ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΕΝ ΤΩ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΩ
ΚΑΙ ΤΗ ΣΧΟΛΗ ΤΩΝ Ν. ΔΟΚΙΜΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Διὰ τὰ ἑλληνικὰ σχολεῖα, τὰ ἀστικὰ
καὶ τὰ ἀνώτερα παρθεναγωγεῖα

Ἐνεκρίθη κατὰ τὴν ὑπ' ἀριθ. $\frac{36398}{4\text{-}11\text{-}17}$ κοινοποίησιν
τοῦ Ὑπουργείου τῆς Παιδείας.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΚΑΤΗ

Ἀριθ. Πράξεως Ἐκπ. Συμβ. $\frac{34}{14\text{-}8\text{-}26}$
Τιμᾶται μετὰ βιβλιοσ. καὶ φόρου Δρ. 31,10
Ἀξία βιβλιοσήμου . . . . . . » 11,50
Πρόσθετος φόρος ἀναγκ. δανείου » 2,30

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΣΙΔΕΡΗ
ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ—ΜΕΓΑΡΟΝ ΑΡΣΑΚΕΙΟΥ
1926

ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ
ΕΝ ΤΩ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΩ ΚΑΙ ΤΗ ΣΧΟΛΗ ΤΩΝ Ν. ΔΟΚΙΜΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Κωνσταντίνος Ν Πουρνάρας

Διὰ τὰ ἑλληνικὰ σχολεῖα, τὰ ἀστικὰ καὶ τὰ ἀνώτερα παρθεναγωγεῖα

Ἐνεκρίθη κατὰ τὴν ὑπ' ἀριθ. $\frac{36398}{4\text{-}11\text{-}17}$ κοινοποίησιν τοῦ Ὑπουργείου τῆς Παιδείας.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΚΑΤΗ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΣΙΔΕΡΗ
ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ—ΜΕΓΑΡΟΝ ΑΡΣΑΚΕΙΟΥ
1926

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως θεωρεῖται κλεψίτυπον.

ΣΥΝΟΠΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

5

Σημείωσις διὰ τὸν διδάσκοντα.

Τὰ προβλήματα τοῦ βιβλίου, εἰς τὰ ὁποῖα δὲν ἀναγράφετ[αι] ἀκριβῶς τὸ εἶδος τοῦ ἐμπορεύματος, καλὸν εἶνε νὰ συμπληροῦν-ται κατὰ τὴν διδασκαλίαν καταλλήλως ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ, ὥστ[ε] αἱ τιμαὶ τοῦ ἐμπορεύματος νὰ ἁρμόζουν κατὰ τὸ δυνατὸν μ[ὲ] τοὺς ἀναγραφομένους ἀριθμοὺς εἰς τὸ πρόβλημα, νὰ εἶνε δὲ τὸ ἐμ-πόρευμα ἐκ τῶν μᾶλλον γνωστῶν εἰς τοὺς μαθητὰς καὶ πρὸς τούτο[ις] ἐκ τῶν προϊόντων ἰδίως τοῦ τόπου ἐν ᾧ λειτουργεῖ τὸ σχολεῖον.

Α

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

Περὶ γραφῆς καὶ ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν.

§ 1. Περὶ ἀριθμήσεως καὶ ἀριθμοῦ.—

α΄) Ἐὰν ἔχωμεν ἓν πλῆθος μήλων, δυνάμεθα νὰ κάμωμεν διαφόρους ἐρωτήσεις περὶ αὐτῶν. Π. χ. πόσον βάρος, ἢ ποῖον χρῶμα ἔχουν; ἢ πόσα μῆλα ἔχει τὸ πλῆθος; Διὰ ν' ἀπαντήσωμεν εἰς τὴν τελευταίαν ἐρώτησιν, λαμβάνομεν ἓν μῆλον ἀπὸ τὸ πλῆθος καὶ τὸ θέτομεν χωριστὰ ἀπὸ τὰ ἄλλα. Πλησίον αὐτοῦ θέτομεν ἓν ἄλλο, τὸ ὁποῖν λαμβάνομεν ἀπὸ τἀπομείναντα τοῦ πλήθους καὶ λέγομεν ὅτι ἔχομεν δύο μῆλα χωριστὰ ἀπὸ τὸ πλῆθος. Ἔπειτα λαμβάνομεν ἓν ἀκόμη ἀπὸ τἀπομείναντα, θέτομεν αὐτὸ πλησίον τῶν δύο καὶ λέγομεν ὅτι ἐλάβομεν τρία μῆλα ἀπὸ τὸ πλῆθος. Οὕτω καθεξῆς ἐξακολουθοῦμεν ὁμοίως, ἐνόσω μένουν ἀκόμη μῆλα εἰς τὸ πλῆθος. Ἀφοῦ λάβωμεν ὅλα τὰ μῆλα τοῦ πλήθους, κατὰ τὸν τρόπον τὸν ὁποῖον εἴπομεν, θὰ εὕρωμεν πόσα μῆλα ἔχομεν, π. χ. ἐννέα μῆλα. 5

Ἡ ἐργασία αὐτή, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν, πόσα μῆλα ἔχει τὸ δοθὲν πλῆθος τῶν μήλων, λέγεται *ἀρίθμησις* τῶν μήλων, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς ἀριθμήσεως λέγεται *ἀριθμός*, καὶ δίδει τὴν ἀπάντησιν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐρώτησιν. Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα ν' ἀριθμήσωμεν πλῆθος βώλων γλυκυσμάτων κλπ., ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται καὶ πλῆθος. Τὸ ἓν τῶν μήλων, ὁ εἷς βῶλος, ἢ τὸ ἓν γλύκυσμα ἐκ τοῦ πλήθους αὐτῶν λέγεται καὶ *μονὰς* μήλων, βώλων, γλυκυσμάτων, καθεὶς ἀριθμὸς ἀποτελεῖται, ἐν γένει, ἀπὸ πολλὰς μονάδας, ἤτοι εἶνε τὸ σύνολον πολλῶν μονάδων.

β΄) Ἐὰν ἔχωμεν ἓν πλῆθος σάκκων, οἱ ὁποῖοι εἶνε πλήρεις μήλων, καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πόσους σάκκους μήλων ἔχει τὸ πλῆθος αὐτό, θὰ θέτωμεν κατὰ μέρος ἕνα-ἕνα σάκκον, καὶ θὰ κάμωμεν τὴν ἀρίθμησιν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, καθὼς καὶ εἰς ἄλλας ὁμοίας, βλέπομεν ὅτι ἡ μονὰς τῶν σάκκων τούτων ἔχει πολλὰ μῆλα καὶ ὄχι ἓν μόνον. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι,

γ΄) *«μονὰς λέγεται ἓν ἀπὸ πολλὰ ὅμοια πράγματα, ἢ καὶ πολλὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν ὡς ἓν ὅλον».*

δ΄) *«Ἀριθμὸς λέγεται τὸ σύνολον πολλῶν μονάδων, ἢ καὶ μία μονάς».*

ε΄) *«Ἀρίθμησις ἑνὸς πλήθους λέγεται ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸ πλῆθος».*

στ΄) Ἐνίοτε τὸ εἶδος τῶν ἀντικειμένων τὰ ὁποῖα ἀριθμοῦμεν, μᾶς εἶνε ἐντελῶς ἀδιάφορον. Οὕτω, ἐὰν εἰς ἐννέα πράγματα, τὰ ὁποῖα ἔχομεν, θέσωμεν καὶ ἄλλα τέσσαρα τοῦ αὐτοῦ εἴδους, θὰ ἔχωμεν δεκατρία πράγματα τοῦ εἴδους αὐτοῦ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν καλοῦμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον *ἀφῃρημένον*. Π. χ. δέκα, τρία, ὀκτώ, κλπ. Ἐνῷ τοὺς ἀριθμοὺς εἰς τοὺς ὁποίους δηλώνομεν καὶ τὸ εἶδος τῶν ἀντικειμένων τὰ ὁποῖα παριστάνουν καλοῦμεν *συγκεκριμένους*. Π. χ. ὀκτὼ μῆλα, δώδεκα θρανία, ἑπτὰ βῶλοι κλπ.

ζ΄) Ἐὰν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ παριστάνουν τὸ αὐτὸ πρᾶγμα π.χ. ὀκτὼ μῆλα, δέκα μῆλα, λέγονται *ὁμοειδεῖς*, ἐνῷ ἐὰν παριστάνουν διάφορα πράγματα, π.χ. τρεῖς ἄνθρωποι, πέντε δραχμαί, λέγονται *ἑτεροειδεῖς*.

§ 2. Ἴσοι καὶ ἄνισοι ἀριθμοί.—

α΄) Δύο ἀριθμοὶ λέγονται λέγοντοι *ἴσοι*, ἐὰν ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ πλῆθος μονάδων· δηλαδή, ἐὰν ὅσας μονάδας ἔχῃ ὁ εἷς τόσας ἔχει καὶ ὁ ἄλλος. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς τῶν δακτύλων τῆς δεξιᾶς χειρὸς καὶ τῶν τῆς ἀριστερᾶς. Σημειώνομεν ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶνε ἴσοι, ἐὰν μεταξύ των γράψωμεν τὸ σημεῖον *ἴσον* (=). Π. χ. ἐννέα ἴσον ἐννέα γράφεται οὕτω: ἐννέα=ἐννέα.

β΄) Ἐὰν ἐκ δύο ἀριθμῶν ὁ εἷς ἔχῃ περισσοτέρας μονάδας ... ἄλλου, λέγεται *μεγαλύτερος* αὐτοῦ, ὁ ἄλλος *μικρότερος* ... πρώτου, οἱ δύο δὲ ἀριθμοὶ λέγονται ἄνισοι. Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ ... καὶ ἑπτὰ εἶνε ἄνισοι. Σημειώνομεν ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶνε ἄνισ...

διὰ τοῦ σημείου > ἢ < γράφοντες εἰς τὸ κοῖλον μέρος τούτου τὸν μεγαλύτερον ἀριθμὸν καὶ εἰς τὸ κυρτὸν τὸν μικρότερον. Π. χ. τρία <ἑπτά, ὀκτὼ> πέντε καὶ ἀπαγγέλλομεν· τρία μικρότερον τοῦ ἑπτά· ὀκτὼ μεγαλύτερον τοῦ πέντε.

γ΄) Τὸ σύνολον τῶν ἀφῃρημένων ἀριθμῶν *ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα*, . . οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἐκ τῆς ἀριθμήσεως, λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν τὴν *φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν*, ἡ ὁποία δὲν ἔχει τέλος. Διότι, ἡ προσθήκη μιᾶς μονάδος εἰς καθένα αὐτῶν δύναται νὰ γίνεται πάντοτε. Ὁ καθεὶς ἀριθμὸς τῆς σειρᾶς αὐτῆς εἶνε μεγαλύτερος ἑνὸς οἱουδήποτε ἐκ τῶν προηγουμένων αὐτοῦ καὶ μικρότερος τῶν ἑπομένων τούτου.

§ 3. Τὸ δεκαδικὸν σύστημα τῆς ἀριθμήσεως.—

α΄) Κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς φυσικῆς σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν ἀπαιτεῖται ὄχι μόνον ἡ προσθήκη μιᾶς μονάδος εἰς τὸν ἑκάστοτε προκύπτοντα ἀριθμὸν (διὰ νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀμέσως ἑπόμενος αὐτοῦ), ἀλλὰ καὶ νὰ κρατῶμεν εἰς τὴν μνήμην μας τὰ ὀνόματα ὅλων τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι προκύπτουν τοιουτοτρόπως καὶ τὰ ὁποῖα εἶνε ὅσοι καὶ οἱ ἀριθμοί, δηλαδὴ δὲν ἔχουν τέλος. Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν ὀνομασίαν τῶν ἀριθμῶν εὐκολωτέραν, καὶ διὰ νὰ δυνάμεθα εὐκολώτερον νὰ ἐνθυμούμεθα τὰς ὀνομασίας, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. 5

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἓν παιδίον ἔχει ἓν πλῆθος βώλων. Διὰ νὰ εὕρῃ τὸν ἀριθμὸν αὐτῶν, θέτει τοὺς βώλους ἀνὰ δέκα εἰς σειράς. Οὕτω εὑρίσκει δύο σειρὰς π. χ. καὶ τοῦ μένουν καὶ τέσσαρες βῶλοι ἀκόμη.

• • • • • • • • • •
• • • • • • • • • •
• • • •

Τὸ σύνολον τῶν βώλων καθεμιᾶς σειρᾶς ἀπὸ δέκα καλοῦμεν *δεκάδα* ἢ *μονάδα δευτέρας τάξεως*. Ὥστε τὸ παιδίον ἔχει δύο δεκάδας καὶ τέσσαρας βώλους. Ἐὰν εἶχε περισσοτέρους βώλους, ὥστε αἱ δεκάδες τὰς ὁποίας θὰ ἐσχημάτιζε νὰ ἦσαν π. χ. εἴκοσι πέντε, νὰ ἔμενον δὲ καὶ ἑπτὰ βῶλοι ἀκόμη (ἐπειδὴ ἡ αὐτὴ δυσκολία θὰ παρουσιάζετο καὶ τώρα διὰ τὴν ὀνομασίαν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων) θὰ ἠδύνατο, ὁμοίως ἐργαζόμενον, νὰ σχηματίσῃ ἐκ δέκα δεκάδων μίαν *ἑκατοντάδα* ἢ *μίαν μονάδα τρίτης τάξεως* καὶ θὰ εἶχε δύο ἑκατοντάδας, πέντε δεκάδας καὶ ἑπτὰ βώλους. Κωνσταντίνος Ν Πουρνάρας β') Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι μὲ δέκα μονάδας, τὰς ὁποίας καλοῦμεν καὶ *μονάδας ἁπλᾶς* ἢ *πρώτης τάξεως*, σχηματίζομεν μίαν *μονάδα δευτέρας τάξεως* ἢ μίαν *δεκάδα*. Μὲ δέκα μονάδας δευτέρας τάξεως σχηματίζομεν *μίαν μονάδα τρίτης τάξεως*, ἢ μίαν *ἑκατοντάδα*. Καθ' ὅμοιον τρόπον μὲ δέκα μονάδας τρίτης τάξεως σχηματίζομεν μίαν *τετάρτης* ἢ μίαν *χιλιάδα*· μὲ δέκα χιλιάδας μίαν *δεκάδα χιλιάδων* κλπ. Ἐὰν οἱ βῶλοι τοῦ παιδίου ἦσαν πολλοὶ περισσότεροι καὶ ἐτακτοποίει αὐτοὺς εἰς σειρὰς ἐκ χιλιάδων, ἑκατοντάδων, δεκάδων καὶ τοῦ ἔμενον ἀκόμη, αὐτοὶ θὰ ἦσαν ὀλιγώτεροι τῶν δέκα. Θὰ γνωρίζῃ λοιπὸν τὸ παιδίον πόσους βώλους ἔχει, ἐὰν εὕρῃ πόσας σειρὰς ἐκ χιλιάδων, ἑκατοντάδων, δεκάδων ἔχει καὶ πόσοι βῶλοι τοῦ μένουν ἀκόμη.

γ') Ὁ σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, ὥστε ἀπὸ δέκα μονάδας μιᾶς τάξεως νὰ σχηματίζεται μία μονὰς ἀμέσως μεγαλυτέρας τάξεως λέγεται *δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως*. Ἡ ἁπλῆ μονάς, ἡ δεκάς, ἡ ἑκατοντάς, ἡ χιλιάς, ἡ δεκὰς χιλιάδων, ἡ ἑκατοντὰς χιλιάδων, τὸ ἑκατομμύριον κλπ. λέγονται *μονάδες διαφόρων τάξεων*.

§ 4. Ὀνομασία τῶν ἀριθμῶν.—

α') Τὸ δεκαδικὸν σύστημα εὐκολύνει νὰ σχηματίζωμεν ὅλα τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν μὲ ὀλίγας λέξεις, τὰς ὁποίας διακρίνομεν εἰς δύο κατηγορίας. 1) τὰς λέξεις *ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα, μηδέν*. 2) τὰς *μονάς, δεκάς, ἑκατοντάς, χιλιάς, δεκὰς χιλιάδων, ἑκατοντὰς χιλιάδων, ἑκατομμύριον, δεκὰς ἑκατομμυρίου, ἑκατοντὰς ἑκατομμυρίου, δισεκατομμύριον* κλπ. Μὲ αὐτὰς δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμόν, ἐὰν μεταχειριζώμεθα τὴν λέξιν *μηδέν*, διὰ νὰ ἐκφράσωμεν τὴν ἔλλειψιν μονάδων.

Πραγματικῶς, ἐὰν ἔχωμεν ἕνα ἀριθμὸν μήλων, εὕρωμεν δὲ ὅτι ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ἔχει ὀκτὼ δεκάδας χιλιάδων, πέντε χιλιάδας, μηδὲν ἑκατοντάδας, τρεῖς δεκάδας καὶ τέσσαρας μονάδας π.χ., ἔχομεν ἀμέσως τὸ ὄνομα τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τῶν λέξεων τούτων.

β') Τὴν *δεκάδα* λέγομεν καὶ *δέκα*, τὰς *δύο δεκάδας* καὶ *εἴκοσι*, τὰς τρεῖς καὶ *τριάκοντα*, τὰς τέσσαρας καὶ *τεσσαράκοντα*, τὰς πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα καὶ *πεντήκοντα, ἑξήκοντα, ἑβδομήκοντα, ὀγδοήκοντα, ἐννενήκοντα*. Ἐπίσης τὴν *ἑκατοντάδα* καλοῦμεν καὶ *ἑκατόν*, τὰς δύο ἑκατοντάδας καὶ *διακόσια* καὶ οὕτω καθεξῆς τὰς τρεῖς, τέσσαρας, πέντε ἕξ κλπ. καὶ *τριακόσια, τετρακόσια, πεντακόσια ἑξακόσια, ἑπτακόσια, ὀκτακόσια, ἐνεακόσια*. Τὴν χιλιάδα καλοῦμεν καὶ *χίλια*, τὴν δεκάδα χιλιάδων καὶ *δέκα χιλιάδας κ. ο. κ., εἴκοσι χιλιάδας, τριάκοντα χιλιάδας,.. ἑκατὸν χιλιάδας.*

γ') Ἀντὶ τῶν ὀνομασιῶν μία δεκὰς καὶ μία μονάς, μία δεκὰς καὶ δύο μονάδες κλπ. λέγομεν *ἕνδεκα, δώδεκα, δέκα τρία, δέκα τέσσαρα, δέκα πέντε, δέκα ἕξ, δέκα ἑπτά, δέκα ὀκτώ, δέκα ἐννέα κ. ο. κ.*

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει μίαν δεκάδα χιλιάδων, πέντε χιλιάδας, ἓξ ἑκατοντάδας, τρεῖς δεκάδας καὶ δύο μονάδας ἔχει τὴν ὀνομασίαν δέκα πέντε χιλιάδες ἑξακόσια τριάκοντα δύο.

Ἀσκήσεις.

1) Πόσας μονάδας ἔχει α') μία χιλιάς ; β') μία δεκὰς χιλιάδων; γ') μία ἑκατοντὰς χιλιάδων; δ') ἓν ἑκατομμύριον ;

2) Πόσας ἑκατοντάδας ἔχει α') μία χιλιάς ; β') μία δεκὰς χιλιάδων ; γ') μία ἑκατοντὰς χιλιάδων ;

3) Πόσας ἑκατοντάδας ἔχει τὸ ἓν ἑκατομμύριον;

4) Μία μονὰς μιᾶς τάξεως πόσας μονάδας ἔχει τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως ; 5

5) Ποίας τάξεως μονὰς εἶνε ἡ μονὰς τῶν χιλιάδων ; ἡ δεκὰς τῶν χιλιάδων ; ἡ ἑκατοντὰς χιλιάδων ; τὸ ἑκατομμύριον, τὸ δισεκατομμύριον ;

§ 5. Περὶ γραφῆς τῶν ἀριθμῶν.—

α') Ἂν καὶ δυνάμεθα νὰ γράφωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν μὲ τὸ ὄνομα αὐτοῦ, δηλαδὴ μὲ τὴν λέξιν ἢ τὰς λέξεις τοῦ ὀνόματος αὐτοῦ, ἐν τούτοις οἱ *Ἰνδοὶ* εὗρον ἓν μέσον διὰ τοῦ ὁποίου γράφομεν εὐκολώτερον πάντα ἀριθμόν, καθὼς ἀμέσως θὰ ἴδωμεν.

Καθὼς ἀνωτέρω εἴδομεν, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καθένα ἀριθμὸν διὰ τῶν λέξεων· ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα, μηδὲν καὶ τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων.

Ἐὰν ἀντὶ τῶν λέξεων αὐτῶν εἰσαγάγωμεν τὰ σύμβολα 1· 2· 3· 4· 5· 6· 7· 8· 9· 0, τὰ ὁποῖα λέγονται ψηφία, καὶ ἀντὶ τῶν ὀνομασιῶν τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων τὰς ἀρχικὰ γράμματα αὐτῶν Μ, Δ, Ε, Χ, $Δ_χ$, $Ε_χ$, $Μ_ε$, $Δ_ε$, $Ε_ε$, κλπ., δυνάμεθα ἀντὶ τοῦ ἀριθμοῦ π. χ. ὀκτὼ χιλιάδες τετρακόσια εἴκοσι πέντε νὰ

X E Δ M

γράψωμεν συντομώτερον 8 4 2 5. Ἀκόμη ὅμως συντομώτερον θὰ κάμωμεν τὴν γραφὴν τοῦ ἀριθμοῦ, ἐὰν ὁρίσωμεν ὅτι, αἱ ἁπλαῖ *μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ θὰ εὑρίσκωνται πάντοτε εἰς τὴν πρώτην θέσιν πρὸς τὰ δεξιά· αἱ δεκάδες εἰς τὴν δευτέραν· αἱ ἑκατοντάδες εἰς τὴν τρίτην,* κ. ο. κ., παραλείπωμεν δὲ τοιουτοτρόπως τὴν γραφὴν τῶν γραμμάτων M, Δ, E,.... ὡς μὴ χρησίμων πλέον. Οὕτω διὰ τὸν ἀριθμὸν ὀκτὼ χιλιάδες τετρακόσια εἴκοσι πέντε, ἀντὶ τοῦ

X E Δ M
8 4 2 5

ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν 8425.

β΄) Ἐὰν εἰς ἕνα ἀριθμὸν δὲν ὑπάρχουν μονάδες μιᾶς τάξεως, παριστάνομεν τὴν ἔλλειψιν αὐτήν, ὡς γνωστόν, μὲ τὸ μηδὲν καὶ γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τῆς τάξεως αὐτῆς τῶν μονάδων τὸ σύμβολον 0.

γ΄) Καθὼς βλέπομεν, διὰ καθὲν ψηφίον ἑνὸς ἀριθμοῦ ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν· 1) τὴν ἀξίαν αὐτοῦ ὡς ψηφίου καὶ 2) τὴν ἀξίαν τούτου ὡς ἐκ τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν τοῦτο ἔχει εἰς τὸν ἀριθμὸν μεταξὺ τῶν ἄλλων ψηφίων, τῆς τάξεως μετρουμένης ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ γραφοῦν διὰ ψηφίων οἱ ἀριθμοί· α΄) διακόσια ἑξήκοντα ἑπτά. β΄) ἑπτακόσια ὀγδοήκοντα ἕξ· γ΄) πεντακόσια τεσσαράκοντα· δ΄) ἐνεακόσια δύο· ε΄) ἑπτακόσια ἕν· στ΄) πέντε χιλιάδες τριακόσια ἑξήκοντα ἕξ.

2) Ὁμοίως οἱ ἀριθμοί· α΄) χίλια τετρακόσια πεντήκοντα τέσσαρα· β΄) ἐννέα χιλιάδες ἑξήκοντα· γ΄) ἐννέα χιλιάδες ἑκατὸν ἑπτά.

3) Νὰ γραφοῦν διὰ ψήφων οἱ ἀριθμοί.

X M E	X Δ E	X E M	Me	Mχ
α΄) 7 8 3.	β΄) 7 8 3.	γ΄) 7 8 3.	δ΄) 74.	ε΄) 84.

	Δ	Δ	E	X
4) Ὁμοίως οἱ ἀριθμοί·	α΄) 25·	β΄) 183·	γ΄) 95·	δ΄) 83.

§ 6. Περὶ ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν.—

α΄) Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 24. Διὰ ν' ἀπαγγείλωμεν αὐτόν, ἢ ἀπαγγέλλομεν ὁλόκληρον ὡς μονάδας, τὰς ὁποίας παριστάνει τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον, δηλαδὴ ὡς ἁπλᾶς μονάδας, ἢ ἀπαγγέλλομεν καθὲν ψη φίον τούτου χωριστὰ ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ μὲ τὸ ὄνομα τῆς τάξεως τῶν μονάδων αὐτοῦ, τὰς ὁποίας παριστάνει. Οὕτω λέγομεν εἴκοσι τέσσαρες μονάδες, ἢ δύο δεκάδες καὶ τέσσαρες μονάδες. Ὁμοίως τὸν ἀριθμὸν 648 ἀπαγγέλλομεν, ἐὰν εἴπωμεν, *ἑξακόσια τεσσαράκοντα ὀκτὼ μονάδες*, ἢ *ἓξ ἑκατοντάδες τέσσαρες δεκάδες καὶ ὀκτὼ μονάδες*.

β') Ὅταν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ περισσότερα τῶν τριῶν ψηφίων, ἀπαγγέλλεται κατὰ δύο τρόπους κυρίως. 1) *χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα ἐκ δεξιῶν πρὸς τἀριστερὰ καὶ ἀκολούθως ἀπαγγέλλομεν καθὲν τούτων μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου αὐτοῦ ψηφίου πρὸς τὰ δεξιά*· τὸ πρῶτον τριψήφιον τμῆμα πρὸς τὰ δεξιὰ λέγεται *τμῆμα τῶν ἁπλῶν μονάδων*, τὸ ἀμέσως ἑπόμενον αὐτοῦ *τμῆμα τῶν χιλιάδων*, τὸ ἀμέσως ἑπόμενον *τμῆμα τῶν ἑκατομμυρίων*, τὸ ἄλλο *τμῆμα τῶν δισεκατομμυρίων* κλπ. Εἶνε φανερὸν ὅτι, κατὰ τὸν χωρισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τριψήφια τμήματα εἶνε δυνατὸν τὸ τελευταῖον τμῆμα πρὸς τἀριστερὰ νὰ εἶνε διψήφιον ἢ μονοψήφιον. 2) *ἀπαγγέλλομεν καθὲν ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ χωριστὰ μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων αὐτοῦ.* 5

γ') Καὶ κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις ἀρχίζομεν συνήθως τὴν ἀπαγγελίαν ἐκ τοῦ πρώτου ψηφίου ἢ τμήματος ἐξ ἀριστερῶν. Κατὰ ταῦτα, τὸν ἀριθμὸν 6834572 ἀπαγγέλλομεν λέγοντες. 1) *ἓξ ἑκατομμύρια ὀκτακόσιαι τριάκοντα τέσσαρες χιλιάδες πεντακόσια ἑβδομήκοντα δύο*· ἢ 2) *ἓξ ἑκατομμύρια ὀκτὼ ἑκατοντάδες χιλιάδων τρεῖς δεκάδες χιλιάδων τέσσαρες χιλιάδες πέντε ἑκατοντάδες ἑπτὰ δεκάδες καὶ δύο μονάδες.*

Ἀσκήσεις.

1) Ἀπαγγείλατε τοὺς ἑπομένους ἀριθμοὺς καὶ εὕρετε πόσας μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας κλπ. ἐν ὅλῳ ἔχει καθεὶς ἐξ αὐτῶν 245· 569·950·907· 1000· 2635· 7400.

2) Ὁμοίως διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 64000· 87000· 600070· 637535· 507402· 24693972· 9324652.

3) α') Γράψατε ἕνα ἀριθμόν, π. χ. τὸν 648 καὶ ἔπειτα πρὸς τἀριστερὰ τοῦ 6 ἕν, δύο, τρία..... μηδενικὰ καὶ ἀπαγγείλατε ἔπειτα τὸν νέον ἀριθμόν. Τί παρατηρεῖτε λοιπόν, ἐὰν πρὸς τὰ τἀριστερὰ ἑνὸς ἀριθμοῦ γράψωμεν ὁσαδήποτε μηδενικά; β') Μεταβάλλεται ἡ ἀξία τοῦ 643, ἐὰν μετὰ τὸ ψηφίον 3 γράψωμεν ἓν μηδὲν καὶ ποίαν θέσιν λαμβάνει τότε τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ 643; ποίαν τὸ ψηφίον τῶν

δεκάδων καὶ ποίαν τὸ τῶν ἑκατοντάδων; Τί παθαίνει λοιπὸν ἡ ἀξία τοῦ 643, ἐὰν εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ γράψωμεν ἓν 0; γ′) Μεταβάλλεται ἡ ἀξία τοῦ 643, ἐὰν δεξιὰ τοῦ 3 γράψωμεν δύο μηδενικὰ καὶ ποίαν θέσιν λαμβάνει τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων, τὸ τῶν ἑκατοντάδων; Τί παθαίνει ἡ ἀξία ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἐὰν εἰς τὸ τέλος πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ γράψωμεν ἕν, δύο,... μηδενικά;

§ 7. Αἱ ἐν Ἑλλάδι κυριώτεραι μονάδες μετρήσεως μήκους, βάρους, χρόνου κλπ.—

α′) Συνήθως οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ ἔχουν τὴν ἐπωνυμίαν *μέτρα, πήχεις, χιλιόμετρα, ὀκάδες, δράμια, δραχμαί, λεπτά* κλπ. Αἱ κυριώτεραι μονάδες τοῦ μήκους, βάρους, χρόνου καὶ νομισμάτων, τῶν ὁποίων γίνεται χρῆσις ἐν Ἑλλάδι εἶνε αἱ ἑξῆς.

β′) Πρὸς μέτρησιν τοῦ μήκους μεταχειρίζονται συνήθως ὡς μονάδα τὸ *μέτρον*, τὸ ὁποῖον διαιρεῖται εἰς δέκα ἴσα μέρη, καθὲν τῶν ὁποίων καλεῖται *παλάμη*. Καθεμία παλάμη διαιρεῖται εἰς δέκα ἴσα μέρη, καθὲν τῶν ὁποίων λέγεται *δάκτυλος ἢ πόντος*. Ὥστε ἓν μέτρον ἔχει 10 παλάμας ἢ 100 δακτύλους.

γ′) Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑφασμάτων μεταχειρίζονται τὸν *πῆχυν*, ὁ ὁποῖος ἰσοδυμεῖ μὲ 64 δακτύλους περίπου, καὶ διαιρεῖται εἰς 8 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *ρούπια*.

Τὸ μῆκος χιλίων μέτρων λέγεται *χιλιόμετρον*.

δ′) Πρὸς μέτρησιν τοῦ βάρους τῶν σωμάτων μεταχειρίζονται ὡς μονάδα τὴν *ὀκᾶν*, ἡ ὁποία ἔχει 400 *δράμια*. Βάρος 44 ὀκάδων λέγεται στατὴρ (κοινῶς καντάρι).

ε′) Πρὸς μέτρησιν τοῦ χρόνου λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὴν *ἡμέραν*, ἡ ὁποία ἔχει 24 *ὥρας*. Καθεμία ὥρα ἔχει 60 *πρῶτα λεπτά*, τὰ ὁποῖα σημειώνομεν διὰ μιᾶς ὀξείας (′) ὑπεράνω τοῦ ἀριθμοῦ· π.χ. 35′. Καθὲν πρῶτον λεπτὸν ἔχει 60 *δεύτερα λεπτά*, τὰ ὁποῖα σημειώνομεν μὲ δύο ὀξείας (″) ὑπεράνω τοῦ ἀριθμοῦ π. χ. 12″. Τὸ ἔτος ἔχει 365 ἡμέρας καὶ ἀνὰ 4 ἔτη 366.

στ′) Μονὰς νομισμάτων εἶνε ἡ *δραχμή*, ἡ ὁποία ἔχει 100 λεπτά.

ζ′) Θὰ σημειώνομεν χάριν συντομίας τὰ μέτρα διὰ τοῦ μ., τὰ χιλιόμετρα διὰ χμ., τοὺς πήχεις διὰ τοῦ π., τὰ ρούπια διὰ τοῦ ρ., τὰς ἡμέρας διὰ τοῦ ἡμ., τὰς ὥρας διὰ τοῦ ὥρ., τὰ ἔτη διὰ ἔτ. τὰς δὲ δραχμὰς καὶ λεπτά, διὰ τῶν δρ. καὶ λ. καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Περὶ προσθέσεως.

§ **8. Ὁρισμοί.**—

α΄) Ἐὰν ἔχωμεν 8 δρ. καὶ 6 δρ. πόσας ἔχομεν ἐν ὅλῳ;

Θὰ εὕρωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, ἐὰν εὕρωμεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει τόσας μονάδας, ὅσας ἔχουν καὶ οἱ δύο δοθέντες ἀριθμοὶ 8 καὶ 6· ἤτοι 14 δραχμάς.

Ὁμοίως, ἂν ἔχωμεν 5 βιβλία καὶ 3 βιβλία καὶ 7 βιβλία καὶ ζητῆται πόσα ἔχομεν ἐν ὅλῳ, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ 5, τοῦ 3 καὶ τοῦ 7· ἤτοι τὸν 15.

β΄) Γενικῶς, ἔστω ὅτι δίδονται δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται νὰ εὕρωμεν ἄλλον, ὁ ὁποῖος ν' ἀποτελῆται ἀπὸ ὅλας τὰς μονάδας τῶν δοθέντων. Λαμβάνομεν ἕνα ἐκ τῶν δοθέντων· αὐτὸν αὐξάνομεν κατὰ τὰς μονάδας ἑνὸς ἄλλου ἐκ τῶν δοθέντων· κ. ο. κ. ἐξακολουθοῦμεν, μέχρις ὅτου λάβωμεν ὅλους τοὺς δοθέντας, χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν τάξιν τὴν ὁποίαν καθεὶς ἔχει. 5

Εἶνε φανερόν, ὅτι τοῦτο δυνάμεθα νὰ κάμωμεν, ἂν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε ἀφῃρημένοι ἢ συγκεκριμένοι ἀλλ' ὁμοειδεῖς.

γ΄) ***Πρόσθεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν ἄλλον, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλας τὰς μονάδας τῶν δοθέντων».***

δ΄) Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται *προσθετέοι*, ὁ δ' ἐξ αὐτῶν διὰ τῆς προσθέσεως εὑρισκόμενος *ἄθροισμα*. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 6 γράφομεν οὕτω $8+6$, ἢ $6+8$ καὶ ἀναγινώσκομεν ὀκτὼ σὺν ἕξ, ἢ 6 σὺν ὀκτώ. Ὥστε τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως εἶνε τὸ σὺν $(+)$.

ε΄) Ἐὰν μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν μιᾶς προσθέσεως θέλωμεν νὰ ἴδωμεν, ἂν ἡ πρᾶξις ἔγινεν ἀκριβῶς, ἀφοῦ πρῶτον ἀλλάξωμεν τὴν μεταξύ των θέσιν τῶν προσθετέων, ἐπαναλαμβάνομεν ἀκολούθως τὴν πρόσθεσιν καὶ βλέπομεν, ἂν εὑρίσκωμεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, καθὼς καὶ πρίν. Ἡ νέα αὐτὴ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας θέλομεν νὰ ἐλέγξωμεν τὴν προηγουμένην, λέγεται *δοκιμὴ* τῆς προσθέσεως.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Δ Δ

1) Εὕρετε τὰ ἑπόμενα ἀθροίσματα· α') 28+7· β') 37+6·

Ε Ε Μ Μ

γ') 59 δρ. +6 δρ. δ') 139+7. ε') 168+29.

2) Εὕρετε τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν.

3) Σχηματίσατε τἀθροίσματα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν ἀνὰ δύο.

4) Προσθέσατε τὸν 3, ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὸν 2, μέχρις ὅτου εὕρετε τριψήφιον ἀριθμόν.

3) Εὕρετε τὰ ἑπόμενα ἀθροίσματα· α') 50+20· β') 800+600. γ') 200+500+400· δ') 8000+300 (παρατηρήσατε ὅτι 50+20=

Δ Δ Δ

=5+2=7=70).

6) Λαμβάνει τις τὴν πρώτην ἡμέραν 8 δρ., τὴν δευτέραν 6 δρ., τὴν δὲ τρίτην 9 δρ.· πόσας δραχμὰς λαμβάνει ἐν ὅλῳ;

7) Ἀγοράζει τις ἐξ ἑνὸς πράγματος τὴν πρώτην φορὰν 7 ὀκ., τὴν δευτέραν φορὰν 6 ὀκ., τὴν δὲ τρίτην 10 ὀκ: πόσας ὀκάδας ἠγόρασεν ἐν ὅλῳ;

§ 9. Ἐφαρμογὴ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον.—

Αἱ ἑπόμεναι ἐφαρμογαὶ τῆς προσθέσεως εἶνε ἄξιαι ἰδιαιτέρας προσοχῆς.

α') Ἐὰν ἡ τιμὴ τῆς πωλήσεως ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶνε μεγαλυτέρα τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς, λέγομεν ὅτι ὁ ἔμπορος *ἐκέρδισεν* ἢ *ὅτι ἔχει κέρδος* ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ ἐμπορεύματος αὐτοῦ, ὑπάρχει δ' ἡ ἑξῆς σχέσις

τιμὴ τῆς πωλήσεως

τιμὴ τῆς ἀγορᾶς | κέρδος

β') Ὅταν ἡ τιμὴ τῆς πωλήσεως ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶνε μικροτέρα τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς, λέγομεν ὅτι ὁ ἔμπορος *ἐζημιώθη ἢ ὅτι ἔχει ζημίαν* ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ ἐμπορεύματος αὐτοῦ, ὑπάρχει δ' ἡ ἑξῆς σχέσις

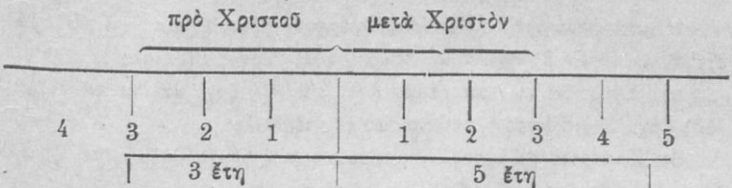
τιμὴ τῆς ἀγορᾶς

τιμὴ τῆς πωλήσεως | ζημία

γ') Ὅταν ἓν ἐμπόρευμα ἢ ἀντικείμενον εὑρίσκεται ἐντὸς ἑνὸς ἀγγείου, π. χ. ἔλαιον ἐντὸς βαρελίου, οἶνος ἐντὸς φιάλης, σάπων ἐντὸς κιβωτίου κλπ. λέγομεν *μικτὸν βάρος* αὐτοῦ τὸ βάρος τοῦ ἐμπορεύματος καὶ τοῦ ἀγγείου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου περιέχεται· *καθαρὸν βάρος* (κοινῶς νέτο) λέγεται τὸ βάρος μόνον τοῦ ἐμπορεύματος καὶ *ἀπόβαρον* (κοινῶς ντάρα) τὸ βάρος μόνον τοῦ ἀγγείου. Μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχει ἡ ἑξῆς σχέσις.

καθαρὸν βάρος+ἀπόβαρον=μικτὸν βάρος.

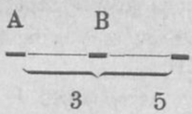
δ') Ἓν γεγονός, π. χ. εἷς πόλεμος, ἤρχισεν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τρίτου ἔτους π. Χ. καὶ ἐτελείωσεν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἕκτου ἔτους μ. Χ. Πόσα ἔτη διήρκεσεν ὁ πόλεμος αὐτός;



Καθὼς βλέπομεν, θὰ ἔχωμεν 3 ἔτη+5 ἔτη=8 ἔτη. 5

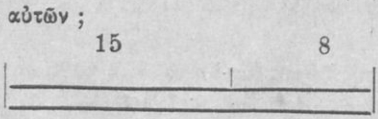
ε') Τρεῖς τόποι Α, Β, Γ εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ὁδοῦ. Ἡ ἀπόστασις τῶν Α καὶ Β εἶνε 3 χμ., τῶν δὲ Β καὶ Γ εἶνε 5 χμ.· πόση εἶνε ἡ ἀπόστασις τῶν Α καὶ Γ;

Προφανῶς ἔχομεν



ΑΓ=3χμ. + 5 χμ.=8 χμ.

στ') Εἰς μερικὰς προσθέσεις δὲν δίδονται ὅλοι οἱ προσθετέοι, ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν αὐτοὺς ἀπὸ σχέσιν τινά, ἡ ὁποία δίδεται. Π. χ. ἐκ δύο ἀριθμῶν ὁ εἷς εἶνε 15, ὁ ἄλλος κατὰ 8 μεγαλύτερος· πόσον εἶνε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν;



15 + 8=23

Καθὼς βλέπομεν καὶ ἐκ τοῦ σχήματος, ὁ δεύτερος ἀριθμὸς εἶνε 15+8=23· ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εἶνε 15+23=38.

Παράδειγμα. Ἠγόρασέ τις ἓν ἐμπόρευμα ἀντὶ 25 δρ. καὶ τὸ ἐπώλησε μὲ κέρδος 14 δραχ: ἀντὶ πόσων δραχμῶν τὸ ἐπώλησεν. Ἂν διὰ τοῦ γράμματος x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν

τιμὴ τῆς πωλήσεως x	
τιμὴ ἀγορᾶς	*κέρδος*

25 δρ. + 14 δρ. $=x$· ἤτοι $x=39$ δρ. Ὥστε ἡ ζητουμένη τιμὴ εἶνε 39 δραχμαί.

Κατωτέρω θὰ παριστάνωμεν ἐνίοτε τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ x.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Ἔμπορος ἠγόρασεν ἐμπόρευμα ἀντὶ 20 (14)* δρ: ἀντὶ πόσων δραχμῶν τὸ ἐπώλησε μὲ κέρδος 6(6) δρχ;

2) Ἀγοράζει τις ἐμπόρευμα ἀντὶ 38 (45) δρχ. καὶ τὸ πωλεῖ 12 (15) δρχ. ἀκριβώτερον· ἀντὶ πόσων δρ. τὸ πωλεῖ;

3) Ἔμπορος ἐπώλησεν ἓν ἐμπόρευμα ἀντὶ 30 (26) δρχ. μὲ ζημίαν 10 (14) δραχμῶν· ἀντὶ πόσων δρ. τὸ εἶχεν ἀγοράσει;

4) Ἡ τιμὴ τῆς πωλήσεως ἐμπορεύματος ἦτο 22 (43) δρχ., ἡ δὲ ζημία 12 (17) δρ.· ποία ἦτο ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς;

5) Τὸ καθαρὸν βάρος ἐμπορεύματος ἦτο 38 (19) ὀκ., τὸ δὲ ἀπόβαρον 7 (6) ὀκ.· πόσον ἦτο τὸ μικτὸν βάρος του;

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Εἷς εἶνε ἡλικίας 48 (37) ἐτῶν· ποίαν ἡλικίαν θὰ ἔχῃ μετὰ 14 (13) ἔτη;

2) Ἐγεννήθη τις τὸ ἔτος 1880 (1853)· ποῖον ἔτος ἦτο 18 (47) ἐτῶν;

3) Εἷς πόλεμος ἤρχισε τὸ 1914 καὶ διήρκεσε 4 ἔτη· πότε ἐτελείωσε;

4) Ἓν παιδίον ἀπέθανε τὸ 75 (94) π. Χ. εἰς ἡλικίαν 5 (3) ἐτῶν· πότε ἐγεννήθη;

5) Ἡ πόλις τῆς Ρώμης ἱδρύθη τὸ 753 π. Χ.· πόσα ἔτη ἐπέρασαν ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως της μέχρι τοῦ 8 (12) ἔτους μ. Χ.;

6) Ἓν γεγονὸς ἤρχισε κατὰ τὸ τέλος τοῦ 8 (15) ἔτους π. Χ., καὶ ἔπαυσε α') εἰς τὴν ἀρχὴν β') εἰς τὸ τέλος τοῦ 8 ἔτους μ. Χ.· πόσα ἔτη διήρκεσε;

*) Ἀντὶ νὰ ἐπαναλαμβάνεται ἡ διατύπωσις ἑνὸς προβλήματος μὲ ἄλλους ἀριθμοὺς γράφονται πρὸς συντομίαν μόνον οἱ ἄλλοι ἀριθμοὶ ἐν παρενθέσει.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Τρεῖς τόποι Α, Β, Γ εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ὁδοῦ. Ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶνε 5 (9) χμ., ἡ ΒΓ 10 (15) χμ· πόση εἶνε ἡ ἀπόστασις ΑΓ;

2) Δύο ταχυδρόμοι βαδίζουν κατ' ἀντίθετον φοράν, ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον· πόσον θὰ ἀπέχουν, ἐὰν ὁ εἷς διανύσῃ 8 (7) χμ., ὁ δὲ ἄλλος 9 (10) χμ;

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Μία ῥάβδος εἶνε 9 (10) παλάμας μακροτέρα ἄλλης καὶ αὐτὴ κατὰ 6 (5) παλ. μακροτέρα τρίτης, ἡ ὁποία ἔχει μῆκος 5 (8) παλ· πόσον μῆκος ἔχει καθεμία; ἡ α' 20 (23).

2) Εἰς τὴν α' τάξιν σχολείου φοιτῶσι 4 (3) μαθηταὶ περισσότεροι τῶν εἰς τὴν β'. Εἰς τὴν β' φοιτῶσι 6 (5) περισσότεροι τῶν εἰς τὴν γ'. Εἰς τὴν γ' φοιτῶσι 3 (2) περισσότεροι ἢ εἰς τὴν δ'. Πόσους μαθητὰς ἔχει καθεμία τάξις, ἂν ἡ δ' ἔχῃ 34 (28) μαθητάς;

47, 43, 37, 34. (38, 35, 30, 28).

3) Πόσον εἶνε τὸ ἄθροισμα τοῦ 20 (36), τοῦ 25 (24) καὶ τοῦ κατὰ 5 (10) μεγαλυτέρου τούτου;

4) Εἷς ἔμπορος εἰσπράτει τὴν πρώτην ἡμέραν 18 (22) δρ.· τὴν δευτέραν 8 (6) δρ. ἐπὶ πλέον καὶ τὴν τρίτην 4 (5) δρ. περισσοτέρας, ἢ ὅσον τὴν δευτέραν· πόσας δραχμὰς εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ; 74 (83).

§ 10. Προσθέσεις ἀπὸ μνήμης.—

α') Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα 58 + 30. Ἀντὶ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 58 τὰς μονάδας τοῦ 30 ἀνὰ μίαν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν αὐτὸ συντομώτερον ὡς ἑξῆς. Ἔχομεν

$$\begin{array}{c} \quad\quad\quad \Delta\ M \quad \Delta\ \ \Delta\ \ M \\ 58+30=5+8+3=8+8=88. \end{array}$$

β') Τὸ ἄθροισμα 48 + 35 εὑρίσκομεν εὐκολώτερον ὡς ἑξῆς. Ἐν πρώτοις προσθέτομεν εἰς τὸν 48 τὸν 30 καὶ εὑρίσκομεν 78· εἰς αὐτὸν δὲ προσθέτομεν ἀκόμη 5, ὅτε εὑρίσκομεν 83.

γ') Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 26 + 16 + 14 εὐκολώτερον, σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα 26 + 14, καθὼς εἴδομεν, καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτὸ 40 προσθέτομεν ἀκόμη 16, ὅτε εὑρίσκομεν 56.

δ') Τὰ ἐξαγόμενα τῶν ἀνωτέρω προσθέσεων, καθὼς καὶ ἄλλων τοιούτων, εὑρίσκομεν *ἀπὸ μνήμης, χωρὶς νὰ γράφωμεν* τοὺς *προσθετέους, καὶ τὰ ἀπὸ καθεμίαν πρόσθεσιν ἀθροίσματα.* Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν *ἀπὸ μνήμης.*

Ἀσκήσεις.

1) Εὕρετε ἀπὸ μνήμης τὰ ἑξῆς ἀθροίσματα.
α′) 28+80· β′) 39+70· γ′) 59+40· δ′, 30+64+20.
2) Ὁμοίως τά· α′) 246+40· β′) 50+56+4.
γ′) 65+35· δ′) 70+32+19· ε′) 98+22+15.
3′) Ὁμοίως τά. α′) 63+17+9· β′) 28+62+18.
γ′) 67+29+31· δ′) 65+28+32· ε′) 9+623+25.
4) Ὁμοίως τά· α′) 78+12+13+27· β′) 900+15+35.
γ′) 28+32+48+19· δ′) 650+92+240+67+3.

§ **11. Γενικὸς κανὼν τῆς προσθέσεως.** —

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 60+35+847.
Δ Μ Δ Μ Ε Δ Μ
Ἐπειδὴ ἔχομεν 68=6+8· 35=3+5· 847=8+4+7, τὸ ἄθροι-
Δ Μ Δ Μ Ε Δ Μ Ε
σμα 68+35+847 εἶνε ἴσον μὲ τὸ 6+8+3+5+8+4+7=8
Δ Μ Μ Δ Μ Ε Δ Μ
+13+20. Ἐπειδὴ δὲ αἱ 20=2+0, τὸ ἄθροισμα εἶνε 8+15 +0.
Δ Ε Δ Ε Δ Μ
Ἐπειδὴ πάλιν αἱ 15=1+5, θὰ ἔχωμεν ἄθροισμα 9+5+0=950. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι, δυνάμεθα νά προσθέσωμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, ἐὰν προσθέσωμεν χωριστὰ τὰ ψηφία τῶν ἁπλῶν μονάδων, τῶν δεκάδων, τῶν ἑκατοντάδων κλπ. Πρὸς εὐκολίαν ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν δεδομένων ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς συνήθως.

Γράφομεν ἕνα τῶν προσθετέων καὶ κάτωθεν αὐτοῦ ἄλλον ἐξ αὐτῶν· κάτω τούτου ἄλλον· καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις ὅτου γράψωμεν ὅλους τοὺς δοθέντας ἀλλ᾽ ὥστε, τὰ ψηφία τῶν μονάδων τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην. Σύρομεν κάτωθεν γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ ἀρχίζοντες ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων προσθέτομεν χωριστὰ

τὰ ψηφία καθεμιᾶς στήλης καὶ ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων στήλης τινὸς δὲν ὑπερβαίνῃ τὸ 9, γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν γραμμὴν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην. Ἐὰν ὅμως περιέχῃ καὶ δεκάδας, τότε γράφομεν μόνον τὰς μονάδας, τὰς δὲ δεκάδας προσθέτομεν μὲ τὰ ψηφία τῆς ἑπομένης στήλης πρὸς τἀριστερά. Οὕτω προχωροῦμεν μέχρις ὅτου προσθέσωμεν καὶ τὰ ψηφία τῆς τελευταίας στήλης πρὸς τἀριστερά».

Οὕτω διὰ τὸ ἄθροισμα $68+35+847$ ἔχομεν

$$\begin{array}{r} 68 \\ 35 \\ 847 \\ \hline 950 \end{array}$$

καὶ λέγομεν 7 καὶ 5=12 καὶ 8=20· γράφομεν 0 καὶ κρατοῦμεν 2· 2 καὶ 4=6 καὶ 3=9 καὶ 6=15. Γράφομεν 5 καὶ κρατοῦμεν 1· 1 καὶ 8=9· γράφομεν τὸ 9. Ὥστε τὸ ἄθροισμα εἶνε 950. 5

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἑπόμενα ἀθροίσματα κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα καὶ ἔπειτα κατ' ἄλλον τρόπον ἀπὸ μνήμης. 5

α') 940+2675+30· β') 960+864+90· γ') 3635+743+95·
δ') 670+3570+860· ε') 1965+643+95.
στ') 1840+983+60. ζ') 950+962+60· η') 925+585+87.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Εἷς χωρικὸς ἀγοράζει χωράφιον ἀντὶ 4182 (6132) δρ. καὶ τὸ πωλεῖ μὲ κέρδος 864 (973) δρ.· ἀντὶ πόσων δραχμῶν πωλεῖ αὐτό; 5046 (7105)

2) Ἔμπορος πωλεῖ ζάχαριν ἀντὶ 6783 (4871) δρ. μὲ ζημίαν 385 (576) δρ.· πόσον τοῦ ἐκόστιζεν; 7168 (5447).

3) Τὸ καθαρὸν βάρος βαρελίου οἴνου εἶνε 728 (313) ὀκ., τὸ δὲ ἀπόβαρον 12 (19) ὀκ: πόσον εἶνε τὸ μικτὸν βάρος; 740 (332).

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἐγεννήθη τις τὸ 1743 (1736) καὶ ἔζησεν 89 (74) ἔτη· ποῖον ἔτος ἀπέθανεν; 1832 (1810).

2) Ἀπέθανέ τις τὸ 324 (453) π.Χ. εἰς ἡλικίαν 83 (95) ἐτῶν· πότε ἐγεννήθη; 407 (548).

3) Ὁ φιλόσοφος Θαλῆς ἐγεννήθη κατὰ τὸ ἔτος 640 π. Χ.·

πόσα έτη επέρασαν από την αρχήν του έτους αυτού μέχρι της αρχής του τρέχοντος έτους;

4) Εἷς πόλεμος ἤρχισε κατὰ τὸ τέλος τοῦ ἔτους 643 (528) π. Χ. καὶ διήρκεσε μέχρι τῆς ἀρχῆς (τέλους) τοῦ ἔτους 324 (1218) μ. Χ. Πόσα ἔτη διήρκεσεν; 965 (1745)· 966 (1746).

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Ἀπὸ ἕνα τόπον ἀναχωροῦν δύο ταχυδρόμοι ἀντιθέτως· πόσον θὰ ἀπέχουν, ἐὰν ὁ μὲν διανύσῃ 24825 (36124) μ., ὁ δὲ 34105 (37158)μ; 58930 (73282).

Τέσσαρες τόποι Α, Β, Γ, Δ εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς. Ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶνε 1684 (9325)μ., ἡ ΒΓ εἶνε 7108 (2974) μ., ἡ δὲ ΓΔ 7418 (3078) μ.· πόσον ἀπέχουν μεταξύ των οἱ Α καὶ Δ; 16210 (15777).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ.

Περὶ ἀφαιρέσεως.

§ 12. Ὁρισμοί.—

α΄) (Πρόβλημα). «*Ἔμπορος ἠγόρασε βούτυρον ἀντὶ 70 δραχμῶν καὶ τὸ ἐπώλησεν ἀντὶ 80 δραχμῶν· πόσας δραχμὰς ἐκέρδισε;*»

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τῶν 80 δρ., τὰς ὁποίας ἔλαβεν ὁ ἔμπορος ἀπὸ τὴν πώλησιν, αἱ 70 δρ. ἦσαν ἰδικαί του, ἐπειδὴ τὰς ἐξώδευσε κατὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ ἐμπορεύματος, αἱ δὲ ἄλλαι εἶνε κέρδος. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ ἐλαττώσωμεν τὸν ἀριθμὸν 80 κατὰ τὰς μονάδας τοῦ 70. Ἐλαττώνοντες ἀνὰ μίαν τὰς 80 μονάδας κατὰ 70 εὑρίσκομεν ὅτι μένουν 10. Ὥστε ὁ ἔμπορος ἐκέρδισεν 10 δραχμάς.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν, ἐὰν τὸ 70 αὐξήσωμεν ἀνὰ μίαν μονάδα μέχρις ὅτου εὕρωμεν τὸ 80.

β΄) (Πρόβλημα). «*Εἷς ηὔξησε τὰ χρήματά του κατὰ 8 δραχμὰς καὶ οὕτω ἔχει 15 δραχμὰς πόσας δραχμὰς εἶχεν ἐξ ἀρχῆς;*»

Ἀφοῦ εἰς τὸ τέλος τὰ χρήματα εἶνε 15 δρ., ἐκ τούτων δὲ αἱ 8 δρ. προέρχονται ἀπὸ τὴν αὔξησιν, ἕπεται ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν πόσα χρήματα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς, ἀρκεῖ τὰς 15 δρ. νὰ ἐλαττώσωμεν κατὰ 8 δραχμάς. Ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὰς 15 δραχμὰς κατὰ 8 δραχμὰς ἀνὰ μίαν, εὑρίσκομεν ὅτι εἶχεν ἐξ ἀρχῆς 7 δραχμάς.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν, ἂν τὰς 8 δραχμὰς αὐξήσωμεν ἀνὰ μίαν δραχμὴν μέχρις ὅτου εὕρωμεν τὰς 15 δραχμάς.

Εἰς καθὲν τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ λαττώνομεν τὸν μεγαλύτερον ἐξ αὐτῶν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας χει ὁ μικρότερος. Ἡ πρᾶξις αὕτη λέγεται *ἀφαίρεσις*.

γ') Ἐν γένει, «*ἀφαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν ἐλαττώνομεν τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν κατὰ τόσας μονάδας ὅσας ἔχει ὁ ἄλλος*».

Ἐὰν εἰς τὸ α') πρόβλημα παραστήσωμεν διὰ τοῦ x τὰς δραχμὰς, ἃς ὁποίας ἐκέρδισε, θὰ ἔχωμεν 70 δρ.$+x$δρ.$=$80 δρ.

Καθὼς βλέπομεν, εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδεται τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν, ζητεῖται δ' ὁ ἄλλος προσθετέος. Θὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν, ἐὰν εὕρωμεν πόσας μονάδας θὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 70 διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν 80.

Ὁμοίως εἰς τὸ β') πρόβλημα, ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν x δρ.$+$8 δρ.$=$15 δρ., ἂν δ' ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν προσθετέων, θὰ ἔχωμεν ὡς καὶ ἀνωτέρω 8 δρ.$+x$ δρ.$=$15 δρ.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ λέγωμεν ὅτι,

δ') «***ἀφαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις εἰς τὴν ὁποίαν δίδεται τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ εἷς τῶν προσθετέων καὶ ζητεῖται ὁ ἄλλος***».

ε') Εἶνε φανερὸν ὅτι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ διὰ τὴν ἀφαίρεσιν πρέπει νὰ εἶνε ἀφῃρημένοι, ἢ συγκεκριμένοι ἀλλ' ὁμοειδεῖς. 5

στ') Τὸ διδόμενον ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν, ἢ ὁ ἀριθμὸς ἀπὸ τὸν ὁποῖον θ' ἀφαιρέσωμεν ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός, λέγεται *μειωτέος*, ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν μειωτέον, ἢ ὁ δοθεὶς προσθετέος λέγεται *ἀφαιρετέος*. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἰς τὴν ἀφαίρεσιν λέγεται *διαφορὰ* ἢ *ὑπόλοιπον* τῆς ἀφαιρέσεως τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

ζ') Τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν, π. χ. τῶν 80 καὶ 70 σημειώνομεν οὕτω 80—70 καὶ ἀπαγγέλλομεν: ὀγδοήκοντα *πλὴν* ἑβδομήκοντα, ἢ ὀγδοήκοντα *μεῖον* ἑβδομήκοντα, ἢ ἑβδομήκοντα *ἀπὸ* ὀγδοήκοντα. Ὥστε σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως εἶνε τὸ *πλὴν* (—), ἡ δὲ διαφορὰ 80—70 φανερώνει τὸν ἀριθμὸν, ὁ ὁποῖος αὐξανόμενος κατὰ 70 δίδει τὸν 80. Διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι,

η') «***ἀφαίρεσις εἶνε ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκεται τρίτος, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸν δεύτερον δίδει ἄθροισμα τὸν πρῶτον***».

θ') Διὰ νά κάμωμεν τὴν δοκιμὴν τῆς ἀφαιρέσεως, προθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον εἰς τὸν ἀφαιρετέον καὶ ἄν εὕρωμεν ἄθροισμα τὸν μειωτέον, τότε ἡ ἀφαίρεσις εἶνε ἀκριβής. Οὕτω εἰς τὴν ἀφαίρεσιν 80—70 τὸ ὑπόλοιπον εἶνε 10, τὸ δὲ ἄθροισμα 70+10 εἶνε ἴσον μὲ 80.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Γράψατε τὰς κατωτέρω ἰσότητας κατ' ἄλλον τρόπον, μεταχειριζόμενοι τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως καὶ εὕρετε τὸν ἄγνωστον x κατὰ δύο τρόπους, τοὺς ὁποίους ἀνωτέρω εἴδομεν.
α') 17+x=15· β') x+45 ἡμ.=53 ἡμ· γ') 47 ὀκ.+x=64 ὀκ.
X X Δ Δ E
δ') 10+x=37· ε') x+19=39· στ') x+ 17 δρ.=36 δρ. ζ') x+9
E X X
=12. η') x+8=15.

2) Εὕρετε τὰς ἑπομένας διαφοράς· α') 95 ὀκ.—86 ὀκ.
Δ Δ X X
β') 29 δρ.—19 δρ.· γ') 9 — 4· δ') 148 ἡμ.—132 ἡμ. ε') 28—17.

3) Ἀριθμήσατε ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 100 ἀναδρομικῶς, ἐνόσω εἶνε δυνατόν.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Εὕρετε τὰς διαφοράς· α') 40—20· β') 700—300 · γ') 5900—4800· δ') 8000—3000· ε') 38000—19000.

2) Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα· α') 9+4—7· β') 20 δρ.+24 δρ. —18 δρ. γ') 39 μ.+11 μ.—25 μ.· δ') 143 ὀκ.—150 ὀκ.+ 362 ὀκ.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἐὰν εἴς τινα ἀριθμὸν προσθέσω τὸν 38 (92) εὑρίσκω τὸν 56 (140)· ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός;

2) Ἐὰν εἴς τινα ἀριθμὸν προσθέσω τὸ ἄθροισμα 5 (8)+6 (9) +9 (6) εὑρίσκω τὸν 27 (30)· ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός;

Ὁμὰς τετάρτη· 1) Λαμβάνει τις 46 (63) δρ. καὶ ἐξ αὐτῶν ἐξοδεύει 23 (40) δρ.· πόσαι δραχμαὶ τῷ μένουν;

2) Μίαν πρωΐαν ἡ θερμοκρασία ἦτο 19° (21°)· τὴν μεσημβρίαν τῆς αὐτῆς ἡμέρας 24° (35°), τὴν δὲ ἑσπέραν 20° (24°)· κατὰ πόσους βαθμοὺς ἡ θερμοκρασία τῆς μεσημβρίας καὶ τῆς ἑσπέρας ἦτο μεγαλυτέρα τῆς πρωϊνῆς;

§ **13. Ἐφαρμογὴ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον.**—

Τῆς ἀφαιρέσεως γίνεται χρῆσις ἰδίως εἰς ζητήματα κέρδους, ζημίας κλπ. Π. χ. ἔμπορος ἀγοράζει ἓν ἐμπόρευμα ἀντὶ 39 δρ. καὶ τὸ πωλεῖ μὲ ζημίαν 9 δρ.· ἀντὶ πόσων δραχμῶν τὸ ἐπώλησεν;

Ἂν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν, ἔχομεν:

τιμὴ πωλήσεως + ζημία = τιμὴ ἀγορᾶς

τιμὴ πωλήσεως $= x$ | ζημία 9 δρ.

39 δρ. = τιμὴ ἀγορᾶς

Ἤτοι $x+9=39$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x=30$ δραχμαί.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Ἔμπορος ἀγοράζει ἐμπόρευμα ἀντὶ 24 (26 δραχμῶν καὶ τὸ πωλεῖ ἀντὶ 36 (38) δρ.· πόσας δραχμὰς κερδίζει;

2) Ἔμπορος ἐκέρδισεν ἀπὸ τὴν πώλησιν ἐμπορεύματος 12 (15) δρ.· πόσον τὸ ἠγόρασεν, ἐὰν τὸ ἐπώλησεν ἀντὶ 38 (46) δρ;

3) Ἔμπορος ἠγόρασεν ἐμπόρευμα 39 (63) δρ. καὶ ἐζημιώθη κατὰ τὴν πώλησίν του 12 (16) δρ.· ἀντὶ πόσων δραχμῶν τὸ ἐπώλησε;

4) Τὸ μικτὸν βάρος ἐμπορεύματος εἶνε 49 (65) ὀκ., τὸ δὲ ἀπόβαρον 8 (6) ὀκ.· πόσον εἶνε τὸ καθαρὸν βάρος;

5) Τὸ μικτὸν βάρος ἐμπορεύματος εἶνε 263 (349) ὀκ., τὸ δὲ καθαρὸν βάρος του 130 (149) ὀκ.· πόσον εἶνε τὸ ἀπόβαρον; 5

Ὁμὰς δευτέρα 1) Ἓν παιδίον ἀπέθανε τὸ 1885 (1896) εἰς ἡλικίαν 16 (17) ἐτῶν· ποῖον ἔτος ἐγεννήθη;

2) Ἐγεννήθη τις εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἔτους 1857 (1842) καὶ ἀπέθανεν εἰς τὸ τέλος τοῦ 1896 (1873)· εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανε;

3) Ἓν γεγονὸς ἤρχισεν εἰς τὸ τέλος τοῦ 1863 (1769) μ. Χ. Ἐὰν ἐτελείωνε α′) εἰς τὴν ἀρχὴν β′) εἰς τὸ τέλος τοῦ 1879 (1778) πόσον χρόνον θὰ διήρκει;

Ὁμὰς τρίτη. 1) Τρεῖς τόποι Α,Β,Γ εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας ὁδοῦ. Ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶνε 45 (64) χμ., ἡ ΑΓ εἶνε 63 (96) χμ.· πόση εἶνε ἡ ΒΓ;

2) Ἐκ δύο τόπων, οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν μεταξύ των 36 (29) χμ. ἀναχωροῦν δύο ταχυδρόμοι καὶ διευθύνεται καθεὶς πρὸς τὸν ἄλλον. Ὅταν συνηντήθησαν, ὁ εἷς εἶχε διατρέξει 18 (16) χμ.· πόσα εἶχε διατρέξει ὁ ἄλλος;

3) Τρεῖς τόποι Α, Β, Γ εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας ὁδοῦ· ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶνε 23 (15) χμ., ἡ ΒΓ 13 (3) χμ. μικροτέρα· πόση εἶνε ἡ ΑΓ;
33 (27).

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Ἐβάδισέ τις πρὸς νότον, ἀναχωρήσας ἀπὸ ἓν σημεῖον. Ἀφοῦ διέτρεξεν 825 (967) μ., διηυθύνθη πάλιν πρὸς βορρᾶν καὶ διέτρεξεν 802 (955) μ.· α') πόσα μέτρα διέτρεξεν ἐν ὅλῳ; β') πόσα μέτρα ἀπεμακρύνθη ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως;
1627 (1922), 23 (12).

2) Ἐκ τριῶν ἀριθμῶν ὁ εἷς εἶνε 25 (36), ὁ δεύτερος κατὰ 8 (12) μικρότερος τοῦ πρώτου, ὁ δὲ τρίτος κατὰ 15 (18) μικρότερος τοῦ δευτέρου· ποῖοι εἶνε οἱ ἀριθμοὶ καὶ πόσον τὸ ἄθροισμά των;
25, 17, 2. (36,25,6).

3) Ἐκ τριῶν ῥάβδων ἡ πρώτη ἔχει μῆκος 56 (83) δακτύλων· ἡ δευτέρα εἶνε κατὰ 15 (68) δακ. βραχυτέρα τῆς πρώτης, ἡ δὲ τρίτη κατὰ 18 (16) δακ. βραχυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο πρώτων· πόσον μῆκος ἔχουν καὶ αἱ τρεῖς;
176 (180).

§ 14. Ἀφαίρεσις ἀπὸ μνήμης.—

α') Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐξαγόμενον 276 δρχ. + 39 δρχ. — 76 δρχ., ἀρκεῖ ἀπὸ τὸν 276 δρχ., ν' ἀφαιρέσωμεν 76 δρχ. καὶ εἰς τὸ ὑπόλοιπον 200 δρχ. νὰ προσθέσωμεν 39 δρχ., ὅτε εὑρίσκομεν 239 δραχμάς.

β') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἐλαττώσωμεν ἕνα ἀριθμὸν κατὰ τὸ ἄθροισμα ἄλλων· π. χ. τὸν 39 κατὰ τὸ ἄθροισμα τοῦ 15 καὶ 4, ἤτοι κατὰ 19. Θὰ ἔχωμεν $39 - 19 = 20$· Εἶνε φανερόν, ὅτι τὸ ἐξαγόμενον αὐτὸ εὑρίσκομεν καὶ ἐὰν ἀπὸ τὸν 39 ἀφαιρέσωμεν πρῶτον 15 καὶ ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον 24 ἀφαιρέσωμεν τὸν 4.

Κατὰ ταῦτα, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $96 - 58$, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν 96 τὸ ἄθροισμα $50 + 8$ καὶ εὑρίσκομεν $96 - 50 = 46$· $46 - 8 = 38$.

γ') Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $46 - 14 - 2$, δυνάμεθα ἀπὸ τὸν 46 ν' ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τοῦ 14 καὶ τοῦ 2, ἤτοι τὸν 16, ὅτε εὑρίσκομεν 30.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων κατὰ

δύο τρόπους συμφώνως πρὸς τἀνωτέρω, ἀλλ' ἀπὸ μνήμης· α') 127+ +6—27· β') 439+4— 39· γ') 649+9—349· δ') 259+36—59—7. ε') 836+38—39—8.

2) Ὁμοίως τὰ α') 96—16—30· β') 94—14—30· γ') 70—12 —28+16· δ') 64—68+24—12.

§ 15. **Γενικὸς κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως.**—

α') Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 76—34, παρατηροῦμεν, ὅτι
Μ Μ
ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰς 4 τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς 6 τοῦ μειωτέου, ὅτε
Μ Δ Δ
εὑρίσκομεν 2, τὰς δὲ 3 τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς 7 τοῦ μειωτέου, ὅτε
Δ
εὑρίσκομεν 4. Ἤτοι δυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν 34 ἀπὸ τὸν 76, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν χωριστὰ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων καὶ τὸ τῶν δεκάδων τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τἀντίστοιχα ψηφία τοῦ μειωτέου, ὅτε εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον 42.

Ὁμοίως διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 465 ἀπὸ τὸν 976, ἀφαιροῦμεν
Μ Μ Δ Δ Ε Ε
τὰς 5 ἀπὸ τὰς 6, τὰς 6 ἀπὸ τὰς 7 καὶ τὰς 4 ἀπὸ τὰς 9. Πρὸς εὐκολίαν γράφομεν τὸν μειωτέον καὶ κάτωθεν αὐτοῦ τὸν ἀφαιρετέον, εἰς τρόπον ὥστε τὰ ψηφία τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, κάτωθεν δὲ σύρομεν ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ ὑποκάτω ταύτης γράφομεν τὰ ὑπόλοιπα τῆς ἀφαιρέσεως καθενὸς ψηφίου τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου τοῦ μειωτέου. Οὕτω ἔχομεν 5

$$\begin{array}{r} 976 \\ 465 \\ \hline 511. \end{array}$$

β') Εἶνε δυνατὸν να συμβῇ, ὥστε ἓν ἢ περισσότερα ψηφία τοῦ ἀφαιρετέου νὰ εἶνε μεγαλύτερα τῶν ἀντιστοίχων τοῦ μειωτέου. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις, ὅτι

«ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν εἰς τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν».

Ἐὰν ἔχωμεν π. χ. τὴν ἀφαίρεσιν 7—4, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 3, καθὼς φαίνεται καὶ ἐὰν καθεμίαν μονάδα τῶν ἀριθμῶν παραστήσωμεν μὲ μίαν στιγμήν.

:| :| :| :| . . .

Ἐὰν εἰς τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, π. χ. τὸν 5, θὰ ἔχωμεν πάλιν

| | | | | | | | | . .

διαφορὰν 3· ἤτοι (7+5)—(4+5)=3.

γ') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν π.χ. τῶν 764 καὶ 438. Ἐπειδὴ αἱ $\overset{M}{8}$ δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τὰς $\overset{M}{4}$, αὐξάνομεν τὸν μειωτέον κατὰ $\overset{M}{10}$ καὶ τὸν ἀφαιρετέον κατὰ $\overset{\Delta}{1}$ καὶ λέγομεν· $\overset{M}{8}$ ἀπὸ $\overset{M}{14}$ μένουν $\overset{M}{6}$· $\overset{\Delta}{1}$ καὶ $\overset{\Delta}{3}$=$\overset{\Delta}{4}$ ἀπὸ 6 μένουν $\overset{\Delta}{2}$. Τέλος $\overset{E}{4}$ ἀπὸ $\overset{E}{7}$=$\overset{E}{3}$. Ὥστε τὸ ὑπόλοιπον εἶνε 326. Πρὸς εὐκολίαν γράφομεν συνήθως τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον, καθὼς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα· καὶ λέγομεν 8 ἀπὸ 4 δὲν ἀφαιρεῖται· 8 ἀπὸ 14=6, γράφομεν τὸ 6· 1 τὸ κρατούμενον καὶ 3=4 ἀπὸ 6=2· γράφομεν τὸ 2· 4 ἀπὸ 7=3· γράφομεν τὸ 3.

$$\begin{array}{r} 764 \\ 438 \\ \hline 326. \end{array}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

δ') **«*Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο ἀριθμούς, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον, ὥστε τὰ ψηφία τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ σύρομεν ὑπ' αὐτοὺς γραμμὴν ὁριζοντίαν. Ἀκολούθως ἀφαιροῦμεν καθὲν ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον τοῦ μειωτέου, ἀρχίζομεν δὲ ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας καὶ τὰ ὑπόλοιπα γράφομεν κάτωθεν τῆς γραμμῆς εἰς τὴν ἀντίστοιχον στήλην καθενός. Ἐὰν ψηφίον τι τοῦ ἀφαιρετέου εἶνε μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον τοῦ μειωτέου, αὐξάνομεν τὸ μὲν ψηφίον τοῦ μειωτέου κατὰ 10, τὸ δὲ ἀμέσως ἑπόμενον πρὸς τἀριστερὰ τοῦ ἀφαιρετέου κατὰ μίαν μονάδα καὶ ἀφαιροῦμεν. Οὕτω ἐξακολουθοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν μέχρις ὅτου ἀφαιρεθοῦν πάντα τὰ ψηφία τοῦ ἀφαιρετέου*»**.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑπόμεναι ἀφαιρέσεις καὶ αἱ δοκιμαί των· *α')* 476—243· β') 8693—5746· γ') 9663—8569 δ') 869 λ.—307 λ.

2) Νὰ εὑρεθῇ κατὰ δύο τρόπους τὸ 8963+3276—5864.

3) Ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 89342 ν' ἀφαιρεθῇ τὸ ἄθροισμα 2532+7634 +5846. (Εὕρετε τὸ ὑπόλοιπον κατὰ δύο τρόπους).

4) Νὰ ἐλαττωθῇ τὸ ἄθροισμα 7936+5284 κατὰ τὴν διαφορὰν 14647—8993.

5) Νὰ ἐλαττωθῇ ἡ διαφορὰ 2178—1937 κατὰ τὴν 8873—8864. 132.

6) Ἀπὸ τὸν 9306 ν' ἀφαιρεθῇ ὁ 846· ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον ν' ἀφαιρεθῇ πάλιν ὁ 846 κ. ο. κ. ὅσον εἶνε δυνατόν. 11 φοράς.

7) Αὐξάνω ἀριθμόν τινα κατὰ 387 (95) καὶ εὑρίσκω τὸν 496(126). Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός; 109(31).

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἔχει τις 4876 (3122) δρ. καὶ ἐξοδεύει 2998 (1380) δρ. ἔπειτα εἰσπράττει 896 (475) δρ. καὶ δαπανᾷ 711 (88) δρ. πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν; Νὰ λυθῇ κατὰ δύο τρόπους). 2063 (2129).

2) Ἔχει τις περιουσίαν 52864 (83467) δρ. καὶ χαρίζει εἰς ἓν φιλανθρωπικὸν κατάστημα 2865 (4569) δρ. εἰς ἄλλο 3562 (5882) δρ. καὶ εἰς τρίτον 7826 (4835) δρ.· πόσαι δραχ. τοῦ ἔμειναν; (Νὰ λυθῇ κατὰ δύο τρόπους). 38611 (68191).

3) Εἷς σιδηρόδρομος εἰσπράττει κατὰ μῆνα Ἰανουάριον, Φεβρουάριον καὶ Μάρτιον ἀντιστοίχως 224516 δρ., 198213 δρ., 234787 δρ. Τὰ ἔξοδά του κατὰ τοὺς τρεῖς τούτους μῆνας ἦσαν ἀντιστοίχως 218415 δρ., 200816 δρ., 218793 δρ.· πόσον κέρδος εἶχε κατὰ τοὺς τρεῖς μῆνας; 19492.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἔμπορος ἠγόρασεν οἶνον ἀντὶ 3824 (768) δρ, καὶ τὸν ἐπώλησεν ἀντὶ 4128 (879) δρ.· πόσας δραχμὰς ἐκέρδισε; 304 (111).

2) Ἔμπορος ἐπώλησε τυρὸν ἀντὶ 2187 (176) δραχ., ἐκέρδισε δὲ 478 (79) δρ.· πόσον τὸν ἠγόρασε; 1709 (97).

3) Εἷς ἠγόρασε σάπωνα ἀντὶ 1678 (362) δρ. καὶ τὸν μετεπώλησε μὲ ζημίαν 472 (122) δρ.· πόσον τὸν ἐπώλησε; 1206 (840).

4) Τὸ μικτὸν βάρος ἐμπορεύματος εἶνε 386 (415) ὀκ., τὸ δὲ καθαρὸν βάρος 317 (398) ὀκ.· πόσον εἶνε τὸ ἀπόβαρον; 169 (17).

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Ἐγεννήθη τις τὴν 1ην Ἰανουαρίου τοῦ 1749 καὶ ἀπέθανε τὴν 1ην Ἰανουαρίου τοῦ 1832· εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανε; (83).

2) Ἐγεννήθη τις εἰς τὸ τέλος τοῦ 1571 καὶ ἀπέθανε α') εἰς τὴν ἀρχήν, β') εἰς τὸ τέλος τοῦ 1630· πόσα ἔτη ἔζησε; 58(59).

3) Εἷς πόλεμος ἤρχισεν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἔτους 836 (925) π. Χ. καὶ διήρκεσεν 76 (78) ἔτη· πότε ἐτελείωσεν; 760 (847).

4) Ἓν γεγονὸς ἤρχισεν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἔτους 711 (387) π. Χ. καὶ ἐτελείωσεν εἰς τὸ τέλος τοῦ 685 (297) π. Χ.· πόσον χρόνον διήρκεσεν; 27(91).

Ὁμὰς πέμπτη. 1) Ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἀναχωροῦν δύο πεζοπόροι, διευθυνόμενοι πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν· πόσον θ' ἀπέχουν μεταξύ των, ἐὰν ὁ μὲν διατρέξῃ 586 (961) μ., ὁ δὲ 489 (1024) μ.; 97 (63).

2) Ἀπὸ δύο τόπους οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν μεταξύ των 328 (170) μ., ἀναχωροῦν πρὸς ἀντιθέτους φορὰς δύο ταχυδρόμοι διὰ νὰ συναντηθοῦν· πόση θά εἶνε ἡ ἀπόστασίς των μετὰ μίαν ἡμέραν, ἐὰν ὁ πρῶτος διανύῃ 28 (27) χμ., ὁ δὲ 27 (31) χμ., καθ' ἡμέραν; 273 (112).

3) Ἀπὸ δύο τόπους Α, Β, οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν μεταξύ των 35 (45) χμ. ἀναχωροῦν δύο ταχυδρόμοι διευθυνόμενοι πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν· πόσον θ' ἀπέχουν ἐάν, ὁ ἐκ τοῦ Α ἀναχωρήσας διανύσῃ 125 (125) χμ., ὁ δ' ἐκ τοῦ Β 327 (285) χμ.; 237(115).

4) Ἐκ τριῶν προσώπων Α, Β, Γ ὁ Α ἔχει 4826 (176) δρ. Ὁ Β 625 (83) ὀλιγωτέρας τοῦ Α καὶ ὁ Γ 178 (24) δρ. ὀλιγωτέρας τοῦ Β. Ὁ Α δίδει εἰς τὸν Γ 48 (22) δρ., ὁ Γ ὅμως δίδει εἰς τὸν Β 243(18) δρ· πόσας δραχμὰς θὰ ἔχῃ καθείς; 4778· 4444· 2828· (154, 111, 73

ΚΑΦΑΛΑΙΟΝ IV.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ.

§ 16. Ὁρισμοί.—

α') (Πρόβλημα). «*Ἡ μία ὀκᾶ ὀσπρίων κοστίζει 9 δραχμάς· πόσον κοστίζουν αἱ 5 ὀκάδες τῶν αὐτῶν ὀσπρίων;*»

Ἀφοῦ διὰ καθεμίαν ὀκᾶν πληρώνομεν 9 δρ., διὰ τὰς 2 ὀκ. θὰ πληρώσωμεν 9 δρ. + 9 δρ.· ἑπομένως διὰ τὰς 5 ὀκ. θὰ πληρώσωμεν 9 δρ. + 9 δρ. + 9 δρ. + 9 δρ. + 9 δρ. = 45 δραχμάς. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδονται δύο ἀριθμοί, οἱ 9 καὶ 5 καὶ σχηματίζομεν ἓν ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τόσους προσθετέους ἴσους μὲ τὸν πρῶτον 9, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δεύτερος 5, ὁδηγεῖ δὲ εἰς τὸ ἑξῆς γενικώτερον.

β') «*Δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται νὰ εὕρωμεν ἓν ἄθροισμα, ἔχον τόσους προσθετέους ἴσους μὲ τὸν πρῶτον ἀριθμόν, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δεύτερος*».

Εἶνε φανερόν, ὅτι ἓν τοιοῦτον πρόβλημα τότε μόνον εἶνε δυνατόν, ἐὰν ὁ δεύτερος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶνε ἀφῃρημένος καὶ διάφορος τοῦ 0 καὶ 1, διότι καθὲν ἄθροισμα πρέπει νὰ ἔχῃ τοὐλάχιστον δύο προσθετέους.

γ') Ἐκ τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν ὁ πρῶτος λέγεται *πολλαπλασιαστέος*, ὁ δεύτερος *πολλαπλασιαστὴς* καὶ οἱ δὲ δύο μαζῇ *παράγοντες*. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς λέγεται *γινόμενον*, ἡ δὲ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται τὸ γινόμενον λέγεται *πολλαπλασιασμός*.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι,

δ') «*πολλαπλασιασμὸς λέγεται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν, ἐπαναλαμβάνομεν τὸν ἕνα τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἄλλος*».

Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν π.χ. τῶν 7 καὶ 4, γράφομεν οὕτω 7×4, ἢ 7.4 καὶ ἀπαγγέλλομεν *ἑπτὰ ἐπὶ τέσσαρα*, δηλαδὴ τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶνε τὸ *ἐπὶ* ($\times$ ἢ .). Ὥστε τὸ 7×4 φανερώνει τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἐὰν εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τεσσάρων προσθετέων ἴσων μὲ 7, ἤτοι 5

$$7 \times 4 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28.$$

§ **13. Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.**—

Καλοῦμεν *γινόμενον τριῶν ἢ περισσοτέρων δοθέντων ἀριθμῶν, ἢ παραγόντων* τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν πρῶτον ἐκ τῶν δοθέντων ἐπὶ τὸν δεύτερον, τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τὸν τέταρτον κ.ο.κ. μέχρι τοῦ τελευταίου Π.χ. τὸ γινόμενον τῶν $3 \times 2 \times 5$ θὰ εὑρεθῇ, ἐὰν εὕρωμεν τὸ γινόμενον 3×2, ἤτοι τὸ 6, καὶ τοῦτο πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 5, ὅτε εὑρίσκομεν $6 \times 5 = 30$. Σημειώνομεν τὸ γινόμενον τοῦτο ὡς ἑξῆς

3.2.5, ἢ $3 \times 2 \times 5$ καὶ εἶνε $= 30$, ὡς εἴδομεν.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ γραφοῦν αἱ κάτωθι προσθέσεις ὡς πολλαπλασιασμοί.

α' $6+6+6$· β') $94+94$· γ') 130 δρ. + 130 δρ. + 130 δρ.

Δ Δ Δ

δ') 832 μ. + 832 μ. ε') $9+9+9$.

2) Νὰ γραφοῦν αἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοὶ ὡς προσθέσεις

καὶ νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα· α΄) 18×4· β΄) 140×5· γ΄) 1250×5.
M X Δ E X
δ΄) 9800×4· ε΄) 560×3· στ΄) 89×5· ζ΄) 12×5 η΄) 38×7.

3) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα· α΄) 40×6· β΄) 50×9. γ΄) 350×6.
Δ Δ
δ΄) 8600×9. ε΄) 900×7. (Παρατηρήσατε ὅτι $40\times6=4\times6=24=240$).

4) Σχηματίσατε τὰ γινόμενα πάντων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν, λαμβανομένων ἀνὰ δύο.

5) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα α΄) $5\times2\times7\times4$· β΄) $6\times7\times9\times2$. γ΄) $40\times5\times1$· δ΄) $8\times3\times5\times2$· ε΄) 8. 4. 3. 2. 7.

6) Μία εὐθεῖα γραμμὴ διαιρεῖται εἰς 8 ἴσα μέρη καὶ καθὲν τούτων πάλιν εἰς 5 ἴσα μέρη· εἰς πόσα ἴσα μέρη διαιρεῖται οὕτω ἡ εὐθεῖα;

§ 18. Δυνάμεις ἑνὸς ἀριθμοῦ.—

α΄) Συνήθως ἀπαντῶμεν γινόμενα μὲ παράγοντας ἴσους. Π. χ. $3\times3\times3$, $6\times6\times6$, ἢ 9×9 κ. ο. κ. Μεταχειριζόμεθα δι' αὐτὰ γραφὴν συντομωτέραν καὶ τὰ ὀνομάζομεν μὲ ἰδιαίτερον ὄνομα. Γράφομεν μόνον ἕνα τῶν ἴσων παραγόντων, δεξιὰ δ' αὐτοῦ καὶ ἄνω τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος φανερώνει πόσας φορὰς ὑπάρχει ὁ παράγων αὐτὸς εἰς τὸ γινόμενον. Οὕτω τὸ $3\times3\times3$ γράφεται 3^3, τὸ $6\times6\times6\times6\times6=6^5$, τὸ $9\times9=9^2$. Τοιαῦτα γινόμενα λέγονται *δυνάμεις* τῶν ἀριθμῶν. Οὕτω τὸ 3^3 λέγεται *τρίτη δύναμις* τοῦ 3, καὶ ἀπαγγέλλεται *τρία εἰς τὴν τρίτην δύναμιν*· τὸ δὲ 6^5 λέγεται *πέμπτη δύναμις* τοῦ 6, ἢ *6 εἰς τὴν πέμπτην δύναμιν* κ. ο. κ.

β΄) Κατὰ ταῦτα, «*δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον ἴσων παραγόντων μὲ τὸν ἀριθμόν*». Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δεικνύει τὸ πλῆθος τῶν ἴσων παραγόντων τοῦ γινομένου, λέγεται *ἐκθέτης τῆς δυνάμεως*, ὁ δὲ εἷς τῶν ἴσων παραγόντων λέγεται *βάσις τῆς δυνάμεως*

γ΄) Ἂν οἱ ἴσοι παράγοντες εἶνε δύο, ἡ δύναμις του λέγεται *τετράγωνον* ἢ *δευτέρα δύναμις* αὐτοῦ· ἂν εἶνε τρεῖς, λέγεται *κύβος* τοῦ ἀριθμοῦ ἢ *τρίτη δύναμις*, ἂν τέσσαρες, πέντε, λέγεται *τετάρτη πέμπτη,.... δύναμις* κ.ο.κ. Οὕτω ὁ κύβος τοῦ 4 εἶνε $4^3=4\times4\times4=64$. Τὸ τετράγωνον τοῦ 5 εἶνε $5^2=5\times5=25$.

Εἶνε φανερόν, ὅτι πᾶσα δύναμις τοῦ 1 εἶνε ἴση μὲ 1, πᾶσα δὲ δύναμις τοῦ 10, εἶνε ἴση μὲ τὴν μονάδα, ἀκολουθουμένην ὑπὸ τόσων μηδενικῶν ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως. Οὕτω ἔχομεν ὅτι $10^2=10\times10=100$· $10^3=10\times10\times10=1000$.

δ΄) Ἐὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, π.χ. τὰς 5^2 καὶ 5^4 θὰ εἶνε $5^2\times5^4=5\times5\times5\times5\times5\times5=5^6$. Ὁμοίως τὸ $6^3\times6^2=6^5$· τὸ $7^2\times7^2\times7^5=7^9$. Ἤτοι,

«τὸ γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶνε δύναμις αὐτοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν δοθεισῶν δυνάμεων».

§ **19. Ἐφαρμογὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον.** —

α΄) Ἐκ τῶν πολλῶν ἐφαρμογῶν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀναφέρομεν ἐνταῦθα ἐκείνην, καθ' ἣν ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων.

β΄) (Πρόβλημα). *«Ἡ ὀκᾶ σάπωνος τιμᾶται 16 δραχμάς· πόσον τιμῶνται αἱ 4 ὀκάδες τοῦ αὐτοῦ σάπωνος;»*

Ἐν πρώτοις παριστάνομεν τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν διὰ τοῦ x καὶ γράφομεν

1 ὀκ. τιμᾶται 16 δρ.
4 x

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ ἡ 1 ὀκ. τιμᾶται 16 δρ., αἱ 2 ὀκάδες θὰ τιμῶνται 16 δρ. + 16 δρ. = 16 δρ $\times$ 2· καὶ αἱ 4 ὀκ. θὰ τιμῶνται 16 δρ. + 16 δρ. + 16 δρ. + 16 δρ. = 16 δρ. $\times$ 4 = 64 δραχμάς.

γ΄) (Πρόβλημα). *«Δίδει τις μίαν ὀκᾶν καφὲ καὶ λαμβάνει 5 ὀκ. σάπωνος· ἐὰν δώσῃ 8 ὀκ. καφέ, πόσας ὀκάδας σάπωνος θὰ λάβῃ;»*

Παριστάνομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ x καὶ γράφομεν

1 ὀκ. κ. 5 ὀκ. σ.
8 x

σκεπτόμενοι δὲ καθὼς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, βλέπομεν ὅτι, ἀφοῦ διὰ μίαν ὀκᾶν καφὲ λαμβάνει 5 ὀκ. σάπωνος, διὰ δύο ὀκ. καφὲ θὰ λάβῃ 5 $\times$ 2 ὀκάδας σάπωνος καὶ διὰ 8 ὀκ. καφὲ θὰ λάβῃ 5 $\times$ 8 = 40 ὀκ. σάπωνος.

δ΄) **«Τὰ ἀνωτέρω προβλήματα, εἰς καθὲν τῶν ὁποίων δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων, καθὼς καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτά, λύονται διὰ πολλαπλασιασμοῦ· πολλαπλασιαστέος εἶνε ἡ τιμὴ τῆς** *μιᾶς μονάδος (ἀδιαφόρως τοῦ τί παριστάνει), πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων, τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ ζητεῖται (καὶ εἶνε εἰς τὴν πρᾶξιν τοῦ πολλαπλασιασμου ἀριθμὸς ἀφῃρημένος). Τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ φανερώνει ὅ,τι καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος».*

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Μία ὀκᾶ οἴνου τιμᾶται 8(10) δρ.· πόσον τιμῶνται 8 (7) ὀκ. τοῦ αὐτοῦ οἴνου;

2) Ἡ μία ὀκᾶ (δραχμὴ) ἔχει 400 (100) δράμια (λεπτά)· πόσα ἔχουν αἱ 3, αἱ 6 αἱ 9 ὀκ. (δραχμαί);

3) Ἓν χρηματικὸν κεφάλαιον δίδει τόκον εἰς ἓν ἔτος 396 (692) δρ.· πόσον τόκον θὰ δώσῃ εἰς 5 (8) ἔτη; 1980 (5536).

4) Ἂν ἡ ὀκᾶ τῆς ζαχάρεως τιμᾶται 12 (32) δρχ.· πόσον τιμῶνται αἱ 8, αἱ 10, αἱ 14, αἱ 30 ὀκ.;

5) Ἁμαξοστοιχία διατρέχει εἰς 1 ὥραν 40 (60) χμ.· πόσα διατρέχει εἰς 6, εἰς 10, εἰς 12, εἰς 30 ὥρας;

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἀγοράζει τις 5 (12) ὀκ ἑνὸς ἐμπορεύματος* πρὸς 32 (53) δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ τὸ πωλεῖ πρὸς 37 (56) δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας δραχμὰς κερδίζει ἐν ὅλῳ; 25 (36).

2) Ἔμπορος ἠγόρασεν 8 (9) ὀκ. πράγματος ἀντὶ 120 (150) δρ. καὶ τὸ ἐπώλησε πρὸς 20 (25) δρ. τὴν ὀκᾶν· πόσον ἐκέρδισε; 40 (75).

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἀπὸ ἕνα τόπον ἀναχωροῦν δύο ταχυδρόμοι διευθυνόμενοι ἀντιθέτως· πόση θὰ εἶνε ἡ ἀπόστασίς των μετὰ 3 (4) ἡμ., ἐὰν ὁ πρῶτος διατρέχῃ 2[illegible] (38) χμ., ὁ δὲ δεύτερος 36 (42) χμ. καθ' ἡμέραν; 183 (320).

2) Πόση θὰ εἶνε ἡ ἀπόστασις τῶν αὐτῶν ταχυδρόμων, ἐὰν ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν; 33 (16).

* Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο καθὼς καὶ εἰς ἄλλα εἰς τὰ ὁποῖα δὲν ἀναφέρεται ἀκριβῶς τὸ εἶδος τοῦ ἐμπορεύματος, καλὸν εἶνε νὰ ὁρίζῃ αὐτὸ ὁ καθηγητὴς εἰς τρόπον, ὥστε ν' ἁρμόζουν καὶ αἱ ἀναγραφόμεναι τιμαὶ διὰ καθὲν καὶ κατὰ τὸ δυνατὸν συμφώνως πρὸς τὰ προϊόντα τοῦ τόπου, ἐν ᾧ λειτουργεῖ τὸ σχολεῖον.

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Ἔχομεν ἕνα ἀριθμὸν μαθητῶν καὶ τοποθετοῦμεν εἰς καθὲν ἐκ 3 (4) θρανίων 7 (8), περισσεύουν δὲ 6 (6) μαθηταί. Πόσους μαθητὰς ἔχομεν; 27 (38).

2) Ἔχομεν 4 (5) θρανία καὶ δοκιμάζομεν νὰ τοποθετήσωμεν εἰς καθὲν 6 (7) μαθητάς, ἀλλὰ περισσεύουν 2 (3) θέσεις κεναί· πόσους μαθητὰς ἔχομεν; 22 (32)

Ὁμὰς πέμπτη. 1) Εἷς ἐργάτης κερδίζει καθ' ἡμέραν 20 δρ.· πόσον κερδίζει α') εἰς 8 ἡμέρ.; β') εἰς μίαν ἑβδομάδα;

2) Ἀγοράζει τις 80 ὀκ. σίτου πρὸς 8 (5) δραχ. τὴν ὀκᾶν· πόσας δραχμὰς θὰ πληρώσῃ;

3) Ἔμπορος ἀγοράζει 6 πήχεις ὑφάσματος ἀντὶ 72 δρ. καὶ τὸ πωλεῖ πρὸς 10 δραχμὰς τὸν πῆχυν· ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη καὶ πόσον; ζ 12.

4) Ἐκ δύο τόπων, οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν 432 (583) χμ., ἀναχωροῦν δύο ταχυδρόμοι, διευθυνόμενοι πρὸς συνάντησίν των· πόσον θ' ἀπέχουν, ἐὰν ὁ μὲν βαδίσῃ 3 (4) ἡμ. ἀπὸ 25 (43) χμ., ὁ δὲ ἐπὶ 4 (5) ἡμ. ἀπὸ 21 (41) χμ. καθ' ἡμέραν; 273 (206).

5) Τρεῖς τόποι Α, Β, Γ εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας ὁδοῦ· ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶνε 4 (6) χμ., ἡ ΒΓ 8 (12) χμ. μεγαλυτέρα τοῦ τριπλασίου τῆς ΑΒ· πόση εἶνε ἡ ΑΓ; 24 (36).

5

§ 20. Πολλαπλασιασμὸς ἀπὸ μνήμης.—

α') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 35[illegible]

Δ M

Εἶνε φανερὸν ὅτι, ἂν γράψωμεν 35=3+5, δυνάμεθα ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 35 ἐπὶ 9, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς

M Δ Δ M M

3×9 καὶ 5×9, ὅτε εὑρίσκομεν 3×9=27, καὶ 5×9=45, τὰ δύο δὲ αὐτὰ ἐξαγόμενα νὰ τὰ προσθέσωμεν. Οὕτω προκύπτει

M M M Δ M

27+45=270+45=315. Ὁμοίως ἔχομεν 45×6=4×6+5×6=

M

24+30=270· ἤτοι,

β') «*Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καθένα τῶν προσθετέων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα*».

γ') (Πρόβλημα). «*Μαθητὴς ἀγοράζει 6 τετράδια πρὸς 50 λεπτὰ*

τὸ ἕν· ἄλλην φορὰν ἀγοράζει 3 τετράδια πρὸς 50 λεπτὰ τὸ ἕ πόσον ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ;».

Θὰ εὕρωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ μ θητὴς ἐπλήρωσε τόσα, ὅσα θὰ ἐπλήρωνεν, ἐὰν ἠγόραζεν 6.τετρ.+3 τετ =9 τετρ. πρὸς 50 λ. καθέν· ἤτοι 50×9=450 λ. Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμεν εὑρίσκομεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ 50 λ. ἐπὶ 6 καὶ ἔπειτα ἐπὶ καὶ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα· ἤτοι 50 λ.×(6+3)=50 λ.×6+ 50 λ.×3=50 λ.×9=450 λ.

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ἕπεται ὅτι, ***«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ καθένα τῶν προσθετέων κ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα».***

δ′) (Πρόβλημα). ***«Ἔμπορος παραγγέλλει καὶ τοῦ στέλλουν 2 ὀκ. ἑνὸς ἐμπορεύματος πρὸς 8 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Ἀλλ' ἐκ τούτο ἐπέστρεψε τὰς 9 ὀκ.· πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πληρώσῃ;».***

Θὰ εὕρωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, ἐὰν παρατηρήσωμεν, ὅ ὁ ἔμπορος πρέπει νὰ πληρώσῃ μόνον τὰς 29 ὀκ. — 9 ὀκ. = 20 ὀκ τὰς ὁποίας ἐκράτησε, πρὸς 8 δρ. καθεμίαν· ἤτοι θὰ πληρώσῃ 20×8= 160 δραχμάς. Τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν θὰ εὕρωμεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν 8 δραχμὰς ×29, καὶ ἀπὸ τὸ γινόμενον 232 δραχμὰς ἀφαιρέσωμεν τὸ δραχμὰς ×9=72 δραχμάς. Ὥστε ἔχομεν 8 δραχμὰς×29—8 δραχμ ×9=8 δραχμὰς ×(29—9)=8 δραχμὰς ×20=160 δραχμάς.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἔχομεν ὅτι, 26—6 ἐπὶ 4 ἰσοῦται μὲ 26×4= 104, πλὴν 6×4=24· δηλαδὴ μὲ 80. Ἤτοι,

«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ τὴν διαφορὰν δι ἄλλων, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν μειο τέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτον γιν μενον νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον».

ε′) Ἔστω ὅτι θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 96×10 ἤ 96×100, ἢ τὸ 96×1000... κ. ο. κ.

Εἶνε φανερὸν ὅτι, ἐὰν ἡ μονὰς ληφθῇ ὡς προσθετέος 10 φοράς, θ

δώσῃ 1 δεκάδα· ἄρα αἱ 96×10 θὰ δώσουν $\overset{\text{M}}{96}=\overset{\Delta}{96}0$.

Ὁμοίως $96\times 100=\overset{\text{M}}{96}=\overset{\text{E}}{96}00$· $96\times 1000=\overset{\text{X}}{96}=96000$ κ.ο.κ.

Ὥστε, ***«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 ἀρκεῖ, νὰ γράψωμεν εἰς τὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ ἕν δύο, τρία... μηδενικά».***

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κατωτέρω γινόμενα ἀπὸ μνήμης κατὰ δύο τρόπους· α') 36×3. β') 87×4· γ') 46×6· δ') 37×9· ε') 25×5· ς') 86×7· ζ') 96×7· η') 92×4. Δ

2) Ὁμοίως τὰ α') 15×13· β') 25×18· γ') 25δρ.×14· δ') 12×8. ε') 28μ.×30· ς') 35 ὀκ. ×10· ζ') 30 πήχ. ×12· η') 15μ.×40.

3) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν α') 38×5+16×5· β') 66×5 +34×5. γ') 65×8+35×8. δ') 28×9 +32×9+90×9.

4) Ὁμοίως τὰ α') 89×4—9×4. β') 136×5—96×5. γ') 215×8—185×8. δ') 46×8+75×8—71×8. ε') 68×17—13×17—42×17· ς') 37×19+24×19—31×19.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα· α') 96 ×100. β') 87×10 γ') 657× 1000· δ') 592×10000. ε') 427×100000.

§ **21. Ἰδιότης τοῦ γινομένου ἀριθμῶν.—**

α') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 6×4.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ μιᾶς στιγμῆς καθεμίαν μονάδα τῶν ἀριθμῶν, θὰ ἔχωμεν ὅτι, 6=.+.+.+.+.+., 4=.+.+.+.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 6×4 θὰ ἐπαναλάβωμεν τὰς μονάδας τοῦ 6 τέσσαρας φοράς· ἤτοι θὰ ἔχωμεν 5

ἄθροισμά των πάντοτε 4							
	.	.	.	.	.	.	ἄθροισμά των 6
	.	.	.	.	.	.	ἄθροισμά των 6
	.	.	.	.	.	.	ἄθροισμά των 6
	.	.	.	.	.	.	ἄθροισμά των 6
	4	4	4	4	4	4	

Ἐὰν προσθέσωμεν τὰς μονάδας αὐτὰς κατὰ σειράς, θὰ εὕρωμεν 6+6+6+6=6×4=24· ἐὰν δὲ κατὰ στήλας, 4+4+4+4+4+4 =4×6=24. Τὰ δύο ἐξαγόμενα εἶνε ἴσα μὲ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας προσθέτομεν, εἶνε δὲ τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὰς δύο προσθέσεις. Ὥστε 6×4=4×6· ἤτοι,

«τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων».

β') Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἰσχύει καὶ διὰ γινόμενον περισσοτέρων παραγόντων. Ἔστω π.χ. ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 3×2×5· Παρατηροῦμεν ὅτι 3×2×5=6×5=30. Ἀλλὰ καὶ 3×5×2=15×2 =30· ἐπίσης 2×3×5=6×5=30, καὶ 2×5×3=10×3=30.

Ὅθεν, *«τὸ γινόμενον ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, καθ' οἱανδήποτ τάξιν καὶ ἂν γράψωμεν τοὺς παράγοντας αὐτοῦ»*.

γ') Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν μεταχειριζόμεθα, διὰ νὰ κάμωμεν τὴ δοκιμὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ἐὰν π.χ. ζητοῦμεν τὸ γινόμενον 20×15 καὶ εὕρωμεν 300, ἀλλάσσομεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων, γράφομεν δηλαδὴ 15×20, ἐκτελοῦμεν καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτόν, πρέπει δὲ νά εὕρωμεν τὸ αὐτὸ γινόμενον 300.

δ') Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστέος εἶνε συγκεκριμένος ἀριθμός, δὲν ἐπιτρέπεται ν' ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων. Διότι ὁ πολλαπλασιαστὴς πρέπει νά εἶνε πάντοτε ἀριθμὸς ἀφῃρημένος. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θεωροῦμεν καὶ τὸν πολλαπλασιαστέον ὡς ἀφῃρημένον ἀριθμὸν καὶ εἰς τὸ προκύπτον γινόμενον δίδομεν τὴν ἐπωνυμίαν τοῦ δοθέντος πολλαπλασιαστέου. Οὕτω δυνάμεθα νὰ κάμωμεν τὴν ἀλλαγὴν τῆς θέσεως τῶν παργόντων. Π.χ. ἐὰν ἔχωμεν 8 δραχμ.$\times 15$, λέγομεν $8\times 15=15\times 8$ καὶ εἰς τὸ γινόμενον 120 δίδομεν τὴν ἐπωνυμίαν δραχμαί.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν ἀπὸ μνήμης τά κάτωθι γινόμενα κατὰ τὸν εὐκολώτερον τρόπον· α') $8\times 4\times 5$· β') $6\times 8\times 5$· γ') $5\times 8\times 2$· δ') $6\times 4\times 3\times 5$· ε') $8\times 5\times 3\times 9$· ς') $5^2\times 2^2\times 10$.

2) Ὁμοίως τά· α') τὸ 4 νὰ ληφθῇ 5×6 φοράς· β') τὸ 5×7 νὰ ληφθῇ 3 φοράς· γ') 8 φορὰς τὸ 5×4.

§ 22. Περὶ τῶν παραγόντων 1 καὶ 0.—

α') Εἰς τὴν (§ 16, β') εἴδομεν, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον ἰσχύει, ὅταν ὁ δεύτερος ἀριθμὸς δὲν εἶνε 1 ἢ 0. Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ 1 σημαίνει αὐτὸν τὸν ἀριθμόν.

Οὕτω 9 ἐπὶ 1 σημαίνει, νὰ λάβωμεν τὸν 9 μίαν φοράν· ἤτοι $9\times 1=9$.

β') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 8×0. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (§21, α') τὸ $8\times 0=$ μὲ 0×8 καὶ τοῦτο εἶνε ἴσον μὲ $0+0+0+0+0+0+0+0=0$, ἕπεται ὅτι καὶ $8\times 0=0$.

Κατὰ ταῦτα, τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ 1 ἰσοῦται μὲ αὐτὸν τὸν ἀριθμόν, ἐνῷ τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ 0 εἶνε ἴσον μὲ 0. Ὥστε εἶνε $5\times 1=5$, ἐνῷ $5\times 0=0$.

Ἀσκήσεις.

1) Ἐὰν εἷς τῶν παραγόντων γινομένου δύο ἀριθμῶν εἶνε ἴσος μὲ 1, π.χ. 1×7 ἢ 1×25, μὲ τί ἰσοῦται τὸ γινόμενον;

2) Ἐὰν εἷς τῶν παραγόντων γινομένου εἶνε 0, π.χ. $8\times0\times3$, ἢ $2\times7\times0\times8$ μὲ τί ἰσοῦται τὸ γινόμενον;

3) Μὲ τί ἰσοῦται οἱαδήποτε δύναμις τῆς μονάδος; π.χ. ἢ 1^3;

§ **23. Κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἀριθμῶν.**—

α′) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 496×8.

Ε Δ Μ

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ $496=4+9+6$. Ἑπομένως (§ 20, α′), διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ 496 ἐπὶ 8, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιά-

Ε Δ Μ

σωμεν τὰς 4 ἐπὶ 8, τὰς 9 ἐπὶ 8 καὶ τὰς 6 ἐπὶ 8, νὰ προσθέσωμεν δὲ τὰ

Ε Δ Μ Ε Δ Μ

ἐξαγόμενα· ἤτοι $496\times8=4\times8+9\times8+6\times8=32+72+48=$

Μ Δ Ε Μ Δ Ε

$=8+76+32=8+6+39=3968$.

Ὡς βλέπομεν, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ 496×8, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καθὲν ψηφίον αὐτοῦ χωριστὰ ἐπὶ 8 καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα, προσέχοντες εἰς τὸ ὅτι, ὁ πολλαπλασιασμὸς

Μ

τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων 6×8 δίδει γινόμενον 48, τοῦ τῶν δεκάδων

Δ Ε

9×8 δίδει 72, καὶ τοῦ τῶν ἑκατοντάδων 4×8 δίδει 32. Πρὸς εὐκολίαν γράφομεν τὸν 496, ὑποκάτω αὐτοῦ τὸν 8, καὶ πολλαπλασιάζομεν ὡς ἑξῆς, ἀφοῦ προηγουμένως σύρωμεν κάτωθεν αὐτῶν γραμμὴν ὁριζοντίαν, ὑπὸ τὴν ὁποίαν γράφομεν τὰ ἐξαγόμενα.

$$\begin{array}{r} 496 \\ 8 \\ \hline 3968. \end{array}$$

Λέγομεν $8\times6=48$· γράφομεν 8 καὶ κρατοῦμεν 4· $8\times9=72$ καὶ $4=76$, γράφομεν τὸ 6 κρατοῦμεν 7· $8\times4=32$ καὶ 7 τὰ κρατούμενα 39· γράφομεν τὸ 39. Τὸ γινόμενον εἶνε 3968.

β′) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 387×562.

Ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 20, α′) ἀντὶ νὰ λάβωμεν τὸ 387 ὡς προσθετέον 562 φοράς, εἶνε τὸ αὐτό, ἐὰν λάβωμεν αὐτὸν πρῶτον 500 φοράς, ἔπειτα 60 φορὰς καὶ τέλος 2 φορὰς ἀκόμη καὶ προσθέσωμ τὰ ἐξαγόμενα. Ὥστε θὰ ἔχωμεν

$$387\times500=387\times5\times100=1935\times100=193500,$$
$$387\times60=387\times6\times10=2322\times10=23220,$$
$$387\times2\qquad\qquad\qquad\qquad=774.$$

Ἤτοι $387\times562=193500+23220+774$. Διὰ νὰ προσθέσωμεν τ ἐξαγόμενα αὐτά, ἐφαρμόζομεν τὸν γενικὸν κανόνα τῆς προσθέσ (§ 11), ὅτε ἔχομεν

$$\begin{array}{lr} & 774 \\ & 23220 \\ & 193500 \\ \hline \text{ἄθροισμα} & 217494 \end{array}$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν σύντομον κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ παρατηροῦ μεν ὅτι τὸ 774 εἶνε τὸ γινόμενον τοῦ 387 ἐπὶ τὸ ψηφίον 2 τῶν ἁπλῶ μονάδων τοῦ 562· τὸ 2322 εἶνε τὸ γινόμενον τοῦ 387 ἐπὶ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ 562, καὶ τὸ 1935 εἶνε τὸ γινόμενον τοῦ 387 ἐπὶ τ ψηφίον 5 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ 562. Πρὸς τούτοις βλέπομεν, ὅτι τ 2322 γράφεται ὑποκάτω τοῦ 774, ἀφοῦ ἀφεθῇ μία θέσις ἐκ τοῦ τέλου πρὸς τὰ δεξιά, εἰς τὴν ὁποίαν γράφεται 0 (τὸ ὁποῖον δύναται καὶ ν παραληφθῇ)· ἐπίσης τὸ 1935 γράφεται ὑποκάτω τοῦ 2322, ἀφο ἀφεθῇ μία θέσις πρὸς τὰ δεξιά.

Πρὸς εὐκολίαν γράφομεν τὸ 387 καὶ ὑποκάτω αὐτοῦ τὸ 562 σύρομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ κάτωθεν αὐτῆς γράφομεν τὰ γινόμεν 774· 2322· 1935, καθὼς εἴπομεν, καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πρῶτο πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον καθενὸς τῶν γινομένων τοῦ 387 ἐπὶ τὰ ψηφία τοῦ 562 εὑρίσκεται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην μὲ τὸ ἀντίστοιχον ψηφίο τούτου.

$$\begin{array}{lr} & 387 \\ & 562 \\ \hline (1) & 774 \\ (2) & 2322 \\ (3) & 1935 \\ \hline & 217494 \end{array}$$

Ἤτοι τὸ 4 τοῦ 774 εὑρίσκεται ὑποκάτω τοῦ 2 τοῦ 562· τὸ 2 τοῦ 2322 εὑρίσκεται ὑποκάτω τοῦ 6 τοῦ 562· τὸ 5 τοῦ 1935 εὑρίσκεται ὑποκάτω τοῦ 5 τοῦ 562.

γ') Ὁμοίως διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 83054×413 λέγομεν, ἀφοῦ γράψωμεν τὸ 83054, ὑποκάτω αὐτοῦ τὸ 413 καὶ κάτωθεν τούτου σύρωμεν γραμμὴν ὁριζοντίαν.

$3\times4=12$, γράφομεν 2 καὶ κρατοῦμεν 1· $3\times5=15$

	83054
	413
(1)	249162
(2)	83054
(3)	332216
	34301302

καὶ 1=16, γράφομεν 6 καὶ κρατοῦμεν 1· 3×0=0 καὶ 1=1, γράφομεν τὸ 1· 3×3=9, γράφομεν τὸ 9· 3×8=24, γράφομεν 24. Ὁμοίως πολλαπλασιάζομεν τὸ 83054 ἐπὶ 1, καὶ ἔπειτα ἐπὶ 4 καὶ τὸ μὲν γινόμενον ἐπὶ 1 ἀρχίζομεν νὰ γράφωμεν ἐκ τῆς θέσεως ἡ ὁποία εἶνε ὑποκάτω τοῦ 1 τοῦ 413 κ.ο.κ.

Τὰ γινόμενα τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ καθὲν τῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ λέγονται μερικὰ γινόμενα. Οὕτω τὰ (1), (2), (3), εἶνε μερικὰ γινόμενα

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

ϛ') «***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο οἱουσδήποτε ἀριθμούς, γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ κάτωθεν σύρομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν. Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ καθὲν τῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἀρχίζοντες ἐκ τῶν δεξιῶν καὶ γράφομεν τὰ μερικὰ γινόμενα ὑπὸ τὴν γραμμὴν τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο οὕτως, ὥστε τὸ πρῶτον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον καθενὸς τούτων νὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν στήλην τοῦ ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἐπὶ τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν. Ἀκολούθως φέρομεν κάτωθεν τοῦ τελευτέου τῶν μερικῶν γινομένων γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ προσθέτομεν ταῦτα, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμήν***». 5

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ πολλαπλασιασθῇ καθεὶς τῶν 185· 3642. 83513 ἐπὶ καθένα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν.

2) Νὰ πολλαπλασιασθοῦν οἱ ἀριθμοὶ 831· 605· 2353· 2793 ἀντιστοίχως ἐπὶ 75· 19· 187· 322 καὶ νὰ γίνουν καὶ αἱ δοκιμαί.

3) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα· α') 2174×1079×2009· β') 8172×3021×715. γ') 3005×7×2×3×5.

(Ἀπόκρ. α') 4712603714. β') 17651642580. γ') 631050).

4) Πόσον εἶνε τὸ ἄθροισμα τοῦ γινομένου 8262×7132 καὶ τοῦ 3151×829; 61536763.

5) Πολλαπλασιάσατε τὸν 4800×400 καὶ δείξατε ὅτι, ἀρκεῖ ν πολλαπλασιάσωμεν τὸν 48×4 καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ γινομένου αὐτο νὰ γράψωμεν τέσσαρα μηδενικὰ (ὅσα ἔχουν εἰς τὸ τέλος καὶ οἱ δύ παράγοντες).

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Μία δωδεκὰς ἔχει δώδεκα τεμάχια· πόσα τεμά χια ἔχουν 24 (36) δωδεκάδες; 288 (432)

2) Μία δραχμὴ ἔχει 100 λεπτά· πόσα λεπτὰ ἔχουν 68 (125) δραχμαί; 6800 (12500).

3) Τὸ ἀγγλικὸν μίλιον ἔχει 1760 ὑάρδας· πόσας ὑάρδας ἔχου 196 (285) μίλια; 344960 (501600).

4) Ἁμαξοστοιχία διατρέχει 35 (68) χμ. εἰς μίαν ὥραν· πόσα διατέχει εἰς 29 (45) ὥρας; 1015 (3060).

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἀγοράζει τις 78 (63) ὀκ. ἑνὸς ἐμπορεύματος πρὸς 135 (235) δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ τὸ πωλεῖ πρὸς 178 (265) δραχ- μὰς τὴν ὀκᾶν· πόσον κερδίζει; 3354 (1890) δραχμάς.

2) Ἐὰν ἔμπορος πωλήσῃ 278 (137) μ. ὑφάσματος ἀντὶ 1673 (1224) δραχμῶν, κερδίσῃ δὲ 4 (7) δραχμὰς εἰς καθὲν μέτρον, ἀντὶ πόσων δραχμῶν ἠγόρασε τὸ ἐμπόρευμα; 561 (265).

3) Ἠγόρασέ τις 385 (426) μ. ὑφάσματος πρὸς 125 (238) δραχ. τὸ μέτρον· πόσον θὰ πωλήσῃ τὸ ὕφασμα διὰ νὰ κερδίσῃ 36 δραχμὰς (75 δραχ.) τὸ μέτρον; ·61985.(133338) δραχμάς.

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Ἀπὸ ἕνα τόπον ἀναχωροῦν σιδηροδρομικῶς κατ' ἀντίθετον φορὰν δύο ταχυδρόμοι· πόσον θὰ ἀπέχουν ὁ εἷς ἀπὸ τὸν ἄλλον μετὰ 47 (86) ὥρ., ἐὰν ἡ μία ἁμαξοστοιχία διανύῃ 35 (25) χιλ., ἡ δὲ ἄλλη 65 (54) χιλ. τὴν ὥραν; 4700 (6794).

2) Πόσον θ' ἀπέχουν οἱ δύο ταχυδρόμοι, ἐὰν διευθύνωνται πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν; 1410 (2494).

Ὁμὰς πέμπτη. 1) Ἀγοράζει τις 68 (53) ὀκ. ἐμπορεύματος πρὸς 78 (93) δραχμὰς τὴν ὀκᾶν· 712 (623) ὀκ. πρὸς 126 (385) δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ 226 (30) ὀκ. πρὸς 125 (318) δραχμὰς τὴν ὀκ.· πόσον πληρώνει ἐν ὅλῳ; 123266 (254324).

2) Ἓν ποσὸν χρημάτων ἐμοιράσθη εἰς 125 (136) ἀνθρώπους εἰς τρόπον, ὥστε καθεὶς ἔλαβε 53 (75) δραχμάς, ἐπερίσσευσαν δὲ καὶ 28 (37) δραχμαί· πόσον ἦτο τὸ ποσόν; 6653 (10237).

3) Ἓν χρηματικὸν ποσὸν πρέπει νὰ μοιρασθῇ μεταξὺ 118 (102)

πτωχῶν οἰκογενειῶν, διὰ νὰ λάβῃ καθεμία 217 (408) δραχμάς· ἀλλ' ἐλλείπουν 825 (716) δραχμαί· πόσον εἶνε τὸ ποσόν; 24781 (40900).

Ὁμὰς ἕκτη. 1) Ἓν κεφάλαιον δίδει τόκον 240 (348) δραχμὰς ἐτησίως· πόσον τόκον θὰ δώσῃ εἰς 12 (16) ἔτη; 2880 (5568).

2) Πληρώνει τις ἕνα ἐργάτην 220 (280) δραχμὰς τὴν ἑβδομάδα· πόσα θὰ τὸν πληρώσῃ εἰς 64 (78) ἑβδομάδας; 14080 (21840).

3) Ἐργάτης λαμβάνει ὡς ἀμοιβὴν 240 (260) δραχμὰς τὴν ἑβδομάδα· πόσα θὰ λάβῃ εἰς 35 (43) ἑβδομάδας; 8400 (11180).

4) Ἀγοράζει τις 325 (486) ὀκ. ἐμπορεύματος πρὸς 415 (725) δραχμὰς τὴν ὀκᾶν· πόσα θὰ πληρώσῃ; 134875 (352350).

5) Ἔμπορος ἀγοράζει 283 (563) ὀκ. ἐμπορεύματος ἀντὶ 27451 53485) δραχμῶν, πωλεῖ δὲ τὴν ὀκᾶν πρὸς 89 (87) δραχμάς· πόσον ἐζημιώθη; 2264 (4504).

6) Τέσσαρες τόποι Α,Β,Γ,Δ εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς. Ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶνε 3486 (8456) μέτρα· ἡ ΒΓ 7 (4)πλασία τῆς ΑΒ, ἠλαττωμένης κατὰ 2486 (6815) μ.· ἡ ΓΔ εἶνε 3 (2) φορὰς μεγαλυτέρα τῆς Α Β· πόση εἶνε ἡ ΑΔ; 20944 (31892).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V.

Περὶ διαιρέσεως.

§ **24. Ὁρισμοί.**—

α΄) (Πρόβλημα). «***Πόσας φορὰς δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀπὸ 200 μῆλα 40 μῆλα;***»

Εἶνε φανερόν, ὅτι θὰ εὕρωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, ἐὰν ἀπὸ τὰ 200 μῆλα ἀφαιροῦμεν 40 μῆλα, μέχρις ὅτου ἐξαντλήσωμεν καὶ τὰ 200 μῆλα, ἢ ἂν θέσωμεν τόσους προσθετέους ἀπὸ 40 μῆλα καθένα μέχρις ὅτου τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε 200 μῆλα. Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ x τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων, τῶν ὁποίων καθεὶς ἔχει 40 μῆλα, θὰ ἔχωμεν

$$\overset{\text{μῆλ.}}{40}\times x = 200 \text{ μῆλα},$$

εὑρίσκομεν δὲ καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους, ὅτι δυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν τὰ 40 ἀπὸ 200 μῆλα 5 φοράς, ἢ ὅτι ὁ ἀριθμὸς 40 μῆλα χωρεῖ 5 φορὰς εἰς τὸν 200 μῆλα· ἤτοι εἶνε $x=5$.

Ὡς βλέπομεν, εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ δίδεται τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν καὶ εἷς τῶν δύο παραγόντων (ὁ πολλαπλασιαστέος) ζητεῖται δὲ νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄλλος.

β') (Πρόβλημα). «*Θέλομεν νὰ μοιράσωμεν 90 δραχμὰς ἐξ ἴσου εἰς 9 πτωχὰς οἰκογενείας· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ καθεμία ;*».

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων μεριδίων θὰ εἶνε 90 δραχμαί, ἐὰν διὰ τοῦ x δραχμ. παραστήσωμεν καθὲν μερίδιον, θὰ ἔχωμεν

x δραχ. $\times 9 = 90$ δραχμαί.

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τον ἀριθμὸν x, ὥστε νὰ εἶναι $x \times 9 = 90$, ἢ ἂν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων $9 \times x = 90$. Οὕτω λύομεν καὶ τὸ πρόβλημα αὐτό, καθὼς καὶ τὸ προηγούμενον, εὑρίσκομεν δ' ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶνε ὁ 10 καὶ παριστάνει δραχμάς.

Γ') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων βλέπομεν ὅτι, ἐὰν δοθῇ τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν (ἀφῃρημένων) καὶ ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν ἄλλον κατὰ δύο τρόπους. Πρῶτον, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ δοθὲν γινόμενον τὸν δοθέντα παράγοντα ἐν ὅσῳ εἶνε δυνατὸν καὶ μετροῦμεν πόσας φορὰς ἀφῃρέσαμεν· δεύτερον, πολλαπλασιάζομεν τὸν δοθέντα ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, ὥστε νὰ εὕρωμεν ἐξαγόμενον τὸ δοθὲν γινόμενον.

Ἐὰν πρόκειται περὶ ἀριθμῶν συγκεκριμένων, ἐργαζόμεθα ὡς νὰ ἦσαν ἀφῃρημένοι καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον δίδομεν τὴν πρέπουσαν ἐπωνυμίαν.

δ') Τὸ δοθὲν γινόμενον καλοῦμεν *διαιρετέον*, τὸν δεδομένον παράγοντα *διαιρέτην*, τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν *πηλίκον*, τὴν δὲ πρᾶξιν, διὰ τῆς ὁποίας ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον, καλοῦμεν *διαίρεσιν*.

ε') «***Διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει γινόμενον τὸν πρῶτον***».

Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν, π. χ. τοῦ 10 καὶ 5, σημειώνομεν οὕτω 10:5, καὶ ἀπαγγέλλομεν *δέκα διὰ πέντε*, ἢ *δέκα διαιρούμενον διὰ πέντε*· ἤτοι τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶνε τὸ *διὰ* (:). Τὸ 10:5 σημαίνει λοιπὸν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 5 δίδει γινόμενον τὸν 10. Διὰ τοῦτο διὰ νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν τῆς διαιρέσεως, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ ἂν εὕρωμεν τὸν διαιρετέον, ἡ πρᾶξις εἶνε ἀκριβής.

στ') Ἄξιον ἰδιαιτέρας προσοχῆς εἶνε, ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν εἰς τὴν ὁποίαν δίδεται τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος ἡ διαίρεσις λέγεται *μέτρησις* ἢ διαίρεσις *μετρήσεως*. Διότι καθὼς εἰς τὸν πρακτικὸν βίον, ἐὰν ἔχωμεν π. χ. ἓν ἀγγεῖον πλῆρες ὕδατος καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς δυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν τὸ ὕδωρ μιᾶς ὀκᾶς ἀπὸ τὸ ὕδωρ τοῦ ἀγγείου (περιέχοντος πολλὰς ὀκάδας), οὕτω καὶ εἰς μίαν τοιαύτην διαίρεσιν θέλομεν νὰ μετρήσωμεν, πόσας φορὰς ὁ δοθεὶς ἀριθμός, π.χ. ὁ 6 δραχμαί, χωρεῖ., ἢ περιέχεται εἰς ἄλλον δοθέντα ἀριθμόν, π.χ. τὸν 60 δραχμάς. Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν δίδεται τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ πολλαπλασιαστής, ἡ διαίρεσις λέγεται *μερισμός*, ἢ διαίρεσις *μερισμοῦ*. Διότι ζητεῖται νὰ μοιράσωμεν ἕνα ἀριθμὸν εἰς ἴσα μέρη, καθὼς π.χ. εἰς τὸ β') (πρόβλημα).

ζ') Τὸ ἁπλοῦν παράδειγμα 7 : 2 δεικνύει ὅτι, πᾶσα διαίρεσις δὲν δύναται πάντοτε νὰ γίνῃ ἀκριβῶς, καθὼς ἀνωτέρω εἴπομεν. Δηλαδὴ δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 2 δίδει γινόμενον 7. Διότι, ἐὰν θέσωμεν $7:2=4$, ὁ ἀριθμὸς 4 εἶνε μεγάλος, ἐπειδὴ $4\times2=8$ εἶνε μεγαλύτερος τοῦ 7· ἐὰν θέσωμεν $7:2=3$, ὁ 3 εἶνε μικρός, διότι ὁ $2\times3=6$ εἶνε κατὰ 1 μικρότερος τοῦ 7. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν καλοῦμεν τὸν 3 *ἀτελὲς πηλίκον* τῆς διαιρέσεως 7:2, τὸ 1 *ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως*, τὴν δὲ διαίρεσιν αὐτὴν *ἀτελῆ*, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ ἐκείνης εἰς τὴν ὁποίαν τὸ πηλίκον εὑρίσκεται ἀκριβῶς, καὶ τὴν ὁποίαν καλοῦμεν *τελείαν διαίρεσιν*. Ὁμοίως ἡ διαίρεσις 19: 4 εἶνε ἀτελής, τὸ ἀτελὲς πηλίκον εἶνε 4, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 3. 5

η') Καθὼς βλέπομεν, ἐνῶ εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν τὸ πηλίκον παριστάνει τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον, εἰς τὴν ἀτελῆ εὑρίσκομεν τὸν μεγαλύτερον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον περιεχόμενον εἰς τὸν διαιρετέον.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι δυνάμεθα γενικώτερον νὰ λέγωμεν ὅτι,

θ') «***διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας, δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκεται ὁ μεγαλύτερος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον, δίδει γινόμενον περιεχόμενον εἰς τὸν πρῶτον***».

ι') Ἐνῶ εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν ὑπάρχει ἡ σχέσις

Διαιρέτης × πηλίκον = διαιρετέος,

ια') εἰς τὴν ἀτελῆ ἔχομεν,

Διαιρέτης × πηλίκον + ὑπόλοιπον = διαιρετέος.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) *α')* Πόσον χωρεῖ τὸ 2 εἰς καθένα τῶν ἀριθμῶν 4· 6· 18· 14· 20· 30· 34· 40· *β')* πόσον χωρεῖ τὸ 3 εἰς καθένα τῶν ἀριθμῶν 6· 18· ·9· 12· 16· 20· 48· γ'.) τὸ 6 εἰς τοὺς 0· 6· 12· 15· 18· 28· 30· 36· 45· 48· δ') τὸ 5 εἰς τοὺς 5· 10· 12· 15· 18· 28· 20· 30· 38· 50· ε') τὸ 7 εἰς τοὺς 0· 7· 14· 21· 25· 28· 85· 42· 45· 52· στ') τὸ 8 εἰς τοὺς 8· 18· 16· 24· 36· 42· 49· 51· 56. ζ') τὸ 9 εἰς τοὺς 9· 18· 23· 27· 36· 45· 53· 61· 64· 81.

2) Πόσον χωροῦν α') αἱ 2 Μ εἰς τὰς 18 Μ· β') αἱ 6 Δ εἰς τὰς 60 Δ· γ') αἱ 8 Χ εἰς τὰς 48 Χ;

Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς x, ὥστε νὰ εἶνε· α') $7 \times x = 21$· β') $5 \times x = 40$· β') $12 \times x = 72$· δ') $125 \times x = 500$· ε') $136 \times x = 544$. ς') $340 \times x = 340$. ζ') $576 \times x = 0$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) α') Πόσον εἶνε τὸ ἥμισυ τῶν 4· 8· 12· 13· 16· 17· 19· 20· 24; β') πόσον εἶνε τὸ τρίτον μέρος τῶν 0· 3· 18· 15· 21· 24· 27· 29· 86· 42· 50; γ') Νὰ εὑρεθῇ τὸ πέμπτον μέρος τῶν 5· 10· 15· 20· 22· 28· 30· 35· 37. δ') τὸ ἕκτον τῶν 6· 12· 18· 20· 24· 29· 45· ε') τὸ τέταρτον τῶν 0· 4· 8· 18· 15· 20· 48· ς') τὸ ἕβδομον τῶν 0· 7· 14· 33· 25· 28· 35· 49· ζ') τὸ ἔνατον τῶν 0· 9· 15· 18· 23· 40· 45· 57· 63· 72.

2) Ἐκτελέσατε τὰς ἑξῆς διαιρέσεις α') 96: 24· β') 125: 25 γ') 3824: 100· δ') 48: 6· ε') 120: 40.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑπόμεναι διαιρέσεις καὶ αἱ δοκιμαί των· α') 95: 2· β') 64: 1· γ') 0: 13· δ') 18: 6. ε') 49: 16

2) Τρέψατε τὸν 8 εἰς γινόμενον δύο ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶνε 2. Ὁμοίως τὸν 26, τὸν 34, τὸν 50.

3) Ἐὰν διαιρέσωμεν ἕνα ἀριθμόν, π.χ. τὸν 35 διὰ τοῦ 1, εὑρίσκομεν πηλίκον αὐτὸν τὸν ἀριθμόν. Διατί;

4) Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν 0 δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, π.χ. διὰ τοῦ 6, εὑρίσκομεν πηλίκον 0. Διατί;

§ 25. Ἐφαρμογαὶ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον.—

Αἱ ἑπόμεναι ἐφαρμογαὶ τῆς διαιρέσεως εἶνε ἄξιαι ἰδιαιτέρας προσοχῆς.

α'). **«Πῶς δυνάμεθα εἰς πλεῖστα προβλήματα διὰ διαιρέσεως ἐκ τῆς τιμῆς πολλῶν μονάδων νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῆς μονάδος ἐξ αὐτῶν».**

(Πρόβλημα) *1)*. «*Ἐὰν αἱ 5 ὀκ. ἐμπορεύματος τιμῶνται 20 δραχμάς, πόσον τιμᾶται ἡ 1 ὀκᾶ αὐτοῦ;*»

Παριστάνομεν διὰ τοῦ x τὸν ζητούμεναν ἀριθμὸν καὶ γράφομεν

5 ὀκ.	τιμῶνται	20 δρ.
1 ὀκ.	τιμᾶται	x

Διὰ τὴν λύσιν λέγομεν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος εἶνε ὑπεράνω τῆς μονάδος (ἢ ἀπέναντι τοῦ x καὶ πλαγίως). Ἀφοῦ αἱ 5 ὀκ. τιμῶνται 20 δραχμάς, ἡ μία ὀκᾶ θὰ τιμᾶται 5 φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι 20 δραχμάς : 5=4 δραχμάς.

(Πρόβλημα) *2)*. «*Δίδει τις 8 ὀκ. καφὲ καὶ λαμβάνει ἀντ' αὐτῶν 40 ὀκ. σάπωνος· διὰ μίαν ὀκᾶν καφὲ πόσας ὀκάδας σάπωνος θὰ λάβῃ;*»

Γράφομεν πάλιν

8 ὀκ. καφὲ	ἀνταλλάσσονται μὲ	40 ὀκ σάπωνος,
1 »	»	x

Πρὸς λύσιν αὐτοῦ σκεπτόμεθα καθὼς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον, ἤτοι λέγομεν· ἀφοῦ αἱ 8 ὀκ. καφὲ ἀνταλλάσονται μὲ 40 ὀκ. σάπωνος ἡ μία ὀκᾶ καφὲ θ' ἀνταλλάσεται μὲ 8 φορὰς ὀλιγωτέρας ὀκάδας σάπωνος, ἤτοι μὲ 40 ὀκ.: 8. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν 5 ὀκ. σάπωνος. Ὥστε ἡ μία ὀκ. καφὲ ἀνταλλάσσεται μὲ 5 ὀκ. σάπωνος. 5

Εἰς τἀνωτέρω προβλήματα καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὰ δίδεται ἡ τιμὴ πολλῶν μονάδων καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς τῶν μονάδων τούτων. Οὕτω εἰς τὸ πρόβλημα 1) δίδεται ἡ τιμὴ τῶν 5 ὀκ., δηλαδὴ αἱ 20 δραχμαὶ καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς 1 ὀκ. Εἰς τὸ πρόβλημα 2) δίδεται ἡ τῶν 8 ὀκ. καφέ, δηλαδὴ αἱ 40 ὀκ. σάπωνος, καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς 1 ὀκ. καφέ.

β') Διὰ νὰ λύσωμεν τὰ τοιαῦτα προβλήματα, διαιροῦμεν τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος φανερώνει τὰς πολλὰς μονάδας. Ἡ διαίρεσις αὐτὴ εἶνε μερισμοῦ καὶ τὸ πηλίκον εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον, ἐνῷ ὁ διαιρέτης εἶνε ἀριθμὸς ἀφῃρημένος.

γ') Μέση τιμή. (Πρόβλημα) «***Ἐργάζεταί τις τρεῖς ὥρας, καὶ λαμβάνει τὴν πρώτην ὥραν 7 δραχμὰς ὡς ἀμοιβήν, τὴν δευτέραν ὥραν 5 δραχμὰς καὶ τὴν τρίτην 6 δραχμάς· πόσας δραχμὰς λαμβάνει κατὰ μέσον ὅρον καθ' ὥραν;***»

Δηλαδὴ πόσας δραχμὰς θὰ ἐλάμβανε καθ' ὥραν, ἐὰν ἐλάμβανε τὸ αὐτὸ ποσὸν εἰς καθεμίαν ὥραν;

Ἐπειδὴ καὶ κατὰ τὰς τρεῖς ἡμέρας λαμβάνει 7δρ. + 5δρ. $\times$ 6δρ. = 18 δρ., ἔπεται ὅτι καθ' ὥραν θὰ ἐλάμβανε 18 δρ. : 3 = 6 δραχμάς.

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὸ ἡ ζητουμένη τιμὴ λέγεται *μέση τιμή*, τὰ δὲ προβλήματα λέγονται *μέσης τιμῆς* καὶ λύονται διὰ διαιρέσεως μερισμοῦ.

δ') *Προβλήματα μίξεως*. Συγγενῆ μὲ τὰ προβλήματα τῆς μέσης τιμῆς εἶνε καὶ τὰ προβλήματα μίξεως, π. χ. τὸ ἑξῆς.

«***Ἀναμιγνύει τις 6 ὀκ. ἐμπορεύματος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 5 δραχμάς, μὲ 3 ὀκ. ἄλλης ποιότητος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 8 δραχμάς· πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος;***»

Ἐπειδὴ τὸ μῖγμα ἔχει βάρος 6 + 3 = 9 ὀκ. καὶ θ' ἀξίζῃ 5 $\times$ 6 + 8 $\times$ 3 = 54 δρ., ἔπεται ὅτι ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος θ' ἀξίζῃ 54 : 9 = 6 δραχμάς.

Καθὼς βλέπομεν, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτὸ καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτό, πρῶτον θὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν καθεμιᾶς τῶν ἀναμιγνυομένων ποσοτήτων καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας περιέχει τὸ μῖγμα.

ε') ***Πῶς δυνάμεθα εἰς πλεῖστα προβλήματα, ὅταν δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ἡ τιμὴ πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων, νὰ εὕρωμεν τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τούτων.***

(Πρόβλημα) *1)*. «***Ἡ ὀκᾶ τοῦ καφὲ τιμᾶται 80 δραχμάς· πόσαι ὀκάδες τιμῶνται 320 δρ.;***»

Παριστάνοντες τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν διὰ τοῦ x, γράφομεν

1 ὀκ.	τιμᾶται	80 δρ.
x		320

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο σκεπτόμεθα ὅτι, καθεμίαν φορὰν ὅταν δίδωμεν 80 δρ., λαμβάνομεν 1 ὀκ. καφέ. Ἑπομένως θ' ἀγοράσομεν τόσας ὀκάδας, ὅσας φορὰς δυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν τὰς 80 δραχμὰς ἀπὸ τὰς 320 δρ., ἢ ἀρκεῖ, νὰ μετρήσωμεν πόσας φορὰς χωρεῖ τὸ 80 δρ. εἰς τὰς 320 δρ: ἤτοι ἔχομεν τὴν διαίρεσιν μετρήσεως

320 δρ. : 80 δρ. = 4.

Ὥστε αἱ 4 ὀκ. τιμῶνται 320 δραχμάς. Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος λέγομεν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ἀπέναντι καὶ πλαγίως τοῦ x. Ἀφοῦ 80 δραχμὰς τιμᾶται ἡ 1 ὀκ., 320 δραχμὰς θὰ τιμῶνται τόσαι ὀκάδες, ὅσας φορὰς χωρεῖ τὸ 80 δρ. εἰς τὸ 320 δρ., ἤτοι 320 : 80 = 4 ὀκάδες.

(Πρόβλημα) *2)*. «***Εἰς πόσους μῆνας θὰ πληρώσωμεν δι' ἐνοίκιον μιᾶς οἰκίας 2400 δραχμάς, ἐὰν διὰ καθένα μῆνα πληρώνωμεν 800 δραχμάς;***»

Παριστάνομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ x καὶ γράφομεν

δι' ἕνα	1 μῆνα	800 δραχ.
	x	2400

Καὶ εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ λέγομεν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ἀπέναντι τοῦ x. Ἀφοῦ τὰς 800 δραχ. πληρώνωμεν διὰ ἕνα μῆνα, διὰ νὰ εὕρωμεν διὰ πόσους μῆνας θὰ πληρώσωμεν 2400 δραχμὰς πρέπει νὰ μετρήσωμεν πόσας φορὰς χωρεῖ τὸ 800 δραχ. εἰς τὰς 2400 δραχ. Ἤτοι πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν μετρήσεως 2400 δραχ. : 800 δραχ., καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 3. Ὥστε εἰς 3 μῆνας θὰ πληρώσωμεν 2400 δραχμάς.

Εἰς καθὲν τῶν δύο τούτων προβλημάτων καί εἰς τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὰ δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ἡ τιμὴ ἄλλων ὁμοειδῶν μονάδων, ζητεῖται δὲ νὰ εὕρωμεν τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τούτων. Οὕτω ἔχομεν εἰς τὸ πρόβλημα 1) ὅτι δίδεται ἡ τιμὴ τῆς 1 ὀκᾶς, δηλαδὴ αἱ 80 δραχ., ἡ τιμὴ ἄλλων ὀκάδων, δηλ. αἱ 320 δραχ. καὶ ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὸ πλῆθος τῶν ὀκάδων τούτων. Ὁμοίως εἰς τὸ πρόβλημα 2) δίδεται ἡ τιμὴ τοῦ 1 μηνός, δηλαδὴ αἱ 800 δραχ. καὶ ζητεῖται πόσαι μονάδες ἔχουν τὴν τιμὴν 2400 δραχμων

στ)' *Διὰ νὰ λύσωμεν τὰ τοιαῦτα προβλήματα, ὡς εἴδομεν, μετροῦμεν πόσας φορὰς χωρεῖ ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος εἰς τὴν τῶν πολλῶν, ἀλλ' ἀγνώστων τὸ πλῆθος μονάδων. Ἡ διαίρεσις αὐτὴ εἶνε μετρήσεως, ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶνε ἀριθμοὶ ὁμοειδεῖς, τὸ δὲ πηλίκον εἶνε ἀριθμὸς ἀφῃρημένος καὶ μετὰ τὴν εὕρεσιν αὐτοῦ θὰ λέγωμεν, ὅτι παριστάνει ὅ,τι καὶ ἡ μονάς, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ δίδεται».* 5

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς *πρώτη*. 1) 12 (15) τεμάχια ὑφάσματος στοιχίζουν 60(45) δραχμάς· πόσον στοιχίζει τὸ ἓν τεμάχιον; 5 (3.)

2) Μικρὸς ἐργάτης λαμβάνει εἰς 16 (17) ἡμ. 192 (153) δραχμάς· πόσας λαμβάνει εἰς 1 ἡμ. κατὰ μέσον ὅρον; 12 (9).

3) Αἱ 8 (9) ὀκ. ἐμπορεύματος τιμῶνται 328 (270) δραχμάς· πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ; 41 (30).

4) Αἱ 4 ὧραι ἔχουν 240'. Πόσα λεπτὰ ἔχει ἡ ὥρα; 60.

5) Ἐὰν τὰ 415 (336) δράμια ἐμπορεύματος τιμῶνται 83 (56) δραχμάς, πόσον ἀγοράζομεν ἐξ αὐτοῦ μὲ 1 δραχμήν; 5 (6).

6) Οἰκονομεῖ τις 270 (160) δραχμὰς εἰς 81 (64) ἡμέρας· εἰς πόσας ἡμέρας οἰκονομεῖ ἓν δεκάδραχμον; 3 (4).

7) Ποσὸν 360(520) δραχμῶν πρέπει νὰ μοιρασθῇ ἐξ ἴσου μεταξὺ 60 (130) προσώπων· πόσον θὰ λάβῃ καθέν; 6 (4).

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Λαμβάνει τις εἰς μίαν ὥραν 6 (8) δραχμάς· εἰς ἄλλην ὥραν 9 (12) δραχμάς, εἰς ἄλλην 10(18) δραχμὰς καὶ εἰς ἄλλην 15 (22) δραχμάς· πόσας δραχμὰς λαμβάνει κατὰ μέσον ὅρον εἰς καθεμίαν τῶν τεσσάρων ὡρῶν; 10 (15

2) Ἁμαξοστοιχία τρέχει ἐπὶ 5 ὥρας καὶ διανύει εἰς καθεμίαν τῶν ὡρῶν τούτων ἀντιστοίχως 46 (44) χμ., 60 (51) χμ., 52 (50) χμ., 58 (52) χμ., 34 (53) χμ.· πόσα χιλιόμετρα διατρέχει εἰς καθεμίαν τῶν ὡρῶν κατὰ μέσον ὅρον; 50 (50).

3) Ἀγοράζει τις ἐξ ἑνὸς ἐμπορεύματος 2 (2) ὀκ. ἀντὶ 12 (7) δραχ.· ἔπειτα 3 (3) ὀκ. ἀντὶ 16 (9) δραχμῶν καὶ τέλος 4 (5) ὀκ. ἀντὶ 26 (14) δραχμῶν· πόσον στοιχίζει ἡ ὀκᾶ κατὰ μέσον ὅρον; 6 (3).

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἀναμιγνύομεν 4 (8) ὀκ. οἴνου τῶν 6 δραχμῶν (900λ.) τὴν ὀκᾶν μὲ 6(4) ὀκ. τῶν 5 δραχμῶν (720λ.) τὴν ὀκᾶν· πόσον στοιχίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος; 540 (840)λ.

2) Ἔμπορος ἀναμιγνύει 2 (4) ὀκ. τείου τῶν 70(90) δραχμῶν, μὲ 5 (5 ὀκ. τῶν 140 (180) δραχμὰς πόσον κοστίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος; 120 (140

3) Θέλει τις νὰ τοποθετήσῃ 144 (108) σφαίρας, ὥστε καθεμία νὰ ἔχῃ 12 (18) σφαίρας· πόσας σειρὰς θὰ σχηματίσῃ; 12 (6).

4) Ἔμπορος πληρώνει κατὰ τὴν ἀγορὰν ἐμπορεύματος διὰ τὰς 60 (3 ὀ· 480 (312) δραχμὰς· πωλεῖ δὲ τὰς 70 (4) ὀκ. ἀντὶ 630 (420) δραχμὰς· πόσας δραχμὰς κερδίζει εἰς καθεμίαν ὀκᾶν; (1).

5) Ταχυδρόμος διανύει τὴν πρώτην ἡμέραν 30 (30) χμ., καθεμίαν δὲ τῶν ἑπομένων ἡμερῶν 10 (5) χμ. περισσότερον τῆς προηγουμένης· πόσον θὰ διέτρεχε τὴν ἡμέραν κατὰ μέσον ὅρον, ἐὰν ἐβάδιζεν ἐπὶ 4 5) ἡμέρας; 45 (40).

§ **26. Διαίρεσις ἀπὸ μνήμης.**—

α') Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον $6\times4\times5\times8$ διὰ τοῦ 5. Τὸ πηλίκον εἶνε $6\times4\times8$. Διότι ἂν τὸ $6\times4\times8$ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 5, εὑρίσκομεν τὸν διαιρετέον $6\times4\times5\times8$.

Ὁμοίως, διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸ $6\times4\times5\times8$ διὰ τοῦ 5×8, παραλείπομεν τὸ 5×8 καὶ εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον τὸ 6×4. Διότι, ἂν τοῦτο πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 5×8 εὑρίσκομεν τὸν διαιρετέον, 6×4×5×8. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

«διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον παραγόντων δι᾽ ἑνὸς ἢ διὰ τοῦ γινομένου μερικῶν ἐκ τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς παράγοντας αὐτοὺς ἀπὸ τὸ δοθὲν γινόμενον».

β΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν εὐκολώτερον τὸ πηλίκον 72:24, παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὸ 24 εἶνε ἴσον μὲ 8×3, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸ 72 εἰς 8 ἴσα μέρη καὶ ἔπειτα καθὲν τῶν μερῶν αὐτῶν εἰς 3 ἴσα μέρη. Θὰ ἔχωμεν δηλαδὴ 72: 8=9 καὶ ἀκολούθως 9: 3=3· Ὁμοίως ἐὰν ἔχωμεν 150: 15, ἐπειδὴ 15=3×5 ἕπεται ὅτι 150: 15= 150: 3=50 καὶ ἀκολούθως ἀκόμη 50: 5 = 10.

γ΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον 360 : 10, παρατηροῦμεν
Δ Δ Μ
ὅτι εἶνε 360 = 36, τὸ δὲ δέκατον μέρος τῆς 1 εἶνε 1, ἄρα τὸ δέκα-
Δ Μ
τον μέρος τῶν 36 εἶνε 36. Ὁμοίως τὸ πηλίκον 2785 : 100
Ε Μ
εὑρίσκομεν, ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ 2785 = 27+85. Ἐπειδὴ
Ε Μ
δὲ τὸ ἑκατοστὸν μέρος τῆς 1 εἶνε 1, ἕπεται ὅτι, τὸ ἑκατοστὸν
Ε Μ
μέρος τῶν 27 εἶνε 27. Ὥστε τὸ πηλίκον τοῦ 2785: 100 εἶνε 27 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 85. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι·

δ΄) *« διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ 10, 100, 1000, . . . ἀρκεῖ, νὰ χωρίσωμεν ἕν, δύο, τρία,... ψηφία ἐκ δεξιῶν τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τὸ μὲν πρὸς τἀριστερὰ οὕτω ἀπομένον τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ θὰ εἶνε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως. τὸ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ τὸ ὑπόλοιπον».*

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων κατὰ τὸν συντομώτερον τρόπον· α΄) 3×6×8: 3×6. β΄) 5×3×2×9: 5×9.

2) Νὰ γίνουν αἱ ἑπόμεναι διαιρέσεις κατὰ δύο τρόπους μετὰ τῶν δοκιμῶν των· α΄) 24×3×2×48: 2×3. β΄) 64:8×2·γ΄) 60: 2×10.

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον καὶ ὑπόλοιπον καθεμιᾶς τῶν κάτωθι διαιρέσεων· α΄)390: 10. β΄) 904: 100. γ΄) 886: 100. δ΄) 16987:1000.

§ **27. Ἰδιότης τῆς διαιρέσεως.—**

« ***Ἐὰν τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην μιᾶς διαιρέσεως πολλα-πλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλί-κον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἢ διαι-ρεῖται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν*** ».

Διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἰδιότης αὐτὴ εἶνε ἀληθής, ἂς μοιράσωμεν ἕνα ἀριθμὸν δραχμῶν εἰς μερικοὺς ἀνθρώπους, π.χ. 13 δραχμὰς εἰς 4 ἀνθρώπους. Θὰ εὕρωμεν ὅτι ἡ διαίρεσις 13 δραχμῶν :4 δίδει πηλίκον 3 δραχμάς, καὶ ὑπόλοιπον 1 δραχμήν. Ἂν τώρα μοιράσωμεν 13 δίδραχμα, ἤτοι 26 δραχμάς, εἰς 8 ἀνθρώπους, καθεὶς θὰ λάβῃ πάλιν 3 δραχμὰς καὶ θὰ μείνῃ 1 δίδραχμον, δηλαδὴ 2 δραχμαί. Ὥστε ἔχομεν 13 δραχ-μάς: 4=3 δραχμὰς καὶ ὑπόλοιπον 1 δραχμήν· (13×2) δρχ. :4×2= 3 δρχ. καὶ ὑπόλοιπον 2 δραχμάς. Ἤτοι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ 2, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 2.

Καθ' ὅμοιον τρόπον βλέπομεν, ὅτι ἡ ἰδιότης εἶνε ἀληθὴς καὶ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην μὲ **2**, 3, 4. . . . .

Ἀσκήσεις.

1) Ἐὰν ὁ διαιρετέος καὶ διαιρέτης λήγουν εἰς μηδενικά, δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν ἰσάριθμα μηδενικὰ ἐκ τοῦ τέλους πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου, χωρὶς τὸ πηλίκον νὰ μεταβληθῇ. Π.χ. τὸ πηλίκον τοῦ 72000: 400 εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ πηλίκον τοῦ 720:4. Διατί;

2) Ἐὰν ἓν ποσὸν μοιρασθῇ ἐξ ἴσου μεταξὺ δύο πτωχῶν λαμβάνει καθεὶς 38 δραχμάς. Ἂν τὸ τριπλάσιον ποσὸν μοιρασθῇ εἰς τριπλασίους πτωχούς, πόσα θὰ λάβῃ ὁ καθείς. Διατί;

3) Διὰ νὰ διανύσῃ τις μίαν ἀπόστασιν κάμνει 30 βήματα· πόσα βήματα θὰ κάμῃ, ἐὰν ἡ ἀπόστασις καὶ τὸ βῆμά του διπλασιασθοῦν; Διατί;

§ **28. Γενικὸς κανὼν τῆς διαιρέσεως.—**

Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 6825 διὰ 32.

Ε Δ Μ

Χωρίζομεν τὸν 6825 εἰς 68 +2 +5 καὶ ζητοῦμεν νὰ διαι-

Ε

ρέσωμεν καθένα τῶν προσθετέων τούτων διὰ τοῦ 32. Τὸ 68:32

Ε Ε Ε

εἶνε κατὰ προσέγγισιν 60: 30 =6: 3 =2 (§27).

Παρατηροῦμεν ὅτι ἐνῷ εἰς τὴν πρόσθεσιν, τὴν ἀφαίρεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν καθὲν ψηφίον τοῦ ἐξαγομένου εὑρίσκεται ἀκριβῶς, ἐδῶ δὲν συμβαίνει τοῦτο πάντοτε, καὶ διὰ τοῦτο πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμήν.

Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν τὰς $\overset{E}{2}$ τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην 32 καὶ εὑρίσκομεν $\overset{E}{2}\times 32=\overset{E}{64}$.

Καθὼς βλέπομεν, τὸ $\overset{E}{64}$ εἶνε κατὰ $\overset{E}{4}$ μικρότερον τοῦ $\overset{E}{68}$ τοῦ διαιρετέου. Διὰ νὰ συνεχίσωμεν τὴν διαίρεσιν πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὰς $\overset{E}{4}$, τὰς $\overset{\Delta}{2}$, καὶ τὰς $\overset{M}{5}$ διὰ τοῦ 32. Ἀλλὰ $\overset{E}{4}=\overset{\Delta}{40}$. Ἑπομένως εἶνε τὸ αὐτό, ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς $\overset{\Delta}{40}+\overset{\Delta}{2}+\overset{M}{5}$ διὰ τοῦ 32, ἢ τὰς $\overset{\Delta}{42}+\overset{M}{5}$ διὰ τοῦ 32. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν πρῶτον τὰς $\overset{\Delta}{42}:32$ καὶ εὑρίσκομεν κατὰ προσέγγισιν $\overset{\Delta}{40}:30=\overset{\Delta}{4}:3=\overset{\Delta}{1}$. Διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν περὶ τῆς ἀκριβείας τοῦ πηλίκου καὶ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτῆς κάμνομεν τὴν δοκιμήν, καθὼς ἀνωτέρω, καὶ ἔχομεν $\overset{\Delta}{1}\times 32=\overset{\Delta}{32}$. Ἑπομένως μένουν ἀκόμη $\overset{\Delta}{10}$. Μένει νὰ διαιρέσωμεν ἀκόμη τὰς $\overset{\Delta}{10}$ καὶ τὰς $\overset{M}{5}$ διὰ τοῦ 32.

Ἀλλὰ $\overset{\Delta}{10}=\overset{M}{100}$. Ὥστε ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὰς $\overset{M}{100}+\overset{M}{5}=\overset{M}{105}:32$. Ἔχομεν πάλιν κατὰ προσέγγισιν $\overset{M}{100}:30=\overset{M}{10}:3=\overset{M}{3}$. Ἡ δοκιμὴ δίδει $\overset{M}{3}\times 32=\overset{M}{96}$· ἄρα μένει ὑπόλοιπον $\overset{M}{105}-\overset{M}{96}=\overset{M}{9}$.

Ἦτοι εὑρήκαμεν πηλίκον $\overset{E}{2},\ \overset{\Delta}{1},\ \overset{M}{3}$, δηλαδὴ 213 καὶ ὑπόλοιπον 9.

Πρὸς εὐκολίαν γράφομεν τὸν διαιρετέον, δεξιὰ αὐτοῦ τὸν διαιρέτην καὶ σύρομεν μεταξὺ τούτων εὐθεῖαν γραμμὴν κατακόρυφον, κάτωθεν δὲ τοῦ διαιρέτου ὁριζοντίαν, ὑπὸ τὴν ὁποίαν θὰ γράφωμεν τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου, ἐνῶ κάτωθεν τοῦ διαιρετέου τὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν διαιρέσεων καὶ λέγομεν

$$\begin{array}{r|l} 68'2'5' & 32 \\ \cline{2-2} 42 & 213 \\ 105 & \\ =9 & \end{array}$$

῾Ο διαιρέτης ἔχει δύο ψηφία· χωρίζομεν καὶ ἀπὸ τὸν διαιρετέον δύο ψηφία ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά· τὸ 68. Τὸ 32 εἰς τὸ 68 χωρεῖ *περίπου* ὅσον τὸ 3 εἰς τὸ 6· τὸ 3 εἰς τὸ 6=2, γράφομεν 2 εἰς τὸ πηλίκον. Πολλαπλασιάζομεν τὸ 2 ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ 68· 2 ἐπὶ 2=4 ἀπὸ 8 τοῦ διαιρετέου =4. Γράφομεν 4 ὑποκάτω τοῦ 8· 2×3=6 ἀπὸ 6=0. Καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου 2 καὶ γράφομεν αὐτὸ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 4. Οὕτω ἔχομεν τὸ 42. Τὸ 32 εἰς τὸ 42 χωρεῖ *περίπου* ὅσον τὸ 3 εἰς τὸ 4· τὸ 3 εἰς τὸ 4=1. Γράφομεν εἰς τὸ πηλίκον δεξιὰ τοῦ 2 τὸ 1 καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 32, τὸ δὲ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπό τὸ 42, ὅτε εὑρίσκομεν 10. Καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 5 τοῦ διαιρετέου καὶ γράφομεν αὐτὸ δεξιὰ τοῦ 10, ὅτε λαμβάνομεν 105. Τὸ 32 εἰς τὸ 105 χωρεῖ *περίπου* ὅσον τὸ 3 εἰς τὸ 10· τὸ 3 εἰς τὸ 10=3. Γράφομεν 3 εἰς τὸ πηλίκον δεξιὰ τοῦ 1. Πολλαπλασιάζομεν τὸ 3 ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸ 105, ὅτε εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 9. Ὥστε τὸ πηλίκον εἶνε 213 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 9.

β') Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμήν, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην 32 ἐπὶ τὸ πηλίκον 213, εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον 9 καὶ πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν διαιρετέον 6825, τὸ ὁποῖον πράγματι συμβαίνει.

γ') Ὁμοίως ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν προσέχοντες νὰ χωρίζωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον τόσα ψηφία, κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης. Ἐὰν ἀφοῦ χωρίσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ ὅσα ψηφία ἔχει ὁ διαιρέτης, τύχῃ ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον λαμβάνομεν, νὰ εἶνε μικρότερος τοῦ διαιρέτου, χώριζομεν καὶ τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου.

δ') Ἐὰν ἡ ἀφαίρεσις τοῦ γινομένου ψηφίου τινὸς τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀπὸ τὸν ἀντίστοιχον διαιρετέον δὲν γίνεται, γράφομεν ἀντὶ τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τοῦ πηλίκου τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον, μέχρις ὅτου τὸ γινόμενον ν' ἀφαιρῆται ἀπὸ τὸν ἀντίστοιχον διαιρετέον.

ε') Ἐὰν διαιρετέος τις, ἐκ τῶν προκυπτόντων ἐὰν καταβιβάσωμεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ δοθέντος διαιρετέου, δὲν διαιρῆται διὰ τοῦ διαιρέτου, γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον, καταβιβάζομεν ἀμέσως τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ προχωροῦμεν ὁμοίως τὴν πρᾶξιν.

Οὕτω εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ 14023 : 23 ἔχομεν·

$$\begin{array}{r|l} 14'0'2'3 & 23 \\ \cline{2-2} 2\,2\,3 & 609 \\ 1\,6 & \end{array}$$

Ἤτοι τὸ πηλίκον εἶνε 609 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 16.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ διαιρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ 146· 538· 2307· 5906· 7662· 9781 διὰ καθενὸς μονοψηφίων 2· 3·...... 9.

2) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑπόμεναι διαιρέσεις μετὰ τῶν δοκιμῶν των· α') 8965: 42. β') 8930:75 γ') 30078: 13· δ') 764632:835.

3) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ λάβωμεν 121 (315) φορὰς ὡς προσθετέον, διὰ νὰ εὕρωμεν ἄθροισμα 34563 (65205); 283 (207).

4) Ἐκτελέσατε τὴν διαίρεσιν $5^4 = 5\times5\times5\times5$ διὰ τοῦ $5^3 = 5\times5\times5$· Ὁμοίως $6^3:6^2$ καὶ $10^4:10^2$ (§26,α')· τί παρατηρεῖτε ἐκ τῶν παραδειγμάτων τούτων; μὲ τί ἰσοῦται τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ;

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Αἱ 375 (3489) ὀκ. ἑνὸς ἐμπορεύματος στοιχίζουν 29988 (226785) δραχμάς· πόσον στοιχίζει ἡ ὀκᾶ; 79 καὶ ὑπ 363 (65). 5

2) Σιδηρόδρομος εἰσπράττει εἰς ἓν ἔτος 81711820 (2767430) δραχμάς· πόσα εἰσπράττει καθ' ἡμέραν κατὰ μέσον ὅρον, ἐὰν τὸ ἔτος ἔχῃ 365 ἡμέρας; 223868 (7582).

3) Ποσὸν ἐκ 415460 (46336) δραχμῶν πρόκειται νὰ διανεμηθῇ μεταξὺ 315 (128) ἀνθρώπων· πόσα θὰ λάβῃ ὁ καθείς; 684 (362).

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἔμπορος ἐπλήρωσε δι' ἀξίαν 318 (327) ὀκ. ἑνὸς ἐμπορεύματος 20988 (22890) δραχμάς, ἐπώλησε δὲ ἀνὰ 728 (459) ὀκ. ἀντὶ 52416 (302924) δρχ.· πόσον ἐκέρδισεν εἰς τὴν 1 ὀκᾶν; 6 (ζ. 4) δρχ.

2 Πληρώ... τις διὰ 37 (49) ὀκ. ἐμπορεύματος 10471 (6223) δραχ., κερδίζει (ζημιοῦται) δὲ κατὰ τὴν πώλησιν 374 (224) δρχ. ἀνὰ 17 (16) ὀκ.· πόσον ἐπώλησε καθεμίαν ὀκᾶν; 305 (113) δρχ.

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Ἀγοράζει τις 28 (16) ὀκ. πράγματος ἀντὶ 504 (96) δραχμῶν· ἔπειτα 36 (18) ὀκ. ἀντὶ 432 (144) δραχμῶν, καὶ τέλος 8 (14) όκ. ἀντὶ 216 (336) δραχμῶν· πόσον στοιχίζει ἡ ὀκ κατὰ μέσον ὅρον; 16 (12)

2) Ἀτμάμαξα τρέχει ἐπὶ 35′ (56′) ἀπὸ 784 (612) μ. εἰς 1′ ἔπειτα ἐπὶ 48′ (58′) διανύουσα 898 (765) μ. εἰς 1′· πόσα διατρέχει κατὰ μέσον ὅρον; 801 (631)

Ὁμὰς πέμπτη. 1) Ποσὸν 4500 (60225) δραχμῶν πρόκειται νὰ μοιρασθῇ ἐξ ἴσου εἰς ἕνα ἀριθμὸν ἀνθρώπων, ὥστε ὁ καθεὶς νὰ λάβῃ 125 (825) δραχμάς· πόσοι εἶνε οἱ ἄνθρωποι; 36 (73)

2) Πόσας φορὰς δυνάμεθα νὰ ἐπαναλάβωμεν μῆκος 128 (253) δακτ. ἐπὶ ἄλλου μήκους 4736 (20999) δακτ.; 37 (83)

3) Πόσας φορὰς χωρεῖ τὸ περιεχόμενον δοχείου 26 (16) όκ. εἰς 884 (944) όκ.; 34 (59)

Ὁμὰς ἕκτη 1) Μία δωδεκὰς μολυβδοκονδύλων ἐτιμᾶτο 432 πεντηκοντάλεπτα· πόσον ἐτιμᾶτο τὸ ἓν μολυβδοκόνδυλον; 18 δραχμάς.

2) Θέλει τις νὰ τοποθετήσῃ 1645 (4165) σφαίρας εἰς 35 (35) ἴσας σειράς· πόσας σφαίρας πρέπει νὰ θέτῃ εἰς καθεμίαν; 47 (119)

3) Ἔμπορος ἀναμιγνύει 12 (32) όκ. οἴνου τῶν 10 (6) δρχ. τὴν ὀκᾶν, 16 (36) όκ. τῶν 9 δραχμῶν (720 λ.) καὶ 24 (24) όκ. τῶν 8 δραχμῶν (520 λ.) πρὸς δὲ 8 όκ. ὕδατος· πόσον στοιχίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ κράματος 760 (576) λ.

ΚΑΦΑΛΑΙΟΝ VI.

Περὶ διαιρετότητος καὶ περὶ πρώτων ἀριθμῶν.

§ 29. Γνωρίσματα τῆς διαιρετότητος.—

α′) Ἡ πρώτη Ἰανουαρίου τοῦ 1909 ἔπεσεν ἡμέραν Παρασκευήν. Θέλομεν νὰ μάθωμεν, ἂν καὶ ἡ πρώτη τοῦ 1910 ἔπεσε Παρασκευήν.

Ἂν συνέβη τοῦτο, πρέπει ἐὰν τὰς 365 ἡμέρας τοῦ ἔτους 1909 διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 7, νὰ μείνῃ ὑπόλοιπον μηδέν. Ἀλλ' ἡ διαίρεσις 365: 7 δίδει ὑπόλοιπον 1. Ὥστε ἡ 1η Ἰανουαρίου τοῦ 1910 ἔπεσε Σάββατον.

Ὡς βλέπομεν, ἐνίοτε ἐνδιαφερόμεθα νὰ γνωρίσωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως καὶ ὄχι τὸ πηλίκον αὐτῆς, καὶ μάλιστα ἂν τὸ ὑπόλοιπον εἶνε 0. Εἴς τινας διαιρέσεις δυνάμεθα νὰ εὑρίσκωμεν εὐκόλως τὸ ὑπόλοιπον.

β') Ἐὰν μία διαίρεσις εἶνε τελεία, π. χ. ἡ 18 : 3, λέγομεν ὅτι ὁ διαιρετέος εἶνε *πολλαπλάσιον* τοῦ διαιρέτου, ἢ ὅτι εἶνε *διαιρετὸς* διὰ τοῦ διαιρέτου, ὁ δὲ διαιρέτης λέγεται ἁπλῶς *διαιρέτης* τοῦ διαιρετέου.

γ') « ***Πᾶς ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ τῆς* 1 *καὶ διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του*** ».

(Πρόβλημα). δ') « ***Ἓν παιδίον λαμβάνει 6543 δρχ. μὲ τὴν ἐντολὴν νὰ τὰς μοιράσῃ εἰς πτωχούς, δίδον εἰς καθένα 2 δραχμ., ὅ,τι δὲ μείνῃ νὰ κρατήσῃ αὐτό. Πόσαι δραχμαὶ θὰ τοῦ μείνουν;*** »

Ἀντὶ νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 6543 : 2 μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως, σκεπτόμεθα ὅτι, τὸ παιδίον ἔλαβεν 6 χιλιάδας, 5 ἑκατοντάδας, 4 δεκάδας δραχμῶν καὶ 3 δραχμάς, διὰ νὰ τὰς μοιράσῃ καθὼς εἴπομεν. Ἀλλ ἂν εἶχε νὰ μοιράσῃ 1000 δραχμὰς καὶ ἔδιδε 2 δραχμὰς εἰς καθένα πτωχόν, θὰ ἐμοίραζεν αὐτὰς εἰς 500 πτωχοὺς καὶ δὲν θὰ τοῦ ἔμενε τίποτε. Ὁμοίως σκεπτόμενοι, βλέπομεν ὅτι, ἀπὸ καθεμίαν ἑκατοντάδα, ἢ δεκάδα, δὲν θὰ τοῦ μείνῃ τίποτε, ἀπὸ δὲ τὰς 3 δραχμὰς τοῦ μένει 1 δραχμή, ἀφοῦ δώσει 2 δραχμὰς εἰς ἕνα πτωχόν. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπόν, ἂν εἷς ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 2, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν μόνον τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων αὐτοῦ διὰ τοῦ 2 καὶ ὅ,τι ὑπόλοιπον εὕρωμεν αὐτὸ θὰ εἶνε καὶ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ὁλοκλήρου τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 2. 5

Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν, ἐὰν τὸ παιδίον δώσῃ 5 δραχμὰς ἢ 10 δραχμὰς εἰς καθένα πτωχόν.

Ὥστε δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι,

ε') « ***ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ 2, ἢ 5, ἢ 10, ἐὰν τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων αὐτοῦ εἶνε διαιρετὸν διὰ 2 ἢ 5 ἢ 10*** ».

στ') Συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα αὐτὸν πάντες οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ψηφίον εἶνε 0·2·4·6·8 εἶνε διαιρετοὶ διὰ τοῦ 2 καὶ λέγονται *ἄρτιοι* ἢ *ζυγοὶ* ἀριθμοί. Τοὐναντίον οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ τελεταῖον ψηφίον εἶνε 1·3·5·7·9 διαιρούμενοι διὰ τοῦ 2 ἀφήνουν ὑπόλοιπον 1 καὶ λέγονται *περιττοὶ* ἢ *μονοὶ* ἀριθμοί.

Οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ψηφίον εἶνε 0 ἢ 5 εἶνε διαιρετοὶ διὰ τοῦ 5, ἐκεῖνοι δὲ οἱ ὁποῖοι λήγουν εἰς 0 εἶνε διαιρετοὶ διὰ τοῦ 10.

ζ') Ἐὰν τὸ παιδίον ἔπρεπε νὰ δίδῃ 3 δραχμὰς εἰς καθένα πτωχόν, εἶνε εὔκολον νὰ ἴδωμεν, ὅτι ἀπὸ καθεμίαν δεκάδα, ἑκατοντάδα, χιλιάδα κλπ. δραχμῶν θὰ τοῦ ἔμενε 1 δραχμή, ἄρα ἀπὸ τὰς 6 χιλιάδας θὰ τοῦ ἔμενον 6 δραχμαί, ἀπὸ τὰς 5 ἑκατοντάδας 5 δραχμαί, ἀπὸ τὰς 4 δεκάδας 4 δραχμαί. Ἑπομένως ἀπὸ τὰς $\overset{\text{Χ}}{6}\overset{\text{Ε}}{5}\overset{\text{Δ}}{4}\overset{\text{Μ}}{3} = 6 + 5 + 4 + 3$ δραχμ. θὰ τοῦ μείνουν $6+5+4+3=18$ δραχμαί. Ἀλλ' αὐτὰς πρέπει νὰ μοιράσῃ πάλιν εἰς πτωχούς, δίδον εἰς καθένα 3 δρχμ.· θὰ δώσῃ λοιπὸν αὐτὰς εἰς $18 : 3 = 6$ πτωχοὺς καὶ δὲν θὰ τοῦ μείνῃ τίποτε.

Ἂν εἶχε νὰ μοιράσῃ 851 δρχμ. ἀπὸ τρεῖς δραχμὰς εἰς καθένα, θὰ τοῦ ἔμενον πρῶτον $8+5+1 = 14$ δρχ., ἀπὸ αὐτὰς δ' ἔπειτα 2 δρχ. Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ διὰ 3 εὑρίσκεται, ἐὰν προσθέσωμεν τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τὸ προκύπτον ἄθροισμα διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 3. Τὸ ὑπόλοιπον τὸ ὁποῖον θὰ εὕρωμεν ἐκ τῆς διαιρέσεως αὐτῆς, θὰ εἶνε καὶ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ὁλοκλήρου τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 3.

Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν ἐὰν τὸ παιδίον δίδῃ 9 δραχμὰς εἰς καθένα πτωχόν. Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι,

« ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ 3, ἢ 9, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ 3, ἢ 9 ».

η') Ἂν τὸ παιδίον ἔπρεπε νὰ δίδῃ 4 δραχμὰς εἰς καθένα πτωχόν, εὑρίσκομεν εὐκόλως, ὅτι ἀπὸ καθεμίαν ἑκατοντάδα, χιλιάδα κλπ. δὲν θὰ τοῦ ἔμενε τίποτε (διότι $100 : 4 = 25$ ἀκριβῶς· $1000 : 4 = 250$), ἀπὸ δὲ τὰς ὑπολοιπομένας 43 δρχ. ἐκ τῶν 6543 θὰ ἔδιδε τὰς 40 δραχμὰς εἰς 10 πτωχοὺς καὶ θὰ τοῦ ἔμενον 3 δραχμαί.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπόν, ἂν εἷς ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 4, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ δύο τελευταῖα αὐτοῦ ψηφία ἐκ δεξιῶν διὰ 4. Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν, ἐὰν τὸ παιδίον ἔδιδεν 25 δραχμάς, ἢ 100 δραχμάς, εἰς καθένα πτωχόν.

Ὅθεν ***« ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ 4, ἢ 25 ἢ 100, ἐὰν ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ δύο πρὸς τὰ δεξιὰ τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ, εἶνε διαιρετὸς διὰ 4, ἢ 25, ἢ 100 ».***

θ') Ἐὰν τὸ παιδίον δίδῃ 8 δρχ. εἰς καθένα πτωχόν, παρατηροῦμεν ὅτι, ἀπὸ καθεμίαν χιλιάδα δὲν θὰ τοῦ μείνῃ τίποτε. Διότι $1000 : 8 = 125$ ἀκριβῶς. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τί θὰ τοῦ μείνῃ ἀπὸ τὰς ἄλλας 543 δραχμάς, διαιροῦμεν τὸ $543 : 8$ καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 7 δραχμάς.

Ὥστε, «*ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ 8, ἐὰν ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ τρία πρὸς τὰ δεξιὰ τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 8*».

Ἀσκήσεις.

1) Ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 436· 965· 589· 2028· 7968· 38684· 26336· 228672· 850340 εἶνε διαιρετοὶ διὰ τοῦ 2, τοῦ 5, τοῦ 8, τοῦ 3, τοῦ 9;

2) Ἂν *ἀριθμὸς διαιρῆται διὰ τοῦ 2 καὶ τοῦ 3, διαιρεῖται καὶ διὰ 6*. Ποῖοι ἐκ τῶν 846· 7283· 8421· 9324· 16843· 76224 εἶνε διαιρετοὶ διὰ τοῦ 3· 2· 4· 6;

3) Διὰ ποίων ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1· 2· 3· 4· 5· 6· 7· 8· 9· 25· 100 εἶνε διαιρετοὶ οἱ ἀριθμοὶ 95365· 839715· 932405;

4) Ποῖον ψηφίον νὰ γράψωμεν εἰς τὸ τέλος τῶν ἀριθμῶν 2825· 39894· 386427, διὰ νὰ γίνουν ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 5, τοῦ 3, τοῦ 10;

5) Ἐὰν ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 3, ἢ 9, καὶ ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων του, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς εἶνε πάλιν διαιρετὸς διὰ 3, ἢ 9. Διατί;

6) Ἐὰν ἀριθμὸς ἔχῃ εἰς τὸ τέλος 2 μηδενικά, διαιρεῖται διὰ τοῦ 100· ἂν τρία, διαιρεῖται διὰ τοῦ 1000. Διατί; 5

7) Ὅταν ἐξετάζωμεν ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ 3 ἢ 9, δυνάμεθα νὰ παραλείπωμεν τὰ ψηφία τὰ ὁποῖα εἶνε διαιρετὰ διὰ 3, ἢ διὰ 9. Διατί;

§ 30. Περὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν.—

Ὑπάρχουν ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶνε διαιρετοὶ μόνον διὰ τοῦ 1 καὶ τοῦ ἑαυτοῦ των, π. χ. οἱ 2· 3· 5· 7· 11 καὶ ἄλλοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν καὶ ἄλλους διαιρέτας, καθὼς οἱ 4· 6· 8· 9. Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν διαιρέτας μόνον τὸν ἑαυτόν των καὶ τὴν μονάδα, λέγονται *πρῶτοι*, ἐκεῖνοι δὲ οἱ ὁποῖοι ἔχουν καὶ ἄλλους διαιρέτας λέγονται *σύνθετοι* ἀριθμοί. Ἐπειδὴ πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς διαιρεῖται μόνον διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς μονάδος, δυνάμεθα νὰ μετατρέψωμεν αὐτὸν εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶνε ἡ 1 καὶ ὁ ἄλλος αὐτὸς ὁ ἀριθμός. Οὕτω ἔχομεν $7=1\times7$. $11=1\times11$.

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι, *«πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς δὲν δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων μικροτέρων αὐτοῦ».*

§ **31. Ἀνάλυσις συνθέτου ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων.**—

α') Ἐπειδὴ πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς ἐκτὸς τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς μονάδος ἔχει καὶ ἄλλους διαιρέτας, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν αὐτὸν εἰς γινόμενον δύο ἄλλων ἀριθμῶν, καθεὶς τῶν ὁποίων εἶνε μικρότερος αὐτου. Οὕτω π.χ. ὁ 6 ἔχει διαιρέτην τὸν 2 καὶ εἶνε $6=2\times3$.

β') Ἐὰν ἀριθμὸς σύνθετος ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, δυνάμεθα καθένα τῶν παραγόντων τούτων, ἐὰν δὲν εἶνε πρῶτοι, νὰ τρέψωμεν εἰς γινόμενον δύο ἄλλων παραγόντων μικροτέρων αὐτοῦ καὶ τοῦτο νὰ ἐξακολουθήσωμεν μέχρις ὅτου ὅλοι οἱ παράγοντες τοὺς ὁποίους θὰ εὕρωμεν, νὰ εἶνε πρῶτοι ἀριθμοί. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ λέγωμεν ὅτι,

«πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων ἀριθμῶν».

Ἔστω π. χ. ὅτι θέλομεν ν' ἀναλύσωμεν τὸν ἀριθμὸν 60 εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων ἀριθμῶν. Ἔχομεν $60=4\times15$ καὶ ἐπειδὴ εἶνε $4=2\times2$ καὶ $15=3\times5$, ἕπεται ὅτι εἶνε $60=2\times2\times3\times5=2^2\times3\times5$.

γ') Ὅταν πρόκειται περὶ μεγάλων ἀριθμῶν, π.χ. ἐὰν θέλωμεν ν' ἀναλύσωμεν τὸν 560 εἰς γινόμενον πρώτων ἀριθμῶν, διαιροῦμεν τὸν 560 διὰ τοῦ μικροτέρου τῶν πρώτων ἀριθμῶν, διὰ τοῦ ὁποίου διαιρεῖται. Ἔπειτα ἐξακολουθοῦν ὁμοίως μὲ τὸ πηλίκον καὶ οὕτω καθεξῆς μὲ τὸ εὑρισκόμενον πηλίκον, ἐν ὅσω τοῦτο εἶνε δυνατόν· δηλαδὴ ἐν ὅσω δὲν εὑρίσκομεν πηλίκον πρῶτον ἀριθμόν. Οὕτω ὁ 560 διαιρεῖται διὰ τοῦ 2 καὶ ἔχομεν

	$560:2=280$·	ἑπομένως	$560=2\times280$.
Ὁμοίως	$280:2=140$·	»	$280=2\times140$.
»	$140:2=70$·	»	$140=2\times70$.
»	$70:2=35$·	»	$70=2\times35$.
»	$35:5=7$·	»	$35=5\times7$.

Ἄρα τὸ $560=2\times280=2\times2\times140=2\times2\times2\times70=2\times2\times2\times2\times35=2\times2\times2\times2\times5\times7=2^4\times5\times7$.

δ') Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μικρότερον πρῶτον, ὁ ὁποῖος εἶνε διαιρέτης ἑνὸς ἀριθμοῦ, δοκιμάζομεν ἂν ὁ δοθεὶς διαιρῆται διὰ τῶν 2·3·5·7·11·13·17·19·23. . . , οἱ ὁποῖοι εἶναι πρῶτοι.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1 ἕως 30 εἶνε πρῶτοι; 2) Ποῖοι ἐκ τῶν 30 ἕως 50 εἶνε πρῶτοι; Ποῖοι ἐκ τῶν 50 ἕως 100;

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ν' ἀναλυθοῦν ἀπὸ μνήμης εἰς γινόμενα δύο παραγόντων οἱ ἀριθμοὶ 24· 32· 36· 39· 40.

2) Ὁμοίως οἱ 69· 75· 78· 81· 84· 85· 87· 91· 100.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ν' ἀναλυθοῦν ἀπὸ μνήμης οἱ ἑπόμενοι ἀριθμοὶ εἰς γινόμενα παραγόντων πρώτων ἀριθμῶν 8· 12· 16· 18· 20· 34· 27· 28· 32· 36· 40· 44· 48· 50· 52· 60· 63· 64.

2) Ν' ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων πρώτων ἀριθμῶν οἱ ἀριθμοὶ 432· 2145· 700· 728· 5445· 871· 1764.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII.

Περὶ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου ἀριθμῶν.

§ **32. Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.**—

α') Ὁ ἀριθμὸς 15 ἔχει τοὺς διαιρέτας 1·3·5·15. Ὁ 40 ἔχει τοὺς 1· 2· 4· 5· 8· 10· 20· 40. Οἱ 15 καὶ 40 ἔχουν κοινοὺς διαιρέτας τοὺς 1 καὶ 5, ἐκ τῶν ὁποίων μεγαλύτερος εἶνε ὁ 5. 5

Ὁ μεγαλύτερος αὐτὸς κοινὸς διαιρέτης τῶν 15 καὶ 40 λέγεται *μέγιστος κοινὸς διαιρέτης* τῶν 15 καὶ 40.

Ἐν γένει, *καλοῦμεν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν τὸν μεγαλύτερον ἐκ τῶν κοινῶν διαιρετῶν αὐτῶν*, θὰ παριστάνωμεν δ' αὐτὸν συντόμως διὰ τοῦ *μ. κ. δ.*

β') Ὅταν δοθέντες ἀριθμοὶ ἔχουν μ. κ. δ. τὴν 1, θὰ λέγωμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶνε *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους*.

γ') Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. ἀριθμῶν, πρέπει νὰ εὕρωμεν τοὺς διαιρέτας καθενὸς ἐκ τούτων, νὰ συγκρίνωμεν μεταξύ των μόνον τοὺς κοινοὺς ἐξ αὐτῶν, καὶ νὰ κρατήσωμεν τὸν μεγαλύτερον. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς εὑρέσεως τοῦ μ. κ. δ. εἶνε δύσκολος, ὅταν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε μεγάλοι, ἔχομεν τρόπον ἁπλοῦν καὶ γενικὸν πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ.

δ') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν 24· 60· 72.

Ἀναλύομεν καθένα ἐξ αὐτῶν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων ὅτε λαμβάνομεν $24 = 2\times2\times2\times3 = 2^3\times3$, $60=2\times2\times3\times5 = 2^2\times3\times5$, $72=2\times2\times2\times3\times3=2^3\times3^2$.

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 3, ὁ ὁποῖος περιέχεται εἰς τὰ τρία γινόμενα, τὰ διαιρεῖ. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν δύο παράγοντας, οἱ ὁποῖοι περιέχονται εἰς καθένα τῶν τριῶν τούτων γινομένων, π.χ. ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον $2\times3=6$, τοῦτο διαιρεῖ καὶ τὰ τρία γινόμενα, ἤτοι τοὺς ἀριθμοὺς 24· 60· 72. Ἑπομένως ὁ 6 εἶνε κοινὸς διαιρέτης τῶν τριῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Διὰ νὰ εὕρωμεν ὅμως τὸν μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν πάντας τοὺς κοινοὺς παράγοντας αὐτῶν, ἤτοι τοὺς 2·2·3. Ὥστε ὁ μ.κ.δ. τῶν 24·60·72 εἶνε ὁ $2\times2\times3=2^2\times3=12$. Ὡς βλέπομεν, ὁ 2 περιέχεται εἰς τοὺς 24· 60· 70, καὶ εἰς μὲν τὸν πρῶτον ἔχει τὸν ἐκθέτην 3, εἰς τὸν δεύτερον 2, καὶ εἰς τὸν τρίτον 3, εἰς δὲ τὸν μ.κ.δ. $2^2\times3$ τὸ 2 περιέχεται μὲ ἐκθέτην 2· δηλαδὴ μὲ τὸν μικρότερον τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους αὐτὸς ἔχει εἰς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς. Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὸν παράγοντα 3.

Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. τῶν 32·80·120.

Ἔχομεν δηλαδὴ

$$32=2\times2\times2\times2\times2=2^5.$$
$$80=2\times2\times2\times2\times2=2^4\times5.$$
$$120=2\times2\times2\times3\times5=2^3\times3\times5.$$

Οἱ κοινοὶ πρῶτοι παράγοντες εἶνε ὁ 2 καὶ ὁ μικρότερος ἐκθέτης αὐτοῦ μὲ τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς εἶνε ὁ 3· ἄρα $2^3=8$ εἶνε ὁ μ.κ.δ. τῶν 32· 80· 120.

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι,

«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. ἀριθμῶν, ἀναλύομεν καθένα ἐξ αὐτῶν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων καὶ ἀκολούθως πολλαπλασιάζομεν πάντας τοὺς κοινοὺς παραγόντας αὐτῶν, καθενὸς λαμβανομένου μὲ τὸν μικρότερον τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποιους ἔχει εἰς τὰ γινόμενα, εἰς τὰ ὁποῖα ἀνελύθησαν οἱ ἀριθμοί».

ε') ***Ἄλλος τρόπος εὑρέσεως τοῦ μ. κ. δ. ἀριθμῶν.***

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν ὑπάρχει καὶ ἡ ἑξῆς ὡραία μέθοδος γνωστὴ ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἕλληνος μαθηματικοῦ Εὐκλείδου (γεννηθέντος τὸ 300 μ.Χ.).

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 810 καὶ 279.

Διαιροῦμεν τὸν 810 διὰ τοῦ 279 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 252. Τὸν διαιρέτην 279 διαιροῦμεν διὰ τοῦ 252 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 27. Διαιροῦμεν πάλιν τὸν 252 διὰ τοῦ 27 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 9. Τέλος διαιροῦμεν τὸν 27 διὰ τοῦ 9 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0. Ὁ τελευταῖος αὐτὸς διαιρέτης 9 εἶνε ὁ μ.κ.δ. τῶν 810 καὶ 279.

Ἡ διαίρεσις λοιπὸν τοῦ ἑκάστοτε διαιρέτου διὰ τοῦ ὑπολοίπου θὰ ἐξακολουθήσῃ μέχρις ὅτου εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0 καὶ ὁ τελευταῖος αὐτὸς διαιρέτης θὰ εἶνε ὁ μ. κ. δ.

Ἡ μέθοδος αὐτὴ τῆς εὑρέσεως τοῦ μ. κ. δ. λέγεται μέθοδος *διὰ διαιρέσεως*, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῆς ἀνωτέρω ἐκτεθείσης, ἡ ὁποία λέγεται *δι' ἀναλύσεως εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας*.

στ') Ἡ μέθοδος *διὰ διαιρέσεως* ἐφαρμόζεται καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. περισσοτέρων τῶν δύο ἀριθμῶν. Ἔστω π. χ. ὅτι ζητοῦμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 125· 350· 480· 500.

Λαμβάνομεν τὸν μικρότερον 125. Διαιροῦμεν δι' αὐτοῦ πάντας τοὺς ἄλλους, γράφομεν δὲ κάτωθεν καθενὸς τὸ ἀντίστοιχον ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, κάτωθεν δὲ τοῦ μικροτέρου αὐτὸν τὸν ἴδιον. 5

Εἰς τὴν νέαν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν ἐργαζόμεθα ὁμοίως, διαιροῦντες τοὺς ἄλλους διὰ τοῦ μικροτέρου αὐτῶν (ὁ ὁποῖος δὲν πρέπει νὰ εἶνε 0) καὶ οὕτω προχωροῦμεν ὁμοίως μέχρις ὅτου πάντα τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως εἶνε ἴσα μὲ 0, ὅτε ὁ τελευταῖος διαιρέτης εἶνε ὁ μ. κ. δ.

Οὕτω διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 125· 350· 480· 500 θὰ ἔχωμεν τὰς ἑξῆς σειράς.

125·	350·	480·	500	
				διαιρέτης ὁ 125
125·	100·	105·	0	
				διαιρέτης ὁ 100
25·	100	5·	0	
				διαιρέτης ὁ 5
0·	0·	5·	0	
				μ. κ. δ. ὁ 5.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἑπομένων ἀριθμῶν δι' ἀναλύσεως καὶ διὰ διαιρέσεως· α') 18, 14, 60, 72. β') 25, 30, 24, 36, 50. γ') 25, 100, 60, 90.

2) Ὁμοίως τῶν α') 6, 8, 12· β') 12, 16, 24· γ') 12, 20, 30. δ') 135, 625, 350, 140.

3) Νὰ εὑρεθῇ διὰ διαιρέσεως καὶ δι' ἀναλύσεως ὁ μ. κ. δ. τῶν 360, 781, 3784.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἐὰν ἐκ δύο ἀριθμῶν ὁ εἷς διαιρῇ τὸν ἄλλον, ὁ διαιρέτης αὐτὸς εἶνε ὁ μ. κ. δ. των. Διατί ;

2) Ἰσχύει τοῦτο καὶ ὅταν ἐκ πολλῶν ἀριθμῶν ὁ εἷς διαιρῇ πάντας τοὺς ἄλλους ;

3) Ἓν παιδίον ἔχει 60 σφαίρας λευκάς, 72 ἐρυθρὰς καὶ 48 μαύρας· θέλει δὲ ἐκ τοῦ καθενὸς εἴδους νὰ σχηματίσῃ ὅσον τὸ δυνατὸν περισσοτέρους σωρούς, ἀλλ' οὕτως ὥστε ὁ καθεὶς σωρὸς νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ πλῆθος σφαιρῶν· α') πόσους τοιούτους σωροὺς δύναται νὰ σχηματίσῃ ; β') ἐκ πόσων σφαιρῶν θ' ἀποτελῆται καθεὶς σωρός ;

4) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶνε πρῶτοι, π. χ. οἱ 5 καὶ 7, θὰ εἶνε καὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διατί ;

§ 33. Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.—

α') Ἓν παιδίον λαμβάνει ἀπὸ σήμερον ἀνὰ 4 ἡμέρας χρήματα ἀπὸ τὸν πατέρα του· ἐπίσης καὶ ἀπὸ τὴν τὴν μητέρα του ἀπὸ σήμερον, ἀλλὰ ἀνὰ 6 ἡμέρας. Μετὰ πόσας ἡμέρας θὰ λάβῃ πάλιν χρήματα κατὰ τὴν αὐτὴν ἡμέραν καὶ ἀπὸ τοὺς δύο ;

Ἐπειδὴ ἀπὸ τὸν πατέρα του θὰ λάβῃ τὴν 4ην, 8ην, 12ην... ἡμέραν ἀπὸ σήμερον, καὶ ἀπὸ τὴν μητέρα του τὴν 6ην, 12ην, 18ην..., συνάγομεν ὅτι, τὴν δωδεκάτην ἡμέραν ἀπὸ σήμερον θὰ λάβῃ χρήματα καὶ ἀπὸ τοὺς δύο διὰ πρώτην φορὰν ἐκτὸς τῆς σημερινῆς.

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸν μικρότερον ἀριθμόν, εἰς τὸν ὁποῖον ὁ 4 καὶ ὁ 6 χωροῦν ἀκριβῶς. Τοὺς ἀριθμοὺς εἰς τοὺς ὁποίους ὁ 4 καὶ ὁ 6 χωροῦν ἀκριβῶς καλοῦμεν *κοινὰ πολλαπλάσια τῶν* 4 *καὶ* 6. Τὸ μικρότερον ἐκ τῶν κοινῶν πολλαπλασίων τῶν 4 καὶ 6 λέγεται *ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν* 4 *καὶ* 6.

β') Ἐν γένει, ***«καλοῦμεν ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν τὸν μικρότερον ἐκ τῶν ἀριθμῶν εἰς τοὺς ὁποίους οἱ δοθέντες χωροῦν ἀκριβῶς»***.

θὰ παριστάνωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον πρὸς συντομίαν διὰ τοῦ ἐ.κ.π.

γ΄) *Εὕρεσις τοῦ ἐ.κ.π. διὰ πολλαπλασιασμοῦ.* Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 5·6·7·10, τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τὸ ἐ.κ.π. Παρατηροῦμεν ἂν ὁ μεγαλύτερος αὐτῶν, ὁ 10, διαιρῆται διὰ καθενὸς τῶν ἄλλων. Καὶ ἂν μὲν διαιρῆται, αὐτὸς θὰ εἶνε τὸ ἐ.κ.π. των δοθέντων ἀριθμῶν, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν τὸ διπλάσιον(20),τὸ τριπλάσιον (30)...μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος νὰ διαιρῆται διὰ καθενὸς τῶν δοθέντων. Ὁ ἀριθμὸς 210, τὸν ὁποῖον πρῶτον θὰ εὕρωμεν τιουτοτρόπως, θὰ εἶνε τὸ ἐ.κ.π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Ὁμοίως διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 2·4·5·6 εὑρίσκομεν ἐ.κ.π. αὐτῶν τὸν 60.

Ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς εὑρέσεως τοῦ ἐ. κ. π. λέγεται καὶ *μέθοδος διὰ πολλαπλασιασμοῦ.*

δ΄) *Εὕρεσις τοῦ ἐ. κ. π. δι' ἀναλύσεως εἰς πρώτους παράγοντας.* Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ.κ.π τῶν ἀριθμῶν 8·18·24. Ἀναλύομεν καθένα αὐτῶν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, ὅτε λαμβάνομεν $8=2\times2\times2=2^3$, $18=2\times3\times3=2\times3^2$, $24=2\times2\times2\times3=2^3\times3$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἀφοῦ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ $8=2\times2\times2$,πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ γινόμενον $2\times2\times2$. Ἐπίσης διὰ νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 18, πρέπει νὰ περιέχῃ τὸ γινόμενον $2\times3\times3$. Διὰ τοῦτο πρέπει εἰς τοὺς παράγοντας τοῦ $2\times2\times2$, νὰ παραθέσωμεν καὶ τοὺς παράγοντας 3×3, ὅτε λαμβάνομεν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ περιέχῃ τὸ γινόμενον $2\times2\times2\times3\times3$. 5
Ἐπειδὴ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ $24=2\times2\times2\times3$, πρέπει νὰ περιέχῃ τὸ γινόμενον τοῦτο $2\times2\times2\times3$, τὸ ὁποῖον πράγματι περιέχει. Ἄρα τὸ $2\times2\times2\times3\times3$, εἶνε ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ τῶν δοθέντων, εἶνε δὲ καὶ τὸ ἐ.κ.π. αὐτῶν. Διότι οὐδεὶς ἄλλος ἀριθμὸς μικρότερος αὐτοῦ διαιρεῖται καὶ διὰ τῶν τριῶν ἀριθμῶν 8· 18· 24. Ὥστε τὸ ζητούμενον ἐ.κ.π. εἶνε ὁ 72.

ε΄) Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐργαζόμενοι, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ.κ.π. οἱωνδήποτε ἄλλων ἀριθμῶν. Π.χ. διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 5· 35· 80· 120 ἔχομεν $5=5$· $35=5\times7$· $80=2^4\times5$· $120=2^2\times3\times5$.

Τὸ δὲ ἐ.κ.π. αὐτῶν εἶνε τὸ $2^4\times3\times5\times7=1680$.

στ΄) Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι,

«***διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ. κ. π. ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν, ἀναλύομεν καθένα τούτων εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων· ἀκολούθως σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν κοινῶν καὶ μὴ κοινῶν***

παραγόντων τῶν γινομένων τούτων, καθενὸς λαμβανομένου μὲ τὸν μέγιστον ἐκθέτην».

ζ') Ὅταν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ δὲν εἶνε πολὺ μεγάλοι, ἀποφεύγομεν τὴν ἀνάλυσιν καθενὸς ἐξ αὐτῶν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, ἀλλ' ἐργαζόμεθα συνήθως ὡς ἑξῆς πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐ.κ.π.

Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ ἐ.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 3·5·9·12·16.

Εὑρίσκομεν τὸν μικρότερον πρῶτον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος διαιρεῖ τοὐλάχιστον δύο ἐξ αὐτῶν. Διαιροῦμεν δι' αὐτοῦ ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι διαιροῦνται, καὶ ὑποκάτω καθενὸς τούτων γράφομεν τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα τῶν διαιρέσεων, κάτωθεν δὲ τῶν ἄλλων αὐτοὺς τοὺς ἰδίους ἀριθμούς. Ἐπὶ τῶν νέων ἀριθμῶν ἐργαζόμεθα ὁμοίως καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις ὅτου εὕρωμεν σειρὰν ἀριθμῶν ἐκ μονάδων ἀποτελουμένην ἢ καὶ ἐκ τοιούτων, ὥστε νὰ μὴ ὑπάρχῃ εἷς πρῶτος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος νὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον δύο ἐξ αὐτῶν. Τοὺς ἑκάστοτε εὑρισκομένους διαιρέτας, καθὼς καὶ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς τελευταίας σειρᾶς ἐκτὸς τῆς μονάδος, γράφομεν εἰς στήλην, κειμένην ἀριστερὰ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ἀπὸ τῶν ὁποίων χωρίζεται διὰ γραμμῆς κατακορύφου.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν

2	3·	5·	9·	12·	16·
2	3·	5·	9·	6·	8·
3	3·	5·	9.	3·	4·
3	1·	5·	3·	1·	4·
4					
5					

Τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀνωτέρω δοθέντων ἀριθμῶν εἶνε τὸ γινόμενον $2\times2\times3\times3\times4\times5$· ἤτοι τὸ $2\times2\times2\times2\times3\times3\times5=720$.

Ὁμοίως πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐ.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 7·12·15·27·35·40·45 ἔχομεν

2	7·	12·	15.	27·	35·	40	45·
2	7·	6·	15·	27·	35·	20·	45·
3	7·	3·	15·	27·	35·	10·	45·
3	7·	1·	5·	9·	35·	10·	15·
5	7·	1·	5·	3·	35·	10·	5·
7	7·	1·	1.	3·	7·	2·	1·
2	1·	1·	1·	3·	1·	2·	1·
3							

Τὸ ἐ.κ.π. εἶνε τὸ $2\times2\times2\times3\times3\times3\times5\times7=7560$.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ. κ. π. τῶν κάτωθι ἀριθμῶν δι' ἀναλύσεως καὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ· α') 8, 9, 6, 12, 15, 20· β') 18, 24, 60, 80· γ') 50, 65, 16, 6.

2) Ὁμοίως τῶν α') 2, 4, 8, 14· β') 6· 12· 5, 16· 10· γ') 8, 12, 16, 5, 6· δ') 7, 2, 4, 6, 8· ε') 8, 6, 9, 12, 25, 30.

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ. κ. π. καὶ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν α') 240, 360, 144, 6648· β') 280, 644, 600, 1024, 1800. γ') 3700, 72, 130, 366· δ') 770, 2420, 3850.

4) Τὸ ἐ. κ. π. ἀριθμῶν πρώτων εἶνε τὸ γινόμενόν των. Διατί ;

5) Τὸ ἐ. κ. π. δύο ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους εἶνε τὸ γινόμενόν των. Διατί ;

6) Τὸ ἐ. κ. π. δύο ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς διαιρεῖται διὰ τοῦ ἄλλου, εἶνε ὁ μεγαλύτερος ἐκ τούτων. Ἀληθεύει τοῦτο καὶ διὰ περισσοτέρους ἀριθμοὺς καὶ διατί ;

7) Ἐκ τοῦ λιμένος Πειραιῶς ἀναχωρεῖ ἀνὰ 7 ἡμέρας ἀτμόπλοιον διὰ Βόλον· πάντοτε ἀνὰ 3 ἡμέρας ἄλλο διὰ Σπέτσας καὶ ἄλλο ἀνὰ 2 δι' Ἰτέαν. Ἐὰν μίαν Κυριακὴν συμπέσῃ ἡ ἀναχώρησις τριῶν ἀτμοπλοίων ἐκ Πειραιῶς διὰ Βόλον, Σπέτσας, Ἰτέαν, πότε πάλιν θὰ συμπέσῃ ἡ πρώτη κοινὴ ἀναχώρησις ; (42 ἡμ.). 5

8) Ὁ Α καὶ ὁ Β ἀρχίζουν νὰ κτυποῦν ἐπὶ δύο διαφόρων ὀργάνων συγχρόνως. Ὁ Α ἐπαναλαμβάνει τὸν κτύπον ἀνὰ 8' (9') ὁ δὲ Β ἀνὰ 12' (15')· μετὰ πόσα λεπτὰ θὰ κτυπήσουν συγχρόνως πάλιν διὰ δευτέραν φοράν ; 24 (45).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΧ.

Περὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

§ 34. Οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοί.—

α′) Μίαν σπουδαίαν ἐπέκτασιν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος τῶν ἀριθμῶν εἰσήγαγεν ὁ μαθητικὸς *Simon Stevin* (1585).

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν αὐτήν, ἄς φαντασθῶμεν μίαν μονάδα, π. χ. ἓν μῆλον, χωρισμένον εἰς 10 ἴσα μέρη καὶ ἄς ὀνομάσωμεν ἓν τοιοῦτον μέρος ἓν *δέκατον*· ἄς σχηματίσωμεν δὲ ἕνα ἀριθμὸν ὄχι μόνον ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων, τὰς ὁποίας παρεστήσαμεν διὰ τῶν Μ, Δ, Ε,... ἀλλὰ καὶ ἐκ δεκάτων, τὰ ὁποῖα θὰ σημειώνωμεν διὰ τοῦ δ. Οὕτω ὁ νέος ἀριθμὸς θὰ σχηματισθῇ καθὼς οἱ μέχρι τοῦδε γνωστοί, δηλαδὴ πάντοτε 10 μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Π. χ. εἰς τὸν

Ε Δ Μ δ
ἀριθμὸν 5 3 8 6 τὰ 10 δέκατα ἀποτελοῦν μίαν μονάδα, αἱ 10 μονάδες μίαν δεκάδα κ. ο. κ.

ϐ′) Συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν αὐτήν, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἓν δέκατον εἰς 10 ἴσα μέρη. Ἓν τοιοῦτον μέρος καλοῦμεν *ἑκατοστὸν* καὶ σημειώνομεν αὐτὸ διὰ τοῦ ε. Σχηματίζομεν δὲ ἕνα ἀριθμὸν ὄχι μόνον ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν μονάδων, ἀλλὰ καὶ ἐκ δεκάτων καὶ ἑκατοστῶν. Ἐπίσης καὶ οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ θὰ σχηματίζωνται, ὡς οἱ μέχρι τοῦδε. Π. χ. εἰς τὸν ἀριθμὸν

Δ Μ δ ε
2 3 0 3

τὰ 10 ε ἀποτελοῦν 1 δ, τὰ 10 δ ἀποτελοῦν 1 Μ, αἱ 10 Μ μίαν δεκάδα κ. ο. κ.

γ′) Ἐὰν οὕτω ἐξακολουθήσωμεν, δυνάμεθα τὸ ἓν τῶν 10 ἴσων μερῶν ἑνὸς ἑκατοστοῦ νὰ καλέσωμεν *χιλιοστόν*, τὸ ἓν τῶν 10 ἴσων μερῶν τοῦ χιλιοστοῦ *δέκατον τοῦ χιλιοστοῦ* κ. ο. κ., νὰ σχηματίσωμεν δὲ ἀριθμούς, ἀκριβῶς ὅπως τοὺς μέχρι τοῦδε γνωστούς. Τὰς νέας αὐτὰς μονάδας *(δέκατον, ἑκατοστόν, χιλιοστόν, δέκατον χιλιοστοῦ, ἑκατοστὸν χιλιοστοῦ, ἑκατομμυριοστόν,...)* καλοῦμεν ***δεκαδικὰς μονάδας***, τοὺς δὲ νέους ἀριθμούς, ***δεκαδικοὺς ἀριθμούς***, ἐνῷ τούς μέχρι τοῦδε γνωστοὺς ***ἀκεραίους***.

§ 35. Περὶ γραφῆς καὶ ἀπαγγελίας τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.—

α') Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς συμφώνως ς τὴν γραφὴν τῶν ἀκεραίων, ἐὰν θέσωμεν ὡς ἀρχήν, ὅτι δεξιὰ τῶν ῶν μονάδων καὶ εἰς τὴν πρώτην θέσιν θὰ γράφωμεν τὰ δέκατα, εἰς δευτέραν θέσιν τὰ ἑκατοστά, εἰς τὴν τρίτην τὰ χιλιοστὰ κ. ο. κ.

Εἶνε φυσικόν, ὅτι πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ποία θέσις ἀντιστοιχεῖ τὰς ἁπλᾶς μονάδας καὶ πρὸς διάκρισιν γράφομεν μεταξὺ τῶν ῶν μονάδων καὶ τῶν δεκάτων ἓν *κόμμα* (,). Κατὰ ταῦτα ὁ

Δ Μ δ ε

θμὸς 6 3 4 7 θὰ γραφῇ οὕτω 63,47. Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ραίας μονάδας, γράφομεν εἰς τὴν θέσιν αὐτῶν 0.

δ ε χ

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 3 7 2 γράφεται οὕτω 0, 372.

β') Ἡ ἀπαγγελία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, π. χ. τοῦ 23,407 δύναται γίνῃ κατὰ τρεῖς τρόπους κυρίως. 1) λέγομεν 23 ἀκέραιος, δέκατα, καὶ 7 χιλιοστά· ἤτοι ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸν ραιον καὶ ἔπειτα καθὲν δεκαδικὸν ψηφίον σημαντικὸν μὲ

δ ε χ

ὄνομα τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας παριστάνει. 2) ἐπειδὴ 4 0 7 ἴσον μὲ 407 χιλιοστά, (διότι ἓν δέκατον ἔχει 100 χιλιοστά), ομεν 23 ἀκέραιος καὶ 407 χιλιοστά. Ἤτοι ἀπαγγέλομεν χωτὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ δεκαδικὸν μέρος, ὀνομάζοντες ὸ μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τῆς τάξεως τοῦ τελευταίου αδικοῦ ψηφίου. 3) Ἐπειδὴ αἱ 23 μονάδες ἔχουν 230 δέκατα,

δ ε ε χ

230=2300 καὶ τὰ 2300=23000, ἕπεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς 23,407 ἴσος μὲ 23407 χιλιοστά· ἀπαγγέλομεν λοιπὸν εἴκοσι τρεῖς χιλιάδες ρακόσια ἑπτὰ χιλιοστά. Ἤτοι ἀπαγγέλλομεν ὁλόκληρον τὸν ἀριθμὸν νὰ ἦτο ἀκέραιος, ὀνομάζοντες αὐτὸν μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τῆς εως τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου αὐτοῦ.

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ πολλὰ δεκαδικὰ ψηφία, συνήθως ἀπαγγέλλομεν ὰ κατὰ τμήματα τριψήφια ἐξ ἀριστερῶν, εἰς καθὲν δὲ τούτων προτῶμεν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου αὐτοῦ ψηφίου. Π. χ. ἀριθμὸν 48,0426289 ἀπαγγέλλομεν ὡς ἑξῆς· 48 ἀκέραιος, 42 χιλιά, 628 ἑκατομμυριοστὰ καὶ 9 δέκατα ἑκατομμυριοστοῦ.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ γραφοῦν οἱ ἑπόμενοι δεκαδικοὶ ἀριθμοί· α') 7 ἀκέραιο[ς]
δέκατα, 6 ἑκατοστά, 3 χιλιοστά. β') 162 ἀκέραιος, 5 ἑκατο[στά]
6 χιλιοστά. γ') 6 ἑκατοστά, 9 χιλιοστά, 7 ἑκατοστὰ χιλιοστοῦ.

δ ε Μ   ε χ δχ δ
δ') 9, 6, 3· ε') 6, 9, 7, 3·

2) Νὰ γραφοῦν οἱ ἀριθμοί· α') 64 δέκατα· β') 627 ἑκατοστά.
γ') 955 χιλιοστά. δ') 863 δέκατα χιλιοστοῦ.

Μ δ   Ε δ
3) Νὰ τραποῦν α') 9 6 εἰς ἑκατοστά· β') 9 6 εἰς δέκατα.

ΜΔΕ   ε Μ Δ
γ') 6 5 3 εἰς δέκατα. δ') 8 4 3 εἰς χιλιοστά.

4) Ν' ἀπαγγελθῇ καθεὶς τῶν ἑπομένων ἀριθμῶν κατὰ τρεῖς τρό[πους]
καὶ νὰ ὁρισθῇ ἡ σημασία καθενὸς ψηφίου ἐκ τῆς θέσεώς του.
α') 0,385· β') 29,084· γ') 249,3435· δ') 0,00684.

5) Μεταβάλλεται ἡ ἀξία ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, π. χ. τοῦ [...]
ἂν εἰς τὴν ἀρχὴν ἢ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ γράψωμεν μηδενικά;

6) Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς γράφεται ὡς δεκαδικὸς μὲ ὅσαδή[ποτε]
δεδικὰ ψηφία. Π. χ. ὁ 5=5,000· ὁ 26=26,000..

Γράψατε τοὺς α') 38· β') 48· γ') 369 ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν.

7) Νὰ μεταφερθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ τοῦ ἀριθμοῦ 96,5937 μίαν θέ[σιν]
πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ νὰ ὁρισθῇ ἡ ἀξία καθενὸς ψηφίου ἐκ τῆς νέας θέ[σε]ώς του· ἐπίσης δύο, τρεῖς... θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθ[μοῦ]
καὶ νὰ ὁρισθῇ ἡ ἀξία καθενὸς ψηφίου εἰς τοὺς νέους ἀριθμούς. Τὸ α[ὐτὸ]
νὰ γίνῃ καὶ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς α') 8,1347 ·β') 0,965· γ') 0,007.

§ 36. Πρόσθεσις.—

Καθὼς εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, οὕτω καὶ εἰς τοὺς δεκαδι[κοὺς]
δύναται νὰ δοθῇ τὸ πρόβλημα.

«Δοθέντων δύο ἢ περισσοτέρων δεκαδικῶν ἢ καὶ ἀκερα[ίων] ἀριθμῶν, ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἄλλος, περιέχων πάσας τὰς μονά[δας] τῶν δοθέντων καὶ μόνον αὐτάς».

Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν αὐτὸ ἀκριβῶς ὅπως ὅταν ἔχωμεν [ἀκε]ραίους, γράφοντες τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὸ ἄθροισμα, ὅταν [τὴν] συναντήσωμεν κατὰ τὴν πρόσθεσιν. Π. χ. ἂν οἱ προσθετέοι εἶνε 8[...]
δραχμαὶ καὶ 6,87 δραχμαὶ γράφομεν τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον, ὥστ[ε αἱ]
μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρ[υφον]

ήλην καὶ προσθέτομεν λέγοντες· 7 καὶ 4=11· γράφομεν 1 καὶ κρατοῦμεν 1· 1 καὶ 8=9, 9 καὶ 3=12· γράφομεν 2 καὶ κρατοῦμεν 1, γράφομεν τὸ κόμμα· 1 καὶ 6=7 καὶ 8=15, γράφομεν τὸ 15.

Ὥστε τὸ ἄθροισμα εἶνε 1522 ἑκατοστὰ δραχμῆς.

$$\begin{array}{r} 8{,}34 \\ 6{,}87 \\ \hline 15{,}21 \end{array}$$

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα· α') 2,837+18+6,13+0,343. β') 3,815+35,61+6286+130,5+83,02. γ') 0,31+3,167+0,12+9,11.

2) Ὁμοίως νὰ γίνουν αἱ προσθέσεις μετὰ τῶν δοκιμῶν των· α') 6,2+9,3+0,36+8+,092· β') 63+8,56+3,64+7,8+8,61· γ') 0,3+5,69+7,56+8,6+2,1389· δ') 1850+0,386+0,0073+546+4,7+3,06+17,04093.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἔμπορος εἰσπράττει κατὰ τὸν Μάρτιον 3864,25 (1225,34) δρχ., τὸν Ἀπρίλιον 2864,01 (1365,1) δρχ., τὸν Μάϊον 3925 (1521,34) δρχ., καὶ τὸν Ἰούνιον 3877,7 (1526) δρχ.· πόσα εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ; 14530,96 (5637,78).

2) Ἐκ τριῶν κεφαλαίων τὸ α' δίδει τόκον 125,34 (1825,26) δρ., τὸ β' 385,9 (2485,6) δρχ., τὸ δὲ γ' 1675,3 (5721,34) δρχ.)· πόσος εἶνε ὁ ὁλικὸς τόκος; 2186,54 (10032,2).

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἔμπορος ἀγοράζει ἐμπορεύματα ἀντὶ 1846,5 (2877,27) δρχ., πωλεῖ δὲ αὐτὸ 375,12 (874,64) δρχ. ἀκριβώτερον. Ἀντὶ πόσων δραχμῶν τὸ ἐπώλησε; 2221,62 (3751,91).

2) Ἔμπορος πωλεῖ ἐμπορεύματα ἀντὶ 28426,45 (89811,45) δρχ., με ζημίαν 825,11 (6345,51) δρχ.· ἀντὶ πόσων δραχμῶν τὸ ἠγόρασε; 2925,6, (56156,96).

3) Τὸ καθαρὸν βάρος ἐμπορεύματος εἶνε 123,45 (217,48) ὀκ., τὸ δὲ ἀπόβαρον 6,04 (9423) ὀκ.· πόσον εἶνε τὸ μικτὸν βάρος; 129,49 (226,903).

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Οἱ τόποι Α, Β, Γ, Δ κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς. Ἡ ἀπόστασις Α Β εἶνε 3,146 (8,076) χμ., ἡ Β Γ 2,38

5

(6,345)χμ., ἡ δὲ ΓΔ 5, 3 (8,12) χμ: πόση εἶνε ἡ ΑΓ; ἡ ΑΔ καὶ ἡ
5,526 (14,421)· 10,826 (22,541)· 7,68 (14,46

2) Δύο τόποι κεῖνται ἑκατέρωθεν πόλεως καὶ ἐπ' εὐθείας γρ-μῆς μετ' αὐτῆς· πόσον ἀπέχουν μεταξύ των, ἐὰν ὁ εἷς ἀπέχῃ αὐ-4,347 χμ., ὁ δὲ ἄλλος 2,42 χμ; 6,767.

Ὁμὰς πέμπτη. 1) Κατά τινα πρωΐαν ἡ θερμοκρασία ἦτο 16 (8,4°), ἀνῆλθε δὲ μέχρι τῆς μεσημβρίας κατὰ 5,1° (4,2°)· πόση ἦτο μεσημβρίαν; 21,6° (12,

2) Ἔμπορος εἰσπράττει εἰς ἓν ἔτος 36854,21 (125943, 12) εἰς τὸ ἑπόμενον ἔτος 3758, 21 (42896,56) δρ. περισσότερας· τὸ ἑπ-μενον 6815,39 (431,79) δρ. περισσότερα, ἢ ὅσον τὸ α' καὶ β' ὁμ-πόσα εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ; 161748,65 (589997,3

3) Τέσσαρες τόποι Α, Β, Γ, Δ κεῖνται ἐπ' εὐθείας ὁδοῦ. Ἡ ἀπό-στασις ΑΒ εἶνε 3,845 (6,123) χμ.· ἡ ΒΓ 3,122 (4,38)) χμ. μεγ-λυτέρα τῆς προηγουμένης· ἡ ΓΔ 5,385 (6,122) χμ. μεγαλυτέρα τ ΑΓ· πόση εἶνε ἡ ΑΔ; 27,009 (39,374

§ **37.** **Ἀφαίρεσις.**—

Ὅπως εἰς τοὺς ἀκεραίους οὕτω καὶ ἐνταῦθα δυνάμεθα νὰ λύσωμ-τὸ πρόβλημα· «*δοθέντος ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ νὰ ἐλαττώσωμ-αὐτὸν κατὰ τὰς μονάδας ἄλλου*».

Ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας λύεται τὸ πρόβλημα τοῦτο λέγετ-ἀφαίρεσις καὶ γίνεται καθὼς καὶ τῶν ἀκεραίων. Πρὸς τοῦτο γράφ-μεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον εἰς τρόπον, ὥστε τὰ ψηφία τ-αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ ἡ ὑποδιαστο-ὑπὸ τὴν ὑποδιαστολήν. Κατὰ τὴν ἀφαίρεσιν *γράφομεν εἰς τὸ ὑπόλοιπ-τὴν ὑποδιαστολὴν ἅμα τὴν συναντήσωμεν.* Οὕτω ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἀφαίρ-σιν 18,832—7,84 γράφομεν

$$\begin{array}{r} 18,832 \\ \underline{7,84} \\ 10,992 \end{array}$$

καὶ λέγομεν· κάτω τὸ 2, καὶ γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν γραμμὴν εἰς τ-στήλην τοῦ 2· 4 ἀπὸ 3 δὲν ἀφαιρεῖται, 4 ἀπὸ 13=9· γράφομεν τὸ 9-1 καὶ 8=9, ἀπὸ 8 δὲν ἀφαιρεῖται, ἀπὸ 18=9· γράφομεν τὸ 9· γρά-φομεν τὸ *κόμμα*· 1 καὶ 7=8, ἀπὸ 8=0· γράφομεν τὸ 0 κάτω τ-1· γράφομεν τὸ 1. Ὥστε τὸ ὑπόλοιπον εἶνε 10,992.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑπόμεναι ἀφαιρέσεις μετὰ τῶν δοκιμῶν των· α') 13,2—0, 1. β') 184,34—167, 95· γ') 1, 345 —0, 467· δ') 33,3—29, 84·ε') 12858—999,88.στ') 185—129,121. ζ') 386, 1—123,147· η') 13,04—5,68214.

2) Ἀπὸ τὸ 278,45+3,172 ν' ἀφαιρεθῇ 1,1846+264,4374.

3) Ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 76,46 ν' ἀφαιρεθῇ ὁ 0, 485 καὶ ἐκ τοῦ ὑπολοίπου ὁ 6, 913 καὶ πάλιν ὁ 13, 001. 56, 061.

4) Ἀπὸ τὸν 83,126—9 ν' ἀφαιρέθῇ ἡ διαφορὰ 7,14—6,458. 73, 444.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Εἰσπράττει τις 7856,25 (3904, 85) δρχ. καὶ ἐξοδεύει ἀμέσως 487,30(1040,65)· λαμβάνει πάλιν 4976,34(5807,38) δρχ. καὶ ἐξοδεύει 417,87 (334,58) δρχ· πόσα τοῦ μένουν; (Νὰ λυθῇ κατὰ δύο τρόπους). 11927,42 (8337).

V 2) Ἔχει τις περιουσίαν 26418,56 (43189,51) δρχ. καὶ ἐξοδεύει πρῶτον 477,38 (125,68) δρχ.· ἔπειτα πάλιν 5218,97 (1875,36) δρχ. καὶ τέλος 387,41 (217,77) δρχ.· πόσα τοῦ ἔμειναν; (Νὰ λυθῇ κατὰ δύο τρόπους). 20334,80 (40970,70). 5

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἔμπορος ἀγοράζει ἐμπορεύματα ἀντὶ 311, 46 (217, 57) δρχ., πωλεῖ δὲ αὐτὰ ἀντὶ 337, 96 (238,44) δρχ: πόσα κερδίζει; 26,5(20,87).

V 2) Πωλήσας τις ἐμπορεύματα ἀντὶ 468,12 (617,34) δρχ. ἐκέρδισε 59,34 (48,56) δρχ.· ἀντὶ πόσων δραχμῶν τὰ ἠγόρασε; 408,78(468,78).

3) Ἀγοράζει τις ἐμπορεύματα ἀντὶ 7846,12(3819,02) δρχ., πωλεῖ δὲ αὐτὰ ἀντὶ 7211,84 (3798,64)· πόσα ἐζημιώθη; 634,28 (20,38).

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Ἐκ δύο τόπων Α καὶ Β, οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν μεταξύ των 45,126 (83,457) χμ., ἀνχωροῦν δύο ἁμαξοστοιχίαι πρὸς τὴν φορὰν Α Β. Ἡ ἐκ τοῦ Α ἀναχωροῦσα διανύει 60,48 (58,64) χμ., ἡ δ' ἐκ τοῦ Β 45,17 (40,856) χμ., τὴν ὥραν· πόση θὰ εἶνε ἡ ἀπόστασίς των μετὰ 1 ὥραν; 29,816 (65,673)

2) Ἀπὸ τὸ ἄθροισμα 13,12 + 8,416 ν' ἀφαιρεθῇ ἡ διαφορὰ 25—23,84. 20,376.

3) Ἀπὸ τὸν 930,6 (6,72) ν' ἀφαιρεθῇ ὁ 84,6 (0,84)· ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον πάλιν ὁ 84,6 (0,84) κ.ο.κ. ἐν ὅσῳ εἶνε δυνατόν.

Εἶνε δυνατὸν 11 (3) φοράς.

4) Αὐξάνω ἕνα ἀριθμὸν κατὰ 38,4 καὶ εὑρίσκω 126· ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός; 87,6.

§38. Πολλαπλασιασμὸς δεκαδικοῦ ἐπὶ ἀκέραιον.—

α') Ὅταν λέγωμεν, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμόν, π.χ. τὸν 4, 52 ἐπὶ 2· 3· 4....., ἐννοοῦμεν, νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο, τρεῖς, τέσσαρας,.. προσθετέους ἴσους μὲ τὸν δοθέντα 4,52. Ὅταν λέγωμεν, νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμόν, ἐπὶ 1 ἢ ἐπὶ 0, ἐννοοῦμεν νὰ λάβωμεν αὐτὸν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμόν, ἢ τὸ 0.

β') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 5,484 ἐπὶ τὸν 263· ἤτοι τὸ 5,484×263. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ 5,484=5484 χιλιοστά. Ὥστε θὰ ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 5,484 χιλιοστὰ×263.

Ἀλλὰ τοῦτο εἶνε τὸ γινόμενον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 5484 καὶ 263 καὶ παριστάνει χιλιοστά. Δηλαδὴ 1442292 χιλιοστὰ =1442,292.

γ') Ὅθεν, *«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν ὡς νὰ ἦσαν καὶ οἱ δύο ἀριθμοὶ ἀκέραιοι, ἀλλ' εἰς τὸ οὕτω προκύπτον γινόμενον χωρίζομεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία ἐκ δεξιῶν πρὸς τἀριστερὰ ὅσα ἔχει ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός»*

Οὕτω καὶ διὰ τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα γράφομεν καὶ πολλαπλασιάζομεν, ὅπως τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, χωρίζομεν δὲ εἰς τὸ γινόμενον τρία δεκαδικὰ ψηφία ἐκ δεξιῶν προς τἀριστερά.

$$\begin{array}{r} 5,484 \\ 263 \\ \hline 16\,452 \\ 329\,04 \\ 1096\,8 \\ \hline 1442,292 \end{array}$$

δ΄) Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε 10· 100· 1000·... ὁ κανὼν εἶνε ἁπλούστερος τοῦ προηγουμένου. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν π. χ. τὸν 0,425$\times$10 σκεπτόμεθα ὅτι, τὰ 425 χιλιοστὰ δεκάκις λαμβανόμενα γίνονται 425 ἑκατοστά =4,25. Ὁμοίως 0,425$\times$100=42,5. Ἐπειδὴ τὸ 1 χιλιοστὸν $\times$100 γίνεται 1 δέκατον κ. ο. κ.

ε΄) Ἤτοι, «***διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10· 100· 1000...ἀρκεῖ νὰ μεταφέρωμεν τὸ κόμμα τοῦ δεκαδικοῦ μίαν, δύο, τρεῖς,... θέσεις πρὸς τὰ δεξιά***».

στ΄) Ἐπειδὴ πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δεκαδικός, τοῦ ὁποίου τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶνε μηδενικά, δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, γενικῶς, ὅτι·

«***ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10· 100· 1000,.. ἐὰν μεταφέρωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ μίαν, δύο, τρεῖς... θέσεις πρὸς τὰ δεξιά***».

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ πολλαπλασιασθῇ καθεὶς τῶν 5,34· 6,782· 0,1234 ἐπὶ καθένα τῶν μονοψηφίων ἀκεραίων.

2) Νὰ πολλαπλασιασθῇ καθεὶς τῶν 2,37· 31,58· 0,8759· 87,875 ἐπὶ 25· 17· 27· 39 ἀντιστοίχως. 5

3) Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 25,135 ἐπὶ τὸ 125+315+278 (κατὰ δύο τρόπους). 18046,93.

4) Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 127,123 ἐπὶ τὸ 38$\times$105. 507220,77.

5) Νὰ πολλαπλασιασθῇ καθεὶς τῶν 3,31 ·14, 15· 0,578 ἐπὶ 10· 100· 1000·

6) Νὰ πολλααλασιασθῇ καθεὶς τῶν 1,68·2,37·13,47· 0,451· 0,1237 ἐπὶ 20· 70· 300· 600· 700· 9000.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἀγοράζει τις 48 (137) ὀκ. ἐμπορεύματος πρὸς 53,4 (60,1) δραχμὰς τὴν ὀκᾶν· πόσα πληρώνει; 2563,2(8233,7).

2) Ἐργάτης λαμβάνει καθ' ἡμέραν 22,5 (35,6) δρχμὰς ὡς ἀμοιβὴν· πόσα θὰ λάβῃ εἰς 28 (36) ἡμέρας; 630 (1281,6).

3) Πληρώνει τις καθ' ἡμέραν ἐργασίας 38,5 (45,6) δραχμὰς ε
καθένα ἐργάτην· πόσα θὰ πληρώση εἰς μίαν ἡμέραν εἰς 85 (72) ἐργ
τας; 3272,5 (3283,

2) Ἓν κεφάλαιον φέρει ἐτήσιον τόκον 385,56 (475,86) δραχμ
πόσον τόκον θὰ φέρῃ εἰς 18 (21) ἔτη; 6940,08 (9993,0

3) Τὸ γεωγραφικὸν μίλιον ἔχει 7420,44 μ.· πόσα μέτρα ἔχουν 3
(634) γεωγρ. μίλια; 2411643 (4704558,9

§ 39. Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ δεκαδικὸν ἀριθμόν.

α΄) (Πρόβλημα). «*Ἡ ὀκᾶ τοῦ κρέατος τιμᾶται 30 δραχμάς· πόσο τιμᾶται τὸ 0,1 τῆς ὀκᾶς αὐτοῦ;*»

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτο δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς καὶ ζητεῖτα ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς δεκάτου τῆς ὀκᾶς.

Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο θὰ λύωμεν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμο καθὼς ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητεῖτα ἡ τιμὴ πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων (§ 19). Δηλαδὴ θὰ πολλαπλασιά σωμεν τὸ 30 δραχμὰς ἐπὶ 0,1. Διὰ νὰ εὕρωμεν τώρα τὸ γινόμενον 30 δραχμὰς×0,1 παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ ἡ μία ὀκᾶ ἀξίζει 30 δραχμάς, τ ἓν δέκατον τῆς ὀκᾶς, τὸ ὁποῖον εἶνε δέκα φορὰς ὀλιγώτερον, θ' ἀξίζῃ 10 φορὰς ὀλιγώτερον τῶν 30 δραχμῶν, ἤτοι 30 δραχμάς: 10=3 δραχ. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν πόσον ἀξίζει τὸ δέκατον τῆς μιᾶς ὀκᾶς, θὰ διαιρέ σωμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς ὀκᾶς, δηλαδὴ τὰς 30 δρχ. διὰ τοῦ 10 καὶ θὰ λέγωμεν ὅτι ***τὸ γινόμενον τοῦ 30×0,1 εἶνε ἴσον μὲ τὸ 30 δραχμὰς :10=3 δραχμαί.***

Ὁμοίως, ἂν ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 130 δρχ, θὰ εὕρωμεν πόσον τιμᾶται τὸ δέκατον τοῦ πήχεως, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ 130×0,1· ἤτοι ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ 130 δρχ.: 10 καὶ εὑρίσκο μεν=13 δρ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον, ἐὰν ἔχωμεν 18×0,01 θὰ ἐννοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἑκατοστὸν τοῦ 18· ἤτοι νὰ διαιρέσωμεν τὸ 18 διὰ τοῦ 100.
13 δρχ.

β΄) Ἐν γένει· «***καλοῦμεν γινόμενον ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ 0,1·0,01, τὸ δέκατον, ἑκατοστόν,.. μέρος τοῦ ἀριθμοῦ τούτου***».

γ΄) (Πρόβλημα). «***Ἡ ὀκᾶ ὀσπρίων τιμᾶται 12 δραχμάς· πόσον τιμῶνται τὰ 0,4 τῆς ὀκᾶς;***»

Ἐπειδὴ τὸ τέσσαρα δέκατα εἶνε 4 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἑνὸς δεκάτου, ἕπεται ὅτι, ἐὰν εὕρωμεν πόσον τιμᾶται τὸ 0,1 ὀκ., εὑρίσκομεν πόσον τιμῶνται τὰ τέσσαρα δέκατα αὐτῆς, ἂν τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς δεκάτου πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 4. Ἀλλ' ἡ τιμὴ τοῦ 0,1 εὑρίσκεται καθὼς εἴδομεν, ἐὰν τὸ 12 πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 0, 1. Ἑπομένως τὴν τιμὴν τῶν 0,4 ὀκ. θὰ εὕρωμεν, ἐὰν τὸ γινόγενον $12 \times 0,1$ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 4.

Ἀκριβῶς τὸ αὐτὸ θὰ ἐννοοῦμεν ὅταν λέγωμεν, νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς 12 ἐπὶ 0,4· δηλαδὴ νὰ εὕρωμεν τὸ δέκατον τοῦ 12 καὶ τοῦτο νὰ πολλαπλλασιάσωμεν ἐπὶ 4.

δ') Ἐν γένει, ***«γινόμενον ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ δεκαδικὸν π. χ. ἐπὶ 3,45 σημαίνει, νὰ εὑρεθῇ μέρος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, π.χ. τὸ ἑκατοστὸν ἐδῶ, καὶ τοῦτο νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 345».***

ε') Ἐπειδὴ πᾶς ἀκέραιος ἀριθμός, π. χ. ὁ 5, σχηματίζεται ἐκ τῆς μονάδος 1, ἐὰν τὴν ἐπαναλάβωμεν πεντάκις $(1+1+1+1+1=5)$, πᾶς δὲ δεκαδικός, π.χ. 3,45 σχηματίζεται ἐκ τῆς 1 ἐὰν λάβωμεν ἓν μέρος αὐτῆς (τὸ ἓν ἑκατοστὸν ἐδῶ) καὶ τὸ ἐπαναλάβωμεν πολλάκις (345 φοράς), ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὸν ἑξῆς γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. 5

«Πολλαπλασιασμὸς λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν σχηματίζεται ἐκ τοῦ πρώτου τρίτος, καθὼς ὁ δεύτερος ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος».

Οὕτω 8×3 φανερώνει νὰ σχηματίσωμεν ἐκ τοῦ 8 τρίτον ἀριθμόν, ὅπως ὁ 3 ἔγινεν ἐκ τῆς μονάδος. Ἀλλ' ὁ 3 ἔγινεν ἐκ τῆς 1, ἀφοῦ τὴν ἐπανελάβομεν τρεῖς φορὰς $(1+1+1=3)$. Ἄρα $8 \times 3 = 8+8+8$.

Ὁμοίως $2,5 \times 3,4$ σημαίνει νὰ σχηματίσωμεν ἐκ τοῦ 2,5 τρίτον ἀριθμόν, ὅπως ὁ 3,4 ἔγινεν ἐκ τῆς 1. Ἀλλ' ὁ 3,4 γίνεται ἐκ τῆς 1, ἂν λάβωμεν τὸ δέκατον αὐτῆς καὶ τοῦτο ἐπαναλάβωμεν 34 φοράς· ἄρα $2,5 \times 3,4$ φανερώνει νὰ εὕρωμεν τὸ δέκατον τοῦ 2,5 καὶ τοῦτο νὰ ἐπαναλάβωμεν 34 φοράς.

στ') Ἄς ἴδωμεν τώρα πῶς θὰ εὕρωμεν τὸ δέκατον ἑνὸς ἀριθμοῦ.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ δέκατον τοῦ 6,3. Παρατηροῦμεν ὅτι 6,3=63 δέκατα· τῶν δὲ 63 δεκάτων τὸ δέκατον εἶνε 63 ἑκατοστά· ἐπειδὴ τὸ δέκατον ἑνὸς δεκάτου εἶνε ἓν ἑκατοστόν.

Ἄρα $6{,}3 \times 0{,}1 = 63$ ἑκατοστὰ $= 0{,}63$.

Ὁμοίως τὸ ἑκατοστὸν τῶν 217,5 εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἑκατοστὸν τῶν 2175 δεκάτων, ἤτοι 2175 χιλιοστὰ $= 2{,}175$.

Ὡς βλέπομεν, ***«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ δέκατον, ἑκατοστόν, χιλιοστόν,... ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ μεταφέρωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ, μίαν, δύο, τρεῖς,... θέσεις πρὸς τἀριστερά»***.

ζ') Ἐπειδὴ πᾶς ἀκέραιος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δεκαδικός, δυνάμεθα γενικώτερον νὰ λέγωμεν ὅτι,

«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ δέκατον, ἑκατοστόν,... ἑνὸς ἀριθμοῦ, μεταφέρομεν τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ μίαν, δύο,... θέσεις πρὸς τἀριστερά».

Οὕτω $68 \times 0{,}001 = 0{,}068$. Ἐπίσης $13 \times 0{,}1 = 1{,}3$.

η') Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ δεκαδικόν, π. χ. τὸ $4{,}53 \times 6{,}24$, πρέπει πρῶτον νὰ εὕρωμεν τὸ ἑκατοστὸν τοῦ 4,53, ἤτοι τὸ 0,0453 καὶ τοῦτο νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 624. Ἀλλὰ τοῦτο εὑρίσκομεν (§ 38), ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ 453 ἐπὶ 624 καὶ εἰς τὸ γινόμενον χωρίσωμεν τέσσαρα δεκαδικὰ ψηφία, ἤτοι· $0{,}0453 \times 624 = 28{,}2672$. Ὥστε $4{,}53 \times 6{,}24 = 28{,}2672$.

Ἐὰν συγκρίνωμεν τὸ 28,2672 μὲ τὸ γινόμενον 282672 τῶν ἀριθμῶν 453 καὶ 624, παρατηροῦμεν ὅτι διαφέρει μόνον κατὰ τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ μάλιστα ὅτι τὸ 28,2672 προκύπτει ἐκ τοῦ 282672, ἐὰν χωρίσωμεν ἐκ δεξιῶν πρὸς τἀριστερὰ τέσσαρα δεκαδικὰ ψηφία, ἤτοι ὅσα ἔχουν καὶ οἱ δύο παράγοντες. Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ δεκαδικόν. Ὅθεν ἔχομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

§ **40.**— ***«Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο δεκαδικοὺς ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ὡς νὰ ἦσαν ἀκέραιοι καὶ εἰς τὸ γινόμενον χωρίζομεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία ἐκ δεξιῶν πρὸς τἀριστερά, ὅσα ἔχουν καὶ οἱ δύο παράγοντες»***.

Οὕτω ἔχομεν

$$4{,}53 \times 6{,}24 = \begin{array}{r} 4{,}53 \\ 6{,}24 \\ \hline 18\,12 \\ 90\,6 \\ 2718 \\ \hline 28{,}2672 \end{array}$$

Ἤτοι 28,2672 δέκατα χιλιοστοῦ.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ πολλαπλασιασθῇ καθεὶς τῶν ἀριθμῶν 4,38· 26,14· 0.8762· 163,001 ἐπὶ α΄) 0,1· β΄) 0,001. γ΄) 0,0001· δ΄) 0,00001.

2) Πόσον εἶνε τὸ δέκατον, ἑκατοστόν, χιλιοστὸν τῆς δραχμῆς.

3) Πόσον εἶνε το δέκατον, ἑκατοστὸν τῶν 400 δραμίων;

4) Νὰ πολλαπλασιασθῇ καθεὶς τῶν ἀριθμῶν 8,67· 0,413·119,121· 123,78· 287,123 ἐπὶ α΄) 5,3· β΄(6,12· γ΄) 0, 315.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἀγοράζει τις 6,5 (18,52) ὀκ. τυροῦ πρὸς 23,34 (26,5) δρ. τὴν ὀκᾶν· πόσας δραχμὰς θὰ πληρώσῃ; 164,71 (490,78). 5

2) Ἀτμάμαξα διανύει καθ' ὥραν 46,3 (54,62) χμ: πόσα χιλιόμ. θὰ διανύσῃ εἰς 26,6 (18,4) ὥρας; 1217,39 (1005,008).

3) Ἓν γεωγραφικὸν μίλιον ἔχει 7420,44 μ: πόσα μέτρα ἔχουν τὰ 3,25 (36,4) γεωγρ. μίλια; 24116,43 (270104,016).

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἔμπορος ἀγοράζει 84,4 (65,5)) ὀκ. κριθῆς πρὸς 5,5 (4,4) δρ. τὴν ὀκᾶν· ἀντὶ πόσων δραχμῶν θὰ πωλήσῃ τὸ ἐμπόρευμα, ἐὰν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 0,25 (0,24) δραχ. κατ' ὀκᾶν; 485,3 (303,92)

2) Ἀγοράζει τις 75,12 (8346) ὀκ. ἐλαίου πρὸς 12,75 (13,25) δρ. τὴν ὀκᾶν, πωλεῖ δὲ αὐτὸ πρὸς 15,5 (14,75) δρ. τὴν ὀκᾶν· πόσον εἶνε τὸ κέρδος; 206,58 (12519).

3) Πωλεῖ τις 25.12 (34,35) ὀκ. πράγματος ἀντὶ 865,12 (963,46) δρ. καὶ κερδίζει 3,25 (4,6) δρ. εἰς τὴν ὀκᾶν· πόσον τὸ ἠγόρασεν; 783,48 (805,45).

4) Ἀγοράζει τις ἐμπόρευμα 285,16 (597,94) ὀκ. πρὸς 5,21 (7,58) δρ. τὴν ὀκᾶν. Τὰ μεταφορικὰ στοιχίζουν 0,08 (0,10)

δρ. κατ' ὀκᾶν· πόσον πρέπει νὰ τὸ πωλήσῃ, διὰ νὰ κερδίσῃ 0,46 (9. 82) δρ. εἰς τὴν ὀκᾶν ; 1639,67 (4484,51).

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Ἔμπορος ἠγόρασε 318,2 (122) ὀκ. ἐμπορεύματος πρὸς 0,45 (0,55) δρ. τὴν ὀκᾶν· ἔπειτα 817 (131,5) ὀκ. πρὸς 1,25 (0,26) δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ 79,1 (0,375) ὀκ. πρὸς 6,7 (0,8) δρ. τὴν ὀκᾶν· πόσα ἐπλήρωσεν ἐν ὅλω; 1694,41 (101,59).

2) Ἐξ 712(815) ἀνθρώπων, οἱ ὁποῖοι ἐμοιράσθησαν ἓν ποσὸν χρημάτων, ἔλαβε καθεὶς 35,78 (46,34) δρχ., καὶ ἐπερίσσευσαν 413,52 (518,46) δρχ.· πόσα χρήματα ἐμοιράσθησαν; 25888,88(38285,56).

3) Πόσον εἶνε τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος εἶνε 1,23 (2,34), καθεὶς δὲ τῶν ἄλλων τὸ 0,84 (0,45) τοῦ προηγουμένου του; 3,131088 (3,86685).

Ὁμὰς πέμπτη. 1) Πόσον εἶνε τὰ 3 δέκατα, τὰ 7 ἑκατοστὰ τοῦ 100; τὰ 9 δέκατα τοῦ 400;

2) Ποῖον ἐκ τῶν γινομένων 4,385×0,012 καὶ 0,346×5,017 εἶνε μεγαλύτερον καὶ πόσον; τὸ β' κατὰ 1,683262.

3) Δείξατε ὅτι καὶ εἰς τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς τὸ γινόμενον δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλαχθῇ ἡ τάξις τῶν παραγόντων.

4) Ἓν κεφάλαιον δίδει τόκον ἐτήσιον 385,56 (4758,6 δρχ.· πόσον θὰ δώσῃ εἰς 18,25 (21,75) ἔτη; 7036,47 (103499,55).

5) Ἓν ἐμπόρευμα ἔχει μικτὸν βάρος 128,46 (365,12) ὀκ., τὸ δὲ ἀπόβαρον εἶνε 3,46 (5,12) ὀκ.· πόσον ἐπωλήθη τὸ ἐμπόρευμα, ἐὰν ἡ ὀκᾶ στοιχίζῃ 4,6 (5,8) δρχ., ἔδιδε δὲ κέρδος 0,9(1) δρχ. καθεμία ὀκᾶ; 687,5 (2448).

6) Ἓν δοχεῖον, περιέχον καφέ, ζυγίζει 86,42 (93,51) ὀκ.· πόσον στοιχίζει ὁ καφές, ἂν τὸ δοχεῖον ζυγίζῃ 7,18 (9,36) ὀκ. καὶ ἡ ὀκᾶ τοῦ καφὲ τιμᾶται 45 (38) δρχ.; 3565,8 (3197,7).

§ 41. Διαίρεσις δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου.—

α') (Πρόβλημα). «*Οἱ 7 πήχεις ὑφάσματος τιμῶνται 162,4 δρχ.· πόσον τιμᾶται ὁ εἷς πῆχυς;*»

Καθὼς εἰς τοὺς ἀκεραίους οὕτω καὶ ἐδῶ ζητεῖται εἷς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 7 δίδει γινόμενον 162,4 δρχ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν

ν 162,4 δρχ. διὰ 7. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι 162,4 δρ. =
Μ δ
62+4 τῆς δραχμῆς. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὰς 162,4 δρχ. διὰ 7, ἀρκεῖ
διαιρέσωμεν τὰς 162 δρχ. διὰ τοῦ 7 καὶ τὰ 4 δέκατα τῆς δραχμῆς
ὰ 7. Τὸ 162 δρχ.: 7=23 δρχ. καὶ μένει καὶ 1 δραχμή. Αὐτὴν πάλιν
έπει νὰ τὴν διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 7· ἀλλὰ 1 δρχ.=10 δέκατα τῆς
αχμῆς· καὶ 4 δέκατα, τὰ ὁποῖα ἔχουν δοθῇ ἐξ ἀρχῆς =14 δέκατα
δ δ
ῆς δραχμῆς. Τὰ 14 τῆς δραχμῆς: 7=2 τῆς δραχμῆς. Ὥστε τὸ πηλί
ν εἶνε 23 δρχ. +2 δέκατα τῆς δραχμῆς = 23,2 δρχ., ἤτοι
62,4 : 7 =23,2.

$$\begin{array}{r|l} 162',4' & 7 \\ \cline{2-2} 22 & 23,2 \\ 1,4. & \end{array}$$

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι,
«*διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου, διαιροῦμεν αὐτὸν ς νὰ εἶνε ἀκέραιος, θέτομεν δὲ τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὸ πηλίκον, αν τελειώσῃ ἡ διαίρεσις τοῦ ἀκεραίου μέρους καὶ πρόκειται νὰ αταβιβάσωμεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων τοῦ διαιρετέου*».

β') Ἐπειδὴ πᾶς ἀκέραιος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δεκαδικός, ἔπε-
ι ὅτι ἡ διαίρεσις αὐτὴ ἰσχύει καὶ ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀκέ- 5
αιον δι' ἀκεραίου. Π.χ. διὰ τὴν διαίρεσιν 13:4 ἔχομεν

$$\begin{array}{r|l} 13',0'0' & 4 \\ \cline{2-2} 1,0 & 3,25 \\ 20 & \\ 0. & \end{array}$$

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν ἑξῆς διαιρέσεων· α') 64,9: 2·
) 423,876: 6· γ') 0,0124125: 125· δ') 14,464:8

2) Ὁμοίως τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων· α') 825 : 10· β') 623:
0· γ') 3784: 1000· δ') 621: 1000· ε') 786,1: 10· στ') 0,789: 100.

§ **42. Ἐξαγόμενον κατὰ προσέγγισιν.**—
α') (Πρόβλημα). ***Ἐὰν 38 δραχμαὶ μοιρασθοῦν ἐξ ἴσου εἰς 7 θρώπους, πόσα θὰ λάβῃ καθεὶς;***

Συμφώνως πρὸς τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ διαιρέσωμεν τὸν 38,00..
χ. διὰ τοῦ 7.

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην μέχρις ὅτου εὕρωμεν τρ
δεκαδικὰ ψηφία τοῦ πηλίκου, προκύπτει πηλίκον 5,428 δρχ. κ
ὑπόλοιπον 4 χιλιοστά.

Ἂν περιορισθῶμεν εἰς τὸ πηλίκον αὐτό, βλέπομεν ὅτι καθ
ἄνθρωπος θὰ λάβῃ 5 δρ. 42 λ. καὶ 8 δέκατα τοῦ λεπτοῦ.

Ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς τὸ σύστημα τῆς μετρήσεως τῶν νομισμάτων δ
ὑπάρχουν νομίσματα μικρότερα τοῦ λεπτοῦ, περιοριζόμεθα μόνον ε
τὰ δύο δεκαδικὰ ψηφία τοῦ πηλίκου καὶ φροντίζομεν, ὥστε τὸ σφάλμ
τὸ ὁποῖον προέρχεται ἕνεκα τούτου, νὰ εἶνε ὅσω τὸ δυνατὸν μικρ
τερον.

β') Ἐὰν ἀντὶ τοῦ ἀριθμοῦ 5,428 δρχ. λάβωμεν τὸ 5,42 δρχ., λα
βάνομεν ὀλιγώτερον, καὶ τὸ σφάλμα εἶνε 8 χιλιοστά.

Ἐὰν ἀντὶ τοῦ 5,428 δρχ. λάβωμεν 5,43 δρχ., λαμβάνομεν περι
σότερον, καὶ τὸ σφάλμα εἶνε 2 χιλιοστά. Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅ
τὸ δεύτερον εἶνε ἀκριβέστερον τοῦ πρώτου. Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασ
φθάνομεν καὶ ἐὰν ἔχωμεν τὸν ἀριθμὸν 5,426· 5,427· 5,428· 5,42
Καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς εἶνε ἀκριβέστερον, ἀντὶ τῶν ἀριθμ
αὐτῶν νὰ λάβωμεν τὸ 5,43 δρχ. καὶ ὄχι τὸν 5,42 δρχ. Διότι κατὰ τ
πρώτην περίπτωσιν λαμβάνομεν ἀντιστοίχως 4·3·2·1 χιλιοστὰ περ
σότερα, ἐνῶ εἰς τὴν δευτέραν 6·7·8·9 χιλιοστὰ ὀλιγώτερον.

γ') Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶνε 5,425 δρχ., θὰ ἠδυνάμεθα νὰ λάβ
μεν τὸ 5,42 δρχ. ἢ 5,43 δρχ. πρὸς εὐκολίαν. Διότι καὶ εἰς τὰς
περιπτώσεις τὸ σφάλμα εἶνε 5 χιλιοστὰ ὀλιγώτερον ἢ περισσότερ
Ἐν τούτοις θὰ λαμβάνωμεν πάντοτε τὸν μεγαλύτερον ἀριθμὸν 5,43
ἕνεκα τοῦ ἑξῆς λόγου. Ἐὰν ὑπῆρχον σημαντικὰ ψηφία μετὰ τὸ τρί
δεκαδικόν, π.χ. ἂν ὁ ἀριθμὸς ἦτο 5,451 καὶ λαμβάνομεν τὸ 5,42
ἐγίνετο λάθος 51 χιλιοστὰ ὀλιγώτερον, ἐνῶ, ἐὰν ἐλάβωμεν τὸ 5,43 γί
ται λάθος μόνον κατὰ 49 χιλιοστὰ ἐπὶ πλέον.

δ') Ἐν γένει, ἐὰν θέλωμεν ἀντὶ τοῦ δοθέντος δεκαδι
ἀριθμοῦ νὰ λάβωμεν ἄλλον, ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ ὀλιγώτερα δεκαδ
ψηφία τούτου, περιοριζόμενοι εἰς τὰ δεκαδικὰ ψηφία μιᾶς ὡ
σμένης τάξεως, εἰς τρόπον ὥστε τὸ σφάλμα τὸ ὁποῖον γίνε
ἕνεκα τούτου νὰ εἶνε μικρότερον, αὐξάνομεν κατὰ 1 τὸ τελευτ

ψηφίον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, εἰς τάξιν τοῦ ὁποίου περιοριζόμεθα, ἐὰν τὸ πρῶτον τῶν παραλειπομένων ψηφίων εἶνε ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ 5. Τοὐναντίον δὲ λαμβάνομεν τοῦτο ἀμετάβλητον, ἐὰν τὸ πρῶτον τῶν παραλειπομένων εἶνε μικρότερον τοῦ 5. Οὕτω π. χ. ἀντὶ τοῦ 8,35671 θὰ λάβωμεν τὸν 8,36. Ἀντὶ τοῦ 3,0452 τὸν 3,05. Ἀντὶ τοῦ 2,1374 τὸν 2,137 κ.ο.κ.

ε') Ἐπειδὴ τὰ τοιαῦτα ἐξαγόμενα δὲν εἶνε τελείως ἀκριβῆ, διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι εἶνε *κατὰ προσέγγισιν* μιᾶς μονάδος τῆς τάξεως ταύτης. Οὕτω π.χ. ἀντὶ τοῦ 8,35671 ἔχομεν τὸν 8,36 κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ (*καθ' ὑπεροχὴν*), ἐπίσης ἀντὶ τοῦ 2,1374 τὸν 2,137 κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ (*κατ' ἔλλειψιν*).

στ') Καθ' ὅμοιον τρόπον συντομεύομεν τὸ δεκαδικὸν πηλίκον μιᾶς διαιρέσεως, ἐὰν ἔχῃ πολλὰ δεκαδικὰ ψηφία, καὶ ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει λέγομεν ὅτι ἔχομεν τὸ πηλίκον κατὰ προσέγγισιν δεκάτου, ἑκατοστοῦ, χιλιοστοῦ,... ὅταν περιοριζώμεθα εἰς δέκατα, ἑκατοστά.... Οὕτω π.χ. ἂν θέλωμεν τὸ πηλίκον τοῦ 139,491 διὰ τοῦ 11 κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ, εὑρίσκομεν 139,491: 11=12,681 κατ' ἀρχάς, καὶ ἀκολούθως λαμβάνομεν 12,68 μὲ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ (κατ' ἔλλειψιν), τὸ δὲ σφάλμα εἶνε 9 χιλιοστὰ καὶ θὰ λέγωμεν, ὅτι ἔχομεν τὸ πηλίκον κατ' ἔλλειψιν. 5

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῶν κάτωθι διαιρέσεων κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ· α') 27:21· β') 124:7· γ') 385,62:9.

2) Ὁμοίως τὰ πηλίκα τῶν ἑπομένων διαιρέσεων κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ καὶ χιλιοστοῦ· α') 423,87:6· β') 0,012495:123· γ') 7481:1001· δ') 8921:107· ε') 786,1:13.

§ 43. Διαίρεσις δεκαδικῶν ἀριθμῶν.—

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 8,3326: 0,26.

Ἐπειδή, καθὼς εἴδομεν (§ 27), ἐὰν τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ἐπὶ 100, ὅτε ὁ μὲν διαιρετέος γίνεται 833,26 ὁ δὲ διαιρέτης 26. Οὕτω ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν δι' ἀκεραίου, ἤτοι ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ δι' ἀκεραίου.

Ὅθεν, «*διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ δεκαδικοῦ, πολλαπλασιάζομεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ 10, 100... ὥστε ὁ διαιρέτης νὰ γίνῃ ἀκέραιος, καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν δι᾽ ἀκεραίου*».

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑπόμεναι διαιρέσεις μετὰ τῶν δοκιμῶν των· α′) 23,37:1,23· β′) 812,07:25,78· γ′) 1,28228:123, δ′) 10, 8102:12,14.

2) Ἐπὶ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 23 (0,0867) διὰ νὰ εὕρωμεν γινόμενον 19,588 (0,0299115);

0,83 (0,345

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Αἱ 3,456 ὀκ. ἐμπορεύματος τιμῶνται 86,4 δρ. πόσον στοιχίζει ἡ ὀκᾶ καὶ πόσον θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 1 δραχμήν;

25· (0,0

2) Ἁμαξοστοιχία διανύει 91,685(77,52) μ, εἰς 5,5′(4,75′) ·πόσο διανύει εἰς 1′ καὶ πόσον χρόνον χρειάζεται διὰ νὰ διατρέξῃ 1 μ.;

16,67 μ. 0,0599′.. (16,32· 0,0612′

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἀγοράζει τις 7,62 (3,25) ὀκ. ἐμπορεύματος ἀντὶ 419,1 (142,32) δρχ.· ἔπειτα 6,95 (4,68) ὀκ. ἄλλης ποιότητος ἀντὶ 333,392 (210,6) δρχ., καὶ τέλος 7,32 (6,42) ὀκ. ἀντὶ 622,2 (353 δρ: α′ πόσον τοῦ στοιχίζει ἡ ὀκᾶ κατὰ μέσον ὅρον; β′) πόσον ἀγοράζει κατὰ μέσον ὅρον μὲ 1 δραχμήν;

62,8· 0,0158... (49,2· 0,02032

2) Ἀγοράζει τις 14,8 (12,2) ὀκ. πράγματος πρὸς 28,5 (148 δρχ. τὴν ὀκᾶν· 16,2 (13,4) ὀκ. πρὸς 31,5 (150,5) δρχ. τὴν ὀκᾶν 19,4 (18,8) ὀκ. πρὸς 30,5 (146,5) δρχ. τὴν ὀκᾶν· πόσον στοιχίζει ὀκᾶ κατὰ μέσον ὅρον καὶ πόσον ἀγοράζει μὲ 1 δραχμήν;

30,23...· 0,0331.... (148,25...· 0,0076.

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Οἰνοπώλης ἀνέμιξε 3,45 (4,58) στατ. οἴνου 578 (665) δρχ. τὸν στατῆρα μὲ 4,82 (9,42) στατ. ἄλλου οἴνου 625 (525) δρ. τὸν στατῆρα καὶ μὲ 0,53(0,51) στατ. ὕδατος· πό ἐπώλησε τὸν στατῆρα τοῦ κράματος, ἐὰν διὰ τὴν ἀνάμιξιν ἐπλήρω 26,3 (41,7) δρχ., ἐκέρδισε (ἐζημιώθη) δὲ καὶ 286,4 (164,5) δρχ.;

604,46... (541,58

2) Ἔμπορος ἀγοράζει 4,24 (5,26) στατ. ὄξους πρὸς 255 (285) δ τὸν στατῆρα, πληρώνει δὲ διὰ τὴν φόρτωσίν του 35,8 (27,9) δρ καὶ ἀναμιγνύει αὐτὸ μὲ 0,34 (0,47) στατ. ὕδατος· πόσον θὰ πωλῇ στατῆρα, ἐὰν ἡ ἀνάμιξίς του στοιχίσῃ 11,5 (12,4) δρχ., καὶ κερδ (ζημιωθῇ) 121,5 (31,7) δρχ. ἐν ὅλῳ;

272, 92.. (263

ΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΧ

Περὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

§ 44. Ἡ σημασία τοῦ κλάσματος.—

α΄) Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς, διῃρέσαμεν τὴν μονάδα εἰς 10· 100... ἴσα μέρη. καὶ ἀπὸ ἓν ὡρισμένον πλῆθος τοιούτων μονάδων ἐσχηματίσαμεν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν μονάδα, π. χ. ἓν μῆλον, μίαν γραμμήν, ἓν σχῆμα ὀρθογώνιον, εἰς ὡρισμένον ἀριθμὸν ἴσων μερῶν, ἔστω εἰς 6 ἴσα μέρη, καὶ λάβωμεν ὡρισμένον πλῆθος ἐξ αὐτῶν, ἔστω 5 τοιαῦτα, θὰ σχηματίσωμεν ἕνα ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον καλοῦμεν *κλασματικὸν* ἢ *κλάσμα*. Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸν κλασματικὸν ἀριθμόν, ἐκτὸς τῆς μονάδος πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ἀφ' ἑνὸς μὲν εἰς πόσα ἴσα μέρη θὰ διαιρέσωμεν τὴν μονάδα, καὶ ἀφ' ἑτέρου πόσα τοιαῦτα μέρη θὰ λάβωμεν· δηλαδὴ ἔχομεν ἀνάγκην δύο ἀριθμῶν. Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος φανερώνει εἰς πόσα ἴσα μέρη χωρίζομεν τὴν μονάδα, λέγεται *παρονομαστὴς* τοῦ κλάσματος, ἐκεῖνος δέ, ὁ ὁποῖος φανερώνει πόσα ἴσα μέρη λαμβάνομεν, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ κλάσμα, λέγεται *ἀριθμητὴς* τοῦ κλάσματος. Ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς λέγονται μὲ ἓν ὄνομα *ὅροι* τοῦ κλάσματος.

β΄) Ἐὰν ἡ μονάς, π. χ. μία εὐθεῖα γραμμή, διαιρεθῇ εἰς δύο ἴσα μέρη, τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν λέγεται *ἓν δεύτερον* τῆς γραμμῆς, ἂν δὲ διαιρεθῇ εἰς τρία, τέσσαρα,... ἴσα μέρη, τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν λέγεται *ἓν τρίτον, ἓν τέταρτον,....* τῆς γραμμῆς. Ἐὰν λάβωμεν τρία ἐκ τῶν ἴσων μερῶν τῆς μονάδος, τὰ ὁποῖα ἔστω ὅτι εἶνε πέντε, τὸ κλάσμα λέγεται *τρία πέμπτα* τῆς γραμμῆς, καὶ γράφεται οὕτω, $\frac{3}{5}$ τῆς γραμμῆς, ἢ συντόμως $\frac{3}{5}$ γρ., γράφομεν δηλαδὴ τὸν παρονομαστὴν ὑποκάτω τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ μικρᾶς ὁριζοντίας γραμμῆς, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν *γραμμὴν τοῦ κλάσματος*. Καθ' ὅμοιον τρόπον γράφομεν καὶ πᾶν ἄλλο κλάσμα. Τὰ κλάσματα τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀριθμητὴν τὴν μονάδα λέγονται καὶ *κλασματικαὶ μονάδες*.

γ') Ὅθεν, «*κλασματικὴ μονὰς λέγεται τὸ ἓν τῶν ἴσων* *ρῶν τῆς ἀκεραίας μονάδος*». Οὕτω κλασματικαὶ μονάδες εἰ
$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\ldots \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \ldots\ldots\ldots$ καὶ ὀνομά
ἓν δεύτερον, ἓν τρίτον, ἓν τέταρτον, ἓν δέκατον, ἓν ἑνδέκα

δ') «*Κλάσμα ἢ κλασματικὸς ἀριθμὸς λέγεται ὁ ἀριθμ* *ὁποῖος προκύπτει, ἐὰν τὴν μονάδα διαιρέσωμεν εἰς ὁσαδή* *ἴσα μέρη καὶ ἐξ αὐτῶν λάβωμεν ἓν πλῆθος ὡρισμένον*».

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ λέγωμεν ὅτι, «*κλάσμα λέγεται τὸ σύ* *κλασματικῶν μονάδων*».

ε') Πᾶς κλασματικὸς ἀριθμός, π. χ. ὁ $\frac{5}{6}$ ὀκ. δύναται νὰ θεω ὡς ἀκέραιος 5 μὲ τὴν ἐπωνυμίαν, τὴν ὁποίαν ὁρίζει ὁ παρονομαστὴ τοῦ, ἕκτα ὀκᾶς. Ὁμοίως ὁ $\frac{7}{10}$ δρ. δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀκέρα μὲ τὴν ἐπωνυμίαν *δέκατα* δρ., κ. ο. κ. $\frac{3}{4}$ μήλου ὡς ἀκέραιος τὴν ἐπωνυμίαν *τέταρτα μήλου*, τὰ $\frac{5}{6}$ ὀρθογωνίου ὡς ἀκέραιος 5 τὴν ἐπωνυμίαν *ἕκτα ὀρθογωνίου*. Αὐτὸς δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ κατωτέρω σχήματος.

$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
		$\frac{5}{6}$			

στ') Ὁ ἀριθμὸς $4\frac{3}{4}$ ὀκ. σημαίνει 4 ὀκ. $+ \frac{3}{4}$ ὀκ., ἀπα λεται *τέσσαρα καὶ τρία πέμπτα* ὀκ. καὶ λέγεται μικτὸς ἀριθμός, τελεῖται δὲ ἀπὸ ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ κλάσμα. Ὥστε, «*μικτὸς* *μὸς λέγεται ὁ ἀποτελούμενος ἀπὸ ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ κλάσ*

Οὕτω οἱ ἀριθμοὶ $6\frac{1}{2}$ δρ., $3\frac{1}{5}$, $8\frac{4}{9}$ εἶνε μικτοί.

ζ') Πᾶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κλασμα ἐνίοτε δὲ καὶ ὡς μικτὸς ἀριθμός. Οὕτω ὁ ἀριθμὸς 0,3 δρχ. εἶνε μὲ τὸν $\frac{3}{10}$ δρχ. Ὁ $0,73 = \frac{73}{100}$, ὁ 1,7 εἶνε ἴσος μὲ 17 δέκατα $= \frac{17}{10} = 1\frac{7}{10}$, ὁ $4,33 = \frac{433}{100}$ ἢ μὲ $4\frac{33}{100}$.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Ἐξηγήσατε τὴν σημασίαν τῶν ἑπομένων
ῶν καὶ ἀπεικονίσατε αὐτὴν διὰ σχήματος ἐπὶ μιᾶς εὐθείας
μῆς, ἢ ἐπὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου, ὡς ἀνωτέρω· α') $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{2}$, $3\frac{1}{2}$·
, $\frac{5}{3}$, $2\frac{1}{3}$· γ') $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $2\frac{3}{4}$· δ') $\frac{6}{6}$, $\frac{1}{6}$, $1\frac{5}{6}$· ε') $\frac{5}{12}$, $\frac{13}{12}$, $\frac{7}{12}$.

2) Τρέψατε α') τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $3\frac{5}{6}$, $4\frac{7}{12}$ τοῦ ἔτους εἰς μῆνας.
ὰ $\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$, $2\frac{2}{5}$, $3\frac{3}{10}$, $4\frac{2}{15}$ τοῦ μηνὸς εἰς ἡμέρας.
ὰ $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$, $4\frac{3}{4}$, $2\frac{5}{6}$, $5\frac{11}{12}$ τῆς ἡμέρας εἰς ὥρας.
ὰ $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $2\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς εἰς δράμια.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Τρέψατε τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{100}$, $2\frac{3}{4}$, $\frac{1}{10}$,
$\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς εἰς λεπτά.

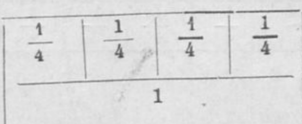
2) Ποῖον μέρος τῆς δραχμῆς εἶνε τὰ 50· 80· 5· 10 λεπτά;

3) Τρέψατε εἰς κλάσματα ἢ εἰς μικτοὺς τοὺς ἀριθμούς· α') 11, 3·
7,7· γ') 29,04· δ') 0,78· ε') 1,2345.

5

§ 45. Τροπὴ ἀκεραίου καὶ μικτοῦ εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα.—

α') Εἶνε εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι, ὁ ἀριθμὸς 1 δύναται νὰ τραπῇ
κλάσμα μὲ οἱονδήποτε παρονομαστήν. Ἐὰν διαιρέσωμεν μονάδα
ου εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν καὶ τὰ τέσσαρα, τότε τὰ *τέσσσαρα*
ρτα μήλου ἀποτελοῦν τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1 μῆλον· ἤτοι 1 μῆλον
$\frac{4}{4}$ μήλου.



Καθ' ὅμοιον τρόπον ἂν σκεφθῶμεν, εὑρίσκομεν ὅτι 1 πῆχυς
ὲ $\frac{8}{8}$ πήχ., 1 ὀκᾶ $= \frac{2}{2}$ ὀκᾶς, $1 = \frac{3}{3}$, $1 = \frac{6}{6}$ κ.λ.π.

β') Εἶνε ἐπίσης εὔκολον νὰ ἴδωμεν, ὅτι οἱοσδήποτε ἀκέρ
ἀριθμὸς δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα μὲ οἱονδή
παρονομαστήν. Ἐὰν θέλωμεν π. χ. τὸν ἀριθμὸν 3 δρχ. νὰ τρέψω
εἰς κλάσμα μὲ παρονομαστὴν 5, δηλαδὴ εἰς πέμπτα, σκεπτόμεθα
ἡ μία δραχμὴ ἔχει 5 εἰκοσάλεπτα ἢ πέμπτα δραχμῆς. Ἐπομένως
δραχμαὶ ἔχουν 10 εἰκοσάλεπτα τῆς δραχμῆς.

Ὥστε θὰ ἔχωμεν 2 δρχ. $= \frac{10}{5}$ δραχμῆς.

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
1					1			

Καθ' ὅμοιον τρόπον σκεπτόμεθα, ἐὰν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν ἀ
ραιον ἀριθμόν, π.χ. τὸν 4 εἰς ἕκτα. Πρὸς τοῦτο λέγομεν. Ἀ
ἡ μία ἀκεραία μονὰς ἔχει 6 ἕκτα, αἱ δύο ἀκέραιαι μονάδες ἔχουν
ἕκτα, καὶ αἱ 4 ἀκέραιαι μονάδες ἔχουν $6 \times 4 = 24$ ἕκτα· ἤτοι

$$4 = \frac{4 \times 6}{6} = \frac{24}{6}.$$

γ') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι· « ***διὰ νὰ τρέψωμεν δοθέ
ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα μὲ δοθέντα παρονο
στήν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν δοθέντα παρο
μαστὴν καὶ τὸ γινόμενον γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν
τὸν δοθέντα***».

δ') Ἵνα μικτὸν ἀριθμόν, π. χ. τὸν $2\frac{1}{4}$ ὀκ., τρέψωμεν εἰς κ
σματικόν, παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ μία ὀκᾶ ἔχει 4 τέταρτα, αἱ δύο ὀ
δες ἔχουν 8 τέταρτα, καὶ ἓν τέταρτον τὸ ὁποῖον ἔχει δοθῇ, γίνο

9 τέταρτα· ἤτοι ἔχομεν $2\frac{1}{4}$ ὀκάδες $= \frac{9}{4}$ ὀκᾶς.

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1				1				

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἔχομεν $3\frac{1}{6} = \frac{19}{6}$, $5\frac{1}{3} = \frac{16}{3}$ κ. ο. κ.
βλέπομεν, « ***διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα, π
λαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ***

ἀκέραιον, εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, ὅ,τι εὕρωμεν γράφομεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν γράφομεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ δοθέντος κλάσματος».

ε') Ἀντιστρόφως δυνάμεθα ἓν κλάσμα νὰ τρέψωμεν εἰς ἀκέραιον ἢ μικτόν. Ἔστω ὁ ἀριθμὸς $\frac{8}{2}$ δραχμαί. Παρατηροῦμεν ὅτι 2 δεύτερα δραχ. ἀποτελοῦν μίαν δραχμήν. Ἑπομένως τὰ $\frac{8}{2}$ δραχ. ἀποτελοῦν 4 δραχ. Ἤτοι ἔχομεν $\frac{8}{2}$ δραχ. = 4 δρ.

<table>
<tr><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td></tr>
</table>

Διὰ νὰ τρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν $\frac{15}{4}$ εἰς μικτόν, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ $\frac{4}{4}$ ἀποτελοῦν μίαν ἀκεραίαν μονάδα, ἑπομένως τὰ $\frac{15}{4}$ ἀποτελοῦν τόσας ἀκεραίας μονάδας, ὅσον χωρεῖ τὸ 4 τέταρτα εἰς τὰ 15 τέταρτα· ἤτοι 15 : 4=3 καὶ μένουν 3 τέταρτα. Ὥστε ἔχομεν $\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{21}{5}$ =4 ἀκέραιαι μονάδες καὶ 4 πέμπτα· ἤτοι

$\frac{24}{5}=4\frac{4}{5}$. 5

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι, ἓν κλάσμα περιέχει μίαν ἢ περισσοτέρας ἀκεραίας μονάδας, ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς τούτου εἶνε ἴσος ἢ μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ, πρὸς δὲ ὅτι,

«διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας κλάσματος, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τούτου, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως γράφομεν ὡς ἀκέραιον, τὸ ὑπόλοιπον ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τὸν τοῦ δοθέντος κλάσματος».

στ') Δοθὲν κλάσμα τρέπεται εἰς ἀκέραιον, ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ.

ζ') Κλάσμα τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶνε μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ λέγεται *γνήσιον*, ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὴς εἶνε ἴσος ἢ μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ, λέγεται *μὴ γνήσιον* καὶ τότε τρέπεται εἰς ἀκέραιον ἢ εἰς μικτὸν ἀριθμόν.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ τραπῇ ἡ μονὰς εἰς δεύτερα, τρίτα, τέταρτα, πέμπτα, ἕκτ δέκατα, δωδέκατα.

2) Τρέψατε τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς 2· 3· 4· 5· 8· 10· 12 εἰ δεύτερα, τρίτα, τέταρτα, πέμπτα, ἕκτα, ἔνατα, εἰκοστά.

3) Νὰ τραποῦν οἱ ἑπόμενοι ἀριθμοὶ ἀπὸ μνήμης εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα.

α') $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$. β') $1\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{3}$, $3\frac{2}{3}$, $4\frac{2}{3}$, $10\frac{1}{2}$. γ') $1\frac{1}{4}$, $2\frac{3}{4}$, $6\frac{3}{4}$, $12\frac{3}{4}$. δ) $1\frac{4}{5}$, $3\frac{2}{5}$, $12\frac{3}{5}$.

4) Τὰ κάτωθι κλάσματα νὰ τραποῦν εἰς ἀκεραίους ἢ μικτούς.

α') $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{31}{2}$. β') $\frac{5}{3}$, $\frac{9}{3}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{11}{3}$, $\frac{35}{3}$.

γ') $\frac{4}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{24}{4}$, $\frac{31}{4}$. δ') $\frac{13}{12}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{24}{12}$, $\frac{23}{12}$, $\frac{48}{12}$, $\frac{18}{12}$, $\frac{60}{12}$.

§46. Τροπὴ κλάσματος εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον, ἔχον ὅρους μεγαλυτέρους.—

α') Γνωρίζομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 5,3 δρ. εἶνε ἴσος μὲ 5,30 δρ., ἢ 5,300 δρ. ἢ 5,3000 δρ., ἐὰν δὲ τούτους γράψωμεν ὡς κλάσματα θὰ ἔχωμεν,

$$\frac{53}{10}\text{δρ.}=\frac{530}{100}\text{δρ.}=\frac{5300}{1000}\text{δρ.}$$

Τὸ παράδειγμα αὐτὸ δεικνύει, ὅτι δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν κλάσμα εἰς ἄλλο, ἔχον τὴν αὐτὴν ἀξίαν, ἀλλ' ὅρους μεγαλυτέρους. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{1}{3}$. Ἐὰν ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν τὴν μονάδα εἰς τρία ἴσα μέρη, τὴν διαιρέσωμεν εἰς διπλάσια μέρη ἴσα, δηλαδὴ εἰς 6, τότε τὸ $\frac{1}{3}$ θὰ γίνῃ $\frac{2}{6}$ ἤτοι $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$.

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$$

Διὰ νὰ τρέψωμεν τὰ $\frac{3}{2}$ εἰς ἕκτα, σκεπτόμεθα ὅτι τὸ $\frac{1}{3}$ ἔχει δύο ἕκτα, ἐπομένως τὰ $\frac{2}{3}$ ἔχουν $\frac{4}{6}$· ἤτοι $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$, τὸ $\frac{1}{10}=\frac{3}{30}$ κ. ο. κ.

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι εἶνε

$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}$, · · · καὶ ἐπειδὴ καθὲν τῶν κλασμάτων ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἑξῆς προκύπτει ἐκ τοῦ πρώτου, ἐὰν τοὺς ὅρους αὐτοῦ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἕπεται ὅτι,

β') «*ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀξία αὐτοῦ δὲν μεταβάλλεται*».

Διὰ νὰ ἴδωμεν ἂν τοῦτο εἶνε πάντοτε ἀληθές, ἂς πολλαπλασιάσωμεν ἐν πρώτοις τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς κλάσματος, π.χ. τοῦ $\frac{3}{4}$, ἐπὶ ἕνα οἱονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμόν, ἔστω ἐπὶ τὸν 5. Ἐπειδὴ τὰ 3 τέταρτα ἐπὶ 5 δίδουν 15 τέταρτα, ἕπεται ὅτι τὸ νέον κλάσμα $\frac{15}{4}$ εἶνε 5 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ $\frac{3}{4}$, δηλαδὴ τὸ δοθὲν κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 5, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5. Ἂν τώρα πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ νέου κλάσματος $\frac{15}{4}$ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον 5, θὰ εὕρωμεν $\frac{15}{4\times5}=\frac{15}{20}$, τὸ ὁποῖον εἶνε 5 φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{15}{4}$. Διότι, τὸ $\frac{1}{20}$ εἶνε 5 φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{1}{4}$, καὶ τὸ $\frac{15}{20}$ εἶνε πέντε φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{15}{4}$. Ἤτοι τὸ κλάσμα $\frac{15}{4}$ γίνεται 5 φορὰς μικρότερον, ἐὰν ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5. Ὥστε μετὰ τὰς δύο πράξεις ἡ ἀξία τοῦ δοθέντος κλάσματος δὲν μεταβάλλεται.

5

Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ ἐξετάσωμεν οἱονδήποτε κλάσμα, π.χ. τὸ $\frac{4}{9}$. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ ἐπὶ 2 θὰ ἔχωμεν $\frac{4\times2}{9}=\frac{8}{9}$, τὸ ὁποῖον εἶνε διπλάσιον τοῦ $\frac{4}{9}$. Ἐξ ἄλλου τὸ $\frac{8}{9\times2}=\frac{8}{18}$ εἶνε δύο φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{8}{9}$, ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{18}$

εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ $\frac{1}{9}$. Ὥστε ἔχομεν $\frac{4}{9} = \frac{4\times2}{9\times2} = \frac{8}{18}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι,

γ΄) «*ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν κλάσματος ἐπί τινα ἀριθμόν, τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν*».

δ΄) «*Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν κλάσματος ἐπί τινα ἀριθμόν, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ*».

ε΄) «*Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους κλάσματος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀξία αὐτοῦ δὲν μεταβάλλεται*».

στ΄) «*Διὰ νὰ τρέψωμεν δοθὲν κλάσμα εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον, ἔχον ὅρους μεγαλυτέρους, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν*».

Ἀσκήσεις.

1) α΄) Νὰ τραπῇ ἀπὸ μνήμης τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα, ἔχοντα παρονομαστὰς ἀντιστοίχως τοὺς 4·6·8·10·12·16·18·20.

β΄) Ὁμοίως νὰ τραπῇ τὸ $\frac{1}{3}$ εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ παρονομαστὰς τοὺς 6·9·12·15·24·36·90·150.

γ΄) Τὸ $\frac{1}{4}$ εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ παρονομαστὰς τοὺς 12·16·24·40·60·20·64·36.

2) Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ παρονομαστὰς τοὺς 6·9·12. Ὁμοίως ὁ $1\frac{1}{3}$ εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ παρονομαστὰς τοὺς 6·12·15·9·45.

3) Νὰ τραποῦν τὰ κλάσματα α΄) $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$ εἰς ἄλλα ἀντιστοίχως ἰσοδύναμα μὲ κοινὸν παρονομαστὴν τὸν 4·8·12·20· β΄) τὰ $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{6}$ εἰς ἄλλα μὲ κοινὸν παρονομαστὴν τὸν 6·12·30. γ΄) τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$ εἰς ἄλλα μὲ κοινὸν παρονομαστὴν τὸν 6·12·18·24·36·72.

§ **47. Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.**—

α΄) Δύο ἢ περισσότερα κλάσματα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, λέγονται *ἑτερώνυμα*. Τοὐναντίον, ἂν δύο ἢ περισσότερα κλάσματα ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, λέγονται *ὁμώνυμα*. Καθὼς εἴδομεν εἰς τἀνωτέρω παραδείγματα δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν δύο ἢ περισσότερα κλάσματα εἰς ἄλλα ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα καὶ ὁμώνυμα. Ὁ κοινὸς παρονομαστὴς τῶν νέων κλασμάτων πρέπει νὰ εἶνε πολλαπλάσιον ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων, ἄρα κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὰ κλάσματα

$$\frac{2}{3},\quad \frac{4}{5},\quad \frac{5}{6},\quad \frac{1}{4}$$

καὶ θέλομεν νὰ τὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα, ἀλλ' ὥστε ὁ κοινὸς παρονομαστὴς νὰ εἶνε τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων. Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν 3·5·6·4. Τοῦτο εἶνε τὸ 60 (§ 33, γ΄). Τὸ 60 διαιροῦμεν διὰ ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν καὶ εὑρίσκομεν πηλίκα τοὺς ἀριθμοὺς 20· 12· 10· 15. Τέλος τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 20, τοὺς τοῦ δευτέρου ἐπὶ 12, τοῦ τρίτου ἐπὶ 10, καὶ τοῦ τετάρτου ἐπὶ 15, εὑρίσκομεν δὲ τὰ ἑξῆς ὁμώνυμα

$$\frac{40}{60},\quad \frac{48}{60},\quad \frac{50}{60},\quad \frac{15}{60}$$

5

Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι,

β΄) « ***διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, τῶν ὁποίων ὁ κοινὸς παρονομαστὴς νὰ εἶνε τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων, εὑρίσκομεν τὸ ἐ κ. π. αὐτῶν, ἀκολούθως διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων καὶ μὲ τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ ἀντιστοίχου κλάσματος***».

γ΄) Συνήθως γράφομεν δεξιὰ τῶν δοθέντων κλασμάτων τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν, τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων τούτων διὰ ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν ὑπεράνω τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ ἀντιστοίχου κλάσματος, τὰ δὲ νέα κλάσματα ἀντιστοίχως ὑποκάτω ἑκάστου τῶν δοθέντων, ὡς κάτωθι.

$$\begin{array}{ccccc} \underbrace{20} & \underbrace{12} & \underbrace{10} & \underbrace{15} & \\ \frac{2}{3}, & \frac{4}{5}, & \frac{5}{6}, & \frac{1}{4}, & \text{ἐ. κ. π. } 60. \\ \frac{40}{60}, & \frac{48}{60}, & \frac{50}{60}, & \frac{15}{60} & \end{array}$$

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα μὲ τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστὴν τὰ κλάσματα α′) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}$. β′) $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.

2) Ὁμοίως τὰ α′) $\frac{3}{2}, \frac{2}{7}, \frac{9}{10}, \frac{1}{2}, \frac{7}{20}$. β′) $\frac{7}{8}, \frac{1}{12}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}$.

3) Ὁμοίως τὰ α′) $\frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{7}{100}$. β′) $\frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{9}$.

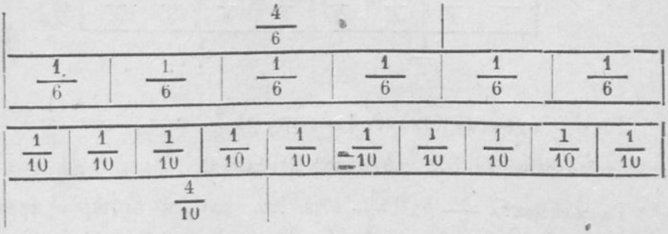
§ 48. Πῶς συγκρίνομεν κλάσματα.—

α′) Δίδονται δύο ἢ περισσότερα κλάσματα καὶ ζητεῖται νὰ εὕρωμεν ποῖον ἐξ αὐτῶν εἶνε μεγαλύτερον καὶ ποῖον τὸ μικρότερον.

Ἐὰν δύο κλάσματα ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, π. χ. τὰ $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{3}{7}$ μεγαλύτερον εἶνε τὸ ἔχον μεγαλύτερον ἀριθμητήν. Ἤτοι τὸ $\frac{5}{7}$. Διότι, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ $\frac{5}{7}$, ἐλάβομεν ἐκ τῶν 7 ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διῃρέθη ἡ μονάς, τὰ 5, ἐνῶ διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὰ $\frac{3}{7}$, ἐλάβομεν τὰ 3. Ὁμοίως σκεπτόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι ἐκ πολλῶν ὁμωνύμων κλασμάτων, π.χ. ἐκ τῶν $\frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}$, μεγαλύτερον εἶνε τὸ $\frac{7}{9}$, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν μεγαλύτερον ἀριθμητήν, μικρότερον δὲ τὸ $\frac{1}{9}$, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν μικρότερον ἀριθμητήν. Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι,

β′) ***«ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων κλαμάτων, ἐχόντων τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν μεγαλύτερον εἶνε τὸ ἔχον τὸν μεγαλύτερον ἀριθμητήν, μικρότερον δὲ τὸ ἔχον τὸν μικρότερον ἀριθμητήν».***

γ′) Ἐὰν ἔχωμεν κλάσματα, ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν, π. χ. τὰ $\frac{4}{6}, \frac{4}{10}$, μεγαλύτερον εἶνε τὸ $\frac{4}{6}$, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν μικρότερον παρονομαστήν. Διότι, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ $\frac{4}{6}$, ἐμοιράσαμεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα εἰς 6 ἴσα μέρη καὶ ἐλάβομεν τὰ 4. Ἐνῶ διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὰ $\frac{4}{10}$, ἐμοιράσαμεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα εἰς ἴσα 10 μέρη, ἐπομένως εἰς μικρότερα ἢ πρὶν καὶ ἐλάβομεν τὰ 4. Τὴν δευτέραν φορὰν ἐλάβομεν λοιπὸν μικρότερα μέρη ἢ τὴν πρώτην, ἄρα τὸ $\frac{4}{6}$ εἶνε μεγαλύτερον τοῦ $\frac{4}{10}$.



Ὁμοίως σκεπτόμενοι βλέπομεν ὅτι ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{11}$ μεγαλύτερον εἶνε τὸ $\frac{2}{3}$ ἔχον τὸν μικρότερον παρονομαστήν, μικρότερον δὲ τὸ $\frac{2}{11}$, ἔχον τὸν μεγαλύτερον παρονομαστήν.

δ') Ὅθεν, «***ὅταν δύο ἢ περισσότερα κλάσματα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν, μεγαλύτερον εἶνε τὸ ἔχον τὸν μικρότερον παρονομαστήν, καὶ μικρότερον τὸ ἔχον τὸν μεγαλύτερον παρονομαστήν***». 5

ε') Ἐὰν τὰ δοθέντα πρὸς σύγκρισιν κλάσματα δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ἢ τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἀκολούθως εὑρίσκομεν, ποῖον εἶνε τὸ μεγαλύτερον, συμφώνως πρὸς τἀνωτέρω.

§ 49. Ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων.—

α') Ὅπως δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν κλάσμα εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον, ἔχον ὅρους μεγαλυτέρους τοῦ δοθέντος, οὕτω δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ κάμωμεν ταὐναντίον, δηλαδὴ δοθέντος κλάσματος, νὰ εὕρωμεν ἄλλο ἴσον πρὸς αὐτὸ καὶ ἔχον ὅρους μικροτέρους.

β') Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{4}{8}$ πήχ. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ 8 ὄγδοα πήχ. ἀποτελοῦν ἕνα πῆχυν, ἐὰν τὴν μονάδα 1 πῆχυν διαιρέσωμεν εἰς ὄγδοα. Βλέπομεν ὅτι τὰ $\frac{4}{8}$ πήχ. ἀποτελοῦν τὸν ἥμισυ πῆχυν, ἤτοι 4 πήχ. =

$=\frac{1}{2}$ πήχεως. Ἐπομένως ἔχομεν $\frac{4}{8}$ πήχ. $=\frac{1}{2}$ πήχεως.

$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
	$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{2}$		

Τὸ $\frac{1}{2}$ πήχεως εὑρίσκομεν ὅμως ἀπὸ τὰ $\frac{4}{8}$ πήχ., ἐὰν τοὺς ὅρους τούτου διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 2.

Τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{4}{8}$ εἶνε ἴσα καὶ τὸ δεύτερον προκύπτει ἐκ τοῦ πρώτου, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 4 (§ 46, ε'). Ἀντιστρόφως, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ ἀπὸ τὸ $\frac{4}{8}$, ἐὰν διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 4. Ὥστε ἔχομεν $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

δ') Ἵνα τὸ κλάσμα $\frac{4}{6}$ δρ. κάμωμεν ἁπλούστερον, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ $\frac{2}{6}$ εἶνε ἴσα μὲ $\frac{1}{3}$. Ἐπομένως τὰ $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Τὸ $\frac{2}{3}$ εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ $\frac{4}{6}$ ἐὰν τοὺς ὅρους τούτου διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 2. Ἔχομεν δὲ καὶ ἐδῶ $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

ε') Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι· «*ἂν διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους κλάσματος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ἀξία τούτου δὲν μεταβάλλεται*».

στ') Λέγομεν ὅτι *ἁπλοποιοῦμεν* ἓν κλάσμα, ἐὰν διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ (διαφόρου τῆς μονάδος).

Ὥστε διὰ τῆς ἁπλοποιήσεως κλάσματος δὲν μεταβάλλεται ἡ ἀξία αὐτοῦ, ἀλλ' εὑρίσκεται ἄλλο κλάσμα ἴσον μὲ τὸ δοθὲν καὶ ἔχον ὅρους μικροτέρους.

ζ') Ἐπειδὴ διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν ἓν κλάσμα, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, εὑρίσκομεν ἐν πρώτοις ἕνα κοινὸν διαιρέτην τῶν ὅρων τούτου· ἀκολούθως διαιροῦμεν δι' αὐτοῦ τοὺς ὅρους αὐτοῦ· τὴν ἐργασίαν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ ἐπαναλάβωμεν πάλιν εἰς τὸ προκύπτον κλάσμα κ. ο. κ.

μέχρις ὅτου εὕρωμεν κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι δὲν ἔχουν κοινόν τινα διαιρέτην.

Οὕτω ἔχομεν

$$\underbrace{\frac{594}{1386}}_{2}=\underbrace{\frac{297}{693}}_{9}=\underbrace{\frac{33}{77}}_{11}=\frac{3}{7}.$$

Οἱ ἀριθμοὶ 2, 9, 11 φανερώνουν τοὺς κοινοὺς διαιρέτας τῶν ὅρων τοῦ πρὸς τἀριστερὰ αὐτῶν κλάσματος.

η') Ταχύτερον εὑρίσκομεν ἀπὸ δοθὲν κλάσμα τὸ ἴσον αὐτοῦ ἁπλούστερον καὶ τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν διαιρέτην, ἂν ἐν πρώτοις εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ὅρων τοῦ δοθέντος καὶ ἀκολούθως διαιρέσωμεν καθένα τῶν ὅρων αὐτοῦ διὰ τοῦ μ.κ.δ αὐτῶν. Οὕτω διὰ τὸ κλάσμα $\frac{594}{1386}$ ὁ μ.κ.δ. τῶν 594 καὶ 1386 εἶνε ὁ 198, εὑρίσκομεν δ' ἀμέσως τὸ $\frac{3}{7}$ διὰ διαιρέσεως τῶν ὅρων τοῦ $\frac{594}{1386}$ διὰ 198.

θ') Τὸ κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι δὲν ἔχουν κοινὸν διαιρέτην, ἀλλ' εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους λέγεται *ἀνάγωγον* καὶ προφανῶς δὲν ἁπλοποιεῖται.

Διὰ τῆς ἁπλοποιήσεως ἐπιδιώκομεν συνήθως νὰ τρέψωμεν τὸ δοθὲν κλάσμα εἰς ἴσον μὲ αὐτὸ καὶ ἀνάγωγον. 5

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ τραποῦν α') εἰς δεύτερα τὰ $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{15}{30}$, $\frac{6}{12}$· β') εἰς τρίτα τὰ $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{5}{15}$· γ') εἰς τέταρτα τὰ $\frac{4}{16}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{5}{20}$· δ') εἰς ὄγδοα τὰ $\frac{2}{16}$, $\frac{21}{56}$, $\frac{3}{24}$, $\frac{2}{16}$.

2) Νὰ τραποῦν α') εἰς δεύτερα τὰ $\frac{6}{4}$, $\frac{10}{4}$, $\frac{28}{4}$· β') εἰς τρίτα τὰ $\frac{12}{9}$, $\frac{21}{9}$, $\frac{30}{18}$, $\frac{42}{9}$· γ') εἰς πέμπτα τὰ $\frac{28}{20}$, $\frac{39}{15}$, $\frac{56}{10}$.

Ὁμὰς δευτέρα. Ν' ἁπλοποιηθοῦν τὰ ἑξῆς κλάσματα.

α') $\frac{10}{6}$, $\frac{16}{6}$, $\frac{22}{6}$, $\frac{28}{6}$, $\frac{36}{6}$· β') $\frac{6}{8}$, $\frac{14}{8}$, $\frac{21}{3}$, $\frac{38}{8}$· γ') $\frac{6}{9}$, $\frac{15}{6}$, $\frac{24}{9}$, $\frac{46}{12}$, $\frac{34}{12}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{48}{12}$· δ') $\frac{128}{24}$, $\frac{1431}{27}$, $\frac{400}{80}$, $\frac{900}{200}$.

§ 30. Πρόσθεσις.—

α') Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων ὁμωνύμ κλασμάτων, π. χ. τῶν $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{8}{6}$ θεωροῦμεν τὸ $\frac{5}{6}$ ὡς ἀκέραιον 6 τὴν ἐπωνυμίαν ἕκτα, καὶ τὸ $\frac{8}{6}$ ὡς ἀκέραιον 8 μὲ τὴν ἐπωνυμ ἕκτα, καὶ οὕτω ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν 5 ἕκτα+8 ἕκτα, τὸ δὲ ἄθρ σμα εἶνε ἴσον μὲ 13 ἕκτα. Ἤτοι $\frac{5}{6}+\frac{8}{6}=\frac{13}{6}=2\,\frac{1}{6}$. Ὁμο εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}=2\,\frac{1}{3}$.

β') Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι, ***«διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσμα ὁμώνυμα, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν καὶ τὸ ἄθροισ γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ γράφομεν τὸν αὐτόν».***

γ') Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα ἑτερωνύμων κλασμάτων, π. τῶν $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ἰσοδύναμα ὁμώνυμα, ὅτε λα βάνομεν τὰ ἀντίστοιχα ἴσα μὲ αὐτὰ $\frac{15}{30}$, $\frac{20}{30}$, $\frac{24}{30}$ καὶ ἀκολού προσθέτομεν ταῦτα, καθὼς ἀνωτέρω. Ἤτοι εὑρίσκομεν $\frac{59}{30}=1\,\frac{2}{3}$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, διὰ νὰ προσθέσωμεν οἱαδήποτε ἄλλα ἑτε νυμα κλάσματα. Ὅθεν,

δ') ***«διὰ νὰ προσθέσωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα, τρέπο αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς τῶν ὁμω μων, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴ τὸν κοινὸν παρονομαστὴν τούτων».***

ε') *«Διὰ νὰ προσθέσωμεν μικτοὺς ἀριθμούς, π. χ. τ* $2\frac{3}{4}$ *καὶ* $5\,\frac{1}{3}$ *προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους τούτων, χωριστὰ τὰ κλάσματα, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, καὶ ἀκολούθως προσ τομεν τὰ δύο ἐξαγόμενα».*

Οὕτω διὰ τὸ $2\,\frac{3}{4}+5\frac{1}{3}$ ἔχομεν $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{9}{12}+\frac{4}{12}$ $\frac{13}{12}=1\,\frac{1}{12}$, $2+5=7$. Ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέν μικτῶν εἶνε $1\,\frac{1}{12}+7=8\,\frac{1}{12}$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 3) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑξῆς προθέσεις.

α') $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ β') $\frac{3}{5}+\frac{7}{5}$ · γ') $\frac{1}{4}+\frac{5}{4}$ · δ') $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}$ ·
ε') $\frac{5}{10}+\frac{9}{10}+\frac{7}{10}$ ·

2) Ὁμοίως αἱ α') $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ · β') $\frac{5}{2}+\frac{7}{7}$ · γ') $2\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ ·

3) Ἐπίσης αἱ α') $\frac{1}{2}+\frac{4}{8}+5\frac{1}{4}$ · β') $2\frac{1}{8}+3\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ ·
γ') $\frac{3}{10}+\frac{5}{2}+\frac{7}{10}$ · δ') $2\frac{1}{2}+5\frac{7}{9}+13\frac{1}{3}+7\frac{1}{10}$ ·

Ὁμὰς δευτέρα 1) Ἔμπορος ἐπώλησεν 83 $\frac{69}{105}$ $\left(36\frac{4}{5}\right)$ ὀκ. ἐμπορεύματος· ἔπειτα 94 $\frac{1}{2}$ $\left(47\frac{3}{4}\right)$ ὀκ., βραδύτερον 120 $\frac{7}{25}$ $\left(87\frac{4}{25}\right)$ ὀκ. καὶ τέλος 125 $\frac{9}{20}$ $\left(98\frac{7}{20}\right)$ ὀκ. αὐτοῦ· πόσας ὀκ. ἐπώλησεν ἐν ὅλῳ; 423 $\frac{621}{700}$ $\left(270\frac{3}{50}\right)$.

2) Βαδίζει τις μίαν ἡμέραν ἐπὶ 2 $\frac{1}{5}$ $\left(1\frac{1}{4}\right)$ ὥρ. καὶ εἰς καθεμίαν τῶν ἑπομένων ἡμερῶν 1 $\frac{1}{4}$ $\left(1\frac{1}{3}\right)$ ὥρας περισσότερον τῆς προηγουμένης· πόσας ὥρας ἐβάδισεν εἰς 4 (5) ἡμέρας; 5
16 $\frac{3}{10}$ $\left(19\frac{7}{12}\right)$.

3) Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἡ πρώτη εἶνε 32 $\frac{3^0}{4}$ $\left(10\frac{5^0}{6}\right)$ ἡ δευτέρα 10 $\frac{1^0}{2}$ $\left(7\frac{7^0}{12}\right)$ μεγαλυτέρα τῆς πρώτης, ἡ δὲ τρίτη εἶνε κατὰ 41 $\frac{3^0}{20}$ $\left(28\frac{4^0}{15}\right)$ μεγαλυτέρα τῆς δευτέρας· πόσον εἶνε τὸ ἄθροισμα καὶ τῶν τριῶν γωνιῶν; $160^0\ 24'$ $(75^0 56')$.

4) Ἀγοράζει τις 71 (41) ὀκ. ἐμπορεύματος ἀντὶ 127 $\frac{3}{5}$ $\left(225\frac{17}{25}\right)$ δρ.· πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν 1 ὀκ., ἐὰν ἡ φόρτωσίς του στοιχίζῃ 3 $\frac{6}{25}$ $\left(5\frac{1}{5}\right)$ θέλει δὲ νὰ κερδίσῃ καὶ 11 $\frac{4}{25}$ $\left(15\frac{3}{25}\right)$ δρ. ἐν ὅλῳ; 2 (6).

5) Ἐργάτης τελειώνει εἰς μίαν ἡμ. τὸ $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{3}\right)$ ἑνὸς ἔργου· δεύτερος τὸ $\frac{1}{3}$ $\left(\frac{2}{5}\right)$ καὶ τρίτος τὸ $\frac{1}{6}$ $\left(\frac{1}{6}\right)$ τοῦ ἔργου· πόσον μέρος τοῦ ἔργου τελειώνουν καὶ οἱ τρεῖς, μαζῆ ἐργαζόμενοι, εἰς 1 ἡμ.;

ὁλόκληρον $\left(\frac{9}{10}\right)$.

6) Δεξαμενὴ δύναται νὰ πληρωθῇ ὑπὸ τριῶν βρύσεων. Ἡ πρώτη πληροῖ εἰς 1 ὥρ. τὸ $\frac{1}{3}$ $\left(\frac{2}{9}\right)$ τῆς δεξαμενῆς, ἡ δευτέρα τὰ $\frac{2}{5}$ $\left(\frac{3}{8}\right)$ καὶ ἡ τρίτη τὸ $\frac{1}{10}$ $\left(\frac{11}{72}\right)$ αὐτῆς· ποῖον μέρος τῆς δεξαμενῆς θὰ πληρωθῇ εἰς 1 ὥρ., ἐὰν ῥέουν καὶ αἱ τρεῖς βρύσεις μαζῆ;

$\frac{5}{6}$ $\left(\frac{3}{4}\right)$.

§ 31. Ἀφαίρεσις.—

α′) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν δύο ὁμωνύμων κλασμάτων, π. χ. τῶν $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{2}{6}$, θεωροῦμεν αὐτὰ ὡς ἀκεραίους 5 καὶ 2 μὲ τὴν ἐπωνυμίαν ἕκτα, καὶ ἔχομεν τὴν ἀφαίρεσιν 5 ἕκτα—2 ἕκτα=3 ἕκτα· ἤτοι $\frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$.

β′) Ὅθεν, «***διὰ ν᾽ ἀφαιρέσωμεν δύο κλάσματα ὁμώνυμα, ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν τοῦ μειωτέου, τὸ ὑπόλοιπον γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν κοινὸν παρονομαστὴν αὐτῶν***».

γ) Ἐὰν τὰ δοθέντα κλάσματα εἶνε ἑτερώνυμα, π. χ. ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$ τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα, ὅτε ἔχομεν $\frac{15}{20} - \frac{8}{20}$ καὶ ἀκολούθως ἀφαιροῦμεν, καθὼς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, οὕτω δι᾽ εὑρίσκομεν διαφορὰν $\frac{7}{20}$.

Ἤτοι,

δ′) «***διὰ ν᾽ ἀφαιρέσωμεν κλάσματα ἑτερώνυμα, τὰ τρέπομεν εἰς ὁμώνυμα καὶ ἀφαιροῦμεν ταῦτα***».

ε') Ἔστω ὅτι θέλομεν ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰς $3\frac{1}{2}$ δρχ. τὰς $\frac{1}{4}$ δρχ.

Ἐπειδὴ τὰ κλάσματα εἶνε ἑτερώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώ-α, ὅτε θὰ ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν $3\frac{2}{4}$δρ.—$1\frac{1}{4}$δρ. ραιροῦμεν χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους τού-, ὅτε λαμβάνομεν ὑπόλοιπον $2\frac{1}{4}$ δρχ.

Ὥστε $3\frac{1}{2}$ δρχ. — $1\frac{1}{4}$ δρχ. $= 2\frac{1}{4}$ δρχ.

στ') Ἂν ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $12\frac{1}{5}$ὀκ.—$5\frac{3}{4}$ ὀκ., πομεν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα καὶ θὰ ἔχωμεν νὰ ωμεν τὴν διαφορὰν $12\frac{4}{20}$ ὀκ.—$5\frac{15}{20}$ ὀκ. Ἐπειδὴ τὸ $\frac{15}{20}$ ὀκ. ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὰ $\frac{4}{20}$ ὀκ., λαμβάνομεν ἀπὸ τὸν ἀκέραιον 12 ὀκ. ν ὀκᾶν καὶ τὴν τρέπομεν εἰς εἰκοστά. Γράφομεν λοιπὸν ἀντὶ $\frac{4}{20}$ ὀκ. τὸ $11\frac{24}{20}$ ὀκ. καὶ θὰ ἔχωμεν τὴν ἀφαίρεσιν $11\frac{24}{20}$ ὀκ. — $\frac{15}{20}$. Ἀφαιροῦμεν τώρα χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ χωριστὰ τοὺς ραίους καὶ εὑρίσκομεν $6\frac{9}{20}$ὀκ. Ὥστε ἔχομεν 5

$\frac{1}{5}$ ὀκ.—$5\frac{3}{4}$ ὀκ.$=12\frac{4}{20}$ ὀκ. —$5\frac{15}{20}$ ὀκ. $= 11\frac{24}{20}$ ὀκ. — $\frac{15}{20}$ ὀκ.$=6\frac{9}{20}$ ὀκ.

ζ') Ὅθεν, ***«διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν δύο μικτοὺς ἀριθμούς, τρέ-μεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα (ἐὰν εἶνε ἑτερώνυμα). Ἐὰν κλάσμα τοῦ μειωτέου εἶνε μικρότερον τοῦ ἀφαιρετέου, λαμ-νομεν μίαν μονάδα τοῦ μειωτέου, καὶ τὴν τρέπομεν εἰς άσμα, ἔχον παρονομαστὴν τὸν τῶν κλασμάτων. Τοῦτο προσ-τομεν εἰς τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου, ὥστε ἀπὸ τὸ ἄθροισμα ῦτο ν' ἀφαιρῆται τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου. Τέλος ἀφαι-ῦμεν χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ χωριστὰ τὸν ἀκέραιον τοῦ αιρετέου ἀπὸ τὸν ὑπολειφθέντα ἀκέραιον τοῦ μειωτέου».***

αα

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι ἀφαιρέσεις.

α') $\frac{7}{9} - \frac{4}{9}$· β') $3\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$· γ') $3\frac{5}{12} - 2\frac{7}{12}$· δ') $8\frac{1}{2} -$ [illegible]
ε') $17 - 1\frac{1}{2}$· ϛ') $4\frac{5}{3} - 2\frac{7}{8}$· ζ') $\frac{1}{1} - \frac{1}{2}$· η') $\frac{2}{1} - \frac{3}{3}$·
θ') $\frac{5}{1} - \frac{1}{5}$· ι') $\frac{6}{1} - \frac{1}{8}$·

2) Ὁμοίως αἱ ἀφαιρέσεις· α') $8\frac{4}{15} - 2\frac{7}{24}$· β') $12\frac{8}{45} - 4\frac{9}{20}$·
γ') $7\frac{13}{72} - 3\frac{13}{45}$· δ') $85\frac{1}{6} -$ [illegible]$\frac{[illegible]}{19}$· ε') $29\frac{1}{8} - 17\frac{1}{24}$·

3) Ἀφαιρέσατε ἀπὸ τὸ 1 τὸ $\frac{1}{4}$, τὰ $\frac{5}{8}$, τὰ $\frac{9}{12}$. Ὁμοίως ἀπὸ τὸ 2 ὀκ. τὸ $1\frac{1}{4}$ ὀκ., ἀπὸ τὸ 4 πήχ. τὸ $\frac{3}{8}$ πήχ. καὶ εὕρετε κανόνα συμφώνως πρὸς τὸν ὁποῖον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ ἀκέραιον κλάσμα ἢ μικτόν.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἔχει τις $36\frac{1}{4}\left(18\frac{2}{3}\right)$ δρχ., δεύτερος ἔχει $8\frac{7}{9}\left(1\frac{1}{2}\right)$ δρχ. ὀλιγωτέρας τοῦ πρώτου, καὶ τρίτος $7\frac{7}{12}$ $\left(3\frac{6}{7}\right)$ δρχ. ὀλιγωτέρας τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο πρώτων. Πόσας δραχμὰς ἔχει ἕκαστος καὶ πόσας καὶ οἱ τρεῖς;

$27\frac{17}{36}\left(17\frac{1}{6}\right)$, $56\frac{5}{36}\left(31\frac{41}{42}\right)$, $119\frac{31}{36}$ (67 17 $\frac{17}{..}$).

2) Ἐξώδευσέ τις πρῶτον $18\frac{4}{5}\left(23\frac{1}{4}\right)$ δρχ. ἐκ τῶν 728 ($314\frac{7}{10}$) δρχ., τὰς ὁποίας εἶχεν· ἔπειτα $27\frac{1}{20}\left(13\frac{1}{2}\right)$ δρ., καὶ τέλος $54\frac{2}{25}\left(18\frac{4}{5}\right)$ δρχ.· πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν; (Κατὰ δύο τρόπους). 628,82 (259,15).

3 Πωλεῖ τις ἐμπόρευμα $127\frac{11}{20}\left(136\frac{17}{20}\right)$ δρχ. μὲ κέρδος $43\frac{1}{2}\left(61\frac{1}{5}\right)$ δρχ.· πόσον τὸ ἠγόρασεν; 84 δρ. 5 λ. (75,6[illegible])

4) Ἓν ἔργον ἤρχισεν εἷς τὰς $8\frac{3}{4}\left(4\frac{5}{12}\right)$ ὥρ. π. μ. καὶ διήρκεσε $10\frac{5}{6}\left(9\frac{7}{30}\right)$ ὥρ.· πότε ἐτελείωσε; 7 ὥρ. 35′ (1 ὥρ. 39′) μ.

§ 32. Πολλαπλασιασμός.—

α') (Πρόβλημα). «*Ἂν ἓν πορτοκάλιον τιμᾶται $\frac{3}{4}$ δρ., πόσον* *μῶνται τὰ 5 πορτοκάλια;*»

Ἀφοῦ τὸ 1 πορτοκ. τιμᾶται $\frac{3}{4}$ δρ., τὰ 2 πορτοκ. θὰ τιμῶνται $\frac{3}{4}$ δρ. $\times 2$, καὶ τὰ 5 πορτοκ. θὰ τιμῶνται $\frac{3}{4}$ δρ. $\times$ 5. Ἀλλὰ ῦτο σημαίνει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον $\frac{3}{4}$ δρ. ὡς οσθετέον 5 φοράς. Ἤτοι θὰ ἔχωμεν,

$\frac{3}{4}$ δρ. $\times 5 = \frac{3}{4}$ δρ. $+ \frac{3}{4}$ δρ. $+ \frac{3}{4}$ δρ. $+ \frac{3}{4}$ δρ. $+ \frac{3}{4}$ δρ. $=$

$\frac{15}{4}$ δρ. $= 3\frac{3}{4}$ δρ. $=$ 3,75 δρ.

Ὁμοίως ἔχομεν $\frac{2}{5} \times 3 = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$.

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι, «*διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα* *ὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ τὸν ἀκέ-* *ιον καὶ τὸ γινόμενον γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ* *ν τοῦ δοθέντος κλάσματος*».

β') (Πρόβλημα). «*Ἂν ἡ ὀκᾶ κριθῆς τιμᾶται 6 $\frac{3}{4}$ δρ., πόσον* *μῶνται αἱ 3 ὀκάδες τῆς κριθῆς;*» 5

Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκᾶ τιμᾶται 6 $\frac{3}{4}$ δρ., αἱ 3 ὀκ. θὰ τιμῶνται 3 φορὰς ριссότερον· ἤτοι 6 $\frac{3}{4}$ δρ., $\times$ 3. Ἐπειδὴ τὸ 6 $\frac{3}{4}$ δρ. $=$ 6 δρ. $+$ $\frac{3}{4}$ δρ., ἕπεται ὅτι ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ 6 δρ. $\times 3 = 18$ δρ., $\frac{3}{4}$ δρ. $\times 3 = \frac{9}{4}$ δρ., καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα, ὅτε εὑρί- ομεν 18 $\frac{9}{4}$ δρ. $= 20\frac{1}{4}$ δρ. Ἐξ ἄλλου ἔχομεν 6 $\frac{3}{4}$ δρ. $\times 3 =$ $\frac{27}{4}$ δρ. $\times 3 = \frac{81}{4}$ δρ. $= 20\frac{1}{4}$ δρ.

Ἤτοι, «*διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον, ἢ πολ-* *πλασιάζομεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα* *ῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸν δοθέντα ἀκέραιον καὶ προσθέτομεν τὰ δύο* *νόμενα, ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα καὶ ἀκο-* *ύθως πολλαπλασιάζομεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον*».

γ') (Πρόβλημα). «***Πόσον τιμῶνται τὰ*** $\frac{2}{3}$ ***τοῦ μέτρου ὑφάσματος, ἐὰν τὸ ἓν μέτρον αὐτοῦ τιμᾶται 13 δρ;»***

Λέγομεν ὅτι, ἀφοῦ 1 μ. τιμᾶται 13 δρ., τὸ $\frac{1}{3}$ μ. θὰ τιμᾶται $\frac{1}{3}$ τῶν 13 δρ., ἤτοι $\frac{13}{3}$ δρ.· καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ μ. θὰ τιμῶνται $\frac{13}{3} \times$ $= \frac{26}{3} = 8\ \frac{2}{3}$ δραχμάς.

Ἐπίσης, ἐὰν θέλωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ 12 ἐπὶ $\frac{4}{9}$, ἀρ νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸ $\frac{1}{9}$ τοῦ 12 καὶ αὐτὸ νὰ πολλαπλασιάσω ἐπὶ 4, ἤτοι $12 \times \frac{4}{9} = \frac{12}{9} \times 4 = \frac{48}{9} = 5\ \frac{3}{9} = 5\ \frac{1}{3}$

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι, «***διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραι ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν ἀριθμη τοῦ κλάσματος, τὸ γινόμενον γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστ δὲ τὸν τοῦ δοθέντος κλάσματος***».

δ') Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\frac{5}{6} \times \frac{2}{3}$, παρατηρ μεν ὅτι $\frac{5}{6} \times \frac{3}{3} = \frac{5}{6} \times 1 = \frac{5}{6}$. Ἑπομένως $\frac{5}{6} \times \frac{1}{3} =$ $= \frac{5}{18}$ (τρὶς μικρότερον τοῦ προηγουμένου § 46, δ')· καὶ $\frac{5}{6} \times$ $= \frac{5 \times 2}{6 \times 3} = \frac{5 \times 2}{18} = \frac{10}{18}$ (δὶς μεγαλύτερον τοῦ προηγουμένου).

Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὸν γινόμενον $\frac{7}{8} \times \frac{4}{9}$. Ἔχομεν ὅτι $\frac{7}{8} \times$ $= \frac{7}{8} \times 1$. Τὸ $\frac{7}{8} \times \frac{1}{9}$ ἤτοι τὸ ἔνατον τῶν $\frac{7}{8}$ εἶνε $\frac{7}{72}$. Κ $\frac{7}{8} \times \frac{4}{9} = \frac{7 \times 4}{72} = \frac{28}{72}$.

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι, «***διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν καὶ τὸ γινό νον γράφομεν ἀριθμητήν, ἔπειτα τοὺς παρονομαστὰς τούτων κ τὸ γινόμενον γράφομεν παρονομαστήν***».

ε') Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ καὶ οἱ δύο παράγοντες εἶ *μικτοὶ ἀριθμοί, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα* κ πολλαπλασιάζομεν τὰ οὕτω προκύπτοντα κλάσματα, ἢ πολαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα.

Π. χ. $3\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{7}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{21}{10}=2\frac{1}{10}$.

Ὁμοίως $6\frac{1}{2}\times 3\frac{1}{4}=\frac{13}{2}\times\frac{13}{4}=\frac{169}{8}=21\frac{1}{8}$. Ἢ καὶ ἄλλως

$$6\frac{1}{2}\times 3\frac{1}{4}=6\frac{1}{2}\times 3+6\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{13}{2}\times 3+\frac{13}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{39}{2}+\frac{13}{8}=19\frac{1}{2}+1\frac{5}{8}=20+\frac{4}{8}+\frac{5}{8}=20+\frac{9}{8}=21\frac{1}{8}.$$

στ') Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω κανόνος συνάγομεν εὐκόλως ὅτι τὸ γινόμενον δύο κλασμάτων δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων. Διότι τὸ γινόμενον $\frac{2}{5}\times\frac{4}{9}$ π.χ. εἶνε ἴσον μὲ $\frac{2\times 4}{5\times 9}$. Ἀλλ' εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν τούτου ἔχομεν γινόμενον ἀκεραίων ἀριθμῶν καὶ δυνάμεθα ὡς γνωστὸν (§ 21), ν' ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν αὐτῶν· ὥστε ἔχομεν

$$\frac{2}{5}\times\frac{4}{9}=\frac{2\times 4}{5\times 9}=\frac{4\times 2}{9\times 5}=\frac{4}{9}\times\frac{2}{5}.$$ 5

ζ') «***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον περισσοτέρων τῶν δύο κλασμάτων, γράφομεν ὡς ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον πάντων τῶν ἀριθμητῶν τῶν δοθέντων καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν***».

Οὕτω τὸ $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{2\times 4\times 1\times 2}{3\times 5\times 2\times 5}=\frac{16}{150}$.

Ἐπίσης εὐκόλως βλέπομεν ὅτι, τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε κλασμάτων δὲν μεταβάλλεται καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν γράψωμεν τοὺς παράγοντας.

η') Ἐκ τῆς ἰδιότητος αὐτῆς τοῦ γινομένου συνάγομεν ὅτι, δυνάμεθα πρὸ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἢ περισσοτέρων κλασμάτων, νὰ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς τῶν παραγόντων καὶ τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ κοινοῦ διαιρέτου τούτων. Οὕτω καθιστῶμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν εὐκολώτερον. Π. χ. ἂν ἔχομεν τὸ γινόμενον $\frac{4}{9} \times \frac{3}{8}$, ἐπειδὴ τοῦτο εἶνε ἴσον μὲ $\frac{4 \times 3}{9 \times 8}$, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ 4 καὶ 8 διὰ τοῦ 4, εὑρίσκομεν $\frac{1 \times 3}{9 \times 2}$. Διαιροῦντες πάλιν τὸ 3 καὶ 9 διὰ τοῦ 3 λαμβάνομεν ἐξαγόμενον $\frac{1 \times 1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}$.

Γράφομεν συνήθως οὕτω,

$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Ὁμοίως ἔχομεν,

$$\frac{15}{24} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{12} \times \frac{1}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{12} \times \frac{1}{1} \times \frac{3}{8}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{1} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{32}.$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κατωτέρω γινόμενα, ἀφοῦ προηγουμένως γίνουν αἱ δυναταὶ ἁπλοποιήσεις· α') $\frac{3}{4} \times \frac{5}{9}$. β') $\frac{18}{25} \times \frac{5}{9}$. γ') $\frac{45}{56} \times \frac{64}{81}$. δ') $\frac{9}{14} \times \frac{36}{39}$. ε') $8\,\frac{2}{3} \times \frac{6}{13}$. ϛ') $8\,\frac{1}{8} \times 4\,\frac{4}{15}$. ζ') $8\,\frac{14}{15} \times 2\,\frac{1}{4}$. η') $\frac{8}{11} \times 33$. θ') $\frac{2}{8} \times 42$.

2) Ὁμοίως τά· α') $\frac{3}{7} \times \frac{7}{10} \times \frac{10}{21}$. β') $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times \frac{4}{28} \times \frac{6}{5}$. γ') $362 \times \frac{23}{21} \times \frac{3}{16} \times \frac{9}{27}$.

3) Ὁμοίως τά· α') $1\,\frac{3}{10} \times \frac{15}{26} \times 1\,\frac{13}{40}$. β') $2\,\frac{2}{3} \times \frac{9}{10} \times \frac{25}{24} \times \frac{2}{3}$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα κατὰ τὸν ἁπλούστερον τρόπον· α') $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$. β') $\frac{1}{100} \times \frac{1}{100}$. γ') $\frac{1}{100} \times \frac{1}{1000}$. δ') $\frac{1}{1000} \times 100$. ε') $10 \times \frac{1}{1000}$. ϛ') $\frac{1}{100} \times 100 \times \frac{3}{10}$. ζ') $\frac{3}{10} \times 100 \times 5$.

2) Ὁμοίως τά· α') ἓν δέκατον ἐπὶ δέκα· β') μία δεκὰς ἐπὶ ἓν δέκατον. γ') ἓν δέκατον ἐπὶ ἓν δέκατον· δ') Ε×ε. ε') Χ×χ. ϛ') Χ×ε. ζ') δ×δ×Ε. η') χ×Χ×ε×Ε.

3

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ τὸν παρανομαστὴν αὐτοῦ, εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμητὴν τούτου. Διατί;

2) Ἡ ὀκᾶ πράγματος στοιχίζει $2\frac{3}{4}$ $\left(3\frac{1}{2}\right)$ δρ.· πόσον στοιχίζουν $\frac{2}{5}$, $1\frac{3}{5}$, $2\frac{4}{5}$ ὀκ.; 1,10 (1,40)· 4,40 (5,60)· 7.70 (9,80).

3) Πόσον θὰ στοιχίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ $\left(1\frac{3}{5}\right)$ πήχ., ὅταν ὁ πῆχυς τιμᾶται $3\frac{1}{4}$ $\left(250\frac{1}{4}\right)$ δρ.; $2\frac{7}{16}$ (400,40).

4) Ἓν κινητὸν διανύει εἰς 1 ὥραν $5\frac{3}{4}$ $\left(7\frac{1}{8}\right)$ χμ.· πόσα διανύει εἰς $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{10}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{50}$, $1\frac{3}{20}$ ὥρ.; 4,6 (5,7)· 1,725 (2,1375)· 8,625 (10,6875)· 5,865, (7,2675)· 6,6125 (8,19375).

5) Ἀγοράζει τις $36\frac{1}{5}$ $\left(84\frac{1}{4}\right)$ ὀκ. πράγματος πρὸς $5\frac{1}{4}$ $\left(6\frac{1}{5}\right)$ δρ. τὴν ὀκ., τὸ πωλεῖ δὲ μὲ κέρδος $\frac{1}{4}$ $\left(\frac{2}{5}\right)$ δρ. τὴν ὀκᾶν. πόσον τὸ ἐπώλησεν; 199,10 (318,45).

6) Ἔχει τις χρήματα διὰ νὰ περάσῃ $18\frac{3}{4}$ $\left(9\frac{1}{5}\right)$ ἡμ., ἐὰν ἐξοδεύῃ $10\frac{1}{5}$ $\left(8\frac{3}{4}\right)$ δρ. καθ' ἡμέραν· πόσας δραχμὰς ἔχει; 5

191,25 (80,50)·

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα· α΄) 2 Δ $\times$ 3 δ. β΄) 3 Δ $\times$ 4 δ· γ΄) 8 Ε $\times$ 7 ε· δ΄) 46 $\times$ 5 ε $\times$ 10.

2) Ἐκ δύο τόπων, οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν μεταξύ των $100\frac{3}{4}$ $\left(607\frac{4}{5}\right)$ χμ., ἀναχωροῦν δύο ταχυδρόμοι πρὸς συνάντησίν των. Ἐὰν ὁ μὲν διανύῃ $8\frac{3}{4}$ $\left(28\frac{1}{4}\right)$ χμ. καθ' ἡμέραν, ὁ δὲ $6\frac{1}{5}$ $\left(32\frac{1}{2}\right)$ χμ., πόσον θ' ἀπέχουν μετὰ $5\frac{1}{2}$ (10 ἡμ.; 18,525 (0,3).

3) Ἔχει τις $824\frac{1}{4}$ $\left(526\frac{1}{2}\right)$ δρ.· ἐξοδεύει τὸ $\frac{1}{7}$ $\left(\frac{1}{4}\right)$ αὐτῶν, ἔπειτα τὸ $\frac{1}{3}$ $\left(\frac{1}{4}\right)$ αὐτῶν καὶ τέλος τὰ $\frac{11}{21}$ $\left(\frac{9}{12}\right)$ αὐτῶν. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν; (Κατὰ δύο τρόπους). 0 (52,65).

4) Ἔχει τις 855 $\left(156\frac{3}{5}\right)$ δρ. καὶ ἐξοδεύει τὰ $\frac{2}{3}$ $\left(\frac{1}{3}\right)$

αὐτῶν· ἐκ τοῦ ὑπολοίπου τὰ $\left(\frac{4}{5}\right)$ αὐτοῦ, καὶ ἐκ τοῦ νέου ὑπολοί-
που τὰ $\frac{3}{5}$ $\left(\frac{10}{11}\right)$ αὐτοῦ· τί ἔμεινε; 38 $\left(1\frac{247}{275}\right)$

5) Ὀπωροπώλης ἔχει 35 (25) μῆλα· πωλεῖ τὸ $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{5}{6}\right)$ αὐτῶν
καὶ $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{6}\right)$ τοῦ μήλου· ἔπειτα πωλεῖ τὰ $\frac{2}{3}$ $\left(\frac{1}{3}\right)$ τοῦ ὑπολοίπου
καὶ $\frac{2}{3}$ $\left(\frac{2}{3}\right)$ τοῦ μήλου· πόσα μῆλα τοῦ ἔμειναν; 5 (2)

6) Ἀπὸ βαρέλιον, ἔχον 56 $\frac{2}{3}$ $\left(42\frac{1}{4}\right)$ ὀκ. οἴνου. Ἀφαιροῦμεν
τὰ $\frac{2}{5}$ $\left(\frac{2}{13}\right)$ αὐτοῦ, καὶ χύνομεν $\frac{3}{4}$ $\left(\frac{5}{8}\right)$ ὀκ. οἴνου, ἀφαιροῦ-
μεν πάλιν τὰ $\frac{4}{5}$ $\left(\frac{4}{5}\right)$ τοῦ εἰς τὸ βαρέλιον οἴνου καὶ πάλιν $\frac{7}{10}$
$\left(1\frac{1}{10}\right)$ ὀκ. Πόσος οἶνος ἔμεινεν; 6 $\frac{1}{4}$ $\left(6\frac{1}{8}\right)$

§ 33. Διαίρεσις κλάσματος δι' ἀκεραίου.—
(Πᾶσαν τοιαύτην διαίρεσιν θεωροῦμεν ὡς μερισμόν).

α΄) (Πρόβλημα). «***Ἂν μοιράσωμεν τὰ $\frac{6}{8}$ τοῦ πήχεως εἰς 3 ἀνθρώπους, πόσα θὰ λάβῃ καθείς;***»

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $\frac{6}{8}$: 3. Θεωροῦμεν τὰ $\frac{6}{8}$ ὡς ἀκέραιον 6 μὲ τὴν ἐπωνυμίαν ὄγδοα (ἢ ρούπια). Οὕτω ἔχομεν τὴν διαίρεσιν

6 ὄγδοα πήχεως: 3 = 2 ὄγδοα πήχ. Ἤτοι $\frac{6}{8} : 3 = \frac{2}{8}$.

Ὁμοίως διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $\frac{15}{12}$: 3 ἔχομεν, *15 δωδέκατα: 3 = 5 δωδέκατα·* ἤτοι $\frac{15}{12} : 3 = \frac{5}{12}$.

Ὡς βλέπομεν, τὸ ἐξαγόμενον καθεμιᾶς τῶν διαιρέσεων αὐτῶν εὑρίσκεται, ἂν γράψωμεν ἀριθμητὴν τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ δοθέντος κλάσματος διὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ παρανομαστὴν τὸν αὐτόν.

β΄) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $\frac{5}{2}$: 3. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς 5 δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 3, σκεπτόμεθα ὅτι, καὶ ἐδῶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ τρίτον τοῦ $\frac{5}{2}$. Ἀλλὰ τὸ τρίτον μέρος τοῦ $\frac{1}{2}$ εἶνε $\frac{1}{6}$. Ἄρα τὸ τρίτον τοῦ $\frac{5}{2}$ εἶνε $\frac{5}{6}$.

Ὥστε ἔχομεν $\frac{5}{2} : 3 = \frac{5}{6}$. Τὸ ἐξαγόμενον αὐτὸ εὑρίσκομεν ἀμέσως, ἐὰν γράψωμεν ἀριθμητὴν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ δοθέντος κλάσματος, καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.

Ὁμοίως ἔχομεν $\frac{4}{9} : 5 = \frac{4}{45}$. Διότι τὸ πέμπτον τοῦ $\frac{1}{9}$ εἶνε $\frac{1}{45}$. Ἐπομένως τὸ πέμπτον τοῦ $\frac{4}{9}$ εἶνε $\frac{4}{45}$.

γ′) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι,

«***διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι᾽ ἀκεραίου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ ν᾽ ἀφήσωμεν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἢ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ ν᾽ ἀφήσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν***».

γ′) Ἂν ὁ διαιρετέος εἶνε μικτὸς ἀριθμός, τρέπομεν αὐτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι᾽ ἀκεραίου. Οὕτω ἔχομεν $3\frac{1}{2} : 5 = \frac{7}{2} : 5 = \frac{7}{10}$.

δ′) Ἡ διαίρεσις ἀκεραίου δι᾽ ἄλλου τοιούτου δὲν εἶνε πάντοτε τελεία, εἰμὴ μόνον ὅταν ὁ διαιρετέος εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου. Π. χ. ἡ διαίρεσις 4: 3, ἢ 8: 9 κ. ο. κ. δὲν εἶνε τελεία. Διότι, δὲν ὑπάρχει ἀκέραιος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 3 δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον 4. 5

Μὲ τὴν βοήθειαν ὅμως τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀκριβῶς τὸ πηλίκον τῶν τοιούτων διαιρέσεων ἄνευ ὑπολοίπου. Πράγματι, ἐὰν τὸν διαιρετέον γράψωμεν ὡς κλάσμα, ἔχον παρονομαστὴν τὴν 1, θὰ ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι᾽ ἀκεραίου. Οὕτω θὰ ἔχωμεν $\frac{4}{1} : 3 = \frac{4}{1 \times 3} = \frac{4}{3}$. Ὁμοίως $8 : 9 = \frac{8}{9}$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι·

«***διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τὸν διαιρετέον ἀριθμητήν, τὸν δὲ διαιρέτην παρονομαστὴν κλάσματος***».

§ **34. Διαίρεσις διὰ κλάσματος.**—

(Πᾶσαν τοιαύτην διαίρεσιν θεωροῦμεν ὡς μέτρησιν).

α′) (Πρόβλημα). «***Ἂν ἓν τετράδιον ἐτιμᾶτο*** $\frac{1}{2}$ ***δρ., πόσα τετράδια θὰ ἀγοράσωμεν μὲ*** $\frac{5}{2}$ ***δραχμάς;***»

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ εὕρωμεν πόσον χωρεῖ τὸ $\frac{1}{2}$ δρχ. εἰς τὸ $\frac{5}{2}$ δρ., ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $\frac{5}{2} : \frac{1}{2}$. Θεωροῦμεν τοὺς κλασματικοὺς ὡς ἀκεραίους 5 καὶ 1 μὲ τὴν ἐπωνυμίαν *δεύτερα* καὶ οὕτω ἔχομεν 5 *δεύτερα δρχ. : 1 δεύτερον δρχ.* $= 5$· ἄρα $\frac{5}{2} : \frac{1}{2} = 5$. Ἤτοι θὰ ἀγοράσωμεν 5 τετράδια μὲ $\frac{5}{2}$ δρχ.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{8}{5} : \frac{3}{5} =$ *8 πέμπτα : 3 πέμπτα*. Ἀλλὰ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 8 : 3 εἶνε, κατὰ τἀνωτέρω, ἴσον μὲ $\frac{8}{3}$. Ὥστε $\frac{8}{5} : \frac{3}{5} = \frac{8}{3}$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον δύο ὁμωνύμων κλασμάτων, θέτοντες τὸν ἀριθμητὴν τοῦ διαιρετέου ὡς ἀριθμητὴν καὶ τὸν τοῦ διαιρέτου ὡς παρονομαστήν.

β') (Πρόβλημα). « ***Πόσους πήχεις δαντέλας θὰ ἀγοράσωμεν μὲ*** $\frac{7}{3}$ ***δρ., ἂν ὁ πῆχυς τιμᾶται*** $\frac{5}{6}$ ***δρ.;***»

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ εὕρωμεν πόσον χωρεῖ τὸ $\frac{5}{6}$ δρχ. εἰς τὸ $\frac{7}{3}$ δρ. Ἤτοι, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $\frac{7}{3} : \frac{5}{6}$. Τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα καὶ ἀκολούθως ἐφαρμόζομεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα. Οὕτω ἔχομεν ὅτι $\frac{7}{3} : \frac{5}{6} = \frac{14}{6} : \frac{5}{6} = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$. Ἤτοι θ' ἀγοράσωμεν $2\frac{4}{5}$ πήχ. δαντέλας.

Καὶ κατ' ἄλλον τρόπον· παρατηροῦμεν ὅτι $\frac{7}{3} : \frac{6}{6} = \frac{7}{3} : 1 = \frac{7}{3}$. Ἑπομένως $\frac{7}{3} : \frac{1}{6}$ εἶνε ἑξάκις μεγαλύτερον τοῦ προηγουμένου, ἤτοι $\frac{7\times6}{3}$ καὶ $\frac{7}{3} : \frac{5}{6} = \frac{7\times6}{3\times5}$, δηλαδὴ πεντάκις μικρότερον τοῦ προηγουμένου.

Τὸ ἐξαγόμενον αὐτὸ εὑρίσκομεν ἀμέσως, ἐὰν τὸν διαιρετέον $\frac{7}{3}$ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ διαιρέτου $\frac{5}{6}$ *ἀντεστραμμένον*, ἤτοι ἐπὶ $\frac{6}{5}$, ὅτε ἔχομεν $\frac{7}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{42}{15} = 2\frac{4}{5}$.

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ἕπεται ὅτι, ***«διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα διὰ κλάσματος, πολλαπλασιά-***

ζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸ ἀντεστραμμένον κλάσμα τοῦ διαιρέτου».

Ὁ κανὼν ἰσχύει καὶ διὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ κλάσματα εἶνε ὁμώνυμα. Οὕτω ἔχομεν,

$\frac{8}{5} : \frac{3}{5} = \frac{8}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{8}{1} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$.

γ') Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶνε μικτὸς ἀριθμός, τρέπομεν αὐτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν διὰ κλάσματος. Τὸ αὐτὸ κάμνομεν καὶ ἐὰν ὁ διαιρετέος ἢ καὶ οἱ δύο εἶνε μικτοὶ ἀριθμοί. Οὕτω π. χ. ἔχομεν $6\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{13}{2} : \frac{3}{4} = \frac{13}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$. Ὁμοίως $2\frac{1}{5} : 4\frac{1}{2} = \frac{11}{5} : \frac{9}{2} = \frac{11}{5} \times \frac{2}{9} = \frac{22}{45}$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων·
α') $\frac{3}{4} : \frac{4}{5}$· β') $\frac{35}{12} : \frac{15}{3}$· γ') $\frac{5}{6} : \frac{2}{9}$· δ') $4\frac{1}{2} : \frac{4}{5}$· ε') $8\frac{5}{6} : 1\frac{1}{5}$·
ς') $5\frac{1}{4} : 4\frac{2}{7}$· ζ') $\frac{2}{5} : 1\frac{13}{15}$· η') $\frac{21}{37} : \frac{15}{8}$· θ') $4\frac{11}{15} : \frac{7}{9}$· 5

2) Ὁμοίως τὰ πηλίκα τῶν· α') $6 : \frac{2}{3}$· β') $12 : \frac{6}{7}$· γ') $22 : 3\frac{2}{3}$ δ') $50 : \frac{25}{3}$· ε') $26 : 8\frac{2}{3}$· ς') $7\frac{2}{3} : 9$. ζ') $13 : 5\frac{1}{6}$·

Ὁμοίως τῶν· α') 7 : 2· β') 51 : 4· γ') 13,5 : 8.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα· α') $\frac{1}{10} : \frac{1}{100}$· β') $\frac{1}{100} : \frac{1}{10}$· γ') $\frac{1}{1000} : \frac{1}{10}$· δ') $\frac{1}{1000} : \frac{1}{100}$· ε') $10 : \frac{1}{10}$· ς') $\frac{1}{10} : 10$. ζ') $10000 : \frac{1}{10}$. η') $\frac{1}{10} : 1000$.

2) Ὁμοίως τά· α') 1 Ε : 1 ε· β') 1 Ε : 1 δ· γ') 1 Χ : 1 χ.

3) Ἐπίσης τά· α') 4 Δ : 2 δ· β') 8 Δ : 2 δ· γ') 9 Ε : 3 ε· δ') 6 Χ : 2 χ· ε') 3 δ : 3. ς') 7 Χ : 7.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἓν κλάσμα ἐπὶ τὸ ἀντίστροφόν του εὑρίσκομεν γινόμενον 1. Διατί;

2) Ἐὰν οἱονδήποτε ἀκέραιον παραστήσωμεν ὡς κλασματικόν, ἔχοντα παρονομαστὴν τὴν 1, τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸν ἀντίστροφόν του ἰσοῦται μὲ 1. Διατί;

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Τὰ $11\frac{1}{4}$ $\left(1\frac{21}{25}\right)$ μέτρα ὑφάσματος τιμῶνται $18\frac{3}{4}$ $\left(9\frac{1}{5}\right)$ δρ.· πόσα μέτρα ἀγοράζομεν μὲ 1 δρ.; $\frac{9}{17}$ $\left(\frac{1}{5}\right)$.

2) Ἔχει τις χρήματα διὰ νὰ περάσῃ $72\frac{3}{4}$ $\left(18\frac{1}{2}\right)$ ἡμ., ἐὰν ἐξοδεύῃ $8\frac{1}{5}$ $\left(7\frac{1}{5}\right)$ δρ. καθ' ἡμέραν· πόσα χρήματα ἔχει καὶ πόσας ἡμέρας θὰ περάσῃ μὲ τὰ χρήματα αὐτά, ἐὰν ἐξοδεύῃ $\left(9\frac{7}{10}\right)$ $7\frac{2}{5}$ δρ. καθεμίαν ἡμέραν; 596,55 (133,20) 61,5 (18).

3) Αἱ 25 $\left(4\frac{1}{5}\right)$ ὀκ. πράγματος τιμῶνται $26\frac{1}{4}$ $\left(73\frac{1}{2}\right)$ δρ.· πόσον τιμᾶται ἡ 1 ὀκᾶ; 1,05(17,50).

4) Ταχυδρόμος διανύει $37\frac{1}{8}$ $\left(48\frac{4}{5}\right)$ χμ. καθ' ἡμέραν· πόσας ἡμέρας χρειάζεται διὰ νὰ διανύσῃ $126\frac{9}{19}$ $\left(204\frac{24}{25}\right)$ χμ; $3\frac{85}{209}$ $\left(4\frac{1}{5}\right)$.

Ὁμὰς πέμπτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα.

α') $2\frac{1}{2}\times 1\frac{1}{2}:\frac{5}{8}$· β') $1\frac{11}{15}:1\frac{5}{9}\times\frac{15}{35}$· γ') $3\frac{1}{5}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}:\frac{1}{2}:\frac{3}{4}$

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς x, ὥστε νὰ εἶνε α') 1 δ $\times x = 1$ ε· β') 2 ε$\times x=1$ δ· γ') 3 ε$\times x=1$ Ε· δ') 1 δ$\times x=4$ ε.

3) Ἐὰν εἷς ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $3\frac{1}{2}$ $\left(4\frac{1}{6}\right)$ δίδει γινόμενον $1\frac{2}{5}$ $\left(2\frac{1}{2}\right)$· ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμὸς αὐτός; $\frac{2}{5}$ $\left(\frac{3}{5}\right)$.

4) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $2\frac{1}{7}$ $\left(\frac{2}{5}\right)$ διὰ νὰ εὕρωμεν γινόμενον 9 $\left(1\frac{1}{2}\right)$; $4\frac{1}{5}$ $\left(3\frac{3}{4}\right)$.

§ 55. Σύνθετα κλάσματα.—

α') Εἰς τὴν § 53, δ' εἴδομεν ὅτι τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν ὡς κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην.

Καθ' ὅμοιον τρόπον, ἐὰν ἔχωμεν τὴν διαίρεσιν $\frac{3}{4}:5$, δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τὸ πηλίκον διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{\frac{3}{4}}{5}$ τὸ ὁποῖον (ει ἀριθμητὴν τὸν κλασματικὸν διαιρετέον $\frac{3}{4}$ καὶ παρονομαστὴν τὸν ιαιρέτην 5. Ὥστε θὰ ἔχωμεν $\frac{3}{4} : 5 = \dfrac{\frac{3}{4}}{5}$.

Ὁμοίως τὸ πηλίκον οἱωνδήποτε ἀριθμῶν παριστάνομεν ὡς κλά-μα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρανομαστὴν τὸν διαιρέτην.

Οὕτω ἔχομεν $7 : \frac{5}{8} = \dfrac{7}{\frac{5}{8}}$, $\frac{4}{3} : \frac{4}{7} = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{7}}$.

$$: 3\frac{1}{4} = \frac{8}{3\frac{1}{4}}, \quad 7\frac{4}{5} : \frac{3}{8} = \frac{7\frac{4}{5}}{\frac{3}{8}}.$$

$$3{,}58 : 2\frac{1}{4} = \frac{3{,}58}{2\frac{1}{4}}.$$

Τὰ κλάσματα τῶν ὁποίων τοὐλάχιστον εἷς ὅρος δὲν εἶνε ἀκέραιος αλοῦμεν *σύνθετα*, πρὸς διάκρισιν αὐτῶν ἀπὸ τῶν μέχρι τοῦδε γνω-τῶν, τὰ ὁποῖα καλοῦμεν *ἁπλᾶ*. 5

Τοὺς ὅρους τῶν συνθέτων κλασμάτων κλείομεν συνήθως ἐντὸς αρενθέσεων, ἐὰν εἶνε ἀνάγκη νὰ διακρίνωμεν αὐτούς.

β') Τὰ σύνθετα κλάσματα ἔχουν τὰς ἰδιότητας τῶν ἁπλῶν, ἐπειδὴ ἶνε πηλίκα διαιρέσεων τῶν ἀριθμητῶν διὰ παρονομαστῶν αὐτῶν.

Ἔστω ὅτι δίδεται ἓν σύνθετον κλάσμα, π. χ. τὸ $\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{5}{8}\right)}$ καὶ έλομεν νὰ τρέψωμεν αὐτὸ εἰς ἁπλοῦν. Ἔχομεν,

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{5}{8}\right)} = \frac{3}{4} : \frac{5}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{3}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}.$$

Ὁμοίως τὸ

$$\frac{\left(6\frac{1}{2}\right)}{5} = \frac{13}{2} : 5 = \frac{13}{2} : 5 = \frac{13}{10} = 1\frac{3}{10} = 1{,}3.$$

Ἐπίσης τὸ

$$\frac{2\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}} = 2\frac{3}{4} : \frac{5}{8} = \frac{11}{4} : \frac{5}{8} = \frac{11}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{11}{1} \times \frac{2}{5} = 4\frac{2}{5}$$

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι «***διὰ νὰ τρέψωμεν σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν, ἀρκεῖ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, τῆς ὁποίας διαιρετέος εἶνε ἀριθμητὴς καὶ διαιρέτης ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ***».

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

1) Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι σύνθετα κλάσματα εἰς ἁπλᾶ.

α') $\frac{\frac{6}{7}}{\frac{4}{6}}$. β') $\frac{3}{4\frac{1}{5}}$. γ') $\frac{\left(2\frac{1}{4}\right)}{\frac{4}{9}}$. δ') $\frac{8,35}{6\frac{1}{5}}$.

ε') $\frac{\frac{13}{5}}{3\frac{1}{2}}$ στ') $\frac{3+2\frac{1}{5}}{\left(7\frac{3}{8}\right)}$. ζ') $\frac{\left(\frac{28}{3}\right)}{\left(\frac{\frac{2}{3}}{4}\right)}$. η') $\frac{\left(\frac{2}{4\frac{1}{5}}\right)}{\left(\frac{4}{25}\right)}$

θ') $\frac{\left(\frac{1}{7}\right)}{\left(\frac{\frac{3}{1}}{8\frac{1}{2}}\right)}$. ι') $\frac{2\frac{54}{100}+\frac{3}{4}-\frac{15}{100}}{8-5\frac{1}{2}}$.

2) Πόσον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς $\frac{2}{5}\left(\frac{1}{4}\right)$ εἰς τὸν ἀριθμὸν $123\frac{1}{4}$ $\left(616\frac{1}{4}\right)$; 308,125 (24, 65)

3) Ἐὰν ἡ ὀκᾶ τοῦ καφὲ τιμᾶται $3\frac{3}{4}$ δρ., πόσας ὀκάδας θὰ ἀγοράσωμεν μὲ $32\frac{2}{3}$ δρ.; $8\frac{32}{45}$

4) Ἠγόρασέ τις $3\frac{1}{2}$ πήχ. ὑφάσματος, ἔπειτα $\frac{4}{45}$ πήχ. ἄλλου ὑφάσματος καὶ $2\frac{1}{8}$ πήχ. ἄλλου, ἐπλήρωσε δὲ ἐν ὅλῳ $60\frac{4}{5}$ δρ. πόσον τιμᾶται ὁ 1 πῆχυς κατὰ μέσον ὅρον; $10\frac{1318}{2057}$

5) $\frac{2}{3}$ τοῦ πήχεως ἑνὸς ὑφάσματος τιμῶνται $6\frac{1}{5}$ δρ.· πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς ; 9,30 δρ.

6) Πόσον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς $6\frac{1}{2}$ ὀκ. εἰς τὸ 150 ὀκ. ; $23\frac{1}{13}$.

§ 56. Λύσις προβλημάτων διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.—

α') *Προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ.*

1) « Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται 4 δρ.· πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ;»

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκ. τιμᾶται 4 δρ., τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς, τὸ ὁποῖον εἶνε 4 φορὰς μικρότερον τῆς ὀκᾶς, θὰ τιμᾶται 4 φορὰς ὀλιγώτερον τῶν 4 δρ.· ἤτοι 4 δρ. : 4=1 δρ.· καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ., τὸ ὁποῖον εἶνε 3 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ $\frac{1}{4}$ ὀκ., θὰ τιμᾶται 3 φορὰς περισσότερον τῆς 1 δρ., ἤτοι 1 δρ.$\times$3 =3 δρ. Ὥστε τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. τιμῶνται 3 δραχμάς. 5

Ἡ λύσις διατάσσεται συνήθως ὡς ἑξῆς.

Ἡ 1 $(=\frac{4}{4})$ ὀκ. τιμῶνται . . . 4 δρ.

τὸ $\frac{1}{4}$ . . . . 4 δρ.: 4=1 δρ.

τὰ $\frac{3}{4}$ . . . . 1 δρ.$\times$3=3 δρ.

Παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν ταχύτερον, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ 4 δρ. ἐπὶ $\frac{3}{4}$, ἤτοι διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $4\times\frac{3}{4}$. Πράγματι ἔχομεν $4\times\frac{3}{4}=1\times\frac{3}{1}=3$.

Ὁ ἀνωτέρω τρόπος τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος λέγεται *μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα*. Διότι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῶν $\frac{3}{4}$ ὀκ., εὑρήκαμεν πρῶτον τὴν τιμὴν τοῦ $\frac{1}{4}$ ὀκ. (τῆς μιᾶς κλασματικῆς μονάδος) καὶ ἀκολούθως τὴν τιμην τῶν $\frac{3}{4}$ ὀκ. (τῶν πολλῶν κλασματικῶν μονάδων).

2) *«Νὰ εὑρεθοῦν τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ ἀριθμοῦ 48».*

Παρατηροῦμεν ὅτι, ὁλόκληρος ὁ ἀριθμὸς ἔχει $\frac{6}{6}$ καὶ λύομεν τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Τὸ $\frac{6}{6}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶνε . . . . 48.

τὸ $\frac{1}{6}$ . . . . $48 : 6 = 8$.

τὰ $\frac{5}{6}$ . . . . $8 \times 5 = 40$.

Ὥστε τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ 48 εἶνε 40. Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $48 \times \frac{5}{6}$. Πράγματι εἶνε $48 \times \frac{5}{6} = 8 \times \frac{5}{1} = 40$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον γίνεται ἡ λύσις ὁμοίων προβλημάτων εἰς τὰ ὁποῖα οἱ ἀριθμοὶ εἶνε μικτοί. Πρὸς εὐκολίαν τρέπομεν αὐτοὺς προηγουμένως εἰς κλασματικούς. Οὕτω π. χ. λύομεν τὸ κατωτέρω πρόβλημα.

3) *« Ὁ 1 πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 15 $\frac{1}{2}$ δρ.· πόσον τιμῶνται 4 $\frac{1}{4} = \frac{17}{4}$ πήχ. αὐτοῦ ;»*

Ἐν πρώτοις γράφομεν

1 πῆχ. τιμᾶται $15\frac{1}{2} = \frac{31}{2}$ δρ.

$4\frac{1}{4} = \frac{17}{4}$ x

καὶ ἀκολούθως λύομεν αὐτὸ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ὡς ἑξῆς.

Ὁ 1 $\left(= \frac{4}{4}\right)$ πῆχ. τιμᾶται . . . $\frac{31}{2}$ δρ.

τὸ $\frac{1}{4}$ . . . . $\frac{31}{2} : 4 = \frac{31}{8}$ δρ.

τὰ $\frac{17}{4}$ . . . . $\frac{31}{8} \times 17 = \frac{527}{8} = 65\frac{7}{8}$ δρ.

Εἰς τἀνωτέρω προβλήματα καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὰ δίδεται ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ πολλῶν μερῶν τῆς μονάδος. Πρὸς λύσιν αὐτῶν κάμνομεν πολλαπλασιασμόν, καὶ πολλα-

...ασιαστέος μὲν εἶνε ἡ τιμὴ τῆς μονάδος, πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ ἀριθμὸς ...όποῖος παριστάνει τὰ μέρη τῆς μονάδος, τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ ζητεῖ... (παράβαλε μὲ τὴν § 19, δ'). Εἰς τὸν κανόνα περιλαμβάνονται καὶ ... προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται εἰς ἀριθμὸς καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ...λλαπλάσιον ἢ καὶ μέρος αὐτοῦ.

Συγκρίνοντες τὸν κανόνα αὐτὸν πρὸς τὸν εἰς τὴν (§ 19, δ') βλέ...μεν ὅτι εἶνε ὅμοιος πρὸς ἐκεῖνον καὶ συνάγομεν ὅτι,

«δυνάμεθα νὰ λύσωμεν διὰ πολλαπλασιασμοῦ πλεῖστα προ...λήματα εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ...τεῖται ἡ τιμὴ πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων ἢ καὶ μερῶν τῆς ...ονάδος».

β') *Προβλήματα διαιρέσεως.*

(Πρόβλημα) ***1)***. ***«Τὰ $\frac{5}{8}$ πήχ. ἑνὸς ὑφάσματος τιμῶνται $10\frac{1}{2}$ δρ.· πόσον τιμᾶται ὁ 1 πῆχυς;»***

Τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ γράφομεν

$\frac{5}{8}$ πήχεως τιμῶνται $10\frac{1}{2} = \frac{21}{2}$ δρ.

1 πῆχυς x

Ἀκολούθως λύομεν τὸ πρόβλημα διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ὡς ἑξῆς.

Τὰ $\frac{5}{8}$ πήχ. τιμῶνται $\frac{21}{2}$ δρ.

τὸ $\frac{1}{8}$ ...... $\frac{21}{2} : 5 = \frac{21}{2\times 5} = \frac{21}{10}$ δρ.

τὰ $\frac{8}{8}$ $(=1)$ .... $\frac{21}{10} \times 8 = \frac{21}{5} \times 4 = \frac{84}{5} = 16\frac{4}{5}$ δρ.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ $\frac{21}{2}$ δρ. διὰ τοῦ $\frac{5}{8}$. Πράγματι $\frac{21}{2} : \frac{5}{8} = \frac{21}{2} \times \frac{8}{5} = \frac{21}{1} \times \frac{4}{5} = \frac{84}{5} = 16\frac{4}{5}$.

(Πρόβλημα) ***2)***. ***«Αἱ $5\frac{1}{2}$ ὀκ. ἑνὸς πράγματος τιμῶνται $27\frac{1}{2}$ δραχμάς· πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ;»***

Ἐν πρώτοις γράφομεν

5

$$5\frac{1}{2}=\frac{11}{2}\text{ ὀκ. τιμῶνται } 27\frac{1}{2}=\frac{55}{2}\text{ δρ.}$$
$$\frac{1\text{ ὀκ} \qquad\qquad\qquad\qquad x}{}$$

καὶ ἀκολούθως λύομεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς.

Τὰ $\frac{11}{2}$ ὀκ. τιμῶνται $\frac{55}{2}$ δρ.

τὸ $\frac{1}{2}$ » » $\frac{55}{2}:11=\frac{55}{2\times 11}$ δρ.

τὰ $\frac{2}{2}(=1)$» » $\frac{55}{2\times 11}\times 2=5$ δρ.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ $27\frac{1}{2}$ διὰ τ[οῦ] $5\frac{1}{2}$. Πράγματι ἔχομεν $27\frac{1}{2}:5\frac{1}{2}=\frac{55}{2}:\frac{11}{2}=\frac{55}{2}\times\frac{2}{11}=\frac{55}{11}=5$.

(Πρόβλημα) *3)*. « *Τὸ τριπλάσιον καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀπ[ο]τελοῦν τὸν ἀριθμὸν 11. Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμὸς αὐτός;*»

Γράφομεν ἐν πρώτοις

$$3\frac{2}{3}=\frac{11}{3}\text{ τοῦ ἀριθμοῦ εἶνε } 11$$
$$\frac{1 \qquad\qquad\qquad\qquad x}{}$$

καὶ λύομεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς.

Τὰ $\frac{11}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶνε 11

τὸ $\frac{1}{3}$ » » $11:11=1$

τὰ $\frac{3}{3}$ $(=1)$ » $1\times 3=3$.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν ἀμέσως, ἐὰν διαιρέσωμεν τ[ὸ] 11 διὰ τοῦ $\frac{11}{3}$. Πράγματι εἶνε $11:\frac{11}{3}=11\times\frac{3}{11}=3$.

Εἰς τ' ἀνωτέρω προβλήματα καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὰ δίδετ[αι] ἡ τιμὴ μερῶν τῆς μονάδος καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τ[ῆς] μιᾶς ἀκεραίας μονάδος. Πρὸς λύσιν αὐτῶν κάμνομεν διαίρεσιν καὶ διαιρετέος μὲν εἶνε ἡ τιμὴ τῶν μερῶν τῆς μονάδος, ἡ ὁποί[α] δίδεται, διαιρέτης δὲ ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος παριστάνει τὰ μέρη τῆ[ς] μονάδος (παράβ. § 25, β'). Εἰς τὸν αὐτὸν κανόνα περιλαμ[-] νεται καὶ ἡ λύσις τῶν προβλημάτων εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται πολλαπλάσιον ἢ μέρος ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ αὐτὸς ὁ ἀριθμός.

Συγκρίνοντες τὸν κανόνα αὐτὸν πρὸς τὸν εἰς τὴν § 25, 6′ βλέπομεν ὅτι εἶνε ὅμοιος μὲ ἐκεῖνον, καὶ συνάγομεν ὅτι·

«*δυνάμεθα νὰ λύσωμεν διὰ διαιρέσεως πλεῖστα προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ πολλῶν μονάδων καὶ μερῶν αὐτῆς, ζητεῖται δὲ ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος*».

(Πρόβλημα) *4)*. «*Μὲ 2 $\frac{1}{2}$ δρ. ἀγοράζει τις 1 ὀκ. πράγματος· μὲ 17 δρ. πόσας ὀκάδας θ' ἀγοράσῃ;*»

Γράφομεν ἐν πρώτοις

μὲ $2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ δρ. ἀγοράζει 1 ὀκ.

» 17 x

καὶ ἀκολούθως λύομεν τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς.

Μὲ $\frac{5}{2}$ δρ. ἀγοράζει .... 1 ὀκ.

» $\frac{1}{2}$ » .... $1:5=\frac{1}{5}$ ὀκ.

» $\frac{2}{2}$ (=1) » .... $\frac{1}{5}\times 2=\frac{2}{5}$ ὀκ.

» 17 » .... $\frac{2}{5}\times 17=\frac{34}{5}=6\frac{4}{5}$ ὀκ.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $17:2\frac{1}{2}$. Ἤτοι $17:\frac{5}{2}=17\times\frac{2}{5}=6\frac{4}{5}$.

(Πρόβλημα) *5)*. «*Εἷς ἐργάτης τελειώνει τὰ $\frac{3}{8}$ ἑνὸς ἔργου εἰς 1 ὥραν· εἰς πόσας ὥρας θὰ τελειώσῃ τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ ἔργου;*»

Γράφομεν ἐν πρώτοις

$\frac{3}{8}$ τοῦ ἔργου τελειώνει εἰς 1 ὥρ.

$\frac{7}{10}$ x

καὶ ἀκολούθως λύομεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς.

5

τὰ $\frac{3}{8}$ ἔργου τελειώνει εἰς .... 1 ὥρ.

τὸ $\frac{1}{8}$ » » » $1:3= \frac{1}{3}$ ὥρ.

τὰ $\frac{8}{8}(=1)$ » » .... $\frac{1}{3}\times 8=\frac{8}{3}$ ὥρ.

τὸ $\frac{1}{10}$ » » .... $\frac{8}{3}:10=\frac{8}{3\times 10}$ ὥρ

τὰ $\frac{7}{10}$ » » .... $\frac{8}{3\times 10}\times 7=\frac{56}{30}$ ὥρ

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρ $\frac{7}{10}:\frac{3}{8}$. Πράγματι ἔχομεν $\frac{7}{10}:\frac{3}{8}=\frac{7}{10}\times\frac{8}{3}=\frac{56}{30}$.

Εἰς καθὲν τῶν δύο τελευταίων προβλημάτων καὶ εἰς τὰ ὅμοια π αὐτὰ δίδεται ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος καὶ ἡ τιμὴ πολλῶν ὁμοειδῶν μ δων ἢ μερῶν αὐτῆς καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν μονά τούτων.

Τὰ προβλήματα αὐτὰ λύομεν ἀμέσως διὰ διαιρέσεως καὶ δια τέος μὲν εἶνε ἡ τιμὴ τῶν μονάδων ἢ τῶν μερῶν αὐτῆς, διαιρέτης τιμὴ τῆς μονάδος (παραβ. § 25 στ').

§ 57. Τροπὴ κλάσματος εἰς δεκαδικόν.—

α') Διὰ νὰ τρέψωμεν κλάσμα, π.χ. τὸ $\frac{3}{8}$ εἰς δεκαδικὸν ἀ μόν, παρατηροῦμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ μετατρέψωμεν αὐτὸ εἰς τὴν δ ρεσιν 3 :8, ἐπειδὴ εἶνε $3:8=\frac{3}{8}$ (§ 53, δ')

Ἐὰν τὸν διαιρετέον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς γράψωμεν ὡς δεκα 3,00..... θὰ ἔχωμεν $\frac{3}{8}$ =3,00.. : 8 καὶ ἐκτελοῦντες τὴν διαίρ αὐτὴν εὑρίσκομεν πηλίκον 0,375. Ὥστε εἶνε $\frac{3}{8}=0,375$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{13}{20}$ =13,000...:20=0

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι· ***«διὰ νὰ τρέψωμεν κλάσμα εἰς δεκα ἀριθμόν, γράφομεν τὸν ἀριθμητὴν ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴ ἀκολούθως διαιροῦμεν τοῦτον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ σματος».***

β') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν εἰς δεκαδικὸν τὸ κλ $\frac{1}{3}$. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν $\frac{1}{3}$ =1, 00...:3=0,333...

Καθὼς βλέπομεν, δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν ὅσον θέλομεν, χωρὶς νὰ εὕρωμεν ποτὲ ὑπόλοιπον 0, τὸ δὲ πηλίκον θὰ ἔχῃ ἀναρίθμητα δεκαδικὰ ψηφία. Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν, ἐὰν ἔχωμεν τὸ κλάσμα $\frac{2}{7}$ καὶ θέλωμεν νὰ τρέψωμεν αὐτὸ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, κατὰ τὴν τροπὴν κλάσματος εἰς δεκαδικὸν ἢ θὰ εὕρωμεν κατὰ τὴν διαίρεσιν ὑπόλοιπον 0, ὁπότε τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, ἢ ἡ διαίρεσις δύναται νὰ ἐξακολουθήσῃ ἐπ' ἄπειρον, ὁπότε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀναρίθμητα ψηφία τοῦ πηλίκου.

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν παρατηροῦμεν ὅτι, ἓν ἢ περισσότερα ψηφία τοῦ πηλίκου ἐπαναλαμβάνονται ἀπό τινος καὶ ἑξῆς τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν. Οὕτω π. χ. κατὰ τὴν τροπὴν τοῦ $\frac{1}{3}$ εἰς δεκαδικόν, τὸ πηλίκον ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία καὶ πάντα τὰ αὐτά. Ὁμοίως κατὰ τὴν τροπὴν τοῦ $\frac{2}{7}$ ἔχομεν ὅτι τὸ πηλίκον εἶνε 0,285714285..., ἤτοι ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, ἐπαναλαμβάνονται δὲ εἰς αὐτὰ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τὰ 2· 8· 5· 7· 1· 4.

γ') Δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ μὲ ἀναρίθητα δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἐπαναλαμβάνονται ἀπό τινος καὶ ἑξῆς κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, λέγονται *περιοδικοὶ δεκαδικοὶ ἀριθμοί*, ἡ δὲ ὁμὰς τῶν ἐπαναλαμβανομένων ψηφίων λέγεται *περίοδος*. Οἱ μέχρι τοῦδε δεκαδικοὶ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ὡρισμένον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων λέγονται *κοινοὶ δεκαδικοί*, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν περιοδικῶν. 5

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ τραποῦν τὰ ἑπόμενα κλάσματα εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμούς. (Ἐὰν ὁ προκύπτων ἀριθμὸς εἶνε περιοδικός, νὰ διακοπῇ ἡ διαίρεσις μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς περιόδου). α') $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{11}{21}$· β') $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{8}{25}$· γ') $\frac{6}{7}$, $6\frac{2}{3}$, $16\frac{1}{11}$, $\frac{10}{13}$.

2) Ὁμοίως τὰ κλάσματα· α') $\frac{37}{180}$, $\frac{57}{200}$, $\frac{753}{1080}$, $\frac{8483}{1000}$. β') $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{12}$· γ') $\frac{7}{13}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{24}$, $\frac{516}{9}$· δ') $\frac{17}{63}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{51}{12}$, $\frac{107}{12}$.

3) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων.

α′) $1\frac{1}{2}+3{,}5$· 6′) $2\frac{3}{4}-1{,}52$· γ′) $2\frac{4}{55}\times 3{,}12$· δ′) $3\frac{3}{20}\times 4{,}1$.
δ′) $4\frac{4}{5}:2{,}16$.

§ **58. Τροπὴ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ εἰς κλάσμα.**— Διὰ νὰ τρέψωμεν κοινὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα, π. χ. τὸν 0, 345, ἀπαγγέλλομεν αὐτὸν ὡς ἑξῆς· *τριακόσια τεσσαράκοντα πέντε χιλιοστά*, καὶ γράφομεν αὐτὸν ἀμέσως ὑπὸ μορφὴν κλασματικήν· ἤτοι $\frac{345}{1000}$, ἁπλοποιοῦντες δι' αὐτὸ εὑρίσκομεν $\frac{69}{200}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $1{,}43=\frac{143}{100}$. Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι, ***«διὰ νὰ τρέψωμεν κοινὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα, γράφομεν ἀριθμητὴν μὲν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν χωρὶς κόμμα, παρονομαστὴν δὲ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσα εἶνε τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ»***.

§ **59. Πράξεις ἐπὶ κλασμάτων καὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν.**—

α′) (Πρόβλημα). «***Ἠγόρασέ τις 100 ὀκ. μῆλα πρὸς $7\frac{1}{2}$ δρ. τὴν ὀκᾶν· πόσα ἐπλήρωσε;***»

Ὡς γνωστόν, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτό, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ $7\frac{1}{2}$ δρ. ἐπὶ 100. Ἀλλὰ πρὸς εὐκολίαν τρέπομεν τὸ $7\frac{1}{2}$ δρ. εἰς δεκαδικὸν 7,5 δρ., ὅτε ὁ πολλαπλασιασμὸς γίνεται εὐκολώτερον καὶ ἔχομεν $7{,}5\times 100=750$ δρ.

6′) Ἔστω ὅτι ἔχομεν ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 42,85 δρ. τὸ $7\frac{5}{8}$δ. Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν, πρέπει νὰ τρέψωμεν τὸν δεκαδικὸν εἰς κλάσμα, ἢ τοὐναντίον τὸν $\frac{5}{8}$ εἰς δεκαδικόν.

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἔχομεν $\frac{5}{8}=0{,}625$. Ἑπομένως εἶνε $7\frac{5}{8}=7{,}625$. Ἄρα ἔχομεν 42,85 δρ. — 7,625 δρ. = 35,225 δρ.

γ′) Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων παραδειγμάτων βλέπομεν ὅτι, ὅταν ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν πράξεις ἐπὶ κλασματικῶν καὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν, ἄλλοτε μὲν τρέπομεν τοὺς κλασματικοὺς εἰς δεκαδικούς, ἄλλοτε δὲ διατηροῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς ὅπως ἐδόθησαν. Συνηθέστερον γίνεται τὸ πρῶτον, καὶ ἰδίως ὅταν οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους ἔχομεν, τρέπωνται εἰς κοινὰ δεκαδικὰ κλάσματα.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ.

α') $6{,}18 + \frac{3}{4} - 1{,}5$· β') $\frac{3}{8} : 0{,}142$· γ') $2\frac{1}{5} + 3{,}1 - 0{,}831 \times \frac{1}{9}$· δ') $\frac{4}{25} \times 3{,}12 + \frac{2}{5} \times 0{,}14 : 0{,}75$.

§ 60. Συμβολικὴ παράστασις πράξεων ἐπὶ ἀριθμῶν διὰ γραμμάτων.—

α') (Πρόβλημα). « ***Ἓν ποσὸν ἐμοιράσθη εἰς 4 ἀνθρώπους. Ὁ πρῶτος ἔλαβε $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ, ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ ὁ τρίτος τὸ $\frac{1}{3}$, ὁ δὲ τέταρτος τὸ ὑπόλοιπον· πόσον μέρος τοῦ ποσοῦ ἔλαβεν ὁ τέταρτος;*** »

Ἀφοῦ ὁ πρῶτος, ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος ἔλαβον ἀντιστοίχως τὸ $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὅλου ποσοῦ, καὶ οἱ τρεῖς αὐτοὶ ἔλαβον μαζῆ $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{47}{60}$ τοῦ ποσοῦ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὅλον ποσὸν εἶχεν $\frac{60}{60}$ ἔμειναν $\frac{60}{60} - \frac{47}{60} = \frac{13}{60}$ τὰ ὁποῖα ἔλαβεν ὁ τελευταῖος. Ὥστε ὁ τέταρτος ἔλαβε τὰ $\frac{13}{60}$ τοῦ ποσοῦ. 5

Ἂν τὸ διανεμηθὲν ποσὸν ἦτο 500 δρ., ὁ τέταρτος ἔλαβε τὰ $\frac{13}{60}$ τῶν 500 δρ., ἤτοι $500 \times \frac{13}{60}$. Ἂν τὸ διανεμηθὲν ποσὸν ἦτο 1200 δραχμαί, ὁ τέταρτος ἔλαβε 1200 δρ. $\times \frac{13}{60}$. Ἂν τὸ ποσὸν ἦτο α δρ., ὁ τέταρτος θὰ ἐλάμβανεν α δρ. $\times \frac{13}{60}$.

Ἐν γένει, θὰ παραστάνωμεν διὰ τῶν πρώτων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ὑποτίθεται ὅτι δίδονται μέν, ἀλλ' ἡ τιμὴ αὐτῶν δὲν εἶνε ὡρισμένη. Πάντως ὅμως ὑποτίθεται ὅτι ἓν γράμμα ἔχει μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τιμήν, δηλαδὴ παριστάνει ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κατὰ τὴν λύσιν ἑνὸς ζητήματος, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει τὸ γράμμα αὐτό.

β') Ἐὰν α, β, γ παραστάνουν τρεῖς ἀφῃρημένους ἀριθμοὺς οἱουσδήποτε, ἢ συγκεκριμένους ἀλλ' ὁμοειδεῖς, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶνε τὸ $\alpha+\beta+\gamma$, ἢ τὸ $\alpha+\gamma+\beta$, ἢ τὸ $\beta+\gamma+\alpha$ κλπ.

γ') Ἐὰν α, β εἶνε δύο ἀριθμοί, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ β εἶνε μικρότερος τοῦ α, ἡ διαφορὰ τούτων παριστάνεται διὰ τοῦ $\alpha-\beta$. Ἐὰν δὲ ἡ διαφορὰ αὐτὴ παρασταθῇ διὰ τοῦ γ, θὰ ἔχωμεν $\alpha-\beta=\gamma$ καὶ θὰ εἶνε $\alpha=\beta+\gamma$.

δ') Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ α ἐπὶ ἄλλον, π. χ. τὸν 5, σημαίνει τὸ ἄθροισμα $\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\alpha$· ἤτοι 5 φορὰς τὸν α, σημειώνομεν δ' αὐτὸ διὰ τοῦ 5. α ἢ καὶ ἁπλῶς διὰ τοῦ 5 α. Ὥστε ἔχομεν $\alpha.\,5=5\alpha$. Ὁμοίως $\alpha.\,7=7\alpha$.

Ἐν γένει, ἐὰν β εἶνε ἀκέραιος ἀριθμός, τὸ γινόμενον $\alpha.\beta$ σημαίνει τὸ ἄθροισμα β προσθετέων ἴσων μὲ α, ἤτοι τὸ ἄθροισμα $\alpha+\alpha+\alpha$ $\ldots+\alpha$, ἐν ὅλῳ β φορὰς καὶ ἔχομεν $\alpha\times\beta=\beta\times\alpha$, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων αὐτοῦ·

ε') Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν α καὶ β σημειώνεται διὰ τοῦ $\alpha:\beta$ παριστάνεται δέ, ὡς γνωστὸν § (53, δ') διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$

στ') Τὸ γινόμενον ἑνὸς κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμὸν εἶνε ἴσον μὲ $\frac{\alpha}{\beta}\times\lambda=\frac{\alpha\times\lambda}{\beta}$ (§ 52). Ὁμοίως ἔχομεν $\lambda\times\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\lambda\times\alpha}{\beta}$

Τὸ γινόμενον δύο κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶνε $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ ἰσοῦται μὲ $\frac{\alpha\times\gamma}{\beta\times\delta}$ (§52,δ').

Τὸ πηλίκον τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ τοῦ ἀκεραίου λ ἰσοῦται μὲ $\frac{\alpha}{\beta}:\lambda=\frac{\alpha}{\beta\times\lambda}$ τὸ δὲ πηλίκον τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶνε

$$\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\times\delta}{\beta\times\gamma}.$$

Ἐὰν ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται α δρ., ὅπου α παριστάνει ἕνα οἱονδήποτε ὡρισμένον ἀριθμὸν καὶ ζητῆται ἡ τιμὴ β ὀκάδων, θὰ ἔχωμεν (§ 19), ἂν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν $x=\alpha\beta$ δρ.

Ἂν τοὐναντίον αἱ α μονάδες ἐξ αὐτῶν τιμῶνται β δρ., εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν αὐτῆς, ἂν διαιρέσωμεν τὸ $\beta:\alpha$· ἤτοι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος παριστάνεται ὑπὸ τοῦ $\frac{\beta}{\alpha}$.

Αἱ τοιαῦται συμβολικαὶ γραφαί, ὡς αἱ ἀνωτέρω εἰς τὰς ὁποίας ὑπάρχουν γράμματα παριστάνοντα ἀριθμούς, λέγονται καὶ τύποι.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν ἑνὸς τύπου, δηλαδὴ τὸν ἀριθμὸν τὸν ὁποῖον παριστάνει, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸν ἀριθμὸν τὸν ὁποῖον παριστάνει καθὲν γράμμα. Ἂν δὲ δοθοῦν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, ἀφοῦ πρῶτον γράψωμεν ἀντὶ τῶν γραμμάτων τὴν τιμήν τούτων, ἐκτελοῦμεν τὰς σημειωμένας μεταξὺ αὐτῶν πράξεις.

Οὕτω π.χ. ὁ τύπος $\alpha+\beta$ ὅταν εἶνε $\alpha=2$, $\beta=3$, ἔχει τὴν τιμὴν $2+3=5$· ὅταν $\alpha=4$ καὶ $\beta=6$, εἶνε $4+6=10$· ὅταν $\alpha=2\frac{1}{2}$ καὶ $\beta=3\frac{3}{4}$ εἶνε $2\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}=2\frac{2}{4}+3\frac{3}{4}=5\frac{5}{4}=6\frac{1}{4}$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ κάτωθι τύπου· $\alpha+\beta-\gamma$· α΄) ὅταν $\alpha=2, \beta=3, \gamma=1$· β΄) $\alpha=5\frac{1}{2}$, $\beta=3, \gamma=5,3$.

2) Ὁμοίως τῶν· α΄) $(\alpha+\beta).\gamma$, ὅταν $\alpha=4$, $\beta=5$, $\gamma=2$· β΄) $(\alpha+\beta)\times(\gamma+\delta)$, ὅταν $\alpha=4$, $\beta=1\frac{1}{3}$, $\gamma=\frac{1}{3}$, $\delta=1,5$. γ΄) $(\alpha-\beta).(\gamma-\delta)$ 5 ὅταν $\alpha=15$, $\beta=4$, $\gamma=3$, $\delta=2$.

3) Ὁμοίως τοῦ $(\alpha+\beta):\gamma$, ὅταν τὸ $\alpha=\frac{3}{8}$, $\beta=\frac{3}{5}$, $\gamma=\frac{7}{2}$.

4) $(\alpha+\beta):(\gamma-\delta)$, ὅταν $\alpha=12$, $\beta=6$, $\gamma=8$, $\delta=1$.

5) Τοῦ $(\alpha^2+2\alpha+1):(\alpha+1)$ ὅταν $\alpha=1$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἔχει τις *α* δραχμὰς καὶ λαμβάνει ἀκόμη 5 δραχμάς πόσας ἔχει ἐν ὅλῳ;

2) Ἔχει τις *α* δραχμὰς καὶ λαμβάνει ἀκόμη τριπλάσιον τούτων· πόσας ἔχει ἐν ὅλῳ;

3) Ἔχει τις *β* δραχμάς, καὶ ἐξ αὐτῶν δίδει· α΄) 6 δραχμάς· β΄) $3\frac{3}{4}$ δρ., καὶ τέλος *δ* δρ· πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν;

4) Ἔχει τις *α* δρ. καὶ ἐξοδεύει τὸ ἥμισυ αὐτῶν· πόσα τοῦ μένουν; Πόσα τοῦ μένουν ἐὰν ἐξοδεύῃ τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον, τὸ πέμπτον αὐτῶν;

5) Ἂν *α* φανερώνῃ ἕνα ἀριθμὸν ἀκέραιον, πῶς θὰ παρασταθῇ ὁ κατὰ μονάδα μεγαλύτερος αὐτοῦ, πῶς ὁ κατὰ μονάδα μικρότερος τούτου;

6) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς ἐμπορεύματος στοιχίζει *μ* δραχμάς· πόσον στοιχίζουν αἱ 2 ὀκάδες, αἱ 3 ὀκάδες, αἱ 6 ὀκάδες, αἱ β ὀκάδες αὐτοῦ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Χ.

Περὶ μέτρων σταθμῶν καὶ νομισμάτων.

§ **61. Περὶ μετρήσεως ποσῶν.—**

Καλοῦμεν *ποσὸν* πᾶν ὅ,τι ἐπιδέχεται αὔξησιν καὶ ἐλάττωσιν. Π.χ. τὸ μῆκος, τὸ βάρος, τὸν ὄγκον, τὸν χρόνον κλπ.

Ἐὰν ἔχωμεν ἓν ποσόν, π.χ. χρήματα καὶ θέλωμεν νὰ γνωρίσωμεν ἀκριβῶς πόσα ἔχομεν, πρέπει νὰ μετρήσωμεν αὐτά, δηλαδὴ νὰ λάβωμεν ἓν ὡρισμένον ποσὸν χρημάτων, π.χ. μίαν δραχμὴν καὶ νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς χωρεῖ αὐτὴ εἰς τὸ δοθὲν ποσόν. Ὁ ἀριθμὸς τὸν ὁποῖον θὰ εὕρωμεν, θὰ παριστάνῃ τὸ ποσὸν τοῦτο.

Γενικῶς, διὰ νὰ προσδιορίσωμεν ἀκριβῶς ἓν οἱονδήποτε ποσόν, λαμβάνομεν ἓν ἄλλο ὁμοειδές αὐτοῦ καὶ πρὸς τοῦτο συγκρίνομεν τὸ δοθέν, δηλαδὴ εὑρίσκομεν πόσας φορὰς τὸ δεύτερον χωρεῖ εἰς τὸ πρῶτον. Ἡ σύγκρισις αὐτὴ ἑνὸς ποσοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς καὶ ὡρισμένον λέγεται *μέτρησις τοῦ ποσοῦ*. Τὸ ὡρισμένον ποσὸν μὲ τὸ ὁποῖον μετροῦμεν ἄλλο ὁμοειδὲς πρὸς αὐτὸ λέγεται *μονὰς μετρήσεως*, ὁ δὲ ἀριθμός ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐκ τῆς μετρήσεως, λέγεται *τιμὴ* τοῦ δοθέντος ποσοῦ ἢ ἀριθμός παριστάνων τὸ ποσόν.

Διὰ νὰ μετρήσωμεν ἓν ποσὸν χρημάτων, λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὴν δραχμήν, ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν καὶ ἄλλην μονάδα· τὸ ἑκατοντάδραχμον π.χ. καὶ ἄλλας, ἂν τὸ ποσὸν εἶνε μεγαλύτερον.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι διὰ τὴν μέρησιν ἑνὸς ποσοῦ δύνανται νὰ ὑπάρχουν διάφοροι μονάδες.

§ **62. Μονάδες μήκους.—**

α΄) Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ μήκους ἔχομεν ὡς μονάδα τὸ *μέτρον* ἢ *βασιλικὸν πῆχυν*, τὸ ὁποῖον εἶνε περίπου τὸ ἓν τῶν 10000000 ἴσων μερῶν τοῦ τετάρτου μέρους τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς. Ἐπειδὴ τὸ μέτρον εἶνε πολὺ μικρὸν διὰ τὴν μέτρησιν μεγάλων ἀποστάσεων, σχηματίζομεν ἐκ τοῦ μέτρου ἄλλας μονάδας, ἀκριβῶς ὅπως εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἐσχηματίσαμεν τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων (§ 3). Οὕτω τὸ μῆκος δέκα μέτρων λαμβάνεται ὡς μονὰς καὶ λέγεται *δεκάμετρον*, ὁμοίως τὸ μῆκος ἑκατὸν μέτρων λαμβάνεται ὡς μονὰς καὶ λέγεται *ἑκατόμετρον*, τὸ μῆκος χιλίων μέτρων *χιλιόμετρον* ἢ *στάδιον* καὶ τὸ μῆκος δέκα χιλιάδων μέτρων *μυριάμετρον*.

Ἐπειδὴ ἀφ' ἑτέρου τὸ μέτρον εἶνε πολὺ μέγα διά τινας μετρήσεις μικρῶν ἀποστάσεων, σχηματίζομεν ἐκ τοῦ μέτρου ἄλλας μονάδας, ὅπως ἐκ τῆς μονάδος ἐσχηματίσαμεν τὰς μονάδας τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν (§ 34). Οὕτω λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸ δέκατον τοῦ μέτρου, τὸ ὁποῖον λέγεται *παλάμη* ἢ *δεκατόμετρον*· τὸ ἑκατοστὸν τοῦ μέτρου, τὸ ὁποῖον λέγεται *δάκτυλος*, κοινῶς πόντος ἢ *ἑκατοστόμετρον*· τὸ χιλιοστὸν τοῦ μέτρου, τὸ ὁποῖον λέγεται *γραμμὴ* ἢ *χιλιοστόμετρον*.

Ἐὰν καθεμίαν τῶν ἀνωτέρω μονάδων ἐκφράσωμεν εἰς μέτρα, θὰ ἔχωμεν 1 δεκάμετρον = 10 μ., 1 ἑκατόμετρον = 100 μ., 1 χιλιόμετρον = 1000 μ., 1 μυριάμετρον = 10000 μ., 1 παλάμη = 0,1 μ., 1 δάκτυλος = 0,01 μ., 1 γραμμὴ = 0,001 μ.

Τὸ μέτρον, ἐκ τοῦ ὁποίου σχηματίζομεν τὰς ἄλλας μονάδας, λέγεται *ἀρχικὴ μονάς*.

β') Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω μονάδων μεταχειρίζονται εἰς τὴν οἰκοδομικὴν τὸν *τεκτονικὸν πῆχυν*, ὁ ὁποῖος εἶνε 0,75μ., ἢ $\frac{3}{4}$ μ. Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑφασμάτων μεταχειρίζονται ὡς μονάδα τὸν μικρὸν πῆχυν Κωνσταντινουπόλεως, ἢ ἁπλῶς τὸν *πῆχυν*, ὁ ὁποῖος ἔχει 0,648 μ., ἢ 64 δακτύλους περίπου, διαιρεῖται δ' εἰς 8 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *ρούπια*. 5

Εἰς τὴν Ἀγγλίαν μεταχειρίζονται ὡς μονάδα μήκους τὴν *ὑάρδαν*, ἡ ὁποία εἶνε ἴση μὲ 0,914 μ. καὶ ὑποδιαιρεῖται εἰς 3 *πόδας*, καθεὶς δὲ πούς εἰς 12 δακτύλους.

γ') Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω μονάδων μήκους ἀξιοσημείωτοι εἶνε καὶ αἱ ἑξῆς. Ἡ *ὀργυιά*, ἡ ὁποία εἶνε ἴση πρὸς 1,919 μ. καὶ ὑποδιαιρεῖται εἰς 6 *πόδας*, καθεὶς πούς εἰς 12 *δακτύλους*, καὶ καθεὶς δάκτυλος εἰς 12 *γραμμάς*.

Ἡ λεῦγα, ἡ ὁποία εἶνε ἴση μὲ 4000 μ.· τὸ *γεωγραφικὸν μίλιον*, τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ 7420 μ., τὸ δὲ *ναυτικὸν μίλιον* μὲ 1852 μέτρα. Τὸ *ἀγγλικὸν μίλιον* εἶνε ἴσον μὲ 1760 ὑάρδας ἢ μὲ 1609 μ.

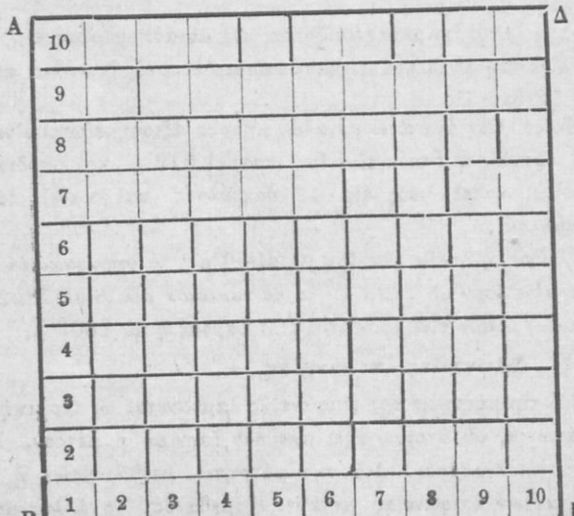
§ 63. Μονάδες ἐπιφανείας.—

α') Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας λαμβάνεται ὡς ἀρχικὴ μονὰς τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν ἴσην μὲ 1 μέτρον, λέγεται δὲ *τετραγωνικὸν μέτρον*. Διὰ τὴν μέτρησιν μεγαλυτέρων ἢ μικροτέρων ἐκτάσεων ἐπιφανείας μεταχειριζόμεθα ἐπὶ ς ἄλλας μονάδας, αἱ ὁποῖαι εἶνε τετράγωνα, τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ σχηματίζεται ἐκ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου, καθὼς αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων τῶν ἀκεραίων καὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν ἐκ τῆς μονάδος. Οὕτω ἔχομεν ἀκόμη τὰς ἑξῆς μονάδας ἐπιφανείας.

Τὸ τετραγωνικὸν δεκάμετρον, ἔχον πλευρὰν δέκα μέτρα, *τὸ τετραγωνικὸν ἑκατόμετρον*, ἔχον πλευρὰν 100 μ.· *τὸ τετραγωνικὸν μυριάμετρον*, ἔχον πλευρὰν 10000 μ.· *τὸ τετραγωνικὸν δεκατόμετρον*, ἔχον πλευρὰν 0,1 μ.· *τὸ τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον καὶ χιλιοστόμετρον*, ἔχοντα πλευρὰς ἀντιστοίχως 0,01 καὶ 0,001 μ.

β΄) Ἐὰν λάβωμεν ἓν τετράγωνον π. χ. τὸ ΑΒΓΔ καὶ διαιρέσωμεν καθεμίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ΒΑ καὶ ΒΓ εἰς 10 ἴσα μέρη, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως τῆς ΒΑ φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ἀπὸ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως τῆς ΒΓ παραλλήλους πρὸς τὴν ΒΑ, τὸ τετράγωνον θὰ χωρισθῇ εἰς 100 ἴσα τετράγωνα. Καθὲν τούτων θὰ ἔχῃ πλευρὰν τὸ δέκατον τῆς πλευρᾶς τοῦ ἀρχικοῦ, εἶνε δὲ τὸ ἑκατοστὸν ἐκείνου. Καὶ ἀντιστρόφως, τὸ ἔχον πλευρὰν δεκαπλασίαν τοῦ ἄλλου εἶνε ἑκατονταπλάσιον αὐτοῦ.

Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι τὸ τετραγωνικὸν δεκάμετρον εἶνε ἴσον μὲ 100 τ. μ., τὸ τετραγωνικὸν ἑκατόμετρον μὲ 10000 τ. μ., τὸ τετραγωνικὸν χιλιόμετρον μὲ 1000000 τ. μ.



Τὸ τετραγωνικὸν δεκατόμετρον εἶνε ἴσον μὲ 0,01 τ. μ.· τὸ τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον μὲ 0,0001 τ. μ. καὶ οὕτω καθεξῆς.

γ') Πρὸς μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων μεταχειρίζονται συνήθως ἐν Ἑλλάδι ὡς μονάδα τετράγωνον, ἔχον πλευρὰν μήκους ἑνὸς τεκτονικοῦ πήχεως ἢ 0,75 μ. καὶ λέγεται *τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς*, εἶνε δὲ τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου. Καὶ ἀντιστρόφως, τὸ τετραγωνικὸν μέτρον εἶνε ἴσον $\frac{16}{9}$ τοῦ τετραγωνικοῦ τεκτονικοῦ πήχεως.

Τὸ στρέμμα εἶνε ἐπιφάνεια 1000 τ. μ., τὸ δὲ παλαιὸν *στρέμμα* 1270 τ. μ.

Πρὸς συντομίαν παριστάνομεν τὸ τετραγωνικὸν μέτρον διὰ τοῦ (μ²), τὸ τετραγ. δεκάμετρον διὰ τοῦ (δμ²), τὸ τετραγ. χιλιόμετρον διὰ τοῦ (χμ²), τὸ τετραγ. δεκατόμετρον διὰ τοῦ (δκ²) κ. ο. κ.

§ 64. Μονάδες ὄγκου καὶ χωρητικότητος.—

α') Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ ὄγκου καὶ τῆς χωρηκότητος λαμβάνομεν ὡς ἀρχικὴν μονάδα τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον περατοῦται εἰς 6 ἴσα τετράγωνα, καθὲν τῶν ὁποίων εἶνε ἓν τετραγωνικὸν μέτρον, καθεμία δὲ κόψις αὐτοῦ ἔχει μῆκος 1 μ. Ἡ μονὰς αὐτὴ λέγεται *κυβικὸν μέτρον* καὶ σημειώνεται διὰ τοῦ (μ³). Ἐξ αὐτοῦ σχηματίζομεν ἄλλας μικροτέρας ἢ μεγαλυτέρας μονάδας, ὅπως καὶ τὰς μονάδας διαφόρων τάξεων ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα. 5

Οὕτω ἔχομεν τὴν *κυβικὴν παλάμην* (δκ³) καὶ τὸν *κυβικὸν δάκτυλον* (εμ³), καὶ εἶνε ἡ κυβικὴ παλάμη τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ (μ³), ὁ δὲ (εμ³) τὸ $\frac{1}{1000000}$ τοῦ (μ³).

β') Ὅσον χωρεῖ εἰς μίαν κμβικὴν παλάμην λέγεται *λίτρον* καὶ χρησιμεύει συνήθως ὡς μονὰς πρὸς μέτρησιν τῶν ὑγρῶν. Ἐπειδὴ τὸ (μ³) ἔχει 1000 κυβικὰς παλάμας, ἕπεται ὅτι τὸ (μ³) χωρεῖ 1000 λίτρα, τὸ δὲ λίτρον εἶνε τὸ χιλιοστὸν τῆς χωρητικότητος τοῦ (μ³). Ἡ χωρητικότης 100 λιτρῶν λέγεται *ἑκατόλιτρον*.

§ 65. Μονάδες βάρους.—

α') Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ βάρους λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4,1°, τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς ἕνα κυβικὸν δάκτυλον καὶ λέγεται *γραμμάριον* (γρ.). Ἐκτὸς τῆς ἀρχικῆς αὐτῆς μονάδος βάρους ἔχομεν καὶ ἄλλας, καθὼς τὸ *χιλιόγραμμον* ἴσον μὲ 1000 γραμμάρια· τὸν *τόνον* ἴσον μὲ 1000 χιλιόγραμμα. Καὶ τὸ μὲν χιλιόγραμμον εἶνε τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου θερμοκρασίας 4,1° τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς μίαν κυβικὴν παλάμην, ὁ δὲ τόνος εἰς ἓν κυβικὸν μέτρον καὶ ἰσοῦται μὲ 781 ὀκ. καὶ 100 δρ.

Ἐν Ἑλλάδι μεταχειρίζονται ὡς μονάδα βάρους τὴν *ὀκᾶν*, ἡ ὁποία εἶνε ἴση μὲ 1280 γραμ., διαιρεῖται δὲ εἰς 400 *δράμια*. Τὸ ἓν δράμιον εἶνε ἴσον μὲ 3,2 γραμ., τὸ δὲ χιλιόγραμμον ἢ *κοιλὸν* μὲ 312,5 δράμια. Βάρος ἴσον μὲ 44 ὀκάδας λέγεται *στατήρ*.

§ **66. Μονάδες νομισμάτων.** —

α') Ἀρχικὴ μονὰς πρὸς μέτρησιν νομισμάτων διὰ τὴν Ἑλλάδα Γαλλίαν, Ἰταλίαν, Ἑλβετίαν καὶ Βέλγιον εἶνε τὸ *φράγκον*, τὸ ὁποῖον ἐν Ἑλλάδι λέγεται καὶ *δραχμή*, καὶ ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *λεπτά*.

Ἐκτὸς τῆς δραχμῆς ὑπάρχουν καὶ τὰ ἑξῆς ἀκόμη νομίσματα.

Τὸ δίδραχμον ἴσον μὲ 2 δραχμάς, τὸ πεντάδραχμον ἢ τάλληρον ἴσον μὲ 5 δραχμάς, τὸ πεντηκοντάλεπτον ἴσον μὲ 50 λεπτὰ ἢ $\frac{1}{2}$ δρ,, τὸ εἰκοσάλεπτον ἴσον μὲ 20 λεπτὰ ἢ $\frac{1}{5}$ δραχμῆς κπλ. Αὐτὰ καὶ ἡ δραχμὴ εἶνε νομίσματα ἀργυρᾶ. Χρυσᾶ νομίσμα εἶνε πεντάδραχμον, δεκάδραχμον, εἰκοσάδραχμον, πεντηκοντάδραχμον καὶ ἑκατοντάδραχμον.

Ἐκτὸς τούτων ἔχομεν ἀκόμη τὰ νικέλινα νομίσματα· πεντάλεπτον, δεκάλεπτον, εἰκοσάλεπτον· χαλκᾶ δὲ τὸ μονόλεπτον, δίλεπτον, πεντάλεπτον ἢ ὀβολὸν ἢ πεντάραν καὶ τὸ δεκάλεπτον ἢ διώβολον ἢ δεκάραν.

β') Εἰς τὴν Ἀγγλίαν ἀρχικὴ μονὰς εἶνε ἡ *λίρα στερλίνα* νόμισμα χρυσοῦν, τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ μὲ 25,23 φράγκα (περίπου)· ὑποδιαιρεῖται εἰς 20 *σελλίνια*, καθὲν σελλίνιον εἰς 12 *πέννας* καὶ καθεμία πέννα εἰς 4 *φαρδίνια*.

Ἐκ τούτων τό σελλίνιον εἶνε ἀργυροῦν, ἡ δὲ πέννα καὶ τὸ φαρδίνιον χαλκᾶ.

γ') Εἰς τὴν Ἀμερικὴν ἀρχικὴ μονὰς εἶνε τὸ *δολλάριον* καὶ εἶνε ἀξίας 5,18 φρ. Χρυσᾶ νομίσματα ὑπάρχουν 25· 20· 5· 3· καὶ 1 δολλαρίου, ἀργυρᾶ δὲ 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ τοῦ δολλαρίου. Τὸ δολλάριον ἔχει 100 σέντς.

δ') Περὶ τῶν μονάδων ἄλλων χωρῶν ἀναγράφονται εἰς τὸν ἑπόμενον πίνακα τῶν σελίδων 130 καὶ 131.

§ **67. Μονάδες χρόνου καὶ περιφερείας κύκλου.**—

α') Ἀρχικὴ μονὰς χρόνου εἶνε ἡ *ἡμέρα* ἤτοι τὸ χρονικὸν διάστημα τὸ παρερχόμενον ἀπὸ ἑνὸς μεσονυκτίου μέχρι τοῦ ἀμέσως ἑπομένου. Ἡ ἡμέρα διαιρεῖται εἰς 24 *ὥρας*, ἡ ὥρα εἰς 60' (*πρῶτα λεπτὰ*) καὶ 1' εἰς 60'' (*δεύτερα λεπτά*).

Διὰ τὴν μέτρησιν μακρῶν χονικῶν διαστημάτων λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ *ἔτος*, τὸ ὁποῖον ἔχει 365 ἡμέρας καὶ τότε λέγεται *κοινόν*, ἢ 366 καὶ τότε λέγεται *δίσεκτον*.

Δίσεκτον εἶνε τὸ ἔτος τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ 4 Π. χ. τὰ ἔτη 1920, 1924, 1928 εἶνα *δίσεκτα*.

Τὸ ἔτος διαιρεῖται εἰς 12 *μῆνας*, τῶν ὁποίων ἄλλοι μὲν ἔχουν 30 ἡμέρας καὶ ἄλλοι 31, ὁ δὲ Φεβρουάριος 28 καὶ ἀνὰ 4 ἔτη 29 ἡμέρας. Χρονικὸν διάστημα 100 ἐτῶν λέγεται *αἰών*. *Ἑβδομὰς* εἶνε χρονικὸν διάστημα 7 ἡμερῶν, ἀρχομένη ἀπὸ τῆς Κυριακῆς καὶ λήγουσα τὸ Σάββατον. 5

β') Διὰ τὴν μέτρησιν ἑνὸς κυκλικοῦ τόξου λαμβάνομεν ὡς μονάδα τόξον τῆς αὐτῆς περιφερείας ἴσον μὲ $\frac{1}{360}$ αὐτῆς, τὸ ὁποῖον καλεῖται *μοῖρα*. Ὥστε ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἔχει μῆκος 360 μοιρῶν. Ἡ μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 *πρῶτα λεπτὰ* (') καὶ καθὲν πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 *δεύτερα* ('') **λεπτά.** Αἱ μοῖραι σημειώνονται μὲ τὸ σύμβολον (°). Π. χ 45 μοῖραι σημιώνονται οὕτω 45°.

§ **68. Δεκαδικὸν μετρικὸν σύστημα.**—

Τὰς μονάδας τὰς ὁποίας ἀνωτέρω ἐγνωρίσαμαν δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν εἰς δύο κατηγορίας. Πρῶτον ἐκείνας αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὑποδιαίρεσιν ὁμοίαν μὲ τὰς μονάδας τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος τῆς ἀριθμήσεως (§ 3), καὶ τὴν ὁποίαν καλοῦμεν

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΤΕΡΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΑΙ ΟΠΟΙΑ

Α΄) μέτρα

1) Δεκαδικὸν με

Κράτη εἰς τὰ ὁποῖα εἶνε ἐν χρήσει	Μονάδες μήκους	Μονάδες ἐπιφανείας
Γαλλία	μυριάμετρον = 10000 μ.	τετραγ. μυριάμετρον = 100000000(μ
Βέλγιον	χιλιόμετρον = 1000 μ.	» χιλιόμετρον = 1000000(μ
Ἑλβετία	ἑκατόμετρον = 100 μ.	ἑκτάριον = 10000(μ
Γερμανία	δεκάμετρον = 10 μ.	ἄριον = 100(μ
Αὐστρία		
Ἱσπανία	ἀρχικὴ μονὰς = 1 μ.	τετραγ. μέτρον = 1(μ
Ρουμανία		
Βουλγαρία		
Σερβία	ὑποδεκάμετρ. = 0,1 μ.	τετραγ. ὑποδεκάμετρον = 0,01(μ
Τουρκία	ὑφεκατόμετρον = 0,01 μ.	τετραγ. ὑφεκατόμετρον = 0,0001(μ
Ἑλλάς	χιλιοστόμετρον = 0,001 μ.	τετρ. χιλιοστόμετρον = 0,000001(μ

2) Ἄλλα

Κράτη	Μονάδες μήκους	Μονάδες ἐπιφανείας
Ἑλλὰς	τεκτονικὸς πῆχυς = 0,75 μ. ἐμπορικὸς πῆχυς = 0,648 μ. ρούπιον $= \frac{1}{8}$ πήχ.	τετραγ. τεκτον. πῆχυς $= \frac{9}{16}$ (μ στρέμμα = 1000 (μ παλαιὸν στρέμμα = 1270 (μ
Ἀγγλία καὶ Ἡνωμέναι Πολιτεῖαι	ὑάρδα = 0,914 μ. πούς $= \frac{1}{3}$ ὑάρδ. δάκτυλος $= \frac{1}{12}$ πόδ. Ἀγγλ. μίλιον = 1760 ὑάρδ. = 1609 μ.	τετραγωνικὴ ὑάρδα = 0,836 (μ ἄκρ (διὰ τοὺς ἀγρούς) = 40,5 α τετραγ. πούς, τετραγ. δάκτυλο
Ρωσσία	πῆχυς ἀρσὶν = 1,711 μ. Ἀγγλ. πούς = 0,305 μ. βέρτσιον = 1500 π. ἀρσίν	τετραγωνικὸς πούς

Β΄) Μονάδες ν

Κράτη ἔχοντα μονά

Κράτη		Ἀγγλία	Γερμανία	Σκανδιναυϊκ. χῶραι
Ἑλλάς	δραχμὴ	λίρα στερλίνα = 25,23 φρ.	μάρκον = 1,25 φρ.	φλωρίνιον = 2,12 φ
Βέλγιον, Γαλλία, Ἑλβετία	φράγκον	σελίνιον $= \frac{1}{20}$ λίρ.	πφένιγκ = 0,01 μάρ.	αἴρ = 0,01 φ
Ἰταλία	λιρέτα	πέννα $= \frac{1}{12}$ σελ.		
Ἱσπανία	πεσσέτα			
Ρουμανία	λέϊ			
Βουλγαρία	λέβι			
Σερβία	δηνάριον			

ΕΙΝΕ ΕΝ ΧΡΗΣΕΙ ΕΙΣ ΤΑ ΔΙΑΦΟΡΑ ΜΕΡΗ

καὶ σταθμά.

ρικὸν σύστημα (μὲ τιμὰς προπολεμικάς)

Μονάδες ὄγκου	Μονάδες χωρητικότητος	Μονάδες βάρους
κυβικὸν χιλιόμετρ. $=1000000000 (\mu^3)$ κυβικὸν μέτρον $= 1 (\mu^3)$ κυβ. ὑποδεκάμετρον $=0{,}001 (\mu^3)$ κυβ. ὑφεκατόμετρον $=0{,}000001 (\mu^3)$ κυβ. χιλιοστόμετ. $=0{,}000000001 (\mu^3)$	ἑκατόλιτρον $= 100$ λ. λίτρον = χωρητικότης 1 (εμ^3)	τόννος $=1000$ λιχιόγρ. χιλιόγραμμον γραμμάριον $= 0{,}001$ τοῦ χιλιογράμμου.
μονάδες		
κυβ. τεκτον. πῆχυς $= \frac{27}{64} (\mu^3)$	κιλὸν Κων]πόλεως $=35{,}37$ λ.	στατὴρ $=44$ ὀκ. ὀκᾶ $=1280$ γραμμ. δράμιον $= \frac{1}{400}$ ὀκ. Ἐν. λίτρα $=149$ δρμ. χιλιόλιτρον $=375$ ὀκ Ἀγγλ. λίτ. $=453{,}6$ γρ. φαρμακευτικὴ λίτρα $= 360$ γρμ. οὐγγιὰ $= \frac{1}{16}$ λ. καράτιον $= \frac{1}{5}$ τοῦ γραμμαρίου
κυβικὴ ὑάρδα	κουάρτερ $=2{,}91$ ἑκ. μποῦσελ $= \frac{1}{8}$ κουάρ τόνος (διὰ τὰ πλοῖα) $=2{,}83 (\mu^3)$	Ἀγγλ. στατ. $=112$ λ. Ἀγγλ. λ. $=453{,}6$ γρ. οὐγγιὰ $= \frac{1}{16}$ λ.
κυβικὸς πούς	ψάθα $= 2{,}10$ ἑκατόλ.	

5

ισμάτων (καὶ σχέσεις αὐτῶν προπολεμικαί)

ῆς λατινικῆς συμβάσεως

Πορτογαλλία	Αὐστρία	Ρωσσία	Ἡν. Πολιτεῖαι	Τουρκία
μιλρέϊς $=5{,}55$ φρ ρέϊς $= \frac{1}{100}$ μιλ.	κορώννα $=1{,}08$ φρ. χέλλερ $=0{,}01$ κ.	ρούβλιον $=2{,}65$ φρ. καπίκιον $=0{,}01$ τοῦ ρουβλίου	δολλάρ. $5{,}18$ φρ. σέντς $=0{,}01$ δ.	γρόσιον $=40$ παρ. 100 γρ. $=1$ λίρα λίρα $= 22{,}80$ φρ. γρόσιον $=0{,}01$ λ. Αἰγ. λίρα $=26$ φρ. μετζίτι $= 20$ γρ.

ὁμοίως δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν, καὶ ἐκείνας αἱ ὁποῖαι δὲν ἔχουν τοι- αύτην ὑποδιαίρεσιν. Αἱ μονάδες αἱ ὁποῖαι ἔχουν δεκαδικὴν ὑποδιαί- ρεσιν λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν τὸ δεκαδικὸν μετρικὸν σύστημα ἢ *δεκα- δικὸν σύστημα μετρήσεως*, κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὸ *δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως* (§ 3). Τὸ σύστημα αὐτὸ ἔχει τὸ προτέρημα ὅτι αἱ μετρή- σεις τῶν ποσῶν διὰ μονάδων αὐτοῦ δίδουν ἐξαγόμενα ἀριθμοὺς δεκαδι- κοὺς ἐν γένει, αἱ δ' ἐπ' αὐτῶν πράξεις ἀνάγονται εἰς τὰς πράξεις τῶν δεκαδικῶν καὶ γίνονται μετὰ μεγαλυτέρας εὐκολίας. Οὕτω τὸ μῆκος 10 μ., 6 παλ., 3 δ., 7 γρ., γράφεται οὕτω 10,367 μ.

Προβλήματα ἀλλαγῆς μονάδος.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ τραποῦν 8, 34 μ. εἰς α') δεκάμετρα· β) ἑκα- τόμετρα· γ') χιλιόμετρα. 0,835. 0,0835· 0,0083

2) 6,42 χμ. εἰς μέτρα, δεκάμετρα κλπ. 6420· 642·64.

Ὁμοίως 0,2345678 ($μ^2$) εἰς α') ($δ^2$)· β') ($εμ^2$)· γ') ($χμ^2$).

4) Ὁμοίως 13,845 χιλιόγραμμα εἰς γραμμάρια καὶ αὐτὰ εἰς ὀκάδας. 13845·10 ὀκ. 326 $\frac{9}{16}$ δρμ.

5) Ἐπίσης 1,2786 ($μ^3$) εἰς α') κυβ. παλάμας· β) κυβ. δακτύλους.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Πόσας ἡμέρας ἔχουν α') 34 ἔτ., ἔχοντα 365 ἡμ. καὶ ἀνὰ 4 ἔτη 366; β') 8,4 μῆνες (ἐὰν καθεὶς ἔχῃ 30 ἡμ.); 12418·252

2) Πόσας ὥρας ἔχουν· α') 2 μῆνες· β') 2,5 ἡμέραι ; 1440·60

Ὁμὰς τρίτη. 1) Νὰ τραποῦν 540,5 ($πχ^2$) εἰς ($μ^2$.) 304,03

2) Νὰ τραποῦν 209,5 (245) μ. α') εἰς μικροὺς πήχεις· β') εἰς ὑάρδας. 448,302·317,83

3) Νὰ τραποῦν εἰς ὑάρδας 1,45 χμ. 1586,4

4) Νὰ τραποῦν 140 ὑάρδαι εἰς μέτρα καὶ ταῦτα εἰς μικροὺς πήχεις. 127,96·197,4

5 Νὰ τραποῦν α') 35 ὀκ. εἰς γραμμάρια· β') 890 γραμμάρια εἰς δράμια· γ') 30 ὀκάδες εἰς χιλιόγραμμα. 44800·278,125·38,4

6) Νὰ τραποῦν εἰς φράγκα 462,5 λίραι τῆς Ἀγγλίας. 11668,87

7) Νὰ τραποῦν 1582 δρ. α') εἰς λίρας Ἀγγλίας· β') εἰς μάρκα· γ') εἰς δολλάρια. 62,703...λίρ. 1265,6 μάρκ. 305, 405.. δολ.

8) Πόσα φράγκα κάμνουν 2580,50 μάρκα; 3225 φρ. 62,5 λ.

9) Νὰ τραποῦν 1400 δολλάρια α') εἰς φράγκα· β') εἰς λίρας Ἀγγλίας· γ') εἰς μάρκα. 7252 φρ.· 287,44 λίρ.· 5801,6 μάρκ.

10) Νὰ τραποῦν 1542 κορῶναι α') εἰς φράγκα· β') εἰς μάρκα. 1665,36 φρ.· 1332,28 μάρκα.

11) Τὸ μέτρον ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 16,40 (2,45) δρ.· πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς; 10,6272 (15876).

12) Νὰ τραποῦν 5 βασιλικὰ στρέμματα εἰς (πχ.^{2}) $8888\frac{8}{9}$.

13) Πόσον τιμᾶται οἰκόπεδον 2450 (2483,45) (μ^2), ἐὰν ὁ (πχ^2) τιμᾶται 80 (72,50) δρχ.; $34844,44\frac{4}{9}$ (320089,11..).

14) Οἰκόπεδον 478 (μ^2) τιμᾶται 34416 δρχ.· πόσον τιμᾶται ὁ (πχ^2); 40,5.

15) Νὰ τραποῦν 23,5 λίραι Τουρκίας εἰς φράγκα καὶ αὐτὰ εἰς μάρκα. 535,80 φρ.· 428,64 μάρκ.

16) Νὰ τραποῦν 258 (πχ^2) εἰς (μ^2). 145,125.

17) Νὰ τραποῦν 152, 65 ὑάρδαι εἰς μέτρα καὶ αὐτὰ εἰς τεκτονικοὺς πήχεις. 139,5· 186,02...

18) Νὰ τραποῦν 15^0 (658″) εἰς πρῶτα καὶ δεύτερα (πρῶτα) λεπτά. 900′· 54000″ ($10\frac{29'}{30}$). 5

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI.

Περὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

§ **69. Συμμιγεῖς ἀριθμοί.**—

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐμετρήσαμεν ἓν ὕφασμα καὶ εὑρήκαμεν ὅτι τὸ μῆκος αὐτοῦ εἶνε 12 π. καὶ 6 ρ.· τότε θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 12 π. 6 ρ. παριστάνει τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος αὐτοῦ. Καθ' ὅμοιον τρόπον, ἐὰν ἐκ τῆς μετρήσεως ἑνὸς χρονικοῦ διαστήματος εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν 47 ὥρ. 20′, θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς παριστάνει τὸ χρονικὸν αὐτὸ διάστημα. Καθεὶς τῶν ἀριθμῶν τούτων ἀποτελεῖται ἀπὸ διαφόρους ἄλλους, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶνε πολλαπλάσια ἢ ὑποδιαιρέσεις τῆς ἀρχικῆς μονάδος. Οὕτω ὁ ἀριθμὸς 12 π. 6 ρούπια ὑφάσματος ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 12 π. καὶ 6 ρούπια, ἐνῷ τὸ ρούπιον εἶνε ὑποδιαίρεσις τοῦ ἑνὸς πήχεως. Τοὺς τοιούτους ἀριθμοὺς καλοῦμεν *συμμιγεῖς*.

Ὥστε, «*συμμιγὴς ἀριθμὸς λέγεται ὁ συγκεκριμένος ἀριθμός ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἄλλους, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶν πολλαπλάσια ἢ ὑποδιαιρέσεις τῆς αὐτῆς ἀρχικῆς μονάδος*».

§ 70. Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς ἁπλοῦν ἀριθμόν.—

α΄) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν 17 ὧρ. εἰ μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, δηλαδὴ εἰς πρῶτα λεπτ Λέγομεν· ἀφοῦ ἡ ὥρα ἔχει 60΄, αἱ 17 ὧραι ἔχουν 60΄ × 17 = 1920΄.

Ὁμοίως, ἂν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν 5 στατ. εἰς ὀκάδας, παρατηρο μεν ὅτι, ἀφοῦ 1 στατ. ἔχει 44 ὀκ., οἱ 5 στατ. ἔχουν 44 ὀκ. × 5 = 220 ὀκ. Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτ «*διὰ νὰ τρέψωμεν ἕνα ἀριθμὸν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτ ρας τάξεως αὐτοῦ, τὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος φ νερώνει πόσας μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως ἔχει μ τῶν δοθεισῶν*».

β΄) Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 2560 λ. καὶ θέλομεν νὰ τ τρέψωμεν εἰς δραχμάς. Παρατηροῦμεν ὅτι ἀφοῦ 100 λ. κάμνουν 1 δρ τὰ 2560 λ. θὰ κάμουν τόσας δραχμάς, ὅσον χωρεῖ τὸ 100 λ. εἰς 2560 λ· ἤτοι ἔχομεν $\frac{2560}{100}=25,60$ δρ. Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομ ὅτι αἱ 13 δρ. ἔχουν $\frac{13}{5}=2,6$ τάλληρα.

Ἐν γένει· «*διὰ νὰ τρέψωμεν ἕνα ἀριθμὸν μονάδων μιᾶς τάξε εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἀρκεῖ νὰ τὸν διαιρέσ μεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος φανερώνει πόσαι μονάδες τῆς δ θείσης τάξεως ἀποτελοῦν μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας*».

γ΄) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν 25 ὥ 23΄ 30΄΄ εἰς δεύτερα λεπτά.

Κατὰ τἀνωτέρω ἐπειδὴ ἡ ὥρα ἔχει 60΄, αἱ 24 ὧραι ἔχ 60΄ × 24 = 1440΄, καὶ 25΄, τὰ ὁποῖα ἐδόθησαν, ἀποτελοῦν ἐν δ 1465΄. Τώρα τρέπομεν τὰ 1465΄ εἰς δεύτερα λεπτά. Ἀφοῦ τὸ 1΄=60 τὰ 1465΄ εἶνε ἴσα μὲ 60΄΄ × 1465=87900΄΄. Προσθέτοντες δὲ καὶ 30΄΄, τὰ ὁποῖα ἐδόθησαν, εὑρίσκομεν ὅτι αἱ 23 ὧραι 25΄ 30΄΄ = 87930΄΄. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομ ὅτι·

«διὰ νὰ τρέψωμεν συμμιγῆ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως αὐτοῦ, τρέπομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος παριστάνει μονάδας τῆς ἀνωτέρας τάξεως, εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας αὐτῆς, εἰς τὸ ἐξαγόμενον δὲ προσθέτομεν καὶ τὰς δοθείσας μονάδας τῆς τάξεως ταύτης· τὸ οὕτω προκύπτον ἄθροισμα τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, εἰς δὲ τὸ ἐξαγόμενον προσθέτομεν καὶ τὰς δοθείσας μονάδας τῆς τάξεως ταύτης· καὶ οὕτω καθεξῆς προχωροῦμεν μέχρι τῶν μονάδων τῆς τελευταίας τάξεως.»

δ') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ 3 στ. 20 ὀκ. 132 δράμ. εἰς ὀκάδας. Ἐν πρώτοις ἔχομεν ὅτι 1 στ.=44 ὀκ., 3 στ.=250 ὀκ.· προσθέτοντες εἰς αὐτὰς καὶ τὰς 20 ὀκ., αἱ ὁποῖαι ἐδόθησαν, εὑρίσκομεν 152 ὀκ. Τώρα τρέπομεν καὶ τὰ 250 δράμ. εἰς ὀκάδας, καὶ ἔχομεν ὅτι 250 δρμ. $= \frac{250}{400} =$ 0,625 ὀκ. καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν ὅτι 3 στατ. 20 ὀκ. 250 δρμ. = 152,625 ὀκ.

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι· *«διὰ νὰ τρέψωμεν συμμιγῆ εἰς ἄλλον ἀριθμόν, παριστάνοντα μονάδας μιᾶς ὡρισμένης τάξεως, διαφόρου τῆς τελευταίας, τρέπομεν τοὺς ἀριθμούς, τοὺς παριστάνοντας μονάδας τάξεως μεγαλυτέρας καὶ μικροτέρας τῆς δοθείσης εἰς μονάδας τῆς τάξεως ταύτης, καὶ τὰ ἐξαγόμενα προσθέτομεν μὲ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος παριστάνει μονάδας τῆς ὁρισθείσης τάξεως».* 5

Οὕτω ἂν θέλωμεν ὁ συμμιγὴς 3 τάλ. 4 δρ. 50 λ νὰ τραπῇ εἰς δραχμάς, θὰ ἔχωμεν 3 τάλ.=5 δρ.×3=15 δρ., καὶ 4 δρ.=19 δρ.· τὰ 50 λ.$= \frac{50}{100}$ δρ.$= \frac{1}{2}$ δρ. Ἑπομένως εἶνε 3 τάλ., 4 δρ., 60 λ.= 19 $\frac{1}{2}$ δρ.=19,5 δρ.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ τραποῦν 7,34 μ. α') εἰς δεκατόμ. β') εἰς ἑκατοστόμ. γ) εἰς χιλιοστόμ. 7,34· 734· 7340.

2) Ὁμοίως 6,42 χμ. εἰς α') μέτρα· β') δεκατόμετρα· γ') ἑκατοστόμετρα. 6420· 64200· 642000.

3) Ὁμοίως τὰ 2345678 μ. α') εἰς ἑκατόμ. καὶ β') εἰς χιλιόμ. 23456,78· 2345,678.

4) Πόσα λεπτὰ ἔχουν α') 8,25 δρ.; β') 18,47 δρ.;

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ τραποῦν εἰς μέτρα· α') 25 παλ. β') 31[?]
δάκ.· γ') 314 γρ.

2) Ὁμοίως εἰς δραχμὰς 825 λ., 1375 λ.

3) Νὰ τραποῦν εἰς ἔτη α') 18 μῆνες· β') 180 ἡμ. $1\frac{1}{2}$, $\frac{36}{73}$.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Νὰ τραποῦν εἰς μέτρα α') 9 χμ. 16,4 μ
β') 2 δεκάμετρα 6 μ. 8 δάκτ.

2) Νὰ τραποῦν εἰς στατῆρας α') 12 στατ. 40 ὀκ. 300 δρμ
β') 132,25 ὀκ. $12\frac{163}{176}$ $3\frac{1}{17[?]}$

3) Πόσα δευτερόλεπτα κάμνουν 4 (2) μῆν., 5 (6) ὥρ., 56' (5[?]
36''); (ὁ μὴν ὑποτίθεται ὅτι ἔχει 30 ἡμέρας).
10389360 (520887[?]

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Νὰ τραποῦν εἰς πήχεις α') 132 μ. β') 14,3 μ
γ') 8 μ. 7 π. 3 δ. 8 γρ. 203,703· 22,678· 13,48

2) Νὰ τραποῦν εἰς ὀκάδας (στατῆρας) οἱ 3 (5) στατ. 5 (28) ὀκ. 10
(320) δράμια. 137,25 $\left(5\frac{36}{55}\right)$

3) Νὰ τραποῦν εἰς μοίρας 7° (28°) 15' (30') 18'' (27'').
7,255· (28,507[?]

Ὁμὰς πέμπτη. 1) Πόσας ὥρας ἔχουν 2,5 $\left(3\frac{1}{5}\right)$ μῆνες;
1800· 230[?]

2) Πόσα δεύτερα λεπτὰ ἔχει α') ἓν κοινὸν ἔτος· β') ἓν δίσεκτ[ον]
ἔτος; 31536000''·31622400''

3) Πόσα δραμ. ἔχουν α') 3,17 στατ.· β') 14,35 ὀκ.;
5579200·574[?]

4) Νὰ τραποῦν εἰς στατῆρας α') 145 (14,35) ὀκ.
3,295...(0,326..

5) Νὰ τραποῦν εἰς ἡμέρας α') 7 (9) ἡμ. 18 (12) ὥρ. 36' (54'
β') 84 (30,6) ὧραι. 7,775 (9,5375) 3,5 (1,27[?]

6) Νὰ τραποῦν εἰς ἡμέρας (ὥρας) 217 (5) ἡμ. (18) ὧραι 36' (2[?]
καὶ 40''). $217\frac{1}{40}\left(138\frac{31}{90}\right)$.

§ **71. Τροπὴ ἀκεραίου εἰς συμμιγῆ.** —
Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὰ 7756' εἰς συμμιγῆ ἀριθμ[όν].
Ἐπειδὴ 60' κάμνουν 1 ὥραν, τὰ 7756' κάμνουν 7756' : [60]

=129 ὥρας καὶ 16′. Ὥστε 7756′=μὲ 129 ὥρας καὶ 16′. Ἐπειδὴ δὲ αἱ 24 ὧραι ἀποτελοῦν 1 ἡμ. αἱ 129 ὧραι ἀποτελοῦν 129 : 24=5 ἡμ. καὶ μένουν 9 ὧραι. Ὥστε αἱ 129 ὧραι = 5 ἡμ. 6 ὥρας. Ὅθεν τὰ 7756′= 5 ἡμ. 9 ὥρ. 16′.

Ὁμοίως σκεπτόμεθα, ἐὰν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν 75325 δράμια εἰς συμμιγῆ. Εὑρίσκομεν δηλαδὴ πρῶτον, πόσας ὀκάδας κάμνουν τὰ 75325 δρ., διαιροῦντες τὸν 75325 διὰ τοῦ 400, τὸ δὲ προκύπτον πηλίκον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 44, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσους στατῆρας περιέχουν. Τὸ τελευταῖον πηλίκον καὶ τὰ ὑπόλοιπα δίδουν τὸν ζητούμενον συμμιγῆ.

Συνήθως ἡ σειρὰ τῶν διαιρέσεων διατάσσεται ὡς κάτωθι.

75325	400	
3532	188	44
3325	12	4
125		

καὶ εὑρίσκομεν ὅτι 75325 δρμ.=4 στ. 12 ὀκ. 125 δρμ. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι· «***διὰ νὰ τρέψωμεν ἀκέραιον ἀριθμόν, παριστάνοντα μονάδας μιᾶς τάξεως εἰς συμμιγῆ, διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος φανερώνει πόσαι μονάδες τῆς δοθείσης τάξεως ἀποτελοῦν μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως· τὸ προκύπτον πηλίκον παριστάνει μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, τὸ δὲ ὑπόλοιπον μονάδας τῆς δοθείσης. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα ἐπὶ τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου, καὶ οὕτω προχωροῦμεν μέχρις ὅτου εὕρωμεν πηλίκον, τοῦ ὁποίου αἱ μονάδες νὰ μὴ περιέχουν μονάδας ἀνωτέρας τάξεως. Τὸ τελευταῖον πηλίκον καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων ἀποτελοῦν τὸν ζητούμενον συμμιγῆ***». 5

§ 72. Τροπὴ κλάσματος εἰς συμμιγῆ.—

α′) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν κλασματικὸν ἀριθμὸν $\frac{47}{8}$ στατ. εἰς συμμιγῆ. Διαιροῦντες τὸ 47 διὰ τοῦ 8 εὑρίσκομεν πόσους ἀκεραίους στατῆρας περιέχει τὸ δοθὲν κλάσμα. Οὕτω ἔχομεν 5 στατῆρας καὶ $\frac{7}{8}$ στ. Τὸ $\frac{7}{8}$ τρέπομεν εἰς ὀκάδας, πολλαπλασιάζοντες 44ὀκ.$\times\frac{7}{8}$, ὅτε εὑρίσκομεν $\frac{308}{8}$ὀκ.$=38\frac{1}{2}$ ὀκ. Τὸ $\frac{1}{2}$ ὀκ. τρέπομεν εἰς δράμια καὶ οὕτω ἔχομεν ὅτι $\frac{44}{8}$ στ. = 5 στ. 38 ὀκ. 200 δρμ.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r|l} 74 & 8 \\ \cline{2-2} 7 & 5 \text{ στ. } 38 \text{ ὀκ. } 200 \text{ δράμια.} \\ \times 44 & \\ \hline 308 & \\ 68 & \\ 4 & \\ \times 400 & \\ \hline 1600 & \\ 0 & \end{array}$$

β') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν 3,45 ἡμ. εἰς συμμιγῆ.

Παρατηροῦμεν ὅτι 3,45 ἡμ. = 3 ἡμ. καὶ 0,45 ἡμ. Αἱ 0,45 ἡμ. =24 ὥρ.×0 45=10,8 ὥρ. ἢ 10 ὥρ. καὶ 0,8 ὥρ. Αἱ 0,8 ὥρ.=48'. Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν καὶ ἐὰν τὸν δοθέντα δεκαδικὸν ἀριθμὸν γράψωμεν ὑπὸ κλασματικὴν μορφὴν καὶ ἐργασθῶμεν καθὼς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι· ***«διὰ νὰ τρέψωμεν κλάσμα, τὸ ὁποῖον παριστάνει μονάδας δοθείσης τάξεως, εἰς συμμιγῆ, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· τὸ πηλίκον παριστάνει μονάδας τῆς δοθείσης τάξεως, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως διὰ πολλαπλασιασμοῦ· τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ παρονομαστοῦ καὶ οὕτω προχωροῦμεν ὁμοίως μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως»***.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ τραποῦν εἰς συμμιγεῖς ἀριθμούς· οἱ α') 784 παλ.' β') 12347 γρ.

2) Ὁμοίως α') 24867 (μ^2)· β') 124 μῆν. γ') 3867 ἡμ.

3) Νὰ τραποῦν εἰς συμμιγεῖς οἱ α') 3, 124 μ.· β') 29,415 πήχ.· γ') 3, 15 τάλ.· δ') 82565''. ε') 1345'.

4) Ὁμοίως α') 2,37 ἔτ.· β') $\frac{4}{9}$ λίρ.· γ') $\frac{13}{9}$ ἔτ.· δ') $\frac{142}{23}$ ἡμ. ε') 82,12 δρ. ϛ') 1223 ἔτη· ζ') 38,52 στατ.

§ **73. Πρόσθεσις.**— 'Επειδὴ οἱ συμμιγεῖς δύνανται νὰ τραποῦν εἰς ἀκεραίους ἢ κλασματικούς, αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις δύνανται ν' ἀναχθοῦν εἰς πράξεις ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν.

α') Οὕτω διὰ νὰ προσθέσωμεν συμμιγεῖς ἀριθμούς, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς ἀκεραίους καὶ ἀκολούθως προσθέτομεν αὐτούς, τὸ δὲ ἄθροισμα τρέπομεν εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν. Π.χ. τὸ ἄθροισμα 3 ἔτ. 7 μῆν. 18 ἡμ.+4 ἔτ. 9 μ. 17 ἡμ.=1308 ἡμ.+1727 ἡμ.=3035 ἡμ., ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν, ἂν τρέψωμεν αὐτὸν εἰς συμμιγῆ, 8 ἔτ., 5 μῆν., 5 ἡμ.

β') 'Εν τούτοις δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν συμμιγεῖς, ἂν προσθέσωμεν χωριστὰ τοὺς ἀριθμούς, τοὺς παριστάνοντας μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως. Οὕτω διὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν συμμιγῶν 3 ἔτ. 7 μῆν. 18 ἡμ. καὶ 4 ἔτ. 9 μῆν. 17 ἡμ. γράφομεν αὐτοὺς ὡς κάτωθι καὶ προσθέτομεν ὡς συνήθως κατὰ στήλην.

3 ἔτ.	7 μῆν.	18 ἡμ.
4	9	17
7	16	35
8	5	5

καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα 7 ἔτ. 16 μῆν. 35 ἡμ. 'Εὰν ἀπὸ καθένα τῶν ἀριθμῶν 35 ἡμ. καὶ 16 μῆνες ἐξάγωμεν τὰς μονάδας τῆς ἀνωτέρας τάξεως, ἐκείνης τὴν ὁποίαν παριστάνει, καὶ προσθέσωμεν αὐτὰς εις τὰς ἀνωτέρας, εὑρίσκομεν 8 ἔτ. 5 μῆν. 5 ἡμ. 5

'Ομοίως ἂν ἔχωμεν πρὸς λύσιν τὸ πρόβλημα:

«Παιδίον ἐγεννήθη τὴν 8ην Φεβρουαρίου τοῦ 1825 καὶ ἀπέθανεν εἰς ἡλικίαν 2 ἐτ. 2 μην. 28 ἡμ., πότε ἀπέθανε;»

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἀπὸ τῆς γεννήσεως τοῦ Χριστοῦ μέχρι τῆς γεννήσεως τοῦ παιδίου ἐπέρασαν 1824 ἔτ. 1 μῆν. 7 ἡμ. (ἐπειδὴ ὁ Φεβρουάριος εἶνε δεύτερος μὴν τοῦ ἔτους καὶ δὲν εἶχε περάσει). Μέχρι δὲ τοῦ θανάτου τοῦ παιδίου ἐπέρασαν 1824 ἔτ. 1 μήν, 7 ἡμ.+2 ἔτ. 2 μῆν. 28 ἡμ.· ἤτοι, διὰ νὰ εὕρωμεν πότε ἀπέθανε θὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρόσθεσιν.

1824 ἔτ.	*1* μὴν	*7* ἡμ.	
2	*2*	*28*	ἐξ ἧς εὑρίσκο-
1826	*3*	*35*	μεν
1826	*4*	*5*	

ἤτοι ἀπέθανε τὴν 6 Μαΐου τοῦ 1827, ἐπειδὴ εἶχον περάσει αἱ 5 πρῶται ἡμέραι αὐτοῦ.

(Τὸ ἐξαγόμενον αὐτὸ εἶνε κατὰ προσέγγισιν, διότι ὑπεθέσαμεν ὅτι καθεὶς μὴν ἔχει 30 ἡμέρας).

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα α΄) 8 μ., 7 π., 2 δ.+12 μ., 9 π., 8 δ.+16 μ., 2 π., 2 δ.· β΄) 18 δρ. 25 λ. +8 τάλ., 4 δρχ. 20 λ.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἓν ὡρολόγιον δεικνύει εἰς τὴν Ρώμην 12΄ 4΄΄ ὀλιγώτερον ἄλλου εἰς τὴν Βιέννην· ποία εἶνε ἡ ὥρα εἰς τὴν Βιέννην, ἂν εἰς τὴν Ρώμην εἶνε 7 (10) ὥρ. 8΄ (9΄) 59΄΄ (29΄΄) π. (μ.) μ.;

7 (10) ὥρ. 21΄ (21΄) 3΄΄ (33΄΄).

2) Ἡ ὥρα εἰς τὴν Βιέννην εἶνε 52΄ 4΄΄ ὀλιγώτερον ἢ εἰς τὴν Πετρούπολιν· ποία εἶνε ἡ ὥρα εἰς τὴν Πετρούπολιν, ἂν εἰς τὴν Βιέννην εἶνε 7 (9) ὥρ. 58΄ (48΄) 12΄΄ (56΄΄) π. (μ.) μ.;

8 (10). ὥρ. 50΄ (41΄) 16΄΄ π. (μ.) μ.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἔμπορος ἀγοράζει ἐμπόρευμα ἀντὶ 47 (127) δρ. 26 (5) λ. καὶ τὸ πωλεῖ μὲ κέρδος 6 (28) δρ., 49 (95) λ.· πόσον τὸ ἐπώλησε; 53,75 (156) δρχ.

2) Ἔμπορος πωλεῖ ἐμπόρευμα ἀντὶ 8720 δρ. 9 λ. (4125 δρ. 16 λ.) μὲ ζημίαν 185 δρ., 16 λ. (325 δρ., 28 λ.)· πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὸ ἐμπόρευμα; 8905,25 (4450,44) δρχ.

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Ὁ φιλόσοφος Κάντιος ἐγεννήθη τὴν 22 Ἀπριλίου τοῦ 1724, ἀπέθανε δὲ εἰς ἡλικίαν 79 ἐτ. 9 μην. 19 ἡμ.· πότε ἀπέθανεν; 11 Φεβρ. 1804.

2) Ὁ Α εἶνε ἡλικίας 14 (64) ἐτ. 6 (8) μην. 18 (9) [illegible]ρ.· ὁ Β 8 (14) ἐτ. 8 (10) μην. 26 (26) ἡμ., πρεσβύτερος· πόσην ἡλικίαν ἔχει ὁ Β; 23 [illegible] μῆν. 14 (5) ἡμ.

3) Ἔμπορος εἰσπράτει τὴν α΄) ἡμέραν 248 δρ. 26 λ. (118 δρ. 9 λ.)· τὴν β΄) 35 δρ. 16 λ. (18 δ. 35 λ.) περισσότερον ἢ τὴν α΄)· τὴν γ΄ (6 δρ. 24 λ. (19 δ. 43 λ.) περισσότερον τῆς β΄ καὶ τὴν δ΄ 22 δρ. 48 λ. (9 δ. 33 λ.) περισσότερον τῆς γ΄· πόσα εἰσπράττει ἐν ὅλῳ;

1133 (575) δρ. 48 (60) λ.

§ 74. Ἀφαίρεσις.—

α΄) Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν συμμιγεῖς ἀριθμούς, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν αὐτοὺς εἰς ἀκεραίους ἢ κλασματικούς, παριστάνοντας μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως, μετὰ δὲ τὴν ἀφαίρεσιν τούτων νὰ τρέψωμεν τὸ ὑπόλοιπον εἰς συμμιγῆ. Οὕτω διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν 12 στ. 8 ὀκ. 250 δρμ., πλὴν 6 στ. 10 ὀκ. 150 δρμ. ἔχομεν τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων 214650 δρμ. πλὴν 109750 δρμ. = 10505 δρμ. Ἐκ τούτου εὑρίσκομεν, τρέποντες αὐτὸν εἰς συμμιγῆ 5 στ. 42 ὀκ. 100 δράμια.

β΄) Ἐν τούτοις δυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν συμμιγεῖς, ἀφαιροῦντες χωριστὰ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι παριστάνουν μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως. Οὕτω διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 4 ἔτ. 3 μῆν. 8 ἡμ.—2 ἔτ. 1 μὴν 12 ἡμ., γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς κάτωθι καὶ ἀφαιροῦμεν κατὰ στήλας·

$$\begin{array}{lll} & & \overset{38}{\smile} \\ 4 \text{ ἔτ.} & 3 \text{ μῆν.} & 8 \text{ ἡμ.} \\ \underline{2} & 1 & 12 \\ \hline 2 & 1 & 26 \end{array}$$

5

λέγοντες· 12 ἡμέραι ἀπὸ 8 ἡμ. δὲν ἀφαιροῦνται· προσθέτομεν 1 μῆνα ἢ 30 ἡμ. εἰς τὰς 8 ἡμ., ὅτε ἔχομεν 38 ἡμ., καὶ ἀφαιροῦντες 12 ἡμ. ἀπὸ 38 ἡμ., εὑρίσκομεν 26 ἡμ: γράφομεν αὐτὸ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν ἡμερῶν· 1 μὴν καὶ 1 μὴν ἴσον 2 μ., ἀπὸ 3 μ. ἴσον 1 μήν· γράφομεν τὸ 1 εἰς τὴν στήλην τῶν μηνῶν· 2 ἔτη ἀπὸ 4 ἔτ. = 2 ἔτη. Ὥστε τὸ ὑπόλοιπον εἶνε 2 ἔτ. 1 μὴν 26 ἡμ.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑπόλοιπα καὶ νὰ γίνουν αἱ δοκιμαὶ τῶν ἀφαιρέσεων· α΄) 18 μ. 4 π. 2 δ—5 μ. 8 π. 6 δ. β΄) 12 εἰκοσ. 3 τάλ. 2 δρ. 30 λ.—5 εἰκ. 3 τάλ. 4 δρ. 80 λ.

γ΄) 8 στ. 32 ὀκ. 250 δρμ.—5 στ. 40 ὀκ. 120 δρ.

2) Ὁμοίως α΄) 3 ἔτ. 8 μῆν. — 2 ἔτ. 10 μῆν. β΄) 16 ὧραι 25΄ 4″ —14 ὥρ. 28΄ 49″. γ΄) 12 τάλ. 3 δρ. 75 λ. — 10 τάλ. 2 δρ. 85 λ.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἀπὸ βαρέλιον περιέχον 385 στ. 32 ὀκ. 200 δρμ. ἀφηρέσαμεν 30 στ. 6 ὀκ. 100 δρμ., ἔπειτα 12 στ. 43 ὀκ. καὶ 16 στ. 17 ὀκ. 120 δρμ: πόσος οἶνος ἔμεινεν εἰς τὸ βαρέλιον;

326 στ. 9 ὀκ. 380 δρμ.

2) Ἔχει τις 628 δρ. 25 λ. (1368 δρ. 83 λ.) καὶ ἐξοδεύει πρῶτον 46 δρ. 18 λ. (9 δρ. 18 λ.), ἔπειτα 16 δρ. 42 λ. (283 δρ. 6 λ.) καὶ τέλος 7 δρ. 18 λ. (19 δρ. 25 λ.)· πόσα τοῦ μένουν;

558 δρ. 47 λ. (1053 δρ. 34 λ.).

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἀγοράζει τις ἐμπόρευμα ἀντὶ 128 δρ. 26 λ. (215 δρ. 48 λ.) καὶ τὸ πωλεῖ μὲ ζημίαν 6 δρ. 25 λ. (9 δρ. 35 λ.)· πόσον ἐπωλήθη τὸ ἐμπόρευμα; 122 δρ. 1 λ. (206 δρ. 13 λ.)

2) Ἔμπορος πωλεῖ ἐμπόρευμα ἀντὶ 788 δρ. 35 λ. (727 δρ. 85 λ.) μὲ κέρδος 22 δρ. 48 λ. (46 δρ. 27 λ.)· πόσον τὸ ἠγόρασε;

765 δρ. 87 λ. (881 δρ. 58 λ.).

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Εἷς πόλεμος διήρκεσεν 6 ἔτη, 5 μῆν., 17 ἡμ., ἐτελείωσε δὲ τὴν 15 Φεβρουαρίου τοῦ 1763· πότε ἤρχισεν;

(28 Αὐγ. 1756).

2) Ἀπέθανέ τις εἰς ἡλικίαν 64 ἐτῶν 8 μῆν. 3 ἡμ. (43 ἐτ. 6 μην. 24 ἡμ.) τὴν 18ην Αὐγούστου τοῦ 1872 (14 Ἰαν. τοῦ 1901)· πότε ἐγεννήθη; 15 Δεκ. 1808 (20 Ἰουν. 1857).

3) Ἓν συμβάν, τὸ ὁποῖον ἤρχισε τὴν 8ην Αὐγ. 1891 τὴν 4 ὥρ. 26′ 18″ π. μ., ἐτελείωσε τὴν 25 Δεκεμβρίου 1895 τὴν 6 ὥρ. 25′13″ π. μ.· πόσον διήρκεσε τὸ γεγονὸς αὐτό;

4 ἔτ. 5 μῆν. 17 ἡμ. 1 ὥρ. 58′ 55″.

4) Νὰ γίνῃ ἡ ἑξῆς ἀφαίρεσις καὶ ἡ δοκιμὴ αὐτῆς.

20 λίρ. 12 σελ. 4 πέν.—10 λίρ. 15 σελ. 2 πέν.

§ **75. Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ διαιρέτης εἶνε ἀκέραιοι.—**

α′) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ 2 ἔτ. 3 μῆν. 9 ἡμ. ἐπὶ 4. Ἔχομεν 2 ἔτ. 3 μῆν. 9 ἡμ. ἐπὶ 4 =819 ἡμ. × 4 =3276 ἡμ: τρέποντες δ' αὐτὸν εἰς συμμιγῆ, εὑρίσκομεν 9 ἔτ. 1 μῆν. 6 ἡμέρας.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν ὁ πολλαπλασιατὴς εἶνε δεκαδικὸς ἀριθμός. Π. χ. 2 ἔτ. 3 μῆν. 9 ἡμ. × 1,2 = 819 ἡμ. ×1,2 = 782,8 ἡμ. =2 ἔτ. 8 μῆν. 22, 8 ἡμ.

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ἕπεται ὅτι· «*διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸν συμιγγῆ εἰς ἀκέραιον ἢ κλασματικόν, παριστάνοντα μονάδας μιᾶς ὡρισμένης τάξεως, καὶ τὸ ἐξαγόμενον αὐτὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, τὸ δὲ γινόμενον νὰ τρέψωμεν εἰς συμμιγῆ*».

β′) Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε ἀκέραιος εἶνε προτιμότερον ἐνίοτε, νὰ πολλαπλασιάσωμεν καθένα τῶν ἀριθμῶν ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ὁ συμμιγὴς ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ τὰ ἐξαγόμενα. Οὕτω π. χ. διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ 8° 27′ 14″ ἐπὶ 5 πολλαπλασιάζομεν καθένα τῶν ἀριθμῶν 14″ 27′ 8° ἐπὶ 5 καὶ εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως τὰ γινόμενα 70″, 135′ 4°. Ἐὰν δὲ ἀπὸ καθένα τῶν 70″, 135′ ἐξάγωμεν τὰς περιεχομένας μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως αὐτῶν, καὶ προσθέσωμεν αὐτὰς εἰς τὸν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος παριστάνει μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως, εὑρίσκομεν τελικὸν ἐξαγόμενον 42° 16′ 10″.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὡς κάτωθι

8°	27′	14″
		5
40°	135′	70″
42°	16′	10″.

γ′) Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν 25° 27′ 44″ διὰ τοῦ 0,8. Τρέπομεν τὸν συμμιγῆ εἰς δεύτερα λεπτά, καὶ οὕτω ἔχομεν τὴν διαίρεσιν 91624: 0,8 — 114530″. Ἐὰν τὸ πηλίκον αὐτὸ τρέψωμεν εἰς συμμιγῆ, εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε ἴσον μὲ 31° 48′ 5″.

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι 29 μ. 4 π. 7 δάκτ.: 421 = 2947 δάκτ.: 421 = 7 δάκτ.

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι· «*διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι᾽ ἀκεραίου ἢ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ εἰς ἀκέραιον ἢ κλασματικόν, παριστάνοντα μονάδας ὡρισμένης τάξεως, καὶ τοῦτον νὰ διαιρέσωμεν ἀκολούθως διὰ τοῦ δοθέντος ἀκεραίου ἢ δεκαδικοῦ, τὸ δὲ πηλίκον νὰ τρέψωμεν εἰς συμμιγῆ, ἐὰν θέλωμεν*».

δ′) Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶνε ἀριθμὸς ἀκέραιος, εἶνε προτιμότερον ἐνίοτε, νὰ διαιροῦμεν καθένα τῶν ἀριθμῶν ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ὁ διαιρετέος συμμιγὴς διὰ τοῦ ἀκεραίου.

Π. χ. ἐὰν θέλωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν 6° 35′ 36″ διὰ τοῦ 6, διαιροῦμεν πρῶτον τὸν 6° διὰ τοῦ 6 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 1°. Ἔπειτα διαιροῦμεν τὰ 35′ διὰ τοῦ 6, ὅτε εὑρίσκομεν πηλίκον 5′ καὶ ὑπόλοιπον 5′· τὰ 5′ τρέπομεν εἰς δεύτερα λεπτὰ καὶ εὑρίσκομεν 60″ $\times$ 5=300″· καὶ 36″, τὰ δοθέντα, κάμνουν ἐν ὅλῳ 336″. Διαιροῦντες καὶ τοῦτο διὰ 6 εὑρίσκομεν πηλίκον 56″. Ὥστε τὸ πηλίκον εἶνε 1° 5′ 56″. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{rrr|lll}
6^{\circ} & 35' & 36 & 6 & & \\
\hline
 & 5 & & 1^{\circ} & 5' & 56'' \\
 & \times 60 & & & & \\
\hline
 & 300 & & & & \\
 & +36 & & & & \\
 & 336 & & & & \\
 & 36 & & & & \\
 & 0 & & & & \\
\end{array}$$

Ἐὰν τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δὲν εἶνε 0, γράφομεν τὸ πηλίκον αὐτοῦ διὰ τοῦ διαιρέτου ὑπὸ μορφὴν κλασματικήν. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι 33 ὀκ. 147 δρμ. : 2= 16 ὀκ. 273 $\frac{1}{2}$ δράμ.

§ 76. Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶνε κλάσμα.—

α′) Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα, π. χ. τὸν 5 στ. 38 ὀκ. 250 δραμ. ἐπὶ $\frac{3}{4}$, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ τέταρτον τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τοῦτο νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3. Ἤτοι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν συμμιγῆ διὰ 4 καὶ τὸ πηλίκον νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν, ἐὰν πρῶτον πολλαπλασιάσωμεν τὸν δοθέντα συμμιγῆ ἐπὶ 3, καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ 4. Οὕτω ἔχομεν ὅτι 5 στ. 38 ὀκ. 250 δρμ. $\times$ $\frac{3}{4}$ ἰσοῦται μὲ $\frac{5 \text{ στ. } 38 \text{ ὀκ. } 250 \text{ δρμ. } \times 3}{4}$. Ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμόν, εὑρίσκομεν γινόμενον 17 στ. 27 ὀκ. 250 δρμ. ἂν δὲ τοῦτο διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 4, εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον 4 στατ. 17 ὀκ. 38 $\frac{1}{4}$ δρμ.

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ μικτόν, ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα καὶ οὕτω πολλαπλασιάζομεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα, ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ καὶ τέλος προσθέτομεν τὰ δύο ἐξαγόμενα. Ἐπίσης, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε δεκαδικός, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν αὐτὸν εἰς κλάσμα καὶ οὕτω νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ κλάσμα.

β') Ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου καὶ ἀκολούθως πολλαπλασιάζομεν τὸν σμμμιγῆ ἐπὶ τὸ νέον κλάσμα.

Παράδειγμα. $18^0\ 45'\ 20'' : \frac{5}{9}$ εἶνε ἴσον μὲ $18^0\ 45'\ 20'' \times \frac{9}{5} = 32^0\ 21'\ 36''$.

γ') Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶνε μικτὸς ἀριθμός, τρέπομεν αὐτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἀκολούθως διαιροῦμεν τὸν συμμιγῆ διὰ τοῦ κλάσματος αὐτοῦ. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι 17 ὀκ. 150 δρ $: 2\frac{3}{5}$ εἶνε ἴσον μὲ 17 ὀκ. 150 δρμ.: $\frac{13}{5}$ = 17 ὀκ. 150 δρμ. $\times \frac{5}{13}$ καὶ ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμὸν εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον 6 ὀκάδας $273\frac{1}{13}$ δρμ.

Ἐπίσης ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶνε δεκαδικὸς ἀριθμός, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν αὐτὸν ὑπὸ κλασματικὴν μορφὴν καὶ νὰ διαιρέσωμεν διὰ κλάσματος.

Οὕτω ἔχομεν ὅτι 5 π. 4 ρ. : 0,8 = 5 π. 4 ρ.: $\frac{8}{10}$ = 5 π. 4 ρ $\times \frac{10}{8}$ = 6 π. 7 ρ.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον· 3 (64) τάλ. 4 (4) δρ., 5 (25) λ. $\times$ 17 (3,44). 327,25 (1115,42) δρ.

2) Ὁμοίως τὸ 1 (8) ἔτ. 4 (7) μῆν. 6 (24) ἡμ. $\times$ 17 (29).
22 (250) ἔτ. 11 (10) μ. 12 (6) ἡμ.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἐργάτης λαμβάνει τὴν ἡμέραν 5 δρ. 45 λ. Πόσα θὰ λάβῃ εἰς 8,5 ἡμ.; 46 δρ. 32,5 λ.

5

2) Ἐὰν κεφάλαιον δίδῃ ἐτήσιον τόκον 13 τάλ. 3 δρ. 85 λ., πόσο[ν] τόκον θὰ δώσῃ εἰς 4,75 ἔτη; 327 δρ 03,75 λ

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἐξ ἑνὸς τόπου ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο ταχυδρό- μοι, διευθυνόμενοι πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν. Ὁ μὲν διανύει 8 (12) χμ. 16 (613) μ., ὁ δὲ 6 (8) χμ. 54 (625) μ. καθ' ὥραν (ἡμέραν)· πόση θὰ εἶνε ἡ ἀπόστασις αὐτῶν μετὰ 3 (2) ἡμ. 18 (12) ὥρ.;

176 (9) χμ. 580 (970) μ.

2) Πόση θὰ εἶνε ἡ ἀπόστασις τῶν ταχυδρόμων, ἐὰν διευθύνωντα[ι] ἀντιθέτως; 1266 (53) χμ. 300 (095) μ.

3) Ἀτμάμαξα διανύει 40 (80) χμ. 325 (26) μ. εἰς $8\frac{1}{4}$ $\left(4\frac{2}{5}\right)$ ὥρ.· πόσον διανύει εἰς 1 ὥραν; 4 χμ. 887,87.. μ. (18 χμ. 187,72.. μ)

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Θέλει τις νὰ μοιράσῃ ἓν ποσὸν μεταξὺ 85 προ- σώπων, ὥστε νὰ λάβῃ καθὲν 5 δρ. 83 λ., ἀλλ' ἐλλείπουν πρὸς τοῦτ[ο] 8 δρ. 35 λ.· πόσον εἶνε τὸ ποσόν; 487,20 δρ.

2) Ἔμπορος ἀγοράζει 3,753 (48,250) χιλ. ἐμπορεύματος ἀντ[ὶ] 332 (407) δρ. 28 (23) λ., πωλεῖ δὲ αὐτὸ ἀντὶ 383 (393) δρ. 40 (72) λ. πόσον ἐκέρδισεν εἰς καθὲν χιλιόγραμμον; 13,621.. (0,28 ζημία)

Ὁμὰς πέμπτη. 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον 3° 16′ 25″ × 52.

170° 13′40″

2) Ἀτμάμαξα διανύει 118 (181) χμ. 701 (917) μ. εἰς $1\frac{3}{8}$ $\left(4\frac{1}{2}\right)$ ὥρ.· πόσον διανύει εἰς 1 ὥρ.; 86 (41) χμ. 328 (826) μ.

3) Αἱ 3 ὀκ. ἐμπορεύματος τιμῶνται 20 δρ. 70 λ.· πόσον τιμᾶτα[ι] ἡ 1 (3,5) ὀκ.; 6,9 (24,15) δ

4) Ἔμπορος ἀγοράζει 50 χιλ. 6 γρ. ἐμπορεύματος ἀντὶ 54 δρ. ἔπειτ[α] 70 χιλ. καὶ 2 γρ. ἀντὶ 43 δρ. 20 λ., καὶ τέλος 10 χιλ. καὶ 6 γρ. ἀν[τὶ] 21 δρ. 50 λ.· πόσον τοῦ στοιχίζει τὸ χιλιόγραμμον κατὰ μέσον ὅρο[ν];

0,91.. δ

§ 77. Πολλαπλασιασμὸς κατὰ τὴν μέθοδον τῶ[ν] ἁπλῶν μερῶν.—

Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 35 ὀργ. 4 πόδ. καὶ 1 δακτ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 548.

Ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καθένα τῶν ἀριθμῶν τοῦ πολλ[απλασιαστέου]

λασιαστέου ἐπὶ 548 καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα, ἐργαζόμεθα
ς ἑξῆς.

1) Πολλαπλασιάζομεν τὰς 35 ὀργ. ἐπὶ 548 καὶ εὑρίσκομεν
9180 ὀργ.

2) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς 4 πόδας ἐπὶ 548, λέγομεν ὅτι·
πειδὴ 4 π. = 3 π. + 1 π. ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς 3 π.
αὶ τὸν 1 π. ἐπὶ 548 καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα. Ἀλλ' ἐπειδὴ
ὀργ. ἐπὶ 548, δίδει 548 ὀργ., οἱ 3 πόδ. οἱ ὁποῖοι εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς
ργυιᾶς, θὰ δώσουν τὸ ἥμισυ τῶν 548 ὀργ., ἤτοι 274 ὀργ. ὁ δὲ 1 ποὺς
ὰ δώσῃ τὸ τρίτον τῶν 274 ὀργ., ἤτοι 274. ὀργ.: 3=91 ὀργ. 2 π.

3) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς 10 δακ. ἐπὶ 548, παρατηροῦ-
εν ὅτι οἱ 10 δ.=6 δ.+3δ.+1δ. καὶ ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν
αθένα τῶν προσθετέων αὐτῶν ἐπὶ 548. Ἀλλ' ἀφοῦ ὁ 1 ποὺς ἐπὶ 548
δωκε γινόμενον 91 ὀργ. καὶ 2π., οἱ 6 δ. οἱ ὁποῖοι εἶνε τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ 1 π.,
ὰ δώσουν τὸ ἥμισυ τῶν 91 ὀργ. καὶ 2 ποδ. ἤτοι 91 ὀργ. 2π.: 2=45
ργ. καὶ 4 πόδ. Οἱ τρεῖς δάκτυλοι οἱ ὁποῖοι εἶνε τὸ ἥμισυ τῶν 6 δακτ.
ὰ δώσουν τὸ ἥμισυ τῶν 45 ὀργ. καὶ 4 π., ἤτοι 45 ὀργ. 4 π.: 2=22
ργ. 5 π. Τέλος ὁ 1 δ., ὁ ὁποῖος εἶνε τὸ τρίτον τῶν 3 δ., θὰ δώσῃ τὸ
ρίτον τῶν 22 ὀργ. καὶ 5 ποδ., ἤτοι 22 ὀργ. 5 π.: 3=7 ὀργ. 3 π. 8δ. 5
Ὥστε εὑρήκαμεν

				ὀργ.	
35 ὀργ.	× 548		... ... =	19180	
4 ποδ.	× 548	3 π. × 548	. . =	274	π.
		1 π. × 548	. . =	91	2
10 δακ.	× 548	6 δ. × 548	. . =	45	4
		3 δ. × 548	. . =	22	5
		1 δ. × 548	. . =	7	3 8 δ.

αὶ προσθέτοντες αὐτὰ εὑρίσκομεν 19619 ὀργ. 14 π. 8 δ.
ἢ 19621 ὀργ. 2 π. 8 δ.

Ὁ ἀνωτέρω τρόπος τῆς εὑρέσεως τοῦ γινομένου συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέ-
ραιον λέγεται *μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν*, ἢ πολλαπλασιασμὸς κατὰ
τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν, ἐπειδὴ καθεὶς τῶν ἀριθμῶν τοῦ πολ-
λαπλασιαστέου ἀναλύεται εἰς μέρη ἁπλᾶ. Ἡ μέθοδος αὐτὴ ἐφαρμό-

εται ἰδίως, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε πολυψήφιος ἀριθμός.

Ἀσκήσεις.

Νὰ γίνουν οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοὶ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

1) 15 ὀργ. 4 π. 8 δ. 10 γρ. $\times$64 (Ἀπ. 1010 ὀργ.3 π. 1 δ. 4 γρ.)
2) 25 τάλ. 3 δρ. 60 λ. $\times$148. (Ἀπ. 3806 τάλ. 2 δρ. 80 λ.).
3) 32 στ. 28 ὀκ. 150 δρμ. $\times$623. (Ἀπ. 20347 στ. 33 ὀκ. 250δρμ.)

§ 78. Πολλαπλασιασμὸς ὅταν ὁ πολαπλασιαστὴς ὁρίζεται ὑπὸ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ.—

(Πρόβλημα) *1). «Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται 2 τάλ. 3 δρ. 60 λ: πόσον τιμῶνται 3 στατ. 18 ὀκ. 300 δρμ. τοῦ αὐτοῦ πράγματος;»*

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν 3 στ. 18 ὀκ. 300 δρμ.

Παρατηροῦμεν ὅτι 3 στ. $=44$ ὀκ. $\times 3=132$ ὀκ., καὶ 18 ὀκ. αἱ δοθεῖσαι, κάμνουν ἐν ὅλῳ 150 ὀκ. Ἐξ ἄλλου τὰ 300 δρ. $= \frac{3}{4}$ ὀκ. Ἐπομένως ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν 150 $\frac{3}{4}$ ὀκ., καὶ διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ 2 τάλ. 3 δρ. 60 λ. ἐπὶ 150 $\frac{3}{4}$. Ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμόν, εὑρίσκομεν ὅτι αἱ 3 στ. 18 ὀκ. καὶ 300 δρμ. τιμῶνται 2050,20 δρ.

(Πρόβλημα) *2). «Μία ὀκᾶ βουτύρου ἀνταλλάσσεται μὲ 4 ὀκ. 100 δρμ. σάπωνος· αἱ 10 ὀκ. 300 δρμ. βουτύρου μὲ πόσας ὀκάδας σάπωνος ἀνταλλάσσουται;»*

Καὶ εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς, δηλαδὴ ὅτι ἡ ὀκ. βουτύρου ἀνταλλάσσεται μὲ 4 ὀκ. 100 δρμ. σάπωνος, ζητεῖται δὲ ἡ τιμὴ 10 ὀκ. 300 δρμ. Ἀλλὰ τὰ 300 δρμ. εἶνε $\frac{3}{4}$ ὀκ. Ἐπομένως ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν 10 $\frac{3}{4}$ ὀκ., καὶ διὰ τοῦτο ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος ἐπὶ 10 $\frac{3}{4}$. Ἤτοι θὰ ἔχωμεν 4 ὀκ. 100 δρμ. $\times$ 10 $\frac{3}{4}$. Ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμόν, εὑρίσκομεν 45 ὀκ. 275δρμ. Ὥστε αἱ 10 ὀκ. 300 δρμ. βουτύρου ἀνταλλάσσονται μὲ 45 ὀκ. 275 δρμ. σάπωνος.

Εἰς τ' ἀνωτέρω δύο προβλήματα καὶ εἰς ἄλλα ὅμοια μὲ αὐτὰ βλέπομεν ὅτι δίδεται ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ πολλῶν μονάδων ἢ καὶ μερῶν τῆς μονάδος, λύονται δὲ διὰ πολλαπλασιασμοῦ. Ὁ μὲν πολλπλασιαστέος εἶνε ἡ τιμὴ τῆς μονάδος, ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν ἄλλον δοθέντα συμμιγῆ, ἂν τρέψωμεν αὐτὸν εἰς ἀριθμόν, παριστάνοντα μονάδας τῆς τάξεως, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ ἔχει δοθῆ.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

1) Ἀγοράζει τις 13 ὀκ. 350 δρμ. ἐμπορεύματος πρὸς 1 τάλ. 1 δρ. 20 λ. τὴν ὀκᾶν· πόσα θὰ πληρώσῃ; 86,025.

2) Ἀτμάμαξα διανύει καθ ὥραν 40 (80) χμ. 325 (26) μ.· πόσα θὰ διανύσῃ εἰς 8 (4) ὥρ. 15′ (15′) καὶ (24″); 332 (340) χμ. 681, 25 (644,006) μ.

3) Ἓν κεφάλαιον δίδει τόκον κατ' ἔτος 228 (125) δρ. 4 (36) λ: πόσον θὰ δώσῃ εἰς 13 (12) ἔτ. 9 (6) μῆν.; 3135,55(1567).

4) Ἔδιδέ τις 1 μάρκον καὶ ἐλάμβανε 1 δρ. 20 λ: πόσας δραχ. θὰ ἐλάμβανεν, ἂν ἔδιδε 3 εἰκοσάμαρκα, 2 πεντάμ., 2 μάρκα, 50 πφένιγκ.; 87.

5) Ἔδιδέ τις 1 ὀκ. καφὲ καὶ ἐλάμβανε 2 ὀκ. 200 δρμ. ζαχάρεως. Ἐὰν ἔδιδεν 20 (40) ὀκ. 350 (200) δρ. καφέ, πόσας ὀκάδας ζαχάρεως θὰ ἐλάβαμνε; 52 (101) ὀκ. 75 (100) δρμ.

§ 79. Ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου τῶν ἁπλῶν μερῶν.—

(Πρόβλημα). ***«Ὁ στατὴρ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται 12 δρ. 40 λ.· πόσον τιμῶνται 17 στ. 35 ὀκ. 300 δρμ. τοῦ αὐτοῦ πράγματος;»***

Καθὼς εἰς τὴν § 77 διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον, δυνάμεθα νὰ κάμωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν, οὕτω καὶ ἐδῶ, ἀντὶ νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ 17 στ. 35 ὀκ. 300 δρμ. εἰς στατῆρας, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν αὐτὴν μέθοδον. Πρὸς τοῦτο λέγομεν.

Ἡ ἀξία 10 στ.	*εἶνε 12 δρ. 40 λ.*	$\times 10=$	*124 δρ.*
» » *7 στ.*	» 12 » 40 ×	*7=*	*86,80*
» » *22 ὀκ.* $=\frac{1}{2}$ *στ.*	» 12 » 40:	*2=*	*6,20*
» » *11 ὀκ.*	» *6* » 20:	*2=*	*3,10*
» » *2 ὀκ.*	» *6* » 20:	*11=*	*0,56 περίπου*
» » *200 δρμ.*	» *56:*	*4=*	*0,14*
» » *100 δρμ.*	*14:*	*2=*	*0,17*
		δραχ.	*λ.*
ἤτοι ἐν ὅλῳ		*220*	*97 περίπου.*

§ 80. Διαίρεσις ὅταν ὁ διαιρέτης ὁρίζεται ὑπὸ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ.—

α΄) (Πρόβλημα) *1). «Οἱ 30 πήχ. 6 ρ. ἑνὸς ὑφάσματος τιμῶνται 3 εἰκ. 2 τάλ. 80 λ., πόσον τιμᾶται ὁ 1 πῆχυς τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;»*

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ δίδεται ἡ τιμὴ τῶν 30 πήχ. καὶ τῶν 6 ρ.. Ἀλλὰ τὰ 6 ρ. $= \frac{6}{8}$ π. $= \frac{3}{4}$ π. Ὥστε δίδεται ἡ τιμὴ τῶν 30 $\frac{3}{4}$ π. καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ 1 πήχ. Πρὸς λύσιν αὐτοῦ θὰ διαιρέσωμεν τὰ 3 εἰκ. 2 τάλ. 80 λ. διὰ τοῦ 30 $\frac{3}{4}$· Ἤτοι ἔχομεν τὴν διαίρεσιν 3 εἰκ. 2τάλ. 80 λ.:30 $\frac{3}{4}$, τὴν ὁποίαν ἐκτελοῦντες εὑρίσκομεν 2 δρ. καὶ 30 λ. περίπου.

(Πρόβλημα) *2). «Ἓν κινητόν, κινούμενον ὁμαλῶς, διανύει εἰς 3 ὥρ. 30′ 20″ διάστημα 45 $\frac{1}{2}$ μιλίων· πόσα μίλια διανύει εἰς 1′;»*

Καὶ εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ 1′, δίδεται δὲ ἡ τιμὴ τῶν 3 ὥρ. 30′ 20″. Ἀλλ' ἂν τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν τρέψωμεν εἰς πρῶτα λεπτά, ἔχομεν $210 + \frac{20}{60} = 210\ \frac{1'}{3}$

Ἑπομένως πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου θὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 45 $\frac{1}{2}$ μίλ. : 210 $\frac{1}{3}$· Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον $\frac{273}{1262}$ μίλια, ἢ ἐπειδὴ τὸ μίλιον ἔχει 1852 μ., τρέποντες εἰς μέτρα, λαμβάνομεν $\frac{273}{1262} \times 1852$ μ. $=400{,}631$ μ. περίπου.

Τὰ δύο ἀνωτέρω προβλήματα καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὰ λύονται διὰ διαιρέσεως μερισμοῦ. Ἐπειδὴ δίδεται ἡ τιμὴ πολλῶν μονάδων καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς.

Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, τρέπομεν τὸν συμμιγῆ, ὁ ὁποῖος ὁρίζει τὸν διαιρέτην, εἰς ἀριθμὸν παριστάνοντα μονάδας τῆς τάξεως τῆς ὁποίας ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν διὰ κλάσματος ἢ δι' ἀκεραίου.

β΄) (Πρόβλημα) *1). «Εἷς πεζὸς χρειάζεται 20′ 45″, διὰ νὰ διανύσῃ 1 χμ.. πόσα χιλιόμετρα θὰ διανύσῃ εἰς 4 ὥρ. 30′;»*

Ἀφοῦ εἰς 20′ 45″ διανύει 1 χιλ., εἰς 4 ὥρ. 30′ θὰ διανύσῃ τόσα χιλιόμετρα, ὅσας φορὰς ἀφαιρεῖται τὸ 20′ 45″ ἀπὸ τὸν 4 ὥρ. 30′, ἢ ὅσον χωρεῖ τὸ 20′ 45″ εἰς τὸ 4 ὥρας 30′. Τρέπομεν καὶ τοὺς δύο συμμιγεῖς εἰς δεύτερα λεπτὰ καὶ ἔχομεν τὴν διαίρεσιν 16200 : 1245, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $13\frac{5}{249}$.

Ὥστε εἰς 4 ὥρ. 30′ θὰ διανύσῃ $13\frac{5}{249}$ χμ.

(Πρόβλημα) 2). *«Οἱ 2 στ. 2 ὀκ. 200 δρμ. ἑνὸς πράγματος τιμῶνται 1 εἰκοσ: πόσον τιμῶνται 1 στ. 10 ὀκ. 150 δρμ. τοῦ αὐτοῦ πράγματος;»*

Ὁμοίως σκεπτόμεθα διὰ τὴν λύσιν καὶ τοῦ προβλήματος τούτου.

Ἀφοῦ διὰ 2 στ. 2 ὀκ. 200 δρμ. δίδομεν 1 εἰκ., διὰ τὸν 1 στ. 10 ὀκ. 150 δρμ. θὰ δώσωμεν τόσα εἰκ., ὅσον χωρεῖ ὁ 1 στ. 10 ὀκ. 150 δρμ. εἰς τὸν 2 στ. 2 ὀκ. 200 δρ. Τρέπομεν καὶ τοὺς δύο συμμιγεῖς εἰς δράμια καὶ οὕτω ἔχομεν τὴν διαίρεσιν 21750: 36200. Ἤτοι $= \frac{2175}{3620} = \frac{435}{724}$. Ὥστε ὁ 1 στ. 10 ὀκ. 150 δρμ. τιμῶνται $\frac{435}{724}$ εἰκ., ἢ τρέποντες τὸ κλάσμα τοῦτο εἰς συμμιγῆ, εὑρίσκομεν 12 δρ. $1\frac{119}{181}$ λ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων βλέπομεν ὅτι, 5
«ὅταν ἡ διαίρεσις εἶνε μετρήσεως, τρέπομεν καὶ τοὺς δύο συμμιγεῖς εἰς μονάδας τῆς κατωτάτης τάξεως καὶ οὕτω ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν ἀκεραίους ἀριθμούς».

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Ἀτμόπλοιον διανύει 120 μίλ. εἰς 2 ἡμερονύκτια 8 ὥρ. 45′· πόσα μίλ. διανύει εἰς 1 ὥρ. κατὰ μέσον ὅρον; $2\frac{26}{227}$ μίλ.

2) Ὡρολόγιον μένει ὀπίσω 1 ὥρ. (18′) καὶ 30′ (20″) εἰς διάστημα τριῶν ἡμερονυκτίων (8 ὥρ. 25′)· πόσον μένει ὀπίσω εἰς 1 ὥρ.;

1′ 15″ $\left(2'\ 10''\ \frac{70}{101}\right)$.

3) Ὁδοιπόρος ἐβάδισε 200 ὀργ. καὶ 3 π. εἰς 3 ὥρ. 40′ 30″· πόσον ἐβάδισεν εἰς 1 ὥραν κατὰ μέσον ὅρον;

54 ὀργ. 3 π. 4 δ. $1\frac{47}{49}$ γρ.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἀτμάμαξα διανύει 118 χμ. 701 μ. εἰς 1 ὥρ. 22′ 30″· πόσον διανύει εἰς 1 ὥρ.; 86 χμ. 328 μ.

2) Οἱ 5 στ. 35 (5) ὀκ. 250 (200) δρμ. πράγματος ἐπωλήθησαν ἀντὶ 291 (2) ταλ. 3 (3) δρ. 50 (60) λ: πόσον ἐπωλήθη ἡ 1 ὀκᾶ; 5,70. (2,47..) δρ.

3) Κινητὸν διατρέχει εἰς 3 ὥρ. 18′ 32″ διάστημα 23 χμ. 824 μ: εἰς πόσον χρόνον διατρέχει 1μ.; 0,5″.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἡ ὀκᾶ πράγματος τιμᾶται 5 δρ. 25 λ: πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν μὲ 2 τάλ. 3 δρ.; 2 ὀκ. 190 $\frac{10}{21}$ δρμ.

2) Ἁμαξοστοιχία διανύει 38 χμ. εἰς 1 ὥρ: εἰς πόσας ὥρας θὰ διατρέξῃ 400 χμ.; 10 ὥρ. 31′ 34 $\frac{14}{19}$″.

3) Ἐργάτης ἐλάμβανε καθ' ὥραν ἐργασίας 4 δρ. 50: εἰς πόσας ὥρας θὰ ἐλάβανεν 120 δρ. 80λ.; 26 $\frac{38}{45}$.

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Μὲ 1 τάλ. ἀγοράζει τις 5 ὀκ. 350 δρμ. πράγματος· πόσον ἀγοράζει μὲ 3 δρ.; 3 ὀκ. 210 δρμ.

2) Μὲ 1 δραχ. ἀγοράζει τις 1 π. 2 ρ. ὑφάσματος· πόσον ἀγοράζει μὲ 10 δρ. καὶ 20 λ.; 12 π. 6 ρ.

3) Ἐὰν οἰκονομῇ τις καθ' ἡμέραν 1 δρ. 25 λ., εἰς πόσας ἡμέρας θὰ οἰκονομήσῃ 75 δρ.; 60 ἡμ.

4) Ἡ ὀκᾶ πράγματος τιμᾶται 3 δρ. 80 λ: πόσας ὀκάδας θ' ἀγοράσωμεν μὲ 12 δρ. 60 λ.; 3 ὀκ. 126 $\frac{6}{19}$ δρ.

5) Ἠγόρασέ τις 43 χιλ. 240 γρ. ἐμπορεύματος ἀντὶ 316 δρ. 25 λ. καὶ τὸ ἐπώλησε μὲ κέρδος 40 δρ. 48 λ: πόσον ἐπώλησε τὸ 1 χιλιόγραμμον; 8, 24 δρ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII.

Περὶ λόγων καὶ ἀναλογιῶν.

§ 81. Λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν.—

Εἰς τὴν § 61 εἴδομεν ὅτι, διὰ νὰ μετρήσωμεν ἓν μέγεθος, συγκρίνομεν αὐτὸ πρὸς ἄλλο ὁμοειδές αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως αὐτῆς εἶνε εἷς ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος καθὼς εἴδομεν, παριστάνει τὸ ποσόν. Γενικῶς δυνάμεθα νὰ συγκρίνωμεν ἓν ποσὸν ἢ ἓν μέγεθος πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς αὐτοῦ καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγρίσεως αὐτῆς θὰ καλοῦμεν λόγον τοῦ πρώτου μεγέθους πρὸς τὸ δεύτερον. Π.χ., ἐὰν ἓν οἰκόπεδον συγκριθῇ πρὸς τὸν τεκτονικὸν τετραγ. πῆχυν καὶ εὑρεθῇ 355 τ. τεκ. π., ὁ ἀριθμὸς 355 παριστάνει τὸν λόγον τῆς ἐπιφανείας τοῦ δοθέντος οἰκοπέδου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τετραγ. τεκτον. πήχεως. Ἐὰν ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως συγκριθῇ πρὸς τὸν πληθυσμὸν ἄλλης καὶ εὑρεθῇ ὅτι, ἡ πρώτη ἔχει τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ πληθυσμοῦ τῆς δευτέρας, τὸ $\frac{1}{4}$ θὰ λέγεται λόγος τοῦ πληθυσμοῦ τῆς πρώτης πρὸς τὸν τῆς δευτέρας. Ὥστε,

«***λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως τοῦ ἑνὸς τῶν δύο μεγεθῶν διὰ τοῦ ἄλλου***». 5

§ 82. Λόγος δύο ἀριθμῶν.—

α΄) Καλοῦμεν ***λόγον δύο ἀριθμῶν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου***. Ἐπειδὴ ὡς γνωστὸν § (53), τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν παριστάνεται διὰ κλάσματος, ἔχοντος ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην, ἕπεται ὅτι, ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς τὸν 3 εἶνε ἴσος μὲ $\frac{12}{3} = 4$· ὁ λόγος τοῦ 5,2 πρὸς τὸν 7,48 ἰσοῦται μὲ $\frac{5,2}{7,48} = \frac{520}{748}$ κ.ο.κ.

Ἐν γένει, ὁ λόγος ἑνὸς ἀριθμοῦ α πρὸς ἄλλον β εἶνε ἴσος μὲ

$\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta}$

β') Οἱ δύο ἀριθμοὶ ἑνὸς λόγου λέγονται ὅροι, ὁ μὲν πρῶτος ἡγούμενος ὁ δὲ δεύτερος ἑπόμενος. Οὕτω τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$ ὁ μὲν α εἶνε ὁ ἡγούμενος ὁ δὲ β ἑπόμενος

γ') Ἐπειδὴ ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν δύναται νὰ παριστάνεται διὰ κλάσματος ἕπεται ὅτι,

« *ὁ λόγος δύο ριθμῶν ἔχει τὰς ἰδιότητας τοῦ κλάσματος* ». Κατὰ ταῦτα,

«*ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν οἱ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθοῦν ἢ διαιρεθοῦν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν*».

Οὕτω ὁ λόγος $\frac{10}{20} = \frac{1}{2} = \frac{20}{40} = \frac{60}{120}$ κ.ο.κ. Ἤτοι ὁ λόγος τῶν 10 καὶ 20 ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν 1 καὶ 2, ἢ τῶν 20 καὶ 40, ἢ τῶν 60 καὶ 120 κ. ο. κ.

§ **83. Ἰδιότης τοῦ λόγου ὁμοειδῶν μεγεθῶν.**—

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν π. χ. δύο ὑφασμάτων. Καθὼς εἴδομεν εἰς τὴν § 82 θὰ μετρήσωμεν τὸ ἓν διὰ τοῦ ἄλλου. Ἂς ὑποτεθῇ ὅτι ἔγινεν ἡ μέτρησις τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου καὶ εὑρέθη ὁ λόγος των ἴσος μὲ 4. Ἂν τώρα μετρήσωμεν καθὲν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος π. χ. διὰ τοῦ 1 μ. καὶ εὕρωμεν ὅτι τὸ δεύτερον ἔχει μῆκος 3 μ., τὸ πρῶτον ὡς τετραπλάσιον τοῦ δευτέρου θὰ ἔχῃ μῆκος $3 \times 4 = 12$ μ. Ὥστε τὰ δύο ὑφάσματα, μετρηθέντα διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος (1 μ.), θὰ παριστάνωνται ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν 12 (τὸ πρῶτον) καὶ 3 (τὸ δεύτερον) Ἀλλὰ καὶ ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς τὸ 3 εἶνε ὁ 4· ἤτοι εἶνε ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν δύο δοθέντων μεγεθῶν. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ἕπεται ὅτι, «*ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν παριστανόντων αὐτὰ ἀριθμῶν, ὅταν ταῦτα μετρηθοῦν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος*». Κατὰ ταῦτα ἂν οἱ πληθυσμοὶ δύο πόλεων, ἔστω τῶν Α καὶ Β, εἶνε 8000 καὶ 12000, ὁ λόγος τοῦ πληθυσμοῦ αὐτῶν εἶνε ἴσος μὲ τὸν λόγον $\frac{8000}{12000} = \frac{2}{3}$.

§ **84. Περὶ ἀναλογιῶν.**—

α') Καλοῦμεν *ἀναλογίαν τὴν ἰσότητα δύο λόγων*. Π. χ. ἡ ἰσότης $\frac{12}{3} = \frac{20}{5}$ λέγεται *ἀναλογία*. Διότι οἱ λόγοι $\frac{12}{3}$ καὶ $\frac{20}{5}$ εἶνε ἴσοι μὲ 4, γράφεται δὲ καὶ οὕτω $12 : 3 = 20 : 5$, καὶ ἀπαγγέλ-

λεται ὡς ἑξῆς· 12 πρὸς 3 ἴσον μὲ 20 πρὸς ἢ 5, καὶ $\frac{12}{3}$ ἴσον μὲ $\frac{20}{5}$.
Ἐὰν οἱ δύο ἴσοι λόγοι εἶνε $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$, ἡ ἀναλογία εἶνε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἢ $\alpha:\beta=\gamma:\delta$.

β΄) Οἱ τέσσαρες ἀριθμοί, οἱ ἀποτελοῦντες τὴν ἀναλογίαν, λέγονται *ὅροι* αὐτῆς καὶ ὁ μὲν πρῶτος καὶ ὁ τρίτος λέγονται *ἡγούμενοι*, οἱ δὲ ἄλλοι *ἑπόμενοι*· ὁ πρῶτος καὶ ὁ τέταρτος λέγονται *ἄκροι*, ὁ δὲ δεύτερος καὶ τρίτος *μέσοι* ὅροι τῆς ἀναλογίας. Τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ οἱ α, δ εἶνε ἄκροι, οἱ δὲ β, γ μέσοι.

γ΄) ***Ἰδιότης τῶν ἀναλογιῶν.***

Ἔστω ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ δ τοὺς δὲ τοῦ δευτέρου ἐπὶ β, λαμβάνομεν $\frac{\alpha\delta}{\beta\delta}=\frac{\gamma\beta}{\alpha\beta}$. Ἐπειδὴ τὰ δύο αὐτὰ κλάσματα ἔχουν παρονομαστὰς ἴσους, θὰ ἔχουν καὶ ἀριθμητὰς ἴσους, δηλαδὴ θὰ εἶνε $\alpha\times\delta=\gamma\times\beta$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι,

«εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων αὐτῆς ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων».

Κατὰ ταῦτα εἰς τὴν ἀναλογίαν $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ ἔχομεν πράγματι ὅτι $2\times 6=3\times 4=12$. Ὁμοίως εἰς τὴν $\frac{5}{6}=\frac{15}{18}$ ἔχομεν ὅτι $5\times 18=6\times 15=90$. 5

δ΄) *Εὕρεσις ἑνὸς τῶν ὅρων ἀναλογίας ἐκ τῶν τριῶν ἄλλων.* Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἕνα τῶν τεσσάρων ὅρων ἀναλογίας, ὅταν δοθοῦν οἱ τρεῖς ἄλλοι. Πράγματι ἔστω ὅτι ὁ ζητούμενος ὅρος εἶνε ὁ πρῶτος, οἱ δὲ τρεῖς ἄλλοι εἶνε κατὰ σειρὰν οἱ β, γ, δ. Ἂν παραστήσωμεν τὸν ἄγνωστον διὰ τοῦ x, θὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{x}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα θὰ εἶνε, $\delta\times x=\beta\times\gamma$. Διαιροῦντες δὲ τοὺς δύο ἴσους τούτους ἀριθμοὺς διὰ τοῦ δ, εὑρίσκομεν ὅτι $x=\frac{\beta\times\gamma}{\delta}$.

Ὁμοίως, ἂν ζητῆται ὁ τέταρτος ὅρος ἀναλογίας, οἱ δὲ τρεῖς ἄλλοι εἶνε κατὰ σειρὰν α, β, γ, θὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{x}$, παριστάνοντες τὸν τέταρτον διὰ τοῦ x. Ἐφαρμόζοντες τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, εὑρίσκομεν $\alpha \times x = \beta \times \gamma$. Ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν ὅτι $x = \frac{\beta \times \gamma}{\alpha}$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, «***διὰ νὰ εὕρωμεν ἕνα τῶν ἄκρων ὅρων ἀναλογίας, τῆς ὁποίας δίδονται οἱ τρεῖς ἄλλοι, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο μέσους ὅρους αὐτῆς καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ δοθέντος ἄκρου***».

ε΄) Ἐὰν ζητῆται εἷς τῶν μέσων ὅρων, δίδονται δ᾽ οἱ τρεῖς ἄλλοι, π. χ. ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{x} = \frac{\gamma}{\delta}$ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ x, ἔχομεν $\gamma \times x = \alpha \times \delta$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x = \frac{\alpha \times \delta}{\gamma}$. Ἤτοι «***διὰ νὰ εὕρωμεν ἕνα τῶν μέσων ὅρων ἀναλογίας, τῆς ὁποίας δίδονται οἱ τρεῖς ἄλλοι διαιροῦμεν τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄκρων διὰ τοῦ δοθέντος μέσου***».

Οὕτω ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{3}{x} = \frac{4}{5}$ ἔχομεν $x = \frac{3 \times 5}{4} = \frac{15}{4}$. Ἐκ τῆς $\frac{7}{3} = \frac{x}{2}$ εὑρίσκομεν $x = \frac{2 \times 7}{3} = \frac{14}{3}$. Ἐκ τῆς $\frac{2}{3} = \frac{5}{x}$ εὑρίσκομεν $x = \frac{3 \times 5}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ x ἐκ τῶν ἀναλογιῶν

α΄) $45 : 68 = 90 : x$· β΄) $6 : 3 = x : 7$· γ΄) $x : 4 = 9 : 7$.
δ΄) $1,6 : 3 = x : 2,7$· ε΄) $3,5 : x = 8 : 1,8$· ς΄) $3\frac{1}{4} : 6 = x : 9$.
ζ΄) $x : 1\frac{1}{2} = \frac{15}{7} : 1\frac{1}{4}$· η΄) $1,9 : x = 2,3 : 2$· θ΄) $x : 6 = 0,6 : 1,5$.

2) Ποῖος εἶνε ὁ ἀντίστροφος λόγος τοῦ $\frac{7}{9}$; τοῦ $\frac{2}{3}$; τοῦ 3,5;

3) Μὲ τί ἰσοῦται τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἀντιστρόφων ἢ δύο ἀντισρόφων λόγων, π. χ. τοῦ $5\left(\frac{3}{7}\right)$ καὶ τοῦ ἀντιστρόφου του;

§ **85. Περὶ ἐξαρτήσεως τῶν ποσῶν.**—

α΄) Καθὼς γνωρίζομεν, ὅσω περισσοτέρας ὀκάδας ἑνὸς ἐμπορεύματος ἀγοράζομεν, τόσω περισσότερα χρήματα πληρώνομεν· τὸ βάρος λοιπὸν καὶ ἡ τιμὴ ἑνὸς ἐμπορεύματος εὑρίσκονται εἰς τοιαύτην σχέσιν μεταξύ των, ὥστε ἡ αὔξησις τοῦ βάρους νὰ φέρῃ τὴν αὔξησιν τῆς τιμῆς, καὶ τοὐναντίον, ἡ ἐλάττωσις τοῦ βάρους νὰ φέρῃ τὴν ἐλάττωσιν τῆς τιμῆς αὐτοῦ. Τοιαῦτα ποσὰ ἀπαντῶνται συχνά. Οὕτω, ἐὰν αὐξηθῇ τὸ εἰσόδημα ἐκ μιᾶς οἰκίας αὐξάνεται καὶ ὁ φόρος, τὸν ὁποῖον πληρώνομεν δι᾽ αὐτήν. Ἐὰν αὐξήσωμεν τοὺς ἐργάτας, οἱ ὁποῖοι ἐργάζονται εἰς ἓν ἔργον, θὰ αὐξηθῇ καὶ τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον αὐτοὶ ἐκτελοῦν.

β') Ὅσω περισσοτέρους ἐργάτας λαμβάνει τις διὰ τὴν ἀνοικοδόμησιν μιᾶς οἰκίας, εἰς τόσω ὀλιγώτερον χρόνον θὰ γίνῃ ἡ ἀνοικοδόμησις. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ τῶν ἡμερῶν ἐργασίας αὐτῶν εὑρίσκονται εἰς τοιαύτην σχέσιν μεταξύ των, ὥστε ἡ αὔξησις τοῦ ἑνὸς τούτων ἐπιφέρει τὴν ἐλάττωσιν τοῦ ἄλλου. Ἐπίσης τοιαῦτα ποσὰ ὑπάρχου ἀρκετά· π. χ. αὐξάνει τις τὸ μῆκος τοῦ βήματός του, ἐλαττοῦται τότε ὁ ἀριθμὸς τῶν βημάτων, τὰ ὁποῖα χρειάζεται νὰ διανύσῃ μίαν ὡρισμένην ἀπόστασιν.

γ') Ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι μετροῦμεν τὴν θερμοκρασίαν ἑνὸς ἀσθενοῦς ἀπὸ ὥρας εἰς ὥραν καὶ εὑρίσκομεν ὅτι αὕτη ἄλλοτε αὐξάνεται καὶ ἄλλοτε ἐλαττοῦται. Τότε ὁ χρόνος καὶ ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀσθενοῦς εὑρίσκονται εἰς τοιαύτην σχέσιν μεταξύ των, ὥστε ἡ αὔξησις τοῦ χρόνου ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα ἄλλοτε μὲ τὴν αὔξησιν ἄλλοτε δὲ τὴν ἐλάττωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ ἀσθενοῦς, καθ᾽ ὅσον αὕτη ἀνέρχεται ἢ κατέρχεται κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο τοῦ χρόνου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι, 5

1) Ὑπάρχουν ποσὰ τοιαῦτα, ὥστε ὅταν τὸ ἓν μεταβάλλεται καὶ τὸ ἄλλο παθαίνει μεταβολήν τινα· ἐπίσης καὶ ἄλλα διὰ τὰ ὁποῖα δὲν συμβαίνει τοῦτο. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν λέγομεν ὅτι τὰ ποσὰ ἐξαρτῶνται τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο, εἰς δὲ τὴν δευτέραν, ὅτι εἶνε ἀνεξάρτητα τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο.

2) Ἓν ποσόν, ἔστω τὸ Α, δύναται νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ ἓν ἄλλο ἔστω τὸ Β, κατὰ ἕνα ἐκ τῶν ἑξῆς δύο τρόπων. α') Δύναται, ὅταν αὐξάνεται τὸ Β, ν᾽ αὐξάνεται καὶ τὸ Α· β') ὅταν αὐξάνεται τὸ Β, νὰ ἐλαττοῦται τὸ Α.

3') Ἓν ποσὸν δύναται νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ ἄλλα ποσὰ περισσότερα τοῦ ἑνός. Οὕτω τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πληρώνει ἓν ἐργοστάσιον εἰς τοὺς ἐργάτας αὐτοῦ, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐργατῶν, ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν κατὰ τὰς ὁποίας αὐτοὶ ἐργάζονται καὶ ἀπὸ τὸν χρόνον, κατὰ τὸν ὁποῖον ἐργάζονται καθ᾽ ἡμέραν οἱ ἐργάται.

Ἀσκήσεις.

1) Εὕρετε παραδείγματα διὰ καθὲν τῶν ἀνωτέρω εἰδῶν τῆς ἐξαρτήσεως τῶν ποσῶν.

2) Ἐκ δύο ποσῶν Α καὶ Β, ὅταν τὸ Α αὐξάνεται, αὐξάνεται καὶ τὸ Β. α′) τί παθαίνει τὸ Β ὅταν τὸ Α ἐλαττοῦται· β′) τί παθαίνει τὸ Α, ὅταν τὸ Β αὐξάνεται;

3) Ἐκ δύο ποσῶν Α καὶ Β ὅταν αὐξάνεται τὸ Α, ἐλαττοῦται τὸ Β· α′) τί παθαίνει τὸ Β, ἐὰν ἐλαττοῦται τὸ Α; β′) τί παθαίνει τὸ Α, ἐὰν αὐξάνεται τὸ Β; τί ἐὰν ἐλαττοῦται τὸ Β;

§ 86. Περὶ τῶν εὐθέως ἀναλόγων ποσῶν.—

α′) Ὁ τρόπος τῆς ἐξαρτήσεως τῶν ποσῶν, τὰ ὁποῖα μεταβάλλονται οὕτως, ὥστε ὅταν τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν αὐξάνεται, αὐξάνεται καὶ τὸ ἄλλο δύναται νὰ εἶνε διαφόρων εἰδῶν.

Ἐὰν 2 ὀκ. ἑνὸς ἐμπορεύματος στοιχίζουν δύο δρ., αἱ 4·6·8· ὀκάδες θὰ στοιχίζουν ἀντιστοίχως 10· 15· 20 δραχμάς· ἡ τιμὴ λοιπὸν τοῦ ἐμπορεύματος αὐξάνεται οὕτως, ὥστε εἰς διπλάσιον, τριπλάσιον ἀριθμὸν ὀκάδων ἀντιστοιχεῖ διπλάσιος, τριπλάσιος ἀριθμὸς δραχμῶν.

Ἐὰν ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου γίνῃ 2· 3 φορὰς μεγαλυτέρα, ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ θὰ γίνῃ μεγαλυτέρα, ἀλλ᾽ ὄχι μόνον 2· 3 φοράς, καθὼς δυνάμεθα νὰ τὸ ἴδωμεν, ἂν κατασκευάσωμεν τὸ σχῆμα. Ποσὰ τοῦ πρώτου εἴδους ὑπάρχουν πολλά. Οὕτω εἰς διπλάσιον, τριπλάσιον χρόνον τῆς ἐργασίας ἀντιστοιχεῖ διπλασία, τριπλασία ἀμοιβὴ κ.ο.κ. Τὰ τοιαῦτα ποσὰ καλοῦμεν κατ᾽ εὐθεῖαν ἀνάλογα.

Ἐν γένει, ***«δύο ποσὰ λέγονται κατ᾽ εὐθεῖαν ἀνάλογα, ἐὰν πολλαπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ ἑνὸς ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται καὶ τὸ ἄλλο μὲ τὸν αὐτὸν ῥυθμόν»***.

β′) Ἰδιότητες τῶν ἀναλόγων ποσῶν.

«Ἐὰν δύο ποσὰ εἶνε ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου».

Πράγματι, ἐὰν 3 ὀκάδες ἑνὸς πράγματος τιμῶνται 14 δρ., αἱ διπλάσιαι ὀκάδες, δηλαδὴ αἱ 6 ὀκ., θὰ τιμῶνται 28 δρ., ὁ δὲ λό-

γος τῶν δύο τιμῶν 3 ὀκ. καὶ 6 ὀκ. εἶνε $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$· Ἐπίσης ὁ λόγος τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τοῦ ἄλλου ποσοῦ εἶνε $\frac{14}{28}=\frac{1}{2}$.
Ἤτοι οἱ δύο λόγοι εἶνε ἴσοι. Διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὅτι, $\frac{3}{6}=\frac{14}{28}$· Ἑπομένως ἔχομεν ὅτι, «***ἐὰν δύο ποσὰ εἶνε ἀνάλογα, ἓν ζεῦγος τιμῶν τοῦ ἑνὸς μετὰ τοῦ ἀντιστοίχου ζεύγους τιμῶν τοῦ ἄλλου ἀποτελοῦν ἀναλογίαν***».

§ 87. Περὶ τῶν ἀντιστρόφως ἀναλόγων ποσῶν.—

α΄) Καὶ εἰς τὰ ποσὰ εἰς τὰ ὁποῖα ὅταν τὸ ἓν αὐξάνεται τὸ ἄλλο ἐλαττοῦται, ὁ τρόπος τῆς ἐξαρτήσεως αὐτῶν εἶνε διαφόρων εἰδῶν. Ἐὰν 5 ἐργ. τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 12 ἡμ., διπλάσιοι, τριπλάσιοι...ἐργάται, ἐργαζόμενοι ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας, θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον εἰς 6· 4... ἡμέρας. Ὥστε ἐὰν αὐξάνεται ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν, ἐλαττοῦται ὁ χρόνος καθ' ὃν παρατοῦται τὸ ἔργον καὶ μάλιστα εἰς 2· 3...φορὰς περισσοτέρους ἐργάτας ἀντιστοιχεῖ 2· 3...φορὰς ὀλιγώτερος χρόνος. Ἐὰν ἡ χορδὴ ἑνὸς κυκλικοῦ τόξου γίνῃ διπλασία, τριπλασία,.. ἐλαττοῦται ἡ ἀπόστασίς αὐτῆς ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἀλλὰ δὲν γίνεται δύο, τρεῖς,..φορὰς μικρότερα, καθὼς φαίνεται, ἂν κατασκευάσωμεν τὸ σχῆμα. Ποσὰ τοῦ πρώτου εἴδους λέγονται *ἀντιστρόφως ἀνάλογα*. 5

Ἐν γένει, «***δύο ποσὰ λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἐὰν πολλαπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, διαιρεῖται ἢ πολλαπλασιάζεται τὸ ἄλλο μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν***».

β΄) Ἰδιότης τῶν ἀντιστρόφως ἀναλόγων ποσῶν.

«***Ἐὰν δύο ποσὰ εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς ἰσοῦται μὲ τὸν ἀντίστροφον λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου***».

Πράγματι, ἐὰν ἐξοδεύῃ τις 8 δρ. καθ' ἡμέραν καὶ περνᾷ μὲ ἓν χρηματικὸν ποσὸν 30 ἡμ., ἐξοδεύων 16 δρ. καθ' ἡμέραν, θὰ περάσῃ 15 ἡμ. Ὁ λόγος τῶν δύο τιμῶν 8 δρ. καὶ 16 δρ. εἶνε $\frac{1}{2}$, ἐνῷ ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων πρὸς αὐτὰς εἶνε $\frac{30}{15}=2$, ὁ ὁποῖος εἶνε ἀντίστροφος τοῦ $\frac{1}{2}$. Διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὅτι $\frac{16}{8}=\frac{30}{15}$.

Ἤτοι, «***ἐὰν ἔχωμεν δύο ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς καὶ ὁ ἀντίστροφος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου ἀποτελοῦν ἀναλογίαν***».

γ΄) Διὰ νὰ διακρίνωμεν ἂν δύο ποσὰ εἶνε ἀνάλογα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα ἢ καὶ μή, συγκρίνομεν αὐτά, καθὼς φαίνεται καὶ εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα.

1) 6 ἐργάται κερδίζουν 15 δρ. Λέγομεν ἀφοῦ 6 ἐργάται κερδίζουν 15 δρ., οἱ διπλάσιοι, τριπλάσιοι... ἐργάται ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας κερδίζουν διπλασίας, τριπλασίας...δραχμάς. Ἑπομένως τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα.

2) 10 ἄνθρωποι ἔχουν τροφὰς διὰ νὰ περάσουν 18 ἡμέρας. Λέγομεν· ἀφοῦ οἱ 10 ἄνθρωποι περνοῦν μὲ τὰς τροφὰς τὰς ὁποίας ἔχουν 18 ἡμ., οἱ διπλάσιοι, τριπλάσιοι... ἄνθρωποι μὲ τὰς αὐτὰς τροφὰς ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας θὰ περάσουν τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον... τῶν ἡμερῶν. Ἑπομένως τὰ ποσὰ εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Περὶ μεθόδων.

§ 88. Περὶ τῆς (ἁπλῆς) μεθόδου τῶν τριῶν.—

α΄) (Πρόβλημα) *1)*. «***Ἐὰν 8 ὀκ. μῆλα στοιχίζουν 60 δρχ., πόσον στοιχίζουν αἱ 20 ὀκ. μῆλα;***»

Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτὸ διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ὡς ἑξῆς. Γράφομεν ἐν πρώτοις, παριστάνοντες διὰ τοῦ *x* τὸν ἄγνωστον ἀριθμόν.

8 ὀκ. μῆλα	*60 δρχ.*
20	x

καὶ ἀκολούθως λέγομεν (§ 56)

αἱ 8 ὀκ. μῆλα στοιχίζουν 60 δρ.

ἡ μία ὀκ. μῆλα στοιχίζει 60 δρ.:8 $= \frac{60}{8}$ δρ.

αἱ 20 ὀκ. στοιχίζουν $\frac{60}{8} \times 20 = 150$ δρ.

Τὴν λύσιν τοῦ αὐτοῦ προβλήματος δυνάμεθα νὰ κάμωμεν καὶ ὡς ἑξῆς μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἀναλογιῶν.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ποσὰ τῶν μήλων καὶ λεπτῶν εἶνε ἀνάλογα. Ἑπομένως ὁ λόγος τῶν δύο τιμῶν τοῦ ποσοῦ τῶν μήλων εἶνε ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν λεπτῶν (§ 87, 6΄)· ἤτοι θὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{8}{20} = \frac{60}{x}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν ὅτι

$$x = \frac{60 \times 20}{8} = 150 \text{ δρχ. } (\S\ 84)$$

(Πρόβλημα) *2)*. «*Αἱ* $2\frac{3}{4}$ *ὀκ. ἑνὸς ἐμπορεύματος τιμῶνται* $9\frac{1}{2}$ *δρ.· πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν μὲ* $12\frac{2}{3}$ *δραχμάς;*»

Παριστάνομεν τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν διὰ τοῦ x, καὶ ἔχομεν

$$2\frac{3}{4} = \frac{11}{4} \text{ ὀκ. τιμῶνται } 9\frac{1}{2} = \frac{19}{2} \text{ δρχ.}$$

$$x \qquad\qquad 12\frac{2}{3} = \frac{38}{3}$$

Λύοντες αὐτὸ διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα (§ 56), εὑρίσκομεν ὅτι ὁ $x = \frac{11 \times 2 \times 38}{4 \times 19 \times 3} = 3\frac{2}{3}$ ὀκάδας.

Τὴν λύσιν τοῦ αὐτοῦ προβλήματος δυνάμεθα νὰ κάμωμεν καὶ διὰ τῶν ἀναλογιῶν, παρατηροῦντες ὅτι τὰ ποσὰ τῶν δραχμῶν καὶ τῶν ὀκάδων εἶνε ἀνάλογα. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν

$$\frac{\left(\frac{11}{4}\right)}{x} = \frac{\left(\frac{19}{2}\right)}{\left(\frac{38}{3}\right)}$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν ὅτι

$$x = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3} \text{ ὀκάδ.}$$

Καὶ εἰς τὰ δύο ἀνωτέρω προβλήματα ἔχομεν ποσὰ ἀνάλογα, δίδονται δ' εἰς καθὲν αὐτῶν δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν ποσῶν καὶ ἄλλη τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, ζητεῖται δὲ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς ταύτην τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ. Οὕτω εἰς τὸ 1) πρόβλημα αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ εἶνε 8 ὀκ. μῆλα καὶ 60 δρχ., ἡ ἄλλη τιμὴ τοῦ ἑνὸς τῶν δύο ποσῶν εἶνε 20 ὀκ. μῆλα, ζητεῖται δὲ ἡ εἰς ταύτην ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ, τὴν ὁποίαν παρεστήσαμεν διὰ τοῦ *x*.

5

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων τούτων βλέπομεν ὅτι, ***«ὅταν τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου* x*, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοί, ἀντεστραμμένον»***.

β') Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐργαζόμεθα, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Ἔστω π. χ. ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς

(Πρόβλημα) *1*). ***«Ἐὰν 16 ἐργάται τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 28 ἡμέρας, εἰς πόσας ἡμέρας 14 ἐργάται τῆς αὐτῆς ἱκανότητος θὰ ἐκτελέσουν τὸ αὐτὸ ἔργον;»***

Γράφομεν, παριστάνοντες τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν διὰ τοῦ x,

16 ἐργ.	28 ἡμ.
14	x

Παρατηροῦμεν τώρα, ὅτι τὰ δύο ποσὰ τῶν ἐργατῶν καὶ τῶν ἡμερῶν εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Ἑπομένως ὁ λόγος τῶν δύο τιμῶν τοῦ ποσοῦ τῶν ἐργατῶν, ὁ $\frac{16}{14}$, θὰ εἶνε ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφον τοῦ λόγου τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τῶν ἡμερῶν, ἤτοι μὲ τὸν $\frac{x}{28}$. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\frac{16}{14} = \frac{x}{28}$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x = \frac{16 \times 28}{14} = 32$ ἡμ.

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ λύομεν καὶ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ὡς ἑξῆς.

Ἀφοῦ οἱ 16 ἐργάται τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς 28 ἡμ., ὁ 1 ἐργ. θὰ τὸ τελειώσῃ εἰς 16 φορὰς περισσοτέρας ἡμέρας, ἤτοι εἰς 28×16 ἡμ.· καὶ οἱ 14 ἐργ. εἰς 14 φορὰς ὀλιγοτέρας τοῦ ἑνός, δηλαδὴ εἰς $\frac{28 \times 16}{14} = 32$ ἡμ.

(Πρόβλημα) *2*). ***«Ὅταν τὸ πλάτος ὑφάσματος εἶνε 7 ῥ., ἀπαιτοῦνται 44 ῥ. διὰ τὴν κατασκευὴν μιᾶς ἐνδυμασίας· πόσοι πήχεις ἀπαιτοῦνται, ὅταν τὸ ὕφασμα ἔχῃ πλάτος 10 ῥ.;»***

Καὶ ἐνταῦθα γράφομεν ἐν πρώτοις

7 ῥ. πλ.	44 ῥ. μῆκος
10	x

Ἐπειδὴ τὰ δύο ποσὰ εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν.

$$\frac{7}{10}=\frac{x}{44}$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=\frac{44\times7}{10}=\frac{308}{10}=30\frac{4}{5}$ ρ. $=3$π. $6\frac{4}{5}$ ρ.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν δύο τούτων προβλημάτων βλέπομεν ὅτι, «ὅταν ***τὰ ποσὰ εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὁ ἄγνωστος x εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα τῶν δύο ἄλλων ἀριθμῶν***».

γ') Ὁ γενικὸς τρόπος τῆς λύσεως προβλημάτων ἑνὸς εἴδους λέγεται μέθοδος.

Ἐπειδὴ εἰς τὰ ἀνωτέρω α') καὶ β') προβλήματα καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὰ δίδονται τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν τὸν ἄγνωστον, διὰ τοῦτο λέγονται προβλήματα τῆς *μεθόδου τῶν τριῶν*.

Ὅθεν, «***μέθοδος τῶν τριῶν λέγεται ὁ τρόπος, κατὰ τὸν ὁποῖον λύονται προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται δύο ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ δύο ποσῶν ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφως ἀναλόγων, καὶ ἄλλη τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, ζητεῖται δὲ ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ ἄλλου***». 5

δ') Ἐὰν συγκρίνωμεν τοὺς δύο προηγουμένους κανόνας α') καὶ β') συνάγομεν ὅτι πρὸς λύσιν ἑνὸς προβλήματος τῆς μεθόδου τῶν τριῶν,

1) Παριστάνομεν τὸν ἄγνωστον διὰ τοῦ x.

2) Γράφομεν τὰς δοθείσας ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν ποσῶν ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, καὶ ὑποκάτω αὐτῶν τὰς ὁμοειδεῖς αὐτῶν.

3) Σύρομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ ὑπ' αὐτὴν γράφομεν ὅτι, x ἰσοῦται μὲ τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοὶ ἀντεστραμμένον μέν, ἂν τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα, ὅπως ἔχει δέ, ἂν εἶνε ἀντίστροφα.

Παρατήρησις. Ἄξιον παρατηρήσεως εἶνε ὅτι, ὁ κανὼν αὐτὸς ἰσχύει μόνον διὰ τὰ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ἔχομεν ποσὰ ἀνάλογα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὄχι δὲ καὶ δι' ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα τὰ ποσὰ μεταβάλλονται οὕτως, ὥστε ὅταν αὐξάνεται τὸ ἕν, αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται ὁπωσδήποτε τὸ ἄλλο.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. ('Εμπόρευμα καὶ ἀξία). 1) 15 (45) ὀκ. ἐμπορεύματος τιμῶνται 18 (63,9) δρ.· πόσον τιμῶνται 27 (425) ὀκ.;

32,4 (603,5).

2) Τὰ 2,4 (7,2) μ. ὑφάσματος τιμῶνται 16,5 (23,4) δρ.· πόσον τιμῶνται $5\frac{1}{3}$ (2,4) μ. αὐτοῦ. $36\frac{2}{3}$ (7,8).

3) Αἱ 3,5 λίτραι οἴνου τιμῶνται 28 δρ.· πόσον τιμῶνται 15,5 λίτραι αὐτοῦ; 124.

4) 16 (28) ὀκ. μῆλα τιμῶνται 84 (140) δρ.· πόσα μῆλα ἀγοράζομεν μὲ 63 (250) δρ.; 12 (50).

Ὁμὰς δευτέρα. ('Εργάται καὶ χρόνος ἐργασίας· χρόνος ἐργασίας καὶ ἀμοιβή· ἐργάται καὶ ἀμοιβή). 1) 'Εὰν 30 (18) ἐργάται τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 8,75 (10,5) ἡμ., πόσοι τοιοῦτοι ἐργάται τὸ τελειώνουν εἰς 3,5 (13,5) ἡμέρας; 75 (14).

2) 'Εὰν 12 (30) ἐργάται τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 7,5 (1,5) ἡμ., εἰς πόσας ἡμ. θὰ τὸ τελειώνουν 27 (13) τοιοῦτοι ἐργάται;

8 ἡμ. 8 ὥρ. (3 ἡμ. 18 ὥρ.).

3) 16 (18) ἐργάται κερδίζουν εἰς ἕνα ὡρισμένον χρόνον 505,2 (220,5) δρ.· πόσον κερδίζουν 12 (22) ἐργάται εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον;

378,9 (269,40).

4) 'Εργάτης κερδίζει εἰς 12,5 (7) ἑβδομάδας 3125 (1976, 8) δραχ.· πόσα κερδίζει εἰς 14 (8,5) ἑβδομάδας; 3500 (2400,40).

Ὁμὰς τρίτη. ('Αριθμὸς ἴσων μερῶν καὶ μέγεθός των). 1) 'Εὰν 18 (27) ἄνθρωποι ἔχουν τροφὰς διὰ $4\frac{1}{3}$ $\left(2\frac{2}{3}\right)$ μῆνας, πόσον χρόνον θὰ ἐπαρκέσουν αἱ τροφαὶ αὐταὶ διὰ 10 (24) ἀνθρώπους;

7 μ. 24 ἡμ. (3

2) 'Εὰν 12 (18) ἄνθρωποι ἔχουν τροφὰς διὰ 4 μῆν. 5 ἡμ. (1 μ. 26 ἡμ.), πόσοι ἄνθρωποι θὰ περάσουν μὲ τὰς αὐτὰς τροφὰς 6, 25 μῆν. (16) ἡμ.; 8 (63).

3) Διὰ νὰ διανύσῃ τις ὡρισμένην ἀπόστασιν χρειάζεται 280 (243) βήματα μήκους 0,84 (0,8) μ.· πόσα βήματα θὰ κάμῃ, ἐὰν καθὲν βῆμα αὐτοῦ ἔχῃ μῆκος 0,77 (0,9) μ.; 312 (216).

Ὁμὰς τετάρτη. 1) 'Εὰν 10 (14) ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 (9 ὥρας καθ' ἡμέραν τελειώνουν ἓν ἔργον, πόσοι τοιοῦτοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 (7) ὥρας καθ' ἡμέραν, τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον; 16 (18).

2) Ἐὰν ἐργάτης εἰς $2\frac{1}{3}$ $\left(2\frac{2}{3}\right)$ μῆνας κερδίζῃ 1591,8 (180) δραχ., εἰς πόσον χρόνον θὰ κερδίσῃ 1023,3 (2925);

1,5 μ. (43 μ. 10 ἡμ.).

3) Μοιράζων τις ἓν ποσὸν χρημάτων εἰς 32 (48) πρόσωπα, δίδει εἰς καθὲν 36 (20) δρ: πόσον θὰ δώσῃ εἰς καθέν, ἂν τὸ αὐτὸ ποσὸν μοιράσῃ εἰς 28 (60) πρόσωπα; $41\frac{1}{7}$ (16).

4) 5 (7) σωλῆνες πληροῦν δεξαμενὴν εἰς $\frac{9}{10}\left(1\frac{2}{15}\right)$ ὥρ: εἰς πόσον χρόνον θὰ τὴν πληρώσουν 9 (17) τοιοῦτοι σωλῆνες; 30′(28′).

5) 20 (36) ἐργάται τελειώνουν ἓν ἔργον, ἐργαζόμενοι 9 (8) ὥρας καθ' ἡμέραν· πόσον πρέπει νὰ ἐργάζωνται καθ' ἡμέραν 18 (32) ἐργάται, διὰ νὰ τὸ τελειώσουν εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον;

10 ὥρ. (9).

6) Ἂν 14 (9) ἐργάται κερδίζουν εἰς τινα χρόνον 36,4 (39,24) δρχ., πόσοι ἐργάται εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον θὰ κερδίσουν 39 (196,20) δραχ.; 15 (45)

§ 89. Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.— 5

α′) (Πρόβλημα) 1). «***Ἐργάτης ἐργαζόμενος 6 ὥρας καθ' ἡμέραν ὑφαίνει 80 μ. ὑφάσματος εἰς 25 ἡμ: πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζεται διὰ νὰ ὑφάνῃ 120 μέτρα τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος εἰς 30 ἡμ.;***»

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος παριστάνομεν τὸν ἄγνωστον διὰ τοῦ x, καὶ γράφομεν

80 μ.	25 ἡμ.	6 ὥρ.
120	30	x

Συγκρίνομεν τὸ ποσὸν τοῦ ὑφάσματος μὲ τὸ ποσὸν τῶν ὡρῶν, ἐπίσης τὸ ποσὸν τῶν ἡμερῶν μὲ τὸ τῶν ὡρῶν, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὰ μὲν πρῶτα εἶνε ἀνάλογα, τὰ δὲ δεύτερα ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ ἡμέραι εἶνε 25 καὶ διὰ τὰ 120 μέτρα, θὰ ἔχωμεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

80 μ.	6 ὥρ.
120	x

εἰς τὸ ὁποῖον παρελείφθη ἡ τιμὴ 25 τοῦ δευτέρου ποσοῦ, ἐπειδὴ ὑπ θέσαμεν ὅτι ἔμεινεν ἀμετάβλητος. Ἐκ τῆς λύσεως τούτου ἔχομε

$x=6\times\frac{120}{80}=9$ ὥρ., ἀφοῦ τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα.

Ἤτοι διὰ νὰ ὑφάνῃ ὁ ἐργάτης 120 μ. εἰς 25 ἡμ., πρέπει νὰ ἐργά ζεται 9 ὥρας καθ᾽ ἡμέραν.

Ἐὰν τώρα θέλῃ νὰ ὑφάνῃ τὰ 120 μ. εἰς 30 ἡμ., καὶ ζητοῦμε πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζεται τὴν ἡμέραν, θὰ λύσωμεν τὸ ἐξῆ πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν

120 μ	25 ἡμ.	9
»	30	x

καὶ ἐπειδὴ ἐδῶ τὰ ποσὰ εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἔχομεν

$$x=9\times\frac{25}{30}=9\times\frac{5}{6}=3\times\frac{5}{2}=7\ \frac{1}{2}\text{ ὥρ.}$$

Ὥστε $7\frac{1}{2}$ ὥρ. τὴν ἡμέραν πρέπει νὰ ἐργάζεται ὁ ἐργάτης, δι νὰ ὑφάνῃ 120 μ. εἰς 30 ἡμέρας.

(Πρόβλημα) 2). «*16 ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ᾽ ἡμέρα τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 28 ἡμ: εἰς πόσας ἡμέρας 14 ἐργάτα ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ᾽ ἡμέραν, θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον;*»

Πρὸς λύσιν καὶ τούτου γράφομεν

16 ἐργ.	9 ὥρ.	28 ἡμ.
14	9	x

Συγκρίνομεν τὸ ποσὸν τῶν ἐργατῶν μὲ τὸ ποσὸν τῶν ἡμερῶν· ἐπ σης τὸ ποσὸν τῶν ὡρῶν ἐργασίας μὲ τῶν ἡμερῶν καὶ εὑρίσκομεν ὅ καὶ τὰ δύο αὐτὰ ποσὰ εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογα μὲ τὸ τρίτον. Ἐὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ ὧραι τῆς καθ' ἡμέραν ἐργασίας εἶνε 9 καὶ δι τοὺς 14 ἐργάτας, θὰ ἔχωμεν νὰ λύσωμεν τὸ ἐξῆς πρόβλημα τῆς μεθό δου τῶν τριῶν.

16 ἐργ.	28 ἡμ.
14	x

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν, ἀφοῦ τὰ ποσὰ εἶνε ἀντιστρόφω ἀνάλογα,

$x=28\times\frac{16}{14}=32$ ἡμ. (§ (88, 6').

Ἐὰν τώρα οἱ 14 ἐργάται ἐργάζωνται 8 ὥρ., διὰ νὰ εὕρωμε εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον, λύομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν

14 ἐργ.	*9 ὥρ.*	*32 ἡμ.*
»	*8*	*x*

καὶ ἐπειδή, καθὼς εἴδομεν, τὰ ποσὰ εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογα, εὑρίσκομεν $x = 32 \times \frac{9}{8} = 36$ ἡμέρας.

Ὥστε εἰς 36 ἡμέρας οἱ 18 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 8 ὥρ. καθ' ἡμέραν, θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον.

β') Εἰς τἀνωτέρω προβλήματα καὶ τὰ ὅμοια μὲ αὐτὰ δίδεται ἡ τιμὴ ἑνὸς ποσοῦ, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς δοθείσας τιμὰς δύο ἄλλων ποσῶν, τὰ ὁποῖα εἶνε ἀνάλογα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς αὐτό, καὶ ζητεῖται ἡ νέα τιμὴ τοῦ ποσοῦ τούτου, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς ἄλλας δοθείσας τιμὰς τῶν δύο ἄλλων ποσῶν. Ἐν γένει, τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ τιμαὶ περισσοτέρων τῶν δύο ποσῶν ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφως ἀναλόγων, καὶ ζητεῖται ἡ νέα τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς ἄλλας τιμὰς τῶν ἄλλων ποσῶν, λέγονται προβλήματα *τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν*, καὶ ἡ λύσις αὐτῶν ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ἡ ὁποία λέγεται καὶ 5
ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῆς συνθέτου.

γ') Διὰ νὰ εὕρωμεν σύντομον κανόνα πρὸς λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, παρατηροῦμεν ὅτι, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐξαγομένου τοῦ προβλήματος 1) ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὑπεράνω τοῦ *x* ἀριθμὸν 6 ὥρ. ἐπὶ τὸ ἀντίστροφον κλάσμα τοῦ $\frac{80}{120}$ καὶ ἐπὶ τὸ $\frac{25}{30}$ τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν αἱ τιμαὶ τῶν δύο ἄλλων ποσῶν, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μὲν πρῶτον εἶνε ἀνάλογον, τὸ δὲ δεύτερον ἀντιστρόφως ἀνάλογον πρὸς τὸ ποσὸν τῶν ὡρῶν. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος 2) καὶ παντὸς προβλήματος συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

«διὰ νὰ λύσωμεν πρόβλημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν 1) γράφομεν τὰς δοθείσας τιμὰς τῶν ποσῶν ἐπ' εὐθείας γραμμῆς· 2) παριστάνομεν διὰ τοῦ x τὴν ζητουμένην νέαν τιμὴν τοῦ ἑνὸς τῶν ποσῶν, καὶ γράφομεν ὑποκάτω τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώ-

της σειρᾶς τὴν νέαν τιμὴν καθενός· 3) ὑποκάτω σύρομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν, καὶ γράφομεν ὅτι, ὁ x ἰσοῦται μὲ τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν ἐπὶ καθὲν τῶν κλασμάτων, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν αἱ δύο τιμαὶ καθενὸς ποσοῦ, ὅπως ἔχει μέν, ἂν τὸ ποσὸν εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογον πρὸς τὸ τοῦ ἀγνώστου, ἀντεστραμένον δέ, ἂν εἶνε ἀνάλογον».

Πρὸς ἐφαρμογὴν λύομεν τὸ ἑξῆς

(Πρόβλημα) «*10 ἐργάται τελειώνουν τὰ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς ἔργου εἰς 15 ἡμ.· εἰς πόσας ἡμέρας 12 ἐργάται ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας ἐργαζόμενοι, θὰ τελειώσουν τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἔργου;*»

10 ἐργ.	$\frac{3}{4}$ ἔργου	15 ἡμ.
12	$\frac{1}{4}$	x

Συγκρίνοντες τὰ ποσὰ εὑρίσκομεν ὅτι, ἐργάται μὲν καὶ ἡμέραι εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἔργον δὲ καὶ ἡμέραι ἀνάλογα. Ἑπομένως ἔχομεν

$$x = 15 \times \frac{10}{12} \times \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = 15 \times \frac{10}{12} \times \frac{1}{3} = 5 \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{1} =$$

$$\frac{25}{6} = 4\frac{1}{6} \text{ ἡμέρας.}$$

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Πόσα λαμβάνει 1 ἐργάτης εἰς 1 ἡμ., ἐὰν 7 (8) τοιοῦτοι ἐργάται εἰς 7 (6) ἡμ., λαμβάνουν 1562,4 (2280) δρ.;

24,80 (47,5).

2) 18 (28) ἐργάται κερδίζομν εἰς 5 (22) ἡμ. 2340 (16016) δρ.· πόσον κερδίζουν 27 (16) ἐργάται εἰς 6 (18) ἡμ.;

4212 (7488).

3) 5 (13) ἐργάται κερδίζουν εἰς 7 (9) ἡμ. 847 (292,5) δρ.· εἰς πόσας ἡμ. 11 (17) ἐργάται θὰ κερδίσουν 2129,6 (3400) δρ.;

8 (80).

Ὁμὰς δευτέρα. 1) 8 (7) ἐργάται ἐργαζόμενοι 10 (9) ὥρ. καθ' ἡμέραν λαμβάνουν διὰ 12 (12) ἡμ. 1920 (990) δρ.· πόσοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 (10) ὥρ. τὴν ἡμέραν, θὰ λάβουν 4284 (3575) δρ. διὰ 14 (13) ἡμ.;

17 (21).

2) 13 (15) ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 (8) ὥρ. τὴν ἡμέραν λαμβάνουν 3088,8 (4416) δρ. εἰς 12 (16) ἡμ.· πόσας δραχ. θὰ λάβουν 16 (18) ἐργάται ἐργαζόμενοι 10 (9) ὥρ. τὴν ἡμέραν ἐπὶ 19 (17) ἡμ.; 6688 (6334,20).

3) Ἐὰν 25 (22) ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 (10) ὥρ. τὴν ἡμέραν σκάπτουν τάφρον μήκους 120 (825) μ. εἰς 12 (15) ἡμ., εἰς πόσας ἡμέρας 36 (18) ἐργάται ἐργαζόμενοι 10 (8) ὥρας καθ' ἡμέραν θὰ σκάψουν τάφρον μήκους 240 (432) μ.; 15 (12).

Ὁμὰς τρίτη. 1) 8 (17) ἐργάται σκάπτουν εἰς 5,4 (8) ἡμ. ἔδαφος 99,36 (134,4) ($μ^3$)· πόσα κυβικὰ μέτρα θὰ σκάψουν 9 (12) ἐργάται εἰς 6 (9) ἡμ.; 124,2 (103,729...).

2) Τάφρος μήκους (15 27) μ., πλάτους 2 (1,5) μ. καὶ βάθους 0,75 (0,8) μ. στοιχίζει 337,5 (518,4) δρ.· πόσον μῆκος θὰ ἔχῃ τάφρος πλάτους 2,25 (2) μ. καὶ βάθους 0,8 (0,75) μ., ἡ ὁποία στοιχίζει 675 (528) δρ.; 25 (22).

3) 16 (19) ἐργάται ὑφαίνουν 51 (114) μ. ὑφάσματος εἰς 17 (6) ἡμ. ἐργαζόμενοι 9 (8) ὥρ. καθ' ἡμέραν· πόσοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 9) ὥρ. καθ' ἡμέραν θὰ ὑφάνουν 57 (189) μ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος εἰς 18 (7) ἡμ. ; 19 (24).

4) Ἐὰν ἑνὸς βιβλίου καθεμία σελὶς ἔχῃ 40 (44) στίχους, καὶ καθεὶς στίχος 63 (72) γράμματα, τὸ βιβλίον ἀποτελεῖται ἀπὸ 15 (20) τυπογραφικὰ φύλλα. Ἀπὸ πόσα τυπογραφικὰ φύλλα θ' ἀποτελῆται τὸ αὐτὸ βιβλίον, ἐὰν καθεμία σελὶς ἔχῃ 45 (48) στίχους, καὶ καθεὶς στίχος 60 (55) γράμματα ; 14 (24).

5

Προβλήματα ὑπολογισμοῦ ποσοστῶν

§ 90. Ἡ σημασία τοῦ τόσον τοῖς ἑκατόν.—

α΄) Εἰς τὸν κοινὸν βίον ἀκούομεν συνήθως τὴν φράσιν «*ὁ ἔμπορος πωλεῖ τὸ ἐμπόρευμα αὐτοῦ μὲ κέρδος 8 τοῖς ἑκατὸν*» π. χ. Δι' αὐτοῦ ἐννοοῦμεν ὅτι εἰς τὰς ἑκατὸν δραχμάς, ὅπου τοῦ στοιχίζει τὸ ἐμπόρευμα, κερδίζει 8 δρ. κατὰ τὴν πώλησιν αὐτοῦ. Ἑπομένως ἐξ ἐκείνου τὸ ὁποῖον στοιχίζει 50 δρ., 25 δρ., 200 δρ, ... κερδίζει αὐτὸς 4 δρ., 2 δρ., 16 δρ. . . . .

Πρόκειται δηλαδὴ περὶ δύο ποσῶν ἀναλόγων (τιμῆς ἀγορᾶς καὶ κέρδους), καὶ μάλιστα δίδεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τιμὴν ἀγορᾶς 100 δρ.

Ἐν γένει, μεταχειριζόμεθα τὴν ἔκφρασιν «*τόσον τοῖς ἑκατὸν*» καὶ τὴν σημειώνομεν διὰ τοῦ $^0/_0$, ὅταν πρόκειται περὶ ἀναλόγων ποσῶν, καὶ δίδεται πόσαι μονάδες τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχοῦν εἰς 100 τοῦ ἄλλου. Κατ' ἀναλογίαν μεταχειριζόμεθα τὴν ἔκφρασιν «*τόσον ἐπὶ τοῖς χιλίοις*» καὶ τὴν σημειώνομεν οὕτω $^0/_{00}$, ἐὰν εἰς ἀνάλογα ποσὰ δίδεται πόσαι μονάδες τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχοῦν εἰς 1000 τοῦ ἄλλου.

β΄) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶνε φανερὰ καὶ ἡ σημασία τῶν ἑξῆς ἐκφράσεων.

1) *Ἓν ἐμπόρευμα θὰ πωληθῇ μὲ ζημίαν 5 $^0/_0$ π. χ.*

2) *Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως ηὐξήθη κατὰ 5 $^0/_0$.*

3) *Ποσόν τι ηὐξήθη κατὰ 10 $^0/_0$ ἑνὸς ἄλλου.*

4) *Ὁ φόρος ἐπὶ τοῦ εἰσοδήματος ἀνέρχεται εἰς 5 $^0/_0$.*

5) *Μία οἰκία δίδει 5 $^0/_0$ εἰσόδημα.*

6) *Ἡ θνησιμότης εἶνε 1 $^0/_{00}$ κ. ο. κ.*

γ΄) Αἱ ἑπόμεναι ἐκφράσεις εἶνε ἐπίσης ἄξιαι προσοχῆς.

1) *Συνεβιβάσθη τις μὲ 70 $^0/_0$*, σημαίνει ὅτι ὁ ἐπλήρωσεν ἀντὶ 100 (δραχμῶν, ὀκάδων. . .) μόνον 70.

2) Ἔμπορος *κάμνει ἔκπτωσιν* 5 $^0/_0$, σημαίνει ὅτι ὁ ἔμπορος δίδει εἰς τὸν ἀγοραστὴν ἐμπόρευμα ἀξίας 100 δρ. ἀντὶ 95 δραχμῶν.

3) Τὰ ἔξοδα ἐμπορεύματος *ἀνέρχονται εἰς* 5 $^0/_0$, σημαίνει ὅτι ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος 100 δρ. αὐξάνεται ἕνεκα ἐξόδων κατὰ 5 δρ.

4) *Τὸ ἀπόβαρον εἶνε 3 $^0/_0$*, σημαίνει ὅτι εἰς 100 ὀκ. μικτὸν βάρος τὸ ἀπόβαρον εἶνε 3 ὀκ.

5) Ὅταν λέγωμεν ὅτι, *τὸ οἰνόπνευμα εἶνε καθαρότητος 80°*, ἐννοοῦμεν ὅτι τοῦτο δὲν εἶνε καθαρόν, ἀλλ' ὅτι εἰς 100 μέρη αὐτοῦ μόνον τὰ 80 μέρη εἶνε καθαρὸν οἰνόπνευμα.

6) *Ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ ἀργύρου, χρυσοῦ,.... εἶνε 850 χιλιοστὰ* π. χ. σημαίνει ὅτι ἐκ χιλίων χιλιοστῶν αὐτοῦ μόνον τὰ 850 χιλιοστὰ εἶνε καθαρὸς ἄργυρος, χρυσός...

δ') Ἐὰν δοθῇ τὸ τόσον τοῖς ἑκατὸν ἢ τοῖς χιλίοις καὶ εὕρωμεν τὸ πόσον (κέρδος, ζημία π. χ.) ἀντιστοιχεῖ εἰς δοθὲν ποσόν, τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο λέγεται συνήθως *ποσοστόν*, τὸ δὲ ποσὸν εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ τὸ ποσοστὸν θὰ καλοῦμεν *κυρίαν τιμήν*.

§ 91. Εὕρεσις τοῦ ποσοστοῦ.—

(Πρόβλημα) « ***Πόσον κερδίζει εἷς ἔμπορος ἐκ τῆς πωλήσεως ἐμπορευμάτων, τὰ ὁποῖα τοῦ στοιχίζουν 365 δρ., καὶ τὰ πωλεῖ μὲ κέρδος 8%;*** »

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδεται ἡ κυρία τιμὴ 365 δρ., τὸ τόσον τοῖς ἑκατὸν 8 δρ., καὶ ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὸ ποσοστόν. Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν αὐτὸ διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς σημασίας τοῦ τόσον τοῖς ἑκατόν. Πράγματι ἔχομεν

100 δρ. τιμὴ ἀγορᾶς δίδει 8 δρ. κέρδος
365 x

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x = 8$ δρ. $\times \frac{365}{100} = 29{,}20$ δρ.

Ἤτοι ὁ ἔμπορος θὰ κερδίσῃ 29,20 δρ.

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων προβλημάτων ἕπεται ὅτι,

«***διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ποσοστὸν ἐκ τῆς κυρίας τιμῆς καὶ τοῦ τόσον τοῖς ἑκατόν, πολλαπλασιάζομεν τὴν κυρίαν τιμὴν ἐπὶ τὸ τόσον τοῖς ἑκατόν, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 100***». 5

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ποσοστὰ τῶν 200 δρ., 300 δρ., 1700 δρ., 385 γρ. πρὸς 1%, 2%, 3%.
(2·3·17·3,85
4·6·34·7,7
6·9·51·11,55)

2) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ποσοστὰ τῶν 100 δρ., 627 δρ., 357 όκ., 12,3 μ. πρὸς $\frac{1}{2}$%, $1\frac{1}{3}$%.
(0,5
$1\frac{1}{3}$ 3,135·1,785·0,0765
8,36·4,76·0,204)

3) Ὁμοίως τῶν 1000 δρ., 1875 δρ., 38645 δρ., 13820 δρ., πρὸς 1‰, 2‰, $1\frac{1}{2}$‰
(1·1,875·38,645·13,82
2·3,75·77·29·27,64
1,5·2,8125·57,9675·20,73)

4) Ἔχει τις ἐτήσιον εἰσόδημα 6428 (8624) δρ., ὀφείλει δὲ νὰ πληρώνῃ φόρον 4 (4,5)% ἐπὶ τοῦ εἰσοδήματος· πόσον φόρον πληρώνει ἐτησίως; 257,12, (379,08).

5) Ἔμπορος ἀγοράζει ἐμπόρευμα ἀντὶ 428 (53165) δρ., πωλεῖ δ' αὐτὸ μὲ κέρδος 6,5 (6,4)°/₀· πόσον εἶνε τὸ κέρδος καὶ πόσον τὸ πωλεῖ; 27,82 (3402,56) 455,82 (56567,56).

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἀγοράζει τις 35 (14) μ. ὑφάσματος πρὸς 10,85 (12,12) δρ. τὸ μέτρον, μεταπωλεῖ δ' αὐτὸ μὲ κέρδος 8 $\left(4\frac{1}{6}\right)$°/₀. πόσα εἰσπράττει; 410,15 (176,75).

2) Οἱ 125 (45) στ. οἴνου τιμῶνται 8125 (3060) δρ: πόσον στοιχίζει ὁ στατήρ, ἂν τὰ ἔξοδα εἶνε 2,4 (3,5)°/₀; 66,56 (70,38).

3) Ἓν ποσὸν πρέπει νὰ μοιρασθῇ μεταξὺ δύο προσώπων, ὥστε τὸ β' νὰ λάβῃ 6,4 (7,5)°/₀ περισσότερα τοῦ α'· πόσον εἶνε τὸ ποσόν, ἐὰν τὸ α' ἔλαβε 2315 (851,6) δρ.: 4778,16 (1767,07).

Ὁμὰς τρίτη. 1) Πόσος εἶνε ὁ καθαρὸς ἄργυρος εἰς 817 (324) χιλ. ἀργύρου, ἔχοντος καθαρότητα 0,835 (0,643);

682,195 (208,332).

2) Πόσος εἶνε ὁ καθαρὸς χρυσὸς εἰς χρυσὸν 25,345 (48,124) χιλ. καθαρότητος 0,900 (0,650); 22,8105 (21,2806).

§ 92. Εὕρεσις τῆς κυρίας τιμῆς. — (Πρόβλημα). «***Πόση εἶνε ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς ἑνὸς ἐμπορεύματος, τὸ ὁποῖον πωληθὲν μὲ κέρδος 5°/₀ ἔδωκε κέρδος 41,1 δρ.;***»

Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο λύομεν διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν ὡς ἑξῆς.

100 δρ. τιμὴ ἀγορᾶς	5 δρ. κέρδος
x	41,1

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα, ἔχομεν

$$x = 100 \times \frac{41,1}{5} = 822 \text{ δραχμάς.}$$

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Πόση εἶνε ἡ κυρία τιμή, ἐὰν τὸ ποσοστὸν πρὸς 5 (4)°/₀ εἶνε 85·175·218,34·7821,58· $58\frac{1}{2}$· 129, 60 δρ.;

1700 (2125)· 3500 (4375)·43646,8 (5458,5)· 156431,6 (195539,5)· 1170 (1462,50)· 2592 (3240).

2) Ποίου ποσοῦ τὸ ποσοστὸν εἶνε 882 δρ., πρὸς 3·3,5· 4,5·5 6°/₀; 29400· 25200· 19600·17640· 14700.

3) Πόσον εἶνε τὸ εἰσόδημα, τὸ ὁποῖον πληρώνει φόρον 84 (54) δρ. πρὸς 3,5 (4,5) °/₀ ἐπὶ τοῦ εἰσοδήματος; 2400 (1200).

4) Ἔμπορος πωλεῖ τὰ ἐμπορεύματά του μὲ ζημίαν 5,4 (12,75)°/₀· πόσον τὰ ἠγόρασε, καὶ πόσον τὰ ἐπώλησεν, ἂν ἡ ζημία εἶνε 47,25 (127,5) δρ.; 875 (1000)· 827,75 (872,5).

5) Πόσον ἐστοίχιζε καὶ πόσον ἐπωλήθη ἐμπόρευμα, ἂν τὸ κέρδος του πρὸς 8,5 (12) °/₀ ἦτο 38, 25 (210) δρ.;
450· 1750 (488,25)· (1960).

6) Βιβλιοπώλης κάμνει ἔκπτωσιν 10 (8) °/₀· πόσον ἀξίζουν βιβλία διὰ τὰ ὁποῖα ἡ ἔκπτωσις εἶνε 84,5 (32,48) δρ.; 845 (406)·

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Μιᾶς χώρας τὰ 85 (82) °/₀ τοῦ ἐδάφους εἶνε εὔφορα, τὰ δὲ ὑπόλοιπα 1596 (1125) ($χμ^2$.) ἄφορα· πόσον °/₀ εἶνε ἄφορον, πόση εἶνε ἡ ἔκτασις τῆς χώρας καὶ τοῦ εὐφόρου μέρους της;
15 (18) °/₀· 10640 (6250). 9044 (5125).

2) Ἐκ τῶν μαθητῶν μιᾶς σχολῆς 322 (344) προήχθησαν, ἐνῷ 8 (14) °/₀ ἔμειναν εἰς τὴν αὐτὴν τάξιν· πόσοι τοῖς °/₀ προήχθησαν; πόσους μαθητὰς εἶχεν ἡ σχολή; πόσοι μαθηταὶ ἔμειναν εἰς τὴν αὐτὴν τάξιν; 92 (86)°/₀· 350 (400)· 28 (56).

§ 93. Εὕρεσις τοῦ τόσον τοῖς ἑκατόν.— 5

(Πρόβλημα). ***«Εἷς ἔμπορος ἀγοράσας ἓν ἐμπόρευμα ἀντὶ 80 δρ. τὸ πωλεῖ μὲ κέρδος 20 δρ.· πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισε;»***

Πρὸς λύσιν αὐτοῦ ἐφαρμόζομεν τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν καὶ ἔχομεν

80 δρ. τιμὴ ἀγορᾶς 20 δρ. κέρδος
100 » x

$$x = 20 \times \frac{100}{80} = 25 \text{ δραχμάς.}$$

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

1) Πόσον °/₀ εἶνε ἡ ἔκπτωσις ἐμπορεύματος, τὸ ὁποῖον στοιχίζει 268 (368,75) δρ. καὶ πωλεῖται 8, 71 (8,26) δρ. ὀλιγώτερον;
3,25. (2,24).

2) Ὁ φόρος ἐτησίου εἰσοδήματος 8624 (6725) δρ. εἶνε 280,28 (215,2) δρ: πόσον °/₀ πληρώνει; 3,25 (3,2).

3) Ἀγοράζων τις ἓν ἐμπόρευμα ἀντὶ 824,8 (624,4) δρ. τὸ μεταπωλεῖ καὶ κερδίζει 30, 93 (78, 05) δρ: πόσον °/₀ κερδίζει; 3,75(12,5)·

4) Ἔμπορος τις πωλεῖ ἐμπόρευμα τὸ ὁποῖον ἠγόρασεν ἀντὶ 624,8 (325,5) δρ. μὲ ζημίαν 101,53 (13,4) δρ.· πόσον °/₀ ζημειώνεται;

16,25 (13,33 ..).

5) Διὰ τὴν πώλησιν οἰκίας ἀντὶ 38724 (68524) δρ. λαμβάνει τις 1258,53 (856,55) δρ. ὡς προμήθειαν· πόσον °/₀ λαμβάνει; 3,25 (1,25)

6) Εἰς κρᾶμα οἰνοπνεύματος 4645,5 (85,4) λίτρ. περιέχεται μόνον 3208,04 (81,14) λίτρα καθαρὸν οἰνόπνευμα· πόσον °/₀ εἶνε τὸ καθαρὸν οἰνόπνευμα;

83 (95,01).

7) Ἀσφαλίζει τις τὴν οἰκίαν του ἀντὶ 454680 (85795) δρ. καὶ πληρώνει δ' ἀσφάλιστρα 1023,03 (171,59) δρ.· πόσον τοῖς χιλίοις εἶνε τὰ ἀσφάλιστρα;

2,25 (2)

8) Πόσον τοῖς ἑκατὸν εἶνε τὸ 4 τοῦ 25; τὸ $2\frac{1}{5}$ τοῦ 20; τὸ 40 τοῦ 500; τὸ 44 τοῦ 400; 16°/₀· 11°/₀· 8°/₀· 11°/₀.

§ 94. Προβλήματα ἀναγόμενα εἰς τὰ τῶν ποσοστῶν.—

(Πρόβλημα) *1)*.«*Ἓν ἐμπόρευμα ἀγορασθὲν ἀντὶ 432 δρ, ἐπωλήθη μὲ κέρδος 5°/₀. Πόση εἶνε ἡ τιμὴ τῆς πωλήσεως αὐτοῦ;*»

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδεται ἡ κυρία τιμὴ καὶ τὸ τόσον τοῖς ἑκατόν, ζητεῖται δὲ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῆς δοθείσης κυρίας τιμῆς καὶ τοῦ ποσοστοῦ ταύτης. Εἶνε φανερὸν ὅτι, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ποσοστὸν τῶν 432 δρ. πρὸς 5°/₀, καὶ τοῦτο νὰ προσθέσωμεν εἰς τὴν κυρίαν τιμήν.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι δίδεται τὸ ἄθροισμα τῆς κυρίας τιμῆς καὶ τοῦ ποσοστοῦ αὐτῆς, καθὼς καὶ ἓν τῶν δύο ἄλλων ποσῶν (κυρίας τιμῆς, τόσον τοῖς ἑκατὸν) τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος, ζητεῖται δὲ τὸ ἄλλο, θὰ ἔχωμεν τὰ ἑξῆς δύο εἴδη προβλημάτων.

1) Δίδεται τὸ ἄθροισμα τῆς κυρίας τιμῆς καὶ τοῦ ποσοστοῦ αὐτῆς, προσέτι δὲ τὸ τόσον τοῖς ἑκατόν, καὶ ζητεῖται ἡ κυρία τιμή.

2) Δίδεται τὸ ἄθροισμα τῆς κυρίας τιμῆς καὶ τοῦ ποσοστοῦ αὐτῆς, προσέτι δὲ ἡ κυρία τιμή, καὶ ζητεῖται τὸ τόσον τοῖς ἑκατόν.

Διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὸν τρόπον τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων τοῦ πρώτου εἴδους 1) ἐκ τούτων, ἔστω τὸ

(Πρόβλημα). *2) "Εν ἐμπόρευμα ἐπωλήθη ἀντὶ 453,6 δρ. μὲ κέρδος 5°/₀· πόσον ἐστοίχιζε τὸ ἐμπόρευμα;»*

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐμπόρευμα ἀξίας 100 δρ. πωλεῖται 105 δρ., ἀφοῦ τὸ κέρδος εἶνε 5°/₀. Ἑπομένως ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

100 δρ. ἀξίας ἀγορᾶς 105 δρ. ἀξία καὶ κέρδος
x 453,6

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα, ἔχομεν ὅτι

$$x = 100 \text{ δρ.} \times \frac{453,6}{105} = 432 \text{ δραχμαί}.$$

Ὅθεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν κυρίαν τιμὴν ἀπὸ τὸ τόσον τοῖς ἑκατὸν καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς κυρίας τιμῆς καὶ τοῦ ποσοστοῦ, προσθέτομεν εἰς τὸ 100 τὸ τόσον τοῖς ἑκατόν, καὶ ἀκολούθως λύομεν πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Τὰ προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους 2) λύονται ἐπίσης ἁπλούστατα διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

5

1) Πωλεῖ τις ἐμπόρευμα μὲ κέρδος 8,4 (4)°/₀ ἀντὶ 785,9 (711,88) δρ.· πόσον ἐστοίχιζε τὸ ἐμπόρευμα καὶ πόσον εἶνε τὸ κέρδος; 725(684,5) 60,9 (27,38).

2) Ἔμπορος πωλεῖ ἐμπόρευμα μὲ ζημίαν 9,5 (7)°/₀ ἀντὶ 754, 77 (152,95) δρ.· α') πόσον τοῦ ἐστοίχιζε τὸ ἐμπόρευμα;

β') Πόσον ἐζημειώθη; 834 (2315)· 79,23 (162,05).

3) Τὸ καθαρὸν βάρος ἐμπορεύματος εἶνε 220,02 (309,075) χιλ· πόσον εἶνε τὸ μικτόν, ἐὰν τὸ ἀπόβαρον εἶνε 3,5 (2,5)°/₀; 228 (317).

4) Εἴς τινα ἔγινεν ἔκπτωσις τοῦ χρέους του 8,4 (4,5)°/₀, ἐπλήρωσε οὕτω 6270,02 (2070,44) δρ.· πόσον ἦτο τὸ χρέος καὶ πόση ἡ ἔκπτωσις; 6845 (2168).

5) Ἡ περιουσία ἐμπόρου αὐξηθεῖσα κατὰ 3,5 (15)°/₀ ἔγινε 4994,91 (18906) δρ.· πόση ἦτο ἀρχικῶς; 4826 (16440).

Περὶ τόκου.

§ 95. Ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες τοῦ τόκου.—

α΄) *Τόκος* λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος δανείζει χρήματα.

Ἐπιτόκιον λέγεται ὁ τόκος τῶν ἑκατὸν δραχμῶν εἰς ἓν ἔτος, ἢ τὸ τόσον τοῖς ἑκατὸν εἰς 1 ἔτος.

Κεφάλαιον λέγεται τὸ ποσὸν τῶν δανειζομένων χρημάτων.

Χρόνος καλεῖται ἡ χρονικὴ διάρκεια κατὰ τὴν ὁποίαν διαρκεῖ τὸ δάνειον.

Ὁ τόκος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ κεφάλαιον, τὸ ἐπιτόκιον, καὶ τὸν χρόνον.

Ὁ τόκος λέγεται *ἁπλοῦς* μέν, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου, *σύνθετος* δέ, ὅταν ὁ τόκος καθενὸς ἔτους δίδῃ τόκον εἰς τὰ ἑπόμενα ἔτη, ὥστε εἰς τὸ τέλος καθενὸς ἔτους ὁ τόκος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον, καὶ τὸ ἐκ τῆς προσθέσεως προκύπτον ποσὸν λαμβάνεται ὡς κεφάλαιον διὰ τὸ ἑπόμενον ἔτος. Θὰ ἐξετάσωμεν τὸν ἁπλοῦν τόκον.

β΄) Εἰς προβλήματα τόκου παρουσιάζονται 4 ποσά· τὸ *κεφάλαιον*, *ὁ τόκος*, *τὸ ἐπιτόκιον*, καὶ *ὁ χρόνος*. Διὰ τὴν γενικότητα θὰ παριστάνωμεν τὰ ποσὰ αὐτὰ κατὰ σειρὰν διὰ τῶν γραμμάτων Κ,Τ,Ε,Χ. Εἰς καθὲν πρόβλημα τόκου δίδονται συνήθως τρία ἐκ τῶν ποσῶν τούτων, καὶ ζητεῖται τὸ τέταρτον. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ζητούμενον δύναται νὰ εἶνε *ὁ τόκος* ἢ *τὸ κεφάλαιον* ἢ *ὁ χρόνος* ἢ *τὸ ἐπιτόκιον*, ἕπεται ὅτι τὰ προβλήματα τόκου εἶνε *τεσσάρων εἰδῶν*.

Διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου εἶνε ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν, ἂν τὰ ποσὰ Κ,Τ,Ε,Χ ἀνὰ δύο συγκρινόμενα εἶνε ἀνάλογα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

γ΄) Ὁ τόκος εἶνε ἀνάλογος πρὸς καθὲν τῶν τριῶν ἄλλων ποσῶν Κ,Ε,Χ.

Πράγματι, ἐὰν ἓν κεφάλαιον δίδῃ τόκον τινά, τὸ διπλάσιον (ἥμισυ), τριπλάσιον (τὸ τρίτον)... κεφάλαιον θὰ δώσῃ διπλάσιον (ἥμισυ, τριπλάσιον (τὸ τρίτον)... τόκον.

Ὁμοίως, ἂν ἓν κεφάλαιον εἰς χρόνον τινά, π.χ. εἰς 3 ἔτη, δίδῃ ἕνα ὡρισμένον τόκον, τὸ αὐτὸ κεφάλαιον θὰ δώσῃ εἰς διπλάσιον (ἥμισυ), τριπλάσιον (τὸ τρίτον)...χρόνον τὸν διπλάσιον (ἥμισυ), τριπλάσιον (τὸ τρίτον)... τόκον. Ἐπίσης ἐὰν διπλασιάσωμεν, τριπλασιάσωμεν (διαιρέσωμεν διὰ δύο, τρία)... τὸ ἐπιτόκιον, διπλασιάζεται τριπλασιάζεται (διαιρεῖται διὰ δύο, τρία)... καὶ ὁ τόκος, τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου μενόντων ἀμεταβλήτων.

δ') Τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος εἶνε ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Διότι, ἐὰν ἓν κεφάλαιον π.χ. 1000 δρ., εἰς 2 ἔτη δίδῃ τόκον τινὰ πρὸς ἓν ἐπιτόκιον, διπλάσιον (τὸ ἥμισυ), τριπλάσιον (τὸ τρίτον)..κεφάλαιον, δανειζόμενον μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον θὰ δώσῃ τὸν αὐτὸν τόκον, εἰς τὸ ἥμισυ (διπλάσιον), τὸ ἓν τρίτον (τριπλάσιον)... τοῦ χρόνου.

Ἐπειδὴ εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου ἔχομεν ποσὰ ἀνάλογα καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἕπεται ὅτι ταῦτα λύονται κατὰ τὴν ἁπλῆν ἢ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν.

Διὰ τὴν ἄσκησιν περὶ τὴν σχέσιν τῶν ποσῶν κεφαλαίου, τόκου, ἐπιτοκίου καὶ χρόνου παραθέτομεν τὰ ἑξῆς προβλήματα.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Κεφάλαιον 252,25 δρ. ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας δίδει 8,25 δρ. τόκον· πόσον τόκον δίδει κεφάλαιον 201,8 δρ. ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας; 6,6. 5

2) Ἓν κεφάλαιον φέρει εἰς 2,5(2,75) ἔτη τόκον 8325 (6417) δρ: πόσον τόκον θὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ κεφάλαιον ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας εἰς 4,5(4,25) ἔτη; 14985 (9917, 18.).

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Κεφάλαιον 328 (526) δρ. δίδει ἕνα ὡρισμένον τόκον εἰς 4 $\left(6\frac{2}{3}\right)$ ἔτ. καὶ 6 μῆν: εἰς πόσον χρόνον 369 (2630) δρ. ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας θὰ δώσῃ τὸν αὐτὸν τόκον;

4 ἔτ. (1 ἔτ. 4 μ.).

2) Κεφάλαιον 3280 (5340) δρ. δίδει τόκον τινὰ εἰς 7 $\left(8\frac{1}{3}\right)$ ἔτη καὶ 6 μῆν: ποῖον κεφάλαιον ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας θὰ δώσῃ εἰς 6 ἔτ. (14 ἔτ. 10 μ.) τὸν αὐτὸν τόκον; 4100 (3000).

3) Κεφάλαιον 3420 (8404) δρ. δίδει τόκον τινὰ πρὸς 4 (5) %· ποῖον κεφάλαιον πρὸς 4,5 (5,5) % δίδει τὸν αὐτὸν τόκον ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας; 3040(7640).

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἓν κεφάλαιον εἰς 3 (2,5) ἔτη καὶ 9 μῆν. φέρει τόκον 148,95 (187,5)δρ: εἰς πόσον χρόνον ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας θὰ φέρῃ τόκον 662 (406,25) δραχ; 16(5) ἔτ. 8(5)μ.

2) Κεφάλαιον 6714 (9327)δρ. δίδει πρὸς 3 $\left(3\frac{1}{2}\right)$ °/₀ τόκον τινά· πρὸς πόσον °/₀ ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας κεφάλαιον 5035,5 (4352,6) δρ. δίδει τὸν αὐτὸν τόκον; 4(7,14).

3) Κεφάλαιον δίδει τόκον τινὰ πρὸς 3,5 (3) °/₀ εἰς 4,5 (5) ἔτη· πρὸς πόσον °/₀ ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας εἰς 9 (6) ἔτη δίδει τὸν αὐτὸν τόκον; 1 ἔτ. 9 μῆν. (2 ἔτ. 6 μῆν.)

§ 96. Εὕρεσις τοῦ τόκου.—

α΄) (Πρόβλημα) *1)*. ***«Πόσον τόκον φέρουν αἱ 3524 δρ. εἰς 7 ἔτη πρὸς 5°/₀;»***

Τὸ πρόβλημε τοῦτο λύομεν κατὰ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν, ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὴν σημασίαν τοῦ ἐπιτοκίου. Ἀφοῦ ἡ ἔκφρασις «πρὸς 5°/₀» σημαίνει ὅτι κεφάλαιον 100 δρ. εἰς 1 ἔτος δίδει τόκον 5 δρ., ἕπεται ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα

100 δρ. κεφάλ.	εἰς 1 ἔτ.	5 δρ. τόκον	
3524	7	x	»

Ἐπειδὴ ὁ τόκος εἶνε ἀνάλογος πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸν χρόνον, ἔχομεν ὅτι

$$x=5\times\frac{3524\times7}{100\times1}=1233{,}5 \text{ δραχμάς.}$$

(Πρόβλημα) *2)*. ***«Πόσον τόκον φέρουν 3250 δρ. πρὸς 3 °/₀ εἰς 2 ἔτη καὶ 6 μῆν.;»***

Ἐν πρώτοις τρέπομεν τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν 1 ἔτ. 6 μῆν. εἰς ἔτη, ὅτε ἔχομεν 2 ἔτ. 6 μῆν.=2,5 ἔτη. Ἀκολούθως λύομεν τὸ πρόβλημα, καθὼς τὸ ἀνωτέρω, καὶ ἔχομεν

100 δρ. κεφάλ.	εἰς 1 ἔτ.	3 δρ. τόκον	
3250	» 2,5	x	»

$$\text{καὶ } x=3\times\frac{3250}{100}\times\frac{2{,}5}{1}=3\times\frac{3250}{100}\times\frac{5}{2}=243{,}\ 75 \text{ δρ.}$$

β΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν κανόνα συμφώνως πρὸς τὸν ὁποῖον θὰ δυνάμεθα συντόμως νὰ εὑρίσκωμεν τὸν τόκον, ὅταν δίδωνται τρία ἄλλα ποσά, παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ ἐξαγόμενον τοῦ 1) προβλήματος

$$\frac{5\times3524\times7}{100}$$

εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς $3524\times5\times7$ οἱ ὁποῖοι παριστάνουν τὸ κεφάλαιον τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν χρόνον, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 100. Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὸ ἐξαγόμενον τοῦ 2) προβλήματος

$$\frac{3250\times3\times2,5.}{100}$$

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι·

«***διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, πολλαπλασιάζομεν τν κεφάλαιον, τὸ ἐπιτόκιον, καὶ τὸν χρόνον (εἰς ἔτη), τὸ δὲ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100***».

Ἐάν, χάριν γενικότητος, μεταχειρισθῶμεν τὰ Κ, Ε, Τ, Χ πρὸς παράστασιν τοῦ κεφαλαίου, ἐπιτοκίου, τόκου καὶ χρόνου (εἰς ἔτη), θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$T=\frac{K\times E\times X}{100} \qquad (1)$$

εἰς τὸν ὁποῖον θ' ἀντικαθιστῶμεν τὰ Κ,Ε,Χ διὰ τῶν δεδομένων τιμῶν αὐτῶν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον.

Ἐ***φαρμογή. «Πόσον τόκον δίδουν 2255 δρ. πρὸς 4 %₀ εἰς 7 μῆνας;»***

Ἐπειδὴ 7 μῆν. $=\frac{7}{12}$ ἔτη, θὰ ἔχωμεν $K = 2255$, $E = 4$, $X=\frac{7}{12}$. Ἑπομένως

$$T=\frac{2255\times4}{100}\times\frac{7}{12}=55,62 \text{ δρ.}$$

γ') Ἐὰν ὁ χρόνος εἶνε μῆνες, καὶ παραστήσωμεν αὐτοὺς διὰ τοῦ Μ, ἐπειδὴ ὁ 1 μὴν εἶνε τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ἔτους, οἱ Μ μῆνες θὰ εἶνε $\frac{M}{12}$ τοῦ ἔτους. Ἄρα ὁ ἀνωτέρω τύπος (1) γίνεται, ἐὰν ἀντὶ τοῦ Χ θέσωμεν τὸ $\frac{M}{12}$,

$$T=\frac{K\times E\times M}{1200}.$$

Ἐὰν δὲ ὁ χρόνος εἶνε ἡμέραι, καὶ παραστήσωμεν αὐτὴν διὰ

5

τοῦ Η, ἐπειδὴ ἡ ἡμέρα εἶνε τὸ $\frac{1}{300}$ τοῦ ἔτους (τοῦ ἔτους λογαριαζομένου μὲ 360 ἡμέρας), αἱ Η ἡμέραι εἶνε $\frac{H}{360}$ ἔτη. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (1) ἀντὶ τοῦ Χ τὸ $\frac{M}{360}$ λαμβάνομεν $T = \frac{K \times E \times H}{36000}$.

δ') Διαροῦντες ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος τούτου διὰ τοῦ ἐπιτοκίου Ε, λαμβάνομεν

$$T = \frac{K \times H}{\frac{36000}{E}} \text{ ἢ } T = \frac{K \times H}{\Delta},$$

ἐὰν διὰ τοῦ Δ παραστήσωμεν τὸ πηλίκον $\frac{36000}{E}$.

Τὸ γινόμενον Κ×Η, τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὰς ἡμέρας, λέγεται *τοκάριθμος τοῦ κεφαλαίου*, τὸ Δ, ἤτοι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 36000 διὰ τοῦ ἐπιτοκίου καλεῖται *σταθερὸς διαιρέτης τοῦ ἐπιτοκίου*.

Ὅθεν ἔχομεν τὸν ἑξῆς κανόνα διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ τόκου.

«Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον ἑνὸς κεφαλαίου δι' ἕνα ἀριθμὸν ἡμερῶν, διαιροῦμεν τὸν τοκάριθμον τοῦ κεφαλαίου διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου τοῦ ἐπιτοκίου».

Οὕτω π. χ. ὁ τόκος 4800 δρ. εἰς 75 ἡμέρας πρὸς 8 °/₀ εἶνε $\frac{4800 \times 75}{4500} = 80$ δραχμαί.

Διότι ὁ σταθερὸς διαιρέτης τοῦ ἐπιτοκίου εἶνε ἐδῶ 36000: 8 = 4500.

ε') Καλὸν εἶνε νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης τοὺς σταθεροὺς διαιρέτας μερικῶν ἐπιτοκίων. Διὰ τοῦτο παραθέτομεν τὸν κατωτέρω πίνακα σταθερῶν διαιρετῶν, οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ ἀπέναντι αὐτῶν ἐπιτόκια.

Ἐπιτόκια		σταθεροὶ διαιρέται
3	(36000: 3)	12000
4	(36000: 4)	9000
4,5	(36000: 4,5)	8000
5		7200
6		6000
7		5143
7,5		4800
8		4500
9		4000

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος τῶν 200· 500· 600· 2000· 7125· 234· 534· 6824 δρχ. πρὸς 3 % εἰς 5 ἔτη.

30· 75· 90· 300·1068,75· 35,7·80,1·1023,6.

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος τῶν 4848 δρ. εἰς 5 ἔτη πρὸς 2 %, 2,5 %· 3,5 %· 4,5 %.
434,8· 606· 848,4· 1090,8.

3) Πόσον τόκον φέρουν 4820 δρ. πρὸς 4 % εἰς 2· 2,25·3· 4,75· 5· 6 ἔτη;
385, 6·433,8·578,4· 915,8· 964· 1156,8.

4) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὁλικὸς τόκος 4800 (5000) δρ. εἰς 75 (90) ἡμ.· 5600 (3000) δρ. εἰς 45 (70) ἡμ.· 8400 δρ. εἰς 35 ἡμ. πρὸς 8 (9) % (διὰ τῶν τοκαρίθμων).
201,33.. (165).

5) Πόσον τόκον φέρουν α΄) 482,75 (5331) δρ. πρὸς 4 % εἰς $2\frac{1}{3}$ $\left(1\frac{1}{6}\right)$ ἔτη (διὰ τῶν τοκαρίθμων).

45,06 προσέγγισις ἑκατοστοῦ. (248,78).

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἐὰν ἀφήσῃ τις εἰς τὸ ταμιευτήριον 3824 (768,4) δρ. ἐπὶ 3 (2) ἔτη πρὸς 4,25 (3,75) %, πόσα θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ εἰς τὸ τέλος;
4311,56 (826,03).

2) Ἐδάνεισέ τις 564,8 (7611) δρ. πρὸς 3,75 (4) %· πόσα θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ μετὰ 2 (4) ἔτη (καὶ 7 μῆνας);
607,16 (9006,35).

3) Ὤφειλέ τις νὰ πληρώσῃ πρὸ 4 (2) ἐτ. 2 (8) μην. 121,7 (123,1) δρ.· πόσα θὰ πληρώσῃ σήμερον, ἐὰν τοῦ λογαριασθῇ καὶ τόκος πρὸς 2,4 (3,75) %;
133,87 (135,41)

Ὁμὰς τρίτη. 1) Πόσον τόκον φέρουν α΄) 382,5 (625,8) δρ. πρὸς 4 (4,5) % εἰς 4 (3) ἔτη 6 (4) μην.;
68,85 (93,87).

2) Πόσον τόκον φέρουν 31440 δρ. πρὸς 3,75 % εἰς 2 ἔτη 5 μῆνας 2 ἡμέρας;
2888,55.

3) Πόσος εἶνε ὁ τόκος 2144 (8600) δρ. πρὸς 3,75 (4,5) % ἀπὸ (2) Μαΐου (Μαρτίου) μέχρι 15 (25) Ἰουνίου (Ἀπριλίου) τοῦ αὐτοῦ ἔτους;
10,05 (58,05)

Ὀ[φ]είλει τις νὰ πληρώσῃ σήμερον 7128 (7116) δρ., καὶ συμφωνεῖ νὰ τὰ πληρώσῃ μετὰ $5\frac{3}{4}$ $\left(4\frac{2}{3}\right)$ ἐτ. μὲ τόκον πρὸς 4,5 (4,5) %· πόσα θὰ πληρώσῃ;
8972,87· (8610,36).

§ **97. Εὕρεσις τοῦ κεφαλαίου.**—

(Πρόβλημα). « *Ποῖον κεφάλαιον τοκίζομεν πρὸς 4 °/₀ ἐπὶ 6 ἔτη φέρει τόκον 204 δρ.;* »

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύομεν κατὰ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν λέγοντες

100 δρ. κεφάλ.	εἰς	1 ἔτ.	4 δρ.	τόκον
x	»	6	204	

Ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος εἶνε ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, τὸ δὲ κεφάλαιον καὶ ὁ τόκος ἀνάλογα, θὰ ἔχωμεν ὅτι,

$$x = \frac{100 \times 204}{4 \times 6} = 850 \text{ δρ.}$$

Τὸ ἐξαγόμενον αὐτὸ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀμέσως, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸν τόκον, ἤτοι τὸν 204, ἐπὶ 100, καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 6, οἱ ὁποῖοι παριστάνουν τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν χρόνον.

Ὅθεν, « *διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100, τὸ δὲ γινόμενον αὐτὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον (εἰς ἔτη)* ».

Ἐάν, χάριν γενικότητος, μεταχειρισθῶμεν τὰ Κ, Ε, Χ, Τ πρὸς παράστασιν τοῦ κεφαλαίου, ἐπιτοκίου, χρόνου καὶ τόκου, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$K = \frac{T \times 100}{E \times X}$$

εἰς τὸν ὁποῖον θ' ἀντικαθιστῶμεν τά Τ, Ε, Χ διὰ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον.

Ἐφαρμογή. « *Πόσον κεφάλαιον τοκισθὲν ἐπὶ 3 ἔτη καὶ 6 μῆν. πρὸς 5°/₀ ἔδωκε τόκον 357 δρ ;* »

Ἐπειδὴ 3 ἔτη καὶ 6 μῆνες = 3,5 ἔτη, θὰ ἔχωμεν Τ=357, Ε=5, Χ=3,5. Ἑπομένως $K = \frac{357 \times 100}{5 \times 3,5} = \frac{35700}{17,5} = \frac{35700 \times 2}{35} = 2040$ δρ.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 4 °/₀ εἰς τρία ἔτη δίδει τόκον 381· 462· 3185,1· 56, 25· 869,7· 4,158 δρ.;
3175· 3850· 26542,5· 468,75· 7247,5· 346,5·

2) Ποῖον κεφάλαιον τοκισθὲν πρὸς 5°/₀ ἔδωκε τόκον 357 δρ. εἰς 3· 3,5· 3,75 ·4· 4,25· 5 ἔτη; 2380· 2040· 1904· 1785· 1680· 1428.

3) Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 2°/₀· 2,5°/₀· 3°/₀· 3,5°/₀· 3,75 °/₀· 4°/₀· 4,5 °/₀· 5 °/₀ ἐπὶ 4 ἔτη δίδει τόκον 252 δρ.;
3150· 2520· 2100· 1800· 1680· 1575· 1400· 1260.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἐξοδεύει τις 12,5 (13,5) δρ. καθ' ἡμέραν, τὰ ὁποῖα εἶνε ὁ τόκος τῶν χρημάτων του, τοκισμένων πρὸς 4,5 (3,5)°/₀· πόσον εἶνε τὸ κεφάλαιόν του; 100000 (136285,71..).

2) Ποῖον κεφάλαιον φέρει εἰς 5 (5) ἔτη πρὸς 4,5 (5,6)°/₀ τὸν αὐτὸν τόκον, τὸν ὁποῖον φέρουν 4812 (8417) δρ. πρὸς 5 (4)°/₀ εἰς 6 (7) ἔτη; 6416 (8416,85..).

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ποῖον κεφάλαιον, τοκιζόμενον πρὸς 2,75 (4,5)°/₀ ἐπὶ 5 ἔτ. 8 μ. (3 ἔτ. 8 μ.) δίδει τόκον 1365,1 (5,61) δρ.; 8760 (34).

2) Πόσον κεφάλαιον, τοκιζόμενον πρὸς 5,5 (4,2) °/₀ ἐπὶ 2 (3) ἔτ. 3 (6) μῆν. 10 (20) ἡμ., δίδει τόκον 7667 (728) δρ.; 61200 (4875).

3) Ποῖον κεφάλαιον, τοκιζόμενον ἐπὶ 6 μῆν. 9 ἡμ. (1 ἔτ. 1,5 μῆν.) πρὸς 7,5 (4)°/₀, δίδει τόκον 598,5 (384,3) δρ.; 15200 (8540).

§ 98. Εὕρεσις τοῦ χρόνου.—

(Πρόβλημα). «***Ἐπὶ πόσον χρόνον κεφάλαιον 648 δρ. τοκισθὲν πρὸς 4 °/₀ φέρει τόκον 77,76 δρ.;***»

Καὶ τὸ πρόβλημα αὐτὸ λύομεν ὡς ἑξῆς διὰ τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

Κεφάλαιον *100* δρ.	εἰς	*1* ἔτ.	φέρει τόκον	4 δρ.
648	»	*x*	»	*77,76*

Ἐπειδὴ ὁ μὲν χρόνος καὶ τὸ κεφάλαιον εἶνε ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα ὁ δὲ τόκος καὶ ὁ χρόνος ἀνάλογα, ἔχομεν ὅτι

$$x = \frac{1 \times 100 \times 77{,}76}{648 \times 4} = 3 \text{ ἔτη}.$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν ἀμέσως, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν *77,76* ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸν τόκον, ἐπὶ 100, καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ *648*, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸ κεφάλαιον, ἐπὶ τὸν *4*, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸν ἐπιτόκιον.

Ὅθεν, «***διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100, τὸ δὲ γινόμενον αὐτὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον***».

Ἐὰν μεταχειρισθῶμεν τὰ Κ, Ε, Χ, Τ πρὸς παράστασιν τοῦ κεφαλαίου, ἐπιτοκίου, χρόνου, καὶ τόκου, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$X=\frac{T\times 100}{K\times E}$$

εἰς τὸν ὁποῖον ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰ T, K, E διὰ τῶν τιμῶν αὐτῶν εὑρίσκομεν τὸν χρόνον (εἰς ἔτη).

Ἐφαρμογή. *«Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 900 δρ. τοκισθὲν πρὸς 4%₀ ἔδωκε τόκον 36 δρ.;»*

Ἔχομεν K=900 E=4, T=36. Ἑπομένως εἶνε $X=\frac{36\times 100}{900\times 4}=\frac{36}{36}$ = 1 ἔτος.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 900 δρ. πρὸς 4% τοκιζόμενον φέρει τόκον 36· 45· 54· 57· 72· 87· 94, 5 δρ.;

1 ἔτ.· 1 ἔτ. 3 μ.· 1 ἔτ. 6 μ.· 1 ἔτ. 7 μ.· 2 ἔτ.· 2 ἔτ.· 5 μ.· 2 ἔτ. 7 μ. 15 ἡμ.

2) Ἐπὶ πόσον χρόνον πρὸς 5% τοκιζόμενον φέρει τόκον 114 δρ. κεφάλαιον 96 δρ.· 86,4 δρ., 72 δρ.· 87,6· 43,2 δρ.;

30 ἔτ.· 33 ἔτ. 4 μ.· 40 ἔτ.· 50 ἔτ.· 66 ἔτ. 8 μῆν.

3) Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ τοκίσωμεν 6414 (7416) δρ. πρὸς 4,5 (3,5)% διὰ νὰ λάβωμεν τόκον 481,05 (735,42) δρ.;

1 (2) ἔτ. 8 (10) μῆν.

4) Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ μείνῃ τοκισμένον κεφάλαιον 30400 36480) δρ. πρὸς 3,75 (7,5)%, διὰ νὰ φέρῃ τόκον 598,5 (1641,6) δρ.;

6 (7) μ. 9 (6) ἡμ.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Κεφάλαιον 4228 (8634) δραχ. τοκισθὲν πρὸς $3\frac{1}{2}$ (4,5)% ἔγινε μὲ τὸν τόκον του 4775,76 (10317,63) δρ.· ἐπὶ πόσον χρόνον ἐτοκίσθη;

3 (4) ἔτ. 8 (4) μῆν. 12 ἡμ.

2) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 997,2 (2817) δρ. τοκιζόμενον πρὸς 5 (4)% γίνεται 1011,05 (2867,08 δρ;

3 (5) μ. 10 (10) ἡμ.

3) Πόσον χρόνον κεφάλαιον 1 δραχ. μένον τοκισμένον πρὸς 3%, 4%, 5%, γίνεται (μετὰ τοῦ τόκου του) διπλάσιον; Πότε θὰ συμβῇ τοῦτο, ἂν τὸ κεφάλαιον εἶνε οἱονδήποτε:

33 ἔτη 4 μῆν. 25 ἔτη.· 20 ἔτη.

4) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 4250 (1808,8) δρ. φέρει πρὸς 6 (5)% τὸν αὐτὸν τόκον, τὸν ὁποῖον φέρουν 3825 (5814) δρ. πρὸς 5 (4)% εἰς 4 $\left(2\frac{1}{3}\right)$ ἔτη;

3 μῆν. 18 ἡμ. 6 ἔτη.

§ 99. Εὕρεσις τοῦ ἐπιτοκίου.—

(Πρόβλημα). *«Κεφάλαιον 455 δρ. φέρει εἰς 3 ἔτη τόκον 54,6 δρ: πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐτοκίσθη;»*

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον, τὸ λύομεν δὲ κατὰ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν λέγοντες,

κεφάλαιον 455 δρ. εἰς 3 ἔτη φέρει τόκον 54,6 δρ.
» 100 » » 1 » x

Ἐπειδὴ ὁ τόκος εἶνε ἀνάλογος πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸν χρόνον θὰ ἔχωμεν,

$$x = \frac{54,6 \times 100 \times 1}{455 \times 3} = 4 \text{ δρ.}$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ λύσωμεν οἱονδήποτε πρόβλημα ὅμοιον πρὸς αὐτό, καθὼς δὲ βλέπομεν, *«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100, τὸ δὲ γινόμενον αὐτὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ ... χρόνον (εἰς ἔτη)».*

Ἤτοι θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$E = \frac{T \times 100}{K \times X}$$

εἰς τὸν ὁποῖον ἀντικαθιστῶντες τὰς δοθείσας τιμὰς ἀντὶ τῶν Τ, Κ, Χ εὑρίσκομεν τὸ ἐπιτόκιον.

Ἐφαρμογή. «Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐτοκίσθη κεφάλαιον 75 δρ. ἐπὶ 4 ἔτη καὶ ἔδωκε τόκον 12 δρ.;» 5

Ἐδῶ ἔχομεν Τ=12, Κ=75, Χ=4. Ἑπομένως $E = \frac{12 \times 100}{75 \times 4} = \frac{1200}{300} = 4$. Ἄρα τὸ ἐπιτόκιον ἦτο 4 δρ.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον κεφάλαιον 180 δρ. φέρει εἰς 3 ἔτη τόκον 10,8· 16,2· 18,9· 20,25· 21,6· 24,39· 22,68 δρ.
2· 3· 3,5· 3,75· 4,51· 4,2 δρ.

2) Κεφάλαιον 75· 60· 50· 100· 90· 37,5 δρ. φέρει εἰς 4 ἔτη τόκον 12 δρ: πρὸς πόσον τοῖς %₀ ἐτοκίσθη; 4· 5· 6 3 $3\frac{1}{3}$, 8 %.

3) Λαμβάνει τις ἀπὸ κεφάλαιον 3808 (7242) δρ. τοκισθὲν ἐπὶ 5,5 $\left(4\frac{1}{3}\right)$ ἔτη, τόκον 699,72 (1412,19) δρ: πρὸς πόσον τοῖς % ἐτοκίσθη;
5,25 (4,5).

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Κεφάλαιον 7845 (6145) δρ ηὐξήθη εἰς 1(1) ἔτ. 5 (8) μῆν. 18 (12) ἡμ. καὶ ἔγινεν 8305,24 (6771,79) δρ: πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη; 4(6).

2) Πρὸ 6 (7) μην. 18 (15) ἡμ. ἔπρεπε νὰ πληρωθῇ χρέος 3860 (598) δρ., καὶ πληρώνεται σήμερον μὲ τὸν τόκον του ἀντὶ 3987,38 (612,35) δρ: πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐλογαριάσθη ὁ τόκος; 6(3,83..).

3) Πρὸς πόσον τοῖς °/ₒ πρέπει νὰ τοκισθῇ κεφάλαιον 5826 (6125) δρ., διὰ νὰ γίνῃ μετὰ 23 (17) ἔτη μὲ τὸν τόκον του 11185,92 (11331,25) δρ ; 4(5).

4) Πρὸς πόσον τοῖς °/ₒ πρέπει νὰ τοκισθῇ 1 δρ., ὥστε μετὰ τῶν τόκων της εἰς 10· 15· 50 ἔτη νὰ διπλασιασθῇ;

10 ἔτη· 6 ἔτ. 8 μ: 5 (καὶ οἱονδήποτε κεφάλαιον).

Ὁμὰς τρίτη. 1) Πρὸς πόσον τοῖς °/ₒ κεφάλαιον 4780 (15396 δρ. εἰς 2,5 (5) ἔτη φέρει τόκον ὅσον 3824 (6415) δρ. πρὸς 5 (3) °/ₒ εἰς 3 (6) ἔτη; 4,8 (1,5).

2) Πρὸς πόσον τοῖς °/ₒ πρέπει νὰ τοκισθῇ ἓν κεφάλαιον, ὥστε εἰς 10 (15) ἔτ. νὰ τριπλασιασθῇ (ἑπταπλασιασθῇ); 20(40).

3) Ἔχει τις δύο κεφάλαια· τὸ ἓν 9856 δρ., καὶ τὸ ἄλλο 7864 δρ. Τὸ α΄ εἶνε τοκισμένον πρὸς 5 °/ₒ. Πρὸς πόσον τοῖς °/ₒ πρέπει νὰ τοκίσῃ τὸ β΄, διὰ νὰ ἔχῃ ἐν ὅλῳ ἐτήσιον τόκον 807,36 δρ.; 4.

§ **100. Προβλήματα ὑπαγόμενα εἰς τὰ τοῦ τόκου.—**

(Πρόβλημα) *1). «Εἷς τοκίζει κεφάλαιον 526 δρ. πρὸς 5°/ₒ· πόσα χρήματα θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ μετὰ 3 ἔτη;»*

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδεται τὸ κεφάλαιον, τὸ ἐπιτόκιον καὶ ὁ χρόνος, ζητεῖται δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ τόκου αὐτοῦ.

Εἶνε φανερόν, ὅτι πρὸς λύσιν τούτου ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, ὁ ὁποῖος εἶνε 78,9 δρ., καὶ νὰ τὸν προσθέσωμεν εἰς τὸ δοθὲν κεφάλαιον, ὅτε εὑρίσκομεν 604,9 δρ.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι δίδεται τὸ ἄθροισμα τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ τόκου του, καὶ δύο ἐκ τῶν τριῶν δεδομένων τοῦ προηγουμένου προβλήματος (κεφαλαίου, ἐπιτοκίου, χρόνου), ζητεῖται δὲ τὸ τρίτον ἐξ αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν τὰ ἑξῆς τρία εἴδη προβλημάτων.

α') Δίδεται τὸ κεφάλαιον, τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ τόκου αὐτοῦ, ζητεῖται δὲ ὁ χρόνος.

β') Δίδεται τὸ κεφάλαιον, ὁ χρόνος καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ τόκου αὐτοῦ, ζητεῖται δὲ τὸ ἐπιτόκιον.

γ') Δίδεται τὸ ἄθροισμα τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ τόκου, τὸ ἐπιτόκισε, καὶ ὁ χρόνος, ζητεῖται δὲ τὸ κεφάλαιον.

Ἐκ τούτων τὰ δύο πρῶτα εἴδη λύονται εὐκόλως (καθὼς εἴδομεν εἰς προηγούμενα πρὸς λύσιν προβλήματα).

Ἔστω τώρα πρὸς λύσιν τὸ

(Πρόβλημα) 2). «*Ποῖον κεφάλαιον τοκισθὲν πρὸς 5°/ₒ ἐπὶ 3 ἔτη γίνεται μετὰ τοῦ τόκου 604,9 δρ.;*»

Πρὸς λύσιν παρατηροῦμεν ὅτι ἀφοῦ 100 δρ. εἰς 1 ἔτος φέρουν τόκον 5 δρ., εἰς 3 ἔτη φέρουν 15 δρ. Ἑπομένως γίνονται μὲ τὸν τόκον αὐτῶν εἰς τρία ἔτ., 115 δρ. Οὕτω λύομεν τὸ πρόβλημα διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν λέγοντες,

100 δρ. κεφ. γίνονται 115 δρ. μὲ τὸν τόκον αὐτῶν
x 604,9

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν ὅτι $x = 100 \times \frac{604,9}{115} = 526$ δρ. Ὥστε τὸ κεφάλαιον ἦτο 526 δραχμαί.

Ἀσκήσεις. 1) Ὀφείλει τις νὰ πληρώσῃ μετὰ 3 (8) ἔτη 416,30 (32045,32) δρ., συμφωνεῖ δὲ νὰ πληρώσῃ σήμερον· πόσον θὰ πληρώσῃ ἂν ὁ τόκος λογαριάζεται πρὸς 5 (3) $^0/_0$; 362 (25843). 5

2) Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον ἐπὶ 2 (4) μῆν. πρὸς 4 (5)°/ₒ γίνεται μετὰ τοῦ τόκου του 730,84 (329,40) δρ. ; 726(324).

Περὶ ὑφαιρέσεως.

§ **101.** **Ὁρισμοί.** —

α') *Ὑφαίρεσις* λέγεται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἓν χρέος, ὅταν τὸ χρέος αὐτὸ πληρώνεται πρὸ τῆς διορίας αὐτοῦ.

Οὕτω, ἐὰν χρέος 416,30 δρ. πληρωθῇ 3 ἔτη πρὸ τῆς διορίας αὐτοῦ ἀντὶ 326 δραχμῶν, ἡ διαφορὰ 416,30 — 326 = 90,30 δρ. λέγεται ὑφαίρεσις.

β') Ὁ δανείζων χρήματα λαμβάνει συνήθως ἀπὸ τὸν δανειζόμενον ἓν ἔγγραφον διὰ τοῦ ὁποίου ἐνυπογράφως ὑπόσχεται ὁ δανειζόμενος, ὅτι θέλει πληρώσει κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς λήξεως τοῦ δανείου τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἐδανείσθη. Τὸ ἔγγραφον αὐτὸ λέγεται *γραμμάτιον* ἢ *συναλλαγματική**, τὸ εἰς αὐτὸ ἀναφερόμενον ποσὸν *ὀνομαστικὴ* ἀξία τοῦ γραμματίου, ἡ δὲ ἐποχὴ κατὰ τὴν ὁποίαν θέλει πληρωθῇ ἡ ἀξία αὐτὴ *λῆξις* τοῦ γραμματίου.

Ἐὰν ὁ κάτοχος ἑνὸς γραμματίου θελήσῃ νὰ τὸ πωλήσῃ πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ, ἐπειδὴ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου πληρώνεται πρὸ τῆς διορίας της, ἐλαττώνεται αὕτη κατὰ τὴν ὑφαίρεσιν.

γ') Ὁ χρόνος ὁ ὁποῖος παρέρχεται ἀπὸ τὴν ἐποχὴν κατὰ τὴν ὁποίαν πωλεῖται ἓν γραμμάτιον πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ μέχρι τῆς λήξεως αὐτοῦ καλεῖται *χρόνος τῆς προεξοφλήσεως* τοῦ γραμματίου, τὸ δὲ ποσὸν ἀντὶ τοῦ ὁποίου προεξοφλεῖται τὸ γραμμάτιον *παροῦσα ἀξία* τοῦ γραμματίου. *Ἡ παροῦσα ἀξία διαφέρει τῆς ὀνομαστικῆς κατὰ τὴν ὑφαίρεσιν.*

Ἔχομεν δύο εἰδῶν ὑφαίρεσιν, τὴν *ἐξωτερικὴν* καὶ τὴν *ἐσωτερικήν*.

§ 102. Ὑφαίρεσις ἐξωτερική.—

α') Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις ἢ ἁπλῶς *ὑφαίρεσις*, εἶνε ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου διὰ τὸν χρόνον τῆς προεξοφλήσεως μὲ ὡρισμένον ἐπιτόκιον.

Εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως παρεμβαίνουν τὰ ἑξῆς τέσσαρα ποσά· ἡ *ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, ὁ χρόνος, τὸ ἐπιτόκιον* καὶ ἡ *ὑφαίρεσις*, τὰ δὲ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἓν ἀπὸ αὐτά, ὅταν δοθοῦν τὰ ἄλλα τρία, δὲν διαφέρουν ἀπὸ τὰ τέσσαρα προβλήματα τοῦ τόκου. Ἐπομένως «*τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως δὲν διαφέρουν καθόλου ἀπὸ τὰ προβλήματα τοῦ τόκου, εἰμὴ μόνον καθότι τὸ μὲν κεφάλαιον θὰ εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, ὁ δὲ τόκος ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις*».

β') Εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως ὑπάγονται καὶ ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου τὸ ἐπιτόκιον, καὶ ὁ χρόνος, ζητεῖται δὲ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία, καὶ ἡ ὑφαίρεσις τοῦ γραμματίου. Διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τούτων, ἔστω τὸ

---

* Ἡ συναλλαγματικὴ εἶνε ἔγγραφον διὰ τοῦ ὁποίου ὁ δανείζων διατάσσει τὸν εἰς ἄλλην ἢ εἰς τὴν αὐτὴν πόλιν διαμένοντα χρεώστην αὐτοῦ, νὰ πληρώσῃ εἰς ἐποχὴν ὡρισμένην, καὶ εἰς διαταγὴν ὡρισμένου προσώπου τὸ σημειούμενον εἰς αὐτὴν ποσόν.

Τὰ ἔγγραφα αὐτὰ συντάσσονται ἐπὶ χαρτοσήμου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀξία ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ Νόμου.

(Πρόβλημα). «*Ποία εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου, τὸ ὁποῖον ἐξωφλήθη 3 μῆν. πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 8 °/₀ ἀντὶ 3699,50 δρ.;*»

Ἐν πρώτοις εὑρίσκομεν ὅτι αἱ 100 δρ. εἰς 3 μῆν. πρὸς 8 °/₀ φέρουν τόκον 2 δρ. Ἑπομένως ὀνομαστικὴ ἀξία 100 δρ. θὰ ἔχῃ παροῦσαν 98 δρ. διὰ τὴν προεξόφλησιν 3 μῆν. πρὸ τῆς λήξεως πρὸς 8 °/₀. Οὕτω θὰ ἔχωμεν νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

100 δρ. ὀνομ. ἀξία ἔχουν 98 δρ. παροῦσαν

x 3699,50

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x = \frac{100 \times 3699,50}{98} = 3775,46$ δρ. περίπου

Ὥστε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου εἶνε 3775,46 δρ. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ὑφαίρεσιν, ἀρκεῖ ν' ἀφαιρέσωμεν τὴν παροῦσαν ἀξίαν ἀπὸ τὴν ὀνομαστικήν, ὅτε προκύπτει 75,96 δραχ.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

1) Ὀφείλει τις νὰ πληρώσῃ μετὰ 2(3) μῆν. χρέος 730,86 (1640) δρ.· πόσα θὰ πληρώσῃ σήμερον, ἐὰν τοῦ γίνῃ ἔκπτωσις 4 (10)°/₀. 725 2876.(ὑφ 41).

2) Χρέος 108, 78 (522,69) δρ. εἶνε πληρωτέον μετὰ 1 μῆν. 10ἡμ.· πόση θὰ εἶνε ἡ ὑφαίρεσις, καὶ πόσα θὰ πληρώσῃ ὁ ὀφειλέτης, ἐὰν ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του σήμερον πρὸς 6,5 (8, 5)°/₀; ὑφαίρεσις περίπου 0,79(4,94). 5

3) Συμφώνως πρὸς διαθήκην ἔχει τις νὰ λάβῃ μετὰ 8 (6) ἔτη ποσὸν 32045,32 (23399,75) δρ.· πόσα θὰ λάβῃ σήμερον, ἐὰν τοῦ γίνῃ ἔκπτωσις 3 (4,5)°/₀; περίπου 7690,87 (6317,93) ὑφ.

4) Ποίαν ἀξίαν ἔχει σήμερον χρέος 781,61 (119,38) δρ. πληρωτέον μετὰ 3 μῆν. 18 (20) ἡμ., ἐὰν ἡ ὑφαίρεσις γίνῃ πρὸς 4,5 (6,5)°/₀; περίπου 771,06 (218,59).

5) Γραμμάτιον 2450 δρ. λῆγον μετὰ 65 ἡμ., δεύτερον 3200 δρ. λῆγον μετὰ 80 ἡμ., καὶ ἄλλο 2740 δρ. λῆγον μετὰ 3 μῆν. ἀντικαθίστανται δι' ἑνὸς 8400 δρ.· ποία εἶνε ἡ λῆξις τούτου, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 8 °/₀;

Λύσις. Εὑρίσκομεν τὴν παροῦσαν ἀξίαν καθενὸς τῶν γραμματίων, καὶ προσθέτομεν αὐτά, τὸ δὲ ἄθροισμα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ 8400. Ἡ διαφορὰ αὕτη παριστάνει τὴν ὑφαίρεσιν τοῦ γραμματίου 8400 δρ. πρὸς 8 °/₀ εἰς τὸν ζητούμενον χρόνον, ἐκ τούτων δ' εὑρίσκομεν αὐτόν.

6) Πόση εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου ἐξοφληθέντος 4 μῆν. (24 ἡμ.) πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9 (6) $^0/_0$ ἀντὶ 834,2 (3386,6 δρ.; 860 (3400).

7) Γραμμάτιον 1800 δρ. λήγει μετὰ 40 ἡμ., β' 1240 δρ. μετὰ 63 ἡμ., καὶ γ' 2500 δρ. μετὰ 115 ἡμ. Ἂν ἀντικατασταθοῦν δι' ἑνὸς γραμματίου, λήγοντος μετὰ 3 μῆνας, ποία θὰ εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ κοινοῦ γραμματίου, ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 4 $^0/_0$;

Λύσις. Εὑρίσκομεν τὴν παροῦσαν ἀξίαν τῶν δοθέντων γραμματίων καὶ τὸ ἄθροισμά των δίδει τὴν παροῦσαν ἀξίαν τοῦ κοινοῦ γραμματίου. Ἀκολούθως λέγομεν, 100 δρ. ὀνομ. ἀξία ἔχει παροῦσαν 99 δρ. κλπ. Διότι αἱ 100 εἰς 3 μ. πρὸς 4$^0/_0$ δίδουν 1 δρ. τόκον.

§ 103. Ὑφαίρεσις ἐσωτερική.—

α') Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶνε ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας τοῦ γραμματίου διὰ τὸν χρόνον, ὁ ὁποῖος θὰ περάσῃ ἀπὸ τὴν ἡμέραν τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως αὐτοῦ.

Διὰ νὰ γνωρίσωμεν πῶς εὑρίσκεται ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις, ἔστω τὸ

(Πρόβλημα). « ***Γραμμάτιον 416,30 δρ. προεξοφλεῖται 3 ἔτη πρὸ τῆς λήξεως αὐτου πρὸς 5 $^0/_0$· πόση εἶνε ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις;*** ».

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως τὸ ἄθροισμα τῆς παρούσης ἀξίας καὶ τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως τοῦ γραμματίου εἶνε ἴσον μὲ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τούτου. Ἑπομένως πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως καὶ τῆς παρούσης ἀξίας τοῦ γραμματίου ἔχομεν νὰ λύσωμεν πρόβλημα ὅμοιον μὲ τὸ εἰς τὴν § 100, Πρόβλημα 2).

Κατὰ ταῦτα εὑρίσκομεν τὸν τόκον τῶν 100 δρ. εἰς 3 ἔτη πρὸς 5$^0/_0$ ὅτε ἔχομεν 15 δρ. Ἀκολούθως παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν εἴχομεν γραμμάτιον 115 δρ., καὶ προεξοφλεῖτο 3 ἔτ. πρὸ τῆς λήξεώς αὐτοῦ πρὸς 5$^0/_0$, θὰ εἶχεν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν 15 δρ. Ὥστε ἔχομεν τώρα τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

115 δρ. ὀνομ. ἀξία ἔχει		*15* δρ. ἐσωτ. ὑφ.
416,30 » » »		x » »

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν ὅτι $x = 15 \times \frac{416,30}{115} = 54,30$ δρ.

Ἤτοι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶνε 54,30 δρ.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς παρούσης ἀξίας δυνάμεθα νὰ λύσωμεν ὅμοιον πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, παρατηροῦντες ὅτι, 115 δρ. ὀνομ. ἀξία ἔχουν 100 δρ. παροῦσαν, ἢ μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως ἀφαιροῦμεν αὐτὴν ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου, ὅτε προκύπτει 362 δρ.

β') Εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως παρεμβαίνουν τὰ ἑξῆς 4 ποσά· *ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία* τοῦ γραμματίου, *ὁ χρόνος*, *τὸ ἐπιτόκιον* καὶ *ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις*, ζητεῖται δὲ ἓν ἐκ τούτων, ὅταν δοθοῦν τὰ τρία ἄλλα. Ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων προβλημάτων τὸ ἓν ἐλύσαμεν ἀνωτέρω, τὰ δὲ λοιπὰ τρία δὲν διαφέρουν καθόλου τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου, εἰμὴ μόνον καθότι ὡς κεφάλαιον θὰ λαμβάνεται ἡ παροῦσα ἀξία, καὶ ὡς τόκος ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις τοῦ γραμματίου.

Ἀσκήσεις.

1) Γραμμάτιον 1200 (1640) δρ. προεξοφλεῖται 3 (3) μῆν. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸ 8 (10) $^0/_0$· νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ ἡ παροῦσα ἀξία του. 23,53·1176,47 (40·1600).

2) Τοῦ αὐτοῦ γραμματίου νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ ἀκολούθως νὰ δειχθῇ ὅτι, ἡ διαφορὰ τῶν δύο ὑφαιρέσεων εἶνε ὁ τόκος τῆς ἐσωτερικῆς πρὸς τὸ δοθὲν ἐπιτόκιον καὶ εἰς τὸν δοθέντα χρόνον.

3) Ὅταν ἑνὸς γραμματίου εὕρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν καὶ γνωρίζωμεν τὸν χρόνον καὶ τὸ ἐπιτόκιον, πῶς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐκ τῶν τριῶν αὐτῶν τὴν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν; 5

Λύσις. Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις ἰσοῦται μὲ τὴν ἐσωτερικήν, προστιθεμένου καὶ τοῦ τόκου της.

4) Ποία τῶν δύο ὑφαιρέσεων εἶνε μεγαλυτέρα καὶ διατί;

5) Νὰ λυθοῦν τὰ προβλήματα πρὸς λύσιν τῆς προηγουμένης παραγράφου (σελ. 189—190) δι' ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως.

Προβλήματα μίξεως.

§ **104.** α') Εἰς τὰ προβλήματα μίξεως ὑπάγονται καὶ ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος, ζητεῖται δὲ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑνὸς τῶν ἀναμιγνυομένων πραγμάτων. Ἔστω τοιοῦτον τὸ ἑξῆς.

(Πρόβλημα). ***«Διὰ νὰ σχηματίσωμεν κρᾶμα οἴνου ἀξίας 8 δρ. κατ' ὀκᾶν, ἀναμιγνύομεν 12 ὀκ. οἴνου τῶν 7,5 δρ., 16,5 ὀκ.***

οἴνου τῶν 6 δρ. καὶ 32 ὀκ. τῶν 9,5 δρ., πρὸς δὲ 9 ὀκ. ἀγνώστου ἀξίας· πόσον ἐτιμᾶτο ἡ ὀκᾶ τοῦ τελευταίου οἴνου;»

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν ὁλοκλήρου τοῦ κράματος 12 ὀκ. +6,5 ὀκ. + 32 ὀκ. + 3 ὀκ. = 69,5 ὀκ. πρὸς 8 δρ. τὴν ὀκᾶν. Ἤτοι 8 δρ.× 69,5 = 556 δρ. Ἀπὸ τὴν τιμὴν αὐτὴν ἀφαιροῦμεν τὴν τιμὴν τῶν τριῶν πρώτων δοθέντων εἰδῶν τοῦ οἴνου, τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος, ὅτε εὑρίσκομεν

7,5 δρ. × 12 = 90 δρ.
6 δρ. × 16,5 = 99 δρ.
9,5 δρ. × 32 = 304 δρ.

Ἐν ὅλῳ 493 δρ., καὶ 556—493=63 δρ.

Ἐπειδὴ τὸ 63 δρ. παριστάνει τὴν τιμὴν τῶν 9 ὀκ. τοῦ οἴνου, ἕπεται ὅτι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς τούτου θὰ εἶνε 63 δρ.: 9=7 δρ.

Ἀσκήσεις.

1) Οἰνοπώλης ἀνέμιξε 450 (100) ὀκ. οἴνου τῶν 4,9 (8) δρ. κατ' ὀκᾶν, 250 (200) ὀκ. τῶν 6 (7,5) δρ., καὶ 12 (500) ὀκ. οἰνοπνεύματος τῶν 15 (7,2) δρ. Πόσον θὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ κράματος καὶ πόσον ἂν κερδίζῃ 2 (1,125) δρ. κατ' ὀκᾶν;
5,45..·7,45.·(7,375·8,5).

2) Ἀνέμιξέ τις 1500 (2400) ὀκ. οἴνου τῶν 9 (6) δρ., 450 (1800) ὀκ. τῶν 6,5 (4) δρ., καὶ 250 (300) ὀκ. ὕδατος (πρὸς 0 τὴν ὀκᾶν). Ποία εἶνε ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ κράματος, καὶ τίς μὲ κέρδος 12 %; 7,456 . περίπου· 8,35 (4,8·5,376).

3) Συνεχωνεύθησαν 230 (250) γραμ. ἀργύρου καθαρότητος 0,845 (0,830) μὲ 140 (180) γρ. καθαρότητος 0,9 (0,9) καὶ 75 (320) γρ. καθαρότητος $\frac{5}{6}$ (0,875). Ποῖος ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος; 0,875... (0,866)·

4 Συνεχωνεύθησαν 15 γραμ. ἀργύρου καθαρότητος 0,900 μετὰ 23 γραμ. ἄλλου ἀργύρου. Ποῖος ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ τελευταίου, ἐὰν ὁ τοῦ κράματος εἶνε 0,827; 9,779..

5) Ἐπώλησέ τις ποσὸν ἐλαίου τριῶν ποιοτήτων· ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τῆς α' ποιότητος ἦτο 11,5 δρ., τῆς β' 12,8 δρ., καὶ τῆς γ'

13 δρ. Ἐκ τῆς β' ἐπώλησε τριπλασίαν ποσότητα τῆς α', ἐκ δὲ τῆς γ' ὅσον ἐκ τῆς α' καὶ τῆς β' ὁμοῦ· ποία εἶνε ἡ τιμὴ τοῦ κράματος;

12,7375.

6') Ἄλλο εἶδος προβλημάτων μίξεως εἶνε ἐκεῖνο εἰς τὸ ὁποῖον δίδονται αἱ τιμαὶ καθεμιᾶς μονάδος δύο πραγμάτων, καὶ ζητεῖται πόσον θὰ λάβωμεν ἀπὸ καθέν, διὰ νὰ σχηματίσωμεν μῖγμα ὡρισμένον, καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς νὰ ἔχῃ δεδομένην τιμήν, κειμένην μεταξὺ τῶν τιμῶν τῶν μονάδων τῶν πραγμάτων, τὰ ὁποῖα πρόκειται ν' ἀναμίξωμεν.

Διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὴν λύσιν τῶν τοιούτων προβλημάτων, ἔστω τὸ (Πρόβλημα). *1).* **«Οἰνοπώλης εἶχεν οἶνον δύο εἰδῶν· τοῦ μὲν πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ ἐτιμᾶτο 4,5 δρ., τοῦ δὲ δευτέρου 8 δρ.· ἤθελε νὰ σχηματίσῃ ἐξ αὐτῶν μῖγμα 1600 ὀκ., τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ ἐτιμᾶτο 6 δρ.· πόσον θὰ ἐλάμβανε ἀπὸ καθὲν εἶδος;»**

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, παρατηροῦμεν ὅτι, μία ὀκᾶ τοῦ πρώτου εἴδους ἐπωλεῖτο χωριστὰ 4,5 δρ., τώρα δὲ εἰς τὸ μῖγμα εὑρισκομένη θὰ πωλῆται 6 δρ: ὥστε ἀπὸ καθεμίαν ὀκᾶν τοῦ πρώτου θὰ κερδίζῃ ὁ οἰνοπώλης 6 δρ.—4,5 δρ.=1,5 δρ. Ἀλλὰ πάλιν θὰ ζημιώνεται ἀπὸ καθεμίαν τοῦ δευτέρου εἴδους 2 δρ. Διότι χωριστὰ ἐπωλεῖτο 8 δρ. καὶ τώρα εἰς τὸ μῖγμα 6 δρ. Λοιπὸν μία ὀκᾶ τοῦ α' εἴδους δίδει κέρδος 1,5 δρ: 1 ὀκᾶ τοῦ β' εἴδους ζημίαν 2 δρ. Ἄρα ἂν μὲν βάλῃ ἐκ τοῦ α' εἴδους 2 ὀκ., θὰ κερδίσῃ 1,5×2 δρ., ἂν δὲ ἐκ τοῦ δευτέρου εἴδους βάλῃ 1,5 ὀκ. θὰ χάσῃ 2×1,5 δρ. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι, οὔτε κέρδος θὰ ἔχῃ οὔτε ζημίαν, ἂν ἀναμίξῃ 2 ὀκ. ἐκ τοῦ α' εἴδους καὶ 1,5 ὀκ ἐκ τοῦ β'. Ὥστε ἂν ἤθελε νὰ κάμῃ μῖγμα 3,5 ὀκ., ἔπρεπε νὰ λάβῃ 2 ὀκ. ἐκ τοῦ πρώτου καὶ 1,5 ἐκ τοῦ δευτέρου. Ἐπειδὴ δὲ θέλει νὰ κάμῃ μῖγμα 1600 ὀκ., διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον θὰ λάβῃ ἐκ τοῦ πρώτου, λύομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν. 5

Εἰς	3,5 ὀκ.	μῖγμα θέτει	2 ὀκ.	ἐκ τοῦ α'
»	1600	»	x	»

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν ὅτι ὁ $x = 2 \times \frac{1600}{3,5} = 914\frac{2}{7}$ ὀκ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας ὀκάδας θὰ βάλῃ ἐκ τοῦ β΄ εἴδους ἐργαζόμεθα ὁμοίως λύοντες τὸ πρόβλημα,

εἰς *3,5* ὀκ. μῖγμα θέτει *1,5* ὀκ. τοῦ β΄
» *1600* » *x* »

ὅτε εὑρίσκομεν $x = 1,5 \times \frac{1600}{3,5} = 625 \frac{5}{7}$ ὀκ.

Ἢ καὶ ἄλλως ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰς 1600 ὀκ. τοῦ μίγματος τὰς $914 \frac{2}{7}$ ὀκ., τὰς ὁποίας θὰ βάλῃ ἐκ τοῦ α΄ εἴδους.

(Πρόβλημα) *2*). «***Ἔχομεν δύο ὄγκους ἀργύρου καὶ τοῦ μὲν πρώτου ὁ βαθμὸς καθαρότητος εἶνε 0,935 τοῦ δὲ δευτέρου 0,880· πόσον πρέπει νὰ λάβωμεν ἀπὸ καθὲν τῶν εἰδῶν διὰ νὰ σχηματίσωμεν 5 δράμια ἀργύρου, ἔχοντος βαθμὸν καθορότητος 0,900;***»

Πρὸς λύσιν τούτου παρατηροῦμεν ὅτι καθεμία μὲν μονὰς τοῦ πρώτου εἴδους εἰσάγει εἰς τὸ κρᾶμα 0,035 ἀργύρου περισσότερον τοῦ ἀπαιτουμένου. Διότι τὸ κρᾶμα πρέπει νὰ ἔχῃ βαθμὸν καθαρότητος 0,900· καθεμία δὲ μονὰς τοῦ δευτέρου εἰσάγει εἰς τὸ κρᾶμα 0,020 ἀργύρου ὀλιγώτερον τοῦ ἀπαιτουμένου. Ὥστε ἀπὸ καθεμίαν μὲν μονάδα τοῦ α΄ εἴδους περισσεύει ἄργυρος 0,035 τῆς μονάδος, ἀπὸ καθεμίαν δὲ τοῦ β΄ εἴδους λείπει ἄργυρος 0,020 τῆς μονάδος.

Ἐὰν λοιπὸν βάλωμεν 20 δράμια ἐκ τοῦ α΄ εἴδους, θὰ περισσεύῃ ἄργυρος $0,035 \times 20$ δράμια, ἐὰν δὲ βάλωμεν 35 δράμια ἐκ τοῦ β΄ εἴδους, θὰ λείψῃ ἄργυρος $0,020 \times 35$ δράμια. Ἐπειδὴ δὲ εἶνε $0,35 \times 20 = 0,020 \times 35$, ἕπεται ὅτι, ἂν βάλωμεν 20 δράμια ἐκ τοῦ α΄ καὶ 35 δράμια ἐκ τοῦ β΄ εἴδους, ὅσος ἄργυρος περισεύει ἐκ τοῦ α΄ τόσος λείπει ἐκ τοῦ β΄. Ἑπομένως τὸ κρᾶμα οὔτε περισσότερον οὔτε ὀλιγώτερον τοῦ ἀπαιτουμένου ἀργύρου θὰ ἔχῃ.

Ἂν λοιπὸν ἠθέλομεν νὰ κάμωμεν κρᾶμα 55 δραμίων, ἔπρεπε νὰ βάλωμεν 20 δράμια ἐκ τοῦ α΄ εἴδους καὶ 35 δρ. ἐκ τοῦ β΄. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον θὰ βάλωμεν ἐκ τοῦ α΄ εἴδους, διὰ νὰ κάμωμεν κρᾶμα 5 δρμ. λύομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Εἰς *55* δρμ. κρᾶμα θέτομεν *20* δρμ. α΄ εἴδους
5 » *x*

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x = 20 \times \frac{5}{55} = 1\frac{9}{11}$ δρμ.

Ἐκ τοῦ β′ εἴδους θὰ βάλωμεν $5 - 1\frac{9}{11} = 3\frac{2}{11}$ δρμ.

(Πρόβλημα) *3). «Ἔμπορος ἤθελε ν' ἀναμίξῃ 180 ὀκ. καφέ, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἐτιμᾶτο 32 δρ. μὲ καφὲ ἄλλης ποιότητος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἐτιμᾶτο 37 δρ: πόσας ὀκάδας ἔπρεπε νὰ λάβῃ ἐκ τῆς δευτέρας ποιότητος, διὰ νὰ ἐτιμᾶτο ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος 35 δρ.;»*

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι

ἀπὸ 1 ὀκ. τοῦ α′ εἴδους ἐκέρδιζε 3 δρ.

ἀπὸ 1 ὀκ. τοῦ β′ εἴδους ἔχανε 2 δρ.

Ἄρα, ἂν ἐλάμβανεν ἐκ τοῦ α′ εἴδους 2 ὀκ. θὰ ἐκέρδιζε 3×2 δρ.· ἂν ἐλάμβανεν ἐκ τοῦ β′ εἴδους 3 ὀκ. θὰ ἔχανε 2×3 δρ.· ἤτοι οὔτε θὰ ἐκέρδιζεν οὔτε θὰ ἔχανεν. Ὥστε, ἂν ἐκ τοῦ α′ εἴδους ἔθετεν 2 ὀκ. πρέπει νὰ ἔθετεν 3 ὀκ. ἐκ τοῦ β′ εἴδους. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας ὀκ. ἔπρεπε νὰ θέτῃ ἐκ τῆς δευτέρας ποιότητος, λύομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Εἰς 2 ὀκ. τοῦ α′ εἴδους θέτομεν 3 ὀκ. τοῦ β′

» 180 » » x »

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x = 3 \times \frac{180}{2} = 270$ ὀκ.

5

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

1) Οἰνοπώλης ἔχει οἶνον τῶν 8 (12,5) δραχ. καὶ τῶν 4,5 (10,2) δραχ. τὴν ὀκᾶν, καὶ θέλει νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν κρᾶμα 2800 (840,75) ὀκ., τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ τιμᾶται 5,4 (11,5) δραχ: πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ βάλῃ ἀπὸ καθὲν εἶδος ;

Ἐκ τοῦ α′ 720 (475 ὀκ. 82 $\frac{14}{23}$ δρμ.

2) Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν θὰ ἀναμίξωμεν σῖτον (καφὲ) ἀξίας 3,5 (37) δρ. τὴν ὀκᾶν μὲ ἄλλον (180 ὀκ.) ἀξίας 2,4 (32) δρ. τὴν ὀκᾶν διὰ νὰ σχηματίσωμεν μῖγμα 3 (35) δρ. τὴν ὀκᾶν ;

Εἰς 6 ὀκ. τοῦ α′ θὰ βάλωμεν 5 τοῦ β′ (270).

3) Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ ἀναμίξωμεν οἰνόπνευμα τῶν 8 (9,5) δρ. τὴν ὀκᾶν μὲ ὕδωρ (ἄλλο τῶν 8 δρ.) διὰ νὰ τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ κράματος 5 (8,4) δρ;

Ἀνὰ 5 ὀκ. οἰνοπν. θὰ θέτωμεν 3 ὀκ. ὕδατος (εἰς 4 τοῦ α′ 11 τοῦ 6′).

4) Πόσον χαλκὸν (ὕδωρ) πρέπει νὰ συγχωνεύσωμεν μὲ 5 δρμ. (40 γρμ.) ἀργύρου (οἰνοπνεύματος) καθαρότητος 0,900^0 (90^0), ὥστε νὰ λάβωμεν κρᾶμα καθαρότητος 0,850^0 (75^0); $\frac{5}{17}$(8)

5) Ἔμπορος ἔχει δύο ποιότητας ζακχάρεως· τῆς μὲν α΄ ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 15 δρ., τῆς δὲ β΄ 13 δρ. καὶ θέλει νὰ κάμῃ μῖγμα ἐξ αὐτῶν 2500 ὀκ., τὸ ὁποῖον νὰ πωλῇ πρὸς 14,8 δρ. τὴν ὀκᾶν, καὶ νὰ κερδίσῃ 10% ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μίγματος· πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ βάλῃ ἀπὸ καθὲν εἶδος; Ἐκ τοῦ α΄ 568 $\frac{2}{11}$.

Περὶ μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα.

§ **105.** **Ὁρισμοί.**—

α΄) Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται *ἀνάλογοι* ἄλλων ἰσοπληθῶν, ἐὰν καθεὶς τῶν πρώτων προκύπτῃ ἐκ τοῦ ἀντιστοίχου τῶν δευτέρων διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Οὕτω οἱ ἀριθμοὶ 2· 6· 8· 10 εἶνε ἀνάλογοι τῶν 1· 3· 4· 5· διότι προκύπτουν ἐκ τούτων διὰ πολλαπλασιασμοῦ καθενὸς τῶν 1· 3· 4· 5 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2.

Ὁ ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμοὺς τῆς μιᾶς σειρᾶς, διὰ νὰ εὕρωμεν τοὺς τῆς ἄλλης, δύναται νὰ εἶνε οἱοσδήποτε. Διὰ τοῦτο οἱ ἀριθμοὶ 1·3·4·5 ἐπειδὴ γίνονται ἐκ τῶν 2· 6· 8· 10, ἂν πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ $\frac{1}{2}$ εἶνε καὶ αὐτοὶ ἀνάλογοι τῶν πρώτων.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ συνάγομεν ὅτι, οἱ λόγοι τῶν ἀριθμῶν τῆς μιᾶς σειρᾶς πρὸς τοὺς ἀντιστοίχους τῆς ἄλλης εἶνε ἴσοι· ἤτοι ἔχομεν τὴν ἰσότητα τῶν λόγων

$$\frac{2}{1}=\frac{6}{3}=\frac{8}{4}=\frac{10}{5} \text{ καὶ } \frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}.$$

β) Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται *ἀντιστρόφως ἀνάλογοι* ἄλλων ἰσοπληθῶν, ἐὰν εἶνε ἀνάλογοι τῶν ἀντιστρόφων αὐτῶν.

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 10· 14· 12 εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{6}$, διότι εἶνε ἀνάλογοι τῶν ἀντιστρόφων τούτων, δηλαδὴ τῶν ἀριθμῶν 5· 7· 6· Πράγματι, ἐὰν τοὺς ἀριθμοὺς 5· 7· 6 πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 2, εὑρίσκομεν τοὺς 10· 14· 12.

§ 106. Μερισμὸς εἰς μέρη εὐθέως ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.—

α') *Μερισμὸς* ἑνὸς ἀριθμοῦ, π. χ. τοῦ 1800, εἰς μέρη **εὐθέως** ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν, π.χ. τῶν *2· 3· 5*, σημαίνει νὰ γίνῃ τόσα μέρη ὁ 1800 ὅσοι εἶνε οἱ δοθέντες ἀριθμοί, καὶ ἀνάλογα πρὸς αὐτούς

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος πρόκειται νὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν *2·3·5* ἦτο ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $2+3+5$, ἤτοι 10, τὰ μέρη θὰ ἦσαν προφανῶς *2· 3· 5*. Ἂν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς ἦτο διπλάσιος (τὸ ἥμισυ), τριπλάσιος (τὸ τρίτον),... τοῦ 10, τὰ μέρη θὰ ἦσαν διπλάσια (τὸ ἥμισυ), τριπλάσια (τὸ τρίτον),... τῶν *2·3·5*. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, καθὲν μέρος εἶνε ἀνάλογον πρὸς τὸν μεριστέον ἀριθμόν.

Ἑπομένως, δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν ὡς ἑξῆς πρὸς εὕρεσιν τοῦ πρώτου μέρους.

Ὅταν ἔχωμεν 10 μεριστέον εἶνε 2 τὸ πρῶτον μέρος,

» » 1800 » x

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x=2\times\frac{1800}{10}=360$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ δύο ἄλλα μέρη κατὰ σειρὰν εἶνε

$$\frac{1800\times3}{10}=540,\ \frac{1800\times5}{10}=900.$$

5

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

«***Διὰ νὰ μοιράσωμεν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ καθένα τῶν δοθέντων, καὶ τὰ γινόμενα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν***».

β') Οἱ ἀριθμοὶ ἀναλόγως τῶν ὁποίων μερίζομεν δύνανται νὰ πολλαπλασιασθοῦν ἢ νὰ διαιρεθοῦν ὅλοι μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, χωρὶς νὰ βλαβοῦν τὰ μέρη. Διότι, ἂν π.χ. πρόκειται νὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν *360* ἀναλόγως τῶν *2· 3· 5*, τὰ μέρη θὰ εἶνε $360\times\frac{2}{10}$, $360\times\frac{3}{10}$, $360\times\frac{5}{10}$ ὅπου τὸ *10* εὑρέθη ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν *2· 3· 5*. Ἂν ἀντὶ τῶν *2· 3· 5* λάβωμεν π.χ. τοὺς ἑξαπλασίους αὐτῶν 2×6· 3×6· 5×6, τὰ μέρη θὰ εἶνε $360\times\frac{2\times6}{10\times6}$, $360\times\frac{3\times6}{10\times6}$ $360\times\frac{5\times6}{10\times6}$, Διότι τὸ ἄθροισμα 2×6

3×6· 5×6 θὰ εἶνε 10×6. Ἀλλὰ τὰ μέρη εἶνε τὰ αὐτὰ ὡς καὶ πρίν, ἐπειδὴ $\frac{2\times6}{10\times6}=\frac{2}{10}$ $\frac{3\times6}{10\times6}=\frac{3}{10}$, $\frac{5\times}{0\times6}=\frac{5}{10}$. Ὁμοίως ἡ διαίρεσις τῶν ἀριθμῶν 2· 3· 5 διὰ τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ, τοῦ αὐτοῦ δι' ὅλους, δὲν βλάπτει τὰ μέρη.

γ') Διὰ τοῦτο, ἐὰν ἔχωμεν νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων κλασματικῶν ἀριθμῶν, π. χ. τὸν 420 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{1}{4}$ τρέπομεν πρῶτον τοὺς κλασματικοὺς εἰς ὁμωνύμους, καὶ ἀκολούθως πολλαπλασιάζομεν ὅλους τούτους ἐπὶ τὸν κοινὸν αὐτῶν παρονομαστήν, οὕτω δὲ μερίζομεν τὸν μεριστέον ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα ἀκεραίων ἀριθμῶν. Οὕτω ἀντὶ τῶν $\frac{2}{3}$, 5, $\frac{1}{4}$ εὑρίσκομεν τοὺς $\frac{8}{12}$, $\frac{60}{12}$, $\frac{3}{12}$ καὶ ἀντ' αὐτῶν λαμβάνομεν τοὺς ἀριθμητὰς 8·60·3. Ἐὰν τὸν μεριστέον 420 μερίσωμεν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν τούτων, εὑρίσκομεν ὅτι τὰ μέρη θὰ εἶνε ἴσα μὲ $420\times\frac{8}{71}$, $420\times\frac{60}{71}$, $420\times\frac{3}{71}$.

δ') *Μερισμὸς* ἑνὸς ἀριθμοῦ, π.χ. τοῦ 600, εἰς μέρη *ἀντιστρόφως ἀνάλογα* δοθέντων ἀριθμῶν, π.χ. τῶν 2· 3, $\frac{2}{5}$, σημαίνει νὰ μερισθῇ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἰς μέρη, τὰ ὁποῖα εἶνε ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους ἀριθμοὺς τῶν δοθέντων.

Κατὰ ταῦτα, διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ ζητούμενα μέρη τοῦ 600, πρέπει, νὰ μερίσωμεν αὐτὸν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{2}$, οἱ ὁποῖοι εἶνε ἀντίστροφοι τῶν δοθέντων 2· 3· $\frac{2}{5}$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ μερίδια τρέπομεν τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{2}$ εἰς ὁμώνυμα $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{15}{6}$ καὶ μερίζομεν τὸν 600 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3. 2· 15, ὅτε εὑρίσκομεν $600\times\frac{3}{20}$, $600\times\frac{2}{20}$, $600\times\frac{15}{20}$
ἢ 90 60 450

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ μερισθῇ α') ὁ ἀριθμὸς 18 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 3· 6· 9. β') ὁ 640,8 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 4· 5· 9.
γ') ὁ 76 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 3· 4· 12.

2) Νὰ μερισθῇ ὁ 520 (36) εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\frac{4}{7}\left(\frac{3}{4}\right)$, καὶ $\left(\frac{5}{6}\right)$. Ὁ α′ 280 $\left(8\frac{16}{25}\right)$.

3) Ὁμοίως α′) ὁ 90 εἰς ἀνάλογα τῶν 2, $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$. Ὁ α′ 45.

β′) ὁ 95 (96) εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν 3 (2), 6 (4), 9 (15). Ὁ α′ $51\frac{9}{11}$ $\left(58\frac{38}{49}\right)$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ μερισθῇ ὁ 560 (40) εἰς τέσσαρα (τρία) μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ β′ νὰ εἶνε τὰ $\frac{3}{5}$ (3πλάσιον) τοῦ α′, τὸ γ′ νὰ εἶνε τὸ ἥμισυ (2πλάσιον) τοῦ β′, καὶ τὸ δ′ τριπλάσιον τοῦ γ′. Τὸ α′ 200 (4).

2) Νὰ μερισθοῦν 100 δρ. εἰς 4 ἐργάτας, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ α′ εἰργάσθη 4 ἡμ., ὁ β′ 3 ἡμ. 8 ὥρ., ὁ γ′ 2 ἡμ. 8 ὥρ., καὶ ὁ δ′ 18 ὥρ. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ λάβῃ καθεὶς ἐξ αὐτῶν (ἡ ἐργάσιμος ἡμέρα λογίζεται μὲ 10 ὥρας.) Ὁ α′ 32,25.

3) Πρὸς κατασκευὴν τῆς πυρίτιδος λαμβάνονται 16 μέρη νίτρου, 3 ἄνθρακος καὶ 2 θείου. Πόσας ὀκ. θὰ λάβωμεν ἀπὸ καθὲν εἶδος, διὰ τὴν κατασκευὴν 840 ὀκ. πυρίτιδος; 640 νίτρου.

4) Δύο ἁμαξηλάται ἀνέλαβον ἀντὶ 2445 δρ. νὰ μετοκομίσουν σῖτον εἰς δύο μέρη, ἀπέχοντα ἀπὸ τοῦ κοινοῦ τόπου τῆς ἀναχωρήσεως τὸ μὲν 75 χμ., τὸ δὲ 55 χμ. Ὁ μὲν μετέφερε 2000 ὀκ. εἰς τὸ πρῶτον, ὁ δὲ 3200 ὀκ. εἰς τὸ δεύτερον μέρος. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ καθεὶς, ἂν ἡ πληρωμὴ γίνῃ ἀναλόγως τῶν ὀκάδων, τὰς ὁποίας καθεὶς μετέφερε, καὶ ἀναλόγως τῶν ἀποστάσεων εἰς τὰς ὁποίας μετεφέρθη ὁ σῖτος; 5

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι, ὁ πρῶτος ἁμαξηλάτης θὰ ἐλάμβανε τὸ αὐτὸ ποσὸν χρημάτων, τὸ ὁποῖον θὰ λάβῃ τώρα, ἂν μετέφερε 2000 $\times$ 75 ὀκ. εἰς ἀπόστασι ἑνὸς χιλιομέτρου. Ὁ δεύτερος θὰ ἐλάμβανε τὸ αὐτὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον θὰ λάβῃ τώρα, ἐὰν μετέφερε 3200 $\times$ 55 ὀκ. εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς χιλιομέτρου. Ἐπομένως, ἀρκεῖ νὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 2445 δρ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2000$\times$75, καὶ 3200$\times$55.

Προβλήματα ἑταιρείας.

§ **107.** *Προβλήματα ἑταιρείας* λέγονται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ μοιρασθῇ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία μιᾶς ἐπιχειρήσεως εἰς ἐκείνους οἱ ὁποῖοι τὴν ἀνέλαβον.

Τὰ τοιαῦτα προβλήματα ἀνάγονται εἰς τὸν μερισμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων.

Πρόβλημα) *1)*. **«Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν ἑταιρείαν διὰ μίαν ἐπιχείρησιν καὶ κατέβαλον τὰ ἑξῆς ποσά· ὁ πρῶτος 2000 δραχ., ὁ δεύτερος 4000 δρ., καὶ ὁ τρίτος 3000 δρ. Ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκέρδισαν 1260 δρ.: πόσας θὰ λάβῃ ὁ καθείς;»**

Εἶνε φανερὸν ὅτι τὰ μερίδια τῶν συνεταίρων πρέπει νὰ εἶνε ἀνάλογα πρὸς τὰς χρηματικὰς καταβολὰς αὐτων. Διότι ὁ καταθέτων διπλάσιον (τὸ ἥμισυ), τριπλάσιον (τὸ τρίτον)...θὰ λάβῃ διπλάσιον (τὸ ἥμισυ)... κέρδος. Ἑπομένως, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μερίδιον καθενός, πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸ κέρδος *1260* δρ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν καταβολῶν *2000* δρ., 4000 δρ., 3000 δρ.

Ἐκτελοῦντες τὸν μερισμὸν τοῦτον εὑρίσκομεν τὰ μερίδια,

$$1260 \times \frac{2000}{9000},\quad 1260 \times \frac{4000}{9000},\quad 1260 \times \frac{3000}{9000} \text{ δραχμάς}$$

ἢ 280 δρ., 560 δρ., *420* δραχμάς.

(Πρόβλημα)*2*). **«Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ κεφάλαιον 4000 δρ. Μετὰ 6 μῆνας προσέλαβε συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ αὐτὸ ποσόν· μετὰ 10 δὲ μῆνας καὶ τρίτον, ὁ ὁποῖος κατέβαλε τὸ αὐτὸ κεφάλαιον· 20 μῆνας μετὰ τὴν ἔναρξιν τῆς ἐπιχειρήσεως εὑρέθη, ὅτι ἐκέρδισαν 3800 δρ: πόσας πρέπει νὰ λάβῃ ὁ καθείς;»**

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο αἱ μὲν καταβολαὶ εἶνε αἱ αὐταί, ἐπειδὴ καθεὶς τῶν συνεταίρων κατέβαλε *4000* δραχμάς, ἀλλ' οἱ χρόνοι κατὰ τοὺς ὁποίους ἔμειναν αἱ καταβολαὶ εἰς τὴν ἐπιχείρησιν εἶνε διάφοροι. Διότι τοῦ μὲν α' τὰ χρήματα ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν *20* μῆν., τοῦ β' *14* μῆν., τοῦ δὲ γ' 4 μῆνας

Τὰ μερίδια τῶν συνεταίρων θὰ εἶνε ἀνάλογα τῶν χρονικῶν διαστημάτων, κατὰ τὰ ὁποῖα αἱ καταβολαὶ ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Ἑπομένως διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ μερίσωμεν τὸ κέρδος τῶν *3800* δρ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν *20*, *14*, 4. Ἐκτελοῦντες τὸν μερισμὸν τοῦτον εὑρίσκομεν ὅτι τὰ μερίδια θὰ εἶνε

$$3800 \times \frac{20}{38},\ 3800 \times \frac{1}{38},\ 3800 \times \frac{4}{38}$$

ἢ 2000 δρ.: 1400 δρ, 400.

(Πρόβλημα) *3*). **«Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 4000 δρ: μετὰ 1 ἔτος προσέλαβε συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέβαλεν 7000 δρ., 8 δὲ μῆνας μετὰ τοῦτον καὶ τρίτον, ὁ ὁποῖος κατέ-**

βαλεν 6000 δρ.· 3 ἔτ. μετὰ τὴν πρόσληψιν τούτου εὑρέθη ὅτι ἐκέρδισαν 14960 δρ.· πόσον θὰ λάβῃ ὁ καθείς;»

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο διαφέρουν τὰ κεφάλαια τῶν συναιτέρων καὶ οἱ χρόνοι διὰ τοὺς ὁποίους ταῦτα ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Διότι ὁ α' κατέβαλε 4000 δρ. διὰ 56 μῆνας, ἐπειδὴ τὸ ποσὸν τοῦτο τῶν 4000 δρ. ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως μέχρι τέλους αὐτῆς· ὁ β' κατέβαλεν 7000 δρ. διὰ 44 μῆν., ἐπειδὴ προσῆλθεν ἓν ἔτος βραδύτερον τοῦ α'·ὁ δὲ γ' κατέβαλε 6000 δρ. διὰ 36 μῆνας.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, δεχόμεθα ὅτι, ἂν ὁ α' κατέθετε 4000×56 δραχμὰς δι' ἕνα μῆνα, ὁ β' 7000×44 δραχμὰς δι' ἕνα μῆνα, καὶ ὁ γ' 6000×36 δραχμὰς δι' ἕνα μῆνα, θὰ ἐλάμβανε καθεὶς ἐξ αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον τώρα θὰ λάβῃ. Ἑπομένως, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μερίδιον καθενός, ἀρκεῖ νὰ μερίσωμεν τὰς 14960 δρ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 4000×56, 7000×44, 6000×36, ἢ τῶν 224000· 308000· 216000. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὸν μερισμὸν τοῦτον εὑρίσκομεν ὅτι τὰ μερίδια εἶνε 4480, 6160, 4320.

Ἑπομένως ὁ πρῶτος θὰ λάβῃ 4480 δρ., ὁ δεύτερος 6160 δρ. καὶ ὁ τρίτος 4320 δραχμάς.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Διέταξέ τις διὰ διαθήκης νὰ μερισθῇ ἡ ἐκ δραχ. 75000 περιουσία του εἰς τοὺς ἀνεψιούς του ἀναλόγως τῆς ἡλικίας των. Πόσα θὰ λάβῃ καθείς, ἂν αἱ ἡλικίαι των εἶνε κατὰ σειρὰν 8 ἐτῶν, 12 ἐτ. 13 ἐτ. καὶ 17 ἐτῶν; Ὁ α' 12000. 5

2) Τρεῖς ἔμποροι κατέβαλον δι' ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν ἀντιστοίχως 6000 (356|4,5) δρ., 7480 (4127,8) δρ. 5200 (813,9) δρ., καὶ ἐκέρδισεν 4582 (1053,37) δρ.· πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ὁ καθεὶς; 1471,74 (441,41).

3) Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν συγχρόνως 2000 (4000) δρ., 3000 (6000) δρ., 4000 (5000) δρ. ἀντιστοίχως. Ἐζημιώθησαν (ἐκέρδισαν) 1500 (τὰ 0,4 τῶν κατατεθέντων). Πόσα ἐζημιώθη (ἐκέρδισεν) ὁ καθεὶς. Ὁ α' 333,33(1600).

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Δύο συνέταιροι κατέβαλον ὁ α' 2000 (1000)δρ., ὁ β' 5000 (3000) δρ., καὶ μετὰ 8 μῆνας (20 ἡμ.) προσέβαλον γ'. ὁ ὁποῖος κατέβαλε 3000 (5000) δρ., μετὰ 6(2) δὲ μῆν. δ' ὁ ὁποῖος κατέβαλε 2000 (6000) δρ. Μετὰ πάροδον 4 (7) μηνῶν (ἀπ' ἀρχῆς) ἐκέρδισαν 4000 (5140 δρ.· πόσον θὰ λάβῃ καθεὶς; Ὁ α' 878,04 $\frac{36}{41}$ (420)

2) Πατὴρ διέταξε διὰ διαθήκης νὰ μερισθῇ ἡ ἐκ 12000 (7800) δρ. περιουσία του εἰς τοὺς 3 υἱούς του ὡς ἑξῆς. Ὁ β′ νὰ λάβῃ διπλάσια $\left(\frac{5}{6}\right)$ τοῦ α′, καὶ ὁ γ′ ὅσον οἱ δύο ἄλλοι ὁμοῦ (ὁ α′ καὶ 0,5 τοῦ β′)· ζητεῖται τὸ μερίδιον καθενός. Ὁ α′ 2000 (2400).

3) Δύο ποιμένες ἐνοικίασαν ἓν λειβάδιον ἀντὶ 800 (700) δρ. Ὁ α′ ἔθρεψεν ἐκεῖ 60 (100) πρόβατα ἐπὶ 4 μῆν. (50 ἡμ.), ὁ β′ 80 (300) πρόβατα ἐπὶ 3 (1) μῆν: πόσον θὰ πληρώσῃ ὁ καθείς; Ὁ α′ 400(250).

4) Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 5000 δρ. Μετὰ 16 μῆν. προσέλαβε συναίτκιρον, ὁ ὁποῖος κατέβαλε 3000. Δύο ἔτη μετὰ ταῦτα εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 4800 δρ.· πόσας πρέπει νὰ λάβῃ ὁ καθείς; Ὁ α′ 3529, 41.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Νὰ μερισθῇ κέρδος 10000 δρ. μεταξὺ τῶν συναιταίρων, ἐκ τῶν ὁποίων κατέβαλον ὁ α′ 3000 δρ. διὰ 2 ἔτ. καὶ 6 μῆν., ὁ β′ 5000 δρ διὰ 2 ἔτ. καὶ 1 μῆν., ὁ γ′ 4000 διὰ 1 ἔτος καὶ 1 μῆνα. Ὁ α′ 3370, 79.

2) Νὰ μοιραθοῦν 1580 δρ. εἰς τέσσαρα μερίδια, ὥστε τὸ β′ νὰ εἶνε 0,75 τοῦ α′, τὸ γ′ τὰ 0,25 τοῦ β′, καὶ τὸ δ′ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ γ′. Τὸ α′ 7660, 06.

§ 108. Περὶ τῶν προβλημάτων μέσου ὅρου.— Εἰς τὴν § 25 γ′ εἴδομεν πῶς εὑρίσκομεν τὴν μέσην τιμὴν διαφόρων πραγμάτων, τῶν ὁποίων δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον καλοῦμεν *μέσον ὅρον* ἢ *ἀριθμητικὸν μέσον* διαφόρων ὁμοειδῶν ποσῶν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διῃρημένον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ πλῆθος τούτων. Οὕτω ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 15· 18· 22 εἶνε

$$\frac{15+18+22}{3}=\frac{55}{3}.$$

Ὁ μέσος ὅρος τῶν 10 δρ., 2 ταλ., 12 δρ., 8 δρ. εἶνε

$$\frac{10+10+12+8}{4}=10 \text{ δραχμαί.}$$

Τῶν μέσων ὅρων γίνεται χρῆσις εἰς διαφόρους περιστάσεις καὶ ἰδίως, ὅταν ζητοῦμεν τὴν μέσην μερησίαν, ἢ μηνιαίαν ἢ ἐτησίαν εἴσπραξιν ἑνὸς ἐμπορικοῦ καταστήματος, ἑνὸς ταμείου, ἐν γένει, τὴν μέσην θερμοκρασίαν τοῦ ἡμερονυκτίου, ἢ τοῦ ἔτους, τῶν μέσων ὅρων τῶν μηνιαίων ἐξόδων μιᾶς οἰκογενείας κλπ. Ἰδίως ὅμως τῶν μέσων ὅρων γίνεται χρῆσις εἰς τὰς μετρήσεις, εἰς τὰς ὁποίας συμβαίνουν ἀναπόφευκτα λάθη. Διὰ τοῦτο μετροῦμεν πολλάκις τὸ περὶ τοῦ ὁποίου πρόκειται ποσόν, καὶ λαμβάνομεν ὡς τιμὴν αὐτοῦ μᾶλλον πιθανὴν τὸν μέσον ὅρον τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν τούτου.

Ἀσκήσεις.

1) Ἓν κτῆμα ἔφερε τὸ α′ ἔτος εἰσόδημα 2600 (600) δραχμάς, τὸ β′ 6800 (475) δρ. καὶ τὸ γ′ 2000 (554) δραχμάς· ποῖος εἶνε ὁ μέσος ὅρος τοῦ εἰσοδήματός του κατὰ τὴν τριετίαν ταύτην; 3800 (543).

2) Μία οἰκογένεια ἐδαπάνησε τὸν Ἰανουάριον 4502,5 δρ., τὸν Φεβρουάριον 3200 δρ., τὸν Μάρτιον 3807,5 δρ., τὸν δὲ Ἀπρίλιον 4654 δρ: ποία εἶνε ἡ μέση τιμὴ τῆς δαπάνης κατὰ τοὺς τέσσαρας τούτους μῆνας; 4041.

3) Μία ὑπηρέτρια ἐλάμβανε κατὰ μῆνα 30 δρ., δύο ἐνδυμασίας κατ' ἔτος ἀξίας 130 δρ., καὶ διάφορα δῶρα ἀξίας 95 δρ: πόσος ἦτο ὁ μηνιαῖος μισθός της κατὰ μέσον ὅρον; 48,75.

4) Οἰκόπεδον, μετρηθὲν δύο φοράς, εὑρέθη, ἔχον ἔκτασιν 537 (μ^2) καὶ 539,25 (μ^2)· πόσον εἶνε κατὰ μέσον ὅρον; 538,125 (μ^2).

5) Ἐργάτης ἔλαβε τὴν Δευτέραν 40 δρ., τὰς δὲ ἄλλας ἡμέρας τῆς ἑβδομάδος μέχρι τοῦ Σαββάτου 45 δρ. καθ' ἑκάστην· πόσον ἐλάμβανε κατὰ μέσον ὅρον τὴν ἡμέραν; 44,16..

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIII. 5

Περὶ τετραγωνικῆς ῥίζης.

§ 109. Ὁρισμοί.—

α′) Ἔστω ὅτι δίδεται εἷς ἀριθμός, π. χ. ὁ 25, καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἄλλος, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τετράγωνον δίδει τὸν δοθέντα.

Εἶνε φανερόν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶνε ὁ 5, διότι εἶνε $5^2 = 5 \times 5 = 25$. Ὁ 5 λέγεται *τετραγωνικὴ ῥίζα* τοῦ 25. Ὁμοίως τοῦ 16 ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶνε ὁ 4, διότι ἔχομεν $4^2 = 4 \times 4 = 16$.

Ἐν γένει, ***καλοῦμεν τετραγωνικὴν ῥίζαν δοθέντος ἀριθμοῦ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὸ τετράγωνον δίδει τὸν δοθέντα, τὴν δὲ εὕρεσιν αὐτῆς καλοῦμεν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.***

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ π. χ. τοῦ 9, σημειώνεται ὡς ἑξῆς.

$\sqrt{9}$, ἤτοι $\sqrt{9} = 3$, καλεῖται δὲ τὸ σύμβολον $\sqrt{\ }$ *ῥιζικόν*, ὁ δὲ ὑπ' αὐ τὸ γραμμένος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, λέγεται *ὑπόριζος ποσότης*.

Ἀσκήσεις. Νὰ σημειωθῇ καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ τετρ. ρίζα τῶν ἀριθμῶν 0· 1· 4· 9· 25· 36· 49· 64· 81· 100· 10000.

β') Ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ τετρ. ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 24. Εὐκόλως παρατηροῦμεν, ὅτι αὐτὴ εἶνε μεγαλυτέρα τοῦ 4, διότι $4^2=16$, ἀλλὰ μικροτέρα τοῦ 5 ἐπειδὴ $5^2=25$. Ἑπομένως ἡ $\sqrt{24}$ περιέχεται μεταξὺ τῶν 4 καὶ 5. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λαμβάνομεν ὡς τετρ. ρίζαν τοῦ 24 τὸν μικρότερον τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων αὐτὴ περιέχεται, ἤτοι τὸν 4, καλεῖται δὲ τότε ὁ 4 τετρ. ρίζα τοῦ 24 *κατὰ προσέγγισιν μονάδος*.

Ἐν γένει, ***καλοῦμεν τετρ. ρίζαν ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τὸν μεγαλύτερον ἀκέραιον ἀριθμόν***, ***τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ εἰς τὸν δοθέντα.***

Οὕτω τοῦ 56 ἡ τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ὁ 7. Διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 7 εἶνε $7^2=49$, καὶ χωρεῖ εἰς τὸ 56, ἐνῶ τὸ τετράγωνον τοῦ 8 εἶνε μεγαλύτερον τοῦ 56. Ὁμοίως παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 18,5 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ὁ 4, διότι ὁ $4^2=16$ χωρεῖ εἰς τὸν 18,5 ἐνῶ τὸ $5^2=25$ εἶνε μεγαλύτερον τοῦ 18,5.

§110. Πρακτικὸς κανὼν πρὸς εὕρεσιν τῆς τετρ. ρίζης τῶν ἀριθμῶν.—

α') Ἂν δοθεὶς ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶνε μικρότερος τοῦ 100, ἡ τετρ. ρίζα αὐτοῦ (ἡ ἀκριβὴς ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος) θὰ εἶνε μικροτέρα τῆς τετρ. ρίζης τοῦ 100, ἤτοι μικροτέρα τοῦ 10· ἄρα θὰ εἶνε ἀριθμὸς μονοψήφιος, εὑρίσκομεν δ' αὐτὸν ἀμέσως ἀπὸ μνήμης, διότι ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐνθυμούμεθα τὰ τετράγωνα ὅλων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν. Οὕτω ἔχομεν ὅτι

$$\sqrt{49}=7, \quad \sqrt{64}=8.$$

Ἀσκήσεις. Εὕρετε τὴν τετρ. ρίζαν τῶν κάτωθι ἀριθμῶν, καὶ σημειώσατε ποῖαι ἐξ αὐτῶν εἶνε κατὰ προσέγγισιν μονάδος· 38· 42· 56· 64· 92· 98· 17· 34· 38· 5· $47\frac{3}{4}$, 93· 75.

β') Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετρ. ρίζαν ἀριθμοῦ ἀκεραίου, ἔχοντος περισσότερα τῶν δύο ψηφίων, ἐφαρμόζομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

1) Χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς διψήφια τμήματα ἐκ δεξιῶν πρὸς τἀριστερὰ (τὸ πρῶτον τμῆμα πρὸς τἀριστερὰ δύναται νὰ εἶνε καὶ μονοψήφιον).

2) Ἐξάγομεν τὴν τετρ. ρίζαν ἀκριβῆ ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ πρώτου τμήματος ἐξ ἀριστερῶν καὶ οὕτω εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης ρίζης.

3) Ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῆς ρίζης ἀπό τὸ τμῆμα ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρέθη, καὶ δεξιὰ τοῦ μένοντος ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον τμῆμα, ὅτε σχηματίζεται εἷς ἀριθμός. Τοῦ ἀριθμοῦ τούτου χωρίζομεν τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων, καὶ διαιροῦμεν τὸν ἀπομένοντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῆς ρίζης.

4) Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου αὐτῆς, καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπ' αὐτὸ τὸ πηλίκον. Ἂν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τὸν σχηματισθέντα ἀριθμόν, τὸ εὑρεθὲν πηλίκον εἶνε τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ζητουμένης ρίζης, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις ὅτου εὕρωμεν ψηφίον, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ν' ἀφαιρῆται. Τὸ ψηφίον τοῦτο θὰ 5 εἶνε τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ρίζης. Ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν, καὶ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάσωμεν τὸ ἀκόλουθον τμῆμα, σχηματίζεται εἷς νέος ἀριθμός.

5) Καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διαιροῦμεν τὰς δεκάδας διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος μέρους τῆς ρίζης, καὶ γράφομεν τὸ πηλίκον δεξιὰ τοῦ διαιρέτου· πολλαπλασιάζομεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν ἐπ' αὐτὸ τὸ πηλίκον· καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ δευτέρου σχηματισθέντος ἀριθμοῦ, τὸ εὑρεθὲν ψηφίον εἶνε τὸ τρίτον ψηφίον τῆς ρίζης· εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, καὶ οὕτω καθεξῆς.

6) Τοιουτοτρόπως ἐξακολουθοῦμεν, μέχρις ὅτου καταβιβασθοῦν πάντα τὰ διψήφια τμήματα. Τὸ εἰς τὸ τελευταῖον τμῆμα ἀντιστοιχοῦν πηλίκον θὰ εἶνε τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς ρίζης· τὸ δὲ εἰς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦν ὑπόλοιπον θὰ εἶνε ὑπόλοιπον τῆς ρίζης.

Ἂν τὸ ὑπόλοιπον εἶνε μηδέν, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς λέγεται *τέλειον τετράγωνον*, καὶ ἡ τετρ. ῥίζα αὐτοῦ εὑρέθη ἀκριβῶς, εἰ δὲ μή, εὑρέθη *κατὰ προσέγγισιν μονάδος*.

Παραδείγματα. 1) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 454276. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{45'\ \ 42'\ \ 76'} & 674 \\
\hline
36 & \begin{array}{r|r} 127 & 1344 \\ \times 7 & \times 4 \\ \hline 889 & 5376 \end{array} \\
\cline{1-1}
\ \ 94'\ 2 & \\
\ \ 88\ \ 9 & \\
\cline{1-1}
\qquad 537'6 & \\
\qquad 537\ \ 6 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 0. &
\end{array}
$$

Εὑρίσκομεν δὲ ὅτι ἡ $\sqrt{454276} =$ μὲ 674.

Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμήν, ὑψοῦμεν τὸν 674 εἰς τὸ τετράγωνον καὶ εὑρίσκομεν τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

2) Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ 7000 εἶνε 204, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 304.

Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμήν, ὑψοῦμεν τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν εἰς τὸ τετράγωνον, καὶ εἰς τὸ γινόμενον αὐτὸ προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον, ὅτε πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

Ἂν κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς τετρ. ῥίζης διαίρεσίς τις δίδῃ πηλίκον 0, γράφομεν εἰς τὴν ῥίζαν ὡς ψηφίον 0, καὶ ἐξακολουθοῦμεν ὁμοίως τὴν πρᾶξιν.

§ 111. Τετραγ. ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν δεκαδικῆς μονάδος.—

α΄) Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὴν τετρ. ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 20. Αὐτὴ περιέχεται, ὡς γνωστόν, μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 5.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πρῶτον δεκαδικὸν ψηφίον τῆς ῥίζης, δοκιμάζομεν ἂν τοῦτο εἶνε τὸ 5. Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ 4,5 καὶ βλέπομεν ὅτι εἶνε $(4,5)^2 = 20,25$· δηλαδὴ μεγαλύτερον τοῦ 20. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ 4,4 εἶνε $(4,4)^2 = 19,36$· ἤτοι μικρότερον τοῦ 20.

Ἑπομένως ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 20 περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 4,4 καὶ 4,5. Δι' ὁμοίων δοκιμῶν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ἄλλα δεκαδικὰ ψηφία τῆς τετρ. ρίζης τοῦ 20.

Ὁ ἀριθμὸς 4,4 λέγεται τετρ. ρίζα τοῦ 20 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς δεκάτου, ὁ δὲ μεγαλύτερος δεκαδικὸς ἀριθμός, ὁ ἔχων δύο δεκαδικὰ ψηφία, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον περιέχεται εἰς τὸ 20, λέγεται *τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 20 κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ.*

Ἐν γένει, ***καλεῖται τετρ. ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἢ 0,01 0,001 κλπ. ὁ μεγαλύτερος δεκαδικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἕν, ἢ δύο, ἢ τρία κλπ. δεκαδικὰ ψηφία, καὶ τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμόν.***

б) Πρὸς εὕρεσιν τῆς τετρ. ρίζης ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἢ 0,01 κλπ. ἔχομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

«Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετρ. ρίζαν ἑνὸς ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἢ 0,01 κλπ. πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 10, ἢ τοῦ 100 κλπ., ἐξάγομεν τὴν τετρ. ρίζαν τοῦ γινομένου κατὰ προσέγγισιν μονάδος, τὴν δὲ ρίζαν αὐτοῦ διαιροῦμεν διὰ τοῦ 10 ἢ τοῦ 100 κλπ.»

Ἐφαρμογή. Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν 0,0001.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν 2 ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 10000, ἤτοι ἐπὶ 100000000, καὶ τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ 200000000 ἐξάγομεν τὴν τετρ. ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅτε εὑρίσκομεν 14142. Αὐτὴν διαιροῦμεν διὰ τοῦ 10000 καὶ οὕτω ἔχομεν ὅτι ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν 0,0001 εἶνε 1,4142.

γ') Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετρ. ρίζαν κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, εὑρίσκομεν τὴν τετρ. ρίζαν τοῦ γινομένου τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος (ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν), καὶ αὐτὴν διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρανομαστοῦ τοῦ κλάσματος. Ἂν ζητῆται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κλάσματος κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἢ 0,01 κλπ. τρέπομεν συνήθως τὸν κλασματικὸν εἰς δεκαδικόν, καὶ ἐπὶ τοῦ δεκαδικοῦ τούτου ἐφαρμόζομεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα. Οὕτω, ἂν ζητῆται ἡ τετρ. ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{12}{7}$ κατὰ προσέγγισιν 0,001 τρέπομεν τὸν $\frac{12}{7}$ εἰς δεκαδικόν, ὅτε εὑρίσκο-

5

μεν 1,714285· τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 1000, καὶ τοῦ γινομένου *1714285* εὑρίσκομεν τὴν τετρ. ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅτε προκύπτει *1309*· αὐτὴν διαιροῦμεν διὰ τοῦ 1000, καὶ οὕτω ἔχομεν, ὅτι ἡ ζητουμένη ρίζα εἶνε *1,309*.

ϛ') Ἡ τετρ. ρίζα δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εὑρίσκεται, ἂν εὑρεθῇ ἡ τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ ἀκεραίου μέρους αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ ὑψωθοῦν εἰς τὸ τετράγωνον οἱ 125· 368· 1473 καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ τετρ. ρίζα τῶν ἐξαγομένων.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τῶν 15129· 170669· 339889· 121104· 122· 413583· 348.

3) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ

α') $\sqrt{1263587}$, β') $\sqrt{4601175}$, γ') $\sqrt{9872264}$.

('Εξαγόμ. 1124 ὑπολ. 211· 2145 ὑπ. 150· 3142 ὑπ. 100).

4) Ὁμοίως αἱ

$\sqrt{1044^2+1392^2}$, $\sqrt{12595^2-10077^2}$, $\sqrt{110224+576081}$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ εὑρεθῇ τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν 0,01 τῶν 5· 10· 27· 1543

2) Ὁμοίως τῶν 278,89· 13,9876· 108,17.

16,70· 3,74· 10,40.

3) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἢ (0,01 ἢ 0,001) τῶν ἀριθμῶν 1543,26· 853,9· 143,23.

§ 115. Διάφορα προβλήματα πρὸς λύσιν.—

Ἔμπορος ἠγόρασεν 155 πήχ. ὑφάσματος ἀντὶ 8960 δρ.· ἀντὶ πόσων δρ. πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸν πῆχυν, διὰ νὰ κερδίσῃ 4%. 60 11.

2) Ἔμπορος ἠγόρασε 265 ὀκ. ἐλαίου πρὸς 12,5 δρ. τὴν ὀκᾶν, μετὰ 7 δὲ μῆνας μετεπώλησεν αὐτὸ πρὸς 14 δραχ. τὴν ὀκᾶν· πρὸς πόσον τοῖς % ἔπρεπε νὰ τοκίσῃ τὰ χρήματά του, διὰ νὰ λάβῃ εἰς 7 μῆνας τὸ αὐτὸ κέρδος; 20,57.

3) Μὲ πόσους βαθμοὺς Κελσίου ἰσοδυναμοῦν 17 βαθμοὶ Ρεωμύρου; 21,25.

4) Μὲ πόσας ὀκάδας ἰσοδυναμοῦν 30 χιλιόγραμμα; 23 ὀκ. 125 δρ.

5) Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ λάβωμεν ἀπὸ καθὲν ἐκ δύο εἰδῶν

οἴνου, τῶν ὁποίων ὁ μὲν τιμᾶται 4 δρ. κατ' ὀκᾶν ὁ δὲ 10 δρχ. διὰ νὰ σχηματίσωμεν κρᾶμα ἀξίας 5 δρ. κατ' ὀκᾶν; (Εἰς 5 τοῦ α' 1 τοῦ β').

6) Διὰ νἀποτελεσθῇ κρᾶμα ἀργύρου βαθμοῦ καθαρότητος $\frac{5}{6}$ ἐξ ἀργύρου, ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος $\frac{11}{12}$ καὶ ἐξ ἄλλου τοιούτου, ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος $\frac{3}{4}$, πόσον μέρος πρέπει νὰ ληφθῇ ἀπὸ καθὲν τούτων; Ἴσα μέρη.

7) Ἓν ποσὸν τοκισθὲν ἐπὶ 6 (4) ἔτ. 9 (5) μῆν. πρὸς 4,5 (4) $^0/_0$ ἔγινε 4985,54 (8535,45) δρ.· πόσον ἦτο τὸ ποσόν; 3824(7254).

8) Ἔμπορος ὀφείλει νὰ πληρώσῃ δι' ἀξίαν ἐμπορευμάτων 316,57 δρ. μετὰ 1 μῆνα καὶ 12 ἡμ. Ἐπειδὴ ὅμως θέλει νὰ πληρώσῃ τοῖς μετρητοῖς, τοῦ γίνεται ἔκπτωσις $4^0/_0$· πόση εἶνε ἡ ἔκπτωσις καὶ πόσα θὰ πληρώσῃ; 1, 48· 315,09.

9) Μία οἰκία ἀξίζει 58120 δρ. καὶ δίδει εἰσόδημα $2,5^0/_0$· πόσον εἶνε τὸ μηνιαῖον εἰσόδημά της; 121,08..

10) Ἔμπορος ἀγοράσας ἐμπορεύματα ἀντὶ 3824,6 (3481,2) δραχ. παρατηρεῖ ὅτι εἶνε ἠναγκασμένος νὰ πωλήσῃ αὐτὰ μὲ ζημίαν 15 $(5)^0/_0$: α') πόση εἶνε ἡ ζημία του; β') ἀντὶ πόσων δραχμῶν ἐπώλησε τὰ ἐμπορεύματα; ζ. 573,69 (174,06).

5

11) Εἷς ἀσφαλίζει τὴν οἰκίαν του ἀντὶ 12500 δραχ. πρὸς $1,4\ ^0/_{00}$· πόσον πλερώνει δι' ἀσφάλιστρα; 17,50

12) Πόσον α') καθαρὸν οἰνόπνευμα β') ὕδωρ περιέχεται εἰς 65,2 (350) λίτρας οἰνοπνεύματος, εἰς τὸ ὁποῖον μόνον 85 (70) $^0/_0$ εἶνε καθαρόν; α' 55,42· (245).

13) Ὁ ἀτμοσφαιρικὸς ἀὴρ περιέχει $21^0/_0$ ὀξυγόνον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον αὐτοῦ εἶνε ἄζωτον· πόσον ὀξυγόνον καὶ πόσον ἄζωτον περιέχεται εἰς 2518 (1000) (μ^3) ἀέρος; Ὀξυγ. 528,78 (210).

14) Ἐκ χρέους 1864 δραχ. ἔγινεν ἔκπτωσις $3,5^0/_0$· πόσα ἐπληρώθησαν; Ἔκπτωσις 65,24.

15) Κτῆμα ἐπωλήθη ἀντὶ 225640 δρ. μὲ προμήθειαν $1\frac{1}{4}\ ^0/_0$· πόσα ἐπληρώθησαν διὰ προμήθειαν; 2820,5.

16) Ἐκ σταθμοῦ ἀναχωρεῖ ἁμαξοστοιχία, διατρέχουσα 20 χμ. τὴν ὥραν. Μετὰ 9 ὥρας ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ σταθμοῦ ἄλλη, διατρέ-

χουσα 25 χμ. τὴν ὥραν· μετὰ πόσον χρόνον ἡ δευτέρα θὰ εἶνε ὀπίσω τῆς πρώτης 1 χμ.; 35 ὥρ. 48΄.

17) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον $$\frac{13\frac{1}{5}+6\frac{7}{10}-\frac{7}{8}}{\left(\dfrac{6}{6\frac{3}{10}-\frac{3}{4}}\right)}$$ 17,598125.

18) Τὸ $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)$ τῶν χρημάτων μου διαιρούμενον διὰ τοῦ 8 (9) δίδει τὸ πηλίκον 20 (100) δρ.· πόσα χρήματα ἔχω; 480 (4500)

19) Ποῖον χρηματικὸν ποσὸν αὐξανόμενον κατὰ τὸ $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)$ αὐτοῦ καὶ κατὰ $\frac{1}{3}$ (2) δρ. γίνεται 5 (72) δραχμαί; 3,5 (50)

20) Ποῖον ποσὸν αὐξανόμενον κατὰ 0,2 (0,75) αὐτοῦ, καὶ ἐλαττούμενον κατὰ 0,2 (1) γίνεται 10 (20); 8,5 (12)

21) Ὑπάλληλος ἀποταμιεύει τὰ 0,2 (0,3) τοῦ μισθοῦ του. Ἐὰν αὐξηθῇ ὁ μισθός του κατὰ τὰ 0,2 (0,4) αὐτοῦ, ποῖον μέρος τοῦ νέου μισθοῦ θὰ ἀποταμιεύῃ, ὥστε τὸ ἀποταμίευμα νὰ εἶνε ὁποῖον ἦτο πρὸ τῆς αὐξήσεως; $\frac{1}{6}\left(\frac{3}{14}\right)$

22) Δύο λυχνίαι πετρελαίου ἔκαυσαν ἡ μὲν 1 ὀκ. καὶ 350 δρμ. πετρελαίου εἰς 9 ὥρ. καὶ 30΄, ἡ δὲ 1 ὀκ. καὶ 20 δρμ. εἰς 6 ὥρ.· ποία ἐκ τῶν δύο εἶνε οἰκονομικωτέρα; Διατί; Ἡ β΄

23) Ποῖος εἶνε ὁ βαθμὸς καθαρότητος κράματος, ἀποτελουμένου ἐκ 15 (25) μερῶν χρυσοῦ καὶ 5 (16) χαλκοῦ; 0,75 (0,625).

24) Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει ν' ἀναμίξωμεν οἶνον τῶν 3,6 4,5) δρ. μὲ ὕδωρ., ὥστε ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος νὰ τιμᾶται 2,8 (4) δρ.; Εἰς 7(8) οἴνου 2 (1) ὕδωρ.

25) Νὰ μερισθοῦν 100 (455) δραχμαὶ εἰς τρεῖς ἀνθρώπους οὕτως, ὥστε ὁ πρῶτος νὰ λάβῃ τὰ 0,75 (0,5) τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τὰ 0,8 (0,25) τοῦ πρώτου. Πόσα θὰ λάβῃ καθείς; Ὁ α΄ 31 $\frac{43}{47}$ (140).

26) Ἔμπορος πτωχεύσας, ἀφήνει ἐνεργητικὸν μὲν 10000 δρ., παθητικὸν δὲ τὸ ἑξῆς. Εἰς τὸν Α ὀφείλει 25000 δρ. εἰς τὸν Β 12450 δρ. καὶ εἰς τὸν Γ 1000 δρ.· τὰ ἔξοδα τῆς ἐκκαθαρίσεως εἶνε 6,5 % ἐπὶ τοῦ ἐνεργητικοῦ του. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ καθεὶς τῶν Α, Β, Γ; Ὁ Α 6079,32..

27) Εἷς πληρώνει σήμερον διὰ γραμμάτιον, λῆγον μετὰ 2 μῆν. 20 ἡμ. (24 ἡμ.) καὶ ἀξίας 860 (3400) δρ. μόνον 842,8 (3386,4) δρ. Πρὸς πόσον τοῖς °/₀ ἔγινεν ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις; 9 (6).

28) Γραμμάτιον 1800 (480) δρ. εἶνε πληρωτέον μετά τινα χρόνον. Ἐπειδὴ ὅμως πληρώνεται τοῖς μετρητοῖς, γίνεται ἐξωτ. ὑφαίρεσις 32,5 (18) δρ., ἡ ὁποία λογαριάζεται πρὸς 6,5 (9) °/₀· πότε λήγει τὸ γραμμάτιον; 3 μ. 10 ἡμ. (5 μ.).

29) Κατὰ τὴν ἀγορὰν μιᾶς οἰκίας ὁ ἀγοραστὴς προσφέρει ἢ 64228 δρ. πληρωτέας ἀμέσως ἢ 36137,6 δρ. πληρωτέας μετὰ 3 ἔτη καὶ 39374,4 δρ. μετὰ 4 ἔτη· ποία ἐκ τῶν δύο προσφορῶν εἶνε προτιμοτέρα, ἐὰν ἡ ὑφαίρεσις (ἐξωτ.) λογίζεται πρὸς 5°/₀; Ἡ α'.

30) Τοκίζει τις ἓν ποσὸν πρὸς 3,75°/₀. Μετὰ 4 ἔτ. 5 μ. ἀποσύρει τὸ κεφάλαιον καὶ τὸν τόκον του καὶ τοκίζει τὸ ὅλον ποσὸν πρὸς 4,5°/₀ καὶ ἔχει οὕτω ἐτήσιον εἰσόδημα 1250 δρ.· ποῖον εἶνε τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον; 23830,8.

31) Κεφάλαιον τοκιζόμενον ἐπὶ 15 μῆνας αὐξάνεται κατὰ τὰ 0,0625 αὐτοῦ. Ποῖον εἶνε τὸ ἐπιτόκιον; 5.

32) Τὸ ἐτήσιον εἰσόδημα 40000 δρ. εἶνε κατὰ 1600 δρ. μικρότερον τοῦ τῶν 60000 δρ. τοκισμένου πρὸς 6°/₀. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη τὸ α'. κεφάλαιον; 5.

5

33) Γραμμάτιον πληρωτέον μετὰ τρεῖς μῆν. καὶ 10 ἡμ. ἐξοφλεῖται ἀντὶ 612 δρ. τοῖς μετρητοῖς· πόση εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, ἐὰν ἡ ὑφαίρεσις λογαριάζεται πρὸς 5°/₀; 621, 01.

34) Εἷς ἀναμιγνύει 3 χιλιόγρ. (40 γρ.) χρυσοῦ καθαρότητος 0,94 (0,9) καὶ 2 χιλιόγρ. (8 γρ. χαλκοῦ) ἄλλου χρυσοῦ καθαρότητος (0,9)· ποῖος εἶνε ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος; 0,924. (0,75).

35) Εἷς ἀναμιγνύει 2 (13) χιλιόγρ. ἀργύρου βαθμοῦ καθαρότητος 0,94 (0,9) καὶ 3 (2) χιλ. χαλκοῦ· πόσον ἄργυρον περιέχει τὸ μῖγμα καὶ ποῖος εἶνε ὁ βαθμὸς καθαρότητός του; 1,88·0,376 (0,78).

36) Τὸ καθαρὸν βάρος ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶνε 607,5 (779,28) χιλιόγρ., τὸ δὲ ἀπόβαρον (μικτὸν) 17,5 (816) χιλιόγρ.· πόσον τοῖς ἑκατὸν εἶνε τὸ ἀπόβαρον; 2,8 (4,5).

37) Εἷς ἀγοράζει 25 πήχεις ὑφάσματος πρὸς 200 δρ. τὸν

πῆχυν καὶ πωλεῖ τοὺς 16,75 πήχεις πρὸς 240 δρ. τὸν πῆχυν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πρὸς 260 δρ. τὸν πῆχυν· πόσον τοῖς $^0/_0$ ἐκέρδισεν; 21,65.

38) Εἷς 458 ὀκ. οἰνοπνεύματος περιέχονται 27,45 ὀκ. ὕδατος· πόσον τοῖς ἑκατὸν εἶνε τὸ καθαρὸν οἰνόπνευμα; 94,00..

39) Εἷς πωλεῖ 17 μ. ὑφάσματος πρὸς 11 $\frac{11}{17}$ δρ. τὸ μέτρον· πόσον $^0/_0$ ζημιώνεται, ἐὰν ἠγόρασεν αὐτὸ ἀντὶ 225 δρ.; 12,44..

40) Ἀντὶ 437,5 (842,8) δρ. ἐπληρώθησαν (80 ἡμέρας ἐνωρίτερον) μόνον 402,7 (825,6) δρ.· πόσον τοῖς ἑκατὸν εἶνε ἡ ἔκπτωσις; 7,95..(9,18..)

41) Ἀγοράζει τις 45 χιλιόγρ. ἐμπορεύματος πρὸς 13 δρ. τὸ χιλιόγραμμον καὶ πωλεῖ αὐτὸ ἀντὶ 545,22 δρ· πόσον τοῖς ἑκατὸν ζημιώνεται; 6,8.

42) Ἔμπορος ἀγοράζει ἐμπόρευμα ἀντὶ 328,25 δρ., πωλεῖ δὲ αὐτὸ ἀντὶ 341,38 δρ.· πόσον ἐκέρδισεν ἐπὶ τῆς ἀξίας του; 4

43) Εἷς πωλεῖ ἐμπόρευμα, κερδίζων 333,66 δρ., ἀντὶ 6400,2 δρ.· πόσον τοῖς ἑκατὸν εἶνε τὸ κέρδος του; (5,5...)

44) 12 σωλῆνες πληροῦν δεξαμενὴν εἰς 6 ὥρ. καὶ 25'· πόσοι τοιοῦτοι σωλῆνες θὰ πληρώσουν τὴν δεξαμενὴν εἰς 7 ὥρ. καὶ 42'; 10

45) Ἐὰν ἓν ποσὸν μοιρασθῇ μεταξὺ 30 προσώπων, λαμβάνει καθεὶς 90 δρ.· εἰς πόσα πρόσωπα θὰ μοιρασθῇ τὸ αὐτὸ ποσόν, διὰ νὰ λάβῃ καθὲν 75 δρ.; 36

46) Διὰ νὰ διανύσῃ τις ὡρισμένην ἀπόστασιν κάμνει 154 βήματα μήκους 0,75 μ. καθέν· πόσον πρέπει νὰ εἶνε τὸ μῆκος καθενὸς βήματος, ἐὰν θέλῃ νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν αὐτὴν μὲ 165 βήματα; 0,7μ

47) Ἓν ἐμπόρευμα στοιχίζει 655 δρ.· τὰ ἔξοδα ἦσαν 2 $^0/_0$· πόσο πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ ἐμπόρευμα, ἐὰν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 10 $^0/_0$ ἐπὶ τῆς ὅλης δαπάνης; 734,9

48) Ἁμαξοστοιχία, διατρέχουσα 56 χμ. τὴν ὥραν, διανύει μία ἀπόστασιν εἰς 1 ὥραν καὶ 15'· ἐὰν διατρέχῃ 42 χμ. τὴν ὥραν, ε πόσον χρόνον θὰ διατρέξῃ τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν; 1 ὥρ. 40

49) 24 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 9,5 ὥρ. καθ' ἡμέραν, τελειώνο ἓν ἔργον. Ἐὰν προστεθοῦν 14 ἐργάται (τοιοῦτοι) πόσον πρέπει νὰ ἐργάζωνται καθ' ἡμέραν, διὰ νὰ τελειώσουν τὸ ἔργον εἰς τὸν αὐτὸν χρόνο 6 ὥρ

50) Τροχὸς κάμνει 3648 στροφὰς εἰς 1 ὥραν καὶ 16′. Πόσας στροφὰς κάμνει εἰς 1 ὥρ. καὶ 25′; 4080

51) Ἐὰν μοιράσω μῆκος εἰς 35 ἴσα μέρη, καθὲν μέρος θὰ ἔχῃ μῆκος 0,18 μ.· εἰς πόσα ἴσα μέρη πρέπει νὰ διαιρέσω τὸ αὐτὸ μῆκος, διὰ νὰ εἶνε καθὲν τούτων 25,5 δάκτ.; 12.

52) Λυχνία καίει καθ' ἡμέραν ἐπὶ 4,05 ὥρας καὶ περνᾷ τις μὲ ὡρισμένον ποσὸν ἐλαίου 16 ἡμ.· πόσον χρόνον θὰ καίῃ καθ' ἡμέραν ἡ λυχνία, ἐὰν μὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν ἐλαίου περνᾷ 16,2 ἡμ.; 4 ὥρ.

53) Ἅμαξα εἰς 6 ὥρ. 35′ καὶ 45″ διατρέχει διάστημα 120 χμ.· πόσα διατρέχει εἰς 1 ὥρ.; 18,193.. χμ.

54) Ἓν ὡρολόγιον εἰς 5 (10) ὥρ. καὶ 20′ (30′) προχωρεῖ 2′ 8′ ἐμπρός· πόσον προχωρεῖ εἰς μίαν ὥραν; $\frac{3'}{8}\left(\frac{16'}{21}\right)$.

55) Μία κρήνη πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 3 ὥρ. 20′ καὶ 45″· πόσον μέρος τῆς δεξαμενῆς θὰ πληρώσῃ εἰς μίαν ὥραν; $\frac{240}{803}$

56) Μὲ 5 λίρας 3 σελ. 8 πέν. ἀγοράζει τις 3 ὀκ. καὶ 200 δρμ. μετάξης· πόσην μέταξαν ἀγοράζει μὲ 1 λίραν; $270\frac{30}{311}$ δρμ.

57) Ἂν ἡ ὀκᾶ μετάξης τιμᾶται 5 τάλ. καὶ 3 δρ., πόσον τιμῶνται 8 ὀκ. 250 δρμ. τῆς μετάξης ταύτης; 241,5 δρ.

58) Ἂν ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 2,70 δρ., πόσον τιμῶνται 8 πήχεις καὶ 6 ρούπια τοῦ ἄνω ὑφάσματος; 23,625 δρ.

5

59) Νὰ τραποῦν 5 ἡμ. 3 ὥρ. 50′ 45″ εἰς ὥρας (ἂν ἡ ἡμέρα λογαριάζεται πρὸς 12 ὥρας). $63\frac{203}{240}$ ὥρ.

60) Νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ὁ ἀριθμὸς $\frac{12}{7}$ πήχ. 1 π. $5\frac{5}{7}$ ρ.

61) Ἂν 65 ὀκ. σίτου ἐπωλήθησαν ἀντὶ 32,60 δρ., πόσον ἐπωλήθη ἡ ὀκᾶ; $50\frac{2}{13}$ λ.

62) Κρήνη πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 5 (3,5) ὥρας· ἄλλη κρήνη δύναται νὰ πληρώσῃ αὐτὴν εἰς 4 (7,25) ὥρας· εἰς πόσας ὥρας αἱ δύο κρῆναι, συγχρόνως ρέουσαι, θὰ πληρώσουν αὐτήν; $2\frac{2}{9}\left(2\frac{31}{86}\right)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIV

Στοιχεῖα Λογιστικῆς καὶ Καταστιχογραφίας.

§ 113. Σκοπὸς τῆς Λογιστικῆς.—

Ἐὰν εἷς ἔμπορος, ἢ ἐμπορικόν, βιομηχανικόν, τραπεζικὸν κατάστημα, θέλῃ νὰ γνωρίζῃ καθ' οἱανδήποτε στιγμὴν τὸ ἀποτέλεσμα καὶ τὴν ἐν γένει κατάστασιν εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκονται αἱ ἐμπορικαὶ αὐτοῦ ἐπιχειρήσεις, πρέπει νὰ κρατῇ λεπτομερῶς πᾶσαν ἐμπορικήν του πρᾶξιν καὶ νὰ καταγράφῃ αὐτὰ εἰς βιβλία μετά τινος μεθοδικότητος, ὥστε νὰ δύναται εἰς πᾶσαν στιγμὴν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν βιβλίων τούτων, νὰ εὑρίσκῃ τὸ ἀποτέλεσμα τῶν ἐργασιῶν αὐτοῦ. Τὸ μάθημα, τὸ ὁποῖον διδάσκει, πῶς δυνάμεθα νὰ ἐγγράφωμεν μεθοδικῶς τὰς ἐμπορικὰς ἐργασίας ἑνὸς ἐμπορικοῦ οἴκου ἐν γένει εἰς τρόπον, ὥστε νὰ δυνάμεθα εὐκόλως, νὰ εὑρίσκωμεν καθ' οἱαδήποτε στιγμὴν τὸ ἀποτέλεσμα αὐτῶν, λέγεται *Λογιστική*. Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς Λογιστικῆς λοιπὸν δύναται πᾶς ἔμπορος, ἢ ἐπιχειρηματίας, νὰ εὑρίσκῃ τὴν κατάστασιν εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται ἐμπορικῶς· ἤτοι, τί κατέχει, τί ἐξ ὅσων εἶχε τοῦ ἐλλείπει, τί πλέον ἔχει, τί ὀφείλει εἰς ἄλλους μετὰ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται εἰς ἐμπορικὰς σχέσεις, καὶ τί ἄλλοι ὀφείλουν εἰς αὐτόν.

Ἐν γένει, διὰ τῆς Λογιστικῆς δύναται καθείς, νὰ εὑρίσκῃ εὐκόλως, ἂν ηὐξήθη ἢ ἠλαττώθη ἡ περιουσία του, ἡ ὁποία ἔχει διατεθῇ διὰ τὰς ἐμπορικάς του ἐπιχειρήσεις μετά τινα περίοδον ἐμπορικῶν ἐργασιῶν, δηλαδὴ τί ἐκέρδισεν, ἢ τί ἐζημιώθη ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως αὐτοῦ.

§ 114. Λογιστικὴ ἁπλογραφικὴ καὶ διπλογραφική.—

α') Ὁ λαμβάνων παρ' ἄλλου ἓν χρηματικὸν ποσὸν ἢ ἓν ἐμπόρευμα ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ ἐπιστρέψῃ τὰ χρήματα, ἢ τὴν ἀξίαν τοῦ ἐμπορεύματος μετά τινα χρόνον εἰς τὸν πρῶτον, λέγεται *χρεώστης*.

Ὁ δίδων τι, χωρὶς νὰ λάβῃ τὴν ἀξίαν αὐτοῦ, ἀλλὰ δικαιούμενος νὰ λάβῃ αὐτήν, λέγεται *πιστωτής*. Οὕτω, ἐὰν ὁ Γεώργιος ἐδάνεισε 500 δρ. εἰς τὸν Ἰωάννην, ὁ μὲν Γεώργιος εἶνε ὁ πιστωτής, ὁ δὲ Ἰωάννης ὁ χρεώστης. Διότι, αὐτὸς ἔλαβε τὰς 500 δρ. ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ τὰς ἐπιστρέψῃ εἰς τὸν πιστωτήν.

Ὁμοίως, ἂν ἀγοράσωμεν ἓν ἐμπόρευμα ἀξίας *500* δρ. παρὰ τοῦ Ν ἐπὶ πιστώσει, ὁ μὲν Ν εἶνε πιστωτής, ἡμεῖς δὲ χρεώστης.

Ἐὰν πωλήσωμεν εἰς τὸν Γ δέμα μαλλίων καὶ λάβωμεν τὴν ἀξίαν αὐτοῦ εἰς μετρητὰς δραχμὰς *500*, ὁ Γ δὲν εἶνε χρεώστης, διότι ἔλαβεν μὲν ἓν δέμα μαλλίων ἀξίας *500* δρ., ἀλλ' ἐμέτρησεν αὐτὰς κατὰ τὴν παραλαβὴν τοῦ ἐμπορεύματος.

Ἐὰν δώσω εἰς τὸν Α *1000* δρ. ἐπὶ πιστώσει, καὶ ἐγγράψω τὴν πρᾶξιν αὐτὴν εἰς τὰ βιβλία τῆς λογιστικῆς εἰς τρόπον, ὥστε νὰ διακρίνεται ὅτι ὁ Α εἶνε χρεώστης τῶν *1000* δρ., λέγω ὅτι ἐχρέωσα τὸν Α μὲ 1000 δραχμάς.

Ἐὰν λάβω παρ' ἑνὸς ἓν ἐμπόρευμα 1000 δρ. ἐπὶ πιστώσει, π. χ. παρὰ τοῦ Α, καὶ ἐγγράψω εἰς τὰ βιβλία τὴν πρᾶξιν αὐτήν, ὥστε νὰ φαίνεται ὅτι ὁ Α εἶνε πιστωτὴς τῶν *1000* δρ., λέγω ὅτι ἐπίστωσα τὸν Α μὲ *1000* δραχμάς.

β') Ὑπάρχουν δύο σηστήματα Λογιστικῆς. *1) ἡ ἁπλογραφική, ἢ Ἁπλογραφία, καὶ 2) ἡ διπλογραφική, ἢ Διπλογραφία.*

Ἡ οὐσιώδης διαφορὰ τῶν δύο αὐτῶν συστημάτων συνίσταται, εἰς τὸ ὅτι εἰς μὲν τὴν Ἁπλογραφίαν εἰς καθεμίαν ἐμπορικὴν πρᾶξιν κάμνομεν μίαν μόνον ἐγγραφὴν τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν πρᾶξιν ποσοῦ, δηλαδὴ τὴν χρέωσιν, ἢ τὴν πίστωσίν αὐτοῦ· εἰς δὲ τὴν Διπλογραφίαν τοὐναντίον κάμνομεν δύο ἐγγραφὰς τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ, μίαν διὰ τὴν χρέωσιν καὶ ἄλλην διὰ τὴν πίστωσιν αὐτοῦ. 5

Οὕτω π.χ., ἐὰν δώσω εἰς τὸν Α ἐπὶ πιστώσει *1000* δρ., κατὰ τὴν Ἁπλογραφίαν, ἐγγράφω τὴν πρᾶξιν αὐτὴν εἰς τὰ βιβλία μου, χρεώνων τὸν Α μὲ τὸ ποσὸν τῶν 1000 δρ.· ἐνῶ κατὰ τὴν Διπλογραφίαν, πρέπει νὰ χρεώσω τὸν Α μὲ τὸ ποσὸν τῶν 1000 δρ., καὶ νὰ πιστώσω τὸν ἑαυτόν μου μὲ τὸ ποσὸν τῶν 1000 δρ., διότι δῶκα αὐτάς.

Ἡ Ἁπλογραφία εἶνε πολὺ ἁπλῆ καὶ εὔκολος, ἀλλ' ἀτελής. Διότι δὲν εἶνε τοιαύτη, ὥστε νὰ δύναται νὰ παρέχῃ πάντοτε λεπτομερεῖς πληροφορίας περὶ τῆς ἐν γένει ἐμπορικῆς καταστάσεως τοῦ ἐμπόρου οὐδὲ παρέχει πλήρη ἔλεγχον τῶν ἐγγραφῶν, αἱ ὁποῖαι γίνονται εἰς τὰ λογιστικὰ βιβλία.

Τοὐναντίον, ἡ Διπλογραφία εἶνε συστηματικὴ καὶ τελειοτέρα, παρέχουσα λεπτομερεῖς πληροφορίας περὶ τῆς ἐν γένει καταστάσεως τῆς ἐμπορικῆς ἐπιχειρήσεως καὶ πλήρη ἔλεγχον τῶν ἐγγραφῶν, αἱ ὁποῖαι γίνονται εἰς τὰ λογιστικὰ βιβλία.

Διὰ ταῦτα ἡ μὲν Ἁπλογραφία ἐφαρμόζεται εἰς μικρὰς ἐμπορικὰς ἐπιχειρήσεις, ἐνῶ ἡ διπλογραφία εἰς τὰς μεγάλας καὶ τὰς καλῶς ὠργανωμένας.

§ 113. Λογαριασμός, χρέωσις, πίστωσις.—

α΄) Πᾶς ἔμπορος κατὰ τὴν διεξαγωγὴν τῶν ἐμπορικῶν αὐτοῦ ἐπιχειρήσεων ἔρχεται εἰς ἐμπορικὰς οἰκονομικὰς σχέσεις μετὰ διαφόρων προσώπων, ἢ ἐμπορικῶν καταστημάτων, ἐνεργῶν μὲ καθένα τούτων ἐμπορικὰς δοσοληψίας ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας.

Ἐὰν ὁ ἔμπορος θέλῃ νὰ εὑρίσκῃ εὐκόλως τὴν ἐμπορικὴν αὐτοῦ θέσιν ἀπέναντι καθενὸς τούτων, μετὰ τῶν ὁποίων ἐνεργεῖ τὰς δοσοληψίας, δὲν πρέπει νὰ ἐμπιστεύεται μόνον εἰς τὴν μνήμην αὐτοῦ τὴν διεξαγωγὴν τῶν διαφόρων πράξεων μετὰ τῶν ἐν λόγῳ προσώπων, ἀλλὰ νὰ κρατῇ ἀκριβῆ καὶ ὅσω τὸ δυνατὸν λεπτομερῆ σημείωσιν αὐτῶν εἰς τὰ λογιστικὰ βιβλία.

Συνήθως ἐγγράφομεν πᾶσαν ἐμπορικὴν πρᾶξιν, ἀφορῶσαν τὸ αὐτὸ πρόσωπον ἢ ἐμπορικὸν κατάστημα εἰς μίαν σελίδα ἑνὸς τῶν λογιστικῶν βιβλίων, διὰ νὰ δυνάμεθα ταχύτερον καὶ εὐκολώτερον ἐκ τῆς παρατηρήσεως τῶν ἐγγραφῶν αὐτῶν νὰ εὑρίσκωμεν εἰς πᾶσαν στιγμὴν τὴν κατάστασίν ἡμῶν πρὸς τὸ ἐν λόγῳ πρόσωπον.

Ἡ τοιαύτη σημείωσις τῶν ἐμπορικῶν πράξεων, αἱ ὁποῖαι ἀποβλέπουν πρόσωπόν τι ἢ κατάστημα ὡρισμένον, λέγεται *λογαριασμός*, ἢ *μερὶς* τοῦ θεωρουμένου προσώπου εἰς τὰ βιβλία τοῦ ἐμπόρου (βλέπε σελ. 218).

Αἱ ἀφορῶσαι τὸ αὐτὸ πρόσωπον ἐμπορικαὶ πράξεις ἐγγράφονται εἰς τὸ λογαριασμὸν αὐτοῦ ὄχι ὅλως τυχαίως καὶ ἁπλῶς μόνον ἡ μία μετὰ τὴν ἄλλην, καθὼς αὐταὶ ἔγιναν, ἀλλὰ μεθοδικώτερον πως, ὡς ἑξῆς. Χρησιμοποιεῖται συνήθως μία σελὶς βιβλίου, διῃρημένη εἰς δύο μέρη· εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος ἐγγράφονται πᾶσαι αἱ πράξεις κατὰ τὰς ὁποίας ἔτυχε τὸ πρόσωπον, τὸ ὁποῖον ἀφορᾷ ὁ λογαριασμὸς αὐτός, νὰ λάβῃ παρ' ἡμῶν ἀμέσως ἢ ἐμμέσως, δηλαδὴ παρ' ἄλλου διὰ λογαριασμὸν ἡμῶν, ἓν πρᾶγμα ἐπὶ πιστώσει. Καθεμία τῶν πράξεων αὐτῶν ἐκτίθεται συντόμως μέν, ἀλλὰ σαφῶς, συνοδεύεται δὲ ἀφ' ἑνὸς μὲν ὑπὸ τῆς χρονολογίας κατὰ τὴν ὁποίαν ἔγινεν ἡ πρᾶξις αὐτή, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὑπὸ τοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον φανερώνει τὴν συμφωνηθεῖσαν ἀξίαν τοῦ ἐμπορεύματος, καὶ μὲ τὸ ὁποῖον χρεώνομεν τὸ πρόσωπον, τὸ παριτανόμενον ὑπὸ τοῦ λογαριασμοῦ. Εἰς τὸ δεξιὸν μέρος ἐγγράφονται πᾶσαι αἱ πράξεις κατὰ τὰς ὁποίας τὸ πρόσωπον, τὸ ὁποῖον παριστάνει ὁ λογαριασμός, ἔτυχε νὰ δώσῃ εἰς ἡμᾶς ἀμέσως ἢ ἐμμέσως ἓν πρᾶγμα. Καθεμία τῶν πράξεων τούτων ἐκτίθεται ὡς καὶ εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος.

β') Τὸ πρὸς τἀριστερὰ μέρος ἑνὸς λογαριασμοῦ λέγεται *χρέωσις*, τὸ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ *πίστωσις*.

Ὁ λόγος τῆς ὀνομασίας αὐτῆς τῶν δύο μερῶν εἶνε ὁ ἑξῆς. Ἐπειδὴ τὸ πρόσωπον, τὸ ὁποῖον παριστάνει ὁ λογαριασμός, λαμβάνον πρᾶγμά τι παρ' ἡμῶν, λαμβάνει αὐτὸ ὄχι δωρεάν, ἀλλ' ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ μᾶς δώσῃ τὸ ἀντίτιμον αὐτοῦ, αὐτὰ δὲ τὰ ποσὰ γράφομεν εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος, ἕπεται ὅτι, τὸ ἀριστερὸν μέρος παριστάνει τὸ χρέος τοῦ ἐν λόγῳ προσώπου πρὸς ἡμᾶς, καὶ καλεῖται *χρέωσις* αὐτοῦ. Ἐπίσης τὸ δεξιὸν μέρος παριστάνει τὰ ποσά, τὰ ὁποῖα μᾶς ἔδωκε τὸ πρόσωπον, τὸ ὁποῖον ἀντιπροσωπεύει ὁ λογαριασμός· ἄρα περιέχει τοῦτο κατάλογον τῶν χρεῶν ἡμῶν, ἢ τῶν ἀπαιτήσεών αὐτοῦ παρ' ἡμῶν, καὶ διὰ τοῦτο καλεῖται *πίστωσις* αὐτοῦ.

116. Δοῦναι, Λαβεῖν.—

α') Τὸ ἀριστερὸν μέρος ἑνὸς λογαριασμοῦ λέγεται καὶ *Δοῦναι*, τὸ δὲ δεξιὸν καὶ *Λαβεῖν*. Διότι τὸ μὲν παριστάνει, καθὼς ἀνωτέρω εἴδομεν, τὰ ποσὰ τὰ ὁποῖα χρεωστεῖ ἢ ὀφείλει νὰ μᾶς δώσῃ τὸ πρόσωπον, τὸ ὁποῖον παριστάνει ὁ λογαριασμός, τὸ δὲ δεξιὸν ὅ,τι δικαιοῦται νὰ λάβῃ 5
αὐτὸ ἀπὸ ἡμᾶς. Διὰ τοῦτο καὶ οἱ δύο ὅροι *Δοῦναι* καὶ *Χρέωσις*, εἶνε συνώνυμοι, καθὼς καὶ οἱ *Λαβεῖν*, καὶ *Πίστωσις*.

Ἂν τὸ Δοῦναι ἑνὸς λογαριασμοῦ ὑπερβαίνῃ τὸ Λαβεῖν, συνάγομεν ὅτι τοῦ ἐδώκαμεν περισσότερα τῶν ὅσα μᾶς ἔδωκεν αὐτός, καὶ ἐπομένως ὅτι μᾶς ὀφείλει τὸ πλεονάζον ποσόν. Ἂν δὲ τοὐναντίον τὸ Λαβεῖν εἶνε μεγαλύτερον τοῦ Δοῦναι, συνάγομεν ὅτι ἐλάβομεν ἀπὸ αὐτὸν περισσότερα τῶν ὅσων τοῦ ἐδώκαμεν, καὶ ἐπομένως τοῦ ὀφείλομεν τὸ πλεονάζον ποσόν.

β') Ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν τοῦ Δοῦναι ὑπερβαίνῃ τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν τοῦ Λαβεῖν, τὸ πλεονάζον εἰς τὸ Δοῦναι ποσὸν καλεῖται *χρεωστικὸν ὑπόλοιπον*, ἐπειδὴ προέρχεται ἀπὸ τὴν χρέωσιν.

Ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν τοῦ Λαβεῖν ὑπερβαίνῃ τὸ τοῦ Δοῦναι, τὸ πλεονάζον ποσὸν εἰς τὸ Λαβεῖν καλεῖται *πιστωτικὸν ὑπόλοιπον*, ἐπειδὴ προέρχεται ἀπὸ τὴν πίστωσιν. Εἷς λογαριασμὸς λέγεται *χρεώστης* μέν, ὅταν ἔχῃ *χρεωστικὸν* ὑπόλοιπον· *πιστωτὴς* δέ, ὅταν ἔχῃ *πιστωτικὸν* ὑπόλοιπον.

ΤΥΠΟΣ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΥ

Δοῦναι ἢ χρέωσις					*Λαβεῖν ἢ πίστωσις*				
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
	(α)					(α)			

Ἡ στήλη 1 χρησιμεύει διὰ νὰ γράφωμεν τὸν μῆνα κατὰ τὸν ὁποῖον ἔγινεν ἡ ἐμπορικὴ πρᾶξις· ἡ 2 χρησιμεύει διὰ τὴν ἡμέραν τοῦ μηνός. ἡ 3 διὰ τὴν λεπτομέρειαν τῆς πράξεως· ἡ 4 καὶ 5 διὰ τὰς δραχμὰς καὶ τὰ λεπτὰ τοῦ ποσοῦ. Εἰς τὴν θέσιν (α) γράφεται τὸ ἔτος κατὰ τὸ ὁποῖον γίνεται ἡ πρᾶξις.

γ') *Χρεώνομεν* ἕνα λογαριασμὸν σημαίνει, ὅτι ἐγγράφομεν εἰς τὴν χρέωσιν αὐτοῦ ἓν ποσόν· *πιστώνομεν* δὲ ἕνα λογαριασμὸν σημαίνει, ὅτι ἐγγράφομεν ἓν ποσὸν εἰς τὴν πίστωσιν αὐτοῦ.

Παραδείγματα. Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν ἀνωτέρω ἔστω ὅτι ἐνηργήσαμεν τὰς κάτωθι ἐμπορικὰς πράξεις μετά τινος προσώπου, ἔστω τοῦ Νικολάου.

1) 1913 Ὀκτωβρίου 10. Ἐπωλήσαμεν εἰς τὸν Νικολάου ἐπὶ πιστώσει ἐμπόρευμα ἀξίας δρ. 250.

2) Ὀκτωβρίου 20. Ἐλάβομεν παρὰ τοῦ Νικολάου εἰς μετρητὰ δρ. 200.

3) 1914 Φεβρουαρίου 5. Καταθέσαμεν παρὰ τῷ Νικολάου διὰ τοῦ Ἰωάννου διὰ λογαριασμόν μας γραμμάτιον εἰς βάρος τοῦ Ἰωάννου λῆγον τῇ 5 Μαΐου δρ. 1500.

Προκειμένου νὰ ἐγγράψωμεν τὰς πράξεις αὐτὰς εἰς τὸν λογαριασμὸν τοῦ Νικολάου, εὑρίσκομεν πρῶτον, ποῖαι τῶν πράξεων αὐτῶν πρέπει νὰ ἐγγραφοῦν εἰς τὴν χρέωσιν, καὶ ποῖαι εἰς τὴν πίστωσιν τοῦ λογαριασμοῦ τοῦ Νικολάου.

Ἡ πρᾶξις 1) θὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν χρέωσιν· διότι ὁ Νικολάου ὀφείλει νὰ μᾶς πληρώσῃ τὰς 250 δρ. διὰ τὰ ἐμπορεύματα, τὰ ὁποῖα τοῦ ἐπωλήσαμεν ἐπὶ πιστώσει. Ἡ πρᾶξις 2) θὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν πίστωσιν τοῦ λογαριασμοῦ. Ἡ 3) θὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν χρέωσιν, διότι ὁ Νικολάου ἔλαβε παρὰ τοῦ Ἰωάννου γραμμάτιον 1500.

Κατὰ ταῦτα καὶ συμφώνως πρὸς τὸν ἀνωτέρω τύπον λογαριασμοῦ ὁ λογαριασμὸς τοῦ Νικολάου θὰ εἶνε ὡς κατωτέρω σελ. 219.

Εἰς τὸν λογαριασμὸν τοῦτον τοῦ Νικολάου τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν τῆς χρεώσεως εἶνε μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ποσῶν τῆς πιστώσεως. Διὰ τοῦτο ὁ λογαριασμὸς αὐτός, ἤτοι τοῦ Νικολάου, εἶνε χρεώστης μας τοῦ ἐπὶ πλέον ποσοῦ, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται, ἐὰν ἀπὸ τὰς 1750 δρ. τῆς χεώσεως ἀφαιρέσωμεν τὰς 200 δρ. τῆς πιστώσεως, ἤτοι τοῦ ποσοῦ τῶν 1550 δραχμῶν. Τὸ ποσὸν αὐτὸ εἶνε τὸ χρεωστικὸν ὑπόλοιπον τοῦ Νικολάου.

Δοῦναι ***Νικολάου (ὁδὸς...)*** ***Λαβεῖν***

1913		Δρ.Λ.	1913		Δρ.Λ.
8/βρίου 10	Ἀξίαν Ἐμπορευμάτων	250	8/βρίου 20	Μέτρητὰς	200
1914 Φεβρ. 5	Κατάθεσίς μας παρ' αὐτῷ διὰ τοῦ Ι.	1500			
	Ἐν ὅλῳ	1750		Ἐν ὅλῳ	200

Ἀσκήσεις. 1) Εἰς καθεμίαν τῶν κάτωθι ἐμπορικῶν πράξεων νὰ εὑρεθῇ ποῖος εἶνε ὁ χρεώστης καὶ ὁ πιστωτής, καὶ ἑπομένως ποίας χρεώσεις ἢ πιστώσεις θὰ κάμῃ καθεὶς τῶν ἐνδιαφερομένων.

α') Τὴν 2αν Ὀκτωβρίου 1915 ἠγόρασα ἀπὸ Πυρρῆν καὶ Σίαν 20 βαρέλια ἐλαίου ὀκ. 3240 πρὸς 1,15 δρ. τὴν ὀκᾶν . . . . Δρ. 3726.

β') Ἐμέτρησα εἰς Πυρρῆν καὶ Σίαν πρὸς ἐξόφλησιν τῆς ἀξίας 20 βαρελίων ἐλαίου . . . . » 3726. 5

γ') Ἠγόρασα ἀπὸ Δ. Ξένον 40 κιβώτια σάπωνος ἐκ 3548 ὀκ. πρὸς 98 λ. τὴν ὀκᾶν . . . . » 3477,05

Ἐμέτρησα ἔναντι . . . . » 1477,05

Ὑπόλοιπον » 2000.

δ') Τὴν 4ην τοῦ ἰδίου ἠγόρασα ἀπὸ Δ. Ξένον 35 κιβώτια σάπωνος ἐκ 3080 ὀκάδων πρὸς 97 λ. τὴν ὀκᾶν τοῖς μετρητοῖς δρ. 5987,60.

ε') Τὴν 9ην ἰδίου ἐμέτρησα εἰς Δ. Ξένον πρὸς ἐξόφλησιν τῆς ἀξίας τῶν 40 κιβωτίων σάπωνος τῆς 2ας τρέχοντος δρ. 2000.

ϛ') Τὴν 27ην Ὀκτωβρίου ἠγόρασα ἀπὸ Δ. Ξένον 30 κιβώτια σάπωνος ἐκ 2620 ὀκ. πρὸς 85 λ. τὴν ὀκᾶν . . . . δρ. 2227.

Πρὸς πληρωμὴν αὐτῶν τοῦ παρεχώρησα γραμμάτιον ὡς ἑξῆς

ἀξία γραμματίου 1714,50

μεῖον τόκος προεξοφλήσεως 9,10 = 1705,40

καὶ μετρητὰς πρὸς ἐξόφλησιν 521,60

Ἐν ὅλῳ 2227.

ζ') Ὁ ἐν Πειραιεῖ Γ. Βούρβουλης ἐπλήρωσε τὴν 15 Ἰουλίου εἰς τὸν Γιάπαπαν τῆς αὐτῆς πόλεως κατὰ διαταγὴν καὶ διὰ λογαρ[illegible] τοῦ ἐν Σύρῳ Ταμβακίδου . . . . δρ. 1000.

2) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πράξεων ποῖαι ἐξ ἐκείνων αἱ ὁποῖαι ἀποβλέπουν τὸν Δ. Ξένον θὰ ἐγγραφοῦν εἰς τὴν χρέωσιν καὶ ποῖαι εἰς τὴν πίστωσιν τοῦ λογαριασμοῦ του;

3) Σχηματίσατε ἐκ τῶν ἀνωτέρω πράξεων τὸν λογαριασμὸν τοῦ Δ. Ξένου κατὰ τὸ παράδειγμα τοῦ λογαριασμοῦ τοῦ Νικολάου.

§ **11Ϛ΄. Ἄνοιγμα, περάτωσις καὶ μεταφορὰ λογαριασμοῦ.**—

α΄) Ὅταν εἷς ἔμπορος ἐνεργῇ μετά τινος προσώπου ἐμπορικὰς πράξεις, διαθέτει μίαν σελίδα ἑνὸς βιβλίου, τὸ ὁποῖον περιέχει τοὺς λογαριασμοὺς ἐκείνων μετὰ τῶν ὁποίων συναλλάσσεται, καὶ εἰς αὐτὴν ἐγγράφει ὅλας τὰς πράξεις τὰς ἀφορώσας τὸ περὶ τοῦ ὁποίου ὁ λόγος πρόσωπον. Ἡ πρᾶξις αὐτὴ λέγεται *ἄνοιγμα λογαριασμοῦ*, γίνεται δὲ ὡς ἑξῆς.

Γράφομεν μὲ παχέα καὶ καλλιγραφικὰ γράμματα τὸ ὀνοματεπώνυμον τοῦ προσώπου, τὸ ὁποῖον ἀντιπροσωπεύει ὁ λογαριασμός, τὸν ὁποῖον ἀνοίγωμεν. Ὑποκάτω τοῦ ὀνόματος, ἢ δεξιὰ αὐτοῦ, ἐν παρενθέσει, γράφομεν διὰ μικροτέρων γραμμάτων τὴν διεύθυνσίν του. Ἐπίσης γράφομεν τὰς λέξεις «*Δοῦναι*» καὶ «*Λαβεῖν*» ἑκατέρωθεν τοῦ ὀνοματεπωνύμου καὶ εἰς τὰς γωνίας τῆς σελίδος (συνήθως αἱ λέξεις Δοῦναι, Λαβεῖν εἶνε ἐκ τῶν προτέρων τυπωμέναι εἰς καθεμίαν σελίδα τοῦ βιβλίου).

β΄) Καλεῖται *περάτωσις* λογαριασμοῦ ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον παρουσιάζει εἷς λογαριασμὸς κατά τινα ἐποχήν. Τὸ ὑπόλοιπον αὐτὸ θὰ εἶνε χρεωστικὸν ἢ πιστωτικὸν ἢ καὶ μηδέν, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν τὰ ὁποῖα εἶνε ἀναγεγραμμένα εἰς τὴν χρέωσιν εἶνε μεγαλύτερον, μικρότερον ἢ ἴσον ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν τῆς πιστώσεως.

Πρὸς περάτωσιν ἑνὸς λογαριασμοῦ προσθέτομεν ἰδιαιτέρως ὅλα τὰ ποσὰ τῆς χρεώσεώς του, καὶ τὸ ἄθροισμα γράφομεν εἰς αὐτὸν καὶ ὑπὸ τὰ ἄλλα ποσά· τὸ αὐτὸ κάμνομεν καὶ διὰ τὰ ποσὰ τῆς πιστώσεώς του. Ἐὰν δύο ποσὰ τῶν ἀθροισμάτων εἶνε ἴσα, λέγομεν ὅτι ὁ λογαριασμὸς αὐτὸς εἶνε *ἐξωφλημένος*, ἂν δὲ ἄνισα θὰ *ἐξισώσωμεν* αὐτόν, δηλαδὴ θὰ κάμωμεν τὰ ποσὰ τῆς χρεώσεως καὶ πιστώσεώς του ἴσα, ὡς ἑξῆς.

Ἂς ὑποτεθῇ ὅτι ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν δύο ἀθροισμάτων, τὰ ὁποῖα εὑρήκαμεν, μεγαλύτερον εἶνε τὸ τῆς χρεώσεως, καὶ ἑπομένως μετὰ τὴν ἀφαίρεσίν των προκύπτει χρεωστικὸν ὑπόλοιπον. Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ λογαριασμοῦ, πιστώνομεν αὐτὸν μὲ τὸ χρεωστικὸν ὑπόλοιπον, γράφοντες εἰς τὴν περίληψιν τὰς λέξεις «*πρὸς ἐξίσωσιν*». Ἀκολούθως προσθέτομεν τὸ ποσὸν αὐτὸ εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν τῆς πιστώσεως, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι καὶ τὰ δύο ἀθροίσματα τῆς χρεώσεως καὶ πιστώσεως εἶνε ἴσα, ἤτοι ὅτι ὁ λογαριασμὸς εἶνε ἐξισωμένος. Μετὰ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ λογαριασμοῦ γράφομεν ὑποκάτω καθενὸς τῶν ἴσων τούτων ἀθροισμάτων εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος μικρὰν διπλῆν ὁριζοντίαν γραμμήν, ἡ ὁποία φανερώνει ὅτι ὁ λογαριασμὸς αὐτὸς ἐπερατώθη, καὶ ὅτι δὲν πρέπει τὰ ποσὰ αὐτὰ νὰ συγχωνευθοῦν βραδύτερον μὲ ἄλλα, τὰ ὁποῖα τυχὸν νὰ γραφοῦν ὑπὸ τὴν διπλῆν γραμμήν.

Οὕτω π. χ. διὰ νὰ περατώσωμεν τὸν κάτωθι λαγαριασμὸν τοῦ Ι. Πετρίδου, προσθέτομεν τὰ ποσὰ τῆς χρεώσεώς του 350,80·1000·200 ἰδιαιτέρως ἐπὶ προχείρου φύλλου χάρτου, καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα 1550,80, τὸ ὁποῖον γράφομεν κάτωθεν τῶν ἄλλων ποσῶν, ἐνῷ εἰς τὴν οἰκείαν στήλην τῆς περιλήψεως γράφομεν τὰς λέξεις «*ἐν ὅλῳ*». Τὸ αὐτὸ κάμνομεν καὶ διὰ τὰ ποσὰ τῆς πιστώσεως, καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα 1250. Ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ 1550,80 τὸ 1250 εὑρίσκομεν τὸ χρεωστικὸν ὑπόλοιπον 300,80. Διὰ νὰ ἐξισώσωμεν τὸν λογαριασμὸν καὶ ἐπομένως νὰ περατώσωμεν αὐτόν, πιστώνομεν αὐτὸν μὲ τὸ ποσὸν 5 τῶν 300,80 δρ.· ἀκολούθως προσθέτομεν αὐτὸ εἰς τὸ προηγούμενον ἄθροισμα τῆς πιστώσεως 1550,80, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται καὶ τὸ ἀντίστοιχον ἄθροισμα τῆς χρεώσεως.

Δοῦναι ***Ι. Πετρίδης (ἐν Πειραιεῖ ὁδὸς...)*** ***Λαβεῖν***

			Δρ.	Λ.				Δρ.	Λ.
1916					1916				
Μαρτ.	7	Ἀξίαν ἐμπορευμάτων	350	80	Μαρτ.	26	Μετρητὰς	250	
					Μαΐου	2	» »	1000	—
Ἀπρ.	12	Γραμμάτιον	1000	—			Ἐν ὅλῳ	1250	—
»	15	Ἀξίαν ἐμπορευμάτων	200				Πρὸς ἐξόφλ.	300	80
		Ἐν ὅλῳ	1550	80				1550	
Ἰουν.	1	Ὑπόλ. ὡς ἄνω	300	80					

Ἐὰν τὸ νέον τοῦτο ἄθροισμα τῆς πιστώσεως εὑρίσκεται κατωτέρω τοῦ πρώτου, γράφομεν ἐκ νέου τὸ πρῶτον εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ δεύτερον. Μετὰ ταῦτα σύρομεν διπλῆν ὁριζοντίαν γραμμὴν ὑποκάτω καθενὸς τῶν τελικῶν ἀθροισμάτων 1550,80 καὶ οὕτω ὁ λογαρισμὸς θεωρεῖται *ἐξισωμένος* καὶ *περατωμένος*.

Ὁμοίως περατοῦται εἷς λογαριασμός, ἐὰν ἔχῃ πιστωτικὸν ὑπόλοιπὸν προσθέτομεν τοῦτο εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν τῆς χρεώσεως, ὅτε ἐξισοῦμεν πάλιν τὸν λογαριασμόν.

Μετὰ τὴν περάτωσιν ἑνὸς λογαρισμοῦ τὸ ὑπόλοιπον ἐγγράφεται μετὰ τῆς σχετικῆς χρονολογίας ὑπὸ τὴν διπλῆν γραμμὴν καὶ εἰς τὸ μέρος τῶν χρεώσεων μέν, ἐὰν εἶνε χρεωστικόν, εἰς τὸ μέρος τῶν πιστώσεων δέ, ἂν εἶνε πιστωτικόν. Εἰς τὴν στήλην τῆς αἰτιολογίας γράφομεν ἐδῶ τὰς λέξεις «*Ὑπόλοιπον ὡς ἄνω*». Ὁ σκοπὸς τῆς ἐγγραφῆς αὐτῆς εἶνε νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ περατωθέντος λογαριασμοῦ κατὰ τὴν ἔναρξιν τοῦ νέου τοιούτου, καὶ πρὸ τῆς ἐγγραφῆς τῶν νέων ἐμπορικῶν πράξεων εἰς τὸ μέρος τῶν χρεώσεων καὶ τῶν πιστώσεων.

Ἡ περάτωσις τοῦ λογαριασμοῦ γίνεται συνήθως περιοδικῶς εἰς τὸ τέλος καθενὸς ἔτους, ἑξαμηνίας ἢ τριμήνου. Δύναται ὅμως εἰς πᾶσαν ἐποχὴν νὰ γίνῃ ἡ περάτωσις ἑνὸς λογαριασμοῦ, ἐὰν ὑπάρχουν λόγοι συντρέχοντες εἰς τοῦτο.

Ἐὰν ἡ χρέωσις καὶ ἡ πίστωσις ἑνὸς λογαριασμοῦ ἔχουν ἴσα ἀθροίσματα, λέγομεν ὅτι ὁ λογαριασμὸς εἶνε *ἐξισωμένος* ἀφ' ἑαυτοῦ, ἢ *ἐξωφλημένος*.

γ') Ὅταν αἱ ἐγγραφαὶ τῶν χρεώσεων, ἢ πιστώσεων, ἢ μόνον ἡ μία ἐξ αὐτῶν καταλάβῃ ὁλόκληρον τὸν χῶρον τὸν προσδιορισμένον δι' αὐτὰς εἰς τὸ *Δοῦναι* ἢ εἰς τὸ *Λαβεῖν* τοῦ λογαριασμοῦ, ὥστε νὰ μὴ μένῃ πλέον χῶρος διὰ μίαν νέαν ἐγγραφήν, σχηματίζομεν τὴν συνέχειαν τοῦ λογαριασμοῦ τούτου εἰς ἄλλην σελίδα τοῦ βιβλίου ὡς ἑξῆς.

1) Προσθέτομεν ὅλα τὰ ποσὰ τῆς χρεώσεως, καθὼς καὶ τῆς πιστώσεως τοῦ λογαριασμοῦ. Καθὲν τῶν ἀθροισμάτων αὐτῶν γράφομεν εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ ἀντιστοίχου χώρου τοῦ λογαριασμοῦ, σημειοῦντες πρὸ καθενὸς τούτων καὶ εἰς τὴν στήλην τῆς περιλήψεως τὰς λέξεις «*εἰς μεταφοράν*».

2) Ἂν ὁ χῶρος τοῦ Δοῦναι ἢ τοῦ Λαβεῖν δὲν εἶνε πλήρης, ἀφήνομεν τὸν ἐλεύθερον χῶρον, ἀκυροῦντες αὐτὸν διὰ τεθλασμένης γραμμῆς, ἡ ὁποία ἀπολήγει εἰς τὸ ἄκρον τοῦ χώρου αὐτοῦ.

3) Ἀνοίγομεν εἰς ἄλλην σελίδα τοῦ βιβλίου, ἡ ὁποία εἶνε ἐλευθέρα, νέον λογαριασμόν, φέροντα τὸ ὄνομα τοῦ προηγουμένου. Εἰς τοῦτον ἐγράφομεν ἀντιστοίχως εἰς τὸν χῶρον τῆς χρεώσεως καὶ τῆς πιστώσεως τὰ δύο ἀθροίσματα, τὰ ὁποῖα εὑρήκαμεν εἰς τὸν προηγούμενον λογαριασμόν. Πρὸ καθενὸς τῶν ποσῶν τούτων γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῆς περιλήψεως τὰς λέξεις «*Ἐκ μεταφορᾶς*».

Πᾶσαν ἄλλην χρέωσιν ἢ πίστωσιν τοῦ λογαριασμοῦ ἐγγράφομεν τώρα, ὡς συνήθως, ὑπὸ τὴν γενομένην ἤδη ἐγγραφὴν καθεμιᾶς τῶν μεταφορῶν. Τὸ συνόλον τῆς ἀνωτέρω ἐργασίας λέγεται *μεταφορὰ λογαριασμοῦ*. Ἐνίοτε ἡ μεταφορὰ ἑνὸς λογαριασμοῦ γίνεται μετὰ τὴν περάτωσιν αὐτοῦ, δηλαδὴ ἀφοῦ περατώσωμεν τὸν λογαριασμόν, μεταφέρομεν εἰς τὸν νέον λογαριασμόν, τὸν ὁποῖον ἀνοίγομεν, ὄχι καὶ τὰ δύο ἀθροίσματα τῆς χρεώσεως καὶ πιστώσεως τοῦ μεταφερομένου, ἀλλὰ μόνον τὸ ποσὸν τῆς ἐξισώσεως αὐτοῦ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀντὶ εἰς εἰς τὸν παλαιὸν λογαριασμὸν νὰ γράψωμεν πρὸ τοῦ μεταφερομένου ποσοῦ τὰς λέξεις « *πρὸς ἐξίσωιν* » γράφομεν « *Ὑπόλοιπον εἰς νέον* », εἰς δὲ τὸν νέον λογαρισμὸν γράφομεν « *Ὑπόλοιπον ἐκ μεταφορᾶς* ».

Δοῦναι ***N. Ἀντωνίου (Ὁδός...) σελὶς 17*** ***Λαβεῖν***

1916			Δρχ.	Λ.	1916			Δρχ.	Λ.
Μαρτ.	4	Ἀξίαν ἐμπορευμάτων	4000	50	Μαρτ.	8	Μετρητὰς	250	—
					»	20	»	500	—
	8	Μετρητὰς	500						
»	15	Ἀξίαν ἐμπορ.	219	50					
»	30	Εἰς μεταφορὰν (σελ. 25)	4720		»	30	Εἰς μεταφορὰν (σελ. 25)	750	—

Παράδειγμα. Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν ἀνωτέρω ἔστω ὁ παρακείμενος λογαριασμὸς τοῦ Ν. Ἀντωνίου τῆς σελίδος 17 τοῦ βιβλίου μας, τὸν ὁποῖον μεταφέρομεν εἰς τὴν σελίδα 25 τοῦ αὐτοῦ βιβλίου, ὡς κατωτέρω. Καθὼς βλέπομεν εἰς τὸν νέον λογαριασμὸν ἐγγράφομεν εἰς μὲν τὴν χρέωσιν πρῶτον τὸ ποσὸν τῶν 4720 δραχμῶν ἐκ μεταφορᾶς τοῦ παλαιοῦ τῆς σελίδος 17, εἰς δὲν τὴν πίστωσιν τὸ ποσὸν τῶν 750 δρχ. ἐκ μεταφορᾶς τῆς αὐτῆς σελίδος 17, καὶ ἀκολούθως ἐργαζόμεθα εἰς τὸν νέον λογαριασμὸν ὡς συνήθως.

Δοῦναι ***N. Ἀντωνίου (ὁδὸς...) σελὶς 25*** ***Λαβεῖν***

1916			Δρχ.	Λ.	1916			Δρχ.	
Μαρτ.	30	Ἐκ μεταφορᾶς (σελ. 17)	4720	—	Μαρτ.	30	Ἐκ μεταφορᾶς (σελ. 17)	750	—
Ἀπρ.	10	Ἀξίαν ἐμπορευμάτων	150	—	Ἀπρ.	15	Μετρητὰς	300	—
»	13	Ἀξίαν ἐμπορευμάτων	630	—	»	20	Γραμμάτιον εἰς διαταγήν μας	500	—

Ἀσκήσεις

1). Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν πράξεων, αἱ ὁποῖαι ἀποβλέπουν τὸν Δ.

Ξένον (σελ. 219, *Ἀσκήσεις*) σχηματίσατε τὸν λογαριασμὸν αὐτοῦ καὶ περατώσατε αὐτόν.

2) Σχηματίσατε τὸν λογαριασμὸν Πυρρῆ καὶ Σία ἐκ τῶν πράξεων αἱ ὁποῖαι ἀποβλέπουν αὐτοὺς (σελ. 219, *Ἀσκήσεις*) καὶ μεταφέρατε αὐτὸν εἰς νέον α') ἄνευ περατώσεως τούτου. β') ἀφοῦ προηγουμένως παρατώσατε αὐτόν.

3) *Συγκέντρωσις λογαριασμῶν*. Διὰ τὰς διαφόρους ἀνάγκας τῆς Λογιστικῆς δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ συγκεντρώσωμεν πολλοὺς λογαριασμοὺς εἰς ἕνα.

Παράδειγμα. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τοὺς κάτωθι λογαριασμοὺς Α,Β,Γ μὲ διάφορα ποσὰ εἰς τὴν χρέωσιν καὶ τὴν πίστωσιν αὐτῶν.

Α		Β		Γ	
1500	650	800	1200	1850	2100

ἤτοι αἱ μὲν χρεώσεις των εἶνε ἀντιστοίχως 1500 δρ., 800 δρ., 1850 δρ., αἱ δὲ πιστώσεις αὐτῶν 650 δρ., 1200 δρ., 2100 δρ. Δυνάμεθα νὰ συγκεντρώσωμεν τοὺς τρεῖς αὐτοὺς λογαριασμοὺς εἰς ἕνα, ἔστω εἰς τὸν Δ., ἤτοι τὰς τρεῖς χρεώσεις εἰς μίαν μόνην, ὡς καὶ τὰς τρεῖς πιστώσεις εἰς μίαν, ὡς κάτωθι φαίνεται

	Δ	
Α.	1500	650
Β.	800	1200
Γ,	1850	2100
	4150	3950

Διὰ τῆς συγκεντρώσεως αὐτῆς τὰ διάφορα ποσά, τὰ διεσπαρμένα εἰς διαφόρους λογαριασμούς, συγκεντροῦνται εἰς ἕνα μόνον λογαριασμόν, εἰς τὸν ὁποῖον τὸ ποσὸν τῆς γενικῆς χρεώσεως καὶ πιστώσεως μένει ἀμετάβλητον.

4) Ἐκ τῶν κάτωθι πράξεων, αἱ ὁποῖαι ἔγιναν μεταξὺ τῶν Σπ. Βαρβιτσιώτου (ἐν Ἀθήναις) καὶ Ν. Μέρμηγκα (ἐν Πειραιεῖ) νὰ συνταχθοῦν α') ὁ λογαριασμὸς τοῦ πρώτου εἰς τὰ βιβλία τοῦ δευτέρου· β') ὁ λογαριασμὸς τοῦ δευτέρου εἰς τὰ βιβλία τοῦ πρώτου· γ') νὰ περατωθοῦν καὶ οἱ δύο λογαρισμοὶ αὐτοὶ τὴν 30ὴν Ἀπριλίου καὶ νὰ μεταφερθοῦν εἰς νέους τοιούτους

1916 Ἰανουρίου 1. Ὁ Ν. Μέρμηγκας ἐδικαιοῦτο νὰ λάβῃ παρὰ τοῦ Σπ. Βαρβιτσιώτου ὑπόλοιπον ἐκ προηγουμένου λογαριασμοῦ δρ. 2800, 40.

1916 Ἰανουαρίου 4. Ὁ Σπ. Βαρβιτσιώτης ἔλαβε παρὰ τοῦ Ν. Μέρμηγκα ἐμπορεύματα ἀξίας. 140,80

1916 Ἰανουαρίου 10. Ὁ Σπ. Βαρβιτσιώτης ἀπέστειλεν εἰς τὸν Ν. Μέρμηγκαν γραμμάτιον λῆγον τῇ 1 Σεπτεμβρίου δρ. 500.

1916 Φεβρουαρίου 6. Ὁ Ν. Μέρμηγκας ἀπέστειλεν εἰς Σπ. Βαρβιτσιώτην ἐμπορεύματα ἀξίας δρ. 450.
1916 Μαρτίου 7. Ὁ Ν. Μέρμηγκας ἀπέστειλεν εἰς Σπ. Βαρβιτσιώτην ἐμπορεύματα ἀξίας δρ. 670,20.
1916 Μαρτίου 26. Ὁ Σπ. Βαρβιτσιώτης ἐπλήρωσεν εἰς Ν. Μέρμηγκαν μετρητὰς δρ. 500.
1916 Ἀπριλίου 3. Ὁ Σπ. Βαρβιτσιώτης ἐπλήρωσεν εἰς τὴν Ἐθνικὴν Τράπεζαν συναλλαγματικὴν εἰς βάρος τοῦ Ν. Μέρμηγκα δρ. 250.
1916 Ἀπριλίου 12. Ὁ Ν. Μέρμηγκας ἀπέστειλεν εἰς Σπ. Βαρβιτσιώτην ἐμπορεύματα ἀξίας δρ. 680,20.
1916 Ἀπριλίου 21. Ὁ Σπ. Βαρβιτσιώτης ἀπέστειλεν εἰς Ν. Μέρμηγκαν γραμμάτιον εἰς βάρος ἑαυτοῦ δρ. 530.

§ **118. Ἐνεργητικόν, Παθητικόν, Κεφάλαιον.**— α′) Πᾶς ἔμπορος δύναται νὰ ὑπαχθῇ εἰς μίαν τῶν ἑξῆς κατηγοριῶν· 1) ἐπαρκεῖ διὰ τῶν ἰδικῶν του κεφαλαίων πρὸς διεξαγωγὴν τῶν ἐμπορικῶν αὐτοῦ ἐπιχειρήσεων· 2) ἐκτὸς τῶν ἰδικῶν του κεφαλαίων ἀναγκάζεται νὰ προστρέξῃ καὶ εἰς ξένα τοιαῦτα κατὰ τὴν ἀρχὴν ἢ κατὰ τὴν πρόοδον τῶν ἐπιχειρήσεών του· 3) διεξάγει τὰς ἐπιχειρήσεις του διὰ ξένων μόνον κεφαλαίων.

Κατὰ τὰς τρεῖς περιπτώσεις τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον διαχειρίζεται ἀποτελεῖται ἀπὸ μετρητὰ χρήματα, ἐμπορεύματα, γραμμάτια, ἀκίνητα, ἐμπορεύματα ἐν γένει, ἔπιπλα, ἐργαλεῖα κλπ. 5

β′) *Ἐνεργητικὸν* ἑνὸς ἐμπόρου καλεῖται τὸ σύνολον τῶν πραγμάτων, τὰ ὁποῖα αὐτὸς κατέχει ὡς μετρητά, ἐμπορεύματα, ἔπιπλα, συναλλαγματικὰς κ.λ.π. καθὼς καὶ τὰ χρεωστικὰ ὑπόλοιπα τῶν εἰς τὰ βιβλία του λογαριασμῶν ἄλλων.

Παθητικὸν ἑνὸς ἐμπόρου καλεῖται τὸ σύνολον τῶν ποσῶν, τὰ ὁποῖα αὐτὸς ὀφείλει εἰς ἄλλους ὑπὸ οἱανδήποτε μορφήν.

Κεφάλαιον ἑνὸς ἐμπόρου κατά τινα ἐποχὴν καλεῖται ἡ διαφορὰ τοῦ Ἐνεργητικοῦ του κατὰ τὴν ἐποχὴν αὐτὴν ἀπὸ τοῦ Παθητικοῦ του.

Κατὰ ταῦτα, τὸ κεφάλαιον ἑνὸς ἐμπόρου κατά τινα ἐποχὴν παριστάνει τὴν καθαρὰν περιουσίαν του, ἡ ὁποία κατὰ τὴν ἐποχὴν αὐτὴν εἶνε διατεθειμένη εἰς τὰς ἐμπορικάς του ἐπιχειρήσεις.

Ὅταν ὁ ἔμπορος ἐπαρκῇ διὰ τῶν ἰδικῶν του κεφαλαίων καὶ οὐδὲν ὀφείλει εἰς τρίτους, τὸ κεφάλαιόν του ἀποτελεῖται ἀπὸ ὁλόκληρον τὸ Ἐνεργητικόν του.

Ὅταν ὁ ἔμπορος ἐκτὸς τῶν ἰδικῶν του κεφαλαίων ἔχῃ προστρέξει καὶ εἰς ξένα τοιαῦτα, τὸ κεφάλαιόν του ἀποτελεῖται ἀπὸ μέρος μόνον τοῦ ἐνεργητικοῦ του, τοῦ ἄλλου ὀφειλομένου εἰς ἄλλους. Ὅταν δὲ διεξάγῃ τὰς ἐπιχειρήσεις του διὰ ξένων μόνον κεφαλαίων, ὁλόκληρον τὸ Ἐνεργητικόν του ὀφείλει εἰς ἄλλους καὶ ἑπομένως δὲν ἔχει κεφάλαιον.

γ') Διὰ νὰ παραστήσωμεν τὸ Ἐνεργητικὸν καὶ Παθητικόν, καταστρώνομεν αὐτὰ εἰς πίνακα διῃρημένον εἰς δύο μέρη κατὰ τὸν τύπον τοῦ λογαριασμοῦ. Τὸ μὲν ἐνεργητικὸν ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν χρέωσιν, τὸ δὲ Παθητικὸν πρὸς τὴν πίστωσιν, ὡς κάτωθι φαίνεται.

Ἐνεργητικόν	Δρχ.	Λ.	*Παθητικόν*	Δρχ,	Λ.
Μετρητὰ	2000	—	Πιστωτικὰ ὑπόλοιπα λογαριασμῶν	6000	—
Ἐμπορεύματα	6000	—	Κεφάλαιον	28000	—
Ἀκίνητα	20000	—			
Χρεωστικὰ ὑπόλοιπα λογαριασμῶν	7000	—			
Ἐν ὅλῳ	34000	—	Ἐν ὅλῳ	34000	—

Αἱ 34000 δρ. (ἀριστερὰ) παριστάνουν τὸ Ἐνεργητικόν, ἀποτελούμενον ἀπὸ διαφόρους ἀξίας καὶ ποσὰ ὀφειλόμενα ὑπὸ τρίτων, ἤτοι ὁλόκληρον τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον διαχειριζόμεθα. Αἱ 6000 δρ. παριστάνουν τὸ Παθητικόν· ἤτοι ὅσα ποσὰ ὀφείλομεν εἰς διάφορα πρόσωπα. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἐνεργητικοῦ ἀφαιρέσωμεν τὸ Παθητικόν, θέλομεν εὕρει τὸ καθαρὸν κεφάλαιον· ἐκτελοῦντες τὴν ἀφαίρεσιν 34000—6000 εὑρίσκομεν κεφάλαιον ἐκ δραχμῶν 28000.

Διὰ νὰ ἐξισώσωμεν τὸν ἀνωτέρω πίνακα, θεωρούμενον ὡς λογαρισμόν, δηλαδὴ διὰ νὰ καταστήσωμεν τὰ ποσὰ τοῦ Ἐνεργητικοῦ καὶ Παθητικοῦ ἴσα, γράφομεν εἰς τὸ μέρος τοῦ Παθητικοῦ τὸ Κεφάλαιον τῶν 28000 δραχ., ὡς ἀνωτέρω, καὶ τὸ τελικὸν ἄθροισμα γράφομεν εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος μετὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ Ἐνεργητικοῦ, ὡς καὶ εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα φαίνεται.

Ἐὰν οὐδὲν παθητικὸν ἔχωμεν, ἀλλὰ μόνον Ἐνεργητικόν, τότε αὐτὸ εἶνε καὶ τὸ Κεφάλαιον, τὴν δὲ θέσιν τοῦ Παθητικοῦ λαμβάνει τὸ Κεφάλαιον. Ἐὰν συμβαίνῃ τοὐναντίον, τότε τὸ Κεφάλαιον λαμβάνει τὴν θέσιν τοῦ Ἐνεργητικοῦ.

Ἐὰν τὸ Ἐνεργητικὸν εἶνε ἴσον πρὸς τὸ Παθητικόν, οὐδὲν Κεφάλαιον μένει ὑπὲρ τοῦ ἐμπόρου. Ἐὰν τὸ Ἐνεργητικὸν εἶνε μικρότερον τοῦ παθητικοῦ, λέγομεν ὅτι ὁ ἔμπορος εἶνε χρεώστης τῆς διαφορᾶς τοῦ Ἐνεργητικοῦ ἀπὸ τοῦ Παθητικοῦ.

Π. χ. ἐὰν τὴν 1ην Ἰανουαρίου 1915 ἡ κατάστασις τοῦ Νικ. Δαρίβα ἦτο ὡς ἑξῆς:

Ἐνεργητικὸν	δρ.	10852,80
Παθητικὸν	»	15800

συνάγομεν ὅτι ἦτο χρεώστης τῆς διαφορᾶς 15800 — 10852,80 = 4947,20 δρχ.

§ **119. Κέρδη, Ζημίαι.**—

α΄) Ἔστω ὅτι κατὰ τὸ τέλος μὲν τοῦ ἔτους 1914 τὸ Κεφάλαιον ἑνὸς ἐμπόρου ἀνήρχετο εἰς 30850 δραχμάς, εἰς τὸ τέλος δὲ τοῦ 1915 ἀνήρχετο εἰς 42500 δρ., ηὐξήθη δηλαδὴ τὸ Κεφάλαιον τοῦ ἐμπόρου αὐτοῦ ἐν διαστήματι ἑνὸς ἔτους κατὰ τὴν διαφορὰν 42500—30850=11650 δραχμάς. Τὸ ποσὸν αὐτὸ τῶν δραχμῶν *κέρδος* τοῦ ἐμπόρου λέγεται τούτου κατὰ τὸ ἔτος 1915.

Ἐν γένει, καλοῦμεν *κέρδος* ἑνὸς ἐμπόρου εἰς ἓν ὡρισμένον χρονικὸν διάστημα τὴν αὔξησιν τοῦ Κεφαλαίου τοῦ ἐμπόρου ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ χρονικοῦ αὐτοῦ διαστήματος μέχρι τέλους αὐτοῦ, ἐὰν ὑπάρχῃ τοιαύτη.

β΄) Τὸ κεφάλαιον ἑνὸς ἐμπόρου ἦτο κατὰ μὲν τὴν 30ήν Ἰουνίου 1915 δραχμαὶ 25700, κατὰ δὲ τὴν 1ην Ἰανουαρίου 1816 ἦτο 20000 δρχ.· δηλαδὴ κατὰ τὸ διάστημα τῆς ἑξαμηνίας ἠλαττώθη τὸ Κεφάλαιον τοῦ ἐμπόρου αὐτοῦ κατὰ 5700 δραχμάς. Ἡ διαφορὰ αὕτη λέγεται *ζημία* τοῦ ἐν λόγῳ ἐμπόρου κατὰ τὴν ἑξαμηνίαν ταύτην. 5

Ἐν γένει, καλοῦμεν *ζημίαν* ἑνὸς ἐμπόρου εἰς ἓν ὡρισμένον χρονικὸν διάστημα τὴν ἐλάττωσιν, τὴν ὁποίαν παθαίνει τὸ Κεφάλαιον αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς μέχρι τέλους τοῦ χρονικοῦ τούτου διαστήματος.

Ἐὰν εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ τέλος ἑνὸς χρονικοῦ ὡρισμένου διαστήματος τὸ Κεφάλαιον ἑνὸς ἐμπόρου εἶνε τὸ αὐτό, λέγομεν ὅτι ὁ ἔμπορος δὲν ἔχει οὔτε κέρδος οὔτε ζημίαν.

§ **120. Ἀπογραφή, Ἰσολογισμός.**—

α΄) *Ἀπογραφὴ* καλεῖται πίναξ, περιέχων λεπτομερῶς ἀναγεγραμμένα κατ᾿ εἶδος, ποσότητα καὶ ἀξίαν τὰ μέρη τοῦ Ἐνεργητικοῦ καὶ Παθητικοῦ.

Διὰ τὸν καταρτισμὸν τῆς Ἀπογραφῆς εἶνε ἀνάγκη νὰ γίνῃ ἀκριβὴς καὶ λεπτομερὴς καταγραφή· 1) πάντων τῶν ὑπαρχόντων ἐμπορευμάτων· 2) τῶν ὑπαρχόντων ἐπίπλων· 3) τῶν μετρητῶν χρημάτων εἰς τὸ ταμεῖον· 4) τῶν ὑπαρχόντων πρὸς εἴσπραξιν γραμματίων· 5) τῶν χρεωστικῶν ὑπολοίπων τῶν λογαριασμῶν· ἐπίσης των πιστωτικῶν ὑπολοίπων καὶ τῶν πληρωτέων γραμματίων.

Ἐκ τοῦ ἀποτελέσματος τῆς ἐργασίας αὐτῆς καταρτίζομεν ἀκολούθως τὸν πίνακα, ὁ ὁποῖος περιέχει τὰ μέρη τοῦ Ἐνεργητικοῦ καὶ τοῦ Παθητικοῦ.

Ὡς γνωστόν, ἡ διαφορὰ τοῦ Παθητικοῦ ἀπὸ τοῦ Ἐνεργητικοῦ δίδει τὸ Κεφάλαιον. Διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ λέγωμεν *Ἀπογραφὴν* τὴν ὅλην ἐργασίαν, διὰ τῆς ὁποίας προσδιορίζομεν τὸ Κεφάλαιον ἑνὸς ἐμπόρου κατά τινα ἐποχήν.

Ὅτι ἡ Ἀπογραφὴ ἔχει σπουδαίαν σημασίαν διὰ πάντα ἔμπορον εἶνε φανερόν. Διότι δι' αὐτῆς γνωρίζει ὁ ἔμπορος ὄχι μόνον τὸ Κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον αὐτὸς ἔχει κατά τινα ἐποχήν, ἀλλὰ καὶ τὸν τρόπον κατὰ τὸν ὁποῖον τοῦτο ἀποτελεῖται. Ἐξ ἄλλου διὰ τῆς συγκρίσεως τῶν Ἀπογραφῶν μεταξὺ αὐτῶν εὑρίσκει ὁ ἔμπορος ἂν ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα, τὸ παρεμπῖπτον μεταξὺ τῶν Ἀπογραφῶν. Διὰ τοῦτο ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ Νόμου, ἵνα ὁ ἔμπορος συντάσσῃ Ἀπογραφήν· 1) κατὰ τὴν ἵδρυσιν τοῦ ἐμπορικοῦ αὐτοῦ καταστήματος· 2) κατὰ τὸ τέλος καθενὸς ἔτους, ἢ ἑξαμηνίας· 3) εἰς ἄλλας ἐκτάκτους περιστάσεις· π. χ. ἐν περιπτώσει θανάτου τοῦ ἐμπόρου, πτωχεύσεως αὐτοῦ διαλύσεως ἢ διαδοχῆς τῆς ἐπιχειρήσεως κ.λ.π.

β') Ἐπειδὴ ἡ Ἀπογραφὴ καταλαμβάνει συνήθως πολλὰς σελίδας, διότι εἶνε λεπτομερής, διὰ τοῦτο συντάσσεται μεθοδικὴ περίληψις αὐτῆς ἡ ὁποία καλεῖται *Ἰσολογισμός*.

Ὁ Ἰσολογισμὸς εἶνε πίναξ, ἀποτελούμενος ἐκ δύο μερῶν. Εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος φέρει τὸν τίτλον «*Ἐνεργητικόν*», εἰς δὲ τὸ δεξιὸν τὸν τίτλον «*Παθητικόν*». Εἰς μὲν τὸ πρῶτον μέρος ἐγγράφομεν ἐν περιλήψει πᾶν ὅ,τι ἀνήκει εἰς τὸ Ἐνεργητικόν, εἰς δὲ τὸ δεύτερον πᾶν ὅ,τι ἀνήκει εἰς τὸ Παθητικόν.

Ἐκτελοῦμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Ἰσολογισμοῦ, προσθέτοντες εἰς τὸ Παθητικὸν αὐτοῦ τὴν διαφορὰν τοῦ Ἐνεργητικοῦ καὶ Παθητικοῦ, ἤτοι τὸ Κεφάλαιον· ἀκολούθως προσθέτομεν τὰ ποσὰ τῶν δύο μερῶν τοῦ Ἰσολογισμοῦ χωριστὰ καθενός, καὶ γράφομεν τὰ ἴσα ἀθροίσματα εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος, σύρομεν δ' ὑποκάτω διπλῆν ὁριζοντίαν γραμμήν.

Παράδειγμα. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τῆς Ἀπογραφῆς ἔχει ὡς ἑξῆς.

Εὑρέθησαν ἐμπορεύματα ἀπώλητα Δρ. 4000.

Ἡ σημερινὴ ἀξία τῶν ἐπίπλων εἶνε ἠλαττωμένη τῆς παλαιᾶς των ἀξίας, ἕνεκα τῆς φθορᾶς τὴν ὁποίαν ἔπαθον κατὰ 5 °/₀. Ἤτοι Δρ. 2375.

Εἰς τὸ χαρτοφυλάκιον ὑπάρχει ἓν γραμμάτιον ἀποδοχῆς Κ. Θεοδώρου, λῆγον τῇ 15 Ἰανουαρίου Δρ. 270.

Εἰς τὸ ταμεῖον ὑπάρχουν μετρητὰ Δρ. 5400.

Ἐκ τοῦ βιβλίου λογαριασμῶν ἔχομεν τὰ ἑξῆς ἐξαγόμενα.

Χρεῶσται

Δ. Μαρκίδης	Δρ. 100.
Π. Μανοῦσος	» 720.
Κ. Θανόπουλος	» 2060.
Δ. Πετρίδης	» 100.

Πιστωταί

Κ. Γεωργιάδης	Δρ. 950.
Μ. Λάμπρος	» 2500.
Ὑπάρχει ἓν γραμμάτιον εἰς βάρος μας ἐν κυκλοφορίᾳ	» 600.

Ἐκ τῶν ἄνω στοιχείων συντάσσομεν τὴν Ἀπογραφήν, ἀναγράφοντες εἰς ἰδιαίτερον μέρος τὰς εἰς τὸ Ἐνεργητικὸν ἀνηκούσας ἐκ τῶν ἀνωτέρω πράξεων καὶ εἰς ἄλλο τὰς εἰς τὸ Παθητικὸν ἀλλὰ μετὰ τῆς αὐτῆς λεπτομερείας, ὡς ἄνω. 5

Μετὰ τὸ πέρας τῆς ἀπογραφῆς καὶ ὑποκάτω αὐτῆς κάμνομεν τὴν περίληψίν της, ἤτοι τὸν Ἰσολογισμόν, τὸν ὁποῖον καὶ ἐξισοῦμεν, καθὼς φαίνεται καὶ εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα.

ΑΠΟΓΡΑΦΗ ΤΗΣ 31 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 1915.

Α΄. Ἐνεργητικόν

	Δρ.	Λ.
Ἐμπορεύματα εὑρεθέντα ἀπώλητα	4000	—
Ἀξία ἐπίπλων σημερινή, ἠλαττωμένη τῆς παλαιᾶς τοιαύτης ἕνεκα φθορᾶς κατὰ 5 °/₀	2375	—
Γραμμάτιον ἐν τῷ χαρτοφυλακίῳ ἀποδοχῆς Κ. Θεοδώρου, λῆγον τῇ 15 Ἰανουαρίου	270	—
Μετρητὰ ἐν τῷ ταμείῳ	5400	—
Χρεῶσται		
Δ. Μαρκίδης	100	—
Π. Μανοῦσος	720	—
Κ. Θανόπουλος	2060	—
Δ. Πετρίδης	100	—
Ἐν ὅλῳ	15025	—

Β' Παθητικόν

Πιστωταί

	Δρ.	Λ.
Κ. Γεωργιάδης	950	—
Μ. Λάμπρος	2500	—
Γραμμάτιον εἰς βάρος μας ἐν κυκλοφορίᾳ	600	—
	4050	—
Κεφάλαιον σημερινόν	10975	—
Ἐν ὅλῳ	15025	—

Ἰσολογισμός.

Ἐνεργητικόν	Δρ.	Λ.	*Παθητικόν*	Δρ.	Λ.
Ἐμπορεύματα	4000	—	Γραμμάτια πληρωτέα	600	—
Ἔπιπλα	2375	—	Πιστωταὶ	3450	—
Μετρητὰ	5400	—	Κεφάλαιον	10975	—
Γραμμάτια εἰσπρακτέα	270	—			
Χρεῶσται	2980	—			
	15025	—		15025	—

Ἡ Ἀπογραφὴ καὶ ὁ Ἰσολογισμὸς συντάσσονται κατ' ἀρχὰς προχείρως ἐπὶ προχείρου χάρτου καὶ ἀκολούθως μεθοδικῶς, καθὼς ἀνωτέρω, γράφονται δὲ εἰς εἰδικὸν βιβλίον, τὸ ὁποῖον καλεῖται *βιβλίον «Ἀπογραφῶν»*.

Πᾶς ἔμπορος ὀφείλει νὰ γράφῃ ὑπεράνω τῆς Ἀπογραφῆς, ἢ κάτω τοῦ Ἰσολογισμοῦ, τὴν χρονολογίαν κατὰ τὴν ὁποίαν ταῦτα ἔγιναν, νὰ βεβαιώνῃ δ' ὅτι ἡ Ἀπογραφὴ καὶ ἡ ὁ Ἰσολογισμὸς συνετάχθησαν ἐπὶ τῇ βάσει καὶ συμφώνως πρὸς τὰ λογιστικὰ αὐτοῦ βιβλία, θέτων προσέτι τὴν ὑπογραφήν του εἰς τὸ τέλος.

§ 121. Λογιστικὰ βιβλία.—

Καλοῦνται *λογιστικὰ βιβλία* ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ ἔμπορος ἐγγράφει μεθοδικῶς τὰς διαφόρους ἐμπορικὰς πράξεις, τὰς ὁποίας ἐνεργεῖ καθ' ἡμέραν, καὶ διὰ τῶν ὁποίων δύναται ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν νὰ γνωρίζῃ τὴν οἰκονομικήν του κατάστασιν.

Τὰ λογιστικὰ βιβλία χρησιμεύουν ἀκόμη, διὰ ν' ἀποδεικνύῃ ὁ ἔμπορος τὰς ὑπ' αὐτοῦ ἐνεργουμένας δικαίας ἐμπορικὰς πράξεις. Διὰ ταῦτα ὑποχρεοῦται ὁ ἔμπορος ὑπὸ τοῦ Νόμου, ὄχι μόνον νὰ τηρῇ τοιαῦτα βιβλία, ἀλλὰ καὶ νὰ τὰ τηρῇ καθ' ὡρισμένας διατυπώσεις· πρὸς δὲ τάσσεται συνέπεια τῆς μὴ τηρήσεώς των κατὰ τὰς διατυπώσεις ταύτας· 1) ὅτι δὲν δύναται νὰ κάμῃ χρῆσιν τοῦ πλεονεκτήματος τοῦ ν' ἀπνδεικνύῃ δι' αὐτῶν τὰς δικαιοπραξίας του, ἐὰν τοῦ παρουσιασθῇ ἀνάγκη· 2) ὅτι δύναται νὰ κηρυχθῇ ἔνοχος δολίας χρεωκοπίας καὶ ἐν περιπτώσει κατὰ τὴν ὁποίαν τοῦ συμβῇ τοιαύτη, ὄχι δολία ἴσως

Τὰ ὑπὸ ταῦ Νόμου ὑποχρεωτικὰ βιβλία εἶνε τὰ ἑξῆς τρία· τὸ *Ἡμερολόγιον*, τὸ βιβλίον τῶν *Ἀπογραφῶν*, τὸ τῆς *Ἀντιγραφῆς τῶν ἐπιστολῶν*. Ἐκτὸς τούτων τηροῦν οἱ ἔμποροι καὶ ἄλλα βιβλία προαιρετικῶς, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς καὶ ὁ τύπος ποικίλει ἀναλόγως τῆς ἐπιχειρήσεως καὶ τῶν ἀναγκῶν τῆς Λογιστκῆς.

Τοιαῦτα εἶνε π. χ. τὸ «*Πρόχειρον*», τὸ «*Καθολικόν*», τὸ «*Ταμεῖμεῖον*» καὶ ἄλλα.

Τὰ ὑποχρεωτικὰ βιβλία πρέπει νὰ τηροῦνται κατὰ τὰς ἑξῆς νομίμους διατάξεις. 1) πρέπει πρὸ τῆς χρήσεώς των νὰ εἶνε βιβλιοδετημένα, ἠριθμημένα καὶ μονογραφημένα ὑπὸ τῆς ἁρμοδίας Ἀρχῆς (τοῦ προέδρου τῶν Πρωτοδικῶν, ἢ τοῦ εἰρηνοδίκου)· 2) Πρέπει νὰ τηροῦνται εἰς τὴν ἑλληνικὴν γλῶσσαν· 3) αἱ διάφοροι πράξεις πρέπει νὰ ἐγγράφωνται εἰς αὐτὰ κατὰ χρονολογικὴν σειράν, ἄνευ κενῶν διαστημάτων, διορθώσεων, παρεγγραφῶν, προσθήκης ἢ ἀφαιρέσεως φύλλων 4) ἐὰν συμβῇ λάθος τι, τοῦτο διορθώνεται διὰ νέας ἐγγραφῆς καταλλήλου, γινομένης κατὰ τὴν ἡμέραν κατὰ τὴν ὁποίαν ἀνακαλύπτεται τοῦτο· 5) πρέπει νὰ εἶνε νομίμως χαρτοσημασμένα. Μόνον τὸ βιβλίον τῆς Ἀντιγραφῆς τῶν ἐπιστολῶν δὲν ὑπόκειται εἰς τὰς διατυπώσεις αὐτάς, ἐπειδὴ δύναται νὰ ἐξελεγχθῇ διὰ τῶν ἀνταλλασσομένων ἐπιστολῶν. 5

§ **122. Πρόχειρον.**—

Πρόχειρον καλεῖται τὸ βιβλίον, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ ἔμπορος σημειώνει προχείρως τὰς εἰς τὸ κατάστημά του καθ' ἡμέραν διεξαγομένας πράξεις κατὰ τὴν χρονολογικὴν σειρὰν κατὰ τὴν ὁποίαν γίνονται. Τὸ βιβλίον τοῦτο τηρεῖται κατὰ θέλησιν, ἀρκεῖ νὰ ἐξιστορῆται εἰς αὐτὸ σαφῶς καθεμία πρᾶξις. Διὰ τοῦτο καὶ ὁ τύπος αὐτοῦ ποικίλει εἰς τοὺς διαφόρους ἐμπορικοὺς οἴκους. Ἐν τούτοις εἰς πάντα τύπον Προχείρου, σχεδὸν πάντοτε, καθεμῖα ἐγγραφομένη πρᾶξις συνοδεύεται ὑπὸ τῆς ἡμερομηνίας κατὰ τὴν ὁποίαν ἐγένετο, καὶ φέρει ἕνα αὔξοντα ἀριθμὸν πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν ἄλλων τοιούτων.

Ὁ μᾶλλον ἐν χρήσει τύπος προχείρου εἶνε ὁ κάτωθι.

Πρόχειρον.

Τῇ 1η Ὀκτωβρίου 1915.

1) Κατέθεσα κεφάλαιον εἰς μετρητὰ 20000.

——————— τῇ αὐτῇ ———————

2) Ἠγόρασα διάφορα ἔπιπλα, ὡς φαίνεται λεπτομερῶς εἰς τὸν σχετικὸν λογαριασμὸν ὑπ' ἀριθ. 1 . . . . Δρ. 2450.

τῇ αὐτῇ

3) Ἠγόρασα διάφορα εἴδη γραφικῆς ὕλης Δρ. 124

τῇ 2ᾳ ἰδίου

4) Ἠγόρασα ἀπὸ Πυρρῆν καὶ Σίαν 20 βαρέλια ἐλαίου 3240 ὀκ. πρὸς 1, 15 τὴν ὀκᾶν . . . . Δρ. 3726

τῇ αὐτῇ

. . . .

Εἰς μεγάλους ἐμπορικοὺς οἴκους τὸ Πρόχειρον ἀναπληροῦται συνήθως ὑπὸ διαφόρων προχείρων βιβλίων, καθὲν τῶν ὁποίων περιλαμβάνει ἰδιαίτερον τμῆμα ἐργασίας. Οὕτω πρόχειρα βιβλία εἰς πλεῖστα τῶν ἐπιχειρήσεων εἶνε τὰ ἑξῆς π. χ.

Βιβλίον ταμείου διὰ τὰς εἰσπράξεις καὶ τὰς πληρωμάς.

Βιβλίον ἀγορῶν διὰ τὰς ἀγορὰς ἐμπορευμάτων.

Βιβλίον πωλήσεων διὰ τὰς πωλήσεις ἐμπορευμάτων.

Βιβλίον γραμματίων εἰσπρακτέων καὶ πληρωτέων, διὰ τὰ λαμβανόμενα καὶ διδόμενα γραμμάτια.

Βιβλίον ἐξόδων διὰ τὰ διάφορα ἔξοδα.

Βιβλίον διαφόρων πράξεων διὰ τὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι εἰς κανὲν τῶν ἀνωτέρω βιβλίων δὲν δύνανται νὰ ἐγγραφοῦν.

§ 123. Ἡμερολόγιον.—

γ΄) Τὸ *Ἡμερολόγιον* εἶνε οὐσιωδέστερον βιβλίον ἐξ ὅλων ὅσα ἔχει ὁ ἔμπορος. Εἰς αὐτὸ ἐγγράφονται καθ' ἡμέραν πᾶσαι αἱ πράξεις τοῦ ἐμπόρου, ἀγοραί, πωλήσεις, εἰσπράξεις, πληρωμαὶ κλπ., ὡς καὶ αἱ κατὰ μῆνα οἰκιακαί του δαπάναι.

Τὸ Ἡμερολόγιον συγκεντρώνει ὅλας, ἐν γένει τὰς πράξεις τοῦ ἐμπόρου, τὰς ἐγγραφείσας εἰς τὰ πρόχειρα βιβλία καὶ εἰς ὁποιασδήποτε ἄλλας σημειώσεις, ἢ ἔγγραφα, μεταφερομένας δὲ εἰς αὐτὸ ἡσύχως καὶ ἐπισταμένως.

Αἱ πράξεις αὐταὶ διατυποῦνται εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ὑποδεικνύουν σαφῶς καὶ διὰ παχέων γραμμάτων τὸ πρόσωπον, τὸ ὁποῖον ἀφορᾷ ἡ πρᾶξις, καὶ τὸ ὁποῖον ὀφείλει νὰ χρεωθῇ, ἢ νὰ πιστωθῇ. Ἂν π. χ. πωλήσωμεν τὴν 25 8/βρίου εἰς τὸν Πέτρον ἐμπορεύματα ἀξίας 200 δραχμῶν, θὰ σημειώσωμεν τοῦτο εἰς τὸ Πρόχειρον καὶ θὰ μεταφέρωμεν τὴν πρᾶξιν εἰς τὸ Ἡμερολόγιον ὡς ἑξῆς.

25 8/βρίου

Εἰς τὸν Πέτρον πώλησιν ἐμπορευμάτων (λεπτομερῶς εἶδος, ποσόν, τιμὴν . . .) Δρ. 200.

Ἂν εἰσπράξωμεν ἀπὸ τὸν Ἰωάννην τὴν αὐτὴν ἡμέραν 150 δραχμάς, θὰ σημειώσωμεν τοῦτο εἰς τὸ Πρόχειρον, καὶ θὰ μεταφέρωμεν τὴν πρᾶξιν ταύτην εἰς τὸ Ἡμερολόγιον κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον· ἤτοι

———— τῇ αὐτῇ ————

Ἀπὸ Ἰωάννην μετρητὰς 150.

Μεθοδικώτερον ὅμως μεταφέρονται αἱ πράξεις ἐκ τοῦ Προχείρου εἰς τὸ Ἡμερολόγιον, ἐὰν εἰς ὡρισμένην στήλην εἰς αὐτὸ γράψωμεν αὔξοντα ἀριθμὸν τῆς πράξεως, ὡς εἰς τὸ Πρόχειρον διὰ τὴν εὕρεσιν αὐτῆς, πρὸς δὲ εἰς ἄλλην στήλην τὴν σελίδα τοῦ Καθολικοῦ, ἢ τοῦ Ταμείου, εἰς τὴν ὁποίαν μεταφέρεται ἀκολούθως ἐκ τοῦ Ἡμερολογίου. Τὴν τοιαύτην διάταξιν παρέχει τὸ κατωτέρω εἰς τὴν ἀρχὴ τῆς ἑπομένης σελίδος ὑπόδειγμα Ἡμερολογίου.

Ἡ μετάβασις ἀπὸ μιᾶς σελίδος εἰς ἄλλην εἰς τὸ Ἡμερολόγιον γίνεται ὡς ἑξῆς.

Εἰς τὸ τέλος τῆς στήλης τῶν δραχμῶν καὶ λεπτῶν γράφομεν τὸ ἄθροισμα τῶν εἰς τὴν σελίδα ἀναγεγραμμένων ποσῶν καὶ πρὸ τοῦ ἀθροίσματος τούτου τὰς λέξεις «*Εἰς μεταφοράν*»· εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς ἑπομένης σελίδος γράφομεν εἰς τὰς οἰκείας στήλας τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν τῆς προηγουμένης καὶ πρὸ αὐτοῦ τὴν φράσιν «*Ἐκ μεταφορᾶς*», ἀκολούθως δ' ἐξακολουθοῦμεν τὴν ἐγγραφὴν καὶ εἰς τὴν σελίδα αὐτὴν ὡς συνήθως.

Αἱ λέξεις «*Δοῦναι*», καὶ «*Λαβεῖν*», αἱ ὁποῖαι σημειοῦνται εἰς τὰς πράξεις τοῦ Ἡμερολογίου, φανερώνουν ὅτι ὁ λογαριασμὸς τοῦ ἀναφερομένου προσώπου θὰ χρεωθῇ ἢ θὰ πιστωθῇ μὲ τὸ ἀντίστοιχον ποσὸν τῆς πράξεως, ἐὰν αὕτη φέρῃ τὸ «*Δοῦναι*» ἢ τὸ «*Λαβεῖν*». Αἱ πράξεις, αἱ ὁποῖαι οὐδεμίαν τῶν λέξεων αὐτῶν φέρουν εἰς τὸ Ἡμερολόγιον, δὲν ἀπαιτοῦν χρέωσιν ἢ πίστωσιν ἑνὸς προσωπικοῦ λογαριασμοῦ εἰς τὸ Καθολικόν. 5

β') Πρὸς ἀποφυγὴν τῆς εἰς καθεμίαν πρᾶξιν ἀναγραφῆς τῆς λέξεως «*Δοῦναι*» ἢ «*Λαβεῖν*» εἰς τὸ Ἡμερολόγιον, ἐὰν αὐταὶ ἀπαιτοῦν χρέωσιν ἢ πίστωσιν ἑνὸς λογαριασμοῦ, διατίθεται ἐνίοτε εἰδικὴ στήλη διὰ τὴν ἀναγραφὴν τῶν ποσῶν τῶν πράξεων, τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὸ Λαβεῖν, εἰς ἄλλην δὲ στήλην ἀναγράφονται τὰ ποσὰ τῶν πράξεων, αἱ ὁποῖαι δὲν ἀπαιτοῦν χρέωσιν ἢ πίστωσιν ἑνὸς προσωπικοῦ λογαριασμοῦ. Κατὰ τοιοῦτον τρόπον εἶνε διατεταγμένον τὸ κάτωθι ὑπόδειγμα Ἡμερολογίου.

§ 124. Καθολικόν.—

Καθολικὸν καλεῖται τὸ βιβλίον εἰς τὸ ὁποῖον ὁ ἔμπορος ἀνοίγει τοὺς λογαριασμοὺς τῶν διαφόρων προσώπων, μετὰ τῶν ὁποίων συνα-

Σελὶς 1. *Ἡμερολόγιον*

1	Καθ. 3	2 Ὀκτωβρίου 1915.			
		Εἰς Κ. Γεωργιάδην ἀξίαν τιμολ. (Δοῦναι)	1600		
		» » » ἐμέτρησεν ἀμέσως (Λαβεῖν)	1000		
		4 ἰδίου.			
2	Καθ. 4	Ἀπὸ Δ. Μαρκίδην (Λαβεῖν) ἀξίαν ἐμπορευμάτων κατὰ τὸ τιμολόγιον 4	250		
3	Καθ. 2 Ταμ. 7	Ἐθνικὴ Τράπεζα διὰ κατάθεσίν μας σημερινὴν (Δοῦναι)	500		
4	Ταμ. 7	Λιανικὴ πώλησις σημερινὴ	600		
		4 ἰδίου			
5	Καθ.17	Δ. Παυλίδης (Λαβεῖν) διὰ σημερινήν του πληρωμήν	150		
		4 ἰδίου			
6	Καθ.15	Ἀπὸ Κ. Θεοδώρου (Λαβεῖν) διὰ γραμμάτιόν του εἰς βάρος του	360		
		Τῇ αὐτῇ			
7	Ταμ. 7	Πώλησις σημερινὴ	450		

Σελὶς 12 *Ἡμερολόγιον*

			Δοῦναι			*Λαβεῖν*	
			Δρ.	Λ.	Δρ. Λ.	Δρ	Λ
		Ἐκ μεταφορᾶς			12600 —	4842	50
		3 Νοεμβρίου					
57	Καθ. 3	Κ. Γεωργιάδης ἀξίαν ἐμπορευμάτων	1540	80		400—	
		τῇ αὐτῇ					
58	Ταμ. 3	Πώλησις λιανικὴ σημερινὴ	450				
		τῇ αὐτῇ					
59	Καθ. 3 Ταμ. 3	Κ. Γεωργιάδης μετρητὰ				1000	
		τῇ αὐτῇ					
60	Καθ. 2 Ταμ. 7	Ἐθνικὴ Τράπεζα δι' ὅσα ἀπεσύραμεν σήμερον				10000	

λάσσεται ἐμπορικῶς.

Εἰς τὸ Καθολικὸν ἐγγράφονται αἱ διάφοροι πράξεις ὄχι κατὰ χρονολογικὴν σειράν, καθὼς εἰς τὸ ἡμερολόγιον, ἀλλὰ κατὰ λογαριασμούς, δηλαδὴ τὰ διάφορα ποσὰ τῶν χρεώσεων καὶ πιστώσεων μεταφέρονται ἐκ τοῦ Ἡμερολογίου εἰς τὰς ἀντιστοίχους μερίδας (Χρέωσις' Πίστωσις) τῶν εἰς τό Καθολικὸν λογαριασμῶν.

Διὰ τὴν εὔκολον εὕρεσιν τῶν λογαριασμῶν εἰς τὸ Καθολικὸν γίνεται συνήθως χρῆσις βιβλιαρίου, τὸ ὁποῖον καλεῖται « *Εὑρετήριον* » καὶ περιέχει κατ' ἀλφαβητικὴν τάξιν τὰ ὀνόματα τῶν τιτλούχων τῶν διαφόρων λογαριασμῶν καὶ καθὲν μετὰ τῆς σελίδος τὴν ὁποίαν κατέχει εἰς τό Καθολικόν. Αἱ σελίδες αὐταὶ εὑρίσκονται καὶ εἰς τὴν στήλην τῆς παραπομπῆς εἰς τὸ Ἡμερολόγιον.

Διὰ τὴν ταχεῖαν εὕρεσιν τῆς εἰς τὸ Ἡμερολόγιον πράξεως, ἐκ τῆς ὁποίας προέρχεται ἡ εἴς τινα λογαριασμὸν τοῦ Καθολικοῦ συντόμως ἀναγεγραμμμένη, ἀναγράφεται εἰς ἰδιαιτέραν στήλην τοῦ Καθολικοῦ ὁ αὔξων ἀριθμὸς τῆς πράξεως (ἢ ἄλλοτε ἡ σελὶς τοῦ Ἡμερολογίου, εἰς τὴν ὁποίαν εἶνε ἀναγεγραμμένη ἡ πρᾶξις) εἰς τὸ Ἡμερολόγιον.

Παράδειγμα. Κατωτέρω παραθέτομεν μερικοὺς λογαριασμοὺς τοῦ Καθολικοῦ εἰς τοὺς ὁποίους ἔχουν μεταφερθῇ τὰ ποσὰ τῶν χρεώσεων καὶ πιστώσεων ἐκ τοῦ Ἡμερολογίου (§ 123).

Σελὶς 3

Δοῦναι ***Κ. Γεωργιάδης*** ***Λαβεῖν***

1915	Αὔξ.		Δρ.	Λ.	1915	Αὔξ.		Δρ.	Λ,
8/βρ. 2	ἀριθ. 1	Ἀξία ἐμπορευμάτων	1600		8/βρ 2	ἀριθ. 1	Μετρητὰς	1000	

Δοῦναι ***Δ. Παυλίδης*** ***Λαβεῖν***

1915	Αὔξ		Δρ.	Λ.	1915	Αὔξ.		Δρ.	Λ.
	ἀριθ. 1				8/βρ. 12	ἀριθ. 5	Διὰ πληρωμήν του	150	

5

Σελὶς 2

Δοῦναι ***Ἐθνικὴ Τράπεζα*** ***Λαβεῖν***

1915	Αὔξ.		Δρ,	Λ.		Αὔξ.		Δρ.	Λ.
8/βρ.10	ἀριθ. 3	Διὰ κατάθεσίν μας	500			ἀριθ.			

Ἀσκήσεις.

Ἐκ τῶν κάτωθι πράξεων νὰ σχηματισθοῦν α΄) τὸ Ἡμερολόγιον β΄) οἱ προσωπικοὶ λογαριασμοὶ ἐκ τῶν πράξεων αἱ ὁποῖαι θὰ ἐγγραφοῦν εἰς τό Ἡμερολόγιον.

1) 8/βρίου 1. Κατέθεσα κεφάλαιον εἰς μετρητὰ δρ. 10000.

2) Τῇ αὐτῇ. Ἠγόρασα διάφορα ἔπιπλα τοῦ καταστήματος τοῖς μετρητοῖς δρ. 2500

3) 8/βρίου 2. Ἠγόρασα ἐπὶ πιστώσει ἀπὸ Κ. Γεωργιάδην διάφορα ἐμπορεύματα ὡς τὸ ὑπ' ἀριθ. 1 τιμολόγιόν του δρ. 1600

4) 8/βρίου 4. Ἐπώλησα ἐπὶ πιστώσει εἰς Δ. Μαρκίδην διάφορα ἐμπορεύματα δρ. 250.

5) 8/ϐρίου 5. Ἐπλήρωσα διὰ γραφικὴν ὕλην δρ. 20.
6) 8/βρίου 7. Ἐπλήρωσα δι' ἐνοίκιον καταστήματος δρ. 200.
7) 8/βρίου 10. Εἰσέπραξα ἀπὸ τὸν Μαρκίδην ἔναντι λογαριασμοῦ του δρ. 150.
8) 8/βρίου 11. Ἀπεδέχθην δύο συναλλαγματικὰς εἰς διαταγὴν τοῦ Κ. Γεωργιάδου ὡς ἑξῆς.

Συναλλαγματικὴ λήξεως 30 Ν/βρίου δρ. 1000
Συναλλαγματικὴ λήξεως 5 Ἰανουαρίου δρ. 600
Ἐν ὅλῳ δρ. 1600.

9) 8/βρίου 12. Ἠγόρασα ἀπὸ Μ. Λάμπρον διάφορα ἐμπορεύματα ἐπὶ πιστώσει ὡς τὸ ὑπ' ἀριθ. 1 τιμολόγιόν του δρ. 3300.
10) 8/βρίου 18. Ἐπώλησα εἰς διαφόρους διάφορα ἐμπορεύματα τοῖς μετρητοῖς δρ. 120.
11) 8/βρίου 21. Ἔλαβον ἀπὸ τὸν Δ. Μαρκίδην συναλλαγματικὴν εἰς διαταγήν μου, λήγουσαν τῇ 7 Δ/βρίου δρ. 200.
12) 8/βρίου 24. Ἐπώλησα εἰς Π. Μανοῦσον διάφορα ἐμπορεύματα ἐπὶ πιστώσει δρ. 340.
13) 8/βρίου 31. Ἐπλήρωσα τοὺς μισθοὺς τῶν ὑπαλλήλλων μου διὰ τὸν μῆνα 8/βριον δρ. 180.
14) Ν/βρίου 3. Ἐπώλησα εἰς Κ. Θεοδώρου διάφορα ἐμπορεύματα ἐπὶ πιστώσει δρ. 260.
15) Ν/βρίου 7. Ἔλαβον ἀπὸ Π. Μανοῦσον μετρητὰς ἔναντι λογαριασμοῦ του δρ. 100.
16) Ν/βρίου 12. Ἐμέτρησα εἰς Μ Λάμπρον ἀπέναντι λογαριασμοῦ του δρ. 500.
17) Ν/βρίου 20. Ἔλαβον ἐκ τοῦ ταμείου διὰ προσωπικά μου ἔξοδα δρ. 200.
18) Ν/βρίου 27. Ἐπώλησα εἰς διαφόρους ἐμπορεύματα τοῖς μετρητοῖς δρ. 140.
19) Ν/βρίου 30. Ἔλαβον παρὰ τοῦ Κ. Θεωδώρου συναλλαγματικὴν εἰς διαταγήν μου, λήγουσαν τῇ 5 Ἰανουαρίου δρ. 260.
20) Δ/βρίου 1. Ἐπλήρωσα τὴν λήξασαν συναλλαγματικὴν εἰς διαταγὴν τοῦ Κ. Γεωργιάδου δρ. δρ. 1000.
21) Δ/βρίου 2. Ἐπλήρωσα τοὺς μισμοὺς τῶν ὑπαλλήλων τοῦ μηνὸς Ν/βρίου δρ. 180.
22) Δ/βρίου 3. Ἐπλήρωσα διὰ γραφικὴν ὕλην δρ. 10.

§ **123. Ταμεῖον.**—

Ταμεῖον καλεῖται τὸ βιβλίον εἰς τὸ ὁποῖον ὁ ἔμπορος ἐγγράφει μεθοδικῶς ἀφ' ἑνὸς μὲν τὰ καθ' ἡμέραν εἰσερχόμενα εἰς τὸ κατάστημά του χρηματικὰ ποσά, ἤτοι τὰς εἰσπράξεις του, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὰ καθ' ἡμέραν ἐξερχόμενα χρηματικὰ ποσά, ἤτοι τὰς πληρωμάς του.

Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ βιβλίου αὐτοῦ δύναται ὁ ἔμπορος νὰ γνωρίζῃ καθ' οἱανδήποτε στιγμὴν τὰ εἰς τὸ χρηματοκιβώτιόν του εὑρισκόμενα μετρητά.

Ἡ τήρησις τοῦ βιβλίου τοῦ Ταμείου εἶνε ὁμοία μὲ τὴν τοῦ Καθολικοῦ. Αἱ εἰσπράξεις σημειοῦνται εἰς τὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰ μέρος, ἤτοι εἰς τὸ Λαβεῖν. Διὰ καθὲν εἰσπραττόμενον ποσὸν σημειοῦται ἡ ἡμερομηνία εἰς τὴν ἐπὶ τούτῳ στήλην, κατόπιν σαφὴς καὶ σύντομος αἰτιολογικὴ ἔκθεσις ἀναφέρουσα τὸν μετρήσαντα τὸ ποσὸν καὶ τὸν λόγον τῆς εἰσπράξεως ταύτης. Εἰς ἰδιαιτέραν στήλην γράφεται ὁ αὔξων ἀριθμὸς καθεμιᾶς πράξεως, εἰλημμένος ἐκ τοῦ Ἡμερολογίου (ἢ ἡ σελὶς τοῦ Ἡμερολογίου εἰς τὴν ὁποίαν εἶνε ἀναγεγραμμένη ἡ πρᾶξις).

Κατωτέρω παραθέτομεν ὑπόδειγμα Ταμείου τῶν εἰς τὰς ἀσκήσεις τῆς προηγουμένης παραγράφου πράξεων.

Εἰς τὴν στήλην τοῦ αὔξοντος ἀριθμοῦ γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν πράξεων, εἰλημμένους ἐξ αὐτῶν τῶν πράξεων ὡς ἐδόθησαν, ἀλλὰ δύνανται νὰ ληφθοῦν καὶ ἐκ τοῦ Ἡμερολογίου, μετὰ τὴν εἰς αὐτὸ ἐγγραφὴν τῶν πράξεων τούτων.

Ἡ περάτωσις καὶ ἡ μεταφορὰ εἰς τὸ βιβλίον τοῦ Ταμείου γίνεται ἀκριβῶς καθὼς φαίνεται καὶ εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα. 5

Ὡς πρόχειρον τοῦ βιβλίου τοῦ Ταμείου θεωρεῖται ἄλλο βιβλίον, τὸ ὁποῖον καλεῖται *βιβλίον Ἐξόδων*. Εἰς τοῦτο γράφονται προχείρως τὰ διάφορα μικρὰ ἔξοδα τοῦ καταστήματος, ἤτοι γραφικῆς ὕλης, γραμματοσήμων κ.λ.π., τηροῦν δὲ τὸ βιβλίον τοῦτο, διὰ νὰ μὴ φέρουν εἰς τὸ Ταμεῖον τὰ μικρὰ ταῦτα ποσὰ τμηματικῶς. Ὁσάκις λοιπὸν πληρώνει ὁ ταμίας τοῦ καταστήματος τοιαῦτα ἔξοδα, δὲν ἐγγράφει αὐτὰ εἰς πίστωσιν τοῦ βιβλίου τοῦ Ταμείου, ἀλλὰ σημειώνει αὐτὰ μόνον εἰς τὸ βιβλίον τῶν ἐξόδων, καθ' ἑβδομάδα δὲ ἢ κατὰ μῆνα φέρει τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα τῶν ἐξόδων εἰς τὴν πίστωσιν αὐτοῦ τοῦ Ταμείου. Διὰ τοῦτο τὸ βιβλίον τοῦτο εἶνε βοηθητικὸν τοῦ Ταμείου.

Ἀσκήσεις.

1) Σχηματίσατε τὸ Ταμεῖον ἐκ τῶν εἰς τὸ Ἡμερολόγιον (σελ. 235), ἀναγεγραμμένων πράξεων.

2) Ἐκ τοῦ Ἡμερολογίου σας διὰ τὰς πράξεις αἱ ὁποῖαι ἐδόθησαν εἰς σελ. 225, *Ἀσκήσεις*, φέρατε τὴν πρέπουσαν μεταβολὴν τοῦ αὔξοντος ἀριθμοῦ τῶν εἰσπράξεων καὶ πληρωμῶν τοῦ Ταμείου.

Εἰσπράξεις						*Ταμεῖον*					*Πληρωμαί*
1909		Αὔξ. ἀριθ		Δρ.	Λ.	1909		Αὔξ. ἀριθ		Δρ.	Λ.
8/βρ	1	1	Καταθέσεις κεφαλαίου	10000	—	8/βρ.	1	2	Δι' ἀγορὰν ἐπίπλων	2500	—
»	10	7	Ἀπὸ Δ. Μαρκίδην	150	—	»	5	5	Διὰ γραφ. ὕλην	20	—
»	18	10	Πώλησις τοῖς μετρητοῖς	120	—	»	7	6	Δι' ἐνοίκιον καταστήματος	200	—
Ν/βρ	7	15	Ἀπὸ Π. Μανοῦσον	100	—	»	31	13	Διὰ μισθοὺς ὑπαλλήλων	180	—
»	27	18	Πώλησις τοῖς μετρητοῖς	140	—	Ν/βρ.	12	16	Εἰς Μ. Λάμπρον	500	—
						»	20	17	Ἔξοδά μου προσωπικὰ	200	—
					—	Δ/βρ.	1	20	Πληρωμὴ γραμματίου	1000	—
						»	2	21	Μισθοὶ ὑπαλλήλων	180	—
						»	3	22	Γραφικὴ ὕλη	60	—
									Ὑπόλοιπον εἰς νέον	5670	
1910			Ἐν ὅλῳ	10510					Ἐν ὅλῳ	10510	
Ἰαν.	1		Ὑπόλοιπον ὡς ἔναντι	5670	—						

§ 126. Βιβλίον Ἀπογραφῶν καὶ Ἰσολογισμῶν.— Τὸ βιβλίον Ἀπογραφῶν καὶ Ἰσολογισμῶν ἐπιβάλλεται, καθὼς εἴπομεν, ὑπὸ τοῦ Νόμου καὶ χρησιμεύει διὰ νὰ ἐγγράφωμεν εἰς αὐτὰ τὰς διαφόρους Ἀπογραφὰς καὶ τοὺς Ἰσολογισμούς.

Περὶ τοῦ τρόπου τῆς τηρήσεως τοῦ βιβλίου αὐτοῦ εἴδομεν εἰς τὴν σελ. 229—30.

Ἀσκήσεις. Ἐκ τοῦ βιβλίου Καθολικοῦ, τὸ ὁποῖον κατηρτίσατε διὰ τὰς πράξεις αἱ ὁποῖαι ἐδόθησαν εἰς τὴν § 124 *Ἀσκήσεις* καὶ ἐκ τοῦ Ταμείου τῶν αὐτῶν πράξεων (§ 125) νὰ συνταχθῇ ἡ Ἀπογραφὴ καὶ ὁ Ἰσολογισμὸς εἰς τὸ βιβλίον τῶν Ἀπογραφῶν καὶ Ἰσολογισμῶν κατὰ τὸ ὑπόδειγμα τῆς § 118.

§ 127. Βιβλίον ἀντιγραφῆς ἐπιστολῶν.— Εἰς τὸ βιβλίον τῆς ἀντιγραφῆς ἐπιστολῶν, τὸ ὁποῖον ἐπιβάλλεται ὑπὸ τοῦ Νόμου, κρατεῖται ἀντίγραφον τῶν ἐπιστολῶν καὶ τῆς ἐν γένει ἀλληλογραφίας τοῦ ἐμπόρου μετὰ τῶν τρίτων, μετὰ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται εἰς ἐμπορικὰς σχέσεις. Πρὸς τοῦτο γράφεται συνήθως ἡ πρὸς ἀντιγραφὴν ἐπιστολὴ δι' εἰδικῆς μελάνης διὰ γραφίδος ἢ διὰ γραφομηχανῆς, καὶ λαμβάνεται ἀντίγραφον εἰς τὸ βιβλίον διὰ τῆς βοηθείας εἰδικοῦ πιεστηρίου.

Ἀσκήσεις.

1) Ἐκ τῶν κάτωθι πράξεων ἑνὸς καταστήματος, αἱ ὁποῖαι ὑποτίθεται ὅτι εἶνε ἀναγεγραμμέναι εἰς τὸ πρόχειρον νὰ καταρτισθῇ α') τὸ Ἡμερολόγιον τοῦ καταστήματος· β') τὸ Καθολικόν· γ') τὸ Ταμεῖον· δ') ἡ Ἀπογραφὴ καὶ ὁ Ἰσολογισμὸς αὐτοῦ τὴν 31 Μαρτίου τοῦ 1914.

1 Ἰανουαρίου 1914

Κατέθεσα ἐπὶ σκοπῷ ἐμπορίου Δρ. 50000.

2 Ἰανουαρίου

2) Ἠγόρασα τοῖς μετρητοῖς εἴδη ἐπίπλων (βλέπε πρόχειρον ἐπίπλων) ἀντὶ δρ. 500.

3 Ἰανουαρίου

3) Ἠγόρασα τοῖς μετρητοῖς εἴδη γραφικῆς ὕλης (βλέπε πρόχειρον ἐπίπλων) ἀντὶ δρ. 62.

5 Ἰανουαρίου

4) Ἠγόρασα ἐπὶ πιστώσει ἀπὸ τὸν Π. Παυλίδην 20 δέματα μαλλίων πρὸς 400 δρ. καθὲν δρ. 8000.

10 Ἰανουαρίου

5) Ἠγόρασα ἀπὸ Π. Παυλίδην 10 δέματα μαλλίων πρὸς 500 δρ. καθὲν τοῖς μετρητοῖς δρ. 5000.

5

15 Ἰανουαρίου

6) Ἠγόρασα ἀπὸ Π. Παυλίδην 10 δέματα μαλλίων πρὸς 1000 δρ. καθὲν, καὶ ἐπλήρωσα τὴν ἀξίαν των διὰ γραμματίου μου λήγοντος τῇ 15 Ἰουλίου δρ. 10000.

20 Ἰανουαρίου

7) Ἐμέτρησα εἰς Π. Παυλίδην πρὸς ἐξόφλησιν τῶν ἀγορασθέντων μαλλίων τῇ 5 τρέχοντος δρ. 8000.

28 Ἰανουαρίου

8) Ἐπλήρωσα δι' ἐνοίκιον γραφείου καὶ ἀποθήκης ἀπὸ 1ης Ἰανουαρίου μέχρι 31ης Μαρτίου πρὸς 150 δρ. μηνιαίως δρ. 450.

29 Ἰανουαρίου

9) Ἐπλήρωσα διὰ ταχυδρομικὰ τοῦ τρέχοντος μηνὸς δρ. 450.

30 Ἰανουαρίου

10) Ἔλαβον ἐκ τοῦ ταμείου δι' ἔξοδά μου (προσωπικὰ) τοῦ Ἰανουαρίου δρ. 300.

31 Ἰανουαρίου

11) Ἐπλήρωσα διὰ μισθοὺς τῶν ὑπαλλήλων δρ. 300.

5 Φεβρουαρίου

12) Ἠγόρασα παρὰ τῶν κάτωθι τὰ ἑπόμενα ἐπὶ πιστώσει ·α') παρὰ τοῦ Α. Ἀγαθοκλέους 10000 ὀκ. ἀλεύρων πρὸς 50 λεπτὰ τὴν ὀκ. δρ. 5000· β') παρὰ τοῦ Δ. Δημητριάδου 2000 ὀκ. ζαχάρεως πρὸς 1,75 δρ. τὴν ὀκ. δρχ. 3500. Ἐν ὅλῳ δρ. 8500.

10 Φεβρουαρίου

13) Ἐπώλησα ἐπὶ πιστώσει εἰς Τ. Εὐαγγελίδην 5 δέματα μαλλίων πρὸς 1100 δρ. καθὲν δρ. 5500.

15 Φεβρουαρίου

14) Ἐπώλησα εἰς Τ. Εὐαγγελίδην 20 δέματα μαλλίων πρὸς 450 δρ. καθὲν δρ. 9000.

20 Φεβρουαρίου

15 Εἰσέπραξα ἀπὸ Τ. Εὐαγγελίδην ἔναντι τοῦ λογαριασμοῦ του δρ. 5000.

25 Φεβρουαρίου

16) Ἐπώλησα εἰς Τ. Εὐαγγελίδην 10 δέματα μαλλίων πρὸς 1125 δρ. καθέν, καὶ ἔλαβον τὴν ἀξίαν αὐτῶν διὰ γραμματίου εἰς διαταγὴν μου, λῆγον τῇ 6 Αὐγούστου δρ. 11250

28 Φεβρουαρίου

17) Ἐπλήρωσα δι' ἔξοδα λήξαντος μηνὸς (βλέπε πρόχειρον Ταμείου) δρ. 613,50.

1 Μαρτίου

18) Ἐπώλησα εἰς ἑπομένους τὰ κάτωθι.

1) Εἰς Ι. Ἰωαννίδην 30000 ὀκ. σίτου πρὸς 50 λ. τὴν ὀκᾶν, πληρωτέας τῆς ἀξίας του ὡς ἑξῆς

α') τοῖς μετρητοῖς ἐντὸς 10 ἡμερῶν δρ. 10000

β') διὰ γραμματίου « 5000

Ἤτοι δρ. 15000.

2) Εἰς Ζαχαρίαν Νεόφυτον 5000 ὀκ. ἀλεύρου πρὸς 65 λ. τὴν ὀκᾶν τοῖς μετρητοῖς δρ. 3250.

Ἤτοι ἐν ὅλῳ δρ. 18250

10 Μαρτίου

10) Ἔλαβον παρὰ τοῦ Ι. Ἰωαννίδου πρὸς ἐξόφλησιν τοῦ πωληθέντος σίτου τὴν 1ην τρέχοντος

α') εἰς μετρητὰ δρ. 10000

β') εἰς γραμμάτιον εἰς διαταγὴν μας λῆγον τῇ 10 Ἰουλίου δρ. 5000. Ἐν ὅλῳ δρ. 15000.

14 Μαρτίου

20) Εἰσέπραξα παρὰ τοῦ Τ. Εὐαγγελίδου δρ. 9000.

18 Μαρτίου

21) Ἠγόρασα παρὰ τοῦ Φ. Ἡλιοπούλου τὴν 28ην Φεβρ. 30000 ὀκ. σίτου πρὸς 45 λ. τὴν ὀκᾶν, ἐπλήρωσα δὲ τὴν ἀξίαν των τοῖς μετρητοῖς. Τὴν πρᾶξιν ταύτην δὲν ἀνέγραψα τῇ 28 Φεβρουαρίου κατὰ λάθος. δρ. 16000

31 Μαρτίου

22) Ἐπλήρωσα δι' ἔξοδα τοῦ μηνὸς Μαρτίου (βλέπε πρόχειρον Ταμείου). δρ. 610,90.