ΔΗΜ. Ι. ΛΙΑΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ηλίου Ανδρέας

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΔΙΑ
Τὰς Τεχνικὰς καὶ Ἐπαγγελματικὰς Σχολὰς

ΕΚΔΟΣΙΣ Γ΄

ΑΘΗΝΑΙ

--?]

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΔΗΜ. Ι. ΛΙΑΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σίουζη Ανδρέας

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΔΙΑ
Τὰς Τεχνικὰς καὶ Ἐπαγγελματικὰς Σχολὰς

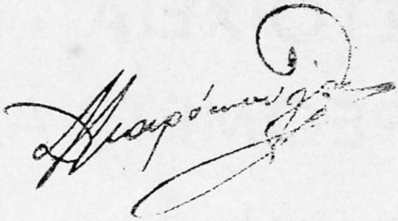
ΕΚΔΟΣΙΣ Γ'

ΑΘΗΝΑΙ

18324

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τά γνήσια ἀντίτυπα φέρουν τήν ὑπογραφήν τοῦ συγγραφέως.



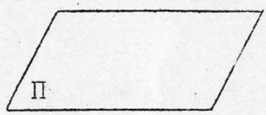
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ανδρέας Ηλίου

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

1. Στερεομετρία λέγεται τό μέρος τῆς Γεωμετρίας τό ὁποῖον ἐξετάζει οἱονδήποτε γεωμετρικόν σχῆμα, ἐν ἀντιθέσει πρός τήν ἐπιπεδομετρίαν ἥτις ἐξετάζει τά σχήματα τῶν ὁποίων πάντα τά στοιχεῖα κεῖνται ἐφ'ἑνός ἐπιπέδου.

2. Ἐπίπεδον λέγεται ἡ ἐπιφάνεια ἐπί τῆς ὁποίας ἡ εὐθεῖα γραμμή ἐφαρμόζει πανταχοῦ καί πρός ὅλας τάς διευθύνσεις. Τό ἐπίπεδον θεωρεῖται ἐπ'ἄπειρον προεκτεινόμενον καθ'ὅλας διευθύνσεις, παρίσταται δέ δι'ἑνός τετραπλεύρου ἤ ειδικώτερον δι'ἑνός παραλληλογράμμου καί σημειοῦται μέ ἕνα γράμμα ἤ καί μέ δύο, ἤτοι τό ἐπίπεδον Π (σχ. 1)

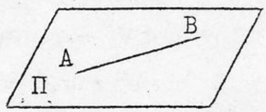


Σχ. 1

3. Θέσις εὐθείας καί ἐπιπέδου

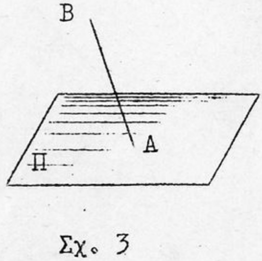
Διακρίνομεν τρεῖς θέσεις εὐθείας καί ἐπιπέδου:-

α) ἡ εὐθεῖα νά κεῖται ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (σχ.2).



Σχ.2

β). ἡ εὐθεῖα νά τέμνη αὐτό (σχ.3).

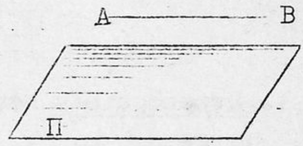


Σχ. 3

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γ)ἡ εὐθεῖα νά εἶναι παράλληλος πρός αὐτό (σχ. 4)

Λέγεται δέ μία εὐθεῖα παράλληλος πρός ἕνα ἐπίπεδον, ἄν ὅσον καί ἄν προεκταθῆ δέν συναντᾶ τό ἐπίπεδον.



Σχ. 4

Ἕνα ἐπίπεδον ὁρίζεται: α) διά τριῶν σημείων: δηλαδή κάθε ἄλλο ἐπίπεδον τό ὁποῖον θά ἔχη τά τρία σημεῖα κοινά μέ τό ἀρχικόν θά συμπίπτη καί θά ἀποτελῆ τό αὐτό ἐπίπεδον.

β) Διά δύο εὐθειῶν τεμνομένων καί γ) διά μιᾶς εὐθείας καί ἑνός σημείου.

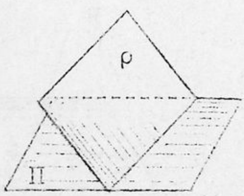
4. Θέσις δύο ἐπιπέδων μεταξύ των.

Δύο ἐπίπεδα δύνανται νά λάβουν δύο θέσεις:

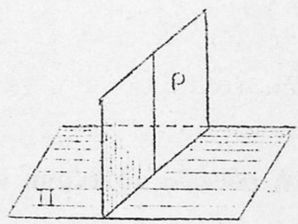
1) νά τέμνωνται, 2) νά εἶναι παράλληλα.

Καί ὅταν τέμνωνται, ἔχομεν πάλιν δύο θέσεις: τήν ἁπλῆν τομήν αὐτῶν, π.χ. σχ. 5 καί τήν κάθετον τομήν, σχ. 6.

Λέγεται δέ ἕν ἐπίπεδον κάθετον ἐπί ἕν ἄλλο, ὅταν τό συναντᾶ καί δέν κλίνει οὔτε πρός τό ἕνα μέρος οὔτε πρός τό ἄλλο, ἐάν ὅμως κλίνη, τότε λέγεται πλάγιον, ἰδέ σχ. 5,6.



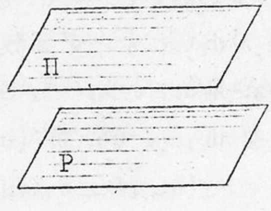
Σχ. 5



Σχ. 6

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

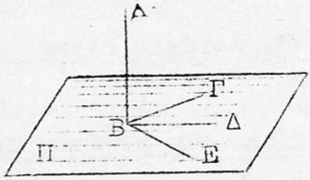
Δύο ἐπίπεδα λέγονται <u>παράλληλα,</u> ὅταν δέν συναντῶνται ὅσον καί ἄν τά αὐξήσωμεν ἀπ'ὅλα τά μέρη π.χ. τά ἐπίπεδα Π καί Ρ , σχ.7.



Σχ. 7

<u>5. Εὐθεῖα κάθετος ἐπί ἐπιπέδου.</u>

<u>Μία εὐθεῖα λέγεται κάθετος ἐπάνω εἰς ἕνα ἐπίπεδον, ὅταν εἶναι κάθετος ἐπί πᾶσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου διερχομένην διά τοῦ ποδός τῆς καθέτου.</u>



Σχ. 8

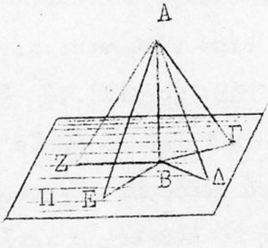
Ἤτοι θά λέγωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ.8)εἶναι κάθετος εἰς τό ἐπίπεδον Π, ἐάν εἶναι κάθετος ἐπί τάς εὐθείας ΒΓ, ΒΔ,ΒΕ, ἄν δηλ. αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΒΕ, εἶναι ὀρθαί.

<u>6.'Ιδιότητες τῆς καθέτου καί τῶν πλαγίων</u>

Ἔστω τό ἐπίπεδον Π (σχ.9) καί ἕν σημεῖον Α τοῦ χώρου μή κείμενον ἐπί τοῦ ἐπιπέδου.

Ἄν ἐκ τοῦ Α φέρωμεν κάθετον ΑΒ καί προσπαθήσωμεν νά φέρωμεν καί ἄλλας, θά ἴδωμεν ὅτι ὅλαι αἱ ἄλλαι συμπίπτουν μέ τήν ΑΒ.

Ἡ κάθετος δέ ΑΒ λέγεται καί <u>ἀπόστασις τοῦ σημείου Α ἀπό τοῦ ἐπιπέδου Π.</u>



Σχ. 9

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

'Εάν μετρήσωμεν τήν κάθετον ΑΒ καί τήν ΑΓ, βλέπομεν ὅτι ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα τῆς πλαγίας ΑΓ. 'Επίσης, ἐάν μετρήσωμεν δύο πλαγίας πού ν'ἀπέχουν ἴσον τοῦ ποδός τῆς καθέτου, βλέπομεν ὅτι εἶναι ἴσαι: δηλ. ἄν ΒΓ = ΒΔ (σχ.9), θά εἶναι καί ΑΓ = ΑΔ.'Επίσης, ἄν ΒΖ μεγαλ. τῆς ΒΓ (σχ.9), θά εἶναι καί ΑΖ μεγαλ.τῆς ΑΓ.

Τ'ἀνωτέρω δυνάμεθα νά τ'ἀποδείξωμεν καί μέ τήν ἀνισότητα τῶν τριγώνων.

'Εκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι:

1ον) 'Εξ ἑνός σημείου πρός ἐπίπεδον μίαν μόνον κάθετον δυνάμεθα νά φέρωμεν καί ἡ ὁποία εἶναι καί ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου ἀπό τοῦ ἐπιπέδου.

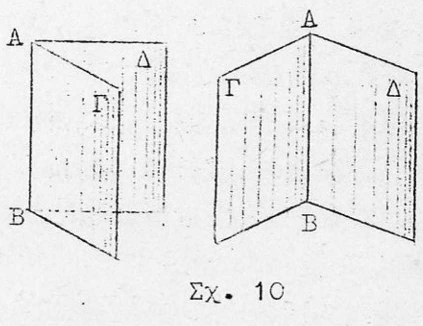
2ον) Ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

3ον) Αἱ πλάγιαι πού ἀπέχουν ἴσον τοῦ ποδός τῆς καθέτου εἶναι ἴσαι.

4ον) Αἱ πλάγιαι πού ἀπέχουν ἄνισον ἀπό τόν πόδα τῆς καθέτου εἶναι ἄνισοι καί μεγαλυτέρα εἶναι ἐκείνη πού ἀπέχει περισσότερον τοῦ ποδός τῆς καθέτου.

7. Δίεδροι καί στερεαί γωνίαι.

Δίεδρος γωνία λέγεται τό σχῆμα τό ὁποῖον ἀποτελοῦν δύο ἐπίπεδα ὅταν τέμνωνται π.χ.τά σχήματα ΓΑΒΔ (σχ.10).Τά ἐπίπεδα ΔΑΒ καί ΓΑΒ τά ὁποῖα ἀποτελοῦν τά διέδρους λέγονται ἕδραι, ἡ δέ εὐθεῖα ΑΒ κατά τήν ὁποίαν τέμνονται λέγεται ἀκμή τῆς διέδρου.



Σχ. 10

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

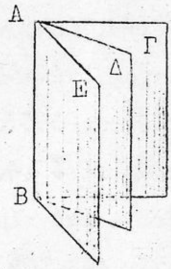
Τήν δίεδρον γωνίαν παριστῶμεν διά δύο γραμμάτων, τά όποῖα γράφονται ἐπί τῆς ἀκμῆς, ἤ διά τεσσάρων ἐκ τῶν ὁποίων δύο μέν γράφονται ἐπί τῆς ἀκμῆς καί ἀνά ἕν ἐπί τῶν ἑδρῶν˙ τά γράμματα τῆς ἀκμῆς τά θέτομεν εἰς τό μέσον π.χ. ἡ δίεδρος (σχ.10) ΑΒ ἤ ΓΑΒΔ.

8. Ἰσότης διέδρων γωνιῶν.

Δύο δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ὅταν ἡ ἀκμή καί αἱ ἕδραι τῆς μιᾶς πέσουν ἐπί τῆς ἀκμῆς καί τῶν ἑδρῶν τῆς ἄλλης, ὥστε νά γίνῃ μία δίεδρος γωνία.

9. Ἐφεξῆς δίεδροι γωνίαι.

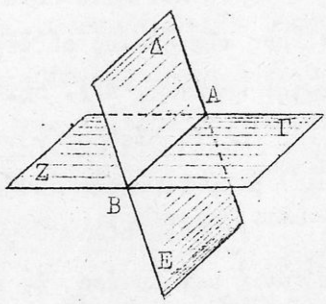
Δύο δίεδροι γωνίαι λέγονται ἐφεξῆς ἐάν ἔχουν κοινήν ἀκμήν, κοινήν ἕδραν, τάς δέ μή κοινάς ἕδρας ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς˙ π.χ. αἱ δίεδροι γωνίαι ΕΑΒΔ καί ΓΑΒΔ εἶναι ἐφεξῆς διότι ἔχουν κοινήν ἀκμήν τήν ΑΒ κοινήν ἕδραν τήν Δ, τάς δέ μή κοινάς ἕδρας Γ καί Ε ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.



Σχ. 11.

10. Κατά κορυφήν δίεδροι γωνίαι.

Δύο δίεδροι γωνίαι λέγονται κατά κορυφήν, ἐάν ἔχουν κοινήν ἀκμήν καί αἱ ἕδραι τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν ἑδρῶν τῆς ἄλλης π.χ. αἱ δίεδροι γωνίαι ΔΑΒΓ καί ΖΑΒΕ (σχ.12) εἶναι κατά κορυφήν, διότι ἔχουν κοινήν ἀκμήν τήν ΑΒ καί τήν ἕδραν Ε προέκτασιν τῆς ἕδρας Δ καί τήν ἕδραν Ζ προέκτασιν τῆς ἕδρας Γ.



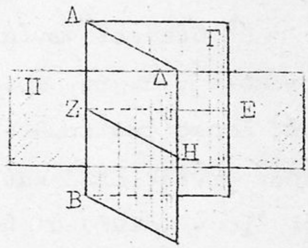
Σχ. 12

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

11. Ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία διέδρου γωνίας.

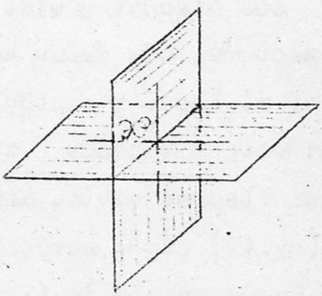
Ἐάν κόψωμεν τήν δίεδρον γωνίαν μέ ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπί τήν ἀκμήν της, ἐπί τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ θά σχηματισθῆ μία ἐπίπεδος γωνία, ἡ ὁποία θά ἔχῃ ὡς κορυφήν τό σημεῖον τομῆς τοῦ ἐπιπέδου καί τῆς ἀκμῆς τῆς διέδρου, πλευράς δέ τάς τομάς τοῦ ἐπιπέδου μετά τῶν ἑδρῶν τῆς διέδρου γωνίας· αὐτή ἡ ἐπίπεδος γωνία λέγεται ἀντίστοιχος τῆς διέδρου καί χρησιμεύει ὡς μέτρον τῆς διέδρου γωνίας· δηλαδή διά νά μετρήσωμεν μίαν δίεδρον γωνίαν, μετροῦμεν τήν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον καί ὅσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τόσων μοιρῶν εἶναι καί ἡ δίεδρος· π.χ.

εἰς τήν δίεδρον ΓΑΒΔ (σχ. 13) ἀντίστοιχος ἐπίπεδος εἶναι ἡ ΕΖΗ ἡ ὁποία προκύπτει ἀπό τήν τομήν ἑνός ἐπιπέδου Π καθέτου ἐπί τήν ἀκμήν ΑΒ εἰς τό σημεῖον Δ καί τέμνει τήν μέν ἕδραν Γ κατά τήν εὐθεῖαν ΕΖ καί τήν ἕδραν Δ κατά τήν εὐθεῖαν ΖΗ.



Σχ. 13

12. Ὀρθή δίεδρος γωνία καλεῖται κάθε δίεδρος γωνία τῆς ὁποίας ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος εἶναι ὀρθή καί κατά συνέπειαν ἡ δίεδρος τῆς ὁποίας αἱ ἕδραι τέμνονται καθέτως, π.χ. σχ.14



Σχ. 14

Ὀξεῖα δίεδρος γωνία καλεῖται ἡ μικροτέρα τῆς ὀρθῆς διέδρου.

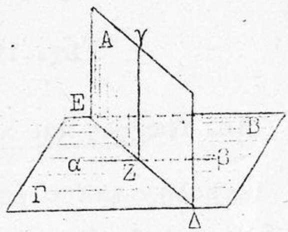
Ἀμβλεῖα δίεδρος γωνία καλεῖται ἡ μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς διέδρου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

13. Συμπληρωματικαί καί παραπληρωματικαί δίεδροι γωνίαι.

Συμπληρωματικαί δίεδροι γωνίαι λέγονται δύο δίεδροι γωνίαι, ἐάν αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι ἔχουν ἄθροισμα 90^{o} καί παραπληρωματικαί, ἐάν αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι ἔχουν ἄθροισμα 180^{o}.

14. Ἐφεξῆς παραπληρωματικαί δίεδροι λέγονται δύο δίεδροι γωνίαι ὅταν ἔχουν κοινήν ἕδραν, κοινήν ἀκμήν, τάς δέ μή κοινάς ἕδρας ἐπί τοῦ ἰδίου ἐπιπέδου· π.χ. αἱ δίεδροι ΑΕΔΓ καί ΑΕΔΒ σχ. 15 εἶναι ἐφεξῆς παραπληρωματικαί, διότι ἔχουν τήν ἕδραν Α κοινήν, τήν ἀκμήν ΕΔ κοινήν, τάς δέ μή κοινάς ἕδρας Γ καί Β ἐπί τῆς ἰδίας ἕδρας Β ἤ Γ, ἐπειδή ἡ μία εἶναι προέκτασις τῆς ἄλλης.



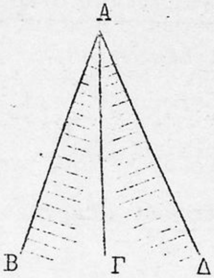
Σχ. 15

15. Τρίεδροι γωνίαι

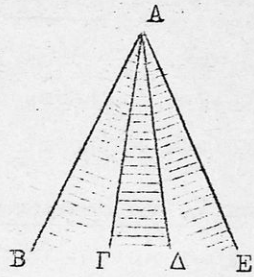
Τρίεδρος στερεά γωνία καλεῖται τό σχῆμα τό ὁποῖον σχηματίζεται ἀπό τρία ἐπίπεδα, τά ὁποῖα διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου καί περατοῦνται ἕκαστον εἰς δύο εὐθείας κατά τάς ὁποίας τέμνεται ὑπό τῶν δύο πλησίον αὐτοῦ ἐπιπέδων (σχ.16) καί διαβάζεται ΑΒΓΔ. Τά ἐπίπεδα πού ἀποτελοῦν τήν τρίεδρον στερεάν γωνίαν λέγονται ἕδραι. Ἡ στερεά γωνία, ἄν ἀποτελεῖται ἀπό τέσσαρας ἕδρας, λέγεται τετράεδρος κλπ. π.χ. ἡ ΑΒΓΔΕ (σχ.17) Αἱ εὐθεῖαι εἰς τάς ὁποίας τέμνονται αἱ ἕδραι μιᾶς στερεᾶς γωνίας λέγονται ἀκμαί αὐτῆς, καί τό σημεῖον εἰς τό ὁποῖον συναντῶνται ὅλαι αἱ ἀκμαί λέγεται κορυφή τῆς στερεᾶς γωνίας.

Εἰς τό σχῆμα 16 ἡ κορυφή τῆς τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι τό Α, ἕδραι τά ἐπίπεδα ΑΒΓ, ΑΓΔ καί ΑΒΔ καί ἀκμαί αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ.-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Σχ. 16



Σχ. 17

16. Προβολή καί κλίσις εὐθείας πρός ἐπίπεδον

Προβολή σημείου ἐπί ἐπιπέδου λέγεται ὁ πούς τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπό τό σημεῖον εἰς τό ἐπίπεδον.

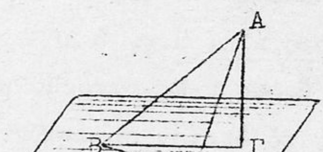
Προβολή δέ γραμμῆς ἐπί ἐπίπεδον λέγεται ἡ γραμμή τήν ὁποίαν ἀποτελοῦν αἱ προβολαί πάντων τῶν σημείων αὐτῆς.

Καλοῦμεν κλίσιν εὐθείας πρός ἐπίπεδον τήν ὀξεῖαν γωνίαν τῆ εὐθείας καί τῆς προβολῆς αὐτῆς πρός τό ἐπίπεδον.

Ἡ κλίσις τῆς εὐθείας πρός τό ἐπίπεδον εἶναι μικροτέρα τῶν γωνιῶν, τάς ὁποίας σχηματίζει αὕτη μετά τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου τῶν διερχομένων διά τοῦ σημείου κατά τό ὁποῖον αὕτη τέμνει τοῦτο.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ.18) τέμνουσα τό ἐπίπεδον Π εἰς τό Β, ΒΓ ἡ προβολή αὐτῆς ἐπί τό Π καί ἡ γωνίαι ΑΒΓ ἡ κλίσις αὐτῆς.

Θά δείξωμεν ὅτι, ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἡ μικροτέρα ἐκ τῶν γωνιῶν τάς ὁποίας σχηματίζει ἡ ΑΒ μέ τάς εὐθείας τοῦ Π, τάς διερχομένας διά τοῦ Β. Ἤτοι ἄν ΒΔ εἶναι τυχοῦσα εὐθεῖα τοῦ Π διερχομένη διά τοῦ Β, θά δείξωμεν ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας ΑΒΔ.



Σχ. 18

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Λαμβάνομεν τήν ΒΔ ἴσην μέ τήν ΒΓ καί φέρομεν τήν εὐθεῖαν ΑΔ. Τά τρίγωνα ΒΑΓ καί ΒΑΔ ἔχουν τήν ΑΒ κοινήν, τήν ΒΓ = ΒΔ ἐκ κατασκευῆς, τήν δέ ΑΓ μικροτέραν τῆς ΑΔ ἐπειδή εἶναι κάθετος, ἡ δέ ΑΔ πλαγία πρός τό Π. Ἄρα καί αἱ ἀπέναντι γωνίαι τῶν ΑΓ καί ΑΔ εἶναι ἄνισοι καί ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας κεῖται μεγαλυτέρα. Ἤτοι εἶναι καί ἡ γωνία ΑΒΓ μικροτέρα τῆς γωνίας ΑΒΔ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΠΟΛΥΕΔΡΑ

1. Πολύεδρον λέγεται κάθε στερεόν σῶμα τό ὁποῖον περιορίζεται πανταχόθεν ὑπό ἐπιπέδων.

Τό πολύεδρον, ἐάν περιορίζεται ὑπό τεσσάρων ἐπιπέδων(ἐδρῶν), λέγεται τετράεδρον, ἐάν ἀπό πέντε, λέγεται πεντάεδρον κ.ο.κ

Ἐπιφάνεια τοῦ πολυέδρου λέγεται ἡ ἐπιφάνεια ὅλων τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ.

Ἀκμαί ἤ πλευραί τοῦ πολυέδρου λέγονται αἱ εὐθεῖαικατά τάς ὁποίας συναντῶνται αἱ ἕδραι αὐτοῦ ἀνά δύο.

Γωνίαι τοῦ πολυέδρου λέγονται αἱ στερεαί γωνίαι αὐτοῦ. Κορυφαί αὐτοῦ λέγονται αἱ κορυφαί τῶν στερεῶν γωνιῶν του. Ἐκ τῶν πολυέδρων τά κυριώτερα εἶναι τά πρίσματα καί αἱ πυραμίδες.

2. Πρῖσμα

Πρῖσμα λέγεται τό πολύεδρον τοῦ ὁποίου δύο ἕδραι εἶναι ἴσαι καί παράλληλοι, αἱ δέ ἄλλαι εἶναι παραλληλόγραμμα.

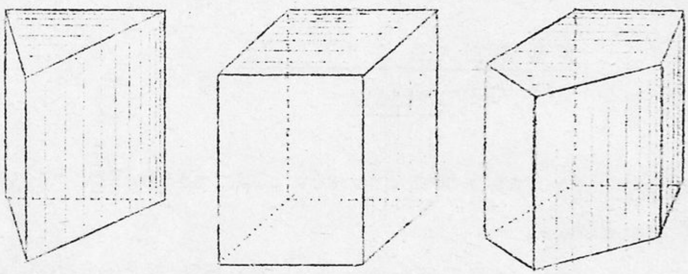
Βάσεις τοῦ πρίσματος λέγονται αἱ δύο ἴσαι καί παράλληλοι ἕδραι αὐτοῦ. Ὕψος λέγεται ἡ κάθετος τήν ὁποίαν φέρομεν ἀπό ἕν σημεῖον τῆς μιᾶς βάσεως ἐπί τήν ἄλλην (ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων).

Παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος λέγεται ἡ ἐπιφάνεια τήν ὁποίαν ἀποτελοῦν [illegible] παραλληλόγραμμα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

3. Εἴδη πρισμάτων.

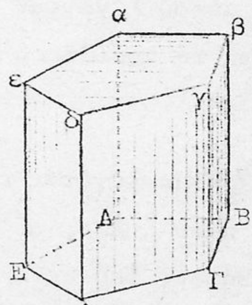
Τά πρίσματα λέγονται τριγωνικά, τετραγωνικά καί γενικῶς πολυγωνικά, ἐάν αἱ βάσεις αὐτῶν εἶναι τρίγωνον, τετράγωνον καί γενικῶς πολύγωνον (σχ. 19).



Σχ. 19

Διακρίνομεν δέ δύο εἴδη πρισμάτων τά ὀρθά καί τά πλάγια.

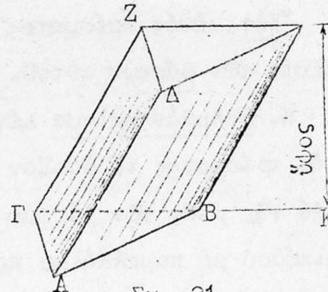
Ὀρθόν λέγεται τό πρῖσμα, ἐάν αἱ ἀκμαί αἱ ὁποῖαι ἑνώνουν τάς ἀντιστοίχους κορυφάς τῶν βάσεων εἶναι κάθετοι εἰς τάς βάσεις. Διά νά κατασκευάσωμεν πρῖσμα λαμβάνομεν τυχόν πολύγωνον ὡς τό ΑΒΓΔΕ σχ. 20 καί φέρομεν ἐκ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ εὐθείας ἴσας καί παραλλήλους τάς Αα, Ββ, Γγ, Δδ, Εε, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐκτός τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου καί πρός τό αὐτό μέρος αὐτοῦ. Τά ἄκρα τῶν εὐθειῶν τούτων θά κεῖνται ἐπί ἑνός ἐπιπέδου, τό ὁποῖον θά εἶναι παράλληλον πρός τό ΑΒΓΔΕ καί τό στερεόν, τό ὁποῖον περατοῦται εἰς τά δύο



Σχ. 20

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

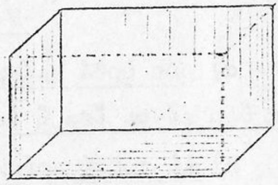
παράλληλα έπίπεδα σχήματα ΑΒΓΔΕ αβγδε καί είς τά παραλληλόγραμμα ΑΒαβ, ΒΓβγ .... ΕΑεα, θά είναι πρίσμα.



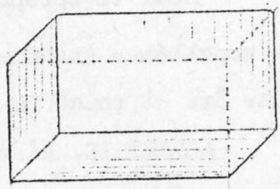
Σχ. 21

Πλάγιον λέγεται τό πρίσμα τοῦ όποίου αί άκμαί δέν είναι κάθετοι είς τάς βάσεις π.χ. (σχ.21). Ύψος τοῦ πλαγίου πρίσματος είναι ή άπόστασις τῶν δύο βάσεων π.χ. ΕΚ (σχ.21).

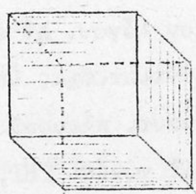
4. Παραλληλεπίπεδα λέγονται τά πρίσματα, τά όποῖα έχουν τάς βάσεις παραλληλόγραμμα ή τά στερεά τά όποῖα περατοῦνται είς παραλληλόγραμμα (σχ.22).


Σχ. 22

Έάν ή βάσις τοῦ παραλληλεπιπέδου είναι όρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τότε τό παραλληλεπίπεδον λέγεται όρθογώνιον (σχ.23).


Σχ. 23

Έάν όλαι αί έδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου είναι τετράγωνα, τότε τό παραλληλεπίπεδον λέγεται κύβος (σχ.24).


Σχ. 24

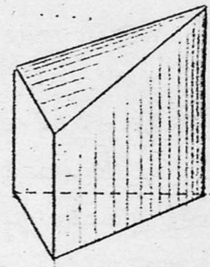
5. Κύβος λέγεται τό παραλληλεπίπεδον τοῦ όποίου όλαι αί έδραι είναι τετράγωνα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κανονικόν λέγεται ἕνα ὀρθόν πρῖσμα ὅταν ἔχει βάσεις κανονικά πολύγωνα.

Ὕψος ἑνός πρίσματος λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων αὐτοῦ.

6. Κολοβόν πρῖσμα λέγεται τό μέρος ἑνός πρίσματος τό ὁποῖον περιέχεται μεταξύ τῆς μιᾶς τῶν βάσεων αὐτοῦ καί ἑνός ἐπιπέδου μή παραλλήλου πρός τάς βάσεις αὐτοῦ π.χ.(σχ.25).



Σχ. 25

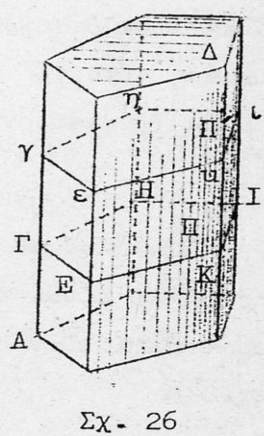
7. Ἰδιότητες τῶν πρισμάτων.

α) Δύο ὀρθά πρίσματα ἐάν ἔχουν ἴσας βάσεις ἤ ἰσοδυνάμους και ἴσα ὕψη εἶναι ἴσα ἤ ἰσοδύναμα.

β) Αἱ τομαί πρίσματος ὑπό ἐπιπέδων παραλλήλων τά ὁποῖα τέμνουν ὅλας τά ἀκμάς αὐτοῦ εἶναι πολύγωνα ἴσα.

Ἔστω τό πρῖσμα ΑΔ (σχ.26) καί ΓΚ καί γκ αἱ τομαί αὐτοῦ ὑπό τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων Π καί Π΄, θά δείξωμεν ὅτι αἱ τομαί ΓΚ καί γκ εἶναι ἴσαι.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Αἱ εὐθεῖαι ΗΓ καί ηγ εἶναι παράλληλοι ὡς τομαί παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπό ἄλλου, ὁμοίως καί αἱ λοιπαί διά τό ἴδιον λόγον. Αἱ εὐθεῖαι ΓΗ, ΗΙ, ΙΚ.... εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρός τάς γη,ηι,ικ,. ὡς ἀπέναντι πλευραί παραλληλογράμμου.



Σχ. 26

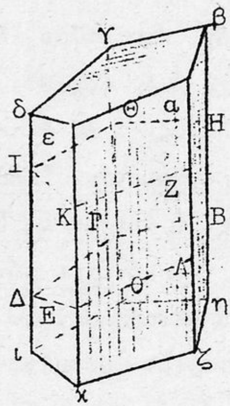
Αἱ γωνίαι ΓΗΙ, ΗΙΚ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι μέ τάς γωνίας γηι,ηικ .....ἐπειδή ἔχουν τάς πλευράς αὐτῶν παραλλήλους καί μέ τήν αὐτήν φοράν. Ἑπομένως τά πολύγωνα ΓΗΙΚΕ καί γηικε ναι ἴσα. Ἤτοι [illegible] ΓΚ [illegible] γκ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Καλοῦμεν κάθετον τομήν ἑνός πρίσματος τήν τομήν αὐτοῦ, ἡ ὁποία γίνεται ὑπό ἐπιπέδου καθέτου ἐπί τάς παραπλεύρους ἀκμάς αὐτοῦ.

γ) Πᾶν πλάγιον πρῖσμα εἶναι ἰσοδύναμον μέ ὀρθόν, τό ὁποῖον ἔχει βάσιν μέν μίαν κάθετον τομήν τοῦ πλαγίου, ὕψος δέ μίαν παράπλευρον ἀκμήν.

Ἔστω πλάγιον πρῖσμα Εβ(σχ.27) καί κάθετος τομή αὐτοῦ ΖΗΘΙΚ ἐάν προεκβληθῶσιν αἱ πλευραί αὐτοῦ καί ληφθῇ Αζ = αΖ, Βη = βΗ, Γθ = = γΘ, Δι = δΙ, Εκ = εΚ, ἀχθῶσι δέ αἱ εὐθεῖαι: ζη, ηθ, θι, ικ, κζ, προκύπτει πρῖσμα ὀρθόν τό ΖΗΘΙΚζηθικ, τό ὁποῖον ἔχει βάσιν τήν κάθετον τομήν τοῦ πλαγίου καί ὕφος τήν Κκ, ἴσην πρός τήν πλευράν Εε τοῦ πλαγίου, διότι ἐλήφθη (κΕ = Κε).



Σχ. 27

Τό ὀρθόν τοῦτο πρῖσμα εἶναι ἰσοδύναμον πρός τό δοθέν πλάγιον:

Διότι τά πρίσματα (πλάγιον καί ὀρθόν) ἔχουν κοινόν μέρος τό στερεόν ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ τά δέ μή κοινά μέρη αὐτῶν ἴσα.

Διότι ἄν πάρωμεν τό στερεόν ΚΖΗΘΙαβγδε, καί τά ἐπί τοῦ ΑΒΓΔΕ κζηθι, οὕτω ὥστε τό πολύγωνον ΖΗΘΙΚ νά ἐφαρμόσῃ ἐπί τοῦ ἴσου τοῦ ζηθικ, ἡ Ζα θά πέσῃ ἐπί τῆς ζΑ, διότι θά εἶναι ἀμφότεροι κάθετοι ἐπί τό αὐτό ἐπίπεδον ζηθικ καί ἐπί τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἐπειδή δέ ἐλήφθη ζΑ = Ζα θά πέσῃ τό α εἰς τό Α, ὁμοίως θά πέσῃ τό β εἰς τό Β καί οὕτω καθ'ἑξῆς. Ὥστε τά δύο στερεά θά ἐφαρμόσουν.

Συμπέρασμα. Τό ὀρθόν πρῖσμα καί τό δοθέν πλάγιον ἐφαρμόζουσι, ὅταν διαιρεθῶσιν εἰς μέρη, ἤτοι εἶναι ἰσοδύναμα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

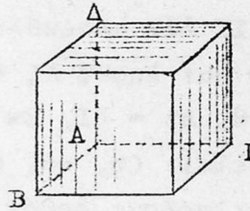
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Μέτρησις στερεῶν σωμάτων

•Τά σώματα ἐκτείνονται κατά τρεῖς διευθύνσεις ἤ διαστάσεις, αἱ ὁποῖαι λέγονται μῆκος, πλάτος καί ὕψος.

Τό ὕψος ἐνίοτε λέγεται καί πάχος ἤ βάθος· π.χ. λέγομεν: τό πάχος τοῦ βιβλίου, τό βάθος τῆς τάφρου.

Τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου αἱ τρεῖς, ἀκμαί αὐτοῦ αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν ἀπό τήν κορυφήν, παριστῶσι τάς τρεῖς διαστάσεις αὐτοῦ: π.χ. ἡ ΑΓ (σχ.28) λέγεται μῆκος, ἡ ΑΒ λέγεται πλάτος, ἡ ΑΔ λέγεται ὕψος.



Σχ. 28

Παρατήρησις: Ἀπό τάς τρεῖς αὐτάς διαστάσεις, ἡ ἐπιφάνεια ἔχει μόνον μῆκος καί πλάτος, ἡ γραμμή ἔχει μόνον μῆκος, τό δέ σημεῖον καμμιάν.

Διά μετρήσωμεν ἕν στερεόν σῶμα πρέπει νά ἔχωμεν ὡς μονάδα ἕν ἄλλο στερεόν ὡρισμένον, πρός τό ὁποῖον νά τό συγκρίνωμεν καί νά εὕρωμεν ἀπό πόσας τοιαύτας μονάδας ἤ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται τό στερεόν τοῦτο σῶμα. Τό ἐξαγόμενον δέ τῆς μετρήσεως λέγεται ὄγκος τοῦ σώματος.

1. Κυβικόν μέτρον

Μία τῶν μονάδων μετρήσεως τῶν στερεῶν σωμάτων λαμβάνομεν τό κυβικόν μέτρον. Τό κυβικόν μέτρον εἶναι ἕνας κύβος τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμή ἤ πλευρά εἶναι ἴση μέ ἕνα μέτρον.

Ἄν λάβωμεν τό κυβικόν μέτρον καί τό διαιρέσωμεν κατά μῆκος εἰς 10 ἴσα μέρη, ὁμοίως κατά πλάτος εἰς 10 ἴσα μέρη καί πάλιν καθ' ὕψος εἰς 10 ἴσα μέρη, τότε παράγονται 1000 κυβικά δέκατα ἤ κυβικαί παλάμαι, δηλ. 1000 μικροί κύβοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἀκμήν ἴσην μέ ἕνα δέκατον ἤ μίαν παλάμην (0,1 τοῦ μέτρου).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ανδρέας - Ζήσου

Ἄν κάμωμεν πάλιν τό ἴδιο καί εἰς τό κυβικόν δέκατον ἤ τήν κυβ. παλάμην θά παραχθοῦν 1000 κυβ. ἑκατ. ἤ κυβ. πόντοι δηλ. 1000 μικροί κύβοι μέ ἀκμήν ἕνα ἑκατοστόν δηλ. (0,01 τοῦ μέτρου). Ἐπομένως εἶναι ἕνα κυβικόν μέτρον ἴσον μέ 1000 κυβικά δέκατα ἤ κυβικάς παλάμας καί ἴσον μέ 1.000.000 κυβικά ἑκατοστά ἤ κυβικούς πόντους.

Γενικῶς μονάς τοῦ ὄγκου εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κύβου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς πλευράν τήν μονάδα τοῦ μήκους.

Μονάς μήκους	Μονάς ἀντίστοιχος τοῦ ἐμβαδοῦ	Μονάς ἀντίστοιχος τοῦ ὄγκου
Χιλιοστόν (mm)	Τετραγ. χιλιοστ. (mm^2)	Κυβικόν χιλιοστ. (mm^3)
Ἑκατοστόν (Cm)	" ἑκατοστ. (Cm^2)	" ἑκατοστ. (Cm^3)
Δέκατον (dm)	" δέκατον (dm^2)	" δέκατον (dm^3)
Μέτρον (m)	" μέτρον (m^2)	" μέτρον (m^3)
Χιλιόμετρον (Km)	" χιλιόμετρ. (Km^2)	" χιλιόμετρ. (Km^3)

Ὅταν ἡ μονάς τοῦ μήκους γίνῃ δέκα φοράς μεγαλυτέρα, ἡ μονάς τοῦ ἀντιστοίχου ὄγκου γίνεται 1000 φοράς μεγαλυτέρα· π.χ. $1 m^3 = 1000\ dm^3 = 1.000.000\ Cm^3 = 1.000.000.000\ mm^3$.

ὁμοίως τό $1 Km^3 = 1000.000.000\ m^3$.

2. Ἄλλη μονάς ὄγκου εἶναι ἡ κυβική ὑάρδα. Δηλαδή ἕνας κύβος τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμή ἤ ἡ πλευρά εἶναι ἴση μέ μίαν ὑάρδα.

Ἄν λάβωμεν μίαν κυβικήν ὑάρδαν καί τήν διαιρέσωμεν κατά μῆκος εἰς 3 ἴσα μέρη, ὁμοίως κατά πλάτος εἰς 3 ἴσα μέρη καί πάλιν καθ'ὕψος εἰς 3 ἴσα μέρη, τότε παράγονται 27 κυβικοί πόδες, δηλαδή 27 μικρότεροι κύβοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἀκμήν ἴσην μέ ἕνα πόδα.

Ἄν κάμωμεν πάλιν τό ἴδιο καί διαιρέσωμεν ἕνα κυβικόν πόδα κατά μῆκος πλάτος καί ὕψος εἰς 12 ἴσα μέρη, θά παραχθοῦν 1728 μικροί κύβοι μέ ἀκμήν μίαν ἴντζαν.

Ἐπομένως μία ὑάρδα εἶναι ἴση μέ 27 κυβικούς πόδας καί ἴση μέ 46656 κυβικάς ἴντζας.

3. Σχέσεις μέτρου καί ὑάρδας καί ἀντιστοίχων αὐτῶν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Μέτρα μήκους.

1 m = 39,37 ἴντζες = 3,28 πόδ. = 1,09 ὑάρδες.
1 πούς = 0,305 m = 12 ἴντζες ἤ 12΄΄.

Μέτρα ἐπιφανείας.

1 m^2 = 1550 τ. ἴντζες = 10.764 τ. πόδ = 1,188 τ. ὑάρδες.
1 τετρ. πούς = 0,0929 m^2 = 929 cm^2 = 144 τετραγ. ἴντζες.

Μέτρα ὄγκου.

1 m^3 = 61024 κυβ. ἴντζ = 35,316 κυβ. πόδ. = 1,295 κυβ. ὑάρδες.
1 κυβ. πούς = 0,0283 m^3 = 28316 Cm^3 = 1728 κυβικ. ἴντζες.

4. Μέτρα χωρητικότητος 1 m^3 ὕδατος = 1000 Kgr = 1 τόννος Γαλλικός = 2205 λίτρας = 220 γαλλόνια = 35,316 κυβικ. πόδας ὕδατος.

1 λίτρα = 0,4536 Kgr = 0,10 γαλλόνια.

1 Kgr = 2,205 λίτρας = 0,22 γαλλόνια.

1 τόννος 'Αγγλικός = 2240 λίτρας = 1016 Kgr =
= 224 γαλλόνια, = 268,8 γαλλόνια 'Αμερικῆς.

1 γαλλόνιον 'Αγγλίας = 10 λίτρας = 4,54 Kgr = 0,00454 m^2 ὕδατο = 0,16 κυβ. πόδ. = 1,2 γαλλόνια 'Αμερικῆς.

1 γαλλόνιον 'Αμερικῆς = 8,34 λίτρας =
= 3,785 Kgr = 231 κυβ. ἴντζας = 0,834 γαλλόνια 'Αγγλίας.

1 κυβικός πούς ὕδατος = 62,4 λίτρας = 6,24 γαλλόνια = 0,0279 τόννοι = 28,3 Kgr = 7,48 γαλλόνια 'Αμερικῆς.

5. Μονάδες βάρους.

Βάρος ἑνός σώματος, ὡς γνωστόν, εἶναι ἡ ἐνέργεια τῆς βαρύτητος, δηλαδή τῆς ἕλξεως τῆς γῆς ἐπ' αὐτοῦ.

Διά νά ζυγίσωμεν ἕν σῶμα μεταχειριζόμεθα διάφορα σταθμά καί τήν πλάστιγγα. Μία ἀπό τάς μονάδας μετρήσεως τοῦ βάρους εἶναι καί τό γραμμάριον (gr). Γραμμάριον εἶναι τό βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου καί θερμοκρασίας 4°C τό ὁποῖον χωρεῖ εἰς ἕνα κυβικόν ἑκατοστόν ἤ κυβικόν πόντον· 1000 τοιαῦτα γραμμάρια ἀποτελοῦν ἕνα χιλιόγραμμον (Kgr) ἤ κιλόν. Μεγαλυτέρα μονάς εἶναι: ὁ τόννος = βαρ. ὕδατος 4°C πού χωρεῖ εἰς 1 m^3 = 1000 χιλ/μμα ἤ Kgr.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τόννος (t) = 1 t = 1000 Kgr.

Δέκατον τόννου (g) = 0,1 t = 100 Kgr

χιλιόγραμμον (Kgr) = 1 Kgr

Ἑκατόν γραμμάρια (hgr) = 100 gr = 0,1 Kgr

Δέκα γραμμάρια (dagr) = 10 gr = 0,01 Kgr

γραμμάριον (gr) = 1 gr = 0,001 Kgr

Δέκατον γραμμαρίου dgr = 0,1 gr = 0,0001 Kgr.

Ἑκατοστόν γραμμαρίου cgr = 0,01 gr = 0,00001 Kgr.

Χιλιοστόν γραμμαρίου (mgr) = 0,001 gr = 0,000001 Kgr.

6. Τό βάρος ἑνός σώματος ἰσοῦται μέ τόν ὄγκον του ἐπί τό εἰδικόν βάρος αὐτοῦ. Ἤτοι $\beta = v \cdot \varepsilon$.

Εἰδικόν βάρος ἑνός σώματος λέγεται τό πηλίκον τοῦ βάρους του διά τοῦ ὄγκου του. Ἤτοι $\varepsilon = \frac{\beta}{v}$.

Ἐκ τοῦ $\beta = v.\varepsilon$ εὑρίσκομεν $v = \frac{\beta}{\varepsilon}$.

Ἤτοι ὁ ὄγκος ἑνός σώματος ἰσοῦται μέ τό πηλίκον τοῦ βάρους τοῦ σώματος διά τοῦ εἰδικοῦ βάρους αὐτοῦ.

Σημείωσις. Διά v θά παριστάνωμεν τόν ὄγκον.

Διά S_π τό ἐμβαδόν παραπλεύρου ἐπιφανείας

Διά S_o τό ὁλικόν ἐμβαδόν.

Διά h τό ὕψος ἤ μῆκος τῶν σωμάτων.

Διά d καί D τάς διαμέτρους.

Διά r καί R τάς ἀκτῖνας.

Διά b καί B μικρήν καί μεγάλην βάσιν.

Διά ε τό εἰδικόν βάρος τῶν σωμάτων.

Διά β τό βάρος τῶν σωμάτων.

Παρατήρησις. Ἐάν ὁ ὄγκος μᾶς δίδεται εἰς κυβικά μέτρα καί πολλαπλασιάσωμεν τόν ὄγκον ἐπί τό εἰδικόν βάρος, τότε τό βάρος τοῦ σώματος δίδεται εἰς τόννους.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

'Εάν τόν ὄγκον τόν εὑρίσκωμεν εἰς κυβικά δέκατα, τό βάρος θά μᾶς δίδεται εἰς χιλιόγραμμα.

'Εάν τόν ὄγκον εὑρίσκωμεν εἰς κυβικά ἑκατοστά, τό βάρος θά μᾶς δίδεται εἰς γραμμάρια.

'Αντιστρόφως. 'Εάν ἔχωμεν τό βάρος ἑνός σώματος εἰς τόννους καί εὕρωμεν ἐξ αὐτοῦ τόν ὄγκον, διαιροῦντες διά τοῦ εἰδικοῦ βάρους, ὁ ὄγκος θά μᾶς δίδεται εἰς κυβικά μέτρα.

'Ομοίως ἄν τό βάρος δίδεται εἰς χιλιόγραμμα ὁ ἐξ αὐτοῦ ὄγκος δίδεται εἰς κυβικά δέκατα ἤ κυβικάς παλάμας.

'Ομοίως ἄν τό βάρος δίδεται εἰς γραμμάρια ὁ ἐξ αὐτοῦ ὄγκος δίδεται εἰς ἑκατοστά.

$m^3 . ε = t$	$t : ε = m^3$
$dm^3 . ε = Kgr$	$Kgr : ε = dm^2$
$cm^3 . ε = gr$	$gr : ε = cm^3$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΙΝΑΞ ΕΙΔΙΚΩΝ ΒΑΡΩΝ

Ὄνομα Σώματος	Εἰδικὸν Βάρος	Ὄνομα Σώματος	Εἰδικὸν Βάρος
Ἀήρ	0,001293	Ξύλον ἀκακίας	0,82
Ἄμμος ὑγρή	1,85	" ἀπιδιᾶς	0,66
Ἄμμος χονδρή	1,75	" ἐβέννου	1,18
Ἄνθραξ	2,30	" ἐλάτης	1,54
Ἀντιμόνιον	6,71	" δρυός	0,84
Ἀλουμίνιον	2,56	" Γαλλίας	0,91
Ἄργυρος	10,53	" καρυδιᾶς	0,67
Ἀσβέστιον	1,58	" κέδρου	0,49
Ἄσφαλτος	1,1-1,2	" κερασιᾶς	0,72
Βενζίνη εἰς 15° C	0,63-0,72	" λεύκης	0,38
Βισμούθιον	9,80	" μαόνι	0,85
Βρώμιον	3,15	" μελίας	0,79
Γάλα	1,03	" μηλιᾶς	0,73
Γλυκερίνη	1,26	" Ὁλλανδίας	1,32
Γρανίτης	2,70	" ὀξυᾶς	0,80
Γραφίτης	2,18	" πεύκης	0,62
Γύψος	2,32	" πτελέας	0,56
Ἐλαστικόν	0,94	" σφενδάμου	0,75
Ἐλεφαντοστοῦν	1,91	" φλαμουριᾶς	0,604
Ἐλαιόλαδον	0,917	Ξυλάνθραξ	0,45-0,60
Θεῖον	2,086	Ὀξυγόνον	1,105
Κασσίτερος	7,29	Οἰνόπνευμα ἀνθρ.	0,702
Κηρός	0,96	Οἶνος	1,01
Κρύσταλλον	3,33	Ὀρείχαλκος	8,65
Λευκοσίδηρος	7,29	Ὀρυκτέλαιον 20°	0,91
Λιγνίτης	1,3	Πάγος	0,916
Λιθάνθραξ	1,16-1	Πετρέλαιον Ρωσ.	0,825
Μαγγάνιον	7,22	" Ἀμερ.	0,795
Μαγνήσιον	1,74	Πέτρα (περίπου)	1,90
Μάρμαρον	2,705	Πηρολουσίτης	4,8
Μόλυβδος	11,35	Πλατίνη	21,50
Μπετόν	2,60	Πορσελάνη	2.242
Νίκελ	8,90	Πυρίτιον	2,39

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Όνομα Σώματος	Είδικόν Βάρος	Όνομα Σώματος	Είδικόν Βάρος
Πυρηνέλαιον	0,92	Ύδωρ θαλάσσης	1,026
Ρητίνη	1,07	Φελός	0,24
Σίδηρος	7,40-7,83	Φωταέριον	0,34-0,45
" σφυρηλ.	7,79-7,85	Φώσφορος	1,83
" χυτός	7,31	" έρυθρός	2,16
Σΐτος	0,80	Χαλαζίας	2,65
Σχιστόλιθος	2,80	Χάλυψ	7,60-7,80
Τσιμέντο	3,10	Χαλκός	8,838
Ύαλος	2,527	Χρυσός	19,32
Ύδράργυρος	13,596	Λρώμιον	6,02
Ύδωρ	1,00	Ψευδάργυρος	7,19

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν IV.

Όγκος καί έμβαδόν Πρίσματος.

1. Ό όγκος όρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εΐναι γινόμενον τών τριών διαστάσεων αύτοΰ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ: Έστω ή ΟΑ = 6, ή ΟΒ = 4 καί ή ΟΓ = 5, (σχ. 29).

Διαιροΰμεν αύτάς είς 6,4,5 ΐσα μέρη κατά σειράν καί φέρομεν διά τών διαιρέσεων παραλλήλους πρός τάς ΟΑ καί ΟΒ.

Ή βάσις ΟΑΔΒ διηρέθη είς 6 Χ 4 = 24 τετράγωνα έχοντα πλευράν ένός μέτρου. Έάν τώρα φέρωμεν ένα έπίπεδον παράλληλον πρός την έδραν ΟΑΔΒ καί είς άπόστασιν ένός μέτρου άπό τοΰ Ο, δηλ. είς το σημεΐον γ, τότε σχηματίζονται 24 κύβοι σάν τόν (οαβγ) μέ πλευράν ένός μέτρου, δηλ. 24 κυβικά μέτρα. Έπειδή δέ τέτοια στρώματα θά έχωμεν 5, διότι ή ΟΓ εΐναι 5m, έπεται ότι όλόκληρον τό παραλληλεπίπεδον άποτελεΐται άπό 24 Χ 5 = 120 κυβικά μέτρα.

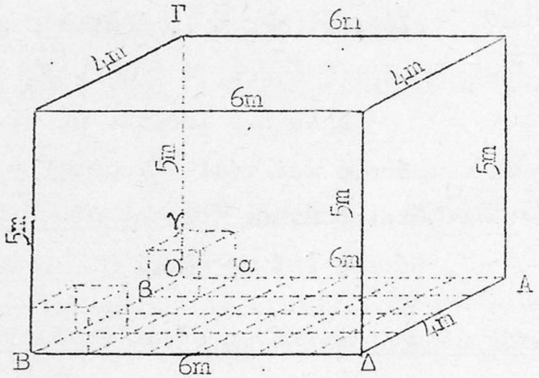
Ώστε όγκος = 6 Χ 4 Χ 5 = 120 κυβικά μέτρα.

Άν αί διαστάσεις εΐναι κλασματικαί, πάλιν άληθεύουν τά άνωτέρω, διότι τρέπομεν τά κλάσματα είς όμώνυμα καί διαιροΰμεν τάς άκμάς είς όσα μέρη μάς λέγουν οί άριθμηταί τών όμωνύμων κλασμάτων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Π.χ ἔστω ΟΑ = $\frac{1}{2}$ m, ΟΒ = $\frac{1}{3}$ m καί ΟΓ = $\frac{1}{4}$ m τρέπομεν τά κλάσματα εἰς ὁμώνυμα καί ἔχομεν ΟΑ = $\frac{6}{12}$, ΟΒ = $\frac{4}{12}$ καί ΟΓ = $\frac{3}{12}$ καί διαιροῦμεν τάς ἀκμάς ὅπως καί ἀνωτέρω κατά σειράν εἰς 6, 4, 3 ἴσα μέρη.

Ἡ βάσις ΟΑΔΒ διηρέθη εἰς 24 τετράγωνα ἔχονται πλευράν $\frac{1}{12}$ τοῦ μέτρου. Ἐάν φέρωμεν ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρός τήν ἕδραν ΟΑΔΒ καί εἰς ἀπόστασιν $\frac{1}{12}$ τοῦ μέτρου ἀπό τοῦ Ο δηλ. εἰς τό σημεῖον γ,



Σχ. 29

τότε σχηματίζονται 24 κύβοι σάν τόν (Οαβγ) μέ πλευράν $\frac{1}{12}$ τοῦ μέτρου· ἐπειδή τέτοια στρώματα θά ἔχωμεν 3, διότι ἡ ΟΓ εἶναι $\frac{3}{12}$ m, ἕπεται ὅτι ὁλόκληρον τό παραλληλεπίπεδον ἀποτελεῖται ἀπό $\frac{24}{144}$ X $\frac{3}{12}$ = $\frac{72}{1728}$ m^3 ἤ $\frac{1}{24}$ m^3. Εἰς τό αὐτό καταλήγομεν, ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τάς τρεῖς διαστάσεις ἤτοι $\frac{1}{2}$ X $\frac{1}{3}$ X $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{24}$ m^3.

Γενικῶς, ἐάν ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου παρασταθῇ διά τοῦ V καί αἱ διαστάσεις αὐτοῦ α,β,γ, θά ἔχωμεν τόν τύπον $\boxed{V = α.β.γ.}$

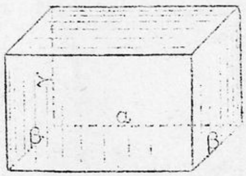
Ἐάν τό παραλληλεπίπεδον γίνῃ κύβος, ὁ τύπος γίνεται V = α.α.α. = $α^3$ $\boxed{V = α^3}$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Δι'αὐτό δέ καί ἡ τρίτη δύναμις παντός ἀριθμοῦ λέγεται καί κύβος, διότι ἐκφράζει τόν ὄγκον κύβου ἔχοντος πλευράν τήν βάσιν τοῦ ἀριθμοῦ· π.χ. 5^3 σημαίνει τόν ὄγκον κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρά εἶναι 5 μέτρα ἤ 5 παλάμαι ἤ 5 πόντοι κ.λ.π.

Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος αὐτοῦ.

Διότι ὡς ἐδείξαμεν προηγουμένως ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μέ τάς τρεῖς διαστάσεις αὐτοῦ· ἤτοι ἄν ἡ μία εἶναι α (σχ. 30), ἡ ἄλλη β καί ἡ ἄλλη γ, καί V ὁ ὄγκος θά ἔχωμεν $\boxed{V = \alpha.\beta.\gamma}$



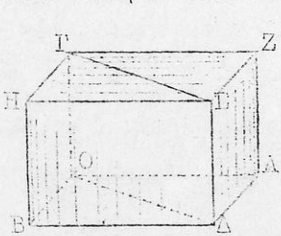
Σχ. 30

Ἀλλά α.β ἰσοῦται μέ τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως καί τότε ἔχομεν $\boxed{V = S_\beta . \gamma}$ ἤτοι ὁ ὄγκος ἰσοῦται μέ τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος.

Ὁ ὄγκος παντός παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος.

2. Τό ὀρθόν παραλληλεπίπεδον διαιρεῖται διά τοῦ ἐπιπέδου τό ὁποῖον ὁρίζουν δύο ἀπέναντι πλευραί του εἰς ἴσα τριγωνικά πρίσματα.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ: Ἔστω τό ὀρθόν παραλληλεπίπεδον ΟΑΒΓ (σχ.31) καί δύο ἀπέναντι πλευραί αὐτοῦ αἱ ΟΓ καί ΕΔ διά τῶν ΟΓ καί ΕΔ φέρομεν ἐπίπεδον, ἔστω τό ἐπίπεδον ΟΓΕΔ, τό ὁποῖον διαιρεῖ τό ὀρθόν παραλληλεπίπεδον εἰς δύο ὀρθά τριγωνικά πρίσματα τά ΟΒΔΕΓΗ καί ΟΔΑΖΓΕ τά ὁποῖα εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ἴσας βάσεις καί τό αὐτό ὕψος.



Σχ. 31

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

3. Ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται μέ τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος.

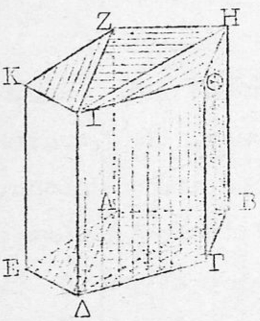
Ἔστω τό τριγωνικόν πρῖσμα ΟΒΔΕΓΗ (σχ. 31) Ἐπί τῶν ἀκμῶν ΒΗ, ΔΕ, ΟΓ κατασκευάζομεν τό παραλληλεπίπεδον ΟΒΔΑΖΕΗΓ· τό πρῖσμα ΟΒΔΕΓΗ θά ἰσοῦται μέ τό $\frac{1}{2}$ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΟΒΔΑΖΕΗΓ, ἀλλά ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μέ τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος· ἤτοι ἄν καλέσωμεν h τό ὕψος καί ὡς βάσιν λάβωμεν τήν (ΟΑΔΒ) θά ἔχωμεν (ΟΒΔΑΖΕΗΓ) = (ΟΑΔΒ)· h ἄρα καί διά τό πρῖσμα θά ἔχωμεν.

(ΟΒΔΕΓΗ) = $\frac{1}{2}$ (ΟΑΔΒ). h ἤ, ἐπειδή τό h εἶναι τό αὐτό

καί τό $\frac{1}{2}$ (ΟΑΔΒ) = (ΟΒΔ), θά ἔχωμεν τελικῶς (ΟΒΔΕΓΗ) = (ΟΒΔ). h . ἤ $\boxed{V = S_\beta . h.}$

4. ὁ ὄγκος παντός ὀρθοῦ πρίσματος ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ: Ἔστω τό πρῖσμα ΑΙ (σχ.32), θά δείξωμεν ὅτι(ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ) = (ΑΒΓΔΕ). h , ἐάν h εἶναι τό ὕψος τοῦ πρίσματος.



Σχ. 32

Διά τῆς παραπλεύρου ἀκμῆς ΑΙ καί τῶν διαγωνίων ΒΑ καί ΔΑ φέρομεν δύο ἐπίπεδα, τά ὁποῖα χωρίζουν τό πρῖσμα εἰς τρία τριγωνικά πρίσματα τά ὁποῖα ἔχουν ὡς ὕψος τό ὕψος τοῦ δοθέντος πρίσματος. Ὁ ὄγκος ὅμως ἑκάστου τριγωνικοῦ πρίσματος ὡς ἀνωτέρω ἐδείξαμεν ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος. Ἄρα τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τριγωνικῶν πρισμάτων ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν βάσεων ἐπί τό ὕψος h.

Ἀλλά τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τριγωνικῶν πρισμάτων μᾶς δίδει τόν ὄγκον τοῦ πρίσματος, τό δέ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν βάσεων μᾶς

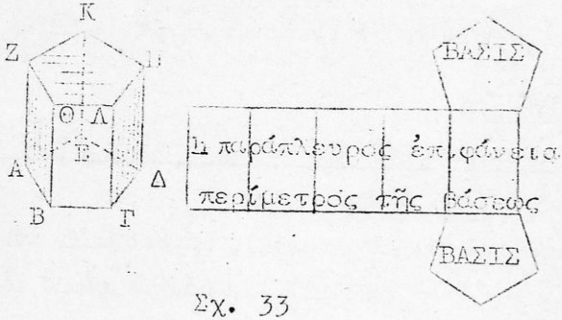
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δίδει τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος καί ἑπομένως (ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ) = (ΑΒΓΔΕ). h ἤτοι $\boxed{V = S_{\beta} \cdot h.}$

5. Ὄγκος πλαγίου πρίσματος ἰσοῦται μέ τό ἐμβαδόν τῆς καθέτου τομῆς ἐπί τό μῆκος μιᾶς ἀκμῆς αὐτοῦ.

6. Ἐμβαδόν παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος.

Ἔστω τό ὀρθόν πρῖσμα ΑΗ (σχ. 33). Τοῦ πρίσματος αὐτοῦ ἡ ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται ἀπό ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα.



Σχ. 33

Ἐάν θεωρήσωμεν τό πρῖσμα ὅτι εἶναι ἐκ χάρτου καί κόψωμεν τοῦτο κατά μῆκος μιᾶς ἀκμῆς του καί τό ἀναπτύξωμεν, θά σχηματισθῇ τό ἀνάπτυγμά του (σχ. 33). Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος σχηματίζει ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ἡ περίμετρος τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος καί ὕψος εἶναι τό ὕψος τοῦ πρίσματος. Ἑπομένως τό ἐμβαδόν τοῦ παραλληλογράμμου μᾶς δίδει τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος

ἤτοι $\boxed{S_{\pi} = \text{περίμετρος βάσεως} \cdot h}$ ἔνθα S_{π} = ἐμβαδόν παραπλεύρου ἐπιφανείας

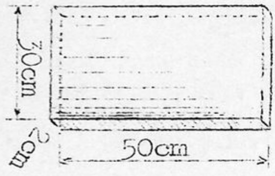
Ἄν θέλωμεν τό ὁλικόν ἐμβαδόν, πρέπει εἰς τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας νά προσθέσωμεν τό ἐμβαδόν τῶν δύο βάσεων·

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἤτοι $\boxed{S_o = S_c + 2S_\beta}$ ἔνθα S_β = ἐμβαδόν βάσεως καί S_o = ὁλικόν ἐμβαδόν.

Ἐάν τό πρῖσμα εἶναι πλάγιον το ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἰσοῦται μέ τήν περίμετρον τῆς καθέτου τομῆς ἐπί τό μῆκος μιᾶς ἀκμῆς αὐτοῦ, ἐπειδή ἰσοδυναμεῖ μέ ὀρθόν κλπ.

7. Ἐφαρμογαί.



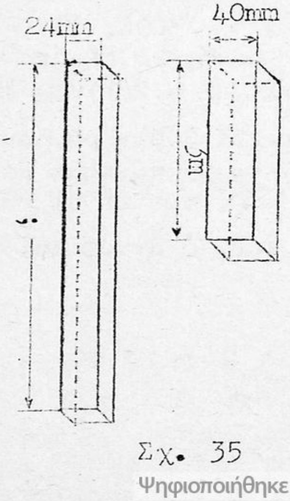
Σχ. 34

Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καί τό βάρος εἰς κιλά καί ὀκάδας ἑνός πίνακος διανομῆς ἠλεκτρικοῦ ρεύματος (ταμπλό) ἐκ μαρμάρου μήκους 50 cm, πλάτους 30 cm καί πάχους 0,02 m καί εἰδικοῦ βάρους 2,705 (σχ. 34).

Λύσις: Ἐπειδή ἡ πλάκα εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ὁ ὄγκος δίδεται ἀπό τόν τύπον V = α.βγ..

Μετατρέπομεν τό 0,02 m εἰς ἑκατοστά, διότι τά ποσά πρέπει νά εἶναι ὁμοειδῆ, ἤτοι V = 50 X 30 X 2 = 3000 cm^3 καί β =3000X2,705= = 8115 gr = 8,115 Kg.

Ἐάν θέλωμεν τό βάρος εἰς ὀκάδας, πολ/μεν τό 8,115 Kg ἐπί 0,781 διότι ἕνα κιλό ἰσοῦται μέ 0,781 ὀκάδας, καί ἔχομεν 8,115X0,781 = = 6,338 ὀκάδας,



Σχ. 35

2. Ράβδου σιδηρᾶς τό μῆκος εἶναι 3 m ἡ δέ βάσις της εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 40 mm. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος αὐτῆς, ἐάν δέ μετασχηματίσωμεν αὐτήν ὥστε νά ἔχῃ τομήν τετράγωνον, πλευρᾶς 24 mm. Ποῖον μῆκος ἔχει καί ποῖον ὄγκον (σχ.35).

Λύσις: Διά νά εὕρωμεν τόν ὄγκον τρέπομεν τά 3 m εἰς χιλιοστά, διότι αἱ μονάδες πρέπει νά εἶναι ὁμοειδεῖς, καί ἔχομεν $V = S_\beta\, h = 40^2 \cdot 3000 =$

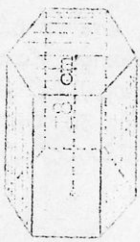
$1600 \cdot 3000 = 4.800.000\ mm^3$.

Ὁ ὄγκος καί εἰς τό πρῶτον στερεόν καί εἰς τό δεύτερον εἶναι ὁ αὐτός. Ἐπομέ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ως ἀρκεῖ νά διαιρέσωμεν τόν ὄγκον διά τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως (24^2) ιά νά ἔχωμεν τό ζητούμενον μῆκος. Ἤτοι $h = \frac{V}{S_\beta} = \frac{4800000}{24^2} = \frac{4800000}{576} = 8,33$ μέτρα.

3. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος πρίσματος κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πλευρᾶς 2 cm καί ὕψος 18 cm (σχ.36).

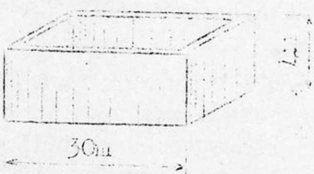


Σχ. 36

Λύσις: Θά εὕρωμεν τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως διά τοῦ τύπου $S_\beta = \frac{6.\alpha^2.\sqrt{3}}{4}$ καί θά τό πολλαπλασιάσωμεν ἐπί τό ὕψος. $S_\beta = \frac{6X2X2\sqrt{3}}{4} = \frac{6X4X1,73}{4} = 10,38$ cm².

Ἤτοι: $V = S_\beta \,.\, h$ ἤ $V = 10,38 X 18 = 186,84$ cm³ ὥστε ὁ ὄγκος εἶναι 186,84 cm³

4. Δεξαμενῆς ὁ μέν πυθμήν εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 30 m τό βάθος δέ αὐτῆς εἶναι 4 m. Ζητεῖται ἡ χωρητικότης αὐτῆς εἰς ὀκάδας καί τόννους (σχ.37).

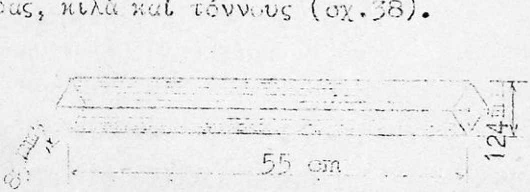


Σχ. 37

Λύσις: Θά εὕρωμεν τόν ὄγκον αὐτῆς πολλαπλασιάζοντες τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως ἐπί τό ὕφος.

Ἤτοι 30 X 30 X 4 = 3600. Ἡ χωρητικότης τῆς δεξαμενῆς θά εἶναι 3600 τόν. καί 3600 X 781 = 2811600 ὀκ.

5. Πρῖσμα μέ βάσιν ρόμβον ἐκ σιδήρου ἔχει μῆκος 55 πόντους καί ἡ πλευρά τῆς βάσεώς του εἶναι 85 mm καί ἡ μία διαγώνιος 124 mm. Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν του, ὁ ὄγκος καί τό βάρος εἰς ὀκάδας, κιλά καί τόννους (σχ.38).



Σχ. 38

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

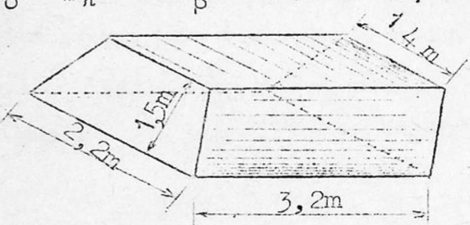
Λύσις: Πρός εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ καί τοῦ ὄγκου δέον ὅπως εὕρωμεν τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως. Εὑρίσκεται δέ διά τοῦ τύπου $S = \frac{\Delta . \delta}{2}$. Ἀλλά γνωρίζομεν μόνον τήν μίαν διαγώνιον καί μίαν ἐκ τῶν πλευρῶν. Ἑπομένως μᾶς λείπει ἡ ἑτέρα διαγώνιος. Δυνάμεθα ὅμως νά τήν εὕρωμεν διά τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος. Ἤτοι $85^2 - 62^2 = 7225 - 3844 = 3381$ καί $\sqrt{3381} = 58$ mm. Εὑρεθείσης τῆς ἑτέρας διαγωνίου $(58 \times 2) = 116$ δυνάμεθα διά τοῦ ρηθέντος τύπου νά εὕρωμεν τό ἐμβαδόν.

Ἤτοι $S = \frac{\Delta . \delta}{2} = \frac{116 \times 124}{2} = 58 \times 124 = 7192$ mm^2.

Πολλαπλασιάζοντες τό εὑρεθέν ἐμβαδόν ἐπί τό ὕψος ἔχομεν τόν ὄγκον. Ἤτοι $V = S_\beta\, h$, $V = 7192 \times 550 = 3955600$ mm^3 = 0,0039566 m^3. πολλαπλασιάζομεν ἐπί τό εἰδικόν βάρος καί ἔχομεν 0,031091016 τόν. = 31,091016 Kgr ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τό 31,091016 X 0,781 = 24,28 ὀκάδας.

S_π = περ.βάσεως . h ἤ $S_\pi = 34 \times 55 = 1870$ cm^2 = 187000 mm^2

$S_o = S_\pi + 2\, S_\beta = 1870 + 143,84 = 2013,84$ cm^2



Σχ. 39

6) Ἕνα πρῖσμα ἐξ ἀλουμινίου ἔχει βάσιν τραπέζιον, μέ μεγάλην βάσιν 2,2 m μικρήν 1,4 m καί ὕψος βάσεως 1,5 m. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καί τό βάρος τοῦ πρίσματος, ἄν τό ὕψος αὐτοῦ εἶναι 3,2 m (είδ βαρ. ἀλουμινίου 2,56) (σχ.39).

Λύσις:

$S_\beta = \frac{2,2 + 1,4}{2} \times 1,5 = \frac{3,6}{2} \times 1,8 \times 1,5 = 2,7$ m^2 ἤ 270 dm^2

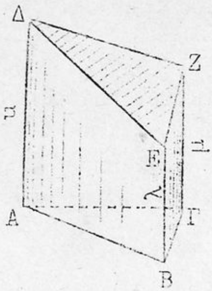
$V = S_\beta\, h = 2,7 \times 3,2 = 8,64$ m^3 ἤ 8640 dm^3.

$\beta = v . \varepsilon = 8640 \times 2,56 = 22118,4$ Kgr. ἤ 17274,4704 ὀκάδες.

8. Κολοβόν τριγωνικόν πρῖσμα.

Κολοβόν πρῖσμα καλεῖται τό στερεόν τό ὁποῖον ἀπομένει ἀπό ἕνα πρῖσμα ἄν τό πρῖσμα τό κόψωμεν μέ ἕνα ἐπίπεδον μή παράλληλον πρός τήν βάσιν του, π.χ. τό ΑΒΓΔΕΖ (σχ.) καί ... τριγωνικόν κολο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Σχ. 40

βόν, διότι ἡ βάσις του εἶναι τρίγωνον.

9. Ὁ ὄγκος κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εὑρίσκεται ἄν πολλαπλασιάσωμεν τό ἐμβαδόν τῆς βάσεώς του ἐπί τό τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκμῶν του.

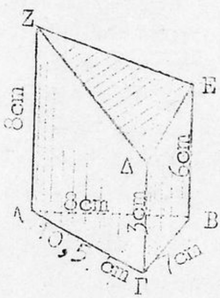
Ἐάν καλέσωμεν τάς ἀκμάς του κατά σειράν κ,λ,μ, (σχ.40) καί S τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως του, ἔχομεν τόν τύπον $V = S_\beta \cdot \frac{\kappa+\lambda+\mu}{3}$

10. Ἐάν εἶναι τό κολοβόν πολυγωνικόν πρῖσμα, τό διαιροῦμεν εἰς τριγωνικά κολοβά πρίσματα καί προσθέτομεν τούς ὄγκους.

11. Ἐφαρμογή.

1. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ὀρθοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος με ἀκμάς βάσεως 7,8,10,5 Cm καί μέ παραπλεύρους ἀκμάς 3,8,6 Cm. (σχ. 41).

Λύσις: Πρόκειται περί ἑνός κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νά εὕρωμεν τόν ὄγκον διά τοῦ τύπου $V = S_\beta \cdot \frac{\kappa+\lambda+\mu}{3}$. Θά εὕρωμεν ὅμως πρῶτον τό ἐμβαδόν τῆς τριγωνικῆς βάσεως διά τοῦ τύπου.



Σχ. 41

$S = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)\cdot(\tau-\beta)\cdot(\tau-\gamma)}$ ἔνθα

$$\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{7+8+10,5}{2} = \frac{25,5}{2} = 12,75.$$

$$\tau - \alpha = 12,75 - 7 = 5,75$$

$$\tau - \beta = 12,75 - 8 = 4,75$$

$$\tau - \gamma = 12,75 - 10,5 = 2,25$$

Ἤτοι $S = \sqrt{12,75 X 5,75 X 4,75 X 2,25} = \sqrt{773,5273} = 27,99\ cm^2$.

Διά τοῦ προαναφερθέντος τύπου θά εὕρωμεν τόν ὄγκον τοῦ στερεοῦ. Ἄρα

$$V = \frac{27,99 X (3+8+6)}{3} = 9,33 X 17 = 158,61\ Cm^3$$ ἤ

$0,0001584\ m^3$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀνδρέας Ἠλίου

'Ασκήσεις

1) Νά γράψης εἰς τό τετράδιόν σου ὅλα τά ἐμβαδά τῶν ἐπιπέδων σχημάτων τά ὁποῖα ἔμαθες μέχρι σήμερον καθώς καί τά μήκη τῶν περιμέτρων.

2) Θέλομεν ἐξ ἑνός φύλλου λαμαρίνας (τενεκέ) διαστάσεων 100 ἐπί 80 cm νά κατασκευάσωμεν 40 κουτιά πρισματικά μέ βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 5 cm καί ὕψους 20 cm.

Νά εὑρεθῆ πρῶτον ἐάν φθάνη ἡ λαμαρίνα καί δεύτερον ἐάν θέλωμεν νά ἔχουν καί δύο καλύμματα πόση λαμαρίνα χρειάζεται ἀκόμη.

3) Νά εὑρεθῆ τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος τό ὁποῖον ἔχει ὕψος 20cm καί τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι τρίγωνον μέ πλευρᾶς 7,8,9, cm.

4) Νά εὑρεθῆ τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τριγωνικοῦ πρίσματος, ἄν αἱ παράπλευραι ἀκμαί του εἶναι 20 cm, ἡ δέ κάθετος τομή του εἶναι τρίγωνον μέ πλευράς 9,10,12 cm.

5) Ὀρθόν τριγωνικόν πρῖσμα ἔχει βάσιν τρίγωνον ἰσόπλευρον πλευρᾶς 3,5 m καί ὕψος 1,9 m. Νά εὑρεθῆ τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του.
'Απ. 19,95 m^2

6) Δοχεῖον πρισματικόν ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 0,45 m τό ὕψος δέ αὐτοῦ εἶναι 0,86 m. Πόσον εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του.
'Απ. 1,548 m^2

7) Ὀρθόν πρῖσμα ἔχει βάσιν κανονικόν ἑξάγωνον πλευρᾶς 1 m, τό δέ ὕψος αὐτοῦ εἶναι 4,75 m. Νά εὑρεθῆ τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του.
'Απ. 28,5 m^2

8) Νά εὑρεθῆ ἡ ἐπιφάνεια, ὁ ὄγκος καί τό βάρος εἰς κιλά καί ὀκάδας κοπτικοῦ ἐργαλείου σχήματος παραλληλεπιπέδου ἐκ χάλυβος μήκους 175 mm, πλάτους 25,6 mm καί ὕψους 32,5 mm ἄν ειδικόν βάρος χάλυβος 7,6.
'Απ. 2,2 dm^2, 0,1456 dm^3 1,107 Kg

9) Πλάκα ἐφαρμογῆς ἐκ χάλυβος ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μέ πλευράς 0,95 m, 0,75 m, 0,12 m. Ζητεῖται νά εὑρεθῆ ἡ ἐπιφάνεια, ὁ ὄγκος καί τό βάρος αὐτῆς εἰς κιλά καί ὀκάδας.
'Απ. 3,505 m^2, 0,085 m^3 649,8 Kg, 508,1436 ὀκάδας.

10) Κτίστης ἔκτισε τοῖχον τοῦ ὁποίου τό μῆκος εἶναι 9,5 μέτρα, τό πάχος 0,60 καί τό ὕψος 2,65 μέτρα. Πόσον θά λάβη ἐάν συνεφωνήθη κυβ. τεκτονικός ... ὅτι ὁ κυβ. τεκ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πῆχυς εἶναι τά $\frac{27}{64}$ τοῦ κυβ. μέτρου. 'Απ. 895 δραχ.

11) Πρόκειται νά καλυφθῇ μέ ὕφασμα τό ἐσωτερικόν κιβωτίου τοῦ ὁποίου τό μῆκος εἶναι 1,50 m, τό πλάτος 0,70 καί τό ὕψος 0,90. Πόσον ὕφασμα χρειάζεται ἐάν τό πλάτος του εἶναι 0,60 m.

'Απ. 10,1 m.

12) Δοχεῖον πρισματικόν ἔχει βάσιν τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρά εἶναι 0,23 τοῦ μέτρου καί ὕψος του 0,34. Πόσας ὀκάδας πετρελαίου χωρεῖ. Τό εἰδικόν βάρος τοῦ πετρελαίου εἶναι 0,891.

'Απ. 12 ὀκ. 207 δραμ.

13) Πρῖσμα μέ βάσιν τετράγωνον ἐκ χάλυβος ἔχει μῆκος 50 cm καί ἡ πλευρά τῆς βάσεώς του εἶναι 20 cm. Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν του, ὁ ὄγκος του καί τό βάρος του εἰς Kg, τόννους, γραμμάρια, ὀκάδας, ἄν τό εἰδικό βάρος τοῦ χάλυβος εἶναι 7,6.

'Απ. 4800 cm^2, 20000 cm^3, 152 Kg, 0,152 t, 118,76 ὀκάδας.

14) Ἔχει ἕνας μεταλλικήν πλάκα σχήματος παραλληλεπιπέδου μέ διαστάσεις 1,2 m, 0,8 m, 1,5 m, θέλει δέ νά διαιρέσῃ αὐτήν εἰς κύβους ἕκαστος τῶν ὁποίων νά ἔχῃ ἀκμήν 0,02 m· εἰς πόσους τοιούτους κύβους θά διαιρεθῇ ἡ πλάξ; 'Απ. 180000.

15) Ἐάν ὁ ὄγκος ἑνός κύβου εἶναι 3375 κυβ. μέτρα, νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ὅλης ἐπιφανείας του.

16) Νά εὑρεθῇ τό βάρος βενζίνης εἰς χιλιόγραμμα τό ὁποῖον δύναται νά περιλάβῃ ρεζερβουάρ βενζινομηχανῆς σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι: ὕψος 300 mm, πλάτος 160 mm καί μῆκος 320 mm. Τό τοίχωμα αὐτοῦ εἶναι ἐξ ἐλάσματος σιδηροῦ πάχους 2,5 mm.

17) Ἐάν τό μῆκος ἑνός τεμαχίου ἐκ σιδήρου σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 2,3 m, τό πλάτος του 0,7 m καί τό βάθος του 5,35 m, πόσον εἶναι τό βάρος του εἰς Kg καί ὀκάδας καί τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας. 'Απ. 67702,11 Kgr καί 52875,34711 ὀ[illegible]

18) Ὀρθόν πρῖσμα ἔχει ὕψος 8,5 m καί ἡ βάσις του εἶναι τρίγωνο μέ πλευράς 4,46, 4,50, 6,44 μέτρων. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδόν αὐτοῦ. 'Απ. 85,170 m^3, 150,94 [illegible]

19) Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος, ἄν τό βάθος του εἶναι 5,14 m, αἱ δέ πλευραί τῆς βάσεώς του 6,5, 6,9 καί 5 μέτρα.

'Απ. 79,5672 m^3

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

20) Ἡ βάσις ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ὁ ρόμβος ἡ πλευρά τοῦ ὁποίου εἶναι 0,10m, ἡ δέ μικροτέρα διαγώνιός του 0,12m. τό βάθος τοῦ πρίσματος εἶναι 0,15 m. Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ὅλης ἐπιφανείας του καί ὁ ὄγκος του. 'Απ. 0,0792 m^2,0,00144 m^3.

21) Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδόν κανονικοῦ πρίσματος ἔχοντος ὕψος 10,45 m , ἐάν ἑκάστη πλευρά τῆς τριγωνικῆς βάσεώς του εἶ- 8,25 m. 'Απ.(307,606 m^3, 317,509m^2).

22) Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος, ἐάν τό ὕψος του εἶναι 10 cm καί ἑκάστη πλευρά τοῦ ἑξαγώνου εἶναι 10 cm. 'Απ.25,95 cm^3.

23) Νά εὑρεθῇ τό μῆκος τῆς ἐσωτερικῆς ἀκμῆς κυβικῆς δεξαμενῆς, χωρούσης 2 τόννους ὕδατος.

24) Πλαγίου πρίσματος τό ἐμβαδόν τῆς καθέτου τομῆς του εἶναι 2,50 m^2 , τό δέ ὕψος του εἶναι 3 m . Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του. 'Απ .7,5 m^3.

25) Νά εὑρεθῇ τό βάρος καί τό ἐμβαδόν, ράβδου ἐκ χάλυβος διατομῆς κανονικοῦ ἑξαγώνου πλευρᾶς 2,35 m καί ὕψους 11,67 m, ἄν εἰδικόν βάρος αὐτῆς εἶναι 7,6. 'Απ.(1271,21 τόν. 193,20 m^2).

26) Πρόκειται νά κατασκευασθῇ εἰς τήν πλάνην ἡ βάσις μιᾶς μηχανῆς σχήματος ὀρθοῦ κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος τοῦ ὁποίου τό ὑλικόν εἶναι σφυρήλατος σίδηρος. Τό εἰδικόν του βάρος εἶναι 7,35, ἡ δέ πλευρά τοῦ ἑξαγώνου εἶναι 0,35 m καί τό ὕψος 65 cm . Νά εὑρεθῇ τό βάρος του εἰς κιλάς καί ὀκάδα. 'Απ.1621,9827 Kgr,1266,769 ὀκάδ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

1. Ὁρισμοί περί κυλίνδρου

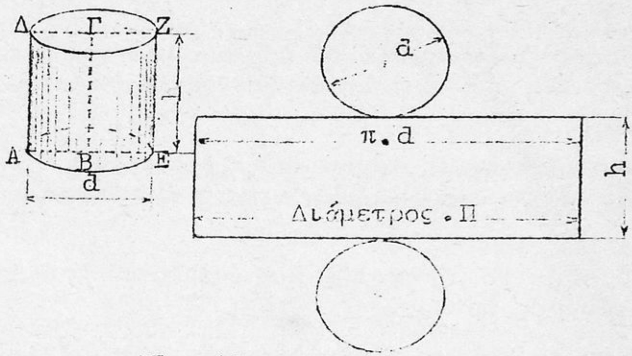
Κύλινδρος ὀρθός κυκλικός καλεῖται πᾶν στερεόν τό ὁποῖον παράγεται ὑπό ὀρθογωνίου στρεφομένου περί μίαν ἀκίνητον αὐτοῦ πλευράν μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τήν ἀρχικήν του θέσιν· λ.χ. τό στερεόν ΑΕΖΔ (σχ. 42), τό ὁποῖον παράγεται ἀπό τό ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ στρεφόμενον περί τήν ΒΓ καλεῖται κύλινδρος.

Ὕψος κυλίνδρου καλεῖται ἡ ἀκίνητος πλευρά ΒΓ τοῦ ὀρθογωνί- ΑΒΓΔ ἐκ τῆς στροφῆς τοῦ ὁποίου παράγεται ὁ κύλινδρος.

Βάσεις κυλίνδρου λέγονται οἱ δύο κύκλοι τούς ὁποίους γράφουν αἱ πλευραί ΑΒ καί ΓΔ τοῦ ὀρθογωνίου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

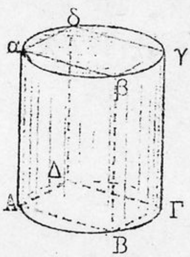
Κυρτή ἐπιφάνεια κυλίνδρου λέγεται ἡ ἐπιφάνεια τήν ὁποίαν



Σχ. 42

γράφει ἡ πλευρά ΑΔ τοῦ ὀρθογωνίου κατά τήν στροφήν αὐτοῦ περί τήν ΒΓ.

Πᾶσα τομή κυλίνδρου κάθετος ὡς πρός τόν ἄξονα αὐτοῦ εἶναι κύκλος ἴσος πρός τάς βάσεις.



Σχ. 43

2. Ἐγγεγραμμένον πρῖσμα εἰς κύλινδρον λέγεται τό πρῖσμα τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τάς βάσεις τοῦ κυλίνδρου· τότε αἱ παράπλευραι ἀκμαί τοῦ πρίσματος εἶναι γενέτειραι τοῦ κυλίνδρου π.χ. (σχ. 43)

3. Ὁ ὄγκος κυλίνδρου ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος αὐτοῦ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Διότι ἐάν φαντασθῶμεν πρῖσμα ἐγγεγραμμένον ἤ περιγεγραμμένον εἰς τόν κύλινδρον καί ἔχον βάσεις κανονικά πολύγωνα, ὑποθέσωμεν δέ ὅτι τό πλῆθος τῶν ἴσων πλευρῶν τῶν βάσεων αὐτοῦ αὐξάνεται ἀπεριορίστως, τά ἐμβαδά τῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου Ἐ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πειδή δέ τό ὕψος τοῦ πρίσματος ἰσοῦται μέ τό ὕψος τοῦ κυλίνδρου καί ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος ἰσοῦται μέ τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος αὐτοῦ, ἔπεται ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου ὅστις εἶναι τό ὅριον τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος, ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος αὐτοῦ.

Παρατήρησις: Ἄν V παριστάνη τόν ὄγκον κυλίνδρου ἔχοντος ἀκτῖνα βάσεως αὐτοῦ r καί ὕψος h, θά ἔχωμεν $\boxed{V = \pi . r^2 . h}$ ἤ $\boxed{V = \frac{\pi . d^2 . h}{4}}$ ἄν d διάμετρος.

4. Τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τοῦ μήκους τῆς περιφερείας ἐπί τό ὕψος αὐτοῦ.

Διότι, ἄν φαντασθῶμεν ὅτι τόν κύλινδρον τόν ἔχομεν περιτυλίξει μέ χαρτί καί σχίσωμεν κατακορύφως τό χαρτί καί τό ἀναπτύξωμεν, θά παρουσιασθῆ ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, ὡς τό σχῆμα 42, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις θά ἔχη μῆκος π.d καί τό ὕψος θά εἶναι τό ὕψος τοῦ κυλίνδρου. Ἐπομένως τό ἐμβαδόν τοῦ παραλληλογράμμου καί τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κυλίνδρου εἶναι τά αὐτά, ἤτοι $\boxed{S_\pi = \pi d . h}$ διά νά εὕρωμεν δέ τό ὁλικόν ἐμβαδόν, προσθέτομεν εἰς τό S_π τά ἐμβαδά τῶν δύο κύκλων ἤτοι $\boxed{S_o = \pi d . h + \frac{2\pi d^2}{4}}$ ὡς τό σχῆμα 42 τό ὁποῖον λέγεται καί ἀνάπτυγμα τοῦ κυλίνδρου.

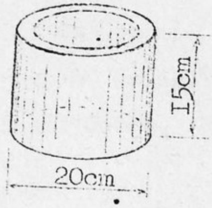
5. Ἐφαρμογαί

1). Ἕνας τεχνίτης ἀνέλαβε νά κατασκευάση 2500 κουτιά λευκοσιδηρά κυλινδρικά· ἡ διάμετρος τῆς βάσεώς των εἶναι 20 cm. τό δέ ὕψος των 15 cm. Πόσην ἐπιφάνειαν λευκοσιδήρου θά χρειαστῆ καί πόση ἡ χωρητικότης ὅλων τῶν κυτίων (σχ.44).

Λύσις: Ἑνός κυτίου ἡ ὁλική ἐπιφάνεια εἶναι

$$So = \Pi . d . h + \frac{2 . \pi . d^2}{4}, \quad So = 3,14 \times 20 \times 15 + \frac{2 \times 3,14 \times 400}{4}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Σχ. 44

$So = 3,14 \times (300+200) = 3,14 \times 500 =$
$= 1570\ cm^3$.

Καί τά 2500 κυτία = $1570 \times 2500 = 3925000$ cm^2 ἤ $392,5m^2$. Ἑνός κουτιοῦ ὁ ὄγκος εἶναι

$V = \frac{\Pi . d^2 h}{4}$, $V = \frac{3,14 \times 400 \times 15}{4} =$

$3,14 \times 15 = 4710\ cm^3$ καί τῶν 2500 εἶναι

$4710 \times 2500 = 11775000\ cm^3$ ἤ $11,775\ m^3$
ἤ 11775 κιλά.

2) Ἕνα ἐργοστάσιον ἀνέλαβε τήν κατασκευήν 7560 κυλινδρικῶν τεμαχίων ἐξ ὀρειχάλκου διαμέτρου 12 mm καί ὕψους 39 mm, μέ ὑποχρέωσιν νά ἐπικαλύψη ταῦτα δι᾽ἀργύρου (νά ἐπαργυρώση) καί ἡ ἐπαργύρωσις νά εἶναι 0,001118 γραμμάρια ἀνά τετραγωνικόν χιλιοστόν. Νά εὑρεθῆ τό βάρος ἑκάστου τεμαχίου καί πόσος ἄργυρος χρειάζεται ἵνα ἐπαργυρωθοῦν ὅλα τά τεμάχια (σχ. 45).

Σχ. 45

Λύσις: Εὑρίσκομεν τό ὁλικόν ἐμβαδόν ἑνός τεμαχίου ἤτοι:

$$So = S_\pi + 2S_\beta$$

Τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας $S_\pi = \pi\, d . h$ ἤ $S_\pi = 3,14 \times 12 \times 39 = 1469,52\ m/m^2$

$S_\beta = \frac{\pi d^2}{4}$ ἤ $S_\beta = \frac{3,14 \times 144}{4} = 113,04\ m/m^2$

Ὥστε:

$$S_o = S_\pi + 2S_\beta = 1469,52 + 226,08 = 1695,60\ mm^2$$

Εὑρίσκομεν τό ἐμβαδόν τῶν 7560 τεμαχίου, ἤτοι $7560 \times 1695,60 =$
$= 12818736\ mm^2$.

Αὐτό θά τό πολ/σωμεν ἐπί 0,001118 διά νά εὕρωμεν πόσα γραμμάρια ἄργυρον χρειαζόμεθα.

Ἤτοι: $12818736 \times 0,001118 = 14331,3$ gr.

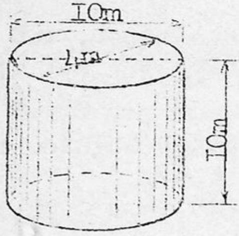
Ὥστε θέλομεν 14331,3 gr

Διά νά εὕρωμεν τό βάρος πολλαπλασιάζομεν τόν ὄγκον ἐπί τό εἰδικόν βάρος, ἤτοι ἔχομεν $V = S_\beta . h$ ἤ $V = 113,04 \times 39 =$
$= 4408,56\ mm^3$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἤ $V = 4,408$ cm³ καί $\beta = V \cdot \varepsilon$ ἤ $\beta = 4,408 \times 7,29 \cong 32,134$ gr.

3) Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδόν κυλίνδρου μέ βάσεις ἐλλείψεις τῆς ὁποίας ὁ μεγάλος ἄξων εἶναι 10, ὁ μικρός 4 m καί τό ὕψος 10 m.



Σχ. 46

Λύσις. Διά νά εὕρωμεν τόν ὄγκον πολλαπλασιάζομεν τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος. Ἐπειδή τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως δίδεται ἀπό τόν τύπον π.a.b– ἔνθα a ὁ μεγάλος ἄξων καί b ὁ μικρός ἄξων – ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι:

$V = \frac{\pi \cdot ab \cdot h}{4}$ ἤτοι, $V = 3,14 \times 5 \times 2 \times 10 = 314$ m³, τό δέ ἐμβαδόν ἰσοῦται μέ τό μῆκος τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος ἤτοι:

$$S_\pi = \pi \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot h$$

$S\pi = 3,14 \times 7 \times 10 = 219,8$ m². $S_o = S_\pi + 2S_\beta = 219,8 + 62,8 = 282,6$ m²

6. Ἀσκήσεις.

1) Θέλομεν νά περιτυλίξωμεν δοχεῖον κυλινδρικόν τοῦ ὁποίου τό ὕψος εἶναι 0,40 m καί ἡ περιφέρεια τῆς βάσεώς του 1,50 m μέ ὕφασμα τοῦ ὁποίου τό πλάτος εἶναι 0,50 m. Πόσον εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του, καί πόσον ὕφασμα χρειάζεται;

'Απ. 0,6 m², 1,20 m

2) Θέλομεν νά κατασκευάσωμεν σωλῆνα ἀπό λευκοσίδηρον τοῦ ὁποίου τό μῆκος νά εἶναι 6 m καί ἡ διάμετρος του 0,20 m. Πόσος λευκοσίδηρος χρειάζεται;

'Απ. 37,68 m²

3) Τό ὕψος στήλης κυλινδρικῆς εἶναι 5 m καί ἡ διάμετρος τῆς βάσεώς της 0,80 m. Πόσον εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας της; Πόσον θά κοστίσῃ ὁ χρωματισμός της πρός 25 τό τ. μέτρον καί πόσον εἶναι τό βάρος της, ἐάν τό ειδι. βάρος εἶναι 7,31.

'Απ. 12,56 m², 314,15 δρχ. 3672,54 Kg.

4) Τό ὕψος κυλίνδρου εἶναι 0,12 m καί ἡ ἀκτίς τῆς βάσεώς του εἶναι $\frac{3}{8}$ τοῦ ὕψους. Πόσον τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καί ὁ ὄγκος του;

'Απ. 0,034 m² 0,0076302 m³.

5) Πόσος εἶναι τό μῆκος καί τό ἐμβαδόν κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ... ἡ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διάμετρος τῆς βάσεώς του εἶναι 4,2 m καί τό ὕψος του 5,6 m.

6) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια τῆς βάσεώς του εἶναι 2,522 m καί τό ὕψος του 0,50 m ;

'Απ.(251,32 dm^3)

7) Πόση εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του εἶναι 0,6283 m^2 καί τό ὕψος του 0,5 m. 'Απ. (1,256 m).

8) Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδόν κυλινδρικοῦ δοχείου τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶναι 3,2 m καί τό ὕψος του 5,6 m

'Απ.(45,05 m^3 72,345 m^2).

9) Κυλινδρική δεξαμενή ἔχει διάμετρον 2,5 m καί ὕψος 3,20. Ζητεῖται η χωρητικότης αὐτῆς εἰς τόννους καί ὀκάδας καί τό ἐμβαδόν αὐτῆς. 'Απ. 15.70 τόν. 12261,7 ὀκάδ. 34,95 m^2.

10) Κατεσκευάσθη εἰς τόρνον ἕνας κύλινδρος μηχανῆς διαμέτρου 12,5 cm καί ὕψους 27,8 cm . Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος του καί ἡ κυρτή ἐπιφάνειά του 'Απ.(3409,884 cm^3, 1091,5 cm^2).

11) Τό μῆκος μιᾶς πετρελαιοφόρου σχήματος κυλινδρικοῦ εἶναι 7,5 m, ἡ διάμετρος αὐτῆς 2,5 m . Νά εὑρεθῆ τό ποσόν τοῦ πετρελαίου πού χωρεῖ εἰς τόννους καί Kgr καθώς καί ἡ ὁλική ἐπιφάνειά του.

'Απ.(29,395 t., 29395 Kg., 68,687 m^2).

12) Ἕνας ὑδροφόρος σχήματος κυλινδρικοῦ τροφοδοτεῖ τούς ἀτμολέβητας τῶν σιδηροδρομικῶν συρτῶν καί ἔχει μῆκος 6,5 m καί διάμετρον 3 m. Νά εὑρεθῆ τό ποσόν τοῦ ὕδατος τό ὁποῖον χωρεῖ καί ἡ ὁλική ἐπιφάνειά του. 'Απ. (45,92 τόν. 75.36 m^2).

13) Ἑνός κεντρικοῦ ἄξονος αὐτοκινήτου ἡ διάμετρος εἶναι 8 mm τό δέ μῆκος του 175 mm . Νά εὑρεθῆ τό βάρος του καί ἡ ἐπιφάνειά του, ἄν είδ. βάρος εἶναι 8,65. 'Απ.(76,0508 gr; 43,96 cm^2).

14) Ὁ πύρος μιᾶς σούστας ἔχει ἀκτῖνα 30 mm καί μῆκος 150 mm Νά εὑρεθῆ τό βάρος του 'Απ. (3306,42 gr).

15) Εἰς ἕνα χυτήριον βγάζουν ἕνα χυτό ἐκ χυστοσιδήρου κυκλικῆς διατομῆς διά βολάντ μιᾶς μηχανῆς τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶναι 2,2 m καί τό πάχος 0,30 m. Εἰς τό κέντρον ὑπάρχει μία ὀπή ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον 0,15 m. Πόσον εἶναι τό βάρος αὐτοῦ.

'Απ(8021,64 Kg.περ.).

16) Μιά βαρειά (σφυρί) ἐκ χάλυβος ἔχει μῆκος 15 cm καί βάσεις ἑξάγωνα, πλευρᾶς 5 cm. Εἰς τό μέσον φέρει ὀπήν διαμέτρου 4 cm διά τήν τοποθέτησιν τοῦ ξύλου (στυλιάρι). Ζητεῖται τό βάρος της εἰς κι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

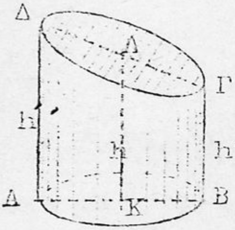
λά καί όκάδας 'Απ. 6,57 Kg 5,13 όκάδ.

17) Θέλομεν νά κατασκευάσωμεν δοχεΐον κυλινδρικόν, τό όποΐον νά χωρῆ 50 όκάδας πετρελαίου. Ἡ διάμετρος τοῦ δοχείου εἶναι 40 cm τί ὕψος πρέπει νά ἔχῃ; είδ. βάρος 0,82. 'Απ. 60 cm

18) Θέλομεν νά κατασκευάσωμεν ἕνα στύλο ἀπό ἀλουμίνιον, ὁ ὁποῖος νά ζυγίζῃ 4057 ὀκάδες. Τό ειδικόν βάρος τοῦ ἀλουμινίου εἶναι 2,54. Τό μῆκος τοῦ στύλου πρέπει νά εἶναι 7,5 τῆς διαμέτρου του. Νά εὑρεθῇ ἡ διάμετρος τοῦ στύλου. 'Απ. 7,02 dm.

7. Κολοβός κύλινδρος

Κολοβός κύλινδρος λέγεται τό στερεόν τό ὁποῖον ἀπομένει, ἐάν ὀρθόν κύλινδρον κόψωμεν μέ ἕνα ἐπίπεδον μή παράλληλον πρός τήν βάσιν του (σχ.47).



Σχ. 47

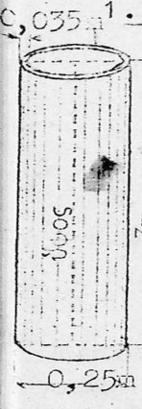
'Επειδή ὁ κολοβός κύλινδρος εἶναι ἰσοδύναμος μέ ὀρθόν κύλινδρον τοῦ ὁποίου τό ὕψος εἶναι τό ΚΛ (σχ.47) καί ἐπειδή

$$ΚΛ = \frac{ΑΔ + ΒΓ}{2} = \frac{h' + h''}{2}$$

, ἕπεται ὅτι τό ἐμβαδόν $S_\pi = 2\pi \cdot r \cdot \frac{h'+h''}{2}$

ἤτοι $S_\pi = \pi . r\,(h' + h'')$ καί ὁ ὄγκος αὐτοῦ $V = \pi\, r^2 . \left(\frac{h'+h''}{2}\right)$

8. Κοῖλος κύλινδρος



1. Κοῖλος κύλινδρος ἐκ χυτισιδήρου ἔχει μῆκος 3 m, διάμετρον δέ ἐξωτερικήν 0,25 (σχ.48) Ζητεῖται τό βάρος αὐτοῦ, ἐάν τό μέν πάχος του εἶναι 0,035 τό δέ είδ. βάρος τοῦ σιδήρου 7,31 καί τό ἐμβαδόν αὐτοῦ.

Λύσις: Θά εὕρωμεν τόν ὄγκον αὐτοῦ τοῦ κυλίνδρου ὡς νά μήν ἦτο κοῖλος καί ἐξ αὐτοῦ θά ἀφαιρέσωμεν τόν ὄγκον τοῦ κοιλώματος. Ἦτοι 0,125 - 0,035 = 0,09 (σχ,48), $v = \pi . r^2 . h = 3,14 \times 0,125^2 \times 3 = 0,147$,

$v = \pi . r^2 . h = 3,14 \times 0,09^2 \times 3 = 0,076$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

0,147 - 0,076 = 0,071 ὥστε ὁ ὄγκος εἶναι 0,071 m^3. Πολλαπλασιάζοντες τόν ὄγκον ἐπί τό εἰδ. βάρος ἔχομεν τό βάρος του στερεοῦ εἰς τόννους. Ἤτοι 0,071 X 7,31 = 0,51901 τόννους = 519,01 κιλά.

Τό ἐμβαδόν τοῦ στερεοῦ ἀποτελεῖται ἀπό τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας καί τῆς ἐσωτερικῆς τοιαύτης καί τῶν δύο βάσεων.

Τῶν παραπλεύρων εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου $S = 2\pi . r . h$

Ἤτοι ἐξωτερ. $S = 2 \times 3,14 \times 0,125 \times 3 = 2,355\ m^2$

ἐσωτερ. $S = 2 \times 3,14 \times 0,09 \times 3 = 1,69\ m^2$

Τῶν βάσεων εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου

$$S = \pi . R^2 - \pi\, r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$

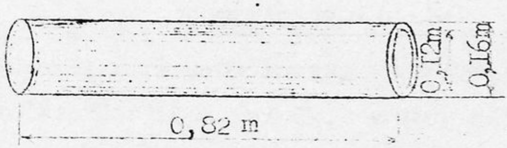
Ἤτοι $S_\beta = 3,14 \times (0,125^2 - 0,9^2) =$

$= 3,14 \times (0,015625 - 0,0081) = 3,14 \times 0,07525 =$
$= 0,0236\ m^2$.

Ἑπομένως τό ὁλικόν ἐμβαδόν εἶναι

$$So = 2,355 + 1,69 + 0,0236 + 0,0236 = 4,0922\ m^2$$

2) Κενός κύλινδρος ἐξ ἀλουμινίου ἔχει ἐξωτερικήν διάμετρον 0,16 m, ἐσωτερικήν 0,12 m καί ὕψος 0,82 m. Ζητεῖται νά εὑρεθῆ τό βάρος του. Εἰδικόν βάρος ἀλουμινίου 2,56 (σχ.49)



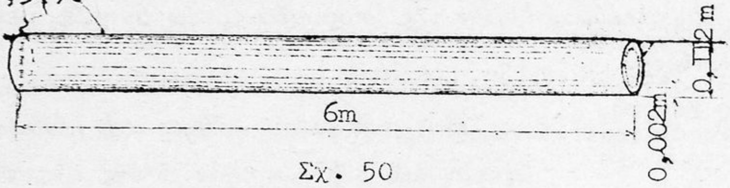
Σχ. 49

Λύσις: Τό βάρος $= 0,785\ (0,16^2 - 0,012^2) \times 0,28 \times 2,56 =$
$= 0,018456167$ τόν.

3) Νά εὑρεθῆ τό βάρος μολυβδίνου σωλῆνος (σχ.50) ἐξωτερικῆς διαμέτρου 0,112 m. πάχους 0,002 m καί μήκους 6 m (εἰδικόν βάρος

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μολύβδου 11,37).



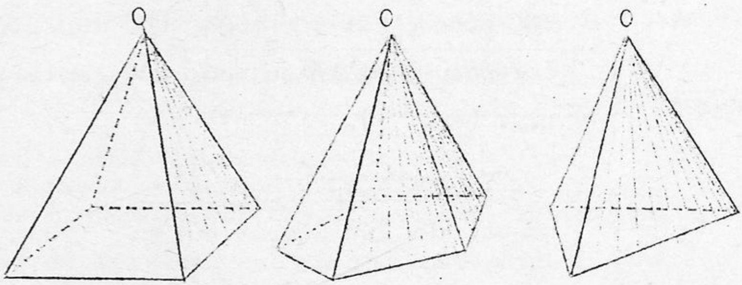
Σχ. 50

Λύσις: Ἡ μέση διάμετρος = 0,112 - 0,002 = 0,110 m.
Τό ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου θά εἶναι:
3,14 X 0,110 X 6 = 0,19724 m^2 καί τό βάρος αὐτοῦ.
β = 0,19724 X 0,002 X 11,37 = 0,0044852376 τόννοι
ἤ β 4Kgr καί 486 gr.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

1. Ὁρισμοί περί πυραμίδων.

Πυραμίς λέγεται τό πολύεδρον τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι τρίγωνα τά ὁποῖα ἔχουν κοινήν κορυφήν ἐκτός μιᾶς, ἥτις δύναται νά εἶναι τυχόν πολύγωνον.



ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΠΕΝΤΑΓΩΝΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ

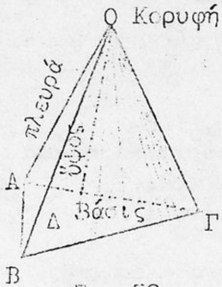
Σχ. 51.

Ἡ ἕδρα ἥτις δύναται νά εἶναι τυχόν πολύγωνον λέγεται βάσις τῆς πυραμίδος καί ἄν αὕτη εἶναι τρίγωνον, ἡ πυραμίς λέγεται τριγωνική ἤ τετράεδρον, ἄν εἶναι τετράπλευρον, τετραγωνική, ἄν πεντάπλευρον, πενταγωνική κ.ο.κ. (σχ.51).

Παράπλευρος ἐπιφάνεια πυραμίδος ὀνομάζεται τό πλῆθος τῶν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

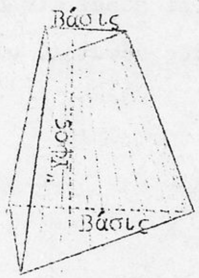
τριγωνικῶν ἑδρῶν αὐτῆς αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινήν κορυφήν· τήν κοινήν κορυφήν τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τῆς πυραμίδος τήν ὀνομάζομεν κορυφήν τῆς πυραμίδος.



Σχ. 52

Ὕψος πυραμίδος λέγεται ἡ κάθετος ἥτις ἄγεται ἀπό τήν κορυφήν αὐτῆς εἰς τήν βάσιν· π.χ. τό ΟΔ (σχ.52).

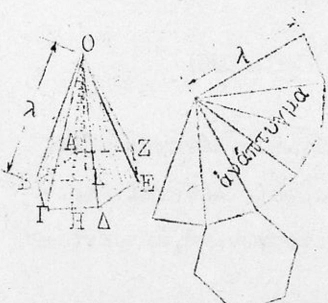
Πλευραί πυραμίδος καλοῦνται αἱ ἀκμαί αὐτῆς αἱ ὁποῖαι ἑνοῦνται εἰς τήν κορυφήν αὐτῆς.



Σχ. 53

2. Κόλουρος πυραμίς λέγεται τό μέρος τῆς πυραμίδος τό ὁποῖον περιέχεται μεταξύ τῆς βάσεως καί τῆς τομῆς τῆς πυραμίδος ὑπό ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τήν βάσιν αὐτῆς· π.χ. (σχ. 53).

Ὕψος κολούρου πυραμίδος λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων αὐτῆς.



Σχ. 54

3. Κανονική λέγεται ἡ πυραμίς, ἐάν ἡ βάσις αὐτῆς (σχ.54) εἶναι κανονικόν πολύγωνον καί ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς ἐπί τήν βάσιν πίπτει εἰς τό κέντρον αὐτῆς.

Ἡ κάθετος αὕτη λέγεται καί ἄξων τῆς κανονικῆς πυραμίδος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Αἱ παράπλευροι ἀκμαί κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι πλάγιαι ὡς πρός τό ἐπίπεδον τῆς βάσεως αὐτῆς καί τέμνουν αὐτήν εἰς σημεῖα ἀπέχοντα ἰσάκις ἀπό τόν πόδα τῆς καθέτου ἐπ' αὐτήν.

Ἑπομένως αἱ παράπλευροι ἕδραι κανονικῆς πυραμίδος εἶναι τρίγωνα ἰσοσκελῆ, τά ὁποῖα ἔχουν ἴσα ὕψη.

4. Τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος ἰσοῦται μέ τό ἥμισυ τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος μιᾶς ἕδρας.

Ἔστω S_π τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος ΟΑΒΓΔΕΖ (σχ. 54) ΟΗ τό ὕψος μιᾶς τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν.

Τά τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ, ΟΔΕ καί ΟΕΑ εἶναι ἰσοσκελῆ ἐπειδή εἶναι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΕ ὡς παράπλευροι ἀκμαί κανονικῆς πυραμίδος.

Τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου ΟΓΔ ἰσοῦται μέ τό $\frac{ΟΗ}{2}$ ἐπί τήν βάσιν αὐτοῦ ΓΔ· ἐπομένως τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων τούτων εἶναι τό ἐμβαδόν S_π τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πυραμίδος.

Ἤτοι ἔχομεν $\boxed{S_\pi = \frac{\text{περίμετρ. βάσεως} \cdot h_\varepsilon}{2}}$

καί ὁλικόν ἐμβαδόν $\boxed{S_o = S_\pi + S_\beta}$

Ἐάν ἡ πυραμίς δέν εἶναι κανονική, εὑρίσκομεν χωριστά τό ἐμβαδόν ἑκάστου τριγώνου καί προσθέτομεν αὐτά.

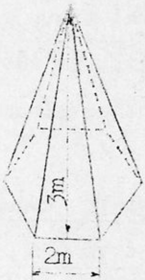
Κανονική λέγεται μία κόλουρος πυραμίς, ἄν προκύπτῃ ἀπό κανονικήν πυραμίδα, αἱ δέ παράπλευροι ἕδραι αὐτῆς εἶναι τραπέζια ἰσοσκελῆ.

Τό σύνολον αὐτῶν ἀποτελεῖ τήν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τῆς κολούρου πυραμίδος.

5. Ἐφαρμογή.

Ἡ βάσις κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἑξάγωνον τοῦ ὁποίου ἡ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Σχ. 55

πλευρά εἶναι 2 m, τό δέ ὕψος τῶν πέριξ τῆς βάσεως τριγώνων εἶναι 3 m (σχ.55). Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καί τό ὁλικόν ἐμβαδόν.

Λύσις. Ξεύρομεν ὅτι $S_\pi = \frac{\text{περίμ.βάσεως } h_\varepsilon}{2}$

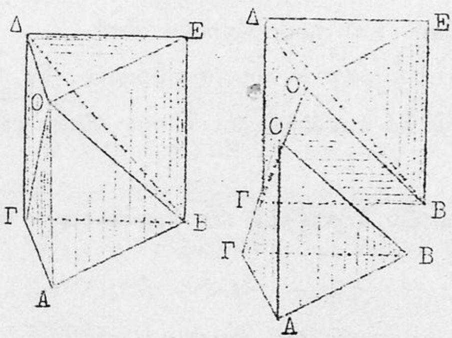
ἤτοι ὕψος ἕδρας = 3 m, περίμ. 6 X 2 = 12 m

ὅτε $S_\pi = \frac{12 \times 3}{2} = 18\ m^2$ διά τόν ὁλικόν θέλομεν καί τό S_β.

Ἐπειδή τό κανονικόν ἑξάγωνον χωρίζεται εἰς 6 ἰσόπλευρα τρίγωνα τό ἐμβαδόν του θά εἶναι ἑξαπλάσιον ἑνός ἰσοπλεύρου, ἀλλά τό ἐμβαδόν ἰσοπλεύρου τριγώνου δίδεται ὑπό τόν τύπον $S_\beta = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ ἔνθα α πλευρά, $S_\beta = \frac{6\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ καί ἐπειδή ἡ πλευρά εἶναι 2 μέτρα, $S_\beta = \frac{6 \times 4 \times \sqrt{3}}{4} = 6 \times \sqrt{3}$ ὥστε τό S_o τῆς πυραμίδος $S_o = S_\pi + S_\beta$ ἤ $S = 18 + 6\sqrt{3}\,m^2 = 18 + 10,38 = 28,38\ m^2$.

6. Ὁ ὄγκος τριγωνικῆς πυραμίδος ἰσοῦται μέ τό τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος αὐτῆς.

Ἔστω V ὁ ὄγκος, S_β τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως καί h τό ὕψος τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ΟΑΒΓ (σχ.56)· θά δείξωμεν ὅτι $V = 1/3\, S_\beta \cdot h$



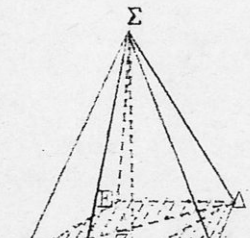
Σχ. 56

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ: Μέ βάσεις ἴσας μέ τήν ΑΒΓ κατασκευάζομεν τό πρῖσμα ΑΒΓΕΟΔ, ἔχον τάς παραπλεύρους ἀκμάς ἴσας καί παραλλήλους πρός τήν ΟΑ. Τό πρίσμα ἀποτελεῖται ἐκ τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ΟΑΒΓ καί ἐκ τῆς τῆς τετραγωνικῆς ΟΒΓΔΕ. Διά τῶν εὐθειῶν ΟΒ καί ΟΔ διέρχεται ἕν ἐπίπεδον, τό ΒΟΔ. Τό ἐπίπεδον τοῦτο διαιρεῖ τήν πυραμίδα ΟΒΓΔΕ εἰς τάς τριγωνικάς ΟΔΓΒ καί ΟΔΕΒ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τό αὐτό ὕψος καί βάσεις ἴσας, τά τρίγωνα ΓΒΔ καί ΔΕΒ εἰς τά ὁποῖα διαιρεῖται τό παραλληλόγραμμον ΒΓΔΕ ὑπό τῆς διαγωνίου αὐτοῦ ΔΒ. Ἑπομένως αἱ πυραμίδες ΟΔΓΒ καί ΟΔΕΒ εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἡ πυραμίς ΟΔΕΒ δύναται νά θεωρηθῆ ὅτι ἔχει βάσιν τήν ΕΟΔ καί κορυφήν τό Β καί ἑπομένως εἶναι ἰσοδύναμος τῆ ΟΑΒ (ὡς ἔχουσαι ἴσας βάσεις τάς ΑΒΓ καί ΟΕΔ) καί ἴσα ὕψη.

Ὅθεν καί αἱ τρεῖς πυραμίδες εἰς τάς ὁποίας διαιρεῖται τό πρῖσμα ΑΒΓΕΟΔ εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἄρα ἡ πυραμίς ΟΑΒΓ εἶναι ἰσοδύναμος μέ τόν τρίτον τοῦ πρίσματος τούτου. Ἀλλ' ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος ἰσοῦται ὡς γνωστόν μέ $S_\beta \cdot h$ (διότι ἔχει βάσιν ΑΒΓ ἔχουσαν ἐμβαδόν S_β καί ὕψος h) ἑπομένως ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος εἶναι $\boxed{V = \frac{S_\beta h}{3}}$

<u>7. Ὁ ὄγκος πυραμίδος ἰσοῦται μέ τόν τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος αὐτῆς.</u>



Σχ. 57

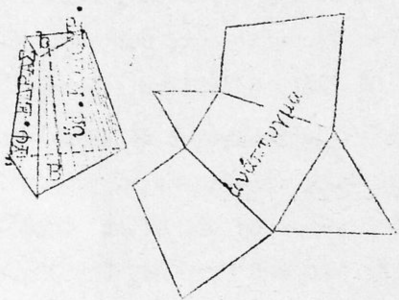
Ἔστω V ὁ ὄγκος, S_β τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως καί h τό ὕψος (ΣΖ) τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ (σχ. 57)· θά δείξωμεν ὅτι εἶναι $V = \frac{S_\beta . h}{3}$

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ: Διά μιᾶς τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν, ἔστω τῆς ΣΔ, καί τῶν διαγωνίων ΔΑ καί ΔΒ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος (σχ.57) φέρομεν ἐπίπεδα. Τά ἐπίπεδα αὐτά διαιροῦν τήν πυραμίδα εἰς τριγωνικάς τῶν ὁποίων βάσεις εἶναι ἀντιστοίχως τρίγωνα ΑΓΒ, ΑΒΔ ... τά ὁποῖα ἀποτελοῦν τήν βά-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῆς πυραμίδος καί τῶν ὁποίων πυραμίδων τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων ἰσοῦται μέ τό ἕν τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν βάσεων αὐτῶν ἐπί τό κοινόν ὕψος τούτων, ἤτοι ἔχομεν $V = \frac{S_B . h}{3}$

8. Ὁ ὄγκος κολούρου πυραμίδος ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὕψος τό τῆς κολούρου καί βάσεις ἡ μέν μία τήν κάτω βάσιν, ἡ ἄλλη τήν ἄνω, ἡ δέ τρίτη τήν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο βάσεων.



Σχ. 58

Ἐάν B παραστήσωμεν τό ἐμβαδόν τῆς κάτω βάσεως (σχ.58), b τό ἐμβαδόν τῆς ἄνω καί διά h τό ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος ὁ ὄγκος μᾶς δίδεται ἀπό τόν τύπον: $V = \frac{B.h}{3} + \frac{b.h}{3} + \frac{\sqrt{B.b}.h}{3}$ ἤ

$$\boxed{V = \frac{h}{3}\left(B + b + \sqrt{Bb}\right)}$$

9. Τό ἐμβαδόν τῆς κολούρου πυραμίδος ἰσοῦται μέ τάς ἡμιπεριμέτρους τῶν βάσεων ἐπί τό ὕψος μιᾶς τῶν ἑδρῶν της.

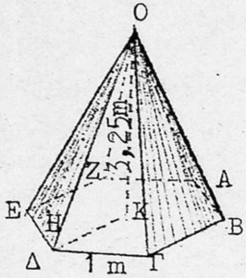
Ἤτοι $\boxed{S\pi = \frac{\text{περίμ. τῆς κάτω} + \text{περίμ. ἄνω}}{2} \cdot h_\varepsilon}$

10. Ἐ φ α ρ μ ο γ α ί

1. Κανονικῆς σιδηρᾶς πυραμίδος ἐχούσης βάσιν ἑξάγωνον μέ πλευράν 1 μέτρον καί ὕψος 3,25 νά εὑρεθῆ ἡ ὁλική ἐπιφάνεια ὁ ὄγκος καί τό βάρος ἄν εἶναι βάρος 7,8 (σχ. 59).

Λύσις: Τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως εὑρίσκεται διά τοῦ τύπου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Σχ. 59.

$$S_\beta = \frac{6\alpha^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{ἤτοι } S_\beta = \frac{6 \text{ X } 1^2 \text{ X } 1,73}{4} = 2,59 m^2.$$

Πολλαπλασιάζοντες τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος τῆς πυραμίδος καί διαιροῦντες διά 3 ἔχομεν τόν ὄγκον αὐτῆς, ἤτοι:

$$V = \frac{2,59 \text{ X } 3,25}{3} = \frac{8,41}{3} = 2,8 \ m^3.$$

$$\beta = 2,8 \text{ X } 7,8 = 21,84 \text{ τόννοι}$$

Τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας εὑρίσκεται διά τοῦ τύπου.

$$S\pi = \frac{\text{περιμ. βάσεως} \cdot h_\varepsilon}{2}$$

Πρέπει ὅμως νά εὕρωμεν πρῶτον τό ὕψος μιᾶς ἕδρας καί εὑρίσκεται ἀκολούθως. Ἐάν λάβωμεν μίαν ἀπό τάς ἀκμάς τῆς πυραμίδο., ἔστω τήν ΟΔ, παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι αὕτη ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΚΔ ἔνθα Κ εἶναι τό κέντρον τοῦ πολυγώνου, δυνάμεθα δέ νά τήν εὕρωμεν διά τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος.

Ἤτοι: $(O\Delta)^2 = (OK)^2 + (\Delta K)^2$

$(O\Delta)^2 = 3,25^2 + 1^2$

$(O\Delta)^2 = 11,56$ καί $O\Delta = \sqrt{11,56} = 3,4$ m.

Τό ἰσοσκελές τρίγωνον ΕΟΔ χωρίζεται εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἴσα, διότι ἔχουν τήν μίαν κάθετον κοινήν, τάς ὑποτεινούσας ἴσας ὡς ἀκμάς τῆς πυραμίδος καί τήν ἑτέραν κάθετον πλευράν.

Γνωρίζομεν δέ τήν ὑποτείνουσαν καί μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν καί ζητοῦμεν τήν ἄλλην κάθετον πλευράν ἥτις εἶναι τό ὕψος τῆς μιᾶς ἕδρας. Θά τό εὕρωμεν δέ καί αὐτό διά τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος.

Ἤτοι: $(OH)^2 = (O\Delta)^2 - (\Delta H)^2$ ἔνθα Η εἶναι τό σημεῖον τῆς τομῆς τῆς καθέτου εἰς τό μέσον τῆς ΕΔ

$(OH)^2 = (3,4)^2 - (0,5)^2$

$(OH) = \sqrt{11,56 - 0,25} = \sqrt{11,31} = 3,36$ m.

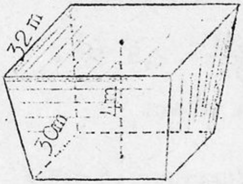
Γνωρίζοντες τό ὕψος μιᾶς ἕδρας δυνάμεθα νά εὕρωμεν τό ἐμβαδόν. Ἤτοι: $S = \frac{6 \text{ X } 3,36}{2} = 10,08 \ m^2$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐάν προσθέσωμεν καί τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως, τότε ἔχομεν τό ὁλικόν ἐμβαδόν.

Ἤτοι $S_{ολ} = 10,08 + 2,59 = 12,67\ m^2$.

2) Δεξαμενῆς ὁ μέν πυθμήν εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 30 m, τά δέ χείλη αὐτῆς σχηματίζουν πάλιν τετράγωνον πλευρᾶς 32 m, τό δέ βάθος αὐτῆς εἶναι 4m. Ζητεῖται ἡ χωρητικότης αὐτῆς (σχ.60).



Σχ. 60

Λύσις: Πρός εὕρεσιν τῆς χωρητικότητος τῆς δεξαμενῆς θά χρησιμοποιήσωμεν τόν τύπον $V = \frac{(B + b + \sqrt{B.b}).h}{3}$ Διότι ὁ ὄγκος εἰς μέτρα ἰσοῦται μέ τήν χωρητικότητα εἰς τόννους.

Ἤτοι: $B = 32 \times 32 = 1024\ m^2$

$b = 30 \times 30 = 900 m^2$

$\sqrt{B.b} = \sqrt{1024 \times 900} = 960\ m^2$. Ὥστε ὁ ὄγκος εἶναι

$$V = \frac{(1024 + 900 + 960)}{3} \times 4 = 3845\ m^3 \text{ καί } b = 3845\ t$$

11. Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

1) Πυραμίς ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 2 m, τά δέ ὕψη τῶν τριγώνων εἶναι ἴσα ἕκαστον πρός 2,3 m. Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της καί ὄγκος της. Ἀπ. $9,2\ m^2$, $2,79\ m^3$.

2) Ἑξαγωνική κανονική πυραμίς ἔχει πλευράν βάσεως 4 m, τό δέ ὕψος τῶν τριγώνων εἶναι 4,58 m. Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν αὐτῆς.

Ἀπ.9648 m^2.

3) Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος τῆς ὁποίας ὅλαι αἱ ἀκμαί εἶναι ἴσαι καί ἑκάστη εἶναι 8,2 m καί ὁ ὄγκος της Ἀπ. $64,85\ m^3$, $116,33\ m^2$ περ.

4) Αἱ ἀκμαί τετραγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 10 cm, αἱ δέ παράπλευροι ἀκμαί της 40 cm. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος της εἰς (m^3) καί τό ἐμβαδόν της.

5) Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κανονικῆς βάσεως πυραμίδος ἐν τῇ ὁποίᾳ τό ὕψος τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τῆς εἶναι 12 cm, ἡ δέ βάσις ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος 7,8 cm. Ἀπ. $158,22\ cm^3$ περ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

6) Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδόν κολούρου τετραγωνικῆς πυραμίδος τῆς ὁποίας ἡ πλευρά τῆς μεγάλης βάσεως εἶναι 4,7 m, τῆς δέ μικρᾶς 3,05 m καί τό ὕψος της 7,35 m.

'Απ. $\simeq 112\ m^3 \simeq 113\ m^2$

7) Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κολούρου ὀρθῆς κανονικῆς πυραμίδος μέ βάσεις τραπέζια ἰσοσκελῆ. Αἱ πλευραί τῆς μεγάλης βάσεως εἶναι 20 mm, 10 mm, 18 mm; τῆς δέ μικρῆς 12 mm καί 6 mm. Τό ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 50 mm.

'Απ. 7655,66 mm^3.

8) Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδόν κολούρου κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος τῆς ὁποίας ἡ πλευρά τῆς μεγάλης βάσεως εἶναι 6,8 m, τῆς δέ μικρῆς 5,3 καί τό ὕψος αὐτῆς 4,5 μέτρα κατά προσέγ. 0,01.

158 m^3, 113 m^2.

9) Τριγωνικῆς πυραμίδος ΚΑΒΓ ἡ πλευρά ΚΑ εἶναι κάθετος ἐπί τήν βάσιν ΑΒΓ καί ἔχει μῆκος 5,3 m, αἱ δέ πλευραί τοῦ τριγώνου ἔχουν μῆκος 3m, 5m, 4m. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδόν αὐτῆς.

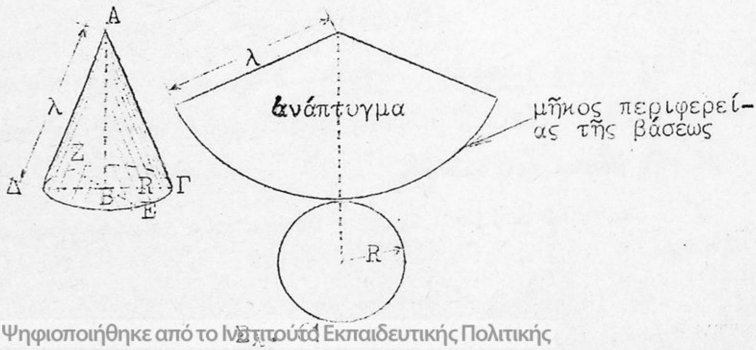
'Απ. 36,57 m^3, 7,95 m^2, 13,25 m^2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

1. Περί ὀρθοῦ Κώνου.

1. Ὁρισμοί.

Κῶνος λέγεται τό στερεόν τό ὁποῖον γεννᾶται ὅταν ὀρθογώνιον τρίγωνον περιστραφῇ περί μίαν τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν μέχρις ὅτου ἐπανέλθη εἰς τήν ἀρχικήν του θέσιν· π.χ. ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τό ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ.61) περιστρέφεται περί τήν πλευράν ΑΒ μέ-



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

χρις ὅτου ἐπανέλθη εἰς τήν ἀρχικήν του θέσιν· τότε θά σχηματισθῆ τό στερεόν ΑΓΔΕ, τό ὁποῖον εἶναι ἕνας κῶνος.

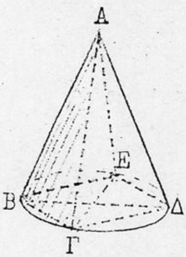
Βάσις τοῦ κώνου λέγεται ἡ περιφέρεια κύκλου ΔΕΓΖ ἡ ὁποία γίνεται ὑπό τῆς καθέτου ΒΓ τοῦ τριγώνου κατά τήν περιστροφήν του περί τήν ΑΒ.

Ἄξων τοῦ κώνου λέγεται ἡ πλευρά ΑΒ ἡ ὁποία μένει ἀκίνητος.

Κορυφή τοῦ κώνου λέγεται τό σημεῖον Α.

Κυρτή ἐπιφάνεια τοῦ κώνου λέγεται ἡ ἐπιφάνεια ἡ ὁποία γίνεται ἀπό τήν ὑποτείνουσαν ΑΓ τοῦ τριγώνου κατά τήν περιστροφήν αὐτοῦ περί τήν ΑΒ.

Πλευρά τοῦ κώνου λέγεται ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου. Πᾶσα τομή κώνου ὑπό ἐπιπέδου καθέτου ἐπί τόν ἄξονα αὐτοῦ εἶναι κύκλος. Πᾶσα δέ τομή κώνου ὑπό ἐπιπέδου διερχομένου διά τοῦ ἄξονος ὅπως ἡ ΔΑΓ εἶναι τρίγωνον ἰσοσκελές διπλάσιον τοῦ ΑΒΓ (σχ.61)



Σχ. 62

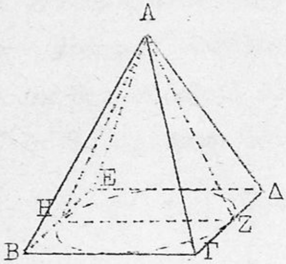
2) Ἐγγεγραμμένη λέγεται μία πυραμίς εἰς κῶνον, ἐάν ἔχῃ ὡς κορυφήν τήν κορυφήν τοῦ κώνου καί ἡ βάσις αὐτῆς εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τήν βάσιν τοῦ κώνου.

Ἡ πυραμίς ΑΒΓΔΕ (σχ.62) εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τόν κῶνον ἐπί πλέον δέ καί αἱ παράπλευροι ἀκμαί αὐτῆς κεῖνται ἐπί τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

3) Περιγεγραμμένη λέγεται ἡ πυραμίς εἰς κῶνον, ἐάν ἔχῃ ὡς κορυφήν τήν κορυφήν τοῦ κώνου, ἡ δέ βάσις αὐτῆς εἶναι περιγεγραμμένη περί τήν βάσιν τοῦ κώνου.

Ἡ πυραμίς ΑΒΓΔΕ (σχ.63) εἶναι μία περιγεγραμμένη πυραμίς περί κῶνον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Σχ. 63

Ἑκάστη τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τῆς πυραμίδος ἐγγίζει τήν κυρτήν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου κατά μίαν εὐθείαν· π.χ. ἡ ἕδρα ΒΕΑ ἐγγίζει τήν κυρτήν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου κατά τήν ΑΗ, ἡ ΑΓΔ ὁμοίως κατά τήν ΑΖ κ.λ.π.

4) Ὁ ὄγκος κώνου ἰσοῦται μέ τό τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος αὐτοῦ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ : Διότι ἄν φαντασθῶμεν πυραμίδα μέ βάσιν κανονικόν πολύγωνον ἐγγεγραμμένην εἰς τόν κῶνον. Ὅταν τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτῆς αὐξάνεται ἀπεριορίστως, τό ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος θά εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς κυκλικῆς βάσεως τοῦ κώνου, τό δέ ὕψος αὐτῆς ἰσοῦται μέ τό ὕψος τοῦ κώνου. Ἐπειδή δέ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ἰσοῦται μέ τό τρίτον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος αὐτῆς, ἕπεται ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ὅστις εἶναι ὅριον τοῦ ὄγκου τῆς πυραμίδος, ἰσοῦται μέ τό τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος αὐτοῦ.

Παρατήρησις. Ἄν V παριστάνῃ τόν ὄγκον κώνου ἔχοντος ἀκτῖνα τῆς βάσεως αὐτοῦ r καί ὕψος h ,θά ἔχωμεν $\boxed{V = \frac{\pi . r^2 . h}{3}}$

5) Τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ κώνου ἰσοῦται μέ τό ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ μήκους τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπί τήν πλευράν αὐτοῦ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ: Διότι, ἄν φαντασθῶμεν ὅτι ὁ κῶνος ἔχει περιτυλιχθῆ μέ χαρτί καί τοῦ κάμωμεν μίαν τομήν κατά μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ καί τό ἀναπτύξωμεν, θά παρουσιασθῇ ἕνας κυκλικός τομεύς ὡς τό

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σχῆμα 61, τοῦ ὁποίου τό τόξον θά ἔχῃ μῆκος ἴσον μέ τό μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κώνου καί ἀκτῖνα ἴσην μέ τήν πλευράν του (λ). Ἐκ τῆς ἐπιπεδομετρίας δέ γνωρίζομεν ὅτι τό ἐμβαδόν τοῦ κυκλικοῦ τομέως, ἰσοῦται μέ τό μῆκος τοῦ τόξου ἐπί τήν ἀκτῖνα διά δύο·

$$\text{Ἤτοι}\quad S_\pi = \frac{2\pi . r . \lambda}{2} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{S_\pi = \pi . r . \lambda}$$

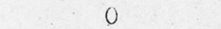
καί τό ὁλικόν ἐμβαδόν του τό εὑρίσκομεν ἄν προσθέσωμεν εἰς τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως τοῦ κύκλου· ἤτοι $S_\theta = \pi r \lambda + \pi r^2$ ἤ $\boxed{S_o = \pi . r .(r + \lambda)}$

<u>Παρατήρησις:</u> Ἡ γωνία τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ κώνου εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου $\mu^o = \dfrac{360 . r}{\lambda}$ καί εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς.

Τό μῆκος τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ κώνου εἶναι $\dfrac{\pi . \mu^o . \lambda}{180}$ (σχ. 61), ἔνθα μ εἶναι ἡ γωνία τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ κώνου καί λ ἡ πλευρά αὐτοῦ. Τό αὐτό μῆκος ὅμως εἶναι καί $2\pi r$ (σχ. 61), διότι εἶναι τό μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κώνου μέ ἀκτῖνα r. Ἐπομένως ἔχομεν τήν ἰσότητα $\dfrac{\pi . \lambda . \mu^o}{180} = 2\pi r$ καί $\mu = \dfrac{360 . r}{\lambda}$

6. Ἐφαρμογή

Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδόν κώνου τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος τῆς βάσεώς του εἶναι 4,2 cm καί τό ὕψος του 2,15 cm καθώς καί ἡ γωνία τοῦ ἀναπτύγματος αὐτοῦ.



Σχ. 64

<u>Λύσις:</u> Τό ἐμβαδόν τοῦ κώνου δίδεται ἀπό τόν τύπον $S_o = S_\pi + S_\beta$ ἔνθα $S_\pi = \pi . r . \lambda$.

Πρός εὕρεσιν τοῦ λ ἐφαρμόζομεν τόν Πυθαγόρειον θεώρημα·

$$\text{ἤτοι}\quad \lambda^2 = 2,15^2 + 2,1^2 \text{ (σχ. 64).}$$

$\lambda = \sqrt{9,0325} = 3,005$ καί $S_\pi = 3,14 \times 2,1 \times 3,005 =$
$= 19,815\ cm^2$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$S_\beta = \pi r^2$$
$$S_\beta = 3,14 \times 2,1^2 = 13,85 \text{ cm}^2 \text{ καί}$$
$$S_o = 19,815 + 13,85 = 33,665 \text{ cm}^2$$

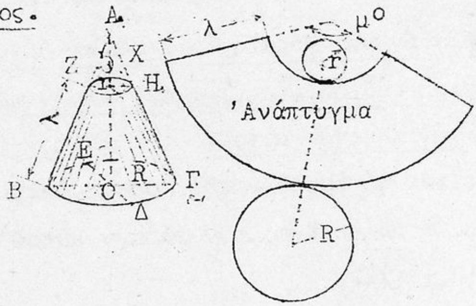
Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου δίδεται ἀπό τόν τύπον

$$V = \frac{\Pi r^2 h}{3} \qquad \text{ἤτοι } V = \frac{3,14 \times 2,1^2 \times 2,15}{3} = 9,92 \text{ cm}^3$$

$$\mu^o = \frac{360.r}{\lambda} = \frac{360 \times 2,1}{3,005} = 251,9^o$$

7. Περί κολούρου κώνου

Ἐάν κῶνον τόν κόψωμεν δι'ἑνός ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τήν βάσιν του, τό μεταξύ τῆς βάσεως καί τῆς τομῆς μέρος τοῦ κώνου λέγεται κόλουρος κῶνος.



Σχ. 65

Ἤτοι, ἐάν ἔχωμεν τόν κῶνον ΑΒΓΔΕ (σχ.65) καί τόν κόψωμεν μέ ἕνα ἐπίπεδον κάθετον πρός τόν ἄξονα θά προκύψη τό στερεόν ΒΔΓΕΖΘΗΙ τό ὁποῖον εἶναι ἕνα κόλουρος κῶνος.

Βάσεις κολούρου λέγονται οἱ δύο παράλληλοι κύκλοι ΒΔΓΕ καί ΖΗΘΙ ὑφ'ὧν περατοῦται.

Ἄξων ἤ ὕψος κολούρου κώνου λέγεται ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τά κέντρα τῶν βάσεων ὡς ἡ ΟΘ.

Πλευρά κολούρου λέγεται μέρος τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου τό μεταξύ τῶν δύο βάσεων περιεχόμενον ὡς ΒΖ ἤ ΓΗ κ.λ.π.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κυρτή ἐπιφάνεια κολούρου κώνου λέγεται τό μέρος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου, τό περιεχόμενον μεταξύ τῶν δύο βάσεων.

8) Ὁ ὄγκος κολούρου κώνου ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τριῶν κώνων, ἐχόντων κοινόν ὕψος τό ὕψος τοῦ κολούρου καί βάσιν ὁ μέν τήν κάτω βάσιν, ὁ δέ τήν ἄνω βάσιν τοῦ κολούρου καί ὁ τρίτος κῶνος εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν δύο ἄλλων.

Ἐάν V εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου R, καί ρ οἱ ἀκτῖνες τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ καί h τό ὕψος του, ἔχομεν τόν ἑξῆς τύπον ὅστις μᾶς δίδει τόν ὄγκον.

$$\boxed{V = \frac{\pi}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right).h}$$

9) Τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ κολούρου κώνου ἰσοῦται μέ τό ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μηκῶν τῶν περιφερειῶν τῶν δύο βάσεων ἐπί τήν πλευράν αὐτοῦ.

Ἐάν S_π εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ κολούρου κώνου καί R, r αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων αὐτοῦ καί λ ἡ πλευρά, θά ἔχωμεν $S_\pi = \pi.(R+r)\lambda$.

Παρατήρησις ἡ γωνία τοῦ ἀναπτύγματος, μ^o, (σχῆμα 65) τοῦ κολούρου κώνου εὑρίσκεται ἀπό τόν τύπον $\mu^o = \dfrac{360\,(R-r)}{\lambda}$

- ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ: Ἄν τόν θεωρήσωμεν ὡς ὁλόκληρον κῶνον, ὡς ἐμφαίνηται εἰς τό σχῆμα 61, ἡ γωνία τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ ὁλοκλήρου κώνου μέ τήν γωνίαν τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ κολούρου συμπίπτει. Ἐπομένως πάλιν μᾶς δίδεται ἀπό τόν τύπον $\mu o = \dfrac{360\,.\,r}{\lambda}$,(1)-ἔνθα λ εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν εἶναι ἡ πλευρά (ΑΗ = X) τοῦ μικροῦ κώνου ΑΗΖ, σχῆμα 65. Εἰς τό αὐτό σχῆμα βλέπομεν ὅτι σχηματίζονται δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, ὅμοια τά ΑΘΗ καί ΑΟΓ, ἐκ τῶν ὁποίων ἔχομεν τήν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σχέσιν $\frac{ΘΗ}{ΟΓ} = \frac{ΑΗ}{ΑΓ}$ ἤ $\frac{r}{R} = \frac{\chi}{\chi+\lambda}$ ἤ $r\chi + r\lambda = R\chi$ ἤ $r\lambda = R\chi - r\chi$

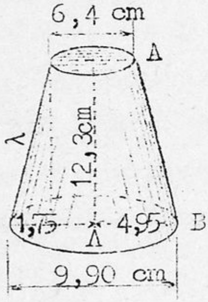
ἤ $r\lambda = \chi(R-r)$ καί $\chi = \frac{r\lambda}{R-r}$.

'Οπότε ἀντικαθιστῶντες εἰς τόν τύπον (1) ἔχομεν $\mu = \frac{360.r}{\frac{r\lambda}{R-r}}$

$$\text{καί } \mu = \frac{360(R-r)}{\lambda}$$

'Ε φ α ρ μ ο γ ή

"Ενα 'εργοστάσιον κατασκευάζει ἐξαρτήματα ἐξ ὀρειχάλκου τά ὁποῖα χρησιμεύουν ὡς βαλβῖδες εἰς κρουνούς ἀτμολεβήτων. Τά ἐξαρτήματα ἔχουν σχῆμα κορούρου κώνου μέ διαστάσεις· διάμετρος μεγάλης βάσεως 9,9 cm, διάμετρος μικρῆς βάσεως 6,4 cm καί ὕψος (τῶν ἐξαρτημάτων) 18,3 cm. Ζητεῖται πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνειά των καί τό βάρος των (σχ. 66).



Σχ. 66

Λύσις: Εὑρίσκομεν τήν πλευράν λ

ἐπειδή $R = 4{,}95$ cm
$r = 3{,}20$ cm
ἤ $R - r = 1{,}75$ cm

ἐπομένως ἡ λ εἶναι $\lambda = \sqrt{18{,}3^2 + 1{,}75^2} = 18{,}38$

ὁπότε $S_\pi = \pi.(R+r).\lambda.$

$$S_\pi = 3{,}14 \times (4{,}95 + 3{,}2) \times 18{,}38 = 463{,}488 \text{ cm}^2$$

$$S_B = 0{,}785 D^2 \text{ ἤ } S_B = 0{,}785 \times 9{,}9^2 = 76{,}93 \text{ cm}^2$$

$$S_b = 0{,}785\, d^2 \text{ ἤ } S_b = 0{,}785 \times 6{,}4^2 = 32{,}106 \text{ cm}^2$$

καί $S_o = S_\pi + S_B + S_b$

$S_o = 463{,}488 + 76{,}93 + 32{,}106 = 572{,}524$ cm². 'Ο ὄγκος μᾶς δίδεται ἀπό τόν $V = \frac{\pi}{3}.(R^2 + r^2 + R\,r).h$

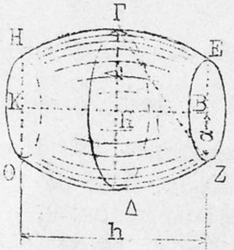
$$V = \frac{3{,}14 \times (4{,}95^2 + 3{,}2^2 + 4{,}95 \times 3{,}2) \times 18{,}3}{3} = 968{,}8572 \text{ cm}^3$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

'Επειδή τό βάρος = V.ε.

"Εχομεν β = 968,775 X 8,65 = 8379,90375 gr .

<u>11. "Ογκος βυτίου ἤ βαρελίου.</u> 'Ο ὄγκος ἤ χωρητικότης τῶν βυτίων ἤ βαρελίων εὑρίσκεται ὅπως καί ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου, διότι τό βυτίον ἠμπορεῖ νά θεωρηθῇ ὅτι ἀποτελεῖται ἀπό δύο κολούρους κώνους οἱ ὁποῖοι ἔχουν μεγάλην βᾶσιν τόν μεσαῖον κύκλον τοῦ βυτίου καί μικράν τούς μικρούς κύκλους αὐτῶν.



Σχ. 67

'Εν 'Αγγλία π.χ. ἔχουν τόν τύπον $\frac{\pi . h}{3}(2A^2 + \alpha^2)$ ἔνθα π εἶναι ὁ ἀριθμός 3,1418, h τό ἐσωτερικόν μῆκος ΚΒ τοῦ βυτίου (σχ. 67), Α ἡ ἀκτίς τῆς μεσαίας βάσεως ΓΔ αὐτοῦ καί α, ἡ ἀκτίς τῆς μικρᾶς βάσεως ΕΖ. Εἰς τήν Γαλλίαν ἔχουν ἄλλον τύπον.

'Ο πρακτικώτερος ὅμως τρόπος ὁ ὁποῖος εἶναι ἐν χρήσει εἰς τήν 'Ελλάδα, Τουρκίαν καί εἰς ἄλλας χώρας εἶναι ἡ μέτρησις τῶν βυτίων μέ τό βαρελόμετρον (καί ἰδίως διά τόν οἶνον).

Τό βαρελόμετρον εἶναι ράβδος ἀπό ξύλο ἤ σίδηρον διῃρημένη εἰς μέρη ἀναλόγως ἐλαττούμενα πρός τά κάτω ἑκάστη δέ διαίρεσις φανερώνει τόν ἀριθμόν τῶν περιεχομένων βαρελῶν εἰς τό βυτίον, ἡ δέ βαρέλα ἔχει χωρητικότητα 0,064 τοῦ κυβ. μ. ἤ 64 κιλά , τῶν ὁποίων τό βάρος εἶναι κατά μέσον ὅρον 48 ὀκ. οἴνου· ὥστε μία ὀκᾶ οἴνου εἶναι ἴση μέ 1,33 τοῦ κιλοῦ. Διά νά μετρήσωμεν τώρα τό βυτίον (σχ.67) εἰσάγομεν ἀπό τό στόμιον Γ, ράβδον μεταλλικήν βαθμολογημένην καταλλήλως κατά τήν διεύθυνσιν ΓΖ μέχρις οὗ συναντήσῃ τό κάτω μέρος Ζ τῆς βάσεως τοῦ βυτίου, ὁ ἀριθμόςτότε τῆς ράβδου ὁ ὁποῖος συμπίπτει μέ τό μέσον τοῦ στομίου Γ <u>παριστᾶ τόν ἀριθμόν τῶν</u> βαρελῶν τῆς χωρητικότητος τοῦ βυτίου· ἐάν π.χ. εἶναι ὁ ἀριθμός 8, τότε τό βυτίον χωρεῖ 8

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

βαρέλας ἤ 64,8 κιλά ἤ 48 Χ 8 ἤτοι 384 ὀκάδες.

Σημείωσις. Ἐάν τό μῆκος ΓΖ δέν εἶναι ἴσον μέ τό μῆκος ΓΘ, λαμβάνομεν τότε τόν μέσον ὅρον αὐτῶν.

12. Προβλήματα

1. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καί ἡ ἐπιφάνεια κώνου ἔχοντος ὕψος 13,2m καί πλευράν 15,7m.

Λύσις. Ἡ ἀκτίς τοῦ κώνου εἶναι μία ἐκ τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου διά τοῦ ὁποίου κατεσκευάσθη θεωρητικῶς ὁ κῶνος. Καί ἐπειδή ἔχομεν τήν ὑποτείνουσαν καί τήν ἑτέραν κάθετον πλευράν δυνάμεθα διά τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος νά τήν εὕρωμεν.

Ἤτοι $r^2 = 15,7^2 - 13,2^2 = 246,49 - 174,25 = 72,25$ καί

$r = 8,5$.

Εὑρεθείσης τῆς ἀκτῖνος δυνάμεθα νά εὕρωμεν τόν ὄγκον καί τό ἐμβαδόν τοῦ κώνου διά τῶν γνωστῶν εἰς ἡμᾶς τύπων:

$$V = \frac{\pi . r^2 . h}{3} = \frac{3,14 \times 8,5^2 \times 13,2}{3} = \frac{2994,628}{3} = 998,2 \ m^3$$

$S_\pi = \pi . r . \lambda = 3,14 \times 8,5 \times 15,7 = 419,03 \ m^3$

$S_\beta = \pi . r^2 = 3,14 \times 8,5^2 = 226,86 \ m^2$

$S_o = 419,03 + 226,86 = 645,89 \ m^2$

2) Αἱ ἀκτῖνες τῆς βάσεως κολούρου κώνου εἶναι 20 cm καί 135 cm καί τό ὕψος του 15 cm. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καί ἡ ἐπιφάνειά του.

Λύσις: Πρός εὕρεσιν τοῦ ὄγκου θά χρησιμοποιήσωμεν τόν τύπον

$$V = \frac{\pi}{3} . (R^2 + r^2 + R . r) . h, \quad V = \frac{3,14}{3} (135^2 + 20^2 + 135 \times 20) \times 15 =$$

$$= \frac{3,14}{3} \times (18225 + 400 + 2700) \times 15 = 3,14 \times 21325 \times 15 =$$

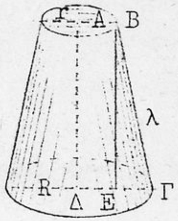
$$= 334802,5 \ cm^3.$$

Ἡ ἐπιφάνεια εὑρίσκεται ἐκ τῶν τύπων διά μέν τήν κυρτήν:

$S_\pi = \pi . (R+r) . \lambda$, καί διά τάς βάσεις $\pi . r^2$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τό λ δέν μᾶς δίδεται εἰς τό πρόβλημα, δυνάμεθα ὅμως νά τό εὕρωμεν ὡς ἑξῆς.



Σχ. 68

'Εάν ἐκ τῆς ἀκτῖνος R ἀφαιρέσωμεν τήν ἀκτῖνα r, θά μᾶς ἀπομείνῃ τό μῆκος ΕΓ (σχ. 68) τό ὁποῖον εἶναι ἡ μία ἐκ τῶν καθέτων τοῦ τριγώνου ΒΕΓ τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ διά τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος θά τήν εὕρωμεν $k - r = 135 - 20 = 115 = ΕΓ$.

"Ητοι $(ΒΓ)^2 = (ΒΕ)^2 + (ΕΓ)^2$ ἤ $(ΒΓ)^2 = 15^2 + 115^2$

ἤ $(ΒΓ)^2 = 225 + 13225 = 13450$ καί

$ΒΓ = \sqrt{13450} = 115,97$ cm

ἄρα $λ = 115,97$

Εὑρεθέντος τοῦ λ διά τῶν ἀνωτέρω τύπων θά εὕρωμεν τήν ἐπιφάνειαν.

$S_π = π.(R+r).λ = 3,14 X (135+20) X 115,97 = 3,14 X 155 X 115,97 =$

$= 56442,59$ cm^2

$S_v = π. R^2 = 3,14 X 18225 = 57226,5$ cm^2

$S_β = π. r^2 = 3,14 X 20^2 = 3,14 X 400 = 1256$ cm^2

'Επομένως ἡ ὁλική ἐπιφάνεια εἶναι.

$S_ο = 56442,59 + 57226,5 + 1256 = 114925,09$ cm^2

3) Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδόν κώνου μέ βάσιν ἔλλειψιν τῆς ὁποίας ὁ μεγάλος ἄξων εἶναι 6 m καί ὁ μικρός ἄξων εἶναι 4 m καί τό ὕψος τοῦ κώνου εἶναι 4 m.

<u>Λύσις.</u> 'Επειδή ὁ ὄγκος κώνου ἰσοῦται μέ τό $\frac{1}{3}$ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος ἔχομεν $V = \frac{π\, a b. h}{12}$, $V = \frac{3,14 X 6 X 4 X 4}{12} =$

$= 25,12$ m^3

'Επειδή τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κώνου ἰσοῦται μέ τό μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπί τό ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

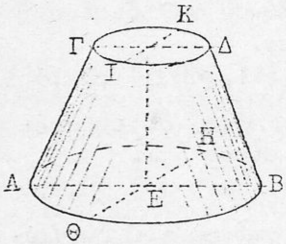
ἕπεται ὅτι $S\pi = \pi.\ \frac{(a+b)}{2}\ .\ \frac{\lambda}{2}$ $S\pi = 3,14 \times \frac{(6+4)}{2} \times \frac{4,62}{2} = $

$= 32.267\ m^2$

Ἔνθα $\lambda = \frac{4,24 + 5}{2} = 4,62$ δηλ. ὁ μέσος ὅρος τῶν πλευρῶν τοῦ κώνου εἰς τά ἄκρα τῶν δύο ἀξόνων κατά προσέγγισιν.

4) Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κολούρου κώνου μέ βάσεις ἐλλείψεις τῶν ὁποίων αἱ διαστάσεις εἶναι τῆς μέν μεγάλης βάσεως ὁ μεγάλος ἄξων 20 μέτρα, καί ὁ μικρός 4 μέτρα, τῆς δέ μικρῆς βάσεως ὁ μεγάλος ἄξων εἶναι 5 μέτρα καί ὁ μικρός 1 μ. Τό δέ ὕψος τοῦ κολούρου κώνου 3 μέτρα.

Λύσις. Διά νά εὕρωμεν τόν ὄγκον κολούρου κώνου μέ οἱανδήποτε βάσιν ἐφαρμόζομεν τόν τύπον τῆς κολούρου πυραμίδος κατά προσέγγισιν. Ἄν δέ θέλωμεν μεγαλυτέραν προσέγγισιν ἐφαρμόζομεν τόν τύπον:-



Σχ. 69

$$V = \frac{\pi.\ h}{6}\left[(2R_1 + R_2).\ r_1 + (2R_2 + R_1)\ r_2\right]$$

ἔνθα R_1 μεγάλος ἡμιάξων τῆς μεγάλης βάσεως = AB (σχ. 69).

ἔνθα R_2 μεγάλος ἡμιάξων τῆς μικρῆς βάσεως = ΓΔ.

ἔνθα r_1 μικρός ἡμιάξων τῆς μεγάλης βάσεως = ΘΗ.

ἔνθα r_2 μικρός ἡμιάξων τῆς μικρῆς βάσεως ΙΚ· ἤτοι ἔχομεν:

$$V = \frac{3,14 \times 3}{6} \times \left[(20 + 2,5) \times 2 + (5+10) \times 0,5\right] = \frac{3,14}{2} \times 52,5 =$$

$$= 82,425\ m^3$$

Ἐάν ἐφαρμόσωμεν τόν τύπον τῆς κολούρου πυραμίδος ἤτοι:

$V = \frac{h}{3}.(B + b + \sqrt{Bb})$, εὑρίσκομεν.

$V = \frac{3}{3}(62,8 + 3,95 + 15,70) = 82,425\ m^3$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

13. Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

1) Πόσο καραβόπανο πλάτους 0,60 m χρειάζεται διά νά κατασκευασθῇ κωνική σκηνή ἡ ὁποία νά ἔχῃ πλευράν 5 m καί περιφέρειαν βάσεως 12 m;
'Απ(26,43 m)

2) Πόσον εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου τοῦ ὁποίου ἡ πλευρά εἶναι 4 m καί ἡ διάμετρος τῆς βάσεώς του 2 m καί πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;
'Απ.(12,566 m^2).

3) Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας καί ὁ ὄγκος κώνου ὁ ὁποῖος ἔχει πλευράν 6,4 μέτρα καί διάμετρον βάσεως 4,6 m
'Απ(62,83 m^2, 33,055 m^3).

4) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδόν κώνου τοῦ ὁποίου τό ὕψος εἶναι 6 m καί ἡ περιφέρεια τῆς βάσεώς του 31,42 m;
'Απ.(157,075 m^3, 130 m^2 .

5) Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδόν κώνου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως εἶναι 1,8 μέτρα καί τό ὕψος 3,5 m.
'Απ.(11,869 m^3 ,32,385 m^2).

6) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδόν κώνου ὅστις ἔχει ὕψος 3,2 m καί τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 5 m.
'Απ.(20,9 m^3 55,556 m^2).

7) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδόν κώνου τοῦ ὁποίου τό ὕψος εἶναι 8 m καί ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως 31,415 m;
'Απ. 226,75 m^2 (209,43 m^3 περίπου).

8) Πόσον εἶναι τό ὕψος ἑνός κώνου, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι 30 κυβ. μέτρα καί τό ἐμβαδόν τῆς βάσεώς του 8 τετρ. μέτρα καί ποῖον τό ἐμβαδόν του;

9) Ἡ πλευρά ἑνός κολούρου κώνου εἶναι 5 m καί αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεών του εἶναι 5 m καί 2 m. Πόσον εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του καί ὁ ὄγκος του;
'Απ(109,90 m^2, 161,28 m^3)

10) Αἱ περιφέρειαι τῶν βάσεων ἑνός κολούρου κώνου εἶναι ἡ μία 6,285 m, ἡ ἄλλη 14,03 m καί τό ὕψος του εἶναι 4 m. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του καί τό ἐμβαδόν του;
'Απ.(34,36 m^3 12,4 m^2).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

11) Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδόν κολούρου κώνου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς τῆς μεγάλης βάσεως εἶναι 2,4 m καί ἡ ἀκτίς τῆς μικρῆς βάσεως εἶναι 1,6 m καί τό ὕψος αὐτοῦ εἶναι 4,2 m.

'Απ(53,455 m^3 79,755 m^2)

12) Δεξαμενῆς ἐχούσης σχῆμα κολούρου κώνου ζητεῖται νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδόν αὐτῆς, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος τῆς μεγάλης βάσεως εἶναι 6,8 m τῆς μικρῆς 5,3 m καί τό ὕψος 4,5 m.

'Απ(529,26 m^3 , 245,265 m^2)

13) Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος κολούρου κώνου μέ βάσεις ἐλλείψεις τῶν ὁποίων αἱ διαστάσεις εἶναι τῆς μέν μεγάλης βάσεως ὁ μεγάλος ἄξων 40 m, τῆς δέ μικρῆς βάσεως ὁ μεγάλος ἄξων εἶναι 10 m καί ὁ μικρός 2 m καί τό ὕψος τοῦ κολούρου κώνου 6 m.

'Απ.(659,4 m^3).

14) Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδόν κολούρου κώνου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς τῆς μεγάλης βάσεώς του εἶναι 4,7 m τῆς δέ μικρῆς του 3,05 m καί τό ὕψος του 7,35 m.

'Απ.(349,60 m^3, 183,24 m^2).

15) Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος, τό βάρος καί τό ἐμβαδόν ἑνός ἄξονος ἐξ ὀρειχάλκου σχήματος κολούρου κώνου τοῦ ὁποίου αἱ ἀκτῖνες εἶναι 0,15 m καί 0,23 m καί τό ὕψος του 0,8 m, ἄν εἰδ. βάρος εἶναι 8,65.

'Απ.(0,0832 m^3 0,71968 t 1,406 m^2)

16) Τά ἀκραξόνια ἑνός αὐτοκινήτου ἔχουν σχῆμα κολούρου κώνου μέ διαμέτρους 4 cm καί 2 cm καί τό μῆκος της 15 cm . Νά εὑρεθοῦν τά βάρη τους καί ἡ ἐπιφάνειά τους, ἄν ειδικ. βάρος 7,8

'Απ.(857,22 gr, 157 cm^2).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

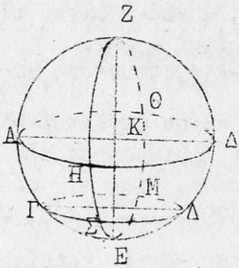
1. Περί σφαίρας

'Ορισμοί. Σφαῖρα λέγεται τό στερεόν σῶμα, τοῦ ὁποίου ἕν σημεῖον κείμενον ἐντός αὐτοῦ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπό ὅλα τά σημεῖα τῆς ἐπιφανείας του.

Τό σημεῖον τοῦτο λέγεται κέντρον τῆς σφαίρας. Τό σχῆμα 70 παριστᾶ σφαῖραν, τό δέ ἐντός αὐτῆς σημεῖον Κ εἶναι τό κέντρον.

Σημ. 'Η σφαῖρα ἠμπορεῖ νά θεωρηθῆ ὅτι κατασκευάζεται

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Σχ. 70

τήν περιστροφήν ἡμικυκλίου, π.χ. τοῦ ΕΑΖ, πέριξ τῆς διαμέτρου αὐτοῦ ΕΖ καί κατά τήν αὐτήν φοράν πάντοτε, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τήν προτέραν του θέσιν.

<u>Ἀκτίς</u> τῆς σφαίρας λέγεται οἱαδήποτε εὐθεῖα ἡ ὁποία ἀρχίζει ἀπό τό κέντρον καί καταλήγει εἰς τήν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας π.χ. ἡ ΚΑ, ΚΕ καί ΚΖ. Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

<u>Διάμετρος</u> τῆς σφαίρας λέγεται οἱαδήποτε εὐθεῖα ἡ ὁποῖα περνᾶ ἀπό τό κέντρον καί καταλήγει ἀπό τά δύο μέρη εἰς τήν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας π.χ. ἡ ΕΖ. Ὅλαι αἱ διάμετροι τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι ἴσαι μεταξύ των, διότι ἑκάστη εἶναι διπλασία ἀκτῖνος.

Ἐάν σφαιρικόν σῶμα, ἔστω πορτοκάλι, κόψωμεν μέ ἐπίπεδον, ἡ τομή ὁπωσδήποτε εἶναι κύκλος.

Ἀπό τούς διαφόρους κύκλους τούς ὁποίους ἠμποροῦμεν νά σχηματίσωμεν μέ τοιαύτας τομάς, ὁ μεγαλύτερος ὅλων σχηματίζεται ὅταν τό ἐπίπεδον περάσῃ ἀπό τό κέντρον τῆς σφαίρας καί λέγεται μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας οἱ δέ ἄλλοι λέγονται μικροί κύκλοι τῆς σφαίρας.

Οἱ κύκλοι ΑΠΒΘΑ καί ΕΗΣΘΕ (σχ.70) εἶναι μέγιστοι καί ἔχουν κέντρον καί ἀκτῖνα, τά τῆς σφαίρας, ὁ δέ κύκλος ΓΣΔΜΓ εἶναι μικρός. Οἱ μέγιστοι κύκλοι τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι ἴσοι μεταξύ των ἕκαστος διαιρεῖ τήν σφαῖραν εἰς δύο ἴσα μέρη τά ὁποῖα λέγονται ἡμισφαίρια. Οἱ δέ διάφοροι μικροί κύκλοι τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι ἄνισοι μεταξύ των, διότι ὅσον περισσότερον ἀπέχει ἡ τομή ἀπό τό κέντρον τῆς σφαίρας, τόσον μικρότερος εἶναι ὁ σχηματιζόμενος κύκλος.

Παράλληλοι κύκλοι τῆς σφαίρας λέγονται οἱ κύκλοι τῶν ὁποί-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ων τά ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα λ.χ. οἱ κύκλοι ΑΗΒΘΑ καί ΓΣΔΓ (σχ70)

Πόλοι κύκλου λέγονται τά ἄκρα τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον τοῦ κύκλου τούτου. Ἐάν π.χ. ἡ διάμετρος ΕΖ εἶναι κάθετος ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου ΓΣΔΓ (ὅτε θά εἶναι κάθετος ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τοῦ παραλλήλου κύκλου ΑΗΒΘΑ) τά ἄκρα αὐτῆς Ε καί Ζ εἶναι οἱ πόλοι τοῦ κύκλου ΓΣΔΓ (καθώς καί τοῦ ΑΗΒΘΑ) (σχ.70). Οἱ πόλοι ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπ'ὅλα τά σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τῆς σφαίρας τοῦ ὁποίου εἶναι πόλοι.

Σημείωσις. Διά νά γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου ἐπάνω εἰς σφαῖραν, μεταχειριζόμεθα τόν σφαιρικόν διαβήτην τοῦ ὁποίου τά σκέλη εἶναι καμπύλα.

Πρός τοῦτο στηρίζομεν τό ἄκρον τοῦ ἑνός σκέλους αὐτοῦ εἰς ἕν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καί περιστρέφομεν τό ἄκρον τοῦ ἄλλου σκέλους ἐπί τῆς ἐπιφανείας μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τό πρῶτον σημεῖον· τότε θά γραφῇ περιφέρεια κύκλου, τοῦ ὁποίου πόλος εἶναι τό σημεῖον εἰς τό ὁποῖον ἐστηρίζετο τό ἄκρον τοῦ ἑνός σκέλους.

2. Σφαιρικόν τμῆμα. Ἐάν κόψωμεν μέ δύο παράλληλα ἐπίπεδα τό μεταξύ τῶν παραλλήλων τούτων ἐπιπέδων περιλαμβανόμενον μέρος τῆς σφαίρας λέγεται σφαιρικόν τμῆμα (τοιοῦτον εἶναι τό μέρος ΑΒΓΔ) Σφαιρικόν τμῆμα λέγεται καί οἱονδήποτε μέρος τῆς σφαίρας ἀποκοπτόμενον μέ ἕνα μόνον ἐπίπεδον, π.χ. τό μέρος ΓΕΔΣΓ (σχ.70).

Βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος λέγονται οἱ δύο κύκλοι εἰς τούς ὁποίους περατοῦται. Ὅταν ὅμως περατοῦται εἰς ἕνα μόνον κύκλον, τότε ὁ κύκλος οὗτος λέγεται βάσις αὐτοῦ.

Ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος λέγεται ἡ κάθετος τήν ὁποίαν φέρομεν μεταξύ τῶν βάσεών του. Ὅταν ὅμως ἔχει μίαν μόνον βάσιν, τότε τό ὕψος αὐτοῦ εἶναι ἡ κάθετος τήν ὁποίαν φέρομεν ἀπό

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ πόλου εἰς τό κέντρον τῆς βάσεώς του, (βέλος).

3. Σφαιρική Ζώνη λέγεται τό μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τό ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξύ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (π.χ. ἡ ἐπιφάνεια ΑΒΓΔ)(σχ.70).

Βάσεις καί ὕψος τῆς σφαιρικῆς ζώνης λέγονται τά αὐτά τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

4. Τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι ἴσον μέ τό γινόμενον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου αὐτῆς ἐπί τήν διάμετρόν της

Ἐάν παραστήσωμεν τήν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας μέ τό r , ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου αὐτῆς θά εἶναι 2π.r καί ἡ διάμετρός της 2 r ἑπομένως ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι κατά τά ἀνωτέρω 2π.r . 2 r ἤ $\boxed{4.\pi.r^2}$ οὗτος εἶναι ὁ τύπος μέ τόν ὁποῖον εὑρίσκομεν τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ὅταν γνωρίζωμεν τήν ἀκτῖνα αὐτῆς καί ὅταν γνωρίζομεν τήν διάμετρον d τό $\boxed{S = \pi d^2}$.

Ἐφαρμογή. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι π.χ. ἡ ἀκτίς σφαίρας εἶναι 3 μέτρα· τό ἐμβαδόν αὐτῆς θά εἶναι $4 \times 3{,}1415 \times 3^2$, ἤτοι 113,094 m^2.

5. Τό ἐμβαδόν τῆς σφαιρικῆς ζώνης εἶναι ἴσον μέ τό γινόμενον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας ἐπί τό ὕψος τῆς ζώνης.

Ἐάν παραστήσωμεν μέ τό h τό ὕψος τῆς ζώνης, τότε τό ἐμβαδόν τῆς σφαιρικῆς ζώνης εὑρίσκεται ἀπό τόν τύπον $\boxed{2.\pi.r.h.}$

Ἐφαρμογή. Ἄς ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου σφαίρας εἶναι 10,70 m, τό δέ ὕψος τῆς ζώνης εἶναι 1,50 m, τότε τό ἐμβαδόν αὐτῆς εἶναι $10.70 \times 1{,}50$, ἤτοι 16,05 m^2.

6. Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι ἴσος μέ τό τρίτον τοῦ γινομένου τῆς ἐπιφανείας της ἐπί τήν ἀκτῖνα της.

Ἐάν παραστήσωμεν μέ r τήν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς εἶναι· $4.\pi.r^2$ καί ἑπομένως ὁ ὄγκος της εἶναι $\frac{4}{3}.\pi.r^2.r.$ $\frac{4}{3}\pi.r^3$. οὗτος εἶναι ὁ τύπος μέ τόν ὁποῖον εὑρίσκομεν τόν ὄγ-

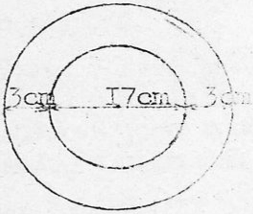
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κον τῆς σφαίρας, ὅταν γνωρίζομεν τήν ἀκτῖνα της· καί ὅταν γνωρίζομεν τήν διάμετρον ὁ ὄγκος δίδεται ἀπό τόν τύπον $\boxed{\dfrac{\pi d^3}{6}}$

7. Ἐφαρμογαί.

1. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀκτίς σφαίρας εἶναι 2 μέτρα τότε ὁ ὄγκος της θά εἶναι $\frac{4}{3} X 3,1415 X 2^3$ ἤ $\frac{4 X 3,1415 X 8}{3} = 33,49 m^3$

2. Σφαῖρα κοίλη ἐκ λευκοσιδήρου ἔχει πάχος μέν 3 cm, διάμετρον δέ ἐξωτερικήν 23 cm. Νά εὑρεθῇ τό βάρος της, ἄν τό είδ.βάρος σιδήρου εἶναι 7,2 (σχ.71).



Σχ. 71

Λύσις. Εὑρίσκομεν τόν ὄγκον τῆς κοίλης σφαίρας ἀφαιροῦντες τόν ὄγκον τῆς ἐσωτερικῆς ἀπό τόν ὄγκον τῆς ἐξωτερικῆς.

Ἡ διάμετρος τῆς ἐσωτερικῆς εἶναι 0,17m ὁπότε θά ἔχομεν:

$$D = 0,23m \quad d = 0,17m \quad V = \frac{\pi}{6}(D^3 - d^3)$$

$$V = \frac{3,14}{6} X (0,23^3 - 0,17^3)$$

$$V = 0,00266\ m^3 \qquad \beta = v.\varepsilon =$$

$$= 0,00266 X 7,2 = 0,019152 \text{ τόννοι.}$$

Ἀσκήσεις

1. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος καί , τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας τῆς ὁποίας ἡ ἀκτίς εἶναι 0,10 τοῦ μέτρου;

'Απ.(0,12566 m^2).

2. Ἡ διάμετρος σφαίρας εἶναι 6,20. Πόσον εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας καί ὁ ὄγκος της. 'Απ.(120,759 m^2)

Σημείωσις: Ὅταν δέν γνωρίζομεν τήν διάμετρον σφαίρας εὑρίσκομεν αὐτήν πρακτικῶς ὡς ἑξῆς:-

Θέτομεν ἐπ'αὐτῆς ἕν ἐπίπεδον ἐπί τοῦ ὁποίου στηρίζεται ἡ σφαῖρα καί τό θέτομεν παραλλήλως πρός ἄλλο ἐπίπεδον, ἡ δέ μεταξύ τῶν δύο ἐπιπέδων τούτων φερομένη κάθετος εἶναι ἡ ζητουμένη διάμετρος, τό δέ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

3) Ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου σφαίρας εἶναι 51,496 m. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας; 'Απ(8196 m).

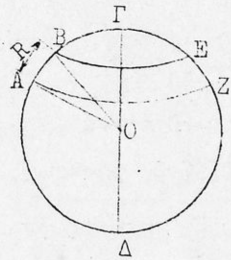
4) Σφαῖρα τῆς ὁποίας ἡ ἀκτίς εἶναι 0,05 τοῦ m. ἐκυλίσθη ἐπάνω εἰς ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν καί διέτρεξεν 10,06 m. Πόσας περιστροφάς ἔκανε περί τόν ἄξονά της; 'Απ. (32 περίπου).

5) Νά εὑρεθῆ τό βάρος εἰς τόννους καί ὀκάδας σφαίρας κοίλης ἐκ σιδήρου πάχους 8 mm καί διαμέτρου ἐξωτερικῆς 8 cm ἄν ειδικ. βάρος σιδήρου 7,8. 'Απ. 0,001019 τόν.,0,8όκ

6) Ἕνα σφαιρικόν τμῆμα ἔχει μῆκος περιφερείας 50 mm καί βέλος 10 mm. Νά εὑρεθῆ ἡ ἀκτίς τῆς ὁποίας μέρος εἶναι τό σφαιρικόν τμῆμα καί ἐν συνεχείᾳ ὁ ὄγκος καί τό βάρος αὐτῆς, ἄν εἶναι ἐξ ἀλουμινίου ειδικοῦ βάρους 2,56; 'Απ.8,17 cm 22,83 cm^3 58,44 gr

7) Ἡ ἀκτίς σιδηρᾶς σφαίρας εἶναι 0,20 m . Πόσον εἶναι τό βάρος της; τό ειδ. βάρος τοῦ χυτοῦ σιδήρου εἶναι 7,6.
'Απ. 254,66 Kgr

8) Ἡ ἐσωτερική διάμετρος σιδηρᾶς κοίλης σφαίρας εἶναι 16 cm καί τό πάχος τοῦ φλοιοῦ αὐτῆς εἶναι 2 cm. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ φλοιοῦ αὐτῆς, τό ἐμβαδόν αὐτῆς καί πόσον τό βάρος της, ἄν ειδ.βάρος 7,86. 'Απ. 2043,09 cm^3, 1256 cm^2 16058,69 gr.



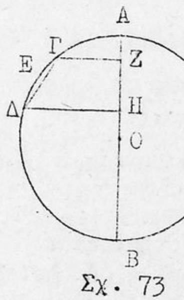
Σχ. 72

9) Σφαιρικός τομεύς λέγεται τό παραγόμενον ὑπό τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΟΑΒ στρεφομένου περί τήν διάμετρον ΓΔ μή τέμνουσαν αὐτόν (σχ.72).

Βάσις τοῦ σφαιρικοῦ τομέως εἶναι ἡ ζώνη τήν ὁποίαν γράφει τό τόξον ΑΒ.

10) Ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τομέως ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῆς ζώνης ἡ ὁποία εἶναι ἡ βάσις αὐτοῦ ἐπί τό τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας ἤτοι:

$$\boxed{V = \frac{2\pi . r^2 . h}{3}}$$



Σχ. 73

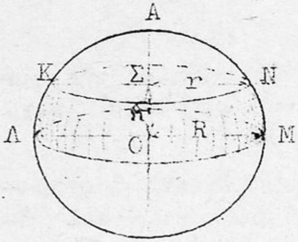
11) Σφαιρικός δακτύλιος λέγεται τό στερεόν τό ὁποῖον παράγεται ἀπό τό κυκλικόν τμῆμα ΓΕΔ (σχ.73), ὅταν τοῦτο στραφῆ περί τήν διάμετρον ΑΒ μή τέμνουσαν αὐτό.

12) Ὁ ὄγκος αὐτοῦ προφανῶς εὑρίσκεται ἐάν ἀπό τόν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ τομέως ἀ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

φαιρέσωμεν τόν ὄγκον τοῦ τριγώνου (ΟΓΔ), δίδεται δέ ἀπό τόν τύπον

$$\boxed{V = \frac{\pi.(\Gamma\Delta)^2.(ZH)}{6}}$$



Σχ. 74

13) Σφαιρικόν τμῆμα λέγεται τό μέρος τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας τό περιεχόμενον μεταξύ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (σχ. 74) τό ΚΝ καί ΜΛ.

Βάσεις τοῦ τμήματος εἶναι αἱ κυκλικαί τομαί ὑπό τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν.

Ὕψος εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν δύο κύκλων ΟΣ. (σχ.74) Ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος δίδεται ἀπό τόν τύπον.

$$V = \frac{\pi.h^3}{6} + \frac{\pi(R^2+r^2).h}{2}$$

ἤ ἁπλούστερα $\boxed{V = \frac{\pi.h}{6}(3R^2+3r^2+h^2).}$

Ἐάν τό σφαιρικόν τμῆμα ἔχει μίαν μόνον βάσιν εἰς τό ΚΝΑ(σχ. 74), δηλαδή σφαιρικόν κύπελον, τότε ὁ ὄγκος του δίδεται ἀπό τόν τύπον.

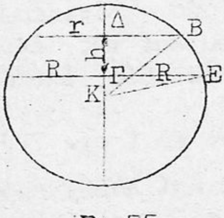
$$\boxed{V = \frac{\pi.h}{6}(3r^2+h^2)} \qquad \text{ἔνθα} \quad h = A\Sigma$$

Ἄν δέ ὁ ὄγκος ἐκφρασθῆ συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τῆς σφαίρας εἰς τήν ὁποίαν ἀνήκει τό τμῆμα καί τοῦ ὕψους τότε

$$V = \frac{\pi.h^2}{3}.(3R-h).$$

14. Ἐ φ α ρ μ ο γ ή

Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τμήματος, ἄν ἡ μέν ἀκτίς τῆς σφαίρας εἶναι 5 m, αἱ δέ βάσεις τοῦ τμήματος ἀπέχουν τοῦ κέντρου 1 m καί 3m. .



Σχ.75

Λύσις. Πρῶτον θά ὑπολογίσωμεν τάς ἀκτῖνας R καί r ἀπό τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΔΒ(σχ.75) καί ΚΓΕ. ΚΔ = 3 m ΚΓ = 1 m ΚΕ = 5m ΚΒ = 5m.

Ἐξαυτῶν ἔχομεν ΓΕ = R = 4,89 m ΔΒ = r = =4 m ΓΔ = h = 2 m . Ἐφαρμόζομεν τόν τύπον.

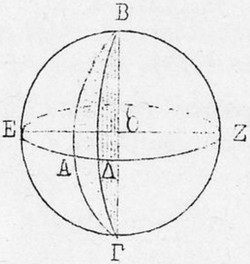
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$V = \frac{\pi . h}{6} (3R^2 + 3r^2 + h^2)$$

$$V = \frac{3,14 \times 2}{6} \times (3 \times 23,91 + 3 \times 16 + 4) \text{ καί}$$

$$V = 129,504 \text{ m}^3.$$

15) Σφαιρική ἄτρακτος λέγεται τό μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τό περιλαμβανόμενον μεταξύ δύο μεγίστων ἡμιπεριφερειῶν· π.χ. τό μέρος ΒΑΓΔΒ (σχ.76).



Σχ. 76

16) <u>Γωνία ἀτράκτου</u> λέγεται ἡ σχηματιζομένη ὑπό τῶν ἡμιπεριφερειῶν καί ἔχει μέτρον τό τόξον ΑΔ τό ἀποκοπτόμενον ὑπό τοῦ μεγίστου κύκλου ΕΑΖΕ τοῦ καθέτου ἐπί τῆς ΒΓ (σχ.76).

17) <u>Ἐμβαδόν ἀτράκτου ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ τόξου της ἐπί τήν διάμετρον τῆς σφαίρας</u> $\boxed{S = l . \bar{d}}$ ἔνθα l τό μῆκος τοῦ τόξου καί ἡ $\bar{d}$ διάμετρος τῆς σφαίρας ἤ $\boxed{S = \frac{\pi r^2 \mu^o}{90}}$

Ἔνθα μ^o γωνία τῆς ἀτράκτου καί r ἀκτίς σφαίρας.

* <u>Σφαιρικός ὄνυξ</u> καλεῖται τό μέρος τῆς σφαίρας τό περιεχόμενον μεταξύ δύο μεγίστων ἡμικυκλίων καί τῆς ὑπ' αὐτῶν ὁριζομένης ἀτράκτου (σχ.76) δηλαδή τό στερεόν ΑΒΓΔΒ.

18). <u>Ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος ἰσοῦται μέ τό ἐμβαδόν τῆς ἀτράκτου του ἐπί τό τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας</u> ἤτοι:-

$$V = \frac{\pi r^2 \mu^o}{990} \cdot \frac{r}{3} \text{ ἤ } \boxed{V = \frac{\pi r^3 \mu^o}{270}} .$$

20.* <u>Ὄνυξ κυλινδρικός</u>

Λέγεται τό στερεόν τό περιλαμβανόμενον ὑπό δύο ἐπιπέδων διερχομένων διά τοῦ ἄξονος κυκλικοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου καί τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς περιλαμβανομένης μεταξύ τῶν δύο ἐπιπέδων.

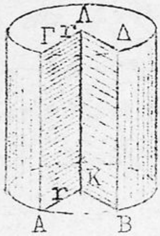
Ἔστω κυκλικός ὀρθός κύλινδρος ἔχων τόν ἄξονα ΚΛ (σχ. 77). Ἐάν διά τοῦ ἄξονος τούτου φέρωμεν τά ἐπίπεδα ΑΓΛΚ καί ΛΔΒΚ, προκύπτει τό στερεόν ΑΒΚΔΛΓ ὅπερ λέγεται <u>κυλινδρικός ὄνυξ</u>. <u>Ὁ κυλιν-</u>

* Τά δι' ἀστερίσκου σημειούμενα νά διδαχθοῦν ἐάν ὑπάρχη χῶρος

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δρικός ὄνυξ ἔχει τάς δύο βάσεις τοῦ ΑΚΒ καί ΓΛΔ κυκλικούς τομεῖς.

Τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ ὄνυχος τούτου δίδεται ἀπό τόν τύπον:-



Σχ. 77

$\boxed{S = r\,\mu^{o}h}$ (I) ἔνθα r εἶναι ἡ ἀκτίς τῶν κύκλων τῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου, h τό ὕψος αὐτοῦ, μ ἡ γωνία τῶν ἐπιπέδων μετρουμένη διά μήκους τόξου ἀκτῖνος μονάδος (ἀκτίνια), S τό ἐμβαδόν. Ἐάν ἡ γωνία μ μετρᾶται διά μοιρῶν τότε ὁ τύπος (I) μετασχηματίζεται εἰς τόν (II)

$\boxed{S = \frac{\pi r \cdot \mu^{o} \cdot h}{180}}$ (II) ἔνθα π εἶναι ὁ γνωστός γεωμετρικός ἀριθμός 3,14. Ἐάν θέλωμεν τήν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ ὄνυχος τότε εἰς τόν τύπον (I) καί (II) πρέπει νά προστεθῆ καί τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο κυκλικῶν τομέων ΑΚΒ καί ΓΛΔ, ὅτε τό ὁλικόν τοῦτο ἐμβαδόν S δίδεται ὑπό τοῦ τύπου (III).

$\boxed{S_o = r\mu(h+r)}$ (III), ἐάν ἡ γωνία μ μετρᾶται διά τοῦ μήκους τόξου ἀκτῖνος μονάδος ἤ $S_o = \frac{\pi . r . \mu^{o}}{180} \cdot (h+r)$ (III) ἐάν μετρᾶται διά μοιρῶν.

Ὁ ὄγκος τοῦ ὄνυχος δίδεται ὑπό τοῦ τύπου: $\boxed{V = \frac{1}{2}\mu . r^{2} . h}$ ἐάν ἡ γωνία μ μετρᾶται διά μήκους τόξου ἀκτῖνος μονάδος καί

$\boxed{V = \frac{\pi\mu^{o} . r^{2} . h}{360}}$ ἐάν ἡ μ μετρᾶται διά μοιρῶν.

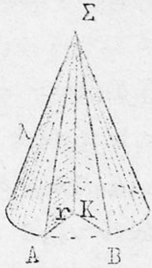
21. * Κωνικός ὄνυξ.

Λέγεται τό στερεόν τό περιεχόμενον μεταξύ δύο ἐπιπέδων διερχομένων διά τοῦ ἄξονος κυκλικοῦ ὀρθοῦ κώνου καί τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ τῆς περιλαμβανομένης ὑπό τῶν δύο ἡμιεπιπέδων.

Ἔστω κυκλικός ὀρθ. κῶνος ὁ ΣΚ (σχ. 78). Ἐάν διά τοῦ ἄξο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νός ΣΚ φέρωμεν τά δύο ἐπίπεδα ΣΑΚ καί ΣΒΚ, λαμβάνομεν τό στερεόν ΣΑΒΚ τό ὁποῖον λέγεται κωνικός ὄνυξ.



Σχ.78

Τό ἐμβαδόν S τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας εἶναι $S = \frac{1}{2} . r . \mu . \lambda$ (I) ἔνθα r ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως τοῦ κώνου, λ ἡ πλευρά αὐτοῦ καί μ ἡ γωνία τῶν ἐπιπέδων μετρουμένη διά τόξου ἀκτῖνος ἴσης μέ τήν μονάδα. Ἐάν ἡ γωνία μ μετρηθῆ διά μοιρῶν, ὁ τύπος (I) γίνεται $\boxed{S = \frac{\pi . r . \mu^o . \lambda}{360}}$ (II).

Ἐάν θέλωμεν τήν ὁλικήν ἐπιφάνειαν τοῦ κωνικοῦ ὄνυχος πρέπει, εἰς τόν τύπον I καί II νά προσθέσωμεν τό ἐμβαδόν τοῦ κυκλικοῦ τομέως τῆς βάσεώς του ἤτοι $\boxed{S_o = \frac{1}{2} . r . \mu . (\lambda + r)}$ III ἔνθα μ μῆκος τόξου ἀκτῖνος ἴσης μέ τήν μονάδα ἤ $\boxed{S_o = \frac{\pi . r . \mu^o}{360} (\lambda + r)}$ III ἔνθα μ παριστᾶ μοίρας.

Ὁ ὄγκος V τοῦ κωνικοῦ ὄνυχος δίδεται ὑπό τοῦ τύπου $\boxed{V = \frac{1}{6} r^2 \mu . h}$ ἔνθα μ μῆκος τόξου ἀκτῖνος ἴσης μέ τήν μονάδα, h τό ὕψος τοῦ κώνου, ἤ $\boxed{V = \frac{1}{3} . \frac{\pi . r^2 . \mu . h}{360},}$ ἔνθα μ εἰς μοίρας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

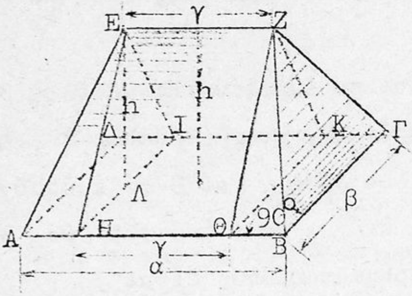
Ὄγκος διαφόρων πολυέδρων

1. * Σφήν

Ὁ ὄγκος σφήνας εὑρίσκεται ἀπό τόν τύπον $\boxed{V = \frac{(2\alpha + \gamma) \beta h}{6}}$ ἔνθα $\alpha = AB$, $\beta = B\Gamma$, $\gamma = EZ$ καί h τό ὕψος τῆς σφήνας.

Διά νά εὕρωμεν τόν ὄγκον τῆς σφήνας φέρομεν ἐκ τῶν Ε καί Ζ (σχ.79) καθέτους ἐπί τήν εὐθεῖαν ΑΒ τάς ΕΗ καί ΖΘ καί ἐκ τῶν σημείων Η καί Θ καθέτους ἐπί τήν εὐθεῖαν ΔΓ τάς ΗΙ καί ΘΚ καί ἑνώνομεν τά Ι καί Κ μέ τα σημεῖα Ε καί Ζ διά τῶν εὐθειῶν ΕΙ καί ΖΚ ...

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Σχ. 79

πότε ἡ σφήνα χωρίζεται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας μέ βάσεις ὀρθογώνια καί εἰς ἕνα πρῖσμα τριγωνικόν μέ βάσιν τό τρίγωνον ΕΗΙ. Τό κομμάτι

$$ΑΗ = \frac{\alpha - \gamma}{2}$$

Ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος

(ΕΙΗΘΚΖ) = (ΕΗΙ) . (ΕΖ).

Τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου

$$(ΕΗΙ) = \frac{(ΗΙ)\ .\ (ΕΛ)}{2}.$$

Ἀλλά ΕΛ = h τό ὕψος τῆς σφήνας, ΗΙ = β ὁπότε ἔχομεν ἄν ἀντικαταστήσωμεν $V = \frac{\beta.\gamma.h}{2}$

Ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος:

$$(ΕΑΗΙΔ) = \frac{1}{3}(ΑΗΙΔ).h = \frac{1}{3}\ (ΑΗ).(ΑΔ).h = \frac{1}{3}\ \frac{\alpha - \gamma}{2}.\beta.h = \frac{(\alpha-\gamma).\beta.h}{6}.$$

Ἐπειδή αἱ δύο πυραμίδες εἶναι ἴσαι, ἔχομεν τελικόν ὄγκον τῆς σφήνας

$$V = \frac{\beta.\gamma.h}{2} + 2\ .\ \frac{(\alpha - \gamma).\beta.h}{6}\ ἤ$$

$$V = \frac{\beta.\gamma.h}{2} + \frac{(\alpha - \gamma).\beta.h}{3} = \frac{3\beta\gamma.h + 2\alpha\beta.h - 2\beta.\gamma.h}{6}$$

$$V = \frac{\beta\gamma.h + 2\alpha\beta.h}{6} = \frac{(2\alpha + \gamma).\beta.h}{6}$$

Ὥστε ὁ ὄγκος τῆς σφήνας δίδεται ἀπό τόν τύπον.

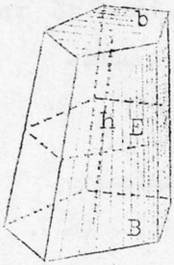
$$\boxed{V = \frac{(2\alpha + \gamma).\beta.h}{6}}$$

2.*Πρισματοειδές

Λέγεται τό πολύεδρον τοῦ ὁποίου δύο μέν ἕδραι εἶναι πολύγωνα παράλληλα ἔχοντα ἴσας τό πλῆθος πλευράς χωρίς νά εἶναι πο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λύγωνα ὅμοια, αἱ δέ λοιπαί ἕδραι εἶναι τρίγωνα ἤ τραπέζια. Αἱ δύο παράλληλοι ἕδραι λέγονται βάσεις τοῦ πρισματοειδοῦς, ὕψος δέ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων (σχ.80).



Σχ. 80

Ἄν B εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς μεγάλης βάσεως, b τό ἐμβαδόν τῆς μικρῆς βάσεως h, ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων καί S τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς ἡ ὁποία ἀπέχει ἴσον ἀπό τάς δύο βάσεις ὁ ὄγκος τοῦ πρισματοειδοῦς εἶναι

$$V = \frac{h}{6}(B + 4S + b).$$

Μερική περίπτωσις ὅταν τό πρισματοειδές ἔχει βάσεις ὀρθογώνια διαστάσεων α, β καί A, B ἡ τομή ἡ ἴσον ἀπέχουσα τῶν βάσεων ἔχει διαστάσεις $\frac{A+\alpha}{2}$, $\frac{B+\beta}{2}$ (ὡς εἶναι πλωτή δεξαμενή), τότε ὁ τύπος γίνεται

$$V = \frac{B.h}{6}(2A + \alpha) + \frac{b.h}{6}(2\alpha + A).$$

Ἐφαρμογή. 1. Σωρός χαλίκων ἔχει σχῆμα πρισματοειδοῦς μέ βάσεις ὀρθογώνια διαστάσεων 2,30 X 1,80 καί 1,50 X 120 ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων εἶναι 0,90. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος.

Λύσις, Ἐφαρμόζομεν τόν τύπον $V = \frac{B.h}{6}.(2A+\alpha) + \frac{b.h}{6}(2\alpha+A)$

ἔνθα: $A = 2{,}30$ $B = 1.80$ $\alpha = 1{,}50$ $\beta = 1{,}20$ $h = 0{,}90$.

ὁπότε $V = \frac{1{,}80 \times 0{,}90}{6}(2 \times 2{,}30 + 1{,}50) + \frac{1{,}20 \times 0{,}90}{6} \times (2 \times 1{,}50 + 2{,}30)$

$$V = 0{,}3 \times 0{,}9 \times (4{,}6 + 1{,}5) + 0{,}2 \times 0{,}90 \times (3 + 2{,}30)$$

καί $V = 2{,}601$ m^3.

3. * Ὄγκος οἱουδήποτε στερεοῦ.

Διά νά εὕρωμεν τόν ὄγκον οἱουδήποτε στερεοῦ μεταχειριζόμεθα

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

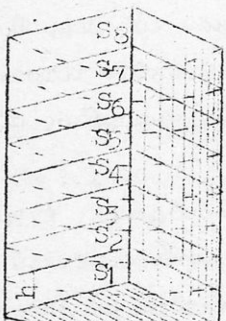
τόν τύπον τοῦ Σύμψωνος.

Δηλαδή διαιροῦμεν τό στερεόν κατά μίαν διάστασιν εἰς ἴσα μέρη καί ἄρτια τό πλῆθος. Κατόπιν εὑρίσκομεν τό ἐμβαδόν ἑκάστης τομῆς πάλιν μέ τήν μέθοδον Σύμψωνος. Ἐπίσης εὑρίσκομεν τήν ἀπόστασιν μεταξύ δύο τομῶν καί ἐφαρμόζομεν τόν τύπον.

$$V = \frac{h}{3}\left[(S_1 + S_8) + 2\,(S_3 + S_5 + S_7) + 4.(S_2 + S_4 + S_6)\right] \quad (\sigma\chi.\ 81)$$

ἔνθα h ἡ ἀπόστασις τῶν δύο τομῶν καί S_1 S_2 κ.λ.π τά ἐμβαδά ἑκάστης τῶν τομῶν.

Ὥστε διά νά εὕρωμεν τόν ὄγκον ἑνός τοιούτου στερεοῦ θά προσθέτωμεν τά ἐμβαδά ὡς ἑξῆς: 1) Τό πρῶτον καί τό τελευταῖον ὅπως ἔχει, 2) Τά ἄρτια τό πλῆθος θά τά πολλαπλασιάζωμεν ἐπί 4 καί θά τά προσθέτωμεν, 3) Τά περιττά τό πλῆθος θά τά πολλαπλασιάζωμεν ἐπί δύο καί θά τά προσθέτωμεν. Τό ἄθροισμα δέ αὐτό θά τό πολλαπλασιάζωμεν ἐπί τό τρίτον τῆς ἀποστάσεως τῶν τομῶν π.χ. Ἔστω ὅτι αἱ τομαί τοῦ (σχ.81



Σχ.81

ἔχουν ἐμβαδά κατά σειράν τά ἑξῆς:

$S_1 = 3,2\ m^2$. $S_2 = 5,8\ m^2$, $S_3 = 7,6 m^2$

$S_4 = 10,3\ m^2$; $S_5 = 12\ m^2$, $S_6 = 12,3\ m^2$

$S_7 = 10,9\ m^2$, $S_8 = 10\ m^2$, ἡ δέ μεταξύ τῶν τομῶν ἀπόστασις 1,5 m

Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον ἔχομεν.

$$V = \frac{1,5}{3} \times \left[3,2+10+2\times(7,6+12+10,9) + 4\times(5,8+10,3+12,3)\right] = 0,5\times187,8 = 939 m^3$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Χ

Κυβισμός ξύλων.

Διά νά κυβίσωμεν ξύλα μεταχειριζόμεθα διαφόρους μεθόδους αἱ ὁποῖαι μᾶς δίδουν τόν ὄγκον τους μέ κάποιαν σχετικήν ἀκρίβειαν.

Ὁ κορμός τῶν δένδρων θεωρεῖται ἐν γένει ὡς κόλουρος κῶνος μέ μικράν διαφοράν τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεών του R, r. Δυνάμεθα ὅμως νά ἐξομοιώσωμεν αὐτόν μέ κύλινδρον τοῦ αὐτοῦ ὕψους h καί μέ ἀκτῖνα βάσεως $\frac{R+r}{2} = \alpha$ ὁπότε ὁ ὄγκος αὐτοῦ δίδεται ἀπό τόν τύπον

$V = \pi.\left(\frac{R+r}{2}\right)^2.h.$ $V = \pi\alpha^2.h$ (I).

Εἰς τήν πρᾶξιν ὅμως μετροῦμεν διά ταινίας τό μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ μέσου τοῦ κορμοῦ $M = 2\pi\alpha$. Ὁπότε $\alpha = \frac{M}{2\pi}$ καί ὁ ἀνωτέρω τύπος γίνεται: $V = \pi.\frac{M^2}{4\pi^2}.h$ ἤ $V = \left(\frac{M}{2}\right)^2.\frac{1}{\pi}.h$ (II).

Διά τῶν τύπων I καί II εὑρίσκομεν τόν ὄγκον τοῦ κορμοῦ τοῦ μετά φλοιοῦ. Εἰς τό ἐμπόριον ὅμως ἀγοράζομε τήν ξυλείαν τετραγωνισμένην δηλ. εἰς σχῆμα παραλληλεπιπέδου ἤ κολούρου πυραμίδος μέ βάσεις τετράγωνα.

Ἐάν ὁ κορμός τοῦ δένδρου εἶναι σχεδόν κυλινδρικός ἐγγράφομεν εἰς μίαν τῶν βάσεών του τετράγωνον. Κατόπιν ἀφαιροῦμεν τά ἐξωτερικά τεμάχια λαμβάνομεν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μέ βάσιν τετράγωνον καί ὕψος τό αὐτό, ὁπότε ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι $V = S.h$, ἔνθα S εἶναι τό ἐμβαδόν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τόν κύκλον ἀκτῖνος α τῆς μεσαίας τομῆς. Ἐπειδή δέ ἡ πλευρά τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ εἶναι, $\alpha\sqrt{2}$ τό $S = 2\alpha^2$ καί ὁ ὄγκος $V = 2\alpha^2.h$

ἤ $V = \left(\frac{M}{2}.\frac{1}{\Pi}\right)^2.2.h$

Ἐάν ὁ κορμός εἶναι κολουροκωνικός μετά τόν τετραγωνισμόν αὐ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ γίνεται κόλουρος πυραμίς μέ βάσεις τετράγωνα καί εὑρίσκομεν τόν ὄγκον τῆς κολούρου πυραμίδος.

Ἕνεκα τῶν ἀνωμαλιῶν τοῦ κορμοῦ παραδέχονται ὅτι χρειάζεται 1,66 m^3 ξύλου μετά φλοιοῦ διά νά δώσῃ 1 m^3 ξύλου τετραγωνισμένου.

Πρακτικά καί σύντομα καί μέ ἀρκετήν προσέγγισιν εὑρίσκομεν τόν ὄγκον ξυλείας μετά φλοιοῦ μή τετραγωνισμένης ὡς ἑξῆς:-

Εὑρίσκομεν τό μῆκος τῆς μέσης περιφερείας διά ταινίας, κατόπιν ἀπό αὐτήν ἀφαιροῦμεν τό ἕκτον καί λαμβάνομεν τό τέταρτον τοῦ ὑπολοίπου ὡς πλευράν τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἰς τήν μεσαίαν τομήν, ὁ δέ ὄγκος δίδεται ἀπό τόν τύπον

$$V = \left(\frac{M - \frac{M}{6}}{4}\right)^2 . h \quad ἤ \quad V = \left(\frac{5M}{24}\right)^2 . h$$

Ἐάν ὁ φλοιός εἶναι πολύ παχύς ἀφαιρεῖται τό πέμπτον, ὁπότε ὁ τύπος γίνεται $V = \left(\frac{M}{20}\right)^2 . h$

Ἐφαρμογαί

1. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κορμοῦ δένδρου μήκους 8,70 m ἄν αἱ ἀκτῖνες τῶν περιφερειῶν εἰς τά ἄκρα αὐτοῦ ἔχουν μήκη 1,25 m, καί 0,75 m

Λύσις: Ἐφαρμόζομεν τόν τύπον $V = \pi . \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 . h$

$R = 1,25 \quad r = 0,75 \quad h = 8,70 \quad \frac{R+r}{2} = 1$ ὁπότε

$V = 3,14 \times 1^2 \times 8,7$ καί $V = 27,318\ m^3$

2. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κορμοῦ δένδρου μετά τόν τετραγωνισμόν του ἐάν τό μῆκος του εἶναι 10,25 m καί ἡ μεσαία περιφέρειά του εἶναι 2,40 m.

Λύσις: Ἐφαρμόζομεν τόν τύπον τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἰς τήν μεσαίαν περιφέρειαν ἤτοι:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$V = \left(\frac{M - \frac{M}{6}}{4}\right)^2 . h \quad \text{ἔνθα } M = 2{,}40 \text{ m} \quad \frac{M}{6} = 0{,}40 \text{ m} \quad h = 10{,}25 \text{m.}$$

$$V = \left(\frac{2{,}40 - 0{,}40}{4}\right)^2 X\ 10{,}25 = 2{,}5625 \text{ m}^3$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

Εἰδικά λελυμένα προβλήματα ἐφαρμογῶν

1. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος 3,5 τόννων σιδήρου ὅταν τό εἰδικόν βάρος αὐτοῦ εἶναι 7,86.

Λύσις: $V = \frac{\beta}{\varepsilon}$ ἤ $V = \frac{3500}{7{,}86} = 458{,}02 \text{ dm}^3$ ἤ $0{,}45802 \text{ m}^3$.

2. Πόσας λίτρας ζυγίζουν 2 κυβικοί πόδες καί 3 κυβικαί ἴντζαι πετρελαίου ἐάν τό εἰδικόν βάρος τοῦ πετρελαίου εἶναι 0,8.

Λύσις: Ἕνας κυβικός πούς ἀπεσταγμένου νεροῦ ζυγίζει 62,4 λίτρας. Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν ἐπί τό εἰδικόν βάρος τοῦ πετρελαίου 0,8 εὑρίσκομεν ὅτι ἕνας κυβικός πούς = 62,4 X 0,8 = 49,92 λίτρας.

Ὁπότε οἱ 2 κυβ. πόδ. = 49,92 X 2 = 99,84 λίτρ. Ἐπειδή δέ ἕνας κυβικός πούς ἔχει 1728 κυβικάς ἴντζας, ἡ μία κυβική ἴντζα = 49,92 : 1728 = 0,029 λίτρας ὁπότε οἱ 3 κυβικές ἴντζες = 0,029 X3 = = 0,087 λίτρας καί οἱ 2 κυβικοί πόδες καί 3 κυβικ. ἴντζες = 99,927 λίτρας πετρελαίου.

3. Κυβική δεξαμενή χωρεῖ 2320 Kg ἐλαίου· ποία εἶναι ἡ πλευρά αὐτῆς;

Λύσις: Εὑρίσκομεν τόν ὄγκον ἐάν διαιρέσωμεν τό βάρος τοῦ ἐλαίου διά τοῦ εἰδικοῦ βάρους αὐτοῦ, ἤτοι:

$2320 : 0{,}91 = 2549 \text{ dm}^3$, ἤ $2{,}549 \text{ m}^3$, κατόπιν εὑρίσκομεν τήν κυβικήν ρίζαν αὐτοῦ καί ἔχομεν $\sqrt[3]{2{,}549} = 1{,}35$ m ἤ 135 cm.

4. Νά εὑρεθῇ ἡ πλευρά χαλυβδίνης ράβδου τετραγωνικῆς διατομῆς ἐάν τό βάρος αὐτῆς εἶναι 12,8 Kg καί τό ὕψος της 8 cm.

Λύσις. $V = \frac{\beta}{\varepsilon}$ ἤτοι $V = \frac{12{,}8}{7{,}6} = 1{,}6842 \text{ cm}^3$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

'Επειδή δέ ὁ ὄγκος = $\alpha^2 . h$ ἔνθα α ἡ πλευρά τῆς διατομῆς καί

$$\alpha = \sqrt{\frac{V}{h}} = \sqrt{\frac{1684,2}{8}} = \sqrt{210,5} = 14,58 \text{ cm}$$

5. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος μιᾶς ὀκᾶς οἰνοπνεύματος.

<u>Λύσις.</u> 'Επειδή μία ὀκά οἰνόπνευμα ἔχει βάρος 1280 gr, ὁ ὄγκος αὐτοῦ θά ἰσοῦται μέ 1280 : 0,78 = 1641 cm^3 . Ἔνθα 0,78 τό εἰδικόν βάρος τοῦ οἰνοπνεύματος.

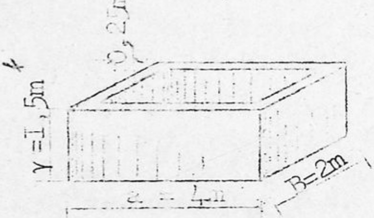
6. Πόσον πρέπει νά εἶναι τό ὕψος δοχείου τό ὁποῖον περιέχει ὑδράργυρον βάρους 1,5 Kgr . 'Η βάσις αὐτοῦ εἶναι ἑξάγωνον πλευρᾶς 0,5 cm .

<u>Λύσις:</u> $V = \frac{\beta}{\varepsilon} = \frac{1,5}{13,596} \div \frac{1500}{13596} = 0,11033 \text{ dm}^3$

$$S\beta = \frac{6\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6 \text{ X } 0,25 \text{ X } 1,73}{4} = 0,649 \text{ cm περίπου.}$$

$$h = \frac{110,33}{0,649} = 1,7 \text{ cm}$$

7. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ σιδηροπαγοῦς σκυροδέματος δεξαμενῆς ἀνοικτῆς ἄνωθεν σχήματος παραλληλεπιπέδου μήκους 4 m, πλάτους 2 καί ὕψους 1,5 m ὅταν τό πάχος τοῦ σκυροκονιάματος εἶναι 0,25 m (σχ. 82).



Σχ. 82

Λύσις: Διά νά εὕρωμεν τόν ὄγκον ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: εὑρίσκομεν τόν ὄγκον τῆς ὅλης δεξαμενῆς καθώς καί τόν ὄγκον τῆς ἐσωτερικῆς κενῆς δεξαμενῆς καί ἀφαιροῦμεν τούς δύο ὄγκους:
V = α.β.γ. ἐνθα α = 4, β = 2,
γ = 1,5 ὅθεν: V = 4 X 2 X 1,5 = 12m^3
V ἐσωτερικῆς = α΄. β΄. γ΄. ἔνθα,

α΄= 4 - 2 X 0,25 = 4 - 0,50 = 3,5 m
β΄= 2 - 2 X 0,25 = 2 - 0,50 = 1,5 m
γ΄= 1,5 - 0,25 = 1,25 m, ὁπότε V = 3,5 X 1,5 X 1,25 = 6,56 m^3 καί ὄγκος σκυροδέμ. 12 - 6,56 = 5,44 m^3 .

'Ομοίως εὑρίσκομεν τόν ὄγκον κάθε ἕδρας ὡς ἑξῆς: -

Ἕδρα βάσεως = 4 X 2 X 0,25 = 2 m^3

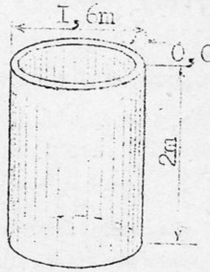
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Μεγάλη ἕδρα = 1,25 X 4 X 0,25 = 1,25 m3

Μικρή ἕδρα = 1,50 X 1,25 X 0,25 = 0,46875 m3 ὁπότε ὁ τελικός ὄγκος εἶναι

ἕδρα βάσεως =	2 m3
Δύο μεγάλαι ἕδραι 1,25 X 2 =	2,50 m3
Δύο μικραί ἕδραι 0,46875 X 2 =	0,9375m3
ὁλικός ὄγκος	5,3375 m3

8. Θέλομεν νά κατασκευάσωμεν δοχεῖον ἐκ σιδηροῦ ἐλάσματος (λαμαρίνας) πάχους 8 mm κυλινδρικοῦ σχήματος διαμέτρου ἐξωτερικῆς 1,6 m καί ὕψους 2 m ὡς τό σχῆμα 83.



Σχ.83

Ζητοῦνται α) ὁ ὄγκος του εἰς m3, β) ἡ χωρητικότης του εἰς τόννους, κιλά καί ὀκάδας ἐάν πρόκειται νά πληρωθῆ διά βενζίνης. Εἰδικ. βάρ. 0,8 γ) Τό ἐμβαδόν τῆς ἀπαιτουμένης λαμαρίνας διά τήν κατασκευήν του, δ) τό βάρος τῆς λαμαρίνας εἰς τόννους κιλά καί ὀκάδας ἐάν ειδικόν βάρος τοῦ σιδήρου εἶναι 7,8 καί ε) ἡ ἀξία τῆς λαμαρίνας εἰς δραχμάς ἐάν τό κιλό στοιχίζη 3000.

Λύσις.

$$r = 0,8 - 0,008 = 0,792$$

α) ὁ $V = \pi r^2 . h$, $V = 3,14 \times 0,792^2 \times 2 = 3,938\ m^3$

β) ἡ χωρητικότης = V.ε, β = 3,938 X 0,8 = 3,15 τόννους βενζίνης. =3150 Kg ἤ 3150 X 0,7[illegible]1 = [illegible],15 ὀκάδ.

γ) $S_o = S_\pi + 2S_\beta$ ἤτοι:

$$S_o = 2\pi r.h + 2\pi r^2 = 2\pi r.(h + r)$$

$$S_o = 2 \times 3,14 \times 0,792 \times 2 \qquad = 15,89\ m^2$$

δ) Εὑρίσκομεν τόν ὄγκον τῆς λαμαρίνας ἤτοι:-

V = 14,002 X 0,008 ≅ 0,112006 m3 καί B = V.ε ἤτοι:

B = 0,11112 X 7,8 = 0,866736 τόννοι = 866,736 Kg = = 679,920 ὀκάδ.-

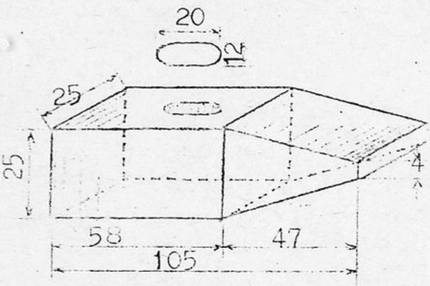
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ε) Ἡ ἀξία τῆς λαμαρίνας εἶναι 866,736X3000 = 2630208 δραχμ.

9. Προκειμένου νά κατασκευάσωμεν σφυρί ἐφαρμοστοῦ διαστάσεων ὡς τό κάτωθι σχῆμα 84, νά ὑπολογισθῇ πόσον μῆκος χάλυβος τετραγωνικῆς διατομῆς θά χρειασθῇ;

Ὑπολογίζομεν πρῶτον τόν ὄγκον τοῦ τραπεζοειδοῦς πρίσματος, δηλαδή τοῦ σφηνοειδοῦς τμήματος τοῦ σφυριοῦ.

Κατά τά γνωστά πρέπει νά εὕρωμεν πρῶτον τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος. Ἡ βάσις τοῦ πρίσματος εἶναι τραπέζιον καί τό ἐμβαδόν του = ἡμιάθροισμα 2 βάσεων ἐπί τό ὕψος =14,5X47=681,5 mm^2



Σχ. 84

καί 681,5 X 25 = 17037,5 mm^3 ὁ ὄγκος τοῦ τραπεζοειδοῦς πρίσματος.

Εὑρίσκομεν ἐπίσης τόν ὄγκον τῆς ὀπῆς. Ὁ ὄγκος τῆς ὀπῆς εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων ἑνός κυλίνδρου διαμέτρου 12 mm καί ὕψους 25 καί ἑνός παραλληλεπιπέδου διαστάσεων 8 X 12 X 25.

Ὄγκος κυλίνδρου =6.6.3,14.25 = 2826 mm^3, ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου 8.12.25 = 2400 mm^3

Προσθέτοντες τώρα τόν ὄγκον τῆς ὀπῆς εἰς τόν ὄγκον τοῦ σφηνοειδοῦς τμήματος τοῦ σφυριοῦ ἔχομεν : 17037,5 + 5226 =22263,5 mm^3

Ὁ ὄγκος οὗτος εἶναι θεωρητικῶς ἴσος μέ τόν ὄγκον τοῦ τμήματος τοῦ τετραγώνου χάλυβος, κατά τόν ὁποῖον πρέπει νά ἐλαττωθῇ τό μῆκος ὁλοκλήρου τοῦ σφυριοῦ ἤτοι τῶν 105 mm, διά νά μᾶς δώσῃ τό ἀπαιτούμενον μῆκος εἰς τό ὁποῖον θά κόπτωνται τά τεμάχια τοῦ χάλυβος διά νά μετασχηματισθοῦν διά σφυρηλατήσεως εἰς τάς διαστάσεις τοῦ σχήματος 84.

Ὥστε 22263,5 = 25,25M καί $M = \frac{22263,5}{25.25} = 35,5$ mm.

Ἀφαιροῦντες τοῦτο ἀπό τό ὁλικόν μῆκος ἔχομεν 105-35,5=69,5 προσθέτομεν καί 3,5 διά ἀπώλειες καί ἔχομεν 69+3,5 = 73 mm.

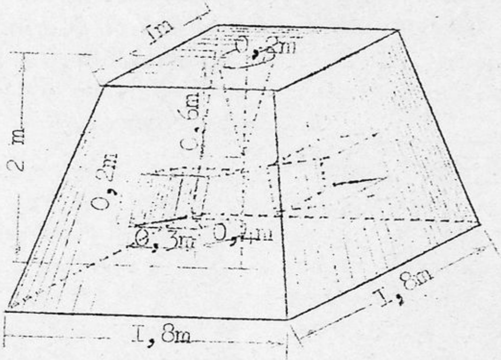
Ἄρα θά κόπτωμεν τά τεμάχια εἰς μῆκος 73 περίπου mm, ὥστε μετασχηματιζόμενα νά μᾶς δίδουν τάς διαστάσεις τοῦ σχ. 84

10. Ἡ βάσις ἑνός ἐλάστρου ἔχει σχῆμα κολούρου πυραμίδος μέ βάσεις τετράγωνα μέ διαστάσεις τῆς μέν μεγάλης 1,8 m τῆς δέ μι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κρῆς 1 m. Τό ὕψος αὐτῆς εἶναι 2 m. Εἰς τό ἄνω μέρος ὑπάρχει ὀπή σχήματος κώνου μέ ἀκτῖνα βάσεως 0,2 m καί βάθους 0,6 m καί εἰς τά πλάγια ὑπάρχουν 2 ὀπαί, καθέτως πρός τάς ἕδρας ὀρθογωνικῆς διατομῆς μέ διαστάσεις 0,2 m καί 0,3 m καί βάθους 0,4. m.

Ζητοῦνται ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τῆς βάσεως, ὁ ὄγκος καί τό βάρος αὐτῆς ἄν ἀποτελεῖται ἀπό χυτοσίδηρον εἰδικοῦ βάρους 7,08(σχῆμα 85).



Σχ. 85

Λύσις. Εὑρίσκομεν τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως ἤτοι:-

$$S_\pi = \frac{\text{Περ. ἄνω} + \text{Περ. κάτω}}{2} \cdot h_\varepsilon \ , \quad S_\pi = \frac{4 + 7,2}{2} X 2,06 = 11,368 m^3$$

Διά νά εὕρωμεν τήν ὁλικήν ἐπιφάνειαν πρέπει νά προσθέσωμεν τήν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ἐκτός τῆς βάσεώς του καί τήν ἐπιφάνειαν τῶν δύο ὀπῶν ἐκτός τῆς μιᾶς ἕδρας των.

$$S_\beta = 1,8^2 = 3,14 \, m^2 \qquad S_b = 1^2 = 1 \, m^2$$

$$S \text{ κων. } \pi r \lambda. \text{ ἔνθα } \lambda = \sqrt{0,2^2 + 0,6^2} = \sqrt{0,40} = 0,632$$

$$S \text{ κων.} = 3,14 X 0,632 X 0,2 = 0,396896 \, m^2$$

$$S \text{ ὀπῆς} = \text{Περίμ.} h + S_B = 1 X 0,4 + 0,2 X 0,3 = 0,4 + 0,06 =$$

$$= 0,46 \, m^2$$

καί ἐπειδή εἶναι δύο ὀπαί θά εἶναι τό διπλάσιον ἤτοι: 0,92 m^2.
Καί ἡ ὁλική ἐπιφάνεια εἶναι:-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$S_o = 11,368 + 3,24 + 1 + 0,39696 + 0,92 = 16,924896 \, m^2$$

$$\text{ὁ ὄγκος} = \frac{B + b + \sqrt{B.b}}{3} . h$$

$$B = 3,24 \, m^2 \qquad b = 1 \, m^2$$

$$B.b = 3,24 \times 1 = 3,24 \, m^2.$$

$\sqrt{B.b} = 1,8$ καί ὁ ὄγκος

$$V = \frac{3,24 + 1 + 1,8}{3} \times 2 = \frac{6,04 \times 2}{3} = \frac{12,08}{3} = 4,026 \, m^3$$

καί ἀπό αὐτόν θά ἀφαιρέσωμεν τόν ὄγκον τοῦ κώνου καί τῶν 2 ὀπῶν.

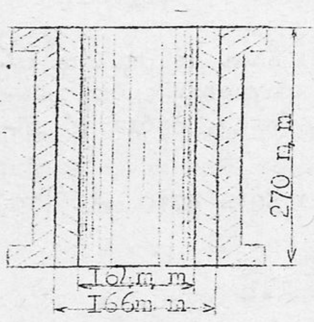
$$V \text{ κών.} = \frac{\pi r^2 . h}{3} = \frac{3,14 \times 0,04 \times 0,6}{3} = 0,02512 \, m^3$$

V ὀπῆς = $\alpha.\beta.\gamma = 0,3 \times 0,2 \times 0,4 = 0,024 \, m^3$ καί τῶν δύο ὀπῶν $0,024 \times 2 = 0,048 \, m^3$.

V κών.+ V δύο ὀπ. $0,02512 + 0,048 = 0,07312 \, m^3$ καί ὁ τελικός ὄγκος $4,026 - 0,07312 = 3,95288 \, m^3$.

Τό βάρος τῆς βάσεως εἶναι $3,95288 \times 7,8 = 30,832464$ τόννοι = $= 30832,464$ Kg.

11. Πρόκειται νά ἀναμεταλλώσωμεν κουζινέτο στροφαλοφόρου ἄξονος μιᾶς πετρελαιομηχανῆς. Ἡ διάμετρος τοῦ στροφαλοφόρου ἄξονος (ἐσωτερική διάμετρος τοῦ κουζινέτου) εἶναι 164 mm, ἡ διάμετρος τοῦ κουζινέτου ἐπί τοῦ ὁποίου θά χυθῆ τό λευκόν μέταλλον εἶναι 196 mm καί τό μῆκος του 270 mm. Εἰδικόν βάρος λευκοῦ μετάλλου 8,5. Ζητεῖται τό βάρος τοῦ λευκοῦ μετάλλου τό ὁποῖον θά ἀπαιτηθῆ διά τήν ἀναμετάλλωσιν(σχ.86)



Σχ.86

Λύσις:-

$$V = \pi.(R^2 - r^2).h$$

$$V = 3,14 \times (98^2 - 82^2) \times 270$$

$$V = 2441664 \, mm^3 = 2441,664 \, cm^3.$$

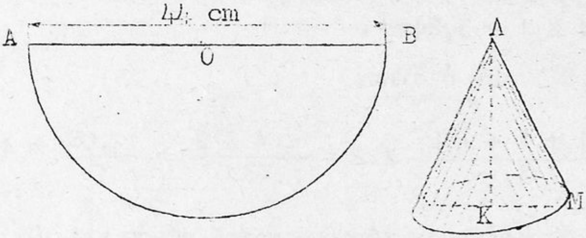
$$\beta = V.\varepsilon \qquad \beta = 2441,664 \times 8,5 =$$

$$= 20754,144 \, gr = 20,754 \, Kg.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

12. Ἀπό ἡμικύκλιον ἐκ λευκοσιδήρου μέ διάμετρον ΑΒ = 44 cm. σχηματίζεται χωνίον διά συγκολλήσεως τῶν ἀκτίνων ΟΑ καί ΟΒ. Ζητεῖται ἡ χωρητικότης αὐτοῦ (σχ. 87).

Λύσις: Μετά τήν συγκόλλησιν παράγεται κῶνος· εὑρίσκομεν τάς διαστάσεις τοῦ κώνου.



Σχ. 87

Τό μῆκος τοῦ τόξου ΑΒ $= \dfrac{\pi . d\ \mu^o}{360} = \dfrac{3,14 \times 44 \times 180}{360} = 69,08$ cm.

ἑπομένως μῆκος περιφερείας κώνου 69,08 καί ἡ διάμετρος αὐτοῦ $d = 22$ cm.

Τό ὕψος τοῦ κώνου ΚΛ $= \sqrt{22^2 - 11^2} = 19,05$ cm καί ὁ ὄγκος αὐτοῦ $= \dfrac{\pi r^2 . h}{3} = \dfrac{3,14 \times 11^2 \times 19,06}{3} = 2412,619$ cm^3.

Ὥστε ἡ χωρητικότης εἶναι 2413,885 cm^3

13. Θέλομεν νά κατασκευάσωμεν ἐλατήριον μέ 30 σπείρας διαμέτρου 50 mm καί διαμέτρου 5 mm. Νά εὑρεθῇ κατά προσέγγισιν τό βάρος τοῦ ἐλατηρίου ἄν ειδικ. βάρος χάλυβος εἶναι 7,6 (σχ. 88).

Σχ. 88

Λύσις: Δεχόμεθα ὅτι ὅλαι αἱ σπεῖραι εἶναι περιφέρειαι ἴσαι (πραγματικῶς δέν εἶναι διότι σχηματίζεται ἕλιξ), ὁπότε τό μῆκος εἶναι: -

$M = \pi . d . n = 3,14 \times 50 \times 30 = 4710$ mm.

ἤ 4,71 m.

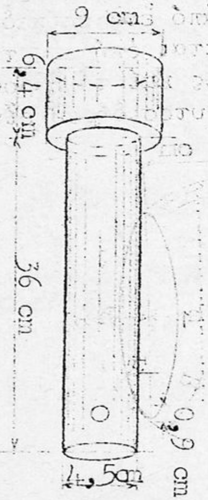
Ὁ ὄγκος $V = \dfrac{\pi\ d^2}{4} . h$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἤτοι $V = \dfrac{3{,}14 \times 0{,}005^2 \times 4{,}71}{4} = 0{,}000092433\ m^3 = 92{,}433\ cm^3$

καί τό βάρος $\beta = 92{,}433 \times 7{,}6 = 702{,}49$ gr περίπου.

14. Πύρος πλήρης ἐκ χάλυβος ἔχει διάμετρον κεφαλῆς 9cm καί ὕψος 6,4 cm, διάμετρον δέ κορμοῦ 4,5 cm καί μῆκος 36cm. Ζητεῖται τό βάρος αὐτοῦ κατά προσέγγισιν, ἐάν εἰς τό ἄκρον τοῦ κειμένου ἀντιθέτως τῆς κεφαλῆς ὑπάρχη ὀπή διαμέτρου 0,9 cm ειδ. βάρος 7,6 (σχῆμα 89).



Σχ. 89

Λύσις:- $V = \dfrac{\pi d^2 h}{4}$

V κεφ. $= \dfrac{3{,}14 \times 81 \times 6{,}4}{4} = 406{,}944\ cm^3.$

V κορμοῦ $= \dfrac{3{,}14 \times 20{,}25 \times 36}{4} = 572{,}265\ cm^3$

V ὀπῆς $= \dfrac{3{,}14 \times 0{,}81 \times 45}{4} = 2{,}8613\ cm^3$

κατά προσέγγισιν, διότι (ἀκριβῶς) ἡ ὀπή δέν εἶναι κύλινδρος, ἀλλά λόγῳ τῆς μικρᾶς διαμέτρου δύναται νά θεωρηθῆ τοιοῦτος.

καί ὁ τελικός ὄγκος:-

$V = V$ κεφαλ. $+ V$ κορμοῦ $- V$ ὀπῆς.

ἤτοι $V = 976{,}3477\ cm^3.$

καί τό βάρος:-

$\beta = 976{,}350 \times 7{,}6 = 7420{,}26$ gr $=$

$= 7{,}42026$ Kg.

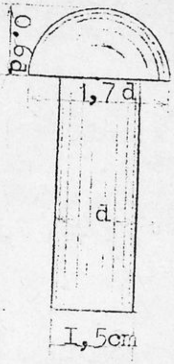
15. Διά τήν ἥλωσιν μιᾶς καπνοδόχου ἐχρειάσθησαν 45 καρφιά (πριτσίνια) τῶν ὁποίων τό μέν σχῆμα τοῦ κορμοῦ εἶναι κυλινδρικόν μέ διάμετρον 1,5 cm καί μῆκος τριπλάσιον τῆς διαμέτρου, τῆς δέ κεφαλῆς σφαιρικόν τμῆμα μέ διάμετρον βάσεως 1,7 τῆς διαμέτρου τοῦ κορμοῦ καί βέλος (ὕφος) κεφαλῆς 0,6 τῆς διαμέτρου τοῦ κορμοῦ. Ζητεῖται νά εὑρεθῆ τό βάρος τῶν 45 ἥλων ἐάν ειδικόν βάρος σιδήρου 7,8 (σχ.90).

Λύσις: $d = 1{,}5$ cm, $r = 1{,}275$ cm, $h = 0{,}90$ cm μῆκος 4,5 cm

Εὑρίσκομεν κατόπιν τόν ὄγκον τοῦ κορμοῦ ἐκ τοῦ τύπου:-

$V = \dfrac{\pi d^2}{4} \cdot h$ ἤ $\dfrac{3{,}14 \times 1{,}5^2 \times 4{,}5}{4} = 7{,}948\ cm^3.$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Σχ. 90

Εὑρίσκομεν κατόπιν τόν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ἐκ τοῦ τύπου:-

$$V = \frac{\pi . h}{6}(3r^2 + h^2)$$

$$V = \frac{3,14 \times 0,90}{6}(3 \times 1,275^2 + 0,9^2)$$

$$V = \frac{3,14 \times 0,3}{2} \times 5,69 = 2,68 \text{ cm}^3$$

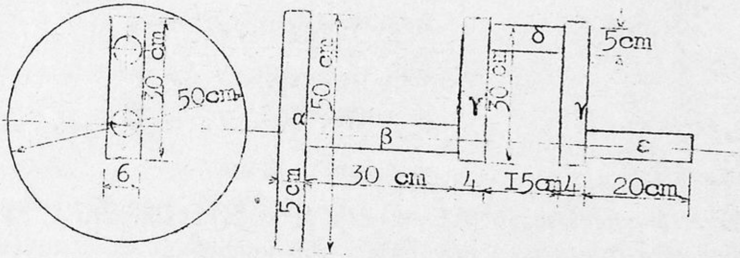
Προσθέτομεν εἰς τόν ὄγκον τοῦ κορμοῦ τόν ὄγκον τῆς κεφαλῆς καί αὐτό πού εὑρίσκομεν τό πολλαπλασιάζομεν ἐπί 45 καί ἔχομεν τόν τελικόν ὄγκον $= (7,948 + 2,68) \times 45 = 478,26 \text{cm}^3$ καί τό βάρος $\beta = 478,26 \times 7,8 = 3730,428$ gr.

16. Νά εὑρεθῇ τό βάρος τοῦ κατωτέρω στροφάλου μετά τοῦ σφονδύλου ἄν οὗτος εἶναι ἀπό χάλυβα ειδικ. βάρους 7,6 καί διαστάσεων ὡς τά σχήματα 91 καί 92.

Λύσις:-

Ὁ ὄγκος τοῦ σφονδύλου α εἶναι: $V = \frac{\pi d^2}{4} . h = \frac{3,14 \times 50^2 \times 5}{4} =$
$= 9812,5 \text{ cm}^3$

Ὁ ὄγκος τοῦ ἄξονος β εἶναι $V = \frac{\pi d^2}{4} . h = \frac{3,14 \times 5^2 \times 30}{4} = 588,75 \text{ cm}^3$



Σχ. 91

Ὁ ὄγκος τῶν παρειῶν γ εἶναι: $V = \alpha . \beta . \gamma = 30 \times 4 \times 6 = 720 \text{ cm}^3$ ἐπειδή δέ εἶναι καί αἱ δύο ἴσαι ἔχομεν τελικόν ὄγκον 1440 cm^3.

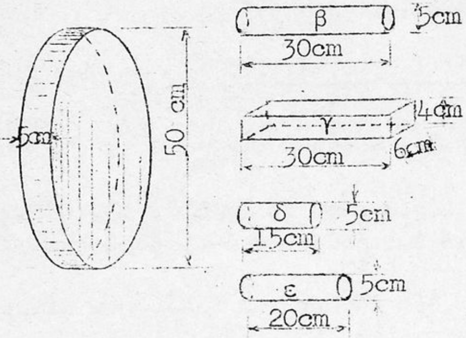
Ὁ ὄγκος τοῦ κομβίου δ εἶναι $V = \frac{\pi . d^2}{4} . h = \frac{3,14 \times 5^2}{4} \times 15 =$

$= 294,37 \text{ cm}^3$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὁ ὄγκος τοῦ ἄξονος ε εἶναι $V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot h = \frac{3,14 \times 5^2}{4} \times 20 =$

$= 392,5\ cm^3$.

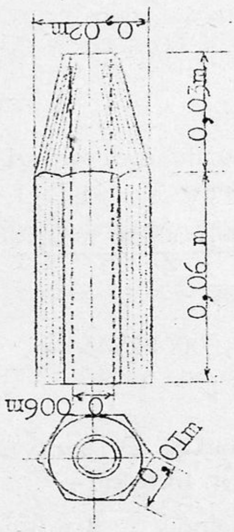


Σχ. 92.

Καί ὁ ὄγκος ὁλοκλήρου εἶναι: $V = 12488,875\ cm^3$

Ὁπότε τό $\beta = 12488,885 \times 7,6 = 94915,45\ gr = 94,91545\ Kg$

17. Τό μπέκ μιᾶς συσκευῆς ὀξυγονοκολλήσεως ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα κανονικόν ἑξαγωνικόν πρῖσμα μήκους 0,06 m καί πλευράν βάσεως 0,01 m, καταλήγει δέ εἰς κόλουρον κῶνον διαμέτρων $D = 0,02$ m καί $d = 0,01$ m καί μήκους 0,03 m. Ἐσωτερικῶς εἶναι κοῖλον μέ κοιλότητα κυλινδρικήν διαμέτρου 0,006 καί μήκους ὅσον τό μῆκος τοῦ μπέκ.



Σχ. 93

Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν καί ὁ ὄγκος του (σχ.93).

<u>Λύσις:</u> εὑρίσκομεν τήν πλευράν τοῦ κολούρου κώνου ἤτοι:-

$$\lambda = \sqrt{0,03^2 + 0,005^2} = 0,000925\ m$$

Εὑρίσκομεν τό ἐμβαδόν κάθε μιᾶς ἐπιφανείας χωριστά καί τάς προσθέτομεν ἤτοι:-

S πρῖσμα = Περ. βάσεως ὕψος

S ~~πρῖσμα = 0,01 Χ 6 Χ 0,06 = 0,0036m²~~

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

S παρ. ἐπιφαν. κολούρου κώνου $= \pi . \dfrac{D+d}{2} . \lambda$

$S = 3,14 \times \dfrac{0,02 + 0,01}{2} \times 0,0304 \simeq 0,00000029 \ m^2$

S βάσεως πρίσματος $= \dfrac{6a^2\sqrt{3}}{4}$

S βάσεως $= \dfrac{6 \times 0,0001 \times 1,73}{4} = 0,000259 m^2$

S βάσεως μικρῆς κολούρου κώνου $= \dfrac{\pi d^2}{4} = \dfrac{3,14 \times 0,01^2}{4} = 0,0000785 \ m^2$

Κατόπιν εὑρίσκομεν τό ἐμβαδόν τῶν βάσεων τοῦ κοίλου κυλίνδρου καί αὐτό τό ἀφαιροῦμεν ἀπό τό ἄθροισμα τῶν ἄλλων ἤτοι:-

τό S τῶν δύο βάσεων τοῦ κυλίνδρου εἶναι $= \dfrac{2 . \pi d^2}{4} =$

$= \dfrac{2 \times 3,14 \times 0,000036}{4} = 0,00005662 \ m^2$

$S_{o} = 0,0036 + 0,00000029 + 0,000259 + 0,0000785 - 0,000259 = 0,0028817 \ m^3$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν τόν ὄγκον.

V πρίσμ. $= \dfrac{6a^2\sqrt{3}}{4} . h = 0,000259 \times 0,06 = 0,0000156 \ m^3$ περίπου

V κόλ. κώνου $= \dfrac{\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr) . h = \dfrac{3,14}{3} \times (0,0001 + 0,000025 +$
$+ 0,00005) \times 0,03 = 0,000005495 \ m^3$.

Κατόπιν εὑρίσκομεν τόν ὄγκον τοῦ κοίλου κυλίνδρου καί τόν ἀφαιροῦμεν ἀπό τό ἄθροισμα τῶν δύο προηγουμένων.

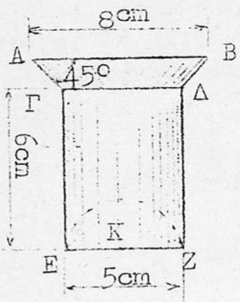
V κοίλου κυλίνδρου $= \dfrac{\pi \ d^2}{4} . h_1 = \dfrac{3,14 \times 0,000036 \times 0,09}{4} =$
$= 0,0000025434 \ m^3$.

V τελικός $= 0,0000156 + 0,000005495 - 0,0000025434 =$
$= 0,000018552 \ m^3 = 18,522 \ cm^3$.

18. Ἡ βαλβῖδα ἑνός τροφοδοτικοῦ ἐπιστομίου ἐξ ὀρειχάλκου σχήματος ὡς τό ὑπ' ἀριθ. 94 σχ. ἔχει διαστάσεις ὡς κάτωθι:-

Ἡ μικρή διάμετρος ΕΖ τοῦ κυλινδρικοῦ μέρους $d = 5$ cm, ἡ μεγάλη διάμετρος $D = 8$ cm καί τό ὕψος ΔΖ $= 6$ cm.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Σχ. 94

Εἰς τό κάτω μέρος τῆς βαλβῖδος σχηματίζεται κενόν σχήματος ἡμισφαιρίου. Νά εὑρεθῆ τό βάρος τῆς βαλβίδος εἰς κιλά ἄν εἰδικόν βάρος ὀρυχάλκου 8,65.

<u>Λύσις:</u> Εὑρίσκομεν πρῶτον τόν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου ΕΓΔΖ καί ἐξ αὐτοῦ ἀφαιροῦμεν τόν ὄγκον τοῦ ἡμισφαιρίου καί κατόπιν προσθέτομεν τόν ὄγκον τοῦ κολούρου κώνου πού σχηματίζεται ὑπεράνω τοῦ κυλίνδρου κατά προσέγγισιν.

V κυλίνδρ. $= \frac{\pi d^2}{4} . h$ ἤ $V = \frac{3,14 \times 5^2 \times 6}{4} = 117,6 \text{ cm}^3$.

V ἡμισφαιρ. $= \frac{\pi d^3}{12}$ ἤ $V = \frac{3,14 \times 5^3}{12} = 32,6 \text{ cm}^3$

Τό ὕψος τοῦ κολούρου κώνου εἶναι $\frac{D - d}{2}$ διότι ἡ γωνία $B\hat{A}\Gamma = 45^\circ$ ἤτοι $h = 1,5 \text{cm}$ V κολ. κών. $= \frac{\Pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr).h$

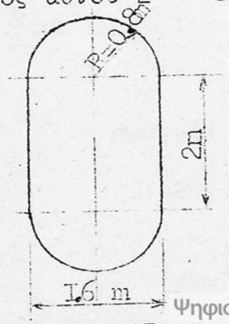
$$V = \frac{3,14}{3}(16 + 6,25 + 10) \times 1,5 = 50,53 \text{cm}^3 .$$

Ὁ ὁλικός ὄγκος $V = V$ κυλίνδρου $+ V$ κολ. κών. $- V$ ἡμισφ.

ἤτοι: $V = 117,6 + 50,63 - 32,6 = 135,63 \text{ cm}^3$ περίπου, καί τό βάρος $\beta = V.\varepsilon.$

ἤ $\beta = 135,63 \times 8,65 = 1173,2$ gr περίπ.

19. Νά εὑρεθῆ ἡ περιεκτικότης εἰς τόννους τοῦ πετρελαίου μεταλλικῆς δεξαμενῆς σχήματος κυλινδρικοῦ, τῆς ὁποίας αἱ βάσεις καταλήγουν εἰς δύο ἡμισφαίρια. Ἡ ἀκτίς τοῦ κυλίνδρου εἶναι 0,8 m καί τό ὕψος αὐτοῦ 2 m· εἰδικόν βάρος πετρ. 0,8 (σχ.95).



Σχ. 95

<u>Λύσις:</u> Ἐπειδή τά ἡμισφαίρια εἶναι τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος, εὑρίσκομεν τόν ὄγκον των ἄν εὕρωμεν τόν ὄγκον τῆς σφαίρας μέ ἀκτῖνα 0,8 m

Διά νά εὕρωμεν λοιπόν τόν ὄγκον τῆς δεξαμενῆς εὑρίσκομεν τόν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου καί τόν ὄγκον τῆς σφαίρας, ἤτοι:

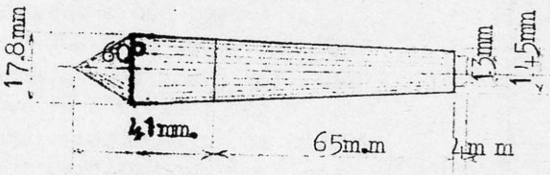
V τελ. $= V$ κυλινδρ $+ V$ σφ. ἤτοι $V = \frac{\pi d^2}{4}.h + \frac{\pi d^3}{6} \cdot 2\left(\frac{h}{4}\ \frac{d}{6}\right)\ \frac{\pi d^2}{12}(3h + 2d) =$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$= \frac{3,14 \times 256}{12} \times (3 \times 2 + 2 \times 1,6) = \frac{3,14 \times 256}{12} \times 9,2 = 6,1627 m^3$$

καί β = 6,1627 X 0,8 = 4,93036 τόννοι.

20. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδόν μιᾶς πόντας στηρίξεως τόρνου μέ τάς εἰς τό σχῆμα δεδομένας διαστάσεις (σχ. 96).



Σχ. 96

Διά νά εὕρωμεν τό ἐμβαδόν τοῦ ἀνωτέρου ἐξαρτήματος τό ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπό τόν κῶνο, τόν κύλινδρο, τόν κόλουρο κῶνο καί τόν κύλινδρο. Εὑρίσκομεν τό ἐμβαδόν ἑνός ἑκάστου.

α) S κώνου $= \pi r . \lambda = 3,14 \times 8,9 \times 17,8 = 497,4388$ mm.

Τό ὕψος τοῦ κώνου εἶναι $h = \frac{\alpha . 3}{2}$ καί $h = \frac{17,8 \times 1,73}{2} \simeq 15,397$ mm.

Τό ὕψος τοῦ κυλίνδρου εἶναι $41 - 15,397 = 25,603$ mm.

β) S κυλίνδρου $= \pi . d . h = 3,14 \times 17,8 \times 25,6 = 1430,84$ mm^2.

γ) S κολούρου κώνου $= \frac{\pi(D+d)}{2} . \lambda$ καί $\lambda = \sqrt{65^2 + 1,65^2} = 65,02$mm.

$$S = \frac{3,14 \times 32,3 \times 65,02}{2} \simeq 3297,229 \text{ mm}^2 .$$

δ) Ἐμβαδόν τοῦ κυλίνδρου $= \pi . d . h.$

$$S = 3,14 \times 13 \times 4 = 163,28 \text{ mm}^2 .$$

S βάσις τοῦ κυλίνδρου εἶναι $\frac{\pi d^2}{4} h = \frac{3,14 \times 13^2}{4} = 132,665$ mm^2.

Τό τελικόν ἐμβαδόν εἶναι:

$S_o = 497,4388 + 1430,84 + + 3297,2292 + 163,28 + 132,665 =$
$= 5531,453$ mm^2.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν τόν ὄγκον ἑνός ἑκάστου:-

α) V κώνου $= \frac{\pi r^2 . h}{3} = \frac{3,14 \times 8,9^2 \times 7,70}{3} = 638,40$ mm^3

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

β) V κυλίνδρου $= \frac{\pi d^2}{4} . h = \frac{3,14 \times 17,8^2 \times 25,6}{4} = 10769,55$ mm^3

γ) V κολούρου κώνου $\frac{\pi}{3} (R^2 + r^2 + Rr) . h = \frac{3,14}{3} \times (8,9^2 + 7,25^2 +$

$+ 8,9 \times 7,25) \times 65 = \frac{3,14}{3} \times (79,21 + 52,5625 + 64,525) \times 65 =$
$= 13558,87325$ mm^3 .

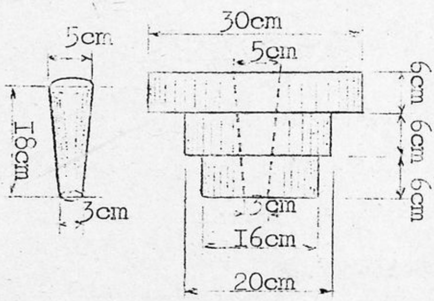
δ) V κυλίνδρου $= \frac{\pi d^2}{4} . h = \frac{3,14 \times 13^2 \times 4}{4} = 530,66$ mm^3.

Ὁ τελικός ὄγκος:-

$V = 478,785 + 10769,55 + 13558,87325 + 530,66 = 25337,86825$ mm^3 =
$= 25,338$ cm^3.

21. Εἰς ἐργοστάσιον πρόκειται νά κατασκευασθῇ κλιμακωτή τροχαλία ἡ ὁποία νά ἔχῃ τρεῖς διαβαθμίσεις, διά τήν αὐξομείωσιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στροφῶν. Ἡ μεγαλυτέρα τροχαλία ἔχει διάμετρον 30 cm , ἡ ἀμέσως μικροτέρα ἔχει διάμετρον 20 cm καί ἡ μικροτέρα 16 cm. Τό πλάτος ἑκάστης τροχαλίας εἶναι 6 cm, διά νά μετατίθεται ὁ ἱμάς ἀπό τροχαλίας εἰς τροχαλίαν. Ἀπό τό ἐσωτερικόν δέ αὐτῆς ἔχει ἀφαιρεθεῖ ἕνας κόλουρος κῶνος κυκλικῆς διατομῆς διά τήν στερέωσιν τοῦ ἄξονος.

Ἡ μεγάλη διάμετρος τῆς ὀπῆς τοῦ κολούρου κώνου εἶναι D = 5 cm καί ἡ μικρά διάμετρος ὀπῆς d = 3 cm. Ζητεῖται νά εὑρεθοῦν: α) Ὁ ὄγκος τῆς κοίλης κλιμακωτῆς τροχαλίας καί β) Τό βάρος αὐτῆς ἐάν αὔτη εἶναι ἐκ χυτοσιδήρου εἰδικοῦ βάρους 7,08 (σχ. 97).



Σχ. 97

Λύσις: Ὁ ὄγκος τῆς κλιμακωτῆς τροχαλίας ἰσοῦται:-

$$V \text{ κλ.τροχ.} = \frac{\pi . d_1^2}{4} . h + \frac{\pi . d_2^2}{4} . h + \frac{\pi . d_3^2}{4} . h$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$V\ \kappa\lambda.\ \tau\rho o\chi. = \frac{\pi . h}{4}\ (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)$$

$$V\ \kappa\lambda.\ \tau\rho o\chi. = \frac{3,14X6}{4}\ X\ (16^2 + 20^2 + 30^2) = \frac{18,84}{4}\ X\ (256 + 400 + 900)$$

$$V\ \kappa\lambda.\ \tau\rho o\chi.\ \ 4,71\ X\ 1556 = 7328,76 cm^3 .$$

Ἐπειδή εἶναι κοίλη ἐσωτερικῶς πρέπει νά ἀφαιρέσωμεν τόν ὄγκον τοῦ κολούρου κώνου, διά νά εὕρωμεν τόν ὁλικόν ὄγκον αὐτῆς.

Ἐφαρμόζομεν τόν τύπον:-

$$V\ \kappa o\lambda.\ \kappa\acute{\omega}\nu. = \frac{\pi . h}{3}\ (R^2 + r^2 + R.r)$$

$$V\ \kappa o\lambda.\ \kappa\acute{\omega}\nu. = \frac{3,14\ X\ 18}{3}\ (2,5^2 + 1,5^2 + 2,5 . 1,5) =$$

$$= 18,84\ X\ (6,25 + 2,25 + 3,75)$$

$$V\ \kappa o\lambda.\ \kappa\acute{\omega}\nu. = 18,84\ X\ 12,25 = 230,8\ cm^3 .$$

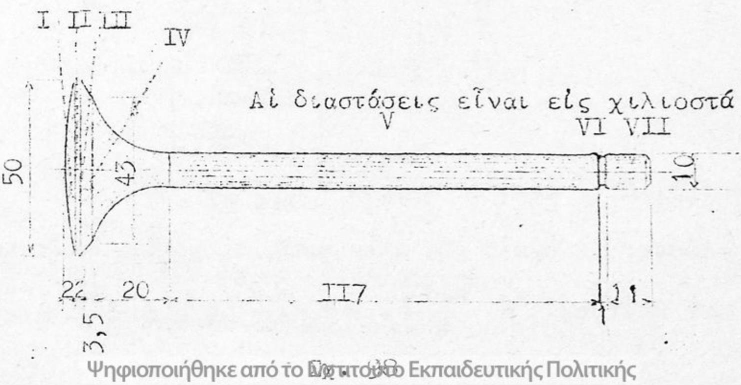
$$V\ \acute{o}\lambda. = V\ \kappa\lambda.\ \tau\rho o\chi. - V\ \kappa o\lambda.\ \kappa\acute{\omega}\nu.$$

$$V\ \acute{o}\lambda. = 7328,76 - 230,80 = 7097,96 cm^3 = 7,09796\ dm^3$$

Καί τό βάρος τῆς κλιμακωτῆς κοίλης τροχαλίας εἶναι:-

$$\beta = V.\varepsilon = 7097,96\ X\ 7,08 = 50253,5568\ gr = 50,254 Kg.$$

22. Νά εὑρεθῇ τό βάρος βαλβῖδος ἐξαγωγῆς, μέ τάς δεδομένας διαστάσεις, μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι τό τμῆμα IV ἔχει σχῆμα κολούρου κώνου τό δέ VII κυλίνδρου. Ὑλικόν χρωμιοχάλυψ εἰδικοῦ βάρους =8,2 (σχ.98).



Σχ. 98

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις:

I) $V = \frac{\pi h}{6} \cdot (3r^2+h^2) = \frac{3,14.0,2}{3} \cdot (3,25^2+0,2^2) = \frac{0,628}{3} \cdot (3.6,25+$
$+0,04) = 0,105.(18,75 + 0,04) = 0,105.18,79 = 1,973\ cm^3.$

II) $V = \pi.r^2.h = 3,14.2,5^2.0,2 = 0,628 X 6,25 = 3,925\ cm^3.$

III) $V = \frac{\pi.h}{3}(R^2+r^2+Rr) = \frac{3,14.0,35}{3} \cdot (2,5^2+2,1^2+2,5.2,1) =$
$=0,366\ (6,25 + 4,41 + 5,25) = 0,366.15,91 = 5,823\ cm^3.$

IV) $V = \frac{\pi.h}{3} \cdot (R^2+r^2+Rr) = \frac{3,14.2}{3} \cdot (2,1^2 + 0,5^2 + 2,1.0,5) =$
$= 2,09.(4,41 + 0,25 + 1,05) = 2,09.\ 5,71 = 11,934\ cm^3.$

V) $V = \pi.r^2h = 3,14.0,5^2.11,7 = 3,14.0,25.11,7 = 0,785.11,7 = 9,184\ cm^3.$

VI) $V = \pi.r^2.h = 3,14.0,4^2.0,1 = 0,314.0,16 = 0,05\ cm^3.$

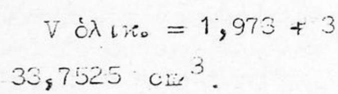
VII) $V = \pi.r^2.h = 3,14.0,5^2.1,1 = 3,14.0,25.1,1 = 0,785.1,1 = 0,8635\ cm^3.$

V ὁλικ. $= 1,973 + 3,925 + 5,823 + 11,934 + 9,184 + 0,05 + 0,8635 =$
$= 33,7525\ cm^3.$

Καί τό βάρος $\beta = 33,752 X 8,2 = 276,7664\ gr.$

$\beta = 276,7664\ gr = 0,2767664 Kg$

23. Ἕνα ἐργοστάσιον ἔλαβε μίαν παραγγελίαν 500 ἐξαρτημάτων ὡς τό κάτωθι σχῆμα (99). Ζητεῖται νά ὑπολογισθῇ τό βάρος αὐτῶν εἰς χιλιόγραμμα, ἐάν εἶναι ἐκ σιδήρου εἰδικοῦ βάρους 7,8 καθώς καί τό ἐμβαδόν ὅλων τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν, διότι πρόκειται νά ἐπιστρωθοῦν μέ λεπτόν στρῶμα κασιτέρου (αἱ διαστάσεις τοῦ σχήματος δίδονται εἰς χιλιοστά).



Σχ. 99

Λύσις: Διά νά εὕρωμεν τόν ὄγκον ἑνός ἐξαρτήματος, εὑρίσκομεν πρῶτον τόν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου θεωροῦντες αὐτόν συμπαγῆ καί κατόπιν ἀπό τόν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου ἀφαιροῦμεν τόν ὄγκον τοῦ μικροῦ κυλίνδρου, τόν ὄγκον τοῦ κώνου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καί τόν ὄγκον τοῦ ἡμισφαιρίου, ἤτοι:-

Ὄγκος συμπαγοῦς κυλίνδρου $V = 0,785 \times 60^2 \times 150 = 423900\ mm^3$

Ὄγκος μικροῦ κυλίνδρου $V = 0,785 \times 30^2 \times 70 = 49455\ mm^3$.

Ὄγκος κώνου $V = \frac{\pi d^2}{12} . h = \frac{3,14 \times 30^2 \times 15}{12} = 3532,5\ mm^3$.

Ὄγκος ἡμισφαιρίου $V = \frac{\pi a^3}{12} = \frac{3,14 \times 54^3}{12} = 41203,08\ mm^3$

Ὁ ὁλικός ὄγκος τοῦ στερεοῦ $V = 423900 - (49455 + 3532,5 + 41203,08)$

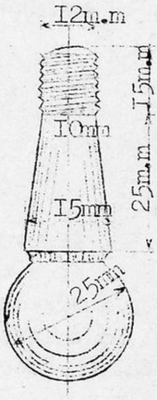
ἤ $V = 423900 - 94190,58 = 329709,42\ mm^3 = 329,70942\ cm^3$.

καί τό βάρος ἑνός ἐξαρτήματος $\beta = 329,70942 \times 7,8 =$

$= 2571,733476\ gr \simeq 2,572\ Kgr.$

ὁπότε τῶν 500 ἐξαρτημάτων θά εἶναι $2,572 \times 500 = 1286\ Kgr$.

24. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καί τό βάρος κατά προσέγγισιν ἑνόςπεριστρεφομένου ἄκρου μπάρας τιμονιοῦ (μπαλάκι) αὐτοκινήτου ὡς τό σχῆμα 100. Τό ὑλικόν εἶναι χάλυψ ειδικ.βάρους 7,6.



Σχ. 100

Λύσις: Εὑρίσκομεν πρῶτον τόν ὄγκον τοῦ κυλινδρικοῦ μέρους ἐπί τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται τό σπείρωμα ἤτοι: $V = \frac{\pi d^2}{4}$ ἔνθα d ἡ μέση διάμετρος $= 1,1$ cm καί $h = 1,5$ cm

ἤ $V = \frac{3,14 \times 1,1^2}{4} \times 1,5 \simeq 1,4248\ cm^3$.

Εὑρίσκομεν κατόπιν τόν ὄγκον τοῦ κολούρου κώνου

ἤτοι $V = \frac{\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr).h$

ἔνθα $R = 0,75$ cm $r = 0,5$ cm καί $h = 2,5$ cm

$V = \frac{3,14}{3} \times (0,75^2 + 0,5^2 + 0,75 \times 0,5) \times 2,5 =$

$= 1,05 \times (0,5625 + 0,25 + 0,375) \times 2,5 \simeq 3,1125\ cm^3$

Εὑρίσκομεν κατόπιν τόν ὄγκον τῆς σφαίρας ἤτοι $V = \frac{\pi d^3}{6}$ ἔνθα $d = 2,5$ cm ἤ $V = \frac{3,14 \times 15,625}{6} \simeq 8,1771\ cm^3$.

Προσθέτοντες τούς τρεῖς ὄγκους εὑρίσκομεν τόν ὁλικόν ὄγκον τοῦ στερεοῦ ἤτοι

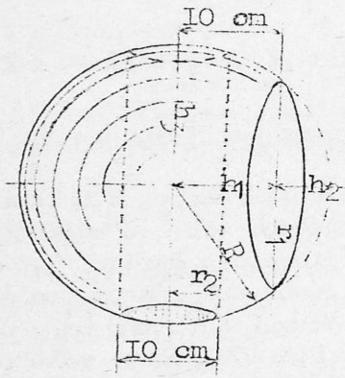
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

V ὁλικός = 1,4248 + 3,1125 + 8,1771 = 12,7171cm^3 ≃ 12,72cm^3

καί τό β = V.ε   ἤ   β = 12,72 X 7,6 = 96,62gr.

Παρατήρησις: Τό βάρος τοῦ ἀνωτέρω στερεοῦ εὑρέθη κατά προσέγγισιν διότι: α) ἔπρεπε διά τήν ἀκρίβειαν νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καί τό βάρος πού ἀφαιρεῖται μετά τήν κατασκευήν τῆς ὀπῆς ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἐπί τῶν σπειρωμάτων καί ἐάν θέλωμεν νά ὑπολογήσωμεν τό ἀφαιρεθέν βάρος μόνον περίπου δυνάμεθα, διότι δέν ἀφαιρεῖται κύλινδρος. β) Ἔπρεπε νά ὑπολογισθῇ ἡ ὕλη ἡ ὁποία ἀφῃρέθη μετά τήν κοχλιοτόμησιν καί γ) ἔπρεπε νά ὑπολογισθῇ ἡ ὕλη ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τό σημεῖον ἐπαφῆς κολούρου κώνου καί σφαίρας.

25. Ἐκ μιᾶς σφαίρας ἐκ χυτοσιδήρου διαμέτρου 30cm ἀποκόπτεται ἕνα τμῆμα ἀπό ἕνα ἐπίπεδον ἀπέχον ἀπό τό κέντρον τῆς σφαίρας 10 cm καί ἀνοίγεται ὀπή εἰς τό κέντρον τῆς σφαίρας διαμέτρου 10 cm Ζητεῖται ὁ ὄγκος καί τό βάρος τοῦ ἀπομένοντος στερεοῦ, ἄν τό εἰδικόν βάρος τοῦ χυτοσιδήρου εἶναι 7,31 (σχ.101).



Σχ. 101

Λύσις: Εὑρίσκομεν τόν ὄγκον τῆς σφαίρας καί ἀπό αὐτόν ἀφαιροῦμεν τόν ὄγκον σφαιρικοῦ τμήματος πού ἀπεκόπη καί τόν ὄγκον τῆς ὀπῆς ἡ ὁποία ἰσοῦται μέ τόν ὄγκον δύο σφαιρικῶν τμημάτων μέ βάσιν τήν διάμετρον τῆς ὀπῆς καί τοῦ ὑπολοίπου μέρους τῆς ὀπῆς τό ἀποτελοῦν ἕνα κύλινδρον. Κατόπιν τόν ὑπόλοιπον ὄγκον τόν πολλαπλασιάζομεν ἐπί τό εἰδικόν βάρος καί εὑρίσκομεν τό βάρος εἰς γραμμάρια, ἐπειδή ὁ ὄγκος ἐκφράζεται εἰς cm^3.

Ἤτοι:

Εὑρίσκομεν τήν ἀκτῖνα r_1 τῆς βάσεως τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος $r_1^2 = R^2 - h_1^2 = 15^2 - 10^2 = 225 - 100 = 125$ καί $r_1 = \sqrt{125} = 11,2$ cm.

Ἀκολούθως εὑρίσκομεν τόν ὄγκον τοῦ τμήματος ἀπό τόν τύπον

$$V = \frac{\pi h_2}{6}\cdot(3r_1^2 + h_2^2) = \frac{3,14 \times 5}{6} \times (3 \times 11,2^2 + 5^2) = 2,61 \times (376,32 + 25) = 1047,44 \text{ cm}^3.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν τόν ὄγκον κυλίνδρου

Ἡ ἀπόστασις h_3 τῆς βάσεως ἀπό τό κέντρον εἶναι:-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$h_3^2 = R^2 - r^2_2 = 15^2 + 5^2 = 225 - 25 = 200$ καί $h_3 = \sqrt{200} = 14,2 cm$ καί τό ὕψος τοῦ κυλίνδρου $h = 2h_3 = 14,1 \times 2 = 28,2 ccm$ ἐπομένως,

$$V = \pi r^2_2 . h = 3,14 \times 5^2 \times 28,2 = 2213,7 cm^3 .$$

Εὑρίσκομεν τόν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος πού σχηματίζει ἡ ὀπή. Τό ὕψος τοῦ τμήματος εἶναι 0,8

$$V = \frac{\pi . h}{6}(3r^2_2 + h^2) = \frac{3,14 \times 0,9}{6} . (3 \times 5^2 + 0,9^2) =$$

$= 0,47 \times 75,81 = 35,7 cm^3$ καί ὁ ὄγκος τῶν δύο σφαιρικῶν τμημάτων εἶναι $35,7 \times 2 = 71,4 cm^3$.

Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ἰσοῦται μέ V σφ. $= \frac{4}{3}\pi R^3 = 14130 cm^3$

Καί ὁ πραγματικός ὄγκος ἰσοῦται:-

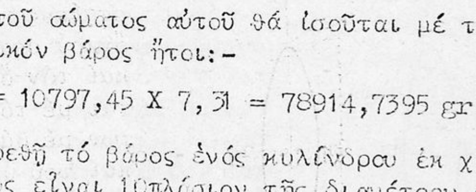
V πρ. $= V$σφ. $-$ (Vτμ. $+ V$ ὀπῆς) $= 14130 - (1047,44 + 71,4 +$

$+ 2213,7) = 14130 - 3332,55 = 10797,45 cm^3$.

Τό βάρος τοῦ σώματος αὐτοῦ θά ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τοῦ ὄγκου ἐπί τό ειδικόν βάρος ἤτοι:-

$\beta = V.\varepsilon = 10797,45 \times 7,31 = 78914,7395$ gr ἤ 78,915 Kgr.

26. Νά εὑρεθῇ τό βάρος ἑνός κυλίνδρου ἐκ χάλυβος τοῦ ὁποίου τό ὁλικόν μῆκος εἶναι 10πλάσιον τῆς διαμέτρου του. Ὁ κύλινδρος αὐτός καταλήγει εἰς τά ἄκρα του εἰς δύο ἡμισφαίρια ἀκτῖνος 7,3 cm. Ἐπίσης δέ ὁ κύλινδρος αὐτός φέρει εἰς τό μέσον τοῦ μήκους του ὀπήν ὀρθογωνικήν διαστάσεων 2 X 3 cm. Ἄνω δέ καί κάτω τῆς ὀπῆς ὑπάρχει ἀνά μία ὀπή κυκλική διαμέτρου 2cm . Ειδικόν βάρος χάλυβος 7,6 (σχ.102).



Σχ. 102 .

Λύσις: Διά νά εὕρωμεν τό βάρος τοῦ κυλίνδρου (συνθέτου ἐπιφανείας) ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:-

α) Εὑρίσκομεν τόν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου καί τῶν δύο ἡμισφαι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρίων.

β) Εὑρίσκομεν τόν ὄγκον τῶν ὀπῶν τόν ὁποῖον ἀφαιροῦμεν ἀπό τόν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου καί τό εὑρεθέν ποσόν πολλαπλασιάζομεν ἐπί τό ειδικόν βάρος τῆς διατομῆς αὐτῶν, ἤτοι:-

1) Ἐπειδή τά δύο ἡμισφαίρια ἀποτελοῦν μίαν σφαίραν διαμέτρου 14,6 cm, τό ὕψος τοῦ κυλίνδρου θά εἶναι 9 X 14,6 = 131,4 cm.

2) Εὑρίσκομεν τόν ὄγκον τῆς σφαίρας ἐκ τοῦ τύπου:-

$$V = \frac{\pi . D^3}{6} = \frac{3,14 \text{ X } 14,6^3}{6} = 1628,68 \text{ cm}^3 .$$

Ὥστε V σφ. = 1628,68 cm^3.

3) Εὑρίσκομεν τόν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου ἐκ τοῦ τύπου:-

$$V = \frac{\pi . D^2}{4} \cdot h = \frac{3,14 \text{ X } 16,6^2}{4} \text{ X } 131,4 = 28423,74 \text{ cm}^3$$ ὄγκος κυλίνδρου.

4) Ὁ ὄγκος τῆς ὅλης ἐπιφανείας εἶναι 28423,74 + 1628,68 = 30 = 30052,42 cm^3.

5) Εὑρίσκομεν τόν ὄγκον τῆς ὀρθογωνικῆς ὀπῆς κατά προσέγγισιν ἡ ὁποία εἶναι πρῖσμα ἔχον βάσιν τήν ὀπήν ταύτην καί ὕψος τήν διάμετρον τοῦ κυλίνδρου ἤτοι:-

$V = S.h = 2 \text{ X} 3 \text{ X } 14,6 = 6 \text{ X } 14,6 = 87,6 \text{ cm}^3$ ὥστε ὁ ὄγκος τῆς ὀρθογωνικῆς ὀπῆς εἶναι 87,6 cm^3,

6) Εὑρίσκομεν τόν ὄγκον μιᾶς ἐκ τῶν κυκλικῶν ὀπῶν, ἡ ὁποία εἶναι κύλινδρος ἔχον βάσιν τήν ὀπήν ταύτην καί ὕψος τήν διάμετρον τοῦ κυλίνδρου ἤτοι:-

$$V = \frac{\pi . D^2}{4} \cdot h = \frac{3,14 \text{ X } 2^2 \text{ X } 14,6}{4} = 45,84 \text{ cm}^3$$ ἤτοι ὄγκος κυλίνδρου = 45,84 cm^3.

7) Τόν ὄγκον τόν διπλασιάζομεν διότι ἔχομεν δύο ὁμοίας ὀπάς ἤτοι 51,5 X 2 = 91,68 cm^3.

8) Προσθέτομεν τούς ὄγκους τῶν ὀπῶν καί ἔχομεν 91,48 + 876= = 179,28 cm^3. Ὥστε ὁ ὄγκος ὅλων τῶν ὀπῶν 179,28 cm^3.

9) Ἀφαιροῦμεν τώρα ἀπό τόν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, τόν ὄγκον τῶν ὀπῶν εὑρίσκομεν τόν ὄγκον τοῦ ζητουμένου στερεοῦ ἤτοι:-

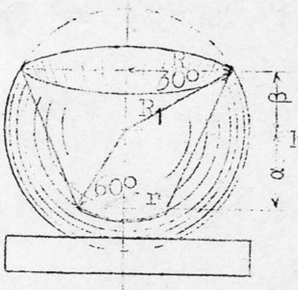
V στ.= 23615,12 - 179,28 = 23436,64 cm^3 ὁ ὄγκος τοῦ ζητουμένου στερεοῦ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Καί τώρα πολλαπλασιάζομεν τόν ὄγκον αὐτόν ἐπί τό ειδικόν βάρος (7,6) καί εὑρίσκομεν τό βάρος του ἤτοι:-

Βάρος στερεοῦ=23436,64 X 7,6 = 165464,69 gr.

27). Σφαιρικόν ἀνθοδοχεῖον ἐκτῖνος R = 60 mm παρουσιάζει τό ἐσωτερικόν του κόλουρο κῶνο τοῦ ὁποίου τό ὕψος καταλήγει κατά 40 mm κάτω ἀπό τό κέντρον τῆς σφαίρας, ἡ δέ γωνία τήν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας μέ τήν μεγάλην βάσιν τοῦ κολούρου κώνου εἶναι 30°, ἡ δέ γωνία τήν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα πού ἑνώνει τό κέντρον τῆς σφαίρας μέ τήν ἄκρην τῆς μικρῆς βάσεως τοῦ κολούρου κώνου εἶναι 60°. Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος καί τό βάρος τοῦ ἀνθοδοχείου (Εἰδ. βάρος ὑάλου ε = 2,5) (σχ. 103).



Σχ. 103

$R_1 = 60$ mm, $\alpha = 40$ mm, γων. 30° καί 60°, V = ; β = ;

Θά εὕρωμεν τόν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, ἐκ τοῦ ὁποίου θά ἀφαιρέσωμεν τόν ὄγκον τοῦ κολούρου κώνου

ἤτοι V = V σφαιρ.τμήματ. - V κολούρου κώνου

$$V = \frac{\pi h}{6}(3R^2 + h^2) - \frac{\pi h_1}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

τό h_1 τοῦ κολούρου κώνου = α+β

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν

$\beta = R_1$ ἡμ 30 = 60 X 0,5 = 30 ἄρα $h_1 = 40 + 30 = 70$mm.

ὁμοίως $R = R_1$ ημ 60 = 60 X 0,866 $\simeq$ 52 mm.

" $r = \alpha$ ἐφ. 30 = 40 X 0,577 = 23 mm.

Ὁπότε ἔχομεν

$$V = \frac{3,14.90}{6}(3.52^2 + 90^2) - \frac{3,14.70}{3}(52^2 + 23^2 + 52.23)$$

V = 7635852 - 973494,2 = 6662357,8 mm^3 ἤ V = 6662,36 cm^3

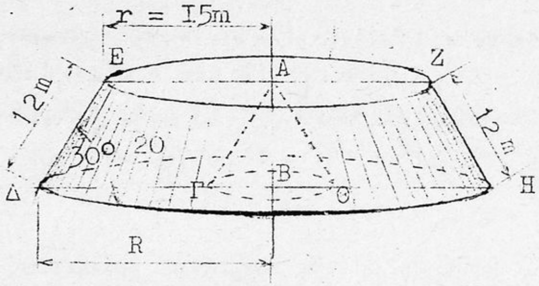
καί β = 6662,36 X 2,5 = 16655,9 gr.

28. Ἐάν περιστραφῆ τό παραλληλόγραμμον ΑΓΔΕ περί τήν εὐθεῖαν ΑΒ θά παραχθῆ ἕνα στερεόν. Αἱ πλευραί τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι 12m καί 15 m καί ἡ μία γωνία αὐτοῦ 30° 20.

Ζητεῖται νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος καί ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ παρα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γομένου στερεοῦ (σχ. 104).



Σχ. 104

<u>Λύσις:</u> Ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ θά εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου μεῖον τόν ὄγκον τοῦ κώνου, ὁπότε ἔχομεν:

V κ.κώνου = $\frac{\pi}{3}$ $(R^2 + r^2 + Rr).h$. Ἐκ τῶν προτέρων ὅμως πρέπει νά εὕρωμεν τήν ἀκτῖνα R καί τό ὕψος, ἤτοι:-

ΕΔ = ΑΓ, γων ΕΔΓ = γων ΕΑΓ καί ΓΑΒ = ΕΑΒ - ΕΑΓ =

$89^o\ 60' - 30^o\ 20' = 59^o\ 40'$.

ΑΒ = ΑΓ. συν $59^o\ 40'$ = 12 Χ 0,50503 = 6,06m· ἔνθα ΑΒ = ὕψος στερεοῦ.

ΓΒ = ΑΓ. συν $30^o\ 20'$ = 12 Χ 0,86310 = 10,357 m Ἤτοι:-

R = ΔΓ + ΓΒ = 15 + 10,357 = 25,357 m καί ἐξ αὐτῶν ἔχομεν:

$$V\kappa.\kappa\acute{\omega}\nu. = \frac{3,14}{3}(25,357^2 + 15^2 + 25,357 \times 15).6,06 =$$

$$= 1,05.\ (642,977 + 225 + 380,355) \times 6,06 = 7943,1365\ m^3$$

Ὁ ὄγκος κώνου ἰσοῦται μέ $V_\kappa = \frac{\pi r^2.h}{3}$,

$$V_\kappa = \frac{3,14.10,357^2 .\ 6,06}{3} = 682,5428\ m^3.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὑρίσκομεν τόν ὁλικόν ὄγκον τοῦ στερεοῦ:-

Vστ. = Vκ. κων. - Vκ = 7943,1365 - 682,542778 =

= 7260,5938 m^3.

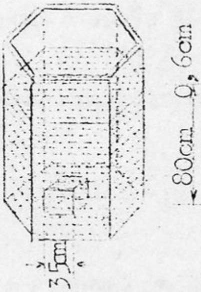
Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ θά ἰσοῦται μέ τό ἐμβαδόν τοῦ κ. κώνου σύν τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νου μεῖον τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως τοῦ κώνου ἤτοι:-

S ὁλ. = Sκ. κων. + S κυρ. ἐπ. κων. - S βασ.κων.$=\pi(R+r)\lambda+$
$+\pi R^2 + \pi r^2 + \pi r_1^2\lambda - \pi r_1^2 =$ ἔνθα $r_1 =$ ΓΒ καί λ = ΑΓ ὁπότε ὁ S ὁλ. =
$= \pi\lambda\,(R + r + r_1^2) + \pi(R^2 + r^2 - r_1^2) = 3,14 \times 12\ (25,357 + 15 +$
$+ 10,357^2) + 3,14\ (25,357^2 + 15^2 - 10,357^2) = 147,624 \times 50,714 \times 3,14 =$
$= 23507,024\ m^2$

29. Ἐντός μιᾶς δεξαμενῆς σχήματος πρίσματος ἑξαγωνικοῦ πίπτει λίθος κυβικός πλευρᾶς 0,35 m. Ὁ πυθμήν τῆς δεξαμενῆς εἶναι ὁριζόντιος, τό δέ ὕψος τοῦ ἐν αὐτῇ ὕδατος ὅπερ ἦτο 0,80 m ηὐξήθη κατά 6 mm. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ νεροῦ καί ἡ πλευρά τοῦ ἑξαγώνου τῆς βάσεως.



Σχ. 105

Λύσις: Ὁ ὄγκος τοῦ πεσόντος λίθου εἶναι $0,35^3 = 0,42875\ m^3$. Ἡ ἀνύψωσις τοῦ ὕδατος κατά 6 mm ἀντιστοιχεῖ πρός τόν ὄγκον τοῦ λίθου ὅστις ἔπεσε ἐντός αὐτῆς. Ἐπομένως καί τό ὕψος τοῦ ἐν αὐτῇ ὕδατος 0,80 m ἀντιστοιχεῖ εἴς τινα ὄγκον ἀνάλογον πρός τόν ὄγκον τοῦ λίθου.

Ἄρα δυνάμεθα νά εὕρωμεν τόν ὄγκον τοῦ ὕδατος.

Ἤτοι: 0,006 m   0,42875 m³
0,80   X

$$X = 0,42875 \times \frac{0,80}{0,006} = 57,1666.\ m^3$$

Ἐάν τόν ὄγκον τόν διαιρέσωμεν διά τοῦ ὕψους τοῦ ὕδατος θά ἔχωμεν τήν βάσιν τῆς δεξαμενῆς.

Ἤτοι $5716,66 : 0,80 = 71,458\ m^2$. Τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως τό εὑρίσκομεν ἐπίσης ἀμέσως ἄν διαιρέσωμεν τό $0,42875 : 0,006 =$
$= 71,458\ m^2$.

Διά νά εὕρωμεν τήν πλευράν τοῦ ἑξαγώνου θά χρησιμοποιήσωμεν

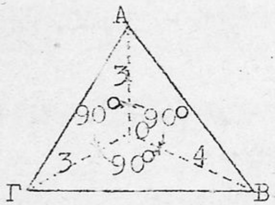
τόν τύπον: $\dfrac{6\alpha^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ ἤ $\alpha^2 \cdot 2,595 = 71,458$ καί $\alpha = \sqrt{\dfrac{71,458}{2,595}} =$
$= 5,25\ m$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

30. Ἐπί τῶν πλευρῶν τρισορθογωνίου τριέδρου γωνίας λαμβάνομεν ἐκ τῆς κορυφῆς Ο τά μήκη ΟΑ = 3, ΟΒ = 4, ΟΓ= 3 m . Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ προκύπτοντος στερεοῦ ΟΑΒΓ καί ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Ο ἀπό τῆς ἕδρας ΑΒΓ.

Λύσις : Ἐάν λάβωμεν ὡς βάσιν τῆς πυραμίδος ΑΟΒ (σχ.106)τότε τό ἐμβαδόν αὐτῆς εἶναι $\frac{3 \times 4}{2} = 6m^2$, Ὁ δέ ὄγκος τοῦ στερεοῦ $\frac{6 \times 3}{3} =$ $= 6\ m^3$.

Διά νά εὕρωμεν ὅμως τήν ἀπόσταιν ἀπό τόῦ σημείου Ο μέχρι τῆς ἕδρας ΑΒΓ δέον νά εὕρωμεν τό ἐμβαδόν αὐτῆς διά τοῦ ὁποίου νά διαιρέσωμεν τόν ὄγκον. Πρῶτον πρέπει νά εὕρωμεν τάς πλευράς ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ τῆς ἕδρας ΑΒΓ. Αὗται δέ εἶναι ὑποτείνουσαι ὀρθογ. τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΓ,ΓΟΑ τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τάς καθέτους πλευράς. Ἄρα δυνάμεθα νά τάς εὕρωμεν διά τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος ἤτοι:-



Σχ.106

$$(ΑΓ)^2 = 9 + 9 = 18 \quad ἢ\ ΑΓ = \sqrt{18} = 4,24.$$

Αἱ ἄλλαι δύο εἶναι 5 ἑκάστη διότι εἰς κάθε τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπερ ἔχει πλευράς 3 καί 4 ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 5.

Εὑρεθεισῶν τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ,ΓΑ δυνάμεθα διά τοῦ τύπου:

$S_τ = \sqrt{τ.(τ-α) . (τ-β) . (τ-γ)}$ νά εὕρωμεν τό ἐμβαδόν:-

$$τ = \frac{α+β+γ}{2} = \frac{5+5+4,24}{2} = \frac{14,24}{2} = 7,12, \quad τ - α = 7,12 - 5 = 2,12,$$

$$τ - β = 7,12 - 5 = 2,12, \qquad τ - γ = 7,12 - 4,24 = 2,88$$

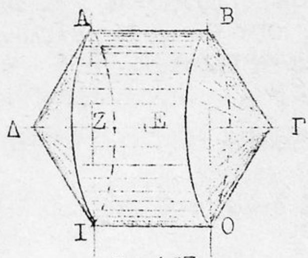
$$Sτ = \sqrt{7,12 \times 2,12 \times 2,12 \times 2,88} = \sqrt{92,16} = 9,6\ m^2$$

Ἐάν διαιρέσωμεν τόν ὄγκον διά τοῦ ἐμβαδοῦ θά ἔχωμεν τό ὕψος

31. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδόν τοῦ παραγομένου στερεοῦ ὑπό κανονικοῦ ἡμιεξαγώνου, ὅταν τοῦτο στραφῇ περί μίαν τῶν διαγωνίων του, ἐάν ἡ πλευρά του εἶναι 6,8 m.

Λύσις: Ἐάν περιστραφῇ τό ἐν λόγῳ ἡμιεξάγωνον θά σχηματισθοῦν δύο ἴσοι κῶνοι ΔΑΙ, ΓΒΘ (σχ. 107) καί ὁ κύλινδρος ΑΒΟΙ τῶν ὁποίων

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Σχ.107

ἀκτίς τῆς βάσεως εἶναι ἡ ΑΖ καί ὕψος εἰς μέν τόν κύλινδρον ἡ ΑΒ εἰς δέ τούς κώνους ἡ ΔΖ. Ἐκ τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τήν ΑΒ ὡς πλευράν τοῦ ἡμιεξαγώνου, τάς δέ ΑΖ καί ΔΖ δέν τάς γνωρίζομεν, θά τάς εὕρωμεν δέ ὡς ἀκολούθως. Ἡ ΔΓ εἶναι διπλασία τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἡ δέ ΔΕ ἴση πρός τήν πλευράν ΑΒ. Ἐάν ἐκ τοῦ Α φέρωμεν τήν κάθετον ΑΖ αὐτη θά συναντήση τήν ΔΕ εἰς τό μέσον καί θά σχηματισθῆ τό ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΖΔ τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τήν ὑποτείνουσαν ΑΔ ὡς πλευράν τοῦ ἡμιεξαγώνου καί τήν ΔΖ ὡς τό ἥμισυ τῆς ΔΕ καί ἑπομένως τό ἥμισυ τῆς ΑΒ, δέν γνωρίζομεν δέ τήν ἑτέραν κάθετον πλευράν ΑΖ ἥτις εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως τῶν παραγομένων στερεῶν. Αὕτη εὑρίσκεται διά τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος.

Ἤτοι: $(ΑΖ)^2 = (ΑΔ)^2 - (ΔΖ)^2$ ἤ $(ΑΖ)^2 = 46,24 - 11,56 = 34,68$, καί $ΑΖ = \sqrt{34,68} = 5,88$

Γνωρίζοντες τά διάφορα μήκη δυνάμεθα διά τῶν γνωστῶν εἰς ἡμᾶς τύπων νά εὕρωμεν τόν ὄγκον καί τήν ἐπιφάνειαν.

Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εὑρίσκεται διά τοῦ τύπου:-

$V = \pi . r^2 . h$ ἤτοι $V = 3,14 \times 5,88^2 \times 6,8 = 3,14 \times 34,57 \times 6,8 =$
$= 738,14\ m^3$.

Οἱ ὄγκοι καί τῶν δύο κώνων εἶναι ἴσοι, δι' αὐτό θά εὕρωμεν τόν ὄγκον τοῦ ἑνός καί θά τόν διπλασιάσωμεν. Ἤτοι $V = \frac{\pi . r^2 . h}{3}$

$$V = \frac{3,14 \times 5,88^2 \times 3,4}{3} = \frac{3,14 \times 34,57 \times 3,4}{3} = \frac{369,07}{3} = 123,02$$

Ἑπομένως ὁ ὄγκος εἶναι $738,14 + 123,02 + 123,02 = 984,18\ m^3$.

Ἡ ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται ἀπό τάς παραπλεύρους ἐπιφανείας τῶν κώνων καί τοῦ κυλίνδρου.

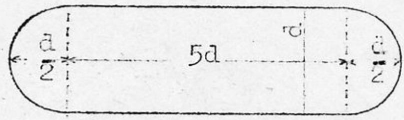
Τό ἐμβαδόν κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου εὑρίσκεται διά τοῦ τύπου $2\pi r . h = 2 \times 3,14 \times 5,88 \times 6,8 = 251,099\ m^2$

Τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου εὑρίσκεται διά τοῦ τύπου $S = \pi r \lambda$ ἔνθα $\lambda = ΑΔ = 6,8$ $S = 3,14 \times 5,88 \times 6,8 =$
$= 125,549\ m^2$

Τό ὁλικόν ἐμβαδόν εἶναι τό ἄθροισμα τῶν εὑρεθέντων ἤτοι:-
$251,099 + 125,549 + 125,549 = 502,187\ m^2$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

32) Πρόκειται νά κατασκευασθῆ λέβης χωρητικότητος 5100 κιλῶν ἔχων σχῆμα κυλίνδρου καταλήγοντος εἰς δύο ἡμισφαίρια τό δέ ὁλικόν μῆκος αὐτοῦ νά εἶναι ἑξαπλάσιον τῆς διαμέτρου αὐτοῦ. Νά ὑπολογισθῆ ἡ διάμετρος καί ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ λέβητος.



Σχ. 108

Λύσις: Ἐπειδή τά δύο ἡμισφαίρα ἀποτελοῦν σφαῖραν διαμέτρου d ἴσην μέ τήν διάμετρον τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου τό ὕψος δέ τοῦ κυλίνδρου εἶναι $5d$. Ὁ ὄγκος τῶν δύο ἡμισφαιρίων δηλ. τῆς σφαίρας διαμέτρου d ἤ ἀκτῖνος $\frac{d}{2}$ εἶναι $V = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi d^3}{8} = \frac{\pi d^3}{6}$, V κυλίνδρου $= \frac{\pi d^2}{4} \cdot 5d = \frac{5\pi d^3}{4}$ καί ὁ ὄγκος λέβητος θά εἶναι :-

$$V \lambda\varepsilon\beta. = \frac{\pi d^3}{6} + \frac{5\pi d^3}{4} = \pi d^3 \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{4} \right) = \frac{17\pi d^3}{12}$$

Ἐπειδή ὅμως ἡ χωρητικότης τοῦ λέβητος εἶναι 5100 κιλά, ὁ ὄγκος θά εἶναι $5,1\ m^3$ ὁπότε ἔχομεν:-

$$5,1 = \frac{17}{12} \cdot \pi d^3 \text{ καί } d^3 = \frac{5,1 \times 12}{17 \times 3,14} = \frac{61,2}{53,38} \text{ ἤ } d^3 = 1,146\ m$$

καί $d = \sqrt[3]{1,146} = 1,046$.

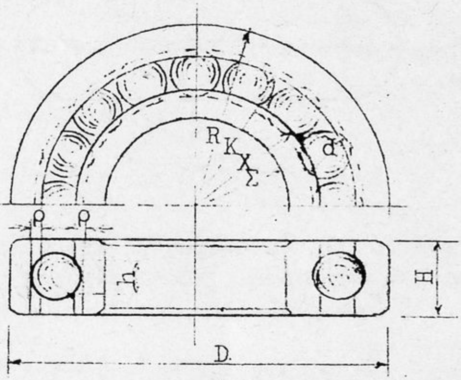
Ἡ ἐπιφάνεια λοιπόν τοῦ λέβητος ἀποτελεῖται ἀπό τήν ἐπιφάνειαν τῶν δύο ἡμισφαιρίων καί ἀπό τήν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου. Ἤτοι ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι $\pi . d^2 = 3,14 \times 1,046^2$. Ἐπιφάνεια κυλίνδρου εἶναι $\pi . d . 5 . d = 5\pi d^2 = 5 \times 3,14 \times 1,046^2$. Ἑπομένως θά ἔχωμεν:-

$$S = \pi d^2 + 5\pi d^2 = 6\pi . d^2 = 6 \times 3,14 \times 1,046 \text{ καί } S = 20,61\ m^2.$$

33. Νά εὑρεθῆ τό βάρος ἑνός ἐνσφαίρου τριβέως (ρουλεμάν) ὁ ὁποῖος ἔχει 16 σφαιρίδια (μπίλιες). Ἡ ἐξωτερική ἀκτίς τῆς ἐξωτερικῆς στεφάνης εἶναι R = 26 mm καί ἡ ἐσωτερική ἀκτίς τῆς ἐξωτερικῆς στεφάνης K = 22 mm. Ἡ ἐξωτερική ἀκτίς τῆς ἐσωτερικῆς στεφάνης εἶναι X=

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

= 17 mm καί ἡ ἐσωτερική ἀκτίς τῆς ἐσωτερικῆς στεφάνης εἶναι Σ = =12 mm. Αἱ διαστάσεις τῶν ὑποδοχῶν (φωλιές) εἶναι τό μέν βάθος 1mm, τό δέ ἄνοιγμα h = 4 mm. Τό πάχος τοῦ ρουλεμάν H = 11 mm εἶναι τό αὐτό καί διά τάς δύο στεφάνας. Ἡ διάμετρος τῆς μπίλιας d = 7 mm Τό ὑλικόν τοῦ ρουλεμάν εἶναι χάλυψ εἰδικοῦ βάρους 7,6 (σχ.109).-



R = 26m/m
K = 22 "
X = 17 "
Σ = 12 "
H = 11 "
d = 7 "
h = 4 "
P = 1 "

Σχ. 109

Λύσις: Ἐξωτερική στεφάνη:-

Ἐμβαδόν κυκλικῆς στεφάνης = 0,785 $(D^2 - d^2)$

$S = 0,785 \cdot (52^2 - 44^2) = 602,88 \ mm^2$

$V = 602,88 \cdot H = 602,88 \times 11 = 6631,68 \ mm^3 = 6,63 \ cm^3$.

Αὖλαξ ἐξωτερικῆς στεφάνης εἶναι κυκλική στεφάνη μέ ἀκτῖνα ἐξωτερικήν 23 mm καί ἐσωτερικήν 22 mm ὁπότε τό ἐμβαδόν τῆς κυκλικῆς αὐτῆς στεφάνης θά εἶναι $S = 0,785 \times (46^2 - 44^2) = 141,3 \ mm^2 = 1,4 \ cm^2$ καί $V = S \cdot h = 141,3 \times 4 = 565,2 \ mm^3 = 0,56 \ cm^3$. Ἐπομένως ὁ ὄγκος τῆς ἐξωτερικῆς στεφάνης θά ἰσοῦται μέ τόν ὄγκον ὁλοκλήρου τῆς στεφάνης πλήν τοῦ ὄγκου τῆς αὔλακος·

ἤτοι $V = 6,63 - 0,56 = 6,07 \ cm^3$

Ὁ ὄγκος τῶν σφαιριδίων ἰσοῦται $V = \dfrac{\pi \ d^3}{6}$ ἤ $V = \dfrac{3,14 \times 343}{6}$ $= 179,5 \ mm^3$ καί ὁ ὄγκος τῶν 16 σφαιριδίων $179,5 \times 16 = 2872 \ mm^3 = 2,87 \ cm^3$.

Ὁ ἐξωτερικός αὖλαξ τῆς ἐσωτερικῆς στεφάνης εἶναι κυκλική στεφάνη μέ ἀκτῖνα ἐξωτερικήν 17 mm καί ἐσωτερικήν 16 mm , ὁπότε τό

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐμβαδόν τῆς κυκλικῆς αὐτῆς στεφάνης εἶναι:-

$$S = 0,785 \times (34^2 - 32^2) = 103,62\ mm^3 \text{ καί}$$

$$V = S \cdot h = 103,62 \times 4 = 0,41\ cm^3$$

<u>Ὄγκος ἐσωτερικῆς στεφάνης</u>. Τό ἐμβαδόν τῆς κυκλικῆς στεφάνης $S = 0,785 \times (34^2 - 24^2) = 455,3\ mm^2$ καί $V = S \cdot h = 455,3 \times 11 \cong 5,008\ cm^3$

Ἐπομένως ὁ ὄγκος τῆς ἐσωτερικῆς στεφάνης θά ἰσοῦται μέ τόν ὄγκον ὁλοκλήρου τῆς στεφάνης πλήν τοῦ ὄγκου τῆς αὔλακος ἤτοι:-

$V = 5,008 - 0,41 = 4,598\ cm^3$ καί ὁ ὄγκος ὁλοκλήρου τοῦ ρουλεμάν θά εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τεμαχίων αὐτοῦ ἤτοι:-

Ὄγκος ἐξωτερ. στεφάνης + ὄγκος σφαιριδίων + ὄγκος ἐσωτερικῆς στεφάνης.

Ἤτοι: $V = 6,07 + 2,87 + 4,598 = 13,538\ cm^3$

καί τό βάρος του $13,538 \times 7,6 = 102,8888$ gr.

<u>Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν XII.</u>

<u>Γ ε ν ι κ α ί ἀ σ κ ή σ ε ι ς</u>

1. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου ἄν $a = 1,5$ mm $c = 60$ mm $b = 80$ cm.

2. Πρόκειται νά κατασκευάσωμεν ἐκ φύλλου λαμαρίνας κύβον ἀκμῆς 0,34 m, πόσα m^2 θά λάβωμεν; 'Απ. $0,6936\ m^2$

3. Ράβδου σιδηρᾶς τό μέν μῆκος εἶναι 4 m, ἡ δέ τομή ἡ κάθετος εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 34 mm. Πρόκειται νά μετασχηματίσωμεν αὐτήν ὥστε νά ἔχῃ τήν τετράγωνον πλευράν 15 mm. Ποῖον μῆκος θά ἔχῃ ἡ ράβδος; 'Απ.7398,4 mm

4. Πρῖσμα ὀρθόν ἔχει βάσιν τρίγωνον τοῦ ὁποίου τό ἐμβαδόν εἶναι 20 m^2, ἐτμήθη δέ ὑπό ἐπιπέδου πλαγίως πρός τήν βάσιν του, ὥστε αἱ τρεῖς παράλληλοι αὐτοῦ ἀκμαί ἔγιναν ἡ μέν 8 dm ἡ δέ 2 dm καί ἡ τρίτη 7 dm. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ κολοβοῦ τούτου πρίσματος.

5. Πόση εἶναι ἡ ἀκμή κύβου ὁ ὁποῖος χωρεῖ 64 τόν. ὕδατος.

6. Δεξαμενή ὀρθογώνιος ἔχει μῆκος 2 m, πλάτος 1,5 περιέχει δέ ὕδωρ μέχρι τοῦ τετάρτου τοῦ ὕψους της. Διά σωλῆνος δύναται νά εἰσρεύσῃ ὕδωρ 6 χιλ/μα τό λεπτόν. Ἀνοιχθέντος τοῦ σωλῆνος ἐπί 31 1/4 λεπτά τό ὕδωρ ἀνῆλθεν εἰς τό ὕψος τοῦ 1/2 τῆς δεξαμενῆς. Ζητεῖται ἡ χωρητικότης τῆς δεξαμενῆς καί τό ὕψος. 'Απ.2250 Kg, 7,5 dm

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

7. Ένα δοχεΐον έχει σχήμα όρθοΰ πρίσματος ύψους 4 δεκάτων, τοΰ όποίου ή βάσις εΐναι τραπέζιον ίσοσκελές. Ή μέν μεγάλη του βάσις εΐναι 3 δέκατα, ή δέ μικρή 2 δέκατα καί ή γωνία τής βάσεως του 56 μοιρών. Πόση εΐναι ή όλική έπιφάνεια καί ό όγκος;

8. Πόσον ύδωρ χωρεΐ κυλινδρικόν δοχεΐον τοΰ όποίου ή βάσις εΐναι 4 dm^2 τό δέ ύψος εΐναι τριπλάσιον τής άκτΐνος τής βάσεως;

9. Πρόκειται νά κατασκευάση τεχνίτης κύλινδρον έκ χυτοσιδήρου πού θά έχη ύψος 2cm καί περιφέρειαν βάσεως 4 cm. Πόσον βάρος θά έχη έάν τό είδ. βάρος τοΰ χυτοσιδήρου εΐναι 7,8;

10. Κοΐλος κύλινδρος έκ χυτοσιδήρου έχει μήκος μέν 4 m διάμετρον δέ έξωτερικήν 0,35 m. Ποΐον τό βάρος του άν τό πάχος εΐνα 0,025 m τό δέ είδ. βάρος 7,2;
'Απ. 0,73476 t

11. Νά ύπολογισθώσι αί πλευραί τοΰ όρθογωνίου τό όποΐον ότα περιστρέφεται περί μίαν τών πλευρών του γεννάται κύλινδρος όστις έχει όγκον 37,68 m^3 περιστρεφόμενον δέ περί τήν άλλην πλευράν του γεννάται κύλινδρος πού έχει όγκον 56,52 m^3. 'Απ. 6, 2,3 m.

12. Τό έσωτερικόν ποτηρίου έχει σχήμα κώνου ή έπίπεδος γωνία τοΰ κώνου εΐναι 60^0 έντός δέ αύτοΰ έχύθη ύδράργυρος 545 γραμμαρίων, Νά εύρεθή τό ύψος τοΰ ύδραργύρου τής πυκνότητος τούτου ούσης 13,596.
'Απ. 4,84 cm

13. Πόσον εΐναι ή άκτίς καί ή έπιφάνεια σφαίρας έκ χυτοσιδήρου τής όποίας τό βάρος εΐναι 250 Kg έάν είδ. βάρος χυτοσιδ. 7,8
'Απ. 19,7cm.

14. Νά εύρεθή ό όγκος τοΰ σφαιρικοΰ τμήματος πού περιλαμβάνεται ύπό δύο παραλλήλων έπιπέδων κειμένων έκατέρωθεν τοΰ κέντρου τής σφαίρας καί εις άποστάσεις ίσας πρός τό $\frac{1}{3}$ καί $\frac{2}{5}$ τής άκτΐνος. Ή άκτίς τής σφαίρας εΐναι 5 cm.

'Απ. 274,11cm^3.

15. Νά ύπολογισθή ή διάμετρος καί ή όλική έπιφάνεια λέβητος ό όποΐος έχει χωρητικότητα 1000 κιλά καί έχει σχήμα κυλίνδρου πού καταλήγει είς δύο ήμισφαίρια. Τό όλικόν μήκος αύτοΰ εΐναι όκταπλάσιον τής διαμέτρου του. 'Απ. 0,59 m 7,325 m^2.

16. Νά εύρεθή ό όγκος τοΰ κοινοΰ μέρους δύο σφαιρών τεμνομένων, άκτίνων 4 cm καί 5 cm καί άποστάσεως τών κέντρων αύτών 6 cm
'Απ. 197,82 cm^3

17. Νά εύρεθή τό βάρος τοΰ έπαιτουμένου έλάσματος πάχους 6m.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διά τήν κατασκευήν κυλινδρικῆς καπνοδόχου ὕψους 10 m καί διαμέτρου 0,50 m , ὅταν ἡ ἐπικάλυψις τῶν ἐλασμάτων κατά τήν ἥλωσιν τήν κατά μῆκος καί τήν περιφερειακήν εἶναι 0,050 m 'Απ. 708,588 Kg.

18. Νά εὑρεθῇ τό βάρος χαλκίνου ἀγωγοῦ διανομῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας διατομῆς 6 τετραγωνικῶν χιλιοστῶν καί μήκους 1000 μέτρων. 'Απ. 52800 gr.

19. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς ἀπαιτουμένης λιθοδομῆς διά τήν κατασκευήν θόλου (ἁψῖδος), ἐξωτερικῆς διαμέτρου 1,80 m ,ἐσωτερικῆς δέ 1,20 m, ὅταν τό πάχος τῆς λιθοδομῆς εἶναι 0,50 m

ἄν είδ. βάρ.2,2 'Απ.777,04 Kg

20. Πρόκειται νά ἀντικαταστήσωμεν, δεξαμενήν πετρελαίου πρισματικήν μήκους 1200 mm , πλάτους 6800 mm , βάθους 1000 mm , δι' ἄλλης κυλινδρικῆς μήκους 1,50 m . Ποία ἡ διάμετρος τῆς νέας δεξαμενῆς, 'Απ. $\simeq$ 0,902 m.

21. Δεξαμενή ἔχει ὡς πυθμένα ὁριζόντιον ἑξάγωνον κανονικόν μέ πλευράν 12 m . Τό ὕψος τοῦ ἐν αὐτῇ ὕδατος εἶναι 1,20 m . Εὑρεῖν τόν ὄγκον τοῦ ὕδατος,

22. 'Αγγεῖον ἐκ χυτοῦ σιδήρου ἔχει σχῆμα πρίσματος ὀρθοῦ μέ βάσιν κανονικόν ἑξάγωνον, εἶναι δέ ἡ μέν ἐξωτερική παράπλευρος ἀκμή 1,75 m , ἡ δέ πλευρά τοῦ ἑξαγώνου 0,4 m καί τό πλάτος τῶν τοιχωμάτων 0,04. Ζητεῖται τό βάρος τοῦ δοχείου.

23. Πρόκειται νά κατασκευασθῇ ἀγγεῖον πρισματικόν βάθους 0,75 m , τό ὁποῖον νά χωρῇ 100 κιλ. Νά ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά τῶν βάσεων αὐτοῦ αἵτινες εἶναι ἑξάγωνα κανονικά.

24. 'Εκ κύβου μολυβδίνου πλευρᾶς 0,10 m , ἀποκόπτονται 8 πυραμίδες ὧν ἑκάστη ἔχει κορυφήν μίαν τοῦ κύβου κορυφήν, βάσεις δέ τά ἐπίπεδα τά ἀγόμενα διά τῶν μέσων τῶν ἀκμῶν ἑκάστης στερεᾶς γωνίας. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ὁλική ἐπιφάνεια καί τό βάρος τοῦ προκύπτοντος στερεοῦ. 'Απ. 478,8 cm^2 91281,52 gr.

25. 'Από ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχον ἐπιφάνειαν 18 τετρ. δεκάτων κατασκευάζομεν κανονικόν τετράεδρον διά στροφῆς ἤ διπλώσεως τῶν γωνιῶν του περί τάς εὐθείας τάς συνδεούσας τά μέσα τῶν πλευρῶν. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου.

26. 'Από ἡμικύκλιον ἐκ λευκοσιδήρου μέ διάμετρον AB = 66 cm. γίνεται χωνίον διά συγκολλήσεως τῶν ἀκτίνων ΟΑ καί ΟΒ. Ζητεῖται ἡ χωρητικότης αὐτοῦ. 'Απ. 8121,17 gr.

27. Φύλλον χαλκοῦ μήκους 8 mm , πλάτους 175 mm καί πάχους

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1mm πόσον τιμᾶται ἄν τά 100 χιλιόγραμμα χαλκοῦ τιμῶνται 2000 δραχμάς καί τό είδικόν βάρος του εἶναι 8,8; 'Απ. 0,2464 δραχμάς.

28. Σφαῖρα ἐκ χυτοσιδήρου διαμέτρου 3 μέτρων κόπτεται ἀπό ἐπιπέδου εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἐκ τοῦ κέντρου της. Εἰς τό μέσον τῆς τομῆς ὑπάρχει κωνική ὀπή τῆς ὁποίας ἡ κορυφή καταλήγει εἰς τό κέντρον τῆς σφαίρας, ἡ δέ γωνία πού σχηματίζεται μεταξύ τῶν δύο πλευρῶν τοῦ κώνου εἶναι 60°. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καί τό βάρος τοῦ στερεοῦ σώματος. 'Απ.10,362 m^3, 80,8236 τόννοι.

29. Εἰς μίας σφαῖραν ἐκ χυτοσιδήρου διαμέτρου 45 cm ἀνοίγεται ὀπή κυλινδρική κατά μῆκος μιᾶς διαμέτρου τῆς σφαίρας πλάτους 12 cm. Καθέτως δέ πρός τήν διάμετρον αὐτήν κατά μῆκος ἄλλης διαμέτρου ἀνοίγονται ἄλλες δύο κολουροκωνικές ὀπές τῶν ὁποίων αἱ διάμετροι τῶν βάσεων εἶναι 6 mm καί 2 mm καί τό βάρος τῶν ὀπῶν 8 mm Ζητεῖται τό ἐμβαδόν ἐσωτερικῶς καί ἐξωτερικῶς τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας καί τό βάρος (κατά τόν ὑπολογισμόν νά ὑπολογισθοῦν αἱ βάσεις τοῦ κυλίνδρου καί κώνου ὡς σφαιρικά τμήματα).

30. Νά εὑρεθῇ πόσον ἔλασμα χρειαζόμεθα διά νά κατασκευάσωμεν δοχεῖον κυλινδρικόν χωρητικότητος 31400 Kg καί ὕψους 2,5 m. 'Απ = 56,52 m^2.

31. Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν, ὁ ὄγκος καί τό βάρος εἰς κιλά καί ὀκάδες τριγωνικοῦ κανονικοῦ πρίσματος ἐκ χάλυβος τοῦ ὁποίου ἡ πλευρά τῆς βάσεως των εἶναι 8 cm καί τό μῆκος του 19 cm.
'Απ. 511,36 cm^2, 525,92 cm^3, 3,99 Kg 2,52 ὀκ.

32. Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν, ὁ ὄγκος καί τό βάρος εἰς κιλά καί ὀκάδας βάσεως ἐκ ντουραλουμινίου σχήματος ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου τοῦ ὁποίου τό μῆκος εἶναι 20 cm, , αἱ δέ πλευραί αὐτοῦ εἶναι ἡ μία 6 cm, καί ἡ ἄλλη 4 cm εἰδικ. βάρος ντουραλουμίν 2,7.
'Απ. 440 cm^2 480 cm^3, 1,3926 Kg 1.004 ὀκάδ.

33. Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν ὁ ὄγκος καί τό βάρος εἰς κιλά καί ὀκάδας ράβδου σιδηρᾶς, σχήματος πρίσματος ἑξαγωνικοῦ μέ πλευράν 2 cm καί μήκους 18 cm, εἰδικόν βάρος σιδήρου 6,88.
'Απ 236,76 cm^2, 186,84 cm^3, 3,384 Kg 2,61 ὀκάδ.

34. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδόν τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας μιᾶς κλιμακωτῆς τροχαλίας τῆς ὁποίας ἡ πρώτη κλιμάκωσις ἔχει διάμετρον 30 cm ἡ δευτέρα 20 cm καί ἡ τρίτη 10 cm

Ἡ ὀπή δέ εἰς τήν ὁποίαν στερεοῦται ὁ ἄξων τῆς κινήσεως ἔχει διάμετρον 5 cm κα[illegible]

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

'Απ. 8321 cm^3 2824,8 cm^2

35. Ἡ πυροκεφαλή μιᾶς πετρελαιομηχανῆς ἐκ χυτοσιδήρου εἶναι ἡμισφαίριον ὁ δέ ἄξων αὐτῆς εἶναι κυλινδρικός καί καταλήγει εἰς ἕνα κῶνον. Ἡ διάμετρος ἡμισφαίρας εἶναι 20 mm. Τό μῆκος τοῦ ἄξονος εἶναι 44mm· ἡ διάμετρος αὐτοῦ εἶναι 12 mm, τό δέ ὕψος τοῦ κώνου εἶναι 16 mm.

Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος, τό ἐμβαδόν καί τό βάρος τοῦ πύρου (εἰδικόν βάρος χυτοσ. 7,3) Ἀπ. 8875,74 mm^3 2892 mm^2 64,79 gr.

36. Βάκτρον ἐκ χάλυβος μήκους 82 cm καταλῆγον ἀπό τό ἕνα ἄκρον εἰς κόλουρον κῶνον μήκους 12 cm μέ γωνίαν κλίσεως 8^o, ἀπό τό ἄλλο ἄκρον του καταλήγει σέ ἡμισφαίριον ακτῖνος 4 cm.

Νά εὑρεθῇ τό βάρος του (εἰδικόν βάρος χάλυβος 7,8.

Ἀπ. 29,909 Kg.

37. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος, τό ἐμβαδόν καί τό βάρος λιπαντηρίας βελόνης (ἐκ χυτοσιδήρου) μιᾶς ἀτμομηχανῆς ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπό κεφαλήν ἡμισφαιροειδῆ διαμέτρου 16,4 cm αὐτοτελῆ μεθ' ἑνός κυλίνδρου ~~τῆς αὐτῆς~~ διαμέτρου καί ὕψους 2 cm. Ἐν συνεχείᾳ δέ καί ἐκ μιᾶς ράβδου μήκους 33 cm τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος ἕως τό ἥμισυ τοῦ ὕψους της εἶναι 2 cm καί τοῦ ὑπολοίπου μήκους εἶναι 2,4 cm, ἐν συνεχείᾳ ἐξ ἑνός κώνου διαμέτρου 2,4 cm καί ὕψους 3 cm. Ἄν εἰδικόν βάρος χυτοσιδήρου 7,2

Ἀπ. 1704,411 cm^3 12293,36 gr 974,769 cm^2.

38. Ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς 2 μέτρων στρέφεται περί εὐθεῖαν ΑΔ διερχομένην διά τῆς κορυφῆς τοῦ Α καί κάθετον τῇ ΑΒ.

Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ προκύπτοντος στερεοῦ.

39. Ἐκ τῶν κορυφῶν ὀρθογωνίου ἔχοντος πλευράς 0,03 m καί 0,04 m φέρομεν καθέτους ἐπί τό ἐπίπεδον αὐτοῦ μήκους κατά σειράν 1,2,3, 4 cm. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ προκύπτοντος στερεοῦ.

40. Ἐμβόλου ἀτμομηχανῆς ὁ δίσκος ἔχει σχῆμα κυλίνδρου; διαμέτρου 80 cm; καί ὕψος 40 cm. Εἰς τό μέσον αὐτοῦ ὑπάρχει ὀπή διά τήν στερέωσιν τοῦ βάκτρου του σχήματος κολούρου κώνου, τοῦ ὁποίου αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων του εἶναι R = 9,5 καί r = 7,3 cm. Ἐσωτερικῶς φέρει κοιλώσεις διά τήν ἐλάττωσιν τοῦ βάρους του, αἱ ὁποῖαι ἔχουν σχήματα:-

1) Ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων 8 Χ 6 Χ 5 cm.
2) Τριγωνικοῦ πρίσματος πλευρᾶς 12 cm καί ὕψους 9 cm
3) Δύο ἡμισφαίρια ἀκτῖνος 12 cm ἕκαστον.

Περιφερειακῶς φέρει δύο αὔλακας διά τήν τοποθέτησιν ελατηρίων

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὕψους 11 cm καί βάθους 0,9 cm . Νά εὑρεθῇ τό καθαρόν βάρος τοῦ δίσκου, ἐάν εἶναι ἐκ χυτοσιδήρου εἰδ. βάρους 7,08.

'Απ. ?90558,240 gr

41. Δίδεται ὠστήριον βαλβῖδος ἐσωτερικῆς καύσεως τό ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπό μίαν σφαῖραν ἡ ὁποία ἐφάπτεται ἐπί τῆς ἐκκεντροφόρου ἀτράκτου τῆς ὁποίας ἡ ἀκτίς εἶναι 2 cm , ἐξ ἑνός κολούρου κώνου τοῦ ὁποίου ἡ μεγάλη ἀκτίς εἶναι 2,5 cm καί ἡ μικρή τό ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας. 'Αφαιρεῖται δέ ἀπό αὐτόν ἕνα ἡμισφαίριον καί τό ὕψος αὐτοῦ εἶναι τό διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας καί ἐξ ἑνός κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς εἶναι τό ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας τό δέ ὕψος αὐτῆς τό τετραπλάσιον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας. 'Υλικόν χάλυψ μέ εἰδικόν βάρος 7,60.

Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν, ὁ ὄγκος καί τό βάρος αὐτοῦ.

42. Νά εὑρεθῇ ποῖον πρέπει νά εἶναι τό εἰδικόν βάρος ὕλης ἐκ τῆς ὁποίας θά κατασκευασθῇ σφαιρικόν κύπελλον.

Τό κύπελλον αὐτό θά ἐπιπλέῃ θαλασσίου ὕδατος, ἡ δέ στάθμη τοῦ ὕδατος θά εὑρίσκεται 0,45 m κάτωθεν τῆς βάσεως τοῦ κυπέλλου. Διάμετρος σφαίρας 1,8 m.

43. Θέλομεν νά κατασκευάσωμεν μία δοκό ἀπό χυτοσίδηρο ἡ ὁποία νά ἔχῃ βάρος 120 Kg. Τό μῆκος τῆς δοκοῦ νά εἶναι 30 φορές μεγαλύτερο τῆς διαμέτρου αὐτοῦ. Νά εὑρεθῇ ἡ διάμετρος καί τό μῆκος τῆς δοκοῦ.

44. Ράβδου σιδηρᾶς τό μῆκος εἶναι 4 m ἡ δέ κάθετος τομή αὐτῆς εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 34 mm . Πρόκειται νά τήν μετασχηματίσωμεν εἰς κυλινδρικήν μήκους 7 m πόσον θά εἶναι τό πάχος αὐτῆς;

Τ Ε Λ Ο Σ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

0240000018191
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Χίου Ανδρέας

Χίου Ανδρέας

Χίου Ανδρέας

Χίου Ανδρέας

Χίου Ανδρέας

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ
ΔΙΑ ΤΑΣ ΤΕΧΝΙΚΑΣ ΣΧΟΛΑΣ

1) ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ
2) ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ
3) ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ
4) ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑΣ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής