Α. Γ. ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΟΥ
ΥΦΗΓΗΤΟΥ ΕΝ ΤΩ ΕΘΝΙΚΩ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΩ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ Δ ΚΟΛΛΑΡΟΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ «ΕΣΤΙΑΣ»
1903

18465

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἐν τῇ συντάξει τοῦ μετὰ χεῖρας τούτου συγγράμματος τῆς Στοιχειώδους Ἀλγέβρας σκοπὸν προεθέμην τὴν ἐντὸς τῶν ὑπὸ τοῦ προορισμοῦ αὐτοῦ διαγραφομένων ὁρίων μετάδοσιν παντὸς ὅ,τι ἄριστον καὶ χρήσιμον προσφέρει ἡ στοιχειώδης τῶν ἀριθμῶν ἐπιστήμη ὑπό τε θεωρητικὴν καὶ πρακτικὴν ἔποψιν, ἐν σαφεῖ καὶ μεθοδικῇ ἐκθέσει, ἐν αὐστηρᾷ διατυπώσει καὶ ἐν ἀσφαλεῖ καὶ ἀκριβεῖ θεμελιώσει καὶ ἀναπτύξει. Διὰ τοῦτο δὲ ἔσχον πρὸ ὀφθαλμῶν τὰ ὅμοιον σκοπὸν διώκοντα συγγράμματα ἐν ξένῃ καὶ ἐν ἑλληνίδι γλώσσῃ γεγραμμένα, μάλιστα δὲ τὴν ὑπὸ τοῦ σεβαστοῦ μοι διδασκάλου Ι. Ν. Χατζιδάκη Στοιχειώδη Ἄλγεβραν καὶ τὰ νεώτατα δοκιμώτατα ξένα ἐγχειρίδια Στοιχειώδους Ἀλγέβρας, δρέψας ἐξ αὐτῶν ὅ,τι χρήσιμον καὶ ὠφέλιμον εὗρον· ἐν πολλοῖς δὲ καί πως ἐνεωτέρισα διά τινων προσθηκῶν περί τε τὴν διάταξιν τῆς ὕλης καὶ περὶ τὰς ἀποδείξεις, ὡς πείθεται ὁ εἰδήμων ἀναγνώστης ἐκ τῆς ἁπλῆς ἀναγνώσεως. Πολλῆς δὲ φροντίδος ἠξίωσα καὶ περὶ τῆς ἐκλογῆς ὅσον οἷόν τε πολλῶν καὶ ποικίλων προβλημάτων ἢ ζητημάτων λυθέντων ἢ πρὸς ἄσκησιν προταθέντων καὶ σποράδην ἐν τῷ κειμένῳ καταχωρισθέντων.

Πάνθ', ὧν προετάχθη ἀστερίσκος, θεωροῦνται παραλειπτέα, ἐὰν ἐλλείπῃ ὁ πρὸς διδασκαλίαν αὐτῶν χρόνος· ἐνίων δὲ φανερὰ ἡ μετάθεσις ἐν ἄλλοις κεφαλαίοις ἄνευ διαταράξεως ἢ συγχύσεως τοῦ συνόλου κατὰ τὴν κρίσιν τῶν φίλων συναδέλφων, ὧν πᾶσαν ἐπιστημονικὴν ἢ περὶ τὴν μέθοδον παρατήρησιν εὐγνωμόνως ἀποδέξομαι.

Ὑψηλὰ φρονῶν περί τε τῆς εὐμαθείας καὶ φιλομαθείας τῆς ἑλληνίδος νεότητος θαρρούντως παραδίδωμι αὐτῇ τὸ σύγγραμμα τόδε ἔχων δι' ἐλπίδος, ὅτι συμβάλλομαι διὰ τῆς αὐστηρότητος καὶ ἀκριβείας αὐτοῦ εἰς ἐπίρρωσιν καὶ ἄσκησιν τῆς διανοίας αὐτῆς.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 5 Ἰουνίου 1903

Α. Γ. ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΗΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΠΕΡΙ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Πρῶται ἔννοιαι.

1. Ποσὸν ἢ μέγεθος καλεῖται πᾶν τὸ ἐπιδεχόμενον αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν· οἷον αἱ γραμμαί, αἱ ἐπιφάνειαι, οἱ ὄγκοι, τὰ βάρη, ὁ χρόνος.

2. Τῶν ποσῶν τὰ μὲν εἶναι συνεχῆ τὰ δὲ ἀσυνεχῆ. Καὶ τὸ μὲν ἀσυνεχὲς ποσὸν εἶναι τὸ συνιστάμενον ἐκ μερῶν ἢ στοιχείων διακεκριμένων ἀλλήλων, ὧν ἕκαστον ἀποτελεῖ ὅλον τι, ὡς πλῆθος ζώων, δένδρων. Τὸ δὲ συνεχὲς ποσὸν εἶναι τὸ συνιστάμενον ἐκ μερῶν ἢ ἐκ στοιχείων συνημμένων πρὸς ἄλληλα, ὡς ὁ χρόνος, αἱ γραμμαί, αἱ ἐπιφάνειαι, οἱ ὄγκοι.

3. Ἐν τῷ ἀσυνεχεῖ ποσῷ ἕκαστον τῶν ἀποτελούντων αὐτὸ μερῶν (ὁμοίων ἢ ἀνομοίων) καλεῖται ἀκεραία μονὰς ἢ ἁπλῶς μονάς. Ἡ δὲ ἔννοια ἡ ὁρίζουσα τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων μονάδων καλεῖται ἀκέραιος ἀριθμός. Ἡ δὲ πρᾶξις, δι' ἧς ὁρίζεται ἡ ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ, καλεῖται ἀρίθμησις.

4. Ἐν τῷ συνεχεῖ ποσῷ καλεῖται ἀκεραία μονὰς ἢ ἁπλῶς μονὰς πᾶν ὁμοειδὲς ποσὸν κατὰ συνθήκην λαμβανόμενον καὶ περιεχόμενον ἐν αὐτῷ. Ἡ δὲ ἔννοια ἡ ὁρίζουσα ποσάκις ἡ μονὰς περιέχεται ἐν τῷ ποσῷ καλεῖται ἀκέραιος ἀριθμός. Ἡ δὲ πρᾶξις, δι' ἧς ὁρίζεται ἡ ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ, καλεῖται μέτρησις.

5. Οὕτως ὁ ὁρισμὸς τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀσυνεχῶν ποσ εἶναι ὅμοιος πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀσυνεχ ποσῶν. Ἡ μόνη αὐτῶν διαφορὰ εἶναι, ὅτι ἐν μὲν τῷ ἀσυνεχεῖ ποσῷ μονὰς δίδοται ὑπ' αὐτῆς τῆς φύσεως τῶν ἀποτελούντων αὐτὸ μερῶ ἐν δὲ τῷ συνεχεῖ ποσῷ ἡ μονὰς λαμβάνεται ὁμοειδὴς καὶ κατὰ συνθήκη

6. Κατ' ἀμφοτέρας ἄρα τὰς περιπτώσεις ἀριθμὸς εἶναι τὸ σύ νολον μονάδων, (ἢ καὶ αὐτὴ ἡ μονάς).

7. Παρίστανται δὲ τὸ ἓν ἢ ἡ μονὰς καὶ αἱ ἐπαναλήψεις αὐτῆς, ἤτ οἱ ἀριθμοὶ δύο, τρία,... διὰ τῶν ἀραβικῶν συμβόλων 1, 2, 3,... γενικώτερον διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου α, β, γ. . . ., χ. ψ .... Καὶ ἐὰν μὲν προσονομάζηται καὶ τὸ εἶδος τῆς μονάδος τῶν ἀριθ μῶν, καλοῦνται οὗτοι συγκεκριμένοι· ὡς 3 δένδρα, 5 ἄνθρωποι. Ἐ ἐναντίᾳ δὲ περιπτώσει οἱ ἀριθμοὶ καλοῦνται ἀφηρημένοι.

8. Ἴσοι λέγονται δύο ἀριθμοί, ἐὰν αἱ μονάδες αὐτῶν ἀντιστοιχῶσ πρὸς ἀλλήλας μία πρὸς μίαν. Ἄνισοι δὲ λέγονται δύο ἀριθμοί, ἐὰν μονά δες τινὲς τοῦ ἑτέρου ἔχωσιν ἀντιστοίχους πάσας τὰς τοῦ ἑτέρου. Ὁ ὁρισμὸς τῆς ἰσότητος δύο ἀριθμῶν ἐπάγεται τὰς ἑπομένας ἀρχικὰς ἰδιότητας.

α). Οἱ τῷ αὐτῷ ἴσοι ἀριθμοὶ καὶ ἀλλήλοις ἴσοι,

β). Ἐὰν ἴσοι (ἢ ἄνισοι) ἀριθμοὶ αὐξάνωνται κατὰ ἴσους ἀριθμοὺς οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι (ἢ ἄνισοι),

9. Τὸ σύμβολον $=$ γράφεται μεταξὺ δύο ἴσων ἀριθμῶν, ὡς $5=5$, τὸ δὲ σύμβολον $<$ μεταξὺ δύο ἀνίσων ἀριθμῶν, τοῦ ἐλάσσονος γραφομένου πρὸ τῆς κυρτῆς γωνίας, ὡς $5<7$, $6>4$.

10. Αἱ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν στοιχειώδεις πράξεις εἶναι: πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις.

Αἱ τέσσαρες πράξεις καὶ οἱ θεμελιώδεις αὐτῶν νόμοι ἢ ἰδιότητες.

11. Πρόσθεσις καλεῖται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἢ πολλῶν ἀριθμῶν (προσθετέων) εὑρίσκεται ἐξ αὐτῶν ἀριθμὸς (ἄθροισμα) περιέχων πάσας τὰς μονάδας τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ μόνας ταύτας.

Σύμβολον τῆς προσθέσεως εἶναι τὸ $+$ γραφόμενον μεταξὺ τῶν προσθετέων ἀριθμῶν, ὡς $\alpha+\beta+\gamma$.

Αἱ δὲ θεμελιώδεις ἰδιότητες τῆς προσθέσεως εἶναι αἱ ἑπόμεναι.

1). Καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ἐκτελεσθῇ ἡ πρόσθεσις πολλῶν ἀριθμῶν, πάντοτε τὸ αὐτὸ εὑρίσκεται ἄθροισμα. (Νόμος ἀντιμεταθέσεως), ὡς $\alpha+\beta+\gamma=\beta+\gamma+\alpha=\gamma+\alpha+\beta=\ldots$

2). Ἐν παντὶ ἀθροίσματι δύνανται νὰ ἀντικατασταθῶσι πολλοὶ προσθετέοι ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν· ὡς $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon= =\alpha+(\beta+\delta+\varepsilon)+\gamma$, ὅπου ἡ παρένθεσις, $(\beta+\delta+\varepsilon)$ δηλοῖ εὑρεθὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν β, δ, ε.

3). Ἐν παντὶ ἀθροίσματι δύναται οἱοσδήποτε τῶν προσθετέων νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ ἀριθμῶν ἐχόντων αὐτὸν ἄθροισμα, ὡς

$$\alpha+(\beta+\delta+\varepsilon)+\gamma=\alpha+\beta+\delta+\varepsilon+\gamma.$$

4). Εἴτε εἰς ἄθροισμα προστίθεται ἀριθμὸς εἴτε εἰς ἕνα τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος, τὸ εὑρισκόμενον ἄθροισμα εἶναι τὸ αὐτό, ὡς

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma).$$

5). Ἄθροισμα προστίθεται εἰς ἕτερον ἄθροισμα καὶ ἂν προστεθῶσιν οἱ προσθετέοι ἀμφοτέρων τῶν ἀθροισμάτων ἀλλεπαλλήλως, ὡς

$$(\alpha+\beta+\gamma)+(\delta+\varepsilon)=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon.$$

Ἡ ἀλήθεια τῶν ἰδιοτήτων τούτων φανερὰ ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς προσθέσεως.

12. Ἀφαίρεσις εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς προσθέσεως πρᾶξις. Ἐν τῇ ἀφαιρέσει δίδονται δύο ἀριθμοὶ α (μειωτέος) καὶ β (ἀφαιρετέος) καὶ εὑρίσκεται τρίτος ἀριθμὸς γ (ὑπόλοιπον ἢ διαφορά), ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν β παρέχει ἄθροισμα τὸν α, ὡς $\alpha=\beta+\gamma$ ἢ $\alpha-\beta=\gamma$, $(\alpha>\beta)$, τοῦ συμβόλου — δηλοῦντος τὴν ἀφαίρεσιν.

Θεμελιώδεις ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι αἱ ἑπόμεναι.

1) Ἐὰν προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον, ἡ διαφορὰ μένει ἀμετάβλητος, ἤτοι ἐὰν $\alpha-\beta=\gamma$, εἶναι $(\alpha+\delta)-(\beta+\delta)=\gamma$.

2) Ἀριθμὸς ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἀθροίσματος, καὶ ἂν ἀφαιρεθῇ ἀφ' ἑνὸς τῶν προσθετέων (ἂν ἀφαιρῆται), ὡς

$$(\alpha+\beta+\gamma)-\delta=\alpha+(\beta-\delta)+\gamma, \quad (\beta>\delta).$$

3) Εἴτε τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν ἀφαιρεῖται ἀμέσως ἀπὸ ἄλλου ἀριθμοῦ εἴτε ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ ἕκαστος τῶν προσθε-

τέων τοῦ ἀθροίσματος ἀλλεπαλλήλως, πάντοτε εὑρίσκειαι ἡ αὐτὴ
φορά· ὡς

$$\alpha-(\beta+\gamma+\delta)=[(\alpha-\beta)-\gamma]-\delta, \quad (\alpha>\beta+\gamma+\delta).$$

4) Διαφορὰ δύο ἀριθμῶν ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἀριθμοῦ, καὶ ἐὰν ρεθῇ ὁ μειωτέος καὶ προστεθῇ ὁ ἀφαιρετέος εἰς τὸν ἀριθμὸν τούτ $\alpha-(\beta-\gamma)=\alpha-\beta+\gamma$.

13. Πολλαπλασιασμὸς εἶναι σύντομος πρόσθεσις. Ἐν τῷ π πλασιασμῷ δίδονται τοὐλάχιστον δύο ἀριθμοὶ α (πολλαπλασιαστέος β (πολλαπλασιαστὴς) καὶ εὑρίσκεται τρίτος ἀριθμὸς γ (γινόμενον). εἶναι ἄθροισμα τόσων ἀριθμῶν ἴσων τῷ α, ὅσας ἔχει μονάδας ὁ β. Σ λον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι τὸ $\times$ ἢ τό· γραφόμενον μεταξὺ ἀριθμῶν α καὶ β (τῶν παραγόντων)· ὡς $\alpha\times\beta$ ἢ $\alpha.\beta$ ἢ ἁπλῶς $\alpha\beta$.

Θεμελιώδεις νόμοι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι

1) Τὸ γινόμενον εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως τῶν παραγόντων (μος ἀντιμεταθέσεως), π. χ, $\alpha.\beta.\gamma=\beta.\gamma.\alpha.=\gamma.\alpha.\beta=\alpha.\gamma.\beta.=$ διότι $\alpha.\beta=\beta.\alpha$.

2) Γινόμενον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, καὶ ἐὰν πολλαπλασια εἷς τῶν παραγόντων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, π χ. $(\alpha\beta).\gamma=\alpha.(\beta\gamma)$.

3) Ἄθροισμα ἀριθμῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, καὶ ἐὰν πο πλασιασθῇ ἕκαστος τῶν προσθετέων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ προ θῶσι τὰ γινόμενα, (Νόμος ἐπιμεριστικός)· ὡς. $(\alpha+\beta).\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$

Καὶ γενικώτερον :

$$(\alpha+\beta).(\gamma+\delta+\varepsilon)=\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\delta+\alpha\varepsilon+\beta\varepsilon.$$

4) Γινόμενον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ γινόμενον, καὶ ἐὰν πολλαπ σιασθῶσιν οἱ παράγοντες ἀμφοτέρων τῶν γινομένων ἀλλεπαλλήλως, $(\alpha.\beta).(\gamma.\delta.\varepsilon)=\alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon$.

Καὶ ἐν γένει πᾶσα τῆς προσθέσεως γενικὴ ἰδιοτης εἶναι προδή καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοιαύτη· ἀρκεῖ αἱ λέξεις προσθετέος, ἄθ σμα νὰ τραπῶσιν εἰς τὰς λέξεις παράγων, γινόμενον.

14. Διαίρεσις εἶναι ἡ ἀντίστροφος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρά ἢ σύντομος ἀφαίρεσις. Ἐν τῇ διαιρέσει δίδονται δύο ἀριθμοὶ α (δ ρετέος) καὶ β (διαιρέτης) καὶ εὑρίσκεται τρίτος ἀριθμὸς γ (πηλίκο ὅστις δηλοῖ, ποσάκις ὁ β περιέχεται ἐν τῷ α. $(\alpha>\beta)$. Σύμβολον διαιρέσεως εἶναι τό : γραφόμενον μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α, β. ὡς $\alpha:\beta$

$=\gamma$, ὅθεν $\alpha=\beta.\gamma$ ἢ γενικώτερον $\alpha=\beta.\gamma+\delta$, δ ὄντος τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως.

15. Θεμελιώδεις ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως εἶναι αἱ ἑπόμεναι:

1) Πολλαπλασιαζομένου διαιρετέου καὶ διαιρέτου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον μένει ἀμετάβλητον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἐὰν ὑπάρχῃ) πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, ἤτοι, ἐὰν $\alpha=\beta.\gamma+\upsilon$, ἔχομεν $\alpha.\delta=(\beta.\delta)\gamma+\upsilon.\delta$.

2) Γινόμενον διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, καὶ ἐὰν διαιρεθῇ εἷς τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου (ἐὰν διαιρῆται), ὡς $(\alpha.\beta.\gamma):\delta=\alpha.(\beta:\delta).\gamma$.

3) Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ γινομένου πολλῶν παραγόντων εἴτε ἀμέσως εἴτε καὶ δι' ἑκάστου τῶν παραγόντων ἀλληλεπαλλήλως, ὡς

$$\alpha:(\beta.\gamma.\delta)=[(\alpha:\beta):\gamma]:\delta.$$

4) Γινόμενον διαιρεῖται διὰ γινομένου, καὶ ἐὰν πᾶς παράγων τοῦ διαιρέτου διαιρέσῃ ἕνα μόνον παράγοντα τοῦ διαιρετέου (ἐὰν διαιρῆται), ὡς $(\alpha.\beta.\gamma):(\delta.\varepsilon)=(\alpha:\delta).\beta.(\gamma:\varepsilon)$.

5) Ἄθροισμα ἀριθμῶν διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, καὶ ἐὰν διαιρεθῇ ἕκαστος τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου (ἐὰν διαιρῆται) καὶ προστεθῶσι τὰ πηλίκα, ὡς $(\alpha+\beta+\gamma):\delta=(\alpha:\delta)+(\beta:\delta)+(\gamma:\delta)$.

Ἐὰν δὲ ὁ διαιρέτης ἦναι ἄθροισμα (ἢ διαφορὰ) ἀριθμῶν, εὑρίσκεται πρῶτον τὸ ἄθροισμα (ἢ ἡ διαφορὰ) καὶ εἶτα τελεῖται ἡ διαίρεσις.

ΣΗΜ. Ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν δι' ἀριθμοῦ εὑρίσκεται εὐκόλως καὶ εἶναι

$$(\alpha-\beta)\gamma=\alpha\gamma-\beta\gamma \text{ καὶ } (\alpha-\beta):\gamma=\alpha:\gamma-\beta:\gamma.$$

16. Εὐκόλως βλέπει τις ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἰρημένων, ὅτι αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων εὑρίσκονται πᾶσαι ἐκ τῆς ἀλληλουχίας τῶν πράξεων καὶ τῶν νόμων τῆς ἰσότητος, τῆς ἀντιμεταθέσεως καὶ τοῦ ἐπιμεριστικοῦ.

Περὶ κλασματικῶν ἀριθμῶν.

17 Ἐὰν ἡ ἀκεραία μονὰς 1 ἡ παριστῶσα πρᾶγμά τι διαιρεθῇ εἰς δύο, τρία, τέσσαρα,... ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων καλεῖται κλασματικὴ μονὰς ἀπαγγελλόμενον ἥμισυ ἢ ἓν δεύτερον, ἓν τρίτον, ἓν τέταρτον..... καὶ γραφόμενον $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, . . .

Κλασματικὸς ἀριθμὸς καλεῖται τὸ σύνολον κλασματικῶν μονάδων, ὡς ὁ $\frac{5}{7}$ ἀπαγγελλόμενος πέντε ἕβδομα καὶ γραφόμενος διὰ δύο ἀκεραίων τοῦ 5 καὶ τοῦ 7, ὧν ὁ μὲν 7 δηλοῖ, εἰς πόσα ἴσα μέρη διῃρέθη ἡ ἀκεραία μονὰς καὶ καλεῖται παρονομαστής, ὁ δὲ 5 δηλοῖ, πόσα τοιαῦτα μέρη λαμβάνονται καὶ καλεῖται ἀριθμητής.

Πᾶς κλασματικὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ παράγει τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ, ἤτοι πᾶς κλασματικὸς ἀριθμὸς εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ καὶ ἑπομένως διὰ τῆς παραδοχῆς τοῦ συστήματος τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἡ διαίρεσις καθίσταται πάντοτε δυνατή, τοῦ πηλίκου δυναμένου νὰ παρασταθῇ διὰ κλάσματος· οὕτω π. χ. τὸ πηλίκον τοῦ 3 διὰ 5 εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{3}{5}$· διότι $\frac{3}{5}\cdot 5=3$.

18. Δύο ἀριθμοὶ τοῦ κλασματικοῦ συστήματος λέγονται ἴσοι, ὅταν ἰσάκις πολλαπλασιαζόμενοι γίνωνται ἀκέραιοι ἴσοι· ἄνισοι δέ, ὅταν γίνωνται ἀκέραιοι ἄνισοι· καὶ τότε μείζων μὲν ὁ τὸν μείζονα ἀκέραιον παρέχων, ἐλάσσων δὲ ὁ τὸν ἐλάσσονα. Ἡ ἰσότης ἢ ἀνισότης ἄρα τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὴν ἰσότητα ἢ ἀνισότητα ἀκεραίων ἀριθμῶν. Οὕτως, οἱ μὲν ἀριθμοὶ $\frac{1}{5}+\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{39}{45}$, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 15 παρέχουσιν ἀμφότεροι τὸν ἀριθμὸν 13 καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσοι· οἱ δὲ ἀριθμοὶ $1+\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 18 παρέχουσιν ὁ μὲν τὸν 24, ὁ δὲ τὸν 27, καὶ ἑπομένως εἶναι ἄνισοι, ὁ πρῶτος ἐλάσσων τοῦ δευτέρου.

19. Διατηρουμένων τῶν νόμων τῆς ἰσότητος, τῆς ἀντιμεταθέσεως, καὶ τοῦ ἐπιμεριστικοῦ ἡ πρόσθεσις, ἀφαίρεσις καὶ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμόν, ὁρίζονται ἐν τῷ συστήματι τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ὡς καὶ ἐν τῷ συστήματι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ἐν τῇ προσθέσει καὶ ἀφαιρέσει ἀναγομένων τῶν ἀριθμῶν εἰς τὴν αὐτὴν κλασματικὴν μονάδα).

Ἀλλ' ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ κλασματικήν τινα μονάδα $\frac{1}{\nu}$ πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς διαίρεσις τοῦ ἀριθμοῦ διὰ ν, ἤτοι

$$\alpha.\frac{1}{\nu}=\frac{\alpha}{\nu}\cdot \text{ διότι } \left(\alpha.\frac{1}{\nu}\right).\nu=\alpha.$$

Καὶ γενικῶς $\frac{\alpha}{\beta}.\frac{\gamma}{\delta}=\left(\alpha.\frac{1}{\beta}\right).\left(\gamma.\frac{1}{\delta}\right)=\alpha.\gamma.\frac{1}{\beta}.\frac{1}{\delta}=\alpha\gamma.\frac{1}{\beta\delta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$.

Κατὰ ταῦτα τὸ γινόμενον εὑρίσκεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὡς ὁ πολλαπλασιαστὴς ἐκ τῆς μονάδος 1.

Ἡ δὲ διαίρεσις ἀριθμοῦ τινος διὰ κλασματικῆς τινος μονάδος $\frac{1}{\mu}$ πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ μ, ἤτοι

$\alpha:\frac{1}{\mu}=\alpha\,\mu$ διότι $(\alpha.\mu).\frac{1}{\mu}=\alpha$ καὶ γενικῶς $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=$

$$=\left(\alpha.\frac{1}{\beta}\right):\left(\gamma.\frac{1}{\delta}\right)=\left(\frac{\alpha}{\gamma}.\frac{1}{\beta}\right):\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha}{\gamma}.\left(\frac{1}{\beta}:\frac{1}{\delta}\right)=$$

$=\frac{\alpha}{\gamma}.\frac{\delta}{\beta}=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$. Κατὰ ταῦτα τὸ πηλίκον δηλοῖ, ποσάκις ἀριθμός τις ἢ μέρος αὐτοῦ περιέχεται ἐν ἑτέρῳ ἀριθμῷ καὶ καλεῖται λόγος.

Σημ. Ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{\mu}$ καλεῖται ἀντίστροφος τοῦ μ καὶ γενικῶς ὁ $\frac{\beta}{\alpha}$ ἀντίστροφος τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$. Κατὰ δὲ τὰ ἀνωτέρω ἡ διαίρεσις δι' ἀριθμοῦ τρέπεται εἰς πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

20. Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι ἐν τῷ κλασματικῷ συστήματι, διατηρουμένων τῶν νόμων τῆς ἰσότητος καὶ τῶν τεσσάρων πράξεων, αἱ δύο πράξεις πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις τρέπονται εἰς ἀλλήλας. Κατέστη δὲ ἐν τῷ συστήματι τούτῳ ἡ διαίρεσις πάντοτε δυνατή

Παρατηρητέον δέ, ὅτι τὸ εἶδος ἢ ἡ φύσις τῶν ποσῶν εἶναι πολλάκις τοιαύτη, ὥστε μόνον τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν δύναται νὰ ἐφαρμόζηται· ὡς ὅταν π. χ. ζητῆται νὰ εὑρεθῇ, πόσοι ἦσαν οἱ ἄνθρωποι οἱ διανεμηθέντες 500 δρ. καὶ λαβόντες ἕκαστος 30 δρ. Ἡ ἀπόκρισις εἶναι $16+\frac{2}{3}$ ἄνθρωποι, ὅπερ ἀδύνατον. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ γενικὴ ἀριθμητικὴ ἀσχολεῖται ἐν γένει περὶ ἀφῃρημένους ἀριθμούς, ἡ παραδοχὴ τοῦ συστήματος τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, ἐν ᾧ ἰσχύουσιν οἱ νόμοι τῶν τεσσάρων πράξεων καὶ τῆς ἰσότητος, εἶναι ἀναγκαία χάριν τῆς γενικότητος.

Περὶ τῶν συμβόλων 0 καὶ ∞.

2. Διὰ τοῦ συμβόλου 0 (μηδὲν) παρίσταται ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ ἡ διαφορὰ δύο ἴσων ἀριθμῶν ἢ ἡ ἀπουσία ἀριθμοῦ

'Εφαρμόζοντες δὲ ἐπὶ τοῦ 0 τοὺς ὁρισμοὺς καὶ τὰς ἰδιότητας τῶν τεσσάρων πράξεων εὑρίσκομεν εὐκόλως, ὅτι τὸ σύμβολον τοῦτο (ὡς ἀριθμὸς λαμβανόμενον) ἐὰν μὲν προστεθῇ εἰς ἀριθμὸν ἢ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀριθμοῦ, οὐδαμῶς μεταβάλλει αὐτόν· ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμὸν ἢ διαιρεθῇ δι' ἀριθμοῦ παρέχει ἐξαγόμενον πάλιν 0. Οἷον

$$\alpha+0=\alpha,\quad \alpha-0=\alpha,\quad 0.\alpha=\alpha.0=0, \frac{0}{\alpha}=0.$$

Ἡ δὲ διὰ τοῦ 0 διαίρεσις ἀδύνατος. Διότι πᾶς ἀριθμὸς ἐπὶ 0 πολλαπλασιαζόμενος παρέχει γινόμενον 0. Οὐχ ἧττον τὸ πηλίκον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως παρίσταται κατὰ συνθήκην διὰ τοῦ συμβόλου ∞· ἤτοι $\frac{\alpha}{0}=\infty$. Εἶναι δὲ τὸ ∞ σύμβολον τοῦ ἀπείρου.

22. Πρὸς ἀκριβεστέραν κατονόησιν τῆς παραδοχῆς τοῦ συμβόλου ∞ θεωρήσωμεν τὴν διαίρεσιν $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ νοήσωμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς β ἐλαττοῦται ἀπαύστως γενόμενος ἐλάσσων πάσης κλασματικῆς μονάδος· φανερόν, ὅτι τὸ πηλίκον τοῦτο αὐξάνεται τότε ἀπαύστως γιγνόμενον μεῖζον παντὸς ἀριθμοῦ. Συμβολικῶς δὲ καὶ κατὰ συνθήκην γράφεται

$$\frac{\alpha}{\beta}=\infty \text{ διὰ } \beta=0, \text{ καὶ } \frac{\alpha}{\beta}=0 \text{ διὰ } \beta=\infty.$$

23. Τὴν ἔννοιαν ἢ λέξιν ἄπειρον μεταχειριζόμεθα μᾶλλον πρὸς δήλωσιν τῆς ἀπουσίας παντὸς πέρατος· οὕτως ὁ χρόνος καὶ ὁ χῶρος εἶναι ποσὰ ἄπειρα. Ἡ δὲ ἔννοια τοῦ ἀπείρου ἀποκλείει προφανῶς τὴν τῆς συγκρίσεως τοῦ λόγου μεγεθῶν. (Ἐν τούτοις πρὸς συντομίαν ἐκφράσεως γίνεται πολλάκις λόγος περὶ ἀπείρων ποσοτήτων καὶ ἀπαιτεῖται μεγίστη προσοχὴ πρὸς ἀποφυγὴν πάσης παρανοήσεως ἢ συγχύσεως τοῦ σχετικῶς ἀπείρως μεγάλου πρὸς τὸ ἀπόλυτον ἢ μεταφυσικόν, οὕτως εἰπεῖν, ἄπειρον).

Σημ. Τὸ Σύμβολον $\frac{0}{0}$ σημαίνει τι ἐντελῶς ἀόριστον, ὡς καὶ τὸ $\frac{\infty}{\infty}$

Περὶ θετικῶν καὶ ἀντιθέτων ἢ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.

24. Ὅπως θεωροῦμεν καὶ διακρίνομεν ἀντιθέτους ἐννοίας, οἷον ἄνω καὶ κάτω, δεξιὰ καὶ ἀριστερά, οὕτως ἐν τῇ Μαθηματικῇ δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν καὶ ἀντιθέτους ἢ ἀρνητικοὺς ἀριθμούς. Κέρδος καὶ

μία, διεύθυνσις δεξιὰ καὶ ἀριστερά, παρελθὸν καὶ μέλλον καὶ τὰ τοιαῦτα ναι ἔννοιαι ἢ ποσὰ ἀντίθετα. Τοὺς ἐκ τῆς ἀριθμήσεως ἢ μετρήσεως ντιθέτων ποσῶν προκύπτοντας ἀριθμοὺς καλοῦμεν κατὰ συνθήκην ἀντιέτους ἢ ἀρνητικοὺς ἀριθμούς, τοὺς δὲ λοιποὺς καλοῦμεν θετικοὺς ἀριμούς. Διακρίνομεν δὲ τοὺς μὲν θετικοὺς ἀριθμοὺς προτάσσοντες αὐτῶν ὸ σημεῖον $+$, τοὺς δὲ ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς προτάσσοντες αὐτῶν τὸ ημεῖον —. οἷον $+\alpha$ ἢ ἁπλῶς α, $-\beta$, ἢ β' (δι' ἑνὸς τόνου).

25. Ἐξ αὐτοῦ δὲ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἕπεται διατηρουμένων τῶν νόμων τῶν τεσσάρων πράξεων καὶ τῆς ἰσότητος,

$$0-\alpha=-\alpha=\alpha',\quad 1+1'=1-1=0 \text{ καὶ } \frac{1'}{\nu}+\frac{1}{\nu}=0\cdot$$

αὶ γενικῶς (τῶν ἀριθμῶν νοουμένων ἐν τῷ κλασματικῷ συστήματι)

$$\alpha+\alpha'=\alpha-\alpha=0$$

αὶ

$$\alpha+\beta'=\gamma, \text{ (ἐὰν } \alpha>\beta)$$

$$\alpha+\beta'=-\gamma=\gamma'. \text{ (ἐὰν } \alpha<\beta).$$

$$\alpha-\beta'=\alpha+\beta.$$

Τουτέστιν ἐν τῷ συστήματι τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἡ μὲν πρόσθεσις ἑτεροειδῶν ἀριθμῶν, θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν, ἀνάγεται εἰς ἀφαίρεσιν, ἡ δὲ ἀφαίρεσις ἑτεροειδῶν ἀριθμῶν εἰς πρόσθεσιν. Καθίσταται δὲ διὰ τῆς παραδοχῆς τοῦ συστήματος τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἡ ἀφαίρεσις πάντοτε δυνατή.

Παραδείγματα.

$$7+3'=7-3=4$$
$$8-2=8+2'=6$$
$$5-3'=5+3=8$$
$$10'-5=10'+5'=15'$$
$$12'-7'=12'+7=5'$$
$$2-20=2+20'=18'$$
$$1-10'=1+10=11$$
$$0-100=100'$$
$$0-60'=60$$

26. Ἐπειδὴ δὲ $1+1'=0,$

ἔχομεν $\alpha(1+1')=\alpha\,1+\alpha.1'=\alpha+\alpha.1'=0.$

ὅθεν $\alpha.1'=\alpha'.$

ἐπομένως καὶ $1'.1'=1.$

Τουτέστι πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς α′ εἶναι γινόμενον τοῦ ἀντιθέτου αὐτῷ θετικοῦ ἀριθμοῦ α ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα 1′, ἡ δὲ ἀρνητικὴ μανὰς 1′ πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ ἑαυτὴν παρέχει γινόμενον τὴν θετικὴν μονάδα 1.

Ἐντεῦθεν δ' ἕπεται, ὅτι διατηρουμένων τῶν νόμων τῆς ἰσότητος καὶ τῶν τεσσάρων πράξεων ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ ἀντίστροφος τούτῳ πρᾶξις διαίρεσις δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἐκτελεῖται, ὡς εἰ ἦσαν ἀμφότεροι θετικοὶ ἀριθμοί. Τὸ δὲ γινόμενον ἢ πηλίκον εἶναι θετικὸν μέν, ἐὰν οἱ δύο ἀριθμοὶ ἦναι ὁμοειδεῖς, ἀρνητικὸν δέ, ἐὰν ἑτεροειδεῖς· οἷον

$$\alpha'.\beta'=\alpha.\beta.1'.1'=\alpha.\beta.1=\alpha.\beta,\qquad \frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha.1'}{\beta.1'}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

$$\alpha.\beta'=(\alpha.\beta).1',\quad \frac{\alpha'}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}1',\ \frac{\alpha}{\beta'}=\frac{\alpha}{\beta}.\frac{1}{1'}=\frac{\alpha}{\beta}.1'.$$

Τοῦτο δ' ἀποτελεῖ τὸν καλούμενον κανόνα τῶν σημείων, καθ' ὃν

$(+).(+)=+$		$(+):(+)=+$
$(+).(-)=-$		$(+):(-)=-$
$(-).(+)=-$	καὶ	$(-):(+)=-$
$(-).(-)=+$		$(-):(-)=+$

Παραδείγματα.

$4.5=20$

$5.3'=5.3.1'=15.1'=15'=-15$

$7'.2=7.1'.2=14.1'=14'=-14$

$3'.7'=3.1'.7.1'=21.1'.1'=21.1=21$

$10:2=5$

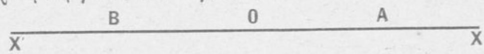
$15:3'=5'$ διότι $3'.5'=15$

$6':2=3'$ διότι $2.3'=6'=-6$

$16':2'=8.$ διότι $2'.8=16'=-16$

27. Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν ἀντιθέτων ἢ ἀρνητικῶν

ἀριθμῶν. Ἔστω ἐπὶ εὐθείας ἀπείρου XX′ σημεῖόν τι O λαμβανόμενον ὡς ἀρχὴ μετρήσεως ἐπὶ τῆς XX′.



Τὰ μὲν μήκη τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τῶν ἐχόντων φορὰν δεξιὰν παρίστανται κατὰ συνθήκην ὑπὸ θετικῶν ἀριθμῶν, τὰ δὲ τῶν ἐχόντων φορὰν ἀριστερὰν ὑπὸ ἀντιθέτων ἢ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν· οἷον τὸ μῆκος τοῦ τμήματος OA παρίσταται ὑπὸ θετικοῦ τινος ἀριθμοῦ α, τὸ δὲ μῆκος τοῦ τμήματος OB ὑπ᾽ ἀρνητικοῦ τινος ἀριθμοῦ —β. τὸ δὲ σημεῖον O παρίσταται ὑπὸ τοῦ μηδενὸς 0.

28. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἰρημένων ἕπεται, ὅτι ἐν τῷ συστήματι τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, διατηρουμένων τῶν νόμων τῶν τεσσάρων πράξεων καὶ τῆς ἰσότητος, αἱ δύο πράξεις πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις τρέπονται εἰς ἀλλήλας. Κατέστη δὲ ἐν τῷ συστήματι τούτῳ ἡ ἀφαίρεσις πάντοτε δυνατή.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι τὸ εἶδος ἢ ἡ φύσις τῶν ποσῶν εἶναι πολλάκις τοιαύτη, ὥστε μόνον τὸ σύστημα τῶν θετικῶν ἀριθμῶν δύναται νὰ ἐφαρμόζηται ἐπ᾽ αὐτῶν. Δηλαδὴ ὑπάρχουσι καὶ ποσὰ ἀνεπίδεκτα ἀντιθέσεως, ὡς π. χ. ἡ ἡλικία ἀνθρώπου, αἱ ὧραι καθ᾽ ἃς ἐκτελεσθήσεται ἔργον τι, καὶ τὰ τοιαῦτα. Ἀλλ᾽ ἡ ὕπαρξις τοιούτων ποσῶν οὐδαμῶς κωλύει χάριν τῆς γενικότητος τὴν παραδοχὴν τοῦ γενικωτέρου συστήματος τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, ἐν ᾧ ἄλλως ἰσχύουσιν οἱ νόμοι τῶν τεσσάρων πράξεων καὶ τῆς ἰσότητος, καὶ ἐν ᾧ πᾶν ἀριθμητικὸν ζήτημα λύεται τοὐλάχιστον δι᾽ ἀριθμῶν, θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν.

Περὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

29. Ἡ ἀρίθμησις ἢ μέτρησις συγκεκριμένων ποσῶν ἢ μεγεθῶν ἄγει, ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν, εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν (θετικῶν ἢ ἀρνητικῶν) ἀριθμῶν, ὧν τὰς ἰδιότητας δυνάμεθα νὰ σπουδάσωμεν καὶ ἀνεξαρτήτως τῶν ποσῶν ἢ μεγεθῶν, ἅτινα ἀριθμοῦσιν ἢ μετροῦσιν οὗτοι. Οἱ ἀκέραιοι καὶ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ (θετικοὶ ἢ ἀρνητικοὶ) καλοῦνται συλλήβδην ῥητοὶ ἢ σύμμετροι. Πρόδηλον δέ, ὅτι μεταξὺ δύο ἀριθμῶν συμμέτρων, ὅσον μικρὰ καὶ ἂν ὑποτεθῇ ἡ διαφορὰ αὐτῶν, δυνάμεθα πάντοτε νὰ παρεμβάλωμεν πλῆθος ἄπειρον ἀριθμῶν ὡσαύτως συμμέτρων. Διότι δοθέντος ἀριθμοῦ τινος ε, ὅσον ἂν θέλωμεν μικροῦ, δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν σειρὰν ἄπειρον ἀριθμῶν συμμέτρων τοιούτων, ὥστε

ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν νὰ γίνηται καὶ μένῃ ἐλάσσων τοῦ ε. οἷον μεταξὺ τοῦ $\frac{1}{1000}$ καὶ $\frac{1}{100}$ ὑπάρχουσιν ἀριθμοὶ μείζονες τοῦ $\frac{1}{1000}$ καὶ ἐλάσσονες τοῦ $\frac{1}{100}$.

30. Ἀλλὰ τὸ σύστημα τῶν συμμέτρων ἀριθμῶν, ἤτοι τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν, περὶ ὧν μέχρι τοῦδε διελάβομεν, δὲν ἐπαρκεῖ πρὸς λύσιν προβλημάτων, οἷα τὰ ἑπόμενα. Εὑρεῖν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 2, ἤτοι εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας παρέχει γινόμενον τὸν ἀριθμὸν 2· ἢ Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις τρὶς λαφθεὶς ὡς παράγων δίδει τὸν ἀριθμὸν 5, ἤτοι εὑρεῖν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ 5.

31. Ἤδη ἡ Ἀριθμητικὴ διδάσκει, ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα, μόνον κατὰ προσέγγισιν δύναται νὰ εὑρίσκηται ἐν τῷ συστήματι τῶν συμμέτρων θετικῶν ἀριθμῶν· οἷον ἡ $\sqrt{2}$ κατὰ προσέγγισιν 0,0001 εἶναι 1,4142. Ὁμοίως $\sqrt[3]{2}$ κατὰ προσέγγισιν, 0,001 εἶναι 1,269, κλ.

Καὶ ἡ Γεωμετρία διδάσκει, ὅτι ἡ σύγκρισις ἢ μέτρησις δύο εὐθειῶν ἐντελῶς ὡρισμένων, ἐπὶ παραδείγματι ἡ διαγώνιος τετραγώνου καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ, ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν ἀριθμοῦ, ὅστις δὶς ληφθεὶς ὡς παράγων δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμὸν 2, κ. λ.

32. Πάντα ταῦτα ἄγουσιν εἰς τὴν ἐπέκτασιν ἢ γενίκευσιν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τῆς προσαρτήσεως νέου συστήματος ἀριθμῶν.

33. Ἐν τῷ συστήματι τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἴδομεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς ἦτο ἄθροισμα μονάδων πεπερασμένον. Ἀλλά, διατηρουμένων τῶν νόμων τῆς ἰσότητος καὶ τῶν τεσσάρων πράξεων δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν καὶ ἀριθμοὺς ἀποτελουμένους ἐξ ἀπείρων τὸ πλῆθος κλασματικῶν (δεκαδικῶν) μονάδων. Εἰς δὲ τὴν παραδοχὴν ταύτην ἄγει ἡμᾶς καὶ ἡ παρατήρησις, ὅτι καὶ ἡ μονὰς καὶ πᾶς ἀριθμός, ὡς ἡ Ἀριθμητικὴ διδάσκει, δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἀποτελούμενοι ἐξ ἀπείρων τὸ πλῆθος κλασματικῶν (δεκαδικῶν) μονάδων

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς $\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+\ldots=0{,}9999\ldots$ τείνει ν' ἀποτελέσῃ τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1. Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς

$\frac{27}{100}+\frac{27}{10000}+\ldots$ τείνει ν' ἀποτελέσῃ τὸν ἀριθμὸν $\frac{27}{99}$· ὁ δὲ ἀριθμὸς 3,725999... τείνει ν' ἀποτελέσῃ τὸν ἀριθμὸν 3,726, κ.λ.

34 Πᾶς ἄρα σύμμετρος ἀριθμὸς δύναται ν' ἀποτελεσθῇ ὑπὸ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἔχοντος ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία περιοδικά. Οἱ δὲ ἀριθμοὶ οἱ δυνάμενοι ν' ἀποτελεσθῶσιν ὑπὸ δεκαδικῶν ἀριθμῶν ἐχόντων ἄπειρα οὐχὶ περιοδικὰ ψηφία καλοῦνται ἄρρητοι ἢ ἄλογοι ἢ ἀσύμμετροι ἀριθμοί. Τοιοῦτοι ἀριθμοὶ εἶναι π.χ. αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι πάντων τῶν ἀριθμῶν τῶν μὴ τελείων τετραγώνων αἱ δυνάμεναι νὰ παρασταθῶσιν ὑπὸ δεκαδικῶν ἀριθμῶν ἐχόντων ἄπειρα ψηφία οὐχὶ περιοδικά.

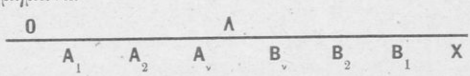
Ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ εἶναι λόγου χάριν καὶ τὰ ἑξῆς πλήθη δεκαδικῶν μονάδων.

0,10100 1000 100001....
8,72702 7002 70002....
1,11 12 13 14 15 16 17 18....

35 Πρόδηλον δέ, ὅτι πᾶς ἀσύμμετρος ἀριθμὸς περιέχεται πάντοτε μεταξὺ δύο συμμέτρων ἀριθμῶν ὧν ἡ διαφορὰ ἀπὸ τοῦ ἀσυμμέτρου δύναται νὰ γίνηται ὁσονδήποτε μικρά· οἷον ἡ $\sqrt{3}$ περιέχεται μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 2, ἤτοι εἶναι $1<\sqrt{3}<2$, κλ.

36. Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Ὅτι δὲ πᾶς ἀσύμμετρος ἀριθμὸς δύναται νὰ παραχθῇ, ὡς καὶ πᾶς σύμμετρος ἀριθμός, ὑπὸ τῆς μετρήσεως συγκεκριμένων μεγεθῶν, πείθεταί τις εὐκόλως καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου ἁπλοῦ παραδείγματος.

Ἐπὶ εὐθείας ΟΧ ἀπὸ τοῦ σημείου Ο κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΟΧ νοήσωμεν τὰ τμήματα.



OA_1, OA_2,... OA_ν,... OB_1, OB_2,...., OB_ν,... μεμετρημένα ἀμοιβαίως ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν α_1, α_2,.. α_ν,... β_1, β_2,...., β_ν,.... Φανερόν, ὅτι τοῦ ν αὐξανομένου ἐπ' ἄπειρον τὸ μὲν σημεῖον A_ν ἀπομακρύνεται ἀπαύστως τοῦ σημείου Ο, τὸ δὲ σημεῖον B_ν πλησιάζει αὐτῷ ἀπαύστως κατὰ μήκη, ὅσον ἂν θέλωμεν μικρά, ἡ δὲ ἀπόστασις $A_\nu B_\nu$, ἤτοι ἡ διαφορὰ $\beta_\nu-\alpha_\nu$ τείνει νὰ γείνῃ καὶ μένῃ ἐλάσσων παντὸς τοῦ δοθέντος μήκους. Ὑπάρχει ἄρα ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΧ ἓν σημεῖον καὶ ἓν μόνον μεταξὺ πάντοτε τοῦ A_ν καὶ B_ν περιεχόμενον ἢ ἓν καὶ ἓν μόνον τμῆμ ΟΛ μεταξὺ πάντοτε τῶν τμημάτων OA_ν καὶ OB_ν περιεχόμενον, τοῦ αὐξανομένου ὑπὲρ πάντα ἀριθμόν. Τὸ μῆκος δὲ τοῦ τμήματος τούτ ΟΛ παρίσταται τότε ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ λ.

Καὶ ἀντιστρόφως· πᾶν μέγεθος δύναται νὰ μετρηθῇ καὶ παρασταθ ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος λ ὁριζομένου ὑπὸ δύο σειρῶν συμμέτρων ἀρι μῶν. Οὕτω, τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου λαμβανομένης ὡς μονάδ μήκους, τὰ μήκη τὰ παριστάμενα ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν τῶν δύο σειρῶ

(α) 1, 1,4, 1.41. 1,414, 1,4142,......

(β) 2, 1,5. 1.42, 1,415, 1,4143,......

τείνουσι νὰ διαφέρωσι τῆς διαγωνίου τοῦ τετραγώνου διαφοράν, ὅσον θέλωμεν μικράν.

37. Ἐὰν ἀριθμοῦ τινος ἀσυμμέτρου ληφθῶσι μονάδες τινὲς ἐν πεπ ρασμένῳ πλήθει, ὁ οὕτως ἀποτελούμενος σύμμετρος ἀριθμὸς καλεῖτ μέρος τοῦ θεωρουμένου ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι, ὁ α ἦναι μέρος τοῦ β καὶ ὁ β μέρος τοῦ γ, καὶ ὁ α εἶναι μέρος τοῦ γ

38. Δύο ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι λ καὶ λ′ ὁριζόμενοι ἕκαστος ὡς ἀν τέρω ὑπὸ δύο σειρῶν:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_\nu,\ \ldots\quad \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_\nu\ldots$$
$$\alpha'_1,\ \alpha'_2,\ \ldots,\ \alpha'_\mu\ \ldots\quad \beta'_1,\ \beta'_2\ \ldots\ \beta'_\mu,\ldots$$

καλοῦνται ἴσοι, ἤτοι λ=λ′, ἐάν, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ν καὶ τοῦ ἔχωμεν πάντοτε:

$$\alpha_\nu < \beta'_\mu, \quad \alpha'_\mu < \beta_\nu$$

ὅπερ ταυτόν, ὅταν πᾶν μέρος τοῦ λ ἦναι μέρος καὶ τοῦ λ′, καὶ τἀνάπ λιν· τότε δὲ λ=λ′.

39. Ἐὰν δὲ μέρος τι τοῦ λ ἦναι μεῖζον παντὸς μέρους τοῦ λ′, ὁ καλεῖται μείζων τοῦ λ′, ἤτοι λ>λ′.

40. Ὁ ὁρισμὸς καὶ αἱ ἰδιότητες τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, δεικνύουσ ὅτι οἱ θεμελιώδεις νόμοι τῆς ἰσότητος καὶ τῶν τεσσάρων πράξεων ἐπὶ τ θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν, ἤτοι τῶν συμμέτρων ἀριθμῶν, μένουσιν οἱ αὐτ καὶ ἐν τῷ συστήματι τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Διότι, ὡς ὡρίσθησαν, ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ οὐδὲν ἄλλο εἶναι ἢ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ κατ προσέγγισιν.

Ἐκ τῶν δύο σειρῶν συμμέτρων ἀριθμῶν, ὑφ' ὧν ὁρίζεται πᾶς ἀσύμμ τρος ἀριθμός, ἡ μὲν παρέχει αὐτὸν κατ' ἔλλειψιν, ὅσον ἂν θέλωμεν μικρὰν, ἡ δὲ καθ' ὑπεροχήν, ὁμοίως ὅσον ἂν θέλωμεν μικράν. Κατὰ ταῦτα αἱ τέσσαρες πράξεις ἐκτελοῦνται, ὡς ἕπεται (τῶν ἀριθμῶν ὑποτιθεμένων ὁμοειδῶν ἢ ἑτεροειδῶν).

41. Πρόσθεσις. Ἔστωσαν πρὸς πρόσθεσιν οἱ δύο ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ λ καὶ λ'. Λαμβανομένων τῶν ἀριθμῶν τούτων κατ' ἔλλειψιν καὶ εἶτα καθ' ὑπεροχήν, εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ἄθροισμα ἔλασσον τοῦ δευτέρου. Ἀλλ' ἡ διαφορὰ τῶν δύο τούτων ἀθροισμάτων δύναται νὰ γείνῃ καὶ μείνῃ, ὅσον ἂν θέλωμεν μικρά. Τὰ δύο ἄρα ταῦτα ἀθροίσματα περιέχουσιν ἀριθμόν τινα ἐντελῶς ὡρισμένον, ὃν ὁρίζουσι μετὰ μεγίστης προσεγγίσεως. Ὁ ἀριθμὸς δὲ οὗτος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν λ καὶ λ'.

42. Ἀφαίρεσις. Λαμβανομένου τοῦ μειωτέου κατ' ἔλλειψιν καὶ τοῦ ἀφαιρετέου καθ' ὑπεροχήν, ἢ τοῦ μειωτέου καθ' ὑπεροχὴν καὶ τοῦ ἀφαιρετέου κατ' ἔλλειψιν, ἡ πρώτη διαφορὰ εὑρίσκεται ἐλάσσων τῆς δευτέρας. Αἱ δύο ἄρα αὗται διαφοραὶ περιέχουσιν ἀριθμόν τινα ἐντελῶς ὡρισμένον, ὃν ὁρίζουσι μετὰ μεγιστης προσεγγίσεως. Ὁ δὲ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο δοθέντων ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

43. Πολλαπλασιασμός. Δοθέντων δύο ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν καὶ λαμβανομένων ἀμφοτέρων κατ' ἔλλειψιν, εἶτα δὲ καθ' ὑπεροχήν, φανερόν, ὅτι τὸ πρῶτον γινόμενον ἔλασσον τοῦ δευτέρου. Ἀλλ' ἡ διαφορὰ τῶν δύο τούτων γινομένων δύναται νὰ γείνῃ καὶ μείνῃ, ὅσον ἂν θέλωμεν μικρά. Μεταξὺ δὲ τῶν γινομένων τούτων περιέχεται ἀριθμός τις ἐντελῶς ὡρισμένος, ὃν ὁρίζουσι μετὰ μεγίστης προσεγγίσεως. Ὁ ἀριθμὸς ἄρα οὗτος εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

44. Διαίρεσις. Τοῦ μὲν διαιρετέου λαμβανομένου κατ' ἔλλειψιν, τοῦ δὲ διαιρέτου καθ' ὑπεροχὴν, ἢ τοῦ μὲν διαιρετέου καθ' ὑπεροχὴν τοῦ δὲ διαιρέτου κατ' ἔλλειψιν, τὸ πρῶτον πηλίκον εὑρίσκεται ἔλασσον τοῦ δευτέρου. Τὰ δύο δὲ ταῦτα πηλίκα δύνανται νὰ διαφέρωσι διαφοράν, ὅσον ἂν θέλωμεν μικράν· περιέχουσιν ἄρα ἀριθμόν τινα ἐντελῶς ὡρισμένον, ὃν ὁρίζουσι μετὰ μεγίστης προσεγγίσεως. Ὁ δὲ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τὸ πηλίκον αὐτῶν.

45. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἰρημένων ἕπεται, ὅτι διὰ τῆς παραδοχῆς τοῦ συστήματος τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, ἐν ᾧ πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι τετράγωνον, κύβος καὶ γενικῶς μυοστὴ δύναμις ἄλλου καὶ ἐν ᾧ ἀποδεικνύεται, ὅτι πᾶσα εὐθεῖα γραμμὴ μετρεῖται καὶ παρίσταται ὑπὸ ἀριθ-

μοῦ (συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου), αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος κ τῶν τεσσάρων πράξεων διατηροῦνται ἀμετάβλητοι.

Περὶ φανταστικῶν ἢ μιγάδων ἀριθμῶν.

46. Τὸ πρόβλημα: εὑρεῖν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῆς ἀρν τικῆς μονάδος —1 ἢ ἀρνητικοῦ τινος ἀριθμοῦ —α, ἢ τἀνάπ λιν εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις δὶς ληφθεὶς ὡς παράγων παρέχ γινόμενον τὴν ἀρνητικὴν μονάδα —1, ἢ ἀρνητικόν τινα ἀρ θμὸν —α, ἀδύνατον νὰ λυθῇ ἐν τῷ συστήματι τῶν ἀριθμῶν τῷ ἐν τ προηγουμένοις ἐκτεθέντι. Ἀνάγκη ἄρα νέας γενικεύσεως ἢ ἐπεκτάσεως τ ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ, τῶν θεμελιωδῶν νόμων τῆς ἰσότητος καὶ τ τεσσάρων πράξεων διατηρουμένων ἀμεταβλήτων.

47. Τὸν ἀριθμὸν τὸν δὶς ληφθέντα ὡς παράγοντα καὶ παρέχοντα γ νόμενον τὴν ἀρνητικὴν μονάδα —1 γράφομεν διὰ τοῦ συμβόλου i, (ἤτ $i^2=-1$, ἢ $i=\pm\sqrt{-1}$) δεχόμενοι αὐτὸν ὡς νέαν μονάδα, ἣν καλοῦμ φανταστικὴν μονάδα, ἐν ἀντιδιαστολῇ πρὸς τὴν πραγματική μονάδα ± 1. Φανταστικὸς ἀριθμὸς ἄρα καλεῖται τὸ πλῆθος ἢ ἐπανάληψις θετικῶν ἢ ἀρνητικῶν φανταστικῶν μονάδων, ἐν ἀντιδιαστο πρὸς τοὺς πραγματικούς, θετικοὺς ἢ ἀρνητικοὺς ἀριθμούς. Οἷον 5i, —7

48. Μιγὰς δὲ ἀριθμὸς καλεῖται ὁ συγκείμενος ἐκ πολλαπλασίω ἢ πολλοστῶν καὶ τῆς πραγματικῆς ± 1 καὶ τῆς φανταστικῆς μονά δος $\pm i$· οἷον

$$3+\frac{5}{7}-8+6i-\frac{2i}{3}-10i$$

Φανερόν, ὅτι πᾶς μιγὰς ἀριθμὸς εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha+\beta i$, τοῦ α κ τοῦ β ὄντων πραγματικῶν ἀριθμῶν. Οἷον $2+3i$, $5-7i$, $-2+8i$, 1+

49. Ἴσοι λέγονται δύο μιγάδες ἀριθμοὶ $\alpha+\beta i$ καὶ $\gamma+\delta i$, ἐὰν κ τὸ πραγματικὸν καὶ τὸ φανταστικὸν αὐτῶν μέρος ἦναι χωρὶς ἴσα· ἤτ ἐὰν $\alpha=\gamma$ καὶ $\beta i=\delta i$ ἢ $\beta=\delta$

50. Συζυγεῖς δὲ καλοῦνται δύο μιγάδες ἀριθμοί, ἐὰν διαφέρωσι μ νον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ φανταστικοῦ αὐτῶν μέρους· οἷον οἱ ἀριθμοὶ

$$\alpha+\beta i \text{ καὶ } \alpha-\beta i$$

51. Πρόσθεσις. Τὸ ἄθροισμα μιγάδων ἀριθμῶν εὑρίσκεται ὡς κ τὸ ἄθροισμα πραγματικῶν ἀριθμῶν προστιθεμένων τῶν πραγματικῶν μ ρῶν καὶ τῶν φανταστικῶν μερῶν χωρίς· οἷον

$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i\cdot$$

52. Ἀφαίρεσις. Ἡ ἀφαίρεσις μιγάδος ἀπὸ μιγάδος ἀριθμοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τοῦ ἀντιθέτου ἀφαιρετέου εἰς τὸν μειωτέον· οἷον

$$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=\alpha+\beta i-\gamma-\delta i=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i.$$

53. Πολλαπλασιασμός. Ἔστωσαν πρὸς πολλαπλασιασμὸν οἱ δύο μιγάδες ἀριθμοὶ $\alpha+\beta i$ καὶ $\gamma+\delta i$. Κατὰ τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον ἔχομεν

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\beta\gamma i+\alpha\delta i+\beta\delta ii=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i\cdot$$

διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς μονάδος i εἶναι $-1=i\,i$.

Τὸ δὲ γινόμενον δύο συζυγῶν ἀριθμῶν εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός, ἤτοι:

$$(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha\alpha+\beta\beta.$$

Ἐὰν δὲ συμβῇ, ὥστε $\alpha.\alpha+\beta.\beta=0$, ἕπεται $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$. Ὅθεν $\alpha\pm\beta i=0$, ἐὰν $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$ ἤτοι μιγὰς ἀριθμὸς ἰσοῦται τῷ 0, ἐὰν καὶ τὸ πραγματικὸν καὶ τὸ φανταστικὸν μέρος αὐτοῦ χωρὶς ἦναι ἴσα τῷ 0. Εὐκόλως δὲ βλέπει τις, ὅτι, ἵνα τὸ γινόμενον $(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$ ἰσῶται τῷ 0, ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων $\alpha+\beta i$, $\gamma+\delta i$ ὀφείλει νὰ ἦναι ἴσος τῷ 0.

54. Διαίρεσις. Τὸ πηλίκον δύο μιγάδων ἀριθμῶν εἶναι ὡσαύτως μιγὰς ἀριθμός. Ἔστω τὸ πηλίκον

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$$

Τὸ πηλίκον τοῦτο εὑρίσκομεν, καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$ ἐπὶ τὸν συζυγῆ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ $\gamma-\delta i$.

ὥστε $$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\gamma-\delta i)(\alpha+\beta i)}{(\gamma-\delta i)(\gamma+\delta i)}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$$

Φανερὸν δὲ ὅτι, ἂν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τὸ πηλίκον εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ μέτρον ἀριθμοῦ τινος $\alpha+\beta i$ καλεῖται καὶ ἀπόλυτος τιμὴ αὐτοῦ καὶ γράφεται ὡς $|\alpha+\beta i|=+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, ὥστε

$$|3|=|-3|=|3i|=|-3i|=3,\ |3+4i|=+\sqrt{9+16}=5$$ καὶ γενικῶς

$$|\alpha+\beta i|=|\alpha-\beta i|=|-\alpha+\beta i|=|-\alpha-\beta i|=+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Παρατήρησις.

Ἐκ τῶν προηγουμένων βλέπομεν εὐκόλως, πῶς τὰ διάφορα συστήματα τῶν πραγματικῶν καὶ τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν διεπλάσθησαν

ἀλληλοδιαδόχως πρὸς λύσιν πάντων τῶν προβλημάτων, ἅτινα δύναντα
ἑκάστοτε νὰ προταθῶσιν. Το σύστημα τῶν μιγάδων ἀριθμῶν, ἐν ᾧ περι
χονται πάντα τὰ λοιπὰ καὶ ἐν ᾧ ἰσχύουσι πάντες οἱ θεμελιώδεις νόμο
τῆς ἰσότητος καὶ τῶν τεσσάρων πράξεων δὲν δυνάμεθα νὰ εὐρύνωμεν δι
τῆς παραδοχῆς νέων μονάδων ἄνευ μεταβολῆς τῶν θεμελιωδῶν τούτω
νόμων. Πολλοὶ πολλοὺς δεχόμενοι θεμελιώδεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν νόμου
πολλὰ εὗρον ἀριθμῶν συστήματα ἔχοντα μὲν ἐφαρμογάς τινας ἐν τῇ Μαθη
ματικῇ, ἀλλ' ὅμως πολὺ ὑπολειπόμενα κατά τε τὴν ἁπλότητα καὶ χρησ
μότητα τοῦ συστήματος τῶν μιγάδων ἀριθμῶν ὅπερ καὶ φυσικώτερον κα
ἁρμονικώτερον. Ἄλλως δὲ οἱ ἀριθμοὶ οὐδὲν ἄλλο εἶναι ἢ ἔννοιαι, ἢ σύμ
βολα, δι' ὧν παρίστανται τὰ διάφορα ποσὰ ἢ μεγέθη. Ὅσῳ ἁπλούστερ
καὶ εἰς ἐλάχιστον ἀριθμὸν ἀνηγμένα τὰ σύμβολα ταῦτα, ὡς καὶ οἱ ἐπ' αὐ
τῶν νόμοι καὶ πράξεις, τόσῳ εὐχερεστέρα, ἁρμονικωτέρα, γενικωτέρα
περὶ αὐτῶν θεωρία καὶ ἐφαρμογή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β.

ΠΕΡΙ ΟΡΙΩΝ

55. Μεταβλητὸν καλεῖται ποσόν τι, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ λάβῃ
ἐν ᾧ θεωρεῖται ζητήματι, ὁσασδήποτε καὶ οἱασδήποτε τιμάς, ἐν ᾧ
ἄλλα ποσά, πρὸς ἃ δύναται νὰ ἔχῃ σχέσιν τινά, ἔχουσι τιμὰς ἐντελῶ
ὡρισμένας καὶ ἀμεταβλήτους καλούμενα ποσὰ σταθερά. Οὕτω τ
ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς εὐθυγράμμου τριγώνου εἶναι κα
μένει σταθερόν, ἐν ᾧ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ δύνανται νὰ μεταβάλλωντα
κατὰ μῆκος, ὡς καὶ ἡ ἐπιφάνεια. Ἡ ἀκτίς, ἡ περιφέρεια καὶ ἡ ἐπιφάνει
κύκλου τινὸς μένουσι σταθερά, ὁπόταν χορδή τις αὐτοῦ μεταβάλλητα
ἀπαύστως, ἢ ὁπόταν ὁ ἀριθμὸς πασῶν τῶν πλευρῶν ἐγγεγραμμένου
περιγεγραμμένου πολυγώνου αὐξάνηται ἀπαύστως.

56. Ὅριον μεταβλητοῦ ποσοῦ x καλεῖται ὡρισμένον καὶ σταθερὸ
ποσὸν α, πρὸς οὗ τὴν τιμὴν πλησιάζουσιν ἀπαύστως αἱ πεπερασμένα
τιμαὶ τοῦ μεταβλητοῦ οὕτως, ὥστε ἡ διαφορὰ $x-\alpha$ τοῦ μεταβλη
τοῦ καὶ σταθεροῦ ποσοῦ, εἰλημμένη κατ' ἀπόλυτον τιμήν, τείνει ν
γείνῃ καὶ μένῃ ἐλάσσων ἀριθμοῦ τινος ε, ὅσον ἂν θέλωμεν μικροῦ. Οὕτω

ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ ἐπιφάνεια πολυγώνου ἐγγεγραμμένου, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς πασῶν τῶν πλευρῶν αὐξάνεται ὑπὲρ πάντα ἀριθμόν· οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν, ὅτι ἔχουσιν ὅρια ἀριθμοὺς συμμέτρους ἐντελῶς ὡρισμένους. Αὐτὸς δὲ οὗτος ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὅριον, τῶν ἐξ ὧν ἀποτελεῖται μερῶν.

Ἡ διαφορὰ $\frac{\nu+1}{\nu}-1$ γίνεται καὶ μένει μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ ε, ὁσονδήποτε μικροῦ, τοῦ ν αὐξανομένου ὑπὲρ πάντα ἀκέραιον ἀριθμόν.

Ὁ ἀριθμὸς $\frac{3}{11}$ εἶναι τὸ ὅριον τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος $0,272727\ldots$

57. Τὸ ὅριον μεταβλητῆς ποσότητος δηλοῦται συμβολικῶς προτασσομένου τοῦ συμβόλου ὅρ. ἀπαγγελλομένου ὅριον,

οἷον $\quad$ ὅρ. $\frac{\nu+1}{\nu}=1 \quad$ διὰ $\nu=1, 2, 3,\ldots$

ἢ μᾶλλον ὅρ. $\frac{\nu+1}{\nu}=1$
$\nu=\infty$

58. Γενικαὶ προτάσεις περὶ τῆς θεωρίας τῶν ὁρίων.

1) Ἔστω πλῆθός τι

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_\nu,\ \ldots$$

ὁσωνδήποτε ποσοτήτων τεινουσῶν πρὸς ὡρισμένον ὅριον α. Ἡ διαφορὰ $\alpha_{\nu+\rho}-\alpha_\nu$ ἔχει ὅριον τὸ 0, ὁπόταν ν' αὐξάνηται ἐπ' ἄπειρον, τοῦ ρ ὄντος οἱουδήποτε ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

Ἡ διαφορὰ $\alpha_{\nu+\rho}-\alpha_\nu$ δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω :

$$\alpha_{\nu+\rho}-\alpha_\nu=(\alpha_{\nu+\rho}-\alpha)-(\alpha_\nu-\alpha)$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ διαφοραὶ $\alpha_{\nu+\rho}-\alpha$, $\alpha_\nu-\alpha$ κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἔχουσιν ὅριον τὸ μηδέν, κατα τὸν ὁρισμὸν τῶν ὁρίων, ἕπεται, ὅτι $\alpha_{\nu+\rho}-\alpha_\nu$ ἔχει ὡσαύτως ὅριον τὸ μηδέν.

2) Ἐὰν αἱ ποσότητες α_1, α_2,... α_ν,... βαίνουσαι ἀπαύστως αὐξανόμεναι μηδέποτε ὑπερβαίνωσιν ἀριθμόν τινα ὡρισμένον Α, ἡ α_ν τείνει πρὸς ὅριον ἴσον ἢ ἔλασσον τοῦ Α τοῦ ν ἐπ' ἄπειρον αὐξανομένου.

Ἐπειδὴ ὑποτίθεται $\quad \alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_\nu<\ldots,$

ἡ διαφορὰ $\alpha_{\nu+\rho}-\alpha_\nu$ εἶνε πάντοτε θετικὴ (ἢ καὶ μηδὲν) διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ν καὶ τοῦ ρ. Ἀλλὰ τότε, ἢ ἡ διαφορὰ $α_{ν+ρ}—α_ν$ ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν (τοῦ ν αὐξανομένου ὑπὲρ πάντα ἀριθμὸν καὶ τοῦ ρ ὄντος οἱουδήποτε ἀκεραίου ἀριθμοῦ) καὶ ἑπομένως $α_ν$ ἔχει ὅριον κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα μὴ ὑπερβαῖνον τὸν ἀριθμὸν Α· ἢ ἡ διαφορὰ $α_{ν+ρ}—α_ν$ δὲν ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν (τοῦ ν αὐξανομένου ὑπὲρ πάντα ἀριθμὸν καὶ τοῦ ρ ὄντος οἱουδήποτε ἀκεραίου ἀριθμοῦ) καὶ ἑπομένως δύναται οὖσα καθ' ὑπόθεσιν θετική, νὰ ὑπερβῇ ἀριθμόν τινα σ διὰ τιμὴν τοῦ ρ ἀρκούντως μεγάλην. Τοῦ σ ἄρα καθισταμένου μείζονος τοῦ Α διὰ τιμὴν τοῦ ρ ἀρκούντως μεγάλην καὶ ἡ διαφορὰ $α_{ν+ρ}—α_ν$ καθίσταται μείζων τοῦ Α, ὅπερ κατὰ τῆς ὑποθέσεως. Ὥστε τὸ $α_ν$ τείνει πρὸς ὅριον μὴ ὑπερβαῖνον τὸν ἀριθμὸν Α.

Ὁμοίως δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν, ὅτι καὶ ὅταν αἱ ποσότητες $α_1, α_2, \ldots α_ν, \ldots$ βαίνουσαι ἀπαύστως ἐλαττούμεναι ὑπερβαίνωσι πάντοτε δοθεῖσαν ποσότητα Α, ἡ $α_ν$ διὰ τιμὰς τοῦ ν ἐπ' ἄπειρον αὐξανομένας τείνει πρὸς ὅριον μεῖζον ἢ ἴσον τῷ Α.

3) Δύο ποσότητες μεταβληταὶ x καὶ y μένουσαι ἀπαύστως ἴσαι πρὸς ἀλλήλας τείνουσιν ἀναγκαίως πρὸς ὅρια ἴσα· ἢ μεταβλητή τις ποσότης x δὲν δύναται νὰ τείνῃ συγχρόνως πρὸς ὅρια ἄνισα.

Ἐὰν ὅρ. $x=α$, ἐπειδὴ $y-α=x-α$, ὅρ. $(x-α)=$ὅρ$(y-α)=0$.

4) Ὁπόταν μεταβλητή τις ποσότης z περιέχηται πάντοτε μεταξὺ δύο ἄλλων μεταβλητῶν x καὶ y ἐχουσῶν τὸ αὐτὸ ὅριον α, καὶ αὕτη ἔχει τὸ αὐτὸ ὅριον.

Ἡ διαφορὰ $z—α$ περιέχεται πάντοτε μεταξὺ τῶν διαφορῶν $x—α$ καὶ $y—α$, ἐκείνη ἄρα, ὡς καὶ αὗται, καθίσταται κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἐλάσσων παντὸς δοθέντος κλάσματος ε.

5. Τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἢ πλειόνων μεταβλητῶν ποσοτήτων x, y, z, ... t, ἐχουσῶν ἀμοιβαίως ὅρια ὡρισμένας ποσότητας α, β, γ,...,λ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ὁρίων α, β, γ,...,λ τῶν μεταβλητῶν τούτων.

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως

$$\text{ὅρ } x=α, \ \text{ὅρ } y=β, \ \text{ὅρ } z=γ,$$

ἔχομεν, τῶν $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ οὐσῶν ποσοτήτων, ὅσων ἂν θέλωμεν μικρῶν,

$$x=α+ε_1, \ y=β+ε_2, \ z=γ+ε_3\cdot$$

ὅθεν

$$x+y+z=(α+β+γ)+(ε_1+ε_2+ε_3)$$

καὶ

$$(x—α)+(y—β)+(z—γ)=ε_1+ε_2+ε_3.$$

Ἀλλ' ἑκάστη τῶν ε, ἤτοι ἡ διαφορὰ τῶν μεταβλητῶν ποσῶν x, y, z ἀπὸ τῶν σταθερῶν α, β, γ, δύναται νὰ γείνῃ καὶ μείνῃ, ὅσον ἂν θέλωμεν μικρά, ἐλάσσων π. χ. τῆς μονάδος $\frac{1}{3\mu}$, καὶ ἐπομένως

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3<\frac{1}{\mu}$$

Ὥστε ὅρ $(x+y+z)=\alpha+\beta+\gamma=$ ὅρ $x+$ ὅρ $y+$ ὅρ z.

6). Τὸ ὅριον τῆς διαφορᾶς x—y δύο μεταβλητῶν ποσῶν x, y ἐχόντων ὡρισμένα ὅρια α, β ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ α—β τῶν ὁρίων αὐτῶν.

Ἐπειδὴ ὅρ $x=\alpha$, ὅρ $y=\beta$,

ἔχομεν $x=\alpha+\varepsilon_1, y=\beta+\varepsilon_2$

ὅθεν $x-y=(\alpha-\beta)+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$

καὶ $(x-\alpha)-(y-\beta)=\varepsilon_1-\varepsilon_2$.

Ἀλλ' αἱ διαφοραὶ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δύνανται νὰ γείνωσι καὶ μείνωσι ἐλάσσονες πάσης δοθείσης ποσότητος, ὅσον ἂν θέλωμεν μικρᾶς· ὥστε

ὅρ $(x-y)=\alpha-\beta=$ ὅρ $x-$ ὅρ y.

7) Τὸ ὅριον τοῦ γινομένου x.y.z...t πολλῶν μεταβλητῶν ποσῶν ἐχόντων ὡρισμένα ὅρια α, β, γ, ..., λ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ α.β.γ...λ τῶν ὁρίων αὐτῶν.

Ἐπειδὴ καθ' ὑπόθεσιν

ὅρ $x=\alpha$, ὅρ $y=\beta$, ὅρ $z=\gamma$,

ἕπεται $x=\alpha+\varepsilon_1,\ y=\beta+\varepsilon_2,\ z=\gamma+\varepsilon_3$

καὶ $x.y.z.=(\alpha.\beta.\gamma.)$

$$+(\beta\gamma\varepsilon_1+\alpha\gamma\varepsilon_2+\gamma\varepsilon_1\varepsilon_2+\alpha\beta\varepsilon_3+\beta\varepsilon_1\varepsilon_3+\alpha\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3).$$

Ἀλλ' αἱ μεταβληταὶ ποσότητες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ γίνονται καὶ μένουσιν ἐλάσσονες πάσης κλασματικῆς μονάδος, π. χ. τῆς $\frac{1}{7k\mu}$, ὅπου k ἀκέραιός τις ἀριθμὸς μείζων τοῦ αβ, βγ, αγ, α, β, γ καὶ ἐπομένως

$$(\beta\gamma\varepsilon_1+\alpha\gamma\varepsilon_2+\gamma\varepsilon_1\varepsilon_2+\alpha\beta\varepsilon_3+\beta\varepsilon_1\varepsilon_3+\alpha\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)<\frac{1}{\mu}$$

ὥστε ὅρ. $(x.y\,z.)=\alpha.\beta.\gamma=$ ὅρ. x. ὅρ. y. ὅρ. z

8). Τὸ ὅριον τοῦ πηλίκου x:y δύο μεταβλητῶν ποσῶν ἐχόντων ὡρισμένα ὅρια α, β ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ α:β τῶν ὁρίων τούτων $(\beta\lessgtr 0)$.

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ὅρ. $x=\alpha$, ὅρ. $y=\beta$.

ἕπεται $x=\alpha+\varepsilon_1, y=\beta+\varepsilon_2$

τῶν ποσοτήτων ε_1 καὶ ε_2 ἐχουσῶν ὅριον τὸ μηδέν. Ὅθεν

$$\frac{x}{y}-\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha+\varepsilon_1}{\beta+\varepsilon_2}-\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta\varepsilon_1-\alpha\varepsilon_2}{\beta(\beta+\varepsilon_2)}.$$

Ἀλλὰ τῶν ποσοτήτων ε_1 καὶ ε_2 τεινουσῶν συγχρόνως πρὸς τὸ μηδέν, ἡ διαφορὰ $|\beta\varepsilon_1-\alpha\varepsilon_2|$ μένει ἀπαύστως ἐλάσσων κλάσματός τινος ε. Ὁμοίως ὁ παρονομαστὴς $\beta(\beta+\varepsilon_2)$ ἔχων ὅριον τὸ β^2 τείνει ἀπαύστως νὰ ὑπερβῇ ὡρισμένον τινὰ ἀριθμὸν η ἁρμοδίως εἰλημμένον. Τὸ πηλίκον ἄρα $\frac{\beta\varepsilon_1-\alpha\varepsilon_2}{\beta(\beta+\varepsilon_2)}$, κατ' ἀπόλυτον τιμήν, μένει ἀπαύστως ἔλασσον τοῦ $\frac{\varepsilon}{\eta}$, ἤτοι κλάσματός τινος ὅσον δήποτε μικροῦ. Ὥστε ἡ διαφορὰ

$$\frac{x}{y}-\frac{\alpha}{\beta} \text{ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, ἤτοι ὅρ.} \frac{x}{y}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

59. Περὶ τῆς μεθόδου τῶν ὁρίων. Πολλάκις αἱ σχέσεις αἱ ὑπάρχουσαι μεταξὺ μεγεθῶν ἀριθμητικῶν, γεωμετρικῶν, κλ. δὲν δύνανται νὰ εὑρεθῶσιν εὐκόλως καὶ ἀμέσως, εἰμὴ ὅταν θεωρῶμεν ταῦτα ὡς ὅρια μεταβλητῶν μεγεθῶν ἁπλουστέρας φύσεως. Ἡ ἔκφρασις τῶν σχέσεων τούτων δηλοῦται δι' ἰσότητος, ἧς τὰ μέλη δύνανται νὰ περιέχωσι πάσας τὰς ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν πράξεις. Ἐὰν ἄρα ἡ ἰσότης ἐκφράζῃ σχέσιν τινὰ μεταξὺ μεταβλητῶν ποσοτήτων, ἡ σχέσις αὕτη διατηρεῖται, καὶ ὅταν ἑκάστη τῶν ἐν αὐτῇ μεταβλητῶν ποσοτήτων ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τῶν ὁρίων αὐτῶν. Οὕτω προκύπτει ἰσότης μεταξὺ τῶν ὁρίων τούτων, ἤτοι μεταξὺ αὐτῶν τούτων τῶν ποσοτήτων, ὧν ἡ σχέσις προτείνεται πρὸς εὕρεσιν

Παρατηρητέον δέ, ὅτι αἱ ποσότητες δύνανται νὰ θεωρῶνται ὡς ὅρια κατὰ ποικίλους τρόπους· ἑκάστῳ δὲ τῶν τρόπων τούτων ἀνήκει ἰδιαιτέρα τῶν ὁρίων μέθοδος. Αἱ σπουδαιόταται δὲ καὶ θεμελιωδέστεραι τῶν ὁρίων μέθοδοι εἶναι αἱ ἑπόμεναι τρεῖς.

1) Ποσότης τις δύναται νὰ θεωρῆται ὡς τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἄθροισμα ἀπείρου σειρᾶς ποσοτήτων, οἷον

$$\frac{72}{100}+\frac{72}{1000}+\frac{72}{10000}+\dots=\frac{72}{99}$$

2) Ποσότης τις δύναται νὰ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὁρίου τοῦ

λόγου δύο μεταβλητῶν ποσοτήτων τεινουσῶν συγχρόνως πρὸς τὸ ὅριον μηδὲν 0, οἷον $\frac{2\alpha.\varepsilon+\varepsilon^2}{\varepsilon}=2\alpha$ (διὰ $\varepsilon=0$).

3) Ποσότης τις δύναται νὰ θεωρῆται ὡς τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἄθροισμα μεταβλητῶν ποσοτήτων ἐχουσῶν μὲν ἑκάστης ὅριον τὸ μηδέν, ἀλλὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν ἐπ' ἄπειρον αὐξανομένου· οἷον τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου κυρτοῦ πολυγώνου καὶ ἡ περιφέρεια αὐτοῦ, τοῦ ἀριθμοῦ πασῶν τῶν πλευρῶν αὐξανομένου ἐπ' ἄπειρον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Ὁρισμοὶ καὶ θεμελιώδεις νόμοι τῶν ἀκεραίων δυνάμεων.

60. Δύναμις ἀριθμοῦ τινος καλεῖται τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἴσων τῷ ἀριθμῷ τούτῳ οἷον $\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\ldots.\alpha$. Τὸ δὲ γινόμενον τοῦτο γράφεται συντόμως καὶ συμβολικῶς, α^{μ}, ὅπου ὁ μὲν ἀριθμὸς α καλεῖται βάσις τῆς δυνάμεως, ὁ δὲ μ ὁ τὸ πλῆθος τῶν ἴσων παραγόντων σημαίνων ἐκθέτης. Ἡ δευτέρα δύναμις α^2 καλεῖται τετράγωνον, ἡ τρίτη α^3 καλεῖται κύβος...... ἡ α^{μ} καλεῖται μυοστή.

61. Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις εἶναι γινόμενα, αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες αὐτῶν εὑρίσκονται ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· εἶναι δ' αὗται αἱ ἑξῆς:

1) Γινόμενον πολλῶν δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἐκθέτην ἔχουσα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν· ἤτοι

(1) $\alpha^{\mu}.\alpha^{\nu}\ldots\alpha^{\rho}=\alpha^{\mu+\nu+\cdots+\rho}$. οἷον $5^3 5^4=5^7$.

Ἐὰν δὲ $\mu=\nu=\ldots=\rho$, ἔχομεν

(2) $\alpha^{\mu}.\alpha^{\mu}\ldots\ldots=\alpha^{\tau.\mu}=(\alpha^{\mu})^{\tau}$

τοῦ ἀριθμοῦ τ σημαίνοντος τὸ πλῆθος τῶν ἴσων παραγόντων α^{μ}· ὥστε

2) Δύναμις ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἐκθέται· οἷον $(10^3)^2=10^{3\cdot 2}=10^6$.

3) Γινόμενον ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν ἕκαστος τῶν παραγόντων αὐτοῦ ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην· ἤτοι

(3) $(\alpha\,\beta \ldots \sigma)^\mu = \alpha^\mu . \beta^\mu \ldots \sigma^\mu$· οἷον $(5.3.8)^3 = 5^3 . 3^3 . 8^3$.

Ἐὰν δὲ τεθῇ $\alpha = \beta = \ldots = \sigma$ καὶ ὑποτεθῇ ὁ τὸ πλῆθος τῶν ἴσων τούτων ἀριθμῶν σημαίνων ἀριθμὸς ἴσος τῷ τ, εὑρίσκεται $(\alpha^\tau)^\mu = \alpha^{\tau . \mu}$, ἤτοι ἡ δευτέρα ἰδιότης.

4) Κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ ὑψωθῶσιν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην· ἤτοι

(4) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu = \frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}$· οἷον $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$

5) Ὁ λόγος δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἐκθετῶν· ἐν τῇ διαφορᾷ ταύτῃ μειωτέος μὲν εἶναι ὁ ἐκθέτης τοῦ ἀριθμητοῦ, ἀφαιρετέος δὲ ὁ τοῦ παρονομαστοῦ, ἤτοι

(5) $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$, $(\mu > \nu)$· οἷον $\frac{5^7}{5^3} = 5^4$

Ἐὰν δὲ τεθῇ $\mu = \nu$, ἔπεται $\alpha^0 = 1$· οἷον $4^0 = 1$. ὥστε ἡ 0 δύναμις ἀριθμοῦ τινος (πλὴν τοῦ 0) ἰσοῦται τῇ μονάδι 1.

Καὶ ἐὰν τεθῇ $\mu = \nu + 1$, ἔπεται $\alpha = \alpha$· οἷον $6^1 = 6$· ὥστε ἡ πρώτη δύναμις ἀριθμοῦ τινος ἰσοῦται αὐτῷ τῷ ἀριθμῷ.

Ἐὰν δὲ τέλος τεθῇ $\mu = 0$, ἔπεται $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$. ὥστε

6) Πᾶσα ἀρνητικὸν ἔχουσα ἐκθέτην δύναμις (πλὴν τοῦ 0) ἰσοῦται τῇ ἀντιστρόφῳ αὐτῇ θετικῇ δυνάμει· οἷον

$$8^{-3} = \frac{1}{8^3}, \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$$

7). Τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν αἱ μὲν περιττὸν ἐκθέτην ἔχουσαι δυνάμεις εἶναι ἀρνητικαί, αἱ δὲ ἄρτιον θετικαί, ἤτοι

$$(-\alpha)^{2\nu \pm 1} = -\alpha^{2\nu \pm 1}, \quad (-\alpha)^{2\nu} = \alpha^{2\nu}.$$

οἷον $(-7)^3 = -7^3$, $(-8)^4 = 8^4$.

Δυνάμεις κλασματικὸν ἀριθμὸν ἔχουσαι ἐκθέτην ἢ ῥίζαι τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

62. Θέλοντες νὰ εὐρύνωμεν τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων ἐπὶ οἱωνδήποτε ἐκθετῶν πράττομεν ὡς καὶ ἐν τῇ διαπλάσει τῶν διαφόρων συ-

στημάτων τῶν ἀριθμῶν. Ὡς ἐκεῖ δεχόμεθα εὐρύνοντες τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀριθμοῦ ἰσχύοντας πάντοτε ἀμεταβλήτους τοὺς νόμους τῆς ἰσότητος καὶ τῶν τεσσάρων πράξεων, οὕτω καὶ ἐνταῦθα εὐρύνοντες τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων ἐπὶ οἱωνδήποτε ἀριθμῶν δεχόμεθα ἰσχύοντας πάντοτε ἀμεταβλήτους τοὺς νόμους ἢ τὰς ἀνωτέρω ἐκτεθείσας θεμελιώδεις ἰδιότητας τῶν δυνάμεων

63. Ἐὰν ἐν τῇ ἀνωτέρω ἰσότητι (1)

$$\alpha^\mu \alpha^\nu \ldots \alpha^\sigma = \alpha^{\mu+\nu \ldots +\sigma}$$

τεθῇ $\mu=\nu=\ldots=\sigma=\frac{1}{\rho}$ καὶ ὑποτεθῇ, ὅτι τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων δηλοῦται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ ρ, λαμβάνομεν

$$\alpha^{\frac{1}{\rho}} . \alpha^{\frac{1}{\rho}} \ldots\ldots \alpha^{\frac{1}{\rho}} = {}^{\frac{1}{\rho}\rho} = \alpha,$$

ἤτοι ἡ δύναμις $\alpha^{\frac{1}{\rho}}$ ὑψωθεῖσα εἰς τὴν ρ δύναμιν παράγει τὸν α.

64. Τὸν ἀριθμὸν $\alpha^{\frac{1}{\rho}}$ καλοῦμεν ρ ρίζαν τοῦ α καὶ γράφομεν συμβολικῶς οὕτως:

$$\alpha^{\frac{1}{\rho}} = \sqrt[\rho]{\alpha}, \qquad \text{οἷον} \qquad 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}.$$

ὅπου τὸ σύμβολον $\sqrt{}$ καλεῖται ῥιζικόν, ὁ ρ δείκτης τοῦ ῥιζικοῦ καὶ ὁ α ὑπόρριζον. Ἐὰν ρ=2, ἡ ῥίζα καλεῖται τετραγωνική, ἐὰν ρ=3 κυβική,..., ἐὰν ρ=ν νυοστή.

Ἐν γένει δέ, ἐὰν $\beta=\sqrt[\rho]{\alpha}$, ἔχομεν καὶ $\alpha=\beta^\rho$

65. Ἐὰν δὲ ἐν τῇ ἰσότητι (1) τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων σημαίνῃ ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς ρ καὶ τεθῇ

$$\mu=\nu=\ldots=\sigma=\frac{\tau}{\rho},$$

λαμβάνομεν $$\alpha^{\frac{\tau}{\rho}} . \alpha^{\frac{\tau}{\rho}} \ldots \alpha^{\frac{\tau}{\rho}} = \alpha^{\frac{\tau}{\rho}.\rho} = \alpha^\tau$$

ἤτοι ἡ δύναμις $\alpha^{\frac{\tau}{\rho}}$ ὑψουμένη εἰς τὴν δύναμιν ρ παράγει τὴν δύναμιν α^τ.

Τὸν ἀριθμὸν $\alpha^{\frac{\tau}{\rho}}$ καλοῦμεν ὁμοίως ρ ρίζαν τῆς τ δυνάμεως τοῦ α καὶ γράφομεν συμβολικῶς οὕτως:

$$\alpha^{\frac{\tau}{\rho}} = \sqrt[\rho]{\alpha^\tau} = \left(\sqrt[\rho]{\alpha}\right)^\tau = (\alpha^\tau)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Τὸ κλάσμα $\frac{\tau}{\rho}$ ὑποτίθεται ἀνάγωγον. Οἷον $10^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{10^2}$

66. Ἐὰν ἐν τῇ ἰσότητι

$$\alpha^\mu . \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$$

τεθῇ

$$\mu=\frac{\tau}{\rho},\ \nu=\frac{\varepsilon}{\eta},$$

λαμβάνομεν

$$\alpha^{\frac{\tau}{\rho}} . \alpha^{\frac{\varepsilon}{\eta}} = \alpha^{\frac{\tau}{\rho}+\frac{\varepsilon}{\eta}} = \alpha^{\frac{\tau\eta+\rho\varepsilon}{\rho\eta}} = \sqrt[\rho\eta]{\alpha^{\tau\eta+\rho\varepsilon}}.$$

67. Ἐὰν ἐν τῇ ἰσότητι

$$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu.\nu}$$

τεθῇ

$$\mu=\frac{\tau}{\rho},\ \nu=\frac{\varepsilon}{\eta},\ \text{λαμβάνομεν}$$

$$\left(\alpha^{\frac{\tau}{\rho}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\eta}} = \alpha^{\frac{\tau}{\rho}.\frac{\varepsilon}{\eta}} = \sqrt[\rho\eta]{\alpha^{\tau\varepsilon}} = \left(\sqrt[\rho\eta]{\alpha}\right)^{\tau\varepsilon} = \left(\alpha^{\tau\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\eta\rho}}$$

68. Ἐὰν ἐν τῇ ἰσότητι

$$(\alpha . \beta . \gamma)^\mu = \alpha^\mu . \beta^\mu . \gamma^\mu$$

τεθῇ

$$\mu=\frac{\tau}{\rho},\ \text{λαμβάνομεν}$$

$$(\alpha . \beta\ \gamma)^{\frac{\tau}{\rho}} = \alpha^{\frac{\tau}{\rho}} . \beta^{\frac{\tau}{\rho}} . \gamma^{\frac{\tau}{\rho}} \quad \text{ἢ} \quad \sqrt[\tau]{(\alpha\beta\gamma)^\tau} = \sqrt[\rho]{\alpha^\tau} . \sqrt[\rho]{\beta^\tau} . \sqrt[\rho]{\gamma^\tau}.$$

ὥστε ἐν γένει τὸ γινόμενον ἰσοβαθμίων ῥιζῶν ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν ἰσοῦται τῇ ἰσοβαθμίῳ ῥίζῃ τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν τούτων. Οἷον $(2.5)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}\ \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{2^2 . 5^2}$

69. Ἐὰν ἐν τῇ ἰσότητι

$$(\alpha^\mu . \beta)^\nu = \alpha^{\mu.\nu}\beta^\nu$$

τεθῇ $\nu=\frac{1}{\mu}$, λαμβάνομεν:

$$\left(\alpha^\mu . \beta\right)^{\frac{1}{\mu}} = \alpha . \beta^{\frac{1}{\mu}}$$

ὥστε, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ῥίζαν ἐπὶ ἀριθμόν, πολλαπλασιάζομεν τὸ ὑπόρριζον ἐπὶ τὴν ἰσοβάθμιον δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου· ἢ ἵνα ἐξαγάγωμεν παράγοντά τινα τοῦ ὑπορρίζου ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ, ἐξάγομεν πρῶτον τὴν ῥίζαν αὐτοῦ.

Οἷον $\quad 5 . \sqrt{7} = \sqrt{5^2 . 7},$

70. Ἐὰν ἐν τῇ ἰσότητι

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}=\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}$$

τεθῇ $\mu=\frac{\tau}{\rho}$, λαμβάνομεν

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\tau}{\rho}}=\frac{\alpha^{\frac{\tau}{\rho}}}{\beta^{\frac{\tau}{\rho}}} \quad \text{ἢ} \quad \sqrt[\rho]{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\tau}}=\frac{\sqrt[\rho]{\alpha^{\tau}}}{\sqrt[\rho]{\beta^{\tau}}}$$

ὥστε ὁ λόγος τῶν ἰσοβαθμίων ῥιζῶν δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῇ ἰσοβαθμίῳ ῥίζῃ τοῦ λόγου τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν.

Οἷον $$\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{7^2}}$$

71. Ἐὰν δὲ ἐν τῇ ἰσότητι

$$\left(\frac{\alpha}{\beta^{\mu}}\right)^{\nu}=\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\mu\nu}}$$

τεθῇ $\nu=\frac{1}{\mu}$, λαμβάνομεν

$$\left(\frac{\alpha}{\beta^{\mu}}\right)^{\frac{1}{\mu}}=\frac{\alpha^{\frac{1}{\mu}}}{\beta} \quad \text{ἢ} \quad \sqrt[\mu]{\frac{\alpha}{\beta^{\mu}}}=\frac{\sqrt[\mu]{\alpha}}{\beta}$$

ὥστε, ἵνα διαιρέσωμεν ῥίζαν δι' ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν τὸ ὑπόρριζον διὰ τῆς ἰσοβαθμίου δυνάμεως τοῦ ἀριθμοῦ τούτου· ἢ ἵνα ἐξαγάγωμεν διαιρέτην τοῦ ὑπορρίζου ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ, ἐξάγομεν πρῶτον τὴν ῥίζαν αὐτοῦ. Οἷον $\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{2}$

72. Ἐὰν δὲ ἐν τῇ ἰσότητι

$\alpha^{-\mu}=\frac{1}{\alpha^{\mu}}$ τεθῇ $\mu=\frac{\tau}{\rho}$, λαμβάνομεν

$$\alpha^{-\frac{\tau}{\rho}}=\frac{1}{\alpha^{\frac{\tau}{\rho}}}=\frac{1}{\sqrt[\rho]{\alpha^{\tau}}}$$

πολλαπλασιάζοντες δὲ ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{1}{\sqrt[\rho]{\alpha^{\tau}}}$ ἐπὶ τὴν ρ δύναμιν τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ λαμβάνομεν

$$\alpha^{-\frac{\tau}{\rho}} = \frac{\left(\sqrt[\rho]{\alpha^{\tau}}\right)^{\rho-1}}{\alpha^{\tau}} = \frac{\alpha^{\frac{\tau(\rho-1)}{\rho}}}{\alpha^{\tau}}$$

73. Ρίζαι διαφόρων δεικτῶν ἢ βαθμῶν τρέπονται εἰς ἰσοβαθμίους, ὡς κλάσματα ἑτερώνυμα εἰς ὁμώνυμα. Ἡ πρότασις αὕτη ἕπεται ἀμέσως ἐκ τῆς παραστάσεως τῶν ριζῶν διὰ κλασματικῶν δυνάμεων, οἷον

$$\sqrt[\mu]{\alpha}, \quad \sqrt[\nu]{\beta}, \quad \sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha^{\nu}}, \quad \sqrt[\mu\nu]{\beta^{\mu}}$$

διότι $\sqrt[\mu]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{\mu}}, \ \sqrt[\nu]{\beta} = \beta^{\frac{1}{\nu}},$ ὅθεν $\sqrt[\mu]{\alpha} = \alpha^{\frac{\nu}{\mu\nu}}, \ \sqrt[\nu]{\beta} = \beta^{\frac{\mu}{\mu\nu}}$

74. Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο ρίζας πάσης ἀρτίας τάξεως καὶ μίαν περιττῆς· πᾶς δὲ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἔχει μίαν ρίζαν πάσης περιττῆς ταξεως, οὐδεμίαν δὲ ἀρτίας.

Ἔστω α θετικός τις ἀριθμὸς ἐπειδὴ δυνατὸν $\alpha=\beta^{2\nu}=(-\beta)^{2\nu}$ καὶ $\alpha=\gamma^{2\nu+1}$, ἀδύνατον δὲ $\alpha=(-\gamma)^{2\nu+1}$, ἕπεται $\sqrt[2\nu]{\alpha}=\beta$ καὶ $\sqrt[2\nu]{\alpha}=-\beta$, ἀλλὰ μόνον $\sqrt[2\nu+1]{\alpha}=\gamma$.

Ὁμοίως, ἐπειδὴ δυνατὸν $-\alpha=(-\beta)^{2\nu+1}$, ἀδύνατον δὲ $-\alpha=(-\gamma)^{2\nu}$, ἕπεται μόνον $\sqrt[2\nu+1]{-\alpha}=-\beta$. π.χ. $\sqrt[2]{16}=\pm 4$, $\sqrt[3]{8}=2$, $\sqrt[3]{-8}=-2$

75. Αἱ ρίζαι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἢ ἀκέραιοι ἢ ἀσύμμετροι ἀριθμοί, οὐδέποτε δὲ κλάσματα. Διότι οὐδέποτε ἀκεραία δύναμις ἀναγώγου κλάσματος ἰσοῦται ἀκεραίῳ ἢ ἀσυμμέτρῳ ἀριθμῷ.

Ἡ μυοστὴ ρίζα ἀκεραίου ἀριθμοῦ, οὗτινος οἱ ἐκθέται πάντων τῶν πρώτων αὐτοῦ παραγόντων εἶναι πολλαπλάσια τοῦ μ, εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐὰν ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς Α ἀναλύηται εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, ὡς

$$\alpha^{\tau\mu}.\beta^{\rho\mu}.\gamma^{\sigma\mu}\ldots.\lambda^{\varepsilon\mu}=A,$$

ἕπεται, ὅτι

$$\left(\alpha^{\tau\mu}.\beta^{\rho\mu}.\gamma^{\sigma\mu}\ldots\lambda^{\varepsilon\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}}=\sqrt[\mu]{A}=\alpha^{\tau}.\beta^{\rho}.\gamma^{\sigma}\ldots\lambda^{\varepsilon}.$$

καὶ ἀντιστρόφως.

ΣΗΜ. 1. Πᾶν γινόμενον, ὁσαδήποτε καὶ οἱαδήποτε ριζικὰ καὶ ἂν ἔχῃ, ἀνάγεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα εἰς μίαν ριζαν. Ἡ τοιαύτη δὲ αναγωγὴ εἶναι ὠφέλιμος προκειμένου νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ρίζα γινομένου τινὸς κατά τινα προσέγγισιν· π. χ. ἀντὶ $10\sqrt{6}$ γραπτέον $\sqrt{600}$· διότι ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 600 κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1 εἶναι 24, ἐν ᾧ $10\sqrt{6}=20$ τοῦτο δὲ συμβαίνει· διότι τὸ ἐπὶ τῆς $\sqrt{6}$ πραττόμενον λᾶθος εἶναι μὲν ἔλασσον τῆς 1, ἀλλὰ δεκαπλασιαζόμενον ὑπερβαίνει αὐτήν.

Ὁμοίως ἀντὶ $\sqrt{6}.\sqrt{7}$ γραπτέον $\sqrt{42}$, ὁμοίως ἀντὶ $\sqrt{5}.\sqrt{20}$ γραπτέον $\sqrt{100}=10$.

ΣΗΜ 2. Ἡ νὴ ρίζα κλάσματος ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς νῆς ρίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ πολλαπλασιαζομένων ἀμφοτέρων τῶν ὅρων αὐτοῦ ἐπὶ ἀριθμὸν τοιοῦτον ὥστε ὁ παρονομαστὴς νὰ γίνηται τελεία δύναμις· π.χ.

$$\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{3}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{2.9}{3^3}}=\frac{\sqrt[3]{18}}{3}$$

ΣΗΜ. 3. Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος ἔχῃ ριζικόν, δύναται νὰ μεταβιβάζηται αὐτὸ εἰς τὸν ἀριθμητὴν πολλαπλασιαζομένων ἀμφοτέρων τῶν ὅρων ἐπὶ ἁρμόδιον ἀριθμόν· π. χ.

$$\frac{\alpha\beta^2}{\sqrt{\gamma}}=\frac{\alpha\beta^2.\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}.\sqrt{\gamma}}=\frac{\alpha\beta^2.\sqrt{\gamma}}{\gamma}.$$

Ὁμοίως
$$\frac{A}{\alpha+\sqrt{\beta}}=\frac{A.(\alpha-\sqrt{\beta})}{(\alpha+\sqrt{\beta})(\alpha-\sqrt{\beta})}=\frac{A(\alpha-\sqrt{\beta})}{\alpha^2-\beta}$$

Ἡ μεταβίβασις αὕτη τῶν ριζῶν ἐκ τοῦ παρονομαστοῦ εἰς τὸν ἀριθμητὴν εἶναι ὠφέλιμος προκειμένου νὰ ὑπολογισθῇ τὸ κλάσμα κατὰ προσέγγισιν· π. χ. ἀντὶ $\frac{3}{\sqrt{20}}$ γραπτέον $\frac{\sqrt{180}}{20}$ διότι κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1 εἶναι $\frac{3}{\sqrt{20}}=\frac{3}{4}$, ἐν ᾧ $\frac{\sqrt{180}}{20}=\frac{13}{20}$, ὅπερ ἀκριβέστερον.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1). Ἀποδεῖξαι, ὅτι

$$\sqrt{2}.\sqrt{18}=6,\ \sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{4}=2,\ \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}=6$$

$$\sqrt{5}.\sqrt[4]{5}=\sqrt[4]{5^3},\ \sqrt{5}.\sqrt{7}=\sqrt{35},\ 3\sqrt{5}=\sqrt{45}$$

$$2\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{32},\ 5\sqrt{6}=\sqrt{150}.\ 2\sqrt[3]{\frac{3}{5}}=\sqrt[3]{\frac{24}{5}}$$

2). Εὑρεῖν τὸ γινόμενον τῶν δυνάμεων

$$\alpha^{\frac{1}{2}},\quad \alpha^{\frac{3}{5}},\quad \sqrt[4]{\alpha^3} \qquad \left(\text{'Aπ. } \alpha^{\frac{37}{20}}\right)$$

3). Εὑρεῖν τὸ πηλίκον

$$\sqrt[3]{\alpha} : \sqrt[7]{\alpha^8} \qquad \left(\text{'Aπ. } \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{17}{21}}\right).$$

4) Εὑρεῖν τὴν πέμπτην δύναμιν τοῦ

$$\sqrt[3]{\alpha^4} \qquad \left(\text{'Aπ. } \alpha^{\frac{20}{3}}\right)$$

5). Ἀποδεῖξαι, ὅτι

$$\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}=\sqrt{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}$$

(Διότι $\quad (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+2\sqrt{\alpha}.\sqrt{\beta}+\beta$)

6) Ἀποδεῖξαι, ὅτι

$$\sqrt{\alpha+\beta}<\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$$

7). Ἀποδεῖξαι, ὅτι

$$\sqrt{18}+\sqrt{28}-\sqrt{75}=3\sqrt{2}+2\sqrt{7}-5\sqrt{3}.$$

* Δυνάμεις ἀσύμμετρον ἀριθμὸν ἔχουσαι ἐκθέτην.

77. Πρὶν προβῶμεν πρὸς ὁρισμὸν τῶν ἀσυμμέτρων ἐκθετῶν καὶ τ
λογαρίθμων, ἀποδείξωμεν πρῶτον προτάσεις τινὰς τῶν δυνάμεων ἀριθμ
θετικοῦ συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου.

1) Αὐξανομένης ἢ ἐλαττουμένης τῆς θετικῆς βάσεως δ
νάμεώς τινος θετικῆς καὶ ἡ δύναμις αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦτ

Διότι ἐν γινομένῳ πολλῶν παραγόντων θετικῶν αὐξανομένων ἢ ἐλα
τουμένων τῶν παραγόντων καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν αὐξάνεται ἢ ἐλαττο
ται. Οἷον $\quad 5^2<6^2<7^2<8^2<\ldots.$

2) Δοθέντος ἀριθμοῦ τινος α εὑρίσκεται πάντοτε ἀριθμ
τις β, οὗτινος ἡ μυοστὴ δύναμις ἰσοῦται τῷ α (τοῦ μ ὄντ
ἀκεραίου καὶ θετικοῦ ἀριθμοῦ).

Ἐὰν Α ἦναι ἀκέραιός τις μείζων τοῦ α μεταξὺ τῶν ἀριθμμῶν

$$0,\ 1^\mu,\ 2^\mu, 3^\mu, \ldots, A^\mu$$

ἢ εὑρίσκεταί τις ἴσος τῷ α, καὶ οὕτως ἀποδεικνύεται ἡ πρότασις.

ὑρίσκονται δύο ἐφεξῆς ρ^μ καὶ $(\rho+1)^\mu$ τοιοῦτοι, ὥστε:

$$\rho^\mu < \alpha < (\rho+1)^\mu.$$

Τότε μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν

$$\rho^\mu, \left(\rho + \frac{1}{10}\right)^\mu, \left(\rho + \frac{2}{10}\right)^\mu, \ldots, \left(\rho + \frac{10}{10}\right)^\mu$$

εὑρίσκεταί τις ἴσος τῷ α καὶ οὕτως ἐδείχθη ἡ πρότασις ἢ περιέχεται α μεταξὺ δύο ἐφεξῆς, ὡς

$$\left(\rho + \frac{\rho_1}{10}\right)^\mu < \alpha < \left(\rho + \frac{\rho_1}{10} + \frac{1}{10}\right)^\mu$$

Ὁμοίως μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν

$$\left(\rho + \frac{\rho_1}{10}\right)^\mu, \left(\rho + \frac{\rho_1}{10} + \frac{1}{100}\right)^\mu, \ldots, \left(\rho + \frac{\rho_1}{10} + \frac{10}{100}\right)^\mu$$

ἢ εὑρίσκεταί τις ἴσος τῷ α καὶ οὕτως ἐδείχθη ἡ πρότασις ἢ ὑπάρχουσιν αἱ ἀνισότητες

$$\left(\rho + \frac{\rho_1}{10} + \frac{\rho_2}{100}\right)^\mu < \alpha < \left(\rho + \frac{\rho_1}{10} + \frac{\rho_2}{100} + \frac{1}{100}\right)^\mu$$

Οὕτω συλλογιζόμενοι συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ α μεταξὺ δύο διαδοχικῶν δυνάμεων δύο ἀριθμῶν διαφερουσῶν ἀλλήλων διαφοράν, ὅσον καὶ ἂν θέλωμεν μικράν, δύναται νὰ γείνῃ καὶ μένῃ ἐλάσσων πάσης κλασματικῆς μονάδος, ὅσον ἂν θέλωμεν μικρᾶς, ἤτοι ἔχει ὅριον τὸ μηδέν· εὑρίσκεται ἄρα ἀριθμός τις καὶ εἷς μόνος

$$\beta = \rho + \frac{\rho_1}{10} + \frac{\rho_2}{100} + \ldots + \frac{\rho_\nu}{10^\nu} + \ldots$$

σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος ἐντελῶς ὡρισμένος, οὗτινος ἡ μυοστὴ δύναμις ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ α.

3) Αἱ ἀκέραιαι θετικαὶ δυνάμεις ἀριθμοῦ τινος α μείζονος τῆς μονάδος 1 βαίνουσιν αὐξανόμεναι ὑπὲρ πάντα ἀριθμὸν μετὰ τοῦ ἐκθέτου:

Ἐπειδὴ $\alpha > 1$, ἔστω $\alpha = 1 + \delta$. Ἀλλ' εἶναι $(1+\delta)(1+\delta) = (1+\delta)^2 > 1 + 2\delta$. Ὁμοίως $(1+\delta)^3 > 1 + 3\delta$· καὶ γενικῶς $(1+\delta)^\nu > 1 + \nu\delta$· γίνεται ἄρα ὁ α^ν μείζων ἀριθμοῦ τινος Α ὅσον δήποτε μεγάλου, ἐὰν $1 + \nu\delta > A$, ἤτοι ἐὰν ληφθῇ

$$\nu > \frac{A-1}{\delta}$$

οἷον $\quad 5^2 < 5^3 < 5^4 < 5^5 < 5^6 < \ldots$

4) Αἱ ἀκέραιαι θετικαὶ δυνάμεις ἀριθμοῦ τινος α ἐλά σσονος τῆς μονάδος 1 βαίνουσιν ἐλαττούμεναι ὑπὸ πᾶσ κλασματικὴν μονάδα αὐξανομένου τοῦ ἐκθέτου ὑπὲρ πάν ἀριθμόν.

Ἐπειδὴ $\alpha < 1$, ἔπεται $\frac{1}{\alpha} > 1$. Ἀλλὰ $\alpha . \frac{1}{\alpha} = 1$ καὶ $\alpha^{\mu} . \frac{1}{\alpha^{\mu}} =$

Ἐὰν ἄρα $\frac{1}{\alpha^{\mu}} > A$, ἔπεται $\alpha^{\mu} < \frac{1}{A}$· ὅπου ὁ A ὅσον δήποτε μέγ ἀριθμὸς

οἷον $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ὅθεν $\frac{1}{4} < 2$ ὥστε $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^4 > \left(\frac{1}{2}\right) >$

5) Δοθέντων, ὡς ἔτυχε, δύο θετικῶν ἀριθμῶν α καὶ ὧν ὁ α μείζων ἢ ἐλάσσων τῆς μονάδος 1, εὑρίσκεται πά τοτε ἀριθμός τις x καὶ εἷς μόνος, τοιοῦτος ὥστε $\alpha^x = \beta$

Ἐὰν ὑποτεθῇ πρότερον $\alpha > 1$ καὶ ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς ν τοιοῦτ ὥστε: $\alpha^{\nu} > \beta, (\beta > 1)$, μεταξὺ τῶν σύμμετρον ἐκθέτην ἐχουσῶν δυνάμε

$$\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{\nu}$$

ἢ εἶναί τις ἴση τῷ β, ὅτε ἐδείχθη ἡ πρότασις, ἢ περιέχεται ὁ β μετα δύο διαδοχικῶν τοιούτων, ὥστε

$$\alpha^{\rho} < \beta < \alpha^{\rho+1}$$

Ὁμοίως μεταξὺ τῶν σύμμετρον ἐκθέτην ἐχουσῶν δυνάμεων

$$\alpha^{\rho}, \alpha^{\rho+\frac{1}{10}}, \alpha^{\rho+\frac{2}{10}}, \ldots, \alpha^{\rho+\frac{10}{10}}$$

ἢ εὑρίσκεταί τις ἴση τῷ β καὶ οὕτως ἐδείχθη ἡ πρότασις ἢ περιέχετ οὗτος μεταξὺ δύο διαδοχικῶν τοιούτων, ὥστε

$$\alpha^{\rho+\frac{\rho_1}{10}} < \beta < \alpha^{\rho+\frac{\rho_1}{10}+\frac{10}{100}}$$

Ὁμοίως μεταξὺ τῶν σύμμετρον ἐκθέτην ἐχουσῶν δυνάμεων

$$\alpha^{\rho+\frac{\rho_1}{10}}, \alpha^{\rho+\frac{\rho_1}{10}+\frac{1}{100}}, \alpha^{\rho+\frac{\rho_1}{10}+\frac{2}{100}},$$

$$\alpha^{\rho+\frac{\rho_1}{10}+\frac{3}{100}} \ldots \alpha^{\rho+\frac{\rho_1}{10}+\frac{10}{100}}$$

εὑρίσκεταί τις ἴση τῷ β καὶ οὕτως ἐδείχθη ἡ πρότασις ἢ περιέχεται οὕ-
ς μεταξὺ δύο διαδοχικῶν· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἀλλ' οὕτω συλλογιζόμενοι συμπεραίνομεν, ὅτι ἢ εὑρίσκεται δύναμίς ς τοῦ α σύμμετρον ἀριθμὸν ἔχουσα ἐκθέτην ἴση τῷ β, ἢ εὑρίσκεται ναμίς τις τοῦ α ἀσύμμετρον ἀριθμὸν ἔχουσα ἐκθέτην ἴση τῷ β.

Διότι προφανῶς ὁ β ὁρίζεται ὑπὸ δύο σειρῶν ἀποτελουμένων ἐκ δυνά-εων τοῦ α συμμέτρους ἀριθμοὺς ἐχουσῶν ἐκθέτας, ὧν ἡ μὲν βαίνει αὐξα-μένη, ἡ δὲ φθίνουσα, τῶν·

$$(\alpha) \qquad \alpha^{\alpha_1}<\alpha^{\alpha_2}<\alpha^{\alpha_3}<\ldots<\alpha^{\alpha_\nu}<\ldots.$$

$$(\beta) \qquad \alpha^{\beta_1}>\alpha^{\beta_2}>\alpha^{\beta_3}>\ldots>\alpha^{\beta_\nu}>\ldots.$$

δὲ διαφορὰ $\alpha^{\beta_\nu}-\alpha^{\alpha_\nu}$ δύναται νὰ γίνηται καὶ νὰ μείνῃ ἐλάσσων πάσης θείσης κλασματικῆς μονάδος· ἔχομεν ἄρα

$$x=\underset{\nu=\infty}{\text{ὅρ}.}\,\alpha^{\nu}=\underset{\nu=\infty}{\text{ὅρ}.}\,\beta^{\nu}=\text{ὅρ}\cdot\left(\rho+\frac{\rho_1}{10}+\frac{\rho_2}{100}\ldots+\frac{\rho^{\nu}}{10^{\nu}}\right)=$$

$$=\rho+\frac{\rho_1}{10}+\frac{\rho_2}{100}+\frac{\rho_3}{1000}+\frac{\rho_4}{10000}+\frac{\rho_5}{100000}+\frac{\rho_6}{1000000}+\ldots$$

που τὰ $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \ldots$ μικρότερα τοῦ 10 ἕκαστον.

Καὶ τότε $\alpha^x=\beta$.

Ἐὰν δὲ $\beta=1$, ἕπεται $x=0$. Ἐὰν $\beta<1$, ἔστω $\beta=\frac{1}{\gamma}$

Τότε, ἐὰν $\alpha^x=\gamma$. ($\gamma>1$), ἔχομεν $\alpha^{-x}=\frac{1}{\gamma}=\beta$.

Ἐὰν δὲ $\alpha<1$, ἔστω $\alpha=\frac{1}{A}$. τότε β ὄντος θετικοῦ ἀριθμοῦ

$$A^x=\beta,\ \text{ὅθεν}\ \alpha^{-x}=\beta$$

στε πάντοτε ὑπάρχει ἀριθμός τις x καὶ εἷς μόνον (διότι κατ' ἀπό-υτον τιμὴν ἡ μείζονα ἐκθέτην ἔχουσα δύναμις εἶναι μείζων, καὶ ἡ λάσσονα ἐλάσσων) τοιοῦτος, ὥστε $\alpha^x=\beta$, τῶν α καὶ β ὄντων θετικῶν ριθμῶν καὶ $\alpha \gtrless 1$.

ΣΗΜ. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται, ὅτι τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν αἱ ἀσύμμετροι δυνάμεις δὲν εὑρίσκονται ἐν τῷ συστήματι τῶν πραγμα-τικῶν ἀριθμῶν.

Οἱ νόμοι τῶν δυνάμεων ἰσχύουσι καὶ ἐπὶ ἀσυμμέτρων ἐκθετῶν· διότι αἱ ἀσύμμετροι δυνάμεις εἶναι ὅρια συμμέτρων τοιούτων.

Περὶ λογαρίθμων.

Ὁρισμοί.

78. Ἐν τῇ ἰσότητι $α^x = β$ ὁ ἐκθέτης x καλεῖται λογάριθμος το β κατὰ τὴν βάσιν α καὶ γράφεται συμβολικῶς: $x = λογ_α β$, ἤτοι λο γάριθμος ἀριθμοῦ τινος β λέγεται ὁ ἐκθέτης x τῆς δυνάμεω εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ὑψωθῇ ὡρισμένος τις ἀριθμὸς ἵνα δώσῃ τὸν β.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἐκθέτης x ὁρίζεται ὡς λογάριθμος τοῦ β, ἕπεται, ὅ πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει ἕνα λογάριθμον καὶ ἕνα μόνον. Κ ἡ μὲν μονὰς 1 ἔχει λογάριθμον τὸ μηδὲν 0· διότι $α^0 = 1$. Λα βανομένης δὲ τῆς βάσεως μείζονος τῆς μονάδος 1 οἱ μ λογάριθμοι τῶν μειζόνων τῆς 1 ἀριθμῶν εἶναι θετικοὶ κ αὐξανομένων τῶν ἀριθμῶν αὐξάνονται καὶ οἱ λογάριθμοι αὐ τῶν, οἱ δὲ λογάριθμοι τῶν ἐλασσόνων τῆς μονάδος 1 ἀριθμῶ εἶναι ἀρνητικοὶ καὶ ἐλαττουμένων τῶν ἀριθμῶν καὶ πρ τὸ 0 τεινόντων οἱ λογάριθμοι αὐτῶν, ἀρνητικοὶ ὄντες αὐξά νονται ὑπὲρ πάντα ἀριθμόν.

Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι, ἐὰν οἱ λογάριθμοι δύο ἀριθμῶν ἦν ἴσοι, καὶ οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι.

ΣΗΜ. 1. Μεταβαλλομένης τῆς βάσεως τῶν λογαρίθμων μεταβά λονται οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν οὕτως, ὥστε προκειμένου περὶ δύο βά σεων διαφόρων ἀλλήλων οἱ λογάριθμοι κατὰ τὴν ἑτέραν βάσι πολλαπλασιάζονται ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον λογάριθμον τῆς ἑτέ ρας βάσεως κατὰ τὴν ἑτέραν.

Ἔστω $α^x = γ^y = β$· ἐντεῦθεν ἕπεται:

$$x = λογ_α β,\ y = λογ_γ β$$

καὶ

$$x = y\ λογ_α γ. \quad ὅθεν$$

$$λογ_α β = λογ_γ β . λογ_α γ, \text{ ἢ } λογ_γ β = \frac{λογ_α β}{λογ_α γ}$$

ΣΗΜ. 2. Διὰ βάσιν $\gtrless 1$, λογ. $0 = \mp\infty$ λογ. $(+\infty) = \infty$ ἢ $-\infty$

Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων.

79. Οἱ λογάριθμοι ἔχουσι τὰς ἑπομένας ἰδιότητας.

1). Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Ἔστω α ἡ βάσις τῶν λογαρίθμων καὶ x, y οἱ λογάριθμοι δύο ἀριθμῶν Μ καὶ Ν, ἤτοι ἔστω x=λογΜ, y=λογΝ ἢ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων $\alpha^x=M$, $\alpha^y=N$

λέγω, ὅτι λογ. (Μ.Ν)=λογΜ+λογΝ.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ

$$\alpha^x=M$$
$$\alpha^y=N$$

ἕπεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ τὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων τούτων.

$$\alpha^{x+y}=M.N$$

ὅθεν $$x+y=\lambda o\gamma(M.N)$$

ἢ $$\lambda o\gamma.M+\lambda o\gamma N=\lambda o\gamma(M.N) \quad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἐκτείνεται ἐπὶ ὁσωνδήποτε παραγόντων·

καὶ ὄντως εἶναι $$M.N.P=M.(N.P)$$

ὅθεν $$\lambda o\gamma(M.N.P)=\lambda o\gamma M+\lambda o\gamma(N.P)=\lambda o\gamma M+\lambda o\gamma N+\lambda o\gamma P$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ περὶ πλειόνων παραγόντων.

2). Ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν λογαρίθμων αὐτῶν.

Ἔστω α ἡ βάσις τῶν λογαρίθμων καὶ x,y οἱ λογάριθμοι δύο ἀριθμῶν Μ καὶ Ν, ἤτοι ἔστω x=λογΜ, y=λογΝ ἢ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων

$$\alpha^x=M$$
$$\alpha^y=N$$

Λέγω, ὅτι

$$\lambda o\gamma \frac{M}{N}=\lambda o\gamma M-\lambda o\gamma N$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ

$$\alpha^x=M$$
$$\alpha^y=N$$

ἕπεται διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων τούτων

$$\alpha^{x-y}=\frac{M}{N}$$

Ὅθεν $$x-y=\lambda o\gamma\frac{M}{N}$$

ἢ $$\lambda o\gamma M-\lambda o\gamma N=\lambda o\gamma\frac{M}{N},$$

3). Ὁ λογάριθμος δυνάμεως (σύμμετρον ἐχούσης ἐκθέτην) ἰσοῦται τῷ λογαρίθμῳ τῆς βάσεως αὐτῆς ἐπὶ τὸν ἐκθέτην αὐτῆς

Ἔστω α ἡ βάσις τῶν λογαρίθμων καὶ x ὁ λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος Μ, ἤτοι ἔστω $x=\lambda o\gamma M$ ἢ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων

$$\alpha^x=M$$

λέγω, ὅτι $$\lambda o\gamma\ M^\kappa=\kappa\ \lambda o\gamma M$$

Ἀπόδειξις. Ἔστω πρότερον ὁ ἐκθέτης ν ἀκέραιος καὶ θετικός· τότε εἶναι

$$M^\nu=M.M.M\ldots M \quad (\nu^{\kappa\iota\varsigma}).$$

ὅθεν

$$\lambda o\gamma M^\nu=\lambda o\gamma M+\lambda o\gamma M+\lambda o\gamma M+\ldots+\lambda o\gamma M$$

ἢ $$\lambda o\gamma M^\nu=\nu\lambda o\gamma M.$$

Ἔστω δεύτερον ὁ ἐκθέτης $\frac{\lambda}{\sigma}$ κλασματικὸς καὶ θετικός· τότε εἶναι

$$\left(M^{\frac{\lambda}{\sigma}}\right)^\sigma=M^\lambda$$

Ὅθεν, λαμβανομένων τῶν λογαρίθμων ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος ταύτης,

$$\sigma.\lambda o\gamma\ M^{\frac{\lambda}{\sigma}}=\lambda.\lambda o\gamma M$$

καὶ $$\lambda o\gamma M^{\frac{\lambda}{\sigma}}=\frac{\lambda}{\sigma}\lambda o\gamma M.$$

Ἔστω τέλος ὁ ἐκθέτης ἀρνητικὸς $-\tau$· τότε εἶναι

$$M^{-\tau}.M^\tau=1$$

Ὅθεν, λαμβανομένων τῶν λογαρίθμων ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος ταύτης,

$$\lambda o\gamma M^{-\tau}+\tau.\lambda o\gamma M=0$$

καὶ $$\lambda o\gamma M^{-\tau}=-\tau.\lambda o\gamma M$$

Ἐκ τούτων πάντων συνάγεται, ὅτι ἔχομεν γενικῶς

$$\lambda o\gamma M^\kappa=\kappa.\lambda o\gamma M \qquad \text{ὃ. ἔ. δ.}$$

οἱουδήποτε ὄντος τοῦ συμμέτρου ἀριθμοῦ κ.

Ὡς μερικὴ δὲ περίπτωσις ἕπεται, ὅτι ὁ λογάριθμος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ· καὶ γενικῶς ὁ λογάριθμος πάσης ῥίζης ἰσοῦται πρὸς τὸν λογάριθμον τοῦ ὑπορρίζου διαιρεθέντα διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης· π.χ.

$$\lambda o\gamma \sqrt{\alpha} = \lambda o\gamma\, \alpha^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \lambda o\gamma \alpha$$

$$\lambda o\gamma \sqrt[\nu]{\alpha} = \lambda o\gamma\, \alpha^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\nu} \lambda o\gamma\, \alpha$$

Ὁ δὲ λογάριθμος πάσης βάσεως α τῶν λογαρίθμων (κατὰ τὴν βάσιν α) ἰσοῦται τῇ μονάδι 1. Διότι

$$\alpha^1 = \alpha$$

ὅθεν

$$1 = \lambda o\gamma\, \alpha$$

Ὅταν δὲ ἰδίᾳ βάσις τῶν λογαρίθμων ληφθῇ ὁ 10 (πρὸς εὐχερεστέραν εὕρεσιν καὶ ἐφαρμογὴν τῶν λογαρίθμων), τότε ὁ λογάριθμος πάσης δυνάμεως τοῦ 10 ἰσοῦται τῷ ἐκθέτῃ αὐτῆς. Διότι

$$\lambda o\gamma\, 10^{\kappa} = \kappa.\ \lambda o\gamma\, 10 = \kappa.\ 1 = \kappa.$$

80. Διὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων δύναται προφανῶς νὰ ἀναχθῇ ὁ μὲν πολλαπλασιασμὸς ἀριθμῶν εἰς πρόσθεσιν αὐτῶν, ἡ δὲ διαίρεσις εἰς ἀφαίρεσιν, ἡ δὲ ὕψωσις εἰς δυνάμεις εἰς πολλαπλασιασμὸν καὶ ἡ ἐξαγωγὴ ῥιζῶν εἰς διαίρεσιν, ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ πίναξ περιέχων τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν· διότι διὰ τοῦ πίνακος τούτου δύνανται νὰ εὑρίσκωνται ἀμέσως οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν· καὶ τἀνάπαλιν.

Οἱ λογαριθμικοὶ πίνακες οἱ ἔχοντες βάσιν τῶν λογαρίθμων τὸν ἀριθμὸν 10 περιέχουσι τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, ἤτοι οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν παρίστανται ἐν αὐτοῖς διὰ δεκαδικῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ ἀκέραιον μέρος καλεῖται χαρακτηριστικόν.

Ἐν τῷ τοιούτῳ συστήματι τῶν λογαρίθμων, αἱ δυνάμεις τοῦ 10 ἔχουσι λογαρίθμους ἀκεραίους ἀριθμούς, οἵτινες εἶναι αὐτοὶ οὗτοι οἱ ἐκθέται τῶν δυνάμεων (ἐδ. 79,3). Πᾶς ἀριθμὸς περιεχόμενος μεταξὺ τοῦ 10^{ν} καὶ τοῦ $10^{\nu+1}$ ἔχει τὸν λογάριθμον αὐτοῦ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ ν καὶ τοῦ $\nu+1$, ὥστε τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ εἶναι ὁ ν· ἐπειδὴ δὲ ὁ

10^{ν} ἔχει $\nu+1$ ψηφία, ἔπεται, ὅτι ὁ λογάριθμος τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ το ἔχοντος $\nu+1$ ψηφία ἔχει ἀκέραιον μέρος τὸν ἀριθμὸν ν.

81. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογα ρίθμου ἀριθμοῦ μείζονος τῆς μονάδος 1 εἶναι ὁ τὸ πλῆθο τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους αὐτοῦ ἐκφράζων ἀριθμὸ ἠλαττωμένος κατὰ 1. Π. χ. ὁ λογάριθμος τοῦ 5 ἔχει χαρακτηριστι κὸν 0, ὁ λογάριθμος τοῦ 20 ἔχει χαρακτηριστικὸν 1, ὁ λογάριθμος τοῦ 608 ἔχει χαρακτηριστικὸν 2, ὁ λογάριθμος τοῦ 5679830 ἔχει χαρακτη ριστικὸν 6, ὁ λογάριθμος τοῦ 7,158 ἔχει χαρακτηριστικὸν 0, ὁ δὲ λο- γάριθμος τοῦ 105,9578 ἔχει χαρακτηριστικὸν 2.

82. Τὸ δὲ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἐλάσσονος τῆς μονάδος 1 ἔχει τόσας ἀρνητικὰς μο- νάδας -1, ὅσας μονάδας 1 ἔχει ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων τὴν τάξιν τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν.

Ἔστω π. χ. τὸ δεκαδικὸν κλάσμα

$$0,007589$$

Ἐὰν τοῦτο πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 1000 καὶ διαιρεθῇ ἐπίσης διὰ 1000 δὲν μεταβάλλεται καὶ ἑπομένως γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{7,589}{1000}$$

ὥστε ὁ λογάριθμος αὐτοῦ εἶναι

$$\text{λογ}\ 7,589-3$$

ἐπειδὴ δὲ ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμητοῦ ἔχει χαρακτηριστικὸν 0, ἔπεται, ὅτι τοῦ δοθέντος κλάσματος ὁ λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικὸν -3, ὅπερ γράφεται συμβολικῶς ὧδε $\bar{3}$, τιθεμένου τοῦ πλὴν—ἄνωθεν τοῦ χαρακτη- ριστικοῦ.

Ὁμοίως ὁ λογάριθμος τοῦ 0,7 ἔχει χαρακτηριστικὸν $\bar{1}$, ὁ λογάριθμος τοῦ 0,0000384 ἔχει χαρακτηριστικὸν $\bar{5}$.

83. Ἐὰν ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ διὰ 10, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ δὲν μεταβάλλεται.

Ἐὰν π. χ. ἦναι

$$\text{λογ}\ A=6,56783,$$

εἶναι καὶ $\text{λογ}\ (10.A)=\text{λογ}\ 10+\text{λογ}\ A=1+6,56783$

καὶ $$\text{λογ}\ \frac{A}{10}=\text{λογ}\ A-\text{λογ}\ 10=6,56783-1$$

ἤτοι μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν μεταβάλλεται, οὐχὶ δὲ καὶ τὸ δεκαδικὸν μέρος.

Ἐντεῦθεν γίνεται φανερόν, ὅτι τὸ μὲν δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου ὁρίζει μόνον τὴν σειρὰν τῶν σημαντικῶν ψηφίων, δι᾽ ὧν γράφεται ὁ ἀριθμός, τὴν δὲ ἀξίαν ἑκάστου ὁρίζει τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ.

84. Ἐν γένει δὲ οἱ λογάριθμοι τῶν μικροτέρων τῆς μονάδος ἀριθμῶν εἶναι ἀρνητικοὶ (ἐδ. 78). Ἀλλὰ τοὺς ὅλως ἀρνητικοὺς λογαρίθμους τρέπομεν συνήθως εἰς ἄλλους, ὧν μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος, ἤτοι τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτῶν, εἶναι ἀρνητικόν, τὸ δὲ δεκαδικὸν μέρος θετικόν.

Ἔστω π. χ. ὁ ὅλως ἀρνητικὸς λογάριθμος

$$-3,43217$$

Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς αὐτὸν $+1$ καὶ -1, ὅπερ δὲν μεταβάλλει αὐτόν, λαμβάνομεν

$$-4+1-0,43217$$

καὶ ἀφαιροῦντες τὸ δεκαδικὸν μέρος ἀπὸ τῆς θετικῆς μονάδος $+1$ εὑρίσκομεν

$$-4+0,56783$$

ὅπερ γράφεται ὡς ἑξῆς

$$\overline{4},56783$$

ἤτοι γράφεται τὸ ἀρνητικὸν σύμβολον — ὑπεράνω τοῦ χαρακτηριστικοῦ, ἵνα δηλωθῇ, ὅτι μόνον αὐτὸ εἶναι ἀρνητικόν.

Ἐντεῦθεν δὲ συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

85. Ἵνα τραπῇ λογάριθμος ὅλως ἀρνητικὸς εἰς ἄλλον, οὗτινος μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι ἀρνητικόν, αὐξάνεται τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ κατὰ μονάδα 1 καὶ γράφεται τὸ σύμβολον — ὑπεράνω αὐτοῦ, μετὰ δὲ ταῦτα ἀφαιρεῖται τὸ δεκαδικὸν μέρος ἀπὸ τῆς μονάδος 1.

Ἡ δὲ ἀφαίρεσις τοῦ δεκαδικοῦ μέρους ἀπὸ τῆς μονάδος γίνεται ἀμέσως, ἐὰν τὸ τελευταῖον σημαντικὸν ψηφίον αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 10, τὰ δὲ λοιπὰ ψηφία πάντα ἀπὸ τοῦ 9.

Κατὰ ταῦτα εἶναι

$$-2,58607=\overline{3},41393,\quad -1,69800=\overline{2},30200$$

* 86. Ὁ λογάριθμος κατὰ τὴν βάσιν 10 παντὸς ἀριθμοῦ

συμμέτρου θετικοῦ, ὅστις δὲν εἶναι ἀκεραία δύναμις τοῦ 1
εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός.

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 2· λέγω, ὅτι ὁ λογάριθμος αὐτοῦ κατὰ τ
βάσιν 10 εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός, ἤτοι εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἔχ
ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία οὐχὶ περιοδικά.

Διότι, ὅταν λαμβάνηται ὡς βάσις τῶν λογαρίθμων ὁ 10, ὁ λογάριθμ
τοῦ 2 ὁρίζεται κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἐκ τῆς ἰσότητος

$$10^x=2,$$

ἐξ ἧς

$$x=\text{λογ}2,$$

Ἡ δὲ τιμὴ τοῦ x δύναται νὰ εὑρεθῇ κατὰ προσέγγισιν ὡς ἑξῆς.

Τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ x, ἤτοι τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμο
τοῦ 2, ἐὰν παρασταθῇ διὰ τοῦ ρ, εἶναι

$$\rho<x<\rho+1$$

καὶ

$$10^\rho<10^x<10^{\rho+1}$$

ἢ

$$10^\rho<2<10^{\rho+1} \qquad (\text{διότι } 10^x=2)$$

ὅθεν

$$\rho=0 \qquad (\text{διότι } 1<2<10)$$

Ὁμοίως, ἐὰν ὁ x ἔχῃ ρ_1 δέκατα ἐν συνόλῳ, εἶναι

$$\frac{\rho_1}{10}<x<\frac{\rho_{1+1}}{10}$$

ἤτοι

$$\rho_1<10x<\rho_{1+1}$$

καὶ

$$10^{\rho_1}<10^{10x}<10^{\rho_1+1}$$

ἢ

$$10^{\rho_1}<2^{10}<10^{\rho_1+1} \qquad (\text{διότι } 10^{10x}=(10^x)^{10}=2^{10})$$

ἢ καὶ

$$10^{\rho_1}<1024<10^{\rho_1+1} \qquad (\text{διότι } 2^{10}=1024)$$

ὅθεν

$$\rho_1=3 \qquad (\text{διότι } 1000<1024<10000)$$

ὥστε ὁ λογ 2 ἔχει 3 δέκατα ἐν συνόλῳ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ λογ 2 ἔχει 30 ἑκατοστὰ ἐν συνόλῳ
» » » » » 301 χιλιοστὰ »
» » » » » 3010 μυριοστὰ »
» » » » » 30103 ἑκατομμυρ. »

καὶ οὕτω καθεξῆς· Διότι:

ὁ 2^{100} ἔχει 31 ψηφία
ὁ 2^{1000} » 302 »
ὁ 2^{10000} » 3011 »
ὁ 2^{100000} » 30104 »

καὶ οὕτω καθεξῆς.

Περὶ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.

87. Ὅπως καταστῶσι διὰ τῶν λογαρίθμων ἁπλούστεραι αἱ πράξεις, ὡς ἀνωτέρω ἐρρήθη, εἶναι ἀνάγκη νὰ κατασκευασθῇ πίναξ περιέχων τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν. Τοιοῦτοι δὲ πίνακες κατεσκευάσθησαν καὶ περιέχουσι τοὺς λογαρίθμους ἀκεραίων μόνον ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐφεξῆς μέχρι τινὸς κατὰ τὴν βάσιν 10.

Ἐπειδὴ δὲ μόνον αἱ σύμμετροι δυνάμεις τοῦ 10 ἔχουσι λογαρίθμους συμμέτρους ἀριθμοὺς (ἐδ. 79,3), αὗται δέ, πλὴν τῶν ἐχουσῶν ἀκέραιον ἐκθέτην, εἶναι πᾶσαι ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ (ἐδ 76) συνάγεται, ὅτι πλὴν τῶν ἀριθμῶν 1, 10, 10^2, 10^3, κλ. πάντων τῶν ἄλλων ἀκεραίων ἀριθμῶν οἱ λογάριθμοι εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ καὶ ἔχουσιν ἄρα ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία οὐχὶ περιοδικά.

Οἱ λογαριθμικοὶ πίνακες περιέχουσι κατ' ἀνάγκην ἑκάστου λογαρίθμου τὰ δεκαδικὰ ψηφία μέχρι τινὸς καὶ ἑπομένως οἱ λογάριθμοι μόνον κατὰ προσέγγισιν εὑρέθησαν καὶ ἐγράφησαν εἰς τοὺς πίνακας. Ἡ δὲ προσέγγισις αὕτη ἐπαρκεῖ πρὸς τὰς συνήθεις ἐφαρμογὰς τῶν λογαρίθμων.

Ἡ εὕρεσις τῶν λογαρίθμων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν γίνεται μὲν καὶ ὡς ἀνωτέρω ἐδείχθη, ἀλλ' ἡ ἀνωτέρα Μαθηματικὴ παρέχει πολλῷ εὐκολωτέρους τρόπους πρὸς εὕρεσιν αὐτῶν. Ἀρκεῖ δὲ νὰ ὑπολογισθῶσιν οἱ λογάριθμοι τῶν πρώτων ἀριθμῶν· διότι τῇ βοηθείᾳ τῆς πρώτης ἰδιότητος τῶν λογαρίθμων οἱ λογάριθμοι τῶν μὴ πρώτων ἀριθμῶν ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν λογαρίθμων τῶν πρώτων παραγόντων αὐτῶν.

Πίνακες τοῦ Λαλάνδου.

88. Οἱ πίνακες τοῦ Λαλάνδου οἱ ἐκδιδόμενοι ὑπὸ Dupuis περιέχουσι τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι 10000 μετὰ πέντε δεκαδικῶν ψηφίων.

Αἱ μὲν δεκάδες τῶν ἀριθμῶν εὑρίσκονται ἐν τῇ στήλῃ, ἐν τῇ κορυφῇ τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ γράμμα N (ἀρχικὸν τῆς λέξεως Nombres), αἱ δὲ μονάδες αὐτῶν εὑρίσκονται ἐν τῇ αὐτῇ ὁριζοντίᾳ σειρᾷ μετὰ τοῦ N. Ὁ δὲ λογάριθμος ἑκάστου ἀριθμοῦ εὑρίσκεται, ὅπου διασταυροῦνται αἱ δύο σειραὶ αἱ τὰς μονάδας καὶ τὰς δεκάδας αὐτοῦ ἔχουσαι. Ἐπειδὴ δὲ πολλοὶ ἐφεξῆς λογάριθμοι ἔχουσι κοινὰ τὰ δύο πρῶτα ψηφία, γράφονται ταῦτα ἅπαξ καὶ νοοῦνται ἐπαναλαμβανόμενα τὰ αὐτὰ μέχρι τινός.

Οὕτως εὑρίσκομεν (Dupuis, p. 21), ὅτι

λογ 6700=3,82607

λογ 6743=3,82885

λογ 6759=3,82988

λογ 6765=3,83027

λογ 6771=3,83065

λογ 6797=3,83288

ΣΗΜ. Ὁ ἀστερίσκος * ὅστις ἀπαντᾷ ἐνιαχοῦ, ἐμφαίνει, ὅτι τὰ παρα-λειπόμενα δύο πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία ἤλλαξαν καὶ πρέπει νὰ λαμβάνωνται τὰ ἀμέσως ἑπόμενα, ὡς συμβαίνει ἐν τῷ λογαρίθμῳ τοῦ ἀριθμοῦ 6765.

Ἐν δὲ τῇ πρώτῃ σελίδι τῶν πινάκων τούτων περιέχονται οἱ λογάριθμοι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 100 κατὰ σειράν· τοῦτο δέ, ὅπως εὑρίσκωνται ταχύτερον οἱ λογάριθμοι αὐτῶν.

Χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.

89. Πρὸς χρῆσιν τῶν λογαριθμικῶν πινάκων δύνανται νὰ ἐμφανίζωνται δύο προβλήματα:

1) Δοθέντος ἀριθμοῦ, εὑρεῖν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ.

2) Δοθέντος λογαρίθμου, εὑρεῖν τὸν ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμόν.

1ον Πρόβλημα.

Δοθέντος ἀριθμοῦ, εὑρεῖν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ.

90. Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου διακρίνονται δύο τινά.

α΄) Ἡ εὕρεσις τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου.

β΄) Ἡ εὕρεσις τοῦ δεκαδικοῦ μέρους αὐτοῦ.

Καὶ τὸ μὲν χαρακτηριστικὸν εὑρίσκεται ἀμέσως (ἐδ. 81).

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους πρῶτον καθίσταται ἀκέραιος ὁ ἀριθμὸς παραλειπομένης τῆς ὑποδιαστολῆς (ἐὰν ὑπάρχῃ)· διότι τὸ ζητούμενον δεκαδικὸν μέρος δὲν μεταβάλλεται, ὅταν ὁ ἀριθμὸς πολλαπλασιάζηται ἐπὶ 10, 100, 1000 κλ. (ἐδ. 83)· εἶτα δὲ διακρίνονται δύο περιπτώσεις.

1ον) Ὅταν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ πλείονα τῶν τεσσάρων ψηφίων, εὑρίκεται ἐν τοῖς πίναξι καὶ ἑπομένως εὑρίσκεται καὶ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ, π.χ.

λογ 6=0,77815

λογ 52=1,71600

λογ 110=2.04139

λογ 3535=3,54839

λογ 6700=3,82607

λογ 7,85=0,89487

λογ 0,703=$\overline{1}$,84696

λογ 0,006958=$\overline{3}$,84248

λογ 0,08914=$\overline{1}$.94007

2α) Ὅταν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ ψηφία πλείονα τῶν τέσσάρων, χωρίζονται τὰ τέσσαρα πρῶτα δι' ὑποδιαστολῆς.

Ἔστω π.χ. ὁ πενταψήφιος ἀριθμὸς 45263. Γράφεται 4598,3, ὅπερ οὐδόλως μεταβάλλει τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου, (ἐδ. 83).

ἐπειδὴ δὲ

$$4526<4526,3<4527$$

καὶ εἶναι

λογ 4526=3,65571

λογ 4527=3,65581,

ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων τούτων εἶναι 10 (μονάδες τῆς τελευταίας τάξεως)· ἀλλὰ καὶ ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 4527 καὶ 4528 εἶναι ὡσαύτως 10, ὥστε δυνάμεθα νὰ δεχώμεθα, ὅτι ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν· καὶ τότε σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Πρὸς αὔξησιν 1 ἀντιστοιχεῖ αὔξησις 10 τῶν ἀντιστοίχων λογαρίθμων

» » 0,3 » » 10.0,3 » »

Ὅθεν πρέπει νὰ προστεθῶσι τρεῖς μονάδες τῆς τελευταίας τάξεως εἰς τὸν λογάριθμον τοῦ 4526, ὅπως ληφθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ 4526,3, ὅστις ἄρα εἶναι 3,65574 καὶ ἑπομένως

λογ 45263=4,65574.

Ἔστω προσέτι ὁ ἀριθμὸς 6,57832. Γράφεται 6578,32· ἐπειδὴ δὲ

$$6578<6578,32<6579$$

καὶ

λογ 6578=3,81809

λογ 6579=3,81816

Πρὸς αὔξησιν 1 ἀντιστοιχεῖ αὔξησις 7 τῶν ἀντιστοίχων λογαρίθ
» » 0,32 » » $0,32.7=2.24$ » »

Ὅθεν πρέπει νὰ αὐξηθῇ κατὰ 2,24 μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως λογάριθμος τοῦ 6578, ὅπως εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ 6578, ὅστις εἶναι

$$\text{λογ}\ 6578{,}32=3{,}81811\ 24$$

ΣΗΜ. Ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων δύο ἐφεξῆς ἀκεραίων ἀριθμ δὲν μένει πάντοτε ἡ αὐτή, ἀλλ' ἐλαττοῦται αὐξανομένων τῶν ἀριθμ ὥστε δὲν εἶναι ἀκριβές, ὅτι ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλο τῆς αὐξήσεως τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ τοιαύτη δ φορὰ μένει συνήθως ἀμετάβλητος ἐπὶ πολλῶν ἀριθμῶν, δυνάμεθα νὰ δ χώμεθα κατὰ προσέγγισιν τὴν ἀναλογίαν, ἐφ' ἧς στηρίζεται ἡ ὡς ἀν τέρω εὕρεσις τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐχόντων πλείονα τῶν τε σάρων σημαντικὰ ψηφία.

2ον Πρόβλημα.

Δοθέντος λογαρίθμου, εὑρεῖν τὸν ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμόν.

91. Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου διακρίνονται δύο τινά.

α') Ἡ εὕρεσις τῶν ψηφίων, δι' ὧν κατὰ σειρὰν γράφ ται ὁ ἀριθμός.

β') Ὁ προσδιορισμὸς τῆς ἀξίας ἑκάστου ψηφίου.

Καὶ πρὸς εὕρεσιν μὲν τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ διακρίνονται δύο π ριπτώσεις.

1η) Ἐὰν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εὑρίσκηται τῷ πίνακι, εὑρίσκονται ἀπέναντι τὰ τέσσαρα ψηφία τοῦ ζητουμένου ἀρ θμοῦ, τὴν δὲ ἀξίαν ἑκάστου τῶν ψηφίων προσδιορίζει τὸ χαρακτηριστικό

Ἔστω π. χ. ὁ λογάριθμος 2,82898 τὸ δεκαδικὸν μέρος εὑρίσκετ ἐν τῷ πίνακι καὶ πρὸς αὐτὸ ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 6745. Ἐπειδὴ δὲ δοθεὶς λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικὸν 2, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει ἔχῃ ἀκέραιον μέρος τριψήφιον, ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι 674,5

Ὁμοίως εὑρίσκεται, ὅτι

πρὸς τὸν λογάριθμον	$0,81077$	ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς	6.468
» »	$\overline{1},97104$	»	»	0,9355
» »	$\overline{2},46015$	»	»	0,02885
» »	3,23603	»	»	1722
» »	4,34947	»	»	22360

2α) Ἐὰν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου δὲν εὑρίσκηται ἐν τῷ πίνακι, περιλαμβάνεται αὐτὸ μεταξὺ τῶν δεκαδικῶν μερῶν τῶν λογαρίθμων δύο ἐφεξῆς ἀριθμῶν.

Ἔστω π. χ. ὁ λογάριθμος 1,86583· τὸ δεκαδικὸν αὐτοῦ μέρος 86583 δὲν εὑρίσκεται ἐν τῷ πίνακι, ἀλλὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν δεκαδικῶν μερῶν 86581 καὶ 86587, ἤτοι

$$86581<86583<86587$$

Ἀλλὰ πρὸς τὰ δύο δεκαδικὰ μέρη 86581 καὶ 86587 ἀντιστοιχοῦσιν οἱ δύο ἐφεξῆς ἀριθμοὶ 7342, 7343. Ἡ δὲ διαφορὰ τῶν δεκαδικῶν τούτων μερῶν εἶναι 6· παραδεχόμενοι δὲ ὡς καὶ ἀνωτέρω, ὅτι ἡ αὔξησις τῶν δεκαδικῶν μερῶν τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Πρὸς αὔξησιν 6 τῶν λογαρ. ἀντιστοιχεῖ αὔξησ. 1 τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμ.

» 2. » » $\frac{2}{6}=0,33...$ » »

Ὥστε πρὸς τὸν δοθέντα λογάριθμον 1,86583 ἀντιστοιχεῖ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς 73,4233 (διότι ὁ δοθεὶς λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικὸν 1)

Ὁμοίως εὑρίσκεται, ὅτι πρὸς τὸν λογάριθμον $\overline{1}$,45386 ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 0,28435.

Σημ. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ὁ ἀντιστοιχῶν πρὸς δοθέντα λογάριθμον εὑρίσκεται κατὰ προσέγγισιν τόσῳ μεγαλειτέραν, ὅσῳ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ εἶναι μικρότερον. Καὶ ἐὰν μὲν τὸ χαρακτηριστικὸν ἦναι $\overline{1}$, εἶναι ἀκριβῆ τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ μέχρι τῶν ἑκατοντάκις χιλιοστῶν· ἐὰν δὲ ἦναι 0, μέχρι τῶν μυριοστῶν· ἐὰν δὲ 2, μέχρι τῶν ἑκατοστῶν· ἐὰν δὲ 5, ὁρίζεται ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς μόνον μέχρι τῶν δεκάδων αὐτοῦ, αἱ δὲ μονάδες αὐτοῦ εἶναι ἄγνωστοι.

Ἐὰν ὁ δοθεὶς λογάριθμος ἦναι ὅλως ἀρνητικός, τρέπεται πρῶτον εἰς ἡμιθετικόν, οὗτινος μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι ἀρνητικὸν (ἐδ. 85).

Ἐφαρμογαὶ τῶν λογαρίθμων.

1) Εὑρεῖν τὸ πηλίκον

$$x=\frac{42,567 . 521,62}{9,6843 . 0,00567}$$

Ἡ διάταξις τοῦ λογισμοῦ γίνεται ὡς ἑξῆς·

$$
\begin{aligned}
&\text{λογ } 42{,}567 = 1{,}62907 \\
&\text{λογ } 521{,}62 = 2{,}71735 \\
&-\text{λογ } 9{,}6843 = \overline{1}{,}01394 \quad \text{λογ } 9{,}6843 = 0{,}98606 \\
&-\text{λογ } 0{,}00567 = 2{,}24642 \quad \text{λογ } 0{,}00567 = \overline{3}{,}75358 \\
\hline
&\text{λογ } x = 5{,}60678 \\
&x = 404327{,}2
\end{aligned}
$$

2). Εὑρεῖν $x=\sqrt[6]{235{,}78}$

$$\text{λογ}x=\frac{1}{6}\text{λογ } 235{,}78$$

$$x=2{,}485523$$

3). Εὑρεῖν $x=\sqrt[5]{\frac{13}{16}}$

$$\text{λογ } x=\frac{1}{5}\cdot\left(\text{λογ } 13-\text{λογ } 16\right)$$

$$x=0{,}959322$$

4). Εὑρεῖν $x=\sqrt[3]{17705+\frac{2}{6}}$

$$\text{λογ } x=\frac{1}{3}\cdot(\text{λογ } 53116-\text{λογ } 3)$$

$$x=26{,}06362$$

5). Εὑρεῖν $x=\left(2\frac{5}{6}\right)^{9}$

$$\text{λογ } x=9.\ (\text{λογ } 17-\text{λογ } 6)$$

$$x=11767{,}34$$

6). Εὑρεῖν $x=\left(317\frac{3}{4}\right)^{0,6}$

$$\text{λογ } x=0{,}6.(\text{λογ } 1271-\text{λογ } 4)$$

$$x=31{,}71403$$

7). Εὑρεῖν $x=\sqrt[5]{\frac{7}{3}\sqrt[4]{6}}$

$$\text{λογ } x=\frac{1}{5}\left(\text{λογ } 7-\text{λογ } 3+\frac{1}{4}\text{λογ } 6\right)$$

$$x=1{,}295695$$

8). Εὑρεῖν $$x=243\sqrt{\frac{716,5}{\sqrt{2}}}$$

$$\lambda o\gamma\, x=\lambda o\gamma\ 243+\frac{1}{3}(\lambda o\gamma\ 716,5-\frac{1}{2}\lambda o\gamma\ 2)$$

$$x=1937,195$$

9) Εὑρεῖν $$x=\sqrt[3]{5,03}+\sqrt[5]{0,2}$$

$$\lambda o\gamma\ x'=\lambda o\gamma\sqrt[3]{5,03}=\frac{1}{3}\lambda o\gamma\ 5,03$$

$$\lambda o\gamma\ x''=\lambda o\gamma\sqrt[5]{0,2}=\frac{1}{5}\lambda o\gamma\ 0,2$$

$$x=x'+x''=2,438169$$

10). Εὑρεῖν $$x=\sqrt[16]{\frac{43+5\sqrt[3]{278}}{\sqrt[5]{17}}}$$

$$\lambda o\gamma\ x'=\lambda o\gamma\ 43$$

$$\lambda o\gamma\ x''=\lambda o\gamma\ 5+\frac{1}{3}\lambda o\gamma\ 278$$

$$\lambda o\gamma\ x=\frac{1}{16}\left(\lambda o\gamma(x'+x'')-\frac{1}{5}\lambda o\gamma\ 17\right)$$

$$x=1,209435$$

11). Εὑρεῖν $$3^x=177147$$

$$x.\ \lambda o\gamma\ 3=\lambda o\gamma\ 177147$$

$$x=\frac{\lambda o\gamma\ 177147}{\lambda o\gamma\ 3}=11$$

12). Εὑρεῖν $$2^x=769$$

$$x\ \lambda o\gamma\ 2=\lambda o\gamma\ 769$$

$$x=\frac{\lambda o\gamma\ 769}{\lambda o\gamma\ 2}=9,5868\ldots.$$

13). Εὑρεῖν $\left(\frac{3}{4}\right)^x = 51\frac{1}{2}$

$$x(\text{λογ } 3 - \text{λογ } 4) = \text{λογ } 103 - \text{λογ } 2$$

$$x = \frac{\text{λογ } 103 - \text{λογ } 2}{\text{λογ } 3 - \text{λογ } 4} = -13,701\ldots.$$

14). Εὑρεῖν $x = \sqrt[\nu]{\alpha^2 - \beta^2}$.

$$\text{λογ } x = \frac{1}{\nu}\left[\text{λογ }(\alpha+\beta) + \text{λογ.}(\alpha-\beta)\right]$$

15). Εὑρεῖν $\gamma = \alpha^{\mu y}.\ \beta^{\nu y}$

$$\text{λογ. } \gamma = \mu y.\ \text{λογ } \alpha + \nu y.\ \text{λογ } \beta = y\ (\mu\ \text{λογ } \alpha + \nu\ \text{λογ } \beta)$$

$$y = \frac{\text{λογ. } \gamma}{\mu\ \text{λογ } \alpha + \nu\ \text{λογ } \beta}$$

Παρατήρησις.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐφαρμογῶν καταφαίνεται ἤδη ἡ ἀπὸ τῶν λογαρίθμων ὠφέλεια· διότι δι' αὐτῶν ἐκτελοῦνται εὐκόλως πράξεις, αἵτινες ἄλλως εἶναι μακρόταται καὶ ἐπιπονώταται. Ὡς δὲ διὰ τῶν διαφόρων συστημάτων τῶν ἀριθμῶν καθίστανται αἱ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν πράξεις δυναταὶ πάντοτε (διατηρουμένων ἀμεταβλήτων τῶν γενικῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν), οὕτω διὰ τοῦ συστήματος τῶν λογαρίθμων καθίστανται εὐχερέστεραι αἱ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν πράξεις. Διὰ τοῦτο ἡ ἐπινόησις τῶν λογαρίθμων εἶναι μία τῶν εὐφυεστέρων καὶ ὑπὸ πρακτικὴν ἔποψιν μία τῶν ὠφελιμωτάτων ἐφευρέσεων τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος. Ἐν τοῖς ἑπομένοις καταδειχθήσεται ἔτι μᾶλλον ἡ ἀπὸ τῶν λογαρίθμων ὠφέλεια.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

Ὁρισμοί.

92. Ἄλγεβρα λέγεται ἡ γενικὴ Ἀριθμητική, ἥτις ἀσχολεῖται περὶ τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὰ ἐπ' αὐτῶν ζητήματα ἀνεξαρτήτως ἐν γένει τῶν ποσῶν ἢ μεγεθῶν, ἅτινα δύνανται νὰ ἀριθμῶσιν ἢ μετρῶσιν οἱ ἀριθμοί. Ἡ Ἄλγεβρα ἐρευνᾷ τὰς γενικὰς σχέσεις ἐπὶ οἱωνδήποτε ἀριθμῶν καὶ τὰς γενικὰς λύσεις τῶν ἐπ' αὐτῶν ζητημάτων.

Ἀλγεβρικὴ παράστασις ἢ ἀλγεβρικὸς τύπος λέγεται ἡ διὰ τῶν ἀριθμητικῶν συμβόλων παράστασις πράξεων ἐπὶ ἀριθμῶν γραφομένων δι' ἀραβικῶν ψηφίων καὶ γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου· οἷον

$$5\alpha^3-4\alpha^2\beta^4\gamma+8\gamma^3-\frac{1}{2}\delta+\delta^2\varepsilon$$

Οἱ ἀριθμητικοὶ παράγοντες $5, -4, 8, -\frac{1}{2}$, οἱ γεγραμμένοι πρὸ τῶν γραμμάτων καλοῦνται συντελεσταί. Ἐὰν δὲ δὲν ὑπάρχῃ συντελεστής, ἐννοεῖται τοιοῦτος ἡ μονὰς 1· ὥστε συντελεστὴς τοῦ γινομένου $\delta\varepsilon^2$ εἶναι ἡ 1· διότι $1.\delta^2\varepsilon=\delta^2\varepsilon$.

Μονώνυμον λέγεται πᾶσα ἀλγεβρικὴ παράστασις, ἐν ᾗ οὔτε πρόσθεσις οὔτε ἀφαίρεσις ὑπάρχει πρὸς ἐκτέλεσιν· οἷον

$$5\alpha\beta^2, -\frac{3\alpha\gamma^3}{\beta}, \sqrt{7\alpha^3\beta}, \frac{12\gamma}{\sqrt[3]{\alpha\beta}}, \alpha^2\beta\sqrt[5]{\gamma\delta^4}$$

Τούτων τὸ μὲν πρῶτον λέγεται ἀκέραιον μονώνυμον ὡς περιέχον μόνον πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τῶν γραμμάτων, τὸ δὲ δεύτερον λέγεται κλασματικὸν μονώνυμον ὡς περιέχον καὶ διαίρεσιν ἐπὶ τῶν γραμμάτων. Ἀμφότερα δὲ τὰ μονώνυμα ταῦτα λέγονται καὶ ῥητά· τὰ δὲ τρία τελευταῖα λέγονται ἄρρητα ὡς περιέχοντα ῥιζικά.

Διώνυμον λέγεται ἡ ἀλγεβρικὴ παράστασις ἡ ἀποτελουμένη διὰ προσθέσεως ἢ ἀφαιρέσεως δύο μονωνύμων· τριώνυμον δὲ καὶ ἐν γένει πολυώνυμον ἡ ἀποτελουμένη διὰ τῶν αὐτῶν πράξεων ὑπὸ τριῶν ἢ πλειόνων μονωνύμων· Οἷον

$$5\alpha^2\beta - \frac{2}{3}\gamma\delta, 3\alpha^2 - \beta^3 + \alpha\gamma^2, \qquad 8\alpha^3 - 2\alpha\beta + \frac{3}{4}\gamma^4 - 7\gamma\delta^2$$

τὸ πολυώνυμον λέγεται ἀκέραιον καὶ ῥητόν, ἐὰν τὰ ἐξ ὧν ἀποτελεῖται μονώνυμα, ἅτινα λέγονται ὅροι αὐτοῦ, ἦναι ἀκέραια καὶ ῥητά· οἷον

$$5\alpha^2\beta - 2\alpha^4\gamma + \frac{2}{5}\beta^3\delta$$

Βαθμὸς ἀκεραίου ῥητοῦ μονωνύμου πρός τι γράμμα αὐτοῦ λέγεται ὁ ἐκθέτης τοῦ γράμματος τούτου· οἷον τὸ μονώνυμον $5\alpha^3\beta^2\gamma\delta^6$ εἶναι πρὸς μὲν τὸ α τρίτου βαθμοῦ, πρὸς δὲ τὸ β δευτέρου, πρὸς δὲ τὸ γ πρώτου καὶ πρὸς τὸ δ ἕκτου βαθμοῦ.

ΣΗΜ. Πᾶν δὲ μονώνυμον εἶναι βαθμοῦ 0 πρὸς πᾶν γράμμα μὴ ἐν αὐτῷ περιεχόμενον· διότι πᾶσα δύναμις (πλὴν τοῦ μηδενὸς) ἔχουσα ἐκθέτην 0 εἶναι 1 (61,5).

Βαθμὸς ἀκεραίου ῥητοῦ μονωνύμου πρὸς πολλὰ γράμματα αὐτοῦ λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν αὐτῶν γραμμάτων· οἷον τὸ μονώνυμον $-2\alpha^4\beta^2\gamma^3\delta$ εἶναι πρὸς μὲν τὰ γράμματα α καὶ β τοῦ ἕκτου βαθμοῦ, πρὸς δὲ τὰ γράμματα α,β,γ τοῦ ἐνάτου, πρὸς δὲ τὰ γράμματα α,β,γ,δ τοῦ δεκάτου βαθμοῦ, κλ.

Βαθμὸς ἀκεραίου ῥητοῦ πολυωνύμου πρός τι γράμμα αὐτοῦ λέγεται ὁ μέγιστος τῶν βαθμῶν τῶν ὅρων αὐτοῦ πρὸς αὐτὸ τὸ γράμμα· οἷον τὸ πολυώνυμον

$$3x^4 - 2\alpha x^3 + 5\alpha^2 x^2 - \frac{8}{5}\alpha^7$$

εἶναι πρὸς μὲν τὸ x τοῦ τετάρτου βαθμοῦ πρὸς δὲ τὸ α τοῦ ἑβδόμου· καὶ πρὸς πᾶν ἄλλο γράμμα μὴ εὑρισκόμενον ἐν αὐτῷ εἶναι τοῦ 0 βαθμοῦ.

Ὁμογενὲς λέγεται πολυώνυμόν τι πρός τινα γράμματα, ἐὰν πάντες οἱ ὅροι αὐτοῦ ἦναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα· οἷον $2\alpha^2+3\beta^2-8\alpha\beta$ εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ πρὸς α καὶ β.

Τιμὴ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως λέγεται ὁ προκύπτων ἀριθμός, ὅταν τὰ ἐν αὐτῇ γράμματα ἀντικαθιστῶνται ὑπὸ δεδομένων ἀριθμῶν καλουμένων ἐπίσης τιμῶν τῶν γραμμάτων· οἷον ἡ παράστασις $3\alpha^2\beta$ διὰ μὲν τὰς τιμὰς $\alpha=3$ καὶ $\beta=1$ ἔχει τιμὴν $3.3^2.1=27$, διὰ δὲ τὰς τιμὰς $\alpha=-1, \beta=\frac{1}{2}$ ἔχει τιμὴν $3.(-1)^2.\frac{1}{2}=3.1.\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. Ἡ δὲ παράστασις $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2$ διὰ μὲν τὰς τιμὰς $\alpha=1, \beta=0, \gamma=2$ ἔχει τιμὴν $1^2+0^2-2^2=1-4=-3$· διὰ δὲ τὰς τιμὰς $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=0{,}1, \gamma=3$ ἔχει τιμὴν $\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(0{,}1)^2+3^2=\frac{1}{4}+0{,}01-9=-8{,}74$· διὰ δὲ τὰς τιμὰς $\alpha=\frac{1}{2}\beta$, $\beta=\frac{1}{3}\gamma$, $\gamma=1$ ἔχει τιμὴν

$$\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2-1^2=\frac{1}{36}+\frac{1}{9}-1=-\frac{31}{36}.$$

Ἀλγεβρικαὶ πράξεις λέγονται αἱ ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων δυνάμει τῶν γενικῶν ἰδιοτήτων τῆς ἰσότητος καὶ τῶν πράξεων γινόμενοι λογισμοί. Ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ ἰσχύουσιν ἀμετάβλητοι πάντες οἱ νόμοι τῆς ἰσότητος καὶ τῶν πράξεων ὡς καὶ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ. Ἐγκλείεται δὲ ἐν παρενθέσει πᾶσα ἀλγεβρικὴ παράστασις, ἐφ' ἧς γίνονται ἀλγεβρικαὶ πράξεις.

Ἴσαι λέγονται δύο ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις, ὅταν προκύπτωσιν ἐξ ἀλλήλων κατὰ τοὺς γενικοὺς νόμους τῆς ἰσότητος καὶ τῶν πράξεων· οἷον αἱ παραστάσεις $(\alpha+\beta-\gamma).\delta$ καὶ $\alpha\delta+\beta\delta-\gamma\delta$ εἶναι ἴσαι.

Ἐπειδὴ πᾶσα ἀφαίρεσις ἀριθμῶν σημαίνει πρόσθεσιν τῶν ἀντιθέτων αὐτοῖς ἀριθμῶν, πᾶν πολυώνυμον θεωρεῖται ὡς ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτοῦ.

Ὅμοιοι ὅροι λέγονται τὰ μόνον κατὰ τὸν συντελεστὴν διαφέροντα (ἐὰν διαφέρωσι) μονώνυμα· οἷον

$$5\alpha^4\beta^3\gamma, \quad \frac{2}{3}\alpha^4\beta^3\gamma, \quad 8\alpha^4\beta^3\gamma, \quad -5\alpha^4\beta^3\gamma.$$

Ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων πολυωνύμου τινὸς λέγεται ἡ ἀντικατάστασις αὐτῶν δι' ἑνὸς μόνου ὅρου ὁμοίου αὐτοῖς. Ἐὰν π. χ. πολυωνυμόν τι περιέχῃ τοὺς τέσσαρας ὁμοίους ὅρους

$$7\alpha^2\beta,\quad -5\alpha^2\beta,\quad -8\alpha^2\beta,\quad 5\alpha^2\beta$$

δύνανται νὰ ἀντικατασταθῶσιν οὗτοι ὑπὸ τοῦ ἑνὸς καὶ μόνου ὅρου τοῦ ὁμοίου αὐτοῖς $-\alpha^2\beta$· διότι $-5\alpha^2\beta$ καὶ $5\alpha^2\beta$ ἀποτελοῦσι 0, $7\alpha^2\beta$ καὶ $-8\alpha^2\beta$ ἀποτελοῦσι $-\alpha^2\beta$, ὡς $-5+5=0$, $7-8=-1$.

Αἱ τέσσαρες πράξεις ἐπὶ ἀλγεβρικῶν ἀκεραίων ῥητῶν πολυωνύμων.

Πρόσθεσις.

93. Πρόσθεσις μονωνύμων. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος μονωνύμων γράφονται αὐτὰ κατὰ σειρὰν συνδεόμενα διὰ τοῦ συμβόλου + τῆς προσθέσεως. Τὸ ἄθροισμα π. χ. τῶν μονωνύμων $4\alpha^3$, $5\alpha^2\beta$, $-8\beta^3$ εἶναι

$$4\alpha^3+5\alpha^2\beta+(-8\beta^3) \text{ ἢ } 4\alpha^3+5\alpha^2\beta-8\beta^3$$

94. Πρόσθεσις πολυωνύμων. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος δύο πολυωνύμων ἀποτελεῖται ἓν μόνον πολυώνυμον ἐκ πάντων τῶν ὅρων ἀμφοτέρων τῶν πολυωνύμων διατηρουμένου τοῦ σημείου ἑκάστου ὅρου καὶ ἀναγομένων τῶν ὁμοίων ὅρων· διότι πᾶν πολυώνυμον θεωρεῖται ὡς ἄθροισμα τῶν ὅρων, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται· ἄθροισμα δὲ προστίθεται εἰς ἕτερον ἄθροισμα, καὶ ἐὰν ἀποτελεσθῇ ἓν μόνον ἄθροισμα ἐκ πάντων τῶν προσθετέων ἀμφοτέρων τῶν ἀθροισμάτων.

Π. χ. τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πολυωνύμων

$$5\alpha^3-7\alpha^2\beta+6\alpha\beta\gamma-4\beta\gamma^2 \text{ καὶ } -3\alpha^2\beta-7\alpha\beta\gamma+5\beta\gamma^2$$

εἶναι

$$5\alpha^3-7\alpha^2\beta+6\alpha\beta\gamma-4\beta\gamma^2-3\alpha^2\beta-7\alpha\beta\gamma+5\beta\gamma^2$$

ἤ, ἀναγομένων τῶν ὁμοίων ὅρων,

$$5\alpha^3-10\alpha^2\beta-\alpha\beta\gamma+\beta\gamma^2$$

95. Τὸ ἄθροισμα δὲ πολλῶν πολυωνύμων εἶναι ἓν μόνον πολυώνυμον ἐκ πάντων τῶν ὅρων αὐτῶν, οἵτινες δύνανται νὰ ἀνάγωνται εἰς ὁμοίους ὅρους.

Π. χ. τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων

$$\begin{array}{r} 4\alpha^3-5\alpha^2\beta+7\beta^3 \\ 2\alpha^3+11\alpha^2\beta-8\beta^3 \\ -4\alpha^3+5\alpha\beta^2-8\beta^3 \\ \hline \end{array}$$

ναι τὸ πολυώνυμον $2\alpha^3+6\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2-9\beta^3$

Ὁμοίως εἶναι ἐν γένει

$$(\mathrm{A}-\mathrm{B}+\Gamma)+(\Delta+\mathrm{E}-\mathrm{Z}-\mathrm{H})=\mathrm{A}-\mathrm{B}+\Gamma+\Delta+\mathrm{E}-\mathrm{Z}-\mathrm{H}$$

Ἀφαίρεσις

96. Ἀφαίρεσις μονωνύμων. Ἡ διαφορὰ δύο μονωνύμων εἶναι ἡ πρόσθεσις τοῦ ἀντιθέτου ἀφαιρετέου μονωνύμου εἰς τὸ μειωτέον μονώνυμον. Π. χ. ἡ διαφορὰ τῶν δύο μονωνύμων α, β εἶναι $\alpha-\beta$. Ἡ διαφορὰ τῶν δύο μονωνύμων $7\alpha^2\beta^2$, $-25\alpha\beta\gamma^2$ εἶναι $7\alpha^2\beta^2+25\alpha\beta\gamma^2$.

97. Ἀφαίρεσις πολυωνύμων. Ἡ διαφορὰ δύο πολυωνύμων εἶναι ἡ πρόσθεσις τοῦ ἀντιθέτου ἀφαιρετέου πολυωνύμου εἰς τὸ μειωτέον πολυώνυμον. (Πολυώνυμόν τι λέγεται ἀντίθετον ἑαυτῷ, ἐὰν ἀλλαχθῶσι τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$ πάντων τῶν ὅρων αὐτοῦ διὰ τῶν ἀντιθέτων σημείων $-$ καὶ $+$, ἤτοι ἐὰν τραπῶσι τὰ $+$ εἰς $-$ καὶ τὰ $-$ εἰς $+$).

Π. χ. ἡ διαφορὰ τῶν δύο πολυωνύμων

$$5\alpha^3-7\alpha^2\beta+6\alpha\beta\gamma-4\beta\gamma^2 \text{ καὶ } -3\alpha^2\beta-7\alpha\beta\gamma+5\beta\gamma^2$$

εἶναι τὸ πολυώνυμον

$$5\alpha^3-7\alpha^2\beta+6\alpha\beta\gamma-4\beta\gamma^2+3\alpha^2\beta+7\alpha\beta\gamma-5\beta\gamma^2$$

ἤ, μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων,

$$5\alpha^3-4\alpha^2\beta+13\alpha\beta\gamma-9\beta\gamma^2$$

ὅτι δὲ τὸ πολυώνυμον τοῦτο εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο δοθέντων πολυωνύμων φαίνεται ἀμέσως· διότι εἶναι

$$\begin{array}{ll} \text{ἀφαιρετέος} & -3\alpha^2\beta-7\alpha\beta\gamma+5\beta\gamma^2 \\ \text{διαφορὰ} & 5\alpha^3-4\alpha^2\beta+13\alpha\beta\gamma-9\beta\gamma^2 \\ \hline \text{μειωτέος} & 5\alpha^3-7\alpha^2\beta+6\alpha\beta\gamma-4\beta\gamma^2 \end{array}$$

Ὁμοίως εἶναι ἐν γένει

$$(\mathrm{A}-\mathrm{B}+\Gamma)-(\Delta-\mathrm{E}+\mathrm{H}-\mathrm{Z})=\mathrm{A}-\mathrm{B}+\Gamma-\Delta+\mathrm{E}-\mathrm{H}+\mathrm{Z}$$

διότι $\mathrm{A}-\mathrm{B}+\Gamma-\Delta+\mathrm{E}-\mathrm{H}+\mathrm{Z}+\Delta-\mathrm{E}+\mathrm{H}-\mathrm{Z}=\mathrm{A}-\mathrm{B}+\Gamma$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὴν τιμὴν τοῦ διωνύμου

$3\alpha\beta - 2\gamma^2$ διὰ $\alpha=5,\ \beta=20, \gamma=4$. (Ἀπ. 26

2) Εὑρεῖν τὴν τιμὴν τοῦ πολυωνύμου x^3+5x^2+7x-6 διὰ $x=$
καὶ τοῦ πολυωνύμου

$x^4+\alpha x^3-\alpha^2x^2+\alpha^3x-\alpha^4$ διὰ $x=5,\ \alpha=3$ (Ἀπ. 36, 82

3) Εὑρεῖν τὴν τιμὴν τοῦ πολυωνύμου $\alpha x^2+\beta x^2-\alpha^2x+\beta^2x$
$-\alpha\beta x+\alpha^3-3\alpha^2\beta+\beta^3$ διὰ $x=5,\ \alpha=3,\ \beta=4$ (Ἀπ. 133).

4) Εὑρεῖν τὴν τιμὴν τοῦ $\dfrac{5x^2+48x-18}{2x^2-15x+27}$ διὰ $x=6$ καὶ τοῦ
$\dfrac{5x^3+12\alpha x^2+8\alpha^2x-9\alpha^3}{4x^2+7\alpha x-3\alpha^2}$ διὰ $x=2,\ \alpha=3$ (Ἀπ. 50, $2\dfrac{23}{31}$

5) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα

$$\begin{array}{l}
4\alpha^3-5\alpha^2\beta+7\alpha\beta^2-9\beta^3\\
-2\alpha^3+4\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2-4\beta^3\\
6\alpha^3-10\alpha^2\beta+8\alpha\beta^2+10\beta^3\\
-3\alpha^3-8\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2-8\beta^3
\end{array}$$

(Ἀπ. $5\alpha^3-19\alpha^2\beta+18\alpha\beta^2-11\beta^3$)

6) Εὑρεῖν τὴν διαφορὰν

$$\begin{array}{l}
15\alpha^4-18\alpha^3\beta+17\alpha^2\beta^2+11\alpha\beta^3-9\beta^4\\
7\alpha^4-13\alpha^3\beta-19\alpha^2\beta^2+20\alpha\beta^3-10\beta^4
\end{array}$$

(Ἀπ. $8\alpha^4-5\alpha^3\beta+36\alpha^2\beta^2-9\alpha\beta^3+\beta^4$)

7) Κεφάλαιον Α δραχμῶν διενεμήθη μεταξὺ τεσσάρων ἀνθρώπ
ὡς ἑξῆς: Ὁ πρῶτος ἔλαβεν α δρ, καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπολοίπου, ὁ δε
τερος β δρ. καὶ τὸ τρίτον τοῦ ὑπολοίπου, ὁ τρίτος γ δρ. καὶ τὸ τ
ταρτὸν τοῦ ὑπολοίπου· τέλος ὁ τέταρτος ἔλαβε πᾶν ὅ,τι ἔμεινε κατὰ τ
διανομὴν ταύτην. Ποῖον τὸ μερίδιον ἑκάστου τῶν τεσσάρων ἀνθρώπω

(Ἀπ. ὁ πρῶτος $\dfrac{A+\alpha}{2}$, ὁ δεύτερος $\dfrac{A-\alpha+4\beta}{6}$, ὁ τρίτ
$\dfrac{A-\alpha-2\beta+9\gamma}{12}$ καὶ ὁ τέταρτος $\dfrac{A-\alpha-2\beta-3\gamma}{4}$).

Πολλαπλασιασμός.

8. Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίων μονωνύμων. Ἵνα πολ-σιάσωμεν δύο μονώνυμα, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς συντελε-αὐτῶν, ἔπειτα γράφομεν κατόπιν τοῦ γινομένου τῶν συντελεστῶν τὰ ἐν τοῖς μονωνύμοις γράμματα καὶ ἕκαστον μετ' ἐκθέτου ἴσου ὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, οὓς ἔχει ἐν τοῖς μονωνύμοις.

ιότι πᾶν μονώνυμον εἶναι γινόμενον πολλῶν παραγόντων· ὥστε ὁ πλασιασμὸς δύο ἀκεραίων μονωνύμων εἶναι ὁ πολλαπλασιασμὸς γι-ου ἐπὶ γινόμενον παραγόντων καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενον αὐτῶν πάλιν μονώνυμον.

Ι. χ. τὸ γινόμενον τῶν δύο μονωνύμων $5\alpha^2\beta^3\gamma$ καὶ $4\alpha^3\beta\delta^3$ εἶναι

$\alpha^2\beta^3\gamma).(4\alpha^3\beta\delta^3)=5\alpha^2\beta^3\gamma.4\alpha^3\beta\delta^3=5.4\alpha^2.\alpha^3\beta^3\beta\gamma.\delta^3=20\alpha^5\beta^4\gamma\delta^3$

ὲ γινόμενον τῶν δύο μονωνύμων $2\alpha\beta^2\gamma$ καὶ $-5\alpha^3\beta\gamma^2\delta$ εἶναι

$$2.(-5)\alpha.\alpha^3\beta^2\beta\gamma\gamma^2\delta=-10\alpha^4\beta^3\gamma^3\delta.$$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὑρίσκεται καὶ τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε νύμων· διότι πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου τούτου ἀρκεῖ νὰ πολλαπλα-θῶσι τὰ δύο πρῶτα μονώνυμα, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν μονώνυμον ἐπὶ τὸ ν μονώνυμον· καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ ληφθῶσιν οὕτω πάντα μονώνυμα ὡς παράγοντες.

99. Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου πολυωνύμου ἐπὶ ἀκέ-ον μονώνυμον. Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν πολυώνυμον ἐπὶ μονώνυ- πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸ μο-μον καὶ ἀθροίζομεν τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα.

Διότι πᾶν πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτοῦ· ὥστε ὁ λαπλασιασμὸς πολυωνύμων ἐπὶ μονώνυμα ἀνάγεται εἰς τὸν πολλα-σιασμὸν μονωνύμων ἐπὶ μονώνυμα καὶ εἶτα εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν κῶν τούτων γινομένων, τὸ δὲ προκῦπτον γινόμενον εἶναι πάλιν πο-νυμον.

Π. χ. τὸ γινόμενον τῶν πολυωνύμων $2\alpha^3-4\alpha^2\beta-7\alpha\beta^2+2\gamma^3$ ἐπὶ μονώνυμον $-3\alpha\gamma^2$ εἶναι

$^3-4\alpha^2\beta-7\alpha\beta^2+2\gamma^3).(-3\alpha\gamma^2)=-6\alpha^4\gamma^2+12\alpha^3\beta\gamma^2+21\alpha^2\beta^2\gamma^2-6\alpha\gamma^5$

100. Πολλαπλασιασμὸς δύο ἀκεραίων πολυωνύμων. Ἵνα λαπλασιάσωμεν δύο πολυώνυμα, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ὅρον τοῦ

ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἐπὶ ἕκαστον ὅρον τοῦ ἄλλου καὶ ἀθροίζομεν τὰ ταῦτα γινόμενα.

Διότι πᾶν πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτοῦ· ὥστε λαπλασιασμὸς δύο πολυωνύμων ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸ νύμων ἐπὶ μονώνυμα καὶ εἶτα εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν μερικῶν γινομένων· τὸ δὲ προκῦπτον γινόμενον εἶναι πάλιν πολυώνυμον.

Πρὸς εὐχερεστέραν δὲ εὕρεσιν τοῦ γινομένου δύο πολυωνύμω τάσσονται τὰ πολυώνυμα ταῦτα κατὰ τὰς κατιούσας ἢ κα ἀνιούσας δυνάμεις ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ γράμματος τῶν δύο πολυω γράφεται ὁ πολλαπλασιαστὴς ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ ἄγετ αὐτοὺς ὁριζοντία γραμμή, ὑπὸ τὴν γραμμὴν δὲ ταύτην γράφεται τ μενον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πολλαπλασι ὑπὸ τὸ γινόμενον δὲ τοῦτο γράφεται τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπ στέου ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ οὕτως, ὥστε οἱ ὅροι νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ κατακορύφῳ στήλῃ· καὶ οὕτω κα μέχρις οὗ ὁ πολλαπλασιαστέος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ πάντας τοὺς τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· ὑπὸ δὲ τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα γράφετα ζοντία γραμμὴ καὶ ὑπ' αὐτὴν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, ὅπερ εἶναι τὸ γιν τῶν δύο πολυωνύμων.

Παραδείγματα.

1) Εὑρεῖν τὸ γινόμενον $(\alpha+\beta).(\alpha+\beta)$ καὶ τὸ $(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)$ κα $(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)$

$$\begin{array}{r}\alpha+\beta\\ \alpha+\beta\\ \hline \alpha^2+\alpha\beta\qquad\\ +\alpha\beta+\beta^2\\ \hline \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\end{array}\qquad\begin{array}{r}\alpha-\beta\\ \alpha-\beta\\ \hline \alpha^2-\alpha\beta\qquad\\ -\alpha\beta+\beta^2\\ \hline \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\end{array}\qquad\begin{array}{r}\alpha+\beta\\ \alpha-\beta\\ \hline \alpha^2-\alpha\beta\qquad\\ +\alpha\beta-\beta^2\\ \hline \alpha^2-\beta^2\end{array}$$

Ὥστε

Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο οἱωνδήποτε ἀ βρικῶν παραστάσεων ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων αὐ καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου αὐτῶν.

Τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς δύο ἀλγεβρικῶν παρασ σεων ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων αὐτῶν πλὴν τοῦ διπ σίου γινομένου αὐτῶν.

γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀλγεβρικῶν παραστά-
ἐπὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν ἀποτελεῖται ἐκ τῆς διαφορᾶς
τετραγώνων αὐτῶν.

Εὑρεῖν τὸ γινόμενον $(\alpha+\beta).(\alpha+\beta).(\alpha+\beta)$ καὶ τὸ γινόμενον
$(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)$.

$$\begin{array}{ll}
\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 & \alpha^2-2\alpha\beta+\beta \\
\alpha+\beta & \alpha-\beta \\
\hline
\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2 & \alpha^3-2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2 \\
\quad +\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3 & \quad -\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2-\beta^3 \\
\hline
\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 & \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3
\end{array}$$

ὥστε

κύβος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀλγεβρικῶν παραστάσεων
ἀποτελεῖται ἐκ τῶν κύβων αὐτῶν καὶ ἐκ τοῦ τριπλασίου τε-
τραγώνου τῆς πρώτης ἐπὶ τὴν δευτέραν καὶ ἐκ τοῦ τριπλα-
σίου τῆς πρώτης ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας.

κύβος τῆς διαφορᾶς δύο ἀλγεβρικῶν παραστάσεων ἀπο-
τελεῖται ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν κύβων αὐτῶν πλὴν τοῦ τρι-
πλασίου τετραγώνου τῆς πρώτης ἐπὶ τὴν δευτέραν καὶ ἐκ
τοῦ τριπλασίου τῆς πρώτης ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας.

). Εὑρεῖν τὸ γινόμενον τῶν δύο πολυωνύμων

$$-4\alpha^4+2\alpha^3\beta-5\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta^3 \quad \text{καὶ} \quad -4\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2+2\beta^2$$

διατεταγμένων κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ὡς πρὸς τὸ γράμμα α
κατὰ τὰς ἀνιούσας ὡς πρὸς τὸ γράμμα β.

$$\begin{array}{l}
-4\alpha^4+2\alpha^3\beta-5\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta^3 \\
-4\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2+2\beta^3 \\
\hline
+16\alpha^6\beta-8\alpha^5\beta^2+20\alpha^4\beta^3-8\alpha^3\beta^4 \\
\qquad +12\alpha^5\beta^2-6\alpha^4\beta^3+15\alpha^3\beta^4-6\alpha^2\beta^5 \\
\qquad\qquad -8\alpha^4\beta^3+4\alpha^3\beta^4-10\alpha^2\beta^5+4\alpha\beta^6 \\
\hline
16\alpha^6\beta+4\alpha^5\beta^2+6\alpha^4\beta^3+11\alpha^3\beta^4-16\alpha^2\beta^5+4\alpha\beta^6
\end{array}$$

ΣΗΜ. 1. Ἐκ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν εὑρίσκεται τὸ γινόμενον δύο ἀκε-
ν πολυωνύμων, συνάγεται, ὅτι ἔχει αὐτὸ πρὸ τῆς ἀναγωγῆς τόσους

ὅρους, ὅσας μονάδας 1 ἔχει τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐκφρα
τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ἀμφοτέρων τῶν πολυωνύμων· ἀλλὰ διὰ τ
γωγῆς δύναται τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ γινομένου νὰ κατασ
κρότερον.

ΣΗΜ. 2. Ἐν τῷ γινομένῳ δύο ἀκεραίων πολυωνύμων διατετα
κατὰ τὰς δυνάμεις ἑνὸς γράμματος εὑρίσκονται πάντοτε δύο ὅρ
πρὸς ἀλλήλους οὔτε πρὸς τοὺς λοιποὺς ὅμοιοι· εἶναι δὲ οὗτοι τὸ γ
νον τῶν πρώτων ὅρων τῶν πολυωνύμων καὶ τὸ γινόμενον τῶν τελευ
Διότι, ἐὰν τὰ πολυώνυμα ἦναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας
δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, οἱ μὲν πρῶτοι ὅροι αὐτῶν ἔχουσι τὰς με
δυνάμεις, οἱ δὲ τελευταῖοι τὰς ἐλαχίστας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμ
καὶ ἑπομένως δὲν δύνανται τὰ γινόμενα αὐτῶν νὰ ἀναχθῶσι μετ
λοιπῶν ὅρων τοῦ γινομένου· τοῦτο δύναταί τις νὰ ἴδῃ εὐκόλως καὶ
ἀνωτέρω παραδείγματα.

Ἐκ τούτων ἄρα συνάγεται, ὅτι τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμω
τοὐλάχιστον δύο ὅρους. Ὁ δὲ βαθμὸς τοῦ γινομένου πρὸς γράμ
ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων πρὸς τὸ
γράμμα.

ΣΗΜ. 3 Τὸ γινόμενον ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι ὁμογενὲς π
νυμον· ὁ δὲ βαθμός αὐτοῦ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν
γόντων.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὰ γινόμενα $(2\alpha^3\beta).\left(\frac{3}{4}\alpha\beta^4\right)$,

$(5\alpha^4\beta^2\gamma).\left(-\frac{1}{2}\alpha\beta^4\gamma^2\delta\right)$, $(7\alpha^5\beta^3\gamma\delta^2).(-2\alpha\beta^4\gamma\delta^3).\left(\frac{3}{4}\alpha^3\beta\gamma\right.$

$\left(\text{Ἀπ.}\quad \frac{3}{2}\alpha^4\beta^5,\ -\frac{5}{2}\alpha^5\beta^6\gamma^3\delta,\ -\frac{21}{2}\alpha^9\beta^8\gamma^3\delta^5\right).$

2) Εὑρεῖν τὸ γινόμενον

$$(5x^5-3\alpha x^3+5\alpha^2x^2+2\alpha^3x-4\alpha^4).(-4\alpha\beta^2x^3).$$

(Ἀπ. $-20\alpha\beta^2x^8+12\alpha^2\beta^2x^6-20\alpha^3\beta^2x^5-8\alpha^4\beta^2x^4+16\alpha^5\beta^2x^3$

3) Εὑρεῖν τὰ γινόμενα ἐπὶ $\alpha-\beta$ τῶν ἑξῆς πολυωνύμων

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2,\ \alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3,\ \alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4,$$
$$\alpha^5+\alpha^4\beta+\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+\alpha\beta^4+\beta^5$$

('Απ. $\alpha^3-\beta^3,\ \alpha^4-\beta^4,\ \alpha^5-\beta^5,\ \alpha^6-\beta^6$).

4) Εὑρεῖν τὰ γινόμενα ἐπὶ $(\alpha+\beta)$ τῶν ἑξῆς πολυωνύμων

$$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2,\ \alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta^3,$$
$$\alpha^4-\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^3+\beta^4,\ \alpha^5-\alpha^4\beta+\alpha^3\beta^2-\alpha^2\beta^3+\alpha\beta^4-\beta^5,$$
$$\alpha^6-\alpha^5\beta+\alpha^4\beta^2-\alpha^3\beta^3+\alpha^2\beta^4-\alpha\beta^5+\beta^6$$

('Απ. $\alpha^3+\beta^3,\ \alpha^4-\beta^4,\ \alpha^5+\beta^5,\ \alpha^6-\beta^6,\ \alpha^7+\beta^7$).

5) Δεῖξαι, ὅτι $[(\beta+\gamma)^2-\alpha^2].\ [\alpha^2-(\beta-\gamma)^2]=$
$(\alpha+\beta+\gamma).\ (\beta+\gamma-\alpha).\ (\alpha+\beta-\gamma).\ (\alpha+\gamma-\beta)$.

6) Δεῖξαι, ὅτι $(\alpha\alpha'+\beta\beta')^2+(\alpha\beta'-\alpha\beta')^2=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)$.

7) Δεῖξαι, ὅτι $(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2+(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2=$
$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2$.

8) Δεῖξαι, ὅτι $(\alpha\beta'-\beta\alpha').(\alpha\beta''-\beta\alpha'')+(\beta\gamma'-\gamma\beta')\ (\beta\gamma''-\gamma\beta'')+$
$+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma').(\gamma\alpha''-\alpha\gamma'')=$
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'')-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma').(\alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma'')$ Lagrange

9) Εὑρεῖν τὸ γινόμενον $(\alpha^{\mu}-\beta^{\rho}-2\gamma^{\nu}).(2\alpha^{\mu}-3\beta)$.

('Απ. $2\alpha^{2\mu}-2\alpha^{\mu}\beta^{\rho}-4\alpha^{\mu}\gamma^{\nu}-3\alpha^{\mu}\beta+3\beta^{\rho+1}+6\beta\gamma^{\nu}$).

Διαίρεσις.

101. Διαίρεσις ἀκεραίων μονωνύμων. Ἵνα διαιρέσωμεν μο-
υμον δι' ἑτέρου μονωνυμου, διαιροῦμεν τὸν συντελεστὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ
τελεστοῦ τοῦ διαιρέτου καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου ἑκάστου γράμ-
τος αὐτοῦ τὸν ἐκθέτην τοῦ αὐτοῦ γράμματος τοῦ διαιρέτου.

Διότι τὸ πηλίκον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινό-
ον τὸν διαιρετέον.

Καὶ ἐὰν μὲν τὸ διαιρετέον μονώνυμον περιέχῃ πάντα τὰ γράμματα
διαιρέτου μονωνύμου μετ' ἐκθέτου οὐχὶ ἐλάσσονος, τὸ πηλίκον εἶναι
έραιον μονώνυμον· εἰ δὲ μή, τὸ πηλίκον εἶναι κλασματικὸν μονώ-

νυμον· δυνάμενον νὰ ἁπλοποιηθῇ διὰ τῆς παραλείψεως τῶν κοινῶν πα
γόντων τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου.

Π. χ. τὸ πηλίκον τοῦ $24\alpha^5\beta^4\gamma^3\delta^2$ διὰ τοῦ $-3\alpha^3\beta^3\gamma\delta$ εἶναι

$$\frac{24\alpha^5\beta^4\gamma^3\delta^2}{-3\alpha^3\beta\gamma^2\delta}=-8\alpha^2\beta^3\gamma\delta$$

διότι $$(-8\alpha^3\beta^3\gamma^2\delta)(-3\alpha^2\beta\gamma^2\delta)=24\alpha^3\beta^4\gamma^3\delta^2$$

τὸ δὲ πηλίκον τοῦ $12\alpha^4\beta^3\gamma^2\delta$ διὰ τοῦ $5\alpha^3\beta^5\gamma\delta^3$ εἶναι

$$\frac{12\alpha^4\beta^3\gamma^2\delta}{5\alpha^3\beta^5\gamma\delta^3}=\frac{12\alpha\gamma}{5\beta^2\delta^2}$$

διότι

$$\frac{12\alpha\gamma}{5\beta^2\delta^2}.\,5\alpha^3\beta^5\gamma\delta^3=12\alpha^4\beta^3\gamma^2\delta$$

102. Διαίρεσις ἀκεραίου πολυωνύμου δι' ἀκεραίου μον
νύμου. Ἵνα διαιρέσωμεν πολυώνυμον διὰ μονωνύμου, διαιροῦμεν ἕκ
στον ὅρον τοῦ διαιρετέου πολυωνύμου διὰ τοῦ μονωνύμου καὶ ἀθροίζο
τὰ μερικὰ ταῦτα πηλίκα.

Διότι πᾶν πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτοῦ· ὥστε ἡ δι
ρεσις πολυωνύμου διὰ μονωνύμου ἀνάγεται εἰς τὴν διαίρεσιν μονωνύ
διὰ μονωνύμου καὶ εἶτα εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν μερικῶν τούτων πηλίκ
τὸ δὲ προκῦπτον πηλίκον εἶναι πολυώνυμον.

Π. χ. τὸ πηλίκον τοῦ πολυωνύμου $2\alpha^2\beta^3-8\alpha^3\beta^2+4\alpha\beta^4$ διὰ τοῦ
νωνύμου $2\alpha\beta^2$ εἶναι τὸ $\alpha\beta-4\alpha^2+2\beta^2$·

διότι $$(\alpha\beta-4\alpha^2+2\beta^2).\,2\alpha\beta^2=2\alpha^2\beta^3-8\alpha^3\beta^2+4\alpha\beta^4$$

ἐντεῦθεν φανερόν, ὅτι, ὅταν οἱ ὅροι πολυωνύμου ἔχωσι κοιν
τινα παράγοντα, τίθεται οὗτος ἐκτὸς παρενθέσεως, ἐντὸς
τῆς παρενθέσεως τίθεται τὸ πηλίκον τοῦ πολυωνύμου δ
τοῦ κοινοῦ παράγοντος τῶν ὅρων αὐτοῦ· τοῦτο δὲ λέγεται ἐξ
γωγὴ τῶν κοινῶν παραγόντων ἢ ὅρων ἐκτὸς παρενθέσεω

103. Διαίρεσις ἀκεραίου πολυωνύμου δι' ἀκεραίου πολυ
νύμου. Ἵνα διαιρέσωμεν πολυώνυμον δι' ἑτέρου πολυωνύμου, διατ
σομεν πρῶτον αὐτὰ κατὰ τὰς κατιούσας ἢ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνά
ἑνὸς κοινοῦ γράμματος αὐτῶν, εἶτα διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τ
διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου καὶ οὕτως εὑρίσκομεν
πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου· εἶτα δὲ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου

όμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ ίσκομεν ὑπόλοιπόν τι· μετὰ δὲ ταῦτα θεωροῦμεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο νέον διαιρετέον καὶ πράττομεν ἐπ᾽ αὐτοῦ ὅ,τι καὶ ἐπὶ τοῦ ἀρχικοῦ ιρετέου, ὅτε εὑρίσκομεν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ ὑπόλοιπόν τι. ωροῦμεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο ὡς νέον διαιρετέον καὶ ἐξακολου- ῦμεν οὕτω, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὸ ὑπόλοιπον 0, ὅπερ συμβαίνει τά τινας διαιρέσεις, ἐὰν τὸ διαιρετέον πολυώνυμον ἦναι διαιρετὸν τοῦ διαιρέτου πολυωνύμου.

Διότι ἐν πάσῃ διαιρέσει ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου τὸ πηλίκον· ἐπειδὴ δὲ ὁ διαιρετέος εἶναι πολυώνυμον καὶ ὁ διαιρέ- ς ἐπίσης, τὸ πηλίκον (ἐὰν ὑπάρχῃ) εἶναι ἐν γένει ἐπίσης πολυώνυμον. στε τὸ διαιρετέον πολυώνυμον εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου πολυωνύ- υ ἐπὶ τὸ πηλίκον πολυώνυμον. Ἀλλ᾽ ὅταν τὰ πολυώνυμα ἦναι διατε- γμένα κατὰ τὰς κατιούσας ἢ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμ- ιτος αὐτῶν, τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν πρῶ- ν ὅρον τοῦ πηλίκου εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου, ὅθεν ὁ πρῶτος ος τοῦ πηλίκου εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρετέου διὰ ῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου.

Ἐὰν δὲ ὁ διαιρέτης πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα πρῶτον ὅρον ῦ πηλίκου καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, τὸ ρισκόμενον ὑπόλοιπον εἶναι τότε γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς λοι- ὺς ὅρους τοῦ πηλίκου, ἤτοι ἐπὶ τὸ ἐκ τῶν λοιπῶν ὅρων τοῦ πηλίκου ιοτελούμενον πολυώνυμον, ὅθεν τὸ πολυώνυμον τοῦτο εἶναι τὸ πηλίκον ς διαιρέσεως τοῦ ὑπολοίπου διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ ἑπομένως ἡ διαί- σις ἀνάγεται ἤδη εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ ὑπολοίπου τούτου διὰ τοῦ διαι- του. Ὥστε ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ὁ ύτερος τῆς ἀρχικῆς· καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ (ἐὰν ὑπάρχῃ πο- ώνυμον πηλίκον) μία τῶν μερικῶν τούτων διαιρέσεων, εἰς ἃς ἀνάγεται ἐξ ἀρχῆς δοθεῖσα, δώσῃ τὸν τελευταῖον ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ ἀφήσῃ όλοιπον 0.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι ἡ διαίρεσις τῶν πολυωνύμων ἀνάγεται ς τὴν διαίρεσιν μονωνύμων· διότι ἐν ἑκάστῃ μερικῇ διαιρέσει μόνον οἱ ρῶτοι ὅροι διαιροῦνται.

Ἡ δὲ διάταξις τῆς πράξεως γίνεται, ὡς ἐκ τῶν ἑπομένων παρα- δειγμάτων φαίνεται.

Παραδείγματα.

1). Εὑρεῖν τὸ πηλίκον τοῦ $6\alpha^3-19\alpha^2\beta+21\alpha\beta^2-10\beta^3$ διὰ $3\alpha-5\beta$. Τὰ πολυώνυμα ταῦτα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιο δυνάμεις τοῦ γράμματος α καὶ κατὰ τὰς ἀνιούσας τοῦ β.

$$
\begin{array}{l|l}
6\alpha^3-19\alpha^2\beta+21\alpha\beta^2-10\beta^3 & 3\alpha-5\beta \\
\underline{-6\alpha^3+10\alpha^2\beta} & \overline{2\alpha^2-3\alpha\beta+2\beta^2} \\
\quad -9\alpha^2\beta+21\alpha\beta^2-10\beta^3 & \\
\quad \underline{+9\alpha^2\beta-15\alpha\beta^2} & \\
\qquad +6\alpha\beta^2-10\beta^3 & \\
\qquad \underline{-6\alpha\beta^2+10\beta^3} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

ὅπου τὰ εὑρισκόμενα γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ ἕκαστον ὅρον τοῦ λίκου, ἐπειδὴ πρέπει νὰ ἀφαιρεθῶσι, γράφονται μετ' ἐναντίων σημε (τρεπομένων τῶν $+$ εἰς $-$ καὶ των $-$ εἰς $+$) καὶ προστίθενται ἕκασ εἰς τὸν ἀντίστοιχον μερικὸν διαιρετέον.

2) Εὑρεῖν τὸ πηλίκον τοῦ $8x^5+10x^4-31x^3+22x^2-29x+12$ διὰ τοῦ $4x^3-5x^2+3x-4$.

$$
\begin{array}{l|l}
8x^5+10x^4-31x^3+22x^2-29x+12 & 4x^3-5x^2+3x-4 \\
\underline{-8x^5+10x^4-6x^3+8x^2} & \overline{2x^2+5x-3} \\
\quad 20x^4-37x^3+30x^2-29x+12 & \\
\quad \underline{-20x^4+25x^3-15x^2+20x} & \\
\qquad -12x^3+15x^2-9x+12 & \\
\qquad \underline{+12x^3-15x^2+9x-12} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

104. Ἐπειδὴ οἱ ὅροι τοῦ πηλίκου δύο πολυωνύμων διατεταγ νων κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις ἑνὸς κοινοῦ γράμματος αὐτῶν εὑρίσκ ται ἐκ τοῦ διαιρετέου καὶ ἐκ τῶν διαδοχικῶν ὑπολοίπων διαιρουμέν τῶν πρώτων ὅρων αὐτῶν διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, ἡ διαί σις δὲν περατοῦται 1) ὅταν ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου ἢ ὁ πρῶ ὅρος τινὸς τῶν ὑπολοίπων δὲν ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τ διαιρέτου καὶ 2) ὅταν οἱ ὅροι οὗτοι ἦναι μὲν διαιρετοὶ διὰ τοῦ πρώτ ὅρου τοῦ διαιρέτου, μηδέποτε δ' ὅμως εὑρίσκηται ὑπόλοιπον 0.

Ἐὰν δὲ τὰ πολυώνυμα ἦναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυ-
ιεις ἑνὸς κοινοῦ γράμματος αὐτῶν, ὁ βαθμὸς τῶν ὑπολοίπων πρὸς τὸ
ἰμμα τῆς διατάξεως βαίνει ἐλαττούμενος καὶ ἑπομένως δύναται νὰ
εθῇ ὑπόλοιπον βαθμοῦ κατωτέρου ἢ ὁ τοῦ διαιρέτου, ὅτε ἡ διαίρε-
διακόπτεται. Διὸ προτιμητέα ἡ διαίρεσις πολυωνύμων διατεταγμένων
τὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς κοινοῦ γράμματος αὐτῶν.

Παραδείγματα.

1)

$$\begin{array}{l|l} 15+4x-3x^2 & 3-4x+5x^2 \\ \cline{2-2} -15+20x-25x^2 & 5+8x+\frac{4}{3}x^2+\dots \\ \cline{1-1} \quad 24x-28x^2 & \\ \quad -24x+32x^2-40x^3 & \\ \cline{1-1} \qquad 4x^2-40x^3 & \\ \qquad -4x^2+\frac{16}{3}x^3-\frac{20}{3}x^4 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad \dots & \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{l|l} x^8-7x^7-4x^6 & x^3-4x \\ \cline{2-2} -x^8+4x^6 & x^5-7x^4-28x^2-112 \\ \cline{1-1} \quad -28x^5 & \\ \cline{1-1} \qquad -112x^3 & \\ \cline{1-1} \qquad\quad -448x & \end{array}$$

τε

$$\frac{x^8-7x^7-4x^6}{x^3-4x}=x^5-7x^4-28x^2-112-\frac{448x}{x^3-4x}$$

ΣΗΜ. 1. Ἐὰν τὸ πηλίκον διαιρέσεως δύο πολυωνύμων ἔχῃ δύο μό-
δρους, εὑρίσκονται οὗτοι ἀμέσως· ὁ μὲν πρῶτος ἐκ τῆς διαιρέσεως
πρώτων, ὁ δὲ δεύτερος ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν τελευταίων ὅρων τῶν
υωνύμων.

ΣΗΜ. 2. Δοθέντων δύο πολυωνύμων, ὧν οἱ συντελεσταὶ εἶναι γράμ-
τα, δύναται νὰ ζητῆται, ὑπὸ ποίας συνθήκας τὸ ἓν πολυώνυμον εἶναι
ιρετὸν διὰ τοῦ ἄλλου.

Ἔστω π. χ. τὸ πολυώνυμον $x^4+\alpha x^2+\beta$ καὶ τὸ πολυώνυμον
$-5x+6$. Διὰ διαιρέσεως εὑρίσκεται

$$
\begin{array}{r|r|rr|l}
x^4 \quad +\alpha & x^2 & & +\beta & x^2-5x+6 \\
+5x^3-6 & & & & \overline{x^2+5x+\alpha+19} \\
+25 & -30 & x & & \\
\hline
\alpha+19 & +5\alpha & & -6\alpha & \\
& +95 & & -114 & \\
\cline{2-2}
& 5\alpha+65 & & &
\end{array}
$$

τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι

$$(5\alpha+65)x+\beta-6\alpha-114$$

Ὅθεν, ἵνα ἦναι τελεία ἡ διαίρεσις αὕτη, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἦναι

$$5\alpha+65=0 \qquad \text{ἢ} \quad \alpha=-13$$

$$\text{καὶ} \quad \beta-6\alpha-114=0 \qquad \text{ἢ} \quad \beta=\ \ 36$$

Ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου πρὸς x διὰ $x-\alpha$.

105. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως πολυωνύμου δια-ταγμένου κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x διὰ τοῦ $x-$ εὑρίσκεται ἐξ αὐτοῦ τοῦ πολυωνύμου, ἐὰν ἀντὶ x τεθῇ α αὐτῷ.

Ἐὰν παρασταθῇ διὰ Α τὸ διαιρετέον πολυώνυμον, διὰ Β τὸ πη-κον καὶ διὰ Υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διὰ $x-\alpha$, εἶναι

(1) $$A=(x-\alpha).B+Y$$

Διότι ἐν τῇ ἐκτελέσει τῆς διαιρέσεως ἀφῃρέθη ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τὸ νόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, ἤτοι τὸ $(x-\alpha)$. Β, καὶ ἔμεινε ὑπόλοιπον Υ· ὥστε τὸ Α εἶναι ἄθροισμα τοῦ $(x-\alpha)$. Β καὶ τοῦ τοῦτο δὲ ἀληθεύει προδήλως οἱασδήποτε ὡρισμένας καὶ πεπερασμέ τιμὰς καὶ ἂν ἔχωσι τὰ γράμματα x καὶ α.

Ἀλλ' ἐὰν ὑποτεθῇ $x=\alpha$, ἐν τῇ ἰσότητι (1), τὸ μὲν γινόμε $(x-\alpha)$. Β μηδενίζεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον Υ μένει ἀμετάβλητον· διότι περιέχει τὸ x· τὸ δὲ πολυώνυμον Α μένει τὸ αὐτὸ περιέχον ἤδη ἀ τοῦ x τὸ α καὶ γράφεται πρὸς διάκρισιν A_α, ἤτοι ἡ ἰσότης (1) γίνε

$$A_\alpha=Y,$$

Αὕτη δὲ ἡ ἰσότης ἐκφράζει τὴν πρότασιν.

Ἐκ δὲ τῆς προτάσεως ταύτης πορίζόμεθα, ὅτι, ἐὰν ἀντικαθιστ νου τοῦ x ὑπὸ τοῦ α προκύπτῃ ἐκ τοῦ πολυωνύμου ἐξαμενον 0, τὸ πολυώνυμον εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $x-\alpha$.

Κατὰ ταῦτα τὸ πολυώνυμον x^3-5x+7 διὰ τοῦ $x-2$ διαιρούμε- δίδει ὑπόλοιπον $2^3-5.2+7=5$

Τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ x^4-2x^3+4x-1 διὰ τοῦ $+3$ εἶναι

$$(-3)^4-2.(-3)^3+4.(-3)-1$$

ἢ

$$81+54-12-1=122.$$

τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $x^\mu-\alpha^\mu$ διὰ τοῦ $x-\alpha$ εἶναι $-\alpha^\mu=0$· τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως εὑρισκόμενον εἶναι τὸ ὁμογενὲς λυώνυμον πρὸς x καὶ α

$$x^{\mu-1}+\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2 x^{\mu-3}+\ldots+\alpha^{\mu-2}x+\alpha^{\mu-1}.$$

Φανερόν, ὅτι πάντες οἱ ὅροι τοῦ πηλίκου τούτου ἔχουσι συντελεστὴν $+1$· καὶ αἱ μὲν δυνάμεις τοῦ x βαίνουσιν ἐλαττούμεναι, αἱ δὲ τοῦ α ξανόμεναι κατὰ μονάδα 1· ὁ δὲ βαθμὸς πάντων τῶν ὅρων πρὸς x καὶ εἶναι ὁ αὐτός, $\mu-1$.

Ἡ δὲ διαίρεσις τοῦ διωνύμου $x^{2\mu\pm1}+\alpha^{2\mu\pm1}$ διὰ τοῦ διωνύμου $x+\alpha$ δει ὡσαύτως ὑπόλοιπον 0, ὡς καὶ ἡ τοῦ $x^{2\mu}-\alpha^{2\mu}$ διὰ τοῦ $x+\alpha$.

Ἰδίᾳ δὲ εἶναι

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta, \qquad \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

106. Τὸ πηλίκον δύο οἱωνδήποτε ἀλγεβρικῶν παραστάσεων παρίσται ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὴν μίαν τῶν παραστάσεων παρονοαστὴν δὲ τὴν ἄλλην.

Αἱ τοιαῦται δὲ κλασματικαὶ παραστάσεις ἢ ἀλγεβρικὰ κλάσματα ουσι πάσας τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων· διότι καὶ ὁ ἀριθμηῆς καὶ ὁ παρονομαστὴς αὐτῶν, οἱαιδήποτε παραστάσεις καὶ ἂν ἦναι, παριστῶσιν ἀριθμούς τινας καὶ ἑπομένως πᾶσαι αἱ ἰδιότητες καὶ αἱ πρ ξεις, αἱ ἐπὶ τῶν συνήθων κλασμάτων γινόμεναι, γίνονται καὶ ἐπὶ τούτ καὶ δι' αὐτῶν αἱ παραστάσεις τρέπονται ἢ μετασχηματίζονται εἰς ἄλλ ἴσας πρὸς αὐτάς.

Παραδείγματα.

1) Τὸ πηλίκον $\frac{5\alpha^5\beta^2\gamma}{12\alpha^3\beta^2\gamma^2\delta^3}$ γίνεται ἁπλούστερον $\frac{5\alpha^2}{12\gamma\delta^3}$

2) Τὸ πηλίκον $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}$ μετασχηματίζεται εἰς

$$\frac{(\alpha-\beta).(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta).(\alpha-\beta)}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$$

3) Τὸ πηλίκον $\frac{4\alpha^4-8\alpha^3\beta+4\alpha^2\beta^2}{5\alpha^2+10\alpha\beta+5\beta^2}$ μετασχηματίζεται εἰς

$$\frac{4\alpha^2.(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)}{5(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)}=\frac{4\alpha^2(\alpha-\beta)^2}{5(\alpha+\beta)^2}$$

4) Τὸ πηλίκον $\dfrac{\dfrac{\alpha}{x-\beta}-\dfrac{\alpha}{x+\beta}}{2+\dfrac{1}{x-\beta}+\dfrac{\alpha^2}{x^2-\beta^2}}$ μετασχηματίζεται πολ

λαπλασιαζομένων ἀμφοτέρων τῶν ὅρων αὐτοῦ ἐπὶ $x^2-\beta^2$ εἰς

$$\frac{\dfrac{\alpha(x^2-\beta^2)}{x-\beta}-\dfrac{\alpha(x^2-\beta^2)}{x+\beta}}{2(x^2-\beta^2)+\dfrac{1\ (x^2-\beta^2)}{x-\beta}+\dfrac{\alpha^2(x^2-\beta^2)}{x^2-\beta^2}}=\frac{\alpha(x+\beta)-\alpha(x-\beta)}{2x^2-2\beta^2+x+\beta+\alpha^2}=$$

$$=\frac{2\alpha\beta}{2x^2+x+\alpha^2-2\beta^2+\beta}$$

5) Ἡ διαφορὰ $\frac{(\alpha+\gamma)^2}{\alpha^3-\gamma^3}-\frac{\alpha-\gamma}{\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2}$ μετασχηματίζεται εἰς

$$\frac{(\alpha+\gamma)^2}{\alpha^3-\gamma^3}-\frac{(\alpha-\gamma).(\alpha-\gamma)}{\alpha^3-\gamma^3}=\frac{(\alpha+\gamma)^2-(\alpha-\gamma)^2}{\alpha^3-\gamma^3}=$$

$$=\frac{(\alpha+\gamma+\alpha-\gamma).(\alpha+\gamma-\alpha+\gamma)}{\alpha^3-\gamma^3}=\frac{2\alpha\,.\,2\gamma}{\alpha^3-\gamma^3}=\frac{4\alpha\gamma}{\alpha^3-\gamma^3}$$

6). Ἡ παράστασις $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}-\frac{\beta}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$ μετασχηματίζεται εἰς

$$\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\beta-\beta^2+\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}=$$

$$=\frac{2\alpha^2-2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}$$

7). Τὸ γινόμενον $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}.\frac{\alpha\beta}{\alpha^3-\beta^3}$ μετασχηματίζεται εἰς

$$\frac{(\alpha-\beta).(\alpha+\beta).\alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2).(\alpha-\beta).(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}=\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha^2+\beta^2).(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}$$

8. Τὸ πηλίκον $\frac{2x^6-4x^5+5x^4-3x^2-3x+1}{x^4+2x-3}$ μετασχηματίζεται

ὰ διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ εἰς

$$x^2-4x+5+\frac{-4x^3+11x^2-25x+16}{x^4+2x-3}$$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα

$$\frac{\alpha^2}{\alpha-\beta}+\frac{\beta^2}{\beta-\alpha}$$ ('Απ. $\alpha+\beta$)

2) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα

$$\frac{\alpha^3}{-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta^3}{(\beta-\alpha).(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma^3}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$ ('Απ. $\alpha+\beta+\gamma$)

3) Εὑρεῖν, ὅτι $\frac{6\alpha\beta}{3\gamma-\delta}\left(\frac{\gamma+\delta}{4}-\frac{\delta}{3}\right)=\frac{\alpha\beta}{2}$

4) Εὑρεῖν τὸ πηλίκον $x^{3\nu}-y^{3\nu}$ διὰ $x^{\nu}-y^{\nu}$ ('Απ. $\alpha^2+\alpha\beta+$

5) Πότε ἡ διαφορὰ $x^{\mu}-\alpha^{\mu}$ εἶναι διαιρετὴ διὰ $x^{\nu}-\alpha^{\nu}$;

6) Εὑρεῖν τὴν τιμὴν ἑκάστου τῶν κλασμάτων

$$\frac{(x^2+1).(x-1)^2}{x^2(x-1)^2},\quad \frac{(x^3+2)(x-1)^2}{(x^2+4)(x-1)},\quad \frac{(x^4+x^2+3).(x-1)^2}{(x^4+2).(x-1)^3}$$

διὰ $x=1$. (Πρέπει νὰ εὑρεθῶσι πρότερον ἁπλούστερα ἀντίστοιχα κλ
σματα).

7) Δεῖξαι, ὅτι $\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}=\frac{x-1}{x+2}$

8) Δεῖξαι, ὅτι $\frac{14x^2-7\alpha x}{10\beta x-5\alpha\beta}=\frac{7x}{5\beta}$

9) Δεῖξαι, ὅτι $\frac{21\alpha^3\beta^2\gamma-9\alpha\beta^3\gamma^2}{15\alpha^2\beta^2\gamma+3\alpha^5\beta^4\gamma^2-12\alpha\beta^2\gamma}=\frac{7\alpha^2-3\beta\gamma}{5\alpha+\alpha^4\beta^2\gamma-4}$

10. Δεῖξαι, ὅτι $\left(\frac{\alpha+x}{\alpha-x}+\frac{\beta-x}{\beta+x}\right).\left(\frac{\alpha-x}{\alpha+x}+\frac{\beta+x}{\beta-x}\right)=$

$$=\frac{4(\alpha\beta+x^2)^2}{(\alpha^2-x^2)(\beta^2-x^2)}.$$

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ ΠΕΡΙΕΧΟΥΣΑΙ

Ὁρισμοί.

107. Αἱ ἰσότητες, ὧν τὰ μέλη ἔχουσιν ἐν γένει γράμματα διακρίνονται εἰς ταυτότητας καὶ εἰς ἐξισώσεις.

Ταυτότης λέγεται ἡ ἰσότης, ἐὰν μένῃ τοιαύτη διὰ πᾶσαν ὡρισμένην καὶ πεπερασμένην τιμὴν ἑκάστου τῶν γραμμάτων, ἅτινα δύναται νὰ περιέχῃ· οἷον

$$\alpha.\beta=\beta.\alpha, \qquad (\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$

διὰ πᾶσαν ὡρισμένην καὶ πεπερασμένην τιμὴν τοῦ α καὶ τοῦ β.

Ἐξίσωσις λέγεται ἡ ἰσότης, ἐὰν μένῃ τοιαύτη μόνον δι' ἁρμοδίας ὡρισμένας καὶ πεπερασμένας τιμὰς τοῦ γράμματος ἢ τῶν γραμμάτων, ἅτινα δύναται νὰ περιέχῃ· οἷον

$$5x=60 \text{ διὰ } x=12, \qquad \frac{2}{1-x}+1=\frac{x}{1+x} \text{ διὰ } x=-3$$

καὶ $2x+\alpha=1$, ἐὰν π. χ. $\alpha=-2$, διὰ $x=\frac{3}{2}$, ἢ καὶ διὰ $x=\frac{1-\alpha}{2}$.

Ἄγνωστοι τῆς ἐξισώσεως λέγονται τὰ γράμματα τὰ ἀντικαθιστάμενα ὑπὸ ὡρισμένων καὶ πεπερασμένων ἀριθμῶν, καλουμένων τιμῶν, ἵνα ἀληθεύῃ αὕτη. Ἐὰν δὲ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ δὲν ὑπάρχωσιν, ἡ ἐξίσωσις λέγεται ἀδύνατος.

Οἱ ἄγνωστοι παρίστανται συνήθως διὰ τῶν τελευταίων γραμμάτ του ἀλφαβήτου φ, χ, ψ, ω ἢ διὰ τῶν x, y, z.

Λύσις τῆς ἐξισώσεως λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστω Ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων ἀποτελεῖ τὸ κυριώτατον ἔργον τῆς Ἀλγέβρα διότι εἰς τοῦτο ἀνάγεται ἡ λύσις τῶν διαφόρων ἀριθμητικῶν προβλημάτω

Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων αἱ ἐπαληθεύουσαι τὰς ἐξισώσεις λέγονται κ λύσεις ἢ ῥίζαι αὐτῶν.

Ἰσοδύναμοι λέγονται δύο ἐξισώσεις πρὸς ἀλλήλας, ὅταν ἔχωσι τ αὐτὰς λύσεις, ἤτοι ὅταν αἱ αὐταὶ ὡρισμέναι καὶ πεπερασμέναι τιμαὶ τῶ ἀγνώστων τῶν ἐν αὐταῖς περιεχομένων ἐπαληθεύωσιν ἀμφοτέρας· ἐπιτρ πεται δὲ ἐν τῇ λύσει ἐξισώσεως οἱασδήποτε πᾶσα μεταβολὴ αὐτῆς, ὅτ ἄγῃ εἰς ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον αὐτῇ.

Βαθμὸς ἐξισώσεως, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἕκαστος τῶν ὅρων εἶναι ἢ ὡρισμέ νος ἀριθμὸς ἢ ῥητὸν ἀκέραιον μονώνυμον καὶ ὅμοιοι ὅροι δὲν ὑπάρχου λέγεται ὁ μέγιστος τῶν βαθμῶν τῶν μονωνύμων πρὸς τοὺς ἀγνώστο (92)· οἷον αἱ μὲν ἐξισώσεις

$$2x-3=4, \quad \alpha x+\beta y=\gamma$$

εἶναι τοῦ πρώτου βαθμοῦ. Ἡ δὲ ἐξίσωσις

$$5x^2+\alpha=4x+1$$

τοῦ δευτέρου βαθμοῦ καὶ ἡ ἐξίσωσις

$$xy^4-2x^3=y^2-1$$

τοῦ πέμπτου βαθμοῦ.

Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων.

108. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ὁ αὐτὸς ὡρισμένος καὶ πεπερασμένος ἀριθμός, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος αὐτῇ.

Ἐὰν παρασταθῶσι χάριν συντομίας διὰ A καὶ B τὰ δύο μέλη ἐξισώσεώς τινος, ἤτοι ἐὰν

$$A=B \tag{1}$$

ἦναι ἐξίσωσίς τις, λέγω, ὅτι, ἐὰν προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς ὁ αὐτὸς ὡρισμένος καὶ πεπερασμένος ἀριθμὸς Γ, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις

$$A+\Gamma=B+\Gamma \tag{2}$$

αι ἰσοδύναμος αὐτῇ, ἤτοι ὅτι αἱ αὐταὶ ὡρισμέναι καὶ πεπερασμέναι τι-
ὶ τῶν ἐν αὐταῖς ἀγνώστων ἐπαληθεύουσιν ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις
) καὶ (2).

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἀληθεύσῃ ἡ ἐξίσωσις (1) δι' ἁρμοδίων ὡρισμένων
ὶ πεπερασμένων τιμῶν τῶν ἐν αὐτῇ ἀγνώστων, ἤτοι ἐὰν τὰ δύο μέλη
τῆς καταστῶσι διὰ τῶν τιμῶν τούτων ὡρισμένοι καὶ πεπερασμένοι ἀρι-
οὶ ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, μένει ἡ ἰσότης, καὶ ὅταν προστεθῇ εἰς ἀμφοτέ-
ς τούτους τοὺς ἴσους πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὺς ὁ αὐτὸς ὡρισμένος καὶ
περασμένος ἀριθμὸς Γ· ὥστε ἀληθεύει καὶ ἡ (2) ἐξίσωσις διὰ τῶν αὐ-
ῶν ὡρισμένων καὶ πεπερασμένων τιμῶν τῶν ἀγνώστων, δι' ὧν καὶ ἡ (1).

Καὶ τἀνάπαλιν· ἐὰν ἀληθεύσῃ ἡ (2) ἐξίσωσις δι' ἁρμοδίων ὡρισμένων
ὶ πεπερασμένων τιμῶν τῶν ἐν αὐτῇ ἀγνώστων, ἤτοι ἐὰν τὰ δύο
λη αὐτῆς καταστῶσιν ὡρισμένοι καὶ πεπερασμένοι ἀριθμοὶ ἴσοι πρὸς
λήλους, μένει ἡ ἰσότης, καὶ ὅταν ἀφαιρεθῇ ἀπ' ἀμφοτέρων τούτων
ῶν ἴσων πρὸς ἀλλήλους ἀριθμῶν ὁ αὐτὸς ὡρισμένος καὶ πεπερασμένος
ιθμὸς Γ· ὥστε ἀληθεύει καὶ ἡ (1) ἐξίσωσις διὰ τῶν αὐτῶν ὡρισμένων
ὶ πεπερασμένων τιμῶν τῶν ἀγνώστων, δι' ὧν ἀληθεύει καὶ ἡ (2). Αἱ
ο ἄρα αὗται ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐπειδὴ δὲ πᾶσα ἀφαίρεσις ἀνάγεται εἰς πρόσθεσιν (25), ἕπεται, ὅτι,
ὶ ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐξισώσεως ὁ
ὐτὸς ὡρισμένος καὶ πεπερασμένος ἀριθμός, προκύπτει ἐξί-
ωσις ἰσοδύναμος αὐτῇ.

109. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ὁ προστιθέμενος ὡρισμένος καὶ πεπε-
ασμένος ἀριθμὸς Γ ἦναι ἀντίθετος ὅρῳ τινὶ τῆς ἐξισώσεως
=Β, ὁ ὅρος οὗτος ἀφανίζεται ἐκ τοῦ μέλους τῆς ἐξισώσεως,
ν ᾧ εὑρίσκεται, καὶ μετατίθεται εἰς τὸ ἕτερον μέλος αὐτῆς
ετ' ἐναντίου σημείου (τρεπομένου τοῦ + εἰς — ἢ τοῦ — εἰς +).
Ιουτέστι δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέλους ἐξι-
ώσεως ὅρον τινὰ εἰς τὸ ἕτερον, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὸ
ημεῖον αὐτοῦ, τρέποντες τὸ + εἰς —, ἢ τἀνάπαλιν.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις

$$5x-3=\frac{x}{5}+2+6x$$

Ἐν προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς ὁ 3, προκύπτει ἡ ἰσοδύναμος αὐτῇ ἐξίσωσις

$$5x=\frac{x}{5}+2+6x+3$$

Ὁμοίως, ἐὰν προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ὁ ὅρος —$6x$, προκ

$$5x-3-6x=\frac{x}{5}+2$$

Ἐν γένει δὲ δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν τοὺς ὅρους ἔχοντας τοὺς ἀγνώστους εἰς τὸ ἓν μέλος τῆς ἐξισώσ τοὺς δὲ λοιποὺς ὅρους εἰς τὸ ἄλλο μέλος αὐτῆς ἀλλάσ τες (ἐν ἀνάγκῃ) τὰ σημεῖα αὐτῶν διὰ τροπῆς τοῦ + εἰ ἢ τἀνάπαλιν.

Π. χ. ἡ ἐξίσωσις

$$7x-3=12+4x$$

ἰσοδυναμεῖ τῇ

$$7x-4x=12+3$$

ἢ τῇ

$$3x=15$$

110. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότερα μέλη ἐξισώσεως ἐπὶ τὸν αὐτὸν ὡρισμένον καὶ πεπερασμέ ἀριθμὸν (πλὴν τοῦ 0), προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύνα αὐτῇ.

Παραστήσωμεν χάριν συντομίας διὰ Α καὶ Β τὰ δύο μέλη ἐξισώσ τινος, ἤτοι ἔστω

$$A=B \tag{1}$$

ἐξίσωσίς τις· λέγω, ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ὡρισμένον καὶ πεπερασμένον ἀριθμὸν Γ (διάφο τοῦ 0), ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις

$$A.\Gamma=B.\Gamma \tag{2}$$

εἶναι ἰσοδύναμος αὐτῇ, ἤτοι ὅτι αἱ αὐταὶ ὡρισμέναι καὶ πεπερασμέ τιμαὶ τῶν ἐν αὐταῖς ἀγνώστων ἐπαληθεύουσιν ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσ (1) καὶ (2).

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἀληθεύσῃ ἡ ἐξίσωσις (1) δι' ἁρμοδίων ὡρισμέν καὶ πεπερασμένων τιμῶν τῶν ἐν αὐτῇ ἀγνώστων, ἤτοι ἐὰν τὰ δύο μέ αὐτῆς καταστῶσι διὰ τῶν τιμῶν τούτων ὡρισμένοι καὶ πεπερασμέ ἀριθμοὶ ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, μένει ἡ ἰσότης, καὶ ὅταν πολλαπλασιασθῶ φότεροι οὗτοι οἱ ἴσοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ὡρισμένον καὶ πεπερασμένον ἀριθμὸν Γ· ὥστε ἀληθεύει καὶ ἡ (2) ἐξίσωσις διὰ τῶν αὐτῶν ὡρισμένων καὶ πεπερασμένων τιμῶν τῶν ἀγνώστων, δι' ὧν καὶ ἡ (1).

Καὶ τἀνάπαλιν· ἐὰν ἀληθεύσῃ ἡ (2) ἐξίσωσις δι' ἁρμοδίων ὡρισμένων καὶ πεπερασμένων τιμῶν τῶν ἐν αὐτῇ ἀγνώστων, ἤτοι ἐὰν τὰ δύο μέλη αὐτῆς καταστῶσιν ὡρισμένοι καὶ πεπερασμένοι ἀριθμοὶ ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, μένει ἡ ἰσότης, καὶ ὅταν διαιρεθῶσιν ἀμφότεροι οὗτοι οἱ ἴσοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ ὡρισμένου καὶ πεπερασμένου ἀριθμοῦ Γ· ὥστε ἀληθεύει καὶ ἡ (1) ἐξίσωσις διὰ τῶν αὐτῶν ὡρισμένων καὶ πεπερασμένων τιμῶν τῶν ἀγνώστων, δι' ὧν ἀληθεύει καὶ ἡ (2). Αἱ δύο ἄρα αὗται ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐπειδὴ πᾶσα διαίρεσις (πλὴν τῆς διὰ τοῦ 0) ἀνάγεται εἰς πολλαπλασιασμὸν (19), ἕπεται, ὅτι, καὶ ἐὰν διαιρεθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως διὰ τοῦ αὐτοῦ ὡρισμένου καὶ πεπερασμένου ἀριθμοῦ, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος αὐτῇ.

ΣΗΜ. Ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀποδείξει ὑποτίθεται κυρίως, ὅτι ὁ πολλαπλασιαστὴς Γ ἔχει τιμὴν ὡρισμένην καὶ πεπερασμένην διάφορον τοῦ 0. Ἐὰν ὅμως ὁ Γ ἦναι παράστασίς τις περιέχουσα γράμματα ἢ ἀγνώστους τῆς δοθείσης ἐξισώσεως δύναται νὰ καταστῇ ἐν γένει ἡ 0 ἢ ∞ διὰ σύστημά τι τιμῶν τούτων καὶ ἑπομένως οἱ ἀνωτέρω συλλογισμοὶ ἐν γένει δὲν ἐφαρμόζονται.

Ὅταν Γ περιέχῃ τοὺς ἀγνώστους καὶ αἱ παραστάσεις Γ καὶ Α—Β ἦναι ἀκέραιαι πρὸς τοὺς ἀγνώστους τούτους, ἡ ἐξίσωσις

$$\Gamma.(A-B)=0$$

ἔχει πάσας τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$A-B=0$$

καὶ προσέτι πάσας τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$\Gamma=0$$

Διότι διὰ πᾶν σύστημα ὡρισμένων καὶ πεπερασμένων τιμῶν τῶν ἀγνώστων, τῶν δύο παραστάσεων Γ καὶ Α—Β ἐχουσῶν τιμὰς πεπερασμένας, ἐὰν ἡ ἑτέρα τῶν δύο τούτων τιμῶν ἦναι 0, τὸ γινόμενον

$$\Gamma.(A-B)$$

εἶναι ἐπίσης 0.

Τότε δὲ λέγεται, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (2) εἶναι γενικωτέρα τῆς ἐξισώ-

σεως (1) αἱ δὲ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\Gamma=0$ λέγονται ξέναι λύσεις εἰ
χθεῖσαι διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ὅταν δὲ ἡ μὲν παράστασις $A-B$ δὲν ἦναι ἀκεραία πρὸς τοὺς ἀγ
στους, ἡ δὲ Γ ἦναι ἀκεραία πρὸς αὐτούς, ἡ ἐξίσωσις (2)

$$\Gamma.(A-B)=0$$

ἔχει πάντοτε πάσας τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1)

$$A-B=0$$

Διότι τοῦ παράγοντος Γ λαμβάνοντος ὡρισμένην καὶ πεπερασμ
νην τιμὴν διὰ σύστημα τιμῶν τῶν ἀγνώστων, τὸ γινόμενον $\Gamma.(A-$
εἶναι 0 διὰ πᾶν σύστημα ὡρισμένων καὶ πεπερασμένων τιμῶν τῶν ἀγν
στων τῶν μηδενιζουσῶν τὸ $A-B$. Ἀλλὰ δὲν δύναταί τις ἐν γένει
βεβαιώσῃ, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (2) ἔχει προσέτι πάσας τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσε

$$\Gamma=0$$

διότι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ διά τινας ὡρισμένας καὶ πεπερασμένα
τιμὰς τῶν ἀγνώστων δυνατὸν ὁ μὲν παράγων Γ νὰ καταστῇ 0, ὁ δ
παράγων $A-B$ νὰ καταστῇ ∞· τότε δὲ ἡ τιμὴ τοῦ γινομένου $\Gamma.(A-B$
οὖσα ἀπροσδιόριστος δὲν δύναται ἐν γένει νὰ λεχθῇ, ὅτι εἶναι 0.

111. ΠΟΡΙΣΜΑ. Δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν πάντας τοὺ
παρονομαστὰς τῶν ὅρων ἐξισώσεως.

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πάντας τοὺς ὅρους αὐτῆ
ἐπὶ κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν.

Π. χ. ἡ μὲν ἐξίσωσις

(1) $$3x-\frac{3}{4}+\frac{x}{3}=4+\frac{2}{3}-\frac{5x}{12}$$

ἰσοδυναμεῖ (πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ 12) τῇ

(2) $$36x-9+4x=48+8-5x$$

ἡ δὲ ἐξίσωσις

(3) $$\frac{x}{x^2-9}+\frac{1}{x(x-3)}=\frac{2x-4}{x.(x+3)}$$

ἰσοδυναμεῖ (πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ $x(x-3)(x+3)$) τῇ

(4) $$x^2+x+3=(x-3).(2x-4).$$

ΣΗΜ. Ἡ μὲν ἐξίσωσις (1) εἶναι τῷ ὄντι ἰσοδύναμος τῇ (2). Ἡ δὲ
ἐξίσωσις (4) ἔχει ἀναγκαίως πάσας τὰς λύσεις τῆς (3), ἀλλὰ ἠδύνατο

έχη καὶ τὰς ξένας λύσεις τοῦ πολλαπλασιαστοῦ $x(x-3)(x+3)$, ι τὰς 0, 3, —3, ὅπερ ἐνταῦθα δὲν συμβαίνει καὶ ἑπομένως αἱ δύο σώσεις (3) καὶ (4) εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς ἀλλήλας (110, Σημ.).

Λύσις τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ τῶν περιεχουσῶν ἕνα μόνον ἄγνωστον.

112. Τὴν λύσιν ἐξισώσεως, ἕνα ἄγνωστον ἐχούσης, ἐπιχειροῦμεν ὡς εται.

1) Ἀπαλλάσσομεν αὐτὴν τῶν παρονομαστῶν, (ἐὰν ἔχῃ).

2) Ἐκτελοῦμεν τὰς σεσημειωμένας πράξεις, (ἐὰν ὦσι).

3) Χωρίζομεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τῶν ἐχόντων τὸν ἄγνωστον ταφέροντες τοὺς μὲν εἰς τὸ ἕτερον τῶν μελῶν, τοὺς δὲ εἰς τὸ ἕτερον ι ἐκτελοῦμεν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων ἐν ἑκατέρῳ τῶν μελῶν ὰν ὑπάρχωσι τοιοῦτοι).

Μετὰ τὰς πράξεις ταύτας πᾶσα πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις μεθ' ἑνὸς νώστου ἀνάγεται εἰς τὴν μορφὴν

(1) $$\alpha x=\beta$$

του α καὶ β εἶναι ἀριθμοὶ γνωστοὶ ἢ παραστάσεις γνωσταί.

Ἡ ἐξίσωσις $\alpha x=\beta$ εἶναι ἐν γένει ἰσοδύναμος τῇ δοθείσῃ, ἐξ ἧς προέυψεν.

Καὶ ἐὰν μὲν $\alpha \gtrless 0$ καὶ $\beta \gtrless 0$, ἔχομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1)

$$x=\frac{\beta}{\alpha} \qquad \left(\text{μία λύσις, ἡ } \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

ὰν δὲ $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$, ἔχομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1)

$$x=\frac{0}{0} \qquad (\text{ἄπειροι τὸ πλῆθος ἢ ἀόριστοι λύσεις})$$

ὰν δὲ $\alpha=0$ καὶ $\beta \gtrless 0$, ἔχομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1)

$$x=\frac{\beta}{0} \qquad (\text{ἀδύνατος ἡ ἐξίσωσις ἢ λύσις αὐτῆς τὸ } \infty)$$

ὰν δὲ τέλος $\alpha \gtrless 0$ καὶ $\beta=0$, ἔχομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1)

$$x=\frac{0}{\alpha}=0 \qquad (\text{μία λύσις, ἡ } 0)$$

Ἡ τελευταία αὕτη περίπτωσις εἶναι μερικὴ τῆς πρώτης.

113. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται, ὅτι τῶν ἐξισώσεων τ
πρώτου βαθμοῦ αἱ μὲν ἐπαληθεύονται ὑπὸ μιᾶς μόνης τιμ
τοῦ ἀγνώστου, αἱ δὲ ὑπὸ οὐδεμιᾶς, αἱ δὲ ὑπὸ ἀπείρων
πλῆθος τιμῶν καὶ εἶναι ταυτότητες.

Παραδείγματα.

1) Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$3(x-1)+\frac{3}{2}+\frac{3x}{4}=\frac{5(x+1)}{16}+26$$

Ἀπαλλάσσομεν αὐτὴν τῶν παρονομαστῶν πολλαπλασιάζοντες ἀμφ
τερα τὰ μέλη ἐπὶ 16, ὅτε γίνεται

$$48(x-1)+24+12x=5(x+1)+416$$

ἐκτελοῦμεν τὰς σεσημειωμένας πράξεις καὶ εὑρίσκομεν

$$48x-48+24+12x=5x+5+416$$

χωρίζομεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τῶν λοιπῶν καὶ ἔχομεν

$$48x+12x-5x=5+416+48-24$$

ἐκτελοῦμεν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ ἔχομεν

$$55x=445$$

καὶ τέλος εὑρίσκομεν

$$x=\frac{445}{55}=8+\frac{1}{11}$$

ὥστε ἡ μόνη λύσις ἢ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι ὁ ἀριθμὸς $8+\frac{1}{11}$
διότι ἀντικαθιστάμενος οὗτος ἀντὶ τοῦ x ἐν αὐτῇ ποιεῖ ἀμφότερα
μέλη ἀριθμοὺς ἴσους πρὸς ἀλλήλους.

2) Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$1+7x+\frac{2}{5}-2x+\frac{3x}{4}-2=6-\frac{2x}{5}+3+\frac{2}{5}$$

ἢ

$$5x+\frac{3x}{4}-1+\frac{2}{5}=9-\frac{2x}{5}+\frac{2}{5}$$

ιὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ 4.5 προκύπτει

$$100x+15x-20+8=180-8x+8$$

$$115x-12=188-8x$$

ιὰ χωρισμοῦ τῶν ὅρων προκύπτει

$$115x+8x=188+12$$

ι' ἀναγωγῆς προκύπτει

$$123x=200$$

αὶ

$$x=\frac{200}{123}=1+\frac{77}{123}$$

ὥστε μόνος ὁ ἀριθμὸς οὗτος λύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

3) Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{2-x}{5}-\frac{1}{3}+\frac{x}{6}=\frac{2(x-1)}{3}+\frac{x}{2}$$

ἢ

$$\frac{2-x}{5}+\frac{x}{6}-\frac{2(x-1)}{3}-\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$$

διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ 2.3.5 προκύπτει

$$6(2-x)+5x-20(x-1)-15x=10$$

ἢ

$$12-6x+5x-20x+20-15x=10$$

ἢ

$$-6x+5x-20x-15x=10-12-20$$

ἢ

$$-36x=-22$$

καὶ

$$x=\frac{22}{36}=\frac{11}{18}$$

ὥστε ὁ ἀριθμὸς $\frac{11}{18}$ εἶναι ἡ λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

4) Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{2x}{3}+\frac{5x}{6}+1=\frac{3x}{2}+6$$

ἢ

$$\frac{2x}{3}+\frac{5x}{6}-\frac{3x}{2}=5$$

προκύπτει διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ 6

$$4x+5x-9x=30$$

ἢ

$$0=30$$

ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος.

5) Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{2x}{3}-\frac{5x}{6}+3=7+\frac{13x}{30}-\frac{3x}{5}-4$$

ἢ

$$\frac{2x}{3}-\frac{5x}{6}-\frac{13x}{30}+\frac{3x}{5}=7-4-3$$

ἢ

$$20x-25x-13x+18x=0$$

ἢ

$$0=0$$

ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ταυτότης ἀληθεύουσα διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ

6) Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x}{\alpha-\beta}-\frac{5\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{2\beta x}{\alpha^2-\beta^2} \quad \left(\text{ὅπου } \alpha \gtrless \beta\right.$$

ἢ

$$\frac{x}{\alpha-\beta}-\frac{2\beta x}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{5\alpha}{\alpha+\beta}$$

διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ $\alpha^2-\beta^2$ προκύπτει

$$(\alpha+\beta)x-2\beta x=5\alpha(\alpha-\beta)$$

ἢ

$$(\alpha+\beta-2\beta)x=5\alpha(\alpha-\beta)$$

ἢ

$$(\alpha-\beta).\,x=5\alpha(\alpha-\beta)$$

καὶ

$$x=5\alpha$$

ὥστε τὸ μονώνυμον 5α εἶναι ἡ λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰς ἑπομένας ἐξισώσεις:

1) $$4x-\frac{2}{3}+\frac{x}{3}=5-\frac{x}{4}, \qquad \left(\text{'Απ.}\quad x=\frac{68}{55}\right)$$

2) $$5x+58-\frac{4x}{3}+7(x-10)=18+\frac{2x}{3}-4(x-10), \qquad \left(\text{'Απ.}\, x=5\right.$$

3) $\frac{x-3\alpha}{\beta-2\alpha}-4=-\frac{3(x-3\beta)}{\alpha-2\beta}$, ('Απ. $x=\alpha+\beta$)

4) $(\alpha+x).(\beta+x)-\alpha(\beta+\gamma)-x^2=\frac{\alpha^2\gamma}{\beta}$, $\left('\text{Απ}\quad x=\frac{\alpha\gamma}{\beta}\right)$

5) $\frac{\gamma x^\mu}{\alpha+\beta\chi}=\frac{\eta x^\mu}{\delta+\varepsilon x}$, $\left('\text{Απ.}\quad x=\frac{\alpha\eta-\gamma\delta}{\gamma\varepsilon-\beta\eta}\right)$

6) $\frac{\alpha(\delta^2+x^2)}{\delta x}=\frac{\alpha x}{\delta}+\alpha\gamma$, $\left('\text{Απ.}\quad x=\frac{\delta}{\gamma}\right)$

7) $3{,}25x-5{,}007-x=0{,}2-0{,}34x$, ('Απ. $x=2{,}010426\ldots$)

8) $\lambda o\gamma\,\alpha.x+\beta=\gamma x+\lambda o\gamma\,\delta$, $\left('\text{Απ.}\quad x=\frac{\lambda o\gamma\,\delta-\beta}{\lambda o\gamma\,\alpha-\gamma}\right)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Προβλήματα, ὧν ἡ λύσις ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς λύσεως μιᾶς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως ἕνα ἄγνωστον περιεχούσης.

114. Ἡ λύσις ἀλγεβρικοῦ τινος προβλήματος περιλαμβάνει τρία τινά·

1) τὴν ἀναζήτησιν τῶν σχέσεων, αἵτινες συνδέουσι τὰς δεδομένας καὶ τὰς ἀγνώστους ποσότητας, ἤτοι τὴν εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως ἢ τῶν ἐξισώσεων τοῦ προβλήματος,

2) τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως ἢ τῶν ἐξισώσεων τοῦ προβλήματος,

3) τὴν ἐξέτασιν τῶν διαφόρων περιπτώσεων, αἵτινες δύνανται νὰ ὑπάρχωσι πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος, ἤτοι τὴν ἀναζήτησιν τῶν διαφόρων συνθηκῶν ἢ ὅρων, οὓς ὀφείλουσι νὰ πληρῶσι τὰ δεδομένα καὶ τὰ ζητούμενα τοῦ προβλήματος, ἵνα ἦναι αὐτὸ δυνατόν, ἤτοι ἐν ἑνὶ λόγῳ τὴν διερεύνησιν τοῦ προβλήματος.

Ἡ εὕρεσις τῆς ἐξισώσεως ἢ τῶν ἐξισώσεων τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ μετάφρασις, οὕτως εἰπεῖν, τῶν σχέσεων, ἃς ἡ ἔκφρασις τοῦ προβλήματος ὁρίζει μεταξὺ τῶν δεδομένων καὶ τῶν ζητουμένων, τῶ γνωστῶν καὶ τῶν ἀγνώστων, τοῦ προβλήματος. Οὐδεὶς δὲ ὑπάρχει ὡρ σμένος κανὼν πρὸς εὕρεσιν τῶν ἐξισώσεων τῶν προβλημάτων ἕνεκα τῆ ποικιλίας αὐτῶν. Διὸ ἀπαιτεῖται πρὸς τοῦτο ἄσκησις καὶ δεξιότης το νοῦ. Ὅ,τι δὲ γενικῶς δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, εἶναι τὸ ἑξῆς.

115. Σημειοῦμεν διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν σημείων ἐπὶ τῶ γραμμάτων, δι' ὧν παρίστανται οἱ ἄγνωστοι, καὶ ἐπὶ τῶ δεδομένων (ἀριθμῶν ἢ γραμμάτων) τὰς πράξεις, ἃς ἠθέλο μεν ἐκτελέσει, ἐὰν δοθέντων τῶν ἀγνώστων ἠθέλομεν ν βεβαιωθῶμεν περὶ τῆς πληρώσεως τῶν συνθηκῶν ἢ ὅρω τοῦ προβλήματος.

Ἕπονται προβλήματά τινα ὡς παραδείγματα.

1) Εὑρεῖν ἀριθμόν, οὗτινος τὸ τρίτον καὶ τὸ τέταρτον κα τὸ ἕκτον προσλαβόντα καὶ τὸν 6 ἀποτελοῦσιν αὐτὸν τὸ ἀριθμόν.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ x, τὸ τρίτο καὶ τὸ τέταρτον καὶ τὸ ἕκτον αὐτοῦ καὶ ὁ 6 ἀποτελοῦσι κατὰ τὴν ἔκ φρασιν τοῦ προβλήματος τὸ ἄθροισμα $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}+6$ ἴσον τῷ x ἤτοι ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}+6=x,$$

ἐξ ἧς λύοντες εὑρίσκομεν $x=24$.

Τῷ ὄντι δὲ εἶναι $\frac{24}{3}+\frac{24}{4}+\frac{24}{6}+6=24$

2) Εὑρεῖν ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἥμισυ αὐτοῦ αὐ ξηθὲν κατὰ τὸ τρίτον αὐτοῦ νὰ ἀποτελῇ τὰ τρία τέταρτα τοῦ ὑπολοίπου αὐξηθέντα κατὰ 85.

Ἔστω x ὁ ζητούμενος ἀριθμός· κατὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήμα τος εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{3}{4}\cdot\left(x-\frac{x}{2}-\frac{x}{3}\right)+85$$

ἐξ ἧς λύοντες εὑρίσκομεν $x=120$

ὄντι δὲ εἶναι $\frac{120}{2}+\frac{120}{3}=\frac{3}{4}\left(120-\frac{120}{2}-\frac{120}{3}\right)+85.$

3) Πατὴρ ἐρωτηθεὶς περὶ τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ αὐτοῦ πε· μετὰ 15 ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ μου θέλει εἶναι τριπλαία τῆς περυσινῆς. Τίς ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ;

Ἔστω x ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ. Κατὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος ἡλικία τοῦ υἱοῦ πέρυσι μὲν ἦτο $x-1$, μετὰ δὲ 15 ἔτη θέλει εἶναι $+15$, ὅπερ θέλει εἶναι τριπλάσιον τοῦ $x-1$ καὶ ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις οῦ προβλήματος εἶναι

$$x+15=3.(x-1)$$

ξ ἧς λύοντες εὑρίσκομεν $\quad x=9$

ῷ ὄντι δὲ εἶναι $\quad 9+15=3(9-1).$

4) Ἄνθρωπός τις ἐπεχείρησε τρεῖς ἐπιχειρήσεις· κατὰ μὲν ὴν πρώτην ἀπώλεσε τὸ ἥμισυ τῶν χρημάτων αὐτοῦ, κατὰ ὴν δευτέραν ἀπώλεσε τὰ δύο τρίτα τοῦ ὑπολοίπου καὶ κατὰ ὴν τρίτην ἐκέρδησε τετράκις, ὅσα ἤδη εἶχε· μετὰ δὲ αῦτα ἀπώλεσε 15 δρ. Πόσα χρήματα εἶχεν οὗτος ἐξ ἀρχῆς;

Ἔστω x τὸ ποσὸν τῶν ἐξ ἀρχῆς χρημάτων. Κατὰ τὴν ἔκφρασιν οῦ προβλήματος ἡ μὲν πρώτη ἐπιχείρησις ἔσχεν ἀπώλειαν $\frac{x}{2}$ καὶ ἔμειαν $\frac{x}{2}$, ἡ δὲ δευτέρα ἔσχεν ἀπώλειαν τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $\frac{x}{2}$, ἤτοι $\frac{x}{3}$, καὶ ἔμειναν $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}$, ἤτοι $\frac{x}{6}$· ἡ δὲ τρίτη ἔσχε κέρδος τὸ τετραπλάσιον τοῦ $\frac{x}{6}$, ἤτοι $\frac{2x}{3}$, καὶ ἔμειναν $\frac{x}{6}+\frac{2x}{3}$· μετὰ δὲ ταῦτα ἀπώλεσε μόνον 15 δρ., ἤτοι τὸ μεῖναν $\frac{x}{6}+\frac{2x}{3}$ ἰσοῦται τῷ x μεῖον 15· ὥστε ἡ ἐξί-σωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{x}{6}+\frac{2x}{3}=x-15$$

ἐξ ἧς λυομένης εὑρίσκεται $x=90$

Τῷ ὄντι δὲ εἶναι $\quad \frac{90}{6}+\frac{2.90}{3}=90-15.$

5) Ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐπιβατῶν ἀτμοπλοίου ἀποπλεύσαντος ἐκ Πειραιῶς, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῶν ἀπεβιβάσθησαν εἰς τὸν πρῶτον λιμένα, 12 εἰς τὸν δεύτερον, τὸ τρίτον τοῦ ὑπολοίπου εἰς τὸν τρίτον καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ὑπολοίπου εἰς τὸν τέταρτον· οἱ δὲ ὑπολειφθέντες 42 ἐπιβάται ἐξηκολούθησαν τὸν πλοῦν πέραν τοῦ τετάρτου λιμένος.

Ἔστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν ζητουμένων ἐπιβατῶν. Τότε εἶναι

	ἐπιβάται	
	ἀποβιβασθέντες,	μείναντες
1ος λιμὴν	$\frac{2x}{5}$	$x-\frac{2x}{5}=\frac{3x}{5}$
2ος λιμὴν	12	$\frac{3x}{5}-12$
3ος λιμὴν	$\frac{1}{3}\left(\frac{3x}{5}-12\right)=\frac{x}{5}-4$	$\frac{2x}{5}-8$
4ος λιμὴν	$\frac{1}{4}\left(\frac{2x}{5}-8\right)=\frac{x}{10}-2$	$\frac{3x}{10}-6$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξακολουθησάντων τὸν πλοῦν ἐπιβατῶν εἶναι 42, ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{3x}{10}-6=42$$

ἐξ ἧς λυομένης εὑρίσκεται $x=160$.

6) Δύο ἁμαξοστοιχίαι ἀναχωροῦσι συγχρόνως ἡ μὲν ἐξ Ἀθηνῶν εἰς Πάτρας, ἡ δὲ ἐκ Πατρῶν εἰς Ἀθήνας. Ἡ μὲν πρώτη διανύει 53 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, ἡ δὲ δευτέρα 35. Ἡ δὲ ἀπόστασις Ἀθηνῶν-Πατρῶν εἶναι 221 στάδια. Κατὰ ποίαν ἀπόστασιν ἐξ Ἀθηνῶν γενήσεται ἡ συνάντησις τῶν δύο τούτων ἁμαξοστοιχιῶν;

Ἔστω x ἡ ἀπόστασις ἐξ Ἀθηνῶν ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς συναντήσεως εἰς χιλιόμετρα· ἡ ἀπόστασις Πατρῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου εἶναι $221-x$.

Ἡ μὲν ἐξ Ἀθηνῶν ἁμαξοστοιχία ~~διανύει~~ $\frac{x}{53}$ χιλιόμετρα ~~τὴν ὥραν~~

Σημειῶσαι 221—x ...δὲ ἐκ Πατρῶν διανύει $\frac{221-x}{35}$ χιλιόμετρα ~~τὴν ὥραν~~. Ὅθεν ἡ ...σωσὶς τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{x}{53}=\frac{221-x}{35}$$

...ἧς εὑρίσκομεν $x=133\frac{9}{88}$ στάδια

7) Μῖγμά τι ἐξ ἀργύρου καὶ χαλκοῦ ἔχει βάρος 580 γρ., ...μβαπτιζόμενον δὲ ἐν τῷ ὕδατι ἔχει βάρος 520 γρ. Ζητεῖται ...ὸ βάρος τοῦ ἀργύρου καὶ τοῦ χαλκοῦ, τῶν ἐν τῷ μίγματι ...ούτῳ περιεχομένων, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ μὲν πυκνότης ...οῦ ἀργύρου εἶναι 10,47, ἡ δὲ τοῦ χαλκοῦ 8,85.

Κατὰ τὴν γνωστὴν ἀρχὴν τοῦ Ἀρχιμήδους πᾶν σῶμα ἐμβαπτιζόμε...ον ἔν τινι ὑγρῷ ἀποβάλλει τόσον ἐκ τοῦ βάρους αὐτοῦ, ὅσον εἶναι τὸ ...άρος τοῦ ὑπ' αὐτοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ. Τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ...δατος εἶναι προφανῶς 580—520=60 γρ. Ἐπειδὴ δὲ ἓν χιλιοστὸν ...ῆς κυβικῆς παλάμης ὕδατος ἔχει βάρος 1 γρ., ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτοπιζομέ...ου ὕδατος εἶναι 60 χιλιοστὰ τῆς κυβικῆς παλάμης, (ὕδωρ καθ. καὶ ἀπε...σταγ. εἰς θερμ. 4,1 βαθμ. κ. θερμ).

Τούτου τεθέντος, ἔστω x τὸ βάρος τοῦ ἀργύρου τοῦ μίγματος εἰς ...γραμμάρια· τότε 580—x εἶναι τὸ βάρος τοῦ χαλκοῦ. Ἐπειδὴ δὲ ἓν ...χιλιοστὸν τῆς κυβικῆς παλάμης τοῦ μὲν ἀργύρου ἔχει βάρος 10,47 γρ. ...τοῦ δὲ χαλκοῦ 8,85 γρ. ἕπεται, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτοπίζοντος μίγματος ...τοῦ μὲν ἀργύρου εἶναι $\frac{x}{10,47}$, τοῦ δὲ χαλκοῦ $\frac{580-x}{8,85}$ καὶ ἑπομέ...νως ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{x}{10,47}+\frac{580-x}{8,85}=60$$

ἐξ ἧς λυομένης εὑρίσκεται $x=316,7$ καὶ $580-x=263,3$.

Ὥστε τὸ δοθὲν μῖγμα περιέχει 316,7 γρ. ἀργύρου καὶ 263,3 γρ. χαλκοῦ.

8) Εὑρεῖν δύο μέρη τοῦ ἀριθμοῦ 60 τοιαῦτα, ὥστε τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν καὶ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἑτέρου νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα τὸν ἀριθμὸν 37

Ἔστω x τὸ ἓν τῶν ζητουμένων μερῶν· τὸ ἕτερον εἶναι προφα
$60-x$. Κατὰ δὲ τὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{2x}{3}+\frac{3(60-x)}{5}=37$$

ὅθεν

$$x=15,\ 60-x=45$$

9) Πεζὸς διανύων 4 στάδια τὴν ὥραν διώκεται ὑπὸ
πέως ἐκκινήσαντος 15 ὥρας μετ' αὐτὸν καὶ διανύοντος
στάδια τὴν ὥραν. Μετὰ πόσας ὥρας ὁ ἱππεὺς καταφθά
τὸν πεζόν;

Ἔστωσαν x αἱ ὧραι, μεθ' ἃς ὁ ἱππεὺς φθάνει τὸν πεζόν. Ἐπε
ὁ πεζὸς ἐξεκίνησε 15 ὥρας πρὸ τοῦ ἱππέως καὶ διανύει 4 στάδια
ὥραν, ἕπεται, ὅτι, ὅτε ἐξεκίνησεν ὁ ἱππεύς, ὁ πεζὸς διήνυσε 4.15 στάδ
Μετὰ x δὲ ὥρας ὁ μὲν πεζὸς διανύει $4x$ στάδια, ὁ δὲ ἱππεὺς $9x$.
ὅλον ἄρα τῶν διανυσθησομένων σταδίων ὑπὸ μὲν τοῦ πεζοῦ εἶναι $60+$
ὑπὸ δὲ τοῦ ἱππέως $9x$. Ὅταν δὲ ὁ ἱππεὺς καταφθάσῃ τὸν πεζόν, εἶ
προφανῶς

$$9x=4x+60$$

ἐξ ἧς

$$x=12$$

ὥστε μετὰ 12 ὥρας ὁ ἱππεὺς καταφθάνει τὸν πεζόν.

10) Δεξαμενὴ πληροῦται ὑπὸ τριῶν ἀνίσων κρουνῶ
Ὑπὸ μὲν τοῦ πρώτου δύναται νὰ πληρωθῇ εἰς 12 ὥρας, ὑπ
δὲ τοῦ δευτέρου εἰς 15 καὶ ὑπὸ τοῦ τρίτου εἰς 18· ὅταν δ
ρέωσι καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ ἐπὶ 4 ὥρας, αὕτη χρειάζεται εἰσέτ
120 λίτρας, ἵνα πληρωθῇ. Πόσων λιτρῶν εἶναι ἡ χωρητικότη
τῆς δεξαμενῆς;

Ἔστω x λιτρῶν ἡ χωρητικότης τῆς δεξαμενῆς. Ἐπειδὴ ὁ πρῶτο
κρουνὸς πληροῖ τὴν δεξαμενὴν εἰς 12 ὥρας, ἕπεται, ὅτι εἰς 4 ὥρας πλη
ροῖ τὰ $\frac{4x}{12}$ αὐτῆς. Ὁμοίως ὁ δεύτερος πληροῖ τὰ $\frac{4x}{15}$ καὶ ὁ τρίτο
τὰ $\frac{4x}{18}$. Ἐὰν δὲ ρέωσιν ὁμοῦ καὶ οἱ τρεῖς κρουνοί, ἡ δεξαμενὴ χρειάζε
ται εἰσέτι 120 λίτρας καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{4x}{12}+\frac{4x}{15}+\frac{4x}{18}=x-120$$

$$\frac{x}{3}+\frac{4x}{15}+\frac{2x}{9}=x-120$$

θεν $$x=675$$

11) Εἰπέ τις, ἄν μοι ἐτριπλασίαζον, ὅσας δραχμὰς ἔχω, ἔδι- 9 δραχ. Ἐξεπλήρωσαν τὸν λόγον αὐτοῦ κατὰ συνέχειαν καὶ ἔδωκεν, ὅσας εἶχε δραχμάς. Πόσας δραχμὰς εἶχεν;

Ἔστωσαν x αἱ δραχμαί, ἃς εἶχεν. Ὅταν τὸ πρῶτον ἐτριπλασιάσθησαν νοντο $3x$· ἔδωκε δὲ 9 δρ. καὶ ἑπομένως ἔμειναν $3x-9$. Ὅταν δὲ δεύτερον ἐτριπλασιάσθησαν αἱ $3x-9$, ἐγένοντο $3(3x-9)$· ἔδωκε δὲ καὶ ἑπομένως ἔμειναν $3.(3x-9)-9$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο αι 0 (διότι ἔδωκε τότε πάσας, ὅσας εἶχε δραχμάς), ἡ ἐξίσωσις τοῦ προ-ήματος εἶναι $$3(3x-9)-9=0$$

ἧς $$x=4.$$

12) Τέσσαρες ἐργάται Α, Β, Γ, Δ ἔλαβον ὁμοῦ 272 δρ. Πό-ας ἔλαβεν ἕκαστος αὐτῶν, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ Α ἔλαβε διπλάσιον τῶν δραχμῶν τοῦ Β πλὴν 85 δρ., ὁ Β τὸ τε-απλάσιον τῶν τοῦ Γ πλὴν 240 δρ. καὶ ὁ Γ τὸ πενταπλά-ον τῶν τοῦ Δ πλὴν 435;

Ἔστωσαν x αἱ δραχμαί, ἃς ἔλαβεν ὁ Δ· κατὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ οβλήματος εἶναι

$$x+(5x-435)+(20x-1980)+(40x-4045)=272$$

ἧς $x=102$ καὶ ἑπομένως αἱ δραχμαὶ τῶν λοιπῶν εἶναι

$$5.102-435,\quad 20.\ 102-1980,\quad 40.102-4045$$
$$75\ ,\qquad 60\ ,\qquad 35$$

13) Κύριός τις ἐμίσθωσεν ὑπηρέτην ἀντὶ 230 δρ. καὶ μιᾶς νδυμασίας κατ' ἔτος· ἀποπέμψας αὐτὸν μετὰ 10 μῆνας ἔδω-εν αὐτῷ 180 δρ. καὶ τὴν ἐνδυμασίαν. Πόσον τιμᾶται ἡ νδυμασία;

Ἔστω x δραχμῶν ἡ τιμὴ τῆς ἐνδυμασίας. Ὁ ἐτήσιος μισθὸς τοῦ ὑπηρέ-ου εἶναι $230+x$ καὶ ἑπομένως ὁ μισθὸς τῶν 10 μηνῶν εἶναι $\frac{(230+x).\ 10}{12}$ ὗτος δὲ κατὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος εἶναι $180+x$ καὶ ἑπομέ-ως ἡ ἐξίσωσις εἶναι $$\frac{(230+x)\ 5}{6}=180+x.$$

ἧς $$x=70.$$

14) Αἱ 32 λίτραι θαλασσίου ὕδατος περιέχουσι 1 λίτρ
ἅλατος· πόσον γλυκὺ ὕδωρ πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς αὐτό, ἵ
τεσσαράκοντα λίτραι τοῦ κράματος περιέχωσιν $\frac{1}{5}$ τῆς
τρας ἅλατος;

Ἔστωσαν x αἱ λίτραι τοῦ προσθετέου γλυκέος ὕδατος εἰς τὰς
λίτρας τοῦ θαλασσίου. Τότε γίνεται κρᾶμα $32+x$ λιτρῶν· ἐπειδὴ δὲ
40 λίτραι τοῦ κράματος περιέχουσιν $\frac{1}{5}$ τῆς λίτρας ἅλατος, ἡ μία λί
τοῦ κράματος περιέχει $\frac{1}{200}$ καὶ τὸ ὅλον κρᾶμα, ἤτοι αἱ $32+x$, πε
χουσι $\frac{32+x}{200}$ τῆς λίτρας ἅλατος. Ἀλλὰ τὸ ἐν τῷ κράματι ὑπάρχον ἅ
εἶναι μία λίτρα καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{32+x}{200}=1$$

ἐξ ἧς

$$x=168$$

15). Πατὴρ ἔχων τρεῖς θυγατέρας ἔδωκε τῇ μὲν πρώ
τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς περιουσίας αὐτοῦ, τῇ δευτέρᾳ τὰ $\frac{2}{7}$ καὶ τῇ τρίτῃ
$\frac{3}{14}$, ὑπελείφθησαν δὲ αὐτῷ 21000 δραχμαί. Ἐκ πόσων δρα
μῶν ἀπετελεῖτο ἡ περιουσία αὐτοῦ;

Ἔστω x ἡ περιουσία. Κατὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος εὑρίσκε
ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x}{4}+\frac{2x}{7}+\frac{3x}{14}+21000=x,$$

ἐξ ἧς

$$x=84000$$

16) Διόφαντος ὁ συγγραφεὺς τοῦ ἀρχαιοτάτου σωζομέν
βιβλίου Ἀλγέβρας ἔζησε τὸ ἕκτον τῆς ζωῆς αὐτοῦ ὡς πα
τὸ δωδέκατον ὡς νεανίας· εἶτα νυμφευθεὶς ἔζησε τὸ ἕβδομ
καὶ 5 ἔτη, πρὶν ἀποκτήσῃ υἱόν, ὅστις ἀπέθανεν 7 ἔτη π
τοῦ πατρὸς αὐτοῦ, ζήσας τὸ ἥμισυ τῆς ζωῆς αὐτοῦ. Πό
ἔτη ἔζησεν ὁ Διόφαντος;

Ἔστω x ἡ ἡλικία τοῦ Διοφάντου. Τότε τὸ ἄθροισμα $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5$
αι ἡ ἡλικία αὐτοῦ, πρὶν ἀποκτήσῃ τὸν υἱόν. Ἐπειδὴ δὲ οὗτος ἔζησε
ἔτη καὶ ἀπέθανε 4 ἔτη πρὸ τοῦ πατρὸς αὐτοῦ, ἕπεται, ὅτι ὁ πατὴρ
ησεν εἰσέτι $\frac{x}{2}+4$ ἔτη καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

ἧς

$$x=84.$$

17). Εἶχέ τις περιουσίαν 120000 δρ. Μέρος ταύτης διέθεσε
ρὸς ἀγορὰν οἰκίας, τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὑπολοίπου ἐτόκισε πρὸς 4 %
ὰ δὲ λοιπὰ $\frac{2}{3}$ πρὸς 5 %. Ἐλάμβανε δὲ ἐκ τῶν οὕτω τοκι-
θέντων χρημάτων ἐτήσιον τόκον 3920 δρ. Ζητεῖται ἡ ἀξία
ῆς οἰκίας καὶ τὰ πρὸς 4 καὶ 5 % τοκισθέντα μέρη.

Ἔστω x δραχμῶν ἡ ἀξία τῆς οἰκίας. Τότε ὁ ἐτήσιος τόκος τῶν

$$\frac{120000-x}{3} \text{ καὶ } \frac{(120000-x).2}{3}$$

ναι

$$\frac{(120000-x).4}{3.100} \text{ καὶ } \frac{(120000-x).2.5}{3.100}$$

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{(120000-x).4}{300}+\frac{(120000-x).10}{300}=3920$$

ξ ἧς $x=36000$ καὶ ἑπομένως τὸ τρίτον καὶ τὰ δύο τρίτα τῶν 84000
ρ. εἶναι 28000 δρ. καὶ 56000 δρ.

18) Ὡρολογίου δεικνύοντος ἀκριβῶς μεσημβρίαν, ὁ δείκτης
ῶν πρώτων λεπτῶν συμπίπτει τῷ δείκτῃ τῶν ὡρῶν. Μετὰ
όσα λεπτὰ τῆς ὥρας γενήσεται ἡ πρώτη σύμπτωσις τῶν δύο
ούτων δεικτῶν καὶ πόσαι τοιαῦται συμπτώσεις γενήσονται
έχρι τοῦ μεσονυκτίου;

Ἔστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν πρώτων λεπτῶν τῆς ὥρας, μετὰ τὴν πα
λευσιν τῶν ὁποίων γενήσεται ἡ πρώτη σύμπτωσις τῶν δεικτῶν. Ἐπει
ὅταν ὁ λεπτοδείκτης διατρέχῃ x πρῶτα λεπτά, ὁ ὡροδείκτης διατρέ
$\frac{x}{12}$, ἵνα συμπέσωσιν οἱ δύο οὗτοι δεῖκται, πρέπει ὁ λεπτοδείκτης νὰ δ
τρέξῃ $\left(60+\frac{x}{12}\right)$ πρῶτα λεπτά. Ὅθεν ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶ

$$60+\frac{x}{12}=x$$

ἐξ ἧς

$$x=\left(65+\frac{5}{11}\right) \text{ πρῶτα λεπτά}$$

Ἐπειδὴ δέ, ὅταν παρέρχωνται $\frac{720}{11}$ πρῶτα λεπτά, γίνεται μ
σύμπτωσις τῶν δύο δεικτῶν, ἕπεται, ὅτι, ὅταν παρέλθωσι 12 ὧραι, ἤτ
720 πρῶτα λεπτά, γίνονται 11 συμπτώσεις αὐτῶν.

ΣΗΜ. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται καὶ ἀμέσως· διότι ἀπὸ μὲν τ
12ης μέχρι τῆς 1ης οὐδεμία συμβαίνει σύμπτωσις, ἐν ἑκάστῃ δὲ τῶν λο
πῶν ὡρῶν μέχρι 12 συμβαίνει μία καὶ μόνη· ὥστε ἐν 12 ὥραις γίνοντ
11 συμπτώσεις. Ἐπειδὴ δὲ ἀμφότεροι οἱ δεῖκται κινοῦνται ὁμαλῶς, ἕπ
ται, ὅτι ὁ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν συμπτώσεων παρερχόμενος χρόν
εἶναι 12:11.

19) Ἐὰν τὸ αὐτὸ ὡρολόγιον ἔχῃ τρεῖς δείκτας (τῶν ὡρῶ
τῶν πρώτων λεπτῶν καὶ τῶν δευτέρων λεπτῶν) καὶ συμπί
πτωσιν αὐτοὶ ἐπὶ τοῦ 12, μετὰ πόσα δεύτερα λεπτὰ ὁ τῶ
δευτέρων λεπτῶν δείκτης διχοτομεῖ τὴν ὑπὸ τῶν λοιπῶν δύ
σχηματιζομένην γωνίαν;

Ἔστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν δευτερολέπτων, μετὰ τὴν παρέλευσιν τῶ
ὁποίων ὁ δείκτης τῶν δευτέρων λεπτῶν διχοτομεῖ τὴν ὑπὸ τῶν λοιπῶ
δύο σχηματιζομένην γωνίαν. Ἐπειδή, ὅταν ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτω
διατρέχῃ x δευτερόλεπτα, ὁ μὲν λεπτοδείκτης διατρέχει $\frac{x}{60}$, ὁ δὲ ὡρο
δείκτης $\frac{x}{12.60}$, ἡ δὲ ὑπὸ τῶν δύο τελευταίων δεικτῶν σχηματιζομέν

α εἶναι ἡ διαφορὰ $\frac{x}{60}-\frac{x}{720}$, ἤτοι $\frac{11x}{720}$, ἧς τὸ ἥμισυ εἶναι

$\frac{x}{40}$, ἔπεται, ὅτι, ἵνα ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων διχοτομῇ ταύτην,

ει προφανῶς νὰ διατρέξῃ $\left(60+\frac{x}{720}+\frac{11x}{1440}\right)$ δευτερόλεπτα.

ν ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$60+\frac{x}{720}+\frac{11x}{1440}=x$$

ῆς

$$x=\left(60+\frac{780}{1427}\right) \text{ δευτερόλεπτα.}$$

20) Ἀτμόπλοιον Α καταδιώκει ἕτερον Β ἀποπλεῦσαν 2 ας πρὸ αὐτοῦ· ἡ ἕλιξ τοῦ ἀτμοπλοίου Α τελεῖ 15 στροφὰς ἀνὰ πᾶν λεπτὸν τῆς ὥρας, ἐν ᾧ ἡ τοῦ Β τελεῖ 25 Ἀλλὰ ἀτμόπλοιον Α δι' 7 στροφῶν τῆς ἕλικος αὐτοῦ διανύει ν αὐτὴν ἀπόστασιν, ἣν καὶ τὸ Β διὰ 15. Μετὰ πόσον όνον τὸ ἀτμόπλοιον Α καταφθάνει τὸ Β;

Ἔστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν λεπτῶν τῆς ὥρας, μετὰ τὴν παρέλευσιν τῶν οίων τὸ ἀτμόπλοιον Α καταφθάνει τὸ Β. Ἐπειδὴ ἡ ἕλιξ τοῦ Β ἐτέσε ἐπὶ 2 ὥρας $25.120=3000$ στροφὰς καὶ ἐπὶ x λεπτὰ τῆς ὥρας $.x$ στροφάς, ἔπεται, ὅτι ἐν συνόλῳ ἐτέλεσε $3000+25x$ στροφάς.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἀτμόπλοιον Α δι' 7 στροφῶν τῆς ἕλικος αὐτοῦ διαει τὴν ἀπόστασιν, ἣν καὶ τὸ Β διὰ 15, ἔπεται, ὅτι ἐπὶ x λεπτὰ τῆς ρας ἡ ἕλιξ τοῦ Β ἐτέλεσε $\frac{15.15\,x}{7}$ στροφάς. Ὅθεν ἡ ἐξίσωσις τοῦ ροβλήματος εἶναι

$$3000+25x=\frac{225x}{7}$$

ξ ἧς $x=420$, ἤτοι 7 ὧραι.

21) Εὑρεῖν ἀριθμὸν τριψήφιον τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων νὰ ἦναι 18, τὸ ψηφίον τῶν μονάδων διπλάσιον τοῦ τῶν ἑκατοντάδων καὶ τέλος προστιθεμένων 390

μονάδων εἰς τὸν ἀριθμὸν νὰ ἀποτελῆται ἀριθμὸς ἔχων ψηφία κατ' ἀντίστροφον τάξιν τῶν τοῦ ζητουμένου ἀριθμ

Ἔστω x τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων· τὸ μὲν ψηφίον τῶν μονά εἶναι $2x$, τὸ δὲ τῶν δεκάδων εἶναι $18-x-2x$ ἢ $18-3x$ καὶ μένως ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ἴσος τῷ

$$100x+10(18-3x)+2x$$

ὁ δὲ ἀριθμός, οὗ τὰ ψηφία εἶναι κατ' ἀντίστροφον τάξιν, εἶναι

$$200x+10(18-3x)+x$$

Ὅθεν ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$100x+10(18-3x)+2x+390=200x+10(18-3x)+x$$

ἐξ ἧς

$$x=\frac{130}{33}$$

Ὥστε τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, διότι κατὰ τὴν φύσιν τοῦ τήματος ὁ x πρέπει νὰ ἦναι ἀκέραιος ἀριθμός.

22) Εὑρεῖν ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν προστεθῶ εἰς αὐτὸν τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ καὶ ὁ 7, νὰ εὑρίσκηται τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ πε ταπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ ηὐξημένου κατὰ 21.

Ἔστω x ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἰ

$$x+\frac{2}{3}x+7=\frac{5x+21}{3}$$

ἢ

$$5x+21=5x+21$$

ὥστε τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριστον· διότι πᾶς ἀριθμὸς ποιεῖ προτεινόμενον.

23) Πατήρ τις εἶναι 41 ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ 17. Μετ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς εἶναι τριπλασία τῆς το υἱοῦ;

Ἔστω x ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν. Μετὰ x ἔτη ἡ μὲν ἡλ κία τοῦ πατρὸς γίνεται $41+x$, ἡ δὲ τοῦ υἱοῦ $17+x$· ἐπειδὴ δὲ τό $41+x$ πρέπει νὰ ἦναι τριπλάσιον τοῦ $17+x$, ἕπεται, ὅτι ἡ ἐξίσωσ τοῦ προβλήματος εἶναι

(1) $$41+x=3(17+x)$$

ἐξ ἧς

$$x=-5$$

Ἡ ἐξίσωσις ἄρα τοῦ προβλήματος ἀληθεύει, ἐὰν ἀντὶ x τεθῇ -5 ἐν
ἡ δὲ ἀρνητικὴ αὕτη τιμὴ τοῦ x εἶναι ἀπορριπτέα, ὡς ἐτέθη τὸ
ημα, ὅπερ διὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον.

Ἐν τούτοις ἡ ἀρνητικὴ αὕτη λύσις τῆς ἐξισώσεως τοῦ προταθέντος
ήματος ἔχει σημασίαν διὰ τὸν παρελθόντα χρόνον, ἐὰν μὴ διὰ τὸν
οντα. Τῷ ὄντι, ἐὰν ἐν τῇ ἐξισώσει (1) τραπῇ τὸ x εἰς $-x$, προ-
ει ἡ ἰξίσωσις

$$41-x=3(17-x)$$
)

ἐκφράζει, ὅτι πρὸ x ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦτο τριπλασία τῆς
υἱοῦ. Λυομένη δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη παρέχει $x=5$. Ὥστε πρὸ 5
ἦτο ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ καὶ οὐχὶ μετὰ 5
ὡς ἐζητεῖτο ἐν τῷ προταθέντι προβλήματι. Καὶ γενικῶς· ἐὰν ἡ νῦν
ία ἦναι τοῦ μὲν πατρὸς α ἐτῶν, τοῦ δὲ υἱοῦ β, ἡ ἐξίσωσις τοῦ
βλήματος κατὰ τὴν ἔκφρασιν αὐτοῦ εἶναι

$$\alpha+x=3(\beta+x)$$

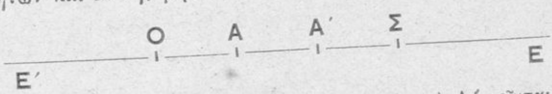
ῆς λύοντες εὑρίσκομεν

$$x=\frac{\alpha-3\beta}{2}$$

Ἡ δὲ λύσις αὕτη δεικνύει, ὅτι, ἐὰν μὲν $\alpha>3\beta$, τὸ προτεινόμενον
βήσεται ἐν τῷ μέλλοντι· ἐὰν δὲ $\alpha<3\beta$, τὸ προτεινόμενον συνέβη ἐν
παρελθόντι. Τουτέστιν ἡ μὲν θετικὴ λύσις σημαίνει τὸν μέλλοντα χρό-
, ἡ δὲ ἀρνητικὴ τὸν παρελθόντα (24).

24) Δύο κινητὰ κινοῦνται ὁμαλῶς μετὰ δεδομένων τα-
τήτων ἐπὶ εὐθείας Ε΄Ε· διέρχονται δὲ συγχρόνως τὸ μὲν
ῶτον διά τινος σημείου Α, τὸ δὲ δεύτερον διά τινος
μείου Α΄· εὑρεῖν ἐπὶ τῆς εὐθείας Ε΄Ε τὸ σημεῖον ἔνθα
υναντῶνται τὰ δύο ταῦτα κινητά.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπιδέχεται πολλὰς περιπτώσεις ἐξαρτωμένας ἐκ
ῆς θέσεως τῶν σημείων Α καὶ Α΄, ἐκ τῆς ἐντάσεως τῶν ταχυτήτων τῶν
ο κινητῶν καὶ ἐκ τῆς φορᾶς ἢ διευθύνσεως τῶν ταχυτήτων τούτων.



Τεθείσθω ἐν πρώτοις, ὅτι τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Α΄ κεῖνται ἐπὶ τῆς
ὐθείας Ε΄Ε πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ὡς πρὸς μόνιμόν τι σημεῖον Ο αὐτῆς,

τὸ Α΄ πέραν τοῦ Α, καὶ ἔστωσαν α καὶ α΄ αἱ ἀποστάσεις $\overline{ΟΑ}$ καὶ
Τεθείσθω προσέτι, ὅτι τὰ δύο κινητὰ κινοῦνται ἀμφότερα ἐξ ἀρισ
πρὸς τὰ δεξιὰ τὸ μὲν πρῶτον μετὰ ταχύτητος v, τὸ δὲ δεύτερον
ταχύτητος v' ἐλάσσονος τῆς v. Τὰ δύο κινητὰ συναντῶνται προφ
κατά τι σημεῖον Σ τῆς εὐθείας Ε΄ Ε κείμενον πέραν τοῦ Α΄ καὶ ἔσ
ἡ ἀπόστασις $\overline{ΟΣ}$.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ ὑπ'
ὅτι ἀμφότερα τὰ κινητὰ διήνυσαν κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον t τὸ μὲν
τον τὴν ἀπόστασιν $\overline{ΑΣ}$, τὸ δὲ δεύτερον τὴν ἀπόστασιν $\overline{Α΄Σ}$. Ἐπειδ
ἡ μὲν ἀπόστασις $\overline{ΑΣ}$ εἶναι $x-\alpha$, ἡ δὲ ἀπόστασις $\overline{Α΄Σ}$ εἶναι $x-\alpha'$
ται, ὅτι (τῶν διανυομένων ἀποστάσεων οὐσῶν ἀναλόγων τῶν ταχ
των καὶ τῶν χρόνων)

$$x-\alpha=vt, \quad x-\alpha'=v't$$

Ὅθεν

$$(1) \qquad t=\frac{x-\alpha}{v}, \qquad t=\frac{x-\alpha'}{v'}$$

καὶ

$$\frac{x-\alpha}{v}=\frac{x-\alpha'}{v'}$$

ἢ

$$(2) \qquad (v-v')\,x=v\alpha'-\alpha v'$$

Αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἰσχύουσι κατὰ πάσας τὰς περιπτώσεις
περ εὑρεθεῖσαι ὑπὸ μερικὴν περίπτωσιν, ἐὰν ὑπάρχῃ ἡ συνθήκη, ὅτι

1ον Αἱ ἀποστάσεις $\overline{ΟΑ}$, $\overline{ΟΑ'}$, $\overline{ΟΣ}$ λογίζονται θετικαὶ μὲν ἀπὸ Ο
Ε, ἢ ἀπὸ Ε΄ εἰς Ε, ἀρνητικαὶ δὲ ἀπὸ Ε εἰς Ο, ἢ ἀπὸ Ε εἰς Ε΄.

2ον Αἱ ταχύτητες τῶν δύο κινητῶν Α καὶ Α΄ λογίζονται θετι
μὲν κατὰ τὴν φορὰν ἢ διεύθυνσιν Ε΄Ε, ἀρνητικαὶ δὲ κατὰ τὴν ΕΕ΄.

3ον Ὁ χρόνος, καθ' ὃν διέρχονται τὰ δύο κινητὰ διὰ τῶν σημε
Α καὶ Α΄ μέχρι τῆς συναντήσεως αὐτῶν κατὰ τὸ σημεῖον Σ, λογίζε
θετικὸς ἢ ἀρνητικός, καθ' ὅσον ἡ συνάντησις κατὰ τὸ σημεῖον Σ γίνε
μετὰ ἢ πρὸ τῆς διαβάσεως τῶν δύο κινητῶν διὰ τῶν δύο σημείων Α καὶ

Τούτων πάντων λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν ἡ ἐξίσωσις (2) τοῦ προβλ
ματος ἐπιδέχεται τὴν ἑπομένην διερεύνησιν.

Διερεύνησις. Λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(v-v').x=va'-av'$$

καὶ ἐξετάσωμεν πάσας τὰς περιπτώσεις τὰς δυναμένας νὰ συμβῶσιν ἐν αὐτῇ.

1ον ἐὰν $v-v' \gtrless 0$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει τὴν λύσιν

$$x=\frac{va'-av'}{v-v'}$$

ἥτις δηλοῖ, ὅτι τὰ δύο κινητὰ συναντῶνται· ἡ δὲ συνάντησις αὐτῶν γίνεται κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΟΕ ἢ ΟΕ′, ἐὰν

$$\frac{va'-av'}{v-v'}$$

ἦναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

2ον Ἐὰν $v-v'=0$, διακρίνονται δύο τινά· καθ' ὅσον

$$va'-av' \gtrless 0 \quad ἢ \quad va'-av'=0$$

Καὶ ἐὰν μὲν $va'-av' \gtrless 0$, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον· τὰ δύο κινητὰ δὲν συναντῶνται. Τοῦτο δὲ ἐξηγεῖται καὶ ἀμέσως· διότι ἐὰν $v=v'$ καὶ $va'-av' \gtrless 0$, ἕπεται, ὅτι $a \gtrless a'$. Τὰ δύο κινητὰ εὑρίσκονται κατά τινα χρονικὴν στιγμὴν κατὰ τὰ σημεῖα Α καὶ Α′, κινοῦνται κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν μετὰ τῆς αὐτῆς ταχύτητος καὶ ἑπομένως ἀφίστανται πάντοτε ἀλλήλων κατὰ τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν $\overline{AA'}$.

Ἐὰν δὲ τοὐναντίον ἦναι καὶ $va'-av'=0$, ἡ ἐξίσωσις ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x. Τὰ δύο κινητὰ δὲν ἀποχωρίζονται ἀλλήλων. Διότι, ἐπειδὴ $v=v'$ καὶ $va'=av'$, ἕπεται, ὅτι $a=a'$, τουτέστι τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Α′ συμπίπτουσιν. Κατὰ τὴν αὐτὴν ἄρα χρονικὴν στιγμὴν τὰ δύο κινητὰ εὑρίσκονται κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον Α· ἐπειδὴ δὲ κινοῦνται κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν μετὰ τῆς αὐτῆς ταχύτητος, ἕπεται, ὅτι, οὐδαμῶς ἀποχωρίζονται ἀλλήλων.

3ον Ἐὰν $v-v' \gtrless 0$ καὶ $va'-av'=0$, εἶναι $x=0$. Τὰ δύο κινητὰ οὐδαμῶς ἀπομακρυνονται τοῦ μονίμου σημείου Ο.

Ἐκ τῆς προηγουμένης διερευνήσεως συνάγεται, ὅτι, ἐὰν

$v-v' \gtrless 0$, τὰ δύο κινητὰ συναντῶνται.

$v-v'=0$ $\begin{cases} va'-av' \lessgtr 0, & \text{τὰ δύο κινητὰ οὐδαμῶς συναντῶνται} \\ va'-av'=0, & \text{τὰ δύο κινητὰ οὐδαμῶς ἀποχωρίζονται ἀλλήλων.} \end{cases}$

Παρατήρησις

Ἐκ τῶν προηγουμένων καταφαίνεται, ὅτι πρόβλημα, οὗτινος ἡ ἐξ σωσις εἶναι πρώτου βαθμοῦ πρὸς τὸν ἄγνωστον, δύναται νὰ ἦναι καὶ ἀδ νατον ἢ ἀόριστον, εἴτε διότι ἄγει εἰς ἐξίσωσιν ἀδύνατον, εἴτε διότι ἐκ τ φύσεως τοῦ ζητήματος ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς ὀφείλει νὰ πληροῖ ὡρισμέν τινὰς συνθήκας (οἷον νὰ ἦναι ἀκέραιος ἀριθμός, ἢ θετικὸς ἀριθμός, καὶ τοιαῦτα) ἢ νὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ ὡρισμένων ὁρίων (οἷον ἡ ἡλικία ἀ θρώπου καὶ τὰ τοιαῦτα).

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πατὴρ ἐρωτηθεὶς περὶ τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ αὐτοῦ εἶπε· μετὰ 1 ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ μου θέλει εἶναι τετραπλασία τῆς πρὸ 4 ἐτῶν ἡλ κίας αὐτοῦ. Τίς ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ; ('Απ. 11)

2) Ἀλώπηξ διώκεται ὑπὸ λαγωνικοῦ διανύσασα ἤδη πρὸ τῆς κατα διώξεως ἀπόστασιν 60 πηδημάτων αὐτῆς· πηδᾷ δὲ ἡ ἀλώπηξ 9 πηδή ματα, ἐν ᾧ χρόνῳ τὸ λαγωνικὸν πηδᾷ 6· ἀλλὰ 3 πηδήματα τοῦ λαγω νικοῦ ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 7 τῆς ἀλώπεκος. Μετὰ πόσα πηδήματα τ λαγωνικὸν καταφθάνει τὴν ἀλώπεκα; ('Απ. 72).

3) Ἐρωτηθείς τις πόσας δραχμὰς ἔχει, εἶπεν· ἐὰν δώσω πρῶτον τ ἥμισυ τῶν ὅσας ἔχω καὶ μίαν ἀκόμη, εἶτα τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπολοίπου κα μίαν ἀκόμη, μοὶ ὑπολείπονται τέσσαρες δραχμαί. Πόσας δραχμὰς εἶχεν ('Απ. 22).

4) Στρατηγός τις διένειμε βραβεῖα εἰς 5 συντάγματα στρατοῦ. Εἰς τ μὲν πρῶτον διένειμε 4 ὀλιγώτερον τοῦ ἡμίσεως τῶν ὅσα εἶχεν· εἰς τ δεύτερον πάλιν 4 ὀλιγώτερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὑπολοίπου· εἰς τὸ τρίτο 4 ὀλιγώτερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ νέου ὑπολοίπου· εἰς τὸ τέταρτον 4 ὀλιγώ τερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ τρίτου ὑπολοίπου· εἰς δὲ τὸ πέμπτον σύνταγμ διένειμε τὰ ὑπολειφθέντα 10· πόσα βραβεῖα διένειμεν; ('Απ. 40).

5) Ἔχει τις εἰς τόκον κεφάλαιόν τι πρὸς 4 $^0/_0$· μετὰ 2 ἔτη ἀφαιρε τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ κεφαλαίου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἀφίνει εἰς τόκον 7 μῆνας, μετὰ τοὺ ὁποίους ἀφαιρεῖ πάλιν τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ὑπολοίπου, τὸ δὲ νέον ὑπόλοιπον ἀφίνε εἰς τόκον 13 μῆνας. Ἔλαβε δὲ ἐν τῷ διαστήματι τῶν 44 μηνῶν τόκο 24375 δρ. Ποῖον τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον; ('Απ. 200000).

6) Ἠγόρασέ τις τεμάχιον ὑφάσματος πρὸς 10 δρ. τὸν πῆχυν· ἀλλ' ἀπατηθεὶς εἰς τὸ μέτρον ἔλαβεν ἕνα πῆχυν ὀλιγώτερον· ὑπολογίζεται δέ, ὅτι πρέπει νὰ πωληθῇ ὁ πῆχυς πρὸς 12 δρ, ἵνα προκύψῃ κέρδος 5 $^0/_0$ ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς. Πόσων πήχεων ἦτο τὸ ὕφασμα; (Ἀπ 7).

7) Ἔκ τινος ἀγγείου περιέχοντος κρᾶμα ὕδατος καὶ οἴνου ἀφαιρεῖται τὸ τρίτον καὶ ἀναπληροῦται δι' ὕδατος, τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ δεύτερον καὶ τρίτον, ὅτε εὑρίσκεται, ὅτι ἡ ἐν τῷ τελευταίῳ κράματι περιεχομένη ποσότης τοῦ ὕδατος εἶναι πενταπλασία τῆς τοῦ οἴνου. Κατὰ ποῖον λόγον εὑρίσκετο ἐν ἀρχῇ ἡ ποσοτης τοῦ οἴνου καὶ τοῦ ὕδατος; (Ἀπ. 7:9).

8) Πατὴρ ἀφῆκε διὰ διαθήκης εἰς μὲν τὸν πρῶτον υἱὸν αὐτοῦ Α δραχμὰς καὶ τὸ $\frac{1}{\nu}$ τοῦ ὑπολοίπου, εἰς τὸν δεύτερον 2α δραχμὰς καὶ τὸ $\frac{1}{\nu}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου, εἰς τὸν τρίτον 3α δραχμὰς καὶ τὸ $\frac{1}{\nu}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου· καὶ οὕτω καθεξῆς· συνέβη δὲ κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον νὰ διανεμηθῇ ἐξ ἴσου ἡ ὅλη περιουσία εἰς τοὺς υἱοὺς ἄνευ ὑπολοίπου· ζητεῖται πόσοι ἦσαν οἱ υἱοί, ἡ περιουσία καὶ ἡ μερὶς ἑκάστου υἱοῦ. (Ἀπ. $\nu-1$ υἱοί, $\alpha(\nu-1)$ ἡ μερίς, $\alpha(\nu-1)^2$ ἡ περιουσία).

9) Ἁμάξης τῶν μὲν ἐμπροσθίων τροχῶν ἡ περιφέρεια εἶναι α ποδῶν, τῶν δὲ ὀπισθίων β, Διανυσάσης δὲ τῆς ἁμάξης διάστημά τι παρετηρήθη, ὅτι οἱ ἐμπρόσθιοι τροχοὶ ἐτέλεσαν ν περιστροφὰς πλέον τῶν ὀπισθίων. Εὑρεῖν τὸ ὑπὸ τῆς ἁμάξης διανυσθὲν διάστημα. $\left(\text{Ἀπ.}\ \frac{\alpha\beta\nu}{\beta-\alpha}\right)$

10) Ἐπὶ εὐθείας δίδονται τρία σημεῖα Ο, Α, Β. Εὑρεῖν ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης σημεῖόν τι Μ τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ σημείου Α νὰ ἦναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ ἑκατέρου τῶν σημείων Ο καὶ Β.

(Λαμβάνεται τὸ μὲν σημεῖον Ο μόνιμον, αἱ δὲ ἀποστάσεις x, α καὶ β τῶν σημείων Μ, Α, Β ἀπὸ τοῦ Ο λαμβάνονται κατ' ἀπόλυτον τιμήν. οὕτως εὑρίσκεται $(x-\alpha)^2=x\,(x-\beta)$ καὶ $x=\frac{\alpha^2}{2\alpha-\beta}$)

11) Ἔστωσαν α ἡ τιμὴ τοῦ οἴνου πρώτης ποιότητος, β ἡ τοῦ τῆς δευτέρας, ν ὁ ἀριθμὸς τῶν λιτρῶν τοῦ οἴνου καὶ γ ἡ τιμὴ τῆς λίτρας τοῦ μίγματος. Τίνες αἱ δύο ποσότητες τοῦ οἴνου; $\left(\text{Ἀπὸ}\ \frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}.\nu, \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}.\nu\right)$

12) Ζητοῦνται δύο ἀριθμοί, ὧν τὸ μὲν ἄθροισμα εἶναι α, τὸ δὲ ἄθροισ[μα] τῶν γενομένων τοῦ μὲν ἐπὶ μ, τοῦ δὲ ἐπὶ ν εἶναι β (Ἀπ. $\frac{\beta-\nu\alpha}{\mu-\nu}$, $\frac{\mu\alpha-[\beta]}{\mu-\nu}$

13) Δοθέντων δύο ἀριθμῶν α καὶ β, τίς ἀριθμὸς πρέπει νὰ προστε[θῇ] εἰς ἑκάτερον αὐτῶν, ἵνα τὸ πηλίκον αὐτῶν ἦναι $\frac{\mu}{\nu}$; (Ἀπ. $\frac{\mu\beta-\nu\alpha}{\nu-\mu}$)

14) Δοθέντων δύο ἀριθμῶν, τίς ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἑκ[ά]τέρου, ἵνα τὸ πηλίκον αὐτῶν ἦναι $\frac{\mu}{\nu}$ (Ἀπ. $\frac{\nu\alpha-\mu\beta}{\nu-\mu}$)

15) Εὑρεῖν ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν ἀπὸ τοῦ $\frac{1}{\nu}$ αὐτοῦ ἀφαιρε[θῇ] τὸ $\frac{1}{\mu}$ αὐτοῦ νὰ ἀποτελῆται ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου τῶν ἀριθμῶν [α] καὶ β (Ἀπ. $\frac{\mu\nu(\log\alpha-\log\beta)}{\mu-\nu}$)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΛΥΣΙΣ ΟΣΩΝΔΗΠΟΤΕ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕΤ' ΙΣΑΡΙΘΜΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ

Ὁρισμοί.

116. Σύστημα ἐξισώσεων λέγεται τὸ σύνολον πολλῶν ἐξισώ[σε]σεων, ἅστινας πρέπει νὰ ἐπαληθεύωσιν αἱ αὐταὶ ὡρισμέναι καὶ πεπερ[α]σμέναι τιμαὶ τῶν ἐν αὐταῖς ἀγνώστων.

Ἰσοδύναμα πρὸς ἄλληλα λέγονται δύο συστήματα ἐξισώσεων, ἐ[ὰν] αἱ αὐταὶ ὡρισμέναι καὶ πεπερασμέναι τιμαὶ τῶν ἐν αὐταῖς ἀγνώστων ἐπα[λη]θεύωσιν ἀμφότερα.

Λύσις συστήματος ἐξισώσεων λέγεται ἡ εὕρεσις πασῶν τῶν τιμ[ῶν] τῶν ἐν αὐταῖς ἀγνώστων. Αἱ δὲ τιμαὶ αὗται τῶν ἀγνώστων λέγονται κ[αὶ] σύστημα λύσεων ἢ ῥιζῶν τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων.

Ἐπιτρέπεται πᾶσα πρᾶξις ἄγουσα ἀπὸ συστήματός τινος ἐξισώσε[ων] εἰς ἕτερον ἰσοδύναμον αὐτῷ.

Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν συστημάτων ἐξισώσεων

117. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν ἐν συστήματι ἐξισώσεων ἀντικατα-στήσωμεν μίαν τῶν ἐξισώσεων δι' ἄλλης ἐξισώσεως προκυ-πτούσης ἐκ τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ, εὑρίσκομεν σύστημα ἐξι-σώσεων ἰσοδύναμον αὐτῷ.

Ἔστω τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων.

$$\begin{aligned} A &= A' \\ B &= B' \\ \Gamma &= \Gamma' \end{aligned} \qquad (1)$$

ὅπου χάριν συντομίας παρεστήσαμεν ἕκαστον τῶν μελῶν τῶν ἐξι-σώσεων δι' ἑνὸς μόνον γράμματος· λέγω, ὅτι τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἑπομένῳ

$$\begin{aligned} \lambda A+\mu B+\nu\Gamma &= \lambda A'+\mu B'+\nu\Gamma' \\ B &= B' \\ \Gamma &= \Gamma' \end{aligned} \qquad (2)$$

ὅπου π.χ. τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων (1) ἀντικατεστήσαμεν ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος πασῶν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων πολλαπλασιασθεισῶν πρῶτον ἐπὶ ὡρισμένους καὶ πεπερασμένους ἀριθμοὺς ἢ παραστάσεις λ, μ, ν διαφόρους τοῦ 0.

Ἀπόδειξις. Πᾶσα ὡρισμένη καὶ πεπερασμένη λύσις τοῦ συστήμα-τος τῶν ἐξισώσεων (1), ὡς ἐπαληθεύουσα τὰς ἐξισώσεις $A=A'$, $B=B'$, $\Gamma=\Gamma'$, ἐπαληθεύει καὶ τὰς ἐξισώσεις $\lambda A=\lambda A'$, $\mu B=\mu B'$, $\nu\Gamma=\nu\Gamma'$ (ἐδ. 110), ἑπομένως καὶ τὴν ἐξίσωσιν $\lambda A+\mu B+\nu\Gamma=\lambda A'+\mu B'+\nu\Gamma'$ (διότι, ἐὰν εἰς ἴσα προστεθῶσιν ἴσα, τὰ προκύπτοντα ἀθροίσματα εἶναι ἴσα)· ὥστε ἐπαληθεύει καὶ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (2).

Καὶ ἀντιστρόφως· πᾶσα ὡρισμένη καὶ πεπερασμένη λύσις τοῦ συστή-ματος τῶν ἐξισώσεων (2), ὡς ἐπαληθεύουσα τὰς ἐξισώσεις

$$\lambda A+\mu B+\nu\Gamma=\lambda A'+\mu B'+\nu\Gamma', \quad B=B', \quad \Gamma=\Gamma'$$

ἐπαληθεύει καὶ τὴν ἐξίσωσιν $\mu B+\nu\Gamma=\mu B'+\nu\Gamma'$ (ἐδ. 110), ἑπομένως καὶ τὴν ἐξίσωσιν $\lambda A=\lambda A'$ ἢ τὴν $A=A'$ (διότι, ἐὰν ἀπὸ τῶν ἴσων $\lambda A+\mu B+\nu\Gamma=\lambda A'+\mu B'+\nu\Gamma'$ ἀφαιρεθῶσιν ἴσα $\mu B+\nu\Gamma=\mu B'+\nu\Gamma'$, τὰ προκύπτοντα ὑπόλοιπα εἶναι ἴσα, ἤτοι $\lambda A=\lambda A'$ ἢ $A=A'$)· ὥστε ἐπα-

ληθεύει καὶ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1). Τὰ συστήματα ἄρα
καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς ἄλληλα. ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Περὶ τῶν πολλαπλασιαστῶν λ, μ, ν δυνάμεθα νὰ παρατη
σωμεν τὰ αὐτὰ καὶ ἐν τῷ ἐδαφίῳ 110 *Σημ.*

118. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις παρέχει τὸν κατάλληλον τρόπον π
ἀπαλοιφὴν ἑνὸς ἢ πολλῶν ἀγνώστων ἐκ πολλῶν ἐξισώσεων σύστη
ἀποτελουσῶν· καλεῖται δὲ ὁ τρόπος οὗτος μέθοδος ἀπαλοιφῆς δ
προσθέσεως.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων μετὰ
ἀγνώστων

$$7x+4y=76$$
$$11x-9y=43$$

Πρὸς ἀπαλοιφὴν τοῦ y μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων πολ
πλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς μὲν πρώτης ἐξισώσεως ἐπὶ 9,
δὲ δευτέρας ἐπὶ 4 (ἤτοι ἐπὶ τοὺς συντελεστὰς τοῦ y ἐν ἀμφοτέραις τ
ἐξισώσεσι) καὶ εἶτα προσθέτομεν τὰς προκυπτούσας ἐξισώσεις κατὰ μέ
Οὕτως ἔχομεν

$$\begin{array}{r} 63x+36y=684 \\ 44x-36y=172 \\ \hline 107x=856 \end{array}$$

καὶ $$x=8$$

Εὑρεθείσης δ' οὕτω τῆς τιμῆς τοῦ x εὑρίσκεται καὶ ἡ τοῦ y, ἀρ
ἐν τῇ πρώτῃ τῶν ἐξισώσεων νὰ τεθῇ ἀντὶ x ὁ 8 (διότι καὶ αὕτη πρέ
νὰ ἐπαληθεύηται ὑπὸ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ x), ὅτε εὑρίσκεται

$$7.8+4y=76 \quad \text{ἢ} \quad 4y=20 \quad \text{καὶ} \quad y=5$$

ὥστε ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι

$$x=8, \ y=5$$

119. Παρατηρητέον δέ, ὅτι ὡς πολλαπλασιασταὶ τῶν ἐξισώσεων σ
στήματος δύνανται πάντοτε νὰ λαμβάνωνται (ἐὰν ἦναι ἀνάγκη) οἱ συν
λεσταὶ τοῦ ἀπολειπτέου ἀγνώστου οὕτως ὥστε κατὰ τὴν πρόσθεσιν
ἀφαίρεσιν τῶν προκυπτουσῶν ἐξισώσεων κατὰ μέλη νὰ ἀπαλείφηται
ἄγνωστος οὗτος. Ἁπλούστερον δὲ εἶναι νὰ λαμβάνωμεν τὸ ἐλάχιστον κ
νὸν πολλαπλάσιον τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀπολειπτέου ἀγνώστου καὶ
πολλαπλασιάζωμεν τὰς ἐξισώσεις ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ ἐλαχίστου κοι

πολλαπλασίου διαιρεθέντος διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀπολειπτέου ἀγνώστου ἐν τῇ αὐτῇ ἐξισώσει.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων

$$5x-12y=17$$
$$3x-\ 8y=71$$

Πρὸς ἀπαλοιφὴν τοῦ y λαμβάνομεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον 24 τῶν συντελεστῶν αὐτοῦ 12 καὶ 8 ἐν ταῖς ἐξισώσεσι καὶ πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς μὲν πρώτης ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ πηλίκον 2 τοῦ 24 διὰ 12, τῆς δὲ δευτέρας ἐπὶ τὸ πηλίκον 3 τοῦ 24 διὰ 8 καὶ ἔχομεν

$$\begin{array}{rl} 10x-24y &= 34 \\ 9x-24y &= 213 \\ \hline 19x &= 247 \\ x &= 13 \end{array}$$

Ὅθεν ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως καὶ $y=4$

Ὥστε ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι

$$x=13,\ y=4.$$

Ἐκ δὲ τοῦ συστήματος

$$\begin{array}{c} x+y=\alpha \\ x-y=\beta \\ \hline \end{array}$$

εὑρίσκεται ἀμέσως $\quad 2x=\alpha+\beta$

$$2y=\alpha-\beta$$

καὶ $\quad x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$$y=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

120. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν ἐν συστήματι ἐξισώσεων λύσωμεν (ἐὰν ἦναι ἀνάγκη) μίαν τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ ὡς πρὸς ἕνα τῶν ἐν αὐτῇ ἀγνώστων θεωροῦντες τοὺς λοιποὺς ἐν αὐτῇ ἀγνώστους (ἐὰν ὑπάρχωσι) ὡς γνωστοὺς καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὴν οὕτως εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου τούτου ἐν ταῖς λοιπαῖς (ἢ ἐν πάσαις ἢ ἔν τισιν αὐτῶν), εὑρίσκομεν σύστημα ἐξισώσεων ἰσοδύναμον αὐτῷ.

Ἔστω τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$\left.\begin{aligned} A&=A' \\ B&=B' \\ \Gamma&=\Gamma' \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ὅπου χάριν συντομίας παρεστήσαμεν ἕκαστον τῶν μελῶν τῶν ἐξισώσεων δι' ἑνὸς μόνου γράμματος· λέγω, ὅτι τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἑπομένῳ

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha' \\ \beta&=\beta' \\ \gamma&=\gamma' \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ὅπερ εὑρίσκομεν λύοντες τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων $A=A'$ πρὸς x καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν ταῖς λοιπαῖς $B=B'$, $\Gamma=\Gamma'$ τὴν οὕτως εὑρεθεῖσαν τιμὴν $x=\alpha'$, ὅτε προκύπτουσιν αἱ ἐξισώσεις $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$, ὧν τὰ μέλη παρεστήσαμεν ὁμοίως διὰ τῶν γραμμάτων α', β, β', γ, γ'.

Ἀπόδειξις. Πᾶσα ὡρισμένη καὶ πεπερασμένη λύσις τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (1), ὡς ἐπαληθεύουσα τὰς ἐξισώσεις $A=A'$, $B=B'$, $\Gamma=\Gamma'$, ἐπαληθεύει καὶ τὰς ἐξισώσεις $x=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$ τοῦ συστήματος (2) τὴν μὲν $x=\alpha'$· διότι εἶναι αὐτὴ ἡ $A=A'$ λυθεῖσα πρὸς x, τὰς δὲ $\beta=\beta'$ καὶ $\gamma=\gamma'$· διότι ἡ μόνη διαφορὰ αὐτῶν ἀπὸ τῶν $B=B'$ καὶ $\Gamma=\Gamma'$ εἶναι, ὅτι ἀντὶ τοῦ x ἐν ταύταις ὑπάρχει τὸ ἴσον αὐτῷ, ἤτοι τὸ α', ἐν ἐκείναις· ὥστε ἐπαληθεύει πᾶσα ὡρισμένη καὶ πεπερασμένη λύσις τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (2).

Καὶ ἀντιστρόφως· πᾶσα ὡρισμένη καὶ πεπερασμένη λύσις τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (2), ὡς ἐπαληθεύουσα τὰς ἐξισώσεις $x=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$, ἐπαληθεύει καὶ τὰς ἐξισώσεις $A=A'$, $B=B'$, $\Gamma=\Gamma'$ τὴν μὲν $A=A'$· διότι εἶναι αὐτὴ ἡ $x=\alpha'$, ἥτις εὑρέθη λυθείσης τῆς $A=A'$ πρὸς x, τὰς δὲ $B=B'$ καὶ $\Gamma=\Gamma'$· διότι ἡ μονη διαφορὰ αὐτῶν ἀπὸ τῶν $\beta=\beta'$ καὶ $\gamma=\gamma'$ εἶναι, ὅτι ἀντὶ τοῦ α' ἐν ταύταις ὑπάρχει τὸ ἴσον αὐτῷ, ἤτοι τὸ x, ἐν ἐκείναις· ὥστε ἐπαληθεύει πᾶσα ὡρισμένη καὶ πεπερασμένη λύσις τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1). Τὰ συστήματα ἄρα (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς ἄλληλα. ὅ. ἔ. δ.

121. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις παρέχει τὸν κατάλληλον τρόπον πρὸς

ἀπαλοιφὴν ἑνὸς ἢ πολλῶν ἀγνώστων ἐκ πολλῶν ἐξισώσεων σύστημα ἀποτελουσῶν· καλεῖται δὲ ὁ τρόπος οὗτος μέθοδος ἀπαλοιφῆς δι' ἀντικαταστάσεως.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων

$$(1) \qquad \begin{aligned} 4x-3y &= 8 \\ 7x+2y &= 43 \end{aligned}$$

ἐὰν λύσωμεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν πρὸς x θεωροῦντες τὸ y ὡς γνωστόν, εὑρίσκομεν $x=\frac{8+3y}{4}$· ἀντικαθιστῶντες δὲ ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x εὑρίσκομεν

$$7.\frac{8+3y}{4}+2y=43$$

ἢ

$$56+21y+8y=172$$

καὶ ἑπομένως τὸ σύστημα (1) ἰσοδυναμεῖ τῷ ἑξῆς

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{8+3y}{4} \\ 56+21y+8y &= 172 \end{aligned}$$

ἐκ τῆς δευτέρας δὲ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν

$$y=4$$

Ὅθεν καὶ $\quad x=\frac{8+3.4}{4}=\frac{20}{4}=5$

Ὥστε ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι $x=5$, $y=4$.

122. Παρατηρητέον δέ, ὅτι λύομεν πάντοτε ἐκείνην τῶν ἐξισώσεων πρὸς ἕνα τῶν ἐν αὐτῇ ἀγνώστων, ἥτις παρέχει τὰς ὀλιγωτέρας πράξεις. Ἐνίοτε δὲ αἱ τιμαί τινων τῶν ἀγνώστων εὑρίσκονται ἢ ἀμέσως ἢ διὰ διαφόρων συνδυασμῶν τῶν ἐξισώσεων πρὸς ἀλλήλας, ὡς παραδείγματος χάριν δι' ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου ἀπαλοιφῆς διὰ προσθέσεως. Ἐν γένει δύνανται νὰ ἐφαρμόζωνται συγχρόνως ἀμφότεραι αἱ μέθοδοι ἀπαλοιφῆς, τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀντικαταστάσεως, πρὸς λύσιν παντὸς συστήματος ἐξισώσεων. Δυνατὸν δὲ νὰ συμβῇ σύστημα ἐξισώσεων νὰ ἦναι τοιοῦτον, ὥστε μία ἢ πολλαὶ τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ νὰ ἦναι ἀσυμβίβαστοι πρὸς τὰς λοιπάς, ἢ νὰ ἐπιδέχωνται ἀορίστους λύσεις, ἢ να ἦναι ἀδύνατοι,

ἢ νὰ ἦναι συνέπειαι μιᾶς ἢ πολλῶν ἐξισώσεων τοῦ αὐτοῦ συστήματος ἐξισώσεων, κλ. Τότε δὲ τὸ τοιοῦτον σύστημα εἶναι ἢ ἀδύνατον, ἢ ἐπιδέχεται ἀορίστους λύσεις, ἢ αἱ ἐξισώσεις αἱ ἀποτελοῦσαι αὐτὸ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἀσυμβίβαστοι.

Παραδείγματα.

1) Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων

$$4x-9=19$$
$$3x-5y=11$$

Ἡ μὲν πρώτη ἐξίσωσις δίδει

$$x=7$$

ἡ δὲ δευτέρα δίδει

$$3.7-5y=11$$

ἢ

$$-5y=-10$$

ἢ

$$y=2$$

Ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων αἱ ἐπαληθεύουσαι τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι $x=7$ καὶ $y=2$.

2) Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$4x+3y=61$$
$$7x-y=38$$

ἡ δευτέρα ἐξίσωσις λυομένη πρὸς y δίδει

$$y=7x-38$$

ἐὰν δὲ ἀντικατασταθῇ ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ y ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει, εὑρίσκεται

$$4x+3(7x-38)=61$$

ἢ

$$4x+21x-114=61$$

ἢ

$$25x=175.$$

καὶ

$$x=7$$

Ὅθεν καὶ $y=7.7-38=49-38=11$

ὥστε $x=7$ καὶ $y=11$ εἶναι ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος.

3) Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$5x-4y=4$$
$$5x+7y=103$$

Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα τῆς πρώτης ἐξισώσεως (πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ —1 ἀμφότερα αὐτῆς τὰ μέλη), ἔχομεν τὸ σύστημα

$$\begin{array}{r} -5x+4y=-4 \\ 5x+7y=103 \\ \hline 11y=99 \end{array}$$

ὅθεν $11y=99$

καὶ $y=9$

Ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην ἐν τῇ πρώτῃ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν

$$5x-4.9=4$$

ἢ $5x=40$

καὶ $x=8$

ὥστε ἡ λύσις τοῦ προταθέντος συστήματος εἶναι $x=8$, $y=9$.

4). Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$7x+18y=110$$
$$11x-12y=52$$

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις λυομένη πρὸς y δίδει

$$y=\frac{11x-52}{12}$$

ἐὰν δὲ ἀντικατασταθῇ ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ y ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει, εὑρίσκεται

$$7x+18.\frac{11x-52}{12}=110$$

ἢ $$7x+3\,\frac{11x-52}{2}=110$$

ἢ $$14x+33x-156=220$$

ἢ $$47x=376$$

καὶ $$x=8$$

ὅθεν καὶ
$$y=\frac{11.8-52}{12}=\frac{88-52}{12}=3$$

ὥστε ἡ λύσις τοῦ προταθέντος συστήματος εἶναι $x=8$, $y=3$.

5) Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$4x-5y=3$$
$$12x-15y=11$$

Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως λαμβάνομεν

$$x=\frac{3+5y}{4}$$

τότε δὲ ἐκ τῆς δευτέρας λαμβάνομεν

$$12.\frac{3+5y}{4}-15y=11$$

ἢ
$$9+15y-15y=11$$

ἢ
$$0.y=2,$$ ὅπερ ἀδύνατον.

Ὥστε καὶ τὸ προταθὲν σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

6) Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$5x+8y=9$$
$$35x+56y=63$$

ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἐπὶ 7 λαμβάνομεν,

$$35x+56y=63$$

ἤτοι τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν, ἢ ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐξισώσεως διὰ 7, λαμβάνομεν

$$5x+8y=9$$

ἤτοι τὴν πρώτην ἐξίσωσιν. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι ἡ ἑτέρα τῶν δύο προταθεισῶν ἐξισώσεων εἶναι συνέπεια τῆς ἑτέρας, ἤτοι κυρίως ἐδόθη μία ἐξίσωσις ἡ

$$5x+8y=9$$

ἥτις ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις· διότι δίδοντες τῷ y αὐθαιρέτως ὁσασδήποτε καὶ οἱασδήποτε τιμὰς εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως ὁσασδήποτε καὶ οἱασδήποτε τιμὰς τοῦ x· ὥστε τὸ προταθὲν σύστημα εἶναι ἀόριστον ἐπιδεχόμενον ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις.

7) Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων.

$$(1)\qquad \begin{aligned} \alpha x+\beta y&=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y&=\gamma' \end{aligned}$$

λύοντες τὴν πρώτην ἐξίσωσιν πρὸς x λαμβάνομεν (ἐὰν $\alpha \lessgtr 0$)

$$x=\frac{\gamma-\beta y}{\alpha}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει λαμβάνομεν

$$\alpha'.\frac{\gamma-\beta y}{\alpha}+\beta' y=\gamma'$$

ἢ
$$\alpha'\gamma-\alpha'\beta y+\alpha\beta' y=\alpha\gamma'$$
ἢ
$$(\alpha\beta'-\beta\alpha').y=\alpha\gamma'-\gamma\alpha$$

καὶ (ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha' \gtrless 0$)

$$y=\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}.$$

Ὅθεν καὶ

$$x=\frac{\gamma-\beta.\dfrac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}}{\alpha}=\frac{\gamma\alpha\beta'-\gamma\beta\alpha'-\beta\alpha\gamma'+\beta\gamma\alpha'}{\alpha(\alpha\beta'-\beta\alpha')}$$

ἢ
$$x=\frac{\gamma\beta'-\beta\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}.$$

ὥστε ἡ λύσις τοῦ προταθέντος συστήματος (ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha' \gtrless 0$) εἶναι ἡ ἑπομένη

$$(2)\qquad x=\frac{\gamma\beta'-\beta\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'},\quad y=\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}$$

* Διερεύνησις. Πρὸς διερεύνησιν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων x καὶ y τοῦ ἀνωτέρω συστήματος δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις:

1η. $\alpha\beta'-\beta\alpha' \gtrless 0$. Τότε ἐκ τῶν συντελεστῶν α, α' ἢ ἐκ τῶν β, β' ὁ ἕτερος τοὐλάχιστον διαφέρει τοῦ 0· διότι ἄλλως, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ α, α' ἢ οἱ β, β' ἦναι 0, εἶναι καὶ $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$, ὅπερ κατὰ τῆς ὑποθέσεως. Πλὴν δὲ τούτου, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ α, α' ἢ οἱ β, β' ἦναι 0, τὸ σύστημα (1) τῶν δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων καταντᾷ εἰς σύστημα δύο ἐξισώσεων $\beta y=\gamma$, $\beta' y=\gamma'$ ἢ $\alpha x=\gamma$, $\alpha' x=\gamma'$ μεθ᾽ ἑνὸς ἀγνώστου, ὅπερ δὲν ὑφίσταται· διότι ὁ ἄγνωστος ὁρίζεται ἁπλῶς ἐκ τῆς ἑτέρας τῶν δύο ἐξισώσεων ἀνεξαρτήτως τῆς ἑτέρας· ἢ ἄλλως πρέπει νὰ ὑπάρχῃ $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$ ἢ $\alpha=\alpha'$, $\gamma=\gamma'$, ἤτοι νὰ ὑπάρχῃ μία ἐξίσωσις μεθ᾽ ἑνὸς ἀγνώστου καὶ οὐχὶ σύστημα δύο ἐξισώσεων.

Ὥστε, ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha' \gtrless 0$, ὅτε καὶ ὁ ἕτερος τοὐλάχιστον τῶν συντελεστῶν α, α' ἢ τῶν β, β' διαφέρει τοῦ 0, τὸ σύστημα (1) τῶν δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων ἐπιδέχεται μίαν λύσιν τὴν (2).

2α. $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$. Ἡ περίπτωσις αὕτη ὑποδιαιρεῖται εἰς τρεῖς ἄλλας περιπτώσεις:

1ον. Ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$, ὁ ἕτερος τοὐλάχιστον τῶν συντελεστῶν α, α' ἢ τῶν β, β' διαφέρει τοῦ 0· διότι, ἐὰν π. χ. $\alpha=0$, τότε εἶναι $\beta\alpha'=0$ καὶ $\alpha'=0$ καὶ ἐπομένως τὸ σύστημα (1) καταντᾷ εἰς σύστημα δύο ἐξισώσεων μεθ᾽ ἑνὸς ἀγνώστου, ὅπερ δὲν ὑφίσταται, ὡς καὶ ἀνωτέρω ἐρρήθη· τούτου δὲ τεθέντος ὁ ἕτερος τοὐλάχιστον τῶν δύο ἀριθμητῶν $\gamma\beta'-\beta\gamma'$, $\alpha\gamma'-\gamma\alpha'$ τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων δυνατὸν νὰ ἦναι 0· διότι, ἐὰν $\gamma\beta'-\beta\gamma' \gtrless 0$ ἢ $\alpha\gamma'-\gamma\alpha' \gtrless 0$, ἡ τιμὴ τοῦ x ἢ ἡ τοῦ y εἶναι ἀδύνατος· τότε δὲ λέγεται, ὅτι αἱ δύο ἐξισώσεις μετὰ δύο ἀγνώστων τοῦ συστήματος (1) εἶναι ἀσυμβίβαστοι πρὸς ἀλλήλας.

Ὥστε, ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$, (ὅπου ὁ ἕτερος τοὐλάχιστον τῶν δύο συντελεστῶν α, α' ἢ τῶν β, β' διαφέρει τοῦ 0) καὶ ὁ ἕτερος τοὐλάχιστον τῶν δύο ἀριθμητῶν $\gamma\beta'-\beta\gamma'$, $\alpha\gamma'-\gamma\alpha'$ τῶν τιμῶν τῶν δύο ἀγνώστων διαφέρει τοῦ 0, αἱ δύο ἐξισώσεις μετὰ δύο ἀγνώστων τοῦ συστήματος (1) εἶναι ἀσυμβίβαστοι πρὸς ἀλλήλας.

2ον Ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$, ὁ ἕτερος τοὐλάχιστον τῶν δύο συντελεστῶν α, α' ἢ τῶν β, β' διαφέρει τοῦ 0, ὡς καὶ ἀνωτέρω ἐρρήθη· τούτου δὲ τεθέντος ἀμφότεροι οἱ ἀριθμηταὶ $\gamma\beta'-\beta\gamma'$, $\alpha\gamma'-\gamma\alpha'$ τῶν τιμῶν τῶν δύο ἀγνώστων δυνατὸν νὰ ἦναι 0· διότι, ἐὰν $\gamma\beta'-\beta\gamma' \gtrless 0$ καὶ $\alpha\gamma'-\gamma\alpha' \gtrless 0$, αἱ τιμαὶ τοῦ x καὶ τοῦ y εἶναι ἀδύνατοι· τοὐναντίον, ἐὰν $\gamma\beta'-\beta\gamma'=0$ καὶ $\alpha\gamma'-\gamma\alpha'=0$, αἱ τιμαὶ τοῦ x καὶ τοῦ y εἶναι ἀόριστοι ὡς ἄπειροι τὸ πλῆθος· τότε δὲ λέγεται, ὅτι τὸ σύστημα (1) τῶν δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων εἶναι ἀόριστον ἢ ἐπιδέχεται ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις.

Ὥστε, ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$ (ὅπου ὁ ἕτερος τοὐλάχιστον τῶν δύο συντελεστῶν α, α' ἢ τῶν β, β' διαφέρει τοῦ 0) καὶ ἀμφότεροι οἱ ἀριθμηταὶ $\gamma\beta'-\beta\gamma'$ καὶ $\alpha\gamma'-\gamma\alpha'$ τῶν δύο τιμῶν τῶν δύο ἀγνώστων ἦναι 0, τὸ σύστημα (1) τῶν δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων ἐπιδέχεται ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις ἢ εἶναι ἀόριστον.

3ον Ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$, δυνατὸν πάντες οἱ συντελεσταὶ $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ νὰ ἦναι 0, ὅτε καὶ $\gamma\beta'-\beta\gamma'=0$, $\alpha\gamma'-\gamma\alpha'=0$, αἱ δὲ ἐξισώσεις (1) ἀνάγονται τότε εἰς τὰς ἐξισώσεις

$$0=\gamma$$
$$0=\gamma',$$

αἵτινες εἶναι ἀσυμβίβαστοι πρὸς ἀλλήλας ἢ ἀδύνατοι· πλὴν ἐὰν καὶ $\gamma=0$, $\gamma'=0$, ὅτε αἱ δύο τιμαὶ τῶν δύο ἀγνώστων εἶναι ἐντελῶς ἀόριστοι. Τοτε δὲ λέγεται, ὅτι τὸ σύστημα (1) τῶν δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων εἶναι ἢ ἀδύνατον ἢ ἀόριστον.

Ὥστε, ἐὰν οἱ τέσσαρες συντελεσταὶ $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ ἦναι πάντες 0, (ὅτε καὶ $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$, $\gamma\beta'-\beta\gamma'=0$, $\alpha\gamma'-\gamma\alpha'=0$), τὸ σύστημα (1) τῶν δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων εἶναι ἀδύνατον μέν, ἐὰν $\gamma \gtrless 0$ καὶ $\gamma' \gtrless 0$, ἀόριστον δέ, ἐὰν $\gamma=0$ καὶ $\gamma'=0$.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται, ὅτι τὸ σύστημα (1) τῶν δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων ἐπιδέχεται μίαν καὶ μόνην λύσιν, ἐὰν ἡ παράστασις

$$\alpha\beta'-\alpha'\beta$$

διαφέρῃ τοῦ 0· ἐὰν δὲ τοὐναντίον $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$, τὸ σύστημα τοῦτο ἢ οὐδεμίαν ἐπιδέχεται λύσιν ἢ ἐπιδέχεται ἀπείραυς τὸ πλῆθος λύσεις.

Λύσις οἱουδήποτε συστήματος πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετ' ἰσαρίθμων ἀγνώστων.

123. Διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς ἑνὸς ἀγνώστου μεταξὺ δύο ἐξισώσεων διὰ τῆς ἑτέρας τῶν δύο μεθόδων, τῆς προσθέσεως ἢ τῆς ἀντικαταστάσεως,

ἀνάγομεν τὴν λύσιν συστήματος ν ἐξισώσεων μετὰ ν ἀγνώστων εἰς σύστημα ν—1 ἐξισώσεων μετὰ ν—1 ἀγνώστων. Τοῦτο δὲ πάλιν ἀνάγομεν ὁμοίως εἰς σύστημα ν—2 ἐξισώσεων μετὰ ν—2 ἀγνώστων· καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν σύστημα δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων, οὗ τὴν λύσιν ἀνωτέρω ἐμάθομεν.

Παραδείγματα.

1) Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων μετὰ τριῶν ἀγνώστων

$$\begin{aligned} 5x-3y+7w &= 16 \\ -4x+2y-3w &= -11 \\ 7x-8y-9w &= -4 \end{aligned}$$

Μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας, τῆς δευτέρας καὶ τρίτης δυνάμεθα νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν ἄγνωστον y πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς μὲν πρώτης ἐπὶ 2, τῆς δὲ δευτέρας ἐπὶ 3· τῆς μὲν δευτέρας ἐπὶ 4, τῆς δὲ τρίτης ἐπὶ 1· οὕτως εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned} 10x-6y+14w &= 32 \\ -12x+6y-9w &= -33 \\ \hline -2x+5w &= -1 \end{aligned}$$

καὶ

$$\begin{aligned} -16x+8y-12w &= -44 \\ 7x-8y-9w &= -4 \\ \hline -9x-21w &= -48 \end{aligned}$$

Οὕτω δὲ λαμβάνομεν τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων

$$\begin{aligned} -2x+5w &= -1 \\ -9x-21w &= -48 \end{aligned}$$

Ἐὰν δὲ τὴν μὲν πρώτην τῶν δύο ἐξισώσεων τούτων πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ —9, τὴν δὲ δευτέραν ἐπὶ 2, εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\begin{aligned} 18x-45w &= 9 \\ -18x-42w &= -96 \\ \hline -87w &= -87 \\ w &= 1 \end{aligned}$$

Ὅθεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως $-2x+5w=-1$ εὑρίσκομεν

$$-2x+5=-1$$

καὶ

$$x\ =\ 3$$

ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως $5x-3y+7w=16$ εὑρίσκομεν

$$15-3y+7=16$$

καὶ

$$y=\ \ 2$$

ὥστε ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι $x=3$, $y=2$, $w=1$.

2) Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\begin{aligned}4x-5y+3w&=8\\ 2x+9y-4w&=23\\ 5x-2y+6w&=47\end{aligned}$$

ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως λαμβάνομεν

$$x=\frac{8+5y-3w}{4}$$

ταύτην δὲ τὴν τιμὴν τοῦ x ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν δευτέραν καὶ ίτην ἐξίσωσιν λαμβάνομεν

$$\begin{aligned}23y-11w&=38\\ 17y+\ 9w&=148\end{aligned}$$

ἐκ δὲ τοῦ συστήματος τούτου εὑρίσκομεν $y=5$, $w=7$

ὅθεν

$$x=\frac{8+5.5-3.7}{4}=3$$

ωστε ἡ λύσις τοῦ προταθέντος συστήματος εἶναι $x=3$, $y=5$, $w=7$.

3) Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα τεσσάρων ἐξισώσεων μετὰ τεσσάων ἀγνώστων

$$\begin{aligned}2x+3y+4w+5\varphi&=\ 37\\ 4x+5y+6w-8\varphi&=-\ 3\\ 6x+2y-4w+7\varphi&=\ 42\\ 8x+4y-5w-3\varphi&=\ 11\end{aligned}$$

ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως λαμβάνομεν

$$x=\frac{37-3y-4w-5\varphi}{2}$$

τότε δὲ αἱ λοιπαὶ τρεῖς γίνονται

$$\begin{aligned} y+2w+18\varphi&=77\\ 7y+16w+8\varphi&=69\\ 8y+21w+23\varphi&=137 \end{aligned}$$

ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων τούτων λαμβάνομεν

$$y=77-2w-18\varphi$$

τότε δὲ αἱ λοιπαὶ δύο γίνονται

$$\begin{aligned} w-59\varphi&=-235\\ 5w-121\varphi&=-479 \end{aligned}$$

ἐκ δὲ τοῦ συστήματος τούτου εὑρίσκομεν $w=1$, $\varphi=4$

Ὅθεν $$y=77-2.1-18.4=3$$

καὶ $$x=\frac{37-3.3-4.1-5.4}{2}=2$$

ὥστε ἡ λύσις τοῦ προταθέντος συστήματος εἶναι

$$x=2,\quad y=3,\quad w=1,\quad \varphi=4.$$

4) Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} 2x-3y+w&=-4\\ 3x-2y&=-8\\ 4y-5w&=-11 \end{aligned}$$

ἐκ τῆς τρίτης ἐξισώσεως λαμβάνομεν

$$w=\frac{4y+11}{5}$$

Ὅθεν ἡ πρώτη γίνεται

$$10x-9y=-31$$

αὕτη δὲ μετὰ τῆς δευτέρας δίδει $x=-2$ $y=1$· ὅθεν καὶ

$$w=\frac{4.1+11}{5}=3.$$

Ἡ λύσις ἄρα εἶναι $x=-2$, $y=1$, $w=3$.

5) Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} y+w&=\alpha\\ w+x&=\beta\\ x+y&=\gamma \end{aligned}$$

διὰ προσθέσεως τῶν ἐξισώσεων τούτων κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$x+y+w=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἀφαιρέσωμεν ἑκάστην τῶν δοθεισῶν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν

$$x=\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}, \quad y=\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}, \quad w=\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}.$$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Λῦσαι τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} 5x-4y+2w&=14 \\ 3x-2y \quad &= 5 \\ 4y+5w&=17 \end{aligned}$$

(Ἀπ. $x=2,\ y=\frac{1}{2},\ w=3$)

2) Λῦσαι τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} 4x-3w+\varphi&=10 \\ 3y+w-4\varphi&=-7 \\ 3y+\varphi&=17 \\ x+2y+3\varphi&=25 \end{aligned}$$

(Ἀπ. $x=2,\ y=4,\ w=1,\ \varphi=5$)

3) Λῦσαι τὸ σύστημα

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\alpha$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{w}=\beta$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{w}=\gamma$$

$\left(\text{Ἀπ. } x=\frac{2}{\alpha+\beta-\gamma},\ y=\frac{2}{\alpha+\gamma-\beta},\ w=\frac{2}{\beta+\gamma-\alpha}\right)$

4) Λῦσαι τὸ σύστημα

$$\frac{2}{x}-\frac{5}{3y}+\frac{1}{w}=3\frac{4}{27}$$
$$\frac{1}{4x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{w}=6\frac{11}{72}$$
$$\frac{5}{6x}-\frac{1}{y}+\frac{4}{w}=12\frac{1}{36}$$

$\left(\text{Ἀπ. } x=6,\ y=9,\ w=\frac{1}{3}\right)$

5) Λῦσαι τὸ σύστημα

$$x+y-w=\lambda o\gamma\,\alpha$$
$$x-y+w=\lambda o\gamma\,\beta \qquad (\text{'А. } x=\lambda o\gamma\sqrt{\alpha\beta},\, y=\lambda o\gamma\sqrt{\alpha\gamma},\, w=\lambda o\gamma\sqrt{\beta\gamma})$$
$$-x+y+w=\lambda o\gamma\,\gamma$$

6) Λῦσαι τὸ σύστημα

$$53-\frac{x}{2}-\frac{w}{2}=y-109$$
$$\frac{x}{4}+\frac{y}{8}=26 \qquad (\text{'Απ. } x=64, y=80, w=100)$$
$$5y=4w$$

7) Λῦσαι τὸ σύστημα

$$(\beta+\gamma)(x+\beta-\gamma)+\alpha(y+\alpha)=2(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)$$
$$\frac{\alpha y}{(\beta-\gamma)x}=\frac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha^2}$$
$$\left(\text{'Απ.} \qquad x=\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}, \quad y=\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha}\right)$$

Προβλήματα·

1) Εὑρεῖν κλάσμα, τὸ ὁποῖον, ἐὰν μὲν αὐξηθῶσι κατὰ 1 οἱ ὅροι αὐτοῦ, γίνεται ἴσον τῷ $\frac{5}{6}$, ἐὰν δὲ ἐλαττωθῶσι κατὰ 1, γίνεται ἴσον τῷ $\frac{4}{5}$.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ x τὸν ἀριθμητὴν καὶ διὰ τοῦ y τὸν παρονομαστὴν τοῦ ζητουμένου κλάσματος, ἔχομεν

$$\frac{x+1}{y+1}=\frac{5}{6}, \qquad \frac{x-1}{y-1}=\frac{4}{5}$$

ἢ

$$6x-5y=-1$$
$$5x-4y=\ \ 1$$

Ὅθεν $x=9$, $y=11$· ὥστε τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶναι $\frac{9}{11}$.

2) Δύο κρουνοὶ ῥέοντες ὁ μὲν ἐπὶ 3 ὥρας, ὁ δὲ ἐπὶ 4 ὥρας ἔδωκαν ὁμοῦ 3960 λίτρας· οἱ αὐτοὶ κρουνοὶ ῥέοντες

ὁ μὲν πρῶτος ἐπὶ 5 ὥρας, ὁ δὲ δεύτερος ἐπὶ 2 ὥρας ἔδωκαν ὁμοῦ 3800 λίτρας. Ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν λιτρῶν τῶν ρευσασῶν ἐξ ἑκατέρου τῶν κρουνῶν τούτων ἐπὶ μίαν ὥραν.

Ἔστωσαν x καὶ y οἱ ἀριθμοὶ τῶν λιτρῶν τῶν ρευσασῶν ἐξ ἑκατέρου τῶν κρουνῶν ἐπὶ μίαν ὥραν. Κατὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος ἔχομεν

$$3x+4y=3960$$
$$5x+2y=3800$$

Ὅθεν $$x=520, \quad y=600$$

ὥστε ἐκ μὲν τοῦ πρώτου κρουνοῦ ἔρρευσαν 520 λίτραι, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 600 λίτραι ἐπὶ μίαν ὥραν

3) Ἔχει τις τρία μίγματα χρυσοῦ, ἀργύρου καὶ μολύβδου· τὰ μίγματα ταῦτα περιέχουσι

τὸ πρῶτον	50 γρ.	χρυσοῦ	60 γρ.	ἀργύρου	80	γρ.	χαλκοῦ
τὸ δεύτερον	30 »	»	50 »	»	70	»	»
τὸ τρίτον	35 »	»	65 »	»	90	»	»

Πόσον βάρος πρέπει νὰ ληφθῇ ἐξ ἑκάστου τῶν μιγμάτων τούτων πρὸς ἀποτέλεσιν τετάρτου μίγματος περιέχοντος 79 γρ. χρυσοῦ, 118 γρ. ἀργύρου, 162 γρ. χαλκοῦ;

Ἔστωσαν x, y, w τὰ βάρη, τὰ ὁποῖα πρέπει να ληφθῶσιν ἐξ ἑκάστου τῶν τριῶν τούτων μιγμάτων. Ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μῖγμα περιέχει $50+60+80=190$ γρ., ἐξ ὧν τὰ 50 γρ. εἶναι χρυσός, τὰ 60 ἄργυρος καὶ τὰ 80 χαλκός, ἕπεται, ὅτι ἐν τῇ συνθέσει τοῦ μίγματος τούτου εἶναι τὰ $\frac{5}{19}$ χρυσός, τὰ $\frac{6}{19}$ ἄργυρος καὶ τὰ $\frac{8}{19}$ χαλκός. Ἐὰν δὲ ληφθῶσι x γραμ. ἐκ τοῦ μίγματος τούτου, λαμβάνονται $\frac{5x}{19}$ γρ. χρυσοῦ, $\frac{6x}{19}$ γραμ. ἀργύρου, $\frac{8x}{19}$ γρ. χαλκοῦ· ὁμοίως λαμβάνονται ἐκ τῶν δύο λοιπῶν μιγμάτων

$$\frac{3y}{15} \text{ γρ χρυσοῦ,} \quad \frac{5y}{15} \text{ γρ. ἀργύρου,} \quad \frac{7y}{15} \text{ γρ. χαλκοῦ}$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{35w}{190} \text{ » »} \quad \frac{65w}{190} \text{ » »} \quad \frac{90w}{190} \text{ » »}$$

Ὥστε αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{5x}{19}+\frac{3y}{15}+\frac{35w}{190}=79$$

$$\frac{6x}{19}+\frac{5y}{15}+\frac{65w}{190}=118$$

$$\frac{8x}{19}+\frac{7y}{15}+\frac{9w}{19}=162$$

Ὅθεν $x=133,\quad y=150,\quad w=76.$

4) Εὑρεῖν διψήφιον ἀριθμόν, οὗτινος τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 12, ἐὰν δὲ τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφῶσι κατ' ἀντίστροφον τάξιν, προκύπτει ἀριθμὸς μείζων κατὰ 18.

Ἔστω x τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ καὶ y τὸ τῶν μονάδων αὐτοῦ.

Κατὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος εὑρίσκεται

$$x+y=12$$

$$10x+y=10y+x-18$$

ἢ

$$x+y=12$$

$$9x-9y=-18$$

Ὅθεν $x=5,\quad y=7.$

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 57.

5) Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς τοιούτους, ὥστε τὸ μὲν πηλίκον αὐτῶν νὰ ἦναι ὡς ὁ 3 πρὸς 4, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν τὸ δωδεκαπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

Ἔστωσαν x καὶ y οἱ δύο ζητούμενοι ἀριθμοί. Κατὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος αἱ ἐξισώσεις αὐτοῦ εἶναι

$$\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$$

$$xy=12(x+y)$$

Ὅθεν $x=21,\quad y=28$

6) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν ἡ διαφορά, τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 5.

Ἔστωσαν x καὶ y οἱ δύο ζητούμενοι ἀριθμοί. Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$(x-y):(x+y)=2:3$$
$$(x+y):xy=3:5$$

ἐξ ὧν
$$x=10,\ y=2$$

7) Μῖγμα χρυσοῦ καὶ ἀργύρου 35 λιτρῶν ἀποβάλλει ἐμβαπτιζόμενον εἰς τὸ ὕδωρ 3 λίτ. Ἐκ πόσων λιτρῶν χρυσοῦ καὶ ἀργύρου σύγκειται τὸ μῖγμα τοῦτο, γνωστοῦ ὄντος, κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ Ἀρχιμήδους, ὅτι ἐμβαπτιζόμενος εἰς τὸ ὕδωρ ὁ μὲν χρυσὸς ἀποβάλλει τὰ 0,052 τοῦ βάρους αὐτοῦ, ὁ δὲ ἄργυρος τὰ 0,099.

Ἔστωσαν x καὶ y αἱ ἐν τῷ μίγματι περιεχόμεναι λίτραι τοῦ χρυσοῦ καὶ τοῦ ἀργύρου. Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$x+y=35$$
$$\frac{52x}{1000}+\frac{99y}{1000}=3$$

ἐξ ὧν

$x=9$ **λίτ.,** $14\frac{14}{47}$ **οὐγ.,** $y=25$ **λίτ.,** $1\frac{33}{47}$ **οὐγ.** (1 **λίτ.** $=16$ **οὐγ.**).

8) Εἶχέ τις 100000 δρ., ὧν μέρος ἐτόκισε πρὸς 2 %, ἕτερον πρὸς 3 % καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 4 % καὶ ἐλάμβανεν ἐκ τῶν τριῶν τούτων μερῶν ἐτήσιον τόκον 3100 δρ. Ὑπελογίσθη δέ, ὅτι, ἂν ἐτόκιζε τὸ πρῶτον μέρος πρὸς τὸ ἐπιτόκιον τοῦ τρίτου, τὸ τρίτον πρὸς τὸ ἐπιτόκιον τοῦ δευτέρου καὶ τὸ δεύτερον πρὸς τὸ ἐπιτόκιον τοῦ πρώτου, ὁ ἐτήσιος τόκος τῶν τριῶν μερῶν ἦτο 2700 δρ. Ποῖα τὰ πρὸς 2, 3 καὶ 4 % τοκισθέντα μέρη;

Ἔστω x τὸ πρὸς 2 % τοκισθὲν μέρος, y τὸ πρὸς 3 % καὶ w τὸ πρὸς 4 %. Τότε εἶναι

$$x+y+w=100000$$

ἐπειδὴ δὲ οἱ ἐτήσιοι τόκοι τῶν x y, w εἶναι

$$\frac{2x}{100},\quad \frac{3y}{100},\quad \frac{4w}{100}$$

ὁ ἐτήσιος τόκος τῶν τριῶν τούτων μερῶν ὁμοῦ εἶναι

$$\frac{2x}{100}+\frac{3y}{100}+\frac{4w}{100}=3100$$

ὁμοίως εὑρίσκεται, ὅτι

$$\frac{4x}{100}+\frac{2y}{100}+\frac{3w}{100}=2700$$

ἐκ δὲ τῶν τριῶν τούτων ἐξισώσεων τοῦ προβλήματος εὑρίσκεται

$$x=20000, \quad y=50000, \quad w=30000.$$

9) Ἀνέλαβέ τις τὴν μετακόμισιν ἀγγείων τριῶν μεγεθῶν συνεφώνησε δὲ νὰ πληρώνῃ διὰ πᾶν συντριβὲν ἀγγεῖον τόσον, ὅσον ἐπληρώνετο μετακομίζων αὐτὸ σῶον· λαβὼν δὲ πρὸς μετακόμισιν 3 μεγάλα ἀγγεῖα, 5 μεσαῖα καὶ 9 μικρὰ εὗρεν, ὅτι, ἐὰν μὲν ἐθραύοντο καθ᾽ ὁδὸν τὰ μεγάλα ἢ τὰ μικρὰ ἔπρεπε νὰ πληρωθῇ 10 δρ., ἐὰν δὲ τὰ μεσαῖα 8 δρ. Πόσον συνεφώνησε νὰ πληρωθῇ διὰ τὴν μετακόμισιν ἑκάστου μεγάλου, μεσαίου καὶ μικροῦ ἀγγείου;

Ἔστω x ἡ πληρωμὴ διὰ τὴν μετακόμισιν ἑκάστου μεγάλου ἀγγείου, y ἡ διὰ τὴν ἑκάστου μεσαίου καὶ w ἡ διὰ τὴν ἑκάστου μικροῦ. Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$5y+9w-3x=10$$
$$3x+5y-9w=10$$
$$3x+9w-5y=8$$

ἐξ ὧν $$x=3,\ y=2,\ w=1$$

10) Σιτέμπορος ἠγόρασε σῖτον ἀντὶ 25 δρ. τὸ ἑκατόλιτρον, σίκαλην ἀντὶ 16 καὶ κριθὴν ἀντὶ 12· ἐπλήρωσε δὲ 1200 δρ. ἐπὶ πλέον διὰ τὸν σῖτον ἢ τὴν σίκαλην καὶ ἐδαπάνησεν ἐν συνόλῳ 7000 δρ. Πόσα ἑκατόλιτρα ἠγόρασεν ἐξ ἑκάστου τῶν εἰδῶν τούτων ;

Ἔστωσαν x, y, w οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἑκατολίτρων ἑκάστου τῶν τριῶν τούτων εἰδῶν. Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$25x+16y+12w=7000$$
$$25x=16y+1200$$

Ἐπειδὴ οἱ ἄγνωστοι εἶναι τρεῖς, ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν δύναται νὰ ληφθῇ αὐθαιρέτως καὶ ἑπομένως τὸ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον. Ἐὰν ὁ w ληφθῇ οἱοσδήποτε ἀριθμός, αἱ τιμαὶ τοῦ x καὶ τοῦ y εἶναι

$$x=\frac{4100-6w}{25},\quad y=\frac{1450-w}{8}$$

Ἀλλ' αἱ τιμαὶ τοῦ x καὶ τοῦ y πρέπει νὰ ἦναι θετικαί, ἤτοι πρέπει νὰ ἦναι

$$4100-6w>0,\quad 1450-3w>0$$

ἢ

$$w<683+\frac{1}{3},\ w<483+\frac{1}{3}$$

Ἡ πρώτη τῶν ἀνισοτήτων τούτων ἀληθεύει προφανῶς, ὅταν ἀληθεύῃ ἡ δευτέρα. Ὅθεν συνάγεται, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται λύσιν, ἐὰν ὁ w περιλαμβάνηται μεταξὺ τοῦ 0 καὶ τοῦ $483+\frac{1}{3}$, ἤτοι ἐὰν

$$0<w<483+\frac{1}{3}$$

ΣΗΜ. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται, ὅτι πρόβλημά τι τοῦ πρώτου βαθμοῦ δύναται νὰ ἦναι ἀόριστον, εἴτε διότι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς δὲν πληροῖ συνθήκας τινάς, εἴτε διότι αἱ ἐξισώσεις μεταξὺ τῶν ἀγνώστων εἶναι ὀλιγώτεραι τὸν ἀριθμὸν τοῦ τῶν ἀγνώστων.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τριψήφιον ἀριθμόν, οὗτινος τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 10, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῶν δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων· ἐὰν δὲ τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφῶσι κατὰ τάξιν ἀντίστροφον προκύπτει ἀριθμὸς μείζων κατα 297. (Ἀπ. 235).

2) Δύο ἀγγεῖα περιέχουσιν 11 λίτρας ὕδατος. Λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ πρώτῳ καὶ χύνομεν εἰς τὸ δεύτερον, ἔπειτα τὸ τρίτον τοῦ περιεχομένου τότε ἐν τῷ δευτέρῳ καὶ χύνομεν εἰς τὸ πρῶτον, εἶτα τὸ τέταρτον τοῦ περιεχομένου τότε ἐν τῷ πρώτῳ καὶ χύνομεν εἰς τὸ δεύτερον καὶ τέλος τὸ πέμπτον τοῦ περιεχομένου τότε ἐν τῷ δευτέρῳ καὶ χύνομεν εἰς τὸ πρῶτον. Ἐὰν ὑποτεθῇ, ὅτι τὸ δεύτερον περι-

εἶχε τότε 1 λίτραν ἐπὶ πλέον τοῦ πρώτου, πόσας λίτρας ὕδατος περιεῖχεν ἑκάτερον ἀγγεῖον κατ' ἀρχάς; ('Απ. 3, 8).

3) Ἐὰν αὐξηθῇ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἡ μὲν βάσις κατὰ 2 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος κατὰ 5, ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ αὐξάνεται κατὰ 12 τετρ. μέτρα· ἐὰν δὲ αὐξηθῇ ἡ μὲν βάσις κατὰ 6 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος κατὰ 15 μέτρα, ἡ ἐπιφάνεια αὐξάνεται κατὰ 96 τετρ. μέτρα. Εὑρεῖν τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου τούτου. ('Απ Τὸ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον· ἐκτὸς ἐὰν ἡ βάσις αὐτοῦ περιέχηται μεταξὺ τοῦ 0 καὶ $\frac{2}{5}$.).

4) Ἱέρων ὁ τύραννος τῶν Συρακουσῶν ἔδωκεν εἰς χρυσοχόον 10 λίτρας χρυσοῦ, ἵνα κατασκευάσῃ ἐξ αὐτοῦ στέφανον τοῦ Διός. Ὑποπτεύσας δὲ μετὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ στεφάνου, ὅτι ὁ χρυσοχόος ἀντικατέστησε δι' ἀργύρου μέρος τοῦ χρυσοῦ, ἠρώτησε τὸν Ἀρχιμήδη, ἐὰν ἦναι δυνατὸν νὰ ἀνακαλυφθῇ τοῦτο. Ὁ Ἀρχιμήδης γνωρίζων ὅτι ὁ χρυσὸς ἀποβάλλει ἐν τῷ ὕδατι τὰ 0,052 τοῦ βάρους αὐτοῦ, ὁ δὲ ἄργυρος τὰ 0,099, ἐζύγισε τὸν στέφανον ἐν τῷ ὕδατι καὶ εὗρεν αὐτὸν 9 λιτρῶν καὶ 6 οὐγγιῶν ($1^{\lambda\iota\tau.}=16^{o\acute{\upsilon}\gamma\gamma.}$)· οὕτω δὲ ἀνεκάλυψε τὸν δόλον. Πόσος ἄργυρος καὶ πόσος χρυσὸς ὑπῆρχεν ἐν τῷ στεφάνῳ; ('Απ. $7^{\lambda\iota\tau.}\ 12^{o\acute{\upsilon}\gamma.}+\frac{12}{47}^{o\acute{\upsilon}\gamma.}$, $2^{\lambda\acute{\iota}\tau.}\ 3^{o\acute{\upsilon}\gamma.}+\frac{35}{47}^{o\acute{\upsilon}\gamma\gamma.}$)

5) Ἀπὸ σταθμοῦ τινος σιδηροδρόμου ἀναχωρεῖ ἀτμάμαξα μετὰ ταχύτητος v· ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σταθμοῦ καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ ἀναχωρεῖ μετά τινα χρόνον ἄλλη ἀτμάμαξα μετὰ ταχύτητος v'· ὑπελογίσθη δὲ ὁ μεταξὺ τῶν δύο ἀναχωρήσεων χρόνος, ὥστε νὰ φθάσωσιν ἀμφότεραι συγχρόνως εἴς τινα τόπον 'Αλλ' ἡ πρώτη ἀτμάμαξα, ἀφοῦ διέτρεξε τὰ δύο τρίτα τῆς ὁδοῦ ἠναγκάσθη νὰ ἐλαττώσῃ τὴν ταχύτητα αὐτῆς κατὰ τὸ ἥμισυ τῆς προτέρας, καὶ οὕτω συμβαίνει συνάντησις τῶν ἀτμαμαξῶν α χιλιόμετρα πρὸ τοῦ τόπου, ὅπου ἔπρεπε νὰ συναντηθῶσιν. Τίς ἡ ἀπὸ τοῦ σταθμοῦ τῆς ἀναχωρήσεως ἀπόστασις τοῦ τόπου;

('Απ. Ἂν διὰ x παρασταθῇ τὸ μῆκος τῆς ὁδοῦ καὶ διὰ y ὁ μεταξὺ τῶν δύο ἀναχωρήσεων μεσολαβήσας χρόνος, εἶναι

$$x=3\left(2-\frac{v}{v'}\right)\alpha,\ y=3\frac{v'-v}{vv'}\left(2-\frac{v}{v'}\right)\alpha.$$

6) Ὀκτὼ βόες ἔφαγον εἰς 7 ἑβδομάδας τὸ χόρτον 4 στρεμμάτων καὶ ὅσον ἐβλάστησε κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο· 9 βόες ἔφαγον εἰς 8 ἑβδομάδας τὸ χόρτον 5 στρεμμάτων καὶ ὅσον ἐβλάστησε κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο. Πόσοι βόες δύνανται νὰ βοσκήσωσιν ἐπὶ 12 ἑβδομάδας εἰς 6 στρέμματα συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ χόρτου, τὸ ὁποῖον βλαστάνει κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο; (Ἀπ. 8).

7) Τρεῖς στρατιῶται Α, Β, Γ εὗρον εἰς τὸ πεδίον τῆς μάχης 384 δρ., πρὸς διανομὴν δὲ τοῦ ποσοῦ τούτου ἐξ ἴσου, ὁ Α ἔδωκε τῷ Β καὶ τῷ Γ, ὅσα ἑκάτερος εἶχεν, ὁ Β ἔδωκε τῷ Α καὶ τῷ Γ, ὅσα ἑκάτερος εἶχεν καὶ ὁ Γ τῷ Α καὶ τῷ Β ὁμοίως· μετὰ δὲ τὴν διανομὴν ταύτην οἱ στρατιῶται οὗτοι εἶχον ἕκαστος τὸ αὐτὸ ποσὸν δραχμῶν. Πόσον εὗρεν ἕκαστος; (Ἀπ. 208, 112, 64).

8) Πλοίαρχος τις θέλει νὰ διανείμῃ εἰς τὰ πληρώματα τριῶν πλοίων 31824 δρ.· ἐὰν δώσῃ 12 δρ. ἑκάστῳ ναύτῃ τοῦ πρώτου πλοίου, ἕκαστος ναύτης τῶν λοιπῶν δύο πλοίων λαμβάνει μόνον 6 δρ.· ἐὰν ἕκαστος ναύτης τοῦ δευτέρου πλοίου λάβῃ 12 δρ., ἕκαστος ναύτης τῶν λοιπῶν δύο πλοίων λαμβάνει μόνον 4 δρ.· τέλος ἐὰν ἕκαστος ναύτης τοῦ τρίτου πλοίου λάβῃ 12 δρ., ἕκαστος τῶν λοιπῶν δύο πλοίων λαμβάνει μόνον 3 δρ.. Τίς ὁ ἀριθμὸς τοῦ πληρώματος ἑκάστου τῶν τριῶν τούτων πλοίων;

(Ἀπ. 780, 1716, 2028).

9) Εὑρεῖν ἀριθμὸν τριψήφιον τοιοῦτον, ὥστε ἡ διαφορὰ τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων ἀπὸ τοῦ τῶν δεκάδων ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων ἀπὸ τοῦ τῶν μονάδων, τὸ δὲ πηλίκιον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶναι ὁ 48, ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῇ ὁ 198 ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, προκύπτει ἀριθμὸς οὗτινος τὰ ψηφία εἶναι κατ' ἀντίστροφον τάξιν γεγραμμένα. (Ἀπ. 432).

10 Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν τὸ μὲν ἄθροισμα α, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν β. $\left(\text{Ἀπ. } \frac{\alpha^2+\beta}{2\alpha},\ \frac{\alpha^2-\beta}{2\alpha}\right)$.

11) Ἔστωσαν β καὶ β' τὰ εἰδικὰ βάρη δύο ὑλῶν· πόσον βάρος πρέπει νὰ ληφθῇ ἐξ ἑκατέρας τῶν ὑλῶν τούτων πρὸς ἀποτέλεσιν μίγματος, οὗτινος τὸ μὲν ἀπόλυτον βάρος α, τὸ δὲ εἰδικὸν βάρος β'';

$$\left(\text{Ἀπ. } \frac{\alpha\beta(\beta'-\beta'')}{\beta''(\beta'-\beta)},\ \frac{\alpha\beta'(\beta''-\beta)}{\beta''(\beta'-\beta)}\right)$$

12) Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς τοιούτους, ὥστε αὐξανομένων τοῦ μὲν κατ α, τοῦ δὲ κατὰ β τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀθροισμάτων νὰ ὑπερβαίνῃ τ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν κατὰ γ· αὐξανομένων δὲ τοῦ μὲν κατὰ α΄, το δὲ κατὰ β΄ τὸ γινόμενον τῶν δύο τούτων ἀθροισμάτων νὰ ὑπερβαίν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν κατὰ γ΄.

$$\left(\text{'Απ. } \frac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma+\alpha\alpha'(\beta'-\beta)}{\alpha'\beta-\alpha\beta'},\ \frac{\beta\gamma'-\beta'\gamma+\beta\beta'(\alpha-\alpha')}{\alpha'\beta-\alpha\beta'}\ \text{Διερεύνησις}\right).$$

13) Πόσα πεντάδραχμα καὶ δίδραχμα ἀποτελοῦσιν 63 δρ., ἐὰν ἀριθμὸς αὐτῶν ἦναι 15. ('Απ. 11 πεντάδρ. 4 δίδρ.).

14) Ὁ Α εἶπε τῷ Β· δός μοι 100 δρ. καὶ τότε ἔχω, ὅσας ἔχεις δραχμάς. Ὁ δὲ Β εἶπε τῷ Α· δός μοι 100 δρ. καὶ τότε ἔχω τὸ διπλάσιον, τῶν ὅσας ἔχεις δραχμῶν. Πόσον εἶχεν ἑκάτερος; ('Απ. 500, 700).

* Περὶ ἀνισοτήτων.

124. Ἀριθμός τις α καλεῖται μείζων ἀριθμοῦ τινος β, ἐὰν ἡ διαφορὰ αὐτῶν α—β ἦναι θετικὸς ἀριθμος, ἤτοι $\alpha>\beta$, ἐὰν $\alpha-\beta>0$. Κατὰ ταῦτα πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι ἐλάσσων τοῦ 0 καὶ ἐκ δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν μείζων εἶναι ὁ κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἐλάσσων· οἷον

$$-2<0, \quad -8<-3$$

Ἐπὶ τῶν ἀνισοτήτων ἰσχύουσιν αἱ ἑπόμεναι ἰδιότητες

1) Ἐὰν προστεθῇ εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ἀνίσους ἀριθμοὺς ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ἡ ἀνισότης μένει· οἷον $5<7$, $5+2<7+2$.

2) Ἐὰν προστεθῶσιν ἄνισοι ἀριθμοὶ εἰς ἀνίσους ἀριθμούς, ἀλλ' ὁ μὲν μείζων εἰς τὸν μείζονα, ὁ δὲ ἐλάσσων εἰς τὸν ἐλάσσονα, ἡ ἀνισότης μένει· οἷον $5>3$, $7>4$· $5+7>3+4$.

3) Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη ἀνισοτητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ὡρισμένον καὶ πεπερασμένον ἀριθμὸν (διάφορον τοῦ 0), ἡ ἀνισότης μένει μέν, ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι θετικος, ἀντιστρέφει δέ, ἐὰν ἦναι ἀρνητικός· οἷον $6>2$, $3.6>2.3$, $-4.6<-4.2$.

Ὡς δὲ μεταξὺ ἀριθμῶν καὶ γραμμάτων δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν ἰσότητας, ἤτοι ταυτότητας καὶ ἐξισώσεις, οὕτω δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν καὶ ἀνισότητας μεταξὺ αὐτῶν ἀληθευούσας εἴτε διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων εἴτε διά τινας, εἴτε δι' οὐδεμίαν. Ὥστε ἡ λύσις τῶν ἀνισοτήτων δύναται νὰ γίνηται, καθ' ὃν καὶ ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων τρόπον.

Παραδείγματα.

1). Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης

$$\alpha x > \beta$$

πρὸς λύσιν τῆς ἀνισότητος ταύτης διακρίνονται τρεῖς περιπτώσεις.

Ὅταν $\alpha > 0$, τότε $x > \frac{\beta}{\alpha}$

ὅταν $\alpha < 0$, τότε $x < \frac{\beta}{\alpha}$

ὅταν $\alpha = 0$, καὶ $\beta \gtrless 0$ ἢ $\beta = 0$, τότε ἡ δοθεῖσα ἀνισότης εἶναι ἢ ἀδύνατος ἢ ἀόριστος.

2) Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης

$$2x + \frac{1}{2} - 7 < 4 - 7x - \frac{1}{2}$$

ἢ $$4x + 14x < 8 + 14 - 2$$

ἢ $$18x < 20$$

ὅθεν $$x < \frac{10}{9}$$

3) Εὑρεῖν τὰ ὅρια μεταξὺ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ μεταβάλληται ὁ x πρὸς ἐπαλήθευσιν τῆς ἀνισότητος

$$\frac{3x}{x-1} + 2 < 2 - \frac{7}{x-1}$$

ἢ $$\frac{3x+7}{x-1} < 0$$

ἢ καὶ $$(3x+7).(x-1) < 0$$

ἡ ἀνισότης αὕτη ὑφίσταται, ἐὰν ὁ x μεταβάλληται προφανῶς μεταξὺ $-\frac{7}{3}$ καὶ 1. ἤτοι $-\frac{7}{3} < x < 1$.

4) Δύο ὡρολόγια ἠχοῦσι συγχρόνως τὴν ὥραν· τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν βαίνει

ἐμπρὸς κατὰ 3 δευτερόλεπτα πλέον τοῦ ἄλλου. Οἱ ἦχοι τοῦ ἐμπρὸς βαίνοντος ὡρολογίου διαδέχονται ἀλλήλους ἀνὰ 5 δευτερόλεπτα, οἱ δὲ τοῦ ἄλλου ἀνὰ 4· ἄλλως δέ, ὅταν τὸ χρονικὸν διάστημα τὸ μεταξὺ δύο ἤχων δὲν ὑπερβαίνῃ τὸ δευτερόλεπτον, τὸ οὖς δὲν ἀντιλαμβάνεται τοῦ ἤχου. Ἐὰν ἠκούσθησαν 14 ἦχοι, ποία ὥρα εἶναι;

Ἔστω x ἡ τάξις ἤχου τοῦ πρώτου ὡρολογίου, οὗ ὁ ἦχος συγχέεται πρὸς τὸν ἦχον τῆς $x+\varepsilon$ τάξεως τοῦ δευτέρου ὡρολογίου· οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ x καὶ ε πρέπει νὰ ἀληθεύωσι τὴν συνθήκην

$$-1 \leqq 5(x-1)-[(3+4(x+\varepsilon-1)] \leqq 1$$

ἢ

$$-1 \leqq x-4\varepsilon-4 \leqq 1$$

ἢ

$$3 \leqq x-4\varepsilon \leqq 5$$

Ὅθεν ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς $x-4\varepsilon$ μόνον τὰς τρεῖς τιμὰς 3, 4, 5 δύναται νὰ ἔχῃ.

Ἀφ' ἑτέρου δὲ παρατηρητέον, ὅτι ἑκάτερος τῶν ἀριθμῶν x καὶ $x+\varepsilon$ δὲν δύναται νὰ ἦναι ἄλλος ἢ εἷς τῶν 12 πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν καὶ ἐπομένως ἡ μὲν ἐξίσωσις

$$x-4\varepsilon=3$$

ἐπιδέχεται τὰς δύο λύσεις $\varepsilon=0$, $x=3$ καὶ $\varepsilon=1$, $x=7$· ἡ δὲ ἐξίσωσις

$$x-4\varepsilon=4$$

ἐπιδέχεται τὰς δύο λύσεις $\varepsilon=0$, $x=4$ καὶ $\varepsilon=1$, $x=8$· ἡ δὲ ἐξίσωσις

$$x-4\varepsilon=5$$

ἐπιδέχεται τὰς δύο λύσεις $\varepsilon=0$, $x=5$ καὶ $\varepsilon=1$, $x=9$.

Ὥστε τὸ οὖς ἑνὸς μόνου ἤχου ἀντιλαμβάνεται, ὅταν τοῦ πρώτου ὡρολογίου ἠχοῦντος τοὺς ἤχους, ὧν ἡ τάξις

3, 4, 5, 7, 8, 9

τὸ δεύτερον ἠχεῖ τοὺς ἤχους, ὧν ἡ τάξις

3, 4, 5, 8, 9, 10

ἓξ ἦχοι δὲν ἐγένοντο ἀντιληπτοί, ἐγένοντο δὲ ἀντιληπτοὶ 14 ἦχοι. Τὰ δύο ἄρα ὡρολόγια ἤχησαν 20 ἤχους καὶ ἐπομένως ἡ ὥρα εἶναι 10.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΣ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Ὁρισμοί.

125. Ἐξίσωσις περιέχουσα ἀγνώστους πλείονας τοῦ ἑνὸς ἐπιδέχεται ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις· οἷον ἡ ἐξίσωσις

$$3x-2y=1$$

διότι ἀντικαθιστῶντες τὸν ἕτερον τῶν ἀγνώστων αὐτῆς, ἔστω τὸν y, δι' οἱουδήποτε ἀριθμοῦ εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν ἕνα μόνον ἄγνωστον περιέχουσαν, τὸν x, οὗ ἡ τιμὴ ὁρίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης· ἐὰν π. χ.

$$y=0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\ \ldots\ldots$$

$$\text{τότε } x=\frac{1+2y}{3}=\frac{1}{3},\quad 1,\quad \frac{5}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{9}{3},\ \ldots\ldots$$

Ἑκάστη τιμὴ τοῦ y μετὰ τῆς ἀντιστοιχούσης τιμῆς τοῦ x ἀποτελοῦσι μίαν λύσιν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως· ὥστε ἡ τοιαύτη ἐξίσωσις ἔχει λύσεις ἀπείρους τὸ πλῆθος.

Καὶ σύστημα ἐξισώσεων πλείονας ἔχον ἀγνώστους ἢ ἐξισώσεις ἐπιδέχεται ἐν γένει ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις· διότι ἀντικαθιστῶντες τοὺς περισσεύοντας ἀγνώστους δι' οἱωνδήποτε τιμῶν δυνάμεθα ἐν γένει νὰ ὁρίσωμεν τοὺς λοιποὺς ἐκ τοῦ συστήματος· οἷον τὸ σύστημα

$$x+2y-w=1$$
$$x-y-3w=2$$

διότι ἀντικαθιστῶντες ἕνα τῶν ἀγνώστων αὐτοῦ, ἔστω τὸν w, δι' οἱουδήποτε ἀριθμοῦ εὑρίσκομεν σύστημα δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων, οὗ ἡ λύσις ὁρίζεται ἐν γένει.

Ἀλλ ἐὰν ἐκ τῶν ἀπειροπληθῶν λύσεων τοιαύτης ἐξισώσεως ἢ συστήματος ἐξισώσεων ζητῆται νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἀκέραιαι, ἐν αἷς δηλονότι αἱ τιμαὶ πάντων τῶν ἀγνώστων εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, τὸ ζήτημα ἀποβαίνει δυσκολώτερον· διότι οἱ περισσεύοντες ἄγνωστοι πρέπει νὰ ὁρίζωνται τότε οὐχὶ δι' αὐθαιρέτων τιμῶν, ἀλλὰ δι' ἁρμοδίων τιμῶν τοιούτων, ὥστε καὶ αἱ τιμαὶ τῶν λοιπῶν ἀγνώστων νὰ προκύπτωσιν, εἰ δυνατόν, ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Ἀπροσδιόριστος ἀνάλυσις λέγεται τὸ μέρος τῆς Ἀλγέβρας, ἐν ᾧ διδάσκεται ἡ εὕρεσις τῶν ἀκεραίων λύσεων δεδομένης ἐξισώσεως πλείονας τοῦ ἑνὸς ἐχούσης ἀγνώστους, ἢ καὶ συστήματος ἐξισώσεων πλείονας ἔχοντος ἀγνώστους ἢ ἐξισώσεις.

Οἱ συντελεσταὶ τῶν τοιούτων ἐξισώσεων ὑποτίθενται ἀκέραιοι ἀριθμοί· διότι, ἐὰν ἦναι κλασματικοί, καθιστῶμεν αὐτοὺς ἀκεραίους ἀπαλάσσοντες τὰς ἐξισώσεις τῶν παρονομαστῶν.

Ἐνταῦθα θεωροῦμεν μόνον μίαν ἐξίσωσιν περιέχουσαν δύο ἀγνώστους καὶ ἠγμένην ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\alpha x+\beta y=\gamma$$

ἔνθα οἱ α, β, γ εἶναι γνωστοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί, θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί.

Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ δύνανται νὰ ὑποτεθῶσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· διότι, ἂν ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην, ἐξαλείφομεν αὐτὸν διαιροῦντες δι' αὐτοῦ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως.

Ἰδιότητες τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$.

126. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α, β τῶν ἀγνώστων ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην, οὐχὶ διαιρέτην τοῦ γ, ἡ ἐξίσωσις $\alpha x+\beta y=\gamma$ οὐδεμίαν ἐπιδέχεται ἀκεραίαν λύσιν.

Διότι, ἐὰν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ α, β ἦναι διαιρετοὶ διά τινος ἀκεραίου δ, δι' οἱωνδήποτε ἀκεραίων ἀριθμῶν καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς ἀγνώστους x καὶ y, τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ δ. Τοτε δὲ πρέπει καὶ τὸ δεύτερον μέλος αὐτῆς, ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς γ, νὰ ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ δ. Ἀλλ' ὁ γ ὑποτίθεται οὐχὶ διαιρετὸς διὰ τοῦ δ. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις $\alpha x+\beta y=\gamma$, ἐν ᾗ οἱ α, β ἔχουσι κοινόν τινα διαιρέτην, οὐχὶ διαιρέτην τοῦ γ, οὐδεμίαν ἐπιδέχεται ἀκεραίαν λύσιν.

127. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α, β ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἡ ἐξίσωσις $\alpha x+\beta y=\gamma$ ἔχει ἀκεραίαν τινὰ λύσιν.

Ἐν πρώτοις παρατηρητέον, ὅτι ὁ ἕτερος τῶν δύο συντελεστῶν α, β, ἔστω ὁ α, δύναται πάντοτε νὰ ὑποτεθῇ θετικός· διότι, ἂν δὲν ἦναι τοιοῦτος, γίνεται πολλαπλασιαζομένων ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα -1.

Ἐὰν δὲ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x+\beta y=\gamma$ πρὸς τὸν ἄγνωστον x, οὗ ὁ συντελεστὴς α ὑποτίθεται θετικὸς ἀριθμός, εὑρίσκομεν

$$x=\frac{\gamma-\beta y}{\alpha}$$

λέγω δέ, ὅτι ἐκ τῶν ἑπομένων ἀκεραίων τιμῶν τοῦ y

$$y=0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\ \ldots,\quad \alpha-1,$$

ὧν τὸ πλῆθος εἶναι α, εὑρίσκεται μία καὶ μόνη, πρὸς ἣν ἀντιστοιχεῖ ἀκεραία τιμὴ τοῦ x.

Διότι τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως τοῦ $\gamma-\beta y$ διὰ τοῦ α δύνανται νὰ ἦναι μόνον οἱ μικρότεροι τοῦ α ἀριθμοί, ἤτοι οἱ

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad \alpha-1$$

Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι ἀκριβῶς τόσοι, ὅσαι εἶναι καὶ αἱ διαιρέσεις, ὧν ἑκάστη ἔχει ἴδιον ὑπόλοιπον, συμπεραίνομεν, ὅτι μία τῶν διαιρέσεων τούτων δίδει ὑπόλοιπον 0, ἤτοι πρὸς μίαν τῶν ἀκεραίων τιμῶν $0, 1, 2, 3, \ldots, \alpha-1$ τοῦ y, ἔστω πρὸς τὴν ν, ἀντιστοιχεῖ ἀκεραία καὶ ἡ τιμὴ τοῦ x, ἔστω ἡ μ, τουτέστι $\frac{\gamma-\beta\nu}{\alpha}=\mu$ $(\nu<\alpha)$· ὥστε ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α, β τῶν ἀγνώστων τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$ ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει ἀκεραίαν τινὰ λύσιν.

ΣΗΜ. 1. Γίνεται τὸ ἀρνητικὸν ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\gamma-\beta y$ διὰ τοῦ α θετικόν, ἐὰν εἰς τὸ πηλίκον προστεθῇ ἡ ἀρνητικὴ μονὰς -1. Ἐὰν π. χ. ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν -7 διὰ 3, εὑρίσκομεν πηλίκον -2 καὶ ὑπόλοιπον -1· λαμβάνοντες ὅμως πηλίκον -3 ἔχομεν ὑπόλοιπον 2· διότι $-7=3.(-3)+2$.

ΣΗΜ. 2. Τῶν διαιρέσεων τοῦ $\gamma-\beta y$ διὰ α τὰ ὑπόλοιπα εἶναι πάντα διάφορα ἀλλήλων· διότι, ἐὰν ὑποτεθῇ, ὅτι δύο τῶν διαιρέσεων τούτων δίδουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, ἔστωσαν δὲ αἱ πρὸς τὰς τιμὰς y' καὶ y'' ἀντιστοιχοῦσαι, τότε, ἐὰν παραστήσωμεν τὸ κοινὸν αὐτῶν ὑπόλοιπον διὰ τοῦ v καὶ τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα διὰ π' καὶ π'', ἔχομεν

$$\gamma-\beta y'=\alpha\pi'+v$$
$$\gamma-\beta y''=\alpha\pi''+v$$

Ὅθεν δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων τούτων προκύπτει

$$β(y'—y'')=α(π'—π'').$$

Ἡ δὲ ἰσότης αὕτη δεικνύει, ὅτι ὁ α πρῶτος ὢν πρὸς τὸν β διαιρεῖ τὴν διαφορὰν $y''—y'$, ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἑκάτερος τῶν δύο ἀριθμῶν y', y'' εἶναι ἐλάσσων τοῦ α. Ἄτοπος ἄρα ἡ ὑπόθεσις, ὅτι δύο τοιαῦται διαιρέσεις δίδουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

128. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις $αx+βy=γ$ ἔχῃ μίαν ἀκεραίαν λύσιν, ἔχει καὶ ἄλλας ἀπείρους τὸ πλῆθος.

Ἔστω $x=μ$, $y=ν$ μία ἀκεραία λύσις τῆς ἐξισώσεως

$$αx+βy=γ$$

ἤτοι ἔστω

$$αμ+βν=γ$$

ἐὰν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας ταύτας, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$α(x—μ)+β(y—ν)=0$$

ἢ

$$α(x—μ)=β(ν—y)$$

Ἀλλ' ὁ α ὡς διαιρῶν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως ταύτης πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ δεύτερον (ἐὰν ἡ ἐξίσωσις ἀληθεύῃ δι' ἀκεραίας τιμὰς τῶν δύο ἀγνώστων x καὶ y), ὢν δὲ πρῶτος πρὸς τὸν β πρέπει νὰ διαιρῇ τὴν διαφορὰν $ν—y$, ἤτοι πρέπει νὰ ᾖναι

$$ν—y=α.ρ \quad (\text{τὸ ρ ἀκέραιος ἀριθμός})$$

ἢ

$$y=ν—αρ$$

Ὅθεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως $α(x—μ)=β(ν—y)$ ἕπεται καὶ

$$x=μ+βρ$$

ὥστε, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ ρ, αἱ τιμαὶ

$$x=μ+βρ$$
$$y=ν—αρ$$

ἐπαληθεύουσι τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν $αx+βy=γ$. Εὑρίσκονται ἄρα ἄπειροι ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως ταύτης, δοθείσης μιᾶς τοιαύτης. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ αὐξάνωμεν τὴν μὲν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ x κατὰ τὸν συντελεστὴν τοῦ y πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ οἱονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμόν, τὴν δὲ ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ y κατὰ τὸν συντελεστὴν τοῦ x πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὸν ἀντίθετον ἀκέραιον αὐτὸν ἀριθμόν

ΣΗΜ 1. Ὁ ἀόριστος ἀκέραιος ἀριθμὸς ρ εἶναι ἀδιαφόρως θετικὸς ἢ ἀρνητικός.

ΣΗΜ. 2. Ὅτι αἱ ἀκέραιαι τιμαὶ $x=\mu+\beta\rho$, $y=\nu-\alpha\rho$ ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x+\beta y=\gamma$ ἐπιβεβαιοῦται καὶ διὰ τῆς ἀμέσου ἀντικαταστάσεως αὐτῶν ἐν αὐτῇ· διότι εἶναι

$$\alpha(\mu+\beta\rho)+\beta(\nu-\alpha\rho)=\alpha\mu+\alpha\beta\rho+\beta\nu-\alpha\beta\rho=\alpha\mu+\beta\nu=\gamma.$$

129. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α, β τῶν ἀγνώστων ἦναι ὁμοειδεῖς, τὸ πλῆθος τῶν θετικῶν καὶ ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$ ἐκφράζεται ἢ ὑπὸ τοῦ μεγίστου θετικοῦ ἀκεραίου τοῦ ἐν τῷ κλάσματι $\frac{\gamma}{\alpha\beta}$ περιεχομένου ἢ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου ηὐξημένου κατὰ μονάδα 1· ἐὰν δὲ οἱ συντελεσταὶ οὗτοι ἦναι ἑτεροειδεῖς, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐπιδέχεται πλῆθος ἄπειρον θετικῶν καὶ ἀκεραίων λύσεων.

Ἔστωσαν πρότερον οἱ συντελεσταὶ α, β ὁμοειδεῖς. Ἐὰν ὁ α ἦναι θετικός, καὶ ὁ β εἶναι θετικός· ἐὰν νῦν ὁ γ ἦναι ἀρνητικός, οὐδεμία προφανῶς ὑπάρχει θετικὴ λύσις· ἀνάγκη ἄρα καὶ ὁ γ νὰ ἦναι θετικός.

Τούτου δὲ τεθέντος, ἔστω $x=\mu$, $y=\nu$ ἡ διὰ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος εὑρισκομένη ἀκεραία λύσις, καθ' ἣν ὁ ν εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς ἐλάσσων τοῦ α· αἱ ἀκέραιαι λύσεις ὁρίζονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=\mu-\beta\rho$$
$$y=\nu+\alpha\rho$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἐκ ταυτότητος

$$\alpha\mu+\beta\nu=\gamma$$

ἢ (διαιρουμένων ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ τοῦ γινομένου αβ)

$$\frac{\mu}{\beta}+\frac{\nu}{\alpha}=\frac{\gamma}{\alpha\beta}$$

ἕπεται, ὅτι, ἐὰν ὁ μέγιστος θετικὸς ἀκέραιος ὁ ἐν τῷ κλάσματι $\frac{\mu}{\beta}$ περιεχόμενος ἦναι ὁ λ, ἤτοι ἐὰν $\frac{\mu}{\beta}=\lambda+\tau$ (ὅπου $\tau<1$), τὸ κλάσμα $\frac{\gamma}{\alpha\beta}$ περιέχει μέγιστον θετικὸν ἀκέραιον ἢ τὸν λ ἢ τὸν $\lambda+1$· τὸν μὲν λ, ἐὰν $\tau+\frac{\nu}{\alpha}<1$, τὸν δὲ $\lambda+1$, ἐὰν $\tau+\frac{\nu}{\alpha}>1$· μείζονα δὲ ἀκέραιον δὲν δύναται νὰ περιέχῃ· διότι καὶ $\tau<1$ καὶ $\frac{\nu}{\alpha}<1$ (διότι $\nu<\alpha$, ἐδ. 128) καὶ ἑπομένως δὲν δύναται νὰ γίνηται $\lambda+2$· ὥστε τὸ πλῆθος τῶν θετικῶν καὶ ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$, ὅπου α, β ἀμφότεροι θετικοί, ἐκφράζεται ἢ ὑπὸ τοῦ μεγίστου θετικοῦ ἀκεραίου τοῦ ἐν τῷ κλάσματι $\frac{\gamma}{\alpha\beta}$ περιεχομένου (ἂν περιέχηται ὁ $\lambda+1$) ἢ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου ηὐξημένου κατὰ μονάδα 1 (ἂν περιέχηται ὁ λ).

Ἔστωσαν δὲ νῦν οἱ συντελεσταὶ α β ἑτεροειδεῖς, ἤτοι ἔστω ὁ α θετικὸς καὶ ὁ β ἀρνητικός. Ἐὰν λάβωμεν καὶ πάλιν τὴν ἀκεραίαν λύσιν $x=\mu$, $y=\nu$, ἔχομεν τοὺς αὐτοὺς τύπους τῆς γενικῆς λύσεως, ἤτοι τοὺς

$$x=\mu-\beta\rho$$
$$y=\nu+\alpha\rho$$

Ἀλλ' ἡ γενικὴ αὕτη τιμὴ τοῦ x δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς

$$x=\beta\left(\frac{\mu}{\beta}-\rho\right)$$

ἐπειδὴ δὲ ὁ β εἶναι ἀρνητικός, ἵνα τὸ x ἦναι θετικόν, πρέπει ἡ διαφορὰ $\frac{\mu}{\beta}-\rho$ νὰ ἦναι ἀρνητική, ἤτοι πρέπει νὰ ἦναι πάντοτε $\rho>\frac{\mu}{\beta}$, ὅπερ συμβαίνει δι' ἀπείρους τὸ πλῆθος ἀκεραίας θετικὰς τιμὰς τοῦ ρ· ὥστε, ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α, β τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$ ἦναι ἑτεροειδεῖς, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐπιδέχεται πλῆθος ἄπειρον ἀκεραίων θετικῶν λύσεων. ὅ.ἔ.δ.

Προβλήματα.

1) Εὑρεῖν τὰς ἀκεραίας θετικὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$x+y=10$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν ἀμέσως

$$x=10-y$$

καὶ ἑπομένως τὸ y μόνον τὰς ἀκεραίας θετικὰς τιμὰς

$$y=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$$

δύναται νὰ λάβῃ· πρὸς ταύτας δὲ ἀντιστοιχοῦσιν αἱ ἀκέραιαι θετικαὶ τιμαὶ τοῦ x

$$x=10,\ 9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0$$

Γενικῶς δύναται νὰ ληφθῇ $x=\rho$, $y=10-\rho$, ὅπου ρ ἀκέραιος θετικὸς ἀριθμός.

2) Εὑρεῖν τὰς ἀκεραίας θετικὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$17x-23y=-19$$

ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν

$$x=\frac{-19+23y}{17}$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἐκ τῶν 17 ἀκεραίων θετικῶν τιμῶν τοῦ y (ἐδ. 128), ἡ $y=6$ καθιστᾷ τὸ $x=7$.

Αἱ ἄπειροι ἄρα τὸ πλῆθος λύσεις τῆς ἐξισώσεως ταύτης (ἐδ. 128, 129) ὁρίζονται ὑπὸ τῶν γενικῶν τύπων

$$x=7+23\rho$$
$$y=6+17\rho$$

ὅπου ρ ἀκέραιος θετικὸς ἀριθμός.

3) Εὑρεῖν τὰς ἀκεραίας θετικὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$11x+5y=254$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν

$$y=\frac{254-11x}{5}$$

ἐκ τῶν 5 ἀκεραίων θετικῶν τιμῶν τοῦ x, ἡ $x=4$ καθιστᾷ $y=42$· ὥστε ἔχομεν γενικῶς

$$x=4+5\rho$$
$$y=42-11\rho$$

ὅπου ὁ ρ ἀκέραιος θετικὸς ἀριθμός.

4) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις διαιρούμενος διὰ 8 δίδει ὑπόλοιπον 3, καὶ διὰ 15 δίδει ὑπόλοιπον 7.

Ἔστω Α ἀριθμός τις, τὰ δὲ πηλίκα αὐτοῦ διὰ 8 καὶ 15 ἔστωσαν x καὶ y· τότε ἔχομεν

$$A=8x+3, \qquad A=15y+7$$

Ὅθεν $$8x+3=15y+7$$

ἢ $$8x-15y=4$$

ἐξ ἧς $$x=\frac{4+15y}{8}$$

καὶ $$x=8-15\rho$$
$$y=4-8\rho$$

Ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν ἑτέραν τῶν τιμῶν τούτων ἐν τῇ παραστάσει τοῦ A εὑρίσκομεν

$$A=67-120\rho$$

ἐὰν δὲ $$\rho=0,\ -1,\ -2,\ -3\ \ldots.$$

ἔχομεν $$A=67,\ 187,\ 307,\ 427\ \ldots.$$

5) Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πενταδράχμων τῶν περιεχομένων ἔν τινι σάκκῳ ἐλήφθησαν πρῶτον σωροὶ ἐκ 10 καὶ ἔμειναν 8, εἶτα ἐξ 20 καὶ ἔμειναν 18. Πόσα πεντάδραχμα περιέχει ὁ σάκκος;

Ἔστωσαν A ὁ ἀριθμὸς τῶν πενταδράχμων, x καὶ y οἱ ἄγνωστοι ἀριθμοὶ τῶν ἐκ 10 καὶ 20 σωρῶν. Τότε ἔχομεν

$$A=10x+8. \qquad A=20y+18$$

Ὅθεν

$$x=2y+1$$

Καὶ $$A=20y+18$$

Ὑπάρχουσιν ἄρα ἐν τῷ σάκκῳ πεντάδραχμα

$$y=18,\quad 38,\quad 58,\quad 78,\ \ldots.$$

καὶ δραχμαὶ $A=90,\quad 190,\quad 290,\quad 390\ \ldots.$

6) Θέλει τις νὰ παραγάγῃ ἐκ δύο ὑλῶν, ὧν ἡ τιμὴ τῆς μονάδος α καὶ β, μῖγμα, οὗτινος ἡ τιμὴ τῆς μονάδος μ. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρας τῶν ὑλῶν τούτων;

Ἔστωσαν x καὶ y αἱ δύο ποσότητες, ἃς πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρας τῶν δύο ὑλῶν. Τότε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\alpha x+\beta y=\mu(x+y)$$

ἢ $$(\alpha-\mu)x-(\mu-\beta)\,y=0$$

ἢ καὶ $$\frac{x}{y}=\frac{\mu-\beta}{\alpha-\mu}$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι αἱ ποσότητες, ἃς πρέπει νὰ λάβῃ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰς διαφορὰς μεταξὺ τῶν τιμῶν ἑκάστης ὕλης καὶ τῆς τιμῆς τοῦ μίγματος. Ἐντεῦθεν δὲ ἐξάγεται ὁ γνωστὸς κανὼν τῆς

Ἀριθμητικῆς· διότι ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις ἀληθεύει διὰ

$$x=\mu-\beta, \quad y=\alpha-\mu.$$

Ἐν γένει δὲ ἔχομεν

$$y=\rho, \; x=\frac{\mu-\beta}{\alpha-\mu}.\rho$$

διὰ $\rho=1,2,3...$

7) Οἰνοπώλης θέλει νὰ παραγάγῃ κρᾶμα ἐξ 100 λιτρῶν οἴνου, οὗτινος ἡ λίτρα νὰ τιμᾶται 0,80 δρ. ἀναμιγνύων τριῶν εἰδῶν οἴνους, τῶν 1,50 δρ., 1 δρ. καὶ 0,60 δρ. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους;

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ x, y, w τὰς ποσότητας ἑκάστου εἴδους, ἔχομεν τὰς δύο ἐξισώσεις

$$x+y+w=100$$

$$1,50x+y+0,60w=80 \quad \text{ἢ} \quad 15x+10y+6w=800$$

ἐκ τῆς πρώτης προκύπτει

$$w=100-x-y$$

καὶ δι' ἀντικαταστάσεως ἐν τῇ δευτέρᾳ προκύπτει

$$9x+4y=200$$

ἐξ ἧς

$$y=\frac{200-9x}{4}$$

καὶ

$$x=4\rho$$
$$y=50-9\rho$$
$$w=50+5\rho$$

Ὅθεν

$$\begin{array}{llllll} x= 4, & 8, & 12, & 16, & 20 \\ y=41, & 32, & 23, & 14, & 5 \\ w=55, & 60, & 65, & 70, & 75 \end{array}$$

8) Εὑρεῖν τρία μέρη τοῦ ἀριθμοῦ 120 διαιρετὰ τὸ μὲν διὰ 3, τὸ δὲ διὰ 4, τὸ δὲ διὰ 5 καὶ τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, ἔστω τὸ δεύτερον, νὰ ἦναι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν δύο λοιπῶν.

Ἔστωσαν α, β, γ τὰ τρία ζητούμενα μέρη. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ x, y, w τὰ ἄγνωστα πηλίκα τῆς διαιρέσεως τῶν μερῶν τοῦ ἀριθμοῦ

120 διὰ 3, 4, 5, ἔχομεν

$$\alpha=3x,\quad \beta=4y,\quad \gamma=5w$$

καὶ ἐπομένως

$$3x+4y+5w=120,\quad 4y=\frac{3x+5w}{2}$$

Δι' ἀντικαταστάσεως δὲ ἐν τῇ πρώτῃ τῆς τιμῆς τοῦ $4y$ προκύπτει

$$3x+5w=80$$

Ὅθεν

$$4y=\frac{80}{2}=40$$

Εἶτα δὲ εὑρίσκομεν εὐκόλως

$$x=5\rho,\quad w=16-3\rho$$

ὥστε τὰ τρία ζητούμενα μέρη εἶναι

$$\alpha=15\rho,\quad \beta=40,\quad \gamma=80-15\rho.$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τοῦ μὲν β ὑπάρχει μία μόνη τιμή, τῶν δὲ α καὶ γ ὑπάρχουσι 5 τιμαί.

9) Εὑρεῖν τρία μέρη τοῦ 57, ὧν τὸ μὲν διαιρούμενον διὰ 3 δίδει ὑπόλοιπον 2, τὸ δὲ διὰ 5 δίδει 4, τὸ δὲ διὰ 7 δίδει 6.

Τὰ τρία μέρη α, β, γ εἶναι τῆς μορφῆς

$$\alpha=3x+2,\quad \beta=5y+4,\quad \gamma=7w+6$$

καὶ ἐπομένως

$$3x+2+5y+4+7w+6=57$$

ἢ

$$3x+5y+7w=45$$

ἐξ ἧς

$$x=\frac{45-5y-7w}{3}=15-2y-2w+\frac{y-w}{3}$$

ἐὰν δὲ τεθῇ

$$\frac{y-w}{3}=\tau$$

ἕπεται

$$y=w+3\tau$$

Ὅθεν διὰ $w=\rho$

$$x=15-4\rho-5\tau,\quad y=\rho+3\tau,\quad w=\rho$$

Αἱ τιμαὶ τοῦ τ περιέχονται μεταξὺ -2 καὶ $+2$ καὶ ἐπομένως δὲν δύνανται νὰ ἦναι ἄλλαι ἢ αἱ -2, -1, 0, 1, 2, πρὸς ἃς ἀντιστοιχοῦσιν αἱ ἑπόμεναι τιμαὶ τοῦ ρ

$$
\begin{array}{ll}
\tau=-2, & \rho=6 \\
\tau=-1, & \rho=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \\
\tau=\ \ 0, & \rho=0,\ 1,\ 2,\ 3 \\
\tau=\ \ 1, & \rho=0,\ 1,\ 2 \\
\tau=\ \ 2, & \rho=0,\ 1.
\end{array}
$$

ἐν συνόλῳ 16 λύσεις.

Ἐὰν λάβωμεν $\tau=2,\ \rho=1,$ ἔχομεν

$$\alpha=5, \quad \beta=39, \quad \gamma=13.$$

10) Χρυσοχόος τις θέλει νὰ παραγάγῃ μῖγμα βαθμοῦ καθαρότητος 0,840 ἐκ τριῶν τεμαχίων ἀργύρου, ὧν οἱ βαθμοὶ καθαρότητος 0,900, 0,860, 0,750. Πόσον ἐν ἀκεραίῳ ἀριθμῷ πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου τεμαχίου;

Ἔστωσαν x, y, w αἱ τρεῖς ζητούμεναι ποσότητες· τότε ἔχομεν

$$0{,}900x+0{,}860y+0{,}750w=0{,}840\ (x+y\ \ w)$$

ἢ

$$6x+2y-9w=0$$

ἐξ ἧς

$$y=\frac{9w-6x}{2}=4w-3x+\frac{w}{2}$$

ἐὰν δὲ τεθῇ

$$x=\rho, \quad \frac{w}{2}=\rho'$$

ἔχομεν

$$x=\rho, \quad y=9\rho'-3\rho, \quad w=2\rho'$$

Ἐὰν ἰδίᾳ λάβωμεν $\rho=3,\ \rho'=6$ ἔχομεν

$$x=3, \quad y=45, \quad w=12$$

11) Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς τοιούτους, ὥστε ἡ ὑπεροχὴ τοῦ γινομένου ὑπὲρ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ ἦναι ὁ 34.

Ἔστωσαν x καὶ y οἱ δύο ἀριθμοί· τότε ἔχομεν

$$xy-(x+y)=34$$

ἐξ ἧς

$$y=\frac{x+34}{x-1}=1+\frac{35}{x-1}$$

Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι τὸ $x-1$ πρέπει νὰ ἦναι εἷς τῶν διαιρετῶν τοῦ 35 ῞Οθεν

$$x-1=1,\quad 5,\quad 7,\quad 35$$

καὶ

$$x=2,\quad 6,\quad 8,\quad 36$$

$$y=36,\quad 8,\quad 6,\quad 2$$

12) Ἔν τινι πανηγύρει ἐδαπάνησαν ἄνδρες καὶ γυναῖκες 330 δρ. Καὶ ἑκάστη μὲν γυνὴ ἐδαπάνησεν 9 δρ., ἕκαστος δὲ ἀνὴρ 16. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$16x+9y=330$$

ὅθεν

$$y=\frac{330-16y}{9}$$

καὶ $x=-3+9\rho,\qquad y=42-16\rho$

ὥστε διὰ $\rho=1$ εἶναι $x=6,\ y=26$

καὶ διὰ $\rho=2$ εἶναι $x=15,\ y=10$

13) Ἠγόρασέ τις ἀντὶ 1080 δρ. αἶγας καὶ πρόβατα. Ἑκάστης αἰγὸς ἡ τιμὴ εἶναι 11 δρ., ἑκάστου δὲ προβάτου 24. Πόσας αἶγας καὶ πόσα πρόβατα ἠγόρασεν;

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$11x+24y=1080$$

῞Οθεν $x=24\rho,\qquad y=45-11\rho$

καὶ διὰ $\rho=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

ἔχομεν
$$\begin{cases} x=0 & 24, & 48, & 72, & 96 \\ y=45, & 34, & 23, & 12, & 1 \end{cases}$$

14) Εὑρεῖν κλάσμα τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν προστεθῶσιν εἰς μὲν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ ὁ 2, εἰς δὲ τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ ὁ 3 νὰ γίνηται ἴσον τῷ κλάσματι $\frac{7}{24}$.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{x+2}{y+3}=\frac{7}{24}$$

ἢ

$$24x-7y=-27$$

Ὅθεν $x=-2+7\rho,\quad y=-3+24\rho.$

καὶ διὰ $\rho=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots.$

ἔχομεν $\begin{cases} x=5, & 12, & 19, & 26\ldots. \\ y=21, & 45, & 69, & 93\ldots. \end{cases}$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις διαιρούμενος διὰ 8 καὶ διὰ 11 δίδει ὑπόλοιπα 5 καὶ 4. (Ἀπ. 88ρ+37).

2) Εὑρεῖν ἀριθμὸν διαιρετὸν μὲν διὰ 9, διαιρούμενον δὲ διὰ 14 καὶ δίδοντα ὑπόλοιπον 8. (Ἀπ. 126ρ+36).

3) Τίς ὁ ἀριθμὸς ὁ διαιρούμενος διὰ 6, 12, 15 καὶ δίδων ὑπόλοιπα 1, 1, 10; (Ἀπ. 60ρ+25).

4) Πόσα χρυσᾶ 20 δρ. καὶ 40 δρ. τιθέμενα κατὰ σειρὰν ἀποτελοῦσι τὴν μονάδα τοῦ μήκους, ἤτοι τὸ μέτρον, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ διάμετρος τῶν 20 δρ. καὶ τῶν 40δράχμων εἶναι 21 καὶ 26 χιλιοστὰ τοῦ μέτρου ; (Ἀπ. 26ρ—200, 200—21ρ).

3) Λῦσαι τὴν ἐξίσωσιν.

$$27x-19y=43$$

ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἔχομεν

$$y=\frac{27x-43}{19}=x-2+\frac{8x-5}{19}$$

Ἵνα δὲ y ᾖναι ἀκέραιος ἀριθμός, πρέπει

$$\frac{8x-5}{19}=\tau \quad \text{(ὅπου } \tau \text{ ἀκέραιος ἀριθμὸς)}$$

ἐξ οὗ $$x=\frac{19\tau+5}{8}=2\tau+\frac{3\tau+5}{8}$$

ὁμοίως, ἐὰν $$\frac{3\tau+5}{8}=\tau'$$

ἕπεται $$\tau=\frac{8\tau'-5}{3}=3\tau'-1-\frac{\tau'+2}{3}$$

ὁμοίως, ἐὰν $$\frac{\tau'+2}{3}=\rho$$

ἕπεται

$$\tau'=3\rho-2$$

ἐξ οὗ

$$\tau=3\tau'-1-\rho=8\rho-7$$

$$x=2\tau+\tau'=19\rho-16$$

$$y=x-2+\tau=27\rho-25$$

Ὥστε αἱ γενικαὶ ἀκέραιαι λύσεις εἶναι

$$x=19\rho-16$$

$$y=27\rho-25$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὰς γενικὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha x+\beta y=\gamma$$

αἵτινες εἶναι

$$\begin{matrix} x=\mu+\beta\rho \\ y=\nu-\alpha\rho \end{matrix} \quad \text{ἤ} \quad \begin{matrix} x=\mu-\beta\rho \\ y=\nu+\alpha\rho \end{matrix}$$

6) Λῦσαι τὴν ἐξίσωσιν

$$\alpha x+\beta y=\gamma$$

ὅπου οἱ συντελεσταὶ α,β εἶναι μεγάλοι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐὰν $\beta>\alpha$, διαιροῦμεν τὸν β διὰ τοῦ α καὶ ἔστω τὸ μὲν πηλίκον π, τὸ δὲ ὑπόλοιπον β', ἤτοι

$$\beta=\alpha.\pi+\beta'$$

τότε δὲ εἶναι

$$\alpha x+(\alpha\pi+\beta')y=\gamma$$

ἤ

$$\alpha(x+\pi y)+\beta' y=\gamma$$

ἐὰν δὲ τεθῇ $x+\pi y=x'$, προκύπτει

$$\alpha x'+\beta' y=\gamma$$

ὅπου x' εἶναι νέος τις ἄγνωστος συνδεόμενος πρὸς τοὺς x,y διὰ τῆς σχέσεως $x'=x+\pi y$ ἢ $x=x'-\pi y$

Εὑρεθεισῶν δὲ τῶν ἀκεραίων τιμῶν τῶν x' καὶ y ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκεται καὶ ὁ x· ἐντεῦθεν δὲ φανερόν, ὅτι ἡ εὕρεσις τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν ἀκεραίων λύσεων ἄλλης, ἥτις ἔχει συντελεστὰς τὸν ἐλάσσονα τῶν συντελεστῶν τῆς δοθείσης καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ μείζονος διὰ τοῦ ἐλάσσονος συντελεστοῦ· ὁμοίως δὲ ἀνάγεται ἡ ἀκεραία λύσις αὐτῆς εἰς ἄλλην· καὶ οὕτω καθ᾽ ἑξῆς. Πρόδηλον δέ, ὅτι αἱ γενόμεναι οὕτω διαιρέσεις εἶναι αἱ δι' ὧν εὑρίσκεται ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν συντελεστῶν α καὶ β. Ἐπειδὴ δὲ οὗτοι ὑποτίθενται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἕπεται, ὅτι εὑρίσκεται ἐπὶ τέλους ὑπόλοιπόν τι ἴσον τῷ μεγίστῳ κοινῷ διαιρέτῃ 1 καὶ οὕτω καταλήγομεν εἰς ἐξίσωσιν, ἐν ᾗ ὁ ἕτερος τῶν ἀγνώστων ἔχει συντελεστὴν τὴν μονάδα 1, ἤτοι καταλήγομεν οὕτως εἰς ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$X+\rho Y=\gamma$$

τῆς δὲ τοιαύτης ἐξισώσεως εὑρίσκεται ἀμέσως ἀκεραία λύσις· διότι, ἐὰν τεθῇ $Y=0$, ἕπεται $X=\gamma$· καὶ γενικῶς ἐὰν τεθῇ $Y=A$, ἕπεται $X=\gamma-A\rho$, ἔνθα A ἀκέραιος ἀριθμός· ὥστε εὑρίσκεται ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἐξισώσεως ἀκεραία λύσις, ἑπομένως καὶ ἑκάστης τῶν προηγουμένων μέχρις αὐτῆς τῆς δοθείσης. (Αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εὑρίσκονται καὶ διὰ τῶν συνεχῶν κλασμάτων· ἰδὲ Ἀνωτέραν Ἄλγεβράν μου).

7) Χωρικός τις φέρει εἰς τὴν ἀγορὰν ᾠὰ πλείονα μὲν τῶν 100 ὀλιγώτερα δὲ τῶν 200. Ἐὰν πωλήσῃ αὐτὰ κατὰ δεκαπεντάδας, ὑπολείπονται 4· ἐὰν πωλήσῃ αὐτὰ κατὰ δωδεκάδας, ὑπολοίπονται 10. Πόσα ᾠὰ ἔχει; (Ἀπ. 154).

8) Ἀξιωματικός τις διέταξε τὴν πορείαν τῶν στρατιωτῶν αὐτοῦ κατὰ οὐλαμοὺς διαιρέσας τὸν ἀριθμὸν αὐτῶν διὰ 2, 4, 8, 10 καὶ ἔμεινεν ἑκάστοτε εἷς στρατιώτης ὑπεράριθμος· διέταξε δὲ τὴν πορείαν κατὰ οὐλαμοὺς διαιρέσας τὸν ἀριθμὸν τῶν στρατιωτῶν διὰ 6, 12 καὶ ἔμειναν οὕτω 5 στρατιῶται ὑπεράριθμοι. Πόσοι ἦσαν οἱ στρατιῶται; (Ἀπ. 161).

9) Εὑρεῖν δύο μέρη τοῦ ἀριθμοῦ 142 διαιρετὰ τὸ μὲν διὰ 9, τὸ δὲ διὰ 14. (Ἀπ. 72, 70).

10) Ἠγόρασέ τις ἵππους καὶ ἀγελάδας ἀντὶ 7080 δρ. ἕκαστος ἵππος ἠγοράσθη ἀντὶ 124 δρ. ἑκάστη δὲ ἀγελὰς ἀντὶ 84 δρ. Πόσοι ἦσαν οἱ ἵπποι καὶ αἱ ἀγελάδες; (Ἀπ. ἵπποι 9, 30, 51, ἀγελάδες 71, 40, 9).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν μονωνύμων

130. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παντὸς ῥητοῦ ἀκεραίου μονωνύμου, ἤτοι ἡ $\frac{1}{2}$ δύναμις αὐτοῦ, οὐδὲν ἄλλο εἶναι ἢ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα γινομένου

παραγόντων (68) καὶ ἑπομένως ἐξάγεται αὕτη κατὰ τοὺς νόμους τῶν δυνάμεων.

Ἐπειδὴ δὲ ἕκαστος παράγων γινομένου εἶναι δύναμις ἀριθμοῦ τινος, ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ρίζα ἐξάγεται (76) διαιρουμένου τοῦ ἐκθέτου αὐτῆς διὰ 2.

Καὶ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα παντὸς ρητοῦ κλασματικοῦ μονωνύμου οὐδὲν ἄλλο εἶναι ἢ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κλάσματος καὶ ἑπομένως ἐξάγεται αὕτη ἐξαγομένης τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἀμφοτέρων τῶν ὅρων αὐτοῦ.

Ἡ δὲ τεραγωνικὴ ρίζα, ὡς καὶ πᾶσα ἀρτίου βαθμοῦ ρίζα, ἔχει δύο ἀντιθέτους τιμὰς (74) καὶ ἑπομένως τὸ ἐξαγόμενον λαμβάνεται καὶ θετικὸν καὶ ἀρνητικόν, ἤτοι μετὰ τοῦ διπλοῦ σημείου $\pm$.

Ἐὰν δέ τινος τῶν παραγόντων δὲν ἐξάγηται ἡ ρίζα, σημειοῦμεν μόνον ἐπ' αὐτοῦ τὴν πρᾶξιν· ἤ, ἂν ἦναι δυνατόν, ἀναλυομεν αὐτὸν εἰς δύο παράγοντας τοιούτους, ὥστε τοῦ ἑτέρου αὐτῶν νὰ ἐξάγηται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα.

Παραδείγματα.

1) $\sqrt{36\alpha^2\beta^4\gamma^{10}} = \pm 6\alpha\beta^2\gamma^5$

2) $\sqrt{\dfrac{81\alpha^2\beta^6\gamma^2}{16\delta^4\varepsilon^8}} = \pm\dfrac{9\alpha\beta^3\gamma}{4\delta^2\varepsilon^4}$

3) $\sqrt{8\alpha^4\beta^2\gamma^6} = \pm\sqrt{8}.\alpha^2\beta\gamma^3$

4) $\sqrt{5\alpha^3\beta^2\delta^6} = \pm\sqrt{5\alpha}.\alpha\beta\delta^3$

5) $\sqrt{\dfrac{3\alpha^4\beta^4\gamma^2}{\delta}} = \pm\dfrac{\sqrt{3}\alpha^2\beta^2\gamma}{\sqrt{\delta}} = \pm\dfrac{\sqrt{3\delta}.\alpha^2\beta^2\gamma}{\delta}$

6) $\alpha\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha}}}}} = \sqrt[32]{\alpha^{63}}$

* Τετραγωνικὴ ρίζα τῶν πολυωνύμων.

131. Ἐξαγαγεῖν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν πολυωνύμου σημαίνει εὑρεῖν πολυώνυμον, οὗ τινος τὸ τετράγωνον ἰσοῦται τῷ δοθέντι πολυωνύμῳ.

Ἡ δὲ μέθοδος, δι' ἧς εὑρίσκεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν πολυωνύμων (ἐὰν ὑπάρχῃ), συνάγεται ἐκ τῆς εὑρέσεως τοῦ τετραγώνου αὐτῶν.

132. Τὸ τετράγωνον παντὸς πολυωνύμου ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων καὶ ἐκ τῶν διπλασίων γινομένων τῶν ὅρων ἀνὰ δύο λαμβανομένων.

Οὕτως εἶναι, ἐὰν πρὸς συντομίαν παραστήσωμεν ἕκαστον ὅρον τοῦ πολυωνύμου δι' ἑνὸς γράμματος

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+2\alpha(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2$$

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=((\alpha+\beta)+(\gamma+\delta))^2=(\alpha+\beta)^2+(\gamma+\delta)^2+2(\alpha+\beta).(\gamma+\delta)=$$

$$=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2+2\alpha\delta+2\beta\delta+2\gamma\delta+\delta^2$$

. . . .

$$(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\kappa)^2=\alpha^2+2\alpha(\beta+\gamma+\ldots+\kappa)+(\beta+\gamma+\ldots+\kappa)^2=$$

$$=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\ldots+\kappa^2$$

Ἐκ τούτων γίνεται φανερόν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις τῶν πολυωνύμων εὑρίσκονται τὰ τετράγωνα πάντων τῶν ὅρων καὶ τὰ διπλάσια γινόμενα τῶν ὅρων ἀνὰ δύο λαμβανομένων.

Κατὰ ταῦτα τὸ τετράγωνον τοῦ τριωνύμου $2x^2+3x-1$ εἶναι μετὰ τὴν ἀγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων

$$4x^4+12x^3+5x^2-6x+1$$

Παρατηρητέον δέ, ὅτι, ὁπόταν πολυώνυμον ἦναι διατεταγμένον κατὰ τὰς δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, ὑπάρχουσιν ἐν τῷ τετραγώνῳ αὐτοῦ τέσσαρες ὅροι μὴ δυνάμενοι νὰ ἀναχθῶσι μετ' ἄλλων ὅρων αὐτοῦ· οἱ δὲ ὅροι οὗτοι εἶναι οἱ δύο πρῶτοι καὶ οἱ δύο τελευταῖοι (ἐὰν καὶ τὸ τετράγωνον ἦναι διατεταγμένον πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα). Ἐν τῷ τετραγώνῳ π. χ. τοῦ πολυωνύμου $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\kappa+\lambda$, οὗ τοὺς ὅρους παριστῶμεν πρὸς συντομίαν διὰ γραμμάτων, καὶ ὅπερ ἔστω διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, ἔστω τοῦ x, οἱ ὅροι α^2, λ^2, $2\alpha\beta$, $2\kappa\lambda$, ἤτοι τὰ τετράγωνα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τελευταίου ὅρου καὶ τὰ διπλάσια γινόμενα τῶν δύο πρώτων ὅρων καὶ τῶν δύο τελευταίων, δὲν δύνανται νὰ ἀναχθῶσι μετ' ἄλλων ὅρων αὐτοῦ. Καὶ ὅτι μὲν οἱ δύο ὅροι α^2 καὶ λ^2 δὲν δύνανται νὰ ἀναχθῶσι μετ' ἄλλων ὅρων τοῦ τετραγώνου τοῦ πολυωνύμου $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\kappa+\lambda$ ἐμάθομεν ἐκ τῆς θεωρίας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πολυωνύμων (100, Σημ. 2)· ὅτι δὲ οἱ δύο ὅροι $2\alpha\beta$ καὶ $2\kappa\lambda$ δὲν δύνανται ὡσαύτως νὰ ἀναχθῶσι μετ' ἄλλων ὅρων αὐτοῦ φαίνεται ἀμέσως· διότι ὁ μὲν $2\alpha\beta$ εἶναι γινόμενον ὅρων τοῦ πολυωνύμου τὰς μεγίστας δυνάμεις τοῦ x ἐχόντων καὶ ἑπομένως τὸ γράμμα x ἔχει ἐν τῷ ὅρῳ τούτῳ μείζονα ἐκθέτην ἢ ἐν τοῖς λοιποῖς ὅροις β^2, $2\beta\gamma$, $2\alpha\gamma, \ldots$, ὁ δὲ $2\kappa\lambda$ εἶναι γινόμενον ὅρων τοῦ πολυωνύμου τὰς ἐλαχίστας δυνάμεις τοῦ x ἐχόντων καὶ ἑπομένως τὸ γράμμα x ἔχει ἐν τῷ ὅρῳ τούτῳ ἐλάσσονα ἐκθέτην ἢ ἐν τοῖς λοιποῖς ὅροις τοῦ τετραγώνου τοῦ πολυωνύμου.

133. Ἔστω νῦν πολυώνυμόν τι P διατεταγμένον κατὰ τὰς φθινούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος αὐτοῦ x καὶ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ οἱ ὅροι τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης αὐτοῦ διατεταγμένης ὡσαύτως κατὰ τὰς φθινούσας δυνάμεις τοῦ x. Τότε ἔχομεν

$$P=(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda)^2=$$
$$\alpha^2+2\alpha(\beta+\gamma+\ldots+\lambda)+\ldots+\lambda^2$$

Οὕτως ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πολυωνύμου P εἶναι ὁ α^2. Ἐξάγοντες δὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ὅρου τούτου εὑρίσκομεν τὸν πρῶτον ὅρον α τῆς ῥίζης· ἀφαιροῦντες δὲ ἀπὸ τοῦ πολυωνύμου P τὸν ὅρον α^2 λαμβάνομεν ὑπόλοιπον

$$Y=2\alpha(\beta+\gamma+\ldots+\lambda)+\ldots+\lambda^2$$

Ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ὑπολοίπου Y εἶναι προφανῶς $2\alpha\beta$· διαιροῦντες δὲ τὸν ὅρον τοῦτον διὰ 2α, ἤτοι διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης, εὑρίσκομεν τὸν δεύτερον ὅρον β τῆς ῥίζης.

Θεωρήσωμεν νῦν τὴν παράστασιν

$$P=[(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta+\ldots+\lambda)]^2=$$
$$(\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta).(\gamma+\delta+\ldots+\lambda)+\ldots+\lambda^2$$

καὶ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' αὐτῆς $(\alpha+\beta)^2$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον

$$Y'=2(\alpha+\beta).(\gamma+\delta+\ldots+\lambda)+\ldots+\lambda^2$$

οὗ ὁ πρῶτος ὅρος $2\alpha\gamma$ διαιρεθεὶς διὰ 2α παρέχει τὸν τρίτον ὅρον γ τῆς ῥίζης· καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις ὅτου εὑρεθῶσι πάντες οἱ ὅροι $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ ὧν τὸ ἄθροισμα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ πολυωνύμου P.

Ἡ δὲ διάταξις τῆς πράξεως φαίνεται ἐκ τοῦ ἑπομένου παραδείγματος

$$
\begin{array}{r|l}
4x^4+12x^3+5x^2-6x+1 & 2x^2+3x-1 \\
-4x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & \hline 4x^2+3x \\
\hline
+12x^3+5x^2-6x+1 & 4x^2+6x-1 \\
-12x^3-9x^2 \qquad\quad & \\
\hline
-4x^2-6x+1 & \\
+4x^2+6x-1 & \\
\hline
0 \qquad &
\end{array}
$$

ὥστε $\sqrt{4x^4+12x^3+5x^2-6x+1}=\pm(2x^2+3x-1)$

134. Ἐκ δὲ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ κανών·

Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν πολυωνύμου, διατάσσομεν αὐτὸ κατὰ τὰς δυνάμεις ἑνὸς γράμματος.

Ἐξάγομεν τὴν τετρ. ῥίζαν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πολυωνύμου καὶ τὴν ῥίζαν ταύτην γράφομεν πρῶτον ὅρον τῆς ῥίζης τοῦ πολυωνύμου.

Ἀφαιροῦμεν ἐκ τοῦ πολυωνύμου τὸ τετράγωνον τοῦ ὅρου τούτου καὶ εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον· εἶτα διπλασιάζομεν αὐτὸν καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου αὐτοῦ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ὑπολοίπου· τὸ δὲ πηλίκον εἶναι ὁ δεύτερος ὅρος τῆς ῥίζης.

Εἰς τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης προσθέτομεν τὸν δεύτερον ὅρον αὐτῆς καὶ τὸ ἄθροισμα πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον τῆς ῥίζης, τὸ δὲ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου καὶ εὑρίσκομεν τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον.

Διαιροῦμεν πάλιν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης· τὸ δὲ πηλίκον εἶναι ὁ τρίτος ὅρος τῆς ῥίζης· εἰς τὸ διπλάσιον τῶν δύο πρώτων ὅρων τῆς ῥίζης προσθέτομεν τὸν τρίτον ὅρον αὐτῆς καὶ τὸ ἄθροισμα πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν τρίτον ὅρον τῆς ῥίζης, τὸ δὲ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου. Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἡ δὲ πρᾶξις λαμβάνει πέρας, ἐὰν εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0.

ΣΗΜ. 1 Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξάγεται, ὅτι δοθὲν πολυώνυμον δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου πολυωνύμου κατὰ τὰς ἑπομένας περιπτώσεις

1) Ἐὰν ἦναι διώνυμον· διότι παντὸς μὲν μονωνύμου τὸ τετράγωνον εἶναι πάλιν μονώνυμον, παντὸς δὲ διωνύμου εἶναι τριώνυμον.

2) Ἐὰν μετὰ τὴν διάταξιν πρός τι γράμμα ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ὁ τελευταῖος δὲν ἦναι τέλεια τετράγωνα· ὅπερ συμβαίνει, ὅταν οἱ ἐκθέται τῶν ὅρων τούτων δὲν ἦναι ἀμφότεροι ἄρτιοι ἀριθμοί.

3) Ἐάν τινος τῶν ὑπολοίπων ὁ πρῶτος ὅρος δὲν ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ρίζης.

ΣΗΜ. 2. Ἐνίοτε ἀναλύεται τὸ δοθὲν πολυώνυμον εἰς δύο παράγοντας, ὧν ὁ ἕτερος εἶναι τετράγωνον ἄλλου πολυωνύμου.

ΣΗΜ. 3. Ἐὰν ὁ βαθμὸς πολυωνύμου τινὸς διατεταγμένου δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν 6 πρός τι γράμμα αὐτοῦ καὶ ἦναι γνωστόν, ὅτι ἡ ρίζα αὐτοῦ δὲν ἔχει ὅρους πλείονας τῶν τεσσάρων, εὑρίσκονται οὗτοι ἀμέσως· καὶ ὁ μὲν πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος εἶναι αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ πολυωνύμου, ὁ δὲ δεύτερος (ἐὰν ὑπάρχῃ) εὑρίσκεται διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ δευτέρου ὅρου τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ρίζης· τέλος ὁ τρίτος (ἐὰν ὑπάρχῃ) εὑρίσκεται διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ προτελευταίου ὅρου τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ τελευταίου ὅρου τῆς ρίζης.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὰς τετρ. ρίζας τῶν

$$x^2-2\alpha x+\alpha^2, \quad \alpha^2-\alpha\beta+\frac{\beta^2}{4}, \quad x^2+x+\frac{1}{4}$$

$$\left(\text{Ἀπ.} \pm(x-\alpha), \quad \pm\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right), \quad \pm\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$$

2) Εὑρεῖν τὰς τετραγ. ρίζας τῶν

$$\alpha^6+6\alpha^3x^4+9x^8, \quad \frac{9\alpha^8}{4}-2\alpha^4\nu^3+\frac{4\nu^6}{9}$$

$$\left(\text{᾿Απ.} \mp(\alpha^3+3x^4), \quad \pm\left(\frac{3\alpha^4}{2}-\frac{2\nu^3}{3}\right)\right)$$

3) Εὑρεῖν τὴν τετρ. ρίζαν τῶν

$$\alpha^{2\mu}+2\alpha^\mu\beta^\nu+\beta^{2\nu}, \quad \frac{\alpha^2}{\beta^2}-\frac{4\alpha}{3\gamma}+\frac{4\beta^2}{9\gamma^2}$$

$$\left(\text{᾿Απ.} \pm(\alpha^\mu+\beta^\nu), \quad \pm\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{2\beta}{3\gamma}\right)\right)$$

4) Εὑρεῖν τὴν τετρ. ρίζαν τοῦ

$$\frac{9}{4}+6x-17x^2-28x^3+49x^4$$

$$\left(\text{᾿Απ.} \pm\left(\frac{3}{2}+2x-7x^2\right)\right)$$

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων.

135. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ὑψω-θῶσιν εἰς τὸ τετράγωνον, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶν-ἰσοδύναμος πρὸς δύο ἐξισώσεις· αὗται δὲ εἶναι ἡ ἀρχικ-καὶ ἡ ἐξ αὐτῆς, τρεπομένου τοῦ $+$ ἢ $-$ τοῦ ἑτέρου μέλου-αὐτῆς εἰς $-$ ἢ $+$.

Ἐξίσωσίς τις λέγεται ἰσοδύναμος πρὸς δύο ἄλλας, ἐὰν πᾶ-ὡρισμένη καὶ πεπερασμένη λύσις αὐτῆς ἦναι λύσις καὶ τῆς ἑτέρ-ς τ-δύο ἄλλων· καὶ τἀνάπαλιν, ἐὰν πᾶσα λύσις τῆς ἑτέρας τῶν δύο το-τ-ἦναι λύσις καὶ αὐτῆς.

Ἔστω τυχοῦσα ἐξίσωσις $\qquad A=B \qquad\qquad (1)$

ἧς τινος τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον μέλος παριστῶμεν πρὸς συντομίαν δ-ἑνὸς γράμματος. Λέγω, ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$A^2=B^2 \qquad (2)$$

ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν ἀρχικὴν ἐξίσωσιν (1) καὶ τὴν ἐξ αὐτῆς προερχομέν-διὰ τροπῆς τοῦ $+$ εἰς $-$ τοῦ ἑτέρου μέλους αὐτῆς, ἔστω τοῦ B, ἤτ-πρὸς τὴν

$$A=-B \qquad (3)$$

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἀληθεύσῃ ἡ ἐξίσωσις (2) δι' ἁρμοδίων ὡρισμένω-καὶ πεπερασμένων τιμῶν τῶν ἐν αὐτῇ ἀγνώστων, ἤτοι ἐὰν τὰ δύο μέλ-αὐτῆς καταστῶσι διὰ τῶν τιμῶν τούτων ὡρισμένοι καὶ πεπερασμένο-ἀριθμοὶ ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, μένει ἡ ἰσότης, καὶ ὅταν ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀμφοτέρων τῶν ἴσων τούτων πρὸς ἀλλήλους ἀριθμῶν, ἤτοι ἀληθεύουσι διὰ τῶν αὐτῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων, δι' ὧν καὶ ἡ ἐξίσωσις (2), καὶ αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (3).

Καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν ἀληθεύσωσιν αἱ δύο ἐξισώσεις (1) καὶ (3) δι' ἁρμοδίων ὡρισμένων καὶ πεπερασμένων τιμῶν τῶν ἐν αὐταῖς ἀγνώστων, ἤτοι ἐὰν τὰ δύο μέλη αὐτῶν καταστῶσι διὰ τῶν τιμῶν τούτων ὡρισμένοι καὶ πεπερασμένοι ἀριθμοὶ ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, μένει ἡ ἰσότης, καὶ ὅταν ὑψωθῶσιν οἱ ἴσοι οὗτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἰς τὸ τετράγωνον, ἤτοι ἀληθεύει διὰ τῶν αὐτῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων, δι' ὧν καὶ αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (3), καὶ ἡ ἐξίσωσις (2). Ὥστε ἡ ἐξίσωσις $A^2=B^2$ ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὰς δύο ἐξισώσεις $A=\pm B$ καὶ τἀνάπαλιν.

Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

136. Ἐὰν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐξισώσεως ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ληφθῇ δὲ ἡ ῥίζα τοῦ ἑτέρου τῶν μελῶν καὶ μετὰ τοῦ + καὶ μετὰ τοῦ —, αἱ οὕτω προκύπτουσαι δύο ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμοι αὐτῇ· ἤτοι ἡ ἐξίσωσις

$$A=B$$

εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς δύο ἐξισώσεις

$$\sqrt{A}=\pm\sqrt{B}$$

διότι προκύπτει ἐξ ἑκατέρας αὐτῶν, ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη τετραγωνισθῶσιν.

Γενικὴ μορφὴ τῆς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

137. Πᾶσα ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἕνα ἔχουσα ἄγνωστον δύναται νὰ ἀναχθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\alpha x^2+\beta x=\gamma \qquad (1)$$

Λαμβάνει δὲ τὴν μορφὴν ταύτην, ἐὰν ἐξαλειφθῶσιν οἱ παρονομασταί, ἐκτελεσθῶσιν αἱ σεσημειωμέναι πράξεις, χωρισθῶσιν οἱ γνωστοὶ ὅροι ἀπὸ τῶν λοιπῶν καὶ ἀναχθῶσιν εἰς ἕνα ὅρον πάντες οἱ περιέχοντες τὸ x^2, ὡσαύτως δὲ καὶ οἱ περιέχοντες τὸ x, τουτέστιν ἐὰν ἐφαρμοσθῶσιν ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως αἱ πράξεις τοῦ ἐδαφ. 112. Περὶ δὲ τῶν συντελεστῶν α, β καὶ τοῦ γ δυναταὶ αἱ ἑξῆς ὑποθέσεις:

1) Ἐὰν πάντες οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἦναι διάφοροι τοῦ 0, τότε ἡ

ἐξίσωσις (1) λαμβάνει (ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς διαιρεθῶσι διὰ τ[οῦ]
α) τὴν μορφὴν

$$x^2+\frac{\beta}{\alpha}x=\frac{\gamma}{\alpha}$$

ἤ, ἐὰν τεθῇ $\qquad \frac{\beta}{\alpha}=\pi \quad$ καὶ $\quad \frac{\gamma}{\alpha}=\kappa,$

$$x^2+\pi x=\kappa.$$

2) Ἐὰν $\alpha=0$, οἱ δὲ ἀριθμοὶ β, γ διάφοροι τοῦ 0, τότε ἡ ἐξίσωσ[ις]
(1) λαμβάνει τὴν τῆς ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ μορφὴν

$$\beta x=\gamma$$

ἣν ἤδη ἐμάθομεν.

3) Ἐὰν $\beta=0$, οἱ δὲ ἀριθμοὶ α, γ διάφοροι τοῦ 0, τότε ἡ ἐξίσωσι[ς]
(1) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\alpha x^2=\gamma$$

ἢ $\qquad x^2=\kappa$

4) Ἐὰν $\gamma=0$, οἱ δὲ ἀριθμοὶ α, β διάφοροι τοῦ 0, τότε ἡ ἐξίσωσις
(1) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\alpha x^2+\beta x=0$$

ἢ $\qquad x^2+\pi x=0$

5) Ἐὰν $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, τότε ἡ ἐξίσωσις (1) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$0.x^2+0.x=0$$

ἤτοι εἶναι ταυτότης ἀληθεύουσα δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ x.

6) Ἐὰν $\alpha=0$, $\beta=0$, ὁ δὲ ἀριθμὸς γ διάφορος τοῦ μηδενός, τότε ἡ ἐξίσωσις (1) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$0=\gamma$$

ἤτοι εἶναι ἀδύνατος.

ΣΗΜ. Ἐν τοῖς ἑπομένοις ὑποτίθενται πάντοτε πραγματικοὶ οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ.

Λύσις τῆς ἐξισώσεως $x^2=\kappa$.

138. Πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως

$$x^2=\kappa$$

παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις, ὅτι αὕτη σημαίνει, ὅτι ζητεῖται ἀριθμός, οὗτινος τὸ τετράγωνον εἶναι δοθείς τις ἀριθμὸς $\varkappa$. Ἐὰν δὲ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς, εὑρίσκομεν τὰς δύο τιμὰς τοῦ x

$$x=\pm\sqrt{\varkappa}$$

αἵτινες ἐπαληθεύουσιν αὐτήν. Νῦν δὲ παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ δύο αὗται τιμαὶ τοῦ x εἶναι ἢ πραγματικαὶ ἢ φανταστικαί. Καὶ πραγματικαὶ μὲν εἶναι, ἐὰν ἡ ὑπόρριζος ποσότης $\varkappa$ ἦναι θετική· φανταστικαὶ δέ, ἐὰν ἡ ὑπόρριζος ποσότης $\varkappa$ ἦναι ἀρνητικὴ (ἐδ. 46)· ὥστε ἡ ἐξίσωσις $x^2=\varkappa$ ἐπαληθεύεται πάντοτε διὰ δύο τιμῶν τοῦ ἀγνώστου x, ἤτοι διὰ τῶν $\pm\sqrt{\varkappa}$, ὅπου $\varkappa$ οἱοσδήποτε ἀριθμός, θετικὸς ἢ ἀρνητικός.

Παραδείγματα.

1) $x^2=25$. Ὅθεν $x=\pm\sqrt{25}=\pm5$

2) $x^2=3$. Ὅθεν $x=\pm\sqrt{3}$

3) $x^2=-9$. Ὅθεν $x=\pm\sqrt{-9}=\pm\sqrt{-1}.\sqrt{9}=\pm i.3=\pm3i$

4) $x^2=-8$. Ὅθεν $x=\pm\sqrt{-8}=\pm i\sqrt{8}=\pm i2\sqrt{2}$

5) $(x-\alpha).(x+\alpha)=2\alpha+1$ ἢ $x^2=(\alpha+1)^2$. Ὅθεν $x=\pm(\alpha+1)$

6) $3x^2+9=6x^2-40$ ἢ $x^2=\dfrac{49}{3}$. Ὅθεν $x=\pm\dfrac{7}{\sqrt{3}}=\pm\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

7) $2x^2-8=6x^2+17$ ἢ $x^2=-\dfrac{25}{4}$. Ὅθεν $x=\pm i\dfrac{5}{2}=\pm\dfrac{5i}{2}$

8) $x^2=\lambda o\gamma\,\alpha$. Ὅθεν $x=\pm\sqrt{\lambda o\gamma\,\alpha}$.

Λύσις τῆς ἐξισώσεως $x^2+\pi x=0$.

139. Πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως

$$x^2+\pi x=0$$

παρατηροῦμεν, ὅτι αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$x.(x+\pi)=0$$

Ἔχομεν ἄρα γινόμενον δύο παραγόντων ἴσον τῷ 0. Ὥστε ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων τούτων πρέπει νὰ ἦναι 0, ἤτοι πρέπει νὰ ἦναι

ἢ $$x=0$$

ἢ $$x=-\pi$$

Αἱ δὲ δύο αὗται λύσεις ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν $x.(x+\pi)=0$

Παραδείγματα

1) $x^2-5x=0$ ἢ $x.(x-5)=0$. Ὅθεν $x=0, x=5$.

2) $x^2+2x=0$ ἢ $x.(x+2)=0$. Ὅθεν $x=0$, $x=-2$.

3) $x^2-\sqrt{8}.\, x=0$ ἢ $x\left(x-\sqrt{8}\right)=0$. Ὅθεν $x=0$, $x=\sqrt{8}$

4) $x^2-\sqrt{-2}.x=0$ ἢ $x.\left(x-\sqrt{-2}\right)=0$. Ὅθεν $x=0$, $x=i\sqrt{2}$

5) x^2+ λογα. x ἢ $x.$ ($x+$λογα$)=0$. Ὅθεν $x=0$, $x=-$λογα

6) $x^2+\sqrt{-\text{λογβ}}.x$ ἢ $x.\left(x+\sqrt{-\text{λογβ}}\right)=0$. Ὅθεν $x=0$, $x=-i\sqrt{\text{λογβ}}$

Λύσις τῆς ἐξισώσεως $x^2+\pi x=\kappa$

140. Πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως

$$x^2+\pi x=\kappa$$

παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς προστεθῇ ὁ ὡρισμένος καὶ πεπερασμένος ἀριθμὸς $\frac{\pi^2}{4}$, προκύπτει ἡ ἰσοδύναμος αὐτῇ ἐξίσωσις

$$x^2+\pi x+\frac{\pi^2}{4}=\kappa+\frac{\pi^2}{4}$$

ἢ $$\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2=\kappa+\frac{\pi^2}{4}\cdot\ \left(\text{διότι}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2=x^2+\pi x+\frac{\pi^2}{4}\right)$$

Ὅθεν $$x+\frac{\pi}{2}=\pm\sqrt{\kappa+\frac{\pi^2}{4}}$$

καὶ $$x=-\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{\frac{4\kappa+\pi^2}{4}}$$

ὥστε, ἐὰν καλέσωμεν x' καὶ x'' τὰς δύο ταύτας τιμὰς τοῦ x, ἔχομεν

$$x'=-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{4\kappa+\pi^2}{4}} \text{ καὶ } x''=-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{4\kappa+\pi^2}{4}}$$

αὗται δὲ εἶναι αἱ δύο λύσεις ἢ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+\pi x=\kappa$

Ἡ παράστασις τοῦ x

(1) $$x=-\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{\kappa+\frac{\pi^2}{4}}$$

εἶναι γενικὸς τύπος καὶ ἐκφράζει, ὅτι

141. Πάσης ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἀνηγμένης ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$x^2+\pi x=\kappa$$

ὁ ἄγνωστος x εὑρίσκεται, ἐὰν ληφθῇ τὸ ἥμισυ τοῦ συντελεστοῦ τῆς πρώτης δυνάμεως αὐτοῦ μετ'ἐναντίου σημείου, προστεθῇ δὲ εἰς αὐτὸ ἢ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ γνωστοῦ ὅρου ηὐξημένου κατὰ τὸ τετράγωνον τοῦ ληφθέντος ἡμίσεως τοῦ συντελεστοῦ.

142. Ἐκ δὲ τοῦ γενικοῦ τούτου τύπου, δι' οὗ ὁρίζεται τὸ x, βλέπομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δύναται νὰ ἔχῃ δύο μὲν πραγματικὰς ῥίζας, ἐὰν ἡ ὑπόρριζος ποσότης $\kappa+\frac{\pi^2}{4}$ ἦναι θετική, μίαν δὲ μόνον πραγματικήν, ἐὰν ἡ ποσότης αὕτη ἦναι 0 καὶ δύο μιγάδας, ἐὰν ἡ ποσότης αὕτη ἦναι ἀρνητική.

143. Ἵνα δὲ εὕρωμεν τύπον παρέχοντα ἀμέσως τὰς ῥίζας τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως ἀνηγμένης ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,$$

ὅπου πάντες οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι διάφοροι τοῦ 0, πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ 4α καὶ εἶτα προσθέτομεν εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς οὕτω προκυπτούσης ἐξισώσεως τὸ $\beta^2-\beta^2$ (ὅπερ δὲν μεταβάλλει αὐτό) καὶ εὑρίσκομεν

$$4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2-\beta^2+4\alpha\gamma=0$$

ἢ $$(2\alpha x+\beta)^2-\beta^2+4\alpha\gamma=0$$

ἢ καὶ $$(2\alpha x+\beta)^2=\beta^2-4\alpha\gamma$$

Ὅθεν $$2\alpha x+\beta=\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$$

καὶ

(2) $$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

ὁ δὲ γενικὸς οὗτος τύπος δύναται νὰ γινώσκηται ἀπὸ μνήμης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ἐὰν $\varkappa+\frac{\pi^2}{4}=0$ ἢ $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, ἔχομεν $x=-\frac{\pi}{2}$ ἢ $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, ἡ δὲ ρίζα $-\frac{\pi}{2}$ ἢ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ λέγεται τότε διπλῆ ρίζα· διότι εἶναι $x'=x''=-\frac{\pi}{2}$ ἢ $=-\frac{\beta}{2\alpha}$, ἤτοι αἱ δύο ρίζαι x' καὶ x'' ἀνάγονται εἰς μίαν, τὴν $-\frac{\pi}{2}$ ἢ τὴν $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

ΣΗΜ 1. Ἐκ τοῦ γενικοῦ τύπου (1) ἢ (2) εὑρίσκονται καὶ αἱ ρίζαι τῶν ἁπλουστέρων ἐξισώσεων $x^2=\varkappa$ καὶ $x^2+\pi x=0$· διότι αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶναι μερικαὶ περιπτώσεις τῆς γενικῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.

Ἐὰν τῷ ὄντι ὑποθέσωμεν $\pi=0$ ἢ $\beta=0$, ἔχομεν

$$x=\pm\sqrt{\varkappa} \quad ἢ \quad x=\pm\frac{\sqrt{-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$$

ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν $\varkappa=0$ ἢ $\gamma=0$, ἔχομεν

$$x=-\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{2}=0 \quad ἢ \quad =-\pi \quad καὶ \quad x=\frac{-\beta\pm\beta}{2\alpha}=0 \quad ἢ =-\frac{\beta}{\alpha}$$

ΣΗΜ. 2. Ἐὰν ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις δοθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(x-\mu)^2=\nu$$

αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι

$$x=\mu\pm\sqrt{\nu}$$

Παραδείγματα

1) $x^2-13x+40=0$ Ὅθεν $x=\frac{13\pm\sqrt{13^2-160}}{2}=\frac{13\pm3}{2}$

Ἐὰν δὲ καλέσωμεν x' καὶ x'' τὰς δύο ταύτας ρίζας, ἔχομεν

$$x'=5,\quad x''=8$$

2) $5x^2-17x-12=0$. Ὅθεν $x=\frac{17\pm\sqrt{17^2-4.5.(-12)}}{2.5}=$

$$=\frac{17\pm\sqrt{529}}{10}=\frac{17\pm23}{10}$$

καὶ $x'=\frac{17-23}{10}=-\frac{3}{5}$, $x''=\frac{17+23}{10}=4$

3) $3x^2-14x+8=0$. Ὅθεν $x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-3.8}}{3}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{3}=\frac{7\pm5}{3}$

καὶ $x'=\frac{7-5}{3}=\frac{2}{3}$, $x''=\frac{7+5}{3}=4$

4) $x^2-8x=-15$. Ὅθεν $x=4\pm\sqrt{-15+4^2}=4\pm\sqrt{1}=4\pm1$

καὶ $x'=4+1=5$, $x''=4-1=3$

5) $x^2+7x=60$. Ὅθεν $x=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{60+\left(\frac{7}{2}\right)^2}=-\frac{7}{2}\pm\frac{17}{2}$

καὶ $x'=-\frac{7}{2}+\frac{17}{2}=5$, $x''=-\frac{7}{2}-\frac{17}{2}=-12$

6) $x^2-\frac{11}{5}x=-\frac{2}{5}$. Ὅθεν $x=\frac{11}{10}\pm\sqrt{-\frac{2}{5}+\frac{121}{100}}=\frac{11}{10}\pm\frac{9}{10}$

καὶ $x=2$, $x''=\frac{1}{5}$.

7) $x^2-(\alpha-\beta)x=\alpha\beta$. Ὅθεν $x=\frac{\alpha-\beta}{2}\pm\sqrt{\alpha\beta+\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}}=\frac{\alpha-\beta}{2}\pm\frac{\alpha+\beta}{2}$

καὶ $x'=\alpha$, $x''=-\beta$

8) $\frac{3\alpha}{x+\beta}+\frac{x-2\beta}{\alpha-\beta}=4$ ἢ $x^2+(3\beta-4\alpha)x=-3\alpha^2+7\alpha\beta-2\beta^2$.

"Οθεν $\quad x=-\frac{3\beta-4\alpha}{2}\pm\sqrt{-3\alpha^2+7\alpha\beta-2\beta^2+\frac{(-3\beta+4\alpha)^2}{4}}$

καὶ $\quad x'=3\alpha-\beta, \quad x''=-2\beta+\alpha$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

Εὑρεῖν τὰς ρίζας τῶν ἑπομένων ἐξισώσεων

1) $x^2-7x+3\frac{1}{4}=0, \quad \left(x'=6\frac{1}{2}, \quad x''=\frac{1}{2}\right)$

2) $x^2-5\frac{3}{4}x=18, \quad \left(x'=8, \quad x''=-2\frac{1}{4}\right)$

3) $622x=15x^2+6384, \quad \left(x'=22\frac{4}{5}, \quad x''=18\frac{2}{3}\right)$

4) $9\frac{3}{5}x-21\frac{15}{16}=x^2, \quad \left(x'=5\frac{17}{20}, \quad x''=3\frac{3}{4}\right)$

5) $\frac{x}{x+60}=\frac{7}{3x-5}, \quad (x'=14, \quad x''=-10)$

6) $\frac{2x+3}{10-x}=\frac{2x}{25-3x}-6\frac{1}{2}, \quad \left(x'=13\frac{22}{31} \quad x''=8\right)$

7) $\alpha\delta x-\alpha\gamma x^2=\beta\gamma x-\beta\delta, \quad \left(x'=\frac{\delta}{\gamma}, \quad x''=-\frac{\beta}{\alpha}\right)$

8) $\alpha x^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha^2+2\beta\gamma+2(\beta-\gamma)x\sqrt{\alpha}, \quad \left(x'=\frac{\beta-\gamma+\alpha}{\sqrt{\alpha}}, \quad x''=\frac{\beta-\gamma-\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right)$

9) $\lambda o\gamma\,\alpha.x^2+\lambda o\gamma\,\beta.x=-\gamma, \left(x=\frac{\lambda o\gamma\frac{1}{\beta}\pm\sqrt{(\lambda o\gamma\,\beta)^2-\gamma\,\lambda o\gamma\,\alpha^4}}{\lambda o\gamma\,\alpha^2}\right)$

Σχέσεις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $x^2+\pi x=\kappa$.

144. Τῶν δύο ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2+\pi x=\kappa$ τὸ μὲν ἄθροισμα ἰσοῦται τῷ συντελεστῇ τῆς πρώτης δυνάμεως

τοῦ ἀγνώστου μετ' ἐναντίου σημείου, τὸ δὲ γινόμενον ἰσοῦται τῷ γνωστῷ ὅρῳ ὡσαύτως μετ' ἐναντίου σημείου εἰλημμένῳ.

Διότι ἔχομεν (ἐδ. 140)

$$x' = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \kappa}$$

$$x'' = -\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \kappa}$$

Ὅθεν διὰ μὲν προσθέσεως κατὰ τὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων τούτων προκύπτει

$$x' + x'' = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$$

διὰ δὲ πολλαπλασιασμοῦ ὡσαύτως προκύπτει

$$x' . x'' = \left[\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{\kappa + \frac{\pi^2}{4}}\right] . \left[\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{\kappa + \frac{\pi^2}{4}}\right] =$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\kappa + \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \kappa - \frac{\pi^2}{4} = -\kappa$$

Παρατηρητέον δέ, ὅτι αἱ ἰδιότητες αὗται ὑφίστανται, καὶ ὅταν μία μόνη ρίζα ὑπάρχῃ, ἐὰν θεωρηθῇ αὕτη ὡς διπλῆ· διότι τότε $x' = x''$ (143, παρατ.)

145. Διὰ δὲ τῶν ἰδιοτήτων τούτων τῶν δύο ριζῶν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως δύνανται νὰ λυθῶσι τὰ ἑπόμενα ζητήματα·

1) Εὑρεῖν τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $x^2 + \pi x = \kappa$, πρὶν λυθῇ αὕτη.

Ἐν πρώτοις παρατηρητέον, ὅτι, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς

$$\kappa + \frac{\pi^2}{4}$$

ἦναι ἀρνητικός, αἱ ρίζαι εἶναι μιγάδες ἀριθμοί. Θεωρήσωμεν δὲ τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι θετικός, ὅτε αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαί. Τότε δυναταὶ αἱ ἑξῆς ὑποθέσεις·

α') π θετικὸν καὶ κ θετικόν. Ἐπειδὴ κ θετικόν, τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι ἀρνητικὸν καὶ ἑπομένως αἱ ρίζαι εἶναι ἑτεροειδεῖς· ἐπειδὴ δὲ π θετικόν, τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν εἶναι ἀρνητικὸν καὶ ἑπομένως μείζων ρίζα κατ' ἀπόλυτον τιμὴν εἶναι ἡ ἀρνητική.

β') π θετικόν, ἀλλὰ κ ἀρνητικόν. Ἐπειδὴ κ ἀρνητικόν, τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι θετικὸν καὶ ἑπομένως αἱ ρίζαι εἶναι ὁμοειδεῖς· ἐπειδὴ δὲ π θετικόν, τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν εἶναι ἀρνητικὸν καὶ ἑπομένως ἀμφότεραι αἱ ρίζαι εἶναι ἀρνητικαί.

γ') π ἀρνητικόν, ἀλλὰ κ θετικόν. Ἐπειδὴ κ θετικόν, τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι ἀρνητικὸν καὶ ἑπομένως αἱ ρίζαι εἶναι ἑτεροειδεῖς· ἐπειδὴ δὲ π ἀρνητικόν, τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν εἶναι θετικὸν καὶ ἑπομένως μείζων ρίζα κατ' ἀπόλυτον τιμὴν εἶναι ἡ θετική.

δ') π ἀρνητικὸν καὶ κ ἀρνητικόν. Ἐπειδὴ κ ἀρνητικόν, τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι θετικὸν καὶ ἑπομένως αἱ ρίζαι εἶναι ὁμοειδεῖς· ἐπειδὴ δὲ π ἀρνητικόν, τὸ ἄρθροισμα τῶν ριζῶν εἶναι θετικὸν καὶ ἑπομένως ἀμφότεραι αἱ ρίζαι εἶναι θετικαί.

ε') Ἐὰν $\kappa=0$, ἀλλὰ $\pi \lesseqgtr 0$, μία τῶν ριζῶν εἶναι 0, ἡ δὲ ἄλλη εἶναι ὁ ἀντίθετος τοῦ π ἀριθμὸς (139). Ἐὰν δὲ $\pi=0$, ἀλλὰ $\kappa \lesseqgtr 0$, αἱ ρίζαι εἶναι ἀντίθετοι (138). Ἐὰν δὲ $\pi=0$ καὶ $\kappa=0$, ἀμφότεραι αἱ ρίζαι εἶναι 0.

Πρόδηλον δέ, ὅτι πάντα τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα δύνανται νὰ εὑρεθῶσι καὶ ἐκ τοῦ γενικοῦ τυπου, δι' οὗ ὁρίζονται αἱ δύο τιμαὶ τοῦ x.

Κατὰ ταῦτα ἡ ἐξίσωσις

$$x^2-7x=2$$

ἔχει μίαν θετικὴν καὶ μίαν ἀρνητικὴν ρίζαν, μείζονα δὲ τὴν θετικήν.

Ἡ δὲ ἐξίσωσις $\qquad x^2+5x=-3$

ἔχει δύο ἀρνητικὰς ρίζας.

2). Εὑρεῖν ὁποίαν μεταβολὴν ὑφίστανται αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, ὅταν οἱ μὲν ἀριθμοὶ β καὶ γ μένωσιν ἀμετάβλητοι, ὁ δὲ ἀριθμὸς α τείνῃ εἰς τὸ 0.

Ἐπειδή, ὅταν α τείνῃ εἰς τὸ 0, ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ τείνει εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\beta\gamma+\gamma=0$, ἕπεται, ὅτι ἡ μία τῶν ριζῶν αὐτῆς τείνει εἰς τὸν ἀριθμὸν $-\frac{\gamma}{\beta}$, τὴν ρίζαν τῆς $\beta x+\gamma=0$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα

ν ριζῶν εἶναι $-\frac{\beta}{\alpha}$, ἕπεται, ὅτι ἡ ἄλλη ρίζα διαφέρει τοῦ ἀριθμοῦ $-\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}$
σῳ ὀλιγώτερον, ὅσῳ μικρότερος κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν εἶναι ὁ ἀριθμὸς α
Ἐντεῦθεν φανερόν, ὅτι ἡ δευτέρα αὕτη ρίζα καθίσταται κατ᾽ ἀπό-
τον τιμὴν μείζων παντὸς ἀριθμοῦ, ὅταν ὁ ἀριθμὸς α καθίσταται κατ᾽
όλυτον τιμὴν ἐλάσσων παντὸς ἀριθμοῦ.

ΣΗΜ. Ὅταν ὁ συντελεστὴς α ἦναι κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν ἀρκούντως
ρός, δυσκόλως ὁρίζονται μεθ᾽ ἱκανῆς προσεγγίσεως αἱ δύο τιμαὶ τοῦ x·

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Διότι ἡ ὑπόρριζος ποσότης $\beta^2-4\alpha\gamma$ δὲν εἶναι ἐν γένει τέλειον τε-
άγωνον καὶ ἑπομένως ἡ $\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$ μόνον κατὰ προσέγγισιν ὁρίζεται. Τὸ
πραττόμενον λᾶθος κατὰ τὸν λογισμὸν τῆς $\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$ διαιρεῖται διὰ
α καὶ ἑπομένως, ἐὰν α ἦναι κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν ἀρκούντως μικρόν, τὸ
θος τοῦτο αὐξάνεται μεγάλως. Ἐὰν π. χ. $\alpha=\frac{1}{1000}$, τὸ πραττόμενον
θος ἐπὶ τοῦ λογισμοῦ τῆς $\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$ ἐπάγεται λᾶθος $500_{\text{κις}}$ μεῖζον
ὶ τοῦ λογισμοῦ τοῦ x'

$$x'=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Διότι πρὸς εὕρεσιν τοῦ x' κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^\nu}$ πρέπει νὰ λογισθῇ
ῶτον ἡ $\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{500}\cdot\frac{1}{10^\nu}$.

Ἀλλ᾽ ὁρίζεται εὐχερέστερον ἡ ἑτέρα τῶν δύο ριζῶν διὰ προσεγγίσεως
ρισκομένης διὰ τῆς καλουμένης μεθόδου τῶν διαδοχικῶν προσεγγί-
εων.

Κατὰ τὴν μέθοδον τῶν διαδοχικῶν προσεγγίσεων ἡ ἐξίσωσις

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$$

θεται πρῶτον ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(1)\qquad x=-\frac{\gamma}{\beta}-\frac{\alpha x^2}{\beta}$$

εἶτα παραλείπεται ὁ ὅρος $-\frac{\alpha x^2}{\beta}$, ὡς ὢν ἀρκούντως μικρὸς διὰ τὸ α, οὕτω λαμβάνεται πρώτη προσεγγίζουσα τιμὴ τοῦ x, ἡ $-\frac{\gamma}{\beta}$. ἤτοι

$$x_1=-\frac{\gamma}{\beta}$$

εἶτα δὲ λογίζεται δευτέρα προσεγγίζουσα τιμὴ x_2, ἀντικαθισταμένου ἐν δευτέρῳ μέλει τῆς ἐξισώσεως (1) τοῦ x διὰ x_1. Οὕτως εὑρίσκεται

$$x_2=-\frac{\gamma}{\beta}-\frac{\alpha}{\beta}x_1{}^2$$

Ὁμοίως λογίζεται τρίτη προσεγγίζουσα τιμὴ x_3 ἀντικαθισταμένου τῷ δευτέρῳ μέλει τῆς ἐξισώσεως (1) τοῦ x διὰ x_2. Οὕτως εὑρίσκεται

$$x_3=-\frac{\gamma}{\beta}-\frac{\alpha}{\beta}x_2{}^2$$

καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἀνάλυσις παντὸς τριωνύμου τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἰς παράγοντας τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

146. Πᾶν τριώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\alpha x^2+\beta x+$ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ $\alpha(x-x')\ (x-x'')$, ὅπου x' καὶ x'' εἶν αἱ δύο τιμαὶ τοῦ x, δι' ἃς τὸ τριώνυμον τοῦτο μηδενίζετα

Διότι, ἐπειδὴ (144)

$$x'+x''=-\frac{\beta}{\alpha} \text{ καὶ } x'.\,x''=\frac{\gamma}{\alpha},$$

τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\alpha x^2-\alpha(x'+x'')x+\alpha x'x''$$

τοῦτο δὲ εἶναι γινόμενον τῶν παραγόντων $\alpha\ (x-x')\ (x-x'')$, ἤτοι

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x').\ (x-x'').$$

Πρόδηλον δέ, ὅτι, ἐὰν $x'=x''$, ἤτοι ἐὰν αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου ἦ ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, τὸ τριώνυμον εἶναι τέλειον τετράγωνον· διότι τό εἶναι $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x')^2$ καὶ $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\pm(x-x')\sqrt{\alpha}$

Κατὰ ταῦτα εἶναι

$$x^2-8x+15=(x-5).\,(x-3)$$
$$x^2+7x-60=(x-5)\,(x+12)$$
$$5x^2-11x+2=5(x-2)\left(x-\frac{1}{5}\right)$$
$$x^2-(\alpha-\beta).\,x-\alpha\beta=(x-\alpha)\,(x+\beta).$$

Διὰ τῆς ἀναλύσεως δὲ ταύτης ἐξηγεῖται καὶ ἡ ὕπαρξις δύο ριζῶν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως· τουτέστιν αἱ ῥίζαι αὐτῆς εἶναι τόσαι, ὅσος εἶναι ὁ βαθμὸς αὐτῆς.

ΣΗΜ. Τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\left(\alpha\gtrless 0\right)$. γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right]$$

$$\text{ἢ}\ \alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)^2\right],\ \text{ἐὰν}\ \beta^2-4\alpha\gamma>0$$

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}\right)^2\right],\ \text{ἐὰν}\ \beta^2-4\alpha\gamma<0$$

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2,\ \text{ἐὰν}\ \beta^2-4\alpha\gamma=0$$

$$\text{ἢ καὶ}\ \alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right).\left(x+\frac{\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)$$

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta+i\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}\right).\left(x+\frac{\beta-i\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}\right)$$

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)$$

Ὅθεν ἕπεται, ὅτι διὰ τῆς ἀναλύσεως ταύτης τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εὑρίσκονται ἀμέσως αἱ ῥίζαι αὐτοῦ.

* Σημεῖον τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ διά τινα τιμὴν τοῦ x.

147. Ἐὰν τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ἔχῃ ῥίζας πραγματικὰς καὶ διαφόρους ἀλλήλων, λαμβάνει τὸ σημεῖον τοῦ

συντελεστοῦ α διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἐλάσσονα τῆς ἐλά-σσονος ῥίζης ἢ μείζονα τῆς μείζονος ῥίζης· λαμβάνει δὲ τὸ σημεῖον τοῦ $-\alpha$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x περιλαμβανομένη μεταξὺ τῶν δύο ῥιζῶν.

Ἐὰν τὸ αὐτὸ τριώνυμον ἔχῃ τὰς ῥίζας αὐτοῦ ἴσας πρὸς ἀλλήλας, λαμβάνει τὸ σημεῖον τοῦ α διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἐξαιρουμένης τῆς $-\frac{\beta}{2\alpha}$, δι' ἣν τὸ τριώνυμον αὐτὸ μηδενί-ζεται.

Ἐὰν τέλος τὸ αὐτὸ τριώνυμον ἔχῃ ῥίζας μιγάδας, ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x.

Ἔστωσαν πρῶτον αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ πραγματι-καὶ διάφοροι ἀλλήλων, $(\beta^2-4\alpha\gamma>0)$, καὶ παραστήσωμεν τὴν μι-ἐλάσσονα διὰ x', τὴν δὲ μείζονα διὰ x''. Τότε ἔχομεν

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x')\,(x-x'')$$

Φανερὸν δέ, ὅτι διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἐλάσσονα τοῦ x' οἱ δύ-παράγοντες $x-x'$, $x-x''$ εἶναι ἀρνητικοὶ καὶ ἑπομένως τὸ γινόμεν-$\alpha(x-x')\,(x-x'')$, ἤτοι τὸ τριώνυμον, λαμβάνει τὸ σημεῖον τοῦ α.

Διὰ πᾶσαν δὲ τιμὴν τοῦ x περιλαμβανομένην μεταξὺ x' καὶ x'' ὁ μὲ-παράγων $x-x'$ εἶναι θετικός, ὁ δὲ παράγων $x-x''$ εἶναι ἀρνητικὸς κα-ἑπομένως τὸ γινόμενον $\alpha(x-x')\,(x-x'')$, ἤτοι τὸ τριώνυμον, λαμβάνει τὸ σημεῖον τοῦ $-\alpha$.

Διὰ πᾶσαν δὲ τιμὴν τοῦ x μείζονα τοῦ x'' οἱ δύο παράγοντες $x-x'$ $x-x''$ εἶναι θετικοὶ καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενον $\alpha(x-x')\,(x-x'')$, ἤτοι τὸ τριώνυμον, λαμβάνει τὸ σημεῖον τοῦ α.

Ἔστωσαν δεύτερον αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου ἴσαι πρὸς ἀλλήλας $(\beta^2-4\alpha\gamma=0)$. Διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x διάφορον τοῦ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ τὸ $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ εἶναι θετικὸν καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενον $\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$, ἤτοι τὸ τριώνυμον λαμβάνει τὸ σημεῖον τοῦ α· διὰ δὲ $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ τὸ τριώνυμον μηδενίζεται.

Ἔστωσαν τέλος αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου μιγάδες ἢ φανταστικαί

$\beta^2-4\alpha\gamma<0$. Τότε ἔχομεν

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}\right]$$

Ἀλλὰ τοῦ $\beta^2-4\alpha\gamma$ ὄντος ἀρνητικοῦ, τὸ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}$ εἶναι θετικόν, ἑπομένως καὶ τὸ

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}$$

εἶναι θετικὸν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x. Ὥστε τὸ τριώνυμον λαμβάνει τὸ σημεῖον τοῦ α διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x.

Κατὰ ταῦτα τὸ τριώνυμον

$$6x^2+x-2$$

οὗ αἱ ρίζαι $-\frac{2}{3}$ καὶ $+\frac{1}{2}$, εἶναι θετικὸν μὲν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $-\frac{2}{3}$ καὶ ἀπὸ $\frac{1}{2}$ μέχρι $+\infty$ ἀρνητικὸν δὲ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἀπὸ $-\frac{2}{3}$ μέχρι $+\frac{1}{2}$.

Τὸ δὲ τριώνυμον

$$15+2x-8x^2$$

οὗ αἱ ρίζαι $-\frac{5}{4}$ καὶ $+\frac{3}{2}$, εἶναι ἀρνητικὸν μὲν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $-\frac{5}{4}$, θετικὸν δὲ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἀπὸ $-\frac{5}{4}$ μέχρι $+\frac{3}{2}$ καὶ ἀρνητικὸν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἀπὸ $+\frac{3}{2}$ μέχρι $+\infty$

Τὸ δὲ τριώνυμον

$$3x^2-10x+9$$

οὗ αἱ ρίζαι φανταστικαί, εἶναι θετικὸν διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x.

148. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι, ἐὰν δύο ἀριθμοὶ λ καὶ μ τιθέμενοι ἀντὶ τοῦ x ἐν τῷ τριωνύμῳ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ δίδωσιν ἐξαγόμενα ἑτεροειδῆ, αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἡ ἑτέρα αὐτῶν περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν λ καὶ μ.

Τεθείσθω, ὅτι τὸ τριώνυμον τοῦτο λαμβάνει τὸ σημεῖον τοῦ $-\alpha$ διὰ $x=\lambda$ καὶ τὸ σημεῖον τοῦ $+\alpha$ διὰ $x=\mu$. Ἐν πρώτοις, ἐὰν αἱ ρίζαι ἦναι, ἢ μιγάδες, ἢ πραγματικαὶ ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, τὸ τριώνυμον δὲν λαμβάνει τὸ σημεῖον τοῦ $-\alpha$ διὰ οὐδεμίαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x. αἱ ρίζαι ἄρα εἶναι πραγματικαὶ ἄνισοι πρὸς ἀλλήλας· περιλαμβάνεται δὲ μεταξὺ αὐτῶν ὁ λ· διότι ἄλλως τιθέμενον τὸ λ ἀντὶ τοῦ x ἐν τῷ τριωνύμῳ δίδει ἐξαγόμενον ἔχον σημεῖον τοῦ $+\alpha$. Ὥστε ἐὰν παραστήσωμεν διὰ x' τὴν ἐλάσσονα ρίζαν τοῦ τριωνύμου καὶ διὰ x'' τὴν μείζονα, ἔχομεν

$$x'<\lambda<x''$$

Ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐξ ὑποθέσεως τὸ μ τιθέμενον ἀντὶ τοῦ x ἐν τῷ τριωνύμῳ δίδει ἐξαγόμενον μετὰ τοῦ σημείου τοῦ $+\alpha$ καὶ εἶναι τὸ μ ἢ ἔλασσον τοῦ x' ἢ μεῖζον τοῦ x'' καὶ ἑπομένως εἶναι

ἢ $$\mu<x'<\lambda$$
ἢ $$\lambda<x''<\mu$$

τουτέστι μία μόνη τῶν πραγματικῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν λ καὶ μ, οἵτινες τιθέμενοι ἀντὶ τοῦ x ἐν τῷ τριωνύμῳ δίδουσιν ἐξαγόμενα μετ' ἐναντίου σημείου ἢ ἑτεροειδῆ.

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν

$$y=325x^2-783x+287,$$

ἔχομεν διὰ $x=0,\ 1,\ 2$ τὸ y μετὰ τῶν σημείων $+, -, +$, ἤτοι

$$\begin{array}{c|l} x & 0 \ldots\ldots 1 \ldots\ldots 2 \\ y & + \ldots\ldots - \ldots\ldots + \end{array}$$

Ἡ μία ἄρα τῶν ριζῶν περιλαμβάνεται μεταξὺ 0 καὶ 1 καὶ ἡ ἄλλη μεταξὺ 1 καὶ 2.

Ἐὰν δὲ

$$y=25x^2-184x+179$$

ἔχομεν διὰ $x=1,\ \frac{92}{25},\ 10$ τὸ y μετὰ τῶν σημείων $+, -, +$, ἤτοι

$$\begin{array}{c|l} x & 1 \ldots\ldots \frac{92}{25} \ldots\ldots 10 \\ y & + \ldots\ldots - \ldots\ldots + \end{array}$$

ΣΗΜ. Ἡ τιμὴ $\frac{92}{25}$ τοῦ x, ἡ περιλαμβανομένη μεταξὺ 1 καὶ 10, δι' ἣν τὸ y λαμβάνει τὸ σημεῖον $-$, εὑρίσκεται λαμβανομένου τοῦ ἡμιαθροίσματος $\frac{184}{2.25}$ τῶν ριζῶν, ὅπερ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 10

* Σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τοῦ τριωνύμου $ax^2+\beta x+\gamma$, ὁπόταν x αὐξάνηται ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$.

Ὁρισμοί.

149. Μεταβλητὴ λέγεται πᾶσα ποσότης δυναμένη νὰ λαμβάνῃ πάσας τὰς τιμὰς τὰς περιλαμβανομένας, ἢ μεταξὺ $-\infty$ καὶ $+\infty$, ἢ μεταξὺ δύο ὁρίων ὡρισμένων καὶ πεπερασμένων.

Ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ λέγεται πᾶσα μεταβλητὴ ποσότης δυναμένη νὰ λαμβάνῃ αὐθαιρέτως πᾶσαν τιμὴν μεταξὺ δεδομένων ὁρίων.

Συνάρτησις λέγεται πᾶσα μεταβλητὴ ποσότης, ἧς αἱ τιμαὶ μεταξὺ δεδομένων ὁρίων ἐξαρτῶνται ἐκ τῶν τιμῶν μιᾶς ἢ πολλῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν μεταβαλλομένων μεταξὺ δεδομένων ὁρίων. Ὁπόταν π. χ. δύο μεταβληταὶ ποσότητες, ἃς παριστῶμεν διὰ x καὶ y, συνδέωνται πρὸς ἀλλήλας διά τινος σχέσεως τοιαύτης, ὥστε πρὸς πᾶσαν αὐθαιρέτως διδομένην ὡρισμένην καὶ πεπερασμένην τιμὴν τῆς x ἀντιστοιχεῖ ἐν γένει ὡρισμένη καὶ πεπερασμένη τιμὴ ἢ τιμαὶ τῆς y, τότε λέγομεν, ὅτι ἡ μεταβλητὴ y εἶναι συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς x, ἣν θεωροῦμεν ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητήν.

Συνεχὴς λέγεται συνάρτησίς τις y διά τινα ὡρισμένην καὶ πεπερασμένην τιμὴν x_0 τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x, ὁπόταν πρὸς τὴν τιμὴν x_0 τῆς x ἀντιστοιχεῖ μία ἐν γένει ὡρισμένη καὶ πεπερασμένη τιμὴ y_0 τῆς y τοιαύτη, ὥστε δοθέντων δύο ἀριθμῶν ε καὶ η, ὅσον ἂν θέλωμεν μικρῶν, πρὸς πᾶσαν τιμὴν τοῦ x περιλαμβανομένην μεταξὺ τῶν ὁρίων $x_0-\varepsilon$ καὶ $x_0+\varepsilon$, ἀντιστοιχεῖ μία μόνη τιμὴ τῆς y περιλαμβανομένη μεταξὺ τῶν ὁρίων $y_0-\eta$ καὶ $y_0+\eta$. Ὁπόταν δὲ ἡ συνάρτησις y τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x ἦναι συνεχὴς διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς περιλαμβανομένας μεταξὺ δύο δεδομένων ἀριθμῶν α καὶ β, τότε λέγομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι συνεχὴς ἐν τῷ διαστήματι ἀπὸ α μέχρι β.

Μέγιστον λέγεται ἡ μεγίστη τιμή, ἣν λαμβάνει συνάρτησίς τις, ὁπόταν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ αὐξανομένη ἀπαύστως διέρχηται διά τινος τιμῆς τοιαύτης, δι' ἣν ἡ συνάρτησις παύεται αὐξανομένη καὶ ἄρχεται ἐλαττουμένη. Ὁπόταν δὲ τοὐναντίον κατὰ τὴν μεταβολὴν ταύτην τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἡ συνάρτησις παύηται ἐλαττουμένη καὶ ἄρχηται αὐξανομένη, τότε λέγομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις τινα τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς λαμβάνει τιμὴν ἐλαχίστην ἢ καθίσταται ἐλάχιστον.

Κατὰ ταῦτα τὸ διώνυμον τοῦ πρώτου βαθμοῦ, οἷον τὸ $\alpha x+\beta$, εἶναι συνάρτησις συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x· καὶ ὁπόταν x αὐξάνηται ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$, ἡ συνάρτησις αὕτη αὐξάνεται ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$, τοῦ α ὄντος θετικοῦ· ἐν ᾧ ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ μέχρι $-\infty$, τοῦ α ὄντος ἀρνητικοῦ.

Ἡ δὲ συνάρτησις $\dfrac{1}{\alpha x+\beta}$ εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x περιλαμβανομένην μεταξὺ $-\infty$ καὶ $-\dfrac{\beta}{\alpha}-\varepsilon$, καὶ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x περιλαμβανομένην μεταξὺ $-\dfrac{\beta}{\alpha}+\varepsilon$ καὶ ∞, τοῦ ε ὄντος ἀριθμοῦ θετικοῦ, ὅσον ἂν θέλωμεν μικροῦ. Ἀλλ' ἡ συνάρτησις αὕτη γίνεται ἀσυνεχής, ὅταν ἡ μεταβλητὴ x μεταβαλλομένη διέρχηται διὰ τῆς τιμῆς $-\dfrac{\beta}{\alpha}$. Καὶ ἐὰν μὲν $\alpha>0$, ἡ συνάρτησις διέρχεται διὰ $-\infty$ ἀποτόμως εἰς $+\infty$· ἐὰν δὲ τοὐναντίον $\alpha<0$, ἡ συνάρτησις μεταβαίνει ἀποτόμως ἀπὸ $+\infty$ εἰς $-\infty$.

* Τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ μεταβάλλεται συνεχῶς, ὁπόταν x αὐξάνηται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ εἰς $+\infty$.

150. Ἔστω
$$y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$$
πρὸς πᾶσαν ὡρισμένην καὶ πεπερασμένην τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχεῖ μία μόνη τιμὴ τοῦ y, ὡρισμένη καὶ πεπερασμένη. Ἔστω x_0 ὡρισμένη καὶ πεπερασμένη τιμὴ τοῦ x καὶ y_0 ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ τριωνύμου. Ἐὰν αὐξήσωμεν εἶτα τὴν τιμὴν x_0 τοῦ x κατὰ θ, $(-1<\theta<+1)$, ἤτοι ἐὰν δώσωμεν τῷ x τὴν τιμὴν $x_0+\theta$, καὶ καλέσωμεν y τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ τριωνύμου, ἔχομεν
$$y_0=\alpha x_0^2+\beta x_0+\gamma$$
$$y=\alpha(x_0+\theta)^2+\beta(x_0+\theta)+\gamma$$
Ὅθεν
$$y=y_0+\theta(2\alpha x_0+\alpha\theta+\beta)$$
Ἔστω νῦν ὁ ἀριθμὸς $2\alpha x_0+\alpha\theta+\beta$ ἔλασσων κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἀριθμοῦ τινος θετικοῦ M, ἤτοι ἔστω κατ' ἀπόλυτον τιμὴν
$$\theta(2\alpha x_0+\alpha\theta+\beta)<\theta M$$

καὶ ὑποθέσωμεν (τῶν η καὶ ε ὄντων ἀριθμῶν τινων τοιούτων ὥστε $-1<\eta<+1$ καὶ $-1<\varepsilon<+1$), ὅτι $\varepsilon=\frac{\eta}{M}<1$. Τότε πρὸς πᾶσαν τιμὴν τοῦ θ περιλαμβανομένην μεταξὺ $-\varepsilon$ καὶ $+\varepsilon$ ἡ τιμὴ τοῦ θM μένει κατ' ἀπόλυτον τιμὴν περιλαμβανομένη μεταξὺ $-\frac{\eta}{M}.M$ καὶ $+\frac{\eta}{M}.M$, ἤτοι μεταξὺ $-\eta$ καὶ $+\eta$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμὸς $\theta(2\alpha x_0+\alpha\theta+\beta)$ ὑποτίθεται ἐλάσσων κατ' ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ $\theta.M$, ἕπεται, ὅτι κατὰ μείζονα λόγον

$$-\eta<\theta(2\alpha x_0+\alpha\theta+\beta)<+\eta.$$

Ἐντεῦθεν ἄρα συνάγομεν, ὅτι διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x περιλαμβανομένην μεταξὺ $x_0-\varepsilon$ καὶ $x_0+\varepsilon$, ἡ τιμὴ τοῦ y, ἤτοι ἡ τιμὴ τοῦ τριωνύμου, περιλαμβάνεται μεταξὺ $y_0-\eta$ καὶ $y_0+\eta$.

Ἔστω π. χ. τὸ τριώνυμον

$$y=5x^2+3x-7$$

λάβωμεν δὲ $x_0=8$ καὶ $\eta=\frac{1}{1000}$. Τότε ἔχομεν

$$y_0=337,\quad M=2.5.8+5+7=92,\quad \varepsilon=\frac{\eta}{M}=\frac{1}{92000}$$

Ὅθεν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x περιλαμβανομένην μεταξὺ

$$8-\frac{1}{92000}\quad\text{καὶ}\quad 8+\frac{1}{92000}$$

ἡ τιμὴ τοῦ y, ἤτοι ἡ τιμὴ τοῦ τριωνύμου, περιλαμβάνεται μεταξὺ

$$337-\frac{1}{1000}\quad\text{καὶ}\quad 337+\frac{1}{1000}$$

151. Πρὸς παρακολούθησιν τῶν μεταβολῶν τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ὁπόταν x μεταβάλληται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$, ἔστω

$$y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$$

ἢ

$$y=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

καὶ

$$w=x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}$$

Τότε δὲ ἔχομεν

$$y=\alpha w$$

Ἐξετάσωμεν ἐν πρώτοις τὰς μεταβολὰς τοῦ τριωνύμου

$$w=x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}$$

διότι ἐκ τῶν μεταβολῶν τούτου εὑρίσκομεν εὐκόλως τὰς μεταβολὰς τοῦ y. Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$w=x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}$$

Ἐντεῦθεν δὲ φανερόν, ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ w εἶναι ἄθροισμα δύο ὅρων, ὧν ὁ μὲν $\frac{4\alpha\gamma-\beta}{4\alpha^2}$ σταθερός, ὁ δὲ $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ μεταβλητός. Ὥστε πρὸς ἐξέτασιν τῶν μεταβολῶν τοῦ w ἀρκεῖ νὰ ἐξετάσωμεν τὰς μεταβολὰς τοῦ μεταβλητοῦ μέρους αὐτοῦ

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.$$

Ὁπόταν x αὐξάνηται ἀπὸ $-\infty$ εἰς $-\frac{\beta}{2\alpha}$, ἡ ποσότης $x+\frac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ αὐξάνεται ἀπὸ $-\infty$ εἰς 0· ἡ δὲ ἀπόλυτος τιμὴ αὐτῆς ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ εἰς 0 καὶ ἑπομένως τὸ τετράγωνον αὐτῆς ἐλαττοῦται ἐπίσης ἀπὸ $+\infty$ εἰς 0. Ὥστε, ὁπόταν x αὐξάνηται ἀπὸ $-\infty$ εἰς $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ w ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ εἰς τὴν τιμὴν $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}$.

Ὁπόταν δὲ x αὐξάνηται ἀπὸ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ εἰς $+\infty$, τὸ $x+\frac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι θετικὸν καὶ αὐξάνεται ἀπὸ 0 εἰς $+\infty$, ὡς καὶ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ, καὶ ἑπομένως τὸ w αὐξάνεται ἀπὸ τῆς τιμῆς $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}$ εἰς $+\infty$, ἤτοι πρὸς ἀνακεφαλαίωσιν

$$\begin{array}{l|l}
x & -\infty \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; -\dfrac{\beta}{2\alpha} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; +\infty \\[2ex]
w & +\infty \;\ldots\; \text{ἐλατ.} \ldots\ldots \dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2} \ldots \text{αὐξ.} \;\; +\infty
\end{array}$$

Ἐπανέλθωμεν νῦν πρὸς ἐξέτασιν τῶν μεταβολῶν τοῦ y, ἤτοι τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Ἔχομεν

$$y=\alpha w$$

ἐξ οὗ συνάγομεν, ὅτι ἔχομεν δύο περιπτώσεις πρὸς διάκρισιν, καθ' ὅσον τὸ α εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

1) $\alpha>0$. Ἡ τιμὴ τοῦ y αὐξάνεται, ὁπόταν ἡ τοῦ w αὐξάνηται, καὶ ἐλαττοῦται, ὁπόταν ἡ τοῦ w ἐλαττῶται. Ἡ δὲ πορεία τῶν μεταβολῶν τούτων δείκνυται, ὡς ἑξῆς φαίνεται

$$\alpha>0, \qquad y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$$

$$\begin{array}{c|l} x & -\infty \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -\dfrac{\beta}{2\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots +\infty \\ y & +\infty \ldots\ldots \text{ἐλατ} \ldots\ldots \dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} \ldots\ldots \text{αὐξ} \ldots\ldots +\infty \end{array}$$

Ἡ τιμὴ ἄρα $\dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ τοῦ y ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τὸ ἐλάχιστον τοῦ τριωνύμου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τριώνυμον μεταβάλλεται συνεχῶς, ὁπόταν x μεταβάλληται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ εἰς $+\infty$, τὸ y διέρχεται δὶς μὲν διὰ πᾶσαν τιμὴν μείζονα τοῦ ἐλαχίστου $\dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$, ἅπαξ δὲ διὰ τοῦ ἐλαχίστου τούτου· οὐδεμίαν δὲ λαμβάνει τιμὴν ἐλάσσονα τοῦ ἐλαχίστου τούτου

Ἰδίᾳ δέ, ἐὰν $\dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{2\alpha}<0$, ἤτοι ἐάν, τοῦ α ὄντος θετικοῦ, $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, τὸ τριώνυμον διέρχεται διὰ τοῦ 0 διὰ δύο τιμὰς τοῦ x διαφόρους ἀλλήλων· ἐν ᾧ δὲν μηδενίζεται δι' οὐδεμίαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x, ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$. Οὕτως ἐπανευρίσκομεν τὴν συνθήκην, καθ' ἣν αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι πραγματικαί, ὅτε $\beta^2-4\alpha\gamma>0$.

2) $\alpha<0$. Ἡ τιμὴ τοῦ y, ἢ τοῦ γινομένου αw, αὐξάνεται, ὁπόταν w ἐλαττῶται, καὶ ἐλαττοῦται, ὁπόταν w αὐξάνηται Ὥστε ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ πορεία τῶν μεταβολῶν τοῦ y, ἤτοι τοῦ τριωνύμου, δείκνυται, ὡς ἑξῆς φαίνεται

$$\alpha<0, \qquad y=\alpha x^2+\beta x+\gamma.$$

$$\begin{array}{c|l} x & -\infty \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -\dfrac{\beta}{2\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots +\infty \\ y & -\infty \ldots\ldots \text{αὐξ} \ldots \dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} \ldots \text{ἐλατ} \ldots -\infty \end{array}$$

Ἡ τιμὴ ἄρα $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ τοῦ y ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι ἐν τῇ δευτέρᾳ ταύτῃ περιπτώσει κατὰ τὸν ὁρισμὸν τὸ μέγιστον τοῦ τριωνύμου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τριώνυμον μεταβάλλεται συνεχῶς, ὁπόταν x αὐξάνηται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ εἰς $+\infty$, τὸ y διέρχεται δὶς μὲν διὰ πᾶσαν τιμὴν ἐλάσσονα τοῦ μεγίστου $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$, ἅπαξ δὲ διὰ τοῦ μεγίστου τούτου· οὐδεμίαν δὲ λαμβάνει τιμὴν μείζονα τοῦ μεγίστου τούτου.

Ἰδίᾳ δέ, ἐὰν $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}>0$, ἤτοι ἐάν, τοῦ α ὄντος ἀρνητικοῦ, $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, τὸ τριώνυμον μηδενίζεται διὰ δύο τιμὰς τοῦ x διαφόρους ἀλλήλων ἐν ᾧ δὲν μηδενίζεται δι' οὐδεμίαν τιμὴν πραγματικὴν τοῦ x, ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$. Οὕτως ἐπανευρίσκομεν αὖθις τὴν συνθήκην, καθ' ἣν αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι πραγματικαί, ὅτε $\beta^2-4\alpha\gamma>0$.

ΣΗΜ. Αἱ δύο τιμαὶ τοῦ x, δι' ἃς τὸ τριώνυμον λαμβάνει τὴν αὐτὴν τιμήν, ἀπέχουσιν ἴσον τῆς τιμῆς $-\frac{\beta}{2\alpha}$, ἤτοι διαφέρουσι τοῦ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ ἡ μὲν ἐπὶ πλέον, ἡ δὲ ἐπὶ ἔλαττον κατὰ τὴν αὐτὴν ποσότητα. Τῷ ὄντι παραστήσωμεν διὰ

$$\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}+\alpha\lambda$$

τιμήν τινα τοῦ τριωνύμου. Τότε ἔχομεν

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}\right]=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}+\alpha\lambda$$

Ὅθεν
$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\lambda$$

καὶ
$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}\pm\sqrt{\lambda}$$

Αἱ δύο τιμαὶ τοῦ x αἱ δίδουσαι τῷ τριωνύμῳ τὴν τιμὴν

$$\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}+\alpha\lambda$$

εἶναι πραγματικαὶ διάφοροι ἀλλήλων, ἐὰν ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς λ ἦναι θετικός· ἴσαι, ἐὰν λ ἦναι 0· φανταστικαί, ἐὰν λ ἦναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.

Ἐξισώσεις ἔχουσαι ῥιζικά.

152. Ἐὰν ἐξίσωσις ἔχῃ τετραγωνικήν τινα ρίζαν, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὑπάρχει ὁ ἄγνωστος, ἀπομονοῦμεν αὐτὴν ἐν τῷ ἑτέρῳ μέλει τῆς ἐξισώσεως καὶ εἶτα ὑψοῦμεν ἀμφοτερα τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, ὅτε ἡ ρίζα ἐξαφανιζεται. Ἀναμνηστέον δέ, ὅτι ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς δύο ἐξισώσεις, τὴν ἀρχικὴν καὶ τὴν ἐξ αὐτῆς προκύπτουσαν, ὅταν ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ληφθῇ μετ' ἐναντίου σημείου. Λέγονται δὲ αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις συζυγεῖς ἀλλήλων.

Παραδείγματα.

1) $$x+\sqrt{x}=2 \quad \text{ἤ} \quad \sqrt{x}=2-x$$

Ὅθεν ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη

$$x=4-4x+x^2$$

ἤ

$$x^2-5x=-4$$

καὶ

$$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-4}+=\frac{5\pm3}{2}$$

τῶν δὲ ριζῶν τούτων ἡ μὲν $x=1$ ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν, ἡ δὲ $x''=4$ τὴν συζυγῆ αὐτῆς.

2) $$x+\sqrt{x^2-2}=2 \quad \text{ἤ} \quad \sqrt{x^2-2}=2-x$$

Ὅθεν $x^2-2=4-4x+x^2$ ἤ $x=\frac{3}{2}$. Ἡ δὲ λύσις αὕτη ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν, οὐχὶ δὲ καὶ τὴν συζυγῆ αὐτῆς.

3) $$\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=1.$$

Ὅθεν $x+2\sqrt{x(x-1)}+x-1=1$ ἤ $\sqrt{x(x-1)}=1-x$

καὶ $$x^2-x=1-2x+x^2 \quad \text{ἤ} \quad x=1.$$

Ἡ δὲ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς τέσσαρας ἐξισώσεις·

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=1$$
$$-\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=1$$
$$\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=1$$
$$-\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=1$$

Φανερὸν δέ, ὅτι μόνον ἡ πρώτη καὶ ἡ τρίτη ἐπαληθεύονται διὰ $x=1$.

4) $$\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{3}}{x^2}$$

ἤ $$2\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3}$$

καὶ $$4x^2=1$$

Ὅθεν $$x=\pm\frac{1}{2}.$$

5) $$\sqrt{1+x+x^2}=\alpha-\sqrt{1-x+x^2}.$$ Ὅθεν

$$1+x+x^2=\alpha^2-2\alpha\sqrt{1-x+x^2}+1-x+x^2$$

ἤ $$2x-\alpha^2=-2\alpha\sqrt{1-x+x^2}$$

ἤ $$4x^2-4\alpha^2x+\alpha^4=4\alpha^2(1-x+x^2)$$

ἤ $$x^2=\frac{\alpha^2}{4}\cdot\frac{\alpha^2-4}{\alpha^2-1}$$

καὶ $$x=\pm\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2-4}{\alpha^2-1}}$$

ΣΗΜ. Αἱ ἐξισώσεις αἱ ἔχουσαι ριζικὰ λύονται ἐνίοτε εὐκολώτερον δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ ὑπορρίζου (ὅταν μάλιστα τοῦτο ἦναι πρώτου βαθμοῦ πρὸς τὸν ἄγνωστον τῆς ἐξισώσεως) δι' ἄλλου ἀγνώστου. Ἐὰν π. χ. ἐν τῇ πρώτῃ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων τεθῇ $x=w^2$, ἔχομεν $w^2+w=2$.

Ὅθεν $$w=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{2+\frac{1}{4}}=\frac{-1\pm3}{2}$$

Διτετράγωνοι ἐξισώσεις.

153. Διτετράγωνοι ἐξισώσεις λέγονται αἱ ἐξισώσεις τοῦ τετάρτου βαθμοῦ αἱ ἀρτίας μόνον δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου περιέχουσαι, ἤτοι αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$\alpha x^4+\beta x^2=\gamma$$

ἐὰν δὲ τεθῇ $x^2=w$, ἔπεται καὶ $x^4=w^2$ καὶ ἡ ἐξίσωσις καθίσταται

$$\alpha w^2+\beta w=\gamma$$

ἤτοι ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ πρὸς τὸν ἄγνωστον x. Αὕτη δὲ λυομένη δίδει

$$w = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Ἔστωσαν δὲ w' καὶ w'' αἱ δύο τιμαὶ τοῦ w· τότε ἔχομεν $x^2 = w'$ καὶ $x = \pm\sqrt{w'}$, ὁμοίως $x^2 = w''$ καὶ $x = \pm\sqrt{w''}$· ὥστε εὑρίσκονται ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως τέσσαρες

$$+\sqrt{w'}, \qquad -\sqrt{w'}, \qquad +\sqrt{w''}, \qquad -\sqrt{w''}$$

Κατὰ ταῦτα αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$x^4 - 12x^2 - 64 = 0$$

εἶναι αἱ $\quad +4 \quad -4, \quad +2\sqrt{-1}, \quad -2\sqrt{-1}$

Προβλήματα λυόμενα διὰ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων.

1) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸ διπλάσιον αὐτοῦ δίδει γινόμενον τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ ηὐξημένον κατὰ 9.

Ἔστω x ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Κατὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος ἔχομεν $\quad x.2x = 3x + 9$

ἢ $\quad 2x^2 - 3x = 9$

καὶ $\quad x = \dfrac{3 \pm 9}{4}$

ἤτοι $\quad x' = 3, \quad x'' = -\dfrac{3}{2}$

Ἡ μὲν $x' = 3$ ἐπαληθεύει τὸ πρόβλημα, ἡ δὲ $x'' = -\dfrac{3}{2}$ λύει τὴν ἐξίσωσιν, ἣν εὑρίσκομεν τρέποντες τὸ x εἰς $-x$ ἐν τῇ ἀρχικῇ ἐξισώσει, ὅτε προκύπτει

$$x.2x = 9 - 3x$$

Αὕτη δὲ λύει τὸ πρόβλημα, οὗ ἡ ἔκφρασις· εὑρεῖν ἀριθμὸν ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸ διπλάσιον αὐτοῦ δίδει γινόμενον ἴσον τῷ 9 ἠλαττωμένῳ κατὰ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ.

2). Εὑρεῖν δύο μέρη τοῦ ἀριθμοῦ λ, ὧν τὸ γινόμενον ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ μ.

Ἔστω x τὸ ἕτερον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ λ· τότε $\lambda - x$ εἶναι τὸ ἕτερον καὶ ἑπομένως κατὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος ἔχομεν

$$x(\lambda - x) = \mu$$

ἢ

$$x^2 - \lambda x + \mu = 0$$

καὶ

$$x = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}$$

Καὶ ἐὰν μὲν $\lambda^2 > 4\mu$, τὰ δύο μέρη τοῦ ἀριθμοῦ λ εἶναι πραγματικά· ἐὰν δὲ $\lambda^2 = 4\mu$, ὁ ἀριθμὸς λ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα πρὸς ἄλληλα μέρη· ἐὰν δὲ $\lambda^2 < 4\mu$, τὰ δύο μέρη τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι φανταστικά.

3). Ἐκ τῆς πωλήσεως ἵππου ἀντὶ ν εἰκοσαδράχμων ἐκέρδησέ τις τόσα ἐπὶ τοῖς 100, ἀνθ' ὅσων ἠγόρασεν αὐτόν. Τίς ἡ ἀξία τοῦ ἵππου;

Ἔστωσαν x τὰ εἰκοσάδραχμα, ἀνθ' ὧν ἠγοράσθη ὁ ἵππος· τότε τὸ κέρδος ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτοῦ εἶναι $\nu - x$ καὶ ἑπομένως

$$\nu - x = \frac{x.x}{100} = \frac{x^2}{100}$$

Ὅθεν

$$x = -50 \pm 10\sqrt{25 + \nu}$$

4) Ἠγόρασέ τις ὕφασμα ἀντὶ 90 δρ. Ἐὰν δὲ ἀντὶ τῶν αὐτῶν χρημάτων ἐλάμβανεν 6 πήχ. ἐπὶ πλέον, ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως εἶναι κατὰ 0,50 δρ. ὀλιγωτέρα. Πόσους πήχεις ἠγόρασεν;

Ἔστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων· τότε ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς πήχεως εἶναι $\frac{90}{x}$· ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων ἦναι $x + 6$, ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως εἶναι $\frac{90}{x+6}$. Ὅθεν

$$\frac{90}{x} = \frac{90}{x+6} + 0{,}50$$

ἢ

$$0{,}50x\,(x+6) = 90.6$$

καὶ

$$x(x+6) = 180.6$$

Ὅθεν

$$x = 30$$

ἀπορριπτομένης τῆς ἀρνητικῆς ῥίζης. Ὥστε τὸ μὲν ὕφασμα ἦτο 30 πήχεων, ἡ δὲ τιμὴ τοῦ πήχεως 3 δρ.

5) Ὅταν δεξαμενῆς τινος ἀνοίγωνται αἱ δύο αὐτῆς κρῆναι, κενοῦται εἰς 15 ὥρας· ἡ μικρὰ κρήνη μόνη κενοῖ αὐτὴν εἰς 16 ὥρας πλέον τῆς μεγάλης. Εἰς πόσον χρόνον κενοῖ αὐτὴν ἡ μεγάλη;

Ἔστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν, καθ' ἃς κενοῖ ἡ μεγάλη κρήνη τὴν δεξαμενὴν ἐκ λ λιτρῶν. Ἡ μικρὰ κενοῖ αὐτὴν εἰς $x+16$ ὥρας. Εἰς μίαν ὥραν κενοῦσιν ἡ μὲν μεγάλη $\frac{\lambda}{x}$, ἡ δὲ μικρὰ $\frac{\lambda}{x+16}$ τῆς δεξαμενῆς καὶ ἑπομένως ἀμφότεραι αἱ κρῆναι ὁμοῦ κενοῦσιν αὐτὴν εἰς $\frac{15\lambda}{x}+\frac{15\lambda}{x+16}$ ὥρας

Ὅθεν
$$\frac{15\lambda}{x}+\frac{15\lambda}{x+16}=\lambda$$
καὶ
$$x=24.$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εὑρίσκεται, καὶ ἐὰν ζητηθῇ ὁ χρόνος, καθ' ὃν αἱ δύο κρῆναι, αἵτινες χωρὶς κενοῦσι τὴν δεξαμενὴν εἰς x καὶ εἰς $x+16$ ὥρας, κενοῦσιν αὐτὴν ὁμοῦ. Ὁ χρόνος οὗτος ἐκφράζεται διὰ $\frac{x(x+16)}{x+(x+16)}$ καὶ ἑπομένως
$$\frac{x(x+16)}{2x+16}=15$$
Ὅθεν αὖθις $x=24$.

6) Κύων συνέλαβε λαγὸν πηδήσαντα ἤδη ἀπόστασιν 77 πηδημάτων πρὸ τῆς καταδιώξεως. Παρετηρήθη δέ, ὅτι 12 πηδήματα τοῦ κυνὸς ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 17 τοῦ λαγοῦ καὶ ὅτι, καθ' ὃν χρόνον ὁ κύων πηδᾷ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πηδημάτων καὶ ὁ λαγός, οὗτος πηδᾷ 216 πηδήματα ἐπὶ πλέον. Μετὰ πόσα πηδήματα συνέλαβεν ὁ κύων τὸν λαγόν;

Ἔστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν πηδημάτων τοῦ λαγοῦ. Ἐπειδή, καθ' ὃν χρόνον ὁ λαγὸς πηδᾷ $x+216$ πηδήματα ὁ κύων πηδᾷ x, ἕπεται, ὅτι καθ' ὃν χρόνον ὁ λαγὸς πηδᾷ 1 πήδημα, ὁ κύων πηδᾷ $\frac{x}{x+216}$ καὶ τέλος πρὸς τὰ x πηδήματα τοῦ λαγοῦ ἀντιστοιχοῦσι κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον $\frac{x^2}{x+216}$ πηδήματα τοῦ κυνός. Ἀλλὰ 12 πηδήματα τοῦ κυνὸς ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 17 τοῦ λαγοῦ καὶ ἐπομένως 1 πήδημα τοῦ κυνὸς ἰσοδυναμεῖ πρὸς $\frac{17}{12}$ πηδ. τοῦ λαγοῦ. Ὅθεν τὰ $\frac{x^2}{x+216}$ πηδήματα τοῦ κυνὸς ἰσοδυναμοῦσι πρὸς $\frac{17x^2}{12(x+216)}$ πηδ. τοῦ λαγοῦ· ταῦτα δὲ εἶναι ἴσα πρὸς $x+77$ πηδ. τοῦ λαγοῦ. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{17x^2}{12(x+216)}=x+77$$

καὶ

$$x=756$$

Ὁ δὲ λόγος τῶν ἀριθμῶν τῶν πηδημάτων τοῦ κυνὸς καὶ τοῦ λαγοῦ εἶναι

$$\frac{756}{972}=\frac{7}{9}$$

Πρὸς ἐπαλήθευσιν τῆς προηγουμένης λύσεως παραστήσωμεν διὰ μ καὶ μ΄ τὰ μήκη τῶν πηδημάτων τοῦ λαγοῦ καὶ τοῦ κυνός. Ὁ λαγὸς συνελήφθη ὑπὸ τοῦ κυνὸς εἰς ἀπόστασιν 756 μ. ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐκκινήσεως αὐτοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν $(756+77)\mu=833\ \mu$. ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐκκινήσεως τοῦ κυνός. Ἀλλ᾽ ὁ λαγός, καθ᾽ ὃν χρόνον ὁ κύων ἐπήδησεν 756 πηδήματα, ἐπήδησεν $\frac{7}{9}.756=588$ καὶ ἐπομένως διέτρεξε τὴν ἀπόστασιν $588\mu'$· ἐπειδὴ δὲ $\mu'=\frac{17}{12}\mu$, ἕπεται, ὅτι

$$\frac{17}{12}.588\mu=17.49\mu=833\mu.$$

7) Ἐργάται τινές, ἄνδρες καὶ γυναῖκες, ἐν συνόλῳ 18 ἔλαβον ὁμοῦ 160 δρ. Ἕκαστος ἀνὴρ ἔλαβεν ἡμερομίσθιον τόσας δραχμάς, ὅσαι ἦσαν αἱ γυναῖκες, καὶ ἑκάστη γυνὴ τόσας, ὅσοι οἱ ἄνδρες· πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

Ἔστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν καὶ y ὁ τῶν γυναικῶν. Τότε κατὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος ἔχομεν

$$x+y=18 \quad \text{ἢ} \quad y=18-x$$

$$xy+yx=160 \quad \text{ἢ} \quad 2xy=160$$

καὶ

$$2x(18-x)=160$$

Ὅθεν

$$x=9\pm1$$

8) Ἐξαργυρώσας τις δι' ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως δύο γραμμάτια τὸ μὲν ἐξ 8776 δρ. πληρωτέων μετὰ 9 μῆνας, τὸ δὲ ἐξ 7488 δρ. πληρωτέων μετὰ 8 μῆνας ἐπλήρωσε διὰ τὸ πρῶτον 1200 δρ. ἐπὶ πλέον τοῦ δευτέρου· πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ὑπελογίσθη ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις;

Παραστήσωμεν διὰ x τὸν τόκον τῶν 100 δραχμῶν ἐπὶ ἕνα μῆνα· τότε τὸ μὲν ζητούμενον ἐπιτόκιον εἶναι $12x$, οἱ δὲ τόκοι τῶν 100 δρ. ἐπὶ 9 καὶ 8 μῆνας εἶναι $9x$ καὶ $8x$. Καὶ ἡ μὲν ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις τοῦ πρώτου γραμματίου εἶναι $\frac{877600}{100+9x}$, ἡ δὲ τοῦ δευτέρου $\frac{748800}{100+8x}$.

Ὥστε

$$\frac{877600}{100+9x}-\frac{748800}{100+8x}=1200,$$

καὶ

$$12x=5{,}86.$$

9) Πρὸς ἐκτέλεσιν ἔργου τινὸς ἐμισθώθησαν δύο ἐργάται· καὶ ἐὰν μὲν ἑκάτερος ἐκτελῇ τὸ ἥμισυ τοῦ ἔργου, ἀπαιτοῦνται 37 ὧραι καὶ ἡμίσεια πρὸς ἐκτέλεσιν αὐτοῦ· ἂν δὲ ἀμφότεροι ἐργάζωνται ὁμοῦ, τὸ ἔργον ἐκτελεῖται εἰς 18 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας ἑκάτερος ἐργάτης ἐκτελεῖ τὸ ἔργον;

Ἔστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν τοῦ ἑνὸς καὶ y ὁ τῶν τοῦ ἄλλου πρὸς ἐκτέλεσιν τοῦ ἔργου. Πρὸς ἐκτέλεσιν τοῦ ἡμίσεως ἔργου ὁ μὲν καταναλίσκει $\frac{x}{2}$ ὥρας, ὁ δὲ $\frac{y}{2}$· ἀλλ' οὕτω καταναλίσκονται 37 ὧραι καὶ ἡμίσεια. Ὅθεν $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=37\frac{1}{2}$ ἢ $x+y=75$ ἢ $y=75-x$

Ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐπειδὴ ὁ μὲν ἐκτελεῖ τὸ ὅλον ἔργον ε εἰς x ὥρας, ὁ δὲ εἰς y ὥρας, ἕπεται, ὅτι εἰς 18 ὥρας ὁ μὲν ἐκτελεῖ $\frac{18\varepsilon}{x}$, ὁ δὲ $\frac{18\varepsilon}{y}$· ἀλλ' οὕτως ἐκτελεῖται τὸ ἔργον ε καὶ ἔχομεν

$$\frac{18\varepsilon}{x}+\frac{18\varepsilon}{y}=\varepsilon \quad ἢ \quad 18y+18x=xy$$

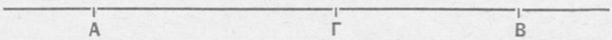
καὶ

$$18(75-x)+18x=x(75-x)$$

ὅθεν

$$x=\frac{75}{2}\pm\frac{15}{2}$$

10) Δύο ταχυδρόμοι ὁμαλῶς κινούμενοι ἐξεκίνησαν συγ-
χρόνως ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β, ὁ μὲν ἐκ τῆς Α πρὸς τὴν Β
ὁ δὲ ἐκ τῆς Β πρὸς τὴν Α. Καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἔφθασεν εἰ
τὴν πόλιν Β ἐννέα ὥρας μετὰ τὴν συνάντησιν αὐτῶν, ὁ δ
δεύτερος εἰς τὴν Β δεκαὲξ ὥρας μετ' αὐτήν. Ζητεῖται ὁ λό
γος τῶν ταχυτήτων, μεθ' ὧν ἐβάδιζον.



Ἔστω x ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου καὶ y ἡ τοῦ δευτέρου καὶ Γ τὸ σημεῖο
τῆς συναντήσεως. Ὁ μὲν πρῶτος διήνυσε τὸ διάστημα ΓΒ ἐπὶ 9 ὥρα
μετὰ ταχύτητος x καὶ ἑπομένως $\Gamma B = 9x$, ὁ δὲ δεύτερος διήνυσε τὸ διά
στημα ΓΑ ἐπὶ 16 ὥρας μετὰ ταχύτητος y καὶ ἑπομένως $\Gamma A = 16y$
ἐπειδὴ δὲ ἀμφότεροι συγχρόνως ἐξεκίνησαν ἐκ τῶν Α καὶ Β καὶ συγχρό-
νως ἔφθασαν εἰς Γ, ἕπεται, ὅτι ὁ χρόνος $\frac{16y}{x}$, καθ' ὃν διήνυσεν ὁ πρῶτο
τὸ διάστημα ΑΓ, εἶναι ἴσος τῷ χρόνῳ $\frac{9x}{y}$, καθ' ὃν διήνυσεν ὁ δεύτερο
τὸ διάστημα ΒΓ, ἤτοι

$$\frac{16y}{x} = \frac{9x}{y} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x^2}{y^2} = \frac{16}{9}$$

καὶ

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$$

ὥστε ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου εἶναι πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου, ὡς ὁ 4 πρὸ
τὸν 3.

11) Δύο ἐργάται ἐργασθέντες οὐχὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμερο
μισθίου ἔλαβον ὁμοῦ 110 δραχμὰς ἀναλόγως τῶν ἡμερῶν
καθ' ἃς εἰργάσθησαν ἑκάτερος, τοῦ δευτέρου ἐργασθέντο
4 ἡμέρας ὀλιγώτερον τοῦ πρώτου. Ἀλλ' ἐὰν ὁ πρῶτος ἐργά
ζηται ὅσας ὁ δεύτερος ἡμέρας, λαμβάνει 42 δρ.· ἐὰν δὲ ὁ δεύ
τερος ἐργάζηται ὅσας ὁ πρῶτος ἡμέρας, λαμβάνει 72 δρ. Ἐπ
πόσας ἡμέρας εἰργάσθη ἑκάτερος τῶν ἐργατῶν ;

Ἔστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, καθ' ἃς εἰργάσθη ὁ πρῶτος· τότ
κατὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος $x-4$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν
καθ' ἃς εἰργάσθη ὁ δεύτερος· καὶ τὸ μὲν ἡμερομίσθιον τοῦ πρώτου εἶνα

$\frac{42}{x-4}$, τὸ δὲ τοῦ δευτέρου $\frac{72}{x}$ καὶ ἑπομένως ὁ μὲν πρῶτος ἔλαβε $\frac{42x}{x-4}$ δραχμάς, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{72(x-4)}{x}$ δραχμάς. Ὥστε

$$\frac{42x}{x-4}+\frac{72(x-4)}{x}=110$$

Ὅθεν $$x=17\pm1.$$

12). Ἔχων τις 13000 δρ. μερίζει αὐτὰς εἰς δύο ἄνισα μέρη, ἅτινα τοκίζει ἐπὶ διαφόρῳ ἐπιτοκίῳ καὶ λαμβάνει ἐξ ἑκατέρου τὸν αὐτὸν ἐτήσιον τόκον. Ἀλλ' ἐὰν τοκίζῃ τὸ πρῶτον μέρος πρὸς τὸ ἐπιτόκιον τοῦ δευτέρου, λαμβάνει ἐτήσιον τόκον 360 δρ., ἐὰν δὲ τοκίζῃ τὸ δεύτερον πρὸς τὸ ἐπιτόκιον τοῦ πρώτου, λαμβάνει ἐτήσιον τόκον 490 δρ. Ποῖα εἶναι τὰ δύο ἐπιτόκια;

Ἔστω x τὸ πρῶτον μέρος καὶ y τὸ πρὸς ὃ τοῦτο ἐτοκίσθη ἐπιτόκιον· τότε τὸ δεύτερον μέρος εἶναι $13000-x$ καὶ ἔστω w τὸ πρὸς ὃ τοῦτο ἐτοκίσθη ἐπιτόκιον. Οἱ ἐτήσιοι τόκοι τοῦ μὲν εἶναι $\frac{xy}{100}$, τοῦ δὲ $\frac{(13000-x)w}{100}$. Κατὰ δὲ τὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{xy}{100}=\frac{(13000-x)w}{100} \quad \text{ἢ} \quad xy=(13000-x)w$$

Ἀφ' ἑτέρου δὲ εἶναι $x=\frac{36000}{w}$ καὶ $y=\frac{49000}{13000-x}$.

Ὅθεν ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{36000}{w}\cdot\frac{49.w}{13w-36}=\left(13000-\frac{36000}{w}\right)w$$

ἐξ ἧς $$w=\frac{36\pm42}{13}$$

ὥστε τὰ ζητούμενα ἐπιτόκια εἶναι $y=7$ καὶ $w=6$.

13) Εὑρεῖν τὰς πλευρὰς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, οὗ ἡ περίμετρος 2τ, ἰσοδυναμοῦντος πρὸς τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ α.

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$x+y=\tau$$
$$xy=\alpha^2$$

Ὅθεν x καὶ y εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (144)

$$w^2-\tau w=-\alpha^2$$

ὥστε ἡ ἑτέρα τῶν δύο ζητουμένων πλευρῶν εἶναι

$$\frac{\tau}{2}+\sqrt{\frac{\tau^2}{4}-\alpha^2}$$

καὶ ἡ ἑτέρα

$$\frac{\tau}{2}-\sqrt{\frac{\tau^2}{4}-\alpha^2}$$

Διερεύνησις. Ἵνα ᾖναι τὸ πρόβλημα δυνατόν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ εὑρεθεῖσαι πλευραὶ νὰ ᾖναι πραγματικαὶ θετικαί, τουτέστι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ᾖναι

$$\frac{\tau^2}{4}-\alpha^2 \geqq 0$$

Τῆς δὲ συνθήκης ταύτης πληρουμένης, αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος ἔχουσι τὸ αὐτὸ σημεῖον· διότι τὸ γινόμενον αὐτῶν α^2 εἶναι θετικόν· εἶναι δὲ θετικαί· διότι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν τ εἶναι θετικόν. Τῆς δὲ περιμέτρου τοῦ ὀρθογωνίου οὔσης 2τ, τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατὸν μέν, ἐφ' ὅσον

$$\alpha^2 \leqq \frac{\tau^2}{4}$$

ἀδύνατον δέ, ἐφ' ὅσον $\alpha^2 > \frac{\tau^2}{4}$.—Ὅταν δὲ $\alpha^2 = \frac{\tau^2}{4}$, αἱ ῥίζαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἑπομένως τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τετράγωνον. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι 1) ἐκ πάντων τῶν ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων τῶν τὴν αὐτὴν περίμετρον ἐχόντων τὸ ἔχον τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν εἶναι τετράγωνον καὶ 2) ἐκ πάντων τῶν ὀρθογ. παραλληλογράμμων τῶν τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν ἐχόντων τὸ ἔχον τὴν ἐλαχίστην περίμετρον εἶναι τετράγωνον.

14) Εὑρεῖν τὰς πλευρὰς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου

γνωστῆς οὔσης τῆς διαφορᾶς λ τῶν δύο προσκειμένων αὐτοῦ πλευρῶν καὶ τῆς πλευρᾶς α τοῦ ἰσοδυναμοῦντος πρὸς αὐτὸ τετραγώνου.

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$x-y=\lambda$$
$$xy=\alpha^2$$

τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον, ἐὰν τεθῇ $y=-y_1$.

Τότε δὲ εἶναι

$$x+y_1=\lambda$$
$$-xy_1=\alpha^2$$

Ὅθεν x καὶ y_1 εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$w^2-\lambda w-\alpha^2=0$$

Ἡ δὲ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει ἀμφοτέρας αὐτῆς τὰς ῥίζας πραγματικὰς καὶ μετ' ἐναντίων σημείων· διότι ὁ γνωστὸς ὅρος α^2 εἶναι ἀρνητικός.—Ἡ μὲν θετικὴ ῥίζα εἶναι x, ἡ δὲ ἀρνητικὴ εἶναι y_1 ἢ $-y$. Ἔχομεν ἄρα

$$x=\frac{\lambda}{2}+\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+\alpha^2}$$

$$y=-y_1=-\frac{\lambda}{2}+\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+\alpha^2}$$

Τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται πάντοτε μίαν λύσιν.

15) Εὑρεῖν τὰς πλευρὰς ὀρθογ. παραλληλογράμμου, γνωστῆς οὔσης τῆς διαγωνίου αὐτοῦ δ καὶ τῆς περιμέτρου 2τ.

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$x+y=\tau$$
$$x^2+y^2=\delta^2$$

Ἐκ δὲ τῆς πρώτης λαμβάνομεν δι' ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς καὶ δι' ἀφαιρέσεως τῆς δευτέρας ἀπὸ τῆς οὕτω προκυπτούσης

$$2xy=\tau^2-\delta^2$$

ἢ

$$xy=\frac{\tau^2-\delta^2}{2}$$

Ὅθεν x καὶ y εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$w^2 - \tau w + \frac{\tau^2 - \delta^2}{2} = 0$$

Αὗται δὲ εἶναι

$$\frac{\tau}{2} \pm \sqrt{\frac{\tau^2}{4} - \frac{\tau^2 - \delta^2}{2}}$$

ἢ

$$\frac{1}{2}\left(\tau \pm \sqrt{2\delta^2 - \tau^2}\right)$$

Διερεύνησις. Ἵνα ἦναι τὸ πρόβλημα δυνατόν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαὶ x καὶ y νὰ ἦναι πραγματικαὶ θετικαί, ἤτοι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἦναι

$$2\delta^2 - \tau^2 \geqq 0$$

ἢ

$$\tau \leqq \delta\sqrt{2}$$

Ἵνα αἱ δύο ῥίζαι ἔχωσι τὸ αὐτὸ σημεῖον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἦναι

$$\frac{\tau^2 - \delta^2}{2} > 0 \quad \text{ἢ} \quad \tau > \delta$$

Πληρουμένης δὲ τῆς δευτέρας ταύτης συνθήκης, αἱ ῥίζαι εἶναι τοῦ αὐτοῦ σημείου· εἶναι δὲ θετικαί· διότι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν τ εἶναι θετικόν. Ὥστε, ἵνα ἦναι τὸ πρόβλημα δυνατόν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ πληρῶνται αἱ συνθῆκαι

$$\delta < \tau \leqq \delta\sqrt{2}$$

Ἐὰν $\tau = \delta\sqrt{2}$, αἱ δύο ῥίζαι εἶναι ἴσαι καὶ ἑπομένως τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τετράγωνον, οὗτινος ἡ πλευρὰ $\frac{\tau}{2}$ ἢ $\frac{\delta\sqrt{2}}{2}$.

Ἐὰν $\tau = \delta$, ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος ἀνάγεται εἰς

$$w^2 - \tau w = 0 \quad \text{ἢ} \quad w(w - \tau) = 0$$

ἤτοι ἡ ἑτέρα τῶν ῥιζῶν εἶναι 0, ἡ δὲ ἑτέρα εἶναι τ, ὅπερ ἐξ ὑποθέσεως ἴσον τῷ δ, καὶ ἑπομένως τὸ ὀρθογώνιον ἀνάγεται εἰς εὐθεῖαν, ἧς τινος τὸ μῆκος δ. Ἐντεῦθεν δὲ συνάγομεν, ὅτι 1) ἐκ πάντων τῶν ὀρθογ. παραλληλογράμμων τῶν τὴν αὐτὴν διαγώνιον ἐχόντων τὸ ἔχον τὴν μεγίστην περίμετρον εἶναι τετράγωνον καὶ 2) ἐκ πάντων τῶν ὀρθογ. παραλληλογράμμων τῶν τὴν αὐτὴν περίμετρον [ἐ]χόντων τὸ ἔχον τὴν ἐλαχίστην διαγώνιον εἶναι τετράγωνον.

16) Εὑρεῖν τὰς πλευρὰς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, γνωστῆς οὔσης τῆς διαγωνίου αὐτοῦ δ καὶ τῆς πλευρᾶς α τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτό.

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$x^2+y^2=\delta^2$$
$$xy=\alpha^2$$

διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς δευτέρας ἐπὶ 2 καὶ διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως τῆς οὕτω προκυπτούσης ἀπὸ τῆς πρώτης εὑρίσκομεν

$$(x+y)^2=\delta^2+2\alpha^2$$
$$(x-y)^2=\delta^2-2\alpha^2$$

ἐξ ὧν, τῆς x οὔσης τῆς μείζονος πλευρᾶς,

$$x+y=\sqrt{\delta^2+2\alpha^2}$$
$$x-y=\sqrt{\delta^2-2\alpha^2}$$

Καὶ

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\delta^2+2\alpha^2}+\sqrt{\delta^2-2\alpha^2}\right)$$
$$y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\delta^2+2\alpha^2}-\sqrt{\delta^2-2\alpha^2}\right)$$

Ἡ μόνη συνθήκη τοῦ δυνατοῦ τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ

$$\delta^2-2\alpha^2\geqq 0$$

ἢ

$$\alpha^2\leqq\frac{\delta^2}{2}$$

Ἐὰν $\alpha^2=\dfrac{\delta^2}{2}$, αἱ πλευραὶ x καὶ y εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἑπομένως τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τετράγωνον.

Ἐντεῦθεν δὲ συνάγομεν, ὅτι 1) ἐκ πάντων τῶν ὀρθογ. παραλληλογράμμων τῶν τὴν αὐτὴν διαγώνιον ἐχόντων τὸ ἔχον τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν εἶναι τετράγωνον καὶ 2) ἐκ πάντων τῶν ὀρθογ. παραλληλογράμμων τῶν τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν ἐχόντων τὸ ἔχον τὴν ἐλαχίστην διαγώνιον εἶναι τετράγωνον.

17) Ἐπὶ εὐθείας ἀπεράντου καὶ διερχομένης διὰ δύο σημείων Α καὶ Β εὑρεῖν σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε

$$\overline{\text{ΑΓ}}^2=\overline{\text{ΑΒ}}.\overline{\text{ΓΒ}}$$

Ἔστω α ἡ ἀπόστασις $\overline{\text{ΑΒ}}$ τῶν δύο σημείων Α καὶ Β. Ἐὰν καλέσωμεν x τὴν ἀπόστασιν $\overline{\text{ΑΓ}}$ καὶ νοήσωμεν τὴν ἀπόστασιν ταύτην θετικὴν μὲν κατὰ τὴν φορὰν ΑΒ, ἀρνητικὴν δὲ κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν ΒΑ, ἔχομεν

$$\overline{\text{ΑΓ}}=x,\quad \overline{\text{ΑΒ}}=\alpha,\quad \overline{\text{ΓΒ}}=\alpha-x$$

καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$x^2=\alpha(\alpha-x)$$

ἢ

$$x^2+\alpha x-\alpha^2=0$$

Ἡ δὲ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει ἀμφοτέρας αὐτῆς τὰς ρίζας πραγματικὰς μετ' ἐναντίων σημείων· διότι ὁ συντελεστὴς τοῦ x^2 καὶ ὁ γνωστὸς ὅρος $-\alpha^2$ ἔχουσιν ἐναντία σημεῖα· προσέτι δὲ ἡ θετικὴ ρίζα εἶναι ἐλάσσων τοῦ α· διότι, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν x διὰ 0, εἶτα διὰ α ἐν τῷ πρώτῳ μέλει τῆς ἐξισώσεως, λαμβάνομεν δύο ἐξαγόμενα μετ' ἐναντίων σημείων. Ὅθεν ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ὑπάρχουσι δύο σημεῖα Γ καὶ Γ′, δι' ἃ λύεται τὸ πρόβλημα, τὸ μὲν μεταξὺ Α καὶ Β, τὸ δὲ πέραν τοῦ Α κατὰ τὴν φορὰν ΒΑ.

18) Ἀπὸ στομίου φρέατος ἀφέθη λίθος εἰς αὐτό· ἠκούσθη δὲ ὁ κρότος τοῦ λίθου (κτυπήσαντος τὸν πυθμένα) μετὰ χρόνον t ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς πτώσεως. Πόσον τὸ βάθος τοῦ φρέατος;

Ὁ χρόνος t ἀποτελεῖται ἐκ δύο προσθετέων χρόνων τοῦ τῆς πτώσεως t' ἀπὸ τοῦ στομίου εἰς τὸν πυθμένα τοῦ φρέατος καὶ τοῦ t'' τῆς διαδόσεως τοῦ ἤχου ἀπὸ τοῦ πυθμένος εἰς τὸ στόμιον αὐτοῦ, ἤτοι $t=t'+t''$. Ἔστω δὲ x τὸ ζητούμενον βάθος τοῦ φρέατος. Γνωστόν, ὅτι, ἐὰν σῶμα ἀπό τινος ὕψους ἀφεθὲν πίπτῃ ἐπὶ t' δευτερόλεπτα, τὸ διανυσθὲν ὑπ' αὐτοῦ διάστημα εἶναι

$$\frac{1}{2}gt'^2,\quad \text{ὅπου}\quad g=9^{\mu},808.$$

Ὅθεν

$$x=\frac{1}{2}gt'^2\quad\text{καὶ}\quad t'=\sqrt{\frac{2x}{g}}$$

Ἀφ' ἑτέρου δὲ εἶναι γνωστὸν ὡσαύτως, ὅτι ὁ ἦχος διαδίδεται μεθ' ὁμαλῆς κινήσεως διανύων ἐν τῷ ἀέρι περὶ τὰ 340 μέτρα κατὰ πᾶν δευτερόλεπτον. Παραστήσωμεν δὲ τὴν ταχύτητα ταύτην τοῦ ἦχου διὰ v· τότε ἔχομεν

$$x = vt''$$

$$\text{καὶ} \quad t'' = \frac{x}{v}$$

Ἐπειδὴ δὲ $t = t' + t''$, ἕπεται ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{v}$$

$$\text{ἢ} \qquad t - \frac{x}{v} = \sqrt{\frac{2x}{g}} \qquad (1)$$

$$\text{ἢ} \qquad \left(t - \frac{x}{v}\right)^2 = \frac{2x}{g} \qquad (2)$$

$$\text{ἢ τέλος} \quad x^2 - 2v\left(t + \frac{v}{g}\right)x + v^2t^2 = 0.$$

Αἱ δὲ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι

$$v\left(t + \frac{v}{g}\right) \pm \sqrt{v^2\left(t + \frac{v}{g}\right)^2 - v^2t^2}$$

$$\text{ἢ} \qquad v\left(t + \frac{v}{g} \pm \sqrt{\frac{v}{g}\left(2t + \frac{v}{g}\right)}\right)$$

Αἱ δύο αὗται ῥίζαι εἶναι πραγματικαί· διότι ἡ ὑπόρριζος ποσότης εἶναι θετική· εἶναι δὲ θετικαί· διότι τὸ γινόμενον αὐτῶν v^2t^2 καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $2v\left(t + \frac{v}{g}\right)$ εἶναι ἀμφότερα θετικά.

Πρόδηλον δέ, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται μίαν μόνην λύσιν, ἣν εὐκόλως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν· αὕτη εἶναι ἡ ἑτέρα τῶν δύο ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος.

Ἀντικατεστήσαμεν τὴν ἐξίσωσιν (1) διὰ τῆς ἐξισώσεως (2), ἥτις ἰσοδυναμεῖ (152) καὶ πρὸς τὴν

$$t - \frac{x}{v} = -\sqrt{\frac{2x}{g}} \qquad (3)$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως εἶναι $v^2\,t^2$ ἡ μία τῶν ῥιζῶν τούτων εἶναι ἐλάσσων τοῦ vt, ἐν ᾧ ἡ ἄλλη εἶναι μείζων τοῦ vt. Ἡ ἐλάσσων ῥίζα ἡ οὖσα ἐλάσσων τοῦ vt ποιεῖ θετικὴν τὴν παράστασιν

$$t - \frac{x}{v}$$

καὶ ἐπομένως ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν (1), ἡ δὲ μείζων ἡ οὖσα μείζων τοῦ vt ποιεῖ ἀρνητικὴν τὴν παράστασιν

$$t-\frac{x}{v}$$

καὶ ἐπομένως ἐπαληθεύει οὐχὶ τὴν (1), ἀλλὰ τὴν (3) ἐξίσωσιν.

Τὸ βάθος ἄρα τοῦ φρέατος ἰσοῦται τῇ ἐλάσσονι ῥίζῃ τῶν δύο ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως (2) καὶ εἶναι τῆς μορφῆς

$$x=v\left(t+\frac{v}{g}-\sqrt{\frac{v}{g}\left(2t+\frac{v}{g}\right)}\right)$$

19) Εὑρεῖν τὰς πλευρὰς ὀρθογωνίου τριγώνου, γνωστῆς οὔσης τῆς περιμέτρου αὐτοῦ 2τ καὶ τῆς πλευρᾶς α τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτό.

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\begin{aligned} x+y+w&=2\tau \\ xy\quad&=2\alpha^2 \\ x^2+y^2&=w^2 \end{aligned}$$

Ἐκ τῆς πρώτης καὶ τῶν δύο τελευταίων λαμβάνομεν

$$x+y=2\tau-w$$

$$(x+y)^2=w^2+4\alpha^2$$

Ὅθεν $$w^2+4\alpha^2=(2\tau-w)^2$$

ἢ $$w=\frac{\tau^2-\alpha^2}{\tau}$$

τῆς ὑποτεινούσης w οὕτως ἐκφρασθείσης, πρὸς λογισμὸν τῶν πλευρῶν x καὶ y τῆς ὀρθῆς γωνίας, ὧν τὸ μὲν ἄθροισμα $2\tau-w$, τὸ δὲ γινόμενον $2\alpha^2$, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως

$$X^2-(2\tau-w)X)+2\alpha^2=0$$

Διερεύνησις. Ἵνα αἱ οὕτως εὑρισκόμεναι τιμαὶ τῶν πλευρῶν x, y, w ἦναι παραδεκταί, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ τιμαὶ αὗται νὰ ἦναι πραγματικαὶ θετικαί.

Ἡ τιμὴ τοῦ $w=\dfrac{\tau^2-\alpha^2}{\tau}$ εἶναι πάντοτε πραγματική· ἵνα δὲ ἦναι καὶ θετική· πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἦναι

$$\alpha<\tau$$

Αἱ δὲ τιμαὶ τοῦ x καὶ y πρέπει νὰ ἦναι ὡσαύτως πραγματικαὶ θετικαί. Καὶ ἵνα μὲν ἦναι πραγματικαί· πρέπει νὰ ἦναι

$$(2\tau-w)^2 \geqq 8\alpha^2$$

Ἐπειδὴ δὲ ἀφ' ἑτέρου ἡ τιμὴ τοῦ $w=\dfrac{\tau^2-\alpha^2}{\tau}$ εἶναι ἐλάσσων τοῦ τ, τὸ $2\tau-w$ εἶναι θετικὸν καὶ ἑπομένως ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ διὰ τῆς ἑπομένης

$$2\tau-w \geqq 2\alpha\sqrt{2}$$

ἢ

$$w \leqq 2(\tau-\alpha\sqrt{2})$$

Πληρουμένης δὲ τῆς συνθήκης ταύτης, αἱ τιμαὶ τοῦ x καὶ y εἶναι πραγματικαί· προσέτι δὲ ἐπειδὴ καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν $2\alpha^2$ εἶναι θετικὸν καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $2\alpha-w$ θετικόν, αἱ τιμαὶ αὗται εἶναι ἀμφότεραι θετικαί.

Ἀλλ' ἡ τελευταία ἀνισότης διὰ $w=\dfrac{\tau^2-\alpha^2}{\tau}$ γίνεται

$$\frac{\tau^2-\alpha^2}{\tau} \leqq 2(\tau-\alpha\sqrt{2})$$

ἢ

$$\alpha^2-2\alpha\tau\sqrt{2}+\tau^2 \geqq 0$$

Ἀλλὰ

$$\alpha^2-2\alpha\tau\sqrt{2}+\tau^2$$

εἶναι πρὸς τὸ α τριώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, οὗτινος αἱ ῥίζαι εἶναι

$$\tau(\sqrt{2}-1) \quad \text{καὶ} \quad \tau(\sqrt{2}+1)$$

Ἵνα δὲ μηδενίζηται ἢ ἦναι θετικόν, πρέπει νὰ ἦναι

$$\text{ἢ} \quad \alpha \leqq \tau(\sqrt{2}-1) \qquad \text{ἢ} \quad \alpha \geqq \tau(\sqrt{2}+1)$$

Ἀλλ' ἡ δευτέρα ἀνισότης $\alpha \geqq \tau(\sqrt{2}+1)$ εἶναι ἀσυμβίβαστος πρὸς τὴν ἀνισότητα $\alpha<\tau$, ἥτις σημαίνει, ὅτι w εἶναι θετικόν. Ὥστε, ἵνα ἦναι δυνατὸν τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ ἦναι

$$\alpha \leqq \tau(\sqrt{2}-1) \qquad \text{καὶ} \qquad \alpha<\tau$$

ἀλλ' ἐπειδὴ $\sqrt{2}-1<1$, ἐὰν $\alpha \leqq \tau(\sqrt{2}-1)$, εἶναι καὶ $\alpha<\tau$ καὶ ἑπομένως ἵνα ἦναι τὸ πρόβλημα δυνατόν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἦναι

$$\alpha \leqq \tau(\sqrt{2}-1)$$

Τῆς συνθήκης δὲ ταύτης πληρουμένης, τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται μίαν λύσιν. Ἐν δὲ τῇ περιπτώσει, καθ' ἣν

$$α=τ(\sqrt{2}-1),$$

εἶναι $x=y$ καὶ ἐπομένως τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

Ἐντεῦθεν δὲ συνάγομεν, ὅτι 1) ἐκ πάντων τῶν ἰσοπεριμέτρων ὀρθογωνίων τριγώνων τὸ ἔχον τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν εἶναι ἰσοσκελές· καὶ 2) ἐκ πάντων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων τῶν τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν ἐχόντων τὸ τὴν ἐλαχίστην περίμετρον ἔχον εἶναι ἰσοσκελές.

20) Εὑρεῖν τὰς πλευρὰς ὀρθογωνίου τριγώνου γνωστῆς οὔσης τῆς περιμέτρου αὐτοῦ 2τ καὶ γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν παραγομένων ἐκ τῆς ὅλης στροφῆς περὶ ἑκατέραν τῶν δύο καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ ἥμισυ σφαίρας ἀκτῖνος ρ.

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$x+y+w=2τ$$
$$xy(x+y)=2ρ^3$$
$$x^2+y^2=w^2$$

Ἐκ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας τῶν ἐξισώσεων τούτων λαμβάνομεν

$$x+y=2τ-w$$
$$xy=\frac{2ρ^3}{2τ-w}$$

Ἐκ δὲ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων λαμβάνομεν

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2τ-w)^2-\frac{4ρ^3}{2τ-w}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $x^2+y^2=w^2$, λαμβάνομεν

$$w^2=(2τ-w)^2-\frac{4ρ^3}{2τ-w}$$

ἢ
$$τw^2-3τ^2w+2τ^3-ρ^3=0 \qquad (1)$$

Ἡ δὲ ἐξίσωσις αὕτη ὁρίζει τὴν ὑποτείνουσαν w. Εὑρεθείσης δὲ τῆς ὑποτεινούσης, εὑρίσκονται καὶ αἱ πλευραὶ x καὶ y, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τὸ μὲν ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι $2τ-w$, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν $\frac{2ρ^3}{2τ-w}$· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$X^2-(2\tau-w)X+\frac{2\rho^3}{2\tau-w}=0 \qquad (2)$$

Διερεύνησις. Ἵνα σύστημά τι τιμῶν x, y, w οὕτως εὑρισκομένων λύῃ τὸ πρόβλημα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ τιμαὶ αὗται νὰ ἦναι πραγματικαὶ θετικαί.

Ἐν πρώτοις ἵνα ἦναι πραγματικαί, πρέπει νὰ ἦναι

$$(2\tau-w)^2 \geqq \frac{8\rho^3}{2\tau-w}$$

ἵνα ἦναι δὲ θετικαί, πρέπει νὰ ἦναι

$$2\tau-w>0$$

Τεθέντος δέ, ὅτι ἡ δευτέρα αὕτη συνθήκη πληροῦται, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς πρώτης ἀνισότητος ἐπὶ $2\tau-w$ καὶ οὕτως εὑρίσκομεν

$$(2\tau-w)^3 \geqq 8\rho^3$$

ἢ

$$2\tau-w \geqq 2\rho$$

ἢ καὶ

$$w \leqq 2(\tau-\rho)$$

καὶ ἐπειδὴ w πρέπει νὰ ἦναι θετικόν, πρέπει τέλος νὰ ἔχωμεν

$$0<w\leqq 2(\tau-\rho)$$

Ἐὰν δὲ ἀφ' ἑτέρου ἦναι $w\leqq 2(\tau-\rho)$, κατὰ μείζονα λόγον εἶναι καὶ $w<2\tau$ καὶ οὕτως ἡ συνθήκη

$$2\tau-w>0$$

πληροῦται· ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν λύσεων τοῦ προβλήματος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ριζῶν τῶν ἐπαληθευουσῶν τὴν ἐξίσωσιν (2) καὶ πληρουσῶν τὰς συνθήκας

$$0<w\leqq 2(\tau-\rho)$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν εὐκόλως, ὅτι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι πάντοτε πραγματικαί· προσέτι δέ, ἐπειδὴ $\rho<\tau$, εἶναι καὶ θετικαί.

Ἵνα ἴδωμεν δέ, πόσαι τῶν ριζῶν τούτων περιλαμβάνονται μεταξὺ 0 καὶ $2(\tau-\rho)$, γράψωμεν

$$K=\tau w^2-2\tau^2 w+2\tau^3-\rho^3$$

καὶ ἐξετάσωμεν τὰς τιμὰς τοῦ K διὰ $w=0$ καὶ διὰ $w=2(\tau-\rho)$·

ἡ μὲν πρώτη τιμὴ εἶναι θετική, ἡ δὲ δευτέρα ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ

$$-(\rho^2-4\tau\rho+3\tau^2)$$

ἢ τοῦ $$-[\rho-\tau(2-\sqrt{2})].[\rho-\tau(2+\sqrt{2})]$$

Οὕτω δὲ ἀγόμεθα νὰ διακρινώμεν τρεῖς περιπτώσεις, καθ' ὅσον ρ περιλαμβάνεται ἢ μεταξὺ 0 καὶ $\tau(2-\sqrt{2})$, ἢ μεταξὺ $\tau(2-\sqrt{2})$ καὶ τ, ἢ καθ' ὅσον $\rho>\tau$.

1η) $0<\rho<\tau(2-\sqrt{2})$. Τότε διὰ $w=2(\tau-\rho)$ τὸ Κ εἶναι ἀρνητικὸν καὶ ἑπομένως ἡ μία μὲν τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως (1) περιλαμβάνεται μεταξὺ 0 καὶ $2(\tau-\rho)$, ἡ δὲ ἄλλη εἶναι μείζων τοῦ $2(\tau-\rho)$ ἡ μὲν πρώτη παραδεκτή, ἡ δὲ δευτέρα ἀπορριπτέα καὶ οὕτω τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται μίαν λύσιν. Τὴν δὲ λύσιν ταύτην εὑρίσκομεν λαμβάνοντες διὰ μὲν w τὴν ἐλάσσονα ρίζαν τῆς ἐξισώσεως (1), διὰ δὲ x καὶ y τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως (2), ὅταν ἐν αὐτῇ ἀντικαταστήσωμεν w διὰ τῆς ἐλάσσονος ρίζης τῆς ἐξισώσεως (1).

2α) $\tau(2-\sqrt{2})<\rho<\tau$. Τότε διὰ $w=2(\tau-\rho)$ τὸ Κ εἶναι θετικὸν καὶ ἑπομένως αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1), ἢ περιλαμβάνονται ἀμφότεραι μεταξὺ 0 καὶ $2(\tau-\rho)$, ἢ ἑκατέρα αὐτῶν εἶναι μείζων τοῦ $2(\tau-\rho)$.

Ἵνα δὲ αἱ δύο αὗται ρίζαι περιλαμβάνωνται μεταξὺ 0 καὶ $2(\tau-\rho)$ πρέπει τὸ ἡμιάθροισμα $\frac{\tau}{2}$ τῶν ριζῶν τούτων νὰ ἦναι ἔλασσον τοῦ $2(\tau-\rho)$

ἤτοι πρέπει νὰ ἦναι $$3\tau<4(\tau-\rho)$$

ἢ $$\rho<\frac{\tau}{4}$$

ἥτις συνθήκη εἶναι ἀσυμβίβαστος πρὸς τὴν ὑπόθεσιν

$$\rho>\tau(2-\sqrt{2})$$

Ἐν τῇ περιπτώσει ἄρα ταύτῃ αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι μείζονες τοῦ $2(\tau-\rho)$· ἀμφότεραι δὲ ἀπορριπτέαι.

3η) $\rho>\tau$. Εἴδομεν ἤδη, ὅτι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἄρα ἕπεται, ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατὸν ἐφ' ὅσον $$\rho\leq\tau(2-\sqrt{2})$$

καὶ ἐπιδέχεται μίαν μόνην λύσιν. Ἵνα εὕρωμεν δὲ τὴν λύσιν ταύτην, πρέπει νὰ λάβωμεν διὰ w τὴν ἐλάσσονα τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἐν δὲ τῇ περιπτώσει, καθ' ἣν

$$\rho=\tau(2-\sqrt{2}),$$

ἡ ἐλάσσων ρίζα τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι $2(\tau-\rho)$· διὰ τὴν τιμὴν δὲ ταύτην τεθεῖσαν ἀντὶ τοῦ w ἐν τῇ ἐξισώσει (2) αἱ δύο ρίζαι αὐτῆς εἶναι ἴσαι καὶ ἑπομένως τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές. Ἡ δὲ λοιπὴ ρίζα τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι μείζων τοῦ $2(\tau-\rho)$ καὶ ἑπομένως ἀπορριπτέα.

21) Ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ δύο φωτεινῶν σημείων Α καὶ Β εὑρεῖν σημεῖον ἐξ ἴσου φωτιζόμενον ὑπ' αὐτῶν.

A B

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου, πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν ἑπόμενον φυσικὸν νόμον·

Τὸ ποσὸν τοῦ φωτὸς τὸ δεχόμενον ὑπὸ ἐπιφανείας τινὸς εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς ἀπὸ τοῦ φωτεινοῦ σημείου.

Κατὰ δὲ τὸν νόμον τοῦτον, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ λ τὸ ποσὸν τοῦ φωτὸς τὸ δεχόμενον ὑπὸ ἐπιφανείας τινὸς ἔκ τινος φωτεινοῦ σημείου ἐξ ἀποστάσεως ἑνὸς μέτρου καὶ διὰ y τὸ ποσὸν τοῦ φωτὸς τὸ δεχόμενον ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας ἐκ τοῦ αὐτοῦ φωτεινοῦ σημείου ἐξ ἀποστάσεως x μέτρων, ἔχομεν

$$y:\lambda=1:x^2 \quad \text{ἢ} \quad y=\frac{\lambda}{x^2}$$

Τὸ δὲ ζητούμενον σημεῖον Γ δύναται νὰ ὑποτεθῇ, ὅτι εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ἢ πέραν τοῦ Α κατὰ τὴν φορὰν ΒΑ ἢ μεταξὺ τοῦ Α καὶ Β ἢ πέραν τοῦ Β κατὰ τὴν φορὰν ΑΒ. Ἐὰν δὲ διὰ μὲν τοῦ x παραστήσωμεν τὴν ἀπόστασιν τοῦ Γ ἀπὸ τοῦ Α, διὰ δὲ α^2 τὸ ποσὸν τοῦ φωτὸς τὸ δεχόμενον ἐκ τοῦ Α ὑπὸ τοῦ τὴν ἀπόστασιν 1 ἀπέχοντος ἀπ' αὐτοῦ σημείου, διὰ δὲ β^2 τὸ ὅμοιον ποσὸν τοῦ φωτεινοῦ σημείου Β· προσέτι δὲ διὰ δ τὴν ἀπόστασιν $\overline{AB}$ τῶν δύο σημείων Α καὶ Β, εὑρίσκομεν κατὰ τὰς τρεῖς ταύτας ὑποθέσεις ἐξισοῦντες τὰ ποσὰ τοῦ φωτὸς τὰ δεχόμενα ἐξ ἴσου ὑπὸ τοῦ φωτιζομένου σημείου τὰς τρεῖς ἐξισώσεις

$$\frac{\alpha^2}{x^2}=\frac{\beta^2}{(\delta+x)^2},\quad \frac{\alpha^2}{x^2}=\frac{\beta^2}{(\delta-x)^2},\quad \frac{\alpha^2}{x^2}=\frac{\beta^2}{(x-\delta)^2}\quad (x>0)$$

Αἱ δὲ τρεῖς αὗται ἐξισώσεις δύνανται νὰ συμπεριληφθῶσιν εἰς μίαν, ἐὰν τὰς ἀποστάσεις τῶν πέραν τοῦ Α κατὰ τὴν φορὰν ΒΑ κειμένων σημείων παραστήσωμεν δι' ἀρνητικῶν ἀριθμῶν· διότι τότε ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει πρέπει νὰ τεθῇ $-x$ ἀντὶ x καὶ ἑπομένως ἡ πρώτη ἐξίσωσις τρέπεται εἰς τὴν δευτέραν ἢ τὴν τρίτην (διότι $(\delta-x)^2=(x-\delta)^2$). Ὥστε ὡς ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὴν ἑπομένην

$$\frac{\alpha^2}{x^2}=\frac{\beta^2}{(\delta-x)^2} \qquad (1)$$

καὶ ἐὰν μὲν $x<0$, τὸ ζητούμενον σημεῖον κεῖται πέραν τοῦ Α κατὰ τὴν φορὰν ΒΑ· ἐὰν δὲ $0<x<\delta$, μεταξὺ Α καὶ Β· ἐὰν δὲ τέλος $x>\delta$, πέραν τοῦ Β κατὰ τὴν φορὰν ΑΒ.

Ἐὰν νῦν ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως (1), προκύπτουσιν αἱ δύο ἰσοδύναμοι πρὸς αὐτὴν ἐξισώσεις

$$\frac{\alpha}{x}=+\frac{\beta}{\delta-x} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha}{x}=-\frac{\beta}{\delta-x}$$

ἐξ ὧν εὑρίσκομεν

$$x=\delta.\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad \text{καὶ} \quad x=\delta.\frac{\alpha}{\alpha-\beta}$$

Διερεύνησις. Ἡ πρώτη τῶν λύσεων τούτων εἶναι προφανῶς πάντοτε θετικὴ καὶ ἐλάσσων τοῦ δ· διότι $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}<1$.

Ὥστε ὑπάρχει πάντοτε μεταξὺ τῶν φωτεινῶν σημείων Α καὶ Β σημεῖόν τι ἐξ ἴσου φωτιζόμενον ὑπ' αὐτῶν· τὸ δὲ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΑΒ, ἐὰν τὰ δύο φῶτα ἦναι ἴσα τὴν ἔντασιν, ἤτοι ἐὰν $\alpha=\beta$· εἰ δὲ μή, τὸ σημεῖον εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὸ ἀσθενέστερον φῶς· διότι, ἐὰν $\alpha>\beta$, εἶναι καὶ $2\alpha>\alpha+\beta$ καὶ ἑπομένως τὸ ἐφ' ὃ πολλαπλασιάζεται ὁ δ κλάσμα εἶναι μεῖζον τοῦ $\frac{\alpha}{2\alpha}$ ἤτοι τοῦ $\frac{1}{2}$; ὥστε $x>\frac{1}{2}\delta$· ἐὰν δὲ $\alpha<\beta$, εἶναι καὶ $2\alpha<\alpha+\beta$ καὶ ἑπομένως $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}<\frac{1}{2}$, ὥστε $x<\frac{1}{2}\delta$.

Ἡ δὲ δευτέρα λύσις παραδεκτὴ μόνον, ὅταν τὰ φῶτα ἦναι ἄνισα πρὸς ἄλληλα τὴν ἔντασιν· διότι, ἐὰν $\alpha=\beta$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\alpha\delta=0$ καὶ ἑπομένως ὁ ἄγνωστος x δὲν ὁρίζεται.

Καὶ ἐὰν μὲν $\beta > \alpha$, ἡ λύσις εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἑπομένως ὑπάρχει σημεῖον ἐξ ἴσου φωτιζόμενον πέραν τοῦ Α κατὰ τὴν φορὰν ΒΑ· ἐὰν δὲ $\alpha > \beta$, ἡ λύσις εἶναι θετικὴ καὶ μείζων τοῦ δ· διότι τὸ ἐφ' ὃ πολλαπλασιάζεται ὁ δ κλάσμα εἶναι μεῖζον τῆς μονάδος 1 καὶ ἑπομένως ὑπάρχει τότε σημεῖον ἐξ ἴσου φωτιζόμενον πέραν τοῦ Β κατὰ τὴν φορὰν ΑΒ. Ὥστε ἐν συνόλῳ ὑπάρχει (ἐξαιρέσει τοῦ μεταξὺ τῶν δύο φώτων κειμένου σημείου) καὶ δεύτερον σημεῖον ἐξ ἴσου φωτιζόμενον καὶ κείμενον πλησιέστερον πρὸς τὸ ἀσθενέστερον φῶς.

Ἐὰν δὲ τὰ φῶτα, ἄνισα ὄντα τὴν ἔντασιν πρὸς ἄλληλα, τείνωσι νὰ καταστῶσιν ἴσα πρὸς ἄλληλα, ἡ δευτέρα λύσις δίδει τιμὴν τοῦ x ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον αὐξανομένην καὶ δυναμένην νὰ ὑπερβῇ πάντα δοθέντα ἀριθμόν· τουτέστι τὸ σημεῖον τὸ ἐκτὸς τῆς ΑΒ ὑπάρχον ἀπομακρύνεται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον τῶν φωτεινῶν σημείων καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τούτων δύναται νὰ ὑπερβῇ πᾶσαν δοθεῖσαν ἀπόστασιν· ἀπέχει δὲ ἀπ' αὐτῶν τόσῳ μείζονα ἀπόστασιν, ὅσῳ ἐλάσσων ἡ διαφορὰ τῆς ἐντάσεως τῶν φώτων.

Ἐὰν δὲ τὸ ἕτερον τῶν δύο φώτων, ἔστω τὸ Β, γίνεται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἀσθενέστερον, ἀμφότερα τὰ ἐξ ἴσου φωτιζόμενα σημεῖα πλησιάζουσιν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον πρὸς τὸ σημεῖον αὐτὸ Β· διότι ὅσῳ ἐλάσσων ἡ ἔντασις β, τόσῳ ἐγγύτεραι αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀμφότεραι πρὸς τὸν ἀριθμὸν δ.

22) Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς γνωστῶν ὄντων τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν α καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν κύβων αὐτῶν κ.

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι αἱ ἑπόμεναι

$$x+y=\alpha$$
$$x^3+y^3=\kappa$$

Ἐὰν ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς πρώτης εἰς τὸν κύβον καὶ ἀπὸ τῆς οὕτω προκυπτούσης ἀφαιρέσωμεν τὴν δευτέραν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$3x^2y+3xy^2=\alpha^3-\kappa$$

ἢ

$$3xy(x+y)=\alpha^3-\kappa$$

ἤ, ἐπειδὴ $x+y=\alpha$,

$$3\alpha xy=\alpha^3-\kappa$$

ἢ καὶ

$$xy=\frac{\alpha^3-\kappa}{3\alpha}$$

Οὕτω δὲ ἀνάγεται ἡ λύσις τοῦ προβλήματος εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως

$$X^2 - \alpha X = \frac{\varkappa - \alpha^3}{3\alpha}$$

καὶ ἑπομένως οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\varkappa - \alpha^3}{3\alpha}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\varkappa - \alpha^3}{3\alpha}}$$

Διερεύνησις. Ἐὰν γράψωμεν τὴν ὑπόρριζον ποσότητα ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{4\varkappa}{3\alpha} - \frac{\alpha^2}{3}$$

βλέπομεν, ὅτι, ἵνα οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοὶ ἦναι πραγματικοί, πρέπει οἱ δύο ἀριθμοὶ α καὶ κ νὰ ἦναι ὁμοειδεῖς καὶ $4\varkappa \geqq \alpha^3$. Ἐντεῦθεν δὲ συνάγομεν ὅτι, ἐὰν ἀριθμὸς μερισθῇ εἰς δύο μέρη, τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν μερῶν τούτων εἶναι τοὐλάχιστον ἴσον πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ κύβου τοῦ ἀριθμοῦ. Τοῦτο δὲ τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν δύο μερῶν γίνεται, ὅταν αὐτὰ ἦναι ἴσα πρὸς ἄλληλα.

23) Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς γνωστῶν ὄντων τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν α καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετάρτων δυνάμεων αὐτῶν τ.

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$x + y = \alpha$$
$$x^4 + y^4 = \tau$$

Δι' ὑψώσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν $x^2 + y^2 + 2xy = \alpha^2$

τοῦτο δὲ πράττοντες καὶ ἐπὶ ταύτην εὑρίσκομεν

$$x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 4x^3y + 4xy^3 = \alpha^4$$

ἐξ ἧς ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὴν δευτέραν

$$6x^2y^2 + 4xy(x^2 + y^2) = \alpha^4 - \tau$$

ἤ, ἐπειδὴ $\quad x^2 + y^2 = \alpha^2 - 2xy,$

$$(xy)^2 - 2\alpha^2(xy) = \frac{\tau - \alpha^4}{2}$$

λύοντες δὲ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην πρὸς xy εὑρίσκομεν οὕτω τὸ γινόμενον xy τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν· ἔχοντες δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα $x+y=\alpha$ καὶ τὸ γινόμενον

$$xy=\left(\alpha^2-\sqrt{\frac{\alpha^4+\tau}{2}}\right) \quad \text{ἢ} \quad xy=\left(\alpha^2+\sqrt{\frac{\alpha^4+\tau}{2}}\right)$$

εὑρίσκομεν διὰ δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως

$$\frac{\alpha}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3\alpha^2+\sqrt{8\tau+8\alpha^4}}$$

ἢ

$$\frac{\alpha}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3\alpha^2-\sqrt{8\tau+8\alpha^4}}$$

Διερεύνησις. Ἡ πρώτη λύσις ἀποτελεῖται ἐκ πραγματικῶν ἀριθμῶν. ἐὰν $\sqrt{8\tau+8\alpha^4}\geqq 3\alpha^2$ ἢ ἐὰν $8\tau+8\alpha^4\geqq 9\alpha^4$, ἤτοι ἐὰν $0<\tau\geqq\frac{\alpha^4}{8}$.

Ἡ δὲ δευτέρα λύσις εἶναι μιγάδες ἀριθμοί. Ἐντεῦθεν δὲ συνάγομεν, ὅτι, ἐὰν ἀριθμὸς μερισθῇ εἰς δύο μέρη, τὸ ἄθροισμα τῶν τετάρτων δυνάμεων αὐτῶν εἶναι τοὐλάχιστον ἴσον τῷ ὀγδόῳ τῆς τετάρτης δυνάμεως τοῦ ἀριθμοῦ.

* Προβλήματα

Περὶ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου.

154. Ἡ ἀμεσωτέρα μέθοδος πρὸς εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς x, δι' ἃς συνάρτησίς τις τῆς μεταβλητῆς ταύτης γίνεται μέγιστον ἢ ἐλάχιστον συνίσταται ἐν τῇ παρακολουθήσει τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως, ὁπόταν αὐξάνηται ἡ μεταβλητὴ x ἔν τινι διαστήματι. Ἐν γένει δὲ ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν συναρτήσεώς τινος εἶναι ἔργον τῆς Ἀνωτέρας Ἀλγέβρας (ἰδὲ Ἀνωτέραν Ἄλγεβράν μου).

Ἀλλὰ ζητήματά τινα τοῦ μεγίστου ἢ τοῦ ἐλαχίστου δύνανται νὰ λυθῶσι καὶ δι' ἐμμέσου τινὸς μεθόδου. Κατὰ τὴν ἔμμεσον ταύτην μέθοδον ἀναζητεῖται πρῶτον ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς x, δι' ἣν ἡ συνάρτησις αὐτῆς λαμβάνει ὡρισμένην τινὰ τιμὴν τ· εἶτα δὲ διερευνᾶται ἡ λύσις ἢ τιμὴ αὕτη τ καὶ εὑρίσκεται, μεταξὺ ὁποίων ὁρίων πρέπει νὰ περιλαμβάνηται ἡ τιμὴ τ τῆς συναρτήσεως, ἵνα ἡ εὑρισκομένη τιμὴ τῆς μεταβλητῆς x ἦναι παραδεκτή. Οὕτω δὲ εὑρίσκονται ἐμμέσως αἱ τιμαὶ τοῦ μεγίστου ἢ τοῦ ἐλαχίστου τῆς συναρτήσεως καὶ αἱ ἀντίστοιχοι πρὸς αὐτὰς τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς.

Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν ἀνωτέρω εἰρημένων ἕπονται προβλήματά τινα.

1) Εὑρεῖν τὰ ὅρια, μεταξὺ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ μεταβάλληται τὸ γινόμενον δύο παραγόντων, ἵνα τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἦναι σταθερὸν καὶ ἴσον τῷ ἀριθμῷ α.

Ἄμεσος λύσις. Ἔστω x ὁ ἕτερος τῶν δύο παραγόντων· τότε ὁ ἕτερος εἶναι $\alpha - x$· τὸ δὲ γινόμενον, ἤτοι ἡ πρὸς σπουδὴν συνάρτησις εἶναι

$$x(\alpha - x)$$

ἢ

$$-x^2 + \alpha x$$

Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι τριώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἐν ᾧ ὁ γνωστὸς σταθερὸς ὅρος εἶναι 0· τοῦτο δὲ οὐδαμῶς παραβλάπτει τὰ συμπεράσματα τῶν θεωριῶν τοῦ ἐδ. 151. Ὁπόταν ἡ μεταβλητὴ x μεταβάλληται ἀπὸ $-\infty$ εἰς $+\frac{\alpha}{2}$, τὸ ἀνωτέρω γινόμενον αὐξάνεται ἀπὸ $-\infty$ εἰς $\frac{\alpha^2}{4}$· ὁπόταν δὲ ἡ x αὐξάνηται ἀπὸ $\frac{\alpha}{2}$ εἰς $+\infty$, τὸ γινόμενον τοῦτο ἐλαττοῦται ἀπὸ $\frac{\alpha^2}{4}$ εἰς $-\infty$. Τὸ γινόμενον ἄρα δὲν ἔχει ἐλάχιστον· εἶναι μέγιστον, ὅταν $x = \frac{\alpha}{2}$· διὰ δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x καὶ τὸ $\alpha - x = \frac{\alpha}{2}$.

Ὥστε τὸ γινόμενον δύο μεταβλητῶν παραγόντων, ὧν τὸ ἄθροισμα σταθερὰ ποσότης, εἶναι μέγιστον, ὅταν οἱ παράγοντες οὗτοι ἦναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἔμμεσος λύσις. Ἀντὶ τῆς ἀμέσου σπουδῆς, ὡς ἀνωτέρω, τῶν τιμῶν τοῦ γινομένου

$$x(\alpha - x),$$

ὁπόταν ἡ μεταβλητὴ x μεταβάλληται αὐξανομένη ἀπὸ $-\infty$ εἰς $+\infty$, δυνάμεθα νὰ ζητήσωμεν, ὁποίαν τιμὴν πρέπει νὰ λάβῃ ἡ x, ἵνα τὸ γινόμενον ἔχῃ δεδομένην τιμὴν τ· διὰ δὲ τῆς διερευνήσεως τῆς λύσεως ταύτης ἀνευρίσκομεν οὕτω, μεταξὺ ὁποίων ὁρίων ἡ τιμὴ τ τοῦ γινομένου δύναται νὰ μεταβάλληται. Πρὸς εὕρεσιν τῆς x ἔχομεν ἄρα τὴν ἐξίσωσιν

$$x(\alpha-x)=\tau$$

ἢ

$$x^2-\alpha x+\tau=0$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἔχουσιν ἄθροισμα α, αὗται εἶναι οἱ δύο παράγοντες τοῦ γινομένου. Ἵνα ἦναι δὲ πραγματικαὶ αἱ ῥίζαι αὗται, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἦναι

$$\alpha^2-4\tau \geqq 0$$

ἢ

$$\tau \leqq \frac{\alpha^2}{4}$$

ὥστε τὸ γινόμενον δύναται νὰ λαμβάνῃ πάσας τὰς τιμὰς τὰς περιλαμβανομένας μεταξὺ $-\infty$ καὶ $\frac{\alpha^2}{4}$. Οὐδὲν ὑπάρχει ἐλάχιστον· τὸ δὲ μέγιστον εἶναι $\frac{\alpha^2}{4}$. Ὅταν δὲ $\tau=\frac{\alpha^2}{4}$, αἱ δύο ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· τὸ γινόμενον ἄρα εἶναι μέγιστον, ὅταν οἱ δύο παράγοντες αὐτοῦ ἦναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους.

ΣΗΜ. Ἐνίοτε ἀντὶ νὰ λαμβάνωνται ὅρια ἀπὸ $-\infty$ εἰς $+\infty$, ἐν οἷς μεταβάλλεται αὐξανομένη ἡ μεταβλητή, δύνανται νὰ λαμβάνωνται τοιαῦτα ἀπὸ ἀριθμοῦ τινος ὡρισμένου καὶ πεπερασμένου μ μέχρις ἀριθμοῦ τινος ὡρισμένου καὶ πεπερασμένου ν. Τότε δὲ ἀρκεῖ νὰ διατάσσωνται κατὰ τάξιν αὐξανομένων μεγεθῶν οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ μ, ν καὶ ὁ δι' ὃν ἡ συνάρτησις εἶναι μέγιστον ἢ ἐλάχιστον. Π χ. ἔστω πρὸς σπουδὴν ἡ μεταβολὴ τοῦ γινομένου $x(12-x)$, ὁπόταν ἡ μεταβλητὴ x αὐξάνηται εἴτε ἀπὸ -5 εἰς $+2$, εἴτε ἀπὸ 3 εἰς 7, εἴτε ἀπὸ 8 εἰς 9, τὸ ἡμιάθροισμα τῶν παραγόντων εἶναι 6, ὅπερ εἶναι μεῖζον μὲν τοῦ ἀνωτέρου ὁρίου τοῦ πρώτου διαστήματος, περιλαμβάνεται δὲ μεταξὺ τῶν ὁρίων τοῦ δευτέρου διαστήματος καὶ εἶναι ἔλασσον τοῦ κατωτέρου ὁρίου τοῦ τρίτου διαστήματος. Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἀμέσως τὸν ἑξῆς πίνακα δεικνύοντα τὴν μεταβολὴν τοῦ γινομένου ἐν ἑκάστῳ τῶν τριῶν διαστημάτων.

x	— 5. 2
$x(12-x)$	—85. . . . . αὐξάνεται 20

x	3. . . . . 6. 7
$x(12-x)$	27. . . . αὐξ. . . . . 36. . . . ἐλατ. . . . 35

x	8 9
$x(12-x)$	32 . . . . ἐλαττοῦται 27

2) Εὑρεῖν, μεταξὺ ὁποίων ὁρίων δύναται νὰ μεταβάλληται τὸ ἄθροισμα δύο παραγόντων γινομένου σταθεροῦ ἴσου τῷ ἀριθμῷ μ.

Ἄμεσος μέθοδος. Ἔστω x ὁ ἕτερος τῶν δύο παραγόντων· τότε ὁ ἕτερος εἶναι $\frac{\mu}{x}$ καὶ ἡ πρὸς σπουδὴν συνάρτησις εἶναι $x+\frac{\mu}{x}$, ἣν παραστήσωμεν διὰ y, ἤτοι

$$y=x+\frac{\mu}{x}$$

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον $\mu>0$ ἢ $\mu<0$.

1ον) $\mu<0$. Ἐπειδὴ μ εἶναι ἀρνητικόν, ὅταν x αὐξάνηται ἀπὸ $-\infty$ εἰς $+\infty$, οἱ δύο προσθετέοι τοῦ ἀθροίσματος αὐξάνονται ἀμφότεροι καὶ ἑπομένως ἡ τιμὴ τοῦ y αὐξάνεται ἀπαύστως. Ὁπόταν δὲ x αὐξάνηται ἀπὸ $-\infty$ εἰς 0, ἡ συνάρτησις y αὐξάνεται ἀπὸ $-\infty$ εἰς $+\infty$ · ὁπόταν δὲ x ὑπερβῇ τὴν τιμὴν 0, ἡ τιμὴ τοῦ y, ἥτις ἦτο θετική, γίνεται ἀρνητικὴ μεταβαλλομένη ἀποτόμως ἀπὸ $+\infty$ εἰς $-\infty$ · ὁπόταν δὲ x αὐξάνηται ἀπὸ 0 εἰς $+\infty$ ἡ τιμὴ τοῦ y αὐξάνεται ἀπὸ $-\infty$ εἰς $+\infty$. Κατὰ ταῦτα ὁπόταν x αὐξάνηται ἀπὸ $-\infty$ εἰς $+\infty$, ἡ συνάρτησις y διέρχεται δὶς διά τινος τιμῆς δεδομένης. Ἡ πορεία τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως y δείκνυται, ὡς ἑξῆς φαίνεται·

x	$-\infty$ . . . . 0 . . . . $+\infty$
y	$-\infty$ . . . . . αὐξ. . . . . $+\infty$ | $-\infty$ . . . . . αὐξ. . . . . $+\infty$

ΣΗΜ. Ἐὰν δοθῶσι τῷ x διαδοχικῶς αἱ δύο τιμαὶ

$$x' \quad \text{καὶ} \quad \frac{\mu}{x'}$$

ὧν τὸ γινόμενον μ, αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως $x+\frac{\mu}{x}$ εἶναι

$$x'+\frac{\mu}{x'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\mu}{x'}+x'$$

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι αἱ δύο τιμαὶ τοῦ x, δι' ἃς ἡ συνάρτησις y λαμβάνει δεδομένην τινὰ τιμήν, εἶναι οἱ δύο παράγοντες, ὧν τὸ γινόμενον μ· ὥστε

Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο παραγόντων ἀρνητικοῦ γινομένου δύναται νὰ λάβῃ πάσας τὰς τιμὰς τὰς περιλαμβανομένας μεταξὺ $-\infty$ καὶ $+\infty$· πρὸς πᾶσαν δὲ τιμὴν τοῦ ἀθροίσματος τούτου ἀντιστοιχεῖ ἓν μόνον σύστημα τιμῶν τῶν δύο παραγόντων τούτων.

2α). $\mu>0$. Ἐὰν μ ἦναι θετικόν, ὅταν x αὐξάνηται, ὁ μὲν πρῶτος ὅρος τοῦ ἀθροίσματος αὐξάνεται, ὁ δὲ δεύτερος ἐλαττοῦται καὶ ἑπομένως δὲν δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν ἀμέσως τὴν μεταβολὴν τοῦ ἀθροίσματος. Ἐν τῇ περιπτώσει δὲ ταύτῃ ἡ ἄμεσος σπουδὴ τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως, ὅταν x μεταβάλληται ἀπὸ $-\infty$ εἰς $+\infty$, δὲν δύναται νὰ γίνηται διὰ τῶν μεθόδων, ὧν ἐγένετο μέχρι τοῦδε χρῆσις.

Μέθοδος ἔμμεσος. Ἀλλ' οἱοσδήποτε καὶ ἂν ἦναι ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς μ, δυνάμεθα νὰ λύσωμεν ἁπλούστατα τὸ προταθὲν πρόβλημα διὰ τῆς ἐμμέσου μεθόδου. Ἀναζητοῦμεν, ὁποίας τιμὰς πρέπει νὰ ἔχωσιν οἱ δύο παράγοντες τοῦ γινομένου μ, ἵνα τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσῶται τῷ πραγματικῷ ἀριθμῷ α. Αἱ δὲ τιμαὶ αὗται εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$x^2-\alpha x+\mu=0$$

αἵτινες εἶναι πραγματικαί, ἐὰν

$$\alpha^2 \geqq 4\mu$$

Καὶ ἐὰν μὲν $\mu<0$, ἡ συνθήκη αὕτη πληροῦται πάντοτε, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ α. Οὕτω δὲ βλέπομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο παραγόντων γινομένου σταθεροῦ καὶ ἀρνητικοῦ δύναται νὰ λάβῃ πάσας τὰς τιμὰς τὰς περιλαμβανομένας μεταξὺ $-\infty$ καὶ $+\infty$· πρὸς πᾶσαν δὲ τιμὴν τοῦ ἀθροίσματος τούτου ἀντιστοιχεῖ ἓν σύστημα τιμῶν τῶν δύο τούτων παραγόντων.

Ἐὰν δὲ μ ἦναι θετικόν, ἡ ἀνισότης

$$\alpha^2 \geqq 4\mu$$

ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν ἀνισότητα

$$(\alpha+2\sqrt{\mu}).\ (\alpha-2\sqrt{\mu}) \geqq 0$$

ἥτις ἀληθεύει μόνον, ἐφ' ὅσον

$$\text{ἢ} \qquad \alpha \leqq -2\sqrt{\mu}$$

$$\text{ἢ} \qquad \alpha \geqq +2\sqrt{\mu}$$

Ὅθεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο παραγόντων γινομένου σταθεροῦ ἴσου τῷ θετικῷ ἀριθμῷ μ οὐδεμίαν δύναται νὰ λάβῃ τιμὴν περιλαμβανομένην μεταξὺ

$$-2\sqrt{\mu} \quad \text{καὶ} \quad +2\sqrt{\mu}$$

δύναται δ' ὅμως νὰ λάβῃ δύο σειρὰς τιμῶν περιλαμβανομένων τῶν μὲν μεταξὺ $-\infty$ καὶ $-2\sqrt{\mu}$ καὶ ἐχουσῶν μέγιστον $-2\sqrt{\mu}$, τῶν δὲ μεταξὺ $+2\sqrt{\mu}$ καὶ $+\infty$ καὶ ἐχουσῶν ἐλάχιστον $+2\sqrt{\mu}$. Ὁπόταν δὲ τὸ ἄθροισμα ἦναι μέγιστον $-2\sqrt{\mu}$, οἱ δύο παράγοντες εἶναι ἴσοι ἑκάτερος τῷ $-\sqrt{\mu}$· ὁπόταν δὲ τὸ ἄθροισμα ἦναι ἐλάχιστον $+2\sqrt{\mu}$, οἱ δύο παράγοντες εἶναι ἴσοι ἑκάτερος τῷ $+\sqrt{\mu}$.

Ἡ ἔμμεσος σπουδὴ τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως y καταφαίνεται ἐν τοῖς ἑπομένοις πίναξιν

$$\begin{array}{c|l} x & -\infty \ldots\ldots -\sqrt{\mu}.\ldots 0 \ldots + \sqrt{\mu}.\ldots\ldots +\infty \\ y & -\infty \ldots\ldots -2\sqrt{\mu}.\ldots \infty \ldots +2\sqrt{\mu}.\ldots\ldots +\infty \end{array}$$

$$\begin{array}{c|l} x & -\infty \ldots\ldots -\sqrt{\mu}.\ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots + \sqrt{\mu}.\ldots\ldots +\infty \\ y & -\infty\ .\text{αὔξ.}\,.\,-2\sqrt{\mu}\ .\text{ἐλάτ.}-\infty \mid +\infty\ .\text{ἐλάτ.}+2\sqrt{\mu}\ .\text{αὔξ.}\,.\,+\infty \end{array}$$

Παρατηρητέον δέ, ὅτι ἡ τιμὴ μέγιστον $-2\sqrt{\mu}$ τῆς συναρτήσεως y εἶναι ἐλάσσων τῆς τιμῆς ἐλάχιστον $+2\sqrt{\mu}$. Τοῦτο δὲ οὐδεμίαν πρέπει νὰ παράσχῃ ἔκπληξιν· διότι ἐνταῦθα δὲν πρόκειται οὔτε περὶ τοῦ ἀπολύτως μεγίστου οὔτε περὶ τοῦ ἀπολύτως ἐλαχίστου. Ὅταν λέγωμεν, ὅτι διὰ $x=-\sqrt{\mu}$ ἡ συνάρτησις y διέρχεται διὰ τοῦ μεγίστου $-2\sqrt{\mu}$, τοῦτο σημαίνει, ὅτι, ἐὰν x αὐξάνηται ἀπὸ τιμῆς τινος μικρόν τι ἐλάσσονος τοῦ $-\sqrt{\mu}$ μέχρι τῆς τιμῆς $-\sqrt{\mu}$, ἡ συνάρτησις y αὐξάνεται· ἐν ᾧ, ἐὰν x αὐξάνηται ἀπὸ $-\sqrt{\mu}$ μέχρι τιμῆς τινος μικρόν τι μείζονος ταύτης, ἡ συνάρτησις y ἐλαττοῦται. Ὁμοίως ὅταν λέγωμεν, ὅτι διὰ $x=+\sqrt{\mu}$ ἡ συνάρτησις y διέρχεται διὰ τοῦ ἐλαχίστου $+2\sqrt{\mu}$, τοῦτο σημαίνει, ὅτι, ἐὰν x αὐξάνηται ἀπό τινος τιμῆς μικρόν τι ἐλάσσονος τοῦ $+\sqrt{\mu}$ μέχρι τῆς τιμῆς $+\sqrt{\mu}$, ἡ συνάρτησις y ἐλαττοῦται· ἐν ᾧ, ἐὰν x αὐξάνηται ἀπὸ $+\sqrt{\mu}$ μέχρι τιμῆς τινος μικρόν τι μείζονος ταύτης, ἡ συνάρτησις y αὐξάνεται.

3) Εὑρεῖν τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως

$$y=\frac{2x+3}{3x-1}.$$

Τὴν συνάρτησιν ταύτην δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς

$$y = \frac{2}{3} + \frac{11}{9\left(x - \frac{1}{3}\right)}$$

Ὁ δὲ ἑπόμενος πίναξ δεικνύει τὴν μεταβολὴν τοῦ y, ὁπόταν x αὐξάνηται ἀπὸ $-\infty$ εἰς $+\infty$

x	$-\infty \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots +\infty$
y	$\frac{2}{3}$ ....ἐλατ....$-\infty \mid +\infty$....ἐλατ.... $\frac{2}{3}$

4) Εὑρεῖν τὰς τιμὰς μέγιστον καὶ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως

$$y = \frac{3x^2 + 2x - 3}{4x^2 - 10x + 7},$$

ὅταν x αὐξάνηται ἀπὸ $-\infty$ εἰς $+\infty$.

Τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν γράφομεν ὡς ἑξῆς·

$$(3 - 4y)x^2 + (2 + 10y)x - 3 - 7y = 0$$

Ἡ δὲ συνθήκη, καθ' ἣν ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει τὰς ῥίζας αὐτῆς πραγματικάς, εἶναι

$$(1 + 5y)^2 + (3 - 4y)(3 + 7y) \geqq 0$$

ἢ

$$-3y^2 + 19y + 10 \geqq 0$$

Τὸ δὲ τριώνυμον τοῦτο τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἀνισότητος ταύτης ἔχει τὰς ῥίζας $\frac{19 \pm \sqrt{481}}{6}$, ἤτοι

$$y' = \frac{19 - \sqrt{481}}{6} = -0,488$$

$$y'' = \frac{19 + \sqrt{481}}{6} = 6,821$$

κατὰ προσέγγισιν 0,001.

Ἵνα δὲ τὸ τριώνυμον τοῦτο ᾖναι θετικόν, ἤτοι ἔχον ἐναντίον σημεῖον πρὸς τὸ τοῦ συντελεστοῦ -3 τοῦ y^2, πρέπει καὶ ἀρκεῖ y νὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ y' καὶ y''. Ὅθεν ἕπεται, ὅτι ὑπάρχουσι δύο μὲν πραγματικαὶ τιμαί, διάφοροι ἀλλήλων, τοῦ x, δι' ἃς ἡ συνάρτησις y ἔχει τιμήν τινα περιλαμβανομένην μεταξὺ y' καὶ y''· οὐδεμία δὲ πραγματικὴ τιμὴ τοῦ x ὑπάρχει, δι' ἧ, τὸ y ἔχει τιμήν τινα ἔξωθεν τοῦ διαστήματος, οὗ τὰ ὅρια ἀπὸ y' μέχρι y''. Αἱ δὲ δύο τιμαὶ τοῦ x, δι' ἃς $y=y'$, εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν τὴν διπλῆν ταύτην τιμὴν τοῦ x διὰ x', ἔχομεν

$$x'=\frac{1+5y'}{4y'-3}=0,487$$

Ὁμοίως αἱ τιμαὶ τοῦ x, δι' ἃς $y=y''$, εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι· ἐὰν δὲ παραστήσωμεν διὰ x'' τὴν διπλῆν ταύτην τιμὴν ἔχομεν

$$x''=\frac{1+5y''}{4y''-3}=1,445$$

Ὁπόταν δὲ x αὐξάνηται ἀπὸ $-\infty$ εἰς $+\infty$, τὸ y μένει περιλαμβανόμενον μεταξὺ y' καὶ y'', αἵτινες εἶναι τὸ ἐλάχιστον καὶ τὸ μέγιστον αὐτοῦ· λαμβάνει δὲ τὸ y δὶς πᾶσαν τιμὴν ἐνδιάμεσον. Διὰ $x=\pm\infty$, τὸ $y=\frac{3}{4}$· διότι

$$y=\frac{3x^2+2x-3}{4x^2-10x+7}=\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{4-\frac{10}{x}+\frac{7}{x^2}}$$

καὶ ἑπομένως, ὅταν $x=\pm\infty$, τὸ $y=\frac{3}{4}$.

Ἡ δὲ πορεία τῆς συναρτήσεως y δείκνυται, ὡς ἑξῆς φαίνεται

$$\begin{array}{c|l} x & -\infty \ldots\ldots\ldots\ldots x' \ldots\ldots\ldots\ldots x'' \ldots\ldots\ldots\ldots +\infty \\ y & \frac{3}{4} \ldots \text{ἐλατ.} \ldots y' \ldots \text{αὐξ.} \ldots y'' \ldots \text{ἐλατ.} \ldots \frac{3}{4} \end{array}$$

ὅπου

$$x'=\ 0,487, \quad x''=1,445$$
$$y'=-0,488, \quad y''=6,821$$

κατὰ προσέγγισιν 0,001.

5) Δίδοται εὐθεῖά τις ΑΒ, ἧς τινος τὸ μῆκος α· ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης λαμβάνεται σημεῖόν τι Γ· κατασκευάζεται δὲ ἐπὶ μὲν τῆς εὐθείας ΑΓ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΔΓ, ἐπὶ δὲ τῆς ΒΓ τετράγωνον ΓΕΗΒ καὶ ἄγεται ἡ εὐθεῖα ΔΕ. Οὕτω σχηματίζεται πεντάγωνον ΑΔΕΗΒ. Εὑρεῖν τὴν θέσιν τοῦ σημείου

Γ, δι' ἣν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πενταγώνου τούτου εἶναι μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

Ἄμεσος λύσις. Ἔστω $\overline{\text{ΑΓ}}=x$· τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μὲν τριγώνου ΑΔΓ εἶναι $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$, τοῦ δὲ τετραγώνου ΓΕΗΒ εἶναι $(\alpha-x)^2$· ἐπειδὴ δὲ τοῦ τριγώνου ΔΓΕ ἡ μὲν βάσις ΓΕ εἶναι $\alpha-x$, τὸ δὲ ὕψος $\frac{x}{2}$, τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $(\alpha-x)\frac{x}{4}$, Ὅθεν ἕπεται, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πενταγώνου, ὅπερ παραστήσωμεν διὰ y, εἶναι

$$y=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+(\alpha-x)^2+\frac{(\alpha-x)x}{4}$$

ἢ
$$y=\frac{1}{4}\left[(3+\sqrt{3})x^2-7\alpha x+4\alpha^2\right]$$

Ὁπόταν δὲ τὸ σημεῖον Γ διατρέχῃ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ 0 μέχρις α. Ἀλλὰ κατὰ τὰς γνωστὰς ἰδιότητας (151) τοῦ τριωνύμου τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ὁπόταν x αὐξάνηται ἀπὸ $-\infty$ εἰς $\frac{7\alpha}{2(3+\sqrt{3})}$, τὸ y ἐλαττοῦται· ὁπόταν δὲ x αὐξάνηται ἀπὸ $\frac{7\alpha}{2(3+\sqrt{3})}$ εἰς $+\infty$, τοῦ y αὐξάνεται. Ὅθεν ἕπεται, ὅτι, ὁπόταν x αὐξάνηται ἀπὸ 0 εἰς $\frac{7\alpha}{2(3+\sqrt{3})}$, ἡ θεωρουμένη ἐπιφάνεια ἐλαττοῦται, ἐν ᾧ αὐξάνεται, ὅταν x αὐξάνηται ἀπὸ $\frac{7\alpha}{2(3+\sqrt{3})}$ εἰς α, ἤτοι

x	0 . . . . $\frac{7\alpha}{2(3+\sqrt{3})}$ . . . . α
ἐμβαδὸν	α^2 . . . . ἐλατ. . . . ἐλάχιστον . . . . αὐξάν. . . . $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$

τὸ ἐλάχιστον ἄρα τῆς ἐπιφανείας ἀντιστοιχεῖ πρὸς $x=\frac{7\alpha}{2(3+\sqrt{3})}$ καὶ εἶναι αὐτὸ ἴσον τῷ

$$\frac{1}{4}\left[4\alpha^2-\frac{49\alpha^2}{4(3+\sqrt{3})}\right]$$

ἢ τῷ
$$\frac{16\sqrt{3}-1}{16(\sqrt{3}+3)}\cdot\alpha^2$$

ἢ τῷ $$\frac{49\sqrt{3}-51}{96}.\ \alpha^2$$

Ἐντεῦθεν δ' ἕπεται, ὅτι, ὁπόταν Γ διατρέχῃ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, τὸ πεντάγωνον λαμβάνει δὶς μὲν πάσας τὰς τιμὰς τὰς περιλαμβανομένας μεταξὺ

$$\frac{49\sqrt{3}-51}{96}\alpha^2 \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4},$$

ἅπαξ δὲ μόνον τὰς τιμὰς τὰς περιλαμβανομένας μεταξὺ

$$\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{καὶ} \quad \alpha^2,$$

οὐδεμίαν δὲ λαμβάνει τιμὴν μείζονα τοῦ α^2.

Ἔμμεσος λύσις. Ἀντὶ τῆς ἀμέσου σπουδῆς, ὡς ἀνωτέρω, τῶν μεταβολῶν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πενταγώνου ΑΔΕΗΒ, ὁπόταν τὸ σημεῖον Γ διατρέχῃ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν θέσιν τοῦ σημείου Γ οὕτως, ὥστε τὸ πεντάγωνον νὰ ἔχῃ δεδομένον ἐμβαδὸν ε· διὰ δὲ τῆς διερευνήσεως τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν οὕτω, μεταξὺ ὁποίων ὁρίων δύναται νὰ μεταβάλληται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πενταγώνου. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν

$$(3+\sqrt{3})x^2-7\alpha x+4\alpha^2-4\varepsilon=0 \qquad (1)$$

Ἵνα δὲ τὸ πρόβλημα ἦναι δυνατόν, ἐν πρώτοις πρέπει αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης νὰ ἦναι πραγματικαί· πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἦναι

$$49\alpha^2-16(\alpha^2-\varepsilon)(3+\sqrt{3})\geqq 0$$

ἢ $$\varepsilon\geqq\frac{(16\sqrt{3}-1)\alpha^2}{16(3+\sqrt{3})}$$

ἢ καὶ $$\varepsilon\geqq\frac{49\sqrt{3}-51}{96}\alpha^2$$

Πληρουμένης δὲ τῆς συνθήκης ταύτης, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει δύο ῥίζας πραγματικάς. Ἵνα δὲ αἱ ῥίζαι αὗται ἦναι παραδεκταί, πρέπει νὰ περιλαμβάνωνται μεταξὺ 0 καὶ α. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ

$$\alpha^2-\varepsilon$$

Ἐὰν μὲν $\varepsilon>\alpha^2$, αἱ ῥίζαι ἔχουσιν ἐναντία σημεῖα· ἡ δὲ ἀρνητικὴ ῥίζα ἀπορριπτέα. Ἀλλὰ καὶ ἡ θετικὴ ῥίζα ἀπορριπτέα· διότι, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν x διὰ α ἐν τῷ πρώτῳ μέλει τῆς ἐξισώσεως (1), εὑρίσκομεν ἀρνητικὸν ἐξαγόμενον, τὸ $\alpha^2\sqrt{3}-4\varepsilon$. Ὅθεν ἕπεται, ὅτι α εἶναι μεταξὺ τῶν δύο ῥιζῶν, ἡ δὲ θετικὴ ῥίζα ὡς μείζων τοῦ α ἀπορριπτέα.

Τὸ πρόβλημα ἄρα εἶναι ἀδύνατον, ὅταν τὸ θεωρούμενον ἐμβαδὸν ε δὲν περιλαμβάνηται μεταξὺ

$$\frac{49\sqrt{3}-51}{96}\alpha^2 \quad \text{καὶ} \quad \alpha^2$$

Τεθείσθω δὲ

$$\frac{49\sqrt{3}-51}{96}\alpha^2 < \varepsilon < \alpha^2$$

ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τὰς ῥίζας αὐτῆς πραγματικὰς καὶ μετὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $\frac{7\alpha}{3+\sqrt{3}}$ εἶναι θετικόν, ἀμφότεραι εἶναι θετικαί. Ἴδωμεν δὲ νῦν, ἐὰν αἱ ῥίζαι αὗται περιλαμβάνωνται μεταξὺ 0 καὶ α. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν x διὰ α ἐν τῷ πρώτῳ μέλει τῆς ἐξισώσεως (1), εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον

$$\alpha^2\sqrt{3}-4\varepsilon$$

τὸ δὲ ἐξαγόμενον τοῦτο δύναται νὰ ἦναι ἢ θετικὸν ἢ ἀρνητικόν·

Καὶ ἐὰν μὲν

$$\varepsilon > \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

τὸ α περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο ῥιζῶν καὶ ἑπομένως ἡ ἐλάσσων ῥίζα μόνη παραδεκτή.

Ἐὰν δὲ

$$\varepsilon < \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4},$$

τὸ α εἶναι ἔξωθεν τοῦ διαστήματος τῶν δύο ῥιζῶν· ἐν δὲ τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἵνα εὕρωμεν, ἂν τὸ α ἦναι μεῖζον τῆς μείζονος ῥίζης ἢ ἔλασσον τῆς ἐλάσσονος, παραβάλλομεν αὐτὸ πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα $\frac{7\alpha}{2(3+\sqrt{3})}$ τῶν ῥιζῶν τούτων. Ἀλλὰ φανερόν, ὅτι

$$\alpha > \frac{7\alpha}{2(3+\sqrt{3})}$$

διότι ἡ ἀνισότης αὕτη ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν

$$6+2\sqrt{3}>7$$

ἢ $$2\sqrt{3}>1$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ α κεῖται ἔξωθεν τοῦ διαστήματος τῶν ριζῶν καὶ εἶναι μεῖζον τοῦ ἡμιαθροίσματος αὐτῶν, ἕπεται, ὅτι εἶναι μεῖζον τῆς μείζονος ρίζης. Ἐπειδὴ δὲ ἀφ' ἑτέρου ἀμφότεραι αἱ ρίζαι εἶναι θετικαί, περιλαμβάνονται μεταξὺ 0 καὶ α καὶ ἑπομένως πληροῦσιν ἀμφότεραι τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος.

Ἐκ τῶν προηγουμένων πάντων ἄρα ἕπεται, ὅτι, ἐὰν μὲν

ἢ $$\varepsilon<\frac{49\sqrt{3}-51}{96}\alpha^2$$

ἢ $$\varepsilon>\alpha^2$$

τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον· ἐὰν δὲ

$$\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}<\varepsilon<\alpha^2,$$

τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται μίαν λύσιν· ἡ δὲ τιμὴ τοῦ x ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς αὐτὴν εἶναι ἡ ἐλάσσων ρίζα τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως (1). Ἐὰν δὲ τέλος

$$\frac{49\sqrt{3}-51}{96}\alpha^2<\varepsilon<\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4},$$

τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται δύο λύσεις.

Πρόδηλον δέ, ὅτι τὰ ἐξαγόμενα τῆς διερευνήσεως ταύτης συμφωνοῦσιν ἐντελῶς πρὸς τὰ κατ' ἄλλον τρόπον εὑρεθέντα ἀνωτέρω ἐξαγόμενα.

ΣΗΜ. Ἐν τοῖς προηγουμένοις ἁπλοῖς προβλήμασι τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον αὐτῶν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς μεταβολῆς μιᾶς μόνης ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Δύναται δὲ νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον καὶ συναρτήσεων ἐξαρτωμένων ἐκ πολλῶν μεταβλητῶν, περὶ ὧν πάντων ἀλλαχοῦ γίνεται λεπτομερὴς σπουδή.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν τὸ μὲν γινόμενον α, τὸ δὲ πηλίκον β.

(Ἀπ. $\sqrt{\alpha\beta}$, $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, Διερεύνησις.)

2) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν ὁ μὲν λόγος $\frac{\mu}{\nu}$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν β. $\left(\text{'Απ. } \frac{\mu\sqrt{\beta}}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}, \frac{\nu\sqrt{\beta}}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}. \text{ Διερεύνησις}\right)$

3) Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὧν τὸ μὲν γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον α, τὸ δὲ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον β, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου γ.

$$\left(\text{'Απ. } \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma}}, \alpha\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha^2+\beta^2}}, \beta\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha^2+\beta^2}}. \text{ Διερεύνησις}\right)$$

4) Ἔστω ἐν γένει δ ἡ ὁδός, ἣν διανύει ὁ Α πλέον τοῦ Β, α δὲ ὁ χρόνος, οὗ ἔχει εἰσέτι ἀνάγκην ὁ Α πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ ταξειδίου αὐτοῦ, β δὲ ὁ χρόνος ὁ ἀντίστοιχος τοῦ Β. Ἐκκινοῦσι δὲ ἀντιθέτως ὁ Α καὶ ὁ Β συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων Γ καὶ Δ. Τίς ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων;

$$\left(\text{'Απ. } \frac{\delta(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}. \text{ Διερεύνησις.}\right)$$

5) Μερίσαι δύο ἀριθμοὺς α καὶ β εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ πρῶτον τοῦ α νὰ ἦναι πρὸς τὸ πρῶτον τοῦ β ὡς μ πρὸς ν· τὸ δὲ γινόμενον τῶν δύο λοιπῶν μερῶν νὰ ἰσῶται τῷ ἀριθμῷ γ. ('Απ. μΑ, νΑ, ὅπου $A = \frac{\nu\alpha + \mu\beta \pm \sqrt{(\nu\alpha-\mu\beta)^2+4\mu\nu\gamma}}{2\mu\nu}$. Διερεύνησις).

6) Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς τοιούτους, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, τὸ γινόμενον αὐτῶν καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν νὰ ἦναι ἴσα πρὸς ἄλληλα. ('Απ. $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$).

7) Εὑρεῖν τριψήφιον ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ψηφίων αὐτοῦ νὰ ἦναι 104, τὸ τετράγωνον τοῦ μεσαίου ψηφίου νὰ ἦναι μεῖζον κατὰ 4 τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν δύο ἄλλων καὶ τέλος ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ὁ 594, τὸ ὑπόλοιπον νὰ ἦναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἀντιστρόφως γεγραμμένος. ('Απ. 862).

8) Δύο ἔμποροι κατέθηκαν ὁμοῦ 500 δρ. διά τινα μικρὰν ἐπιχείρησιν· ὁ μὲν κατέθηκε τὸ ποσὸν αὐτοῦ ἐπὶ 5 μῆνας, ὁ δὲ ἐπὶ 2· μετὰ δὲ τὴν ἐπιχείρησιν ἔλαβεν ἑκάτερος 450 δρ. κέρδος καὶ κεφάλαιον· πόσον κατέθηκεν ἑκάτερος; ('Απ. 200. 300).

9) Ὅμιλος 20 ἀνθρώπων, ἀνδρῶν καὶ γυναικῶν, ἐδαπάνησαν ἔν τινι ξενοδοχείῳ 48 δρ. τόσας δὲ οἱ ἄνδρες, ὅσας καὶ αἱ γυναῖκες, ἤτοι 24 δρ. ἀλλ' ἕκαστος ἀνὴρ ἐδαπάνησε 1 δρ. πλέον ἑκάστης γυναικός. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες; (Ἀπ. 8 ἄνδρες, 12 γυναῖκες).

10) Ἄνθρωπός τις ἠγόρασε πρᾶγμά τι καὶ ἐπώλησεν αὐτὸ μετά τινα χρόνον ἀντὶ 144 δρ. ἐκέρδησε δὲ τόσον ἐπὶ τοῖς 100, ὅσον ἠγόρασεν αὐτό. Πόσον ἠγόρασεν αὐτό; (Ἀπ. 80 δρ.).

11) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι α, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν πέμπτων δυνάμεων αὐτῶν εἶναι β. Τίνες οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι; (Ἀπ. $\frac{1}{2}(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\rho})$, ὅπου $\rho = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 \pm \sqrt{\frac{\alpha^5 + 4\beta}{5\alpha}}\right)$. Διερεύνησις).

12) Δοθέντων α τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν καὶ β τοῦ γινομένου ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν, εὑρεῖν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους. (Ἀπ. $\frac{1}{2}(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\rho})$, ὅπου $\rho = \frac{1}{4}(\alpha^2 \pm \sqrt{\alpha^4 - 8\beta})$. Διερεύνησις).

13) Γνωστῶν ὄντων τοῦ ἀθροίσματος α τῶν ἄκρων ὅρων, τοῦ ἀθροίσματος β τῶν μέσων καὶ τοῦ ἀθροίσματος γ τῶν κύβων τῶν τεσσάρων ὅρων, εὑρεῖν τὴν ἀναλογίαν. (Ἀπ. $\frac{\alpha - A}{2} : \frac{\beta - B}{2} = \frac{\beta + B}{2} : \frac{\alpha + A}{2}$

ὅπου $A = \sqrt{\frac{4\gamma - \alpha^3 - 4\beta^3 + 3\alpha^2\beta}{3(\alpha + \beta)}}$, $B = \sqrt{\frac{4\gamma - 4\alpha^3 - \beta^3 + 3\alpha\beta^2}{3(\alpha + \beta)}}$)

14) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται τῷ γινομένῳ αὐτῶν. (Ἀπ. $y = \frac{x}{x - 1} = 1 + \frac{1}{x - 1}$)

15) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν τὸ ἄθροισμα πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι ὡς ὁ μ πρὸς τὸν ν. (Ἀπ. $y = \frac{\nu x}{\mu x - \nu}$).

16) Ἐκφράσαι δι' ἀκεραίων ἀριθμῶν τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗ τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ.

(Ἀπ. 12, 5, 13· 8, 6, 10).

18) Τίς τιμὴ τοῦ x καθιστᾷ τὴν παράστασιν $\alpha^2 x^2+\gamma$ τέλειον τετράγωνον;
('Απ. $x=\frac{\gamma\nu^2-\mu^2}{2\alpha\mu\nu}$).

19) Λῦσαι τὸ σύστημα

$$(x+y)(x^2+y^2)=\alpha$$
$$(x-y)(x^2-y^2)=\beta$$

20) Λῦσαι τὴν ἐξίσωσιν $x^2+y^2=w^2$ δι' ἀκεραίων ἀριθμῶν.
('Απ. 5, 12, 13· 8, 15, 17· 7, 24, 25).

21) Εὑρεῖν τὸ ἐλάχιστον τῆς παραστάσεως $x^2+(8-x)^2$.
('Απ. $x=4$, ἐλάχιστον 32).

22) Εὑρεῖν τὸ μέγιστον τῆς παραστάσεως $\sqrt{y}+\sqrt{10-y}$.
('Απ. $y=5$, μέγιστον $2\sqrt{5}$).

23) Εὑρεῖν τὸ ἐλάχιστον τῆς παραστάσεως $\frac{\alpha^2}{x}+\frac{\alpha^2}{\alpha-x}$.

('Απ. $x=\frac{1}{2}\alpha$, ἐλάχιστον 4α).

24) Εὑρεῖν τὸ ἐλάχιστον τῆς παραστάσεως $\frac{\alpha\beta}{x}+\frac{\beta^2}{\alpha-x}$

('Απ. $\frac{\beta(\alpha+\beta\pm2\sqrt{\alpha\beta})}{\alpha}$)

25) Ἐκ πάντων τῶν τετραγώνων τῶν ἐγγεγραμμένων ἐν δεδομένῳ τετραγώνῳ ποῖον τὸ ἔχον τὴν ἐλαχίστην ἐπιφάνειαν; ('Απ. τὸ τετράγωνον, οὗ αἱ κορυφαὶ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος).

26) Ἐγγράψαι εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἕτερον τρίγωνον ἰσοσκελὲς δεδομένης ἐπιφανείας.

27) Ἐγγράψαι εἰς τετράγωνον ἕτερον τετράγωνον δεδομένης ἐπιφανείας.

28) Εὑρεῖν τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα τῆς συναρτήσεως.

$$y=(2x-1)\ (4x-5)\ (x-3)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΠΕΡΙ ΠΡΟΟΔΩΝ

Πρόοδοι ἀριθμητικαί.

Ὁρισμοί.

154. Πρόοδος ἀριθμητικὴ ἢ κατὰ διαφορὰν λέγεται σειρὰ ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ τῇ προσθέσε ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· οἷον

οἱ ἀριθμοὶ 4, 7, 10, 13, 16,. . . .

ἢ οἱ ἀριθμοὶ 20, 18, 16, 14, 12,. . . .

ἀποτελοῦσι δύο ἀριθμητικὰς προόδους, ἑκάστου ἀριθμοῦ παραγομένου ἐκ τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ τῇ προσθέσει τοῦ ἀριθμοῦ 3, ἢ —2.

Οἱ ἀριθμητικὴν πρόοδον ἀποτελοῦντες ἀριθμοὶ λέγονται ὅροι αὐτῆς· ὁ δὲ ἀριθμος, τῇ προσθέσει τοῦ ὁποίου εἰς ἕκαστον ὅρον παράγεται ὁ ἑπόμενος, λέγεται λόγος αὐτῆς.

Αὔξουσα λέγεται ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος, ἐὰν οἱ ὅροι αὐτῆς προβαίνωσιν αὐξανόμενοι· ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ὁ λόγος αὐτῆς ἦναι θετικὸς ἀριθμός· τοιαύτη πρόοδος εἶναι ἡ

5, 7, 9, 11, 13, 15,. . . .

Φθίνουσα δὲ λέγεται ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος, ἐὰν οἱ ὅροι αὐτῆς προβαίνωσιν ἐλαττούμενοι· ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ὁ λόγος αὐτῆς ἦναι ἀρνητικὸς ἀριθμός· τοιαύτη πρόοδος εἶναι ἡ

19, 16, 13, 10, 7,. . . .

Εὕρεσις τοῦ ὅρου τοῦ κατέχοντος ὡρισμένην τάξιν ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ.

155. Ἐν πάσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ ἕκαστος ὅρος ἰσοῦται τῷ πρώτῳ αὐξηθέντι κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τὸν ἐκφράζοντα τὸ πλῆθος τῶν πρὸ αὐτοῦ ὅρων.

Διότι, ἐὰν παρασταθῇ διὰ τοῦ α ὁ πρῶτος ὅρος καὶ διὰ τοῦ τ ὁ νός, διὰ δὲ τοῦ ω ὁ λόγος ἀριθμητικῆς τινος προόδου, εἶναι

πρῶτος ὅρος	α
δεύτερος	$\alpha+\omega$
τρίτος	$\alpha+2\omega$
τέταρτος	$\alpha+3\omega$
πέμπτος	$\alpha+4\omega$

καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐντεῦθεν φανερόν, ὅτι ὁ τὴν νὴν τάξιν κατέχων ὅρος τ, οὗ προηγοῦνται ν—1 ἄλλοι ὅροι τῆς αὐτῆς προόδου, εἶναι τῆς μορφῆς

$$\tau=\alpha+(\nu-1)\omega \qquad (1)$$

Παραδείγματα.

1) Εὑρεῖν τὸν 20ὸν ὅρον τῆς προόδου

$$1,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\ldots\ldots,\ \text{λόγος } 2$$

Επειδὴ τοῦ ὅρου τούτου προηγοῦνται 19 ἄλλοι, ἰσοῦται τῷ

$$1+19.2,\quad \text{ἤτοι τῷ}\quad 39$$

2) Εὑρεῖν τὸν 31ον ὅρον τῆς προόδου

$$200,\quad 150,\quad 100,\ldots\ldots,\ \text{λόγος } -50$$

Ἐπειδὴ προηγοῦνται αὐτοῦ 30, εἶναι ἴσος τῷ

$$200+30(-50),\quad \text{ἤτοι τῷ}\quad -1300$$

Ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου.

156. Ἐν πάσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων ἐξ ἴσου ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἄκρων.

Ἔ[illegible] ἀριθμητική τις πρόοδος ἡ

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots\ldots,\ \rho,\ \sigma,\ \tau,\quad \text{λόγος}\ \omega$$

Ἐπειδὴ εἶναι

$$\beta=\alpha+\omega$$
$$\sigma=\tau-\omega$$

ἕπεται

$$\beta+\sigma=\alpha+\tau$$

Ὁμοίως, ἐπειδὴ εἶναι

$$\begin{array}{ll} & \gamma=\beta+\omega \\ & \rho=\sigma-\omega \\ \hline \text{ἕπεται} & \gamma+\rho=\beta+\sigma=\alpha+\tau \end{array}$$

καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ πρότασις.

Ἔστω νῦν, ὅτι ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς προόδου

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots\ldots, \rho,\ \sigma,\ \tau$$

ὧν τὸ πλῆθος ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς ν. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Κ τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, ἔχομεν

$$\begin{array}{ll} & K=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\rho+\sigma+\tau \\ \text{ἢ} & K=\tau+\sigma+\rho+\ldots+\gamma+\beta+\alpha \\ \hline \text{ὅθεν} & 2K=(\alpha+\tau)+(\beta+\sigma)+(\gamma+\rho)+\ldots+(\rho+\gamma)+(\sigma+\beta)+(\tau+\alpha) \end{array}$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἐντὸς τῶν παρενθέσεων ἀθροίσματα εἶναι πάντα ἴσα πρὸς ἄλληλα, ὡς προηγουμένως ἐδείχθη, τὸ δὲ πλῆθος τῶν ἀθροισμάτων τούτων εἶναι ν, ἤτοι ὅσον καὶ τὸ τῶν ὅρων τῆς προόδου, ἕπεται

$$2K=(\alpha+\tau)\nu$$

καὶ

$$K=\frac{\nu.(\alpha+\tau)}{2} \qquad (2)$$

ὥστε

Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων πάσης ἀριθμητικῆς προόδου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ τὸ πλῆθος αὐτῶν ἐκφράζων ἀριθμὸς ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων.

Οὕτω τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 100 εἶναι

$$K=\frac{100(1+100)}{2}=\frac{10100}{2}=5050$$

Δυνατὸν δὲ νὰ δοθῶσιν ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προόδου καὶ ὁ λόγος αὐτῆς καὶ ὁ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ἐκφράζων ἀριθμός, νὰ ζητῆται δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων· τότε εὑρίσκομεν ἐν πρώτοις τὸν τελευταῖον ὅρον ἐκ τοῦ τύπου (1) καὶ εἶτα ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον (2).

157. Οἱ πέντε ἀριθμοὶ α, τ, ν, ω, Κ, οἵτινες θεωροῦνται ἐν πάσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ συνδέονται πρὸς ἀλλήλους διὰ τῶν δύο ἐξισώσεων

$$\tau=\alpha+(\nu-1)\omega, \qquad K=\frac{\nu(\alpha+\tau)}{2}$$

Ἐντεῦθεν φανερόν, ὅτι, δοθέντων τῶν τριῶν ἐξ αὐτῶν, οἱ λοιποὶ δύο πρέπει νὰ ὁρίζωνται ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων, ἐν αἷς περιέχονται ὡς ἄγνωστοι. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ πέντε πραγμάτων δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰ δύο κατὰ δέκα διαφόρους τρόπους, ἕπεται, ὅτι δύνανται νὰ προταθῶσιν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων δέκα διάφορα ἀλλήλων προβλήματα, καθ' ὅσον λαμβάνονται ὡς ἄγνωστοι αἱ ποσότητες αἱ περιεχόμεναι ἔν τινι τῶν ἑπομένων ὁμάδων

$$(\alpha,\tau),\quad (\alpha,\omega),\quad (\alpha,\nu),\quad (\alpha,K),\quad (\tau,\omega)$$
$$(\tau,\nu),\quad (\tau,K),\quad (\omega,\nu),\quad (\omega,K),\quad (\nu,K)$$

Ὁπόταν δὲ λαμβάνωνται ὡς ἄγνωστοι οἱ (α,ν) ἢ οἱ (τ,ν), τὸ πρόβλημα ἄγει εἰς ἐξίσωσιν δευτεροβάθμιον· ἐν ἑκάστῃ δὲ τῶν λοιπῶν περιπτώσεων τὸ πρόβλημα ἄγει εἰς πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν.

158) Παρεμβαλεῖν μεταξὺ δύο δεδομένων ἀριθμῶν α καὶ β ν ἀριθμούς, ἤτοι εὑρεῖν ἀριθμητικὴν πρόοδον συγκειμένην ἐκ ν+2 ὅρων, ἐν οἷς οἱ α καὶ β εἶναι οἱ ἄκροι.

Ἐὰν παραστήσωμεν δι' ω τὸν λόγον, ἐπειδὴ τοῦ ὅρου β πρέπει νὰ προηγῶνται ν+1 ὅροι, ἔχομεν

$$\beta=\alpha+(\nu+1)\omega$$

Ὅθεν

$$\omega=\frac{\beta-\alpha}{\nu+1}$$

Γνωστῶν δὲ ὄντων τοῦ λόγου ω τῆς προόδου καὶ τοῦ πρώτου ὅρου α, ὑπολογίζονται καὶ πάντες οἱ λοιποὶ ὅροι.

Ἰδίᾳ δὲ ἐὰν παρεμβάλωμεν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β ἕνα μόνον ὅρον, ὁ λόγος τῆς προόδου εἶναι τότε $\frac{\beta-\alpha}{2}$, ὁ δὲ ζητούμενος ὅρος εἶναι $\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}$ ἢ $\frac{\alpha+\beta}{2}$, τουτέστι τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἀριθμῶν α καὶ β (ὁ μέσος ὅρος ἢ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον αὐτῶν).

ΣΗΜ. Ἡ παρεμβολὴ αὕτη δύναται νὰ γίνηται καὶ μεταξὺ β καὶ γ, γ καὶ δ, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐὰν δὲ παρεμβάλληται πάντοτε ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ὅρων, ἡ οὕτω προκύπτουσα πρόοδος εἶναι ἀριθμητική, ἧς λόγος ὁ

$$\frac{\rho-\mu}{\nu+1}$$

ὅπου ρ καὶ μ δύο οἱοιδήποτε διαδοχικοὶ ὅροι τῆς δοθείσης ἀριθμητικῆς προόδου.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ν. $\left(\text{'Απ. } \frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)$

2) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν ν περιττῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 καὶ ἐφεξῆς. ('Απ. ν^2).

3) Εὑρεῖν τὸν 17ον ὅρον ἀριθμ. προόδου, ἧς ὁ μὲν πρῶτος ὅρος 2, ὁ δὲ λόγος 3, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν 17 ὅρων. ('Απ. $\tau=50$, $K=442$).

4) Τίς ὁ πρῶτος ὅρος ἀριθμ. προόδου, ἧς τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων εἶναι $7\frac{1}{7}$, ὁ δὲ λόγος $1\frac{2}{3}$; $\left(\text{'Απ. } \alpha=\frac{5}{7}\right)$

5) Ὁ πρῶτος ὅρος ἀριθμ. προόδου εἶναι $2\frac{1}{2}$, ὁ λόγος $\frac{1}{3}$ καὶ τὸ ἄθροισμα 1900. Εὑρεῖν τὸν ἀριθμὸν τῶν ὅρων αὐτῆς. ('Απ. $\nu=100$).

6) Ἐδαπάνησέ τις κατά τινα ἡμέραν 3,40 δρ., τὴν ἐπαύριον 0,20 δρ. ἐπὶ πλέον, καὶ οὕτω καθεξῆς· πόσον ἐδαπάνησε τὴν 16ην ἡμέραν καὶ τὸ ὅλον. ('Απ. 6,40 δρ. 78,40 δρ.).

7) Ἐδάνεισέ τις κεφάλαιον 3500 δρ. πρὸς 4 $^0/_0$. Κατὰ πᾶν ἔτος, ἐπὶ 24 ἔτη, προστίθενται εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦ προηγουμένου ἔτους 300 δρ. πόσον εἶναι τὸ ἐκ τῶν τόκων κέρδος; ('Απ. 6672 δρ.).

8) Γνωστόν, ὅτι σῶμά τι πῖπτον ἐν τῷ κενῷ διατρέχει ἐν τῷ πρώτῳ δευτερολέπτῳ τῆς πτώσεως αὐτοῦ $15\frac{5}{8}$ πόδ (περὶ τὰ 4,9044 μέτρ.), ἀνὰ πᾶν δὲ δευτερόλεπτον διατρέχει $31\frac{1}{4}$ πόδ. (9,8088 μ.) πλέον τοῦ προηγουμένου δευτερολέπτου τῆς πτώσεως· ἐὰν σῶμά τι ἔπιπτεν ἐπὶ 20 δευτερόλεπτα, πόσους πόδας διέτρεξεν ἐν τῷ τελευταίῳ δευτερολέπτῳ τῆς πτώσεως αὐτοῦ καὶ ἐπὶ τὰ 20 ταῦτα δευτερόλεπτα;

$\left(\text{'Απ. } 609\frac{3}{8},\ 6250\right)$

9) Φυσιοδίφης τις παρετήρησεν ἀπὸ 8ης μέχρι 19ης Ἰουνίου ἔτους τινός, ὅτι τὸ θερμόμετρον ἀνυψοῦτο καθ' ἑκάστην κατὰ ἥμισυν βαθμόν, τὸ δὲ ἀριθμητικὸν μέσον πασῶν τῶν παρατηρήσεων ἔδωκε $18\frac{3}{4}$ βαθμούς. Ποίαν θερμοκρασίαν ἐδείκνυε τὸ θερμόμετρον τὴν 8 Ἰουνίου; ('Απ. 16^0).

Πρόοδοι γεωμετρικαί.

Ὁρισμοί.

159. Πρόοδος γεωμετρικὴ ἢ κατὰ πηλίκον λέγεται σειρὰ ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ὅστις λέγεται λόγος· οἷον

οἱ ἀριθμοὶ $2, \ 6, \ 18, \ 54, \ldots\ldots$

ἢ οἱ ἀριθμοὶ $3, \ 2, \ \frac{4}{3}, \ \frac{8}{9}, \ \frac{16}{27}, \ \frac{32}{81}, \ldots\ldots$

οἵτινες λέγονται ὅροι, ἀποτελοῦσι γεωμετρικὰς προόδους, ὧν ἡ μὲν πρώτη λέγεται αὔξουσα· διότι ὁ λόγος αὐτῆς 3 εἶναι μείζων τῆς μονάδος 1, ἡ δὲ δευτέρα λέγεται φθίνουσα· διότι ὁ λόγος αὐτῆς $\frac{2}{3}$ εἶναι ἐλάσσων τῆς μονάδος 1. Πᾶσα γεωμετρικὴ πρόοδος εἶναι αὔξουσα ἢ φθίνουσα, καθ' ὅσον ὁ λόγος αὐτῆς κατ' ἀπόλυτον τιμὴν εἶναι μείζων ἢ ἐλάσσων τῆς μονάδος 1· καὶ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει οἱ ὅροι προβαίνουσιν αὐξανόμενοι, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει προβαίνουσιν ἐλαττούμενοι, κατ' ἀπόλυτον τιμήν.

Εὕρεσις τοῦ ὅρου τοῦ κατέχοντος ὡρισμένην τάξιν ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ.

160. Ἐν πάσῃ γεωμετρικῇ προόδῳ ἕκαστος ὅρος ἰσοῦται τῷ πρώτῳ πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ δύναμιν τοῦ λόγου ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τὸν ἐκφράζοντα τὸ πλῆθος τῶν πρὸ αὐτοῦ ὅρων.

Ἐὰν παρασταθῇ διὰ τοῦ α ὁ πρῶτος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου καὶ διὰ τοῦ τ ὁ ν^ος^, διὰ δὲ τοῦ ω ὁ λόγος, εἶναι

πρῶτος ὅρος	α
δεύτερος	$\alpha.\omega$
τρίτος	$\alpha.\omega^2$
τέταρτος	$\alpha.\omega^3$
πέμπτος	$\alpha.\omega^4$

καὶ οὕτω καθεξῆς. Ὥστε ὁ ὅρος τ ὁ τὴν ν^ην^ τάξιν κατέχων καὶ τοῦ ὁποίου προηγοῦνται ν—1 ἄλλοι ὅροι εἶναι

$$\tau = \alpha.\omega^{\nu-1} \qquad (1)$$

Παραδείγματα.

1) Εὑρεῖν τὸν ἕβδομον ὅρον τῆς γεωμετρικῆς προόδου, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος 4, ὁ δὲ λόγος $\frac{1}{3}$.

Ὁ ὅρος οὗτος εἶναι $4.\frac{1}{3^6}$ ἢ $\frac{4}{729}$.

2) Εὑρεῖν τὸν 30ὸν ὅρον τῆς γεωμ. προόδου.

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \ldots\ldots, \qquad \text{λόγος } 2$$

ὁ ὅρος οὗτος εἶναι 1.2^{29} ἢ 536870912.

3) Εὑρεῖν τὸν 20ὸν ὅρον τῆς γεωμ. προόδου

$$1, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \ldots\ldots, \qquad \text{λόγος } \frac{1}{2}$$

ὁ ὅρος οὗτος εἶναι $1.\frac{1}{2^{19}}$ ἢ $\frac{1}{524288}$.

ΣΗΜ. Αἱ δυνάμεις αἱ ἔχουσαι μεγάλους ἀριθμοὺς ἐκθέτας λογίζονται εὐκόλως διὰ τῶν λογαρίθμων (ἰδὲ καὶ Dupuis, p. 146).

Ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου

161. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots\ldots, \quad \rho, \quad \sigma, \quad \tau$$

ἀποτελοῦντες γεωμετρικὴν πρόοδον, ἧς τινος ὁ λόγος ω, καὶ παραστήσωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διὰ τοῦ Κ· τότε ἔχομεν

$$\begin{aligned} K &= \alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots+\rho+\sigma+\tau \\ K\omega &= \alpha\omega+\beta\omega+\gamma\omega+\ldots\ldots+\rho\omega+\sigma\omega+\tau\omega \end{aligned}$$

Ὅθεν $K\omega - K = \tau\omega - \alpha$

ἢ $K(\omega-1) = \tau\omega - \alpha$

καὶ $$K = \frac{\tau\omega-\alpha}{\omega-1} \qquad (2)$$

ὥστε

Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων πάσης γεωμετρικῆς προόδου εὑρίσκεται, ἐὰν ὁ τελευταῖος ὅρος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν λόγον καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου τούτου ἀφαιρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τοῦτο διαιρεθῇ διὰ τοῦ λόγου ἠλαττωμένου κατὰ μονάδα 1.

Παρατηρητέον, ὅτι, ἐὰν ὁ λόγος ἦναι 1, ἡ ἐξίσωσις (2) γίνεται $K=\frac{0}{0}$ καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμα Κ εἶναι ἀοριστον. Ἀλλ' ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ ἄθροισμα Κ εὑρίσκεται ἀμέσως ἐκ τῆς προόδου· διότι πάντες οἱ ὅροι εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ἑπομένως, ἂν ὁ τὸ πλῆθος αὐτῶν ἐκφράζων ἀριθμὸς ἦναι ὁ ν, εἶναι $K=\alpha.\nu$.

Δυνατὸν νὰ δοθῶσιν ὁ πρῶτος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου καὶ ὁ λόγος αὐτῆς καὶ ὁ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ἐκφράζων ἀριθμός· τότε πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν Κ εὑρίσκεται πρῶτον ὁ τελευταῖος ὅρος διὰ τοῦ τύπου (1) καὶ εἶτα ἐφαρμόζεται ὁ τύπος (2), ὅτε εὑρίσκεται εὐκόλως

$$K=\frac{\alpha(\omega^\nu-1)}{\omega-1}$$

ὁ δὲ τύπος οὗτος εὑρίσκεται καὶ ἄλλως· διότι εἶναι

$$K=\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2+\ldots+\alpha\omega^{\nu-1}$$

ἢ

$$K=\alpha(1+\omega+\omega^2+\ldots+\omega^{\nu-1})$$

ἢ καὶ (ἐδ. 105)

$$K=\frac{\alpha(\omega^\nu-1)}{\omega-1} \qquad (3)$$

Διερεύνησις τοῦ τύπου (3). Ἐὰν $\omega>1$, αὐξανομένου τοῦ ἐκθέτου ν αὐξάνεται καὶ ἡ δύναμις ω^ν (ἐδ. 77,3), ἑπομένως αὐξάνεται καὶ τὸ ἄθροισμα Κ. Ἀλλ' ὅταν ν αὐξάνηται ὑπὲρ πάντα ἀριθμόν, ω^ν αὐξάνεται ὡσαύτως καὶ ἑπομένως τὸ Κ γίνεται μεῖζον πάσης δοθείσης ποσότητος κατ' ἀπόλυτον τιμήν.

Ἐὰν δὲ $\omega<1$, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸν τύπον (3), ὡς ἕπεται

$$K=\frac{\alpha(1-\omega^\nu)}{1-\omega}$$

ἢ

$$K=\frac{\alpha}{1-\omega}-\frac{\alpha\omega^\nu}{1-\omega}$$

Ὑπὸ δὲ τὴν μορφὴν ταύτην τὸ ἄθροισμα Κ τῶν ν πρώτων ὅρων συντίθεται ἐκ τοῦ σταθεροῦ ὅρου $\frac{\alpha}{1-\omega}$ καὶ ἐκ τοῦ μεταβλητοῦ ὅρου $\frac{\alpha\omega^\nu}{1-\omega}$ τοῦ μεταβαλλομένου μετὰ τοῦ ν. Ὁπόταν δὲ ὁ ν αὐξάνηται, τὸ ω^ν ἐλαττοῦται (ἐδ. 77,4), τὸ $\frac{\alpha\omega^\nu}{1-\omega}$ ἐλαττοῦται ὡσαύτως καὶ ἑπομένως τὸ Κ αὐξάνεται προδήλως κατ' ἀπόλυτον τιμήν. Ἀλλ' ὅταν ν αὐξάνηται ὑπὲρ πάντα ἀριθμόν, τὸ μεταβλητὸν μέρος $\frac{\alpha\omega^{\nu}}{1-\omega}$ ἐλαττοῦται γινόμενον ἔλασσον πάσης δοθείσης ποσότητος καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμα Κ αὐξανόμενον ἀπαύστως καὶ μένον ἔλασσον τοῦ $\frac{\alpha}{1-\omega}$ τείνει ἀπαύστως εἰς τὸ $\frac{\alpha}{1-\omega}$ διαφέρον αὐτοῦ διαφοράν, ὅσην ἂν θέλωμεν μικρὰν (ἐδ. 58,2). Τοῦτο δὲ ἐκφράζομεν λέγοντες, ὅτι τοῦ ν αὐξανομένου ὑπὲρ πάντα ἀριθμὸν καὶ τοῦ λόγου ω ὄντος ἐλάσσονος τῆς μονάδος 1 τὸ ἄθροισμα Κ ἔχει ὅριον τὸ $\frac{\alpha}{1-\omega}$, ἤτοι (ἐδ. 57)

$$\underset{\nu=\infty}{\text{ὅρ}}\ K=\frac{\alpha}{1-\omega}$$

Παραδείγματα.

1) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν 15 πρώτων ὅρων τῆς προόδου

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad \ldots.$$

Ἔχομεν

$$K=\frac{\tau\omega-\alpha}{\omega-1}=\frac{\alpha(\omega^{\nu}-1)}{\omega-1}=2^{15}-1=32767.$$

2) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς προόδου

$$1, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{9}, \quad \ldots.$$

Ἔχομεν

$$\underset{\nu=\infty}{\text{ὅρ}}\ K=\frac{\alpha}{1-\omega}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

162. Οἱ δύο τύποι

$$\tau=\alpha\omega^{\nu-1}$$

$$K=\frac{\alpha(\omega^{\nu}-1)}{1-\omega}$$

εἶνε δύο σχέσεις μεταξὺ τῶν πέντε ποσοτήτων α, τ, ω, ν, Κ. Αἱ δύο δ' αὗται σχέσεις ὁρίζουσι δύο οἱασδήποτε τῶν πέντε τούτων ποσοτήτων, ὅταν ἦναι γνωσταὶ αἱ λοιπαὶ τρεῖς. Οὕτως ἔχομεν δέκα διάφορα ἀλλήλων προβλήματα, καθ' ὅσον λαμβάνομεν ὡς δύο ἀγνώστους τὰς ποσότητας μιᾶς τῶν δέκα ἑπομένων ὁμάδων

$$(\alpha,\tau),\ (\alpha,\omega),\ (\alpha,\nu),\ (\alpha,K),\ (\tau,\omega)$$
$$(\tau,\nu),\ (\tau,K),\ (\omega,\nu),\ (\omega,K),\ (\nu,K)$$

Ἐκεῖνα δὲ τῶν προβλημάτων, ἐν οἷς οὐδέτερος τῶν ἀριθμῶν ω, ν εἶναι ἄγνωστος, λύονται δι' ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ. Τὰ δὲ λοιπὰ προβλήματα εἶνε δυσκολώτερα· τινὰ τούτων δύνανται νὰ λύωνται διὰ τῶν λογαρίθμων, τινὰ δὲ δὲν δύνανται νὰ λύωνται διὰ στοιχειωδῶν μεθόδων.

163. Παρεμβαλεῖν μεταξὺ δύο δεδομένων ἀριθμῶν α καὶ β ἄλλους ν ἀριθμούς, ἤτοι εὑρεῖν γεωμετρικὴν πρόοδον συγκειμένην ἐκ ν+2 ὅρων τοιούτων, ὥστε οἱ α,β νὰ ἦναι οἱ ἄκροι ὅροι αὐτῆς.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ω τὸν λόγον, ἐπειδὴ τοῦ ὅρου β πρέπει νὰ προηγῶνται ν+1 ὅροι, ἔχομεν

$$\beta=\alpha\omega^{\nu+1}$$

Ὅθεν

$$\omega=\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$$

Γνωστοῦ δὲ ὄντος τοῦ λόγου ω καὶ τοῦ πρώτου ὅρου α τῆς προόδου ὑπολογίζονται καὶ οἱ λοιποὶ ὅροι ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον.

Ἰδίᾳ δὲ ἐὰν μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν α, β παρεμβάλωμεν ἕνα μόνον ὅρον, ὁ λόγος τῆς προόδου εἶναι $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ καὶ ἑπομένως ὁ ζητούμενος ὅρος εἶναι $\alpha.\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ ἢ $\sqrt{\alpha\beta}$, ἤτοι τὸ γεωμετρικὸν μέσον δύο ἀριθμῶν εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ γινομένου αὐτῶν.

ΣΗΜ. Ἡ παρεμβολὴ αὕτη δύναται νὰ γίνηται καὶ μεταξὺ β καὶ γ, γ καὶ δ, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἐὰν δὲ παρεμβάλληται πάντοτε ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ὅρων, ἡ οὕτω προκύπτουσα πρόοδος εἶναι γεωμετρική, ἧς λόγος ὁ

$$\sqrt[\nu+1]{\frac{\rho}{\mu}}$$

ὅπου μ καὶ ρ δύο οἱοιδήποτε διαδοχικοὶ ὅροι τῆς δοθείσης γεωμετρικῆς προόδου.

164. Ἐν πάσῃ γεωμετρικῇ προόδῳ ἐκ πεπερασμένου ἀριθμοῦ ὅρων ἀποτελουμένῃ τὸ γινόμενον δύο ὅρων ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων εἶναι σταθερόν.

Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \ldots\quad \rho,\quad \sigma,\quad \tau$$

ἧς ὁ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ἐκφράζων ἀριθμὸς ἔστω ὁ ν καὶ λόγος ὁ ω.

Ἐπειδὴ εἶναι

$$\beta = \alpha\omega$$

$$\sigma = \tau . \frac{1}{\omega}$$

ἕπεται

$$\beta . \sigma = \alpha . \tau$$

Ὁμοίως ἐπειδὴ

$$\gamma = \alpha . \omega^2$$

$$\rho = \tau . \frac{1}{\omega^2}$$

ἕπεται

$$\gamma . \rho = \alpha . \tau$$

καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ πρότασις.

165. Εὑρεῖν τὸ γινόμενον τῶν ν πρώτων ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, ἧς γνωστὸς ὁ πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος.

Ἔστωσαν

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \ldots,\quad \rho,\quad \sigma,\quad \tau$$

οἱ ν πρῶτοι ὅροι γεωμετρικῆς τινος προόδου καὶ P τὸ γινόμενον αὐτῶν, ἤτοι ἔστω

$$P = \alpha\beta\gamma\ldots\rho\sigma\tau$$

ἢ

$$P = \tau\sigma\rho\ldots\gamma\beta\alpha$$

Ὅθεν

$$P^2 = \alpha\tau . \beta\sigma . \gamma\rho \ldots \rho\gamma . \sigma\beta\ \tau\alpha$$

ἢ

$$P^2 = (\alpha\tau)^\nu$$

καὶ

$$P = \sqrt{(\alpha\tau)^\nu}$$

Παρατήρησις. Ἐὰν ἔχωμεν δύο προόδους τὴν μὲν γεωμετρικὴν ἀρχομένην ἀπὸ τῆς μονάδος 1, τὴν δὲ ἀριθμητικὴν ἀρχομένην ἀπὸ τοῦ 0, ἤτοι

$$1,\quad 1+\varepsilon,\quad (1+\varepsilon)^2,\ \ldots,\ (1+\varepsilon)^\nu \ldots$$

$$0,\quad \eta,\quad 2\eta,\quad \ldots,\quad \nu\eta,\quad \ldots$$

οἱ ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς προόδου λέγονται λογάριθμοι τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς· οἷον λογ $(1+\varepsilon)^\nu = \nu\eta$.

Ἵνα δὲ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον τῶν λογαρίθμων δείξωμεν τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα αὐτῶν, λάβωμεν δύο τυχόντας ὅρους τῆς γεωμετρικῆς προόδου, τοὺς $(1+\varepsilon)^{\mu}$ καὶ $(1+\varepsilon)^{\nu}$, καὶ παραστήσωμεν αὐτοὺς διὰ M καὶ N, ἤτοι

$$M=(1+\varepsilon)^{\mu}$$
$$N=(1+\varepsilon)^{\nu}$$

καὶ
$$M.N=(1+\varepsilon)^{\mu+\nu}$$

Τὸ γινόμενον M.N εἶναι καὶ αὐτὸ ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου ἔχον ἀντίστοιχον ἐν τῇ ἀριθμητικῇ προόδῳ τὸν $(\mu+\nu)\eta$· ὥστε κατὰ τὸν ὁρισμὸν

$$\lambda o\gamma(M.N)=(\mu+\nu)\eta=\mu\eta+\nu\eta$$

Ἀλλ' εἶναι

$$\lambda o\gamma M=\mu\eta \quad \text{καὶ} \quad \lambda o\gamma N=\nu\eta$$

Ὅθεν

$$\lambda o\gamma(M.N)=\lambda o\gamma M+\lambda o\gamma N$$

Ἐκ τῆς ἀρχικῆς δὲ ταύτης ἰδιότητος ἀποδεικνύονται εὐκόλως καὶ αἱ λοιπαὶ ἰδιότητες.

Ὁ ὁρισμὸς δὲ οὗτος τῶν λογαρίθμων συμφωνεῖ πρὸς τὸν ἤδη δοθέντα (ἐδ. 78) τὸν ἐκφράζοντα τοὺς λογαρίθμους ὡς ἐκθέτας ὡρισμένης τινὸς βάσεως. Τῷ ὄντι ἔστω α ὁ ἀριθμὸς ὁ ὑψούμενος εἰς τὴν δύναμιν η καὶ παράγων τὸν ἀριθμὸν $1+\varepsilon$, ἤτοι ἔστω

$$\alpha^{\eta}=1+\varepsilon \quad \text{ἢ} \quad \alpha=(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\eta}}$$

Τότε ἔχομεν

$$1+\varepsilon=\alpha^{\eta}$$
$$(1+\varepsilon)^2=\alpha^{2\eta}$$
$$(1+\varepsilon)^3=\alpha^{3\eta}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(1+\varepsilon)^{\nu}=\alpha^{\nu\eta}$$

Ἐντεῦθεν δὲ καθίσταται δῆλον, ὅτι οἱ ὅροι τῆς γεωμετρικῆς προόδου εἶναι δυνάμεις τοῦ α ἔχουσαι ἐκθέτας τοὺς ἀντιστοίχους ὅρους τῆς ἀριθμητικῆς προόδου· οὗτοι ἄρα εἶναι λογάριθμοι ἐκείνων κατὰ τὴν βάσιν α.

ΣΗΜ. Οὕτως ὡρίσθησαν τὸ πρῶτον οἱ λογάριθμοι ὑπὸ τοῦ ἐπινοήσαντος αὐτοὺς Νεπέρου (τῷ 1614). Πρόδηλον δέ, ὅτι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ὁρίζονται οὐχὶ πάντων τῶν ἀριθμῶν οἱ λογάριθμοι, ἀλλὰ μόνον ἐκείνων, οἵτινες εἶναι ὅροι τῆς γεωμετρικῆς προόδου. Ἵνα δὲ ἔχωμεν τοὺς λογαρίθμους πάντων τῶν ἀριθμῶν καὶ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον, πρέπει νὰ παρεμβάλλωμεν μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων τῆς τε γεωμετρικῆς καὶ ἀριθμητικῆς προόδου, (ὧν οἱ ὅροι ἄπειροι τὸ πλῆθος), ὅσους ἂν θέλωμεν ἀντιστοίχους ὅρους.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων τῆς προόδου

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{8},\quad \dots \qquad (\text{'Απ. } 2).$$

2) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων τῆς προόδου

$$\frac{1}{\lambda},\quad \frac{1}{\lambda^2},\quad \frac{1}{\lambda^3},\quad \dots \qquad (\lambda>1)$$

$$\left(\text{'Απ. } \frac{1}{\lambda-1}\right)$$

3) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων τῆς προόδου

$$\frac{\mu}{\nu}\quad \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2,\quad \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^3,\quad \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^4,\quad \dots \qquad (\mu<\nu)$$

$$\left(\text{'Απ. } \frac{\mu}{\nu-\mu}\right)$$

4) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων τῆς προόδου

$$\frac{37}{100},\quad \frac{37}{100^2},\quad \frac{37}{100^3}\quad \dots \qquad \left(\text{'Απ. } \frac{37}{99}\right)$$

5) Παρετηρήθη, ὅτι ὁ πληθυσμὸς χώρας τινὸς αὐξάνεται κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἐν διαστήματι δὲ 4 ἐτῶν ἐγένετο ἀπὸ 10000 ὁ 14641. Ποῖος ὁ λόγος τῆς αὐξήσεως;

$$\left(\text{'Απ. } \frac{1}{10}\right)$$

6) Τίς ὁ λόγος γεωμ. προόδου 32 ὅρων, ὧν ὁ πρῶτος 5 καὶ ὁ τελευταῖος 80; Ποῖον τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων καὶ τίς ὁ εἰκοστός;

('Απ. 1,09356· 881,62· 27,351)

7) Ἔν τινι γεωμετρικῇ προόδῳ συγκειμένῃ ἐξ 7 ὅρων τὸ ἄθροισμα τῶν μὲν 6 πρώτων ὅρων εἶναι $157\frac{1}{2}$, τῶν δὲ 6 τελευταίων εἶναι διπλά-

σιον τοῦ πρώτου ἀθροίσματος· τίς ἡ γεωμετρ. πρόοδος;

(Ἀπ. $2\frac{1}{2}$, 5, 10, 20, 40, 80, 160)

8) Τίς ἡ γεωμετρ. πρόοδος, ἧς γνωστὸν τὸ ἄθροισμα α ἐκ 5 διαδοχικῶν ὅρων καὶ τὸ ἄθροισμα β τῶν ὅρων τῶν κατεχόντων τάξιν ἀρτίαν; (Ἀπ. ἐὰν

Α, Β, Γ, Δ, Ε ἦναι οἱ 5 ὅροι, τότε $\Gamma = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2+4(\alpha-\beta)^2}}{2}$, ὅτε καὶ

$$A = \frac{((\alpha-\beta)-\sqrt{(\alpha-\beta)^2-4\Gamma^2})^2}{4\Gamma}, \quad B = \frac{(\alpha-\beta)-\sqrt{(\alpha-\beta)^2-4\Gamma^2}}{2}$$

$$\Delta = \frac{(\alpha-\beta)+\sqrt{(\alpha-\beta)^2-4\Gamma^2}}{2}, \quad E = \frac{((\alpha-\beta)+\sqrt{(\alpha-\beta)^2-4\Gamma^2})^2}{4\Gamma}\Bigg)$$

9) Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀρτίας τάξεως γεωμ. προόδου συγκειμένης ἐκ τεσσάρων ὅρων εἶναι α· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τῆς περιττῆς τάξεως β· τίς ἡ πρόοδος;

(Ἀπ. λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$, πρῶτος ὅρος $\frac{\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}$).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΠΕΡΙ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ

Ὁρισμοί.

166. Τόκος λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον φέρουσι δανειζόμενα χρήματα καλούμενα κεφάλαιον.

Ἐπιτόκιον λέγεται ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν ἐπὶ ἓν ἔτος.

Ὁ τόκος εἶναι ἢ ἁπλοῦς ἢ σύνθετος· καὶ ἁπλοῦς μὲν λέγεται, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου· σύνθετος δέ, ὅταν εἰς τὸ τέλος ἑκάστης χρονικῆς μονάδος προστίθηται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ ἀποτελῇ τὸ κατὰ τὴν ἑπομένην χρονικὴν μονάδα τοκιζόμενον κεφάλαιον.

Ἀνατοκισμὸς λέγεται ἡ εἰς τὸ κεφάλαιον πρόσθεσις τοῦ τόκου, ἤτοι ἡ κεφαλαιοποίησις τοῦ τόκου· τὸ δὲ ἐπὶ συνθέτῳ τόκῳ δανειζόμενον ποσὸν λέγεται, ὅτι ἀνατοκίζεται. Τὸ δὲ γενικὸν στοιχειῶδες πρόβλημα τοῦ ἀνατοκισμοῦ εἶναι τὸ ἑξῆς.

Κεφάλαιον α δραχμῶν ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος, πόσον γίνεται μετὰ ν ἔτη, ὅταν μία δραχμὴ ἐπὶ ἓν ἔτος φέρῃ τόκον τ;

Ἐπειδὴ ἡ μία δραχμὴ ἐπὶ ἓν ἔτος φέρει τόκον τ, αἱ α δραχμαὶ φέρουσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν χρόνον τόκον ατ καὶ ἐπομένως τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον α εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους γίνεται $\alpha+\alpha\tau$, ἢ $\alpha(1+\tau)$.

Ἐντεῦθεν δ' ἕπεται, ὅτι ἡ μετὰ ἓν ἔτος ἀξία οἱουδήποτε κεφαλαίου α εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ αὐτὸ ἐπὶ $(1+\tau)$.

Κατὰ δὲ ταῦτα τὸ κεφάλαιον α, ὅπερ ἐγένετο εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους $\alpha(1+\tau)$, εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους γίνεται $\alpha(1+\tau).(1+\tau)$ ἢ $\alpha(1+\tau)^2$, εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους τὸ κεφάλαιον $\alpha(1+\tau)^2$ γίνεται $\alpha(1+\tau).^2(1+\tau)$ ἢ $\alpha(1+\tau)^3$, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τέλους τῶν ν ἐτῶν, ὅτε τὸ κεφάλαιον γίνεται $\alpha(1+\tau)^\nu$· ὅπερ παραστήσωμεν διὰ Κ, ὅτε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $K=\alpha(1+\tau)^\nu$. (1)

Πρόδηλον δέ, ὅτι ἡ αὐτὴ προκύπτει ἐξίσωσις, καὶ ὅταν ὁ ἀνατοκισμὸς συμβαίνῃ οὐχὶ κατ' ἔτος, ἀλλὰ καθ' οἱαδήποτε χρονικὰ διαστήματα ἴσα πρὸς ἄλληλα· ἀρκεῖ νὰ παρασταθῇ πάντοτε διὰ τοῦ τ ὁ τόκος μιᾶς δραχμῆς ἐπὶ ἓν τῶν διαστημάτων τούτων καὶ διὰ τοῦ ν ὁ ἀριθμὸς ὁ τὸ πλῆθος τῶν διαστημάτων τούτων ἐκφράζων.

Ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως (1) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἓν τῶν τεσσάρων ποσῶν Κ, α, τ, ν, ὅταν τὰ λοιπὰ τρία ἦναι δεδομένα· τοῦτο δὲ γίνεται εὐκόλως διὰ τῶν λογαρίθμων· διότι λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἔχομεν

$$\lambda o\gamma K=\lambda o\gamma\,\alpha+\nu\,\lambda o\gamma\,(1+\tau)$$

Ἐπειδὴ δὲ δύναται νὰ ἦναι ἄγνωστον ἓν οἱονδήποτε τῶν τεσσάρων ποσῶν Κ, α, ν, τ, ἕπεται, ὅτι δύνανται νὰ προταθῶσι τέσσαρα διάφορα ἀλλήλων προβλήματα. Πρὸς λύσιν δὲ ἑκάστου τῶν τεσσάρων τούτων προβλημάτων ἀρκεῖ νὰ γραφῇ ἡ ἀνωτέρω σχέσις μεταξὺ τῶν τεσσάρων ποσῶν Κ, α, τ, ν ὑπὸ μίαν τῶν ἑπομένων μορφῶν

$$\lambda o\gamma\,K=\lambda o\gamma\,\alpha+\nu\,\lambda o\gamma\,(1+\tau)$$

$$\lambda o\gamma\,\alpha=\lambda o\gamma\,K-\nu\,\lambda o\gamma\,(1+\tau)$$

$$\lambda o\gamma(1+\tau)=\frac{\lambda o\gamma\,K-\lambda o\gamma\,\alpha}{\nu}$$

$$\nu=\frac{\lambda o\gamma\,K-\lambda o\gamma\,\alpha}{\lambda o\gamma\,(1+\tau)}$$

* 167. Ἐν τοῖς προηγουμένοις ὑποτίθεται, ὅτι τὸ κεφάλαιον α ἀνατοκίζεται ἐπὶ ἀκέραιόν τινα ἀριθμὸν ν χρονικῶν μονάδων καὶ ἡ μόνη σύμβασις γίνεται, ὅτι μετὰ πάροδον χρονικῆς τινος μονάδος, ἡ ἀξία μιᾶς δραχμῆς αὐξάνεται κατὰ τ. Ἀλλὰ πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀξίας τοῦ κεφαλαίου α μετὰ ν χρονικὰς μονάδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ κλάσμα τι $\frac{\rho}{\sigma}$ τῆς χρονικῆς μονάδος πρέπει νὰ γίνηται νέα σύμβασις κατὰ τὰς ἑξῆς περιπτώσεις.

Πρώτη περίπτωσις. Δύναται νὰ συμφωνηθῇ, ἵνα τὸ κεφάλαιον α ἀνατοκίζηται πρὸς τ κατὰ χρονικήν τινα μονάδα ἐπὶ τὰς ν πρώτας χρονικὰς μονάδας, ἐπὶ δὲ τὰ $\frac{\rho}{\sigma}$ τῆς ἐπομένης χρονικῆς μονάδος τὸ παραχθὲν κεφάλαιον $\alpha(1+\tau)^\nu$ τοκίζηται ἐπὶ ἁπλῷ τόκῳ, ὅτε ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἶναι διὰ τὰ $\frac{\rho}{\sigma}$ τῆς χρονικῆς μονάδος $\frac{\rho}{\sigma}\tau$ καὶ ἐπομένως τὸ κεφάλαιον $\alpha(1+\tau)^\nu$ γίνεται τότε

$$K=\alpha(1+\tau)^\nu.(1+\frac{\rho}{\sigma}\tau)$$

Δευτέρα περίπτωσις. Τῆς ἀξίας τῆς μιᾶς δραχμῆς γινομένης μετὰ πάροδον χρονικῆς τινος μονάδος $1+\tau$ δύναται νὰ συμφωνηθῇ, ἵνα μετὰ πάροδον ἑκάστου χρονικοῦ διαστήματος $\frac{1}{\sigma}$ τῆς χρονικῆς μονάδος ἡ ἀξία τῆς μιᾶς δραχμῆς αὐξάνηται κατά τινα ποσότητα τ' τοιαύτην, ὥστε εἰς τὸ τέλος ἑκάστης χρονικῆς μονάδος ἡ ἀξία τῆς μιᾶς δραχμῆς νὰ γίνηται $1+\tau$. Οὕτω δὲ ἡ ἀξία τῆς μιᾶς δραχμῆς ἐπὶ ἕν, δύο, τρία,... τῶν χρονικῶν τούτων διαστημάτων γίνεται $1+\tau'$, $(1+\tau')^2$, $(1+\tau')^3$,... καὶ ἐπομένως μετὰ σ τοιαῦτα διαστήματα, ἤτοι μετὰ μίαν χρονικὴν μονάδα, ἡ ἀξία τῆς μιᾶς δραχμῆς γίνεται $(1+\tau')^\sigma$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀξία αὕτη πρέπει ἀφ' ἑτέρου νὰ γίνηται ἴση τῷ $1+\tau$, ἕπεται ἡ σχέσις

$$(1+\tau')^\sigma=1+\tau$$

ἐξ ἧς

$$1+\tau'=(1+\tau)^{\frac{1}{\sigma}}$$

Μετὰ δὲ ρ τοιαῦτα χρονικὰ διαστήματα, ἤτοι μετὰ $\frac{\rho}{\sigma}$ τῆς χρονικῆς μονάδος, ἡ ἀξία τῆς μιᾶς δραχμῆς γίνεται

$$(1+\tau')^{\rho}=(1+\tau)^{\frac{\rho}{\sigma}}$$

καὶ ἑπομένως ἡ ἀξία τῶν $\alpha(1+\tau)^{\nu}$ δραχμῶν γίνεται

$$K=\alpha(1+\tau)^{\nu+\frac{\rho}{\sigma}}.$$

ἢ
$$K=\alpha(1+\tau)^{\nu'} \quad \left(\nu'=\nu+\frac{\rho}{\sigma}\right)$$

Οἱ δὲ τραπεζῖται δέχονται ἐν γένει τὴν δευτέραν ταύτην περίπτωσιν, ἥτις ἄγει εἰς ἁπλουστέρους τῆς πρώτης λογισμούς.

168. Ἕτερον πρόβλημα τοῦ ἀνατοκισμοῦ εἶναι καὶ τὸ ἑπόμενον.

Ἐὰν κατατεθῇ εἰς τράπεζαν κατὰ χρονικήν τινα μονάδα τὸ ποσὸν α δραχμῶν ἐπ' ἀνατοκισμῷ, πόσον γίνεται τὸ ποσὸν α μετὰ ν χρονικὰς μονάδας τοῦ τόκου τῆς μιᾶς δραχμῆς ἐπὶ μίαν χρονικὴν μονάδα ὄντος τ;

Αἱ α δραχμαὶ αἱ κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς πρώτης χρονικῆς μονάδος κατατεθεῖσαι μένουσιν εἰς ἀνατοκισμὸν ἐπὶ ν χρονικὰς μονάδας καὶ ἑπομένως γίνονται $\alpha(1+\tau)^{\nu}$· αἱ δὲ εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς δευτέρας χρονικῆς μονάδος κατατεθεῖσαι γίνονται $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$, αἱ εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς τρίτης $\alpha(1+\tau)^{\nu-2}$, καὶ καθεξῆς· τέλος αἱ α δραχμαὶ κατατεθεῖσαι εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς τελευταίας χρονικῆς μονάδος γίνονται $\alpha(1+\tau)$. Ὥστε, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ Σ τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον γίνεται τὸ α εἰς τὸ τέλος τῶν ν χρονικῶν τούτων μονάδων τῶν ἴσων ἀλλήλαις, ἔχομεν

$$\Sigma=\alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)^2+\alpha(1+\tau)^3+\ldots+\alpha(1+\tau)^{\nu}$$

ἢ (ἐδ. 161)
$$\Sigma=\frac{\alpha(1+\tau)^{\nu+1}-\alpha(1+\tau)}{\tau}=\frac{\alpha(1+\tau)[(1+\tau)^{\nu}-1]}{\tau}$$

Ἵνα δὲ ὑπολογίζηται ἡ παράστασις αὕτη διὰ τῶν λογαρίθμων, ἀνάγκη πρῶτον νὰ ὑπολογίζηται ἡ δύναμις $(1+\tau)^{\nu}$ καὶ νὰ ἐλαττῶται αὕτη κατὰ μονάδα 1· τὸ δὲ οὕτως εὑρισκόμενον ὑπόλοιπον νὰ τίθηται ἐν τῇ παραστάσει ταύτῃ ἀντὶ τοῦ παράγοντος $(1+\tau)^{\nu}-1$ καὶ νὰ ἐφαρμόζωνται εἶτα ἐπ' αὐτῆς οἱ λογάριθμοι.

ΣΗΜ. Αἱ δυνάμεις $(1+\tau)^{\nu}$ διὰ $\tau=0{,}03,\ 0{,}04,\ \ldots,\ 0{,}06$ καὶ διὰ $\nu=1, 2, 3, \ldots, 50$ εὑρίσκονται ἐν τοῖς πίναξι τοῦ Dupuis (σελ. 134).

Ἐφαρμογαί.

1) Εὑρεῖν τὴν ἀξίαν κεφαλαίου 5680 δρ. ἀνατοκισθέντος ἐπὶ 18 ἔτη πρὸς 4,5 % κατ' ἔτος.

Ἐν τῷ τύπῳ

$$\text{λογ } K = \text{λογ } \alpha + \nu \text{ λογ } (1+\tau)$$

πρέπει νὰ τεθῇ $\alpha = 5680$, $\tau = 0{,}045$ καὶ $\nu = 18$.

Ἡ δὲ διάταξις τῆς πράξεως γίνεται, ὡς ἑξῆς φαίνεται

$$\begin{array}{rl} \text{λογ } 5680 = & 3{,}75435 \\ 18 \text{ λογ } 1{,}045 = & 0{,}34416 \quad\quad \text{λογ } 1{,}045 = 0{,}01912 \\ \hline \text{λογ } K = & 4{,}09851 \\ K = & 12546{,}17 \text{ δρ.} \end{array}$$

2) Εὑρεῖν τὴν ἀξίαν κεφαλαίου 7654 δρ. ἀνατοκισθέντος ἐπὶ 12 ἔτη καὶ 4 μῆνας πρὸς 4 % κατ' ἔτος.

Ἐν τῷ τύπῳ

$$\text{λογ } K = \text{λογ } \alpha + \nu \text{ λογ } (1+\tau)$$

πρέπει νὰ τεθῇ $\alpha = 7654$, $\tau = 0{,}04$ καὶ $\nu = 12 + \frac{1}{3} = \frac{37}{3}$ καὶ ἑπομένως

$$\begin{array}{rl} \text{λογ } 7654 = & 3{,}88389 \\ \frac{37}{3} \text{ λογ } 1{,}04 = & 0{,}21003, \quad\quad \text{λογ } 1{,}04 = 0{,}01703 \\ \hline \text{λογ } K = & 4{,}09392 \\ K = & 12414{,}28 \text{ δρ.} \end{array}$$

3) Εὑρεῖν, ὁποῖον κεφάλαιον ἀνατοκιζόμενον ἐπὶ 9 ἔτη καὶ 3 μῆνας πρὸς 4,5 % γίνεται 72680 δρ.

Ἐνταῦθα εἶναι

$$K = 72680, \quad \tau = 0{,}045, \quad \nu = 9 + \frac{1}{4} = \frac{37}{4}$$

καὶ ἑπομένως

$$\text{λογ } \alpha = \text{λογ } 72680 - \frac{37}{4} \text{ λογ } 1{,}045$$

$$\begin{array}{rl} \text{λογ } 72680 = & 4{,}86141 \\ \frac{37}{4} \text{ λογ } 1{,}045 = & 0{,}17686, \quad \text{λογ } 1{,}045 = 0{,}01912 \\ \hline \text{λογ } \alpha = & 4{,}68455 \\ \alpha = & 48366{,}66 \text{ δρ.} \end{array}$$

4) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἀνατοκιζόμενον τὸ κεφάλαιον 2543 δρ. ἐπὶ 24 ἔτη καὶ 5 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας ἐγένετο 7460 δρ.

Ἐνταῦθα εἶναι

$$\alpha=2543,\quad K=7460,\quad \nu=\frac{220}{9} \quad \text{καὶ ἑπομένως}$$

$$\lambda o\gamma\,(1+\tau)=\frac{9(\lambda o\gamma\,K-\lambda o\gamma\,\alpha)}{220}=0{,}01911$$

$$1+\tau=1{,}04976$$

$$\tau=0{,}04976$$

5) Ἐὰν κατατεθῶσιν ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς γεννήσεώς τινος κατ' ἔτος 1 δραχμὴ ὑπὲρ αὐτοῦ ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 5 $^0/_0$, πόσα ἔχει λαμβάνειν κατὰ τὸ δέκατον ἔτος τῆς ἡλικίας αὐτοῦ;

$$\Sigma=\frac{\alpha(1+\tau)\,[(1+\tau)^{\nu}-1]}{\tau}=\frac{(1{,}05)\,[(1{,}05)^{10}-1]}{0{,}05}=$$

$$=\frac{(1{,}05).(0{,}628895)}{0{,}05}=13{,}2068 \text{ δρ.}$$

Περὶ χρεωλυσίας.

Ὁρισμοί.

169. Χρεωλυσία λέγεται ἡ ἐντὸς ὡρισμένου χρονικοῦ διαστήματος ἀπόσβεσις χρέους δι' ἴσων δόσεων πληρωνομένων κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα, οἷον κατ' ἔτος, καθ' ἑξαμηνίαν κλ.

Χρεωλύσιον λέγεται τὸ ποσὸν τὸ πληρωνόμενον εἰς τὸ τέλος ἑκάστου χρονικοῦ διαστήματος.

Τὸ δὲ χρέος ἀποσβέννυται, ὅταν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν χρεωλυσίων μετὰ τῶν συνθέτων τόκων αὐτῶν ἀποτελέσῃ ποσὸν ἴσον τῇ ἀξίᾳ τοῦ ἀνατοκιζομένου κεφαλαίου. Π. χ. ἐὰν κεφάλαιόν τι α δραχμῶν δανεισθῇ ἐπὶ ἀνατοκισμῷ, μετὰ πάροδον ν χρονικῶν διαστημάτων ἴσων ἀλλήλοις γίνεται

$$\alpha(1+\tau)^{\nu}$$

τ ὄντος τοῦ τόκου τῆς μιᾶς δραχμῆς ἐπὶ ἓν τῶν χρονικῶν τούτων διαστημάτων.

Ἐὰν δὲ πρὸς ἐξόφλησιν πληρώνηται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου χρονικοῦ διαστήματος ἡ ποσότης x, ἡ μὲν πρώτη δόσις διδομένη εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου χρονικοῦ διαστήματος γίνεται εἰς τὸ τέλος τῶν ν χρονικῶν διαστημάτων

$$x(1+\tau)^{\nu-1}$$

ἡ δευτέρα δόσις εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου χρονικοῦ διαστήματος γίνεται εἰς τὸ τέλος τῶν ν χρονικῶν διαστημάτων

$$x(1+\tau)^{\nu-2}$$

Ὁμοίως ἡ τρίτη δόσις γίνεται

$$x(1+\tau)^{\nu-3}$$

καὶ καθεξῆς· ἡ προτελευταία δόσις γίνεται

$$x(1+\tau)$$

καὶ ἡ τελευταία εἶναι x.

Ὥστε ἡ ὁλικὴ ἀξία τῶν ν τούτων δόσεων εἶναι

$$x+x(1+\tau)+x(1+\tau)^2+x(1+\tau)^3+\ldots+x(1+\tau)^{\nu-1}$$

ἢ (ἐδ. 161).

$$x.\frac{(1+\tau)^\nu-1}{\tau}$$

καὶ ἑπομένως, ἵνα συμβῇ ἀπόσβεσις τοῦ δανείου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἦναι

$$x.\frac{(1+\tau)^\nu-1}{\tau}=\alpha(1+\tau)^\nu$$

Ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως ταύτης δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μίαν τῶν τεσσάρων ποσοτήτων x, τ, ν, α, ὅταν αἱ λοιπαὶ τρεῖς ἦναι γνωσταί, διὰ τῶν τύπων

$$\alpha=x.\frac{(1+\tau)^\nu-1}{\tau(1+\tau)^\nu}$$

$$x=\frac{\alpha\tau(1+\tau)^\nu}{(1+\tau)^\nu-1}$$

$$\nu=\frac{\lambda o\gamma\ x-\lambda o\gamma(x-\alpha\tau)}{\lambda o\gamma(1+\tau)}$$

$$\lambda o\gamma\ (1+\tau)=\frac{\lambda o\gamma\ x-\lambda o\gamma(x-\alpha\tau)}{\nu}$$

Ἐφαρμογαί.

1) Ποῖον τὸ δάνειον, τὸ ὁποῖον ἀπεσβέσθη διὰ 34 δόσεων ἐκ 1500 δρ. ἑκάστης πρὸς 4,5 %;

Ἐνταῦθα εἶναι $(1+\tau)^\nu=4{,}466362$ καὶ ἑπομένως

$$\alpha=\frac{1500 . 3{,}467666}{4{,}467666 . 0{,}045}=25872{,}91$$

2) Ἐδανείσθη κεφάλαιον 50000 δρ. πρὸς ἀπόσβεσιν διὰ 25 δόσεων πρὸς 4 %. Ποῖον τὸ χρεωλύσιον;

Ἐνταῦθα εἶναι $(1+\tau)^\nu=2{,}665836$,

$$\frac{\tau}{(1+\tau)^\nu-1}=0{,}024012 \text{ καὶ ἑπομένως}$$

$$x=50000 . 2{,}665836 . 0{,}024012=3200{,}602.$$

3) Ποσάκις πρέπει νὰ πληρωθῇ τὸ ποσὸν 8869,90 δρ. πρὸς ἀπόσβεσιν χρέους 100000 δρ. πρὸς 5 %;

Ἐνταῦθα εἶναι $x=8869{,}9$, $\alpha=100000$, $\tau=0{,}05$ καὶ ἑπομένως

$$\nu=\frac{\lambda o\gamma\, x-\lambda o\gamma(x-\alpha\tau)}{\lambda o\gamma(1+\tau)}=\frac{0{,}36021}{0{,}02119}=17$$

4) Τραπεζίτης τις δανείζει ὑπὸ τοὺς ἑξῆς ὅρους· πᾶν δάνειον ἐξοφλεῖται δι' 25 δόσεων, ὧν ἑκάστη εἶναι τὸ $\frac{1}{15}$ τοῦ δανείου· ποῖον τὸ ἐπιτόκιον;

Ἐνταῦθα εἶναι $\frac{x}{\alpha}=0{,}0666\ldots$, $\nu=25$ καὶ ἑπομένως

$$0{,}0425<\tau<0{,}045$$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὴν σχέσιν

$$\alpha(1+\tau)^\nu=x . \frac{(1+\tau)^\nu-1}{\tau}$$

ἐκ τῆς σχέσεως

$$\alpha=\frac{x}{1+\tau}+\frac{x}{(1+\tau)^2}+\ldots+\frac{x}{(1+\tau)^\nu}$$

2) Ἀποθνήσκων τις κατέλιπε 3200 δρ. διανεμηθησομένας μετὰ 80 ἔτη τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 3 $^0/_0$. Ποῖον τὸ διανεμηθησόμενον ποσόν;

(Ἀπ. 34050,70).

3) Ὁ πληθυσμὸς χώρας τινὸς εἶναι 200000. Παρετηρήθη δέ, ὅτι αὐξάνεται κατ' ἔτος κατὰ τὸ $\frac{1}{15}$· ποῖος ὁ πληθυσμὸς μετὰ 100 ἔτη;

(Ἀπ. 12702820 περίπου).

4) Ἐπὶ πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι ἀνατοκιζόμενον πρὸς 4 $^0/_0$ διπλασιάζεται;

(Ἀπ. 18 περίπου).

5) Ἔν τινι πόλει ὑπάρχουσι 20000 κάτοικοι καὶ εἶναι γνωστόν, ὅτι ὁ πληθυσμὸς αὐτῆς αὐξάνεται κατ' ἔτος κατὰ $\frac{3}{100}$. Τίς ἦτο ὁ πληθυσμὸς πρὸ 10 ἐτῶν;

(Ἀπ. 14882).

6) Ἐπὶ πόσον δὲ χρόνον ὁ πληθυσμὸς οὗτος διπλασιάζεται;

(Ἀπ. 78 ἔτη περίπου).

7) Ἐκ τινος κεφαλαίου ἐκ 5000 δρ. ἀνατοκιζομένου πρὸς 5 $^0/_0$ λαμβάνονται κατ' ἔτος 400 δρ.· πόσον ὑπολειφθήσεται μετὰ 10 ἔτη;

(Ἀπ. 3093,37)

* ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ.

ΠΕΡΙ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΝ, ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ, ΣΥΝΔΥΑΣΜΩΝ, ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΤΟΥ ΔΙΩΝΥΜΟΥ.

Μεταθέσεις.

170. Μεταθέσεις μ πραγμάτων διαφόρων ἀλλήλων καλοῦνται οἱ διάφοροι τρόποι, καθ' οὓς δύνανται ταῦτα νὰ τεθῶσι κατὰ σειράν, τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου. Ἑκάστη μετάθεσις περιέχει πάντα τὰ πράγματα· δύο δὲ τυχοῦσαι μεταθέσεις μόνον κατὰ τὴν τάξιν τῶν πραγμάτων διαφέρουσιν ἀλλήλων. Τὰ μ ταῦτα πράγματα παρίστανται γενικῶς διὰ τῶν

γραμμάτων α, β, γ, δ, . . ., κ τοῦ ἀλφαβήτου. Φανερόν, ὅτι δύο γράμματα δύο μόνον ἐπιδέχονται μεταθέσεις, τὰς αβ καὶ βα. Τρία δὲ γράμματα ἐπιδέχονται 6 μόνας μεταθέσεις. Διότι ἔχοντες τὰς μεταθέσεις τῶν δύο γραμμάτων α καὶ β, ἤτοι τὰς αβ καὶ βα, καὶ γράφοντες ἐν ἑκατέρα τούτων τὸ τρίτον γράμμα γ εἰς πάσας τὰς θέσεις (εἶναι δ' αὗται 3 τὸν ἀριθμὸν) λαμβάνομεν :

αβγ	βαγ
αγβ	βγα
γαβ	γβα

ἤτοι 1.2.3=6 μεταθέσεις. Τέσσαρα δὲ γράμματα ἐπιδέχονται 24 μόνας μεταθέσεις. Διότι ἔχοντες τὰς μεταθέσεις τῶν τριῶν γραμμάτων α, β, γ καὶ γράφοντες τὸ τέταρτον γράμμα δ ἐν ἑκάστῃ μεταθέσει εἰς πάσας τὰς θέσεις (εἶναι δ' αὗται 4 τὸν ἀριθμὸν) λαμβάνομεν 1. 2. 3. 4=24 μεταθέσεις. Καὶ γενικῶς ἔχοντες τὰς μεταθέσεις, τῶν μ—1 γραμμάτων, ὧν τὸ πλῆθος σημαίνει ὁ ἀριθμὸς 1. 2. 3. . . . (μ—1) καὶ γράφοντες τὸ μυοστὸν γράμμα κ ἐν ἑκάστῃ μεταθέσει, εἰς πάσας τὰς θέσεις (εἶναι δὲ αὗται μ τὸν ἀριθμὸν ἐν ἑκάστῃ μεταθέσει) λαμβάνομεν: 1. 2. 3. 4. . .μ μεταθέσεις, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων μ πραγμάτων διαφόρων ἀλλήλων εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ πάντων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ μ. Συμβολικῶς δὲ γράφεται ὁ ἀριθμὸς οὗτος ὡς ἑξῆς :

$$M_\mu \quad ἢ \quad \mu!$$

Αἱ μ! αὗται μεταθέσεις εἶναι πᾶσαι διάφοροι ἀλλήλων· διότι αἱ μὲν προκύπτουσαι ἐκ τῆς αὐτῆς μεταθέσεως τῶν μ—1 γραμμάτων διαφέρουσι κατὰ τὴν θέσιν τοῦ νέου γράμματος κ, αἱ δὲ ἐκ διαφόρων κατὰ τὴν θέσιν τῶν λοιπῶν γραμμάτων. Ἄλλαι δὲ μεταθέσεις τῶν μ γραμμάτων δὲν ὑπάρχουσι· διότι, ἂν θεωρήσωμεν μίαν οἱανδήποτε τούτων καὶ παραλείψωμεν ἐξ αὐτῆς τὸ νέον γράμμα κ, μένει προφανῶς μετάθεσίς τις τῶν μ—1 γραμμάτων· ταύτην δ' εἴχομεν ἤδη καὶ ἐπειδὴ τὸ νέον γράμμα κ ἐτέθη εἰς πάσας αὐτῆς τὰς θέσεις, ἕπεται, ὅτι ἐκ ταύτης προῆλθε καὶ ἡ μετάθεσις, ἣν θεωροῦμεν.

Διατάξεις.

171. Διατάξεις μ γραμμάτων διαφόρων ἀλλήλων ἀνὰ ν ($\mu \geq \nu$) καλοῦνται οἱ διάφοροι τρόποι, καθ' οὓς δύνανται νὰ ληφθῶσι ν

τῶν πραγμάτων μ καὶ νὰ τεθῶσι κατὰ σειρὰν τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου. Δύο τυχοῦσαι διατάξεις διαφέρουσιν ἀλλήλων εἴτε κατὰ τὴν φύσιν τῶν πραγμάτων εἴτε κατὰ τὴν τάξιν τούτων.

Τὰ γράμματα α, β, γ,. . . ι, κ ἀνὰ 1 λαμβανόμενα ἐπιδέχονται προφανῶς μ μόνας διατάξεις, τὰς α, β,. . . ., ι, κ.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀνὰ δύο διατάξεων τῶν μ τούτων γραμμάτων τίθενται κατόπιν ἑκάστου γράμματος διαδοχικῶς πάντα τὰ λοιπά, ὡς ἑξῆς:

αβ	βα	γα	.	.	κα
αγ	βγ	γβ	.	.	κβ
αδ	βδ	γδ	.	.	κγ
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
ακ	βκ	γκ	.	..	κι

Ἐπειδὴ ἑκάστη στήλη περιέχει μ—1 διατάξεις, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν στηλῶν τούτων εἶναι μ· ἕπεται, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν διατάξεων μ γραμμάτων ἀνὰ δύο εἶναι μ(μ—1) καὶ συμβολικῶς $\Delta^2_\mu = \mu(\mu-1)$.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τῶν ἀνὰ τρία διατάξεων τῶν μ γραμμάτων τίθενται κατόπιν ἑκάστης διατάξεως ἀνὰ δύο διαδοχικῶς πάντα τὰ λοιπὰ μ—2 γράμματα. Οὕτως εὑρίσκονται πᾶσαι αἱ διατάξεις ἀνὰ 3, ὧν ὁ ἀριθμὸς

$$\Delta^3_\mu = \mu\ (\mu-1)\ (\mu-2).$$

Καὶ γενικῶς εὑρεθεισῶν τῶν διατάξεων τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν—1, ὧν τὸ πλῆθος σημαίνει ὁ ἀριθμὸς $\Delta^{\nu-1}_\mu = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+2)$ καὶ τιθεμένων κατόπιν ἑκάστης τῶν διατάξεων τούτων διαδοχικῶς πάντων τῶν λοιπῶν μ—ν+1 γραμμάτων εὑρίσκονται πᾶσαι αἱ ἀνὰ ν διατάξεις·

$$\Delta^\nu_\mu = \mu\ (\mu-1)\ (\mu-2)\ldots\ (\mu-\nu+1).$$

ἤτοι ὁ ἀριθμὸς τῶν διατάξεων μ πραγμάτων διαφόρων ἀλλήλων ἀνὰ ν εἶναι τὸ γινόμενον ν διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ μ ἀρχομένων καὶ κατὰ μονάδα 1 φθινόντων.

Αἱ Δ^ν_μ αὗται διατάξεις διαφέρουσι πᾶσαι ἀλλήλων· διότι αἱ μὲν ἐκ τῆς αὐτῆς διατάξεως ἀνὰ ν—1 προερχόμεναι διαφέρουσι κατὰ τὸ τελευταῖον γράμμα, αἱ δὲ ἐκ διαφόρων κατὰ τὰ λοιπά. Ἄλλαι δὲ διατάξεις ἀνὰ ν τῶν μ γραμμάτων δὲν ὑπάρχουσι· διότι, ἂν θεωρήσωμεν μίαν τούτων οἱανδήποτε, παραλειπομένου ἐξ αὐτῆς τοῦ τελευταίου γράμματος, προκύπτει διάταξίς τις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν—1· ταύτην δ' εἴχομεν ἤδη καὶ ἐπειδὴ ἐτέθη εἰς τὸ τέλος αὐτῆς ἕκαστον τῶν λοιπῶν γραμμάτων $\mu-\nu+1$, ἅτινα δὲν εἶχεν, ἕπεται, ὅτι ἐκ ταύτης προῆλθε καὶ ἡ διάταξις, ἣν θεωροῦμεν.

Ἐὰν τὰ μ γράμματα λαμβάνωνται ἀνὰ μ, αἱ διατάξεις καθίστανται μεταθέσεις· διότι τότε μόνον κατὰ τὴν τάξιν διαφέρουσιν. Ὥστε

$$\Delta_\mu^\mu = M_\mu = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-\mu+1) = 1.2\ldots\mu = \mu!$$

Συνδυασμοί.

172. Συνδυασμοὶ μ πραγμάτων διαφόρων ἀλλήλων ἀνὰ ν καλοῦνται οἱ διάφοροι τρόποι, καθ' οὓς δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ν τῶν μ πραγμάτων, ὥστε αἱ οὕτως εὑρισκόμεναι διατάξεις νὰ διαφέρωσιν ἀλλήλων καθ' ἓν τοὐλάχιστον πρᾶγμα, τῆς τάξεως τῶν πραγμάτων οὔσης οἱασδήποτε.

Τὰ μ γράμματα α, β, γ,...ι, κ ἀνὰ ἓν λαμβανόμενα ἐπιδέχονται προφανῶς μ συνδυασμούς, τοὺς α, β, γ,..., ι, κ.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τῶν ἀνὰ δύο συνδυασμῶν τῶν μ τούτων γραμμάτων γράφομεν διαδοχικῶς κατόπιν ἑκάστου αὐτῶν ἕκαστον τῶν ἑπομένων, ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{rrrr}
\alpha\beta, & \alpha\gamma, & \alpha\delta, & \ldots\ \alpha\kappa \\
 & \beta\gamma, & \beta\delta, & \ldots\ \beta\kappa \\
 & & \gamma\delta, & \ldots\ \gamma\kappa \\
 & & & \ldots\ldots\ldots \\
 & & & \iota\kappa
\end{array}$$

Φανερὸν δέ, ὅτι ὁ τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τούτων σημαίνων ἀριθμὸς εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν διατάξεων ἀνὰ δύο τῶν αὐτῶν μ γραμμάτων, ἤτοι συμβολικῶς :

$$\Sigma_\mu^2 = \frac{\Delta_\mu^2}{1.2}$$

ἢ καὶ ἄλλως· ἐὰν ἐν ἑκάστῳ τῶν συνδυασμῶν ἀνὰ δύο νοήσωμεν πάσας τὰς δυνατὰς μεταθέσεις τῶν 2 γραμμάτων, εὑρίσκομεν ἐξ αὐτοῦ M_2 διατάξεις, αἵτινες περιέχουσι μὲν τὰ αὐτὰ γράμματα, διαφέρουσι δὲ κατὰ τὴν θέσιν αὐτῶν· ὥστε ἐκ τῶν Σ_μ^2 συνδυασμῶν προκύπτουσιν ἐν συνόλῳ $M_2\Sigma_\mu^2$ διατάξεις, ἤτοι

$$\Delta_\mu^2 = M_2\Sigma_\mu^2 \quad \text{ἢ} \quad \Sigma_\mu^2 = \frac{\Delta_\mu^2}{M_2}$$

Ἵνα εὕρωμεν δὲ τοὺς ἀνὰ τρία συνδυασμούς, γράφομεν διαδοχικῶς κατόπιν ἑκάστου συνδυασμοῦ ἀνὰ δύο ἕκαστον τῶν ἑπομένων γραμμάτων, ὡς ἑξῆς:

αβγ, αβδ, αβε, . . . , αβκ

αγδ, αγε, . . . , αγκ

. . . .

οὕτως εὑρίσκονται $M_3 \Sigma^3_\mu$ διατάξεις ἀνὰ 3, ἤτοι

$$\Delta^3_\mu = M_3 \Sigma^3_\mu \quad \text{ἢ} \quad \Sigma^3_\mu = \frac{\Delta^3_\mu}{M_3}$$

Καὶ γενικῶς· ἔχοντες τοὺς συνδυασμοὺς τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν—1· ὧν τὸ πλῆθος παρίσταται συμβολικῶς:

$$\Sigma^{\nu-1}_\mu = \frac{\Delta^{\nu-1}_\mu}{M_{\nu-1}} \quad \text{ἢ} \quad \Delta^{\nu-1}_\mu = M_{\nu-1} \Sigma^{\nu-1}_\mu$$

καὶ γράφοντες κατόπιν ἑκάστου τῶν συνδυασμῶν τούτων διαδοχικῶς ἕκαστον τῶν ἑπομένων γραμμάτων εὑρίσκομεν πάντας τοὺς ἀνὰ ν συνδυασμοὺς τῶν μ γραμμάτων· διότι, ἐὰν ἐν ἑκάστῳ τῶν συνδυασμῶν ἀνὰ ν—1 νοήσωμεν πάσας τὰς δυνατὰς μεταθέσεις τῶν ν—1 τούτων γραμμάτων, εὑρίσκομεν πάσας τὰς διατάξεις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν, ἤτοι

$$\Delta^\nu_\mu = M_\nu \Sigma^\nu_\mu \quad \text{ἢ} \quad \Sigma^\nu_\mu = \frac{\Delta^\nu_\mu}{M_\nu} = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2\ldots\nu}$$

ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μ πραγμάτων διαφόρων ἀλλήλων ἀνὰ ν εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν διατάξεων ἀνὰ ν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ν μεταθέσεων τῶν αὐτῶν πραγμάτων· εἶναι δὲ τὸ πηλίκον τοῦτο ἀριθμὸς ἀκέραιος.

Οἱ Σ^ν_μ οὗτοι συνδυασμοὶ διαφέρουσιν ἀλλήλων· διότι οἱ μὲν ἐκ τοῦ αὐτοῦ συνδυασμοῦ ἀνὰ ν—1 προερχόμενοι διαφέρουσι κατὰ τὸ τελευταῖον γράμμα, οἱ δὲ ἐκ διαφόρων κατὰ τὰ λοιπά. Ἄλλοι δὲ συνδυασμοὶ ἀνὰ ν τῶν μ γραμμάτων δὲν ὑπάρχουσι· διότι, ἂν θεωρήσωμεν ἕνα τούτων οἱονδήποτε καὶ διατάξωμεν τὰ γράμματα αὐτοῦ κατὰ τὴν ἀλφαβητικὴν τάξιν (α β γ, . . ., κ). παραλειπομένου ἐξ αὐτοῦ τοῦ τελευταίου γράμματος προκύπτει συνδυασμός τις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν—1· τοῦτον δὲ τὸν συνδυασμὸν εἴχομεν ἤδη. καὶ ἐπειδὴ ἐτέθη μετὰ τὸ τελευταῖον αὐτοῦ γράμμα ἕκαστον τῶν ἑπομένων, ἅτινα δὲν εἶχεν, ἕπεται, ὅτι ἐκ τούτου προῆλθε καὶ ὁ συνδυασμός, ὃν θεωροῦμεν.

* 173. Οἱ συνδυασμοὶ μ πραγμάτων διαφόρων ἀλλήλων ἀνὰ ν κέκτηνται τὰς ἑπομένας ἰδιότητας:

1) Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν εἶναι ἴσος τῷ ἀριθμῷ τῶν συνδυασμῶν μ πραγμάτων ἀνὰ μ—ν· ἤτοι

$$\Sigma_\mu^\nu = \Sigma_\mu^{\mu-\nu}$$

Διότι πρὸς ἕκαστον συνδυασμὸν περιέχοντα ν τῶν μ γραμμάτων ἀντιστοιχεῖ εἷς συνδυασμὸς περιέχων τὰ λοιπὰ μ — ν γράμματα, καὶ ἀντιστρόφως. Ὁ αὐτὸς ἄρα ἀριθμὸς συνδυασμῶν ὑπάρχει εἰς ἀμφότερα τὰ πλήθη Σ_μ^ν καὶ $\Sigma_\mu^{\nu-1}$. Τοῦτο δ' ἀποδεικνύεται καὶ ἀμέσως· διότι

$$\Sigma_\mu^\nu = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2\ldots\mu} = \frac{1.2\ldots(\mu-\nu).(\mu-\nu+1)\ldots(\mu-1)\mu}{1.2\ldots(\mu-\nu).1.2\ldots\nu} =$$

$$= \frac{\mu!}{\nu!\,(\mu-\nu)!} = \Sigma_\mu^{\mu-\nu}.$$

τοῦ ἀριθμοῦ $\dfrac{\mu!}{\nu!\,(-\nu)!}$ μένοντος τοῦ αὐτοῦ τρεπομένου τοῦ ν εἰς μ — ν.

2) Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν εἶναι ἴσος τῷ ἀριθμῷ τῶν συνδυασμῶν μ—1 πραγμάτων ἀνὰ ν ηὐξημένῳ κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν μ—1 πραγμάτων ἀνὰ ν—1, ἤτοι

$$\Sigma_\mu^\nu = \Sigma_{\mu-1}^\nu + \Sigma_{\mu-1}^{\nu-1}.$$

Διότι οἱ συνδυασμοὶ μ γραμμάτων α, β, γ, . . . , κ ἀνὰ ν δύνανται νὰ διακριθῶσιν εἰς δύο μέρη· τὸ μὲν πρῶτον ἀποτελοῦσι πάντες οἱ συνδυασμοὶ οἱ μὴ περιέχοντες γράμμα τι, π. χ. τὸ α, τὸ δὲ δεύτερον οἱ περιέχοντες τοῦτο. Καὶ ὁ μὲν ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν τοῦ πρώτου μέρους εἶναι προφανῶς $\Sigma_{\mu-1}^\nu$, ὁ δὲ τοῦ δευτέρου εὑρίσκεται λαμβανομένων τῶν συνδυασμῶν τῶν μ—1 γραμμάτων ἀνὰ ν—1 καὶ προσγραφομένου ἑκάστῳ αὐτῶν τοῦ γράμματος α. Τὸ αὐτὸ εὑρίσκεται καὶ ἀμέσως, διότι:

$$\Sigma_{\mu-1}^\nu = \frac{(\mu-1)}{\nu!\,(\mu-\nu-1)!} \quad \text{καὶ} \quad \Sigma_{\mu-1}^{\nu-1} = \frac{(\mu-1)!}{(\nu-1)!\,(\mu-\nu)!}$$

ὅθεν

$$\Sigma_{\mu-1}^\nu + \Sigma_{\mu-1}^{\nu-1} = \frac{\mu!}{\nu!(\mu-\nu)!} = \Sigma_\mu^\nu$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται καὶ

$$\Sigma_{\mu}^{\nu}=\Sigma_{\mu-1}^{\nu-1}+\Sigma_{\mu-2}^{\nu-1}+\Sigma_{\mu-3}^{\nu-1}+\Sigma_{\mu-4}^{\nu-1}+\ldots+\Sigma_{\nu}^{\nu-1}+\Sigma_{\nu-1}^{\nu-1}$$

πολλαπλασιαζομένων δὲ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ $(\nu-1)!$ εὑρίσκεται:

$$\frac{1}{\nu}\Delta_{\mu}^{\nu}=\Delta_{\mu-1}^{\nu-1}+\Delta_{\mu-2}^{\nu-1}+\Delta_{\mu-3}^{\nu-1}+\ldots+\Delta_{\nu-1}^{\nu-1}$$

Πιθανότητες.

174. Πιθανότης συντυχίας τινὸς καλεῖται ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εὐμενῶν ἢ δυσμενῶν περιπτώσεων πρὸς τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν ἐξ ἴσου δυνατῶν περιπτώσεων εὐμενῶν τε καὶ δυσμενῶν.

Ὑποτεθείσθω π. χ., ὅτι ὑδρία τις περιέχει 17 σφαιρίδια τοῦ αὐτοῦ ὄγκου καὶ ὕλης, ὧν τὰ μὲν 12 λευκά, τὰ δὲ 5 μέλανα, καὶ ὅτι ζητεῖται ἡ πιθανότης περὶ τοῦ χρώματος σφαιριδίου κατὰ τύχην ἐκ τῆς ὑδρίας ἐξαχθέντος. Ὑπάρχουσιν ἐν συνόλῳ 17 ἐξ ἴσου δυναταὶ περιπτώσεις: 12 διὰ τὰ λευκὰ καὶ 5 διὰ τὰ μέλανα.

Ἡ πιθανότης ἄρα περὶ τοῦ χρώματος εἶναι $\frac{12}{17}$ διὰ τὴν ἐξαγωγὴν λευκοῦ, $\frac{5}{17}$ διὰ τὴν ἐξαγωγὴν μέλανος.

175. Λαχεῖόν τι ἀποτελεῖται ἐκ μ κλήρων ἢ ἀριθμῶν. Ἐὰν ὑποτεθῇ, ὅτι κληροῦνται συγχρόνως ν ἀριθμοί, τίς ἡ πιθανότης, ὅτι μεταξὺ τῶν ν ἀριθμῶν ὑπάρχουσι ρ ὁριζόμενοι ἐκ τῶν προτέρων;

Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξ ἴσου δυνατῶν περιπτώσεων εἶναι προφανῶς ἐνταῦθα Σ_{μ}^{ν}. Ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων εἶναι $\Sigma_{\mu-\rho}^{\nu-\rho}$ διότι, ἐὰν θεωρήσωμεν εὐνοϊκόν τινα συνδυασμὸν καὶ παραλείψωμεν τοὺς ὁρισθέντας ἐκ τῶν προτέρων ρ ἀριθμούς, μένει συνδυασμός τις τῶν μ—ρ λοιπῶν ἀριθμῶν ἀνὰ ν—ρ· καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν εἰς συνδυασμόν τινα τῶν μ—ρ τούτων ἀριθμῶν ἀνὰ ν—ρ προστεθῶσιν οἱ ἐκ τῶν προτέρων ὁρισθέντες ρ ἀριθμοί, ἔχομεν συνδυασμόν τινα εὐνοϊκόν.

Ἡ πιθανότης ἄρα εἶναι:

$$\frac{\Sigma_{\mu-\rho}^{\nu-\rho}}{\Sigma_{\mu}^{\nu}}$$

Ἐὰν $\mu=90$, $\nu=5$, $\rho=3$, ἔπεται

$$\frac{\Sigma_{87}^{2}}{\Sigma_{90}^{5}}=\frac{1}{11748}$$

Ὥστε ἐπὶ 11748 περιπτώσεων ὑπάρχει 1 εὐνοϊκὴ καὶ 11747 δυσμενεῖς. Τὸ εἰδικὸν τοῦτο παράδειγμα εἶναι ὄντως ἀξιοπαρατήρητον.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν

1) Εὑρεῖν τὸν ἀριθμὸν τὸν ἐκφράζοντα τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων εὐθυγράμμου σχήματος, τὸ ὁποῖον ἔχει μ πλευρὰς καὶ μ κορυφάς.

Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς μ κορυφὰς ἀνὰ 2 πρὸς ἀλλήλας εἶναι τόσαι, ὅσοι οἱ συνδυασμοὶ τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ 2, ἤτοι $\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}$. ἀλλ' ἀπὸ τούτων ἀφαιρετέαι αἱ μ πλευραὶ τοῦ σχήματος· ὥστε αἱ διαγώνιοι εἶναι

$$\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}-\mu \quad \text{ἢ} \quad \frac{\mu(\mu-3)}{1.2}$$

2) Κατὰ πόσα σημεῖα τέμνονται αἱ μ πλευραὶ ἐπιπέδου πολυγώνου προσεκβαλλόμεναι; (ὑποτίθεται, ὅτι δὲν εἶναι δύο παράλληλοι).

Κατὰ τόσα σημεῖα, ὅσοι εἶναι οἱ συνδυασμοὶ τῶν μ πλευρῶν ἀνὰ δύο, ἤτοι $\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}$· ἀλλ' ἀπὸ τούτων ἀφαιρετέαι αἱ μ κορυφαί, ὥστε αἱ τομαὶ εἶναι

$$\frac{\mu(\mu-3)}{1.2}$$

3) Κατὰ πόσους τρόπους δύνανται νὰ λάβωσι θέσιν ὀκτὼ ἄνθρωποι περί τινα τράπεζαν; ('Απ. 40320)

4) Πόσοι διψήφιοι ἀριθμοὶ ὑπάρχουσιν ἔχοντες σημαντικὰ ψηφία διάφορα ἀλλήλων; πόσοι τριψήφιοι; ('Απ. 72, 504).

5) Κατὰ πόσους τρόπους δύνανται νὰ παραταχθῶσι δέκα στρατιῶται; ('Απ. 3628800).

6) Ἐάν τις ἀγοράσῃ 30 ἀριθμοὺς λαχείου, τίς ἡ πιθανότης ἐξαγωγῆς ἢ ἑνὸς ἢ δύο ἢ τριῶν ἀριθμῶν;

('Απ. $\frac{1}{3}$ περίπου, $\frac{1}{3}$ περίπου, $\frac{8}{49}$ περίπου).

7) Ἔν τινι κάλπῃ ὑπάρχουσιν 24 σφαιρίδια τοῦ αὐτοῦ ὄγκου καὶ

ὕλης ὧν 6 λευκά, 8 μέλαινα καὶ 12 ἐρυθρά· ἐξάγονται πρῶτον 7 καὶ εἶτα 3 ἐκ τῶν ὑπολοίπων 17· τίς ἡ πιθανότης ὅτι τὰ 7 ἐξαχθέντα εἶναι πάντα ἐρυθρά, τὰ δὲ 3 λευκά;

$$\left(\text{᾿Απ. } \frac{5}{490314}\right).$$

Τύπος τοῦ διωνύμου.

176. Τὸ γινόμενον τῶν μ παραγόντων διωνύμων $(x+\alpha).(x+\beta)(x+\gamma)...(x+\varkappa).(x+\lambda)$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων, ἅτινα εὑρίσκομεν λαμβάνοντες κατὰ πάντας τοὺς δυνατοὺς τρόπους τὸν ἕτερον ὅρον ἐξ ἑκάστου διωνύμου. Οὕτω προκύπτει πολυώνυμον ἀκέραιον πρὸς x βαθμοῦ μ. Καὶ ὁ μὲν ὅρος x^μ εὑρίσκεται προφανῶς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πάντων τῶν πρώτων ὅρων τῶν διωνύμων· ἔχει ἄρα συντελεστὴν 1. Ἡ δὲ δύναμις $x^{\mu-1}$ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ x ἐκ $\mu-1$ μόνον διωνύμων· ὥστε ὁ συντελεστὴς αὐτῆς εἶναι τὸ ἄθροισμα $K_1=\alpha+\beta+\gamma+...+\varkappa+\lambda$ πάντων τῶν μ δευτέρων ὅρων τῶν διωνύμων. Ἡ δύναμις $x^{\mu-2}$ εὑρίσκεται ὁμοίως ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ x ἐκ $\mu-2$ μόνον διωνύμων ἔχουσα συντελεστὴν τὸ ἄθροισμα $K_2=\alpha\beta+\alpha\gamma+...+\varkappa\lambda$, ἤτοι τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων ἀνὰ δύο τῶν δευτέρων ὅρων $\alpha, \beta, ..., \lambda$. Καὶ γενικῶς πρὸς εὕρεσιν πάντων τῶν ὅρων τῶν ἐχόντων παράγοντα $x^{\mu-\rho}$ πρέπει νὰ ληφθῇ τὸ x κατὰ πάντας τοὺς δυνατοὺς τρόπους ὡς παράγων ἐκ $\mu-\rho$ μόνον διωνύμων. Ὁ συντελεστὴς ἄρα τοῦ $x^{\mu-\rho}$ εἶναι τὸ ἄθροισμα K_ρ πάντων τῶν γινομένων ἀνὰ ρ τῶν δευτέρων ὅρων $\alpha, \beta, \gamma, ..., \lambda$. Ὁ δὲ τελευταῖος ὅρος τοῦ γινομένου εἶναι προφανῶς $K_\mu=\alpha.\beta.\gamma....\lambda$.

Ἔχομεν ἄρα

$$(x+\alpha).(x+\beta)(x+\gamma)...(x+\lambda)=x^\mu+K_1x^{\mu-1}+K_2x^{\mu-2}+...K_\rho x^{\mu-\rho}$$
$$+...+K_{\mu-1}x+K_\mu$$

ὅθεν καὶ

$$(x-\alpha.)(x-\beta)..(x-\lambda)=x^\mu-K_1x^{\mu-1}+K_2x^{\mu-2}-..+-(1)^\rho K_\rho x^{\mu-\rho}$$
$$+..+(-1)^\mu K_\mu.$$

Ἐὰν δὲ $\alpha=\beta=\gamma=...=\lambda$, ἕπεται

(1) $$(x+\alpha)^\mu=x^\mu+\Sigma^1_\mu\alpha x^{\mu-1}+\Sigma^2_\mu\alpha^2x^{\mu-2}+..+\Sigma^\rho_\mu\alpha^\rho x^{\mu-\rho}+..+\alpha^\mu$$

καὶ $$(x-\alpha)^\mu=x^\mu-\Sigma^1_\mu\alpha x^{\mu-1}_\rho+\Sigma^2_\mu\alpha^2x^{\mu-2}+..+(-1)^\rho\Sigma^\rho_\mu\alpha^\rho x^{\mu-\rho}$$
$$+...+(-1)^\mu\alpha^\mu$$

ὅπου συμβολικῶς Σ_μ^ρ σημαίνει τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ρ· ἤτοι

$$\Sigma_\mu^\rho = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\rho+1)}{1.2\ldots\rho}$$

177. Τὸ ἀνάπτυγμα (1) καλεῖται τύπος τοῦ διωνύμου ἢ τύπος τοῦ Νεύτωνος. Παρατηρητέον δέ, ὅτι ἐν τῷ τύπῳ τούτῳ οἱ μὲν ἐκθέται τοῦ x βαίνουσι κατὰ μονάδα ἐλαττούμενοι, οἱ δὲ τοῦ α κατὰ μονάδα αὐξανόμενοι. Ἐν ἑκάστῳ δὲ ὅρῳ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τοῦ α καὶ τοῦ x εἶναι πάντοτε ἴσον τῷ μ. Ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι $\mu+1$.

178. Οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τοῦ $(x+\alpha)^\mu$ τῶν ἴσων ἀπεχόντων τῶν ἄκρων εἶναι ἴσοι. Ἐκ τοῦ ἀναπτύγματος (1) ἀμέσως φανερόν, ὅτι ὁ πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος ἔχουσι συντελεστὴν τὴν μονάδα 1. Ὁ δεύτερος καὶ ὁ προτελευταῖος ὅρος ἔχουσι συντελεστὰς Σ^1_μ καὶ $\Sigma_\mu^{\mu-1}$· ἀλλ' εἶναι γνωστόν, ὅτι $\Sigma^1_\mu=\Sigma_\mu^{\mu-1}$. Καὶ γενικῶς $\Sigma^\rho_\mu=\Sigma_\mu^{\mu-\rho}$, $(\mu>\rho)$: Ἕκαστος δὲ συντελεστὴς παράγεται ἐκ τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ κατὰ τὸν ἑπόμενον τύπον

$$\Sigma_\mu^\rho = \frac{\mu-\rho+1}{\rho}\Sigma_\mu^{\rho-1}$$

179. Ἐὰν ἐν τῷ ἀναπτύγματι τοῦ $(x+\alpha)^\mu$ τεθῇ $x=\alpha=1$, ἕκαστος ὅρος ἀνάγεται εἰς τὸν συντελεστὴν αὐτοῦ καί ἔχομεν

$$2^\mu=1+\frac{\mu}{1}+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}+\ldots+1$$

ἢ
$$2^\mu-1=\Sigma^1_\mu+\Sigma^2_\mu+\ldots+\Sigma^\mu_\mu$$

ἤτοι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν $\mu+1$ συντελεστῶν εἶναι ἴσον τῷ 2^μ, ὁ δὲ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μ πραγμάτων λαμβανομένων κατὰ πάντας τοὺς δυνατοὺς τρόπους, ἤτοι ἀνὰ 1, ἀνὰ 2,..., ἀνὰ μ, εἶναι $2^\mu-1$.

180. Ἐὰν δὲ ἐν τῷ ἀναπτύγματι τοῦ $(x-\alpha)^\mu$ τεθῇ $x=\alpha=1$, ἕπεται

$$0=1-\Sigma^1_\mu+\Sigma^2_\mu-\Sigma^3_\mu+\ldots$$

ὅθεν

$$\Sigma^1_\mu+\Sigma^3_\mu+\ldots=1+\Sigma^2_\mu+\Sigma^4_\mu+\ldots$$

ἤτοι ἐν πᾶσι τοῖς δυνατοῖς συνδυασμοῖς μ πραγμάτων τὸ ἄθροισμα τῶν συνδυασμῶν τῶν περιεχόντων περιττὸν ἀριθμὸν πραγμάτων ὑπερβαίνει κατὰ μονάδα τὸ ἄθροισμα τῶν συνδυασμῶν τῶν περιεχόντων ἄρτιον ἀριθμὸν πραγμάτων.

181. Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας:

$$(x+1)^\mu = x^\mu + \Sigma_\mu^1 x^{\mu-1} + \ldots + \Sigma_\mu^\rho x^{\mu-\rho} + \ldots + \Sigma_\mu^\mu$$

$$(x+1)^\mu = 1 + \Sigma_\mu^1 x + \ldots + \Sigma_\mu^\rho x^\rho + \ldots + \Sigma_\mu^\mu x^\mu$$

λαμβάνομεν τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(x+1)^{2\mu}$. Ἐν τῷ ἀναπτύγματι δὲ τούτῳ ὁ συντελεστὴς τοῦ x^μ εἶναι ὁ $\Sigma_{2\mu}^\mu$ ἴσος προφανῶς τῷ ἀθροίσματι

$$1 + (\Sigma_\mu^1)^2 + (\Sigma_\mu^2)^2 + \ldots + (\Sigma_\mu^\mu)^2 = \frac{2\mu!}{\mu!\,\mu!}$$

Προβλήματα διάφορα.

1) Ἔν τινι ἐκπαιδευτηρίῳ ἐκ τεσσάρων τάξεων καὶ 123 μαθητῶν ὑπάρχουσιν ἐν μὲν τῇ δευτέρᾳ τάξει 4 μαθηταὶ πλέον ἢ ἐν τῇ πρώτῃ, ἐν δὲ τῇ τρίτῃ τάξει 8 πλέον ἢ ἐν τῇ δευτέρᾳ, ἐν δὲ τῇ τετάρτῃ τάξει 3 πλέον ἢ ἐν τῇ τρίτῃ· πόσοι εἶναι οἱ μαθηταὶ ἑκάστης τάξεως;
(Ἀπ. 23, 27, 35, 38).

2). Ἔν τινι φρουρίῳ ὑπάρχουσι 3250 στρατιῶται, ἐν οἷς οἱ πυροβοληταὶ τριπλάσιοι τῶν ἱππέων, οἱ δὲ πεζοὶ τετραπλάσιοι τῶν πυροβολητῶν. Πόσοι εἶναι οἱ στρατιῶται ἑκάστου ὅπλου; (Ἀπ. 220, 660, 2640).

3) Ἔχει τις ἐν τῷ δεξιῷ θυλακίῳ 6 δραχ. πλέον ἢ ἐν τῷ ἀριστερῷ· ἐκ τοῦ δεξιοῦ θυλακίου τίθενται εἰς τὸ ἀριστερὸν τόσαι, ὅσαι αἱ ἐν αὐτῷ· εἶτα ἐκ τοῦ ἀριστεροῦ εἰς τὸ δεξιὸν τόσαι, ὅσαι αἱ ἤδη ἐν αὐτῷ καὶ τέλος ἐκ τοῦ δεξιοῦ εἰς τὸ ἀριστερὸν τόσαι, ὅσαι αἱ ἤδη ἐν αὐτῷ· οὕτω δὲ ἐν ἑκατέρῳ θυλακίῳ εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς δραχμῶν. Πόσαι εἶναι αἱ ἐξ ἀρχῆς δραχμαί; (Ἀπ. 11, 5).

4) Ἡ λίτρα οἴνου ἐπωλήθη πρὸς 1,10 μετὰ κέρδους $37\frac{1}{2}$ %· πόσον ἠγοράσθησαν αἱ ἑκατὸν λίτραι; (Ἀπ. 80 δρ.).

5) Κεφάλαιον ἐδανείσθη πρὸς $6\frac{1}{2}$ % κατ' ἔτος. Μετὰ πό[illegible] ἔτη οἱ τόκοι ἀποτελοῦσιν $1\frac{5}{8}$ τοῦ κεφαλαίου; (Ἀπ. 25).

6) Χωρικός τις ἔχει ἀγέλην χηνῶν καὶ ἀμνῶν ἐν ὅλῳ 432. Ἀντήλλαξε δὲ τὴν ἀγέλην τῶν χηνῶν ἀντὶ ἀμνῶν οὕτως, ὥστε 32 χῆνες ἀντιστοιχοῦσι πρὸς 3 ἀμνούς· οὕτω δὲ ἔχει 200 ἀμνούς. Πόσος ὁ ἀριθμὸς τῶν χηνῶν; (Ἀπ. 256).

7) Δύο σώματα ἐκκινοῦσι συγχρόνως ἐκ δύο σημείων ἀπεχόντων ἀπ' ἀλλήλων 243 μέτρα πρὸς συνάντησιν αὐτῶν· τὸ μὲν διανύει κατὰ πᾶν λεπτὸν τῆς ὥρας 5 μέτρα, τὸ δὲ 7· πότε ἡ ἀπόστασις αὐτῶν εἶναι 39 μέτρα ;

('Απ. μετὰ 17 ἢ μετὰ $23\frac{1}{2}$ λεπτά.

8) Δύο σώματα, ὧν ἡ ἀπόστασις 9 μέτρα, κινοῦνται τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου. Τὸ πρῶτον συνηντήθησαν μετὰ 2, τὸ δὲ δεύτερον μετὰ 10 λεπτὰ τῆς ὥρας· πόσον τὸ μῆκος τῆς περιφερείας;

('Απ. 36μ.).

9). Πρέπει νὰ πληρωθῶσι 2007 δρ. μετὰ 5 μῆνας, 3395 μετὰ 7, 6740 μετὰ 13. Μετὰ πόσους μῆνας πρέπει νὰ πληρωθῶσι 12142 δρ.

('Απ. μετὰ 10 μῆνας).

10) Τρεῖς χωρικοὶ ἐμίσθωσαν ἀντὶ 180 δρ. λειμῶνας πρὸς νομὴν τῶν ζώων αὐτῶν. Ὁ Α ἔνειμε ζῶά τινα ἐπὶ 12 ἑβδομάδας, ὁ Β ἔνειμε 11 ζῶα πλέον ἢ ὁ Α ἐπὶ 10 ἑβδομάδας, τέλος δὲ ὁ Γ ἔνειμε 50 ζῶα ἐπὶ 13 ἑβδομάδας. Ἐὰν δὲ ὁ Γ πληρώσῃ $97\frac{1}{2}$ δρ., πόσον πρέπει νὰ πληρώσωσιν ὁ Α καὶ ὁ Β;

('Απ. 36, $46\frac{1}{2}$)

11) Διὰ πέντε χωρίων κατὰ σειρὰν κειμένων Α, Β, Γ, Δ, Ε διέρχεται ὁδός· Α ἀπέχει τοῦ Β $3\frac{1}{2}$ μίλια, Δ ἀπέχει τοῦ Ε $\frac{1}{4}$ μίλ. Αἱ δύο ἀποστάσεις $\overline{\text{ΒΓ}}$ καὶ $\overline{\text{ΓΔ}}$ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς ὁ 2 πρὸς τὸν 3, αἱ δὲ δύο ἀποστάσεις $\overline{\text{ΑΓ}}$ καὶ $\overline{\text{ΓΕ}}$ ὡς ὁ 3 : 2. Πόσον ἀπέχει Β ἀπὸ Γ καὶ Γ ἀπὸ Δ;

('Απ. $2\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$).

12) Οἰνοπώλης θέλει νὰ ἀναμίξῃ δύο εἴδη οἴνου κατὰ τὸν λόγον 3:2. Τὸ ἑκατόλιτρον τοῦ ἑνὸς εἴδους τιμᾶται 144 δρ., ποίας τιμῆς πρέπει νὰ ἦναι ὁ οἶνος τοῦ δευτέρου εἴδους, ἵνα τὸ ἑκατόλιτρον τοῦ μίγματος τιμᾶται 126 δρ., καὶ ποίας τιμῆς πρέπει νὰ ἦναι τὸ ἑκατόλιτρον τοῦ δευτέρου εἴδους, ἐὰν τὸ ἑκατόλιτρον τοῦ πρώτου εἴδους τιμᾶται 210 δρ.;

('Απ. 99, 0).

13) Ἐάν τις νοήσῃ ἕνα ἀριθμὸν αὐξηθέντα κατὰ 2 καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τούτου ἀφαιρέσῃ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν αὐτοῦ, λαμβάνει τὸν ἀριθμὸν 2. Τίς ὁ ἀριθμός;

('Απ. 2).

14) Τίς ἡ τιμὴ τοῦ x ἐν τῷ γινομένῳ

$$(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2x)\,(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2x)$$

ἵνα ἔχῃ τὸ γινόμενον τοῦτο τὴν τιμὴν

$$\alpha^4+\beta^4x^2; \qquad \left(\text{'Απ. } \frac{1}{2}\right)$$

15) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν ἡ διαφορὰ καὶ τὸ πηλίκον α.

('Απ. $\alpha^2 : \alpha-1$, $\alpha : \alpha-1$).

16) Δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς ὁ 3 πρὸς τὸν 5. Ἐὰν εἰς τὸν ἕνα προστεθῇ ὁ 10, ἀπὸ δὲ τοῦ ἄλλου ἀφαιρεθῇ ὁ 10, ἀντιστρέφεται ὁ λόγος τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν. Τίνες οἱ ἀριθμοί; ('Απ. 15, 25).

17) Κεφάλαιόν τι ἀποτελεῖ μετὰ τοῦ ἑπταετοῦς αὐτοῦ τόκου 2101,95 δρ., τριπλάσιον δὲ κεφάλαιον πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον ἀποτελεῖ μετὰ 5 ἔτη μετὰ τῶν τόκων αὐτοῦ 5892,75 δρ. Ποῖα τὰ κεφάλαια καὶ τὸ ἐπιτόκιον; ('Απ. 1620, 4860, $4\frac{1}{4}$ %)

18) Δύο σώματα ἀπέχουσιν ἀλλήλων δ μέτρα. Ἐὰν κινῶνται μεθ' ὁμαλῆς κινήσεως πρὸς ἄλληλα συναντῶνται μετὰ μ δευτερόλεπτα, ἐὰν δὲ κινῶνται τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο, συναντῶνται μετὰ ν δευτερόλεπτα. Πόσα μέτρα διανύει ἑκάτερον σῶμα ἐπὶ ἓν δευτερόλεπτον;

$$\text{'Απ. } \frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}\right),\ \frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\nu}\right)$$

19) Χωρικός τις ἔχει βόας τινὰς καὶ ἐπί τινας ἡμέρας τροφὴν αὐτῶν. Ἐὰν πωλήσῃ τοὺς 75 βόας, ἡ τροφὴ ἐπαρκεῖ 20 ἡμέρας ἐπὶ πλέον. Ἐὰν δὲ ἀγοράσῃ 100 βόας, ἡ τροφὴ ἐπαρκεῖ 15 ἡμέρας ἐπὶ ἔλαττον. Πόσοι οἱ βόες καὶ πόσαι αἱ ἡμέραι τῆς διατροφῆς; ('Απ. 300, 60).

20) Τρεῖς πόλεις Α, Β, Γ κεῖνται ἐν σχήματι τριγώνου. Ἀπὸ τῆς Α διὰ Β εἰς Γ εἶναι 82 χιλιόμετρα· ἀπὸ τῆς Β διὰ Γ εἰς Α εἶναι 97 καὶ ἀπὸ τῆς Γ διὰ Α εἰς Β εἶναι 89. Πόσον ἀπέχουσιν ἀλλήλων αἱ τρεῖς αὗται πόλεις; ('Απ. 37, 45, 52).

21) Μερίσαι τὸν ἀριθμὸν 232 εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς τοιούτους ὥστε, ἐὰν ὁ πρῶτος περιέχῃ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο λοιπῶν, ὁ δεύτερος τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο λοιπῶν καὶ ὁ τρίτος τὸ τέταρτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο λοιπῶν, νὰ γίνωνται ἴσοι πρὸς ἀλλήλους.

('Απ. 40, 88, 104).

22) Δεξαμενή τις πληροῦται διὰ μὲν τῆς κρήνης α καὶ τῆς β εἰς 35 λεπτὰ τῆς ὥρας, διὰ δὲ τῆς α καὶ γ εἰς 42 καὶ διὰ τῆς β καὶ γ εἰς 70. Μετὰ πόσον χρόνον πληροῦται δι' ἑκάστης κρήνης, καὶ διὰ τῶν τριῶν ὁμοῦ;

$$\left(\text{'Απ. } 52\frac{1}{2},\ 105,\ 210\cdot\ 30\right)$$

23) Μερίσαι τὸ κλάσμα

$$\frac{27+34\omega}{(3+4\omega)\,(6+7\omega)}$$

εἰς τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων κλασμάτων ἐχόντων παρονομαστὰς τοῦ μὲν $3+4\omega$, τοῦ δὲ $6+7\omega$.

$$\left(\text{'Απ. } \frac{2}{3+4\omega}+\frac{5}{6+7\omega}\right)$$

24) Μερίσαι τὸ κλάσμα

$$\frac{306x^2-450x+162}{(8x-7).(5x-4)(2x-1)}$$

εἰς τὸ ἄθροισμα τριῶν κλασμάτων, ὧν οἱ παρονομασταὶ $8x-7$, $5x-4$, $2x-1$.

$$\left(\text{'Απ. } \frac{9}{9x-7}+\frac{6}{5x-4}+\frac{3}{2x-1}\right).$$

25) Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὧν αἱ πρὸς ἀλλήλους σχέσεις ὡς $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{4}$ καὶ ὧν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων 10309. ('Απ. 78, 52, 39)

26) Μερίσαι τὸν ἀριθμὸν 20 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὰ τετράγωνα αὐτῶν νὰ ἦναι πρὸς ἄλληλα ὡς $1 : 2\frac{1}{4}$.

('Απ. 8 καὶ 12 ἢ —40 καὶ 60).

27) Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ τετραγώνου, οὗτινος τὸ ἐμβαδὸν γίνεται μεῖζον κατὰ τὰ $\frac{9}{16}$ αὐτοῦ, ἐὰν ἡ πλευρὰ αὐτοῦ αὐξηθῇ κατὰ 3 μέτρα;

('Απ. 12 μέτρα).

28) 'Αγοράζει τις 133 ὀκάδ. πράγματός τινος καὶ πωλεῖ αὐτὸ μετά τινος κέρδους ἐπὶ τοῖς ἑκατόν. Διὰ τῶν χρημάτων τῆς πωλήσεως ἀγοράζει ἕτερον πρᾶγμα καὶ πωλεῖ αὐτὸ μετὰ τοῦ αὐτοῦ κέρδους καὶ τὸ πρῶτον. Διὰ δὲ τῶν χρημάτων τῶν δύο τούτων πωλήσεων δύναται νὰ ἀγοράσῃ τρίτον πρᾶγμα 168 ὀκάδ. 14 $^0/_0$ ἀκριβώτερον τοῦ πρώτου. Πρὸς πόσον $^0/_0$ πωλεῖ τὸ πρᾶγμα κερδαίνων; ('Απ. 20 $^0/_0$).

29) Τὸ μῆκος ὀρθογ. παραλληλογράμμου πρὸς τὸ πλάτος αὐτοῦ εἶναι ὡς 15 : 8, ἡ δὲ διαγώνιος αὐτοῦ εἶναι 323 μέτρα. Πόσον τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος; ('Απ. 285, 152)

30) Δύο κινητὰ κινοῦνται ὁμαλῶς ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτῆς· τὸ μὲν διανύει γ μέτρα εἰς τὸ δευτερόλεπτον, τὸ δὲ γ΄. Μετὰ πόσα δευτερόλεπτα ἡ ἀπόστασις αὐτῶν εἶναι δ μέτρα;

('Απ. $\delta : \sqrt{\gamma^2+\gamma'^2}$).

31) Δύο κινητά, ὧν ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις δ μέτρα, κινοῦνται ὁμαλῶς ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας πρὸς τὴν κορυφὴν αὐτῆς. Τὸ μὲν ἐξεκίνησε t δευτερόλεπτα πρότερον τοῦ δὲ καὶ συναντᾶται εἰς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας πρὸς τοῦτο ν δευτερόλεπτα μετὰ τὴν ἐκκίνησιν αὐτοῦ. Πόσα μέτρα διανύει ἑκάτερον κινητὸν εἰς ἓν δευτερόλεπτον;

('Απ. $\delta : \sqrt{\nu^2+(\nu-t)^2}$).

32) Παντοπώλης ἀγοράζει ἀντὶ 264 δραχ. καφὲν καὶ ἀντὶ τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ ζάκχαριν, ἐξ ἧς λαμβάνει 90 όκ. ἐπὶ πλέον τοῦ καφέ πωλεῖ δὲ 29 ὀκάδ. καφὲ καὶ 57 ὀκάδ. ζάχαριν καὶ ἔχει κέρδος πρὸς 20 % ἐν ὅλῳ 93 δραχ. Πόσος εἶναι ὁ καφὲς καὶ ἡ ζάκχαρις; ('Απ. 240, 330).

33) Ἀγοράζει τις ἵππον καὶ πληρώνει ποσόν τι, πωλεῖ εἶτα αὐτὸν ἀντὶ 432 δραχ. καὶ ἔχει κέρδος τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ 100 ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ ἵππου. Πόσον ἠγόρασε τὸν ἵππον; ('Απ. 240 δρ.)

34) Ὁ Α καὶ ὁ Β κατέθηκαν ὁμοῦ πρὸς ἐπιχείρησίν τινα 3400 δρ. καὶ ὁ μὲν Α ἐπὶ 12 μῆνας, ὁ δὲ Β ἐπὶ 16. Κατὰ τὴν διανομὴν ἔλαβον κέρδος καὶ κεφάλαιον ὁ μὲν Α 2070 δρ. ὁ δὲ Β 1920. Πόσον κατέθηκεν ἑκάτερος; ('Απ. 1800, 1600).

35) Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ εἶναι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν δύο καθέτων πλευρῶν ἴσον τῷ ἀριθμῷ β, τὸ δὲ ἄθροισμα τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ ἐπ αὐτὴν ὕψους ἴσον τῷ α. Εὑρεῖν τὰς τρεῖς πλευρὰς καὶ τὸ ὕψος.

$$\left(\text{'Απ. } \sqrt{\alpha^2-\beta^2},\ \alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2},\ \frac{1}{2}\ \beta \pm \sqrt{\alpha^2-\frac{3}{4}\ \beta^2-\alpha\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\right)$$

36) Δεξαμενή τις δύναται νὰ πληρωθῇ ὑπὸ δύο κρηνῶν· ὑπὸ τῆς μὲν 2 ὥρας πρότερον τῆς δέ, ὑπ' ἀμφοτέρων δὲ ὁμοῦ εἰς $1\frac{7}{8}$ ὥρ. Μετὰ πόσας ὥρας πληροῦται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν κρηνῶν; ('Απ. 5, 3).

37) Ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β ἀπεχουσῶν 26 μίλια ἀλλήλων ἐκκινοῦσι συγχρόνως δύο ἁμαξοστοιχίαι καὶ συναντῶνται μετὰ $10\frac{1}{2}$ ὥρας. Ἡ μὲν χρειάζεται δι' ἕκαστον μίλιον $\frac{1}{8}$ ὥρ. πλέον τῆς δέ. Πόσον χρόνον χρειάζεται ἑκατέρα δι' ἓν μίλιον; ('Απ. $\left.\frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right)$.

38) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας κινοῦνται ἐκ τῆς κορυφῆς δύο κινητὰ ὁμαλῶς μετ' ἴσης ταχύτητος. Τὸ ἐκκινῆσαν 22 δευτερόλεπτα βραδύτερον τοῦ ἄλλου διανύει εἰς ἕκαστον δευτερόλεπτον 7 μέτρα, τὸ δὲ 8 μέτρα. Μετὰ πόσα δευτερόλεπτα ἀπέχουσιν ἀλλήλων τὰ κινητὰ 275 μέτρα. ('Απ. 11 δευτερόλεπτα μετὰ τὴν ἐκκίνησιν τοῦ πρώτου).

39) Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου τοῦ περιβαλλομένου διὰ σχοινίου 36 μέτρων; ('Απ. 81 τετρ. μέτρα).

40) Ἡ πλευρὰ κύβου εἶναι κατὰ $2\frac{1}{2}$ ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου μείζων τῆς ἑτέρου κύβου, οὗ ὁ ὄγκος ἐλάσσων κατὰ $2501\frac{7}{8}$ ἑκατοστὰ τοῦ κυβικοῦ μέτρου. Ποῖος ὁ ὄγκος ἑκατέρου κύβου; $\left(\text{'Απ. } 7414\frac{7}{8}, 4913\right)$

41) Δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς 11 : 13, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι 14210. Τίνες οἱ ἀριθμοί;

('Απ. 77 καὶ 91 ἢ —77 καὶ —91).

42) Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὧν τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον μ, τὸ δὲ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον ν, τὸ δὲ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον ρ. ('Απ. $\sqrt{\mu\nu:\rho}$, $\sqrt{\mu\rho:\nu}$, $\sqrt{\nu\rho:\mu}$).

43) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμενον καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων ἴσα πρὸς ἄλληλα.

$$\left(\text{'Απ. } \frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5}),\ \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5}),\ 0,\ 0\right)$$

44) Διψηφίου ἀριθμοῦ ἀντιστρέφονται τὰ ψηφία καὶ πολλαπλασιάζεται ὁ προκύπτων ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν πρῶτον καὶ εὑρίσκεται γινόμενον 5092. Ἐὰν δὲ διαιρεθῇ ὁ πρῶτος διὰ τοῦ δευτέρου, εὑρίσκεται πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον μονοψήφιος ἀριθμός. Τίς ὁ ἀριθμός; ('Απ. 76).

45). Ἡ διαγώνιος ὀρθογ. παραλληλογράμμου εἶναι 20, 4 μέτρα·

ἐὰν αὐξηθῇ ἡ βάσις κατὰ 14 καὶ ἐλαττωθῇ τὸ ὕψος κατὰ 2, 4 μέτρα, ἡ διαγώνιος αὐξάνεται κατὰ 12, 4 μέτρα. Τίς ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος;

('Απ. 18, 9, 6).

46) Δύο παιδία ἐκκινοῦσιν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας τριγωνικοῦ χωραφίου κατὰ μῆκος τῶν πλευρῶν μετὰ ταχυτήτων οὐσῶν πρὸς ἀλλήλας ὡς 13 : 11. Συναντῶνται δὲ τὸ πρῶτον κατὰ τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης καὶ τὸ δεύτερον 20 μέτρα ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐκκινήσεως. Εὑρεῖν τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν τοῦ χωραφίου. ('Απ. 60, 80, 100).

47) Τίνα τὸ μῆκος τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἐὰν ἡ διαγώνιος ἦναι α ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου, ἡ ἐπιφάνεια β ἑκατοστὰ τοῦ τετραγ. μέτρου, τὸ δὲ μῆκος ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τοῦ πλάτους καὶ τοῦ ὕψους κατὰ γ ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου;

('Απ. $\frac{1}{2}\left(\gamma+\sqrt{\alpha^2+\beta},\right)\frac{1}{4}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta}-\gamma\pm\sqrt{5\alpha^2-3\gamma^2-3\beta-2\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta}}\right)$

48) Ἐπὶ ὁδοῦ 1732,5 μέτρων ἐκτελεῖ ὁ ἐμπρόσθιος τροχὸς ἁμάξης 165 περιστροφὰς ἐπὶ πλέον τοῦ ὀπισθίου. Ἐὰν αὐξηθῶσιν αἱ περιφέρειαι ἑκατέρου τροχοῦ κατὰ 0,75 μέτρα, ὁ ἐμπρόσθιος τροχὸς ἐκτελεῖ 112 περιστροφὰς ἐπὶ πλέον τοῦ ὀπισθίου· ποῖον τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑκατέρου τροχοῦ; ('Απ. 3, 4,2).

49) Μερίσαι τὸν ἀριθμὸν 102 εἰς τρεῖς προσθετέους τοιούτους, ὥστε τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον νὰ ἰσῶται τῷ 102 πλασίῳ τοῦ δευτέρου, ὁ δὲ τρίτος νὰ ἦναι τὸ $1\frac{1}{2}$ πλάσιον τοῦ πρώτου.

('Απ. 34, 17, 51 ἢ —204, 612, —306).

50) Διψήφιός τις ἀριθμὸς ἔχει τὰς ἑπομένας ἰδιότητας· τὸ γινόμενον τῶν δύο ψηφίων εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ. Ἐὰν ἀντιστραφῶσι δὲ τὰ ψηφία καὶ ἀφαιρεθῇ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἀπὸ τοῦ οὕτω προκύπτοντος, τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $1\frac{1}{2}$ τοῦ γινομένου τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ Τίς ὁ ἀριθμός;

('Απ. 36, 00).

51) Μερίσαι τὸν ἀριθμὸν 71 εἰς δύο ἀριθμούς, ὧν ὁ μὲν διαιρετὸς διὰ 5, ὁ δὲ διαιρετὸς διὰ 8. ('Απ. 15 καὶ 56 ἢ 55 καὶ 16.

52) Ἠγόρασέ τις 120 ζῶα, ἤτοι χοίρους, αἶγας καὶ πρόβατα, ἀντὶ

2400 δρ. Ἕκαστος χοῖρος τιμᾶται 27, καὶ ἑκάστη αἲξ 19 καὶ ἕκαστον πρόβατον $7\frac{1}{2}$ δρ. Πόσα ἠγόρασεν ἐξ ἑκάστου εἴδους;

('Απ. 17, 99, 8 ἢ 40, 60, 24 ἢ 63, 21, 40).

53) Ἀναλῦσαι τὸ κλάσμα $\frac{128}{117}$ εἰς ἄθροισμα δύο κλασμάτων, ὧν οἱ παρονομασταὶ εἶναι ὁ 9 καὶ ὁ 13. $\left(\text{'Απ. } \frac{5}{9}, \frac{9}{13}\right)$.

54) Τίς ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ 3, 5, 7, 11 δίδει ὑπόλοιπα 1, 4, 1, 9; ('Απ. $64+1155\rho$).

55) Χωρική τις εἶχε χῆνας, ὄρνιθας, νήσσας καὶ περιστερὰς ἐν ὅλῳ 76· ἐπώλησεν ἕνα χῆνα ἀντὶ 3 δρ., 2 ὄρνιθας ἀντὶ 3,15, μίαν νῆσσαν ἀντὶ 1,05 καὶ μίαν περιστερὰν ἀντὶ 0,60, ἔλαβε δὲ ἐν ὅλῳ 106,05· πόσα εἶχεν ἐξ ἑκάστου εἴδους; ('Απ. 11, 10, 54, 1 ἢ 12, 8, 53, 3 ἢ 13, 6, 52, 5 ἢ 14, 4, 51, 7 ἢ 15, 2, 50, 9 ἢ 8, 22, 44, 2. κλ.).

56) Τριάκοντα ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδία ἔφαγον ὁμοῦ 232. δρ. ἕκαστος ἀνὴρ ἐπλήρωσε 14 δρ. ἑκάστη γυνὴ $5\frac{1}{2}$ καὶ ἕκαστον παιδίον 1· πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, αἱ γυναῖκες καὶ τὰ παιδία; ('Απ. 10, 16, 4).

57) Εὑρεῖν δύο ἀκεραίους θετικοὺς ἀριθμούς, ὧν τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται τῷ 24πλασίῳ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιστρόφων τιμῶν αὐτῶν.

('Απ. 1, 24 ἢ 2, 12 ἢ 3, 8 ἢ 4, 6).

58) Εὑρεῖν κλάσμα τοιοῦτον, ὥστε ἐὰν προστεθῇ εἰς 1 ἢ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ 1, νὰ προκύπτῃ κατ' ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις τέλειον τετράγωνον

$\left(\text{'Απ. } \frac{24}{25}, \frac{120}{169}, \text{ κλ.}\right)$

59) Τρέψαι τὸ ἄθροισμα $\alpha^2+\beta^2$ εἰς ἄθροισμα δύο ἄλλων τετραγώνων

$$\left(\text{'Απ. } \left(\frac{2\alpha\rho+\beta(\rho^2-1)}{\rho^2+1}\right)^2+\left(\frac{2\beta\rho-\alpha(\rho^2-1)}{\rho^2+1}\right)^2\right)$$

60) Διὰ τίνας ἀκεραίους ἀριθμοὺς εἶναι

$$xy=2w,\ x^2+y^2=\varphi^2,\ x^3+y^3+\varphi^3=w^3;$$

('Απ. 3, 4, 5, 6).

61) Πρὸς ἀνόρυξιν ἀρτεσιανοῦ φρέατος 500 μέτρων βάθους πληρώνει τις διὰ τὸ πρῶτον μέτρον 3,24 δι' ἕκαστον ἑπόμενον 5 λεπτὰ ἐπὶ πλέον· πόσον πληρώνει διὰ τὸ τελευταῖον μέτρον καὶ δι' ὅλον τὸ φρέαρ;

('Απ. 28,19, 7857,50)

62) Ἐὰν 8600 δρ. τοκίζωνται ἐπὶ ἁπλῷ τόκῳ πρὸς $4\frac{1}{2}$ % καὶ εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους προστίθενται 200 δρ., πόσοι εἶναι οἱ τόκοι ὁμοῦ τῶν 17 ἐτῶν; ('Απ. 7803).

63) Σῶμά τι πίπτει ἀφεθὲν ἔκ τινος ὕψους· συγχρόνως δὲ ἀναρρίπτεται κατακορύφως ἕτερον σῶμα ἔκ τινος σημείου κειμένου κάτωθεν εἰς ἀπόστασιν 795 μέτρων ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς πτώσεως τοῦ πρώτου. Ἐὰν τὸ δεύτερον σῶμα ἔχῃ ἀρχικὴν ταχύτητα 318 μέτρων, μετὰ πόσα δευτερόλεπτα συναντῶνται;

$\left(\text{'Απ. } 2\frac{1}{2}\right)$

64) Πλοῖον φέρον 175 ἐπιβάτας εἶχεν ἐπαρκὲς ὕδωρ διὰ τὸν πλοῦν. Μετὰ 30 ἡμέρας δι' ἀσθένειάν τινα ἔθνησκον 3 ἐπιβάται καθ' ἑκάστην· τρικυμία δὲ ἐπεβράδυνε τὸν πλοῦν κατὰ τρεῖς ἑβδομάδας· τὸ πλοῖον κατέπλευσεν εἰς τὸν λιμένα, ὅτε τὸ ὕδωρ εἶχεν ἤδη ἐξαντληθῆ· πόσον διήρκεσεν ὁ πλοῦς; ('Απ. 79 ἡμ.).

65) Ἐκ δύο πόλεων ἀπεχουσῶν 165 μίλια ἀλλήλων ἐκκινοῦσι συγχρόνως Α καὶ Β πρὸς συνάντησιν αὐτῶν. Α διανύει τὴν πρώτην ἡμέραν 1 μίλιον, τὴν δευτέραν 2, καὶ καθεξῆς. Β διανύει τὴν πρώτην ἡμέραν 20 μίλια, τὴν δευτέραν 18, τὴν τρίτην 16, καὶ καθεξῆς· πότε ἡ συνάντησις;

('Απ. μετὰ 10 ἡμέρας).

66) Ἔκ τινος σημείου κειμένου ἐπὶ τοῦ ἑτέρου σκέλους γωνίας $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς ἄγεται ἐπὶ τὸ ἕτερον σκέλος κάθετος, ἐκ δὲ τοῦ ποδὸς ταύτης ἄγεται κάθετος ἐπὶ τὸ πρῶτον, ἐκ τοῦ ποδὸς ταύτης ἄγεται κάθετος ἐπὶ τὸ δεύτερον, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐὰν ἡ πρώτη κάθετος ἔχῃ μῆκος μ χιλιοστῶν τοῦ μέτρου, πόσον μῆκος ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων τούτων;

('Απ. 2μ. χιλιοστὰ τοῦ μέτρου).

67) Ἐπὶ δύο πλευρῶν τριγώνου κατασκευάζονται δύο τρίγωνα, ὧν ἑκάτερον ἔχει ἐμβαδὸν τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πρώτου τριγώνου· εἶτα

κατασκευάζονται ὁμοίως ἐπὶ τῶν δύο πλευρῶν τῶν δύο τριγώνων τρίγωνα, ὧν ἑκάτερον ἔχει ὁμοίως ἐμβαδὸν τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν τριγώνων τούτων, καὶ οὕτω καθεξῆς· πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν πάντων τῶν τριγώνων;
('Απ. $\frac{4}{3}$ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἀρχικοῦ τριγώνου).

68) Ὁ Ἀχιλλεὺς διώκει χελώνην εὑρισκομένην ἤδη εἰς ἀπόστασιν 1 σταδίου ἀπ' αὐτοῦ. Ὅτε ὁ Ἀχιλλεὺς ἔρχεται εἰς τὴν θέσιν, ὅπου ἡ χελώνη ἦτο ἐν ἀρχῇ, αὕτη προχωρεῖ κατὰ $\frac{1}{12}$ τοῦ σταδίου· ὅταν ὁ Ἀχιλλεὺς διανύῃ τὸ διάστημα τοῦτο, ἡ χελώνη προχωρεῖ κατὰ $\frac{1}{144}$ τοῦ σταδίου, καὶ οὕτω καθεξῆς. Καταφθάνει ὁ Ἀχιλλεὺς τὴν χελώνην, εἰ καὶ πλησιάζει ἀπαύστως πρὸς αὐτήν; (τὸ γνωστὸν σόφισμα τοῦ Ζήνωνος).

69) Γνωστὸν τὸ ἀνέκδοτον τοῦ βασιλέως τῶν Ἰνδῶν τοῦ ἐρωτήσαντος τὸν ἐφευρέτην τοῦ ζατρικίου περὶ τῆς ἀμοιβῆς διὰ τὴν ἐφεύρεσιν ταύτην. Οὗτος ἐζήτησεν ἕνα κόκκον σίτου διὰ τὸ πρῶτον τετράγωνον, 2 διὰ τὸ δεύτερον, 4 διὰ τὸ τρίτον, καὶ καθεξῆς, διπλασιάζων πάντοτε μέχρι τοῦ 64^{ου} τετραγώνου, τοῦ τελευταίου· πόσος ὁ ζητηθεὶς σῖτος;
('Απ. 18446744073709551615 κόκκοι).

70) Παρετηρήθη, ὅτι ὁ πληθυσμὸς χώρας τινὸς αὐξάνεται κατὰ τὸν αὐτὸν λογον· ἐν διαστήματι 4 ἐτῶν ὁ πληθυσμὸς ἀπὸ 10000 ἐγένετο 14641· κατὰ ποῖον λόγον ηὐξήθη; ('Απ· 1:10).

71) Κεφάλαιον 1200 δρ. ἀνατοκίζεται πρὸς 4 $^0/_0$· ποῖον τὸ κεφάλαιον μετὰ 36 ἔτη; ('Απ. 4924,70).

72) Ἔκ τινος πίθου περιέχοντος 20 λίτρας καθαρὸν οἶνον ἐξάγονται 3 λίτραι καὶ ἀναπληροῦνται δι' ὕδατος· εἶτα ἐξάγονται ὁμοίως 3 λίτραι ἐκ τοῦ κράματος καὶ ἀναπληροῦνται δι' ὕδατος, καὶ οὕτω καθεξῆς 24κις· πόσος καθαρὸς οἶνος ἀπέμεινεν; ('Απ. 0,404654λ.).

73) Τράπεζά τις δανείζεται 1500 δρ. πρὸς 3 $^0/_0$ καὶ δανείζει αὐτὰς πρὸς 5 $^0/_0$· πόσον τὸ κέρδος τῆς τραπέζης μετὰ 10 ἔτη; ('Απ. 427,47).

74) Μετὰ 7 ἔτη πρέπει νὰ πληρώσῃ τις 3600 δραχ.· πόσον πρέπει νὰ πληρώσῃ τώρα πρὸς $3\frac{1}{2}$ $^0/_0$; ('Απ. 2829,57).

75) Ὁ πληθυσμὸς πόλεως ἐπὶ 24 ἔτη ηὐξήθη ἀπὸ 32500 εἰς 66066 κατοίκους· ποία εἶναι ἡ ἐτησία αὔξησις ἐπὶ 100; ('Απ. 3).

76) Πρὸ πόσων ἐτῶν κεφάλαιον 5326 $\frac{1}{2}$ δραχ. πρὸς 6 $^0/_0$ ἦτο 5000 δραχμαί; ('Απ. πρὸ 1 $\frac{1}{12}$ ἔτους).

77) Ἐὰν ὁ πληθυσμὸς χώρας ἐπὶ 9 ἔτη ηὐξήθη ἀπὸ 208700 εἰς 318500 κατοίκους, ποῖος ὁ πληθυσμὸς μετὰ 15 ἔτη; ('Απ. 644299).

78) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον κεφάλαιόν τι ἀνατοκιζόμενον μετὰ 10 ἔτη διπλασιάζεται; ('Απ. 7,177).

79) Μετὰ πόσα ἔτη κεφάλαιον 2739 δρ. ἀνατοκιζόμενον γίνεται, ὅσον τὸ κεφάλαιον 3815 εἰς 7 ἔτη πρὸς 3 $\frac{3}{4}$ $^0/_0$; ('Απ. 16).

80) Μετὰ πόσα ἔτη κεφάλαιον 8443 δρ. ἀνατοκιζόμενον πρὸς 4 $^0/_0$ γίνεται, ὅσον τὸ κεφάλαιον 9000 δρ. πρὸς 6 $^0/_0$ μετὰ 9 ἔτη; ('Απ. 15).

81) Τραπεζίτης ἔχων κεφάλαιον 600000 δραχ. ἀνατοκιζόμενον λαμβάνει ἐτησίως πρὸς συντήρησιν 5 $^0/_0$ καὶ δαπανᾷ 6000 δραχ. ποῖον τὸ κεφάλαιον μετὰ 12 ἔτη; ('Απ. 982011).

82) Ἔκ τινος ἀνατοκιζομένου κεφαλαίου 2578 δρ. ἀφαιροῦνται κατ' ἔτος 100 δρ.· πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον μετὰ 10 ἔτη; ('Απ. 2941 $\frac{1}{2}$).

83) Ἔχει τις κεφάλαιον 2817 ἀνατοκιζόμενον πρὸς 4 $^0/_0$ ὅπερ αὐξάνηται κατ' ἔτος κατὰ 420 δρ.· πόσον τὸ κεφάλαιον μετὰ 8 ἔτη; ('Απ. 7725,23).

84) Ἐκ τοῦ ἀνατοκιζομένου κεφαλαίου 30000 δραχ. πρὸς 4 $\frac{1}{4}$ $^0/_0$ δαπανᾷ τις κατ' ἔτος 4680 δρ. Μετὰ πόσα ἔτη δαπανᾶται τὸ κεφάλαιον; ('Απ. 7,64).

85) Δάνειον 3816 δραχ. πρὸς 4 $^0/_0$ πρέπει νὰ ἐξοφληθῇ ἐντὸς 5 ἐτῶν δι' ἴσων δόσεων· ποῖον τὸ χρεωλύσιον; ('Απ. 857,18).

86) Κράτος τι δανείζεται 3 ἑκατομμύρια δραχμῶν πρὸς 5 $^0/_0$ καὶ πρέπει νὰ ἐξοφλήσῃ ἐντὸς 25 ἐτῶν· πόσον τὸ χρεωλύσιον; ('Απ. 212857).

87) Ὑπὸ πόσα σημεῖα δύνανται νὰ τέμνωνται ν εὐθεῖαι, ὧν ρ εἶναι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας;

88) Ἔστωσαν γενικῶς α ὁ ἀριθμὸς τῶν παιγνιοχάρτων, ν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξαχθέντων, σ τὸ ἄθροισμα τῶν σημείων ἑκάστου καὶ τοῦ ἀριθμοῦ

τῶν ὑπερκειμένων, ρ τὸ ὑπόλοιπον αὐτῶν. Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν σημείων τῶν ν πρώτων ἐξαχθέντων. ('Απ. $\nu(\sigma+1)+\rho-\alpha$).

89) Ἔμπορος ἀγοράζει ὕφασμα πληρώνων 7 δραχ. τὰ 5 μέτρα· πωλεῖ δὲ ἀντὶ 16 δραχ. τὰ 11 μέτρα καὶ οὕτως ἔχει κέρδος 24 δραχ. πόσον ἠγόρασε καὶ ἐπώλησεν; ('Απ. 440 μέτρα).

90) Δύο ὁδοιπόροι Α καὶ Β ἐκκινοῦσιν ἔχοντες ὁ Α δραχμὰς 100 καὶ ὁ Β δραχμὰς 48· ὁ Α ἐδαπάνησε τὸ διπλάσιον τῶν τοῦ Β, ἔχει δ' ὅμως ἀκόμη τριπλάσιον τῶν τοῦ Β· πόσον ἐδαπάνησεν ἑκάτερος; ('Απ. 88, 44).

91) Βιβλιοπώλης ἐπώλησε δυο βιβλία τὸ μὲν ἐκ 48 φύλλων ἀντὶ 4,20 δρ. τὸ δὲ ἐξ 78 φύλλων ἀντὶ 5,70· ὁ χάρτης καὶ τὸ δέσιμον τῶν δύο βιβλίων τιμῶνται ἰσάκις· πόσον τιμᾶται τὸ δέσιμον; ('Απ. 1,80).

92) Μερίσαι 156 δραχ. μεταξὺ 16 πτωχῶν ἀναλόγως τῆς ἡλικίας αὐτῶν καὶ οὕτως, ὥστε ἕκαστος αὐτῶν νὰ λάβῃ τόσα ἐπὶ πλέον, ὅσα ὁ μετ' αὐτὸν ἀμέσως ἐρχόμενος κατὰ τάξιν ἡλικίας. Ἐὰν ὁ νεώτατος αὐτῶν ἔλαβεν 6 δρ., πόσον ἔλαβεν ὁ πρεσβύτατος; ('Απ. 13,50).

93) Πρέπει νὰ πληρωθῶσι 2363 διὰ 34 δόσεων οὕτως, ὥστε ἑκάστη δόσις νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν ἀμέσως προηγουμένην κατὰ 3 δραχ., ποία ἡ πρώτη δόσις; ('Απ. 20).

94) Δεξαμενὴ πληρουμένη ὑπὸ δύο κρουνῶν εἰς 12 λεπτὰ τῆς ὥρας πληροῦται ὑπὸ τοῦ ἑτέρου εἰς 20 λεπτά· εἰς πόσα λεπτὰ πληροῦται ὑπὸ τοῦ ἑτέρου; ('Απ. 30).

95) Ἠγόρασέ τις ἀντὶ 18 ὀβολῶν ποσότητά τινα μήλων καὶ ἀχλαδίων· ἀντὶ ἑνὸς ὀβολοῦ ἔλαβε 4 μῆλα, ὡσαύτως 5 ἀχλάδια· ἐπώλησε τὸ ἥμισυ τῶν μήλων καὶ τὸ τρίτον τῶν ἀχλαδίων, ἀνθ' ὅσων ἠγόρασεν αὐτὰ καὶ ἔλαβεν 8 ὀβολούς· πόσα ἠγόρασεν ἐξ ἑκατέρου εἴδους; ('Απ. 48,30).

96) Εὑρεῖν ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε προστιθέμενος διαδοχικῶς εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 15, 27, 45 νὰ ἀποτελῇ ἀναλογίαν. ('Απ. 9).

97) Φίλοι τινὲς ἐξέδραμον μισθώσαντες ἅμαξαν ἀντὶ 342 δραχ., τρεῖς ἐξ αὐτῶν κατελείφθησαν καθ' ὁδόν, ἕκαστος δὲ τῶν λοιπῶν ἐπλήρωσεν ἐπὶ πλέον 19 δραχ. πόσοι ἦσαν ἐκκινοῦντες; ('Απ. 9).

98) Ἐπώλησέ τις, μετὰ ζημίας, ἀντὶ 420 δρ. πρᾶγμά τι, τὸ ὁποῖον ἤθελε νὰ πωλήσῃ ἀντὶ 570 δρ, Ἐὰν ἐπώλει αὐτὸ ἀντὶ 570 δρ., ἐκέρδαινε 4κις τῶν ὅσων ἐζημιώθη. Ἀντὶ πόσων ἠγόρασεν αὐτό; ('Απ. 450 δρ.)

99) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν τὸ ἄθροισμα νὰ ἰσῶται τῷ γινομένῳ αὐτῶν, προστιθέμενον δὲ εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν νὰ δίδῃ $15\frac{3}{4}$ ('Απ. $3\frac{3}{2}$).

100) Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ ἀνατοκισθῇ κεφάλαιόν τι πρὸς 5%, ἵνα χιλιαπλασιασθῇ; ('Απ. 141 μέχρι 142 ἔτη).

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΩΝ ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ

Σελὶς	Στίχος	Ἀνάγνωθι
36	10	ἐκθέτης 5
37	13	α_ν β_ν ρ_ν
41	16	πάσης συμμέτρου δυνάμεως
41	29	αἱ ἀκέραιαι δυνάμεις
44	29	ἑκατοντάκις χιλιοστὰ
45	9	ἐδ 76 καὶ 75
46	8	3,83232
46	26	ἐδ. 81 καὶ 82
47	11 »	$\bar{2},95007$
50	23	δείκτης 5
51	1	δείκτης 3
59	29	τοῦ πολυωνύμου
61	21	$2\beta^3$
64	3	$-3\alpha^3\beta\gamma^2\delta$
64	6	$(-8\alpha^2\beta^3\gamma\delta)(-3\alpha^3\beta\gamma^2\delta)=24\alpha^5\beta^4\gamma^3\delta^2$
65	9	ἐν πάσῃ τελείᾳ διαιρέσει
76	34	ἐὰν
85	26	$\frac{x}{6}$
87	2	35
99	10	α
103	5	$+$
119	18	x=9 λίτ., $14\frac{14}{47}$ οὐγ, y=25 λίτ., $1\frac{33}{47}$ οὐγ. (1 λίτ.=16 οὐγ.)
126	4	τὸ οὖς ἀντιλαμβάνεται ἑνὸς μόνου
128	6	ἀπαλλάσ.
130	2	$y''-y'$
143	10	ἐκθέτης 2
160	22	$x'x''$
166	1	διά τινα
173	1	w
185	—	g
202	27	ἰσόπλευρον

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ