ΛΑΖΑΡΟΥ ΛΑΖΟΥ
Διευθυντοῦ Πρακτικοῦ Λυκείου

ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ
Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΤΑΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ Γ΄ ΚΑΙ Δ΄ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ ΕΚΔΟΣΕΩΣ 1931

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ, ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΚΑΙ
ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝ. Ν. ΣΙΔΕΡΗ
52 ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ 52—ΜΕΓΑΡΟΝ ΑΡΣΑΚΕΙΟΥ
1932

ΛΑΖΑΡΟΥ ΛΑΖΟΥ
Διευθυντοῦ Πρακτικοῦ Λυκείου

ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ
Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΤΑΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ Γ' ΚΑΙ Δ΄ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ ΕΚΔΟΣΕΩΣ 1931

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ, ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΚΑΙ
ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝ. Ν. ΣΙΔΕΡΗ
52 ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ 52—ΜΕΓΑΡΟΝ ΑΡΣΑΚΕΙΟΥ
1932

Κάθε γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὰς ὑπογραφὰς τῶν συγγραφέων.

ΤΥΠΟΙΣ : ΑΘ. Α. ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΥ ΣΤΟΑ ΣΙΜΟΠΟΥΛΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΙΙΙ.

ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

***312.* Νὰ εὑρεθῇ ὁ τέταρτος ἀνάλογος τῶν 91, 63, 112.**

Ἂν παρασταθῇ διὰ τοῦ x ὁ ζητούμενος, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{91}{63}=\frac{112}{x} \quad \text{ἢ} \quad x=\frac{63.112}{91}=77\frac{49}{91}.$$

***313.* Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέσος ἀνάλογος μεταξὺ τῶν 45 καὶ 39.**

Ἐὰν παρασταθῇ μὲ x, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{45}{x}=\frac{x}{39} \quad \text{ἢ} \quad x^2=45.39 \quad \text{καὶ} \quad x=3\sqrt{195}.$$

***314.* Νὰ εὑρεθῇ ὁ τρίτος ἀνάλογος μεταξὺ τῶν 5 καὶ 213, δηλαδὴ ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας $5:213=213:x$.**

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας ἔχομεν

$$x=\frac{213.213}{5}=9073\frac{4}{5}$$

***315.* Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἂν τρία σημεῖα Α, Β, Γ, κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας διαδέχωνται ἄλληλα, καθ᾽ ἣν τάξιν καὶ τὰ Α′, Β′, Γ′, κείμενα ἐπὶ ἄλλης εὐθείας, αἱ ἀναλογίαι $AB:B\Gamma= A'B':B'\Gamma'$, $AB:A\Gamma=A'B':A'\Gamma'$, $A\Gamma:B\Gamma=A'\Gamma':B'\Gamma'$ εἶναι ἰσοδύναμοι αἱ μὲν πρὸς τὰς δέ.**

Ἔστω ὅτι μεταξὺ τῶν τμημάτων τῶν ἀντιστοίχων τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῶν σημείων τούτων ὑπάρχει ἡ ἀναλογία $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{A'B'}{B'\Gamma'}$ (1)· ἀλλ᾽ ἐξ αὐτῆς κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν ὑπάρχει καὶ ἡ

$$\frac{AB}{AB+B\Gamma}=\frac{A'B'}{A'B'+B'\Gamma'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{AB}{A\Gamma}=\frac{A'B'}{A'\Gamma'} \ (2)$$

ἐπίσης ἐκ τῆς (1) ὑπάρχει καὶ ἡ

$$\frac{AB+B\Gamma}{B\Gamma}=\frac{A'B'+B'\Gamma'}{B'\Gamma'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{A\Gamma}{B\Gamma}=\frac{A'\Gamma'}{B'\Gamma'} \ (3)\cdot$$

παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ (2) καὶ (3) προέρχονται ἐκ τῆς (1), ἄρα αἱ ἀναλογία (1), (2), (3) εἶναι ἰσοδύναμοι.

316. *Δείξατε, ὅτι ἂν εἶναι $\alpha:\beta=\gamma:\delta$ θὰ εἶναι καὶ*

$$(\alpha+\beta):(\alpha-\beta)=(\gamma+\delta):(\gamma-\delta).$$

Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τὴν μονάδα ἔχομεν $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}$ (1)· ἂν ἀφαιρέσωμεν τὴν μονάδα καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς αὐτῆς ἀναλογίας ἔχομεν $\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta}$ (2)· διαιροῦντες τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$.

317. *Ἐὰν εἶναι $\alpha:\beta=\gamma:\delta$, $\varepsilon:\zeta=\eta:\vartheta$, $\iota:\varkappa=\lambda:\mu$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha\varepsilon\iota:\beta\zeta\varkappa=\gamma\eta\lambda:\delta\vartheta\mu$.*

Ἐὰν τὰς δοθείσας ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\varkappa}{\vartheta}$, $\frac{\iota}{\varkappa}=\frac{\lambda}{\mu}$ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη θὰ ἔχωμεν $\frac{\alpha.\varepsilon.\iota}{\beta.\zeta.\varkappa.}=\frac{\gamma.\eta.\lambda}{\delta.\vartheta.\mu}$.

318. *Ἂν εἶναι $\alpha:x=x:\beta$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha:\beta=x^2:\beta^2$.*

Ἐκ τῆς $\frac{\alpha}{x}=\frac{x}{\beta}$ προκύπτει $\alpha=\frac{x^2}{\beta}$ ἢ $\frac{\alpha}{1}=\frac{x^2}{\beta}$· ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος ἐπὶ $\frac{1}{\beta}$ ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{x^2}{\beta^2}.$$

319. *Ἂν εἶναι $\alpha:\beta=\gamma:\delta$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha^\mu:\beta^\mu=\gamma^\mu:\delta^\mu$.*

Ἐὰν ὑψώσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ εἰς τὴν μ δύναμιν ἔχομεν

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu=\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^\mu \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}=\frac{\gamma^\mu}{\delta^\mu}.$$

320. Ὅταν τὸ σημεῖον M χωρίζῃ ἐσωτερικῶς τὴν AB καὶ κινούμενον συνεχῶς διατρέχει τὴν AB ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ B, ὁ λόγος AM : BM αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ O μέχρι τοῦ ἀπείρου (∞).

A M B

Ἔστω $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{\varrho}$· ἐκ ταύτης ἔχομεν

$$\frac{AM}{AM+BM} = \frac{1}{\varrho+1} \quad ἢ \quad \frac{AM}{AB} = \frac{1}{\varrho+1} \quad (2).$$

Ὅταν τὸ M κινῆται ἐπὶ τῆς AB μόνον ὁ ἀριθμητὴς τοῦ πρώτου μέλους μεταβάλλεται, διότι ὁ παρονομαστὴς εἶναι τὸ τμῆμα AB, τὸ ὁποῖον εἶναι τελείως ὡρισμένον· ὅταν τὸ M συμπέσῃ μετὰ τοῦ A θὰ εἶναι $AM = AA = 0$, ἄρα καὶ $\frac{AM}{AB} = 0$, ὅθεν καὶ $\frac{1}{\varrho+1} = 0$· ἀλλ' ἵνα $\frac{1}{\varrho+1} = 0$ πρέπει $\varrho+1 = \infty$ καὶ πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ $\varrho = \infty$, ὁπότε $\frac{1}{\varrho} = 0$. Ὅταν τὸ M ἀπομακρύνεται συνεχῶς τοῦ A ἐπὶ τῆς AB τὸ AM συνεχῶς αὐξάνει, ἐπειδὴ δὲ AB σταθερόν, τὸ κλάσμα $\frac{AM}{AB}$ συνεχῶς αὐξάνει, ἄρα καὶ τὸ ἴσον του $\frac{1}{\varrho+1}$ συνεχῶς αὐξάνει, ἑπομένως ὁ παρονομαστὴς $\varrho+1$ συνεχῶς ἐλαττοῦται, ἐπειδὴ ὅμως ἡ μονὰς δὲν μεταβάλλεται, ἕπεται ὅτι συνεχῶς ἐλαττοῦται ὁ ϱ, ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{1}{\varrho}$ συνεχῶς αὐξάνει· ὅταν δὲ τὸ M συμπέσῃ μετὰ τοῦ B, τότε $AM = AB$ ἄρα $\frac{AM}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$, ὅθεν καὶ $\frac{1}{\varrho+1} = 1$ (καθ' ἣν στιγμὴν τὸ M φθάσῃ εἰς τὸ B) ἢ $1 = \varrho+1$ καὶ $\varrho = 0$, ἄρα $\frac{1}{\varrho} = \infty$.

Ἤτοι ὁ λόγος $\frac{1}{\varrho}$ τοῦ $\frac{AM}{BM}$, ὅταν τὸ M διατρέχῃ τὴν AB ἀπὸ τοῦ A εἰς τὸ B, πρῶτον μηδενίζεται, ἔπειτα συνεχῶς αὐξάνει καὶ γίνεται ἄπειρον, ὅταν τὸ M φθάσῃ εἰς τὸ B.

321. Ὅταν τὸ σημεῖον M' κείμενον πέραν τοῦ B χωρίζῃ ἐξωτερικῶς τὴν AB καὶ κινούμενον συνεχῶς διατρέχῃ τὴν προέκτασιν τῆς AB ἀπὸ τοῦ B καὶ πέραν αὐτοῦ, ὁ λόγος AM' : BM' ἐλαττοῦται ἀπὸ τοῦ ἀπείρου (∞) μέχρι τῆς 1.

$$\underset{\textstyle .}{A}\rule{2cm}{0.4pt}\underset{\textstyle .}{B}\rule{2cm}{0.4pt}\underset{\textstyle .}{M'}$$

Ἔστω $\frac{AM'}{MB'} = \varrho$ ἢ $\frac{AM'}{BM'} = \frac{\varrho}{1}$, τότε $\frac{AM'-BM'}{BM'} = \frac{\varrho - 1}{1}$ ἢ

$$\frac{AB}{BM'} = \frac{\varrho - 1}{1} \text{ ἢ } \frac{BM'}{AB} = \frac{1}{\varrho - 1}$$

Ἐὰν τὸ M′ μεταβάλλῃ θέσιν, τὸ BM′ μεταβάλλεται, ἑπομένως καὶ τὸ ϱ· ἐὰν τὸ M′ συμπέσῃ μετὰ τοῦ B τότε $BM' = BB = 0$, ἄρα καὶ $\frac{BM'}{AB} = 0$, ὅθεν καὶ $\frac{1}{\varrho - 1} = 0$· ἀλλὰ διὰ νὰ συμβαίνῃ τοῦτο πρέπει $\varrho - 1 = \infty$, ὁπότε ἀρκεῖ $\varrho = \infty$· ὅταν τὸ M′ ἀπομακρύνεται τοῦ B, τὸ $\frac{BM'}{AB}$ συνεχῶς αὐξάνει, (ὑποτιθεμένης τῆς κινήσεως τοῦ M′ συνεχοῦς), διότι ὁ ἀριθμητὴς συνεχῶς αὐξάνει, ἄρα καὶ τὸ $\frac{1}{\varrho - 1}$ συνεχῶς αὐξάνει, ἑπομένως ὁ παρανομαστὴς $\varrho - 1$ συνεχῶς ἐλαττοῦται· ἐπειδὴ ὅμως τὸ 1 εἶναι ἀμετάβλητον, ἕπεται ὅτι ὁ ϱ συνεχῶς ἐλαττοῦναι· ὅταν δὲ τὸ M ἀπομακρυνθῇ ἀπείρως τοῦ B ἐπὶ τῆς AB τότε BM′ τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, ἄρα καὶ $\frac{BM'}{AB} = \infty$, ὁπότε καὶ $\frac{1}{\varrho - 1} = \infty$ ἀλλὰ διὰ νὰ συμβαίνῃ τοῦτο πρέπει $\varrho - 1 = 0$, ἐξ οὗ $\varrho = 1$

Ὁ κάτωθι πίναξ συνοψίζει συντόμως τὴν μεταβολὴν τοῦ λόγου AM′:BM′

BM′	0 . . . αὐξάν. . . . . . ∞
AM′ : BM′	∞ . . . ἐλαττ 1

322. Ἐὰν τὸ M′ κείμενον ἔνθεν τοῦ A, χωρίζῃ ἐξωτερικῶς τὴν AB καὶ κινούμενον συνεχῶς διατρέχῃ τὴν προέκτασιν τῆς AB ἀπὸ τοῦ A καὶ ἔνθεν αὐτοῦ, ὁ λόγος AM′ : BM′ αὐξάνεται ἀπὸ 0 μέχρι τῆς 1.

Ἔστω $\frac{AM'}{BM'} = \frac{1}{\varrho}$ τότε $\frac{AM'}{BM'-AM'} = \frac{1}{\varrho - 1}$ ἢ $\frac{AM'}{AB} = \frac{1}{\varrho - 1}$, ὅπου AB = σταθερόν, AM′ μεταβλητὸν καὶ ϱ μεταβλητόν· ὅταν M′ συμπίπτῃ μετὰ τοῦ A τότε $\frac{AM'}{AB} = \frac{AA}{AB} = 0$, ἄρα καὶ $\frac{1}{\varrho - 1} = 0$, ἑπομένως $\varrho - 1 = \infty$, ἀλλὰ τότε $\varrho = \infty$, ὁπότε $\frac{1}{\varrho} = 0$. Ὅταν M συνεχῶς ἀπομακρύνεται τοῦ Α τὸ $\frac{AM'}{AB}$ συνεχῶς αὐξάνει, ἄρα καὶ $\frac{1}{\rho-1}$ συνεχῶς αὐξάνει, ἤτοι $\rho-1$ συνεχῶς ἐλαττοῦται, ἤτοι τὸ ρ συνεχῶς ἐλαττοῦται, ἄρα τὸ $\frac{1}{\rho}$ συνεχῶς αὐξάνει· ὅταν δὲ τὸ Μ ἀπομακρυνθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ εἰς τὸ ∞ τότε $\frac{AM'}{AB}=\infty$ ἄρα καὶ $\frac{1}{\rho-1}=\infty$, ὅθεν $\rho-1$ $=0$ καὶ $\rho=1$, ὁπότε καὶ $\frac{1}{\rho}=1$

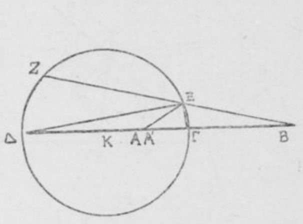
Ὁ κάτωθι πίναξ συνοψίζει συντόμως τὴν μεταβολὴν τοῦ λόγου ΑΜ′: ΒΜ′

ΑΜ′	0	αὐξ.	∞
ΑΜ′ : ΒΜ′	0	αὔξαν.	1

323. ***Ἂν διαιρεθῇ ἁρμονικῶς διάμετρός τις κύκλου διὰ τῶν σημείων Α, Β, αἱ ἀποστάσεις τυχόντος σημείου τῆς περιφερείας αὐτοῦ ἀπὸ τῶν Α καὶ Β ἔχουν λόγον σταθερόν.***

Ἔστω ὅτι ἡ διάμετρος ΓΔ τοῦ κύκλου Κ διαιρεῖται ἁρμονικῶς διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β, ἤτοι ὅτι εἶναι $\frac{ΓA}{ΔA}=\frac{ΓB}{ΔB}$ (1), καὶ Ε τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας θὰ δείξωμεν ὅτι ὁ λόγος $\frac{EA}{EB}$ εἶναι σταθερός.

Φέρομεν τὰς ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ· ἡ ΕΔ εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας τοῦ τριγώνου ΑΕΒ. Διότι ἂν ἡ ΕΔ δὲν εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ταύτης, καὶ φέρωμεν τὴν συμμετρικὴν τῆς ΕΖ ὡς πρὸς τὴν ΕΔ, αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν διάμετρον εἴς τι σημεῖον Α′, καὶ ἕνεκα τῆς διχοτόμου ΕΔ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας ΖΕΑ′ τοῦ τριγώνου Α′ΕΒ θὰ ἔχωμεν $\frac{ΔA'}{ΔB}=\frac{EA'}{EB}$ (2) ἀλλὰ ἕνεκα τῆς εἰς ἡμικύκλιον ἐγγεγραμμένης γωνίας ΔΕΓ, ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ΕΓ ἄρα ἡ ΕΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α′ΕΒ, ἡ ὁποία εἶναι παραπλήρωμα τῆς ΖΕΑ′· ἀλλ᾽ ἡ γωνία Α′ΕΒ εἶναι ἐσωτερικὴ τοῦ τριγώνου Α′ΕΒ, ἑπομένως ἔχομεν



Σχ. 1.

$\frac{ΓA'}{ΓB}=\frac{EA'}{EB}$ (3)· ἐκ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν

$$\frac{\Gamma A'}{\Gamma B} = \frac{\Delta A'}{\Delta B} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Gamma A'}{\Delta A'} = \frac{\Gamma B}{\Delta B} \qquad (4)$$

ἐκ δὲ τῶν (1) καὶ (4) ἔχομεν

$$\frac{\Gamma A'}{\Delta A'} = \frac{\Gamma A}{\Delta A} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Gamma A'}{\Delta A' + \Gamma A'} = \frac{\Gamma A}{\Delta A + \Gamma A} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Gamma A'}{\Delta \Gamma} = \frac{\Gamma A}{\Delta \Gamma}.$$

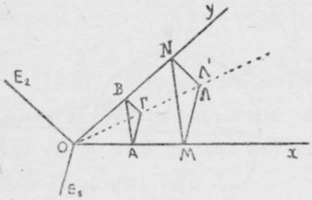
ἐκ τῆς τελευταίας ἰσότητος προκύπτει $\Gamma A' = \Gamma A$, ἤτοι τὸ σημεῖον Α συμπίπτει πρὸς τὸ Α, ἑπομένως καὶ ἡ ΕΑ′ συμπίπτει πρὸς τὴν ΕΑ, ἄρα ἡ ΔΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΖΕΑ καὶ ἑπομένως ἡ κάθετος πρὸς ταύτην ἡ ΕΓ εἶναι διχοτόμος τῆς ΑΕΒ· ἕνεκα τούτου δὲ ἔχομεν $\frac{EA}{EB} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B}$· ἀλλὰ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶναι δεδομένα, ἑπομένως τὰ τμήματα ΓΑ, ΓΒ, ΔΑ, ΔΒ εἶναι ὡρισμένα, ὅθεν

$$\frac{EA}{EB} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B} = \text{σταθερός}.$$

Ἤτοι ἡ περιφέρεια Κ εἶναι ὁ γεωμετρ. τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὰ Α καὶ Β ἔχουν λόγον σταθερόν.

324. *Ἐπὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν λαμβάνομεν ἀπὸ δύο ὡρισμένων σημείων Α,Β αὐτῶν τὰς ΑΜ, ΒΝ μεταβαλλομένας ἀναλόγως. Διὰ τῶν Μ,Ν φέρομεν παραλλήλους πρὸς ἄλλας δύο ὡρισμένας εὐθείας. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν εὐθειῶν τούτων.*

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ 0x καὶ 0y, OE_1 καὶ OE_2· (σχ.2) φέρομεν τὴν ΑΒ καὶ τυχοῦσαν παράλληλον πρὸς ταύτην τὴν ΜΝ·τότε τὰ τμήματα ΑΜ καὶ ΒΝ, ὡς τμήματα εὐθειῶν τεμνομένων ὑπὸ παραλλήλων μεταβάλλονται ἀναλόγως. Ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β φέρομεν τὰς ΑΓ καὶ ΒΓ ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς δοθείσας εὐθείας OE_1 καὶ OE_2, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Γ· φέρομεν τὴν ΟΓ, λέγω, ὅτι αὕτη εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος. Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΜΝ τοῦ τριγώνου ΟΜΝ ἔχομεν



Σχ. 2.

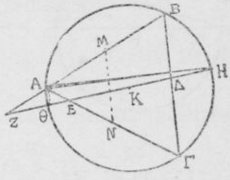
$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} \qquad (1)$$

ἐὰν ἀχθῇ ἐκ τοῦ Μ ἡ ΜΛ παράλληλος πρὸς τὴν ΟΕ, αὕτη θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν ΑΓ, ἑπομένως ἔχομεν $\frac{ΟΑ}{ΟΜ}=\frac{ΟΓ}{ΟΛ}$ (2)· ἐὰν ἐκ τοῦ Ν ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν $ΟΕ_2$ καὶ ὑποτεθῇ ὅτι αὕτη τέμνει τὴν ΟΓ εἰς τὸ Λ′, τότε αὕτη θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $\frac{ΟΒ}{ΟΝ}=\frac{ΟΓ}{ΟΛ'}$ (3)· ἐκ τῶν (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν $\frac{ΟΓ}{ΟΛ}=\frac{ΟΓ}{ΟΛ'}$ ἤτοι $ΟΛ=ΟΛ'$, ἄρα τὰ σημεῖα Λ καὶ Λ′ συμπίπτουν ἑπομένως αἱ ἐκ τοῦ Μ καὶ Ν ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς τὰς $ΟΕ_1$ καὶ $ΟΕ_2$ τέμνονται ἐπὶ τῆς ΟΓ, ἄρα αὕτη εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος.

*325. **Δύο χορδαὶ κύκλου, διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῆς περιφερείας, διαιροῦν ἁρμονικῶς τὴν διάμετρον, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τὴν συνδέουσαν τὰ μέσα καὶ τὰ ἄκρα τῶν χορδῶν.***

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΑΓ (σχ. 3) δύο χορδαὶ τοῦ κύκλου Κ καὶ ΘΗ ἡ διάμετρος, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, ἡ ὁποία συνδέει τὰ ἄκρα Β καὶ Γ τῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΑΓ· ἐὰν Ε καὶ Ζ εἶναι τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα τέμνεται ἡ διάμετρος ΗΘ ὑπὸ τῶν χορδῶν ΑΓ καὶ ΑΒ, θὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{ΗΖ}{ΘΖ}=\frac{ΗΕ}{ΘΕ}$, δηλ. ἡ διάμετρος διαιρεῖται ἁρμονικῶς.

Ἐν πρώτοις ἡ διάμετρος ΗΘ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΜΝ, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, διότι ἡ ΗΘ ἐπειδὴ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ΒΓ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ πρὸς τὴν παράλληλον αὐτῆς τὴν ΜΝ. Φέρομεν τὴν ΑΗ· αἱ γωνίαι ΗΑΒ καὶ ΓΑΗ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουσιν ἐπὶ τῶν ἴσων τόξων ΒΗ καὶ ΓΗ· ὥστε ἡ ΑΗ εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας ΕΑΒ τοῦ τριγώνου ΕΖΑ, ἑπομένως ἔχομεν



Σχ. 3.

$$\frac{ΗΖ}{ΗΕ}=\frac{ΑΖ}{ΑΕ} \qquad (1)$$

Ἐὰν ἀχθῇ ἡ χορδὴ ΑΘ αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΗ, διότι ἡ γωνία ΘΑΗ ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθή, ἑπομένως ἡ ΑΘ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΖΑΕ, ὡς παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας ΕΑΒ : θὰ ἔχομεν λοιπὸν $\frac{ΘΖ}{ΘΕ}=\frac{ΑΖ}{ΑΕ}$ (2)· ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\frac{HZ}{HE} = \frac{\Theta Z}{\Theta E}$ ἢ $\frac{HZ}{\Theta Z} = \frac{HE}{\Theta E}$, ἤτοι ἡ διάμετρος διῃρέθη ἁρμονικῶς.

326. Πρὸς ποῖον μέρος τοῦ ἐπιπέδου κεῖνται τὰ σημεῖα, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων Α,Β ἔχουν λόγον μεγαλύτερον δοθέντος ἀριθμοῦ ρ ;

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ γεωμετρ. τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β ἔχουν λόγον ἴσον μὲ ρ, εἶναι περιφέρεια, καὶ ἔστω ΓΔ ἡ διάμετρος αὐτῆς. Ἐὰν Μ (σχ.4) εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου θὰ ἔχωμεν

$$\frac{MB}{MA} = \varrho \quad \text{καὶ} \quad \frac{\Delta B}{\Delta A} = \varrho \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Delta B}{\Delta A} = \frac{\varrho}{1}.$$

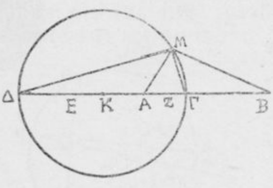
Ἐκ τῆς τελευταίας ἀναλογίας ἔχομεν.

$$\frac{\Delta B - \Delta A}{\Delta A} = \frac{\varrho - 1}{1} \quad \text{ἢ} \quad \frac{AB}{\Delta A} = \varrho - 1 \quad \text{καὶ} \quad \Delta A = \frac{AB}{\varrho - 1} \quad (1)$$

Ἔχομεν ἐπίσης $\frac{\Gamma B}{\Gamma A} = \frac{\varrho}{1}$ ἢ $\frac{\Gamma B + \Gamma A}{\Gamma A} = \frac{\varrho + 1}{1}$

$$\text{ἢ} \quad \frac{AB}{\Gamma A} = \varrho + 1 \quad \text{καὶ} \quad \Gamma A = \frac{AB}{\varrho + 1} \quad (2)$$

Θεωρήσωμεν τώρα σημεῖον Ν,τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ Α καὶ Β νὰ ἔχουν λόγον $\sigma > \varrho$· τοῦτο θὰ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἥτις ἔστω, ὅτι τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ, ὁπότε $\frac{NB}{NA} = \sigma$ καὶ $\frac{EB}{EA} = \sigma$ καὶ $\frac{ZB}{ZA} = \sigma$, (ὑποτίθεται ὅτι τὸ μὲν Ζ κεῖται μεταξὺ Α καὶ Β τὸ δὲ Ε πέραν τοῦ Α)· ἐὰν καὶ ἐπὶ τοῦ Ν ἐφαρμόσωμεν τὰ προηγούμενα εὑρίσκομεν



Σχ. 4.

$EA = \frac{AB}{\sigma - 1}$ (3) καὶ $ZA = \frac{AB}{\sigma + 1}$ (4)· διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (3) καὶ (1) καθὼς καὶ τὰς (4) καὶ (2) λαμβάνομεν $\frac{EA}{\Delta A} = \frac{\varrho - 1}{\sigma - 1}$ καὶ $\frac{ZA}{\Gamma A} = \frac{\varrho + 1}{\sigma + 1}$· ἀλλὰ $\sigma > \varrho$ ἑπομένως καὶ $\sigma - 1 > \varrho - 1$ καὶ $\sigma + 1 > \varrho + 1$ ἢ $\frac{\varrho - 1}{\sigma - 1} < 1$ καὶ $\frac{\varrho + 1}{\sigma + 1} < 1$, ὅθεν καὶ

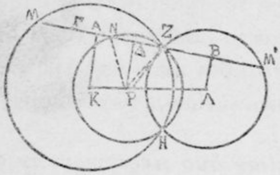
$\frac{ΕΑ}{ΔΑ} < 1$ καὶ $\frac{ΖΑ}{ΓΑ} < 1$ ἢ $ΕΑ < ΔΑ$ καὶ $ΖΑ < ΓΑ$, ἤτοι τὸ μὲν σημεῖον Ε κεῖται μεταξὺ τοῦ Δ καὶ Α τὸ δὲ σημεῖον Ζ μεταξὺ τῶν Γ καὶ Α· ἤτοι ἡ διάμετρος τῆς περιφερείας, ἐφ' ἧς κεῖται τὸ Ν ἔχει τὰ ἄκρα της μεταξὺ τῶν ἄκρων τῆς ΔΓ, ἑπομένως ἡ περιφέρεια αὕτη κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας ΓΜΔ· ἄρα τὰ σημεῖα τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν Α καὶ Β ἔχουν λόγον μεγαλύτερον τοῦ ρ, εὑρίσκονται εἰς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τὸ περιλαμβάνομεν ὑπὸ τῆς περιφερείας, ἥτις ἀποτελεῖ τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν Α καὶ Β ἔχουν λόγον ρ.

*327. **Διὰ τοῦ ἑνὸς τῶν κοινῶν σημείων δύο περιφερειῶν φέρομεν εὐθεῖαν, τέμνουσαν τὰς περιφερείας καὶ στρεφομένην περὶ τὸ σημεῖον τοῦτο. Ἂν Μ, Μ′ εἶναι αἱ τομαὶ ταύτης μετὰ τῶν περιφερειῶν, νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν διαιρούντων τὴν ΜΜ′ εἰς μέρη ἔχοντα λόγον δοθέντα.***

Ἔστωσαν Ζ καὶ Η (σχ.5) αἱ τομαὶ τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ καὶ $\frac{μ}{ν-μ}$ ὁ δοθεὶς λόγος. Φέρομεν διὰ τοῦ Ζ τυχοῦσαν τέμνουσαν ΜΜ′, τῆς ὁποίας ἔστω Ν τὸ σημεῖον, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $\frac{ΜΝ}{Μ'Ν} = \frac{μ}{ν-μ}$.

ἐντεῦθεν ἔχομεν $\frac{ΜΝ}{ΜΝ+Μ'Ν} = \frac{μ}{ν-μ+μ}$ ἢ $\frac{ΜΝ}{ΜΜ'} = \frac{μ}{ν}$ (1).

Ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ΚΑ καὶ ΛΒ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΜΜ′ θὰ εἶναι $ΑΖ = \frac{ΜΖ}{2}$ καὶ $ΖΒ = \frac{ΖΜ'}{2}$, ὅθεν καὶ $ΑΖ + ΖΒ = \frac{ΜΖ + Μ'Ζ}{2}$ ἢ $ΑΒ = \frac{ΜΜ'}{2}$· θεωρήσωμεν νῦν τὸ σημεῖον Δ τῆς ΑΒ, διὰ τὸ ὁποῖον ἔχομεν $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{μ}{ν}$· πρὸς προσδιορισμὸν τούτου παρατηροῦμεν ὅτι $ΑΒ = \frac{ΜΜ'}{2}$, ἄρα $\frac{μ}{ν}(ΑΒ) = \frac{1}{2}\left(\frac{μ}{ν} ΜΜ'\right)$, ἀλλ' ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $ΜΝ = \frac{μ}{ν} ΜΜ'$, ὅθεν $\frac{μ}{ν}(ΑΒ) = \frac{ΜΝ}{2}$ ἢ $ΑΔ = \frac{ΜΝ}{2}$, ἤτοι τὸ Δ ἀπέχει τοῦ Α ἀπόστασιν $ΑΔ = \frac{ΜΝ}{2}$· ἔστω Γ τὸ μέσον τῆς ΜΝ τότε $ΜΓ = ΓΝ = ΔΑ$ (2). Ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΔΡ κάθετος εἰς τὸ Δ ἐπὶ τὴν ΑΒ, αὕτη τέμνει τὴν ΚΛ εἰς τὸ Ρ· ἕνεκα δὲ τῶν παραλλήλων ΑΚ, ΔΡ καὶ ΒΛ ἔχομεν $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΚΡ}{ΚΛ} = \frac{μ}{ν}$ καὶ $ΚΡ = \frac{μ}{ν}. ΚΛ$, ἤτοι τὸ σημεῖον Ρ εἶναι σταθερόν, διότι ὁ λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ εἶναι σταθερὸς καὶ ἡ διάκεντρος ΚΛ ἐπίσης σταθερά. Ἂν ἀχθοῦν νῦν αἱ ΡΝ καὶ ΡΖ, ἐπειδὴ ΜΑ = ΑΖ καὶ ΜΓ=ΑΔ ἕνεκα τῆς (2), ἔχομεν ΜΑ—ΜΓ=ΑΖ—ΑΔ ἢ ΓΑ=ΔΖ (3)· ὡσαύτως ἐπειδὴ ἕνεκα τῆς (2) εἶναι ΓΝ=ΑΔ τότε καὶ ΓΝ—ΑΝ=ΑΔ—ΑΝ ἢ ΓΑ=ΝΔ (4)· ἐκ τῶν (3) καὶ (4) λαμβάνομεν ΔΖ = ΝΔ, ἤτοι τὸ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΝΖ τοῦ τριγώνου ΝΡΖ, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ διάμεσος ΡΔ εἶναι καὶ ὕψος, ὡς ἐκ κατασκευῆς κάθετος πρὸς τὴν ΑΒ, ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΡΝΖ εἶναι ἰσοσκελές, ὅθεν ΡΝ=ΡΖ, ἤτοι ἡ ΡΝ εἶναι σταθερά, καὶ ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν ΡΖ τῶν σταθερῶν σημείων Ρ καὶ Ζ· ἑπομένως τὸ Ν κεῖται ἐπὶ περιφερείας ἐχούσης κέντρον τὸ Ρ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΡΖ



Σχ. 5.

Λέγω ὅτι ἡ περιφέρεια αὕτη εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος. Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ζ τυχοῦσα τέμνουσα ΜΜ′, ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν Ρ εἰς τὸ Ν· ἂν ἀχθοῦν αἱ ΚΑ καὶ ΛΒ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΜΜ′, ἔχομεν 2 ΑΒ=ΜΜ′ (5)· ἂν ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ ΡΝ καὶ τὸ ὕψος ΡΔ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΝΡΖ, θὰ ἔχωμεν ΝΔ=ΔΖ (6)· ἕνεκα δὲ τῶν παραλλήλων ΚΑ, ΡΔ, ΛΒ ἔχομεν $\frac{\text{ΚΡ}}{\text{ΚΛ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}}$· ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς εἶναι $\frac{\text{ΚΡ}}{\text{ΚΛ}} = \frac{\mu}{\nu}$ ὅθεν $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\mu}{\nu}$ καὶ $\frac{2\text{ΑΔ}}{2\text{ΑΒ}} = \frac{\mu}{\nu}$, ἢ ἕνεκα τῆς (5) $\frac{2\text{ΑΔ}}{\text{ΜΜ}'} = \frac{\mu}{\nu}$, ἢ $\frac{\text{ΑΔ}+\text{ΑΔ}}{\text{ΜΜ}'} = \frac{\mu}{\nu}$· εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἀναλογίας ταύτης προσθέτομεν καὶ ἀφαιροῦμεν ἴσα τμήματα ΝΔ καὶ ΔΖ, ὅτε ἔχομεν $\frac{(\text{ΑΔ}+\text{ΔΖ})+(\text{ΑΔ}-\text{ΔΖ})}{\text{ΜΜ}'} = \frac{\mu}{\nu}$ ἢ $\frac{\text{ΑΖ}+\text{ΑΝ}}{\text{ΜΜ}'} = \frac{\mu}{\nu}$ (7)· ἀλλὰ ΑΖ = ΜΑ, διότι ἡ ΚΑ ὡς κάθετος ἐκ τοῦ κέντρου Κ ἐπὶ τὴν χορδὴν ΜΖ διαιρεῖ αὐτὴν εἰς ἴσα μέρη, ἑπομένως ἡ (7) γίνεται $\frac{\text{ΜΑ}+\text{ΑΝ}}{\text{ΜΜ}'} = \frac{\mu}{\nu}$ ἢ $\frac{\text{ΜΝ}}{\text{Μ}'\text{Μ}} = \frac{\mu}{\nu}$· ἐκ ταύτης δὲ λαμβάνομεν $\frac{\text{ΜΝ}}{\text{ΜΜ}'-\text{ΜΝ}} = \frac{\mu}{\nu-\mu}$ ἢ $\frac{\text{ΜΝ}}{\text{Μ}'\text{Ν}} = \frac{\mu}{\nu-\mu}$, ἤτοι τὸ σημεῖον τὸ διαιροῦν τὴν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΜΜ′ εἰς μέρη ἔχοντα τὸν δοθέντα λόγον εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς περιφερείας Ρ καὶ τῆς τεμνούσης, ἑπομένως ἡ περιφέρεια Ρ εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμετρ. τόπος.

Ἑπομένως ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι περιφέρεια ἔχουσα κέντρον τὸ σημεῖον τῆς διακέντρου τῶν δοθέντων κύκλων, τὸ διαιροῦν ταύτην εἰς μέρη ἔχοντα λόγον γνωστὸνκαὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιντοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τῆς τομῆς τῶν περιφερειῶν τῶν δοθέντων κύκλων.

328. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἔχομεν ΑΒ = 12 μ., ΑΓ = 14 μ. ΒΓ = 13 μ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ τμήματα εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ΒΓ ὑπὸ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α.

Ἐὰν Δ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς ΒΓ (σχ.6) ὑπὸ τῆς διχοτόμου ΑΔ τῆς γωνίας Α θὰ ἔχωμεν κατὰ γνωστὸν θεώρημα·

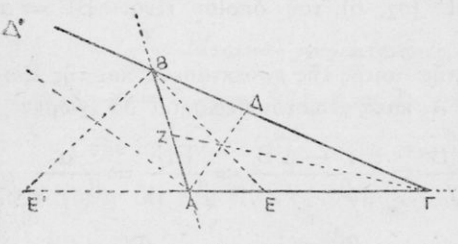
$$\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΑΓ}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\text{ΒΔ}}{12} = \frac{\text{ΔΓ}}{14} = \frac{\text{ΒΔ} + \text{ΒΓ}}{12 + 14} = \frac{\text{ΒΓ}}{26} = \frac{13}{36} = \frac{1}{2}$$

ἐκ τούτων ἔχομεν

$$\text{ΒΔ} = \frac{12 \,.\, 1}{2} = 6 \text{ καὶ } \text{ΔΓ} = \frac{14 \,.\, 1}{2} = 7.$$

329. Αἱ πλευραὶ τριγώνου εἶναι 5,6,4 μ.· ἐφ' ἑκάστης τούτων καὶ τῆς προεκτάσεως ἑκάστης νὰ εὑρεθοῦν τὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ σημεῖα πρὸς τὰς ἀντιστοίχους δύο κορυφὰς τοῦ τριγώνου.

Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 6) τὸ δοθὲν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου εἶναι ΑΒ = 4μ., ΑΓ = 5μ, ΒΓ = 6μ. Τὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ σημεῖα πρὸς τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ κεῖνται ἐπὶ τῆς ΒΓ προεκτεινομένης καὶ εἶναι τὰ σημεῖα κατὰ τὰ ὁποῖα ἡ ἐσωτερικὴ καὶ ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τέμνουν τὴν ΒΓ.



Σχ. 6.

Ἐὰν λοιπὸν Δ καὶ Δ' εἶναι ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ἐσωτερικὴ καὶ ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος τέμνουν τὴν ΒΓ ἔχομεν κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῶν διχοτόμων γωνιῶν :

$$\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΑΓ}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\text{ΒΔ}}{4} = \frac{\text{ΔΓ}}{5} = \frac{\text{ΒΔ} + \text{ΔΓ}}{4 + 5} = \frac{\text{ΒΓ}}{9} = \frac{6}{9}$$

ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν $\text{ΒΔ} = \frac{4.6}{9} = 2\frac{2}{3}$μ., $\text{ΔΓ} = \frac{5.6}{9} = 3\frac{1}{3}$ μ.

ἐπίσης ἔχομεν

$$\frac{\Delta'\Gamma}{A\Gamma}=\frac{\Delta'B}{AB} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Delta'\Gamma}{5}=\frac{\Delta'B}{4}=\frac{\Delta'\Gamma-\Delta'B}{5-4}=\frac{B\Gamma}{1}=\frac{6}{1}$$

ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν $\Delta'\Gamma=\frac{5\,.\,6}{1}=30\mu$, $\Delta'B=24$.

ὥστε τὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ σημεῖα Δ καὶ Δ′ πρὸς τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ ἀπέχουν τῆς μὲν κορυφῆς Β ἀποστάσεις ἀντιστοίχους ἴσας μὲ $2\,{}^2/_3$μ. καὶ 24 τῆς δὲ κορυφῆς Γ ἀποστάσεις ἴσας μὲ $3\frac{1}{3}$μ. καὶ 30 μ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ σημεῖα Ε καὶ Ε′ πρὸς τὰς κορυφὰς Α καὶ Γ ἀπέχουν ἀντιστοίχως τῆς μὲν κορυφῆς Α, 2 μ. καὶ 10 μ. τῆς δὲ κορυφῆς Γ, 3 μ. καὶ 15 μ., τὰ δὲ συζυγῆ ἁρμονικὰ Ζ καὶ Ζ′ πρὸς τὰς κορυφὰς Α καὶ Β ἀπέχουν ἀντιστοίχως τῆς μὲν κορυφῆς Α, $1\frac{11}{20}$ μ. καὶ 20 μ. τῆς δὲ κορυφῆς Β, $2\frac{2}{11}$ καὶ 24 μ.

330. ***Ἂν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου εἶναι α, β, γ, εὕρετε τὰ μήκη τῶν μερῶν ἑκάστης, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ὑπὸ τῆς διχοτόμου τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.***

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 6), τοῦ ὁποίου εἶναι $B\Gamma=\alpha$, $A\Gamma=\beta$ καὶ $AB=\gamma$.

Ἐὰν Δ′ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς προεκτάσεως καὶ τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α, κατὰ γνωστὸν θεώρημα θὰ ἔχωμεν

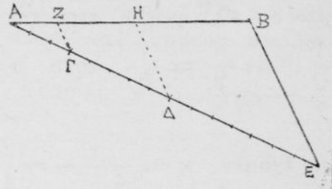
$$\frac{\Delta'\Gamma}{A\Gamma}=\frac{\Delta'B}{AB} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Delta'\Gamma}{\beta}=\frac{\Delta'B}{\gamma}=\frac{\Delta'\Gamma-\Delta'B}{\beta-\gamma}=\frac{B\Gamma}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\beta-\gamma}$$

ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν $\Delta'\Gamma=\frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}$ καὶ $\Delta'B=\frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}$

Ἂν Ζ′ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Γ, εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι $Z'B=\frac{\alpha\gamma}{\alpha-\beta}$ καὶ $Z'A=\frac{\beta\gamma}{\alpha-\beta}$.

331. ***Διαιρέσατε εὐθεῖαν 12 μ. εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν 3, 5, 7.***

Ἔστω $AB=12\mu$· ἐκ τῆς ἀρχῆς A φέρομεν εὐθεῖαν σχηματίζουσαν τυχοῦσαν μετ᾿ αὐτῆς γωνίαν καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης λαμβάνομεν τμήματα διαδοχικὰ $A\Gamma=3\mu.$, $\Gamma\Delta=5\mu$ καὶ $\Delta E=7\mu.$· φέρομεν τὴν BE καὶ ἐκ τῶν σημείων Δ καὶ Γ τὰς ΔH καὶ ΓZ παραλλήλους πρὸς ταύτην. Τὰ ζητούμενα μέρη εἶναι τὰ AZ, ZH καὶ HB, διότι ἕνεκα τῶν παραλλήλων ἔχομεν



Σχ. 7.

$$\frac{AZ}{A\Gamma}=\frac{ZH}{\Gamma\Delta}=\frac{HB}{\Delta E} \quad \text{ἢ} \quad \frac{AZ}{3}=\frac{ZH}{5}=\frac{HB}{7} \qquad (1)$$

Τὰ μήκη αὐτῶν εὑρίσκομεν ἐκ τῆς (1) διότι ἔχομεν

$$\frac{AZ}{3}=\frac{ZH}{5}=\frac{HB}{7}=\frac{AZ+ZH+HB}{15}=\frac{12}{15}$$

ὅθεν $\quad AZ=\frac{12}{15}.\ 3=2,4\ \mu. \qquad ZH=\frac{12}{15}.\ 5=4\ \mu.$

καὶ $\quad HB=\frac{12}{15}.\ 7=5,6\ \mu.$

332. Κατασκευάσατε τὴν εὐθεῖαν x, ἐὰν εἶναι α΄) $x=\frac{\alpha\beta}{2}$, β΄) $x=\frac{\gamma}{\alpha^2}$. Μερικαὶ περιπτώσεις, ἂν $\alpha=2,\ \beta=3,\ \gamma=4$· $\alpha=3,\ \beta=7,\ \gamma=11$· $\alpha=2,\ \gamma=3$· $\alpha:2=\gamma:5$· $\alpha=2\gamma$·

α΄) τὴν σχέσιν $x=\frac{\alpha\beta}{2}$ γράφομεν $\frac{x}{\alpha}=\frac{\beta}{2}$ ἢ $\frac{2}{\beta}=\frac{\alpha}{x}$, ἐξ οὗ συνάγομεν ὅτι ἡ x εἶναι τετάρτη ἀνάλογος μεταξὺ τῶν 2, β καὶ α.

β΄) $x=\frac{\gamma}{\alpha^2}$· τὴν σχέσιν ταύτην γράφομεν $\alpha^2x=\gamma$ ἢ $\alpha x=\frac{\gamma}{\alpha}$

ἢ $\frac{\alpha}{\gamma}\ x=\frac{1}{\alpha}$ ἢ $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\frac{1}{\alpha}}{x}$, ἤτοι ἡ x εἶναι τετάρτη ἀνάλογος μεταξὺ τῶν α, γ καὶ $\frac{1}{\alpha}$.

Ἂν $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=4$, τότε εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ὁ x εἶναι τέταρτος ἀνάλογος μεταξὺ τῶν 2, 3 καὶ 2, εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν ὁ x εἶναι τέταρτος ἀνάλογος μεταξύ, 2, 4 καὶ $\frac{1}{2}$·

ἂν $\alpha=3$, $\beta=7$, $\gamma=11$ εἰς τὴν α′) ὁ x εἶναι τέταρτος ἀνάλογος τὴν 2, 7 καὶ 3 εἰς δὲ τὴν β′) τῶν 3, 11 καὶ $\frac{1}{3}$· ἂν $\alpha=2$ καὶ $\gamma=3$ εἰς τὴν β′) περίπτωσιν ὁ x εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν 2, 3, $\frac{1}{2}$, ἂν $\frac{\alpha}{2}=\frac{\gamma}{5}$ τότε $\alpha=\frac{2}{5}\gamma$, ὁπότε εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἔχομεν $x=\frac{\gamma}{\frac{4}{25}\cdot\gamma^2}=\frac{25}{4\gamma}$, ἥτις γράφεται $\frac{x}{25}=\frac{\frac{1}{4}}{\gamma}$ ἢ

$\frac{\gamma}{\frac{1}{4}}=\frac{25}{x}$, ἤτοι ὁ x εἶναι τέταρτος ἀνάλογος τῶν γ, $\frac{1}{4}$, 25·

ἂν $\alpha=2\gamma$ τότε $x=\frac{\gamma}{4\gamma^2}=\frac{1}{4\gamma}$ ἢ $x=\frac{\frac{1}{4}}{\gamma}$ ἢ $\frac{\gamma}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{x}$

ἤτοι ὁ x εἶναι μέσος ἀνάγογος τῶν γ, $\frac{1}{4}$ καὶ 1.

*333: **Νὰ εὑρεθῇ** x, **ἥτις νὰ ἰσοῦται μὲ α′) μ.ν.ρ. β′) ν² : μ.***

α′) Ἔστω $x=\mu.\nu.\rho.$· ταύτην γράφομεν $\frac{x}{\rho}=\mu.\nu$ ἢ $\frac{x}{\rho}=\frac{\mu}{\frac{1}{\nu}}$

ἢ $\frac{\frac{1}{\mu}}{\nu}=\frac{\rho}{x}$, ἤτοι ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ ἡ τετάρτη ἀνάλογος μεταξὺ τῶν $\frac{1}{\nu}$, μ, ρ.

β′) ἔστω $x=\frac{\nu^2}{\mu}$· ταύτην γράφομεν $\frac{x}{\nu}=\frac{\nu}{\mu}$ ἢ $\frac{\mu}{\nu}=\frac{\nu}{x}$, ἤτοι ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ ἡ τετάρτη ἀνάλογος μεταξὺ τῶν μ, ν, ν.

ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

*134. **Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα, ἔχοντα τὰς γωνίας τῶν κορυφῶν των ἢ τὰς παρὰ τὰ βάσεις των ἴσας εἶναι ὅμοια.***

Τά ἰσοσκελῆ τρίγωνα ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας τῶν κορυφῶν ἴσας ἢ τὰς παρὰ τὰς βάσεις των γωνίας ἴσας ἔχουν καὶ τὰς ἄλλας γωνίας ἴσας ἑπομένως εἶναι ὅμοια.

335. Αἱ πλευραὶ τριγώνου εἶναι 120 μ., 80 μ., 75 μ.· νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ ὁμοίου πρὸς αὐτὸ καὶ ἔχοντος ὁμόλογον τῆς 120 μ. πλευρὰν 90 μ.

Ἂν β καὶ γ εἶναι αἱ δύο ζητούμεναι πλευραὶ αἱ ὁμόλογοι πρὸς τὰς πλευράς τῶν 80 μ. καὶ 75 μ. θὰ ἔχωμεν

$$\frac{90}{120}=\frac{\beta}{80}=\frac{\gamma}{75}$$

ἐξ τῶν ὁποίων ἔχομεν $\beta=\frac{90.80}{120}=60$ μ. καὶ

$$\gamma=\frac{90.75}{120}=56{,}25 \text{ μ.}$$

336. Δύο εὐθεῖαι πλάγιαι πρὸς ἄλλας δύο παραλλήλους καὶ διερχόμεναι διὰ τοῦ σημείου Β, ἐκτὸς αὐτῶν κειμένου, τέμνουν τὴν μίαν εἰς τὸ Α, Γ καὶ τὴν ἄλλην εἰς τὰ Δ, Ε, οὕτως ὥστε ΔΑ=4 μ., ΔΕ=12 μ., ΑΓ=18 μ., ΒΓ=16 μ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν ΒΔ, ΒΕ, ΓΕ.

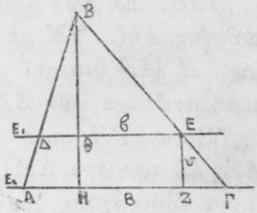
Ἔστωσαν E_1, E_2 (σχ. 7) αἱ δύο παράλληλοι καὶ ΒΑ, ΒΓ, αἱ δύο πλάγιαι

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΔΕ καὶ ΒΑΓ λαμβάνομεν

$$\frac{BA}{B\Delta}=\frac{A\Gamma}{\Delta E} \quad \text{ἢ} \quad \frac{BA-B\Delta}{B\Delta}=\frac{A\Gamma-\Delta E}{\Delta E}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{\Delta A}{B\Delta}=\frac{18-12}{12} \quad \text{ἢ} \quad \frac{4}{B\Delta}=\frac{1}{2}$$

καὶ ΒΔ=8 μ.· ἐκ τῶν αὐτῶν τριγώνων



Σχ. 7.

ἔχομεν $\frac{BE}{B\Gamma}=\frac{\Delta E}{A\Gamma}$ (1)

ἢ $\frac{BE}{16}=\frac{12}{18}$, καὶ $BE=16\cdot\frac{2}{3}=10\,\frac{2}{3}$ μ.· ἐκ τῆς ἀναλογίας

(1) λαμβάνομεν $\frac{BE}{B\Gamma-BE}=\frac{\Delta E}{A\Gamma-\Delta E}$ ἢ $\frac{BE}{E\Gamma}=\frac{\Delta E}{A\Gamma-\Delta E}$

ἢ $\frac{10\,{}^2/_3}{E\Gamma}:=\frac{12}{6}$ καὶ $E\Gamma=10\,\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$, ἤτοι $E\Gamma=5\,\frac{1}{3}$.

337. Δίδονται τὰ μήκη Β καὶ β τῶν βάσεων τραπεζίου καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ υ. Νὰ εὑρεθῇ τό ὕψος τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου ἐκ τῆς προεκτάσεως τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου (Μερικὴ περίπτωσις Β=25μ., β=18μ., υ=12,2μ).

Ἔστω ΕΑΒ (σχ. 8) τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ἐκ τῆς προεκτάσεως τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ.

Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΕΖΔ καὶ ΕΗΑ ἔχομεν

Σχ. 8.

$$\frac{EZ}{EH}=\frac{E\Delta}{EA} \quad \text{ἢ} \quad \frac{EZ}{EZ+\upsilon}=\frac{E\Delta}{EA}. \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΕΔΓ καὶ ΕΑΒ ἔχομεν

$$\frac{\Delta\Gamma}{AB}=\frac{E\Delta}{EA} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\beta}{B}=\frac{E\Delta}{EA} \qquad (2)$$

ἐπειδὴ τὰ δεύτερα μέλη τῶν (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα ἔχομεν

$$\frac{EZ}{EZ+\upsilon}=\frac{\beta}{B}$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $B.EZ=\beta.EZ+\beta\upsilon$ ἢ $EZ(B-\beta)=\beta\upsilon$

καὶ $$EZ=\frac{\beta\upsilon}{B-\beta}$$

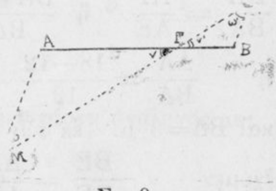
ὥστε τὸ ζητούμενον ὕψος ΕΗ εἶναι ἴσον μὲ

$$EH=EZ+ZH=\frac{\beta\upsilon}{B-\beta}+\upsilon=\frac{\beta\upsilon+B\upsilon-\beta\upsilon}{B-\beta}=\frac{B\upsilon}{B-\beta}.$$

Ἐφαρμογή: Ἂν $B=25$, $\beta=18$, $\upsilon=12{,}2$, τότε

$$EH=\frac{25.12{,}2}{25-18}=43\frac{4}{7} \text{ μέτρ.}$$

338. ***Ἐκ τῶν ἄκρων εὐθείας ΑΒ φέρομεν δύο παραλλήλους εὐθείας ΑΜ, ΒΝ μὲ ἀντιθέτους φοράς. Ἡ ΜΝ διαιρεῖ τὴν ΑΒ εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν ΑΜ, ΒΝ· (σχ. 9).***



Σχ. 9.

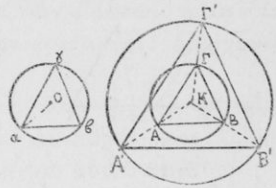
Ἔστω Γ ἡ τομὴ τῆς ΑΒ ὑπὸ τῆς ΜΝ. Τὰ τρίγωνα ΑΜΓ καὶ ΓΝΒ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν δύο γωνίας ἴσας, τὴν $\nu=\nu'$ ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ τὴν $\omega=\omega'$ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΜ καὶ ΒΝ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΜΝ. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ἔχομεν.

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma B}=\frac{AM}{BN}$$

339. ***Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ τρίγωνον ὅμοιον πρὸς ἄλλο δοθέν.***

Ἔστω Κ (σχ. 10) ὁ δοθεὶς κύκλος εἰς τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἐγγράφωμεν ἓν τρίγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν αβγ.

Περιγράφομεν εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον αβγ τὸν κύκλον Ο, τοῦ ὁποίου προσδιορίζομεν τὴν ἀκτῖνα Οα. Ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν Οα γράφομεν περιφέρειαν ὁμόκεντρον τῆς δοθείσης· εἰς τὸν κύκλον αὐτὸν ἐγγράφομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἴσον μὲ τὸ αβγ. Ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ μέχρι τῆς δοθείσης περιφερείας λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Α′, Β′, Γ′, τὰ ὁποῖα εἶναι αἱ κορυφαὶ τοῦ ζητομένου τριγώνου.

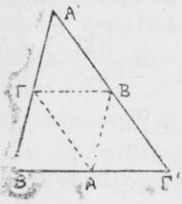


Σχ. 10.

Τὸ τρίγωνον Α′ Β′ Γ′ εἶναι πράγματι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους.

340. Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου ὁρίζουν τρίγωνον ὅμοιον πρὸς αὐτό· τίς ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.

Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 11) τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου Α′ Β′ Γ′. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Α′ Β′ Γ′.



Σχ. 11.

Ἡ πλευρὰ ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν Γ′Β′ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς, ἐπειδὴ συνδέει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν Γ′ Α′ καὶ Β′ Α′ τοῦ τριγώνου Α′ Β′ Γ′· ὁμοίως καὶ αἱ ἄλλαι πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ δοθέντος Α′Β′Γ′. Ἑπομένως τὰ τρίγωνα αὐτά, ἐπειδὴ ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους εἶναι ὅμοια.

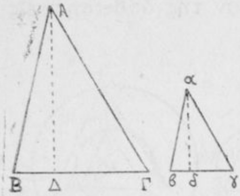
Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ἔχομεν

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{Β}'\text{Γ}'}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{Α}'\text{Β}'}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{Α}'\text{Γ}'}=\frac{1}{2}$$

ἤτοι ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος εἶναι $\frac{1}{2}$.

341. Ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τριγώνου εἶναι 7,4 καὶ 6,2 μ. Ἐὰν ἡ ὁμόλογος βάσις ὁμοίου τριγώνου εἶναι 4,6 μ., πόσον εἶναι τὸ ὕψος τούτου;

Ἔστωσαν τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ (σχ. 12) καὶ ΑΔ, αδ τὰ ἀντίστοιχα ὕψη αὐτῶν, ὅπου $ΒΓ=7{,}4$, $ΑΔ=6{,}2$ $βγ=4{,}6$.



Σ. 12.

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τούτων ἔχομεν $\frac{αβ}{ΑΒ}=\frac{βγ}{ΒΓ}$ (1)· ἀλλὰ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ αβδ εἶναι ὅμοια ὡς ὀρθογώνια ἔχοντα τὰς ὀξείας γωνίας Β καὶ β ἴσας ὡς γωνίας τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ αβγ· ἐκ τούτων λοιπὸν ἔχομεν $\frac{αβ}{ΑΒ}=\frac{αδ}{ΑΔ}$ (2)· ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\frac{αδ}{ΑΔ}=\frac{βγ}{ΒΓ}$ καὶ $αδ=\frac{(βδ)(ΑΔ)}{ΒΓ}=\frac{4{,}6.6{,}2}{7{,}4}$ ἢ

$$αδ=3{,}854\ldots\ μ.$$

*342. **Δίδεται τριγώνου μιὰ πλευρὰ α, τὸ ὕψος υ καὶ τὸ ἀντίστοιχον τούτου υ′ ἄλλου τριγώνου, ὁμοίου πρὸς αὐτό. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁμόλογος τῆς α πλευρά.***

Ἔστω $ΒΓ=α$ (σχ.12), $βγ=α'$, $ΑΔ=υ$ καὶ $αδ=υ'$· ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ αβγ ἔχομεν $\frac{ΑΒ}{αβ}=\frac{ΒΓ}{βγ}$· ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ αβδ ἔχομεν $\frac{ΑΒ}{αβ}=\frac{ΑΔ}{αδ}$, ὅθεν ἕπεται καὶ $\frac{ΒΓ}{βγ}=\frac{ΑΔ}{αδ}$, ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $βγ=\frac{(αδ)\,(ΒΓ)}{ΑΔ}$, ἤτοι $α'=\frac{αυ'}{υ}$.

*343. **Δύο ὁμοίων τριγώνων δίδονται δύο ὁμόλογα ὕψη υ, υ′, τὸ α+υ ἢ τὸ α—υ καὶ ζητεῖται ἡ ὁμόλογος πλευρὰ α′ τῆς α.***

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια ὁ λόγος τῶν βάσεων των ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν των, ἤτοι ἔχομεν $\frac{α}{α'}=\frac{υ}{υ'}$ (1) ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $α'=\frac{αυ'}{υ}$ (2)· ἐκ τῆς (1), κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν ἔχομεν $\frac{α}{α'}=\frac{υ}{υ'}=\frac{α+υ}{α'+υ'}$· ἐκ ταύτης ἔχομεν

$$α=\frac{α'\,(α+υ)}{(α'+υ')}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ α εἰς τὴν (2) εὑρίσκομεν

$$α'=\frac{α'(α+υ)}{α'+υ'}\cdot\frac{υ'}{υ} \quad ἢ \quad α'(α'+υ')υ=α'(α+υ)υ'$$

$$ἢ \quad (α'+υ')υ=(α+υ)υ' \quad ἢ \quad α'υ+υ'υ=(α+υ)υ'$$

ἢ $\alpha'\upsilon=(\alpha+\upsilon)\upsilon'-\upsilon'\upsilon$ καὶ $\alpha'=\dfrac{(\alpha+\upsilon)\upsilon'-\upsilon'\upsilon}{\upsilon}$

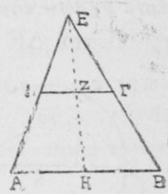
Ὁμοίως ἐργαζόμεθα ἂν εἶναι γνωστὰ τὰ υ, υ΄ καὶ (α—υ).

344. ***Ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν βάσεων τραπεζίου καὶ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραί του (προεκτεινόμεναι) διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.***

Ἔστωσαν Η καὶ Ζ (σχ. 13) τὰ μέσα τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΗΖ καὶ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ τοῦ τραπεζίου προεκτεινόμεναι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἐπειδὴ αἱ βάσεις ΑΒ καὶ ΔΓ εἶναι ἄνισοι καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν θὰ εἶναι ἄνισα, ὁπότε τὰ ΑΗΖΔ καὶ ΗΒΓΖ θὰ εἶναι τραπέζια. Ἀλλὰ ΔΖ=ΖΓ καὶ ΑΗ=ΗΒ ἐξ ὑποθέσεως· διαιροῦντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\frac{\Delta Z}{AH}=\frac{Z\Gamma}{HB}$$

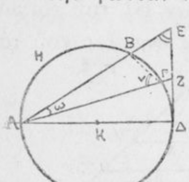


Σχ. 13.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΔΓ καὶ ΑΒ τέμνονται ὑπὸ τῶν μὴ παραλλήλων ΑΓ, ΗΖ, ΒΓ εἰς μέρη ἀνάλογα, ἑπομένως αἱ μὴ παράλληλοι προεκτεινόμεναι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

345. ***Ἂν ΑΒ, ΑΓ εἶναι χορδαὶ καὶ ΑΔ διάμετρος τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἀγόμεναι ἐκ τοῦ σημείου Δ τῆς περιφερείας του, ἀχθῇ δὲ ἐφαπτομένη του εἰς τὸ Δ, τέμνουσα εἰς τὰ Ε, Ζ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, καὶ ΑΖΕ εἶναι ὅμοια.***

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΖΕ (σχ. 14) ἔχουν τὴν γωνίαν ω κοινὴν καὶ τὴν γωνίαν ν ἴσην μὲ τὴν Ε, διότι εἶναι συμπληρωματικαὶ τῆς γωνίας ΕΑΔ· πράγματι τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ὀρθογώνιον ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι ἐφαπτομένη ἑπομένως ἡ γωνία Ε εἶναι συμπλήρωμα τῆς γωνίας ΕΑΔ, ἡ γωνία ὅμως ν εἶναι ἐγγεγραμένη, καὶ βαίνει εἰς τὸ τόξον ΑΗΒ, ἄρα τὸ μέτρον ταύτης ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΗΒ, πρὸς δὲ ἡ γωνία ΕΑΔ εἶναι ἐγγεγραμμένη



Σχ. 14.

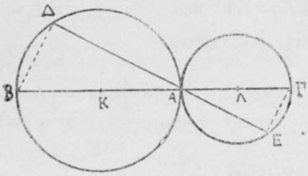
καὶ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓΔ, ἄρα τὸ μέτρον της ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου τούτου, ὅθεν μέτρ. γων ν $+$ μετρ. γων ΕΑΔ $=$ $\dfrac{\text{τοξ ΑΗΒ}+\text{τοξ ΒΓΔ}}{2}=\dfrac{1}{4}$ περιφερ.· ἀφοῦ ὅμως τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν γωνιῶν τούτων ἰσοῦται πρὸς 1/4 τῆς περιφερείας αἱ γωνίαι ν καὶ ΕΑΔ εἶναι συμπληρωματικαί, ὅθεν γων ν=γων Ε, διότι εἶναι συμπληρώματα καὶ αἱ δύο τῆς αὐτῆς γωνίας ΕΑΔ. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ ΑΕΖ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν δύο τῶν γωνιῶν των ἀντιστοίχως ἴσας.

346. Ἂν ΑΔ, ΒΕ εἶναι δύο ὕψη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ νὰ δειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΔΓ, ΒΕΓ εἶναι ὅμοια.

Τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΒΕΓ εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Γ κοινήν· ἄρα εἶναι ὅμοια.

347. Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται αἱ χορδαί των, αἵτινες σχηματίζονται ὑπὸ εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ σημείου τῆς ἁφῆς των ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουν καὶ αἱ διάμετροί των.

Ἔστω ΔΕ (σχ. 15) ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου Α τῆς ἁφῆς τῶν δύο κύκλων Κ καὶ Λ. Ἐὰν φέρωμεν τὴν διάμετρον ΚΛ, αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου τῆς ἁφῆς καὶ προεκτεινομένη κόπτει τὰς περιφερείας ἔστω εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ.



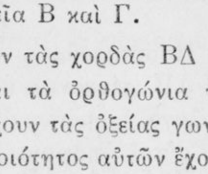
Σ. 15.

Ἐὰν φέρωμεν τὰς χορδὰς ΒΔ καὶ ΓΕ σχηματίζονται τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΔΑ καὶ ΑΕΓ, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὰς ὀξείας γωνίας ΒΑΔ καὶ ΕΑΓ ἴσας ὡς κατὰ κορυφήν· ἐκ τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{A\Delta}{AE}.$$

348. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες εἶναι παράλληλοι πρὸς μίαν πλευρὰν τριγώνου καὶ τέμνουν τὰς δύο ἄλλας.

Ἔστω ἡ ΕΖ (σχ.16) παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ Η τὸ μέσον αὐτῆς. Τὸ Η εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου· ἔστω δὲ καὶ Δ τὸ μέσον τῆς ΒΓ· τότε ἔχομεν $\frac{EH}{B\Delta}=\frac{HZ}{\Delta\Gamma}$. Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΕΒ, ΗΔ καὶ ΖΓ δὲν εἶναι παράλληλοι καὶ τέμνουν τὰς παραλλήλους εὐθείας ΕΖ καὶ ΒΓ εἰς μέρη ἀνάλογα, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου· ἀλλ' ἡ τομὴ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι ἡ κορυφὴ Α τοῦ τριγώνου, ἄρα



Σχ. 16.

καὶ ἡ ΔΗ διέρχεται διὰ τοῦ Α· τὸ μέσον Η τῆς ΕΖ κεῖται λοιπὸν ἐπὶ τῆς σταθερᾶς εὐθείας ΑΔ, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Δ· ὥστε ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ εἶναι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὴν κορυφὴν Α μὲ τὸ μέσον Δ τῆς ΒΓ.

Ἀντιστρόφως.—Θὰ δείξωμεν, ὅτι καὶ κάθε παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ τέμνουσα τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχει τὸ μέσον τῆς ἐπὶ τῆς ΑΔ.

Πρὸς τοῦτο θεωρήσωμεν τὴν ΜΡ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ τέμνουσαν τὰς ΑΒ, ΑΔ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Μ, Ν, Ρ· αἱ παράλληλοι ΜΡ ὡς ΒΓ τεμνόμεναι ὑπὸ δέσμης εὐθειῶν τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα, ἤτοι $\frac{MN}{B\Delta}=\frac{NP}{\Delta\Gamma}$ (1)· ἀλλὰ ΒΔ=ΔΓ, διότι Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ, ἑπομένως ἐκ τῆς (1) ἔχομεν καὶ ΜΝ=ΝΡ ἤτοι τὸ Ν εἶναι τὸ μέσον τῆς ΜΡ· ὁ ζητούμενος λοιπὸν γεωμετρικὸς τόπος εἶναι ἡ ΑΔ, ἡ ὁποία συνδέει τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, πρὸς τὴν ὁποίαν ἄγονται αἱ παράλληλοι μὲ τὴν ἀπέναντι πρὸς ταύτην κορυφὴν αὐτοῦ.

349. Πολύγωνον ἔχει περίμετρον 280 μ. καὶ μίαν πλευρὰν 15 μ. Ἄλλο ὅμοιον πρὸς αὐτὸ ἔχει περίμετρον 190 μ.· νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ τῆς τῶν 15 μ.

Ἔστω x ἡ ζητουμένη πλευρά· ἐπειδὴ ὁ λόγος ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν περιμέτρων αὐτῶν, ἔχομεν

$$\frac{x}{15}=\frac{190}{280} \quad \text{καὶ} \quad x=\frac{190.15}{280}=10\frac{5}{28}\ \mu.$$

350. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ τριγώνου, ἔχοντος περίμετρον 124,4 μ. ἂν αἱ ὁμοίου πρὸς αὐτὸ ἔχουν μήκη 3,4μ., 5μ., 6,2μ.

Ἐὰν α, β, γ, εἶναι ἀντιστοίχως αἱ πλευραὶ τοῦ ὁμοίου τριγώνου πρὸς τὰς πλευρὰς 3,4 μ., 5 μ., 6,2 μ. τοῦ δοθέντος, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha}{3{,}4}=\frac{\beta}{5}=\frac{\gamma}{6{,}2}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3{,}4+5+6{,}2}=\frac{124{,}4}{14{,}6}$$

Ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν

$$\alpha=\frac{3{,}4.124{,}4}{14{,}6}=28{,}97\cdot\ \beta=\frac{5.124{,}4}{14{,}6}=42{,}6\cdot\ \gamma=\frac{6{,}2.124{,}4}{14{,}6}=52{,}82$$

351. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὕψη τριγώνου ἔχοντος περίμετρον 32 μ., ἂν ἄλλου ὁμοίου πρὸς αὐτό, τὰ μὲν ὕψη εἶναι 2μ., 3μ., 5μ., ἡ δὲ περίμετρος 15,2 μ.

Ἔστωσαν υ_1, υ_2, υ_3 τὰ ὁμόλογα ὕψη πρὸς τὰ δοθέντα τοιαῦτα· ἐπειδὴ τὰ ὁμόλογα ὕψη δύο ὁμοίων τριγώνων ἔχουν λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον ὁμοιότητος αὐτῶν, ἂν παραστήσωμεν μὲ ρ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος, θὰ ἔχομεν $\frac{υ_1}{2}=\frac{υ_2}{3}=\frac{υ_3}{4}=ρ$· ἀλλὰ εἶναι καὶ

$\frac{32}{15,2}=ρ$, ὅθεν $\frac{υ_1}{2}=\frac{υ_2}{3}=\frac{υ_3}{4}=\frac{32}{15,2}$ καὶ

$$υ_1=\frac{32.2}{15,2}=4\frac{4}{19}\text{ μ.},\quad υ_2=6\frac{6}{19}\text{ μ.}\quad \text{καὶ}\quad υ_3=8\frac{8}{19}\text{ μ.}$$

252. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ τετραπλεύρου, ἔχοντος περίμετρον 2,5 φορὰς τὴν περίμετρον ἄλλου, ὁμοίου πρὸς αὐτό, ἔχοντος πλευρὰς 12 μ., 5,8 μ., 3,5 μ., 7,6 μ.

Ἔστω Σ ἡ περίμετρος τοῦ τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου ζητοῦνται αἱ πλευραὶ καὶ σ ἡ τοῦ δοθέντος· ὁ λόγος ὁμοιότητος τῶν τετραπλεύρων εἶναι $\frac{Σ}{σ}=2,5$· ἂν λοιπὸν δι᾽ α, β, γ, δ παραστήσωμεν τὰς ζητουμένας πλευράς, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως ὁμόλογοι τῶν 12 μ., 5,8 μ., 3,5 μ., 7,6 μ., ἔχομεν $\frac{α}{12}=\frac{β}{5,8}=\frac{γ}{3,5}=\frac{δ}{7,6}=2,5$ καὶ

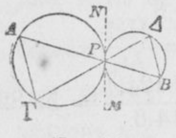
α=12.2,5=30 μ. β=5,8.2,5=14,40 μ. γ=3,5.2,5=8,75 καὶ δ=7,6.2,5=19 μ.

353. Ποῖος ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος δύο πολυγώνων, ἐχόντων περιμέτρους 142,4 μ., καὶ 49,2 μ.;

Ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος τῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν περιμέτρων των, ἤτοι $ρ=\frac{142,5}{49,2}=\frac{475}{164}$.

354. Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐκτός, τὰ ἀντίστοιχα τμήματα δύο εὐθειῶν ἀγομένων διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου των καὶ περατουμένων εἰς τὰ περιφείας των εἶναι ἀνάλογα.

Ἔστωσαν ΑΒ, καὶ ΓΔ (σχ. 17) δύο εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου τῆς ἁφῆς Ρ τῶν δύο δοθέντων κύκλων· θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{ΑΡ}{ΡΒ}=\frac{ΓΡ}{ΡΔ}$.



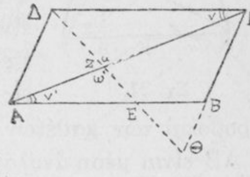
Σχ. 17.

Ἂν ἀχθοῦν αἱ χορδαὶ ΑΓ καὶ ΒΔ αἱ συνδέουσαι τὰ ἄκρα τῶν τμημάτων τῶν εὐθειῶν τούτων τῶν περιεχομένων εἰς ἕκαστον κύκλον, αὗται (ἄσ. 211) εἶναι παράλληλοι· σχηματίζονται λοιπὸν δύο τρίγωνα ΑΓΡ καὶ ΔΒΡ, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὅλας τὰς γωνίας των ἴσας, ἄρα εἶναι ὅμοια· ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ἔχομεν $\frac{ΑΡ}{ΡΒ}=\frac{ΓΡ}{ΡΔ}$.

355. ***Ἂν εἰς παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἀχθῇ εὐθεῖα ΔΕ τέμνουσα τὴν διαγώνιον ΑΓ εἰς τὸ Ζ, τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ Θ, τὴν δὲ ΑΒ εἰς τὸ Ε, νὰ δειχθῇ, ὅτι εἶναι $(ΔΖ)^2=(ΖΘ).(ΕΖ)$.***

Τὰ τρίγωνα ΔΖΓ καὶ ΑΖΕ (σχ.18) εἶναι ὅμοια, διότι γων ω=γων ω′ ὡς κατὰ κορυφήν, καὶ γων ν=γων ν′, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΔΓ καὶ ΑΒ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ· ἐκ τῆς ὁμοιότητος τούτων λαμβάνομεν

$$\frac{ΔΖ}{ΖΕ}=\frac{ΖΓ}{ΖΑ} \qquad (1)$$



Σχ. 18.

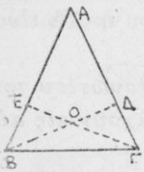
δι᾽ ὅμοιον λόγον καὶ τὰ τρίγωνα ΔΖΑ καὶ ΓΖΘ εἶναι ὅμοια, ἐκ δὲ τούτων ἔχομεν

$$\frac{ΖΘ}{ΔΖ}=\frac{ΖΓ}{ΖΑ} \qquad (2)\text{·}$$

ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει

$$\frac{ΔΖ}{ΖΕ}=\frac{ΖΘ}{ΔΖ}. \quad \text{ἢ} \quad (ΔΖ)^2=(ΖΘ).(ΖΕ).$$

356. ***Δύο ὕψη ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀντιστοίχων βάσεων.***



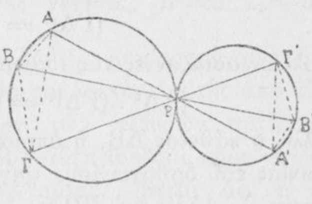
Σχ. 19.

Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 19) τὸ δοθὲν τρίγωνον καὶ ΒΔ, ΓΕ τὰ ὕψη αὐτοῦ· θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{ΒΔ}{ΓΕ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΕΓ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Α κοινήν· ἐκ τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν ἔχομεν $\frac{ΒΔ}{ΓΕ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$.

357. ***Δύο κύκλοι ἐφάπτονται εἰς τὸ Ρ. Διὰ τοῦ Ρ ἄγονται τρεῖς εὐθεῖαι, τέμνουσαι τὰς περιφερείας του εἰς τὰ Α, Β, Γ καὶ Α′, Β′, Γ′. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ εἶναι ὅμοια.***

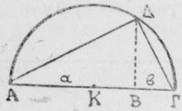
Αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ Α′Β′ εἶναι παράλληλοι, διότι συνδέουν τὰ ἄκρα δύο τεμνουσῶν τῶν κύκλων, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς καὶ περατοῦνται εἰς τὰς περιφερείας των (βλέπε ἄσκησ. 211)· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν Β′Γ′ καὶ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΓ′· τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ ἔχοντα τὰς πλευράς των ἀνὰ δύο παραλλήλους εἶναι ὅμοια.



Σχ. 20.

358. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα x ὥστε νὰ εἶναι $x=\sqrt{αβ}$.***

Ἐπί εὐθείας λαμβάνομεν δύο διαδοχικὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ α καὶ β καὶ μὲ διάμετρον τὴν ΑΓ γράφομεν ἡμιπεριφερείαν, ἐκ δὲ τοῦ Β ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ Δ· λέγω ὅτι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα εἶναι ἡ ΒΔ· τὸ τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Δ, διότι ἡ γωνία ΑΔΓ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον, αἱ δὲ ΑΒ καὶ ΒΓ εἶναι αἱ προβολαὶ τῶν καθέτων του πλευρῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΔΒ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν προβολῶν τῶν καθέτων πλευρῶν ἔχομεν



Σχ. 21.

$(ΒΔ)^2=(ΑΒ)(ΒΓ)=α.β$ καὶ $ΒΔ=\sqrt{αβ}$. ἄρα $x=ΒΔ$

359. ***Πᾶσα χορδὴ κύκλου εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς διαμέτρου τῆς διερχομένης διά τινος τῶν ἄκρων τῆς χορδῆς καὶ τῆς προβολῆς ταύτης ἐπὶ τὴν διάμετρον.***

Ἔστω ΑΔ (σχ. 21) χορδὴ τοῦ κύκλου Κ, ΑΓ ἡ διάμετρος ἡ διερχομένη διὰ τοῦ ἄκρου Α αὐτῆς καὶ ΑΒ ἡ προβολὴ τῆς ἐπὶ τὴν ΑΔ διάμετρον· Θὰ δείξωμεν $ΑΔ^2=(ΑΓ).(ΑΒ)$. Ἂν ἀχθῇ καὶ ἡ χορδὴ ΔΓ, σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΓ, τοῦ ὁποίου ἡ ΑΔ εἶναι μία τῶν καθέτων πλευρῶν ἑπομένως $(ΑΔ)^2=(ΑΓ)(ΑΒ)$.

360. ***Τὸ γινόμενον τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν ὑποτείνουσαν ἐπὶ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτὴν ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.***

Ἔστω ΑΔΓ (σχ. 21) τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον· θὰ δείξωμεν ὅτι

$$(ΑΔ).(ΔΓ)=(ΑΓ)(ΔΒ)$$

Ἐπειδὴ κάθε κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς προβολῆς αὐτῆς ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἔχομεν

$$(ΑΔ)^2 = (ΑΓ).(ΑΒ)$$
$$(ΓΔ)^2 = (ΑΓ).(ΒΓ)$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἰσότητας κατὰ μέλη ἔχομεν

$$(ΑΔ^2.(ΓΔ)^2 = (ΑΓ)^2.(ΑΒ).(ΒΓ). \quad (1)$$

Ἀλλὰ ἡ κάθετος ΔΒ, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Δ τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων (ΑΒ) καὶ (ΒΓ)· ἤτοι εἶναι $(ΔΒ)^2=(ΑΒ).(ΒΓ)$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὸ (ΑΒ).(ΒΓ) διὰ τοῦ ἴσου του $(ΔΒ)^2$ ἔχομεν

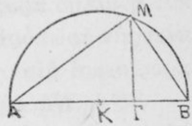
$$(ΑΔ)^2.(ΓΔ)^2=(ΑΓ)^2.(ΔΒ)^2$$

ἢ

$$(ΑΔ).(ΓΔ)=(ΑΓ).(ΔΒ).$$

361. Δίδεται ἡ εὐθεῖα ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν ἄκρων Μ, καθέτων ἐπ' αὐτὴν εὐθειῶν ΓΜ εἰς τὰ σημεῖα Γ αὐτῆς, ἂν εἶναι $(ΜΓ)^2=(ΑΓ).(ΓΒ)$.

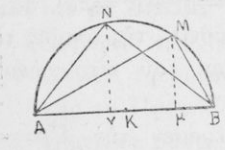
Ἐπειδὴ $(ΓΜ)^2=(ΑΓ)(ΓΒ)$, ἕπεται, ὅτι τὸ Μ εἶναι κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὑποτείνουσαν τὴν ΑΒ· ἂν λοιπὸν μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ γραφῇ περιφέρεια αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τῆς κορυφῆς Μ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου τριγώνου· λέγω δὲ ὅτι ἡ περιφέρεια αὕτη εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος.



Σχ. 22.

Διότι ἂν θεωρήσωμεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας ταύτης καὶ φέρωμεν ἐκ τούτου τὴν κάθετον ΓΜ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ, καὶ ἀχθῶσιν αἱ ΑΜ καὶ ΒΜ τὸ τρίγωνον ΑΜΒ εἶναι ὀρθογώνιον, ἡ δὲ ΜΓ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας του, ἄρα θὰ εἶναι $(ΓΜ)^2=(ΑΓ)(ΓΒ)$.

362. Τὰ τετράγωνα δύο χορδῶν ΑΜ, ΑΝ, διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α τῆς περιφερείας των ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ Α διερχομένης διαμέτρου



Σχ. 23.

Ἔστω ΑΒ (σχ. 23) ἡ διάμετρος ἡ διερχομένη διὰ τοῦ Α καὶ Αμ ἡ προβολὴ τῆς ΑΜ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ Αν ἡ προβολὴ τῆς ΑΝ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Κατὰ τὴν ἄσκησιν (359) ἔχομεν $(ΑΜ)^2=(ΑΒ)(Αμ)$ καὶ $(ΑΝ)^2=(ΑΒ)(Αν)$. διαιροῦντες κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\frac{(ΑΜ)^2}{(ΑΝ)^2}=\frac{(Αμ)}{(Αν)}$$

363. Νὰ εὑρεθῇ εὐθεῖα μήκους μ. τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι $μ^2=3^2+4^2$ ἢ $μ^2=4^2-3^2$, καὶ γενικῶς $μ^2=α^2 \pm β^2$, ὅταν δίδωνται τὰ α, β.

α') ἡ μ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ἔχοντος καθέτους πλευρὰς 3 καὶ 4. Πρὸς εὕρεσιν λοιπὸν ταύτης ἀπὸ τῆς κορυφῆς ὀρθῆς γωνίας Α λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς τμήματα ΑΒ=3 καὶ ΑΓ=4 καὶ φέρομεν ΒΓ· αὕτη ἰσοῦται πρὸς τὴν μ.

β') $μ^2=4^2-2^2$, ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης, ἕπεται ὅτι ἡ μ εἶναι ἡ μία κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὑποτείνουσαν ἴσην πρὸς 4μ, καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην πρὸς 3μ. Πρὸς κατασκευὴν ταύτης ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς· ἐπὶ τῆς μίας τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας Α λαμβάνομεν τμῆμα ΑΒ=3μ. καὶ μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς 4 μονάδας γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν τῆς γωνίας εἰς τὸ Γ, τότε ἡ ἡ $ΑΓ=μ$.

Γενικῶς, ἂν $μ^2=α^2+β^2$ ἡ μ ἰσοῦται μὲ τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου κάθετοι πλευραὶ εἶναι ἴσαι ἡ μία πρὸς α καὶ ἡ ἄλλη πρὸς β· ἂν $μ^2=α^2-β^2$ τὸ μ ἰσοῦται πρὸς τὴν κάθετον πλευρὰν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ἔχοντος ὑποτείνουσαν ἴσην πρὸς α καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην πρὸς β.

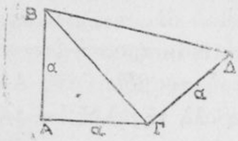
364. ***Νὰ εὑρεθῇ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων δύο εὐθειῶν 24μ. καὶ 32μ.***

Ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ ὑποτείνουσαν 32μ. καὶ κάθετον πλευρὰν 24μ. τότε ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

365. ***Νὰ εὑρεθῇ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι διπλάσιον, τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου ἄλλης.***

Ἔστω α εἶναι ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα· κατασκευάζομεν ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΑΓ, (σχ. 24) τὸ ὁποῖον ἔχει καθέτους πλευρὰς τὰς $ΑΒ=ΑΓ=α$· ἐκ τούτου λαμβάνομεν

$$(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2=α^2+α^2=2α^2.$$



Σχ. 24.

Ἡ ΒΓ εἶναι λοιπὸν εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς α.

Ἐκ τῆς κορυφῆς Γ φέρομεν τὴν $ΓΔ=α$ καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ· ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΒΔ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΓΔ ἔχομεν $(ΒΔ)^2=(ΒΓ)^2+(ΓΔ)^2=2α^2+α^2=3α^2$.

Ἡ ΒΔ εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς α

366 ***Νὰ εὑρεθῇ εὐθεῖα, ἥτις νὰ ἰσοῦται μὲ $α\sqrt{2}$, $α\sqrt{3}$,...***

Ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον νὰ εἶναι διπλάσιον τριπλάσιον κ.τ.λ. τοῦ τετραγώνου τῆς δοθείσης· διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ x, y κ.τ.λ. διαδοχικῶς ταύτας, ἔχομεν

$$x^2=2α^2 \qquad y^2=3α^2 \qquad καί \qquad x=α\sqrt{2} \qquad y=α\sqrt{3}$$

(ἡ κατασκευὴ γίνεται καθὼς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν).

367. ***Νὰ εὑρεθῇ εὐθεῖα, ἥτις νὰ ἰσοῦται μὲ*** $\sqrt{α^2-{}^2β}$, $\sqrt{α^2+β^2-γ^2}$, $\sqrt{(α^2+β^2)-(γ^2+δ^2)}$, ***ἂν α, β, γ, δ εἶναι δεδομέναι εὐθεῖαι.***

α΄) Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον ὑποτείνουσαν α καὶ κάθετον πλευρὰν β, τότε ἡ ζητουμένη εὐθεῖα εἶναι ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ τοῦ τριγώνου τούτου· διότι ἂν τὴν παραστήσωμεν διὰ x θὰ ἔχωμεν $x^2=\alpha^2-\beta^2$ καὶ $x=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$.

β΄) ἐν πρώτοις κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον καθέτους πλευρὰς τὰς α καὶ β· ἐὰν δὲ παραστήσωμεν διὰ x τὴν ὑποτείνουσαν τούτου ἔχομεν $x^2=\alpha^2+\beta^2$ (1)· κατόπιν κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον ὑποτείνουσαν x καὶ ἄλλην κάθετον πλευρὰν τὴν γ· ἐὰν παραστήσωμεν διὰ y τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν αὐτοῦ, ἔχομεν

$y^2=x^2-\gamma^2$ ἢ ἕνεκα τῆς (1) $y^2=\alpha^2+\beta^2-\gamma^2$ καὶ $y=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}$.

γ΄) Κατασκευάζομεν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα ἀντιστοίχως καθέτους πλευρὰς τὰς α, β καὶ γ, δ· ἂν τὰς ὑποτεινούσας τούτων παραστήσωμεν δι᾽ Α καὶ Β ἔχομεν $A^2=\alpha^2+\beta^2$ καὶ $B^2=\gamma^2+\delta^2$ (1)· ἔπειτα κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον ὑποτείνουσαν ἴσην πρὸς Α καὶ κάθετον πλευρὰν ἴσην πρὸς Β· ἐὰν δὲ διὰ x παρασταθῇ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν $x^2=A^2-B^2$ ἢ

$x=\sqrt{A^2-B^2}$ ἢ ἕνεκα τῶν (1) $x=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)-(\gamma^2+\delta^2)}$

*368. **Εὕρετε τὰς τρεῖς πλευρὰς ὀρθογωνίου τριγώνου ἐχούσας ἄθροισμα 30μ. ὅταν τὸ ἄθροισμά τῶν τετραγώνων αὐτῶν ἰσοῦται μὲ 386μ.***

Ἔστωσαν x, y, z, ἡ ὑποτείνουσα καὶ αἱ δύο κάθεται πλευραὶ τοῦ ὀρθογωγίου τριγώνου.

Ἀπὸ τὸ Πυθαγόριον θεώρημα καὶ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ἔχομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων.

$$y^2+z^2=x^2 \qquad (1)$$
$$x+y+z=30 \qquad (2)$$
$$x^2+y^2+z^2=386 \qquad (3)$$

Ἀφαιροῦντες τὴν (1) ἀπὸ τὴν (3) ἔχομεν

$2x^2=386$ ἢ $x^2=193$ καὶ $x=\sqrt{193}=13{,}89\mu.$

Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ x εἰς τὴν (1) καὶ (3) ἔχομεν

$$y^2+z^2=193 \qquad (4)$$
$$y+z=16{,}11 \qquad (5)$$

ὑψοῦντες καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (5) εἰς τὸ τετράγωνον ἔχομεν

$$y^2+z^2+2yz=259{,}53$$

καὶ ἐπειδὴ $y^2+z^2=193$ ἔχομεν

$$2yz=66{,}53 \quad ἢ \quad yz=33{,}265 \qquad (6)$$

Ἐκ τῶν (5) καὶ (6) παρατηροῦμεν, ὅτι γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν y καὶ z· τὰ y καὶ z εἶναι λοιπὸν ρίζαι τῆς ἐξισώσεως.

$$X^2 - 16{,}11X + 33{,}26 = 0$$

Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν

$$= \frac{16{,}11 \pm \sqrt{16{,}11^2 - 4.33{,}265}}{2} = \frac{16{,}11 \pm \sqrt{126{,}4721}}{2}$$

$$= \frac{16{,}11 \pm 11{,}24}{2}$$

ἄρα $y = \frac{16{,}11 + 11{,}24}{2} = 13{,}675$

$$z = \frac{16{,}11 - 11{,}24}{2} = 2{,}435$$

ὥστε αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου εἶναι 2,435μ., 12,675μ.. καὶ καὶ 13,89.

369. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ 60μ., ἡ δὲ διαφορὰ τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι 5μ. Ζητοῦνται αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ τριγώνου.

Ἔστωσαν x, y, z, ἡ ὑποτείνουσα καὶ αἱ δύο κάθεται πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

Ἀπὸ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα καὶ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ἔχομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων.

$$y^2 + z^2 = x^2 \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 60 \qquad (2)$$
$$y - z = 5 \qquad (3)$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ y^2+z^2 διὰ τοῦ ἴσου του x^2 εἰς τὴν (2) ἔχομεν

$$2x^2 = 60 \quad \text{καὶ} \quad x^2 = 30 \quad \text{ἢ} \quad x = \sqrt{30}$$

Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ x εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$y^2 + z^2 = 30 \qquad (4)$$

Ἀπὸ τὴν (3) ἔχομεν

$$y = 5 + z \qquad (5)$$

τὴν τιμὴν τοῦ y θέτομεν εἰς τὴν (4) καὶ εὑρίσκομεν

$$(5+z)^2 + z^2 = 30$$

ἢ $25 + 10z + z^2 + z^2 - 30 = 0$ ἢ $2z^2 + 10z - 5 = 0$

Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν

$$z = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 + 4.2.5.}}{4} = \frac{-10 \pm \sqrt{140}}{4} = \frac{-10 \pm 11{,}83}{4}$$

καὶ $\qquad z_1 = \dfrac{-10 \pm 11{,}83}{4} = \dfrac{1{,}83}{4} = 0{,}4574$

καὶ $\qquad z_2 = \dfrac{-21{,}83}{4}$· (ἀποκλείεται ὡς ἀρνητικὴ)

τὴν τιμὴν τοῦ z θέτοντες εἰς τὴν (5) εὑρίσκομεν

$$y = 5{,}4575.$$

ὥστε αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι 0,4575μ. 5,4575μ. καὶ 5,4772 μ.

*370. **Γωνία τις τριγώνου εἶναι ὀξεῖα, ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα, ἐὰν τὸ τετράγωνον τῆς ἀπέναντι αὐτῆς πλευρᾶς εἶναι μικρότερον, ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.***

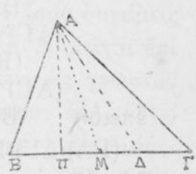
Ἐὰν α, β, γ εἶναι αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου καὶ μ ἡ προβολὴ τῆς τῆς γ ἐπὶ τῆς β, τότε θὰ ἔχωμεν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \pm 2\beta\mu$. (1)

α΄) ἔστω $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$· ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\alpha^2 - (\beta^2 + \gamma^2) = \pm 2\beta\mu$· ἐπειδὴ $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ θὰ εἶναι $\alpha^2 - (\beta^2 + \gamma^2) < 0$. ὁπότε πρέπει νὰ εἶναι $\pm 2\beta\mu < 0$· ἐπειδὴ ὅμως $\beta\mu > 0$, ἕπεται ὅτι $-2\beta\mu < 0$· ἑπομένως κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἔχομεν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\mu$· ἀλλ' ἡ σχέσις αὕτη ὑπάρχει ὅταν ἡ α κεῖται ἀπέναντι ὀξείας γωνίας,

β΄) ἔστω $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ τότε $\alpha^2 - (\beta^2 + \gamma^2) = 0$· ἐπειδὴ ὅμως $\alpha^2 - (\beta^2 + \gamma^2) = \pm 2\beta\mu$, ἕπεται καὶ $2\beta\mu = 0$· ἀλλὰ $2 \neq 0$ καὶ $\beta \neq 0$, διότι ἄλλως δὲν θὰ ὑπῆρχε τρίγωνον, ἑπομένως θὰ εἶναι $\mu = 0$, δηλαδὴ ἡ προβολὴ τῆς γ ἐπὶ τὴν β εἶναι σημεῖον, ἤτοι ἡ γ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν β, ἄρα ἡ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία Α εἶναι ὀρθή.

γ΄) ἔστω $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ τότε καὶ $\alpha^2 - (\beta^2 + \gamma^2) > 0$, ἄρα καὶ $\pm 2\beta\mu > 0$· ἀλλ' ἐπειδὴ $\beta\mu > 0$, ἕπεται ὅτι $+2\beta\mu > 0$, ἑπομένως ἡ σχέσις (1) γίνεται $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\mu$· ἀλλ' αὕτη ὑπάρχει ὅταν ἡ πλευρὰ α κεῖται ἀπέναντι ἀμβλείας γωνίας.

*371. **Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἡμίσεως τῆς τρίτης πλευρᾶς σὺν τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέσου τῆς πλευρᾶς ταύτης.***



Σχ. 25.

Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 25) τὸ δοθὲν τρίγωνον, ΑΜ ἡ διάμεσος του καὶ ΜΠ ἡ προβολὴ ταύτης ἐπὶ τὴν ΒΓ· ἡ ΑΜ μετὰ τῆς ΒΓ σχηματίζει ἐφεξῆς παραπληρωματικὰς γωνίας, αἵτινες ἐν γένει εἶναι ἄνισοι (ἐκτὸς ἂν τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές)· ἔστω λοιπὸν γων $BMA < 1$ ὀρθ. καὶ γων $AM\Gamma > 1$ ὀρθ.· ἐπειδὴ ἡ AB κεῖται ἀπέναντι ὀξείας γωνίας τοῦ τριγώνου ABM ἔχομεν

$$(AB)^2 = (AM)^2 + (BM)^2 - 2(BM)(\Pi M), \qquad (1)$$

διὰ δὲ τὴν $A\Gamma$, ὡς κειμένην ἀπέναντι ἀμβλείας γωνίας τοῦ τριγώνου $AM\Gamma$ ἔχομεν

$$(A\Gamma)^2 = (AM)^2 + (M\Gamma)^2 + 2(M\Gamma)(\Pi M) \qquad (2)$$

ἀλλ' ἕνεκα τῆς διαμέσου AM εἶναι $BM = M\Gamma$ ἑπομένως, ἡ (2) γίνεται

$$(A\Gamma)^2 = (AM)^2 + (BM)^2 + 2(BM)(\Pi M) \qquad (3)$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (3) ἔχομεν

$$(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = 2(AM)^2 + 2(BM)^2$$

372. Δοθέντος τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ σημείου Δ τῆς βάσεως $B\Gamma$ (μεταξὺ τῶν B καὶ Γ) εἶναι

$$(AB)^2.(\Delta\Gamma) + (A\Gamma)^2.(B\Delta) - (A\Delta)^2 (B\Gamma) = (B\Gamma).(\Delta\Gamma).(B\Delta).$$

Φέρομεν τὴν $A\Delta$ (σχ.25) ὁπότε αἱ περὶ τὸ Δ σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, ἄνισοι ἐν γένει· ἔστω δὲ ὅτι γων$A\Delta B < 1$ὀρθ καὶ γων$A\Delta\Gamma > 1$ὀρθ. τότε ἐκ τοῦ τριγώνου $A\Delta B$ ἔχομεν

$$(AB)^2 = (A\Delta)^2 + (B\Delta)^2 - 2(B\Delta)(\Pi\Delta)$$

καὶ λύοντες ὡς πρὸς $2(\Pi\Delta)$ ἔχομεν $2(\Pi\Delta) = \dfrac{(A\Delta)^2 + (B\Delta)^2 - (AB)^2}{(B\Delta)}$ (1)

ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου $A\Delta\Gamma$ ἔχομεν

ἢ $$(A\Gamma)^2 = (A\Delta)^2 + (\Delta\Gamma)^2 + 2(\Delta\Gamma)(\Pi\Delta)$$

ἢ $$2(\Pi\Delta) = \frac{(A\Gamma)^2 - (A\Delta)^2 - (\Delta\Gamma)^2}{(\Delta\Gamma)}$$

ἐξισοῦντες τὰ δεύτερα μέλη τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$\frac{(A\Delta)^2 + (B\Delta)^2 - (AB)^2}{(B\Delta)} = \frac{(A\Gamma)^2 - (A\Delta)^2 - (\Delta\Gamma)^2}{(\Delta\Gamma)}$$

ἢ $$(A\Delta)^2(\Delta\Gamma) + (B\Delta)^2(\Delta\Gamma) - (AB)^2(\Delta\Gamma) = (A\Gamma)^2(B\Delta) - (A\Delta)^2(B\Delta) - (\Delta\Gamma)^2(B\Delta)$$

$$(B\Delta)^2(\Delta\Gamma) + (\Delta\Gamma)^2(B\Delta) = (A\Gamma)^2(B\Delta) + (AB)^2(\Delta\Gamma) - (A\Delta)^2(B\Delta) - (A\Delta)^2(\Delta\Gamma)$$

ἢ $$(B\Delta)(\Delta\Gamma)[B\Delta + \Delta\Gamma] = (A\Gamma)^2(B\Delta) + (AB)^2(\Delta\Gamma) - (A\Delta)^2[B\Delta + \Delta\Gamma]$$

ἢ ἐπειδὴ $B\Delta + \Delta\Gamma = B\Gamma$

$$(B\Delta)(\Delta\Gamma)(B\Gamma) = (A\Gamma)^2(B\Delta) + (AB)^2(\Delta\Gamma) - (A\Delta)^2(B\Gamma),$$

373. Ἐὰν α, β, γ παριστάνουν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου, $A\Delta$ δὲ εἶναι ἡ διάμεσος ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν πλευρὰν α καὶ ΔH ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τὴν α, θὰ εἶναι

$$(A\Delta)^2 = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2} - \frac{\alpha^2}{4}, \qquad \gamma^2 - \beta^2 = 2\alpha(\Delta H).$$

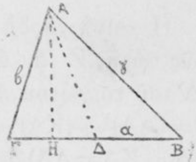
Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν διαμέσων τριγώνου (ἄσκησις 371) ἔχομεν

$$(AB)^2+(A\Gamma)^2=2(A\Delta)^2+2(B\Delta)^2$$

ἀλλὰ $AB=\gamma$, $A\Gamma=\beta$, $B\Delta=\frac{B\Gamma}{2}=\frac{\alpha}{2}$, καὶ $2(B\Delta)^2=\frac{\alpha^2}{2}$

ὅθεν $\gamma^2+\beta^2=2(A\Delta)^2+\frac{\alpha^2}{2}$ ἢ λύοντες ὡς πρὸς $(A\Delta)^2$ ἔχομεν $2(A\Delta)^2=\gamma^2+\beta^2-\frac{\alpha^2}{2}$ καὶ

$$(A\Delta)^2=\frac{\beta^2+\gamma^2}{2}-\frac{\alpha^2}{4}.$$



Σχ. 25.

β′) διὰ τὴν β κειμένην ἀπέναντι ὀξείας γωνίας τοῦ τριγώνου ΑΓΔ ἔχομεν

$$\beta^2=(A\Delta)^2+(\Gamma\Delta)^2-2(\Gamma\Delta)(\Delta H) \qquad (1)$$

διὰ δὲ τὴν γ, ἕνεκα τῆς ἀμβλείας γων ΑΔΒ ἔχομεν·

$$\gamma^2=(A\Delta)^2+(\Delta B)^2+2(\Delta B)(\Delta H), \qquad (2)$$

ἀλλὰ $(\Gamma\Delta)=(\Delta B)$, ὅθεν ἡ (1) γίνεται $\beta^2=(A\Delta)^2+(\Delta B)^2-2(\Delta B)(\Delta H)$ (3)

ἀφαιροῦντες τὰς (2) καὶ (3) κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\gamma^2-\beta^2=4(\Delta B)(\Delta H) \quad \text{ἢ} \quad \gamma^2-\beta^2=2(2\Delta B)(\Delta H)$$

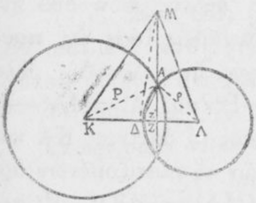
ἀλλὰ $2(\Delta B)=\Gamma B=\alpha$ ὅθεν $\gamma^2-\beta^2=2\alpha(\Delta H)$

374. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἂν δύο περιφέρειαι τέμνωνται, πᾶν σημεῖον ἔχον τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς τοὺς δύο κύκλους κεῖται ἐπὶ τῆς κοινῆς χορδῆς αὐτῶν.

Ἔστωσαν Κ καὶ Λ(σχ.26) οἱ τεμνόμενοι κύκλοι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, Ρ καὶ ρ αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν καὶ Μ σημεῖόν τι ἔχον $\Delta_1=\Delta_2$ ὅπου Δ_1 παριστᾷ τὴν δύναμιν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸν Κ καὶ Δ_2 ὡς πρὸς τὸν Λ· τότε $\Delta_1=KM^2-P^2$ καὶ $\Delta_2=\Lambda M^2-\rho^2$, ἄρα

$$KM^2-P^2=\Lambda M^2-\rho^2$$

ἢ $$KM^2-\Lambda M^2=P^2-\rho^2 \qquad (1)$$



Σχ. 26.

Ἀλλὰ τὸ σημεῖον Μ, ὡς ἔχον ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τοὺς κύκλους Κ καὶ Λ κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος αὐτῶν, ὅστις ὡς γνωστὸν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον ΚΛ, ἔστω δὲ ὁ ποὺς αὐτοῦ Ζ· ἂν φέρωμεν τὴν διάμεσον ΜΔ τοῦ τριγώνου ΜΚΛ, ἐκ τῶν τριγώνων ΜΚΔ παὶ ΜΛΔ λαμβάνομεν :

$$MK^2=M\Delta^2+K\Delta^2+2(K\Delta)(\Delta Z) \qquad (2)$$

καὶ $$(M\Lambda)^2=(M\Delta)^2+(\Lambda\Delta)^2-2(\Lambda\Delta)(\Delta Z)$$

ἀλλὰ $K\Delta=\Lambda\Delta$, ὅθεν $M\Lambda^2=M\Delta^2+K\Delta^2-2(K\Delta)(\Delta Z)$ (3)

Ἀφαιροῦντες τὰς (2) καὶ (3) κατὰ μέλη ἔχομεν

$$(MK)^2-(M\Lambda)^2=4(K\Delta)(\Delta Z)=2(2K\Delta)(\Delta Z)$$

ἀλλὰ $2K\Delta=K\Lambda$, ὅθεν $MK^2-M\Lambda^2=2(K\Lambda)(\Delta Z)$· ἕνεκα δὲ τῆς (1) ἔχομεν $2(K\Lambda)(\Delta Z)=P^2-\varrho^2$ καὶ $\Delta Z=\dfrac{P^2-\varrho^2}{2K\Lambda}$ (4)

Ἡ κοινὴ χορδὴ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον ΚΛ, ἔστω δὲ ὁ ποῦς αὐτῆς Ζ′ ἂν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ καὶ ΛΑ, ὡς καὶ ἡ διάμεσος ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΚΛ ἐκ τῶν τριγώνων ΑΚΔ καὶ ΑΔΛ λαμβάνομεν. $P^2=(A\Delta)^2+(K\Delta)^2+2(K\Delta)(\Delta Z')$ καὶ $\varrho^2=(A\Delta)^2+(K\Delta)^2-2(K\Delta)(\Delta Z')$ (διότι $K\Delta=\Lambda\Delta$) ὅθεν· $P^2-\varrho^2=4(K\Delta)(\Delta Z')$ ἢ $P^2-\varrho^2=2(K\Lambda)(\Delta Z')$ ἢ

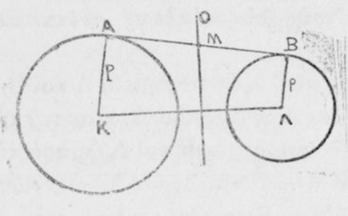
$$\Delta Z'=\frac{P^2-\varrho^2}{2K\Lambda} \qquad (5)$$

ἐκ τῶν (4) καὶ (5) λαμβάνομεν $\Delta Z=\Delta Z'$, ἄρα τὰ σημεῖα Ζ καὶ Ζ′ συμπίπτουν· ἑπομένως ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν δύο κύκλων καὶ ἡ κοινὴ χορδὴ αὐτῶν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν διάκεντρον εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον αὐτῆς, ἄρα κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἤτοι τὸ Μ εἶναι σημεῖον τῆς κοινῆς χορδῆς.

375. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ριζικὸς ἄξων δύο κύκλων διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη κοινήν τινὰ ἐφαπτομένην τῶν δύο κύκλων.

Ἔστω Ο ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων Κ καὶ Λ (σχ. 27) οἵτινες ἔχουν ἀντιστοίχως ἀκτῖνας Ρ καὶ ρ καὶ ΑΒ κοινὴ αὐτῶν ἐφαπτομένη τέμνουσα τὸν ριζικὸν ἄξονα εἰς τὸ σημεῖον Μ· θὰ δείξωμεν ὅτι

$$AM=MB$$



Σχ. 27.

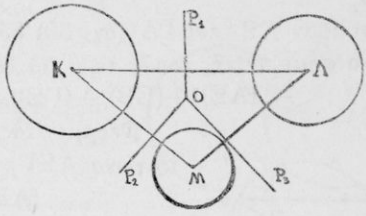
Ἐπειδὴ τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν δύο κύκλων ἔχει δυνάμεις ἴσας ὡς πρὸς τοὺς κύκλους, ἤτοι $\Delta_1=\Delta_2$· ἀλλὰ $\Delta_1=MK^2-P^2$ καὶ $\Delta_2=M\Lambda^2-\varrho^2$ ὅθεν $MK^2-P^2=M\Lambda^2-\varrho^2$ (1)· ἂν ἀχθοῦν ὅμως αἱ ἀκτῖνες ΚΑ καὶ ΛΒ αἱ ἀπολήγουσαι εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, ἐκ τῶν σχηματιζομένων ὀρθογωνίων τριγώνων ΚΑΜ καὶ ΛΒΜ ἔχομεν $(MA)^2=(MK)^2-P^2$ καὶ $(MB)^2=(M\Lambda)^2-\varrho^2$ ἢ ἕνεκα τῆς (1) ἔχομεν $(MA)^2=(MB)^2$, ἄρα καὶ $MA=MB$, ἤτοι τὸ Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης ΑΒ.

376. Οἱ ριζικοὶ ἄξονες τριῶν κύκλων, λαμβανομένων ἀνὰ δύο τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον (καλούμενον ριζικὸν κέντρον τῶν κύκλων) ἢ εἶναι παράλληλοι.

Ἔστω P_1 ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων Κ καὶ Λ καὶ P_2 (σχ.28) τῶν κύκλων Κ καὶ Μ· ἐπειδὴ οὗτοι εἶναι κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς διακέντρους ΚΛ καὶ ΛΜ, ἤτοι ἐπὶ δύο τεμνομένας εὐθείας τέμνονται εἴς τι σημεῖον

Ο, αἱ δυνάμεις Δ_1 καὶ Δ_2 τοῦ σημείου τούτου, ὡς πρὸς τοὺς κύκλους Κ καὶ Λ εἶναι ἴσαι, διότι τοῦτο εἶναι σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος αὐτῶν P_1 ἤτοι $\Delta_1=\Delta_2$ (1)· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ αἱ δυνάμεις τοῦ Ο ὡς πρὸς τοὺς κύκλους Κ καὶ Μ εἶναι ἴσαι· ἂν λοιπὸν Δ_3 παριστᾷ τὴν δύναμιν τοῦ Ο ὡς πρὸς τὸν κύκλον Μ θὰ ἔχωμεν

$$\Delta_1=\Delta_3 \quad (2)$$



Σχ. 28.

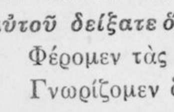
ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\Delta_2=\Delta_3$, ἤτοι αἱ δυνάμεις τοῦ Ο ὡς πρὸς τοῦ κύκλους Λ καὶ Μ εἶναι ἴσαι, ἄρα τοῦτο εἶναι σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος αὐτῶν P_3, ἤτοι καὶ ὁ τρίτος ριζικὸς ἄξων διέρχεται διὰ τοῦ Ο.

Ἐὰν οἱ ριζικοὶ ἄξονες P_2 καὶ P_3 εἶναι παράλληλοι, οἱ τρεῖς κύκλοι Κ, Μ, Λ ἔχουν τὰ κέντρα των ἐπ' εὐθείας γραμμῆς καὶ ὁ ριζικὸς ἄξων P_1 θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτούς, διότι εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον ἐπὶ τὴν ὁποίαν εἶναι καὶ οἱ δύο ἄλλοι ριζικοὶ ἄξονες. Ὁ P_1 δὲν δύναται νὰ συμπέσῃ μὲ κανένα ἐκ τῶν δύο ἄλλων ριζικῶν ἀξόνων, διότι ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι θὰ συνέπιπτεν μὲ ἕνα ἐξ αὐτῶν π. χ. τὸν P_3 τότε ὅλα του τὰ σημεῖα θὰ εἶχον τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς τοὺς τρεῖς κύκλους, καὶ θὰ ἦσαν ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονας P_2, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν, διότι οἱ ριζικοὶ ἄξονες P_2 καὶ P_3 ὑπετέθησαν παράλληλοι.

377. Ἐὰν ΟΕ, ΟΖ, ΟΜ, εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ καὶ ΓΑ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀπὸ σημεῖον Ο, κείμενον ἐντὸς αὐτοῦ δείξατε ὅτι $(AE)^2+(BZ)^2+(\Gamma\Theta)^2=(EB)^2+(Z\Gamma)^2+(\Theta A)^2$.

Φέρομεν τὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ (σχ. 29).

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τῆς τρίτης πλευρᾶς αὐτοῦ (Θεώρημα § 140 Γεωμ. Ν. Σακελλαρίου).



Σχ. 29.

Κατὰ τὸ θεώρημα αὐτὸ ἔχομεν λοιπὸν ἀπὸ τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΑΟΓ καὶ ΒΟΓ τὰς ἰσότητας

$$(AO)^2-(OB)^2=(AE)^2-(EB)^2$$
$$(O\Gamma)^2-(OA)=(\Gamma\Theta)^2-(\Theta A)^2$$
$$(OB)^2-(O\Gamma)^2=(BZ)^2-(Z\Gamma)^2$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας κατὰ μέλη ἔχομεν

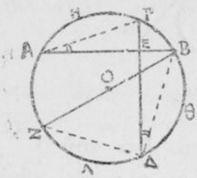
$$0=(\mathrm{AE})^2+(\Gamma\Theta)^2+(\mathrm{BZ})^2-(\mathrm{EB})^2-(\Theta\mathrm{A})^2-(\mathrm{Z}\Gamma)^2$$

ἢ $$(\mathrm{EB})^2+(\Theta\mathrm{A})^2+(\mathrm{Z}\Gamma)^2=(\mathrm{AE})^2+(\Gamma\Theta)^2+(\mathrm{BZ})^2$$

378. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τμημάτων δύο καθέτων χορδῶν ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου.

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 30) δύο κάθετοι χορδαὶ τοῦ κύκλου Ο καὶ Ε τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των, θὰ δείξωμεν ὅτι

$$(\mathrm{AE})^2+(\mathrm{EB})^2+(\Gamma\mathrm{E})^2+(\mathrm{E}\Delta)^2=(\mathrm{BZ})^2$$



Σχ. 30.

Φέρομεν τὰς ΑΓ, ΒΔ. Ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΓ καὶ ΒΕΔ ἔχομεν

$$(\mathrm{AE})^2+(\mathrm{E}\Gamma)^2=(\mathrm{A}\Gamma)^2$$
$$(\mathrm{EB})^2+(\mathrm{E}\Delta)^2=(\mathrm{B}\Delta)^2$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας κατὰ μέλη ἔχομεν

$$(\mathrm{AE})^2+(\mathrm{EB})^2+(\mathrm{E}\Gamma)^2+(\mathrm{E}\Delta)^2= (\mathrm{A}\Gamma)^2+(\mathrm{B}\Delta)^2 \qquad (1)$$

Ἡ γωνία ΑΕΓ ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τόξων ΑΗΓ καὶ ΒΘΔ· ἐπειδὴ δὲ εἶναι ὀρθή, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο αὐτῶν τόξων εἶναι ἴσον μὲ ἡμιπεριφέρειαν.

Ἐὰν λοιπὸν φέρωμεν τὴν διάμετρον ΒΟΖ τὰ τόξα ΖΛΔ καὶ ΑΗΓ θὰ εἶναι ἴσα, διότι μετὰ τοῦ τόξου ΒΘΔ ἔχουν ἄθροισμα τὴν ἡμιπεριφέρειαν· ἐπειδὴ τὰ τόξα εἶναι ἴσα θὰ εἶναι καὶ αἱ χορδαὶ ΑΓ καὶ ΔΖ ἴσαι· ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΔΖ ἔχομεν

$$(\mathrm{B}\Delta)^2+(\Delta\mathrm{Z})^2=(\mathrm{BZ})^2$$

ἢ $$(\mathrm{B}\Delta)^2+(\mathrm{A}\Gamma)^2=(\mathrm{BZ})^2$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ δεύτερον μέλος τῆς (1) διὰ τοῦ ἴσου του ἔχομεν

$$(\mathrm{AE})^2+(\mathrm{EB})^2+(\mathrm{E}\Gamma)^2+(\mathrm{E}\Delta)^2=(\mathrm{BZ})^2.$$

379. Ἐὰν αἱ κάθετοι ἐκ τῶν κορυφῶν τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὰς ἀπέναντι πλευρὰς τέμνονται εἰς τὸ Δ, δείξατε ὅτι

$$(\mathrm{AB})^2-(\mathrm{A}\Gamma)^2=(\mathrm{B}\Delta)^2-(\Gamma\Delta)^2.$$

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΕ καὶ ΑΓΕ

ἔχομεν $(\mathrm{AB})^2=(\mathrm{AE})^2+(\mathrm{BE})^2$

καὶ $(\mathrm{A}\Gamma)^2=(\mathrm{AE})^2+(\Gamma\mathrm{E})^2$

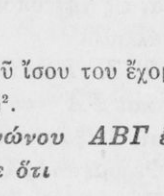
ὅθεν $(\mathrm{AB})^2-(\mathrm{A}\Gamma)^2=(\mathrm{BE})^2-(\Gamma\mathrm{E})^2$, (1)

ἐκ δὲ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΒΔΕ καὶ ΓΔΕ

ἔχομεν $(\mathrm{B}\Delta)^2=(\Delta\mathrm{E})^2+(\mathrm{BE})^2$

καὶ $(\Gamma\Delta)^2=(\Delta\mathrm{E})^2+(\Gamma\mathrm{E})^2$

ἐπομένως $(\mathrm{B}\Delta)^2-(\Gamma\Delta)^2=(\mathrm{BE})^2-(\Gamma\mathrm{E})^2$ (2)

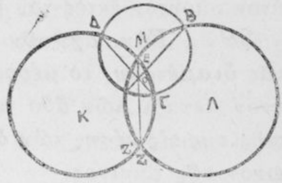


Σχ. 31.

ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν $(\mathrm{AB})^2-(\mathrm{A}\Gamma)^2=(\mathrm{B}\Delta)^2-(\Gamma\Delta)^2$.

380. Ἐὰν ἕκαστος τῶν τριῶν κύκλων τέμνῃ τοὺς δύο ἄλλους αἱ κοιναὶ χορδαὶ τῶν ἀνὰ δύο κύκλων διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἔστωσαν Κ, Λ, Μ (σχ. 32) τρεῖς κύκλοι, καὶ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ αἱ κοιναὶ χορδαὶ τῶν κύκλων Λ καὶ Μ, Μ καὶ Κ, Κ καὶ Λ. Θὰ δείξω, ὅτι αἱ χορδαὶ αὐταὶ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.



Σχ 32.

Ἔστω Ο ἡ τομὴ τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ Ο κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου Μ· ἐπειδὴ τὸ Ο κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β καὶ μεταξὺ τῶν Γ καὶ Δ θὰ εὑρίσκεται ἐντὸς τῶν κύκλων Κ καὶ Λ.

Φέρομεν τὴν ΕΟ καὶ ἔστωσαν Ζ καὶ Ζ' αἱ τομαὶ τῶν κύκλων Κ καὶ Λ καὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΕΟ.

Κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῶν τεμνομένων χορδῶν ἔχομεν

$$(ΟΕ).(ΟΖ')=(ΟΓ)(ΟΔ)$$
$$(ΟΕ).(ΟΖ)=(ΟΑ).(ΟΒ)$$

ἀλλ' ἐπειδὴ $(ΟΑ).(ΟΒ)=(ΟΓ).(ΟΔ)$ θὰ ἔχωμεν καὶ

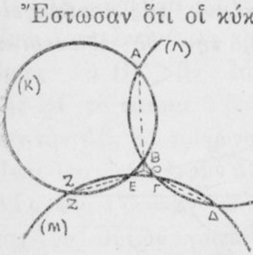
$$(ΟΕ).(ΟΖ')=(ΟΕ)(ΟΖ)$$

ἢ $$(ΟΖ')=(ΟΖ)$$

καὶ ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Ζ καὶ Ζ' κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Ο ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΕΟ, ἕπεται ὅτι τὰ δύο σημεῖα Ζ καὶ Ζ' συμπίπτουν εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ζ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς τομῆς τῶν δύο περιφερειῶν· ὥστε καὶ ἡ τρίτη κοινὴ χορδὴ ΕΖ τῶν κύκλων Κ καὶ Λ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ο.

Ἐὰν ἡ τομὴ τῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΓΔ κεῖται ἐκτὸς τῶν κύκλων ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως ὡς φαίνεται κατωτέρω.

Ἔστωσαν ὅτι οἱ κύκλοι (Κ), (Λ), (Μ) (σχ. 33) τέμνονται ἀνὰ δύο καὶ ἔστω Ο ἡ τομὴ τῶν κοινῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΓΔ τῶν (Κ), (Λ) καὶ (Κ), (Μ).



Σχ. 33.

Αἱ ΟΑ καὶ ΟΔ εἶναι τέμνουσαι τοῦ κύκλου (Λ) ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, ἑπομένως

$$(ΟΒ)(ΟΑ)=(ΟΓ)(ΟΔ) \qquad (1)$$

Ἂς φέρωμεν τὴν ΟΕ καὶ ἔστω, ὅτι αὕτη προεκτεινομένη δὲν διέρχεται διὰ τοῦ Ζ· τότε θὰ τέμνῃ τὸν μὲν κύκλον (Κ) εἴς τι σημεῖον Ζ τὸν δὲ (Μ) εἴς τι σημεῖον Ζ'· ἀλλὰ τότε αἱ ΟΑ καὶ ΟΖ εἶναι τέμνουσαι τοῦ κύκλου (Κ) ἐκ τοῦ σημείου Ο, ἑπομένως ἔχομεν

$$(ΟΒ)(ΟΑ)=(ΟΕ)(ΟΖ),$$

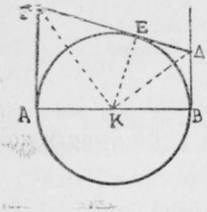
αἱ δὲ ΟΔ καὶ ΟΖ′ εἶναι τέμνουσαι ἐκ τοῦ Ο τοῦ κύκλου (Μ), ὅθεν

$$(ΟΓ)(ΟΔ)=(ΟΕ)(ΟΖ′),$$

ἑπομένως, ἕνεκα τῆς (1) ἔχομεν καὶ (ΟΕ)(ΟΖ)=(ΟΕ)(ΟΖ′), ἐκ ταύτης ἕπεται ΟΖ=ΟΖ′· ἄρα τὰ σημεῖα Ζ καὶ Ζ′ συμπίπτουν, ἤτοι συμπίπτουν εἰς κοινὸν σημεῖον τῶν δύο κύκλων (Κ) καὶ (Μ)· ἀλλὰ τὸ μόνον τοιοῦτον ἐκτὸς τοῦ Ε εἶναι τὸ Ζ, ἄρα ἡ ΟΕ διέρχεται διὰ τοῦ Ζ.

381. ***Ἐὰν ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι περιφερείας εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου, τὸ μέρος τρίτης τινὸς ἐφαπτομένης, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν δύο πρώτων διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς της εἰς μέρη, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος.***

Ἔστωσαν ΑΓ καὶ ΒΔ (σχ. 34) αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας Κ εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου ΑΒ καὶ Ε τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς τρίτης ἐφαπτομένης ΓΔ· θὰ δείξωμεν ὅτι (ΓΕ).(ΔΕ)=(ΚΕ)^2.



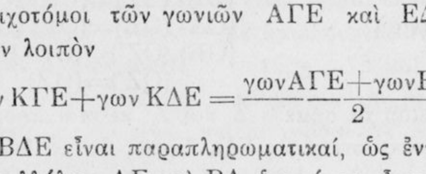
Σχ. 34.

Αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΓ καὶ ΒΔ, ἐπειδὴ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι· ἐὰν ἀχθοῦν αἱ ΚΓ καὶ ΚΔ αὗται εἶναι ἀντιστοίχως διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ΑΓΕ καὶ ΕΔΒ· θὰ ἔχωμεν λοιπὸν

$$\text{γων}\,ΚΓΕ+\text{γων}\,ΚΔΕ=\frac{\text{γων}ΑΓΕ+\text{γων}ΒΔΕ}{2}$$

ἀλλὰ αἱ γωνίαι ΑΓΕ καὶ ΒΔΕ εἶναι παραπληρωματικαί, ὡς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΓ καὶ ΒΔ, ἑπομένως εἶναι γων ΚΓΕ+γων ΚΑΕ=1 ὀρθ., ἄρα καὶ γων ΓΚΔ=1 ὀρθ.· ἂν ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΚΕ ἡ ἀπολήγουσα εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην ΓΔ, ἤτοι ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΚΔ, ἑπομένως θὰ ἔχωμεν (ΚΕ)^2=(ΓΕ)(ΔΕ).

382. ***Ἐὰν ἡ διάκεντρος δύο κύκλων τέμνῃ τὰς περιφερείας κατὰ σειρὰν εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ Δ, τὴν δὲ ἐξωτερικὴν κοινὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Ρ, θὰ εἶναι (ΡΑ).(ΡΔ)=(ΡΒ).(ΡΓ).***



Σχ. 35.

Ἔστωσαν Κ καὶ Λ οἱ δοθέντες κύκλοι (σχ. 35) ΛΚ ἡ διάκενρος των καὶ ΖΕ ἡ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν.

Ἂν ἀχθοῦν αἱ ἀκτῖνες ΚΕ καὶ ΛΖ αἱ εἰς τὰ σημεῖα ἀφῆς, αὗται ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην ΕΖ τῶν κύκλων Κ καὶ Λ εἶναι παράλληλοι, ἄρα γων ΖΛΒ=γων ΕΚΔ· ἐὰν δὲ ἀχθοῦν αἱ χορδαὶ ΕΔ καὶ ΖΒ σχηματίζονται τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΖΒΛ καὶ ΚΔΕ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς ἴσην, ἄρα (ἄσκησ. 334) ἔχουν καὶ ω=γων ω'· αἱ ΕΔ καὶ ΖΒ θὰ εἶναι λοιπὸν παράλληλοι, ἐπειδὴ τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐκτὸς γωνίας ἴσας· τὰ τρίγωνα ΡΕΔ καὶ ΡΖΒ εἶναι λοιπὸν ὅμοια· ἐκ τῆς ὁμοιότητος τούτων λαμβάνομεν $\frac{Ρ Δ}{Ρ Β}=\frac{Ρ Ε}{Ρ Ζ}$ (1)· ἐπίσης δι' ὅμοιον λόγον καὶ τὰ τρίγωνα ΡΖΑ καὶ ΡΕΓ εἶναι ὅμοια καὶ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τούτων ἔχομεν $\frac{Ρ Α}{Ρ Γ}=\frac{Ρ Ζ}{Ρ Ε}$ (2)· πολλαπλασιάζοντες τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν $\frac{(ΡΑ)(ΡΔ)}{(ΡΒ))ΡΓ)}=\frac{(ΡΖ)(ΡΕ)}{(ΡΖ)(ΡΕ)}=1$, ἤτοι $(ΡΑ)(ΡΔ)=(ΡΒ)(ΡΓ)$.

383. Ἡ διάκεντρος δύο κύκλων τέμνῃ τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Ρ· ἐὰν ἀχθῇ διὰ τοῦ Ρ τέμνουσα τὰς περιφερείας κατὰ σειρὰν εἰς τὸ Ε, Ζ, Θ καὶ Η, νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι $(ΡΕ).(ΡΗ)=(ΡΖ)\,(ΡΘ)$.

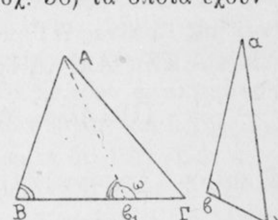
Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως ταύτης πρέπει νὰ ἀποδειχθοῦν προηγουμένως αἱ ἑξῆς δύο προτάσεις.

Ι. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ἀπέναντι μιᾶς τούτων γωνίας ἴσας ἢ εἶναι ἴσαι ἢ αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι αὐτῶν αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν δύο ἄλλων ἴσων πλευρῶν εἶναι παραπληρωματικαί.

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ (σχ. 36) τὰ ὁποῖα ἔχουν

ΑΒ=αβ, ΑΓ=αγ καὶ Γ=γ.

Ἂν εἶναι καὶ ΒΓ=βγ τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἑπομένως καὶ Β=β. Ἔστω ὅμως ὅτι ΒΓ>βγ· ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΒΓ τὸ τμῆμα $Γβ_1$=βγ καὶ φέρωμεν τὴν $Αβ_1$ τὰ τρίγωνα $Αβ_1Γ$ καὶ αβγ, εἶναι ἴσα διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας ΑΓ=αγ, $Γβ_1$=βγ καὶ τὰς περιεχομένας ὑπ' αὐτῶν γωνίας Γ καὶ γ ἴσας·



Σχ. 36.

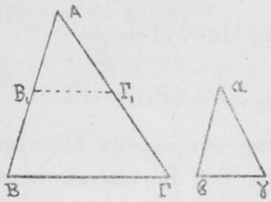
ἄρα θὰ εἶναι καὶ $Αβ_1$=αβ καὶ γων ω=γων β (1)· ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ΑΒ=αβ, ἄρα ΑΒ=$Αβ_1$ ἑπομένως τὸ τρίγωνον $ΑΒβ_1$ εἶναι ἰσοσκελές, ὅθεν Β=$Ββ_1Α$ ἀλλὰ $Ββ_1$+ω=2 ὀρθ. ὅθεν καὶ Β+ω=2 ὀρθ. ἢ ἕνεκα τῆς (1) καὶ Β+β=2 ὀρθ.

II. *Ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἀναλόγους καὶ τὴν γωνίαν τὴν ἀπέναντι τοῦ ἑνὸς ζεύγους τῶν ἀναλόγων πλευρῶν ἴσην, ἢ τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια ἢ αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι αὐτῶν αἱ κείμεναι ἀπέναντι τοῦ ἄλλου ζεύγους τῶν ἀναλόγων πλευρῶν εἶναι παραπληρωματικαί.*

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ (σχ.37), τὰ ὁποῖα ἔχουν

$$\frac{AB}{\alpha\beta}=\frac{B\Gamma}{\beta\gamma} \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \Gamma=\text{γων}\,\gamma.$$

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα $AB_1=\alpha\beta$ καὶ φέρομεν τὴν $B_1\Gamma_1$ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ· ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $AB_1\Gamma_1$ καὶ ΑΒΓ ἔχομεν



Σχ. 37.

$$\frac{AB}{AB_1}=\frac{B\Gamma}{B_1\Gamma_1} \quad (2)\cdot$$ ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν

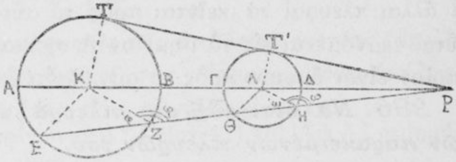
$$\frac{B\Gamma}{\beta\gamma}=\frac{B\Gamma}{B_1\Gamma_1},$$ ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει $B_1\Gamma_1=\beta\gamma$, καὶ γων $\Gamma_1=$γων Γ· ἀλλὰ γων Γ=γων γ_1, ὅθεν γων $\Gamma_1=$γων γ, ἤτοι τὰ τὰ τρίγωνα $AB_1\Gamma_1$ καὶ αβγ ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς ἀπέναντι τῆς μιᾶς τούτων γωνίας ἴσας, ἄρα ἢ εἶναι ἴσα (κατά τὴν προηγουμένην πρότασιν) ὁπότε $B_1=\beta$, ἄρα καὶ $B=\beta$, ὁπότε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ θὰ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας, ἢ αἱ ἀπέναντι τῶν δύο ἄλλων ἴσων πλευρῶν γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, ἤτοι $B_1+\beta=2$ ὀρθ. ἀλλὰ τότε καὶ $B+\beta=2$ ὀρθ..

Ἔστω τώρα ΚΛΡ ἡ διάκεντρος τῶν κύκλων Κ καὶ Λ (σχ 38) ΤΤ'Ρ ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη καὶ ΡΕ ἡ τέμνουσα τὰς περιφερείας. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΛΤ' καὶ ΚΤ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, καθὼς καὶ τὰς ΛΗ καὶ ΚΖ. Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΡΛΤ' καὶ ΡΚΤ ἔχομεν

$$\frac{P\Lambda}{PK}=\frac{\Lambda T'}{KT} \quad (1)\cdot$$ ἀλλὰ $\Lambda T'=\Lambda H$ καὶ $KT=KZ$, ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἐπομένως ἡ (1) γίνεται $\dfrac{P\Lambda}{PK}=\dfrac{\Lambda H}{KZ}$.

Ἀλλὰ τότε τὰ τρίγωνα ΡΗΛ καὶ ΡΖΚ ἔχουν δύο πλευρὰς ἀναλόγους καὶ τὴν γωνίαν Ρ τὴν κειμένην ἀπέναντι τοῦ ζεύγους τῶν ἀναλόγων πλευρῶν ΛΗ καὶ ΚΖ κοινήν, ἄρα αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι ω καὶ φ, ἐπειδὴ κεῖνται ἀπέναντι τοῦ ἄλλου ζεύγους τῶν ἀναλόγων πλευρῶν ΡΛ καὶ ΡΚ θὰ εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί· ἔστω λοιπὸν ὅτι $\omega+\varphi=2$ ὀρ. (2)· ἀλλὰ $\omega+\omega'=2$ ὀρθ. καὶ $\varphi+\varphi'=$ὀρθ. ἐπομένως $(\omega'+\varphi')+(\omega+\varphi)=4$ ὀρθ. ἢ $\omega'+\varphi'=2$ ὀρθ. ἕνεκα τῆς (2)· τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον, διότι ἵνα

$\omega'+\varphi'=2$ὀρθ., (ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΗΛΘ καὶ ΖΚΕ δὲν εἶναι ὀρθογώνια), πρέπει ἡ μὲν μία τῶν γωνιῶν τούτων νὰ εἶναι ὀξεῖα ἡ δὲ ἄλλη ἀμβλεῖα· ἀλλὰ ἡ ω' εἶναι ἡ παρὰ τὴν βάσιν γωνία τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΗΛΘ, ἐπομένως εἶναι ὀξεῖα· δι᾽ ὅμοιον λόγον καὶ $\varphi'<1$ ὀρθ. ἄρα καὶ $\omega'+\varphi'<2$ ὀρθ. ἐπομένως ἡ ἰσότης $\omega'+\varphi'=2$ ὀρ. εἶναι ἄτοπος, ἄρα ἄτοπος εἶναι καὶ ἡ $\omega+\varphi=2$ὀρθ. ἐκ τῆς ὁποίας προῆλθε αὕτη· ἀφ᾽ οὗ λοιπὸν αἱ γωνίαι ω καὶ φ δὲν εἶναι παραπληρωματικαὶ εἶναι κατ᾽ ἀνάγκην ἴσαι κατὰ τὴν πρότασιν II, ἄρα τὰ τρίγωνα ΡΛΗ καὶ ΡΚΖ εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ ἔχουν δύο γωνίας ἴσας· ἐκ τῆς ὁμοιότητος τούτων ἕπεται



Σχ. 38.

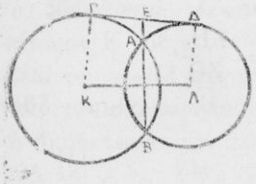
$\frac{\text{ΡΗ}}{\text{ΡΖ}}=\frac{\text{ΡΛ}}{\text{ΡΚ}}$ (3)· ἂν δὲ φέρωμεν τὰς ΛΘ καὶ ΚΕ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ΡΚΕ καὶ ΡΛΘ εἶναι ὅμοια· ἐκ τῆς ὁμοιότητος δὲ τούτων ἔχομεν $\frac{\text{ΡΕ}}{\text{ΡΘ}}=\frac{\text{ΡΚ}}{\text{ΡΛ}}$ (4)·

πολλαπλασιάζοντες τὰς (3) καὶ (4) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\frac{(\text{ΡΕ})(\text{ΡΗ})}{(\text{ΡΖ})(\text{ΡΘ})}=\frac{(\text{ΡΛ})(\text{ΡΚ})}{(\text{ΡΛ})(\text{ΡΚ})},\quad \frac{(\text{ΡΕ})(\text{ΡΗ})}{(\text{ΡΖ})(\text{ΡΘ})}=1,$$

ὅθεν
$$(\text{ΡΕ})(\text{ΡΗ})=(\text{ΡΖ})(\text{ΡΘ})$$

384. ***Ἡ κοινὴ χορδὴ δύο τεμνομένων κύκλων, προεκτεινομένη διχοτομεῖ τὰς κοινὰς ἐφαπτομένας τῶν περιφερειῶν.***



Σχ. 39.

Ἔστω ΑΒ (σχ. 39) ἡ κοινὴ χορδὴ τῶν δύο τεμνομένων κύκλων Κ καὶ Λ καὶ ΓΔ ἡ μία τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν καὶ Ε τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ΓΔ καὶ ΑΒ· θὰ δείξωμεν ὅτι ΓΕ=ΕΔ.

Ἡ ΕΓ καὶ ΕΒ εἶναι ἡ μὲν πρώτη ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Κ, ἡ δὲ δευτέρα τέμνουσα αὐτοῦ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ε, ἐπομένως ἔχομεν $(\text{ΕΑ})(\text{ΕΒ})=(\text{ΕΓ})^2$ (1)·
δι᾽ ὅμοιον λόγον ἔχομεν καὶ $(\text{ΕΑ})(\text{ΕΒ})=(\text{ΕΔ})^2$ (2)·
ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν καὶ $(\text{ΕΓ})^2=(\text{ΕΔ})^2$, ἤτοι ΕΓ=ΕΔ, ἄρα ἡ ἐφαπτομένη διχοτομεῖται εἰς τὸ Ε.

385. ***Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ὅμοιον πρὸς δοθὲν καὶ ἔχον μίαν πλευρὰν δοθεῖσαν.***

Ἔστω αβγ τὸ δοθὲν τρίγωνον καὶ ΒΓ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα· μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ καὶ πλευρὰν τὴν ΒΓ σχηματίζομεν γωνίας ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς γωνίας β καὶ γ τοῦ τριγώνου αβγ, τῶν ὁποίων αἱ ἄλλαι πλευραὶ νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΒΓ. Αἱ πλευραὶ αὐταὶ τεμνόμεναι εἰς τὸ σημεῖον Α σχηματίζουν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ αβγ, διότι ἔχει μὲ αὐτὸ δύο γωνίας ἴσας.

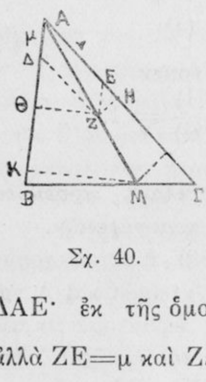
386. Νὰ διαιρεθῇ μιὰ πλευρὰ τριγώνου εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν παρακειμένων πλευρῶν του.

Διχοτομοῦμεν τὴν ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ταύτης γωνίαν, ὁπότε τὸ σημεῖον τομῆς αὐτῆς καὶ τῆς διχοτόμου διαιρεῖ τὴν πλευρὰν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν παρακειμένων πλευρῶν.

387. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν ἄλλων πλευρῶν νὰ ἔχουν λόγον δοθέντα μ : ν.

Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 40) τὸ δοθὲν τρίγωνον.

Ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν, ἔστω τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΔ=μ, ἐπὶ δὲ τῆς ΑΓ τμῆμα ΑΕ=ν καὶ φέρομεν τὰς ΔΖ καὶ ΕΖ ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ καὶ οὕτω σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔΖΕ· φέρω τὴν διαγώνιον τοῦ ΑΖ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Μ, λέγω ὅτι τὸ Μ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.



Σχ. 40.

Διότι ἂν φέρωμεν τὰς ΖΘ καὶ ΖΗ καθέτους ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΘΖ καὶ ΕΖΗ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὰς γωνίας ΘΔΖ καὶ ΖΕΗ ἴσας, ὡς ἴσας πρὸς τὴν ΔΑΕ· ἐκ τῆς ὁμοιότητος τούτων ἔχομεν $\frac{ZE}{Z\Delta}=\frac{ZH}{Z\Theta}$.

ἀλλὰ ΖΕ=μ καὶ ΖΔ=ν, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου, ὅθεν

$$\frac{ZH}{Z\Theta}=\frac{\mu}{\nu} \qquad (1)$$

Φέρομεν τὰς ἀποστάσεις ΜΛ καὶ ΜΚ τοῦ Μ ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΒ· ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΖΗ καὶ ΑΜΛ ἔχομεν $\frac{ZH}{M\Lambda}=\frac{AZ}{AM}$ (2)· ἐπίσης ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΘΖ καὶ ΑΚΜ ἔχομεν $\frac{Z\Theta}{MK}=\frac{AZ}{AM}$ (3)· ἐκ τῶν (2) καὶ (3) ἔχομεν

$$\frac{ZH}{M\Lambda}=\frac{Z\Theta}{MK} \quad \text{ἢ} \quad \frac{ZH}{Z\Theta}=\frac{M\Lambda}{MK} \qquad (4)$$

ἕνεκα ὅμως τῆς (1) ἡ (4) γίνεται $\frac{M\Lambda}{MK}=\frac{\mu}{\nu}$.

388. Νὰ ἀχθῇ διὰ τῆς κορυφῆς τῆς ἀμβλείας γωνίας (ἀμβλυγωνίου τριγώνου) πρὸς τὴν ἔναντί της πλευράν, μέση ἀνάλογος πρὸς τὰ μέρη εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ πλευρὰ αὕτη.

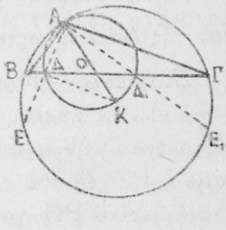
Ἔστω τὸ ἀμβλυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 41) καὶ ΑΔ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα καὶ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι

$$(\mathrm{A}\Delta)^2=(\mathrm{B}\Delta)(\Delta\Gamma) \qquad (1)$$

Ἂν περιγραφῇ περὶ τὸ τρίγωνον τοῦτο κύκλος καὶ προεκταθῇ ἡ ΑΔ μέχρις ὅτου κόψῃ τὴν περιφέρειαν του εἰς τὸ Ε, ἕνεκα τῶν τεμνομένων χορδῶν ΑΕ καὶ ΒΓ ἔχομεν

$$(\mathrm{A}\Delta)(\Delta\mathrm{E})=(\mathrm{B}\Delta)(\Delta\Gamma) \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $(\mathrm{A}\Delta)^2=(\mathrm{A}\Delta)(\Delta\mathrm{E})$, ἤτοι ΑΔ=ΔΕ· ὥστε τὸ σημεῖον Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΕ τοῦ κύκλου Κ τῆς ἀγομένης ἐκ σημείου Α τῆς περιφερείας του. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ΚΔ, αὕτη θὰ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ΕΑ, διότι διέρχεται διὰ τοῦ μέσου αὐτῆς· ἡ γωνία ΑΔΚ εἶναι λοιπὸν ὀρθή, ἑπομένως τὸ Δ κεῖται ἐπὶ περιφερείας ἐχούσης διάμετρον τὴν ἀπόστασιν τοῦ Α ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ τοῦ δοθέντος κύκλου, ἤτοι τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ (ἄσκησις 278). Ἡ ζητουμένη λοιπὸν εὐθεῖα περατοῦται εἰς τὴν τομὴν τῆς περιφερείας ταύτης καὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας.



Σχ. 41.

Σύνθεσις.—Περιγράφομεν περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον· τὸ κέντρον Κ τοῦ κύκλου κεῖται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, διότι ἡ ἀμβλεία του γωνία ἐγγράφεται εἰς τμῆμα κύκλου μικρότερον ἡμικυκλίου· φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΑΚ καὶ μὲ διάμετρον αὐτὴν γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ_1. Ἂν φέρω τὰς ΑΔ καὶ $\mathrm{A}\Delta_1$, λέγω ὅτι καὶ αἱ δύο αὐταὶ εὐθεῖαι λύουν τὸ πρόβλημα.

Ἀπόδειξις.—Προεκτείνομεν τὴν ΑΔ ἕως ὅτου γίνῃ χορδὴ ΑΕ τοῦ κύκλου Κ· ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ ΑΕ καὶ ΒΓ τέμνονται ἐντὸς κύκλου ἔχομεν $(\mathrm{A}\Delta)(\Delta\mathrm{E})=(\mathrm{B}\Delta)(\Delta\Gamma)$· ἀλλὰ τὸ σημεῖον Δ ὡς κείμενον ἐπὶ τῆς περιφερείας ΑΔΚ τῆς ἐχούσης διάμετρον τὴν ΑΚ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΕ (ἄσκησις 278), ἤτοι ΑΔ=ΔΕ, ἄρα ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $(\mathrm{A}\Delta)(\mathrm{A}\Delta)=(\mathrm{B}\Delta)(\Delta\Gamma)$ ἢ $(\mathrm{A}\Delta)^2=(\mathrm{B}\Delta)(\Delta\Gamma)$· δι' ὅμοιον λόγον καὶ $(\mathrm{A}\Delta_1)^2=(\mathrm{B}\Delta_1)\Delta_1\Gamma)$.

389. Διὰ σημείου P κειμένου ἐντὸς κύκλου νὰ ἀχθῇ χορδὴ AB, ὥστε ὁ λόγος AP : BP νὰ εἶναι ἴσος μέ μ : ν.

Λύσις α΄. *Ἀνάλυσις.* Ἔστω AB (σχ. 42 α΄) ἡ ζητουμένη χορδὴ τότε θὰ ἔχωμεν $\frac{AP}{BP}=\frac{\mu}{\nu}$ (1)· ἐὰν ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΓΡΔ ἡ διερχομένη διὰ τοῦ P, ἕνεκα τῶν τεμνομένων χορδῶν BA καὶ ΓΔ, θὰ ἔχωμεν

$$(AP)(BP)=(\Gamma P)(\Delta P) \quad (2)\cdot$$

πολλαπλασιάζοντες τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$(AP)^2=\frac{\mu}{\nu}(\Gamma P)(\Delta P) \quad (3)\cdot$$

ἐὰν φέρωμεν τὴν PE κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον ΓΔ, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΕΔ θὰ ἔχωμεν $(PE)^2=(\Gamma P)(\Delta P)$, ὁπότε ἡ (3) γίνεται $\frac{(AP)^2}{(PE)^2}=\frac{\mu}{\nu}$.
ἐντεῦθεν συνάγομεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ P ἀπὸ τῆς περιφερείας ἰσοῦται μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐντελῶς ὡρισμένης εὐθείας PE δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$.

Σύνθεσις. — Φέρομεν τὴν διάμετρον ΔΓ τὴν διερχομένην διὰ τοῦ P τοῦ δοθέντος κύκλου K καὶ τὴν PE κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον αὐτὴν καὶ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον μεταξὺ τοῦ ν, μ καὶ PE, ἡ ὁποία ἔστω ἡ PZ· ἐκ τοῦ Z φέρομεν ZH κάθετον ἐπὶ τὴν PE καὶ μὲ κέντρον P καὶ ἀκτῖνα PH γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν K εἰς τὰ σημεῖα A καὶ A΄· λέγω ὅτι ἂν ἀχθοῦν αἱ χορδαὶ APA καὶ A΄PB΄ αὗται λύουν τὸ πρόβλημα.

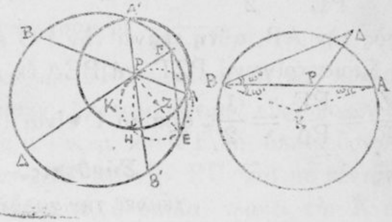
Ἀπόδειξις. — Διότι ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου PHE ἔχομεν $(PH)^2=(PZ)(PE)$ (4)· ἀλλ᾽ ἐκ κατασκευῆς ἔχομεν $\frac{\nu}{\mu}=\frac{PE}{PZ}$, ὅθεν $PZ=\frac{\mu}{\nu}(PE)$, ἑπομένως ἡ (4) γίνεται $(PH)^2=\frac{\mu}{\nu}(PE)^2$ (5)· ἀλλὰ PH=AP, ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΕΔ ἔχομεν $(PE)^2=(P\Gamma)(P\Delta)$· ἑπομένως ἡ (5) γράφεται $(AP)^2=\frac{\mu}{\nu}(P\Gamma)(P\Delta)$ (6)· ἀλλὰ $(P\Gamma)(P\Delta)=(AP)(BP)$, ὡς χορδαὶ τοῦ κύκλου K τεμνόμεναι, ἑπομένως ἡ (6) γράφεται

$$(AP)^2=\frac{\mu}{\nu}(AP)(BP) \quad \text{ἢ} \quad AP=\frac{\mu}{\nu}(BP)$$

ἢ ἀκόμη $\frac{AP}{BP}=\frac{\mu}{\nu}$· ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ A΄B΄ λύει τὸ πρόβλημα.

Λύσις β'.—*Ἀνάλυσις.*—Ἔστω ΑΡΒ (σχ.42β') ἡ ζητουμένη χορδὴ καὶ τοιαύτη ὥστε, $\frac{AP}{PB}=\frac{\mu}{\nu}$ (1)· ἂς ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΚΑ=ρ καὶ ἡ ΚΡ πρὸς δὲ καὶ ἡ ΒΔ παράλληλος πρὸς τὴν ΚΑ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΚΡ εἰς τὸ Δ· τὰ τρίγωνα ΚΡΑ καὶ ΒΡΔ εἶναι ὅμοια· ἐκ τούτων δὲ ἔχομεν $\frac{AP}{PB}=\frac{\rho}{B\Delta}$

ἢ ἕνεκα τῆς (1) $\frac{\mu}{\nu}=\frac{\rho}{B\Delta}$



Σχ. 42.

καὶ $\frac{AP}{PB}=\frac{KP}{P\Delta}$ ἢ ἕνεκα τῆς (1)

$\frac{\mu}{\nu}=\frac{KP}{P\Delta}$, ἤτοι αἱ εὐθεῖαι ΒΔ καὶ ΡΔ εἶναι γνωσταί, ἡ μὲν πρώτη ὡς τετάρτη ἀνάλογος τῶν μ, ν, ρ, ἡ δὲ δευτέρα ὡς τετάρτη ἀνάλογος τῶν μ, ν, ΚΡ.

Σύνθεσις.—Εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον μεταξὺ τῶν μ, ν, ΚΡ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΚΡ λαμβάνομεν τμῆμα ΡΔ ἴσον πρὸς τὴν εὑρεθεῖσαν τετάρτην ἀνάλογον· ὡσαύτως εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον μεταξὺ τῶν μ, ν, ρ καὶ μὲ κέντρον Δ καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν τετάρτην ταύτην ἀνάλογον γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Κ εἰς τὸ σημεῖον Β· φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΡΑ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἀπόδειξις.—Ἂν ἀχθοῦν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ καὶ ΚΒ, ἐκ κατασκευῆς ἔχομεν

$$\frac{KP}{P\Delta}=\frac{\mu}{\nu} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\rho}{B\Delta}=\frac{\mu}{\nu}.$$

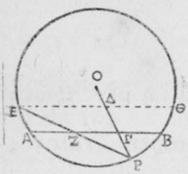
ἀλλὰ $\rho=KB$ ἄρα $\frac{KB}{B\Delta}=\frac{KP}{P\Delta}$,

ἤτοι τὸ σημεῖον Ρ διαιρεῖ τὴν πλευρὰν ΚΔ τοῦ τριγώνου ΚΒΔ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν παρακειμένων πλευρῶν αὐτοῦ, ἄρα ἡ ΒΡ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Β, ἑπομένως γων ω''=γων ω'· ἕνεκα ὅμως τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΚΑ ἔχομεν γων ω'=γων ω, ἄρα καὶ γων ω''=γων ω· ἑπομένως αἱ ΒΔ καὶ ΚΑ εἶναι παράλληλοι, διότι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίνης σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας, ὅθεν τὰ τρίγωνα ΒΡΔ καὶ ΚΡΑ εἶναι ὅμοια· ἐκ τῆς ὁμοιότητος τούτων ἔχομεν

$$\frac{KP}{P\Delta}=\frac{AP}{BP}, \quad \text{ἀλλὰ} \quad \frac{KP}{P\Delta}=\frac{\mu}{\nu}, \quad \text{ἄρα καὶ} \quad \frac{AP}{BP}=\frac{\mu}{\nu}.$$

390. Νὰ ἀχθῇ διὰ σημείου Ρ, κειμένου ἐπὶ τόξου δοθείσης χορδῆς ΑΒ, χορδή, ἥτις νὰ διχοτομῆται ὑπὸ τῆς ΑΒ.

Ἀνάλυσις.—Ἔστω ΡΕ (σχ. 44) ἡ ζητουμένη χορδὴ καὶ τοιαύτη ὥστε $\frac{\text{ΡΖ}}{\text{ΡΕ}}=\frac{1}{2}$· ἐὰν ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΡΟ καὶ ἐκ τοῦ Ε παράλληλος ΕΔ, πρὸς τὴν ΑΒ, αὕτη τέμνει τὴν ΡΟ εἰς τὸ Δ· ἀλλὰ τότε σχηματίζονται τὰ ὅμοια τρίγωνα ΡΖΓ καὶ ΡΕΔ, ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ὁποίων ἔχομεν $\frac{\text{ΡΖ}}{\text{ΡΕ}}=\frac{\text{ΡΓ}}{\text{ΡΔ}}=\frac{1}{2}$· ἄρα τὸ Γ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΡΔ.



Σχ. 44.

Σύνθεσις.—Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΡ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν χορδὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ· ἐπὶ τῆς ΟΡ λαμβάνομεν τμῆμα ΓΔ=ΡΓ καὶ ἐκ τοῦ Δ φέρομεν τὴν ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ· κατόπιν φέρομεν τὴν χορδὴν ΕΡ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἀπόδειξις.—Διότι ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΡΖΓ καὶ ΡΕΔ ἔχομεν

$$\frac{\text{ΡΓ}}{\text{ΡΔ}}=\frac{\text{ΡΖ}}{\text{ΡΕ}}$$

ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς εἶναι $\frac{\text{ΡΓ}}{\text{ΡΔ}}=\frac{1}{2}$

ἄρα καὶ $\frac{\text{ΡΖ}}{\text{ΡΕ}}=\frac{1}{2}$, ἑπομένως τὸ Ζ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΡΕ.

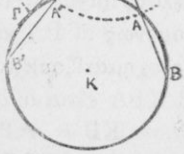
Σημείωσις.—Τὸ πρόβλημα ἐλύετο ἀμέσως, ἐὰν μὲ διάμετρον τὴν ΟΡ ἐγράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία θὰ ἔτεμνε τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ· ἐὰν φέρωμεν τὴν ΡΖ καὶ τὴν προεκτείνομεν, ἕως ὅτου γίνῃ χορδὴ ΡΕ, αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη σύμφωνα μὲ τὴν (ἄσκησιν 278).

391. Ἀπὸ σημείου Ρ, ἐκτὸς κύκλου κειμένου, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΡΑΒ τοῦ κύκλου, ὥστε ὁ λόγος ΡΑ : ΑΒ νὰ ἰσοῦται μὲ δοθέντα λόγον μ : ν.

Ἀνάλυσις.—Ἐὰν ΡΑΒ (σχ. 45) εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα, τότε θὰ εἶναι $\frac{\text{ΡΑ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{\mu}{\nu}$ ἢ $\frac{\text{ΡΑ}}{\text{ΡΑ}+\text{ΑΒ}}=\frac{\mu}{\mu+\nu}$

ἢ $$\frac{\text{ΡΑ}}{\text{ΡΒ}}=\frac{\mu}{\mu+\nu} \qquad (1)$$

Ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΡΓ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Κ ἐκ τοῦ Ρ θὰ ἔχωμεν $(\text{ΡΓ})^2=(\text{ΡΑ})(\text{ΡΒ})$· ἀλλ' ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $\text{ΡΒ}=\text{ΡΑ}.\frac{\mu+\nu}{\mu}$, ὅθεν ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται



Σχ. 45.

$(\mathrm{Р\Gamma})^2 = \frac{\mu+\nu}{\mu}.(\mathrm{PA})^2$ καὶ $\frac{\mathrm{PA}^2}{\mathrm{P\Gamma}^2} = \frac{\mu}{\mu+\nu}$, ἤτοι ἡ ἀπόστασις τοῦ Ρ ἀπὸ τῆς τομῆς τῆς περιφερείας καὶ τῆς τεμνούσης ἰσοῦται πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐκ τοῦ Ρ ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου ἔχει λόγον ἴσον μὲ $\frac{\mu}{\mu+\nu}$.

Σύνθεσις.—Ἐκ τοῦ Ρ φέρομεν τὴν ΡΓ ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου Κ καὶ μὲ διάμετρον ταύτην γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν· εὑρίσκομεν δὲ τὴν τετάρτην ἀνάλογον μεταξὺ τῆς $\mu+\nu$, μ καὶ ΡΓ, ἡ ὁποία ἔστω ἡ ΡΔ· ἐκ τοῦ Δ ὑψοῦμεν τὴν κάθετον ΔΕ ἐπὶ τὴν ΡΓ καὶ μὲ κέντρον Ρ καὶ ἀκτῖνα ΡΕ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Κ εἰς τὰ σημεῖα Α′ καὶ Α· ἐὰν φέρωμεν τὴν τέμνουσαν ΡΑΒ λέγω, ὅτι εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἀπόδειξις. Διότι ἐκ κατασκευῆς εἶναι $\frac{\mu+\nu}{\mu} = \frac{\mathrm{P\Gamma}}{\mathrm{P\Delta}}$ (1)· ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου ὅμως τριγώνου ΡΕΓ ἔχομεν $(\mathrm{PE})^2 = (\mathrm{P\Delta})(\mathrm{P\Gamma})$ (2)· ἐκ τῆς (1) ὅμως λαμβάνομεν :

$$\mathrm{P\Delta} = \frac{\mu}{\mu+\nu}(\mathrm{P\Gamma}),$$ ὁπότε ἡ (2) γίνεται

$$(\mathrm{PE})^2 = \frac{\mu}{\mu+\nu}(\mathrm{P\Gamma})^2 \cdot$$

ἀλλὰ $(\mathrm{P\Gamma})^2 = (\mathrm{PA})(\mathrm{PB})$

ὅθεν $(\mathrm{PE})^2 = \frac{\mu}{\mu+\nu}(\mathrm{PA})(\mathrm{PB})$,

ἀλλὰ $\mathrm{PE} = \mathrm{PA}$ ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἑπομένως

$$(\mathrm{PA})^2 = \frac{\mu}{\mu+\nu}(\mathrm{PA})(\mathrm{PB})$$

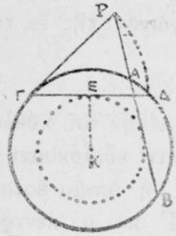
ἢ $\mathrm{PA} = \frac{\mu}{\mu+\nu}\mathrm{PB}$ καὶ $\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}} = \frac{\mu}{\mu+\nu}$.

ἐκ ταύτης δὲ ἔχομεν

$$\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}-\mathrm{PA}} = \frac{\mu}{\mu+\nu-\mu} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mu}{\nu}.$$

392. Ἀπὸ σημεῖον κείμενον ἐκτὸς κύκλου νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΡΑΒ τοῦ κύκλου, ὥστε νὰ εἶναι $(AB)^2=(PA).(PB)$.

Ἀνάλυσις.—Ἔστω ΡΑΒ (σχ. 46) ἡ ζητουμένη τέμνουσα, καὶ τοιαύτη, ὥστε $(AB)^2=(PA)(PB)$.



Σχ. 46.

Ἂν ἀχθῇ ἡ ἐκ τοῦ Ρ ἐφαπτομένη ΡΓ τοῦ κύκλου Κ ἔχομεν $(P\Gamma)^2=(PA)(PB)$, ἤτοι $(P\Gamma)^2=(AB)^2$ ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι

$$(PA)\,.\,(PB)=(AB)^2$$

ἢ $P\Gamma=AB$· ἐντεῦθεν παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐντὸς τοῦ κύκλου μέρος τῆς τεμνούσης πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἐκ τοῦ Ρ ἐφαπτομένην αὐτοῦ.

Σύνθεσις.—Λαμβάνομεν τυχοῦσαν χορδὴν τοῦ κύκλου Κ τὴν ΓΔ ἴσην πρὸς τὴν ἐφαπτομένην αὐτοῦ ΡΓ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὸ ἀπόστημα ΚΕ αὐτῆς γράφομεν περιφέρειαν· ἐκ τοῦ Ρ φέρομεν τὴν ΡΑΒ ἐφαπτομένην τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας Κ· λέγω ὅτι αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα.

Ἀπόδειξις. Αἱ χορδαὶ ΓΔ καὶ ΑΒ εἶναι ἴσαι, ὡς χορδαὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ κύκλου Κ, τῶν ὁποίων τὰ ἀποστήματα εἶναι ἴσα, ὡς ἀκτῖνες τοῦ ἐσωτερικοῦ κύκλου Κ· ἀλλ᾽ ἐκ κατασκευῆς εἶναι

$$\Gamma\Delta=P\Gamma, \quad \text{ἄρα θὰ εἶναι καὶ} \quad AB=P\Gamma\cdot$$

ἀλλὰ $(P\Gamma)^2=(PA)(PB)$ ὅθεν καὶ $(AB)^2=(PA)(PB)$.

393. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Ρ ἐπὶ τοῦ τόξου δοθείσης χορδῆς ΑΒ, ὥστε νὰ εἶναι ΡΑ : ΡΒ = μ : ν.

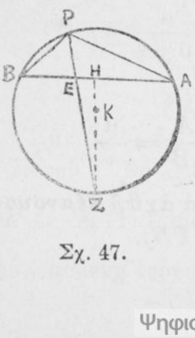
Ἀνάλυσις. Ἔστω Ρ (σχ. 47) τὸ ζητούμενον σημεῖον· ἂν ἀχθοῦν αἱ χορδαὶ ΡΑ καὶ ΡΒ θὰ ἔχομεν ἐξ ὑποθέσεως

$$\frac{PA}{PB}=\frac{\mu}{\nu}.$$

Ἐὰν φέρωμεν τὴν διχοτόμον ΡΕ τῆς γωνίας ΑΡΒ, τότε θὰ ἔχωμεν $\frac{PA}{PB}=\frac{EA}{EB}$ καὶ ἐπειδὴ $\frac{PA}{PB}=\frac{\mu}{\nu}$, ἕπεται ὅτι καὶ $\frac{EA}{EB}=\frac{\mu}{\nu}$· ἐὰν προεκταθῇ ἡ ΡΕ τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ζ, ἀλλὰ τότε

$$\text{τοξ}\ AZ=\text{τοξ}\ ZB$$

διότι ἐπὶ τούτων βαίνουν αἱ ἴσαι ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ΑΡΖ καὶ ΖΡΒ· ἂν λοιπὸν ἐκ τοῦ μέσου Η τῆς ΑΒ ὑψώσωμεν κάθετον, αὐτη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ μέσου Ζ τοῦ τόξου ΑΖΒ τοῦ ἀντιστοίχου ὑπὸ τῆς χορδῆς ταύτης. Οὕτω λοιπὸν τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ εἶναι ὡρισμένα, τὸ μὲν Ε ὡς διαιροῦν τὴν ΑΒ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν μ καὶ ν, τὸ δὲ Ζ ὡς τομὴ τῆς περιφερείας Κ καὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ.



Σχ. 47.

Σύνθεσις.—Διαιροῦμεν τὴν χορδὴν ΑΒ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν μ καὶ ν, καὶ ἔστωσαν ταῦτα τὰ ΑΕ καὶ ΒΕ καὶ ἐκ τοῦ μέσου Η αὐτῆς ὑψοῦμεν τὴν ΗΖ κάθετον ἐπὶ ταύτην· φέρομεν τὴν ΖΕ καὶ προεκτείνομεν, ἕως ὅτου κόψῃ τὸ τόξον ΑΒ εἰς τὸ Ρ· τοῦτο λέγω ὅτι εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Ἀπόδειξις.—Ἐὰν ἀχθοῦν αἱ ΑΡ καὶ ΒΡ τότε γων ΑΡΖ=ΖΡΒ, διότι τὰ τόξα ἐπὶ τῶν ὁποίων βαίνουν αἱ ἐγγεγραμμέναι αὐταὶ γωνίαι εἶναι ἴσα, καθόσον ἡ ΗΖ, ἐπειδὴ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον Η τῆς χορδῆς ΑΒ, διαιρεῖ τὸ τόξον ΑΖΒ εἰς δύο μέρη ΑΖ καὶ ΒΖ ἴσα· ἑπομένως ἡ ΡΖ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΡΒ· αὕτη ὅμως ἐκ κατασκευῆς, διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ε τῆς ΑΒ· ἕνεκα λοιπὸν τῆς διχοτόμου ΡΕ τῆς ἐσωτερικῆς γωνίας Ρ τοῦ τριγώνου ΑΡΒ ἔχομεν

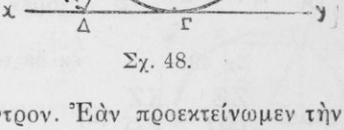
$$\frac{ΕΑ}{ΕΒ}=\frac{ΑΡ}{ΒΡ}\cdot$$

Ἀλλ᾽ ἐκ κατασκευῆς εἶναι $\frac{ΕΑ}{ΕΒ}=\frac{μ}{ν}$, ἄρα καὶ $\frac{ΑΡ}{ΒΡ}=\frac{μ}{ν}$.

394. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο σημείων καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας.

Ἔστωσαν Α καὶ Β (σχ.48) τὰ σημεῖα διὰ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ διέλθῃ ἡ ζητουμένη περιφέρεια καὶ xy ἡ εὐθεία εἰς τὴν ὁποίαν θὰ ἐφάπτεται

Ἀνάλυσις.—Ἔστω Κ ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς εὐθείας xy.



Σχ. 48.

Τὸ κέντρον Κ ἐπειδὴ ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ· θὰ κεῖται δὲ καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου πρὸς τὴν xy, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ τῆς ἁφῆς. Ἡ τομὴ αὐτῶν τῶν δύο τόπων εἶναι τὸ ζητούμενον κέντρον. Ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν ΒΑ μέχρις ὅτου συναντήσει τὴν xy εἰς τὸ Δ θὰ ἔχωμεν

$$ΔΓ^2=ΔΒ.ΔΑ$$

(ἐπειδὴ ἡ ἐφαπτομένη ΔΓ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὅλης τεμνούσης ΔΒ ἐπὶ τὸ ἐκτὸς αὐτῆς μέρος ΔΑ).

Τὸ μῆκος ΔΓ εἶναι λοιπὸν μέσον ἀνάλογον τῶν δύο γνωστῶν εὐθειῶν ΔΒ καὶ ΔΓ καὶ ἑπομένως δύναται νὰ προσδιορισθῇ. Προσδιορισθέντος αὐτοῦ, προσδιορίζομεν καὶ τὸ σημεῖον Γ τῆς ἁφῆς τῆς περιφερείας καὶ τῆς εὐθείας xy.

Κατασκευή.—Προεκείνομεν τὴν ΒΑ μέχρι ὅτου συναντήσῃ τὴν εὐθεῖαν xy. Κατασκευάζομεν τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν εὐθειῶν ΔΒ καὶ ΔΑ· πρὸς ποῦτο μὲ διάμετρον τὴν ΒΔ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ Α φέρομεν κάθετον ΑΖ πρὸς τὴν ΔΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ Ζ· ἡ ΔΖ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΔΒ καὶ ΔΑ, διότι ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΖΒ ἔχομεν $ΔΖ^2 = ΔΒ.ΔΑ$.

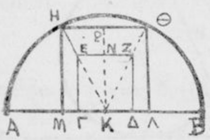
Ἐπὶ τῆς xy λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ Δ μῆκος ΔΓ=ΔΖ καὶ φέρομεν ἐκ τοῦ Δ κάθετον ἐπὶ τὴν xy, ἡ ὁποία θὰ συναντήσῃ τὴν κάθετον ΗΚ εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ, εἰς τὸ Κ. Ἂν μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΓ γράψωμεν περιφέρειαν, αὐτὴ θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη.

Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, διότι δυνάμεθα νὰ λάβωμεν καὶ ΔΓ′=ΔΖ πρὸς τὰ ἀριστερά, ὁπότε εὑρίσκομεν καὶ ἓν δεύτερον σημεῖον Γ′ ἐπαφῆς καὶ ἑπομένως ἕνα δεύτερον κύκλον Κ′.

Ἐὰν ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν xy τότε τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ «***νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο σημείων καὶ ἐφαπτομένη μιᾶς εὐθείας, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ὁποίαν ὁρίζουν τὰ σημεῖα ταῦτα***».

395. Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς δοθὲν ἡμικύκλιον.

Ἀνάλυσις.—Ἔστω ΜΛΘΗ (σχ. 49) τὸ ζητούμενον τετράγωνον. Φέρομεν τὴν ΚΘ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ζ· ἐκ τοῦ Ζ φέρομεν τὴν ΕΖ παράλληλον πρὸς τὴν διάμετρον ΑΒ τοῦ ἡμικυκλίου, ἡ ὁποία κόπτει τὴν ΚΗ εἰς τὸ Ε. Μὲ πλευρὰν τὴν ΕΖ κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον ΔΖΕΓ.



Σχ. 49.

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΖΔ καὶ ΚΘΛ ἔχομεν $\frac{ΔΖ}{ΛΘ} = \frac{ΚΖ}{ΚΘ}$ (1).

ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΕΖ καὶ ΚΘΗ ἔχομεν $\frac{ΖΕ}{ΘΗ} = \frac{ΚΖ}{ΚΘ}$ (2)·

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\frac{ΔΖ}{ΛΘ} = \frac{ΖΕ}{ΘΗ}$·

ἀλλὰ ΛΘ=ΘΗ, ὡς πλευραὶ τετραγώνου, ἑπομένως καὶ ΔΖ=ΖΕ ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΔΖΕΓ ἔχει δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας, ἑπομένως εἶναι τετράγωνον· ἂν δὲ ἀχθῇ ἡ ΚΡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΗΘ, τότε ΘΡ=ΗΡ, ὁπότε καὶ ΖΝ=ΝΕ, ἄρα καὶ ΚΔ=ΚΓ, δηλαδὴ τὸ Κ εἶναι μέσον τῆς ΓΔ.

Σύνθεσις.—Ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου Κ, λαμβάνομεν τὰ τμήματα

ΚΔ=ΚΓ αὐθαιρέτως καὶ μὲ πλευρὰν τὴν ΓΔ σχηματίζομεν τὸ τετράγωνον ΓΔΖΕ· φέρομεν τὴν ΚΖ καὶ προεκτείνομεν αὐτὴν ἕως ὅτου κόψῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Θ· ἐκ τοῦ Θ φέρομεν τὴν ΘΛ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, τὴν ΘΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΗΜ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, οὕτω δὲ σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον ΛΘΗΜ, τὸ ὁποῖον λέγω ὅτι εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον.

Ἀπόδειξις. — Διότι ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΖΔ καὶ ΚΘΛ ἔχομεν

$$\frac{\Delta Z}{\Theta\Lambda}=\frac{KZ}{K\Theta} \qquad (3)$$

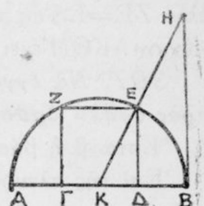
Ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΚΡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ, αὕτη εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον της χορδὴν ΘΗ καὶ τὴν διαιρεῖ εἰς ἴσα μέρη· ὡσαύτως ὡς ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΕΚΖ διαιρεῖ καὶ τὴν ΕΖ εἰς ἴσα μέρη· ἀλλ' εἶναι

$$\frac{ZN}{\Theta P}=\frac{KZ}{K\Theta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{2ZN}{2\Theta P}=\frac{KZ}{K\Theta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{ZE}{\Theta H}=\frac{KZ}{K\Theta} \qquad (4)$$

ἐκ τῶν (3) καὶ (4) ἔχομεν $\frac{\Delta Z}{\Theta\Lambda}=\frac{ZE}{\Theta H}$.

Ἀλλὰ ΔΖ = ΖΕ ἄρα καὶ ΘΛ=ΘΗ· ἑπομένως τὸ ΛΘΗΜ εἶναι τετράγωνον.

Λύσις β'.) Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ ζητούμενον τετράγωνον εἶναι τὸ ΓΔΕΖ, (σχ. 50) ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ἡμικύκλιον Κ· ἐπειδὴ αἱ ΓΖ καὶ ΔΕ εἶναι ἴσαι ἐξ ὑποθέσεως, ἕπεται ὅτι τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρον Κ, ὡς ἀποστάσεις ἴσων χορδῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου κύκλου· ἔχομεν λοιπὸν $K\Delta=\frac{ZE}{2}=\frac{E\Delta}{2}$.



Σχ. 50.

Προεκτείνομεν τὴν ΚΕ μέχρις ὅτου συναντήσῃ εἰς τὸ Η τὴν κάθετον ΒΗ πρὸς τὴν ΑΒ, τὴν ἀγομένην ἐκ τοῦ Β. Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΚΔΕ καὶ ΚΒΗ ἔχομεν

$$\frac{BH}{KB}=\frac{\Delta E}{K\Delta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{BH}{KB}=\frac{\Delta E}{\Delta E/2}=2$$

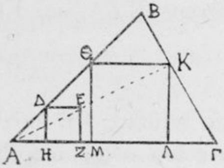
ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $BH=2(KB)=$ διάμετρον.

Κατασκευή.—Ἐκ τοῦ Β φέρομεν κάθετον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ λαμβάνομεν ΒΗ=ΑΒ. Φέρομεν τὴν ΚΗ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ε.

Ἐὰν ἐκ τοῦ Ε φέρωμεν τὴν ΕΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, τὴν ΕΔ κάθετον πρὸ τὴν ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ Ζ τὴν ΖΓ παράλληλον πρὸς τὴν ΕΔ, τὸ σχηματιζόμενον τετράγωνον ΕΖΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον.

399. ***Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς δοθὲν τρίγωνον.***

Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ (σχ. 51) τοῦ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνω τυχὸν σημεῖον Δ καὶ φέρω τὴν ΔΗ κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ· μὲ πλευρὰν τὴν ΔΗ σχηματίζω τὸ τετράγωνον ΔΗΖΕ καὶ φέρω τὴν ΑΕ, ἥτις προεκτεινομένη τέμνει τὴν τρίτην πλευρὰν ΒΓ τοῦ τριγώνου εἰς τὸ σημεῖον Κ· ἐκ Κ φέρω τὴν τοῦ ΚΛ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ σχηματίζω τῆς ΚΛ τὸ ὀρθογώνιον ΚΛΜΘ· λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον.



Σχ. 51.

Διότι ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΕΖ καὶ ΑΚΛ ἔχομεν

$$\frac{ΑΕ}{ΑΚ}=\frac{ΖΕ}{ΛΚ} \qquad (1)$$

ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΕΔ καὶ ΑΚΘ λαμβάνομεν

$$\frac{ΑΕ}{ΑΚ}=\frac{ΕΔ}{ΚΘ} \qquad (2)$$

ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν $\dfrac{ΖΕ}{ΛΚ}=\dfrac{ΕΔ}{ΚΘ}$.

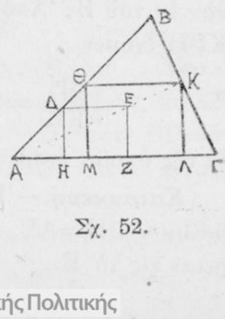
ἀλλὰ ΖΕ=ΕΔ ὡς πλευραὶ τετραγώνου, ἄρα καὶ ΛΚ=ΚΘ, ἤτοι τὸ ὀρθογώνιον ΛΚΘΜ ἔχει δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας, ἄρα εἶναι τετράγωνον.

397. ***Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τρίγωνον, ὀρθογώνιον ὅμοιον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον.***

Ἔστω β ἡ βάσις καὶ υ τὸ ὕψος τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου.

Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν αὐθαίρετον σημεῖον Δ καὶ φέρομεν τὴν ΔΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν ὡς ὕψος ὀρθογωνίου ὁμοίου πρὸς τὸ δοθέν· ἵνα εὕρωμεν τὴν βάσιν τούτου ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἵνα τὰ ὀρθογώνια εἶναι ὅμοια πρέπει αἱ διαστάσεις των νὰ εἶναι ἀνάλογοι, ἤτοι ὅτι πρέπει νὰ ἔχωμεν

$\dfrac{υ}{β}=\dfrac{ΔΗ}{β'}$, ἤτοι ἡ ζητουμένη βάσις εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν υ, β, ΔΗ.



Σχ. 52.

Ἐκ τοῦ σημείου λοιπὸν Δ φέρομεν τὴν ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ καὶ ἴσην πρὸς τὴν τετάρτην ἀνάλογον τῶν υ,β, ΔΗ, καὶ κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον ΔΗΖΕ τῶν ΓΗ καὶ ΔΕ· φέρομεν τὴν ΑΕ καὶ προεκτείνομεν αὐτήν, ἕως ὅτου κόψῃ τὴν ΒΓ εἴς τι σημεῖον Κ· ἐκ τοῦ Κ φέρω τὴν ΚΘ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ καὶ ἐκ τῶν Κ καὶ Θ τὰς ΚΛ καὶ ΘΜ καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΓ, οὕτω κατασκευάζεται τὸ ὀρθογώνιον ΘΚΛΜ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Διότι ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΕΖ καὶ ΑΚΛ ἔχομεν

$$\frac{ΕΖ}{ΚΛ}=\frac{ΑΕ}{ΑΚ} \qquad (1)$$

ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΕΔ καὶ ΑΚΘ ἔχομεν

$$\frac{ΔΕ}{ΚΘ}=\frac{ΑΕ}{ΑΚ} \qquad (2)$$

ἄρα $\frac{ΕΖ}{ΚΛ}=\frac{ΔΕ}{ΚΘ}$ ἢ $\frac{ΚΘ}{ΚΛ}=\frac{ΔΕ}{ΕΖ}$ ἢ $\frac{ΚΘ}{ΚΛ}=\frac{ΔΕ}{ΔΗ}$,

ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς ἔχομεν $\frac{υ}{β}=\frac{ΔΗ}{ΔΕ}$ ἄρα $\frac{ΔΕ}{ΔΗ}=\frac{β}{υ}$

ἐπομένως καὶ $\frac{ΚΘ}{ΚΛ}=\frac{β}{υ}$,

ἤτοι αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου ΘΚΛΜ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς διαστάσεις τοῦ δοθέντος, ἄρα τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον.

398. Κατασκευάσατε τὰς εὐθείας

$$x=\frac{2\alpha\beta\gamma}{\varepsilon\delta}, \qquad x=\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}, \qquad x=\frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2}$$

α΄) Ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται $x=\frac{2\alpha\beta}{\varepsilon}\cdot\frac{\gamma}{\delta}$ (1)

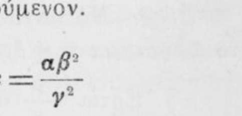
ἀλλὰ $\frac{2\alpha\beta}{\varepsilon}$ ἐκφράζει τὴν τετάρτην ἀνάλογον μεταξὺ τῶν γραμμῶν ε, 2α καὶ β· καὶ ἔστω, ὅτι αὕτη κατεσκευάσθη καὶ εἶναι ἡ y.

Ἡ (1) γράφεται τότε

$$x=y.\frac{\gamma}{\delta} \quad ἢ \quad \frac{\delta}{y}=\frac{\gamma}{x};$$

ἡ ὁποία ἐκφράζει πάλιν τὴν τετάρτην ἀνάλογον τῶν τριῶν γραμμῶν δ, y καὶ γ.

β΄) $x=\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}$. Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν διαδοχικὰ τμήματα ΒΓ καὶ ΓΔ (σχ. 53) ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς β καὶ γ καὶ μὲ διάμετρον τὴν ΒΔ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν· ἐκ δὲ τοῦ Γ φέρομεν τὴν κάθετον ΓΕ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΒΔ, ὁπότε



Σχ. 53.

$$(ΓΕ)^2=(ΒΓ)(ΓΔ)=β.γ$$

ὅθεν ἡ δοθεῖσα σχέσις γίνεται $x=\frac{\alpha^2}{(\Gamma E)^2}$.

Ἐπὶ τῆς ΓΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΓΑ=α καὶ φέρομεν τὴν ΕΑ καὶ ἐπὶ ταύτην τὴν κάθετον ΓΖ, τότε $\frac{A\Gamma^2}{\Gamma E^2}=\frac{AZ}{ZE}$ ἢ $\frac{\alpha^2}{\Gamma E^2}=\frac{AZ}{ZE}$

ὁπότε ἔχομεν $x=\frac{AZ}{ZE}$ ἢ $\frac{ZE}{AZ}=\frac{1}{x}$

ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον μεταξὺ τῶν ΖΕ, ΑΖ καὶ 1, ἵνα ἔχωμεν τὴν x.

γ') $x=\frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2}$· αὕτη γράφεται $\frac{x}{\alpha}=\frac{\beta^2}{\gamma^2}$.

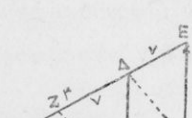
Σχηματίζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΓΗ (σχ. 53) ἔχον καθέτους πλευρὰς ΒΓ=β καὶ ΓΗ=γ καὶ φέρομεν τὴν ΓΘ κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΗ· τότε $\frac{B\Gamma^2}{\Gamma H^2}=\frac{B\Theta}{H\Theta}$ ἢ $\frac{\beta^2}{\gamma^2}=\frac{B\Theta}{H\Theta}$,

ὁπότε $\frac{x}{\alpha}=\frac{B\Theta}{H\Theta}$ ἢ $\frac{H\Theta}{B\Theta}=\frac{\alpha}{x}$.

ὅθεν πρὸς εὕρεσιν τῆς x ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον μεταξὺ τῶν ΗΘ, ΒΘ καὶ α.

399. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων δίδεται τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ καί ὁ λόγος των.

α') Ἔστω $\frac{\mu}{\nu}$ ὁ δοθεὶς λόγος· ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν τμῆμα ΑΒ (σχ.54) ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν ἄθροισμα καὶ ἐκ τῆς ἀρχῆς Α φέρομεν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν ΑΒ ὀξεῖαν γωνίαν καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τὰ διαδοχικὰ τμήματα ΑΔ=μ καὶ ΔΕ=ν· συνδέομεν τὸ Ε καὶ Β καὶ ἐκ τοῦ Δ φέρομεν τὴν ΔΓ παράλληλον πρὸς τὴν ΕΒ, ὁπότε τὰ ζητούμενα τμήματα εἶναι τὰ ΑΓ καὶ ΓΒ.



Σχ. 54.

Διότι ΑΓ+ΓΒ=ΑΒ= πρὸς τὸ δοθὲν ἄθροισμα· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΔΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΕΒ τοῦ τριγώνου ΑΕΒ τέμνει τὰς πλευράς του εἰς μέρη ἀνάλογα, ἤτοι $\frac{A\Gamma}{\Gamma B}=\frac{A\Delta}{\Delta E}=\frac{\mu}{\nu}$.

β') Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν τμῆμα ΑΗ ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν διαφορὰν (σχ. 54) καὶ ἐκ τοῦ Α φέρομεν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζεται μὲ αὐτὴν γωνίαν, καὶ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΔ=μ καὶ τμῆμα

ΖΔ=ν· φέρομεν τὴν ΖΗ καὶ τὴν ΔΒ παράλληλον πρὸς αὐτήν, ὁπότε τὰ ζητούμενα τμήματα εἶναι τὰ ΑΒ καὶ ΗΒ·

Διότι ΑΒ—ΗΒ=ΑΗ=μὲ τὴν δοθεῖσαν διαφοράν. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΖΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΔΒ τοῦ τριγώνου ΑΔΒ ἔχομεν $\frac{AB}{HB}=\frac{A\Delta}{Z\Delta}=\frac{\mu}{\nu}$.

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

400. ***Ἡ κεντρικὴ γωνία κανονικοῦ τινος πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του.***

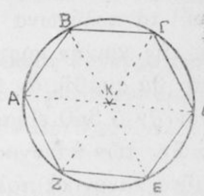
Ἐὰν ν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν, τότε καὶ τὸ πλῆθος τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται, ἂν ἀχθοῦν αἱ ἀκτῖνες εἰς ὅλας τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, εἶναι ν, ἤτοι σχηματίζονται ν κεντρικαὶ γωνίαι· ἐπειδὴ δὲ ὅλαι εἶναι ἴσαι, ἐὰν δι᾽ ω παραστήσωμεν τὸ μέτρον τῆς μιᾶς, τότε τὸ μέτρον ὅλων θὰ εἶναι ν.ω· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς 4 ὀρθ.· ἐπομένως εἶναι ν.ω=4ὀρθ. καὶ $\omega=\frac{4}{\nu}$ ὀρθ.

401. ***Ἡ ἀκτὶς κανονικοῦ πολυγώνου (ἡ ὁποία περατοῦται εἴς τινα κορυφήν του διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς ταύτης.***

Ἔστω τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 55). Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἀκτὶς ΚΒ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΑΒΓ.

Ἂν ἀχθοῦν αἱ ἀκτῖνες αἱ ἀπολήγουσαι εἰς τὰς τρεῖς διαδοχικὰς κορυφὰς Α, Β, Γ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΚΑΒ καὶ ΚΒΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν ΚΒ κοινήν, τὴν ΚΑ=ΚΓ ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ τὴν ΑΒ=ΒΓ, ὡς πλευρὰς κανονικοῦ πολυγώνου, ἄρα θὰ εἶναι καὶ

γων ΑΒΚ = γων ΓΒΚ.



Σχ. 55.

402. ***Ἡ κεντρικὴ γωνία κανονικοῦ πολυγώνου καὶ μία τῶν γωνιῶν του εἶναι παραπληρωματικαί.***

Ἔστω ΒΚΓ (σχ. 55) μία κεντρικὴ γωνία τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΑΒΓ+ΒΚΓ=2 ὀρθ.

Ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΚΓ ἔχομεν

γων ΒΚΓ+2γων ΚΒΓ=2 ὀρθ.·

ἀλλὰ (ἄσκησις 401) 2γων ΚΒΓ=γων ΑΒΓ,

ὅθεν γων ΒΚΓ + γων ΑΒΓ = 2 ὀρθ.

403. Πόση εἶναι α΄.) ἑκάστη τῶν γωνιῶν, β΄.) ἡ κεντρικὴ γωνία κανονικοῦ πενταγώνου, ἑξαγώνου, ὀκταγώνου, δεκαγώνου, δωδεκαγώνου, εἰκοσαγώνου ;

Ἡ κεντρικὴ γωνία τοῦ πενταγώνου εἶναι $\omega = \frac{4}{5}$ ὀρθ. $= 72^\circ$ (ἄσκησις 400) τυχοῦσα δὲ γωνία αὐτοῦ φ εἶναι

$$\varphi = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ \quad \text{(ἄσκησις 402).}$$

Διὰ τὸ ἑξάγωνον εἶναι $\omega = \frac{4}{6} = 60^\circ$ καὶ $\varphi = 180 - 60 = 120^\circ$.

Διὰ τὸ ὀκτάγωνον εἶναι $\omega = \frac{4}{8} = 45^\circ$ καὶ $\varphi = 180 - 45 = 135^\circ$.

Διὰ τὸ δεκάγωνον εἶναι $\omega = \frac{4}{10} = 36^\circ$ καὶ $\varphi = 180 - 36 = 144^\circ$.

Διὰ τὸ δωδεκάγωνον εἶναι $\omega = \frac{4}{12} = 30^\circ$ καὶ $\varphi = 180 - 30 = 150^\circ$.

Διὰ τὸ εἰκοσάγωνον εἶναι $\omega = \frac{4}{20} = 18^\circ$ καὶ $\varphi = 180 - 18 = 162^\circ$.

405. Θέλομεν νὰ καλύψωμεν ἄνευ κενῶν ἓν ἐπίπεδον μὲ κανονικὰ πολύγωνα καὶ ἴσα μεταξύ των· νὰ δειχθῇ ὅτι τοῦτο εἶναι δυνατὸν μὲ τρία εἴδη μόνον κανονικῶν πολυγώνων. Τίνα ταῦτα :

Διὰ νὰ καλύψωμεν τὸ ἐπίπεδον μὲ κανονικὰ πολύγωνα θὰ τοποθετήσωμεν αὐτὰ διαδοχικῶς, οὕτως ὥστε μία τῶν κορυφῶν των νὰ εἶναι κοινή· τὰ πολύγωνα πρέπει νὰ εἶναι τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν περὶ τὴν κοινὴν κορυφὴν γωνιῶν των νὰ ἰσοῦται πρὸς 4 ὀρθάς· ἀλλὰ τοῦτο θὰ συμβῇ, ἂν θέλωμεν νὰ ἔχωμεν ἀκέραιον ἀριθμὸν πολυγώνων, μόνον ἄν ὁ 360 εἶναι ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ μέτρου μιᾶς τῶν γωνιῶν τῶν κανονικῶν πολυγώνων ποὺ θὰ χρησιμοποιηθοῦν· ἀλλὰ τοιαῦτα κανονικὰ πολύγωνα εἶναι τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη γωνία εἶναι 60°, τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι 90° καὶ τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι 120°.

405. Τίνος κανονικοῦ πολυγώνου αἱ γωνίαι εἶναι 150° 120°, 6,2 ὀρθ., 1,4 ὀρθ.

Ἔστω ν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου· ἡ κεντρικὴ γωνία αὐτοῦ (ἄσκησις 400) ἰσοῦται πρὸς $\frac{360^\circ}{\nu}$· ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ κεντρικὴ γωνία κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι παραπλήρωμα μιᾶς τῶν γωνιῶν αὐτοῦ ἔχομεν

$150 + \frac{360}{\nu} = 180$ ἢ $\frac{360}{\nu} = 30$ καὶ $\nu = \frac{360}{30} = 12$

ἤτοι τοῦτο εἶναι τὸ δωδεκάγωνον.

Δι' ὅμοιον λόγον ἔχομεν $120 + \frac{360}{\nu} = 180$ καὶ $\nu = \frac{360}{\nu} = 6$,

ἤτοι ἑξάγωνον. Πολύγωνον, τοῦ ὁποίου κάθε γωνία ἰσοῦται πρὸς 6,2ὀρθ. δὲν ὑπάρχει, διότι κάθε γωνία πρέπει νὰ εἶναι μικροτέρα τῶν δύο ὀρθῶν, ὁσονδήποτε μέγα καὶ ἂν εἶναι τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν του. Διότι ἂν παραστήσωμεν δι' ω μίαν γωνίαν του καὶ διὰ ν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν του ἔχομεν τὴν σχέσιν $\omega + \frac{360}{\nu} = 180^{\circ}$

καὶ $\omega = 180 - \frac{360}{\nu}$· ὅταν αὐξάνῃ ὁ ἀριθμὸς ν τῶν πλευρῶν, τὸ κλάσμα $\frac{360}{\nu}$ ἐλαττοῦται, οὐδέποτε ὅμως μηδενίζεται, ἄρα πάντοτε εἶναι $\omega < 180^{\circ}$· τοῦτο ἄλλως τε φαίνεται καὶ ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τῆς ἐξισώσεως $6{,}2 + \frac{4}{\nu} = 2$, ἡ ὁποία δίδει τιμὴν τοῦ ν ἀρνητικήν.

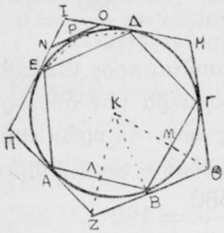
Ἐὰν ἡ γωνία εἶναι 1,4 ὀρθ. ἔχομεν $1{,}4 + \frac{4}{\nu} = 2$ ὀρθ.

καὶ $\nu = \frac{4}{0{,}6} = \frac{40}{6}$· ἀλλὰ τὸ $\frac{40}{6}$ δὲν εἶναι ἴσον πρὸς ἀκέραιον, ἐπομένως δὲν ὑπάρχει κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι νὰ εἶναι ἴσαι πρὸς 1,4 ὀρθ.

406. ***Αἱ ἐφαπτόμεναι κύκλου εἰς τὰς κορυφὰς ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν κανονικοῦ πολυγώνου σχηματίζουν περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον κανονικὸν πολύγωνον, μὲ ἴσον ἀριθμὸν πλευρῶν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον.***

Ἔστω ΖΘΗΙΠ (σχ.56) τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται τῶν κορυφῶν τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ΑΒΓΔΕ· θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ΖΘΗΙΠ εἶναι κανονικόν.

Ἂν ἀχθοῦν τὰ ἀποστήματα ΚΛ καὶ ΚΜ τῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΒΓ αὐτὰ εἶναι ἴσα, διότι αἱ χορδαὶ, ὡς πλευραὶ κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσαι, ἄρα τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΛΚΒ καὶ ΒΚΜ, ἐπειδὴ ἔχουν ΚΛ=ΚΜ καὶ ΚΒ κοινὴν εἶναι ἴσα· ὅθεν καὶ γων ΛΚΒ=γων ΒΚΜ, ἤτοι ἡ ΚΒ εἶναι διχοτόμος τῆς γων ΛΚΜ· ἀλλὰ τὸ Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ ἤτοι τὸ μέσον τῆς βάσεως τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΘΓ, ἄρα ἡ ΚΜ, ὡς κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου διέρχεται διὰ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς Θ· δι' ὅμοιον λόγον καὶ ἡ ΚΛ διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Ζ. Εἰς τὸ τρίγωνον ὅμως ΖΚΘ ἡ ΚΒ εἶναι ὕψος αὐτοῦ (ὡς ἀκτὶς ἀπολήγουσα εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς Β) καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας Κ τῆς κορυφῆς, ἄρα τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές, ἑπομένως ΒΘ=ΒΖ, ἤτοι αἱ κορυφαὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου τοῦ σχηματισθέντος ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων· ἀλλ' ἔχομεν καὶ ΘΒ=ΘΓ,



Σχ. 56.

ὅθεν $\frac{Z\Theta}{2}=\frac{\Theta H}{2}$.

δι' ὅμοιον λόγον εἶναι

$$\frac{Z\Theta}{2}=\frac{\Theta H}{2}=\frac{HI}{2}=\frac{I\Pi}{2}=\frac{\Pi Z}{2},$$

ἤτοι $$Z\Theta=\Theta H=HI=I\Pi=\Pi Z.$$

Τὰ τρίγωνα ΔΗΓ καὶ ΓΘΒ καθὼς ἐδείχθη ἔχουν ΔΗ=ΗΓ=ΓΘ=ΘΒ καὶ ΔΓ=ΓΒ, ὡς πλευρὰς κανονικοῦ πολυγώνου, ἤτοι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας, ἄρα θὰ εἶναι καὶ γων Θ=γων Η· δι' ὅμοιον λόγον εἶναι

γων Θ=γων Η=γων Ι=γων Π=γων Ζ.

ἤτοι τὸ πολύγωνον ΖΘΗΙΠ ἔχει τὰς πλευράς του καὶ τὰς γωνίας του ἴσας, ἄρα εἶναι κανονικόν.

407. ***Αἱ ἐφαπτόμεναι κύκλου εἰς τὰ μέσα τῶν τόξων τῶν ἀντιστοίχων εἰς τὰς πλευρὰς ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου σχηματίζουν περιγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ πρώτου ἀνὰ μία, αἱ δὲ κορυφαὶ κεῖνται εἰς τὰς προεκτάσεις τῶν ἀκτίνων τοῦ ἐγγεγραμμένου.***

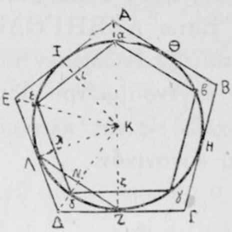
Ἔστωσαν Ζ,Η,Θ,Ι,Λ (σχ.57) τὰ μέσα τῶν τόξων τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς πλευρὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον Κ κανονικοῦ πολυγώνου αβγδε, καὶ ΑΒΓΔΕ τὸ περιγγεγραμμένον πολύγωνον, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν αἱ ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου εἰς τὰ μέσα τῶν τόξων· θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ αβγδε καὶ ὅτι αἱ κορυφαί του κεῖνται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῶν ἀκτίνων τοῦ ἐγγεγραμμένου.

Ἂν ἀχθῇ ἡ Κζ κάθετος ἐπὶ τὴν πλευρὰν γδ, αὐτὴ ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ἐκ τοῦ κέντρου θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ μέσου Ζ τοῦ τόξου δγ τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπ' αὐτῆς, ἤτοι διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ζ τῆς ἁφῆς τῆς ΔΓ καὶ τοῦ κύκλου Κ, ἑπομένως εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ὡς ἀκτὶς ἀπολήγουσα εἰς τὸ σημεῖον ἁφῆς· ὅθεν αἱ δγ καὶ ΔΓ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν· δι' ὅμοιον λόγον καὶ αἱ ἄλλαι πλευραὶ τῶν δύο πολυγώνων ἀνὰ δύο εἶναι παράλληλοι, ἑπομένως αἱ γωνίαι αὐτῶν, ὡς ἔχουσαι τὰς πλευρὰς παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως, ἤτοι

$$Α=α,\ Β=β,\ Γ=γ,\ Δ=δ,\ Ε=ε\cdot$$

ἀλλὰ $α=β=γ=δ=ε$ ὡς γωνίαι κανονικοῦ πολυγώνου, ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ

$$Α=Β=Γ=Δ=Ε.$$



Σχ. 57.

Φέρομεν τώρα τὸ ἀπόστημα Κλ τῆς εδ· τοῦτο δι' ὅμοιον λόγον προεκτεινόμενον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΛ καὶ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Λ.

Ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΖΛ σχηματίζεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΚΛΖ, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος ΚΝ, ἐπειδὴ εἶναι κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως ΛΖ θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ μέσου δ τοῦ τόξου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς αὐτήν· ἀλλὰ ἐπειδὴ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΛΖ, ἡ ὁποία εἶναι βάσις τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΛΔΖ, θὰ διέλθῃ διὰ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ Δ, ἤτοι αἱ κορυφαὶ Δ καὶ δ κεῖνται ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος Κδ προεκτεινομένης· δι' ὅμοιον λόγον καὶ αἱ λοιπαὶ κορυφαὶ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου κεῖνται ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν ἀκτίνων τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ τοιούτου.

Ἐὰν ἀχθῇ ἡ Κε, αὕτη θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Ε, τότε ὅμως σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΕΚΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοσκελές, διότι γων Ε=γων ε, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς τῶν παραλλήλων εδ καὶ ΕΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΚΕ· δι' ὅμοιον λόγον καὶ γων Δ=γων δ· ἀλλὰ γων ε=γων δ ὡς γωνίαι παρὰ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εΚδ, ἄρα καὶ γων Ε=γων Δ· ἑπομένως ἡ ΚΛ ὡς ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΕΚΔ διαιρεῖ τὴν βάσιν εἰς δύο ἴσα μέρη, ἤτοι $ΕΛ = ΛΔ = \frac{ΕΔ}{2}$.

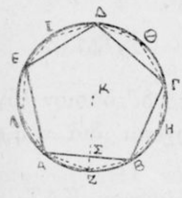
ἀλλὰ $ΛΔ = ΔΖ = \frac{ΔΓ}{2}$, ὅθεν $\frac{ΕΔ}{2} = \frac{ΔΓ}{2}$ καὶ $ΕΔ = ΔΓ\cdot$

δι' ὅμοιον λόγον εἶναι $ΕΔ=ΔΓ=ΓΒ=ΒΑ=ΑΕ$

ἤτοι τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον ἔχει τὰς γωνίας του καὶ τὰς πλευράς του ἴσας, ἄρα εἶναι κανονικόν.

408. Ἐὰν αἱ κορυφαὶ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλου κανονικοῦ πολυγώνου συνδεθοῦν δι᾽ εὐθειῶν μὲ τὰ μέσα τῶν ἀντιστοιχούντων τόξων, αἱ ἑνοῦσαι εὐθεῖαι σχηματίζουν ἄλλο τοιοῦτον πολύγωνον, ἔχον διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

Ἔστω ΑΖΒΗΓΘΔΙΕΛ (σχ 58) τὸ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται, ἂν ἑνώσωμεν τὰς κορυφὰς τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον μὲ τὰ μέσα τῶν τόξων ποὺ ἀντι στοιχοῦν εἰς τὰς πλευράς του· θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ΑΖΒΗΓΘΔΙΕΛ εἶναι κανονικόν.



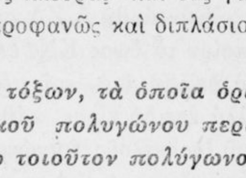
Σχ. 58.

Αἱ πλευραὶ ΑΖ, ΖΒ, ΒΗ.....ΛΑ τοῦ πολυγώνου ΑΖΒ.....Λ εἶναι ἴσαι αἱ χορδαὶ τῶν ἴσων τόξων ΑΖ, ΖΒ, ΒΗ.....ΛΑ. Ἐπίσης καὶ αἱ γωνίαι του Α, Ζ, Β,.....Λ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ κάθε μία βαίνει ἐπὶ ἴσων τόξων· τὸ πολύγωνον ΑΖΒ.....Λ εἶναι λοιπὸν κανονικόν, διότι ἔχει τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας του ἴσας· ἔχει δὲ προφανῶς καὶ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

409. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ μέσα τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν τὰ σημεῖα ἁφῆς τῶν πλευρῶν κανονικοῦ πολυγώνου περιγεγραμμένου εἰς κύκλον, σχηματίζουν ἄλλο τοιοῦτον πολύγωνον μὲ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

Ἔστω ΑΒΓΔΕ (σχ. 59) τὸ περιγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον εἰς τὸν κύκλον Κ καὶ ια, βγ, κδ, εζ, ηθ αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ μέσα τῶν τόξων ΛΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΙ, ΙΛ· θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ πολύγωνον αβγκδεζηθι εἶναι κανονικὸν πολύγωνον καὶ ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

Ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΑΚ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Α τῶν ἐφαπτομένων ΑΛ καὶ ΑΖ καὶ εἶναι κάθετος καὶ τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΛΖ, ἐπομένως διέρχεται διὰ τοῦ μέσου λ τοῦ τόξου ΛΖ· ἀφοῦ ὅμως εἰς τὸ τρίγωνον Αια ἡ Αλ εἶναι διχοτόμος τῆς Α καὶ διάμεσος αὐτοῦ, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ τρίγωνον βΒγ εἶναι ἰσοσκελές· ἀλλὰ τὰ δύο αὐτὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἔχουν γων Α=γων Α ὡς γωνίας τοῦ δοθέντος κονονικοῦ πολυγώνου, ἄρα ἔχουν ὅλας τὰς γωνίας των ἴσας.



Σχ. 59.

Ἀλλὰ γων.ιαΖ=γων.Α+γων.ι, ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου Αια. Ἐπίσης γων Ζβγ=γων Β+γων γ, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον· ἀλλὰ γων Α=γων Β καί γων ι=γων γ, ὅθεν καὶ γων.ιαΖ=γων Ζβγ· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ὅλαι αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου αβεκδεζηθι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα αΚΖ καὶ βΚΖ ἔχουν τὴν ΚΖ κοινὴν καὶ γων ΚαΖ=γων ΚβΖ, ὡς ἡμίση ἴσων γωνιῶν, ἄρα εἶναι ἴσα, ὥστε θὰ εἶναι καὶ αΖ=Ζβ, ἤτοι $αΖ=\frac{αβ}{2}$· δι' ὅμοιον λόγον εἶναι καὶ $αλ=\frac{ια}{2}$· ἀλλὰ αΖ=αλ, ὡς ἐφαπτόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου α τῆς αὐτῆς περιφερείας, ὅθεν $\frac{αβ}{2}=\frac{ια}{2}$ ἤτοι καὶ αβ=ια· ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου αβγκδ..... εἶναι ἴσαι, ἄρα τοῦτο ἐπειδὴ ἔχει τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας του ἴσας εἶναι κανονικόν· ὅτι ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν τοῦ δοθέντος εἶναι προφανές.

410. ***Ἡ περίμετρος ἐγγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου ἄλλου τοιούτου, ἔχοντος διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν· ἡ δὲ περίμετρος περιγγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς περιμέτρου ἄλλου τοιούτου, ἔχοντος διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.***

Ἔστω ΛΖ μία τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου (σχ. 59)· εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦν αἱ πλευραὶ Λλ καὶ λΖ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

Ἡ πλευρὰ ΛΖ ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα μὲ τὴν τεθλασμένην, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦν αἱ Λλ καὶ λΖ· τοῦτο ὅμως συμβαίνει δι' ὅλας τὰς πλευράς τοῦ δοθέντος· ἑπομένως ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι τεθλασμένη κλειστὴ περιβαλλομένη ὑπὸ τῆς ἐπίσης κλειστῆς τεθλασμένης, τὴν ὁποίαν ἀποτελεῖ ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν, ἄρα ἡ πρώτη εἶναι μικροτέρα τῆς δευτέρας.

Ἐπίσης ἔχομεν ια<ιΑ+Αα· κατὰ μείζονα λόγον θὰ εἶναι καὶ ια<ΑΛ+ΑΖ· ἀλλὰ ΑΛ+ΑΖ=ΑΒ, ὅθεν ια<ΑΒ, ἤτοι ἑκάστη πλευρὰ τοῦ δοθέντος κανονικοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ περιγεγραμμένου τοῦ ἔχοντος διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν· ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ δευτέρου εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ πρώτου.

411. ***Πᾶν ἰσόπλευρον πολύγωνον περιγεγραμμένον εἰς κύκλον, ἔχον περιττὸν ἀριθμὸν πλευρῶν εἶναι κανονικόν.***

Ἔστω τὸ περὶ τὸν κύκλον Κ (σχ. 59) περιγεγραμένον ἰσόπλευρον πολύγωνον ΑΒΓΔΕ ἔχον περιττὸν ἀριθμὸν πλευρῶν, θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι κανονικόν.

Ἔχομεν $ΑΒ=ΒΓ$ καὶ $ΖΒ=ΒΗ$ ἄρα $ΑΒ-ΖΒ=ΒΓ-ΒΗ$ ἤτοι
$$ΑΖ=ΗΓ$$
Ἂν ἀχθοῦν καὶ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ καὶ αἱ ἀκτῖνες ΚΖ, ΚΗ αἱ ἀπολήγουσαι εἰς τὰ σημεῖα ἁφῆς, τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΚΖ καὶ ΚΗΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν $ΚΖ=ΚΗ$ καὶ $ΑΖ=ΗΓ$, ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ γων $ΚΑΖ=$γων $ΚΓΗ$· ἀλλὰ γων $ΚΑΖ=\frac{Α}{2}$ καὶ γων $ΚΓΗ=\frac{Γ}{2}$, ὅθεν $\frac{Α}{2}=\frac{Γ}{2}$, ἤτοι $Α=Γ$· δι' ὅμοιον λόγον ἔχομεν $Β=Δ$, $Γ=Ε$ καὶ $Ε=Β$· παραβάλλοντες τὰς ἰσότητας ταύτας ἔχομεν· $Α=Β=Γ=Δ=Ε$, ἤτοι τὸ πολύγωνον ἔχει καὶ τὰς γωνίας του ἴσας, ἄρα εἶναι κανονικόν.

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ πολύγωνον ἔχει ἄρτιον πλῆθος πλευρῶν, δὲν δυνάμεθα νὰ δείξωμεν, ὅτι ἔχει τὰς γωνίας του ὅλας ἴσας, ἀλλὰ μόνον ὅτι αἱ περιττῆς τάξεως γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀρτίας τάξεως ἐπίσης ἴσαι· λέγοντες δὲ ὅτι μία γωνία εἶναι περιττῆς ἢ ἀρτίας τάξεως, ἐννοοῦμεν τὴν θέσιν της ὡς πρὸς τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς πρώτην. Εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ εἶναι πολύγωνον μὲ ἄρτιον πλῆθος πλευρῶν περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι ἴσαι καὶ νὰ μὴ εἶναι κανονικόν· τοιοῦτον πολύγωνον εἶναι ὁ ῥόμβος.

412. Πᾶν ἰσογώνιον πολύγωνον, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον εἶναι κανονικόν, ἂν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν του εἶναι περιττὸς ἀριθμός.

Ἔστω τὸ εἰς τὸν κύκλον Κ (σχ. 57) ἐγγεγραμμένον ἰσογώνιον πολύγωνον αβγδε ἔχον περιττὸν ἀριθμὸν πλευρῶν, θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι κανονικόν.

Αἱ γωνίαι αὐτοῦ ὡς ἴσαι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς ἴσα τόξα, ἑπομένως τοξ $αβγ=$τοξ $βγδ$ ἄρα τοξ $αβγ-$τοξ $βγ=$τοξ $βγδ-$τοξ $βγ$ ἤτοι
$$\text{τοξ } αβ=\text{τοξ } γδ\cdot$$
δι' ὅμοιον λόγον ἔχομεν
$$\text{τοξ } βγ=\text{τοξ } δε. \quad \text{τοξ } γδ=\text{τοξ } αε \quad \text{καὶ} \quad \text{τοξ } δε=\text{τοξ } αβ\cdot$$
παραβάλλοντες τὰς ἰσότητας ταύτας λαμβάνομεν,
$$\text{τοξ } αβ=\text{τοξ } βγ=\text{τοξ } γδ=\text{τοξ } δε=\text{τοξ } εα$$
ἄρα καὶ αἱ χορδαὶ τῶν τόξων τούτων εἶναι ἴσαι ἤτοι
$$αβ=βγ=γδ=δε=εα\cdot$$

ἑπομένως τὸ πολύγωνον ἔχει καὶ τὰς πλευράς του ἴσας, ἄρα εἶναι κανονικόν.

Σημείωσις. Ἂν τὸ πολύγωνον εἶναι ἰσογώνιον καὶ ἔχει ἄρτιον ἀριθμὸν πλευρῶν, λάβωμεν δὲ ὡς πρώτην τυχοῦσαν ἐξ αὐτῶν, τότε κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, εὑρίσκομεν, ὅτι μόνον αἱ πλευραὶ περιττῆς τάξεως ἐν σχέσει πρὸς τὴν θεωρουμενην εἶναι ἴσαι, ὡς καὶ αἱ πλευραὶ ἀρτίας τάξεως εἶναι ἴσαι, πρὸς ἀλλήλας· διότι δύναται νὰ εἶναι ἰσογώνιον πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ νὰ μὴ εἶναι κανονικόν· τοιοῦτον εἶναι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον.

413. Πᾶν ἰσογώνιον πολύγωνον, περιγεγραμμένον εἰς κύκλον εἶναι κανονικόν.

Ἔστω τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον Κ (σχ. 57) ἰσογώνιον πολύγωνον ΑΒΓΔΕ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι κανονικόν.

Ἂν ἀχθοῦν αἱ ΚΔ, ΚΕ, ΚΑ, αὗται εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Δ, Ε καὶ Α, ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΔΚΕ καὶ ΕΚΑ εἶναι ἰσοσκελῆ, διότι αἱ παρὰ τὴν βάσιν των γωνίαι εἶναι ἴσαι, ὡς ἡμίση ἴσων γωνιῶν· ἄρα τὰ ὕψη αὐτῶν ΚΛ καὶ ΚΙ διχοτομοῦν τὰς βάσεις, ἤτοι

$$\text{ΕΛ} = \frac{\text{ΕΔ}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \text{ΕΙ} = \frac{\text{ΕΑ}}{2}\cdot$$

ἀλλὰ $\text{ΕΛ}=\text{ΕΙ}$, ὅθεν $\dfrac{\text{ΕΔ}}{2} = \dfrac{\text{ΕΑ}}{2}$ ἤτοι $\text{ΕΑ}=\text{ΕΔ}\cdot$

Δι᾿ ὅμοιον λόγον $\text{ΑΒ}=\text{ΒΓ}=\text{ΓΔ}=\text{ΔΕ}=\text{ΕΑ}$,

ἤτοι τὸ πολύγωγον ἔχει καὶ τὰς πλευράς του ἴσας, ἄρα εἶναι κανονικόν.

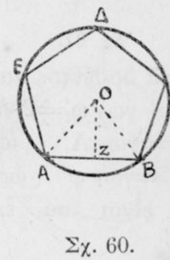
414. Ἐὰν δοθῇ ἡ πλευρὰ κανονικοῦ πολυγώνου καὶ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ ρ, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ. Μερικὴ περίπτωσις:

$$\rho=1, \quad \lambda=\sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad \frac{\sqrt{5-1}}{2}.$$

Ἔστω ΑΒ (σχ. 60) ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ.

Τὸ ἀπόστημα ΟΖ διαιρεῖ τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη, ὁπότε

$\text{ΑΖ} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{2} = \dfrac{\lambda}{2}$, ἂν παραστήσωμεν μὲ λ τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.



Σχ. 60.

Ἀλλ᾿ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΖΑ λαμβάνομεν

$$(\text{ΟΖ})^2=(\text{ΟΑ})^2-(\text{ΑΖ})^2$$

ἐπειδὴ δὲ $\text{ΟΑ}=\rho$ καὶ $\text{ΑΖ} = \dfrac{\lambda}{\text{Ζ}}$ ἔχομεν

$$(\text{ΟΖ})^2 = \rho^2 - \frac{\lambda^2}{4}$$

ἢ παριστάνοντες μὲ α τὸ ἀπόστημα ΟΖ ἔχομεν

$$\text{καὶ } \alpha^2 = \frac{1}{4}(4\rho^2 - \lambda^2) \qquad \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{4\rho^2 - \lambda^2}$$

Διὰ $\rho=1$ καὶ $\lambda=\sqrt{2}$, ἔχομεν $\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{4-2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$

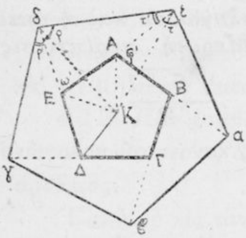
διὰ $\rho=1$ καὶ $\lambda=\sqrt{3}$, ἔχομεν $\alpha=\frac{1}{2}$

διὰ $\rho=1$ καὶ $\lambda=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ἔχομεν

$$\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{4-\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{16-6+2\sqrt{5}}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

415. ***Ἐὰν αἱ πλευραὶ κανονικοῦ πολυγώνου προεκταθοῦν κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν ἡ μία μετὰ τὴν ἄλλην κατὰ τὸ αὐτὸ μῆκος καὶ συνδέσωμεν τὰ ἄκρα τῶν προεκτάσεων, σχηματίζεται νέον κανονικὸν πολύγωνον· νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν περιμέτρων τῶν δύο κανονικῶν πολυγώνων.***

Ἔστω ΑΒΓΔΕ τὸ δοθὲν κανονικὸν πολύγωνον (σχ.61)· Ἐὰν προεκτείνωμεν ὅλας τὰς πλευρὰς αὐτοῦ πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν κατὰ μῆκος ἴσον πρὸς ἑκάστην πλευρὰν καὶ συνδέσωμεν τὰ ἄκρα τῶν προεκτάσεων σχηματίζεται τὸ πολύγωνον αβγδε. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ αβγδε εἶναι κανονικόν.



Σχ. 61.

Τὰ τρίγωνα Εδε καὶ Αεα ἔχουν Εε=Αα, διότι ἑκάστη τούτων ἐκ κατασκευῆς εἶναι διπλασία τῆς πλευρᾶς τοῦ δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου καὶ Εδ=Αε, διότι ἑκάστη τούτου ἐκ κατασκευῆς εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου, εἶναι δὲ

γων Ε+γων ω′=2 ὀρθ. καὶ γων Α+γων φ′=2 ὀρθ. ἀλλὰ
γων Ε=γων Α, ὡς γωνίαι κανονικοῦ πολυγώνου, ἄρα καὶ
γων ω′=γων φ′ ὡς παραπληρώματα ἴσων γωνιῶν, ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα, ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ δε=εα· δι᾽ ὅμοιον λόγον ἔχομεν αβ=βγ=γδ=δε=εα.

Ἀλλὰ ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων δΕε καὶ εΑα ἔχομεν

γων ρ=γων τ.

ἐκ δὲ τῶν ἴσων τριγώνων Δγδ καὶ Εδε ἔχομεν γων ρ′=γων τ′

ἄρα $\quad$ γων ϱ + γων ϱ' = γων τ + γων τ' $\quad$ ἤτοι $\quad$ γων δ = γων ε·
δι' ὅμοιον λόγον εἶναι $\quad \alpha=\beta=\gamma=\delta=\varepsilon$
ἄρα τὸ πολύγωνον αβγδε, ἐπειδὴ ἔχει τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας του ἴσας εἶναι κανονικόν.

Ἐὰν Κ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ τότε καὶ τοῦ αβγδε εἶναι τὸ Κ.

Διότι ἂν ἀχθοῦν αἱ ΚΕ, ΚΔ, Κδ, Κε, τὰ τρίγωνα ΔΚδ καὶ ΕΚε εἶναι ἴσα διότι ἔχουν ΚΔ=ΚΕ, ὡς ἀκτῖνας τοῦ δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου, Δδ=Εε ὡς διπλασίας τῆς πλευρᾶς τοῦ δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου καὶ γων ΚΔδ=γων ΚΕε, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων γωνιῶν Δ καὶ Ε, ἄρα θὰ ἔχουν καὶ Κδ=Κε· δι' ὅμοιον λόγον Κδ=Κε=Κα=Κβ=Κγ, ἄρα τὸ Κ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ αβγδε.

Ἐὰν διὰ Σ παραστήσωμεν τὴν περίμετρον τοῦ αβγδε καὶ διὰ σ τοῦ ΑΒΓΔΕ, ἐπειδὴ ταῦτα εἶναι κανονικὰ καὶ ἔχουν ἴσον ἀριθμὸν πλευρῶν εἶναι ὅμοια, ἑπομένως ὁ λόγος τῶν περιμέτρων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων των ἤτοι

$$\frac{\Sigma}{\sigma}=\frac{x}{\varrho}$$

ὅπου $\quad x=\text{Κε} \quad \varrho=\text{ΚΕ}=\text{ΚΑ}$·
εἰς τὸ τρίγωνον ὅμως ΕΚε ἡ ΑΚ εἶναι διάμεσος, ἑπομένως ἔχομεν

$$(\text{Κε})^2+(\text{ΚΕ})^2=2(\text{ΚΑ}^2)+2(\text{ΑΕ})^2$$

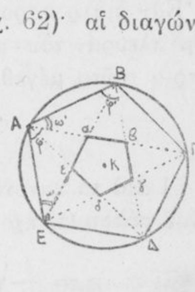
ἤτοι, ἂν μ παριστᾷ τὴν πλευρὰν τοῦ δοθέντος πολυγώνου,

$$x^2+\varrho^2=2\varrho^2+2\mu^2 \quad \text{καὶ} \quad x^2=\varrho^2+2\mu^2,$$

ἄρα $$\frac{\Sigma}{\sigma}=\frac{\sqrt{\varrho^2+2\mu^2}}{\varrho} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Sigma}{\sigma}=\sqrt{1+2\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2}$$

416. ***Ἐὰν φέρωμεν πάσας τὰς διαγωνίους κανονικοῦ πενταγώνου σχηματίζεται νέον κανονικὸν πεντάγωνον.***

Ἔστω τὸ κανονικὸν πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ (σχ. 62)· αἱ διαγώνιοι του τεμνόμεναι σχηματίζουν τὸ πενταγώνον αβγδε· θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι κανονικὸν
Ἡ γωνία α ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑαΕ ἰσοῦται μὲ ω+φ·
διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου ΑβΒ ἔχομεν $\beta=\omega'+\varphi'$· ἀλλὰ $\omega=\omega'$
διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ τόξου ἴσου πρὸς $\frac{1}{5}$ τῆς περιφερείας καθεμία·
ἐπίσης εἶναι καὶ $\varphi=\varphi'$



Σχ. 62.

διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνει καθεμία ἐπὶ τόξου ἴσου πρὸς τὰ

$\frac{2}{5}$ τῆς περιφερείας. Προσθέτοντας κατὰ μέλη τὰς δύο τελευταίας ἰσότητας ἔχομεν

$$\omega+\varphi=\omega'+\varphi', \quad \text{ὅθεν} \quad \alpha=\beta.$$

Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι $\quad \alpha=\beta=\gamma=\delta=\varepsilon$

Τὰ τρίγωνα ΑαΕ καὶ ΑβΒ ἔχουν τὴν ΑΕ=ΑΒ, τὴν $\omega=\omega'$ καὶ $\varphi=\varphi'$ ἄρα εἶναι ἴσα, ὅθεν Εα=Αβ (1)·
ἀλλὰ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΕε καὶ ΑαΒ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ΑΕ=ΑΒ καὶ τὰς προκειμένας εἰς αὐτὰς γωνίας ἴσας, ἐπειδὴ εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων, πρὸς τὸ $\frac{1}{5}$ περιφερείας καθεμία, ἄρα θὰ εἶναι καὶ

$$\text{Ε}\varepsilon=\text{Α}\alpha \qquad (2)$$

ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν $\quad \text{Ε}\alpha-\text{Ε}\varepsilon=\text{Α}\beta-\text{Α}\alpha \quad$ ἤτοι $\quad \varepsilon\alpha=\alpha\beta$.

Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι $\quad \alpha\beta=\beta\gamma=\gamma\delta=\delta\varepsilon=\varepsilon\alpha$·
τὸ πολύγωνον αβγδε εἶναι λοιπὸν κανονικόν, διότι ἔχει τὰς πλευράς του καὶ τὰς γωνίας του ἴσας.

417. ***Ἐὰν διχοτομήσωμεν τὰ τεταρτημόρια περιφερείας ΑΓ, ΓΒ, κλπ., δυνάμεθα νὰ σχηματίσωνεν ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ὀκτάγωνον· καθ' ὅμοιον τρόπον προχωροῦντες δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν κανονικὸν πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ ἔχον 16, 32, κλπ. πλευράς.***

Ἐὰν διχοτομήσωμεν τὰ ἴσα τόξα ΑΓ, ΓΒ κλπ. αἱ πλευραὶ τοῦ σχηματιζομένου κανονικοῦ πολυγώνου θὰ εἶναι ἴσαι, ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων· ἐπειδὴ δὲ τὸ πολύγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον καὶ ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας θὰ εἶναι κανονικόν.

418. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀπόστημα κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος 1μ., 0,8μ. 2,4μ.***

Ἐὰν διὰ ρ παραστήσωμεν τὴν ἀκτῖνα κανονικοῦ πολυγώνου, διὰ λ τὴν πλευράν του καὶ δι' α τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ, ὁ τύπος ὁ συνδέων τὰ τρία ταῦτα μέγεθη (ἄσκησις 414) εἶναι

$$\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{4\rho^2-\lambda^2} \qquad (1)$$

α') Διὰ τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον, ὅταν $\rho=1$, ἔχομεν $\rho=\lambda=1$· ὅθεν ἐκ τοῦ τύπου (1) ἔχομεν

$$\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{4-1} \qquad \text{ἢ} \qquad \alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Διὰ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, ὅταν $\rho=1$ ἔχομεν

$$\lambda=\sqrt{3}, \quad \text{ὅθεν} \quad \alpha=\frac{1}{2}.$$

β') Ἂν $\varrho=0{,}8$ διὰ τὸ ἑξάγωνον θὰ εἶναι καὶ $\lambda=0{,}8$· ὅθεν

$$\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4.64-64}{100}}=\frac{2}{5}\sqrt{3}$$

Διὰ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον θὰ εἶναι $\lambda=0{,}8\sqrt{3}$, ὅθεν

$$\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4.64-3.64}{100}}=\frac{2}{5}$$

γ') Ἂν $\varrho=2{,}4$· διὰ τὸ ἑξάγωνον θὰ εἶναι καὶ $\lambda=2{,}4$· ὅθεν

$$\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4.24^2-24^2}{100}}=\frac{6}{5}\sqrt{3}.$$

διὰ τὸ τρίγωνον θὰ εἶναι $\alpha=2{,}4\sqrt{3}$, ὅθεν

$$\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4.24^2-3.24^2}{100}}=\frac{6}{5}.$$

419. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἢ τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς 1, ἢ $\sqrt{3}$ ἢ 7, ἢ $7\sqrt{3}$.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ϱ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καὶ α τὴν πλευράν του, διὰ μὲν τὸ ἑξάγωνον θὰ ἔχωμεν $\varrho=\alpha$, διὰ δὲ τὸ τρίγωνον θὰ ἔχωμεν $\alpha=\varrho\sqrt{3}$, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει

$$\varrho=\frac{\alpha}{\sqrt{3}}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}.$$

Ὅταν $\alpha=1$· διὰ τὸ ἑξάγωνον θὰ εἶναι $\varrho=1$, διὰ τὸ τρίγωνον $\varrho=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ὅταν $\alpha=\sqrt{3}$ διὰ τὸ ἑξάγωνον θὰ εἶναι $\varrho=\sqrt{3}$ διὰ τὸ τρίγωνον $\varrho=1$

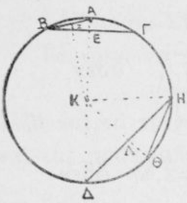
Ὅταν $\alpha=7$, διὰ τὸ ἑξάγωνον θὰ εἶναι $\varrho=7$, διὰ τὸ τρίγωνον $\varrho=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

Ὅταν $\alpha=7\sqrt{3}$, διὰ τὸ ἑξάγωνον $\varrho=7\sqrt{3}$ διὰ τὸ τρίγωνον $\varrho=7$.

420. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀπόστημα κανονικοῦ δωδεκαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος ϱ.

Ἔστω ΑΒ (σχ. 63) ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δωδεκαγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς ἰσοῦται μὲ ϱ καὶ ἔστω Κ ὁ περὶ τοῦτο περιγεγραμμένος κύκλος.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ΚΖ πρέπει νὰ ὑπολογισθῇ πρῶτον ἡ πλευρά του ΑΒ. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΚΔ καὶ ἐκ τοῦ Β τὴν ΒΕ κάθετον ἐπ' αὐτήν· ἡ ΒΕ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἤτοι εἶναι $BE = \frac{\varrho}{2}$.



Σχ. 63.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΕ ἔχομεν

$$(AB)^2 = (BE)^2 + (AE)^2$$

ἢ

$$(AB)^2 = \frac{\varrho^2}{4} + (AE)^2,$$

ἀλλὰ

$$AE = AK - EK$$

ὅπου ΕΚ εἶναι τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον Κ, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ἂν εἰς τὸν τύπον $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{4\varrho^2 - \lambda^2}$ (ἄσκησις 414) τεθῇ $\lambda = \varrho$, ὅτε

$$\alpha = \frac{\varrho\sqrt{3}}{2} \quad \text{ἑπομένως}$$

$$AE = \varrho - \frac{\varrho\sqrt{3}}{2} = \frac{\varrho(2-\sqrt{3})}{2}, \quad \text{ἄρα}$$

$$(AB)^2 = \frac{\varrho^2[1+(2-\sqrt{3})^2]}{4} = \frac{\varrho^2(8-4\sqrt{3})}{4} \quad \text{καὶ}$$

$$AB = \varrho\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{4\varrho^2 - \lambda^2}$,

ἀντὶ λ τὸ $\varrho\sqrt{2-\sqrt{3}}$. ἔχομεν

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{4\varrho^2 - \varrho^2(2-\sqrt{3})} = \frac{\varrho}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

ὥστε τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ δωδεκαγώνου ἰσοῦται πρὸς

$$\frac{\varrho}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

421. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀπόστημα κανονικοῦ ὀκταγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος $\varrho = 1{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}8$.

Ἔστω ΗΘ ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου (σχ. 63)· ἂν ἀχθῇ ἡ ΗΛ κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΘ, αὕτη ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραγώνου, ἤτοι εἶναι $$ΗΛ=\frac{ρ}{2}\sqrt{2}.$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΗΛΘ ἔχομεν

$$(ΗΘ)^2=(ΗΛ)^2+(ΛΘ)^2 \quad ἢ \quad (ΗΘ)^2=\frac{2ρ^2}{4}+(ΛΘ)^2$$

ἀλλὰ $$ΛΘ=ΚΘ-ΚΛ=ρ-\frac{ρ\sqrt{2}}{2},$$

διότι ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΚΛΗ εἶναι ΚΛ=ΗΛ,

$$ἄρα \quad ΛΘ=\frac{ρ}{2}(2-\sqrt{2}),$$

ἑπομένως $$(ΗΘ)^2=\frac{2ρ^2+ρ^2(2-\sqrt{2})^2}{4}=ρ^2(2-\sqrt{2})$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $α=\frac{1}{2}\sqrt{4ρ^2-λ^2}$, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἀπόστημα κανονικοῦ πολυγώνου θέσωμεν

$$λ^2=(ΗΘ)^2=ρ^2(2-\sqrt{2}) \quad θὰ\ ἔχωμεν$$

$$α=\frac{1}{2}\sqrt{4ρ^2-ρ^2(2-\sqrt{2})} \quad ἤτοι \quad α=\frac{ρ}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

αὕτη εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἀποστήματος τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου.

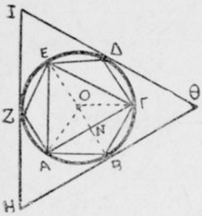
Διὰ $ρ=1$ ἔχομεν $α=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$· διὰ $ρ=3$ εἶναι $α=\frac{3}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$· διὰ $ρ=5$, εἶναι $α=\frac{5}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$· διὰ $ρ=4$ εἶναι $α=2\sqrt{2+\sqrt{2}}$· διὰ $ρ=8$ εἶναι

$$α=4\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

422. ***Ἡ πλευρὰ ἰσοπλεύρου τριγώνου περιγεγραμμένου εἰς κύκλον εἶναι διπλασία τῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου.***

Ἔστωσαν ΗΘΙ (σχ. 64) καὶ ΑΓΕ τὸ περιγεγραμμένον καὶ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο ἰσόπλευρα τρίγωνα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ πλευρὰ ΗΘ εἶναι διπλασία τῆς ΑΓ.

Τὰ τρίγωνα ΗΘΙ καὶ ΑΓΕ εἶναι ὅμοια, ἑπομένως ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος των ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀποστημάτων των ἢ τῶν πλευρῶν των, ἤτοι ἔχομεν



Σχ. 64.

$$\frac{(ΗΘΙ)}{(ΑΓΕ)}=\frac{ΗΘ}{ΑΓ}=\frac{ΟΒ}{ΟΝ} \quad (1)$$

ἀλλὰ ΟΒ=ϱ, τὸ δὲ ΟΝ εἶναι τὸ ἀπόστημα ἰσοπλεύρου τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ πλευρᾶς κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἤτοι μὲ $\frac{ϱ}{2}$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$\frac{ΗΘ}{ΑΓ}=\frac{ϱ}{ϱ/2} \quad ἢ \quad \frac{ΗΘ}{ΑΓ}=2$$

ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ΗΘ=2.ΑΓ.

433. Ἐὰν συνδέσωμεν δι' εὐθειῶν τὰς ἐναλλὰξ κορυφὰς κανονικοῦ δεκαγώνου σχηματίζομεν κανονικὸν πεντάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

Διότι αἱ πλευραὶ τοῦ σχηματιζομένου πενταγώνου εἶναι ἴσαι, ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ κανονικὸν δεκάγωνον κύκλου· ἐπειδὴ δὲ τὸ πεντάγωνον αὐτὸ ἔχει ἴσας τὰς πλευράς του καὶ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, εἰς τὸν ὁποῖον εἶναι καὶ τὸ κανονικὸν δεκάγωνον, ἕπεται, ὅτι εἶναι κανονικὸν (Γεωμ. Σακελλ. Θεώρημα 152).

424. Ἐὰν διχοτομήσωμεν τὰ τόξα τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς πλευρὰς ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν κανονικὸν εἰκοσάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ὁμοίως προχωροῦντας δυνάμεθα νὰ σχηματίζωμεν ἐγγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον μὲ 40, 80, ... πλευράς.

Διότι αἱ πλευραὶ τοῦ σχηματιζομένου εἰκοσαγώνου εἶναι χορδαὶ ἴσων τόξων, καθ' ὅσον καθεμία ἀντιστοιχεῖ εἰς τόξον ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{20}$ τῆς περιφερείας· ἀφοῦ δὲ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον εἶναι κανονικόν. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ ἄλλα πολύγωνα.

425. Ἂν α παριστάνῃ τὸ ἀπόστημα, ϱ τὴν ἀκτῖνα, Α τὴν γωνίαν καὶ Γ τὴν κεντρικὴν γωνίαν ἑνὸς ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, νὰ δειχθῇ ὅτι :

α') εἰς ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον τρίγωνον· εἶναι $α=ϱ/2$, $Α=60^\circ$, $Γ=120^\circ$.

β') εἰς ἐγγεγραμένον τετράγωνον εἶναι $2\alpha=\rho\sqrt{2}$,
$A=90^\circ$, $\Gamma=90^\circ$.

γ') εἰς ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον εἶναι $2\alpha=\rho\sqrt{3}$,
$A=120^\circ$, $\Gamma=60^\circ$.

δ') εἰς ἐγγεγραμμένον κανονικὸν δεκάγωνον εἶναι

$$4\alpha=\rho\sqrt{10+2\sqrt{5}} \quad A=144^\circ, \quad \Gamma=36^\circ.$$

Διὰ κάθε κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς εἶναι λ καὶ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν του ν ἔχομεν τὰς σχέσεις

$$\alpha=\frac{\sqrt{4\rho^2-\lambda^2}}{2} \text{ (ἄσκησις 414)}, \quad \Gamma=\frac{4}{\nu} \text{ ὀρθ. (ἄσκησις 400)},$$
$$A+\Gamma=2 \text{ ὀρθ. (ἄσκησις 402)}.$$

α') εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι $\lambda=\rho\sqrt{3}$ καὶ $\nu=3$, ἑπομένως ἐκ τῶν τύπων τούτων ἔχομεν

$$\alpha=\frac{\sqrt{4\rho^2-3\rho^2}}{2}=\frac{1}{2}\rho, \quad \Gamma=\frac{4}{3} \text{ ὀρθ.} =\frac{360^\circ}{3}=120^\circ \text{ καὶ}$$
$$A=180^\circ-120^\circ=60^\circ.$$

β') Διὰ τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον, ὅπου $\lambda=\rho\sqrt{2}$ καὶ $\nu=4$ ἔχομεν $\alpha=\frac{\sqrt{4\rho^2-2\rho^2}}{2}=\frac{\rho}{2}\sqrt{2}$, ἢ $2\alpha=\rho\sqrt{2}$.

$$\Gamma=\frac{4}{4}=1 \text{ ὀρθ.}=90^\circ \quad \text{καὶ} \quad A=180^\circ-90^\circ=90^\circ.$$

γ'.) Διὰ τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον, ὅπου $\lambda=\rho$ καὶ $\nu=6$ ἔχομεν

$$\alpha=\frac{\sqrt{4\rho^2-\rho^2}}{2}=\frac{\rho\sqrt{3}}{2} \quad \text{ἢ} \quad 2\alpha=\rho\sqrt{3}.$$

$$\Gamma=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \text{ ὀρθ.}=60^\circ, \quad A=180-60=120^\circ.$$

δ') Διὰ τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν δεκάγωνον, ὅπου

$$\lambda=\frac{\rho}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) \quad \text{καὶ} \quad \nu=10 \quad \text{ἔχομεν}$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{4\rho^2-\frac{\rho^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2}=$$

$$\frac{\rho}{4}\sqrt{16-(\sqrt{5}-1)^2}=\frac{\rho}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

καὶ $$4\alpha=\varrho\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,.$$

$$\Gamma=\frac{4}{10}\text{ ὀρθ.}=\frac{360^\circ}{10}=36^\circ \quad \text{καὶ} \quad A=180^\circ-36^\circ=144^\circ.$$

426. ***Τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου.***

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ δ τὴν πλευρὰν τοῦ δεκαγώνου μὲ λ τοῦ πενταγώνου καὶ μὲ ϱ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, θὰ δείξωμεν ὅτι

$$\lambda^2=\varrho^2+\delta^2.$$

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ πλευρὰ δ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\delta=\frac{\varrho}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) \qquad (1)$$

Ἀλλὰ ἡ πλευρὰ δ τοῦ δεκαγώνου δίδεται συναρτήσει τῆς πλευρᾶς λ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου καὶ ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\delta=\sqrt{2\varrho\left(\varrho-\sqrt{\varrho^2-\frac{\lambda^2}{4}}\right)} \qquad (2) \qquad \text{(Προβ. § 164 Γεωμ. Σακελλ.)}$$

Ὑψοῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἔχομεν

$$\delta^2=2\varrho^2-2\varrho\sqrt{\varrho^2-\frac{\lambda^2}{4}}, \quad \text{ἢ} \quad 2\varrho\sqrt{\varrho^2-\frac{\lambda^2}{4}}=2\varrho^2-\delta^2$$

ὑψοῦμεν πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ λαμβάνομεν

$$4\varrho^2\left(\varrho^2-\frac{\lambda^2}{4}\right)=4\varrho^4+\delta^4-4\varrho^2\delta^2 \quad \text{ἢ} \quad 4\varrho^4-\varrho^2\lambda^2=4\varrho^4+\delta^4-4\varrho^2\delta^2,$$

ἢ
$$\varrho^2\lambda^2=4\varrho^2\delta^2-\delta^4$$

ἢ ἕνεκα τῆς (1) $$\varrho^2\lambda^2=\varrho^4(\sqrt{5}-1)^2-\frac{\varrho^4}{16}(\sqrt{5}-1)^4$$

ἢ
$$\lambda^2=\varrho^2(\sqrt{5}-1)^2-\frac{\varrho^2}{16}(\sqrt{5}-1)^4$$

ἢ $$\lambda^2=\frac{\varrho^2(\sqrt{5}-1)^2}{16}\left[16-(\sqrt{5}-1)^2\right]=\frac{\varrho^2(\sqrt{5}-1)^2}{16}\left[10+2\sqrt{5}\right]$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεων

$$\lambda^2=\frac{40\varrho^2-8\varrho^2\sqrt{5}}{16}=\frac{10\varrho^2-2\varrho^2\sqrt{5}}{4}$$

ἀλλὰ
$$10\varrho^2=4\varrho^2+6\varrho^2$$

ὅθεν $$\lambda^2 = \frac{4\varrho^2}{4} + \frac{6\varrho^2 - 2\varrho^2\sqrt{5}}{4} = \varrho^2 + \frac{6\varrho^2 - 2\varrho^2\sqrt{5}}{4},$$

ἀλλὰ $$6\varrho^2 = 5\varrho^2 + \varrho^2$$

ὅθεν $$\lambda^2 = \varrho^2 + \frac{5\varrho^2 - 2\varrho^2\sqrt{5} + \varrho^2}{4} = \varrho^2 + \frac{\varrho^2(5 - 2\sqrt{5} + 1)}{4}$$

ἀλλὰ $$5 - 2\sqrt{5} + 1 = (\sqrt{5} - 1)^2$$

ὅθεν $$\lambda^2 = \varrho^2 + \frac{\varrho^2(\sqrt{5} - 1)^2}{4}$$

ἤτοι $$\lambda^2 = \varrho^2 + \left[\frac{\varrho(\sqrt{5} - 1)}{2}\right]^2$$

ἢ ἕνεκα τῆς (1) $$\lambda^2 = \varrho^2 + \delta^2$$

427. Ἂ ϱ παριστάνῃ τὴν ἀκτῖνα κύκλου, ἡ πλευρὰ λ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν κανονικοῦ πενταγώνου, ὀκταγώνου, δωδεκαγώνου, εἶναι

$$\frac{\varrho}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad \varrho\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad \varrho\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ δ τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ μὲ λ τοῦ πενταγώνου, τότε θὰ ἔχωμεν

$$\delta = \sqrt{2\varrho\left(\varrho - \sqrt{\varrho^2 - \frac{\lambda^2}{4}}\right)} \quad (1)$$ (Προβ. 163 Γεωμ. Σακελλ. ἐκδ. Δ′)

ἀλλὰ $$\delta = \frac{\varrho}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

ὁπότε ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\frac{\varrho}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) = \sqrt{2\varrho\left(\varrho - \sqrt{\varrho^2 - \frac{\lambda^2}{4}}\right)}$$

Λύοντες ὡς πρὸς λ^2 εὑρίσκομεν

$$\lambda^2 = \frac{10\varrho^2 - 2\varrho^2\sqrt{5}}{4}$$ (ἄσκησις 426)

ἢ $$\lambda^2 = \frac{\varrho^2}{4}\left(10 - 2\sqrt{5}\right)$$

καὶ $$\lambda = \frac{\varrho}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

β′) Ἐὰν λ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, ἡ δ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου. Θὰ εἶναι δὲ

$$\lambda=\varrho\sqrt{2}$$

ὁπότε ὁ τύπος (1) γίνεται

$$\delta=\sqrt{2\varrho\left(\varrho-\sqrt{\varrho^2-\frac{2\varrho^2}{4}}\right)}$$

$$\delta=\sqrt{2\varrho\left(\varrho-\frac{\sqrt{4\varrho^2-2\varrho^2}}{2}\right)}=\sqrt{\frac{2\varrho(2\varrho-\varrho\sqrt{2})}{2}}=\sqrt{\varrho(2\varrho-\varrho\sqrt{2})}=$$

$$=\sqrt{\varrho^2\,.\,(2-\sqrt{2})} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \delta=\varrho\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

γ') Ἔστω λ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον κανονικοῦ ἑξαγώνου, καὶ δ ἡ πλευρὰ τοῦ δωδεκαγώνου.

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν τύπον (1) τὸ λ διὰ τῆς τιμῆς τοῦ λ=ρ λαμβάνομεν

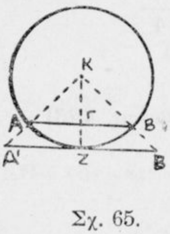
$$\delta=\sqrt{2\varrho\left(\varrho-\sqrt{\varrho^2-\frac{\varrho^2}{4}}\right)}=\sqrt{2\varrho\left(\varrho-\frac{\sqrt{4\varrho^2-\varrho^2}}{2}\right)}=$$

$$\sqrt{\frac{2\varrho(2\varrho\ \sqrt{3\varrho^2})}{2}}=\sqrt{\varrho(2\varrho-\varrho\sqrt{3})}$$

$$\text{ἢ} \qquad \delta=\sqrt{\varrho^2(2-\sqrt{3})} \qquad \text{ἢ} \qquad \delta=\varrho\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

428. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἢ πενταγώνου περιγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος ρ.

Ἔστω ΑΒ ἡ πλευρὰ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον Κ· Ἐάν ἐκ τοῦ μέσου Ζ τοῦ τόξου ΑΒ φέρωμεν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου, τὸ τμῆμα Α'Β' τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς, τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν ἀκτίνων ΟΑ καὶ ΟΒ προεκτεινομένων εἶναι προφανῶς ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν,



Σχ. 65.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΚΑ'Β' καὶ ΚΑΒ εἶναι ὅμοια ἔχομεν

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{KZ}{K\Gamma}$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν

$$A'B' = \frac{AB.KZ}{K\Gamma}$$

Ἀλλὰ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΓΑ ἔχομεν

$$K\Gamma = \sqrt{KA^2 - A\Gamma^2}$$

ὁπότε ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$A'B' = \frac{AB.KZ}{\sqrt{KA^2 - A\Gamma^2}}.$$

Ἂν παραστήσωμεν μὲ ϱ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, μὲ λ τὸ γνωστὸν μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΒ, μὲ λ' τὸ ἄγνωστον μῆκος τῆς πλευρᾶς Α΄Β΄, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$\lambda' = \frac{\lambda.\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - \frac{\lambda^2}{4}}} = \frac{2\lambda\varrho}{\sqrt{4\varrho^2 - \lambda^2}} \qquad (1)$$

α΄) Διὰ τὸ ἑξάγωνον εἶναι $\lambda = AB = \varrho$, ἑπομένως ὁ τύπος (1) δίδει

$$\lambda' = \frac{2\varrho^2}{\sqrt{4\varrho^2 - \varrho^2}} = \frac{2\varrho^2}{\sqrt{3\varrho^2}} = \frac{2\varrho^2}{\varrho\sqrt{3}} = \frac{2\varrho\sqrt{3}}{3}$$

β΄) Διὰ τὸ κανονικὸν πεντάγωνον ἔχομεν

$$\lambda = \frac{\varrho}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

ἑπομένως ὁ τύπος (1) δίδει

$$\lambda' = \frac{2\varrho.\frac{\varrho}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{4\varrho^2 - \left(\frac{\varrho}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^2}} = \frac{\varrho^2\sqrt{10-5\sqrt{5}}}{\sqrt{4\varrho^2 - \frac{\varrho^2}{4}\left(10-2\sqrt{5}\right)}} =$$

$$= \frac{\varrho^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{16\varrho^2 - 10\varrho^2 + 2\varrho^2\sqrt{5}}{4}}} = \frac{\varrho^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\frac{\varrho}{2}\sqrt{6+2\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{2\varrho\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}$$

429. Εὕρετε τὰς πλευρὰς τῶν περιγεγραμμένων εἰς κύκλον ἀκτῖνος ρ κανονικῶν ὀκταγώνου, τριγώνου, δωδεκαγώνου.

α΄) Διὰ τὸ κανονικὸν ὀκτάγωνον ἔχομεν

$$\lambda=\varrho\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad (\text{ἄσκησις } 427)$$

ἑπομένως ὁ τύπος (1) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως δίδει

$$\lambda'=\frac{2\varrho.\varrho\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4\varrho^2-\left(\varrho\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2}}=\frac{2\varrho^2\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4\varrho^2-\varrho^2\left(2-\sqrt{2}\right)}}$$

$$=\frac{2\varrho^2\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2\varrho^2+\varrho^2\sqrt{2}}}=\frac{2\varrho^2\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\varrho\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{2\varrho\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2\varrho\left(\sqrt{2}-1\right)$$

β΄) Διὰ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχομεν

$$\lambda=\varrho\sqrt{3}$$

ἑπομένως ὁ τύπος (1) δίδει

$$\lambda'=\frac{2\varrho.\varrho\sqrt{3}}{\sqrt{4\varrho^2-\left(\varrho\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{2\varrho^2\sqrt{3}}{\sqrt{4\varrho^2-3\varrho^2}}=\frac{2\varrho^2\sqrt{3}}{\varrho}=2\varrho\sqrt{3}$$

γ΄) Διὰ τὸ κανονικὸν δωδεκάγωνον ἔχομεν

$$\lambda=\varrho\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

ἑπομένως ὁ τύπος (1) δίδει

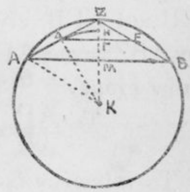
$$\lambda'=\frac{2\varrho.\varrho\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{4\varrho^2-\left(\varrho\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}}=\frac{2\varrho^2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{4\varrho^2-2\varrho^2+\varrho^2\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{2\varrho^2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\varrho\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{2\varrho\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 2\varrho\left(2-\sqrt{3}\right).$$

430. Εὕρετε τὸ ἀπόστημα καὶ τὴν ἀκτῖνα κανονικοῦ πολυγώνου ἔχοντος διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν ἄλλου ἰσοπεριμέτρου πρὸς αὐτὸ καὶ τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ ἀκτὶς καὶ τὸ ἀπόστημα.

Ἔστω ΑΒ (σχ. 66) ἡ πλευρὰ κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον Κ καὶ ΚΜ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ.

Ἐὰν Ζ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΖΒ καὶ Δ καὶ Ε τὰ μέσα τῶν χορδῶν ΖΑ καὶ ΖΒ, τότε $ΔΕ=\frac{ΑΒ}{2}$



Σχ. 66.

ἑπομένως ἡ ΔΕ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπεριμέτρου πολυγώνου πρὸς τὸ δοθέν, τὸ ὁποῖον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν τούτου, καὶ ἐγγράφεται εἰς ὁμόκεντρον κύκλον πρὸς τὸν δοθέντα μὲ ἀκτῖνα τὴν ΚΔ· ἔχει δὲ τοῦτο διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν τοῦ δοθέντος, διότι ἡ κεντρική του γωνία ΔΚΕ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς κεντρικῆς γωνίας ΑΚΒ.

Ἐὰν φέρωμεν τὸ ἀπόστημα ΚΓ, καὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΔ τοῦ νέου πολυγώνου θὰ ἔχωμεν

$$ΚΓ=ΚΜ+ΜΓ \qquad (1)$$

καὶ

$$ΚΓ=ΚΖ-ΓΖ \qquad (2)$$

ἀλλὰ $ΜΓ=ΓΖ$, διότι ἡ ΔΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΜ καὶ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς ΑΖ, ἄρα θὰ διχοτομῇ καὶ τὴν ΜΖ, ὁπότε ἡ (2) γίνεται

$$ΚΓ=ΚΖ-ΜΓ \qquad (3)$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (3) ἔχομεν

$$2ΚΓ=ΚΜ+ΚΖ$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν

$$ΚΓ=\frac{ΚΜ+ΚΖ}{2} \qquad (4)$$

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΔΖ ἔχομεν

$$ΚΔ^2=ΚΖ.ΚΓ$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς αὐτὴν τὸ ΚΓ διὰ τοῦ ἴσου του ἔχομεν

$$K\Delta^2 = KZ.\frac{KM+KZ}{2} = \frac{KZ.KM+KZ^2}{2}$$

$$K\Delta = \sqrt{\frac{KZ.KM+KZ^2}{2}}$$

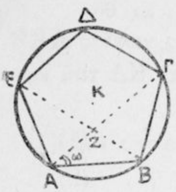
431. Δύο διαγώνιοι πενταγώνου κανονικοῦ, μὴ διερχόμεναι διὰ τῆς αὐτῆς κορυφῆς αὐτοῦ, διαιροῦνται εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Ἔστω ΑΒΓΔΕ (σχ. 67) τὸ κανονικὸν πεντάγωνον καὶ ΑΓ, ΒΕ δύο διαγώνιοι αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Θὰ δείξωμεν ὅτι $(Z\Gamma)^2 = (A\Gamma).(AZ)$.

Περιγράφομεν περὶ τὸ κανονικὸν πεντάγωνον κύκλον· τὰ τρίγωνα ΑΖΒ καὶ ΑΓΒ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὴν γωνίαν ω κοινὴν καὶ γων ΑΒΖ=γων ΑΓΒ, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς ἴσα τόξα· ἐκ τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{AB}{AZ} \quad \text{ἢ} \quad (AB)^2 = (A\Gamma)(AZ) \qquad (1)$$

Τὸ τρίγωνον ὅμως ΒΖΓ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἡ γων ΖΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ βαίνει εἰς τόξον ΕΔΓ ἴσον πρὸς $\frac{2}{5}$ τῆς περιφερείας, ἄρα τὸ μέτρον της ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{5}$ τῆς περιφερείας, ἡ δὲ γωνία ΒΖΓ, ὡς ἔχουσα τὴν κορυφὴν ἐντὸς τοῦ κύκλου ἔχει μέτρον τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τόξων ΑΕ καὶ ΒΓ, τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται μεταξὺ τῶν πλευρῶν της, ἤτοι ἔχει καὶ αὕτη μέτρον ἴσον πρὸς $\frac{1}{5}$ τῆς περιφερείας, ἐπομένως



Σχ. 67.

αἱ δύο αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἄρα καὶ ΒΓ=ΖΓ· ἀλλὰ ΒΓ=ΑΒ ὡς πλευραὶ κανονικοῦ πολυγώνου, ὅθεν καὶ ΑΒ=ΖΓ ἐπομένως ἡ (1) γίνεται

$$(Z\Gamma)^2 = (A\Gamma)(AZ)$$

432. Ἐὰν δύο διαγώνιοι κανονικοῦ πενταγώνου τέμνωνται τὸ μεγαλύτερον μέρος ἑκάστης ἰσοῦται μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου.

Ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν τὸ τρίγωνον ΒΖΓ εἶναι ἰσοσκελές, ἄρα θὰ εἶναι

ΖΓ=ΓΒ=πλευρὰν πενταγώνου.

433. Ἐὰν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου εἶναι 6, 9, 12μ. νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν ὑψῶν του, τῶν διαμέσων του, τῶν

διχοτόμων του, τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του.

Ἔστω $\alpha=6$, $\beta=9$, $\gamma=12$. Ἐὰν μὲ υ_α, υ_β, υ_γ παραστήσωμεν τὰ ὕψη τὰ ἀντισχοιχοῦντα εἰς τὰς πλευρὰς α, β, γ, ἔχομεν τοὺς τύπους

$$\upsilon_\alpha=\frac{2}{\alpha}\sqrt{\sigma(\sigma-\alpha)(\sigma-\beta)(\sigma-\gamma)} \qquad \upsilon_\beta=\frac{2}{\beta}\sqrt{\sigma(\sigma-\alpha)(\sigma-\beta)(\sigma-\gamma)}$$

$$\upsilon_\gamma=\frac{2}{\gamma}\sqrt{\sigma(\sigma-\alpha)(\sigma-\beta)(\sigma-\gamma)}$$

ἐνταῦθα $\sigma=13{,}5$, $\sigma-\alpha=7{,}5$ $\sigma-\beta=4{,}5$ $\sigma-\gamma=1{,}5$ ἑπομένως

$$\sqrt{\sigma(\sigma-\alpha)(\sigma-\beta)(\sigma-\gamma)}=\sqrt{\frac{135.75.45.15}{10000}}=\frac{675}{100}\sqrt{15}$$

ὅθεν
$$\upsilon_\alpha=\frac{2.675}{6.100}\sqrt{15}=\frac{9}{4}\sqrt{15},=8{,}615$$

$$\upsilon_\beta=\frac{3}{2}\sqrt{15}=5{,}743 \quad \text{καὶ} \quad \upsilon_\gamma=\frac{9}{8}\sqrt{15}=4{,}037$$

β') Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ μ_α, μ_β, μ_γ τὰς διαμέσους ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς πλευρὰς α, β, γ θὰ ἔχωμεν

$$\mu_\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2(\gamma^2+\beta^2)-\alpha^2}$$

$$\mu_\beta=\frac{1}{2}\sqrt{2(\gamma^2+\alpha^2)-\beta^2}$$

$$\mu_\gamma=\frac{1}{2}\sqrt{2(\alpha^2+\beta^2)-\gamma^2}$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\mu_\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{614}=12{,}39 \quad \mu_\beta=\frac{1}{2}\sqrt{279}=8{,}216, \quad \mu_\gamma=\frac{1}{2}\sqrt{90}=4{,}343$$

γ') Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ δ_α, δ_β, δ_γ τὰς διχοτόμους κατὰ σειρὰν τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ θὰ ἔχωμεν

$$\delta_\alpha=\frac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\beta\gamma\sigma(\sigma-\alpha)}$$

$$\delta_\beta=\frac{2}{\alpha+\gamma}\sqrt{\alpha\gamma\sigma(\sigma-\beta)}$$

$$\delta_\gamma=\frac{2}{\alpha+\delta}\sqrt{\alpha\beta\sigma(\sigma-\gamma)}$$

Ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν

$$\delta_\alpha=\frac{2}{21}\sqrt{9.12.13{,}5.7{,}5}=\frac{18}{7}\sqrt{15}=9{,}846 \quad \delta_\beta=3\sqrt{6}=7{,}347$$

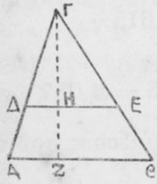
$$\delta_\gamma=\frac{9}{5}\sqrt{6}=4{,}408$$

δ΄) Ἐὰν ϱ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγγεγραμμένου κύκλου, ἔχομεν

$$\varrho = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\sqrt{\sigma(\sigma-\alpha)(\sigma-\beta)(\sigma-\gamma)}} = \frac{6.9.12}{4.\dfrac{675}{100}\sqrt{15}} =$$

$$\frac{6.9.12.100\sqrt{15}}{4.675.15} = \frac{8\sqrt{15}}{5} = 6{,}126$$

435. Εὐθεῖά τις ἄγεται παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τέμνουσα τὰς ΑΓ, ΒΓ εἰς τὰ Δ, Ε. Ἐὰν ΑΔ:ΔΓ=2:3 καὶ ΑΒ=20 μ., εὕρετε τὴν ΔΕ.



Σχ. 68.

Ἐκ τῆς δοθείσης ἀναλογίας $\frac{ΑΔ}{ΔΓ} = \frac{2}{3}$ ἔχομεν

$$\frac{ΑΔ+ΔΓ}{ΔΓ} = \frac{2+3}{3} \quad \text{ἢ} \quad \frac{ΑΓ}{ΔΓ} = \frac{5}{3}.$$

Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΓ εἶναι ὅμοια, ἐπομένως ἔχομεν

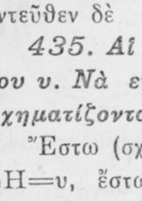
$$\frac{ΑΓ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ}{ΔΕ} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{ΑΒ}{ΔΕ} = \frac{5}{3}$$

ἢ $$\frac{20}{ΔΕ} = \frac{5}{3}.$$

ἐντεῦθεν δὲ $ΔΕ = 12μ.$

435. Αἱ βάσεις τραπεζίου ἔχουν μήκη α καὶ β, τὸ δὲ ὕψος του υ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ἑκάστου τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα σχηματίζονται, ὅταν προεκταθοῦν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραί του.

Ἔστω (σχ.69) ΑΒΓΔ τὸ δοθὲν τραπέζιον, ὅπου ΑΔ=α, ΒΓ=β καὶ ΖΗ=υ, ἔστω δὲ Ε ἡ τομὴ τῶν μὴ παραλλήλων αὐτοῦ πλευρῶν καὶ ΕΗ ἡ ἐκ τοῦ σημείου τούτου κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις.



Σχ. 69.

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΕΑΔ καὶ ΕΒΓ ἔχομεν

$$\frac{ΕΑ}{ΕΒ} = \frac{ΑΔ}{ΒΓ} = \frac{\alpha}{\beta}$$

ἀλλὰ καὶ ἐκ τῶν τριγώνων ΕΑΖ καὶ ΕΒΗ ἔχομεν

$$\frac{ΕΑ}{ΕΒ} = \frac{ΕΖ}{ΕΗ} \quad \text{ὅθεν καὶ} \quad \frac{ΕΖ}{ΕΗ} = \frac{\alpha}{\beta}$$

ἐκ ταύτης λαμβάνομεν

$$\frac{ΕΖ}{ΕΗ-ΕΖ} = \frac{\alpha}{\beta-\alpha} \quad \text{ἢ} \quad \frac{ΕΖ}{ΖΗ} = \frac{\alpha}{\beta-\alpha}$$

ἢ $$\frac{ΕΖ}{\upsilon} = \frac{\alpha}{\beta-\alpha} \quad \text{καὶ} \quad ΕΖ = \frac{\alpha\upsilon}{\beta-\alpha},$$ ἐπομένως

$$EH = \upsilon + \frac{\alpha\upsilon}{\beta-\alpha} = \frac{\beta\upsilon - \alpha\upsilon + \alpha\upsilon}{\beta-\alpha}$$

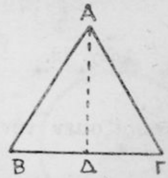
ἤτοι $$EH = \frac{\beta\upsilon}{\beta-\alpha}.$$

436. ***Ἐὰν α εἶναι ἡ πλευρὰ ἰσοπλεύρου τριγώνου, νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος του· ἂν υ εἶναι τὸ ὕψος του, πόση εἶναι ἡ πλευρά του ;***

Ἔστω ΑΒΓ (σχ.70) τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ ΑΔ τὸ ὕψος του.

Ἀπὸ τό ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΓ ἔχομεν

$$A\Delta^2 = A\Gamma^2 - \Delta\Gamma^2$$
$$= \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} \quad \left(\text{διότι } \Delta\Gamma = \frac{\alpha}{2}\right)$$
$$= \frac{3\alpha^2}{4}$$



Σχ. 70.

ὅθεν $$\upsilon = A\Delta = \frac{\alpha}{2}\sqrt{3} \qquad (1)$$

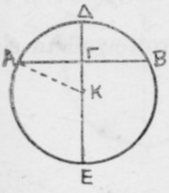
Ἐὰν δοθῇ τὸ ὕψος ΑΔ=υ, θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς (1)

$$2\upsilon = \alpha\sqrt{3} \qquad \text{καὶ} \qquad \alpha = \frac{2\upsilon}{\sqrt{3}} = \frac{2\upsilon\sqrt{3}}{3}$$

437. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς μακροτέρας καὶ τῆς βραχυτέρας χορδῆς, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ ἀχθοῦν ἀπὸ σημεῖον ἀπέχον 0,06μ. ἀπὸ τοῦ κέντρου κύκλου ἀκτῖνος 0,10μ.***

Ἡ μεγαλυτέρα χορδὴ εἶναι ἡ διάμετρος ΕΔ ἡ διερχομένη διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Γ· ἀφοῦ λοιπὸν ἡ ἀκτὶς εἶναι 0,10μ., ἡ διάμετρος θὰ εἶναι 0,20μ.

Ἡ βραχυτέρα χορδὴ ἡ διερχομένη διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Γ εἶναι ἡ κάθετος ΑΒ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΔΕ τὴν διερχομένην διὰ τοῦ Γ (ἄσκησις 158)· διότι ἀφοῦ ἡ ἀπόστασις ΚΓ τοῦ Γ ἀπὸ τοῦ κέντρου εἶναι 0,06μ. δηλ. μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος τὸ Γ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου. Ἐὰν ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΚΑ, ἐκ τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΚΓ ἔχομεν



Σχ. 71.

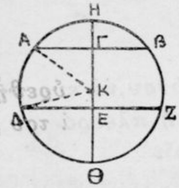
$$A\Gamma^2 = AK^2 - K\Gamma^2$$
$$= 0{,}10^2 - 0{,}06^2 = 0{,}01 - 0{,}0036 = 0{,}0064$$

καὶ $$A\Gamma = \sqrt{0{,}0064} = 0{,}08$$

ἑπομένως $$AB = 2.0{,}08 = 0{,}16 \text{ μ.}$$

438. ***Ἡ ἀπόστασις χορδῆς 0,10 ἀπὸ τοῦ κέντρου εἶναι 0,12μ.. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ κέντρου χορδῆς 0,24μ.***

Ἔστω ὅτι χορδὴ $AB=0,10$ (σχ. 72) καὶ χορδὴ $\Delta Z=0,24$μ. καὶ $K\Gamma=0,12$.



Σχ. 72.

Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΔ καὶ τὰς ἀποστάσεις ΚΓ, ΚΕ τῶν χορδῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΓΑ ἔχομεν

$$KA^2=K\Gamma^2+A\Gamma^2$$
$$=0,12^2+0,05^2$$
$$=0,0169$$

ὅθεν $KA=\sqrt{0,0169}=0,13.$

ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΕΔ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν $K\Delta=0,13$, $\Delta E=\frac{\Delta Z}{2}=0,12$μ. ἔχομεν

$$KE^2=K\Delta^2-\Delta E^2$$
$$=0,13^2-0,12^2$$
$$=0,0025$$

ὅθεν $KE=\sqrt{0,0025}=0,05.$

439. Αἱ πλευραὶ τριγώνου εἶναι 407 δ., 368 δ., 351 δ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του καὶ τὰ τρία ὕψη του.

Ἐὰν $\alpha=407$ δ. $\beta=368$ δ. καὶ $\gamma=351$δ. καὶ δ_α, δ_β, δ_γ, αἱ διχοτόμοι κατὰ σειρὰν τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ ἔχομεν

$$\delta_\alpha=\frac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\beta\gamma\sigma(\sigma-\alpha)}=\frac{2}{719}\sqrt{368.351.563.156}=266,27\ldots\text{ δ.}$$

$$\delta_\beta=\frac{2}{\alpha+\gamma}\sqrt{\alpha\gamma\sigma(\sigma-\beta)}=\frac{2}{758}\sqrt{407.351.563.195}=330,43\ldots\text{ δ.}$$

$$\delta_\gamma=\frac{2}{\alpha+\beta}\sqrt{\alpha\beta\sigma(\sigma-\gamma)}=\frac{2}{775}\sqrt{407.368.563.212}=345,84\ldots\text{ δ.}$$

Ἐὰν υ_α, υ_β, υ_γ εἶναι κατὰ σειρὰν τὰ ὕψη τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς πλευρὰς α, β, γ ἔχομεν

$$\upsilon_\alpha=\frac{2}{\alpha}\sqrt{\sigma(\sigma-\alpha)(\sigma-\beta)(\sigma-\gamma)}=$$
$$\frac{2}{407}\sqrt{563.156.195.212}=292,71\ldots\text{δ.}$$

$$\upsilon_\beta=\frac{2}{\beta}\sqrt{\sigma(\sigma-\alpha)(\sigma-\beta)(\sigma-\gamma)}=$$
$$\frac{2}{368}\sqrt{563.156.195.212}=323,74\ldots\text{δ.}$$

$$\upsilon_\gamma = \frac{2}{\gamma}\sqrt{\sigma(\sigma-\alpha)(\sigma-\beta)(\sigma-\gamma)} =$$

$$\frac{2}{351}\sqrt{563.156.165.212} = 339{,}5....\delta.$$

440. ***Ἀπὸ ἄκρον ἐφαπτομένης κύκλου μήκους 0,20 μ. ἄγεται τέμνουσά του διὰ τοῦ κέντρου του. Ἐὰν τὸ ἐκτὸς μέρος τῆς τεμνούσης εἶναι 0,8μ. νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτίς.***

Ἔστω ΑΒ (σχ. 73) ἡ ἐφαπτομένη καὶ ΒΓΔ ἡ τέμνουσα. Ἐπειδὴ ἡ ἐφαπτομένη ΑΒ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς τεμνούσης ΒΔ καὶ τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρους αὐτῆς ΒΓ ἔχομεν

$$AB^2 = B\Delta\, B\Gamma$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν

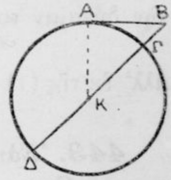
$$B\Delta = \frac{AB^2}{B\Gamma} = \frac{0{,}20^2}{0{,}08} = \frac{0{,}04}{0{,}08} = 0{,}5.$$

Ἀλλὰ $B\Delta = B\Gamma + \Gamma\Delta$

ἢ $0{,}5 = 0{,}08 + \Gamma\Delta$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν

$\Gamma\Delta = 0{,}42$ ὁπότε ἀκτὶς $K\Delta = 0{,}21$.



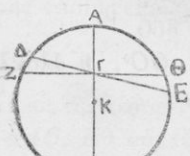
Σχ. 73.

441. ***Ἡ ἀκτὶς κύκλου εἶναι 13μ.· ἀπὸ σημεῖον ἀπέχον 5μ. ἀπὸ τὸ κέντρον ἄγεται χορδή τις· πόσον εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων τῆς χορδῆς; πόσον τὸ μῆκος τῆς μικροτέρας χορδῆς, ἥτις ἄγεται διὰ τοῦ σημείου τούτου;***

Ἔστω ΑΒ (σχ. 74) ἡ διάμετρος ἡ διερχομένη διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Γ· ἐπειδὴ ΚΓ=5μ. ἕπεται ὅτι

$B\Gamma = 13+5 = 18$ καὶ $\Gamma A = 13-5 = 8\mu.$

Φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΕΓΔ διερχομένην διὰ τοῦ Γ.



Σχ. 74.

Ἐπειδὴ αἱ ΕΔ καὶ ΑΒ τέμνονται ἐντὸς τοῦ κύκλου ἔχομεν

$$(\Gamma\Delta).(\Gamma E) = (\Gamma A)(\Gamma B)$$

ἢ $(\Gamma\Delta)(\Gamma E) = 8.18 = 144.$

Ἡ μικροτέρα χορδὴ ἡ διερχομένη διὰ τοῦ Γ εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΓΒ.

Ἔστω δὲ αὕτη ἡ ΖΓΘ· αὕτη διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς διαμέτρου ΑΒ· ἐκ τῶν τεμνομένων χορδῶν ΖΘ καὶ ΕΔ ἔχομεν

$$(Z\Gamma).(\Gamma\Theta) = (E\Gamma).(\Gamma\Delta)$$

ἀλλὰ $Z\Gamma = \Gamma\Theta$ καὶ $(E\Gamma).(\Gamma\Delta) = 144$

ἄρα θὰ εἶναι

$$(\mathrm{Z\Gamma})^2=144$$

καὶ $\mathrm{Z\Gamma}=12$ ὁπότε ἡ $\mathrm{Z\Theta}=2.\mathrm{Z\Gamma}=24.$

442. ***Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον κανονικοῦ πολυγώνου αὐξάνεται ἀπεριορίστως, τὸ τετράγωνον τοῦ ἀποστήματος του ἔχει ὅριον τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος του.***

Ἐὰν Θ εἶναι τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καὶ ρ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ, τότε

ὅρ. Θ=ρ (1) (Δ. 178 Γεωμ. Σακελλ. ἔκδοσις Δ')

ἐπειδὴ ὅμως τὸ ὅριον δυνάμεως μεταβλητῆς ἐχούσης ὅριον ἰσοῦται μὲ τὴν δύναμιν τοῦ ὁρίου, ἔπεται ὅτι

$$\text{ὅρ}(\Theta^2)=(\text{ὅρ}\Theta)^2 \qquad (2)$$

ἀλλ' ἐκ τῆς (1) ἡ (2) γίνεται

$$\text{ὅρ}(\Theta^2)=\rho^2$$

443. ***Ἐὰν ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας, τὸ τόξον 1° ἔχει μῆκος $\frac{2\pi\rho}{360}$, καὶ τόξον μ° ἔχει μῆκος $\frac{2\pi\rho}{360}$ μ.***

Ἂν x παριστάνῃ τὸ μῆκος τοῦ τόξου εἰς μέτρα, καὶ Γ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, ἐπειδὴ τὰ τόξα εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀντιστοίχων ἐπικέντρων γωνιῶν θὰ ἔχωμεν

$$\frac{x}{\Gamma}=\frac{1}{360} \quad \text{ἢ} \quad x=\frac{\Gamma}{360},$$

ἀλλὰ $\Gamma=2\pi\rho$ ὅθεν $x=\frac{2\pi\rho}{360}.$

Δι' ὅμοιον λόγον ἂν y παριστᾷ τὸ μῆκος τοῦ τόξου μ° εἰς μέρη ἀκτῖνος εἶναι

$$\frac{y}{\Gamma}=\frac{\mu}{360} \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{\mu\Gamma}{360} \quad \text{ἢ} \quad y=\frac{2\pi\rho}{360}\,\mu.$$

443. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοξου 25°, 45°, 60°, ἢ ὁλοκλήρου τῆς περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος 1μ. ἢ 1,4μ.***

Κατὰ τὸν προηγούμενον τύπον, διὰ ρ=1 ἔχομεν

$$\text{μῆκος τόξου } 25^0=\frac{2\pi\rho.25}{360}=\frac{2\pi.1.25}{360}=\frac{\pi}{7,2}=0,43\mu.$$

$$\text{μῆκος τόξου } 45^0=\frac{2\pi\rho.45}{360}=\frac{2\pi.145}{360}=\frac{\pi}{4}=0,785\mu.$$

$$\text{μῆκος τόξου } 60^0=\frac{2\pi\rho.60}{360}=\frac{2\pi.1.60}{360}=1,047\mu.$$

μῆκος ὁλοκλήρου περιφερ. $=2\pi\rho=2.\pi.1=6,28$ μ.

Διὰ ρ=1,4 ἔχομεν

μῆκος τόξου $25^0 = \frac{2\pi.1,4.25}{360} = 0,61\mu.$

μῆκος τόξου $45^0 = \frac{2\pi.1,4.45}{360} = 1,099\mu.$

μῆκος τόξου $60^0 = \frac{2\pi.1,4.60}{360} = 1,465\mu.$

μῆκος περιφερείας $= 2\pi\varrho. = 2\pi.1,4 = 8,792\mu.$

444. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τόξου 20° 15′ 40″ καὶ ὁλοκλήρου τῆς περιφερείας ἀκτῖνος 3μ.

Τρέποντες τὸν συμμιγῆ εἰς κλάσμα τῆς μοίρας ἔχομεν

$$20^0\ 15'\ 40'' = \frac{3647^0}{180}$$

ἑπομένως ἔχομεν

μῆκος τόξου $20^0\ 15'\ 40'' = \frac{2\pi.3}{360} \cdot \frac{3647}{180} = 1,06$

μῆκος περιφερείας $= 2\pi.3 = 18,84\ \mu.$

445. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς κύκλου, ἂν τόξον αὐτῆς 20° 45′ ἔχει μῆκος 146μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ὁλοκλήρου τῆς περιφερείας.

Ἐπειδὴ $20^0\ 45' = \frac{83^0}{4}$ θὰ ἔχωμεν

μῆκος τόξου $= \frac{2\pi\varrho}{360} \cdot \frac{83}{4}$

ἢ $146 = \frac{2\pi\varrho.83}{360.4}$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$$\varrho = \frac{146.360.4}{2\pi.83} = 154,70\mu.$$

τὸ μῆκος τῆς περιφερείας εἶναι $2\pi\varrho = 2.\pi.154,70 = 971,8\mu.$

446. Νὰ εὑρεθῇ πόσον μοιρῶν εἶναι τόξον μήκους 3,47μ. ἂν ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ εἶναι 2 μ.

Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας εἶναι $2\pi\varrho = 2.3,14.2 = 12,56\mu.$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὰς μοίρας τοῦ τόξου θὰ ἔχωμεν

$$\frac{x}{360} = \frac{3,47}{12,56}$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$$x = \frac{360.3,47}{12,56} = 99,4^0 \quad \text{περίπου}$$

447. *"Αν γ εἶναι τὸ μέτρον τόξου, εἰς μέρη ἀκτῖνος, εἶναι δὲ τοῦτο μ μοιρῶν, θὰ ἔχωμεν $\gamma=\frac{\pi}{180}\mu$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ τόξον εἰς μοίρας τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα (δηλ. εἶναι $\gamma=1$).*

Κατὰ τὴν ἄσκησιν 443 ἔχομεν

$$\gamma=\frac{2\pi\rho}{360}\mu.=\frac{\pi\rho}{180}\mu.$$

ἐπειδὴ ἐδῶ τὸ τόξον ἐκφράζεται εἰς μέρη ἀκτῖνος δηλ. ἐπειδὴ εἶναι $\rho=1$, ἔχομεν

$$\gamma=\frac{\pi}{180}\mu.$$

Ἐὰν τὸ τόξον εἶναι x^0 θὰ ἔχωμεν

$$\frac{x^0}{\mu}=\frac{1}{\gamma} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x}{\mu}=\frac{1}{\frac{\pi}{180}\mu.}$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $\quad x=\frac{180}{\pi}$.

448. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπίκεντρος γωνία ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τόξον μήκους 5,85 δακτ. κύκλου ἀκτῖνος 9,45 δ.*

Ἐπειδὴ ἡ ἐπίκεντρος γωνία ἔχει μέτρον τὸ ἀντίστοιχον τόξον, ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ πόσον μοιρῶν εἶναι τοῦτο, ἔστω δὲ τοῦτο x^0· ἐδῶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας εἶναι $\Gamma=2\pi.9{,}45$

ὅθεν $\quad \frac{x}{360}=\frac{5{,}85}{2\pi.9{,}45} \quad$ καὶ $\quad x=\left(\frac{5{,}85.180}{\pi.9{,}45}\right)^0$

ἐὰν ληφθῇ $\pi=3{,}1416$ εἶναι $x=35^0\ 27'\ 16''$ περίπου.

449. *Νὰ εὑρεθῇ περιφέρεια ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων περιφερειῶν.*

Ἔστω x ἡ ἀκτὶς τῆς ζητουμένης περιφερείας καὶ A, α ἀντιστοίχως αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο δοθεισῶν περιφερειῶν· τὰ μήκη τῶν περιφερειῶν αὐτῶν κατὰ σειρὰν εἶναι $2\pi x$, $2\pi A$, $2\pi\alpha$. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν

$$2\pi x=2\pi A\pm2\pi\alpha \quad \text{ἢ} \quad x=A\pm\alpha$$

ἤτοι ἡ περιφέρεια ἡ ἔχουσα ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν δοθεισῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, ἡ δὲ ἔχουσα ἀκτῖνα τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων των ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

450. Εὕρετε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς ἐγγεγραμμένης ἢ περιγεγραμμένης εἰς ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 2,4μ.

α'.) Γνωρίζομεν ὅτι μεταξὺ πλευρᾶς α ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ ἀκτῖνος ρ περιγεγραμμένης περιφερείας ὑπάρχει ἡ σχέσις

$$\alpha=\rho\sqrt{3}$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν

$$\rho=\frac{\alpha}{\sqrt{3}}=\frac{2,4}{\sqrt{3}}=\frac{2,4\sqrt{3}}{3}=1,384\mu.$$

ἑπομένως τὸ μῆκος τῆς περιφερείας Γ θὰ εἶναι

$$\Gamma=2\pi\rho=2.3,14.1,384=8,706.$$

β'.) Ἡ ἀκτὶς x τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἰσοῦται μὲ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους τοῦ τριγώνου (ἄσκησις 208)· τὸ ὕψος τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς α εἶναι (ἄσκ. 436).

$$\upsilon=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{2,4\sqrt{3}}{2}=1,2\sqrt{3}$$

ἑπομένως ἡ ἀκτὶς $\quad x=\frac{1}{3}.\ 1,2\sqrt{3}=0,4\sqrt{3}=0,692\mu.$

τὸ δὲ μῆκος τῆς περιφερείας Γ' εἶναι

$$\Gamma'=2\pi\, x=2.3,14.0,692=4,353\mu.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ μῆκος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας περὶ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι διπλάσιον τοῦ μήκους τῆς ἐγγεγραμμένης· τοῦτο φαίνεται ἄλλως τε καὶ ἐκ τοῦ ὅτι ἡ μὲν ἀκτὶς ρ τῆς περιγεγραμμένης ἰσοῦται μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕψους, ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὕψους τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἤτοι εἶναι $\quad \rho=2x.$

451. Εὕρετε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν καὶ τὰς περιμέτρους κανονικοῦ τριγώνου, ἑξαγώνου, δωδεκαγώνου, πολυγώνου κανονικοῦ μὲ 24, 48, 96....768 πλευρὰς περιγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος 1 καὶ προσδιορίσατε οὕτω τὸ π κατὰ προσέγγισιν.

Ἔστωσαν λ_3, λ_6, λ_{12}.... 7_{768} κατὰ σειρὰν αἱ πλευραὶ τῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων εἰς τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα ἀκτῖνα τὴν μονάδα καὶ λ'_3, λ'_6, λ'_2...,7_{768} αἱ πλευραὶ τῶν περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον περιγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰ προηγούμενα.

Ὡς γνωστὸν $\quad \lambda_3=\sqrt{3}\quad$ καὶ $\quad \lambda_6=1$

ἐκ τοῦ τύπου $\quad \delta=\sqrt{2-\sqrt{4-\lambda^2}}$

ὁ ὁποῖος ἐκ τῆς πλευρᾶς ἐγγεγραμμένου πολυγώνου εἰς κύκλον ἀκτῖνος ἴσης μὲ τὴν μονάδα, δίδει τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ ἔχοντος διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν ἀπὸ ἐκεῖνο ἔχομεν

$$\lambda_{12}=\sqrt{2-\sqrt{3}}\,,$$

$$\lambda_{24}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$\lambda_{48}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{+2\sqrt{3}}}}$$

$$\lambda_{96}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

$$\lambda_{192}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$$

$$\lambda_{384}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}} \quad \text{καὶ}$$

$$\lambda_{768}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}$$

Ἐκ τῶν τιμῶν τούτων, λαμβάνομεν τὰς τιμὰς τῶν πλευρῶν τῶν ἀντιστοίχων περιγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων, ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον

$$\lambda'=\frac{2\varrho\lambda}{\sqrt{4\varrho^2-\lambda^2}}$$

ὅπου λ ἡ πλευρὰ τυχόντος ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου εἰς κύκλον ἀκτῖνος ϱ καὶ λ' ἡ πλευρὰ τοῦ ἀντιστοίχου περιγεγραμμένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον πολυγώνου·
ἐπειδὴ δέ ἐδῶ $\varrho=1$, ὁ ἀνωτέρω τύπος γίνεται

$$\lambda'=\frac{2\lambda}{\sqrt{4-\lambda^2}},$$

οὕτω λοιπὸν ἔχομεν

$$\lambda'_3=2\sqrt{3}\,,$$

$$\lambda'_6=\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\lambda'_{12}=\frac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=2(2-\sqrt{3}\,),$$

$$\lambda'_{24} = \frac{2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = 2(2-2\sqrt{2+\sqrt{3}})(\sqrt{2}+\sqrt{3}),$$

$$\lambda'_{48} = \frac{2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} \qquad \text{κ.ο.κ.}$$

Ὑπολογίζοντες δὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100000}$ καὶ καλοῦντες τὰς περιμέτρους τῶν περιγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων, διὰ σ_3, σ_6, σ_{12}, σ_{24}. . . . σ_{768} λαμβάνομεν

$\lambda'_3 = 3,46410$.	καὶ	$\sigma_3 = 10,39230$. . . .
$\lambda'_6 = 1,15470$.		$\sigma_6 = 6,92820$. . . . .
$\lambda'_{12} = 0,535998$.		$\sigma_{12} = 6,43078$. . . . .
$\lambda'_{24} = 0,263298$.		$\sigma_{24} = 6,31915$. . . . .
$\lambda'_{48} = 0,131087$.		$\sigma_{48} = 6,29218$. . . . .
$\lambda'_{96} = 0,065473$.		$\sigma_{96} = 6,28541$. . . . .
$\lambda'_{384} = 0,016363$.		$\sigma_{384} = 6,283392$. . . .
$\lambda'_{768} = 0,00818129$.		$\sigma_{768} = 6,283231$. . . .

Ἂν λοιπὸν λάβωμεν ὡς προσεγγίζουσαν τιμὴν τῆς περιφερείας τὴν περίμετρον σ_{768} τότε $\pi = \frac{6,283231}{2} = 3,141615$. . . .

ἡ περίμετρος τοῦ ἀντιστοίχου ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι

$$\sigma'_{768} = 6,283169,$$

ἑπομένως $\qquad 6,283169 < 2\pi < 6,283231$

καὶ $\qquad 3,141584\ldots < \pi < 3,141615\ldots\ldots$

ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται ὁ π εἶναι ἴση πρὸς $\frac{31}{1000000}$

ἤτοι ἡ διαφορὰ ἰσοῦται πρὸς $\frac{3}{100000}$ περίπου, ὥστε εἴτε τὴν μίαν τιμὴν εἴτε τὴν ἄλλην λάβωμεν ὡς προσεγγίζουσαν τιμὴν τοῦ π, κάμνομεν λάθος μικρότερον τῶν $\frac{3}{100000}$.

452. Εὕρετε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν καὶ τὰς περιμέτρους ἐγγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων μὲ 4, 8, 16, 32,.... 2048 πλευρὰς κύκλου ἀκτῖνος 1 καὶ εὕρετε οὕτω τὸ π κατὰ προσέγγισιν.

Ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον ἀκτῖνος 1 ἐγγεγραμμένου τετραγώνου ἰσοῦται πρὸς $\sqrt{2}$ ἤτοι $\lambda_4=\sqrt{2}$,

ἐκ ταύτης καὶ τοῦ τύπου $\delta=\sqrt{2-\sqrt{4-\lambda_2}}$

εὑρίσκομεν $\lambda_8=\sqrt{2-\sqrt{2}}$

ἐκ ταύτης καὶ τοῦ ἰδίου τύπου ἔχομεν

$\lambda_{16}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$\lambda_{32}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

ὁ τρόπος, καθ' ὃν ἡ πλευρὰ ἑκάστου πολυγώνου σχηματίζεται ἐκ τῆς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τούτου εἶναι προφανής· οὕτω ἔχομεν

	μῆκος πλευρᾶς	περίμετρος
$\lambda_4=\sqrt{2}$	$=1,41421$.....	5,65685....
$\lambda_8=\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$=0,765365$....	6,12293....
$\lambda_{16}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$=0,39018$.....	6,242888...
$\lambda_{32}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$	$=0,19603$.....	6,27309....
$\lambda_{64}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$	$=0,098135$....	6,28066....
$\lambda_{128}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}$	$=0,049082$....	6,28255...

$$\lambda_{256}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}\ \text{μῆκ.πλευρᾶς} \quad \text{περίμετρ.}$$
$$=0{,}024543\ldots\ldots=6{,}28303\ldots$$

$$\lambda_{512}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}}$$
$$=0{,}01227196\ldots=6{,}28314\ldots$$

$$\lambda_{1024}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}}}$$
$$=0{,}00613591\ldots \quad 6{,}283175\ldots$$

$$\lambda_{2048}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}}}}$$
$$=0{,}00306796\ldots \quad 6{,}28318\ldots$$

Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν ὡς προσεγγίζουσαν τιμὴν τῆς περιφερείας τὴν 6,28318... τότε $\pi=3{,}14159\ldots$

453. Εὕρετε ἐκ τῆς περιμέτρου περιγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων εἰς κύκλον ἀκτῖνος 1 τῶν ἐχόντων 4,8, 16, 32... 2048 πλευρὰς τὸν ἀριθμὸν π κατὰ προσέγγισιν.

Ἔστωσαν λ_4, λ_8, $\lambda_{16}\ldots\lambda_{2048}$ αἱ πλευραὶ τῶν περιγεγραμμένων πολυγώνων τῶν ἐχόντων πλευράς 4, 8,16....2048·

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τιμῶν τῶν πλευρῶν τῶν ἐγγεγραμμένων ἀντιστοίχων πολυγώνων καὶ τοῦ τύπου

$$\lambda'=\frac{2\lambda}{\sqrt{4-\lambda^2}}$$

λαμβάνομεν

$$\lambda'_4=2$$

$$\lambda'_8=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\lambda'_{18}=\frac{2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς· οὕτω λαμβάνομεν

μῆκος πλευρᾶς	περίμετρος
$\lambda_4 \;=2$	8
$\lambda_8 \;=0,8283931\ldots.$	6,627145...
$\lambda_{16} =0,3915746\ldots.$	6,365194...
$\lambda_{32} =0,197139\ldots..$	6,308448...
$\lambda_{64} =0,09825366\ldots$	6,288236 ..
$\lambda_{128} =0,0490977\ldots.$	6,284446 ..
$\lambda_{256} =0,0245445\ldots.$	6,283500...
$\lambda_{512} =0,012272\ldots..$	6,283264...
$\lambda_{1024} -0,0061359\ldots.$	6,283205...
$\lambda_{2048} =0,00306796\ldots$	5,283190 ..

ἂν λάβωμεν ὡς προσεγγίζουσαν τιμὴν τῆς περιφερείας τὴν περίμετρον 6,283190 τότε $\pi=3,141595\ldots$

ΒΙΒΛΙΟΝ IV.

ΕΜΒΑΔΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.

454. ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν ὀρθογωνίου ἔχοντος διαστάσεις 72 μ. καὶ 40μ. πρὸς ἄλλο ἔχον διαστάσεις 18 δ., 14 δ.***

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου ὀρθογωνίου εἶναι $72.48=2880$ τ.μ.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δευτέρου ὀρθογωνίου εἶναι $0,18.0,14=0,0252$τ.μ.

Ἑπομένως ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των θὰ εἶναι

$$\frac{2880}{0,0252}=\frac{28800000}{252}=114285,71.$$

455. ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος ἑνὸς ὀρθογωνίου οἰκοπέδου μὲ διαστάσεις 18,5 καὶ 15,5 μ. πρὸς πλακόστρωτον ὀρθογώνιον ἐπιφάνειαν μὲ διαστάσεις 31 δ. καὶ 18 δ.***

Ὁ ζητούμενος λόγος εἶναι ἴσος μὲ

$$\frac{18,5.15,5}{0,31.0,18}=\frac{2867500}{558}=5138,88.$$

456. ***Ὀρθογώνιον καὶ τετράγωνον ἔχουν ἴσας περιμέτρους 100 μ.· τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι τὸ τέταρτον τῆς βάσεως του. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν.***

Ἂν τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παρασταθῇ μὲ x, ἡ βάσις του θὰ εἶναι 4x καὶ ἐπειδὴ ἡ περίμετρος του εἶναι 100 μετρ. θά ἔχωμεν $10x=100$ ἢ $x=10$· ὥστε τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 10μ. καὶ ἡ βάσις του 40, τὸ δὲ ἐμβαδόν του εἶναι

$$40.10=400 \text{ τ μ.}$$

Ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι $100:4=25$· ἐπομένως τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι $25^2=625$. Ὁ λόγος λοιπὸν τοῦ ἐμβαδῶν των εἶναι

$$\frac{400}{625}=\frac{16}{25}.$$

457. ***Θέλομεν νὰ στρώσωμεν αἴθουσαν σχήματος ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις 4,5 μ. καὶ 3,8μ. διὰ πλακῶν τετραγώνων, ἐχουσῶν πλευρὰν 0,12 μ. Πόσας τοιαύτας πλάκας θὰ χρειασθῶμεν ;***

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι $4,5.3,8=17,50$ μ.· τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου εἶναι $0,12.0,12=0,0144$ τ.μ. Θὰ χρειασθῶμεν λοιπὸν

$$17,10:0,0144=11875 \text{ πλάκας.}$$

458. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, μὲ περίμετρον 14,8μ.*

Ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι 14,8 : 4=3,7μ.· ἑπομένως τὸ ἐμβαδόν του εἶναι 3,7.3,7=13,69 τ.μ.

459. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ βάσις ὀρθογωνίου, ἔχοντος ἐμβαδὸν 34,8 τ.μ. ἂν τὸ ὕψος αὐτοῦ εἶναι 3,2μ.***

Ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 34,8 : 3,2 = 10,875μ.

460. ***Πόσον εἶναι τὸ ὕψος ὀρθογωνίου, ἔχοντος βάσιν 13,04μ. καὶ ἐμβαδὸν 6428 (μ²).***

Τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 6428 : 13,04=492,95 μ. περίπου.

461. ***Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, μὲ πλευρὰν τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ καθέτους πλευρὰς 3,2μ., 2,1μ.***

Ἂν x εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογ. τριγώνου θὰ ἔχωμεν

$$x^2 = 3{,}2^2 + 2{,}1^2 = 14{,}65\cdot$$

ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου εἶναι 14,65 τ. μ.

462. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι τὰ 0,95 τετραγώνου ἔχοντος πλευρὰν 0,25 μ.***

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου εἶναι

$$0{,}25 . 0{,}25 = 0{,}0625 \text{ τ.μ.}$$

ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι

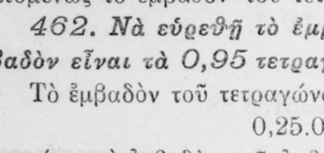
$$0{,}0625 . 0{,}95 = 0{,}059375 \text{ τ.μ.}$$

463. ***Νὰ εὑρεθῇ πλευρὰ τετραγώνου μὲ ἐμβαδὸν 18,0625 (μ²).***

Ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν $\sqrt{18{,}0625} = 4{,}25$μ.

464. ***Παραλληλόγραμμα μὲ ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμα.***

Ἔστω ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ δύο παραλληλόγραμμα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη. Θὰ δείξωμεν ὅτι αὐτὰ εἶναι ἰσοδύναμα.



Σχ. 75.

Θέτομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔ οὕτως, ὥστε αἱ ἴσαι βάσεις των ΕΖ καὶ ΑΒ νὰ ἐφαρμόσουν καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ ΑΒΓΔ· ἐπειδὴ τὰ ὕψη τῶν παραλληλογράμμων εἶναι ἴσα ἡ ΘΗ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΔΓ καὶ ἔστω ὅτι θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν Θ΄Η΄, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον τὴν θέσιν ΑΒΗ΄Θ΄.

Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΑΘ′Δ καὶ ΒΗ′Γ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην δηλ. τὴν ΑΔ=ΒΓ καὶ ΑΘ′=ΒΗ′, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς παραλληγογράμμων καὶ τὴν γωνίαν ΔΑΘ′ ἴσην μὲ τὴν γωνίαν ΓΒΗ′, διότι αἱ πλευραί των εἶναι παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι· ὥστε τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΗΘ′, ἐπειδὴ ἔχουν τὰ τρίγωνα ΑΔΘ′ καὶ ΒΓΗ′ ἴσα καὶ τὸ ΑΒΓΘ′ κοινόν, εἶναι ἰσοδύναμα.

465. ***Δύο παραλληλόγραμμα ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν βάσεων ἐπὶ τὰ ὕψη των.***

Ἔστωσαν Π καὶ Π′ δύο παραλληλόγραμμα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀντιστοίχως βάσεις β, β′ καὶ ὕψη υ, υ′. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{\Pi}{\Pi'}=\frac{\beta.\upsilon}{\beta'.\upsilon'}$.

Τὰ παραλληλόγραμμα Π καὶ Π′ εἶναι ἰσοδύναμα μὲ ὀρθογώνια τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη. Ἀλλά, ὡς γνωρίζομεν, ὁ λόγος δύο ὀρθογωνίων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν διαστάσεών των, ἤτοι μὲ $\frac{\beta.\upsilon}{\beta'.\upsilon}$· ἄρα καὶ τὰ ἰσοδύναμα πρὸς αὐτὰ παραλληλόγραμμα θὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον.

466. ***Παραλληλόγραμμα ἔχοντα ἴσας βάσεις ἢ ἴσα ὕψη ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν ἢ τῶν βάσεων αὐτῶν.***

Ἔστω ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα Π καὶ Π′ ἔχουν ἴσας βάσεις β καὶ διάφορα ὕψη υ καὶ υ′. Θὰ δείξω ὅτι $\frac{\Pi}{\Pi'}=\frac{\upsilon}{\upsilon}$. Διότι κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν ἔχομεν $\frac{\Pi}{\Pi'}=\frac{\beta.\upsilon}{\beta.\upsilon'}=\frac{\upsilon}{\upsilon'}$.

467. ***Τρίγωνα ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμα.***

Τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα μὲ τὰ ἡμίση τῶν παραλληλογράμμων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἀλλὰ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμα· ἄρα καὶ τὰ ἡμίση των θὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

468. ***Τρίγωνα ἔχοντα ἴσας βάσεις ἢ ἴσα ὕψη ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν ἢ τῶν βάσεων αὐτῶν.***

Ἔστωσαν Τ καὶ Τ′ δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν β καὶ ὕψη ἀντιστοίχως υ καὶ υ′· θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{T}{T'}=\frac{\upsilon}{\upsilon'}$.

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν

$$T=\frac{1}{2}\beta.\upsilon \qquad T'=\frac{1}{2}\beta.\upsilon'$$

Διαιροῦντες τὰς ἰσότητας κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\frac{T}{T} = \frac{\upsilon}{\upsilon'}$$

ὁμοίως εὑρίσκομεν
$$\frac{T}{T'} = \frac{\beta}{\beta'}$$

ἂν αἱ βάσεις εἶναι διάφοροι καὶ τὰ ὕψη ἴσα.

469. ***Δύο τρίγωνα ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν βάσεων των ἐπὶ τὰ ὕψη των.***

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ B καὶ υ τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ μὲ β καὶ υ′ τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς ἄλλου τριγώνος αβγ θὰ ἔχωμεν

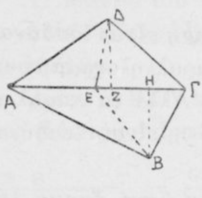
$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\ \text{B}.\upsilon$$

$$(\alpha\beta\gamma) = \frac{1}{2}\ \beta.\upsilon'$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας λαμβάνομεν

$$\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{\text{B}.\upsilon}{\beta.\upsilon'}.$$

470. ***Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ μέσον ἑκάστης τῶν διαγωνίων τετραπλεύρου μὲ τὰς ἀπέναντι κορυφάς του διαιροῦν τὸ τετράπλευρον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.***



Σχ. 76.

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, καὶ Ε τὸ μέσον τῆς διαγωνίου ΑΓ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ ΑΔΕΒ καὶ ΔΕΒΓ εἶναι ἰσοδύναμα.

Πράγματι: τὰ τρίγωνα ΑΕΔ καὶ ΔΕΓ εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἔχουν ἴσας βάσεις ΑΕ καὶ ΕΓ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΔΖ. Ὁμοίως καὶ τὰ τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΕΒΓ εἶναι ἰσοδύναμα διὰ τὸν αὐτὸν λόγον· ἑπομένως τὰ ΑΔΕΒ καὶ ΔΕΒΓ εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἕκαστον αὐτῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα.

471. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ἔχοντος βάσιν 3,4μ. καὶ ἐμβαδὸν 346,8 (μ²).***

Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου $E = \frac{1}{2}\beta.\upsilon$ εὑρίσκομεν

$$\upsilon = \frac{2E}{\beta} \qquad \text{ὥστε} \qquad \upsilon = \frac{2.346,8}{3,4} = 204\ \mu.$$

472. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχοντος ἐμβαδὸν 64,9 (μ²) καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν του 4μ.

Ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ $\frac{2 \times 64,9}{4} = 432,45$ μ.

473. Πόσον τιμᾶται οἰκόπεδον τριγωνικὸν ἔχον βάσιν 24,75 μ. ὕψος τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως, ἂν τὸ μ² τιμᾶται 1470 δρ.

Τὸ ἐμβαδὸν οὗ οἰκοπέδου εἶναι $\frac{25,75 \times 12,375}{2} = 153,140625$ τ.μ.

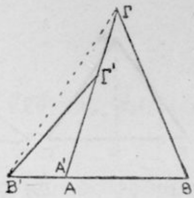
Τὸ οἰκόπεδον τιμᾶται λοιπὸν $1470 \times 153,140625 = 225116,72$ δρχμ.

474. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο τριγώνων τῶν ὁποίων μία γωνία τοῦ ἑνὸς εἶναι παραπληρωματικὴ μιᾶς τοῦ ἄλλου ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν του, αἵτινες περιέχουν τὰς γωνίας ταύτας.

Ἔστω τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς γωνίας Α καὶ Α΄ παραπληρωματικάς· θὰ δείξω ὅτι

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(Α'Β'Γ')} = \frac{(ΑΒ).(ΑΓ)}{(Α'Β')(Α'Γ')}.$$

Φέρομεν τὴν Β΄Γ· τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Β΄ΓΑ΄ ἔχουν ἀντιστοίχως βάσεις τὰς ΑΒ καὶ Α΄Β΄ κειμένας ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας Β΄Β καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, τὴν ἐκ τοῦ Γ κάθετον ἐπὶ τὴν Β΄Β.



Σχ. 77.

Ἑπομένως ὁ λόγος των θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεών των, ἤτοι

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(Β'ΓΑ)} = \frac{(ΑΒ)}{(Α'Β')} \qquad (1)$$

Ὁμοίως τὰ τρίγωνα Β΄ΓΑ΄ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἔχουν βάσεις τὰς ΑΓ καὶ Α΄Γ΄ καὶ ὕψος τὸ αὐτό, τὴν ἐκ τοῦ Β΄ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ· ἑπομένως ὁ λόγος των θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεών των, ἤτοι

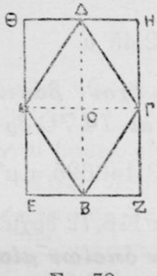
$$\frac{(Β'ΓΑ)}{(Α'Β'Γ')} = \frac{(ΑΓ)}{(Α'Γ')} \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν:

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(Α'Β'Γ')} = \frac{(ΑΒ)(ΑΓ)}{(Α'Β')(Α'Γ')}$$

475. Τὸ ἐμβαδὸν ῥόμβου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν διαγωνίων του.

Ἔστω ὁ ῥόμβος ΑΒΓΔ καὶ ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ. Ἂν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ῥόμβου, θὰ δείξωμεν, ὅτι



Σχ. 78.

$$Ε = \frac{1}{2}.(ΑΓ).(ΒΔ).$$

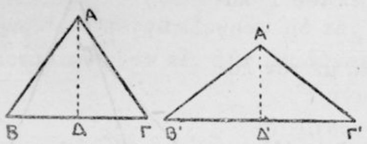
Ἐκ τῶν κορυφῶν Β καὶ Δ καθὼς καὶ ἐκ τῶν Α καὶ Γ φέρομεν παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ. Σχηματίζεται τότε τὸ ὀρθογώνιον ΕΖΗΘ, τὸ ὁποῖον εἶναι διπλάσιον τοῦ ῥόμβου, διότι ἀποτελεῖται ἀπὸ ὀκτὼ ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα ἐνῷ ὁ ῥόμβος ἀπὸ 4. Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ἰσοῦται μὲ

$$(ΕΖ).(ΕΘ) \quad ἢ \quad (ΑΓ).(ΒΔ).$$

Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ῥόμβου θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου, ἤτοι μὲ $\frac{1}{2}$ (ΑΓ)(ΒΔ).

476. Ἐὰν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἔχουν τὰ δύο ἴσας των πλευρὰς ἴσας μεταξύ των καὶ τὸ ὕψος τοῦ ἑνὸς ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως τοῦ ἄλλου, εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἔστωσαν τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ (σχ.79) τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς πλευράς των ΑΒ, ΑΓ, Α΄Β΄, Α΄Γ΄ ἴσας καὶ τὸ ὕψος Α΄Δ΄ ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ ΒΔ τῆς βάσεως ΒΓ· θὰ δείξωμεν ὅτι αὐτὰ εἶναι ἰσοδύναμα.



Σχ. 79.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ καὶ Α΄Β΄Δ΄ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσας, δηλ. τὰς

$$ΑΒ=Α΄Β΄ \quad καὶ \quad ΒΔ=Α΄Δ΄$$

ἐξ ὑποθέσεως. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἰσοδύναμα διότι καθένα ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα.

477. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο τριγώνων ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ ἐχόντων γωνίαν Γ=γων Γ΄ εἶναι 0,45. Πόση εἶναι ἡ Α΄Γ΄, ἂν (ΑΓ)=3,6μ. (ΓΒ)=2,2μ. καὶ (Γ΄Β΄)=0,8(ΑΓ).

Γνωρίζομεν, ὅτι μεταξὺ δύο τριγώνων ποὺ ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην ὑπάρχει ἡ σχέσις

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(Α΄Β΄Γ΄)} = \frac{(ΓΑ)(ΓΒ)}{(Γ΄Α΄)(Γ΄Β΄)}.$$

Ἀντικαθιστῶντες διὰ τῶν γνωστῶν των ἔχομεν

$0,45=\frac{3,6\times 2,2}{(\Gamma'A')\times 0,8\times 3,6}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $(\Gamma'A')=\frac{55}{9}$ μ.

478. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου ἔχοντος βάσεις 8,4 6,2μ. καὶ ὕψος 5,1 μ.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι ἴσον μὲ $\frac{1}{2}(8,4+6,2)\times 5,1=37,23$τμ.

479. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ρόμβου, ἔχοντος μίαν διαγώνιον 30,5μ. τὴν δὲ ἄλλην 0,8 ταύτης.

Ἡ μικροτέρα διαγώνιος εἶναι $0,8\times 30,5=24,40$· ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου εἶναι $\frac{1}{2}.\ 30,5\times 24,40=372,10$ τ.μ.

480. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραπλεύρου, ἂν αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνωνται καθέτως καὶ εἶναι ἡ μία μὲν 18,6μ. ἡ δὲ ἄλλη τὰ 0,9 ταύτης.

Ἡ ἄλλη διαγώνιος εἶναι ἴση μὲ $0,9\times 18,6=16,74$.

Τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς διαγωνίους του καθέτους εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἥμισυ ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει διαστάσεις ἴσας μὲ τὰς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου· ὥστε τὸ ἐμβαδόν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ

$$\frac{1}{2}\ 18,6\times 16,74=155,682 \text{ τ.μ.}$$

481. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος ρόμβου, ἔχοντος ἐμβαδὸν 840(μ²) καὶ μίαν διαγώνιον 12μ.

Ἐκ τοῦ τύπου $E=\frac{\delta_1.\delta_2}{2}$, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ρόμβου, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς διαγωνίους του δ_1 καὶ δ_2, ἂν λύσωμεν ὡς πρὸς δ_1, εὑρίσκομεν

$$\delta_1=\frac{2E}{\delta_1}=\frac{2.840}{12}=140 \text{ μ.}$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΟΓ (Σχ. 78) τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς δύο καθέτους πλευρὰς ΟΔ, καὶ ΟΓ ἴσας μὲ τὰ ἡμίση τῶν διαγωνίων τοῦ ρόμβου ἔχομεν

$$\Delta\Gamma=\sqrt{70^2+6^2}=70,25.$$

Ἐπομένως ἡ περίμετρος τοῦ ρόμβου εἶναι $4\times 70,25=281$ μ. περίπου

482. Τραπεζίου ἰσοσκελοῦς ἡ μία τῶν βάσεων εἶναι 9,6 μ. μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης, τὸ δὲ ὕψος 6,4. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος αὐτοῦ, ἂν ἔχῃ ἐμβαδὸν 840,8 (μ²).

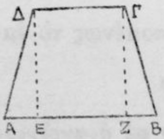
Ἂν μὲ x παραστήσωμεν τὴν μικρὰν βάσιν, ἡ μεγάλη θὰ εἶναι $x+9,5$ μ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι

$$(ΑΒΓΔ)=\frac{(ΑΒ+ΔΓ)}{2}.\ ΔΕ.$$

Ἀντικαθιστῶντες διὰ τῶν γνωστῶν ἔχομεν

$$840,8=\frac{(x+9,51+x)}{2}.\ 6,4.$$

Λύοντες πρὸς x εὑρίσκομεν $x=126,625$· ὥστε ἡ μεγάλη βάσις θὰ εἶναι $126,625+9,5=136,125$.



Σχ. 80.

Ἐὰν ἐκ τῶν Δ καὶ Γ φέρωμεν καθέτους ΔΕ καὶ ΓΖ ἐπὶ τὴν ΑΒ σχηματίζονται δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΔ καὶ ΖΒΓ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα. Θὰ εἶναι λοιπὸν ΑΕ=ΖΒ. Κατὰ συνέπειαν θὰ εἶναι

$$ΑΕ=\frac{ΑΒ-ΓΔ}{2}=\frac{136,125-126,625}{2}=4,75.$$

ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΕΔ ἔχομεν

$$ΑΔ=\sqrt{ΔΕ^2+ΑΕ^2}$$
$$=\sqrt{6,4^2+4,75^2}=8,09 \text{ περίπου}$$

Ἑπομένως ἡ περίμετρος τοῦ τραπεζίου εἶναι

$$ΑΒ+ΓΔ+ΒΓ+ΑΔ=136,125+126,625+8,09+8,09=278,93 \text{ μ.}$$

483. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου ἔχοντος ὕψος 13,56 καὶ διάμεσον 32,4.

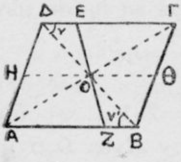
Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὴν διάμεσον ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου ἤτοι μὲ $32,4\times13,56=439,344$ τ.μ.

484. Τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου εἶναι 84,56($μ^2$) τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ 6,4μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάμεσός του.

Ἡ διάμεσος τοῦ τραπεζίου εἶναι $84,96:6,4=13,2125$ μ.

485. Πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμου τὸ διαιρεῖ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 81) καὶ ΖΕ τυχοῦσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῆς τομῆς Ο τῶν διαγωνίων του ΑΓ καὶ ΒΔ· θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ μέρη ΔΕΖΑ καὶ ΕΓΒΖ εἶναι ἰσοδύναμα.



Σχ. 81.

Ἐὰν ἐκ τοῦ Ο φέρωμεν παράλληλον ΗΘ πρὸς τὰς βάσεις ΑΒ καὶ ΔΓ τοῦ παραλληλογράμμου αὐτὴ θὰ εἶναι διάμεσος αὐτοῦ καὶ θὰ εἶναι ΗΟ=ΟΘ.

Τὰ τραπέζια λοιπὸν ΔΕΖΑ καὶ ΕΓΒΖ ἔχουν ἴσας διαμέσους καὶ ἴσα ὕψη· ἄρα θὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

486. ***Ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὰ μέσα τῶν βάσεων τραπεζίου τὸ χωρίζει εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.***

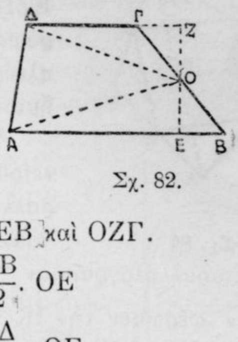
Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν βάσεων τραπεζίου τὸ χωρίζει εἰς δύο ἄλλα τραπέζια, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, ἑπομένως θὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

487. ***Πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ μέσου τῆς διαμέσου τραπεζίου καὶ τέμνουσα τὰς βάσεις του τὸ διαιρεῖ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.***

Ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη διὰ τοῦ μέσου τῆς διαμέσου τραπεζίου τὸ χωρίζει εἰς δύο ἄλλα τραπέζια τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας διαμέσους καὶ ἴσα ὕψη, ἑπομένως τὰ τραπέζια, αὐτὰ θὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

488. ***Ἐὰν διὰ τοῦ μέσου μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τραπεζίου φέρομεν εὐθείας εἰς τὰς ἀπέναντι κορυφάς του, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο σχηματιζομένων τριγώνων ἐχόντων πλευρὰς τὰς βάσεις αὐτοῦ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ τραπεζίου.***

Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ.82) καὶ Ο τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΟΑΒ καὶ ΟΔΓ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ τραπεζίου.



Σχ. 82.

Ἐκ τοῦ Ο φέρομεν τὴν ΕΖ κάθετον ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ. Θὰ εἶναι δὲ ΟΕ=ΟΖ ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΟΕΒ καὶ ΟΖΓ.

Ἀλλὰ ἐμβαδὸν τριγώνου $(ΑΟΒ) = \frac{ΑΒ}{2} . ΟΕ$

καὶ » » $(ΟΓΔ) = \frac{ΓΔ}{2} . ΟΕ$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

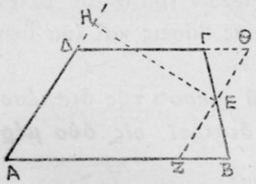
$$(ΑΟΒ)+(ΟΓΔ) = \frac{ΑΒ+ΓΔ}{2} . ΟΕ$$

Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι $(ΑΒΓΔ) = \frac{ΑΒ+ΓΔ}{2} . ΕΖ$, ὅπου τὸ ὕψος ΕΖ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΟΕ· ἑπομένως ἕπεται ὅτι

$$(ΑΟΒ)+(ΟΓΔ) = \frac{(ΑΒΓΔ)}{2}.$$

489. ***Τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν ταύτης ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ἄλλης μὴ παραλλήλου πλευρᾶς του.***

Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ, (σχ. 83) Ε τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ ΒΗ ἡ ἀπόστασις τοῦ Ε ἀπὸ τῆς ἄλλης πλευρᾶς ΑΔ.

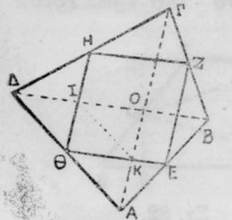


Σχ. 83.

Ἐκ τοῦ Ε φέρομεν παράλληλον ΖΘ πρὸς τὴν ΑΔ καὶ προεκτείνομεν τὴν ΔΓ μέχρι τοῦ Θ· τὰ τρίγωνα ΕΖΒ καὶ ΕΓΘ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας. Τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι λοιπὸν ἰσοδύναμον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖΘΔ. Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ εἶναι ἴσον μὲ ΑΔ . ΕΗ.

ὥστε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι ΑΔ . ΕΗ.

490. Τὸ σχῆμα, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τυχόντος τετραπλεύρου εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ.



Σχ. 84.

Ἔστω ΑΒΓΔ (σχ 84) τυχὸν τετράπλευρον καὶ ΕΖΗΘ τὸ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου κορυφαὶ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ΕΖΗΘ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ διαιροῦν τὸ μὲν τετράπλευρον εἰς τέσσαρα τρίγωνα, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον εἰς τέσσαρα ἄλλα παραλληλόγραμμα. Ἂς ἐξετάσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΟΔ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΘΚΟΙ

Ἐὰν φέρωμεν τὴν ΙΚ τὸ τρίγωνον ΑΟΔ διαιρεῖται εἰς τέσσαρα τρίγωνα ΑΚΘ, ΘΚΙ, ΙΚΟ καὶ ΘΙΔ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα μεταξύ των. Τὸ παραλληλόγραμμον λοιπὸν ΘΚΟΙ, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο τοιαῦτα τρίγωνα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου ΑΟΖ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν ἄλλων παραλληλογράμμων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀντιστοίχου του τριγώνου ἐντὸς τοῦ ὁποίου εἶναι ἐγγεγραμμένον· ἐξ αὐτοῦ ἐξάγεται, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ δοθέντος τετραπλεύρου.

491. Τὸ ἐμβαδὸν ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι α) τὰ 3/4 τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου. β') μέσον ἀνάλογον τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

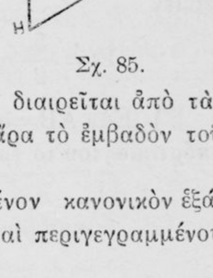
α΄) Τὸ ἐγγεγραμμένον καὶ τὸ περιγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον εἶναι πολύγωνα ὅμοια· ἐπομένως τὰ ἐμβαδά των ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστημάτων των.

Τὸ ἀπόστημα τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ πλευρᾶς ἰσοπλεύρου τριγώνου, δηλ. μὲ $\frac{\varrho\sqrt{3}}{2}$, τὸ δὲ ἀπόστημα τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Ἂν παραστήσωμεν μὲ ε καὶ Ε τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο αὐτῶν πολυγώνων ἔχομεν

$$\frac{\varepsilon}{E}=\frac{\left(\frac{\varrho\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\varrho^2}=\frac{\frac{3\varrho^2}{4}}{\varrho^2}=\frac{3}{4}.$$

ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν $\varepsilon=\frac{3}{4}E.$

β΄) Ἐπειδὴ τὸ ἀπόστημα τοῦ περιγεγραμμένου εἰς κύκλον ἰσοπλεύρου τριγώνου ΗΘΙ (σχ 85) εἶναι διπλάσιον τοῦ ἀποστήματος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΓΕ, ἕπεται ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου τριγώνου εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ δευτέρου.



Σχ. 85.

Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΓΕ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ περιγεγραμμένου ΗΘΙ θὰ παρασταθῇ μὲ 4Ε.

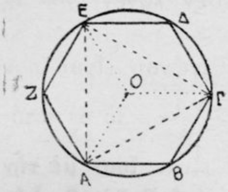
Ἀλλὰ τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΓΕ, διότι ἂν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΓ, ΟΕ τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον χωρίζεται εἰς τρεῖς ἴσους ῥόμβους, ἕκαστος τῶν ὁποίων διαιρεῖται ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΓΕ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα· ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου θὰ παρασταθῇ μὲ 2Ε.

Παρατηροῦμεν δέ, ὅτι πράγματι τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον εἶναι μέσον ἀνάλογον τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου διότι ἔχομεν

$$(2E)^2=E.4E \qquad ἢ \qquad 4E^2=4E^2.$$

492. Τὸ ἐμβαδὸν ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἰσοπλεύρου τρι-

γώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου.



Σχ. 86.

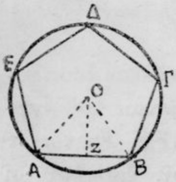
Ἔστωσαν ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 86) τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ΑΓΕ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐγγεγραμμένα εἰς τὸν κύκλον Ο.

Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΓ, ΟΕ διαιρεῖται τὸ ἑξάγωνον εἰς τρεῖς ῥόμβους, ἕκαστος τῶν ὁποίων διαιρεῖται ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΓΕ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα. Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΓΕ εἶναι λοιπὸν τὸ ἥμισυ τοῦ κανον. ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ.

493. Νὰ εὑρεθῇ τὸν ἐμβαδὸν κανονικοῦ πενταγώνου α′) διὰ τῆς πλευρᾶς του β′) διὰ τῆς ἀκτῖνος του.

α′) Ἐὰν ΑΒ=α (σχ.87) ἡ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ καὶ Ε τὸ ἐμβαδόν του θὰ ἔχωμεν

$$E = \frac{5.AB.OZ.}{2} \qquad (1)$$



Σχ. 87.

Ὑπολογίζομεν τὸ ΟΖ ἐκ τοῦ ὀρθογ.τριγώνου ΟΖΑ

$$OZ = \sqrt{OA^2 - AZ^2} = \sqrt{\varrho^2 - \frac{\alpha^2}{4}}$$

Ἀλλὰ γνωρίζομεν (ἄσκησις 427) ὅτι

$$\alpha = \frac{\varrho}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \quad \text{ἢ} \quad \varrho = \frac{2\alpha}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

ὁπότε ἔχομεν $\quad OZ = \sqrt{\frac{4\alpha^2}{10-2\sqrt{5}} - \frac{\alpha^2}{4}} = \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰ ΑΒ καὶ ΟΖ διὰ τῶν ἴσων των ἔχομεν

$$E = \frac{5}{2}.\alpha.\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \frac{5}{4}\,\alpha^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$$

β′) Ἐὰν ΑΒ=α (σχ.87) εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου, ΟΖ τὸ ἀπόστημα του τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι

$$E = 5.AB.\frac{OZ}{2} = 5\alpha.\frac{OZ}{2}$$

ἐδῶ $\qquad \alpha = \frac{\varrho}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \qquad$ καὶ

$$OZ = \sqrt{OA^2 - AZ^2} = \sqrt{\varrho^2 - \frac{\varrho^2(10-2\sqrt{5})}{16}} = \frac{\varrho}{4}\sqrt{2+2\sqrt{5}}$$

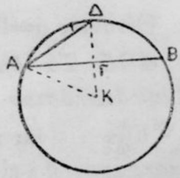
Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν

$$E=5.\frac{\varrho}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.\frac{\varrho}{8}\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\frac{5\varrho^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

494. ***Ὁμοίως δεκαγώνου, ὀκταγώνου, δωδεκαγώνου, ἐγγεγραμμένων εἰς κύκλον ἀκτῖνος 0,2μ.***

α′) Ἐμβαδὸν δεκαγώνου.

Ἔστω ΑΔ (σχ 88) ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον Κ. Ἡ χορδὴ ΑΒ, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ διπλασίου τόξου εἶναι ἡ πλευρὰ κανονικοῦ πενταγώνου.



Σχ. 88.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δεκαγώνου εἶναι δεκαπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΚΑΔ.

Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΚΑΔ εἶναι

$$\frac{1}{2}.\text{ΚΔ}.\text{ΑΓ}=\frac{1}{2}\varrho\,\frac{\text{ΑΒ}}{2}$$

$$=\frac{\varrho}{2}.\frac{\varrho\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=\frac{\varrho^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου εἶναι λοιπὸν

$$E=\frac{10\varrho^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}=\frac{5}{4}\varrho^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Θέτοντες $\varrho=0{,}2$ εὑρίσκομεν

$$E=\frac{5}{4}.0{,}04\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\frac{1}{20}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

β′) Ἐμβαδὸν δωδεκαγώνου.

Ἐὰν ΑΔ παριστάνῃ τὴν πλευρὰν τοῦ δωδεκαγώνου, ἡ ΑΒ θὰ εἶναι πλευρά κανονικοῦ ἑξαγώνου. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δωδεκαγώνου εἶναι δωδεκαπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΚΔ.

Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΚΔ εἶναι

$$(\text{ΑΚΔ})=\frac{1}{2}.\text{ΚΔ}.\text{ΑΓ}=\frac{1}{2}\varrho.\frac{\text{ΑΒ}}{2}=\frac{\varrho}{2}.\frac{\varrho}{2}=\frac{\varrho^2}{4}$$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ δωδεκαγώνου θὰ εἶναι λοιπὸν

$$E=12.\frac{\varrho^2}{4}=3\varrho^2$$

Θέτοντες $\varrho=0{,}2$ εὑρίσκομεν $E=3\times0{,}04=0{,}12$ τ.μ.

β′) Ἐὰν ΑΔ παριστάνῃ (σχ.88) τὴν πλευρὰν κανονικοῦ ὀκταγώνου, ἡ ΑΒ θὰ εἶναι πλευρὰ τετραγώνου. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου θὰ εἶναι ὀκταπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΚΔ.

Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ΑΚΔ εἶναι

$$(\text{ΑΚΔ}) = \frac{1}{2}\,\text{ΚΔ.ΑΓ} = \frac{1}{2}\,\varrho.\,\frac{\text{ΑΒ}}{2} = \frac{\varrho}{2}\,.\,\frac{\varrho\sqrt{2}}{2} = \frac{\varrho^2\sqrt{2}}{4}$$

Καὶ ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου εἶναι

$$\text{Ε} = 8.\,\frac{\varrho^2\sqrt{3}}{4} = 2\varrho^2\sqrt{2}$$

Θέτοντες $\varrho = 0{,}2$ εὑρίσκομεν $\text{Ε} = 2 \times 0{,}04\sqrt{2} = 0{,}1128$ τ.μ.

495. Τὸ ἐμβαδὸν περιγεγραμμένου εἰς κύκλον τετραγώνου εἶναι διπλάσιον τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένου.

Ἐὰν ϱ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου θά εἶναι $\varrho\sqrt{2}$ καὶ τὸ ἐμβαδόν του $(\varrho\sqrt{2})^2 = 2\varrho^2$.

Ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου ἤτοι μὲ 2ϱ καὶ ἑπομένως τὸ ἐμβαδόν του εἶναι $(2\varrho)^2 = 4\varrho^2$. Παρατηροῦμεν πράγματι ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἐγγεγραμμένου.

496. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἀγροῦ κανονικοῦ δεκαγώνου πλευρᾶς 100 μ.

Εὑρήκαμεν (ἄσκησις 494) ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος εἶναι

$$\text{Ε} = \frac{5}{4}\,\varrho^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \qquad (1)$$

Ἡ ἀκτὶς δὲ συναρτήσει τῆς πλευρᾶς εἶναι

$$\varrho = \frac{2\alpha}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὸ ϱ διὰ τοῦ ἴσου του ἔχομεν

$$\text{Ε} = \frac{5}{4}\,.\,\frac{\alpha^2}{4}\left(\sqrt{5} + 1\right)^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{5}{2}\,\alpha^2\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

Θέτοντες $\alpha = 100$ ἔχομεν

$$\text{Ε} = \frac{5}{2}.\,100^2\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = 15350 \text{ τ.μ.}$$

497. Ἂν αἱ πλευραὶ πολυγώνου πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ λ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ λ^2, τῶν γωνιῶν του διατηρουμένων ἀμεταβλήτων.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι μένουν ἀμετάβλητοι, τὰ δύο πολύγωνα θὰ εἶναι ὅμοια.

Γνωρίζομεν δέ, ὅτι ὅταν δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των.

Ἂν παρηστήσωμεν μὲ ΑΒ τὴν πλευράν ἑνὸς πολυγώνου Π, τοῦ ἄλλου Π′ ἡ πλευρὰ θὰ εἶναι λ.(ΑΒ) καὶ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{(\Pi')}{(\Pi)} = \frac{\lambda^2(AB)^2}{(AB)^2} = \lambda^2$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν ὅτι $(\Pi') = \lambda^2(\Pi)$.

498. Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν πολυγώνου ὁμοίου πρὸς ἄλλο ἔχον ἐμβαδὸν 1646 (μ^2) ἂν ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος αὐτοῦ εἶναι 0,6.

Ἂν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ζητουμένου πολυγώνου καὶ Ε′ τοῦ δοθέντος, ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα εἶναι ὅμοια θὰ ἔχωμεν

$$\frac{E}{E'} = (0,6)^2 \quad \text{ἢ} \quad E = E'(0,6)^2 = 1646 \times 0,36 = 592,56 \text{ τ. μ.}$$

499. Τὰ ἐμβαδὰ δύο κύκλων ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων ἢ τῶν διαμέτρων αὐτῶν.

Ἐὰν ρ, ρ′ εἶναι τὰ μήκη τῶν ἀκτίνων καὶ Ε, Ε′ τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο κύκλων ἔχομεν

$$E = \pi\rho^2, \qquad E' = \pi\rho'^2$$

καὶ

$$\frac{E}{E'} = \frac{\pi\rho^2}{\pi\rho'^2} = \frac{\rho^2}{\rho'^2}$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν καὶ διὰ τὰς διαμέτρους.

500. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτῖνος α′) 12 δακτ. β′) 8,2 δ.

α′) Ἂν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἔχομεν

$$E = \pi\rho^2 = 3,14 \times 12^2 = 452,16 \text{ τ. δ.}$$

β′) $$E = \pi \times 8,2^2 = 211,1336 \text{ τ.δ.}$$

501. Πόσον εἶναι τὸ πάχος κυκλικοῦ δακτυλίου δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν, ἐχουσῶν μήκη 650 μ. καὶ 626 μ.

Ἡ ἀκτὶς τοῦ μὲν πρώτου κύκλου εἶναι $\rho = \frac{650}{2\pi} = 103,5$ μ. τοῦ δὲ

δευτέρου $\rho' = \frac{626}{2\pi} = 99,68$ μ.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δακτυλίου εἶναι διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο κύκλων, ἤτοι

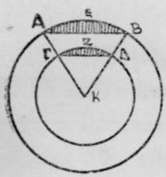
$$E=\pi(103{,}5^2-99{,}68^2)=2427{,}111 \text{ τ.μ.}$$

502 ***Τὰ ἐμβαδὰ δύο ὁμοίων κυκλικῶν τμημάτων (ἀντιστοιχούντων εἰς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας) ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων των.***

Ἔστωσαν τὰ κυκλικὰ τμήματα (ΑΕΒΑ) καὶ (ΓΖΔΓ) (σχ. 89) καὶ ΚΑ=Ρ, ΚΓ=ρ αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν· θὰ δείξωμεν ὅτι

$$\frac{(ΑΕΒΑ)}{(ΓΖΔΓ)}=\frac{Ρ^2}{ρ^2}$$

Τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΚΑΒ καὶ ΚΓΔ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς Κ κοινήν· θὰ ἔχωμεν λοιπὸν



Σχ. 89.

$$\frac{(ΚΑΒ)}{(ΚΓΔ)}=\frac{Ρ^2}{ρ^2} \qquad (1)$$

ἀλλὰ καὶ οἱ κυκλικοὶ τομεῖς ΚΑΕΒ καὶ ΚΓΖΔ, ἐπειδὴ ἔχουν τὴν αὐτὴν γωνίαν Κ, ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων των, ἤτοι ἔχομεν

$$\frac{(ΚΑΕΒ)}{(ΚΓΖΔ)}=\frac{Ρ^2}{ρ^2} \qquad (2)$$

ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει

$$\frac{Ρ^2}{ρ^2}=\frac{(ΚΑΕΒ)}{(ΚΓΖΔ)}=\frac{(ΚΑΒ)}{(ΚΓΔ)}=\frac{(ΚΑΕΒ)-(ΚΑΒ)}{(ΚΓΖΔ)-(ΚΓΔ)}=\frac{(ΑΕΒΑ)}{(ΓΖΔΓ)}$$

ἢ

$$\frac{Ρ^2}{ρ^2}=\frac{(ΑΕΒΑ)}{(ΓΖΔΓ)}.$$

Σημείωσις. Τὸ ὅτι οἱ τομεῖς (ΚΑΕΒ) καὶ (ΚΓΖΔ) ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

Γνωρίζομεν ὅτι:

$$\text{ἐμβ. τομ. } (ΚΑΕΒ)=\frac{1}{2}\,Ρ\times \text{μῆκος τόξου } (ΑΕΒ)$$

$$=\frac{1}{2}.Ρ.\frac{2\pi Ρ.\mu^0}{360^0}=\frac{\pi Ρ^2\mu^0}{360} \qquad (1)$$

ἐὰν μ παριστάνῃ τὸ μέτρον τῆς γωνίας ΑΚΒ τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὸ τόξον ΑΕΒ.

Ὁμοίως ἔχομεν

$$\text{ἐμβ. τομ. } (ΚΓΖΔ)=\frac{1}{2}\,ρ.\frac{2\pi ρ.\mu^0}{360^0}=\frac{\pi ρ^2.\mu^0}{360^0}. \qquad (2)$$

Διαιροῦντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\frac{(ΚΑΕΒ)}{(ΚΓΖΔ)}=\frac{Ρ^2}{ρ^2}$$

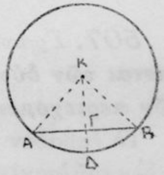
503. Ἡ χορδὴ τμήματος κυκλικοῦ εἶναι 10π. ἡ δε ἀκτὶς 10π. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος.

Ἔστω ΑΒ χορδὴ τοῦ κύκλου Κ (σχ. 90). Γνωρίζομεν, ὅτι

ἐμβ. τμημ. (ΑΔΒΑ)=ἐμβ. τομ. ΑΚΒ—ἐμβ. τριγ. ΑΚΒ. (1)

Ἐπειδὴ ΑΒ=10π. καὶ ΑΚ=10π., ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι πλευρὰ κανον. ἑξαγώνου· ἑπομένως

γων. ΑΚΒ=60°.



$$\text{Ἐμβ. τομ. ΑΚΒ} = \frac{\pi\varrho^2.60^0}{360^0} = \frac{\pi\varrho^2}{6}$$

$$\text{Ἐμβ. τριγ. ΑΚΒ} = \frac{\varrho^2\sqrt{3}}{4}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) ἔχομεν

$$\text{ἐμβ. τμ. (ΑΔΒΑ)} = \frac{\pi\varrho^2}{6} - \frac{\varrho^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\varrho^2(2\pi-3\sqrt{3})}{12}$$

Σχ. 90.

Θέτοντες ϱ=10 ἔχομεν

$$\text{ἐμβ. τμημ. (ΑΔΒΑ)} = \frac{100(2\pi-3\sqrt{3})}{12} = 9{,}0586 \text{ τ.π.}$$

504. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως, ἐὰν ἡ ἐπίκεντρος γωνία του εἶναι 20° καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου 20 δ.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως ἔχομεν

$$E = \frac{\pi.20^2.20}{360} = \frac{200\pi}{9} = 69{,}85761 \text{ τ.δ.}$$

505. Τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ δωδεκαγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

(Βλέπε ἄσκησιν 494. γ΄.)

506. Τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς ἡμικύκλιον εἶναι τὰ 0,4 τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον τετραγώνου.

Ἔστω ΕΖΓΔ (σχ. 91) τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς ἡμικύκλιον τετράγωνον καὶ ΕΔ ἡ πλευρά του, ἡ ὁποία ὑπολογίζεται ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΕΔ.

$$\Delta E^2 = KE^2 - K\Delta^2 = \varrho^2 - \frac{\Delta E^2}{4}$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\Delta E^2 = \dfrac{4\varrho^2}{5}$

ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου ΕΖΓΔ

εἶναι $E = \dfrac{4\varrho^2}{5}$.

Σχ. 91.

Ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἰς τὸν κύκλον Κ εἶναι $\varrho\sqrt{2}$ καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ ἐμβαδόν του εἶναι

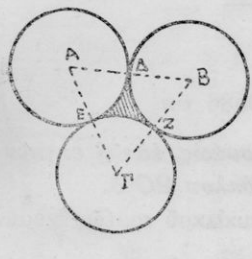
$$(\varrho\sqrt{2})^2 = 2\varrho^2$$

Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ ἡμικύκλιον τετραγώνου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον εἶναι

$$\frac{4\varrho^2}{5} : 2\varrho^2 = 0{,}4$$

507. ***Γράφομεν τρεῖς ἴσους κύκλους, ὥστε ἕκαστος νὰ ἐφάπτεται τῶν δύο ἄλλων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένου μέρους, ἂν ἡ ἀκτίς των εἶναι ϱ.***

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου μέρους ΕΔΖ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ ἀπὸ τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν τομέων, ἕκαστος τῶν ὁποίων εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἕκτον τῆς περιφερείας.



Σχ. 92.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$ καὶ ἐπειδὴ $AB = 2\varrho$ εἶναι $\frac{4\varrho^2\sqrt{3}}{4} = \varrho^2\sqrt{3}$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως

$$A E \Delta = \frac{\pi . AE^2}{6} = \frac{\pi\varrho^2}{6}$$

καὶ τῶν τριῶν τομέων θὰ εἶναι $\frac{3.\pi\varrho^2}{6} = \frac{\pi\varrho^2}{2}$.

Ἑπομένως ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου μέρους εἶναι

$$E = \varrho^2\sqrt{3} - \frac{\pi\varrho^2}{2} = \varrho^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right).$$

508. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάμετρος τροχοῦ, ὅστις κάμνει 264 στροφάς, ὅταν διανύῃ 5,5 χιλιόμετρα.***

Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ εἶναι

$$5{,}500 : 264 = 20{,}833 \text{ μετρ.}$$

ἑπομένως ἡ διάμετρός του εἶναι

$$20{,}83 : 3{,}14 = 6{,}63.$$

509. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ κανονικοῦ ὀκταγώνου ἰσοδυνάμου μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν ἄλλων μὲ πλευρὰς 6μ., 7μ., 8μ.***

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ E, E', E'', E''' τὰ ἐμβαδὰ τῶν δοθέντων ὀκταγώνων καὶ τοῦ ζητουμένου καὶ μὲ $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ ἀντιστοίχως τὰς πλευρὰς αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{E'''}{\alpha'''^2}=\frac{E}{\alpha^2}=\frac{E'}{\varrho'^2}=\frac{E'}{\alpha''^2}=\frac{E+E'+E''}{\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2}$$

Ἀλλὰ τὸ πρῶτον καὶ τὸ τελευταῖον κλάσμα ἔχουν τοὺς ἀριθμητάς των ἐξ ὑποθέσεως ἴσους, διότι τὰ ἐμβαδὰ τοῦ ζητουμένου ὀκταγώνου καὶ τῶν τριῶν δοθέντων εἶναι ἰσοδύναμα, καὶ εἶναι ἴσα, ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τοὺς παρονομαστάς των ἴσους, ἤτοι θὰ εἶναι

$$\alpha'''^2=\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2$$

καὶ $\alpha'''=\sqrt{\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2}=\sqrt{6^2+7^2+8^2}=12{,}20\mu.$

510. Τὸ ἐμβαδὸν ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ὀκταγώνου ἰσοῦται μὲ τό ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου μὲ πλευρὰς τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου τετραγώνου.

Τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ ὀκταγώνου συναρτήσει τὰς πλευρᾶς του εἶναι (ἄσκησις 494. β').

$$E=2\varrho^2\sqrt{2}=2\varrho.\varrho\sqrt{2}.$$

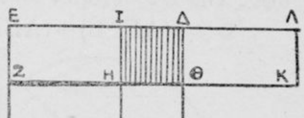
Ἀλλὰ 2ϱ παριστάνει τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου (ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον) καὶ $\varrho\sqrt{2}$ τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου

Σχ. 93.

511. Τὸ τετράγωνον τὸ κατασκευαζόμενον ἐπὶ εὐθείας, ἥτις ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο εὐθειῶν σύν ἢ πλὴν τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τούτων.

α') Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΒΓ (σχ. 94) δύο εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ΑΓ, καὶ ΑΓΔΕ τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται μὲ πλευρὰν τὴν ΑΓ.

Ἐπὶ τῆς ΑΕ λαμβάνομεν τὴν ΑΖ ἴσην μὲ τὴν ΑΒ καὶ φέρομεν τὰς ΖΘ καὶ ΒΙ παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΑΓ καὶ ΑΕ.



Σχ. 94.

Διὰ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν τὸ τετράγωνον χωρίζεται εἰς :

τὸ τετράγωνον ΑΒΗΖ, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται μὲ πλευρὰν τὴν ΑΒ, εἰς τὸ τετράγωνον ΗΘΔΙ, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται μὲ πλευρὰν τὴν ΔΙ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΓ, ὡς ὑπόλοιπα ἴσων πλευρῶν ΑΓ καὶ ΕΔ ἀπὸ τῶν ὁποίων ἀφῃρέθησαν αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΕΙ καὶ εἰς δύο ὀρθογώνια ΒΓΘΗ καὶ ΖΗΙΕ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα καὶ ἔχουν διαστάσεις ἴσας μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΒΓ.

Ὥστε $(ΑΒ+ΒΓ)^2=ΑΒ^2+ΒΓ^2+2ΑΒ.ΒΓ.$

β΄) Ἔστωσαν ΑΓ καὶ ΑΒ (σχ. 94) δύο εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ εἶναι ἡ ΒΓ.

Τὸ τετράγωνον ΗΘΔΙ, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται μὲ πλευρὰν τὴν ΗΘ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΓ δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὅτι προκύπτει ἀπὸ τὸ τετράγωγον ΑΓΔΕ ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀφῃρέθησαν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΙΕ, τὸ ὁποῖον ἔχει διαστάσεις ἴσας μὲ τὰς δοθείσας εὐθείας ΑΓ καὶ ΑΒ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΓΘΗ ἤτοι

$$(ΗΘΔΙ)=(ΑΓΔΕ)-(ΑΒΙΕ)-(ΒΓΘΗ).$$

προσθέτοντες καὶ ἀφαιροῦντες εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἄνω ἰσότητος τὸ τετράγωνον ΑΒΗΖ ἔχομεν

$$\begin{aligned}(ΗΘΔΙ)&=(ΑΓΔΕ)-(ΑΒΙΕ)-(ΒΓΘΗ)-(ΑΒΗΖ)+(ΑΒΗΖ)\\ &=(ΑΓΔΕ)-(ΑΒΙΕ)-(ΒΓΘΗ)+(ΑΒΗΖ)+(ΑΒΗΖ)\\ &=(ΑΓΔΕ)-(ΑΒΙΕ)-(ΑΓΘΖ)+(ΑΒΗΖ)\end{aligned}$$

καὶ ἐπειδὴ (ΑΒΙΕ)=(ΑΓΘΖ) ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$(ΗΘΔΙ)=(ΑΓΔΕ)-2(ΑΒΙΕ)+(ΑΒΗΖ).$$

ἢ $(ΑΓ-ΑΒ)^2=ΑΓ^2-2.ΑΓ.ΑΒ+ΑΒ^2.$

512. Ἡ διαφορὰ δύο τετραγώνων, κατασκευαζομένων ἐπὶ δύο εὐθειῶν εἶναι ἰσοδύναμος μὲ ὀρθογώνιον, ἔχον βάσιν καὶ ὕψος τὴν διαφορὰν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εὐθειῶν.

Ἔστωσαν τὰ τετράγωνα ΑΓΔΕ καὶ ΑΒΗΖ (σχ. 94) τὰ ὁποῖα κατασκευάζονται μὲ πλευρὰς τὰς εὐθείας ΑΓ καὶ ΑΒ.

Ἂν ἀπὸ τὸ τετράγωνον ΑΓΔΕ ἀφαιρέσωμεν τὸ ΑΒΗΖ ἀπομένουν τὰ ὀρθογώνια ΖΕΔΘ καὶ ΒΓΘΗ· τὸ πρῶτον ὀρθογώνιον ἔχει βάσιν τὴν ΖΘ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ μὴν ΑΓ καὶ ὕψος ΖΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ ΒΓ, τὸ δὲ δεύτερον ἔχει βάσιν τὴν ΓΘ ἴσην μὲ τὴν ΑΒ καὶ ὕψος τὴν ΒΓ· ἔχομεν λοιπὸν

$$\begin{aligned}(ΑΓΔΕ)-(ΑΒΗΖ)&=(ΖΕΔΘ)+ΒΓΘΗ\\ &=(ΖΘ).(ΖΕ)+(ΒΓ).(ΓΘ)\\ &=(ΑΓ).(ΒΓ)+(ΒΓ)(ΑΒ)\\ &=(ΒΓ)(ΑΓ+ΑΒ)\\ &=(ΑΓ-ΑΒ).(ΑΓ+ΑΒ)\end{aligned}$$

ἢ $ΑΓ^2-ΑΒ^2=(ΑΓ+ΑΒ)\,(ΑΓ-ΑΒ).$

513. Διὰ σημείου κειμένου ἐπί τινος τῶν πλευρῶν τριγώνου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα διαιροῦσα αὐτὸ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα, ἢ ἔχοντα λόγον μ : ν.

Ἔστω ΔΕ (σχ. 95) ἡ εὐθεία, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Δ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἡ ὁποία διαιρεῖ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

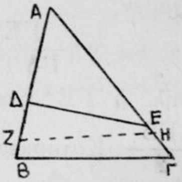
Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ ἔχουν τὴν γωνίαν Α κοινὴν ἔχομεν

$$\frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{(\text{ΑΔ}).(\text{ΑΕ})}{(\text{ΑΒ}).(\text{ΑΓ})} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{2}=\frac{(\text{ΑΔ}).(\text{ΑΕ})}{(\text{ΑΒ}).(\text{ΑΓ})}$$

ἢ

$$\frac{2(\text{ΑΔ})}{(\text{ΑΒ})}=\frac{(\text{ΑΓ})}{(\text{ΑΕ})}$$

ἐκ τῆς ἀναλογίας αὐτῆς προσδιορίζεται ἡ ΑΕ, ἡ ὁποία εἶναι τετάρτη ἀνάλογος τῶν γνωστῶν τμημάτων 2(ΑΔ),(ΑΒ) καὶ (ΑΓ).



Σχ. 95.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ἂν ἡ εὐθεῖα διαιρῇ τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον μ : ν.

514. ***Δοθὲν τρίγωνον νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα δι᾽ εὐθειῶν ἀγομένων ἀπὸ δύο σημείων κειμένων ἐπὶ τῶν πλευρῶν του.***

Ἔστωσαν Δ καὶ Ζ τὰ δοθέντα σημεῖα (σχ. 95) τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Διὰ τοῦ Ζ φέρομεν τὴν ΖΗ, οὕτως ὥστε νὰ διαιρῇ τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ ΑΖΗ νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΒΖΗΓ (ἄσκησις προηγουμένη) καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ τρίγωνον ΑΖΗ διὰ τῆς εὐθείας ΔΕ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα· οὕτω τὸ τρίγωνον διαιρεῖται εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

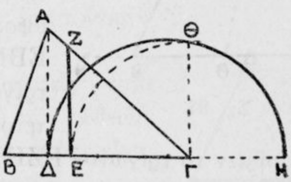
515. ***Δοθὲν τρίγωνον νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι᾽ εὐθείας καθέτου πρὸς μίαν πλευρὰν αὐτοῦ.***

Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 96) ἓν οἱονδήποτε τρίγωνον, τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη δι᾽ εὐθείας καθέτου πρὸς τὴν ΒΓ.

Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει λυθῇ καὶ ὅτι ἡ ΖΕ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΓΕΖ καὶ ΓΒΑ ἔχουν τὴν γωνίαν Γ κοινὴν ἔχομεν

$$\frac{(\text{ΓΕΖ})}{(\text{ΓΒΑ})}=\frac{(\text{ΓΖ}).(\text{ΓΕ})}{(\text{ΓΑ}).(\text{ΓΒ})}=\frac{1}{2} \quad (1)$$

(ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΓΕΖ).



Σχ. 96.

Ἂν ἀχθῇ τὸ ὕψος ΑΔ τὰ τρίγωνα ΓΕΖ καὶ ΓΔΑ εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως ἔχομεν

$$\frac{\text{ΓΖ}}{\text{ΓΑ}}=\frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΓΔ}} \quad (2)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὸν λόγον $\frac{\Gamma Z}{A\Gamma}$ διὰ τοῦ ἴσου του ἔχομεν

$$\frac{\Gamma E^2}{\Gamma\Delta . \Gamma B} = \frac{1}{2} \quad \text{ἢ} \quad \Gamma E^2 = \Gamma\Delta . \frac{\Gamma B}{2}$$

δηλ. ἡ ΓΕ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν γνωστῶν τμημάτων ΓΔ καὶ $\frac{\Gamma B}{2}$. Κατασκευαζομένης τῆς ΓΕ προσδιορίζεται τὸ σημεῖον Ε ἐκ τοῦ ὁποίου ὑψοῦμεν τὴν ζητουμένην κάθετον ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ.

Ἡ κατασκευὴ τῆς ΓΕ γίνεται ὡς ἑξῆς:

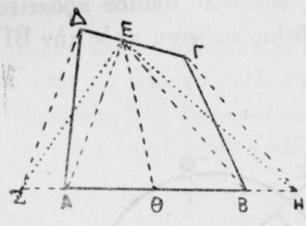
Προεκτείνομεν τὴν ΔΓ καὶ λαμβάνομεν $\Gamma H = \frac{\Gamma B}{2}$· μὲ διάμετρον τὴν ΔΓ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν· ἐκ τοῦ Γ ὑψοῦμεν κάθετον ΓΘ πρὸς τὴν ΔΗ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Θ· ἡ ΓΘ εἶναι ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος· λαμβάνομεν ἔπειτα ΓΕ=ΓΘ καὶ ἐκ τοῦ Ε ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ.

516. Δοθὲν τετράπλευρον νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας ἀγομένης διὰ σημείου κειμένου ἐπί τινος τῶν πλευρῶν του.

Ἔστω ΑΒΓΔ (σχ. 97) τὸ δοθὲν τετράπλευρον καὶ Ε ἓν σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΓΔ.

Μετασχηματίζομεν τὸ δοθὲν τετράπλευρον εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον (§ 206)

Πρὸς τοῦτο ἐκ τοῦ Δ καὶ Γ φέρω παραλλήλους πρὸς τὰς ΕΑ καὶ ΕΒ ἀντιστοίχως, αἱ ὁποῖαι κόπτουν τὴν ΑΒ προεκτεινομένην εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η· φέρομεν τὴν ΕΖ καὶ ΕΗ· τὰ τρίγωνα ΕΑΖ καὶ ΕΔΑ εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΕ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος· ὁμοίως εἶναι ἰσοδύναμα καὶ τὰ ΕΒΗ καὶ ΕΒΓ· ὥστε τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΕΖΗ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ.



Σχ. 97.

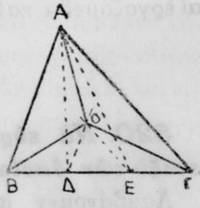
Διαιροῦμεν τὸ τρίγωνον ΕΖΗ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη διὰ τῆς διαμέσου ΕΘ· τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΕΘΖ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου ΕΖΗ ἢ τοῦ ἰσοδυνάμου του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ· ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΕΘΖ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ΕΔΑΘ· ἄρα καὶ τοῦτο εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

517. Δοθὲν τρίγωνον νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα

δι' εὐθειῶν ἀγομένων εἰς τὰς κορυφὰς ἀπό τινος σημείου κειμένου ἐντὸς αὐτοῦ.

Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 98) τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

Διαιροῦμεν τὴν βάσιν ΒΓ εἰς τρία ἴσα μέρη τὰ ΒΔ, ΔΕ καὶ ΕΓ, φέρομεν τὰς ΑΔ, ΑΕ, ὁπότε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ διαιρεῖται εἰς τὰ τρία τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΕ καὶ ΑΕΓ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.



Σχ. 98.

Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν τὴν ΔΟ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΑ καὶ ἐκ τοῦ Ε τὴν ΕΟ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΑ· αἱ δύο αὗται παράλληλοι τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον· διότι ἐὰν φέρωμεν τὰς ΟΑ, ΟΒ καὶ ΟΓ τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΑΓ καὶ ΟΒΓ εἶναι ἰσοδύναμα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ ΑΒΔ, ΑΕΓ καὶ ΑΔΕ. Πράγματι τὰ ΟΑΒ καὶ ΑΒΔ εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, διότι αἱ κορυφαί των Ο καὶ Δ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς παραλλήλου ΟΔ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒ· ἀλλά, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω τὸ ΑΒΔ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ΑΒΓ, ἄρα καὶ τὸ ἰσοδυναμόν του ΟΑΒ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ΑΒΓ· ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΟΑΓ καὶ ΟΕΓ εἶναι ἰσοδύναμα καὶ ἑπομένως τὸ ΟΑΓ ἴσον μὲ τὸ τρίτον τοῦ ΑΒΓ. Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι καὶ τὸ ΟΒΓ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίτον τοῦ ΑΒΓ.

518. Δοθὲν παραλληλόγραμμον νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἔκ τινος τῶν κορυφῶν αὐτοῦ.

Ἔστω ΑΒΓΔ (σχ. 99) τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον.

Ἐὰν φέρωμεν τὴν διαγώνιον ΔΒ τὸ παραλληλόγραμμον διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΔΒΓ.

Σχ. 99.

Διαιροῦμεν τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη (ἄσκησις 517) διὰ τῶν εὐθειῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ, ΔΘ· τὸ τρίγωνον ΑΔΖ εἶναι ἴσον μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ΑΔΒ ἢ μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ· ὁμοίως καὶ τὸ ΔΓΗ εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ΑΒΓΔ· ἑπομένως τὸ ἀπομένον μέρος ΔΖΒΗ τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι καὶ τὸ αὐτὸ ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ΑΒΓΔ.

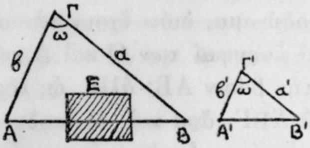
519. Δοθὲν πολύγωνον νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας, ἀγομένης ἐκ σημείου κειμένου ἐπί τινος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Μετασχηματίζομεν τὸ δοθὲν πολύγωνον εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον καὶ ἐργαζόμεθα καθὼς καὶ εἰς τὴν ἄσκησιν 516.

ΧΩΡΟΜΕΤΡΙΑ

520. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις δύο σημείων Α, Β προσιτῶν μεταξὺ τῶν ὁποίων ὑπάρχει οἰκία.

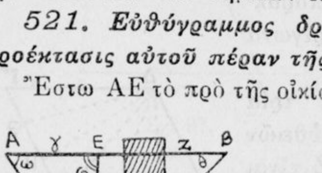
Λαμβάνομεν σημεῖόν τι Γ ἐκτὸς τῆς ΑΒ κείμενον καὶ τοιοῦτον ὥστε καὶ τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Β νὰ εἶναι ὁρατὰ ἀπὸ τὸ σημεῖον αὐτό· χαράσσομεν εὐθυγραμμίαν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου Α, Γ καὶ Β, Γ καὶ μετροῦμεν τὰς ἀποστάσεις ΓΑ=β καὶ ΓΒ=α, ὡς καὶ τὴν γωνίαν ΑΓΒ, ἡ ὁποία ἔστω ω· κατόπιν ἐπὶ τοῦ χάρτου κατασκευάζομεν τρίγωνον Α'Β'Γ' ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΓΒ ἔχον πλευρὰς β' καὶ α' αἱ ὁποῖαι παριστοῦν ἀντιστοίχως τὰς β καὶ α ὑπὸ ὡρισμένην κλίμακα π. χ. 0,01 καὶ μὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην πρὸς ω· μετροῦμεν τὴν πλευρὰν Α'Β' τοῦ τριγώνου τῆς ὁποίας τὸ μῆκος γ' πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τῆς κλίμακος καὶ οὕτω ἔχομεν τὴν ἀπόστασιν τῶν σημείων Α καὶ Β.



Σχ. 100.

521. Εὐθύγραμμος δρόμος συναντᾷ οἰκίαν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ προέκτασις αὐτοῦ πέραν τῆς οἰκίας.

Ἔστω ΑΕ τὸ πρὸ τῆς οἰκίας τμῆμα τοῦ δρόμου καὶ Δ ἡ οἰκία. Ἐκλέγομεν σημεῖόν τι Γ ἐκτὸς τοῦ δρόμου κείμενον καὶ τοιοῦτον, ὥστε νὰ φαίνεται ἀπ' αὐτοῦ καὶ τὸ πρὸ τῆς οἰκίας καὶ τὸ μετὰ τὴν οἰκίαν ἔδαφος, τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται ἐπίπεδον· ἐπὶ τοῦ δρόμου λαμβάνομεν σημεῖον Ε κείμενον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς οἰκίας πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Α καὶ με-

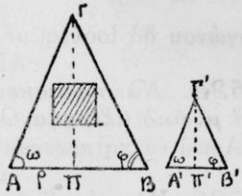


Σχ. 101.

τροῦμεν τὴν ΑΕ=γ· χαράσσομεν ἔπειτα τὴν εὐθυγραμμίαν τὴν διερχομένην διὰ τοῦ Γ,Α καὶ Γ,Ε καὶ μετροῦμεν τὰς γωνίας ΕΑΓ=ω καὶ ΑΕΓ=φ· σχηματίζομεν ὑπὸ κλίμακα εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ χάρτου τρίγωνον Α′Γ′Ε′ ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΕΓ καὶ φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν σχηματίζουσαν μετὰ τῆς Α′Γ′ γωνίαν ν, τὴν ὁποίαν καὶ μετροῦμεν. Προεκτείνομεν τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς γωνίας ταύτης ἕως ὅτου συναντήσει τὴν προέκτασιν τῆς Α′Ε′ εἴς τι σημεῖον Β′ καὶ μετροῦμεν τὴν Γ′Β′=δ′· τὴν δ′ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τῆς κλίμακος, ὁπότε θὰ προκύψῃ τὸ μῆκος δ· κατόπιν μὲ πλευρὰν τὴν ΑΓ καὶ κορυφὴν τὸ Γ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους σχηματίζομεν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ν τὴν ΑΓΒ καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΓΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΓΒ=δ· μὲ κορυφὴν τὴν Β καὶ πλευρὰν τὴν ΓΒ σχηματίζομεν γωνίαν ΓΒΖ ἴσην πρὸς τὴν γωνία Γ′Β′Α′ τοῦ τριγώνου Γ′Β′Α′, τὸ ὁποῖον ἔχομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ χάρτου· προφανῶς ἡ ΖΒ εἶναι ἡ προέκτασις τοῦ δρόμου.

*522. **Μεταξὺ εὐθείας ΑΒ καὶ σημείου Γ ἐκτὸς αὐτῆς ὑπάρχει οἰκία τις. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Γ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.***

Χαράσσομεν τὰς εὐθυγραμμίας τὰς διερχομένας ἐκ τῶν Γ καὶ Α ὡς καὶ ἐκ τῶν Γ καὶ Β (τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἐκλέγονται τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι ὁρατὰ ἐκ τοῦ Γ)· μετροῦμεν τὴν ΑΒ = γ καὶ τὰς γωνίας ΓΑΒ=ω καὶ ΓΒΑ=φ καὶ κατασκευάζομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου τρίγωνον Α′Β′Γ′ ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ ὑπὸ κλίμακα ἔστω 1/λ· φέρομεν τὸ ὕψος Γ′Π′ τὸ ἀγόμενον ἐκ τοῦ Γ′ καὶ μετροῦμεν τὴν Α′Π′ ἤτοι τὴν ἀπόστασιν τοῦ ποδὸς τοῦ ὕψους ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α τοῦ τριγώνου Α′Β′Γ′, ἔστω δὲ Α′Π′=ρ′· ταύτην πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν λ τῆς κλίμακος καὶ ἔχομεν λρ′=ρ· ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μὲ ἀρχὴν τὸ Α λαμβάνομεν τμῆμα ΑΠ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἴσον πρὸς ρ, τότε τὸ Π προφανῶς εἶναι ὁ ποῦς τῆς ἐκ τοῦ Γ καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ· ἂν φέρωμεν λοιπὸν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐκ τοῦ Π αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Γ, ἤτοι εἶναι ἡ ζητουμένη.



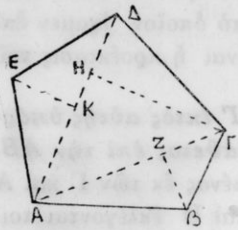
Σχ. 102.

*523. **Οἰκία τις κεῖται μεταξὺ δύο σημείων Α, Β. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διεύθυνσις ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον συναντᾷ αὕτη τὴν οἰκίαν.***

Ἐκλέγομεν σημεῖον Γ (σχ. 101) ἀπὸ τοῦ ὁποίου φαίνονται ἀμφότερα τὰ σημεῖα Α καὶ Β· χαράσσομεν τὰς εὐθυγραμμίας τὰς διερχομένας διὰ τῶν Γ, Α καὶ Γ, Β καὶ μετροῦμεν τὰς ΑΓ καὶ ΓΒ ἔστω ΑΓ=β καὶ ΓΒ=δ ὡς καὶ τὴν γωνίαν ΑΓΒ=ν καὶ σχηματίζομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ χάρτου τρίγωνον Α΄Γ΄Β΄ ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΓΒ ἔχον πλευρὰς $\frac{\beta}{\lambda}$ καὶ $\frac{\delta}{\lambda}$ καὶ ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην πρὸς ν καὶ μετροῦμεν τὰς γωνίας ω καὶ θ αὐτοῦ· ἔπειτα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μὲ πλευρὰς ΑΓ καὶ ΒΓ καὶ κορυφὰς τᾶ Α καὶ Β, σχηματίζομεν γωνίας ΓΑΕ καὶ ΓΒΖ ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς ω καὶ θ, ὁπότε ἡ ΑΒ ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῶν ΑΕ καὶ ΖΒ, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας· τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα συναντᾷ ἡ ΑΒ τὴν οἰκίαν εἶναι αἱ τομαὶ τῆς οἰκίας καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν ΑΕ καὶ ΒΖ.

524. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἀγροῦ πολυγωνικοῦ.

Ἔστω ΑΒΓΔΕ (σχ.103) ὁ πολυγωνικὸς ἀγρός· ἐκ μιᾶς τῶν κορυφῶν αὐτοῦ ἔστω τῆς Α φέρομεν ὅλας τὰς δυνατὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ καὶ χαράσσομεν τὰς εὐθυγραμμίας ΑΓ καὶ ΑΔ· οὕτω δὲ ὁ ἀγρὸς διηρέθη εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ καὶ ΑΔΕ.



Σχ. 103.

Ἐκ τῆς κορυφῆς Β χαράσσομεν τὴν κάθετον ΒΖ ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἐκ δὲ τῶν κορυφῶν Γ καὶ Ε τὰς καθέτους ΓΗ, ΕΚ ἐπὶ τὴν ΑΔ μετροῦμεν ἔπειτα τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ καὶ τὰς ἀχθείσας καθέτους καὶ οὕτω ἔχομεν τὰ μήκη τῶν βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν τῶν σχηματισθέντων τριγώνων· εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν κάθε τριγώνου, ὁπότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΓΔ καὶ ΑΔΕ.

525. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ σχέδιον τετραγώνου πλευρᾶς 258 μ. ὑπὸ κλίμακα 0,01μ.

Ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ πλευρὰν

$$α=258\times0{,}01=2{,}58μ.$$

526. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τριγωνικοῦ ἀγροῦ, τοῦ ὁποίου τὸ σχέδιον ὑπὸ κλίμακα 0,001 εἶναι 0,12μ., 0,14μ., 0,17μ.

Ἔστωσαν α=0,12μ., β=0,14μ., γ=0,17 καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχεδίου τοῦ ἀγροῦ, καὶ α΄, β΄, γ΄ αἱ πλευραὶ τοῦ ἀγροῦ καὶ Ε΄ τὸ ἐμβαδόν του.

Ἐπειδὴ τὸ σχέδιον ἔχει γίνει ὑπὸ κλίμακα 0,001 ἔχομεν

$$\frac{α'}{α}=\frac{β'}{β}=\frac{γ'}{γ}=1000$$

καὶ $α'=0{,}12\times1000=120μ.\quad β'=140\quad γ'=170.$

ἐπίσης ἔχομεν

$$E=\sqrt{σ(σ-α)(σ-β)(σ-γ)}\quad \text{ἤτοι}\quad E=\sqrt{0{,}215\times0{,}095\times0{,}075\times0{,}045}=0{,}008297 \text{ τ.μ.}$$

ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων σχημάτων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν, ἔχομεν

$$\frac{E'}{E} = (1000)^2 \quad \text{καὶ} \quad E' = E(1000)^2 \quad \text{ἤτοι}$$

$$E' = 0{,}008297 \times 1000000 = 8297 \text{ τ.μ.}$$

527. ***Νὰ ἀχθῇ πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν ΑΒ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους παράλληλος ἐκ σημείου Γ ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου.***

Ἐκ τοῦ σημείου Γ χαράσσομεν διὰ τοῦ χωρομετρικοῦ γνώμονος εὐθεῖαν κάθετον ΓΔ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν διεύθυνσιν ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ Γ διὰ τοῦ αὐτοῦ ὀργάνου χαράσσομεν κάθετον ΓΕ ἐπὶ τὴν ΓΔ ἡ δευτέρα αὕτη κάθετος εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος πρὸς τὴν δοθεῖσαν διεύθυνσιν.

528. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος (διὰ τοῦ σχεδίου) παραθύρου, ὑπεράνω δρόμου, ἂν δοθῇ τὸ ὕψος τοῦ παραθύρου μετρούμενον ἐντὸς τοῦ δωματίου καὶ αἱ γωνίαι Α καὶ Β, καθ' ἃς φαίνονται ἐκ τοῦ δρόμου τὸ ἄνω καὶ κάτω ἄκρον τοῦ παραθύρου.***

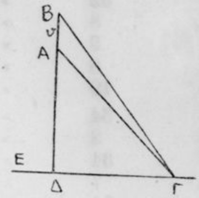
Ἔστω ΕΔ ὁ δρόμος ΒΔ ἡ κατακόρυφος, ΑΒ τὸ παράθυρον, τοῦ ὁποίου δίδεται τὸ ὕψος υ, ἤτοι ΑΒ = υ καὶ γων ΑΓΔ=γων Α καὶ γων ΒΓΔ=γων Β.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι γνωσταὶ ΑΒ=υ, γων ΑΓΒ=Β—Α καὶ

γων ΑΒΓ=90—Β ὡς καὶ

γων ΒΑΓ=90°+Α.

Εἰς τὸ σχέδιον λοιπὸν κατασκευάζομεν ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{\lambda}$ τρίγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ, ἔχον δηλαδὴ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς $\frac{\upsilon}{\lambda}$ καὶ προσκειμένας γωνίας τὰς 90—Β καὶ 90+Α, καὶ ἔστω τοῦτο τὸ Α'Β'Γ'· τούτου προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν Β'Α' καὶ ἐκ τοῦ Γ' φέρομεν κάθετον ἐπὶ ταύτην τὴν Γ'Δ' καὶ μετροῦμεν τὴν Α'Δ', ὁπότε τὸ ζητούμενον ὕψος εἶναι ἴσον πρὸς Α'Δ'.λ.



Σχ. 104.

Διότι τὰ ὀρθογώνια ΑΔΓ καὶ Α'Δ'Γ' ἔχουν γων ΔΑΓ=γων Δ'Α'Γ' καθόσον καὶ αἱ δύο εἶναι παραπληρώματα τῆς γωνίας 90+Α, ἐπομένως εἶναι ὅμοια, ἤτοι

$$\frac{ΑΔ}{Α'Δ'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}$$

ἀλλ' ἕνεκα τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΑΓ καὶ Β'Α'Γ' ἔχομεν

$$\frac{ΑΓ}{Α'Γ'} = \frac{ΑΒ}{Α'Β'}$$

ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς εἶναι $\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \lambda$, ὅθεν εἶναι

$$\frac{ΑΓ}{Α'Γ'} = \lambda, \quad \text{ἄρα καὶ} \quad \frac{ΑΔ}{Α'Δ'} = \lambda \quad \text{ἤτοι} \quad ΑΔ = \lambda(Α'Δ').$$

529. ***Νὰ εὑρεθῇ (διὰ σχεδίου) τὸ ὕψος τοῦ Ἡλίου κατά τινα στιγμὴν τῆς ἡμέρας (μὴ νεφελώδη), ἤτοι ἡ γωνία τῶν ἀκτίνων του μὲ τὴν προβολὴν αὐτῶν ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἂν κατακόρυφος δοκὸς μήκους 5,40μ. ρίπτη σκιὰν 4,20.***

Ἐπειδὴ ἡ δοκὸς εἶναι κατακόρυφος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, ἑπομένως καὶ ἐπὶ τὴν σκιάν της· ἂν φαντασθῶμεν τὴν εὐθεῖαν ἡ ὁποία συνδέει τὸ ἄκρον τῆς δοκοῦ μετὰ τοῦ ἄκρου τῆς σκιᾶς της, ἡ διεύθυνσις αὐτῆς συμπίπτει μὲ τὴν διεύθυνσιν τῶν ἀκτίνων τοῦ Ἡλίου· ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὴν γωνίαν τῆς εὐθείας ταύτης μετὰ τῆς σκιᾶς τῆς ῥάβδου, ἵνα ἔχωμεν τὸ ὕψος τοῦ ἡλίου.

Πρὸς τοῦτο σχηματίζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει καθέτους πλευρὰς ἴσας πρὸς 5 40μ. καὶ 4,20, ὑπὸ κλίμακα π.χ. $\frac{1}{100}$, ὅτε αἱ ἀντίστοιχοι κάθετοι πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι βα=0,054 καὶ βγ=0,042 καὶ μετροῦμεν τὴν γωνίαν αβγ, ἥτις ἰσοῦται πρὸς τὸ ὕψος τοῦ Ἡλίου κατὰ τὴν θεωρουμένην στιγμήν. Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν ὅτι τοῦτο ὑπερβαίνει κατά τι τὰς 52^0.

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελίς	στίχ.		ἀντὶ τοῦ		νὰ γραφῇ
4	15	» »	$\frac{\varkappa}{\vartheta}$	» »	$\frac{\eta}{\vartheta}$
8	τελευταῖος	» »	ΟΕ	» »	$ΟΕ_2$
9	2	» »	$ΟΕ_2$	» »	$ΟΕ_1$
9	32	» »	ὡς παραπληρωματικὴ	» »	παραπληρωματικῆς
16	8	» »	μέσος ἀνάγογος	» »	τέταρτος ἀνάλογος
20	9	» »	βδ	» »	βγ
23	8	» »	ὡς	» »	καὶ
23	19	» »	τριγώνων	» »	πολυγώνων·
28	34	» »	$\sqrt{\alpha^2-{}^2\beta}$	» »	$\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$
30	2	» »	33,26	» »	33,265
39	34	» »	$Β\beta_1+\omega$	» »	$Β\beta_1Α+\omega$
40	7	» »	Γ	» »	γων Γ
40	14	» »	γων γ_1	» »	γων γ
44	21	» »	ΑΡΑ	» »	ΑΡΒ
48	32	» »	ἀντιστοίχου	» »	ὑποτεινομένου
49	33	» »	ΔΓ	» »	ΔΑ
52	12	» »	νὰ διαγραφῇ τὸ *τοῦ*		
53	3	» »	ΓΗ	» »	ΔΗ
61	29		οἱ δύο στίχοι 29 καὶ 30 νὰ διορθωθοῦν ὡς ἑξῆς :		

Ἐπίσης ἔχομεν $\iota\alpha < \iota Α + Α\alpha$ ἢ $\iota\alpha < Α\alpha+\beta Β$· προσθέτοντες καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος τὸ αβ ἔχομεν $\iota\alpha+\alpha\beta<Α\alpha+\beta Β+\alpha\beta$ ἢ $\iota\alpha+\alpha\beta<ΑΒ$ ἤτοι

Σελίς	στίχ.		ἀντὶ τοῦ		νὰ γραφῇ
61	32	» »	μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς	» »	τοῦ ἀθροίσματος δύο διαδοχικῶν πλευρῶν
63	6		μετὰ τὴν λέξιν θεωρουμένην	» »	ὡς πρώτην
63	34		ἀντὶ τοῦ $\frac{\lambda}{Ζ}$	» »	$\frac{\lambda}{2}$
64	6	» »	$\frac{1}{2}\sqrt{16-6+2\sqrt{5}}$	» »	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{16-6+2\sqrt{5}}{4}}$
70	4		νὰ διαγραφῇ τὸ κλάσμα $\frac{(ΗΘΙ)}{(ΑΓΕ)}$		
75	16		ὁ ἀριθμητὴς $\varrho^2\sqrt{10-5\sqrt{5}}$	» »	$\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
84	9		νὰ διαγραφῇ τὸ ἐχούσης ὅριον		
84	21		ἀντὶ τοῦ εἰς μέρη ἀκτῖνος		νὰ γραφῇ εἰς μέτρα
87	26	» »	7_{768}	» »	λ_{768} καὶ
87	28	» »	7_{768}	» »	λ'_{768}
88	11	» »	πρώτου + τῆς ῥίζης	» »	—
92	[illegible]		[illegible]		[illegible]190

1000/97

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ

Τὸ Α΄ Μέρος τῶν ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ, τὸ ὁποῖον περιέχει τὰς λύσεις τῶν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων τοῦ Α΄ καὶ Β΄ βιβλίου Γεωμετρίας Νείλου Σακελλαρίου (ἔκδοσις 1931).

ΥΠΟ ΕΚΤΥΠΩΣΙΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ Γ΄. Περιέχει τὰς λύσεις τῶν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων Στερεομετρίας καὶ Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας Νείλου Σακελλαρίου (ἔκδοσις 1931).

ΜΕΡΟΣ Δ΄. Περιέχει τὰς λύσεις 200 προβλημάτων, γεωμετρικῶν κατασκευῶν καὶ γεωμετρικῶν τόπων κλπ. μὴ περιεχομένων εἰς τὰ τρία προηγούμενα μέρη, καταλλήλων διὰ τοὺς ὑποψηφίους τοῦ Πολυτεχνείου καὶ τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΥΠΟ **ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ**

Περιέχει τὰς λύσεις 1500 ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων τῆς Ἀλγέβρας Νείλου Σακελλαρίου.