Στοιχειώδης

Γεωμετρία

Ι. Ν. Χατζηδάκη

ς

ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

Ι. Ν. Χρόνης

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ,ΒΤΓ' ΝΟΜΟΝ

Ι. Ν. Χρόνης

ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΒΔΟΜΗ

Δραχμαί 5.—

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
(8 — Ὁδὸς Λυκούργου — 8).
1906

ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

Ι. Ν. Χρόνη.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ͵ΒΤΓ΄ ΝΟΜΟΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΒΔΟΜΗ

Ι. Ν. Χρόνη.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
(8 — Ὁδὸς Λυκούργου — 8).
1906

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ἰδιόχειρον ὑπογραφήν μου θεωρεῖται ἐκ τυποκλοπίας προερχόμενον.

Ἀριθ. *Πρωτ. 6156* / *Διεκπ.*

Ἐν Ἀθήναις τῇ 29 Ἀπριλίου 1906.

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Πρὸς τὸν κ. Ἰωάννην Χατζιδάκιν.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸν νόμον ͵ΒΤΓ' τῆς 12 Ἰουλίου 1895 περὶ διδακτικῶν βιβλίων τῆς μέσης καὶ δημοτικῆς ἐκπαιδεύσεως, καὶ τὸ Βασιλικὸν Διάταγμα τῆς 10 Ὀκτωβρίου 1895 καὶ τὴν ἔκθεσιν τῆς οἰκείας ἐπιτροπείας τῶν κριτῶν τῶν διδακτικῶν βιβλίων τῶν εἰς τὰ Ἑλληνικὰ σχολεῖα εἰσακτέων, γνωρίζομεν ὑμῖν, ὅτι ἐγκρίνομεν τὴν γνώμην τῆς ἐπιτροπείας ταύτης, ὅπως τὸ ὑμέτερον σύγγραμμα Στοιχειώδης Γεωμετρία, τὸ κατὰ τὸν εἰρημένον νόμον ἐγκριθέν, εἰσαχθῇ ἐν τοῖς δημοσίοις, δημοσυντηρήτοις καὶ ἰδιωτικοῖς ἑλληνικοῖς Σχολείοις ἐπὶ πέντε σχολικὰ ἔτη, ἀπὸ τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1906 - 1911.

Ὁ Ὑπουργὸς
Α. ΣΤΕΦΑΝΟΠΟΥΛΟΣ

Στέφ. Μ. Παρίσης.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Θ. Ν. Χρόνη

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΠΡΩΤΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Τὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα βλέπομεν ἢ ἐγγίζομεν, ἔχουσι **σχῆμα** καὶ ἔκτασιν ἢ **μέγεθος**.

2. **Γεωμετρία** λέγεται ἡ ἐπιστήμη, ἥτις ἐξετάζει τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν.

3. Ὅταν ἐξετάζωμεν μόνον τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν τῶν σωμάτων, καλοῦμεν αὐτὰ **σώματα γεωμετρικὰ** ἢ **στερεά**.

4. Τὰ ἄκρα ἑκάστου σώματος, ὅλα ὁμοῦ, ἀποτελοῦσι τὴν **ἐπιφάνειαν** αὐτοῦ. Καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἔχει σχῆμα καὶ ἔκτασιν· διαφέρει ὅμως ἡ ἔκτασις τῆς ἐπιφανείας ἀπὸ τὴν ἔκτασιν τοῦ σώματος (¹).

5. Τὰ ἄκρα τῆς ἐπιφανείας, ἢ ἑνὸς μέρους τῆς ἐπιφανείας, ἀποτελοῦσιν, ὅλα ὁμοῦ, **γραμμήν**. Καὶ ἡ γραμμὴ ἔχει σχῆμα καὶ ἔκτασιν· διαφέρει ὅμως ἡ ἔκτασις τῆς γραμμῆς ἀπὸ τὴν ἔκτασιν τοῦ σώματος καὶ ἀπὸ τὴν ἔκτασιν τῆς ἐπιφανείας (²).

6. Τὰ ἄκρα τῆς γραμμῆς, ἢ ἑνὸς μέρους τῆς γραμμῆς, λέγονται **σημεῖα**. Τὸ δὲ σημεῖον δὲν ἔχει ἔκτασιν οὔτε μέρη.

7. Πᾶν ὅ,τι ἔχει ἔκτασιν δυνάμεθα νὰ τὸ φαντασθῶμεν διῃρημένον εἰς μέρη.

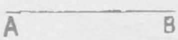
8. Τὸ μέρος εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς μὲ τὸ ὅλον· ἤγουν τὰ μέρη τοῦ σώματος εἶναι σώματα, τὰ μέρη τῆς ἐπιφανείας εἶναι ἐπιφάνειαι καὶ τὰ μέρη τῆς γραμμῆς γραμμαί.

9. Τὰ σημεῖα καὶ αἱ γραμμαὶ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι ἐξετάζονται εἰς τὴν γεωμετρίαν καὶ χωριστὰ καθ' ἕν· ἤγουν **ἄνευ τῶν σωμάτων**, εἰς **τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται**· καθὼς εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ἐξετάζονται οἱ ἀριθμοὶ καὶ ἄνευ τῶν πραγμάτων, τὰ ὁποῖα παριστῶσι.

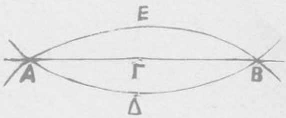
(¹) Ἓν φύλλον χάρτου, ἐὰν νοηθῇ χωρὶς πάχος, δύναται νὰ παραστήσῃ τὴν ἐπιφάνειαν.
(²) Μία κλωστὴ λεπτοτάτη δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γραμμή.

10. Ὅταν ἐξετάζωμεν τὰ στερεὰ καὶ τὰς ἐπιφανείας καὶ τὰς γραμμὰς ὡς πρὸς τὸ σχῆμά των, τὰ λέγομεν, μὲ ἓν ὄνομα, σχήματα· ὅταν δὲ ἐξετάζωμεν αὐτὰ ὡς πρὸς τὴν ἔκτασίν των, τὰ λέγομεν ποσὰ γεωμετρικὰ ἢ μεγέθη.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὰ σημεῖα, τὰς γραμμάς, τὰς ἐπιφανείας καὶ τὰ στερεὰ παριστάνομεν δι' εἰκόνων, αἵτινες λέγονται καὶ αὐταὶ σχήματα. Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ διακρίνωμεν σημεῖόν τι, γράφομεν πλησίον αὐτοῦ γράμμα τι τοῦ ἀλφαβήτου· παραδείγματος χάριν λέγομεν τὸ σημεῖον Α, ἤτοι τὸ σημεῖον, πλησίον τοῦ ὁποίου εἶναι τὸ γράμμα Α.



Ἡ γραμμὴ διακρίνεται συνήθως διὰ δύο γραμμάτων, τὰ ὁποῖα γράφονται εἰς δύο σημεῖα αὐτῆς· παραδείγματος χάριν, ἡ γραμμὴ ΑΒ· ἀλλ' ἐὰν διὰ δύο σημείων διέρχωνται πολλαὶ γραμμαί, μεταχειριζόμεθα πρὸς διάκρισιν αὐτῶν περισσότερα γράμματα· παραδείγματος χάριν, λέγομεν ἡ γραμμὴ ΑΓΒ, ἡ γραμμὴ ΑΔΒ, ἡ ΑΕΒ κτλ.



11. Ἀξίωμα λέγεται πρότασις ἀφ' ἑαυτῆς φανερά· τουτέστι μὴ στηριζομένη ἐπὶ ἄλλης. Παράδειγμα ἔστω τὸ ἑξῆς ἀξίωμα.

Πᾶν σχῆμα δύναται νὰ ἀλλάξῃ θέσιν χωρὶς αὐτὸ διόλου νὰ μεταβληθῇ.

12. Ἀπόδειξις λέγεται ὁ συλλογισμὸς (ἢ πολλοὶ συλλογισμοί), διὰ τοῦ ὁποίου πειθόμεθα, ὅτι πρότασίς τις εἶναι ἀληθής.

Στηρίζεται δὲ ἡ ἀπόδειξις ἐπὶ τῶν ἀξιωμάτων.

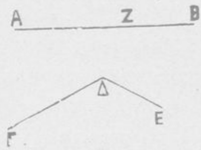
13. Θεώρημα δὲ λέγεται ἡ πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερὰ διὰ τῆς ἀποδείξεως.

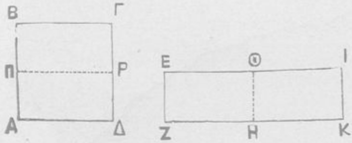
14. Πόρισμα λέγεται πρότασις, ἥτις ἐξάγεται ἀπὸ προηγουμένην τινὰ ἀληθῆ πρότασιν.

Περὶ τῆς ἰσότητος.

15. Ἴσα λέγονται δύο σχήματα, ὅταν δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσι τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ἤτοι νὰ τεθῶσιν οὕτως, ὥστε πᾶν σημεῖον ἑνὸς οἱουδήποτε ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι σημεῖον καὶ τοῦ ἄλλου.

Δυνατὸν εἶναι δύο σχήματα ἀκέραια μὲν νὰ μὴ ἐφαρμόζωσι, νὰ ἐφαρμόζωσιν ὅμως, ἀφοῦ διαιρεθῶσιν εἰς μέρη. Ἂν, παραδείγματος χάριν, ἡ γραμμὴ ΓΔ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς ΑΖ καὶ ἡ ΔΕ ἐπὶ τῆς ΖΒ, αἱ γραμμαὶ ΑΖΒ καὶ ΓΔΕ ἐφαρμόζουσιν, ἀφοῦ διαιρεθῶσιν εἰς μέρη, ἡ μὲν πρώτη εἰς τὰ μέρη ΑΖ, ΖΒ, ἡ δὲ δευτέρα εἰς τὰ ΖΔ, ΔΕ. Ὁμοίως, ἂν ἡ ἐπιφάνεια ΕΖΗΘ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς ΑΔΡΠ καὶ ἡ ΘΙΚΗ ἐπὶ τῆς ΒΓΡΠ, αἱ δύο ἐπιφάνειαι ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΚΙ ἐφαρμόζουσιν, ἀφοῦ διαιρεθῶσιν εἰς μέρη, ἀκέραιαι ὅμως δὲν δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσιν.





Καὶ ὅσα ἐφαρμόζουσιν, ἀφοῦ διαιρεθῶσιν εἰς μέρη, λέγονται καὶ αὐτὰ ἴσα. Ὅταν ὅμως θέλωμεν νὰ διακρίνωμεν αὐτὰ ἀπὸ τὰ ἄλλα (τουτέστιν ἀπὸ τὰ ἐφαρμόζοντα ἀκέραια), καλοῦμεν αὐτὰ ἴσα κατὰ μέρη, ἢ ἴσα τὴν ἔκτασιν, ἢ ἰσοδύναμα.

16. Μικρότερον *ἄλλου λέγεται σχῆμά τι, ἐὰν εἶναι ἴσον πρός τι μέρος αὐτοῦ· τὸ δὲ ἄλλο λέγεται* μεγαλήτερον· *παραδείγματος χάριν, τὸ σχῆμα ΕΖΗΘ εἶναι μικρότερον τοῦ ΑΒΓΔ· τὰ δύο δὲ σχήματα λέγονται τότε* ἄνισα.

Ἀξίωμα τῆς ἰσότητος.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ εἶναι καὶ πρὸς ἄλληλα ἴσα.

Ἐὰν δηλαδὴ δύο σχήματα Α καὶ Β ἐφαρμόζωσι καὶ τὰ δύο ἐπὶ ἄλλου τινὸς Γ, εἴτε ἀκέραια εἴτε διῃρημένα, τὰ σχήματα ταῦτα θὰ ἐφαρμόζωσι καὶ αὐτά, τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου, εἴτε ἀκέραια εἴτε διῃρημένα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Ἡ ἰσότης σημειοῦται ἐν τῇ γεωμετρίᾳ (ὡς καὶ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ) διὰ τοῦ σημείου =, ὅπερ γράφεται μεταξὺ τῶν δύο ἴσων· οἷον ΑΒΓΔ = ΖΕΙΚ· ἡ δὲ ἀνισότης διὰ τοῦ σημείου < εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ ὁποίου γράφεται τὸ μικρότερον· οἷον ΓΔ < ΑΒ.*

Ἰδιότητες τῆς ἰσότητος.

17. Ἡ ἰσότης ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

Ἐὰν εἰς ἴσα προσθέσωμεν ἴσα, καὶ τὰ ἀθροίσματα θὰ εἶναι ἴσα.

Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσα ἀφαιρέσωμεν ἴσα, καὶ τὰ ὑπόλοιπα θὰ εἶναι ἴσα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Καὶ ἡ ἀνισότης ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.*

1) Ἐὰν εἰς ἄνισα προσθέσωμεν ἴσα, καὶ τὰ ἀθροίσματα εἶναι ὁμοίως ἄνισα.

Δηλαδὴ τὸ μεγαλήτερον μένει μεγαλήτερον καὶ τὸ μικρότερον μικρότερον.

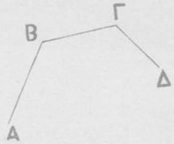
2) Ἐὰν ἀπὸ ἄνισα ἀφαιρέσωμεν ἴσα, καὶ τὰ ὑπόλοιπα εἶναι ὁμοίως ἄνισα.

3) Ἐὰν εἰς ἄνισα προσθέσωμεν ἄνισα, ἀλλὰ τὸ μεγαλήτερον εἰς τὸ μεγαλήτερον καὶ τὸ μικρότερον εἰς τὸ μικρότερον, καὶ τὰ ἀθροίσματα εἶναι ὁμοίως ἄνισα.

Περὶ τῆς εὐθείας γραμμῆς.

18. Εὐθεῖα γραμμὴ *λέγεται ἡ ἁπλουστάτη γραμμή, τῆς ὁποίας τὴν ἰδέαν ὅλοι ἔχομεν.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Ἰδέαν τῆς εὐθείας γραμμῆς λαμβάνομεν, ὅταν βλέπωμεν κλωστὴν ἢ τρίχα λεπτοτάτην τεταμένην (ἢ ἄλλα ὅμοια πράγματα)· ὅσον λεπτότερον εἶναι τὸ τεταμένον νῆμα, τόσον περισσότερον προσεγγίζει πρὸς τὴν εὐθεῖαν γραμμήν.*



19. Τεθλασμένη γραμμὴ *λέγεται ἐκείνη, ἥτις σύγκειται μὲν ἐξ εὐθειῶν, δὲν εἶναι ὅμως εὐθεῖα· τοιαύτη εἶναι ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔ.*

20. Καμπύλη *δὲ γραμμὴ λέγεται ἐκείνη, τῆς ὁποίας κανὲν μέρος δὲν εἶναι εὐθεῖα.*

Ὅτι δὲ ὑπάρχουσι τοιαῦται γραμμαί, τοῦτο θὰ δειχθῇ εἰς τὰ ἑπόμενα.

Μικτὴ δὲ λέγεται ἡ γραμμή, ἐὰν σύγκειται ἐξ εὐθείας καὶ καμπύλης.

Ἀξιώματα τῆς εὐθείας γραμμῆς

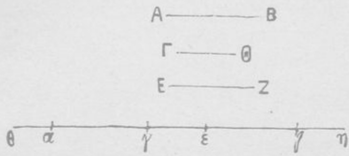
Ἐκ παντὸς σημείου εἰς πᾶν ἄλλο σημεῖον ἄγεται μία εὐθεῖα γραμμὴ καὶ μόνον μία.

Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι μικροτέρα πάσης τεθλασμένης ἐχούσης τὰ αὐτὰ ἄκρα.

Ὁρισμοί.

21. Ἀπόστασις ἢ ἀπόστημα δύο σημείων λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὰ σημεῖα ταῦτα.

22. Ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων εὐθειῶν λέγεται ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσιν αὗται, ὅταν τεθῶσι κατὰ σειρὰν ἐπὶ ἄλλης εὐθείας.



Παραδείγματος χάριν, ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΘ, ΕΖ εἶναι ἡ εὐθεῖα αζ, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς εὐθείας θη τὰ τρία συνεχῆ μέρη αγ, γε, εζ ἴσα πρὸς τὰς δοθείσας εὐθείας ($αγ = ΑΒ$, $γε = ΓΘ$, $εζ = ΕΖ$).

Διαφορὰ δὲ δύο ἀνίσων εὐθειῶν λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἥτις μένει, ὅταν ἀπὸ τὴν μεγαλητέραν ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτῆς ἀποκόψωμεν ἓν μέρος ἴσον μὲ τὴν μικροτέραν.

Παραδείγματος χάριν, ἡ εὐθεῖα γε εἶναι διαφορὰ τῶν εὐθειῶν αε καὶ αγ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ ἄθροισμα δύο γραμμῶν α καὶ β παριστάνομεν ὡς ἑξῆς $α + β$, τὴν δὲ διαφορὰν ὡς ἑξῆς $α — β$. Ὁμοίως $2α$ δηλοῖ τὸ διπλάσιον τῆς α, ἤτοι $α + α$, καὶ $\frac{α}{2}$ τὸ ἥμισυ αὐτῆς.

Περὶ τοῦ ἐπιπέδου.

23. Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἁπλῶς ἐπίπεδον λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζει πανταχοῦ (*), ἤτοι πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἄγεται διὰ δύο οἱωνδήποτε σημείων αὐτῆς, κεῖται ὅλη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰκόνα τῆς ἐπιφανείας ταύτης μᾶς παρέχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἠρεμοῦντος ὕδατος ἢ ἄλλαι ὅμοιαι ἐπιφάνειαι (ὡς τῶν τοίχων, τῶν πατωμάτων τῶν οἰκιῶν, κτλ.).

(*) Οἱ τεχνῖται διὰ νὰ ἴδωσιν, ἂν ἐπιφάνειά τις εἶναι ἐπίπεδος, παρατηροῦσιν, ἂν ὁ κανὼν ἐφαρμόζῃ ἀκριβῶς πανταχοῦ ἐπ' αὐτῆς.

Διαίρεσις τῆς γεωμετρίας.

24. *Ἡ γεωμετρία διαιρεῖται εἰς δύο μέρη. Εἰς τὸ πρῶτον ἐξετάζονται σχήματα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ὅλα ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, εἰς τὸ δεύτερον σχήματα οἱαδήποτε. Λέγεται δὲ τὸ μὲν πρῶτον μέρος* ἐπίπεδος γεωμετρία *ἢ* ἐπιπεδομετρία, *τὸ δὲ δεύτερον* στερεὰ γεωμετρία *ἢ* στερεομετρία.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

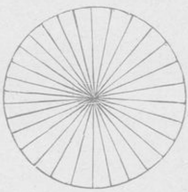
ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

Θ. Ν. Χράπη

ΒΙΒΛΙΟΝ Α'

ΠΕΡΙ ΚΥΚΛΟΥ

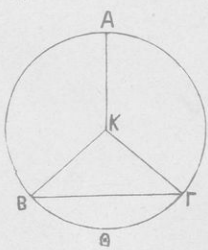
Ὁρισμοί.



25. Κύκλος *λέγεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας ἓν σημεῖον ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ ὅλα τὰ ἄκρα αὐτῆς.*

Τὸ σημεῖον τοῦτο λέγεται κέντρον, *ἡ δὲ γραμμή, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσι τὰ ἄκρα τοῦ κύκλου, λέγεται* περιφέρεια.

Ὁ κύκλος γεννᾶται, ἐὰν μία εὐθεῖα, ὡς ἡ ΚΑ, μένουσα πάντοτε εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, περιστραφῇ περὶ τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς Κ, μέχρις οὗ ἐπιστρέψῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν της· τότε ἡ μὲν εὐθεῖα ΚΑ θὰ γράψῃ τὸν κύκλον, τὸ δὲ ἄλλο ἄκρον αὐτῆς Α θὰ γράψῃ τὴν περιφέρειαν.



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Τὴν περιφέρειαν γράφομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου διὰ τοῦ διαβήτου. Περὶ τοῦ ὀργάνου τούτου θὰ διαλάβωμεν ἐν ἀρχῇ τοῦ Β' Βιβλίου.*

Ἀκτὶς *τοῦ κύκλου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ κέντρου εἰς τὴν περιφέρειαν.*

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ δὲ τοῦ κύκλου ἕπεται, ὅτι πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες αὐτοῦ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Διάμετρος *τοῦ κύκλου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ ἔχει τὰ ἄκρα της ἐπὶ τῆς περιφερείας.*

Πᾶσαι αἱ διάμετροι τοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι· διότι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἀκτίνων.

Τόξον *λέγεται μέρος οἱονδήποτε τῆς περιφερείας, ἡ δὲ τὰ ἄκρα τοῦ τόξου συνδέουσα εὐθεῖα λέγεται* χορδὴ *αὐτοῦ.*

Παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ ἀνωτέρω σχῆμα τόξον μὲν εἶναι τὸ ΒΘΓ, χορδὴ δὲ αὐτοῦ ἡ εὐθεῖα ΒΓ· τὴν αὐτὴν δὲ χορδὴν ἔχει καὶ τὸ τόξον ΒΑΓ.

Τμῆμα κύκλου *λέγεται μέρος αὐτοῦ περιεχόμενον ὑπό τινος τόξου καὶ ὑπὸ τῆς χορδῆς αὐτοῦ· οἷον τὸ σχῆμα ΒΘΓΒ.*

Τομεὺς *δὲ λέγεται μέρος τοῦ κύκλου περιεχόμενον ὑπό τινος τόξου καὶ ὑπὸ τῶν ἀκτίνων, αἵτινες ἄγονται εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου τούτου· οἷον τὸ σχῆμα ΚΒΘΓΚ.*

Ἐὰν φαντασθῶμεν τὴν γένεσιν τοῦ κύκλου ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ περιστρεφομένης πέριξ τοῦ κέντρου, ἐννοοῦμεν ἀμέσως τὴν ἀλήθειαν τῶν ἑξῆς προτάσεων.

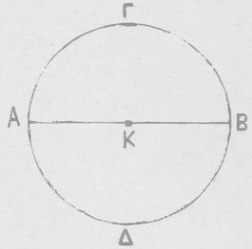
1) Πᾶν σημεῖον τοῦ κύκλου μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς περιφερείας ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον ὀλιγώτερον μιᾶς ἀκτῖνος.

2) Πᾶν σημεῖον ἐκτὸς τοῦ κύκλου κείμενον (εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ) ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον περισσότερον μιᾶς ἀκτῖνος.

3) Δύο κύκλοι ἔχοντες ἴσας ἀκτῖνας εἶναι ἴσοι. Διότι, ὅταν τεθῇ ὁ εἷς ἐπὶ τοῦ ἄλλου, οὕτως ὥστε νὰ συμπέσωσι τὰ κέντρα αὐτῶν, θὰ συμπέσωσι καὶ αἱ ἀκτῖνες ὡς ἴσαι, ἑπομένως θὰ ἐφαρμόσωσι καὶ αἱ περιφέρειαι καὶ οἱ κύκλοι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

26. Πᾶσα διάμετρος διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ.



Ἔστω κύκλος ὁ ΑΓΒΔΑ καὶ διάμετρος αὐτοῦ οἱαδήποτε ἡ ΑΚΒ· λέγω, ὅτι τὰ δύο τόξα ΑΓΒ καὶ ΑΔΒ εἶναι ἴσα, καὶ τὰ δύο τμήματα ΑΚΒΓΑ καὶ ΑΔΒΚΑ ὡσαύτως ἴσα.

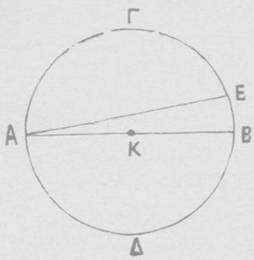
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. *Ἐὰν περιστρέψωμεν τὸ τμῆμα ΑΓΒΚΑ περὶ τὴν διάμετρον ΑΚΒ, μέχρις οὗ πέσῃ εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἄλλου τμήματος ΑΔΒΚΑ, τὸ τόξον ΑΓΒ θὰ ἐφαρ-*

μόση ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΔΒ· διότι, ἂν σημεῖόν τι τοῦ τόξου ΑΓΒ ἔπιπτεν ἐντὸς τοῦ τμήματος ΑΔΒΚΑ, ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τὸ κέντρον θὰ ἦτο μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος· ἂν δὲ πάλιν σημεῖόν τι τοῦ ἰδίου τόξου ἔπιπτεν ἐκτὸς τοῦ τμήματος ΑΔΒΚΑ, ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τὸ κέντρον θὰ ἦτο μεγαλητέρα τῆς ἀκτῖνος, ὅπερ ἄτοπον· διότι ἡ περιστροφὴ δὲν μετέβαλε διόλου τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων τοῦ τόξου ΑΓΒ ἀπὸ τὸ κέντρον Κ.

Ὅταν δὲ ἐφαρμόσῃ τὸ τόξον ΑΓΒ ἐπὶ τοῦ ΑΔΒ, θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ τὸ τμῆμα ΑΓΒΚΑ ἐπὶ τοῦ ΑΔΒΚΑ· ἄρα καὶ τὰ τμήματα εἶναι ἴσα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Ἐκ τῆς προηγουμένης ἀποδείξεως βλέπομεν, ὅτι τὰ τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἀλλήλων, ὡς καὶ αἱ εὐθεῖαι γραμμαί.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. *Πλὴν τῶν διαμέτρων δὲν δύναται ἄλλη εὐθεῖα νὰ διαιρέσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη (οὐδὲ τὸν κύκλον). Διότι ἔστω ἄλλη τις εὐθεῖα μὴ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου, ἡ ΑΕ· αὕτη διαιρεῖ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο μέρη, τὰ ΑΓΕ καὶ ΑΔΒΕ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἄνισα· διότι τὸ μὲν ΑΓΕ εἶναι μέρος τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΓΕΒ, τὸ δὲ ΑΔΒΕ ὑπερβαίνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΔΒ.*



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Εἰς ἕκαστον θεώρημα διακρίνομεν* ὑπόθεσιν *καὶ* συμπέρασμα· *τοῦ θεωρήματος τούτου ὑπόθεσις εἶναι ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι διάμετρος, δηλαδὴ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου· συμπέρασμα δὲ εἶναι ὅτι ἡ ΑΒ διαιρεῖ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειάν του εἰς δύο ἴσα μέρη.*

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΟΞΩΝ ΤΗΣ ΑΥΤΗΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ

27. Ἄθροισμα *δύο ἢ περισσοτέρων τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας λέγεται τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσιν, ὅταν τεθῶσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας (ἢ ἐπὶ ἄλλης ἴσης) κατὰ σειράν.*

Παραδείγματος χάριν, ἄθροισμα τῶν τόξων ΑΓΕ καὶ ΕΒ εἶναι τὸ τόξον ΑΓΕΒ.

Διαφορὰ *δὲ δύο τόξων (τῆς αὐτῆς περιφερείας) λέγεται τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον μένει, ὅταν ἀπὸ τὸ μεγαλήτερον ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτοῦ ἀποκόψωμεν μέρος ἴσον μὲ τὸ μικρότερον.*

ΠΕΡΙ ΓΩΝΙΩΝ

28. Γωνία *λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουσι δύο εὐθεῖαι ἐξ ἑνὸς σημείου ἀρχίζουσαι καὶ μὴ ἀποτελοῦσαι μίαν μόνην εὐθεῖαν.*

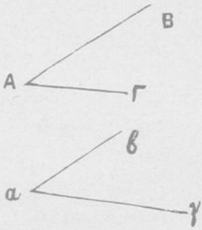
Τὸ σχῆμα ΒΑΓ εἶναι γωνία.

Κορυφὴ *τῆς γωνίας λέγεται τὸ σημεῖον, ἐκ τοῦ ὁποίου ἀρχίζουσιν αἱ τὴν γωνίαν σχηματίζουσαι εὐθεῖαι.*

Πλευραὶ *δὲ τῆς γωνίας λέγονται αἱ σχηματίζουσαι αὐτὴν εὐθεῖαι*

Τῆς γωνίας ΒΑΓ κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Α, πλευραὶ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ.

Ἴσαι *λέγονται δύο γωνίαι, ἐὰν δύνανται νὰ τεθῶσιν ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης οὕτως, ὥστε νὰ ἀποτελέσωσι μίαν μόνην γωνίαν.*



Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν δὲν ἐξαρτᾶται ποσῶς ἀπὸ τὸ μέγεθος τῶν πλευρῶν των. Παραδείγματος χάριν, αἱ δύο γωνίαι ΒΑΓ καὶ βαγ θὰ εἶναι ἴσαι, ἐάν, ἀφοῦ τεθῇ ἡ αγ ἐπὶ τῆς ΑΓ οὕτως, ὥστε νὰ πέσῃ τὸ α εἰς τὸ Α, πέσῃ καὶ ἡ αβ ἐπὶ τῆς ΑΒ.

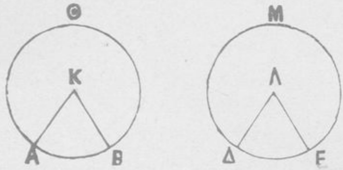
Ἐπίκεντρος *γωνία λέγεται ἡ ἔχουσα τὴν κορυφήν της εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· τὸ δὲ τόξον τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς ἐπικέντρου γωνίας περιεχόμενον λέγεται* ἀντίστοιχον *αὐτῆς.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Τὴν γωνίαν παριστάνομεν διὰ τοῦ γράμματος τῆς κορυφῆς, ἢ (ἐὰν πολλαὶ γωνίαι ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν) διὰ τριῶν γραμμάτων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν τίθεται εἰς τὴν κορυφὴν καὶ τὰ ἄλλα δύο εἰς τὰς πλευρὰς (ἓν εἰς καθεμίαν)· γράφεται δὲ καὶ ἀναγινώσκεται τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς πάντοτε μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων. Παραδείγματος χάριν λέγομεν ἡ γωνία Α, ἢ ἡ γωνία ΒΑΓ, ἢ ἡ γωνία ΓΑΒ. Ἐνίοτε παριστάνομεν τὴν γωνίαν καὶ δι' ἑνὸς μικροῦ γράμματος, τὸ ὁποῖον γράφομεν ἐντὸς αὐτῆς, καὶ πλησίον τῆς κορυφῆς.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

29. Εἰς ἴσα τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου (ἢ ἴσων κύκλων) ἀντιστοιχοῦσιν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΘΑ καὶ ΔΕΜΔ καὶ ἂς ὑποτεθῶσιν ἴσα τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΔΕ· λέγω, ὅτι καὶ αἱ πρὸς αὐτὰ ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίκεντροι γωνίαι, ἤτοι αἱ ΑΚΒ, ΔΛΕ, θὰ εἶναι ἴσαι.



Διότι, ἂν ἐφαρμόσωμεν τοὺς δύο ἴσους κύκλους οὕτως, ὥστε νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπ' ἀλλήλων τὰ δύο ἴσα τόξα ΑΒ καὶ ΔΕ (τὸ Α ἐπὶ τοῦ Δ καὶ τὸ Β ἐπὶ τοῦ Ε), θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ ἀκτὶς ΚΑ ἐπὶ τῆς ΛΔ καὶ ἡ ΚΒ ἐπὶ τῆς ΛΕ· τουτέστι θὰ ἐφαρμόσωσι καὶ αἱ γωνίαι· ἄρα εἶναι ἴσαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

30. Εἰς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας ἀντιστοιχοῦσιν ἴσα τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Διότι, ὅταν αἱ ἴσαι γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΔΛΕ ἐφαρμόσωσι, θὰ συμπέσωσι τὰ κέντρα τῶν κύκλων· καὶ ἐπειδὴ οἱ κύκλοι εἶναι ἴσοι, θὰ ἐφαρμόσωσιν ὁ εἷς ἐπὶ τοῦ ἄλλου· ἄρα καὶ τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΔΕ θὰ ἐφαρμόσωσιν· ὥστε εἶναι ἴσα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Τὰ δύο ταῦτα θεωρήματα εἶναι ἀντίστροφα τὸ ἓν τοῦ ἄλλου· λέγονται δὲ* ἀντίστροφα *δύο θεωρήματα, ὅταν ἡ ὑπόθεσις τοῦ πρώτου εἶναι συμπέρασμα εἰς τὸ δεύτερον, καὶ τἀνάπαλιν ἡ ὑπόθεσις τοῦ δευτέρου εἶναι συμπέρασμα εἰς τὸ πρῶτον. Τοῦ πρώτου ἡ ὑπόθεσις εἶναι, ὅτι* τὰ δύο τόξα ΑΒ, ΔΕ εἶναι ἴσα, *συμπέρασμα δὲ εἶναι, ὅτι* αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς αὐτὰ ἐπίκεντροι γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι· *τοῦ δευτέρου ὑπόθεσις μὲν εἶναι, ὅτι* αἱ δύο ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΚΒ, ΔΛΕ εἶναι ἴσαι, *συμπέρασμα δὲ εἶναι, ὅτι* καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα, τὰ ΑΒ, ΔΕ, θὰ εἶναι ἴσα.

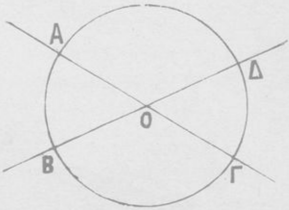
Ὁρισμός.

31. *Ὅταν δύο εὐθεῖαι διασταυρώνωνται, καθὼς αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ, σχηματίζουσι τέσσαρας γωνίας.Ἐκ τούτων αἱ ἔχουσαι τὴν κορυφὴν μόνον κοινήν, ἀλλὰ πλευρὰς διαφόρους, λέγονται* κατὰ κορυφήν. *Τοιαῦται εἶναι αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ, ὁμοίως καὶ αἱ γωνίαι ΒΟΓ καὶ ΑΟΔ.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

32. Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. *Μὲ κέντρον τὴν κοινὴν κορυφὴν τῶν γωνιῶν καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε ἂς γραφῇ κύκλος· τοῦ κύκλου τούτου ἀμφότεραι αἱ εὐθεῖαι ΑΟΓ καὶ ΒΟΔ εἶναι διάμετροι· ἑπομένως τὰ τόξα ΑΒΓ καὶ ΒΓΔ εἶναι ἴσα, ὡς ἡμίση τῆς περιφερείας. Ἐὰν λοιπὸν ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῶν τὸ κοινὸν μέρος ΒΓ, μένουσιν ἴσα τόξα, τὰ ΑΒ καὶ ΓΔ· ἄρα καὶ αἱ πρὸς αὐτὰ ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ εἶναι ἴσαι.*



Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν ΑΟΔ καὶ ΒΟΓ.

Ὁρισμός.

33. Κάθετοι πρὸς ἀλλήλας *λέγονται δύο εὐθεῖαι, ὅταν εἰς τὴν διασταύρωσίν των σχηματίζωσι τέσσαρας γωνίας ἴσας.*

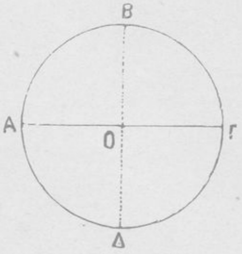
Ὀρθὴ *δὲ λέγεται ἑκάστη τῶν τεσσάρων ἴσων γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουσιν αἱ κάθετοι πρὸς ἀλλήλας εὐθεῖαι.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. *Ὅταν ἐκ τῶν τεσσάρων γωνιῶν, τὰς ὁποίας δύο εὐθεῖαι διασταυρούμεναι σχηματίζουσι, δύο ἐφεξῆς εἶναι ἴσαι, ὡς αἱ ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ, καὶ αἱ τέσσαρες θὰ εἶναι ἴσαι (διότι αἱ ἄλλαι δύο εἶναι κατὰ κορυφὴν τῶν πρώτων) καὶ αἱ εὐθεῖαι θὰ εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

34. Δι' ἑκάστου σημείου δοθείσης εὐθείας διέρχεται μία κάθετος πρὸς αὐτὴν καὶ μία μόνη.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΓ καὶ σημεῖον αὐτῆς οἱονδήποτε τὸ Ο· λέγω, ὅτι διὰ τοῦ Ο διέρχεται μία καὶ μία μόνη κάθετος πρὸς τὴν ΑΓ.



ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. *Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε ἂς γραφῇ κύκλος· τοῦ κύκλου τούτου τὴν περιφέρειαν διαιρεῖ ἡ εὐθεῖα ΑΟΓ εἰς δύο ἴσα μέρη, ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ, τῶν ὁποίων τὰ μέσα ἔστωσαν τὰ Β καὶ Δ.*

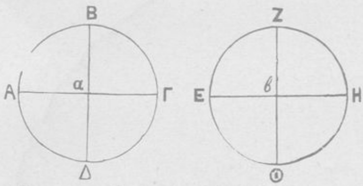
Τὰ τέσσαρα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ

εἶναι ἴσα ὡς τεταρτημόρια τῆς περιφερείας· ἐπομένως, ἂν ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΔ, θὰ διαιρῇ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη, τὰ ΒΓΔ καὶ ΒΑΔ· ἄρα θὰ εἶναι διάμετρος (26 Παρατήρ.)· τουτέστι θὰ διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου Ο. Ἡ εὐθεῖα αὕτη ΒΔ θὰ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ΑΓ· διότι αἱ τέσσαρες γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζει μετ' αὐτῆς, εἶναι ἴσαι, ὡς ἐπίκεντροι καὶ εἰς ἴσα τόξα ἀντιστοιχοῦσαι.

Ἐὰν στραφῇ ἡ ΒΔ περὶ τὸ Ο, δὲν θὰ διέρχηται πλέον διὰ τοῦ μέσου Β τοῦ τόξου ΑΒΓ· ἐπομένως θὰ σχηματίζῃ ἀνίσους τὰς ἐφεξῆς γωνίας ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ· ὥστε μία μόνη ὑπάρχει κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ο (*).

ΘΕΩΡΗΜΑ

35. Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι *(ὑπὸ οἱωνδήποτε εὐθειῶν καὶ ἂν σχηματίζωνται)* εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

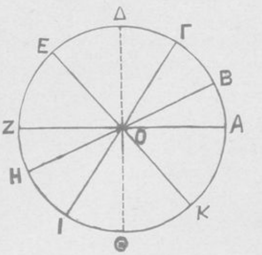


ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. *Διότι, ἐὰν γραφῶσι κύκλοι ἔχοντες κέντρα τὰς κορυφὰς δύο ὀρθῶν γωνιῶν, ὡς τῶν α καὶ β, καὶ ἀκτῖνας ἴσας, τὰ ἀντίστοιχα τόξα τῶν γωνιῶν τούτων, ἤτοι τὰ ΑΒ καὶ ΕΖ, θὰ εἶναι τέταρτα τῶν ἴσων περιφερειῶν· ἐπομένως ἴσα· ἄρα καὶ αἱ γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι.*

Ὁρισμοί.

36. *Ἐκ δύο γωνιῶν μικροτέρα λέγεται ἡ τὸ μικρότερον τόξον ἔχουσα, ὅταν αἱ κορυφαὶ αὐτῶν τεθῶσιν εἰς τὸ κέντρον τοῦ αὐτοῦ κύκλου (ἢ ἴσων κύκλων). Παραδείγματος χάριν, ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΟΓ.*

37. Ἄθροισμα *δύο ἢ περισσοτέρων γωνιῶν λέγεται γωνία τις, ἐὰν τὸ τόξον της εἶναι ἄθροισμα τῶν τόξων τῶν γωνιῶν τούτων, ὅταν αἱ κορυφαὶ αὐτῶν τεθῶσιν εἰς τὸ κέντρον τοῦ αὐτοῦ κύκλου.*



Παραδείγματος χάριν, ἡ γωνία ΑΟΓ εἶναι ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ· ἡ δὲ γωνία ΑΟΕ εἶναι ἄθροισμα τῶν ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΕ. Ἐὰν δὲ τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ ὑποτεθῶσιν ἴσα, ἡ γωνία ΑΟΓ εἶναι διπλασία τῆς ΑΟΒ καὶ ἡ γωνία ΑΟΔ τριπλασία αὐτῆς.

(*) Ἐὰν φύλλον χάρτου διπλώσωμεν εἰς δύο (χωρὶς νὰ σχίσωμεν ἢ νὰ συμπτύξωμεν αὐτό), ἔπειτα εἰς τέσσαρα οὕτως, ὥστε αἱ σχηματισθεῖσαι κοιναὶ γραμμαὶ νὰ συμπίπτωσιν, αἱ γραμμαὶ αὗται ἐπὶ τοῦ φύλλου, ἀφοῦ ἀναπτυχθῇ, θὰ σχηματίζωσι 4 ὀρθὰς γωνίας.

38. Διαφορὰ *δὲ δύο ἀνίσων γωνιῶν λέγεται γωνία τις, ἐὰν τὸ τόξον της εἶναι διαφορὰ τῶν τόξων τῶν γωνιῶν τούτων, ὅταν αἱ κορυφαὶ αὐτῶν τεθῶσιν εἰς τὸ κέντρον τοῦ αὐτοῦ κύκλου.*

Παραδείγματος χάριν, ἡ γωνία ΒΟΓ εἶναι διαφορὰ τῶν γωνιῶν ΑΟΓ καὶ ΑΟΒ, ἡ δὲ γωνία ΑΟΓ εἶναι διαφορὰ τῶν γωνιῶν ΑΟΕ καὶ ΓΟΕ.

Ὁρισμοί.

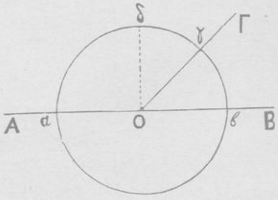
39. Ὀξεῖα *γωνία λέγεται ἡ μικροτέρα ὀρθῆς.* Ἀμβλεῖα *δὲ ἡ μεγαλητέρα ὀρθῆς.*

Παραπληρωματικαὶ *λέγονται δύο γωνίαι, ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι δύο ὀρθαί.*

Παραδείγματος χάριν, ἡ γωνία ΑΟΓ εἶναι ὀξεῖα, ἡ δὲ γωνία ΑΟΕ εἶναι ἀμβλεῖα, αἱ δὲ γωνίαι ΑΟΕ καὶ ΕΟΖ εἶναι παραπληρωματικαί, ὡσαύτως καὶ αἱ γωνίαι ΑΟΓ καὶ ΓΟΖ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

40. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται, ὅταν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου μιᾶς εὐθείας ἀχθῇ ἄλλη εὐθεῖα, εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι.

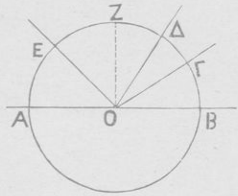


Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς (πλὴν τῶν ἄκρων) τὸ Ο, καὶ ἐκ τοῦ Ο ἂς ἀχθῇ οἱαδήποτε εὐθεῖα, ὡς ἡ ΟΓ· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΑΟΓ καὶ ΓΟΒ εἶναι δύο ὀρθαί.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. *Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε ἂς γράψωμεν περιφέρειαν· ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ τέμνῃ τὰς εὐθείας εἰς τὰ σημεῖα α, β, γ καὶ τὸ τόξον αγβ θὰ εἶναι ἥμισυ τῆς περιφερείας· εἰς τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας δὲν ἀντιστοιχεῖ καμμία γωνία, (διότι αἱ εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἀγόμεναι ἀκτῖνες δὲν σχηματίζουσι γωνίαν, ἀλλ' ἀποτελοῦσι μίαν διάμετρον)· διὰ τοῦτο αἱ δύο γωνίαι α ο γ καὶ γ ο β δὲν ἔχουσιν ἄθροισμα* μίαν γωνίαν *(ὁρισμὸς 37)· ἀλλ' ἐὰν εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ δ φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ο δ, διαιρεῖται μὲν ἡ γωνία α ο γ εἰς δύο ἄλλας, α ο δ, δ ο γ, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν δὲν μεταβάλλεται· τότε ὅμως αἱ μὲν δύο γωνίαι δ ο γ καὶ γ ο β ἔχουσιν ἄθροισμα τὴν ὀρθὴν δ ο β, ἡ δὲ γωνία δ ο α εἶναι ἐπίσης ὀρθή· ὥστε τὸ ἄθροισμα εἶναι δύο ὀρθαί.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

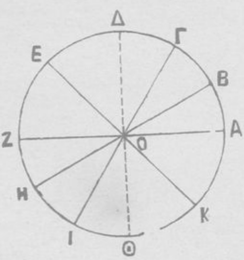
41. Πᾶσαι αἱ γωνίαι, αἵτινες σχηματίζονται, ὅταν ἐξ ἑνὸς σημείου εὐθείας τινὸς ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς κείμεναι, ἔχουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθὰς γωνίας.



ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. *Διότι, ἂν γράψωμεν κύκλον μὲ κέντρον τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε, καὶ ἔπειτα φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΟΖ εἰς τὸ μέσον Ζ τοῦ τόξου ΑΕΔΓΒ, αἱ μὲν γωνίαι ΑΟΕ, ΕΟΖ ἔχουσιν ἄθροισμα τὴν ὀρθὴν ΑΟΖ, αἱ δὲ ΖΟΔ, ΔΟΓ, ΓΟΒ ἔχουσιν ἄθροισμα τὴν ὀρθὴν ΖΟΒ, ὥστε ἔχομεν πάλιν ἄθροισμα δύο ὀρθάς.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

42. Πᾶσαι αἱ γωνίαι, αἵτινες σχηματίζονται πέριξ ἑνὸς σημείου, ὅταν ἐξ αὐτοῦ ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι, ἔχουσιν ἄθροισμα τέσσαρας ὀρθάς.



(Ὑποθέτω, ὅτι, ἂν μία τῶν εὐθειῶν αὐξηθῇ πέραν τοῦ κοινοῦ αὐτῶν σημείου Ο, ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι καὶ ἐκ τοῦ ἑνὸς μέρους αὐτῆς καὶ ἐκ τοῦ ἄλλου).

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. *Ἂν μίαν ἐκ τῶν εὐθειῶν αὐξήσωμεν ἀπὸ τὸ Ο, ἔστω τὴν ΑΟ, βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι αἱ μὲν γωνίαι ΖΟΕ, ΕΟΓ, ΓΟΒ, ΒΟΑ ἔχουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθάς, αἱ δὲ ΖΟΗ, ΗΟΙ, ΙΟΚ, ΚΟΑ ἄλλας δύο· ὥστε τὸ ὅλον ἔχομεν ἄθροισμα τέσσαρας ὀρθάς.*

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐξ ἑνὸς σημείου ἄγομεν τέσσαρας εὐθείας καὶ σχηματίζονται πέριξ αὐτοῦ τέσσαρες γωνίαι· μία ἐξ αὐτῶν εἶναι ὀρθή, ἄλλη εἶναι $\frac{1}{3}$ τῆς ὀρθῆς καὶ μία ἄλλη εἶναι $1\frac{1}{8}$ τῆς ὀρθῆς· ἐκ πόσων ὀρθῶν καὶ πόσων μερῶν τῆς ὀρθῆς σύγκειται ἡ τετάρτη;

2) Γωνία τις εἶναι $1\frac{1}{7}$ τῆς ὀρθῆς· πόση εἶναι ἡ παραπληρωματικὴ αὐτῆς;

3) Ἐκ τῶν τεσσάρων γωνιῶν, αἵτινες σχηματίζονται εἰς τὴν διασταύρωσιν δύο εὐθειῶν, ἡ μία εἶναι $\frac{3}{4}$ τῆς ὀρθῆς· πόσον εἶναι αἱ ἄλλαι, ἡ καθεμία χωριστά;

4) Ἐξ ἑνὸς σημείου δοθείσης εὐθείας ἄγομεν τρεῖς εὐθείας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς καὶ σχηματίζονται τέσσαρες γωνίαι ἴσαι· πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι καθεμία;

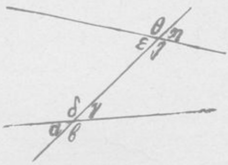
5) Ἐὰν δι' ἑνὸς σημείου ἀχθῶσι 12 εὐθεῖαι καὶ σχηματίζωσι 12 ἴσας γωνίας, πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι καθεμία;

6) Ἐκ τῶν τεσσάρων γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζουσι δύο εὐθεῖαι εἰς τὴν διασταύρωσίν των, μία εἶναι διπλασία μιᾶς ἄλλης· πόσον εἶναι ἡ καθεμία ἐκ τῶν τεσσάρων γωνιῶν;

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ

Ὁρισμοί.

43. Ὅταν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ τρίτης, σχηματίζονται πέριξ τῶν δύο τομῶν 8 γωνίαι· ἐκ τούτων αἱ μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν καὶ πρὸς διάφορα μέρη τῆς τεμνούσης κείμεναι καλοῦνται ἐντὸς ἐναλλάξ· τοιαῦται εἶναι αἱ γωνίαι γ καὶ ε, ὡσαύτως καὶ αἱ γωνίαι δ καὶ ζ. Αἱ δὲ γωνίαι γ καὶ η (ὧν ἡ μία κεῖται ἐντός, ἡ δὲ ἄλλη ἐκτὸς καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης) λέγονται ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὡσαύτως καὶ αἱ γωνίαι δ καὶ θ, β καὶ ζ, α καὶ ε· (αἱ δὲ γωνίαι γ καὶ ζ, αἵτινες κεῖνται μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης, λέγονται ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὡσαύτως καὶ αἱ γωνίαι δ καὶ ε).



Παρατήρησις.

44. Ὅταν αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι· διότι ἐκ δύο γωνιῶν ἐντὸς ἐναλλὰξ μεταβαίνομεν εἰς δύο ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐὰν ἀντὶ μιᾶς γωνίας λάβωμεν τὴν κατὰ κορυφὴν αὐτῆς· ἐὰν π. χ. εἶναι $\gamma = \varepsilon$, θὰ εἶναι καὶ $\gamma = \eta$ (διότι $\eta = \varepsilon$ ἐδ. 32). Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι ἴσαι, καὶ ἐντὸς ἐναλλὰξ θὰ εἶναι ἴσαι· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

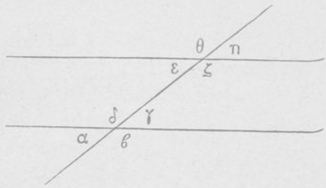
Ὁρισμὸς τῶν παραλλήλων.

45. Παράλληλοι λέγονται πρὸς ἀλλήλας δύο εὐθεῖαι, ἐὰν κείμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν, οὔτε ἀπὸ τὸ ἓν μέρος οὔτε ἀπὸ τὸ ἄλλο.

ΘΕΩΡΗΜΑ

46. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζωσι τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας. (ὅτε θὰ σχηματίζωσι καὶ τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας), αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι.

Τοῦτο ἐννοοῦμεν, ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι, ἂν εἶναι $\gamma=\varepsilon$, $\delta=\zeta$, τὰ ἑκατέρωθεν τῆς τεμνούσης κείμενα δύο σχήματα οὐδόλως διαφέρουσιν· ἂν λοιπὸν συνηντῶντο αἱ εὐθεῖαι πρὸς τὸ ἕν μέρος τῆς τεμνούσης, θὰ συνηντῶντο καὶ πρὸς τὸ ἄλλο· καὶ θὰ εἴχομεν τότε ἐξ ἑνὸς σημείου εἰς ἄλλο δύο εὐθείας· ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὸ 1ον ἀξίωμα τῆς εὐθείας καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἄτοπον (*).



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Καὶ ὅταν αἱ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι ἴσαι, αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.*

Διότι τότε καὶ αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ εἶναι ἴσαι.

** Ἐπίσης εἶναι παράλληλοι αἱ εὐθεῖαι, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαί.*

ΠΟΡΙΣΜΑ

47. Δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι. Διότι σχηματίζουσι τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας.

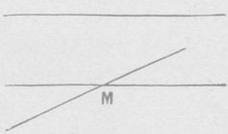
ΑΞΙΩΜΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ

48. Ἐκ σημείου μὴ κειμένου ἐπ' εὐθείας τινὸς μία μόνη διέρχεται παράλληλος τῆς εὐθείας ταύτης.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

49. Πᾶσα εὐθεῖα συναντῶσα μίαν τῶν παραλλήλων θὰ συναντᾷ καὶ τὴν ἄλλην.

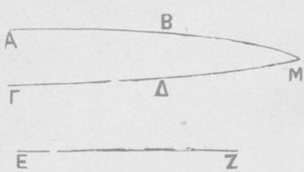
Ἄλλως θὰ ἦσαν ἐξ ἑνὸς σημείου (τοῦ σημείου τῆς συναντήσεως) δύο παράλληλοι τῆς αὐτῆς εὐθείας.



ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

50. Αἱ πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παράλληλοι εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.

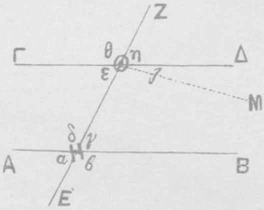
Διότι, ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (τῶν ὁποίων ὑποτίθεται παράλληλος ἡ ΕΖ) συνηντῶντο εἴς τι σημεῖον Μ, θὰ εἴχομεν ἐκ τοῦ Μ δύο παραλλήλους τῆς ΕΖ, τουτέστι τὰς ΜΒΑ καὶ ΜΔΓ· ὅπερ ἄτοπον.



(*) Λεπτομερῆ ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου ἴδε εἰς τὴν μεγάλην μου Γεωμετρίαν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

51. Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τμηθῶσιν ὑπὸ τρίτης οἱασδήποτε, θὰ σχηματίζωσι τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας καὶ τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας.



Ἔστωσαν παράλληλοι αἱ εὐθεῖαι AB καὶ ΓΔ, τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς EZ· λέγω, ὅτι θὰ εἶναι

$$\gamma=\varepsilon=\eta,\quad \beta=\zeta$$
$$\delta=\zeta=\vartheta,\quad \alpha=\varepsilon.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. *Ἂς θέσωμεν τὴν γωνίαν γ ἐπὶ τῆς η τοιουτοτρόπως, ὥστε νὰ συμπέσωσιν αἱ κορυφαὶ αὐτῶν H καὶ Θ, νὰ πέσῃ δὲ καὶ ἡ πλευρὰ HΘ τῆς γωνίας γ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΘZ τῆς η· τότε καὶ ἡ πλευρὰ HB θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΘΔ· διότι, ἂν ἐλάμβανεν ἄλλην θέσιν, ἔστω τὴν ΘM, θὰ ἦτο ἡ γωνία γ ἴση μὲ τὴν γωνίαν ZΘM· ἄρα (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα) θὰ ἦτο ἡ ΘM παράλληλος τῆς AB· ἀλλὰ τότε θὰ εἴχομεν ἐκ τοῦ σημείου Θ δύο παραλλήλους τῆς AB· τουτέστι τὴν ΘM καὶ τὴν ΘΔ, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὸ ἀξίωμα τῶν παραλλήλων καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἄτοπον· ὥστε κατ' ἀνάγκην θὰ πέσῃ καὶ ἡ πλευρὰ HB ἐπὶ τῆς ΘΔ· ἑπομένως εἶναι* $\gamma=\eta$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\varepsilon=\eta$ *(ὡς κατὰ κορυφήν),*
συμπεραίνομεν, ὅτι εἶναι καὶ $\gamma=\varepsilon$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου.*

ΠΟΡΙΣΜΑ

52. Πᾶσα κάθετος ἐπὶ μίαν τῶν παραλλήλων εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

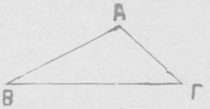
Ὁρισμοί.

53. Εὐθύγραμμον σχῆμα *λέγεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περατουμένη εἰς εὐθείας γραμμάς.*

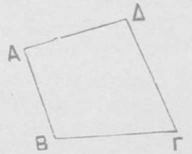
Πλευραὶ *τοῦ σχήματος λέγονται αἱ περιέχουσαι αὐτὸ εὐθεῖαι.*

Γωνίαι δ' αὐτοῦ, αἱ ὑπὸ τῶν πλευρῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι.

Κορυφαὶ δ' αὐτοῦ, αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν τούτων.



Τρίπλευρον μὲν ἢ τρίγωνον λέγεται τὸ ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν περιεχόμενον σχῆμα, ὡς τὸ $ΑΒΓ$, τετράπλευρον δὲ τὸ ὑπὸ τεσσάρων, ὡς τὸ $ΑΒΓΔ$, πολύπλευρον δὲ ἢ πολύγωνον τὸ ὑπὸ περισσοτέρων.

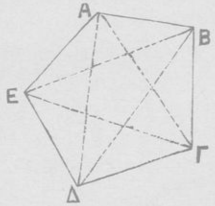


54. Περίμετρος τοῦ σχήματος λέγεται τὸ σχῆμα, ὅπερ ἀποτελοῦσιν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ, ἔτι δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Διαγώνιος τοῦ σχήματος λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις συνδέει δύο κορυφὰς χωρὶς νὰ εἶναι πλευρά.

Τὸ σχῆμα $ΑΒΓΔΕ$ εἶναι πολύγωνον

Πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι αἱ εὐθεῖαι $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΕ$, $ΕΑ$· γωνίαι δ' αὐτοῦ εἶναι αἱ γωνίαι $Α$, $Β$, $Γ$, $Δ$, $Ε$· κορυφαὶ αὐτοῦ τὰ σημεῖα $Α, Β, Γ, Δ, Ε$· διαγώνιοι δὲ αἱ $ΑΓ$, $ΑΔ$, $ΒΔ$, $ΒΕ$, $ΓΕ$.



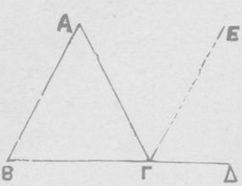
55. Κυρτὸν λέγεται τὸ σχῆμα, ἐὰν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ αὐξανόμεναι δὲν εἰσέρχωνται ἐντὸς αὐτοῦ· τοιοῦτον εἶναι τὸ σχῆμα $ΑΒΓΔΕ$.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

56. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι δύο ὀρθαί.

Ἔστω οἱονδήποτε τρίγωνον τὸ $ΑΒΓ$· ἵνα δείξωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι δύο ὀρθαί, αὐξάνομεν μίαν τῶν πλευρῶν του, ἔστω τὴν $ΒΓ$, μέχρι σημείου τινὸς $Δ$, καὶ ἄγομεν ἐκ τοῦ $Γ$ τὴν $ΓΕ$ παράλληλον τῇ $ΑΒ$.



Ἡ γωνία $Α$ τοῦ τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν $ΑΓΕ$, διότι αἱ δύο αὐταὶ γωνίαι εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων $ΑΒ$ καὶ $ΓΕ$, τεμνο-

μένων ὑπὸ τῆς ΑΓ· ἐπίσης ἡ γωνία Β τοῦ τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν ΕΓΔ, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς τῶν αὐτῶν παραλλήλων τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ· ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου, ἤτοι τὸ $A+B+\Gamma$, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ΑΓΕ, ΕΓΔ καὶ ΑΓΒ, τουτέστι μὲ δύο ὀρθὰς (κατὰ τὸ ἐδάφ. 41).

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

57. Ἡ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνία ΑΓΔ *(ἥτις σχηματίζεται, ὅταν μία τῶν πλευρῶν του προσεκβληθῇ)* εἶναι ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν Α καὶ Β.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

58. Ἐὰν τρίγωνόν τι ἔχῃ μίαν ὀρθὴν γωνίαν, αἱ ἄλλαι δύο θὰ ἀποτελῶσι μίαν ὀρθὴν· *(θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ αἱ δύο ὀξεῖαι).*

ΠΟΡΙΣΜΑ 3ον

59. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς δύο γωνίας ἴσας, θὰ ἔχωσι καὶ τὴν τρίτην ἴσην.

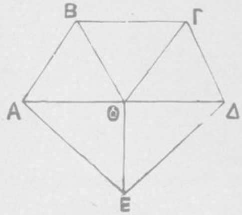
Διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ Α, Β, Γ τὰς γωνίας τοῦ ἑνὸς καὶ διὰ α, β, γ τὰς γωνίας τοῦ ἄλλου, θὰ εἶναι $A+B+\Gamma=\alpha+\beta+\gamma$ (διότι ἀμφότερα τὰ ἀθροίσματα εἶναι δύο ὀρθαί)· ἐὰν δὲ ἀπὸ τὰ δύο ἴσα ἀφαιρέσωμεν τὰ ἴσα $A+B$ καὶ $\alpha+\beta$ (διότι $A=\alpha$ καὶ $B=\beta$), προκύπτει $\Gamma=\gamma$.

*ΘΕΩΡΗΜΑ

60. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι τόσαι ὀρθαὶ γωνίαι, ὅσας μονάδας εὑρίσκομεν διπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν του καὶ ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ διπλασίου τὸν ἀριθμὸν 4.

Ἔστω τὸ κυρτὸν πεντάπλευρον ΑΒΓΔΕ· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι ὀρθαὶ 10 — 4, ἤτοι 6.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. *Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Θ τοῦ πολυγώνου φέρωμεν εὐθείας εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ, διαιροῦμεν τὸ πολύγωνον εἰς τόσα τρίγωνα, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραί του· καὶ αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου διαιροῦνται εἰς δύο μέρη ἑκάστη, ἀλλὰ τοῦτο δὲν μεταβάλλει τὸ ἄθροισμα αὐτῶν. Τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων τούτων εἶναι 5×2, ἤτοι 10 ὀρθαί. Ἀλλ' αἱ γωνίαι, αἵτινες ἐσχηματίσθησαν πέριξ τοῦ*



Θ, δὲν εἶναι τοῦ πολυγώνου, πρέπει λοιπὸν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμά των (ὅπερ εἶναι 4 ὀρθαὶ) ἀπὸ τὰς 10 ὀρθάς· ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι 6 ὀρθαί. Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ πᾶν ἄλλο πολύγωνον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Παντὸς τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισματέσσαρας ὀρθάς, διότι χωρίζεται διὰ μιᾶς διαγωνίου του εἰς δύο τρίγωνα.*

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν μία γωνία τριγώνου τινὸς εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, ἡ γωνία αὕτη εἶναι ὀρθή· ἐὰν δὲ εἰς τρίγωνον μία γωνία ὑπερβαίνῃ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων δύο, ἡ γωνία αὕτη εἶναι ἀμβλεῖα· ἐὰν δὲ ἑκάστη γωνία εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, τὸ τρίγωνον ἔχει καὶ τὰς τρεῖς του γωνίας ὀξείας.

2) Πόσας ὀρθὰς ἔχουσιν ἄθροισμα ἅπασαι αἱ γωνίαι ἑνὸς εἰκοσαπλεύρου;

3) Ἐὰν αἱ τρεῖς γωνίαι τετραπλεύρου εἶναι ὀρθαί, καὶ ἡ τετάρτη θὰ εἶναι ὀρθή.

4) Τριγώνου τινὸς ἡ μία γωνία εἶναι $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς, ἡ δὲ ἄλλη $\frac{4}{5}$· πόση εἶναι ἡ τρίτη;

5) Ἑνὸς ἑξαγώνου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· πόσον εἶναι ἑκάστη;

6) Πᾶν τρίγωνον ἔχει δύο τοὐλάχιστον ὀξείας γωνίας.

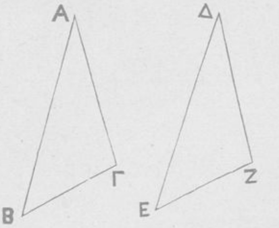
7) Ἑνὸς πολυγώνου αἱ γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα 12 ὀρθάς· πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον τοῦτο;

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

61. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς δύο πλευράς των ἴσας καὶ τὴν ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἔχοντα τὰς δύο πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἴσας μὲ τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ καὶ ΔΖ (τὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν ΔΕ καὶ τὴν ΑΓ ἴσην μὲ τὴν ΔΖ) καὶ τὴν γωνίαν Α (τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ) ἴσην μὲ τὴν γωνίαν Δ (τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΔΖ)· λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.



ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. *Διότι, ἂν θέσωμεν τὴν γωνίαν Δ ἐπὶ τῆς ἴσης της Α οὕτως, ὥστε νὰ πέσῃ ἡ πλευρὰ ΔΕ ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ἡ ΔΖ ἐπὶ τῆς ΑΓ, τὸ μὲν σημεῖον Ε θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β διὰ τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν ΔΕ καὶ ΑΒ, τὸ δὲ σημεῖον Ζ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν ΔΖ καὶ ΑΓ· καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΖ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ· διότι τὰ* *ἄκρα αὐτῶν συνέπεσαν καὶ μεταξὺ δύο σημείων μία μόνη εὐθεῖα ὑπάρχει· ὥστε τὰ δύο τρίγωνα ἐφαρμόζουσιν, ἄρα εἶναι ἴσα. Θὰ ἔχωσι λοιπὸν καὶ τὰς γωνίας Β καὶ Ε ἴσας, καὶ τὰς γωνίας Γ καὶ Ζ ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ ΕΖ ἴσας.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

62. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας γωνίας ἴσας, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχῆμα τὸ ἀνωτέρω), ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΒΓ ἴσην μὲ τὴν ΕΖ, τὴν γωνίαν Β ἴσην μὲ τὴν Ε καὶ τὴν γωνίαν Γ ἴσην μὲ τὴν Ζ· λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. *Διότι, ἐὰν θέσωμεν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ ΕΖ νὰ ἐφαρμόσῃ μὲ τὴν ἴσην της ΒΓ (νὰ πέσῃ δὲ τὸ Ε εἰς τὸ Β καὶ τὸ Ζ εἰς τὸ Γ), ἡ μὲν ΕΔ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΒΑ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν Ε καὶ Β, ἡ δὲ ΖΔ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΓΑ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν Ζ καὶ Γ· ἑπομένως τὸ σημεῖον Δ, ὅπερ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΕΔ καὶ ΖΔ, θὰ γίνῃ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΒΑ καὶ ΓΑ· ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΒΑ καὶ ΓΑ δὲν δύνανται νὰ ἔχωσιν ἄλλο κοινὸν σημεῖον πλὴν τοῦ Α, συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ σημεῖον Δ θὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ Α· ἑπομένως ἡ ΕΔ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΑ καὶ ἡ ΖΔ ἐπὶ τῆς ΓΑ· ὥστε τὰ τρίγωνα θὰ ἐφαρμόσωσιν· ἄρα εἶναι ἴσα.*

Ὁρισμοί.

63. Ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ λέγεται τὸ τρίγωνον,

Ἰσοσκελές, *ἐὰν ἔχῃ δύο πλευρὰς ἴσας,*

Ἰσόπλευρον δέ, *ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς αὐτοῦ πλευρὰς ἴσας,*

Σκαληνὸν δέ, *ἐὰν δὲν ἔχῃ πλευρὰς ἴσας.*

64. Ἐκ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ λέγεται τὸ τρίγωνον,

Ὀρθογώνιον, *ἐὰν ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθήν,*

Ἀμβλυγώνιον, *ἐὰν ἔχῃ μίαν γωνίαν ἀμβλεῖαν (αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι του θὰ εἶναι ὀξεῖαι κατὰ τὸ θεώρημα 56).*

Ὀξυγώνιον, *ἐὰν καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι του εἶναι ὀξεῖαι*

Ἰσογώνιον, *ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς του γωνίας ἴσας.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Τοῦ ἰσογωνίου τριγώνου ἑκάστη γωνία εἶναι* $\frac{2}{3}$ *τῆς ὀρθῆς· διότι αἱ τρεῖς ἔχουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθάς.*

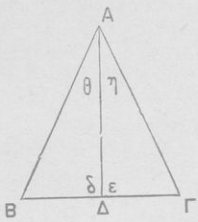
65. Ὑποτείνουσα *τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου λέγεται ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρά.*

66. Βάσις *τοῦ τριγώνου λέγεται μία τις τῶν πλευρῶν του· τοῦ δὲ ἰσοσκελοῦς τριγώνου λαμβάνεται συνήθως ὡς βάσις ἡ πρὸς τὰς ἄλλας ἄνισος.*

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΙΣΟΣΚΕΛΟΥΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

67. Παντὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι *(αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν)* εἶναι ἴσαι.

Ἔστω ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἔχον ἴσας τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ· λέγω, ὅτι αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι, αἱ Γ καὶ Β, εἶναι ἴσαι.



ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. *Ἐκ τῆς κορυφῆς Α τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἃς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΔ, ἥτις νὰ διχοτομῇ τὴν γωνίαν Α· ἡ εὐθεῖα αὕτη διαιρεῖ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον εἰς δύο τρίγωνα, ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα· διότι ἔχουσι δύο πλευρὰς ἴσας* $ΑΔ = ΑΔ$, *καὶ* $ΑΒ = ΑΓ$ *(ἐξ ὑποθέσεως) καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην,* $\vartheta = \eta$*· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ θὰ ἐφαρμόσωσιν, ἐὰν περιστρέψωμεν τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν περὶ τὴν ΑΔ, μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἄλλου· ἑπομένως αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι, ἐπίσης καὶ αἱ γωνίαι δ καὶ ε εἶναι ἴσαι καὶ ἑπομένως εἶναι ὀρθαὶ γωνίαι, καὶ* $ΔΓ = ΔΒ$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.

68. Αἱ παρὰ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου δύο ἴσαι γωνίαι εἶναι πάντοτε ὀξεῖαι· ἄλλως θὰ ὑπερέβαινε τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν του τὰς δύο ὀρθάς.

ΠΟΡΙΣΜΑ

69. Πᾶν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

70. Ἐὰν τρίγωνόν τι ἔχῃ δύο γωνίας ἴσας, ἔχει καὶ τὰς ἀπέναντι αὐτῶν πλευρὰς ἴσας.

Ἔστω τοιοῦτο τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἔχον τὰς γωνίας Β καὶ Γ ἴσας· λέγω, ὅτι καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν γωνιῶν τούτων πλευραί, αἱ ΑΓ καὶ ΑΒ, εἶναι ἴσαι.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. *Ἐὰν φέρωμεν καὶ πάλιν ἐκ τῆς κορυφῆς Α τὴν διχοτομοῦσαν τῆς γωνίας Α, τὴν ΑΔ, διαιρεῖται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς δύο τρίγωνα, ἔχοντα τὸς δύο γωνίας Β καὶ Γ ἴσας (ἐξ ὑποθέσεως) καὶ τὰς γωνίας θ καὶ η ἴσας· ἄρα θὰ ἔχωσι καὶ τὰς ἐπιλοίπους γωνίας των ἴσας ἤτοι τὴν δ ἴσην ε (ἑπομένως αἱ γωνίαι δ καὶ ε εἶναι ὀρθαὶ γωνίαι)· ὥστε τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ ἔχουσι μίαν πλευρὰν ἴσην ΑΔ=ΑΔ καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας δ=ε καὶ θ=η· ἄρα εἶναι ἴσα· καὶ ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων τούτων ἕπεται ΑΒ=ΑΓ, ἤτοι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ *Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου.*

ΠΟΡΙΣΜΑ

71. Πᾶν τρίγωνον ἰσογώνιον εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.

72. Ἀξιοπαρατήρητον εἶναι, ὅτι εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον μία καὶ ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ΑΔ ἐκτελεῖ τὰ ἑξῆς τέσσαρα·

1) διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς·

2) διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς βάσεως·

3) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν·

4) διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς·

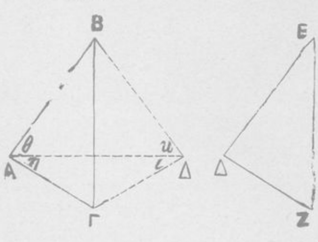
δεικνύεται δὲ εὐκολώτατα, ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλη εὐθεῖα, ἥτις νὰ ἐκτελῇ καὶ μόνον τὰ δύο ἐκ τούτων.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

73. Δύο τρίγωνα ἔχοντα τὰς τρεῖς των πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν εἶναι ἴσα.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι εἶναι ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ καὶ ΒΓ=ΕΖ· λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα.



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου θέτομεν τὰ δύο τρίγωνα τὸ ἓν ἐκτὸς τοῦ ἄλλου καὶ οὕτως, ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσιν αἱ ἴσαι πλευραὶ ΒΓ καὶ ΕΖ (καὶ αἱ κορυφαὶ Β καὶ Ε) καὶ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι εἶναι ΑΒ=ΕΔ=ΒΔ, ὅθεν (κατὰ τὸ θεώρημα 67) εἶναι θ=κ· ἀλλὰ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ *εἶναι ὡσαύτως ἰσοσκελὲς (διότι εἶναι $Α\Gamma = \Delta Z = \Gamma\Delta$), ὅθεν ἕπεται*

$$\eta = \iota.$$

Ἐκ τῶν δύο τούτων ἰσοτήτων ἕπεται (ἐὰν προσθέσωμεν ἴσα εἰς ἴσα)

$$\vartheta + \eta = \varkappa + \iota,$$

ἤτοι

$$A = \Delta,$$

ὥστε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἴσας· ἄρα εἶναι ἴσα (κατὰ τὸ θεώρημα 61).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Εἰς τὴν ἀπόδειξιν ταύτην ὑπεθέσαμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΔ κεῖται ἐντὸς τῶν τριγώνων, ὥστε διαιρεῖ τὰς γωνίας Α καὶ Δ εἰς μέρη, ἀλλὰ καὶ ἐκτὸς αὐτῶν ἂν κεῖται ἡ ΑΔ, πάλιν ἡ ἀπόδειξις μένει ἡ αὐτή· μόνον αἱ γωνίαι Α καὶ Δ εἶναι τότε διαφοραὶ ἴσων γωνιῶν.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

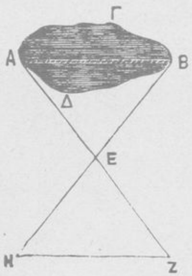
74. Εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα αἱ ἴσαι πλευραὶ εὑρίσκονται ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν καὶ αἱ ἴσαι γωνίαι ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς γωνίας των ἴσας κατὰ μίαν, εἶναι ἴσα;

2) Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχωσιν ἴσας βάσεις καὶ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς ἴσην.

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς λίμνης ΑΒΓΔ (εἰς τὴν ὁποίαν δὲν δυνάμεθα νὰ ἐμβῶμεν)· τουτέστι τὸ μῆκος τῆς εὐθείας ΑΒ.



Λαμβάνομεν σημεῖόν τι Ε ἐκτὸς τῆς λίμνης καὶ μετροῦμεν τὰς ἀποστάσεις ΕΑ καὶ ΕΒ, ἔπειτα προσεκβάλλομεν αὐτὰς καὶ λαμβάνομεν $EZ = EA$ καὶ $EH = EB$· ἡ εὐθεῖα ΗΖ θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒ (61)· ὥστε μετροῦντες τὴν ΗΖ εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν.

4) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ γωνία ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως εἶναι $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς· πόσον εἶναι ἑκατέρα τῶν πρὸς τὴν βάσιν γωνιῶν;

5) Αἱ πρὸς τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνίαι εἶναι $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς· πόση εἶναι ἡ ἄλλη γωνία;

6) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι τὸ ἥμισυ ἑκατέρας τῶν πρὸς τὴν βάσιν γωνιῶν· ποῖαι εἶναι αἱ γωνίαι του;

ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΟΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ

75. Παντὸς τριγώνου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλητέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· ὅτι μία πλευρά, ὡς ἡ ΑΒ, εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, εἶναι φανερὸν ἐκ τοῦ 2ου ἀξιώματος τῆς εὐθείας, ὥστε τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως εἶναι φανερόν· τὸ δὲ δεύτερον ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Ἵνα δείξωμεν, ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι μεγαλητέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων, προσθέτομεν εἰς αὐτὴν τὴν μικροτέραν ἐκ τῶν δύο ἄλλων· τότε ἔχομεν

$$B\Gamma + A\Gamma > AB.$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τὰ δύο ἄνισα ἀφαιρέσωμεν τὴν αὐτὴν γραμμὴν ΑΓ, εὑρίσκομεν $B\Gamma > AB - A\Gamma.$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ περὶ τῶν ἄλλων πλευρῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

76. Ἐὰν δύο πλευραὶ τριγώνου τινὸς εἶναι ἄνισοι, καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἄνισοι· ἡ μεγαλητέρα γωνία ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας πλευρᾶς.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔστω ἡ πλευρὰ ΑΒ μεγαλητέρα τῆς ΑΓ· λέγω, ὅτι ἡ γωνία Γ (ἡ ἀπέναντι τῆς ΑΒ) θὰ εἶναι μεγαλητέρα τῆς Β.

Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς μεγαλητέρας πλευρᾶς ΑΒ τὸ μέρος ΑΔ ἴσον μὲ τὴν μικροτέραν ΑΓ καὶ ἂς φέρωμεν τὴν ΓΔ.

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι ἰσοσκελὲς ἐκ κατασκευῆς, θὰ εἶναι

$$\delta = \varepsilon.$$

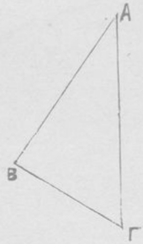
Ἐπειδὴ δὲ πάλιν ἡ γωνία δ εἶναι ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΔΒΓ, θὰ εἶναι (ἐδ. 57) $\delta > B$, *ἄρα καὶ* $\varepsilon > B$·

ἀλλ' ἀφοῦ ἡ γωνία ε ὑπερβαίνει τὴν Β, πολὺ περισσότερον θὰ εἶναι Γ>Β· διότι ἡ γωνία Γ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ε.

ΘΕΩΡΗΜΑ

77. Ἐὰν δύο γωνίαι τριγώνου τινὸς εἶναι ἄνισοι, καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἄνισοι· ἡ μεγαλητέρα πλευρὰ ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας γωνίας.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔστω ἡ γωνία Β μεγαλητέρα τῆς Γ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ θὰ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΒ.



ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. *Ἂν ἡ ΑΓ δὲν ἦτο μεγαλητέρα τῆς ΑΒ, θὰ ἦτο ἢ ἴση μὲ αὐτήν, ἢ μικροτέρα αὐτῆς. Ἀλλ' ἂν ἦτο ἡ ΑΓ ἴση μὲ τὴν ΑΒ, θὰ ἦτο (κατὰ τὸ θεώρ. 67) καὶ ἡ γωνία Β ἴση μὲ τὴν γωνίαν Γ, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Ἂν δὲ πάλιν ἦτο ἡ ΑΓ μικροτέρα τῆς ΑΒ, θὰ ἦτο (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα) καὶ ἡ γωνία Β μικροτέρα τῆς Γ, ὅπερ καὶ τοῦτο ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως· ἄρα ἡ ΑΓ οὔτε ἴση δύναται νὰ εἶναι μὲ τὴν ΑΒ οὔτε μικροτέρα αὐτῆς· λοιπὸν θὰ εἶναι μεγαλητέρα.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Ἀντὶ νὰ ἀποδείξωμεν εὐθύς, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΒ, ἀπεδείξαμεν πρῶτον, ὅτι δὲν δύναται νὰ εἶναι μήτε ἴση μήτε μικροτέρα· διότι ἀμφότεραι αἱ ὑποθέσεις ΑΓ=ΑΒ ἢ ΑΓ<ΑΒ φέρουσιν εἰς ἄτοπα. Ἡ τοιαύτη μέθοδος τῆς ἀποδείξεως λέγεται* ἀπαγωγὴ εἰς ἄτοπον· *κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην ἀπεδείξαμεν καὶ ἄλλα θεωρήματα (ἐδαφ. 26, 51 κτλ.). Συνίσταται δὲ ἡ μέθοδος αὕτη γενικῶς εἰς τοῦτο, ὅτι ἀποδεικνύομεν τὰς ὑποθέσεις, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ κάμωμεν περί τινος πράγματος, πάσας ψευδεῖς, πλὴν μιᾶς καὶ μόνης, τῆς ὁποίας τότε συμπεραίνομεν τὴν ἀλήθειαν.*

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

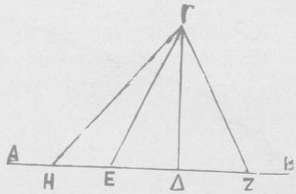
1) Εἰς πᾶν ἰσοσκελὲς τρίγωνον καθεμία ἐκ τῶν ἴσων πλευρῶν ὑπερβαίνει τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως.

2) Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου ἐντὸς τριγώνου ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τούτων εὐθειῶν θὰ εἶναι μικρότερον μὲν τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου, μεγαλήτερον ὅμως τοῦ ἡμίσεος τῆς περιμέτρου.

ΠΕΡΙ ΚΑΘΕΤΟΥ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΩΝ

Ὁρισμοί.

78. Ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου δὲν δύνανται νὰ ἀχθῶσι κάθετοι πρὸς αὐτὴν περισσότεραι τῆς μιᾶς (*), διότι (κατὰ τὸ πόρισμα 47) δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι. Ἂν λοιπὸν ἀχθῇ ἡ κάθετος ΓΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ, πᾶσαι αἱ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ ἐκ τοῦ Γ εἰς τὴν ΑΒ ἀγόμεναι, λέγονται πλάγιαι *πρὸς αὐτήν.*



Δύο πλάγιαι ΓΕ, ΓΖ λέγομεν, ὅτι ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὴν κάθετον, ὅταν οἱ πόδες αὐτῶν Ε, Ζ ἀπέχωσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸν πόδα Δ τῆς καθέτου, ἤτοι ὅταν εἶναι ΕΔ = ΔΖ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

79. Ἐὰν ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου ἀχθῶσιν εἰς αὐτὴν ἡ κάθετος καὶ ὁσαιδήποτε πλάγιαι,

1) Ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας.

2) Δύο πλάγιαι ἐξ ἴσου ἀπέχουσαι ἀπὸ τὴν κάθετον εἶναι ἴσαι.

3) Ἐκ δύο πλαγίων ἡ περισσότερον ἀπέχουσα ἀπὸ τὴν κάθετον εἶναι μεγαλητέρα.

1. Ἡ κάθετος ΓΔ εἶναι μικροτέρα τῆς τυχούσης πλαγίας ΓΕ· διότι εἰς τὸ τρίγωνον ΓΔΕ ἡ γωνία ΓΔΕ, ὡς ὀρθή, εἶναι μεγαλητέρα τῆς ὀξείας ΓΕΔ· ἀπέναντι δὲ τῆς μεγαλητέρας γωνίας παντὸς τριγώνου εὑρίσκεται μεγαλητέρα πλευρὰ (Θεώρ. 77)· ὅθεν ΓΕ > ΓΔ.

2. Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ πλάγιαι ΓΕ καὶ ΓΖ ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὴν κάθετον, ἤτοι ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι εἶναι ΔΕ = ΔΖ, τὰ δύο τρίγωνα ΓΔΕ, ΓΔΖ θὰ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΓΔ κοινήν, τὴν ΔΕ ἴσην μὲ τὴν ΔΖ, καὶ τὴν γωνίαν ΓΔΕ ἴσην μὲ τὴν ΓΔΖ (ὡς ὀρθάς). Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν τριγώνων τούτων συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ ΓΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΖ.

3. Ἐκ τῶν πλαγίων ΓΕ καὶ ΓΗ μεγαλητέρα εἶναι ἡ περισσότερον

(*) Ὅτι δὲ ἄγεται καὶ μία, καὶ πῶς εὑρίσκεται αὕτη, θὰ μάθωμεν εἰς τὸ δεύτερον βιβλίον.

ἀπέχουσα ἀπὸ τὴν κάθετον, ἡ ΓΗ. Διότι εἰς τὸ τρίγωνον ΓΕΗ ἡ γωνία ΓΕΗ εἶναι ἀμβλεῖα (ὡς παραπλήρωμα τῆς ὀξείας ΓΕΔ)· ἑπομένως αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι τοῦ τριγώνου ΓΕΗ εἶναι (ἐδ. 56) ὀξεῖαι· καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΓΗΕ ὡς ὀξεῖα εἶναι μικροτέρα τῆς ἀμβλείας ΓΕΗ· ἄρα καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰ ΓΕ εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΗ.

Εἰς τὴν ἀπόδειξιν ἐλάβομεν δύο πλαγίας ΓΕ, ΓΗ, κειμένας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου· ἐὰν αἱ πλάγιαι κεῖνται πρὸς διάφορα μέρη τῆς καθέτου, καθὼς αἱ ΓΗ, ΓΖ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΔΗ (ἥτις εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΔΖ) τὸ μέρος ΔΕ, ἴσον μὲ τὴν ΔΖ, καὶ ἄγομεν τὴν πλαγίαν ΓΕ, ἥτις κατὰ τὰ προαποδειχθέντα εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΖ· ἔπειτα ἀποδεικνύομεν ὡς ἀνωτέρω, ὅτι ἡ ΓΗ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΓΕ, ἄρα μεγαλητέρα καὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτήν, τῆς ΓΖ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Καὶ τὰ ἀντίστροφα τῶν τριῶν τούτων προτάσεων ἀληθεύουσι καὶ ἀποδεικνύονται εὐκολώτατα διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.*

Ὁρισμός.

80. Ἀπόστημα ἢ ἀπόστασις *σημείου ἀπὸ εὐθείας λέγεται ἡ κάθετος, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου εἰς τὴν εὐθεῖαν· λαμβάνεται δὲ ἡ κάθετος ὡς ἀπόστημα, διότι εἶναι μία· εἶναι δὲ καὶ ἡ ἐλαχίστη πασῶν τῶν εὐθειῶν, αἵτινες δύνανται νὰ ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ σημείου εἰς τὴν εὐθεῖαν,*

ΠΟΡΙΣΜΑ

81. Ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου δὲν δύνανται νὰ ἀχθῶσιν εἰς αὐτὴν τρεῖς εὐθεῖαι ἴσαι.

Διότι, ἂν μὲν ἡ μία ἐκ τῶν τριῶν εἶναι κάθετος, θὰ εἶναι αὕτη μικροτέρα τῶν δύο ἄλλων· ἐὰν δὲ εἶναι πλάγιαι καὶ αἱ τρεῖς, ἢ θὰ εὑρίσκωνται καὶ αἱ τρεῖς πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ἄνισοι, ἢ θὰ εὑρίσκωνται δύο πρὸς τὸ ἓν μέρος τῆς καθέτου καὶ μία πρὸς τὸ ἄλλο· ἀλλὰ καὶ τότε αἱ δύο, αἵτινες εὑρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου, θὰ εἶναι ἄνισοι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

82. Περιφέρεια κύκλου καὶ εὐθεῖα γραμμὴ δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.

Διότι, ἂν εὐθεῖά τις καὶ περιφέρεια εἶχον τρία κοινὰ σημεῖα, τὰ σημεῖα ταῦτα τῆς εὐθείας θὰ ἀπεῖχον ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ὥστε θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ κέντρου εἰς τὴν εὐθεῖαν ταύτην τρεῖς εὐθεῖαι ἴσαι· ὅπερ κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα εἶναι ἀδύνατον.

ΠΟΡΙΣΜΑ

83. Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι γραμμὴ καμπύλη.

Διότι οὐδὲν μέρος αὐτῆς, ὅσον μικρὸν καὶ ἂν ὑποτεθῇ, εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

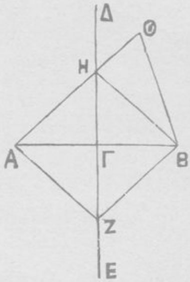
ΘΕΩΡΗΜΑ

84. Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου εὐθείας ἀχθῇ κάθετος εἰς αὐτήν,

1) Πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου θὰ ἀπέχῃ ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα·

2) Πᾶν σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου κείμενον δὲν θὰ ἀπέχῃ ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ μέσου αὐτῆς Γ κάθετος πρὸς αὐτὴν ἡ ΕΓΔ.



1. Τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς καθέτου, οἷον τὸ Ζ, ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β· διότι αἱ εὐθεῖαι ΖΑ καὶ ΖΒ εἶναι πλάγιαι, ἀπέχουσαι ἐξ ἴσου ἀπὸ τὴν κάθετον ΖΓ, ἄρα εἶναι ἴσαι.

2. Πᾶν σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου κείμενον, ὡς τὸ Θ, δὲν ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β. (Ὀλιγώτερον θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ ἐκεῖνο τὸ ἄκρον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου, πρὸς ὃ εὑρίσκεται καὶ τὸ Θ). Διότι ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν ΘΑ, ΘΒ, ἡ μία θὰ τέμνῃ τὴν κάθετον ΖΓΔ εἴς τι σημεῖον Η καὶ ἐὰν φέρωμεν τὴν ΗΒ, ἔχομεν ἐκ τοῦ τριγώνου ΘΗΒ (κατὰ τὸ θεώρ. 75) $ΘΒ < ΒΗ + ΗΘ$, καὶ ἐὰν ἀντὶ τῆς ΒΗ θέσωμεν τὴν ἴσην αὐτῆς ΗΑ, εὑρίσκομεν $ΘΒ < ΑΗ + ΗΘ$, τουτέστι $ΘΒ < ΘΑ$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

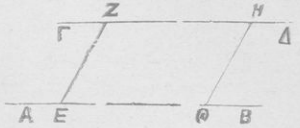
85. Πᾶν σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα εὐθείας τινός, κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου, ἥτις ἄγεται εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ταύτης.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Δύο χωρία κείμενα εἰς διάφορα μέρη ἑνὸς ποταμοῦ πρόκειται νὰ συνδεθῶσι διὰ γεφύρας, ἥτις θὰ στηθῇ ἐπὶ τοῦ ποταμοῦ διὰ κοινῆς δαπάνης· νὰ εὑρεθῇ τὸ μέρος τοῦ ποταμοῦ, εἰς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ γίνῃ ἡ γέφυρα, ὥστε νὰ ἀπέχῃ ἐξ ἴσου καὶ ἀπὸ τὰ δύο χωρία.

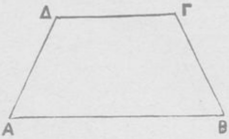
2) Ἡ διπλάσιον ἄλλης ἀπέχουσα πλαγία εἶναι διπλασία;

ΠΕΡΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ



86. Παραλληλόγραμμον *λέγεται τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι. Τοιοῦτον εἶναι τὸ τετράπλευρον ΕΘΗΖ.*

Τραπέζιον *λέγεται τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου δύο μόνον ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι· τοιοῦτον εἶναι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ.*



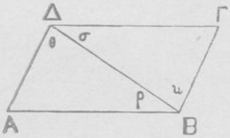
ΘΕΩΡΗΜΑ

87. Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἴσαι.

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· λέγω, ὅτι εἶναι

$$AB = \Gamma\Delta, \quad A\Delta = B\Gamma$$

καὶ $$A = \Gamma, \quad B = \Delta\cdot$$



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν τὴν διαγώνιον ΒΔ, ἥτις διαιρεῖ τὸ παραλληλόγραμμον εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ. Τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα· διότι ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΒΔ κοινήν, τὴν γωνίαν ρ ἴσην μὲ τὴν γωνίαν σ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ, καὶ τὰς γωνίας θ καὶ κ ἴσας, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΒΓ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΔΒ· ἔχουσι λοιπὸν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας, ἄρα εἶναι ἴσα· ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι εἶναι $A\Delta = B\Gamma$ *καὶ* $AB = \Gamma\Delta$ *(διότι εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα αἱ ἴσαι πλευραὶ εὑρίσκονται ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν).*

Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΓΒΔ ἕπεται πρὸς τούτοις, ὅτι εἶναι $A = \Gamma$ *καὶ αἱ γωνίαι Β καὶ Δ εἶναι ἴσαι, διότι σύγκεινται ἐκ μερῶν ἴσων* ($\rho = \sigma$ *καὶ* $\vartheta = \varkappa$).

88. Αἱ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἀγόμεναι κάθετοι εἶναι πᾶσαι ἴσαι.

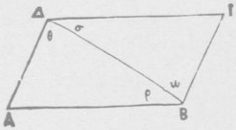
Διότι αἱ ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν κάθετοι εἶναι παράλληλοι (κατὰ τὸ πόρισμα 47), παράλληλοι δὲ μεταξὺ δύο παραλλήλων περιεχόμεναι εἶναι ἴσαι, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀπόστασις *δύο παραλλήλων λέγεται μία τις τῶν καθέτων, αἵτινες ἄγονται μεταξὺ αὐτῶν.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

89. Πᾶν τετράπλευρον, ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας, εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι



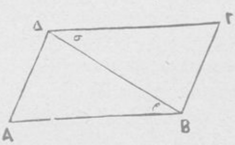
ΑΒ=ΓΔ καὶ ΑΔ=ΒΓ·

λέγω, ὅτι τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον. Διότι ἄγοντες τὴν διαγώνιον ΒΔ χωρίζομεν τὸ τετράπλευρον εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΓΒΔ, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰς τρεῖς των πλευρὰς ἴσας καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἴσα· ἑπομένως αἱ γωνίαι θ καὶ κ, ὡς ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν (ΑΒ=ΓΔ) κείμεναι, εἶναι ἴσαι· ὁμοίως καὶ αἱ γωνίαι ϱ καὶ σ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΔΓ καὶ ΑΒ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΔΒ σχηματίζουσι τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ϱ καὶ σ ἴσας, ἕπεται, ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι. Ὁμοίως διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν θ καὶ κ εἶναι παράλληλοι καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ· ἄρα τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

90. Πᾶν τετράπλευρον ἔχον δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους εἶναι παραλληλόγραμμον.

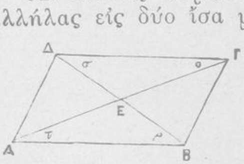
Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἡ ΑΒ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῆς ΔΓ· λέγω, ὅτι τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.



Διότι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΓΒΔ, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ διαγώνιος ΒΔ διαιρεῖ τὸ τετράπλευρον, εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΒΔ κοινήν, τὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν ΓΔ καὶ τὴν γωνίαν ϱ ἴσην μὲ τὴν σ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ. Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν τριγώνων τούτων συνάγεται, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΓ, ἔτι δὲ καὶ παράλληλος αὐτῆς διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν ΑΔΒ καὶ ΔΒΓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

91. Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ διαγώνιοι τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς δύο ἴσα μέρη.



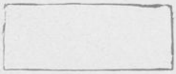
Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ· λέγω, ὅτι τὸ σημεῖον Ε, εἰς τὸ ὁποῖον τέμνουσιν ἀλλήλας αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΓ καὶ ΒΔ, εἶναι μέσον καὶ τῶν δύο.

Διότι τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΓΔΕ ἔχουσι τὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν ΓΔ (ὡς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου), τὴν γωνίαν ϱ ἴσην μὲ τὴν σ (ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ) καὶ τὴν γωνίαν τ ἴσην μὲ τὴν ο *(δι' ὅμοιον λόγον)· ἄρα εἶναι ἴσα. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι εἶναι ΑΕ=ΕΓ καὶ ΔΕ=ΕΒ· τουτέστιν, ὅτι τὸ Ε εἶναι τὸ μέσον καὶ τῶν δύο διαγωνίων.*

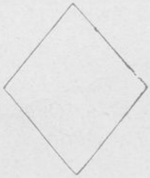
Ὁρισμοί.

92. Ἐκ τῶν παραλληλογράμμων διακρίνομεν ἰδιαζόντως τὰ ἑξῆς εἴδη

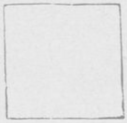
Ὀρθογώνιον *λέγεται τὸ παραλληλόγραμμον, ἐὰν ἔχῃ ὀρθὰς πάσας τὰς γωνίας του.*



Ῥόμβος *λέγεται τὸ παραλληλόγραμμον, ἐὰν ἔχῃ ἴσας πάσας τὰς πλευράς του.*



Τετράγωνον *δὲ λέγεται τὸ παραλληλόγραμμον, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς πλευρὰς πάσας ἴσας καὶ τὰς γωνίας πάσας ὀρθάς. Τὸ τετράγωνον εἶναι ὀρθογώνιον ἰσόπλευρον, ἤτοι ὀρθογώνιον ἔχον ἴσας πάσας τὰς πλευράς, εἶναι δὲ καὶ ῥόμβος ἔχων ἴσας πάσας τὰς γωνίας.*



Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πᾶν τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς δύο ἴσα μέρη, εἶναι παραλληλόγραμμον.

2) Παντὸς ὀρθογωνίου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι.

3) Παντὸς ῥόμβου αἱ διαγώνιοι εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

4) Παντὸς δὲ τετραγώνου αἱ διαγώνιοι καὶ κάθετοι εἶναι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἴσαι.

5) Τραπεζίου τινὸς ἔχομεν τὰς δύο ἀπέναντι γωνίας· ἡ μὲν μία εἶναι $1\frac{1}{5}$ ὀρθῆς, ἡ δὲ ἄλλη $\frac{4}{7}$ ὀρθῆς· νὰ εὑρεθῶσιν αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι αὐτοῦ.

* ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

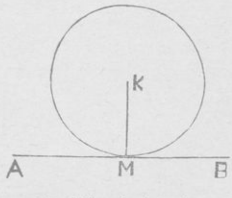
Ὁρισμός.

93. Ἐφαπτομένη *τοῦ κύκλου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ὅταν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχῃ μὲ τὴν περιφέρειαν·* τέμνουσα *δέ, ὅταν ἔχῃ δύο κοινὰ σημεῖα μὲ τὴν περιφέρειαν.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

94. Ἐὰν εὐθεῖά τις ἔχῃ μὲ τὴν περιφέρειαν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, τὸ ἀπόστημα τῆς εὐθείας ἀπὸ τὸ κέντρον εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα.

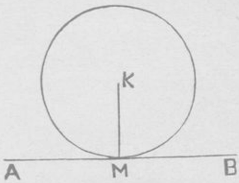
Διότι, ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἐγγίζει τὸν κύκλον μόνον εἰς τὸ σημεῖον Μ, τὰ ἄλλα σημεῖα αὐτῆς εὑρίσκονται ἐκτὸς τοῦ κύκλου καὶ διὰ τοῦτο ἀπέχουσιν ἀπὸ τὸ κέντρον περισσότερον τῆς ἀκτῖνος· ἑπομένως ἡ ἀκτὶς ΚΜ εἶναι ἡ ἐλαχίστη πασῶν τῶν εὐθειῶν, αἵτινες δύνανται νὰ ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ Κ εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ· ἄρα ἡ ΚΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Μ καὶ τὸ ἀπόστημα τοῦ Κ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἶναι ἡ ἀκτὶς ΚΜ.



ΘΕΩΡΗΜΑ

95. Ἐὰν τὸ ἀπόστημα εὐθείας τινὸς ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα, ἤτοι ἐὰν ἡ εὐθεῖα εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος, ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΜ· εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς Μ λέγω, ὅτι ἡ ΑΜ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου.



Διότι τὸ σημεῖον Μ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῆς περιφερείας καὶ τῆς εὐθείας, ἀλλὰ τὰ ἄλλα σημεῖα τῆς εὐθείας θὰ κεῖνται πάντα ἐκτὸς τῆς περιφερείας, διότι αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τὸ κέντρον (ὡς πλάγιαι) εἶναι μεγαλήτεραι τῆς καθέτου ΚΜ, ἤτοι τῆς ἀκτῖνος.

ΠΟΡΙΣΜΑ

96. Εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς περιφερείας ὑπάρχει μία ἐφαπτομένη καὶ μόνον μία.

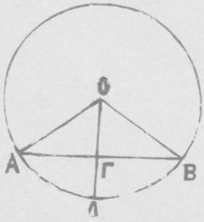
Διότι ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον Μ πρέπει νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΜ· μία δὲ μόνη ὑπάρχει κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΜ εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς Μ.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΧΟΡΔΩΝ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

ΘΕΩΡΗΜΑ

97. Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἀχθῇ εὐθεῖα εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς, θὰ εἶναι κάθετος πρὸς αὐτὴν καὶ θὰ διχοτομῇ καὶ τὸ τόξον αὐτῆς.

Διότι, ἂν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς ΑΒ *καὶ ἡ ἀκτὶς ΟΔ διὰ τοῦ μέσου αὐτῆς Γ, γίνονται δύο τρίγωνα ΟΑΓ, ΟΓΒ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας κατὰ μίαν (ΟΓ=ΟΓ, ΟΑ=ΟΒ καὶ ΑΓ=ΓΒ)· ἄρα ἡ γωνία ΟΓΑ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΟΓΒ, καὶ ἑπομένως ἡ ΟΔ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ αἱ δύο ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΟΔ, ΔΟΒ εἶναι ἴσαι· ἄρα καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα ΑΔ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσα.*



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. *Ἡ εὐθεῖα ΟΔ ἐκτελεῖ τὰ ἑξῆς τέσσαρα·*

1) διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου·

2) διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς·

3) εἶναι κάθετος πρὸς τὴν χορδήν·

4) διαιρεῖ τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη.

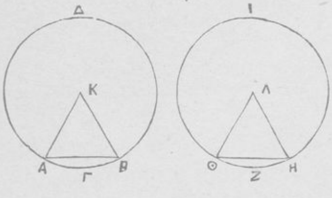
Ἀποδεικνύεται δὲ εὐκόλως, ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλη εὐθεῖα, ἥτις νὰ ἐκτελῇ καὶ δύο μόνον ἐκ τούτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

98. Εἰς τοὺς ἴσους κύκλους τὰ ἴσα τόξα ἔχουσιν ἴσας χορδάς, καὶ ἀντιστρόφως, αἱ ἴσαι χορδαὶ ἔχουσιν ἴσα τόξα εἴτε μικρότερα τῆς ἡμιπεριφερείας εἶναι τὰ τόξα, εἴτε μεγαλήτερα.

Τὰ ἴσα τόξα ἔχουσιν ἴσας χορδάς· διότι, ὅταν ἐφαρμόσωμεν τὰ ἴσα τόξα, θὰ ἐφαρμόσωσι καὶ τὰ ἄκρα αὐτῶν· ἑπομένως θὰ ἐφαρμόσωσι καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν (διότι ἐξ ἑνὸς σημείου εἰς ἄλλο μία μόνη εὐθεῖα ἄγεται).

Καὶ ἀντιστρόφως, αἱ ἴσαι χορδαὶ ἔχουσιν ἴσα τόξα· διότι, ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΘΗ εἶναι ἴσαι, καὶ φέρωμεν εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΒ, ΛΘ, ΛΗ, γίνονται δύο τρίγωνα ΚΑΒ, ΛΗΘ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς των πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν· ἑπομένως ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἀλλήλων. Ὅταν δὲ τὰ τρίγωνα ἐφαρμόσωσιν, ἐφαρμόζουσι καὶ οἱ κύκλοι (διότι συμπίπτουσι τὰ κέντρα αὐτῶν), καὶ τὸ μὲν τόξον ΘΖΗ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ ΑΓΒ, τὸ δὲ ΘΙΗ ἐπὶ τοῦ ΑΔΒ.



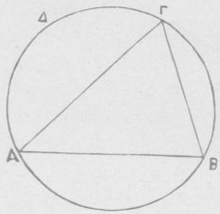
ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΙΣ ΚΥΚΛΟΝ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Ὁρισμοί.

99. Γωνία λέγεται ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον, *ἐὰν ἡ μὲν κορυφὴ αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου.*

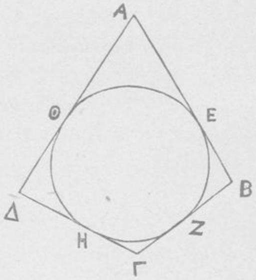
Εἰς τμῆμα *δὲ* ἐγγεγραμμένη *λέγεται ἡ γωνία, ἐὰν ἡ μὲν κορυφὴ αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ τμήματος, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς διέρχωνται διὰ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας, ἥτις εἶναι βάσις τοῦ τμήματος.*

Παραδείγματος χάριν ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΑ, ἡ αὐτὴ δὲ γωνία εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τμῆμα ΑΒΓΔΑ.



Εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, *ἐὰν πᾶσαι αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας. Ὁ δὲ κύκλος λέγεται τότε* περιγεγραμμένος περὶ τὸ σχῆμα.

Τοιοῦτον εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΑ.



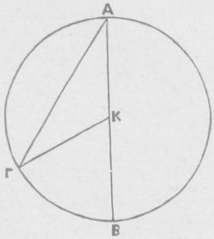
Εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται περιγεγραμμένον εἰς κύκλον, *ἐὰν ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, ὁ δὲ κύκλος λέγεται τότε* ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ σχῆμα.

Τοιοῦτον εἶναι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

100. Εἰς τὸν κύκλον ἡ ἐπίκεντρος γωνία εἶναι διπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης, ὅταν ἔχωσιν ἀμφότεραι βάσιν τὸ αὐτὸ τόξον.

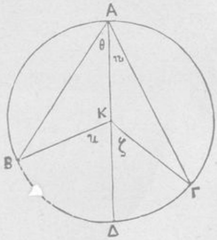
Ἐπειδὴ τὸ κέντρον δύναται νὰ εἶναι ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ἢ ἐντὸς αὐτῆς, ἢ ἐκτὸς αὐτῆς, διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.



1) Ἔστω κατ' ἀρχὰς τὸ κέντρον ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ΑΒ τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΒΑΓ· ἐὰν ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΚΓ, γίνεται γωνία ἐπίκεντρος ἡ ΒΚΓ, ἔχουσα βάσιν τὸ αὐτὸ τόξον μὲ τὴν ἐγγεγραμμένην, ἤτοι τὸ ΒΓ· εἶναι δὲ ἡ γωνία ΒΚΓ, ὡς ἐκτὸς γωνία τοῦ τριγώνου ΑΚΓ, ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα $Α+Γ$ τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν Α καὶ Γ, καὶ ἐπειδὴ εἶναι $Α=Γ$ (διότι τὸ τρίγωνον ΑΚΓ εἶναι ἰσοσκελές), ἡ ἐκτὸς γωνία ΒΚΓ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα $Α+Α$, ἤτοι εἶναι διπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης Α.

2) Ἔστω δεύτερον τὸ κέντρον ἐντὸς τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΒΑΓ.

Ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΒ, ΚΓ, γίνεται ἐπίκεντρος γωνία ἡ ΒΚΓ, ἔχουσα βάσιν τὸ αὐτὸ μὲ τὴν ἐγγεγραμμένην τόξον ΒΓ· ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ἐγγεγραμμένης ἡ διάμετρος ΑΚΔ, διαιρεῖ τὴν ἐγγεγραμμένην εἰς δύο ἄλλας, ϑ καὶ η, καὶ τὴν ἐπίκεντρον ὁμοίως εἰς δύο, $\varkappa$ καὶ ζ· εἶναι δὲ κατὰ τὰ προηγούμενα (διότι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ΒΑΔ, ΔΑΓ ἔχουσι τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς πλευρᾶς των ΑΔ)



$$\varkappa = 2\vartheta, \qquad \zeta = 2\eta$$

ὅθεν $\varkappa+\zeta=2\vartheta+2\eta=2\ (\vartheta+\eta)$,

τουτέστι $ΒΚΓ=2.\ ΒΑΓ$.

3) Ἔστω τέλος τὸ κέντρον ἐκτὸς τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΒΑΓ· ἄγοντες καὶ πάλιν τὰς ἀκτῖνας ΚΒ, ΚΓ καὶ τὴν διάμετρον ΑΔ, θὰ ἔχωμεν ὁμοίως

$$ΒΚΔ=2.\ ΒΑΔ$$

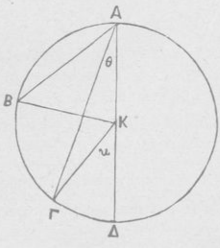
καὶ $\varkappa=2\vartheta$·

ὅθεν, ἀφαιροῦντες ἴσα ἀπὸ ἴσα, εὑρίσκομεν

$$ΒΚΓ=2.\ ΒΑΔ-2\vartheta=2\ (ΒΑΔ-\vartheta),$$

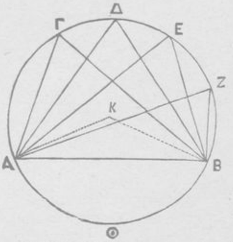
τουτέστι $ΒΚΓ=2.ΒΑΓ$·

ὥστε ἡ ἐπίκεντρος γωνία εἶναι πάντοτε διπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης, ἐὰν βαίνωσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου.



ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

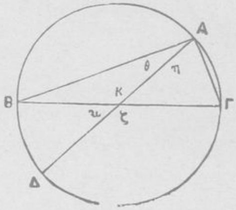
101. Πᾶσαι αἱ εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.



Διότι πᾶσαι βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου (ἐκείνου, ὅπερ κεῖται ἐκτὸς τοῦ τμήματος) καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἡμίση μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἐπικέντρου γωνίας.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

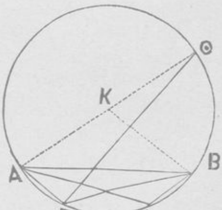
102. Πᾶσα γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς τμῆμα κύκλου μεγαλήτερον ἡμικυκλίου, *οἷον τὸ τμῆμα ΑΓΔΕΖΒΑ*, (ἰδὲ σχῆμα τὸ ἀνωτέρω), εἶναι ὀξεῖα.



Διότι εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ΑΚΒ, ἥτις εἶναι μικροτέρα τῶν δύο ὀρθῶν.

Πᾶσα δὲ εἰς ἡμικύκλιον ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι ὀρθή.

Διότι ἡ γωνία ΒΑΓ, ἥτις εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΒΑΓΚΒ, εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν δύο γωνιῶν κ καὶ ζ (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα), τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι δύο ὀρθαί.



Πᾶσα δὲ γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς τμῆμα κύκλου μικρότερον ἡμικυκλίου, *οἷον τὸ ΑΒΔΓΑ, εἶναι ἀμβλεῖα.*

Διότι εἶναι μεγαλητέρα τῆς ὀρθῆς ΑΓΘ.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐγγεγραμμένη τις γωνία εἶναι $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς· πόσον μέρος τῆς ὅλης περιφερείας εἶναι τὸ τόξον τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχόμενον;

2) Γωνία τις ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον ἔχει ἐντὸς αὐτῆς τόξον, ὅπερ εἶναι τὸ ὄγδοον τῆς περιφερείας· πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι ἡ γωνία αὕτη;

3) Δύο ἴσαι χορδαὶ σχηματίζουσι γωνίαν τινὰ ἐγγεγραμμένην· τὸ τόξον μιᾶς ἐξ αὐτῶν εἶναι $\frac{1}{5}$ τῆς περιφερείας· πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι ἡ γωνία;

4) Νὰ δειχθῇ, ὅτι εἰς πᾶν τετράπλευρον, ὅπερ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

5) Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον τὸ μεγαλήτερον τόξον ἔχει μεγαλητέραν χορδήν· (δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν τόξα μεγαλήτερα τῆς ἡμιπεριφερείας).

6) Τὸ διπλάσιον τόξον ἔχει διπλασίαν χορδήν;

7) Ἐξ ἑνὸς σημείου ἐντὸς τοῦ κύκλου ληφθέντος δύνανται νὰ ἀχθῶσιν ἄπειροι χορδαί· ποία εἶναι ἡ μεγίστη ἐξ ὅλων καὶ ποία ἡ ἐλαχίστη;

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΓΑΝΑ ΚΑΙ ΧΡΗΣΙΣ ΑΥΤΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

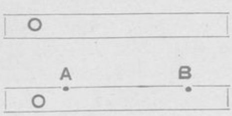
Ὅταν τὰ σχήματα, τὰ ὁποῖα γράφομεν, χρησιμεύωσι μόνον εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῶν θεωρημάτων (ὡς μέχρι τοῦδε συνέβαινεν), ἵνα ὁ νοῦς διὰ τῆς βοηθείας αὐτῶν εὐκολώτερον παρακολουθῇ τὴν ἀπόδειξιν, τότε δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ εἶναι τέλεια· ἀρκεῖ νὰ παριστάνωσιν ὁπωσοῦν σαφῶς τὰ ἀληθῆ σχήματα, περὶ τῶν ὁποίων τὸ θεώρημα διαλαμβάνει· δύνανται λοιπὸν νὰ γράφωνται καὶ διὰ τῆς χειρὸς μόνης.

Ἀλλ' ὅταν διὰ τῶν σχημάτων συνδυαζομένων πρόκειται νὰ εὕρωμεν ἄλλο τι σχῆμα ἄγνωστον (ὡς συμβαίνει εἰς τὰς πραγματικὰς ἐφαρμογὰς τῆς γεωμετρίας), τότε εἶναι ἀνάγκη νὰ γράφωμεν τὰ σχήματα μετὰ πάσης τῆς δυνατῆς ἀκριβείας καὶ τελειότητος· τότε δὲ ἡ χεὶρ μόνη δὲν ἀρκεῖ, ἀλλ' ἀπαιτοῦνται καὶ ὄργανα γεωμετρικά, ἐκ τῶν ὁποίων δύο εἶναι τὰ πρωτεύοντα, ὁ κανὼν *καὶ* ὁ διαβήτης. *Διὰ τοῦτο, πρὶν προχωρήσωμεν, πρέπει νὰ γνωρίσωμεν τὰ ἁπλούστερα ἐκ τῶν ὀργάνων τούτων καὶ τὴν χρῆσιν ἑκάστου.*

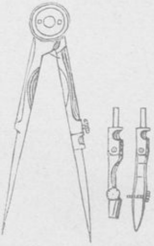
ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΚΑΝΟΝΟΣ

Ὁ κανὼν εἶναι συνήθως σανίς τις λεπτὴ καὶ ἐπιμήκης, ἔχουσα εὐθυγράμμους ἀκμὰς ἢ ἄκρα· χρησιμεύει δὲ εἰς τὸ νὰ γράφωμεν εὐθείας γραμμάς.

Ἵνα γράψωμεν διὰ τοῦ κανόνος εὐθεῖαν γραμμήν, ἥτις νὰ διέρχηται διὰ δύο γνωστῶν σημείων, θέτομεν αὐτὸν ἐπὶ τοῦ χάρτου οὕτως, ὥστε μία ἀκμή του νὰ διέρχηται διὰ τῶν σημείων τούτων, ἔπειτα σύρομεν τὸ μολυβδοκόνδυλον ἢ τὴν γραφίδα ἀκολουθοῦντες τὴν ἀκμὴν τοῦ κανόνος.

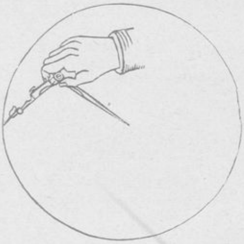


ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΔΙΑΒΗΤΟΥ

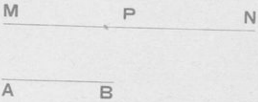


Ὁ διαβήτης εἶναι ὄργανον συνήθως ἐκ μετάλλου καὶ σύγκειται ἐκ δύο σκελῶν, τὰ ὁποῖα τελειώνουσιν εἰς αἰχμὰς λεπτοτάτας. Τὸ μέρος, ἔνθα ἑνώνονται τὰ σκέλη, λέγεται κεφαλὴ τοῦ διαβήτου· ἑνώνονται δὲ δι' ἑνὸς ἄξονος, περὶ τὸν ὁποῖον δύνανται νὰ περιστρέφωνται πλησιάζοντα (ὅτε ὁ διαβήτης κλείει) ἢ ἀπομακρυνόμενα ἀπ' ἀλλήλων (ὅτε ὁ διαβήτης ἀνοίγει).

Ὁ διαβήτης χρησιμεύει εἰς τὸ νὰ γράφωμεν δι' αὐτοῦ περιφέρειαν, ὅταν ἔχωμεν τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα.



Πρὸς τοῦτο ἀνοίγομεν τὸν διαβήτην τόσον, ὥστε ἡ ἀπόστασις τῶν δύο αἰχμῶν νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα (τοῦτο δὲ δοκιμάζομεν θέτοντες τὰς αἰχμὰς εἰς τὰ ἄκρα τῆς δοθείσης εὐθείας, ἥτις θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα), ἔπειτα θέτομεν τὴν μίαν αἰχμὴν εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι κέντρον τῆς περιφερείας, καὶ διατηροῦντες ἀκίνητον τὴν αἰχμὴν ταύτην περιστρέφομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου τὴν ἄλλην, χωρὶς νὰ μεταβάλλωμεν τὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου· τότε προφανῶς ἡ στρεφομένη αἰχμὴ θὰ γράψῃ τὴν περιφέρειαν.

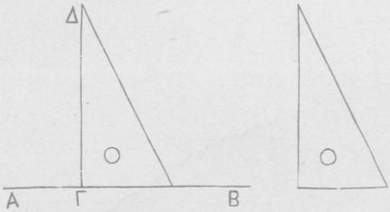


Διὰ τοῦ διαβήτου δυνάμεθα προσέτι νὰ λάβωμεν ἐπὶ δεδομένης εὐθείας MN τμῆμα ἴσον μὲ ἄλλην δοθεῖσαν εὐθεῖαν AB. Πρὸς τοῦτο ἀνοίγομεν αὐτὸν τόσον, ὥστε αἱ αἰχμαὶ νὰ συμπίπτωσιν ἀκριβῶς μὲ τὰ ἄκρα τῆς AB, ἔπειτα θέτομεν μίαν αἰχμὴν εἰς τὸ σημεῖον M καὶ στρέφομεν τὸν διαβήτην, μέχρις οὗ ἡ ἄλλη αἰχμὴ ἔλθῃ εἴς τι σημεῖον P τῆς γραμμῆς MN· τὸ τμῆμα MP εἶναι προφανῶς ἴσον μὲ τὴν εὐθεῖαν AB. Τὸ αὐτὸ κάμνομεν διὰ τὰ τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Διὰ τοῦ διαβήτου δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εὕρωμεν το ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων εὐθειῶν· ἐπίσης καὶ τὴν διαφορὰν δύο εὐθειῶν· ἐπίσης καὶ τὸ ἄθροισμα καὶ τὴν διαφορὰν τόξων τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΓΝΩΜΟΝΟΣ

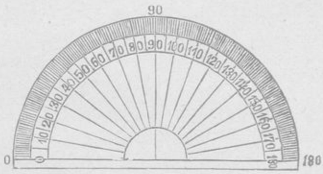
Ὁ γνώμων εἶναι ξυλίνη σανὶς λεπτή, ἔχουσα σχῆμα ὀρθογωνίου τριγώνου· μεταχειριζόμεθα δὲ αὐτὸν καὶ εἰς ἄλλα (περὶ ὧν ὁ λόγος κατωτέρω) καὶ εἰς τὸ νὰ φέρωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ καὶ εἰς δοθὲν σημεῖον Γ αὐτῆς.

Πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ γνώμονος ἐπὶ τῆς ΑΒ, θέτοντες τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἰς τὸ Γ, ἔπειτα μεταχειριζόμεθα τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν ὡς κανόνα, καὶ γράφομεν διὰ γραφίδος τὴν κάθετον ΓΔ.



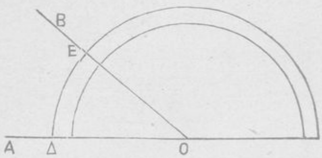
ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΜΟΙΡΟΓΝΩΜΟΝΙΟΥ

Τὸ μοιρογνωμόνιον εἶναι ἡμικύκλιον (συνήθως ἐκ μετάλλου), τοῦ ὁποίου τὸ τόξον (δηλαδὴ τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας) εἶναι διῃρημένον εἰς 180 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται μοῖραι· *ὥστε ὅλη ἡ περιφέρεια ἔχει 360 μοίρας. Ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται* λεπτὰ πρῶτα, *καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60* δεύτερα λεπτά, *κτλ.*



Χρησιμεύει δὲ τὸ μοιρογνωμόνιον εἰς τὴν μέτρησιν τῶν γωνιῶν.

Ἵνα μετρήσωμεν διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου δεδομένην γωνίαν, θέτομεν αὐτὸ ἐπὶ τῆς γωνίας οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσῃ τὸ κέντρον Ο τοῦ ἡμικυκλίου μὲ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας, καὶ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ, ἐφ' ἧς εἶναι σεσημειωμένος ὁ ἀριθμὸς 0, νὰ ἐφαρμόσῃ μὲ τὴν μίαν πλευρὰν τῆς γωνίας· τότε ἡ ἄλλη πλευρὰ αὐτῆς θὰ συναντᾷ τὸ τόξον τοῦ ἡμικυκλίου εἴς τι σημεῖον καὶ ὁ ἀριθμός, ὅστις εἶναι εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο γεγραμμένος, δεικνύει



πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ τόξον τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας περιεχόμενον. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου παριστᾷ καὶ τὴν γωνίαν. Ἂν λόγου χάριν τὸ τόξον ΔΕ εἶναι 40 μοιρῶν, λέγομεν, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι 40 μοιρῶν.

Ὁ ἀριθμός, δι' οὗ γράφομεν τὰς μοίρας, ἔχει ἓν μηδενικὸν δεξιὰ καὶ ὀλίγον ὑπεράνω, ὡς 40^0, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν πρώτων λεπτῶν ἔχει μίαν ὀξεῖαν, ὡς 55^0, $14'$, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν δευτέρων λεπτῶν ἔχει δύο ὀξείας, ὡς 12^0, $35'$, $48''$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. *Καθὼς τὸ τόξον τῶν 40^0 ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ τόξον τῆς μιᾶς μοίρας λαμβανόμενον 40 φοράς, οὕτω καὶ ἡ γωνία τῶν 40^0 (ἡ πρὸς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦσα) ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν γωνίαν τῆς μιᾶς μοίρας λαμβανομένην 40 φοράς· διότι, ἂν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἡμικυκλίου φέρωμεν ἀκτῖνας εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστης μοίρας, αἱ ἀκτῖνες αὗται θὰ διαιρέσωσι τὴν γωνίαν τῶν 40^0 εἰς 40 γωνίας ἴσας καὶ ἑκάστη ἐκ τῶν γωνιῶν τούτων θὰ εἶναι γωνία μιᾶς μοίρας. Ἐκ τούτου προκύπτει, ὅτι δυνάμεθα νὰ συγκρίνωμεν δύο γωνίας, ὡς πρὸς τὸ μέγεθός των, συγκρίνοντες τὰ τόξα αὐτῶν πρὸς ἄλληλα. Διότι, ἂν μία γωνία εἶναι 48^0, ἄλλη δέ τις 72^0, ἡ μὲν πρώτη σύγκειται ἀπὸ τὴν γωνίαν τῆς μιᾶς μοίρας λαμβανομένην 48 φοράς, ἡ δὲ δευτέρα σύγκειται ἀπὸ τὴν ἰδίαν γωνίαν 1^0, λαμβανομένην 72 φοράς· λοιπὸν ἡ μία γωνία εἶναι πρὸς τὴν ἄλλην, ὡς εἶναι πρὸς ἀλλήλους οἱ ἀριθμοὶ 48 καὶ 72. Ἀλλὰ καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί· διότι τὸ ἓν περιέχει τὸ τόξον τῆς μιᾶς μοίρας 48 φοράς, τὸ δὲ ἄλλο περιέχει τὸ αὐτὸ 72 φοράς. Ὥστε αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς εἶναι καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ὀρθὴ γωνία ἔχει 90^0, ἡ γωνία μιᾶς μοίρας θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{90}$ τῆς ὀρθῆς, καὶ ἡ γωνία 2^0 θὰ εἶναι $\frac{2}{90}$ τῆς ὀρθῆς, καὶ ἡ γωνία 40^0 θὰ εἶναι $\frac{40}{90}$ ἢ $\frac{4}{9}$ τῆς ὀρθῆς, κτλ.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα *λέγεται πρότασις, δι' ἧς ζητεῖται νὰ γίνῃ τι.* Λύσις *δὲ τοῦ προβλήματος λέγεται ἡ ἐκτέλεσις τοῦ ζητουμένου.*

Ἡ λύσις τῶν ἑπομένων προβλημάτων ἀνάγεται εἰς τὰς ἑξῆς δύο ἐργασίας.

α') Νὰ γραφῇ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας ἔχομεν δύο σημεῖα, καὶ νὰ αὐξηθῇ ὅσον θέλωμεν.

Ἡ ἐργασία αὕτη ἐκτελεῖται διὰ τοῦ κανόνος καὶ τῆς γραφίδος.

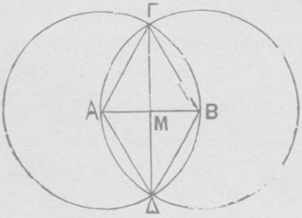
β') Νὰ γραφῇ περιφέρεια, τῆς ὁποίας ἔχομεν τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα.

Ἡ ἐργασία αὕτη ἐκτελεῖται διὰ τοῦ διαβήτου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1ον

103. Δοθείσης εὐθείας νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον καὶ ἡ εἰς αὐτὸ κάθετος.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον αὐτῆς καὶ νὰ ἀχθῇ ἐξ αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.



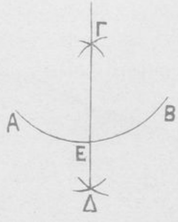
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. *Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, καὶ μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν. Αἱ περιφέρειαι αὗται θὰ τέμνωνται (διότι ἑκατέρα ἐξ αὐτῶν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἄλλης), ἐὰν δὲ συνδέσωμεν τὰς δύο τομὰς Γ καὶ Δ διὰ τῆς ΓΔ, λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ θὰ διαιρῇ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς δύο ἴσα μέρη ΑΜ, ΜΒ καὶ θὰ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν.*

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. *Τὸ σημεῖον Γ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας ΑΒ· ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ σημεῖον Δ (διότι ἐκ τῆς κατασκευῆς αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ΓΑ, ΓΒ, ΔΑ, ΔΒ εἶναι ἴσαι), διὰ τοῦτο ἀμφότερα θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ (ἐδ. 85)· ἀλλ' ἡ μόνη εὐθεῖα, ἥτις ἔχει ἀμφότερα τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ, εἶναι ἡ δι' αὐτῶν διερχομένη ΓΔ· ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο γραφομένων περιφερειῶν δὲν εἶναι ἀνάγκη* *νὰ εἶναι ἴσαι μὲ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ, ἀρκεῖ νὰ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· διότι αἱ τομαὶ αὐτῶν Γ, Δ θὰ ἀπέχωσι πάντοτε ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς ΑΒ· ἐπομένως ἡ ΓΔ θὰ εἶνε ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2ον

104. Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τόξον ἢ δοθεῖσα γωνία εἰς δύο ἴσα μέρη.



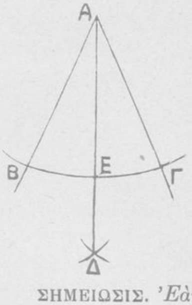
Ἔστω τὸ δοθὲν τόξον τὸ ΑΒ· ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον αὐτοῦ.

ΛΥΣΙΣ. *Διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ προηγουμένου προβλήματος εὑρίσκομεν τὴν κάθετον ΓΔ εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ· ἡ δὲ κάθετος αὕτη διαιρεῖ (ἐδ. 97) τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ τόξα ΑΕ, ΕΒ ὁμοίως εἰς δύο ἴσα μέρη, θὰ εὑρεθῇ τὸ δοθὲν τόξον ΑΒ διῃρημένον εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη· ἐὰν δὲ καὶ ἕκαστον τῶν τεσσάρων διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα, θὰ διαιρεθῇ τὸ δοθὲν τόξον εἰς ὀκτὼ ἴσα μέρη, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸ τόξον εἰς 2, 4, 8, 16, 32 κτλ. ἴσα μέρη.*

Ἔστω δεύτερον ἡ δοθεῖσα γωνία ἡ ΒΑΓ· ζητεῖται νὰ διαιρεθῇ αὕτη εἰς δύο ἴσα μέρη.

ΛΥΣΙΣ. *Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας Α καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν τυχοῦσαν γράφομεν περιφέρειαν, τῆς ὁποίας τόξον τι, ἔστω τὸ ΒΓ,*



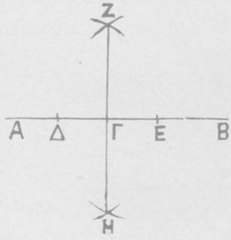
περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας· ἔπειτα εὑρίσκομεν (διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ πρώτου προβλήματος) τὴν κάθετον ΑΔ εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΒΓ (τῆς ὁποίας καθέτου ἔχομεν ἓν σημεῖον, τὸ Α)· αὕτη δὲ ἡ κάθετος θὰ διαιρέσῃ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εἰς δύο ἴσα μέρη ΒΑΔ, ΔΑΓ· διότι διαιρεῖ τὸ τόξον ΒΓ εἰς δύο μέρη ἴσα, ΒΕ, ΕΓ, αἱ δὲ εἰς ἴσα τόξα ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίκεντροι γωνίαι ΒΑΔ, ΔΑΓ εἶναι ἴσαι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰς γωνίας ΒΑΔ, ΔΑΓ ὁμοίως εἰς δύο ἴσα μέρη, θὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα γωνία ΒΑΓ εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ οὕτω καθεξῆς.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3ον.

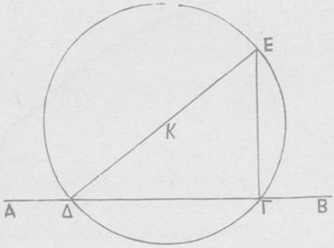
105. Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB καὶ σημεῖον αὐτῆς τὸ $Γ$· πρόκειται ἐκ τοῦ $Γ$ νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν AB.



Μὲ κέντρον τὸ $Γ$ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν τυχοῦσαν γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς δύο σημεῖα $Δ$ καὶ $Ε$. Ἔπειτα φέρομεν, κατὰ τὸ πρῶτον πρόβλημα, τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς $ΔΕ$ (ὅπερ εἶναι τὸ $Γ$) καὶ αὐτὴ θὰ εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν AB εἰς τὸ σημεῖον $Γ$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται καὶ ἄλλως, ὡς ἑξῆς. Μὲ κέντρον οἱονδήποτε σημεῖον K, ἐκτὸς τῆς εὐθείας κείμενον, καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν $KΓ$ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις νὰ τέμνῃ τὴν εὐθεῖαν καὶ εἰς ἄλλο τι σημεῖον $Δ$ (πλὴν τοῦ $Γ$)· ἔπειτα ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν $ΔK$ καὶ προσεκβάλλομεν αὐτήν, μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἴς τι σημεῖον $Ε$· ἄγομεν τέλος τὴν $ΕΓ$ καὶ αὐτὴ θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος, διότι ἡ γωνία $ΔΓΕ$, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον, εἶναι ὀρθή.

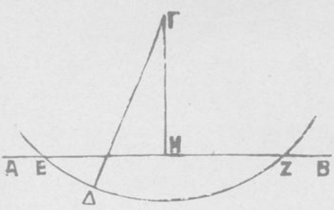


Ἡ κατασκευὴ αὕτη χρησιμεύει τότε μάλιστα, ὅταν τὸ δοθὲν σημεῖον $Γ$ εἶναι τὸ ἄκρον τῆς εὐθείας καὶ δὲν θέλωμεν νὰ προσεκβάλωμεν αὐτήν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὴν διὰ τοῦ γνώμονος ταχυτέραν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἐμάθομεν ἤδη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4ον.

106. Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ δεδομένην εὐθεῖαν, ἥτις δὲν ἔχει τὸ δοθὲν σημεῖον, καὶ ἥτις δύναται νὰ αὐξηθῇ ὅσον θέλωμεν.



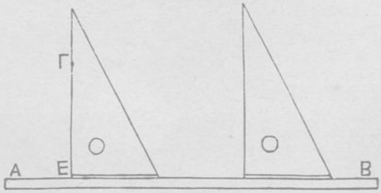
Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ ἐκτὸς αὐτῆς δοθὲν σημεῖον τὸ $Γ$· ζητεῖται ἐκ τοῦ $Γ$ νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν AB (ἥτις δύναται νὰ αὐξηθῇ, ἐὰν εἶναι ἀνάγκη).

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Λαμβάνομεν τυχὸν

σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, οἷον τὸ Δ, τὸ ὁποῖον νὰ κεῖται πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς εὐθείας ἢ τὸ Γ, καὶ μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΓΔ γράφομεν περιφέρειαν· τὴν περιφέρειαν ταύτην θὰ τέμνῃ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (αὐξανομένη ἐν ἀνάγκῃ) εἰς δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ, διότι τέμνει τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς ΓΔ, ὅταν δὲ εὐθεῖά τις τέμνῃ μίαν ἀκτῖνα, τέμνει προφανῶς καὶ τὴν περιφέρειαν. Ἐὰν νῦν εὕρωμεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΕΖ (κατὰ τὸ πρῶτον πρόβλημα), αὕτη θὰ εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Γ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. *Διότι, ὡς κάθετος εἰς τὸ μέσον χορδῆς, διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Γ τοῦ κύκλου (97).*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Διὰ τοῦ γνώμονος καὶ τοῦ κανόνος λύομεν τὸ πρόβλημα τοῦτο ὡς ἑξῆς. Ἐφαρμόζομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ μίαν ἐκ τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ γνώμονος καὶ προσαρμόζομεν εἰς αὐτὴν τὸν κανόνα· ἔπειτα διατηροῦντες τὸν κανόνα ἀκίνητον, σύρομεν τὸν γνώμονα ἐπ' αὐτοῦ,*



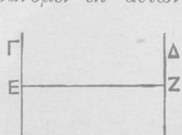
μέχρις οὗ διέλθῃ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ διὰ τοῦ Γ, ὅτε, μεταχειριζόμενοι τὴν πλευρὰν ταύτην ὡς κανόνα, γράφομεν τὴν κάθετον ΓΕ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5ον.

107. Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ· ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἐπ' αὐτῆς τετράγωνον.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. *Ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β τῆς δοθείσης εὐθείας ἄγομεν καθέτως ἐπ' αὐτὴν τὰς ΑΓ καὶ ΒΔ, καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῶν τὰ τμήματα ΑΕ καὶ ΒΖ ἴσα μὲ τὴν ΑΒ· ἔπειτα ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ σχῆμα ΑΒΖΕ εἶναι τετράγωνον.*



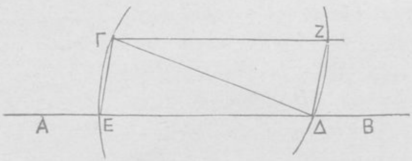
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. *Αἱ εὐθεῖαι ΑΕ καὶ ΒΖ εἶναι παράλληλοι (ὡς κάθετοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ) καὶ ἴσαι ἐκ τῆς κατασκευῆς· ἄρα τὸ σχῆμα ΑΒΖΕ εἶναι παραλληλόγραμμον (κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 90).*

Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο γωνίαι τοῦ Α καὶ Β εἶναι (ἐκ κατασκευῆς) ὀρθαί, καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν Ε καὶ Ζ θὰ εἶναι ὀρθαὶ (ἐδ. 87)· ἄρα τὸ σχῆμα τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον. Ἀλλὰ καὶ αἱ πλευραί του εἶναι ἴσαι· διότι αἱ μὲν *τρεῖς ΑΒ, ΑΕ, ΒΖ εἶναι ἴσαι ἐκ τῆς κατασκευῆς· ἡ δὲ ΕΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒ, διότι εἶναι ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου· ἄρα τὸ σχῆμα ΑΒΖΕ εἶναι τετράγωνον.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6ον.

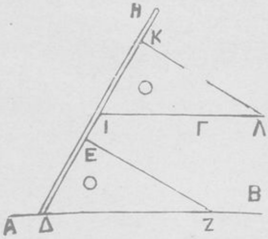
108. Νὰ ἀχθῇ παράλληλος τῆς δοθείσης εὐθείας ἀπὸ σημείου μὴ κειμένου ἐπ' αὐτῆς.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ δοθὲν σημεῖον, ἐκτὸς αὐτῆς, τὸ Γ· ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Γ εὐθεῖα παράλληλος τῆς ΑΒ.



ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. *Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν τυχοῦσαν γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις νὰ τέμνῃ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Δ· μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Γ καὶ θὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Ε· τέλος μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν χορδὴν ΕΓ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν πρώτην εἴς τι σημεῖον Ζ· ἄγομεν τὴν ΓΖ καὶ αὐτὴ θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος.*

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. *Διότι τὰ δύο τρίγωνα ΔΓΕ καὶ ΔΓΖ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα τὰς πλευράς των ἴσας (ΓΔ=ΓΔ, ΔΕ=ΔΓ=ΓΖ καὶ ΕΓ=ΔΖ)· εἰς τὰ ἴσα δὲ ταῦτα τρίγωνα αἱ γωνίαι ΓΔΕ καὶ ΔΓΖ εὑρίσκονται ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ΕΓ καὶ ΔΖ· ἄρα εἶναι ἴσαι καὶ διὰ τοῦτο αἱ εὐθεῖαι ΕΔ καὶ ΓΖ εἶναι παράλληλοι (ἐδ. 46).*



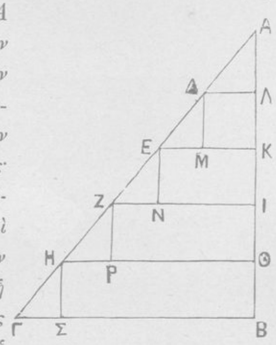
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Διὰ τοῦ γνώμονος καὶ τοῦ κανόνος λύεται τὸ πρόβλημα τοῦτο ταχύτερον ὡς ἑξῆς. Ἐφαρμόζομεν τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ γνώμονος ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου πλευρᾶς του ΔΕ ἐφαρμόζομεν κανόνα, τὸν ΔΗ, ἔπειτα σύρομεν τὸν γνώμονα ἐπὶ τοῦ κανόνος (τὸν ὁποῖον διατηροῦμεν ἀκίνητον), μέχρις οὗ ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ διέλθῃ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Γ· τότε μεταχειριζόμενοι τὴν ὑποτείνουσαν ὡς κανόνα γράφομεν διὰ γραφίδος τὴν εὐθεῖαν ΙΓΛ, ἥτις θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος. Διότι αἱ γωνίαι ΚΙΛ καὶ ΚΔΒ εἶναι ἴσαι· εἶναι δὲ αἱ γωνίαι αὗται ἐντός, ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ* μέρη τῶν εὐθειῶν AB καὶ $I\Lambda$, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΔK· ἄρα αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7ον.

109. Νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἰς ἴσα μέρη ὅσα θέλωμεν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, καὶ ἂς διαιρεθῇ εἰς πέντε ἴσα μέρη.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου A τῆς εὐθείας AB ἄγομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν σχηματίζουσαν μετ' αὐτῆς γωνίαν, ἔστω τὴν $A\Gamma$, ἔπειτα λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς $A\Gamma$ τυχὸν τμῆμα τὸ $A\Delta$ καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τοῦτο ἐπὶ τῆς $A\Gamma$ κατὰ σειρὰν πεντάκις· ἔστω δὲ Γ τὸ ἄκρον τοῦ πέμπτου τμήματος $H\Gamma$· ἄγομεν διὰ τῶν σημείων Γ καὶ B τὴν εὐθεῖαν ΓB καὶ ἐκ τῶν σημείων H, Z, E, Δ, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ $A\Gamma$ εἰς ἴσα μέρη, ἄγομεν παραλλήλους τῆς $B\Gamma$, τὰς $H\Theta$, ZI, EK, $\Delta\Lambda$· λέγω, ὅτι αἱ παράλληλοι αὗται διαιροῦσι τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν AB εἰς πέντε ἴσα μέρη, τὰ $A\Lambda$, ΛK, KI, $I\Theta$, ΘB.



✳ ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Ἐὰν ἐκ τῶν σημείων H, Z, E, Δ φέρωμεν παραλλήλους τῆς AB, γίνονται τὰ τρίγωνα ΔME, ENZ, ZPH, $H\Sigma\Gamma$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα πρὸς τὸ $A\Delta\Lambda$. Τῷ ὄντι, ἐὰν παραβάλωμεν τὸ $A\Delta\Lambda$ πρὸς ἓν οἱονδήποτε ἐξ αὐτῶν, ἔστω πρὸς τὸ EZN, βλέπομεν, ὅτι ἔχουσιν

$EZ = A\Delta$ (ἐκ κατασκευῆς).

$E = A$ ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων AB, EN τεμνομένων ὑπὸ τῆς $A\Gamma$,

καὶ $Z = \Delta$, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ZI καὶ $\Delta\Lambda$ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΓA·

ἑπομένως τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (ἐδ 62).

Ἐπειδὴ λοιπὸν πάντα τὰ τρίγωνα $A\Delta\Lambda$, ΔEM, ENZ, ZHP, $H\Sigma\Gamma$ εἶναι ἴσα μεταξύ των, συνάγομεν, ὅτι εἶναι

$$A\Lambda = \Delta M = EN = ZP = H\Sigma\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\Delta M = \Lambda K$, $EN = KI$, $ZP = I\Theta$, $H\Sigma = \Theta B$, ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων, ἕπεται, ὅτι εἶναι

$$A\Lambda = \Lambda K = KI = I\Theta = \Theta B\cdot$$

τουτέστιν ἡ εὐθεῖα AB διηρέθη εἰς πέντε ἴσα μέρη.

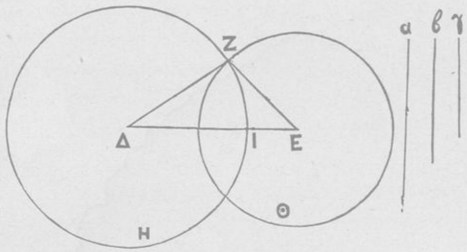
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8ον.

110. Ἐκ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ α, β, γ· πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον ἔχον πλευρὰς τὰς εὐθείας ταύτας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. *Ἐπειδὴ παντὸς τριγώνου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, ἀνάγκη ἑκάστη τῶν τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, διὰ νὰ λύηται τὸ πρόβλημα.*

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. *Λαμβάνομεν ἐπί τινος εὐθείας ἓν μέρος ΔΕ ἴσον μὲ τὴν μεγίστην ἐκ τῶν τριῶν δεδομένων εὐθειῶν, τὴν α, καὶ γράφομεν δύο περιφερείας, ἐχούσας κέντρα μὲν τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, ἀκτῖνας δὲ τὰς δύο ἄλλας εὐθείας β καὶ γ· αἱ περιφέρειαι αὗται τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ ἂν φέρωμεν εἰς ἓν τῶν σημείων τῆς τομῆς Ζ τὰς ἀκτῖνας ΔΖ, ΕΖ, γίνεται τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΔΕΖ.*



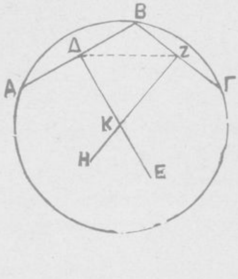
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9ον.

111. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ τριῶν δοθέντων σημείων.

Ἔστωσαν Α, Β, Γ τὰ τρία δοθέντα σημεῖα· ζητεῖται νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου ἔχουσα τὰ τρία ταῦτα σημεῖα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. *Τὰ τρία δοθέντα σημεῖα πρέπει νὰ μὴ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας· διότι τρία σημεῖα περιφερείας ποτὲ δὲν εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας (82).*

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. *Ἄγομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΒΓ, ἔπειτα τὴν ΔΕ κάθετον εἰς τὸ μέσον Δ τῆς ΑΒ καὶ τὴν ΖΗ κάθετον εἰς τὸ μέσον Ζ τῆς ΒΓ· αἱ δύο αὗται κάθετοι, ἐὰν ἀρκούντως αὐξηθῶσι, θὰ τέμνωνται εἴς τι σημεῖον Κ, καὶ ἡ μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΑ γραφομένη περιφέρεια θὰ ἔχῃ τὰ τρία δοθέντα σημεῖα Α, Β, Γ.*



Διότι τὸ σημεῖον Κ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β, διότι κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ (ἐδ. 84)· ὁμοίως ἀπέχει ἐξ ἴσου καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ, διότι εἶναι σημεῖον τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ· ὥστε αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ εἶναι ἴσαι, καὶ ἂν γράψωμεν περιφέρειαν μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ μὲ ἀκτῖνα ἢ τὴν ΚΑ ἢ τὴν ΚΒ ἢ τὴν ΚΓ, ἡ περιφέρεια αὐτὴ θὰ ἔχῃ καὶ τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ προβλήματος τούτου εὑρίσκομεν τὸ κέντρον δοθέντος κύκλου ἢ δοθέντος τόξου. Διότι ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ ἐπὶ τοῦ τόξου τρία τυχόντα σημεῖα καὶ νὰ εὕρωμεν τὸ κέντρον τῆς δι' αὐτῶν διερχομένης περιφερείας.*

Προβλήματα εἰς λύσιν.

1) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, οὗ ἡ βάσις νὰ εἶναι διπλασία τῆς προσκειμένης πλευρᾶς (τοῦ ὕψους) καὶ ἡ περίμετρος ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν Α.

2) Νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἓν νὰ εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄλλου.

3) Ἐξ ἑνὸς σημείου ἐντὸς γωνίας νὰ ἀχθῇ εὐθεῖά τις τοιαύτη, ὥστε τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον νὰ εἶναι ἰσοσκελές.

4) Ἐντὸς κύκλου λαμβάνομεν σημεῖόν τι· νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου τούτου χορδή τις τοιαύτη, ὥστε νὰ διαιρῆται εἰς τὸ ληφθὲν σημεῖον εἰς δύο μέρη ἴσα.

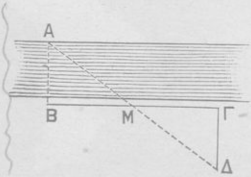
5) Νὰ κατασκευασθῇ ῥόμβος ἐκ τῶν διαγωνίων του.

6) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἐκ τῆς διαγωνίου του.

7) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν αὐτοῦ.

8) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλάτος ποταμοῦ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπέναντι ὄχθη εἶναι ἀπρόσιτος.

Ἔστω Α σημεῖόν τι εὐδιάκριτον ἐπὶ τῆς ἀπέναντι ἡμῶν ὄχθης καὶ Β σημεῖόν τι ἀπέναντι τοῦ Α καὶ προσιτὸν εἰς ἡμᾶς· ἄγομεν τὴν ΒΜ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ προεκτείνοντες λαμβάνομεν ΜΓ = ΒΜ· ἔπειτα ὑψοῦμεν τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΜΓ καὶ ἐπ' αὐτῆς δοκιμάζοντες εὑρίσκομεν σημεῖόν τι Δ τοιοῦτον, ὥστε τὸ σημεῖον Α νὰ φαίνηται κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΔΜ· τότε ἡ ΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον πλάτος ΑΒ· διότι τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΜ καὶ ΜΓΔ εἶναι ἴσα (ἐδ. 62).



Ι. Ν. Χρόνης

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

Ὁρισμοί.

112. Μέτρησις *μεγέθους λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς ὡρισμένον, τὸ ὁποῖον λέγεται* μονάς. *Ἐκ τῆς συγκρίσεως δὲ ταύτης εὑρίσκομεν, πόσαι μονάδες καὶ πόσα καὶ ποῖα μέρη τῆς μονάδος ἀποτελοῦσι τὸ μέγεθος, ἤτοι πῶς ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ μέγεθος.*

113. Τὸ μέγεθος, ὅπερ ἐλήφθη ὡς μονάς, παρίσταται διὰ τῆς μονάδος 1, τὸ δὲ μετρηθὲν μέγεθος παρίσταται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς, καθ' ὃν τρόπον ἀποτελεῖται τὸ μετρηθὲν μέγεθος ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς. Ἐάν, παραδείγματος χάριν, τὸ μετρηθὲν μέγεθος εὑρέθη ἀποτελούμενον ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τοῦ ἡμίσεος αὐτῆς καὶ ἐκ τοῦ πέμπτου αὐτῆς, ὁ παριστῶν αὐτὸ ἀριθμὸς θὰ εἶνε

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}, \text{ ἤτοι } \frac{17}{10}$$

114. Ὁ ἐκ τῆς μετρήσεως γραμμῆς προκύπτων ἀριθμός, ὁ παριστῶν αὐτήν, λέγεται μῆκος *αὐτῆς· ὁ δὲ ἐκ τῆς καταμετρήσεως ἐπιφανείας προκύπτων, ὁ καὶ παριστῶν αὐτήν, λέγεται* ἐμβαδὸν *αὐτῆς.*

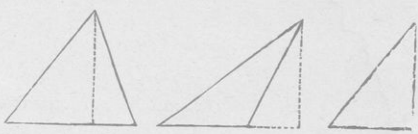
115. Τὰ ἴσα σχήματα, εἴτε ἀκέραια ἐφαρμόζουσιν εἴτε διῃρημένα, παρίστανται ὑπὸ ἴσων ἀριθμῶν· διότι σύγκεινται ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν. Καὶ ἀντιστρόφως, τὰ παριστώμενα ὑπὸ ἴσων ἀριθμῶν ὁμοειδῆ σχήματα εἶναι ἴσα, εἴτε ἀκέραια εἴτε κατὰ μέρη· διότι ἀποτελοῦνται ὑπὸ τῶν αὐτῶν μερῶν τῆς μονάδος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Εἰς ὅλα τὰ ἑπόμενα ὑποθέτομεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ μετροῦνται μὲ μίαν μονάδα καὶ παρίστανται δι' ἀριθμῶν ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν. Τοῦτο ἐν γένει δὲν ἀληθεύει ἢ κατὰ προσέγγισιν· διότι ὑπάρχουσι καὶ γραμμαί, τὰς ὁποίας ἡ μονὰς καὶ τὰ μέρη αὐτῆς δὲν δύνανται νὰ ἀποτελέσωσιν (ἐκτός, ὅταν ληφθῶσιν ἄπειρα τοιαῦτα), καὶ* αἱ ὁποῖαι λέγονται ἀσύμμετροι πρὸς τὴν μονάδα. Τὰς τοιαύτας γραμμὰς δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν μόνον κατὰ προσέγγισιν καὶ νὰ παραστήσωμεν δι' ἀριθμῶν· δυνάμεθα ὅμως νὰ προσεγγίσωμεν εἰς αὐτὰς ὅσον θέλωμεν. Διότι, ἂν παραδείγματος χάριν, μετρήσωμεν μίαν τοιαύτην γραμμὴν μὲ τὸ χιλιοστὸν τοῦ πήχεως, θὰ εὕρωμεν, ὅτι περιέχει ἀριθμόν τινα χιλιοστῶν, ἔστω 815, καὶ ὑπόλοιπόν τι μικρότερον τοῦ χιλιοστοῦ· τότε ὁ ἀριθμὸς 0,815 παριστᾷ τὴν γραμμὴν ταύτην μὲ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$.

ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

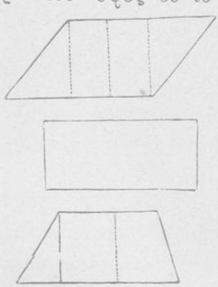
Ὁρισμοί.

116. Ὡς μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνομεν τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἡ μονὰς τῶν εὐθειῶν.



Βάσις τριγώνου λέγεται μία τις τῶν πλευρῶν του· ὕψος δὲ ἡ ἐπὶ τὴν βάσιν ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς ἀγομένη κάθετος. Δύναται δὲ ἡ κάθετος αὕτη νὰ πέσῃ εἴτε εἰς αὐτὴν τὴν βάσιν, εἴτε εἰς τὴν προσεκβολὴν αὐτῆς.

Βάσις παραλληλογράμμου λέγεται ἑκατέρα τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του· ὕψος δὲ τὸ ἀπόστημα τῶν πλευρῶν τούτων ἀπ' ἀλλήλων.



Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι, πᾶσαι αἱ μεταξὺ αὐτῶν κάθετοι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, καὶ διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ λάβωμεν οἱανδήποτε ἐξ αὐτῶν ὡς ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου.

Ἐὰν τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον, βάσις καὶ ὕψος αὐτοῦ εἶναι (κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν) δύο προσκείμεναι πλευραὶ αὐτοῦ.

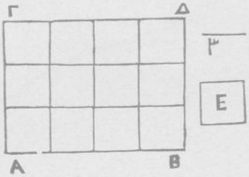
Τοῦ τραπεζίου βάσεις μὲν λέγονται αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ αὐτοῦ· ὕψος δὲ τὸ ἀπόστημα αὐτῶν ἀπ' ἀλλήλων.

ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΟΥ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ

ΘΕΩΡΗΜΑ

117. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του *(τουτέστι τῶν δύο ἀριθμῶν, δι' ὧν ταῦτα παρίστανται).*

Ἔστωσαν κατὰ πρῶτον οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι παριστῶσι τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος, ἀκέραιοι καὶ οἱ δύο.

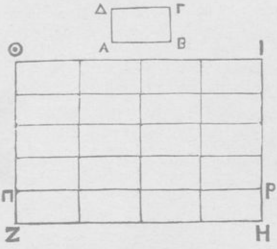


Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἡ μὲν βάσις ΑΒ περιέχει τὴν μονάδα μ τῶν εὐθειῶν τετράκις, τὸ δὲ ὕψος ΑΓ περιέχει αὐτὴν τρίς· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ θὰ περιέχῃ τὴν μονάδα Ε τῶν ἐπιφανειῶν 3.4 φορὰς ἤτοι 12άκις καὶ ἑπομένως ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ θὰ παριστᾶται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 12·

Διότι, ἂν διαιρέσωμεν τὴν μὲν βάσιν ΑΒ εἰς τέσσαρα μέρη, ἴσα μὲ τὴν μονάδα μ, τὸ δὲ ὕψος ΑΓ εἰς τρία, καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας φέρωμεν παραλλήλους τῆς ἄλλης, διαιρεῖται τὸ ὀρθογώνιον εἰς 3. 4 ἤτοι 12 μέρη (διότι αἱ μὲν παράλληλοι τῆς ΑΒ διαιροῦσιν αὐτὸ κατὰ πρῶτον εἰς 3, αἱ δὲ παράλληλοι τῆς ΑΓ διαιροῦσιν ἔπειτα ἕκαστον τῶν τριῶν τούτων εἰς 4)· εἶναι δὲ τὰ μέρη ταῦτα πάντα τετράγωνα ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ὀρθὰς καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας μὲ τὴν μονάδα μ. Ἄρα σύγκειται τὸ ὀρθογώνιον ἐκ τῆς μονάδος Ε τῶν ἐπιφανειῶν δωδεκάκις ληφθείσης, τουτέστι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι 12.

Ἔστωσαν δεύτερον οἱ ἀριθμοὶ οἱ παριστῶντες τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος κλασματικοί.

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἡ μὲν βάσις ΑΒ εἶναι $\frac{7}{4}$ *τῆς μονάδος τῶν εὐθειῶν μ, τὸ δὲ ὕψος ΑΔ τὰ* $\frac{3}{5}$ *αὐτῆς. Ἐὰν θέσωμεν κατὰ σειρὰν 4 ὀρθογώνια ἴσα μὲ τὸ ΑΒΓΔ, ἀποτελεῖται τὸ ὀρθογώνιον ΖΗΡΠ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν μὲν 7 μονάδας μ, ὕψος δὲ* $\frac{3}{5}$ *· ἐὰν δὲ θέσωμεν ἐπ' ἄλληλα 5 ὀρθογώνια ἴσα μὲ τὸ ΖΗΡΠ, ἀποτελεῖται τὸ ὀρθογώνιον ΖΗΙΘ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν 7 καὶ ὕψος 3, ἑπομένως ἔχει ἐμβαδὸν 21 μονάδας Ε. Ἐπειδὴ δὲ 20 ὀρθογώνια ἴσα πρὸς τὸ δοθὲν*



ΑΒΓΔ ἀποτελοῦσι τὸ ΖΗΙΘ, τὸ ὁποῖον σύγκειται ἀπὸ 21 μονάδας Ε, ἕπεται ὅτι ἕκαστον ἐξ αὐτῶν εἶναι $\frac{21}{20}$ *τῆς μονάδος Ε τῶν ἐπιφανειῶν, τουτέστιν ἔχει ἐμβαδὸν* $\frac{21}{20}$, *ἤτοι τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του* $\frac{7}{4}$ *ἐπὶ τὸ ὕψος του* $\frac{3}{5}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Ἐὰν ἡ πλευρὰ τετραγώνου παριστᾶται διά τινος ἀριθμοῦ, ἔστω τοῦ 6, ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ παρίσταται διὰ τοῦ* 6×6, *ἤτοι διὰ τοῦ γινομένου τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του· διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον παντὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του λέγεται* τετράγωνον *αὐτοῦ· σημειοῦται δὲ συντόμως ὡς ἑξῆς:* 6^2 *ἀντὶ* 6×6.

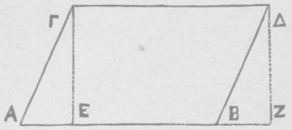
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΚΑΙ ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΙΣ ΑΥΤΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

118. Πᾶν παραλληλόγραμμον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ὀρθογώνιον, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

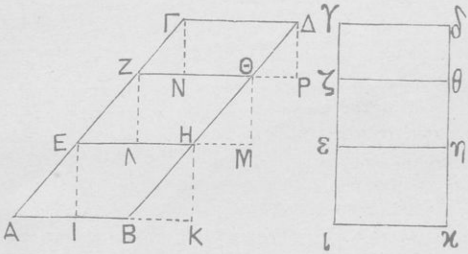
Ἃς ὑποθέσωμεν κατ' ἀρχάς, ὅτι ἡ βάσις ΑΒ εἶναι ἴση ἢ μεγαλητέρα τῆς προσκειμένης πλευρᾶς ΑΓ.

Ἐὰν ἐκ τῶν ἄκρων τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς καταβιβάσωμεν καθέτους ἐπὶ τὴν βάσιν, ἡ μὲν ἐκ τῆς ἀμβλείας γωνίας Γ ἀγομένη, ἡ ΓΕ, θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ παραλληλογράμμου· διότι τὸ τμῆμα ΑΕ εἶναι μικρότερον τῆς ΑΓ (ὡς ὑποτεινούσης τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΕ), ἑπομένως μικρότερον καὶ τῆς ΑΒ· ἡ δὲ κάθετος, ἥτις καταβιβάζεται ἐκ τοῦ Δ, θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς βάσεως. Θὰ εἶναι δὲ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΕ καὶ ΒΔΖ ἴσα, διότι ἔχουσι τὰς δύο γωνίας ἴσας Α=Β (ἐδ. 51) καὶ Ε=Ζ ὡς ὀρθάς, ἄρα ἔχουσι καὶ τὰς ὀξείας γωνίας Γ καὶ Δ ἴσας· ἔχουσι δὲ καὶ τὰς ὑποτεινούσας ἴσας (ἐδ. 87), ἄρα εἶναι ἴσα (ἐδ. 62). Ἀλλ' ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΓΕ ἀποτμηθῇ ἀπὸ τοῦ παραλληλογράμμου καὶ τεθῇ εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἴσου του ΒΔΖ, μετασχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΕΓΔΖ· ἑπομένως τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο ΕΓΔΖ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἴσα κατὰ τὴν



ἐπιφάνειαν· ἔχει δὲ τὸ ὀρθογώνιον $ΕΓΔΖ$ βάσιν μὲν τὴν $ΕΖ$, ἴσην μὲ τὴν $ΓΔ$, ἴσην μὲ τὴν $ΑΒ$, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ $ΓΕ$.

Ἄς ὑποθέσωμεν νῦν, ὅτι ἡ βάσις $ΑΒ$ εἶναι μικροτέρα τῆς προσκειμένης πλευρᾶς $ΑΓ$· ἐὰν τότε διαιρέσωμεν τὴν $ΑΓ$ εἰς μέρη ἴσα ἢ μικρότερα τῆς $ΑΒ$, καὶ ἐκ τῶν σημείων $Ε$, $Ζ$ τῆς διαιρέσεως φέρωμεν παραλλήλους τῆς $ΑΒ$, διαιρεῖται τὸ παραλληλόγραμμον εἰς ἄλλα $ΑΕΗΒ$, $ΕΗΘΖ$, $ΖΘΔΓ$, τὰ ὁποῖα ἔχουσι βάσεις $ΕΗ$, $ΖΘ$ ἴσας μὲ τὴν $ΑΒ$, καὶ τὰ ὁποῖα, ὡς προηγουμένως εἴπομεν, μετασχηματίζονται εἰς τὰ ὀρθογώνια $ΕΙΚΗ$, $ΖΘΜΛ$, $ΓΔΡΝ$, ἅτινα πάντα ἔχουσι βάσεις ἴσας μὲ τὴν $ΑΒ$. Τὰ ὀρθογώνια ταῦτα, τιθέμενα κατὰ σειρὰν



ἐπ' ἄλληλα, ἀποτελοῦσι τὸ ὀρθογώνιον $ικδγ$, ἑπομένως τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο καὶ τὸ παραλληλόγραμμον $ΑΒΓΔ$ εἶναι ἴσα κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. Τὸ ὀρθογώνιον δὲ τοῦτο $ικδγ$ ἔχει βάσιν τὴν $ικ$, ἤτοι τὴν $ΙΚ$, ἴσην μὲ τὴν $ΑΒ$, καὶ ὕψος τὴν $ιγ$, ἤτοι τὸ ἄθροισμα $ΓΝ+ΖΛ+ΕΙ$, τὸ ὁποῖον ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου· διότι αἱ παράλληλοι $ΓΔ$, $ΖΘ$, $ΕΗ$, $ΑΒ$ διαιροῦσι τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου εἰς τμήματα ἴσα μὲ τὰ $ΓΝ$, $ΖΛ$, $ΕΙ$ (κατὰ τὸ πόρισμα 88).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Δυνάμεθα διὰ μιᾶς μόνον τομῆς νὰ μετασχηματίσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον· ἀρκεῖ νὰ λαμβάνωμεν ὡς βάσιν αὐτοῦ τὴν μεγαλητέραν τῶν πλευρῶν του.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

119. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Διότι ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειαν ὀρθογωνίου, ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

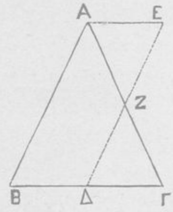
120. Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμα.

Διότι μετασχηματίζονται εἰς τὸ ὀρθογώνιον, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

121. Πᾶν τρίγωνον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ παραλληλόγραμμον, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἂς λάβωμεν ὡς βάσιν αὐτοῦ τὴν πλευρὰν ΒΓ. Ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς ΒΓ ἄγομεν παράλληλον τῆς ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ Α παράλληλον τῆς ΒΓ. Οὕτω σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΔΕ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν μὲν τὴν ΒΔ, ἤτοι τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ Α ἀγομένην κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἤτοι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου. Εἶναι δὲ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο ἰσοδύναμον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.



Διότι τὰ δύο τρίγωνα ΔΖΓ καὶ ΑΖΕ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΑΕ ἴσην μὲ τὴν ΔΓ· (διότι καὶ αἱ δύο εἶναι ἴσαι μὲ τὴν ΒΔ), καὶ τὴν γωνίαν Α ἴσην μὲ τὴν Γ (ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΕ καὶ ΒΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ)· ἔτι δὲ καὶ τὴν γωνίαν Ε ἴσην μὲ τὴν Δ (δι' ὅμοιον λόγον). Ἀλλ' ἐὰν τὸ τρίγωνον ΔΖΓ ἀποτμηθῇ ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τεθῇ εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἴσου του ΖΕΑ, μετασχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΔΕ· εἶναι λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα ἰσοδύναμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

122. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου εἶναι γινόμενον τοῦ ἡμίσεος τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του $\left(\frac{1}{2}\beta\times\upsilon\right)$· *ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του* $\left(\frac{\beta\times\upsilon}{2}\right)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

123. Πᾶν τρίγωνον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ὀρθογώνιον, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου.

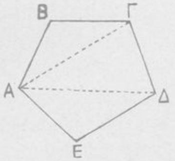
Διότι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΔΕ, ὅπερ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, μετασχηματίζεται εἰς ὀρθογώνιον ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

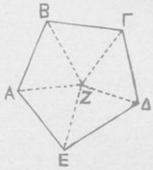
ΠΟΡΙΣΜΑ 3ον

124. Τὰ ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη ἔχοντα τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα.

Διότι, ὅταν κατατμηθῶσι, μετασχηματίζονται εἰς τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον· ἑπομένως ἐφαρμόζουσιν, ἀφοῦ διαιρεθῶσιν εἰς μέρη.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν παντὸς εὐθυγράμμου σχήματος ἀναλύοντες αὐτὸ εἰς τρίγωνα. Πρὸς τοῦτο ἄγομεν ἔκ τινος κορυφῆς τοῦ σχήματος τὰς διαγωνίους αὐτοῦ, ἢ καὶ ἔκ τινος σημείου ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένου ἄγομεν εὐθείας εἰς τὰς κορυφάς του.*

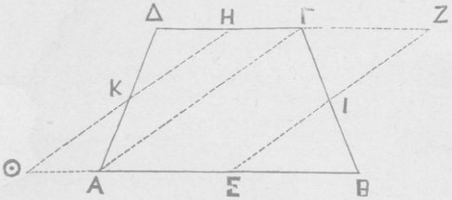




ΘΕΩΡΗΜΑ

125. Πᾶν τραπέζιον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ παραλληλόγραμμον, ὅπερ ἔχει ὕψος μὲν τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου, βάσιν δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο βάσεων τοῦ τραπεζίου.

Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ ἔχον βάσεις μὲν τὰς παραλλήλους ΑΒ καὶ ΓΔ, ὕψος δὲ τὴν ἀπόστασιν αὐτῶν. Ἐὰν φέρωμεν τὴν διαγώνιον ΑΓ διαιροῦμεν τὸ τραπέζιον εἰς δύο τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ, ἔχοντα βάσεις τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου καὶ ὕψος τὸ αὐτό, τουτέστι τὴν ἀπόστασιν τῶν παραλλήλων. Καὶ τὸ μὲν ΑΒΓ μετασχηματίζεται, ὡς προηγουμένως ἐδείξαμεν, εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΕΖΓ, τὸ δὲ ΑΓΔ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΘΑΓΗ· ἑπομένως τὸ τραπέζιον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΘΕΖΗ· ἔχει δὲ τοῦτο ὕψος μὲν τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου, βάσιν δὲ τὴν ΘΕ, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσιν ἡ ΑΘ, ἥμισυ τῆς ΓΔ (διότι ΑΘ=ΗΓ=ΗΔ) καὶ ἡ ΑΕ, ἥμισυ τῆς ΑΒ· τουτέστι τὰ ἡμίση ἀμφοτέρων τῶν βάσεων· ὥστε εἶναι



$$ΘΕ = \frac{1}{2} ΑΒ + \frac{1}{2} ΓΔ = \frac{1}{2} (ΑΒ + ΓΔ).$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

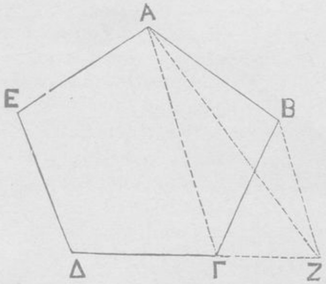
126. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπεζίου εἶναι γινόμενον τοῦ ὕψους του υ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο βάσεών του β καὶ β', ἤτοι $\frac{β+β'}{2}$ υ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

127. Ἐκ τοῦ δοθέντος πολυγώνου νὰ κατασκευασθῇ ἄλλο, ἔχον ἐπιφάνειαν μὲν τὴν αὐτήν, μίαν δὲ πλευρὰν ὀλιγώτερον.

Ἔστω τὸ δοθὲν πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ.

Ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἄγομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ, ἥτις χωρίζει ἀπὸ τοῦ πολυγώνου τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς Β ἄγομεν παράλληλον τῆς ΑΓ καὶ αὐξάνομεν τὴν ΔΓ, μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν παράλληλον τῆς ΑΓ εἴς τι σημεῖον Ζ· τέλος ἄγομεν καὶ τὴν ΑΖ.



Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΖΓ εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΓ καὶ ὕψη ἴσα· διότι αἱ κορυφαὶ αὐτῶν Β καὶ Ζ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας (τῆς ΒΖ) παραλλήλου τῆς βάσεώς των ΑΓ· ὅθεν αἱ ἐξ αὐτῶν ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὴν βάσιν εἶναι ἴσαι (κατὰ τὸ πόρισμα 88). Καὶ ἂν μὲν προσθέσωμεν εἰς τὸ σχῆμα ΑΕΔΓ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, εὑρίσκομεν τὸ δοθὲν πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, ἂν δὲ εἰς τὸ αὐτὸ σχῆμα ΑΕΔΓ προσθέσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΖΓ, εὑρίσκομεν τὸ σχῆμα ΑΖΔΕ. Ἑπομένως τὸ δοθὲν πολύγωνον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ΑΖΔΕ· ἔχει δὲ τοῦτο μίαν πλευρὰν ὀλιγώτερον ἢ τὸ δοθέν· διότι ἀντὶ τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ ἔχει τοῦτο μίαν μόνον, τὴν ΑΖ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν εἰς τὸ εὑρεθὲν πολύγωνον ἐφαρμόσωμεν τὴν αὐτὴν κατασκευὴν καὶ ἐξακολουθήσωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, θὰ φθάσωμεν ἐπὶ τέλους εἰς τρίγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθὲν πολύγωνον. Ἐπειδὴ δὲ πᾶν τρίγωνον μετασχηματίζεται εἰς παραλληλόγραμμον καὶ τοῦτο πάλιν εἰς ὀρθογώνιον, συμπεραίνομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθὲν πολύγωνον.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

Ὁρισμοί.

128. Ὡς μονάδα τῶν εὐθειῶν λαμβάνομεν εἰς τὰ ἑξῆς προβλήματα τὸν βασιλικὸν πῆχυν (κοινῶς λεγόμενον γαλλικὸν μέτρον).

129. Τὸ τετράγωνον, ὅπερ ἔχει πλευρὰν ἕνα πῆχυν, λέγεται τετραγωνικὸς πῆχυς· *τοῦτο δὲ λαμβάνομεν ὡς μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν.*

130. Παλάμη *λέγεται τὸ δέκατον τοῦ πήχεως,* τετραγωνικὴ *δὲ* παλάμη *λέγεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου πλευρὰ εἶναι μία παλάμη. Ἡ τετραγωνικὴ παλάμη εἶναι τὸ ἑκατοστὸν τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου (κατὰ τὸ θεώρ. 117).*

131. Δάκτυλος *λέγεται τὸ ἑκατοστὸν τοῦ πήχεως,* τετραγωνικὸς *δὲ* δάκτυλος *λέγεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι εἷς δάκτυλος· εἶναι δὲ ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος τὸ δεκάκις χιλιοστὸν ἢ τὸ μυριοστὸν τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως (κατὰ τὸ θεώρ. 117).*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Εἰς τὴν καταμέτρησιν τῶν οἰκοπέδων μεταχειρίζονται συνήθως τὸν λεγόμενον* τεκτονικὸν πῆχυν, *ὅστις εἶναι τὰ 75 ἑκατοστὰ ἤτοι τὰ τρία τέταρτα τοῦ βασιλικοῦ πήχεως. Ὁ δὲ τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς (δηλαδὴ τὸ τετράγωνον, ὅπερ ἔχει πλευρὰν ἕνα τεκτονικὸν πῆχυν) εἶναι* $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}$, *ἤτοι τὰ* $\frac{9}{16}$ *τοῦ τετραγωνικοῦ βασιλικοῦ πήχεως.*

Προβλήματα.

1) Οἰκόπεδόν τι ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιον· μία πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι 16 τεκτ. πήχεις καὶ ἡ ἄλλη 7· ἐκ πόσων τετραγωνικῶν τεκτονικῶν πήχεων συνίσταται τὸ οἰκόπεδον τοῦτο;

('Απ. 112, τετρ. τεκτ. πήχεις).

2) Κῆπός τις ἔχει σχῆμα τραπεζίου· αἱ δύο παράλληλοι πλευραί του εἶναι ἡ μὲν μία 123 μέτρα, ἡ δὲ ἄλλη 232,6 (232 μέτρα καὶ ἓξ δέκατα τοῦ μέτρου), ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν (τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου) εἶναι 85 μέτρα. Ἐκ πόσων τετραγωνικῶν μέτρων σύγκειται ὁ κῆπος; καὶ ἐκ πόσων στρεμμάτων; (τὸ στρέμμα ἔχει 1000 τετραγωνικὰ μέτρα).

('Απ. 15113 τετρ. μέτρα ἢ 15 στρέμ. καὶ 113 τετρ. μέτρα).

3) Τὸ ἔδαφος δωματίου τινὸς πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ σανίδων, τῶν ὁποίων τὸ μῆκος εἶναι 2,5 μέτρα, τὸ δὲ πλάτος 0,3· τοῦ δωματίου τὸ μὲν μῆκος εἶναι 5 μέτρα, τὸ δὲ πλάτος 3· ζητεῖται, πόσαι σανίδες χρειάζονται;

('Απ. ὅσας φορὰς χωρεῖ ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σανίδος εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πατώματος, τόσαι σανίδες χρειάζονται, ἤτοι 20).

4) Τὸ ἔδαφος αὐλῆς τινος πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ πλακῶν τετραγωνικῶν, αἵτινες ἔχουσι πλευρὰν 0,20 μέτρα· τῆς αὐλῆς τὸ μὲν μῆκος εἶναι 18 μέτρα, τὸ δὲ πλάτος 10· ζητεῖται, πόσαι πλάκες χρειάζονται. ('Απ. 4500).

5) Οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου καὶ τὸ μὲν μῆκος αὐτοῦ εἶναι 18,3 πήχεων, τὸ δὲ πλάτος 12· τὸ οἰκόπεδον τοῦτο ἐπωλήθη ἀντὶ 2500 δραχ. πόσον ἀξίζει ὁ τετραγωνικὸς πῆχυς; ('Απ. 11 δραχ. καὶ 37 λεπτ.).

6) Χωράφιόν τι σχήματος τετραγώνου μὲ πλευρὰν 18 μέτρα ἀντηλλάγη μὲ ἄλλο τῆς αὐτῆς μὲν ποιότητος, ἀλλὰ σχήματος ὀρθογωνίου, ἔχοντος ἴσην περίμετρον καὶ πλάτος 10 μέτρα· ἔγινε δικαία ἡ ἀνταλλαγή; ('Απ. ὄχι, τὸ ἔχον ὀρθογώνιον σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ ἔχοντος τετραγωνικὸν κατὰ 64 τετραγωνικὰ μέτρα).

7) Λιβάδιόν τι τριγωνικοῦ σχήματος ἔχει μίαν πλευρὰν ἴσην μὲ 185 μέτρα καὶ ἡ κάθετος πρὸς αὐτήν, ἥτις καταβιβάζεται ἀπὸ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς, εἶναι 78 μέτρα· πόσα στρέμματα ἔχει τὸ λιβάδιον τοῦτο; ('Απ. 7 στρέμματα καὶ 215 τετρ. μέτρα).

8) Κῆπός τις ὀρθογωνίου σχήματος ἔχων μῆκος μὲν 25 μέτρα, πλάτος δὲ 14,8 διαιρεῖται εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη διὰ δύο δρόμων, οἵτινες διασταυροῦνται εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ· τὸ πλάτος τῶν δρόμων εἶναι 1 μέτρον· ζητεῖται, πόσα τετραγωνικὰ μέτρα ἔχει ἕκαστον ἐκ τῶν τεσσάρων μερῶν. (Ἀπ. 82,8 τετρ. μέτρα).

9) Τοῖχός τις ἔχων πλάτος 12 μέτρα καὶ ὕψος 8 πρόκειται νὰ χρωματισθῇ· ἡ χρωμάτισις ἑνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου στοιχίζει 75 λεπτά· πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ χρωμάτισις τοῦ τοίχου τούτου ἐπὶ τῇ ὑποθέσει, ὅτι ἔχει μίαν θύραν, τῆς ὁποίας τὸ μὲν πλάτος εἶναι 1,2 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος 3 μέτρα; (Ἀπ. 68 δραχ. καὶ 30 λεπτ.).

10) Χωράφιόν τι ἔχει σχῆμα παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ εἶναι 58 μέτρα, ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τῆς παραλλήλου πρὸς αὐτὴν (τουτέστι τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου) εἶναι 19,2 μέτρα· ἐκ πόσων τετραγωνικῶν μέτρων σύγκειται;

(Ἀπ. 1113,6 τετραγωνικὰ μέτρα).

11) Νὰ διαιρεθῇ τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς ἴσα μέρη. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαιρεθῇ ἡ βάσις αὐτοῦ εἰς ἴσα μέρη καὶ νὰ ἀχθῶσιν ἐκ τῆς κορυφῆς εὐθεῖαι εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως.

12) Νὰ διαιρεθῇ τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς ἴσα μέρη.

13) Νὰ διαιρεθῇ τὸ δοθὲν τραπέζιον εἰς ἴσα μέρη.

Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν τὰς δύο βάσεις εἰς ἴσα μέρη (τὴν καθεμίαν εἰς ὅσα μέρη θὰ διαιρεθῇ τὸ τραπέζιον) καὶ ἑνοῦμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως δι' εὐθειῶν κατὰ σειράν.

14) Δοθὲν τρίγωνον νὰ διαιρεθῇ διὰ μιᾶς εὐθείας ἐκ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἓν νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ ἄλλου.

15) Οἰκόπεδόν τι τετραγωνικὸν ἔχει ἐμβαδὸν 441 τετραγωνικὰ μέτρα· πόση εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ;

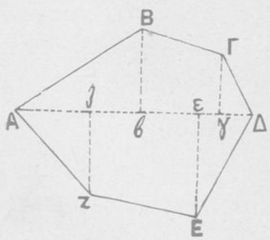
16) Ἀγρός τις ὀρθογώνιος ἔχων 125 μέτρα μῆκος καὶ 80 μέτρα πλάτος πρόκειται νὰ θερισθῇ· πόσον θὰ στοιχίσῃ ὁ θερισμός, ἐὰν δι' ἕκαστον τ. μ. πληρώνωνται οἱ θερισταὶ 1δρ.75;

17) Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς ὑαλοπίνακος, ὅστις ἔχει πλάτος 0μ,40 καὶ ὕψος 1,20;

18) Κῆπός τις σχήματος τετραγώνου ἔχει περίμετρον 48 μέτρα· πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

Παρατηρήσεις.

1η) Ἵνα μετρήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν πολυγώνου, ὡς τοῦ ΑΒΓΔΕΖ, ὁ ἁπλούστερος τρόπος εἶναι ὁ ἑξῆς.



Ἄγομεν τὴν μεγαλητέραν ἐκ τῶν διαγωνίων του, τὴν ΑΔ, καὶ ἀπὸ τῶν κορυφῶν καταβιβάζομεν ἐπ' αὐτὴν καθέτους Ββ, Γγ, Εε, Ζζ, τοιουτοτρόπως διαιρεῖται τὸ σχῆμα εἰς τρίγωνα καὶ τραπέζια· μετροῦμεν ἔπειτα τὰς καθέτους ταύτας καὶ τὰ μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα διαιροῦσι τὴν διαγώνιον. Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι εὑρέθη (εἰς μέτρα):

$$B\beta = 5, \quad \Gamma\gamma = 4, \quad E\varepsilon = 7, \quad Z\zeta = 4{,}8\cdot$$
$$A\zeta = 3, \quad \zeta\beta = 2{,}6, \quad \beta\varepsilon = 2{,}9, \quad \varepsilon\gamma = 1, \quad \gamma\Delta = 2\cdot$$

τότε θὰ εἶναι

$$\text{ἐμβ. } AB\beta = \frac{1}{2}\times 5\times 5{,}6 = 14 \quad \text{τετρ. μέτρα}$$

$$\text{ἐμβ. } B\beta\gamma\Gamma = \frac{1}{2}\times 3{,}9\times 9 = 17{,}55 \quad \text{»}$$

$$\text{ἐμβ. } \Gamma\gamma\Delta = \frac{1}{2}\times 4 \times 2 = 4 \quad \text{»}$$

$$\text{ἐμβ. } \Delta E\varepsilon = \frac{1}{2}\times 7 \times 3 = 10{,}50 \quad \text{»}$$

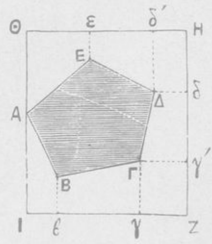
$$\text{ἐμβ. } E\varepsilon\zeta Z = \frac{1}{2}\times 11{,}8\times 5{,}5 = 32{,}45 \quad \text{»}$$

$$\text{ἐμβ. } AZ\zeta = \frac{1}{2}\times 4{,}8\times 3 = 7{,}2 \quad \text{»}$$

ὅθεν ἐμβ. $AB\Gamma\Delta EZ$ $= 85{,}7$

Ἀντὶ τῆς διαγωνίου δύναταί τις νὰ μεταχειρισθῇ καὶ ἄλλην οἱανδήποτε γραμμὴν τέμνουσαν τὸ σχῆμα.

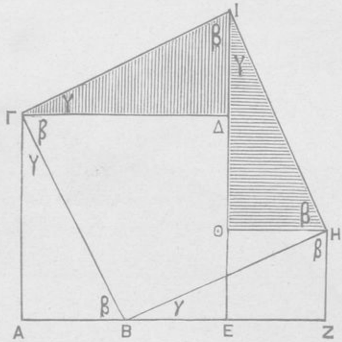
2α) *Ἵνα μετρήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν λίμνης ἢ ἕλους, εἰς τὸ ὁποῖον δὲν δυνάμεθα νὰ εἰσχωρήσωμεν, σχηματίζομεν πέριξ αὐτοῦ ἁπλοῦν τι σχῆμα, ἔστω ὀρθογώνιον, ἐντὸς τοῦ ὁποίου νὰ περιέχηται τὸ ἕλος, ἔπειτα ἐκ τῶν κορυφῶν A, B,... ἄγομεν καθέτους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου καὶ μετροῦντες τὰς καθέτους ταύτας, ὡς καὶ τὰ τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα τέμνουσι τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου, εὑρίσκομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τραπεζίων $AI\beta B$, $B\beta\gamma\Gamma$,.. ἀφαιροῦντες δὲ τότε*



τὰ ἐμβαδὰ ταῦτα ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου $Z I \Theta H$ θὰ εὕρωμεν προφανῶς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἕλους.

Πυθαγόρειον θεώρημα.

132. Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.



Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἔχον ὀρθὴν τὴν γωνίαν Α. Κατασκευάζομεν τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ, ἔστω τὸ ΑΓΔΕΑ, καὶ παραπλεύρως τούτου τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ, ἔστω τὸ ΕΖΗΘ (ὅτε ΕΖ=ΑΒ)· τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τετραγώνων εἶναι τὸ σχῆμα ΑΓΔΘΗΖΕΒΑ. Ἐὰν ἀποκόψωμεν ἐκ τοῦ σχήματος τούτου τὰ δύο ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΒΖΗ καὶ θέσωμεν τὸ μὲν ΑΒΓ εἰς τὴν θέσιν ΘΗΙ, τὸ δὲ ΒΗΖ εἰς τὴν θέσιν ΓΙΔ (ΔΙ=ΗΖ), προκύπτει ἐκ τῶν δύο τετραγώνων τὸ τετράγωνον ΒΓΙΗΒ τῆς ὑποτεινούσης· εἶναι δὲ τοῦτο τετράγωνον, διότι καὶ αἱ τέσσαρες πλευραί του εἶναι ἴσαι μὲ τὴν ΒΓ καὶ αἱ γωνίαι του εἶναι ἴσαι μὲ τὸ ἄθροισμα $\beta+\gamma$ τῶν δύο ὀξειῶν γωνιῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ· ὅπερ ἄθροισμα εἶναι μία ὀρθὴ γωνία.

133. Ἐὰν μετρήσωμεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, διὰ τῆς μονάδος τῶν εὐθειῶν, θὰ εὕρωμεν ἀριθμούς· τοὺς ἀριθμοὺς δὲ τούτους παριστῶμεν διὰ τῶν αὐτῶν γραμμάτων ἐγκλειομένων εἰς παρένθεσιν, οἷον (ΑΒ), (ΑΓ), (ΒΓ)· τότε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τετραγώνων τῶν αὐτῶν γραμμῶν εἶναι $(AB\times AB)$ ἢ $(AB)^2$, $(A\Gamma)^2$, $(B\Gamma)^2$, τότε δὲ τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα ἐκφράζεται διὰ τῆς ἑξῆς ἰσότητος:

$$(B\Gamma)^2=(AB)^2+(A\Gamma)^2.$$

134. Παρατηρητέον δέ, ὅτι ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης, ἥτις συνδέει τὰς πλευρὰς παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, δυνάμεθα, ὅταν δοθῶσι δύο ἐξ αὐτῶν (ἤγουν οἱ ἀριθμοὶ οἱ παριστῶντες αὐτάς), νὰ εὕρωμεν τὴν τρίτην· ἄν, παραδείγματος χάριν, δοθῇ

$$(A\Gamma)=3 \qquad (AB)=4,$$

εὑρίσκομεν

$$(B\Gamma)^2=3^2+4^2=9+16=25\cdot$$

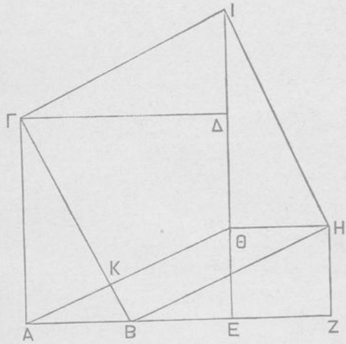
ὅθεν $(ΒΓ)=5$.

Ἐὰν δὲ δοθῇ $(ΑΓ)=12$, $(ΑΒ)=5$,
εὑρίσκομεν $(ΒΓ)^2=12^2+5^2=144+25=169$·
ὅθεν $(ΒΓ)=13$.

Ἐὰν δὲ δοθῇ $(ΒΓ)=29$, $(ΑΓ)=20$,
εὑρίσκομεν $(ΑΒ)^2=29^2-20^2=841-400=441$·
ὅθεν $(ΑΒ)=21$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

135. Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν ὅλην τὴν ὑποτείνουσαν, ὕψος δὲ τὸ εἰς τὴν πλευρὰν ταύτην προσκείμενον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης.



Ἐὰν εἰς τὸ σχῆμα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΘ, γίνεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΘΙΓΑ (διότι δύο ἀπέναντι πλευραὶ αὐτοῦ, αἱ ΘΙ καὶ ΑΓ, εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι) καὶ εἶναι ἡ ΓΒ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΘ, διότι εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς παραλλήλου αὐτῆς ΓΙ.

Τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς ΑΓ, ἤτοι μὲ τὸ ΑΓΔΕ· διότι ἔχουσιν ἴσας βάσεις ΑΓ=ΑΓ καὶ ἴσα ὕψη ΑΕ=ΓΔ ἀλλὰ τὸ αὐτὸ παραλληλόγραμμον ΑΘΙΓΑ εἶναι ἰσοδύναμον καὶ μὲ ὀρθογώνιον ἔχον βάσιν τὴν βάσιν αὐτοῦ τὴν ΑΘ ἢ καὶ τὴν ἴσην ΒΓ, ὕψος δὲ τὴν ΓΚ, ἤτοι τὸ τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τὸ προσκείμενον εἰς τὴν πλευράν· ἑπομένως τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ καὶ τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο εὐθειῶν ΒΓ καὶ ΓΚ εἶναι ἰσοδύναμα, ἤτοι

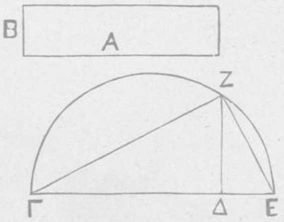
$$(ΑΓ)^2=(ΒΓ)\cdot(ΚΓ)\cdot$$

ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ περὶ τοῦ τετραγώνου τῆς $(ΑΒ)$

$$(ΑΒ)^2=(ΓΒ)\ (ΒΚ)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

136. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον.



Ἔστωσαν A καὶ B δύο προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου.

ΛΥΣΙΣ. *Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς τυχούσης εὐθείας τὴν ΓΕ ἴσην μὲ τὴν A καὶ τὴν ΔΕ ἴσην μὲ τὴν B, καὶ ἐπὶ τῆς ΓΕ γράφομεν ἡμικύκλιον· ἐκ τοῦ σημείου Δ ἄγομεν τὴν ΔΖ, κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΕ μέχρι τῆς περιφερείας, καὶ ἑνοῦμεν τὰ σημεῖα E καὶ Z· ἡ EZ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.*

Διότι, ἐὰν ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΖ, γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ΓΖΕ, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα):

$$(ZE)^2=(\Gamma E)\ (\Delta E) \qquad \text{ἤτοι} \qquad (\Gamma E)^2=(A)\times(B).$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

137. Παντὸς εὐθυγράμμου σχήματος δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἰσοδύναμον τετράγωνον.

Διότι ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθὲν σχῆμα (ἐδ. 127, Σημ.) καὶ ἔπειτα τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο.

Προβλήματα.

1) Τριγώνου τινὸς ὀρθογωνίου αἱ τὴν ὀρθὴν γωνίαν σχηματίζουσαι πλευραὶ εἶναι ἡ μὲν 77 μέτρα, ἡ δὲ 36· ζητεῖται ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ καὶ τὰ μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται αὕτη ὑπὸ τῆς καθέτου ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας. (Ἀπ. ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 85 μέτρα· τὰ δὲ μέρη αὐτῆς εἶναι 69,75. . . καὶ 15,25. . .).

2) Ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 15 μέτρα. ζητοῦνται αἱ πλευραί. (Ἀπ. ἡ καθεμία εἶναι 10 μέτρα καὶ 6 δέκατα).

3) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ βάσις εἶναι 8 μέτρα, καὶ ἑκάστη τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι 5 μέτρα· ζητεῖται τὸ ὕψος αὐτοῦ καὶ τὸ ἐμβαδόν του. (Ἀπ. ὕψος 3 μέτρα· ἐμβαδὸν 12 τετρ. μέτρα).

4) Ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει ἐμβαδὸν 112,5 τετρ. μέτρα· νὰ εὑρεθῶσιν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ. (Ἀπ. ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 21,2. . . αἱ δὲ ἄλλαι πλευραὶ 45 καὶ 15).

5) Ὀρθογώνιόν τι ἔχει μῆκος 14 μέτρα καὶ πλάτος 8· ζητεῖται τὸ μῆκος τῶν διαγωνίων του. (Ἀπ. ἡ καθεμία εἶναι 16,1. . . μέτρα).

6) Πρόκειται διὰ κλίμακος νὰ ἀναβῶμεν τοῖχόν τινα, ὅστις ἔχει ὕψος 10 πήχεις· ἡ βάσις τῆς κλίμακος πρέπει νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εἰς ἀπόστασιν 3 μέτρων ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ τοίχου· πόσον μῆκος πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ κλῖμαξ διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ τοίχου; (Ἀπ. 10,44. . .).

ΠΕΡΙ ΠΟΣΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΝ

138. Λόγος *μεγέθους πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς (οἷον γραμμῆς πρὸς γραμμήν, ἐπιφανείας πρὸς ἐπιφάνειαν κτλ.) λέγεται ὁ* ἀριθμός, ὅστις δεικνύει, πῶς ἀποτελεῖται τὸ μέγεθος τοῦτο ἐκ τοῦ ἄλλου καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ· *ἤτοι ὁ ἀριθμός, ὅστις προκύπτει ἐκ τῆς καταμετρήσεως τοῦ πρώτου, ὅταν τὸ δεύτερον ληφθῇ ὡς μονὰς (ἰδὲ ἐδ. 113).*

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ποσόν τι B σύγκειται ἐξ ἄλλου A δὶς ληφθέντος καὶ ἐκ τοῦ ἡμίσεος αὐτοῦ $\left(\text{ἤτοι τοῦ } \frac{A}{2}\right)$ καὶ ἐκ τοῦ πέμπτου αὐτοῦ $\left(\frac{A}{5}\right)$, ὁ λόγος τοῦ B πρὸς τὸ A $\left(\text{τὸν ὁποῖον παριστῶμεν ὡς ἑξῆς } \frac{B}{A}\right)$ εἶναι $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$ ἢ $\frac{27}{10}$.

139. Γινόμενον *μεγέθους τινὸς A ἐπὶ ἀριθμὸν οἱονδήποτε λέγεται τὸ μέγεθος, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ A καὶ ἐκ τῶν μερῶν του, ὡς ἀποτελεῖται ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν της.*

Παραδ. χάριν, τὸ γινόμενον $A\times 3$ ἢ $3.A$ σημαίνει τὸ $A+A+A$, τὸ δὲ γινόμενον $A\times\frac{2}{3}$, ἢ $\frac{2}{3}\cdot A$, εἶναι $\frac{A}{3}+\frac{A}{3}$ $\left(\text{διότι } \frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)$.

140. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. *Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ λόγου δύο μεγεθῶν, ἂν μέγεθός τι B εἶναι γινόμενον ἄλλου μεγέθους A ἐπί τινα ἀριθμόν, οἷον τὸν 5, ἂν εἶναι δηλαδὴ*

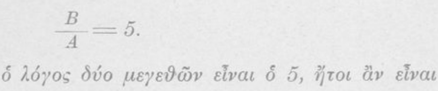
$B=A.5$, ὁ λόγος τοῦ B πρὸς τὸ A θὰ εἶναι πάλιν ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς 5, ἤτοι θὰ εἶναι καὶ

$$\frac{B}{A}=5.$$

Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν ὁ λόγος δύο μεγεθῶν εἶναι ὁ 5, ἤτοι ἂν εἶναι $\frac{B}{A}=5$, τὸ B εἶναι γινόμενον τοῦ A ἐπὶ 5, ἤτοι $B=A.5$.

141. Ἀνάλογα *λέγονται δύο ἢ περισσότερα μεγέθη πρὸς ἄλλα ἰσάριθμα (καὶ ὁμοειδῆ), ἐὰν προκύπτωσιν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Παραδείγματος χάριν, αἱ γραμμαὶ $Δ$, E, Z λέγονται ἀνάλογοι πρὸς τὰς γραμμὰς A, B, $Γ$.



ἐὰν εἶναι $\Delta = A \times 3 \qquad A = \Delta \times \frac{1}{3}$

$E = B \times 3$ ἢ $B = E \times \frac{1}{3}$

$Z = \Gamma \times 3 \qquad \Gamma = Z \times \frac{1}{3}$

Τὰ δύο μεγέθη, τὰ ὁποῖα προκύπτουσι τὸ ἓν ἐκ τοῦ ἄλλου διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, λέγονται ἀντίστοιχα *ἢ* ὁμόλογα.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα αἱ γραμμαὶ Α καὶ Δ εἶναι ὁμόλογοι, ὁμοίως αἱ Β καὶ Ε, ὁμοίως αἱ Γ καὶ Ζ.

ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

141. Πάντες ἔχομεν τὴν ἰδέαν τῆς ὁμοιότητος καὶ δυνάμεθα ἑπομένως νὰ κρίνωμεν π. χ. ἂν εἰκών τις εἶναι ὁμοία πρὸς τὸ παριστώμενον ὑπ' αὐτῆς πρόσωπον ἢ πρᾶγμα. Ἂν δὲ ἐξετάσωμεν, ποῖα εἶναι τὰ χαρακτηριστικὰ τῆς ὁμοιότητος, τουτέστι τίνας ὅρους πρέπει νὰ πληροῖ ἡ εἰκών, ἵνα ὁμοιάζῃ πρὸς τὸ πρωτότυπον, εὑρίσκομεν τὰ ἑξῆς δύο: 1) Αἱ γραμμαὶ τῆς εἰκόνος πρέπει νὰ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀντιστοιχουσῶν γραμμῶν τοῦ παριστανομένου προσώπου ἢ πράγματος· ἂν, λόγου χάριν, πρόκειται νὰ παραστήσωμεν ἄνθρωπόν τινα καὶ ἐν τῇ εἰκόνι αἱ χεῖρες ἔχωσι τὸ ἥμισυ τοῦ φυσικοῦ μεγέθους, τότε καὶ τὰ σκέλη καὶ οἱ πόδες καὶ ὁ κορμὸς κτλ. πρέπει νὰ ἔχωσι μέγεθος πάντα τὸ ἥμισυ τοῦ φυσικοῦ· 2) αἱ γωνίαι πρέπει νὰ μένωσιν ἀμετάβλητοι· ἂν, λόγου χάριν, ἡ χεὶρ τοῦ πρωτοτύπου εἶναι κάθετος πρὸς τὸν κορμόν, καὶ ἐν τῇ εἰκόνι πρέπει νὰ συμβαίνῃ τὸ αὐτό.

Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι ἐννοοῦμεν τὸν ἑπόμενον ὁρισμὸν τῆς ὁμοιότητος.

142. Ὅμοια *λέγονται δύο εὐθύγραμμα σχήματα, ἐὰν αἱ μὲν γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν, αἱ δὲ ἀντιστοιχοῦσαι πλευραὶ αὐτῶν (ἤτοι αἱ τὰς κορυφὰς ἴσων γωνιῶν συνδέουσαι) εἶναι ἀνάλογοι.*

Αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πλευραὶ τῶν ὁμοίων σχημάτων λέγονται καὶ ὁμόλογοι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

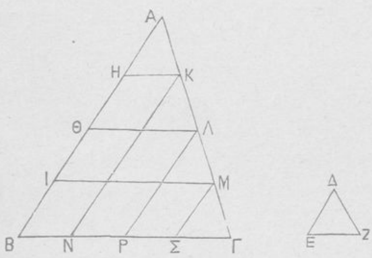
143. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευράς των ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ πλευραὶ τῶν δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἀνάλογοι· καὶ ἔστω

$$AB = 4.\Delta E$$
$$B\Gamma = 4.EZ$$
$$\Gamma A = 4.Z\Delta\cdot$$

λέγω, ὅτι καὶ αἱ γωνίαι αἱ περιεχόμεναι ὑπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν θὰ εἶναι ἴσαι· καὶ ἑπομένως τὰ τρίγωνα θὰ εἶναι ὅμοια.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου διαιροῦμεν τὴν ΑΒ εἰς 4 ἴσα μέρη (τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι ἴσα μὲ τὴν ΔΕ) καὶ ἐκ τῶν σημείων Η, Θ, Ι τῆς διαιρέσεως ἄγομεν παραλλήλους τῆς ΒΓ· αἱ παράλληλοι αὗται θὰ διαιρέσωσι τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη (ἰδὲ πρόβλημα 7ον) : ΑΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΓ (τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι ἴσα μὲ τὴν ΔΖ)· ἐὰν δὲ καὶ ἐκ τῶν σημείων Κ, Λ, Μ φέρωμεν παραλλήλους τῆς ΑΒ, αἱ παράλληλοι αὗται θὰ διαιρέσωσι τὴν ΒΓ εἰς 4 ἴσα μέρη ΒΝ, ΝΡ, ΡΣ, ΣΓ, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι ἴσα μὲ τὴν ΕΖ.



Ἐὰν τώρα συγκρίνωμεν τὰ δύο τρίγωνα ΑΗΚ καὶ ΔΕΖ, βλέπομεν ὅτι ἔχουσι τὰς πλευράς των ἴσας κατὰ μίαν, διότι ΑΗ=ΔΕ, ΑΚ=ΔΖ καὶ ΗΚ=ΒΝ=ΕΖ· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα καὶ ἔχουσιν ἑπομένως καὶ τὰς γωνίας των ἴσας, ἤτοι Δ=Α, Ε=Η καὶ Ζ=Κ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι ΑΗΚ καὶ Β εἶναι ἴσαι, διὰ τὰς παραλλήλους ΗΚ καὶ ΒΓ, ὡσαύτως καὶ αἱ γωνίαι ΑΚΗ καὶ Γ, συνάγεται Δ=Α, Ε=Β, Ζ=Γ· ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Ἔχουσι λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ τὰς γωνίας των ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· ἄρα εἶναι ὅμοια.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Εἰς τὴν προηγουμένην ἀπόδειξιν ὑπεθέσαμεν, ὅτι ὁ* *ἀριθμός, μὲ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσιν αἱ πλευραὶ τοῦ ἑνὸς τριγώνου, ἵνα προκύψωσιν αἱ πλευραὶ τοῦ ἄλλου (δηλαδὴ ὁ λόγος τῶν ἀντιστοιχουσῶν πλευρῶν), εἶναι ἀκέραιος. Ἀλλὰ καὶ κλασματικὸς ἂν εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος, πάλιν ἀληθεύει τὸ θεώρημα. Διότι ἔστω* $AB = \frac{7}{5}\Delta E$, $B\Gamma = \frac{7}{5.}EZ$, $\Gamma A = \frac{7}{5}Z\Delta$· *ἐὰν κατασκευάσωμεν τρίγωνον μὲ πλευρὰς* $\frac{\Delta E}{5}, \frac{EZ}{5}, \frac{Z\Delta}{5}$, *τὸ τρίγωνον τοῦτο, ἔστω τὸ ΦΧΩ, θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΔΕΖ· διότι αἱ πλευραὶ τοῦ ΔΕΖ εἶναι πενταπλάσιαι τῶν πλευρῶν τοῦ ΦΧΩ· τὸ αὐτὸ δὲ τρίγωνον ΦΧΩ θὰ εἶναι ὅμοιον καὶ πρὸς τὸ ΑΒΓ· διότι αἱ πλευραὶ τοῦ ΑΒΓ εἶναι ἑπταπλάσιαι τῶν πλευρῶν τοῦ ΦΧΩ· ἑπομένως αἱ γωνίαι Α καὶ Δ θὰ εἶναι ἴσαι μὲ τὴν Φ· ἄρα εἶναι ἴσαι καὶ πρὸς ἀλλήλας· ἐπίσης θὰ εἶναι καὶ αἱ γωνίαι Β καὶ Ε ἴσαι, καὶ αἱ γωνίαι Γ καὶ Ζ ἴσαι· ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ θὰ εἶναι ὅμοια.*

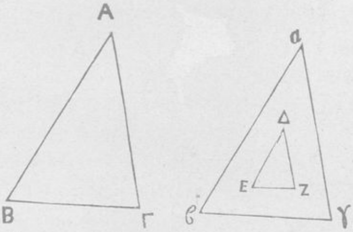
ΘΕΩΡΗΜΑ

144. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς γωνίας των ἴσας κατὰ μίαν, εἶναι ὅμοια.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουσιν

$$A=\Delta, \quad B=E, \quad \Gamma=Z\cdot$$

λέγω, ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τοῦ πρώτου θὰ εἶναι ἀνάλογοι τῶν πλευρῶν ΔΕ, ΕΖ, ΖΔ τοῦ δευτέρου καὶ ἑπομένως τὰ τρίγωνα ταῦτα θὰ εἶναι ὅμοια.



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ λόγος τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3, ἤτοι ἔστω ΑΒ=3.ΔΕ.

Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον αβγ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι τριπλάσιαι τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, ἤτοι αβ=3.ΔΕ, βγ=3.ΕΖ, γα=3.ΖΔ· τὸ τρίγωνον τοῦτο αβγ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΔΕΖ (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα), διότι αἱ πλευραί του εἶναι ἀνάλογοι τῶν πλευρῶν τοῦ ΔΕΖ· τὸ αὐτὸ δὲ τρίγωνον αβγ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΑΒΓ· διότι ἡ αβ, ὡς τριπλασία τῆς ΔΕ, εἶ-

ναι ἴση μὲ τὴν ΑΒ (ἥτις καὶ αὐτὴ εἶναι τριπλασία τῆς ΔΕ), αἱ δὲ γωνίαι α, β, γ, ὡς ἴσαι μὲ τὰς Δ, Ε, Ζ, εἶναι ἴσαι καὶ μὲ τὰς Α, Β, Γ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

145. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας των ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.

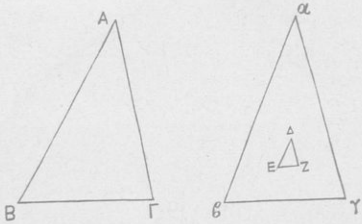
Διότι καὶ την τρίτην γωνίαν ἔχουσιν ἴσην (59).

Καὶ ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσι μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην, εἶναι ὅμοια.

ΘΕΩΡΗΜΑ

146. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουσιν Α=Δ καὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ ἀναλόγους πρὸς τὰς πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ· λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι εἶναι

$$AB = 5.\Delta E \quad \text{καὶ} \quad A\Gamma = 5.EZ.$$

Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον αβγ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι πενταπλάσιαι τῶν πλευρῶν τοῦ ΔΕΖ· τὸ τρίγωνον τοῦτο θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΔΕΖ (κατὰ τὸ θεώρημα 143), τὸ αὐτὸ δὲ τρίγωνον αβγ θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΑΒΓ· διότι αἱ πλευραὶ αβ, αγ, ὡς πενταπλάσιαι τῶν ΔΕ, ΔΖ, εἶναι ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, ἡ δὲ γωνία α, ὡς ἴση μὲ τὴν Δ, θὰ εἶναι ἴση καὶ μὲ τὴν Α· ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΕΔΖ εἶναι ὅμοια·

ΘΕΩΡΗΜΑ

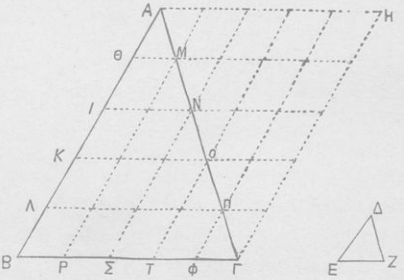
147. Ὁ λόγος δύο ὁμοίων τριγώνων εἶναι ἴσος μὲ τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ λόγου τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια καὶ ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των εἶναι ὁ 5, ἤτοι

$$AB = 5.\Delta E, \quad B\Gamma = 5.EZ, \quad \Gamma A = 5.Z\Delta\cdot$$

λέγω, ὅτι ὁ λόγος $\dfrac{AB\Gamma}{\Delta EZ}$ *τῶν ὁμοίων τριγώνων θὰ εἶναι* 5×5, *ἤτοι ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ σύγκειται ἐξ 25 τριγώνων ἴσων πρὸς τὸ ΔΕΖ.*

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν ἐκ τῆς κορυφῆς Α παράλληλον τῆς ΒΓ καὶ ἐκ τῆς Γ παράλληλον τῆς ΑΒ· οὕτω σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΗ, ὅπερ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· διότι τὸ τρίγωνον ΑΓΗ, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΑΒΓ (87). Διαιροῦμεν ἔπειτα τὴν ΑΒ εἰς 5 ἴσα μέρη ΑΘ, ΘΙ, ΙΚ, ΚΛ, ΛΒ, (τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι ἴσα μὲ τὴν ΔΕ) καὶ ἐκ τῶν σημείων Θ, Ι, Κ, Λ ἄγομεν παραλλήλους τῆς ΒΓ, αἵτινες διαιροῦσι καὶ τὴν ΑΓ εἰς 5 ἴσα (109) μέρη ΑΜ, ΜΝ, ΝΟ, ΟΠ, ΠΓ, καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΗ ἐπίσης εἰς 5 ἴσα παραλληλόγραμμα· ἔπειτα ἐκ τῶν σημείων Μ, Ν, Ο, Π ἄγομεν παραλλήλους τῆς ΑΒ, αἵτινες θὰ διαιρέσωσιν (109) καὶ τὴν ΒΓ εἰς 5 ἴσα μέρη, θὰ διαιρέσωσι δὲ καὶ ἕκαστον τῶν 5 παραλληλογράμμων (εἰς ἃ τὸ πρῶτον διηρέθη) πάλιν εἰς 5 ἴσα παραλληλόγραμμα· ὥστε τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΗ διηρέθη τοιουτοτρόπως εἰς 5×5 παραλληλόγραμμα ἴσα πρὸς ἄλληλα. Ἕκαστον τῶν παραλληλογράμμων τούτων σύγκειται ἐκ δύο τριγώνων ἴσων πρὸς τὸ ΔΕΖ· διότι τὸ τρίγωνον ΑΘΜ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΔΕΖ, ὡς ἔχον τὴν ΑΘ ἴσην μὲ τὴν ΔΕ καὶ την ΑΜ ἴσην μὲ τὴν ΔΖ καὶ τὴν ΘΜ ἴσην τῇ ΒΡ, ἴσην τῇ ΕΖ. Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΗ σύγκειται ἐκ 2×5×5 τριγώνων ἴσων τῷ ΔΕΖ· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὡς ἥμισυ αὐτοῦ, σύγκειται ἐκ 5×5 τριγώνων ἴσων τῷ ΔΕΖ· τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ δείξωμεν.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. *Ἐπειδὴ καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον 5×5, τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς.*

Τὰ ὅμοια τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν.

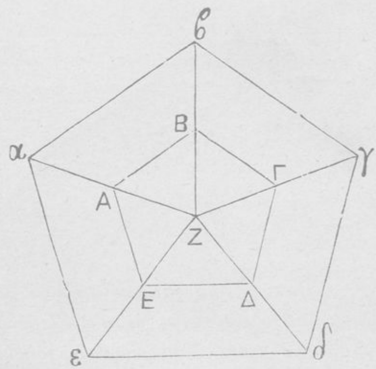
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Ἐὰν ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν εἶναι κλασματικὸς ἀριθμός, ἔστω ὁ* $\frac{5}{3}$ *(ἤτοι* $AB = \frac{5}{3}\Delta E$*), συγκρίνομεν τὰ τρίγωνα*

$AB\Gamma$ καὶ ΔEZ πρὸς τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι τὸ τρίτον τῶν πλευρῶν τοῦ ΔEZ καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ μὲν $AB\Gamma$ σύγκειται ἐκ 5×5 τοιούτων τριγώνων, τὸ δὲ ΔEZ ἐκ 3×3· ὥστε ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι $\frac{5\times5}{3\times3}$ ἤτοι $\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

148 Δοθέντος πολυγώνου νὰ κατασκευασθῇ ὅμοιον.

Ἔστω δοθὲν πολύγωνον τὸ $AB\Gamma\Delta E$· πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν ἄλλο πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τοῦτο.



ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον τοῦ πολυγώνου τούτου, τὸ Z, καὶ ἄγομεν ἐκ τοῦ Z εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου τὰς εὐθείας ZA, ZB, $Z\Gamma$, $Z\Delta$, ZE καὶ πολλαπλασιάζομεν ὅλας ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, ἔστω ἐπὶ τὸν 2, καὶ συνδέομεν τὰ ἄκρα των διὰ τῶν εὐθειῶν $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$, $\varepsilon\alpha$· λέγω, ὅτι τὸ σχηματισθὲν πολύγωνον $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Τὰ τρίγωνα ZAB καὶ $Z\alpha\beta$ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην (τὴν Z) καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους (ἡ $Z\alpha$ εἶναι διπλασία τῆς ZA καὶ ἡ $Z\beta$ ἐπίσης διπλασία τῆς ZB)· ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ $\alpha\beta$ εἶναι διπλασία τῆς AB καὶ παράλληλος αὐτῆς.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα $ZB\Gamma$, $Z\beta\gamma$ εἶναι ὅμοια· ἐπίσης τὰ $Z\Gamma\Delta$ καὶ $Z\gamma\delta$, $Z\Delta E$ καὶ $Z\delta\varepsilon$, ZEA καὶ $Z\varepsilon\alpha$· ὅθεν, αἱ πλευραὶ $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$, $\varepsilon\alpha$ εἶναι διπλάσιαι τῶν πλευρῶν AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE, EA· ἑπομένως ἀνάλογοι αὐτῶν.

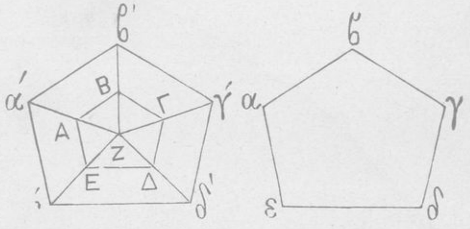
Καὶ αἱ γωνίαι A καὶ α τῶν πολυγώνων εἶναι ἴσαι, διότι σύγκεινται ἐκ μερῶν ἴσων· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι B καὶ β, Γ καὶ γ, Δ καὶ δ, E καὶ ε.

Ὥστε τὰ δύο πολύγωνα ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας των ἴσας κατὰ μίαν. καὶ κατὰ σειρὰν καὶ τὰς ἀντιστοιχούσας πλευρὰς ἀναλόγους· ἄρα εἶναι ὅμοια.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Λαμβάνοντες ἄλλον ἀριθμὸν ὡς πολλαπλασιαστήν, σχηματίζομεν ἄλλο πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν· ὥστε ὑπάρχουσιν ἄπειρα πολύγωνα ὅμοια πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πολύγωνον.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

149. Δύο ὅμοια πολύγωνα δύνανται νὰ διαιρεθῶσιν εἰς τρίγωνα ἴσα τὸ πλῆθος, ὅμοια καθ' ἓν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένα.



Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὰ πολύγωνα αβγδε καὶ ΑΒΓΔΕ εἶναι ὅμοια καὶ ὁ λόγος τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς τοῦ δευτέρου εἶναι ὁ 2· ἤτοι ἔστω

$$\alpha\beta=2.AB,\ \beta\gamma=2.B\Gamma,\ \gamma\delta=2.\Gamma\Delta,\ \delta\varepsilon=2.\Delta E,\ \varepsilon\alpha=2.EA.$$

Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ζ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ καὶ ἄγομεν ἐξ αὐτοῦ εὐθείας εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτὰς ὅλας ἐπὶ τὸν λόγον τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (ὅστις εἰς τὸ προκείμενον παράδειγμα εἶναι ὁ 2), οὕτω σχηματίζομεν τὸ πολύγωνον α'β'γ'δ'ε', ὅπερ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ. Τὸ πολύγωνον τοῦτο α'β'γ'δ'ε' θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ αβγδε· διότι αἱ πλευραὶ αβ καὶ α'β' εἶναι ἴσαι, ὡς διπλάσιαι τῆς ΑΒ (αβ = 2.ΑΒ ἐξ ὑποθέσεως, καὶ α'β' = 2.ΑΒ ἐκ κατασκευῆς)· ὡσαύτως αἱ πλευραὶ βγ, β'γ' εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ γδ, γ'δ' ἴσαι, καὶ καθεξῆς· αἱ δὲ γωνίαι α καὶ α' εἶναι ἴσαι· διότι καὶ αἱ δύο εἶναι ἴσαι μὲ τὴν Α· ἐπίσης αἱ γωνίαι β καὶ β' εἶναι ἴσαι· καὶ καθεξῆς· ἤτοι τὰ δύο πολύγωνα αβγδε καὶ α'β'γ'δ'ε' ἔχουσι καὶ τὰς πλευράς των ἴσας κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειρὰν καὶ τὰς γωνίας, τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας, ἴσας· ἂν λοιπὸν ἡ γωνία βαε ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της β'α'ε', θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ πλευρὰ α'β' ἐπὶ τῆς ἴσης της αβ καὶ ἡ γωνία β. θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της β' καὶ ἡ πλευρὰ βγ ἐπὶ τῆς β'γ' καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε θὰ ἐφαρ-

μόση τὸ αβγδε ἐπὶ τοῦ α'β'γ'δ'ε'· ὅταν δὲ γίνῃ τοῦτο, θὰ εὑρεθῇ τὸ πολύγωνον αβγδε διῃρημένον εἰς τὰ τρίγωνα Ζα'β', Ζβ'γ', Ζγ'δ', Ζδ'ε', Ζε'α', τὰ ὁποῖα εἶναι τόσα, ὅσα εἶναι καὶ τὰ ΖΑΒ, ΖΒΓ,., ΖΕΑ κα ὅμοια πρὸς αὐτὰ ἓν πρὸς ἓν καὶ ὁμοίως κείμενα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

150. Τῶν ὁμοίων πολυγώνων αἱ μὲν περίμετροι ἔχουσι λόγον τὸν λόγον τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι τὴν δευτέραν δύναμιν αὐτοῦ.

Ἔστωσαν δύο ὅμοια πολύγωνα, τὰ ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των εἶναι ὁ 3, ἤτοι

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= 3.AB\\ \beta\gamma &= 3.B\Gamma\\ \gamma\delta &= 3.\Gamma\Delta\\ \delta\varepsilon &= 3.\Delta E\\ \varepsilon\alpha &= 3EA.\end{aligned}$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων εὑρίσκομεν, ἐὰν προσθέσωμεν αὐτὰς κατὰ μέλη,

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\alpha = 3.\ (AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E + EA)\cdot$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι καὶ αἱ περίμετροι ἔχουσι τὸν λόγον 3 τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ λόγου, ὃν ἔχουσιν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν πολυγώνων, διαιροῦμεν τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, ἔστω τὸ ΑΒΓΔΕ, εἰς τρίγωνα ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου αὐτοῦ Ζ καὶ κατασκευάζομεν, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, περὶ τὸ Ζ πολύγωνον ἴσον μὲ τὸ αβγδε. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΖΑΒ, ΖΒΓ, ΖΓΔ... εἶναι κατὰ σειρὰν ὅμοια πρὸς τὰ Ζαβ, Ζβγ, Ζγδ, .. καὶ ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν εἶναι ὁ 3, ἔχομεν (147)

$$\begin{aligned}Z\alpha\beta &= (3\times 3)ZAB\\ Z\beta\gamma &= (3\times 3)ZB\Gamma\\ Z\gamma\delta &= (3\times 3)Z\Gamma\Delta\\ Z\delta\varepsilon &= (3\times 3)Z\Delta E\\ Z\varepsilon\alpha &= (3\times 3)ZEA.\end{aligned}$$

προσθέτοντες δὲ κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας ταύτας, εὑρίσκομεν

$$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = 3\times 3.\mathrm{AB\Gamma\Delta E}$$

ἢ

$$\frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{AB\Gamma\Delta E} = 3\times 3\cdot$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ὁμοίων πολυγώνων ἔχουσι λόγον 3×3, ἤτοι τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ λόγου 3 τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὰ τετράγωνα $(\alpha\beta)^2$ καὶ $(AB)^2$ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον 3×3, συμπεραίνομεν, ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ὁμοίων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των.

ΠΟΡΙΣΜΑ

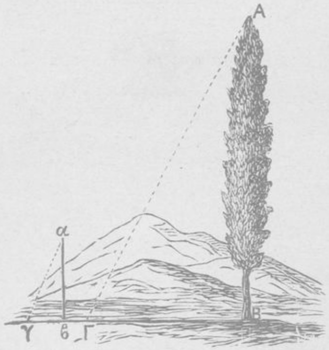
151. Ἐὰν τὰ ὅμοια πολύγωνα εἶναι ἐγγράψιμα εἰς κύκλον, αἱ μὲν περίμετροι αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀκτίνων τῶν κύκλων, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων.

Διότι, ἂν τὸ Ζ ληφθῇ εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων $\frac{Z\alpha}{ZA}$.

Προβλήματα

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος δένδρου ἢ στύλου ὀρθοῦ ἐκ τῆς σκιᾶς αὐτοῦ.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος τοῦ δένδρου ΑΒ.



Ἐπὶ τοῦ ἐδάφους (ὅπερ ὑποθέτομεν ὁριζόντιον) στήνομεν ὀρθὴν ῥάβδον τινὰ αβ, τὴν ὁποίαν μετροῦμεν· ἔτι δὲ μετροῦμεν καὶ τὰς σκιὰς ΒΓ καὶ βγ· λέγω, ὅτι τὸ ζητούμενον ὕψος ΑΒ δίδεται ὑπὸ τῆς ἰσότητος $AB = B\Gamma . \frac{\alpha\beta}{\beta\gamma}$.

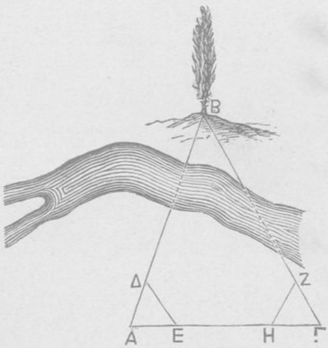
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. *Διότι τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας Α καὶ α ἴσας (145)· τῷ ὄντι αἱ φωτειναὶ ἀκτῖνες ΑΓ καὶ αγ δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς παράλληλοι, ἐπίσης καὶ αἱ γραμμαὶ ΑΒ καὶ αβ, αἵτινες ἵστανται ὄρθιαι ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Ἐκ δὲ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων τούτων ἕπεται, ὅτι αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἀνάλογοι τῶν αβ, βγ, ἤτοι ὅτι εἶνοι* $\frac{AB}{\alpha\beta} = \frac{B\Gamma}{\beta\gamma}$, *ὅθεν* $AB = \frac{B\Gamma . \alpha\beta}{\beta\gamma}$.

Ἂν λόγου χάριν ἡ μὲν σκιὰ τοῦ δένδρου εἶναι 8 πήχεις, ἡ δὲ ῥάβδος 1,5 πήχεις καὶ ἡ σκιὰ αὐτῆς 2,8 πήχεις, τὸ ὕψος τοῦ δένδρου θὰ εἶναι $8 . \frac{1.5}{2.8}$ *ἤτοι* $\frac{8 \times 15}{28}$, *ἢ* $\frac{2 \times 15}{7}$, *ἢ* $\frac{30}{7}$, *ἢ* $4^{\pi}, \frac{2}{7}$.

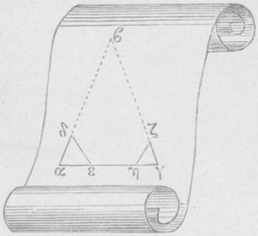
2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις σημείου ἀπροσίτου ἀπὸ τοῦ σημείου, εἰς ὃ εὑρισκόμεθα.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὴν ἀπόστασιν ΑΒ τοῦ σημείου Α (εἰς τὸ ὁποῖον εὑρισκόμεθα) ἀπὸ τοῦ ἀπροσίτου σημείου Β.

Ἀπὸ τοῦ σημείου Α μετροῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εὐθεῖάν τινα ΑΓ καὶ σημειοῦοεν διὰ ῥάβδων ὀρθίων τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΒ, ἔτι δὲ καὶ τῆς ΓΒ· ἔπειτα λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ δύο ἴσα τμήματα ΑΔ, ΑΕ· ὡσαύτως λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΓΒ, ΓΑ δύο ἴσα μέρη ΓΖ, ΓΗ καὶ ἄγομεν τὰς εὐθείας ΔΕ καὶ ΖΗ.



Μετὰ ταῦτα γράφομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου τὴν εὐθεῖαν αγ, ἥτις ἰσοῦται μὲ μέρος τι τῆς ΑΓ (παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ αγ εἶναι τὸ $\frac{1}{10000}$ *τῆς ΑΓ) καὶ κατασκευάζομεν τὰ τρίγωνα αδε καὶ γζη, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἐπίσης τὰ δεκάκις χιλιοστὰ μέρη τῶν πλευρῶν τῶν τριγώνων ΑΔΕ καὶ ΓΖΗ. Τότε τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΕ, αδε θὰ εἶναι ὅμοια διὰ τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν των, ὡσαύτως καὶ τὰ τρίγωνα ΓΖΗ καὶ γζη· ἐπομένως αἱ δύο γωνίαι Α καὶ α εἶναι ἴσαι, ὡσαύτως καὶ αἱ γωνίαι Γ καὶ γ· ὅθεν καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ θὰ εἶναι ὅμοια. Ἐκ δὲ τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν ἕπεται*



$$\frac{AB}{\alpha\beta} = \frac{\Gamma A}{\gamma\alpha} \cdot \text{ἢ } AB = \alpha\beta . \frac{A\Gamma}{\alpha\gamma} \cdot$$

καὶ ἐπειδὴ $\Gamma A = 10000 . \gamma\alpha$, *εὑρίσκομεν*

$$AB = 10000 . \alpha\beta \cdot$$

μετροῦμεν λοιπὸν ἐπὶ χάρτου τὴν αβ καὶ τὸ εὑρεθὲν μῆκος πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 10000, τὸ δὲ γινόμενον εἶναι ἡ ζητουμένη ἀπόστασις.

Ζητήματα.

1) Τριγώνου τινὸς αἱ πλευραὶ εἶναι 5, 6, 7 μέτρα· ποῖαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ πρὸς αὐτὸ ὁμοίου καὶ ἔχοντος περίμετρον 45 μέτρα; (Ἀπόκρ. 12,5 15 καὶ 17,5).

2) Δύο ὁμοίων τριγώνων αἱ περίμετροι εἶναι τοῦ μὲν 18 μέτρα, τοῦ δὲ 45· ποῖον λόγον ἔχουσιν αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ καὶ ποῖον αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν; (Ἀπ. αἱ πλευραὶ ἔχουσι λόγον $\frac{18}{45}$ ἢ $\frac{2}{5}$· αἱ δὲ ἐπιφάνειαι ἔχουσι λόγον $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$ ἤτοι $\left.\frac{4}{25}\right)$.

3) Δοθέντος πολυγώνου κατασκευάζομεν ἄλλο μὲ διπλασίας πλευρὰς (καὶ μὲ τὰς αὐτὰς γωνίας)· ποσαπλάσιον εἶναι τὸ δεύτερον τοῦ πρώτου κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν; (Ἀπ. τετραπλάσιον).

4) Δοθέντος πολυγώνου θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἄλλο ὅμοιον καὶ διπλάσιον κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν· μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν νὰς πλευρὰς τοῦ δοθέντος; (Ἀπόκρ. μὲ $\sqrt{2}$ ἤτοι μὲ 1,4142. . .).

Θ. Ν. Χρόνης.

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'

Θ. Ν. Κρόνη

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Ὁρισμός.

152. Κανονικὸν πολύγωνον *λέγεται τὸ ἔχον πάσας τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας καὶ πάσας τὰς γωνίας αὐτοῦ ἴσας· τουτέστι τὸ ἰσογώνιον καὶ ἰσόπλευρον· οἷον τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ τὸ τετράγωνον εἶναι κανονικὰ πολύγωνα.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

153. Ἐὰν περιφέρεια κύκλου διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη (*περισσότερα τῶν δύο*), αἱ χορδαὶ αὐτῶν σχηματίζουσι κανονικὸν πολύγωνον.

Αἱ μὲν πλευραὶ τοῦ οὕτω σχηματιζομένου πολυγώνου θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· διότι εἶναι χορδαὶ ἴσων τόξων (98)· *αἱ δὲ γωνίαι αὐτοῦ θὰ εἶναι ἴσαι· διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὴν περιφέρειαν καὶ βαίνουσιν ἐπὶ τόξων ἴσων· διότι τὸ τόξον, ἐφ' οὗ ἑκάστη βαίνει, εἶναι ὅλη ἡ περιφέρεια πλὴν δύο ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς.*

Ἄρα τὸ πολύγωνον τοῦτο εἶναι κανονικόν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

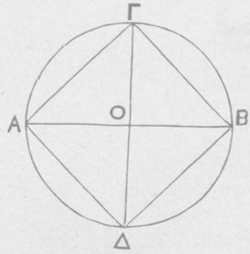
154. *Τὸ πρόβλημα* νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον κανονικὸν πολύγωνον ἔχον μ πλευράς, *εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἑξῆς·* νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα περιφέρεια εἰς μ ἴσα μέρη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

155. Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.

Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἀρκεῖ νὰ διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια αὐτοῦ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ νὰ ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ αὐτῶν.

Πρὸς τοῦτο ἄγομεν τυχοῦσαν διάμετρον τὴν ΑΒ καὶ ἔπειτα κάθετον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς τὴν διάμετρον ΓΔ· αἱ διάμετροι αὗται διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη (διότι αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι ἴσαι) καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν ΑΓ, ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ σχηματίζουσι τετράγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον.



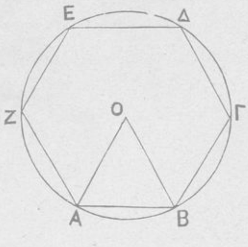
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου Α Ο Γ πορίζόμεθα* $(ΑΓ)^2=(ΑΟ)^2+(ΟΓ)^2=2.\ (ΑΟ)^2$, *ὅθεν καὶ* $(ΑΓ)=(ΑΟ)\sqrt{2}$, *ἤτοι* ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραγώνου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 2· εἶναι δὲ $\sqrt{2}=1,4142\ldots$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

156. Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.

Ἀρκεῖ νὰ διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια αὐτοῦ εἰς ἕξ ἴσα μέρη· ἵνα δὲ ἐκτελέσωμεν τοῦτο, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἔστω ΑΒ τὸ ἕκτον τῆς περιφερείας Ο· τότε ἡ χορδὴ ΑΒ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου. Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ ΟΒ, ἡ γωνία ΑΟΒ θὰ εἶναι τὸ ἕκτον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν, ἤτοι $\frac{4}{6}$ *ἢ* $\frac{2}{3}$ *μιᾶς ὀρθῆς· ἐπομένως αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι τοῦ τριγώνου* ΟΑΒ, *αἱ* Α *καὶ* Β, *θὰ ἔχωσιν ἄθροισμα* $2-\frac{2}{3}$ *ἢ* $\frac{4}{3}$ *τῆς ὀρθῆς, καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι (διότι* ΟΑ=ΟΒ), *θὰ εἶναι ἡ καθεμία τὸ ἥμισυ τοῦ* $\frac{4}{3}$ *ἤτοι* $\frac{2}{3}$ *τῆς ὀρθῆς ἄρα τὸ τρίγωνον* ΟΑΒ *θὰ εἶναι ἰσογώνιον, ἐπομένως (ἐδ. 71) καὶ ἰσόπλευρον· ἤτοι θὰ εἶναι* ΑΒ=ΟΑ=ΟΒ. *Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι*



Ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

Ἐὰν λοιπὸν μὲ κέντρον σημεῖόν τι Α *τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ* *μὲ ἀκτῖνα τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου γράψωμεν περιφέρειαν καὶ τὰ σημεῖα Β καὶ Ζ, ἔνθα αὕτη τέμνει τὴν δοθεῖσαν, συνδέσωμεν μὲ τὸ Α, θὰ ἔχωμεν δύο πλευρὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου· λαμβάνοντες ἔπειτα τὴν κορυφὴν Β ὡς κέντρον καὶ γράφοντες ἴσην περιφέρειαν, εὑρίσκομεν τὴν κορυφὴν Γ, καὶ οὕτω καθεξῆς.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

157. Νὰ ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.

Ἐγγράφομεν πρῶτον κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ἔπειτα συνδέομεν τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἐναλλὰξ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΓΕ, ΕΑ· τὸ τρίγωνον ΑΓΕ θὰ εἶναι ἰσόπλευρον· διότι ἕκαστον τῶν τόξων ΑΒΓ, ΓΔΕ, ΕΖΑ σύγκειται ἐκ δύο ἕκτων τῆς περιφερείας καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίτον αὐτῆς.

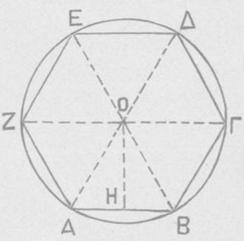
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Ἔχοντες τὴν περιφέρειαν διῃρημένην εἰς ἴσα μέρη, ἐὰν ἕκαστον τῶν ἴσων τόξων ὑποδιαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα, θὰ εὑρεθῇ ἡ περιφέρεια διῃρημένη εἰς διπλάσιον ἀριθμὸν ἴσων μερῶν. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν ὄχι μόνον εἰς 4 ἴσα μέρη, ἀλλὰ καὶ εἰς 8, εἰς 16, 32, 64 κτλ. Ὁμοίως ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ ἑξάγωνον, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 12, εἰς 24, 48, 96 κτλ. ἴσα μέρη.

ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ

158. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι γινόμενον τῆς περιφερείας αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνός του.



Ἔστω ὁ κύκλος Ο· ἂς ἐγγράψωμεν εἰς αὐτὸν κανονικόν τι πολύγωνον, οἷον τὸ ΑΒΓΔΕΖ· *ἐὰν εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας* ΟΑ, ΟΒ..., *διαιρεῖται τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα ἴσα πρὸς ἄλληλα (διότι ἔχουσι τὰς τρεῖς των πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν), ἑπομένως καὶ ἰσοϋψῆ. Τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων τούτων, ἐπειδὴ ἔχουσιν ὅλα ὕψος ἴσον μὲ τὸ ΟΗ, θὰ εἶναι*

$$\frac{ΑΒ \times ΟΗ}{2}, \frac{ΒΓ \times ΟΗ}{2}, \frac{ΓΔ \times ΟΗ}{2}, \frac{ΔΕ \times ΟΗ}{2}, \frac{ΕΖ \times ΟΗ}{2}, \frac{ΖΑ \times ΟΗ}{2}$$

ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ εἶναι

$$\frac{\text{ΑΒ}\times\text{ΟΗ}}{2}+\frac{\text{ΒΓ}\times\text{ΟΗ}}{2}+\frac{\text{ΓΔ}\times\text{ΟΗ}}{2}+\frac{\text{ΔΕ}\times\text{ΟΗ}}{2}+\frac{\text{ΕΖ}\times\text{ΟΗ}}{2}+\frac{\text{ΖΑ}\times\text{ΟΗ}}{2}$$

ἢ $$(ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ+ΕΖ+ΖΑ)\times\frac{\text{ΟΗ}}{2}$$

ἤτοι ἡ περίμετρός του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀποστήματος ΟΗ τοῦ κέντρου ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου.

Ἄς φαντασθῶμεν νῦν, ὅτι ἐγγράφομεν ἄλλο κανονικὸν πολύγωνον ἔχον δὶς τόσας πλευρὰς ἢ τὸ ΑΒΓΔΕΖ καὶ ἔπειτα ἄλλο, καὶ οὕτω καθεξῆς, διπλασιάζοντες πάντοτε τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν· τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν ἐγγραφομένων κανονικῶν πολυγώνων θὰ εἶναι πάντοτε γινόμενον τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀποστήματός του. Ἀλλ' ὅσον αὐξάνει ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν, τόσον πλησιάζει τὸ ἀπόστημα ΟΗ πρὸς τὴν ἀκτῖνα (διότι ἡ διαφορὰ ΟΑ—ΟΗ εἶναι (75) μικροτέρα τῆς ΑΗ, τουτέστι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ πολυγώνου καταντᾷ μικροτέρα πάσης εὐθείας), ἡ δὲ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πλησιάζει πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου πλησιάζει πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου. Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἰσοῦται ἀκριβῶς μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνός του.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, καὶ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τομέως εἶναι γινόμενον τοῦ τόξου του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. *Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦτο ὁ κύκλος εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τρίγωνον, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν τὴν περιφέρειαν, ὕψος δὲ τὴν ἀκτῖνα.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

159. Τῶν κύκλων αἱ μὲν περιφέρειαι εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀκτίνων, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι εἶναι ἀνάλογοι τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων.

Ἄς θέσωμεν δύο κύκλους οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσωσι τὰ κέντρα αὐτῶν. καὶ ἂς φέρωμεν ἐκ τοῦ κέντρου ἀκτῖνας ὁσασδήποτε αἱ ἀκτῖνες αὗται διαιροῦσι τὰς περιφερείας εἰς μέρη, αἱ δὲ χορδαὶ τῶν μερῶν τούτων σχηματίζουσι πολύγωνα ἐγγεγραμμένα *καὶ ὅμοια (διότι τὸ ἓν προκύπτει ἐκ τοῦ ἄλλου (ἐδ. 148), ἐὰν αἱ ἀκτῖνες, αἵτινες ἄγονται εἰς τὰς κορυφάς του, πολλαπλασιασθῶσιν ὅλαι μὲ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν). Ἐὰν δὲ παρασιήσωμεν τὰς περιμέτρους αὐτῶν διὰ Σ καὶ σ, τὰς δὲ ἐπιφανείας αὐτῶν διὰ Ε καὶ ε καὶ τὰς ἀκτῖνας διὰ Α καὶ α, θὰ εἶναι (151)*

$$\frac{\sigma}{\Sigma}=\frac{\alpha}{A} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\varepsilon}{E}=\frac{\alpha^2}{A^2} \quad (\iota)$$

Ἂς φαντασθῶμεν νῦν, ὅτι ἐγγράφομεν εἰς τοὺς κύκλους δύο ἄλλα ὅμοια πολύγωνα ἔχοντα δὶς τόσας πλευρὰς ἢ τὰ προηγούμενα (γίνεται δὲ τοῦτο, ἐὰν διχοτομήσωμεν πάσας τὰς εἰς τὸ κέντρον σχηματισθείσας γωνίας), ἔπειτα ἄλλα, καὶ καθεξῆς, διπλασιάζοντες πάντοτε τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν. Ὅσον μικραὶ καὶ ἂν γίνωσιν αἱ πλευραὶ τῶν ἐγγραφομένων πολυγώνων, πάντοτε θὰ ἀληθεύωσιν αἱ ἰσότητες (ι), ἀλλ' ὅσον προχωροῦμεν αὐξάνοντες τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν, τόσον αἱ περίμετροι τῶν πολυγώνων πλησιάζουσιν εἰς τὰς περιφερείας τῶν κύκλων, εἰς τοὺς ὁποίους εἶναι ἐγγεγραμμέναι, αἱ δὲ ἐπιφάνειαί των εἰς τὰς ἐπιφανείας τῶν κύκλων. Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν, ὅτι θὰ εἶναι

$$\frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{\alpha}{A} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\varkappa}{K}=\frac{\alpha^2}{A^2},$$

ἔνθα γ καὶ Γ παριστῶσι τὰς περιφερείας καὶ κ καὶ Κ τὰς ἐπιφανείας τῶν κύκλων.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. *Ἐκ τῶν δύο τούτων θεωρημάτων βλέπομεν, ὅτι οἱ κύκλοι δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς κανονικὰ πολύγωνα ἔχοντα ἄπειρον ἀριθμὸν πλευρῶν.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι καὶ τὰ τόξα τὰ εἰς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας ἀντιστοιχοῦντα (ὡς π. χ. τὰ τόξα ΑΒΓΔ καὶ αβγδ) εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀκτίνων. Διότι καὶ αἱ περίμετροι τῶν εἰς αὐτὰ ἐγγραφομένων γραμμῶν, ὅταν τὰ τόξα ταῦτα διαιρεθῶσιν εἰς μέρη δι' ὁσωνδήποτε ἀκτίνων, (π.χ. αἱ ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ καὶ αβ+βγ+γδ), ἔχουσι τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων (παράβλ. 151).*

ΠΟΡΙΣΜΑ

160. Ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι ὁ αὐτὸς εἰς πάντας τοὺς κύκλους.

Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{\alpha}{A}$ *εὑρίσκομεν*

$$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\Gamma}{A},$$

ἐξ ἧς καὶ
$$\frac{\gamma}{2\alpha}=\frac{\Gamma}{2A}$$

τουτέστιν ὁ λόγος, ὃν ἔχει ἡ περιφέρεια γ πρὸς τὴν διάμετρόν της 2α, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῆς τυχούσης περιφερείας Γ πρὸς τὴν διάμετρον αὐτῆς 2Α.

Ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρόν της παρίσταται ἐν τοῖς συγγράμμασι πάντων τῶν ἐθνῶν διὰ τοῦ ἑλληνικοῦ γράμματος π (*), *εἶναι δὲ κατὰ προσέγγισιν* $\frac{22}{7}$ $\left(\text{ὀλίγον τι μικρότερος τοῦ } \frac{22}{7}\right)$

ΜΕΤΡΑ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

161. Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου διὰ τοῦ α, τὸ μὲν μῆκος τῆς περιφερείας αὐτοῦ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου 2πα, τὸ δὲ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ἐκ τοῦ τύπου $\pi.\alpha^2$.

Διότι παριστῶντες τὸ μὲν μῆκος τῆς περιφερείας διὰ τοῦ γ, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου διὰ τοῦ κ, ἔχομεν

$$\frac{\gamma}{2\alpha}=\pi, \text{ ὅθεν } \gamma=2\pi.$$ 2πα

πρὸς τούτοις εἶναι (ἰδὲ ἐδάφιον 158)

$$\varkappa=\frac{1}{2}\gamma.\ \alpha=\frac{1}{2}\ 2\pi\alpha\ \alpha=\pi.\alpha^2.$$

Προβλήματα.

1) Περιφερείας τινὸς ἡ ἀκτὶς εἶναι 2,5 μέτρα· νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος αὐτῆς.

(Ἀπ. Τὸ μῆκος αὐτῆς εἶναι $2\times\frac{22}{7}\times2,5$ ἢ $\frac{110}{7}$, ἤτοι 15 μέτρα καὶ $\frac{5}{7}$ τοῦ μ. περίπου).

2) Περιφέρειά τις ἔχει μῆκος 40 μέτρων· νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς.

(Ἀπ. Ἡ ἀκτὶς εἶναι $\frac{40}{2\times\frac{22}{7}}$ δηλαδὴ $20\times\frac{7}{22}$ ἢ $\frac{70}{11}$ ἤτοι 6 μέτρα καὶ $\frac{4}{11}$).

(*) Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶνε ἀσύμμετρος· δηλαδὴ δὲν εἶνε ἀκέραιος οὔτε κλασματικὸς καὶ μόνον μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία δύναται νὰ παρασταθῇ.

3) Εἷς ἐκ τῶν τροχῶν μιᾶς ἁμάξης ἔχων ἀκτῖνα 0,45 μέτρα ἔκαμεν 128 στροφάς· πόσον δρόμον διήνυσεν ἡ ἅμαξα; (Ἀπ. 362 μέτρα περίπου).

4) Ἡ περιφέρεια τοῦ ἰσημερινοῦ τῆς γῆς εἶνε 40,000,000 μέτρα· πόσα μέτρα διανύει καθ' ὥραν ἓν σημεῖον τοῦ ἰσημερινοῦ, ὅταν ἡ γῆ στρέφηται περὶ τὸν ἄξονά της; καὶ πόσα μέτρα εἶνε τὸ τόξον τοῦ ἑνὸς λεπτοῦ;

5) Κορμός τις δένδρου ἔχει περιφέρειαν 1 μέτρου· πόση εἶνε ἡ διάμετρος αὐτοῦ;

$$\left(\text{Ἀπ. } \frac{7}{22}\right).$$

6) Στρογγύλη τις τράπεζα ἔχει ἀκτῖνα 1,2 μέτρα· πόσα τετρ. μέτρα εἶνε ἡ ἐπιφάνειά της; (Ἀπ. 4,53).

7) Δεξαμενή τις κυκλικὴ ἔχει περιφέρειαν 15 μέτρων· πόσα τετρ. μέτρα εἶνε ἡ ἐπιφάνειά της; (Ἀπ. 17,9 περίπου).

8) Ἐκ δύο κύκλων ὁ εἷς ἔχει ἀκτῖνα διπλασίαν τοῦ ἄλλου· ποσαπλάσιος εἶνε ὁ πρῶτος κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν; ποσαπλάσιος δὲ κατὰ τὴν περιφέρειαν; (Ἀπ. τετραπλάσιος κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν· διπλάσιος δὲ κατὰ τὴν περιφέρειαν).

9) Κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα 5 μέτρων λαμβάνομεν τόξον 15^0· πόσον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τόξου τούτου;

Ἐπειδὴ τὸ μῆκος τῆς ὅλης περιφερείας εἶναι $2\pi \times 5\mu$ ἤτοι $10 \times \pi$, ἔχει δὲ ἡ περιφέρεια 360^0, ἡ μία μοῖρα θὰ ἔχῃ μῆκος $\frac{10.\pi}{360}$ ἢ $\frac{\pi}{36}$ καὶ αἱ 15^0 θὰ ἔχωσι μῆκος $\frac{15.\pi}{36}$ ἢ $\frac{5.\pi}{12}$.

10) Πόσων μοιρῶν εἶναι τόξον τι, ὅπερ ἔχει μῆκος 20 μέτρων καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶνε 8 μέτρα;

Ἡ ὅλη περιφέρεια ἔχει μῆκος 16π· ἑπομένως τόξον μήκους 16π ἔχει μοίρας 360, τόξον ἔχον μῆκος 1 μέτρου ἔχει μοίρας $\frac{360}{16.\pi}$, καὶ τόξον ἔχον μῆκος 20 μέτρων ἔχει μοίρας $\frac{360}{16\pi} \times 20$ ἢ $\frac{45 \times 10}{\pi}$.

11) Τομεύς τις κυκλικὸς ἔχει ἀκτῖνα 3 μέτρων καὶ ἡ γωνία αὐτοῦ εἶνε 18^0. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶνε 9π καὶ τοῦ τεταρτημορίου $\frac{9\pi}{4}$, ἔχει δὲ τοῦτο γωνίαν 90^0· ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως οὗ ἡ γωνία 1^0 θὰ εἶναι $\frac{9\pi}{4 \times 90}$ ἢ $\frac{\pi}{40}$, καὶ ὁ τομεὺς οὗτινος ἡ γωνία εἶνε 18^0 θὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν $\frac{18\pi}{40}$ ἢ $\frac{9\pi}{20}$ τετρ. μέτρ.

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΡΑ ΑΥΤΩΝ

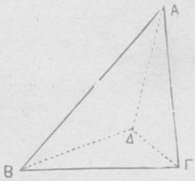
ΠΟΛΥΕΔΡΑ

Πολύεδρον *λέγεται πᾶν σῶμα, τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα εἶναι ἐπίπεδα σχήματα.*

Ἕδραι *τοῦ πολυέδρου λέγονται τὰ ἐπίπεδα σχήματα, ἐξ ὧν σύγκειται ἡ ἐπιφάνειά του.*

Πλευραὶ ἢ ἀκμαὶ *τοῦ πολυέδρου λέγονται αἱ πλευραὶ τῶν ἑδρῶν του καὶ* κορυφαὶ *αὐτοῦ αἱ κορυφαὶ τῶν ἑδρῶν του.*

Τὸ πολύεδρον ὀνομάζεται ἐκ τοῦ πλήθους τῶν ἑδρῶν του τετράεδρον, *ἐὰν ἔχῃ τέσσαρας ἕδρας,* πεντάεδρον, *ἐὰν ἔχῃ πέντε,* ἑξάεδρον, *ἐὰν ἔχῃ ἕξ, καὶ οὕτω καθεξῆς.*



Τὸ ἀπέναντι σχῆμα παριστᾷ τετράεδρον· μὲ ὀλιγωτέρας ἕδρας δὲν δύναται νὰ κλεισθῇ πολύεδρον· (αἱ ἐστιγμέναι γραμμαὶ ὑποτίθενται κείμεναι ὄπισθεν τοῦ ἐπιπέδου τοῦ χάρτου).

ΠΡΙΣΜΑΤΑ

Πρίσμα *λέγεται τὸ πολύεδρον, τοῦ ὁποίου δύο μὲν ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι* (*), *αἱ δὲ ἄλλαι παραλληλόγραμμα.*

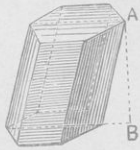
Τὸ ἀπέναντι σχῆμα παριστᾷ πρίσμα.

Βάσεις *τοῦ πρίσματος λέγονται αἱ δύο ἴσαι καὶ παράλληλοι ἕδραι αὐτοῦ,* ὕψος *δὲ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν* (**).

(*) Παράλληλα λέγονται τὰ ἐπίπεδα τὰ μὴ συναντώμενα, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσι πανταχόθεν.

(**) Ἀπόστασις τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων λέγεται μία τις τῶν μεταξὺ αὐτῶν καθέτων, (διότι ὅλαι εἶνε ἴσαι)· λέγεται δὲ εὐθεῖα κάθετος πρὸς ἐπίπεδον, ἐὰν εἶναι κάθετος πρὸς πάσας τὰς εὐθείας, αἵτινες κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ διέρχονται διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς, ἤτοι διὰ τοῦ σημείου ἔνθα τέμνει τὸ ἐπίπεδον.

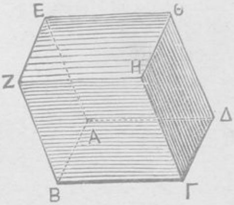
Τὸ πρίσμα λέγεται ἐκ τῆς βάσεως αὐτοῦ τριγωνικόν, ἐὰν ἔχῃ βάσιν τρίγωνον, τετραγωνικόν, ἐὰν τετράπλευρον, καὶ οὕτω καθεξῆς.



Τὸ πρίσμα λέγεται ὀρθόν, ἐὰν τὰ παραλληλόγραμμα, ὑφ᾿ ὧν πέριξ περιορίζεται, εἶναι ὀρθογώνια, εἰ δὲ μή, λέγεται πλάγιον.

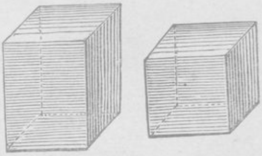
Τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος ἑκάστη πλευρὰ μὴ κειμένη ἐπὶ τῶν βάσεων ἰσοῦται πρὸς τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἐὰν αἱ βάσεις τοῦ πρίσματος εἶναι καὶ αὐταὶ παραλληλόγραμμα, πᾶσαι αἱ ἕδραι τοῦ πρίσματος εἶναι παραλληλόγραμμα, καὶ λέγεται παραλληλεπίπεδον· τοιοῦτον εἶναι τὸ στερεὸν ΑΗ.



Πᾶν παραλληλεπίπεδον εἶναι ἑξάεδρον.

Ἐὰν αἱ ἓξ ἕδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι ὀρθογώνια, λέγεται ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ἐὰν δὲ αἱ ἓξ ἕδραι εἶναι τετράγωνα, τὸ στερεὸν λέγεται κύβος ἢ κανονικὸν ἑξάεδρον.



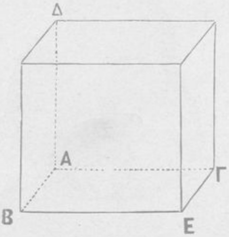
Ὁ κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ ἓν μέτρον, λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν στερεῶν καὶ λέγεται κυβικὸν μέτρον. Ὄγκος δὲ παντὸς στερεοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις δεικνύει, πῶς ἀποτελεῖται τοῦτο ἐκ τοῦ κυβικοῦ μέτρου καὶ ἐκ τῶν μερῶν του· λέγοντες, παραδείγματος χάριν, ὅτι στερεόν τι ἔχει ὄγκον $6\frac{1}{2}$, ἐννοοῦμεν, ὅτι ἀποτελεῖται, ἐὰν ἑνωθῶσιν ἓξ κυβικὰ μέτρα καὶ $\frac{1}{2}$ τοῦ κυβικοῦ μέτρου.

ΜΕΤΡΟΝ ΤΩΝ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ

Ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος εἶναι γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

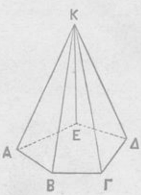
Ἵνα εὕρωμεν δηλαδὴ τὸν ὄγκον τοῦ δοθέντος πρίσματος, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὅστις παριστᾷ τὸ ὕψος· τὸ γινόμενον εἶναι ὁ ζητούμενος ὄγκος τοῦ πρίσματος.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ὑποτεθῇ, ὅτι ἡ βάσις εἶναι ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ἡ μὲν 8 μέτρα, ἡ δὲ 5, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶναι 8×5 (ἤτοι 40 τετραγωνικὰ μέτρα)· ἐὰν δὲ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 12 μέτρα, ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι 8×5×12, ἤτοι 480 κυβικὰ μέτρα, τουτέστι τὸ στερεὸν σύγκειται ἀπὸ 480 κυβικὰ μέτρα.

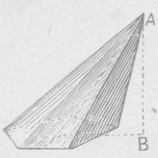


ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Εἰς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ὁ ὄγκος εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰς τρεῖς ἀκμάς του, τὰς εἰς μίαν κορυφὴν ἐρχομένας, ὡς τὰς* ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ· *διότι τὸ γινόμενον τῶν* ΑΒ *καὶ* ΑΓ, *ἤτοι τὸ* ΑΒ×ΑΓ, *εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως* ΑΒΕΓ. *Αἱ τρεῖς αὗται ἀκμαὶ λέγονται* διαστάσεις *τοῦ στερεοῦ, καὶ ἡ μὲν* ΑΓ *λέγεται* μῆκος, *ἡ δὲ* ΑΒ πλάτος, *ἡ δὲ* ΑΔ ὕψος.

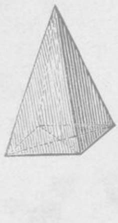
ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ



Πυραμὶς *λέγεται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποίου μία ἕδρα εἶναι οἱονδήποτε πολύγωνον, αἱ δὲ λοιπαὶ εἶναι τρίγωνα, βάσεις μὲν ἔχοντα τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, κορυφὴν δὲ κοινὴν σημεῖόν τι κείμενον ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου. Τοιοῦτον εἶναι τὸ στερεὸν* ΚΑΒΓΔΕ.



Βάσις *τῆς πυραμίδος λέγεται τὸ πολύγωνον* ΑΒΓΔΕ, κορυφὴ *δὲ τὸ σημεῖον Κ,* ὕψος *δὲ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς εἰς τὴν βάσιν ἀγομένη κάθετος. Ἡ κάθετος αὕτη δύναται νὰ πέσῃ καὶ ἐκτὸς τῆς βάσεως, ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀπέναντι σχῆμα.*



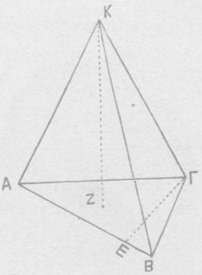
Ἡ πυραμὶς λέγεται ἐκ τῆς βάσεως αὐτῆς τριγωνική, *ἐὰν ἔχῃ βάσιν τρίγωνον,* τετραγωνική, *ἐὰν τετράπλευρον, καὶ οὕτω καθεξῆς.*

Τὸ ἀπέναντι σχῆμα παριστᾷ πυραμίδα τετραγωνικήν.

ΜΕΤΡΟΝ ΤΩΝ ΠΥΡΑΜΙΔΩΝ

Ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους της.

Ἄς ὑποθέσωμεν π.χ., ὅτι ἡ πυραμὶς ΚΑΒΓ ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶνε 5 μέτρα καὶ ἡ κάθετος ΓΕ (τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου) εἶναι 3 μέτρα· τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος εἶναι $\frac{5\times 3}{2}$.



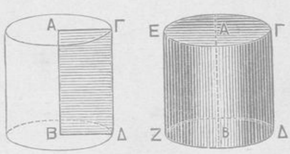
ἐὰν δὲ τὸ ὕψος ΚΖ τῆς πυραμίδος ὑποτεθῇ $6\frac{1}{2}$ *μέτρα, ὁ ὄγκος αὐτῆς θὰ εἶναι γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ΑΒΓ ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους ΚΖ, ἤτοι*

$$\frac{5\times 3\times 6\frac{1}{2}}{2\times 3} \text{ ἢ } \frac{5\times 6\frac{1}{2}}{2} \text{ ἢ } \frac{5\times 13}{4} \text{ ἤτοι } \frac{65}{4}.$$

τουτέστι 16 κυβικὰ μέτρα καὶ $\frac{1}{4}$ *αὐτοῦ.*

ΠΕΡΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

Κύλινδρος *λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον γεννᾶται, ἐὰν περιστραφῇ ὀρθογώνιόν τι περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (ἥτις μένει ἀκίνητος) πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ἤρχισε νὰ στρέφηται.*



Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ *στρέφεται περὶ τὴν* ΑΒ, *μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του. Εἰς τὴν περιστροφὴν ταύτην αἱ πλευραὶ* ΑΓ *καὶ* ΒΔ *γράφουσι κύκλους, οἵτινες λέγονται* βάσεις *τοῦ κυλίνδρου, τὰ δὲ σημεῖα* Γ *καὶ* Δ *γράφουσι τὰς περιφερείας τῶν κύκλων τούτων, ἡ δὲ πλευρὰ* ΓΔ *γράφει ἐπιφάνειαν, ἥτις λέγεται* κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου· *ἡ δὲ* ΓΔ *λέγεται* γενέτειρα *αὐτῆς.*

Ἄξων *τοῦ κυλίνδρου ἢ* ὕψος *λέγεται ἡ ἀκίνητος μένουσα πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου, ἡ* ΑΒ.

ΜΕΤΡΑ ΤΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

1) Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ κύλινδρος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὀρθὸν πρίσμα ἔχον ἀπείρους παραπλεύρους ὀρθογωνίους ἕδρας, ὡς καὶ ὁ κύκλος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κανονικὸν πολύγωνον ἔχον ἀπείρους πλευράς.*

Ἄς ὑποθέσωμεν, π. χ., ὅτι κυλίνδρου τινὸς ἡ βάσις ἔχει ἀκτῖνα 2 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶνε 5 μέτρα· τότε ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως εἶναι $\frac{22}{7}\times2\times2$ *τετρ. μέτρα καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι* $\frac{22}{7}\times2\times2\times5$ *ἤτοι* $\frac{440}{7}$ *ἢ 62 κυβικὰ μέτρα καὶ* $\frac{6}{7}$ *κυβ. μέτρου (κατὰ προσέγγισιν).*

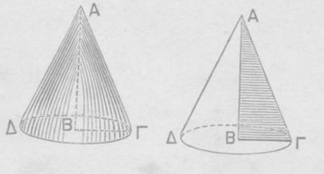
2) Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ ὀρθογώνιον ἔχον βάσιν μὲν τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ φαντασθῶμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου συνισταμένην ἀπὸ χαρτίον λεπτότατον καὶ κομμένην εἰς μίαν γενέτειραν· ἐὰν τότε ἀναπτύξωμεν αὐτὴν ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, φανερὸν εἶναι, ὅτι τρέπεται εἰς ὀρθογώνιον, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν μίαν εὐθεῖαν ἴσην μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

Ἄς ὑποθέσωμεν, π. χ., ὅτι κυλίνδρου τινὸς ἡ βάσις ἔχει ἀκτῖνα 1, 2, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶναι 3 μέτρα· ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως θὰ εἶναι $\frac{22}{7}\times2,4$· *Ἑπομένως ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου θὰ εἶναι* $\frac{22}{7}\times2,4\times3$ *ἢ* $\frac{1584}{70}$ *ἤτοι 22 τετρ. μέτρα καὶ* $\frac{44}{70}$ *αὐτοῦ.*

ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΥ

Κῶνος *λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον γεννᾶται, ὅταν ὀρθογώνιον τρίγωνον περιστραφῇ περὶ μίαν τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ἤρχισε νὰ στρέφηται.*



Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του. Εἰς τὴν περιστροφὴν ταύτην ἡ μὲν πλευρὰ ΒΓ θὰ γράψῃ κύκλον, ὅστις λέγεται βάσις *τοῦ κώ-*

νου, ἡ δὲ πλευρὰ ΑΓ θὰ γράψῃ ἐπιφάνειαν, ἥτις λέγεται κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου

Ἄξων τοῦ κώνου ἢ ὕψος αὐτοῦ λέγεται ἡ ἀκίνητος μένουσα πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

Κορυφὴ δὲ τοῦ κώνου λέγεται τὸ σημεῖον Α.

Πλευρὰ δὲ ἢ ἀπόστημα τοῦ κώνου λέγεται ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐξ οὗ γεννᾶται.

ΜΕΤΡΑ ΤΟΥ ΚΩΝΟΥ

1) Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους του.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ κῶνος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πυραμίς, τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι κανονικὸν πολύγωνον ἔχον ἀπείρους πλευράς.*

Ἔστω ὡς παράδειγμα κῶνός τις, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ἔχει ἀκτῖνα 4 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος εἶναι 12 μέτρα.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως εἶναι $\frac{22}{7} \times 4 \times 4$ *καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, ὅστις εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους, θὰ εἶναι* $\frac{22}{7} \times 4 \times 4 \times 4$ *ἤτοι 201 κυβικὰ μέτρα καὶ* $\frac{1}{7}$ *κυβικοῦ μέτρου (κατὰ προσέγγισιν).*

2) Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειαν κυκλικοῦ τομέως, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν τόξον εἶναι ἴσον μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἡ δὲ ἀκτὶς ἴση μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.

Ἵνα ἐννοήσωμεν τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ φαντασθῶμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου συνισταμένην ἀπὸ χαρτίον λεπτότατον, καὶ κομμένην κατὰ μίαν πλευράν, ἐὰν ἀναπτύξωμεν αὐτὴν ἐπὶ ἐπιπέδου, φανερὸν εἶναι, ὅτι τότε ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως θὰ τραπῇ εἰς κυκλικόν τι τόξον (τοῦ ὁποίου κέντρον θὰ εἶναι ἡ κορυφὴ τοῦ κώνου), ἡ δὲ κυρτὴ ἐπιφάνεια εἰς τομέα.

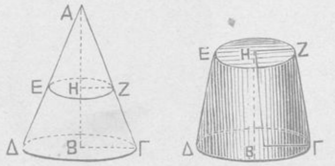
Διὰ τοῦτο τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου εἶναι γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του (158, Σημ.).

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ., ὅτι κώνου τινὸς ἡ βάσις ἔχει ἀκτῖνα 2,5 μέτρα, ἡ δὲ πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι 4 μέτρα.

Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως εἶναι $\frac{7}{22} \times 5$, *ἡ δὲ κυρτὴ ἐπιφάνεια εἶναι* $\frac{22}{7} \times 5 \times 2$ *ἢ* $\frac{200}{7}$ *ἤτοι 31 τετραγωνικὰ μέτρα καὶ* $\frac{3}{7}$ *τετρ. μέτρου (κατὰ προσέγγισιν).*

ΠΕΡΙ ΚΟΛΟΥΡΟΥ ΚΩΝΟΥ

Ἐὰν κῶνος τμηθῇ δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του, τὸ μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τῆς τομῆς μέρος τοῦ κώνου λέγεται κόλουρος κῶνος· *τοιοῦτον εἶναι τὸ στερεὸν ΔΓΖΕ.*



Βάσεις *τοῦ κολούρου κώνου λέγονται οἱ δύο κύκλοι* ΔΓ *καὶ ΕΖ, ὑφ' ὧν περατοῦται.* Ἄξων *δὲ ἢ* ὕψος *αὐτοῦ λέγεται ἡ εὐθεῖα ΗΒ, ἥτις συνδέει τὰ κέντρα τῶν δύο βάσεων.*

Πλευρὰ *δὲ αὐτοῦ λέγεται τὸ μέρος* ΖΓ *τῆς πλευρᾶς* ΑΓ *τοῦ ὅλου κώνου, τὸ μεταξὺ τῶν δύο βάσεων περιεχόμενον.*

ΜΕΤΡΑ ΤΟΥ ΚΟΛΟΥΡΟΥ ΚΩΝΟΥ

1) Ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἑξῆς ἰσότητος:

$$\text{Ὄγκ. κολ. κώνου} = \frac{1}{3}\pi.\ BH \left\{ (B\Gamma)^2 + (HZ)^2 + (B\Gamma)(HZ) \right\},$$

ἐν τῇ ὁποίᾳ ΒΗ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κολούρου κώνου, ΒΓ *καὶ ΗΖ αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεών του καὶ π ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρόν της (160), ὅστις κατὰ προσέγγισιν εἶναι* $\frac{22}{7}$

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο βάσεων εἶναι ἡ μὲν ΒΓ = 5 *μέτρα, ἡ δὲ ΗΖ = 3 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος ΒΗ = 7, 5, θὰ ἔχωμεν*

$$\begin{aligned} (B\Gamma)^2 &= 5 \times 5 = 25 \\ (HZ)^2 &= 3 \times 3 = 9 \\ (B\Gamma)(ZH) &= 3 \times 5 = 15 \cdot \end{aligned}$$

ὅθεν ὄγκος κολ. κώνου $= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7,5 \times 49 = 22 \times 2,5 \times 7 = 154 \times 2,5 = 385$ *κυβικὰ μέτρα.*

2) Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο περιφερειῶν τῶν βάσεων αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του.

Ἔστω ὡς παράδειγμα κόλουρός τις κῶνος, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν πλευρὰ εἶναι 12 μέτρα, αἱ δὲ ἀκτῖνες τῶν βάσεων εἶναι ἡ μὲν μία 3 μέτρα, ἡ δὲ ἄλλη 5.

Τότε ἡ μία βάσις ἔχει περιφέρειαν $\frac{22}{7}\times 3\times 2$.

ἡ δὲ ἄλλη ἔχει περιφέρειαν $\frac{22}{7}\times 5\times 2$·

τὸ ἄθροισμα τῶν περιφερειῶν τούτων εἶναι $\frac{22}{7}(3+5)\times 2$,

ἤτοι $\frac{22}{7}\times 8\times 2$.

ἄρα ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου θὰ εἶναι

$$\frac{22}{7}\times 8\times 2\times\frac{12}{2}=\frac{22}{7}\times 8\times 12=\frac{2112}{7}=301\frac{5}{7}$$ *τετραγ. μέτρα:*

ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ

Σφαῖρα *λέγεται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ ὅλα τὰ ἄκρα του.*

Τὸ σημεῖον τοῦτο λέγεται κέντρον *σφαίρας.*

Ἀκτὶς *τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ κέντρου εἴς τι σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.*

Διάμετρος *δὲ τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ ἔχει τὰ ἄκρα της ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.*

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς σφαίρας πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι· ὁμοίως καὶ αἱ διάμετροι εἶναι ἴσαι, ὡς διπλάσιαι τῶν ἀκτίνων.

Δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν τὴν σφαῖραν γεννωμένην ὑπὸ ἡμικυκλίου στρεφομένου περὶ τὴν διάμετρόν του. Διότι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τοῦ οὕτω παραγομένου στερεοῦ, ὡς σημεῖα τῆς περιφερείας, θὰ ἀπέχωσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρον αὐτῆς.

Ἐὰν ἡ σφαῖρα τμηθῇ δι᾽ ἐπιπέδου, ἡ τομὴ θὰ εἶναι κύκλος. Ὅταν δὲ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν σφαῖραν, διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς, ὁ παραγόμενος κύκλος, οἷος εἶναι ὁ ΑΒΓ, *ἔχει κέντρον τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς καὶ λέγεται* μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας· *ὅταν δὲ τὸ τέμνον ἐπίπεδον δὲν διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὁ παραγόμενος κύκλος, ὡς ὁ* ΔΖΕ, *λέγεται* μικρὸς

κύκλος τῆς σφαίρας· *διότι ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ ΔΗ εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας* ΑΚ.

Πᾶς μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἴσα μέρη, ἅτινα λέγονται ἡμισφαίρια.

ΜΕΤΡΑ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

1) Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τεσσάρων κύκλων αὐτῆς.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἡ ἀκτὶς σφαίρας τινὸς εἶναι 3 μέτρα, ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ μεγίστου κύκλου αὐτῆς θὰ εἶναι $\frac{22}{7}\times 3\times 3$, *ἡ δὲ ἐπιφάνεια αὐτῆς θὰ εἶναι* $4\times\frac{22}{7}\times 3\times 3$ *ἤτοι* $\frac{22}{7}\times 36$ *ἤτοι 113 τετρ. μέτρα καὶ* $\frac{1}{2}$ *αὐτοῦ (κατὰ προσέγγισιν).*

2) Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνός της.

Ἔστω ὡς παράδειγμα σφαῖρά τις, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα 8 μέτρα· ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μεγίστου κύκλου αὐτῆς θὰ εἶναι $\frac{22}{7}\times 8\times 8$·

ὅθεν ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας θὰ εἶναι $4\times\frac{22}{7}\times 8\times 8$

καὶ ὁ ὄγκος αὐτῆς θὰ εἶναι $4\times\frac{22}{7}\times 8\times 8\times 8\times\frac{1}{3}$, *ἢ* $\frac{45056}{21}$

ἤτοι 2145 κυβικὰ μέτρα καὶ $\frac{11}{21}$ *αὐτοῦ* (*κατὰ προσέγγισιν*).

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τοῖχός τις ἔχει μῆκος μὲν 12 μέτρα, πάχος δὲ 0,75 τοῦ μέτρου καὶ ὕψος 3 μέτρα· πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ; (Ἀπ. 27 κ. μ.).

2) Πόσα κυβικὰ μέτρα ὕδατος χωρεῖ δεξαμενή, ἥτις ἔχει βάσιν ὀρθογώνιον μήκους 15 μέτρων καὶ πλάτους 4, τὸ δὲ βάθος αὐτῆς εἶναι $6\frac{1}{2}$ μέτρα; (Ἀπ. 390 κ. μ.).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ βάρος τοῦ ἐν τῇ δεξαμενῇ χωροῦντος ὕδατος, πρέπει νὰ εἰξεύρωμεν ὅτι μία λίτρα ὕδατος (τουτέστι μία κυβικὴ παλάμη) ζυγίζει $312\frac{1}{2}$ δράμια· ὥστε τὸ κυβικὸν μέτρον, (ὅπερ ἀποτελεῖται ἀπὸ 1000 κυβικὰς παλάμας) θὰ ζυγίζῃ δράμια

$1000 \times 312\frac{1}{2}$ καὶ τὸ ὕδωρ, ὅπερ χωρεῖ ἡ δεξαμενή, θὰ εἶναι ἑπομένως $390 \times 1000 \times 312\frac{1}{2}$ ἢ $195 \times 1000 \times 625$ δράμια, τουτέστιν ὀκάδες $\frac{195 \times 1000 \times 625}{400}$ ἤτοι $304\ 687\frac{1}{2}$.

3) Πόσοι κυβικοὶ δάκτυλοι ἀποτελοῦσιν ἓν κυβικὸν μέτρον; ('Απ. 1000000).

4) Ἐκ πόσων κυβικῶν μέτρων ἀποτελεῖται δοκός τις κυλινδρικὴ σιδηρᾶ, ἥτις ἔχει μῆκος μὲν 10 μέτρα, διάμετρον δὲ τῆς βάσεως 0,20 τοῦ μέτρου;

('Απ. $\frac{22}{7} \times 0{,}1 \times 0{,}1 \times 10$ ἤτοι $\frac{22}{70}$ ἢ $\frac{11}{35}$ τοῦ κυβικοῦ μέτρου).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ βάρος τῆς δοκοῦ ταύτης, πρέπει νὰ εἰξεύρωμεν, ὅτι ὁ σίδηρος εἶναι 78 φορὰς βαρύτερος τοῦ ὕδατος (ὅταν καὶ τὰ δύο ἔχωσι τὸν αὐτὸν ὄγκον)· ἂν ἡ δοκὸς ἦτο ἐξ ὕδατος, θὰ εἶχε βάρος (ζήτημα 2ον).

$$\frac{11}{35} \times 1000 \times 312\frac{1}{2} \text{ δράμια,}$$

ἄρα τὸ βάρος αὐτῆς θὰ εἶναι δράμια

$$7{,}\times 8\frac{11}{35} \times 1000 \times 312\frac{1}{2}, \quad \text{ἤτοι } 78 \times \frac{11}{70} \times 100 \times 625,$$

ἤτοι ὀκάδες $78 \times \frac{11}{70} \times \frac{1}{4} \times 625$, ἢ $39 \times \frac{11}{70} \times \frac{1}{2} \times 625$,

ἤτοι 1915 ὀκάδες καὶ $\frac{5}{28}$ τῆς ὀκᾶς.

5) Ὁδός τις ἔχει μῆκος 5 χιλιάδας μέτρα καὶ πλάτος 12 μέτρων, πρόκειται δὲ νὰ στρωθῇ διὰ χαλικίων εἰς ὕψος 0,30 τοῦ μέτρου· πόσα κυβικὰ μέτρα χαλικίων χρειάζονται; ('Απ. 18000).

6) Πόσον βάρος ἔχει μολυβδίνη σφαῖρα, τῆς ὁποίας ἡ περιφέρεια τοῦ μεγίστου κύκλου εἶναι $\frac{1}{2}$ μέτρον; ('Απ. ἡ διάμετρος αὐτῆς εἶναι $\frac{1}{2} \times \frac{7}{22}$ καὶ ἡ ἀκτὶς $\frac{1}{4} \times \frac{7}{22}$, ἄρα ὁ ὄγκος αὐτῆς θὰ εἶναι

$$4 \times \frac{22}{7} \times \frac{1}{4} \times \frac{7}{22} \times \frac{1}{4} \times \frac{7}{22} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{7}{22}$$

ἢ

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{7}{22} \times \frac{7}{22} \times \frac{1}{4}\cdot$$

ἂν ἡ σφαῖρα ἦτο ἐξ ὕδατος, θὰ εἶχε βάρος (ζήτημα 2ον)

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{7}{22} \times \frac{7}{22} \times \frac{1}{3} \qquad 1000 \times 312\frac{1}{2} \text{ δράμια}\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ ὁ μόλυβδος εἶναι 11,35 φορὰς βαρύτερος τοῦ ὕδατος, τὸ βάρος τῆς μολυβδίνης σφαίρας θὰ εἶναι

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{7}{22} \times \frac{7}{22} \times \frac{1}{3} \times 1000 \times \frac{625}{2} \times 11{,}35 \text{ δράμια}\cdot$$

ἢ

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{7}{22} \times \frac{7}{22} \times \frac{1}{6} \times 1000 \times 625 \times 11, \text{ δράμια}$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εὑρίσκομεν 22 ὀκάδας καὶ 237 δράμια περίπου).

7) Πόσας ὀκάδας ὕδατος χωρεῖ βαρέλιόν τι, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν μῆκος εἶναι $1\frac{1}{2}$ μέτρον, ἡ δὲ ἐσωτερικὴ διάμετρος εἶναι 0,60 εἰς τὰ ἄκρα καὶ 0,70 εἰς τὸ μέσον;

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ βαρελίου, δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν αὐτὸ διῃρημένον εἰς δύο ἴσους κολούρους κώνους (δι' ἑνὸς ἐπιπέδου καθέτου εἰς τὸ μέσον τοῦ ἄξονος τοῦ βαρελίου) καὶ τότε, κατὰ τὰ ῥηθέντα περὶ κολούρου κώνου, ὁ ὄγκος τοῦ βαρελίου θὰ εἶναι διπλάσιος τοῦ

$$\frac{1}{3}\pi.0,75\left\{(0,30)^2+(0,35)^2+(0,30)(0,35)\right\},$$

δηλαδὴ ἴσος μὲ

$$\frac{1}{3}\pi.1,5\left\{(0,30)^2+(0,35)^2+(0,30)(0,35)\right\}.$$

ἐκτελοῦντες δὲ τὰς πράξεις εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τοῦ βαρελίου ἴσον μὲ 0,5 κ. μ. ὡς ἔγγιστα, καὶ ἐπειδὴ τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου ὕδατος εἶναι δράμια $312\frac{1}{2}\times1000$, εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ βαρέλιον χωρεῖ 390 ὀκ. καὶ 250 δράμια.

8) Πόσον εἶναι τὸ βάρος μιᾶς στήλης ἐκ μαρμάρου, ἥτις ἔχει βάσιν μὲν κυκλικήν, ἧς τινος ἡ περιφέρεια εἶναι 1μ,2, ὕψος δὲ 8 μέτρα.

Ἡ ἀκ[illegible]ής βάσεως εἶναι $\frac{1,2}{2\pi}$

ὁ δὲ ὄγκος τῆς στήλης εἶναι $\frac{1,2}{2}\times\frac{1,2}{2\pi}\times 8$ ἤτοι $0,6\times\frac{0.6}{\pi}\times 8$·

ἐὰν λοιπὸν ἦτο ἐξ ὕδατος, θὰ εἶχε βάρος

$$,6\times\frac{0,6}{\pi}\times 8\times1000 \text{ χιλιόγραμμα·}$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ μάρμαρον εἶναι 2,8 βαρύτερον τοῦ ὕδατος, τὸ βάρος τῆς στήλης θὰ εἶναι

$$6\times\frac{6}{\pi}\times8\times28\cdot$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εὑρίσκομεν 2567... χιλιόγραμμα

9) Πόσον βάρος ἔχει ὁ ἀὴρ δωματίου τινὸς ἔχοντος ὕψος μὲν 4 μ,5 μῆκος δὲ 5 μέτρα καὶ πλάτος 4 μ.;

Ὁ ὄγκος τοῦ δωματίου εἶναι $4,5\times5\times4$ ἢ 90 κ. μ.

Ἐὰν λοιπὸν ἦτο ὕδωρ, θὰ εἶχε βάρος 90000 χιλιόγραμμα· καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀὴρ εἶναι 770 φορὰς ἐλαφρότερος τοῦ ὕδατος, τὸ βάρος τοῦ ἀέρος θὰ εἶναι $\frac{90000}{770}$ ἤτοι 117 χιλιογρ. περίπου.

Εὕρεσις τοῦ ὄγκου ἐκ τοῦ βάρους.

Ἐὰν εἰξεύρωμεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει κατὰ πόσον τὸ σῶμα εἶναι βαρύτερον ἢ ἐλαφρότερον τοῦ ὕδατος (ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται *εἰδικὸν βάρος* τοῦ σώματος), δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον αὐτοῦ ἐκ τοῦ βάρους του· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ βάρος (ἐκπεφρασμένον εἰς ἀριθμὸν χιλιογράμμων) διὰ τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ σώματος· τὸ πηλίκον θὰ παριστᾷ τὸν ὄγκον τοῦ σώματος εἰς κυβικὰς παλάμας ἤτοι εἰς χιλιοστὰ τοῦ κυβ. μέτρου.

Παραδείγματος χάριν ἐὰν τεμάχιόν τι μολύβδου ζυγίζῃ 58 χιλιόγραμμα, ὁ ὄγκος θὰ εἶναι $\frac{58}{11,35}$ ἢ $\frac{5800}{1135}$ κυβ. παλάμαι ἤτοι μετὰ τὰς πράξεις 5 κυβ. παλ. 110 κυβικοὶ δάκτυλοι. Διότι ὕδωρ 58 χιλιογράμμων ἔχει ὄγκον 58 κυβικῶν παλαμῶν. Ἐπειδὴ δὲ ὁ μόλυβδος εἶναι 11,35 φορὰς βαρύτερος τοῦ ὕδατος, ὁ ὄγκος αὐτοῦ (ὅταν ἔχῃ ἴσον βάρος) θὰ εἶναι 11,35 φορὰς μικρότερος ἤτοι $\frac{58}{11,35}$.

Καὶ χωρὶς νὰ γνωρίζωμεν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σώματος, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον αὐτοῦ· πρὸς τοῦτο ἐμβαπτίζομεν αὐτὸ ἐντὸς δοχείου πλήρους ὕδατος· τότε μέρος τοῦ ὕδατος ἐκχύνεται· τὸ ἐκχυνόμενον τότε ὕδωρ ζυγίζομεν καὶ ἐκφράζομεν δι' ἀριθμοῦ τινος χιλιογράμμων· ὅσα χιλιόγραμμα εὕρομεν, τόσαι κυβικαὶ παλάμαι εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ σώματος· καὶ ὅσα γραμμάρια βάρους εὕρομεν, τόσους κυβικοὺς δακτύλους ἔχει ὁ ὄγκος.

Θ. Ν. Χρόνης

Ἀριθ. Πρωτ. 6156 / Διεκπ.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 29 Ἀπριλίου 1906.

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Πρὸς τὸν κ. Ἰωάννην Χατζιδάκιν.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸν νόμον ,ΒΤΓ' τῆς 12 Ἰουλίου 1895 περὶ διδακτικῶν βιβλίων τῆς μέσης καὶ δημοτικῆς ἐκπαιδεύσεως, καὶ τὸ Βασιλικὸν Διάταγμα τῆς 10 Ὀκτωβρίου 1895 καὶ τὴν ἔκθεσιν τῆς οἰκείας ἐπιτροπείας τῶν κριτῶν τῶν διδακτικῶν βιβλίων τῶν εἰς τὰ Ἑλληνικὰ σχολεῖα εἰσακτέων, γνωρίζομεν ὑμῖν, ὅτι ἐγκρίνομεν τὴν γνώμην τῆς ἐπιτροπείας ταύτης, ὅπως τὸ ὑμέτερον σύγγραμμα Στοιχειώδης Γεωμετρία, τὸ κατὰ τὸν εἰρημένον νόμον ἐγκριθέν, εἰσαχθῇ ἐν τοῖς δημοσίοις, δημοσυντηρήτοις καὶ ἰδιωτικοῖς ἑλληνικοῖς Σχολείοις ἐπὶ πέντε σχολικὰ ἔτη, ἀπὸ τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1906 - 1911.

Ὁ Ὑπουργὸς
Α. ΣΤΕΦΑΝΟΠΟΥΛΟΣ

Στέφ. Μ. Παρίσης.

Τιμὴ λεπτὰ ἐνενήκοντα (90).