100 : 8 $^0/_{00}$ 4 20,16
40 66,4
4
2,64

~~100~~ 12 8 2,64
~~100~~ 4 x

~~100~~ 100 : 8 : x
12 4

2060 ~~12~~ $^0/_{00}$ 1 3.5

100 : 12 :: 12
2000 41 x

2100 100 : 12 : x

12 12
2

240 82
41 240
492
0122

36,77
55
33
37.15
1.50
44,15

7 3/5 43 Πα 40 = 43

Κ. [illegible]

Δεκεμβρίου 1/67

[illegible]	5	50
[illegible]	3	30
[illegible]	1	10
[illegible]	2	25
[illegible]	1	[illegible]
[illegible]	7	35
		165

ΛΕΓΕΝΔΡΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΤΑΦΡΑΣΘΕΝΤΑ

ΥΠΟ

ΤΟΥ ΠΛΩΤΑΡΧΟΥ

Γ. ΖΩΧΙΟΥ.

ΑΘΗΝΗΣΙ,

ΤΥΠΟΙΣ Χ. ΝΙΚΟΛΑΪΔΟΥ ΦΙΛΑΔΕΛΦΕΩΣ.

(Παρὰ τῇ Πύλῃ τῆς Ἀγορᾶς Ἀριθ. 420.)

1857.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.

Τὴν αἰτίαν τῆς δευτέρας ταύτης μεταφράσεως τῶν στοιχείων τῆς γεωμετρίας τοῦ Λεγένδρου καὶ ἀφ' ἑαυτῶν ἐννοοῦσιν, ὅσοι μετεχειρίσθησαν τὴν ἤδη ἐξαντληθεῖσαν πρώτην τῶν αὐτῶν στοιχείων μετάφρασιν, εἴτε διδάσκοντες, εἴτε διδασκόμενοι, καὶ πᾶς τις ἄλλος, τὰς δύο αὐτὰς μεταφράσεις ἀντιπαραβάλλων. Μετεφράσθη δὲ ὁλόκληρον τοῦ Λεγένδρου τὸ κείμενον (ἐν ᾧ πολλαὶ αὐτοῦ ἐπουσιώδεις προτάσεις νὰ παραλείψῃ τις δύναται) πρὸς ἀποφυγὴν τῆς λογοκρισίας, ἥτις, ὡς φαίνεται, οὐδαμοῦ τῆς γῆς εἶναι ἀμερόληπτος καὶ δικαία. Προσετέθη δὲ εἰς τὸ τέλος τῆς μεταφράσεως παράρτημά τι, πρὸς εὐκολωτέραν πολλῶν θεωρημάτων κατάληψιν.

Ἀλλὰ διατί μετεφράσθησαν τὰ στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας τοῦ Λεγένδρου, καὶ δὲν συνετάχθη γεωμετρική τις πραγματεία ἄλλη;

Εἰς τοὺς τοιοῦτόν τι ἐρωτῶντας περιττὴ εἶναι πᾶσα ἀπόκρισις, διότι δεινὸν ἡ ἄγνοια.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Ὁρισμοί.

1 Ἡ Γεωμετρία σκοπὸν ἔχει τὴν καταμέτρησιν τῆς ἐκτάσεως.
Ἡ ἔκτασις ἔχει τρεῖς διαστάσεις, μῆκος, πλάτος, βάθος.

2. *Γραμμὴ* ὀνομάζεται πᾶν μῆκος.
Τὰ ἄκρα τῆς γραμμῆς καλοῦνται *σημεῖα*. Τὸ σημεῖον δὲν ἔχει ἔκτασιν.

3. *Εὐθεῖα γραμμὴ* λέγεται ἡ ἐλαχίστη δύο σημείων ἀπόστασις.

4. Πᾶσα γραμμὴ μὴ εὐθεῖα καὶ μὴ κεκλασμένη καλεῖται *γραμμὴ καμπύλη*.
Κεκλασμένην γραμμὴν λέγουσι τὴν ἐξ εὐθειῶν συνισταμένην. Οὕτω, παραδείγματος χάριν, ἡ μὲν ΑΒ (σχ. 1) εἶναι εὐθεῖα· ἡ δὲ ΑΓΔΒ κεκλασμένη· ἡ δὲ ΑΕΒ καμπύλη γραμμή.

5. *Ἐπιφάνεια* ὀνομάζεται πᾶν μῆκος μετὰ πλάτους.

6. *Ἐπίπεδον* λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, ἐφ' ἧς εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζεται ἐντελῶς καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις.

7. *Κυρτὴ* ἐπιφάνεια ὀνομάζεται πᾶσα ἐπιφάνεια μὴ ἐπίπεδος καὶ μὴ ἐξ ἐπιπέδων συνισταμένη.

8. *Στερεὸν* ἢ *σῶμα* λέγεται πᾶν τὸ μῆκος, πλάτος, βάθος ἔχον. (*)

9. *Γωνία* ὀνομάζεται ἡ μικρὰ ἢ μεγάλη δύο διατεμνομένων

(*) Πρὸς ἀκριβεστέραν τῶν πρώτων αὐτῶν ὁρισμῶν κατάληψιν, κρίνομεν ἀξίαν ἀναγνώσεως τὴν ἀκόλουθον ἑρμηνείαν.

εὐθειῶν ἀμοιβαία κλίσις, ἤτοι τὸ ὑπ' αὐτῶν ἀποτελούμενον χάσμα.

Τὸ σημεῖον τῆς συναπαντήσεως, ἤτοι ἡ κοινὴ τομὴ Α (σχ. 2) λέγεται *κορυφὴ* τῆς γωνίας, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ καλοῦνται *πλευραὶ* τῆς γωνίας.

Τῆς γωνίας τὸ μέγεθος δὲν διορίζεται ὑπὸ τοῦ μεγέθους τῶν πλευρῶν αὐτῆς, ἀλλ' ὡς εἴρηται ὑπὸ τῆς ἀμοιβαίας αὐτῶν κλίσεως.

Ἡ γωνία ἡ μεμονωμένη ἐκφράζεται συνήθως διὰ μόνου τοῦ ἐπὶ τῆς κορυφῆς αὐτῆς ὑπάρχοντος γράμματος. Οὕτω, παραδείγματος χάριν, λέγομεν ἡ γωνία Α. Ὅταν ὅμως πολλαὶ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον συνέρχωνται γωνίαι, πρὸς παράστασιν ἑκάστης ἀναγκαζόμεθα τρία νὰ μεταχειρισθῶμεν γράμματα, τὸ τῆς κορυφῆς καὶ τὰ τῶν ἄκρων τῶν πλευρῶν. Τὸ τῆς κορυφῆς ὅμως πάντοτε τίθεται ἐν τῷ μέσῳ τῆς ἐκφράσεως ἢ τῆς γραφῆς. Οὕτω λέγομεν ἡ γωνία ΔΓΕ (σχ. 20) ἢ ΕΓΔ· ἡ γωνία ΔΓΒ ἢ ΒΓΔ. κτλ.

Ἐπειδὴ καὶ αἱ γωνίαι εἶναι ποσά, ὑπόκεινται καὶ αὐταὶ εἰς τῶν

Κατὰ τοὺς φυσικούς, σῶμα λέγεται ἡ ἀδιαχώρητος ἔκτασις. Κατὰ τοὺς γεωμέτρας τὰ σώματα εἶναι διαχωρητά, ἔκτασιν μόνον ἔχοντα. Ὅθεν σῶμα καὶ ἔκτασις κατ' αὐτοὺς κατ' οὐδὲν διαφέρουσιν.

Ἔκτασις δὲ κυρίως λέγεται ὁ ἐν τῷ ἀπείρῳ διαστήματι ὑπὸ σώματος κατεχόμενος τόπος.

Ἡ ἔκτασις ἔχει τρεῖς διαστάσεις, τὸ μῆκος, τὸ πλάτος, τὸ βάθος. Δύο διαστάσεις μεμονωμέναι, χωρὶς τῆς τρίτης δηλαδὴ, ἤτοι ἐπιφάνεια, ἡ μία μόνη διάστασις ἀπὸ τῶν λοιπῶν δύο κεχωρισμένη, ἤτοι γραμμή, ἐν τῇ φύσει δὲν ἀπαντῶνται· δύνανται ὅμως νὰ νοηθῶσιν, ἤτοι δύναταί τις νὰ συλλάβῃ τὴν ἔννοιαν καὶ τῆς ἐπιφανείας καὶ τῆς γραμμῆς, ἂν καὶ τοιοῦτόν τι ἐν τῷ κόσμῳ δὲν ὑπάρχει. Ὁ ἀναμετρῶν, λόγου χάριν, τὸ ὕψος ὄρους, ἢ τὸ βάθος λιμένος, τῆς μιᾶς μόνης διαστάσεως ἐπιδιώκει τὴν γνῶσιν. Ὁ δὲ τὴν ἔκτασιν στρατοπέδου ἀνερευνῶν τὰς δύο συνδυάζει διαστάσεις, τὴν δὲ τρίτην εἰς οὐδὲν λογίζεται. Ἡ γεωμετρία δὲ ἀνεξετάζει καὶ τὴν κατὰ διαστάσεις ἀναλελυμένην ἔκτασιν, καὶ τὴν ἔκτασιν ἐν ὅλῳ. Διὰ τῆς γνώσεως δὲ τῶν διαστάσεων προσδιορίζει τὴν ἔκτασιν.

Ἐν ἄλλοις λόγοις, ὁ τῶν τριῶν διαστάσεων συνδυασμὸς λέγεται ἔκτασις, στερεόν, σῶμα. Ὁ τῶν δύο, ἐπιφάνεια· ἡ μία διάστασις καλεῖται γραμμή· ἡ μηδεμία, σημεῖον. Ἡ κίνησις τοῦ σημείου γεννᾷ τὴν γραμμήν· ἡ κίνησις τῆς γραμμῆς παράγει τὴν ἐπιφάνειαν· ἡ κίνησις τῆς ἐπιφανείας ἀποτελεῖ τὸ σῶμα. Καὶ κατ' ἄλλους, ἐπιφάνειαι λέγονται τὰ ὅρια τῶν σωμάτων· γραμμαὶ τὰ ὅρια τῶν ἐπιφανειῶν· σημεῖα τῶν γραμμῶν τὰ ὅρια. Ο. Μ.

ποσῶν τὰ πάθη, ἐπιδέχονται δηλαδὴ καὶ αὐταὶ πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν, πολλαπλασιασμὸν, διαίρεσιν.

Ἡ γωνία ΔΓΕ (σχ. 20) εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΔΓΒ καὶ ΒΓΕ. Ἡ δὲ γωνία ΔΓΒ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς γωνίας ΔΓΕ, ἐξ ἧς ἀφῃρέθη ἡ γωνία ΒΓΕ.

Περὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως τῶν γωνιῶν ἐν ἄλλοις γίνεται λόγος.

10. Αἱ δύο προσκείμεναι γωνίαι ΒΑΓ, ΒΑΔ (σχ. 3), αἱ ἀποτελούμεναι ὑπὸ τῆς συναντήσεως τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ, ὅταν ἦναι ἴσαι, ὀνομάζονται *ὀρθαί*· ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΒ ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει λέγεται *κάθετος* ἐπὶ τῆς ΓΔ.

11. Πᾶσα γωνία ΒΑΓ (σχ. 4), τῆς ὀρθῆς μικροτέρα, ὀνομάζεται *γωνία ὀξεῖα*. Πᾶσα δὲ γωνία ΔΕΖ, τῆς ὀρθῆς μείζων, λέγεται *γωνία ἀμβλεῖα*. (*)

12. Αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ (σχ. 5), αἱ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ὑπάρχουσαι καὶ μὴ συναπαντῶσαι ἀλλήλας, ὅσον καὶ ἂν ἐκβληθῶσιν, ὀνομάζονται *παράλληλοι*.

13. Τὸ ἐπίπεδον χωρίον, τὸ πανταχόθεν ὑπὸ γραμμῶν περικεκλεισμένον, ὀνομάζεται *σχῆμα ἐπίπεδον*.

Τὸ σχῆμα λέγεται *εὐθύγραμμον*, ἢ *πολύγωνον*, ὅταν αἱ περικλείουσαι αὐτὸ γραμμαὶ ἦναι ὅλαι εὐθεῖαι.

Τὸ σύστημα τῶν εὐθειῶν αὐτῶν ὅλων ἀποτελεῖ τὴν λεγομένην *περίμετρον* τοῦ πολυγώνου. (σχ. 6)

14. Τὸ ἁπλούστατον τῶν πολυγώνων εἶναι τὸ *τρίγωνον*, ἤτοι τὸ ἐκ τριῶν εὐθειῶν ἀποτελούμενον σχῆμα. Τὸ λέγομεν δὲ ἁπλούστατον, διότι δύο εὐθεῖαι ἀδύνατον εἶναι ν' ἀποτελέσωσι σχῆμα.

Μετὰ τὸ τρίγωνον ἕπεται τὸ *τετράπλευρον*, ἤτοι τὸ πολύγωνον, τὸ τέσσαρας ἔχον γωνίας. Τί δὲ λέγεται *πεντάγωνον*, *ἑξάγωνον* κτλ. καὶ ἐκ μόνου τοῦ ὀνόματος ἐννοεῖται.

15. Τὸ τρίγωνον, ἂν μὲν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς του πλευρὰς ἴσας, λέγεται *ἰσόπλευρον* (σχ. 7)· ἂν δὲ τὰς δύο μόνον, *ἰσοσκελὲς* (**) (σχ. 8)· ἂν δ' ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς ἀνίσους, ὀνομάζεται *σκαληνὸν* (σχ. 9).

16. Τὸ τρίγωνον, τὸ ἔχον μίαν ὀρθὴν γωνίαν, λέγεται *τρί-*

(*) Ἡ ὀρθὴ γωνία εἶναι τῶν γωνιῶν μονάς.

(**) Αἱ πλευραὶ πάσης γωνίας ὀνομάζονται καὶ σκέλη. Ἰδίως σκέλη λέγονται αἱ δύο ἴσαι πλευραὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

γωνον *ὀρθογώνιον*. Ἡ δὲ εἰς τὴν ὀρθὴν γωνίαν Α (σχ. 10) ἀντικειμένη πλευρὰ ΒΓ καλεῖται *ὑποτείνουσα*. (*)

17. Ὑπάρχουσιν ἐξαίρετά τινα τετράπλευρα, ἅτινα χαρακτηρίζονται ἐν τοῖς ἑξῆς.

Τὸ *τετράγωνον* ἔχει τὰς τέσσαρας πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς τέσσαρας γωνίας ὀρθάς. (σχ. 11) (**)

Τὸ *ὀρθογώνιον* ἔχει τὰς τέσσαρας γωνίας ὀρθὰς καὶ τὰς πλευρὰς ἀνίσους. (σχ. 12)

Τὸ *παραλληλόγραμμον* ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους. (σχ. 13.)

Τὸ ῥομβοειδὲς ἔχει τὰς μὲν πλευρὰς ἴσας, τὰς δὲ γωνίας μὴ ὀρθάς. (σχ. 14)

Τὸ *τραπέζιον* ἔχει δύο μόνον πλευρὰς παραλλήλους, τὰς δὲ ἄλλας δύο οὔ. (σχ. 15) (***)

18. *Διαγώνιος* ὀνομάζεται πᾶσα εὐθεῖα ΑΓ (σχ. 42), συνάπτουσα τὰς κορυφὰς δύο γωνιῶν ἀντικειμένων.

19. Πᾶν πολύγωνον λέγεται, *ἰσόπλευρον* μὲν, ὅταν ἔχῃ ὅλας του τὰς πλευρὰς ἴσας· *ἰσογώνιον* δὲ, ὅταν ἔχῃ ἴσας ὅλας του τὰς γωνίας.

20. Δύο ἢ πλειότερα πολύγωνα, πρὸς ἄλληλα παραβαλλόμενα, ὀνομάζονται, *ἰσόπλευρα* μὲν, ὅταν ἔχωσι τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας, *ἰσογώνια* δὲ, ὅταν ἴσας ἔχωσι τὰς γωνίας των τὰς ὁμολόγους.

Ὁμόλογοι πλευραὶ καὶ *ὁμόλογοι* γωνίαι λέγονται αἱ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος κείμεναι, ἤτοι αἱ ἄνω, αἱ κάτω, αἱ πρὸς τὰ δεξιὰ, αἱ πρὸς τὰ ἀριστερά. κτλ.

Τὰ τέσσαρα πρῶτα τῆς γεωμετρίας βιβλία πραγματεύονται περὶ τῶν ἐπιπέδων σχημάτων· εἰς δὲ τὰ λοιπὰ τέσσαρα γίνεται λόγος περὶ τῶν στερεῶν. (****)

(*) Ἐξ ὅλων τῶν πολυγώνων ἐξαίρετον εἶναι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον. Διότι πᾶν μὲν πολύγωνον ἀναλύεται εἰς τρίγωνα· πᾶν δὲ τρίγωνον εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα.

(**) Τὸ τετράγωνον εἶναι ἡ μονὰς, ἡ χρησιμεύουσα πρὸς καταμέτρησιν πάσης ἐπιφανείας.

(***) Τὰ τρίγωνα, τὰ πέντε ἐξαίρετα τῶν τετραπλεύρων εἴδη, καὶ τὰ λεγόμενα κανονικὰ πολύγωνα ἔχουσιν ἴδιον καταμετρήσεως τρόπον, καὶ διὰ τοῦτο μνημονεύονται ἰδιαιτέρως. Ὅλα δὲ τὰ λοιπὰ πολύγωνα καταμετροῦνται τῇ βοηθείᾳ τῶν τριγώνων.

(****) Ἡ γεωμετρία ἡ στοιχειώδες ἀντικείμενον δὲν ἔχει τὴν καταμέτρησιν

Ἐξήγησις τῶν ὅρων καὶ τῶν σημείων.

Ἀξίωμα ὀνομάζεται πᾶσα πρότασις ἐναργὴς καὶ αὐτόδηλος.

Θεώρημα λέγεται ἡ ἀλήθεια, ἡ διὰ συλλογισμοῦ βεβαιουμένη. Τὸν δὲ συλλογισμὸν αὐτὸν καλοῦσιν *ἀπόδειξιν*.

Πρόβλημα ὀνομάζεται πᾶν εἰς λύσιν προκείμενον ζήτημα.

Λῆμμα λέγεται πᾶσα δευτερεύουσα πρότασις, χρησιμεύουσα πρὸς ἀπόδειξιν θεωρήματος, ἢ πρὸς λύσιν προβλήματος.

Πρότασιν ὀνομάζουσιν ἀδιακρίτως καὶ τὸ θεώρημα, καὶ τὸ λῆμμα, καὶ τὸ πρόβλημα.

Πόρισμα λέγεται ἡ ἀπὸ μιᾶς ἢ πλειοτέρων προτάσεων ἀποῤῥέουσα συνέπεια.

Τὸ *σχόλιον* εἶναι εἶδος διασαφήσεως, ὑποδεικνυούσης τὴν χρησιμότητα καὶ τὸ περιεκτικὸν ἢ μὴ μιᾶς ἢ πολλῶν προηγουμένων προτάσεων.

Ὑπόθεσις λέγεται τὸ σύστημα τῶν δεδομένων, ἐφ' οὗ θεμελιοῦται ἡ τὴν ἀπόδειξιν ἀποτελοῦσα σειρὰ τῶν συλλογισμῶν, ἢ ἡ ψευδὴς καὶ ἄτοπος θέσις, τὴν ὁποίαν πρὸς ὥραν ἀποδεχόμεθα πρὸς ἔμμεσον προτάσεώς τινος ἀπόδειξιν.

πάσης ἐκτάσεως, ὡς ὁ ὁρισμὸς αὐτῆς φαίνεται λέγων, ἀλλ' ὡρισμένων τινῶν γραμμῶν, ἐπιφανειῶν καὶ σωμάτων καταδεικνύει τὰ μέτρα·

Ἐκ τῶν γραμμῶν καταμετρᾷ τὰς εὐθείας καὶ μίαν μόνην καμπύλην, τὴν περιφέρειαν. Ἐκ τῶν ἐπιφανειῶν τὰς ἐπιπέδους καὶ πολυγώνους ἐνταυτῷ, ἐκ δὲ τῶν μὴ πολυγώνων τὸν κύκλον. Προσέτι προσδιορίζει τρεῖς κυρτὰς ἐπιφανείας, τὴν τῆς σφαίρας, τὴν τοῦ κώνου καὶ τὴν τοῦ κυλίνδρου.

Ἐκ τῶν σωμάτων καταμετρᾷ τὰ πολύεδρα, ἤτοι τὰ ἀπολήγοντα εἰς ἐπιπέδους ἐπιφανείας, καὶ ἐκ τῶν μὴ πολυέδρων τὴν σφαῖραν, τὸν κῶνον, τὸν κύλινδρον.

Ἰδοὺ τίς ὁ σκοπὸς τοῦ παρόντος συγγράμματος.

Τῶν γραμμῶν τῶν εὐθειῶν τὰ μεγέθη διορίζονται κατὰ σύγκρισιν πρὸς ἄλλας εὐθείας. Τῆς καμπύλης, ἤτοι τῆς περιφερείας, τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν σωμάτων αἱ ἐκτάσεις εὑρίσκονται διὰ τῶν σχέσεων τῶν ἐκτάσεων αὐτῶν πρὸς τὴν γραμμὴν τὴν εὐθεῖαν· διότι ὅλα ἐπὶ τέλους ἀνάγονται εἰς μίαν μονάδα, τὴν εὐθεῖαν γραμμήν.

Περὶ καταμετρήσεως κυρίως γίνεται λόγος εἰς τὰ βιβλία τρίτον, τέταρτον, ἕκτον, ὄγδοον, καὶ εἰς τὸ δεύτερον ὡς ἐν παρόδῳ. Τὰ λοιπὰ τῆς γεωμετρίας βιβλία καὶ ἱκανὸν τῶν εἰρημένων μέρος ἐξιχνιάζουσι τὰς σχέσεις, ἐφ' ὧν θεμελιοῦται ἡ καταμέτρησις. Ὁ. Μ.

Τὸ σημεῖον τοῦτο = εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος. Α=Β σημαίνει Α ἴσον Β.

Τὸ σημεῖον τοῦτο >, τὸ ὁποῖον γράφεται καὶ οὕτω <, εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος. Καὶ εἰς μὲν τῆς γωνίας τὸ χάσμα γράφεται τὸ ποσὸν τὸ μέγα, εἰς δὲ τὴν κορυφὴν τὸ μικρόν. Α>Β, ἢ Β<Α σημαίνει, ὅτι τὸ Α εἶναι μεῖζον τοῦ Β, ἢ τὸ Β μικρότερον τοῦ Α.

Τὸ σημεῖον τοῦτο + εἶναι τὸ σύμβολον τῆς προσθέσεως, λέγεται δὲ *πλέον*.

Τὸ σημεῖον τοῦτο — εἶναι τὸ σύμβολον τῆς ἀφαιρέσεως καὶ καλεῖται *μεῖον*.

Τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως γράφεται μεταξὺ τῶν προσθετέων ποσῶν, καὶ τὸ τῆς ἀφαιρέως μεταξὺ τοῦ ἀφαιρετέου καὶ ἀφαιρέτου. Α+Β ἐκφράζει τὸ κεφάλαιον τοῦ Α καὶ Β. Α—Β εἰκονίζει τὸ ὑπόλοιπον, τὸ μένον μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ Β ἀπὸ τοῦ Α. Α—Β+Γ, ἢ Α+Γ—Β εἶναι παράστασις σημαίνουσα, ὅτι τὸ μὲν Α καὶ Γ πρέπει νὰ προστεθῶσι, τὸ δὲ Β πρέπει ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου αὐτῶν.

Τὸ σημεῖον τοῦτο × εἶναι τὸ σύμβολον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· γράφεται δὲ μεταξὺ τῶν παραγόντων καὶ καλεῖται *ἐπί*.

Α×Β ἐκφράζει τὸ γινόμενον τοῦ Α πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ Β.

Ἀντὶ τοῦ × μεταχειρίζονται πολλάκις ὡς σύμβολον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μίαν στιγμήν. Ἤτοι τὸ γινόμενον Α×Β ἐκφράζεται καὶ οὕτως Α.Β. Πολλάκις δὲ παραλείπεται καὶ ἡ στιγμή. Ὅθεν τὸ αὐτὸ γινόμενον κατὰ τρεῖς γράφεται τρόπους, τοὺς ἑξῆς Α×Β=Α.Β=Α Β.

Τῆς τελευταίας παραστάσεως δὲν γίνεται χρῆσις, ὁσάκις ταυτοχρόνως διὰ τοῦ ΑΒ ἐκφράζεται καὶ τὸ γινόμενον ΑΒ, καὶ ἡ γραμμὴ, ἡ ἔχουσα πέρατα τὸ Α καὶ Β. (*)

Ἡ παράστασις Α×(Β+Γ—Δ), ἥτις σημειοῦται καὶ οὕτως Α.(Β+Γ—Δ), καὶ οὕτως Α(Β+Γ—Δ), ἐκφράζει τὸ γινόμενον τοῦ Α, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὴν ποσότητα Β+Γ—Δ. Τὸ

(*) Εἰς τὴν ἄλγεβραν τὰ γράμματα ἐκφράζουσι ποσά· εἰς τὴν γεωμετρίαν τὰ γράμματα εἶναι τὰ σήμαντρα τοῦ τόπου τῶν σημείων. Οὕτω, λόγου χάριν, ΑΒ ἐκφράζει τὴν γραμμὴν, τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἀρχομένην καὶ εἰς τὸ Β λήγουσαν.

Τὰ ποσὰ ἐκφράζονται διὰ μικρῶν γραμμάτων, τὰ δὲ σήμαντρα διὰ κεφαλαίων. Σπανίως δὲ διὰ κεφαλαίων γραμμάτων ἐκφράζονται ποσά. Ο. Μ.

γινόμενον δὲ τοῦ Α+Β ἐπὶ Α—Β+Γ γράφεται συνήθως οὕτω (Α+Β)(Α—Β+Γ). Ὅ,τι περιέχεται ἐν παρενθέσει θεωρεῖται ὡς μία μόνη ποσότης.

Ὁ ἀριθμὸς, ὁ ἔμπροσθεν γραμμῆς ἢ ποσότητος τεταγμένος, λογίζεται ὡς πολλαπλασιαστὴς τῆς γραμμῆς ἢ τῆς ποσότητος αὐτῆς. 3ΑΒ ἐκφράζει τὸ τριπλάσιον τῆς γραμμῆς ΑΒ. Τὸ ἥμισυ δὲ τῆς γωνίας Α εἰκονίζεται οὕτως $\frac{1}{2}$ Α.

Τὸ τετράγωνον τῆς γραμμῆς ΑΒ σημειοῦται οὕτως $\overline{AB}^2$, καὶ ὁ κύβος οὕτως $\overline{AB}^3$. Τὸ τί δὲ εἶναι τὸ τετράγωνον καὶ τὸ τί ὁ κύβος γραμμῆς τινὸς, θέλομεν ἀκολούθως ἐν οἰκείῳ τόπῳ λαλήσει.

Τὸ σημεῖον τοῦτο $\sqrt{}$ εἶναι τὸ σύμβολον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

Παραδείγματος χάριν, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 εἰκονίζεται οὕτω $\sqrt{2}$· ἡ δὲ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ γινομένου Α×Β, ἢ ἡ μέση ἀνάλογος, ἡ μεταξὺ Α καὶ Β, σημειοῦται οὕτω $\sqrt{A\times B}$.

Ἀξιώματα

1. Τὰ τρίτῳ τινὶ ἴσα ποσὰ εἶναι καὶ πρὸς ἄλληλα ἴσα.
2. Πᾶν ὅλον εἶναι μεῖζον τοῦ μέρους του.
3. Πᾶν ὅλον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἰδίων του μερῶν.
4. Ἀπὸ ἑνὸς εἰς ἄλλο σημεῖον μία μόνη ἄγεται εὐθεῖα. (*)
5. Δύο γραμμαὶ, δύο ἐπιφάνειαι, δύο στερεὰ τότε λέγονται ἴσα, ὅταν ἐπ' ἄλληλα τιθέμενα, ἐφαρμόζωνται καθ' ὅλα καὶ ἐντελῶς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1.

Θεώρημα

Ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι. (**)

(*) Ἡ εὐθεῖα, κατὰ τὸν ὁρισμόν της, εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν γραμμῶν. Ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον ἓν μόνον δύναται νὰ νοηθῇ ἐλάχιστον ἀπόστημα. Μία λοιπὸν μεταξὺ δύο σημείων ὑπάρχει εὐθεῖα. Ἂν δὲ καὶ δευτέρα ἀχθῇ, συμπίπτει μετὰ τῆς πρώτης.

(**) Κατὰ τὸν 10 ὁρισμὸν, ὀρθαὶ γωνίαι λέγονται αἱ προσκείμεναι καὶ ἴσαι. Πρὸς τί λοιπὸν τὸ περὶ ἰσότητος τῶν ὀρθῶν γωνιῶν θεώρημα;

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι κατὰ ζεύγη πρὸς ἀλλήλας ἴσαι. Τίς

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΓΔ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ ἡ ΗΘ ἐπὶ τῆς ΕΖ. Λέγω, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΓΔ, ΕΗΘ εἶναι ἴσαι. (σχ. 16)

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἔχω δεδομένα ΑΓΔ=ΒΓΔ καὶ ΕΗΘ=ΖΗΘ. Λαμβάνω δὲ τὰ τέσσαρα διαστήματα ΑΓ, ΓΒ, ΕΗ, ΗΖ ἴσα. Ὅθεν ΑΒ=ΕΖ. Τιθεμένης δὲ τῆς εὐθείας ΕΖ ἐπὶ τῆς ΑΒ οὕτως, ὥστε τὸ μὲν σημεῖον Ε νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Α, τὸ δὲ Ζ ἐπὶ τοῦ Β, αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι συμπίπτουσι καὶ μίαν μόνην ἀποτελοῦσιν εὐθεῖαν. (*) Διότι, ἂν τὸ ἐναντίον ὑποτεθῇ, ἀνατρέπεται τὸ 4 ἀξίωμα, καθ' ὃ ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον μία μόνη ἄγεται εὐθεῖα.

Τῆς ἐντελοῦς δὲ τῶν δύο εὐθειῶν ΑΒ, ΕΖ ἐφαρμογῆς γενομένης, τὸ μέσον τῆς ΕΖ, ἤτοι τὸ σημεῖον Η, πίπτει ἐπὶ τοῦ μέσου τῆς ΑΒ, ἤτοι ἐπὶ τοῦ σημείου Γ. Ἂν δὲ καὶ ἡ κάθετος ΗΘ συνέπιπτε μετὰ τῆς καθέτου ΓΔ, ἡ ἰσότης τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ἐβεβαιοῦτο πάραυτα. Ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν δύναμαι νὰ καταδείξω ταύτην τῶν καθέτων τὴν σύμπτωσιν, παραδέχομαι τὸ ἐναντίον, παραδέχομαι δηλαδή, ὅτι αἱ κάθετοι δὲν συμπίπτουσιν. Ἐὰν δὲ ἐκ τῆς τοιαύτης παραδοχῆς προκύψῃ ἄτοπον, προδήλως ἕπεται τότε, ὅτι αἱ κάθετοι συμπίπτουσι, διότι ἡ τοῦ ἐναντίου ὑπόθεσις εἰς ἄτοπον ἄγει.

Ὑποθέτω λοιπόν, ὅτι ἡ κάθετος ΗΘ πίπτει ἐκεῖθεν τῆς ΓΔ, ἐπὶ τῆς ΓΚ. Τούτου δὲ τεθέντος, τὴν μὲν γωνίαν ΕΗΘ εἰκονίζει ἡ ΑΓΚ, τὴν δὲ ΖΗΘ ἡ ΒΓΚ. Καὶ ἐπειδὴ ΕΗΘ=ΖΗΘ, ἀναγκαίως ἕπεται, ὅτι ΑΓΚ=ΒΓΚ. Ἀλλ' αὗται αἱ δύο ἴσαι γωνίαι, παραβαλλόμεναι πρὸς τὰς δύο γωνίας τὰς ἴσας ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ, ἡ μὲν ΑΓΚ εἶναι μείζων τῆς ΑΓΔ, ἡ δὲ ΒΓΚ μικροτέρα τῆς ΒΓΔ. Ὅθεν ἕπεται, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΓΚ καὶ ΒΓΚ δὲν εἶναι ἴσαι, διότι πρὸς ἴσας παραβαλλόμεναι ἡ μὲν εἶναι μείζων, ἡ δὲ μικροτέρα. Κακῶς λοιπὸν ὑπετέθη, ὅτι ΓΚ εἰκονίζει τὴν κάθετον ΗΘ· διότι ἂν ἡ ΓΚ ἐπεῖχε τὸν τόπον τῆς καθέτου ΗΘ, αἱ δύο γωνίαι ΑΓΚ καὶ ΒΓΚ ἤθελον εἶσθαι ἴσαι.

Ἐντεῦθεν δὲ ἕπεται, ὅτι οὐδεμία εὐθεῖα ΓΚ, ἐκεῖθεν ἢ ἔνθεν τῆς ΓΔ ἀποκλίνουσα, δύναται νὰ εἰκονίσῃ τὴν κάθετον ΗΘ. Ἐν

ὅμως οἶδεν ἂν ὅλαι ἦναι ἴσαι;

Τὸ θεώρημα λοιπὸν εἶναι ἀναγκαῖον.

(*) Πρὸς ἀπόδειξιν τῶν κυρίων περὶ ἰσότητος προτάσεων, ἐν γένει, ὅταν μεταξὺ τῶν γνωστῶν ὑπάρχῃ καὶ γωνία, μεταχειριζόμεθα τὴν ἐπίθεσιν. Διότι, κατὰ τὸ 5 ἀξίωμα, ἴσα λέγονται τά, ἐπιθέσεως γενομένης, ἐντελῶς συμπίπτοντα. Ὁ. Μ.

ἄλλοις λόγοις, αἱ δύο κάθετοι ΗΘ καὶ ΓΔ συμπίπτουσι, καὶ αἱ γωνίαι ΕΗΘ, ΑΓΔ ἐφαρμόζονται ἐντελῶς, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἴσαι.

Λοιπὸν ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2.

Θεώρημα

Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν ΑΓΔ, ΒΓΔ, τῶν σχηματιζομένων ἐκ τῆς συναπαντήσεως δύο ὁποιωνδήποτε εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ, ἀποτελεῖ πάντοτε δύο γωνίας ὀρθάς. (σχ. 17)

Ἐπὶ τῆς στιγμῆς Γ ἂς ὑψωθῇ ἡ ΓΕ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ. Τοιουτοτρόπως ἡ γωνία ΑΓΔ ἀναλύεται καὶ σχηματίζει τὰς δύο γωνίας ΑΓΕ καὶ ΕΓΔ. Αἱ δύο λοιπὸν γωνίαι ΑΓΔ, ΒΓΔ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΒΓΔ. Ἡ πρώτη τῶν τριῶν τούτων γωνιῶν εἶναι ὀρθή, αἱ δὲ λοιπαὶ δύο ὁμοῦ λαμβανόμεναι ἀποτελοῦσι τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΒΓΕ. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΑΓΔ, ΒΓΔ δύο παράγει γωνίας ὀρθάς.

Πόρισμα 1. Ὅταν λοιπὸν μία τῶν προσκειμένων γωνιῶν ἦναι ὀρθή, καὶ ἡ ἄλλη ὁμοίως θέλ' εἶσθαι ὀρθή.

Πόρισμα 2. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΔΕ ὑποτεθῇ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἀντιστρόφως ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΔΕ. (σχ. 18)

Διότι, οὔσης τῆς ΔΕ καθέτου ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ὀρθή. Ἐντεῦθεν δὲ ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ εἰς τὴν ὀρθὴν ταύτην γωνίαν προσκειμένη γωνία ΑΓΕ εἶναι ὀρθή. Ὅθεν ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΔΕ, διότι αἱ δύο προσκείμεναι γωνίαι ΑΓΕ, ΑΓΔ εἶναι ὀρθαί.

Πόρισμα 3. Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΕ, ΕΑΖ, τῶν ἐσχηματισμένων εἰς τὸ ἕτερον μιᾶς εὐθείας μέρος, ἀποτελεῖ δύο γωνίας ὀρθάς. (σχ. 34) Διότι τὸ ἄθροισμα αὐτὸ καὶ τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν ΒΑΕ, ΕΑΖ τὸ κεφάλαιον κατ' οὐδὲν διαφέρουσι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3.

Θεώρημα

Δύο ἀπέραντοι εὐθεῖαι γραμμαί, ὅταν ἔχωσι δύο σημεῖα κοινὰ, συμπίπτουσι καὶ μίαν μόνην ἀποτελοῦσιν εὐθεῖαν. (*)

Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ δύο κοινὰ τῶν δύο εὐθειῶν σημεῖα. Μεταξὺ τῶν σημείων αὐτῶν, κατὰ τὸ 4 ἀξίωμα, αἱ εὐθεῖαι, αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος, συμπίπτουσι καὶ μίαν μόνην ἀποτελοῦσι γραμμὴν εὐθεῖαν. Ἐπειδὴ δὲ ἀδύνατον εἶναι ν' ἀποδειχθῇ ἡ πρότασις ἀμέσως, ἂς ὑποτεθῇ ὅτι ἡ τοιαύτη τῶν δύο εὐθειῶν ἕνωσις παραμένει μέχρι τοῦ σημείου Γ, καὶ ὅτι εἰς αὐτὸ τὸ σημεῖον αἱ δύο εὐθεῖαι ἀποχωρίζονται, καὶ ἡ μὲν λαμβάνει τὴν διεύθυνσιν ΓΕ, ἡ δὲ τὴν ΓΔ. Οὐχ ἧττον ὅμως ἀμφότεραι μένουσιν εὐθεῖαι καὶ μετὰ τὸν χωρισμόν. (σχ. 19)

Τούτου τεθέντος, εἰς τὸ σημεῖον Γ, τὸ τοῦ χωρισμοῦ τῶν εὐθειῶν, ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΖ οὕτως, ὥστε ν' ἀποτελέσῃ μετὰ τῆς ΑΓ γωνίαν ὀρθὴν, τὴν ΑΓΖ.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΓΖ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ γραμμὴ ΑΒΓΕ εὐθεῖα, ἡ γωνία ΖΓΕ εἶναι ὀρθὴ, ὡς προσκειμένη εἰς ὀρθήν. Ἐπειδὴ προσέτι καὶ ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔ εἶναι εὐθεῖα, ἡ γωνία ΖΓΔ εἶναι καὶ αὐτὴ ὀρθὴ, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ὅθεν ΖΓΕ=ΖΓΔ, διότι ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι. Ἀλλ' ἡ γωνία ΖΓΕ εἶναι μέρος τῆς ΖΓΔ, ἑπομένως ἡ ἰσότης ΖΓΕ=ΖΓΔ εἶναι ἄτοπος. Κακῶς λοιπὸν ὑπετέθη, ὅτι αἱ εὐθεῖαι χωρίζονται εἰς τὸ σημεῖον Γ, διότι ἡ ὑπόθεσις αὐτὴ ἄγει εἰς ἄτοπον.

Λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι μένουσιν ἀχώριστοι· τοῦτο δ' ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4.

Θεώρημα

Ἐὰν δύο προσκειμένων γωνιῶν ΑΓΔ, ΔΓΒ τὸ ἄθροισμα ἀποτελῇ δύο γωνίας ὀρθὰς, τῶν γωνιῶν αὐτῶν αἱ δύο ἀντίθετοι πλευραὶ ΑΓ, ΓΒ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. (σχ. 20) (**)

(*) Κατὰ τὸ 4 ἀξίωμα, μεταξὺ δύο σημείων μία μόνη ἄγεται εὐθεῖα. Ἑπομένως, ἂν καὶ δευτέρα ἀχθῇ, συμπίπτει μετὰ τῆς πρώτης. Ἤτοι αἱ κοινὰ σημεῖα δύο ἔχουσαι εὐθεῖαι συμπίπτουσι καὶ μίαν μόνην μεταξὺ τῶν σημείων αὐτῶν ἀποτελοῦσιν εὐθεῖαν. Πέραν ὅμως τῶν δύο κοινῶν σημείων μένουσιν αἱ εὐθεῖαι ἡνωμέναι, ἢ ἀποσπῶνται καὶ χωρίζονται, ἄλλη ἄλλην λαμβάνουσα διεύθυνσιν; Περὶ τούτου πραγματεύεται ἡ 3 πρότασις, τὸ 4 ἀξίωμα συμπληροῦσα. Ο. Μ.

(**) Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι τὸ ἀντίστροφον τῆς δευτέρας. Ἐν γένει δὲ, ὅταν

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἔμμεσον (ἄμεσος ἀπόδειξις δὲν ὑπάρχει), ἂς μὴ δεχθῶμεν τὴν ΑΓ καὶ τὴν ΓΒ ὡς εὐθεῖαν ἀποτελούσας, ἀλλ' ἂς ὑποθέσωμεν τὴν ΓΕ συνέχειαν τῆς ΑΓ.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΓΕ γραμμὴ ὑποτίθεται εὐθεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΓΔ καὶ ΔΓΕ ἀποτελεῖ δύο γωνίας ὀρθάς. (πρότ. 2) Ἐπειδὴ προσέτι, κατὰ τῆς προτάσεως τὴν ἔκφρασιν, καὶ τῶν δύο γωνιῶν ΑΓΔ καὶ ΔΓΒ τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖ δύο γωνίας ὀρθάς, κατὰ τὸ πρῶτον ἀξίωμα ἔχομεν ΑΓΔ+ΔΓΕ=ΑΓΔ+ΔΓΒ. Ἐξαλειφομένης δὲ τῆς γωνίας ΑΓΔ καὶ ἐκ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος ταύτης, μένει ΔΓΕ=ΔΓΒ (*). Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, διότι ἡ ΔΓΒ εἶναι μέρος τῆς ΔΓΕ. Κακῶς λοιπὸν ὑπετέθη, ὅτι συνέχεια τῆς ΑΓ εἶναι ἄλλη τις εὐθεῖα ΓΕ, καὶ ὄχι ἡ ΓΒ. Λοιπὸν ἡ ΑΓ καὶ ΓΒ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Θεώρημα

Αἱ διασταυρούμεναι εὐθεῖαι ΑΒ, ΔΕ σχηματίζουσι τὰς κατὰ κορυφὴν ἤτοι τὰς ἀντικειμένας γωνίας ἴσας. (σχ. 21)

Ἐπειδὴ ἀμφότεραι αἱ γραμμαὶ καὶ ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΔΕ εἶναι εὐθεῖαι, κατὰ τὴν δευτέραν πρότασιν ἔχομεν τὰς δύο ἀκολούθους ἰσότητας.

ΑΓΕ+ΕΓΒ=2 (**)

ΑΓΕ+ΑΓΔ=2

Ὅθεν, κατὰ τὸ πρῶτον ἀξίωμα, ἔχομεν

ΑΓΕ+ΕΓΒ=ΑΓΕ+ΑΓΔ

Ἐξαλειφομένου τοῦ κοινοῦ ὅρου ΑΓΕ, μένει ΕΓΒ=ΑΓΔ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ δύο κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΑΓΕ, ΒΓΔ εἶναι ἴσαι.

Σχόλιον. Αἱ τέσσαρες γωνίαι, αἱ ἐκ τῆς διατομῆς δύο διασταυρουμένων εὐθειῶν σχηματιζόμεναι, ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἀποτελοῦσι τέσσαρας γωνίας ὀρθάς· διότι δύο περιλαμβάνουσι προσκειμένων γωνιῶν συστήματα. Τέσσαρας ὡσαύτως γωνίας ὀρθὰς ἀποτελεῖ καὶ ὅλων τῶν πέριξ σημείου τινὸς γωνιῶν τὸ ἄθροισμα. Διότι, ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον Γ σχηματισθῶσι τέσσαρες γωνίαι ὀρθαὶ διὰ τῆς

τὸ ἕτερον προτάσεώς τινος μέρος ἀποδεικνύεται κατ' εὐθεῖαν, τοῦ ἀντιστρόφου ἡ ἀπόδειξις γίνεται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Τούτου τοῦ κανόνος ὀλίγαι ὑπάρχουσιν ἐξαιρέσεις.

(*) Ἡ ἐξ ἴσων ἴσων ἀφαίρεσις ἴσα ἀφίνει κατάλοιπα.

(**) Μονὰς ὑποτίθεται ἡ μία ὀρθὴ γωνία. Ο. Μ.

κατατομῆς δύο καθέτων, τὸ χωρίον, τὸ ὑπὸ τῶν τεσσάρων αὐτῶν γωνιῶν κατεχόμενον, κατέχεται καὶ ὑφ᾽ ὅλων τῶν γωνιῶν ΑΓΒ,ΒΓΔ,ΔΓΕ,ΕΓΖ,ΖΓΑ, τῶν κύκλῳ τοῦ σημείου Γ.(σχ.22)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6.

Θεώρημα

Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν ἐξ αὐτῶν τῶν πλευρῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην.

Ἔστω ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ, καὶ Α=Δ· λέγω, ὅτι τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ἴσα. (σχ. 23)

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἂς τεθῇ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον Ε νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β, καὶ τὸ σημεῖον Δ ἐπὶ τοῦ Α. Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΔΕ εἶναι εὐθεῖαι ἴσαι, συμπίπτουσιν. Ἐπειδὴ προσέτι αἱ γωνίαι Δ καὶ Α εἶναι ἴσαι, ἡ πλευρὰ ΔΖ πίπτει ἐπὶ τῆς ΑΓ καὶ ἐφαρμόζεται ἀκριβῶς, διότι ΔΖ=ΑΓ. Ἀφ᾽ οὗ δὲ τὸ μὲν σημεῖον Ε ἐτέθη ἐπὶ τοῦ Β, τὸ δὲ σημεῖον Ζ ἔπεσεν ἐπὶ τοῦ Γ, αἱ πλευραὶ ΕΖ καὶ ΒΓ, κατὰ τὸ 4 ἀξίωμα, συμπίπτουσι. Καὶ τούτου δὲ γενομένου, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐφαρμόζονται καθ᾽ ὁλοκληρίαν, καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα κατὰ τὸ 5 ἀξίωμα.

Πόρισμα. Τρία εἰς τὰ δύο τρίγωνα εἴχομεν δεδομένα ἴσα, τὰς δύο πλευρὰς καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν. Ἐκ τῶν τριῶν δ᾽ αὐτῶν ἴσων δεδομένων ἐπορίσθημεν τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων. Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται, ὅτι καὶ τὰ τρία λοιπὰ τῶν τριγώνων μέρη, ἤτοι καὶ αἱ δύο γωνίαι καὶ ἡ τρίτη πλευρά, εἶναι ἴσα. Ὅθεν ἔχομεν ΕΖ=ΒΓ, Ε=Β, καὶ Ζ=Γ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7.

Θεώρημα

Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν προσκειμένην εἰς αὐτὰς τὰς γωνίας πλευρὰν ἴσην.

Ἔστω Β=Ε, Γ=Ζ, καὶ ΒΓ=ΕΖ· λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ΔΕ. καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσα. (σχ. 23)

Πρὸ ἀπόδειξιν τούτου, ἂς τεθῇ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον Ε νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β καὶ τὸ σημεῖον Ζ ἐπὶ τοῦ Γ. Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ΕΖ, ΒΓ εἶναι εὐθεῖαι ἴσαι, συμπίπτουσιν. Ἐπειδὴ προσέτι αἱ γωνίαι Ε καὶ Β εἶναι ἴσαι, ἡ πλευρὰ ΕΔ λαμβάνει τὴν διεύθυνσιν τῆς πλευρᾶς ΑΒ, καὶ τὸ σημεῖον Δ πίπτει κατ᾽ αὐτὴν τὴν διεύθυνσιν. Ἐπειδὴ πρὸς τοῖς ἄλλοις αἱ γωνίαι Ζ καὶ Γ εἶναι ἴσαι, ἡ πλευρὰ ΖΔ λαμβάνει τὴν διεύθυνσιν τῆς πλευρᾶς ΓΑ, καὶ τὸ σημεῖον Δ πίπτει κατ᾽ αὐτὴν τὴν δεύθυνσιν.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ ἀπαντᾶται συγχρόνως καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΒΑ καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΓΑ, ἀναγκαίως τὸ σημεῖον αὐτὸ πίπτει ἐπὶ τοῦ σημείου Α· διότι μόνον τὸ σημεῖον Α ὑπάρχει καὶ ἐπὶ τῆς ΒΑ καὶ ἐπὶ τῆς ΓΑ. (*)

Τούτου δὲ γενομένου, ἤτοι μετὰ τὴν σύμπτωσιν τῶν σημείων Δ καὶ Α, αἱ πλευραὶ ΕΔ καὶ ΒΑ, ΖΔ καὶ ΓΑ ταυτίζονται, τὰ δὲ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐντελῶς ἐφαρμόζονται καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα.

Πόρισμα. Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριῶν ἴσων δεδομένων ΕΖ=ΒΓ, Ε=Β, καὶ Ζ=Γ, ἐπορίσθημεν τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἐξ ἧς ἕπεται ἡ ἰσότης τῶν τριῶν λοιπῶν μερῶν τῶν τριγώνων, ἤτοι τῆς Δ=Α, τῆς ΕΔ=ΒΑ, καὶ τῆς ΖΔ=ΓΑ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8.

Θεώρημα

Εἰς πᾶν τρίγωνον ἑκάστη τῶν πλευρῶν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. (σχ. 23)

Διότι, παραδείγματος χάριν, ἡ μὲν γραμμὴ ΒΓ εἶναι εὐθεῖα, ἡ δὲ ΒΑ+ΑΓ κεκλασμένη. Ἡ εὐθεῖα δὲ, κατὰ τὸν ὁρισμόν της, εἶναι μικροτέρα πάσης γραμμῆς ἄλλης, ἐχούσης τὰ αὐτὰ πέρατα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9.

Θεώρημα

Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Ο, ὑπάρχοντος ἐντὸς τριγώνου τινὸς ΑΒΓ, ἀχθῶσιν εἰς τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ΒΓ αἱ εὐθεῖαι ΟΒ, ΟΓ, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων εὐθειῶν

(*) Ἐπειδὴ αἱ δύο κοινὰ σημεῖα ἔχουσαι εὐθεῖαι συμπίπτουσι καὶ μίαν μόνην εὐθεῖαν ἀποτελοῦσιν, ἡ κοινὴ τομὴ δύο εὐθειῶν ἓν μόνον εἶναι σημεῖον· διότι, ἂν ἡ κοινὴ αὕτη τομὴ δύο περιελάμβανε σημεῖα, αἱ εὐθεῖαι συνέπιπτον.

θέλ' εἶσθαι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο λοιπῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒ, ΑΓ. (σχ. 24)

Ἐκτείνω τὴν ΒΟ μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὴν πλευρὰν ΑΓ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΟΓ ἔχω ΟΓ$<$ΟΔ$+$ΔΓ. Προστιθεμένης δὲ τῆς εὐθείας ΟΒ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης (*) προκύπτει ἡ ἀνισότης ΟΒ$+$ΟΓ$<$ΟΔ$+$ΔΓ$+$ΟΒ. Ἀναγωγῆς δὲ γενομένης, εὑρίσκω ΟΒ$+$ΟΓ$<$ΔΓ$+$ΒΔ, διότι ΟΔ$+$ΟΒ$=$ΒΔ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἔχω ΒΔ$<$ΑΒ$+$ΑΔ. Προστιθεμένης δὲ τῆς εὐθείας ΔΓ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης, προκύπτει ἡ ἀνισότης ΔΓ$+$ΒΔ$<$ΑΒ$+$ΑΔ$+$ΔΓ. Ἀναγωγῆς δὲ γενομένης, εὑρίσκω ΔΓ$+$ΒΔ$<$ΑΒ$+$ΑΓ, διότι ΑΔ$+$ΔΓ$=$ΑΓ.

Παραβάλλων τὴν τελευταίαν ταύτην ἀνισότητα πρὸς τὴν ἀνωτέρω, συνάγω ΟΒ$+$ΟΓ$<$ΔΓ$+$ΒΔ$<$ΑΒ$+$ΑΓ. Ὅθεν ἕπεται ΟΒ$+$ΟΓ$<$ΑΒ$+$ΑΓ. Τοῦτο δ' ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10.

Θεώρημα

Ὅταν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ ἐξ αὐτῶν τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην γωνίαν ἄνισον, ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ τριγώνου, τοῦ ἔχοντος τὴν μείζονα γωνίαν, εἶναι μείζων τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, τοῦ ἔχοντος τὴν γωνίαν τὴν ἐλάσσονα.

Ἔστω ΑΒ$=$ΔΕ, ΑΓ$=$ΔΖ, καὶ ΒΑΓ$>$Δ· λέγω, ὅτι ΒΓ$>$ΕΖ. (σχ. 25)

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, σχηματίζω τὴν γωνίαν ΓΑΗ$=$Δ, λαμβάνω ΑΗ$=$ΔΕ, καὶ ἄγω τὴν ΓΗ.

Τὰ δύο τρίγωνα ΑΗΓ, ΔΕΖ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων. Ὅθεν καὶ ΗΓ$=$ΕΖ.

Ἐκ τῶν τριγώνων ΗΙΓ, ΒΙΑ πορίζομαι τὰς δύο ἀκολούθους ἀνισότητας.

ΗΓ$<$ΗΙ$+$ΙΓ
ΑΒ$<$ΒΙ$+$ΙΑ

Ἀθροίζων δὲ κατὰ μέλη τὰς ἀνισότητας ταύτας, ἔχω (**)

(*) Εἰς ἄνισα, ἴσων προστιθεμένων, ἡ ἀνισότης δὲν ἀλλοιοῦται.

(**) Φυσικῷ τῷ λόγῳ, τῶν δύο μικροτέρων μελῶν τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τοῦ κεφαλαίου τῶν δύο μελῶν τῶν μειζόνων.

ΗΓ + ΑΒ < ΗΙ + ΙΓ + ΒΙ + ΙΑ.

Ἐπειδὴ δὲ ΗΙ + ΙΑ = ΑΗ, καὶ ΙΓ + ΒΙ = ΒΓ, ἀναγωγῆς εἰς τὸ δεύτερον μέλος γενομένης, συνάγομεν

ΗΓ + ΑΒ < ΑΗ + ΒΓ.

Ἐπειδὴ δὲ ΑΗ = ΔΕ, καὶ ΑΒ = ΔΕ, ἕπεται ὅτι καὶ ΑΗ = ΑΒ. Καὶ ἐξαλειφομένων τῶν δύο τούτων ἴσων ὅρων ἐκ τοῦ πρώτου καὶ ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἀνωτέρω ἀνισότητος, (*) μένει ΗΓ < ΒΓ. Ἐπειδὴ δὲ ΗΓ = ΕΖ, ἕπεται ὅτι καὶ ΕΖ < ΒΓ.

Καὶ τοῦτο μὲν ἐπρόκειτο ν' ἀποδειχθῇ. Ἐπειδὴ ὅμως, ὅταν ἐλήφθη ἡ ΑΗ = ΔΕ, ἀῤῥήτως ὑπετέθη, ὅτι τὸ σημεῖον Η πίπτει ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, ἐν ᾧ τοῦτο δὲν συμβαίνει πάντοτε, διότι ἐνδεχόμενον εἶναι τὸ σημεῖον Η νὰ πέσῃ καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, ἢ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἡ ἀνωτέρω γενομένη ἀπόδειξις μίαν μόνην τῆς προτάσεως περίστασιν ἑρμηνεύει. Κατὰ τὰς δύο δὲ τὰς λοιπάς, ἰδοὺ πῶς τὸ πρᾶγμα ἀποδεικνύεται.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Η πέσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, πρόδηλον εἶναι, ὅτι ΗΓ < ΒΓ. Ἐπειδὴ δὲ ΗΓ = ΕΖ, ἕπεται, ὅτι καὶ ΕΖ < ΒΓ. (σχ. 26)

Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον Η πέσῃ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, κατὰ τὴν προηγουμένην 9 πρότασιν, ἔχομεν ΑΗ + ΗΓ < ΑΒ + ΒΓ. Ἀφαιρουμένων δὲ ἀπὸ τῶν δύο μελῶν τῆς ἀνισότητος ταύτης τῶν δύο ἴσων ποσοτήτων ΑΗ, ΑΒ, μένει ΗΓ < ΒΓ, ἢ ΕΖ < ΒΓ. (σχ. 27)

Σχόλιον. Ἀντιστρόφως, ἐὰν ὑποτεθῇ ἡ πλευρὰ ΑΒ = ΔΕ, ἡ πλευρὰ ΑΓ = ΔΖ, καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ > ΕΖ, λέγω, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι μείζων τῆς γωνίας ΕΔΖ.

Καὶ τῷ ὄντι ἢ αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΕΔΖ εἶναι ἴσαι, ἢ ΒΑΓ > ΕΔΖ, ἢ ΒΑΓ < ΕΔΖ.

Ἂν αἱ δύο γωνίαι ΒΑΓ, ΕΔΖ, ὑποτεθῶσιν ἴσαι, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ἴσα· διότι ἔχουσι κατ' αὐτὴν τὴν ὑπόθεσιν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Ἐπομένως καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΓ = ΕΖ· ὅπερ ἄτοπον. Ἂν δὲ ὑποτεθῇ ἡ γωνία ΕΔΖ > ΒΑΓ, κατὰ τὴν ἤδη ἀποδεδειγμένην 10 πρότασιν, καὶ ἡ πλευρὰ ΕΖ θέλ' εἶσθαι μείζων τῆς ΒΓ. Ἀλλ' ἐπίσης καὶ τοῦτο ἄτοπον εἶναι. Ὅθεν ἀναγκαίως ΒΑΓ > ΕΔΖ.

(*) Ἡ ἐξ ἀνίσων ἴσων ἀφαίρεσις οὐδεμίαν εἰς τὴν ἀνισότητα φέρει ἀλλοίωσιν. Ο.Μ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11.

Θεώρημα

Δύο τρίγωνα, ἔχοντα τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, εἶναι ἴσα.

Ἔστω ἡ πλευρὰ ΑΒ=ΔΕ, ἡ πλευρὰ ΑΓ=ΔΖ, καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ=ΕΖ· λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ἴσα. (σχ. 23)

Διότι, ἂν διαφέρωσι τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα, διαφέρουσι κατὰ τὰς γωνίας. Ἂς ὑποτεθῇ λοιπὸν ἢ Α>Δ, ἢ Α<Δ. Τούτου τεθέντος, κατὰ τὴν 10 πρότασιν, ἔχομεν ἢ ΒΓ>ΕΖ, ἢ ΒΓ<ΕΖ. Ἀλλὰ τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα εἶναι ἄτοπα, διότι ἀνατρέπουσι τὴν δεδομένην συνθήκην, τὴν ἰσότητα δηλαδὴ τῶν πλευρῶν. Ἀναγκαίως λοιπὸν Α=Δ.

Ἀπαραλλάκτως δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν, ὅτι Β=Ε καὶ Γ=Ζ.

Σχόλιον. Εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα αἱ ἴσαι γωνίαι ἀντίκεινται εἰς ἴσας πλευράς, καὶ αἱ ἴσαι πλευραὶ εἰς ἴσας γωνίας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12.

Θεώρημα

Εἰς πᾶν τρίγωνον ἰσοσκελὲς αἱ γωνίαι, αἱ εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς ἀντικείμεναι, εἶναι ἴσαι.

Ἔστω ἡ πλευρὰ ΑΒ=ΑΓ· λέγω, ὅτι καὶ Β=Γ. (σχ. 28)

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, διχοτομῶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὴν βάσιν ΒΓ, καὶ συνάπτω τὸ μέσον αὐτῆς Δ μετὰ τῆς κορυφῆς Α.

Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν ΑΒ=ΑΓ, ὡς ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τὴν ΒΔ=ΓΔ, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς, καὶ τὴν ΑΔ κοινήν. Ἀφ' οὗ δὲ ἡ τῶν τριγώνων ἰσότης ἐβεβαιώθη, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία Β=Γ.

Πόρισμα. Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.

Σχόλιον. Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ προκύπτει, ὅτι ἡ γωνία ΒΑΔ=ΓΑΔ, καὶ ἡ γωνια ΑΔΒ=ΑΔΓ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο τελευταῖαι αὗται ἴσαι γωνίαι εἶναι προσκείμεναι, ἕπεται ὅτι εἶναι ὀρθαί. Ἑπομένως συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεώς του ἀγομένη εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτῆς τῆς βάσεως, καὶ συγχρόνως διαιρεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο ἴσα μέρη.

Βάσις τοῦ τριγώνου λέγεται ἡ μία τῶν πλευρῶν του. Ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας τοῦ τριγώνου, ἡ εἰς τὴν βάσιν ἀντικειμένη, ὀνομάζεται κορυφὴ τοῦ τριγώνου.

Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ὡς βάσις λαμβάνεται ἡ ἄνισος πλευρά.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13.

Θεώρημα

Ἀντιστρόφως, ἐὰν τρίγωνόν τι ἔχῃ δύο γωνίας ἴσας, εἰς τὰς ἴσας αὐτὰς γωνίας ἀντίκεινται ἴσαι πλευραί, καὶ τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

Ἔστω ἡ γωνία ΑΒΓ=ΑΓΒ· λέγω, ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΓ=ΑΒ. (σχ. 29)

Αἱ πλευραὶ ΑΓ, ΑΒ εἶναι ἢ ἴσαι, ἢ ἄνισοι. Ἂς ὑποτεθῶσιν ἄνισοι· ἔστω δὲ ΑΒ>ΑΓ.

Λαμβάνω μέρος τι τῆς ΑΒ, τὸ ΒΔ=ΑΓ, καὶ συνάπτω δι' εὐθείας τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΒΓΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν· ἤτοι τὴν γωνίαν ΔΒΓ=ΑΓΒ, κατὰ τῆς προτάσεως τὰ δεδομένα, τὴν πλευρὰν ΒΔ=ΑΓ, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς, καὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ κοινήν.

Ἀλλὰ τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΒΓ δὲν εἶναι ἴσα, διότι τὸ δεύτερον εἶναι μέρος τοῦ πρώτου. Κακῶς λοιπὸν ὑπετέθη ἡ ΑΒ>ΑΓ, διότι ἡ ὑπόθεσις αὐτὴ μᾶς ἄγει εἰς ἄτοπον.

Εἰς τὸ αὐτὸ περιπίπτομεν ἄτοπον, ἐὰν παραδεχθῶμεν ΑΒ<ΑΓ. Ἄρα ΑΒ=ΑΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14.

Θεώρημα

Εἰς πᾶν τρίγωνον, εἰς τὴν μείζονα γωνίαν ἀντίκειται μείζων πλευρά, καὶ ἀντιστρόφως, εἰς τὴν μείζονα πλευρὰν μείζων γωνία.

Α'. Ἔστω ἡ γωνία Γ>Β· λέγω, ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ>ΑΓ. (σχ. 30)

Σχηματίζω τὴν γωνίαν ΔΓΒ=Β. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΓΔ, κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν, εἶναι ἰσοσκελές. Ὅθεν ΓΔ=ΒΔ.

Ἀλλ' ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ πορίζόμεθα τὴν ἀνισότητα ΑΓ<ΑΔ

$+$ΓΔ· ἢ ΑΓ$<$ΑΔ$+$ΒΔ· διότι ΓΔ$=$ΒΔ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΔ$+$ΒΔ$=$ΑΒ, συνάγομεν ΑΓ$<$ΑΒ.

Β΄. Ἔστω ἡ πλευρὰ ΑΒ$>$ΑΓ· λέγω, ὅτι Γ$>$Β.

Διότι, ἂν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ ὑποτεθῶσιν ἴσαι, κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν, ἴσαι προκύπτουσι καὶ αἱ πλευραὶ ΑΓ, ΑΒ· ὅπερ ἄτοπον. Ἂν δὲ ὑποτεθῇ ἡ Β$>$Γ, κατὰ τὸ πρῶτον τῆς παρούσης προτάσεως μέρος, ἕπεται, ὅτι καὶ ΑΓ$>$ΑΒ· ὅπερ ἐπίσης ἄτοπον.

Λοιπὸν Γ$>$Β. (*)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.

Θεώρημα

Ἐξ ἑνὸς σημείου Α, ὑπάρχοντος ἐκτὸς εὐθείας τινὸς ΔΕ, μία μόνη ἐπ' αὐτῆς τῆς εὐθείας δύναται ν' ἀχθῇ κάθετος. (σχ. 31)

Ἐπειδὴ ἡ πρότασις αὕτη δὲν ἀποδεικνύεται ἀμέσως, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἄγονται δύο κάθετοι, ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΑΓ.

Ἐκτείνω τὴν ΑΒ μέχρις οὗ ἀποτελεσθῇ ἡ ΒΖ$=$ΑΒ· καὶ συνάπτω τὰ σημεῖα Γ καὶ Ζ.

Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΖΒΓ εἶναι ἴσα· διότι ἡ γωνία ΑΒΓ $=$ΖΒΓ, κατὰ τὰ δεδομένα· ἡ πλευρὰ ΒΖ$=$ΑΒ, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς· ἡ δὲ πλευρὰ ΒΓ εἶναι κοινή. Ὅθεν ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΑΓΒ$=$ΖΓΒ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΓΒ ὑπετέθη ὀρθὴ, ὀρθὴ εἶναι καὶ ἡ ΖΓΒ. Ἀλλ' ἐὰν τῷ ὄντι αἱ γωνίαι ΑΓΒ, ΖΓΒ ἦναι ὀρθαὶ, κατὰ τὴν τετάρτην πρότασιν, ἡ γραμμὴ ΑΓΖ εἶναι εὐθεῖα. Ἑπομένως μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Ζ ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι, ἡ ΑΖ καὶ ἡ ΑΓΖ· ὅπερ ἄτοπον. Κακῶς λοιπὸν ὑπετέθη, ὅτι ἀπὸ τοῦ σημείου Α δύο ἐπὶ τῆς ΔΕ ἄγονται κάθετοι.

Σχόλιον. Ὡσαύτως, εἰς σημεῖον ὁποιονδήποτε εὐθείας τινὸς, μία μόνη ἐπ' αὐτῆς τῆς εὐθείας δύναται νὰ ὑψωθῇ κάθετος. Διότι, ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι δύο δυνατὸν εἶναι νὰ ὑψωθῶσι κάθετοι, ἡ ΓΕ καὶ ἡ ΓΔ, ἐπειδὴ ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι, θέλομεν ἔχει

(*) *Τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα, τὸ 12 καὶ τὸ 13, εἶναι τῆς προτάσεως ταύτης συνέπειαι· διότι, ἀφ' οὗ εἰς πᾶν τρίγωνον ἡ ἀνισότης τῶν πλευρῶν συνεπάγει τὴν ἀνισότητα τῶν γωνιῶν, καὶ ἡ ἀνισότης τῶν γωνιῶν τὴν ἀνισότητα τῶν πλευρῶν, ἕπεται, ὅτι ἡ ἰσότης τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου συνδέεται μετὰ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν του, καὶ τἀνάπαλιν.* Ο. Μ.

ΒΓΕ=ΒΓΔ· ὅπερ ἄτοπον, διότι ἀντιβαίνει εἰς τὸ 2 ἀξίωμα. (σχ. 17)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16.

Θεώρημα

Ἐὰν ἀπό τινος σημείου Α, ὑπάρχοντος ἐκτὸς εὐθείας τινὸς ΔΕ, ἀχθῶσιν ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς ἡ κάθετος ΑΒ καὶ πλάγιαι διάφοροι, οἷον ΑΕ, ΑΓ, ΑΔ, (σχ. 31), λέγω·

Α΄. Ὅτι ἡ κάθετος ΑΒ εἶναι πάσης πλαγίας ἐλάσσων.

Β΄. Ὅτι αἱ δύο πλάγιαι ΑΓ, ΑΕ, αἱ ἰσάκις ἐκ τῆς καθέτου ἀπέχουσαι, εἶναι ἴσαι.

Γ΄. Ὅτι ἐκ τῶν δύο πλαγίων ΑΓ, ΑΔ μείζων εἶναι ἡ μᾶλλον ἐκ τῆς καθέτου ἀπέχουσα.

Πρὸς ἀπόδειξιν τῶν εἰρημένων, ἐκτείνω τὴν ΑΒ ἕως οὗ σχηματισθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΖ=ΑΒ, καὶ συνάπτω τὰ σημεῖα Γ καὶ Ζ, Δ καὶ Ζ.

Α΄. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΖΒΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν (πρότ. 6)· ἤτοι τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΑΒΓ=ΖΒΓ, τὴν πλευρὰν ΑΒ=ΒΖ, καὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ κοινήν. Ἄρα καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ ΑΓ=ΖΓ.

Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΖ ἔχομεν ΑΒ+ΒΖ<ΑΓ+ΓΖ· διότι τῶν μὲν πρώτων γραμμῶν τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖ εὐθεῖαν, τῶν δὲ δευτέρων τὸ κεφάλαιον κεκλασμένην. Αὕτη δὲ ἡ ἀνισότης δύναται νὰ παρασταθῇ καὶ οὕτω, ΑΒ+ΑΒ<ΑΓ+ΑΓ, διότι ΑΒ=ΒΖ, καὶ ΑΓ=ΓΖ. Ὅθεν 2ΑΒ<2ΑΓ, ἢ ΑΒ<ΑΓ.

Λοιπὸν ἡ κάθετος εἶναι πάσης πλαγίας ἐλάσσων.

Β΄. Ὑποτιθεμένης τῆς ἀποστάσεως ΒΓ=ΒΕ, ἐπειδὴ τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΕ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὰς ὀρθὰς γωνίας ΑΒΓ, ΑΒΕ ἴσας, τὴν πλευρὰν ΒΓ=ΒΕ, καὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ κοινήν, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ ΑΓ=ΑΕ.

Λοιπὸν αἱ ἰσάκις ἀπὸ τῆς καθέτου ἀπέχουσαι πλάγιαι εἶναι ἴσαι.

Γ΄. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΖ (πρότ. 9) παράγεται ἡ ἀνισότης ΑΓ+ΓΖ<ΑΔ+ΔΖ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΓ=ΓΖ, καὶ ΑΔ=ΔΖ, ἔχομεν ΑΓ+ΑΓ<ΑΔ+ΑΔ, ἢ 2ΑΓ<2ΑΔ, ἢ ΑΓ<ΑΔ.

Λοιπὸν μείζων πλαγία εἶναι ἡ μᾶλλον ἐκ τῆς καθέτου ἀπέχουσα.

Πόρισμα 1. Ἡ κάθετος, πάσης πλαγίας ἐλάσσων οὖσα, εἰκονίζει τὴν καθαυτὸ ἀπόστασιν σημείου ἀπὸ εὐθείας.

Πόρισμα 2. Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου δὲν εἶναι δυνατὸν ν' ἀχθῶσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τρεῖς εὐθεῖαι ἴσαι· διότι μόναι αἱ ἀπὸ τῆς καθέτου ἰσάκις ἀπέχουσαι πλάγιαι εἶναι ἴσαι. Τρεῖς δὲ πλάγιαι δὲν εἶναι δυνατὸν ν' ἀπέχωσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ τῆς καθέτου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17.

Θεώρημα

Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Γ, τοῦ μέσου τῆς εὐθείας ΑΒ, ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς ἡ κάθετος ΕΖ, πρῶτον· Πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου ἀπέχει ἰσάκις ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β· δεύτερον· Πᾶν σημεῖον, ὑπάρχον ἐκτὸς τῆς καθέτου, δὲν ἀπέχει ἰσάκις ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β. (σχ. 32)

Α΄. Ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις ΑΓ=ΓΒ, αἱ δύο πλάγιαι ΑΔ, ΔΒ εἶναι ἴσαι. Ἄρα τὸ σημεῖον Δ ἰσάκις ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β ἀπέχει. Τὸ αὐτὸ δὲ λέγομεν καὶ περὶ παντὸς ἄλλου σημείου τῆς καθέτου ΕΖ.

Λοιπὸν πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου ἰσάκις ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β ἀπέχει.

Β΄. Ἔστω σημεῖόν τι Ι ἐκτὸς τῆς καθέτου. Συνάπτω τὰ σημεῖα Α καὶ Ι, Β καὶ Ι. Ἀναγκαίως δὲ ἡ μία ἐκ τῶν τοιουτοτρόπως σχηματιζομένων δύο εὐθειῶν ΑΙ, ΒΙ τέμνει τὴν κάθετον ΕΖ εἴς τι σημεῖον Δ. Ἄγων δὲ τὴν ΒΔ, ἔχω ΑΔ=ΒΔ.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΔΙ πορίζομαι ΒΙ < ΙΔ + ΔΒ, ἢ ΒΙ < ΙΔ + ΑΔ, ἤ, τῆς ἀναγωγῆς γενομένης, ΒΙ < ΑΙ.

Λοιπὸν τὰ ἐκτὸς τῆς καθέτου ὑπάρχοντα σημεῖα δὲν ἀπέχουσιν ἰσάκις ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

Θεώρημα.

Δύω τρίγωνα ὀρθογώνια, ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας καὶ δύο ἐκ τῶν λοιπῶν πλευρῶν ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, εἶναι ἴσα.

Ἔστω ἡ ὑποτείνουσα ΑΓ=ΔΖ, καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ=ΔΕ· λέγω, ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ἴσα. (σχ. 33)

Τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα, ἢ εἶναι ἴσα, ἢ διαφέρουσιν. Ἂν διαφέρωσι, διαφέρουσι κατὰ τὴν τρίτην πλευράν· διότι ἂν καὶ αἱ πλευραὶ ΒΓ, ΕΖ ἦσαν ἴσαι, τὰ τρίγωνα ἤθελον εἶσθαι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς των πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ.

Ἐπειδὴ ἡ πρότασις δὲν ἀποδεικνύεται κατ' εὐθεῖαν, ἄς ὑποτεθῇ ΒΓ$>$ΕΖ. Τούτου τεθέντος, λαμβάνω τὴν ΒΗ$=$ΕΖ, καὶ ἄγω τὴν ΑΗ.

Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΗ, ΔΕΖ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν· ἤτοι τὴν γωνίαν Β$=$Ε, τὴν πλευρὰν ΑΒ$=$ΔΕ, καὶ τὴν πλευρὰν ΒΗ$=$ΕΖ. Ὅθεν ἕπεται, ὅτι καὶ ΑΗ$=$ΔΖ. Ἀλλὰ κατὰ τὰ δεδομένα καὶ ΑΓ $=$ΔΖ· λοιπὸν ΑΗ$=$ΑΓ. Ὅπερ ἄτοπον· διότι ἡ πλαγία ΑΓ ἀπέχει τῆς καθέτου ΑΒ πλέον ἢ ἡ πλαγία ΑΗ.

Κακῶς λοιπὸν ὑπετέθη ἡ πλευρὰ ΒΓ$>$ΕΖ. Ἀπαραλλάκτως δὲ δύναταί τις ν' ἀποδείξῃ, ὅτι οὐδὲ ΕΖ$>$ΒΓ. Ἄρα ΒΓ$=$ΕΖ.

Λοιπὸν τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. (*)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19.

Θεώρημα

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἀποτελεῖ δύο γωνίας ὀρθάς. (**)

(*) Εἰς τὴν πρότασιν ταύτην δύο εἴχομεν ῥητὰ δεδομένα. Ὑπῆρχεν ὅμως καὶ τρίτον τι ἀῤῥήτως γνωστόν, ἡ ὀρθὴ γωνία. Πάντοτε δὲ, πρὸς ἀπόδειξιν ἰσότητος εὐθυγράμμων τριγώνων, τρία πρέπει νὰ ὑπάρχωσι δεδομένα· ἐν οἷς μία τοὐλάχιστον πρέπει νὰ περιλαμβάνηται πλευρά.

Διὰ τῶν αὐτῶν συλλογισμῶν, δι' ὧν ἐβεβαιώθη ἡ ἀλήθεια τῆς 18 προτάσεως, δύναταί τις ν' ἀποδείξῃ καὶ ὅτι δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν εἰς τὴν μείζονα πλευρὰν ἀντικειμένην γωνίαν ἴσην. (Ἴδε τὸ μετὰ τὸ δεύτερον βιβλίον 11 πρόβλημα)

(**) Αὕτη τοῦ τριγώνου ἡ ἰδιότης εἶναι τοιουτοτρόπως μετὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν παραλλήλων συνδεδεμένη, ὥστε ἀμοιβαῖα αἱ θεωρίαι αὗται λογίζονται ἐξαρτήματα. Καὶ ἂν μὲν ταύτης τῆς ἰδιότητος τοῦ τριγώνου ἡ ἀπόδειξις προηγηθῇ, ἕπεται εὐχερῶς τῶν παραλλήλων ἡ θεωρία· ἂν δὲ τοὐναντίον προηγηθῇ τῶν παραλλήλων ἡ θεωρία, τοῦ τριγώνου ἡ ἰδιότης ἁπλῆ τῆς θεωρίας αὐτῆς εἶναι συνέπεια. Ὁπωσδήποτε ὅμως ἂν διαταχθῶσιν αἱ προτάσεις, εἴτε οὕτως, εἴτε ἄλλως, τῆς προτασσομένης ἡ ἀπόδειξις εἶναι σχοινοτενὴς καὶ οὕτως εἰπεῖν ἐκλελυμένη.

Ἔστω τὸ σκαληνὸν τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς ὃ μεγίστη μὲν πλευρὰ ὑποτίθεται ἡ ΑΒ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΒΓ. Ὅθεν ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι τῆς ΒΑΓ μείζων. (σχ. 35)

Πρὸς εὐκολίαν τῶν μαθητῶν, ἐξ ὧν οἱ πλεῖστοι ναυαγοῦσιν εἰς τὸ δι' αὐτοὺς μέγα τῆς 19 ταύτης προτάσεως πέλαγος, προσετέθη εἰς τὸ τέλος τῆς παρούσης μεταφράσεως παράρτημα, εἰς ὃ διατάσσονται κατὰ τρόπον ἄλλον προτάσεις τινὲς τοῦ πρώτου βιβλίου. Ὁ τρόπος δὲ τῆς διατάξεως καὶ τῶν ἀποδείξεων τὸ εἶδος ἐξομαλύνουσι πολλὰ δυσχερῆ καὶ ἀνώμαλα, εἰς ἃ προσκόπτων ὁ ταλαίπωρος μαθητὴς, ἀπαυδᾷ πρὸ τῶν προπυλαίων τῆς ἐπιστήμης τῆς ἀληθινῆς.

Ἰδοὺ δὲ ποῖον εἶναι τὸ πνεῦμα τῆς ἀποδείξεως, τὴν ὁποίαν ὁ συγγραφεὺς μετεχειρίσθη, πρὸς βεβαίωσιν τῆς 19 προτάσεως.

Φαντάσθητι, ἀναγνῶστα, τῆς Ῥόδου τὸν κολοσσὸν ἱστάμενον ἐπὶ ἐδάφους καὶ ἔχοντα κινητὰ τὰ ἄκρα του τὰ κάτω. Τὰ σκέλη του καὶ ἡ συνάπτουσα τοὺς πόδας του εὐθεῖα ἀποτελοῦσι τρίγωνον. Ἂν ὁ κολοσσὸς ἀνοίξῃ τὰ σκέλη του ἔτι μᾶλλον, τὸ τρίγωνον αὐτὸ μεταβάλλεται, μεταβαλλομένης τῆς βάσεως καὶ τῶν τριῶν γωνιῶν του. Καὶ ἡ μὲν γωνία τῶν σκελῶν αὐξάνει, αἱ δὲ γωνίαι αἱ παρὰ τοὺς πόδας ἐλαττοῦνται. Ἡ αὔξησις δὲ τῆς πρώτης καὶ τῶν δευτέρων ἡ ἐλάττωσις προβαίνουσι, καθ' ὅσον ὁ γίγας διανοίγει τὰ σκέλη του. Τοιουτοτρόπως δὲ σχηματίζονται ἄπειρα τρίγωνα. Ὁ συγγραφεὺς δὲ ἀποδεικνύει ἐν πρώτοις, ὅτι εἰς ὅλα αὐτὰ τὰ τρίγωνα αἱ τρεῖς γωνίαι ἀποτελοῦσι τὸ αὐτὸ ἄθροισμα· ἀποτελοῦσι δηλαδὴ ποσόν τι ἀμετάβλητον καὶ σταθερόν.

Φαντάσθητι δὲ ἤδη, ἀναγνῶστα, τὸν κολοσσὸν διατείνοντα οὕτως τὰ σκέλη του, ὥστε νὰ καταντήσωσι σχεδὸν ὁριζόντια. Ἐν τοιαύτῃ στάσει ὄντος τοῦ κολοσσοῦ, τὰ μὲν σκέλη του σχηματίζουσι γωνίαν, ὀλίγον διαφέρουσαν δύο ὀρθῶν γωνιῶν, αἱ δὲ παρὰ τοὺς πόδας γωνίαι εἶναι μηδαμιναί. Ἂν δὲ τὰ σκέλη τοῦ κολοσοῦ συμπέσωσι μετὰ τοῦ ἐδάφους, τότε τῶν σκελῶν ἡ γωνία φθάνει τὸν ἀνώτατον ὅρον, ἤτοι γίνεται ἴση ὀρθαῖς δύο, αἱ δὲ γωνίαι αἱ παρὰ τοὺς πόδας ἀφανίζονται ἐντελῶς. Ἐν ἄλλοις δηλαδὴ λόγοις, ἐπὶ τέλους αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι συγχωνεύονται εἰς μίαν μόνην, τὴν τῶν σκελῶν, τὴν ἴσην ὀρθαῖς γωνίαις δύο. Ἐπειδὴ δὲ ὡς εἴρηται τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν οἱουδήποτε ἐκ τῶν τριγώνων, ὅσα ὁ κολοσσὸς τὰ σκέλη του διανοίγων ἀλληλοδιαδόχως ἐσχημάτισεν, εἶναί τι ἀμετάβλητον, ἕπεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἀποτελεῖ δύο γωνίας ὀρθάς.

Τοιαύτη εἶναι εἰς γλῶσσαν ἐπιστημονικῶς βέβηλον τῆς προκειμένης προτάσεως ἡ κατὰ τὸν συγγραφέα ἀπόδειξις. Καὶ ὁ μὲν συγγραφεὺς μεταχειρίζεται, πρὸς μετάδοσιν τῆς ἰδέας του, χαρακτόν τι τρίγωνον· ἡμεῖς δὲ, πρὸς φωτισμὸν τοῦ σπουδαστοῦ, ἐνομίσαμεν χρήσιμον τὴν ἐπικουρίαν τοῦ ῥοδίου κολοσσοῦ, ἀφ' οὗ ῥᾴδιον εἶναι καὶ τὸ πήδημα. Ο. Μ.

Διχοτομῶ τὴν ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ μέσου αὐτῆς Ι ἄγω τὴν ΑΙΓ′, τὴν ὁποίαν ἐκτείνω μέχρις οὗ γείνῃ ΑΙΓ′=ΑΒ. Ἐκτείνω προσέτι τὴν ΑΒ ἕως οὗ σχηματισθῇ ἡ ΑΒ′ διπλασία τῆς ΑΙ.

Ὀνομάζω Α, Β, Γ τὰς τρεῖς γωνίας τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ Α′, Β′, Γ′ τὰς τρεῖς γωνίας τοῦ τριγώνου ΑΒ′Γ′. Τούτων δὲ τεθέντων, διισχυρίζομαι, ὅτι ἡ μὲν γωνία Γ′=Β+Γ, ἡ δὲ γωνία Α=Α′+Β′. Ὅθεν ἕπεται Α+Β+Γ = Α′+Β′+Γ′· ἕπεται δηλαδή, ὅτι καὶ εἰς τὰ δύο τρίγωνα αἱ τρεῖς γωνίαι ἀποτελοῦσι τὸ αὐτὸ ἄθροισμα.

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς παρεμπιπτούσης ταύτης προτάσεως, λαμβάνω τὴν ΑΚ=ΑΙ, καὶ ἄγω τὴν Γ′Κ.

Τὰ δύο τρίγωνα ΑΙΒ, ΑΙ′Κ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων· ἤτοι τὴν πλευρὰν ΑΙ=ΑΚ, τὴν πλευρὰν ΑΓ′=ΑΒ, καὶ τὴν γωνίαν ΒΑΙ κοινήν. Ὅθεν ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΙ=Γ′Κ, καὶ ἡ γωνία Α′Γ′Κ=ΑΒΙ, καὶ ἡ γωνία ΑΚΓ′=ΑΙΒ.

Ὡσαύτως ἴσα εἶναι καὶ τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΙ, ΚΒ′Γ′· διότι κατὰ τὴν δευτέραν πρότασιν ΑΚΓ′+Γ′ΚΒ′=2

Καὶ ΑΙΒ+ΑΙΓ=2

Ὅθεν, κατὰ τὸ πρῶτον ἀξίωμα, ΑΚΓ′+Γ′ΚΒ′=ΑΙΒ+ΑΙΓ. Καὶ ἐξαλειφομένων ἔνθεν μὲν τοῦ ὅρου ΑΚΓ′, ἐκεῖθεν δὲ τοῦ ὅρου ΑΙΒ, διότι ὡς ἤδη παρετηρήθη οἱ δύο αὐτοὶ ὅροι εἶναι ἴσοι, μένει Γ′ΚΒ′=ΑΙΓ. Πρὸς τούτοις δὲ ἔχομεν ΙΓ=ΒΙ=Γ′Κ, καὶ ΚΒ′=ΑΚ=ΑΙ. Ἤτοι τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΙ,ΚΒ′Γ′ εἶναι ἴσα, διότι τὰς δύο ἴσας αὐτῶν γωνίας Γ′ΚΒ′, ΑΙΓ περιέχουσιν αἱ ἴσαι πλευραὶ Γ′Κ, ΚΒ′ καὶ ΙΓ, ΙΑ. Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν τριγώνων αὐτῶν ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ=Γ′Β′, καὶ ἡ γωνία Β′Γ′Κ=ΑΓΒ, καὶ ἡ γωνία ΚΒ′Γ′=ΓΑΙ.

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὰ ἤδη ἀποδειχθέντα

Γ′=ΑΓ′Κ+ΚΓ′Β′=Β+Γ

Καὶ Α′+Β′=ΒΑΙ + ΓΑΙ = Α

Συνάπτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας ταύτας ἔχομεν Α′+Β′+Γ′=Α+Β+Γ. Ἤτοι εἰς ἀμφότερα τὰ τρίγωνα ΑΒΓ,ΑΒ′Γ′ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι τὸ αὐτό. Ἐκτὸς δὲ τούτου, ἐπειδὴ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ΑΓ=Γ′Β′, ΑΒ=ΑΓ′, καὶ ΑΓ$<$ΑΒ, ἕπεται, ὅτι καὶ Γ′Β′$<$ΑΓ′. Αὕτη δὲ ἡ ἀνισότης ὑποδεικνύει, ὅτι καὶ ἡ γωνία Α′$<$Β′· διότι εἰς πᾶν τρίγωνον, κατὰ τὴν 14 πρότασιν, ἡ μείζων πλευρὰ ἀντίκειται εἰς τὴν μείζονα γωνίαν, καὶ ἡ ἐλάσσων εἰς τὴν ἐλάσσονα. Ἐπειδὴ δὲ Α′+Β′=Α, ἕπεται, ὅτι Α′$<\frac{1}{2}$Α.

Ἐὰν ἤδη ἐκ τοῦ τριγώνου $AB'\Gamma'$ σχηματίσωμεν τὸ τρίγωνον $AB''\Gamma''$, ὅπως ἐσχηματίσαμεν τὸ τρίγωνον $AB'\Gamma'$ ἐκ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, καλοῦντες A'',B'',Γ'' τὰς τρεῖς γωνίας τοῦ τρίτου τιγώνου $AB''\Gamma''$, πορίζόμεθα τὰς ἑξῆς ἰσότητας $A'=A''+B''$, $\Gamma''=B'+\Gamma'$, $A''+B''+\Gamma''=A'+B'+\Gamma'$, καὶ τὴν ἀνισότητα $A''<\frac{1}{2}A'$, ἢ τὴν $A''<\frac{1}{4}A$. Ἤτοι καὶ εἰς τὰ τρία τρίγωνα, τὸ $AB\Gamma$, τὸ $AB'\Gamma'$, καὶ τὸ $AB''\Gamma''$, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι τὸ αὐτό. Πρὸς τούτοις δὲ αἱ γωνίαι A, A', A'', B, B', B'' προβαίνουσι φθίνουσαι, διότι ἔχομεν $A=A'+B'$, $A'=A''+B''$, $A'<\frac{1}{2}A$, $A''<\frac{1}{4}A$.

Παρατείνοντες ἐπ' ἄπειρον τὴν ἀλλεπάλληλον ταύτην τῶν τριγώνων κατασκευὴν, θέλομεν φθάσει εἴς τι τρίγωνον $\alpha\beta\gamma$, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ποσῶς δὲν θέλει διαφέρει τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, ἡ δὲ γωνία α θέλ' εἶσθαι μικροτέρα ὁποιουδήποτ' ἂν θελήσωμεν ὅρου τῆς κατιούσης προόδου $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{4}A$, $\frac{1}{8}A$. κ.τ.λ. (*) Δυνάμεθα δὲ νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι τῶν τριγώνων ἡ σειρὰ παρετάθη ἐπὶ τοσοῦτον, ὥστε τοῦ τριγώνου $\alpha\beta\gamma$ ἡ γωνία α εἶναι πάσης γωνίας ἐλάσσων.

Καὶ τούτου τεθέντος, ἐὰν διὰ τοῦ τριγώνου $\alpha\beta\gamma$ κατασκευάσωμεν τὸ ἐφεξῆς τρίγωνον $\alpha'\beta'\gamma'$, καθ' ὃν τρόπον κατεσκευάσθησαν καὶ τὰ τρίγωνα τὰ προηγούμενα, τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, ἤτοι τοῦ $\alpha'\beta'\gamma'$, αἱ δύο γωνίαι α' καὶ β', ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἀποτελοῦσι τὴν γωνίαν α τοῦ τριγώνου $\alpha\beta\gamma$, ἀποτελοῦσι δηλαδὴ ἄθροισμα πάσης γωνίας μικρότερον. Ἑπομένως τὸ σύνολον τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου $\alpha'\beta'\gamma'$ ἀνάγεται σχεδὸν εἰς μόνην τὴν γωνίαν γ'.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ ἀκριβοῦς μέτρου τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν α', β', γ', ἐκτείνομεν τὴν πλευρὰν $\alpha'\gamma'$ πρὸς τὸ δ', καὶ χάριν εὐκολίας ὀνομάζομεν χ' τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν $\beta'\gamma'\delta'$.

Ἡ γωνία χ' καὶ ἡ γωνία γ' τοῦ τριγώνου $\alpha'\beta'\gamma'$, συγκεφα-

(*) Ὁ συγγραφεὺς θέλων νὰ ὁρίσῃ τὴν σμικρότητα τῆς γωνίας α, μετεχειρίσθη πρὸς ἀπόδειξιν τῆς προκειμένης προτάσεως τὸ σκαληνὸν τρίγωνον, καὶ τοιουτοτρόπως ἐσχημάτισε τὴν κατιοῦσαν πρόοδον $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{4}A$, $\frac{1}{8}A$ κτλ. Ἀλλὰ καὶ ἂν ἄλλο ληφθῇ τρίγωνον, ἡ πρότασις ἀποδεικνύεται, διότι τῶν γωνιῶν A, A', A'', κτλ. $B, B'B''$ κτλ. ἡ φθίσις εἶναι προφανής. Καὶ τῷ ὄντι $A=A'+B'$, $A'=A''+B''$, $A''=A'''+B'''$ κτλ. Ο. Μ.

λαιούμεναι ἀποτελοῦσι δύο γωνίας ὀρθάς. Ὅθεν, ἐὰν ληφθῇ ὡς μονὰς ἡ γωνία ἡ ὀρθή, ἡ μὲν γωνία γ΄ δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ $2-\chi'$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου α΄β΄γ΄ διὰ τοῦ $\alpha'+\beta'+2-\chi'$.

Ἀλλὰ προϊούσης τῆς εἰρημένης τῶν ἀλλεπαλλήλων τριγώνων κατασκευῆς, καὶ αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι τῶν σχημάτων αὐτῶν μεταβάλλονται οὕτως, ὥστε περὶ τὸ ἔσχατον τῆς τοιαύτης μεταβολῆς ὅριον αἱ γωνίαι ά καὶ β΄ κατ᾿ οὐδὲν σχεδὸν τοῦ μηδενὸς διαφέρουσιν. Ἐν αὐτῷ δὲ τῷ ἐσχάτῳ ὁρίῳ ἡ εὐθεῖα α΄γ΄δ΄ συμπίπτει μετὰ τῆς α΄β΄. Τότε δὲ ὄχι μόνον αἱ γωνίαι α΄ καὶ β΄ ἐξουδενοῦνται, ἀλλὰ ταυτοχρόνως ἀφανίζεται καὶ ἡ γωνία χ΄. Ἡ ποσότης δὲ $\alpha'+\beta'+2-\chi'$, ἡ ἐκφράζουσα τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου α΄β΄γ΄ καὶ παντὸς ἄλλου τριγώνου προηγουμένου, συγκεφαλαιοῦται εἰς τὸ ποσὸν δύο, τὸ δύο ἐκφράζον γωνίας ὀρθάς. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἀποτελεῖ δύο γωνίας ὀρθάς.

Πόρισμα 1. Γινώσκοντες τὰς δύο γωνίας τριγώνου τινός, ἢ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, εὐκόλως προσδιορίζομεν τὴν γωνίαν τὴν τρίτην. Διότι, ἀφαιρουμένου τοῦ γνωστοῦ αὐτοῦ ἀθροίσματος ἀπὸ δύο ὀρθῶν γωνιῶν, προκύπτει ὡς ὑπόλοιπον ἡ τρίτη γωνία.

Πόρισμα 2. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς δύο γωνίας των ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἀναγκαίως καὶ ἡ τρίτη αὐτῶν γωνία εἶναι ἴση, καὶ τὰ τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ἰσογώνια.

Πόρισμα 3. Εἰς πᾶν τρίγωνον γωνία ὀρθὴ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρξῃ εἰ μὴ μόνον μία· διότι, ἂν αἱ δύο τοῦ τριγώνου γωνίαι ἦσαν ὀρθαί, ἡ τρίτη ἤθελεν εἶσθαι μηδέν. Κατὰ λόγον δὲ ἰσχυρότερον μία μόνη εἰς τρίγωνον δύναται νὰ ὑπάρξῃ γωνία ἀμβλεῖα.

Πόρισμα 4. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀξειῶν γωνιῶν παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἀποτελεῖ μίαν γωνίαν ὀρθήν.

Πόρισμα 5. Εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἑκάστη τῶν γωνιῶν εἶναι τὸ τρίτον δύο γωνιῶν ὀρθῶν, ἢ τὰ δύο τρίτα μιᾶς ὀρθῆς. Ὅθεν, ἂν παραστήσωμεν τὴν γωνίαν τὴν ὀρθὴν διὰ τῆς 1, ἡ γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐκφράζεται διὰ τοῦ $\frac{2}{3}$.

Πόρισμα 6. Ἐὰν παραταθῇ πρὸς τὸ σημεῖον Δ ἡ ΑΒ πλευρὰ τριγώνου τινὸς ΑΒΓ, ἡ σχηματιζομένη ἐξωτερικὴ γωνία ΓΒΔ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν Α καὶ Γ, τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι. Διότι, ἐὰν ἡ γωνία ΑΒΓ προστεθῇ, ἢ εἰς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ΓΒΔ, ἢ εἰς τὰς δύο γωνίας Α καὶ Γ, τὸ αὐτὸ προκύπτει ἐξαγόμενον, ἤτοι δύο γωνίαι ὀρθαί. (σχ. 35)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 20.

Θεώρημα

Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν παντὸς πολυγώνου περιλαμβάνει τοσάκις δύο γωνίας ὀρθὰς, ὅσαι εἶναι τοῦ πολυγώνου αἱ πλευραὶ μεῖον δύο.

Ἔστω ἐν εἴδει παραδείγματος τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖΗ. (σχ. 42) Ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἄγω τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, καὶ διαιρῶ δι' αὐτῶν τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα πέντε, ἂν τὸ σχῆμα ἦναι ἑπτάγωνον, εἰς ἓξ δὲ, ἂν ἦναι ὀκτάγωνον, καὶ ἐν γένει εἰς τόσα τρίγωνα, ὅσας τὸ πολύγωνον ἔχει πλευρὰς μεῖον δύο· διότι ὅλα τὰ τρίγωνα αὐτὰ δύνανται νὰ ὑποτεθῶσιν ὡς ἔχοντα, κορυφὴν μὲν κοινὴν, γωνίαν τινὰ τοῦ πολυγώνου, τὴν Α, βάσιν δὲ, τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, δύο μόνον ἐξαιρουμένων. Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων οὐδὲν ἄλλο εἶναι, εἰ μὴ αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων ἐκφράζει τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου. Γωνίας δὲ ὀρθὰς αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων ἀποτελοῦσι δὶς τόσας, ὅσα εἶναι τὰ τρίγωνα, ἤτοι ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου μεῖον δύο.

Πόρισμα 1. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι δύο γωνίαι ὀρθαὶ ἐπὶ $4-2$ πολλαπλασιασθεῖσαι, ἤτοι τέσσαρες ὀρθαί. Ἐὰν λοιπὸν αἱ τέσσαρες τετραπλεύρου τινὸς γωνίαι ὑποτεθῶσιν ἴσαι, ἑκάστη αὐτῶν θέλ' εἶσθαι ὀρθή. Τοῦτο δ' ἐπικυροῖ τὸν 17 ὁρισμὸν, καθ' ὃν παρεδέχθημεν τετράπλευρα ἔχοντα καὶ τὰς τέσσαρας γωνίας των ὀρθὰς, οἷον τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ὀρθογώνιον.

Πόρισμα 2. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πενταγώνου εἶναι ὀρθαὶ γωνίαι δύο, πολλαπλασιασθεῖσαι ἐπὶ $5-2$, ἤτοι ἓξ ὀρθαὶ γωνίαι. Ἐὰν λοιπὸν τὸ πεντάγωνον ὑποτεθῇ ἰσογώνιον, ἤτοι ὑποτεθῇ ἔχον τὰς πέντε γωνίας του ἴσας, ἑκάστη αὐτῶν εἶναι τὸ πέμπτον τῶν ἓξ ὀρθῶν γωνιῶν, ἢ τὰ $\frac{6}{5}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας.

Πόρισμα 3. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ ἑξαγώνου εἶναι $2\times(6-2,)$ ἤτοι 8 ὀρθαὶ γωνίαι. Ἑκάστη λοιπὸν γωνία τοῦ ἰσογωνίου ἑξαγώνου εἶναι τὰ $\frac{8}{6}$ ἢ τὰ $\frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς.

Σχόλιον. Ἐάν τις ἐπιχειρήσῃ νὰ ἐφαρμόσῃ τὴν πρότασιν ταύτην καὶ εἰς τὰ πολύγωνα, τὰ ἔχοντα μίαν ἢ πλειοτέρας γωνίας εἰσεχούσας, πρέπει νὰ θεωρήσῃ ἑκάστην αὐτῶν ὡς μείζονα δύο ὀρθῶν γωνιῶν. Πρὸς ἀποφυγὴν δὲ πάσης συγχύσεως, ἐν τῷ παρόντι συγγράμματι πραγματευόμεθα μόνον περὶ τῶν πολυγώνων, τῶν ἐχόντων γωνίας ἐξεχούσας, τῶν κυρτῶν καλουμένων. Τῶν κυρτῶν δὲ πολυγώνων ἡ κατασκευὴ εἶναι τοιαύτη, ὥστε μία γραμμὴ εὐθεῖα δὲν δύναται νὰ συναπαντήσῃ τὴν περίμετρον αὐτῶν εἰς σημεῖα πλειότερα τῶν δύο. (σχ. 43)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 21.

Θεώρημα

Δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ κάθετοι ἐπί τινος τρίτης εὐθείας ΖΗ εἶναι παράλληλοι, ἤτοι δὲν συναπαντῶνται, ὅσον καὶ ἂν παραταθῶσι. (σχ. 36)

Διότι, ἂν τις ὑποθέσῃ ὅτι συναπαντῶνται εἴς τι σημεῖον Ο, ἀναγκάζεται νὰ παραδεχθῇ δύο καθέτους ΟΖ καὶ ΟΗ, ἠγμένας ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΗΖ. Τοῦτο ὅμως κατὰ τὴν 15 πρότασιν εἶναι ἀδύνατον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 22.

Θεώρημα

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ σχηματίζωσι μετά τινος τρίτης εὐθείας ΕΖ δύο ἐσωτερικὰς γωνίας ΒΕΖ, ΔΖΕ τοιαύτας, ὥστε τὸ ἄθροισμά των ν' ἀποτελῇ δύο γωνίας ὀρθάς, αἱ δύο αὐταὶ εὐθεῖαι, ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔ, εἶναι παράλληλοι. (σχ. 36)

Ἐὰν αἱ δύο γωνίαι ΒΕΖ, ΔΖΕ ὑποτεθῶσιν ἴσαι, ἑκάστη αὐτῶν ἤθελεν εἶσθαι ὀρθή. Ἐν τοιαύτῃ δὲ περιπτώσει ἡ παροῦσα πρότασις ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην. Ἂς ὑποθέσωμεν λοιπὸν, ὅτι αἱ δύο γωνίαι εἶναι ἄνισοι· ἀπὸ τοῦ Ζ δὲ σημείου, ἤτοι ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς μείζονος γωνίας, ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ.

Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΕΖΗ αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι ἀποτελοῦσι μίαν γωνίαν ὀρθὴν (Πρότ. 19, πόρ. 4). Ἀφαιρεθέντος δὲ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο αὐτῶν γωνιῶν, ἤτοι τοῦ ΒΕΖ + ΗΖΕ, ἀπὸ τῶν δύο γωνιῶν ΒΕΖ, ΔΖΕ, ὧν τὸ ἄθροισμα, κατὰ τὰ δεδομένα, ἀποτελεῖ δύο γωνίας ὀρθὰς, μένει ὑπόλοιπον ἡ γωνία ΔΖΗ, ἥτις διὰ τοῦτο εἶναι ὀρθή. Ἐντεῦθεν δὲ ἕπεται, ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΖΗ· ἄρα εἶναι καὶ παράλληλοι (πρότ. 21).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 23.

Θεώρημα

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ ΑΒ, ΓΔ σχηματίζωσι μετά τινος τρίτης εὐθείας ΕΖ δύο ἐσωτερικὰς ἑτερομερεῖς γωνίας τοιαύτας, ὥστε τὸ ἄθροισμά των νὰ ἦναι μεῖζον ἢ ἔλαττον δύο γωνιῶν ὀρθῶν, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ ἱκανῶς ἐκτεινόμεναι συναπαντῶνται. (σχ. 37)

Ἔστω κατὰ πρῶτον τῶν δύο γωνιῶν τὸ ἄθροισμα ΒΕΖ+ΕΖΔ ἔλαττον δύο γωνιῶν ὀρθῶν.

Ἄγω τὴν ΖΗ καὶ σχηματίζω δι' αὐτῆς τὴν γωνίαν ΕΖΗ=ΑΕΖ. Ἄρα ἔχω ΒΕΖ+ΕΖΗ=ΒΕΖ+ΑΕΖ. Τῆς ἰσότητος δὲ ταύτης τὸ δεύτερον μέρος ἀποτελεῖ δύο γωνίας ὀρθάς, ἑπομένως δύο ὀρθὰς γωνίας ἀποτελεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΒΕΖ, ΕΖΗ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα ΒΕΖ +ΕΖΔ εἶναι ἔλαττον δύο ὀρθῶν, ἀναγκαίως ἡ γωνία ΕΖΗ>ΕΖΔ. Ὅθεν ἡ εὐθεῖα ΖΔ περιέχεται ἐντὸς τῆς γωνίας ΕΖΗ.

Τούτου τεθέντος, ἐκ τοῦ σημείου Ζ ἄγω τὴν πλαγίαν ΖΜ, ἥτις συναπαντᾷ τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Μ. Ἡ οὕτω σχηματιζομένη γωνία ΑΜΖ καὶ ἡ ΗΖΜ εἶναι ἴσαι· διότι ἂν εἰς ἀμφοτέρας τὰς γωνίας ταύτας προστεθῇ τὸ ποσὸν ΕΖΜ+ΖΕΜ, ἀποτελοῦνται δύο ἴσα κεφάλαια, ἐξ ὧν ἕκαστον δύο περιλαμβάνει γωνίας ὀρθάς.

Λαμβάνω ἤδη τὴν ΜΝ=ΖΜ καὶ συνάπτω τὰ σημεῖα Ζ καὶ Ν διὰ τῆς εὐθείας ΖΝ. Ἡ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΖΜΝ ὑπάρχουσα γωνία ΑΜΖ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν ΜΖΝ, ΜΝΖ (πρότ. 19, πόρ. 6). Ἀλλ' αἱ δύο αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι, διότι ἀντίκεινται εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς ΜΝ, ΖΜ. Ἄρα ἡ γωνία ΑΜΖ εἶναι διπλασία τῆς γωνίας ΜΖΝ· ἑπομένως διπλασία τῆς γωνίας ΜΖΝ εἶναι καὶ ἡ γωνία ΜΖΗ, διότι ΑΜΖ= ΜΖΗ. Λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΖΝ διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν ΗΖΜ καὶ συναπαντᾷ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ν, κατὰ τὴν ἀπόστασιν ΜΝ=ΖΜ.

Δι' ἀποδείξεως ἀπαραλλάκτου βεβαιοῦται, ὅτι ἐὰν ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΝΠ=ΖΝ, προσδιορίζεται ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ σημεῖον Π, εἰς ὃ ἀπολήγει ἡ εὐθεῖα ΖΠ, δι' ἧς σχηματίζεται ἡ γωνία ΗΖΠ, ἥτις εἶναι τῆς μὲν γωνίας ΗΖΝ τὸ ἥμισυ, τῆς δὲ γωνίας ΗΖΜ τὸ τέταρτον.

Ἐντεῦθεν δὲ ἕπεται, ὅτι αἱ εὐθεῖαι, δι' ὧν ἀλληλοδιαδόχως λαμβάνει τις τὸ ἥμισυ, τὸ τέταρτον, τὸ ὄγδοον κτλ. μέρος τῆς γωνίας ΗΖΜ, τέμνουσι τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς σημεῖα μᾶλλον μὲν ἐπὶ μᾶλλον ἀλλήλων ἀπέχοντα, εὐκόλως ὅμως προσδιοριζόμενα· διότι ΜΝ=ΖΜ, ΝΠ=ΖΝ, ΠΚ=ΖΠ κτλ. Ἡ ἀπόστασις μάλιστα οἱαςδήποτε ἐξ αὐτῶν τῶν τομῶν ἀπὸ τοῦ σταθεροῦ σημείου Ζ δὲν εἶναι διπλασία τῆς ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σταθεροῦ σημείου ἀποστάσεως τῆς τομῆς τῆς προηγουμένης· διότι, παραδείγματος χάριν, ΖΝ$<$ΖΜ+ΜΝ, ἢ ΖΝ$<$2ΖΜ. Ὡσαύτως ΖΠ $<$2ΖΝ, ΖΚ$<$2ΖΠ κτλ.

Ἀλλὰ διαιρῶν τις καὶ ὑποδιαιρῶν τὴν γωνίαν ΗΖΜ εἰς δύο ἴσα μέρη, θέλει μετ' οὐ πολὺ φθάσει εἴς τινα γωνίαν ΗΖΩ μικροτέραν τῆς γωνίας ΗΖΔ, καὶ ἐν τούτοις ἡ εὐθεῖα ΖΩ, δι' ἧς ἡ ὑποδιαίρεσις γίνεται, ἐκτεινομένη συναπαντᾷ τὴν ΒΑ εἴς τι σημεῖον ὡρισμένον. Δι' ἰσχυρότερον λοιπὸν λόγον ἡ εὐθεῖα ΖΔ, ἡ περιεχομένη ἐντὸς τῆς γωνίας ΕΖΩ, συναπαντᾶται μετὰ τῆς ΑΒ.

Ἔστω ἤδη τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐσωτερικῶν γωνιῶν ΑΕΖ+ΓΖΕ μεῖζον δύο ὀρθῶν.

Ἐὰν παραταθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΕ καὶ ΓΖ, ἡ μὲν πρὸς τὸ Β, ἡ δὲ πρὸς τὸ Δ, τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων γωνιῶν ΑΕΖ, ΒΕΖ, ΓΖΕ, ΕΖΔ ἀποτελεῖ τέσσαρας γωνίας ὀρθάς. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ τὸ ἄθροισμα ΑΕΖ+ΓΖΕ, τὸ μεῖζον δύο γωνιῶν ὀρθῶν, μένει τὸ κεφάλαιον ΒΕΖ+ΕΖΔ ἔλαττον δύο γωνιῶν ὀρθῶν. Ὅθεν, κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα, αἱ εὐθεῖαι ΕΒ, ΖΔ ἐκτεινόμεναι συναπαντῶνται.

Πόρισμα. Ἀπὸ τοῦ ὡρισμένου σημείου Ζ μία μόνη ἄγεται παράλληλος τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ. Διότι μία μόνη ὑπάρχει εὐθεῖα ΖΗ, σχηματίζουσα μετὰ τῆς κατὰ θέλησιν ἠγμένης ΖΕ καὶ τῆς εὐθείας ΑΒ τὰς δύο ἐσωτερικὰς γωνίας ΒΕΖ, ΕΖΗ, τὸ ἄθροισμα τῶν ὁποίων οὔτε μεῖζον οὔτε ἔλαττον εἶναι δύο ὀρθῶν γωνιῶν. Πᾶσα δὲ ἄλλη εὐθεῖα ΖΔ ἀποτελεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΒΕΖ+ΕΖΔ ἢ μεῖζον ἢ ἔλαττον δύο ὀρθῶν γωνιῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 24.

Θεώρημα

Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐσωτερικῶν γωνιῶν ΑΗΟ, ΗΟΓ, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ διατέμνουσα ΕΖ, συναπαντῶσα τὰς παραλλήλους ΑΒ, ΓΔ, ἀποτελεῖ δύο γωνίας ὀρθάς.

Διότι, ἂν τὸ ἄθροισμα αὐτὸ ὑποτεθῇ μεῖζον ἢ ἔλαττον δύο ὀρθῶν, κατὰ τὴν 23 πρότασιν, αἱ δύο παράλληλοι ΑΒ, ΓΔ συναπαντῶνται ἔνθεν ἢ ἐκεῖθεν. (σχ. 38)

Πόρισμα 1. Ἐὰν ἡ γωνία ΗΟΓ ἦναι ὀρθὴ, ἀναγκαίως ὀρθὴ γωνία εἶναι καὶ ἡ ΑΗΟ. Ὅθεν πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τῆς μιᾶς παραλλήλου κάθετος εἶναι καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης.

Πόρισμα 2. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα ΑΗΟ+ΗΟΓ ἀποτελεῖ δύο γωνίας ὀρθὰς, δύο δὲ γωνίας ὀρθὰς ἀποτελεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα ΗΟΔ+ΗΟΓ, ἀφαιρουμένης καὶ ἀπὸ τῶν δύο ἴσων αὐτῶν ἀθροισμάτων τῆς κοινῆς γωνίας ΗΟΓ, μένει ἡ γωνία ΑΗΟ=ΗΟΔ. Κατὰ δὲ τὴν 5 πρότασιν ΑΗΟ=ΒΗΕ, καὶ ΗΟΔ=ΓΟΖ. Ὅθεν αἱ τέσσαρες ὀξεῖαι γωνίαι ΑΗΟ, ΒΗΕ, ΗΟΔ, ΓΟΖ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι. Ὡσαύτως ἴσαι πρὸς ἀλλήλας εἶναι καὶ αἱ τέσσαρες ἀμβλεῖαι γωνίαι ΑΗΕ, ΒΗΟ, ΗΟΓ, ΔΟΖ. Παρατηρητέον δὲ, ὅτι τὸ ἄθροισμα μιᾶς τῶν ἀνωτέρω τεσσάρων ὀξειῶν γωνιῶν καὶ μιᾶς τῶν τεσσάρων ἀμβλειῶν ἀποτελεῖ γωνίας ὀρθὰς δύο.

Σχόλιον. Αἱ γωνίαι, περὶ ὧν ἤδη ἐγένετο λόγος, δύο ἀνὰ δύο παραβαλλόμεναι, διάφορα λαμβάνουσιν ὀνόματα. Καὶ τὰς μὲν δύο γωνίας ΑΗΟ, ΗΟΓ ὠνομάσαμεν ἐν τοῖς προηγουμένοις *ἐσωτερικὰς ἑτερομερεῖς*. Τὸ αὐτὸ δὲ ἔχουσιν ὄνομα καὶ αἱ δύο γωνίαι ΒΗΟ,ΗΟΔ. Αἱ γωνίαι ΑΗΟ, ΗΟΔ ὀνομάζονται *ἐναλλὰξ ἐντός*. Παρομοίως ἐναλλὰξ ἐντὸς λέγονται καὶ αἱ γωνίαι ΒΗΟ, ΗΟΓ. Καλοῦνται δὲ *ἐναλλὰξ ἐντὸς ἐκτὸς* αἱ γωνίαι ΕΗΒ, ΗΟΔ, καὶ αἱ ΕΗΑ,ΗΟΓ. Αἱ δὲ δύο γωνίαι ΕΗΒ, ΓΟΖ, καὶ αἱ ΑΗΕ, ΔΟΖ λέγονται *ἐναλλὰξ ἐκτός*.

Τούτων τεθέντων, λογίζονται ὡς ἀποδεδειγμέναι αἱ ἑξῆς προτάσεις.

1. Αἱ ἐσωτερικαὶ καὶ ἑτερομερεῖς γωνίαι, ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἀποτελοῦσιν ὀρθὰς γωνίας δύο.

2. Αἱ ὁμώνυμοι ἐναλλὰξ γωνίαι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν δύο ὁμώνυμοι ἐναλλὰξ γωνίαι ἦναι ἴσαι, αἱ ἀποτελοῦσαι αὐτὰς εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἔστω ΑΗΟ=ΗΟΔ. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα ΗΟΓ+ΗΟΔ ἀποτελεῖ δύο γωνίας ὀρθὰς, δύο ὀρθὰς γωνίας παράγει καὶ τὸ κεφάλαιον ΑΗΟ+ΗΟΓ. Ἑπομένως, κατὰ τὴν 22 πρότασιν, αἱ εὐθεῖαι ΑΗ, ΓΟ εἶναι παράλληλοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 25.

Θεώρημα

Δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι τρίτης τινὸς ΕΖ εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι. (σχ. 39)

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου φέρω τὴν διατέμνουσαν ΠΚΡ κάθετον ἐπὶ τῆς ΕΖ.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῆς ΕΖ, ἡ διατέμνουσα ΠΡ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τῆς ΕΖ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ (ἴδε πρότ. 24, πόρ. 1). Ὡσαύτως καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἐπειδὴ ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος τῆς ΕΖ, ἡ διατέμνουσα ΠΡ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΔ. Ἤτοι ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΠΚ. Λοιπὸν εἶναι παράλληλοι (ἴδε πρότ. 21).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 26.

Θεώρημα

Ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις δύο παραλλήλων πανταχοῦ εἶναι ἡ αὐτή.

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα αἱ δύο παράλληλοι ΑΒ, ΓΔ. (σχ. 40)

Ἐκ δύο ὁποιωνδήποτε σημείων τῆς εὐθείας ΓΔ, τοῦ Θ λόγου χάριν καὶ τοῦ Η, ἄγω ἐπὶ τῆς ΑΒ τὰς δύο καθέτους ΘΖ, ΗΕ (*). Αἱ δύο αὐταὶ κάθετοι, κατὰ τὰ ἐν τῇ 24 προτάσει εἰρημένα, εἶναι κάθετοι καὶ ἐπὶ τῆς ΓΔ, πρὸς τούτοις δὲ καὶ παράλληλοι, διότι ἤχθησαν κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Διϊσχυρίζομαι δὲ ἤδη, ὅτι εἶναι καὶ ἴσαι.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, συνάπτω τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η διὰ τῆς διαγωνίου ΖΗ, καὶ παρατηρῶ, ὅτι αἱ γωνίαι ΗΖΕ, ΖΗΘ, ἐξεταζόμεναι ὡς πρὸς τὰς παραλλήλους ΑΒ, ΓΔ, εἶναι ἐναλλὰξ ἐντὸς καὶ ἐπομένως ἴσαι (ἴδε πρότ. 24. σχόλ). Ὡσαύτως, ἐπειδὴ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΕΗ, ΖΘ εἶναι παράλληλοι, καὶ αἱ γωνίαι ΕΗΖ, ΗΖΘ ἐναλλὰξ ἐντὸς, αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΕΖΗ, ΖΗΘ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι μίαν πλευρὰν κοινὴν, τὴν ΖΗ

(*) Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς παρούσης προτάσεως ἄγονται κάθετοι, διότι ἡ κάθετος διορίζει τὴν ἐλαχίστην, ἤτοι τὴν ἀληθινὴν ἀπόστασιν σημείου ἀπὸ εὐθείας, ἢ εὐθείας ἀπὸ εὐθείας. Ο. Μ καὶ τὰς δύο προσκειμένας εἰς αὐτὴν τὴν πλευρὰν γωνίας ἴσας. Ὅθεν ἕπεται ὅτι καὶ ΕΗ=ΖΘ. Ἤτοι, αἱ κατὰ τὰ σημεῖα Θ καὶ Η ἀποστάσεις τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ εἶναι ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 27.

Θεώρημα

Δύο γωνίαι ΒΑΓ, ΔΕΖ, ἔχουσαι τὰς πλευράς των παραλλήλους, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ κατευθυνομένας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, εἶναι ἴσαι. (σχ. 41)

Ἐκτείνω, εἰ δέον, τὴν πλευρὰν ΔΕ μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Η. Αἱ γωνίαι ΔΕΖ καὶ ΔΗΓ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι, διότι ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΓ (ἴδε πρότ. 24). Ὡσαύτως ἴσαι εἶναι καὶ αἱ γωνίαι ΔΗΓ, ΒΑΓ, διότι ΔΗ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΒ. Λοιπὸν αἱ γωνίαι ΔΕΖ καὶ ΒΑΓ εἶναι ἴσαι.

Σχόλιον. Διὰ νὰ ὑπάρξῃ τῶν γωνιῶν ΔΕΖ καὶ ΒΑΓ ἡ ἰσότης, δύο ἀπαιτοῦνται συνθῆκαι, ὁ παραλληλισμὸς καὶ ἡ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος διεύθυνσις τῶν πλευρῶν. Ἀπαιτεῖται δὲ καὶ ἡ δευτέρα αὕτη συνθήκη, διότι, ἂν παραταθῇ πρὸς τὸ σημεῖον Θ ἡ πλευρὰ ΕΖ, αἱ δύο γωνίαι ΔΕΘ, ΒΑΓ ἔχουσι μὲν τὰς πλευράς των παραλλήλους, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἴσαι.

Αἱ δύο γωνίαι ΔΕΘ, ΒΑΓ, ἐν περιπτώσει τοιαύτῃ, ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἀποτελοῦσι δύο γωνίας ὀρθάς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 28.

Θεώρημα

Τοῦ παραλληλογράμμου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι. Ὡσαύτως ἴσαι εἶναι καὶ αἱ γωνίαι αὐτοῦ αἱ ἀπέναντι. (σχ. 44)

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἄγω τὴν διαγώνιον ΒΔ.

Τὰ διὰ τῆς διαγωνίου σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΒΔ, ΓΒΔ ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΒΔ κοινὴν καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας γωνίας ἴσας· ἤτοι τὴν γωνίαν ΑΒΔ=ΓΔΒ, ἕνεκα τοῦ παραλληλισμοῦ τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ, ΓΔ, καὶ τὴν γωνίαν ΑΔΒ=ΓΒΔ, ἕνεκα τοῦ παραλληλισμοῦ τῶν δύο πλευρῶν ΑΔ, ΒΓ (ἴδε πρότ. 24). Ἄρα τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα, κατὰ τὴν ἑβδόμην πρότασιν, εἶναι ἴσα. Ἐπομένως καὶ αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων αὐτῶν, αἱ εἰς τὰς ἴσας γωνίας ἀντικείμεναι, εἶναι ἴσαι. Ὅθεν ΑΒ=ΓΔ, καὶ ΑΔ=ΒΓ.

Λοιπὸν τῶν παραλληλογράμμων αἱ πλευραὶ αἱ ἀπέναντι εἶναι ἴσαι.

Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν δύο τριγώνων ΑΒΔ, ΓΒΔ ἕπεται προσέτι, ὅτι καὶ ἡ γωνία Α=Γ, καὶ ἡ γωνία ΑΔΓ=ΑΒΓ· διότι αἱ μὲν γωνίαι Α καὶ Γ εἰς τὴν αὐτὴν ἀντίκεινται πλευρὰν ΒΔ, ἐκ δὲ τῶν λοιπῶν δύο γωνιῶν ἡ ἑτέρα, ἡ ΑΔΓ, λόγου χάριν, ἀποτελεῖται ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν ΑΔΒ, ΒΔΓ, αἵτινες ἔχουσιν ἐναλλὰξ καὶ ἴσας τὰς δύο γωνίας ΓΒΔ, ΑΒΔ, ἐξ ὧν σχηματίζεται ἡ ἄλλη.

Λοιπὸν τοῦ παραλληλογράμμου αἱ γωνίαι αἱ ἀπέναντι εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα. Αἱ παράλληλοι λοιπὸν ΑΒ, ΓΔ, αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ περιεχόμεναι, εἶναι ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 29.

Θεώρημα

Ἐὰν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τετραπλεύρου τινὸς ΑΒΓΔ ἦναι ἴσαι, οἷον ἡ ΑΒ=ΓΔ καὶ ἡ ΑΔ=ΒΓ, αἱ πλευραὶ αὗται αἱ ἴσαι εἶναι παράλληλοι καὶ τὸ σχῆμα παραλληλόγραμμον. (σχ. 44)

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, φέρω τὴν διαγώνιον ΒΔ, καὶ σχηματίζω δι' αὐτῆς τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΓΒΔ, ἅτινα ἔχουσι τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα.

Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν δύο αὐτῶν τριγώνων ἕπεται, ὅτι αἱ εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΒ, ΓΔ ἀντικείμεναι γωνίαι ΑΔΒ, ΓΒΔ εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο αὗται ἴσαι γωνίαι εἶναι ἐναλλὰξ, κατὰ τὴν 24 πρότασιν, αἱ πλευραὶ ΑΔ, ΒΓ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπαραλλάκτως ἀποδεικνύεται καὶ τῶν δύο ἀντικειμένων πλευρῶν ΑΒ, ΓΔ ὁ παραλληλισμός. Λοιπὸν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 30.

Θεώρημα

Ἐὰν τετραπλεύρου τινὸς ΑΒΓΔ αἱ δύο ἀντικείμεναι πλευραὶ ΑΒ, ΓΔ ἦναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, καὶ αἱ λοιπαὶ δύο αὐτοῦ πλευραὶ, ἡ ΒΓ καὶ ἡ ΑΔ, εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι καὶ τὸ σχῆμα εἶναι παραλληλόγραμμον. (σχ. 44)

Ἄγω τὴν διαγώνιον ΒΔ.

Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΔΒΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὴν μὲν πλευρὰν ΑΒ=ΔΓ, τὴν δὲ πλευρὰν ΒΔ κοινὴν, τὰς δὲ δύο ἐναλλὰξ γωνίας ΑΒΔ, ΒΔΓ, τὰς σχηματιζομένας ὑπὸ τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ καὶ τῆς διαγωνίου, ἴσας. Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν δύο αὐτῶν τριγώνων ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΑΔ=ΒΓ, καὶ ἡ γωνία ΑΔΒ=ΔΒΓ. Ἐπειδὴ δὲ πρὸς τοῖς ἄλλοις αἱ δύο αὗται ἴσαι γωνίαι εἶναι ἐναλλὰξ, αἱ πλευραὶ ΑΔ, ΒΓ εἶναι παράλληλοι.

Τὸ σχῆμα λοιπὸν ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 31.

Θεώρημα

Αἱ δύο τοῦ παραλληλογράμμου διαγώνιοι ΑΓ, ΔΒ τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη. (σχ. 45)

Τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΟ, ΓΒΟ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΑΔ=ΒΓ, τὴν ἐναλλὰξ γωνίαν ΑΔΟ=ΓΒΟ, καὶ τὴν ἐναλλὰξ γωνίαν ΔΑΟ=ΒΓΟ. Ὅθεν ἕπεται, ὅτι τῶν ἴσων τριγώνων αἱ δύο πλευραὶ ΑΟ, ΟΓ, αἱ ἀντικείμεναι εἰς τὰς ἴσας γωνίας ΑΔΟ, ΓΒΟ, εἶναι ἴσαι. Ἄρα ἡ διαγώνιος ΑΓ ἐδιχοτομήθη ὑπὸ τῆς διαγωνίου ΒΔ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ διαγώνιος ΑΓ τέμνει εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν διαγώνιον ΒΔ.

Σχόλιον. Ἐὰν ἀντὶ παραλληλογράμμου εἴχομεν ῥομβοειδὲς, ἐπειδὴ τοῦ τοιούτου σχήματος αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι, τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ ἔχουσι τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα. Ὅθεν ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΑΟΒ=ΒΟΓ. Ἤτοι αἱ δύο τοῦ ῥομβοειδοῦς διαγώνιοι τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ γωνίας ὀρθάς. (*)

(*) Εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον ὁ συγγραφεὺς ἠρεύνησε

1. Τὰς ἰδιότητας τῶν διασταυρουμένων εὐθειῶν.
2. Τὰς ἰδιότητας τοῦ τριγώνου.
3. Τὰ περὶ ἰσότητος τῶν τριγώνων.
4. Τὰς ἰδιότητας τῆς καθέτου καὶ τῶν πλαγίων.
5. Τὰς ἰδιότητας τῶν παραλλήλων.

Τὰ περὶ τριγώνων δὲ δὲν χρησιμεύουσι μόνον πρὸς εὕρεσιν ἀγνώστων τινῶν μερῶν τοῦ τριγώνου, τῇ βοηθείᾳ τῶν γνωστῶν, ἀλλὰ διὰ τῶν σχέσεων τῶν

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ.

Ὁρισμοί.

1. *Περιφέρεια* ὀνομάζεται ἡ καμπύλη γραμμὴ ἐκείνη, τῆς ὁποίας, ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπό τινος σημείου, *κέντρου* καλουμένου, ἐντὸς αὐτῆς ὑπάρχοντος. (σχ. 46)

Τὸ ὑπὸ τῆς περιφερείας περιεχόμενον ἐπίπεδον χωρίον λέγεται *κύκλος*.

Ἡ περιφέρεια εἶναι τὸ τέρμα τοῦ κύκλου.

Ἐνίοτε συγχέονται ἐν τῇ ἐκφράσει ὁ κύκλος καὶ ἡ περιφέρεια, κακῆς γινομένης τῶν ὅρων χρήσεως. Ἀλλὰ ἡ ἄτοπος τῶν ὀνομάτων χρῆσις δὲν δύναται νὰ ἐπηρεάσῃ ποσῶς τῶν πραγμάτων τὰς ἰδέας, ἅμα λάβῃ τις κατὰ νοῦν, ὅτι ὁ μὲν κύκλος εἶναι ἐπιφά-

---

ἴσων τριγώνων καὶ διὰ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ τριγώνου ποριζόμεθα τῶν γωνιῶν τὰ σχετικὰ μεγέθη καὶ τῶν εὐθειῶν τὰς ἰσότητας ἢ τὰς ἀνισότητας. Διότι τῶν μὲν γωνιῶν καὶ τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν σωμάτων ἡ ἰσότης βεβαιοῦται δι' ἐπιθέσεως, τῶν δὲ εὐθειῶν τὸ ἴσον καὶ τὸ ἄνισον δὲν δύναται νὰ βεβαιωθῇ διὰ μέσου τοιούτου.

Καὶ διατί ; Διότι κατὰ τὴν ἐπιστήμην νοῦς ὁρᾷ καὶ νοῦς ἀκούει· πᾶσα δὲ ἄλλη ἀντίληψις, καὶ ἡ διὰ τῆς ὁράσεως καὶ ἡ τῆς ἀφῆς, λογίζεται ἀτελής, σφαλερά, πάσης πίστεως ἀναξία. Διὰ τοῦτο αἱ λεγόμεναι γραφικαὶ λύσεις καὶ αἱ δι' ὁμοιωμάτων ἀποδείξεις δὲν ἐπιτρέπονται εἰ μὴ εἰς διδάσκοντας καὶ διδασκομένους τυφλοὺς τὸν νοῦν. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τῶν ψιλῶν εὐθειῶν γραμμῶν τοὺς προσδιορισμούς, ἐπιθέσεως γενομένης, ὅρος συγκρίσεως δὲν ὑπάρχει, μεταχειρίζονται εἰς τὴν γεωμετρίαν τὰς ἐπιθέσεις καὶ τὰς σχέσεις τῶν σχημάτων, τῶν τριγώνων ἐξαιρέτως, πρὸς εὕρεσιν τῆς ἰσότητος ἢ τῆς ἀνισότητος τῶν εὐθειῶν.

νεια, δύο ἔχουσα διαστάσεις, ἡ δὲ περιφέρεια γραμμή, κατὰ μῆκος μόνον ἐκτεινομένη.

2. Πᾶσα γραμμὴ εὐθεῖα ΑΓ, ΓΕ, ΓΔ κτλ., τὸ κέντρον μετά τινος σημείου τῆς περιφερείας συνάπτουσα, ὀνομάζεται *ἀκτίς*, ἢ *ἡμιδιάμετρος*. Πᾶσα δὲ εὐθεῖα, οἵα ἡ ΑΒ, ἐκ τοῦ κέντρου διερχομένη καὶ εἰς τὴν περιφέρειαν ἀμφοτέρωθεν ἀπολήγουσα, λέγεται *διάμετρος*.

Κατὰ τῆς περιφερείας τὸν ὁρισμὸν, ὅλαι αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι. Ὡσαύτως ὅλαι αἱ διάμετροι εἶναι ἴσαι καὶ διπλάσιαι τῶν ἀκτίνων.

3. Πᾶν τῆς περιφερείας μέρος, οἷον τὸ ΖΘΗ, λέγεται *τόξον*.

Χορδὴ ὀνομάζεται ἡ συνάπτουσα τὰ δύο ἄκρα τοῦ τόξου εὐθεῖα ΖΗ.

4. *Τμῆμα* ὀνομάζεται τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ μεταξὺ τόξου καὶ χορδῆς περιεχόμενον.

Εἰς τὴν αὐτὴν χορδὴν ΖΗ δύο πάντοτε ἀντίκεινται ἄνισα τόξα ΖΘΗ, ΖΕΗ, ἑπομένως δύο δι' αὐτῆς ὁρίζονται κύκλου τμήματα, τὸ μὲν μεῖζον τὸ δὲ ἔλαττον. Ἐν γένει ὅμως, ὅταν περὶ τόξου ἢ τμήματος κύκλου λαλῶμεν, ὑπονοοῦμεν πάντοτε, ὅτι περὶ τοῦ ἐλάσσονος ὁ λόγος γίνεται. Ὅταν δὲ περὶ τοῦ μείζονος πρόκηται, ἀναφέρομεν αὐτὸ ῥητῶς ἐν τῇ ἐκφράσει.

5. *Τομεὺς* λέγεται τὸ μεταξὺ δύο ἀκτίνων ΓΔ, ΓΕ καὶ τοῦ ὑπ' αὐτῶν ἐναγκαλιζομένου τόξου ΕΔ περιεχόμενον χωρίον.

6. Γραμμὴ *ἐγγεγραμμένη ἐν τῷ κύκλῳ* λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, εἰς τὴν περιφέρειαν ἀπολήγουσα, οἵα ἡ ΑΒ. (σχ. 47)

Γωνία ἐγγεγραμμένη ὀνομάζεται πᾶσα γωνία ὑπὸ δύο χορδῶν σχηματιζομένη καὶ τὴν κορυφὴν αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ἔχουσα. Τοιαύτη γωνία εἶναι ἡ ΒΑΓ.

Τρίγωνον ἐγγεγραμμένον λέγεται πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ, ἔχον τὰς τρεῖς τῶν γωνιῶν του κορυφὰς ἐπὶ τῆς περιφερείας.

Καὶ ἐν γένει *πολύγωνον ἐγγεγραμμένον* ὀνομάζεται τὸ ἔχον ὅλας τῶν γωνιῶν του τὰς κορυφὰς ἐπὶ τῆς περιφερείας. Ὁ κύκλος δὲ, ἐν περιπτώσει τοιαύτῃ, λέγεται *περιγεγραμμένος* εἰς τὸ πολύγωνον αὐτό.

7. *Διατέμνουσα* λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ συναπαντῶσα τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς δύο σημεῖα. Τοιαύτη εἶναι ἡ ΑΒ. (σχ. 48)

8. *Ἐφαπτομένη* καλεῖται ἡ εὐθεῖα, ἡ μετὰ τῆς περιφερείας ἓν μόνον ἔχουσα σημεῖον κοινόν. Τοιαύτη εἶναι ἡ ΓΔ.

Τὸ κοινὸν σημεῖον Μ λέγεται *σημεῖον τῆς ἁφῆς*.

9. Ὡσαύτως λέγομεν, ὅτι κύκλος ἅπτεται κύκλου ἄλλου,

ὅταν οἱ δύο αὐτοὶ κύκλοι ἓν μόνον ἔχωσι σημεῖον κοινόν.

10. Πᾶν πολύγωνον λέγεται *περιγεγραμμένον* εἰς τὸν κύκλον, ὅταν ὅλαι αἱ πλευραί του ἅπτωνται τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου αὐτοῦ. Ὁ κύκλος δὲ τότε ὀνομάζεται *ἐγγεγραμμένος* εἰς τὸ πολύγωνον. (σχ. 160)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1.

Θεώρημα

Πᾶσα διάμετρος ΑΒ διαιρεῖ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εἰς δύο ἴσα μέρη. (σχ. 49)

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, μεταχειρίζομαι ὡς βάσιν κοινὴν καὶ τῶν δύο σχημάτων ΑΕΒ, ΑΖΒ τὴν διάμετρον ΑΒ. Τῆς ἐπιθέσεως δὲ, τῆς ἐπ' ἄλληλα, τῶν δύο αὐτῶν σχημάτων γενομένης, ἡ καμπύλη γραμμὴ ΑΕΒ συμπίπτει ἀκριβῶς μετὰ τῆς καμπύλης ΑΖΒ· διότι, ἂν τὸ ἐναντίον δεχθῶμεν, τὰ σημεῖα τῆς μιᾶς καὶ τῆς ἄλλης καμπύλης δὲν θέλουσιν ἀπέχει ἰσάκις ἐκ τοῦ κέντρου. Ἤτοι τοῦ ἐναντίου ἡ παραδοχὴ καταργεῖ τῆς περιφερείας τὸν ὁρισμὸν, ἄγει δηλαδὴ εἰς ἄτοπον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2.

Θεώρημα

Ἡ διάμετρος εἶναι πάσης χορδῆς μείζων. (σχ. 49)

Ἐὰν εἰς τῆς χορδῆς ΑΔ τὰ ἄκρα ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΑΓ, ΓΔ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΓΔ, εἰς ὃ ἔχομεν $ΑΔ < ΑΓ + ΓΔ$, ἢ $ΑΔ < ΑΓ + ΓΒ$. Ὅθεν $ΑΔ < ΑΒ$.

Πόρισμα. Λοιπὸν ἐξ ὅλων τῶν εὐθειῶν, ὅσας δύναταί τις νὰ ἐγγράψῃ εἰς τὸν κύκλον, μεγίστη εἶναι ἡ διάμετρος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3.

Θεώρημα

Οὐδεμία γραμμὴ εὐθεῖα δύναται νὰ συναντήσῃ περιφέρειαν κύκλου εἰς σημεῖα πλειότερα τῶν δύο.

Διότι, ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι εὐθεῖά τις συναπαντᾷ περιφέρειαν κύκλου εἰς τρία σημεῖα, τὰ τρία αὐτὰ σημεῖα θέλουσιν ἐξ ἴσου ἐκ τοῦ κέντρου ἀπέχει. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον· διότι τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι ἀπὸ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ν᾽ ἀχθῶσι δυνατὸν δὲν εἶναι. (Πρότ. 16, βιβλ. 1)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4.

Θεώρημα

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, ἢ εἰς κύκλους ἴσους, τὰ ἴσα τόξα ἔχουσιν ὑποτεινούσας ἴσας χορδάς, καὶ ἀντιστρόφως αἱ ἴσαι χορδαὶ ὑποτείνουσιν ἴσα τόξα.

Ἔστωσαν αἱ ἀκτῖνες ΑΓ, ΕΟ ἴσαι, καὶ τὰ τόξα ΑΜΔ, ΕΝΗ ἴσα· λέγω ὅτι ἴσαι εἶναι καὶ αἱ χορδαὶ ΑΔ, ΕΗ. (σχ. 50)

Διότι, τεθέντος τοῦ ἡμικυκλίου ΑΜΔΒ ἐπὶ τοῦ ἡμικυκλίου ΕΝΗΖ, ὄχι μόνον αἱ διάμετροι ΑΒ, ΕΖ συμπίπτουσι, διότι εἶναι ἴσαι, ἀλλ᾽ ἕνεκα ταύτης τῶν διαμέτρων τῆς ἰσότητος, καὶ ἡ καμπύλη γραμμὴ ΑΜΔΒ ἐφαρμόζεται ἐντελῶς ἐπὶ τῆς καμπύλης γραμμῆς ΕΝΗΖ. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὰ δεδομένα τὸ τόξον ΑΜΔ=ΕΝΗ, ἀναγκαίως τὸ σημεῖον Δ πίπτει ἐπὶ τοῦ σημείου Η. Ἐπομένως συμπίπτουσι καὶ αἱ χορδαὶ ΑΔ, ΕΗ, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἴσαι.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν ἡ ἀκτὶς ΑΓ=ΕΟ, ἡ δὲ χορδὴ ΑΔ=ΕΗ, λέγω ὅτι καὶ τὸ τόξον ΑΜΔ εἶναι ἴσον τῷ τόξῳ ΕΝΗ.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἄγω τὰς ἀκτῖνας ΓΔ, ΟΗ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΔ, ΕΟΗ ἔχουσι τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἤτοι τὴν ΑΓ=ΕΟ, τὴν ΓΔ=ΟΗ, καὶ τὴν ΑΔ=ΕΗ. Ἄρα τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα (Πρότ. 11, βιβλ. 1). Ἐπομένως ἡ γωνία ΑΓΔ=ΕΟΗ. Ἀλλὰ τῶν δύο ἴσων ἡμικυκλίων ΑΔΒ, ΕΗΖ τῆς ἐπιθέσεως τῆς ἐπ᾽ ἄλληλα γενομένης, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΓΔ=ΕΟΗ, ἡ μὲν ἀκτὶς ΓΔ προφανῶς ταυτίζεται μετὰ τῆς ἀκτῖνος ΟΗ, τὸ δὲ σημεῖον Δ πίπτει ἐπὶ τοῦ σημείου Η. Ἄρα τὰ τόξα ΑΜΔ, ΕΝΗ εἶναι ἴσα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13.

Θεώρημα

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, εἰς τόξον μεῖζον ὑποτείνει μείζων χορδή, καὶ ἀντιστρόφως, ἡ χορδὴ ἡ μείζων τόξον μεῖζον ὑποτείνει, ἐὰν τὰ τόξα, τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος, τῆς ἡμιπεριφερείας ἦναι μικρότερα. (σχ. 50)

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἔστω τὸ τόξον ΑΘ>ΑΔ.

Ἄγω τὰς χορδὰς ΑΔ, ΑΘ καὶ τὰς ἀκτῖνας ΓΔ, ΓΘ· τοιουτοτρόπως δὲ σχηματίζω δύο τρίγωνα ΑΓΔ, ΑΓΘ, ἅτινα ἔχουσιν ἀνὰ δύο τὰς πλευράς των ἴσας, ἤτοι τὴν μὲν ΑΓ κοινὴν, τὴν δὲ ΓΔ=ΓΘ. Αἱ γωνίαι των ὅμως ΑΓΘ, ΑΓΔ εἶναι ἄνισοι. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΑΓΘ εἶναι μείζων τῆς γωνίας ΑΓΔ, ἡ τρίτη πλευρὰ ΑΘ εἶναι μείζων τῆς τρίτης πλευρᾶς ΑΔ (Πρότ. 10, διβλ 1). Ἄρα χορδὴ μείζων εἶναι ἡ τὸ τόξον τὸ μεῖζον ὑποτείνουσα.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν ἡ χορδὴ ΑΘ μείζων τῆς ΑΔ ὑποτεθῇ, ἐκ τῶν αὐτῶν τριγώνων ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΑΓΘ εἶναι μείζων τῆς ΑΓΔ, καὶ διὰ τοῦτο καὶ τὸ τόξον ΑΘ εἶναι μεῖζον τοῦ ΑΔ.

Σχόλιον. Τὰ τόξα, τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος, ὑπετέθησαν τῆς ἡμιπεριφερείας μικρότερα. Ἐὰν δὲ μείζω τῆς ἡμιπεριφερείας ὑποτεθῶσι, τότε τὴν ἐναντίαν τὰ τόξα ἔχουσιν ἰδιότητα· ἤτοι αὐξάνοντος τοῦ τόξου, ἐλαττοῦται ἡ χορδὴ, καὶ τἀνάπαλιν. Παραδείγματος χάριν, τὸ τόξον ΑΚΒΔ εἶναι μεῖζον τοῦ τόξου ΑΚΒΘ· ἡ χορδὴ ὅμως ΑΔ, ἡ τὸ πρῶτον ὑποτείνουσα, εἶναι ἐλάσσων τῆς ΑΘ, τῆς ὑποτεινούσης τὸ δεύτερον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6.

Θεώρημα

Πᾶσα ἀκτὶς, κάθετος ἐπὶ χορδῆς, διαιρεῖ τὴν χορδὴν αὐτὴν καὶ τὸ ὑπ' αὐτὴν τόξον εἰς δύο μέρη ἴσα. (σχ. 51)

Ἔστω ἡ ἀκτὶς ΓΗ κάθετος ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΒ· λέγω, πρῶτον, ὅτι τῆς χορδῆς αὐτῆς τὰ δύο μέρη ΑΔ, ΒΔ εἶναι ἴσα· δεύτερον, ὅτι ἴσα εἶναι καὶ τὰ δύο τοῦ ὑπ' αὐτὴν τόξου ΑΗΒ μέρη, ἤτοι ΑΗ=ΗΒ.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτων, ἄγω τὰς ἀκτῖνας ΑΓ, ΓΒ.

Α΄. Αἱ δύο αὐταὶ ἀκτῖνες, ὡς πρὸς τὴν κάθετον ΓΔ, εἶναι δύο ἴσαι πλάγιαι. Ἐπομένως ἰσάκις ἐκ τῆς καθέτου αὐτῆς ἀπέχουσιν. (Πρότ. 16, διβλ. 1.) Ἄρα ΑΔ=ΔΒ.

Β΄. Ἐπειδὴ ΑΔ=ΔΒ, ἡ ΓΗ εἶναι ἡ κάθετος, ἡ ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς εὐθείας ΑΒ ἀναβαίνουσα. Ἐπομένως ὅλα τῆς καθέτου αὐτῆς τὰ σημεῖα ἰσάκις ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β ἀπέχουσι (Πρότ. 17, διβλ. 1). Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ σημεῖον Η εἰς αὐτὴν τὴν κάθετον ἀνήκει, τὸ ἀπόστημα ΑΗ=ΒΗ. Ἀλλὰ τῶν χορδῶν ΑΗ, ΒΗ ἡ ἰσότης συνεπάγει τῶν τόξων ΑΗ, ΒΗ τὴν ἰσότητα, κατὰ τὴν

4 πρότασιν τοῦ παρόντος βιβλίου. Λοιπὸν ἡ ἀκτὶς ΓΗ, ἡ κάθετος ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΒ, διαιρεῖ τὴν χορδὴν αὐτὴν καὶ τὸ ὑπ' αὐτὴν τόξον ΑΗΒ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Σχόλιον. Τὸ κέντρον Γ, τῆς χορδῆς ΑΒ τὸ μέσον Δ, καὶ τοῦ τόξου τοῦ ὑπ' αὐτὴν τὸ μέσον Η κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Ἐπειδὴ δὲ δύο σημεῖα ἀρκοῦσι πρὸς εὕρεσιν τῆς θέσεως εὐθείας τινὸς, πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ δύο ἐκ τῶν τριῶν εἰρημένων σημείων, διαβαίνει καὶ ἐκ τοῦ τρίτου καὶ εἶναι καὶ κάθετος εἰς τὴν χορδήν.

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι πᾶσα κάθετος, ἀπὸ τοῦ μέσου χορδῆς τινὸς ἀναβαίνουσα, διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καὶ διὰ τοῦ μέσου τοῦ τόξου τοῦ ὑπ' αὐτὴν τὴν χορδήν.

Διότι ἡ κάθετος, ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος, οὐδὲν ἄλλο εἶναι, εἰμὴ ἡ κάθετος, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τῆς χορδῆς ἀγομένη· ἐπειδὴ ἀμφότεραι αἱ κάθετοι ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς διαβαίνουσι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7.

Θεώρημα

Ἐκ τριῶν ὁποιωνδήποτε μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων σημείων Α,Β,Γ, δυνατὸν εἶναι νὰ διέλθῃ περιφέρεια κύκλου, μία ὅμως καὶ μόνη. (σχ. 52)

Συνάπτω τὰ τρία σημεῖα διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ διαιρῶ τὰς εὐθείας αὐτὰς εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τῶν καθέτων ΔΕ, ΖΗ. Λέγω δ' ἐν πρώτοις, ὅτι αἱ δύο αὗται κάθετοι συναπαντῶνται εἴς τι σημεῖον Ο.

Αἱ κάθετοι ΔΕ, ΖΗ ἢ συναπαντῶνται, ἢ εἶναι παράλληλοι. Ἂς ὑποτεθῶσι πρὸς ὥραν παράλληλοι.

Τούτου τεθέντος, ἐκτείνω τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΖΗ ἕως οὗ συναπαντηθῶσιν εἰς τὸ Κ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΔΕ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω γενομένην ὑπόθεσιν, εἶναι παράλληλος τῆς ΖΗ, ἡ ΑΒ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τῆς ΔΕ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΖΗ (Πρότ. 24, βιβλ. 1). Ἄρα ἡ γωνία Κ εἶναι ὀρθή. Ἀλλ' ἡ εὐθεῖα ΒΚ, ἡ συνέχεια τῆς ΑΒ, διαφέρει τῆς εὐθείας ΒΓ, διότι τὰ τρία σημεῖα Α,Β,Γ, δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ἄρα ἀπὸ τοῦ σημείου Β δύο ἄγονται ἐπὶ τῆς ΖΗ κάθετοι, ἡ ΒΚ, καὶ ἡ ΒΖ· ὅπερ ἄτοπον (Πρότ. 15, βιβλ. 1). Κακῶς λοιπὸν ὑπετέθησαν αἱ εὐθεῖαι ΔΕ, ΖΗ παράλληλοι. Ἄρα συναπαντῶνται εἴς τι σημεῖον Ο.

Τὸ σημεῖον Ο ἀνήκει εἰς τὴν κάθετον ΔΕ, τὴν ἀναβαίνουσαν ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ΑΒ, ἑπομένως ἐξ ἴσου ἀπέχει ἀπὸ τῶν ἄκρων Α καὶ Β. Τὸ σημεῖον Ο ἀνήκει καὶ εἰς τὴν κάθετον ΖΗ, καὶ ἀπὸ τῶν ἄκρων Β καὶ Γ ἀπέχει ἐξ ἴσου. Λοιπὸν αἱ τρεῖς ἀποστάσεις ΑΟ, ΒΟ, ΓΟ εἶναι ἴσαι. Ἄρα, ἂν μεταχειρισθῇ τις τὸ σημεῖον Ο ὡς κέντρον καὶ μίαν τῶν τριῶν ἀποστάσεων, ἢ τὴν ΑΟ, ἢ τὴν ΒΟ, ἢ τὴν ΓΟ ὡς ἀκτῖνα, καὶ γράψῃ περιφέρειαν, ἡ περιφέρεια αὕτη ἀναγκαίως διέρχεται ἐκ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ.

Ἀλλὰ μία καὶ μόνη δύναται νὰ διέλθῃ ἐκ τῶν τριῶν αὐτῶν σημείων περιφέρεια. Διότι ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι καὶ δευτέρα τις ἄλλη ἐκ τῶν αὐτῶν σημείων περιφέρεια διαβαίνει, τῆς δευτέρας ταύτης περιφερείας τὸ κέντρον πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἐπὶ τῆς καθέτου ΔΕ· διότι μόνης τῆς εὐθείας αὐτῆς τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β (Πρότ. 17, βιβλ. 1). Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον τὸ κέντρον τῆς δευτέρας περιφερείας πρέπει νὰ κῆται ἐπὶ τῆς καθέτου ΖΗ. Ἐν ἄλλοις δηλαδὴ λόγοις, καὶ τῆς δευτέρας περιφερείας τὸ κέντρον εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ τῶν δύο καθέτων, ἐπὶ τῆς ΔΕ καὶ ἐπὶ τῆς ΖΗ. Ἀλλ' αἱ δύο αὗται κάθετοι, εὐθεῖαι οὖσαι, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς σημεῖα πλειότερα τοῦ ἑνός. Ἄρα τὸ αὐτὸ καὶ αἱ δύο περιφέρειαι ἔχουσι κέντρον, καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτήν. Λοιπὸν μία καὶ μόνη διέρχεται περιφέρεια ἐκ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων σημείων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8.

Θεώρημα

Αἱ ἴσαι χορδαὶ ἰσάκις ἐκ τοῦ κέντρου ἀπέχουσιν· ἐκ δύο δὲ χορδῶν ἀνίσων, ἐκ τοῦ κέντρου μᾶλλον ἀπέχει ἡ ἐλάσσων. (σχ. 53)

Α'. Ἔστωσαν αἱ δύο ἴσαι χορδαὶ ΑΒ, ΔΕ. Ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ καταβιβάζω τὰς καθέτους ΓΖ, ΓΗ, καὶ διαιρῶ δι' αὐτῶν τὰς χορδὰς ΑΒ, ΔΕ εἰς δύο ἴσα μέρη. Ἄγω δὲ καὶ τὰς ἀκτῖνας ΓΑ, ΓΔ.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΑΖ, ΓΔΗ ἔχουσι τὰς ὑποτεινούσας ΑΓ, ΓΔ ἴσας, ὡς ἀκτῖνας, προσέτι δὲ καὶ ἑτέρας δύο πλευρὰς ἴσας, τὴν ΑΖ καὶ τὴν ΔΗ· διότι ἡ μὲν ΑΖ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς ΑΒ, ἡ δὲ ΔΗ τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς ΔΕ· αἱ χορδαὶ δὲ

ΑΒ, ΔΕ ὑπετέθησαν ἴσαι. Ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα (Πρότ. 18, βιβλ. 1). Ἑπομένως καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ ΓΖ=ΓΗ.

Λοιπὸν αἱ ἴσαι χορδαὶ ἰσάκις ἐκ τοῦ κέντρου ἀπέχουσι.

Β'. Ἔστω ἡ χορδὴ ΑΘ μείζων τῆς ΔΕ, ἑπομένως καὶ τὸ τόξον ΑΚΘ εἶναι μεῖζον τοῦ τόξου ΔΜΕ (Πρότ. 5, βιβλ. 2).

Ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΚΘ λαμβάνω τὸ μέρος ΑΝΒ=ΔΜΕ, ἄγω τὴν χορδὴν ΑΒ, καὶ καταβιβάζω, ἐπ' αὐτῆς μὲν, τὴν κάθετον ΓΖ, ἐπὶ δὲ τῆς χορδῆς ΑΘ τὴν κάθετον ΓΙ.

Πρόδηλον εἶναι, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΖ ὑπερέχει τὴν ΓΟ· αὕτη δὲ ἡ ΓΟ, ὡς πλαγία, εἶναι τῆς καθέτου ΓΙ μείζων (Πρότ. 16, βιβλ. 1). Δι' ἰσχυρότερον λοιπὸν λόγον ΓΖ>ΓΙ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΔΕ εἶναι ἴσαι, τὸ ἀπόστημα ΓΖ=ΓΗ· ὅθεν ΓΗ>ΓΙ. Ἄρα ἐκ δύο ἀνίσων χορδῶν ἡ μείζων ἧττον ἐκ τοῦ κέντρου ἀπέχει.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9.

Θεώρημα

Πᾶσα κάθετος ΒΔ, ἠγμένη εἰς τῆς ἀκτῖνος ΓΑ τὸ ἄκρον, εἶναι τῆς περιφερείας ἐφαπτομένη. (σχ. 54)

Διότι πᾶσα πλαγία ΓΕ εἶναι τῆς καθέτου ΓΑ μείζων (Πρότ. 16, βιβλ. 1). Λοιπὸν τὸ σημεῖον Ε εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ κύκλου. Ἑπομένως ἡ εὐθεῖα ΒΔ δὲν ἔχει κοινὸν μετὰ τῆς περιφερείας εἰ μὴ τὸ σημεῖον Α. Ἄρα εἶναι ἐφαπτομένη. (*)

Σχόλιον. Ἔκ τινος σημείου Α, ἐπὶ τῆς περιφερείας ὑπάρχοντος, μία μόνη ἄγεται τῆς περιφερείας αὐτῆς ἐφαπτομένη, ἡ ΑΔ. Διότι ἂν δευτέρα τις εὐθεῖα ὑποτεθῇ ἐφαπτομένη, αὕτη ἡ εὐθεῖα δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΓΑ. Ἑπομένως ὡς πρὸς τὴν νέαν αὐτὴν ἐφαπτομένην ἡ ἀκτὶς ΓΑ εἶναι πλαγία. Ἂν δὲ ἀχθῇ ἐκ τοῦ κέντρου κάθετος ἐπὶ τῆς δευτέρας ἐφαπτομένης, ἡ κάθετος αὐτὴ θέλ' εἶσθαι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος. Ἄρα ἡ καθ' ὑπόθεσιν ἐφαπτομένη εἰσέρχεται ἐν τῷ κύκλῳ καὶ εἶναι διατέμνουσα.

(*) Καὶ ἀντιστρόφως, πᾶσα ἐφαπτομένη εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος. Διότι, ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι δὲν εἶναι, ἡ ἀκτὶς ὡς πρὸς αὐτὴν λογίζεται πλαγία. Ἑπομένως ἡ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπόστασις τοῦ κέντρου, τὴν ὁποίαν ἡ κάθετος ἐκφράζει, εἶναι τῆς ἀκτῖνος μικροτέρα. Ἄρα ἡ ἐφαπτομένη εἰσέρχεται εἰς τὸν κύκλον· ὅπερ ἄτοπον. Λοιπὸν πᾶσα ἐφαπτομένη εἶναι κάθετος εἰς τῆς ἀκτῖνος τὸ ἄκρον. Ο. Μ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10.

Θεώρημα

Δύο παράλληλοι ΑΒ, ΔΕ διαχωρίζουσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας τόξα ἴσα ΜΝ, ΠΚ. (σχ. 55)

Τρεῖς ἡ παροῦσα πρότασις περιλαμβάνει περιστάσεις.

Α΄. Ἔστωσαν καὶ αἱ δύο παράλληλοι διατέμνουσαι. Ἄγω τὴν ἀκτῖνα ΓΘ κάθετον ἐπὶ τῆς χορδῆς ΜΠ.

Ἡ ἀκτὶς ΓΘ εἶναι συγχρόνως κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΝΚ, παραλλήλου τῆς ΜΠ (πρότ. 24, βιβλ. 1). Ἄρα τὸ σημεῖον Θ ἐνταυτῷ εἶναι μέσον καὶ τοῦ τόξου ΜΘΠ καὶ τοῦ τόξου ΝΘΚ (πρότ. 6, βιβλ. 2). Ὅθεν τὸ τόξον ΜΘ=ΘΠ, καὶ τὸ τόξον ΝΘ=ΘΚ. Λοιπὸν, ἀφαιρουμένων κατὰ μέλη τῶν δύο αὐτῶν ἰσοτήτων, προκύπτει ἡ ἰσότης ΜΘ—ΝΘ=ΘΠ—ΘΚ· ἤτοι ΜΝ=ΠΚ.

Β΄. Ἔστω ἡ ἑτέρα τῶν παραλλήλων, ἡ ΑΒ, διατέμνουσα, ἡ δὲ ἄλλη, ἡ ΔΕ ἐφαπτομένη. (σχ. 56)

Εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς Θ ἄγω τὴν ἀκτῖνα ΓΘ. Ἡ ἀκτὶς αὕτη, κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΔΕ· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῆς ΜΠ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΜΠ. Ὅθεν ἕπεται, ὅτι ἡ ἀκτὶς διαιρεῖ τὴν χορδὴν ΜΠ καὶ τὸ ὑπὲρ αὐτὴν τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη. Ἤτοι τὸ σημεῖον Θ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΜΘΠ. Λοιπὸν τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ περιεχόμενα τόξα ΜΘ, ΘΠ εἶναι ἴσα.

Γ΄. Ἔστωσαν καὶ αἱ δύο παράλληλοι ΔΕ, ΙΛ ἐφαπτόμεναι, ἡ μὲν εἰς τὸ σημεῖον Θ, ἡ δὲ εἰς τὸ Κ.

Ἄγω τὴν διατέμνουσαν καὶ παράλληλον ΑΒ. Ὅθεν, κατὰ ἤδη ἀποδεδειγμένα, ἔχω ΜΘ=ΘΠ, καὶ ΜΚ=ΚΠ. Λοιπὸν ὁλόκληρον τὸ τόξον ΘΜΚ=ΘΠΚ. Ἑκάτερον δὲ τῶν δύο τούτων τόξων εἶναι ἡμιπεριφέρεια.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11.

Θεώρημα

Ἡ εὐθεῖα, ἡ διαβαίνουσα διὰ τῶν κέντρων δύο περιφερειῶν, εἰς δύο σημεῖα διατεμνομένων (*), εἶναι κάθετος ἐπὶ

(*) Αἱ περιφέρειαι, ὅταν μὲν ἔχωσι τρία κοινὰ σημεῖα, συμπίπτουσι καὶ μίαν μόνην ἀποτελοῦσι περιφέρειαν (πρότ. 7, βιβλ. 2)· ὅταν δὲ ἓν μόνον, ἅπτονται· ὅταν οὐδὲν, ἀπέχουσιν ἀλλήλων· ὅταν δὲ δύο, τέμνονται.

τῆς εὐθείας τῆς συναπτούσης τὰ τῶν τομῶν σημεῖα, καὶ συγχρόνως διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη. (σχ. 57 καὶ 58)

Διότι ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἡ συνάπτουσα τὰ σημεῖα τῶν τομῶν, εἶναι κοινὴ ἀμφοτέρων τῶν κύκλων χορδή. Ἂν δὲ ἐπὶ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς αὐτῆς ὑψωθῇ κάθετος, ἡ κάθετος αὕτη ἀναγκαίως διὰ τῶν δύο κέντρων διέρχεται. (Πρότ. 6, βιβλ. 2). Ἐπειδὴ δὲ ἐκ δύο σημείων μία μόνη δυνατὸν εἶναι νὰ διέλθῃ εὐθεῖα, ἄρα ἡ διὰ τῶν κέντρων διαβαίνουσα εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ μέσου τῆς κοινῆς χορδῆς, τῆς συναπτούσης τῶν τομῶν τὰ σημεῖα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12.

Θεώρημα

Ἐὰν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων δύο κύκλων ἦναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἀκτίνων, καὶ ἐὰν συγχρόνως τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων καὶ τῆς ἐλάσσονος ἀκτῖνος ὑπερέχῃ τὴν ἀκτῖνα τὴν μείζονα, αἱ περιφέρειαι τῶν κύκλων αὐτῶν τέμνονται (σχ. 57 καὶ 58)

Διότι, διὰ νὰ ὑπάρξῃ ἡ τομή, πρέπει νὰ ὑπάρξῃ τὸ τρίγωνον ΓΑΔ· πρέπει δηλαδὴ νὰ συνυπάρξωσιν αἱ δύο ἀνισότητες αὗται ΓΔ$<$ΑΓ$+$ΑΔ καὶ ΑΔ$<$ΑΓ$+$ΓΔ. Ὑπάρχοντος δὲ τοῦ τριγώνου ΓΑΔ, πρόδηλον εἶναι, ὅτι αἱ ἐκ τῶν κέντρων Γ καὶ Δ γεγραμμέναι περιφέρειαι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13.

Θεώρημα

Ἐὰν αἱ ἀκτῖνες ΓΑ, ΑΔ δύο κύκλων προστιθέμεναι ἀποτελῶσι τὸ ΓΔ ἀπόστημα τῶν κέντρων τῶν κύκλων αὐτῶν, αἱ περιφέρειαι αἱ δι' αὐτῶν γεγραμμέναι ἅπτονται ἐξωτερικῶς (σχ. 59)

Πρόδηλον εἶναι, ὅτι αἱ δύο περιφέρειαι ἔχουσιν ἓν σημεῖον κοινόν, τὸ Α, ἄλλο ὅμως οὐδέν· διότι ἂν δύο εἶχον σημεῖα κοινά, τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἤθελεν εἶσθαι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἀκτίνων (Πρότ. 12, βιβλ. 2).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14.

Θεώρημα

Ἐὰν αἱ ἀκτῖνες ΓΑ, ΑΔ δύο κύκλων, ἡ ἑτέρα ἀπὸ τῆς ἑτέρας ἀφαιρουμένη, ἀποτελῶσι τὸ ΓΔ ἀπόστημα τῶν κέντρων τῶν κύκλων αὐτῶν, αἱ περιφέρειαι αἱ δι' αὐτῶν γεγραμμέναι ἅπτονται ἐσωτερικῶς (σχ. 60)

Ἐν πρώτοις φανερὸν εἶναι, ὅτι αἱ δύο περιφέρειαι ἔχουσιν ἓν σημεῖον κοινὸν, τὸ Α, ἄλλο ὅμως οὐδέν· διότι ἂν εἶχον καὶ δεύτερον σημεῖον κοινὸν, ἡ μεγάλη ἀκτὶς ΑΔ ἤθελεν εἶσθαι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῆς μικρᾶς ἀκτῖνος ΑΓ καὶ τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων ΓΔ (Πρότ. 12, βιβλ. 2). Τοῦτο δὲ ἐπὶ τοῦ προκειμένου δὲν ὑπάρχει.

Πόρισμα. Λοιπὸν ὅταν δύο περιφέρειαι ἅπτωνται ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς, τὰ κέντρα αὐτῶν καὶ τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Σχόλιον. Ὅλαι αἱ διὰ τοῦ σημείου Α διαβαίνουσαι περιφέρειαι, αἱ ἔχουσαι τὸ κέντρον αὐτῶν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ, ἅπτονται ἀλλήλων· διότι αὐτὸ μόνον τὸ σημεῖον Α ἔχουσι κοινόν. Ἐὰν δὲ εἰς τὸ σημεῖον Α ἀχθῇ ἡ ΑΕ κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΔ, ἡ εὐθεῖα ΑΕ θέλ' εἶσθαι κοινὴ ὅλων τῶν περιφερειῶν ἐφαπτομένη. (*)

(*) Γενικὸν σχόλιον τῶν προτάσεων 11, 12, 13 καὶ 14.

Ἔστω Κ τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων δύο κύκλων, Α ἡ ἀκτὶς τοῦ μείζονος κύκλου, καὶ α ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τοῦ ἐλάσσονος.

Δύο περιφέρειαι ἢ δὲν συναπαντῶνται ποσῶς, ἢ συναπαντῶνται, ἢ συμπίπτουσιν, ἢ ἅπτονται ἐξωτερικῶς, ἢ ἅπτονται ἐσωτερικῶς, ἢ ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν περιλαμβάνει.

Αἱ περιφέρειαι συμπίπτουσιν, ὅταν ἔχωσι τρία τοὐλάχιστον σημεῖα κοινά· τότε δὲ $K=0$ καὶ $A=\alpha$.

Ὅταν δύο περιφέρειαι προσεγγίσωσιν ἀλλήλας μέχρις ἐπαφῆς, ἐσωτερικῆς ἢ ἐξωτερικῆς, τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς συναπτούσης τὰ κέντρα· διότι ἀμφότεραι αἱ ἀκτῖνες εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς κοινῆς τῶν ἁπτομένων περιφερειῶν ἐφαπτομένης, καὶ διὰ τοῦτο ἢ συμπίπτουσιν (πρότ. 15. βιβλ. 1, σχόλιον), ἢ ἡ ἑτέρα εἶναι τῆς ἑτέρας συνέχεια (πρότ. 4, βιβλ. 1).

Ἐκ ταύτης δὲ τῆς διαθέσεως τῶν κέντρων καὶ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς πηγάζει, κατὰ μὲν τὴν ἐξωτερικὴν ἐπαφὴν, ἡ ἐξίσωσις $K=A+\alpha$, κατὰ δὲ τὴν ἐσωτερικὴν, ἡ ἐξίσωσις $A=K+\alpha$, ἢ $A-\alpha=K$, πηγάζουσι δηλαδὴ τὰ δύο ἐκ τῶν

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.

Θεώρημα

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, ἢ εἰς κύκλους ἴσους, αἱ ἴσαι γωνίαι ΑΓΒ, ΔΓΕ, αἱ τὴν κορυφὴν αὐτῶν εἰς τὸ κέντρον ἔχουσαι, ἐναγκαλίζονται ἐπὶ τῆς περιφερείας τόξα ἴσα ΑΒ, ΔΕ. (σχ. 61)

προκειμένων θεωρήματα, τὸ 13 καὶ τὸ 14. Ἤτοι αἱ περιφέρειαι ἅπτονται ἐξωτερικῶς μὲν, ὅταν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων οὔτε μεῖζον ἦναι, οὔτε ἔλαττον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἀκτίνων, ἐσωτερικῶς δὲ, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῆς μικρᾶς ἀκτῖνος καὶ τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων ἀποτελῇ τὴν ἀκτῖνα τὴν μεγάλην.

Ὅταν δὲ τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων δύο περιφερειῶν ὑπερβῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων, αἱ περιφέρειαι τότε ἀπέχουσιν ἀλλήλων. Ἐν τοιαύτῃ δὲ περιπτώσει ἔχομεν $K > A + \alpha$. Ἐὰν δὲ ἡ μικρὰ περιφέρεια περιλαμβάνηται ἐντὸς τῆς μεγάλης, τότε ἡ μεγάλη ἀκτὶς περιέχει τὴν μικρὰν ἀκτῖνα, τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων, καὶ ἔτι πρός. Ὅθεν $A > K + \alpha$. Εἰς ταύτην δὲ τὴν ἀνισότητα ἐνίοτε τὸ $K = 0$, τότε δὲ αἱ δύο περιφέρειαι εἶναι συγκεντρικαί.

Διὰ νὰ συναπαντηθῶσι δὲ δύο περιφέρειαι, πρέπει νὰ προσεγγίσωσιν ἀλλήλας τοσοῦτον, ὥστε τῶν κέντρων αὐτῶν τὸ ἀπόστημα νὰ κατασταθῇ μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων. Ἡ συνάντησις δὲ γίνεται εἰς δύο σημεῖα· διότι ἂν μὲν εἰς τρία σημεῖα συναντηθῶσιν αἱ περιφέρειαι, ταυτίζονται· ἂν εἰς ἓν, ἅπτονται· ἂν εἰς οὐδὲν, ἀπέχουσιν ἀλλήλων.

Κατὰ τὴν συνάντησιν λοιπὸν τῶν περιφερειῶν, ἐπειδὴ τὰ κέντρα καὶ τῶν τομῶν τὰ σημεῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, αἱ δύο ἀκτῖνες καὶ τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων ἀποτελεῖ τρίγωνον, εἰς ὃ, κατά τινα ἰδιότητα αὐτοῦ, ἔχομεν $K < A + \alpha$, καὶ $A < K + \alpha$. Ἤτοι, ὅταν δύο περιφέρειαι συναντῶνται, ὄχι μόνον τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἀκτίνων, ἀλλὰ καὶ ἡ μεγάλη ἀκτὶς εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῆς μικρᾶς ἀκτῖνος καὶ τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων.

Ἐν ἄλλοις λόγοις λοιπὸν καὶ ἐν συνόψει·

Ὅταν $K < A + \alpha$, καὶ συγχρόνως $A < K + \alpha$, περιφερειῶν συνάντησις.

Ὅταν $K > A + \alpha$, περιφερειῶν ἀποχή.

Ὅταν $K = A + \alpha$, ἐπαφὴ ἐξωτερική.

Ὅταν $A = K + \alpha$, ἐπαφὴ ἐσωτερική.

Ὅταν $A > K + \alpha$, ἡ μεγάλη περιφέρεια περιλαμβάνει τὴν μικράν.

Ὅταν $A > \alpha$ καὶ $K = 0$, αἱ περιφέρειαι εἶναι συγκεντρικαί.

Ὅταν $A = \alpha$ καὶ $K = 0$, αἱ περιφέρειαι συμπίπτουσιν. Ο. Μ.

Ἀντιστρόφως ἐὰν τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ ἦναι ἴσα, ἴσαι εἶναι καὶ αἱ γωνίαι ΑΓΒ, ΔΓΕ.

Α΄. Ἔστω ἡ ἀκτὶς ΑΓ=ΔΓ, καὶ ἡ γωνία ΑΓΒ=ΔΓΕ. Λέγω, ὅτι τὸ τόξον ΑΒ=ΔΕ.

Ἐὰν ἡ ἑτέρα τῶν γωνιῶν τούτων ἐπὶ τῆς ἑτέρας τεθῇ, ἐφαρμόζεται ἐντελῶς· διότι ὄχι μόνον αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι ἴσαι, ἀλλὰ καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν, ὡς ἀκτῖνες κύκλων ἴσων, ἴσαι εἶναι. Ἤτοι, ἂν τὸ ἕτερον τῶν κέντρων ἐπὶ τοῦ ἑτέρου τεθῇ καὶ αἱ πλευραὶ τῶν γωνιῶν ταυτισθῶσι, τὸ σημεῖον Α πίπτει ἐπὶ τοῦ Δ καὶ τὸ σημεῖον Β ἐπὶ τοῦ Ε. Τούτου δὲ γενομένου, τὸ τόξον ΑΒ ἀναγκαίως ἐφαρμόζεται ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΕ καὶ ἓν μόνον μετ' αὐτοῦ ἀποτελεῖ τόξον· διότι ἂν τοὐναντίον ὑποτεθῇ, τὰ σημεῖα τῶν τόξων αὐτῶν δὲν θέλουσιν ἀπέχει ἐκ τοῦ κέντρου ἰσάκις· ὅπερ ἄτοπον. Λοιπὸν τὸ τόξον ΑΒ=ΔΕ.

Β΄. Ἔστω ἤδη τὸ τόξον ΑΒ=ΔΕ, λέγω, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΑΓΒ=ΔΓΕ.

Αἱ δύο αὐταὶ γωνίαι ἢ ἴσαι εἶναι, ἢ ἄνισοι. Ἂς ὑποτεθῶσιν ἄνισοι, καὶ ἡ ΑΓΒ>ΔΓΕ.

Λαμβάνω ἓν τῆς γωνίας ΑΓΒ μέρος, τὴν γωνίαν ΑΓΙ=ΔΓΕ. Ἐκ τούτου δὲ κατὰ τὰ προειρημένα ἕπεται, ὅτι καὶ τὸ τόξον ΑΙ=ΔΕ. Ἀλλὰ κατὰ τὰ δεδομένα ΑΒ=ΔΕ· λοιπὸν καὶ ΑΙ=ΑΒ· ὅπερ ἄτοπον, διότι ΑΙ εἶναι μέρος τοῦ ΑΒ. Ἄρα ἡ γωνία ΑΓΒ δὲν εἶναι μείζων τῆς γωνίας ΔΓΕ.

Ἀπαραλλάκτως ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ γωνία ΔΓΕ μείζων εἶναι τῆς ΑΓΒ. Λοιπὸν ΑΓΒ=ΔΓΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16.

Θεώρημα

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, ἢ εἰς κύκλους ἴσους, ἐὰν δύο ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΓΒ, ΔΓΕ ἔχωσι τοιοῦτον πρὸς ἀλλήλας λόγον, οἷον ἔχουσι δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, ὁ αὐτὸς λόγος ὑπάρχει καὶ εἰς τὰ διαχωριζόμενα τόξα ΑΒ, ΔΕ, ἡ ἀκόλουθος δὲ ἀποτελεῖται ἀναλογία. (σχ. 62)

Γωνία ΑΓΒ: γωνία ΔΓΕ:: τόξον ΑΒ: τόξον ΔΕ.

Ἔστω, χάριν παραδείγματος, ὅτι αἱ δύο γωνίαι ΑΓΒ, ΔΓΕ ἔχουσι τοιαύτην πρὸς ἀλλήλας σχέσιν, οἵαν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ

7 καὶ 4· ἢ ἐν ἄλλοις λόγοις, ἔστω, ὅτι τὸ κοινὸν τῶν δύο αὐτῶν γωνιῶν μέτρον, ἡ γωνία Μ, χωρεῖ εἰς μὲν τὴν γωνίαν ΑΓΒ ἑπτάκις, εἰς δὲ τὴν γωνίαν ΔΓΕ τετράκις.

Ἐπειδὴ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην, αἱ μερικαὶ γωνίαι ΑΓμ, μΓν, νΓπ, κτλ. ΔΓχ, χΓψ, κτλ. εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι, ἴσα πρὸς ἄλληλα εἶναι καὶ τὰ μερικὰ τόξα Αμ, μν, νπ, κτλ. Δχ, χψ, κτλ. (Πρότ. 15, βιβλ. 2). Ἄρα ὁλόκληρα τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ, παραβαλλόμενα πρὸς σύγκρισιν, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς 7 καὶ 4.

Ἐὰν δὲ ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν 7 καὶ 4 λάβωμεν ὡς ὅρους συγκρίσεως ἀριθμοὺς ἄλλους, ἡ ἀπόδειξις τοῦ πράγματος μένει ἡ αὐτή. Λοιπὸν ἐν γένει, ὅταν ἡ σχέσις τῶν δύο γωνιῶν ΑΓΒ, ΔΓΕ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τῆς σχέσεως δύο ἀριθμῶν ἀκεραίων, ἡ αὐτὴ σχέσις ὑπάρχει καὶ εἰς τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ.

Σχόλιον. Ἀντιστρόφως, ἐὰν τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ ἔχωσι τοιοῦτον πρὸς ἄλληλα λόγον, οἷον πρὸς ἀλλήλους ἔχουσι δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ, ὁ αὐτὸς λόγος ὑπάρχει καὶ εἰς τὰς γωνίας ΑΓΒ, ΔΓΕ· πάντοτε δὲ ἀποτελεῖται ἡ ἀναλογία ΑΓΒ: ΔΓΕ::ΑΒ: ΔΕ.

Διότι τὰ μερικὰ τόξα Αμ, μν, κτλ. Δχ, χψ, κτλ. εἶναι ἴσα· ἐπομένως ἴσαι εἶναι καὶ αἱ μερικαὶ γωνίαι ΑΓμ, μΓν, κτλ. ΔΓχ, χΓψ, κτλ.

Λοιπὸν ὁ λόγος τῶν τόξων καὶ ὁ λόγος τῶν γωνιῶν δὲν διαφέρουσιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17.

Θεώρημα

Ὁποιοσδήποτ' εἶναι τῶν γωνιῶν ΑΓΒ, ΑΓΔ ὁ λόγος, ὁ αὐτὸς λόγος ὑπάρχει καὶ εἰς τὰ τόξα ΑΒ, ΑΔ, τὰ ἔχοντα κέντρα τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν αὐτῶν καὶ δι' ἀκτίνων ἴσων γεγραμμένα, ὑπὸ τῶν πλευρῶν δὲ τῶν αὐτῶν γωνιῶν διαχωριζόμενα. (σχ. 63)

Σχηματίζω ἐντὸς τῆς μείζονος γωνίας ΑΓΒ τὴν γωνίαν ΑΓΔ ἴσην τῇ ἐλάσσονι, καὶ δισχυρίζομαι, ὅτι μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν γωνιῶν καὶ τῶν τόξων ΑΒ, ΑΔ ὑπάρχει ἡ ἐν τῇ προτάσει εἰρημένη σχέσις, ἤτοι

Γωνία ΑΓΒ: γωνία ΑΓΔ:: τόξον ΑΒ: τόξον ΑΔ.

Αὕτη δὲ ἡ ἀναλογία, ἢ ἀληθεύει, ἢ δὲν ἀληθεύει. Ἂν δὲν ἦναι ἀληθινὴ, χωλαίνει· χωλαίνει δὲ κατὰ τὸν ἕνα μόνον ὅρον, διότι πρὸς σχηματισμὸν ἀναλογίας δύναμαι νὰ λάβω τρία ποσὰ κατὰ θέλησιν, τὸ τέταρτον δὲ μόνον εἶναι ἀπὸ τῆς θελήσεώς μου ἀνεξάρτητον, διότι ἐκ τῆς σχέσεως τῶν τριῶν ἄλλων ἀποῤῥέει. Ἔστω λοιπὸν, ὅτι ὁ τέταρτος τῆς ἀναλογίας ὅρος εἶναι τόξον τι ΑΟ μεῖζον τοῦ ΑΔ, ἔστω δηλαδὴ, ὅτι ἀληθεύει ἡ ἑξῆς ἀναλογία·

Γωνία ΑΓΒ: γωνία ΑΓΔ:: τόξον ΑΒ:: τόξον ΑΟ (1).

Τούτου τεθέντος, κατατέμνω τὸ τόξον ΑΒ εἰς πλῆθος μερῶν ἴσων, μικροτέρων τοῦ ΔΟ· πρόδηλον δὲ εἶναι ὅτι μία τῶν τομῶν, ἡ Ι, περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν σημείων Δ καὶ Ο. Συνάπτω τὸ σημεῖον Ι μετὰ τοῦ κέντρου Γ· ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος τῶν τόξων ΑΒ, ΑΙ εἶναι δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν λόγος, διότι ἀπὸ τοῦ Α καὶ μέχρι τοῦ Β καὶ μέχρι τοῦ Ι ἀκέραιον περιλαμβάνεται τμημάτων πλῆθος, ἡ ἑξῆς ὑπάρχει ἀναλογία·

Γωνία ΑΓΒ: γωνία ΑΓΙ:: τόξον ΑΒ : τόξον ΑΙ (2)

Ἡ ἀναλογία αὕτη καὶ ἡ ἀνωτέρω (1), τὴν ὁποίαν ὡς ἀληθῆ παρεδέχθημεν, πρὸς ἀλλήλας παραβαλλόμεναι, ἐπειδὴ ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς ἡγουμένους, ἀποτελοῦσι διὰ τῶν ἑπομένων αὐτῶν τὴν ἀκόλουθον ἀναλογίαν

Γωνία ΑΓΔ: γωνία ΑΓΙ:: τόξον ΑΟ: τόξον ΑΙ.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ δεύτερος τῆς ἀναλογίας ταύτης ἡγούμενος ΑΟ εἶναι τοῦ ἑπομένου του ΑΙ μείζων, ἕπεται, ὅτι καὶ ὁ πρῶτος ἡγούμενος ΑΓΔ μείζων εἶναι τοῦ ἑπομένου του ΑΓΙ, ἄλλως ἀναλογία δὲν ὑπάρχει. Ἀλλὰ τὸ μὲν τόξον ΑΟ$>$ΑΙ, ἡ δὲ γωνία ΑΓΔ$<$ΑΓΙ. Ἄρα ἡ ἐσχάτη αὕτη ἀναλογία εἶναι ἐσφαλμένη.

Ἀλλ' ἡ ἀναλογία αὕτη προέκυψεν ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν δύο προηγουμένων ἀναλογιῶν (1), (2), ἐξ ὧν ἡ προτελευταία (2) εἶναι ὁμολογουμένως ὀρθή. Λοιπὸν ἡ ἄλλη, ἡ (1), τὴν ὁποίαν καθ' ὑπόθεσιν ἐδέχθημεν ὡς ὀρθὴν, χωλαίνει κατὰ τὸν τέταρτον ὅρον. Ἄρα ὁ τέταρτος τῆς ἀναλογίας αὐτῆς ὅρος δὲν εἶναι μείζων τοῦ ΑΔ.

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν, ὅτι ὁ τέταρτος τῆς ἀναλογίας αὐτῆς ὅρος δὲν εἶναι τοῦ ΑΔ ἐλάσσων. Ἄρα εἶναι ἴσος, καὶ ἑπομένως ἀληθεύει ἡ ἀναλογία ἡ ἑξῆς·

Γωνία ΑΓΒ: γωνία ΑΓΔ:: τόξον ΑΒ: τόξον ΑΔ. (*)

(*) Τὸ ἄνω ἐκτεθὲν τῆς ἀποδείξεως σύστημα εἶναι ἐν χρήσει πολλῇ καθ' ὅλον τὸ σύγγραμμα. Τὸ ἀνεπτύξαμεν δὲ ὅσον ἔνεστιν ἀναλελυμένως, πρὸς εὐχερεστέραν κατάληψιν τῶν ἑπομένων προτάσεων, τῶν ἀποδεικνυομένων ἀπαραλλάκτως. Ο. Μ.

Πόρισμα. Ἐπειδὴ ἡ ἐπίκεντρος γωνία καὶ τὸ ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιλαμβανόμενον τόξον εἶναι οὕτω πως συνδεδεμένα, ὥστε καθ' ὁποιονδήποτε λόγον ἂν αὐξήσῃ ἢ ἐλαττωθῇ τὸ μέγεθος τὸ ἕτερον, τὴν κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν τοῦ ἑτέρου μεγέθους ἐπάγει, δύναταί τις νὰ παραδεχθῇ ὡς μέτρον τῶν γωνιῶν τὰ τόξα. Καὶ ἀπὸ τοῦδε θέλομεν μεταχειρισθῆ ἀντὶ μέτρου τῆς γωνίας ΑΓΒ τὸ τόξον ΑΒ. Παρατηρητέον ὅμως, ὅτι ἐν τῇ παραβολῇ τῶν γωνιῶν, τὰ πρὸς καταμέτρησιν αὐτῶν χρησιμεύοντα τόξα γράφονται διὰ τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος· διότι ἐπ' αὐτῇ τῇ βάσει θεμελιοῦνται αἱ ἀνωτέρω προτάσεις.

Σχόλιον 1. Φυσικὸν τῶν ποσοτήτων μέτρον εἶναι ποσότης τις ὁμοειδής. Κατ' αὐτὸ δὲ τὸ δόγμα ἁρμόζον τῶν γωνιῶν μέτρημα φαίνεται τὸ διὰ τῆς γωνίας τῆς ὀρθῆς. Καὶ τῷ ὄντι, ἂν δεχθῶμεν ὡς μονάδα τῶν γωνιῶν τὴν γωνίαν τὴν ὀρθήν, δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν, τὰς μὲν ὀξείας γωνίας, δι' ἀριθμοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τοῦ 0 καὶ τῆς 1, τὰς δὲ ἀμβλείας, δι' ἀριθμοῦ περιεχομένου μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 2. Ἀλλ' οὗτος τῆς παραστάσεως τῶν γωνιῶν ὁ τρόπος δὲν εἶναι ὁ πρὸς χρῆσιν καταλληλότερος· διότι ἕνεκα τῆς εὐκολίας, μεθ' ἧς δύναταί τις νὰ γράψῃ τόξα ἴσα, καὶ δι' ἄλλους πολλοὺς λόγους, ἁπλουστέρα καὶ εὐχερεστέρα εἶναι ἡ διὰ τῶν τόξων καταμέτρησις τῶν γωνιῶν. Καὶ εἶναι μὲν τὸ τοιοῦτον μέτρημα ἔμμεσον, ἀλλ' εὐκόλως δι' αὐτοῦ εὑρίσκεται τὸ μέτρον τὸ ἄμεσον καὶ ἀπόλυτον· διότι ἐκ τῆς συγκρίσεως τόξου τινὸς πρὸς τὸ τεταρτημόριον τῆς περιφερείας, προκύπτει ἡ πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν σχέσις τῆς γωνίας τῆς εἰς τὸ τόξον ἀντικειμένης, προκύπτει δηλαδὴ τὸ ἀπόλυτον τῆς γωνίας μέτρον.

Σχόλιον 2. Τὰ διὰ τῶν τριῶν τελευταίων προτάσεων περὶ τῶν πρὸς τὰ τόξα σχέσεων τῶν γωνιῶν ἀποδειχθέντα ἀληθεύουσι καὶ ὅταν παραβάλλῃ τις πρὸς τὰ τόξα τοὺς τομεῖς· διότι οἱ τομεῖς εἶναι ἴσοι, ὅταν ἴσαι ἦναι αἱ γωνίαι. Ἐν γένει δὲ οἱ τομεῖς εἶναι πρὸς τὰς γωνίας ἀνάλογοι.

Λοιπὸν δύο τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ κύκλων ἴσων τομεῖς ΑΓΒ, ΑΓΔ ἔχουσι τὸν αὐτὸν πρὸς ἀλλήλους λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ τόξα ΑΒ, ΑΔ, τὰ ἀποτελοῦντα τῶν τομέων αὐτῶν τὰς βάσεις.

Ἐντεῦθεν δὲ ἕπεται, ὅτι τὰ τόξα, τὰ χρησιμεύοντα πρὸς καταμέτρησιν γωνιῶν, δύνανται νὰ χρησιμεύσωσι καὶ ὡς μέτρα τομέων τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ κύκλων ἴσων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

Θεώρημα

Πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία ΒΑΔ μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν της περιεχομένου τόξου ΒΔ.

Ἐν πρώτοις τὸ κέντρον ὑποτίθεται ὑπάρχον ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΑΔ. (σχ. 64)

Ἄγω τὴν διάμετρον ΑΕ καὶ τὰς ἀκτῖνας ΓΒ, ΓΔ. Ἡ γωνία ΒΓΕ, ἡ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς τοῦ τριγώνου γωνιῶν ΓΑΒ, ΑΒΓ (πρότ. 19, πόρ. 6). Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς, ἡ γωνία ΓΑΒ$=$ΑΒΓ. Λοιπὸν ἡ γωνία ΒΓΕ εἶναι διπλασία τῆς ΒΑΓ.

Ἡ γωνία ΒΓΕ εἶναι ἐπίκεντρος· ἄρα μέτρον ἔχει τὸ τόξον ΒΕ. Ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓΕ· μέτρον λοιπὸν ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΕ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἡ γωνία ΓΑΔ μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΕΔ. Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΒΑΓ$+$ΓΑΔ, ἢ ἡ γωνία ΒΑΔ μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ κεφαλαίου ΒΕ$+$ΕΔ, ἤτοι τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΔ.

Ὑποτίθεται ἤδη τὸ κέντρον Γ ὑπάρχον ἐκτὸς τῆς γωνίας ΒΑΔ. (σχ. 65)

Ἄγω τὴν διάμετρον ΑΕ.

Ἡ γωνία ΒΑΕ μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΕ, ἡ δὲ γωνία ΔΑΕ τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΔΕ. Ἄρα ἡ διαφορὰ τῶν δύο αὐτῶν γωνιῶν, ἤτοι ἡ γωνία ΒΑΔ ἔχει μέτρον τὸ ἑξῆς $\frac{\text{ΒΕ}}{2}-\frac{\text{ΔΕ}}{2}=\frac{\text{ΒΕ}-\text{ΔΕ}}{2}=\frac{\text{ΒΔ}}{2}$, ἤτοι τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΔ.

Λοιπὸν πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιλαμβανομένου τόξου.

Πόρισμα 1. Ὅλαι αἱ εἰς τὸ αὐτὸ τοῦ κύκλου τμῆμα ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ΒΑΓ, ΒΔΓ, κτλ. εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουσι μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΒΟΓ. (σχ. 66)

Πόρισμα 2. Πᾶσα ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ ἐγγεγραμμένη γωνία ΒΑΔ εἶναι γωνία ὀρθή· διότι μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς ἡμιπεριφερείας ΒΟΔ, ἤτοι τῆς περιφερείας τὸ τέταρτον, τὸ μίαν μετροῦν γωνίαν ὀρθήν. (σχ. 67)

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς αὐτῆς προτάσεως κατὰ τρόπον ἄλλον, ἄγω τὴν ἀκτῖνα ΑΓ.

Τὸ τρίγωνον ΒΑΓ εἶναι ἰσοσκελές· ὅθεν ἡ γωνία ΒΑΓ=ΑΒΓ. Τὸ τρίγωνον ΓΑΔ εἶναι ὡσαύτως ἰσοσκελές· ὅθεν ἡ γωνία ΓΑΔ=ΑΔΓ. Λοιπὸν ΒΑΓ+ΓΑΔ, ἢ ΒΑΔ=ΑΒΔ+ΑΔΒ.

Ἤτοι αἱ δύο γωνίαι ἡ Β καὶ ἡ Δ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ, ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἀποτελοῦσι τὴν τρίτην ΒΑΔ. Ἐπομένως αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου αὐτοῦ γωνίαι εἶναι τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας ΒΑΔ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ τρεῖς παντὸς τριγώνου γωνίαι ἐν ὅλῳ ἀποτελοῦσι δύο γωνίας ὀρθάς, ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι μία ὀρθὴ γωνία.

Πόρισμα 3. Πᾶσα γωνία ΒΑΓ, ἐγγεγραμμένη εἰς τμῆμα κύκλου μεῖζον τοῦ ἡμικυκλίου, εἶναι γωνία ὀξεῖα· διότι μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΟΓ, τοῦ ὄντος μικροτέρου ἡμιπεριφερείας. (σχ. 66)

Πᾶσα δὲ γωνία ΒΟΓ, ἐγγεγραμμένη εἰς τμῆμα κύκλου μικρότερον ἡμικυκλίου, εἶναι ἀμβλεῖα γωνία· διότι μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΑΓ, τοῦ ὑπερβαίνοντος ἡμιπεριφέρειαν.

Πόρισμα 4. Αἱ ἀντικείμεναι γωνίαι Α καὶ Β τετραπλεύρου τινὸς ἐγγεγραμμένου ΑΒΓΔ, ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἀποτελοῦσι δύο γωνίας ὀρθάς· διότι ἡ γωνία ΒΑΔ μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΓΔ· ἡ δὲ γωνία ΒΓΔ τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΑΔ. Ἀμφότεραι δηλαδὴ αἱ γωνίαι ΒΑΔ, ΒΓΔ, ἐν συνόλῳ, μέτρον ἔχουσι τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας. Ἄρα τὸ ἄθροισμά των ἀποτελεῖ δύο γωνίας ὀρθάς. (σχ. 68)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19.

Θεώρημα

Ἡ γωνία ΒΑΓ, ἡ ὑπὸ χορδῆς καὶ ὑπὸ ἐφαπτομένης ἀποτελουμένη, μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΜΔΓ, τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της. (σχ. 69)

Ἐκ τοῦ Α σημείου τῆς ἀφῆς ἄγω τὴν διάμετρον ΑΔ.

Ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ὀρθὴ (Πρότ. 9, βιβλ. 2), ἐπομένως μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΜΔ· ἡ δὲ γωνία ΔΑΓ μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΔΓ. Λοιπὸν αἱ δύο γωνίαι ΒΑΔ+ΔΑΓ, ἢ ἡ γωνία ΒΑΓ μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΜΔ, καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ΔΓ, ἤτοι τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλου τόξου ΑΜΔΓ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δύναταί τις ν' ἀποδείξῃ, ὅτι ἡ γωνία ΓΑΕ μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΓ, τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της. (*)

(*) Εἰς τὸ δεύτερον βιβλίον ἐκτείνεται τῶν γνώσεων τῶν γεωμετρικῶ δυ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΔΥΟ ΠΡΩΤΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΣΧΕΤΙΚΑ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ.

Διχοτόμησον τὴν γνωστὴν εὐθεῖαν ΑΒ. (σχ. 70)

Ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β, ὡς ἀπὸ κέντρων, καὶ δι' ἀκτῖνος τοῦ ἡμίσεος τῆς ΑΒ μείζονος, γράφω δύο τόξα, ἅτινα τέμνονται εἴς τι σημεῖον Δ. Τὸ σημεῖον Δ ἀπέχει ἰσάκις ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β.

Ἀπαραλλάκτως διορίζω ἄνωθεν ἢ κάτωθεν τῆς εὐθείας ΑΒ ἄλλο τι σημεῖον Ε, ἰσάκις ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β ἀπέχον.

Συνάπτω τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Ἡ εὐθεῖα ΔΕ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη.

ορίζων καὶ νέαι ἀνακαλύπτονται τοῦ συνεχοῦς ποσοῦ ἰδιότητες.

Εἰς τὸ βιβλίον τὸ δεύτερον ὁ συγγραφεὺς ἑρμηνεύει·

1. Τὰς ἰδιότητας τῆς περιφερείας καὶ τοῦ κύκλου.
2. Τὰς ἰδιότητας τῶν ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένων εὐθειῶν.
3. Τὰς σχέσεις τῶν τόξων πρὸς τὰς χορδάς.
4. Τὰς ἰδιότητας τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῶν διατεμνουσῶν.
5. Τὰς σχέσεις τῶν τόξων πρὸς τὰς γωνίας τὰς ἐπικέντρους, πρὸς τὰς ἐγγεγραμμένας, πρὸς τὰς γωνίας τὰς ἐκ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης ἀποτελουμένας.

Ἡ γνῶσις δὲ τῶν σχέσεων τῶν τόξων καὶ τῶν γωνιῶν εἶναι ἐκ τῶν χρησιμωτέρων· διότι ἐκ τῶν τριγώνων μόνον τὴν περὶ ἰσότητος καὶ ἀνισότητος σχέσιν πορίζόμεθα, τὸ αὐτὸ δὲ συνάγομεν καὶ ἐκ τῶν τμημάτων τοῦ κύκλου. Ἤτοι εἰς τὴν ἴσην γωνίαν ἴση πλευρὰ ἀντίκειται, καὶ εἰς τὴν μείζονα μείζων· ὡσαύτως εἰς τὸ ἴσον τόξον ἴση χορδὴ ὑποτείνει, καὶ εἰς τὸ μεῖζον μείζων.

Αἱ σχέσεις ὅμως τῶν γωνιῶν καὶ τῶν τόξων εὐρύτερον περιλαμβάνουσι κύκλον. Ὅθεν δύναταί τις νὰ συμπεράνῃ ἀκριβῶς τὰ τῆς γωνίας γινώσκων τὸ τόξον, καὶ τἀνάπαλιν. Διὰ τοῦτο τὰ τόξα χρησιμεύουσι πρὸς καταμέτρησιν τῶν γωνιῶν.

Διότι τὰ δύο σημεῖα Δ καὶ Ε, ἰσάκις ἕκαστον ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β ἀπέχον, ἀνήκουσιν εἰς τὴν κάθετον, τὴν ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ΑΒ ἀναβαίνουσαν. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ δύο σημείων μία μόνη εὐθεῖα διαβαίνει, ἡ διὰ τῶν σημείων Δ καὶ Ε διερχομένη εὐθεῖα εἶναι αὐτὴ ἡ κάθετος, ἡ τέμνουσα τὴν ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὸ σημεῖον Γ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.

Εἰς τὸ Α, γνωστὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ΒΓ, ὕψωσον κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς. (σχ. 71)

Λαμβάνω ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Α καὶ εἰς ἴσην ἀπ' αὐτοῦ ἀπόστασιν τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Ἐκ τῶν σημείων τούτων, ὡς ἀπὸ κέντρων, καὶ δι' ἀκτῖνος μείζονος τῆς εὐθείας ΒΑ, γράφω δύο τόξα, ἅτινα τέμνονται εἴς τι σημεῖον Δ. Συνάπτω τὰ σημεῖα Α καὶ Δ. Ἡ ΑΔ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.

Διότι τὸ σημεῖον Δ, ἰσάκις ἐκ τῶν ἄκρων Β καὶ Γ ἀπέχον, ἀνήκει εἰς τὴν κάθετον, τὴν ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ΒΓ ἀναβαίνουσαν. Ἑπομένως ἡ ΑΔ εἶναι ἡ κάθετος αὐτή.

Σχόλιον. Ἡ αὐτὴ κατασκευὴ χρησιμεύει πρὸς σχηματισμὸν γωνίας τινὸς ὀρθῆς ΒΑΔ εἰς τὸ γνωστὸν σημεῖον Α τῆς γνωστῆς εὐθείας ΒΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.

Ἀπὸ τοῦ γνωστοῦ σημείου Α, τοῦ ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΒΔ ὑπάρχοντος, καταβίβασον ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς κάθετον. (σχ. 72)

Ἀπὸ τοῦ σημείου Α, ὡς ἀπὸ κέντρου, καὶ δι' ἀκτῖνος ἱκανῶς μεγάλης, γράφω τόξον τέμνον τὴν εὐθεῖαν ΒΔ εἰς δύο σημεῖα Β καὶ Δ. Εὑρίσκω κατόπιν σημεῖόν τι Ε, ἰσάκις ἀπέχον ἀπὸ τῶν σημείων Β καὶ Δ. Συνάπτω τὰ σημεῖα Α καὶ Ε. Ἡ ΑΕ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.

Διότι ἕκαστον τῶν σημείων Α καὶ Ε ἰσάκις ἀπὸ τῶν σημείων Β καὶ Δ ἀπέχει. Ἑπομένως ἡ ΑΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ μέσου τῆς ΒΔ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.

Εἰς τὸ Α σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ κατασκεύασον γωνίαν ἴσην τῇ γνωστῇ γωνίᾳ Κ. (σχ. 73)

Ἀπὸ τῆς κορυφῆς Κ, ὡς ἀπὸ κέντρου, καὶ δι' ἀκτῖνος κατὰ θέλησιν εἰλημμένης, γράφω τὸ τόξον ΙΛ, τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ἀποπερατούμενον. Μετὰ ταῦτα ἀπὸ τοῦ σημείου Α, ὡς ἀπὸ κέντρου, καὶ δι' ἀκτῖνος ἴσης τῇ ΚΙ γράφω ἀόριστόν τι τόξον ΒΟ. Κατόπιν ἀπὸ τοῦ σημείου Β, ὡς ἀπὸ κέντρου, καὶ δι' ἀκτῖνος ἴσης τῇ χορδῇ ΙΛ χαράσσω τόξον. Τὸ τόξον τοῦτο τέμνει τὸ ἀόριστον τόξον ΒΟ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Συνάπτω τὰ σημεῖα Α καὶ Δ, καὶ ἡ τοιουτοτρόπως ἀποτελεσθεῖσα γωνία εἶναι ἡ ζητουμένη.

Διότι τὰ τόξα ΒΔ, ΙΛ καὶ ἀκτῖνας καὶ χορδὰς ἴσας ἔχουσιν. Ἑπομένως εἶναι ἴσα. (Πρότ. 4, βιβλ. 2). Ἄρα ἡ γωνία ΒΑΔ= ΙΚΛ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5.

Διχοτόμησον γνωστὸν τόξον, ἢ γνωστὴν γωνίαν. (σχ. 74)

Α΄. Προκειμένου λόγου περὶ τῆς διχοτομήσεως τοῦ τόξου ΑΒ, ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β, ὡς ἀπὸ κέντρων, καὶ διὰ τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος, γράφω δύο τόξα, συναπαντώμενα εἰς τὸ σημεῖον Δ. Συνάπτω τὸ κέντρον Γ καὶ τὸ σημεῖον Δ. Ἡ ΓΔ διαιρεῖ τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὸ σημεῖον Ε.

Διότι ἕκαστον τῶν σημείων Γ καὶ Δ ἰσάκις ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β τῆς χορδῆς ΑΒ ἀπέχει. Ἑπομένως ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς αὐτῆς· ἄρα διαιρεῖ τὸ τόξον ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὸ σημεῖον Ε. (Πρότ. 6, βιβλ. 2)

Β΄. Προκειμένης δὲ εἰς διχοτόμησιν τῆς γωνίας ΑΓΒ, ἐν πρώτοις ἀπὸ τῆς κορυφῆς Γ, ὡς ἀπὸ κέντρου, γράφω τὸ τόξον ΑΒ, μετὰ δὲ ταῦτα διαιρῶ τὸ τόξον αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη. Ἡ εὐθεῖα ΓΔ, ἡ τὸ τόξον ΑΒ διχοτομοῦσα, διχοτομεῖ καὶ τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν ΑΓΒ, τὴν εἰς αὐτὸ ἀντικειμένην. Τοῦτο δὲ πρόδηλον εἶναι. (Πρότ. 15, βιβλ. 2.)

Σχόλιον. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς δύναταί τις νὰ διαιρέσῃ τὰ τοῦ τόξου ἡμίση ΑΕ, ΕΒ εἰς δύο ἴσα μέρη ἕκαστον. Διὰ τοιαύτης δὲ ἀλλεπαλλήλου εἰς δύο ὑποδιαιρέσεως χωρίζει τις, ἂν θέλῃ, τόξον ἢ γωνίαν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, εἰς ὀκτώ, εἰς δέκα καὶ ἓξ κτλ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6.

Ἀπὸ τοῦ γνωστοῦ σημείου Α φέρε τῆς γνωστῆς εὐθείας ΒΓ παράλληλον. (σχ. 75)

Ἀπὸ τοῦ σημείου Α, ὡς ἀπὸ κέντρου, καὶ δι' ἀκτῖνος ἱκανῶς μεγάλης, γράφω τὸ ἀόριστον τόξον ΕΟ. Ἀπὸ τοῦ σημείου Ε, εἰς ὃ τὸ τόξον συναπαντᾷ τὴν εὐθεῖαν, ὡς ἀπὸ κέντρου, καὶ διὰ τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος γράφω τὸ τόξον ΑΖ. Λαμβάνω τὸ ΕΔ=ΑΖ καὶ ἄγω τὴν εὐθεῖαν ΑΔ. Αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος.

Διότι, συνάπτων τὰ σημεῖα Α καὶ Ε, παρατηρῶ, ὅτι αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΕΖ, ΕΑΔ εἶναι ἴσαι. Ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΕΖ εἶναι παράλληλοι (Πρότ. 24, βιβλ. 1).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7.

Εὑρὲ τὴν τρίτην τριγώνου τινὸς γωνίαν, τῶν λοιπῶν δύο αὐτοῦ γωνιῶν Α καὶ Β δεδομένων. (σχ. 76)

Σύρω τὴν ἀόριστον εὐθεῖαν ΔΕΖ, καὶ εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς Ε σχηματίζω τὴν γωνίαν ΔΕΓ=Α, καὶ τὴν γωνίαν ΓΕΘ=Β. Ἡ λοιπὴ γωνία ΘΕΖ εἶναι ἡ τρίτη τοῦ τριγώνου γωνία, ἡ ζητουμένη. Διότι τῶν τριῶν αὐτῶν γωνιῶν τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖ δύο γωνίας ὀρθάς, ἀποτελεῖ δηλαδὴ μέγεθος τόσον, ὅσον καὶ αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι, ἐξ ὧν αἱ δύο εἶναι αἱ δεδομέναι Α καὶ Β.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8.

Κατασκεύασον τὸ τρίγωνον, γνωστῆς οὔσης μιᾶς αὐτοῦ γωνίας Α, καὶ δεδομένων τῶν πλευρῶν Β καὶ Γ, τῶν περιεχουσῶν τὴν γωνίαν αὐτήν. (σχ. 77)

Σύρω τὴν ἀόριστον εὐθεῖαν ΔΕ, καὶ σχηματίζω εἴς τι σημεῖον αὐτῆς Δ γωνίαν ἴσην τῇ Α. Λαμβάνω κατόπιν τὴν ΔΗ=Β, καὶ τὴν ΔΘ=Γ, καὶ ἄγω τὴν ΗΘ. Τὸ τοιουτοτρόπως σχηματιζόμενον τρίγωνον ΔΗΘ εἶναι τὸ ζητούμενον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9.

Κατασκεύασον τὸ τρίγωνον, γνωστῆς οὔσης μιᾶς αὐτοῦ πλευρᾶς, καὶ δύο γωνιῶν αὐτοῦ δεδομένων. (σχ. 78)

Αἱ δύο γωνίαι αἱ δεδομέναι, ἢ καὶ αἱ δύο πρόσκεινται εἰς τὴν γνωστὴν πλευράν, ἢ ἡ ἑτέρα αὐτῶν πρόσκειται, ἡ δὲ ἄλλη ἀντίκειται.

Ἂν ἡ μὲν τῶν γωνιῶν πρόσκειται, ἡ δὲ ἀντίκειται, εὑρίσκω τὴν τρίτην γωνίαν κατὰ τὸν ἤδη προεκτεθέντα τρόπον (Πρόβλημα 7). Ὅθεν πρὸς κατασκευὴν τοῦ τριγώνου ἔχω πάντοτε μίαν πλευρὰν καὶ τὰς εἰς τὴν πλευρὰν αὐτὴν προσκειμένας δύο γωνίας.

Τούτου τεθέντος, λαμβάνω εὐθεῖάν τινα ΔΕ ἴσην τῇ πλευρᾷ τῇ γνωστῇ, καὶ σχηματίζω, εἰς μὲν τὸ σημεῖον Δ, τὴν γωνίαν ΕΔΖ ἴσην τῇ ἑτέρᾳ τῶν προσκειμένων, εἰς δὲ τὸ σημεῖον Ε, τὴν γωνίαν ΔΕΗ ἴσην τῇ ἄλλῃ. Αἱ δύο εὐθεῖαι ΔΖ, ΕΗ διατέμνονται εἴς τι σημεῖον Θ. Τὸ τοιουτοτρόπως ἀποτελούμενον τρίγωνον ΔΕΘ εἶναι τὸ ζητούμενον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 10.

Κατασκεύασον τὸ τρίγωνον, τῶν τριῶν αὐτοῦ πλευρῶν Α, Β, Γ δεδομένων. (σχ. 79)

Λαμβάνω εὐθεῖάν τινα ΔΕ ἴσην τῇ πλευρᾷ Α. Ἀπὸ τοῦ σημείου Ε, ὡς ἀπὸ κέντρου, καὶ δι' ἀκτῖνος ἴσης τῇ δευτέρᾳ πλευρᾷ Β, γράφω τόξον. Ἀπὸ τοῦ σημείου Δ, ὡς ἀπὸ κέντρου, καὶ δι' ἀκτῖνος ἴσης τῇ τρίτῃ πλευρᾷ Γ, γράφω ἕτερον τόξον. Τὸ τόξον τοῦτο τέμνει τὸ τόξον τὸ ἄλλο, τὸ πρότερον γεγραμμένον, εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ἄγω τὰς εὐθείας ΔΖ, ΕΖ καὶ τὸ τοιουτοτρόπως ἀποτελούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Σχόλιον. Ἐὰν ἡ μία τῶν πλευρῶν ὑπερεῖχε τῶν δύο λοιπῶν τὸ ἄθροισμα, τὰ τόξα δὲν ἤθελον συναπαντηθῆ. Ἑπομένως τὸ ζήτημα ἤθελεν εἶσθαι ἀδύνατον. Τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατὸν ὁσάκις τὸ ἄθροισμα δύο ὁποιωνδήποτε ἐκ τῶν τριῶν δεδομένων τοῦ τριγώνου πλευρῶν ὑπερέχει τὴν πλευρὰν τὴν τρίτην.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 11.

Κατασκεύασον τὸ τρίγωνον, γνωστῆς οὔσης μιᾶς αὐτοῦ γωνίας Γ, καὶ δεδομένων τῶν δύο πλευρῶν αὐτοῦ Α καὶ Β, ἐξ ὧν ἡ μὲν Α πρόσκειται, ἡ δὲ Β ἀντίκειται εἰς τὴν γνωστὴν γωνίαν Γ.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δύο συμβαίνουσι περιστάσεις.

Α΄. Ἔστω ἡ γνωστὴ γωνία Γ ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα. (σχ. 80)

Κατασκευάζω τὴν γωνίαν ΕΔΖ ἴσην τῇ γνωστῇ γωνίᾳ Γ. Μετὰ ταῦτα λαμβάνω τὴν ΔΕ=Α, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ε, ὡς ἀπὸ κέντρου, καὶ δι' ἀκτῖνος ἴσης τῇ δεδομένῃ πλευρᾷ Β, γράφω τόξον, τέμνον τὴν εὐθεῖαν ΔΖ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ἄγω τὴν ΕΖ, καὶ τὸ τοιουτοτρόπως σχηματιζόμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ζητούμενον. (*)

Ἐννοεῖται δὲ, ὅτι κατὰ ταύτην τὴν περίπτωσιν ἡ πλευρὰ Β, ἡ ἀντικειμένη εἰς τὴν μεγίστην τοῦ τριγώνου γωνίαν, τὴν ὀρθὴν ἢ ἀμβλεῖαν, εἶναι μείζων τῆς πλευρᾶς Α, τῆς εἰς ἐλάσσονα γωνίαν ἀντικειμένης.

Β΄. Ἐὰν ἡ γωνία Γ ἦναι ὀξεῖα καὶ ἡ πλευρὰ Β μείζων τῆς Α, ἡ αὐτὴ κατασκευὴ χρησιμεύει πρὸς σχηματισμὸν τοῦ τριγώνου, καὶ τὸ κατ᾽ αὐτὴν προκύπτον τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι τὸ ζητούμενον. (σχ. 81)

Ἀλλ᾽ ἐὰν ἡ μὲν γωνία Γ ἦναι ὀξεῖα, ἡ δὲ πλευρὰ Β ἐλάσσων τῆς Α, τὸ ἀπὸ τοῦ σημείου Ε, ὡς ἀπὸ κέντρου, καὶ δι᾽ ἀκτῖνος ΕΖ=Β γεγραμμένον τόξον τέμνει τὴν πλευρὰν ΔΖ εἰς δύο σημεῖα Ζ καὶ Η, ἀμφότερα κείμενα πέραν τῆς κορυφῆς Δ. Ἐπομένως δύο ὑπάρχουσι τρίγωνα, τὸ ΔΕΖ καὶ τὸ ΔΕΗ, πληροῦντα τοῦ προβλήματος τὰς συνθήκας. (σχ. 82)

Σχόλιον. Τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, ὅταν ἡ πλευρὰ Β ἦναι μικροτέρα τῆς καθέτου, τῆς καταβιβαζομένης ἀπὸ τοῦ σημείου Ε ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΖ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12.

Κατασκεύασον τὸ παραλληλόγραμμον, γνωστῆς οὔσης μιᾶς αὐτοῦ γωνίας Γ, καὶ τῶν δύο πλευρῶν Α καὶ Β, τῶν περιεχουσῶν τὴν γωνίαν αὐτὴν, δεδομένων. (σχ. 83)

Σύρω εὐθεῖάν τινα ΔΕ=Α· σχηματίζω εἰς τὸ σημεῖον Δ τὴν γωνίαν ΖΔΕ=Γ, καὶ λαμβάνω τὴν ΔΖ=Β. Μετὰ ταῦτα ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ, ὡς ἀπὸ κέντρου, καὶ δι᾽ ἀκτῖνος ΖΗ=ΔΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ε, ὡς ἀπὸ κέντρου, καὶ δι᾽ ἀκτῖνος ΕΗ=ΔΖ, γράφω δύο τόξα, ἅτινα συναπαντῶνται εἰς τὸ σημεῖον Η. Ἄγω τὰς εὐθείας ΖΗ, ΕΗ, τὸ τοιουτοτρόπως δὲ κατασκευαζόμενον παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Διότι, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς, αἱ ἀντικείμεναι πλευραὶ εἶναι

(*) ὅτι αὐτὸ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον, δύναται ν᾽ ἀποδειχθῇ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καθ᾽ ὃν εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον ἀπεδείχθησαν ἴσα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν ἴσην καὶ μίαν τῶν ἄλλων πλευρῶν ἴσην (Πρότ. 18, βιβλ. 1).

ἴσαι, ἑπομένως τὸ σχῆμα εἶναι παραλληλόγραμμον (πρότ. 29, βιβλ. 1). Εἶναι δὲ τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον, διότι κατεσκευάσθη διὰ τῆς γωνίας καὶ τῶν πλευρῶν τῶν δεδομένων.

Πόρισμα. Ἐὰν ἡ δεδομένη γωνία ἦναι ὀρθὴ, τὸ σχῆμα θέλ' εἶσθαι ὀρθογώνιον. Ἐὰν δὲ πρὸς τοῖς ἄλλοις αἱ πλευραὶ αἱ δεδομέναι ἦναι ἴσαι, τὸ σχῆμα θέλ' εἶσθαι τετράγωνον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 13.

Εὑρὲ τὸ κέντρον κύκλου ἢ τόξου δεδομένου. (σχ. 84)

Λαμβάνω κατὰ θέλησιν τρία τῆς περιφερείας ἢ τοῦ τόξου σημεῖα Α, Β, Γ· ἄγω τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΒΓ, καὶ διαιρῶ αὐτὰς εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τῶν καθέτων ΔΕ, ΖΗ. Τὸ σημεῖον Ο, εἰς ὃ αἱ δύο κάθετοι συναπαντῶνται, εἶναι τὸ ζητούμενον κέντρον.

Σχόλιον. Ἡ αὐτὴ κατασκευὴ χρησιμεύει πρὸς γραφὴν περιφερείας διαβαινούσης ἐκ τριῶν δεδομένων σημείων Α, Β, Γ, καὶ πρὸς περιγραφὴν περιφερείας εἰς γνωστὸν τρίγωνον ΑΒΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 14.

Ἀπὸ σημείου γνωστοῦ φέρε εἰς κύκλον γνωστὸν ἐφαπτομένην.

Ἐὰν τὸ γνωστὸν σημεῖον Α ὑπάρχῃ ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἄγω τὴν ἀκτῖνα ΓΑ, καὶ φέρω ἐπ' αὐτῆς εἰς τὸ ἄκρον Α τὴν κάθετον ΑΔ. Ἡ κάθετος αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη. (Πρότ. 9, βιβλ. 2). (σχ. 85)

Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, (σχ. 86) συνάπτω τὸ σημεῖον αὐτὸ μετὰ τοῦ κέντρου διὰ τῆς εὐθείας ΓΑ, καὶ διαιρῶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἀπὸ τοῦ σημείου Ο, ὡς ἀπὸ κέντρου, καὶ διὰ τῆς ἀκτῖνος ΟΓ γράφω περιφέρειαν, ἥτις συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν τὴν δεδομένην εἰς τὸ σημεῖον Β. Ἄγω τὴν ΑΒ· ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.

Πρὸς βεβαίωσιν τούτου, συνάπτω τὰ σημεῖα Γ καὶ Β, τοιουτοτρόπως δὲ ἀποτελεῖται ἡ γωνία ΓΒΑ, ἥτις εἶναι ὀρθὴ, διότι εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΓΒΑ (Πρότ. 18, βιβλ. 2). Ἄρα ἡ ΑΒ, κάθετος οὖσα εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΓΒ, εἶναι ἐφαπτομένη.

Σχόλιον. Ὅταν τὸ σημεῖον Α ἐκτὸς τοῦ κύκλου ὑπάρχῃ, δύο πάντοτε ἐξ αὐτοῦ δύναταί τις νὰ φέρῃ ἴσας ἐφαπτομένας ΑΒ, ΑΔ. Ἡ ἰσότης δὲ τῶν δύο τούτων εὐθειῶν ἀποδεικνύεται διὰ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΓΒΑ, ΓΔΑ, ἅτινα ἔχουσι τὴν ὑποτείνουσαν ΓΑ κοινὴν καὶ τὴν πλευρὰν ΓΒ=ΓΔ, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἴσα (Πρότ. 18, βιβλ. 1). Ἄρα ΑΔ=ΑΒ· συγχρόνως δὲ καὶ ἡ γωνία ΓΑΔ=ΓΑΒ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 15.

Γράψον κύκλον ἐντὸς γνωστοῦ τριγώνου. (σχ. 87)

Διαιρῶ τὰς γωνίας Α καὶ Β εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΟ, καὶ ΒΟ, τῶν συναπαντωμένων εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἀπὸ τοῦ σημείου Ο καταβιβάζω ἐπὶ τῶν τριῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν τὰς καθέτους ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ· λέγω δὲ, ὅτι αἱ τρεῖς αὗται κάθετοι εἶναι ἴσαι.

Ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ μὲν γωνία ΔΑΟ=ΟΑΖ, ἡ δὲ ὀρθὴ γωνία ΑΔΟ=ΑΖΟ· λοιπὸν καὶ ἡ τρίτη γωνία ΑΟΔ εἶναι ἴση τῇ τρίτῃ γωνίᾳ ΑΟΖ. Ὅθεν τὰ δύο τρίγωνα ΑΟΔ, ΑΟΖ ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΑΟ κοινὴν καὶ τὰς εἰς ταύτην τὴν πλευρὰν προσκειμένας γωνίας ἴσας· λοιπὸν εἶναι ἴσα. Ἄρα ΔΟ=ΟΖ.

Ἀπαραλλάκτως ἀποδεικνύεται καὶ τῶν τριγώνων ΒΟΔ, ΒΟΕ ἡ ἰσότης, ἐξ ἧς ἕπεται, ὅτι ΟΔ=ΟΕ. Λοιπὸν αἱ τρεῖς κάθετοι ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι.

Ἐὰν ἤδη ἀπὸ τοῦ σημείου Ο, ὡς ἀπὸ κέντρου, καὶ διὰ τῆς ΟΔ, ὡς ἀκτῖνος, γράψω περιφέρειαν, ἡ περιφέρεια αὕτη θέλ' εἶσθαι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον, περὶ δὲ τούτου οὐδεμία ὑπάρχει ἀμφιβολία· διότι ἡ πλευρὰ ΑΒ, κάθετος οὖσα εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΟΔ, εἶναι ἐφαπτομένη. Ἐφαπτομένη διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι καὶ ἡ ἄλλη πλευρὰ ΑΓ, καὶ ἡ τρίτη ΒΓ. Ἄρα τὸ τρίγωνον εἶναι περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον, ἢ ὁ κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τρίγωνον.

Σχόλιον. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ διχοτομοῦσαι τὰς τρεῖς τριγώνου γωνίας, συνέρχονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 16.

Ἐπὶ γνωστῆς εὐθείας ΑΒ γράψον κύκλου τμῆμα, δεκτικὸν γνωστῆς τινὸς γωνίας Γ, ἤτοι γράψον τμῆμα κύκλου τοιοῦτον, ὥστε ὁποιανδήποτε ἐγγράψῃς εἰς αὐτὸ γωνίαν νὰ ἦναι ἴση τῇ δεδομένῃ Γ. (σχ. 88 καὶ 89)

Ἐκτείνω τὴν ΑΒ πρὸς τὸ Δ, καὶ σχηματίζω εἰς τὸ σημεῖον

Β τὴν γωνίαν ΔΒΕ=Γ. Ἄγω τὴν ΒΟ κάθετον ἐπὶ τῆς ΒΕ, καὶ τὴν ΗΟ κάθετον ἐπὶ τοῦ μέσου τῆς ΑΒ. Ἀπὸ τοῦ σημείου Ο, εἰς ὃ αἱ δύο κάθετοι συναπαντῶνται, ὡς ἀπὸ κέντρου, καὶ διὰ τῆς ΟΒ ὡς ἀκτῖνος, γράφω κύκλον· τοῦ κύκλου τούτου τὸ τμῆμα ΑΜΒ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Διότι ἡ ΒΖ, κάθετος οὖσα εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΟΒ, εἶναι ἐφαπτομένη· ἑπομένως ἡ γωνία ΑΒΖ ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΚΒ (Πρότ. 19, βιβλ. 2). Ἀφ' ἑτέρου δὲ ἡ γωνία ΑΜΒ, γωνία οὖσα ἐγγεγραμμένη, ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΚΒ. Ἄρα ἡ γωνία ΑΜΒ=ΑΒΖ=ΕΒΔ=Γ.

Λοιπὸν πᾶσα εἰς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΜΒ ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι ἴση τῇ δεδομένῃ γωνίᾳ Γ.

Σχόλιον. Ἐὰν ἡ δεδομένη γωνία ἦτον ὀρθή, τὸ ζητούμενον τμῆμα ἤθελεν εἶσθαι τὸ ἡμικύκλιον, τὸ γεγραμμένον ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 17.

Εὑρὲ τὸ κοινὸν τῶν δεδομένων εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ μέτρον, ἐὰν ἔχωσι, καὶ τὸν λόγον αὐτῶν ἐν ἀριθμοῖς. (σχ. 90)

Φέρω τὴν εὐθεῖαν τὴν ἐλάσσονα ΓΔ ἐπὶ τῆς μείζονος ΑΒ τοσάκις, ὁσάκις περιέχεται. Ἔστω δὲ, ὅτι περιέχεται δὶς καὶ ὅτι πλεονάζει τὸ ὑπόλοιπον ΒΕ.

Φέρω τὸ ὑπόλοιπον ΒΕ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ τοσάκις, ὁσάκις περιέχεται. Ἔστω δὲ, ὅτι περιέχεται ἅπαξ, καὶ ὅτι πλεονάζει τὸ ὑπόλοιπον ΔΖ.

Φέρω τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον ΔΖ ἐπὶ τοῦ πρώτου ΒΕ τοσάκις, ὁσάκις περιέχεται. Ἔστω δὲ, ὅτι περιέχεται ἅπαξ καὶ ὅτι πλεονάζει τὸ ὑπόλοιπον ΒΗ.

Φέρω τὸ τρίτον ὑπόλοιπον ΒΗ ἐπὶ τοῦ δευτέρου ΔΖ τοσάκις, ὁσάκις περιέχεται.

Παρατείνω δὲ τὴν τοιαύτην πρᾶξιν ἕως οὗ ὑπόλοιπόν τι περιληφθῇ ἐντελῶς εἰς τὸ πρὸ αὐτοῦ καὶ οὐδὲν πλεονάσῃ.

Τὸ τελευταῖον τοῦτο ὑπόλοιπον εἶναι τὸ κοινὸν τῶν δύο δεδομένων εὐθειῶν μέτρον. Διότι, δεχόμενοι αὐτὸ ὡς μονάδα, εὐκόλως ἐν πρώτοις εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν προηγουμένων ὑπολοίπων, ἐπὶ τέλους δὲ πορίζόμεθα καὶ τὰς τῶν δύο δεδομένων εὐθειῶν. Ὅθεν συνάγομεν τὸν λόγον αὐτῶν ἐν ἀριθμοῖς.

Χάριν παραδείγματος, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον ΒΗ περιέχεται δὶς ἀκριβῶς εἰς τὸ προηγούμενον ὑπόλοιπον ΖΔ. Τὸ ὑπόλοιπον αὐτὸ ΒΗ εἶναι τὸ κοινὸν τῶν δύο δεδομένων εὐθειῶν μέτρον.

Διότι, ἐὰν ΒΗ=1, ἡ εὐθεῖα ΖΔ=2. Ἀλλ' ἡ εὐθεῖα ΕΒ περιέχει ἅπαξ τὴν ΖΔ καὶ πλεονάζει ἡ ΒΗ. Λοιπὸν ΕΒ=3. Ἡ εὐθεῖα ΓΔ περιέχει ἅπαξ τὴν ΕΒ, καὶ πλεονάζει ἡ ΖΔ. Λοιπὸν ΓΔ=5. Τέλος ἡ ΑΒ περιέχει δὶς τὴν ΓΔ, καὶ πλεονάζει ἡ ΕΒ. Λοιπὸν ΑΒ=13. Ἐντεῦθεν δὲ ἕπεται, ὅτι ὁ λόγος τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ὁ λόγος τῶν ἀριθμῶν 13 καὶ 5. Ἐὰν δὲ ληφθῇ ἡ ΓΔ ὡς μονάς, ἡ ΑΒ ἐκφράζεται διὰ τοῦ $\frac{13}{5}$. Ἐὰν δὲ ὡς μονὰς ληφθῇ ἡ ΑΒ, ἡ ΓΔ παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{5}{13}$.

Σχόλιον. Ἡ μέθοδος, ἡ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσα πρὸς εὕρεσιν τοῦ λόγου δύο εὐθειῶν, εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ἧς ἐν τῇ ἀριθμητικῇ εὑρίσκεται ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης. Διὰ τοῦτο δὲν ὑπάρχει ἀνάγκη νέας τινὸς ἀναλύσεως τῆς μεθόδου ταύτης.

Ἐνδέχεται δὲ νὰ μὴ εὑρεθῇ ὑπόλοιπον περιεχόμενον ἀκριβῶς εἰς τὸ πρὸ αὐτοῦ, ὅσον καὶ ἂν παρατείνωμεν τῆς παραβολῆς τὴν πρᾶξιν. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει αἱ δύο δεδομέναι εὐθεῖαι δὲν ἔχουσι μέτρον κοινὸν, καὶ διὰ τοῦτο λέγονται ἀσύμμετροι. Θέλομεν δὲ ἀπαντήσει παράδειγμα τοιοῦτον κατόπιν, ἀναζητοῦντες τὸν λόγον τῆς διαγωνίου τοῦ τετραγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ. Καὶ δὲν δυνάμεθα μὲν νὰ εὕρωμεν ἀκριβῶς ἐν ἀριθμοῖς τῶν ἀσυμμέτρων εὐθειῶν τὸν λόγον, πάντοτε ὅμως, παραλειπομένου τοῦ τελευταίου ὑπολοίπου, δυνατὸν εἶναι νὰ προσδιορισθῇ λόγος τις προσεγγίζων εἰς τὸν ἀριβῆ κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον, καθ' ὅσον ἡ πρᾶξις τῆς παραβολῆς παρατείνεται πολὺ ἢ ὀλίγον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 18.

Εὑρὲ τὸ κοινὸν τῶν γωνιῶν Α καὶ Β μέτρον, ἐὰν ἔχωσι, καὶ τὸν λόγον αὐτῶν ἐν ἀριθμοῖς. (σχ. 91)

Δι' ἀκτίνων ἴσων γράφω τὰ τόξα ΓΔ, ΕΖ, ἅτινα χρησιμεύουσιν ὡς μέτρα τῶν γωνιῶν τῶν δεδομένων. Μετὰ ταῦτα παραβάλλω τὰ τόξα ΓΔ, ΕΖ ὅπως ἀνωτέρω παρέβαλον τὰς δύο εὐθείας. Τὰ τόξα δὲ, τὰ γεγραμμένα δι' ἴσων ἀκτίνων, παραβάλλονται ὅπως παραβάλλονται καὶ αἱ εὐθεῖαι. Τοιουτοτρόπως δὲ εὑρίσκω τὸ κοινὸν τῶν δύο τόξων μέτρον, ἐὰν ἔχωσι, καὶ τὸν λόγον αὐτῶν ἐν ἀριθμοῖς. Ὁ λόγος τῶν τόξων θέλ' εἶσθαι ὁ λόγος τῶν δεδομένων γωνιῶν (Πρότ. 17, βιβλ. 2). Ὅθεν ἐὰν ΔΟ ἦναι τὸ κοινὸν τῶν τόξων μέτρον, ΔΑΟ εἶναι τὸ κοινὸν μέτρον τῶν γωνιῶν.

Σχόλιον. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δύναταί τις νὰ προσδιορίσῃ τὸ ἀπόλυτον γωνίας τινὸς μέγεθος, παραβάλλων τὸ τόξον, τὸ χρησιμεῦον ὡς μέτρον αὐτῆς, πρὸς ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν. Παραδείγματος χάριν, ἐὰν τὸ τόξον ΓΔ ἔχῃ λόγον πρὸς ὅλην τὴν περιφέρειαν ὡς 3 πρὸς 25, ἡ γωνία Α εἶναι τὰ $\frac{3}{25}$ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν, ἢ τὰ $\frac{12}{25}$ μιᾶς γωνίας ὀρθῆς.

Ἐνδέχεται τὰ τόξα νὰ μὴ ἔχωσι κοινόν τι μέτρον. Τότε τῶν γωνιῶν ὁ λόγος δὲν εἶναι ὁ ἀκριβὴς, ἀλλ' ὁ προσεγγίζων εἰς τὴν ἀκρίβειαν κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον, καθ' ὅσον ἡ πρᾶξις τῆς παραβολῆς παρατείνεται πολὺ ἢ ὀλίγον. (*)

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ ΤΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.

Ὁρισμοί.

1. Τὰ ἴσας ἐπιφανείας ἔχοντα σχήματα ὀνομάζονται *ἰσοδύναμα*,

Ὑπάρχουσι δὲ καὶ μὴ ὅμοια σχήματα ἰσοδύναμα. Παραδείγματος χάριν, δύνανται νὰ ὑπάρξωσι κύκλος καὶ τετράγωνον, τρίγωνον καὶ ὀρθογώνιον ἰσοδυναμοῦντα, ἤτοι ἴσην ἔχοντα ἐπιφάνειαν.

Ἴσα δὲ σχήματα λέγονται ἐκεῖνα μόνα, ὅσα, τῆς ἐπ' ἄλληλα

(*) Ὅλη αὐτὴ τῶν προβλημάτων ἡ σειρὰ ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν θεωρημάτων τῶν ἀποδειχθέντων εἰς τὰ δύο πρῶτα βιβλία. Ἀποτελοῦσι δὲ τὰ προβλήματα ταῦτα μέρος τῆς οὕτως εἰπεῖν πρακτικῆς γεωμετρίας, τῆς εἰς τὰς τέχνας ἀπαραιτήτου, τὴν ὁποίαν ὅμως ὁ Ἀρχιμήδης κατεφρόνει· διότι κατ' αὐτὸν πᾶσα τέχνη χρείας ἐφαπτομένη ἀγενὴς εἶναι καὶ βάναυσος, μόνη δὲ ἡ ἐπιστήμη, ἡ τὸ καλὸν καὶ περιττὸν ἀμιγὲς τοῦ ἀναγκαίου ἔχουσα, λογίζεται ἀξία τῆς προσοχῆς τοῦ φιλοτίμου ἀνθρώπου.

Εἰς τὴν ἐπιστήμην δὲ τὴν καθαυτὸ δὲν ἀποδέχονται τὰς γραφικὰς τῶν ἐπιθέσεως γενομένης, ἐφαρμόζονται ἐντελῶς. Τοιαῦτα σχήματα εἶναι οἱ κύκλοι, οἱ ἔχοντες τὰς ἀκτῖνας αὐτῶν ἴσας, τὰ τρίγωνα, τὰ ἔχοντα τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας, κτλ.

2. Δύο πολύγωνα ὀνομάζονται *ὅμοια*, ὅταν ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους. Ὁμόλογοι δὲ πλευραὶ λέγονται αἱ κατέχουσαι τὴν αὐτὴν τάξιν εἰς ἀμφότερα τὰ πολύγωνα, ἢ αἱ ἀντικείμεναι εἰς γωνίας ἴσας. Αὗται δὲ αἱ γωνίαι ὀνομάζονται ὁμόλογοι.

Τὰ ἴσα σχήματα εἶν' ὅμοια· τὰ ὅμοια ἐνδέχεται νὰ μὴ ἦναι ἴσα.

3. Εἰς κύκλους διαφέροντας ὀνομάζονται *τόξα ὅμοια*, *τομεῖς ὅμοιοι*, *τμήματα ὅμοια*, τὰ ἀντικείμενα εἰς ἐπικέντρους γωνίας ἴσας.

Ἤτοι, ἐὰν ἡ γωνία Α ὑποτεθῇ ἴση τῇ γωνίᾳ Ο, τὸ τόξον ΒΓ εἶναι ὅμοιον τῷ τόξῳ ΔΕ, ὁ τομεὺς ΑΒΓ ὅμοιος τῷ τομεῖ ΟΔΕ, κτλ. (σχ. 92)

4. *Ὕψος* τοῦ παραλληλογράμμου ὀνομάζεται ἡ κάθετος ΕΖ, ἡ διορίζουσα τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο ἀντικειμένων πλευρῶν ΑΒ, ΓΔ, αἵτινες λογίζονται βάσεις. (σχ. 93)

5. *Ὕψος* τοῦ τριγώνου λέγεται ἡ κάθετος ΑΔ, ἡ ἀγομένη ἀπὸ τῆς κορυφῆς μιᾶς τῶν γωνιῶν αὐτοῦ, τῆς Α, ἐπὶ τῆς ἀντικειμένης πλευρᾶς ΒΓ, ἥτις λογίζεται βάσις. (σχ. 94)

6. *Ὕψος* τοῦ τραπεζίου λέγεται ἡ κάθετος ΕΖ, ἡ ἀγομένη ἀπὸ

προβλημάτων λύσεις, ὄχι διότι αἱ λύσεις αὐταὶ ἔχουσί τι ἀγενὲς καὶ βάναυσον, ἀλλὰ διότι εἶναι ἐλλειπεῖς καὶ ἐσφαλμέναι, καὶ ἰδοὺ κατὰ τί.

Πᾶν γεωμετρικοῦ προβλήματος δεδομένον εἶναι ἐσφαλμένον καὶ ἐλλειπές, διότι πᾶσα ἄμεσος καταμέτρησις εἰς μυρία ὑπόκειται λάθη. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ πᾶσα γεωμετρικοῦ προβλήματος γραφικὴ λύσις ἀτελὴς εἶναι καὶ ἐσφαλμένη. Ἀτελὴς καὶ ἐσφαλμένος ὡσαύτως εἶναι καὶ πᾶς τοιούτου ἐξαγομένου προσδιορισμός. Ὅθεν εἰς τριπλᾶ ὑπόκειται λάθη πᾶσα γεωμετρικοῦ προβλήματος πρακτικὴ λύσις. Τούτου ἕνεκα μεταχειρίζονται πρὸς λύσιν τῶν προβλημάτων τῶν γεωμετρικῶν, ἀντὶ τῶν γεωμετρικῶν μέσων, τὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ, τὰ πάσης ἐντελείας δεκτικά.

Ἐτάχθη δὲ τῶν προεκτεθέντων προβλημάτων ἡ συλλογὴ μετὰ τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον βιβλίον ὡς πρακτικόν τι μάθημα, ἢ ὡς ἐφαρμογή τις τῶν γεωμετρικῶν δογμάτων, καὶ ὄχι ὡς ἀπαραίτητον τοῦ κειμένου μέρος. Ο. Μ.

τῆς ἑτέρας τῶν παραλλήλων πλευρῶν ΓΔ, ἐπὶ τῆς ἄλλης, τῆς ΑΒ. (σχ. 95)

7. *Ἐμβαδὸν* καὶ ἐπιφάνεια σχήματός τινος εἶναι λέξεις σχεδὸν συνώνυμοι. Ἐμβαδὸν ἰδίως λέγεται ἡ καταμεμετρημένη τοῦ σχήματος ἐπιφάνεια, ἢ ἡ ἔκτασις αὐτοῦ κατὰ σύγκρισιν πρὸς ἄλλας ἐπιφανείας.

Σ. Κ. Πρὸς κατάληψιν καὶ τοῦ παρόντος βιβλίου καὶ τῶν ἀκολούθων, ἀπαιτεῖται ἡ γνῶσις τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν, περὶ ὧν πραγματεύονται τὰ κοινότερα τῆς ἀριθμητικῆς καὶ τῆς ἀλγέβρας συγγράμματα, εἰς ἃ ὁ χρείαν ἔχων παραπέμπεται. Ἐνταῦθα δὲ γίνεται ἁπλῆ τις μόνον παρατήρησις, πρὸς ἐξήγησιν τῆς ἀληθοῦς τῶν ἀναλογιῶν ἐννοίας, καὶ πρὸς ἀποφυγὴν πάσης ἀμφιβολίας κατά τε τῶν δεδομένων τὴν ἔκφρασιν, καὶ ἐν τῇ σειρᾷ τῶν ἀποδείξεων.

Γνωστὸν εἶναι, ὅτι τῆς ἀναλογίας Α : Β : : Γ : Δ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων Α×Δ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν μέσων Β×Γ.

Ἡ ἀλήθεια αὕτη εἶναι ἀναντίῤῥητος, περὶ ἀριθμῶν λόγου προκειμένου. Ἐπίσης δὲ ἀναμφισβήτητος λογίζεται, καὶ ὅταν περὶ παντὸς μεγέθους πρόκειται, μεγέθους ὅμως κατατετμημένου, ἢ ἐκπεφρασμένου δι' ἀριθμοῦ. Ἡ τοιαύτη δὲ παντὸς μεγέθους δι' ἀριθμῶν παράστασις εἶναι πρᾶγμα δυνατόν· διότι, παραδείγματος χάριν, ἐὰν διὰ τῶν γραμμάτων Α, Β, Γ, Δ εἰκονίζωνται εὐθεῖαι γραμμαί, δύναταί τις νὰ λάβῃ μίαν ἐκ τῶν τεσσάρων αὐτῶν γραμμῶν, ἢ πέμπτην τινὰ γραμμὴν εὐθεῖαν ὡς μονάδα, καὶ νὰ μεταχειρισθῇ αὐτὴν ὡς μέτρον κοινόν. Τούτου δὲ τεθέντος, δι' ἑκάστου τῶν γραμμάτων Α, Β, Γ, Δ ἐκφράζεται πληθύς τις μονάδων, ἀκεραία ἢ κλασματικὴ, συμμετρικὴ ἢ ἀσύμμετρος, ἡ δὲ ἀναλογία τῶν γραμμῶν Α, Β, Γ, Δ τρέπεται εἰς ἀριθμῶν ἀναλογίαν.

Τὸ γινόμενον λοιπὸν τῶν γραμμῶν Α καὶ Δ, τὸ ὁποῖον λέγεται καὶ *ὀρθογώνιον* τῶν γραμμῶν αὐτῶν, οὐδὲν ἄλλο εἶναι, εἰ μὴ τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γραμμικῶν μονάδων, τῶν περιεχομένων εἰς τὴν γραμμὴν Α, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῶν γραμμικῶν, τῶν περιλαμβανομένων εἰς τὴν γραμμὴν Δ. Τὸ γινόμενον δ' αὐτὸ ἀναγκαίως εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ, τῷ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον προκύπτοντι ἐκ τῶν γραμμῶν Β καὶ Γ. Περὶ δὲ τούτου οὐδεμία ὑπάρχει ἀμφιβολία.

Πολλάκις τὰ ποσὰ Α καὶ Β εἶναι μεγέθη εἴδους τινὸς, λόγου χάριν, γραμμαὶ, τὰ δὲ ποσὰ Γ καὶ Δ μεγέθη εἴδους ἄλλου, λόγου χάριν, ἐπιφάνειαι. Πλὴν καὶ τὰ μεγέθη ταῦτα, καί τοι διάφορα, δύνανται νὰ λογισθῶσιν ὡς ἂν ἦσαν ἀριθμοί. Καὶ τὸ μὲν Α καὶ τὸ Β ἐκφράζουσι πληθὺν μονάδων γραμμικῶν, τὸ δὲ Γ καὶ τὸ Δ πληθὺν μονάδων ἐπιφανείας· τὸ δὲ γινόμενον $A \times \Delta$ ἐκφράζει ἀριθμὸν τοιοῦτον, οἷον καὶ τὸ γινόμενον $B \times \Gamma$.

Ἐν γένει δὲ, εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς τῶν ἀναλογιῶν, οἱ ὅροι αὐτῶν λογίζονται ὡς ἀριθμοὶ, εἴδους ὅμως τοῦ πρέποντος. Τοιουτοτρόπως δὲ τοῦ πράγματος ἐξεταζομένου, οὐδεμίαν ἀπαντᾷ τις δυσκολίαν εἰς τῶν πράξεων τὴν ἐκτέλεσιν καὶ τὴν κατάληψιν τῶν ἐξαγομένων.

Πολλαὶ τῶν ἀποδείξεων στηρίζονται εἰς τοὺς ἁπλουστέρους ἀλγεβρικοὺς κανόνας, τοὺς θεμελιουμένους εἰς τὰ ἤδη γνωστὰ ἀξιώματα. Παραδείγματος χάριν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως $A = B + \Gamma$ ἐπὶ Μ, φανερὸν εἶναι ὅτι προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $A \times M = B \times M + \Gamma \times M$. Ὡσαύτως, συνάπτοντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις $A = B + \Gamma$ καὶ $\Delta = E - \Gamma$, καὶ τῆς ἀναγωγῆς γενομένης, ἤτοι ἀφανιζομένων τοῦ $+\Gamma$ καὶ $-\Gamma$, συνάγομεν $A + \Delta = B + E$.

Αἱ ἀλγεβρικαὶ αὗται τροπαὶ καὶ πολλαὶ ἄλλαι φύσεως ὁμοίας εἶναι καὶ πρόδηλοι καὶ σαφεῖς. Ἂν δέ τις ποτὲ περιπέσῃ εἰς ἀμφιβολίαν περὶ πρακτέου τινὸς, δύναται νὰ καταφύγῃ καὶ νὰ συμβουλευθῇ τὰ ἀλγεβρικὰ βιβλία. Ἀναμιγνύων δὲ τοιουτοτρόπως τῶν δύο ἐπιστημῶν τὴν σπουδὴν οὐκ ὀλίγην θέλει προσκτήσει ὠφέλειαν.

Ταῦτα ἐγράφησαν πρὸς φωτισμὸν καὶ ὁδηγίαν τοῦ γεωμετροῦντος. (*)

(*) Ἰδοὺ ποίαν, ἐν ἄλλοις λόγοις καὶ ἐν συνόψει, ἔννοιαν ἔχει αὕτη τοῦ συγγραφέως ἡ σημείωσις.

Καὶ τὸ συνεχὲς ποσὸν, ὅταν νὰ ὁρισθῇ πρόκειται, τρέπεται εἰς διακεκριμένον, καὶ ἢ κατατέμνεται, ἢ ὑποτίθεται κατατετμημένον. Ἐπειδὴ δὲ ὑπάρχουσι διάφορα συνεχοῦς ποσοῦ εἴδη, οἷον γραμμαὶ, ἐπιφάνειαι, σώματα, διάφοροι εἶναι καὶ αἱ μονάδες. Ἀλλ' ὅταν ἅπαξ δεχθῇ τις πρὸς παράστασιν τῶν συνεχῶν ποσῶν τοὺς ἀριθμοὺς, οὐδεμίαν ἀπαντᾷ εἰς τὴν χρῆσιν αὐτῶν δυσκολίαν. Ὡς παράδειγμα δὲ φέρω τὰ βάρη, τὰ σχέσιν ἔχοντα πρὸς τοὺς ὄγκους, πρὸς τὴν ἔκτασιν δηλαδὴ τῶν σωμάτων. Τὰ βάρη εἶναι ποσὰ συνεχῆ, ἐν τούτοις ὅμως καὶ εἰς τὸν κοινωνικὸν βίον τὰ ὑπολογίζομεν ὡς ἂν ἦσαν ποσὰ διακεκριμένα, καὶ τὰ ἐκφράζομεν δι' ἀριθμῶν, μεταχειριζόμενοι ὡρισμένου

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΡΩΤΗ.

Θεώρημα.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη ἔχοντα, εἶναι ἰσοδύναμα. (σχ. 96)

Ἔστω κοινὴ τῶν δύο παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ, ΑΒΕΖ βάσις ἡ εὐθεῖα ΑΒ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ δύο ταῦτα σχήματα καθ' ὑπόθεσιν ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, αἱ ἄνω αὐτῶν βάσεις ΔΓ, ΖΕ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, παραλλήλου τῆς ΑΒ.

Ἐκ τῆς φύσεως τῶν παραλληλογράμμων ἔπεται, ὅτι ΑΔ=ΒΓ, καὶ ΑΖ=ΒΕ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΔΓ=ΑΒ, καὶ ΖΕ=ΑΒ· ἄρα ΔΓ=ΖΕ. Ἀφαιρουμένων δὲ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΔΕ τῶν δύο ἴσων εὐθειῶν ΔΓ, ΖΕ, τὰ μένοντα ὑπόλοιπα ΓΕ, ΔΖ εἶναι ἴσα. Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΖ, ΓΒΕ ἔχουσι τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· ὅθεν εἶναι ἴσα.

Ἀλλ' ἐὰν ἀπὸ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΕΔ ἀφαιρεθῇ τὸ τρίγωνον ΑΔΖ, μένει τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΕΖ. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΕΔ ἀφαιρεθῇ τὸ τρίγωνον ΓΒΕ, μένει τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἄρα τὰ δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, ΑΒΕΖ, τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι ἰσοδύναμα.

Πόρισμα. Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ τὸ τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχον ὀρθογώνιον ΑΒΕΖ εἶναι ἰσοδύναμα. (σχ. 97)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2.

Θεώρημα.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλο-

τι βάρος ὡς μονάδα. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἤτοι δι' ἀριθμῶν, λογίζομεν καὶ τὰς κατατετμημένας ἢ κεχαραγμένας ἐπιφανείας, τὰς πρασιὰς λόγου χάριν, τὰς ὁλόκληρον κῆπον ἀποτελούσας. Ἐνὶ λόγῳ, εὔκολος εἶναι ἡ δι' ἀριθμῶν παράστασις τοῦ συνεχοῦς ποσοῦ, καὶ καταληπτοὶ οἱ τοιούτου εἴδους ἀριθμητικοὶ ὑπολογισμοί.

γράμμου ΑΒΓΔ, τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. (σχ. 98)

Διότι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ εἶναι ἴσα (Πρότ. 28, βιβλ.).

Πόρισμα 1. Λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΒΓΕΖ, τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΟ· διότι τὸ ὀρθογώνιον ΒΓΕΖ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοδύναμα.

Πόρισμα 2. Ὅλα τὰ τρίγωνα, τὰ ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη ἔχοντα, εἶναι ἰσοδύναμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3.

Θεώρημα.

Δύο ὀρθογώνια τοῦ αὐτοῦ ὕψους ἔχουσι τὸν αὐτὸν πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχουσιν αἱ βάσεις αὐτῶν. (σχ. 99)

Ἔστωσαν τὰ δύο ὀρθογώνια ΑΒΓΔ, ΑΕΖΔ, τὰ ἔχοντα τὸ κοινὸν ὕψος ΑΔ. Λέγω ὅτι τὰ ὀρθογώνια ταῦτα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσιν αἱ βάσεις αὐτῶν ΑΒ, ΑΕ.

Ἐν πρώτοις ἂς ὑποτεθῇ ὅτι τῶν δύο βάσεων ὁ λόγος εἶναι συμμετρικός, καὶ ὅτι, χάριν παραδείγματος, ἐκφράζεται διὰ τῆς σχέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 7 πρὸς τὸν ἀριθμὸν 4.

Κατατέμνω τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς 7 ἴσα μέρη· τούτου δὲ γενομένου, ἡ εὐθεῖα ΑΕ περιλαμβάνει 4 ἐξ αὐτῶν τῶν ἴσων μερῶν.

Ἐξ ἑκάστης τομῆς ἀναφέρω κάθετον ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒ, τοιουτοτρόπως δὲ σχηματίζω ἑπτὰ μερικὰ ὀρθογώνια ἴσα, διότι ἔχουσι βάσεις μὲν ἴσας, ὕψος δὲ τὸ αὐτό. Ἐξ αὐτῶν δὲ τῶν μερικῶν ἴσων ὀρθογωνίων, εἰς μὲν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ περιλαμβάνονται ἑπτὰ, εἰς δὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΕΖΔ περιέχονται τέσσαρα. Ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ἔχει τὸν αὐτὸν πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΕΖΔ λόγον, ὃν ἔχει ὁ ἀριθμὸς 7 πρὸς τὸν ἀριθμὸν 4. Διὰ τοῦ αὐτοῦ δὲ συλλογισμοῦ ἡ πρότασις ἀποδεικνύεται, καὶ ἂν τῶν βάσεων ὁ λόγος ἦναι ἄλλος τις, διάφορος τοῦ λόγου τοῦ ἀριθμοῦ 7 πρὸς τὸν ἀριθμὸν 4. Ἤτοι, ὅταν τῶν βάσεων ὁ λόγος ἦναι ὁποιοσδήποτε μὲν, ἀλλὰ συμμετρικὸς, ἡ ἑξῆς πάντοτε ὑπάρχει ἀναλογία·

ΑΒΓΔ : ΑΕΖΔ : : ΑΒ : ΑΕ.

Ἂς ὑποτεθῇ ἤδη (σχ. 100), ὅτι αἱ βάσεις ΑΒ, ΑΕ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἀσύμμετροι. Καὶ πάλιν λέγω, ὅτι ὑπάρχει ἡ ἑπομένη ἀναλογία·

ΑΒΓΔ : ΑΕΖΔ : : ΑΒ : ΑΕ.

Διότι, ἂν αὕτη ἡ ἀναλογία δὲν ἀληθεύῃ, οἱ τρεῖς πρῶτοι αὐτῆς ὅροι μετά τινος τετάρτου, ἢ μείζονος ἢ ἐλάσσονος τοῦ ΑΕ, ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν. Ἔστω δὲ, ὅτι ὁ τέταρτος αὐτὸς ὅρος εἶναι μείζων τοῦ ΑΕ, καὶ ὅτι ὑπάρχει ἡ ἀκόλουθος ἀναλογία·

ΑΒΓΔ : ΑΕΖΔ : : ΑΒ : ΑΟ.

Κατατέμνω τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς πολλὰ μέρη ἴσα μὲν, μικρότερα δὲ τῆς ΕΟ· ἑπομένως μία τοὐλάχιστον τομὴ Ι περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν σημείων Ε καὶ Ο. Ἐκ τοῦ σημείου Ι ἀνυψῶ τὴν κάθετον ΙΚ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ βάσεις ΑΒ, ΑΙ εἶναι συμμετρικαὶ, κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἀποδειχθέντα, ταύτην δύναταί τις νὰ σχηματίσῃ τὴν ἀναλογίαν·

ΑΒΓΔ : ΑΙΚΔ : : ΑΒ : ΑΙ. (1)

Ἀλλὰ, κατὰ τὴν ἤδη γενομένην ὑπόθεσιν,

ΑΒΓΔ : ΑΕΖΔ : : ΑΒ : ΑΟ. (2)

Τῶν δύο τελευταίων τούτων ἀναλογιῶν οἱ ἡγούμενοι εἶναι ἴσοι· λοιπὸν οἱ ἑπόμενοι αὐτῶν ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν, τὴν ἑξῆς·

ΑΙΚΔ : ΑΕΖΔ : : ΑΙ : ΑΟ.

Ἐπειδὴ δὲ τῆς ἀναλογίας ταύτης ὁ ἑπόμενος ΑΟ ὑπερέχει τὸν ἡγούμενον ΑΙ, διὰ νὰ ὑπάρξῃ ἀναλογία, πρέπει καὶ ὁ ἑπόμενος ΑΕΖΔ νὰ ὑπερέχῃ τὸν ἡγούμενον ΑΙΚΔ. Ἐνταῦθα ὅμως συμβαίνει τὸ ἐναντίον, ἤτοι ὁ ἡγούμενος ΑΙΚΔ ὑπερέχει τὸν ἑπόμενον ΑΕΖΔ. Ἄρα δὲν εἶναι ὀρθὴ ἡ ἀναλογία

ΑΙΚΔ : ΑΕΖΔ : : ΑΙ : ΑΟ.

Ἡ ἄτοπος δὲ αὕτη ἀναλογία προέκυψεν ἐκ τῆς πλοκῆς τῶν δύο ἀναλογιῶν (1) καὶ (2), ἐξ ὧν ἡ (1) εἶναι ὀρθή. Ἄρα ἡ (2) ἀναλογία εἶναι στρεβλή. Ἐπειδὴ δὲ τρία ὁποιαδήποτε ποσὰ δύνανται νὰ χρησιμεύσωσι πρὸς κατασκευὴν ἀναλογίας, οἱ τρεῖς πρῶτοι τῆς (2) ἀναλογίας ὅροι καλῶς ἔχουσιν, ὁ τέταρτος δὲ μόνον, ὁ ΑΟ, εἶναι δυσανάλογος. Ἄρα ὁ τέταρτος αὐτὸς ὅρος δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν εὐθεῖαν ΑΕ.

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ τέταρτος ὅρος τῆς (2) ἀναλογίας δὲν δύναται νὰ ἦναι ἐλάσσων τῆς ΑΕ. Ἄρα εἶναι ἴσος τῇ ΑΕ.

Λοιπὸν ὁποιοσδήποτε εἶναι τῶν βάσεων ὁ λόγος, τὰ ἰσοϋψῆ ὀρθογώνια ΑΒΓΔ, ΑΕΖΔ ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσιν αἱ βάσεις αὐτῶν ΑΒ, ΑΕ. (*)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4.

Θεώρημα.

Δύο ὁποιαδήποτε ὀρθογώνια ΑΒΓΔ, ΑΕΗΖ τοιοῦτον ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὁποῖον τὰ γινόμενα τῶν βάσεων αὐτῶν, πολλαπλασιασθεισῶν ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα ὕψη. Ἤτοι ἡ ἀκόλουθος πάντοτε ὑπάρχει ἀναλογία· (σχ. 101)

ΑΒΓΔ : ΑΕΗΖ : : ΑΒ$\times$ΑΔ : ΑΕ$\times$ΑΖ.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, διατάσσω τὰ ὀρθογώνια οὕτως, ὥστε αἱ γωνίαι αὐτῶν Α ν' ἀντιστοιχήσωσι κατὰ κορυφήν. Ἐκτείνω δὲ τὰς πλευρὰς ΗΕ καὶ ΓΔ ἕως οὗ συναπαντηθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Θ.

Τὰ δύο ὀρθογώνια ΑΒΓΔ, ΑΕΘΔ, ἐπειδὴ ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΔ, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν ΑΒ, ΑΕ. Ὡσαύτως τὰ δύο ὀρθογώνια ΑΕΘΔ, ΑΕΗΖ, ἐπειδὴ ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΕ, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν ΑΔ, ΑΖ. Αἱ δύο λοιπὸν ἀκόλουθοι ὑπάρχουσιν ἀναλογίαι·

ΑΒΓΔ : ΑΕΘΔ : : ΑΒ : ΑΕ.
ΑΕΘΔ : ΑΕΗΖ : : ΑΔ : ΑΖ.

Πολλαπλασιαζομένων δὲ τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν κατὰ τάξιν, ἤτοι ὅρου ἐπὶ ὅρον, καὶ ἐξαλειφομένου ἀπό τε τοῦ πρώτου ἡγουμένου καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου ἑπομένου τοῦ κοινοῦ παράγοντος ΑΕΘΔ, ἡ ἑξῆς προκύπτει ἀναλογία·

ΑΒΓΔ : ΑΕΗΖ : : ΑΒ$\times$ΑΔ : ΑΕ$\times$ΑΖ.

Τοῦτο δ' ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. Λοιπὸν δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν ὡς μέτρον

(*) Τὰς ἀποδείξεις τῆς 16 καὶ τῆς 17 προτάσεως τοῦ δευτέρου βιβλίου περιέλαβεν ὁ συγγραφεὺς εἰς μίαν, καὶ ἀπετέλεσε τὴν ἀπόδειξιν τοῦ περὶ ὀρθογωνίων θεωρήματος, περὶ οὗ πραγματεύεται αὕτη τοῦ τρίτου βιβλίου ἡ πρότασις. Τὸ τοιοῦτον δὲ τῆς ἀποδείξεως σύστημα, ὡς καὶ ἄλλοτε εἴπομεν, θέλομεν ἀπαντήσει πολλάκις.

τοῦ ὀρθογωνίου τὸ γινόμενον τῆς βάσεως αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ πολλαπλασιασθείσης. Ἐννοεῖται δὲ, ὅτι τὸ γινόμενον αὐτὸ ἐκφράζει τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, τοῦ ἀριθμοῦ δηλαδὴ τῶν γραμμικῶν μονάδων, τῶν εἰς τὴν βάσιν περιεχομένων, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γραμμικῶν μονάδων, τῶν περιλαμβανομένων εἰς τὸ ὕψος.

Τὸ τοιοῦτον τοῦ ὀρθογωνίου μέτρον δὲν εἶναι ἀπόλυτον, ἀλλὰ σχετικόν· διότι, πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ, ὑποτίθεται ὅτι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐξετιμήθη ὀρθογώνιόν τι ἄλλο, καταμετρηθεισῶν καὶ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ διὰ τῆς αὐτῆς γραμμικῆς μονάδος. Προσδιορίζεται δὲ τοιουτοτρόπως γινόμενόν τι δεύτερον. Τούτου δὲ τοῦ γινομένου ὁ πρὸς τὸ πρῶτον γινόμενον λόγος ἐκφράζει τὸν λόγον τῶν δύο ὀρθογωνίων, κατὰ τὰ ἤδη ἐν τῷ ἀνωτέρῳ θεωρήματι ἀποδειχθέντα.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ἡ μὲν βάσις ὀρθογωνίου τινὸς Α τρεῖς περιλαμβάνῃ μονάδας, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ δέκα, τὸ ὀρθογώνιον αὐτὸ δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3×10, ἤτοι διὰ τοῦ 30. Ὁ ἀριθμὸς ὅμως οὗτος, μεμονωμένος καὶ ἀσχέτως πρὸς πάντα ἄλλον ἐξεταζόμενος, οὐδὲν ἐκφράζει. Ἀλλ' ἐὰν δευτέρου τινὸς ὀρθογωνίου Β, ἡ μὲν βάσις περιέχῃ δώδεκα μονάδας, τὸ δὲ ὕψος ἑπτὰ, τὸ δεύτερον αὐτὸ ὀρθογώνιον δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 7×12, ἤτοι διὰ τοῦ 84. Ἐντεῦθεν δὲ ἕπεται, ὅτι τὰ δύο ὀρθογώνια Α καὶ Β ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσιν οἱ δύο ἀριθμοὶ 30 καὶ 84. Ἐὰν δὲ κατὰ συνθήκην ληφθῇ ὡς μονὰς, πρὸς καταμέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν, τὸ ὀρθογώνιον Α, τὸ ὀρθογώνιον Β ἀπόλυτον μέτρον ἔχει τὸ $\frac{84}{30}$· ἤτοι τὸ ὀρθογώνιον Β, ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, περιλαμβάνει $\frac{84}{30}$ μονάδος ἐπιφανειῶν.

Προτιμᾶται πάσης ἄλλης μονάδος, πρὸς καταμέτρησιν ἐπιφανείας, τὸ τετράγωνον, διότι ἁπλουστέρα εἶναι ἡ χρῆσις αὐτοῦ. Προτιμῶσι δὲ τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον τὴν μονάδα πλευράν. Διὰ τῆς παραδοχῆς δὲ τοιούτου τινὸς τετραγώνου, ἀντὶ μονάδος, πρὸς καταμέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν, τρέπεται εἰς μέτρον ἀπόλυτον, τὸ μέτρον τὸ σχετικὸν, περὶ οὗ ἐγένετο ἀνωτέρω λόγος. Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 30, ὅστις ἐχρησίμευσε πρὸς παράστασιν τοῦ ὀρθογωνίου Α, ἐκφράζει ἤδη 30 μονάδας ἐπιφανείας, ἢ 30 τετράγωνα, ἔχοντα τὴν γραμμικὴν μονάδα πλευράν. Τοῦτο δὲ εἰκονίζει σαφῶς τὸ 102 σχῆμα. (*)

Πολλάκις εἰς τὴν γεωμετρίαν ὀνομάζουσιν *ὀρθογώνιον* τὸ γινόμενον δύο εὐθειῶν. Τῆς τοιαύτης μάλιστα τοῦ γινομένου ὀνομασίας γίνεται χρῆσις καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικήν. Ὅθεν ὀνομάζεται ὀρθογώνιον τὸ γινόμενον δύο ἀνίσων ἀριθμῶν, καθὼς ὀνομάζεται *τετράγωνον* τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἴσων.

Τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, κτλ. εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 4, 9, κτλ. Λοιπὸν τὸ ἐπὶ εὐθείας διπλασίας κατεσκευασμένον τετράγωνον εἶναι τετραπλάσιον, τὸ ἐπὶ τριπλασίας ἐννεαπλάσιον, καὶ οὕτω καθεξῆς. (σχ. 103)

(*) Ἐὰν εἰς τὴν ἀναλογίαν

$$ΑΒΓΔ : ΑΕΗΖ :: ΑΒ \times ΑΔ : ΑΕ \times ΑΖ,$$

τὴν ἀνωτέρω βεβαιωθεῖσαν, ὑποτεθῇ $ΑΕ=1$, καὶ $ΑΖ=1$, ἐὰν δηλαδὴ τὸ ὀρθογώνιον ΑΕΗΖ ὑποτεθῇ τετράγωνον, ἔχον πλευρὰς ἴσας τῇ μονάδι, προκύπτει ἡ ἑξῆς ἀναλογία·

$$ΑΒΓΔ : ΑΕΗΖ :: ΑΒ \times ΑΔ : 1.$$

Ἐὰν δὲ συγχρόνως τὸ τετράγωνον ΑΕΗΖ ληφθῇ ὡς μονὰς, πρὸς καταμέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν, ἡ ἀναλογία, ἡ ἤδη εὑρεθεῖσα, τρέπεται εἰς ταύτην·

$$ΑΒΓΔ : 1 :: ΑΒ \times ΑΔ : 1.$$

Ὅθεν ἕπεται $ΑΒΓΔ = ΑΒ \times ΑΔ$.

Ἤτοι, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ ἐκφράζεται διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο αὐτοῦ διαστάσεων, τῆς βάσεως δηλαδὴ καὶ τοῦ ὕψους, ὅταν ληφθῇ ὡς μονὰς, πρὸς καταμέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν, τὸ τετράγωνον, τὸ ἔχον διαστάσεις ἴσας τῇ μονάδι.

Τοῦτο δὲ εἶναι τὸ ὑπὸ τοῦ συγγραφέως λεγόμενον ἀπόλυτον τοῦ ὀρθογωνίου μέτρον.

Οὐδὲν κυρίως δύναται νὰ ὀνομασθῇ μέτρον ἀπόλυτον· διότι ὄχι μόνον οὐδὲν μέγεθος ἀπόλυτον ὑπάρχει, ἀλλὰ καὶ πᾶσα μονὰς συνθήκης τινὸς εἶναι γέννημα. Ἂν τῷ ὄντι ὑπῆρχε μέτρον ἀπόλυτον, τὸ μέτρον αὐτὸ ἤθελεν εἶσθαι μοναδικόν. Ἀλλὰ μοναδικὰ μέτρα δὲν ὑπάρχουσι· διότι τὸ αὐτὸ ποσὸν παντοῖα δύναται νὰ ἔχῃ μέτρα. Ἑπομένως ὅλα τὰ μέτρα εἶναι σχετικά.

Ὅταν τὰ μεγέθη ἐκφράζωνται δι' ἀριθμῶν, ὁ λόγος τῶν ἀριθμῶν ἐκφράζει τῶν ποσῶν αὐτῶν τὸν λόγον. Ὅταν δὲ ὁ ἕτερος τῶν ἀριθμῶν ληφθῇ ὡς μονὰς, ὁ ἀριθμὸς ὁ ἄλλος, διὰ τοῦ ἑτέρου διαιρούμενος, ἐκφράζει τὸ σχετικῶς πρὸς τὴν τοιαύτην μονάδα μέτρον τοῦ ἀντιστοιχοῦντος μεγέθους.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Θεώρημα.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ, πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ. (σχ. 97)

Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΕΖ, ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΕ, εἶναι ἰσοδύναμα (πρότ. 1, βιβλ. 3). Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΕΖ μέτρον ἔχει τὸ γινόμενον $AB \times BE$ (πρότ. 4, βιβλ. 3), τὸ αὐτὸ γινόμενον ἐκφράζει καὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τὸ ἐμβαδόν.

Πόρισμα. Τὰ παραλληλόγραμμα τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν ἀνάλογα· καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν ἀνάλογα. Διότι ἔστωσαν Α, Β, Γ τρία μεγέθη ὁποιαδήποτε· τὰ μεγέθη ταῦτα πάντοτε ἀποτελοῦσι τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν $A \times \Gamma : B \times \Gamma :: A : B$. (*)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6.

Θεώρημα.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς

(*) Ἔστωσαν Π καὶ π δύο παραλληλόγραμμα, Β καὶ Υ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ πρώτου, β καὶ υ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ δευτέρου. Κατὰ τὴν 5 πρότασιν, $\Pi = B \times \Upsilon$, καὶ $\pi = \beta \times \upsilon$. Λοιπὸν

$$\Pi : \pi :: B \times \Upsilon : \beta \times \upsilon.$$

Ἐὰν ἤδη ὑποτεθῇ $B = \beta$, ἡ ἀναλογία αὕτη τρέπεται εἰς τὴν

$$\Pi : \pi :: \Upsilon : \upsilon,$$

Ἤτοι τὰ παραλληλόγραμμα τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν ἀνάλογα.

Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ $\Upsilon = \upsilon$, ἡ αὐτὴ ἀναλογία τρέπεται εἰς ταύτην,

$$\Pi : \pi :: B : \beta.$$

Ἤτοι τὰ παραλληλόγραμμα τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν ἀνάλογα.

βάσεως αὐτοῦ, πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους αὐτοῦ. (σχ. 104)

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΕ, τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΔ (πρότ. 2, βιβλ. 3). Ἐπειδὴ δὲ τοῦ παραλληλογράμμου τὸ ἐμβαδὸν ἐκφράζεται διὰ τοῦ γινομένου $ΒΓ\times ΑΔ$ (πρότ. 5, βιβλ. 3), τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{1}{2}ΒΓ\times ΑΔ$, ἢ διὰ τοῦ $ΒΓ\times\frac{1}{2}ΑΔ$, ἢ διὰ τοῦ $\frac{ΒΓ\times ΑΔ}{2}$.

Πόρισμα. Τὰ τρίγωνα τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν ἀνάλογα· καὶ τὰ τρίγωνα τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν. (*)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7.

Θεώρημα.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τοῦ ὕψους αὐτοῦ ΕΖ, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο παραλλήλων αὐτοῦ βάσεων ΑΒ, ΓΔ. (σχ. 105)

Διὰ τοῦ σημείου Ι, μέσου τῆς πλευρᾶς ΓΒ, φέρω τὴν ΚΛ παράλληλον τῆς ἀντικειμένης πλευρᾶς ΑΔ· ἐκτείνω δὲ τὴν ΔΓ μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν ΚΛ.

Τὰ τρίγωνα ΙΒΛ, ΙΓΚ εἶναι ἴσα (Πρότ. 7, βιβλ. 1), διότι ἡ πλευρὰ ΙΒ=ΙΓ, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ γωνία ΛΙΒ=ΓΙΚ, ὡς κατὰ κορυφήν, καὶ ἡ γωνία ΙΒΛ=ΙΓΚ, ὡς ἐναλλάξ, διότι ἡ ΓΚ καὶ ἡ ΒΛ εἶναι παράλληλοι (Πρότ. 24, βιβλ. 1). Ἐὰν δὲ

(*) Ἔστωσαν Τ καὶ τ δύο τρίγωνα, Β καὶ β αἱ βάσεις των, Υ καὶ υ τὰ ὕψη των. Κατὰ τὴν ἕκτην πρότασιν $Τ=\frac{Β\times Υ}{2}$, καὶ $τ=\frac{β\times υ}{2}$. Λοιπὸν $Τ : τ : : \frac{Β\times Υ}{2} : \frac{β\times υ}{2}$. Ὅθεν $Τ : τ : : Β\times Υ : β\times υ$. Ἐὰν Β=β, ἕπεται, ὅτι $Τ : τ : : Υ : υ$. Ἐὰν δὲ Υ=υ, προκύπτει $Τ : τ : : Β : β$.

ἐκ τοῦ ὅλου σχήματος ἀφαιρεθῇ τὸ τρίγωνον ΙΓΚ, μένει τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ· ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῇ τὸ τρίγωνον ΙΒΛ, μένει τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔΚΛ. Ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ τραπέζιον εἶναι ἰσοδύναμα. Ἐπειδὴ δὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔΚΛ μέτρον ἔχει τὸ γινόμενον $\text{ΕΖ}\times\text{ΑΛ}$, τὸ αὐτὸ γινόμενον χρησιμεύει πρὸς παράστασιν τοῦ μέτρου τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ.

Ἀλλ᾽ ἡ εὐθεῖα $\text{ΑΒ}=\text{ΑΛ}+\text{ΛΒ}$, καὶ ἡ εὐθεῖα $\text{ΔΓ}=\text{ΔΚ}-\text{ΓΚ}$. Προστιθεμένων τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων κατὰ μέλη, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $\text{ΑΒ}+\text{ΔΓ}=\text{ΑΛ}+\text{ΛΒ}+\text{ΔΚ}-\text{ΓΚ}$. Ἐπειδὴ δὲ $\text{ΓΚ}=\text{ΛΒ}$, καὶ $\text{ΔΚ}=\text{ΑΛ}$, ἡ ἐξίσωσις, ἡ ἤδη προκύψασα, τρέπεται εἰς ταύτην $\text{ΑΒ}+\text{ΔΓ}=2\text{ΑΛ}$, ἢ $\text{ΑΛ}=\frac{\text{ΑΒ}+\text{ΔΓ}}{2}$. Ἤτοι, ἀντὶ τῆς εὐθείας ΑΛ, δύναταί τις νὰ μεταχειρισθῇ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου.

Λοιπὸν τὸν γινόμενον $\text{ΕΖ}\times\text{ΑΛ}$, τὸ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκφράζον τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ τὸ ἐμβαδὸν, τῆς ἀντεισαγωγῆς γενομένης, τρέπεται εἰς $\text{ΕΖ}\times\frac{(\text{ΑΒ}+\text{ΔΓ})}{2}$. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἐκφράζεται διὰ τοῦ γινομένου τοῦ ὕψους αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο παραλλήλων αὐτοῦ βάσεων πολλαπλασιασθέντος. (*)

Σχόλιον. Ἐὰν διὰ τοῦ σημείου Ι, μέσου τῆς ΒΓ, ἀχθῇ ἡ ΙΘ παράλληλος τῆς βάσεως ΑΒ, τὸ σημεῖον Θ θέλ᾽ εἶσθαι τὸ μέσον τῆς ΑΔ. Διότι τὰ σχήματα ΑΘΙΛ, ΔΘΙΚ εἶναι παραλληλόγραμμα· τοῦτο δὲ ἀποδεικνύεται διὰ τοῦ παραλληλισμοῦ τῶν ἀντικειμένων πλευρῶν· ἑπομένως $\text{ΑΘ}=\text{ΙΛ}$, καὶ $\text{ΔΘ}=\text{ΙΚ}$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΒΙΛ, ΓΙΚ προέκυψεν ἡ $\text{ΙΛ}=\text{ΙΚ}$, ἄρα $\text{ΑΘ}=\text{ΔΘ}$.

(*) Ἡ πρότασις αὕτη ἀποδεικνύεται κατὰ τὸν ἀκόλουθον ἁπλούστερον τρόπον

Ἄγω τὴν διαγώνιον ΔΒ, καὶ διαιρῶ δι᾽ αὐτῆς τὸ τραπέζιον εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΔΒΓ. Τοῦ πρώτου τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{\text{ΕΖ}\times\text{ΑΒ}}{2}$, τοῦ δὲ δευτέρου διὰ τοῦ $\frac{\text{ΕΖ}\times\text{ΓΔ}}{2}$. Τὸ τραπέζιον λοιπὸν μέτρον ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο τριγώνων, ἤτοι $\frac{\text{ΕΖ}\times\text{ΑΒ}}{2}+\frac{\text{ΕΖ}\times\text{ΓΔ}}{2}$, ἢ $\frac{\text{ΕΖ}\times(\text{ΑΒ}+\text{ΓΔ})}{2}$.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω δὲ ἀποδειχθέντα, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου παρίσταται διὰ τοῦ $EZ\times A\Lambda$. Ἐπειδὴ δὲ $I\Theta = A\Lambda$, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου δύναται νὰ παρασταθῇ καὶ διὰ τοῦ γινομένου $EZ\times I\Theta$. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἐκφράζεται καὶ διὰ τοῦ γινομένου τοῦ ὕψους αὐτοῦ ΕΖ, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὴν εἰθεῖαν ΙΘ, τὴν συνάπτουσάν τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8.

Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖά τις ΑΓ τμηθῇ εἰς δύο τμήματα ΑΒ, ΒΓ, τὸ ἐπὶ τῆς ὅλης εὐθείας ΑΓ κατεσκευασμένον τετράγωνον περιλαμβάνει τὸ τετράγωνον, τὸ ἐπὶ τοῦ πρώτου τμήματος ΑΒ, τὸ τετράγωνον, τὸ ἐπὶ τοῦ δευτέρου τμήματος ΒΓ, καὶ δύο ὀρθογώνια, βάσιν ἔχοντα τὸ ΑΒ καὶ ὕψος τὸ ΒΓ.

Ἤτοι $\overline{A\Gamma}^2 = (AB+B\Gamma)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{B\Gamma}^2 + 2AB\times B\Gamma$. (σχ. 106)

Κατασκευάζω τὸ τετράγωνον ΑΓΔΕ, λαμβάνω τὴν $AZ = AB$, καὶ ἄγω τὴν μὲν ΖΗ παράλληλον τῆς ΑΓ, τὴν δὲ ΒΘ παράλληλον τῆς ΑΕ.

Τὸ τετράγωνον ΑΓΔΕ διεχωρίσθη τοιουτοτρόπως εἰς τέσσαρα μέρη. Τὸ μέρος τὸ πρῶτον, ἤτοι τὸ τετράπλευρον ΑΒΙΖ εἶναι τετράγωνον, διότι ἐλήφθη ἡ $AZ = AB$. Τὸ τετράγωνον δὲ τοῦτο βάσιν ἔχει τὴν ΑΒ. Τὸ μέρος τὸ δεύτερον, ἤτοι τὸ τετράπλευρον ΙΗΔΘ, εἶναι ὡσαύτως τετράγωνον, τετράγωνον μάλιστα, διαστάσεις ἔχον ἴσας τῇ ΒΓ· διότι $A\Gamma = AE$, καὶ $AB = AZ$, ὅθεν $A\Gamma - AB = AE - AZ$· ἤτοι $B\Gamma = ZE$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΖΗ ἤχθη παράλληλος τῆς ΑΓ, καὶ ἡ ΒΘ παράλληλος τῆς ΑΕ, ἡ εὐθεῖα $B\Gamma = IH$, καὶ ἡ $ZE = I\Theta$, ἐπομένως καὶ $IH = I\Theta$. Ἄρα τὸ τετράπλευρον ΙΗΔΘ εἶναι τετράγωνον, διαστάσεις ἔχον ἴσας τῇ ΒΓ.

Ἀφαιρουμένων δὲ ἀπὸ τοῦ ὅλου τετραγώνου ΑΓΔΕ τῶν δύο τετραγώνων ΑΒΙΖ, ΙΗΔΘ, μένουσι τὰ δύο τετράπλευρα ΒΓΗΙ, ΖΙΘΕ, ἅτινα εἶναι ὀρθογώνια, βάσεις ἔχοντα ἴσας τῇ ΑΒ, καὶ ὕψη ἴσα τῇ ΒΓ.

Λοιπὸν τὸ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΓ κατεσκευασμένον τετράγωνον περιέχει τὰ τέσσαρα σχήματα, τὰ ἐν τῇ ἐκφράσει τῆς προτάσεως εἰρημένα.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἡ περὶ τοῦ τετραγώνου διωνύμου τινός, ἡ κατὰ τρόπον ἄλλον ἀποδεικνυομένη εἰς τὴν ἄλγεβραν, εἰς ἣν γράφουσιν αὐτὴν οὕτως.

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2.$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9.

Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖά τις ΑΓ ἐκφράζῃ τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐὰν ἐπὶ τῶν τριῶν αὐτῶν εὐθειῶν κατασκευασθῶσι τετράγωνα, τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο λοιπῶν τετραγώνων κατὰ τοσοῦτον, καθ' ὅσον ὁρίζουσι δύο ὀρθογώνια, βάσιν ἔχοντα τὴν ΑΒ καὶ ὕψος τὴν ΒΓ. Ἤτοι $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 = (\mathrm{AB}-\mathrm{B\Gamma})^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{B\Gamma}}^2 - 2\mathrm{AB}\times\mathrm{B\Gamma}$. (σχ. 107)

Κατασκευάζω ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ τετράγωνον ΑΒΙΖ, προσάπτω δὲ εἰς αὐτὸ τὸ τετράγωνον ΚΕΖΔ, τὸ ἔχον διαστάσεις ἴσας τῇ ΒΓ· ἐπομένως ἡ εὐθεῖα ΑΕ=ΑΓ. Ἄγω τὴν μὲν ΓΗ παράλληλον τῆς ΒΙ, τὴν δὲ ΕΘ παράλληλον τῆς ΑΒ.

Τὰ ὀρθογώνια ΒΓΗΙ, ΚΔΗΛ βάσεις μὲν ἔχουσιν ἴσας τῇ ΑΒ, ὕψη δὲ ἴσα τῇ ΒΓ. Ἐπομένως ἕκαστον αὐτῶν μέτρον ἔχει τὸ γινόμενον ΑΒ×ΒΓ.

Τὸ ὅλον σχῆμα εἶναι τὸ ἄθροισμα δύω τετραγώνων, τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΒ καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς ΒΓ. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος αὐτοῦ ἀφαιρεθῶσι τὰ δύο ὀρθογώνια ΒΓΗΙ, ΚΔΗΛ, μένει τὸ τετράγωνον ΑΓΔΕ, ἤτοι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ.

Λοιπὸν $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{B\Gamma}}^2 - 2\mathrm{AB}\times\mathrm{B\Gamma}$.

Σχόλιον. Ἡ αὐτὴ πρότασις ἀποδεικνύεται καὶ εἰς τὴν ἄλγεβραν, ἐκφράζεται δὲ διὰ τοῦ τύπου τούτου $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10.

Θεώρημα.

Τὸ ὀρθογώνιον, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ὕψος δὲ τὴν διαφορὰν τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, εἶναι ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν αὐτῶν. Ἤτοι $(\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ})\times(\text{ΑΒ}-\text{ΒΓ})=\overline{\text{ΑΒ}}^2-\overline{\text{ΒΓ}}^2$. (σχ. 108)

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΑΚΛΕ, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις ΑΚ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΚ, ἢ ΒΓ, διότι ΒΚ=ΒΓ, τὸ δὲ ὕψος ΑΕ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΚ, ἢ ΒΓ.

Ἐκ τοῦ σημείου Β φέρω τὴν ΒΘ παράλληλον τῆς ΑΕ, καὶ τὸ τοιουτοτρόπως ἀποχωριζόμενον ὀρθογώνιον ΒΚΛΘ ἐπιθέτω πλαγίως ἐπὶ τῆς ΕΔ=ΑΓ.

Τούτου δὲ γενομένου, τὸ ὀρθογώνιον ΑΚΛΕ, περὶ οὗ πρόκειται, τρέπεται εἰς τὸ σχῆμα ΑΒΘΔΗΖ, τὸ ὁποῖον εἶναι κολωβόν τι τετράγωνον τῆς ΑΒ· διότι πρὸς συμπλήρωσιν αὐτοῦ τῆς ΑΒ τοῦ τετραγώνου ἐλλείπει τὸ σχῆμα ΔΘΙΗ, τὸ ὁποῖον εἶναι τετράγωνον τῆς ΒΓ. Ἐν ἄλλοις λόγοις, τὸ ὀρθογώνιον ΑΚΛΕ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν κατεσκευασμένων ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ τῆς ΒΓ.

Λοιπὸν $(\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ})\times(\text{ΑΒ}-\text{ΒΓ})=\overline{\text{ΑΒ}}^2-\overline{\text{ΒΓ}}^2$.

Σχόλιον. Ἡ αὐτὴ πρότασις ἀποδεικνύεται καὶ εἰς τὴν ἄλγεβραν, ἐκφράζεται δὲ διὰ τοῦ τύπου $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11.

Θεώρημα.

Τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου κατεσκευασμένον τετράγωνον ἐξισοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων, τῶν κατεσκευασμένων ἐπὶ τῶν λοιπῶν δύο τοῦ τριγώνου αὐτοῦ πλευρῶν. (σχ. 109)

Ἔστω ΑΒΓ τρίγωνόν τι ὀρθογώνιον εἰς τὸ σημεῖον Α. Σχηματίζω καὶ ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου αὐτοῦ τετράγωνα. Καταβιβάζω ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης, καὶ ἐκτείνω αὐτὴν μέχρις οὗ συναπαντήσῃ εἰς τὸ σημεῖον Ε τὴν ἀντικειμένην πλευρὰν τοῦ τετραγώνου. Ἄγω τὰς διαγωνίους ΑΖ, ΓΘ.

Ἡ γωνία ΑΒΖ συνίσταται ἐκ τῆς γωνίας ΑΒΓ καὶ ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΓΒΖ. Ὡσαύτως ἡ γωνία ΘΒΓ συνίσταται ἐκ τῆς αὐτῆς γωνίας ΑΒΓ καὶ ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΑΒΘ. Λοιπὸν ἡ γωνία ΑΒΖ=ΘΒΓ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΘ, πλευραὶ οὖσαι τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου, εἶναι ἴσαι, ἴσαι δὲ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι καὶ αἱ εὐθεῖαι ΒΖ, ΒΓ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΖ, ΘΒΓ εἶναι ἴσα (Πρότ. 6, βιβλ. 1).

Τὸ τρίγωνον ΑΒΖ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΒΔΕΖ, τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΖ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΔ (Πρότ. 2, βιβλ. 3). Τὸ δὲ τρίγωνον ΘΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου ΑΒΘΛ, τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΘ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΒ. Ἡ πλευρὰ δὲ ΑΒ ἐκφράζει καὶ τοῦ τριγώνου τὸ ὕψος, διότι ἡ γραμμὴ ΛΑΓ, ἐφ' ἧς κεῖται ἡ κορυφὴ αὐτοῦ Γ, εἶναι εὐθεῖα. Εἶναι δὲ ἡ γραμμὴ ΛΑΓ εὐθεῖα, διότι αἱ δύο προσκείμεναι γωνίαι ΒΑΛ, ΒΑΓ ἀποτελοῦσιν ὀρθὰς γωνίας δύο (Πρότ. 4, βιβλ. 1).

Ἐπειδὴ δέ, ὡς ἀνωτέρω ἀπεδείχθη, τὰ μὲν τρίγωνα ΑΒΖ, ΘΒΓ εἶναι ἴσα, τὸ δὲ ὀρθογώνιον ΒΔΕΖ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΒΖ, τὸ δὲ τετράγωνον ΑΒΘΛ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΘΒΓ, τὸ ὀρθογώνιον ΒΔΕΖ καὶ τὸ τετράγωνον ΑΒΘΛ εἶναι ἰσοδύναμα.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δύναταί τις ν' ἀποδείξῃ, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΓΔΕΗ καὶ τὸ τετράγωνον ΑΓΙΚ εἶναι ἰσοδύναμα. Ἀλλὰ τὰ δύο ὀρθογώνια ΒΔΕΖ, ΓΔΕΗ ἀποτελοῦσι τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ· λοιπὸν τὸ τετράγωνον ΒΓΗΖ, τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης κατεσκευασμένον, ἐξισοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων ΑΒΘΛ, ΑΓΙΚ, τῶν κατεσκευασμένων ἐπὶ τῶν δύο λοιπῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Ἤτοι $\overline{\mathrm{ΒΓ}}^2=\overline{\mathrm{ΑΒ}}^2+\overline{\mathrm{ΑΓ}}^2$.

Πόρισμα 1. Τὸ τετράγωνον λοιπὸν τῆς ΑΒ, τῆς ἑτέρας τῶν πλευρῶν, ἐξ ὧν ἡ ὀρθὴ γωνία τριγώνου τινὸς ὀρθογωνίου ἀποτελεῖται, ἰσοῦται τῷ τετραγώνῳ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ, μεῖον τοῦ τετραγώνου τῆς ἄλλης πλευρᾶς ΑΓ. Ἤτοι $\overline{\mathrm{ΑΒ}}^2=\overline{\mathrm{ΒΓ}}^2-\overline{\mathrm{ΑΓ}}^2$.

Πόρισμα 2. Ἔστω ΑΓ ἡ διαγώνιος τετραγώνου τινὸς ΑΒΓΔ.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι καὶ ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές· ἑπομένως $\overline{\mathrm{ΑΓ}}^2=\overline{\mathrm{ΑΒ}}^2+\overline{\mathrm{ΒΓ}}^2=2\overline{\mathrm{ΑΒ}}^2$. Λοιπὸν τὸ τετράγωνον, τὸ ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΑΓ κατεσκευασμένον, εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου, τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ. (σχ. 118)

Αὕτη τοῦ τετραγώνου ἡ ἰδιότης ἀποδεικνύεται καὶ κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

Ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Γ ἄγω τῆς ΒΔ παραλλήλους, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Β καὶ Δ ἄγω παραλλήλους τῆς ΑΓ. Κατασκευάζω δὲ τοιουτοτρόπως τετράγωνόν τι ἄλλο, τὸ ΕΖΗΘ, τὸ ὁποῖον εἶναι τετράγωνον τῆς ΑΓ.

Τὸ τετράγωνον ΕΖΗΘ περιέχει ὀκτὼ τρίγωνα ἴσα τῷ τριγώνῳ ΑΒΕ. Τὸ δὲ τετράγωνον ΑΒΓΔ τέσσαρα μόνον τοιαῦτα τρίγωνα περιλαμβάνει. Ἄρα τὸ τετράγωνον ΕΖΗΘ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Ἐπειδὴ $\overline{\mathrm{ΑΓ}}^2 : \overline{\mathrm{ΑΒ}}^2 :: 2 : 1$, τῆς ῥίζης τῆς τετραγωνικῆς ἐξαχθείσης, συνάγομεν $\mathrm{ΑΓ} : \mathrm{ΑΒ} :: \sqrt{2} : 1$. Ἤτοι ἡ διαγώνιος τετραπλεύρου τινὸς, πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ παραβαλλομένη, εἶναι ἀσύμμετρος.

Περὶ τούτου θέλομεν πραγματευθῇ κατόπιν ἐν ἐκτάσει.

Πόρισμα 3. Ἀνωτέρω ἀπεδείχθη, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ ΒΔΕΖ. (σχ. 109) Ἐπειδὴ δὲ τὸ τετράγωνον ΒΓΗΖ καὶ τὸ ὀρθωγώνιον ΒΔΕΖ ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος ΔΕ, τὰ δύο ταῦτα σχήματα εἶναι πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν ΒΓ, ΒΔ ἀνάλογα. Λοιπὸν

$$\overline{\mathrm{ΒΓ}}^2 : \overline{\mathrm{ΑΒ}}^2 :: \mathrm{ΒΓ} : \mathrm{ΒΔ}.$$

Ἤτοι τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἑτέρας τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς αὐτοῦ γωνίας, ὃν ἔχει ἡ ὑποτείνουσα πρὸς τὸ τμῆμα, τὸ εἰς τὴν πλευρὰν αὐτὴν προσκείμενον.

Λοιπὸν καὶ

$$\overline{\mathrm{ΒΓ}}^2 : \overline{\mathrm{ΑΓ}}^2 :: \mathrm{ΒΓ} : \mathrm{ΓΔ}.$$

Πόρισμα 4. Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια ΒΔΕΖ, ΔΓΗΕ ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος ΔΕ, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν ΒΔ, ΓΔ. Τὰ ὀρθογώνια δὲ ταῦτα, κατὰ τὰ εἰρημένα, ἰσοδυναμοῦσι τοῖς τετραγώνοις $\overline{\mathrm{ΑΒ}}^2$, $\overline{\mathrm{ΑΓ}}^2$. Λοιπὸν

$$\overline{\mathrm{ΑΒ}}^2 : \overline{\mathrm{ΑΓ}}^2 :: \mathrm{ΒΔ} : \mathrm{ΔΓ}.$$

Ἤτοι τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν, ἐξ ὧν ἡ ὀρθὴ γωνία ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου ἀποτελεῖται, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τῆς ὑποτεινούσης τὰ τμήματα, τὰ εἰς αὐτὰς τὰς πλευρὰς προσκείμενα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12.

Θεώρημα.

Ἐὰν ἡ γωνία Γ τριγώνου τινὸς ΑΒΓ ἦναι ὀξεῖα, τὸ τετράγωνον τῆς ἀντικειμένης πλευρᾶς εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν δύο πλευρῶν, τῶν περιεχουσῶν τὴν γωνίαν Γ. Εἶναι δὲ τοσοῦτον μικρότερον, ὅσον ἐκφράζουσι δύο ὀρθογώνια, βάσιν ἔχοντα τοῦ τριγώνου τὴν βάσιν ΒΓ, καὶ ὕψος τὸ ἀπόστημα τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας Γ ἀπὸ τοῦ Δ ποδὸς τῆς καθέτου ΑΔ, τῆς ἀγομένης ἐπὶ τῆς ΒΓ· ὅ ἐστι μεθερμηνευόμενον, (σχ. 110)

$$\overline{ΑΒ}^2=\overline{ΑΓ}^2+\overline{ΒΓ}^2-2ΒΓ\times ΓΔ.$$

Δύο ἡ πρότασις αὕτη περιλαμβάνει περιστάσεις.

Α'. Ὅταν ἡ κάθετος ΑΔ πίπτῃ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἐν τῇ τοιαύτῃ περιπτώσει ΒΔ$=$ΒΓ$-$ΓΔ. Ὅθεν (Πρότ. 9, βιβλ. 3) $\overline{ΒΔ}^2=\overline{ΒΓ}^2+\overline{ΓΔ}^2-2ΒΓ\times ΓΔ$. Προστιθεμένου δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης τοῦ $\overline{ΑΔ}^2$, παράγεται ἡ ἐξίσωσις $\overline{ΒΔ}^2+\overline{ΑΔ}^2=\overline{ΒΓ}^2+\overline{ΓΔ}^2+\overline{ΑΔ}^2-2ΒΓ\times ΓΔ$· ἥτις, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ εἶναι ὀρθογώνια, καὶ ἑπομένως $\overline{ΑΔ}^2+\overline{ΒΔ}^2=\overline{ΑΒ}^2$, καὶ $\overline{ΑΔ}^2+\overline{ΔΓ}^2=\overline{ΑΓ}^2$, τῆς ἀντεισαγωγῆς γενομένης, τρέπεται εἰς ταύτην $\overline{ΑΒ}^2=\overline{ΒΓ}^2+\overline{ΑΒ}^2-2ΒΓ\times ΓΔ$.

Β'. Ὅταν ἡ κάθετος ΑΔ πίπτῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἐν τῇ δευτέρᾳ ταύτῃ περιπτώσει ΒΔ$=$ΓΔ$-$ΒΓ. Ὅθεν (Πρότ. 9, βιβλ. 3) $\overline{ΒΔ}^2=\overline{ΓΔ}^2+\overline{ΒΓ}^2-2ΓΔ\times ΒΓ$. Προστιθεμένου δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης τοῦ $\overline{ΑΔ}^2$, καὶ τῆς ἀναγωγῆς γενομένης, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$\overline{ΑΒ}^2=\overline{ΒΓ}^2+\overline{ΑΓ}^2-2ΒΓ\times ΓΔ.$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13.

Θεώρημα.

Ἐὰν ἡ γωνία Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἦναι ἀμβλεῖα, τὸ τετράγωνον τῆς ἀντικειμένης πλευρᾶς ΑΒ εἶναι μεῖζον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν λοιπῶν δύο πλευρῶν, τῶν περιεχουσῶν τὴν γωνίαν αὐτήν. Εἶναι δὲ τοσοῦτον μεῖζον, ὅσον εἶναι δύο ὀρθογώνια, βάσιν ἔχοντα τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου ΒΓ, καὶ ὕψος τὴν ἀπόστασιν τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας Γ ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ΑΔ, τῆς ἀγομένης ἐπὶ τῆς ΒΓ· ὅ ἐστι μεθερμηνευόμενον, (σχ. 111).

$$\overline{AB}^2=\overline{A\Gamma}^2+\overline{B\Gamma}^2+2B\Gamma\times\Gamma\Delta.$$

Ἡ κάθετος ΑΔ ἀναγκαίως πίπτει ἐκτὸς τοῦ τριγώνου· διότι ἂν παραδεχθῶμεν αὐτὴν καταπίπτουσαν ἐντὸς τοῦ τριγώνου, παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ σημεῖον Ε, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΓΕ, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν γωνία Ε εἶναι ὀρθὴ, ἡ δὲ γωνία Γ ἀμβλεῖα. Τοιούτου ὅμως τριγώνου ἡ ὕπαρξις εἶναι ἀδύνατος (Πρότ. 19, βιβλ. 1).

Τούτου τεθέντος, κατὰ τοῦ σχήματος τὴν κατασκευὴν, ἡ ΒΔ$=$ΒΓ$+$ΓΔ. Ὅθεν ἕπεται (Πρότ. 8. βιβλ. 3) $\overline{B\Delta}^2=\overline{B\Gamma}^2+\overline{\Gamma\Delta}^2+2B\Gamma\times\Gamma\Delta$. Προστιθεμένου δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ $\overline{A\Delta}^2$ καὶ τῆς ἀναγωγῆς ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ προτάσει γενομένης, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις αὕτη $\overline{AB}^2=\overline{B\Gamma}^2+\overline{A\Gamma}^2+2B\Gamma\times\Gamma\Delta$.

Τοῦτο δ' ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. Εἰς μόνον τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο πλευρῶν ἰσοῦται τῷ τετραγώνῳ τῆς πλευρᾶς τῆς τρίτης· διότι εἰς τὰ τρίγωνα τὰ μὴ ὀρθογώνια, ἐὰν μὲν ἡ γωνία ἦναι ἀμβλεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τῆς ἀντικειμένης πλευρᾶς· ἐὰν δὲ ἦναι ὀξεῖα, ὑπερέχεται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14.

Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τριγώνου τινὸς ΑΒΓ ἀχθῇ εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως αὐτοῦ ἡ εὐθεῖα ΑΕ, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν, ἐξ ὧν ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἀποτελεῖται, ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τοῦ διπλασίου τοῦ τετραγώνου τῆς διατεμνούσης ΑΕ καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ τετραγώνου ἑνὸς τῶν τμημάτων τῆς βάσεως· τουτέστι

$$\overline{AB}^2+\overline{A\Gamma}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{BE}^2. \text{ (σχ. 112)}$$

Ἄγω τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ.

Τὸ τρίγωνον ΑΕΓ, κατὰ τὴν 12 πρότασιν τοῦ παρόντος βιβλίου, ταύτην παράγει τὴν ἰσότητα

$$\overline{A\Gamma}^2=\overline{AE}^2+\overline{E\Gamma}^2-2E\Gamma\times E\Delta.$$

Ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου ΑΒΕ, κατὰ τὴν 13 πρότασιν τοῦ παρόντος βιβλίου, αὕτη προκύπτει ἡ ἐξίσωσις·

$$\overline{AB}^2=\overline{AE}^2+\overline{EB}^2+2EB\times E\Delta.$$

Συνάπτοντες κατὰ μέλη τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις, καὶ ἐνθυμούμενοι, ὅτι ΕΒ=ΕΓ, συνάγομεν

$$\overline{AB}^2+\overline{A\Gamma}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{EB}^2.$$

Πόρισμα. Λοιπὸν, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο διαγωνίων παντὸς παραλληλογράμμου εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσμαματι τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων αὐτοῦ πλευρῶν.

Ἰδοὺ δὲ ἡ ἀπόδειξις. (σχ. 113)

Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὸ σημεῖον Ε (Πρότ. 31, βιβλ. 1), ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, πορίζόμεθα,

$$\overline{AB}^2+\overline{B\Gamma}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{BE}^2.$$

Ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, συνάγομεν,

$$\overline{A\Delta}^2+\overline{\Delta\Gamma}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{\Delta E}^2.$$

Συνάπτοντες κατὰ μέλη τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις καὶ ἐνθυμούμενοι, ὅτι ΒΕ=ΔΕ, εὑρίσκομεν,

$$\overline{AB}^2+\overline{A\Delta}^2+\overline{\Delta\Gamma}^2+\overline{B\Gamma}^2=4\overline{AE}^2+4\overline{\Delta E}^2.$$

Ἀλλὰ $4\overline{AE}^2=(2AE)^2=\overline{A\Gamma}^2$, καὶ $4\overline{\Delta E}^2=(2\Delta E)^2=\overline{B\Delta}^2$. Λοιπὸν, τῆς ἀντεισαγωγῆς γενομένης, ἡ ἑξῆς προκύπτει ἐξίσωσις.

$$\overline{AB}^2+\overline{A\Delta}^2+\overline{\Delta\Gamma}^2+\overline{B\Gamma}^2=\overline{A\Gamma}^2+\overline{B\Delta}^2.$$

Ἤτοι, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν δύο αὐτοῦ διαγωνίων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.

Θεώρημα.

Πᾶσα εὐθεῖα ΔΕ, παράλληλος τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, διαιρεῖ τὰς δύο λοιπὰς πλευρὰς αὐτοῦ ΑΒ, ΑΓ εἰς τέσσαρα μέρη ἀνάλογα· ὅ ἐστι. ΑΔ: ΔΒ:: ΑΕ:ΕΓ. (σχ. 114)

Ἄγω τὰς διαγωνίους ΒΕ καὶ ΔΓ.

Τὰ δύο τρίγωνα ΒΔΕ, ΔΕΓ ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΔΕ· ἔχουσι προσέτι καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος· διότι αἱ κορυφαὶ των Β καὶ Γ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΒΓ, παραλλήλου τῆς βάσεως. Λοιπὸν τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα. (Πρότ. 2, βιβλ. 3).

Τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΕ, ΒΔΕ τὰς μὲν βάσεις αὐτῶν ἔχουσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ, τὰς δὲ κορυφὰς αὐτῶν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ε· ἑπομένως ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν ΑΔ, ΔΒ ἀνάλογα (Πρότ. 6, βιβλ. 3)· ἤτοι,

ΑΔΕ : ΒΔΕ :: ΑΔ : ΔΒ. (1).

Τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΕ, ΔΕΓ τὰς μὲν βάσεις αὐτῶν ἔχουσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΓ, τὰς δὲ κορυφὰς αὐτῶν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Δ· ἑπομένως ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν ΑΕ, ΕΓ ἀνάλογα· ἤτοι,

ΑΔΕ : ΔΕΓ :: ΑΕ : ΕΓ (2).

Ἐπειδὴ δὲ, ὡς ἤδη εἴρηται, τὸ τρίγωνον ΒΔΕ=ΔΕΓ, αἱ δύο ἀναλογίαι (1) καὶ (2) ἔχουσι τοὺς πρώτους λόγους ἴσους.

Οἱ δεύτεροι λοιπὸν λόγοι αὐτῶν τὴν ἑξῆς ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν ΑΔ : ΔΒ :: ΑΕ : ΕΓ

Πόρισμα 1. Ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης ἕπεται ἡ ἀκόλουθος ΑΔ+ΔΒ : ΑΔ :: ΑΕ+ΕΓ : ΑΕ, ἢ ΑΒ : ΑΔ :: ΑΓ : ΑΕ.

Ἐκ τῆς αὐτῆς ἀναλογίας ἕπεται προσέτι καὶ αὕτη· ΑΔ+ΔΒ: ΔΒ :: ΑΕ+ΕΓ : ΕΓ, ἢ ΑΒ : ΔΒ :: ΑΓ : ΕΓ.

Πόρισμα 2. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ τμηθῶσιν ὑφ' ὁποιουδήποτε πλήθους παραλλήλων ΑΓ, ΕΖ, ΗΘ, ΒΔ, κτλ., τὰ προκύπτοντα τμήματα αὐτῶν θέλουσιν εἶσθαι ἀνάλογα· τουτέστι ΑΕ : ΓΖ :: ΕΗ : ΖΘ :: ΗΒ : ΘΔ. (σχ. 115)

Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τῆς συναπαντήσεως τῶν δύο εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΟΕΖ, ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος τῆς βάσεως ΕΖ, ἡ ἑξῆς ὑπάρχει ἀναλογία ΟΕ : ΑΕ :: ΟΖ : ΓΖ, ἥτις τρέπεται εἰς ταύτην ΟΕ : ΟΖ :: ΑΕ : ΓΖ (1). Ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου ΟΗΘ, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἡ ἀκόλουθος προκύπτει ἀναλογία ΟΕ : ΕΗ :: ΟΖ : ΖΘ, ἥτις τρέπεται εἰς ταύτην ΟΕ : ΟΖ:: ΕΗ : ΖΘ (2). Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο ἀναλογίαι (1) καὶ (2) ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον ΟΕ : ΟΖ κοινὸν, οἱ λοιποὶ δύο αὐτῶν λόγοι ταύτην σχηματίζουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΕ : ΓΖ :: ΕΗ : ΖΘ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δύναταί τις ν' ἀποδείξῃ,ὅτι καὶ ΕΗ: ΖΘ :: ΗΒ : ΘΔ, καὶ καθεξῆς ὡσαύτως.

Λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων ΕΖ, ΗΘ κτλ. εἰς μέρη ἀνάλογα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16.

Θεώρημα.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΔΕ τέμνῃ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ εἰς τέσσαρα μέρη ἀνάλογα τοιαῦτα, ὥστε ΑΔ : ΔΒ :: ΑΕ : ΕΓ, ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι παράλληλος τῆς βάσεως ΒΓ. (σχ. 116)

Ἡ εὐθεῖα ΔΕ, ἢ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΓ, ἢ δὲν εἶναι. Ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν τὴν πρότασιν κατ' εὐθεῖαν, ἃς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ ΔΕ δὲν εἶναι τῆς ΒΓ παράλληλος.

Τούτου τεθέντος, ἄγω τὴν ΔΟ παράλληλον τῆς ΒΓ.

Κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν ἡ ἑξῆς ὑπάρχει ἀναλογία·

ΑΔ : ΔΒ :: ΑΟ : ΟΓ. (1)

Ἀλλ' ὑπάρχει δεδομένον, ὅτι ΑΔ : ΔΒ :: ΑΕ : ΕΓ. (2)

Ἐπειδὴ τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν οἱ πρῶτοι λόγοι εἶναι οἱ αὐτοὶ, οἱ δεύτεροι αὐτῶν λόγοι τὴν ἀκόλουθον ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν·

ΑΟ : ΟΓ :: ΑΕ : ΕΓ, ἢ ΑΟ : ΑΕ :: ΟΓ : ΕΓ.

Ἀλλὰ ταύτης τῆς ἀναλογίας ἡ ὕπαρξις εἶναι ἀδύνατος· διότι ὁ μὲν πρῶτος ἑπόμενος ΑΕ εἶναι μείζων τοῦ πρώτου ἡγουμένου ΑΟ, ὁ δὲ δεύτερος ἑπόμενος ΕΓ εἶναι ἐλάσσων τοῦ δευτέρου ἡγουμένου ΟΓ. Αὕτη δὲ ἡ ἄτοπος ἀναλογία προέκυψεν ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2). Ἐπειδὴ δὲ ἡ (2) ἀναλογία εἶναι ὀρθὴ, ἀναγκαίως ἡ (1) ἀναλογία εἶναι στρεβλή. Λοιπὸν ΔΟ δὲν εἶναι παράλληλος τῆς ΒΓ. Ἑπομένως παράλληλος αὐτῆς εἶναι ἡ ΔΕ.

Σχόλιον. Δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν τὸ αὐτὸ θεώρημα, καὶ ἐὰν ὡς δεδομένην εἴχομεν τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν ΑΒ : ΑΔ :: ΑΓ : ΑΕ· διότι ἐκ ταύτης ἕπεται αὕτη ΑΒ—ΑΔ : ΑΔ :: ΑΓ—ΑΕ : ΑΕ, ἤτοι ΒΔ :: ΑΔ :: ΓΕ : ΑΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17.

Θεώρημα.

Ἡ εὐθεῖα ΑΔ, ἡ εἰς δύο μέρη ἴσα τὴν γωνίαν ΒΑΓ τριγώνου τινὸς τέμνουσα, τέμνει τοῦ τριγώνου αὐτοῦ τὴν βάσιν ΒΓ εἰς τμήματα δύο ΒΔ, ΔΓ, ἀνάλογα πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, τὰς τὴν γωνίαν περιεχούσας. Ὅ ἐστι μεθερμηνευόμενον ΒΔ : ΔΓ :: ΑΒ : ΑΓ. (σχ. 117)

Ἐκ τοῦ σημείου Γ ἄγω τὴν ΓΕ παράλληλον τῆς ΑΔ, καὶ ἐκτείνω αὐτὴν ἕως οὗ συναντήσῃ τὴν ΒΑ, παρατεινομένην.

Ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΒΓΕ ἡ εὐθεῖα ΑΔ παράλληλος εἶναι τῆς βάσεως ΓΕ, ἡ ἀκόλουθος ὑπάρχει ἀναλογία (Πρότ. 15, βιβλ. 3)·

ΒΔ : ΔΓ :: ΑΒ : ΑΕ.

Ἀλλὰ τὸ ΑΓΕ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές· διότι ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΑΔ, ΓΕ ἡ γωνία ΑΓΕ=ΔΑΓ, καὶ ἡ γωνία ΑΕΓ=ΒΑΔ (Πρότ. 24. βιβλ. 1). Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως ἡ γωνία

ΔΑΓ=ΒΑΔ, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΑΓΕ=ΑΕΓ. Λοιπὸν ΑΕ=ΑΓ (Πρότ. 13, βιβλ. 1).

Αντεισάγοντες δὲ εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν, ἀντὶ τῆς εὐθείας ΑΕ τὴν ΑΓ, εὑρίσκομεν ταύτην.

ΒΔ : ΔΓ :: ΑΒ : ΑΓ.

Περὶ ταύτης δὲ καὶ ἐπρόκειτο.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

Θεώρημα.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἔχοντα τὰς ὁμολόγους γωνίας ἴσας, ἔχουσι καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους, καὶ εἶναι ὅμοια. (σχ. 119)

Ἔστωσαν ΑΒΓ, ΓΔΕ δύο τρίγωνα, ἔχοντα τὰς ὁμολόγους γωνίας αὐτῶν ἴσας, δηλαδὴ ΒΑΓ=ΓΔΕ, ΑΒΓ=ΔΓΕ, καὶ ΑΓΒ=ΔΕΓ. Λέγω, ὅτι αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων αὐτῶν, αἱ εἰς τὰς ἴσας γωνίας ἀντικείμεναι, εἶναι ἀνάλογοι, καὶ τοὺς ἑξῆς ἴσους ἀποτελοῦσι λόγους ΒΓ : ΓΕ :: ΑΒ : ΓΔ :: ΑΓ : ΔΕ.

Παρατάσσω τὰ δύο τρίγωνα οὕτως, ὥστε αἱ δύο ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ΒΓ, ΓΕ ν' ἀποτελέσωσιν εὐθεῖαν· ἐκτείνω δὲ τὰς πλευρὰς ΒΑ, ΕΔ ἕως οὗ συναντηθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Ζ.

Ἐπειδὴ ἡ μὲν γραμμὴ ΒΓΕ εἶναι εὐθεῖα, ἡ δὲ γωνία ΒΓΑ=ΓΕΔ, ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι παράλληλος τῆς ΔΕ (Πρότ. 24, βιβλ. 1). Ὡσαύτως ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΒΓ=ΔΓΕ, ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος τῆς ΔΓ· ἐπομένως τὸ σχῆμα ΑΓΔΖ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΖΕ, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι παράλληλος τῆς βάσεως ΖΕ, ἡ ἑξῆς ὑπάρχει ἀναλογία ΒΓ : ΓΕ :: ΒΑ : ΑΖ (Πρότ. 15, βιβλ. 3). Ἡ ἀναλογία αὕτη, διὰ τῆς ἀντεισαγωγῆς τῆς ΓΔ, ἀντὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΖ, τρέπεται εἰς ταύτην,

ΒΓ : ΓΕ :: ΒΑ : ΓΔ (1).

Εἰς τὸ αὐτὸ δὲ τρίγωνον ΒΖΕ, ἐὰν ἡ ΒΖ ληφθῇ ὡς βάσις, ἐπειδὴ ἡ ΓΔ εἶναι τῆς βάσεως αὐτῆς παράλληλος, καὶ ἡ ἑξῆς ὑπάρχει ἀναλογία ΒΓ : ΓΕ :: ΖΔ : ΔΕ. Αὕτη δὲ ἡ ἀναλογία, διὰ τῆς ἀντεισαγωγῆς τῆς ΑΓ, ἀντὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΖΔ, τρέπεται εἰς ταύτην,

ΒΓ : ΓΕ :: ΑΓ : ΔΕ (2).

Αἱ δύο δὲ ἀναλογίαι (1) καὶ (2), ἐπειδὴ ἔχουσι τὸν αὐτὸν πρῶτον λόγον, διὰ τῶν λόγων αὐτῶν τῶν δευτέρων τὴν ἀκόλουθον παράγουσιν ἀναλογίαν,

ΑΓ : ΔΕ :: ΒΑ : ΓΔ.

Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΒΑΓ, ΓΔΕ, τὰ τὰς ὁμολόγους γωνίας ἴσας ἔχοντα, ἔχουσι καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους. Ἐπειδὴ δὲ, κατὰ τὸν δεύτερον ὁρισμὸν τὸν ἐν τῷ παρόντι βιβλίῳ, σχήματα ὅμοια λέγονται τὰ ἔχοντα τὰς ὁμολόγους γωνίας ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους, τὰ δύο τρίγωνα ΒΑΓ, ΓΔΕ εἶναι ὅμοια.

Πόρισμα. Ὅταν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ ἡ τρίτη εἶναι ἴση τῇ τρίτῃ. Ἐπομένως δύο τρίγωνα ἀρκεῖ νὰ ἔχωσι δύο ὁμολόγους γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ εἶναι ὅμοια.

Σχόλιον. Εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἀντίκεινται εἰς τὰς ἴσας γωνίας. Παραδείγματος χάριν, ἐπὶ τοῦ προκειμένου, ἡ μὲν γωνία ΑΓΒ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ ΔΕΓ, ἡ δὲ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ὁμόλογος τῆς ΔΓ. Ὡσαύτως καὶ αἱ πλευραὶ ΑΓ, ΔΕ εἶναι ὁμόλογοι, διότι ἀντίκεινται εἰς τὰς ἴσας γωνίας ΑΒΓ, ΔΓΕ.

Μετὰ τὸν τοιοῦτον τῶν ὁμολόγων πλευρῶν προσδιορισμὸν, αἱ παρὰ πόδας δύνανται ν' ἀποτελεσθῶσιν ἀναλογίαι,

ΑΒ : ΔΓ :: ΑΓ : ΔΕ :: ΒΓ : ΓΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19.

Θεώρημα.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἔχοντα τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους ἔχουσι καὶ τὰς ὁμολόγους γωνίας ἴσας καὶ εἶναι ὅμοια. (σχ. 120)

Ἔστω ΒΓ ; ΕΖ :: ΑΒ : ΔΕ :: ΑΓ : ΔΖ. Λέγω, ὅτι τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχουσι τὰς ὁμολόγους γωνίας ἴσας, τουτέστι Α=Δ, Β=Ε, Γ=Ζ, καὶ ἑπομένως εἶναι ὅμοια.

Εἰς τὸ σημεῖον Ε κατασκευάζω τὴν γωνίαν ΖΕΗ=Β, καὶ εἰς τὸ σημεῖον Ζ τὴν γωνίαν ΕΖΗ=Γ· ἡ τρίτη γωνία Η ἀναγκαίως εἶναι ἴση τῇ τρίτῃ γωνίᾳ Α, καὶ ἑπομένως τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΕΖΗ ἔχουσι τὰς ὁμολόγους γωνίας ἴσας καὶ εἶναι ὅμοια.

Τούτου τεθέντος, κατὰ τὴν πρότασιν τὴν προηγουμένην, ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΕΖΗ ἡ ἑξῆς προκύπτει ἀναλογία·

ΒΓ : ΕΖ :: ΑΒ : ΕΗ.

Ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν ΒΓ : ΕΖ :: ΑΒ : ΔΕ,

Ἄρα ΕΗ=ΔΕ· διότι ὅταν οἱ τρεῖς ἀντίστοιχοι δύο ἀναλογιῶν ὅροι ἦναι ἴσοι, καὶ οἱ τέταρτοι αὐτῶν ὅροι ἴσοι εἶναι.

Ἐκ τῶν αὐτῶν τριγώνων καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν πρότασιν ἡ ἀκόλουθος σχηματίζεται ἀναλογία·

ΒΓ : ΕΖ :: ΑΓ : ΖΗ.

Ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν ΒΓ : ΕΖ :: ΑΓ : ΔΖ·

Ἄρα καὶ ΖΗ=ΔΖ.

Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΕΗΖ, ΔΕΖ ἔχουσι τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα. (Πρότ. 11, βιβλ. 1). Ἀλλ' ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς τὸ τρίγωνον ΕΗΖ εἶναι ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ· ἄρα καὶ τὰ τρίγωνα ΔΕΖ, ΑΒΓ ἔχουσι τὰς ὁμολόγους γωνίας ἴσας καὶ εἶναι ὅμοια.

Σχόλιον 1. Κατὰ τὰ ἤδη ἀποδειχθέντα ἐν τοῖς τελευταίοις δύο θεωρήμασιν, εἰς τὰ τρίγωνα, τῶν γωνιῶν ἡ ἰσότης συνεπάγει τῶν πλευρῶν τὴν ἀναλογίαν, καὶ ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν συνεπάγει τῶν γωνιῶν τὴν ἰσότητα. Ἤτοι ἡ ἑτέρα τῶν δύο συνθηκῶν τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων τῆς ἑτέρας εἶναι συνέπεια· ὥστε ἡ μία τῶν συνθηκῶν αὐτῶν ἀρκεῖ πρὸς βεβαίωσιν τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων. Τοῦτο ὅμως εἰς μόνα τὰ τρίγωνα συμβαίνει· διότι καὶ εἰς τὰ τετράπλευρα καὶ εἰς πᾶν ἄλλο σχῆμα, πλειοτέρας ἔχον πλευράς, δύναταί τις τηρῶν τῶν γωνιῶν τὴν ἰσότητα ν' ἀλλάξῃ τῶν πλευρῶν τὴν ἀναλογίαν, ἢ τηρῶν τὰς αὐτὰς πλευράς, ν' ἀλλάξῃ τῆς γωνίας. Ὅθεν εἰς τὰ τοιαῦτα σχήματα τῶν γωνιῶν ἡ ἰσότης δὲν εἶναι τῆς ἀναλογίας τῶν πλευρῶν συνέπεια, καὶ ἀντιστρόφως ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν πόρισμα τῆς τῶν γωνιῶν ἰσότητος. Παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 121), ἐάν τις σύρῃ τὴν ΕΖ παράλληλον τῆς ΒΓ, σχηματίζει τὸ τετράπλευρον ΑΕΖΔ, τοῦ ὁποίου αἱ μὲν γωνίαι εἶναι ἴσαι ταῖς τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ἀλλ' ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν τῶν δύο αὐτῶν σχημάτων μετεβλήθη. Ὡσαύτως δύναταί τις νὰ μὴ ἀλλοιώσῃ μὲν κατά τι τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΑΔ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, νὰ μεταβάλῃ δὲ τὰς γωνίας, προσεγγίζων ὅσον ἂν θελήσῃ τὰ σημεῖα Β καὶ Δ.

Σχόλιον 2. Αἱ δύο τελευταῖαι προτάσεις, αἱ μίαν μόνην κυρίως ἀποτελοῦσαι, καὶ ἡ περὶ τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης, ἤτοι ἡ ἑνδεκάτη τοῦ παρόντος βιβλίου, εἶναι τὰ ἐπισημότερα καὶ χρησιμώτερα τῆς γεωμετρίας θεωρήματα· διότι καὶ ταῦτα μόνον σχεδὸν ἀρκοῦσιν εἰς πᾶσαν τῆς γεωμετρίας ἐφαρμογὴν καὶ εἰς παντὸς προβλήματος λύσιν. Συμβαίνει δὲ τοῦτο, διότι πᾶν μὲν πολύγωνον δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς τρίγωνα, πᾶν δὲ τρίγωνον εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα· ἑπομένως αἱ γενικαὶ τῶν τριγώνων ἰδιότητες περιλαμβάνουσι τὰς τῶν λοιπῶν σχημάτων. (*)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 20.

Θεώρημα.

Δύο τρίγωνα, ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, εἶναι ὅμοια. (σχ. 122)

Ἔστω ἡ γωνία Α=Δ, καὶ ἡ ἀναλογία ΑΒ : ΔΕ :: ΑΓ : ΔΖ. Λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια.

(*) Διὰ τῆς γεωμετρίας, χωρὶς τῆς βοηθείας τῶν ὁμοίων τριγώνων, δύναταί τις νὰ μετρήσῃ μόνους τοὺς προσιτοὺς καὶ βατοὺς τόπους· διὰ τῆς ἐπικουρίας δὲ τῶν τριγώνων τῶν ὁμοίων, ὄχι μόνον τὰ ἄβατα καὶ ἀπρόσιτα τῆς γῆς μέρη καταμετρεῖ, ἀλλὰ καὶ τῶν οὐρανῶν ἐπιβαίνει καὶ τὰς ἀποστάσεις αὐτῶν διορίζει.

Διὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ὁμοίων τριγώνων ὁ ἄνθρωπος ἐξέτεινε τὸ κράτος αὐτοῦ, ὑποβαλὼν εἰς μέτρον καὶ τὰ μακρὰν, καθὼς τὰ ἐγγύς, καὶ τὰ ἀπωτέρω τῆς γῆς, καθὼς καὶ τὰ ἐπὶ τῆς γῆς.

Ἰδοὺ δὲ ὁ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον τῆς μαθηματικῆς τὰ στοιχεῖα, χωρὶς τῆς τριγωνομετρίας, οὐδὲν εἶναι. Εἰς τὴν τριγωνομετρίαν κυρίως γίνεται ἡ χρησιμωτέρα τῶν ἰδιοτήτων τῶν ὁμοίων τριγώνων ἐφαρμογή. Ἡ τριγωνομετρία διανοίγει πολλῶν ἐπιστημῶν τὰς πύλας.

Πρὸς καταμέτρησιν τῶν γωνιῶν ἐγένοντο δεκτὰ τὰ τόξα, διότι τὸ τόξον εἶναι μέγεθος ἁπλούστερον τῆς γωνίας. Ἀντὶ δὲ τῶν τόξων ἤθελον προτιμηθῆ αἱ χορδαὶ, ὡς εὐθεῖαι, πρὸς καταμέτρησιν τῶν γωνιῶν, ἐὰν μεταξὺ τῶν γωνιῶν καὶ τῶν χορδῶν ὑπῆρχεν ἀναλογία. Καὶ δύναταί τις μὲν νὰ γνωρίσῃ τῆς γωνίας τὸ μέγεθος ἐκ τῆς χορδῆς τοῦ τόξου, τοῦ ἀντικειμένου, ἀλλ' ἀντὶ τῶν χορδῶν προτιμῶνται ἄλλαι τινὲς εὐθεῖαι, κάθετοι, τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ καλούμεναι, δι' ὧν ὁρίζεται ἡ πρὸς τὰς πλευρὰς τῶν τριγώνων ἄμεσος

Λαμβάνω τὴν ΑΗ=ΔΕ, καὶ ἄγω τὴν ΗΘ παράλληλον τῆς ΒΓ· Τούτων γενομένων, ἡ γωνία ΑΗΘ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ ΑΒΓ ὡς ἐναλλάξ, καὶ ἡ ΑΘΗ=ΑΓΒ, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἄρα τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΗΘ εἶναι ὅμοια· ἐκ τῶν ὁμοίων δ' αὐτῶν τριγώνων προκύπτει ἡ ἑξῆς ἀναλογία,

ΑΒ : ΑΗ :: ΑΓ : ΑΘ.

Ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν ΑΒ : ΔΕ :: ΑΓ : ΔΖ.

Ἐπειδὴ δὲ ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς ΑΗ=ΔΕ, ἐκ τῶν δύο αὐτῶν ἀναλογιῶν ἕπεται, ὅτι καὶ ΑΘ=ΔΖ. Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΗΘ, ΔΕΖ ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων· ἄρα εἶναι ἴσα. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΗΘ, ΑΒΓ εἶναι ὅμοια· λοιπὸν ὅμοια εἶναι καὶ τὰ τρίγωνα ΔΕΖ, ΑΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 21.

Θεώρημα.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἔχοντα τὰς ὁμολόγους πλευρὰς παραλλήλους, ἢ καθέτους, εἶναι ὅμοια.

Α'. Ἔστωσαν τῶν τριγώνων αἱ πλευραὶ παράλληλοι. (σχ. 123)

Ἐὰν ἡ πλευρὰ ΑΒ ἦναι παράλληλος τῆς ΔΕ, καὶ ἡ ΒΓ παράλληλος τῆς ΕΖ, ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ ΔΕΖ (Πρότ. 27, βιβλ. 1). Ἐὰν δὲ πρὸς τούτοις ἡ πλευρὰ ΑΓ ἦναι παράλληλος τῆς ΔΖ, ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ ΔΖΕ, καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ ἴση τῇ γωνίᾳ ΕΔΖ. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχουσι τὰς ὁμολόγους αὐτῶν γωνίας ἴσας, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ὅμοια.

Β'. Ἔστωσαν ἤδη τῶν τριγώνων αἱ πλευραὶ κάθετοι. (σχ. 124)

Ἔστω ἡ μὲν ΔΕ πλευρὰ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἡ δὲ πλευρὰ ΔΖ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΓ.

Τοῦ τετραπλεύρου ΑΙΔΘ αἱ γωνίαι Ι καὶ Θ εἶναι ὀρθαί. Ἐπει-

τῶν γωνιῶν αὐτῶν σχέσις. Ἤτοι, διὰ τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν, ἀνάγεται τῆς γωνίας τὸ μέγεθος εἰς μέγεθος γραμμῆς εὐθείας. Τοιουτοτρόπως δὲ ἀποφεύγει τις τὰς γραφικάς, ἤτοι τὰς ἐμπειρικὰς τῆς γεωμετρίας λύσεις, καὶ ἀντὶ τῆς ἐπισφαλοῦς τῶν γεωμετρικῶν ἐργαλείων χρήσεως, μεταχειρίζεται τὸν ὑπολογισμόν, ὅστις εἶναι τέλειος καὶ ἀκριβής.

δὴ δὲ αἱ τέσσαρες αὐτοῦ γωνίαι τέσσαρας ἀποτελοῦσι γωνίας ὀρθάς(Πρότ. 20,βιβλ. 1),αἱ λοιπαὶ δύο αὐτοῦ γωνίαι, ἡ ΙΑΘ καὶ ἡ ΙΔΘ,ὁμοῦ λαμβανόμεναι δύο ἀποτελοῦσιν ὀρθάς. Ἀλλὰ δύο ἀποτελοῦσιν ὀρθὰς καὶ αἱ δύο γωνίαι ΕΔΖ, ΙΔΘ, ὁμοῦ λαμβανόμεναι. Λοιπὸν ἡ γωνία ΕΔΖ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ ΙΑΘ ἢ ΒΑΓ.

Ὡσαύτως, ὑποτιθεμένης τῆς τρίτης πλευρᾶς ΕΖ καθέτου ἐπὶ τῆς τρίτης πλευρᾶς ΒΓ, δύναταί τις ν' ἀποδείξῃ τὴν γωνίαν ΔΖΕ =Γ, καὶ τὴν γωνίαν ΔΕΖ=Β. Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰ ἔχοντα τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καθέτους, ἔχουσι τὰς ὁμολόγους γωνίας ἴσας, καὶ ἐπομένως εἶναι ὅμοια.

Σχόλιον. Ὅταν τῶν τριγώνων αἱ πλευραὶ ἦναι παράλληλοι, ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι αἱ παράλληλοι. Ὅταν δὲ κάθετοι ἦναι τῶν τριγώνων αἱ πλευραί, ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι αἱ κάθετοι. Ἤτοι, ἐπὶ τοῦ προκειμένου παραδείγματος, ἡ ΔΕ εἶναι τῆς ΑΒ ὁμόλογος, ἡ ΔΖ τῆς ΑΓ, καὶ ἡ ΕΖ τῆς ΒΓ.

Ὅταν τῶν τριγώνων αἱ πλευραὶ ἦναι κάθετοι, ἐνδέχεται τὰ τρίγωνα ἄλλην νὰ ἔχωσι διάθεσιν, ἢ τὴν ἐν τῷ σχήματι, τὸ ὁποῖον ἤδη μετεχειρίσθημεν πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ. Πάντοτε ὅμως ἡ ὁμοιότης τῶν τριγώνων ἀποδεικνύεται, ἢ διὰ τετραπλεύρων τοιούτων, οἷον τὸ ΑΙΔΘ, ἐχόντων δηλαδὴ δύο γωνίας ὀρθάς, ἢ διὰ τῆς συγκρίσεως ὀρθογωνίων τριγώνων, κατὰ κορυφὴν ἀντικειμένων. Ἐν πάσῃ δὲ περιπτώσει δυνατὸν εἶναι νὰ κατασκευασθῇ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τρίγωνόν τι, ἔχον τὰς πλευρὰς αὐτοῦ παραλλήλους τῶν πλευρῶν τοῦ ἑτέρου τριγώνου, πρὸς ὃ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ συγκρίνεται. Τοιουτοτρόπως δὲ ἀνάγεται ἡ ἀπόδειξις εἰς τὴν τῆς περιπτώσεως τοῦ σχήματος 124.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 22.

Θεώρημα.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΖ, ΑΗ,κτλ., αἱ κατὰ θέλησιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τριγώνου τινὸς ἠγμέναι, διαιροῦσι τοῦ τριγώνου αὐτοῦ τὴν βάσιν ΒΓ καὶ τὴν παράλληλον αὐτῆς ΔΕ εἰς μέρη ἀνάλογα, τουτέστι ΔΙ : ΒΖ : : ΙΚ : ΖΗ : : ΚΛ : ΗΘ, κτλ. (σχ. 125)

Ὁ παραλληλισμὸς τῶν εὐθειῶν ΔΙ καὶ ΒΖ καθιστάνει ὅμοια τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΙ ΑΒΖ, ἐξ ὧν προκύπτει ἡ ἀναλογία αὕτη,

ΔΙ : ΒΖ : : ΑΙ : ΑΖ.

Ὡσαύτως, ἕνεκα τοῦ παραλληλισμοῦ τῶν εὐθειῶν ΙΚ, ΖΗ, ἡ ἑξῆς ὑπάρχει ἀναλογία,

ΑΙ : ΑΖ : : ΙΚ : ΖΗ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο αὗται ἀναλογίαι ἔχουσι κοινὸν τὸν λόγον ΑΙ : ΑΖ, οἱ δύο λοιποὶ λόγοι ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν, τὴν ἀκόλουθον·

ΔΙ : ΒΖ : : ΙΚ : ΖΗ.

Ἀπαραλλάκτως δύναταί τις ν'ἀποδείξῃ, ὅτι ΙΚ : ΖΗ : : ΚΛ : ΗΘ, κτλ.

Λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΔΕ διῃρέθη εἰς τὰ σημεῖα Ι,Κ,Λ, ὅπως ἡ βάσις ΒΓ διαιρεῖται εἰς τὰ σημεῖα Ζ, Η, Θ.

Πόρισμα. Λοιπὸν, ἐὰν ἡ βάσις ΒΓ ἦτον εἰς ἴσα μέρη διῃρημένη εἰς τὰ σημεῖα Ζ, Η, Θ, ἡ παράλληλος αὐτῆς ΔΕ ἤθελε διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη εἰς τὰ σημεῖα Ι, Κ, Λ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 23.

Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α τῆς ὀρθῆς γωνίας τριγώνου τινὸς ὀρθογωνίου καταβιβασθῇ ἡ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης,

Αον. Τὰ δύο μερικὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ θέλουσιν εἶσθαι ὅμοια καὶ πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς τὸ ὁλικὸν τρίγωνον ΑΒΓ.

Βον. Ἑκατέρα τῶν πλευρῶν τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ἤτοι ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΑΓ, θέλ' εἶσθαι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ τμήματος ΒΔ, ἢ ΔΓ, τοῦ εἰς τὴν πλευρὰν αὐτὴν προσκειμένου.

Γον. Ἡ κάθετος ΑΔ θέλ' εἶσθαι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τῆς ὑποτεινούνης τμημάτων ΒΔ, ΔΓ. (σχ. 126)

Αον. Τὰ δύο τρίγωνα ΒΑΔ, ΒΑΓ ἔχουσι τὴν μὲν γωνίαν Β κοινὴν, τὰς δὲ γωνίας ΒΔΑ, ΒΑΓ ἴσας, ὡς ὀρθὰς, ἐπομένως καὶ ἡ τρίτη τοῦ μικροῦ τριγώνου γωνία ΒΑΔ εἶναι ἴση τῇ τρίτῃ τοῦ μεγάλου τριγώνου γωνίᾳ Γ. Ἄρα τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια. Απαραλλάκτως δὲ ἀποδεικνύεται καὶ τῶν τριγώνων ΔΑΓ, ΒΑΓ ἡ ὁμοιότης. Λοιπὸν καὶ τὰ τρία τρίγωνα ΒΑΔ, ΔΑΓ, ΒΑΓ εἶναι ὅμοια.

Βον. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΒΑΔ, ΒΑΓ εἶναι ὅμοια, τῶν τριγώνων αὐτῶν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι. Ὁμόλογοι δὲ πλευραὶ εἶναι ἡ ΒΔ τοῦ μικροῦ τριγώνου καὶ ἡ ΒΑ τοῦ μεγάλου, διότι ἀντίκεινται εἰς τὰς ἴσας γωνίας ΒΑΔ, ΒΓΑ. Ὁμόλογοι προσέτι εἶναι καὶ αἱ δύο ὑποτείνουσαι, ἡ ΒΑ, ἡ τοῦ μικροῦ τριγώνου, καὶ ἡ ΒΓ, ἡ τοῦ μεγάλου. Ἐκ τῶν ὁμολόγων δ' αὐτῶν πλευρῶν πηγάζει ἡ ἀκόλουθος ἀναλογία·

$$ΒΔ : ΑΒ :: ΑΒ : ΒΓ.$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον κατασκευάζεται καὶ ἡ ἀναλογία,

$$ΔΓ : ΑΓ :: ΑΓ : ΒΓ.$$

Ἤτοι ἑκατέρα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ τμήματος, τοῦ εἰς αὐτὴν τὴν πλευρὰν προσκειμένου.

Γον. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΔΓ, διὰ τῆς συγκρίσεως τῶν πλευρῶν τῶν ὁμολόγων, αὕτη προκύπτει ἡ ἀναλογία·

$$ΒΔ : ΑΔ :: ΑΔ : ΔΓ.$$

Ἤτοι ἡ κάθετος ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν τῆς ὑποτεινούσης τμημάτων ΒΔ, ΔΓ.

Σχόλιον. Ἐκ τῶν ἀναλογιῶν ΒΔ : ΑΒ :: ΑΒ : ΒΓ, καὶ ΔΓ : ΑΓ :: ΑΓ : ΒΓ, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἄκρων καὶ τῶν μέσων ἑκάστης αὐτῶν, παράγονται αἱ δύο ἐξισώσεις αὗται,

$$\overline{ΑΒ}^2 = ΒΔ \times ΒΓ$$

$$\overline{ΑΓ}^2 = ΔΓ \times ΒΓ.$$

Προστιθεμένων τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων κατὰ μέλη, ἡ ἀκόλουθος ἀποτελεῖται ἐξίσωσις·

$$\overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΑΓ}^2 = ΒΔ \times ΒΓ + ΔΓ \times ΒΓ.$$

Ἥτις γράφεται καὶ οὕτω $\overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΑΓ}^2 = (ΒΔ + ΔΓ) \times ΒΓ.$

Ἤ, ἀναγωγῆς γενομένης, $\overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΑΓ}^2 = ΒΓ \times ΒΓ$·

Ἢ $\overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΑΓ}^2 = \overline{ΒΓ}^2.$

Τὸ τετράγωνον δηλαδὴ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν. Ἤτοι δι' ἄλλης ὁδοῦ περιήλθομεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς αὐτῆς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἰδιότητος, περὶ ἧς κατὰ τρόπον ἄλλον ἐπραγματεύθημεν ἐν τοῖς προηγουμένοις.

Κυρίως λοιπὸν τὸ περὶ τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης θεώρημα εἶναι πόρισμά τι τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων. Τοιουτοτρόπως δὲ αἱ θεμελιώδεις τῆς γεωμετρίας προτάσεις ἀνάγονται εἰς μίαν μόνην, καθ' ἣν τὰ τρίγωνα, τὰ ἔχοντα τὰς ὁμολόγους γωνίας ἴσας, ἔχουσι καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους.

Πολλάκις συμβαίνει, ὡς ἤδη παρετηρήθη τούτου παράδειγμα, ἐκ τῶν πορισμάτων προτάσεώς τινος ἡ ἀπόδειξις προτάσεως ἄλλης ἤδη ἀποδεδειγμένης νὰ προκύψῃ. Ἐν γένει δὲ τὸ ἰδιάζον χαρακτηριστικὸν τῶν γεωμετρικῶν θεωρημάτων γνώρισμα, ἡ ἀκαταμάχητος ἀπόδειξις τῆς ὀρθότητος καὶ ἀκριβείας των εἰς τοῦτο κυρίως συνίσταται, ὁπωσδήποτε δηλαδὴ καὶ ἂν συνδυάσῃ τις τὰ θεωρήματα αὐτὰ, ἀρκεῖ μόνον ὀρθῶς νὰ συλλογίζηται, εἰς ὀρθὰ καὶ ἀκριβῆ περιπίπτει πάντοτε ἐξαγόμενα. Τοιοῦτόν τι δὲ δὲν ἤθελε συμβῇ, ἂν πρότασίς τις ἦτον ὅλως ἄτοπος ἢ κατά τι ἐσφαλμένη· διότι τὸ σφάλμα πολλαπλασιαζόμενον ἤθελε κατασταθῇ φανερὸν, ἅμα ἡ πρότασις μετ' ἄλλων συνδυαζομένη εἰς σφάλματος μείζονος παραγωγὴν συνετέλει. Παρατηρεῖται δὲ τοῦτο εἰς ὅλας τὰς διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ἀποδείξεις, τὰς ὁποίας πολλάκις μετεχειρίσθημεν. Αἱ τοιαῦται ἀποδείξεις, δι' ὧν προτιθέμεθα νὰ βεβαιώσωμεν δύο ποσῶν τὴν ἰσότητα, συνίστανται εἰς τὸ νὰ δείξωμεν, ὅτι καὶ ἡ ἐλαχίστη ἂν ὑπῆρχε μεταξὺ αὐτῶν ἀνισότης, σειρά τις συλλογισμῶν ἤθελε μᾶς φέρει εἰς ἄτοπον προφανὲς καὶ ψηλαφητόν. Ὅθεν ἡ προφανὴς αὕτη ἀτοπία μᾶς ἀναγκάζει νὰ παραδεχθῶμεν, ὅτι ἡ ἰσότης τῶν ποσῶν, τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος, ὑπάρχει.

Πόρισμα. Ἐὰν ἀπό τινος σημείου Α περιφερείας τινὸς ἀχθῶσιν εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου ΒΓ αἱ δύο χορδαὶ ΑΒ, ΑΓ, τὸ οὕτω σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ σημεῖον Α (Πρότ. 18, βιβλ. 2). (σχ. 127)

Τούτου τεθέντος, Α'. ἡ κάθετος ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τῆς διαμέτρου τμημάτων ΒΔ, ΔΓ· ἢ, ἐν ἄλλοις λόγοις, τὸ τετράγωνον $\overline{\text{ΑΔ}}^2$ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΔ×ΔΓ εἶναι ἴσα.

Β'. Ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΒΓ καὶ τοῦ προσκειμένου τμήματος ΒΔ, ἢ, κατ' ἔκφρασιν ἄλλην,

$\overline{AB}^2 = B\Delta \times B\Gamma$. Παρομοίως $\overline{A\Gamma}^2 = \Gamma\Delta \times B\Gamma$. Λοιπὸν $\overline{AB}^2 : \overline{A\Gamma}^2 :: B\Delta : \Gamma\Delta$. Ἐκ τῆς παραβολῆς δὲ τοῦ $\overline{AB}^2$ καὶ $\overline{B\Gamma}^2$ προκύπτει ἡ ἀναλογία $\overline{AB}^2 : \overline{B\Gamma}^2 :: B\Delta : B\Gamma$. Παρομοίως $\overline{A\Gamma}^2 : \overline{B\Gamma}^2 :: \Delta\Gamma : B\Gamma$.

Αὗται αἱ σχέσεις τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἀπεδείχθησαν ἐν τοῖς πορίσμασι 3 καὶ 4 τῆς 11 προτάσεως τοῦ βιβλίου τούτου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 24.

Θεώρημα.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ὀρθογώνια τῶν πλευρῶν, τῶν περιεχουσῶν τὴν ἴσην αὐτὴν γωνίαν. Τουτέστι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει τὸν αὐτὸν πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον $AB \times A\Gamma$ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $A\Delta \times AE$. (σχ. 128)

Ἄγω τὴν εὐθεῖαν ΒΕ.

Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΔΕ, ἔχουσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν Ε καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν ΑΒ, ΑΔ (Πρότ. 6, βιβλ. 3). Λοιπὸν,

$$ABE : A\Delta E :: AB : A\Delta.$$

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον $AB\Gamma : ABE :: A\Gamma : AE$.

Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν αἱ δύο αὗται ἀναλογίαι κατὰ τάξιν, ἤτοι ὅρος ἐπὶ ὅρον, καὶ ὁ κοινὸς παράγων ΑΒΕ ἀποβληθῇ, ἡ ἀκόλουθος προκύπτει ἀναλογία,

$$AB\Gamma : A\Delta E :: AB \times A\Gamma : A\Delta \times AE.$$

Πόρισμα. Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ εἶναι ἴσα, ἐὰν ἴσα ἦναι τὰ δύο ὀρθογώνια $AB \times A\Gamma$, $A\Delta \times AE$, ἢ ἐὰν ἡ ἑξῆς ὑπάρχῃ ἀναλογία $AB : A\Delta :: AE : A\Gamma$. Ὑπάρχει δὲ ἡ ἀναλογία αὕτη, ἐὰν ΔΓ ἦναι παράλληλος τῆς ΒΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 25.

Θεώρημα.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν αὐτῶν τῶν ὁμολόγων. (σχ. 122)

Ἔστω ἡ γωνία Α=Δ, καὶ ἡ γωνία Β=Ε.

Ἐν πρώτοις, κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Α καὶ Δ εἶναι ἴσαι, ἡ ἑξῆς ἀποτελεῖται ἀναλογία·

$$ΑΒΓ : ΔΕΖ :: ΑΒ \times ΑΓ : ΔΕ \times ΔΖ. \quad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ὅμοια, καὶ αὕτη ὑπάρχει ἡ ἀναλογία·

$$ΑΒ : ΔΕ :: ΑΓ : ΔΖ.$$

Πολλαπλασιαζομένων δὲ τῶν ὅρων τῆς ἀναλογίας ταύτης ἐπὶ τοὺς ἀντιστοιχοῦντας ὅρους τῆς ἀκολούθου ταυτότητος,

$$ΑΓ : ΔΖ :: ΑΓ : ΔΖ,$$

Ἡ ἀναλογία προκύπτει αὕτη,

$$ΑΒ \times ΑΓ : ΔΕ \times ΔΖ :: ΑΓ^2 : ΔΖ^2. \quad (2)$$

Ἄρα [παραβαλλομένων τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2)]

$$ΑΒΓ : ΔΕΖ :: ΑΓ^2 : ΔΕ^2.$$

Λοιπὸν τὰ δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν αὐτῶν ΑΓ, ΔΖ, τῶν ὁμολόγων, ἢ πρὸς τὰ τετράγωνα δύο ὁμολόγων πλευρῶν ἄλλων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 26.

Θεώρημα.

Δύο ὅμοια πολύγωνα ἀναλύονται εἰς ἰσοπληθῆ τρίγωνα, κατὰ ζεύγη ὅμοια, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένα. (σχ. 129)

Εἰς τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ ἄγω ἀπὸ τῆς αὐτῆς γωνίας Α τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ, καὶ εἰς τὸ πολύγωνον ΖΗΘΙΚ ἄγω ἀπὸ τῆς γωνίας Ζ, ὁμολόγου τῆς Α, τὰς διαγωνίους ΖΘ, ΖΙ.

Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα εἶναι ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι γωνίαι ΑΒΓ, ΖΗΘ εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ περιέχουσαι αὐτὰς πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΖΗ, ΗΘ εἶναι ἀνάλογοι· τουτέστι ΑΒ : ΖΗ :: ΒΓ : ΗΘ. Ἤτοι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΖΗΘ ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, καὶ ἐπομένως εἶναι ὅμοια (Πρότ. 20, βιβλ. 3). Ἄρα καὶ ἡ γωνία ΒΓΑ=ΗΘΖ. Ἀφαιρουμένων δὲ τῶν δύο τούτων ἴσων γωνιῶν ἀπὸ τῶν ἴσων γωνιῶν ΒΓΔ, ΗΘΙ, μένουσιν ὑπόλοιπα αἱ δύο γωνίαι ΑΓΔ, ΖΘΙ, αἵτινες εἶναι ἴσαι, διότι γωνίαι ἴσαι ἀπὸ ἴσων ἀφηρέθησαν. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος δὲ τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΖΗΘ, πορίζόμεθα τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν,

ΑΓ : ΖΘ : : ΒΓ : ΗΘ.

Ἐκ δὲ τῆς ὁμοιότητος τῶν πολυγώνων συνάγομεν ταύτην,

ΒΓ : ΗΘ : : ΓΔ : ΘΙ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο αὗται ἀναλογίαι ἔχουσι κοινὸν τὸν λόγον ΒΓ : ΗΘ, οἱ δύο λοιποὶ αὐτῶν λόγοι ἀποτελοῦσι τὴν ἀκόλουθον ἀναλογίαν ΑΓ : ΖΘ : : ΓΔ : ΘΙ.

Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΔ, ΖΘΙ ἔχουσι τὰς μὲν δύο ὁμολόγους γωνίας ΑΓΔ, ΖΘΙ ἴσας, τὰς δὲ πλευρὰς ΑΓ, ΓΔ, ΖΘ, ΘΙ, ἐξ ὧν αἱ γωνίαι αὐταὶ ἀποτελοῦνται, ἀναλόγους· ἄρα εἶναι ὅμοια.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δύναταί τις ν' ἀποδείξῃ καὶ τῶν λοιπῶν τριγώνων τὴν ὁμοιότητα, ὁσαιδήποτε ἂν ἦναι τῶν πολυγώνων αἱ πλευραί. Ἄρα δύο ὅμοια πολύγωνα ἀναλύονται εἰς τρίγωνα ἰσοπληθῆ, ὅμοια κατὰ ζεύγη, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένα.

Σχόλιον. Καὶ ἡ ἀντίστροφος πρότασις ἀληθεύει. Ἤτοι δύο πολύγωνα, συνιστάμενα ἐξ ἴσου πλήθους τριγώνων, ὁμοίων κατὰ ζεύγη, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένων, εἶναι ὅμοια.

Διότι ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ἀντιστοίχων τριγώνων ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ=ΖΗΘ, ἡ δὲ ΒΓΑ=ΗΘΖ, καὶ ἡ ΑΓΔ=ΖΘΙ. Ἄρα ἡ γωνία ΒΓΔ=ΗΘΙ. Παρομοίως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ γωνία ΓΔΕ =ΘΙΚ, κτλ. Πρὸς τούτοις ἡ ἀκόλουθος προκύπτει τῶν ἴσων λόγων σειρὰ ΑΒ : ΖΗ : : ΒΓ : ΗΘ : : ΑΓ : ΖΘ : : ΓΔ : ΘΙ, κτλ. Λοιπὸν τὰ δύο πολύγωνα ἔχουσι τὰς μὲν γωνίας ἴσας, τὰς δὲ πλευρὰς ἀναλόγους· ἄρα εἶναι ὅμοια.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 27.

Θεώρημα.

Τῶν ὁμοίων πολυγώνων, αἱ μὲν περίμετροι, εἶναι πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀνάλογοι, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τὰ τετράγωνα. (σχ. 129),

Α^{ον}. Ἐκ τῆς φύσεως τῶν ὁμοίων σχημάτων ἕπεται, ὅτι

ΑΒ : ΖΗ : : ΒΓ : ΗΘ : : ΓΔ : ΘΙ, κτλ.

Ἐκ ταύτης δὲ τῆς σειρᾶς τῶν λόγων τῶν ἴσων δύναταί τις νὰ σχηματίσῃ τὴν ἀκόλουθον ἀναλογίαν·

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+κτλ., ἤτοι ἡ περίμετρος τοῦ πρώτου πολυγώνου

Πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων ΖΗ+ΗΘ+ΘΙ κτλ., ἤτοι ἡ περίμετρος τοῦ δευτέρου πολυγώνου

Ὡς ἡγούμενός τις

Πρὸς τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ,

Ἢ ὡς ἡ πλευρὰ ΑΒ πρὸς τὴν ὁμόλογον αὐτῆς ΖΗ.

Λοιπὸν αἱ περίμετροι τῶν ὁμοίων πολυγώνων εἶναι πρὸς τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀνάλογοι.

Β'ον. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ,ΖΗΘ εἶναι ὅμοια, ταύτην δύναταί τις νὰ σχηματίσῃ τὴν ἀναλογίαν (Πρότ. 25, βιβλ. 3).

$$\text{ΑΒΓ} : \text{ΖΗΘ} :: \overline{\text{ΑΓ}}^2 : \overline{\text{ΖΘ}}^2.$$

Ὡσαύτως ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΓΔ, ΖΘΙ ἡ ἑξῆς προκύπτει ἀναλογία,

$$\text{ΑΓΔ} : \text{ΖΘΙ} :: \overline{\text{ΑΓ}}^2 : \overline{\text{ΖΘ}}^2.$$

Λοιπόν, ἕνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου $\overline{\text{ΑΓ}}^2 : \overline{\text{ΖΘ}}^2$, ἡ ἀκόλουθος ἀποτελεῖται ἀναλογία·

$$\text{ΑΒΓ} : \text{ΖΗΘ} :: \text{ΑΓΔ} : \text{ΖΘΙ}.$$

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν καὶ τὴν ἀναλογίαν ταύτην,

$$\text{ΑΓΔ} : \text{ΖΘΙ} :: \text{ΑΔΕ} : \text{ΖΙΚ}.$$

Καὶ οὕτω καθεξῆς, ἐὰν καὶ ἄλλα ὑπῆρχον τρίγωνα.

Λοιπὸν ὑπάρχει τῶν ἴσων λόγων ἡ σειρὰ αὐτη

$$\text{ΑΒΓ} : \text{ΖΗΘ} :: \text{ΑΓΔ} : \text{ΖΘΙ} :: \text{ΑΔΕ} : \text{ΖΙΚ}.$$

Ἐκ ταύτης δὲ τῆς σειρᾶς πορίζόμεθα τὴν ἀναλογίαν,

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ΑΒΓ+ΑΓΔ+ΑΔΕ, ἤτοι τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ

Πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων ΖΗΘ+ΖΘΙ+ΖΙΚ, ἤτοι τὸ πολύγωνον ΖΗΘΙΚ

Ὡς ἡγούμενός τις ΑΒΓ

Πρὸς τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ ΖΗΘ,

Ἢ ὡς $\overline{\text{ΑΒ}}^2 : \overline{\text{ΖΗ}}^2$.

Λοιπὸν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ὁμοίων πολυγώνων εἶναι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ἀνάλογοι.

Πόρισμα. Ἐὰν ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, ὡς ἐπὶ πλευρῶν ὁμολόγων, κατασκευασθῶσι τρία ὅμοια πολύγωνα, τὸ πολύγωνον, τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης κατεσκευασμένον, ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν δύο λοιπῶν πολυγώνων. Διότι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν πολυγώνων αὐτῶν εἶναι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ἀνάλογοι. Ἀλλὰ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τὰ τετράγωνα ἔχουσι τοιαύτην σχέσιν πρὸς ἄλληλα, οἵαν ἔχουσι τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, ἄρα κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 28.

Θεώρημα.

Τὰ τέσσαρα τμήματα τῶν δύο χορδῶν ΑΒ, ΓΔ, τῶν ἐντὸς κύκλου διασταυρουμένων, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὅ ἐστι τὴν ἑξῆς ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν ΑΟ : ΔΟ : : ΓΟ : ΟΒ. (σχ. 130)

Ἄγω τὰς εὐθείας ΑΓ καὶ ΒΔ.

Τῶν τριγώνων ΑΓΟ, ΒΟΔ αἱ εἰς τὸ σημεῖον Ο κατὰ κορυφὴν ἀντικείμεναι γωνίαι εἶναι ἴσαι. Ἴσαι ὡσαύτως εἶναι καὶ αἱ δύο αὐτῶν γωνίαι Α καὶ Δ, διότι εἰς τὸ αὐτὸ τοῦ κύκλου τμῆμα εἶναι ἐγγεγραμμέναι (Πρότ. 18, βιβλ. 2). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ γωνία Γ=Β. Ἄρα τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια· αἱ ὁμόλογοι δὲ πλευραὶ αὐτῶν τὴν ἀκόλουθον ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν·

ΑΟ : ΔΟ : : ΓΟ : ΟΒ.

Πόρισμα. Ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης ἡ ἑξῆς σχηματίζεται ἐξίσωσις ΑΟ×ΟΒ=ΔΟ×ΓΟ. Ἤτοι τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῶν δύο τμημάτων τῆς ἑτέρας τῶν χορδῶν, καὶ τὸ ὀρθογώνιον, τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τῶν δύο τμημάτων τῆς χορδῆς τῆς ἄλλης, εἶναι ἴσα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 29.

Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπό τινος σημείου Ο, ἐκτὸς κύκλου ὑπάρχοντος, ἀχθῶσιν αἱ διατέμνουσαι ΟΒ, ΟΓ μέχρι τοῦ κοίλου τόξου ΒΓ, ὁλόκληροι αἱ διατέμνουσαι εἶναι ἀντιστρόφως πρὸς τὰ ἐξωτερικὰ αὐτῶν μέρη ἀνάλογοι· ὅ ἐςι ἡ ἀκόλουθος ἀποτελεῖται ἀναλογία ΟΒ : ΟΓ : : ΟΔ : ΟΑ. (σχ. 131)

Ἄγω τὰς εὐθείας ΑΓ καὶ ΒΔ.

Τὰ τρίγωνα ΟΑΓ, ΟΒΔ ἔχουσι τὴν γωνίαν Ο κοινὴν, καὶ τὴν γωνίαν Β=Γ (Πρότ. 18, βιβλ. 2). Λοιπὸν τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια· ἑπομένως αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ τὴν ἀκόλουθον ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν·

ΟΒ : ΟΓ :: ΟΔ : ΟΑ.

Πόρισμα. Λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΟΑ$\times$ΟΒ εἶναι ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ ΟΓ$\times$ΟΔ.

Σχόλιον. Εὐκόλως παρατηρεῖται, ὅτι τὸ θεώρημα τοῦτο πολλὴν ἔχει πρὸς τὸ προηγούμενον ἀναλογίαν. Δὲν διαφέρει δὲ αὐτοῦ, εἰ μὴ κατὰ τῶν χορδῶν ΑΒ, ΓΔ τὴν τομήν. Καὶ τῷ ὄντι· εἰς μὲν τὸ προηγούμενον θεώρημα αἱ χορδαὶ αὐταὶ ἐτέμνοντο ἐντὸς τοῦ κύκλου, εἰς δὲ τὸ παρὸν τέμνονται ἐκτός. Ἡ πρότασις δὲ ἡ ἑπομένη μερική τις εἶναι τῆς παρούσης περίστασις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 30.

Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπό τινος σημείου Ο, ἐκτὸς κύκλου ὑπάρχοντος, ἀχθῶσιν ἡ ἐφαπτομένη ΟΑ καὶ ἡ διατέμνουσα ΟΓ, ἡ ἐφαπτομένη εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὅλης διατεμνούσης καὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ ταύτης μέρους· ὅ ἐστιν ἡ ἑξῆς ὑπάρχει ἀναλογία ΟΓ : ΟΑ : : ΟΑ : ΟΔ, ἢ ἡ ἰσότης αὐτη $\overline{\mathrm{O A}}^2=\mathrm{O}\Gamma\times\mathrm{O}\Delta$. (σχ. 132)

Ἄγω τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΑΓ.

Τὰ τρίγωνα ΟΑΔ, ΟΑΓ ἔχουσι τὴν γωνίαν Ο κοινήν. Προσέτι δὲ ἡ γωνία ΟΑΔ, ἡ ἐκ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης ἀποτελουμένη, μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΔ (Πρότ. 19, βιβλ. 2). Τὸ αὐτὸ δὲ μέτρον ἔχει καὶ ἡ γωνία Γ. Λοιπὸν ἡ γωνία ΟΑΔ=Γ. Ἄρα τὰ περὶ οὗ ὁ λόγος τρίγωνα εἶναι ἴσα· ἑπομένως ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτῶν τῶν ὁμολόγων ἡ ἀκόλουθος συγκροτεῖται ἀναλογία,

ΟΓ : ΘΑ : : ΟΑ ; ΟΔ,

ἐξ ἧς ἀποτελεῖται ἡ ἐξίσωσις αὐτη $\overline{\mathrm{O A}}^2=\mathrm{O}\Gamma\times\mathrm{O}\Delta$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 31.

Θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου τινὸς ΑΒΓ ἡ γωνία Α εἰς δύο ἴσα διαιρεθῇ μέρη διὰ τῆς εὐθείας ΑΔ, τὸ ὀρθογώνιον τῶν τμημάτων ΒΔ, ΔΓ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς διατεμνούσης ΑΔ, ὁμοῦ λαμβανόμενα, ἐξισοῦνται τῷ ὀρθογωνίῳ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ. (σχ. 133).

Διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ ἄγω περιφέρειαν κύκλου. Ἐκτείνω δὲ τὴν ΑΔ ἕως οὗ συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν αὐτὴν, καὶ σύρω τὴν ΓΕ.

Τὸ τρίγωνον ΒΑΔ καὶ τὸ τρίγωνον ΕΑΓ ἔχουσιν ἐξ ὑποθέσεως τὴν γωνίαν ΒΑΔ=ΕΑΓ· πρὸς τούτοις δὲ ἡ γωνία Β=Ε· διότι ἀμφότεραι αἱ γωνίαι αὗται μέτρον ἔχουσι τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΓ. Ἑπομένως τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια καὶ αὕτη ὑπάρχει ἡ ἀναλογία,

$$\text{ΒΑ} : \text{ΑΕ} :: \text{ΑΔ} : \text{ΑΓ}.$$

Ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἀναλογίας αὕτη προκύπτει ἡ ἰσότης ΒΑ$\times$ΑΓ=ΑΕ$\times$ΑΔ. Ἀλλὰ ΑΕ=ΑΔ+ΔΕ. Πολλαπλασιασθέντων δὲ καὶ τῶν δύο ταύτης τῆς ἐξισώσεως μελῶν ἐπὶ ΑΔ, ἡ ἰσότης παράγεται αὕτη, ΑΕ$\times$ΑΔ=$\overline{\text{ΑΔ}}^2$+ΑΔ$\times$ΔΕ. Ἀλλὰ ΑΔ$\times$ΔΕ= ΒΔ$\times$ΔΓ (Πρότ. 28, βιβλ. 3)· ἄρα

$$\text{ΒΑ}\times\text{ΑΓ}=\overline{\text{ΑΔ}}^2+\text{ΒΔ}\times\text{ΔΓ}.$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 32.

Θεώρημα.

Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον, τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῆς διαμέτρου ΓΕ τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου καὶ τῆς καθέτου ΑΔ, τῆς καταβιβαζομένης ἐπὶ τῆς τρίτης πλευρᾶς ΒΓ, εἶναι ἴσα. (σχ. 134)

Ἄγω τὴν ΑΕ.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΕΓ εἶναι ὀρθογώνια, τὸ μὲν εἰς τὸ Δ, τὸ δὲ εἰς τὸ Α· προσέτι δὲ ἔχουσι καὶ τὴν γωνίαν Β=Ε. Ἑπομένως τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια, καὶ ἐξ αὐτῶν αὕτη παράγεται ἡ ἀναλογία,

ΑΒ : ΓΕ : : ΑΔ : ΑΓ.

Ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἀναλογίας αὕτη προκύπτει ἡ ἰσότης ΑΒ$\times$ΑΓ$=$ΓΕ$\times$ΑΔ.

Πόρισμα. Ἐὰν καὶ τὰ δύο ταύτης τῆς ἰσότητος μέλη ἐπὶ ΒΓ πολλαπλασιασθῶσιν, αὕτη ἀποτελεῖται ἡ ἰσότης ΑΒ$\times$ΑΓ$\times$ΒΓ $=$ΓΕ$\times$ΑΔ$\times$ΒΓ. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον ΑΔ$\times$ΒΓ ἐκφράζει τὸ διπλάσιον τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου (Πρότ. 6, βιβλ. 3)· ἄρα τὸ γινόμενον τῶν τριῶν παντὸς τριγώνου πλευρῶν εἶναι ἴσον τῇ τοῦ τριγώνου ἐπιφανείᾳ, πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ τὸ διπλάσιον τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Τὸ γινόμενον τριῶν εὐθειῶν καλεῖται ἐνίοτε *στερεόν*· τῆς τοιαύτης δὲ ὀνομασίας τὸ αἴτιον θέλει ἑρμηνευθῆ κατόπιν. Ἐννοεῖται δὲ τοῦ γινομένου αὐτοῦ ἡ ἀξία εὐκόλως, ἐὰν τοῦ τριγώνου αἱ πλευραὶ δι' ἀριθμῶν παρασταθῶσι, καὶ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπ' ἀλλήλους.

Σχόλιον. Ἰδοὺ δὲ καὶ τίνι τρόπῳ ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἐκφράζεται διὰ τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. (σχ. 87)

Τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΑΟΓ, τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ ὑπάρχει εἰς τὸ σημεῖον Ο, ἔχουσι κοινὸν ὕψος τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου· τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν τριῶν αὐτῶν τριγώνων ἀποτελεῖ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΑΟΓ ἐκφράζεται διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ΟΔ, τὸ ποσὸν τοῦτο χρησιμεύει καὶ πρὸς παράστασιν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Λοιπὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὸ ἐμβαδὸν ἐκφράζεται διὰ τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου αὐτοῦ, πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 33.

Θεώρημα.

Τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ, παντὸς ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν ὀρθογωνίων τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τῶν ἀντικειμένων, ὅ ἐστι

ΑΓ$\times$ΒΔ$=$ΑΒ$\times$ΓΔ$+$ΑΔ$\times$ΒΓ. (σχ. 135)

Λαμβάνω τὸ τόξον ΓΟ=ΑΔ, καὶ ἄγω τὴν ΒΟ, ἥτις συναπαντᾷ τὴν διαγώνιον ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ι.

Ἡ γωνία ΑΒΔ=ΓΒΙ, διότι ἡ μὲν μέτρον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΔ, ἡ δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ΓΟ, τοῦ ὄντος ἴσου τῷ ΑΔ. Πρὸς τούτοις δὲ ἡ γωνία ΑΔΒ=ΒΓΙ, διότι ἀμφότεραι αἱ γωνίαι αὗται εἰς τὸ αὐτὸ τοῦ κύκλου τμῆμα ΑΟΒ εἶναι ἐγγεγραμμέναι. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΙΒΓ εἶναι ὅμοια. Ὅθεν ἡ ἑξῆς προκύπτει ἀναλογία,

ΑΔ : ΓΙ : : ΒΔ : ΒΓ.

Ἐξ ἧς πηγάζει ἡ ἰσότης ΑΔ×ΒΓ=ΓΙ×ΒΔ. (1)

Ἐπειδὴ δὲ τὸ τόξον ΑΔ=ΓΟ, προστιθεμένου εἰς ἀμφότερα τὰ δύο ἴσα ταῦτα τόξα τοῦ τόξου ΟΔ, προκύπτει ἡ ἰσότης αὕτη ΑΟ=ΔΓ. Λοιπὸν ἡ γωνία ΑΒΙ=ΔΒΓ. Πρὸς τούτοις ἡ γωνία ΒΑΙ=ΒΔΓ, διότι ἀμφότεραι αἱ ἴσαι αὗται γωνίαι εἰς τὸ αὐτὸ τοῦ κύκλου τμῆμα εἶναι ἐγγεγραμμέναι.

Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΙ, ΔΒΓ εἶναι ὅμοια, ἐξ αὐτῶν δὲ ἡ ἀκόλουθος γεννᾶται ἀναλογία,

ΑΒ : ΒΔ : : ΑΙ : ΓΔ.

Ἐξ ἧς προκύπτει ἡ ἰσότης ΑΒ×ΓΔ=ΑΙ×ΒΔ. (2)

Προστιθεμένων δὲ κατὰ μέλος τῶν δύο ἰσοτήτων (1) καὶ (2), αὕτη παράγεται ἡ ἰσότης,

ΑΔ×ΒΓ+ΑΒ×ΓΔ=ΓΙ×ΒΔ+ΑΙ×ΒΔ.

Ἀλλὰ ΓΙ×ΒΔ+ΑΙ×ΒΔ=(ΓΙ+ΑΙ)×ΒΔ=ΑΓ×ΒΔ.

Ἄρα ΑΔ×ΒΓ+ΑΒ×ΓΔ=ΑΓ×ΒΔ.

Σχόλιον. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δύναταί τις ν' ἀποδείξῃ καὶ ἕτερον τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου θεώρημα, τὸ ἑξῆς.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΙΓ χορηγοῦσι τὴν ἀναλογίαν ταύτην,

ΒΔ : ΒΓ : : ΑΒ : ΒΙ.

Ὅθεν ΒΙ×ΒΔ=ΒΓ×ΑΒ. (3)

Ἄγω τὴν ΓΟ.

Τὰ τρίγωνα ΙΓΟ, ΑΒΙ εἶναι ὅμοια, ἑπομένως ὅμοια εἶναι καὶ τὰ τρίγωνα ΙΓΟ, ΒΔΓ. Ἐκ τῶν τριγώνων δὲ τούτων αὕτη σχηματίζεται ἡ ἀναλογία,

ΒΔ : ΓΟ : : ΔΓ : ΟΙ.

Ὅθεν ΟΙ×ΒΔ=ΓΟ×ΔΓ· ἢ, ἐπειδὴ ΓΟ=ΑΔ,

ΟΙ×ΒΔ=ΑΔ×ΔΓ. (4)

Προστιθεμένων δὲ κατὰ μέλος τῶν δύο ἰσοτήτων (3) καὶ (4), αὕτη προκύπτει ἡ ἰσότης,

$$BI \times B\Delta + OI \times B\Delta = B\Gamma \times AB + A\Delta \times \Delta\Gamma.$$

Ἀλλὰ $BI \times B\Delta + OI \times B\Delta = (BI + OI) \times B\Delta = BO \times B\Delta.$

Ἄρα $BO \times B\Delta = B\Gamma \times AB + A\Delta \times \Delta\Gamma.$

Ἐὰν ληφθῇ τὸ τόξον ΒΠ=ΑΔ, καὶ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΚΠ, δι' ὁμοίων συλλογισμῶν αὕτη προσδιορίζεται ἡ ἰσότης·

$$\Gamma\Pi \times \Gamma A = AB \times A\Delta + B\Gamma \times \Gamma\Delta.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ τόξον ΒΠ=ΓΟ, διὰ τῆς εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη προσθήκης τοῦ τόξου ΒΓ, σχηματίζεται τὸ τόξον ΓΒΠ=ΒΓΟ. Λοιπὸν αἱ χορδαὶ ΓΠ, ΒΟ εἶναι ἴσαι· ἑπομένως τὰ ὀρθογώνια $BO \times B\Delta$, $\Gamma\Pi \times \Gamma A$ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς εὐθείας ΒΔ, ΓΑ.

Ἄρα

$$B\Delta : \Gamma A :: AB \times B\Gamma + A\Delta \times \Delta\Gamma : AB \times A\Delta + B\Gamma \times \Gamma\Delta.$$

Ὅ ἐστι μεθερμηνευόμενον,

Αἱ διαγώνιοι παντὸς ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἀθροίσματα τῶν ὀρθογωνίων τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου αὐτοῦ, τῶν συνερχομένων εἰς τῶν διαγωνίων τὰ ἄκρα.

Διὰ τῶν δύο ἤδη ἀποδειχθέντων θεωρημάτων δύναταί τις νὰ προσδιορίσῃ τὰς διαγωνίους, τῇ βοηθείᾳ τῶν πλευρῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 34.

Θεώρημα.

Ἔστω Π σημεῖόν τι τῆς ἀκτῖνος ΑΓ κύκλου τινός, ἂς ληφθῇ δὲ ἐκτὸς τοῦ κύκλου αὐτοῦ, ἐπὶ τῆς παρατάσεως τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος, τὸ σημεῖον Κ οὕτως, ὥστε αὕτη ν' ἀποτελῆται ἡ ἀναλογία ΓΠ : ΓΑ : : ΓΑ : ΓΚ. Ἐὰν ἀπὸ οἱουδήποτε τῆς περιφερείας σημείου Μ ἀχθῶσιν εἰς τὰ σημεῖα Π καὶ Κ αἱ δύο εὐθεῖαι ΜΠ, ΜΚ, λέγω ὅτι τῶν δύο αὐτῶν εὐθειῶν ὁ λόγος εἶναι σταθερός, καὶ ὅτι πάντοτε θέλει ἀποτελεῖσθαι ἡ ἀναλογίααὕτη ΜΠ : ΜΚ : : ΑΠ : ΑΚ. (σχ. 136)

Διότι ἡ ἀναλογία ΓΠ : ΓΑ : : ΓΑ : ΓΚ, ἡ κατὰ τὰς συνθήκας τῆς προτάσεως ὑπάρχουσα, διὰ τῆς ἀντεισαγωγῆς τῆς ΓΜ ἀντὶ τῆς ΓΑ, τρέπεται εἰς ταύτην ΓΠ : ΓΜ :: ΓΜ : ΓΚ. Ὅθεν ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΓΠΜ, ΓΚΜ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων (Πρότ. 20, βιβλ. 3). Ἐκ τῆς ὁμοιότητος δὲ τῶν τριγώνων αὐτῶν ταύτην πορίζόμεθα τὴν ἀναλογίαν ΜΠ : ΜΚ : : ΓΠ : ΓΜ, ἢ ΓΑ. Ἀλλ' ἡ ἀναλογία ΓΠ : ΓΑ :: ΓΑ : ΓΚ ταύτην παράγει ΓΠ : ΓΑ :: ΓΑ—ΓΠ : ΓΚ—ΓΑ, ὅ ἐστι, ταύτην ΓΠ : ΓΔ : : ΑΠ : ΑΚ· ἄρα ΜΠ : ΜΚ : : ΑΠ : ΑΚ (*).

Προβλήματα τοῦ τρίτου βιβλίου σχετικά.

Πρόβλημα πρῶτον.

Διαίρεσον γνωστήν τινα εὐθεῖαν εἰς μερῶν ἴσων πλῆθος ὡρισμένον, ἢ εἰς τμήματα ἀνάλογα πρὸς εὐθείας δεδομένας.

Α^{ον}. Ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ εἰς πέντε ἴσα μέρη διαίρεσις τῆς εὐθείας ΑΒ. (σχ. 137)

Ἀπὸ τοῦ ἄκρου αὐτῆς Α ἄγω τὴν ἀπέραντον εὐθεῖαν ΑΗ, καὶ λαμβάνων κατ' ἀρέσκειαν εὐθεῖάν τινα ΑΓ, φέρω αὐτὴν πεντάκις ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τῆς ΑΗ. Συνάπτω τὸ τελευταῖον σημεῖον Η μετὰ τοῦ ἄκρου Β διὰ τῆς εὐθείας ΗΒ, καὶ φέρω τὴν ΓΙ παράλληλον τῆς ΗΒ.

Τούτων γενομένων, λέγω ὅτι ΑΙ εἶναι τὸ πέμπτον τῆς εὐθείας ΑΒ μέρος. Ἂν δέ τις φέρῃ τὴν ΑΙ πεντάκις ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἰς πέντε ἴσα διαιρεῖται μέρη· καὶ ἰδοὺ διατί·

Ἐπειδὴ ἡ ΓΙ εἶναι παράλληλος τῆς ΗΒ, αἱ πλευραὶ ΑΗ, ΑΒ τέμνονται ἀναλόγως εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Ι (Πρότ. 15, βιβλ. 3). Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι τὸ πέμπτον μέρος τῆς ΑΗ, ἄρα ΑΙ εἶναι τὸ πέμπτον μέρος τῆς ΑΒ.

Β^{ον}. Ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ τομὴ τῆς εὐθείας ΑΒ εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν δεδομένων εὐθειῶν Π, Κ, Ρ. (σχ. 138)

Ἀπὸ τοῦ ἄκρου Α ἄγω τὴν ἀπέραντον εὐθεῖαν ΑΖ, καὶ λαμβάνω ἐπ' αὐτῆς ΑΓ=Π, ΓΔ=Κ, καὶ ΔΕ=Ρ, συναπτω δὲ τὰ

(*) Εἰς τὸ τρίτον βιβλίον πραγματεύεται ὁ συγγραφεὺς τὰ περὶ καταμετρήσεως τῶν ἐξαιρέτων πολυγώνων σχημάτων, ἀνάγει δὲ τὰ μέτρα τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν ἐπιφανειῶν εἰς γραμμῶν εὐθειῶν μέτρα· τοῦτο δὲ εἶναι τὸ κύριον τοῦ βιβλίου ἀντικείμενον.

Εἰς τὸ αὐτὸ βιβλίον ἐκτίθενται καὶ τῶν ὁμοίων πολυγώνων σχημάτων αἱ σχέσεις, ἰδίως δὲ αἱ τῶν τριγώνων τῶν ὁμοίων, ἀποκαλύπτονται δὲ καὶ τοῦ τριγώνου τοῦ ὀρθογωνίου αἱ ἀξιολογώτεραι ἰδιότητες.

Τὸ τρίτον βιβλίον περιέχει τὰ ἐπισημότερα καὶ χρησιμώτερα γεωμετρικὰ θεωρήματα.

ἄκρα Ε καὶ Β, καὶ ἐκ τῶν σημείων Γ καὶ Δ φέρω τὴν ΓΙ καὶ τὴν ΔΚ παραλλήλους τῆς ΕΒ.

Τούτων γενομένων, λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ διηρέθη εἰς τρία μέρη ΑΙ, ΙΚ, ΚΒ ἀνάλογα πρὸς τὰς δεδομένας εὐθείας Π, Κ, Ρ· καὶ ἰδοὺ διατί·

Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΓΙ, ΔΚ, ΕΒ εἶναι παράλληλοι, τὰ τμήματα ΑΙ, ΙΚ, ΚΒ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς εὐθείας ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ (Πρότ. 15, βιβλ. 3). Ἀλλ' αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι ἐλήφθησαν ἴσαι ταῖς δεδομέναις Π, Κ, Ρ· ἄρα κτλ.

Πρόβλημα δεύτερον.

Εὑρὲ τῶν τριῶν γνωστῶν εὐθειῶν Α, Β, Γ τὴν τετάρτην ἀνάλογον. (σχ. 139)

Διὰ δύο ἀπεράντων εὐθειῶν ΔΕ, ΔΖ σχηματίζω γωνίαν τινὰ ὅσον θέλω μεγάλην· ἐπὶ τῆς ΔΕ λαμβάνω τὴν ΔΑ=Α καὶ τὴν ΔΒ=Β· ἐπὶ τῆς ΔΖ λαμβάνω τὴν ΔΓ=Γ, καὶ συνάπτω τὰ σημεῖα Α καὶ Γ διὰ τῆς ΑΓ· ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου Β φέρω τὴν ΒΧ παράλληλον τῆς ΑΓ.

Τούτων γενομένων, λέγω ὅτι ἡ ΔΧ εἶναι ἡ ζητουμένη τετάρτη ἀνάλογος. Ἰδοὺ δὲ πῶς τοῦτο ἀποδεικνύεται.

Ἐπειδὴ ἡ ΒΧ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΓ, αὐτὴ ὑπάρχει ἡ ἀναλογία,

$$ΔΑ : ΔΒ :: ΔΓ : ΔΧ.$$

Ἀλλ' οἱ τρεῖς πρῶτοι τῆς ἀναλογίας ταύτης ὅροι εἶναι αἱ τρεῖς δεδομέναι εὐθεῖαι. Ἄρα ἡ εὐθεῖα ΔΧ εἶναι ἡ ζητουμένη τετάρτη ἀνάλογος· διότι ἓν μόνον τρία δεδομένα ποσὰ ἔχουσι τέταρτον ἀνάλογον.

Πόρισμα. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου εὑρίσκεται τῶν δύο δεδομένων εὐθειῶν Α, Β ἡ τρίτη ἀνάλογος· διότι τρίτη ἀνάλογος τῶν δύο εὐθειῶν Α, Β λέγεται ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν εὐθειῶν Α, Β, Β.

Πρόβλημα τρίτον.

Εὑρὲ τῶν δύο εὐθειῶν Α καὶ Β τὴν μέσην ἀνάλογον. (σχ. 140)

Ἐπὶ τῆς ἀπεράντου εὐθείας ΔΖ λαμβάνω τὴν ΔΕ=Α καὶ τὴν

ΕΖ=Β· ἐπὶ ὁλοκλήρου δὲ τῆς εὐθείας ΔΖ, ὡς ἐπὶ διαμέτρου, γράφω τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΔΗΖ. Ἐκ τοῦ σημείου Ε ἀναφέρω ἐπὶ τῆς διαμέτρου αὐτῆς τὴν κάθετον ΕΗ, ἥτις συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Η.

Τούτων γενομένων, λέγω ὅτι ἡ ΕΗ εἶναι ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος.

Διότι πᾶσα κάθετος ΗΕ, ἀπό τινος σημείου τῆς περιφερείας ἐπὶ τῆς διαμέτρου καταγομένη, εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τῆς διαμέτρου τμημάτων ΔΕ, ΕΖ (Πρότ. 23, βιβλ. 3). Ἀλλὰ τὰ δύο αὐτὰ τμήματα ἐλήφθησαν ἴσα ταῖς δύο δεδομέναις εὐθείαις Α καὶ Β, ἄρα κτλ.

Πρόβλημα τέταρτον.

Διαίρεσον τὴν δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ μεῖζον αὐτῶν μέσον νὰ ἦναι ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ μικροτέρου αὐτῆς μέρους.(σχ.141)

Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς Β φέρω τὴν κάθετον ΒΓ, τὴν ὁποίαν λαμβάνω ἴσην τῷ ἡμίσει τῆς ΑΒ. Μεταχειρίζομαι ὡς κέντρον τὸ σημεῖον Γ, καὶ διὰ τῆς ἀκτῖνος ΓΒ γράφω περιφέρειαν. Ἄγω τὴν ΑΓ, ἥτις συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον Δ, καὶ λαμβάνω τὴν ΑΖ=ΑΔ.

Τούτων γενομένων, λέγω ὅτι ἡ ΑΒ ἐτμήθη εἰς τὸ σημεῖον Ζ, καθ' ἃ τὸ πρόβλημα τὸ παρὸν ἀπαιτεῖ, ἤτοι ἡ ἀκόλουθος ὑπάρχει ἀναλογία,

$$ΑΒ : ΑΖ : : ΑΖ : ΖΒ.$$

Ἰδοὺ δὲ πῶς τοῦτο ἀποδεικνύεται·

Ἡ ΑΒ, κάθετος οὖσα εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΓΒ, εἶναι ἐφαπτομένη. Ἐὰν δὲ παραταθῇ ἡ ΑΓ μέχρις οὗ συναντήσῃ ἐκ δευτέρου τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ε, ἡ ἑξῆς ἀποτελεῖται ἀναλογία (Πρότ. 30, βιβλ. 3)·

$$ΑΕ : ΑΒ : : ΑΒ : ΑΔ.$$

Ἐκ ταύτης δὲ αὕτη παράγεται,

$$ΑΕ—ΑΒ : ΑΒ : : ΑΒ—ΑΔ : ΑΔ.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀκτὶς ΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ διάμετρος ΔΕ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἴσαι, καὶ ἑπομένως ΑΕ—ΑΒ =ΑΔ=ΑΖ. Ἐπειδὴ πρὸς τούτοις ΑΖ=ΑΔ, ἕπεται ὅτι ΑΒ—ΑΔ =ΖΒ. Λοιπὸν, τῶν ἀντεισαγωγῶν γενομένων,

$$ΑΖ : ΑΒ : : ΖΒ : ΑΔ \text{ ἢ } ΑΖ.$$

Καὶ μετατιθεμένων τῶν ὅρων, ΑΒ : ΑΖ : : ΑΖ : ΖΒ.

Σχόλιον. Ἡ τοιαύτη τῆς εὐθείας ΑΒ κατατομὴ ὀνομάζεται διαίρεσις εἰς *μέσον καὶ ἄκρον λόγον*· ταύτης δὲ θέλομεν ἀπαντήσει κατόπιν ἐφαρμογάς. Σημειωτέον δὲ, ὅτι καὶ ἡ διατέμνουσα ΑΕ διῃρέθη εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον εἰς τὸ σημεῖον Δ· διότι, οὔσης τῆς ΑΒ=ΔΕ, αὕτη ὑπάρχει ἡ ἀναλογία, ΑΕ : ΔΕ : : ΔΕ : ΑΔ.

Πρόβλημα πέμπτον.

Ἐκ τοῦ σημείου Α, τοῦ ὑπάρχοντος ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΓΔ, φέρε τὴν εὐθεῖαν ΒΔ οὕτως, ὥστε τὰ μέρη αὐτῆς ΑΒ, ΑΔ, τὰ περιεχόμενα μεταξὺ τοῦ σημείου Α καὶ τῶν δύο τῆς γωνίας πλευρῶν, νὰ ἦναι ἴσα. (σχ. 142)

Ἐκ τοῦ σημείου Α φέρω τὴν ΑΕ παράλληλον τῆς ΓΔ, λαμβάνω τὴν ΒΕ=ΓΕ, καὶ διὰ τῶν σημείων Β καὶ Α ἄγω τὴν ΒΑΔ. Ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη.

Διότι, ἕνεκα τοῦ παραλληλισμοῦ τῶν εὐθειῶν ΑΕ καὶ ΓΔ, ἡ ἐξῆς ὑπάρχει ἀναλογία ΒΕ : ΕΓ : : ΒΑ : ΑΔ. Ἐπειδὴ δὲ ΒΕ=ΕΓ, ἄρα ΒΑ=ΑΔ.

Πρόβλημα ἕκτον.

Κατασκεύασον τετράγωνον ἰσοδύναμον παραλληλογράμμῳ ἢ τριγώνῳ γνωστῷ.

Α^ον. Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ γνωστὸν παραλληλόγραμμον, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὴν ΑΒ, ὕψος δὲ τὴν ΔΕ. (σχ. 143)

Εὑρίσκω τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΔΕ, ἔστω δὲ αὕτη ἡ εὐθεῖα ΧΨ. Τούτου γενομένου, λέγω ὅτι τὸ τετράγωνον, τὸ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῆς ΧΨ, εἶναι ἰσοδύναμον τῷ παραλληλογράμμῳ ΑΒΓΔ· διότι, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς, ΑΒ : ΧΨ : : ΧΨ : ΔΕ· ὅ ἐστι $\overline{X\Psi}^2 = AB \times \Delta E$. Ἀλλὰ ΑΒ×ΔΕ ἐκφράζει τὸ μέτρον τοῦ παραλληλογράμμου, $\overline{X\Psi}^2$ δὲ τὸ τοῦ τετραγώνου· ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμα.

Β^ον. Ἔστω ΑΒΓ τὸ γνωστὸν τρίγωνον, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὴν ΒΓ, ὕψος δὲ τὴν ΑΔ. (σχ. 144)

Εὑρίσκω τὴν μέσην ἀνάλογον τῆς ΒΓ καὶ τοῦ ἡμίσεος τῆς ΑΔ, ἔστω δὲ αὕτη ἡ εὐθεῖα ΧΨ. Τούτου γενομένου, λέγω ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΧΨ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ· διότι, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς, ΒΓ : ΧΨ : : ΧΨ : $\frac{1}{2}$ ΑΔ· ὅ ἐστι $\overline{\text{ΧΨ}}^2$ = ΒΓ × $\frac{1}{2}$ ΑΔ. Ἄρα τὸ ἐπὶ τῆς ΧΨ κατεσκευασμένον τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ.

Πρόβλημα ἕβδομον.

Κατασκεύασον ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΔ ὀρθογώνιόν τι ΑΔΕΧ ἰσοδύναμον τῷ γνωστῷ ὀρθογωνίῳ ΑΒΖΓ. (σχ. 145)

Εὑρίσκω τὴν τετάρτην ἀνάλογον τῶν τριῶν εὐθειῶν ΑΔ, ΑΒ, ΑΓ, ἔστω δὲ αὕτη ἡ εὐθεῖα ΑΧ. Τούτου γενομένου, λέγω ὅτι τὸ ὀρθογώνιον, τὸ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΔ, ΑΧ κατασκευαζόμενον, εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ ΑΒΖΓ.

Διότι, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς, ΑΔ : ΑΒ : : ΑΓ : ΑΧ· ὅ ἐστι ΑΔ × ΑΧ = ΑΒ × ΑΓ. Ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΑΔΕΧ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ ΑΒΖΓ,

Πρόβλημα ὄγδοον.

Εὑρὲ τὰς εὐθείας, δι' ὧν ἐκφράζεται ὁ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν γνωστῶν εὐθειῶν Α καὶ Β λόγος τοῦ ὀρθογωνίου τῶν γνωστῶν εὐθειῶν Γ καὶ Δ. (σχ. 148)

Ἔστω Χ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν εὐθειῶν Β, Γ, Δ. Λέγω, ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι Α καὶ Χ καὶ τὰ δύο ὀρθογώνια Α × Β καὶ Γ × Δ τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον.

Διότι, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς Β : Γ : : Δ : Χ· ὅ ἐστι Γ × Δ = Β × Χ. Λοιπὸν Α × Β : Γ × Δ : : Α × Β : Β × Χ : : Α : Χ.

Πόρισμα. Πρὸς εὕρεσιν λοιπὸν τοῦ λόγου τῶν τετραγώνων, τῶν κατεσκευασμένων ἐπὶ τῶν εὐθειῶν Α καὶ Γ, προσδιορίζω τὴν Χ, τὴν τρίτην ἀνάλογον τῶν εὐθειῶν Α καὶ Γ, τὴν προκύπτουσαν ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης Α : Γ : : Γ : Χ, διότι $Α^2 : Γ^2$: : Α : Χ.

Πρόβλημα ἔννατον.

Εὑρὲ τὰς εὐθείας, δι' ὧν ἐκφράζεται ὁ πρὸς τὸ γινόμενον τῶν τριῶν γνωστῶν εὐθειῶν Α, Β, Γ λόγος τοῦ γινομένου τῶν τριῶν γνωστῶν εὐθειῶν Π, Κ, Ρ. (σχ. 149)

Εὑρίσκω τὴν τετάρτην ἀνάλογον τῶν εὐθειῶν Π, Α, Β, ἔστω δὲ αὕτη ἡ εὐθεῖα Χ.

Εὑρίσκω κατόπιν τὴν τετάρτην ἀνάλογον τῶν εὐθειῶν Γ, Κ, Ρ, ἔστω δὲ αὕτη ἡ εὐθεῖα Ψ.

Λέγω ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι Χ καὶ Ψ, καὶ τὰ δύο γινόμενα $\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\Gamma$ καὶ $\Pi\times\mathrm{K}\times\mathrm{P}$ τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον.

Διότι, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς $\Pi:\mathrm{A}::\mathrm{B}:\mathrm{X}$, ὅἐστι $\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\Pi\times\mathrm{X}$. Διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δὲ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ Γ, αὕτη παράγεται ἡ ἰσότης $\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\Gamma=\Gamma\times\Pi\times\mathrm{X}$. Ὡσαύτως δὲ, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς, $\Gamma:\mathrm{K}::\mathrm{P}:\Psi$ ὅ ἐστι $\mathrm{K}\times\mathrm{P}=\Gamma\times\Psi$. Διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δὲ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ Π αὕτη παράγεται ἡ ἰσότης $\Pi\times\mathrm{K}\times\mathrm{P}=\Pi\times\Gamma\times\Psi$. Λοιπὸν τὸ γινόμενον $\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\Gamma$ τὸν αὐτὸν ἔχει πρὸς τὸ γινόμενον $\Pi\times\mathrm{K}\times\mathrm{P}$ λόγον, ὃν ἔχει τὸ γινόμενον $\Gamma\times\Pi\times\mathrm{X}$ πρὸς τὸ γινόμενον $\Pi\times\Gamma\times\Psi$, ἢ ὃν ἔχει ἡ εὐθεῖα Χ πρὸς τὴν εὐθεῖαν Ψ.

Πρόβλημα δέκατον.

Κατασκεύασον τρίγωνον ἰσοδύναμον γνωστῷ πολυγώνῳ. (σχ. 146)

Ἔστω ΑΒΓΔΕ τὸ γνωστὸν πολύγωνον. Ἄγω ἐν πρώτοις τὴν διαγώνιον ΓΕ, δι' ἧς ἀποκόπτεται τὸ τρίγωνον ΓΔΕ. Ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρω κατόπιν τὴν ΔΖ παράλληλον τῆς ΓΕ, καὶ ἐκτείνω αὐτὴν ἕως οὗ συναπαντήσῃ τὴν ΑΕ παρατεινομένην. Συνάπτω διὰ τῆς ΓΖ τὰ σημεῖα Γ καὶ Ζ, τὸ τοιουτοτρόπως δὲ ἀποτελούμενον πολύγωνον ΑΒΓΖ ἔχει μίαν πλευρὰν ὀλιγωτέραν, εἶναι δὲ ἰσοδύναμον τῷ πολυγώνῳ ΑΒΓΔΕ· καὶ ἰδοὺ τούτου ἡ ἀπόδειξις.

Τὰ τρίγωνα ΓΔΕ, ΓΖΕ ἔχουσι τὴν μὲν βάσιν ΓΕ κοινὴν, τὸ αὐτὸ δὲ ὕψος, διότι αἱ κορυφαὶ των Δ καὶ Ζ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΔΖ παραλλήλου τῆς βάσεως· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἰσοδύναμα. Προστιθεμένου δὲ εἰς ἑκάτερον αὐτῶν τοῦ σχήματος ΑΒΓΕ, ἀποτελεῖται ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΖ. Ὅθεν τὰ δύο ταῦτα πολύγωνα εἶναι ἴσα.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δυνάμεθα ν' ἀφανίσωμεν καὶ τὴν γωνίαν Β, διὰ τῆς ἀντεισαγωγῆς τοῦ τριγώνου ΑΗΓ, ἀντὶ τοῦ ἰσοδυνάμου ΑΒΓ. Λοιπὸν τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ τρέπεται εἰς τὸ ἰσοδύναμον τρίγωνον ΗΓΖ.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ μέσου δυνατὸν εἶναι νὰ μετασχηματισθῇ πᾶν πολύγωνον εἰς τρίγωνον· διότι διὰ τῆς κατὰ μίαν ἐξαφανίσεως τῶν πλευρῶν, τὸ πολύγωνον ἐπὶ τέλους τρέπεται εἰς τρίγωνον ἰσοδύναμον.

Σχόλιον. Κατὰ τὰ προειρημένα, πᾶν τρίγωνον τρέπεται εἰς τετράγωνον ἰσοδύναμον (πρόβλημα 6). Ἐπειδὴ δὲ πᾶν πολύγωνον μετασχηματίζεται εἰς τρίγωνον ἰσοδύναμον, πᾶν πολύγωνον δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον τετράγωνον. Ἡ τοιαύτη τροπὴ καλεῖται *τετραγωνισμὸς* τοῦ πολυγώνου.

Τὸ περὶ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου ζήτημα σκοπὸν ἔχει τὴν εὕρεσιν τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς κύκλον διαμέτρου γνωστῆς.

Πρόβλημα ἑνδέκατον.

Κατασκεύασον τετράγωνον ἴσον τῷ ἀθροίσματι ἢ τῇ διαφορᾷ δύο γνωστῶν τετραγώνων. (σχ. 147)

Ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ πλευραὶ τῶν δύο γνωστῶν τετραγώνων.

Α^{ον}. Πρὸς κατασκευὴν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἴσου τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων αὐτῶν, ἄγω τὰς δύο ἀπεράντους εὐθείας ΕΔ, ΕΖ καὶ ἀποτελῶ δι᾽ αὐτῶν γωνίαν ὀρθήν· λαμβάνω τὴν ΕΔ=Α καὶ τὴν ΕΗ=Β· φέρω τὴν ΔΗ, αὕτη δὲ ἡ εὐθεῖα εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Διότι τὸ τρίγωνον ΔΕΗ εἶναι ὀρθογώνιον, ἑπομένως τὸ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΔΗ κατεσκευασμένον τετράγωνον εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν κατεσκευασμένων ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΕΔ καὶ ΕΗ.

Β^{ον}. Πρὸς κατασκευὴν δὲ τετραγώνου ἴσου τῇ διαφορᾷ δύο γνωστῶν τετραγώνων, σχηματίζω ὡς ἀνωτέρω ὀρθήν τινα γωνίαν, τὴν ΖΕΘ, λαμβάνω δὲ τὴν ΗΕ ἴσην τῇ μικροτέρᾳ τῶν δύο γνωστῶν πλευρῶν Α καὶ Β, μεταχειριζόμενος δὲ τὸ σημεῖον Η ὡς κέντρον, δι᾽ ἀκτῖνος ΗΘ, ἴσης τῇ λοιπῇ τῶν δύο γνωστῶν πλευρῶν, γράφω τόξον. Τὸ τόξον τοῦτο τέμνει τὴν πλευρὰν ΕΘ εἰς τὸ σημεῖον Θ.

Τούτων γενομένων, λέγω ὅτι τὸ ἐπὶ τῆς ΕΘ κατεσκευασμένον τετράγωνον εἶναι ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν δύο τετραγώνων, τῶν κατεσκευασμένων ἐπὶ τῶν δύο γνωστῶν πλευρῶν Α καὶ Β.

Διότι τὸ τρίγωνον ΗΕΘ εἶναι ὀρθογώνιον, καὶ ἡ μὲν ὑποτείνουσα αὐτοῦ ΗΘ=Α,ἡ δὲ πλευρὰ αὐτοῦ ΗΕ=Β. Ἄρα τὸ τετράγωνον, τὸ ἐπὶ τῆς ΕΘ κατασκευαζόμενον,κτλ.

Σχόλιον. Διὰ τοῦ ἤδη ἐκτεθέντος τρόπου δύναταί τις νὰ κατασκευάσῃ τετράγωνον ἴσον τῷ ἀθροίσματι ὁσωνδήποτε ἂν θελήσῃ τετραγώνων. Διότι διὰ τῆς κατασκευῆς, δι' ἧς τὰ δύο τετράγωνα ἀνάγονται εἰς ἕν, ἀνάγονται τὰ τρία εἰς δύο, καὶ ταῦτα τὰ δύο εἰς ἕν. Τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ ἂν περὶ ἀναγωγῆς πλειοτέρων πρόκειται τετραγώνων. Δύναταί τις δὲ πρὸς τούτοις διὰ τῶν αὐτῶν κατασκευῶν καὶ νὰ ἀφαιρέσῃ ἀπὸ ἀθροίσματος τετραγώνων ἄλλων τετραγώνων ἄθροισμα.

Πρόβλημα δωδέκατον.

Κατασκεύασον τετράγωνον,τοιαύτην ἔχον πρὸς τὸ γνωστὸν τετράγωνον ΑΒΓΔ σχέσιν, ὁποίαν ἔχει ἡ εὐθεῖα Μ πρὸς τὴν εὐθεῖαν Ν. (σχ. 150)

Ἐπὶ τῆς ἀπεράντου εὐθείας ΕΗ λαμβάνω τὴν εὐθεῖαν ΕΖ=Μ, καὶ τὴν εὐθεῖαν ΖΗ=Ν. Ἐπὶ τῆς ΕΗ, ὡς ἐπὶ διαμέτρου, γράφω ἡμιπεριφέρειαν, καὶ εἰς τὸ σημεῖον Ζ φέρω ἐπὶ τῆς διαμέτρου τὴν κάθετον ΖΘ. Ἐκ τοῦ σημείου Θ ἄγω τὰς χορδὰς ΘΗ, ΘΕ, τὰς ὁποίας ἐπ' ἀόριστον διάστημα ἐκτείνω. Ἐπὶ τῆς πρώτης δ' αὐτῶν λαμβάνω τὴν ΘΚ ἴσην τῇ πλευρᾷ ΑΒ τοῦ γνωστοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Κ φέρω τὴν ΚΙ παράλληλον τῆς ΕΗ.

Τούτων γενομένων, λέγω ὅτι ἡ ΘΙ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Διότι, ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΚΙ, ΗΕ, αὕτη ὑπάρχει ἡ ἀναλογία, ΘΙ : ΘΚ : : ΘΕ : ΘΗ ἄρα $\overline{\Theta I}^2 : \overline{\Theta K}^2 :: \overline{\Theta E}^2 : \overline{\Theta H}^2$. Ἀλλὰ εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΕΘΗ (πρότ. 23, βιβλ. 3), τὸ τετράγωνον τῆς ΘΕ τοιαύτην πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΘΗ ἔχει σχέσιν,ὁποίαν ἔχει τὸ τμῆμα ΕΖ πρὸς τὸ τμῆμα ΖΗ, ἢ ὁποίαν ἔχει ἡ εὐθεῖα Μ πρὸς τὴν εὐθεῖαν Ν. Λοιπὸν $\overline{\Theta I}^2 : \overline{\Theta K}^2 ::$ Μ : Ν. Ἀλλὰ ΘΚ=ΑΒ· ἄρα τὰ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΘΙ καὶ ΑΒ κατεσκευασμένα τετράγωνα εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς εὐθείας Μ καὶ Ν.

Πρόβλημα δέκατον τρίτον.

Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΖΗ, ὁμολόγου τῆς ΑΒ, κατασκευάσον πολύγωνον ὅμοιον τῷ γνωστῷ πολυγώνῳ ΑΒΓΔΕ. (σχ. 129)

Ἐν τῷ γνωστῷ πολυγώνῳ ἄγω τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ· εἰς δὲ τὸ σημεῖον Ζ σχηματίζω τὴν γωνίαν ΗΖΘ=ΒΑΓ, καὶ εἰς τὸ σημεῖον Η τὴν γωνίαν ΖΗΘ=ΑΒΓ. Αἱ εὐθεῖαι ΖΘ, ΗΘ θέλουσι συναντηθῇ εἰς τὸ σημεῖον Θ, τὸ τοιουτοτρόπως δὲ ἀποτελούμενον τρίγωνον ΖΗΘ θέλ' εἶσθαι ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ.

Ὡσαύτως ἐπὶ μὲν τῆς πλευρᾶς ΖΘ, ὁμολόγου τῆς ΑΓ, κατασκευάζω τὸ τρίγωνον ΖΙΘ ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΑΔΓ, ἐπὶ δὲ τῆς πλευρᾶς ΖΙ, ὁμολόγου τῆς ΑΔ, σχηματίζω τὸ τρίγωνον ΖΙΚ ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΑΔΕ. Τὸ οὕτω συντελούμενον πολύγωνον ΖΗΘΙΚ εἶναι τὸ ζητούμενον, τὸ ὅμοιον τῷ πολυγώνῳ ΑΒΓΔΕ. Διότι τὰ δύο ταῦτα πολύγωνα συνίστανται ἐξ ἴσου πλήθους τριγώνων ὁμοίων καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τεταγμένων σειρὰν (πρότ. 26, βιβλ. 3).

Πρόβλημα δέκατον τέταρτον.

Γνωστῶν ὄντων δύο σχημάτων ὁμοίων, κατασκεύασον τρίτον σχῆμα ὅμοιον, καὶ ἴσον τῷ ἀθροίσματι ἢ τῇ διαφορᾷ αὐτῶν.

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν γνωστῶν σχημάτων. Κατασκευάζω τὸ τετράγωνον, τὸ ἴσον τῷ ἀθροίσματι ἢ τῇ διαφορᾷ τῶν τετραγώνων, τῶν κατεσκευασμένων ἐπὶ τῶν πλευρῶν Α καὶ Β· ἔστω δὲ Χ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ ἡ πλευρά. Αὕτη ἡ πλευρὰ Χ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου σχήματος, ἡ ὁμόλογος τῶν πλευρῶν Α καὶ Β τῶν γνωστῶν σχημάτων· ἐπ' αὐτῆς δὲ σχηματίζω τὸ σχῆμα τὸ ζητούμενον, κατὰ τὰ ἐν τῇ προηγουμένῃ προτάσει εἰρημένα. Ἰδοὺ δὲ τοῦ πράγματος ἡ ἀπόδειξις.

Τὰ ὅμοια σχήματα εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν αὐτῶν τῶν ὁμολόγων. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς Χ εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι ἢ τῇ διαφορᾷ τῶν τετραγώνων, τῶν κατεσκευασμένων ἐπὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν Α καὶ Β, ἄρα τὸ σχῆμα τὸ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Χ κατεσκευασμένον εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι ἢ τῇ διαφορᾷ τῶν ὁμοίων σχημάτων, τῶν κατεσκευασμένων ἐπὶ τῶν πλευρῶν Α καὶ Β.

Πρόβλημα δέκατον πέμπτον.

Κατασκεύασον σχῆμα ὅμοιον σχήματι γνωστῷ, καὶ τοιαύτην ἔχον πρὸς αὐτὸ ἀναλογίαν, οἵαν ἡ Μ πρὸς τὴν Ν.

Ἔστω Α πλευρά τις τοῦ σχήματος τοῦ γνωστοῦ, Χ δὲ ἡ πλευρὰ τοῦ σχήματος τοῦ ζητουμένου, ἡ ὁμόλογος τῆς Α. Κατὰ τοῦ προβλήματος τὴν ἔκφρασιν, τὸ τετράγωνον τῆς Χ πρέπει νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς Α ἀναλογίαν, οἵαν ἡ Μ πρὸς τὴν Ν (Πρότ. 27, βιβλ. 3).

Κατὰ τὸ 12 πρόβλημα προσδιορίζω τὴν πλευρὰν Χ. Γνωστῆς δὲ τῆς Χ γενομένης, συμπληρῶ τὰ λοιπὰ κατὰ τὸ πρόβλημα 13.

Πρόβλημα δέκατον ἕκτον.

Κατασκεύασον σχῆμα ὅμοιον τῷ σχήματι Π, καὶ ἰσοδύναμον τῷ σχήματι Κ. (σχ. 151)

Εὑρίσκω τὴν Μ πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἰσοδυνάμου τῷ σχήματι Π, καὶ τὴν Ν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἰσοδυνάμου τῷ σχήματι Κ· ἔστω δὲ Χ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν ἤδη γνωστῶν εὐθειῶν Μ, Ν, ΑΒ. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Χ, ὁμολόγου τῆς ΑΒ, γράφω σχῆμα ὅμοιον τῷ σχήματι Π· λέγω δὲ ὅτι τὸ σχῆμα αὐτὸ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ σχήματι Κ.

Διότι ἔστω Ψ τὸ σχῆμα, τὸ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Χ κατασκευασθέν.

Τούτου τεθέντος, ἔχομεν $\Pi : \Psi :: \overline{AB}^2 : X^2$. Ἀλλὰ κατὰ τὴν γενομένην κατασκευὴν $AB : X :: M : N$, ἢ $\overline{AB}^2 : X^2 :: M^2 : N^2$. Ἄρα $\Pi : \Psi :: M^2 . N^2$. Ἐπειδὴ δὲ ὡσαύτως κατὰ τὴν κατασκευὴν $M^2 = \Pi$ καὶ $N^2 = K$, ἄρα $\Pi : \Psi :: \Pi : K$, ὅ ἐστι $\Psi = K$.

Λοιπὸν τὸ σχῆμα Ψ εἶναι ὅμοιον τῷ σχήματι Π καὶ ἰσοδύναμον τῷ σχήματι Κ.

Πρόβλημα δέκατον ἕβδομον.

Κατασκεύασον ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον τῷ γνωστῷ τετραγώνῳ Γ, καὶ τοιοῦτον, ὥστε αἱ προσκείμεναι αὐτοῦ πλευραὶ ν' ἀποτελῶσιν ἄθροισμά τι ΑΒ. (σχ. 152)

Ἐπὶ τῆς ΑΒ, ὡς ἐπὶ διαμέτρου, γράφω ἡμιπεριφέρειαν, ἄγω δὲ εἰς ἀπόστασιν ΑΔ, ἴσην τῇ πλευρᾷ τοῦ γνωστοῦ τεραγώνου Γ, τὴν ΔΕ παράλληλον τῆς διαμέτρου. Ἐκ τοῦ σημείου Ε, εἰς ὃ ἡ παράλληλος τέμνει τὴν περιφέρειαν, καταβιβάζω ἐπὶ τῆς διαμέτρου τὴν κάθετον ΕΖ. Τούτων δὲ γενομένων, λέγω ὅτι ΑΖ καὶ ΖΒ εἶναι αἱ προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθωγωνίου.

Διότι τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἀποτελεῖ τὴν ΑΒ, τὸ δὲ ὀρθογώνιον αὐτῶν ΑΖ$\times$ΖΒ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ τετραγώνῳ τῆς ΕΖ (Πρότ. 23, βιβλ. 3), ἢ τῷ τετραγώνῳ τῆς ΑΔ. Ἤτοι τὸ ὀρθογώνιον αὐτὸ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ γνωστῷ τετραγώνῳ Γ.

Σχόλιον. Τὸ πρόβλημα τότε μόνον εἶναι δυνατὸν, ὅταν τὸ ἀπόστημα ΑΔ δὲν ὑπερβαίνῃ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἡμικυκλίου, ὅταν δηλαδὴ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου Γ δὲν ὑπερέχῃ τὸ ἥμισυ τῆς εὐθείας ΑΒ.

Πρόβλημα δέκατον ὄγδοον.

Κατασκεύασον ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον τῷ τετραγώνῳ Γ, καὶ τοιοῦτον, ὥστε αἱ πλευραὶ αὐτοῦ αἱ προσκείμεναι νὰ διαφέρωσιν ἀλλήλων κατὰ τὴν γνωστὴν ποσότητα ΑΒ. (σχ. 153)

Ἐπὶ τῆς γνωστῆς εὐθείας ΑΒ, ὡς ἐπὶ διαμέτρου, γράφω περιφέρειαν· εἰς τὸ ἄκρον δὲ τῆς διαμέτρου αὐτῆς ἄγω τὴν ἐφαπτομένην ΑΔ, καὶ λαμβάνω αὐτὴν ἴσην τῇ πλευρᾷ τοῦ τετραγώνου Γ. Διὰ τοῦ σημείου Δ καὶ τοῦ κέντρου Ο ἄγω τὴν διατέμνουσαν ΔΖ. Τούτων γενομένων, λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΔΕ καὶ ΔΖ εἶναι αἱ προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.

Διότι, πρῶτον μὲν, ἡ διαφορὰ τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἰσοῦται τῇ διαμέτρῳ ΕΖ ἢ ΑΒ· δεύτερον δὲ, τὸ ὀρθογώνιον ΔΕ$\times$ΔΖ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ τετραγώνῳ $\overline{\text{ΑΔ}}^2$ (Πρότ. 30, βιβλ. 3). Ἄρα τὸ ὀρθογώνιον αὐτὸ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ γνωστῷ τετραγώνῳ Γ.

Πρόβλημα δέκατον ἔννατον.

Εὑρὲ τὸ κοινὸν μέτρον, ἂν μέτρον τοιοῦτον ὑπάρχῃ, τῆς διαγωνίου τοῦ τετραγώνου καὶ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ. (σχ. 154)

Ἔστω ΑΒΓΗ τετράγωνόν τι, ἔχον διαγώνιον τὴν ΑΓ.

Φέρω ἐν πρώτοις τὴν πλευρὰν ΓΒ ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΓΑ τοσάκις, ὁσάκις περιέχεται (Πρόβλ. 17, βιβλ. 2)· ἐπὶ τούτῳ δὲ ἐκ τοῦ Γ ὡς κέντρου, καὶ διὰ τῆς ΓΒ ὡς ἀκτῖνος γράφω τὸ ἡμικύκλιον ΔΒΕ. Δῆλον δὲ, ὅτι ἡ ΓΒ περιέχεται ἅπαξ εἰς τὴν ΑΓ, ὑπολείπεται δὲ ἡ εὐθεῖα ΑΔ. Ἤτοι ἡ πρώτη αὕτη τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου παραβολὴ δίδει πηλίκον μὲν τὴν 1, ὑπόλοιπον δὲ τὴν εὐθεῖαν ΑΔ, ἥτις πρέπει νὰ παραβληθῇ πρὸς τὴν ΒΓ, ἢ πρὸς τὴν ΑΒ, διότι ΒΓ=ΑΒ.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ ἐξαγομένου τῆς παραβολῆς ταύτης δύναταί τις, λαμβάνων τὴν ΑΖ=ΑΔ, νὰ φέρῃ πραγματικῶς τὴν ΑΖ ἐπὶ τῆς ΑΒ· δι' αὐτοῦ δὲ τοῦ τρόπου εὑρίσκεται, ὅτι ἡ ΑΖ περιέχεται δὶς εἰς τὴν ΑΒ, καὶ ὅτι μένει καί τι ὑπόλοιπον. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο καὶ τὰ ἀκόλουθα προβαίνουσιν ἐλαττούμενα, μετά τινας δὲ παραβολὰς, ἕνεκα τῆς σμικρότητος τῶν ὑπολοίπων αὐτῶν, ἡ σύγκρισις ἀποβαίνει ἀδύνατος, τοῦ ζητουμένου δὲ μέτρου ὁ προσδιορισμὸς ἀνάγεται εἰς μηχανικὰς παραβολὰς ἀτελεῖς, δι' ὧν οὐδόλως ὁρίζεται ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΑΒ ἔχωσιν ἢ δὲν ἔχωσι κοινόν τι μέτρον, ἀντὶ τῶν φθινόντων ὑπολοίπων, μεταχειριζόμεθα εὐθείας τινὰς ἄλλας, κατὰ τὸ μέγεθος μὲν ἀναλλοιώτους, ἀναλόγους δὲ πρὸς τὰ ὑπόλοιπα αὐτά.

Καὶ τῷ ὄντι· ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ὀρθὴ, ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἐφαπτομένη· πρὸς τούτοις δὲ ἡ εὐθεῖα ΑΕ εἶναι διατέμνουσα, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἠγμένη, ἑπομένως (Πρότ. 30, βιβλ. 3) αὕτη ὑπάρχει ἡ ἀναλογία ΑΔ : ΑΒ :: ΑΒ : ΑΕ. Ἤτοι, κατὰ τὴν δευτέραν παραβολὴν, καθ' ἣν πρόκειται νὰ παραβληθῇ ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΑΒ, δυνάμεθα, ἀντ' αὐτῶν τῶν δύο εὐθειῶν, νὰ μεταχειρισθῶμεν τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΑΕ, διότι τὴν αὐτὴν σχέσιν ἔχουσιν, ὡς ἤδη παρετηρήθη, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΑΒ, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΕ. Ἀλλ' ἡ ΑΒ, ἢ ἡ ΓΔ (διότι ΑΒ=ΓΔ) περιέχεται δὶς εἰς τὴν ΑΕ, καὶ πλεονάζει καὶ ἡ ΑΔ ὡς ὑπόλοιπον. Ἄρα ἐκ τῆς δευτέρας παραβολῆς προκύπτει πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον ἡ εὐθεῖα ΑΔ, ἥτις πρέπει νὰ συγκριθῇ πρὸς τὴν ΑΒ.

Ἡ τρίτη δὲ αὕτη σύγκρισις, ἡ σύγκρισις δηλαδὴ τῆς ΑΔ καὶ ΑΒ, ὡς ἤδη ἀπεδείχθη, ἀνάγεται εἰς τὴν παραβολὴν τῆς ΑΒ, ἢ τῆς ΓΔ, πρὸς τὴν ΑΕ. Καὶ ἐκ ταύτης δὲ τῆς παραβολῆς προκύπτει πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον ἡ ΑΔ.

Ἐπειδὴ δὲ, ὡς ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε γενομένων δύναταί τις νὰ συμπεράνῃ, αἱ ἀλλεπάλληλοι τῶν ὑπολοίπων συγκρίσεις εἶναι ἀτελεύτητοι, διότι εἰς τῶν αὐτῶν εὐθειῶν τὴν παραβολὴν τὸ ζήτημα πάντοτε ἀνάγεται, ἡ διαγώνιος τοῦ τετραγώνου καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ οὐδὲν ἔχουσι μέτρον κοινόν. Ἡ τοιαύτη δὲ τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου σχέσις ἦτον ἀριθμητικῶς γνωστὴ (διότι, κατὰ τὴν 11 τοῦ τρίτου βιβλίου πρότασιν, ἡ διαγώνιος τοῦ τετραγώνου τοιοῦτον ἔχει πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ λόγον, οἷον ἡ $\sqrt{2}:1$), ἤδη δὲ καὶ γεωμετρικῶς ἐβεβαιώθη, καὶ τὰ κατ' αὐτὴν ἐσαφηνίσθησαν ἔτι μᾶλλον.

Σχόλιον. Δὲν εἶναι μὲν δυνατὸν νὰ παρασταθῇ δι' ἀριθμῶν ὁ ἀκριβὴς τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου λόγος, δύναται ὅμως νὰ πλησιάσῃ τις εἰς τὴν ἀκρίβειαν ὅσον ἂν θελήσῃ, βοηθούμενος ὑπὸ τοῦ συνεχοῦς κλάσματος, τοῦ ἐκφράζοντος τὸν λόγον αὐτόν. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ μὲν τῆς πρώτης συγκρίσεως προκύπτει πηλίκον 1, ἐκ δὲ τῶν λοιπῶν μέχρι τοῦ ἀπείρου 2 πηλίκον παράγεται, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος συνεχὲς κλάσμα τοῦτο εἶναι $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{κτλ.}}}}}$ μέχρι τοῦ ἀπείρου.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ὑπολογίσῃ τις τὴν ἀξίαν τεσσάρων ὅρων τοῦ κλάσματος αὐτοῦ, εὑρίσκει τὸ κοινὸν κλάσμα $1\frac{12}{29}$, ἢ $\frac{41}{29}$. Ἑπομένως ὁ ὡς ἔγγιστα λόγος τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου εἶναι $41:29$.

Εὑρίσκεται δὲ λόγος ἀκριβέστερος τούτου, ἐὰν πρὸς ὑπολογισμὸν πλειότεροι ληφθῶσι τοῦ συνεχοῦς κλάσματος ὅροι.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

Κανονικὰ πολύγωνα καὶ κύκλου μέτρον.

Πᾶν πολύγωνον ἰσογώνιον καὶ ἰσόπλευρον λέγεται *πολύγωνον κανονικόν*.

Πολύγωνα κανονικὰ ὑπάρχουσι παντοίας πληθύος πλευρῶν. Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ τὸ τετράγωνον εἶναι κανονικὰ πολύγωνα, τὸ μὲν ἐκ τριῶν συνιστάμενον πλευρῶν, τὸ δὲ ἐκ τεσσάρων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1.

Θεώρημα.

Τὰ κανονικὰ πολύγωνα, τὰ ἔχοντα ἴσην πλευρῶν πληθύν, εἶναι σχήματα ὅμοια. (σχ. 155)

Ἔστωσαν, παραδείγματος χάριν, τὰ δύο κανονικὰ ἑξάγωνα ΑΒΓΔΕΖ, αϐγδεζ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑκατέρου τῶν πολυγώνων τούτων ὀκτὼ ἀποτελεῖ γωνίας ὀρθὰς (Πρότ. 20, βιϐλ. 1). Ἄρα ἡ γωνία Α εἶναι τὸ ἕκτον ὀκτὼ ὀρθῶν γωνιῶν· ὡσαύτως δὲ τὸ ἕκτον μέρος ὀκτὼ ὀρθῶν γωνιῶν εἶναι καὶ ἡ γωνία α· ὅθεν Α=α. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον Β=ϐ, Γ=γ, κτλ.

Πρὸς τούτοις δὲ, ἕνεκα τῆς φύσεως τῶν δύο αὐτῶν πολυγώνων, αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ κτλ. εἶναι ἴσαι· ἴσαι δὲ εἶναι καὶ αἱ πλευραὶ αϐ, ϐγ, γδ, κτλ. Ἑπομένως αὕτη ὑπάρχει τῶν ἴσων λόγων ἡ σειρὰ ΑΒ : αϐ : : ΒΓ : ϐγ : : ΓΔ : γδ, κτλ. Ὅ ἐστι τὰ δύο κανονικὰ πολύγωνα, περὶ ὧν πρόκειται, ἔχουσι τὰς ὁμολόγους γωνίας ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· ἄρα εἶναι ὅμοια, κατὰ τὸν περὶ ὁμοίων πολυγώνων ὁρισμόν.

Πόρισμα. Αἱ περίμετροι τῶν κανονικῶν πολυγώνων, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν πλευρῶν πληθὺν, εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτῶν τὰς ὁμολόγους, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν αὐτῶν πλευρῶν (Πρότ. 27, βιϐλ. 3).

Σχόλιον. Ἡ γωνία παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου προσδιορίζεται διὰ τῆς πληθύος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ὡς ἡ γωνία παντὸς πολυγώνου ἰσογωνίου (Πρότ. 20, ϐιϐλ. 1).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2.

Θεώρημα.

Πᾶν κανονικὸν πολύγωνον καὶ ἐγγράφεται καὶ περιγράφεται εἰς κύκλον. (σχ. 156)

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕ κτλ.

Γράφω περιφέρειαν, διαϐαίνουσαν διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ· ἔστω δὲ Ο τὸ κέντρον τῆς περιφερείας αὐτῆς, καὶ ΟΠ ἡ κάθετος, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου εἰς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ καταγομένη. Φέρω ἐπὶ τέλους τὰς εὐθείας ΔΟ καὶ ΟΔ.

Τὸ τετράπλευρον ΟΠΓΔ δύναται νὰ ἐπιτεθῇ ἐπὶ τοῦ τετραπλεύρου ΟΠΒΑ. Καὶ τῷ ὄντι· ἡ μὲν πλευρὰ ΟΠ εἶναι κοινή, αἱ δὲ γωνίαι ΟΠΓ, ΟΠΒ εἶναι ἴσαι, ὡς ὀρθαί· ἑπομένως ἡ πλευρὰ ΠΓ ἐφαρμόζεται ἐπὶ τῆς ΠΒ, διότι αἱ δύο αὗται πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

Ἐπειδὴ δὲ, ἕνεκα τῆς φύσεως τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἡ γωνία ΠΓΔ=ΠΒΑ, ἡ πλευρὰ ΓΔ λαμβάνει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΒΑ. Ἐπειδὴ πρὸς τούτοις ΓΔ=ΒΑ, τὸ σημεῖον Δ πίπτει ἐπὶ τοῦ Α, τὰ δύο δὲ τετράπλευρα συμπίπτουσι καθ᾽ ὁλοκληρίαν. Ἄρα ἡ ἀπόστασις ΟΔ εἶναι ἴση τῇ ΑΟ· ἑπομένως ἡ περιφέρεια, ἡ ἐκ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ διαβαίνουσα, διέρχεται καὶ ἐκ τοῦ σημείου Δ.

Δι᾽ ὁμοίου δὲ συλλογισμοῦ δύναταί τις ν᾽ ἀποδείξῃ, ὅτι ἡ περιφέρεια, ἡ ἐκ τῶν σημείων Β, Γ, Δ διερχομένη, διαβαίνει καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ε, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ὅ ἐστιν ἡ περιφέρεια, ἡ ἐκ τῶν σημείων Α, Β, Γ διαβαίνουσα, διέρχεται ἐξ ὅλων τῶν κορυφῶν τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου· ἑπομένως τὸ πολύγωνον εἶναι εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτὴν ἐγγεγραμμένον.

Ἐπειδὴ δὲ ὡς πρὸς αὐτὴν τὴν περιφέρειαν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κτλ., εἶναι χορδαὶ ἴσαι, αἱ πλευραὶ αὐταὶ ἰσάκις ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπέχουσι (Πρότ. 8, βιβλ. 2). Λοιπὸν, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Ο, ὡς κέντρου, καὶ διὰ τῆς ἀκτῖνος ΟΠ γράψῃ τις περιφέρειαν, ἡ περιφέρεια αὕτη ἅπτεται τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ ὅλων τῶν λοιπῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν κατὰ τὸ μέσον· ἤτοι ἡ περιφέρεια, ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος, εἶναι εἰς τὸ πολύγωνον ἐγγεγραμμένη· ἢ, ἐν ἄλλοις λόγοις, τὸ πολύγωνον εἶναι περιγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν.

Σχόλιον 1. Τὸ σημεῖον Ο, τὸ κοινὸν τοῦ τε ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου κέντρον, δύναται νὰ ἐκληφθῇ καὶ ὡς κέντρον τοῦ πολυγώνου. Διὰ τοῦτο ὀνομάζεται *κεντρικὴ γωνία* ἡ γωνία ΑΟΒ, ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ δύο ἀκτίνων ἠγμένων εἰς τὰ ἄκρα πλευρᾶς τινὸς ΑΒ.

Ἐπειδὴ δὲ ὅλαι αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΒΓ, κτλ. εἶναι ἴσαι, δῆλον εἶναι, ὅτι καὶ ὅλαι αἱ κεντρικαὶ γωνίαι ἴσαι εἶναι· ἑπομένως ἡ τιμὴ πάσης τοιαύτης γωνίας εὑρίσκεται, διαιρουμένων τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν διὰ τῆς πληθύος τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου.

Σχόλιον 2. Πρὸς ἐγγραφὴν πολυγώνου κανονικοῦ εἰς περιφέρειαν γνωστὴν, διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν αὐτὴν εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας τὸ πολύγωνον ἔχει πλευράς. Διότι διὰ τῆς τοιαύτης διαιρέσεως τὰ τόξα γίνονται ἴσα, ἑπομένως αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κτλ., εἶναι ἴσαι· ἴσα δὲ εἶναι καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΟ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, κτλ., διότι ἴσας ἔχουσι τὰς πλευράς. Ὅθεν ἴσαι εἶναι καὶ αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ, κτλ. Ἄρα τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ κτλ. εἶναι κανονικόν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3.

Πρόβλημα.

Γράψον ἐν γνωστῇ περιφερείᾳ τετράγωνον. (σχ. 157)

Ἄγω κατ᾽ ὀρθὰς γωνίας τὰς δύο διαμέτρους ΑΓ καὶ ΒΔ, καὶ συνάπτω τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Τούτων δὲ γενομένων λέγω, ὅτι τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον ἐγγεγραμμένον τετράγωνον.

Διότι αἱ γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ, κτλ. εἶναι ἴσαι· ἐπομένως ἴσαι εἶναι καὶ αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΒΓ, κτλ.

Σχόλιον. Τὸ τρίγωνον ΒΟΓ, τὸ ἰσοσκελὲς καὶ ὀρθογώνιον, ταύτην παράγει τὴν ἀναλογίαν (Πρότ. 11, βιβλ. 3), ΒΓ : ΒΟ :: $\sqrt{2}$: 1.

Ὅ ἐστιν, ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου τὸν αὐτὸν ἔχει πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου λόγον, ὃν ἔχει ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 πρὸς τὴν μονάδα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4.

Πρόβλημα.

Γράψον ἐν γνωστῇ περιφερείᾳ ἑξάγωνον κανονικὸν καὶ τρίγωνον ἰσόπλευρον. (σχ. 158)

Ἂς ὑποτεθῇ τὸ πρόβλημα λελυμένον· ἔστω δὲ ΑΒ μία τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου πλευρά.

Ἄγω τὰς ἀκτῖνας ΑΟ, ΟΒ, καὶ δισχυρίζομαι ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι ἰσόπλευρον.

Διότι ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι τὸ ἕκτον τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν μέρος· ὅ ἐστιν, ἐὰν ἡ γωνία ἡ ὀρθὴ ληφθῇ ὡς μονάς, ΑΟΒ $=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Αἱ δύο δὲ λοιπαὶ τοῦ τριγώνου γωνίαι, ἡ ΑΒΟ καὶ ἡ ΒΑΟ, ὁμοῦ μὲν λαμβανόμεναι, παράγουσι τὸ ποσὸν $2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$, ἑκατέρα δ᾽ αὐτῶν, ἐπειδὴ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι, $\frac{2}{3}$ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ἀποτελεῖ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΟ εἶναι ἰσόπλευρον. Ἐκ τούτου δὲ ἕπεται, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου εἶναι ἴσαι.

Πρὸς ἐγγραφὴν λοιπὸν κανονικοῦ ἑξαγώνου εἰς περιφέρειαν γνωστὴν, φέρε τοῦ κύκλου τὴν ἀκτῖνα ἑξάκις ἐπὶ τῆς περιφερείας. Ἡ τοιαύτη δὲ τῆς ἀκτῖνος ἐπιφορὰ λήγει ὅπου καὶ ἄρχεται.

Ἐὰν συναφθῶσι παραλλὰξ αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ, σχηματίζεται τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΓΕ.

Σχόλιον. Τὸ σχῆμα ΑΒΓΟ εἶναι παραλληλόγραμμον, ῥομβοειδὲς μάλιστα, διότι ΑΒ=ΒΓ=ΓΟ=ΑΟ. Λοιπὸν (Πρότ. 14, βιβλ. 3) τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων $\overline{ΑΓ}^2+\overline{ΒΟ}^2$ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν $\overline{ΑΒ}^2+\overline{ΒΓ}^2+\overline{ΓΟ}^2+\overline{ΑΟ}^2=4\overline{ΑΒ}^4=4\overline{ΒΟ}^2$. Ἀφαιρουμένου δὲ ἑκατέρωθεν τοῦ τετραγώνου $\overline{ΒΟ}^2$, ὑπολείπεται $\overline{ΑΓ}^2=3\overline{ΒΟ}^2$. Λοιπὸν $\overline{ΑΓ}^2:\overline{ΒΟ}^2::3:1$, ἢ $ΑΓ:ΒΟ::\sqrt{3}:1$. Ὅ ἐστιν, ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου τοιαύτην ἔχει πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου σχέσιν, ὁποίαν ἡ τετραγωνικὴ τοῦ 3 ῥίζα πρὸς τὴν μονάδα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Πρόβλημα.

Γράψον ἐντὸς κύκλου γνωστοῦ τὰ τρία κανονικὰ πολύγωνα, δεκάγωνον, πεντάγωνον καὶ δεκαπεντάγωνον. (σχ. 159)

Διαιρῶ τὴν ἀκτῖνα ΑΟ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον εἰς τὸ σημεῖον Μ (Πρόβλ. 4, βιβλ. 3). Λαμβάνω τὴν χορδὴν ΑΒ ἴσην τῷ μεγάλῳ τμήματι ΟΜ, καὶ λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου κανονικοῦ δεκαγώνου, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται, ἐπιφερομένης τῆς πλευρᾶς αὐτῆς δεκάκις ἐπὶ τῆς περιφερείας.

Ἄγω τὴν ΜΒ.

Ἐπειδὴ ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς ΑΟ : ΟΜ :: ΟΜ : ΑΜ, ἕπεται ὅτι καὶ ΑΟ : ΑΒ :: ΑΒ : ΑΜ, διότι ΟΜ=ΑΒ. Ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΟ, ΑΜΒ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουσι μίαν γωνίαν κοινὴν, τὴν Α, περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων (Πρότ. 20, βιβλ. 3). Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΟ εἶναι ἰσοσκελὲς, ἰσοσκελὲς εἶναι καὶ τὸ τρίγωνον ΑΜΒ. Λοιπὸν ΑΒ=ΒΜ. Ἀλλὰ ΑΒ=ΟΜ· ἄρα ΒΜ=ΟΜ· ἤτοι καὶ τὸ τρίγωνον ΒΜΟ εἶναι ἰσοσκελές.

Ἡ γωνία ΑΜΒ, ἡ ἐκτὸς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΜΟ ὑπάρχουσα, εἶναι διπλασία τῆς ἐσωτερικῆς γωνίας Ο (Πρότ. 19, βιβλ. 1). Ἀλλ' ἡ γωνία ΑΜΒ=ΜΑΒ. Λοιπὸν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΑΒ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν τῶν πρὸς τὴν βάσιν, ἤτοι καὶ ἡ γωνία ΟΑΒ, καὶ ἡ γωνία ΟΒΑ, εἶναι διπλασία τῆς κατὰ τὴν κορυφὴν γωνίας Ο. Ἄρα ἡ γωνία Ο εἶναι τὸ πέμπτον δύο ὀρθῶν γωνιῶν μέρος, ἢ τὸ δέκατον τεσσάρων. Ἑπομένως τὸ τόξον ΑΒ εἶναι τὸ δέκατον τῆς περιφερείας, ἡ δὲ χορδὴ ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου.

Πόρισμα 1. Συναπτομένων δύο ἀνὰ δύο τῶν κορυφῶν τῶν γωνιῶν τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου ἀποτελεῖται τὸ κανονικὸν πεντάγωνον ΑΓΕΗΙ.

Πόρισμα 2. Ἔστω ΑΒ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου, καὶ ΑΛ ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου τοῦ κανονικοῦ τοῦ ἐγγεγραμμένου.

Τούτων τεθέντων, τὸ τόξον ΒΛ, πρὸς τὴν περιφέρειαν παραβαλλόμενον, εἶναι $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$. Ἤτοι ἡ χορδὴ ΒΛ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ δεκαπενταγώνου. Δῆλον δὲ, ὅτι τὸ τόξον ΓΛ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ΓΒ.

Σχόλιον. Μετὰ τὴν ἐγγραφὴν οἱουδήποτε κανονικοῦ πολυγώνου, διχοτομουμένων τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ ὑποτείνουσι, καὶ ἀγομένων τῶν χορδῶν εἰς τὰ ἡμίτομα αὐτὰ τόξα, ἀποτελεῖται κανονικὸν πολύγωνον ἄλλο, πληθὺν πλευρῶν διπλασίαν ἔχον. Ὅθεν ἀπὸ μὲν τοῦ τετραγώνου μεταβαίνει τις εἰς τὸ κανονικὸν πολύγωνον, τὸ συνιστάμενον ἐξ 8, 16, 32 κτλ. πλευρῶν· ἀπὸ δὲ τοῦ ἑξαγώνου εἰς τὸ κανονικὸν πολύγωνον, τὸ σχηματιζόμενον ἐκ 12, 24, 48, κτλ. πλευρῶν· ἀπὸ δὲ τοῦ δεκαγώνου εἰς τὸ κανονικὸν πολύγωνον, τὸ ἀποτελούμενον ἐξ 20, 40, 80, κτλ. πλευρῶν· ἀπὸ δὲ τοῦ δεκαπενταγώνου εἰς τὸ κανονικὸν πολύγωνον, τὸ ἀποπερατούμενον ὑπὸ 30, 60, 120, κτλ. πλευρῶν. (*)

(*) Μέχρι τινὸς ἐπιστεύετο, ὅτι μόνα τὰ πολύγωνα αὐτὰ ἠδύνατό τις νὰ ἐγγράψῃ εἰς κύκλον τῇ βοηθείᾳ τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, τῇ βοηθείᾳ δηλαδὴ τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου βαθμοῦ. Κατόπιν ὅμως ἀπεδείχθη,

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6.

Πρόβλημα.

Γνωστοῦ ὄντος τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔ κτλ., γράψον πειρὶ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν κανονικὸν πολύγωνον ὅμοιον. (σχ. 160)

Ἐκ τοῦ μέσου τοῦ τόξου ΑΒ, ἐκ τοῦ σημείου Τ, ἄγω τὴν ἐφαπτομένην ΗΘ, ἥτις εἶναι παράλληλος τῆς ΑΒ (Πρότ. 9, βιβλ. 2). Ὁμοίας δὲ ἐφαπτομένας ἄγω καὶ ἐκ τῶν μέσων τῶν τόξων ΒΓ, ΓΔ, κτλ. Ὅλαι αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται συναπαντῶνται καὶ ἀποτελοῦσι τὸ περιγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον ΗΘΙΚ κτλ., τὸ ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ.

Ὅτι δὲ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον ΗΘΙΚ κτλ. εἶναι κανονικὸν καὶ ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ, ἰδοὺ ἡ ἀπόδειξις.

Ἐν πρώτοις δῆλον εἶναι, ὅτι τὰ τρία σημεῖα Ο, Β, Θ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΤΘ, ΟΘΝ ἔχουσι τὴν ὑποτείνουσαν ΟΘ κοινὴν καὶ τὴν πλευρὰν ΟΤ=ΟΝ, ὅ ἐστιν εἶναι ἴσα (Πρότ. 18, βιβλ. 1)· ἐπομένως ἡ γωνία ΤΟΘ=ΘΟΝ· ἤτοι ἡ εὐθεῖα ΟΘ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Β, τοῦ ὑπάρχοντος ἐν τῷ μέσῳ τοῦ τόξου ΤΝ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ σημεῖον Ι κεῖται ἐπὶ τῆς ΟΓ, προεκτεινομένης, κτλ.

Τούτου δὲ τεθέντος, ἐπειδὴ ἡ ΗΘ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΒ, καὶ ἡ ΘΙ τῆς ΒΓ, ἡ γωνία ΗΘΙ=ΑΒΓ (Πρότ. 27, βιβλ. 1). Ὡσαύτως δὲ ἡ γωνία ΘΙΚ=ΒΓΔ, κτλ. Λοιπὸν αἱ γωνίαι τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου καὶ αἱ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἶναι ἴσαι.

Ἕνεκα δὲ τῶν αὐτῶν παραλλήλων, σχηματίζονται αἱ ἀναλογίαι αὗται.

ΗΘ : ΑΒ : : ΟΘ : ΟΒ,

ΘΙ : ΒΓ : : ΟΘ : ΟΒ.

Ἄρα ΗΘ : ΑΒ : : ΘΙ : ΒΓ.

ὅτι διὰ τῶν αὐτῶν μέσων ἐγγράφεται καὶ τὸ κανονικὸν πολύγωνον, τὸ δεκαεπτὰ ἔχον πλευράς, καὶ ἐν γένει πᾶν ἄλλο πολύγωνον κανονικόν, ἀποτελούμενον ἐκ πλευρῶν $2^{\nu}+1$, ὅταν $2^{\nu}+1$ ἦναι ἀριθμὸς πρῶτος. Σ. Σ.

Ἀλλὰ ΑΒ=ΒΓ, ἄρα ΗΘ=ΘΙ, Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΘΙ=ΙΚ, κτλ. Λοιπὸν αἱ πλευραὶ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι ἴσαι. Ἄρα τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον καὶ κανονικὸν εἶναι καὶ ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ.

Πόρισμα 1. Ἀντιστρόφως, γνωστοῦ ὄντος τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου ΗΘΙΚ κτλ., δύναταί τις δι' αὐτοῦ νὰ ἐγγράψῃ τὸ ὅμοιον αὐτῷ πολύγωνον ΑΒΓΔ κτλ. Πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ ν' ἀχθῶσιν εἰς τὰς κορυφὰς Η, Θ, Ι, κτλ. τοῦ γνωστοῦ πολυγώνου αἱ εὐθεῖαι ΟΗ, ΟΘ, κτλ., αἵτινες συναπαντῶσι τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, κτλ. Συναπτομένων δὲ τῶν σημείων τούτων διὰ τῶν χορδῶν ΑΒ, ΒΓ, κτλ., ἀποτελεῖται τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον.

Δύναταί τις δὲ νὰ ἐγγράψῃ κανονικὸν πολύγωνον ὅμοιον τῷ γνωστῷ ΗΘΙΚ κτλ., τῷ περιγεγραμμένῳ, συνάπτων τὰ σημεῖα τῶν ἁφῶν Τ, Ν, Π, κτλ. διὰ τῶν χορδῶν ΤΝ, ΝΠ, κτλ.

Πόρισμα. 2. Λοιπὸν περιγράφονται εἰς τὸν κύκλον τόσα κανονικὰ πολύγωνα, ὅσα καὶ ἐγγράφονται, καὶ τὸ ἀνάπαλιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7.

Θεώρημα.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς ἰδίας αὐτοῦ περιμέτρου, ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου πολλαπλασιασθείσης. (σχ. 160)

Λαμβάνω ὡς παράδειγμα τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΗΘΙΚ κτλ. Τοῦ τριγώνου ΗΟΘ τὸ ἐμβαδὸν ἐκφράζεται διὰ τοῦ ΗΘ$\times\frac{1}{2}$ΟΤ· τοῦ δὲ τριγώνου ΟΘΙ τὸ ἐμβαδὸν σημαίνεται διὰ τοῦ ΘΙ$\times\frac{1}{2}$ΟΝ· ἐπειδὴ δὲ ΟΝ=ΟΤ, τὰ δύο τρίγωνα ΗΟΘ, ΟΘΙ, ὁμοῦ λαμβανόμενα, μέτρον ἔχουσι τὸ γινόμενον (ΗΘ+ΘΙ)$\times\frac{1}{2}$ΟΤ.

Παρατείνοντες τὴν τοιαύτην καταμέτρησιν καὶ εἰς τὰ λοιπὰ τρίγωνα, συνάγομεν ὅτι ὅλων τῶν τριγώνων τὸ ἄθροισμα, ὅ ἐστιν ὁλόκληρον τὸ κανονικὸν πολύγωνον, ὡς μέτρον ἔχει τὸ κεφάλαιον τῶν βάσεων ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ, κτλ., ἤτοι τοῦ πολυγώνου τὴν περίμετρον, πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ $\frac{1}{2}$ ΟΤ, ἐπὶ τὸ ἥμισυ δηλαδὴ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. (*)

Σχόλιον. Τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἡ ἀκτὶς ΟΤ οὐδὲν ἄλλο εἶναι, εἰμὴ ἡ κάθετος, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπί τινος τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἀγομένη. Ἡ ἀκτὶς αὕτη λέγεται καὶ *ἀπόστημα* τοῦ πολυγώνου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8.

Θεώρημα.

Αἱ μὲν περίμετροι τῶν ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀκτῖνας τῶν κύκλων τῶν περιγεγραμμένων, ἢ τῶν ἐγγεγραμμένων, αἱ δὲ ἐπειφάνειαι αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν αὐτῶν ἀκτίνων. (σχ. 161)

Ἔστω ΑΒ πλευρά τις τοῦ ἑτέρου τῶν ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων, περὶ ὧν πρόκειται, Ο δὲ ἔστω τὸ κέντρον καὶ ΟΑ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου. Τοῦ κύκλου δὲ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἀκτὶς εἶναι ἡ ΟΔ, ἡ ἐπὶ τῆς ΑΒ πλευρᾶς κάθετος. Ἔστωσαν πρὸς τούτοις αϐ μὲν ἡ πλευρὰ τοῦ ἑτέρου ὁμοίου κανονικοῦ πολυγώνου, ο δὲ τὸ κέντρον, καὶ οα, οδ αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων, τοῦ τε περιγεγραμμένου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου.

Κατὰ τὰ ἤδη κείμενα, αἱ περίμετροι τῶν ὁμοίων πολυγώνων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ, αϐ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι Α καὶ α εἶναι ἴσαι, διότι ἑκατέρα τούτων εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας τοῦ πολυγώνου· ἐπειδὴ ὡσαύτως, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ Β=ϐ, τὰ τρίγωνα ΑΒΟ, αϐο εἶναι ὅμοια· ὅμοια δὲ εἶναι καὶ τὰ τρίγωνα ΑΔΟ, αδο. Λοιπὸν ΑΒ : αϐ : : ΑΟ : αο : : ΔΟ : δο.

Ὅ ἐστιν, αἱ περίμετροι τῶν ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀκτῖνας ΑΟ, αο τῶν κύκλων τῶν περιγε-

(*) Ἐπειδὴ ὁ κύκλος οὐδὲν ἄλλο εἶναι, εἰμὴ πολύγωνον κανονικόν, πληθὺν πλευρῶν ἄπειρον ἔχον, τὸ ἐμϐαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς περιφερείας αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ πολλαπλασιασθείσης. Ο. Μ.

γραμμένων, καὶ πρὸς τὰς ἀκτῖνας ΔΟ, δο τῶν κύκλων τῶν ἐγγεγραμμένων.

Αἱ ἐπιφάνειαι δὲ τῶν πολυγώνων αὐτῶν τῶν δμοίων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΑΒ, αϐ, ἑπομένως εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων ΑΟ, αο τῶν κύκλων τῶν περιγεγραμμένων, καὶ πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων ΔΟ, δο τῶν κύκλων τῶν ἐγγεγραμμένων. (*)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9.

Λῆμμα.

Πᾶσα γραμμὴ καμπύλη ἢ πολύγωνος, περιλαμβάνουσα ἀπ' ἄκρου ἕως ἄκρου τὴν κυρτὴν γραμμὴν ΑΜΒ, εἶναι ταύτης μείζων. (σχ. 162)

Κυρτὴν γραμμὴν ὀνομάζουσι πᾶσαν γραμμὴν καθ' ὅλα καμπύλην ἢ πολύγωνον, ἢ ἐν μέρει καμπύλην καὶ ἐν μέρει πολύγωνον, εἰς δύο μόνα σημεῖα ὑπ' εὐθείας διατεμνομένην.

Ἐὰν ἡ γραμμὴ ΑΜΒ εἶχεν εἰσοχὰς, κατὰ τὸν ὁρισμὸν, δὲν ἦτο κυρτὴ, διότι εὐθεῖα γραμμὴ ἤθελε τὴν συναπαντήσει εἰς πλειότερα τῶν δύο σημεῖα.

Τοῦ κύκλου τὰ τόξα εἶναι γραμμαὶ κυρταί. Ἡ παροῦσα πρότασις ὅμως πραγματεύεται, ὄχι μόνον περὶ τῶν τόξων, ἀλλὰ καὶ περὶ πάσης ἄλλης γραμμῆς κυρτῆς.

Τούτων τεθέντων, ἐὰν ἡ γραμμὴ ΑΜΒ δὲν ἦναι μικροτέρα πάσης γραμμῆς, αὐτὴν περικλειούσης, μεταξὺ τῶν περικλειουσῶν ὑπάρχει γραμμή τις ἐλαχίστη, μικροτέρα τῆς περικλειομένης ΑΜΒ, ἢ τὸ πολὺ ἴση.

Ἔστω λοιπὸν ΑΓΔΕΒ ἡ ἐλαχίστη τῶν γραμμῶν, τῶν περικλειουσῶν τὴν ΑΜΒ.

Ἄγω τὴν εὐθεῖαν ΠΚ οὕτως, ὥστε ἢ νὰ μὴ συναπαντᾷ τὴν ΑΜΒ, ἢ τὸ πολὺ νὰ ἅπτηται αὐτῆς.

(*) Ἐπειδὴ ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια οὐδὲν ἄλλο εἶναι, εἰμὴ περίμετρος κανονικοῦ πολυγώνου, ἔχοντος πληθὺν πλευρῶν ἄπειρον, αἱ μὲν περιφέρειαι τῶν κύκλων πρὸς τὰς ἀκτῖνας, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων εἶναι ἀνάλογοι

Ἡ εὐθεῖα ΠΚ εἶναι μικροτέρα τῆς ΠΓΔΚ. Ἄρα ἡ περικλείουσα γραμμὴ ΑΠΚΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΓΔΚΒ, ἥτις ἐξ ὅλων τῶν περικλειουσῶν ὑπετέθη ἡ ἐλαχίστη. Ἡ τοιαύτη λοιπὸν ὑπόθεσις εἶναι ἀδύνατος. (*)

Σχόλιον. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι πᾶσα πανταχόθεν κεκυρτωμένη γραμμὴ ΑΜΒ εἶναι μικροτέρα πάσης αὐτὴν περικλειούσης ΖΗΘ.

Ἡ περικλείουσα ΖΗΘ, καὶ ἂν ἅπτηται τῆς περικλειομένης ΑΜΒ, καὶ ἂν πόῤῥωθεν αὐτὴν περιλαμβάνῃ, πάντοτε μείζων εἶναι. (σχ. 163)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10.

Λῆμμα.

Δεδομένων δύο συγκεντρικῶν περιφερειῶν, δυνατὸν εἶναι νὰ ἐγγράψῃ τις εἰς τὴν μείζονα κανονικὸν πολύγωνον τοιοῦτον, ὥστε αἱ πλευραὶ αὐτοῦ νὰ μὴ ἅπτωνται τῆς μικροτέρας, καὶ νὰ περιγράψῃ εἰς τὴν μικροτέραν κανονικὸν πολύγωνον τοιοῦτον, ὥστε αἱ πλευραὶ αὐτοῦ νὰ μὴ ἐγγίζωσι τὴν μεγαλητέραν. Καὶ εἰς ἀμφοτέρας δηλαδὴ τὰς περιστάσεις αἱ πλευραὶ τῶν πολυγώνων περιλαμβάνονται μεταξὺ τῶν δύο συγκεντρικῶν περιφερειῶν. (σχ. 164)

Ἔστωσαν ΓΑ, ΓΒ αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο δεδομένων συγκεντρικῶν περιφερειῶν. Ἐν πρώτοις ἄγω εἰς τὸ σημεῖον Α τὴν ἐφαπτομένην ΔΕ, τὴν ἀπολήγουσαν εἰς τὴν μεγάλην περιφέρειαν κατὰ τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Ἐγγράφω μετὰ ταῦτα εἰς τὴν περιφέρειαν τὴν μεγάλην κανονικόν τι πολύγωνον ἐξ ἐκείνων, περὶ ὧν ἐν τοῖς προηγουμένοις προβλήμασιν ἐπραγματεύθημεν. Διαιρῶ ἀκολούθως τὰ τόξα, εἰς ἃ αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ ὑποτείνουσιν, εἰς δύο ἴσα μέρη, καὶ συνάπτων τῶν ἡμιτετμημένων τόξων τὰ

(*) Ἐν ἄλλοις λόγοις, οὐδεμία τῶν γραμμῶν τῶν περικλειουσῶν δύναται νὰ ὑποτεθῇ ὡς ἐλαχίστη, διότι ὑπάρχει ἄλλη τις, ταύτης μικροτέρα καὶ εἰς τὴν περικλειομένην γραμμὴν ΑΜΒ πλησιεστέρα. Ἤτοι ἡ περικλειομένη γραμμὴ ΑΜΒ εἶναι τὸ ἔσχατον ὅριον, πρὸς ὃ ὅλαι αἱ περικλείουσαι συστελλόμεναι τείνουσιν. Ο. Μ.

ἄκρα διὰ χορδῶν, σχηματίζω ἄλλο κανονικὸν πολύγωνον, πλευρῶν πληθὺν διαπλασίαν ἔχον. Προχωρῶν δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δύναμαι νὰ φθάσω εἰς τόξον μικρότερον τοῦ ΔΒΕ· ἔστω δὲ ΜΒΝ τὸ μικρότερον αὐτὸ τόξον(οὗ τὸ μέσον ὑποτίθεται εἰς τὸ Β).

Δῆλον εἶναι ὅτι ἡ χορδὴ ΜΝ, ὡς μικροτέρα, ἀπέχει τοῦ κέντρου πλειότερον ἢ ἡ ΔΕ· ἑπομένως τὸ κανονικὸν πολύγωνον, τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν ΜΝ, δὲν συναντᾷ τὴν περιφέρειαν, τὴν ἔχουσαν ἀκτῖνα τὴν ΓΑ.

Τῶν αὐτῶν δὲ κειμένων, ἄγω τὰς ἀκτῖνας ΓΜ, ΓΝ, αἵτινες τέμνουσι τὴν ἐφαπτομένην ΔΕ εἰς τὸ Π καὶ εἰς τὸ Κ. ΠΚ θέλ᾽εἶσθαι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς τὴν μικρὰν περιφέρειαν περιγεγραμμένου πολυγώνου, τοῦ ὁμοίου τῷ πολυγώνῳ τῷ ἐγγεγραμμένῳ εἰς τὴν περιφέρειαν τὴν μεγάλην, τῷ ἔχοντι πλευρὰν τὴν ΜΝ.

Φανερὸν δὲ εἶναι, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον,οὗ Π Κ εἶναι ἡ πλευρὰ, δὲν συναπαντᾷ τὴν μεγάλην περιφέρειαν, διότι ἡ ΓΠ εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΜ.

Λοιπὸν, διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς, δύναταί τις εἰς μὲν τὴν μεγάλην περιφέρειαν νὰ ἐγγράψῃ,εἰς δὲ τὴν μικρὰν νὰ περιγράψῃ κανονικὰ πολύγωνα ὅμοια, ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν περικεκλεισμένας ἐντὸς τῶν δύο συγκεντρικῶν περιφερειῶν.

Σχόλιον. Δεδομένων δύο συγκεντρικῶν τομέων ΖΓΗ, ΙΓΘ, δυνατὸν εἶναι νὰ ἐγγράψῃ τις εἰς τὸν μέγαν, καὶ νὰ περιγράψῃ εἰς τὸν μικρὸν *μέρη κανονικοῦ πολυγώνου* ὅμοια καὶ τοιαῦτα, ὥστε αἱ περίμετροι αὐτῶν νὰ περιλαμβάνωνται μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν· ἐπὶ τούτῳ δὲ ἀρκεῖ ἡ ἀλληλοδιάδοχος διαίρεσις τοῦ τόξου ΖΒΗ εἰς 2, 4, 8, 16, κτλ. μέρη ἴσα, μέχρις οὗ εὑρεθῇ μέρος μικρότερον τοῦ τόξου ΔΒΕ.

Ὀνομάζομεν δὲ *μέρος κανονικοῦ πολυγώνου* τὸ σχῆμα, τὸ ἀποπερατούμενον ὑπὸ σειρᾶς χορδῶν ἴσων, ἐγγεγραμμένων εἰς τὸ τόξον ΖΗ ἀπ᾽ ἄκρου ἕως ἄκρου. Τὸ μέρος δ᾽ αὐτὸ ἔχει τὰς κυρίας τῶν κανονικῶν πολυγώνων ἰδιότητας, ἤτοι ἔχει τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς ἴσας, ἐγγράφεται δὲ καὶ περιγράφεται εἰς τὸν κύκλον,δὲν ἀποτελεῖ ὅμως καθαυτὸ μέρος κανονικοῦ πολυγώνου, εἰμὴ ὅταν τὸ τόξον,τὸ ὁποῖον μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ὑποτείνει, ἦναι συμμετρικὸν τῆς περιφερείας μέρος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11.

Θεώρημα.

Τῶν κύκλων αἱ μὲν περιφέρειαι πρὸς τὰς ἀκτῖνας, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων εἶναι ἀνάλογοι. (σχ. 165)

Διὰ τῆς σημειώσεως ταύτης *περιφ.* ΓΑ, χάριν συντομίας, σημαίνεται ἡ περιφέρεια, ἡ ἔχουσα ἀκτῖνα τὴν ΓΑ.

Τούτου τεθέντος, λέγω ὅτι μεταξὺ τῶν περιφερειῶν καὶ τῶν ἀκτίνων ὑπάρχει ἡ ἀναλογία αὕτη *περιφ.*ΓΑ : περιφ. ΟΒ :: ΓΑ : ΟΒ.

Διότι, ἂν τοῦτο ἀληθὲς δὲν ἦναι, ἡ ἀκτὶς ΓΑ τοιαύτην θέλει ἔχει σχέσιν πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΟΒ, οἵαν ἡ *περιφ.* ΓΑ πρὸς τέταρτόν τινα ὅρον μείζονα ἢ ἐλάσσονα τῆς *περιφ.* ΟΒ. Ἔστω δὲ, ὅτι ὁ τέταρτος οὗτος ὅρος εἶναι τῆς *περιφ.ΟΒ* ἐλάσσων· ἔστω δηλαδὴ, καθ' ὑπόθεσιν, ὅτι ΓΑ : ΟΒ :: *περιφ.*ΓΑ : *περιφ.* ΟΔ.

Ἐγγράφω εἰς τὴν περιφέρειαν, τὴν ἔχουσαν ἀκτῖνα τὴν ΟΒ, τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΕΖΗΘΙ κτλ., τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ δὲν συναντῶσι τὴν ἄλλην περιφέρειαν, τὴν ἔχουσαν ἀκτῖνα τὴν ΟΔ (πρότ. 10, βιβλ. 4). Ἐγγράφω δὲ κανονικὸν πολύγωνον ὅμοιον, τὸ ΜΝΠΣΤ κτλ., εἰς τὴν περιφέρειαν, τὴν ἔχουσαν ἀκτῖνα τὴν ΓΑ.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ δύο ταῦτα ἐγγεγραμμένα πολύγωνα εἶναι ὅμοια, αἱ περίμετροι αὐτῶν ΜΝΠΣΤ κτλ., ΕΖΗΘΙ κτλ. εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀκτῖνας ΓΑ, ΟΒ τῶν περιγεγραμμένων κύκλων (πρότ. 8, βιβλ. 4)· ὅ ἐστι,

ΜΝΠΣΤ : ΕΖΗΘΙ :: ΓΑ : ΟΒ. (1)

Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως *περιφ.* ΓΑ : *περιφ.* ΟΔ :: ΓΑ : ΟΒ (2)

Ἄρα ΜΝΠΣΤ : ΕΖΗΘΙ :: *περιφ.* ΓΑ : *περιφ.* ΟΔ. (3) (*)

(*) Ἡ (3) ἀναλογία προέκυψεν ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν ἀναλογιῶν (1) και (2). Ἑπομένως ἡ ἀτοπία τῆς (3) ἀναλογίας πρέπει ν' ἀποδοθῇ ἢ εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἀναλογίας (1) καὶ (2), ἢ εἰς τὴν ἑτέραν τούτων. Ἐπειδὴ δὲ ἡ (2) εἶναι ὀρθὴ, ἡ (1) εἶναι ἄτοπος. Χωλαίνει δὲ κατὰ τὸν τέταρτον ὅρον, διότι οἱ τρεῖς πρῶτοι πάσης ἀναλογίας ὅροι εἶναι ἀδιάφοροι.

Ἀλλ' ἡ ἀναλογία αὕτη εἶναι ἀδύνατος, διότι ἡ μὲν περίμετρος ΜΝΠΣΤ εἶναι μικροτέρα τῆς *περιφ.*ΓΑ (Πρότ. 9, βιβλ. 4), ἀπ' ἐναντίας δὲ ἡ περίμετρος ΕΖΗΘΙ εἶναι μείζων τῆς *περιφ.*ΟΔ. Λοιπὸν ἀδύνατον εἶναι ἡ ἀκτὶς ΓΑ τοιαύτην νὰ ἔχῃ πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΟΒ σχέσιν, οἵαν ἡ *περιφ.*ΓΑ πρός τινα περιφέρειαν μικροτέραν τῆς *περιφ.* ΟΒ. Ἤ, ἐν ἄλλοις λόγοις, ἀδύνατον εἶναι νὰ ὑπάρξῃ ἡ ἀκόλουθος ἀναλογία· ἀκτὶς πρὸς ἀκτῖνα, ὡς ἡ περιφέρεια, ἡ διὰ τῆς πρώτης ἀκτῖνος γεγραμμένη, πρὸς περιφέρειαν μικροτέραν τῆς περιφερείας, τῆς γεγραμμένης διὰ τῆς δευτέρας ἀκτῖνος.

Ἕπεται δὲ ἐκ τούτου, ὅτι οὐδὲ ἡ ἀναλογία αὕτη ὑπάρχει, ΓΑ πρὸς ΟΒ, ὡς *περιφ.* ΓΑ πρὸς περιφέρειαν μείζονα τῆς *περιφ.*ΟΒ. Διότι, ἐὰν ὀρθὴ ἡ ἀναλογία αὕτη ἦτον, ἠδύνατό τις, διὰ τῆς ἀντιστροφῆς τῶν ὅρων αὐτῆς, ταύτην τὴν ἀναλογίαν νὰ σχηματίσῃ, ΟΒ πρὸς ΓΑ, ὡς περιφέρειά τις μείζων τῆς *περιφ.*ΟΒ πρὸς *περιφ.* ΓΑ, ἢ ὡς ἡ *περιφ.*ΟΒ πρὸς περιφέρειάν τινα μικροτέραν τῆς *περιφ.* ΓΑ. Ὅ ἐστιν, ἀκτὶς πρὸς ἀκτῖνα, ὡς ἡ περιφέρεια, ἡ διὰ τῆς πρώτης ἀκτῖνος γεγραμμένη, πρὸς περιφέρειαν μικροτέραν τῆς περιφερείας, τῆς γεγραμμένης διὰ τῆς δευτέρας ἀκτῖνος. Τοῦτο ὅμως ἀνωτέρω ἀπεδείχθη ἀδύνατον.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας ΓΑ : ΟΒ : : *περιφ.* ΓΑ : Χ οὔτε μείζων εἶναι, οὔτε μικρότερος τῆς *περιφ.*ΟΒ, ἄρα εἶναι ἴσος τῇ *περιφ.* ΟΒ. Λοιπὸν τῶν κύκλων αἱ περιφέρειαι εἶναι πρὸς τὰς ἀκτῖνας αὐτῶν ἀνάλογοι.

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ καὶ διὰ κατασκευῆς κατὰ πάντα ὁμοίας ἀποδεικνύεται ἡ πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων ἀναλογία τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κύκλων. Περιττὴ δὲ κρίνεται πᾶσα λεπτομερεστέρα τῆς προτάσεως ταύτης ἀνάπτυξις, διότι τῆς προτάσεως τῆς ἀκολούθου ἡ παροῦσα πόρισμα εἶναι.

Πόρισμα. Τὰ ὅμοια τόξα ΑΒ, ΔΕ εἶναι πρὸς τὰς ἀκτῖνας ΑΓ, ΔΟ ἀνάλογα, οἱ δὲ ὅμοιοι τομεῖς ΑΓΒ, ΔΟΕ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν. (σχ. 166)

Διότι, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν τόξων, αἱ γωνίαι Γ καὶ Ο εἶναι ἴσαι (ὁρισμ. 3, βιβλ. 3). Ἀλλ' ἡ γωνία Γ ἔχει τὴν αὐτὴν πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας σχέσιν, οἵαν τὸ τόξον ΑΒ πρὸς ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν, τὴν διὰ τῆς ἀκτῖνος ΑΓ γεγραμμένην (πρότ. 17, βιβλ. 2). Ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ γωνία Ο τὴν αὐτὴν ἔχει πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας σχέσιν, οἵαν τὸ τόξον ΔΕ πρὸς ὅλην τὴν περιφέρειαν, τὴν γεγραμμένην διὰ τῆς ἀκτῖνος ΟΔ. Ἄρα τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς περιφερείας, εἰς ἃς ἀνήκουσιν. Ἀλλ' αἱ περιφέρειαι αὗται εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀκτῖνας ΑΓ, ΔΟ· λοιπὸν *τόξον* ΑΒ : *τόξον* ΔΕ :: ΑΓ : ΔΟ.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον οἱ τομεῖς ΑΓΒ, ΔΟΕ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς ὁλοκλήρους τοὺς κύκλους. Ἐπειδὴ δὲ οἱ κύκλοι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων, ἄρα *τομ.*ΑΓΒ : *τομ.*ΔΟΕ :: $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2$: $\overline{\mathrm{\Delta O}}^2$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. 12.

Θεώρημα.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς περιφερείας αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἰδίας αὐτοῦ ἀκτῖνος πολλαπλασιασθείσης. (σχ. 167)

Σημειῶ διὰ τοῦ *ἐπιφ.* ΓΑ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου, τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν ΓΑ, λέγω δὲ, ὅτι *ἐπιφ.*ΓΑ$=\frac{1}{2}$ΓΑ$\times$ *περιφ.* ΓΑ.

Διότι, ἐὰν τὸ γινόμενον $\frac{1}{2}$ΓΑ$\times$ *περιφ.* ΓΑ δὲν ἐκφράζῃ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν ΓΑ, ἀναγκαίως δι' αὐτοῦ σημαίνεται τὸ μέτρον κύκλου τινος μείζονος ἢ μικροτέρου. Ἂς ὑποτεθῇ δὲ κατὰ πρῶτον, ὅτι διὰ τοῦ γινομένου αὐτοῦ ὁρίζεται τὸ ἐμβαδὸν κύκλου μείζονος, ἔστω δηλαδὴ, εἰ δυνατὸν, $\frac{1}{2}$ΓΑ$\times$*περιφ.* ΓΑ$=$ *ἐπιφ.* ΓΒ.

Περὶ τὸν κύκλον, τὸν ἔχοντα ἀκτῖνα τὴν ΓΑ, γράφω κανονικὸν πολύγωνον τοιοῦτον, ὥστε αἱ πλευραὶ αὐτοῦ νὰ μὴ ἅπτωνται τῆς περιφερείας, τῆς ἐχούσης ἀκτῖνα τὴν ΓΒ (πρότ. 10, βιβλ. 4). Τοῦ περιγεγραμμένου τούτου πολυγώνου ΔΕΖΗ κτλ. τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται, πολλαπλασιαζομένης τῆς περιμέτρου αὐτοῦ ΔΕ$+$ΕΖ$+$ΖΗ$+$κτλ. ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, ἤτοι ἐπὶ $\frac{1}{2}$ ΑΓ (πρότ. 7, βιβλ. 4). Ἀλλὰ τοῦ πολυγώνου ἡ περίμετρος εἶναι μείζων τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας, διότι πανταχόθεν αὐτὴν περιλαμβάνει, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου ΔΕΖΗ κτλ. ὑπερέχει τὸ γινόμενον τοῦτο $\frac{1}{2}$ ΑΓ$\times$ *περιφ.* ΑΓ, τὸ καθ' ὑπόθεσιν ἐκφράζον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, τοῦ ἔχοντος ΓΒ ἀκτῖνα. Ἄρα τὸ πολύγωνον εἶναι τοῦ κύκλου τούτου μεῖζον. Τοῦτο ὅμως δὲν ἀληθεύει· ἀπ' ἐναντίας μάλιστα τὸ πολύγωνον αὐτὸ εἶναι μικρότερον τοῦ κύκλου, τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν ΓΒ, διότι περιέχεται ἐν αὐτῷ τῷ κύκλῳ.

Λοιπὸν ἀδύνατον εἶναι νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ γινομένου τούτου $\frac{1}{2}$ ΓΑ$\times$ *περιφ.* ΓΑ ἐμβαδὸν μεῖζον τῆς *ἐπιφ.* ΓΑ. Ἤ, ἐν ἄλλοις λόγοις, ἀδύνατον εἶναι τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας κύκλου τινός, ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ πολλαπλασιασθείσης, νὰ ἐκφράσῃ κύκλον μείζονα.

Λέγω δὲ ἤδη, ὅτι διὰ τοῦ αὐτοῦ γινομένου δὲν δύναται νὰ σημειωθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου μικροτέρου. Διὰ νὰ μὴ μεταχειρισθῶ δὲ σχῆμα ἄλλο, ἂς ὑποτεθῇ ὅτι πρόκειται περὶ τοῦ κύκλου, τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν ΓΒ. Πρόκειται δηλαδὴ ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον τοῦτο $\frac{1}{2}$ ΓΒ$\times$ *περιφ.* ΓΒ δὲν δύναται νὰ χρησιμεύσῃ πρὸς παράστασιν τῆς ἐπιφανείας κύκλου μικροτέρου, παραδείγματος χάριν τοῦ κύκλου, τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν ΓΑ.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ δεύτερον τοῦτο τῆς προτάσεως μέρος, καθὼς καὶ τὸ πρῶτον, δὲν ἀποδεικνύεται κατ' εὐθεῖαν, ἔστω, εἰ δυνατὸν, $\frac{1}{2}$ΓΒ$\times$ *περιφ.* ΓΒ$=$ *ἐπιφ.* ΓΑ.

Περιγράφω, ὡς καὶ ἀνωτέρω, τὸ πολύγωνον ΔΕΖΗ κτλ. Τοῦ πολυγώνου τούτου ἡ ἐπιφάνεια ἔχει μέτρον τοῦτο (ΔΕ$+$ΕΖ$+$ΖΗ$+$κτλ.)$\times\frac{1}{2}$ΓΑ. Ἀλλ' ἡ περίμετρος ΔΕ$+$ΕΖ$+$ΖΗ$+$κτλ. εἶναι μικροτέρα τῆς *περιφ.*ΓΒ, ἐν ᾗ ὁλόκληρος περικλείεται. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερον τοῦ ποσοῦ τούτου $\frac{1}{2}$ΓΑ$\times$*περιφ.* ΓΒ, καὶ ἔτι μᾶλλον μικρότερον τοῦ ποσοῦ τούτου $\frac{1}{2}$ΓΒ$\times$ *περιφ.* ΓΒ. Ἀλλὰ τὸ τελευταῖον τοῦτο ποσὸν, καθ' ὑπόθεσιν, ἐκφράζει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, τοῦ ἔχοντος ΓΑ ἀκτῖνα. Λοιπὸν τὸ πολύγωνον, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος, εἶναι μικρότερον τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν αὐτῷ. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον.

Ἄρα ἀδύνατον εἶναι τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας κύκλου τινός, ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ πολλαπλασιασθείσης, νὰ ἐκφράσῃ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου μικροτέρου.

Λοιπὸν ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου, ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ πολλαπλασιασθεῖσα, τὸ μέτρον τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύκλου αὐτοῦ ἐκφράζει.

Πόρισμα 1. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τομέως ἐκφράζεται διὰ τοῦ γινομένου τοῦ τόξου τοῦ τομέως αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ πολλαπλασιασθέντος. (σχ. 168)

Διότι ὁ τομεὺς ΑΓΒ τοιαύτην ἔχει πρὸς ὁλόκληρον τὸν κύκλον σχέσιν, ὁποίαν τὸ τόξον ΑΜΒ πρὸς ὅλην τὴν περιφέρειαν ΑΒΔ (πρότ. 17, βιβ. 2), ἢ ὁποίαν τὸ γινόμενον $\text{ΑΜΒ}\times\frac{1}{2}\text{ΑΓ}$ πρὸς τὸ γινόμενον $\text{ΑΒΔ}\times\frac{1}{2}\text{ΑΓ}$. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $\text{ΑΒΔ}\times\frac{1}{2}\text{ΑΓ}$ ἐκφράζει τοῦ κύκλου τὸ ἐμβαδόν· ἄρα τὸ γινόμενον $\text{ΑΜΒ}\times\frac{1}{2}\text{ΑΓ}$ εἶναι τὸ μέτρον τῆς ἐπιφανείας τοῦ τομέως.

Πόρισμα 2. Ἔστω π ἡ περιφέρεια, ἡ διάμετρον ἔχουσα τὴν μονάδα. Ἐπειδὴ αἱ περιφέρειαι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀκτῖνας, ἢ πρὸς τὰς διαμέτρους, αὕτη δυνατὸν εἶναι νὰ σχηματισθῇ ἡ ἀναλογία· ἡ διάμετρος 1 τὸν αὐτὸν ἔχει πρὸς τὴν περιφέρειαν π λόγον (σχ. 165), ὃν ἔχει ἡ διάμετρος 2ΓΑ πρὸς τὴν περιφέρειαν, τὴν ἔχουσαν ΓΑ ἀκτῖνα. Ὅ ἐστιν, $1 : \pi :: 2\text{ΓΑ} : \textit{περιφ.}\ \text{ΓΑ}$. Λοιπὸν $\textit{περιφ.}\ \text{ΓΑ} = 2\pi\times\text{ΓΑ}$. Πολλαπλασιαζομένων ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐπὶ $\frac{1}{2}\text{ΓΑ}$, προκύπτει ἡ ἀκόλουθος ἰσότης, $\frac{1}{2}\text{ΓΑ}\times\textit{περιφ.}\ \text{ΓΑ} = \pi\times\overline{\text{ΓΑ}}^2$, ἢ $\textit{ἐπιφ.}\ \text{ΓΑ} = \pi\times\overline{\text{ΓΑ}}^2$. Ἤτοι ἡ ἐπιφάνεια παντὸς κύκλου εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ, πολλαπλασιασιασθέντος ἐπὶ τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν π, τὸν ἐκφράζοντα τὴν περιφέρειαν, τὴν ἔχουσαν διάμετρον τὴν μονάδα, τὸν δηλοῦντα δηλαδὴ τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.

Ὡσαύτως τοῦ κύκλου, τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν ΟΒ, ἡ ἐπιφάνεια δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ γινομένου τούτου $\pi\times\overline{\text{ΟΒ}}^2$. Ἐπειδὴ δὲ $\pi\times\overline{\text{ΓΑ}}^2 : \pi\times\overline{\text{ΟΒ}}^2 :: \overline{\text{ΓΑ}}^2 : \overline{\text{ΟΒ}}^2$, ἕπεται ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κύκλων εἶναι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων αὐτῶν ἀκτίνων ἀνάλογοι. Τοῦτο δὲ ἀπεδείχθη ἐν τῇ προηγουμένῃ προτάσει.

Σχόλιον. Ἐν τοῖς προηγουμένοις ἐγένετο λόγος, ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τετραγώνου κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσου κύκλῳ ἀκτῖνος γνωστῆς. Ἀλλ' ὡς ἤδη ἀπεδείχθη ὁ κύκλος εἶναι ἰσοδύναμος τῷ ὀρθογωνίῳ, τῷ ἔχοντι βάσιν μὲν τὴν περιφέρειαν, ὕψος δὲ καὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ. Τοῦτο δὲ τὸ ὀρθογώνιον τρέπεται εἰς τετράγωνον διὰ τῆς εὑρέσεως τῆς μέσης ἀναλόγου τῶν δύο αὐτοῦ διαστάσεων.

Ἤτοι ὁ κύκλος τετραγωνίζεται, ἂν, γνωστῆς οὔσης τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ, γνωστὴ καὶ ἡ περιφέρεια αὐτοῦ γείνῃ. Γίνεται δὲ γνωστὴ ἡ περιφέρεια διὰ τῆς ἀκτῖνος, ἐὰν προσδιορισθῇ ὁ πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος τῆς ἀκτῖνος, ἢ τῆς διαμέτρου.

Μέχρι τῆς ὥρας δὲν προσδιωρίσθη ὁ λόγος αὐτὸς, εἰμὴ ὡς ἔγγιστα. Ἀλλ' ὁ τοιοῦτος ὡς ἔγγιστα προσδιορισμὸς πλησιάζει τοσοῦτον εἰς τὴν ἀλήθειαν, ὥστε καὶ ἂν ὁ ἀκριβὴς τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον λόγος εὑρεθῇ, οὐδὲν θέλει ἔχει πραγματικὸν πλεονέκτημα ὑπὲρ τὸν λόγον τὸν προσεγγίζοντα. Διὰ τοῦτο τὸ περὶ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἄλλοτε, ὅτε αἱ περὶ προσεγγίσεως μέθοδοι δὲν ἦσαν ἀρκούντως γνωσταί, πολλοὺς ἐπησχόλησε γεωμέτρας, σήμερον τάσσεται μεταξὺ τῶν ἀργῶν ζητημάτων, εἰς ἃ μόνοι οἱ ἀγεωμέτρητοι καταγίνονται.

Ὁ Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν, ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον περιέχεται μεταξὺ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν $3\frac{10}{70}$ καὶ $3\frac{10}{71}$. Ὅ ἐστι $3\frac{1}{7}$ ἢ $\frac{22}{7}$ εἶναι τιμή τις ἀρκούντως προσεγγίζουσα εἰς τὸν ἀριθμὸν, τὸν ἀνωτέρω σημειωθέντα διὰ π. Αὕτη δὲ ἡ πρώτη προσεγγίζουσα τιμὴ τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι ἐν κοινῇ χρήσει, ἕνεκα τῆς ἁπλότητος αὐτῆς.

Ὁ Μέτιος εὗρεν ἄλλην τινὰ τιμὴν τοῦ π, μᾶλλον προσεγγίζουσαν, ταύτην $\frac{355}{113}$. Ἄλλοι δὲ ὑπελόγισαν διὰ δεδακικῶν κλασμάτων τὴν τιμὴν τοῦ π, εὗρον δὲ αὐτὴν ἴσην τῷ κλασματικῷ ἀριθμῷ τούτῳ 3,14159265358979 32 κτλ. Τινὲς δὲ αὐτῶν παρέτειναν τοὺς ὑπολογισμοὺς μέχρι τοῦ ἑκατοστοῦ εἰκοστοῦ ἑβδόμου, ἄλλοι δὲ μέχρι τοῦ ἑκατοστοῦ τεσσαρακοστοῦ δεκαδικοῦ ψηφίου. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ἡ τοιαύτη προσέγγισις δὲν διαφέρει τῆς ἐσχάτης ἀκριβείας. Ἀκριβέστερον δὲ δὲν δύναταί τις νὰ εὕρῃ οὐδὲ τῶν ἀτελῶν δυνάμεων τὰς ῥίζας.

Τὰ ἀκόλουθα προβλήματα χρησιμεύουσι πρὸς ἑρμηνείαν τῶν δύο στοιχειωδεστέρων καὶ ἁπλουστέρων μεθόδων, δι' ὧν ὡς ἔγγιστα ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εὑρίσκεται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13.

Πρόβλημα.

Δεδομένων τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων, τοῦ μὲν ἐγγεγραμμένου, τοῦ δὲ περιγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, ζητοῦνται αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κανονικῶν πολυγώνων, τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου, τῶν ἐχόντων πληθὺν πλευρῶν διπλασίαν. (σχ. 169)

Ἔστω ΑΒ μὲν ἡ πλευρὰ τοῦ γνωστοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, ΕΖ δὲ ἡ πλευρὰ τοῦ ὁμοίου κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ περιγεγραμμένου καὶ γνωστοῦ, ἡ παράλληλος τῆς ΑΒ· πρὸς τούτοις δὲ ἔστω Γ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Ἄγω τὴν χορδὴν ΑΜ καὶ τὰς ἐφαπτομένας ΑΠ, ΒΚ.

Τούτων γενομένων, ΑΜ μὲν εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἔχοντος πληθὺν πλευρῶν διπλασίαν, ΠΚ δὲ, διπλασία τῆς ΠΜ, εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου πολυγώνου (πρότ. 6, βιβλ. 4).

Ἐπειδὴ δὲ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς πᾶσαν γωνίαν ἴσην τῇ ΑΓΜ, ἀρκεῖ πρὸς λύσιν τοῦ ζητήματος ἡ ἐξέτασις μόνης τῆς γωνίας ΑΓΜ, διότι τὰ τρίγωνα τὰ ἐν αὐτῇ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ πολύγωνα ὁλόκληρα.

Καὶ τούτου τεθέντος, ἔστω Α ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἔχοντος πλευρὰν τὴν ΑΒ, Β ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, Α′ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἔχοντος πλευρὰν τὴν ΑΜ, καὶ Β′ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου.

Α καὶ Β εἶναι ποσὰ γνωστά· ζητοῦνται δὲ τὰ ἄγνωστα ποσὰ Α′ καὶ Β′.

Α^{ον}. Τὰ τρίγωνα ΑΓΔ, ΑΓΜ, τὰ ἔχοντα κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον Α, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν ΓΔ, ΓΜ. Τὰ αὐτὰ δὲ τρίγωνα εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ πολύγωνα Α καὶ Α′, εἰς ἃ ἀνήκουσι. Λοιπὸν Α : Α′ : : ΓΔ : ΓΜ. Τὰ τρίγωνα δὲ ΓΑΜ, ΓΜΕ, τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν κορυφὴν Μ, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν ΓΑ, ΓΕ. Τὰ αὐτὰ δὲ τρίγωνα εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ πολύγωνα Α′ καὶ Β, εἰς ἃ ἀνήκουσι. Λοιπὸν Α′ : Β : : ΓΑ : ΓΕ. Ἐπειδὴ δὲ ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΑΔ, ΜΕ αὕτη ὑπάρχει ἡ ἀναλογία ΓΔ : ΓΜ : : ΓΑ : ΓΕ, ἕπεται ὅτι Α : Α′ : : Α′ : Β. Ἄρα τὸ πολύγωνον Α′, τὸ ἕτερον τῶν ζητουμένων, εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο γνωστῶν πολυγώνων Α καὶ ὁ Β· ὅ ἐστιν $A' = \sqrt{A \times B}$.

Β^{ον}. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΓΠΜ, ΓΠΕ ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος ΓΜ, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν ΠΜ, ΠΕ. Ἐπειδὴ προσέτι ἡ εὐθεῖα ΓΠ διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν ΜΓΕ, (πρότ. 17, βιβλ. 3), ἕπεται ὅτι ΠΜ : ΠΕ :: ΓΜ : ΓΕ :: ΓΔ : ΓΑ :: Α : Α΄. Ἄρα ΓΠΜ : ΓΠΕ :: Α : Α΄. Ὅθεν ἕπεται ΓΜΠ : ΓΠΜ$+$ΓΠΕ, ἢ ΓΜΕ :: Α : Α$+$Α΄. Ἀλλὰ ΓΜΠΑ ἢ 2ΓΜΠ καὶ ΓΜΕ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ πολύγωνα Β΄ καὶ Β, εἰς ἃ ἀνήκουσι. Λοιπὸν Β΄ : Β :: 2Α : Α$+$Α΄. Ὄντος δὲ ἤδη τοῦ Α΄ γνωστοῦ, ὡς ἀνωτέρω εἴρηται, διὰ τῆς ἀναλογίας ταύτης προσδιορίζεται τὸ Β΄. Ὅ ἐστι $Β' = \frac{2Α \times Β}{Α + Α'}$.

Εὐκόλως λοιπὸν διὰ τῶν πολυγώνων Α καὶ Β δύναταί τις νὰ προσδιορίσῃ τὰ πολύγωνα Α΄ καὶ Β΄, τὰ ἔχοντα πληθὺν πλευρῶν διπλασίαν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14.

Πρόβλημα.

Ζητεῖται ὁ ὡς ἔγγιστα λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.

Ἔστω ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου ἴση 1. Ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι ἡ $\sqrt{2}$ (πρότ. 3, βιβλ. 4)· ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι ἴση τῇ διαμέτρῳ. Ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ μὲν ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι 2, τοῦ δὲ περιγεγραμμένου 4.

Ἀντεισάγοντες εἰς τοὺς τύπους τῆς προηγουμένης προτάσεως, ἀντὶ τοῦ Α, τὸν ἀριθμὸν 2, καὶ ἀντὶ τοῦ Β, τὸν ἀριθμὸν 4, εὑρίσκομεν τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον ὀκτάγωνον $Α' = \sqrt{8} =$ 2,8284271, τὸ δὲ περιγεγραμμένον ὀκτάγωνον $Β' = \frac{16}{2+\sqrt{8}}$ $=$ 3, 3137085. Διὰ τῶν ὀκταγώνων δὲ, τοῦ τε ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου, τῶν ἤδη γνωστῶν γενομένων, προσδιορίζονται τὰ πολύγωνα, τὰ ἐκ διπλασίας πληθύος πλευρῶν συνιστάμενα. Ἐπὶ τούτῳ δὲ γίνεται τὸ μὲν Α$=$2,8284271, τὸ δὲ Β$=$3,3137085· ὅθεν προκύπτει $Α' = \sqrt{Α \times Β} =$ 3, 0614674, καὶ $Β' = \frac{2Α \times Β}{Α + Α'} =$ 3,1825979. Ταῦτα δὲ τὰ πολύγωνα, τὰ ἐκ 16 πλευρῶν συνιστάμενα, χρησιμεύουσι πρὸς εὕρεσιν τῶν πολυγώνων, τῶν ἀποπερατουμένων ὑπὸ πλευρῶν 32.

Παρατείνοντες τοὺς ὑπολογισμοὺς κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν εἰς πολύγωνα, ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον, μὴ διαφέροντα ἀλλήλων κατὰ τὰ πρῶτα τοὐλάχιστον ἑπτὰ δεκαδικὰ ψηφία, εἰς ἃ οἱ ὑπολογισμοὶ ἀνωτέρω περιωρίσθησαν. Τούτου δὲ γενομένου, καὶ ὁ κύκλος δὲν διαφέρει τῶν πολυγώνων αὐτῶν, διότι μεταξὺ αὐτῶν περιέχεται. Ἄρα ὁ κύκλος σημαίνεται διὰ τοῦ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ἐκφράζοντος τὰ πολύγωνα, τὸ ἐγγεγραμμένον καὶ τὸ περιγεγραμμένον, τὰ μὴ διαφέροντα ἀλλήλων κατὰ τὰ πρῶτα ἑπτὰ δεκαδικὰ ψηφία. Ἰδοὺ δὲ ἡ σειρὰ τῶν ὑπολογισμῶν τῶν πολυγώνων αὐτῶν, ἀπὸ τῶν τετραγώνων μέχρι τῶν πολυγώνων, τῶν μὴ διαφερόντων κατὰ τὰ πρῶτα ἑπτὰ δεκαδικὰ ψηφία.

Ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν.	Πολ. ἐγγεγραμμένον.	Πολ. περιγεγραμμένον.
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3 3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,1214451	3 1517249
64	3 1365485	3,1441184
128	3,1403311	3,1422236
256	3 1412772	3,1417504
512	3,1415138	3 1416321
1024	3 1415729	3,1416025
2048	3 1415877	3,1415951
4096	3 1415914	3 1415933
8192	3.1415923	3,1415928
16384	3,1415925	3 1415927
32768	3,1415926	3,1415926

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου 3,1415926.

Πρὸς πλειοτέραν δὲ ἀκρίβειαν, καὶ πρὸς ἀποφυγὴν τῶν σφαλμάτων, τῶν προκυπτόντων ἐκ τῆς παραλείψεως τῶν μικροτάτων κλασμάτων, τὰ πολύγωνα, τό τε ἐγγεγραμμένον καὶ τὸ περιγεγραμμένον, ὑπελογίσθησαν μέχρι τοῦ ἐννάτου δεκαδικοῦ ψηφίου· περιελήφθη δηλαδὴ εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς καὶ τὸ ὄγδοον δεκαδικὸν ψηφίον. Τοιουτοτρόπως δὲ ἀσφαλίζεται ἡ ἀκρίβεια τοῦ ψηφίου τοῦ ἑβδόμου.

Ἐπειδὴ δὲ τοῦ κύκλου ἡ ἐπιφάνεια εὑρίσκεται καὶ πολλαπλασιαζομένης τῆς ἡμιπεριφερείας αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα, οὔσης τῆς ἀκτῖνος ἴσης τῇ 1, ἡ ἡμιπεριφέρεια εἶναι 3,1415926. Οὔσης δὲ τῆς διαμέτρου ἴσης τῇ 1, ἡ περιφέρεια εἶναι 3,1415926. Ἤτοι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, ὁ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἀριθμὸς π, εἶναι ἴσος τῷ 3,1415926.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.

Λῆμμα.

Τὸ τρίγωνον ΓΑΒ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ ΔΓΕ, τῷ ἔχοντι τὴν αὐτὴν γωνίαν Γ, καὶ τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΓΕ, ἡ ἴση τῇ ΓΔ, εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΓΑ καὶ ΓΒ. Ἐὰν δὲ πρὸς τούτοις ἡ γωνία ΓΑΒ ὀρθὴ ὑποτεθῇ, ἡ κάθετος ΓΖ, ἡ ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου καταβιβαζομένη, εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς πλευρᾶς ΓΔ καὶ τοῦ ἥμισυ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν ΓΑ, ΓΒ. (σχ. 170)

Α^{ον}. Ἕνεκα τῆς κοινῆς γωνίας Γ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τοιαύτην ἔχει πρὸς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΔΓΕ σχέσιν, οἵαν τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ$\times$ΓΒ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΔΓ$\times$ΓΕ, ἢ πρὸς τὸ τετράγωνον $\overline{\Delta\Gamma}^{2}$ (πρότ. 24, βιβλ. 3). Ἄρα τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα, ἐὰν $\overline{\Delta\Gamma}^{3}$=ΑΓ$\times$ΓΒ, ἐὰν δηλαδὴ ἡ ΔΓ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ΑΓ καὶ τῆς ΓΒ.

Β^{ον}. Ἐπειδὴ ἡ κάθετος ΓΗΖ τέμνει εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν ΑΓΒ (πρότ. 17, βιβλ. 3), αὐτῇ ὑπάρχει ἡ ἀναλογία ΑΗ : ΗΒ :: ΑΓ : ΓΒ. Ὅθεν ἕπεται ΑΗ : ΑΗ$+$ΗΒ ἢ ΑΒ :: ΑΓ : ΑΓ$+$ΓΒ. Ἀλλὰ ΑΗ : ΑΒ :: τρίγωνον ΑΓΗ : τρίγωνον ΑΓΒ ἢ 2ΓΔΖ. Ἐὰν ἤδη ἡ γωνία Α ὑποτεθῇ ὀρθή, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΗ, ΓΔΖ εἶναι ὅμοια, καὶ ταύτην παράγουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΓΗ : ΓΔΖ :: $\overline{\mathrm{A}\Gamma}^{2}$: $\overline{\Gamma\mathrm{Z}}^{2}$. Λοιπὸν

$\overline{\mathrm{A}\Gamma}^{2}$: $2\overline{\Gamma\mathrm{Z}}^{2}$ :: ΑΓ : ΑΓ$+$ΓΒ.

Πολλαπλασιαζομένων ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου λόγου τῆς ἀναλογίας ταύτης ἐπὶ ΑΓ, οἱ ἡγούμενοι καθίστανται ἴσοι· ἐπομένως ἴσοι τότε γίνονται καὶ οἱ ἑπόμενοι. Ἄρα $2\overline{\Gamma Z}^2 = A\Gamma \times (A\Gamma + \Gamma B)$, ἢ $\overline{\Gamma Z}^2 = A\Gamma \times \left(\frac{A\Gamma + \Gamma B}{2}\right)$. Ὅ ἐστι μεθερμηνευόμενον, ἐὰν ἡ γωνία Α ὑποτεθῇ ὀρθή, ἡ κάθετος ΓΖ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν πλευρῶν ΑΓ, ΓΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16.

Πρόβλημα.

Ζητεῖται κύκλος, διαφέρων γνωστοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τοσοῦτον ὀλίγον, ὅσον ἄν τις θελήσῃ. (σχ. 171)

Ἔστω, χάριν παραδείγματος, γνωστὸν τὸ τετράγωνον ΒΜΝΠ· ζητεῖται δὲ ὁ κύκλος, ὁ διαφέρων αὐτοῦ κατ᾽ ἐλάχιστον.

Καταβιβάζω ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΜΒ τὴν κάθετον ΓΑ, καὶ ἄγω τὴν ΓΒ.

Ὁ διὰ τῆς ἀκτῖνος ΓΑ γραφόμενος κύκλος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ δεδομένον τετράγωνον, ὁ δὲ διὰ τῆς ΓΒ γραφόμενος εἶναι περιγεγραμμένος εἰς τὸ αὐτὸ τετράγωνον. Ὁ πρῶτος εἶναι μικρότερος τοῦ τετραγώνου· ὁ δεύτερος μείζων. Πρόκειται δὲ ἤδη νὰ συσταλῶσι τὰ δύο ταῦτα ὅρια.

Λαμβάνω ἑκατέραν τῶν πλευρῶν ΓΔ καὶ ΓΕ ἴσην τῇ μέσῃ ἀναλόγῳ, τῇ μεταξὺ τῆς ΓΑ καὶ ΓΒ, καὶ ἄγω τὴν ΕΔ. Τούτων γενομένων, τὸ τρίγωνον ΓΔΕ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ τριγώνῳ ΓΑΒ (πρότ. 15, βιβλ. 4).

Τὰ αὐτὰ πράττω εἰς ἕκαστον τῶν ὀκτὼ τριγώνων, τῶν ἀποτελούντων τὸ τετράγωνον τὸ δεδομένον· τοιουτοτρόπως δὲ σχηματίζεται ὀκτάγωνον κανονικόν, ἰσοδύναμον τῷ τετραγώνῳ ΒΜΝΠ. Ὁ κύκλος δὲ ὁ γραφόμενος διὰ τῆς ἀκτῖνος ΓΖ, τῆς μέσης ἀναλόγου μεταξὺ ΓΑ καὶ $\frac{\Gamma A + \Gamma B}{2}$, εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ὀκτάγωνον· ὁ κύκλος δὲ, ὁ γραφόμενος διὰ τῆς ἀκτῖνος ΓΔ, εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ὀκτάγωνον περιγεγραμμένος. Ὁ πρῶτος κύκλος εἶναι μικρότερος τοῦ δεδομένου τετραγώνου· ὁ δὲ δεύτερος μείζων.

Μετασχηματιζομένων δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τῶν ἴσων τῷ τριγώνῳ ΓΔΖ, εἰς τρίγωνα ἰσοσκελῆ ἰσοδύναμα, τὸ ὀκτάγωνον τρέπεται εἰς πλευρῶν δεκαὲξ πολύγωνον κανονικὸν, ἰσοδύναμον τῷ δεδομένῳ τετραγώνῳ. Καὶ ὁ μὲν κύκλος, ὁ ἐν αὐτῷ τῷ πολυγώνῳ ἐγγεγραμμένος, εἶναι τοῦ τετραγώνου μικρότερος, ὁ δὲ κύκλος ὁ περιγεγραμμένος μείζων.

Δύναταί τις νὰ παρατείνῃ τὴν τοιαύτην κατασκευὴν ἕως οὗ αἱ ἀκτῖνες, ἡ τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου, νὰ διαφέρωσιν ἀλλήλων ὅσον ἔνεστιν ὀλίγον. Τότε δὲ ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος καὶ ὁ περιγεγραμμένος σχεδὸν συμπίπτουσι, καὶ δύναται νὰ ἐκληφθῇ ἑκάτερος αὐτῶν ὡς ἰσοδύναμος τῷ τετραγώνῳ τῷ δεδομένῳ.

Σχόλιον. Ἰδοὺ εἰς ποίας ἀνάγεται πράξεις ἡ τῶν διαδοχικῶν ἀκτίνων ἀναζήτησις.

Ἔστω α μὲν ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς κανονικόν τι πολύγωνον ἐγγεγραμμένου κύκλου, β δὲ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ αὐτὸ πολύγωνον. Ἔστωσαν πρὸς τούτοις α' καὶ β' αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων, τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ πολύγωνον τὸ ἀκόλουθον, τὸ ἔχον πλευρῶν πληθὺν διπλασίαν.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἀποδεδειγμένα, ἡ μὲν β' εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ α καὶ β, ἡ δὲ α' μέση ἀνάλογος μεταξὺ α καὶ $\frac{\alpha+\beta}{2}$ ἤτοι $\beta'=\sqrt{\alpha\times\beta}$, καὶ $\alpha'=\sqrt{\alpha\times\frac{\alpha+\beta}{2}}$. Ἐὰν λοιπὸν αἱ ἀκτῖνες α καὶ β τῶν κύκλων, τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου, ἦναι γνωσταί, εὐκόλως προσδιορίζονται αἱ α' καὶ β' ἀκτῖνες τῶν κύκλων, τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ ἀκόλουθον πολύγωνον. Ἅμα δὲ, παρατεινομένου τοῦ τοιούτου ὑπολογισμοῦ, ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἀκτίνων, τῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου δηλαδὴ καὶ τῆς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, καταντήσῃ ἀνεπαίσθητος, τότε ἑκατέρα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν εἶναι ἀκτὶς τοῦ κύκλου, τοῦ ἰσοδυνάμου τῷ δεδομένῳ τετραγώνῳ, ἢ ἄλλῳ τινὶ γνωστῷ κανονικῷ πολυγώνῳ.

Τῆς τοιαύτης ἀκτῖνος ἡ εὕρεσις εὐκόλως κατορθοῦται διὰ εὐθειῶν, διότι εἰς πολλῶν διαδοχικῶν μέσων ἀναλόγων ὁ προσδιορισμὸς αὐτῆς ἀνάγεται. Εὐκολώτερον ὅμως ἡ ἀκτὶς αὐτη εὑρίσκεται δι' ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ. Ὁ τοιοῦτος δὲ ὑπολογισμὸς ἀποτελεῖ μίαν τῶν προχειροτέρων μεθόδων, δι' ὧν ἐν τῇ στοιχειώδει γεωμετρίᾳ συντόμως προσδιορίζεται ὁ ὡς ἔγγιστα λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.

Ἐπὶ τούτῳ δὲ ἔστω ἡ πλευρὰ τοῦ δεδομένου τετραγώνου ἴση 2. Ἡ ΓΑ ἀκτὶς τοῦ πρώτου ἐγγεγραμμένου κύκλου εἶναι 1, καὶ ἡ ΓΒ ἀκτὶς τοῦ πρώτου περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι $\sqrt{2}=$ 1,4142136.

Ὄντος δὲ τοῦ $\alpha=1$, καὶ τοῦ $\beta=1,4142136$, εὑρίσκεται τὸ μὲν $\beta'=1,1892071$, τὸ δὲ $\alpha'=1,0986841$. Οὗτοι δὲ οἱ δύο ἀριθμοὶ χρησιμεύουσι πρὸς ὑπολογισμὸν τῶν ἀκολούθων, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καθ' ὃν αὐτοὶ ἐκ τῶν προηγουμένων προσδιωρίσθησαν.

Ἰδοὺ δὲ τὸ ἐξαγόμενον τοῦ τοιούτου ὑπολογισμοῦ, εἰς ὃν ἐγένετο χρῆσις τῶν κοινῶν λογαρίθμων· ἐλήφθησαν δὲ ἑπτὰ ἢ ὀκτὼ δεκαδικὰ ψηφία.

Ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων κύκλων.		Ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων.
1,4142136	. .	1,0000000
1,1892071	. .	1,0986841
1,1430500	. .	1,1210863
1,1320149	. .	1,1265639
1,1292862	. .	1,1279257
1,1286063	. .	1,1282657

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἥμισυ τῶν χαρακτήρων, δι' ὧν αἱ ἀκτῖνες τῶν τελευταίων δύο κύκλων, τοῦ περιγεγραμμένου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου, εἶναι τὸ αὐτὸ, ἀντὶ τῶν μέσων γεωμετρικῶν ἀναλόγων, δύναται νὰ λάβῃ τις τοὺς ἀριθμητικοὺς μέσους ἀναλόγους, οἵτινες δὲν διαφέρουσι τῶν γεωμετρικῶν, εἰμὴ κατὰ τὰ τελευταῖα δεκαδικὰ ψηφία. Οἱ ὑπολογισμοὶ δὲ τοιουτοτρόπως συντέμνονται καθ' ὑπερβολὴν, ταῦτα δὲ παράγουσι τὰ ἐξαγόμενα.

1,1284360	. .	1,1283508
1,1283934	. .	1,1283721
1,1283827	. .	1,1283774
1,1283801	. .	1,1283787
1,1283794	. .	1,1283791
1,1283792	. .	1,1283792.

Λοιπὸν 1,1283792 εἶναι ὡς ἔγγιστα ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, τοῦ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσου τῷ τετραγώνῳ, τῷ ἔχοντι πλευρὰν 2. Ἐκ τούτου δὲ εὐκόλως πορίζεταί τις τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον· διότι, κατὰ τὰ ἤδη ἀποδεδειγμένα, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου ἐκφράζεται διὰ τοῦ γινομένου τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν π. Ἐὰν λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια 4 διαιρεθῇ διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ 1,1283791, προκύπτει τοῦ π ἡ τιμή. Ἡ τοιουτοτρόπως δὲ προσδιοριζομένη τιμὴ τοῦ π εἶναι 3,1415926 κτλ. Τὴν αὐτὴν δὲ ἐν τοῖς προηγουμένοις εὕρομεν τιμὴν, κατὰ τρόπον ἄλλον. (*)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ Δ'. ΒΙΒΛΙΟΥ.

Ὁρισμοί.

1. *Μέγιστον* ὀνομάζεται τὸ ποσὸν, τὸ παντὸς ἄλλου ὁμοειδοῦς μεῖζον· *ἐλάχιστον* δὲ τὸ παντὸς ὁμοειδοῦς μικρότερον.

Παραδείγματος χάριν, ἡ μὲν διάμετρος, πρὸς τὰς ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένας λοιπὰς εὐθείας παραβαλλομένη, εἶναι *μεγίστη*· ἡ δὲ κάθετος, πρὸς ὅλας τὰς ἀπὸ γνωστοῦ σημείου εἰς γνωστὴν εὐθεῖαν ἀγομένας πλαγίας συγκρινομένη, εἶναι *ἐλαχίστη*.

2. *Ἰσοπερίμετρα* σχήματα ὀνομάζονται τὰ περιμέτρους ἴσας ἔχοντα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1.

Θεώρημα.

Ἐξ ὅλων τῶν τριγώνων, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὴν αὐτὴν περίμετρον, τὸ ἴσας ἔχον τὰς λοιπὰς δύο πλευρὰς εἶναι τὸ μέγιστον. (σχ. 172).

Ἔστω ΑΓ=ΓΒ, καὶ ΑΜ+ΜΒ=ΑΓ+ΓΒ· λέγω, ὅτι τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι μεῖζον τοῦ τριγώνου ΑΜΒ, τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὴν αὐτὴν περίμετρον.

(*) Τὸ τέταρτον βιβλίον κύριον ἀντικείμενον ἔχει τοῦ κύκλου τὴν καταμέτρησιν καὶ τῶν κανονικῶν πολυγώνων τὰς ἰδιότητας. Ὡς προείρηται δὲ ὁ κύκλος οὐδὲν ἄλλο εἶναι, εἰμὴ κανονικὸν πολύγωνον, πληθὺν πλευρῶν ἄπειρον ἔχον. Ο. Μ.

Ἐκ τοῦ σημείου Γ, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ διὰ τῆς ἀκτῖνος ΓΑ=ΓΒ γράφω περιφέρειαν, συναπαντῶσαν εἰς τὸ σημεῖον Δ τὴν ΓΑ, παρατεινομένην. Ἄγω τὴν ΔΒ. Ἡ γωνία ΔΒΑ, ἡ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ ἐγγεγραμμένη, εἶναι ὀρθή (πρότ. 18, βιβλ. 2). Ἐκτείνω τὴν κάθετον ΔΒ πρὸς τὸ σημεῖον Ν· λαμβάνω τὴν ΜΝ=ΜΒ, καὶ συνάπτω τὰ σημεῖα Α καὶ Ν διὰ τῆς ΑΝ· ἐκ τοῦ σημείου δὲ Μ καὶ Γ καταβιβάζω ἐπὶ τῆς ΔΝ τὰς καθέτους ΜΠ καὶ ΓΗ.

Ἐπειδὴ ΓΒ=ΓΔ καὶ ΜΝ=ΜΒ, ἕπεται ὅτι ΑΓ+ΓΒ=ΑΔ, καὶ ΑΜ+ΜΒ=ΑΜ+ΜΝ. Ἀλλὰ ΑΓ+ΓΒ=ΑΜ+ΜΒ· λοιπὸν ΑΔ=ΑΜ+ΜΝ· ἄρα ΑΔ>ΑΝ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ πλαγία ΑΔ τὴν πλαγίαν ΑΝ ὑπερέχει, ἀπέχει τῆς καθέτου ΑΒ πλειότερον. Λοιπὸν ΔΒ>ΒΝ. Ἄρα ἡ ΒΗ, ἥτις εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΒΔ (πρότ. 12, βιβλ. 1), εἶναι μείζων τῆς ΒΠ, ἥτις εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΒΝ. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΜ, τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ, εἶναι πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν ΒΗ, ΒΠ ἀνάλογα. Ἄρα, ἐπειδὴ ΒΗ> ΒΠ, τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι μεῖζον τοῦ μὴ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΜΒ, τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὴν αὐτὴν περίμετρον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2.

Θεώρημα.

Ἐξ ὅλων τῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν πλευρῶν πληθύν, τὸ μέγιστον εἶναι ἰσόπλευρον. (σχ. 173)

Ἔστω ΑΒΓΔΕΖ τὸ μέγιστον πολύγωνον. Ἐὰν ἡ πλευρὰ ΒΓ δὲν ἦναι ἴση τῇ ΓΔ, κατασκευάζω ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΔ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΟΔ, τὸ ὡς πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ ἰσοπερίμετρον. Τὸ τρίγωνον ΒΟΔ εἶναι μεῖζον τοῦ τριγώνου ΒΓΔ (πρότ. 1 παράρτ.), καὶ ἐπομένως τὸ πολύγωνον ΑΒΟΔΕΖ ὑπερέχει τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ. Ἄρα τὸ πολύγωνον τοῦτο, ἐξ ὅλων τῶν πολυγώνων, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν περίμετρον καὶ τὴν αὐτὴν πλευρῶν πληθύν, δὲν εἶναι τὸ μέγιστον, ὡς ψευδῶς ὑπετέθη. Κατ' ἀνάγκην λοιπὸν ΒΓ=ΓΔ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΓΔ=ΔΕ, ΔΕ=ΕΖ, κτλ. Ἄρα τὸ *μέγιστον* πολύγωνον εἶναι ἰσόπλευρον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3.

Θεώρημα.

Ἐξ ὅλων τῶν τριγώνων, τῶν κατασκευαζομένων διὰ δύο πλευρῶν δεδομένων, μέγιστον εἶναι ἐκεῖνο, εἰς ὃ αἱ δύο αὗται πλευραὶ γωνίαν ὀρθὴν ἀποτελοῦσι. (σχ. 174)

Τὰ δύο τρίγωνα ΒΑΓ, ΒΑΔ ἔχουσι κοινὴν τὴν πλευρὰν ΑΒ, καὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ=ΑΔ. Ἐὰν ἡ γωνία ΒΑΓ ἦναι ὀρθή, λέγω ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΑΓ εἶναι μεῖζον τοῦ τριγώνου ΒΑΔ, τοῦ ἔχοντος τὴν εἰς τὸ σημεῖον Α γωνίαν ὀξεῖαν ἢ ἀμβλεῖαν.

Καὶ τῷ ὄντι· τὰ δύο τρίγωνα ΒΑΓ, ΒΑΔ, ἐπειδὴ ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν ΑΓ, ΔΕ. Ἀλλ' ἡ κάθετος ΔΕ εἶναι μικροτέρα τῆς πλαγίας ΑΔ, τῆς ἴσης τῇ ΑΓ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΑΔ εἶναι μικρότερον τοῦ ΒΑΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4.

Θεώρημα.

Ἐξ ὅλων τῶν πολυγώνων, τῶν κατασκευαζομένων διὰ μιᾶς κατὰ θέλησιν εἰλημμένης πλευρᾶς, τῶν δὲ λοιπῶν δεδομένων, τὸ μέγιστον εἶναι τοιοῦτον, ὥστε ὅλαι αὐτοῦ αἱ γωνίαι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὴν ἡμιπεριφέρειαν, τὴν ἔχουσαν διάμετρον τὴν πλευρὰν τὴν ἄγνωστον. (σχ. 175)

Ἔστω ΑΒΓΔΕΖ τὸ μέγιστον τῶν πολυγώνων, τῶν κατασκευαζομένων διὰ τῶν δεδομένων πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ καὶ τῆς πλευρᾶς ΑΖ, κατὰ θέλησιν εἰλημμένης.

Ἄγω τὰς διαγωνίους ΑΔ, ΔΖ.

Ἐὰν ἡ γωνία ΑΔΖ δὲν ἦναι ὀρθή, δύναταί τις, τηρῶν τοῦ σχήματος τὰ μέρη ΑΒΓΔ, ΔΕΖ, ν' αὐξήσῃ τὸ τρίγωνον ΑΔΖ, ἐπομένως καὶ τὸ πολύγωνον ὁλόκληρον, ἐὰν καταστήσῃ τὴν γωνίαν αὐτήν, ἤτοι τὴν ΑΔΖ, ὀρθήν, κατὰ τὰ ἐν τῇ προηγουμένῃ προτάσει εἰρημένα. Ἐπειδὴ δὲ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ ὑπετέθη μέγιστον, οὐδεμία εἰς αὐτὸ δυνατὸν εἶναι νὰ δοθῇ αὔξησις· ἄρα ἡ γωνία ΑΔΖ εἶναι ἤδη ὀρθή. Ὡσαύτως ὀρθαὶ εἶναι καὶ αἱ γωνίαι ΑΒΖ, ΑΓΖ, ΑΕΖ. Λοιπὸν τοῦ μεγίστου πολυγώνου ὅλαι αἱ γωνίαι Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὴν ἡμιπεριφέρειαν, τὴν ἔχουσαν διάμετρον τὴν ἀπροσδιόριστον πλευρὰν ΑΖ.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη ἀφορμὴν δίδει εἰς τοῦ προβλήματος τούτου τὴν γένεσιν. Πολλοὶ ἆρά γε ὑπάρχουσι τρόποι, καθ᾽ οὓς δύναται νὰ σχηματισθῇ τὸ μέγιστον πολύγωνον, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος;

Πρὶν ἢ δοθῇ εἰς τὸ ζήτημα τοῦτο ἡ πρέπουσα λύσις, παρατηρητέον ὅτι, ἐὰν ἡ αὐτὴ χορδὴ ΑΒ ὑποτείνῃ τόξα, διὰ διαφόρων ἀκτίνων ΑΓ, ΑΔ γεγραμμένα (σχ. 176), ἡ κεντρικὴ γωνία εἶναι μὲν μικροτέρα εἰς τὸν κύκλον, τὸν ἔχοντα μεγάλην ἀκτῖνα, μεγαλητέρα δὲ εἰς τὸν κύκλον. τὸν δι᾽ ἀκτῖνος μικρᾶς. γεγραμμένον· ὅ ἐστιν ΑΓΒ$<$ΑΔΒ. Ἡ ἀπόδειξις δὲ τούτου εἶναι πρόχειρος.

Ἐπειδὴ ΑΔΟ$=$ΑΓΔ$+$ΓΑΔ (πρότ. 19. βιβλ. 1), ἡ γωνία ΑΓΔ$<$ΑΔΟ. Διπλασιαζομένων δὲ ἀμφοτέρων τῶν δύο ἀνίσων αὐτῶν ποσῶν, ἕπεται ὅτι ΑΓΒ$<$ΑΔΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Θεώρημα.

Μόνον εἷς ὑπάρχει τρόπος, καθ᾽ ὃν τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐκ πολλῶν μὲν γνωστῶν πλευρῶν, μιᾶς δὲ ἀπροσδιορίστου, ἥτις εἶναι διάμετρος τοῦ ἡμικυκλίου, ἐν ᾧ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ εἶναι ἐγγεγραμμέναι. (σχ. 175).

Ἔστω, ὅτι εὑρέθη ὁ κύκλος ὁ πληρῶν τοῦ προκειμένου ζητήματος τὰς συνθήκας. Ἂν ληφθῇ κύκλος τις μείζων, αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κτλ. ἀντιστοιχοῦσιν εἰς κεντρικὰς γωνίας μικροτέρας. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν θέλ᾽ εἶσθαι μικρότερον δύο γωνιῶν ὀρθῶν· ἑπομένως αἱ ἐσχατιαὶ τῶν πλευρῶν τῶν δεδομένων δὲν θέλουσιν ἀπολήγει εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου. Τὸ ἄτοπον δὲ τὸ ἐναντίον θέλει συμβῇ, ἐὰν κύκλος μικρότερος ληφθῇ. Ἄρα τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος πολύγωνον δὲν ἐγγράφεται εἰμὴ εἰς ἕνα μόνον κύκλον.

Σχόλιον. Δυνατὸν μὲν εἶναι ν᾽ ἀλλάξῃ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κτλ. ἡ τάξις, ἡ διάμετρος ὅμως τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου μένει ἡ αὐτή. Ἀναλλοίωτος δὲ μένει καὶ τοῦ πολυγώνου ἡ ἐπιφάνεια· διότι ὁποιαδήποτ᾽ εἶναι τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, κτλ. ἡ τάξις, ἀρκεῖ μόνον ἐκ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν ν᾽ ἀποτελῆται ἡ ἡμιπεριφέρεια, καὶ τοῦ πολυγώνου ἡ ἐπιφάνεια κατ᾽ οὐδὲν ἀλλοιοῦται, διότι αὕτη προσδιορίζεται, ἀφαιρουμένων ἀπὸ τοῦ ἡμικυκλίου τῶν κυκλικῶν τμημάτων ΑΒ,ΒΓ, κτλ., ἅτινα τὸ αὐτὸ πάντοτε ἀποτελοῦσιν ἄθροισμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6.

Θεώρημα.

Ἐξ ὅλων τῶν πολυγώνων, τῶν διὰ γνωστῶν πλευρῶν κατασκευαζομένων, μέγιστον εἶναι τὸ ἐγγραφόμενον εἰς κύκλον. (σχ. 177)

Ἔστω ΑΒΓΔΕΖΗ τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, καὶ αβγδεζη τὸ πολύγωνον, τὸ μὴ εἰς κύκλον ἐγγραφόμενον, δι' ἴσων ὅμως πλευρῶν κατεσκευασμένον, ὅ ἐστιν ΑΒ=αβ, ΒΓ=βγ, κτλ. Λέγω ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον εἶναι τοῦ ἑτέρου μεῖζον.

Ἄγω τὴν διάμετρον ΕΜ καὶ τὰς εὐθείας ΑΜ καὶ ΜΒ. Ἐπὶ τῆς αβ=ΑΒ κατασκευάζω τὸ τρίγωνον αβμ=ΑΒΜ, συνάπτω δὲ τὰ σημεῖα ε καὶ μ διὰ τῆς εὐθείας εμ.

Κατὰ τὰ ἐν τῇ τετάρτῃ προτάσει εἰρημένα, τὸ πολύγωνον ΕΖΗΑΜ εἶναι μεῖζον τοῦ πολυγώνου εζηαμ, ἐκτὸς μόνον ἐὰν καὶ τοῦτο ἐγγράφηται ὡς ἐκεῖνο εἰς ἡμιπεριφέρειαν, ἔχουσαν διάμετρον τὴν πλευρὰν εμ· ἐν τοιαύτῃ δὲ περιπτώσει τὰ δύο αὐτὰ πολύγωνα εἶναι ἴσα, κατὰ τὰ εἰρημένα ἐν τῇ πέμπτῃ προτάσει. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ πολύγωνον ΕΔΓΒΜ εἶναι μεῖζον τοῦ πολυγώνου εδγβμ, ἐξαιρουμένης τῆς αὐτῆς περιπτώσεως, καθ' ἣν εἶναι ἴσα. Λοιπὸν ὁλόκληρον τὸ πολύγωνον ΕΖΗΑΜΒΓΔΕ εἶναι μεῖζον τοῦ πολυγώνου εζηαμβγδε, ἐκτὸς μόνον ἐὰν ἦναι κατὰ πάντα ἴσα. Ἀλλὰ κατὰ πάντα ἴσα δὲν εἶναι, διότι τὸ ἕτερον αὐτῶν ἐγγράφεται εἰς τὸν κύκλον, τὸ δὲ ἄλλο οὔ. Ἄρα τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον εἶναι τὸ μεῖζον. Ἀφαιρουμένων ἑκατέρωθεν τῶν ἴσων τριγώνων ΑΒΜ, αβμ, ὑπολείπεται τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖΗ, τὸ μεῖζον τοῦ ὑπολειπομένου πολυγώνου αβγδεζη, τοῦ μὴ ἐγγραφομένου εἰς κύκλον.

Σχόλιον. Δύναταί τις ν' ἀποδείξῃ, ὡς ἐν τῇ πέμπτῃ προτάσει, ὅτι εἷς μόνος ὑπάρχει κύκλος, ἑπομένως ἓν μόνον ὑπάρχει πολύγωνον μέγιστον, πληροῦν τοῦ προβλήματος τὰς συνθήκας. Τὸ πολύγωνον δ' αὐτό, καθ' ὁποιανδήποτε ἂν διατεθῶσιν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ τάξιν, τὴν αὐτὴν πάντοτε ἐπιφάνειαν ἔχει.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7.

Θεώρημα.

Ἐξ ὅλων τῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων καὶ τὴν αὐτὴν ἐχόντων πλευρῶν πλῆθυν, μέγιστον εἶναι τὸ κανονικόν.

Διότι, κατὰ τὸ δεύτερον θεώρημα, τὸ μέγιστον πολύγωνον ὅλας ἔχει τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας, κατὰ δὲ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἐγγράφεται εἰς τὸν κύκλον. Ἄρα τὸ πολύγωνον αὐτὸ εἶναι κανονικόν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8.

Λῆμμα.

Αἱ κεντρικαὶ γωνίαι, αἱ ὑπὸ τόξων κύκλων διαφόρων μετρούμεναι, εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τόξα αὐτά, διὰ τῶν ἀκτίνων αὐτῶν διαιρούμενα. (σχ. 178)

Ἤτοι ἡ γωνία Γ πρὸς τὴν γωνίαν Ο, ὡς τὸ πηλίκον $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$ πρὸς τὸ πηλίκον $\frac{ΔΕ}{ΔΟ}$.

Διὰ τῆς ἀκτῖνος ΟΖ, τῆς ἴσης τῇ ΑΓ, γράφω μεταξὺ τῶν παρατεταμένων πλευρῶν ΟΔ, ΟΕ τὸ τόξον ΖΗ. Ἐπειδὴ αἱ ἀκτῖνες ΑΓ, ΟΖ εἶναι ἴσαι, αὐτὴ ἐν πρώτοις ὑπάρχει ἡ ἀναλογία $Γ : Ο :: ΑΒ : ΖΗ$ (πρότ. 17, βιβλ. 2) ἢ $Γ : Ο :: \frac{ΑΒ}{ΑΓ} : \frac{ΖΗ}{ΖΟ}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ τόξα ΖΗ, ΔΕ εἶναι ὅμοια, καὶ αὐτὴ ἡ ἀναλογία ὑπάρχει $ΖΗ : ΔΕ :: ΖΟ : ΔΟ$ (πρότ. 11, βιβλ. 4). Λοιπὸν τὸ πηλίκον $\frac{ΖΗ}{ΖΟ} = \frac{ΔΕ}{ΔΟ}$. Ὅθεν $Γ : Ο :: \frac{ΑΒ}{ΑΓ} : \frac{ΔΕ}{ΔΟ}$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9.

Θεώρημα.

Ἐκ δύο ἰσοπεριμέτρων κανονικῶν πολυγώνων μεῖζον εἶναι τὸ πλειοτέρας ἔχον πλευράς. (σχ. 179)

Ἔστω ΔΕ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑτέρου τῶν πολυγώνων, Ο ἔστω τὸ κέντρον του, καὶ ΟΕ τὸ ἀπόστημά του. Ἔστω πρὸς τούτοις ΑΒ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἄλλου πολυγώνου, Γ ἔστω τὸ κέντροντου, καὶ ΓΒ τὸ ἀπόστημά του. Ἂς ὑποτεθῶσι δὲ τὰ μὲν κέντρα Ο καὶ Γ ἀπέχοντα ἀλλήλων κατά τινα ἀπόστασιν ΟΓ, τὰ δὲ ἀποστήματα ΟΕ ΓΒ τεταγμένα κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΟΓ. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΔΟΕ καὶ ΑΓΒ εἶναι ἡμίση γωνιῶν, ἐκ τῶν ἐν τοῖς κέντροις τῶν πολυγώνων, δὲν εἶναι ἴσαι, καὶ διὰ τοῦτο αἱ εὐθεῖαι ΓΑ καὶ ΟΔ ἐκτεινόμεναι συναπαντῶνται εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ἐκ τοῦ σημείου Ζ καταβιβάζω ἐπὶ τῆς ΟΓ τὴν κάθετον ΖΗ, ἐκ δὲ τῶν σημείων Ο καὶ Γ, ὡς ἐκ κέντρων, γράφω τὰ τόξα ΗΙ, ΗΘ, τὰ ἀπολήγοντα εἰς τὰς πλευρὰς ΟΖ, ΓΖ.

Τούτων τεθέντων, κατὰ τὸ προηγούμενον λῆμμα, αὕτη ὑπάρχει ἡ ἀναλογία $Ο : Γ :: \frac{ΗΙ}{ΟΗ} : \frac{ΗΘ}{ΓΗ}$. Ἀλλὰ ἡ ΔΕ τοιαύτην ἔχει πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ πρώτου πολυγώνου σχέσιν, ὁποίαν ἡ γωνία Ο πρὸς τέσσαρας γωνίας ὀρθάς. Ὡσαύτως καὶ ἡ ΑΒ τοιαύτην ἔχει πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ δευτέρου πολυγώνου σχέσιν, ὁποίαν ἡ γωνία Γ πρὸς τέσσαρας γωνίας ὀρθάς. Ἐπειδὴ δὲ αἱ περίμετροι τῶν πολυγώνων εἶναι ἴσαι, ἄρα $ΔΕ : ΑΒ :: Ο : Γ$, ἢ $ΔΕ : ΑΒ :: \frac{ΗΙ}{ΟΗ} : \frac{ΗΘ}{ΓΗ}$. Πολλαπλασιαζομένων δὲ τῶν μὲν ἡγουμένων ἐπὶ ΟΗ, τῶν δὲ ἑπομένων ἐπὶ ΓΗ, αὕτη προκύπτει ἡ ἀναλογία $ΔΕ \times ΟΗ : ΑΒ \times ΓΗ :: ΗΙ : ΗΘ$. Ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΔΕ, ΟΖΗ συνάγομεν $ΟΕ : ΟΗ :: ΔΕ : ΖΗ$. Ὅθεν ἕπεται $ΔΕ \times ΟΗ = ΟΕ \times ΖΗ$. Ὡσαύτως δὲ καὶ $ΑΒ \times ΓΗ = ΓΒ \times ΖΗ$. Λοιπὸν $ΟΕ \times ΖΗ : ΓΒ \times ΖΗ :: ΗΙ : ΗΘ$, ἢ $ΟΕ : ΓΒ :: ΗΙ : ΗΘ$.

Ἐὰν δὲ ἤδη ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τόξον ΗΙ εἶναι μεῖζον τοῦ τόξου ΗΘ, ἕπεται ὅτι τὸ ἀπόστημα ΟΕ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀποστήματος ΓΒ.

Πρὸς τὸ μέρος τὸ πέραν τῆς ΓΑ κατασκευάζω τὸ σχῆμα ΓΚχ καθ' ὅλα ἴσον τῷ σχήματι ΓΗχ, ἤτοι κατασκευάζω τὴν ΓΚ=ΓΗ, τὴν γωνίαν ΘΓΚ=ΘΓΗ, καὶ τὸ τόξον Κχ=χΗ.

Ἡ καμπύλη ΚχΗ περικλείει τὸ τόξον ΚΘΗ, καὶ διὰ τοῦτο τοῦ τόξου τούτου μείζων εἶναι (πρότ. 9, βιβλ. 4). Ἄρα ἡ Ηχ, ἤτοι τὸ ἥμισυ τῆς καμπύλης, εἶναι μείζων τοῦ ΗΘ, τοῦ ἡμίσεος δηλαδὴ τοῦ τόξου. Λοιπόν, κατὰ μείζονα λόγον, ΗΙ εἶναι τοῦ ΗΘ μείζων.

Ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων ἕπεται, ὅτι τὸ ἀπόστημα ΟΕ ὑπερέχει τὸ ΓΒ. Ἀλλὰ τὰ δύο πολύγωνα, τὴν αὐτὴν περίμετρον ἔχοντα, εἶναι πρὸς τὰ ἴδια αὐτῶν ἀποστήματα ἀνάλογα (πρότ. 7, βιβλ. 4). Ἄρα τὸ πολύγωνον, τὸ ἔχον ἡμίπλευρον τὴν ΔΕ, εἶναι μεῖζον τοῦ πολυγώνου, τοῦ ἔχοντος ἡμίπλευρον τὴν ΑΒ. Τὸ πρῶτον τῶν δύο αὐτῶν πολυγώνων ἔχει πλευρὰς πλειοτέρας, διότι ἡ κεντρικὴ αὐτοῦ γωνία εἶναι μικροτέρα. Ἄρα ἐκ δύο ἰσοπεριμέτρων κανονικῶν πολυγώνων μεῖζον εἶναι τὸ πλειοτέρας ἔχον πλευράς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10.

Θεώρημα.

Ὁ κύκλος εἶναι παντὸς ἰσοπεριμέτρου πολυγώνου μείζων. (σχ. 180)

Ἀπεδείχθη ἐν τοῖς ἀνωτέρω, ὅτι ἐξ ὅλων τῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν πλευρῶν πληθὺν, μέγιστον εἶναι τὸ κανονικόν. Ὅθεν, πρὸς ἀπόδειξιν τῆς παρούσης προτάσεως, ἀρκεῖ νὰ γείνῃ ἡ πρὸς οἱονδήποτε κανονικὸν πολύγωνον σύγκρισις κύκλου ἰσοπεριμέτρου.

Ἔστω ΑΙ μὲν τὸ ἡμίπλευρον τοῦ πολυγώνου, τοῦ πρὸς τὸν κύκλον παραβαλλομένου, Γ δὲ τὸ κέντρον αὐτοῦ. Πρὸς τούτοις ἐν τῷ ἰσοπεριμέτρῳ κύκλῳ ἔστω ἡ γωνία ΔΟΕ=ΑΓΙ, καὶ ἑπομένως καὶ τὸ τόξον ΔΕ ἴσον τῷ ἡμιπλεύρῳ ΑΙ.

Τούτων τεθέντων, αὕτη ἐξ αὐτῶν πηγάζει ἡ ἀναλογία.

Τὸ πολύγωνον Π πρὸς τὸν κύκλον Κ, καθὼς τὸ τρίγωνον ΑΓΙ πρὸς τὸν τομέα ΟΔΕ. Ἤτοι $\Pi : K :: \frac{1}{2}\, AI \times \Gamma I : \frac{1}{2}\, \Delta E \times OE ::$ $\Gamma I : OE$.

Εἰς τὸ σημεῖον Α ἄγω τὴν ἐφαπτομένην ΕΗ, ἥτις συναπαντᾷ τὴν ΟΔ, παρατεινομένην πρὸς τὸ Η. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΓΙ, ΗΟΕ ταύτην παρέχουσι τὴν ἀναλογίαν $\Gamma I : OE :: AI$ ἢ $\Delta E : HE$. Λοιπὸν $\Pi : K :: \Delta E : HE$, ἢ καθὼς $\Delta E \times \frac{1}{2} OE$, ὅ ἐστι τὸ μέτρον τοῦ τομέως ΔΟΕ, πρὸς $HE \times \frac{1}{2} OE$, ὅ ἐστι τὸ μέτρον τοῦ τριγώνου ΗΟΕ. Ἀλλ' ὁ τομεὺς εἶναι τοῦ τριγώνου μικρότερος. Ἄρα τὸ πολύγωνον Π εἶναι τοῦ κύκλου Κ μικρότερον.

Λοιπὸν ὁ κύκλος εἶναι παντὸς ἰσοπεριμέτρου πολυγώνου μείζων.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Τὰ ἐπίπεδα καὶ αἱ γωνίαι αἱ στερεαί.

Ὁρισμοί.

1. Εὐθεῖά τις λέγεται *κάθετος ἐπὶ ἐπιπέδου*, ὅταν ἦναι κάθετος εἰς ὅλας τὰς εὐθείας, τὰς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κειμένας, καὶ ἐκ τοῦ *ποδὸς* αὐτῆς διερχομένας (πρότ. 4, βιβλ. 5)

Ποῦς τῆς καθέτου ὀνομάζεται τὸ σημεῖον, εἰς ὃ ἡ κάθετος συναπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον.

2. Εὐθεῖά τις εἶναι *παράλληλος ἐπιπέδου*, ὅταν, ὅσον καὶ ἂν παραταθῶσιν ἥ τε εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον, δὲν συναπαντῶνται. Ἀντιστρόφως τὸ ἐπίπεδον εἶναι τῆς εὐθείας παράλληλον.

3. Δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, ὅταν δὲν συναπαντῶνται, ἂν καὶ ἐπ' ἄπειρον παραταθῶσι.

3. Κατόπιν θέλει ἀποδειχθῇ (πρότ. 3, βιβλ. 5), ὅτι ἡ κοινὴ τομὴ δύο συναπαντωμένων ἐπιπέδων εἶναι γραμμὴ εὐθεῖα. Τούτου τεθέντος, *γωνία δίεδρος* (*) λέγεται ἡ μικρὰ ἢ μεγάλη τῶν δύο ἐπιπέδων ἀμοιβαία κλίσις, ἤτοι τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν τὸ μικρὸν ἢ μέγα ἀπ' ἀλλήλων γωνιῶδες ἀπόστημα.

Τὸ ἀπόστημα αὐτὸ μετρεῖται (πρότ. 17, βιβλ. 5) ὑπὸ τῆς γωνίας, τῆς ἀποτελουμένης ἐκ δύο εὐθειῶν καθέτων, ἠγμένων εἰς ὁποιονδήποτε τῆς κοινῆς τομῆς σημεῖον, καὶ ἐρριμμένων τῆς μὲν εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον, τῆς δὲ εἰς ἐκεῖνο.

Ἡ γωνία αὕτη εἶναι ἢ ὀρθή, ἢ ὀξεῖα, ἢ ἀμβλεῖα.

5. Ἐὰν ὀρθὴ ἦναι, τὰ δύο ἐπίπεδα εἶναι *κάθετα* τὸ ἕτερον ἐπὶ τοῦ ἑτέρου.

6. *Στερεὰ γωνία* λέγεται τὸ γωνιῶδες χάσμα, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ πολλῶν ἐπιπέδων, συνενουμένων εἰς ἓν σημεῖον.

Παραδείγματος χάριν, ἡ στερεὰ γωνία Σ ἀποτελεῖται ἐκ τῆς

(*) Πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν ἄλλων γωνιῶν ὠνόμασα τὴν τῶν ἐπιπέδων γωνίαν δίεδρον. Ο. Μ.

ἑνώσεως τῶν ἐπιπέδων ΑΣΒ, ΒΣΓ, ΓΣΒ, ΔΣΑ. (σχ. 199)

Τρία τοὐλάχιστον ἀπαιτοῦνται ἐπίπεδα πρὸς σχηματισμὸν γωνίας στερεᾶς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1.

Θεώρημα.

Δὲν εἶναι δυνατὸν εὐθεῖα ἐν μέρει μὲν ἐπί τινος ἐπιπέδου, ἐν μέρει δὲ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ νὰ ὑπάρχῃ.

Διότι, κατὰ τοῦ ἐπιπέδου τὸν ὁρισμὸν, ἅμα εὐθεῖά τις δύο μετὰ ἐπιπέδου κοινὰ ἔχει σημεῖα, ὁλόκληρος ἐπ' αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου κεῖται.

Σχόλιον. Ἐπιφάνειά τις γνωρίζεται ἂν ἦναι ἐπίπεδος, τιθεμένης καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς εὐθείας τινός. Ἂν ἡ εὐθεῖα ἅπτηται τῆς ἐπιφανείας καθ' ὅλην αὐτῆς τὴν ἔκτασιν, ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶναι ἐπίπεδος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2.

Θεώρημα.

Δύο εὐθεῖαι διεσταυρωμέναι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ τὴν θέσιν αὐτοῦ διορίζουσι. (σχ. 181)

Ἔστωσαν ΑΒ,ΑΓ δύο εὐθεῖαι, εἰς τὸ σημεῖον Α διασταυρούμεναι. Δύναταί τις νὰ φαντασθῇ ἐπίπεδον, διαβαῖνον διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ. Ἐὰν δὲ τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ, στραφὲν περὶ τὴνΑΒ,περιλάβῃ καὶ τὸ σημεῖον Γ, ὁλόκληρος τότε ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἐπ' αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου κεῖται, διότι δύο αὐτῆς σημεῖα, τὸ Α καὶ τὸ Γ, ἐπ' αὐτοῦ εὑρίσκονται. Συγχρόνως δὲ καὶ ἡ θέσις τοῦ ἐπιπέδου ὁρίζεται· διότι καὶ ἡ ἐλαχίστη ἐκτόπισις αὐτοῦ τὸ ἀποσπᾷ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς τοὐλάχιστον τῶν τριῶν σημείων Α,Β,Γ.

Λοιπὸν ἡ θέσις παντὸς ἐπιπέδου εἶναι ὡρισμένη, ἅμα ἐκ δύο διασταυρουμένων εὐθειῶν θέσεως γνωστῆς τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ διαβαίνει.

Πόρισμα 1. Πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ, ἢ τρία σημεῖα Α, Β, Γ, μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα, διορίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου.

Πόρισμα 2. Καὶ δύο παράλληλοι ΑΒ, ΓΔ (σχ. 182) διορίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου. Διότι, ἀχθείσης τῆς διατεμνούσης ΕΖ, τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο εὐθειῶν ΑΕ, ΕΖ εἶναι τὸ ἐπίπεδον τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3.

Θεώρημα.

Ἡ κοινὴ τομὴ δύο ἐπιπέδων εἶναι γραμμὴ εὐθεῖα.

Διότι, ἐὰν τρία τῆς κοινῆς αὐτῆς τομῆς σημεῖα δὲν ἔκειντο ἐπ' εὐθείας, τὰ δύο ἐπίπεδα, ἐκ τῶν τριῶν αὐτῶν σημείων διαβαίνοντα, τὴν αὐτὴν ἤθελον κατέχει θέσιν, καὶ τὸ αὐτὸ ἤθελον ἀποτελεῖ ἐπίπεδον (πρότ. 2, βιβλ. 5). Τοῦτο δὲ ἀντιβαίνει εἰς τῆς παρούσης προτάσεως τὴν ἔκφρασιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4.

Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖά τις ΑΠ ἦναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθειῶν ΠΒ, ΠΓ, κειμένων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ καὶ ὑπὸ τὸν πόδα αὐτῆς διασταυρουμένων, ἡ αὐτὴ εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ πάσης ἄλλης εὐθείας ΠΚ, διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς διερχομένης, καὶ κειμένης ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ ἑπομένως εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. (σχ. 183)

Λαμβάνω ἐπὶ τῆς ΠΚ σημεῖόν τι Κ, καὶ ἐξ αὐτοῦ ἄγω ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΠΓ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ οὕτως, ὥστε ΒΚ=ΚΓ (πρόβλ. 5, βιβλ. 3). Συνάπτω τὰ σημεῖα Β, Κ, Γ μετὰ τοῦ Α διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΚ, ΑΓ.

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΠΚ διαιρεῖ τὴν ΒΓ βάσιν τοῦ τριγώνου ΠΒΓ εἰς δύο ἴσα μέρη, κατὰ τὴν 14 πρότασιν τοῦ τρίτου βιβλίου,

$$\overline{\text{ΠΓ}}^2 + \overline{\text{ΠΒ}}^2 = 2\overline{\text{ΠΚ}}^2 + 2\overline{\text{ΚΓ}}^2.$$

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΑΓ πορίζόμεθα τὴν ἰσότητα ταύτην

$$\overline{\text{ΑΓ}}^2+\overline{\text{ΑΒ}}^2=2\overline{\text{ΑΚ}}^2+2\overline{\text{ΚΓ}}^2.$$

Ἀφαιρουμένης τῆς πρώτης ἰσότητος ἀπὸ τῆς δευτέρας, αὕτη ἡ ἰσότης ἀποτελεῖται,

$$\overline{\text{ΑΓ}}^2+\overline{\text{ΑΒ}}^2-\overline{\text{ΠΓ}}^2-\overline{\text{ΠΒ}}^2=2\overline{\text{ΑΚ}}^2-2\overline{\text{ΠΚ}}^2. \quad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΠΓ, ΑΠΒ εἶναι ὀρθογώνια εἰς τὸ σημεῖον Π, μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῶν ὑπάρχουσιν αἱ σχέσεις αὗται $\overline{\text{ΑΓ}}^2-\overline{\text{ΠΓ}}^2=\overline{\text{ΑΠ}}^2$, καὶ $\overline{\text{ΑΒ}}^2-\overline{\text{ΠΒ}}^2=\overline{\text{ΑΠ}}^2$. Κατὰ τὰς σχέσεις δὲ ταύτας τῶν ἀναγωγῶν γενομένων εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), ἡ ἰσότης αὕτη προκύπτει,

$$\overline{\text{ΑΠ}}^2+\overline{\text{ΑΠ}}^2=2\overline{\text{ΑΚ}}^2-2\overline{\text{ΠΚ}}^2$$

ἢ $\quad 2\overline{\text{ΑΠ}}^2=2\overline{\text{ΑΚ}}^2-2\overline{\text{ΠΚ}}^2$

ἢ $\quad \overline{\text{ΑΠ}}^2=\overline{\text{ΑΚ}}^2-\overline{\text{ΠΚ}}^2$

ἢ $\quad \overline{\text{ΑΚ}}^2=\overline{\text{ΑΠ}}^2+\overline{\text{ΠΚ}}^2.$

Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΠΚ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ σημεῖον Π (πρότ. 11, βιβλ. 3). Λοιπὸν ἡ ΑΠ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΠΚ.

Σχόλιον. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἕπεται, ὅτι ὄχι μόνον εὐθεῖά τις δύναται νὰ ἦναι κάθετος εἰς ὅλας τὰς ἐκ τοῦ ποδὸς αὐτῆς διερχομένας εὐθείας, τὰς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένας, ἀλλ' ὅτι καὶ ἀρκεῖ εἰς δύο μόνον ἐξ αὐτῶν νὰ ἦναι κάθετος, διὰ νὰ ἦναι κάθετος καὶ εἰς ὅλας τὰς λοιπάς. Τοῦτο δὲ ἐπιβεβαιοῖ τὴν ὀρθότητα τοῦ 1 ὁρισμοῦ τοῦ παρόντος βιβλίου.

Πόρισμα. Ἡ κάθετος ΑΠ εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας ΑΚ. Ἑπομένως ἡ κάθετος διορίζει τὴν ἀληθῆ ἀπόστασιν τοῦ σημείου Α ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ.

Πόρισμα 2. Ἀπὸ τοῦ σημείου Π, τοῦ δεδομένου ἐπί τινος ἐπιπέδου, μία μόνη δυνατὸν εἶναι ν' ἀνυψωθῇ κάθετος. Διότι, ἐὰν δύο ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Π ὑποτεθῶσιν ἀναβαίνουσαι κάθετοι, διὰ τῶν δύο αὐτῶν καθέτων ἄγω ἐπίπεδον τέμνον τὸ ἐπίπεδον ΜΝ κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΠΚ. Τούτου δὲ γενομένου, αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος δύο κάθετοι εἶναι κάθετοι καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΠΚ, κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον.

Ἀδύνατον ὡσαύτως εἶναι νὰ καταβιβασθῶσιν ἀπό τινος σημείου γνωστοῦ δύο ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κάθετοι. Διότι ἐὰν παραδεχθῶμεν ὡς καθέτους τὰς εὐθείας ΑΠ, ΑΚ, τὸ τρίγωνον ΑΠΚ δύο θέλει ἔχει ὀρθὰς γωνίας, τὴν ΑΠΚ καὶ τὴν ΑΚΠ. Ἀλλὰ τοῦτο ἀδύνατον εἶναι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Θεώρημα.

Αἱ ἀπὸ τῆς καθέτου ἰσάκις ἀπέχουσαι πλάγιαι εἶναι ἴσαι. Ἐκ δύο δὲ ἀνισάκις ἀπὸ τῆς καθέτου ἀφισταμένων πλαγίων ἡ μᾶλλον ἀπέχουσα εἶναι καὶ μεγαλητέρα. (σχ. 184)

Διότι, ὑποτιθεμένων τῶν γωνιῶν ΑΠΒ, ΑΠΓ, ΑΠΔ ὀρθῶν καὶ τῶν ἀποστημάτων ΠΒ, ΠΓ, ΠΔ ἴσων, τὰ τρίγωνα ΑΠΒ, ΑΠΓ, ΑΠΔ ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων, καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα. Ἄρα καὶ αἱ ὑποτείνουσαι αὐτῶν, ἤτοι αἱ πλάγιαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι.

Ὡσαύτως, ἐὰν τὸ ἀπόστημα ΠΕ ἦναι μεῖζον τοῦ ἀποστήματος ΠΔ, ἢ τοῦ ΠΒ, διότι ΠΔ=ΠΒ, προδήλως ἕπεται, ὅτι ἡ πλαγία ΑΕ μείζων θέλ' εἶσθαι τῆς πλαγίας ΑΒ, καὶ τῆς πλαγίας ΑΔ, τῆς ἴσης τῇ ΑΒ.

Πόρισμα. Ὅλαι αἱ ἴσαι πλάγιαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, κτλ. ἀπολήγουσιν εἰς τὴν περιφέρειαν ΒΓΔ, τὴν περιγεγραμμένην ἐκ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου Π, ὡς ἐκ κέντρου.

Λοιπὸν, γνωστοῦ ὄντος τοῦ σημείου Α, τοῦ ὑπάρχοντος ἐκτὸς ἐπιπέδου τινὸς, πρὸς εὕρεσιν τοῦ σημείου Π, τοῦ περιλαμβανομένου ἐν αὐτῷ τῷ ἐπιπέδῳ, εἰς ὃ ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου Α καταβαίνουσα κάθετος συναπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον, λαμβάνονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ τρία σημεῖα Β, Γ, Δ, ἰσάκις ἐκ τοῦ σημείου Α ἀπέχοντα, μετὰ δὲ ταῦτα προσδιορίζεται τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, τῆς διαβαινούσης ἐξ αὐτῶν τῶν τριῶν σημείων. Τὸ κέντρον αὐτὸ θέλ' εἶσθαι τὸ ζητούμενον σημεῖον Π.

Σχόλιον. Ἡ γωνία ΑΒΠ ἀποτελεῖ τὴν λεγομένην κλίσιν τῆς πλαγίας ΑΒ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. Τὴν αὐτὴν δὲ κλίσιν ἔχουσιν ὅλαι αἱ πλάγιαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, κτλ., αἱ ἰσάκις ἀπὸ τῆς καθέτου ἀπέχουσαι· διότι ὅλα τὰ τρίγωνα ΑΒΠ, ΑΓΠ, ΑΔΠ, κτλ. εἶναι ἴσα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6.

Θεώρημα.

Ἔστω ΑΠ κάθετός τις ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ καὶ ΒΓ εὐθεῖά τις ἐπ' αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου ἐῤῥιμμένη. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ ποδὸς Π τῆς καθέτου ἀχθῇ ἡ κάθετος ΠΔ ἐπὶ τῆς ΒΓ καὶ συναφθῶσι τὰ σημεῖα Α καὶ Δ διὰ τῆς ΑΔ, ἡ ΑΔ θέλ' εἶσθαι κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΓ. (σχ. 185)

Λαμβάνω τὴν ΔΒ=ΔΓ, καὶ ἄγω τὰς εὐθείας ΠΒ, ΠΓ, ΑΒ, ΑΓ. Ἐπειδὴ ΔΒ=ΔΓ, ἡ πλαγία ΠΒ=ΠΓ. Ἐπειδὴ πρὸς τούτοις ΠΒ=ΠΓ, ἡ ὡς πρὸς τὴν κάθετον ΑΠ πλαγία ΑΒ=ΑΓ (πρότ. 5, βιβλ. 5). Ἤτοι ἡ εὐθεῖα ΑΔ ἔχει δύο σημεῖα Α καὶ Δ ἰσάκις ἀπέχοντα ἀπὸ τῶν ἄκρων Β καὶ Γ. Ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ μέσου τῆς ΒΓ.

Πόρισμα. Κατὰ τὸ αὐτὸ σχῆμα ἡ εὐθεῖα ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΠΔ, διότι ἡ ΒΓ εἶναι συγχρόνως κάθετος ἐπὶ τῶν δύο εὐθειῶν ΑΔ, ΠΔ.

Σχόλιον. Αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΕ, ΒΓ εἶναι παράδειγμα εὐθειῶν μὴ συναπαντωμένων· διότι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ δὲν κεῖνται ἐπιπέδου. Ἡ ἐλαχίστη τῶν δύο αὐτῶν εὐθειῶν ἀπόστασις εἶναι ἡ εὐθεῖα ΠΔ, ἡ συγχρόνως καὶ ἐπὶ τῆς ΑΠ καὶ ἐπὶ τῆς ΒΓ κάθετος.

Ἡ ἀπόστασις ΠΔ εἶναι πάσης ἄλλης τῶν εὐθειῶν ΑΠ καὶ ΒΓ ἀποστάσεως ἐλάσσων· διότι, ἐὰν δύο ἄλλα συναφθῶσι σημεῖα, τὸ Α καὶ τὸ Β, παραδείγματος χάριν, ἔχομεν ΑΒ>ΑΔ, ΑΔ>ΠΔ. Λοιπὸν, κατὰ μείζονα λόγον, ΑΒ>ΠΔ.

Αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΕ, ΓΒ, καίτοι μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ὑπάρχουσαι, ὑποτίθεται ὅτι ἀποτελοῦσι γωνίαν ὀρθὴν, διότι ἡ ΑΕ καὶ ἡ ἐξ ἑνὸς αὐτῆς σημείου ἀγομένη παράλληλος τῆς εὐθείας ΒΓ γωνίαν ὀρθὴν σχηματίζουσιν. Ὡσαύτως ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ ἡ κάθετος ΠΔ, αἱ εἰκονίζουσαι δύο ὁποιασδήποτε εὐθείας, μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένας, ὑποτίθεται ὅτι ἀποτελοῦσι τὴν αὐτὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζει μετὰ τῆς ΑΒ ἡ παράλληλος τῆς ΠΔ, ἡ ἐξ ἑνὸς σημείου τῆς ΑΒ ἀγομένη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7.

Θεώρημα.

Πᾶσα εὐθεῖα ΔΕ παράλληλος τῆς ΑΠ, τῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ καθέτου, εἶναι ἐπ' αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου καὶ αὐτὴ κάθετος. (σχ. 186)

Ἄγω τῶν παραλλήλων ΑΠ, ΔΕ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἐπίπεδον ΜΝ καὶ παράγει τὴν τομὴν ΠΔ. Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ ἄγω τὴν ΒΓ κάθετον ἐπὶ τῆς ΠΔ, καὶ συνάπτω τὰ σημεῖα Α καὶ Δ διὰ τῆς ΑΔ.

Κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΠΔΕ· ἄρα ἡ γωνία ΒΔΕ εἶναι ὀρθή. Ἀλλὰ ἡ γωνία ΕΔΠ εἶναι καὶ αὐτὴ ὀρθή, διότι ἡ μὲν ΑΠ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΠΔ, ἡ δὲ ΔΕ παράλληλος τῆς ΑΠ. Λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῶν δύο εὐθειῶν ΔΠ, ΔΒ· ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ.

Πόρισμα 1. Ἀντιστρόφως, αἱ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΜΝ κάθετοι ΑΠ, ΔΕ εἶναι παράλληλοι. Διότι, ἐὰν τὸ ἐναντίον ὑποτεθῇ, ἐκ τοῦ σημείου Δ ἄγω παράλληλον τῆς ΑΠ· ἡ παράλληλος δὲ αὐτη θέλ' εἶσθαι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ. Ἀλλὰ δύο ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Δ ν' ἀναβῶσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κάθετοι εἶναι ἀδύνατον (πρότ. 4, βιβλ. 5).

Πόρισμα 2. Δύο εὐθεῖαι Α καὶ Β, παράλληλοι τρίτης τινὸς εὐθείας Γ, εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.

Πρὸς κατάληψιν τούτου, φαντάζομαι ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας Γ. Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι Α καὶ Β εἶναι παράλληλοι τῆς Γ, καὶ αὗται εἶναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἄρα, κατὰ τὸ ἀνωτέρω πόρισμα, εἶναι πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.

Ἐννοεῖται δὲ ὅτι αἱ τρεῖς παράλληλοι, αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος, δὲν ὑπάρχουσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ὑπῆρχον, περιττὴ ἦτον ἡ ἀπόδειξις, διότι τὸ πρᾶγμα εἶναι ἤδη γνωστὸν (πρότ. 25, βιβλ. 1).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8.

Θεώρημα.

Ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἡ παράλληλος τῆς εὐθείας ΓΔ, τῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ κειμένης, εἶναι τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ παράλληλος. (σχ. 187)

Διότι, ἐὰν καθ' ὑπόθεσιν ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ ὑπάρχουσα, συναπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, ἀναγκαίως πρέπει νὰ τὸ συναπαντήσῃ κατά τι σημεῖον τῆς εὐθείας ΓΔ, ἥτις εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΑΒΓΔ καὶ ΜΝ. Ἀλλ' ἡ εὐθεῖα ΑΒ δὲν δύναται νὰ συναπαντήσῃ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, διότι εἶναι τῆς εὐθείας ταύτης παράλληλος· ἄρα οὔτε τὸ ἐπίπεδον ΜΝ συναπαντᾷ. Λοιπὸν εἶναι τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ παράλληλος (ὁρισμ. 2).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9.

Θεώρημα.

Τὰ ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας κάθετα, εἶναι παράλληλα. (σχ. 188)

Διότι, ἐὰν καθ' ὑπόθεσιν τὰ ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ συναπαντηθῶσιν, ἔστω Ο ἓν τῆς συναντήσεως αὐτῶν σημεῖον. Ἐκ τοῦ σημείου Ο ἄγω τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ.

Ἡ εὐθεῖα ΑΒ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΑ, τῆς ἐκ τοῦ ποδὸς αὐτῆς διερχομένης καὶ ἐπ' αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου κειμένης. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΟ. Λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΒ εἶναι κάθετοι, ἠγμέναι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον. Ἄρα τὰ δύο ἐπίπεδα δὲν συναπαντῶνται. Λοιπὸν εἶναι παράλληλα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10.

Θεώρημα.

Αἱ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΜΝ, ΠΚ τομαὶ ΕΖ, ΗΘ, αἱ διὰ τρίτου τινὸς ἐπιπέδου ΖΗ γινόμεναι, εἶναι παράλληλοι. (σχ. 189)

Διότι, ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΗΘ, αἱ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ὑπάρχουσαι, δὲν ἦναι παράλληλοι, ἐκτεινόμεναι συναπαντῶνται.

Ἐπομένως καὶ τὰ ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ, ἐπὶ τῶν ὁποίων αἱ παράλληλοι αὐταὶ ὑπάρχουσι, συναπαντῶνται. Ἄρα τὰ ἐπίπεδα ταῦτα δὲν εἶναι παράλληλα. Τοῦτο ὅμως ἀντιβαίνει εἰς τῆς προτάσεως τὰ δεδομένα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11.

Θεώρημα.

Πᾶσα εὐθεῖα ΑΒ, κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΚ, τοῦ παραλλήλου τοῦ ΜΝ. (σχ. 188)

Χαράσσω ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΚ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ κατὰ θέλησιν, μετὰ δὲ ταῦτα ἄγω διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἐπίπεδον ΜΝ κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΑΔ. Αὕτη ἡ τομὴ ΑΔ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΓ (πρότ. 10, βιβλ. 5). Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ κάθετος εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΔ, ἀναγκαίως εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ, παραλλήλου τῆς ΑΔ. Ἐκ τούτου δὲ ἕπεται, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ πάσης εὐθείας, ἐκ τοῦ ποδὸς αὐτῆς διερχομένης καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΚ κειμένης. Ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΚ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12.

Θεώρημα.

Αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΜΝ, ΠΚ περιεχόμεναι παράλληλοι εὐθεῖαι ΕΗ, ΖΘ εἶναι ἴσαι. (σχ. 189)

Διὰ τῶν παραλλήλων ΕΗ, ΖΘ ἄγω τὸ ἐπίπεδον ΕΗΘΖ, τὸ τέμνον τὰ δύο παράλληλα ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ κατὰ τὰς διευθύνσεις ΕΖ, ΗΘ.

Αὗται αἱ δύο τομαὶ ΕΖ, ΗΘ εἶναι παράλληλοι (πρότ. 10, βιβλ. 5). Ἐπειδὴ δὲ παράλληλοι εἶναι καὶ αἱ εὐθεῖαι ΕΗ, ΖΘ, τὸ σχῆμα ΕΗΘΖ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἄρα ΕΗ=ΖΘ.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι παντοῦ δύο παράλληλα ἐπίπεδα ἰσάκις ἀπέχουσι. Καὶ τῷ ὄντι αἱ εὐθεῖαι ΕΗ, ΖΘ, ἐὰν ὑποτεθῶσι κάθετοι ἐπὶ τῶν δύο ἐπιπέδων ΜΝ, ΠΚ, εἶναι παράλληλοι (πρότ. 7, βιβλ. 5), καὶ διὰ τοῦτο ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13.

Θεώρημα.

Αἱ μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὑπάρχουσαι γωνίαι ΓΑΕ,ΔΒΖ εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν παράλληλα, ἐὰν αἱ πλευραὶ τῶν γωνιῶν αὐτῶν ἦναι παράλληλοι καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ κατευθύνωνται μέρος. (σχ. 190)

Λαμβάνω τὴν ΑΓ=ΒΔ, καὶ τὴν ΑΕ=ΒΖ, καὶ ἄγω τὰς εὐθείας ΓΕ, ΔΖ, ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ.

Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, τὸ σχῆμα ΑΒΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμον (πρότ. 30, βιβλ. 1). Λοιπὸν ἡ ΓΔ καὶ ἡ ΑΒ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΕΖ καὶ ἡ ΑΒ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Ἄρα ἡ ΓΔ καὶ ἡ ΕΖ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, καὶ τὸ σχῆμα ΓΕΖΔ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐπομένως καὶ αἱ πλευραὶ ΓΕ, ΔΖ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΓΑΕ, ΔΒΖ ἔχουσι τὰς πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. Ἄρα ἡ γωνία ΓΑΕ=ΔΒΖ.

Ὅτι δὲ τὰ ἐπίπεδα ΑΓΕ, ΒΔΖ εἶναι παράλληλα, ἰδοὺ ἡ ἀπόδειξις.

Ἢ εἶναι παράλληλα, ἢ δὲν εἶναι. Ἄς ὑποτεθῇ, ὅτι δὲν εἶναι. Τούτου τεθέντος, ἄγω ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ ἐπιπέδου ΒΔΖ· ἔστω δὲ, ὅτι τὸ τρίτον τοῦτο ἐπίπεδον συναπαντᾷ τὰς εὐθείας ΓΔ, ΕΖ εἰς τὰ σημεῖα Η, καὶ Θ, εἰς σημεῖα δηλαδὴ διαφέροντα τῶν σημείων Γ καὶ Ε. Κατὰ τὴν 12 πρότασιν καὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΒ, ΗΔ, ΘΖ εἶναι ἴσαι. Ἀλλ' ἴσαι εἶναι καὶ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ. Ἄρα ΓΔ=ΗΔ, καὶ ΘΖ=ΕΖ. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον. Λοιπὸν τὸ ἐπίπεδον ΑΓΕ εἶναι παράλληλον τοῦ ἐπιπέδου ΒΔΖ.

Πόρισμα. Ἐὰν τὰ δύο παράλληλα ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ συναπαντηθῶσιν ὑπ' ἄλλων δύο ἐπιπέδων ΓΑΒΔ, ΕΑΒΖ, αἱ ὑπὸ τῶν κοινῶν τομῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι ΓΑΕ, ΔΒΖ, αἱ ἐπὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων κείμεναι, εἶναι ἴσαι. Διότι ἡ τομὴ ΑΓ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΔ (πρότ. 10, βιβλ. 5), καὶ ἡ τομὴ ΑΕ παράλληλος τῆς ΒΖ. Ἄρα ἡ γωνία ΓΑΕ=ΔΒΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14.

Θεώρημα.

Ἐὰν συναφθῶσι τὰ ἄκρα τῶν μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένων τριῶν ἴσων καὶ παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ἀποτελοῦνται δύο τρίγωνα ΑΓΕ, ΒΔΖ ἴσα, τὰ δὲ ἐπίπεδα τῶν τριγώνων αὐτῶν θέλουσιν εἶσθαι παράλληλα. (σχ. 190)

Διότι, ἕνεκα τῆς ἰσότητος καὶ τοῦ παραλληλισμοῦ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ, τὸ σχῆμα ΑΒΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ὅθεν αἱ πλευραὶ ΑΓ, ΒΔ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ αἱ πλευραὶ ΑΕ, ΒΖ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Ὡσαύτως δὲ ἴσαι καὶ παράλληλοι εἶναι καὶ αἱ πλευραὶ ΓΕ καὶ ΔΖ. Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΕ, ΒΔΖ εἶναι ἴσα.

Ὁ παραλληλισμὸς δὲ τῶν ἐπιπέδων, ἐφ᾽ ὧν τὰ τρίγωνα ταῦτα κεῖνται, ἀποδεικνύεται ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ προτάσει.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.

Θεώρημα.

Δύο εὐθεῖαι, μεταξὺ τριῶν παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμεναι, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα. (σχ. 191)

Ἐὰν τὰ ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ, ΡΣ συναπαντῶνται ὑπὸ μὲν τῆς εὐθείας ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Α, Ε, Β, ὑπὸ δὲ τῆς εὐθείας ΓΔ εἰς τὰ σημεῖα Γ, Ζ, Δ, λέγω ὅτι ἡ ἑξῆς θέλει ὑπάρχει ἀναλογία ΑΕ : ΕΒ : : ΓΖ : ΖΔ.

Συνάπτω τὰ σημεῖα Α καὶ Δ διὰ τῆς ΑΔ, ἥτις συναπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον ΠΚ εἰς τὸ σημεῖον Η· ἄγω δὲ τὰς εὐθείας ΑΓ, ΕΗ, ΗΖ, ΒΔ. Αἱ διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔ τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΠΚ, ΡΣ εἶναι παράλληλοι (πρότ. 10, βιβλ. 5). Λοιπὸν ΑΕ : ΕΒ :: ΑΗ : ΗΔ. Ὡσαύτως παράλληλοι εἶναι καὶ αἱ τομαὶ ΑΓ, ΗΖ· ἑπομένως ΑΗ : ΗΔ :: ΓΖ : ΖΔ. Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος ΑΗ : ΗΔ εἶναι κοινὸς, ἄρα ΑΕ : ΕΒ :: ΓΖ : ΖΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16.

Θεώρημα.

Ἔστω ΑΒΓΔ τετράπλευρόν τι, κείμενον ἢ μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. (*) Ἐὰν τοῦ τετραπλεύρου αὐτοῦ αἱ ἀντικείμεναι πλευραὶ τμηθῶσι διὰ τῶν εὐθειῶν ΕΖ, ΗΘ εἰς μέρη ἀνάλογα οὕτως, ὥστε αἱ ἀναλογίαι νὰ σχηματισθῶσιν αὗται ΑΕ : ΕΒ :: ΔΖ : ΖΓ, καὶ ΒΗ : ΗΓ :: ΔΘ : ΘΔ, λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΗΘ τέμνονται εἴς τι σημεῖον Μ, καὶ ἐξ αὐτῆς τῆς τομῆς αἱ ἀναλογίαι παράγονται αὗται ΘΜ : ΜΗ :: ΑΕ : ΕΒ, καὶ ΕΜ : ΜΖ :: ΑΘ : ΘΔ. (σχ. 192)

Ἄγω κατὰ τῆς ΑΔ τὴν διεύθυνσιν τὸ ἐπίπεδον ΑϐΘγΔ, τὸ μὴ διερχόμενον διὰ τῆς ΗΘ· ἐκ δὲ τῶν σημείων Ε, Β, Γ, Ζ φέρω τῆς ΗΘ τὰς παραλλήλους Εε, Βϐ, Γγ, Ζζ, αἵτινες συναντῶσι τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ εἰς τὰ σημεῖα ε, ϐ, γ, ζ.

Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι Βϐ, ΗΘ, Γγ εἶναι παράλληλοι (πρότ. 15, βιβλ. 3), ταύτας ἔχω τὰς ἀναλογίας ϐΘ : ΘΓ :: ΒΗ : ΗΓ :: ΑΘ : ΘΔ. Ἄρα (πρότ. 20, βιβλ. 3) τὰ τρίγωνα ΑΘϐ, ΔΘγ εἶναι ὅμοια. Πρὸς τούτοις Αε : εϐ :: ΑΕ : ΕΒ, καὶ Δζ : ζγ :: ΔΖ : ΖΓ. Ἄρα Αε : εϐ :: Δζ : ζγ· ἢ, *ἐν συνθέσει*, Αε : Δζ :: Αϐ : Δγ. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ τρίγωνα ΑΘϐ, ΔΘγ εἶναι ὅμοια, αἱ ἀναλογίαι ὑπάρχουσιν αὗται Αϐ : Δγ :: ΑΘ : ΘΔ. Λοιπὸν Αε : Δζ :: ΑΘ : ΘΔ. Ἐκτὸς τούτου, ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΘϐ, ΔΘγ ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΘΑε=ΘΔζ. Ἄρα καὶ τὰ τρίγωνα ΑΘε, ΔΘζ εἶναι ὅμοια (πρότ. 20, βιβλ. 3). Λοιπὸν ἡ γωνία ΑΘε=ΔΘζ.

Ἐντεῦθεν δὲ ἕπεται, πρῶτον μὲν, ὅτι ἡ γραμμὴ εΘζ εἶναι εὐθεῖα, δεύτερον δὲ, ὅτι αἱ τρεῖς παράλληλοι Εε, ΗΘ, Ζζ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τοῦ περιλαμβάνοντος τὰς εὐθείας ΕΖ,

---

(*) Κατὰ τοῦ συγγραφέως τὴν ἀπόδειξιν, τὸ τετράπλευρον, τὸ ἀποτελοῦν τῆς προτάσεως τὸ σχῆμα, ἐπὶ δύο κεῖται ἐπιπέδων. Ἀναγκαίως δὲ τοιούτου σχήματος χρῆσις γίνεται, διότι περὶ στερεομετρίας πρόκειται.

ΠΘ. Ἄρα αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἀναγκαίως τέμνονται εἴς τι σημεῖον Μ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι Εε, ΜΘ, Ζζ εἶναι παράλληλοι, πρὸς τοῖς ἄλλοις ἔπεται, ὅτι ΕΜ : ΜΖ :: εΘ : Θζ :: Α Θ : ΘΔ.

Δι' ὁμοίας κατασκευῆς, γινομένης πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ, δύναταί τις ν' ἀποδείξῃ, ὅτι ΘΜ : ΜΠ :: ΑΕ : ΕΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17.

Θεώρημα.

Ἡ γωνία, ἡ μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων ΜΑΝ, ΜΑΠ περιεχομένη, δύναται νὰ μετρηθῇ, κατὰ τὰ ἐν τῷ ὁρισμῷ αὐτῆς εἰρημένα, διὰ τῆς γωνίας ΝΑΠ, τῆς ἀποτελουμένης ὑπὸ τῶν ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἠγμένων δύο καθέτων ΑΝ, ΑΠ, ἐξ ὧν ἡ μὲν εἰς τοῦτο, ἡ δὲ εἰς ἐκεῖνο τῶν ἐπιπέδων εἶναι ἐῤῥιμμένη. (σχ. 193)

Πρὸς βεβαίωσιν τῆς ἀκριβείας τῆς προτάσεως ταύτης, ἐπιχειρῶ ν' ἀποδείξω ἐν πρώτοις, ὅτι τὸ μέτρον, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος, εἶναι σταθερὸν, ὁπουδήποτε τῆς κοινῆς τομῆς αἱ δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἀχθῶσι.

Καὶ τῷ ὄντι· ἐὰν ἐξ ἄλλου τινὸς σημείου Μ ἀχθῶσιν ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΑΜ κάθετοι αἱ εὐθεῖαι ΜΓ, ΜΒ, ἡ μὲν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ ἐῤῥιμμένη, ἡ δὲ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΠ, ἡ ἐξ αὐτῶν τῶν καθέτων σχηματιζομένη γωνία ΒΜΓ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ ΠΑΝ (πρότ. 13, βιβλ. 5), διότι αἱ μὲν εὐθεῖαι ΜΒ καὶ ΑΠ, κάθετοι οὖσαι ἐπὶ τῆς ΑΜ, εἶναι παράλληλοι· ὡσαύτως δὲ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον παράλληλοι εἶναι καὶ αἱ εὐθεῖαι ΜΓ, ΑΝ. Ἐπομένως ἀδιάφορον εἶναι ἂν ἡ γωνία εἰς τὸ σημεῖον Μ, ἢ εἰς τὸ σημεῖον Α σχηματισθῇ, διότι τὸ μέγεθος αὐτῆς σταθερὸν πάντοτε μένει.

Ἤδη δὲ πρόκειται ν' ἀποδείξω, ὅτι ἐὰν τῶν δύο ἐπιπέδων ἡ γωνία αὐξήσῃ ἢ ἐλαττωθῇ, τὴν αὐτὴν αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν καὶ ἡ γωνία ΠΑΝ λαμβάνει.

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΑΝ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Α, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ δι᾽ ἀκτῖνος οἱασδήποτε, γράφω τὸ τόξον ΝΑΠ. Ὡσαύτως δὲ ἐκ τοῦ σημείου Μ,ὡς ἐκ κέντρου,καὶ διὰ τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος γράφω τὸ τόξον ΓΕΒ, καὶ ἄγω κατὰ θέλησιν τὴν εὐθεῖαν ΑΔ.

Τὰ δύο ἐπίπεδα ΠΑΝ, ΒΜΓ, κάθετα ὄντα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΜΑ, εἶναι παράλληλα (πρότ. 9, βιβλ. 5). Ἄρα τῶν δύο αὐτῶν ἐπιπέδων αἱ τομαὶ ΑΔ, ΜΕ, αἱ δὲ τοῦ τρίτου ἐπιπέδου ΑΜΕΔ γινόμεναι,εἶναι παράλληλοι,καὶ διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΒΜΕ= ΠΑΔ (πρότ. 13, βιβλ. 5).

Ὀνομάζω πρὸς ὥραν τὴν ὑπὸ τῶν δύο ἐπιπέδων ΜΠ,ΜΝ ἀποτελουμένην γωνίαν *πτυχήν*. Τούτου δὲ τεθέντος,ἐὰν ἡ γωνία ΔΑΠ ἦτον ἴση τῇ γωνίᾳ ΔΑΝ,πρόδηλον εἶναι,ὅτι καὶ ἡ πτυχὴ ΔΑΜΠ ἤθελεν εἶσθαι ἴση τῇ πτυχῇ ΔΑΜΝ· διότι ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ μὲν βάσις ΔΑΠ ἐφαρμόζεται ἐπὶ τῆς βάσεως ΔΑΝ,ἴσης οὔσης,τὸ δὲ ὕψος ΑΜ τὸ αὐτὸ πάντοτε μένει. Ὅθεν αἱ δύο πτυχαὶ συμπίπτουσιν. Ὡσαύτως εὐκόλως τις βλέπει, ὅτι ἐὰν ἡ γωνία ΔΑΠ περιείχετο ἀκριβῶς δὶς, τρὶς, ἢ πολλάκις εἰς τὴν γωνίαν ΠΑΝ, ἡ πτυχὴ ΔΑΜΠ δὶς, τρὶς, ἢ πολλάκις ἤθελε περιέχεσθαι εἰς τὴν πτυχὴν ΠΑΜΝ. Γνωστὸν δ᾽ ἄλλοθεν εἶναι,ὅτι ἅμα ἡ ἐν ἀκεραίοις ἀριθμοῖς τοιαύτη σχέσις ἀποδειχθῇ,πᾶσα ἄλλη σχέσις βεβαιοῦται· τοῦτο δὲ εἴς τινα περίστασιν ἀνάλογον ἐν τοῖς προηγουμένοις ἀπεδείχθη (πρότ. 17, βιβλ. 2). Λοιπὸν ὁποιαδήποτε εἶναι τῶν γωνιῶν ΔΑΠ, ΠΑΝ ἡ σχέσις, ἡ αὐτὴ σχέσις ὑπάρχει καὶ εἰς τὰς πτυχὰς ΔΑΜΠ, ΠΑΜΝ. Ἄρα ἡ γωνία ΝΑΠ δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς μέτρον τῆς πτυχῆς ΠΑΜΝ,ἤτοι τῆς γωνίας,τῆς ὑπὸ τῶν δύο ἐπιπέδων ΜΑΠ, ΜΑΝ ἀποτελουμένης.

Σχόλιον. Ὅ,τι εἰς τὰς ἐξ εὐθειῶν συνισταμένας γωνίας παρετηρήθη, τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὰς ἐξ ἐπιπέδων ἀποτελουμένας παρατηρεῖται. Τουτέστι τὰ διασταυρούμενα ἐπίπεδα σχηματίζουσι τὰς μὲν κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας, τὰς δὲ προσκειμένας τοιαύτας, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν δύο ἀποτελεῖ γωνίας ὀρθάς. Ὅθεν, ὅταν ἐπίπεδόν τι κάθετον ἐπὶ ἄλλου ἐπιπέδου ἦναι, τὸ δεύτερον τοῦτο ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ πρώτου. Πρὸς τούτοις δὲ ἡ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου ἐπιπέδου τομὴ τὰς αὐτὰς παράγει ἰσότητας καὶ τὰς αὐτὰς ἰδιότητας, ὅσας ἡ ὑπὸ τεμνούσης εὐθείας τομὴ εὐθειῶν παραλλήλων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖά τις ΑΠ κάθετος ἦναι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, πᾶν ἐπίπεδον ΑΠΒ, κατ' αὐτὴν τὴν εὐθεῖαν ΑΠ φερόμενον, κάθετον εἶναι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ. (σχ. 194)

Ἔστω ΒΓ ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΑΒ,ΜΝ. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ΒΓ ἀχθῇ κάθετος ἡ ΔΕ, ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ ἐῤῥιμμένη, ἡ εὐθεῖα ΑΠ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, θέλ' εἶσθαι κάθετος ἐπὶ ἑκατέρας τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΔΕ. Ἀλλ' ἡ γωνία ΑΠΔ, ἡ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ΠΑ, ΠΔ, τῶν καθέτων ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΒΓ, ἀποτελουμένη, τὸ μέτρον τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων ΑΒ, ΜΝ ἐκφράζει. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία αὐτὴ εἶναι ὀρθή, τὰ δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα τὸ ἕτερον ἐπὶ τοῦ ἑτέρου (ὁρισμ. 5).

Σχόλιον. Ὅταν τρεῖς εὐθεῖαι ΑΠ, ΒΠ, ΔΠ, ἦναι ἀμοιβαίως κάθετοι, ἑκάστη αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν λοιπῶν δύο, καὶ τὰ τρία ἐπίπεδα εἶναι κάθετα τὸ ἕτερον ἐπὶ τῶν ἑτέρων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19.

Θεώρημα.

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ΑΒ κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ ὑποτεθῇ, καὶ ἐὰν ἐν αὐτῷ τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒ ἡ εὐθεῖα ΠΑ κάθετος ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΠΒ ἀχθῇ, λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα ΠΑ θέλ' εἶσθαι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ. (σχ. 194)

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ ἄγω τὴν εὐθεῖαν ΠΔ κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΠΒ. Τούτου δὲ γενομένου, ἡ γωνία ΑΠΔ εἶναι ὀρθή, διότι τὰ ἐπίπεδα εἶναι κάθετα τὸ ἕτερον ἐπὶ τοῦ ἑτέρου. Ἄρα ἡ εὐθεῖα ΑΠ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῶν δύο εὐθειῶν ΠΒ, ΒΔ· ἑπομένως εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΜΝ.

Πόρισμα. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ἦναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, καὶ ἐὰν ἀπό τινος τῆς κοινῆς τομῆς σημείου Π ἀνυψωθῇ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, λέγω ὅτι ἡ κάθετος αὕτη ὑπάρχει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒ. Διότι, ἐὰν ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος κάθετος ὑπῆρχεν, ἠδύνατό τις ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒ ν' ἀνυψώσῃ τὴν ΑΠ κάθετον ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΒΠ· ἡ εὐθεῖα δὲ ΑΠ ἤθελεν εἶσθαι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ. Ἄρα δύο εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Π ἤθελον ὑπάρχει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ κάθετοι. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον (πρότ. 4, βιβλ. 5).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 20.

Θεώρημα.

Τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΒ, ΑΔ, τῶν καθέτων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ἡ κοινὴ τομὴ ΑΠ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ τρίτου αὐτοῦ ἐπιπέδου. (σχ. 194)

Διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Π κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ ὑψωθῇ, ἡ κάθετος αὕτη εὑρίσκεται συγχρόνως καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΔ (πρότ. 19, βιβλ. 5). Ἄρα ἡ ΑΠ, ἡ κοινὴ τῶν δύο αὐτῶν ἐπιπέδων τομή, ἡ κάθετος αὕτη εἶναι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 21.

Θεώρημα.

Ἐὰν στερεά τις γωνία ἐκ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ἀποτελῆται, τὸ ἄθροισμα δύο ἐξ αὐτῶν τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι τῆς τρίτης γωνίας μεῖζον. (σχ 195)

Ἀνάγκην ἀποδείξεως ἡ πρότασις αὕτη δὲν ἔχει, εἰμὴ ὅταν μία ἐκ τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, πρὸς ἑκατέραν τῶν λοιπῶν δύο κατ' ἰδίαν παραβαλλομένη, μείζων ἦναι.

Ἔστω λοιπὸν ἡ στερεὰ γωνία Σ, ἐκ τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΣΒ, ΑΣΓ, ΒΣΓ συνισταμένη. Ἔστω πρὸς τούτοις ἐκ τῶν τριῶν αὐτῶν γωνιῶν ἡ ΑΣΒ μείζων· λέγω ὅτι ΑΣΒ$<$ΑΣΓ$+$ΒΣΓ.

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΒ σχηματίζω τὴν γωνίαν ΒΣΔ$=$ΒΣΓ· ἄγω δὲ κατὰ θέλησιν τὴν εὐθεῖαν ΑΔΒ, καὶ λαμβάνω τὴν ΣΓ$=$ΣΔ· ἐπὶ τέλους δὲ φέρω τὰς εὐθείας ΑΓ, ΒΓ.

Ἡ πλευρὰ ΒΣ εἶναι κοινὴ, ἡ δὲ ΣΔ=ΣΓ, καὶ ἡ γωνία ΒΣΔ=ΒΣΓ. Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΒΣΔ, ΒΣΓ εἶναι ἴσα. Ἄρα ΒΔ=ΒΓ. Ἀλλὰ ΑΒ<ΑΓ+ΒΓ. Ἀφαιρουμένης δὲ ἔνθεν μὲν τῆς ΒΔ, ἐκεῖθεν δὲ τῆς ΒΓ, τῆς ἴσης τῇ ΒΔ, μένει ΑΔ<ΑΓ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ μὲν πλευρὰ ΑΣ εἶναι κοινὴ, ἡ δὲ πλευρὰ ΣΔ=ΣΓ, ἡ δὲ τρίτη πλευρὰ ΑΔ μικροτέρα τῆς τρίτης πλευρᾶς ΑΓ, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΑΣΔ<ΑΣΓ. Προστιθεμένων δὲ κατὰ μέλη τῶν δύο μελῶν ταύτης τῆς ἀνισότητος καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος ταύτης ΒΣΔ=ΒΣΓ, ἡ ἀκόλουθος σχηματίζεται ἀνισότης ΑΣΔ+ΒΣΔ, ἢ ΑΣΒ<ΑΣΓ+ΒΣΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 22.

Θεώρημα.

Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, ἐξ ὧν στερεά τις γωνία ἀποτελεῖται, πάντοτε τεσσάρων γωνιῶν ὀρθῶν εἶναι μικρότερον. (σχ. 196)

Κόπτω τὴν στερεὰν γωνίαν Σ διά τινος ἐπιπέδου ΑΒΓΔΕ. Ἐξ ἑνὸς δὲ σημείου Ο, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ ὑπάρχοντος, ἄγω εἰς ὅλας τὰς γωνίας τοῦ σχηματισθέντος πολυγώνου τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων ΑΣΒ, ΒΣΓ, κτλ., τῶν συνερχομένων εἰς τὸ σημεῖον Σ, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἰσαρίθμων τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΓ, κτλ., τῶν κύκλῳ τοῦ σημείου Ο ὑπαρχόντων εἶναι ἴσα. Ἀλλ' εἰς τὸ σημεῖον Β αἱ γωνίαι ΑΒΟ, ΟΒΓ, ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἀποτελοῦσι τὴν γωνίαν ΑΒΓ, τὴν μικροτέραν τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν ΑΒΣ, ΣΒΓ (πρότ. 21, βιβλ. 5). Παρομοίως δὲ εἰς τὸ σημεῖον Γ αἱ γωνίαι ΒΓΟ+ΟΓΔ<ΒΓΣ+ΣΓΔ. Τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει εἰς ὅλας τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ.

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι εἰς τὰ τρίγωνα, τὰ ἔχοντα τὰς κορυφὰς αὐτῶν εἰς τὸ σημεῖον Ο, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, τῶν παρὰ τὰς βάσεις, εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν παρὰ τὰς αὐτὰς βάσεις γωνιῶν τῶν τριγώνων, τῶν ἐχόντων κορυφὴν τὸ σημεῖον Σ. Πρὸς ἀντιστάθμισιν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, τῶν κύκλῳ τοῦ σημείου Ο, εἶναι μεῖζον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν, τῶν εἰς τὸ σημεῖον Σ συνερχομένων. Ἀλλ' αἱ κύκλῳ τοῦ σημείου Ο ὑπάρχουσαι γωνίαι τέσσαρας ἀποτελοῦσι γωνίας ὀρθὰς (πρότ. 5, βιβλ. 1)· ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, ἐξ ὧν ἡ στερεὰ γωνία Σ ἀποτελεῖται, μικρότερον εἶναι τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν.

Σχόλιον. Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν ταύτην ἡ στερεὰ γωνία Σ εἶναι κυρτὴ, τουτέστιν, ἐὰν ὁποιαδήποτε τῆς γωνίας αὐτῆς ἕδρα παραταθῇ, δὲν τέμνει τὴν στερεὰν γωνίαν. Ἐὰν τὴν ἔτεμνε, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν δὲν εἶχε πλέον ὅρια, παντοῖα δ' ἤθελεν ἔχει μεγέθη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 23.

Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχωσι τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας, ἐξ ὧν συνίστανται, ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρα, τὰ ἐπίπεδα, ἐφ' ὧν αἱ ἴσαι γωνίαι ὑπάρχουσιν, ἰσάκις πρὸς ἄλληλα κλίνουσιν. (σχ. 197)

Ἔστωσαν ἡ μὲν γωνία ΑΣΓ=ΔΤΖ, ἡ δὲ γωνία ΑΣΒ=ΔΤΕ, καὶ ἡ γωνία ΒΣΓ=ΕΤΖ. Λέγω, ὅτι τὰ ἐπίπεδα ΑΣΓ, ΑΣΒ ἔχουσι πρὸς ἄλληλα κλίσιν ἴσην τῇ κλίσει τῶν ἐπιπέδων ΔΤΖ, ΔΤΕ.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, λαμβάνω κατ' ἀρέσκειαν τὴν εὐθεῖαν ΣΒ, καὶ φέρω ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΓ τὴν κάθετον ΒΟ. Ἐκ τοῦ σημείου Ο, ἐκ τοῦ σημείου δηλαδὴ εἰς ὃ ἡ κάθετος συναπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον, ἄγω τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΓ καθέτους ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΣΑ, ΣΓ, καὶ συνάπτω μετὰ τοῦ Β τὰ σημεῖα Α καὶ Γ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ. Μετὰ ταῦτα λαμβάνω τὴν εὐθεῖαν ΤΕ=ΣΒ, φέρω τὴν ΕΠ κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΔΤΖ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Π, τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, ἄγω ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΤΔ, ΤΖ τὰς καθέτους ΠΔ, ΠΖ, συνάπτω δ' ἐπὶ τέλους μετὰ τοῦ Ε τὰ σημεῖα Δ καὶ Ζ διὰ τῶν εὐθειῶν ΔΕ, ΕΖ.

Τὰ δύο τρίγωνα ΣΑΒ, ΤΔΕ εἶναι ὀρθογώνια τὸ μὲν εἰς τὸ σημεῖον Α, τὸ δὲ εἰς τὸ σημεῖον Δ (πρότ. 6, βιβλ. 5). Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΑΣΒ=ΔΤΕ, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ γωνία ΣΒΑ=ΤΕΔ. Πρὸς τούτοις δὲ ἡ πλευρὰ ΣΒ=ΤΕ. Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΣΑΒ, ΤΔΕ εἶναι ἴσα (πρότ. 7, βιβλ. 1). Ἄρα καὶ ΣΑ=ΤΔ, καὶ Α=Β

ΔΕ. Ἀπαραλλάκτως ἀποδεικνύεται, ὅτι ΣΓ=ΤΖ, καὶ ΒΓ=ΕΖ.

Τούτων τεθέντων, ἕπεται ὅτι τὰ τετράπλευρα ΣΑΟΓ, ΤΔΠΖ εἶναι ἴσα. Καὶ τῷ ὄντι· τιθεμένης τῆς γωνίας ΑΣΓ ἐπὶ τῆς γωνίας ΔΤΖ, τῆς ἴσης αὐτῇ, ἐπειδὴ ΣΑ=ΤΔ, καὶ ΣΓ=ΤΖ, τὸ σημεῖον Α πίπτει ἐπὶ τοῦ Δ καὶ τὸ σημεῖον Γ ἐπὶ τοῦ Ζ. Συγχρόνως δὲ ἡ εὐθεῖα ΑΟ, ἡ κάθετος ἐπὶ τῆς ΣΑ, πίπτει ἐπὶ τῆς ΔΠ, τῆς καθέτου ἐπὶ τῆς ΤΔ· ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ ΟΓ πίπτει ἐπὶ τῆς ΠΖ. Λοιπὸν τὸ σημεῖον Ο πίπτει ἐπὶ τοῦ σημείου Π· ὅθεν ΑΟ=ΔΠ. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΔΠΕ εἶναι ὀρθογώνια, τὸ μὲν εἰς τὸ σημεῖον Ο, τὸ δὲ εἰς τὸ σημεῖον Π. Τοῦ ἑτέρου δὲ ἡ ὑποτείνουσα ΑΒ=ΔΕ, καὶ ἡ πλευρὰ ΑΟ=ΔΠ. Λοιπὸν τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα (πρότ. 18, βιβλ. 1)· ἄρα ἡ γωνία ΟΑΒ=ΠΔΕ. Ἀλλ' ἡ μὲν γωνία ΟΑΒ εἶναι ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΣΒ, ΑΣΓ, ἡ δὲ γωνία ΠΔΕ εἶναι ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΔΤΕ, ΔΤΖ. Ἄρα αἱ δύο αὐταὶ κλίσεις εἶναι ἴσαι.

Παρατηρητέον ὅμως, ὅτι ἡ γωνία Α τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ δὲν εἶναι ἡ καθαυτὸ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΑΣΒ, ΑΣΓ, εἰμὴ ὅταν ἡ κάθετος ΒΟ πίπτῃ πέραν τῆς ΣΑ πρὸς τὸ μέρος τῆς ΣΓ. Ἐὰν ἔπιπτε πρὸς τὸ μέρος τὸ ἕτερον, τῶν δύο ἐπιπέδων ἡ γωνία ἤθελεν εἶσθαι ἀμβλεῖα, προστιθεμένη δὲ εἰς τὴν γωνίαν Α τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ, ἤθελεν ἀποτελεῖ δύο γωνίας ὀρθάς. Ἀλλὰ κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην καὶ ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων ΤΔΕ, ΤΔΖ θέλ' εἶσθαι ὡσαύτως ἀμβλεῖα, καὶ εἰς τὴν γωνίαν Δ τοῦ τριγώνου ΔΠΕ προστιθεμένη θέλει ἀποτελεῖ δύο ὀρθάς. Ἐπειδὴ δὲ πάντοτε δύναταί τις ν' ἀποδείξῃ, ὅτι αἱ γωνίαι Α καὶ Δ εἶναι ἴσαι, ἕπεται πάντοτε ὅτι ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΣΑΒ, ΣΑΓ καὶ ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΤΔΕ, ΤΔΖ εἶναι ἴσαι.

Σχόλιον. Ἐὰν αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι, αἱ γωνίαν στερεὰν συνιστῶσαι, καὶ αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι, αἱ ἄλλην γωνίαν στερεὰν σχηματίζουσαι, ἦναι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ ἐὰν ἐνταυτῷ αἱ ἴσαι ἤτοι αἱ ὁμόλογοι ἐπίπεδοι γωνίαι ἦναι κατὰ τὸν αὐτὸν διατεθειμέναι τρόπον καὶ εἰς τὰς δύο γωνίας τὰς στερεὰς, αἱ δύο αὗται στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἐπιτιθέμεναι δὲ ταυτίζονται. Καὶ τῷ ὄντι, ὡς ἀνωτέρω παρετηρήθη, τὸ τετράπλευρον ΣΑΟΓ ἐφαρμόζεται ἐπὶ τοῦ τετραπλεύρου ΤΔΠΖ, τοῦ ἴσου αὐτῷ. Ἐπιτιθεμένης δὲ τῆς ΣΑ ἐπὶ τῆς ΤΔ, ἡ ΣΓ πίπτει ἐπὶ τῆς

ΤΖ, καὶ τὸ σημεῖον Ο ἐπὶ τοῦ Π. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΛΟΒ, ΔΠΕ εἶναι ἴσα, ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΓ κάθετος ΟΒ καὶ ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΤΔΖ κάθετος ΠΕ εἶναι ἴσαι. Πρὸς τούτοις δὲ αἱ δύο αὐταὶ κάθετοι κατὰ τὴν αὐτὴν κατευθύνονται φοράν. Λοιπὸν τὸ σημεῖον Β πίπτει ἐπὶ τοῦ σημείου Ε καὶ ἡ εὐθεῖα ΣΒ ἐπὶ τῆς ΤΕ, αἱ δύο δὲ στερεαὶ γωνίαι ἐφαρμόζονται ἐπ' ἀλλήλας ἐντελῶς.

Αὕτη ὅμως τῶν στερεῶν γωνιῶν ἡ σύμπτωσις τότε μόνον πραγματοποιεῖται, ὅταν αἱ γωνίαι αἱ ἐπίπεδοι αἱ ἴσαι κατὰ τὸν αὐτὸν ἦναι διατεθειμέναι τρόπον καὶ εἰς ἀμφοτέρας τὰς στερεὰς γωνίας. Ὅταν δὲ κατὰ τάξιν ἀντίστροφον αἱ ἴσαι ἐπίπεδοι γωνίαι ἦναι συνηρμοσμέναι, ἢ, ἐν ἄλλοις λόγοις, ὅταν αἱ κάθετοι ΟΒ, ΠΕ, ἀντὶ νὰ διευθύνωνται κατὰ τὴν αὐτὴν ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα ΑΣΓ, ΔΤΖ φοράν, κατὰ φορὰν ἐναντίαν φέρωνται, ἡ σύμπτωσις τῶν δύο στερεῶν γωνιῶν εἶναι πρᾶγμα ἀδύνατον. Οὐχ ἧττον ὅμως βέβαιον μένει, κατὰ τὰ ἐν τῷ παρόντι θεωρήματι εἰρημένα, ὅτι τὰ ἐπίπεδα, ἐφ' ὧν αἱ ἴσαι γωνίαι ὑπάρχουσιν, ἐξ ἴσου πρὸς ἄλληλα κλίνουσι. Τουτέστιν ὅλα μὲν τὰ συστατικὰ τῶν δύο στερεῶν γωνιῶν μέρη εἶναι ἴσα, ἡ ἐπίθεσις ὅμως καὶ ἡ ἐφαρμογὴ τῶν γωνιῶν αὐτῶν εἶναι ἀκατόρθωτος.

Τὸ τοιοῦτον τῆς ἰσότητος εἶδος, τὸ μὴ ἐξ ἐπιθέσεως, τὸ μὴ ἀπόλυτον, πρὸς διάκρισιν, λέγεται ἐκ *συμμετρίας ἰσότης*. Ὅθεν αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος στερεαὶ γωνίαι, αἱ ἀποτελούμεναι ἐξ ἴσων μὲν ἐπιπέδων γωνιῶν, κατὰ φορὰν ὅμως ἀντίστροφον συνηρμοσμένων, ὀνομάζονται γωνίαι ἴσαι ἐκ συμμετρίας, ἢ ἁπλῶς *γωνίαι συμμετρικαί*.

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς τὰς γωνίας τὰς στερεάς, τὰς συνισταμένας ἐξ ἐπιπέδων γωνιῶν πλειοτέρων τῶν τριῶν. Παραδείγματος χάριν, ἡ γωνία ἡ στερεά, ἡ ἀποτελουμένη ἐκ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, καὶ ἡ γωνία ἡ στερεά, ἡ συνηρμοσμένη ἐκ τῶν αὐτῶν γωνιῶν Α, Ε, Δ, Γ, Β, κατὰ τάξιν ὅμως ἀντίστροφον, τοιαῦται νὰ ἦναι δύνανται, ὥστε τὰ ἐπίπεδα, ἐφ' ὧν αἱ ἴσαι ὑπάρχουσιν ἐπίπεδοι γωνίαι, τὴν αὐτὴν νὰ ἔχωσι πρὸς ἄλληλα κλίσιν. Καὶ ἴσαι μὲν αἱ δύο αὐταὶ γωνίαι εἶναι καθ' ὅλα των τὰ μέρη, ἡ ἐπίθεσις ὅμως αὐτῶν νὰ γίνῃ ἀδύνατον εἶναι, καὶ διὰ τοῦτο καλοῦμεν καὶ αὐτὰς γωνίας ἴσας ἐκ συμμετρίας, ἢ γωνίας συμμετρικάς.

Εἰς τὰ ἐπίπεδα σχήματα ἰσότης ἐκ συμμετρίας κυρίως δὲν ὑπάρχει, διότι καὶ ἂν τοιαύτην τινὰ ἰσότητα παραδεχθῇ τις, ἡ ἰσότης εἶναι ἀπόλυτος καὶ πραγματική· διότι τὰ ἐπίπεδα σχήματα ἀντιστρέφονται καὶ τὸ ἄνω αὐτῶν μέρος δύναταί τις ἀντὶ τοῦ κάτω νὰ λάβῃ. Ἡ τοιαύτη ὅμως ἀντιστροφὴ εἰς τὰ στερεὰ εἶναι ἀπραγματοποίητος, διότι ἡ τρίτη διάστασις δύο δύναται νὰ ἔχῃ ἐναντίας διευθύνσεις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 24.

Πρόβλημα.

Δεδομένων τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, ἐξ ὧν στερεὰ ἀποτελεῖται γωνία, ζητεῖται διὰ κατασκευῆς ἐπιπέδου ἡ ἀμοιβαία κλίσις δύο ἐκ τῶν τριῶν αὐτῶν ἐπιπέδων γωνιῶν. (σχ. 198)

Ἔστω Σ ἡ δεδομένη στερεὰ γωνία, ἡ ἐκ τῶν τριῶν γνωστῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΣΒ, ΑΣΓ, ΒΣΓ συνισταμένη. Ζητεῖται ἡ ἀμοιβαία κλίσις δύο ἐξ αὐτῶν τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, παραδείγματος χάριν, ζητεῖται ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΑΣΒ, ΑΣΓ.

Διὰ κατασκευῆς ὁμοίας τῇ γενομένῃ εἰς τὴν προηγουμένην ταύτης πρότασιν προσδιορίζω τὴν γωνίαν ΟΑΒ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη κλίσις. Ζητεῖται τῆς αὐτῆς γωνίας ὁ προσδιορισμὸς διὰ κατασκευῆς κεχαραγμένης ἐπὶ ἐπιπέδου.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς ζητουμένης ταύτης γωνίας χαράσσω ἐπὶ ἐπιπέδου τὰς τρεῖς γωνίας Β′ΣΑ ΑΣΓ, Β″ΣΓ, καὶ σχηματίζω αὐτὰς ἴσας ταῖς γωνίαις ΒΣΑ, ΑΣΓ, ΒΣΓ τοῦ σχήματος τοῦ στερεοῦ. Λαμβάνω κατόπιν τὰς πλευρὰς Β′Σ καὶ Β″Σ ἑκατέραν ἴσην τῇ πλευρᾷ ΒΣ τοῦ σχήματος τοῦ στερεοῦ. Ἐκ τῶν σημείων Β′ καὶ Β″ καταβιβάζω τὰς εὐθείας Β′Α καὶ Β″Γ καθέτους ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΣΑ καὶ ΣΓ· αἱ κάθετοι δ᾽ αὗται συναπαντῶνται εἴς τι σημεῖον Ο. Ἐκ τοῦ σημείου Α ὡς ἐκ κέντρου καὶ διὰ τῆς ἀκτῖνος ΑΒ′ γράφω τὴν ἡμιπεριφέρειαν Β′ϐΕ. Εἰς τὸ σημεῖον Ο ἀναφέρω κάθετον ἐπὶ τῆς Β′Ε τὴν Οϐ, τὴν συναπαντῶσαν εἰς τὸ σημεῖον ϐ τὴν ἡμιπεριφέρειαν· συνάπτω τὰ σημεῖα Α καὶ ϐ διὰ τῆς εὐθείας Αϐ, καὶ λέγω ὅτι ἡ γωνία ΕΑϐ εἶναι ἡ ζητουμένη κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΑΣΓ, ΑΣΒ ἐν τῇ γωνίᾳ τῇ στερεᾷ.

Τὸ πᾶν δὲ τῆς προτάσεως τῆς παρούσης ἀνάγεται εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΟϐ, ΑΟΒ, ἐξ ὧν τὸ μὲν πρῶτον τοῦ ἐπιπέδου σχήματος μέρος ἀποτελεῖ, τὸ δὲ δεύτερον εἰς τὸ σχῆμα τὸ στερεὸν περιλαμβάνεται. Ἰδοὺ δὲ πῶς τοῦτο βεβαιοῦται.

Τὰ δύο τρίγωνα Β′ΣΑ,ΒΣΑ εἶναι ὀρθογώνια εἰς τὰ σημεῖα Α, ἔχουσι δὲ καὶ τὰς εἰς τὰ σημεῖα Σ γωνίας ἴσας. Ἀλλ' ἡ ὑποτείνουσα ΣΒ′ εἶναι ἴση τῇ ὑποτεινούσῃ ΣΒ. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα. Ὅθεν ἡ πλευρὰ ΣΑ, ἡ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ σχήματι, εἶναι ἴση τῇ πλευρᾷ ΣΑ, τῇ ἐν τῷ σχήματι τῷ στερεῷ. Ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ′, ἢ ἡ πρὸς αὐτὴν ἴση πλευρὰ Αϐ, ἡ ἐν τῷ σχήματι τῷ ἐπιπέδῳ, εἶναι ἴση τῇ ΑΒ πλευρᾷ, τῇ ἐν τῷ σχήματι τῷ στερεῷ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ ΣΓ, αἱ μέρος τῶν δύο σχημάτων ἀποτελοῦσαι, εἶναι ἴσαι. Ὅθεν ἕπεται, ὅτι καὶ τὰ τετράπλευρα ΣΑΟΓ ἀμφοτέρων τῶν σχημάτων εἶναι ἴσα, καὶ διὰ τοῦτο ἡ πλευρὰ ΑΟ τοῦ σχήματος τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἴση τῇ πλευρᾷ ΑΟ τοῦ σχήματος τοῦ στερεοῦ. Ἄρα τῶν δύο σχημάτων, τοῦ ἐπιπέδου δηλαδὴ καὶ τοῦ στερεοῦ, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΟϐ, ΑΟΒ ἔχουσι τὴν ὑποτείνουσαν ἴσην καὶ μίαν τῶν λοιπῶν πλευρῶν ἴσην· λοιπὸν εἶναι ἴσα· ἡ δὲ γωνία ΕΑϐ, ἡ διὰ τῆς ἐπιπέδου κατασκευῆς προσδιορισθεῖσα, εἶναι ἡ ζητουμένη κλίσις τῶν δύο τῆς στερεᾶς γωνίας ἐπιπέδων ΣΑΒ,ΣΑΓ.

Ὅταν τὸ σημεῖον Ο πίπτῃ μεταξὺ τῶν Α καὶ Β′ σημείων τοῦ σχήματος τοῦ ἐπιπέδου, ἡ γωνία ΕΑϐ γίνεται ἀμβλεῖα, καὶ τὴν ἀληθινὴν πάντοτε μετρεῖ κλίσιν τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος ἐπιπέδων. Διὰ τοῦτο, διὰ ν' ἁρμόζῃ ἡ αὐτὴ εἰς ὅλας τὰς περιστάσεις λύσις, ἐσημειώθη οὕτως ΕΑϐ καὶ ὄχι οὕτως ΟΑϐ ἡ κλίσις ἡ ζητουμένη.

Σχόλιον. Δύναταί τις νὰ ἐρωτήσῃ ἐὰν διὰ τριῶν ὁποιωνδήποτε ἐπιπέδων γωνιῶν δυνατὸν ἦναι νὰ σχηματισθῇ γωνία στερεά. Ἐν πρώτοις τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν δεδομένων ἐπιπέδων γωνιῶν πρέπει νὰ ἦναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν, διότι χωρὶς τούτου στερεὰ γωνία δὲν σχηματίζεται (πρότ. 22, βιϐλ. 5). Πρὸς τούτοις, ἐὰν δύο ἐκ τῶν τριῶν γωνιῶν, ἡ Β′ΣΑ καὶ ἡ ΑΣΓ, ληφθῶσι κατὰ θέλησιν, ἡ τρίτη ΓΣΒ″ πρέπει νὰ ἦναι τοιαύτη, ὥστε ἡ κάθετος Β″Γ, ἡ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΣΓ ἀγομένη, νὰ συναπαντᾷ τὴν διάμετρον Β′Ε μεταξὺ τῶν ἄκρων Β′ καὶ Ε. Τουτέστι τὰ ὅρια τοῦ μεγέθους τῆς γωνίας ΓΣΒ″ εἶναι ἐκεῖνα, ἐξ ὧν ἡ κάθετος Β″Γ ἄγεται εἰς τὰ σημεῖα Β′ καὶ Ε. Ἐκ τῶν δύο τούτων σημείων φέρω ἐπὶ τῆς ΓΣ τὰς καθέτους Β′Ι καὶ ΕΚ, αἵτινες συναπαντῶσιν εἰς τὰ σημεῖα Ι καὶ Κ τὴν διὰ τῆς ἀκτῖνος ΣΒ′ γεγραμμένην περιφέρειαν. Τὰ ὅρια λοιπὸν τῆς γωνίας ΓΣΒ″ εἶναι αἱ γωνίαι ΓΣΙ καὶ ΓΣΚ.

Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον Β′ΣΙ ἡ εὐθεῖα ΓΣ, παρατεινομένη, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς βάσεως Β′Ι. Ὅθεν ἡ γωνία ΓΣΙ=ΓΣΒ′=ΑΣΓ+ΑΣΒ′. Εἰς δὲ τὸ τρίγωνον ΕΣΚ ἡ εὐθεῖα ΣΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΕΚ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΓΣΚ=ΓΣΕ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΣΕ, ΑΣΒ′ εἶναι ἴσα, ἡ γωνία ΑΣΕ=ΑΣΒ′. Ἆρα ΓΣΕ ἢ ΓΣΚ=ΑΣΓ—ΑΣΒ′.

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατὸν ἐν ὅσῳ ἡ τρίτη γωνία ΓΣΒ″ εἶναι μικροτέρα μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο λοιπῶν γωνιῶν ΑΣΓ, ΑΣΒ′, μεγαλητέρα δὲ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν. Αὕτη δὲ ἡ συνθήκη δὲν διαφέρει τῆς τοῦ 21 προηγουμένου θεωρήματος· διότι κατ᾽ αὐτὸ τὸ θεώρημα πρέπει ὄχι μόνον ΓΣΒ″ <ΑΣΓ+ΑΣΒ′, ἀλλὰ καὶ ΑΣΓ<ΓΣΒ″+ΑΣΒ, ἢ ΓΣΒ″>ΑΣΓ—ΑΣΒ′.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 23.

Πρόβλημα.

Ἐκ τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, ἐξ ὧν στερεά τις ἀποτελεῖται γωνία, δεδομένων τῶν δύο, καὶ τῆς ἀμοιβαίας αὐτῶν κλίσεως γνωστῆς οὔσης, ζητεῖται ἡ τρίτη ἐπίπεδος γωνία. (σχ. 198)

Ἔστωσαν ΑΣΓ, ΑΣΒ′ αἱ δύο δεδομέναι ἐπίπεδοι γωνίαι· ἂς ὑποτεθῇ δὲ πρὸς ὥραν ὅτι ΓΣΒ″ εἶναι ἡ τρίτη γωνία ἡ ζητουμένη, καὶ ὅτι διὰ τῆς κατασκευῆς, τῆς γενομένης εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, προσδιωρίσθη ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων τῶν δύο δεδομένων γωνιῶν, τουτέστιν ἡ γωνία ΕΑϐ. Τούτων τεθέντων, διὰ τῆς γωνίας ΕΑϐ προσδιορίζεται ἡ γωνία ΓΣΒ″ ὅπως διὰ τῆς γωνίας ΓΣΒ″ εὑρέθη ἡ γωνία ΕΑϐ· τοιουτοτρόπως δὲ λύεται τὸ προκείμενον πρόβλημα.

Λαμβάνω λοιπὸν τὴν ΣΒ′ κατὰ θέλησιν, καὶ καταβιβάζω ἐπὶ τῆς ΣΑ τὴν ἀόριστον κάθετον Β΄Ε. Σχηματίζω τὴν γωνίαν ΕΑϐ ἴσην τῇ κλίσει τῶν δύο δεδομένων ἐπιπέδων· ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου ϐ, εἰς ὃ ἡ πλευρὰ Αϐ συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν, τὴν γεγραμμένην ἐκ τοῦ κέντρου Α καὶ δι' ἀκτῖνος ΑΒ΄, φέρω ἐπὶ τῆς ΑΕ τὴν κάθετον ϐΟ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ο ἄγω ἐπὶ τῆς ΣΓ τὴν ἀόριστον κάθετον ΟΓΒ΄΄, τὴν ὁποίαν παρατείνω μέχρι τοῦ Β΄΄, λαμϐάνων τὴν ΣΒ΄΄=ΣΒ΄. Ἡ τοιουτοτρόπως ἀποτελουμένη γωνία ΓΣΒ΄΄ εἶναι ἡ ζητουμένη τρίτη γωνία.

Διότι, ἐὰν διὰ τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν Β΄ΣΑ, ΑΣΓ, ΓΣΒ΄΄ σχηματισθῇ γωνία στερεά, ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων, ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ δύο δεδομέναι γωνίαι ΑΣΒ΄, ΑΣΓ, εἶναι ἴση τῇ γνωστῇ γωνίᾳ ΕΑϐ.

Σχόλιον. (σχ. 199) εἰς τὴν γωνίαν τὴν στερεὰν τὴν τετραπλῆν, εἰς τὴν στερεὰν δηλαδὴ γωνίαν, τὴν συνισταμένην ἐκ τῶν τεσσάρων ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΣΒ, ΒΣΓ, ΓΣΔ, ΔΣΑ, ἡ γνῶσις τῶν γωνιῶν τούτων δὲν ἀρκεῖ πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀμοιϐαίων κλίσεων τῶν ἐπιπέδων, ἐφ' ὧν αἱ γωνίαι αὐταὶ κεῖνται· διότι διὰ τῶν αὐτῶν γωνιῶν δυνατὸν εἶναι πολλαὶ νὰ σχηματισθῶσι γωνίαι στερεαί. Ἐὰν ὅμως ἐκτὸς τῶν τεσσάρων γωνιῶν δοθῇ καὶ συνθήκη τις, παραδείγματος χάριν, ἐὰν γνωστὴ ὑποτεθῇ καὶ ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΑΣΒ, ΒΣΓ, τότε καθ' ὅλα ἡ στερεὰ γωνία γνωστὴ γίνεται, καὶ δυνατὸς εἶναι ὁ προσδιορισμὸς τῆς κλίσεως δύο ὁποιωνδήποτε ἐπιπέδων αὐτῆς. Πρὸς βεϐαίωσιν τούτου, φαντάζομαι τὴν τριπλῆν στερεὰν γωνίαν, τὴν ἀποτελουμένην ἐκ τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΣΒ, ΒΣΓ, ΑΣΓ. Ἐπειδὴ ἐκ τῶν τριῶν τούτων γωνιῶν αἱ δύο πρῶται εἶναι δεδομέναι καὶ ἡ κλίσις αὐτῶν γνωστὴ, γνωστὴ διὰ τοῦ ἤδη λυθέντος προϐλήματος γίνεται καὶ ἡ τρίτη γωνία, ἡ ΑΣΓ. Ἐξεταζομένης δὲ κατ' ἰδίαν καὶ τῆς τριπλῆς στερεᾶς γωνίας, τῆς ἀποτελουμένης ἐκ τῶν τριῶν γνωστῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΣΓ, ΑΣΔ, ΔΣΓ, προσδιορίζεται καὶ τὸ λοιπὸν τῆς τετραπλῆς στερεᾶς γωνίας μέρος. Τουτέστι καθ' ὅλα ἡ τετραπλῆ στερεὰ γωνία γνωστὴ γίνεται, διότι ἡ ἕνωσις τῶν δύο προσδιωρισμένων τριπλῶν στερεῶν γωνιῶν τὴν τετραπλῆν, τὴν περὶ ἧς ὁ λόγος, ἀποτελεῖ.

Ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΣΔ, ΔΣΓ εὑρίσκεται ἀμέσως διὰ τῆς δευτέρας τριπλῆς στερεᾶς γωνίας. Πρὸς εὕρεσιν δὲ τῆς κλίσεως τῶν δύο ἐπιπέδων ΒΣΓ, ΓΣΔ, προσδιορίζεται ἐν πρώτοις διὰ μερικῆς τινὸς τριπλῆς στερεᾶς γωνίας ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΣΓ, ΓΣΔ, μετὰ δὲ ταῦτα διὰ μέσου ὁμοίου διορίζεται ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΣΓ, ΒΣΓ. Προστιθεμένων δὲ τῶν δύο ἤδη ἐγνωσμένων κλίσεων, προκύπτει ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΒΣΓ, ΔΣΓ.

Ἀπαραλλάκτως πληροφορεῖταί τις, ὅτι πρὸς γνῶσιν ἐντελῆ πενταπλῆς τινὸς στερεᾶς γωνίας, ἀπαιτοῦνται αἱ πέντε ἐπίπεδοι γωνίαι, ἐξ ὧν ἡ στερεὰ συνίσταται, καὶ δύο αὐτῶν ἀμοιβαῖαι κλίσεις. Τρεῖς δὲ προσαπαιτοῦνται κλίσεις εἰς τὸν προσδιορισμὸν στερεᾶς γωνίας ἑξαπλῆς, καὶ οὕτω καθεξῆς (*).

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

Τὰ πολύεδρα.

Ὁρισμοί.

1. *Στερεὸν πολύεδρον*, ἢ ἁπλῶς *πολύεδρον* ὀνομάζεται πᾶν στερεὸν ὑπὸ ἐπιπέδων ἀποπερατούμενον. Ἀναγκαίως δὲ τὰ ἐπίπεδα ταῦτα, τὰ ὁποῖα ὀνομάζουσιν *ἕδρας*, ὑπὸ γραμμῶν εὐθειῶν περιορίζονται. Ἰδίως δὲ λέγεται *τετράεδρον* τὸ στερεὸν, τὸ τέσσαρας ἔχον ἕδρας· *ἑξάεδρον*, τὸ ἔχον ἕξ· *ὀκτάεδρον*, τὸ ἔχον ὀκτώ· *δωδεκάεδρον*, τὸ ἔχον δώδεκα· *εἰκοσάεδρον*, τὸ ἔχον εἴκοσι, κτλ.

Τὸ τετράεδρον εἶναι τὸ ἁπλούστερον πολύεδρον, διότι τρεῖς τοὐλάχιστον ἀπαιτοῦνται ἕδραι πρὸς σχηματισμὸν στερεᾶς γωνίας· πρὸς ἀποπεράτωσιν δὲ τοῦ χάσματος, τοῦ ὑπὸ τῶν τριῶν αὐτῶν ἐπιπέδων ἀποτελουμένου, τέταρτον ἀπαιτεῖται ἐπίπεδον.

2. Ἡ κοινὴ τομὴ δύο προσκειμένων ἑδρῶν πολυέδρου τινὸς ὀνομάζεται *πλευρὸν*, ἢ *ῥάχις* τοῦ πολυέδρου.

(*) Εἰς τὸ πέμπτον βιβλίον ἐκτίθενται τὰ περὶ κατατομῶν καὶ παραλληλισμοῦ εὐθειῶν καὶ ἐπιπέδων, ἐπιπέδων καὶ ἐπιπέδων, τὰ περὶ μέτρου τῶν πτυχῶν, τῶν διέδρων δηλαδὴ γωνιῶν, καὶ τῶν στερεῶν γωνιῶν αἱ ἰδιότητες.

Πολλαὶ τοῦ πέμπτου βιβλίου προτάσεις ἀντιστοιχοῦσι πρός τινα τοῦ πρώτου βιβλίου θεωρήματα.

3. *Κανονικὸν πολύεδρον* λέγεται ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου ὅλαι μὲν αἱ ἕδραι κανονικὰ καὶ ἴσα εἶναι πολύγωνα, ὅλαι δὲ αἱ στερεαὶ γωνίαι πρὸς ἀλλήλας εἶναι ἴσαι.

Κανονικὰ πολύεδρα εἶναι πέντε. Περὶ τούτου ἰδὲ τὸ παράρτημα τῶν βιβλίων 6 καὶ 7.

4. *Πρίσμα* ὀνομάζεται πᾶν πολύεδρον περιειλημμένον μεταξὺ πολλῶν ἐπιπέδων παραλληλογράμμων, ἀποπερατουμένων ἔνθεν καὶ ἔνθεν ὑπὸ δύο ἴσων καὶ παραλλήλων πολυγώνων.

Ἰδοὺ δὲ τίνι τρόπῳ κατασκευάζεται πρίσμα. (σχ. 200)

Ἔστω ΑΒΓΔΕ πολύγωνόν τι ὁποιονδήποτε. Ἐπί τινος ἐπιπέδου παραλλήλου τοῦ ΑΒΓΔΕ ἄγω τὰς εὐθείας ΖΗ, ΗΘ, ΘΙ, κτλ. ἴσας καὶ παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κτλ., τοιουτοτρόπως δὲ σχηματίζω τὸ πολύγωνον ΖΗΘΙΚ, τὸ ἴσον τῷ πολυγώνῳ ΑΒΓΔΕ. Μετὰ δὲ ταῦτα ἐπιζευγνύω τὰς κορυφὰς τῶν ὁμολόγων γωνιῶν διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ, κτλ. Αἱ διὰ τῆς τοιαύτης κατασκευῆς ἀποτελούμεναι ἕδραι ΑΒΗΖ, ΒΓΘΗ, κτλ., εἶναι παραλληλόγραμμα, καὶ ἑπομένως τὸ στερεὸν ΑΒΓΔΕΚΖΗΘΙ εἶναι πρίσμα.

5. Τὰ ἴσα καὶ παράλληλα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΙΚ ὀνομάζονται *βάσεις τοῦ πρίσματος*. Αἱ λοιπαὶ ἕδραι, αἱ παραλληλόγραμμοι, ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἀποτελοῦσι τὴν λεγομένην *παράπλευρον* ἢ *κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος*. Αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ, κτλ., λέγονται *πλευρὰ* τοῦ πρίσματος.

6. *Ὕψος πρίσματος* ὀνομάζεται τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων ἡ ἀπόστασις, ἢ ἡ κάθετος ἡ ἀπό τινος σημείου τῆς ἄνω βάσεως ἐπὶ τῆς κάτω βάσεως καταγομένη.

7. Τὸ πρίσμα λέγεται *ὀρθὸν*, ὅταν τὰ πλευρὰ αὐτοῦ ΑΖ, ΒΗ, κτλ. ἦναι κάθετα ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων τῶν βάσεων. Ἐν πάσῃ δὲ τοιαύτῃ περιπτώσει, πᾶν τοῦ πρίσματος πλευρὸν τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος ἐκφράζει.

Τὸ μὴ ὀρθὸν πρίσμα λέγεται *πλάγιον*. Τοῦ πλαγίου πρίσματος τὸ ὕψος εἶναι τοῦ πλευροῦ αὐτοῦ μικρότερον.

8. Τὸ πρίσμα ὀνομάζεται *τριγωνικὸν*, ὅταν ἡ βάσις αὐτοῦ ἦναι τρίγωνον· *τετραγωνικὸν*, ὅταν ἡ βάσις αὐτοῦ ἦναι τετράπλευρον· *πενταγωνικὸν*, ὅταν ἦναι πεντάγωνον· *ἑξαγωνικὸν*, ὅταν ἦναι ἑξάγωνον, κτλ.

9. Τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα,

ἔχει ὅλας τὰς ἕδρας αὐτοῦ παραλληλογράμμους, καὶ ὀνομάζεται *παραλληλεπίπεδον*. (σχ. 206)

Τὸ παραλληλεπίπεδον λέγεται *ὀρθογώνιον*, ὅταν ὅλαι αἱ ἕδραι αὐτοῦ ἦναι ὀρθογώνια.

10. Μεταξὺ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων διακρίνεται ὁ *κύβος*, τουτέστι τὸ κανονικὸν ἑξάεδρον, τὸ περιειλημμένον μεταξὺ ἓξ ἴσων τετραγώνων.

11. *Πυραμὶς* ὀνομάζεται τὸ στερεὸν, τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ πολλῶν τριγώνων, ἐξ ἑνὸς μὲν μέρους συνερχομένων εἴς τι σημεῖον Σ, ἐξ ἄλλου δὲ εἴς τι ἐπίπεδον πολύγωνον ΑΒΓΔΕ ἀποληγόντων. (σχ.196)

Τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ ὀνομάζεται *βάσις* τῆς πυραμίδος, τὸ δὲ σημεῖον Σ λέγεται *κορυφή*. Τὸ σύνολον δὲ τῶν τριγώνων ΑΣΒ, ΒΣΓ, κτλ., ἀποτελεῖ τὴν λεγομένην *παράπλευρον* ἢ *κυρτὴν ἐπιφάνειαν* τῆς πυραμίδος.

12. *Ὕψος* τῆς πυραμίδος ὀνομάζεται ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος εἰς τὴν βάσιν αὐτῆς, παρατεινομένην εἰ δέον, ἠγμένη κάθετος.

13. Ἡ πυραμὶς λέγεται *τριγωνικὴ*, *τετραγωνικὴ*, κτλ. κατὰ τῆς βάσεως αὐτῆς τὸ σχῆμα τὸ τριγωνικὸν, τὸ τετράπλευρον, κτλ.

14. Ἡ πυραμὶς λέγεται *κανονικὴ*, ὅταν ἡ μὲν βάσις αὐτῆς κανονικὸν ἦναι πολύγωνον, ἡ δὲ ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως ἀγομένη κάθετος διαβαίνῃ διὰ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ταύτης.

Ἡ τοιαύτη κάθετος λέγεται *ἄξων* τῆς πυραμίδος.

15. *Διαγώνιος* πολυέδρου ὀνομάζεται πᾶσα εὐθεῖα συνάπτουσα τὰς κορυφὰς δύο μὴ προσκειμένων στερεῶν γωνιῶν.

16. Δύο πολύεδρα λέγονται *συμμετρικὰ*, ὅταν, κοινὴν βάσιν ἔχοντα, καὶ τὸ μὲν αὐτῶν ἔνθεν ταύτης τῆς βάσεως, τὸ δ' ἐκεῖθεν ὑπάρχον, ἦναι κατεσκευασμένα οὕτως, ὥστε αἱ κορυφαὶ τῶν ὁμολόγων στερεῶν γωνιῶν ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως ἰσάκις, εὑρίσκονται δὲ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, καθέτου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως.

Παραδείγματος χάριν, (σχ. 202), ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΣΤ ἦναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, καὶ ἐὰν τὸ σημεῖον Ο, εἰς ὃ ἡ κάθετος αὐτὴ συναπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ, διαιρῇ τὴν εὐθεῖαν ΣΤ εἰς δύο ἴσα μέρη, αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΤΑΒΓ, αἱ βάσιν κοινὴν ἔχουσαι τὴν ΑΒΓ, εἶναι συμμετρικὰ πολύεδρα.

17. Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ὀνομάζονται *ὅμοιαι*, ὅταν δύο ἕδραι τῆς ἑτέρας αὐτῶν καὶ δύο τῆς ἄλλης, καὶ ὅμοιαι ἦναι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον διατεταγμέναι, καὶ ἴσην πρὸς ἀλλήλας ἔχωσι κλίσιν.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, (σχ. 203), ἡ γωνία ΑΒΓ=ΔΕΖ, καὶ ἡ ΒΑΓ=ΕΔΖ, καὶ ἡ ΑΒΣ=ΔΕΤ, καὶ ἡ ΒΑΣ=ΕΔΤ, ἐὰν πρὸς τούτοις ἡ ἀμοιβαία τῶν ἐπιπέδων ΑΒΣ, ΑΒΓ κλίσις καὶ ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΔΕΤ, ΔΕΖ, τῶν αὐτοῖς ὁμολόγων, ἦναι ἴσαι, αἱ πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΤΔΕΖ εἶναι ὅμοιαι.

18. Ἐάν τις συνάπτων τρεῖς κορυφὰς γωνιῶν, κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας ἢ τῆς βάσεως πολυέδρου τινός, τρίγωνον σχηματίσῃ, δύναται νὰ ἐκλάβῃ τὰς κορυφὰς τῶν στερεῶν τοῦ πολυέδρου γωνιῶν, ὅσαι ἐκτὸς τῆς ἕδρας ἢ τῆς βάσεως αὐτῆς ὑπάρχουσιν, ὡς κορυφὰς ἰσαρίθμων τριγωνικῶν πυραμίδων, κοινὴν ἐχουσῶν βάσιν τὸ τρίγωνον, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος. Φανερὸν δὲ εἶναι, ὅτι διὰ πάσης τοιαύτης πυραμίδος διορίζεται ἡ ὡς πρὸς τὴν βάσιν θέσις γωνίας τινὸς τοῦ πολυέδρου.

Τούτου τεθέντος, δύο πολύεδρα ὀνομάζονται *ὅμοια*, ὅταν, ὁμοίας ἔχοντα βάσεις, αἱ ἐκτὸς τῶν βάσεων αὐτῶν ὑπάρχουσαι κορυφαὶ τῶν λοιπῶν στερεῶν γωνιῶν διορίζωνται δι᾽ ὁμοίων τριγωνικῶν πυραμίδων.

19. Ὀνομάζονται *κορυφαὶ* τοῦ πολυέδρου αἱ κορυφαὶ τῶν στερεῶν αὐτοῦ γωνιῶν.

Σ. Κ. Ὅλα τὰ πολύεδρα, περὶ ὧν ἐν τῷ παρόντι συγγράμματι γίνεται λόγος, εἶναι πολύεδρα κ υ ρ τ ά, πολύεδρα δηλαδή, τῶν ὁποίων ὅλαι αἱ γωνίαι προεξέχουσι. Τῶν τοιούτων πολυέδρων τὴν ἐπιφάνειαν μία γραμμὴ εὐθεῖα δὲν δύναται νὰ συναπαντήσῃ εἰς σημεῖα πλειότερα τῶν δύο. Ἐὰν δέ τις ἐκτείνῃ κυρτοῦ τινὸς πολυέδρου ὁποιανδήποτε ἕδραν, ἡ ἕδρα αὕτη δὲν τέμνει τὸ πολύεδρον. Τουτέστι, πᾶν κυρτὸν πολύεδρον ὁλόκληρον κεῖται ἢ ἔνθεν ἢ ἐκεῖθεν οἱασδήποτε αὐτοῦ ἕδρας. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἀδύνατον εἶναι μέρος κυρτοῦ πολυέδρου ἄνωθεν καὶ μέρος κάτωθεν οἱασδήποτε τοῦ πολυέδρου αὐτοῦ ἕδρας νὰ ὑπάρχῃ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1.

Θεώρημα.

Τὰ πολύεδρα τὰ ἔχοντα τὰς αὐτὰς κορυφὰς συμπίπτουσι καὶ ταυτίζονται.

Ἔστω, καθ' ὑπόθεσιν, ὅτι δύο τοιαῦτα πολύεδρα δὲν συμπίπτουσι.

Τούτου τεθέντος, ἕδρα τις τοῦ δευτέρου πολυέδρου, παρατεινομένη, διαχωρίζει τὸ πρῶτον πολύεδρον, καὶ ἄλλας μὲν κορυφὰς αὐτοῦ ἄνωθεν, ἄλλας δὲ κάτωθεν ἀποκλείει. Ἀλλ' αἱ κορυφαὶ τοῦ πρώτου πολυέδρου εἶναι καὶ τοῦ δευτέρου πολυέδρου κορυφαί· ἄρα τοῦ δευτέρου πολυέδρου ἡ ἕδρα ἡ παραταθεῖσα διαχωρίζει καὶ τοῦ πολυέδρου αὐτοῦ τὰς κορυφὰς, καὶ ἄλλας μὲν ἔνθεν, ἄλλας δ' ἐκεῖθεν ἀφίνει. Τοῦτο ὅμως ἄτοπον εἶναι, διότι ἀντιβαίνει εἰς τῶν κυρτῶν πολυέδρων τὸν ὁρισμόν.

Λοιπὸν τὰ πολύεδρα τὰ ἔχοντα τὰς αὐτὰς κορυφὰς συμπίπτουσι καὶ ταυτίζονται.

Σχόλιον. Γνωστῆς οὔσης τῆς θέσεως τῶν σημείων Α,Β,Γ,Κ, ἅτινα πρόκειται νὰ χρησιμεύσωσιν ὡς κορυφαὶ πρὸς κατασκευὴν πολυέδρου τινὸς, εὐκόλως κατασκευάζεται τὸ πολύεδρον. (σχ. 204)

Διὰ τριῶν πλησίον ἀλλήλων ὑπαρχόντων σημείων Δ, Ε, Θ, ἄγω τὸ ἐπίπεδον ΔΕΘ, τὸ ὁποῖον ἐνδέχεται μὲν νὰ διαβαίνῃ καὶ ἐξ ἄλλων σημείων, παραδείγματος χάριν, ἐκ τοῦ Κ καὶ ἐκ τοῦ Γ, ἀποκλείει ὅμως ἔνθεν ἢ ἐκεῖθεν ὅλα τὰ σημεῖα τὰ λοιπά. Τὸ τοιουτοτρόπως ἀποτελούμενον ἐπίπεδον σχῆμα ΔΕΘ ἢ ΔΕΘΚΓ εἶναι μία τοῦ πολυέδρου ἕδρα. Διὰ μιᾶς τοῦ σχήματος τούτου πλευρᾶς ΕΘ ἄγω ἐπίπεδον ἄλλο, τὸ ὁποῖον στρέφω ἕως οὗ συναντήσῃ καὶ μίαν τοὐλάχιστον κορυφὴν ἄλλην Ζ, ἢ πλειοτέρας συγχρόνως, οἷον τὴν Ζ καὶ τὴν Ι. Οὕτω δ' ἀποτελεῖται ἡ δευτέρα τοῦ πολυέδρου ἕδρα, ἡ ΖΕΘ ἢ ΖΕΘΙ. Παρατείνω δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὴν κατασκευὴν, μέχρις οὗ ὁλόκληρον συμπληρωθῇ τὸ ζητούμενον πολύεδρον. Λέγω δὲ ὅτι αὐτὸ εἶναι τὸ πολύεδρον τὸ ζητούμενον καὶ οὐδὲν ἄλλο, διότι δὲν ὑπάρχουσι δύο διάφορα πολύεδρα τὰς αὐτὰς ἔχοντα κορυφάς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2.

Θεώρημα.

Τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων αἱ ὁμόλογοι ἕδραι εἶναι ἴσαι. Ὡσαύτως δὲ ἴσαι εἶναι καὶ τῶν ὁμολόγων προσκειμένων ἑδρῶν αἱ ἀμοιβαῖαι κλίσεις. (σχ. 205)

Ἔστω ΑΒΓΔΕ ἡ κοινὴ δύο συμμετρικῶν πολυέδρων βάσις. Ἔστωσαν Μ μὲν καὶ Ν δύο οἱαιδήποτε κορυφαὶ τοῦ ἑτέρου τῶν πολυέδρων, Μ′ δὲ καὶ Ν′ αἱ ὁμόλογοι κορυφαὶ τοῦ ἄλλου. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων, αἱ εὐθεῖαι ΜΜ′, ΝΝ′ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, καὶ εἰς δύο ἴσα διαιροῦνται μέρη κατὰ τὰ σημεῖα μ καὶ ν, εἰς ἃ τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ συναπαντῶσι.

Τούτων τεθέντων, λέγω ὅτι τὰ ἀποστήματα ΜΝ καὶ Μ′Ν′ εἶναι ἴσα. Ἰδοὺ δὲ τίνι τρόπῳ τοῦτο ἀποδεικνύεται.

Στρεφομένου τοῦ τραπεζίου μΜ′Ν′ν περὶ τὴν εὐθεῖαν μν καὶ ἐπιτιθεμένου ἐπὶ τοῦ τραπεζίου μΜΝν, ἡ πλευρὰ μΜ′ ἐφαρμόζεται ἐπὶ τῆς μΜ, καὶ ἡ νΝ′ ἐπὶ τῆς νΝ, διότι αἱ εἰς τὰ σημεῖα μ καὶ ν γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Ἐπειδὴ δὲ ὡς εἴρηται μΜ′=μΜ καὶ νΝ′=νΝ, τὸ σημεῖον Μ′ συμπίπτει μετὰ τοῦ Μ, καὶ τὸ Ν′ μετὰ τοῦ Ν. Ἄρα ὁλόκληρον τὸ τραπέζιον μΜ′Ν′ν ἐφαρμόζεται ἐντελῶς ἐπὶ τοῦ τραπεζίου μΜΝν. Λοιπὸν ΜΝ=Μ′Ν′.

Ἔστω Π τρίτη τις κορυφὴ τοῦ ἄνω συμμετρικοῦ πολυέδρου καὶ Π′ ἡ ὁμόλογος κορυφὴ τοῦ συμμετρικοῦ πολυέδρου τοῦ ἄλλου. Κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα, ΜΠ=Μ′Π′ καὶ ΝΠ=Ν′Π′. Λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΜΝΠ, τὸ συνάπτον τρεῖς οἱασδήποτε κορυφὰς τοῦ ἑτέρου τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων, καὶ τὸ τρίγωνον Μ′Ν′Π′, τὸ συνάπτον τὰς τρεῖς ὁμολόγους κορυφὰς τοῦ ἄλλου συμμετρικοῦ πολυέδρου, εἶναι ἴσα.

Ἐὰν δέ τις ἀποβλέψῃ εἰς μόνα τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῶν πολυέδρων σχηματιζόμενα, συνάγει ὅτι τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων αἱ ἐπιφάνειαι ἀποτελοῦνται ἐξ ἴσης πλήθυος τριγώνων ἓν πρὸς ἓν ἴσων.

Λέγω ἤδη, ὅτι ἐὰν ἐκ τῶν τριγώνων τούτων τινὰ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑπάρχωσιν ἐπιπέδου καὶ μίαν τοῦ πολυέδρου πολύγωνον ἕδραν σχηματίζωσι, τὰ τρίγωνα τὰ ὁμόλογα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὡσαύτως κεῖνται ἐπιπέδου καὶ τὴν ὁμόλογον πολύγωνον ἕδραν τοῦ ἄλλου πολυέδρου ἴσην ἀποτελοῦσι.

Τῷ ὄντι· ἂς ὑποτεθῶσι τὰ δύο προσκείμενα τρίγωνα ΜΠΝ,ΝΠΚ ὑπάρχοντα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ἔστωσαν δὲ Μ΄Π΄Ν΄,Ν΄Π΄Κ΄, τὰ τρίγωνα τὰ αὐτοῖς ὁμόλογα. Κατὰ τὰ ἤδη ἀποδεδειγμένα, ἡ γωνία ΜΝΠ=Μ΄Ν΄Π΄, καὶ ἡ γωνία ΠΝΚ=Π΄Ν΄Κ΄. Ἀγομένων δὲ τῶν εὐθειῶν ΜΚ καὶ Μ΄Κ΄, τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΜΝΚ καὶ Μ΄Ν΄Κ΄ εἶναι ἴσα, ἑπομένως ἡ γωνία ΜΝΚ=Μ΄Ν΄Κ΄. Ἐπειδὴ δὲ τὸ σχῆμα ΜΠΚΝ καθ᾽ ὑπόθεσιν ἐπίπεδον εἶναι, ἡ γωνία ΜΝΚ=ΜΝΠ+ΠΝΚ. Ἄρα καὶ ἡ γωνία Μ΄Ν΄Κ΄=Μ΄Ν΄Π΄+Π΄Ν΄Κ΄. Ἐὰν δὲ τὰ τρία τρίγωνα Μ΄Ν΄Π΄, Π΄Ν΄Κ΄, Μ΄Ν΄Κ΄ ὑποτεθῶσι μὴ ὑπάρχοντα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὰ τρίγωνα ταῦτα ἀποτελοῦσι μίαν στερεὰν γωνίαν εἰς τὸ σημεῖον Ν΄. Ὅθεν ἕπεται ὅτι ἡ γωνία Μ΄Ν΄Κ΄<Μ΄Ν΄Π΄+Π΄Ν΄Κ΄ (πρότ. 21, βιβλ. 5). Ἀλλ᾽ αὕτη τῶν τριῶν γωνιῶν ἡ ἀνισότης εἶναι ἄτοπος, ὡς ἤδη ἀπεδείχθη. Ἄρα τὰ δύο τρίγωνα Μ΄Ν΄Π΄, Π΄Ν΄Κ΄ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κεῖνται ἐπιπέδου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι πᾶσα τρίγωνος ἢ πολύγωνος ἕδρα τοῦ ἑτέρου τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἴσην ἕδραν τοῦ συμμετρικοῦ πολυέδρου τοῦ ἄλλου. Ἑπομένως αἱ ὁμόλογοι τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων ἕδραι εἶναι ἴσαι.

Πρὸς ἀπόδειξιν δὲ, ὅτι καὶ αἱ κλίσεις τῶν ἑδρῶν τῶν ὁμολόγων εἶναι ἴσαι, ἔστωσαν ΜΠΝ, ΝΠΚ δύο τρίγωνα, ἐπὶ δύο προσκειμένων ἑδρῶν ἐσχηματισμένα καὶ κοινὴν πλευρὰν ἔχοντα τὴν ῥάχιν ΝΠ· ἔστωσαν δὲ Μ΄Π΄Ν΄, Ν΄Π΄Κ΄ τὰ τρίγωνα τὰ αὐτοῖς ὁμόλογα. Τούτων τεθέντων, δύναταί τις νὰ φαντασθῇ εἰς μὲν τὸ σημεῖον Ν γωνίαν στερεὰν, ἀποτελουμένην ἐκ τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΜΝΚ, ΜΝΠ, ΠΝΚ, εἰς δὲ τὸ σημεῖον Ν΄ στερεὰν γωνίαν ἄλλην, συνισταμένην ἐκ τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν Μ΄Ν΄Κ΄, Μ΄Ν΄Π΄, Π΄Ν΄Κ΄. Ἀπεδείχθη δὲ ἀνωτέρω ὅτι αἱ ὁμόλογοι ἐπίπεδοι γωνίαι τῶν πολυέδρων τῶν συμμετρικῶν εἶναι ἴσαι. Ἄρα ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΜΝΠ, ΠΝΚ εἶναι ἴση τῇ κλίσει τῶν ἐπιπέδων Μ΄Ν΄Π΄, Π΄Ν΄Κ΄ (πρότ. 23, βιβλ. 5).

Λοιπὸν τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων αἱ ὁμόλογοι ἕδραι εἶναι ἴσαι· ὡσαύτως δὲ ἴσαι εἶναι καὶ τῶν ὁμολόγων ἑδρῶν αἱ ἀμοιβαῖαι κλίσεις.

Σχόλιον. Παρατηρητέον ὅτι αἱ στερεαὶ γωνίαι τοῦ ἑνὸς ὅρου τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων καὶ αἱ ὁμόλογοι στερεαὶ γωνίαι τοῦ ἄλλου εἶναι πρὸς ἀλλήλας συμμετρικαί· διότι ἐὰν στερεά τις γωνία Ν σχηματίζηται ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΜΝΠ, ΠΝΚ, ΚΝΡ, κτλ., ἡ ὁμόλογος αὐτῇ στερεὰ γωνία Ν′ ἀποτελεῖται ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν Μ′Ν′Π′, Π′Ν′Κ′, Κ′Ν′Ρ′, κτλ. Αὗται δὲ αἱ γωνίαι φαίνονται διατεταγμέναι ὅπως καὶ αἱ ὁμόλογοι αὐταῖς εἰς τὸ ἄλλο πολύεδρον. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἀντεστραμμέναι, ἡ πραγματικὴ διάταξις τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, ἐξ ὧν ἡ στερεὰ γωνία Ν ἀποτελεῖται, εἶναι ἀντίστροφος τῆς διατάξεως τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, ἐξ ὧν ἡ στερεὰ γωνία Ν′ σχηματίζεται. Εἶναι δὲ ἀποδεδειγμένον ὅτι τῶν ὁμολόγων ἑδρῶν αἱ ἀμοιβαῖαι κλίσεις εἶναι ἴσαι. Ἄρα αἱ στερεαὶ γωνίαι Ν καὶ Ν′ εἶναι συμμετρικαί. (Ἰδὲ τὸ σχόλιον τῆς 23 προτάσεως τοῦ 5 βιβλίου).

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω παρατηρήσεως ἕπεται, ὅτι πᾶν πολύεδρον ἓν μόνον ἔχει πολύεδρον συμμετρικόν. Διότι ἐὰν κατασκευάσῃ τις ἐπί τινος ἄλλης βάσεως νέον πολύεδρον συμμετρικὸν τοῦ δεδομένου, τούτου τοῦ πολυέδρου αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι συμμετρικαὶ, πρὸς τὰς γωνίας τοῦ δεδομένου παραβαλλόμεναι. Ἄρα εἶναι ἴσαι, ἂν συγκριθῶσι πρὸς τὰς γωνίας τοῦ συμμετρικοῦ πολυέδρου, τοῦ κατεσκευασμένου ἐπὶ τῆς πρώτης βάσεως. Πρὸς τούτοις δὲ αἱ ὁμόλογοι ἕδραι τῶν πολυέδρων αὐτῶν εἶναι ἴσαι. Ἑπομένως τὰ ἐπὶ δύο διαφόρων βάσεων κατεσκευασμένα πολύεδρα, τὰ συμμετρικὰ τρίτου τινὸς δεδομένου πολυέδρου, ἔχουσιν ἴσας καὶ τὰς ἕδρας τὰς ὁμολόγους καὶ τὰς ὁμολόγους στερεὰς γωνίας. Ἑπομένως ἐπιτιθέμενα ἐφαρμόζονται καὶ ἓν μόνον ἀποτελοῦσι σῶμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3.

Θεώρημα.

Δύο πρίσματα εἶναι ἴσα, ὅταν αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι, αἱ μίαν γωνίαν στερεὰν εἰς ἑκάτερον τῶν πρισμάτων ἀποτελοῦσαι, ἦναι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον διατεταγμέναι. (σχ. 200) ληπτω ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ ἴση τῇ βάσει αϐγδε, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΗΖ ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ αϐηζ, καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓΘΗ ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ ϐγθη· λέγω ὅτι τὰ πρίσματα ΑΒΓΙ, αϐγι εἶναι ἴσα.

Διότι, τιθεμένης τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ ἐπὶ τῆς βάσεως αϐγδε, τὰ δύο ταῦτα πολύγωνα ἐφαρμόζονται καθ' ὁλοκληρίαν, διότι εἶναι ἴσα. Ἀλλ' αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι, αἱ τὴν στερεὰν γωνίαν Β σχηματίζουσαι, καὶ αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι, αἱ τὴν στερεὰν γωνίαν ϐ ἀποτελοῦσαι, εἶναι ἴσαι, τουτέστι ΑΒΓ=αϐγ, ΑΒΗ=αϐη, καὶ ΗΒΓ=ηϐγ. Πρὸς τούτοις δὲ αἱ τρεῖς αὐταὶ γωνίαι καὶ εἰς τὰ δύο πρίσματα κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν εἶναι διατεταγμέναι. Ἄρα αἱ στερεαὶ γωνίαι Β καὶ ϐ εἶναι ἴσαι· ἐπομένως ἡ ῥάχις ΒΗ ἐφαρμόζεται ἐπὶ τῆς ῥάχεως ϐη, τῆς ἴσης αὐτῇ. Ἕνεκα δὲ τῶν δύο ἴσων παραλληλογράμμων ΑΒΗΖ, αϐηζ, ἡ ῥάχις ΗΖ ταυτίζεται μετὰ τῆς ῥάχεως ηζ, ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ ῥάχις ΗΘ μετὰ τῆς ῥάχεως ηθ συμπίπτει. Ἐπειδὴ δὲ τρία σημεῖα διορίζουσι τὴν θέσιν παντὸς ἐπιπέδου, ἡ ἄνω βάσις ΖΗΘΙΚ συμπίπτει καθ' ὁλοκληρίαν μετὰ τῆς ἄνω βάσεως ζηθικ, τῆς ἴσης αὐτῇ. Ὅθεν τὰ δύο πρίσματα ταυτίζονται καὶ ἓν μόνον ἀποτελοῦσι, διότι τὰς αὐτὰς καὶ τὰ δύο ἔχουσι κορυφάς (πρότ. 1, βιϐλ. 6).

Πόρισμα. Δύο πρίσματα ὀρθὰ ἴσας ἔχοντα βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἴσα. Διότι, οὔσης τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἴσης τῇ αϐ, καὶ τοῦ ὕψους ΒΗ ὄντος ἴσου τῷ ϐη, τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΗΖ εἶναι ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ αϐηζ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἴσα εἶναι καὶ τὰ ὀρθογώνια ΒΗΘΓ, ϐηθγ. Ἄρα αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι, αἱ σχηματίζουσαι τὴν στερεὰν γωνίαν Β, καὶ αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι, αἱ ἀποτελοῦσαι τὴν στερεὰν γωνίαν ϐ, εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν τὰ δύο πρίσματα εἶναι ἴσα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4.

Θεώρημα.

Παντὸς παραλληλεπιπέδου αἱ ἀντικείμεναι ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. (σχ. 206)

Κατὰ τοῦ παραλληλεπιπέδου τὸν ὁρισμὸν αἱ βάσεις αὐτοῦ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα παραλληλόγραμμα. Ὑπολείπεται λοιπὸν ν᾽ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς τὰς λοιπὰς τοῦ στερεοῦ αὐτοῦ ἀντικειμένας ἕδρας, παραδείγματος χάριν, εἰς τὰς ΑΕΘΔ, ΒΖΗΓ.

Ἐπειδὴ τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἴσαι καὶ παράλληλοι εἶναι καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΕ καὶ ΒΖ. Λοιπὸν αἱ γωνίαι ΔΑΕ, ΓΒΖ εἶναι ἴσαι (πρότ. 13, βιβλ. 5), καὶ τὰ ἐπίπεδα ΔΑΕ, ΓΒΖ παράλληλα. Ἄρα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα ΔΑΕΘ, ΓΒΖΗ εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δύναταί τις ν᾽ ἀποδείξῃ, ὅτι καὶ τὰ ἀντικείμενα παραλληλόγραμμα ΑΒΖΕ, ΔΓΗΘ εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα.

Πόρισμα. Ἐπειδὴ τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ἑξάεδρον, ἔχον τὰς ἕδρας τὰς ἀντικειμένας ἴσας καὶ παραλλήλους, δύναταί τις νὰ ἐκλάβῃ ὡς βάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου δύο ὁποιασδήποτε ἐκ τῶν ἀντικειμένων αὐτοῦ ἑδρῶν.

Σχόλιον. Δεδομένων τῶν τριῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΕ, ΑΔ, αἵτινες διαβαίνουσιν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α καὶ γνωστὰς ἀποτελοῦσι γωνίας, δυνατὸν εἶναι νὰ κατασκευασθῇ κατὰ τὰς εὐθείας αὐτὰς παραλληλεπίπεδον.

Πρὸς κατασκευὴν τοῦ τοιούτου παραλληλεπιπέδου, ἄγω ἀπὸ τοῦ ἄκρου ἑκάστης τῶν τριῶν δεδομένων εὐθειῶν ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ διὰ τῶν λοιπῶν δύο εὐθειῶν διερχομένου· τουτέστιν, ἄγω ἐκ μὲν τοῦ σημείου Β ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ ΔΑΕ, ἐκ δὲ τοῦ σημείου Δ ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ ΒΑΕ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ε ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ ΒΑΔ. Αἱ ἀμοιβαῖαι τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν τομαὶ συμπληροῦσι τὸ παραλληλεπίπεδον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Θεώρημα.

Παντὸς παραλληλεπιπέδου αἱ μὲν ἀντικείμεναι στερεαὶ γωνίαι εἶναι συμμετρικαί, αἱ δὲ ἀπὸ τῶν κορυφῶν τῶν γωνιῶν αὐτῶν ἀγόμεναι διαγώνιοι τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς δύο μέση ἴσα. (σχ. 206)

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου παραβάλλω δύο ἀντικειμένας τοῦ παραλληλεπιπέδου γωνίας, παραδείγματος χάριν, τὰς στερεὰς γωνίας Α καὶ Η.

Ἡ γωνία ΕΑΒ, ἡ ἴση τῇ γωνίᾳ ΕΖΒ, εἶναι ἴση καὶ τῇ γωνίᾳ ΘΗΓ. Ὡσαύτως ἡ γωνία ΔΑΕ=ΔΘΕ=ΓΗΖ, καὶ ἡ γωνία ΔΑΒ=ΔΓΒ=ΘΗΖ. Λοιπὸν αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται ἡ στερεὰ γωνία Α, καὶ αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι, αἱ σχηματίζουσαι τὴν γωνίαν Η, εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ διάταξις τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι ἀντίστροφος, αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι Α καὶ Η εἶναι συμμετρικαὶ (πρότ. 23, βιβλ. 5).

Πρὸς ἀπόδειξιν δὲ τοῦ δευτέρου τῆς προτάσεως μέρους, λαμβάνω τὰς δύο διαγώνιους ΕΓ, ΑΗ, τὰς ἐξ ἀντιθέτων κορυφῶν ἠγμένας.

Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΕ καὶ ἡ ΓΗ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, τὸ σχῆμα ΑΕΗΓ εἶναι παραλληλόγραμον. Ἄρα αἱ διαγώνιοι ΕΓ καὶ ΑΗ τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς δύο μέρη ἴσα. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δύναταί τις νὰ ἀποδείξῃ, ὅτι τὸ αὐτὸ πάσχουσι καὶ δύο ἄλλαι διαγώνιοι, ἡ ΕΓ καὶ ἡ ΔΖ. Λοιπὸν αἱ τέσσαρες τοῦ παραλληλεπιπέδου διαγώνιοι διχοτομοῦσιν ἀλλήλας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6.

Θεώρημα.

Τὸ ἐπίπεδον ΒΔΘΖ, τὸ διὰ τῶν δύο ἀντικειμένων παραλλήλων ῥάχεων ΒΖ, ΔΘ διαβαῖνον, διαιρεῖ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ εἰς δύο τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΔΘΕΖ, ΗΘΖΒΓΔ συμμετρικά. (σχ. 207)

Ἐν πρώτοις διϊσχυρίζομαι ὅτι τὰ δύο ταῦτα στερεὰ εἶναι πρίσματα.

Καὶ τῷ ὄντι· τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΕΖΘ, ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας καὶ παραλλήλους, εἶναι ἴσα· αἱ δὲ παράπλευροι ἕδραι ΑΒΖΕ, ΑΔΘΕ, ΒΔΘΖ εἶναι παραλληλόγραμμα. Ἄρα τὸ στερεὸν ΑΒΔΘΕΖ εἶναι πρίσμα. Ὡσαύτως πρίσμα εἶναι καὶ τὸ στερεὸν ΗΘΖΒΓΔ. Ἤδη δὲ λέγω, ὅτι τὰ δύο ταῦτα πρίσματα εἶναι συμμετρικά.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ὑπὸ τὴν βάσιν ΑΒΔ κατασκευάζω τὸ πρίσμα ΑΒΔΘ΄Ζ΄Ε΄ τὸ συμμετρικὸν τοῦ πρίσματος ΑΒΔΘΖΕ. Κατὰ τὰ ἤδη ἀποδεδειγμένα (πρότ. 2, βιβλ. 6), τὸ ἐπίπεδον ΑΒΖ΄Ε΄ καὶ τὸ ΑΒΖΕ, εἶναι ἴσα. Ὡσαύτως δὲ ἴσα εἶναι καὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΔΘ΄Ε΄, ΑΔΘΕ. Ἀλλὰ τῶν πρισμάτων ΗΘΖΒΓΔ, ΑΒΔΘ΄Ε΄Ζ΄, πρὸς ἄλληλα παραβαλλομένων, αἱ βάσεις ΗΘΖ, ΑΒΔ εἶναι ἴσαι, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον ΗΘΔΓ, τὸ ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ ΑΒΖΕ, εἶναι καὶ τῷ παραλληλογράμμῳ ΑΒΖ΄Ε΄ ἴσον· καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΗΖΒΓ, τὸ ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ ΑΔΘΕ, καὶ τῷ παραλληλογράμμῳ ΑΔΘ΄Ε΄ ἴσον εἶναι. Ἄρα τὰ τρία ἐπίπεδα, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται ἡ Η στερεὰ γωνία τοῦ πρίσματος ΗΘΖΒΓΔ, καὶ τὰ τρία ἐπίπεδα, τὰ σχηματίζοντα τὴν Α στερεὰν γωνίαν τοῦ πρίσματος ΑΒΔΘ΄Ε΄Ζ΄, εἶναι ἴσα ἑκάτερον ἑκατατέρῳ, εἶναι δὲ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν διατεταγμένα. Λοιπὸν τὰ δύο αὐτὰ πρίσματα εἶναι ἴσα (πρότ. 3, βιβλ. 6)· δύνανται δὲ καὶ νὰ ἐφαρμοσθῶσι τὸ ἕτερον ἐν τῷ ἑτέρῳ. Ἀλλὰ τὸ πρίσμα ΑΒΔΘ΄Ε΄Ζ΄ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ ΑΒΔΘΕΖ, ἄρα καὶ τὸ πρίσμα ΗΘΖΒΓΔ εἶναι τοῦ πρίσματος ΑΒΔΘΕΖ συμμετρικόν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7.

Λῆμμα.

Αἱ διὰ παραλλήλων ἐπιπέδων τομαὶ παντὸς πρίσματος πολύγωνα εἶναι ἴσα. (σχ. 201)

Ἔστωσαν, παραδείγματος χάριν, πρίσμα μὲν τὸ ΑΒΓΙ, ἐπίπεδα δὲ παράλληλα τὸ ΝΟΠΚΡ καὶ τὸ ΣΤΦΧΨ.

Αἱ εὐθεῖαι ΝΟ καὶ ΣΤ εἶναι παράλληλοι, διότι δύο εἶναι παραλλήλων ἐπιπέδων τομαὶ ὑπὸ τρίτου, τοῦ ΑΒΗΖ. Αἱ αὐταὶ δὲ εὐθεῖαι ΝΟ, ΣΤ περιέχονται μεταξὺ τῶν τοῦ πρίσματος παραλλήλων πλευρῶν ΝΣ, ΟΤ· λοιπὸν εἶναι ἴσαι. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δύναταί τις ν' ἀποδείξῃ, ὅτι αἱ πλευραὶ ΟΠ, ΠΚ, ΚΡ, κτλ. τῆς τομῆς ΝΟΠΚΡ, καὶ αἱ πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχοῦσαι πλευραὶ ΤΦ, ΦΧ, ΧΨ, κτλ. τῆς τομῆς ΣΤΦΧΨ εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ δὲ συγχρόνως αἱ ἴσαι αὗται πλευραὶ εἶναι παράλληλοι, αἱ γωνίαι ΝΟΠ, ΟΠΚ, κτλ. τῆς πρώτης τομῆς καὶ αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι ΣΤΦ, ΤΦΧ, κτλ. τῆς τομῆς τῆς δευτέρας εἶναι ἴσαι. Ἄρα αἱ δύο τομαὶ ΝΟΠΚΡ, ΣΤΦΧΨ πολύγωνα εἶναι ἴσα.

Πόρισμα. Πᾶσα τομὴ πρίσματος, τῆς βάσεως αὐτοῦ παράλληλος, εἶναι ἴση τῇ βάσει αὐτῇ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8.

Θεώρημα.

Τὰ δύο συμμετρικὰ τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΔΘΕΖ, ΒΓΔΘΗΖ, εἰς ἃ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ ἀναλύεται, εἶναι ἰσοδύναμα. (σχ. 208)

Ἐκ τῶν κορυφῶν Β καὶ Ζ ἄγω κάθετα ἐπὶ τοῦ πλευροῦ ΒΖ τὰ ἐπίπεδα Βαδγ, Ζεθη, ἅτινα συναπαντῶσι τὰ τρία λοιπὰ τοῦ παραλληλεπιπέδου πλευρὰ ΑΕ, ΔΘ, ΓΗ ἔνθεν μὲν εἰς τὰ σημεῖα α, δ, γ, ἐκεῖθεν δὲ εἰς τὰ σημεῖα ε, θ, η. Αἱ τοιουτοτρόπως σχηματιζόμεναι τομαὶ Βαδγ, Ζεθη παραλληλόγραμμα εἶναι ἴσα. Καὶ εἶναι μὲν ἴσαι αἱ τομαὶ αὗται, διότι ἐσχηματίσθησαν ὑπὸ δύο ἐπιπέδων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καθέτων, τουτέστι παραλλήλων (πρότ. 7, βιβλ. 6). Εἶναι δὲ παραλληλόγραμμα, διότι δύο ἀντικείμεναι πλευραὶ τοῦ ἑτέρου τῶν σχημάτων αὐτῶν παραδείγματος χάριν, αἱ αΒ, δγ, εἶναι αἱ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τομαὶ τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΖΕ, ΔΓΗΘ.

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ σχῆμα ΒαεΖ εἶναι παραλληλόγραμμον. Παραλληλόγραμμα ὡσαύτως εἶναι καὶ τὰ τετράπλευρα ΒΖηγ, γδθη, αδθε, τὰ συμπληροῦντα τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ στερεοῦ ΒαδγηΖεθ. Λοιπὸν τὸ στερεὸν τοῦτο εἶναι πρίσμα (ὁρισμ. 4. βιβλ. 6), πρίσμα μάλιστα ὀρθόν, διότι τὸ πλευρὸν αὐτοῦ ΒΖ εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς βάσεως.

Τούτου τεθέντος, καὶ διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΒΖθδ ἀναλυομένου τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος Βθ εἰς δύο ὀρθὰ τριγωνικὰ πρίσματα αΒδθΖε, ΒδγηΖθ, λέγω ὅτι τὸ πλάγιον τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΔΘΕΖ καὶ τὸ πρίσμα αΒδθεΖ τὸ τριγωνικὸν τὸ ὀρθὸν εἶναι ἰσοδύναμα.

Τὰ δύο ταῦτα πρίσματα ἔχουσι μέρος τι κοινόν, τ εΑΒΔθεΖ.

Ὑπολείπεται λοιπὸν ν' ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ λοιπὰ αὐτῶν μέρη, τουτέστι τὰ στερεὰ ΒαΑΔδ, ΖεΕΘθ, εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἕνεκα τῶν παραλληλογράμμων ΑΒΖΕ, αΒΖε, αἱ πλευραὶ ΑΕ, αε, αἱ ἴσαι καὶ παράλληλοι τῆς ΒΖ, εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας ἴσαι. Ἀφαιρουμένου δὲ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν μέρους Αε, μένει Αα=Εε. Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ Δδ=Θθ.

Ἐπιτιθεμένης δὲ τῆς βάσεως Ζεθ τοῦ στερεοῦ ΖεΕΘθ, ἐπὶ τὴν ἴσην αὐτῇ βάσιν Βαδ τοῦ στερεοῦ ΒαΑΔδ, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον ε συμπίπτει μετὰ τοῦ α, καὶ τὸ σημεῖον θ μετὰ τοῦ δ, αἱ πλευραὶ εΕ, θΘ συμπίπτουσι μετὰ τῶν ἴσων αὐταῖς αΑ, δΔ, διότι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου Βαδ. Λοιπὸν τὰ δύο στερεά, τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος, ταυτίζονται καθ' ὁλοκληρίαν. Ἄρα τὰ δύο πρίσματα ΒΑΔΘΕΖ, ΒαδθεΖ εἶναι ἴσα.

Ὡσαύτως ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ πλάγιον πρίσμα ΒΓΔΘΗΖ καὶ τὸ ὀρθὸν πρίσμα ΒδγηΖθ εἶναι ἰσοδύναμα. Ἀλλὰ τὰ δύο ὀρθὰ πρίσματα ΒαδθΖε, ΒδγηΖθ εἶναι ἴσα, διότι κοινὸν ἔχουσιν ὕψος, τὸ ΒΖ, αἱ δὲ βάσεις αὐτῶν Βαδ, Βδγ εἶναι ἴσαι, διότι τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἥμισῃ (πρότ. 3, βιβλ. 6)· ἄρα τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα ΒΑΔΘΖΕ, ΒΔΓΗΖΘ, τὰ πρίσμασιν ἴσοις ἰσοδύναμα, καὶ πρὸς ἄλληλα εἶναι ἰσοδύναμα.

Πόρισμα. Πᾶν τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΔΘΕΖ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ, τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν στερεὰν γωνίαν Α, καὶ τὰ αὐτὰ πλευρὰ ΛΒ, ΑΔ, ΑΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9.

Θεώρημα.

Τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΗ,ΑΛ, τὰ ἔχοντα τὴν μὲν κάτω βάσιν ΑΒΓΔ κοινήν, τὰς δὲ ἄνω αὐτῶν βάσεις ΕΖΗΘ, ΙΚΛΜ περιειλημμένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΕΚ, ΘΛ, εἶναι ἰσοδύναμα. (σχ. 209)

Τρεῖς ἡ παροῦσα πρότασις περιλαμβάνει περιστάσεις, κατὰ τὰ τρία τῆς ΕΙ μεγέθη· διότι ἡ γραμμὴ ΕΙ ἢ μείζων τῆς ΕΖ εἶναι, ἢ μικροτέρα, ἢ ἴση. Ἀλλὰ καὶ κατὰ τὰς τρεῖς αὐτὰς διαφόρους περιστάσεις ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις χρησιμεύει πρὸς βεβαίωσιν τοῦ θεωρήματος. Ἐν πρώτοις δὲ λέγω, ὅτι τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα ΑΕΙΜΘΔ, ΒΖΚΛΗΓ εἶναι ἴσα, καὶ ἰδοὺ ἡ ἀπόδειξις.

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΕ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΖ καὶ ἡ ΘΕ τῆς ΗΖ, ἡ γωνία ΑΕΙ=ΒΖΚ, ἡ δὲ γωνία ΘΕΙ=ΗΖΚ, καὶ ἡ γωνία ΘΕΑ=ΗΖΒ. Ἐκ τῶν ἓξ δὲ τούτων γωνιῶν αἱ τρεῖς πρῶται σχηματίζουσι τὴν στερεὰν γωνίαν Ε, αἱ δὲ λοιπαὶ τρεῖς ἀποτελοῦσι τὴν στερεὰν γωνίαν Ζ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι αὐταὶ αἱ ἐπίπεδοι καὶ ἴσαι εἶναι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν διατεθειμέναι, αἱ στερεαὶ γωνίαι Ε καὶ Ζ εἶναι ἴσαι. Ἐὰν λοιπὸν τὸ πρίσμα ΑΕΜ τεθῇ ἐν τῷ πρίσματι ΒΖΛ, τὰ δύο ταῦτα πρίσματα ταυτίζονται· διότι ἡ μὲν βάσις ΑΕΙ, τῆς ἐπιθέσεως γενομένης, ἐφαρμόζεται ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΖΚ, τῆς ἴσης αὐτῇ, τὰ δὲ πλευρὰ ΕΘ, ΖΗ συμπίπτουσιν, ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν στερεῶν γωνιῶν Ε καὶ Ζ. Ταυτίζονται δὲ καθ' ὁλοκληρίαν τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος πρίσματα, διότι ἡ βάσις ΑΕΙ καὶ τὸ πλευρὸν ΕΘ διορίζουσι τὸ πρίσμα ΑΕΜ, ἡ δὲ βάσις ΒΖΚ καὶ τὸ πλευρὸν ΖΗ διορίζουσι τὸ πρίσμα ΒΖΛ (πρότ. 3, βιϐλ. 6). Λοιπὸν τὰ πρίσματα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ἐὰν ἤδη ἀπὸ τοῦ στερεοῦ ΑΛ ἀφαιρεθῇ τὸ πρίσμα ΑΕΜ, μένει τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΙΛ. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ στερεοῦ ΑΛ ἀφαιρεθῇ τὸ πρίσμα ΒΖΛ, μένει τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΕΗ. Ἄρα τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΙΛ, ΑΕΗ εἶναι ἰσοδύναμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10.

Θεώρημα.

Τὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι ἰσοδύναμα. (σχ. 210)

Ἔστω ΑΒΓΔ ἡ κοινὴ βάσις τῶν δύο παραλληλεπιπέδων ΑΗ, ΑΛ. Ἐπειδὴ τὰ παραλληλεπίπεδα ταῦτα ὑποτίθενται ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος, αἱ ἄνω αὐτῶν βάσεις ΕΖΗΘ, ΙΚΛΜ ὑπάρχουσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Πρὸς τούτοις δὲ αἱ πλευραὶ ΕΖ καὶ ΑΒ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, καὶ αἱ πλευραὶ ΙΚ καὶ ΑΒ ὡσαύτως. Ἄρα καὶ αἱ πλευραὶ ΕΖ καὶ ΙΚ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἴσαι καὶ παράλληλοι εἶναι καὶ αἱ πλευραὶ ΗΖ καὶ ΛΚ.

Ἐκτείνω τὰς πλευρὰς ΕΖ, ΘΗ, καὶ τὰς πλευρὰς ΛΚ, ΙΜ μέχρις οὗ συναπαντηθῶσι καὶ σχηματίσωσι τὸ παραλληλόγραμμον ΝΟΠΚ. Τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο προδήλως ἴσον εἶναι ἑκατέρᾳ τῶν βάσεων ΕΖΗΘ, ΙΚΛΜ. Ἐὰν δὲ σχηματισθῇ τρίτον παραλληλεπίπεδον, κάτω μὲν βάσιν ἔχον τὴν ΑΒΓΔ, ἄνω δὲ τὴν ΝΟΠΚ, τὸ τρίτον τοῦτο παραλληλεπίπεδον θέλ' εἴσθαι ἰσοδύναμον τῷ παραλληλεπιπέδῳ ΑΗ (πρότ. 9, βιβλ. 6), διότι ὄχι μόνον κάτω βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχει, ἀλλὰ καὶ αἱ ἄνω τῶν δύο αὐτῶν παραλληλεπιπέδων βάσεις μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΗΚ, ΖΝ περιέχονται. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ τρίτον παραλληλεπίπεδον, περὶ οὗ εἴρηται, εἶναι ἰσοδύναμον τῷ παραλληλεπιπέδῳ ΑΛ. Λοιπὸν τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΗ, ΑΛ, τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι ἰσοδύναμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11.

Θεώρημα.

Πᾶν παραλληλεπίπεδον τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, βάσιν ἰσοδύναμον καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχον. (σχ. 210)

Ἔστω ΑΗ τὸ παραλληλεπίπεδον τὸ πρὸς τροπὴν προτεθέν. Ἐκ τῶν σημείων Α,Β,Γ,Δ, ἀνυψῶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως τὰς καθέτους ΑΙ, ΒΚ, ΓΛ, ΔΜ, καὶ σχηματίζω τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΛ, τὸ ἰσοδύναμον τῷ παραλληλεπιπέδῳ ΑΗ, τὸ ἔχον τὰς παραπλεύρους ἕδρας ΑΚ, ΒΛ, κτλ. ὀρθογωνίους. Ἐὰν καὶ ἡ βάσις ΑΒΓΔ ὀρθογώνιον ἦναι, τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΛ εἶναι τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τὸ ἰσοδύναμον τῷ προτεθέντι παραλληλεπιπέδῳ ΑΗ. Ἐὰν ὅμως ἡ βάσις ΑΒΓΔ δὲν ἦναι ὀρθογώνιον, (σχ. 211), ἄγω τὰς μὲν εὐθείας ΑΟ, ΒΝ καθέτους ἐπὶ τῆς ΓΔ, τὰς δὲ εὐθείας ΟΚ, ΝΠ καθέτους ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ παραλληλεπιπέδου, καὶ τοιουτοτρόπως σχηματίζω τὸ στερεὸν ΑΒΝΟΚΙΚΠ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

Καὶ τῷ ὄντι· ἡ βάσις ΑΒΝΟ καὶ ἡ ἀντικειμένη εἰς αὐτὴν ἕδρα ΙΚΠΚ εἶναι τετράπλευρα ὀρθογώνια. Ὀρθογώνια δὲ εἶναι καὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι, διότι τὰ πλευρὰ ΑΙ, ΟΚ, κτλ. ε[illegible] κάθετα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως. Ἄρα τὸ στερε[illegible] ΑΠ εἶναι παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον. Ἀλλὰ τὰ δύ[illegible]αλληλεπίπεδα ΑΠ, ΑΛ δυνατὸν εἶναι νὰ ἐκληφθῶσιν [illegible] ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒΚΙ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΟ. [illegible]μεν εἶναι ἰσοδύναμα. Λοιπὸν τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ, (σχ[illegible]10 καὶ 211), τὸ κατὰ πρῶτον τραπὲν εἰς τὸ ἰσοδύνα[illegible]ον αὐτῷ παραλληλεπίπεδον ΑΛ, ἐτράπη ἐκ νέου εἰς παρ[illegible]αλληλεπίπεδόν τι ἄλλο ΑΠ ἰσοδύναμον καὶ ὀρθογώνιον, ἔχ[illegible] ὕψος μὲν τὸ αὐτὸ, τουτέστι τὸ ΑΙ, βάσιν δὲ τὴν ΑΒΝΟ [illegible]ην τῇ βάσει ΑΒΓΔ ἰσοδύναμον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12.

Θεώρημα.

Τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ΑΗ, ΑΛ, τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒΓΔ, εἶναι πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν ΑΕ,ΑΙ ἀνάλογα. (σχ. 212)

Ἐν πρώτοις ἔστωσαν τὰ ὕψη ΑΕ, ΑΙ ἀνάλογα πρὸς δύο ἀκεραίους ἀριθμοὺς, παραδείγματος χάριν, πρὸς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς 15 καὶ 8.

Διαιρῶ τὸ ὕψος ΑΕ εἰς 15 ἴσα μέρη, ἐξ ὧν 8 περιέχει τὸ ὕψος ΑΙ, καὶ διὰ τῶν τομῶν χ, ψ, ω, κτλ. ἄγω ἐπίπεδα παράλληλα τῆς βάσεως. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα διαχωρίζουσι τὸ στερεὸν ΑΗ εἰς 15 παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἴσα, διότι καὶ αἱ βάσεις αὐτῶν ἴσαι καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν ἴσα εἶναι. Εἶναι δὲ αἱ βάσεις τῶν παραλληλεπιπέδων αὐτῶν ἴσαι, διότι πᾶσα τομὴ πρίσματος, οἵα ἡ ΜΙΚΛ, παραλλήλως τῆς βάσεως ΑΒΓΔ γενομένη, εἶναι πρὸς τὴν βάσιν ταύτην ἴση (πρότ. 7, βιβλ. 6). Τὰ ὕψη δὲ τῶν αὐτῶν παραλληλεπιπέδων εἶναι ἴσα, διότι τὰ τμήματα Αχ, χψ, ψω, κτλ. εἶναι τὰ ἴσα μέρη τοῦ ὕψους ΑΕ. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν 15 ἴσων παραλληλεπιπέδων, εἰς ἃ ἀνελύθη τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ, 8 περιέχει τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΛ, τὰ παραλληλεπίπεδα ΑΗ, ΑΛ εἶναι πρὸς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς 15 καὶ 8 ἀνάλογα, ἢ ἐν γένει ἀνάλογα πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν ΑΕ, ΑΙ.

Ἂς ὑποτεθῇ ἤδη, ὅτι ἀδύνατον εἶναι νὰ παρασταθῇ δι' ἀριθμῶν ἡ πρὸς τ[illegible]ος ΑΕ σχέσις τοῦ ΑΙ· λέγω, ὅτι καὶ κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύ[illegible] ἡ ἑξῆς ὑπάρχει ἀναλογία, *στερεὸν* ΑΗ : *στερεὸν* ΑΛ : : ΑΕ : ΑΙ. [illegible] ἂν καθ' ὑπόθεσιν ἡ ἀναλογία αὕτη δὲν ἦναι ἀληθὴς, ἔστω,

στερεὸν ΑΗ : *στερεὸν* ΑΛ : : [illegible]Ε : ΑΟ.

Τούτου τεθέντος, διαιρῶ τὸ ὕψο[illegible]ΑΕ εἰς πολλὰ μέρη ἴσα, μικρότερα ὅμως τοῦ ΟΙ· ἀνκγκαίως δὲ ἓν [illegible]ῆς διαιρέσεως ταύτης σημεῖον μ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ Ο κα[illegible]. Ἔστω δὲ Π τὸ παραλληλεπίπεδον, τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὴν ΑΒΓΔ, [illegible]ψος δὲ τὸ Αμ.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ ὕψη ΑΕ, Αμ εἶναι πρὸς δύο ἀκεραι[illegible] ἀριθμοὺς ἀνάλογα, ἡ ἀναλογία ὑπάρχει αὕτη,

στερεὸν ΑΗ : Π : : ΑΕ : Αμ.

Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως *στερεὸν* ΑΗ : *στερεὸν* ΑΛ : : ΑΕ : ΑΟ,

Ἄρα *στερεὸν* ΑΛ : Π : : ΑΟ : Αμ.

Ἀλλ' ὁ ὅρος ΑΟ εἶναι μείζων τοῦ Αμ, ἄρα, διὰ νὰ ὑπάρξῃ ἀναλογία, πρέπει καὶ τὸ στερεὸν ΑΛ μεῖζον νὰ ἦναι τοῦ στερεοῦ Π. Τὸ ἐναντίον ὅμως συμβαίνει, τουτέστι τὸ στερεὸν Π εἶναι μεῖζον τοῦ στερεοῦ ΑΛ. Λοιπὸν ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας ταύτης *στερεὸν* ΑΗ : *στερεὸν* ΑΛ : : ΑΕ : χ δὲν δύναται νὰ ἦναι γραμμὴ μείζων τῆς ΑΙ.

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος τέταρτος ὅρος δὲν εἶναι οὔτε μικρότερος τῆς ΑΙ. Ἄρα εἶναι ἴσος τῇ ΑΙ. Λοιπὸν τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα, τὰ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντα, εἶναι πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν ἀνάλογα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13.

Θεώρημα.

Τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ΑΗ, ΑΚ, τὰ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΕ ἔχοντα, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν ΑΒΓΔ, ΑΜΝΟ. (σχ. 213)

Παρατάσσω τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ὅπως ἐν τῷ σχήματι φαίνονται, καὶ ἐκτείνω τὸ ἐπίπεδον ΟΝΚΛ μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὸ ἐπίπεδον ΔΓΗΘ καὶ σχηματίσῃ τὴν τομὴν ΠΚ. Τοιουτοτρόπως δὲ σχηματίζεται τρίτον τι παραλληλεπίπεδον ΑΚ, τὸ ὁποῖον δύναταί τις νὰ παραβάλῃ πρὸς ἑκάτερον τῶν παραλληλεπιπέδων ΑΗ, ΑΚ.

Τὰ δύο στερεὰ ΑΗ, ΑΚ, ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΕΘΔ, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν ΑΟ, ΑΒ. Ὡσαύτως τὰ στερεὰ ΑΚ, ΑΚ, ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΟΛΕ, εἶναι πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν ΑΔ, ΑΜ ἀνάλογα. Τουτέστιν αἱ δύο αὗται ὑπάρχουσιν ἀναλογίαι,

στερεὸν ΑΗ : *στερεὸν* ΑΚ : : ΑΒ : ΑΟ,

στερεὸν ΑΚ : στερεὸν ΑΚ : : ΑΔ : ΑΜ.

Πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν κατὰ τάξιν, καὶ ἐξαλειφομένου ἐκ τῆς προκυπτούσης ἀναλογίας ἀπό τε τοῦ πρώτου ἡγουμένου καὶ τοῦ πρώτου ἑπομένου τοῦ κοινοῦ παράγοντος *στερεὸν* ΑΚ, μένει ἡ ἀναλογία αὕτη,

στερεὸν ΑΗ : *στερεὸν* ΑΚ : : ΑΒ$\times$ΑΔ : ΑΟ$\times$ΑΜ.

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον ΑΒ$\times$ΑΔ ἐκφράζει τὴν βάσιν ΑΒΓΔ, καὶ τὸ γινόμενον ΑΟ$\times$ΑΜ εἰκονίζει τὴν βάσιν ΑΜΝΟ· ἄρα τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα, τὰ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντα, εἶναι πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν ἀνάλογα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14.

Θεώρημα.

Τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων αὐτῶν ἐπὶ τὰ ὕψη αὐτῶν, πρὸς τὰ γινόμενα δηλαδὴ τῶν τριῶν αὐτῶν διαστάσεων. (σχ. 213)

Παρατάσσω τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΗ, ΑΩ, τὰ ὁποῖα πρὸς σύγκρισιν λαμβάνω, κατὰ τρόπον τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν κοινὴν νὰ ἔχωσι τὴν γωνίαν ΒΑΕ, ἐκτείνω δὲ τὰς ἕδρας τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΩ, ὅσαι ἀπαιτοῦνται πρὸς συμπλήρωσιν τρίτου τινὸς παραλληλεπιπέδου ΑΚ, ἔχοντος τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ.

Τούτων τεθέντων, κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν, ταύτην ἔχω τὴν ἀναλογίαν,

στερεὸν ΑΗ : *στερεὸν* ΑΚ : : ΑΒΓΔ : ΑΜΝΟ.

Ἀλλὰ τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΚ, ΑΩ, ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΜΝΟ, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν ΑΕ, ΑΧ. Λοιπὸν,

στερεὸν ΑΚ : *στερεὸν* ΑΩ :: ΑΕ : ΑΧ.

Πολλαπλασιαζομένων κατὰ τάξιν τῶν δύο αὐτῶν ἀναλογιῶν, καὶ ἐξαλειφομένου καὶ ἀπὸ τῶν δύο τοῦ πρώτου λόγου ὅρων τοῦ κοινοῦ παράγοντος *στερεὸν* *ΑΚ*, ἡ ἀναλογία προκύπτει αὕτη,

στερεὸν ΑΗ : *στερεὸν* ΑΩ :: ΑΒΓΔ×ΑΕ : ΑΜΝΟ×ΑΧ.

Ἀντὶ τῶν βάσεων ΑΒΓΔ, ΑΜΝΟ δύναταί τις ν' ἀντικαταστήσῃ τὰ γινόμενα ΑΒ×ΑΔ, ΑΟ×ΑΜ. Τῆς ἀντικαταστάσεως ταύτης γενομένης, ἡ ἀναλογία σχηματίζεται αὕτη,

στερ. ΑΗ : στερ. ΑΩ :: ΑΒ×ΑΔ×ΑΕ : ΑΟ×ΑΜ×ΑΧ. (*)

Ἄρα τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα εἶναι πρὸς τὰ γινόμενα τῶν τριῶν αὐτῶν διαστάσεων ἀνάλογα.

Σχόλιον. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἕπεται, ὅτι δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν ὡς μέτρον παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ τὸ γινόμενον, ἢ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν αὐτοῦ διαστάσεων. Κατὰ τοῦτο δὲ τὸ θεμελιῶδες θεώρημα καταμετροῦνται καὶ ὅλα τὰ λοιπὰ στερεά.

Πρὸς κατάληψιν δὲ τοῦ τοιούτου μέτρου, παρατηρητέον ὅτι ὀνομάζεται γινόμενον δύο ἢ πλειοτέρων εὐθειῶν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, τῶν εἰκονιζόντων τὰς εὐθείας αὐτάς. Οἱ τοιοῦτοι δὲ ἀριθμοὶ ἀξαρτῶνται ἐκ τῆς γραμμικῆς μονάδος, τῆς ὁποίας ἡ ἐκλογὴ εἶναι αὐθαίρετος.

Τούτου τεθέντος, τὸ γινόμενον τῶν τριῶν παραλληλεπιπέδου τινὸς διαστάσεων εἶναι ἀριθμὸς, οὐδὲν καθ' ἑαυτὸν σημαίνων· ἄλλος δ' ἀντ' αὐτοῦ προκύπτει ἀριθμὸς, ἂν ἄλλης γραμμικῆς μονάδος χρῆσις γίνῃ. Ἀλλὰ καταμετρουμένων διὰ τῆς αὐτῆς γραμμικῆς μονάδος καὶ τῶν τριῶν διαστάσεων ἄλλου τινὸς παραλληλεπιπέδου, καὶ πολλαπλασιαζομένων τῶν διαστάσεων αὐτῶν ἐπ' ἀλλήλας, τὰ τοιουτοτρόπως παραγόμενα δύο γινόμενα εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ δύο στερεὰ, καὶ τοῦ σχετικοῦ αὐτῶν μεγέθους τὴν ἰδέαν εἰκονίζουσι

(*) Ἐὰν εἰς τὴν ἀναλογίαν ταύτην

στερ. ΑΗ : στερ. ΑΩ :: ΔΒ×ΑΔ×ΑΕ : ΑΟ×ΑΜ×ΑΧ,

τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν, ληφθῇ ΑΟ=1, ΑΜ=1, ΑΧ=1, ἐὰν δὲ συγχρόνως καὶ τὸ στερεὸν ΑΩ ὑποτεθῇ ἴσον τῇ μονάδι, αὕτη προκύπτει ἡ ἀναλογία,

στερ. ΑΗ : 1 :: ΑΒ×ΑΔ×ΔΕ : 1.

Ὅθεν στερεὸν ΑΗ = ΑΒ×ΑΔ×ΑΕ.

Τὸ μέγεθος στερεοῦ τινὸς, ὁ ὄγκος ἢ ἡ ἔκτασις αὐτοῦ ὀνομάζεται *στερεότης*. Στερεότης δὲ κυρίως λέγεται τὸ μέτρον τῆς ἐκτάσεως αὐτοῦ. Ὅθεν ἡ στερεότης παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ, πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ἢ εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τῶν τριῶν αὐτοῦ διαστάσεων.

Τοῦ κύβου αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι. Ἡ στερεότης λοιπὸν τοῦ κύβου, τοῦ ἔχοντος πλευρὸν ἴσον τῇ μονάδι, εἶναι $1\times1\times1$, ἢ 1. Ἐὰν δὲ τὸ πλευρὸν ὑποτεθῇ ἴσον 2, τοῦ κύβου ἡ στερεότης εἶναι $2\times2\times2$, ἢ 8. Ἐὰν δὲ τὸ πλευρὸν ἴσον 3 ὑποτεθῇ, τοῦ κύβου ἡ στερεότης εἶναι $3\times3\times3$, ἢ 27, καὶ οὕτω καθεξῆς. Τουτέστιν, ὅταν τὰ πλευρὰ τῶν κύβων ἦναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺ 1, 2, 3, κτλ., οἱ κύβοι ἢ αἱ στερεότητες αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1, 8, 27, κτλ. Διὰ τοῦτο εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ὀνομάζονται *κύβοι* τὰ γινόμενα τριῶν ἴσων ἀριθμῶν.

Κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα, πρὸς κατασκευὴν κύβου τινὸς, διπλασίου κύβου ἄλλου γνωστοῦ, πρέπει νὰ εὑρεθῇ πλευρὸν, τοιαύτην ἔχον πρὸς τὸ πλευρὸν τοῦ γνωστοῦ κύβου σχέσιν, οἵαν ἡ κυβικὴ τοῦ 2 ῥίζα πρὸς τὴν μονάδα. Καὶ ἡ μὲν τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 εὐκόλως διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς διορίζεται· ἡ κυβικὴ ὅμως αὐτοῦ ῥίζα δὲν εὑρίσκεται διὰ τῶν ἁπλῶν μέσων τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, διὰ τῆς χρήσεως δηλαδὴ εὐθειῶν, ὧν δύο σημεῖα εἶναι δεδομένα, καὶ κύκλων κέντρων καὶ ἀκτίνων γνωστῶν.

Τούτου ἕνεκα, τὸ πρόβλημα τοῦ *διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου* κατέστη περιβόητον παρὰ τοῖς ἀρχαίοις γεωμέτραις, καθὼς καὶ τὸ τῆς *τριτομῆς τῆς γωνίας*, τὸ ὁποῖον εἰς τὴν αὐτὴν σχεδὸν ἀνάγεται τάξιν. Ἀλλ᾽ ἀπὸ πολλοῦ ἤδη χρόνου αἱ λύσεις, ὅσας τὰ ζητήματα ταῦτα ἐπιδέχονται, εἶναι γνωσταί. Καὶ δὲν ἔχουσι μὲν αἱ τοιαῦται λύσεις τὴν ἁπλότητα τῶν κατασκευῶν τῆς στοιχειώδους γωμετρίας, οὐχ ἧττον ὅμως ἡ ἀκρίβεια αὐτῶν εἶναι ὅσον ἔνεστιν ἐντελής.

Τουτέστι, παντὸς παραλληλεπιπέδου ὁ ὄγκος εἰκονίζεται διὰ τοῦ γινομένου τῶν τριῶν αὐτοῦ διαστάσεων, ἐὰν ὡς μονὰς ληφθῇ ὁ κύβος, ὁ ἔχων μῆκος, πλάτος, πάχος ἴσον τῇ μονάδι. Ο. Μ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.

Θεώρημα.

Ἡ στερεότης παντὸς παραλληλεπιπέδου, καὶ ἐν γένει ἡ στερεότης παντὸς πρίσματος εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ πολλαπλασιασθείσης.

Διότι, πρῶτον, πᾶν παραλληλεπίπεδον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ παραλληλεπιπέδῳ, τῷ ἔχοντι τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν ἰσοδύναμον (πρότ. 11, βιβλ. 6). Ἐπειδὴ δὲ ἡ στερεότης παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἐκφράζεται διὰ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ πολλαπλασιασθείσης, ἄρα καὶ παντὸς ἄλλου παραλληλεπιπέδου ἡ στερεότης δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ πολλαπλασιασθείσης.

Δεύτερον, πᾶν τριγωνικὸν πρίσμα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου, τοῦ ἔχοντος τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν διπλασίαν (πρότ. 8, βιβλ. 6). Ἐπειδὴ δὲ τοῦ παραλληλεπιπέδου ἡ στερεότης σημαίνεται διὰ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ πολλαπλασιασθείσης, ἄρα τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἡ στερεότης δύναται νὰ σημειωθῇ διὰ τοῦ γινομένου τοῦ ὕψους αὐτοῦ, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὴν βασιν αὐτοῦ, ἥτις εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Τρίτον, πᾶν πολυγωνικὸν πρίσμα δύναται ν᾽ ἀναλυθῇ εἰς τόσα τριγωνικὰ πρίσματα ἰσοϋψῆ, ὅσα τρίγωνα εἰς τὸ πολύγωνον, τὸ τὴν βάσιν αὐτοῦ ἀποτελοῦν, σχηματίζονται. Ἐπειδὴ δὲ παντὸς τριγωνικοῦ πρίσματος ἡ στερεότης ἐκφράζεται διὰ τοῦ γινομένου τοῦ ὕψους αὐτοῦ, ἐπὶ τὴν βάσιν αὐτοῦ πολλαπλασιασθέντος, ἄρα ὅλων τῶν τριγωνικῶν πρισμάτων ἡ στερεότης, ἕνεκα τοῦ κοινοῦ αὐτῶν ὕψους, σημαίνεται διὰ τοῦ γινομένου τοῦ ὕψους αὐτῶν, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγωνικῶν βάσεων, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τοῦ πολυγωνικοῦ πρίσματος ἡ βάσις. Λοιπὸν παντὸς πολυγωνικοῦ πρίσματος ἡ στερεότης εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ πολλαπλασιασθείσης.

Πόρισμα. Ἐάν τις παραβάλῃ πρὸς ἄλληλα δύο ἰσοϋψῆ πρίσματα, τὰ γινόμενα τῶν βάσεων αὐτῶν ἐπὶ τὰ ὕψη αὐτῶν εἶναι πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν ἀνάλογα. Ἄρα τὰ ἰσοϋψῆ πρίσματα εἶναι πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν ἀνάλογα. Ὡσαύτως τὰ ἴσην βάσιν ἔχοντα πρίσματα εἶναι πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν ἀνάλογα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16.

Θεώρημα.

Ἐὰν πυραμίς τις ΣΑΒΓΔΕ τμηθῇ ὑπό τινος ἐπιπέδου αβγδε, παραλλήλου τῆς βάσεως αὐτῆς,

Α^ον^. Τὰ πλευρὰ ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ,... καὶ τὸ ὕψος ΣΟ τέμνονται ἀναλόγως εἰς τὰ σημεῖα α, β, γ... καὶ ο.

Β^ον^. Ἡ τομὴ αβγδε εἶναι πολύγωνον ὅμοιον τῇ βάσει ΑΒΓΔΕ. (σχ. 214)

Διότι, πρῶτον, τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓ, αβγ, αἱ τομαὶ ΑΒ, αβ, αἱ διὰ τοῦ τρίτου ἐπιπέδου ΣΑΒ γενόμεναι, εἶναι παράλληλοι (πρότ. 10, βιβλ. 5). Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΣΑΒ, Σαβ εἶναι ὅμοια· ἐξ αὐτῶν δὲ τῶν τριγώνων αὕτη ἕπεται ἡ ἀναλογία ΣΑ : Σα :: ΣΒ : Σβ. Ὡσαύτως δὲ δύναται ν' ἀποδειχθῇ ὅτι καὶ ΣΒ : Σβ :: ΣΓ : Σγ, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἄρα ὅλα τὰ πλευρὰ ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, κτλ. τέμνονται ἀναλόγως εἰς τὰ σημεῖα α, β, γ, κτλ. Καὶ τὸ ὕψος ΣΟ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν τέμνεται εἰς τὸ σημεῖον ο, διότι αἱ τομαὶ ΒΟ καὶ βο εἶναι παράλληλοι· ὅθεν ΣΟ : Σο :: ΣΒ : Σβ.

Δεύτερον, ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ αβ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΒ, καὶ ἡ βγ παράλληλος τῆς ΒΓ, καὶ ἡ γδ παράλληλος τῆς ΓΔ, κτλ., ἡ γωνία αβγ=ΑΒΓ, ἡ γωνία βγδ=ΒΓΔ, καὶ οὕτω καθεξῆς. Πρὸς τούτοις δὲ, ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΣΑΒ, Σαβ, ἕπεται ΑΒ : αβ :: ΣΒ : Σβ· ἐκ τῆς ὁμοιότητος δὲ τῶν τριγώνων ΣΒΓ, Σβγ, προκύπτει ΣΒ : Σβ :: ΒΓ : βγ. Ἄρα ΑΒ : αβ :: ΒΓ : βγ, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἄρα τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, αβγδε ἔχουσι τὰς γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ὅμοια.

Πόρισμα. Ἔστωσαν αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓΔΕ, ΣΧΨΩ, αἱ κορυφὴν μὲν τὴν αὐτὴν, βάσεις δὲ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένας ἔχουσαι, καὶ διὰ τοῦτο τῶν πυραμίδων αὐτῶν τὸ ὕψος εἶναι τὸ αὐτό.

Ἐὰν αἱ δύο πυραμίδες, αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος, τμηθῶσιν ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν βάσεων, λέγω ὅτι αἱ τομαὶ αβγδε, χψω εἶναι πρὸς τὰς βάσεις ΑΒΓΔΕ, ΧΨΩ ἀνάλογοι.

Καὶ τῷ ὄντι· ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, αβγδε εἶναι ὅμοια, αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΑΒ, αβ. Ἀλλὰ ΑΒ : αβ :: ΣΑ : Σα. Λοιπὸν ΑΒΓΔΕ : αβγδε :: $\overline{ΣΑ}^2 : \overline{Σα}^2$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΧΨΩ : χψω :: $\overline{ΣΧ}^2 : \overline{Σχ}^2$. Ἀλλ' ἐπειδὴ αβγχψω ἓν καὶ τὸ αὐτὸ εἶναι ἐπίπεδον, παράλληλον τοῦ ἐπιπέδου τῶν βάσεων, ἡ ἑξῆς ὑπάρχει ἀναλογία ΣΑ : Σα : : ΣΧ : Σχ. Ἄρα ΑΒΓΔΕ : αβγδε :: ΧΨΩ : χψω. Τουτέστιν αἱ τομαὶ αβγδε, χψω εἶναι πρὸς τὰς βάσεις ΑΒΓΔΕ, ΧΨΩ ἀνάλογοι. Λοιπὸν ἐὰν αἱ βάσεις αὗται ὑποτεθῶσιν ἰσοδύναμοι, αἱ κατὰ τὸ αὐτὸ ὕψος τομαὶ τῶν πυραμίδων εἶναι ἐπίσης ἰσοδύναμοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17.

Θεώρημα.

Αἱ τριγωνικαὶ πυραμίδες, αἱ ἔχουσαι βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἰσοδύναμοι. (σχ. 215)

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓ, σαβγ, αἱ ἔχουσαι τὸ αὐτὸ μὲν ὕψος ΑΤ, βάσεις δὲ τὰ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κείμενα ἰσοδύναμα τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ.

Ἐπειδὴ τὸ θεώρημα δὲν ἀποδεικνύεται κατ' εὐθεῖαν, ἂς ὑποτεθῇ ὅτι αἱ δύο πυραμίδες διαφέρουσιν ἀλλήλων, καὶ ὅτι ἡ πυραμὶς σαβγ εἶναι ἡ ἐλάσσων. Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ δύο σωμάτων εἶναι σῶμα, πᾶν δὲ σῶμα ἔχει ἰσοδύναμον σῶμα σχήματος ἄλλου, ἂς ὑποτεθῇ προσέτι, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν δύο πυραμίδων εἶναι πρίσμα τι τριγωνικόν, βάσιν μὲν ἔχον τὴν βάσιν ΑΒΓ, ὕψος δὲ τὸ ΑΧ.

Τούτων τεθέντων, τέμνω τὸ κοινὸν ὕψος ΑΤ εἰς μέρη ἴσα μέν, μικρότερα ὅμως τοῦ ΑΧ, καὶ καλῶ υ ἓν τῶν τοιούτων ἴσων τμημάτων, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων τῶν τομῶν ἄγω ἐπίπεδα παράλληλα τοῦ ἐπιπέδου τῶν βάσεων. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα τέμνουσι καὶ τὰς δύο πυραμίδας, αἱ παραγόμεναι δὲ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τομαὶ, κατὰ τὰ εἰρημένα ἐν τῷ προηγουμένῳ θεωρήματι, εἶναι ἰσοδύναμοι, τουτέστιν ἡ ΔΕΖ καὶ ἡ δεζ, ἡ ΗΘΙ καὶ ἡ ηθι, κτλ. Μετὰ ταῦτα ἐπὶ τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΙ κτλ., ὡς ἐπὶ βάσεων, καὶ μεταχειριζόμενος ὡς πλευρὰ τῆς ῥάχεως ΣΑ τὰ τμήματα ΑΔ, ΔΗ, ΗΚ, κτλ., κατασκευάζω πρίσματα ἐξωτερικά. Ὡσαύτως δὲ ὑπὸ τὰ τρίγωνα δεζ, ηθι, κλμ, κτλ., ὡς ἐπὶ βάσεων, καὶ τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ῥάχεως σα μεταχειριζόμενος ὡς πλευρὰ, κατασκευάζω πρίσματα ἐσωτερικά. Ὅλα ταῦτα τὰ πρίσματα, τά τε ἐσωτερικὰ καὶ τὰ ἐξωτερικὰ, ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος υ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν πρισμάτων εἶναι μεῖζον τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ, τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν πρισμάτων τῶν ἐσωτερικῶν εἶναι μικρότερον τῆς πυραμίδος σαβγ. Ἄρα, διὰ τὸν διπλοῦν αὐτὸν λόγον, τὰ δύο τῶν πρισμάτων ἀθροίσματα διαφέρουσιν ἀλλήλων πλειότερον, ἢ ὅσον ἀλλήλων διαφέρουσιν αἱ δύο πυραμίδες.

Ἀλλὰ, ἀπὸ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω χωροῦντες, τὸ πρῶτον ἐσωτερικὸν πρίσμα, τὸ δεζα, καὶ τὸ ἐξωτερικὸν τὸ δεύτερον, τὸ ΔΕΖΗ, εἶναι ἰσοδύναμα, διότι καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος υ ἔχουσι, καὶ αἱ βάσεις αὐτῶν ΔΕΖ, δεζ εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἰσοδύναμα διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι καὶ τὰ πρίσματα, τὸ δεύτερον ἐσωτερικὸν, τὸ ηθιδ, καὶ τὸ τρίτον ἐξωτερικὸν, τὸ ΗΘΙΚ, τὸ τρίτον ἐσωτερικὸν καὶ τὸ τέταρτον ἐξωτερικὸν, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τῶν πρισμάτων τῶν ἐσχάτων, τοῦ ἐσωτερικοῦ καὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ.

Λοιπὸν ὅλα τὰ ἐκτὸς τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ κατασκευασθέντα πρίσματα, ἐξαιρουμένου τοῦ πρώτου πρίσματος ΑΒΓΔ, ἔχουσιν ἰσοδύναμα πρίσματα ἐσωτερικὰ, ἐκ τῶν κατασκευασθέντων ἐν τῇ πυραμίδι σαβγ. Ἄρα τὸ πρίσμα ΑΒΓΔ εἶναι ἡ διαφορὰ, ἡ μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐξωτερικῶν πρισμάτων καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐσωτερικῶν. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ἡ τῶν δύο αὐτῶν ἀθροισμάτων ἡ διαφορὰ εἶναι μείζων τῆς διαφορᾶς τῶν πυραμίδων, τὸ πρίσμα ΑΒΓΔ πρέπει νὰ ἦναι μεῖζον τοῦ πρίσματος ΑΒΓΧ. Τὸ ἐναντίον ὅμως ὑπάρχει· διότι τὰ δύο ταῦτα πρίσματα τὴν αὐτὴν μὲν ἔχουσι βάσιν ΑΒΓ, τὸ ὕψος δὲ τοῦ πρώτου, ἤτοι τὸ, υ, εἶναι μικρότερον τοῦ ὕψους ΑΧ, τοῦ ὕψους δηλαδὴ τοῦ δευτέρου. Κακῶς λοιπὸν ὑπετέθη ὅτι αἱ πυραμίδες διαφέρουσι, διότι ἡ ὑπόθεσις αὕτη εἰς ἄτοπον ἄγει. Λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓ, σαβγ, αἱ βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα ἔχουσαι, εἶναι ἰσοδύναμοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

Θεώρημα.

Πᾶσα τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος, τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. (σχ. 216)

Ἔστω ΣΑΒΓ τριγωνική τις πυραμὶς, καὶ ΑΒΓΔΕΣ πρίσμα τι τριγωνικὸν, τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχον. Λέγω ὅτι ἡ πυραμὶς εἶναι τοῦ πρίσματος τὸ τρίτον.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἀφαιρῶ ἀπὸ τοῦ πρίσματος τὴν πυραμίδα ΣΑΒΓ· τούτου δὲ γενομένου, ὑπολείπεται τὸ στερεὸν ΣΑΓΔΕ, τὸ ὁποῖον δύναταί τις νὰ ἐκλάβῃ ὡς πυραμίδα, κορυφὴν μὲν ἔχουσαν τὸ σημεῖον Σ, βάσιν δὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΔΕ.

Φέρω τὴν διαγώνιον ΓΕ καὶ ἄγω τὸ ἐπίπεδον ΣΓΕ, δι' οὗ ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΓΔΕ ἀναλύεται εἰς δύο τριγωνικὰς πυραμίδας ΣΑΓΕ, ΣΔΓΕ. Αἱ δύο αὗται πυραμίδες ἔχουσι κοινὸν μὲν ὕψος τὴν ἀπὸ τοῦ σημείου Σ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓΔΕ ἀγομένην κάθετον, βάσεις δὲ ἴσας, διότι τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΕ, ΔΓΕ εἶναι τὰ δύο τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου ἡμίση. Ἄρα αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΓΕ, ΣΔΓΕ εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἀλλ' αἱ πυραμίδες ΣΔΓΕ, ΣΑΒΓ βάσεις μὲν ἔχουσι τὰ ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΣ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ, διότι ὕψος καὶ τῶν δύο αὐτῶν πυραμίδων εἶναι τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓ, ΔΕΣ ἡ ἀπόστασις. Ἄρα αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΣΔΓΕ εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἀλλὰ καὶ αἱ πυραμίδες ΣΔΓΕ, ΣΑΓΕ, ὡς ἤδη εἴρηται, εἶναι ἰσοδύναμοι. Λοιπὸν ἰσοδύναμοι εἶναι καὶ αἱ τρεῖς πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΣΔΓΕ, ΣΑΓΕ, ἐξ ὧν τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΣ ἀποτελεῖται. Ἄρα ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΣ, τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Πόρισμα. Ἡ στερεότης πάσης τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως αὐτῆς, ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς πολλαπλασιασθείσης.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19.

Θεώρημα.

Πᾶσα πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ μέτρον ἔχει τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως αὐτῆς ΑΒΓΔΕ, ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς ΣΟ πολλαπλασιασθείσης. (σχ. 214)

Διότι, ἀγομένων τῶν ἐπιπέδων ΣΕΒ, ΣΕΓ κατὰ τὰς διαγωνίους ΕΒ, ΕΓ, ἡ πυραμὶς ἡ πολυγωνικὴ ΣΑΒΓΔΕ ἀναλύεται εἰς πολλὰς πυραμίδας τριγωνικάς, ἐχούσας τὸ αὐτὸ ὕψος ΣΟ. Ἐπειδὴ δέ, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἑκάστη ἐξ αὐτῶν τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων μέτρον ἔχει τὴν βάσιν αὐτῆς, τουτέστιν ἓν ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΕ, ΒΓΕ, ΓΔΕ, ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους ΣΟ πολλαπλασιασθεῖσαν, τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων, ἤτοι ἡ πολυγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ, μέτρον ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΑΒΕ, ΒΓΕ, ΓΔΕ, τὸ πολύγωνον δηλαδὴ ΑΒΓΔΕ, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους ΣΟ. Λοιπὸν πᾶσα πυραμὶς μέτρον ἔχει τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως αὐτῆς, πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.

Πόρισμα 1. Πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος, τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Πόρισμα 2. Αἱ πυραμίδες αἱ ἰσοϋψεῖς εἶναι πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν ἀνάλογοι· αἱ δὲ πυραμίδες, αἱ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχουσαι, εἶναι πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν ἀνάλογοι.

Σχόλιον. Παντὸς πολυέδρου ἡ στερεότης διορίζεται, ἀναλυομένου τοῦ πολυέδρου αὐτοῦ εἰς πυραμίδας· ἡ τοιαύτη δὲ ἀνάλυσις κατὰ πολλοὺς γίνεται τρόπους, ἐν οἷς καὶ ὁ ἑξῆς.

Τὰ ἐπίπεδα τῆς διαιρέσεως ἄγονται ἀπὸ τῆς κορυφῆς στερεᾶς τινὸς γωνίας. Τοιουτοτρόπως δὲ σχηματίζονται τόσαι πυραμίδες, ὅσαι εἶναι τοῦ πολυέδρου αἱ ἕδραι, ἐξαιρουμένων τῶν ἑδρῶν, τῶν σχηματιζουσῶν τὴν στερεὰν γωνίαν, ἐξ ἧς ἄγονται τῆς διαιρέσεως τὰ ἐπίπεδα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 20.

Θεώρημα.

Τὰ πολύεδρα τὰ συμμετρικὰ εἶναι ἰσοδύναμα, τουτέστι κατὰ τὴν στερεότητα ἴσα. (σχ. 202)

Διότι, πρῶτον, δύο τριγωνικαὶ συμμετρικαὶ πυραμίδες, παραδείγματος χάριν, αἱ ΣΑΒΓ, ΤΑΒΓ, κοινὸν ἔχουσι μέτρον τὸ γινόμενον τῆς κοινῆς αὐτῶν βάσεως ΑΒΓ, ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους ΣΟ ἢ ΤΟ πολλαπλασιασθείσης. Ἄρα αἱ δύο αὗται πυραμίδες εἶναι ἰσοδύναμοι.

Δεύτερον, ἐὰν καθ' ὁποιονδήποτε τρόπον τὸ ἕτερον τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας ἀναλυθῇ, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ τὸ συμμετρικὸν πολύεδρον τὸ ἄλλο δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας συμμετρικάς. Ἐπειδὴ δὲ αἱ συμμετρικαὶ τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι ἰσοδύναμοι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ ὁλόκληρα τὰ πολύεδρα τὰ συμμετρικὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη ἄμεσον φαίνεται πόρισμα τῆς δευτέρας προτάσεως τοῦ παρόντος βιβλίου, ἐν ᾗ ἀπεδείχθη ὅτι τὰ συστατικὰ τοῦ ἑτέρου τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων μέρη καὶ τὰ μέρη τὰ συστατικὰ τοῦ ἄλλου εἶναι ἴσα. Ἐν τούτοις ἐκρίθη ἀναγκαία καὶ ἡ δευτέρα αὕτη τοῦ πράγματος ἀκριβὴς ἀπόδειξις, ἡ ἤδη γενομένη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 21.

Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ πυραμίδος, τμηθείσης διὰ ἐπιπέδου πρὸς τὴν βάσιν αὐτῆς παραλλήλου, ἀφαιρεθῇ ἡ μικρὰ πυραμίς, ὁ κορμὸς ὁ ὑπολειπόμενος ἀναλύεται εἰς τρεῖς πυραμίδας, ἐχούσας, κοινὸν μὲν ὕψος, τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, βάσεις δὲ, ἡ μὲν αὐτῶν, τὴν κάτω βάσιν τοῦ κορμοῦ, ἡ δὲ, τὴν ἄνω βάσιν τοῦ κορμοῦ, ἡ δὲ τρίτη, τὴν μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν βάσεων μέσην ἀνάλογον. (σχ. 217)

Ἔστω ΣΑΒΓΔΕ πυραμίς τις τετμημένη διά τινος ἐπιπέδου αβγδε, παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν αὐτῆς. Ἔστω προσέτι ΤΖΗΘ τριγωνική τις πυραμίς, ἰσοδύναμον τῇ βάσει τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ ἔχουσα βάσιν, ὕψος δὲ τὸ αὐτό. Ἂς ὑποτεθῇ δὲ ὅτι αἱ βάσεις τῶν δύο πυραμίδων κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Τούτων τεθέντων, τὸ ἐπίπεδον αβγδε, ἐκτεινόμενον, τέμνει καὶ τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα καὶ σχηματίζει τομήν τινα ζηθ, ὕψος ἔχουσαν τὸ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῶν βάσεων ὕψος τῆς τομῆς αβγδε. Ἐπειδὴ δὲ τῶν πυραμίδων αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘ ὑπετέθησαν ἰσοδύναμοι, καὶ αἱ τομαὶ αβγδε, ζηθ, ἀνάλογοι πρὸς τὰς βάσεις οὖσαι (πρότ. 16, βιβλ. 6), εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἄρα αἱ πυραμίδες Σαβγδε, Τζηθ εἶναι ἰσοδύναμοι, διότι τὸ αὐτὸ μὲν ὕψος, βάσεις δὲ ἰσοδυνάμους ἔχουσιν. Ἐπειδὴ δέ, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ αἱ ὁλόκληροι πυραμίδες ΣΑΒΓΔΕ, ΤΖΗΘ ἰσοδύναμοι εἶναι, ἕπεται ὅτι καὶ οἱ κορμοὶ ΑΒΓΔΕεαβγδ, ΖΗΘθζη εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἀρκεῖ λοιπὸν τὸ θεώρημα τὸ παρὸν ν' ἀποδειχθῇ ἐπὶ κορμοῦ τριγωνικῆς πυραμίδος, διότι καὶ τῶν λοιπῶν πυραμίδων οἱ κορμοὶ κορμοὺς τριγωνικῶν πυραμίδων ἰσοδυνάμους ἔχουσιν, ὡς ἤδη ἐβεβαιώθη.

Ἔστω ἤδη ΖΗΘθζη κορμός τις τριγωνικῆς πυραμίδος (σχ. 218), παραλλήλους ἔχων βάσεις. Διὰ τῶν τριῶν σημείων Ζ, η, Θ ἄγω τὸ ἐπίπεδον ΖηΘ, δι' οὗ ἀποκόπτεται ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ηΖΗΘ. Ἡ πυραμὶς αὕτη βάσιν μὲν ἔχει τοῦ κορμοῦ τὴν κάτω βάσιν ΖΗΘ, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, διότι ἡ κορυφὴ αὐτῆς η ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἄνω βάσεως ζηθ κεῖται. Ἀφαιρεθείσης δὲ τῆς πυραμίδος ηΖΗΘ, μένει ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ηζθΘΖ, ἡ ἔχουσα κορυφὴν μὲν τὸ σημεῖον η, βάσιν δὲ τὸ τετράπλευρον ζθΘΖ.

Διὰ τῶν τριῶν σημείων ζ, η, Θ ἄγω τὸ ἐπίπεδον ζηΘ, δι' οὗ ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ἀναλύεται εἰς τὰς δύο τριγωνικὰς πυραμίδας ηΖζΘ, ηθζΘ. Ἡ δευτέρα δὲ αὕτη τριγωνικὴ πυραμὶς βάσιν μὲν ἔχει τοῦ κορμοῦ τὴν ἄνω βάσιν ηζθ, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, διότι ἡ κορυφὴ αὐτῆς Θ εἰς τῆς κάτω βάσεως τὸ ἐπίπεδον ὑπάρχει.

Κατὰ τὰ εἰρημένα λοιπόν, ἐκ τῶν τριῶν πυραμίδων, εἰς ἃς ὁ κορμὸς κατὰ τὸ παρὸν θεώρημα ἀναλύεται, εὕρομεν τὰς δύο· ὑπολείπεται δὲ πρὸς ἐξέτασιν ἡ τρίτη πυραμὶς ηΖζΘ.

Ἄγω τὴν ηΚ παράλληλον τῆς ζΖ καὶ φαντάζομαι νέαν τινὰ πυραμίδα, τὴν ζΖΘΚ, τὴν ἔχουσαν κορυφὴν μὲν τὸ σημεῖον Κ, βάσιν δὲ τὸ τρίγωνον ΖζΘ. Αἱ δύο πυραμίδες ηΖζΘ, ζΖΘΚ εἶναι ἰσοδύναμοι, διότι ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΖζΘ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἔχουσι δὲ τὸ αὐτὸ ὕψος, διότι αἱ κορυφαὶ αὐτῶν η καὶ Κ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ηΚ παραλλήλου τῆς Ζζ, καὶ ἐπομένως παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως τῶν πυραμίδων αὐτῶν. Ἐπειδὴ δὲ δύναμαι νὰ θεωρήσω ὡς κορυφὴν τῆς πυραμίδος ζΖΘΚ τὸ σημεῖον ζ, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ πυραμὶς αὕτη ὕψος ἔχει τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ. Ὑπολείπεται λοιπὸν ν' ἀποδείξω, ὅτι ἡ βάσις αὐτῆς ΖΚΘ εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος τῶν βάσεων ΖΗΘ, ζηθ.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΖΘΚ, ζηθ ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην, τὴν Ζ=ζ, αὕτη ὑπάρχει ἡ ἀναλογία (πρότ. 24, βιβλ. 3), ΖΘΚ : ζηθ :: ΖΘ×ΖΚ : ζθ×ζη, ἐξ ἧς ἕπεται αὕτη ΖΘΚ : ζηθ : : ΖΘ : ζθ (1), διότι ἡ πλευρὰ ΖΚ=ζη. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ΖΘΗ : ΖΘΚ :: ΖΗ : ΖΚ ἢ ζη (2). Ἀλλ' ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΖΗΘ, ζηθ ταύτην πορίζόμεθα τὴν ἀναλογίαν ΖΗ : ζη :: ΖΘ : ζθ. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν ἀναλογίαν ταύτην τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) οἱ δεύτεροι λόγοι ἀναλογίαν ἀποτελοῦσι, καὶ οἱ πρῶτοι αὐτῶν λόγοι ἀναλογίαν σχηματίζουσι, τὴν ἑξῆς ΖΗΘ : ΖΘΚ : : ΖΘΚ : ζηθ. Τουτέστιν ἡ βάσις ΖΘΚ εἶναι τῶν βάσεων ΖΗΘ, ζηθ ἡ μέση ἀνάλογος. Λοιπὸν πᾶς κορμὸς πυραμίδος, παραλλήλους ἔχων βάσεις, ἀναλύεται εἰς τρεῖς πυραμίδας, ἐχούσας, ὕψος μὲν, τοῦ κορμοῦ τὸ ὕψος, βάσεις δὲ, ἡ μὲν αὐτῶν τὴν κάτω βάσιν τοῦ κορμοῦ, ἡ δὲ τὴν ἄνω βάσιν τοῦ κορμοῦ, ἡ δὲ τρίτη τὴν μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν βάσεων μέσην ἀνάλογον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 22.

Θεώρημα.

Ἐὰν τριγωνικόν τι πρίσμα τμηθῇ ὑπό τινος ἐπιπέδου ΔΕΣ, κεκλιμένου πρὸς τοῦ πρίσματος αὐτοῦ τὴν βάσιν ΑΒΓ, τὸ ἐκ τῆς τοιαύτης τομῆς παραγόμενον κολοβὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΣ ἀναλύεται εἰς τρεῖς πυραμίδας, ἐχούσας, κορυφὰς μὲν, τὰ σημεῖα Δ, Ε, Σ, κοινὴν δὲ βάσιν τοῦ κολοβοῦ πρίσματος τὴν βάσιν ΑΒΓ. (σχ. 216)

Διὰ τῶν τριῶν σημείων Σ, Α, Γ ἄγω τὸ ἐπίπεδον ΣΑΓ, τὸ ἀποκόπτον ἀπὸ τοῦ κολοβοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΣ τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΣΑΒΓ. Ἡ πυραμὶς αὕτη βάσιν μὲν ἔχει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Σ.

Ἀφαιρεθείσης δὲ ἀπὸ τοῦ κολοβοῦ πρίσματος τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ, μένει ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΓΔΕ, ἡ ἔχουσα κορυφὴν μὲν τὸ σημεῖον Σ, βάσιν δὲ τὸ τετράπλευρον ΑΓΔΕ. Μετὰ ταῦτα διὰ τῶν τριῶν σημείων Σ, Ε, Γ ἄγω τὸ ἐπίπεδον ΣΕΓ, τὸ διαχωρίζον τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα εἰς δύο πυραμίδας τριγωνικάς, τὴν ΣΑΓΕ καὶ τὴν ΣΓΔΕ.

Ἡ πυραμὶς ΣΑΓΕ, ἡ ἔχουσα βάσιν μὲν τὸ τρίγωνον ΑΓΕ, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Σ, εἶναι ἰσοδύναμος τῇ πυραμίδι ΒΑΓΕ τῇ ἐχούσῃ βάσιν μὲν τὸ αὐτὸ τρίγωνον ΑΓΕ, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Β· διότι αἱ δύο αὐταὶ πυραμίδες ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἔχουσι δὲ τὸ αὐτὸ ὕψος, διότι ἡ εὐθεῖα ΒΣ, παράλληλος οὖσα καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ καὶ τῆς εὐθείας ΓΔ, εἶναι παράλληλος καὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓΕ, ἐφ' οὗ αἱ δύο αὐταὶ εὐθεῖαι ὑπάρχουσιν. Ἄρα αἱ πυραμίδες ΣΑΓΕ, ΒΑΓΕ εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἡ πυραμὶς δὲ ΒΑΓΕ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα βάσιν μὲν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Ε.

Ἡ τρίτη πυραμὶς ΣΓΔΕ τρέπεται κατὰ πρῶτον εἰς τὴν ΑΣΓΔ, τὴν ἔχουσαν τὴν αὐτὴν βάσιν ΣΓΔ, καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἔχουσι δὲ αἱ πυραμίδες ΣΓΔΕ, ΑΣΓΔ τὸ αὐτὸ ὕψος, διότι ἡ εὐθεῖα ΑΕ εἶναι παράλληλος τοῦ ἐπιπέδου ΣΓΔ. Ἄρα αἱ πυραμίδες αὐταὶ εἶναι ἰσοδύναμοι. Κατόπιν δὲ τῆς πρώτης ταύτης τροπῆς ἡ πυραμὶς ΑΣΓΔ, ἢ ΣΑΓΔ, τρέπεται εἰς τὴν ΒΑΓΔ, διότι αἱ δύο αὗται πυραμίδες καὶ τὴν αὐτὴν ἔχουσι βάσιν ΑΓΔ, καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἔχουσι δὲ τὸ αὐτὸ ὕψος, διότι αἱ κορυφαὶ αὐτῶν Σ καὶ Β ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὑπάρχουσι παραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως. Ἄρα ἡ πυραμὶς ΣΓΔΕ, ἡ ἰσοδύναμος τῇ πυραμίδι ΑΣΓΔ, εἶναι καὶ τῇ πυραμίδι ΒΑΓΔ ἰσοδύναμος. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς ΒΑΓΔ δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς ἔχουσα βάσιν μὲν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Δ.

Λοιπὸν τὸ κολοβὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΣ εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι τριῶν πυραμίδων, ἐχουσῶν κοινὴν μὲν βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὰς δὲ τὰ τρία σημεῖα Δ, Ε, Σ.

Πόρισμα. Τὰ πλευρὰ ΑΕ, ΒΣ, ΓΔ, ἐὰν ἦναι κάθετα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, εἶναι τὰ ὕψη τῶν πυραμίδων, εἰς ἃς τὸ κολοβὸν ἀναλύεται πρίσμα. Ὅθεν, ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, τοῦ κολοβοῦ πρίσματος ἡ στερεότης ἐκφράζεται οὕτω $\frac{1}{3}$ ΑΒΓ$\times$ΑΕ $+\frac{1}{3}$ ΑΒΓ$\times$ΒΣ$+\frac{1}{3}$ΑΒΓ$\times$ΓΔ· ἀναγωγῆς δὲ γενομένης οὕτω $\frac{1}{3}$ ΑΒΓ$\times$(ΑΕ$+$ΒΣ$+$ΓΔ).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 23.

Θεώρημα.

Αἱ ὅμοιαι τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχουσι τὰς ὁμολόγους ἕδρας ὁμοίας καὶ τὰς ὁμολόγους στερεὰς γωνίας ἴσας. (σχ. 203)

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν, αἱ δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΤΔΕΖ εἶναι ὅμοιαι, ἐὰν τὰ δύο τρίγωνα ΣΑΒ, ΑΒΓ ἦναι καὶ ὅμοια τοῖς τριγώνοις ΤΔΕ, ΔΕΖ, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τεταγμένα τάξιν, τουτέστιν, ἐὰν ἡ γωνία ΑΒΣ=ΔΕΤ, ἡ γωνία ΒΑΣ=ΕΔΤ, ἡ γωνία ΑΒΓ=ΔΕΖ, καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ=ΕΔΖ, καὶ ἐὰν πρὸς τούτοις ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΣΑΒ, ΑΒΓ ἦναι ἴση τῇ κλίσει τῶν ἐπιπέδων ΤΔΕ, ΔΕΖ.

Τούτων τεθέντων, λέγω ὅτι αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος δύο πυραμίδες ἔχουσιν ὅλας τὰς ἕδρας ὁμοίας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὰς ὁμολόγους στερεὰς γωνίας ἴσας.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, λαμβάνω ΒΗ=ΕΔ, ΒΘ=ΕΖ, ΒΙ=ΕΤ, καὶ ἄγω τὰς εὐθείας ΗΘ, ΗΙ, ΙΘ. Ἡ τοιουτοτρόπως σχηματιζομένη πυραμὶς ΙΗΒΘ εἶναι ἴση τῇ πυραμίδι ΤΔΕΖ· διότι ἕνεκα τῶν πλευρῶν ΗΒ, ΒΘ, αἵτινες ἐλήφθησαν ἴσαι ταῖς πλευραῖς ΔΕ, ΕΖ, καὶ τῆς γωνίας ΗΒΘ, τῆς κατὰ τὰ δεδομένα ἴσης τῇ γωνίᾳ ΔΕΖ, τὸ τρίγωνον ΗΒΘ εἶναι ἴσον τῷ τριγώνῳ ΔΕΖ. Ἐὰν λοιπὸν ἐντεθῇ ἡ ἑτέρα τῶν πυραμίδων, ἡ ΤΔΕΖ, ἐν τῇ ἑτέρᾳ, ἐν τῇ ΙΗΒΘ, ἐὰν δηλαδὴ ἡ βάσις ΔΕΖ τεθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως ΗΒΘ, ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ΤΔΕ κλίνει πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΔΕΖ τόσον, ὅσον τὸ ἐπίπεδον ΣΑΒ κλίνει πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, τὸ ἐπίπεδον ΤΔΕ ἐφαρμόζεται κατὰ πάντα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΣΑΒ. Πρὸς τούτοις δὲ, ἐπειδὴ καθ' ὑπόθεσιν ἡ γωνία ΔΕΤ=ΗΒΙ, αἱ δύο ἴσαι εὐθεῖαι ΕΤ, ΒΙ ἐφαρμόζονται ἐπ' ἀλλήλας. Ἐν ἄλλοις λόγοις τὰ τέσσαρα σημεῖα Δ, Ε, Ζ, Τ συμπίπτουσι μετὰ τῶν τεσσάρων σημείων Η, Β, Θ, Ι, καὶ ἐπομένως (πρότ. 1, βιβλ. 6) αἱ δύο πυραμίδες ΤΔΕΖ, ΙΗΒΘ ταυτίζονται καὶ ἓν μόνον ἀποτελοῦσι σῶμα.

Ἀλλ' ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΔΕΖ, ΗΒΘ, ἡ γωνία ΒΗΘ=ΕΔΖ=ΒΑΓ. Ἄρα ἡ πλευρὰ ΗΘ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΓ. Ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ πλευρὰ ΗΙ εἶναι παράλληλος τῆς πλευρᾶς ΑΣ. Λοιπὸν τὸ ἐπίπεδον ΙΗΘ εἶναι παράλληλον τοῦ ἐπιπέδου ΣΑΓ (πρότ. 13, βιβλ. 5). Ἐντεῦθεν δὲ ἕπεται, ὅτι τὸ μὲν τρίγωνον ΙΗΘ, ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ τρίγωνον ΤΔΖ, εἶναι ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΣΑΓ (πρότ. 16, βιβλ. 6), τὸ δὲ τρίγωνον ΙΒΘ, ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ τρίγωνον ΤΕΖ, εἶναι ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΣΒΓ. Ἄρα αἱ δύο ὅμοιαι τριγωνικαὶ πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΤΔΕΖ ἔχουσι καὶ τὰς τέσσαρας ὁμολόγους ἕδρας ὁμοίας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· ἔχουσι προσέτι καὶ τὰς ὁμολόγους στερεὰς γωνίας ἴσας.

Διότι ἡ μὲν γωνία Ε ἐνετέθη εἰς τὴν ὁμόλογον αὐτῇ γωνίαν Β· τὸ αὐτὸ δὲ δύναταί τις νὰ πράξῃ καὶ περὶ τῶν λοιπῶν ὁμολόγων στερεῶν γωνιῶν. Ἀλλ' εἶναι περιττὸν, διότι φανερὸν εἶναι ὅτι δύο οἱαιδήποτε ὁμόλογοι στερεαὶ γωνίαι, παραδείγματος χάριν, αἱ γωνίαι Τ καὶ Σ, εἶναι ἴσαι, ὡς ἐξ ἴσων καὶ ὁμοίως διατεταγμένων ἐπιπέδων γωνιῶν συνιστάμεναι.

Λοιπὸν αἱ ὅμοιαι τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχουσι καὶ τὰς ὁμολόγους ἕδρας ὁμοίας, καὶ τὰς ὁμολόγους στερεὰς γωνίας ἴσας.

Πόρισμα 1. Τὰ ὅμοια τῶν δύο ὁμοίων πυραμίδων τρίγωνα ταύτας χορηγοῦσι τὰς ἀναλογίας ΑΒ : ΔΕ :: ΒΓ : ΕΖ :: ΑΓ : ΔΖ:: ΑΣ : ΔΤ :: ΣΒ : ΤΕ :: ΣΓ : ΤΖ. Λοιπὸν αἱ ὁμόλογοι τῶν ὁμοίων τριγωνικῶν πυραμίδων ῥάχεις εἶναι ἀνάλογοι.

Πόρισμα 2. Ἐπειδὴ, ὡς ἤδη ἀπεδείχθη, αἱ ὁμόλογοι στερεαὶ γωνίαι τῶν ὁμοίων τριγωνικῶν πυραμίδων εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι εἰς τὰς ὁμοίας τριγωνικὰς πυραμίδας αἱ ἀμοιβαῖαι τῶν ὁμολόγων ἑδρῶν κλίσεις εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα 3. Ἐὰν τριγωνική τις πυραμὶς ΣΑΒΓ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου τινὸς ΗΙΘ, πρός τινα ἕδραν ΣΑΓ παραλλήλου, ἡ τοιουτοτρόπως ἀποκοπτομένη μερικὴ πυραμὶς ΒΗΙΘ εἶναι ὁμοία τῇ ὁλικῇ πυραμίδι ΒΑΣΓ· διότι τὰ τρίγωνα ΒΗΙ, ΒΗΘ καὶ ὅμοια εἶναι τοῖς τριγώνοις ΒΑΣ, ΒΑΓ, ἑκάτερον ἑκατέρῳ, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον διατεταγμένα, καὶ τὴν αὐτὴν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα κλίσιν.

Ἄρα αἱ δύο πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι.

Πόρισμα 4. (σχ. 214) Ἐὰν οἱαδήποτε πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ ὑπό τινος ἐπιπέδου αβγδε πρὸς τὴν βάσιν αὐτῆς παραλλήλου τμηθῇ, ἡ ἀποκοπτομένη μερικὴ πυραμὶς Σαβγδε εἶναι ὁμοία τῇ ὁλοκλήρῳ πυραμίδι ΣΑΒΓΔΕ· διότι αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, αβγδε εἶναι ὅμοιαι· ἐκτὸς δὲ τούτου, ἐὰν συναφθῶσι τὰ σημεῖα Β καὶ Ε, ϐ καὶ ε διὰ τῶν εὐθειῶν ΒΕ, ϐε, ὡς ἤδη ἀπεδείχθη, αἱ τριγωνικαὶ πυραμίδες ΣΑΒΕ, Σαϐε εἶναι ὅμοιαι. Ἄρα τὸ σημεῖον Σ, καὶ ὡς πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΕ, καὶ ὡς πρὸς τὴν βάσιν αϐε, διορίζεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, διορίζεται δηλαδὴ δι' ὁμοίων τριγωνικῶν πυραμίδων. Λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓΔΕ, Σαϐγδε εἶναι ὅμοιαι (ὁρισμ. 18, βιϐλ. 6).

Σχόλιον. Ἀντὶ τῶν πέντε δεδομένων, τῶν κατὰ τὸν ὁρισμὸν ἀπαιτουμένων πρὸς βεϐαίωσιν τῆς ὁμοιότητος δύο τριγωνικῶν πυραμίδων, ἰσάριθμα ἄλλα δεδομένα ν' ἀντικαταστήσῃ τις δύναται. Ἐπειδὴ δὲ διάφοροι τῆς τοιαύτης ἀντικαταστάσεως ὑπάρχουσι συνδυασμοί, διάφορα σχηματίζονται περὶ ὁμοίων τριγωνικῶν πυραμίδων θεωρήματα, ἐν οἷς διακρίνεται τὸ ἑξῆς. Αἱ τριγωνικαὶ πυραμίδες, αἱ ἔχουσαι τὰς ὁμολόγους αὐτῶν ῥάχεις ἀναλόγους, εἶναι ὅμοιαι (σχ. 203)

Διότι, ἐκ τῶν ἀναλογιῶν τούτων ΑΒ : ΔΕ : : ΒΓ : ΕΖ : : ΑΓ : ΔΖ : : ΑΣ : ΔΤ : : ΣΒ : ΤΕ : : ΣΓ : ΤΖ, αἵτινες πέντε περιλαμϐάνουσι συνθήκας, ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΣ, ΑΒΓ εἶναι καὶ ὅμοια τοῖς τριγώνοις ΔΕΤ, ΔΕΖ, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν διατεταγμένα τρόπον. Ὡσαύτως δὲ ὅμοια εἶναι καὶ τὰ τρίγωνα ΣΒΓ, ΤΕΖ. Ἄρα αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι, ἐξ ὧν ἡ στερεὰ γωνία Β σχηματίζεται, καὶ αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι, αἱ τὴν στερεὰν γωνίαν Ε ἀποτελοῦσαι, εἶναι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· ἑπομένως καὶ αἱ ἀμοιϐαῖαι κλίσεις, ἡ τῶν δύο ἐπιπέδων ΣΑΒ, ΑΒΓ, καὶ ἡ τῶν ὁμολόγων αὐτοῖς ἐπιπέδων ΤΔΕ, ΔΕΖ, εἶναι ἴσαι. Ἄρα αἱ δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες, αἱ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν ῥάχεις ἀναλόγους ἔχουσαι, εἶναι ὅμοιαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 24.

Θεώρημα.

Τὰ ὅμοια πολύεδρα ἔχουσι τὰς ὁμολόγους ἕδρας ὁμοίας καὶ τὰς ὁμολόγους στερὰς γωνίας ἴσας. (σχ. 219)

Ἔστω ΑΒΓΔΕ πολυέδρου τινὸς ἡ βάσις· ἔστωσαν δὲ Μ καὶ Ν αἱ κορυφαὶ δύο στερεῶν αὐτοῦ γωνιῶν, ἐκτὸς τῆς βάσεως κειμένων, ὧν ἡ θέσις προσδιορίζεται διὰ τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων ΜΑΒΓ, ΝΑΒΓ, τῶν ἐχουσῶν τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒΓ. Ἔστω πρὸς τούτοις αϐγδε ἡ βάσις ἄλλου τινὸς ὁμοίου πολυέδρου, ἡ ὁμοία τῇ βάσει ΑΒΓΔΕ, ἔστωσαν δὲ μ καὶ ν αἱ κορυφαὶ τῶν στερεῶν αὐτοῦ γωνιῶν, αἱ ὁμόλογοι ταῖς κορυφαῖς Μ καὶ Ν, αἱ προσδιοριζόμεναι διὰ τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων μαϐγ, ναϐγ, τῶν πρὸς τὰς πυραμίδας ΜΑΒΓ, ΝΑΒΓ ὁμοίων. Λέγω, ἐν πρώτοις, ὅτι τὰ ἀποστήματα ΜΝ, μν εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ΑΒ, αϐ.

Τῷ ὄντι· ἐπειδὴ αἱ πυραμίδες ΜΑΒΓ, μαϐγ εἶναι ὅμοιαι, ἡ ἀμοιϐαία τῶν ἐπιπέδων ΜΑΓ, ΒΑΓ κλίσις καὶ ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων μαγ, ϐαγ εἶναι ἴσαι. Ὡσαύτως δὲ, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν πυραμίδων ΝΑΒΓ, ναϐγ, ἡ τῶν ἐπιπέδων ΝΑΓ, ΒΑΓ ἀμοιϐαία κλίσις καὶ ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ναγ, ϐαγ εἶναι ἴσαι. Ἀφαιρουμένων δὲ τῶν πρώτων κλίσεων ἀπὸ τῶν δευτέρων, αἱ ὑπολειπόμεναι κλίσεις, ἡ τῶν ἐπιπέδων ΝΑΓ, ΜΑΓ, καὶ ἡ τῶν ἐπιπέδων ναγ, μαγ εἶναι ἴσαι. Ἀλλ' ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν αὐτῶν πυραμίδων ἕπεται, ὅτι τὰ τρίγωνα ΜΑΓ, μαγ εἶναι ὅμοια· ὅμοια δὲ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι καὶ τὰ τρίγωνα ΝΑΓ, ναγ. Ἄρα αἱ δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ΜΝΑΓ, μναγ ἔχουσι δύο ἕδρας ὁμολόγους ὁμοίας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον διατεταγμένας, καὶ ἰσάκις ἐπ' ἀλλήλας κλινούσας. Λοιπὸν αἱ πυραμίδες αὗται εἶναι ὅμοιαι (πρότ. 23, βιϐλ. 6), καὶ αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν ῥάχεις σχηματίζουσι τὴν ἀναλογίαν ταύτην ΜΝ : μν : : ΑΜ : αμ. Ἀλλὰ κατὰ τὰς δεδομένα, ΑΜ : αμ :: ΑΒ : αϐ. Ἄρα ΜΝ : μν : : ΑΒ : αϐ.

Ἔστωσαν ἤδη Π καὶ π δύο ἄλλαι ὁμόλογοι τῶν αὐτῶν πολυέδρων κορυφαί. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα, αἱ ἀναλογίαι ὑπάρχουσιν αὗται ΠΝ : πν : : ΑΒ : αϐ, καὶ ΠΜ : πμ : : ΑΒ : αϐ. Ἄρα ΜΝ : μν : : ΠΝ : πν : : ΠΜ : πμ. Λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΠΜΝ, τὸ συνάπτον τρεῖς ὁποιασδήποτε κορυφὰς τοῦ ἑτέρου τῶν ὁμοίων πολυέδρων, καὶ τὸ τρίγωνον πμν, τὸ συνάπτον τὰς τρεῖς ὁμολόγους κορυφὰς τοῦ πολυέδρου τοῦ ἄλλου, εἶναι ὅμοια.

Ἔστωσαν προσέτι Κ καὶ κ δύο ἄλλαι ὁμόλογοι τῶν πολυέδρων αὐτῶν κορυφαί. Κατὰ τὰ ἤδη ἀποδεδειγμένα, τὰ τρίγωνα ΠΚΝ, πκν εἶναι ὅμοια. Λέγω δὲ ἤδη, ὅτι τῶν ἐπιπέδων ΠΚΝ, ΠΜΝ ἡ κλίσις, καὶ ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων πκν, πμν εἶναι ἴσαι.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἄγω τὰς εὐθείας ΚΜ, κμ. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὰ εἰρημένα τὰ τρίγωνα ΚΜΝ, κμν εἶναι ὅμοια, αἱ γωνίαι ΚΝΜ, κνμ εἶναι ἴσαι. Ἐὰν δὲ φαντασθῶ εἰς μὲν τὸ σημεῖον Ν γωνίαν στερεὰν, συνισταμένην ἐκ τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΚΝΜ, ΚΝΠ, ΠΝΜ, εἰς δὲ τὸ σημεῖον ν γωνίαν στερεὰν, ἀποτελουμένην ὑπὸ τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν κνμ, κνπ, πνμ, ἐπειδὴ αἱ ἐπίπεδοι αὐταὶ γωνίαι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἕπεται ὅτι καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι ἴσαι εἶναι. Ἄρα ἡ τῶν ἐπιπέδων ΠΝΚ, ΠΝΜ ἀμοιβαία κλίσις, καὶ ἡ κλίσις τῶν ὁμολόγων αὐτοῖς ἐπιπέδων πνκ, πνμ εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν, ἐὰν τὰ δύο τρίγωνα ΠΝΚ, ΠΝΜ ὑποτεθῶσιν ὑπάρχοντα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τουτέστιν, ἐὰν ἡ γωνία ΚΝΜ=ΚΝΠ+ΠΝΜ, ἀναγκαίως καὶ τὰ δύο τρίγωνα πνκ, πνμ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κεῖνται ἐπιπέδου, καὶ ἡ γωνία κνμ=κνπ+πνμ.

Πάντα δὲ τὰ εἰρημένα ἀληθῆ εἶναι, ὁποιαιδήποτε γωνίαι Μ, Ν, Π, Κ πρὸς τὰς ὁμολόγους αὐταῖς μ, ν, π, κ παραβληθῶσιν. Ἐὰν δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑτέρου τῶν ὁμοίων πολυέδρων ὑποτεθῇ διῃρημένη εἰς τρίγωνα, οἷα τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΜΝΠ, ΝΠΚ, κτλ., καὶ τοῦ ἄλλου πολυέδρου ἡ ἐπιφάνεια ἴσην περιλαμβάνει πληθὺν τριγώνων ὁμοίων καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν διατεταγμένων τρόπον, ἤτοι τὰ τρίγωνα αβγ, αγδ, μνπ, νπκ, κτλ. Ἐὰν δὲ πολλὰ τρίγωνα ΜΠΝ, ΝΠΚ, κτλ. ἐν τῇ αὐτῇ περιλαμβάνωνται ἕδρᾳ καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κεῖνται ἐπιπέδου, τὰ αὐτοῖς ὁμόλογα μπν, νπκ, κτλ. ὡσαύτως ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κεῖνται ἐπιπέδου καὶ ἐν τῇ αὐτῇ περιλαμβάνονται ἕδρᾳ. Ἄρα πᾶσα πολύεδρος ἕδρα τοῦ ἑτέρου τῶν ὁμοίων πολυέδρων ἀντιστοιχεῖ πρὸς ὁμοίαν πολύγωνον ἕδραν τοῦ ἄλλου πολυέδρου. Λοιπὸν τὰ δύο ὅμοια πολύεδρα σχηματίζονται ὑπὸ ἴσης πληθύος πολυγώνων καὶ ὁμοίων καὶ ὁμοίως διατεταγμένων.

Λέγω πρὸς τούτοις ὅτι αἱ ὁμόλογοι τῶν πολυέδρων αὐτῶν στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι. Διότι ἐὰν, παραδείγματος χάριν, ἡ στερεὰ γωνία Ν ἐκ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΚΝΠ, ΠΝΜ, ΜΝΡ, ΚΝΡ ἀποτελῆται, ἡ ὁμόλογος αὐτῇ στερεὰ γωνία ν ἐκ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν κνπ, πνμ, μνρ, κνρ σχηματίζεται. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἐπίπεδοι αὐταὶ ὁμόλογαι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐφ᾽ ὧν δύο ὁποιαιδήποτε ἐξ αὐτῶν προσκείμεναι γωνίαι κεῖνται, τὴν αὐτὴν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα κλίσιν, οἵαν καὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ ὁμόλογα αὐτοῖς, αἱ στερεαὶ τῶν ὁμοίων πολυέδρων γωνίαι εἶναι ἴσαι, διότι ἐφαρμόζονται ἐντελῶς, τῆς ἑτέρας εἰς τὴν ἑτέραν ἐντιθεμένης.

Λοιπὸν τῶν ὁμοίων πολυέδρων αἱ ὁμόλογοι ἕδραι εἶναι ὅμοιαι καὶ αἱ ὁμόλογοι στερεαὶ αὐτῶν γωνίαι ἴσαι.

Πόρισμα. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω γενομένης ἀποδείξεως τοῦ παρόντος θεωρήματος ἕπεται ὅτι, ἐὰν συναφθῶσι τέσσαρες κορυφαὶ τοῦ ἑτέρου τῶν ὁμοίων πολυέδρων καὶ αἱ τέσσαρες ὁμόλογοι κορυφαὶ τοῦ πολυέδρου τοῦ ἄλλου, σχηματίζονται δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ὅμοιαι, διότι αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν ῥάχεις εἶναι ἀνάλογοι (πρότ. 23, βιβλ. 6).

Ἐκ τῆς αὐτῆς ἀποδείξεως ἕπεται προσέτι, ὅτι αἱ ὁμόλογοι τῶν ὁμοίων πολυέδρων διαγώνιοι, παραδείγματος χάριν αἱ διαγώνιοι ΑΝ, αν, εἶναι πρὸς τὰς ὁμολόγους τῶν πολυέδρων ῥάχεις ΑΒ, αβ ἀνάλογοι. (*)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 25.

Θεώρημα.

Τὰ ὅμοια πολύεδρα ἀναλύονται εἰς ἰσαρίθμους ὁμολόγους τριγωνικὰς πυραμίδας καὶ ὁμοίας καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν διατεταγμένας τάξιν.

Κατὰ τὰ ἤδη ἀποδεδειγμένα, αἱ ἐπιφάνειαι τῶν πολυέδρων ἀναλύονται εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα ὅμοια, ἑκάτερον ἑκατέρῳ, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν διατεταγμένα τάξιν. Ἐὰν λοιπὸν φαντασθῶ τὸ ἕτερον τῶν ὁμοίων πολυέδρων ἀναλελυμένον εἰς τόσας πυραμίδας τριγωνικάς, ὅσα ἔχει ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ τρίγωνα, ἐξαιρουμένων τῶν τριγώνων, τῶν ἀποτελούντων στερεάν τινα γωνίαν αὐτοῦ Α, καὶ τὸ ἄλλο πολύεδρον ἀναλύεται εἰς τόσας τριγωνικὰς πυραμίδας, ὅσα ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἔχει τρίγωνα, ἐξαιρουμένων τῶν τριγώνων, ἐξ ὧν ἡ στερεὰ γωνία α, ἡ ὁμόλογος τῇ Α, σχηματίζεται. Ἡ πυραμὶς δὲ ἡ τριγωνική, ἡ συνάπτουσα τέσσαρας οἱασδήποτε κορυφὰς τοῦ ἑτέρου τῶν ὁμοίων πολυέδρων, καὶ ἡ

(*) Τῆς προτάσεως ταύτης ἡ ἀπόδειξις μεγάλην ἔχει ὁμοιότητα πρὸς τὴν ἀπόδειξιν τῆς δευτέρας προτάσεως τοῦ αὐτοῦ βιβλίου. Ο. Μ.

τριγωνικὴ πυραμὶς, ἡ συνάπτουσα τὰς τέσσαρας ὁμολόγους κορυφὰς τοῦ πολυέδρου τοῦ ἄλλου, εἶναι ὅμοιαι. Ἄρα τὰ ὅμοια πολύεδρα, κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 26.

Θεώρημα.

Αἱ πυραμίδες αἱ ὅμοιαι εἶναι πρὸς τοὺς κύϐους τῶν ὁμολόγων ῥάχεων αὐτῶν ἀνάλογοι. (σχ. 214)

Ὅταν δύο πυραμίδες ἦναι ὅμοιαι, ἡ μικροτέρα αὐτῶν ἐντὸς τῆς μεγαλητέρας δύναται νὰ ἐντεθῇ τοιουτοτρόπως, ὥστε καὶ αἱ δύο τὴν αὐτὴν νὰ ἔχωσι στερεὰν γωνίαν Σ. Τούτου δὲ γενομένου, τῶν πυραμίδων αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, αϐγδε εἶναι παράλληλοι· διότι, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν ὁμολόγων ἑδρῶν (πρότ. 23, βιϐλ. 6), ἡ γωνία Σαϐ=ΣΑΒ, καὶ ἡ γωνία Σϐγ=ΣΒΓ. Ἄρα τὸ ἐπίπεδον αϐγ εἶναι παράλληλον τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ (πρότ. 13, βιϐλ. 5). Καὶ τούτου τεθέντος, ἄγω ἐκ τῆς κορυφῆς Σ τὴν ΣΟ κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, ἔστω δὲ ο τὸ σημεῖον, εἰς ὃ ἡ κάθετος αὕτη διατρυπᾷ τὸ ἐπίπεδον αϐγ. Κατὰ τὰ ἤδη ἀποδεδειγμένα (πρότ. 16, βιϐλ. 6), ΣΟ : Σο : : ΣΑ : Σα : : ΑΒ : αϐ. Ὅθεν $\frac{1}{3}$ ΣΟ : $\frac{1}{3}$ Σο : : ΑΒ : αϐ.

Ἀλλ' ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν βάσεων ΑΒΓΔΕ, αϐγδε,

$$\mathrm{ΑΒΓΔΕ} : \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon : : \overline{\mathrm{ΑΒ}}^2 : \overline{\alpha\beta}^2.$$

Πολλαπλασιαζομένων κατὰ τάξιν τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τῶν δύο αὐτῶν ἀναλογιῶν, αὕτη ἀποτελεῖται ἡ ἀναλογία,

$$\mathrm{ΑΒΓΔΕ}\times\tfrac{1}{3}\mathrm{ΣΟ} : \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\times\tfrac{1}{3}\Sigma o : : \overline{\mathrm{ΑΒ}}^3 : \overline{\alpha\beta}^3.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ποσὸν τοῦτο ΑΒΓΔΕ$\times\frac{1}{3}$ΣΟ τὴν στερεότητα τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ ἐκφράζει (πρότ. 18, βιϐλ. 6), διὰ δὲ τοῦ ποσοῦ τούτου αϐγδε$\times\frac{1}{3}$Σο ἡ στερεότης τῆς πυραμίδος Σαϐγδε σημαίνεται, ἕπεται ὅτι αἱ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς τοὺς κύϐους τῶν ὁμολόγων ῥάχεων αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 27.

Θεώρημα.

Τὰ ὅμοια πολύεδρα εἶναι πρὸς τοὺς κύβους τῶν ὁμολόγων ῥάχεων αὐτῶν ἀνάλογα. (σχ. 219)

Δύο ὅμοια πολύεδρα ἀναλύονται εἰς ἰσαρίθμους πυραμίδας τριγωνικὰς ὁμολόγους ὁμοίας (πρότ. 25, βιβλ. 6). Ἀλλ' αἱ ὅμοιαι τριγωνικαὶ πυραμίδες ΑΓΜΝ, αγμν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς κύβους τῶν ὁμολόγων ΑΒ, αβ. Τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἔχουσι καὶ δύο ἄλλαι οἱαιδήποτε ὁμόλογοι τριγωνικαὶ πυραμίδες. Ἄρα τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων, ἐξ ὧν τὸ πρῶτον πολύεδρον ἀποτελεῖται, καὶ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων, εἰς ἃς τὸ δεύτερον πολύεδρον ἀναλύεται, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς κύβους δύο οἱωνδήποτε ὁμολόγων ῥάχεων τῶν ὁμοίων αὐτῶν πολυέδρων.

Γενικὸν σχόλιον.

Δυνατὸν εἶναι νὰ παρασταθῶσι διὰ τύπων ἀλγεβρικῶν, δι' ἐκφράσεων δηλαδὴ ὅσον ἔνεστι συνεπτυγμένων, τὰ περὶ μέτρου τῆς στερεότητος τῶν ἐξαιρέτων πολυέδρων, περὶ ὧν αἱ κυριώτεραι τοῦ παρόντος βιβλίου διέλαβον προτάσεις.

Ἔστω Β ἡ βάσις πρίσματός τινος, Υ δὲ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Ἡ στερεότης τοῦ πρίσματος αὐτοῦ εἶναι $\mathrm{B}\times\Upsilon$, ἢ ΒΥ.

Ἔστω Β ἡ βάσις πυραμίδος τινὸς, Υ δὲ τὸ ὕψος αὐτῆς. Ἡ στερεότης τῆς πυραμίδος αὐτῆς εἶναι $\mathrm{B}\times\frac{1}{3}\Upsilon$, ἢ $\frac{1}{3}\mathrm{B}\times\Upsilon$, ἢ $\frac{1}{3}\mathrm{B}\Upsilon$.

Ἔστω Υ τὸ ὕψος κολοβῆς τινὸς πυραμίδος, ἐχούσης βάσεις παραλλήλους, ἔστωσαν δὲ Α καὶ Β αἱ βάσεις αὐταί. Ἡ μὲν μέση τῶν βάσεων αὐτῶν ἀνάλογος εἶναι ἡ $\sqrt{\mathrm{AB}}$, ἡ δὲ στερεότης τῆς κολοβῆς αὐτῆς πυραμίδος εἶναι $\frac{1}{3}\Upsilon\times(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\sqrt{\mathrm{AB}})$.

Ἔστωσαν Β μὲν ἡ βάσις κολοβοῦ τινὸς πρίσματος, Υ δὲ Υ′, Υ″ τὰ ὕψη τῶν τριῶν αὐτοῦ κορυφῶν τῶν ἄνω. Ἡ στερεότης τοῦ κολοβοῦ πρίσματος εἶναι $\frac{1}{3}\,\mathrm{B}\times(\Upsilon+\Upsilon'+\Upsilon'')$.

Ἔστωσαν Σ καὶ σ αἱ στερεότητες δύο πολυέδρων ὁμοίων, Ρ δὲ καὶ ρ δύο τῶν πολυέδρων αὐτῶ ὁμόλογοι ῥάχεις, ἢ δύο τῶν πολυέδρων αὐτῶν ὁμόλογοι διαγώνιοι, κατὰ τὰ ἤδη ἀποδεδειγμένα αὕτη ὑπάρχει ἡ ἀναλογία. $\Sigma : \sigma :: P^3 : \rho^3$. (*)

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Ἡ Σφαῖρα.

Ὁρισμοί.

1. Σφαῖρα ὀνομάζεται τὸ στερεὸν, τὸ ἀποπερατούμενον ὑπὸ ἐπιφανείας κυρτῆς, ἐξ ἴσου καθ᾽ ὅλα αὐτῆς τὰ σημεῖα ἀφισταμένης ἀπό τινος ἐσωτερικοῦ σημείου, *κέντρου καλουμένου*.

Δύναταί τις νὰ φαντασθῇ τὴν σφαῖραν παραγομένην ἐκ τῆς περιαγωγῆς ἡμικυκλίου τινὸς ΔΑΕ, πέριξ τῆς ἰδίας αὐτοῦ διαμέτρου ΔΕ στραφέντος. Διότι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς σχηματιζομένης κατ᾽ αὐτὴν τὴν κίνησιν κυρτῆς ἐπιφανείας ἰσάκις ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ. (σχ. 220)

2. *Ἀκτὶς σφαίρας* λέγεται ἡ εὐθεῖα ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας εἴς τι σημεῖον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἀγομένη. *Διάμετρος* δὲ ἢ *ἄξων* ὀνομάζεται ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διαβαί-

---

(*) Τὸ ἕκτον βιβλίον ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ τρίτον, αἱ περὶ καταμετρήσεως μάλιστα ἀποδείξεις εἶναι σχεδὸν αἱ αὐταί.

Εἰς τὰ πολύγωνα μονὰς λαμβάνεται τὸ τετράγωνον, καὶ διὰ τοῦτο ὅλα τὰ σχήματα τὰ πολύγωνα πρὸς τὸ τετράγωνον παραβάλλονται. Τῶν δὲ πολυέδρων μονὰς εἶναι ὁ κύβος, πρὸς ὃν ἀνάγονται ἀναλυόμενα, ἢ μετασχηματιζόμενα ὅλα τὰ στερεὰ, τὰ ὑπὸ ἐπιπέδων ἀποπερατούμενα. Παραδείγματος χάριν, πᾶν παραλληλεπίπεδον μέτρον ἔχει τὸ γινόμενον τῶν τριῶν αὐτοῦ διαστάσεων, ἐὰν κύβος ληφθῇ ὡς μονάς. Δύο τριγωνικὰ πρίσματα ἀποτελοῦσιν ἓν παραλληλεπίπεδον. Πᾶν πρίσμα ἀναλύεται εἰς πολλὰ πρίσματα τριγωνικά. Τρεῖς πυραμίδες τριγωνικαὶ συνιστῶσιν ἓν τριγωνικὸν πρίσμα. Πᾶσα δὲ πυραμὶς καὶ πᾶν πολύεδρον εἰς τριγωνικὰς ἀναλύεται πυραμίδας.

Αὕτη εἶναι τῆς καταμετρήσεως τῶν πολυέδρων ἡ ἄλυσις.

νουσα καὶ ἀμφοτέρωθεν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς ἀπολήγουσα εὐθεῖα.

Ὅλαι τῆς σφαίρας αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι. Καὶ ὅλαι αἱ διάμετροι ἴσαι εἶναι καὶ διπλάσιαι τῶν ἀκτίνων.

3. Ἐν τοῖς ἑπομένοις θέλει ἀποδειχθῇ (πρότ. 1), ὅτι πᾶσα σφαίρας τομὴ, διὰ ἐπιπέδου γινομένη, εἶναι κύκλος. Τούτου τεθέντος, καλεῖται *κύκλος μέγιστος* πᾶσα διὰ τοῦ κέντρου σφαίρας τομή· *κύκλος* δὲ *μικρὸς* ὀναμάζεται πᾶσα ἄλλη σφαίρας τομὴ, μὴ ἐκ τοῦ κέντρου διαβαίνουσα.

4. *Ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον* σφαίρας λέγεται τὸ ἔχον ἓν μόνον μετὰ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς σημεῖον κοινόν.

5. *Πόλος κύκλου* σφαίρας καλεῖται σημεῖόν τι τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἰσάκις ἀπέχον ἐξ ὅλων τῶν σημείων τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου αὐτοῦ.

Πᾶς σφαίρας κύκλος, μικρὸς ἢ μέγιστος, δύο ἔχει πόλους. Τοῦτο δὲ θέλει κατόπιν ἀποδειχθῆ. (πρότ. 6).

6. *Τρίγωνον σφαιρικὸν* ὀνομάζεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ μεταξὺ τριῶν τόξων κύκλων μεγίστων περιεχόμενον.

Τὰ τόξα αὐτὰ λέγονται *πλευραὶ* τοῦ τριγώνου, ὑποτίθενται δὲ πάντοτε ἡμιπεριφερείας μικρότερα.

Αἱ ἀμοιβαῖαι κλίσεις τῶν ἐπιπέδων, ἐφ᾿ ὧν τὰ τόξα κεῖνται, εἶναι τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ γωνίαι.

7. Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον λέγεται *ὀρθογώνιον*, *ἰσοσκελὲς*, *ἰσόπλευρον* κατὰ τὰς αὐτὰς περιστάσεις, καθ᾿ ἃς καὶ τὸ εὐθύγραμμον τρίγωνον οὕτω καλεῖται.

8. *Πολύγωνον σφαιρικὸν* ὀνομάζεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ πολλῶν τόξων κύκλων μεγίστων.

9. *Ἄτρακτος* λέγεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ περικλειόμενον μεταξὺ δύο μεγίστων ἡμικυκλίων, ἀποπερατουμένων ὑπὸ κοινῆς τινὸς διαμέτρου.

10. *Σφὴν* ἢ *ὄνυξ σφαιρικὸς* ὀνομάζεται τὸ μέρος τοῦ σώματος τῆς σφαίρας, τὸ μεταξὺ δύο μεγίστων ἡμικυκλίων καὶ τοῦ ἀτράκτου αὐτῶν, βάσεως τόπον ἐπέχοντος, περιλαμβανόμενον.

11. *Πυραμὶς σφαιρικὴ* λέγεται τὸ μέρος τοῦ σώματος τῆς

σφαίρας, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων στερεᾶς τινὸς γωνίας, ἐχούσης τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ τῆς σφαίρας κέντρον. *Βάσις* δὲ πάσης τοιαύτης πυραμίδος ὀνομάζεται τὸ πολύγωνον τὸ σφαιρικὸν, τὸ ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων σχηματιζόμενον.

12. *Ζώνη* καλεῖται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἐπιπέδων παραλλήλων. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ὀνομάζονται *βάσεις* τῆς ζώνης. Ἂν τὸ ἕτερον τῶν ἐπιπέδων ἅπτηται τῆς σφαίρας, τοῦτο δὲ ἐνδεχόμενον εἶναι, ἡ ζώνη τότε μίαν μόνην ἔχει βάσιν.

13. *Τμῆμα σφαιρικὸν* λέγεται τὸ μέρος τοῦ σώματος τῆς σφαίρας, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, ἀποτελούντων τὰς βάσεις αὐτοῦ.

Ὅταν τὸ ἕτερον τῶν παραλλήλων αὐτῶν ἐπιπέδων ἅπτηται τῆς σφαίρας, τοῦτο δὲ ἐνδεχόμενον εἶναι, μίαν τότε τὸ τμῆμα μόνην ἔχει βάσιν.

14. *Ὕψος ζώνης* ἢ *τμήματος σφαιρικοῦ* ὀνομάζεται ἡ ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, τῶν ἀποτελούντων τὰς βάσεις τῆς ζώνης ἢ τοῦ τμήματος αὐτοῦ.

15. Περιαγομένου τοῦ ἡμικυκλίου ΔΑΕ περὶ τὴν διάμετρον ΔΕ καὶ σχηματιζομένης τῆς σφαίρας, συμπεριάγεται καὶ πᾶς αὐτοῦ κυκλικὸς τομεὺς, οἷος ὁ ΔΓΖ, ἢ ΖΓΘ, καὶ ἀποτελεῖται στερεόν τι, ὁ λεγόμενος *σφαιρικὸς τομεύς*. (σχ. 220)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1.

Θεώρημα.

Πᾶσα σφαίρας τομὴ, διὰ ἐπιπέδου γινομένη, εἶναι κύκλος. (σχ. 221)

Ἔστω ΑΜΒ ἡ δι' ἐπιπέδου γενομένη τομὴ τῆς σφαίρας, τῆς ἐχούσης κέντρον τὸ σημεῖον Γ. Ἐκ τοῦ σημείου Γ ἄγω ἐπὶ μὲν τοῦ ἐπιπέδου ΑΜΒ τὴν κάθετον ΓΟ, εἰς διάφορα δὲ σημεῖα τῆς καμπύλης ΑΜΒ, εἰς ἣν ἡ τομὴ ἀπολήγει, τὰς εὐθείας ΓΜ, ΓΜ, ΓΒ.

Ἐπειδὴ αἱ πλάγιαι ΓΜ, ΓΜ, ΓΒ εἶναι ἴσαι, διότι ἀκτῖνες εἶναι τῆς σφαίρας, ἰσάκις ἀπὸ τῆς καθέτου ΓΟ ἀπέχουσι (πρότ. 5, βιβλ. 5). Ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΟΜ, ΟΜ, ΟΒ εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν ἡ τομὴ ΑΜΒ εἶναι κύκλος, τὸ σημεῖον Ο κέντρον ἔχων.

Πόρισμα 1. Ἐὰν διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἡ τομὴ διαβαίνῃ, ἀκτὶς αὐτῆς εἶναι τῆς σφαίρας ἡ ἀκτίς. Ἄρα ὅλοι οἱ μέγιστοι κύκλοι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους εἶναι.

Πόρισμα 2. Οἱ μέγιστοι κύκλοι εἰς δύο ἴσα διχοτομοῦσιν ἀλλήλους μέρη. Διότι ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ, ἐκ τοῦ κέντρου διαβαίνουσα, διάμετρος εἶναι.

Πόρισμα 3. Καὶ ἡ σφαῖρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς εἰς δύο ἴσα διατέμνονται μέρη ὑπὸ παντὸς κύκλου μεγίστου. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἂς ἀποσπασθῶσιν ἀπ' ἀλλήλων τὰ δύο ἡμισφαίρια, καὶ τὸ ἕτερον εἰς τὸ ἕτερον ἂς ἐντεθῇ οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωσι τὴν μὲν βάσιν κοινὴν, τὴν δὲ κυρτὴν ἐπιφάνειαν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἐστραμμένην. Τούτου γενομένου, αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο ἡμισφαιρίων ἀναγκαίως ταυτίζονται, διότι ἄλλως σημεῖα τινὰ τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν ἤθελον ἀνισάκις ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπέχει.

Πόρισμα. 4. Τὸ κέντρον παντὸς κύκλου μικροῦ καὶ τὸ τῆς σφαίρας ὑπάρχουσιν ἐπὶ τῆς καθέτου, τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μικροῦ κύκλου ἀγομένης. (σχ. 221)

Πόρισμα 5. Ἐκ τῶν μικρῶν κύκλων οἱ μᾶλλον τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπέχοντες εἶναι μικρότεροι. Διότι, ἂν τὸ διάστημα ΓΟ αὔξησιν λάβῃ, ἡ χορδὴ ΑΒ, τοῦ μικροῦ κύκλου ΑΜΒ ἡ διάμετρος, μικροτέρα γίνεται.

Πόρισμα 6. Ἐκ δύο σημείων, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ὑπαρχόντων, πάντοτε δυνατὸν εἶναι κύκλου μεγίστου τόξον νὰ διαβῇ. Διότι τὰ δύο ταῦτα σημεῖα καὶ τῆς σφαίρας τὸ κέντρον ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κεῖνται ἐπιπέδου καὶ τὴν θέσιν αὐτοῦ διορίζουσιν. Ἂν ὅμως τὰ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας δύο σημεῖα, τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος, εἰς τὰ ἄκρα διαμέτρου τινὸς τύχωσι, τὰ σημεῖα ταῦτα καὶ τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὑπάρχουσιν εὐθείας, καὶ διὰ τοῦτο πλῆθος μεγίστων κύκλων ἄπειρον ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει διὰ τῶν δύο σημείων διαβαίνει.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2.

Θεώρημα.

Πᾶσα παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου πλευρὰ εἶναι τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν δύο μικροτέρα. (σχ. 222)

Ἔστω O τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἐφ' ἧς τρίγωνόν τι σφαιρικὸν ΑΒΓ ὑπάρχει.

Ἄγω τὰς ἀκτῖνας OA, OB, OΓ, καὶ φαντάζομαι τὰ ἐπίπεδα AOB, AOΓ, ΓOB. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα σχηματίζουσιν εἰς τὸ σημεῖον O μίαν γωνίαν στερεάν· τῆς γωνίας δὲ αὐτῆς τῆς στερεᾶς αἱ γωνίαι αἱ ἐπίπεδοι AOB, AOΓ, ΓOB μέτρα ἔχουσι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὰς πλευρὰς AB, AΓ, BΓ. Ἐπειδὴ δὲ πᾶσα τριέδρου στερεᾶς γωνίας γωνία ἐπίπεδος μικροτέρα εἶναι τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν δύο ἐπιπέδων γωνιῶν (πρότ. 21, βιβλ. 5), πᾶσα πλευρὰ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν δύο εἶναι μικροτέρα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3.

Θεώρημα.

Τὸ ἐλάχιστον ἀπόστημα δύο σημείων, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ὑπαρχόντων, εἶναι τὸ τόξον τοῦ κύκλου τοῦ μεγίστου, τὸ συνάπτον τὰ δύο αὐτὰ σημεῖα. (σχ. 223) (*)

Ἔστω ΑΝΒ τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου, τὸ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας συνάπτον τὰ σημεῖα A καὶ B, ἔστω δὲ ἐκτὸς τοῦ τόξου αὐτοῦ, εἰ δυνατὸν, σημεῖόν τι M, ἀνῆκον εἰς τὴν ἐλαχίστην γραμμὴν, τὴν μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B.

Ἡ χρῆσις οἱουδήποτε μέτρου, πρὸς καταμέτρησιν ἀποστάσεως τινὸς, δὲν μεταβάλλει ποσῶς τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς τὴν ἔκτασιν. Ἂν λοιπὸν μεταχειρισθῶ τόξα κύκλου μεγίστου πρὸς ὁρισμὸν τῶν ἀποστάσεων τῶν μεταξὺ A καὶ M, B καὶ M, τῶν ἀποστάσεων αὐτῶν ἡ ἔκτασις κατ' οὐδὲν ἀλλοιοῦται.

(*) Ἐξ ὅλων τῶν γραμμῶν, τῶν εἰς τὰ αὐτὰ ἄκρα ἀποπερατουμένων, ἡ εὐθεῖα εἶναι ἡ πασῶν ἐλαχίστη. Πᾶσα δὲ γραμμὴ εἶναι τοσοῦτον μικροτέρα, ὅσον πλειότερον εἰς τὴν εὐθεῖαν πλησιάζει. Ἐπειδὴ δὲ ὁ μέγιστος κύκλος εἶναι παντὸς ἄλλου τῆς αὐτῆς σφαίρας κύκλου μείζων, τοῦ μεγίστου κύκλου τὸ τόξον εἶναι εὐθύτερον, τουτέστι μικρότερον πάσης ἄλλης γραμμῆς, μεταξὺ τῶν αὐτῶν περάτων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἀγομένης. Ο. Μ.

ὁπωσδήποτε δηλαδὴ μετρήσω τοῦ μεγίστου κύκλου τὸ τόξον ANB καὶ τὴν γραμμὴν τὴν ἐλαχίστην, τὴν μεταξὺ A καὶ B, τὴν ἐκ τοῦ M διαβαίνουσαν, καὶ τοῦ τόξου καὶ τῆς γραμμῆς αὐτῆς τὰ μεγέθη δὲν μεταβάλλονται.

Τούτου τεθέντος, διὰ τοῦ σημείου M ἄγω τὰ μεγίστου κύκλου τόξα MA, MB.

Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, τὸ τόξον $ANB < AM + MB$. Ἄρα τὸ σημεῖον M δὲν ἀνήκει εἰς τὴν γραμμὴν τὴν ἐλαχίστην, τὴν μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B, διότι ἂν τὸ τοιοῦτον ἀληθὲς ἦτον, αἱ μεταξὺ τοῦ A καὶ τοῦ M, τοῦ B καὶ τοῦ M ἀποστάσεις, ὁπωσδήποτε καταμετρούμεναι, δὲν ἤθελον ἀποτελέσει ἔκτασιν μείζονα τοῦ τόξου ANB.

Λοιπὸν οὐδὲν σημεῖον, ἐκτὸς τοῦ τόξου ANB ὑπάρχον, ἀνήκει εἰς τὴν γραμμὴν τὴν ἐλαχίστην, τὴν μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἀγομένην. Ἄρα τοῦ μεγίστου κύκλου τὸ τόξον ANB εἶναι τὸ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐλάχιστον ἀπόστημα τῶν σημείων A καὶ B. (*).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4.

Θεώρημα.

Τῶν τριῶν πλευρῶν παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τῆς περιφερείας κύκλου μεγίστου. (σχ. 224)

Ἔστω ΑΒΓ τρίγωνόν τι σφαιρικόν.

Ἐκτείνω τοῦ τριγώνου αὐτοῦ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ μέχρις οὗ ἐκ νέου συναντηθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Δ.

Τὰ τόξα ΑΒΔ, ΑΓΔ εἶναι ἡμιπεριφέρειαι, διότι οἱ κύκλοι οἱ μέγιστοι εἰς δύο ἴσα πάντοτε τέμνουσιν ἀλλήλους μέρη (πρότ. 1, βιβλ, 7). Ἀλλὰ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ ἡ πλευρὰ $ΒΓ < ΒΔ + ΓΔ$

(*) Ὁδηγηθεὶς ὑπὸ τῆς πείρας διεσκεύασα ἐν μέρει τὰ λόγια τῆς ἀποδείξεως τῆς παρούσης προτάσεως, ἐτήρησα ὅμως καθ' ὅλα τὴν ἀρχικὴν τοῦ συγγραφέως ἰδέαν. Ο Μ.

(πρότ. 2, βιβλ. 7). Προστιθεμένων δὲ εἰς ἀμφότερα τῆς ἀνισότητος ταύτης τὰ μέλη τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, αὕτη προκύπτει ἡ ἀνισότης $ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ<ΑΒΔ+ΑΓΔ$. Τουτέστι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἶναι ὁλοκλήρου περιφερείας κύκλου μεγίστου μικρότερον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Θεώρημα.

Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πλευρῶν παντὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερον μιᾶς μεγίστου κύκλου περιφερείας. (σχ. 225)

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ.

Ἐκτείνω κατὰ πρῶτον τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΔΓ μέχρις οὗ συναπαντηθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος $ΒΖ+ΓΖ$, ἡ περίμετρος τοῦ πενταγώνου ΒΒΓΔΕ εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ τετραπλεύρου ΑΕΔΖ.

Ἐκτείνω μετὰ ταῦτα τὰς πλευρὰς ΑΕ, ΓΔ μέχρις οὗ συναπαντηθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Η. Τούτου δὲ γενομένου, ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ ΕΔ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος $ΕΗ+ΗΔ$, ἡ περίμετρος τοῦ τετραπλεύρου ΑΕΔΖ εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ΑΖΗ. Ἀλλὰ τοῦ τριγώνου τούτου ὡς καὶ παντὸς ἄλλου σφαιρικοῦ τριγώνου ἡ περίμετρος εἶναι τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου μικροτέρα. Ἄρα, κατὰ μείζονα λόγον, τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ ἡ περίμετρος εἶναι μιᾶς ὁλοκλήρου τοιαύτης περιφερείας μικροτέρα.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη κατ᾽ οὐσίαν δὲν διαφέρει τῆς 22 τοῦ πέμπτου βιβλίου προτάσεως. Διότι, ἐὰν Ο ἦναι τῆς σφαίρας τὸ κέντρον, δύναταί τις νὰ φαντασθῇ εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ ὑπάρχουσαν τὴν κορυφὴν στερεᾶς τινὸς γωνίας συνισταμένης ἐκ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΟΒ,ΒΟΓ,ΓΟΔ, κτλ. Ὅλων δὲ τῶν ἐπιπέδων τούτων γωνιῶν τὸ ἄθροισμα εἶναι τεσσάρων γωνιῶν ὀρθῶν μικρότερον. Μόνον λοιπὸν κατὰ τῆς ἀποδείξεως τὸ εἶδος ἡ παροῦσα πρότασις διαφέρει τῆς τοῦ πέμπτου βιβλίου, περὶ ἧς εἴρηται. Καὶ εἰς ἀμφοτέρας ὅμως τὰς προτάσεις τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ ὑποτίθεται κυρτὸν, ὑποτίθεται δηλαδὴ ὅτι οὐδεμία τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ πλευρὰ ἐκτεινομένη κόπτει τὸ σχῆμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6.

Θεώρημα.

Τὰ ἄκρα Δ καὶ Ε τῆς διαμέτρου ΔΕ, τῆς καθέτου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μεγίστου κύκλου ΑΜΒ, εἶναι πόλοι τοῦ μεγίστου αὐτοῦ κύκλου ΑΜΒ καὶ ὅλων τῶν μικρῶν κύκλων, τῶν παραλλήλων αὐτοῦ, παραδείγματος χάριν, τοῦ μικροῦ κύκλου ΖΝΗ. (σχ. 220)

Διότι ἡ ΔΓ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΜΒ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ ὅλων τῶν εὐθειῶν ΓΑ, ΓΜ, ΓΒ, κτλ., ὅσαι, ἐπ αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου ὑπάρχουσαι, ἐκ τοῦ ποδὸς αὐτῆς διαβαίνουσιν. Ἄρα ὅλα τὰ τόξα ΔΑ, ΔΜ, ΔΒ, κτλ. περιφερείας εἶναι τεταρτημόρια. Ὡσαύτως περιφερείας εἶναι τεταρτημόρια καὶ τὰ τόξα ΕΑ, ΕΜ, ΕΒ, κτλ. Λοιπὸν ἑκάτερον τῶν σημείων Δ καὶ Ε ἐξ ἴσου ἐξ ὅλων τῶν σημείων τῆς περιφερείας ΑΜΒ ἀπέχει. Ἄρα τὰ δύο αὐτὰ σημεῖα πόλοι εἶναι τῆς περιφερείας αὐτῆς (ὁρισμ. 5).

Πρὸς τούτοις δὲ ἡ ἀκτὶς ΔΓ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΜΒ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΖΝΗ, τοῦ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΜΒ παραλλήλου. Ἄρα ἡ ἀκτὶς αὐτὴ διαβαίνει διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ΖΝΗ (πρότ. 1, βιβλ. 7). Ἐὰν λοιπὸν ἀχθῶσιν αἱ πλάγιαι ΔΖ, ΔΝ, ΔΗ, κτλ. αἱ πλάγιαι αὐταὶ, ἰσάκις ἀπὸ τῆς καθέτου ἀπέχουσαι, θέλουσιν εἶσθαι ἴσαι. Ἀλλὰ τῶν χορδῶν ἡ ἰσότης συνεπάγει τῶν τόξων τὴν ἰσότητα. Ἄρα τὰ τόξα ΔΖ, ΔΝ, ΔΗ, κτλ. εἶναι ἴσα. Τὸ σημεῖον Δ λοιπὸν εἶναι πόλος τοῦ μικροῦ κύκλου ΖΝΗ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ σημεῖον Ε εἶναι τοῦ αὐτοῦ κύκλου πόλος.

Πόρισμα 1. Πᾶν τόξον ΔΜ, ἀπό τινος σημείου τοῦ μεγίστου κύκλου ΑΜΒ εἰς τὸν πόλον αὐτοῦ ἠγμένον, περιφερείας εἶναι τεταρτημόριον. Πᾶν δὲ τοιοῦτον τεταρτημόριον ὀρθὴν μετὰ τοῦ τόξου ΑΜ σχηματίζει γωνίαν· διότι, τῆς εὐθείας ΔΓ οὔσης καθέτου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΜΓ, πᾶν ἐπίπεδον ΔΜΓ, ἐκ τῆς εὐθείας αὐτῆς διαβαῖνον, κάθετον εἶναι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΜΓ (πρότ. 18, βιβλ. 5). Ἄρα ἡ γωνία τῶν δύο αὐτῶν ἐπιπέδων, ἡ, κατὰ τὸν 6 ὁρισμὸν τοῦ παρόντος βιβλίου ἡ γωνία ΑΜΔ, εἶναι γωνία ὀρθή.

Πόρισμα 2. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ πόλου γνωστοῦ τινὸς τόξου ΑΜ ἄγω τὸ ἀόριστον τόξον ΜΔ κάθετον ἐπὶ τοῦ ΑΜ, καὶ λαμβάνω τὸ μέρος ΜΔ ἴσον τεταρτημορίῳ περιφερείας· τὸ τοιουτοτρόπως δὲ προσδιοριζόμενον σημεῖον Δ εἶναι ὁ ἕτερος τῶν πόλων τοῦ τόξου ΑΜ. Ἢ ἄγω ἐκ τῶν δύο τοῦ γνωστοῦ τόξου σημείων Α καὶ Μ τὰ τόξα ΑΔ, ΜΔ κάθετα ἐπὶ τοῦ ΑΜ. Τῆς κοινῆς τῶν δύο αὐτῶν καθέτων τόξων τομῆς τὸ σημεῖον Δ εἶναι ὁ ζητούμενος πόλος.

Πόρισμα 3. Ἀντιστρόφως, ἐὰν τοῦ σημείου Δ ἡ ἀπὸ ἑκατέρου τῶν σημείων Α καὶ Μ ἀπόστασις ἦναι ἴση τεταρτημορίῳ περιφερείας, λέγω ὅτι τὸ σημεῖον Δ εἶναι τοῦ τόξου ΑΜ ὁ ἕτερος τῶν πόλων, συγχρόνως δὲ ὅτι αἱ γωνίαι ΔΑΜ, ΔΜΑ εἶναι ὀρθαί.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἔστω Γ τῆς σφαίρας τὸ κέντρον. Ἄγω τὰς ἀκτῖνας ΓΑ, ΓΔ, ΓΜ. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΓΔ, ΜΓΔ εἶναι ὀρθαί, ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῶν δύο εὐθειῶν ΓΑ, ΓΜ· ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν εὐθειῶν αὐτῶν. Λοιπὸν τὸ σημεῖον Δ εἶναι πόλος τοῦ τόξου ΑΜ· ἑπομένως αἱ γωνίαι ΔΑΜ, ΔΜΑ εἶναι ὀρθαί.

Σχόλιον. Τῇ βοηθείᾳ τῶν πόλων δύναταί τις νὰ γράψῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας τόξα κύκλου τοσοῦτον εὐκόλως, ὅσον καὶ ἐπὶ ἐπιφανείας ἐπιπέδου. Παραδείγματος χάριν, περιαγομένου τοῦ τόξου ΔΖ, ἢ παντὸς ἄλλου τόξου τοιούτου περὶ τὸ σημεῖον Δ, ἡ ἄκρα αὐτοῦ Ζ γράφει τὸν μικρὸν κύκλον ΖΝΗ. Διὰ τῆς περιαγωγῆς δὲ τοῦ τεταρτημορίου ΔΖΑ περὶ τὸ σημεῖον Δ γράφεται τοῦ μεγίστου κύκλου τὸ τόξον ΑΜ ὑπὸ τῆς ἄκρας Α.

Προκειμένου λόγου περὶ παρατάσεως τοῦ τόξου ΑΜ, ἢ γνωστῶν ὄντων τῶν σημείων Α καὶ Μ, καὶ ζητουμένου τοῦ τόξου τοῦ ἐξ αὐτῶν διαβαίνοντος, ἐν πρώτοις προσδιορίζω τὸν πόλον Δ διὰ τῆς κοινῆς τομῆς δύο τόξων, τὰ ὁποῖα γράφω ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Μ, ὡς ἐκ πόλων, καὶ δι᾽ ἀποστήματος ἴσου τεταρτημορίῳ περιφερείας. Ἀφ᾽ οὗ δὲ τοιουτοτρόπως ὁ πόλος Δ προσδιορισθῇ, γράφω ἐξ αὐτοῦ διὰ τεταρτημορίου περιφερείας τὸ τόξον ΑΜ ἢ τὴν συνέχειαν αὐτοῦ.

Θέλων δὲ νὰ καταβιβάσω ἀπό τινος γνωστοῦ σημείου Π τόξον κάθετον ἐπὶ τοῦ γνωστοῦ τόξου ΑΜ, ἐκτείνω τὸ τόξον τοῦτο πρὸς τὸ Σ, μέχρις οὗ ἀποτελεσθῇ τὸ τόξον ΠΣ ἴσον τεταρτημορίῳ. Μετὰ ταῦτα μεταχειρίζομαι τὸ σημεῖον Σ ὡς πόλον καὶ γράφω τὸ τόξον ΠΜ· τὸ τόξον τοῦτο εἶναι τὸ τόξον τὸ κάθετον, τὸ ζητούμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7.

Θεώρημα.

Πᾶν ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ἄκρου ἀκτῖνος σφαίρας κάθετον, ἅπτεται τῆς σφαίρας. (σχ. 226).

Ἔστω ΖΑΗ ἐπίπεδόν τι ἐπὶ τοῦ ἄκρου τῆς ἀκτῖνος ΟΑ κάθετον.

Λαμβάνω ἐπ' αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου σημεῖόν τι Μ καὶ ἄγω τὰς εὐθείας ΟΜ, ΑΜ. Ἡ γωνία ΟΑΜ εἶναι ὀρθή· ἐπομένως ἡ ἀπόστασις ΟΜ εἶναι μείζων τῆς ΟΑ. Ἄρα τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας. Τὸ αὐτὸ δὲ συνάγω καὶ περὶ παντὸς ἄλλου σημείου τοῦ ἐπιπέδου ΖΑΗ.

Ἄρα τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ ἓν μόνον ἔχει μετὰ τῆς σφαίρας κοινὸν σημεῖον, τὸ Α. Τουτέστι τὸ ἐπίπεδον, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος, ἅπτεται τῆς σφαίρας (ὁρισμ. 4).

Σχόλιον. Δύναταί τις ὡσαύτως ν' ἀποδείξῃ, ὅτι δύο σφαῖραι ἓν μόνον ἔχουσι κοινὸν σημεῖον, ἐπομένως ὅτι ἅπτονται ἀλλήλων, ὅταν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων αὐτῶν ἦναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι ἢ τῇ διαφορᾷ τῶν ἀκτίνων αὐτῶν. Ἐν πάσῃ δὲ τοιαύτῃ περιπτώσει τὰ κέντρα καὶ τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8.

Θεώρημα.

Ἡ γωνία ΒΑΓ, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσι τὰ δύο κύκλων μεγίστων τόξα ΑΒ, ΑΓ, εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ ΖΑΗ, τὴν ὁποίαν σχηματίζουσιν αἱ εἰς τὸ σημεῖον Α ἐφαπτόμεναι τῶν τόξων αὐτῶν. Ἔχει δὲ μέτρον ἡ γωνία αὐτὴ τὸ τόξον ΔΕ, τὸ γεγραμμένον ἐκ τοῦ σημείου Α, ὡς ἐκ πόλου, μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, προεκτεινομένων εἰ δέον. (σχ. 226)

Διότι ἡ ἐφαπτομένη ΑΖ, ἡ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ τόξου ΑΒ ὑπάρχουσα, εἶναι ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΑΟ κάθετος. Κάθετος δὲ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος εἶναι καὶ ἡ ἐφαπτομένη ΑΗ, ἡ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ τόξου ΑΓ κειμένη. Ἄρα ἡ γωνία ΖΑΗ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ τῶν ἐπιπέδων ΟΑΒ, ΟΑΓ (πρότ. 17, βιβλ. 5)· αὕτη δὲ τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀμοιβαία κλίσις εἶναι ἡ γωνία τῶν τόξων ΑΒ, ΑΓ, ἡ σημειουμένη οὕτω ΒΑΓ.

Ὡσαύτως, ἐὰν ἑκάτερον τῶν τόξων ΑΔ, ΑΕ περιφερείας τεταρτημόριον ἦναι, καὶ ἡ γωνία ΔΟΕ τὴν ἀμοιβαίαν τῶν ἐπιπέδων ΟΑΔ, ΟΑΕ κλίσιν ἐκφράζει Ἑπομένως ΔΕ εἶναι τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν τὸ μέτρον, τουτέστι τὸ μέτρον τῆς γωνίας ΒΑΓ.

Πόρισμα. Δύναταί τις νὰ συγκρίνῃ πρὸς ἀλλήλας τῶν σφαιρικῶν τριγώνων τῆς γωνίας, παραβάλλων πρὸς ἄλληλα τῶν μεγίστων κύκλων τὰ τόξα, τὰ ἐκ τῶν κορυφῶν τῶν γωνιῶν αὐτῶν ὡς ἐκ πόλων γεγραμμένα, καὶ μεταξὺ τῶν ἰδίων αὐτῶν πλευρῶν περιεχόμενα. Διὰ τοῦτο εὐκόλως κατασκευάζεται γωνία πρὸς γωνίαν τινὰ γνωστὴν ἴση.

Σχόλιον. (σχ. 238). Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι, παραδείγματος χάριν, αἱ ΑΓΟ, ΒΓΝ, εἶναι ἴσαι· διότι ἑκάστη τῶν γωνιῶν αὐτῶν τὴν ἀμοιβαίαν τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΓΒ, ΟΓΝ κλίσιν ἐκφράζει. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν ΑΓΟ, ΟΓΒ, τὰς ὁποίας σχηματίζουσι τὰ συναντώμενα τόξα ΑΓΒ, ΟΓΝ, δύο ἀποτελεῖ γωνίας ὀρθάς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9.

Θεώρημα.

Ἐὰν ἐκ τῶν τριῶν κορυφῶν Α, Β, Γ γνωστοῦ τινὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὡς ἐκ πόλων, γράψῃ τις τὰ τόξα ΕΖ, ΖΔ, ΔΕ, τὰ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ σχηματίζοντα, ἀντιστρόφως τοῦ τριγώνου τούτου αἱ τρεῖς κορυφαὶ Δ, Ε, Ζ πόλοι εἶναι τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ τοῦ τριγώνου τοῦ γνωστοῦ. (σχ. 227)

Τῷ ὄντι· ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Α πόλος εἶναι τοῦ τόξου ΕΖ, τὸ τόξον ΑΕ περιφερείας εἶναι τεταρτημόριον. Περιφερείας ὡσαύτως τεταρτημόριον εἶναι καὶ τὸ τόξον ΓΕ, διότι τὸ σημεῖον Γ πόλος εἶναι τοῦ τόξου ΔΕ. Ἄρα τὸ σημεῖον Ε ἀπὸ ἑκάστου τῶν σημείων Α καὶ Γ τεταρτημόριον περιφερείας ἀπέχει. Λοιπὸν τὸ σημεῖον Ε πόλος εἶναι τοῦ τόξου ΑΓ (πρότ. 6, βιβλ. 7). Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ μὲν σημεῖον Δ πόλος εἶναι τοῦ τόξου ΒΓ, τὸ δὲ σημεῖον Ζ πόλος τοῦ τόξου ΑΒ.

Πόρισμα. Ἄρα δύναταί τις νὰ γράψῃ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τῇ βοηθείᾳ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, ὅπως τὸ τρίγωνον ΔΕΖ τῇ βοηθείᾳ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ γράφεται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10.

Θεώρημα.

Τῶν αὐτῶν κειμένων, ὡς ἐν τῷ προηγουμένῳ θεωρήματι, ἑκάστη γωνία ἑκατέρου τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΖ μέτρον ἔχει τὸ ὑπερβάλλον μέρος τῆς ἡμιπεριφερείας, τὸ ὑπὲρ τὴν ἀντικειμένην πλευρὰν τοῦ τριγώνου τοῦ ἄλλου. (σχ. 227)

Ἐκτείνω, εἰ δέον, τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ μέχρις οὗ συναντήσωσι τὴν πλευρὰν ΕΖ εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Θ.

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Α πόλος εἶναι τοῦ τόξου ΗΘ, ἡ γωνία Α μέτρον ἔχει τὸ τόξον ΗΘ. Ἀλλὰ τὸ τόξον ΕΘ περιφερείας εἶναι τεταρτημόριον, διότι τὸ σημεῖον Ε πόλος εἶναι τοῦ τόξου ΑΘ. Ὡσαύτως δὲ τεταρτημόριον περιφερείας εἶναι καὶ τὸ τόξον ΖΗ, διότι τὸ σημεῖον Ζ εἶναι πόλος τοῦ τόξου ΑΗ. Ἄρα τὸ κεφάλαιον ΕΘ+ΖΗ ἡμιπεριφέρειαν ἀποτελεῖ. Ἀλλὰ ΕΘ+ΖΗ=ΕΗ+ΗΘ+ΖΘ+ΗΘ=ΕΖ+ΗΘ. Λοιπὸν ΕΖ+ΗΘ=$\frac{1}{2}$ *περιφέρεια*. Ὅθεν ΗΘ=$\frac{1}{2}$ *περιφ.*— ΕΖ. Τουτέστι τὸ τόξον ΗΘ, τὸ μέτρον τῆς γωνίας Α, ἰσοῦται τῷ ἡμίσει τῆς περιφερείας, ἀφαιρεθείσης ὅμως ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος αὐτοῦ τῆς πλευρᾶς ΕΖ. Ὡσαύτως δὲ ἡ μὲν γωνία Β μέτρον ἔχει $\frac{1}{2}$*περιφ.*—ΔΖ, ἡ δὲ γωνία Γ, $\frac{1}{2}$*περιφ.*—ΔΕ.

Ἡ τοιαύτη δὲ περὶ μέτρου τῶν γωνιῶν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων ἰδιότης εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ἀμοιβαία, διότι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ ἕτερον αὐτῶν τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἑτέρου γράφεται. Διὰ τοῦτο αἱ γωνίαι Δ, Ε, Ζ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ μέτρον ἔχουσιν, ἡ μὲν αὐτῶν $\frac{1}{2}$ *περιφ.*—ΒΓ, ἡ δὲ $\frac{1}{2}$ *περιφ.*—ΑΓ, ἡ δὲ τρίτη $\frac{1}{2}$ *περιφ.*—ΑΒ. Καὶ τῷ ὄντι· ἡ γωνία Δ, παραδείγματος χάριν, μέτρον ἔχει τὸ τόξον ΜΙ. Ἀλλὰ ΜΙ+ΒΓ=ΜΒ+ΒΓ+ΓΙ+ΒΓ=ΜΓ+ΒΙ=$\frac{1}{2}$*περιφέρεια*. Ἄρα ΜΙ+ΒΓ=$\frac{1}{2}$ *περιφ.* Ὅθεν ΜΙ=$\frac{1}{2}$ *περιφ.*—ΒΓ. Τουτέστι, τὸ τόξον ΜΙ, τὸ μέτρον τῆς γωνίας Δ, ἰσοῦται τῷ ἡμίσει τῆς περιφερείας, ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος αὐτοῦ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

Τὸ αὐτὸ δὲ δύναταί τις ν' ἀποδείξῃ καὶ περὶ τῶν λοιπῶν δύο γωνιῶν Ε καὶ Ζ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ.

Σχόλιον. (σχ. 228). Παρατηρητέον ὅτι, ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, τρία ἄλλα σχηματίζονται τρίγωνα ἐκ τῆς συναπαντήσεως τῶν τόξων ΔΕ, ΕΖ, ΔΖ. Ἀλλ' ἡ ἰδιότης, περὶ ἧς ἤδη εἴρηται, εἶναι προσὸν τοῦ κεντρικοῦ μόνον τριγώνου, τὸ ὁποῖον διακρίνεται τῶν λοιπῶν τριῶν κατὰ τοῦτο, ὅτι αἱ γωνίαι Α καὶ Δ, (σχ. 227), Β καὶ Ε, Γ καὶ Ζ κεῖνται ἑτέρωθεν, αἱ μὲν τῆς πλευρᾶς ΒΓ, αἱ δὲ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ τῆς ΑΒ.

Διάφορα δίδουσιν εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ὀνόματα. Ἡμεῖς τὰ ὀνομάζομεν *τρίγωνα πολικά*.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11.

Θεώρημα.

Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς Α τριγώνου τινὸς σφαιρικοῦ, ὡς ἐκ πόλου, καὶ διὰ τοῦ ἀποστήματος ΑΓ γράψῃ τις τὸ μικροῦ κύκλου τόξον ΔΕΓ, ἐὰν προσέτι ἐκ τῆς κορυφῆς Β τοῦ αὐτοῦ τριγώνου, ὡς ἐκ πόλου, καὶ διὰ τοῦ ἀποστήματος ΒΓ γράψῃ ὡσαύτως τὸ τόξον ΔΖΓ, καὶ ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Δ, εἰς ὃ τὰ δύο τόξα ΔΕΓ, ΔΖΓ συναπαντῶνται, σύρῃ τὰ μεγίστων κύκλων τόξα ΑΔ, ΔΒ, τοῦ τοιουτοτρόπως σχηματιζομένου τριγώνου ΑΔΒ τὰ μέρη εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τοῦ τριγώνου ΑΓΒ. (σχ. 229)

Διότι, κατὰ τὴν κατασκευὴν, ἡ πλευρὰ ΑΔ=ΑΓ, ἡ πλευρὰ ΒΔ=ΒΓ, ἡ δὲ πλευρὰ ΑΒ εἶναι κοινή· τουτέστι τὰ δύο τρίγωνα ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρα. Λέγω δὲ ἤδη ὅτι αἱ εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς ἀντικείμεναι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Τῷ ὄντι· τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ὑπάρχοντος καθ' ὑπόθεσιν εἰς τὸ σημεῖον Ο, δύναταί τις νὰ φαντασθῇ στερεάν τινα γωνίαν ἐσχηματισμένην εἰς τὸ σημεῖον Ο διὰ τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΟΒ, ΑΟΓ, ΒΟΓ. Ὡσαύτως δὲ δύναται νὰ ὑποθέσῃ καὶ δευτέραν τινὰ στερεὰν γωνίαν, ἐσχηματισμένην εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο διὰ τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΟΒ, ΑΟΔ, ΒΟΔ. Ἐπειδὴ δὲ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ αἱ πλευραὶ καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΔΒ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι, ἕπεται ὅτι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι, αἱ τὴν ἑτέραν τῶν στερεῶν γωνιῶν σχηματίζουσαι, καὶ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι, αἱ τὴν στερεὰν γωνίαν τὴν ἄλλην ἀποτελοῦσαι, εἶναι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. Ἀλλὰ κατὰ πᾶσαν τοιαύτην περίπτωσιν, ὡς ἐν τοῖς προηγουμένοις ἀπεδείχθη (πρότ. 23, βιβλ. 5), τὰ ἐπίπεδα, ἐφ' ὧν αἱ ἴσαι ὑπάρχουσι γωνίαι, ἰσάκις πρὸς ἄλληλα κλίνουσιν. Ἄρα αἱ γωνίαι τῶν σφαιρικῶν τριγώνων ΔΑΒ, ΓΑΒ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, τουτέστιν ἡ ΔΑΒ=ΓΑΒ, ἡ ΔΒΑ=ΓΒΑ, καὶ ἡ ΑΔΒ=ΑΓΒ. Λοιπὸν καὶ αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΔΒ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου ΑΓΒ.

Σχόλιον. Τῶν τριγώνων ὅμως αὐτῶν ἡ ἰσότης δὲν εἶναι ἀπόλυτος, διότι ἀδύνατον εἶναι νὰ ἐπιτεθῶσιν ἐπ' ἄλληλα τὰ τρίγωνα αὐτὰ καὶ νὰ ἐφαρμοσθῶσι κατὰ πάντα, ἐξαιρουμένης τῆς περιπτώσεως, καθ' ἣν εἶναι ἰσοσκελῆ.

Τῶν σφαιρικῶν τριγώνων, τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος, ἡ τοιαύτη ἰσότης εἶναι, καθ' ἃ ἐν ἄλλοις εἴπομεν, *συμμετρικὴ*, καὶ διὰ τοῦτο ὀνομάζομεν τὰ τρίγωνα ΑΓΒ, ΑΔΒ συμμετρικά.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12.

Θεώρημα.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα, τὰ μίαν ἴσην γωνίαν μεταξὺ πλευρῶν ἴσων

περιεχομένην ἔχοντα, εἶναι καθ' ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη ἴσα. (σχ. 230)

Ἔστω ἡ πλευρὰ ΑΒ=ΕΖ, ἡ πλευρὰ ΑΓ=ΕΗ, καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ=ΖΕΗ.

Τὸ τρίγωνον ΕΖΗ δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἢ ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ αὐτοῦ ΑΒΔ, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καθ' ὃν ἐπ' ἄλληλα ἐφαρμόζονται δύο τρίγωνα εὐθύγραμμα, ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων περιεχομένην. Ἄρα ὅλα τὰ μέρη τοῦ τριγώνου ΕΖΗ εἶναι πρὸς ὅλα τὰ μέρη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἴσα. Τουτέστιν, ἐκτὸς τῶν τριῶν μερῶν τῶν δεδομένων, τῶν καθ' ὑπόθεσιν ἴσων, καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ=ΖΗ, καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ=ΕΖΗ, καὶ ἡ γωνία ΑΓΒ=ΕΗΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13.

Θεώρημα.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα, τὰ δύο γωνίας καὶ τὴν εἰς αὐτὰς προσκειμένην πλευρὰν ἴσας ἔχοντα, εἶναι καθ' ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη ἴσα.

Διότι τὸ ἕτερον τῶν τριγώνων δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου ἢ ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ αὐτοῦ, ὅπως ἐν παρομοίᾳ περιπτώσει ἐπ' ἄλληλα ἐφαρμόζονται τὰ τρίγωνα τὰ εὐθύγραμμα. (Ἴδε πρότ. 7, βιβλ. 1)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14.

Θεώρημα.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα, τὰ ἔχοντα τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχουσιν ἴσας καὶ τὰς γωνίας αὐτῶν, τὰς εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς ἀντικειμένας. (σχ. 229)

Κατὰ τὴν 11 πρότασιν, τὴν προηγουμένην, διὰ τριῶν δεδομένων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ δύο δύναταί τις νὰ κατασκευάσῃ σφαιρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ, διαφέροντα ἀλλήλων κατὰ τὴν θέσιν μόνον τῶν μερῶν, ἐξ ὧν ἀπαρτίζονται, κατὰ τὴν θέσιν δηλαδὴ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν αὐτῶν, ἴσα ὅμως κατὰ τῶν μερῶν αὐτῶν τὴν ἔκτασιν. Ἄρα τὰ τρίγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα ἰσόπλευρα, ἢ ἀπολύτως εἶναι ἴσα, ἢ κατὰ συμμετρίαν. Καὶ εἰς ἀμφοτέρας ὅμως τὰς περιστάσεις τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι καὶ ἰσογώνια πρὸς ἄλληλα· τουτέστιν αἱ εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς αὐτῶν ἀντικείμεναι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.

Θεώρημα.

Παντὸς ἰσοσκελοῦς σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ εἰς τὰς ἴσας αὐτοῦ πλευρὰς ἀντικείμεναι γωνίαι εἶναι ἴσαι. **Καὶ** ἀντιστρόφως, ἐὰν δύο σφαιρικοῦ τινὸς τριγώνου γωνίαι ἴσαι ἦναι, τὸ τρίγωνον αὐτὸ εἶναι ἰσοσκελές. (σχ. 231)

Πρῶτον. Ἔστω ἡ πλευρὰ ΑΒ=ΑΓ. Λέγω ὅτι καὶ ἡ γωνία Γ=Β.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγω ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α εἰς τῆς βάσεως τὸ μέσον Δ τὸ τόξον ΑΔ. Τὰ τοιουτοτρόπως σχηματιζόμενα δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ ἔχουσι τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τουτέστι τὴν μὲν ΑΔ κοινὴν, τὴν ΒΔ=ΔΓ, καὶ τὴν ΑΒ=ΑΓ. Λοιπὸν, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας. Ἄρα Β=Γ.

Δεύτερον. Ἔστω ἡ γωνία Β=Γ. Λέγω ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ=ΑΒ.

Ἐπειδὴ δὲ δὲν δύναμαι ν' ἀποδείξω τὴν πρότασιν ἀμέσως, δέχομαι ὅτι αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ διαφέρουσιν ἀλλήλων, καὶ ὅτι μείζων αὐτῶν εἶναι ἡ ΑΒ.

Τούτου τεθέντος, λαμβάνω τὸ τόξον ΒΟ=ΑΓ, καὶ ἄγω τὸ τόξον ΟΓ.

Αἱ πλευραὶ ΒΟ, ΒΓ εἶναι ἴσαι ταῖς πλευραῖς ΑΓ, ΒΓ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. Ἡ γωνία δὲ ΟΒΓ, ἡ ὑπὸ τῶν δύο πρώτων πλευρῶν περιεχομένη, εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ ΑΓΒ, τῇ περιλαμβανομένῃ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῶν δευτέρων. Ἄρα τὰ δύο τρίγωνα ΟΒΓ, ΑΓΒ ἔχουσι καὶ τὰ λοιπὰ αὐτῶν μέρη ἴσα (πρότ. 12, βιβλ. 7)· ἐπομένως καὶ ἡ γωνία ΟΓΒ=ΑΒΓ. Ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν ἡ γωνία ΑΒΓ=ΑΓΒ· ἄρα ΟΓΒ=ΑΓΒ. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον. Λοιπὸν δὲν δύναταί τις νὰ ὑποθέσῃ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ ἀνίσους, διότι ἡ τοιαύτη ὑπόθεσις εἰς ἄτοπον ἄγει. Λοιπὸν αἱ εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς ἀντικείμεναι γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι.

Σχόλιον. Ἐκ τῆς αὐτῆς ἀποδείξεως ἕπεται ὅτι καὶ ἡ γωνία ΒΔΑ=ΓΔΑ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο ἴσαι αὗται γωνίαι εἶναι προσκείμεναι, εἶναι ὀρθαί. Ἄρα τὸ τόξον, τὸ ἠγμένον ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τινὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἰς τῆς βάσεως αὐτοῦ τὸ μέσον, εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς βάσεως αὐτῆς, διαιρεῖ δὲ καὶ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο ἴσα μέρη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16.

Θεώρημα.

Ἐὰν ἡ γωνία Α σφαιρικοῦ τινὸς τριγώνου ΑΒΓ μείζων ἦναι τῆς γωνίας αὐτοῦ Β, καὶ ἡ ἀντικειμένη εἰς τὴν γωνίαν Α πλευρὰ αὐτοῦ ΒΓ μείζων εἶναι τῆς πλευρᾶς ΑΓ, τῆς ἀντικειμένης εἰς τὴν γωνίαν Β. Ἀντιστρόφως δὲ, ἐὰν ἡ πλευρὰ ΒΓ μείζων ἦναι τῆς ΑΓ, καὶ ἡ γωνία Α εἶναι μείζων τῆς γωνίας Β. (σχ. 232)

Πρῶτον. Ἔστω Α$>$Β.

Σχηματίζω τὴν γωνίαν ΒΑΔ=Β. Ὅθεν ἔχω ΑΔ=ΒΔ (πρότ. 15, βιβλ. 7). Ἀλλὰ ΑΔ+ΔΓ$>$ΑΓ. Ἄρα (τῆς ἀντεισαγωγῆς τοῦ ΒΔ ἀντὶ τοῦ ΑΔ γενομένης) ΒΔ+ΔΓ ἢ ΒΓ$>$ΑΓ.

Δεύτερον. Ἔστω ΒΓ$>$ΑΓ· λέγω ὅτι καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ μείζων εἶναι τῆς γωνίας ΑΒΓ.

Διότι, ἐὰν αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΑΒΓ ἦσαν ἴσαι, ἴσα ἤθελον εἶσθαι καὶ τὰ τόξα ΒΓ, ΑΓ. Ἐὰν δὲ ἡ γωνία ΒΑΓ$<$ΑΒΓ, κατὰ τὰ ἤδη ἀποδεδειγμένα, ἀναγκαίως ἕπεται ὅτι καὶ ΒΓ$<$ΑΓ. Ἀλλ' οὐδὲν τούτων ὑπάρχει. Ἄρα ἡ γωνία ΒΑΓ μείζων εἶναι τῆς γωνίας ΑΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17.

Θεώρημα.

Ἐὰν τῶν δύο σφαιρικῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΖ, τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κειμένων, αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, ΔΕ, ΔΖ ἦναι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, τουτέστιν ἐὰν ΑΒ=ΔΕ, καὶ ΑΓ=ΔΖ, καὶ ἐὰν συγχρόνως ἡ γωνία Α μείζων ἦναι τῆς Δ, λέγω ὅτι τοῦ πρώτου τριγώνου ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΓ μείζων εἶναι τῆς τοῦ δευτέρου τριγώνου τρίτης πλευρᾶς ΕΖ. (σχ. 233)

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀποδεικνύεται καθ' ὅλα ἀπαραλλάκτως, ὅπως τοῦ πρώτου βιβλίου ἡ 10 πρότασις ἀπεδείχθη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

Θεώρημα.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν ὑπάρχοντα τρίγωνα, τὰ πρὸς ἄλληλα ἰσογώνια, εἶναι ὡσαύτως καὶ ἰσόπλευρα.

Ἔστωσαν Α μὲν καὶ Β τρίγωνα δύο σφαιρικὰ, πρὸς ἄλληλα ἰσογώνια, Π δὲ καὶ Κ τὰ πολικὰ αὐτῶν τρίγωνα. Ἐπειδὴ κατὰ τὰ δεδομένα τῶν τριγώνων Α καὶ Β αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι τῶν πολικῶν Π καὶ Κ αἱ πλευραὶ ἴσαι εἶναι (πρότ. 10, βιβλ. 7). Ἀλλ' ἡ ἰσότης τῶν πλευρῶν τῶν πολικῶν τριγώνων Π καὶ Κ συνεπάγει καὶ τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων αὐτῶν τὴν ἰσότητα (πρότ. 14, βιβλ. 7). Ἡ ἰσότης δὲ τῶν γωνιῶν τῶν πολικῶν τριγώνων Π καὶ Κ τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν τῶν τριγώνων Α καὶ Β μαρτυρεῖ (πρότ. 10, βιβλ. 7). Ἄρα τὰ πρὸς ἄλληλα ἰσογώνια τρίγωνα Α καὶ Β εἶναι ὡσαύτως καὶ ἰσόπλευρα.

Τὸ αὐτὸ θεώρημα ἀποδεικνύεται χωρὶς τῆς βοηθείας τῶν πολικῶν τριγώνων κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον. (σχ. 234)

Ἔστωσαν ΑΒΓ, ΔΕΖ δύο τρίγωνα σφαιρικὰ πρὸς ἄλληλα ἰσογώνια, τουτέστιν ἔστω Α=Δ, Β=Ε, Γ=Ζ. Λέγω ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ, ΒΓ=ΕΖ.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, παρατείνω τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ καὶ λαμβάνω ΑΗ=ΔΕ, καὶ ΑΘ=ΔΖ, ἄγω δὲ τὸ τόξον ΗΘ, καὶ ἐκτείνω τὰ τόξα ΒΓ, ΗΘ μέχρις οὗ συναπαντηθῶσιν εἰς τὰ σημεῖα Ι καὶ Κ.

Κατὰ τὴν ἤδη γενομένην κατασκευὴν, ἡ πλευρὰ ΑΗ=ΔΕ, καὶ ἡ ΑΘ=ΔΖ, ἴσαι δὲ εἶναι καὶ αἱ γωνίαι ΗΑΘ, ΒΑΓ, ΕΔΖ, αἱ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῶν περιεχόμεναι. Ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΗΘ, ΔΕΖ εἶναι καθ' ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη ἴσα (πρότ. 12, βιβλ. 7). Λοιπὸν καὶ ἡ γωνίᾳ ΑΗΘ=ΔΕΖ=ΑΒΓ, καὶ ἡ γωνία ΑΘΗ=ΔΖΕ=ΑΓΒ.

Εἰς τὰ τρίγωνα ΙΒΗ, ΚΒΗ ἡ μὲν πλευρὰ ΒΗ εἶναι κοινὴ, ἡ δὲ γωνία ΙΗΒ=ΚΒΗ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα ΙΗΒ+ΚΗΒ δύο ἀποτελεῖ γωνίας ὀρθὰς, δύο δὲ ὡσαύτως γωνίας ὀρθὰς ἀποτελεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα ΚΒΗ+ΙΒΗ, ἕπεται ὅτι ΚΗΒ=ΙΒΗ. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΙΒΗ, ΚΒΗ εἶναι ἴσα (πρότ. 13, βιβλ. 7). Ἄρα ΙΗ=ΚΒ, καὶ ΙΒ=ΗΚ.

Ὡσαύτως δὲ, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΘΗ=ΑΓΒ, ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΙΓΘ, ΚΓΘ μίαν ἔχουσι πλευρὰν ἴσην, εἰς δύο ἴσας προσκειμένην γωνίας. Λοιπὸν εἶναι ἴσα. Ἄρα ΙΘ=ΚΓ καὶ ΙΓ=ΚΘ.

Ἀφαιρουμένων ἤδη ἐκ τῶν ἴσων πλευρῶν ΚΒ, ΙΗ τῶν ἴσων πλευρῶν ΚΓ, ΙΘ, τὰ ὑπόλοιπα ΒΓ, ΗΘ εἶναι ἴσα. Ἐκτὸς δὲ τούτου ἡ γωνία ΒΓΑ=ΑΘΗ, καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ=ΑΗΘ. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΘΗ μίαν ἔχουσιν ἴσην πλευρὰν, εἰς δύο ἴσας γωνίας προσκειμένην· ὅθεν εἶναι ἴσα. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ καθ' ὅλα αὐτοῦ τὰ μέρη ἴσον εἶναι τῷ τριγώνῳ ΑΗΘ, ἄρα εἶναι ἴσον καὶ τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ. Ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἰσότητος ἕπεται ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ, ΒΓ=ΕΖ. Λοιπὸν τὰ πρὸς ἄλληλα ἰσογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ σφαιρῶν ἴσων κείμενα, ἔχουσιν ἴσας τὰς πλευρὰς, τὰς ἀντικειμένας εἰς τὰς γωνίας αὐτῶν τὰς ἴσας.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη δὲν ἀληθεύει εἰς τὰ τρίγωνα τὰ εὐθύγραμμα, εἰς ἃ τῶν γωνιῶν ἡ ἰσότης τὴν ἀναλογίαν μόνον τῶν πλευρῶν συνεπάγει. Εὐκόλως δ' ἐξηγεῖται ἡ τοιαύτη τῶν εὐθυγράμμων καὶ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων διαφορά· διότι καὶ εἰς τὴν πρότασιν ταύτην, καθὼς καὶ εἰς τὰς προτάσεις 12, 13, 14 καὶ 17 τοῦ παρόντος βιβλίου, εἰς ἃς λόγος περὶ παραβολῆς τριγώνων γίνεται, ῥητῶς ὑπετέθη ὅτι τὰ τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων εἶναι κεχαραγμένα σφαιρῶν. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τόξα τὰ ὅμοια πρὸς τὰς ἀκτῖνας αὐτῶν εἶναι ἀνάλογα, τὰ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν γεγραμμένα τρίγωνα δὲν εἶναι ὅμοια, ἐὰν δὲν ἦναι ἴσα. Δὲν εἶναι λοιπὸν ἀπορίας ἄξιον διατί τῶν γωνιῶν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων ἡ ἰσότης τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν αὐτῶν συνεπάγει.

Τὰ τρίγωνα ὅμως τὰ σφαιρικά, τὰ ἔχοντα μὲν τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας, ἄλλο δ' ἐπ' ἄλλης ὄντα κεχαραγμένα σφαίρας, δὲν εἶναι ἴσα, ἀλλ' ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι δὲ αὐτῶν πλευραὶ εἶναι πρὸς τὰς ἀκτῖνας τῶν σφαιρῶν ἀνάλογοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19.

Θεώρημα.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ἓξ μὲν ὀρθῶν γωνιῶν ἔλαττον, δύο δὲ ὀρθῶν γωνιῶν μεῖζον.

Πρῶτον. Πᾶσα σφαιρικοῦ τριγώνου γωνία εἶναι δύο ὀρθῶν γωνιῶν μικροτέρα (ἰδὲ τὸ παρὰ πόδας σχόλιον). Ἄρα καὶ τῶν τριῶν σφαιρικοῦ τριγώνου γωνιῶν τὸ ἄθροισμα εἶναι ἓξ ὀρθῶν γωνιῶν μικρότερον.

Δεύτερον. Πᾶσα σφαιρικοῦ τριγώνου γωνία μέτρον ἔχει τὴν ἡμιπεριφέρειαν, ἐξ ἧς ἀφῃρέθη ἡ πλευρὰ τοῦ τριγώνου τοῦ πολικοῦ, ἡ εἰς τὴν γωνίαν αὐτὴν ἀντιστοιχοῦσα (πρότ. 10, βιβλ. 7). Αἱ τρεῖς λοιπὸν τοῦ τριγώνου τοῦ σφαιρικοῦ γωνίαι μέτρον ἔχουσι τρεῖς ἡμιπεριφερείας, ἀφαιρεθέντος ὅμως ἀπὸ τῶν ἡμιπεριφερειῶν αὐτῶν τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τοῦ πολικοῦ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πλευρῶν παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου μικρότερον εἶναι ὁλοκλήρου περιφερείας (πρότ. 4, βιβλ. 7), τοῦ ἀθροίσματος αὐτοῦ ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν, ὑπολείπεται ὑπόλοιπον μεῖζον ἡμιπεριφερείας. Ἀλλ' ἡ ἡμιπεριφέρεια μέτρον εἶναι δύο γωνιῶν ὀρθῶν.

τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου μεῖζον εἶναι δύο γωνιῶν ὀρθῶν.

Πόρισμα 1. τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου δὲν εἶναι σταθερὸν ὡς τὸ τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εὐθυγράμμου, ἀλλὰ διαφέρει κατὰ τρίγωνα· περιέχεται δὲ μεταξὺ τῶν δύο ὀρθῶν γωνιῶν καὶ τῶν ἕξ, καὶ δὲν δύναται ποτὲ νὰ φθάσῃ οὔτε τὸ ἓν, οὔτε τὸ ἄλλο τῶν δύο αὐτῶν ὁρίων. Διὰ τοῦτο ἐκ τῆς γνώσεως τῶν δύο σφαιρικοῦ τινὸς τριγώνου γωνιῶν δὲν ἕπεται τῆς τρίτης αὐτοῦ γωνίας ἡ γνῶσις.

Πόρισμα 2. Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον δύναται νὰ ἔχῃ δύο ἢ τρεῖς γωνίας ὀρθὰς, δύο ἢ τρεῖς γωνίας ἀμβλείας.

Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *δισορθογώνιον* ἦναι, (σχ. 235), ἐὰν ἔχῃ δηλαδὴ δύο γωνίας ὀρθὰς, τὴν Β καὶ τὴν Γ, ἡ κορυφὴ αὐτοῦ Α πόλος εἶναι τῆς βάσεως αὐτοῦ ΒΓ (πρότ. 6, βιβλ. 7), αἱ δὲ πλευραὶ αὐτοῦ ΑΒ, ΑΓ περιφερείας εἶναι τεταρτημόρια.

Ἐὰν δὲ καὶ ἡ γωνία Α ὀρθὴ ὑποτεθῇ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τότε *τρισορθογώνιον*, καὶ αἱ μὲν γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ὀρθαὶ, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτοῦ τεταρτημόρια.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ὀκτὼ περιέχει τρισορθογώνια τρίγωνα. Τοῦτο δὲ φανεροῦται ὑπὸ τοῦ 236 σχήματος, ὑποτιθεμένου τοῦ τόξου ΜΝ ἴσου τεταρτημορίῳ περιφερείας.

Σχόλιον. Ἐν τοῖς ἀνωτέρω ὑπετέθη, κατὰ τὰ ἐν τῷ 6 ὁρισμῷ εἰρημένα, ὅτι τῶν σφαιρικῶν τριγώνων αἱ πλευραὶ μικρότεραι εἶναι ἡμιπεριφερείας. Ἐκ τῆς συνθήκης δὲ ταύτης ἕπεται, ὅτι πᾶσα σφαιρικοῦ τριγώνου γωνία δύο γωνιῶν ὀρθῶν εἶναι μικροτέρα· διότι, ἐὰν ἡ πλευρὰ ΑΒ ἡμιπεριφερείας ἦναι μικροτέρα, ἐὰν δὲ τοιαύτη καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ ὑποτεθῇ, τὰ τόξα ΑΒ, ΑΓ, πρέπει νὰ παραταθῶσιν ἀμφότερα διὰ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Δ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο γωνίαι ΑΒΓ, ΔΒΓ, ὁμοῦ λαμβανόμεναι, δύο ἀποτελῶσι γωνίας ὀρθὰς, ἡ γωνία ΑΒΓ μόνη εἶναι δύο ὀρθῶν γωνιῶν μικροτέρα. (σχ. 224)

Ὑπάρχουσιν ὅμως τρίγωνα σφαιρικὰ, ἔχοντα πλευράς τινας ἡμιπεριφερείας μείζονας καί τινας γωνίας δύο ὀρθῶν γωνιῶν μεγαλητέρας. Πρὸς βεβαίωσιν τούτου, παρατείνω τὴν πλευρὰν ΑΓ μέχρις οὗ συμπληρωθῇ ὁλόκληρος ἡ περιφέρεια ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἡμισφαιρίου ἀφαιρῶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Τούτων γενομένων, μένει τρίγωνόν τι, τὸ ὁποῖον δύναταί τις νὰ ἐκφράσῃ διὰ τῶν αὐτῶν στοιχείων ΑΒΓ. Ἔχει δὲ τὸ τρίγωνον τοῦτο πλευρὰς τὰς ἑξῆς ΑΒ, ΒΓ, ΑΕΔΓ, ἐξ ὧν ἡ ΑΕΔΓ εἶναι μείζων τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΕΔ. Συγχρόνως ὅμως καὶ ἡ γωνία Β, ἡ ἀντικειμένη εἰς τὴν πλευρὰν ΑΕΔΓ, μείζων εἶναι δύο ὀρθῶν κατὰ τὴν ποσότητα ΓΒΔ.

Ἐξῃρέθησαν δὲ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τὰ τοιαῦτα τρίγωνα, τὰ ἔχοντα πλευρὰς καὶ γωνίας τοσοῦτον μεγάλας, διότι ἡ λύσις αὐτῶν, τουτέστιν ὁ προσδιορισμὸς τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν τῶν τοιούτων σφαιρικῶν τριγώνων, ἀνάγεται πάντοτε εἰς τὴν λύσιν τριγώνων, ἐχόντων τὰ κατὰ τὸν ὁρισμὸν προσόντα. Καὶ τῷ ὄντι· ἐκ τῆς γνώσεως τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἕπονται πάραυτα αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου τοῦ ἄλλου, τὸ ὁποῖον ὑπολείπεται, ἀφαιρουμένου ἀπὸ τοῦ ἡμισφαιρίου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 20.

Θεώρημα.

Ὁ ἄτρακτος ΑΜΒΝΑ τὸν αὐτὸν ἔχει πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας λόγον, ὃν τοῦ ἀτράκτου αὐτοῦ ἡ γωνία ΜΑΝ ἔχει πρὸς τέσσαρας γωνίας ὀρθάς, ἢ ὃν ἔχει τὸ τόξον ΜΝ, τῆς γωνίας αὐτῆς τὸ μέτρον, πρὸς ὅλην τὴν περιφέρειαν. (σχ. 236)

Ἂς ὑποτεθῇ κατὰ πρῶτον ὅτι ὁ λόγος τοῦ τόξου ΜΝ καὶ τῆς περιφερείας ΜΝΠΚ εἶναι συμμετρικός. Ἔστω, παραδείγματος χάριν, ὅτι τὸ τόξον αὐτὸ καὶ ἡ περιφέρεια εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 5 καὶ 48.

Τούτου τεθέντος, διαιρῶ τὴν περιφέρειαν ΜΝΠΚ εἰς 48 ἴσα μέρη, ἐξ ὧν 5 περιλαμβάνει τὸ τόξον ΜΝ. Συνάπτων δὲ μετὰ ταῦτα τὸ πόλον Α καὶ τὰ σημεῖα, εἰς ἃ ἡ περιφέρεια διῃρέθη, διὰ τεταρτημορίων περιφερείας, σχηματίζω ἐπὶ τοῦ ἡμισφαιρίου ΑΜΝΠΚ 48 τρίγωνα ἴσα. Εἶναι δὲ τὰ τρίγωνα ταῦτα ἴσα, διότι ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη ἴσα πρὸς ἄλληλα εἶναι. Ὁλόκληρος λοιπὸν ἡ σφαῖρα περιλαμβάνει 96 τρίγωνα τοιαῦτα, ὁ δὲ ἄτρακτος 10 μόνον περιέχει. Ἄρα τοῦ ἀτράκτου καὶ τῆς σφαίρας αἱ ἐκτάσεις εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 10 καὶ 96, ἢ 5 καὶ 48, ἔχουσι δηλαδὴ τὴν αὐτὴν σχέσιν, τὴν ὁποίαν τὸ τόξον MN πρὸς ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν ἔχει.

Ἐὰν δὲ ὁ πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος τοῦ τόξου MN ἦναι ἀσύμμετρος, καὶ τότε δύναταί τις, μεταχειριζόμενος τὴν αὐτὴν ἀπόδειξιν, ἧς πολλάκις ἐγένετο χρῆσις, νὰ βεβαιώσῃ, ὅτι ὁ ἄτρακτος καὶ ἡ σφαῖρα τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον, ὃν ἔχει τὸ τόξον MN, πρὸς ὅλην τὴν περιφέρειαν παραβαλλόμενον.

Πόρισμα 1. Οἱ ἄτρακτοι εἶναι πρὸς τὰς ἰδίας αὐτῶν γωνίας ἀνάλογοι.

Πόρισμα 2. Κατὰ τὰ προειρημένα, τῆς σφαίρας ὁλοκλήρου ἡ ἐπιφάνεια ὀκτὼ περιλαμβάνει τρισορθογώνια τρίγωνα (πρότ. 19, βιβλ. 7). Ἐὰν λοιπὸν ληφθῇ ὡς μονὰς τὸ τρίγωνον τὸ τρισορθογώνιον, ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 8.

Τούτου τεθέντος, ἐκ τῆς προδήλου ἀναλογίας ταύτης A : 4 :: A : 4, διπλασιάζων ἀμφοτέρους τοῦ πρώτου αὐτῆς λόγου τοὺς ὅρους, συνάγω τὴν ἀναλογίαν ταύτην,

$$2A : 8 :: A : 4,$$

εἰς ἣν, ἐὰν ὁ μὲν ἀριθμὸς 4 τέσσαρας δηλοῖ γωνίας ὀρθὰς, τὸ δὲ γράμμα A τὴν γωνίαν ἀτράκτου τινὸς σημαίνῃ, διὰ δὲ τοῦ ἀριθμοῦ 8, τουτέστι δι' ὀκτὼ τρισορθογωνίων τριγώνων, ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας σημειωθῇ, ἀναγκαίως, κατὰ τὸ θεώρημα τὸ ἤδη ἀποδειχθὲν, 2A τὸν ἄτρακτον αὐτὸν ἐκφράζει. Δύναμαι δὲ νὰ μεταχειρισθῶ εἰς μὲν τὸν δεύτερον τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας λόγον τὴν γωνίαν τὴν ὀρθὴν ὡς μονάδα, εἰς δὲ τὸν πρῶτον τὸ τρίγωνον τὸ τρισορθογώνιον, διότι εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τῶν λόγων ἡ ἰσότης μόνον ἀπαιτεῖται, τῶν δὲ ὅρων τοῦ πρώτου λόγου τὸ εἶδος συνήθως διαφέρει τοῦ εἴδους τῶν ὅρων τοῦ λόγου τοῦ δευτέρου, καθὼς καὶ ἐπὶ τοῦ προκειμένου.

Ἄρα παντὸς ἀτράκτου ἡ ἐπιφάνεια δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ διπλασίου τῆς ἰδίας αὐτοῦ γωνίας. Τὸ διπλάσιον ὅμως αὐτὸ δὲν ἐκφράζει γωνίας, ἀλλὰ τρίγωνα τρισορθογώνια. (*)

(*) Μετεσκεύασα τοῦ δευτέρου αὐτοῦ πορίσματος τὴν ἐξήγησιν, πρὸς εὐχερεστέραν κατάληψιν αὐτοῦ· ἐτήρησα ὅμως τοῦ συγγραφέως τὴν πραγματικὴν ἔννοιαν. Ο.Μ.

Σχόλιον. Ἡ σφὴν, ἡ μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων ΑΜΒ, ΑΝΒ περιεχομένη, τὴν αὐτὴν ἔχει πρὸς τὴν στερεότητα τῆς σφαίρας σχέσιν, ἣν ἔχει ἡ γωνία Α πρὸς τέσσαρας γωνίας ὀρθάς. Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ἀτράκτων τῶν σφηνῶν ἡ ἰσότης ἕπεται. Ἄρα αἱ σφῆνες εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς γωνίας, τὰς σχηματιζομένας ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων, ὑφ᾽ ὧν περιέχονται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 21.

Θεώρημα.

Τὰ συμμετρικὰ σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσα.

Ἔστωσαν ΑΒΓ, ΔΕΖ δύο τρίγωνα συμμετρικὰ, τουτέστι δύο τρίγωνα, ἔχοντα μὲν τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας, ἤτοι ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ, ΒΓ=ΕΖ, ὧν ὅμως ἡ ἐπ᾽ ἄλληλα ἐφαρμογὴ εἶναι ἀδύνατος. Λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ΑΒΓ εἶναι ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ ΔΕΖ.

Ἔστω Π ὁ πόλος τοῦ μικροῦ κύκλου, τοῦ διερχομένου ἐκ τῶν σημείων Α, Β, Γ (*). Ἐκ τοῦ πόλου Π ἄγω τὰ τρία ἴσα μεγίστου κύκλου τόξα ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ (πρότ. 6, βιβλ. 7). Μετὰ ταῦτα σχηματίζω εἰς τὸ σημεῖον Ζ τὴν γωνίαν ΔΖΚ=ΑΓΠ, καὶ λαμβάνω τὸ τόξον ΖΚ=ΓΠ· ἐπὶ τέλους, δὲ συνάπτω τὰ σημεῖα Δ καὶ Κ, Ε καὶ Κ διὰ τῶν μεγίστου κύκλου τόξων ΔΚ, ΕΚ.

Τούτων γενομένων, αἱ πλευραὶ ΔΖ, ΖΚ εἶναι ἴσαι ταῖς πλευραῖς ΑΓ, ΓΠ. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡ γωνία ΔΖΚ=ΑΓΠ, τὰ δύο τρίγωνα ΔΖΚ, ΑΓΠ (πρότ. 12, βιβλ. 7) εἶναι καθ᾽ ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη ἴσα. Ἄρα καὶ ἡ πλευρὰ ΔΚ=ΑΠ, καὶ ἡ γωνία ΔΚΖ=ΑΠΓ.

Ἐπειδὴ δὲ τῶν συμμετρικῶν τριγώνων ΔΖΕ, ΑΒΓ αἱ γωνίαι ΔΖΕ, ΑΓΒ, αἱ εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς ΔΕ, ΑΒ ἀντικείμεναι, εἶναι ἴσαι, ἐὰν ἀπὸ τῶν δύο ἴσων αὐτῶν γωνιῶν, ἀπὸ ἑκατέρας ἑκατέρα, ἀφαιρεθῶσιν αἱ κατὰ τὴν κατασκευὴν ἴσαι γωνίαι ΔΖΚ,

---

(*) Ὁ κύκλος, ὁ ἐκ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ διαβαίνων, ὁ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ γεγραμμένος, μικρὸς εἶναι τῆς σφαίρας κύκλος. Διότι ἂν μέγιστος κύκλος ὑποτεθῇ, τὰ τρία τόξα ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἤθελον ὑπάρχει ἐπιπέδου, καὶ ἀντὶ τριγώνου, ἓν μόνον ἤθελον ἀποτελεῖ τόξον.

ΑΓΠ, αἱ δύο μένουσαι γωνίαι ΚΖΕ, ΠΓΒ θέλουσιν εἶσθαι ἴσαι. Ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ πλευραὶ ΚΖ, ΖΕ εἶναι ἴσαι ταῖς πλευραῖς ΠΓ, ΓΒ, τὰ τρίγωνα ΖΚΕ, ΓΠΒ εἶναι καθ' ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη ἴσα. Ἄρα καὶ ἡ πλευρὰ ΚΕ=ΠΒ, καὶ ἡ γωνία ΖΚΕ=ΓΠΒ.

Ἐπειδὴ ὅμως τὰ τρίγωνα ΔΖΚ, ΑΓΠ, τὰ ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, εἶναι ἰσοσκελῆ, δυνατὸν εἶναι νὰ ἐφαρμοσθῶσιν ἐπ' ἄλληλα· διότι, τιθεμένης τῆς πλευρᾶς ΠΑ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ πλευρᾶς ΚΖ, ἡ πλευρὰ ΠΓ συμπίπτει μετὰ τῆς ἴσης αὐτῇ πλευρᾶς ΚΔ· ἐπομένως τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα ταὐτίζονται καὶ ἓν μόνον ἀποτελοῦσι τρίγωνον. Ὅθεν εἶναι ἴσα. Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ΔΚΖ=ΑΠΓ.

Ὡσαύτως δὲ ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ἐπιφάνεια ΖΚΕ=ΓΠΒ, καὶ ἡ ἐπιφάνεια ΔΚΕ=ΑΠΒ. Λοιπὸν ΔΚΖ+ΖΚΕ—ΔΚΕ= ΑΠΓ+ΓΠΒ—ΑΠΒ· ἢ ΔΕΖ=ΑΒΓ.

Ἄρα τὰ δύο σφαιρικὰ συμμετρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσα.

Σχόλιον. Οἱ πόλοι Π καὶ Κ ἐνδέχεται νὰ τύχωσιν ἐντὸς τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΖ. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει συνάπτονται τὰ τρία τρίγωνα ΔΚΖ, ΖΚΕ, ΔΚΕ καὶ ἀποτελεῖται τὸ τρίγωνον ΔΕΖ. Ὡσαύτως δὲ συνάπτονται καὶ τὰ τρία τρίγωνα ΑΠΓ, ΓΠΒ, ΑΠΒ καὶ σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Τοῦ θεωρήματος ὅμως ἡ ἀπόδειξις καὶ τὸ ἐκ ταύτης προκύπτον συμπέρασμα μένουσι πάντοτε τὰ αὐτά.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 22.

Θεώρημα.

Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀντικειμένων τριγώνων ΑΟΓ, ΒΟΔ, τῶν σχηματιζομένων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἡμισφαιρίου τινὸς ΟΑΓΒΔ διὰ τῆς κατὰ θέλησιν τομῆς δύο μεγίστων κύκλων ΑΟΒ, ΓΟΔ, ἀποτελεῖ τὸν ἄτρακτον, τὸν ἔχοντα γωνίαν τὴν ΒΟΔ. (σχ. 238)

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἐκτείνω τὰ τόξα ΟΒ, ΟΔ εἰς τὸ ἡμισφαίριον τὸ ἄλλο, μέχρις οὗ συναπαντηθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Ν.

Τὸ τόξον ΟΒΝ εἶναι ἡμιπεριφέρεια· ὡσαύτως ἡμιπεριφέρεια εἶναι καὶ τὸ τόξον ΑΟΒ. Ἀφαιρουμένου δὲ καὶ ἀπὸ τῆς πρώτης καὶ ἀπὸ τῆς δευτέρας ἡμιπεριφερείας τοῦ κοινοῦ τόξου ΟΒ, μένει ΒΝ=ΑΟ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ΔΝ=ΓΟ, καὶ ΒΔ=ΑΓ. Τουτέστι τὰ δύο τρίγωνα ΑΟΓ, ΒΔΝ ἔχουσι τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, εἶναι δὲ συμμετρικά, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς καὶ τῆς θέσεως αὐτῶν εἰκάζεται. Ἄρα εἶναι ἴσα κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν (προτ. 21, βιβλ. 7). Ἀλλὰ τὰ δύο τρίγωνα ΒΟΔ, ΒΝΔ ἀποτελοῦσι τὸν ἄτρακτον ΟΒΝΔΟ, τὸν ἔχοντα γωνίαν τὴν ΒΟΔ. Λοιπὸν καὶ τὰ δύο τρίγωνα ΑΟΓ, ΒΟΔ, ὁμοῦ λαμβανόμενα, εἶναι τῷ αὐτῷ ἀτράκτῳ ἰσοδύναμα.

Σχόλιον. Πρόδηλον εἶναι ὅτι αἱ δύο σφαιρικαὶ πυραμίδες, αἱ ἔχουσαι βάσεις τὰ τρίγωνα ΑΟΓ, ΒΟΔ, ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἰσοδυναμοῦσι τῷ σφαιρικῷ ὄνυχι, τῷ ἔχοντι γωνίαν τὴν ΒΟΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 23.

Θεώρημα.

Παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ἡ ἐπιφάνεια μέτρον ἔχει τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν αὐτοῦ γωνιῶν τὸ ὑπερβάλλον, τὸ ὑπὲρ ὀρθὰς γωνίας δύο. (σχ. 239)

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Ἐκτείνω τοῦ τριγώνου αὐτοῦ τὰς πλευρὰς μέχρις οὗ συναντήσωσι μέγιστόν τινα κύκλον ΔΕΖΗ, περιλαμβάνοντα ἐν ἑαυτῷ τὸ τρίγωνον.

Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΗΘ, ὁμοῦ λαμβανόμενα, ἀποτελοῦσι τὸν ἄτρακτον, τὸν ἔχοντα γωνίαν μὲν τὴν Α, μέτρον δὲ 2Α (πρότ. 20, βιβλ. 7). Τουτέστιν ΑΔΕ+ΑΗΘ=2Α. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ΒΗΖ+ΒΙΔ=2Β, καὶ ΓΙΘ+ΓΖΕ=2Γ. Ἀλλὰ τὰ ἓξ αὐτὰ τρίγωνα συμπληροῦσι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἡμισφαιρίου, ἐφ' οὗ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κεῖται, καὶ ἔτι δὶς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πλεονάζει. Τουτέστι ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἓξ αὐτῶν τριγώνων ἀποτελοῦνται τέσσαρα τρισορθογώνια τρίγωνα καὶ δύο τρίγωνα ΑΒΓ. Λοιπὸν 4+2ΑΒΓ=2Α+2Β+2Γ, ἢ 2+ΑΒΓ=Α+Β+Γ, ἢ ΑΒΓ=Α+Β+Γ—2. Ἄρα παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ἡ ἐπιφάνεια μέτρον ἔχει τὸ ὑπόλοιπον, τὸ μένον μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν δύο ὀρθῶν γωνιῶν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου αὐτοῦ.(*)

Πόρισμα 1. Ὅσας τὸ μέτρον αὐτὸ γωνίας ὀρθὰς περιλαμβάνει, τόσα τὸ τρίγωνον τὸ σφαιρικὸν, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος, τρίγωνα τρισορθογώνια, ἤτοι ὄγδοα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας περιέχει (πρότ. 20, βιβλ. 7). Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ἑκάστη τῶν γωνιῶν τοῦ δεδομένου σφαιρικοῦ τριγώνου ἦναι τὰ $\frac{4}{3}$ γωνίας ὀρθῆς, αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου αὐτοῦ γωνίαι 4 ἐν ὅλῳ ἀποτελοῦσι γωνίας ὀρθὰς, ἡ δὲ ἐπιφάνεια αὐτοῦ δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ $4-2=2$. Τουτέστι τὸ τρίγωνον αὐτὸ δύο περιέχει τρισορθογώνια τρίγωνα, ἤτοι τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τὸ τέταρτον εἶναι.

Πόρισμα 2. Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀτράκτῳ, τῷ ἔχοντι γωνίαν ἐκφραζομένην διὰ τοῦ ποσοῦ τούτου $\frac{A+B+\Gamma}{2}-1$. Διότι καὶ τὸ τρίγωνον καὶ ὁ ἄτρακτος μέτρον ἔχουσι τὸ ποσὸν τοῦτο $A+B+\Gamma-2$. Ὡσαύτως καὶ ἡ σφαιρικὴ πυραμὶς, ἡ βάσιν ἔχουσα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, εἶναι ἰσοδύναμος τῷ σφαιρικῷ ὄνυχι, τῷ ἔχοντι γωνίαν τὴν ἑξῆς $\frac{A+B+\Gamma}{2}-1$.

Σχόλιον. Παραβαλλομένου τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ πρὸς τὸ τρισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον, συμπαραβάλλεται καὶ ἡ σφαιρικὴ πυραμὶς, ἡ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ βάσιν ἔχουσα, πρὸς τὴν τρισορθογώνιον σφαιρικὴν πυραμίδα, ὁ αὐτὸς δὲ ἐκ τῶν δύο αὐτῶν παραβολῶν προκύπτει λόγος. Ὡσαύτως δὲ παραβάλλεται καὶ ἡ στερεὰ γωνία, ἡ κατὰ τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος, τῆς ἐχούσης βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, πρὸς τὴν στερεὰν γωνίαν, τὴν κατὰ τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος τῆς τρισορθογωνίου.

(*) Εἰς τὸν τύπον τοῦτον $A+B+\Gamma-2$, τὸν ἐκφράζοντα τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐν ὅλῳ μὲν μονὰς εἶναι τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον, ἰδίᾳ δὲ τὰ μὲν ποσὰ Α, Β, Γ σημαίνουσι γωνίας, ὁ δὲ ἀριθμὸς 2 λογίζεται ὡς ἀφῃρημένος. Αὕτη δὲ τῶν μονάδων ἡ ποικιλία δὲν ἐπηρεάζει ποσῶς τὸ θεώρημα, διότι ζητεῖται ἁπλῶς διά τίνος ἀριθμοῦ δυνατὸν εἶναι νὰ παρασταθῇ παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ἡ ἐπιφάνεια, ὅταν μονὰς ἐκληφθῇ τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον. Ο. Μ.

Καὶ τῷ ὄντι· ἡ σύγκρισις γίνεται, παρατιθεμένων τῶν συγκρινομένων πραγμάτων. Ἂν λοιπὸν, κατὰ τὴν σύγκρισιν, τῶν πυραμίδων αἱ βάσεις συμπέσωσι, πρόδηλον εἶναι ὅτι καὶ αἱ πυραμίδες καὶ αἱ κατὰ τὰς κορυφὰς αὐτῶν στερεαὶ γωνίαι συμπίπτουσιν. Ἐντεῦθεν δὲ πολλὰ ἕπονται πορίσματα.

Α^{ον}. Αἱ σφαιρικαὶ τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν ἀνάλογοι.

Β^{ον}. Αἱ κατὰ τὰς κορυφὰς τῶν αὐτῶν πυραμίδων στερεαὶ γωνίαι τὴν αὐτὴν ἔχουσι τῶν βάσεων αὐτῶν ἀναλογίαν. Διὰ τοῦτο, πρὸς εὕρεσιν τοῦ λόγου δύο στερεῶν γωνιῶν, τοποθέτησον τὰς κορυφὰς αὐτῶν εἰς τὸ κέντρον τῆς αὐτῆς σφαίρας καὶ παράβαλε πρὸς ἄλληλα τὰ σφαιρικὰ πολύγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὑπὸ τῶν ἑδρῶν τῶν στερεῶν γωνιῶν χαρασσόμενα.

Ἡ κατὰ τὴν κορυφὴν τῆς τρισορθογωνίου σφαιρικῆς πυραμίδος στερεὰ γωνία, ἡ ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων ἀμοιβαίως καθέτων ἀποτελουμένη, ἡ καλουμένη *ὀρθὴ στερεὰ γωνία*, δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς μονὰς, πρὸς καταμέτρησιν τῶν λοιπῶν στερεῶν γωνιῶν. Τούτου τεθέντος, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, ὁ χρησιμεύων πρὸς παράστασιν τῆς ἐπιφανείας οἱουδήποτε σφαιρικοῦ πολυγώνου, χρησιμεύει καὶ πρὸς ἔκφρασιν τῆς εἰς αὐτὸ ἀντικειμένης στερεᾶς γωνίας. Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια σφαιρικοῦ τινὸς πολυγώνου ἦναι $\frac{3}{4}$, ἐὰν δηλαδὴ ἦναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ τρισορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ πολύγωνον αὐτὸ στερεὰ γωνία εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀρθῆς στερεᾶς γωνίας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 24.

Θεώρημα.

Ἡ ἐπιφάνεια παντὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου μέτρον ἔχει τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν αὐτοῦ τὸ ὑπερβάλλον, τὸ ὑπὲρ δύο γωνίας ὀρθὰς, τοσάκις λαμβανομένας, ὅσαι εἶναι τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ αἱ πλευραὶ, πλὴν δύο. (σχ. 240)

Ἐκ τῆς κορυφῆς γωνίας τινὸς Α ἄγω τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ, καὶ διαιρῶ τοιουτοτρόπως τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ εἰς τόσα τρίγωνα, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ, πλὴν δύο. Ἐπειδὴ δὲ παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ἡ ἐπιφάνεια μέτρον ἔχει τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν αὐτοῦ τὸ ὑπερβάλλον, τὸ ὑπὲρ ὀρθὰς γωνίας δύο, τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, τὸ ἐκ τοῦ συνόλου τῶν τριγώνων ἀποτελούμενον, μέτρον ἔχει τὸ ἄθροιμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων αὐτῶν, ἤτοι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου, διότι τὰ δύο αὐτὰ ἀθροίσματα εἶναι ἴσα, πλὴν τοσάκις ὀρθῶν γωνιῶν δύο, ὅσαι εἶναι τοῦ πολυγώνου αἱ πλευραί, πλὴν δύο.

Σχόλιον. Ἔστω α μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ τινὸς πολυγώνου, π δὲ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἡ πληθύς· πρὸς τούτοις δὲ ἔστω ἡ γωνία ἡ ὀρθὴ ἴση τῇ μονάδι· τοῦ πολυγώνου τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος ἡ ἐπιφάνεια μέτρον ἔχει τὸ ποσὸν τοῦτο $α-2(π-2)=α-2π+4$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 25.

Θεώρημα.

Ἔστω Κ μὲν τῶν κορυφῶν πολυέδρου τινὸς ἡ πληθύς, Ε δὲ ἡ πληθὺς τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ, καὶ Ρ τῶν ῥάχεων αὐτοῦ τὸ πλῆθος· λέγω ὅτι μεταξὺ τῶν τριῶν αὐτῶν ποσῶν ἡ ἀκόλουθος πάντοτε ὑπάρχει σχέσις $Κ+Ε=Ρ+2$. (σχ. 240)

Λαμβάνω ἐντὸς τοῦ πολυέδρου, τὸ ὁποῖον ὡς παράδειγμα μεταχειρίζομαι, σημεῖόν τι, καὶ ἐξ αὐτοῦ ἄγω εἰς ὅλας τοῦ πολυέδρου τὰς κορυφὰς γραμμὰς εὐθείας. Μετὰ δὲ ταῦτα φαντάζομαι περὶ τὸ πολύεδρον σφαῖραν, κέντρον ἔχουσαν τὸ σησημεῖον, ἐξ οὗ τὰς εὐθείας ἤγαγον, καὶ συνάπτω διὰ τόξων κύκλων μεγίστων τὰ σημεῖα, εἰς ἃ αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ διατρυπῶσι τὴν σφαῖραν. Σχηματίζω δὲ τοιουτοτρόπως τοσαῦτα καὶ τοιαῦτα πολύγωνα σφαιρικά, ὅσας καὶ οἵας τὸ πολύεδρον ἔχει ἕδρας.

Ἔστω λοιπὸν ΑΒΓΔΕ πολύγωνόν τι, ἐκ τῶν κατὰ τὸν εἰρημένον τρόπον σχηματισθέντων· ἔστω προσέτι π μὲν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ ἡ πληθύς, α δὲ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ Α, Β, Γ, Δ, Ε τὸ ἄθροισμα. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ ἡ ἐπιφάνεια ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου τούτου $α-2π+4$. Προσδιοριζομένης δὲ ὡσαύτως καὶ τῆς ἐπιφανείας ἑκάστου τῶν λοιπῶν σφαιρικῶν πολυγώνων, καὶ ἀθροιζομένων εἰς ἓν ὅλων τῶν κυρτῶν αὐτῶν ἐπιφανειῶν, ἔνθεν μὲν τῆς σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια σχηματίζεται, ἥτις καὶ σημειοῦται διὰ τοῦ 8, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν τῶν πολυγώνων περιλαμβάνει ὅλα τῶν γωνιῶν αὐτῶν τὰ ἀθροίσματα, πλὴν δὶς τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν αὐτῶν, πλέον τοσάκις τοῦ ἀριθμοῦ 4, ὅσαι εἶναι τοῦ πολυέδρου αἱ ἕδραι. Ἐπειδὴ δὲ τῶν σφαιρικῶν αὐτῶν πολυγώνων αἱ γωνίαι, αἱ πέριξ σημείου τινὸς Α συνηρμοσμέναι, τέσσαρας ἀποτελοῦσι γωνίας ὀρθὰς, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ὅλων τῶν πολυγώνων περιλαμβάνει τοσάκις τὸν ἀριθμὸν 4, ὅσας τὸ πολύεδρον ἔχει κορυφάς· τουτέστι τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶναι ἴσον τῷ ποσῷ 4Κ. Τὸ διπλάσιον δὲ τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κτλ. ἐξισοῦται τῷ τετραπλασίῳ τοῦ πλήθους τῶν ῥάχεων τοῦ πολυέδρου, ἐξισοῦται δηλαδὴ τῇ ποσότητι 4Ρ, διότι πᾶσα τοῦ πολυέδρου ῥάχις εἰς δύο αὐτοῦ ἕδρας ὡς πλευρὰ χρησιμεύει. Ἄρα $8=4К-4Р+4Е$· ἢ, ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ τοῦ 4 διαιρουμένων, $2=К-Р+Е$. Ὅθεν $К+Е=Р+2$.

Πόρισμα. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἕπεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, ἐξ ὧν αἱ στερεαὶ γωνίαι πολυέδρου τινὸς ἀποτελοῦνται, περιλαμβάνει τοσάκις τέσσαρας γωνίας ὀρθὰς, ὅσας τὸ ποσὸν τοῦτο $К-2$ περιέχει μονάδας· τοῦ Κ σημαίνοντος τῶν κορυφῶν τοῦ πολυέδρου τὸ πλῆθος.

Τῷ ὄντι· τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἕδρας τινὸς, ἐχούσης πλευρὰς π, ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου τούτου $2\pi-4$ (πρότ. 20, βιβλ. 1). Τύποι δὲ ἀπαράλλακτοι ἐκφράζουσι καὶ τῶν γωνιῶν τῶν λοιπῶν ἑδρῶν τὰ ἀθροίσματα. Τὸ κεφάλαιον λοιπὸν ὅλων αὐτῶν τῶν ἀθροισμάτων, ἤτοι τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν ὅλων τῶν ἑδρῶν, περιλαμβάνει ὅλα τὰ ποσὰ 2π, ἤτοι τὸ διπλάσιον τῶν πλευρῶν ὅλων τῶν ἑδρῶν, ὅ ἐστι τὸ τετραπλάσιον τῶν ῥάχεων τοῦ πολυέδρου, τουτέστι 4Ρ, πλὴν τοῦ ἀριθμοῦ 4 τοσάκις, ὅσαι εἶναι τοῦ πολυέδρου αὐτοῦ αἱ ἕδραι, ἤτοι πλὴν 4Ε. Τὸ ἄθροισμα δηλαδὴ τῶν γωνιῶν ὅλων τῶν ἑδρῶν εἶναι ἴσον τῷ ποσῷ τούτῳ $4Р-4Е$. Ἀλλὰ, κατὰ τὸ θεώρημα, τὸ ἤδη ἀποδειχθὲν, $Р-Е=К-2$. Ἄρα $4Р-4Е=4\,(К-2)$. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, ἐξ ὧν αἱ στερεαὶ γωνίαι κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 26.

Θεώρημα.

Ἐξ ὅλων τῶν σφαιρικῶν τριγώνων, τῶν κατασκευαζομένων διὰ δύο δεδομένων πλευρῶν ΓΒ, ΓΑ καὶ τρίτης τινὸς, κατὰ θέλησιν εἰλημμένης, μέγιστον εἶναι τὸ ΑΒΓ, τὸ ἔχον τὴν γωνίαν Γ, τὴν μεταξὺ τῶν δύο δεδομένων πλευρῶν περιεχομένην, ἴσην τῷ ἀθροίσματι τῶν δύο λοιπῶν αὐτοῦ γωνιῶν Α καὶ Β. (σχ. 272, καὶ 273)

Ἐκτείνω τὰς δύο πλευρὰς ΑΓ, ΑΒ μέχρις οὗ συναντηθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Δ, τοιουτοτρόπως δὲ σχηματίζω τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΒΓΔ, εἰς ὃ ἡ γωνία ΓΒΔ εἶναι ἴση τῷ ἀθροίσματι τῶν δύο λοιπῶν γωνιῶν ΒΔΓ, ΒΓΔ. Διότι τὸ ἄθροισμα ΒΓΔ+ΒΓΑ δύο ἀποτελεῖ γωνίας ὀρθάς· δύο δὲ ὡσαύτως γωνίας ὀρθὰς ἀποτελεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα ΓΒΑ+ΓΒΔ. Ὅθεν ΒΓΔ+ΒΓΑ=ΓΒΑ+ΓΒΔ. Προστιθεμένης δὲ κατὰ τὰ μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς καὶ τῆς ἀκολούθου ΒΔΓ=ΒΑΓ, ἡ ἰσότης παράγεται αὕτη ΒΓΔ+ΒΓΑ+ΒΔΓ=ΓΒΑ+ΓΒΔ+ΒΑΓ. Ἀλλὰ, καθ' ὑπόθεσιν, ΒΓΑ=ΓΒΑ+ΒΑΓ· ἄρα ΓΒΔ=ΒΓΔ+ΒΔΓ.

Μετὰ ταῦτα ἄγω τὸ τόξον ΒΙ καὶ σχηματίζω δι' αὐτοῦ τὴν γωνίαν ΓΒΙ=ΒΓΔ, ἑπομένως καὶ τὴν γωνίαν ΙΒΔ=ΒΔΓ. Τούτου δὲ γενομένου, τὰ δύο τρίγωνα ΙΒΓ, ΙΒΔ εἶναι ἰσοσκελῆ. Ὅθεν ΙΓ=ΙΒ=ΙΔ. Ἄρα τὸ σημεῖον Ι, τὸ μέσον τοῦ τόξου ΔΓ, ἀπέχει ἐξ ἴσου ἐκ τῶν τριῶν σημείων Β, Γ, Δ. Ὡσαύτως δὲ, δι' ὅμοιόν τινα λόγον, τὸ σημεῖον Ο, τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΒ, ἐξ ἴσου ἀπέχει ἀπὸ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ.

Ἔστω ἤδη τὸ τόξον ΓΑ′=ΓΑ, καὶ ἡ γωνία ΒΓΑ′>ΒΓΑ. (σχ. 272)

Συνάπτω τὰ σημεῖα Α′ καὶ Β διὰ τοῦ τόξου Α′Β, καὶ ἐκτείνω τὰ τόξα Α′Γ, Α′Β μέχρις οὗ συναπαντηθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Δ′. Τὸ τόξον Δ′ΓΑ′ εἶναι ἴσον ἡμιπεριφερείᾳ· ἡμιπεριφέρεια δὲ εἶναι καὶ τὸ τόξον ΔΓΑ. Ἐπειδὴ δὲ ΓΑ′=ΓΑ, ἄρα καὶ ΓΔ′=ΓΔ. Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΓΙΔ′ αἱ πλευραὶ ΓΙ+ΙΔ′>ΓΔ′. Λοιπὸν ΙΔ′>ΓΔ′—ΓΙ, ἢ ΙΔ′>ΙΔ.

Διαιρῶ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΓΙΒ τὴν κατὰ τὴν κορυφὴν αὐτοῦ γωνίαν Ι εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τοῦ τόξου ΕΙΖ. Τὸ τόξον τοῦτο εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ μέσου τῆς βάσεως. Λαμβάνω δὲ μεταξὺ τοῦ I καὶ τοῦ E σημεῖόν τι Δ. Ὅθεν ἔχω ΒΔ=ΓΔ. Ἀλλὰ τὸ τόξον ΒΔ εἶναι μικρότερον τοῦ ΒΙ, διότι, ἐν πρώτοις, μεταχειριζόμενος τὴν ἀπόδειξιν τῆς 9 προτάσεως τοῦ πρώτου βιβλίου, δύναμαι ν' ἀποδείξω ὅτι ΒΔ+ΔΓ<ΒΙ+ΙΓ. Διαιρῶν δὲ ἀμφότερα τῆς ἀνισότητος ταύτης τὰ μέλη διὰ 2, εὑρίσκω ΒΔ< ΒΙ. Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον Δ′ΔΓ ἔχομεν Δ′Δ>Δ′Γ—ΓΔ, ἔτι δὲ μᾶλλον Δ′Δ>ΔΓ—ΓΙ, ἢ Δ′Δ>ΔΙ, ἢ Δ′Δ>ΒΙ. Λοιπὸν Δ′Δ> ΒΔ. Λοιπὸν ἐὰν τις ζητήσῃ ἐπὶ τοῦ τόξου ΕΙΖ σημεῖόν τι, ἰσάκις ἀπέχον ἐκ τῶν τριῶν σημείων Β, Γ, Δ′, τὸ σημεῖον αὐτὸ δὲν εὑρίσκεται, εἰμὴ ἐπὶ τῆς παρατάσεως τοῦ τόξου ΕΙ πρὸς τὸ Ζ.

Ἔστω Ι′ τὸ ζητούμενον αὐτὸ σημεῖον· ὅθεν Δ′Ι′=ΒΙ′=ΓΙ′. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα Ι′ΓΒ, Ι′ΓΔ′, Ι′ΒΔ′ εἶναι ἰσοσκελῆ, ἡ γωνία Ι′ΒΓ=Ι′ΓΒ, καὶ ἡ γωνία Ι′ΒΔ′=Ι′Δ′Β, καὶ ἡ γωνία Ι′ΓΔ′= Ι′Δ′Γ. Ἀλλὰ τῶν γωνιῶν Δ′ΒΓ, ΓΒΔ′ τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖ δύο γωνίας ὀρθάς· δύο δὲ ἀποτελοῦσι γωνίας ὀρθὰς καὶ αἱ δύο γωνίαι Δ′ΓΒ, ΒΓΔ′, ὁμοῦ λαμβανόμεναι· λοιπὸν

$$\Delta'\mathrm{B}\mathrm{I}'+\mathrm{I}'\mathrm{B}\Gamma+\Gamma\mathrm{B}\Delta'=2,$$

$$\mathrm{B}\Gamma\mathrm{I}'-\mathrm{I}'\Gamma\Delta'+\mathrm{B}\Gamma\Delta'=2.$$

Ἀθροιζομένων κατὰ μέλη τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων, ἐπειδὴ Ι′ΒΓ=ΒΓΙ′, καὶ Δ′ΒΙ′—Ι′ΓΔ′=ΒΔ′Ι′—Ι′Δ′Γ=ΓΔ′Β=ΓΔ′Β, ἡ ἀκόλουθος προκύπτει ἐξίσωσις

$$2\mathrm{I}'\mathrm{B}\Gamma+\Gamma\Delta'\mathrm{B}+\Gamma\mathrm{B}\Delta'+\mathrm{B}\Gamma\Delta'=4.$$

Λοιπὸν ΓΔ′Β+ΓΒΔ′+ΒΓΔ′—2(τουτέστι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου Δ′ΒΓ)=2—2Ι′ΒΓ. Ἐν ἄλλοις λόγοις, *τὸ ἐμβαδὸν* Δ′ΒΓ= 2—2 *ἡ γωνία* Ι′ΒΓ. Ὡσαύτως δὲ εἰς τὸ τρίγωνον ΔΒΓ *τὸ ἐμβαδὸν* ΔΒΓ=2—2 *ἡ γωνία* ΙΒΓ. Ἀλλὰ κατὰ τὰ ἤδη ἀποδεδειγμένα Ι′ΒΓ>ΙΒΓ· ἄρα τὸ ἐμβαδὸν Δ′ΒΓ εἶναι μικρότερον τοῦ ἐμβαδοῦ ΔΒΓ.

Διὰ τῆς αὐτῆς ἀποδείξεως, (σχ. 273), εἰς τὸ αὐτὸ καταντᾷ τις συμπέρασμα, ἐὰν ὄντος τοῦ τόξου ΓΔ′=ΓΔ, λάβῃ ΒΓΔ′< ΒΓΔ. Ἄρα ἐξ ὅλων τῶν τριγώνων, τῶν κατασκευαζομένων διὰ δύο πλευρῶν δεδομένων καὶ τρίτης κατὰ θέλησιν εἰλημμένης, μέγιστον εἶναι τὸ ΔΒΓ.

Σχόλιον 1. (σχ. 241). Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ μεταξὺ ὅλων τῶν κατασκευαζομένων διὰ δύο δεδομένων πλευρῶν ΓΑ, ΓΒ μέγιστον, ἐγγράφεται εἰς τὸ ἡμικύκλιον, τὸ ἔχον διάμετρον τῆς τρίτης πλευρᾶς ΑΒ τὴν χορδήν. Διότι, κατὰ τὰ ἤδη ἀποδεδειγμένα, τὰ διαστήματα ΟΓ, ΟΒ εἶναι ἴσα, ἐὰν Ο ἦναι τοῦ ΑΒ τὸ μέσον. Ἄρα ἡ περιφέρεια τοῦ μικροῦ κύκλου, τοῦ γραφομένου ἐκ τοῦ σημείου Ο, ὡς ἐκ πόλου, καὶ διὰ τοῦ ἀποστήματος ΟΒ, διέρχεται διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ. Τοῦ μικροῦ δ' αὐτοῦ κύκλου διάμετρος εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΑ· διότι τὸ κέντρον αὐτοῦ, τὸ ἐνταυτῷ κατ' ἀνάγκην ὑπάρχον καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μικροῦ αὐτοῦ κύκλου, καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τόξου τοῦ μεγίστου κύκλου ΒΟΑ (πρότ. 1, βιβλ. 7, πόρισ. 4), ἀναγκαίως εὑρίσκεται εἰς τὴν κοινὴν τῶν δύο αὐτῶν ἐπιπέδων τομήν, τουτέστιν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΑ. Ὅθεν ἡ εὐθεῖα ΒΑ εἶναι διάμετρος.

Σχόλιον 2. Ἐπειδὴ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ γωνία Γ εἶναι ἴση τῷ ἀθροίσματι τῶν δύο λοιπῶν αὐτοῦ γωνιῶν Α καὶ Β, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τοῦ τριγώνου αὐτοῦ γωνιῶν εἶναι ἴσον τῷ διπλασίῳ τῆς γωνίας Γ. Ἀλλὰ τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου τὸ ἄθροισμα εἶναι μεῖζον δύο ὀρθῶν γωνιῶν (πρότ. 19, βιβλ. 7), ἄρα ἡ γωνία Γ εἶναι μείζων μιᾶς γωνίας ὀρθῆς.

Σχόλιον 3. Προεκβαλλομένων τῶν πλευρῶν ΓΒ, ΓΑ μέχρι τοῦ σημείου Ε, εἰς ὃ ἐκ νέου συναπαντῶνται, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΒΑΕ. Τὸ τρίγωνον αὐτὸ εἶναι ἴσον τῷ τετάρτῳ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Διότι ἡ γωνία Ε=Γ=ΑΒΓ+ΓΑΒ. Ἄρα αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ΒΑΕ εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς τὰς τέσσαρας ΑΒΓ, ΑΒΕ, ΓΑΒ, ΒΑΕ, τὰς ἀποτελούσας ἐν ὅλῳ τέσσαρας γωνίας ὀρθάς. Λοιπὸν (πρότ. 23, βιβλ. 7) ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου ΒΑΕ=4—2=2, τουτέστι ἴση τῷ τετάρτῳ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Σχόλιον 4. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δὲν εἶναι μέγιστον, ὅταν τῶν δύο αὐτοῦ πλευρῶν ΓΑ, ΓΒ τὸ ἄθροισμα ἴσον ἡμιπεριφερείᾳ κύκλου μεγίστου, ἢ μεῖζον αὐτῆς ἦναι. Διότι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγράφεται εἴς τι τῆς σφαίρας ἡμικύκλιον· ἑπομένως τῶν δύο αὐτοῦ πλευρῶν ΓΑ, ΓΒ τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τῆς ἡμιπεριφερείας ΒΓΑ (πρότ. 3, βιβλ. 7). Ἄρα εἶναι μικρότερον καὶ τῆς ἡμιπεριφερείας κύκλου μεγίστου.

Ἡ αἰτία δὲ, δι' ἣν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δὲν εἶναι μέγιστον, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο αὐτοῦ πλευρῶν ὑπερέχῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν κύκλου μεγίστου, εἶναι αὕτη.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κατὰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν, γίνεται τοσοῦτον ἐκτενέστερον, καθ' ὅσον ἡ γωνία, ἡ μεταξὺ τῶν δύο δεδομένων πλευρῶν περιεχομένη, αὐξάνει. Ὅταν δὲ ἡ γωνία αὕτη πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας ἐξισωθῇ, αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ εὑρίσκονται ἐπιπέδου καὶ ὁλόκληρον ἀποτελοῦσι περιφέρειαν. Τὸ τρίγωνον δὲ τότε γίνεται μὲν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ ἡμισφαιρίου, ἀλλ' ἀποβάλλει τοῦ τριγώνου τὸ σχῆμα καὶ τὰς ἰδιότητας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 27.

Θεώρημα.

Ἐξ ὅλων τῶν περίμετρον ὡρισμένην ἐχόντων σφαιρικῶν τριγώνων, τῶν κατασκευαζομένων διά τινος πλευρᾶς γνωστῆς, μέγιστον εἶναι τὸ ἔχον τὰς λοιπὰς δύο ἀορίστους αὐτοῦ πλευρὰς ἴσας. (σχ. 242)

Ἔστω ἡ γνωστὴ πλευρὰ ΑΒ κοινὴ καὶ εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΒ, ΑΔΒ· ἔστω δὲ προσέτι ΑΓ+ΓΒ=ΑΔ+ΔΒ. Λέγω ὅτι τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΓΒ, εἰς ὃ ΑΓ=ΓΒ, μεῖζον εἶναι τοῦ τριγώνου ΑΔΒ· τοῦ μὴ ἰσοσκελοῦς.

Πρὸς βεβαίωσιν τούτου, ἐπειδὴ τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα ἔχουσι κοινὸν τὸ μέρος ΑΟΒ, ἀρκεῖ ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΟΔ εἶναι μικρότερον τοῦ τριγώνου ΑΟΓ.

Ἡ γωνία ΓΒΑ, ἡ ἴση τῇ γωνίᾳ ΓΑΒ, μείζων εἶναι τῆς γωνίας ΟΑΒ· ἐπομένως ἡ πλευρὰ ΑΟ εἶναι μείζων τῆς ΟΒ (πρότ. 16, βιβλ. 7). Λαμβάνω τὸ μὲν τόξον ΟΙ=ΟΒ, τὸ δὲ τόξον ΟΚ=ΟΔ, καὶ ἄγω τὸ τόξον ΚΙ· τὸ τοιουτοτρόπως σχηματιζόμενον τρίγωνον ΟΚΙ εἶναι ἴσον τῷ τριγώνῳ ΒΟΔ (πρότ. 12, βιβλ. 7).

Τὸ τρίγωνον ΔΟΒ, ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ τρίγωνον ΚΟΙ, ἐὰν δὲν ἦναι μικρότερον τοῦ τριγώνου ΟΑΓ, εἶναι ἢ ἴσον, ἢ μεγαλήτερον. Ἐὰν ὅμως τὸ τρίγωνον ΔΟΒ ἴσον, ἢ μεγαλήτερον τοῦ τριγώνου ΟΑΓ ὑποτεθῇ, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ι μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Ο κεῖται· τὸ σημεῖον Κ πέραν τοῦ Γ ἐπὶ τῆς παρατάσεως τοῦ τόξου ΟΓ πρέπει νὰ ὑπάρχῃ, διότι ἄλλως τὸ τρίγωνον ΟΚΙ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΓΑΟ ἤθελε περιέχεσθαι, καὶ διὰ τοῦτο μικρότερον αὐτοῦ ἤθελεν εἶσθαι.

Τούτων τεθέντων, ἐπειδὴ τὸ ἐλάχιστον ἀπόστημα μεταξὺ τῶν σημείων Γ καὶ Α εἶναι τὸ τόξον ΓΑ, ἔχομεν ΓΚ+ΚΙ+ΙΑ>ΓΑ. Ἀλλὰ ΓΚ=ΟΔ—ΓΟ, καὶ ΑΙ=ΑΟ—ΟΒ, καὶ ΚΙ=ΒΔ· ἄρα ΟΔ—ΓΟ+ΑΟ—ΟΒ+ΒΔ>ΓΑ. Ἀναγωγῆς δὲ γενομένης, ΑΔ—ΓΒ+ΒΔ>ΓΑ, ἢ ΑΔ+ΒΔ>ΓΑ+ΓΒ. Ἀλλ' αὕτη ἡ ἀνισότης ἀναιρεῖ τὴν κατὰ τὰ ἀνωτέρω παραδεδεγμένην ἰσότητα ΑΔ+ΒΔ=ΑΓ+ΓΒ. Λοιπὸν τὸ σημεῖον Κ δὲν ἀπαντᾶται ἐπὶ τῆς παρατάσεως τοῦ τόξου ΟΓ· ἄρα μεταξὺ τῶν σημείων Ο καὶ Γ περιέχεται· ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΚΟΙ, ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ τρίγωνον ΟΔΒ εἶναι μικρότερον τοῦ τριγώνου ΑΓΟ. Ἄρα τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι μεῖζον τοῦ τριγώνου ΑΔΒ, τοῦ μὴ ἰσοσκελοῦς, τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὴν αὐτὴν περίμετρον.

Σχόλιον. Αἱ τελευταῖαι δύο προηγούμεναι προτάσεις εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς προτάσεις 1 καὶ 3 τοῦ παραρτήματος τοῦ τετάρτου βιβλίου. Ὅθεν δύναταί τις νὰ συμπεράνῃ καὶ περὶ τῶν πολυγώνων τῶν σφαιρικῶν ὅσα καὶ περὶ τῶν εὐθυγράμμων πολυγώνων ἐπορίσθη.

Ἰδοὺ δὲ τὰ κυριώτερα τῶν πορισμάτων.

Πρῶτον. Ἐξ ὅλων τῶν ἰσοπεριμέτρων σφαιρικῶν πολυγώνων, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν τῶν πλευρῶν πληθύν, μέγιστον εἶναι τὸ πολύγωνον τὸ ἰσόπλευρον.

Πρὸς βεβαίωσιν τούτου μεταχειριζόμεθα τὴν ἀπόδειξιν τῆς 2 προτάσεως τοῦ παραρτήματος τοῦ τετάρτου βιβλίου.

Δεύτερον. Ἐξ ὅλων τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων, τῶν σχηματιζομένων διὰ μιᾶς μὲν κατὰ θέλησιν λαμβανομένης πλευρᾶς, τῶν δὲ λοιπῶν δεδομένων, μέγιστον εἶναι τὸ ἐγγραφόμενον εἰς τὸ ἡμικύκλιον, τὸ διάμετρον ἔχον τὴν χορδὴν τῆς πλευρᾶς τῆς ἀορίστου.

Τούτου ἡ ἀπόδειξις συνάγεται ἐκ τῆς 26 προτάσεως τοῦ παρόντος βιβλίου, κατὰ τὰ ἐν τῇ τετάρτῃ προτάσει τοῦ παραρτήματος τοῦ τετάρτου βιβλίου εἰρημένα. Τότε δὲ μόνον τὸ πολύγωνον, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος, εἶναι τὸ μέγιστον, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τῶν δεδομένων μικρότερον ἦναι ἡμιπεριφερείας κύκλου μεγίστου.

Τρίτον. Ἐξ ὅλων τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων, τῶν σχηματιζομένων διὰ πλευρῶν δεδομένων, μέγιστον εἶναι τὸ εἴς τινα τῆς σφαίρας κύκλον ἐγγραφόμενον.

Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὅπως καὶ ἡ 6 πρότασις τοῦ τετάρτου βιβλίου.

Τέταρτον. Ἐξ ὅλων τῶν ἰσοπεριμέτρων σφαιρικῶν πολυγώνων, τῶν ἐξ ἴσης πληθύος πλευρῶν συνισταμένων, μέγιστον εἶναι τὸ ἰσογώνιον καὶ ἰσόπλευρον.

Τοῦτο συνάγεται ἐκ τῶν ἀνωτέρω 1 καὶ 3 πορισμάτων.

Σημείωσις. Τὰ περὶ *μεγίστου* θεωρήματα, τὰ περὶ σφαιρικῶν πολυγώνων, ἐφαρμόζονται καὶ εἰς τὰς γωνίας τὰς στερεάς, τὰς διὰ τῶν πολυγώνων αὐτῶν καταμετρουμένας. (*)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ ΕΚΤΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΒΔΟΜΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ.

Τὰ κανονικὰ πολύεδρα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1.

Θεώρημα.

Πέντε μόνον δυνατὸν εἶναι νὰ ὑπάρξωσι πολύεδρα κανονικά.

Κατὰ τὸν ὁρισμόν, *κανονικὰ πολύεδρα* ὀνομάζονται τὰ στε-

(*) Τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι τὸ κύριον τοῦ ἑβδόμου βιβλίου ἀντικείμενον. Διὰ τοῦτο ὅλαι αἱ περὶ τριγώνων προτάσεις τοῦ πρώτου βιβλίου καὶ εἰς τὸ ἕβδομον περιέχονται.

Εἰς τὸ ἕβδομον βιβλίον ἐξηγεῖται καὶ ὁ τρόπος, καθ' ὃν προσδιορίζονται τὰ σχετικὰ μεγέθη τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων, τὰ τοῦ ἀτράκτου καὶ τῆς σφηνός, τὰ τῶν στερεῶν γωνιῶν καὶ τὰ τῶν σφαιρικῶν πυραμίδων Ἐπὶ τούτῳ δὲ ἐκλαμβάνεται ὡς μονάς, τῶν μὲν σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν, τὸ τρίγωνον τὸ τρισορθογώνιον, τῶν δὲ στερεῶν γωνιῶν, ἡ ὀρθὴ στερεὰ γωνία, τῶν δὲ σφαιρικῶν πυραμίδων καὶ τῶν σφηνῶν, ἡ τρισορθογώνιος σφαιρικὴ πυραμίς.

ρεὰ, ὧν ὅλαι μὲν αἱ ἕδραι κανονικὰ εἶναι ἴσα πολύγωνα, ὅλαι δὲ αἱ στερεαὶ γωνίαι ἴσαι. Αἱ συνθῆκαι ὅμως αὗται δύνανται νὰ ὑπάρξωσιν εἰς ὀλίγας μόνον περιστάσεις, τὰς ἑξῆς.

Πρῶτον. Γωνία στερεὰ σχηματίζεται διὰ τριῶν γωνιῶν τριγώνων ἰσοπλεύρων, διὰ τεσσάρων καὶ διὰ πέντε, διὰ πλειοτέρων ὅμως οὔ. Διότι ἓξ γωνίαι τριγώνων ἰσοπλεύρων τέσσαρας ἀποτελοῦσι γωνίας ὀρθάς· ἐπομένως δι' ἓξ γωνιῶν τοιούτων ἀδύνατον εἶναι ν' ἀποτελεσθῇ γωνία στερεὰ (πρότ. 22, βιβλ. 5). Τρία λοιπὸν διὰ τριγώνων ἰσοπλεύρων σχηματίζονται κανονικὰ πολύεδρα, τὸ τετράεδρον, τὸ ὀκτάεδρον καὶ τὸ εἰκοσάεδρον.

Δεύτερον. Μόνον διὰ τριῶν γωνιῶν σχημάτων τετραγώνων γωνία ἀποτελεῖται στερεά· διότι τέσσαρες γωνίαι τετραγώνων τέσσαρας ἀποτελοῦσι γωνίας ὀρθάς. Τέσσαρες δὲ γωνίαι ὀρθαὶ γωνίαν στερεὰν νὰ σχηματίσωσιν ἀδύνατον εἶναι. Ἓν μόνον λοιπὸν διὰ τετραγώνων σχηματίζεται πολύεδρον κανονικὸν, τὸ ἑξάεδρον, ὁ λεγόμενος κύβος.

Τρίτον καὶ τελευταῖον. Διὰ τριῶν μόνον γωνιῶν σχημάτων πενταγώνων κανονικῶν γωνία στερεὰ σχηματίζεται· διότι τέσσαρες τοιούτων πολυγώνων γωνίαι ὑπερέχουσι τέσσαρας ὀρθάς. Ἐπομένως ἓν καὶ διὰ ἑδρῶν πενταγώνων κανονικῶν ἀποτελεῖται κανονικὸν πολύεδρον, τὸ δωδεκάεδρον.

Δὲν εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ προβῇ τις περαιτέρω, διότι τρεῖς μὲν ἑξαγώνου κανονικοῦ γωνίαι τέσσαρας ἀποτελοῦσι γωνίας ὀρθὰς, τρεῖς δὲ γωνίαι ἑπταγώνου κανονικοῦ ὑπερβαίνουσι τὰς τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας.

Λοιπὸν πέντε μόνον δυνατὸν εἶναι νὰ σχηματισθῶσι πολύεδρα κανονικὰ, τρία μὲν, διὰ ἰσοπλεύρων τριγώνων, ἓν δὲ, διὰ τετραγώνων, καὶ ἓν διὰ πενταγώνων κανονικῶν.

Σχόλιον. Ἐν τῇ ἀκολούθῳ προτάσει ἀποδεικνύεται, ὅτι τὰ πέντε αὐτὰ κανονικὰ πολύεδρα ὑπάρχουσι πραγματικῶς, καὶ ὅτι δυνατὸν εἶναι νὰ προσδιορίσῃ τις τὰς διαστάσεις ἑνὸς ἑκάστου αὐτῶν, ἅμα γνωστὴν ἔχει τὴν μίαν αὐτοῦ ἕδραν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2.

Πρόβλημα.

Κατασκεύασον τὸ κανονικὸν πολύεδρον, μιᾶς αὐτοῦ ἕδρας, ἢ μιᾶς μόνης αὐτοῦ ῥάχεως γνωστῆς οὔσης.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο πέντε παρουσιάζει περιστάσεις, ἑπομένως πέντε ἐπιδέχεται λύσεις, τὰς ἑξῆς.

Κατασκευὴ τοῦ τετραέδρου.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς ἕδρα τοῦ τετραέδρου. (σχ. 243).

Εἰς τὸ σημεῖον Ο, εἰς τὸ κέντρον τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, ἀνυψῶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ τὴν κάθετον ΟΣ, καὶ ἐκτείνω αὐτὴν μέχρι τοῦ σημείου Σ, εἰς τρόπον ὥστε ΑΣ=ΑΒ. Συνάπτω τὸ σημεῖον Σ μετὰ τοῦ Β καὶ τοῦ Γ διὰ τῶν εὐθειῶν ΣΒ, ΣΓ, καὶ λέγω ὅτι ἡ τοιουτοτρόπως σχηματιζομένη πυραμὶς ΣΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράεδρον.

Διότι, ἕνεκα τῶν ἴσων ἀποστημάτων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, αἱ πλάγιαι ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ ἰσάκις ἀπὸ τῆς καθέτου ΣΟ ἀπέχουσι, καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσαι. Ἀλλ' ἐξ αὐτῶν ἡ μία, ἡ ΣΑ=ΑΒ. Ἄρα αἱ τέσσαρες τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ ἕδραι εἶναι τρίγωνα ἴσα τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ. Πρὸς τούτοις δὲ αἱ στερεαὶ τῆς πυραμίδος αὐτῆς γωνίαι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι, διότι ἑκάστη αὐτῶν ἐκ τριῶν ἴσων ἀποτελεῖται ἐπιπέδων γωνιῶν. Ἄρα ἡ πυραμὶς, ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος, τὸ ζητούμενον εἶναι κανονικὸν τετράεδρον.

Κατασκευὴ τοῦ ἑξαέδρου.

Ἔστω ΑΒΓΔ γνωστόν τι τετράγωνον. (σχ. 244). Ἐπὶ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ, ὡς ἐπὶ βάσεως, κατασκευάζω πρίσμα, ἔχον ὕψος τὸ ΑΕ, τὸ ἴσον τῇ πλευρᾷ ΑΒ.

Τὸ πρίσμα αὐτὸ εἶναι τὸ ζητούμενον κανονικὸν ἑξάεδρον, διότι αἱ μὲν ἕδραι αὐτοῦ ἴσα εἶναι τετράγωνα, αἱ δὲ στερεαὶ αὐτοῦ γωνίαι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι, διότι ἑκάστη αὐτῶν ἐκ τριῶν ἐπιπέδων ὀρθῶν γωνιῶν ἀποτελεῖται.

Κατασκευὴ τοῦ ὀκταέδρου.

Ἔστω ΑΜΒ γνωστόν τι ἰσόπλευρον τρίγωνον. (σχ. 245). Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ σχηματίζω τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ, εἰς δὲ τὸ σημεῖον Ο, εἰς τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ, ἀνυψῶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ τὴν κάθετον ΤΣ, τὴν ἀποπερατουμένην ἔνθεν μὲν εἰς τὸ σημεῖον Τ, ἐκεῖθεν δὲ εἰς τὸ σημεῖον Σ, εἰς τρόπον ὥστε ΟΤ=ΟΣ=ΑΟ. Μετὰ ταῦτα δὲ ἄγω τὰς εὐθείας ΣΑ, ΣΒ, ΤΑ, κτλ., καὶ τοιουτοτρόπως σχηματίζω τὸ στερεὸν ΣΑΒΓΔΤ, τὸ συναποτελούμενον ἐκ τῶν δύο τετραγωνικῶν πυραμίδων ΣΑΒΓΔ, ΤΑΒΓΔ, τῶν ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς βάσεως ΑΒΓΔ κατεσκευασμένων. Τὸ στερεὸν ΣΑΒΓΔΤ εἶναι τὸ ζητούμενον κανονικὸν ὀκτάεδρον.

Ἐν πρώτοις τὰ τρίγωνα ΑΟΣ, ΑΟΔ εἶναι ὀρθογώνια εἰς τὸ σημεῖον Ο, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῶν ΑΟ, ΟΣ, ΟΔ εἶναι ἴσαι· λοιπὸν τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα. Ἄρα ΑΣ=ΑΔ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δύναταί τις ν' ἀποδείξῃ, ὅτι καὶ ὅλα τὰ λοιπὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΟΤ, ΒΟΣ, ΓΟΤ, κτλ., εἶναι ἴσα τῷ τριγώνῳ ΑΟΔ. Ἄρα ὅλαι αἱ ῥάχεις ΑΒ, ΑΣ, ΑΤ, κτλ. εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι. Ἐπομένως αἱ ὀκτὼ τοῦ στερεοῦ ΣΑΒΓΔΤ ἕδραι τρίγωνα εἶναι ἰσόπλευρα ἴσα τῷ γνωστῷ τριγώνῳ ΑΒΜ.

Λέγω ἤδη, ὅτι καὶ ὅλαι τοῦ πολυέδρου αὐτοῦ αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι, ὡς παράδειγμα δὲ λαμβάνω τὰς γωνίας Σ καὶ Β.

Τὸ τρίγωνον ΣΑΓ προδήλως εἶναι ἴσον τῷ τριγώνῳ ΔΑΓ· ὅθεν ἡ γωνία ΑΣΓ εἶναι ὀρθή. Ἄρα τὸ σχῆμα ΣΑΤΓ εἶναι τετράγωνον ἴσον τῷ τετραγώνῳ ΑΒΓΔ. Ἐὰν δέ τις, παραβάλλων τὴν πυραμίδα ΒΑΣΓΤ πρὸς τὴν πυραμίδα ΣΑΒΓΔ, θέσῃ τῆς πρώτης πυραμίδος τὴν βάσιν ΑΣΓΤ ἐπὶ τῆς ΑΒΓΔ βάσεως τῆς δευτέρας, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ο κοινὸν τῶν βάσεων αὐτῶν εἶναι κέντρον, τῆς πρώτης πυραμίδος τὸ ὕψος ΟΒ καὶ τὸ ΟΣ ὕψος τῆς δευτέρας συμπίπτουσι καὶ ταυτίζονται, αἱ δύο δὲ πυραμίδες συγχέονται καὶ ἓν μόνον ἀποτελοῦσι σῶμα. Λοιπὸν ἡ στερεὰ γωνία Σ εἶναι ἴση τῇ στερεᾷ γωνίᾳ Β. Ἄρα τὸ στερεὸν ΣΑΒΓΔΤ ὀκτάεδρον εἶναι κανονικόν.

Σχόλιον. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΔ, ΣΤ εἶναι ἀμοιβαίως κάθετοι, εἰς δύο δὲ ἴσα τέμνουσιν ἀλλήλας μέρη· τὰ ἄκρα δὲ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν τοῦ κανονικοῦ ὀκταέδρου εἶναι αἱ κορυφαί.

Κατασκευὴ τοῦ δωδεκαέδρου.

Ἔστω ΑΒΓΔΕ γνωστόν τι κανονικὸν πεντάγωνον (σχ. 246). Ἔστωσαν δὲ ΑΒΠ, ΓΒΠ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι τῇ γωνίᾳ ΑΒΓ. Διὰ τῶν τριῶν τούτων γωνιῶν σχηματίζω τὴν στερεὰν γωνίαν Β, καὶ τῇ βοηθείᾳ τῆς 24 προτάσεως τοῦ πέμπτου βιβλίου προσδιορίζω τὴν ἀμοιβαίαν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων, ἐφ' ὧν κεῖνται δύο ἐξ αὐτῶν τῶν γωνιῶν οἱαιδήποτε.

Καλῶ τὴν κλίσιν αὐτὴν Κ, εἰς δὲ τὰ σημεῖα Γ, Δ, Ε, Α σχηματίζω κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ γωνίας στερεὰς ἴσας τῇ στερεᾷ γωνίᾳ Β. Τὸ ἐπίπεδον ΓΒΠ καὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΓΗ ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ἀποτελοῦσιν ἐπίπεδον, διότι ἀμφότερα τὴν αὐτὴν ἔχουσι πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔΕ κλίσιν Κ.

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΒΓΗ γράφω τὸ πεντάγωνον ΒΓΗΖΠ, τὸ ἴσον τῷ πενταγώνῳ ΑΒΓΔΕ. Τὸ αὐτὸ δὲ πράττω καὶ εἰς τὰ λοιπὰ ἐπίπεδα ΓΔΙ, ΔΕΛ, κτλ., τοιουτοτρόπως δὲ σχηματίζω πολύεδρόν τινα ἐπιφάνειαν ΠΖΗΘ . . . . κτλ., συνισταμένην ἐκ πενταγώνων ἐξ ἴσων καὶ κανονικῶν, ἐχόντων τὴν αὐτὴν ἀμοιβαίαν κλίσιν Κ.

Ἔστω ἤδη πζηθ . . . . κτλ. ἄλλη τις ἐπιφάνεια, ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ ΠΖΗΘ . . . . κτλ. Λέγω ὅτι αἱ δύο αὗται πολύεδροι ἐπιφάνειαι δυνατὸν εἶναι νὰ συναρμολογηθῶσι κατὰ τρόπον τοιοῦτον, ὥστε ἐκ τῆς τοιαύτης συναρμογῆς μία μόνη ν' ἀποτελεσθῇ συνεχὴς πολύεδρος ἐπιφάνεια.

Τῷ ὄντι· ἡ γωνία οπζ, παραδείγματος χάριν, δυνατὸν εἶναι νὰ συναρμολογηθῇ μετὰ τῶν δύο γωνιῶν ΒΠΟ, ΒΠΖ, καὶ ν' ἀποτελέσῃ τὴν στερεὰν γωνίαν Π, τὴν ἴσην τῇ στερεᾷ γωνίᾳ Β. Ἡ τοιαύτη δὲ συναρμογὴ δὲν μεταβάλλει κατ' οὐδὲν τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων ΒΠΟ, ΒΠΖ, διότι ἡ κλίσις αὕτη εἶναι ἡ πρὸς σχηματισμὸν τῆς στερεᾶς γωνίας ἀπαιτουμένη. Ἀλλ' ἐν ᾧ ἡ στερεὰ γωνία Π σχηματίζεται, ἡ πλευρὰ πζ ἐφαρμόζεται ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ πλευρᾶς ΠΖ, εἰς δὲ τὸ σημεῖον Ζ συνέρχονται αἱ τρεῖς γωνίαι ΠΖΗ, πζε, εζη καὶ ἀποτελοῦσι γωνίαν τινὰ στερεὰν ἴσην πρὸς τὰς στερεὰς γωνίας, τὰς ἤδη ἐσχηματισμένας. Ἡ τοιαύτη δὲ τῶν τριῶν αὐτῶν ἐπιπέδων συνένωσις δὲν μεταβάλλει ποσῶς οὔτε τῆς γωνίας Π, οὔτε τῆς ἐπιφανείας πζηθα...κλτ. τὴν κατάστασιν· διότι τὰ ἐπίπεδα ΠΖΗ, εζπ, τὰ ἤδη εἰς τὸ σημεῖον Π συνηρμολογημένα, ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὴν ὡρισμένην κλίσιν Κ· τὴν αὐτὴν δὲ κλίσιν ἔχουσι καὶ τὰ ἐπίπεδα εζη, εζπ.

Παρατείνων τις κατὰ διαδοχὴν τὴν τοιαύτην ἐξέτασιν, παρατηρεῖ ὅτι αἱ δύο ἐξάεδροι ἐπιφάνειαι, αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος, συναρμολογοῦνται καὶ ἀποτελοῦσιν ὁλοσχερῆ τινὰ καὶ συννεύουσαν ἐπιφάνειαν, ἐν ὅλῳ κανονικὸν περιλαμβάνουσαν δωδεκάεδρον. Κανονικὸν δὲ εἶναι δωδεκάεδρον τὸ ἐκ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς διοριζόμενον σῶμα, διότι καὶ αἱ δώδεκα αὐτοῦ ἕδραι ἴσα εἶναι κανονικὰ πεντάγωνα, καὶ αἱ στερεαὶ αὐτοῦ γωνίαι πρὸς ἀλλήλας εἶναι ἴσαι.

Κατασκευὴ τοῦ εἰκοσαέδρου.

Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 247) εἰκοσαέδρου ἕδρα. Πρὸς κατασκευὴν αὐτοῦ σχηματίζω ἐν πρώτοις γωνίαν στερεὰν, πέντε συναρμολογῶν ἐπίπεδα, ἴσα τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ καὶ τὴν αὐτὴν πρὸς τὰ πλησίον αὐτῶν ἔχοντα ἀμοιβαίαν κλίσιν.

Ἰδοὺ δὲ πῶς ἡ στερεὰ αὐτὴ γωνία σχηματίζεται.

Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Β΄Γ΄, τῆς ἴσης τῇ πλευρᾷ ΒΓ, κατασκευάζω τὸ κανονικὸν πολύγωνον Β΄Γ΄Θ΄Ι΄Δ΄, ἐκ τοῦ κέντρου δὲ τοῦ πολυγώνου τούτου ἀναφέρω ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἐφ᾽ οὗ τὸ πολύγωνον αὐτὸ κεῖται, κάθετον, τὴν ὁποίαν ἐκτείνω μέχρι τοῦ Α΄, εἰς τρόπον ὥστε Β΄Α΄=Β΄Γ΄. Ἄγω δὲ μετὰ ταῦτα τὰς εὐθείας Α΄Γ΄, Α΄Θ΄, Α΄Ι΄, Α΄Δ΄, καὶ τοιουτοτρόπως διὰ τῶν πέντε ἐπιπέδων Β΄Α΄Γ΄, Γ΄Α΄Θ΄, κτλ. σχηματίζω τὴν στερεὰν γωνίαν Α΄, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη. Διότι αἱ πλάγιαι Α΄Β΄, Α΄Γ΄, κτλ. εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι, μία δ᾽ ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴση τῇ πλευρᾷ Β΄Γ΄. Ἑπομένως ὅλα τὰ τρίγωνα Β΄Α΄Γ΄, Γ΄Α΄Θ΄, κτλ. εἶναι καὶ ἐν ἀλλήλοις ἴσα, καὶ ἴσα τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ.

Ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ πρόδηλον εἶναι ὅτι τὰ ἐπίπεδα Β΄Α΄Γ΄, Γ΄Α΄Θ΄, κτλ. τὴν αὐτὴν ὅλα πρὸς τὰ πλησίον αὐτῶν ἔχουσιν ἀμοιβαίαν κλίσιν. Καὶ τῷ ὄντι· αἱ στερεαὶ γωνίαι Β΄, Γ΄, κτλ. εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι, διότι ἑκάστη αὐτῶν σχηματίζεται ἐκ δύο γωνιῶν τριγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἐκ μιᾶς γωνίας κανονικοῦ πενταγώνου. Ἡ ἀμοιβαία δὲ κλίσις τῶν ἐπιπέδων, ἐφ᾽ ὧν τὰ τρίγωνα τὰ ἰσόπλευρα κεῖνται, εἶναι ἡ κλίσις, τὴν ὁποίαν ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων, τῶν ἀποτελούντων τὴν στερεὰν γωνίαν Α′, ἔχει πρὸς τὸ πλησίον αὐτοῦ. Καλῶ τὴν κλίσιν ταύτην Κ, δύναμαι δὲ νὰ προσδιορίσω αὐτὴν τῇ βοηθείᾳ τῆς 24 προτάσεως τοῦ πέμπτου βιβλίου.

Τούτου τεθέντος, σχηματίζω εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ γωνίας στερεὰς ἴσας τῇ γωνίᾳ Α′, τοιουτοτρόπως δὲ ἀποτελῶ πολύεδρόν τινα ἐπιφάνειαν ΔΕΖΗκτλ., συνισταμένην ἐκ δέκα ἰσοπλεύρων τριγώνων, ἐξ ὧν ἕκαστον κλίνει πρὸς τὸ πλησίον αὐτοῦ κατὰ τὴν ποσότητα Κ. Τῆς πολυέδρου δὲ ταύτης ἐπιφανείας ὁ γῦρος ἔχει τὰς γωνίας Δ, Ε, Ζ, κτλ., τὰς παραλλὰξ ἀποτελουμένας ἐκ δύο ἢ τριῶν γωνιῶν τριγώνων ἰσοπλεύρων.

Κατασκευάζω κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ ἄλλην πολύεδρον ἐπιφάνειαν, ἴσην τῇ πολυέδρῳ ἐπιφανείᾳ ΔΕΖΗκτλ·, καὶ συναρμολογῶ τὰς δύο αὐτὰς ἐπιφανείας, τὰς μὲν διπλᾶς τῶν γύρων γωνίας εἰς τὰς τριπλᾶς ἐμβάλλων, τὰς δὲ τριπλᾶς εἰς τὰς διπλᾶς. Ἡ τοιαύτη δὲ συναρμογὴ εὐοδοῦται, διότι ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων τῶν διπλῶν καὶ τῶν τριπλῶν αὐτῶν γωνιῶν ἔχει πρὸς τὸ πλησίον αὐτοῦ τὴν κλίσιν Κ, τὴν ἀπαιτουμένην πρὸς κατασκευὴν πενταπλῆς στερεᾶς γωνίας, ἴσης τῇ γωνίᾳ Α′. Ὅθεν ἐν ὅλῳ σχηματίζεται ὁλοσχερής τις καὶ συνεχὴς ἐπιφάνεια, ἐξ εἴκοσι συνισταμένη τριγώνων ἰσοπλεύρων. Τὸ ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας δὲ αὐτῆς διοριζόμενον σῶμα εἶναι τὸ ζητούμενον εἰκοσάεδρον, διότι καὶ αἱ ἕδραι αὐτοῦ ἴσαι πρὸς ἀλλήλας εἶναι, καὶ αἱ στερεαὶ αὐτοῦ γωνίαι ἴσαι εἶναι ὡσαύτως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3.

Πρόβλημα.

Εὑρὲ τὴν ἀμοιβαίαν κλίσιν δύο προσκειμένων ἑδρῶν κανονικοῦ πολυέδρου.

Τὴν ζητουμένην ταύτην κλίσιν πορίζεταί τις, ἐκ τῆς προηγουμένης τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων κατασκευῆς ὁδηγούμενος. Εὑρίσκει δὲ αὐτὴν τῇ βοηθείᾳ τῆς 24 προτάσεως τοῦ πέμπτου βιβλίου, καθ᾽ ἥν, ὅταν αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι, ἐξ ὧν στερεά τις γωνία ἀποτελεῖται, ἦναι γνωσταί, γνωστὴ γίνεται καὶ ἡ ἀμοιβαία κλίσις τῶν ἐπιπέδων, ἐφ' ὧν αἱ ἐπίπεδοι αὗται γωνίαι κεῖνται.

Εἰς τὸ τετράεδρον, (σχ. 243), ἑκάστη στερεὰ γωνία σχηματίζεται ἐκ τριῶν γωνιῶν τριγώνων ἰσοπλεύρων. Πρὸς εὕρεσιν λοιπὸν τῆς ζητουμένης κλίσεως, διὰ τῆς 24 προτάσεως τοῦ πέμπτου βιβλίου εὑρὲ τὴν ἀμοιβαίαν κλίσιν δύο ἐκ τῶν ἐπιπέδων, τῶν ἀποτελούντων στερεάν τινα τοῦ τετραέδρου γωνίαν. Ἡ κλίσις αὕτη εἶναι τῶν ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου ἡ ζητουμένη κλίσις.

Εἰς τὸ ἑξάεδρον, (σχ. 244), δύο προσκειμένων ἑδρῶν ἡ κλίσις εἶναι γωνία ὀρθή.

Εἰς τὸ ὀκτάεδρον, (σχ. 245), πρὸς εὕρεσιν τῆς ζητουμένης κλίσεως, λάβε δύο γωνίας τριγώνων ἰσοπλεύρων καὶ μίαν γωνίαν ὀρθὴν, καὶ σχημάτισον δι' αὐτῶν γωνίαν στερεάν.

Ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων, ἐφ' ὧν τὰ τρίγωνα κεῖνται, εἶναι ἡ κλίσις ἡ ζητουμένη.

Εἰς τὸ δωδεκάεδρον, (σχ. 246), ἑκάστη στερεὰ γωνία σχηματίζεται ἐκ τριῶν γωνιῶν πενταγώνων κανονικῶν. Ἡ κλίσις λοιπὸν τῶν ἐπιπέδων, ἐφ' ὧν δύο τοιαῦται πενταγώνων γωνίαι κεῖνται, εἶναι τῶν προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ δωδεκαέδρου ἡ ἀμοιβαία κλίσις.

Εἰς τὸ εἰκοσάεδρον, (σχ. 247), πρὸς εὕρεσιν τῆς ζητουμένης κλίσεως, λάβε ἰσοπλεύρων τριγώνων γωνίας δύο καὶ μίαν κανονικοῦ πενταγώνου γωνίαν καὶ δι' αὐτῶν σχημάτισον τρίεδρον γωνίαν στερεάν. Ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων, ἐφ' ὧν τῶν ἰσοπλεύρων αὐτῶν τριγώνων αἱ γωνίαι κεῖνται, εἶναι τῶν προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ εἰκοσαέδρου ἡ ἀμοιβαία κλίσις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4.

Θεώρημα.

Εὑρὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς πολύεδρον κανονικὸν, καὶ τὴν τῆς περιγεγραμμένης, γνωστῆς οὔσης μιᾶς τοῦ πολυέδρου αὐτοῦ ῥάχεως. (σχ. 248)

Ἐν πρώτοις πρέπει ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι πᾶν κανονικὸν πολύεδρον καὶ ἐγγράφεται καὶ περιγράφεται εἰς σφαῖραν.

Ἔστω AB κοινή τις δύο προσκειμένων ἑδρῶν πλευρά. Ἔστωσαν προσέτι Γ μὲν καὶ E τὰ κέντρα τῶν δύο αὐτῶν ἑδρῶν, ΓΔ δὲ καὶ EΔ αἱ κάθετοι, αἱ ἀπὸ τῶν κέντρων αὐτῶν ἐπὶ τῆς κοινῆς πλευρᾶς AB ἠγμέναι. Αἱ δύο αὐταὶ κάθετοι ἀπολήγουσιν εἰς τὸ σημεῖον Δ, τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς AB, σχηματίζουσι δὲ πρὸς ἀλλήλας γωνίαν τινὰ γνωστὴν, ἴσην τῇ κλίσει δύο τοῦ πολυέδρου προσκειμένων ἑδρῶν, τῇ διὰ τοῦ προηγουμένου προβλήματος προσδιοριζομένῃ.

Εἰς τὸ ἐπίπεδον ΓΔE, τὸ ἐπὶ τῆς εὐθείας AB κάθετον, ἄγω ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΓΔ, EΔ τὰς ἀορίστους καθέτους ΓO, EO, αἵτινες συναπαντῶνται εἰς τὸ σημεῖον O. Λέγω δὲ ὅτι τὸ σημεῖον O εἶναι καὶ τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας κέντρον κοινόν. Καὶ τῆς μὲν ἐγγεγραμμένης σφαίρας ἀκτὶς εἶναι ἡ εὐθεῖα OΓ, τῆς δὲ περιγεγραμμένης ἡ OA.

Τῷ ὄντι· ἐπειδὴ τὰ μὲν ἀποστήματα ΓΔ, ΔE εἶναι ἴσα, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ΔO κοινὴ, τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΔO, EΔO εἶναι ἴσα (πρότ. 18, βιϐλ. 1)· ἴσαι δὲ εἶναι καὶ αἱ κάθετοι OΓ, OE. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα AB εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔE, τὸ ἐπίπεδον ABΓ εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔE (πρότ. 18, βιϐλ. 5), ἢ ἀντιστρόφως τὸ ἐπίπεδον ΓΔE εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ABΓ. Ἐκτὸς δὲ τούτου, ἡ εὐθεῖα ΓO, ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔE ὑπάρχουσα, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων ΓΔE, ABΓ, τουτέστιν ἐπὶ τῆς ΓΔ. Ἄρα (πρότ. 19, βιϐλ. 5) ἡ εὐθεῖα ΓO εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ABΓ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ εὐθεῖα EO εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ABE. Λοιπὸν αἱ δύο εὐθεῖαι ΓO,EO, αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν δύο προσκειμένων ἑδρῶν καθέτως πρὸς τὰ ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν αὐτῶν ἠγμέναι, συναπαντῶνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον O καὶ εἶναι ἴσαι.

Ἐὰν δὲ ἤδη ὑποτεθῇ, ὅτι ABΓ καὶ ABE εἰκονίζουσι δύο ἄλλας οἱασδήποτε προσκειμένας ἕδρας τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου, οὔτε τοῦ ἀποστήματος ΓΔ τὸ μέγεθος μεταϐάλλεται, οὔτε τῆς γωνίας ΓΔO, ἥτις εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ΓΔE, ἡ ἔκτασις ἀλλοιοῦται. Ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΔO, καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ΓO εἰς ὅλας τοῦ πολυέδρου τὰς ἕδρας ἁρμόζουσιν. Ἐὰν λοιπὸν ἐκ τοῦ σημείου O, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ διὰ τῆς ἀκτῖνος OΓ γράψῃ τις σφαῖραν, ἡ σφαῖρα αὕτη ψαύει ὅλας τοῦ πολυέδρου τὰς ἕδρας κατὰ τὰ κέντρα αὐτῶν (διότι τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ, ΑΒΕ κάθετα εἶναι ἐπὶ τοῦ ἄκρου τῆς ἀκτῖνος). Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἡ τοιαύτη σφαῖρα εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ πολύεδρον, ἢ τὸ πολύεδρον εἶναι περιγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν.

Ἄγω μετὰ ταῦτα τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΓΑ=ΓΒ, αἱ δύο πλάγιαι ΟΑ, ΟΒ, ἰσάκις ἀπὸ τῆς καθέτου ἀπέχουσαι, εἶναι ἴσαι. Ἴσαι δὲ εἶναι καὶ δύο ἄλλαι οἱαιδήποτε εὐθεῖαι, εἰς τὰ ἄκρα τῆς αὐτῆς ῥάχεως ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἠγμέναι. Ἄρα ὅλαι αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας εἶναι. Ἐὰν λοιπὸν ἐκ τοῦ σημείου Ο, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ διὰ τῆς ἀκτῖνος ΟΑ γράψῃ τις ἐπιφάνειαν σφαιρικὴν, ἡ ἐπιφάνεια αὕτη διαβαίνει ἐξ ὅλων τῶν κορυφῶν τοῦ πολυέδρου. Τουτέστιν ἡ τοιαύτη σφαῖρα εἶναι περιγεγραμμένη εἰς τὸ πολύεδρον, ἢ τὸ πολύεδρον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν.

Τούτων τεθέντων, οὐδεμία πρὸς λύσιν τοῦ προτεθέντος προβλήματος ὑπολείπεται δυσκολία. Ἰδοὺ δὲ τίνι τρόπῳ τὸ πρόβλημα αὐτὸ λύεται.

Δοθείσης τῆς πλευρᾶς ἕδρας τινὸς τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου, (σχ. 249), γράφω τὴν ἕδραν αὐτήν· ἔστω δὲ ΓΔ τὸ ἀπόστημα αὐτῆς. Κατόπιν, διὰ τοῦ προηγουμένου προβλήματος, προσδιορίζω τὴν ἀμοιβαίαν κλίσιν δύο προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου, καὶ σχηματίζω τὴν γωνίαν ΓΔΕ ἴσην τῇ τοιαύτῃ κλίσει. Λαμβάνω μετὰ ταῦτα τὴν ΔΕ ἴσην τῇ ΓΔ, καὶ ἄγω τὰς εὐθείας ΓΟ καὶ ΕΟ καθέτους ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΓΔ καὶ ΕΔ. Αἱ δύο αὗται κάθετοι συναπαντῶνται εἴς τι σημεῖον Ο, οὕτω δὲ προσδιορίζεται ἡ ΓΟ, ἥτις εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, τῆς ἐν τῷ πολυέδρῳ ἐγγεγραμμένης.

Παρατείνω τὴν ΔΓ καὶ λαμβάνω τὴν ΓΑ ἴσην τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου εἴς τινα τοῦ πολυέδρου ἕδραν· οὕτω δὲ προσδιορίζεται ἡ ΟΑ, ἥτις εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας τῆς περὶ τὸ αὐτὸ πολύεδρον περιγεγραμμένης.

Διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΔΟ, ΓΑΟ, τὰ τοῦ σχήματος 249, εἶναι ἴσα τοῖς ὁμωνύμοις τριγώνοις τοῦ σχήματος 248. Ὅθεν, ἐν ᾧ αἱ εὐθεῖαι ΓΔ, ΓΑ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο κύκλων, τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου εἴς τινα τοῦ πολυέδρου ἕδραν, αἱ εὐθεῖαι ΟΓ, ΟΑ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο σφαιρῶν, τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ αὐτὸ πολύεδρον.

Σχόλιον. Ἐκ τῶν προηγουμένων τελευταίων προτάσεων τὰ ἀκόλουθα ἕπονται πορίσματα.

Α^{ον}. Πᾶν κανονικὸν πολύεδρον ἀναλύεται εἰς τοσαύτας κανονικὰς πυραμίδας, ὅσας τὸ πολύεδρον αὐτὸ ἕδρας ἔχει. Ὅλων δ' αὐτῶν τῶν πυραμίδων κορυφὴ εἶναι τοῦ πολυέδρου τὸ κέντρον, τὸ ὁποῖον ἐνταυτῷ εἶναι καὶ κέντρον τῆς τε ἐγγεγραμμένης καὶ τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας.

Β^{ον}. Ἡ στερεότης παντὸς κανονικοῦ πολυέδρου εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ, πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας.

Γ^{ον}. Τὰ ὁμώνυμα πολύεδρα εἶναι σώματα ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι δὲ αὐτῶν διαστάσεις εἶναι ἀνάλογοι. Ἄρα αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ τῶν περιγεγραμμένων εἰς αὐτὰ σφαιρῶν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ῥάχεις τῶν πολυέδρων αὐτῶν.

Δ^{ον}. Τὰ διὰ τοῦ κέντρου ἐγγεγραμμένου τινὸς κανονικοῦ πολυέδρου καὶ τῶν ῥάχεων αὐτοῦ διαβαίνοντα ἐπίπεδα διαιροῦσι τὴν ἐπιφάνειαν τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας εἰς τόσα καὶ τοιαῦτα πολύγωνα ἴσα, ὅσας καὶ οἵας τὸ πολύεδρον ἔχει ἕδρας.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Τὰ τρία στρογγύλα σώματα.

Ὁρισμοί.

1. *Κύλινδρος* ὀνομάζεται τὸ στερεὸν, τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τῆς περιαγωγῆς ὀρθογωνίου τινὸς ΑΒΓΔ, στραφέντος πέριξ μιᾶς αὐτοῦ πλευρᾶς ΑΒ, ἀκινήτου μενούσης. (σχ. 250)

Περιστρεφομένου τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ, αἱ μὲν δύο αὐτοῦ πλευραὶ ΑΔ, ΒΓ, τὴν ὡς πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ κάθετον θέσιν αὐτῶν διαρκῶς τηροῦσαι, περιγράφουσι τὰς δύο ἐπιπέδους κυκλικὰς ἐπιφανείας ΔΘΠ, ΓΗΚ, τὰς ὁποίας ὀνομάζουσι *βάσεις* *τοῦ κυλίνδρου*, ἡ δὲ πλευρὰ ΓΔ περιγράφει τὴν καλουμένην *κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου.*

Ἡ ἀκίνητος μένουσα πλευρὰ ΑΒ ὀνομάζεται *ἄξων τοῦ κυλίνδρου.*

Πᾶσα κυλίνδρου τομὴ ΚΛΝ, πρὸς τὸν ἄξονα καθέτως γινομένη, κύκλος εἶναι πρὸς ἑκατέραν τῶν βάσεων ἴσος. Διότι, στρεφομένου τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ περὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΙΚ, ἡ ἐπὶ τῆς ΑΒ κάθετος, περιγράφει ἐπίπεδον κυκλικὸν ἴσον τῇ βάσει. Τὸ ἐπίπεδον δ᾽ αὐτὸ οὐδὲν ἄλλο εἶναι, εἰμὴ ἡ κατὰ τὸ σημεῖον Ι καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα γινομένη τομή.

Πᾶσα κυλίνδρου τομὴ ΠΚΗΘ, κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος γινομένη, ὀρθογώνιον εἶναι, διπλάσιον τοῦ γεννήτορος ΑΒΓΔ.

2. *Κῶνος* ὀνομάζεται τὸ στερεὸν, τὸ παραγόμενον ἐκ τῆς περιαγωγῆς ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου ΣΑΒ, στραφέντος περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΣΑ, ἀκίνητον μένουσαν. (σχ. 251)

Περιστρεφομένου τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΣΑΒ, ἡ μὲν πλευρὰ αὐτοῦ ΑΒ περιγράφει τὸ κυκλικὸν ἐπίπεδον ΒΔΓΕ, τὸ ὁποῖον ὀνομάζουσι *βάσιν τοῦ κώνου*, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ΣΒ περιγράφει τὴν λεγομένην *κυρτὴν τοῦ κώνου ἐπιφάνειαν.*

Τὸ σημεῖον Σ ὀνομάζεται *κορυφὴ τοῦ κώνου*· ἡ εὐθεῖα ΣΑ λέγεται *ἄξων* ἢ *ὕψος τοῦ κώνου*, ἡ δὲ εὐθεῖα ΣΒ καλεῖται *πλευρὰ* ἢ *ἀπόστημα τοῦ κώνου.*

Πᾶσα κώνου τομὴ ΘΚΖΙ, πρὸς τὸν ἄξονα καθέτως γινομένη, κύκλος εἶναι. Πᾶσα δὲ τομὴ κώνου, διὰ τοῦ ἄξονος διαβαίνουσα, τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς, διπλάσιον τοῦ γεννήτορος.

3. Ἐάν τις ἀπὸ τοῦ κώνου ΣΓΔΒ, διὰ τομῆς, πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ παραλλήλου, ἀφαιρέσῃ τὸν κῶνον ΣΖΚΘ, τὸ ὑπολειπόμενον σῶμα ΓΒΘΖ ὀνομάζεται *κολοβὸς κῶνος*, ἢ *κώνου κορμός.* Δύναταί τις νὰ φαντασθῇ τοῦ κώνου τὸν κορμὸν παραγόμενον ἐκ τῆς περὶ τὴν πλευρὰν ΑΗ στροφῆς τοῦ τραπεζίου ΑΒΘΗ, τοῦ ἔχοντος τὰς γωνίας Α καὶ Η ὀρθάς. Ἡ ἀκίνητος μένουσα πλευρὰ ΑΗ ὀνομάζεται *ἄξων* ἢ *ὕψος τοῦ κορμοῦ*, οἱ κύκλοι ΒΔΓ, ΘΚΖ καλοῦνται *βάσεις* τοῦ κορμοῦ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΒΘ λέγεται *πλευρὰ* τοῦ κορμοῦ.

4. Οἱ κύλινδροι ὀνομάζονται *ὅμοιοι*, *ὅμοιοι* δὲ λέγονται καὶ οἱ κῶνοι, ὅταν οἱ ἄξονες αὐτῶν πρὸς τὰς διαμέτρους τῶν βάσεων αὐτῶν ἦναι ἀνάλογοι.

5. Ἐὰν εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, τὸν ἀποτελοῦντα τὴν βάσιν κυλίνδρου τινὸς, ἐγγράψῃ τις πολύγωνόν τι ΑΒΓΔΕ, καὶ ἐπὶ τῆς βάσεως ταύτης ΑΒΓΔΕ κατασκευάσῃ πρίσμα ὀρθὸν καὶ πρὸς τὸν κύλινδρον ἰσοϋψὲς, τὸ πρίσμα αὐτὸ λέγεται *ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον*, καὶ ὁ κύλινδρος ὀνομάζεται *περιγεγραμμένος εἰς τὸ πρίσμα*. (σχ. 252)

Πρόδηλον δὲ εἶναι, ὅτι τοῦ πρίσματος τὰ πλευρὰ ΑΖ, ΒΗ ΓΘ, κτλ., κάθετα ἐπὶ τῆς βάσεως ὄντα, εὑρίσκονται ἐν τῇ κυρτῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. Ἑπομένως τὸ πρίσμα καὶ ὁ κύλινδρος ἅπτονται ἀλλήλων κατ' αὐτὰ τὰ πλευρά.

6. Ὡσαύτως, ἐάν τις περὶ τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου γράψῃ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔ, ἐπὶ τοῦ πολυγώνου δὲ αὐτοῦ, ὡς ἐπὶ βάσεως, κατασκευάσῃ πρίσμα ὀρθὸν καὶ πρὸς τὸν κύλινδρον ἰσοϋψὲς, τὸ μὲν πρίσμα εἶναι *περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον*, ὁ δὲ κύλινδρος *ἐγγεγραμμένος εἶναι εἰς τὸ πρίσμα*. (σχ. 253)

Ἔστωσαν Μ, Ν, κτλ. τὰ σημεῖα τῶν ἁφῶν τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, κτλ. Ἐὰν εἰς τὰ σημεῖα αὐτὰ ὑψώσῃ τις ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως τὰς καθέτους ΜΧ, ΝΨ, κτλ., αἱ κάθετοι αὐταὶ ὑπάρχουσι συγχρόνως καὶ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου καὶ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ περιγεγραμμένου πρίσματος. Ἄρα ὁ κύλινδρος καὶ τὸ πρίσμα τὸ περιγεγραμμένον ἅπτονται ἀλλήλων κατ' αὐτὰς τὰς εὐθείας.

Σ. Κ. Ὁ κύλινδρος, ὁ κῶνος καὶ ἡ σφαῖρα εἶναι τὰ τρία στρογγύλα σώματα, περὶ ὧν γίνεται λόγος εἰς τῆς γεωμετρίας τὰ στοιχεῖα.

Προοιμιώδη περὶ ἐπιφανειῶν λήμματα.

ΠΡΩΤΟΝ.

Πᾶσα ἐπιφάνεια ἐπίπεδος ΟΑΒΓΔ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης ἐπιφανείας ΠΑΒΓΔ, ἀποπερατουμένης εἰς τὴν αὐτὴν περίμετρον ΑΒΓΔ. (σχ. 254)

Ἡ πρότασις αὐτη εἶναι τοσοῦτον προφανὴς, ὥστε ἠδύνατό τις νὰ τὴν κατατάξῃ εἰς τὰ ἀξιώματα. Διότι, ὅπως ἡ εὐθεῖα μεταξὺ τῶν ἄλλων γραμμῶν θεωρεῖται, οὕτω καὶ μεταξὺ τῶν ἄλλων ἐπιφανειῶν δύναταί τις νὰ θεωρήσῃ τὸ ἐπίπεδον. Ἡ εὐθεῖα εἶναι ἡ μεταξὺ δύο ὡρισμένων σημείων ἐλαχίστη γραμμή. Ὡσαύτως καὶ τὸ ἐπίπεδον, παραβαλλόμενον πρὸς ὅλας τὰς λοιπὰς ἐπιφανείας, τὰς εἰς τὴν αὐτὴν περίμετρον ἀποπερατουμένας, εἶναι τῶν ἐπιφανειῶν ἡ ἐλαχίστη. Ἐπειδὴ ὅμως ὀλίγαι ὅσον ἔνεστι προτάσεις πρέπει νὰ ἐκλαμβάνωνται ὡς ἀξιώματα, διὰ τοῦτο ἰδοὺ συλλογισμός τις, δι' οὗ αἴρεται πᾶσα περὶ τῆς προκειμένης προτάσεως ἀμφιβολία.

Ἐπειδὴ αἱ ἐπιφάνειαι εἶναι αἱ κατὰ μῆκος καὶ κατὰ πλάτος ἐκτάσεις, ἀναγκαίως ἡ μείζων ἐπιφάνεια μείζονας ἔχει διαστάσεις. Ἐὰν λοιπὸν ἐπιφανείας τινὸς ἡ καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις ἔκτασις ὑπερέχῃ τὴν καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις ἔκτασιν ἐπιφανείας ἄλλης, πρόδηλον εἶναι, ὅτι ἡ πρώτη ἐπιφάνεια μείζων εἶναι τῆς δευτέρας.

Ἐπὶ τοῦ προκειμένου δὲ, ὁπωσδήποτε αἱ δύο ἐπιφάνειαι ὑπό τινος ἐπιπέδου ΒΠΔ τμηθῶσιν, ἐκ μὲν τῆς τομῆς τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας παράγεται ἡ εὐθεῖα ΒΔ, ἐκ δὲ τῆς τομῆς τῆς ἐπιφανείας τῆς ἄλλης γεννᾶται ἡ μὴ εὐθεῖα ΒΠΔ. Ἀλλὰ ἡ μὴ εὐθεῖα γραμμὴ ΒΠΔ μείζων εἶναι τῆς εὐθείας ΒΟΔ. Ἄρα ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ΟΑΒΓΔ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης ἐπιφανείας ΠΑΒΓΔ, ἀποπερατουμένης εἰς τὴν αὐτὴν περίμετρον.

ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Πᾶσα κυρτὴ ἐπιφάνεια ΟΑΒΓΔ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης ἐπιφανείας, περικλειούσης αὐτὴν καὶ ἀποπερατουμένης εἰς τὴν αὐτὴν περίμετρον ΑΒΓΔ. (σχ. 255)

Καὶ ἐν ἄλλοις εἴρηται καὶ ἤδη πάλιν διαδηλοῦται, ὅτι *κυρτὴ ἐπιφάνεια* λέγεται πᾶσα ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν εὐθεῖά τις δὲν δύναται νὰ συναπαντήσῃ εἰς σημεῖα πλειότερα τῶν δύο. Ἐν τούτοις ὅμως εὐθεῖα γραμμὴ δυνατὸν εἶναι νὰ ἐφαρμοσθῇ κατά τινα διεύθυνσιν ἐπὶ κυρτῆς ἐπιφανείας· παράδειγμα δὲ ἔστωσαν τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου αἱ ἐπιφάνειαι. Παρατηρητέον δὲ, ὅτι κυρτὴ ἐπιφάνεια λέγεται καὶ ἡ καμπύλη, καὶ ἡ πολύεδρος, καὶ ἡ ἐν μέρει μὲν καμπύλη, ἐν μέρει δὲ πολύεδρος.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια ΟΑΒΓΔ, ἐξ ὅλων τῶν περικλειουσῶν αὐτὴν, δὲν ἦναι ἡ ἐλαχίστη, μεταξὺ τῶν περικλειουσῶν ἐπιφανειῶν ἔστω ΠΑΒΓΔ ἡ ἐλαχίστη, ἡ τὸ πολὺ ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ ΟΑΒΓΔ.

Ἔκ τινος σημείου Ο ἄγω ἐπίπεδόν τι, ἁπτόμενον τῆς ἐπιφανείας ΟΑΒΓΔ καὶ μὴ τέμνον αὐτήν. Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ συναπαντᾷ τὴν ἐπιφάνειαν ΠΑΒΓΔ, καὶ ἀποκόπτει ἀπ' αὐτῆς μέρος μεῖζον ἑαυτοῦ (ἴδε τὸ προηγούμενον λῆμμα). Τηρῶν δὲ τὸ ὑπολειπόμενον τῆς ἐπιφανείας ΠΑΒΓΔ μέρος, καὶ ἀντὶ τῆς ἀποκοπτομένης κυρτῆς ἐπιφανείας τὸ ἐπίπεδον, τὸ ἀποκόπτον αὐτὴν, μεταχειριζόμενος, σχηματίζω ἐπιφάνειάν τινα νέαν, μικροτέραν τῆς ἐπιφανείας ΠΑΒΓΔ, περικλείουσαν ὅμως τὴν ἐπιφάνειαν ΟΑΒΓΔ.

Ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια ΠΑΒΓΔ ὑπετέθη ἡ πασῶν ἐλαχίστη. Ἄρα ἡ τοιαύτη ὑπόθεσις εἶναι ἀνυπόστατος. Λοιπὸν ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ΟΑΒΓΔ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης ἐπιφανείας ΠΑΒΓΔ, περικλειούσης αὐτὴν καὶ ἀποληγούσης εἰς τὴν αὐτὴν περίμετρον ΑΒΓΔ.

Σχόλιον. Δι' ὁμοίου καθ' ὅλα συλλογισμοῦ δύναταί τις ν' ἀποδείξῃ,

Α^ον. Ὅτι, ἐὰν ἐπιφάνειά τις κυρτὴ, ὑπὸ δύο περιμέτρων ΑΒΓ, ΔΕΖ ἀποπερατουμένη, περιέχηται ἐντὸς οἱασδήποτε ἄλλης ἐπιφανείας, ἐχούσης πέρατα τὰς αὐτὰς περιμέτρους, ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ ἡ περιεχομένη εἶναι μικροτέρα τῆς περιεχούσης. (σχ. 256).

Β^ον. Ὅτι, ἐὰν κυρτή τις ἐπιφάνεια ΑΒ περικλείηται πανταχόθεν ὑπό τινος ἐπιφανείας ἄλλης ΜΝ, ἡ περικλείουσα ἐπιφάνεια μείζων εἶναι τῆς περικλειομένης, εἴτε ἔχωσιν αἱ δύο αὐταὶ ἐπιφάνειαι γραμμάς τινας, ἢ σημεῖα, ἢ ἐπίπεδα κοινὰ, εἴτε οὐδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον. (σχ. 257).

Διότι οὐδεμία ἐκ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν περικλειουσῶν ἐλαχίστη τῶν λοιπῶν εἶναι. Ἂν δὲ τὸ τοιοῦτον ὑποτεθῇ, ἄγω τὸ ἐπίπεδον ΓΔ οὕτως, ὥστε νὰ ἅπτηται τῆς περικλειομένης κυρτῆς ἐπιφανείας ΑΒ. Τὸ ἐπίπεδον δ' αὐτὸ εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας ΓΜΔ (ἴδε τὸ πρῶτον λῆμμα). Ὅθεν ἡ ἐπιφάνεια ΓΝΔ εἶναι μικροτέρα τῆς ΜΝ. Τοῦτο δὲ ἀνατρέπει τὴν ὑπόθεσιν, τὴν ἀνωτέρω γενομένην, καθ' ἣν ἡ ἐπιφάνεια ΜΝ ἐξελήφθη ὡς ἐλαχίστη πασῶν. Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ΑΒ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης ἐπιφανείας, αὐτὴν περικλειούσης.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ I.

Θεώρημα.

Ἡ στερεότης παντὸς κυλίνδρου εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ, πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ. (σχ. 258)

Ἔστω Υ μὲν τὸ ὕψος κυλίνδρου τινός, ΓΑ δὲ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως αὐτοῦ.

Καλῶ *ἐπιφ.*ΓΑ, τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου, τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν ΓΑ, καὶ λέγω, ὅτι ἡ στερεότης τοῦ κυλίνδρου, τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος, ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου τούτου *ἐπιφ.*ΓΑ$\times$Υ. Διότι, ἐὰν τὸ ποσὸν αὐτὸ δὲν ἐκφράζῃ τὸν κύλινδρον, περὶ οὗ πρόκειται, βεβαίως μέτρον εἶναι κυλίνδρου τινὸς ἄλλου, μείζονος ἢ ἐλάσσονος. Ἐν πρώτοις δὲ ἂς ὑποτεθῇ ὅτι διὰ τοῦ ποσοῦ τούτου *ἐπιφ.*ΓΑ$\times$Υ ἐκφράζεται ἡ στερεότης κυλίνδρου τινὸς μικροτέρου, παραδείγματος χάριν, τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ἔχοντος ὕψος μὲν τὸ Υ, ἀκτῖνα δὲ τῆς βάσεως αὐτοῦ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ.

Γράφω περὶ τὸν κύκλον, τὸν ἔχοντα ἀκτῖνα τὴν ΓΔ, κανονικόν τι πολύγωνον ἐξ ἐκείνων, ὅσων αἱ πλευραὶ δὲν συναπαντῶσι τὴν περιφέρειαν, τὴν ἔχουσαν ἀκτῖνα τὴν ΓΑ (πρότ. 10, βιβλ. 4). Ἐπὶ τοῦ περιγεγραμμένου δ᾽ αὐτοῦ πολυγώνου ΗΘΙΠ, ὡς ἐπὶ βάσεως, φαντάζομαι κατεσκευασμένον πρίσμα ὀρθὸν, ὕψος ἔχον τὸ Υ. Τὸ πρίσμα δ᾽ αὐτὸ περιγεγραμμένον εἶναι εἰς τὸν κύλινδρον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ἀκτῖνα ἔχει τὴν ΓΔ.

Τούτου τεθέντος, ἡ στερεότης τοῦ πρίσματος (πρότ. 15, βιβλ. 6) εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ ΗΘΙΠ, πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ Υ. Ἀλλὰ τοῦ πρίσματος ἡ βάσις ΗΘΙΠ εἶναι μικροτέρα τοῦ κύκλου, τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν ΓΑ. Ἄρα τοῦ πρίσματος ἡ στερεότης εἶναι μικροτέρα τοῦ ποσοῦ τούτου *ἐπιφ.*ΓΑ$\times$Υ. Ἀλλὰ τὸ ποσὸν τοῦτο *ἐπιφ.*ΓΑ$\times$Υ, κατὰ τὴν γενομένην ὑπόθεσιν, ἐκφράζει τὴν στερεότητα τοῦ ἐν τῷ πρίσματι ἐγγεγραμμένου κυλίνδρου. Ἄρα τὸ πρίσμα εἶναι μικρότερον τοῦ κυλίνδρου αὐτοῦ. Ἀλλ᾽ ἀπ᾽ ἐναντίας ὁ κύλινδρος εἶναι μικρότερος τοῦ πρίσματος, διότι περιέχεται ἐν αὐτῷ. Λοιπὸν ἀδύνατον εἶναι διὰ τοῦ ποσοῦ τούτου *ἐπιφ.*

ΓΑ×Υ τὸ μέτρον νὰ ἐκφράζηται τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ἔχοντος ὕψος μὲν τὸ Υ, βάσιν δὲ τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου ἀκτὶς εἶναι ἡ ΓΔ. Ἢ, ἐν ἄλλοις λόγοις, τὸ γινόμενον τῆς βάσεως κυλίνδρου τινὸς, πολλαπλασιαθείσης ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ, δὲν δύναται νὰ ἐκφράσῃ τὴν στερεότητα κυλίνδρου μικροτέρου.

Λέγω πρὸς τούτοις ὅτι τὸ αὐτὸ γινόμενον δὲν δύναται νὰ παραστήσῃ τὸ μέτρον τῆς στερεότητος κυλίνδρου μεγαλητέρου. Πρὸς ἀπόδειξιν δὲ τούτου καὶ πρὸς ἀποφυγὴν σχημάτων πολλῶν, ἔστω ΓΔ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον ζητεῖται, καὶ ἔστω, εἰ δυνατὸν, *ἐπιφ.*ΓΔ×Υ τὸ μέτρον τῆς στερεότητος κυλίνδρου τινὸς μείζονος, παραδείγματος χάριν, τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ἔχοντος ὕψος μὲν τὸ Υ, βάσιν δὲ τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου ἀκτὶς εἶναι ἡ ΓΑ.

Γράφω, ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, περὶ τὸν κύλινδρον, τὸν ἔχοντα βάσιν τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου ἀκτὶς εἶναι ἡ ΓΔ, πρίσμα ὀρθὸν καὶ ἰσοϋψές. Τοῦ περιγεγραμμένου αὐτοῦ πρίσματος ἡ στερεότης ἐκφράζεται διὰ τοῦ ΗΘΙΠ×Υ. Ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου ΗΘΙΠ μείζων εἶναι τῆς *ἐπιφ.*ΓΔ. Ἄρα τοῦ πρίσματος ἡ στερεότης μείζων εἶναι τοῦ ποσοῦ τούτου *ἐπιφ.*ΓΔ×Υ. Λοιπὸν τὸ πρίσμα εἶναι μεῖζον τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ἔχοντος τὸ αὐτὸ μὲν ὕψος, βάσιν δὲ τὴν *ἐπιφ.*ΓΑ. Τὸ ἐναντίον ὅμως συμβαίνει, τουτέστι τὸ πρίσμα εἶναι μικρότερον τοῦ κυλίνδρου αὐτοῦ, διότι περιέχεται ἐν αὐτῷ. Ἄρα ἀδύνατον εἶναι τὸ γινόμενον τῆς βάσεως κυλίνδρου τινὸς, ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ πολλαπλασιασθείσης, νὰ ἐκφράσῃ τὸ μέτρον τῆς στερεότητος κυλίνδρου μείζονος.

Λοιπὸν ἡ στερεότης παντὸς κυλίνδρου ἐκφράζεται διὰ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ πολλαπλασιασθείσης.

Πόρισμα 1. Οἱ κύλινδροι οἱ ἰσοϋψεῖς εἶναι πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν ἀνάλογοι. Οἱ κύλινδροι δὲ, οἱ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντες, εἶναι πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν ἀνάλογοι.

Πόρισμα 2. Οἱ ὅμοιοι κύλινδροι εἶναι καὶ πρὸς τοὺς κύβους τῶν ὑψῶν αὐτῶν, καὶ πρὸς τοὺς κύβους τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων αὐτῶν ἀνάλογοι. Διότι αἱ βάσεις αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν. Ἐπειδὴ δὲ οἱ κύλινδροι εἶναι ὅμοιοι, τῶν βάσεων αὐτῶν αἱ διάμετροι εἶναι πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν ἀνάλογοι(ὁρισμ. 4, βιβλ. 8). Ἄρα αἱ βάσεις τῶν κυλίνδρων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ὑψῶν αὐτῶν. Λοιπὸν αἱ βάσεις αὐταὶ, ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα ὕψη τῶν κυλίνδρων πολλαπλασιασθεῖσαι, τουτέστιν οἱ κύλινδροι, εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς κύβους τῶν ὑψῶν τῶν κυλίνδρων αὐτῶν.

Σχόλιον. Ἔστω Α μὲν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κυλίνδρου τινὸς, Υ δὲ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Τῆς βάσεως αὐτοῦ ἡ ἐπιφάνεια ἐκφράζεται διὰ τοῦ πA^2 (προτ. 12, βιβλ. 4)· τοῦ κυλίνδρου δὲ ἡ στερεότης σημαίνεται διὰ τοῦ $\pi A^2 \times Y$, ἢ διὰ τοῦ $\pi A^2 Y$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2.

Λῆμμα.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια παντὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ πολλαπλασιασθείσης. (σχ. 252)

Διότι τοῦ πρίσματος αὐτοῦ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων ΑΖΗΒ, ΒΗΘΓ, ΓΘΙΔ, κτλ., ἐξ ὧν αὕτη ἀποτελεῖται. Ἀλλὰ τῶν ὀρθογωνίων αὐτῶν τὰ μὲν ὕψη ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ κτλ. εἶναι ἴσα τῷ ὕψει τοῦ πρίσματος, αἱ δὲ βάσεις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κτλ. ἐν ὅλῳ τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος σχηματίζουσι. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων αὐτῶν, τουτέστι τοῦ πρίσματος ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ πολλαπλασιασθείσης.

Πόρισμα. Τῶν ἰσοϋψῶν πρισμάτων αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς περιμέτρους τῶν βάσεων τῶν πρισμάτων αὐτῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3.

Λῆμμα.

Ἡ κυρτὴ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια μείζων μὲν εἶναι τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας παντὸς πρίσματος, εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμ-

μένου, ἐλάσσων δὲ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας παντὸς πρίσματος περιγεγραμμένου.(σχ. 252)

Διότι, ἀφ' ἑνὸς μὲν καὶ τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου πρίσματος ΑΒΓΔΕΚΖΗΘΙ αἱ ἐπιφάνειαι αἱ κυρταὶ εἶναι ἰσομήκεις. Εἶναι δὲ ἰσομήκεις, διότι πᾶσα παραλλήλως πρὸς τὴν ΑΖ γινομένη ἀμφοτέρων τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν τομὴ ἴση εἶναι τῷ πλευρῷ ΑΖ. Ἀφ' ἑτέρου δὲ, ἄν τις, πρὸς εὕρεσιν τοῦ πλάτους τῶν αὐτῶν ἐπιφανειῶν, κόψῃ καὶ τὰ δύο σώματα δι' ἐπιπέδων, παραλλήλων τοῦ ἐπιπέδου τῶν βάσεων, τουτέστι δι' ἐπιπέδων καθέτων ἐπὶ τοῦ πλευροῦ ΑΖ, ἡ μὲν τῶν τομῶν εἶναι ἴση τῇ περιφερείᾳ τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ ἴση τῇ περιμέτρῳ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ. Πρόδηλον δὲ εἶναι, ὅτι τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἡ περιφέρεια ὑπερέχει κατ' ἔκτασιν τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ. Ἄρα τοῦ κυλίνδρου ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια μείζων εἶναι τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένου πρίσματος, διότι κατὰ μῆκος μὲν αἱ δύο αὐταὶ ἐπιφάνειαι εἶναι ἴσαι, κατὰ πλάτος ὅμως ἡ τοῦ κυλίνδρου ὑπερτερεῖ τὴν τοῦ πρίσματος.

Διὰ συλλογισμοῦ καθ' ὅλα ὁμοίου δύναταί τις ν' ἀποδείξῃ, ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι μικροτέρα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ περιγεγραμμένου πρίσματος ΑΒΓΔΙΖΗΘ. (σχ. 253)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4.

Θεώρημα.

Ἡ κυρτὴ παντὸς κυλίνδρου ἐπιφάνεια εἶναι ἴση τῇ περιφερείᾳ τῆς βάσεως αὐτοῦ, πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ. (σχ 258)

Ἔστω Υ μὲν τὸ ὕψος κυλίνδρου τινὸς, ΓΑ δὲ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως αὐτοῦ.

Καλῶ *περιφ.*ΓΑ τὴν περιφέρειαν, τὴν ἔχουσαν ἀκτῖνα τὴν ΓΑ, καὶ λέγω, ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος, ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου τούτου *περιφ.*ΓΑ$\times$Υ. Διότι ἐὰν τὸ ποσὸν αὐτὸ δὲν ἐκφράζῃ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, περὶ οὗ πρόκειται, βεβαίως μέτρον εἶναι τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου τινὸς ἄλλου μείζονος ἢ ἐλάσσονος. Ἐν πρώτοις δὲ ἃς ὑποτεθῇ, ὅτι διὰ τοῦ ποσοῦ τούτου *περιφ.*ΓΑ$\times$Υ ἐκφράζεται ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κυλίνδρου τινὸς μικροτέρου, τοῦ κυλίνδρου, παραδείγματος χάριν, τοῦ ἔχοντος ὕψος μὲν τὸ Υ, ἀκτῖνα δὲ βάσεως τὴν ΓΔ.

Γράφω περὶ τὸν κύκλον, τὸν ἔχοντα ἀκτῖνα τὴν ΓΔ, κανονικόν τι πολύγωνον ἐξ ἐκείνων, ὅσων αἱ πλευραὶ δὲν συναπαντῶσι τὴν περιφέρειαν, τὴν ἔχουσαν ἀκτῖνα τὴν ΓΑ. Ἐπὶ τοῦ περιγεγραμμένου δ' αὐτοῦ πολυγώνου ΗΘΙΠ, ὡς ἐπὶ βάσεως, φαντάζομαι κατεσκευασμένον πρίσμα ὀρθὸν, ὕψος ἔχον τὸ Υ.

Τοῦ πρίσματος αὐτοῦ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια μέτρον ἔχει τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου ΗΘΙΠ, πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ὕψος Υ (προτ. 2, βιβλ. 8). Ἀλλ' ἡ περίμετρος αὕτη εἶναι μικροτέρα τῆς περιφερείας, τῆς ἐχούσης ἀκτῖνα τὴν ΓΑ. Ἄρα ἡ κυρτὴ τοῦ πρίσματος ἐπιφάνεια εἶναι μικροτέρα τοῦ ποσοῦ *περιφ.*ΓΑ$\times$Υ. Ἀλλὰ τὸ ποσὸν τοῦτο *περιφ.*ΓΑ$\times$Υ, κατὰ τὴν γενομένην ὑπόθεσιν, ἐκφράζει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ἐν τῷ πρίσματι ἐγγεγραμμένου. Ἄρα ἡ κυρτὴ τοῦ πρίσματος ἐπιφάνεια εἶναι μικροτέρα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου αὐτοῦ. Ἀλλ' ἀπ' ἐναντίας ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος εἶναι μεγαλητέρα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐγγεγραμμένου κυλίνδρου (προτ. 3, βιβλ. 8). Ἄρα ἡ ὑπόθεσις, ἡ ἀνωτέρω γενομένη, εἶναι ψευδής. Λοιπὸν ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως κυλίνδρου τινὸς, πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ, δὲν δύναται νὰ ἐκφράσῃ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κυλίνδρου μικροτέρου.

Λέγω ἤδη, ὅτι τὸ αὐτὸ γινόμενον δὲν δύναται νὰ παραστήσῃ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κυλίνδρου μεγαλητέρου. Πρὸς ἀπόδειξιν δὲ τούτου καὶ πρὸς ἀποφυγὴν σχημάτων πολλῶν, ἔστω ΓΔ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, περὶ οὗ πρόκειται, καὶ ἔστω, εἰ δυνατὸν, *περιφ.*ΓΔ$\times$Υ τὸ μέτρον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου τινὸς ἄλλου, ἔχοντος τὸ αὐτὸ μὲν ὕψος Υ, βάσιν δὲ μείζονα, βάσιν, παραδείγματος χάριν, γεγραμμένην διὰ τῆς ἀκτῖνος ΓΑ.

Μεταχειριζόμενος τὴν ἀνωτέρω γενομένην κατασκευὴν, συμπεραίνω ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος μέτρον ἔχει τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου ΗΘΙΠ, πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ὕψος Υ. Ἀλλ' ἡ περίμετρος αὕτη μείζων εἶναι τῆς *περιφ.*ΓΔ.

Ἄρα ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος εἶναι μείζων τοῦ ποσοῦ τούτου *περιφ*.ΓΔ$\times$Υ, τοῦ καθ' ὑπόθεσιν ἐκφράζοντος τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ἰσοϋψοῦς μὲν, βάσιν ὅμως ἔχοντος τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου ἀκτὶς εἶναι ἡ ΓΑ. Τουτέστιν ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ὑπερέχει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐξωτερικοῦ αὐτοῦ κυλίνδρου. Ἀλλὰ καὶ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον αὐτὸν τὸ πρίσμα ἂν ἦτον, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἤθελεν εἶσθαι μικροτέρα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου (προτ. 3, βιβλ. 8). Κατὰ λόγον λοιπὸν μείζονα ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, τὸ ὁποῖον δὲν ἐκτείνεται μέχρι τοῦ ἐξωτερικοῦ κυλίνδρου, μικροτέρα εἶναι τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου αὐτοῦ. Ἄρα ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως κυλίνδρου τινὸς, ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ πολλαπλασιασθεῖσα, δὲν δύναται νὰ ἐκφράσῃ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κυλίνδρου μείζονος.

Λοιπὸν ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια παντὸς κυλίνδρου εἶναι ἴση τῇ περιφερείᾳ τῆς βάσεως αὐτοῦ, πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Θεώρημα.

Ἡ στερεότης παντὸς κώνου εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους αὐτοῦ πολλαπλασιασθείσης. (σχ. 259)

Ἔστω ΣΟ τὸ ὕψος κώνου τινὸς, καὶ ΑΟ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως αὐτοῦ.

Καλῶ *ἐπιφ*.ΑΟ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεως αὐτοῦ, καὶ λέγω ὅτι ἡ στερεότης τοῦ κώνου αὐτοῦ ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου τούτου *ἐπιφ*.ΑΟ$\times\frac{1}{3}$ΣΟ.

Ἐν πρώτοις ἂς ὑποτεθῇ, ὅτι τὸ ποσὸν τοῦτο *ἐπιφ*.ΑΟ$\times\frac{1}{3}$ΣΟ ἐκφράζει τὴν στερεότητα κώνου τινὸς μείζονος, τοῦ κώνου, παραδείγματος χάριν, τοῦ ἔχοντος τὸ αὐτὸ μὲν ὕψος ΣΟ, ἀκτῖνα δὲ βάσεως τὴν ΒΟ, τὴν μείζονα τῆς ΑΟ.

Περὶ τὸν κύκλον, τὸν ἔχοντα ἀκτῖνα τὴν ΑΟ, γράφω πολύγωνόν τι κανονικὸν εξ ἐκείνων, ὅσων αἱ πλευραὶ δὲν συναπαντῶσι τὴν περιφέρειαν, τὴν ἔχουσαν ἀκτῖνα τὴν ΒΟ (πρότ. 10, βιβλ. 4). Ἐπὶ τοῦ περιγεγραμμένου δ' αὐτοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ΜΝΠΚ.... φαντάζομαι στηριζομένην πυραμίδα, κορυφὴν ἔχουσαν τὸ σημεῖον Σ.

Ταύτης τῆς πυραμίδος ἡ στερεότης εἶναι ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πολυγώνου ΜΝΠΚ...., πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους ΣΟ (προτ. 19. βιβλ. 6). Ἀλλὰ τὸ πολύγωνον αὐτὸ εἶναι μεῖζον τοῦ κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια ἐσημειώθη διὰ ἐπιφ.ΑΟ. Ἄρα ἡ πυραμὶς εἶναι μείζων τοῦ ποσοῦ τούτου ἐπιφ.ΑΟ$\times\frac{1}{3}$ΣΟ, τοῦ κατὰ τὴν ἀνωτέρω γενομένην ὑπόθεσιν ἐκφράζοντος τὸν κῶνον, τὸν ἔχοντα κορυφὴν μὲν τὸ σημεῖον Σ, ἀκτῖνα δὲ βάσεως τὴν ΒΟ. Ἀλλ' ἀπ' ἐναντίας ἡ πυραμὶς εἶναι μικροτέρα τοῦ κώνου αὐτοῦ, διότι περιέχεται ἐν αὐτῷ. Λοιπὸν ἡ βάσις κώνου τινὸς, ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους αὐτοῦ πολλαπλασιασθεῖσα, δὲν δύναται νὰ ἐκφράσῃ τὴν στερεότητα κώνου μείζονος.

Λέγω πρὸς τούτοις, ὅτι τὸ αὐτὸ γινόμενον δὲν δύναται νὰ παραστήσῃ τὸ μέτρον τῆς στερεότητος κώνου μικροτέρου. Πρὸς ἀπόδειξιν δὲ τούτου καὶ πρὸς ἀποφυγὴν σχημάτων πολλῶν, ἔστω ΒΟ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου, περὶ οὗ πρόκειται, καὶ ἔστω, εἰ δυνατὸν, ἐπιφ.ΒΟ$\times\frac{1}{3}$ΣΟ τὸ μέτρον τῆς στερεότητος κώνου τινὸς ἄλλου, ἔχοντος ὕψος μὲν τὸ ΣΟ, βάσιν δὲ μικροτέραν, βάσιν, παραδείγματος χάριν, γεγραμμένην διὰ τῆς ἀκτῖνος ΑΟ.

Μεταχειριζόμενος τὴν αὐτὴν κατασκευὴν, τὴν ἀνωτέρω γενομένην, συμπεραίνω ὅτι ἡ στερεότης τῆς πυραμῖδος ΣΜΝΠΚ.... μέτρον ἔχει τὴν ἐπιφάνειαν ΜΝΠΚ....,πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ $\frac{1}{3}$ΣΟ. Ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια ΜΝΠΚ.... εἶναι μικροτέρα τῆς ἐπιφ.ΒΟ. Ἄρα τῆς πυραμίδος τὸ μέτρον εἶναι μικρότερον τοῦ ποσοῦ τούτου ἐπιφ.ΒΟ$\times\frac{1}{3}$ΣΟ,τοῦ καθ' ὑπόθεσιν ἐκφράζοντος τὴν στερεότητα τοῦ ἐσωτερικοῦ κώνου.Ἄρα ἡ πυραμὶς εἶναι μικροτέρα τοῦ κώνου, τοῦ ἔχοντος ὕψος μὲν τὸ ΣΟ, ἀκτῖνα δὲ βάσεως τὴν ΑΟ. Ἀπ' ἐναντίας ὅμως ἡ πυραμὶς εἶναι μείζων τοῦ κώνου αὐτοῦ, διότι ὁ κῶνος αὐτὸς περιέχεται ἐν αὐτῇ. Ἄρα ἡ βάσις κώνου τινὸς, ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους αὐτοῦ πολλαπλασιασθεῖσα, δὲν δύναται νὰ ἐκφράσῃ τὸ μέτρον τῆς στερεότητος κώνου μικροτέρου.

Λοιπὸν ἡ στερεότης τοῦ κώνου εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ, πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Πόρισμα. Ὁ κῶνος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ὅθεν ἕπεται, Α^{ον}. Ὅτι οἱ κῶνοι οἱ ἰσοϋψεῖς εἶναι πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν ἀνάλογοι.

Β^{ον}. Ὅτι οἱ κῶνοι, οἱ ἴσας βάσεις ἔχοντες, εἶναι πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν ἀνάλογοι.

Γ^{ον}. Ὅτι οἱ κῶνοι οἱ ὅμοιοι εἶναι καὶ πρὸς τοὺς κύβους τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων αὐτῶν, καὶ πρὸς τοὺς κύβους τῶν ὑψῶν αὐτῶν ἀνάλογοι.

Σχόλιον. Ἔστω Α μὲν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κώνου τινός, Υ δὲ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Τοῦ κώνου αὐτοῦ ἡ στερεότης εἶναι $\pi A^2 \times \frac{1}{3}\Upsilon$, ἢ $\frac{1}{3}\pi A^2 \Upsilon$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6.

Θεώρημα.

Ἡ στερεότης τοῦ κολοβοῦ κώνου, τοῦ ἔχοντος ὕψος μὲν τὴν εὐθεῖαν ΠΟ, ἀκτῖνας δὲ βάσεων τὰς εὐθείας ΑΟ, ΔΠ, ἐκφράζεται διὰ τοῦ ποσοῦ τούτου $\frac{1}{3}\pi \times \Theta\Pi \times (\overline{AO}^2 + \overline{\Delta\Pi}^2 + AO \times \Delta\Pi)$. (σχ. 260)

Ἔστω ΤΖΗΘ τριγωνική τις πυραμὶς, ἰσοϋψὴς μὲν πρὸς τὸν κῶνον ΣΑΒ, βάσιν δ᾽ ἔχουσα τὸ τρίγωνον ΖΗΘ, τὸ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου ἰσοδύναμον. Ἂς ὑποτεθῇ δὲ ὅτι τῶν δύο αὐτῶν σωμάτων αἱ βάσεις ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κεῖνται ἐπιπέδου.

Τούτου τεθέντος, τῆς πυραμίδος καὶ τοῦ κώνου αἱ κορυφαὶ Σ καὶ Τ ἰσάκις ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῶν βάσεων ἀπέχουσιν. Ἐὰν δὲ, παρατεινομένου τοῦ ἐπιπέδου ΔΠΕ, τμηθῇ δι᾽ αὐτοῦ ἡ πυραμὶς, ἡ παραγομένη τομὴ ΙΚΛ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἄνω τοῦ κολοβοῦ κώνου βάσιν ΔΕ. Διότι αἱ βάσεις ΑΒ, ΔΕ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων ΑΟ, ΔΠ (πρότ. 11, βιβλ. 4), ἢ πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ὑψῶν ΣΟ, ΣΠ. Ἀλλὰ καὶ τὰ τρίγωνα ΖΗΘ, ΙΚΛ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν αὐτῶν ὑψῶν (πρότ. 16, βιβλ. 6). Ἄρα οἱ κύκλοι ΑΒ, ΔΕ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τρίγωνα ΖΗΘ, ΙΚΛ. Ἀλλ᾽ ἐξ ὑποθέσεως τὸ τρίγωνον ΖΗΘ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ κύκλῳ ΑΒ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΙΚΛ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ κύκλῳ ΔΕ.

Ἀλλ' ἡ βάσις ΑΒ, πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ $\frac{1}{3}$ΣΟ, τὴν στερεότητα τοῦ κώνου ΣΑΒ ἐκφράζει· ἡ δὲ βάσις ΖΗΘ, πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ $\frac{1}{3}$ΣΟ, ἐκφράζει τὴν στερεότητα τῆς πυραμίδος ΤΖΗΘ. Ἄρα, ἐπειδὴ αἱ βάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι, ἡ στερεότης τῆς πυραμίδος εἶναι ἴση τῇ στερεότητι τοῦ κώνου. Δι' ὅμοιόν τινα λόγον ἡ πυραμὶς ΤΙΚΛ εἶναι ἰσοδύναμος τῷ κώνῳ ΣΔΕ. Ἄρα ὁ κολοβὸς κῶνος ΑΔΕΒ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ κολοβῇ πυραμίδι ΖΗΘΛΙΚ. Ἀλλ' ἡ βάσις ΖΗΘ, ἡ ἰσοδύναμος τῷ κύκλῳ, τῷ ἔχοντι ἀκτῖνα τὴν ΑΟ, μέτρον ἔχει τὸ ποσὸν τοῦτο $\pi\times\overline{\text{ΑΟ}}^2$. Ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ βάσις $\text{ΙΚΛ}=\pi\times\overline{\text{ΔΠ}}^2$. Ἡ μέση δὲ ἀνάλογος, ἡ μεταξὺ $\pi\times\overline{\text{ΑΟ}}^2$ καὶ $\pi\times\overline{\text{ΔΠ}}^2$, μέτρον ἔχει τοῦτο $\pi\times\text{ΑΟ}\times\text{ΔΠ}$. Λοιπὸν ἡ στερεότης τῆς κολοβῆς πυραμίδος, ἢ τοῦ κολοβοῦ κώνου, μέτρον ἔχει (πρότ. 21, βιβλ. 6) τὸ ποσὸν τοῦτο $\frac{1}{3}\text{ΟΠ}\times(\pi\times\overline{\text{ΑΟ}}^2+\pi\times\overline{\text{ΔΠ}}^2+\pi\times\text{ΑΟ}\times\text{ΔΠ})$, τὸ ὁποῖον γράφεται καὶ οὕτω $\frac{1}{3}\pi\times\text{ΟΠ}\times(\overline{\text{ΑΟ}}^2+\overline{\text{ΔΠ}}^2+\text{ΑΟ}\times\text{ΔΠ})$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7.

Θεώρημα.

Ἡ κυρτὴ παντὸς κώνου ἐπιφάνεια εἶναι ἴση τῇ περιφερείᾳ τῆς βάσεως αὐτοῦ, πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ. (σχ. 259)

Ἔστω Σ μὲν ἡ κορυφὴ κώνου τινὸς, ΑΟ δὲ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως αὐτοῦ, καὶ ΣΑ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ. Λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου αὐτοῦ ἐκφράζεται διὰ τοῦ ποσοῦ τούτου *περιφ.*ΑΟ$\times\frac{1}{2}$ΣΑ. Διότι ἔστω, εἰ δυνατὸν, *περιφ.*ΑΟ$\times\frac{1}{2}$ΣΑ ἡ ἐπιφάνεια κώνου τινὸς ἄλλου, ἔχοντος κορυφὴν μὲν τὸ σημεῖον Σ, βάσιν δὲ τὸν κύκλον, τὸν περιγεγραμμένον δι' ἀκτῖνος μείζονος τῆς ΑΟ, παραδείγματος χάριν, διὰ τῆς ἀκτῖνος ΒΟ.

Γράφω περὶ τὸν μικρὸν κύκλον κανονικόν τι πολύγωνον ΜΝΠΚ... ἐξ ἐκείνων, ὅσων αἱ πλευραὶ δὲν συναπαντῶσι τὴν περιφέρειαν, τὴν ἔχουσαν ἀκτῖνα τὴν ΒΟ· ἔστω δὲ ΣΜΝΠΚ...

ἡ κανονικὴ πυραμὶς, ἡ ἔχουσα βάσιν μὲν τὸ περιγεγραμμένον αὐτὸ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Σ.

Τούτων τεθέντων, τὸ τρίγωνον ΣΜΝ, τὸ ἓν ἐκ τῶν πολλῶν, τῶν ἀποτελούντων τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος, μέτρον ἔχει τὴν βάσιν αὐτοῦ ΜΝ, πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους αὐτοῦ ΣΑ, ἐπὶ τὸ ἥμισυ δηλαδὴ τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου τοῦ προτεθέντος. Ἐπειδὴ δὲ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχουσι καὶ τὰ λοιπὰ τρίγωνα ΣΝΠ, ΣΠΚ, κτλ., ἕπεται ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι ἴση τῇ περιμέτρῳ ΜΝΠΚ...., πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ $\frac{1}{2}$ΣΑ. Ἀλλὰ ἡ περίμετρος ΜΝΠΚ.... μείζων εἶναι τῆς *περιφ.*ΑΟ. Ἄρα ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι μείζων τῆς *περιφ.*ΑΟ$\times\frac{1}{2}$ΣΑ, καὶ ἑπομένως μείζων τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν μὲν κορυφὴν Σ, βάσιν δὲ τὸν κύκλον, τὸν περιγεγραμμένον διὰ τῆς ἀκτῖνος ΒΟ. Ἀλλ' ἀπ' ἐναντίας ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου αὐτοῦ ὑπερέχει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος· διότι, ἐὰν τις δύο τοιαύτας πυραμίδας βάσιν πρὸς βάσιν συγκολλήσῃ, καὶ συγκολλήσῃ ὡσαύτως δύο κώνους τοιούτους, παρατηρεῖ ὅτι τῶν κώνων ἡ ἐπιφάνεια περιλαμβάνει πανταχόθεν τὴν ἐπιφάνειαν τῶν δύο πυραμίδων, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἐπιφάνεια τῶν δύο συγκεκολλημένων κώνων ὑπερέχει τὴν τῶν δύο συγκεκολλημένων πυραμίδων (λῆμμα 2). Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου μείζων εἶναι τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος, τῆς ἐν αὐτῷ περιεχομένης. Τὸ ἐναντίον ὅμως ἐπορίσθημεν ἐκ τῆς ὑποθέσεως, τῆς κατ' ἀρχὰς γενομένης. Ἄρα ἡ τοιαύτη ὑπόθεσις εἶναι ψευδής. Λοιπὸν ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως κώνου τινὸς, πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ, δὲν δύναται νὰ ἐκφράσῃ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κώνου μείζονος.

Λέγω ἤδη ὅτι τὸ αὐτὸ γινόμενον δὲν εἶναι μέτρον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου μικροτέρου. Διότι ἔστω ΒΟ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κώνου τινός· ἂς ὑποτεθῇ δὲ ὅτι *περιφ.*ΒΟ$\times\frac{1}{2}$ΣΒ ἐκφράζει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, τοῦ ἔχοντος κορυφὴν μὲν τὸ σημεῖον Σ, ἀκτῖνα δὲ βάσεως τὴν ΑΟ, τὴν μικροτέραν τῆς ΒΟ.

Μεταχειριζόμενος τὴν αὐτὴν κατασκευὴν, τὴν ἀνωτέρω γενομένην, συνάγω πάλιν ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος ΣΜΝΠΚ.... εἶναι ἴση τῇ περιμέτρῳ ΜΝΠΚ...., πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ $\frac{1}{2}$ΣΑ. Ἀλλὰ καὶ ἡ περίμετρος ΜΝΠΚ... εἶναι μικροτέρα τῆς *περιφ.*ΒΟ, καὶ ἡ πλευρὰ ΣΑ μικροτέρα εἶναι τῆς ΣΒ. Ἄρα διὰ τὸν διπλοῦν αὐτὸν λόγον ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι μικροτέρα τοῦ ποσοῦ *περιφ.*ΒΟ$\times\frac{1}{2}$ΣΒ, τοῦ καθ' ὑπόθεσιν ἐκφράζοντος τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, τοῦ ἔχοντος βάσιν τὸν κύκλον, τὸν διὰ τῆς ἀκτῖνος ΑΟ περιγεγραμμένον. Ἄρα ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι μικροτέρα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, τοῦ ἐν αὐτῇ περιεχομένου. Ἀπ' ἐναντίας ὅμως εἶναι μεγαλητέρα· διότι, ἐάν τις δύο τοιαύτας πυραμίδας βάσιν πρὸς βάσιν συγκολλήσῃ, καὶ συγκολλήσῃ ὡσαύτως δύο κώνους τοιούτους, παρατηρεῖ ὅτι τῶν δύο πυραμίδων ἡ ἐπιφάνεια περιλαμβάνει πανταχόθεν τὴν ἐπιφάνειαν τῶν δύο κώνων, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἐπιφάνεια τῶν δύο συγκεκολλημένων πυραμίδων ὑπερέχει τὴν τῶν δύο συγκεκολλημένων κώνων. Ἄρα ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως κώνου τινός, ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ πολλαπλασιασθεῖσα, δὲν δύναται νὰ ἐκφράσῃ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κώνου μικροτέρου.

Λοιπὸν ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια οἱουδήποτε κώνου μέτρον ἔχει τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως αὐτοῦ, πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

Σχόλιον. Ἔστω Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κώνου τινὸς καὶ Π ἡ πλευρὰ αὐτοῦ. Τῆς βάσεως αὐτοῦ ἡ περιφέρεια εἶναι 2πΑ, ἡ δὲ κυρτὴ αὐτοῦ ἐπιφάνεια ἐκφράζεται διὰ τοῦ $2\pi\mathrm{A}\times\frac{1}{2}\Pi=\pi\mathrm{A}\Pi$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8.

Θεώρημα.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια παντὸς κολοβοῦ κώνου ΑΔΕΒ εἶναι ἴση τῇ πλευρᾷ αὐτοῦ ΔΑ, πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων αὐτοῦ. (σχ. 261)

Εἰς τὸ ἐπίπεδον ΣΑΒ, τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ΣΟ διαβαῖνον, ἄγω καθέτως ἐπὶ τῆς ΣΑ τὴν εὐθεῖαν ΑΖ, καὶ λαμβάνω αὐτὴν ἴσην τῇ περιφερείᾳ, τῇ γεγραμμένῃ διὰ τῆς ἀκτῖνος ΑΟ, συνάπτω δὲ τὰ σημεῖα Σ καὶ Ζ διὰ τῆς εὐθείας ΣΖ, καὶ σύρω τὴν ΔΘ παράλληλον τῆς ΑΖ.

Ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΣΑΟ, ΣΔΓ, ἡ ἀναλογία ὑπάρχει αὕτη ΑΟ : ΔΓ : : ΣΑ : ΣΔ. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος δὲ τῶν τριγώνων ΣΑΖ, ΣΔΘ ἡ ἑξῆς προκύπτει ἀναλογία ΑΖ : ΔΘ : : ΣΑ : ΣΔ. Τὰς δύο δὲ ταύτας ἀναλογίας συγκρίνων τις συνάγει ΑΖ : ΔΘ : : ΑΟ : ΔΓ, ἢ ΑΖ : ΔΘ : : *περιφ.*ΑΟ : *περιφ.*ΔΓ (πρότ. 11, βιϐλ. 4). Ἀλλά, κατὰ τὴν κατασκευήν, ΑΖ$=$*περιφ.*ΑΟ. Λοιπὸν ΔΘ$=$*περιφ.*ΔΓ.

Τούτου τεθέντος, τὸ τρίγωνον ΣΑΖ, τὸ ἔχον μέτρον τὴν ποσότητα ΑΖ$\times\frac{1}{2}$ΣΑ, εἶναι ἰσοδύναμον τῇ κυρτῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου ΣΑΒ, τῇ ἐχούσῃ μέτρον *περιφ.*ΑΟ$\times\frac{1}{2}$ΣΑ. Δι' ὅμοιόν τινα λόγον τὸ τρίγωνον ΣΔΘ εἶναι ἰσοδύναμον τῇ κυρτῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου ΣΔΕ. Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κολοϐοῦ κώνου ΑΔΕΒ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τραπεζίου ΑΔΘΖ. Ἀλλὰ τοῦ τραπεζίου τούτου ἡ ἐπιφάνεια (πρότ. 7, βιϐλ. 3) μέτρον ἔχει τὸ ποσὸν ΑΔ$\times\left(\frac{\text{ΑΖ}+\text{ΔΘ}}{2}\right)$. Ἄρα τοῦ κολοϐοῦ κώνου ΑΔΕΒ ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἴση τῇ πλευρᾷ αὐτοῦ ΑΔ, πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων.

Πόρισμα. Ἐκ τοῦ σημειου Ι, τοῦ ἐν τῷ μέσῳ τῆς ΑΔ ὑπάρχοντος, ἄγω τὴν ΙΚΛ παράλληλον τῆς ΑΒ, καὶ τὴν ΙΜ παράλληλον τῆς ΑΖ. Δύναμαι δὲ ν' ἀποδείξω, ὡς ἀνωτέρω, ὅτι ΙΜ$=$*περιφ.*ΙΚ. Ἀλλὰ τὸ τραπέζιον ΑΔΘΖ$=$ΑΔ$\times$ΙΜ$=$ΑΔ$\times$*περιφ.*ΙΚ. Λοιπὸν καὶ κατ' ἄλλον ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολοϐοῦ κώνου ἐκφράζεται τρόπον, τὸν ἑξῆς·

Πᾶσα τοιαύτη ἐπιφάνεια εἶναι ἴση τῇ πλευρᾷ τοῦ κολοϐοῦ κώνου, πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς τομῆς αὐτοῦ, τῆς γενομένης εἰς ἴσην ἀπὸ τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων ἀπόστασιν.

Σχόλιον. Ἐὰν εὐθεῖά τις ΑΔ, ὁλόκληρος ἔνθεν ἢ ἐκεῖθεν τῆς εὐθείας ΟΓ καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ὑπάρχουσα, στραφῇ περὶ τὴν ΟΓ καὶ ὁλόκληρον συμπληρώσῃ περίοδον, ἡ ἐκ τῆς στροφῆς τῆς εὐθείας ΑΔ ἀποτελουμένη κυρτὴ ἐπιφάνεια μέτρον ἔχει τὸ ποσὸν ΑΔ$\times\left(\frac{\textit{περιφ.}\text{ΑΟ}+\textit{περιφ.}\text{ΔΓ}}{2}\right)$, ἢ τὸ ποσὸν ΑΔ$\times$*περιφ.*ΙΚ.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΟ, ΔΓ, ΙΚ εἶναι κάθετοι, ἀπὸ τῶν ἄκρων καὶ τοῦ μέσου τῆς εὐθείας ΑΔ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΓ ἠγμέναι.

Πρὸς ἀπόδειξιν τῶν εἰρημένων, ἐκτείνω τὴν ΑΔ καὶ τὴν ΟΓ μέχρις οὗ συναπαντηθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Σ. Τούτου δὲ γενομένου, πρόδηλον εἶναι ὅτι ἐκ τῆς περιστροφῆς τῆς εὐθείας ΑΔ ἀποτελεῖται ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολοβοῦ κώνου, τοῦ ἔχοντος βάσεις τοὺς κύκλους, τοὺς περιγεγραμμένους διὰ τῶν ἀκτίνων ΑΟ, ΔΓ, τῆς κορυφῆς τοῦ ὁλοσχεροῦς κώνου οὔσης εἰς τὸ σημεῖον Σ. Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ἐκ τῆς περιστροφῆς τῆς εὐθείας ΑΔ παραγομένη, μέτρον ἔχει τὴν ποσότητα, τὴν ἀνωτέρω ὁρισθεῖσαν.

Τῆς ἐπιφανείας, τῆς τοιουτοτρόπως παραγομένης, ὁ αὐτὸς τύπος χρησιμεύει ὡς μέτρον, καὶ ὅταν τὸ σημεῖον Δ συμπίπτῃ μετὰ τοῦ Σ, ὅταν δηλαδὴ κῶνος γεννᾶται, καὶ ὅταν ἡ εὐθεῖα ΑΔ παράλληλος ἦναι τοῦ ἄξονος, ἤτοι ὅταν κύλινδρος σχηματίζηται. Καὶ εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ εὐθεῖα ΔΓ εἶναι ἴση τῷ μηδενί, εἰς δὲ τὴν δευτέραν ἴση γίνεται τῇ εὐθείᾳ ΑΟ καὶ τῇ εὐθείᾳ ΙΚ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9.

Λῆμμα.

Ἔστωσαν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ πολλαὶ διαδοχικαὶ κανονικοῦ πολυγώνου πλευραί· ἔστω προσέτι Ο τὸ κέντρον καὶ ΟΙ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου. Ἐὰν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τὸ μέρος ΑΒΓΔ, τὸ καθ' ὁλοκληρίαν ἔνθεν ἢ ἐκεῖθεν τῆς διαμέτρου ΖΗ ὑπάρχον, ὁλόκληρον συμπληρώσῃ στροφὴν περὶ τὴν διάμετρον αὐτήν, ἡ σχηματιζομένη ἐπιφάνεια μέτρον ἔχει τὸ ποσὸν τοῦτο ΜΡ$\times$*περιφ.*ΟΙ, εἰς ὃ ΜΡ εἰκονίζει τὸ ὕψος τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς, τουτέστι τὸ μέρος τοῦ ἄξονος, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἄκρων καθέτων ΑΜ, ΔΡ. (σχ. 262)

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ι εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ, ἐὰν ἡ ΙΚ κάθετος ἀπὸ τοῦ σημείου Ι ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἀχθῇ, ἡ ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν ἡ πλευρὰ ΑΒ περιγράφει, μέτρον ἔχει τὸ ποσὸν τοῦτο ΑΒ$\times$*περιφ.*ΙΚ (πρότ. 8, βιβλ. 8).

Ἄγω τὴν ΑΧ παράλληλον τοῦ ἄξονος· τούτου δὲ γενομένου, τὰ τρίγωνα ΑΒΧ, ΟΙΚ ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀμοιβαίως καθέτους, τουτέστι τὴν ΟΙ ἐπὶ τῆς ΑΒ, τὴν ΙΚ ἐπὶ τῆς ΑΧ, καὶ τὴν ΟΚ ἐπὶ τῆς ΒΧ. Ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια. Ἐκ ταύτης δὲ τῆς ὁμοιότητος ἕπεται ἡ ἀναλογία ΑΒ : ΑΧ :: ΟΙ : ΙΚ, ἢ ΑΒ : ΜΝ :: ΟΙ : ΙΚ (διότι ΑΧ=ΜΝ), ἢ ΑΒ : ΜΝ :: *περιφ.*ΟΙ : *περιφ.*ΙΚ (πρότ. 11, βιβλ. 4). Λοιπὸν ΑΒ$\times$*περιφ.* ΙΚ=ΜΝ$\times$*περιφ.*ΟΙ. Ἤτοι, ἡ ἐκ τῆς περιστροφῆς τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἀποτελουμένη ἐπιφάνεια ἐξισοῦται πρὸς τὸ ἴδιον αὐτῆς ὕψος ΜΝ, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ εἰς τὸ πολύγωνον ἐγγεγραμμένου κύκλου. Ὡσαύτως δὲ ἡ ἐπιφάνεια ἡ σχηματιζομένη ἐκ τῆς περιστροφῆς τῆς πλευρᾶς ΒΓ=ΝΠ$\times$*περιφ.*ΟΙ. Ἡ δὲ ἐπιφάνεια ἡ παραγομένη ἐκ τῆς περιστροφῆς τῆς πλευρᾶς ΓΔ=ΠΡ$\times$*περιφ.*ΟΙ. Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια, ἡ σχηματιζομένη ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ μέρους ΑΒΓΔ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, μέτρον ἔχει τὸ ποσὸν τοῦτο (ΜΝ+ΝΠ+ΠΡ)$\times$*περιφ.* ΟΙ, τουτέστι ΜΡ$\times$*περιφ.*ΟΙ. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἡ ἐπιφάνεια, περὶ ἧς πρόκειται, μέτρον ἔχει τὸ ἴδιον αὐτῆς ὕψος, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Πόρισμα. Ἐὰν ἡ πληθὺς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἦναι ἀρτία, ὁ δὲ ἄξων διαβαίνῃ διὰ τῶν δύο ἀντικειμένων αὐτοῦ κορυφῶν Ζ καὶ Η, ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ ἡμιπολυγώνου ΖΑΓΗ παραγομένη, μέτρον ἔχει τὸν ἴδιον αὐτῆς ἄξονα ΖΗ, πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ πολύγωνον κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10.

Θεώρημα.

Ἡ διάμετρος πάσης σφαίρας, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ μεγίστου αὐτῆς κύκλου πολλαπλασιασθεῖσα, τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας αὐτῆς ἐκφράζει. (σχ. 263)

Λέγω ἐν πρώτοις, ὅτι ἡ διάμετρος σφαίρας οἱασδήποτε, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ μεγίστου αὐτῆς κύκλου πολλαπλασιασθεῖσα, δὲν δύναται νὰ ἐκφράσῃ τὴν ἐπιφάνειαν σφαίρας μεγαλητέρας. Διότι ἔστω, εἰ δυνατὸν, ΑΒ×*περιφ*.ΑΓ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, τῆς ἐχούσης διάμετρον τὴν ΓΔ.

Περὶ τὸν κύκλον, τὸν κεχαραγμένον διὰ τῆς ἀκτῖνος ΓΑ, γράφω κανονικόν τι πολύγωνον, ἀρτίαν πλευρῶν πληθὺν ἔχον, ἐξ ἐκείνων, ὅσων αἱ πλευραὶ δὲν συναπαντῶσι τὴν περιφέρειαν, τὴν γεγραμμένην διὰ τῆς ἀκτῖνος ΓΔ· ἔστωσαν δὲ Μ καὶ Σ δύο ἀντικείμεναι κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ. Μετὰ ταῦτα περὶ τὸν ἄξονα ΜΣ στρέφω τοῦ κανονικοῦ αὐτοῦ πολυγώνου τὸ ἥμισυ ΜΠΣ. Ἡ ἐκ τῆς τοιαύτης περιστροφῆς παραγομένη ἐπιφάνεια, κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα (πρότ. 9, βιβλ. 8), μέτρον ἔχει τὸ ποσὸν τοῦτο ΜΣ×*περιφ*.ΑΓ. Ἀλλ' ὁ ἄξων ΜΣ μείζων εἶναι τῆς διαμέτρου ΑΒ. Ἄρα ἡ ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ πολυγώνου σχηματισθεῖσα ἐπιφάνεια μείζων εἶναι τοῦ ποσοῦ τούτου ΑΒ×*περιφ*.ΑΓ, καὶ ἐπομένως μείζων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τῆς ἐχούσης ἀκτῖνα τὴν ΓΔ. Ἀλλ' ἀπ' ἐναντίας ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας αὐτῆς εἶναι μείζων τῆς ἐπιφανείας, τῆς σχηματισθείσης ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ πολυγώνου, διότι πανταχόθεν ἐν ἑαυτῇ περιέχει τὴν ἐκ τῆς πιριστροφῆς τοῦ πολυγώνου προελθοῦσαν ἐπιφάνειαν. Λοιπὸν ἡ διάμετρος σφαίρας τινὸς, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ μεγίστου αὐτῆς κύκλου πολλαπλασιασθεῖσα, δὲν δύναται νὰ ἐκφράσῃ τὴν ἐπιφάνειαν σφαίρας μεγαλητέρας.

Ἤδη δὲ λέγω, ὅτι τὸ γινόμονον αὐτὸ δὲν δύναται νὰ παραστήσῃ τὸ μέτρον σφαίρας μικροτέρας. Διότι ἔστω, εἰ δυνατὸν, ΔΕ×*περιφ*.ΓΔ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, τῆς ἐχούσης ἀκτῖνα τὴν ΓΑ.

Μεταχειριζόμενος τὴν αὐτὴν κατασκευὴν, τὴν ἀνωτέρω γενομένην, συνάγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ, τοῦ παραγομένου ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ πολυγώνου, μέτρον ἔχει τὸ ποσὸν τοῦτο ΜΣ×*περιφ*.ΑΓ. Ἀλλὰ καὶ ὁ ἄξων ΜΣ εἶναι μικρότερος τῆς διαμέτρου ΔΕ, καὶ ἡ *περιφ*.ΑΓ εἶναι μικροτέρα τῆς *περιφ*.ΓΔ. Λοιπὸν, διὰ τὸν διπλοῦν αὐτὸν λόγον, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ, τοῦ παραγομένου ἐκ τῆς περιστοφῆς τοῦ πολυγώνου, εἶναι μικροτέρα τοῦ ποσοῦ τούτου ΔΕ×*περιφ*.ΓΔ, καὶ ἐπομένως μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τῆς ἐχούσης ἀκτῖνα τὴν ΑΓ. Ἀλλ' ἀπ' ἐναντίας ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ πολυγώνου σχηματιζομένη, μείζων εἶναι τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τῆς ἐχούσης ἀκτῖνα τὴν ΑΓ, διότι πανταχόθεν περιλαμβάνει τῆς σφαίρας ταύτης τὴν ἐπιφάνειαν. Λοιπὸν ἡ διάμετρος σφαίρας τινὸς, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ μεγίστου αὐτῆς κύκλου πολλαπλασιασθεῖσα, δὲν δύναται νὰ παραστήσῃ τὸ μέτρον σφαίρας μικροτέρας.

Ἄρα ἡ διάμετρος πάσης σφαίρας, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ μεγίστου αὐτῆς κύκλου πολλαπλασιασθεῖσα, τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας αὐτῆς ἐκφράζει.

Πόρισμα. Τοῦ μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου ἡ ἐπιφάνεια μέτρον ἔχει τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ πολλαπλασιασθεῖσαν. Ἄρα τῆς σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια εἶναι τετραπλασία τῆς ἐπιφανείας τοῦ μεγίστου αὐτῆς κυκλου.

Σχόλιον. Μετὰ τὴν κατὰ τὸν εἰρημένον τρόπον εὕρεσιν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, καὶ τὴν παραβολὴν αὐτῆς πρὸς ἐπιφανείας ἐπιπέδους, εὐκόλως δύναταί τις νὰ προσδιορίσῃ τὸ ἀπόλυτον μέτρον τῶν ἀτράκτων καὶ τῶν τριγώνων τῶν σφαιρικῶν, τῶν ὁποίων ὁ λόγος, ὁ πρὸς ὁλόκληρον τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, διωρίσθη ἐν τοῖς προηγουμένοις.

Καὶ τῷ ὄντι πᾶς μὲν ἄτρακτος, τοῦ ὁποίου, παραδείγματος χάριν, Γ εἶναι ἡ γωνία, τοιαύτην ἔχει πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας σχέσιν, ὁποίαν σχέσιν ἔχει ἡ γωνία Γ πρὸς τέσσαρας γωνίας ὀρθὰς (πρότ. 20, βιβλ. 7), ἢ ὁποίαν σχέσιν ἔχει τὸ μεγίστου κύκλου τόξον, τὸ μετροῦν τὴν γωνίαν Γ, πρὸς ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν τοῦ μεγίστου αὐτοῦ κύκλου. Ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι ἴση τῇ περιφερείᾳ τοῦ μεγίστου αὐτοῦ κύκλου, πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ. Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀτράκτου εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τοῦ τόξου, τοῦ μετροῦντος τὴν γωνίαν αὐτοῦ, ἐπὶ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας πολλαπλασιασθέντος.(*)

(*) Ἔστω Ε ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας τινὸς, Δ ἡ διάμετρος αὐτῆς, Α ἄτρακτός τις ἐπ' αὐτῆς, Γ ἡ γωνία τοῦ ἀτράκτου αὐτοῦ, Π ἡ περιφέρεια μεγίστου τινὸς κύκλου, καὶ Τ τὸ τόξον τοῦ κύκλου αὐτοῦ, τὸ μετροῦν τὴν γωνίαν Γ. Κατὰ τὰ περὶ ἀτράκτου ἐν τῷ ἑβδόμῳ βιβλίῳ εἰρημένα,

Α: Ε:: Γ: 4,

Ἢ Α: Ε:: Τ: Π.

Πᾶν δὲ τρίγωνον σφαιρικὸν ἰσοδυναμεῖ πρὸς ἄτρακτον, ἔχοντα γωνίαν ἴσην τῷ ἡμίσει τοῦ ὑπολοίπου, τοῦ μένοντος μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν δύο ὀρθῶν γωνιῶν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ σφαιρικοῦ αὐτοῦ τριγώνου (πρότ. 23, βιβλ. 7). Τουτέστιν, ἐὰν ὑποτεθῶσι, παραδείγματος χάριν, Λ μὲν καὶ Μ καὶ Ν τὰ τόξα, τὰ μετροῦντα τὰς τρεῖς τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου γωνίας, Π δὲ ἡ περιφέρεια τοῦ μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου, καὶ Δ ἡ διάμετρος αὐτοῦ, τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ἰσοῦται τῷ ἀτράκτῳ, τῷ ἔχοντι γωνίαν καταμετρουμένην ὑπὸ τοῦ τόξου τούτου $\frac{\Lambda + \mathrm{M} + \mathrm{N} - \frac{1}{2}\Pi}{2}$. Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος σφαιρικοῦ τριγώνου ἐκφράζεται διὰ τοῦ ποσοῦ τούτου $\Delta \times \frac{\left(\Lambda + \mathrm{M} + \mathrm{N} - \frac{1}{2}\Pi\right)}{2}$.

Προκειμένου λοιπὸν λόγου περὶ τοῦ τρισορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου, κατὰ τὰ εἰρημένα, τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων Λ,Μ,Ν, τῶν καταμετρούντων τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, ἀποτελεῖ $\frac{3}{4}\Pi$, διότι ἕκαστον τῶν τόξων αὐτῶν εἶναι ἴσον τῷ $\frac{1}{4}\Pi$. Τὸ ὑπόλοιπον δέ, τὸ μένον μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ $\frac{1}{2}\Pi$ ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου τῶν τριῶν γωνιῶν, εἶναι $\frac{1}{4}$ Π, τὸ ἥμισυ δὲ τούτου $\frac{1}{8}\Pi$. Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τρισορθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴση τῷ $\frac{1}{8}\Pi \times \Delta$, ἤτοι εἶναι τὸ ὄγδοον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Τὸ μέτρον τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων συνάγεται, ἀναλυομένων τῶν πολυγώνων αὐτῶν εἰς τρίγωνα σφαιρικά. Ἐκτὸς δὲ τούτου, τὸ μέτρον αὐτὸ διορίζεται ἐν ὅλῳ τῇ βοηθείᾳ τῆς 24 προτάσεως τοῦ ἑβδόμου βιβλίου· διότι ἡ μονὰς τοῦ κατ' αὐτὴν τὴν πρότασιν μέτρου τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων εἶναι τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια κατεμετρήθη ἤδη, πρὸς ἐπιφάνειαν ἐξισωθεῖσα ἐπίπεδον.

Πολλαπλασιαζομένων ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τῆς ἀναλογίας ταύτης ἐπὶ Δ, αὕτη προκύπτει ἡ ἀναλογία $A : E :: T \times \Delta : \Pi \times \Delta$. Ἀλλὰ $\Pi \times \Delta$ ἐκφράζει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας· ἄρα $T \times \Delta$ τοῦ ἀτράκτου εἶναι ἡ ἐπιφάνεια. Ο. Μ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11.

Θεώρημα.

Ἡ ἐπιφάνεια πάσης σφαιρικῆς ζώνης εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τοῦ ὕψους αὐτῆς, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου. (σχ. 269)

Ἔστω ΕΖ τόξον τι, μεγαλήτερον ἢ μικρότερον τετάρτου περιφερείας· πρὸς τούτοις δὲ ἔστω ΖΗ κάθετος ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΕΓ. Λέγω ὅτι ἡ ζώνη, ἡ μίαν ἔχουσα βάσιν, ἡ σχηματιζομένη ἐκ τῆς στροφῆς τοῦ τόξου ΕΖ περὶ τὴν ἀκτῖνα ΕΓ, μέτρον ἔχει τὸ ΕΗ$\times$*περιφ*.ΕΓ.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἐν πρώτοις δέχομαι πρὸς ὥραν, ὅτι ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος ζώνη μέτρον ἔχει μικρότερον· ἔστω δὲ, εἰ δυνατὸν, τὸ μέτρον αὐτὸ ἴσον ΕΗ$\times$*περιφ*.ΓΑ.

Ἐγγράφω εἰς τὸ τόξον ΕΖ τὸ ΕΜΝΟΠΖ τμῆμα κανονικοῦ τινὸς πολυγώνου, ἐξ ἐκείνων, ὅσων αἱ πλευραὶ δὲν συναπαντῶσι τὴν περιφέρειαν, τὴν διὰ τῆς ἀκτῖνος ΓΑ γεγραμμένην, καὶ καταβιβάζω ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΕΜ τὴν κάθετον ΓΙ.

Κατὰ τὰ προειρημένα, ἡ ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν τὸ πολυγωνικὸν τμῆμα ΕΜΝΟΠΖ περὶ τὴν ἀκτῖνα ΕΓ στρεφόμενον γράφει, μέτρον ἔχει τὸ ποσὸν ΕΗ$\times$*περιφ*.ΓΙ (προτ. 9, βιβλ. 8). Τὸ ποσὸν δ' αὐτὸ μεῖζον εἶναι τοῦ ΕΗ$\times$*περιφ*.ΓΑ, τοῦ καθ' ὑπόθεσιν μετροῦντος τὴν ζώνην, τὴν σχηματιζομένην ἐκ τῆς στροφῆς τοῦ τοξου ΕΖ. Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ἀποτελουμένη ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ πολυγωνικοῦ τμήματος ΕΜΝΟΠΖ, μείζων εἶναι τῆς ζώνης, τὴν ὁποίαν ἀποτελεῖ τὸ περιγεγραμμένον τόξον ΕΖ, περὶ τὴν ἀκτῖνα ΕΓ στρεφόμενον. Ἀλλ' ἀπ' ἐναντίας τῆς ζώνης αὐτῆς ἡ ἐπιφάνεια μείζων εἶναι τῆς ἐκ τοῦ πολυγώνου σχηματιζομένης. Ἄρα τὸ μέτρον πάσης ζώνης, μίαν ἐχούσης βάσιν, δὲν εἶναι μικρότερον τοῦ ὕψους τῆς ζώνης αὐτῆς, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου.

Λέγω ἤδη ὅτι τῆς αὐτῆς ζώνης τὸ μέτρον δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ ὕψος αὐτῆς, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου.

Πρὸς βεβαίωσιν καὶ τούτου, ἂς ὑποτεθῇ ὅτι πρόκειται περὶ τῆς ζώνης, τῆς γεγραμμένης διὰ τῆς στροφῆς τοῦ τόξου ΑΒ περὶ τὴν ἀκτῖνα ΑΓ. Ἔστω δὲ, εἰ δυνατὸν, *ζώνη*ΑΒ$>$ΑΔ$\times$ *περιφ.*ΓΑ.

Ὁλόκληρος τῆς σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια, ἡ συναποτελουμένη ἐκ τῶν δύο ζωνῶν ΑΒ, ΒΘ, μέτρον ἔχει ΑΘ$\times$*περιφ.*ΓΑ (πρότ. 10, βιβλ. 8), ἢ τὸ ποσὸν τοῦτο ΑΔ$\times$*περιφ.*ΓΑ$+$ΔΘ$\times$*περιφ.*ΓΑ. Ἐὰν λοιπὸν δεχθῶμεν ὅτι *ζώνη*ΑΒ$>$ΑΔ$\times$*περιφ.*ΓΑ, ἀναγκαίως ἕπεται ὅτι *ζώνη* ΒΘ$<$ΔΘ$\times$*περιφ.*ΓΑ. Τοῦτο ὅμως ἀδύνατον εἶναι κατὰ τὸ ἤδη ἀποδεδειγμένον πρῶτον τῆς προτάσεως ταύτης μέρος. Ἄρα πάσης ζώνης, ἐχούσης μίαν βάσιν, τὸ μέτρον δὲν εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ὕψους αὐτῆς, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου.

Λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια πάσης ζώνης, ἐχούσης μίαν μόνην βάσιν, εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τοῦ ὕψους αὐτῆς, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ μέτρου οἱασδήποτε ζώνης, ἐχούσης δύο βάσεις, (σχ. 220), μεταχειρίζομαι τὴν ἐκ τῆς στροφῆς τοῦ τόξου ΖΘ περὶ τὴν διάμετρον ΔΕ παραγομένην, καὶ καταβιβάζω ἐπὶ ταύτης τῆς διαμέτρου τὰς καθέτους ΖΟ, ΘΚ. Παρατηρῶ δὲ ὅτι ἡ ζώνη, ἡ ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τόξου ΖΘ σχηματιζομένη, εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο ζωνῶν, τῶν ἀποτελουμένων ἐκ τῆς περιστροφῆς τῶν τόξων ΔΘ, ΔΖ. Ἀλλ' αἱ δύο αὗται ζῶναι μέτρον ἔχουσιν, ἡ μὲν τὸ ΔΚ$\times$*περιφ.*ΓΔ, ἡ δὲ τὸ ΔΟ$\times$*περιφ.*ΓΔ. Ἄρα ἡ διὰ τοῦ τόξου ΖΘ γραφομένη ζώνη μέτρον ἔχει τὸ (ΔΚ—ΔΟ)$\times$*περιφ.*ΓΔ, ἢ τὸ ΟΚ$\times$*περιφ* ΓΔ.

Λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια πάσης σφαιρικῆς ζώνης, ἐχούσης μίαν ἢ δύο βάσεις, εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τοῦ ὕψους αὐτῆς, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου.

Πόρισμα. Αἱ ζῶναι, αἱ ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν ὑπάρχουσαι, εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν. Πᾶσα δὲ ζώνη τοιοῦτον ἔχει πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὕψος τῆς ζώνης αὐτῆς πρὸς τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12.

Θεώρημα.

Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΒΑΓ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΓΕΖ, τὸ τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχον, στραφῶσι συγχρόνως περὶ τὴν κοινὴν αὐτῶν βάσιν ΒΓ, τὸ ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τριγώνου ἀποτελούμενον στερεὸν εἶναι τὸ τρίτον τοῦ κυλίνδρου, τοῦ παραγομένου ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ ὀρθογωνίου. (σχ. 264 καὶ 265)

Καταβιβάζω ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΒΓ τὴν κάθετον ΑΔ. (σχ. 264)

Ὁ διὰ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ σχηματιζόμενος κῶνος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ κυλίνδρου, τοῦ παραγομένου διὰ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΖΒΔ (πρότ. 5, βιβλ. 8). Ὡσαύτως δὲ ὁ κῶνος, ὁ παραγόμενος διὰ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ, εἶναι τὸ τρίτον τοῦ κυλίνδρου, τοῦ περιγραφομένου διὰ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΔΓΕ. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο κώνων, τουτέστι τὸ στερεὸν, τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο κυλίνδρων, ἤτοι τὸ τρίτον τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ ὀρθογωνίου ΒΓΕΖ.

Ἐὰν ἡ κάθετος ΑΔ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πέσῃ, (σχ. 265), τὸ στερεὸν τότε, τὸ ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀποτελούμενον, εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν κώνων, τῶν σχηματιζομένων ἐκ τῆς περιστροφῆς τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ. Ἀλλ' ἐνταυτῷ ὁ κύλινδρος, ὁ διὰ τοῦ ὀρθογωνίου ΒΓΕΖ περιγεγραμμένος, εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν κυλίνδρων, τῶν σχηματιζομένων ἐκ τῆς περιστροφῆς τῶν ὀρθογωνίων ΒΔΑΖ, ΓΔΑΕ. Ἄρα τὸ στερεὸν, τὸ ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τριγώνου παραγόμενον, πάντοτε εἶναι τὸ τρίτον τοῦ κυλίνδρου, τοῦ σχηματιζομένου ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ ὀρθογωνίου, τοῦ ἔχοντος καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν.

Σχόλιον. Ὁ κύλκος, ὁ διὰ τῆς ἀκτῖνος ΑΔ γεγραμμένος, μέτρον ἔχει τοῦτο $\pi \times \overline{A\Delta}^2$. Λοιπὸν $\pi \times \overline{A\Delta}^2 \times B\Gamma$ εἶναι τὸ μέτρον τοῦ κυκλίνδρου, τοῦ ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ ὀρθογωνίου ΒΓΕΖ παραγομένου, καὶ $\frac{1}{3}\pi\times\overline{\mathrm{ΑΔ}}^2\times\mathrm{ΒΓ}$ εἶναι τὸ μέτρον τοῦ στερεοῦ, τοῦ σχηματιζομένου ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13.

Πρόβλημα.

Ζητεῖται τὸ μέτρον τοῦ στερεοῦ, τοῦ σχηματιζομένου ἐκ τῆς στροφῆς τοῦ τριγώνου ΓΑΒ περί τινα εὐθεῖαν ΓΔ, ἠγμένην ὁπωσδήποτε ἐκτὸς τοῦ τριγώνου αὐτοῦ ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ Γ. (σχ. 266)

Ἐκτείνω τὴν πλευρὰν ΑΒ μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὸν ἄξονα ΓΔ εἴς τι σημεῖον Δ, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β καταβιβάζω ἐπὶ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ τὰς καθέτους ΑΜ, ΒΝ.

Τὸ στερεὸν, τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τριγώνου ΓΑΔ μέτρον ἔχει τὸ $\frac{1}{3}\pi\times\overline{\mathrm{ΑΜ}}^2\times\mathrm{ΓΔ}$ (πρότ. 12, βιβλ. 8). Τὸ στερεὸν δὲ, τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τριγώνου ΓΒΔ μέτρον ἔχει τὸ $\frac{1}{3}\pi\times\overline{\mathrm{ΒΝ}}^2\times\mathrm{ΓΔ}$. Ἄρα ἡ διαφορὰ τῶν δύο αὐτῶν στερεῶν, τουτέστι τὸ στερεὸν, τὸ ἐκ τῆς στροφῆς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ παραγόμενον, μέτρον ἔχει τὸ $\frac{1}{3}\pi\times(\overline{\mathrm{ΑΜ}}^2-\overline{\mathrm{ΒΝ}}^2)\times\mathrm{ΓΔ}$.

Ὁ τύπος οὗτος $\frac{1}{3}\pi\times(\overline{\mathrm{ΑΜ}}^2-\overline{\mathrm{ΒΝ}}^2)\times\mathrm{ΓΔ}$ καὶ ἄλλην δυνατὸν εἶναι νὰ λάβῃ μορφήν. Ἐπὶ τούτῳ δὲ, ἀπὸ μὲν τοῦ σημείου Ι, τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ΑΒ, ἄγω τὴν ΙΚ κάθετον ἐπὶ τῆς ΓΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου Β φέρω τὴν ΒΟ παράλληλον τῆς ΓΔ. Ὅθεν ἔχω $\mathrm{ΑΜ}+\mathrm{ΒΝ}=2\mathrm{ΙΚ}$ (πρότ. 7, βιβλ. 3), καὶ $\mathrm{ΑΜ}-\mathrm{ΒΝ}=\mathrm{ΑΟ}$. Ἄρα $(\mathrm{ΑΜ}+\mathrm{ΒΝ})\times(\mathrm{ΑΜ}-\mathrm{ΒΝ})=\overline{\mathrm{ΑΜ}}^2-\overline{\mathrm{ΒΝ}}^2=2\mathrm{ΙΚ}\times\mathrm{ΑΟ}$ (πρότ. 10, βιβλ. 3).

Τὸ μέτρον λοιπὸν τοῦ στερεοῦ, περὶ οὗ πρόκειται, ἐκφράζεται καὶ οὕτω $\frac{2}{3}\pi\times\mathrm{ΙΚ}\times\mathrm{ΑΟ}\times\mathrm{ΓΔ}$. Ἀλλὰ, καταβιβαζομένης ἐπὶ τῆς ΑΒ τῆς καθέτου ΓΠ, τὰ τρίγωνα ΑΒΟ, ΔΓΠ εἶναι ὅμοια καὶ ταύτην δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΟ: ΓΠ:: ΑΒ: ΓΔ. Ὅθεν ἕπεται $\mathrm{A}\mathrm{O}\times\Gamma\Delta=\Gamma\Pi\times\mathrm{AB}$. Ἀλλὰ $\Gamma\Pi\times\mathrm{AB}$ τὸ διπλάσιον εἶναι τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἄρα $\mathrm{AO}\times\Gamma\Delta=2\mathrm{AB}\Gamma$. Λοιπὸν τὸ στερεὸν, τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἔχει πρὸς τοῖς ἄλλοις ὡς μέτρον καὶ τὸ ποσὸν τοῦτο $\frac{4}{3}\pi\times\mathrm{AB}\Gamma\times\mathrm{IK}$, τὸ ὁποῖον γράφεται καὶ οὕτω $\mathrm{AB}\Gamma\times\frac{2}{3}\times2\pi\times\mathrm{IK}$, ἢ οὕτω $\mathrm{AB}\Gamma\times\frac{2}{3}\pi\epsilon\rho\iota\varphi.\mathrm{IK}$, διότι $2\pi\times\mathrm{IK}$ τὴν περιφέρειαν τὴν γεγραμμένην διὰ τῆς ἀκτῖνος ΙΚ ἐκφράζει.

Λοιπὸν τὸ στερεὸν, τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, μέτρον ἔχει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὰ δύο τρίτα τῆς περιφερείας, τὴν ὁποίαν περιγράφει τὸ σημεῖον Ι, τὸ μέσον τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου.

Πόρισμα. Ὑποτιθεμένης τῆς πλευρᾶς ΑΓ=ΓΒ, (σχ. 267), ἡ εὐθεῖα ΓΙ κάθετος εἶναι ἐπὶ τῆς ΑΒ· ὅθεν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐκφράζεται διὰ τοῦ ποσοῦ $\mathrm{AB}\times\frac{1}{2}\Gamma\mathrm{I}$· ἡ δὲ στερεότης $\frac{4}{3}\pi\times\mathrm{AB}\Gamma\times\mathrm{IK}$, ἡ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσα, τρέπεται εἰς ταύτην $\frac{2}{3}\pi\times\mathrm{AB}\times\Gamma\mathrm{I}\times\mathrm{IK}$. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΟ, ΓΙΚ εἶναι ὅμοια καὶ ταύτην δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΑΒ : ΒΟ :: ΓΙ: ΙΚ, ἢ ΑΒ: ΜΝ:: ΓΙ: ΙΚ. Ἄρα $\mathrm{AB}\times\mathrm{IK}=\mathrm{MN}\times\Gamma\mathrm{I}$. Λοιπὸν τὸ στερεὸν, τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, μέτρον ἔχει τὸ ποσὸν τοῦτο $\frac{2}{3}\pi\times\mathrm{MN}\times\overline{\Gamma\mathrm{I}}^2$.

Σχόλιον. Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς παρούσης προτάσεως ὑπετέθη ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ, παρατεινομένη, συναπαντᾷ τὸν ἄξονα. Τὸ θεώρημα ὅμως βέβαιον εἶναι καὶ ὅταν ἡ πλευρὰ ΑΒ παράλληλος τοῦ ἄξονος τύχῃ.

Τῷ ὄντι ὁ κύλινδρος, (σχ. 268), ὁ σχηματιζόμενος ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ ὀρθογωνίου ΑΜΝΒ, μέτρον ἔχει τὸ $\pi\times\overline{\mathrm{AM}}^2\times\mathrm{MN}$. Ὁ δὲ κῶνος, ὁ γεγραμμένος διὰ τοῦ τριγώνου $\mathrm{A}\Gamma\mathrm{M}=\frac{1}{3}\pi\times\overline{\mathrm{AM}}^2\times\Gamma\mathrm{M}$. Καὶ ὁ κῶνος, ὁ γεγραμμένος διὰ τοῦ τριγώνου $\mathrm{B}\Gamma\mathrm{N}=\frac{1}{3}\pi\times\overline{\mathrm{AM}}^2\times\Gamma\mathrm{N}$. Συνάπτοντες τὰ δύο πρῶτα στερεὰ καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν ἀφαιροῦντες τὸ τρίτον, εὑρίσκομεν τὸ στερεὸν, τὸ παραγόμενον ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἄρα τὸ μέτρον τοῦ στερεοῦ, τοῦ παραγομένου διὰ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου $\pi\times\overline{\mathrm{AM}}^2\times(\mathrm{MN}+\frac{1}{3}\Gamma\mathrm{M}-\frac{1}{3}\Gamma\mathrm{N})$, ὅστις, ἐπειδὴ $\Gamma\mathrm{N}-\Gamma\mathrm{M}=\mathrm{MN}$, ἀνάγεται εἰς τοῦτον $\pi\times\overline{\mathrm{AM}}^2\times\frac{2}{3}\mathrm{MN}=\frac{2}{3}\pi\times\overline{\Gamma\Pi}^2\times\mathrm{MN}$. Τοιοῦτον δὲ ἐξαγόμενον καὶ ἀνωτέρω εὑρέθη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14.

Θεώρημα.

Ἔστωσαν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ πολλαὶ διαδοχικαὶ κανονικοῦ πολυγώνου πλευραί, ἔστω Ο τὸ κέντρον αὐτοῦ, καὶ ΟΙ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Ἐὰν ὁ πολύγωνος τομεὺς ΑΟΔ, ὁ καθ' ὁλοκληρίαν ἔνθεν ἢ ἐκεῖθεν τῆς διαμέτρου ΖΗ ὑπάρχων, στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον αὐτὴν καὶ ὅλην συμπληρώσῃ περίοδον, τὸ τοιουτοτρόπως σχηματιζόμενον στερεὸν μέτρον ἔχει τὸ ποσὸν τοῦτο $\frac{2}{3}\pi\times\overline{\mathrm{OI}}^2\times\mathrm{MP}$, εἰς ὃ ΜΡ ἐκφράζει τὸ τμῆμα τοῦ ἄξονος, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἄκρων καθέτων ΑΜ, ΔΡ. (σχ. 262)

Τῷ ὄντι· ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον εἶναι κανονικόν, ὅλα τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ, κτλ. εἶναι ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ. Ἀλλά, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς προηγουμένης προτάσεως, τὸ στερεόν, τὸ ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τριγώνου ΑΟΒ σχηματιζόμενον, μέτρον ἔχει τὰ $\frac{2}{3}\pi\times\overline{\mathrm{OI}}^2\times\mathrm{MN}$. Τὸ δὲ στερεόν, τὸ παραγόμενον ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τριγώνου ΒΟΓ, μέτρον ἔχει τὰ $\frac{2}{3}\pi\times\overline{\mathrm{OI}}^2\times\mathrm{N}\Pi$. Τὸ δὲ στερεόν, τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ τριγώνου ΓΟΔ, μέτρον ἔχει τὰ $\frac{2}{3}\pi\times\overline{\mathrm{OI}}^2\times\Pi\mathrm{P}$. Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν στερεῶν αὐτῶν, ἤτοι ὁλόκληρον τὸ στερεόν, τὸ ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ πολυγώνου τομέως ΑΟΔ παραγόμενον, μέτρον ἔχει τὰ $\frac{2}{3}\pi\times\overline{\mathrm{OI}}^2(\mathrm{MN}+\mathrm{N}\Pi+\Pi\mathrm{P})$, τουτέστι τὰ $\frac{2}{3}\pi\times\overline{\mathrm{OI}}^2\times\mathrm{MP}$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.

Θεώρημα.

Πᾶς μὲν σφαιρικὸς τομεὺς μέτρον ἔχει τὴν ζώνην, εἰς ἣν ἀπολήγει, πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας· πᾶσα δὲ σφαῖρα μέτρον ἔχει ὁλόκληρον τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν, πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς. (σχ. 269)

Ἔστω ΑΒΓ κυκλικός τις τομεύς, παράγων διὰ τῆς περὶ τὴν ἀκτῖνα ΑΓ στροφῆς αὐτοῦ τὸν σφαιρικὸν τομέα, τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον ζητεῖται. Ἡ ζώνη, ἡ διὰ τῆς περιαγωγῆς τοῦ τόξου ΑΒ σχηματιζομένη, μέτρον ἔχει τὸ $\text{ΑΔ}\times\textit{περιφ.}\text{ΑΓ}=2\pi\times\text{ΑΓ}\times\text{ΑΔ}$(πρότ. 11, βιβλ. 8). Λέγω λοιπόν, ὅτι ὁ τομεύς, περὶ οὗ πρόκειται, μέτρον ἔχει τὴν ζώνην αὐτήν, πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ $\frac{1}{3}\text{ΑΓ}$, ἤτοι $\frac{2}{3}\pi\times\overline{\text{ΑΓ}}^2\times\text{ΑΔ}$.

Τῷ ὄντι ἔστω, εἰ δυνατόν, ὅτι τὸ ποσὸν $\frac{2}{3}\pi\times\overline{\text{ΑΓ}}^2\times\text{ΑΔ}$ ἐκφράζει τὸ μέτρον σφαιρικοῦ τινὸς τομέως μείζονος, τοῦ τομέως, παραδείγματος χάριν, τοῦ σχηματιζομένου ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΕΓΖ, τοῦ ὁμοίου τῷ τομεῖ ΑΓΒ.

Τούτου τεθέντος, ἐγγράφω εἰς τὸ τόξον ΕΖ τὸ ΕΜΝΟΠΖ τμῆμα κανονικοῦ πολυγώνου, ἐξ ἐκείνων, ὅσων αἱ πλευραὶ δὲν συναπαντῶσι τὸ τόξον ΑΒ, καὶ φαντάζομαι τὸν πολύγωνον τομέα ΕΜΝΟΠΖΓ καὶ τὸν κυκλικὸν τομέα ΕΖΓ στρεφομένους συγχρόνως περὶ τὴν ἀκτῖνα ΕΓ. Ἔστω δὲ ΓΙ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, τοῦ εἰς τὸ πολύγωνον ἐγγεγραμμένου, καὶ ΖΗ κάθετος, ἠγμένη ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΕΓ.

Τὸ στερεόν, τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ πολυγώνου τομέως, μέτρον ἔχει $\frac{2}{3}\pi\times\overline{\text{ΓΙ}}^2\times\text{ΕΗ}$ (πρότ. 14, βιβλ. 8). Ἀλλὰ ΓΙ, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς, μείζων εἶναι τῆς ΑΓ· ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ ΕΗ τὴν ΑΔ ὑπερέχει· διότι, ἀγομένων τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΕΖ, τὰ ὅμοια τρίγωνα ΕΖΗ, ΑΒΔ ταύτην δίδουσι τὴν ἀναλογίαν ΕΗ : ΑΔ : : ΖΗ : ΒΔ. Ἀλλὰ ΖΗ : ΒΔ : : ΓΖ : ΓΒ. Λοιπὸν ΕΗ > ΑΔ.

Διὰ τὸν διπλοῦν αὐτὸν λόγον, ἤτοι διότι καὶ ΓΙ > ΑΓ, καὶ ΕΗ > ΑΔ, τὸ ποσὸν τοῦτο $\frac{2}{3}\pi\times\overline{\Gamma I}^2\times EH$ ὑπερέχει τὸ ποσὸν $\frac{2}{3}\pi\times\overline{A\Gamma}^2\times A\Delta$. Ἐπειδὴ δὲ διὰ μὲν τοῦ πρώτου τῶν δύο αὐτῶν ποσῶν ἐκφράζεται τὸ μέτρον τοῦ στερεοῦ, τοῦ σχηματιζομένου ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ πολυγώνου τομέως, διὰ δὲ τοῦ δευτέρου σημαίνεται ἡ στερεότης τοῦ τομέως τοῦ σφαιρικοῦ, τοῦ παραγομένου ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΕΓΖ, ἕπεται ὅτι τὸ στερεόν, τὸ διὰ τῆς περιαγωγῆς τοῦ πολυγώνου τομέως παραγόμενον, μεῖζον εἶναι τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, τοῦ σχηματιζομένου ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΕΓΖ. Ἀπ' ἐναντίας ὅμως τὸ στερεόν, τὸ διὰ τοῦ πολυγώνου παραγόμενον, εἶναι τοῦ σφαιρικοῦ αὐτοῦ τομέως μικρότερον, διότι ἐν αὐτῷ περιέχεται. Ἄρα ἡ ὑπόθεσις, ἡ ἀνωτέρω γενομένη, εἶναι ἀνυπόστατος. Λοιπὸν ἡ ζώνη, ἤτοι ἡ βάσις τομέως τινὸς σφαιρικοῦ, ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας πολλαπλασιασθεῖσα, δὲν δύναται νὰ ἐκφράσῃ τὸ μέτρον σφαιρικοῦ τομέως μείζονος.

Λέγω ἤδη ὅτι τὸ αὐτὸ γινόμενον δὲν δύναται νὰ παραστήσῃ τὸ μέτρον σφαιρικοῦ τομέως μικροτέρου. Διότι, ἔστω ὅτι ΓΕΖ εἶναι ὁ κυκλικὸς τομεύς, ὁ διὰ τῆς περιαγωγῆς αὐτοῦ παράγων τὸν σφαιρικὸν τομέα, τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον ζητεῖται. Ἂς ὑποτεθῇ δέ, εἰ δυνατόν, ὅτι $\frac{2}{3}\pi\times\overline{\Gamma E}^2\times EH$ ἐκφράζει τὸ μέτρον σφαιρικοῦ τινὸς τομέως μικροτέρου, τοῦ τομέως, παραδείγματος χάριν, τοῦ παραγομένου ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΓΒ.

Μεταχειριζόμενος τὴν αὐτὴν κατασκευήν, τὴν ἀνωτέρω γενομένην, συμπεραίνω ὅτι τὸ στερεόν, τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ πολυγώνου τομέως, μέτρον ἔχει τὸ ποσὸν $\frac{2}{3}\pi\times\overline{\Gamma I}^2\times EH$. Ἀλλ' ἡ ΓΙ εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΕ. Ἄρα τὸ στερεὸν αὐτὸ εἶναι μικρότερον τοῦ ποσοῦ τούτου $\frac{2}{3}\pi\times\overline{\Gamma E}^2\times EH$, τοῦ καθ' ὑπόθεσιν ἐκφράζοντος τὸ μέτρον τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, τοῦ παραγομένου ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΓΒ

Ἄρα τὸ στερεὸν, τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ πολυγώνου τομέως, εἶναι μικρότερον τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, τοῦ παραγομένου ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΓΒ. Ἀπ' ἐναντίας ὅμως τὸ στερεὸν, τὸ ἐκ τοῦ πολυγώνου παραγόμενον, εἶναι μεῖζον τοῦ σφαιρικοῦ αὐτοῦ τομέως, διότι ὁ τομεὺς περιέχεται ἐν αὐτῷ. Ἄρα ἡ ζώνη σφαιρικοῦ τινὸς τομέως, ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας πολλαπλασιασθεῖσα, δὲν δύναται νὰ παραστήσῃ τὸ μέτρον σφαιρικοῦ τομέως μικροτέρου.

Λοιπὸν πᾶς σφαιρικὸς τομεὺς μέτρον ἔχει τὴν ζώνην, εἰς ἣν ἀπολήγει, πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.

Πᾶς κυκλικὸς τομεὺς ΑΓΒ, αὐξάνων, δύναται νὰ ἐξισωθῇ πρὸς ἡμικύκλιον. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ὁ σφαιρικὸς τομεὺς, ὁ ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ κυκλικοῦ τομέως παραγόμενος, αὐτὴ εἶναι ὁλόκληρος ἡ σφαῖρα. Ἄρα ἡ στερεότης πάσης σφαίρας μέτρον ἔχει τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς, ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς πολλαπλασιασθεῖσαν.

Πόρισμα. Ἐπειδὴ τῶν σφαιρῶν αἱ ἐπιφάνειαι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν, αἱ ἐπιφάνειαι αὐταὶ, ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας πολλαπλασιασθεῖσαι, εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς κύβους τῶν ἀκτίνων. Ἄρα αἱ στερεότητες τῶν σφαιρῶν εἶναι πρὸς τοὺς κύβους τῶν ἀκτίνων αὐτῶν, ἢ πρὸς τοὺς κύβους τῶν διαμέτρων αὐτῶν ἀνάλογοι.

Σχόλιον. Ἔστω Α ἡ ἀκτὶς σφαίρας τινός. Τῆς σφαίρας αὐτῆς ἡ μὲν ἐπιφάνεια ἰσοῦται τῷ $4\pi A^2$, ἡ δὲ στερεότης τῷ $4\pi A^2 \times \frac{1}{3}A$, ἢ τῷ $\frac{4}{3}\pi A^3$. Καλοῦντες δὲ Δ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας, ἔχομεν $A = \frac{1}{2}\Delta$, καὶ $A^3 = \frac{1}{8}\Delta^3$. Λοιπὸν ἡ στερεότης τῆς σφαίρας ἐκφράζεται καὶ οὕτω $\frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{8}\Delta^3$, ἢ οὕτω $\frac{1}{6}\pi\Delta^3$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16.

Θεώρημα.

Ἡ ἐπιφάνεια πάσης σφαίρας, παραβαλλομένη πρὸς ὁλόκληρον τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου (τουτέστι καὶ τῶν βάσεων αὐτοῦ συμπεριλαμβανομένων), τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ ἀριθμὸς 2 πρὸς τὸν 3.

Τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας καὶ αἱ στερεότητες τῶν δύο αὐτῶν σωμάτων. (σχ.270).

Ἔστω ΜΠΝΚ ὁ μέγιστος σφαίρας τινὸς κύκλος καὶ ΑΒΓΔ τὸ περὶ τὸν κύκλον αὐτὸν γεγραμμένον τετράγωνον. Στρεφομένων συγχρόνως καὶ τοῦ ἡμικυκλίου ΠΜΚ καὶ τοῦ ἡμιτετραγώνου ΠΑΔΚ περὶ τὴν διάμετρον ΠΚ, τὸ μὲν ἡμικύκλιον τὴν σφαῖραν παράγει, τὸ δὲ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου σχηματίζει τὸν κύλινδρον, τὸν εἰς τὴν σφαῖραν αὐτὴν περιγεγραμμένον.

Τοῦ κυλίνδρου τὸ ὕψος ΑΔ εἶναι ἴσον τῇ διαμέτρῳ ΠΚ· ἡ βάσις δὲ τοῦ κυλίνδρου εἶναι μέγιστος τῆς σφαίρας κύκλος, διότι ἡ διάμετρος αὐτοῦ ΑΒ εἶναι ἴση τῇ διαμέτρῳ ΜΝ. Ἄρα ἡ κυρτὴ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια (πρότ. 4, βιβλ. 8) εἶναι ἴση τῇ περιφερείᾳ τοῦ μεγίστου κύκλου, πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ποσὸν ἐκφράζει καὶ τῆς σφαίρας τὴν ἐπιφάνειαν (πρότ. 10, βιβλ. 8). Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας καὶ ἡ κυρτὴ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια εἶναι ἴσαι.

Ἀλλὰ τῆς σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια ἐξισοῦται πρὸς τέσσαρας κύκλους μεγίστους. Ἄρα καὶ ἡ κυρτὴ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τέσσαρας τοιούτους κύκλους ἐξισοῦται. Προστιθεμένων δὲ εἰς τοὺς τέσσαρας αὐτοὺς μεγίστους κύκλους τῶν δύο τοῦ κυλίνδρου βάσεων, αἵτινες δύο εἶναι μέγιστοι κύκλοι, ὅλη τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου ἡ ἐπιφάνεια πρὸς ἕξ μεγίστους κύκλους ἐξισοῦται. Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου παραβαλλομένη, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ ἀριθμὸς 4 πρὸς τὸν ἀριθμὸν 6, ἢ ὃν ἔχει ὁ ἀριθμὸς 2 πρὸς τὸν ἀριθμὸν 3. Τοῦτο δ' ἐπρόκειτο ἐν πρώτοις ν' ἀποδειχθῇ.

Ἤδη δὲ παρατηρῶ, ὅτι ἡ μὲν βάσις τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου μέγιστος εἶναι τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας κύκλος, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ πρὸς τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας ἐξισοῦται. Ἄρα τοῦ κυλίνδρου ἡ στερεότης εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τοῦ μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου, ἐπὶ τὴν διάμετρον αὐτῆς πολλαπλασιασθέντος (πρότ. 1, βιβλ. 8). Ἀλλ' ἡ στερεότης τῆς σφαίρας πρὸς τέσσαρας ἐξισοῦται κύκλους μεγίστους, ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς πολλαπλασιασθέντας (πρότ. 15, βιβλ. 8)· ἤ, ἐν ἄλλοις λόγοις, πρὸς ἕνα εἶναι μέγιστον κύκλον ἰσοδύναμος, πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὰ $\frac{4}{3}$ τῆς ἀκτῖνος, ἢ ἐπὶ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέτρου. Ἄρα ἡ σφαῖρα, πρὸς τὸν περιγεγραμμένον κύλινδρον παραβαλλομένη, ἀναλογεῖ ὡς 2 πρὸς 3. Ἑπομένως τῶν δύο αὐτῶν σωμάτων αἱ ἐπιφάνειαι πρὸς τὰς στερεότητας αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι.

Σχόλιον. Ἐάν τις φαντασθῇ πολύεδρον περὶ σφαῖραν γεγραμμένον, συνιστάμενον δηλαδὴ ἐξ ἑδρῶν τῆς σφαίρας ἁπτομένων, τὸ πολύεδρον αὐτὸ ἀναλύεται εἰς τόσας πυραμίδας, ἐχούσας τὸ κέντρον τῆς σφαίρας κοινὴν κορυφὴν, ὅσαι εἶναι τοῦ πολυέδρου αἱ ἕδραι. Ὅλων δὲ τῶν πυραμίδων αὐτῶν ὕψος εἶναι τῆς σφαίρας ἡ ἀκτίς. Ἑκάστη δὲ πυραμὶς μέτρον ἔχει τὴν ἕδραν τοῦ πολυέδρου, ἥτις ὡς βάσις εἰς αὐτὴν χρησιμεύει, ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας πολλαπλασιασθεῖσαν. Ἄρα ὁλόκληρον τὸ πολύεδρον ἐξισοῦται πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ, πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας τῆς ἐγγεγραμμένης.

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι αἱ στερεότητες τῶν εἰς σφαῖραν περιγεγραμμένων πολυέδρων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἐπιφανείας τῶν πολυέδρων αὐτῶν. Ἡ μεταξὺ λοιπὸν τῶν στερεοτήτων καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου καὶ τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας ὑφισταμένη ἀναλογία, ἡ πρὸ μικροῦ ἀποδειχθεῖσα, καὶ εἰς πάμπολλα ἄλλα ὑπάρχει σώματα.

Ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν εἰς κύκλον περιγεγραμμένων πολυγώνων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς περιμέτρους τῶν πολυγώνων αὐτῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17.

Πρόβλημα.

Ζητεῖται τὸ μέτρον τοῦ στερεοῦ, τοῦ παραγομένου ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΒΜΔ περί τινα διάμετρον, ἐκτὸς τοῦ τμήματος αὐτοῦ ὑπάρχουσαν. (σχ. 271)

Καταβιβάζω ἐπὶ τοῦ ἄξονος τὰς καθέτους ΒΕ, ΔΖ. Ἐκ τοῦ κέντρου Γ φέρω τὴν ΓΙ κάθετον ἐπὶ τῆς χορδῆς ΒΔ, καὶ ἄγω τὰς ἀκτῖνας ΓΒ, ΓΔ.

Τὸ στερεὸν, τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ κυκλικοῦ τομέως $\mathrm{ΒΓΑ}=\frac{2}{3}\pi\times\overline{\mathrm{ΓΒ}}^{2}\times\mathrm{ΑΕ}$ (πρότ. 15, βιβλ. 8). Τὸ δὲ στερεὸν, τὸ παραγόμενον ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ κυκλικοῦ τομέως $\Delta\Gamma A = \frac{2}{3}\pi \times \overline{\Gamma B}^2 \times AZ$. Τῶν δύο δ' αὐτῶν στερεῶν ἡ διαφορὰ, ἤτοι τὸ στερεὸν, τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ κυκλικοῦ τομέως $\Delta\Gamma B = \frac{2}{3}\pi \times \overline{\Gamma B}^2(AZ - AE) = \frac{2}{3}\pi \times \overline{\Gamma B}^2 \times EZ$. Ἀλλὰ τὸ στερεὸν, τὸ παραγόμενον ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΔΓΒ, μέτρον ἔχει τὰ $\frac{2}{3}\pi \times \overline{\Gamma I}^2 \times EZ$ (πρότ. 13, βιβλ. 8). Ἄρα τὸ στερεὸν, τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ κυκλικοῦ τμήματος $BM\Delta = \frac{2}{3}\pi \times EZ(\overline{\Gamma B}^2 - \overline{\Gamma I}^2)$. Ἀλλὰ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΒΙ πορίζόμεθα $\overline{\Gamma B}^2 - \overline{\Gamma I}^2 = \overline{BI}^2 = \frac{1}{4}\overline{B\Delta}^2$. Ἄρα τὸ στερεὸν, τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΒΜΔ, μέτρον ἔχει τοῦτο $\frac{2}{3}\pi \times EZ \times \frac{1}{4}\overline{B\Delta}^2$, ἤτοι τοῦτο $\frac{1}{6}\pi \times \overline{B\Delta}^2 \times EZ$.

Σχόλιον. Τὸ στερεὸν, τὸ ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΒΜΔ παραγόμενον, ἀναλογεῖ πρὸς τὴν σφαῖραν, τὴν ἔχουσαν διάμετρον τὴν ΒΔ, ὡς $\frac{1}{6}\pi \times \overline{B\Delta}^2 \times EZ$ πρὸς $\frac{1}{6}\pi \times \overline{B\Delta}^3$, ἢ ὡς ΕΖ πρὸς ΒΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

Θεώρημα.

Πᾶν μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμενον σφαιρικὸν τμῆμα μέτρον ἔχει τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ πολλαπλασιασθὲν, καὶ τὴν στερεότητα τῆς σφαίρας, τῆς ἐχούσης διάμετρον τὸ ὕψος αὐτό. (σχ. 271)

Ἔστωσαν ΒΕ καὶ ΔΖ αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, περὶ οὗ πρόκειται, καὶ ΕΖ ἔστω τὸ ὕψος αὐτοῦ. Τὸ σφαιρικὸν αὐτὸ τμῆμα παράγεται ἐκ τῆς στροφῆς τοῦ κυκλικοῦ χωρίου ΒΜΔΖΕ περὶ τὸν ἄξονα ΖΕ.

Τὸ στερεὸν, τὸ παραγόμενον ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ κυκλικοῦ τμήματος $BM\Delta = \frac{1}{6}\pi \times \overline{B\Delta}^2 \times EZ$ (πρότ. 17, βιβλ. 8). Ὁ δὲ κολοβὸς κῶνος (πρότ. 6, βιβλ. 8), ὁ σχηματιζόμενος ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τραπεζίου $\mathrm{B\Delta ZE}=\frac{1}{3}\pi\times \mathrm{EZ}\times(\mathrm{BE}^2+\mathrm{\Delta Z}^2+\mathrm{BE}\times \mathrm{\Delta Z})$. Τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν δύο αὐτῶν στερεῶν, τουτέστι τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος σφαιρικὸν τμῆμα$=\frac{1}{6}\pi\times \mathrm{EZ}\times(2\mathrm{BE}^2+2\mathrm{\Delta Z}^2+2\mathrm{BE}\times \mathrm{\Delta Z}+\mathrm{B\Delta}^2)$.

Τούτων τεθέντων, ἄγω τὴν ΒΟ παράλληλον τῆς ΕΖ· ὅθεν ἔχω $\mathrm{\Delta O}=\mathrm{\Delta Z}-\mathrm{BE}$, καὶ $\mathrm{\Delta O}^2=\mathrm{\Delta Z}^2+\mathrm{BE}^2-2\mathrm{\Delta Z}\times \mathrm{BE}$ (πρότ. 9, βιβλ. 3). Ἄρα $\mathrm{B\Delta}^2=\mathrm{BO}^2+\mathrm{\Delta O}^2=\mathrm{EZ}^2+\mathrm{\Delta Z}^2+\mathrm{BE}^2-2\mathrm{\Delta Z}\times \mathrm{BE}$. Ἀντεισάγων δὲ ταύτην τοῦ $\mathrm{B\Delta}^2$ τὴν τιμὴν εἰς τὸν τύπον, τὸν ἀνωτέρω εὑρεθέντα, τὸν προσδιορίζοντα τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος τὸ μέτρον, καὶ τῆς ἀναγωγῆς γενομένης, συνάγω ὅτι τὸ σφαιρικὸν αὐτὸ τμῆμα μέτρον ἔχει τὸ ἑξῆς,

$$\frac{1}{6}\pi\times \mathrm{EZ}\times(3\mathrm{BE}^2+3\mathrm{\Delta Z}^2+\mathrm{EZ}^2).$$

Ἀλλ' ὁ τύπος οὗτος ἀναλύεται εἰς δύο μέρη, ἐξ ὧν τὸ μὲν πρῶτον, τὸ $\frac{1}{6}\pi\times \mathrm{EZ}\times(3\mathrm{BE}^2+3\mathrm{\Delta Z}^2)$, ἢ τὸ $\mathrm{EZ}\times\left(\frac{\pi\times \mathrm{BE}^2+\pi\times \mathrm{\Delta Z}^2}{2}\right)$ ἐκφράζει τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος βάσεων, ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ τμήματος πολλαπλασιαζόμενον, τὸ δὲ δεύτερον, ἤτοι τὸ $\frac{1}{6}\pi\times \mathrm{EZ}^3$ εἶναι ἡ σφαῖρα, ἡ διάμετρον ἔχουσα τοῦ τμήματος αὐτοῦ τὸ ὕψος ΕΖ (πρότ. 15, βιβλ. 8, σχόλ.). Ἄρα πᾶν μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμενον σφαιρικὸν τμῆμα μέτρον ἔχει κτλ.

Πόρισμα. Ἐὰν ἡ ἑτέρα τῶν βάσεων ὑποτεθῇ μηδὲν, τὸ σφαιρικὸν τμῆμα, περὶ οὗ πρόκειται, μίαν μόνην τότε ἔχει βάσιν. Ἄρα πᾶν σφαιρικὸν τμῆμα, μίαν μόνην ἔχον βάσιν, ἐξισοῦται τῷ ἡμίσει τοῦ κυλίνδρου, τοῦ πρὸς τὸ τμῆμα ἰσοϋψοῦς καὶ τὴν αὐτὴν ἔχοντος βάσιν, προστιθεμένης εἰς τὸ ἥμισυ αὐτὸ τῆς σφαίρας, τῆς ἐχούσης διάμετρον τοῦ τμήματος τὸ ὕψος.

Γενικὸν σχόλιον.

Ἔστω Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κυλίνδρου τινὸς καὶ Υ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Ἡ στερεότης τοῦ κυλίνδρου αὐτοῦ ἰσοῦται τῷ $\pi A^2 \times \Upsilon$, ἢ τῷ $\pi A^2 \Upsilon$.

Ἔστω Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κώνου τινὸς καὶ Υ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Ἡ στερεότης τοῦ κώνου αὐτοῦ ἰσοῦται τῷ $\pi A^2 \times \frac{1}{3}\Upsilon$, ἢ τῷ $\frac{1}{3}\pi A^2 \Upsilon$.

Ἔστωσαν Α καὶ α αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων κολοβοῦ τινὸς κώνου, Υ δ' ἔστω τὸ ὕψος αὐτοῦ. Ἡ στερεότης τοῦ κολοβοῦ αὐτοῦ κώνου ἐξισοῦται τῷ $\frac{1}{3}\pi\Upsilon(A^2+\alpha^2+A\alpha)$.

Ἔστω Α ἡ ἀκτὶς σφαίρας τινός. Ἡ στερότης αὐτῆς ἰσοῦται τῷ ποσῷ τούτῳ $\frac{4}{3}\pi A^3$.

Ἔστω Α μὲν ἡ ἀκτὶς σφαιρικοῦ τινὸς τομέως, Υ δὲ τὸ ὕψος τῆς ζώνης, εἰς ἣν αὐτὸς ἀπολήγει. Ἡ στερεότης τοῦ τομέως αὐτοῦ ἐξισοῦται τῷ ποσῷ τούτῳ $\frac{2}{3}\pi A^2 \Upsilon$

Ἔστωσαν Β καὶ ϐ αἱ δύο σφαιρικοῦ τινὸς τμήματος ϐάσεις, Υ δ' ἔστω τὸ ὕψος αὐτοῦ. Τοῦ σφαιρικοῦ αὐτοῦ τμήματος ἡ στερεότης ἐξισοῦται τῷ ποσῷ τούτῳ $\left(\frac{B+\beta}{2}\right)\Upsilon+\frac{1}{6}\pi\Upsilon^3$.

Ἐὰν τὸ σφαιρικὸν τμῆμα μίαν μόνην ἔχῃ βάσιν Β, ἡ στερεότης αὐτοῦ ἰσοῦται τῷ $\frac{1}{2}B\Upsilon+\frac{1}{6}\pi\Upsilon^3$. (*)

(*) Ἀντικείμενον τοῦ ὀγδόου βιβλίου εἶναι ἡ ἀπόλυτος καταμέτρησις τῶν τριῶν στρογγύλων σωμάτων, τοῦ κυλίνδρου, τοῦ κώνου καὶ τῆς σφαίρας.

Ὅλαι σχεδὸν αἱ προτάσεις τοῦ βιβλίου αὐτοῦ ἀποδεικνύονται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ὁπωσοῦν σκοτειναί. Ἐπειδὴ ὅμως ὅλαι τὴν αὐτὴν καὶ ἀπαράλλακτον ἔχουσιν ἀπόδειξιν, ἐὰν μίαν ὁ μαθητὴς μετ' ἐπιστασίας μελετήσῃ, οὐδεμίαν εἰς τῶν λοιπῶν τὴν κατάληψιν ἀπαντᾷ δυσκολίαν. Κατὰ τοῦτο δὲ τὸ βιβλίον τὸ ὄγδοον εὐκολώτερον εἶναι ὅλων τῶν προηγουμένων αὐτοῦ.

Πρὸς εὐκολωτέραν δὲ τῶν πλείστων προτάσεων ἀνάμνησιν δύναταί τις νὰ θεωρήσῃ τὸν μὲν κύλινδρον ὡς πρίσμα, τὸν δὲ κῶνον ὡς πυραμίδα, τὴν δὲ σφαῖραν ὡς πολύεδρον κανονικόν. Καὶ τῷ ὄντι· τὰ μέτρα τῆς στερεότητος τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ πρίσματος, τοῦ κώνου καὶ τῆς πυραμίδος, τῆς σφαίρας καὶ τοῦ πολυέδρου τοῦ κανονικοῦ εἶναι τὰ αὐτά.

Τὰ μέτρα δὲ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου εὑρίσκει τις, ἀναπτύσσων τῶν δύο αὐτῶν σωμάτων τὰς ἐπιφανείας. Καὶ τοῦ μὲν κυλίνδρου ἡ ἐπιφάνεια ἀναπτυσσομένη τρέπεται εἰς ὀρθογώνιον, βάσιν ἔχον τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου. Ἡ ἐπιφάνεια δὲ τοῦ κώνου ἀναπτυσσομένη κυκλικὸν σχηματίζει τομέα, ἔχοντα τόξον μὲν τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἀκτῖνα δὲ τοῦ κώνου τὴν πλευράν.

Τῆς σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια ἀναπτυσσομένη διασχίζεται ἢ ῥυτιδοῦται, καὶ διὰ τοῦτο ἀδύνατον εἶναι νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον αὐτῆς δι' ἀναπτύξεως.

Εὑρίσκεται δὲ τὸ μέτρον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, παραβαλλομένης τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς πρὸς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν, τὴν παραγομένην ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ ἡμίσεος μέρους κανονικοῦ πολυγώνου. Ἴδε τὴν 9 πρότασιν τοῦ ὀγδόου βιβλίου.

Τοῦ κολοβοῦ κώνου δὲ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ὡς διαφορὰ δύο κυκλικῶν τομέων. Τοιουτοτρόπως δὲ καὶ αὐτὴ δι' ἀναπτύξεως προσδιορίζεται·

Εἰς τὸ ἕβδομον βιβλίον προσδιωρίσθησαν τῆς σφαίρας αἱ διαστάσεις, ἀλλ' ὄχι ἀπολύτως· δὲν ἐξισώθησαν δηλαδὴ αἱ σφαιρικαὶ ἐπιφάνειαι πρὸς ἐπιπέδους ἐπιφανείας, οὐδὲ τὰ τῆς σφαίρας τμήματα καὶ ἡ σφαῖρα αὐτὴ πρὸς πολύεδρα σώματα παρεβλήθησαν, ἀλλ' ἐλήφθησαν ὡς μονάδες μέτρα τινὰ σφαιρικὰ αὐθαίρετα καὶ κατὰ συνθήκην. Εἰς τὸ ὄγδοον ὅμως βιβλίον τὰ πάντα προσδιωρίσθησαν κατὰ σύγκρισιν πρὸς ἐπίπεδα, ὧν αἱ ἐκτάσεις ἀνάγονται εἰς γραμμὰς εὐθείας.

ΤΕΛΟΣ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Προστεθὲν ὑπὸ τοῦ μεταφραστοῦ πρὸς εὐκολωτέραν προτάσεών τινων κατάληψιν.

Μετὰ τὴν 18 πρότασιν τοῦ πρώτου βιβλίου τάξον τὰς ἀκολούθους.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1.

Θεώρημα.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας ἴσας, καὶ δύο ἐκ τῶν λοιπῶν γωνιῶν, ἐκτὸς τῆς ὀρθῆς, ἴσας, εἶναι ἴσα. (σχ. 33)

Ἔστω ἡ μὲν πλευρὰ ΑΓ=ΔΖ, ἡ δὲ γωνία Γ=Ζ.

Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΔΖ ἐφαρμόζω τὴν ΑΓ, τὸ σημεῖον Γ ἐπὶ τοῦ Ζ τοποθετῶν, καὶ τὸ σημεῖον Α ἐπὶ τοῦ Δ.

Τούτου γενομένου, ἡ πλευρὰ ΓΒ λαμβάνει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΖΕ, διότι ἡ γωνία Γ=Ζ. Ἀναγκαίως δὲ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ μετὰ τῆς ΔΕ συμπίπτει, διότι ἡ ΑΒ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τῆς ΓΒ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΖΕ, μεθ' ἧς ἡ ΓΒ συνέπεσεν. Ἐπομένως, ἐὰν ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΔΕ μίαν δὲν ἀποτελέσωσιν εὐθεῖαν, δύο ἐκ τοῦ σημείου Δ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΕ θέλουσιν ὑπάρχει κάθετοι. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΓΒ μετὰ ΖΕ καὶ ἡ ΑΒ μετὰ τῆς ΔΕ συμπίπτουσι, τὸ σημεῖον Β, καὶ ἐπὶ τῆς ΖΕ καὶ ἐπὶ τῆς ΔΕ ὑπάρχον, πίπτει ἐπὶ τοῦ σημείου Ε. Ἄρα ἡ πλευρὰ ΓΒ=ΖΕ, καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ=ΔΖ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ=ΔΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2.

Θεώρημα.

Πᾶσα εὐθεῖα, ἐπ' ἄλλης εὐθείας κάθετος οὖσα, συναπαν-

τᾶται ὑπὸ ὅλων τῶν εὐθειῶν, τῶν πρὸς τὴν ἄλλην αὐτὴν εὐθεῖαν πλαγίως διακειμένων. (σχ. 274)

Ἔστω ἡ μὲν ΑΓ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἡ δὲ ΒΔ εὐθεῖά τις, πρὸς τὴν ΑΒ κεκλιμένη. Λέγω, ὅτι ἡ πλαγία ΒΔ, παρατεινομένη, συναπαντᾷ τὴν κάθετον ΑΓ, παρατεινομένην ὡσαύτως, εἰ δέον.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, σχηματίζω τὴν γωνίαν ΑΒΔ′=ΑΒΔ, καὶ ἐκτείνω τὴν κάθετον ΑΓ κάτωθεν τῆς ΑΒ πρὸς τὸ Γ′. Ἂς ὑποτεθῇ δὲ ὅτι ἡ ΑΓ δὲν συναπαντᾷ τὴν ΒΔ. Ἐκ τῆς ὑποθέσεως ταύτης ἕπεται, ὅτι ἡ ἐν τῇ ἀγκάλῃ τῆς γωνίας ΔΒΔ′ περιεχομένη εὐθεῖα ΓΓ′, καὶ ἂν ἐπ' ἄπειρον παραταθῇ, δὲν ἀπαντᾷ τὰς πλευρὰς ΒΔ, ΒΔ′. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον· διότι τῆς μὲν γωνίας ΔΒΔ′ τὸ χάσμα δὲν εἶναι ἄπειρον, τῆς δὲ καθέτου ΓΓ′ ἡ παράτασις ἀκαταπαύστως συντέμνει τὴν μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΒΔ, ΒΔ′ καὶ τῆς καθέτου αὐτῆς ὑπάρχουσαν ἀπόστασιν. Ἄρα ἡ κάθετος ΑΓ ἀναγκαίως συναπαντᾷ τὴν πλαγίαν ΒΔ.

Πόρισμα. Πᾶσα εὐθεῖα ΗΘ, (σχ. 275), κάθετος ἐπὶ μιᾶς τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης. Διότι, ἂν ἐπὶ μόνης τῆς ΓΔ ἡ ΗΘ ὑποτεθῇ κάθετος, ἡ ΑΒ, πλαγία ὡς πρὸς τὴν ΗΘ οὖσα, ἐκτεινομένη συναπαντᾷ τὴν ΓΔ. Τοῦτο ὅμως ἀδύνατον εἶναι, διότι ἡ ΓΔ καὶ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3.

Θεώρημα.

Δύο παράλληλοι οἱαιδήποτε, διασταυρούμεναι ὑπό τινος διατεμνούσης, σχηματίζουσι τὰς δύο ἐσωτερικὰς γωνίας, τὰς ἔνθεν ἢ ἐκεῖθεν τῆς διατεμνούσης αὐτῆς κειμένας, τοιαύτας, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν δύο ἀποτελεῖ γωνίας ὀρθάς. (σχ. 275)

Ἔστω ἡ ΑΒ παράλληλος τῆς ΓΔ, καὶ ἡ ΕΖ εὐθεῖά τις, διατέμνουσα καθ' ὁποιονδήποτε τρόπον τὰς παραλλήλους αὐτάς. Λέγω ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐσωτερικῶν γωνιῶν ΒΕΖ, ΔΖΕ, τῶν ἑτέρωθεν τῆς διατεμνούσης ΕΖ κειμένων, δύο ἀποτελεῖ γωνίας ὀρθάς.

Διαιρῶ τὴν ΕΖ εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὸ σημεῖον Ι, καὶ ἐξ αὐτοῦ τοῦ σημείου ἄγω τὴν ΗΘ κάθετον ἐπὶ τῆς ΓΔ. Κατὰ τὰ ἐν τῇ προηγουμένῃ προτάσει εἰρημένα, ἡ ΗΘ εἶναι καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ κάθετος, διότι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῆς ΓΔ. Ἄρα τὰ δύο τρίγωνα ΙΘΖ, ΙΗΕ εἶναι ὀρθογώνια.

Τὰ δύο αὐτὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουσι τὴν μὲν πλευρὰν ΙΕ=ΙΖ, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὴν δὲ γωνίαν ΘΙΖ=ΗΙΕ, ὡς κατὰ κορυφὴν τῆς ἑτέρας πρὸς τὴν ἑτέραν ἀντικειμένης. Ἄρα τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα (ἴδε τὴν ἀνωτέρω ἀποδειχθεῖσαν πρώτην πρότασιν). Λοιπὸν καὶ ἡ γωνία ΙΕΗ=ΙΖΘ. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα ΙΖΘ+ΙΖΔ δύο ἀποτελεῖ γωνίας ὀρθάς. Ἄρα καὶ ΙΕΗ+ΙΖΔ δύο γωνίας ὀρθὰς ἀποτελεῖ. Τουτέστι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐσωτερικῶν γωνιῶν ΒΕΖ, ΔΖΕ πρὸς δύο ἐξισοῦται γωνίας ὀρθάς.

Πόρισμα. Ἀντιστρόφως, (σχ. 37), ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐσωτερικῶν γωνιῶν ΚΝΖ, ΗΖΝ, τῶν ἑτέρωθεν τῆς διατεμνούσης ΖΝ κειμένων, δύο ἀποτελῇ γωνίας ὀρθάς, λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΚΝ, ΖΗ, αἱ τὰς γωνίας αὐτὰς σχηματίζουσαι, εἶναι παράλληλοι.

Διότι, ἐὰν ἡ ΖΗ δὲν ἦναι τῆς ΝΚ παράλληλος, ἔστω παράλληλος τῆς ΝΚ ἡ ΖΔ.

Κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα,

$$\Delta ZN + KNZ = 2 \text{ ὀρθ.}$$

Ἀλλὰ καὶ $HZN + KNZ = 2$ ὀρθ.

Ἄρα ΔΖΝ=ΗΖΝ. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον. Ἄρα παράλληλος τῆς ΚΝ οὐδεμία ἄλλη νὰ ἦναι δύναται, ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΖΗ.

Πόρισμα. Ὡς πόρισμα τῆς προτάσεως ταύτης τάξον τὸ δεύτερον πόρισμα καὶ τὸ σχόλιον τῆς ἐν τῷ κειμένῳ 24 *προτάσεως τοῦ πρώτου βιβλίου.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4.

Θεώρημα.

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου δύο ἀποτελεῖ γωνίας ὀρθάς. (σχ. 277)

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Ἐκ τοῦ σημείου Α ἄγω τὴν ΔΕ παράλληλον τῆς ΒΓ.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔΑΒ=Β, ὡς ἐναλλὰξ, καὶ ἡ γωνία ΕΑΓ=Γ, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἐπειδὴ πρὸς τούτοις ΔΑΒ+ΒΑΓ+ΕΑΓ=2ὀρθ., ἕπεται ὅτι Β+ΒΑΓ+Γ=2ὀρθ. Τουτέστι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ δύο ἀποτελεῖ γωνίας ὀρθάς.

Πόρισμα. Ὡς *πόρισμα τῆς προτάσεως ταύτης τάξον τὰ πορίσματα τῆς ἐν τῷ κειμένῳ* 19 *προτάσεως τοῦ πρώτου βιβλίου.*

Μετὰ ταῦτα τάξον κατὰ σειρὰν τὰς λοιπὰς προτάσεις τοῦ πρώτου βιβλίου, ἀπὸ τῆς 19 *καὶ κατωτέρω.*

==

Πρὸς εὐκολωτέραν ἀπόδειξιν τοῦ τρόπου, καθ' ὃν ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εὑρίσκεται, ἀντὶ τῶν ἐν τῷ κειμένῳ προτάσεων 13, 14, 15 *καὶ* 16 *τοῦ τετάρτου βιβλίου, τάξον τὰς δύο ἀκολούθους.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Πρόβλημα.

Γνωστῆς οὔσης τῆς χορδῆς τόξου τινὸς, εὑρὲ τὴν χορδὴν τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ τόξου αὐτοῦ τὸ ἥμισυ. (σχ. 276).

Ἔστωσαν ΑΒ μὲν ἡ χορδὴ ἡ γνωστὴ, ΑΓ δὲ ἡ χορδὴ ἡ ζητουμένη, καὶ ΚΓ ἔστω ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου.

Κατὰ τὰ περὶ ὀρθογωνίου τριγώνου εἰρημένα (πρότ. 23, βιβλ. 3), ἐπειδὴ ἡ ΑΔ ὑποτίθεται κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΕ, ἡ χορδὴ ΑΓ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὅλης διαμέτρου ΓΕ καὶ τοῦ τμήματος αὐτῆς ΓΔ, ἤτοι

$$\overline{\text{ΑΓ}}^2=\text{ΓΕ}\times\text{ΓΔ}. \quad (1)$$

Ἀλλὰ ΓΔ=ΓΚ—ΔΚ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΑΔΚ εἶναι ὀρθογώνιον, $\text{ΔΚ}=\sqrt{\overline{\text{ΑΚ}}^2-\overline{\text{ΑΔ}}^2}$. Ἄρα $\text{ΓΔ}=\text{ΓΚ}-\sqrt{\overline{\text{ΑΚ}}^2-\overline{\text{ΑΔ}}^2}$. Ἀντεισάγων δὲ ταύτην τῆς ΓΔ τὴν τιμὴν εἰς τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν (1), εὑρίσκω

$$\overline{A\Gamma}^2=\Gamma E\left(\Gamma K-\sqrt{\overline{AK}^2-\overline{A\Delta}^2}\right),$$

ἢ $\overline{A\Gamma}^2=\Gamma E\times\Gamma K-\Gamma E\sqrt{\overline{AK}^2-\overline{A\Delta}^2}.$

Ὅθεν $A\Gamma=\sqrt{\Gamma E\times\Gamma K-\Gamma E\sqrt{\overline{AK}^2-\overline{A\Delta}^2}}.$ (2)

Πρὸς ἁπλοποίησιν τοῦ τύπου τούτου, δι' οὗ τῆς ζητουμένης χορδῆς ἡ τιμὴ ἐκφράζεται, καλῶ α μὲν τὴν γνωστὴν χορδὴν AB, ά δὲ τὴν ἄγνωστον χορδὴν AΓ, καὶ ρ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

Τῆς ἀντεισαγωγῆς δὲ γενομένης, ὁ τύπος (2) τρέπεται εἰς τοῦτον

$$\alpha'=\sqrt{2\rho\times\rho-2\rho\sqrt{\rho^2-\frac{\alpha^2}{4}}}.$$

$$\text{Ὅθεν } \alpha'=\sqrt{2\rho^2-2\rho\sqrt{\frac{4\rho^2-\alpha^2}{4}}}.$$

$$\text{Ἢ } \alpha'=\sqrt{2\rho^2-\rho\sqrt{4\rho^2-\alpha^2}}.$$

Ὑποτιθεμένης δὲ τῆς ἀκτῖνος $\rho=1$,

$$\alpha'=\sqrt{2-\sqrt{4-\alpha^2}}.\ (3)$$

Σχόλιον. Διὰ τοῦ τύπου (3) εὑρίσκει τις, παραδείγματος χάριν, τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ δωδεκαγώνου διὰ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου τοῦ κανονικοῦ, καὶ διὰ τῆς πλευρᾶς τοῦ δωδεκαγώνου τοῦ κανονικοῦ προσδιορίζει τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἐξ εἴκοσι καὶ τεσσάρων ἀποτελουμένου πλευρῶν, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἔστω ἤδη καὶ $\alpha=1$, ἤτοι ἡ γνωστὴ χορδὴ AB ἂς ἐξισωθῇ πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ἂς ὑποτεθῇ δηλαδὴ ὅτι AB ἐκφράζει τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου (πρότ. 4, βιβλ. 4).

Τούτου τεθέντος, ἡ ζητουμένη χορδὴ ά ἐκφράζει τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου δωδεκαγώνου, ὁ δὲ τύπος (3) τρέπεται εἰς τοῦτον

$$\alpha'=\sqrt{2-\sqrt{3}}=0{,}51763809.$$

Καλῶν δὲ α'' τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ εἴκοσι καὶ τέσσαρας ἔχοντος πλευράς, εὑρίσκω

$$\alpha''=\sqrt{2-\sqrt{4-\alpha'^2}}=0,26105238.$$

Τοιουτοτρόπως δὲ, ἀπὸ πολυγώνου εἰς πολύγωνον μεταβαίνων, προσδιορίζω τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἔχοντος πλευρὰς ἐννενήκοντα καὶ ἕξ. Καλῶν δὲ τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ τὴν πλευρὰν α'''', εὑρίσκω

$$\alpha''''=0,06543817.$$

Ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου, ἤτοι $96\alpha''''=6,282064.$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6.

Πρόβλημα.

Γνωστῆς οὔσης τῆς περιμέτρου κανονικοῦ τινὸς πολυγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον γνωστὸν, εὑρὲ τὴν περίμετρον τοῦ ὁμοίου κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον περιγεγραμμένου. (σχ. 276)

Διὰ τῆς ΑΒ πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου γνωστοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, καὶ τῆς ΑΚ, ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, προσδιορίζω τὴν ΔΚ, ἤτοι τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, τοῦ εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον αὐτὸ πολύγωνον ἐγγεγραμμένου· διότι

$$\Delta K=\sqrt{\overline{AK}^2-\overline{A\Delta}^2}.$$

Εὑρίσκω λοιπὸν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ κανονικὸν πολύγωνον, τὸ ἐννενήκοντα καὶ ἓξ ἔχον πλευράς, καὶ καλῶ αὐτὴν ρ''''. Ὑποτιθεμένης δὲ τῆς ἀκτῖνος $\Gamma K=1$, σημειῶ διὰ τοῦ $96A''''$ τὴν περίμετρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἐξ ἐννενήκοντα καὶ ἓξ πλευρῶν συνισταμένου, τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον, τὸν ἔχοντα ἀκτῖνα τὴν ΓΚ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ περίμετροι τῶν ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀκτῖνας τῶν κύκλων, τῶν εἰς αὐτὰ ἐγγεγραμμένων (πρότ. 8, βιβλ. 4), ταύτην δύναμαι νὰ σχηματίσω τὴν ἀναλογίαν

$$\rho'''' : 1 :: 96\alpha'''' : 96\mathrm{A}''''.$$

ὅθεν $96\mathrm{A}'''' = \dfrac{96\alpha''''}{\rho''''} = 6,285429.$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου, τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν ΓΚ, τουτέστι τὴν μονάδα, περιέχεται μεταξὺ τῶν περιμέτρων τῶν δύο αὐτῶν ὁμοίων πολυγώνων,

ἔχω *περιφ.*ΓΚ$= \dfrac{96\alpha'''' + 96\mathrm{A}''''}{2} = 6,283746.$

Καὶ τοσαύτη μὲν εἶναι ἡ περιφέρεια, ὅταν ἡ ἀκτὶς αὐτῆς ἴση τῇ μονάδι ὑποτίθεται. Ὑποτιθεμένης δὲ τῆς διαμέτρου ἴσης τῇ μονάδι, ἐπειδὴ αἱ περιφέρειαι εἶναι πρὸς τὰς ἀκτῖνας αὐτῶν ἀνάλογοι (πρότ. 11, βιβλ. 4), ἡ περιφέρεια, ἡ διάμετρον ἔχουσα τὴν μονάδα, τὴν ὁποίαν κοινῶς καλοῦσι $\pi = 3,1418$.

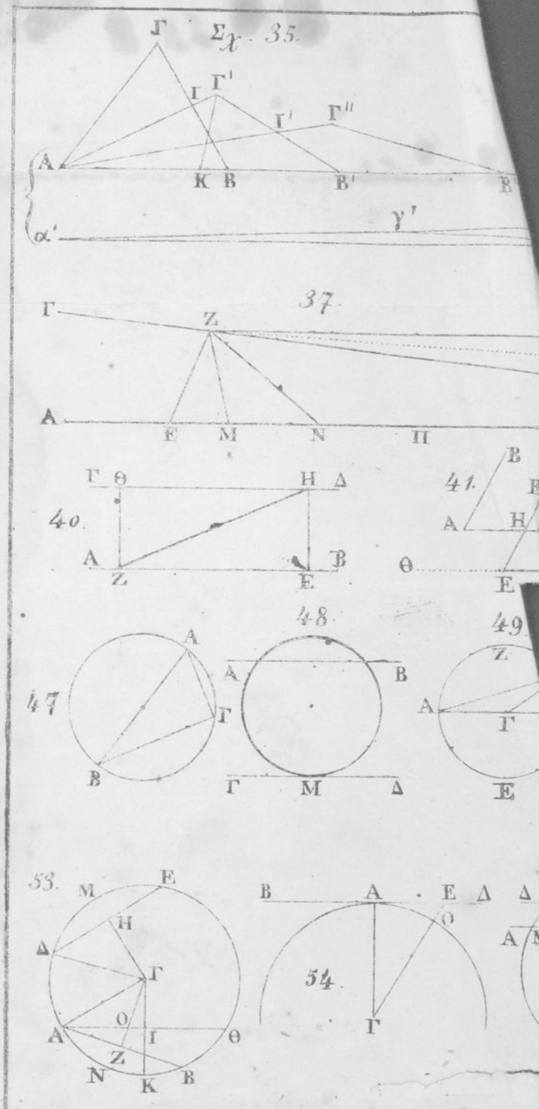
Αὕτη τοῦ π ἡ τιμὴ διαφέρει τῆς ἀληθινῆς 3 περίπου δεκάκις χιλιοστά.

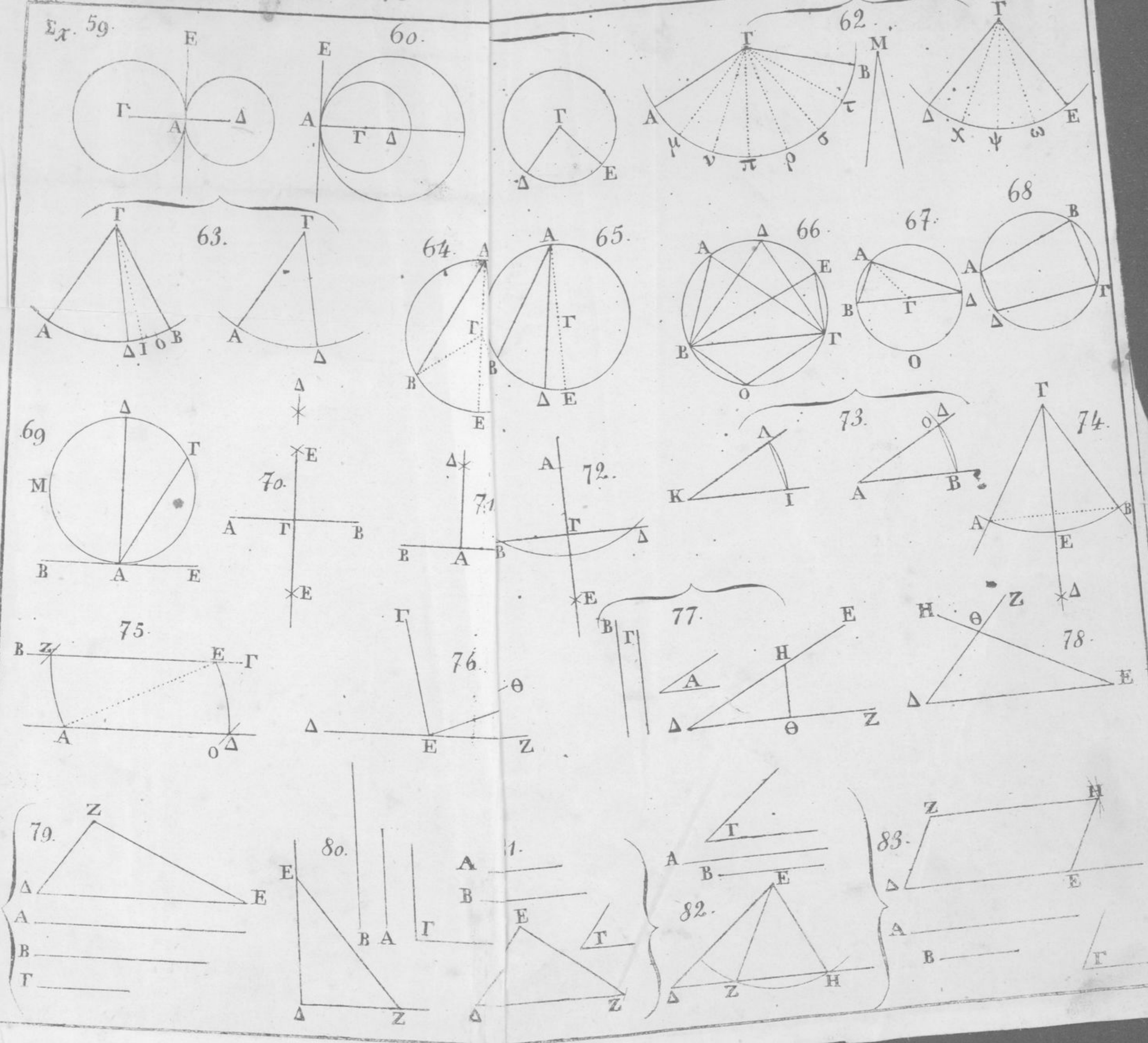
Σχόλιον. *Ὡς σχόλιον τάξον τὰ ἐν τῷ σχολίῳ τῆς 12 προτάσεως τοῦ τετάρτου βιβλίου περὶ τῆς περιφερείας π εἰρημένα.*

ΤΕΛΟΣ.

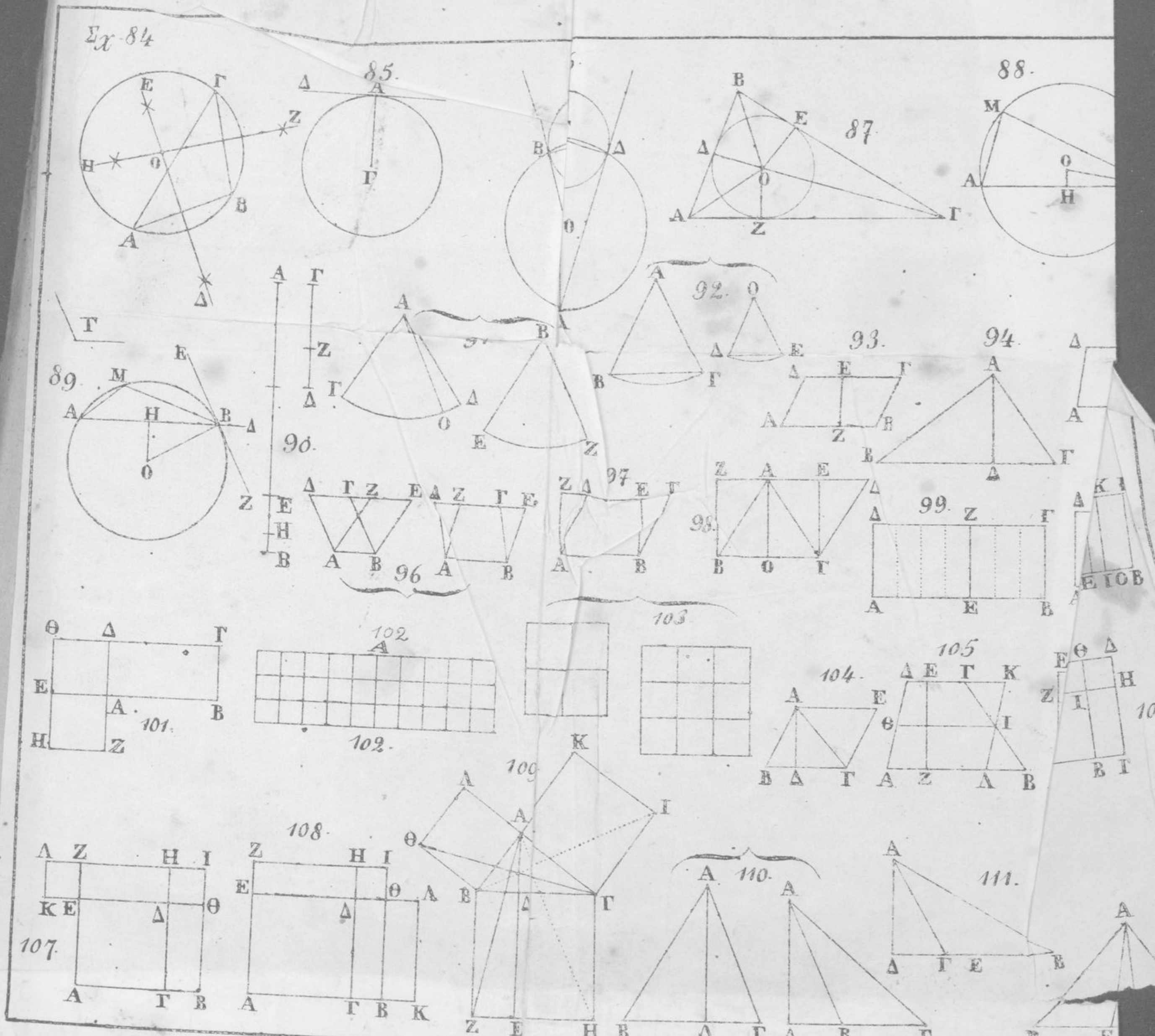
ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΩΝ ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ.

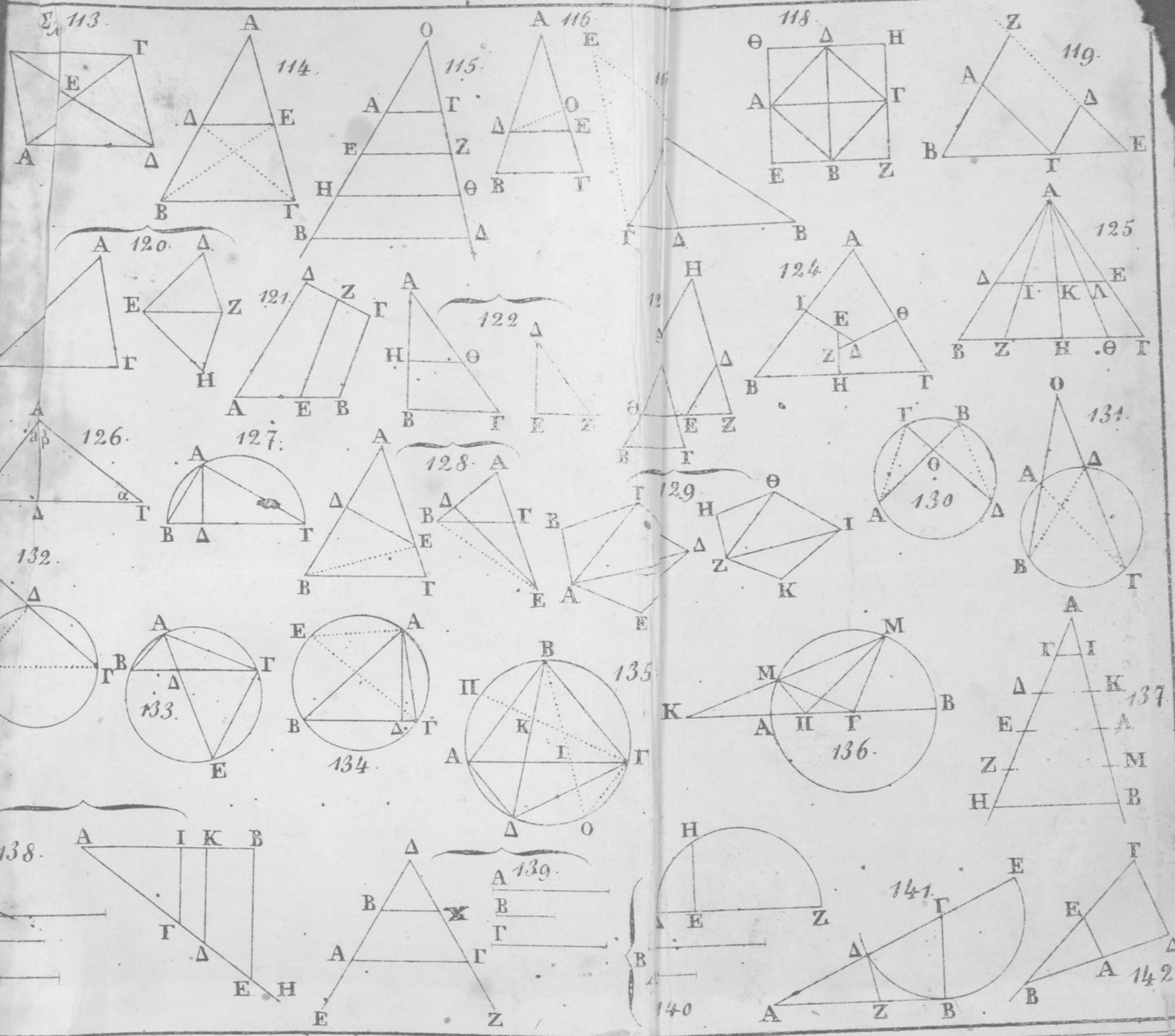
Σελ.στίχ.	Ἀντὶ	Γράφε
81, 20	$\overline{AB}^2 = \overline{B\Gamma}^2 + \overline{AB}^2 - 2B\Gamma \times \Gamma\Delta$	$\overline{AB}^2 = \overline{B\Gamma}^2 + \overline{A\Gamma}^2 = 2B\Gamma \times \Gamma\Delta$
82, 11	$\overline{AB}$	$\overline{AB}^2$
101,30	εἶναι ἴσα	εἶναι ὅμοια.
168,τελ.	Α=Β	ΑΒ=


Σχ. 35.
37.
40.
41.
47
48.
49
53.
54.

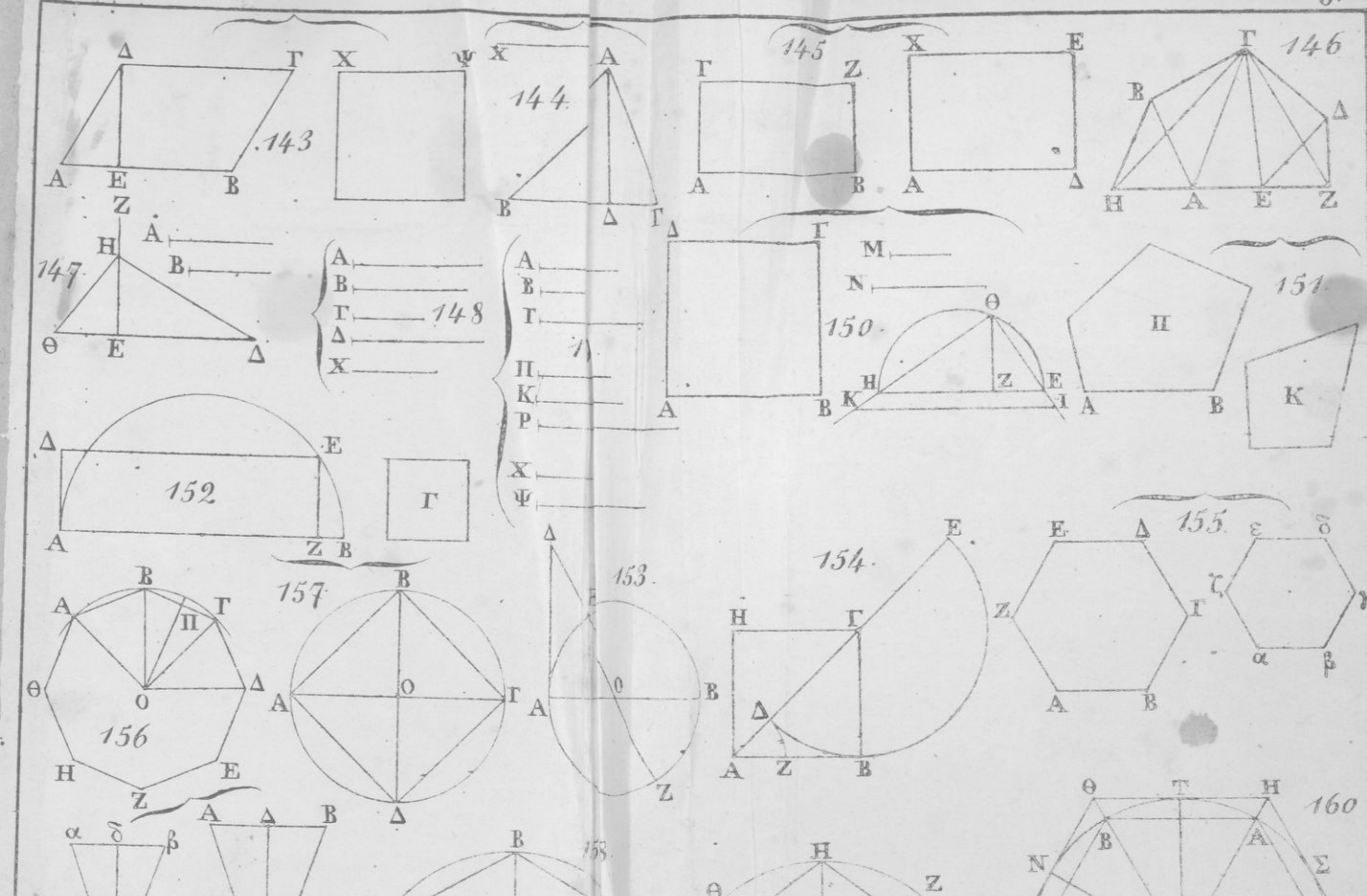


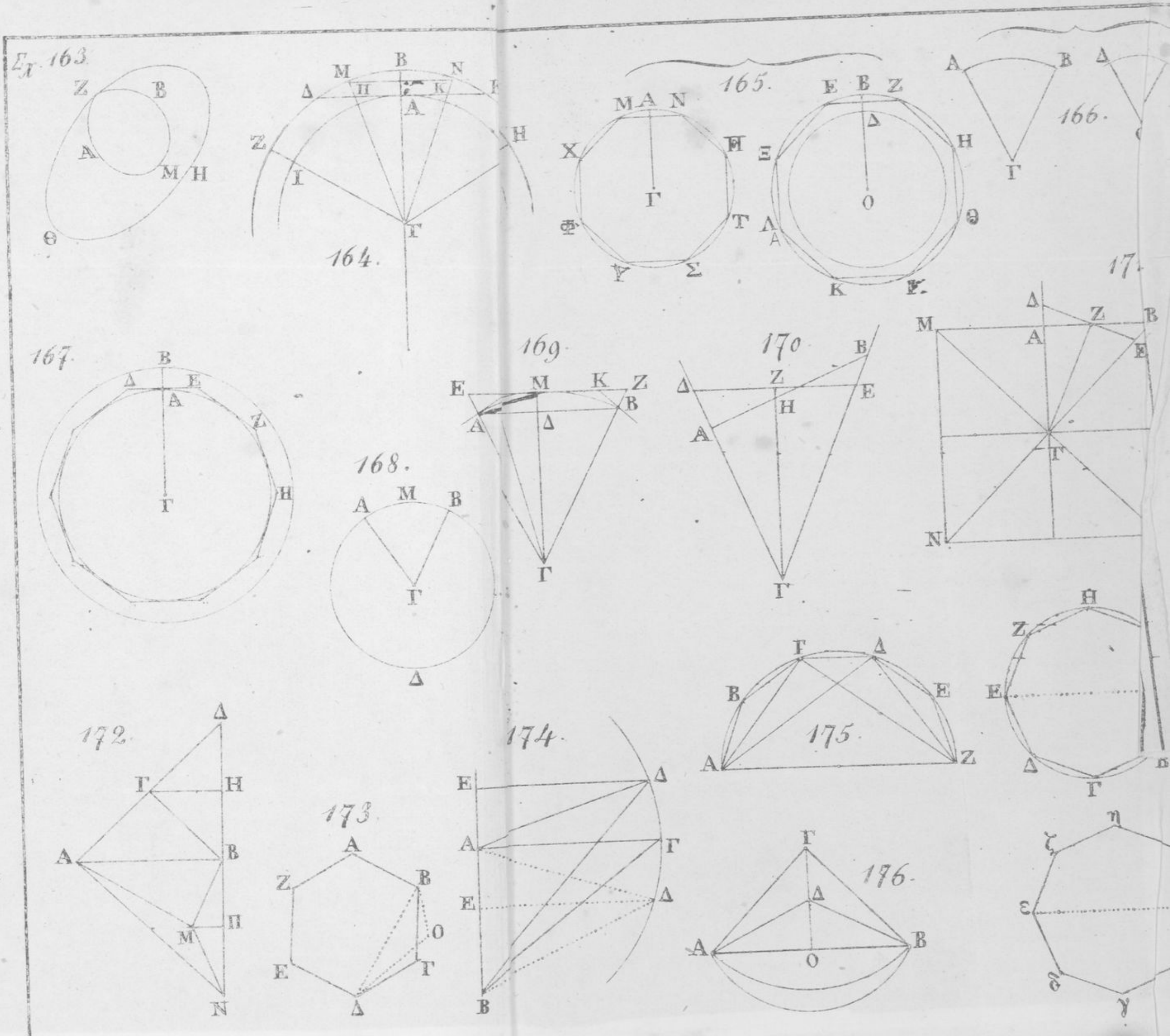
Σχ. 59.
60.
62.
63.
64.
65.
66.
67.
68
69
70.
71
72.
73.
74.
75.
76.
77.
78.
79.
80.
81.
82.
83.


Σχ. 84
85.
87.
88.
89.
90.
92.
93.
94.
96
97
98.
99.
101.
102
102.
103
104.
105
107.
108.
109
110.
111.

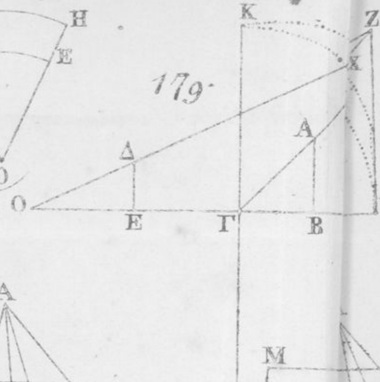


Σχ. 113
114
115
116
118
119
120
121
122
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142

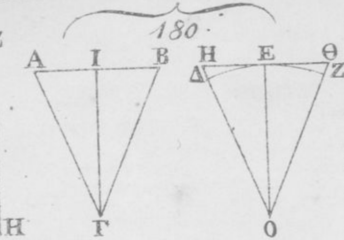

143
144
145
146
147
148
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162


Σχ. 163.
164.
165.
166.
167.
168.
169.
170.
172.
173.
174.
175.
176.

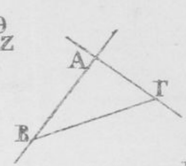
178.



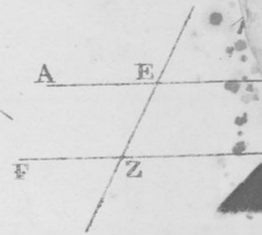
179.

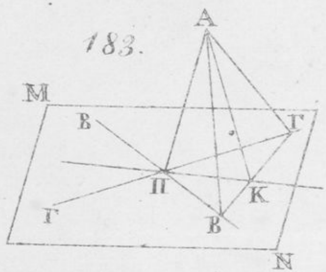


180.

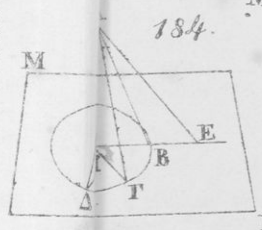


181.

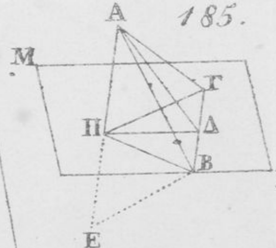




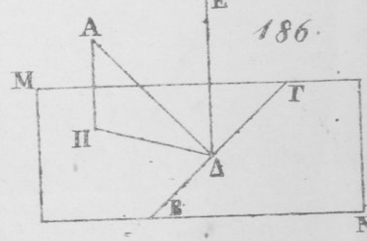
183.



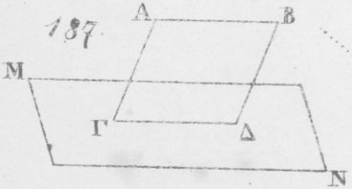
184.



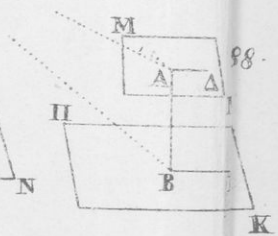
185.



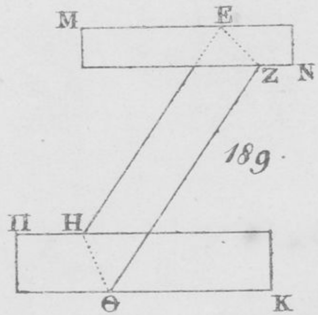
186.



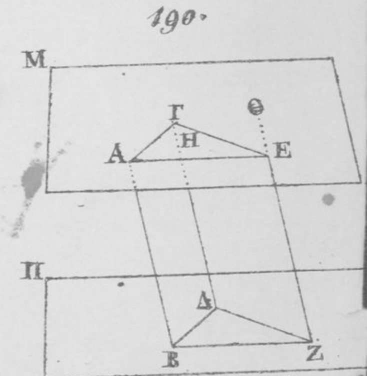
187.



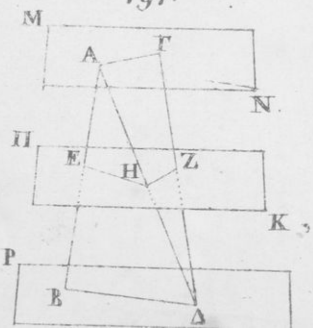
188.



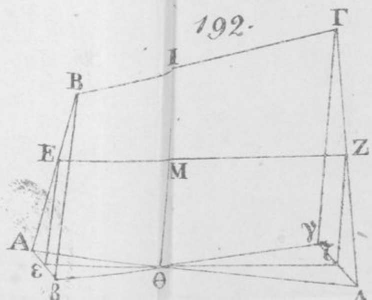
189.



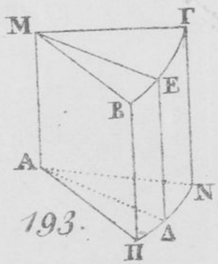
190.



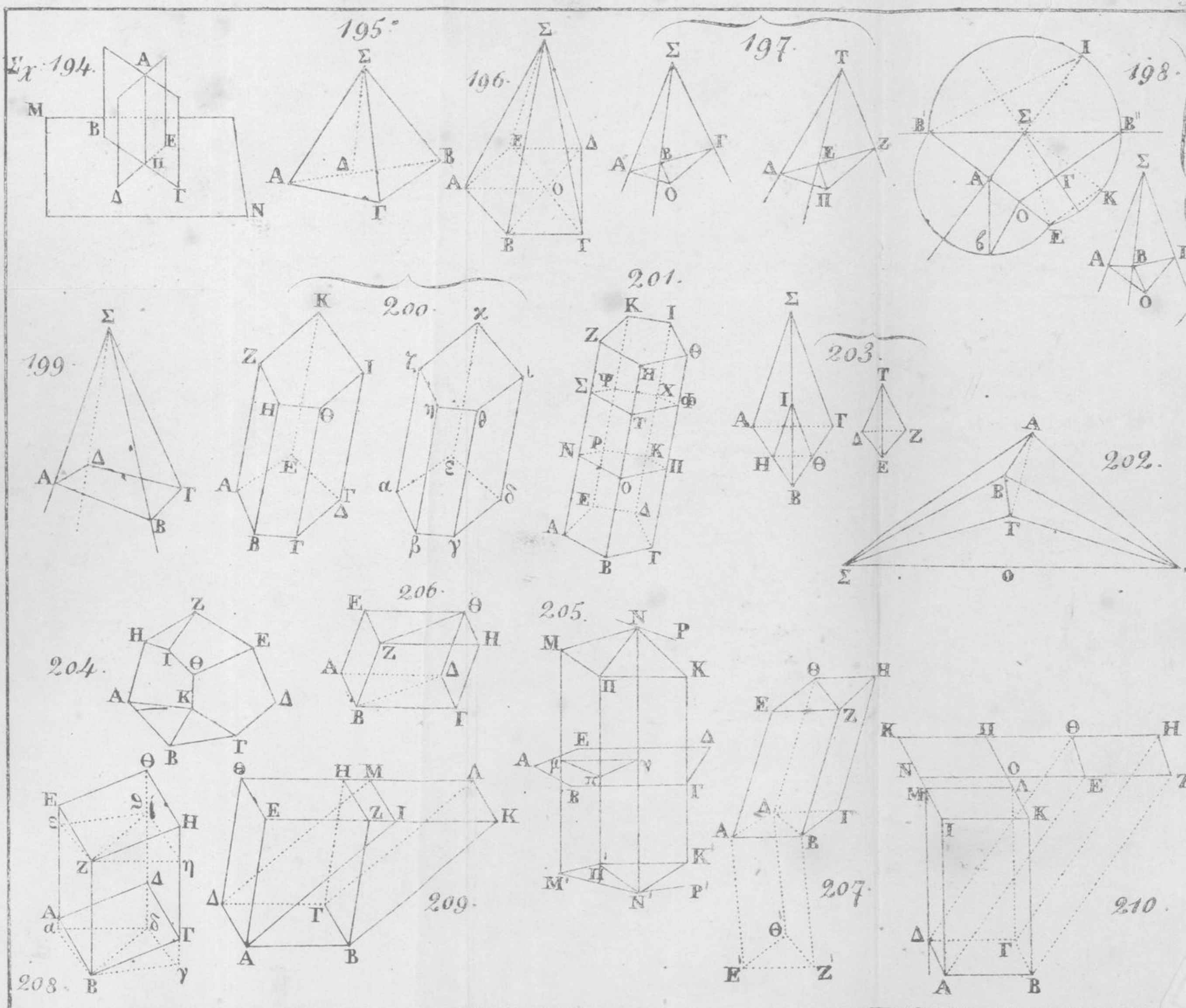
191.

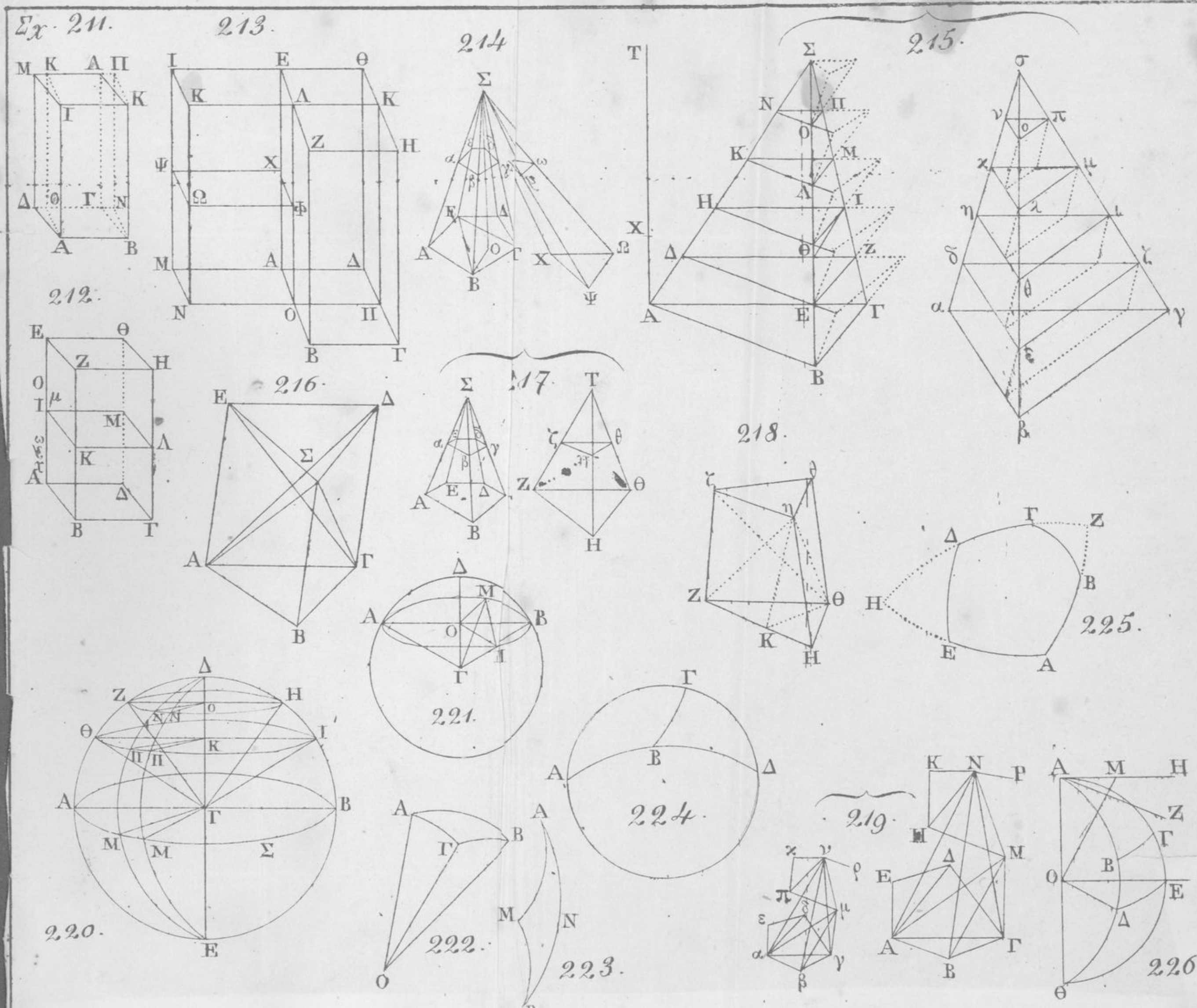


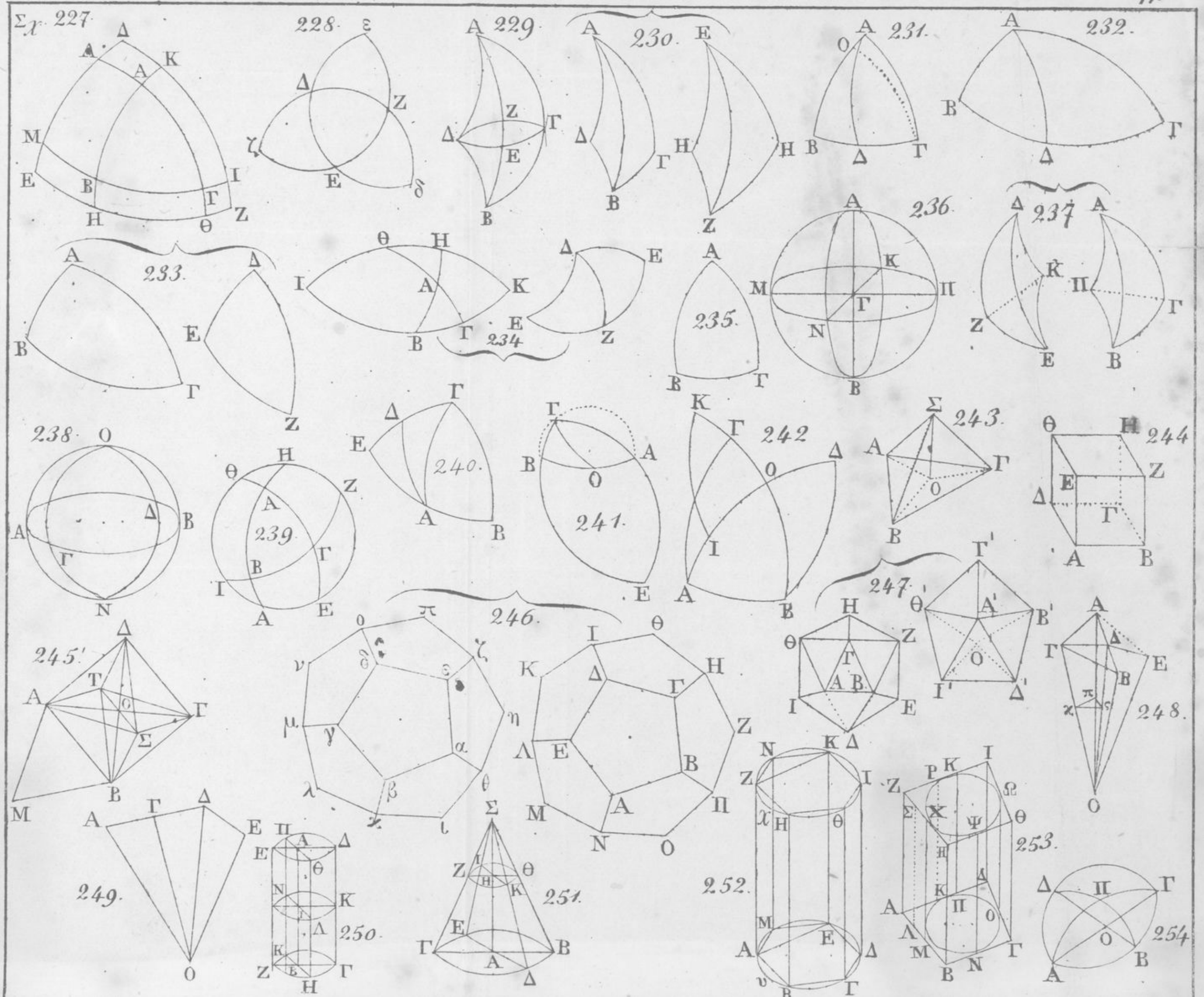
192.

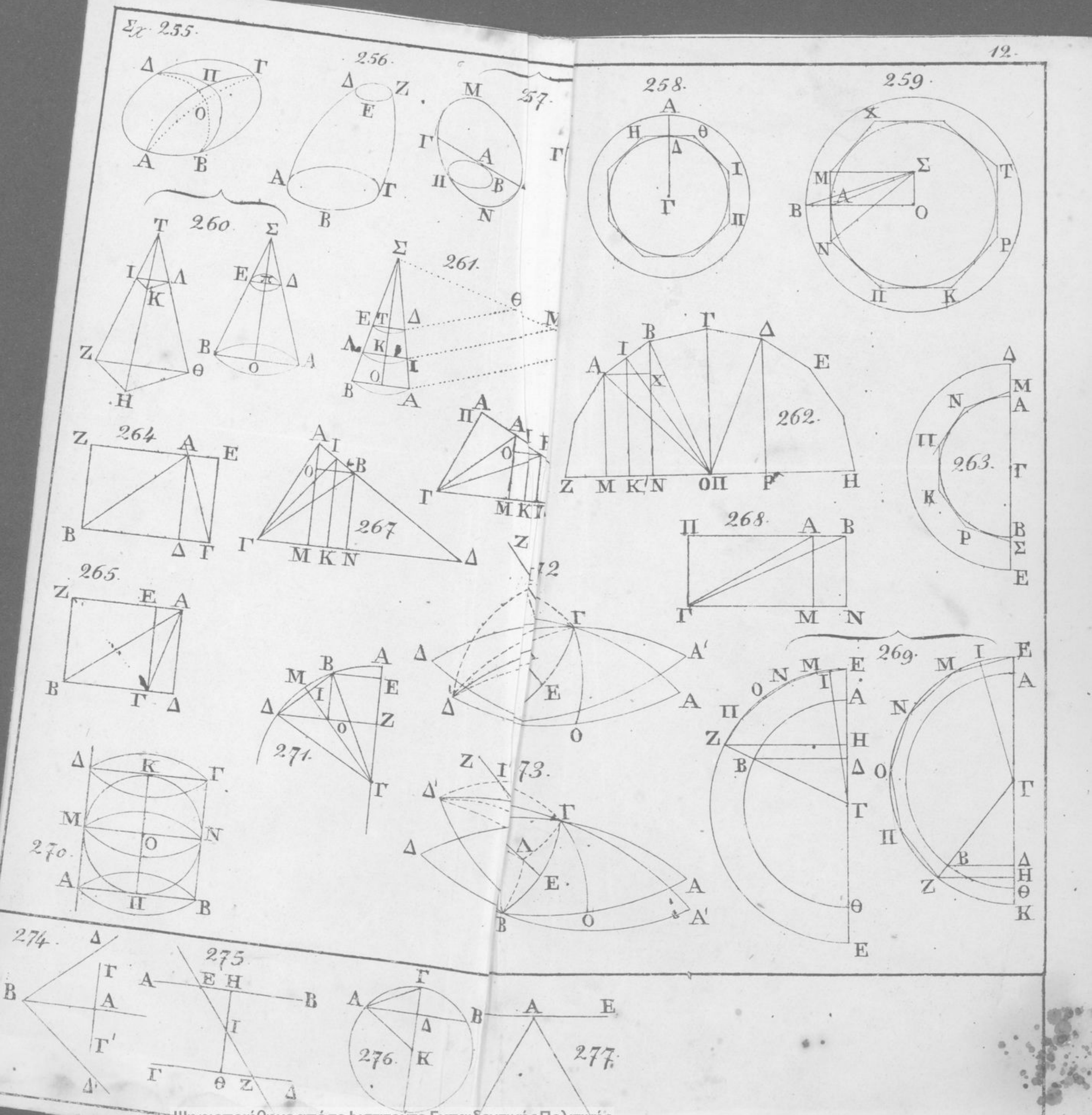


193.


Σχ. 194.
195.
196.
197.
198.
199.
200.
201.
202.
203.
204.
205.
206.
207.
208.
209.
210.


Σχ. 211.
213.
214
215.
212.
216.
217.
218.
225.
221.
220.
224.
222.
223.
219.
226.


Σχ. 227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245'
246
247
248
249
250
251
252
253
254


Σχ. 255.
256.
257.
258.
259.
260.
261.
262.
263.
264.
265.
267.
268.
269.
270.
271.
272
273.
274.
275.
276.
277.

[Σχολικά]

Q-18X'

117

1000	14
150	65
2	25
150	10
440	5
110	
330	116
10	
2021	

		δ.
ξυσταρίνια	2	20
της νύχτας	1	20
γαλώτσια	3	30
φουστάνια	1	40
θευράτσια λευχάρια	3	15
μουλέβρα	3	15
σελοσέλα	1	5
		145