶς εὑρίσκεται καὶ ἑνώνομεν τὰ δύο ἐμβαδά.

Τὰ τρίγωνα ἔχουν, τὸ πρῶτον τὴν μεγάλην βάσιν τοῦ τραπεζίου καὶ ὕψος τὴν κάθετον ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἕως τὴν βάσιν.

Τὸ δεύτερον ἔχει τὴν μικρὰν βάσιν τοῦ τραπεζίου καὶ ὕψος ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἕως τὴν βάσιν. Ὅπως βλέπομεν, τὸ ὕψος των εἶναι ἴσον. Τὸ μέτρημά τους ἀπέδειξεν, ὅτι τὰ τρίγωνα, ποὺ σχηματίζονται, ὅταν φέρωμεν τὴν διαγώνιον, ἔχουν ἴσον ὕψος ἀλλ' ἄνισον βάσιν. Ἔτσι ἂν οἱ βάσεις τοῦ τραπεζίου εἶναι ἡ μία 8 μ. καὶ ἡ ἄλλη 6, τὸ δὲ ὕψος 5 μ., τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου θὰ εἶναι :

1) Τοῦ ἑνὸς τριγώνου $\frac{8 \times 5}{2} = 20$ τ.μ.

2) Τοῦ ἄλλου τριγώνου $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ τ.μ.

Σύνολον 35 τ.μ.

Παρατηρήσεις : 1) Ὁ Γιάννης λέγει : —Μὲ πολὺ ἁπλούστερη διατύπωσι, πολλαπλασιάζομε κάθε βάσι χωριστὰ μὲ τὸ ὕψος, διαιροῦμε τὰ γινόμενά των διὰ τοῦ 2 καὶ ἑνώνομε τὰ πηλίκα.

$\frac{8 \times 5}{2} = 20 \quad \frac{6 \times 5}{2} = 15 \qquad 20 + 15 = 35$ τ.μ.

2) Ἡ Εὐθυμία : Γιὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου προσθέτομεν τὰς δύο βάσεις, τὰς πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ 2. Π.χ.

1) $8 + 6 = 14$
2) $14 \times 5 = 70$
3) $70 : 2 = 35$ τ.μ.

Ὁ Σωτήρης : — Προσθέτομε τὶς δυὸ βάσεις, παίρνομε τὸ μισὸ αὐτῶν καὶ τὸ παλλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ὕψος. Ἐμβ. τραπεζίου =

$8 + 6 : 2 = 7$
$7 \times 5 = 35$ τ.μ.

Ἂς λάβωμεν, λέγει ὁ διδάσκαλος, τὰς παρατηρήσεις τοῦ Σωτήρη καὶ τῆς Εὐθυμίας. Μίαν μόνον ἀπὸ αὐτὰς νὰ τὴν ἔχωμεν ὡς κανόνα διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τραπεζίου.

Προβλήματα. 1) Ὁ κ. Γεωργίου ἔχει ἕνα οἰκόπεδον εἰς τὸν Κεραμεικὸν σχήματος τραπεζίου. Ἡ βάσις του εἶναι 180 μ., ἡ ἄλλη 70 μ., καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων 80 μ. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τραπεζίου;

2) Ὁ κ. Τρύφων ὁ ἐργολάβος ἀνέλαβε νὰ ἐπιστρώσῃ τὴν πλατεῖαν τῆς Ἁγίας Ἄννης, ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα τραπεζίου. Αἱ βάσεις της εἶναι 35 μ. καὶ 26 μ. Τὸ ὕψος 30 μ. Τὰ πλακάκια μὲ τὰ ὁποῖα θὰ τὴν ἐπιστρώσῃ ἔχουν τὸ καθένα πλευρὰν 0,80 μ. Πόσα πλακάκια θὰ χρειασθοῦν ;

3) Κάμετε καὶ σεῖς δύο παρόμοια προβλήματα.

ε'. Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος

Ἐαν ἀναπτύξωμεν τὴν κόλουρον πυραμίδα, θὰ λάβωμεν τὸ ἀνάπτυγμά της. Τότε ὅλη ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς κολούρου πυραμίδος θὰ εἶναι ἕνα τραπέζιον. Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου τῆς μεγάλης βάσεως τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἴση μὲ τὴν μεγάλην βάσιν τοῦ τραπεζίου τοῦ ἀναπτύγματος. Ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου τῆς μικρῆς βάσεως εἶναι ἴση μὲ τὴν μικρὰν τοῦ τραπεζίου. Αὐτὴ ἡ ἐξακρίβωσις, λέγει ὁ διδάσκαλος, μᾶς εἶναι πολὺ χρήσιμος.

Ἡ κόλουρος λοιπὸν πυραμὶς ἔχει μίαν παράπλευρον ἐπιφάνειαν καὶ δύο τριγωνικὰς ἐπιφανείας. Πρέπει νὰ εὕρωμεν τὰ τρία αὐτῶν ἐμβαδά, διὰ νὰ εὕρωμεν ὅλον της τὸ ἐμβαδόν.

Παράδειγμα : Ὑπάρχει ὕψωμα πλησίον τῆς λίμνης Ἀχρίδος σχήματος κολούρου πυραμίδος. Ἡ τριγωνικὴ βάσις του ἔχει βάσιν μὲ μῆκος 585 μ. καὶ ὕψος 300 μ. Αἱ ἄλλαι πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ μία 250 μ. καὶ ἡ ἄλλη 200. Ἡ ἄνω βάσις ἔχει βάσιν μὲ μῆκος 75 μ. καὶ ὕψος 50. Αἱ ἄλλαι της πλευραὶ εἶναι ἡ μία 60 ἡ ἄλλη 55 μ. Τὸ ὕψος τῆς παραπλεύρου ἕδρας τῆς πυραμίδος εἶναι 400 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κολούρου πυραμίδος ;

	Πρᾶξις:
1) $\frac{585 + 75}{2} \times 400 = 132.000$ τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος.	1) 585 + 75 = 660 ; 660 : 2 = 330 ; 330 × 400 = 132.000
2) $\frac{585 \times 300}{2} = 87,750$ τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεγάλης βάσεως τοῦ τριγώνου τῆς κολούρου πυραμίδος.	2) 585 × 300 = 175.500 ; 175.500 : 2 = 87.750 (15, 15, 10, 0)

3) $\frac{75 \times 50}{2} = 1.875$ τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς μικρᾶς βάσεως τοῦ τριγώνου τῆς κολούρου πυραμίδος.	3) $75 \times 50 = 3.750$ $\begin{array}{l\|l} 3.750 & 2 \\ \cline{2-2} 17 & 1.875 \\ \ 15 & \\ \ \ 10 & \end{array}$
4) $132.000 + 87.750 + 1.875 = 221.625$ τ.μ. εἶναι ὅλο τὸ ἐμβαδὸν τῆς κολούρου πυραμίδος.	4) $\begin{array}{r} 132.000 \\ 87.750 \\ +\ \ 1.875 \\ \hline 221.625 \end{array}$

Κανών. Γράψατε μόνοι σας τὸν κανόνα : Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος.

Γενικὴ ᾿Ανακεφαλαίωσις

Πολύεδρα σώματα

᾿Ασκήσεις. 1)Τί σχῆμα γίνεται, ὅταν ἀναπτύξωμεν τὰς παραπλεύρους ἕδρας τῆς κολούρου πυραμίδος ;

2) Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κολούρου πυραμίδος;

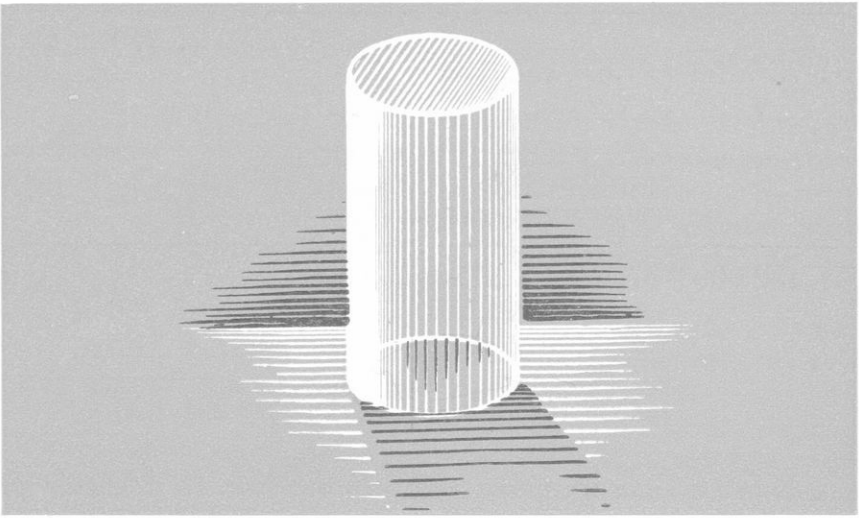
3) Διατί ἡ βάσις τοῦ τραπεζίου ποὺ ἔγινεν ἀπὸ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κολ. πυραμίδος, εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς της; Δοκιμάσατε μὲ τὴν ἰδικήν σας πυραμίδα.

4) Ἡ τριγωνικὴ βάσις κολούρου πυραμίδος ἔχει βάσιν 18 μ. καὶ ὕψος 13 μ. Αἱ ἄλλαι πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ μία 9 μ. καὶ ἡ ἄλλη 10 μ. Ἡ ἄνω βάσις ἔχει βάσιν 4 μ. καὶ ὕψος 2 μ. Αἱ ἄλλαι πλευραὶ ἔχουν ἡ μία 3 καὶ ἡ ἄλλη 1 μ. Τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι 11 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς κολούρου πυραμίδος ;

5) Κάμετε καὶ σεῖς δύο παρόμοια προβλήματα.

6) Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδόν των;

7) Πῶς εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον κάθε ἑνός, ποὺ ἐμάθαμεν;



ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΣΤ'. ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

1. Γενικὴ ἐπισκόπησις

῾Ο διδάσκαλος εἶπεν εἰς τὸν Σωκράτη νὰ βγάλη ἀπὸ τὸ κιβώτιον τῶν στερεῶν σωμάτων τὸν κύλινδρον. ῾Ο Σωκράτης δὲν ἐδυσκολεύθη καθολοκληρίαν. ῾Ορίστε, εἶπε, καὶ ἔδειξε τὸ σχῆμα. Μᾶς ἐξήγησεν ὅτι, ὅταν εἰς τὸ χωρίον του ἔτυχε νὰ ἐπισκευάζεται ἡ δημοσία ὁδός, ἐκεῖ εἶχεν ἔλθει ἕνας ὁδοστρωτήρ. Οἱ κάτοικοι τὸν ἔλεγαν «κύλινδρο». ᾿Ηρώτησε τὸν μπαμπᾶ του καὶ τοῦ ἐξήγησεν, ὅτι τὸ ὄνομα τὸ ἔδωσαν οἱ χωρικοὶ ἀπὸ τὸ ἔμπροσθεν κυλινδρικὸν μέρος τοῦ ὁδοστρωτῆρος. Αὐτὸ ὁμοιάζει μὲ τὸ σχῆμα ποὺ εἰς τὴν Γεωμετρίαν ὀνομάζεται κύλινδρος.

— Καὶ οἱ κυλινδρόμυλοι τέτοιο σχῆμα ἔχουν, ποὺ σπᾶν τὸ σιτάρι, τὶς ἐλιὲς κλπ.

— Καὶ τὰ κουτιὰ τοῦ γάλακτος καὶ γενικῶς ὅλες οἱ κονσέρβες, λέγει ἡ ῾Ελένη.

α'. Κυρτὴ καὶ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια αὐτοῦ

Τὰ παιδιὰ παρατηροῦν ὅτι ὁ κύλινδρος ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς ἐπιφανείας. Δύο ἐπιπέδους καὶ μίαν κυρτήν.

β'. Βάσεις καὶ ὕψος αὐτοῦ

Ὁ κύλινδρος στηρίζεται εἰς μίαν ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους ἐπιφανείας, ἀλλὰ καὶ αἱ δύο καλοῦνται *βάσεις* αὐτοῦ. Αἱ βάσεις εἶναι μεταξύ των ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Ὕψος. Ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴν μίαν βάσιν ἕως τὴν ἄλλην λέγεται ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

2. Κύκλος

α'. Τί εἶναι κύκλος

Αἱ δύο βάσεις τοῦ κυλίνδρου ἔχουν τὸ ἴδιον σχῆμα. Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται *κύκλος*. Κύκλος λοιπὸν εἶναι μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία περικλείεται ἀπὸ μίαν καμπύλην γραμμήν.

β'. Περιφέρεια

Ἡ καμπύλη γραμμή, ποὺ περικλείει τὴν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν, λέγεται *περιφέρεια*. Ἡ καμπύλη αὐτὴ γραμμή, ὅπως βλέπετε, εἶναι κλειστή.

γ'. Κέντρον

Ὁ Γιῶργος ἔφερε τὸν διαβήτην τοῦ μπαμπᾶ του.

— Νά, μ' αὐτὸν ὁ μπαμπᾶς, ποὺ εἶναι μηχανικός, κάμνει περιφερείας. Στηρίζει τὸ σκέλος τοῦ διαβήτη στὸ χαρτὶ (ξύλο κλπ.) καὶ περιστρέφει τὸ ἄλλο, ποὺ ἔχει ἕνα μολυβάκι, ἕως ὅτου κλείση. Τὸ ἄλλο σημειώνει γύρω-γύρω τὴν περιφέρεια. *Τὸ σημεῖον ποὺ στηρίζεται ὁ διαβήτης, λέγεται κέντρον τοῦ κύκλου.* Διὰ συντομίαν τὸ σημειώνομεν μὲ τὸ γράμμα Κ. *Ὅλα πλέον τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρον.*

Διότι τὸ κέντρον εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον ἀκριβῶς τοῦ κύκλου. Δέσατε μίαν κλωστὴν σὲ ἕνα καρφάκι, στηρίξατε τὸ καρφάκι εἰς τὸ χαρτόνι ἢ ξύλο ἢ στὴ γῆ. Εἰς τὴν ἄλλην ἄκρην τῆς κλωστῆς βάλετε ἕνα μολύβι, κιμωλία κλπ. καὶ γυρίσατέ την, διὰ νὰ κάμετε κύκλον ἀκριβῆ, ἂν δὲν ἔχετε διαβήτην.

δ΄. Ἀκτὶς τοῦ κύκλου

Ἀκτὶς λέγεται ἡ εὐθεῖα ποὺ ἑνώνει τὸ Κ. μὲ ἕνα σημεῖον τῆς περιφερείας. Ἀκτῖνας εἰς κάθε κύκλον δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν πάρα πολλάς. Εἶναι δὲ μεταξύ των ὅλαι ἴσαι, διότι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ Κ.

ε΄. Διάμετρος

Σύρομεν μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν ἀπὸ ἕνα σημεῖον τῆς περιφερείας. Περνᾶ ἀπὸ τὸ Κ. τοῦ κύκλου καὶ τελειώνει εἰς ἕνα ἄλλο σημεῖον τῆς περιφερείας.

Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ λέγεται *διάμετρος*.

Ὥστε ἡ γραμμὴ ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ ἑνώνει δύο σημεῖα τῆς περιφερείας λέγεται *διάμετρος*. Διαμέτρους ἔχομεν πολλὰς καὶ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἐπίσης βλέπομεν ὅτι ἡ διάμετρος εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος. Αἱ δύο ἀκτῖνες κάμνουν μίαν διάμετρον.

στ΄. Ἡμικύκλιον—Ἡμιπεριφέρεια

Ἡ διάμετρος βλέπομεν ὅτι χωρίζει τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη. Αὐτὰ λέγονται ἡμικύκλια. Ἐπίσης ἡ διάμετρος χωρίζει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη. Ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων λέγεται *ἡμιπεριφέρεια*.

Τί λοιπὸν λέγεται ἡμικύκλιον ; Ἡμιπεριφέρεια;

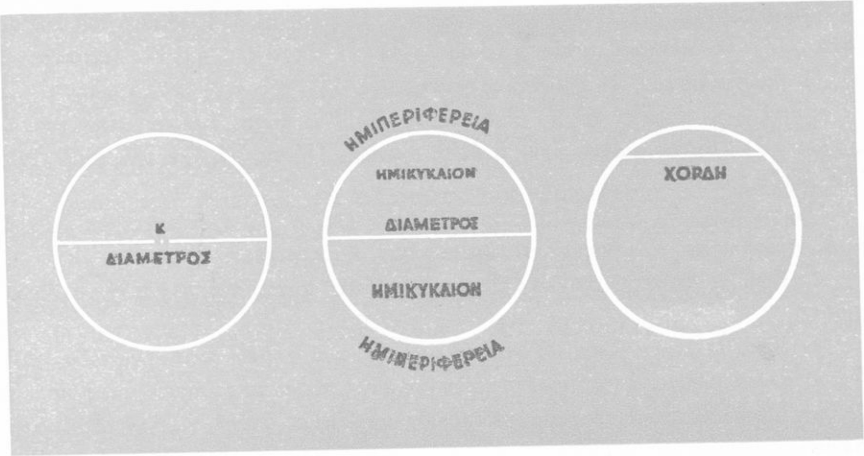
ζ΄. Τόξον—Χορδὴ

Ἕνα μέρος ἀπὸ τὴν περιφέρειαν ἑνὸς κύκλου, λέγεται *τόξον*.

Χορδή. Ὅταν μέσα εἰς τὸν κύκλον σύρωμεν μίαν εὐθεῖαν ἀπὸ ἕνα σημεῖον εἰς τὸ ἄλλο τῆς περιφερείας, χωρὶς νὰ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρον, ἡ εὐθεῖα αὕτη λέγεται *χορδή*. Ἄρα αἱ χορδαὶ τοῦ κύκλου εἶναι, ὅπως φαίνεται, μικρότεραι ἀπὸ τὴν διάμετρον.

η΄. Τμῆμα—Τομεὺς

Φέρομεν εἰς τὸν κύκλον μίαν χορδήν. Ἡ χορδὴ βλέπομεν ὅτι χωρίζει ἕνα μέρος τοῦ κύκλου. Τὸ μέρος αὐτὸ περικλείεται ἀπὸ



ἕνα τόξον καὶ ἀπὸ μίαν χορδήν. Αὐτὸ τὸ μέρος τοῦ κύκλου λέγεται *τμῆμα*.

Ὅταν ὅμως ἕνα μέρος τοῦ κύκλου λαμβάνεται μεταξὺ ἑνὸς τόξου καὶ δύο ἀκτίνων, λέγεται *κυκλικὸς τομεύς*.

θ'. Τί εἶναι μοῖρα

Ἡ περιφέρεια ἑκάστου κύκλου χωρίζεται εἰς 360 μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται μοῖραι. Ἡ μοῖρα χωρίζεται εἰς 60 πάλιν μέρη ἴσα, τὰ πρῶτα λεπτά. Κάθε πάλιν πρῶτον εἰς 60 δεύτερα. Τὰ πρῶτα λεπτὰ σημειώνομεν μὲ μίαν ὀξεῖαν ἐπάνω εἰς τὸν ἀριθμόν, π.χ. 55', τὰ δεύτερα μὲ δύο, π.χ. 55''.

Ἡ ὀρθὴ γωνία ἔχει ἄνοιγμα 90^0.

Σημ. Τὸ ^{0} ἐπάνω ἀπὸ τὸ 90^0 θὰ εἰπῇ μοίρας. Αὐτὸ τὸ ἐξακριβώνομεν μὲ τὸ *μοιρογνωμόνιον*.

Εἶναι ἕνα ὄργανον ἀπὸ μέταλλον, τὸ ὁποῖον εἶναι χωρισμένον εἰς 180 μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *μοῖραι*.

Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὴν γωνίαν βάζομεν τὸ κέντρον του εἰς τὴν κορυφήν της. Ἡ μία πλευρά της θὰ πέσῃ εἰς τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν τοῦ μοιρογνωμονίου. Ἡ ἄλλη πλευρὰ θὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν τοῦ ὀργάνου. Ἐκεῖ ἀκριβῶς εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν ποὺ θὰ ἔχῃ ἡ γωνία. Φυσικὰ ἡ ὀρθὴ γωνία θὰ ἔχῃ 90^0. Διότι ἔγινε ἀπὸ δύο καθέτους πλευράς.

Ἐρωτήσεις. 1) Τί λέγομεν κύκλον ; Τί εἶναι αἱ δύο βάσεις τοῦ κυλίνδρου ; 2) Τί κέντρον τοῦ κύκλου ; 3) Τί ἀκτῖνα ; 4) Τί διάμετρον ; 5) Τί ἡμικύκλιον ; Τί ἡμιπεριφέρειαν ; 6) Τί τόξον ; Τί χορδήν ; 7) Τί τμῆμα ; Τί τομέα ; 8) Τί εἶναι μοῖρα; 7) Εἰς πόσας μοίρας χωρίζεται ὁ κύκλος ; 9) Πόσας μοίρας ἔχει ἡ ὀρθὴ γωνία ; Πόσας θὰ ἔχῃ μία ἀμβλεῖα ; Μία ὀξεῖα ;

Ἐργασίαι: 1) Πῶς κάμνομεν ἀκριβῶς κύκλον ; Σημειώσατε ἐπ' αὐτοῦ τὸ Κ, τὴν ἀκτῖνα, τὴν διάμετρον, ἡμικύκλιον, ἡμιπεριφέρειαν.

2) Κάμετε δεύτερον κύκλον. Σημειώσατε ἀπ' αὐτοῦ τόξον, χορδήν, τμῆμα, τομέα.

3) Κάμετε ἕνα κύκλον μὲ χονδρὸ χαρτόνι καὶ σημειώσατε ἕνα τόξον 90^0 Πόσαι ἄλλαι μοῖραι ἀπομένουν εἰς τὸν κύκλον ; Μὲ τὶ μετροῦμεν τὰς μοίρας ;

4) Μετρήσατε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιόν σας μίαν ὀρθήν, ὀξεῖαν, ἀμβλεῖαν γωνίαν.

Ἀνακεφαλαίωσις

Κάμετε ἕνα κύκλον ποὺ νὰ ἔχῃ διάμετρον 0,09 μ. Λέγετε τί παρατηροῦμεν, ὅτι γίνεται εἰς τὸν κύκλον καὶ τί εἰς τὴν περιφέρειαν ;

3. Κανονικὰ σχήματα

Κανονικὰ σχήματα λέγομεν τὸ *τετράγωνον*, διότι ὅλαι αἱ πλευραί του εἶναι ἴσαι καὶ ὅλαι αἱ γωνίαι του ἴσαι.

Ἐπίσης καὶ τὸ *ἰσόπλευρον τρίγωνον* ἔχει ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας καὶ τὰς γωνίας του ἴσας. Αἱ γωνίαι τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἡ κάθε μία ἀπὸ 60^0.

4. Κανονικὰ πολύγωνα

Τὰ σχήματα ποὺ ἔχουν περισσοτέρας ἀπὸ 4 πλευρὰς καὶ γωνίας τὰ λέγομεν πολύγωνα.

Ὅταν ἔχουν ὅλας τὰς πλευράς των καὶ τὰς γωνίας των ἴσας, τὰ λέγομεν *κανονικὰ πολύγωνα*.

Σημ. Τὰ σχήματα αὐτὰ συνηθίζομεν νὰ τὰ ὀνομάζωμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν γωνιῶν καὶ ὄχι τῶν πλευρῶν των. Π.χ. πεντάγωνον, ἑξάγωνον, ὀκτάγωνον κλπ.

5. Ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον πολύγωνον

Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον π.χ. ἕνα τετράγωνον χωρίζομεν τὴν περιφέρειαν εἰς 4 ἴσα μέρη (τὰ τόξα). Φέρομεν τὰς χορδὰς αὐτῶν καὶ ἐσχηματίσθη ἀμέσως τὸ πεντάγωνον. Δυνάμεθα ὅμως καὶ ἀμέσως νὰ φέρωμεν δύο διαμέτρους. Ἑνώνομεν τὰ ἄκρα τῶν διαμέτρων καὶ ἔχομεν ἀμέσως τὸ τετράγωνον.

Ἀπὸ τὸ τετράγωνον τώρα αὐτὸ εὑρίσκομεν τὸ μέσον τῶν πλευρῶν του. Φέρομεν τὰς νέας χορδὰς αὐτῶν καὶ σχηματίζεται νέον πολύγωνον, τὸ ὀκτάγωνον. Ἂν θέλωμεν ἐξακολουθοῦμεν μὲ τὸν ἴδιον τρόπον νὰ διχοτομῶμεν τὰς πλευρὰς τοῦ νέου σχήματος καὶ νὰ φέρωμεν χορδάς των. Τότε τὸ ὀκτάγωνον θὰ γίνη δεκαεξάγωνον, 32γωνον καὶ οὕτω καθεξῆς. Ὥστε θὰ καταντήση ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ νὰ γίνη ἕνα μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.

Σημ. Αἱ χορδαὶ θὰ εἶναι πλευραὶ τῶν πολυγώνων. Ποῖος θὰ βγάλη τὸν κανόνα ;

Ὁ Σπῦρος εἶπε τὸν καλύτερον:

ΚΑΝΩΝ.—Ὅταν ἕνα πολύγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον μέσα σὲ κύκλο μὲ πάρα πολλὲς πλευρές, ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου θὰ εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου. Ὁ κύκλος λοιπὸν εἶναι ἕνα πολύγωνον μὲ πάρα πολλὰς πλευράς.

Ἄσκησις. Νὰ κάμετε ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς χαρτόνι κυκλικόν.

Ὁ Ἄλκης εἶχε τὸ πιὸ καλύτερο σχῆμα.

— Χώρισα, λέει, τὴν περιφέρεια εἰς 6 ἴσα τόξα μὲ τὸν διαβήτη μου. Ἀφοῦ ἐμέτρησα πρῶτα τὴν περιφέρεια, ἔφερα ἔπειτα τὶς χορδὲς κι ἔτσι ἔγινε τὸ ἑξάγωνο. Παρετήρησα μάλιστα, ὅτι ἡ ἀκτῖνα εἶναι τὸ 6ο τῆς περιφερείας. Γι' αὐτὸ κάθε χορδή, ποὺ βλέπετε, ἔχει μῆκος μιᾶς ἀκτίνας, στὰ ἑξάγωνα ἐγγεγραμμένα κανονικὰ πολύγωνα. Ἂν θέλω, κάθε τόξο τὸ διαιρῶ σὲ δύο ἴσα μέρη καὶ ἑνώνω μὲ εὐθεῖες τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως. Τότε θὰ ἔχω ἕνα δωδεκάγωνο. Τὰ νέα τόξα πάλι σὲ δύο ἴσα μέρη καὶ ἑνώνω μὲ εὐθεῖες τὸ σημεῖο τῆς διαιρέσεως. Τότε θὰ ἔχω ἕνα 24γωνο. Μέχρι νὰ γίνουν ἕνα οἱ πλευρὲς τοῦ πολυγώνου μὲ τὸν κύκλο. Ὥστε ἡ περίμετρος κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, γίνεται ἴση μὲ τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του ἀδιακόπως διπλασιάζεται.

6. Ἀστερίσκος—Ρόμβος

Ὁ Γιάννης εἶδεν, εἰς ἕνα κέντημα τῆς ἀδελφῆς του, ἕνα ὡραῖον σχῆμα. Αὐτό, εἶπεν ὁ διδάσκαλος, λέγεται *ἀστερίσκος.*

Κάμνομεν ἕνα κανονικὸν ἐγγεγραμμένον ἑξάγωνον. Σβήνομεν τὰς χορδάς. Ἑνώνομεν δύο δύο τὰς κορυφάς, πηδῶντας μίαν, π.χ. τὴν 1 μὲ τὴν 3. Τὴν 2 μὲ τὴν 4. Τὴν 3 μὲ τὴν 5. Τὴν 5 μὲ τὴν 1 καὶ τὴν 6 μὲ τὴν 2. Ἔπειτα τὸ κέντρον μὲ τὰς κορυφάς. Ἑνώνομεν τὸ κέντρον μὲ τὰς γωνίας, ποὺ ἐσχημάτισαν αἱ εὐθεῖαι ἐκεῖ ποὺ συνηντῶντο. Ἔτσι ἔχομεν τὸν ἀστερίσκον. Κάθε τετράγωνον τοῦ ἀστερίσκου λέγεται *ρόμβος.*

Ἀσκήσεις. 1) Ἐγγράψατε μέσα εἰς κύκλον ἕνα πεντάγωνον κανονικόν. Κάμετέ το δεκάγωνον. Τί ἄλλο μπορούσατε νὰ τὸ κάνετε ;

2) Κάμετε ἕνα ἀστερίσκον καὶ χρωματίσατέ τον μὲ διάφορα χρώματα, ὅπως εἰς τὰ κεντήματα τῶν ἐργοχείρων.

3) Ὅποιος ἔχει ἴδει ἄλλο καλύτερον πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, νὰ προσπαθήσῃ νὰ τὸ ἰχνογραφήσῃ.

4) Τί θὰ κάμῃ ἕνας ἐπιπλοποιὸς διὰ νὰ κατασκευάσῃ ἕνα κανονικὸν ὀκταγωνικὸν τραπέζιον ;

7. Ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου

Εἰς ἐγγεγραμμένον ἑξάγωνον φέρομεν τὰς διαγωνίους του ἀπὸ τὰς ἀπέναντι κορυφάς του. Βλέπομεν, ὅτι ἐσχηματίσθησαν 6 τρίγωνα. Αὐτὰ εἶναι ἴσα μεταξύ των διότι αἱ βάσεις των εἶναι πλευραὶ κανονικοῦ πολυγώνου, αἱ δὲ ἄλλαι δύο πλευραὶ ἑκάστου τριγώνου εἶναι ἀκτῖνες τοῦ κύκλου.

Ὁ Σωκράτης λέγει :—Θὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου καὶ αὐτὸ θὰ τὸ πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν ἀριθμὸν ὅλων τῶν τριγώνων. Ἢ μὲ τὸν ἀριθμὸν ὅλων τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, ποὺ φυσικά, εἶναι τόσες, ὅσα τὰ τρίγωνα.

Τότε ἡ Ἀλίκη εἶπε :—Θὰ εἶναι πιὸ σύντομο, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὴν περίμετρο τοῦ πολυγώνου ἐπὶ τὸ ὕψος ἑνὸς τριγώνου διὰ δύο.

Ὁ διδάσκαλος συνεφώνησε μὲ τὸν σύντομον τρόπον τῆς Ἀλίκης καὶ εἶπεν, ὅτι ἡ ἀπὸ τὸ κέντρον κάθετος ἐπὶ τὴν πλευρὰν ἑνὸς τριγώνου λέγεται ἀπόστημα. Ἔτσι ἔχομεν τὸν κανόνα:

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρον ἐπὶ τὸ ἀπόστημα διὰ 2.

Προβλήματα. 1) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ ἑξαγώνου πολυγώνου, ποὺ ἡ πλευρά του ἔχει μῆκος 0,38 μ. καὶ τὸ ἀπόστημα εἶναι 0,27 μ.;

2) Νὰ ἐγγράψετε εἰς κύκλον κανονικὸν ὀκτάγωνον μὲ πλευρὰν μήκους 0,05 μ. καὶ ἀπόστημα 0,04 μ. καὶ νὰ εὕρετε τὸ ἐμβαδόν τους.

3) Νὰ ἐγγράψετε ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον μὲ πλευρὰν 0,15 μ., ἀπόστημα 0,12 μ. καὶ νὰ εὕρετε τὸ ἐμβαδόν του.

4) Ἐὰν κάμωμεν ἕνα πολύγωνον μὲ πάρα πολλὰς πλευράς, τί θὰ συμβῇ;

8. Εὕρεσις τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου

Ὁ Γιάννης ἀπήντησεν εἰς τὴν ὑπ' ἀριθμὸν 4 ἐρώτησιν:

— Θὰ γίνῃ κύκλος· τότε πλέον θὰ δυσκολευώμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου. Δι' αὐτὸ πρέπει νὰ μάθωμεν νὰ μετρῶμεν τὴν περιφέρειαν. Ἐὰν λοιπὸν πάρωμεν τὴν διάμετρον ἑνὸς κύκλου καὶ μὲ αὐτὴν μετρήσωμεν τὴν περιφέρειάν του, θὰ ἴδωμεν: Ὅτι ἡ διάμετρος χωρεῖ εἰς τὴν περιφέρειαν 3,14 φοράς. Δοκιμάσατε. Ἔτσι ἐξάγεται ὅτι ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου εἶναι μεγαλυτέρα 3,14 φορὰς ἀπὸ τὴν διάμετρόν του. Ἡ δὲ διάμετρος εἶναι 3,14 φορὰς μικροτέρα ἀπὸ τὴν περιφέρειαν ἑνὸς κύκλου. Εὔκολα τώρα εὑρίσκομεν τὴν περιφέρειαν, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου.

Παράδειγμα: Πόση εἶναι ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου, ὅταν ἡ διάμετρός του εἶναι 4 μ.

$4 \times 3,14 = 12,56$ μ. εἶναι ἡ περιφέρεια.

Σημ. Δι' εὐκολίαν μας τὴν περιφέρειαν σημειώνομεν μὲ τὸ γράμμα Π. Τὴν διάμετρον μὲ τὸ γράμμα δ καὶ τὴν ἀκτῖνα μὲ τὸ γράμμα α. Τὸν σταθερὸν ἀριθμόν, ποὺ βγαίνει ἀπὸ τὴν διαίρεσιν τῆς περιφερείας διὰ τῆς διαμέτρου μὲ τὸ γράμμα π. Τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀντὶ τοῦ × μὲ μίαν τελείαν (.) καὶ τὴν διαίρεσιν μὲ δύο (:)

ΚΑΝΩΝ—Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3,14. Ἰδοὺ καὶ ὁ τύπος: Π = δ.π ἢ Π=δ.3,14, ἢ Π=2απ (ἐπειδὴ ἡ διάμετρος ἔχει δύο ἀκτῖνας).

— Τώρα, λέγει ὁ Λυκοῦργος, ἐννοοῦμεν καὶ τὰς ἄλλας σχέσεις τῶν μερῶν τοῦ κύκλου. Π.χ. Ὅταν ἠξεύρω τὴν περιφέρεια ἀμέσως εὑρίσκω καὶ τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου, γιατὶ διαιρῶ διὰ 3,14 (ἢ π).

Παράδειγμα: Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου εἶναι 18,84 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ διάμετρος;

Ὁ τύπος $\delta = \Pi : \pi$ ἢ $\delta = \dfrac{\Pi}{\pi}$ Ἀντικαθιστῶ καὶ ἔχω

$$18{,}84 : 3{,}14 = 6 \text{ μ.}$$

ΚΑΝΩΝ.—Ἡ διάμετρος ἰσοῦται μὲ τὴν περιφέρειαν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3,14.

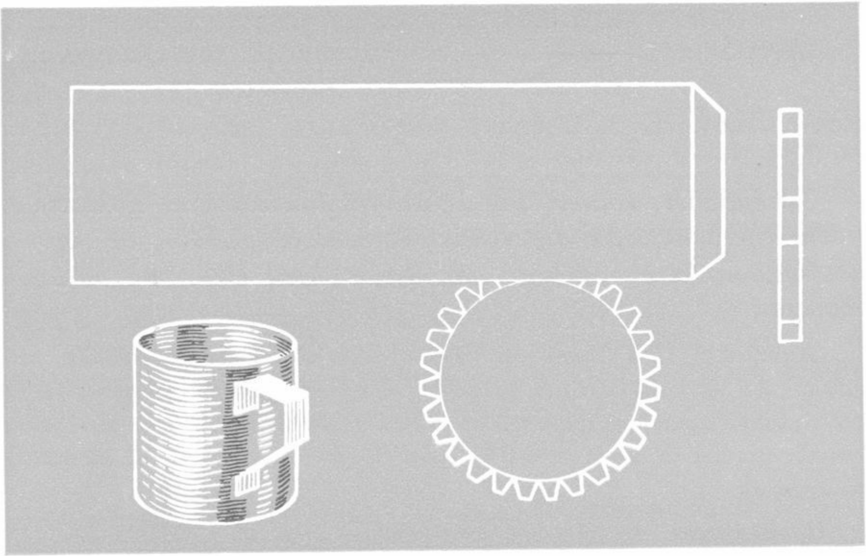
Προβλήματα. 1) Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 0,5 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρειά του;

2) Ἕνας τροχὸς ἁμάξης ἔχει περιφέρειαν 10,52 μ. Πόση εἶναι ἡ διάμετρος καὶ πόση ἡ ἀκτίς του;

3) Ἡ διάμετρος τῶν ὀπισθίων τροχῶν τοῦ αὐτοκινήτου μας εἶναι 6,28 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρειά των;

9. Ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου

Εἰς τὸν κύκλον σύρομεν πολλὰς ἀκτῖνας. Βλέπομεν, ὅτι ἐσχηματίσθησαν πολλοὶ κυκλικοὶ τομεῖς, τρίγωνα. Κάθε ἕνα ἔχει βάσιν τὸ τόξον τοῦ τομέως καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν ὅλου τοῦ κύκλου εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ὅλων τῶν τριγώνων τοῦ κύκλου (ἐφ' ὅσον θὰ εἶναι ἴσα τὰ τρίγωνα μεταξύ των). Ἄλλως εὑρίσκομεν κάθε ἑνὸς χωριστὰ καὶ θὰ προσθέσωμεν ὅλα τὰ ἐμβαδά.



Ὁ Σωτήρης λέγει :—Γιατί νὰ καθώμαστε νὰ κάνωμε τόσον ἐπίπονη δουλειά ; Ἀντὶ νὰ μετροῦμε κάθε τρίγωνο, ἐμεῖς ἠξεύρομεν ὅτι αἱ βάσεις ὅλων τῶν τριγώνων ἀποτελοῦν τὴν περιφέρειαν, ὅπως συμβαίνει μὲ τὸ κανονικὸ πολύγωνο μὲ τὶς ἐπίπεδες πλευρές.

— Λοιπὸν εὑρίσκομεν τὴν περιφέρεια, τὴν πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸ ὕψος, ποὺ ἐδῶ εἶναι ἡ ἀκτῖνα, καὶ διαιροῦμε διὰ 2.

Νά καὶ ὁ τύπος : Ε κύκλου =Π.α :2

Παράδειγμα. Ἡ ἀκτὶς τοῦ ποδηλάτου μου εἶναι 0,6 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

1) Π =2.α.3,14. Ἀντικαθιστῶ 0,6.2.3,14 =3,768 μ.

2) Ε =Π.α : 2. Ἀντικαθιστῶ 3,768.0,6 : 2 = 1,1304 τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ποδηλάτου.

Ὅταν μᾶς δίδεται ἡ ἀκτίς, ἀντὶ νὰ εὑρίσκωμεν τὴν περιφέρειαν καὶ ἔπειτα διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν πολλαπλασιάζομεν πάλιν μὲ τὴν ἀκτῖνα, ἔχομεν ἕνα συντομώτερον τρόπον, ποὺ εὑρέθη ἀπὸ τὴν ἰδίαν πρᾶξιν.

$$\text{'Αντὶ λοιπὸν } \frac{\alpha.2.3{,}14.\alpha}{2} = \text{ ἁπλοποιοῦμε τὸν κλασματικὸν}$$

αὐτὸν τύπον. Ἔτσι, 2 ἐπάνω καὶ 2 κάτω φεύγει. Καὶ μένει α.α.3,14.

Τὸ ἐμβαδόν, λοιπόν, τοῦ κύκλου εὑρίσκεται ὅταν πολλαπλασιάσω τὴν ἀκτῖνα ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της καὶ ἐπὶ 3,14.

Ὅποιος λοιπὸν τρόπος μᾶς διευκολύνει, αὐτὸν θὰ ἀκολουθήσωμεν.

'Ασκήσεις: 1) Γράψατε τὸν κανόνα : Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ; 2) Μὲ ποῖον γράμμα γράφομεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν ἐπιφανειῶν ; 3) Ὁ κύκλος ὅταν χωρισθῇ σὲ πάρα πολλὰ τόξα, τί σῶμα εἶναι ; Τὰ τόξα αὐτά, πῶς ὀνομάζονται καὶ τὸ σῶμα αὐτό ; 4) Πῶς εὕρομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ;

Προβλήματα. 1) Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 3,5 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

2) Ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου εἶναι 12,56 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

3) Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου εἶναι 12,56 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

4) Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου εἶναι 38,14 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

5) Ἡ κυκλικὴ πλατεῖα τῆς Παντανάσσης ἔχει διάμετρον 56 μ. Πόσας πλάκας θὰ χρειασθῇ τῶν 0,4 μ. μήκους καὶ 0,3 μ. πλάτους ;

6) Κάμετε διάφορα παρόμοια δικά σας προβλήματα, ποὺ συναντῶμεν εἰς τὸν βίον μας.

10. 'Εμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως

α΄. Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα καὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου

Τὸν κυκλικὸ τομέα τὸν ἐκλαμβάνομεν ὡς τρίγωνον.

Παράδειγμα. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως, ποὺ τὸ τόξον του εἶναι 15 μ. καὶ ἡ ἀκτίς του 4 μ. ;

$$\text{Ε κυκλ. τομ.} = \frac{15 \times 4}{2} = 30 \text{ μ.}$$

Παρατήρησις. Αἱ δύο πλευραὶ εἶναι ἴσαι διότι εἶναι ἀκτῖνες τοῦ κύκλου. Τὸ τόξον εἶναι ἡ βάσις. Ἔτσι εἰργάσθημεν, ὅπως εἰς τὸ τρίγωνον.

ΚΑΝΩΝ.—Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τοῦ τόξου ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 2.

β'. Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα καὶ τὰς μοίρας τοῦ τόξου

Παράδειγμα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως 90^0 ὁ ὁποῖος ὑπάρχει εἰς κύκλον, ποὺ ἔχει ἀκτῖνα 5,5 μ. ;

Σκέψις. Πρέπει νὰ εὕρωμεν πόσα μέτρα μῆκος εἶναι τὸ τόξον τῶν 90^0. Ὅλη ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἐμάθαμεν ὅτι ἔχει 360^0. Νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, διὰ νὰ ἴδωμεν πόσα μέτρα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς 90^0.

Λύσις : Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα, εὔκολα εὑρίσκομεν τὴν περιφέρειαν. Ὁ τύπος Π=2α.π. Ἀντικαθιστῶμεν :

$$\Pi = 5{,}5.2.3{,}14 = 34{,}54 \text{ μ.}$$

Ἀφοῦ 360^0 περιφέρεια εἶναι 34,54 μ.

90^0 » » X

Τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα.

$$X = \frac{34{,}54 \times 90}{360} = 8{,}63 \text{ μ.}$$ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τομέως ποὺ ζητοῦμεν.

Τώρα πλέον ἐφθάσαμεν εἰς τὴν α' περίπτωσιν.

$$\text{Ε κυκλ. τομέως} = \frac{8{,}63 \times 5{,}5}{2} = 23{,}73 \text{ τ.μ.}$$

—Λίγο ἂν προσέχωμε, λέγει ὁ Βαγγέλης, τὰ πράγματα μόνα τους λύονται. Ἡ ἀριθμητικὴ καὶ ἡ γεωμετρία κάνουν τοὺς ἀνθρώπους λογικοὺς καὶ προσεκτικούς.

Ἀσκήσεις: 1) Κάμετε μὲ τὸν διαβήτην σας ἕνα κύκλον μὲ ἀκτῖνα 0,05 μ. καὶ μὲ τόξον 0,10 μ. καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ αὐτοῦ τομέως.

2) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως 50^0, ὁ ὁποῖος ὑπάρχει εἰς κύκλον, ποὺ ἔχει ἀκτῖνα 2 μ. ;

3) Κάμετε δύο παρόμοια ἰδικά σας προβλήματα.

11. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου

Ὁ διδάσκαλος λέγει εἰς τὸν Γιῶργον νὰ βγάλῃ τὸν κύλινδρόν του καὶ νὰ πῇ, ποιὸ θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδόν του.—Ὅπως βλέπω, πρέπει νὰ βρῶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς κύκλου, νὰ τὸ διπλασιάσω, γιατὶ αἱ βάσεις τοῦ κυλίνδρου εἶναι δύο κύκλοι ἴσοι.

—Ἔπειτα νὰ βρῶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του καὶ νὰ προσθέσω σ' αὐτὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο κύκλων. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἐμάθαμε πῶς εὑρίσκεται.

— Τὸ ἐμβαδὸν ὅμως τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας, δὲν ἠξεύρομεν πῶς εὑρίσκεται. Καταλαβαίνω ὅμως ὅτι, ἂν ἦταν τρόπος νὰ ξεδιπλώσωμε τὸν κύλινδρο, θὰ εἴχαμε μιὰ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια. Τότε ἀνάλογα μὲ τὸ σχῆμα θὰ εὕρισκα τὸ ἐμβαδόν.

Τὰ παιδιὰ ἐμπῆκαν εἰς κίνησιν. Ὁ Σωτήρης εἶχεν ἕνα κύλινδρον ἀπὸ τὸν ἀδελφόν του. Τὸν ἄνοιξε—Νά ! ἔγινε ὀρθογώνιον ἡ κυρτή του ἐπιφάνεια.

Παρατήρησις. Τὸ μέρος ὅπου ἦταν ἕνα μὲ τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου, εἶναι τώρα ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου. Τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου εἶναι καὶ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου.

—Ὥστε δὲν χρειάζεται νὰ χαλᾶμε τὸν κύλινδρο πιά, γιὰ νὰ δοῦμε τὴν κυρτή του ἐπιφάνεια, λέγει ἡ Ἑλένη.

Ἡ κυρτὴ λοιπὸν ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι ὀρθογώνιο ποὺ ἔχει βάσι τὴν περιφέρεια τῆς κυκλικῆς βάσεώς του καὶ ὕψος, τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

Παράδειγμα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυλινδρικοῦ ντεπόζιτου νεροῦ τοῦ σιδηροδρομικοῦ σταθμοῦ Ἀχλαδοκάμπου, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 1,3 καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 4 μ. ;

Λύσις :

$$1)\ \text{Ε τῆς μιᾶς κυκλικῆς βάσεως} = \frac{1{,}3.2.3{,}14.1{,}3}{2} = 5{,}30 \text{ τ.μ.}$$

Ε τῆς δευτέρας τὸ ἴδιον = 5,30 τ.μ. Σύνολον 10,60 τ.μ. εἶναι τὸ Ε καὶ τῶν δύο βάσεών του.

2) Ε κυρτῆς ἐπιφανείας.

α) 1,3.2 = 2,6 μ. διάμετρος.

β) 2,6.3,14 = 8.16 μ. περιφέρεια.

γ) 8.16.4 = 32,64 τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Ε ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου=10,60+32,64=43,24 τ.μ.

Ἐργασίαι : 1) Γράψατε μόνοι σας τὸν κανόνα : Πῶς εὑρίσκεται τὸ Ε τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ;

2) Πῶς εὑρίσκομεν τὸ Ε ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ;

√ 3) Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 2,4 μ., τὸ ὕψος του 6 μ. Πόσον εἶναι τὸ Ε ὅλης τῆς ἐπιφανείας του ;

√ 4) Ἡ διάμετρος ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 3,5 μ., τὸ ὕψος του 8,3 μ. Πόσον εἶναι τὸ Ε ὅληςτῆς ἐπιφανείας του ;

√ 5) Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως μιᾶς κυλινδρικῆς στήλης εἶναι 16,5 μ. Τὸ ὕψος της 7 μ. Πόσα χρήματα θὰ μᾶς στοιχίσῃ νὰ τὴν ἐπιχρίσωμεν μὲ τσιγκόχρωμα, ἐὰν τὸ τετραγ. μέτρον στοιχίσῃ 12 δραχμάς ; √

12. Ὄγκος τοῦ κυλίνδρου

Κάμνομεν μὲ τὰς ἰδίας διαστάσεις ἕνα κυλινδρικὸν δοχεῖον ἐξ ἀλουμινίου καὶ ἕνα πρισματικόν. Γεμίζομεν τὸ πρῶτον μὲ νερὸ καὶ τὸ ἀδειάζομεν εἰς τὸ δεύτερον. Παρατηροῦμεν ὅτι καὶ τὰ δύο δοχεῖα παίρνουν τὴν αὐτὴν ποσότητα ἀκριβῶς.

Εἴπομεν ὅτι ἕνα πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, ὅταν τοῦ διπλασιάσωμεν ἀδιακόπως τὰς πλευράς, γίνεται ἕνα μὲ τὸν κύκλον. Ἔτσι, ὅταν διπλασιάζωμεν ἀδιακόπως τὰς ἕδρας ἑνὸς πολυγωνικοῦ πρίσματος, θὰ γίνῃ ἕνα μὲ τὸν κύλινδρον. Αἱ βάσεις θὰ γίνουν κύκλος καὶ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια, κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου.

Λοιπὸν κύλινδρος εἶναι ἕνα πολυγωνικὸν πρῖσμα μὲ πάρα πολλὰς ἕδρας. Συνεπῶς ὁ ὄγκος του εὑρίσκεται, ὅπως τοῦ πρίσματος.

Εἰς ὅλα τὰ πρίσματα ἐμάθομεν ὅτι ὁ ὄγκος των ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος· τὸ ἴδιον καὶ διὰ τὸν κύλινδρον.

Παράδειγμα. Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἑνὸς κυλινδρικοῦ δοχείου εἶναι 1 μέτρον. Τὸ ὕψος του 3 μέτρα. Πόσα κιλὰ ἐλαίου χωρεῖ ;

Λύσις :

1) 2.1.3,14.1 : 2 = 3,14 τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδόν.

2) 3,14.3 = 9,42 κ.μ. ὁ ὄγκος τοῦ κυλινδρικοῦ δοχείου.

3) 9,42.0,915 = 8,619.30 κ.μ.ἐλαίου χωρεῖ ἢ 8.619 κιλὰ καὶ 30 γραμμάρια.

Ἐργασίαι : Κάμετε λοιπὸν μόνοι σας τὸν κανόνα : Πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου ;

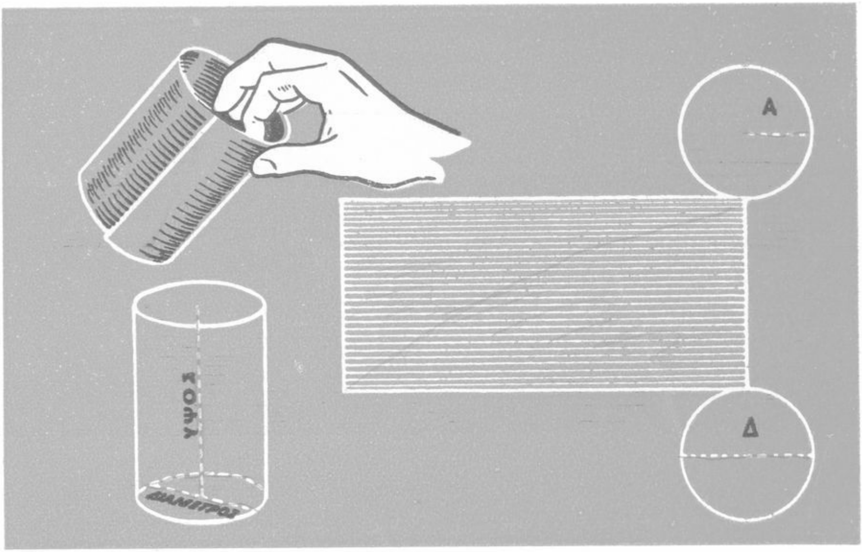
13. Κατασκευὴ τοῦ κυλίνδρου

α΄. Ὁ Γιῶργος ἀπὸ χαρτόνι ἔκαμεν ἕνα ὀρθογώνιο. Τὴν μίαν πλευρὰν τὴν ἐκράτησεν ἀκίνητον. Τὴν ἄλλην πλευρὰν χωρὶς νὰ τὴν σπάσῃ καθόλου τὴν ἔφερε καὶ τὴν ἕνωσε μὲ τὴν πρώτην. Ἔκαμε καὶ δύο κυκλικὰ καπάκια ποὺ ἔχουν περιφέρειαν ἴσην μὲ τὴν βάσιν τοῦ ὀρθογωνίου. Ἔτσι κατασκεύασε τὸν κύλινδρον.

Κάμετε καὶ σεῖς μὲ τσίγκον, κόντρα πλακὲ ἢ χαρτόνι ἕνα κύλινδρον.

2ος τρόπος :

Ἡ Ἀλεξάνδρα δὲν ἔφυγεν ἀπὸ τὸν γνωστὸν τρόπον τῆς κατασκευῆς τῶν στερεῶν γεωμετρικῶν σωμάτων.—Ἰχνογράφησα σὲ χαρτόνι τὸ παραλληλόγραμμον μὲ ὅσα μέτρα θέλω γιὰ βάσι. Μετρῶ μὲ τὸν διαβήτη καλὰ καὶ εὑρίσκω τὸ μέσο τῶν δύο βάσεων. Ἡ βάσις ἔχει μῆκος ὅση ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου. Εὑρίσκω τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Τώρα ἀπὸ τὴ βάσι τοῦ παραλληλογράμμου, ποὺ ἔχω βρῆ τὸ μέσον, σύρω κατ' εὐθεῖαν τὴν ἀκτῖνα. Ἐκεῖ, ποὺ θὰ σταθῇ, εἶναι τὸ Κ τοῦ κύκλου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου. Μὲ τὸν διαβήτη κάνω ἀπὸ τὸ Κ κύκλο, ποὺ θὰ ἀκουμπήσῃ ἕνα μέρος τοῦ τόξου του, στὴ βάσι τοῦ παραλληλογράμμου. Τὸ ἴδιο κάνω καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τῆς ἄλλης βάσεως τοῦ παραλληλογράμμου. Ἔτσι ἔγινε ἕνα παραλληλόγραμμο καὶ δύο κύκλοι, ποὺ ἀκουμποῦν μὲ ἕνα μέρος τοῦ τόξου των στὶς δύο βάσεις του. Ξεχωρίζω τὸ σχῆμα μου ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπο χαρτόνι. Ξύνω λίγο τὶς ἄκρες γιὰ νὰ παίρνουν τὴν κόλλα καὶ διπλώνω. Ἔπειτα κατεβάζω καὶ τὰ καπάκια τῶν κύκλων, τὰ κολλῶ καὶ αὐτὰ κι ἔτσι ἔχω ἕτοιμο τὸν κύλινδρό μου.

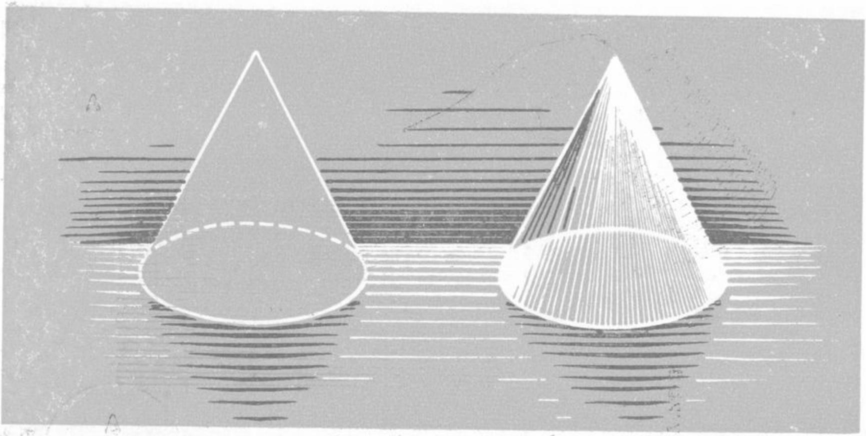


Προβλήματα. 1) Κυλινδρικὸν δοχεῖον ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 0,3. Τὸ ὕψος του εἶναι 2,5. Πόσα κιλὰ μπύρας χωρεῖ;

2) Τὸ κυλινδρικὸν ντεπόζιτο τοῦ σιδηροδρομικοῦ σταθμοῦ Ἐδέσσης ἔχει διάμετρον βάσεως 2,3 μ. Τὸ ὕψος του εἶναι 3,35. Πόσα κυβικὰ νερὸ χωρεῖ;

3) Ἡ διάμετρος ἑνὸς φρέατος (πηγαδιοῦ) κυλινδρικοῦ εἶναι 1,65 μ. Τὸ βάθος του εἶναι 18 μ. Πόσα χρήματα ἐπληρώσαμεν διὰ νὰ τὸ ἀνοίξωμεν, μὲ 225 δραχμὰς τὸ κυβ. μέτρον;

4) Θέλει ὁ λαδέμπορος κ. Γεωργαντᾶς νὰ κάμη δοχεῖον κυλινδρικὸν νὰ χωρῇ 900 ὀκάδες μὲ ὕψος 3,5 μ. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεώς του;



Ζ΄. ΚΩΝΟΣ

1. Γενικὴ ἐπισκόπησις

α΄. Τί εἶναι κῶνος

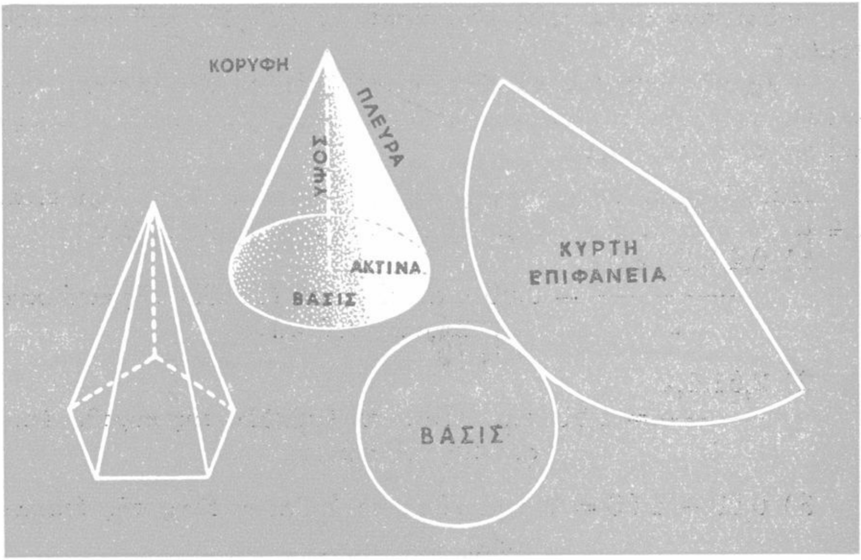
Ὁ διδάσκαλος ἔβγαλεν ἀπὸ τὸ κιβώτιον ἕνα στερεὸν σῶμα. Ὁ Νῖκος εἶπεν, ὅτι τὸ στερεὸν αὐτὸ σῶμα ὁμοιάζει μὲ τὰ χωνιά. Τὸ σῶμα λοιπὸν αὐτὸ λέγεται *κῶνος*.

Παρατηρήσεις: Ὁ Ἀλέκος λέγει: Τὸ σῶμα αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν *μικτὴν* ἐπιφάνειαν. Ἡ βάσις του εἶναι μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια καὶ εἰς αὐτὴν στηρίζεται. Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνειά του εἶναι *κυρτὴ* ἐπιφάνεια καὶ τελειώνει εἰς *κορυφήν*, ποὺ εὑρίσκεται ἀπέναντι τῆς βάσεως. Ἡ κάθετος γραμμή, ποὺ ἐννοοῦμεν ἀπὸ τὴν κορυφὴν εἰς τὴν βάσιν, εἶναι τὸ *ὕψος* τοῦ κώνου, ποὺ λέγεται *ἄξων*. Ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴν κορυφὴν εἰς ἕνα ὁποιονδήποτε σημεῖον τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του λέγεται πλευρὰ τοῦ κώνου.

ΚΑΝΩΝ.—Κῶνος λέγεται τὸ στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον ἔχει διὰ βάσιν ἕνα κύκλον καὶ μίαν παράπλευρον ἐπιφάνειαν κυρτήν, ἡ ὁποία τελειώνει εἰς κορυφήν.

β΄. Κατασκευὴ κώνου

Ὁ Γιάννης τὴν ἄλλην ἡμέραν εἶχε κάμει ἀπὸ χαρτόνι ἕνα κῶνον. Ἀνοίξαμεν αὐτὸν καὶ ἔγινε τὸ ἀνάπτυγμά του.



Ἡ Εὐθυμία τότε λέγει : — Γιὰ νὰ κάμωμε κῶνο πρῶτα κάμνομεν ἕνα κύκλον μὲ ὅση θέλομεν ἢ μᾶς εἴπουν περιφέρεια. Ἔπειτα ἕνα κυκλικὸν τομέα. Τὸ τόξον τῆς βάσεώς του κανονίζομε μὲ τὸν διαβήτη, ὥστε νὰ ἔχῃ μῆκος ὅσο ἡ βάσις τοῦ κύκλου. Βάζομε τὸ τόξο ἐπάνω στὸν κύκλο καὶ ἑνώνομε τὶς ἄκρες του.

Ἐργασίαι: 1) Κάμετε καὶ σεῖς κῶνο ἀπὸ χαρτόνι, σύρμα, τσίγκον, πηλόν, μουσαμᾶ κτλ.

2) Εὕρετε καὶ ὀνομάσατε κωνικὰ σώματα, ποὺ μεταχειριζόμεθα εἰς τὴν ζωήν μας, ἢ φυσικὰ τοιαῦτα.

γ'. Ἐμβαδὸν τοῦ κώνου

Ὅσα χρειάζονται γιὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κώνου βγαίνουν μόνα τους, λέγει ὁ Τέλης.

—Ὁ κῶνος μου ἔχει βάσιν κύκλου. Ξεύρομε πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

Ἐπίσης εἰς μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία ὅταν ἀναπτύχθηκεν ἔγινε κυκλικὸς τομεύς.

— Ξεύρομε πάλι, πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως.

— Λοιπὸν ἀπομένει νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως (κύκλου), τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας (κυκλικοῦ τομέως) καὶ νὰ τὰ προσθέσωμε.

Παράδειγμα. Ἡ ἀκτὶς τῆς κυκλικῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 0,4 μ., ἡ πλευρά του 1,2 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

1) $\dfrac{0{,}4.2.3{,}14.0{,}4}{2} = 0{,}50$ τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς βάσεως τοῦ κώνου.

2) $\dfrac{2{,}51.1{,}2}{2} = 1{,}50$ τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

3) $0{,}50 + 1{,}50 = 2$ τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

Ἐργασίαι: 1) Κάμετε μόνοι σας τὸν κανόνα : Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ;

2) Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ;

Προβλήματα: 1) Ἡ ἀκτὶς κυλινδρικῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 2 μ. Ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου εἶναι 7 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ;

2) Ἡ διάμετρος τῆς κυκλικῆς βάσεως μιᾶς στέγης εἶναι 0,9 μ., ἡ πλευρὰ τῆς στέγης εἶναι 9 μ. Πόσα χρήματα θὰ πληρώσωμεν διὰ νὰ τσιμεντάρωμεν τὴν βάσιν, ἐὰν κάθε τετραγωνικὸν στοιχίση 35 δραχμάς ; Καὶ πόσα γιὰ νὰ ἀσπρίσωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν, μὲ 5 δραχμὰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ;

3) Θέλομεν νὰ κάνωμεν μίαν κωνικὴν σκηνὴν μὲ περιφέρειαν βάσεως 5 μ. Ἡ πλευρά της νὰ εἶναι 3,50 μ. Πόσα μέτρα καραβόπανον θὰ χρειασθῶμεν διὰ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν ; Καὶ πόσα μέτρα ψάθες διὰ τὶς ἐπίστρωσιν τῆς βάσεως ;

δ'. Ὄγκος τοῦ κώνου

Παίρνομεν ἕνα δοχεῖον κωνικὸν καὶ τὸ γεμίζομεν νερό. Ἔπειτα ἀδειάζομεν τὸ νερὸ εἰς ἕνα δοχεῖον κυλινδρικόν, μὲ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν. Θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι θὰ πρέπει νὰ ἀδειάσωμεν εἰς τὸ κυλινδρικὸν δοχεῖον 3 φορὰς γεμᾶτο τὸ κωνικόν. Ἢ τὸ δοχεῖον τὸ κυλινδρικὸν μὲ ἴσον ὕψος καὶ βάσιν μὲ τὸ κωνικόν, θὰ γεμίση 3 φορὰς τὸ κωνικόν.

Ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εὑρίσκεται ὅπως τοῦ κυλίνδρου, ἀλλὰ κατὰ τρεῖς φορὰς ὀλιγώτερος. Καὶ διὰ συντομίαν : ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος διὰ 3.

Παρατήρησις. Ὁ Σωτήρης ἐνεθυμήθη τὴν πυραμίδα.—Προχθὲς ἐσυγκρίναμεν τὸ πρῖσμα μὲ τὸν κύλινδρον καὶ τὰ βρήκαμε ὅτι εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν τὶς αὐτὲς διαστάσεις. Ἐπίσης ὅτι τὸ πρῖσμα γίνεται κύλινδρος, ὅταν διπλασιάζωμεν ἀδιακόπως τὰς πλευράς του.

Ἔτσι παίρνομε μίαν πυραμίδα καὶ τὴν βάσι της ἐγγράφομεν εἰς κύκλον καὶ διπλασιάζομεν ἀδιακόπως τὰς πλευράς της. Θὰ καταντήση ἡ περίμετρος τῆς βάσεώς της νὰ γίνη ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Ὁ κύκλος αὐτὸς θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν κύκλον τῆς βάσεως τοῦ κώνου. Ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος θὰ καταντήση ἀπὸ τεθλασμένη, κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου.

— Λοιπόν, ὅπως τὸ πρῖσμα θὰ γίνη κύλινδρος, ἔτσι καὶ ἡ πυραμίδα κῶνος.

— Αὐτὸ ἂς τὸ δοκιμάσωμεν, λέγει ὁ διδάσκαλος.

— Νά, μία πυραμὶς καὶ αὐτὸς ὁ κῶνος ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν.

— Γέμισέ τα νερό, Ἀλίκη.

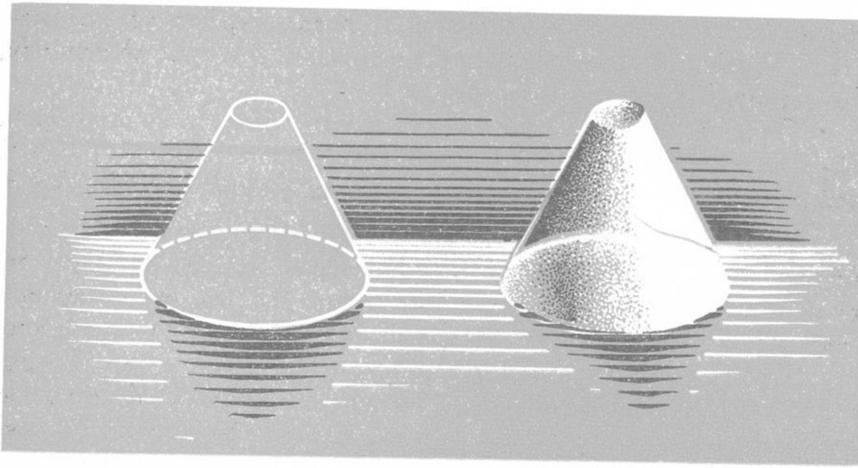
Ἡ Ἀλίκη γεμίζει πρῶτα τὸν κῶνον καὶ ἔπειτα τὸν ἀδειάζει εἰς τὴν πυραμίδα. Οὔτε μία στογόνα περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον ἐχώρεσεν ἡ πυραμίς. Ἔτσι ἐφθάσαμεν νὰ συνταυτίσωμεν πυραμίδα καὶ κῶνον. Ὅ,τι ἐκάμαμεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος, κάμνομεν καὶ διὰ τὸν κῶνον.

Ἐρωτήσεις: 1) Πῶς εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον κώνου; Γράψατε τὸν κανόνα.

Προβλήματα: 1) Ἕνα κωνικὸν δοχεῖον ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 0,6 μ. καὶ ὕψος 2,5 μ. Πόσα κιλὰ οἰνοπνεύματος χωρεῖ ; Πόσας ὀκάδας ;

2) Ἕνας κῶνος ἔχει διάμετρον βάσεως 0,5 μ. καὶ ὕψος 1,6 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ; Πόσον ἔλαιον χωρεῖ ;

3) Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κωνικοῦ ὑψώματος εἶναι 1.735 μ. Τὸ ὕψος του 265 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του καὶ πόσας ὀκάδας σιδηρομεταλλεύματος θὰ βγάλωμεν, ὅταν ὁλόκληρον τὸ ὕψωμα εἶναι ἐκ σιδηροπυρίτου ;



2. Κόλουρος κῶνος

α΄. Τί εἶναι κόλουρος κῶνος

Ὁ διδάσκαλος ἔβγαλεν ἀπὸ τὸ κιβώτιον ἕνα στερεὸν σῶμα.

Τὰ παιδιὰ δὲν ἐδυσκολεύθησαν νὰ καταλάβουν, τί σχῆμα ἦτο.

— Κόλουρος κῶνος, εἶπον.

Προχθὲς μὲ τὴν συνταύτισιν τῆς πυραμίδος μὲ τὸν κῶνον, ἔζησαν ὅλα τὰ παιδιά.

Τὰ παιδιὰ ἐξετάζουν τὸν κόλουρον κῶνον :

— Τὸ σχῆμα αὐτὸ ὁμοιάζει μὲ τὸν κῶνον.

—Ἔχει ὅμως μιὰ τομὴ (κόψιμο) κάτω ἀπὸ τὴν κορυφήν, ὁριζοντία πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου.

Ἀλίκη—Ἑλένη.—Ἐμεῖς ἐκάμαμε ἕναν κῶνο καὶ τὸν κόψαμε μ᾽ ἕνα μαχαῖρι ὁριζόντια. Τὸ κομμάτι τὸ ἕνα ἔχει καὶ τὴν κορυφὴ μαζί του. Εἶναι μάλιστα καὶ τέλειος κῶνος. Τὸ ὑπόλοιπο ποὺ ἔμεινεν ἀπὸ τὴ βάσι ὡς τὸ κόψιμο εἶναι ὁλόκληρος κῶνος.

— Τὰ ἀμπαζοὺρ εἶναι κόλουρος κῶνος, ἡ δακτυλήθρα, τὰ ποτήρια, οἱ γλάστρες.

Ὁ κόλουρος κῶνος ἔχει τώρα *τρεῖς ἐπιφάνειες, δύο κυκλικὲς καὶ μία κυρτή.*

— Οἱ κυκλικὲς ἐπιφάνειες λέγονται βάσεις. Εἶναι παράλληλες μεταξύ τους, ἀλλ' ἄνισες.

—Ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου εἶναι μικτή.

—Ὕψος λέγεται ἡ εὐθεῖα (ἄξων), ποὺ ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν δύο κύκλων.

— Πλευρά, ἡ εὐθεῖα, ποὺ ἑνώνει τὶς περιφέρειες τῶν δύο κύκλων.

— Γιὰ βάσι τοῦ κώνου παίρνομε τὸν μεγαλύτερο κύκλο του.

Ἐργασίαι: Κάμετε ἕνα κόλουρον κῶνον ἀπ' ὅ, τι θέλετε. Ἡ Ἀλίκη καὶ ἡ Ἑλένη μᾶς εἶπαν, πῶς τὸν ἔκαμαν.

Ἐρωτήσεις: Τί λέγεται κόλουρος κῶνος ;

β'. Ἐμβαδὸν τοῦ κολούρου κώνου

Ὁ Σωτήρης ἄνοιξε τὸν κόλουρον κῶνον του. Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνειά του μοιάζει, λέγει, μὲ τραπέζιο.

Ἔτσι ἐφθάσαμε στὴν ἴδια ἐργασία μὲ τὴν κόλουρον πυραμίδα.

— Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο βάσεών του ἐπὶ τὸ ὕψος διὰ δύο. —Βάσεις ὅμως στὸ ἀνάπτυγμα τοῦ κολούρου κώνου εἶναι αἱ περιφέρειαι τῶν δύο κύκλων του. Ἔτσι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου πολλαπλασιάζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο περιφερειῶν του ἐπὶ τὴν πλευράν του καὶ διαιροῦμεν διὰ 2. Διὰ νὰ εὕρωμεν ὅλον τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου θὰ εὕρωμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο κύκλων του καὶ θὰ προσθέσωμεν τὰ τρία ἐμβαδά.

Παράδειγμα. Ἕνας κόλουρος κῶνος ἔχει πλευρὰν 5 μ. Ἡ ἀκτὶς τοῦ μεγάλου κύκλου εἶναι 4 μ. Ἡ ἀκτὶς τοῦ μικροῦ 2 μ. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ ὅλης τῆς ἐπιφανείας του.

2.4.3,14 = 25,12 μ. εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ μεγάλου κύκλου.

2.2.3,14 = 12,56 μ. εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ μικροῦ κύκλου του.

37,68 μ. εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν δύο κύκλων.

Α′ $\dfrac{37,68.5}{2} = 94,20$ τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου.

Β′ $\dfrac{25,12.4}{2} = 50,24$ τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγάλου κύκλου

Γ′ $\dfrac{12,56.2}{2} = 12,56$ τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικροῦ κύκλου.

157,00 τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου.

Ἐρωτήσεις: Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κολούρου κώνου ;

Προβλήματα: 1) Αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων ἀπὸ ἕνα ἀμπαζούρ εἶναι ἡ μία 0,08 μ. καὶ ἡ ἄλλη 0,02 μ. Ἡ πλευρά του εἶναι 0,12 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του ;

2) Αἱ διάμετροι τῶν βάσεων μιᾶς γλάστρας εἶναι 0,4 καὶ τῆς ἄλλης 0,15 μ. Ἡ πλευρά της εἶνα 0,5 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας της ;

3) Κάμετε καὶ σεῖς δύο παρόμοια προβλήματα.

γ′. Ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κολούρου κώνου εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τοῦ τελείου κώνου. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὸν ὄγκον τοῦ κώνου ποὺ λείπει. Διότι ὁ κῶνος, ποὺ λείπει, εἶναι τέλειος πάλιν, μὲ κορυφὴν καὶ ὅλα τὰ στοιχεῖα, ποὺ τὸν κάμνουν ἀκριβῆ καὶ ἠξεύρομεν εὐκόλως τὴν εὕρεσιν τοῦ ὄγκου του.

Ἕνας ὅμως ἀκριβὴς τρόπος, ὅταν δὲν ἔχωμεν εἰς τὰς χεῖρας μας τὸ μέρος τοῦ κώνου ποὺ λείπει, εἶναι ὁ ἑξῆς :

Πολλαπλασιάζομεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ μεγάλου κύκλου ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της. Ἐπίσης καὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ μικροῦ κύκλου ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της. Ἔπειτα τὴν μεγάλην ἐπὶ τὴν μικράν. Προσθέτομεν τὰ τρία γινόμενα, καὶ ὅ,τι εὕρομεν τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ὕψος, ἐπὶ τὸ 3,14 καὶ διαιροῦμεν ὅλο αὐτὸ διὰ 3.

Νά καὶ ὁ τύπος : $\dfrac{(\text{Α.Α} + \text{α.α} + \text{Α. α.υ}).3,14}{3}$

Παράδειγμα. Ἕνας κόλουρος κῶνος ἔχει Α (ἀκτῖνα τοῦ μεγάλου κύκλου του) 2μ., α (ἀκτῖνα τοῦ μικροῦ κύκλου του) 0,4 μ. καὶ ὕψος 0,8 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

$$\frac{(2.2 + 0{,}4.0{,}4 + 2.0{,}4.0{,}8).\ 3{,}14}{3}$$

Πράξεις

α) $2 \times 2 = 4$
$0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$
$2 \times 0{,}4 = 0{,}8$
4.96

β) $4{,}96 \times 0{,}8 = 3{,}698$
$3{,}698 \times 3{,}14 = 12{,}459$
$12{,}459 : 3 = 4{,}153.17$ κ.μ.

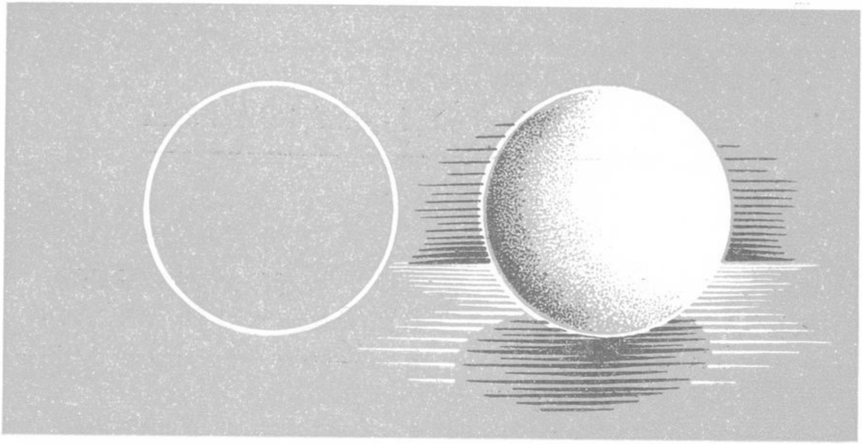
Εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου.

Προβλήματα: 1) Θέλω νὰ κάμω ἕνα δοχεῖο σχήματος κολούρου κώνου διὰ νὰ μεταφέρω ἔλαιον. Ὁ κύκλος τῆς βάσεως νὰ ἔχῃ διάμετρον 2,4 μ. Ὁ ἄλλος 0,8 μ. Τὸ ὕψος του νὰ εἶναι 2,5 μ. Πόσα κυβικὰ ἔλαιον θὰ χωρῇ; Πόσας ὀκάδας;

2) Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 6 μ., ἡ ἄλλη 1,5 μ. Τὸ ὕψος του εἶναι 7 μ. Πόσα κυβ. μέτρα νεροῦ χωρεῖ;

3) Πόσα κυβικὰ μέτρα ξυλείας ἔχει ἕνα δένδρον, ποὺ ἡ μία βάσις του ἔχει περιφέρειαν 5 μ., ἡ ἄλλη 1 μ. καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 12 μέτρα;

4) Κάμετε δύο ἰδικά σας παρόμοια προβλήματα.



3. Σφαῖρα

α΄. Σώματα σφαιρικὰ

Ἡ μπάλλα, τὰ διάφορα τόπια, οἱ βόλοι, ὡρισμένα πορτοκάλια, καρπούζια, οἱ μπίλιες τοῦ μπιλιάρδου, ὡρισμένοι γλόμποι πολυφώτων, ἡ γῆ, ἡ ὑδρόγειος σφαῖρα τοῦ σχολείου μας. Ὅλα αὐτὰ τὰ σώματα λέγονται σφαιρικὰ σώματα.

β΄. Ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας

Παρατηροῦμεν ἕνα τόπι. Τώρα στέκεται εἰς ἕνα μέρος τῆς ἐπιφανείας του, τὸ σημειώνομεν. Τὸ κυλοῦμεν. Βλέπομεν, ὅτι ἐστάθη εἰς ἄλλο. Ὥστε ἡ σφαῖρα δὲν ἔχει ὡρισμένην βάσιν, διότι *ἡ ἐπιφάνειά της εἶναι μία καὶ ὅλη κυρτή.*

γ΄. Τομὴ τῆς σφαίρας

Ὁ διδάσκαλος ἤνοιξε τὴν σφαῖραν καὶ ἐχωρίσθη εἰς δύο ἴσα μέρη. Ἡ τομὴ (τὸ κόψιμον) παρουσίασε δύο κύκλους. Οἱ κύκλοι αὐτοὶ ἔχουν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν. Ἐκόψαμεν καὶ ἕνα ὁλοστρόγγυλον πορτοκάλι. Πρῶτον, ὄχι εἰς τὸ μέσον. Πάλιν τὸ κόψιμον παρουσίασε κύκλον. Ἀλλὰ μικρότερον. Ὅσας τομὰς καὶ ἂν κάμωμεν εἰς τὴν σφαῖραν, θὰ γίνουν κύκλοι.

δ'. Μέγιστος κύκλος

Κόπτομεν τώρα τὸ πορτοκάλι ἀκριβῶς εἰς τὸ μέσον. Βλέπομεν, ὅτι ὁ κύκλος ποὺ ἔγινεν, εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἐξ ὅλων.

Ὥστε, ὅταν ἡ τομὴ γίνῃ εἰς τὸ μέσον, ὁ κύκλος αὐτὸς εἶναι ὁ μεγαλύτερος. Αὐτὸς λέγεται *μέγιστος* κύκλος. Ὅσον ἡ τομὴ ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὸ μέσον, τόσον ὁ κύλκος εἶναι μικρότερος.

ε'. Ἡμισφαίρια

Ὁ μέγιστος κύκλος τῆς τομῆς τῆς σφαίρας χωρίζει αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη. Αὐτὰ λέγονται ἡμισφαίρια. Ἔτσι ὁ Ἰσημερινὸς εἶναι ὁ μέγιστος κύκλος τῆς γηΐνης σφαίρας, ὁ ὁποῖος χωρίζει τὴν γῆν εἰς δύο ἡμισφαίρια. Τὸ Βόρειον καὶ τὸ Νότιον.

Εἰς κάθε σφαῖραν ἕνας μόνον μέγιστος κύκλος ὑπάρχει, ἀπὸ ὁποιοδήποτε μέρος καὶ ἂν κόψωμεν τὴν σφαῖραν. Ὅσοι κύκλοι δὲν περνοῦν ἀπὸ τὸ μέσον τῆς σφαίρας, λέγονται μικρότεροι.

στ'. Κέντρον τῆς σφαίρας

Ὁ μέγιστος κύκλος εἴδομεν ὅτι χωρίζει τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἡμισφαίρια. Ἡ τομὴ ἔχει κυκλικὴν ἐπιφάνειαν. Τὸ κέντρον τοῦ μεγίστου κύκλου εἶναι καὶ κέντρον τῆς σφαίρας. Ὅπως ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρον, ἔτσι καὶ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρον της. Κέντρον λοιπὸν εἶναι τὸ μέσον ἀκριβῶς τῆς σφαίρας.

Τί λέγεται λοιπὸν σφαῖρα ; Ὁ Θανάσης ἔδωσε τὸν καλύτερον ὁρισμόν :

Σφαῖρα λέγεται τὸ στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ μίαν μόνον κυρτὴν ἐπιφάνειαν, ποὺ ὅλα τὰ σημεῖα της ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

ζ'. Ἀκτὶς τῆς σφαίρας

Κάθε ἀκτὶς τοῦ μεγίστου κύκλου ἑνώνει τὸ κέντρον του μὲ ἕνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας του. Ἔτσι κάθε εὐθεῖα γραμμή, ποὺ ἑνώνει ἕνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μὲ τὸ κέντρον, λέγεται ἀκτίς. Ὅπως εἰς τὸν κύκλον ἔτσι καὶ εἰς τὴν σφαῖραν ὑπάρχουν πάρα πολλαὶ ἀκτῖνες. Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἔτσι καὶ ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τῆς σφαίρας εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ὁ Σωκράτης τότε εἶπε: —Ἀπὸ τὴν σφαῖραν αὐτὴν (καὶ ἔδειξε τὴν σφαῖραν τοῦ σχολείου), συμπεραίνομεν, ὅτι ὅλοι οἱ τόποι τῆς Γῆς ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρον της. Ἔτσι καὶ ἡ Ἀμερικὴ καὶ ἡ Ἀσία καὶ ἡ Εὐρώπη καὶ ἡ Ἀφρικὴ καὶ ἡ Αὐστραλία καὶ γενικὰ κάθε γωνία τῆς Γῆς ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρον της.

η'. Διάμετρος τῆς σφαίρας

Ἡ εὐθεῖα ποὺ ἑνώνει δύο σημεῖα τῆς περιφερείας καὶ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρον λέγεται εἰς τὸν κύκλον διάμετρος. Τὸ ἴδιον καὶ εἰς τὴν σφαῖραν: Ἡ εὐθεῖα γραμμή, ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ ἑνώνει δύο σημεῖα τῆς ἐπιφανείας της, λέγεται *διάμετρος*. Ὅλαι αἱ διάμετροι τῆς σφαίρας εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ὅπως καὶ τοῦ κύκλου. Ἐπίσης ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος της. Εἰς κάθε σφαῖραν δυνάμεθα νὰ σύρωμεν πολλὰς διαμέτρους.

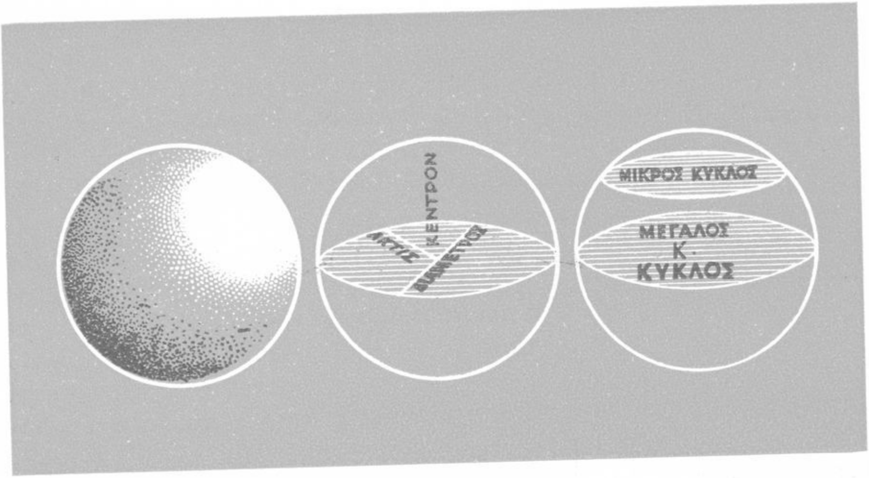
Ἔτσι οἱ μέγιστοι κύκλοι μιᾶς σφαίρας ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον, τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα καὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον μὲ τὴν σφαῖραν των.

Παρατήρησις. Αἱ ἀκτῖνες καὶ αἱ διάμετροι τῆς σφαίρας σχηματίζονται κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον μὲ τοῦ κύκλου. Ἀλλὰ ἀντὶ νὰ λέγωμεν ὅπως καὶ τοῦ κύκλου *περιφέρεια*, εἰς τὴν σφαῖραν θὰ λέγωμεν *ἐπιφάνεια*.

θ'. Ἄξων

Ἡ Γῆ εἴπομεν ὅτι εἶναι μία πελωρία σφαῖρα. Φανταζόμεθα μίαν διάμετρον γύρω ἀπὸ τὴν ὁποίαν στρέφεται ἡ Γῆ *ἀπὸ δυσμῶν πρὸς ἀνατολάς*. Ἡ διάμετρος αὐτή, φυσικά, ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς Γῆς, λέγεται *ἄξων*.

— Νά, λέγει ὁ Φάνης. Πέρασα ἀπὸ τὸ ὁλοστρόγγυλο πορτοκάλι μου, αὐτὸ τὸ ξύλο. Αὐτὸς εἶναι ὁ ἄξονας. Ἔτσι ἐμάθαμε στὴ Γεωγραφία ὅτι στρέφεται ἡ Γῆ. Ἀπὸ τὴ Δύση στὴν Ἀνατολή. Τὸν γύρο αὐτὸ τὸν κάνει σὲ 24 ὧρες.— Τὸ ἕνα ἄκρο τοῦ ἄξονο λέγεται Βόρειος Πόλος.— Τὸ ἄλλο, Νότιος.



— Οἱ μέγιστοι κύκλοι ποὺ περνοῦν ἀπὸ τοὺς δύο πόλους της, λέγονται μεσημβρινοί. Γιατί, ὅταν ὁ Ἥλιος κατὰ τὴν περιστροφὴν τῆς Γῆς βρεθῆ πάνω σὲ καθένα ἀπ' αὐτούς, ὅλοι οἱ τόποι τους ἔχουν μεσημβρίαν. Οἱ ἄλλοι, ποὺ εἶναι στὸ ἄλλο, τὸ ἀπέναντι ἡμισφαίριον, μεσάνυχτα. Ὡς πρῶτο μεσημβρινὸ ποὺ πῆραν οἱ ἐπιστήμονες γιὰ βάσι, εἶναι αὐτός, ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ Γκρήνουϊτς. Ἐκεῖ εὑρίσκεται καὶ τὸ μεγαλύτερο ἀστεροσκοπεῖο τοῦ κόσμου.

— Ἡ ἀπόστασι κάθε μεσημβρινοῦ ἀπὸ τὸν πρῶτο λέγεται, στὴ Γεωγραφία, γεωγραφικὸ μῆκος. Ὅταν εἶναι ἡ ἀπόστασι ἀπὸ τὰ δυτικά, δυτικό. Ὅταν ἀπὸ τὰ ἀνατολικά, ἀνατολικό. Ὁ πρῶτος μεσημβρινὸς χωρίζει τὴ Γῆ, ἀκριβῶς, σὲ δύο ἡμισφαίρια. Ἀνατολικὸ καὶ δυτικό. Ἔτσι ἔχουμε 180 μεσημβρινοὺς ἀνατολικά, 180 δυτικά. — Ἐνῶ ὁ μέγιστος, εἴδαμε, κύκλος, ποὺ εἶναι κάθετος στὸν ἄξονα τῆς Γῆς, λέγεται Ἰσημερινός. Αὐτὸς χωρίζει τὴ Γῆ στὸ Βόρειο καὶ τὸ Νότιο ἡμισφαίριο. Οἱ δὲ τόποι, ποὺ βρίσκονται πάνω σ' αὐτόν, ἔχουν ἰσημερία.

— Ἀπ' αὐτὸν ἕως τὸν Βόρειο Πόλο ἔχουμε 90^{0}. Καὶ ἀπ' αὐτὸν ἕως τὸν Νότιο, πάλι 90^{0} ἢ 90 παραλλήλους κύκλους πρὸς τὸν Ἰσημερινό. Ἡ ἀπόστασις ἑνὸς παραλλήλου ἀπὸ τὸν Ἰσημερινό, λέγεται γεωγραφικὸ πλάτος. Ἐπειδὴ χωρίζεται σὲ δύο ἡ Γῆ ἡμισφαίρια, ἀπὸ τὸν Ἰσημερινό, τὸ Βόρειο καὶ τὸ Νότιο, ἔχομε βόρειο γεωγραφικὸ πλάτος καὶ νότιο.

ι'. Πῶς ὁρίζομεν τὴν θέσιν ἑκάστου σημείου τῆς Γῆς.

Ὁ μέγιστος, εἴπομεν, κάθετος εἰς τὸν ἄξονα τῆς Γῆς, λέγεται Ἰσημερινός. Ὅπως κάθε κύκλος, ἔτσι καὶ ὁ Ἰσημερινὸς ἔχει 360°. Ἐχώρισαν λοιπὸν τὸν Ἰσημερινόν, εἰς 360 ἴσα μέρη, τὰς μοίρας· ἐχάραξαν ἡμικύκλια, ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως καὶ ἀπὸ τοὺς δύο πόλους. Ἔτσι ἔγιναν 360 μεσημβρινοί. Ὥστε μία μοῖρα ἀντιστοιχεῖ εἰς κάθε μεσημβρινόν. Ἡ μία μοῖρα εἶναι τὸ 1/360 τοῦ Ἰσημερινοῦ τῆς Γῆς. Ὁ Ἰσημερινὸς ἔχει 40.000.000 μ. Ἡ μία μοῖρα θὰ ἔχη 111.111 μ. ἢ 111,111 χιλιόμετρα. Ὥστε ἡ ἀπόστασις ἑνὸς μεσημβρινοῦ μέχρι τοῦ ἄλλου εἶναι 111,111 χιλιόμ. Ἐπάνω εἰς τὴν ὑδρόγειον σφαῖραν ἔχει χαραχθῆ ὁ Ἰσημερινός. 90 παράλληλοι ἢ μοῖραι ἀπὸ τὸν Ἰσημερινὸν εἰς τὸν Νότον καὶ 90 ἀπὸ τὸν Ἰσημερινὸν εἰς τὸν Βορρᾶν (δηλ. Βόρειον Πόλον). Ἐπίσης ἀπὸ τὸν Α. μεσημβρινὸν ἕως τὸ τέλος τοῦ Δυτικοῦ ἡμισφαιρίου 180°, ἢ μεσημβρινοί. Καὶ ἄλλοι 180° ἢ μεσημβρινοὶ μέχρι τοῦ τέλους τοῦ Ἀνατολικοῦ ἡμισφαιρίου. Εἰς τὸν πρῶτον μεσημβρινὸν (τοῦ Γκρήνουϊτς) δίδομεν ἀριθμὸν 0.

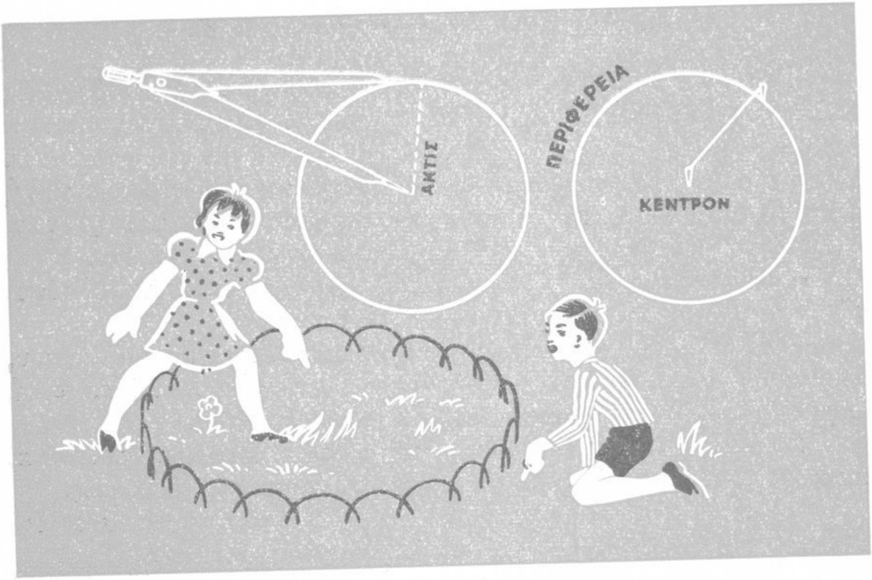
Τώρα πλέον δυνάμεθα νὰ γνωρίσωμεν ὁποιονδήποτε σημεῖον τῆς Γῆς, ἀρκεῖ νὰ μᾶς δώσουν γεωγραφικὸν μῆκος καὶ πλάτος. Ἐπίσης μὲ ἀκρίβειαν τὰς ἀποστάσεις τοῦ ἑνὸς σημείου τῆς Γῆς ἀπὸ τὸ ἄλλο.

Παράδειγμα. 1) Αἱ Ἀθῆναι εὑρίσκονται εἰς τὸν 38ὸν βόρειον παράλληλον, ἡ Ἄγκυρα εἰς τὸν 40όν. Αἱ Ἀθῆναι ὅμως εὑρίσκονται καὶ εἰς τὸ 24 ἀνατολικὸν μῆκος, ἐνῷ ἡ Ἄγκυρα εἰς 33,5 Α.Μ. Πῶς θὰ εὕρω ἀπὸ τὸν χάρτην μὲ ἀκρίβειαν, ποῦ εἶναι αἱ Ἀθῆναι καὶ ποῦ ἡ Ἄγκυρα ; Τὸ παράδειγμα ἠδύνατο νὰ γραφῆ μὲ τὰ ἀρχικὰ γράμματα ἔτσι :

Ἀθῆναι 38° ΒΠ (βόρειον πλάτος), 24° ΑΜ (ἀνατολικὸν μῆκος). Ἄγκυρα 40° Β.Π. 33,5 Α.Μ. Πῶς θὰ εὕρω εἰς τὸν χάρτην μὲ ἀκρίβειαν, ποῦ εἶναι αἱ Ἀθῆναι καὶ ποῦ ἡ Ἄγκυρα ;

Ὁ Σωτήρης λέγει : — Νά, κάτω καὶ πάνω ἀπὸ τὸ χάρτη σημειώνεται σὲ μοῖρες τὸ γεωγραφικὸ μῆκος Α καὶ Δ. δεξιὰ καὶ ἀριστερὰ τὸ γεωγραφικὸν πλάτος.

— Λοιπὸν εὑρίσκω στὰ ἀριστερὰ τὸν ἀριθμὸν 38. Ἀπὸ κάτω



ἢ πάνω εὑρίσκω τὸν ἀριθμὸν 24⁰ Α.Μ. Σύρω εὐθεῖαν γραμμὴν πρὸς τὰ ἐπάνω ἕως ὅτου συναντήσω τὸν 38 παράλληλο. Στὸ σημεῖο τῆς συναντήσεως ἀκριβῶς, εἶναι αἱ Ἀθῆναι. Ἡ Εὐθυμία: —Δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ ηὗρα τὸν 40⁰. Πάνω ἢ κάτω ὅλο δεξιὰ (γιατὶ εἶναι ἀνατολικὸν μῆκος) ηὗρα τὸ 33,5. Τραβῶ ἴσα πρὸς τὰ πάνω, ἐδῶ συναντῶ τὸν 40⁰ παράλληλο, εἶναι ἡ Ἄγκυρα.

Ἀσκήσεις. 1) Τὸ Παρίσι ἔχει 2,5⁰ ΑΜ, 48⁰ ΒΠ. Εὕρετε εἰς τὸν χάρτην ἢ τὴν σφαῖραν ποῦ ἀκριβῶς εὑρίσκεται;

2) Ἡ Λισσαβὼν ἔχει 9,2⁰ ΔΜ καὶ 38,5⁰ ΒΠ. Ποῦ εὑρίσκεται;

3) Τὸ Κάϊρον τί γεωγραφικὸ πλάτος καὶ μῆκος ἔχει;

4) Ποιὰ εἶναι ἡ πρωτεύουσα τῆς Αὐστραλίας καὶ τί γεωγραφικὸ μῆκος καὶ πλάτος ἔχει;

5) Ἡ πρωτεύουσα Ὄσλο τῆς Νορβηγίας τί γεωγραφικὸν πλάτος καὶ μῆκος ἔχει;

6) Αἱ Ἀθῆναι μὲ τὴν Σμύρνην εὑρίσκονται στὸν αὐτὸν παράλληλον. Διαφέρουν ὅμως κατὰ 4 μοίρας γεωγραφικοῦ μήκους. Πόσα χιλιόμετρα ἀπέχουν μεταξύ των;

ια'. Πῶς κανονίζομεν περίπου τὴν ὥραν

Ὅπως ἡ Γῆ γυρίζει γύρω ἀπὸ τὸν Ἥλιον, θὰ ρίψῃ διαδοχικῶς ἐπάνω του τοὺς 360 μεσημβρινούς της εἰς 24 ὥρας. Ἔτσι εἰς μίαν ὥραν ὁ ἥλιος θὰ πέσῃ κατακορύφως ἐπάνω εἰς 15 μεσημβρινούς. Ὥστε ἂν μία πόλις εἶναι ἐπάνω εἰς τὸν πρῶτον μεσημβρινὸν καὶ ἡ ἄλλη εἰς τὸν 15ον, θὰ ἔχουν διαφορὰν μίαν ὥραν μεταξύ των. Διότι ἡ πρώτη θὰ ἔχῃ μίαν ὥραν ἐνωρίτερον μεσημβρίαν.

— Λοιπὸν ἔτσι ἐξηγεῖται, λέγει ὁ Ἄλκης, γιατί ὅλοι οἱ τόποι τῆς Γῆς δὲν ἔχουν μεσημέρι τὴν αὐτὴ στιγμή.

— Γι' αὐτὸ τὸ καλοκαίρι, ποὺ πῆγα στὴν Ἄρτα, ὁ πατέρας μου, ὅταν ἐφθάσαμε, ἔβαλε τὸ ρολόγι του 12' πίσω.— Βλέπετε, ἡ Ἄρτα ἔχει 21° γεωγραφικὸν Μ. ἐνῶ ἡ Ἀθήνα 24°.

Ἡ Ἀλίκη λέγει· — Κι ἐγὼ πῆγα στὴν Καβάλα, ποὺ εἶναι μακρύτερα ἀπὸ τὴν Ἄρτα, ἀλλὰ δὲν ἀλλάξαμε τὴν ὥρα μας.

— Γιά δὲς ὅμως, λέγει ἡ Ἑλένη, ἡ Καβάλα εἶναι στὸ ἴδιο ΓΜ μὲ τὴν Ἀθήνα, κανένα-δυὸ λεπτὰ ἴσως διαφέρει.

— Ἐγώ, λέγει ὁ Νικήτας, πῆγα μὲ τὴ θεία μου στὸ Παρίσι. Ἡ θεία μου εἶναι μεγάλη μοδίστρα καὶ ἐπῆγε γιὰ φιγουρίνια καὶ μὲ πῆρε κι ἐμένα.— Ἡ θεία μου ἔβαλε τὸ ὡρολόγι της στὸ Παρίσι 1 1/2 ὥρα πίσω. Γιατὶ θυμᾶμαι, ὅταν τὸ καλοκαίρι σηκωνόμαστε τὸ πρωὶ στὶς 7, μοῦ ἔλεγε: Τώρα στὴν Ἀθήνα ἔχει βγῆ ἡ ἀδελφούλα σου. Γιατὶ περίπου ἡ ὥρα θὰ εἶναι ὀκτώμιση στὴν Ἀθήνα μας.

Ἀσκήσεις. 1) Ὅταν στὸ Λονδῖνον, ποὺ εἶναι ἐπάνω στὸν 1ον Μεσιμβρινόν, εἶναι ἡ ὥρα 1, τί ὥρα θὰ εἶναι εἰς τὴν Τεχεράνην, ποὺ εἶναι ἐπάνω εἰς τὸν 52 Α Μεσημβρινόν. Μετρᾶτε μὲ ὥρας 24. Ὅσας ἔχει τὸ ἡμερονύκτιον.

2) Ὅταν εἰς τὴν Ἀθήνα ἡ ὥρα εἶναι 12, τί ὥρα θὰ εἶναι: α) εἰς τὰ Ἱεροσόλυμα. β) Εἰς τὸ Νέον Δελχί. γ) Εἰς τὸ Πεκῖνον. δ) Εἰς τὸ Τόκιο;

3) Ὅταν ἡ ὥρα εἰς τὴν Ν. Ὑόρκη εἶναι 6, τί ὥρα θὰ εἶναι εἰς τὴν Λισσαβῶνα; Εἰς τὴν Μαδρίτην;

4) Τί διαφορὰν ὥρας ἔχουν αἱ Ἀθῆναι ἀπὸ τὴν Ρώμην; Ἀπὸ τὸ Βερολῖνον; Ἀπὸ τὸ Λονδῖνον;

ιβ'. Ἐμβαδὸν σφαίρας

Μὲ διαφόρους μετρήσεις, ποὺ ἔκαμαν οἱ γεωμέτραι, κατέληξαν εἰς τὸ ἑξῆς συμπέρασμα : Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εὑρίσκεται ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν διάμετρον ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της καὶ ἐπὶ 3,14.

Ὁ τύπος : Ε τῆς σφαίρας = δ.δ.3,14.

Παράδειγμα. Ἡ διάμετρος ἑνὸς σφαιρικοῦ ἀεροστάτου εἶναι 8 μ. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του ;

Λύσις. Ε = 8.8.3,14 = 200,96 τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἀεροστάτου.

2ος τρόπος : Ἐπίσης οἱ γεωμέτραι ηὗραν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας εἶναι τέσσαρας φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου κύκλου της.

Ἂς λύσωμεν τὸ ἴδιο πρόβλημα :

8 : 2 = 4μ. εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας τοῦ μεγίστου κύκλου της. 50,24.4 = 200,96 τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Ὁποιονδήποτε ἀπὸ τοὺς δύο τρόπους χρησιμοποιήσωμεν, τὸ αὐτὸ θὰ εὕρωμεν ἀποτέλεσμα.

Παρατηρήσεις. Ὁ Φάνης λέγει : Ὁ κύκλος ἀπὸ τὸν κύλινδρον καὶ δῶθε πάρα πολὺ μᾶς ἐχρησίμευσε. Μὲ τὴν γνῶσι τοῦ κύκλου, δὲν δυσκολευθήκαμε στὴ λύσι τῶν προβλημάτων καθὼς καὶ στὴν κατανόησι τῶν σωμάτων.

Προβλήματα. 1) Ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας εἶναι 9,7 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν της ;

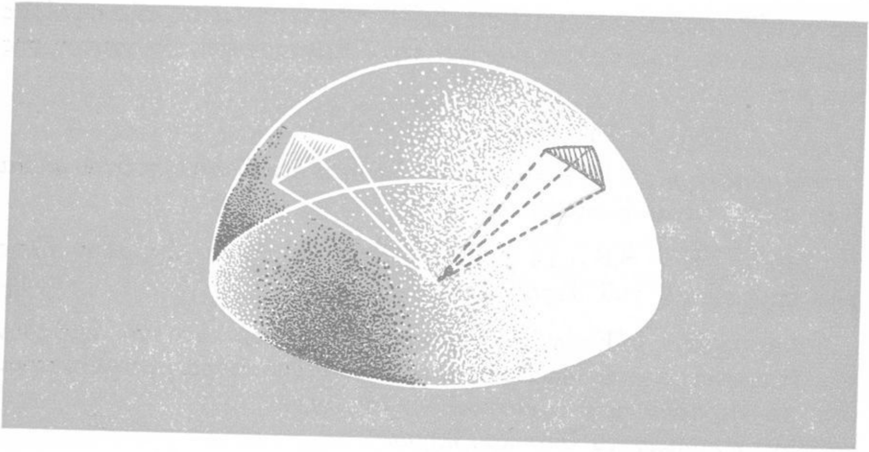
2) Πόσον ὕφασμα χρειάζεται διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα μπαλόνι σφαιρικὸν μὲ διάμετρον 23 μ.;

3) Ὁ μέγιστος κύκλος μιᾶς σφαίρας εἶναι 6,2 τ.μ. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας;

4) Τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς σφαίρας εἶναι 136,2 τ.μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ διάμετρός της; ἡ ἀκτίς της;

5) Ὁ μέγιστος κύκλος μιᾶς σφαίρας ἔχει περιφέρειαν 236 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας ;

6) Κάμετε ὅλοι σας μίαν σφαῖραν ἀπὸ ὅ,τι θέλετε.



ιγ'. Εὕρεσις τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας

Οἱ γεωμέτραι ἔπειτα ἀπὸ πολλὰς μετρήσεις ηὗραν, ὅτι τὴν σφαῖραν δυνάμεθα νὰ τὴν χωρίσωμεν εἰς πάρα πολλὰς πυραμίδας. Αἱ πυραμίδες αὐταὶ θὰ ἔχουν βάσιν ἡ κάθε μία ἕνα μέρος τῆς σφαίρας. Ὕψος τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας καὶ κοινὴν κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Ὁ διδάσκαλος βγάζει ἕνα πορτοκάλι. Χαράσσει ἐπάνω εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἕνα τρίγωνον. Βυθίζει ἐπάνω εἰς τὰ χαράγματα βαθειὰ τὸ μαχαίρι ἕως τὸ κέντρον καὶ ἀποχωρίζει τὸ τεμάχιον. Βλέπομεν πράγματι μίαν τριγωνικὴν πυραμίδα. Συνεχίζει ἔτσι καὶ τὸ πορτοκάλι ἔγινεν ὅλον τριγωνικαὶ πυραμίδες.

— Τότε, λέγει ὁ Γιῶργος, *ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα διὰ 3.*

Παράδειγμα. Μία σφαῖρα σιδηρᾶ ἔχει ἀκτῖνα 2 μέτρα. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος της καὶ τὸ βάρος εἰς κιλά ;

$2 + 2 = 4$ μ. ἡ διάμετρός της.

$4.4.3,14 = 50,24$ τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδόν της.

$\dfrac{50,24.2}{3} = 33,49$ κ.μ. εἶναι ὁ ὄγκος της ἢ 33,490 κ.π.

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ σφαῖρα εἶναι ἀπὸ σίδηρον, ὁ δὲ σίδηρος ἔχει εἰδικὸν βάρος 7,6 πολλαπλασιάζω τὸν ὄγκον της ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν. Ἔτσι φυσικὰ ἐκάμαμεν ἐξ ἀρχῆς.

33, 49.7,6 = 254,524 κυβ. μ. ἢ 254,524 κυβ. παλάμαι ἢ χιλιόγραμμα εἶναι τὸ βάρος τῆς σφαίρας αὐτῆς.

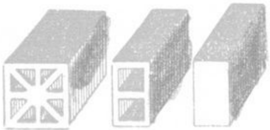
Προβλήματα. 1) Ἡ ἀκτὶς τοῦ μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι 0,2 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

2) Ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας ὑαλίνης (τὴν ὁποίαν χρησιμοποιοῦν διὰ πειράματα) εἶναι 0,9 μ. Πόσα κιλὰ οἰνοπνεύματος χωρεῖ;

3) Μία συμπαγὴς σφαῖρα ἐξ ἀργύρου ἔχει ἀκτῖνα 1,2 μ. Πόσον ζυγίζει;

4) Ἕνας σφαιρικὸς ὄγκος μολύβδου ἔχει διάμετρον 6 μέτρα. Πόσα κιλὰ καὶ πόσας ὀκάδας ζυγίζει;

5) Κάμετε ἕναν ἔλεγχον εἰς τὰ τετράδιά σας, μήπως σᾶς λείπει κανένας κανὼν ἀπὸ τὰ σχήματα, ποὺ ἐμάθαμε καὶ ἐκάναμε.

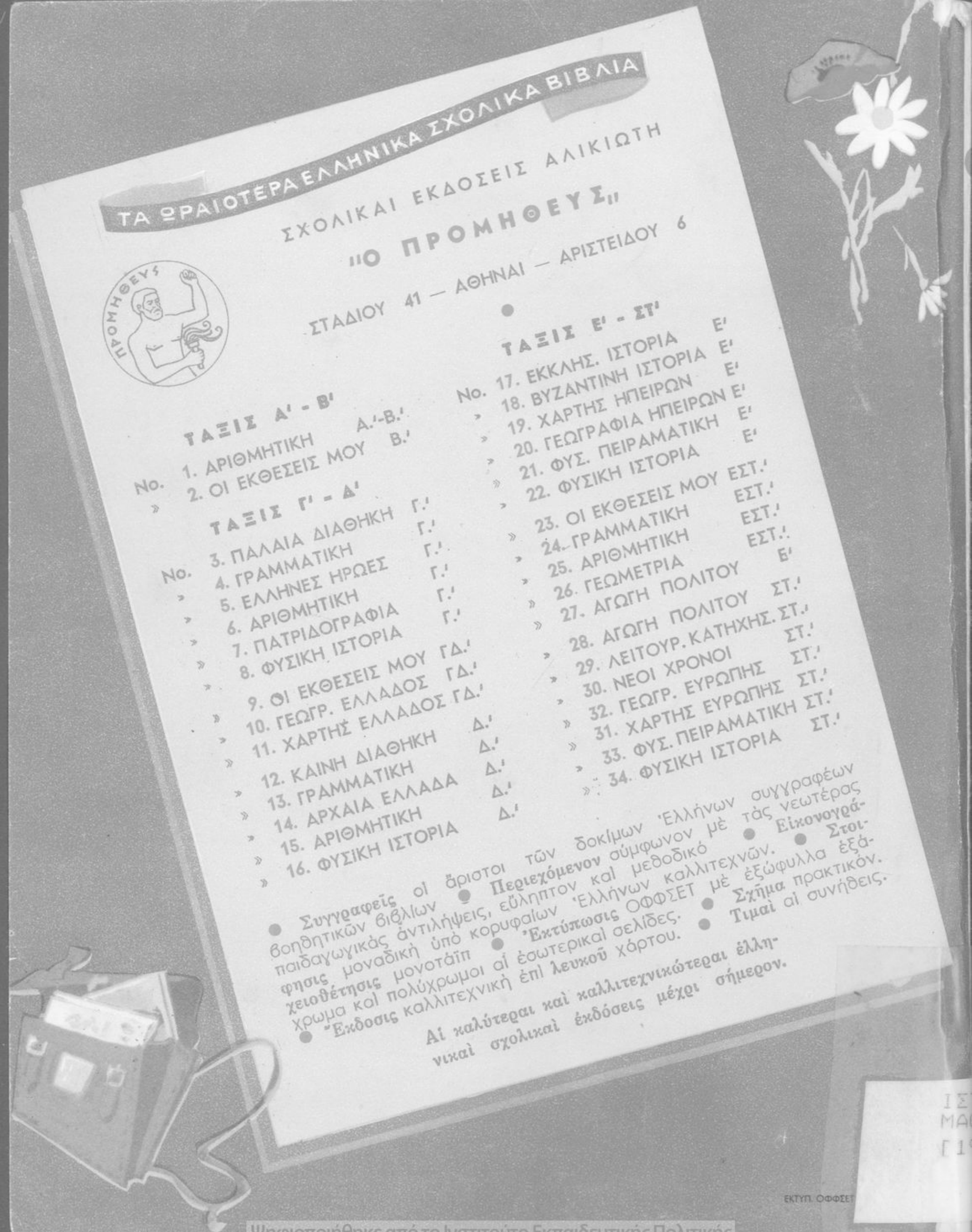


1,2
1,2

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Β'.—Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον

Γ'. Πλάγιον παραλληλεπίπεδον


ΤΑ ΩΡΑΙΟΤΕΡΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ
ΣΧΟΛΙΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΑΛΙΚΙΩΤΗ
"Ο ΠΡΟΜΗΘΕΥΣ"
ΣΤΑΔΙΟΥ 41 — ΑΘΗΝΑΙ — ΑΡΙΣΤΕΙΔΟΥ 6
ΠΡΟΜΗΘΕΥΣ
ΤΑΞΙΣ Α' - Β'
No. 1. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ Α.'-Β.'
» 2. ΟΙ ΕΚΘΕΣΕΙΣ ΜΟΥ Β.'
ΤΑΞΙΣ Γ' - Δ'
No. 3. ΠΑΛΑΙΑ ΔΙΑΘΗΚΗ Γ.'
» 4. ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗ Γ.'
» 5. ΕΛΛΗΝΕΣ ΗΡΩΕΣ Γ.'
» 6. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ Γ.'
» 7. ΠΑΤΡΙΔΟΓΡΑΦΙΑ Γ.'
» 8. ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ Γ.'
» 9. ΟΙ ΕΚΘΕΣΕΙΣ ΜΟΥ ΓΔ.'
» 10. ΓΕΩΓΡ. ΕΛΛΑΔΟΣ ΓΔ.'
» 11. ΧΑΡΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ ΓΔ.'
» 12. ΚΑΙΝΗ ΔΙΑΘΗΚΗ Δ.'
» 13. ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗ Δ.'
» 14. ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΑΔΑ Δ.'
» 15. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ Δ.'
» 16. ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ Δ.'
ΤΑΞΙΣ Ε' - ΣΤ'
No. 17. ΕΚΚΛΗΣ. ΙΣΤΟΡΙΑ Ε'
» 18. ΒΥΖΑΝΤΙΝΗ ΙΣΤΟΡΙΑ Ε'
» 19. ΧΑΡΤΗΣ ΗΠΕΙΡΩΝ Ε'
» 20. ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ ΗΠΕΙΡΩΝ Ε'
» 21. ΦΥΣ. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ Ε'
» 22. ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ Ε'
» 23. ΟΙ ΕΚΘΕΣΕΙΣ ΜΟΥ ΕΣΤ.'
» 24. ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗ ΕΣΤ.'
» 25. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΣΤ.'
» 26. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΕΣΤ.'
» 27. ΑΓΩΓΗ ΠΟΛΙΤΟΥ Ε'
» 28. ΑΓΩΓΗ ΠΟΛΙΤΟΥ ΣΤ.'
» 29. ΛΕΙΤΟΥΡ. ΚΑΤΗΧΗΣ. ΣΤ.'
» 30. ΝΕΟΙ ΧΡΟΝΟΙ ΣΤ.'
» 32. ΓΕΩΓΡ. ΕΥΡΩΠΗΣ ΣΤ.'
» 31. ΧΑΡΤΗΣ ΕΥΡΩΠΗΣ ΣΤ.'
» 33. ΦΥΣ. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΣΤ.'
» 34. ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ ΣΤ.'
● **Συγγραφεῖς** οἱ ἄριστοι τῶν δοκίμων Ἑλλήνων συγγραφέων βοηθητικῶν βιβλίων ● **Περιεχόμενον** σύμφωνον μὲ τὰς νεωτέρας παιδαγωγικὰς ἀντιλήψεις, εὔληπτον καὶ μεθοδικό ● **Εἰκονογράφησις** μοναδικὴ ὑπὸ κορυφαίων Ἑλλήνων καλλιτεχνῶν. ● **Στοιχειοθέτησις** μονοτάϊπ ● **Ἐκτύπωσις** ΟΦΦΣΕΤ μὲ ἐξώφυλλα ἑξάχρωμα καὶ πολύχρωμοι αἱ ἐσωτερικαὶ σελίδες. ● **Σχῆμα** πρακτικόν. ● **Ἔκδοσις** καλλιτεχνικὴ ἐπὶ **λευκοῦ** χάρτου. ● **Τιμαὶ** αἱ συνήθεις.
Αἱ καλύτεραι καὶ καλλιτεχνικώτεραι ἑλληνικαὶ σχολικαὶ ἐκδόσεις μέχρι σήμερον.
ΕΚΤΥΠ. ΟΦΦΣΕΤ