ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ.

ΣΥΝΤΑΧΘΕΙΣΑ

ΥΠΟ

Σ. ΜΑΝΑΡΗ,

Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματ. Ἐπιστημῶν παρὰ τῇ Ζωσιμαίᾳ Σχολῇ.

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΕΤΑΡΤΗ.

Συμπληρωθεῖσα, ἀναπτυχθεῖσα καὶ ἐπὶ τὸ μεθοδικώτερον καὶ ἀναλυτικώτερον ἐπεξεργασθεῖσα.

ΑΘΗΝΑΙ,

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ Ο «ΛΟΓΙΟΣ ΕΡΜΗΣ.»

1870.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ.

ΣΥΝΤΑΧΘΕΙΣΑ

ΥΠΟ

Σ. ΜΑΝΑΡΗ,

Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματ. Ἐπιστημῶν παρὰ τῇ Ζωσιμαίᾳ Σχολῇ.

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ.

Συμπληρωθεῖσα, ἀναπτυχθεῖσα καὶ ἐπὶ τὸ μεθοδικώτερον καὶ ἀναλυτικώτερον ἐπεξεργασθεῖσα.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΕΤΑΡΤΗ.

ΑΘΗΝΑΙ,

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ Ο «ΛΟΓΙΟΣ ΕΡΜΗΣ.»

 1870.

ΠΡΟΛΕΓΟΜΕΝΑ.

Ἡ εὐνοϊκὴ ὑποδοχὴ ἣν ἔτυχεν ἡ πρώτη καὶ δευτέρα ἔκδοσις τοῦ πονήματός μου μ' ἐνεθάῤῥυνεν εἰς τὴν τρίτην ταύτην. Ἐπειδὴ δὲ ἡ μὲν πρώτη ἔφερεν ἐν ἑαυτῇ τὴν ἀτέλειαν τῶν δοκιμίων, ἡ δὲ δευτέρα παρεμορφώθη κακῆς ἕνεκα συννενοήσεως μεταξὺ συντάκτου καὶ τυπογράφου, ἔκρινα ἀναγκαῖον ἀναθεωρήσας ἀμφοτέρας νὰ διασκευάσω ἐπὶ τὸ τελειότερον, νὰ συμπληρώσω καὶ ἐν γένει ἀναμορφώσω τὸ ὅλον πόνημα, κατὰ τὴν διάταξιν τῆς ὕλης, τὴν ἀνάπτυξιν τῶν θεωριῶν καὶ τὴν ἐφαρμογὴν αὐτῶν ἐπὶ διαφόρων ἐπιστημονικῶν ζητημάτων.

Ἡ Ἄλγεβρα συνέχεια τῆς ἀριθμητικῆς, ἢ μᾶλλον κατὰ τὸν περινούστατον Νεύτωνα, Καθολικὴ ἀριθμητικὴ (Arithmetica universalis), περιλαμβάνει ἀναγκαίως ἐν τῷ εὐρυτάτῳ χώρῳ αὐτῆς πάσας τὰς περὶ ἀριθμῶν θεωρίας, ἐξηγοῦσα καὶ ἀναπτύσσουσα αὐτὰς διὰ τῶν προσφυεστάτων αὐτῆς μέσων. Ἀλλὰ μεταξὺ τῶν πολλῶν καὶ ἀφῃρημένων θεωριῶν τῆς ἐπιστήμης ταύτης πρέπει νὰ διακρίνωνται, αἱ ἀπαρτίζουσαι στοιχειώδη πραγματείαν, ὡρισμένην πρὸς χρῆσιν τῶν ἐν τοῖς γυμνασίοις διδασκομένων, προσιτὴν τοῖς πᾶσι καὶ εἰς πάντας ἀπαραίτητον πρὸς τὴν σπουδὴν τῶν ἀνωτέρω ἐπιστημῶν.

Διὸ καὶ ὑπὸ τῆς πείρας πολυχρονίου διδασκαλίας ὁδηγούμενος καὶ ταῖς σοφαῖς τοῦ Λακρσΐου κρίσεσιν ἑπομένως, ἀπήλλαξα τὴν Ἀριθμητικὴν ἐκ τῶν πολλῶν ἐκείνων θεωριῶν, αἵτινες οὐ μόνον ἀτελῶς ἐν αὐτῇ ἀναπτύσσονται, ἀλλὰ καὶ ἄνευ ἐφαρμογῆς ἐν τοῖς ἰδίως ἀριθμητικοῖς ζητήμασι μένουσιν. Οὕτως αἱ θεωρίαι τῶν συνεχῶν κλασμάτων, τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀριθμῶν, τῶν δυνάμεων καὶ ῥιζῶν, τῶν προόδων καὶ λογαρίθμων, καὶ ἀτελῶς ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ διδάσκονται καὶ δεινὴν ὑπὲρ τὸ δέον ἀποκαθιστῶσι τὴν ἐκμάθησιν αὐτῶν, ἄνευ τῆς τελείας ἀναπτύξεως τῶν ἁπλουστάτων καὶ γενικῶν μέσων τῆς Ἀλγέβρας. Καὶ ἐνῷ ἐπιβαρύνουσιν αἱ θεωρίαι αὗται τὸν πρωτόπειρον μαθητήν· δὲν εὑρίσκουσιν ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον τὴν ἐφαρμογὴν εἰς τὰ κοινὰ ζητήματα τοῦ πρακτικοῦ βίου. Ἀλλὰ τί νὰ εἴπῃ τις περὶ τῶν συγγραφέων ἐκείνων, οἵτινες παλινδρομοῦντες ἐκθέτουσι τὰς αὐτὰς θεωρείας καὶ ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ; Τὰ μεγάλα ὀνόματα καλύπτουσιν ἐνίοτε ἁμαρτήματα ἀσύγγνωστα εἰς τοὺς μικροὺς καὶ ἀσήμους.

Ἐνόσῳ δυσδιάκριτα καὶ συγκεχυμένα ὑπάρχουσι τὰ ὅρια μεταξὺ τῶν στοιχείων τῆς Μαθηματικῆς καὶ τῶν ὑψηλοτέρων πραγματειῶν, ἐνόσῳ ἕκαστον μέρος τῶν στοιχείων δὲν ἔχει καταλλήλως διαγεγραμμένα τὰ ἴδια ὅρια, οὐδέποτε μεθοδικὴ καὶ ἀναλυτικὴ διδασκαλία τῶν μαθημάτων τούτων δυνατὸν νὰ ἐπιτευχθῇ.

Ταῦτα πάντα λαβὼν ὑπ' ὄψιν ἐπεχείρησα τὴν σύνταξιν βιβλίου διδακτικοῦ, περιέχοντος τὰς στοιχειώδεις καὶ ἀπαραιτήτως ἀναγκαίας γνώσεις τῆς ἐπιστήμης, μετὰ τῆς ἀπαιτουμένης εὐκρινείας.

Ἰδοὺ αἱ κυριώτεραι μεταβολαί, ἃς ἐπήνεγκον ἐν τῷ πονήματι τούτῳ. Ἀνέπτυξα στοιχειωδῶς τὴν θεωρίαν τῶν ἀρνητικῶν ποσοτήτων, διευκρινήσας τὴν ὠφέλειαν αὐτῶν ἐπὶ διαφόρων ἐφαρμογῶν. Ἐξέθεσα τὴν γενικὴν διερεύνησιν ἐπὶ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, ὅσον ἠδυνήθην ἁπλούστερον, μεθοδικώτερον καὶ ἀναλυτικώτερον ἐφήρμοσα ἐπὶ ζητημάτων ἐπιστημονικῶν τοὺς περὶ ἐπιλύσεως τῶν προβλημάτων κανόνας. Συνεπλήρωσα τὴν θεωρίαν τῶν προόδων καὶ λογαρίθμων, ἐκθέσας ἐν πίναξι πάντας τοὺς τύπους αὐτῶν καὶ ἐφαρμόσας αὐτοὺς εἰς τὴν λύσιν πολλῶν ζητημάτων. Προσέθηκα τελευταῖον νέον πίνακα χρεωλύτρων διὰ σειρὰν εἰκοσιπέντε ἐτῶν πρὸς 4, 5, 6 καὶ 10 τοῖς 100. Καὶ ἐν γένει συμμορφωθεὶς ταῖς τοῦ προγράμματος τῆς Γαλλίας διατάξεσι καὶ ὑπ' ὄψιν ἔχων τὰ ἐπὶ τῇ βάσει τούτου συνταχθέντα καὶ ἐπιδοκιμασθέντα νεώτερα συγγράμματα τῶν σοφῶν Γάλλων, ἐτόλμησα μόνον νὰ παραδῶ τὸν κανόνα προσθέσας τὸ περὶ σχηματισμοῦ τῶν δυνάμεων ἐν γένει καὶ ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν κεφάλαιον, διότι ἄνευ τῆς θεωρίας τοῦ διωνύμου τοῦ ἀθανάτου Νεύτωνος καὶ τῆς τῶν συνδυασμῶν, ἡ Ἄλγεβρα στερεῖται τοῦ ὡραιοτέρου κοσμήματος αὐτῆς τοῦ ὠφελιμωτέρου μέρους πρὸς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς κρίσεως τῶν σπουδαζόντων καὶ τοῦ ἀναγκαιοτέρου διὰ τὰς ἀπείρους ἐφαρμογὰς αὐτοῦ καθ' ὅλα τὰ μέρη τῶν μαθηματικῶν ἐπιστημῶν.

Ἂν εἰς τὴν σύνταξιν τοῦ πονήματος τούτου ἐπέτυχα τοῦ μόνου ἐπιζητουμένου σκοποῦ τῆς ὠφελείας τῆς σπουδαζούσης νεολαίας, ἐναπόκειται εἰς τὴν ἀμερόληπτον τῶν λογίων κρίσιν τὴν ὁποίαν ἐπικαλούμενος θέλω σεβασθῆ. Εἴθε οἱ κόποι μου ἀποδειχθῶσι κατά τι ὠφέλιμοι καὶ παροτρύνωσι τοὺς ἱκανωτέρους πρὸς σύνταξιν τελειοτέρων συγγραμμάτων!

Ἔγραφον ἐν Ἰωαννίνοις κατὰ μῆνα Ὀκτώβριον.

Σ. Μ.

ΠΙΝΑΞ

ΤΩΝ ΕΜΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

μένος ἀριθμὸς προστίθεται εἰς τὸν ὑπὸ τοῦ α παριστανόμενον, ἢ ἐμφαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν α καὶ β.

γ'. Τὸ σημεῖον τῆς Ἀφαιρέσεως —, τὸ ὁποῖον ἐκφέρεται *μεῖον* καὶ γραφόμενον μεταξὺ δύο ἀριθμῶν δεικνύει, ὅτι ὁ δεύτερος ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸν πρῶτον· οὕτως $\alpha-\beta$ ἀπαγγέλλεται α μεῖον β, καὶ φανερόνει ὅτι ἀπὸ τὸν ἀριθὸν α ἀφαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς β, ἢ προσέτι τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἀριθμῶν α καὶ β.

δ'. Τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $\times$, ἢ μία στιγμὴ ., τὸ ὁποῖον ἐκφέρεται *ἐπί*, τίθεται δὲ μεταξὺ τῶν παραγόντων· οὕτως 5×6 ἢ 5.6 ἐκφωνεῖται 5 ἐπὶ 6, καὶ φανερόνει ὅτι ὁ ἀριθμὸς 5 πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 6· ὡσαύτως $\alpha\times\beta$ ἢ $\alpha.\beta$ ἐκφωνεῖται α ἐπὶ β, καὶ φανερόνει, ὅτι ὁ ἀριθμὸς α πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν β, ἢ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθ. α καὶ β.

Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ παριστάνωνται διὰ γραμμάτων, κατὰ συνθήκην παραλείπεται τὸ σημεῖον, παριστάνεται δὲ τὸ γινόμενον, γραφομένου τοῦ ἑνὸς παράγοντος πλησίον τοῦ ἄλλου· οὕτως $\alpha\beta$ εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς $\alpha\times\beta$, καὶ $\alpha\beta\gamma$ εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς $\alpha\times\beta\times\gamma$.

Ἐννοεῖται εὐκόλως ὅτι ἡ συνθήκη αὕτη δὲν ἔχει χώραν καὶ ἐπὶ τῶν δι' Ἀραβικῶν ψηφίων σημειωμένων παραγόντων, διότι τότε τὸ γινόμενον αὐτῶν συγχέεται μὲ ἄλλον ἀριθμὸν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος· οὕτω τὸ γινόμενον 5×6 ἤτοι 30 συγχέεται μὲ τὸν ἀριθμὸν 56.

ε'. Τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶναι δύο στιγμαὶ :, καὶ τίθεται μεταξὺ τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου, ἢ μία γραμμὴ —, ἄνω τῆς ὁποίας γράφεται ὁ διαιρετέος καὶ κάτω ὁ διαιρέτης, ἐκφέρεται δὲ διά. Οὕτως $\alpha:\beta$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἀπαγγέλλεται α διὰ β, σημαίνει δὲ ὅτι ὁ ἀριθμὸς α διαιρεῖται διὰ τοῦ β, ἢ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ β. Ἡ σημείωσις $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι εὐχρηστοτέρα.

ϛ'. Ὁ *Συντελεστής*, ὅστις εἶναι σημεῖον συντμητικὸν τῆς διαδοχικῆς προσθέσεως. Οὕτως ὅταν γενικός τις ἀριθμὸς μέλλῃ νὰ προστεθῇ εἰς ἑαυτὸν πολλάκις, γράφεται ἅπαξ μόνον, πρὸ αὐτοῦ δὲ τίθεται μερικὸς ἀριθμὸς ἔχων τόσας μονάδας, ὁσάκις ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς λαμβάνεται ὡς προσθετέος π. χ. ἀντὶ τοῦ $\alpha+\alpha+\alpha+\alpha$ γράφομεν 4α. παρομοίως διὰ τοῦ $5\alpha\beta$ ἐκφράζομεν συντομώτερον τὴν διαδοχικὴν πρόσθεσιν αβ + αβ + αβ + αβ + αβ. Ὁ εἰς τ' ἀριστερὰ γραφόμενος ἀριθμὸς λέγεται *συντελεστής*.

ζ'. Ὁ *ἐκθέτης* ὅστις εἶναι σημεῖον, διὰ τοῦ ὁποίου συντέμνεται ὁ διαδοχικὸς πολλαπλασιασμός. Οὕτως ὅταν γενικός τις ἀριθμὸς μέλλῃ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἑαυτὸν διαδοχικῶς, γράφεται ἅπαξ μόνον, καὶ εἰς τὰ δεξιὰ καὶ ὀλίγον ἄνω τούτου τίθεται μερικὸς ἀριθμὸς ἔχων τόσας μονάδας, ὁσάκις ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς λαμβάνεται ὡς παράγων· π.χ. ἀντὶ τοῦ $α\times α\times α\times α$ ἢ αααα γράφομεν ἁπλούστερον $α^4$. Ὡσαύτως $β^5$ εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς $β\times β\times β\times β\times β$. Ὁ ἐπὶ τοῦ γράμματος γραφόμενος ἀριθμὸς ὀνομάζεται ἐκθέτης.

Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινὸς πολλάκις ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος, ἢ τὸ γινόμενον πολλῶν ἴσων παραγόντων, λέγεται *δύναμις*. Βαθμὸς δὲ δυνάμεως, ὁ ἀριθμὸς τῶν παραγόντων· οὕτω 4 λέγεται δευτέρα δύναμις τοῦ 2, διότι εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ δύο ἐπὶ 2· καὶ 8 εἶναι ἡ τρίτη δύναμις τοῦ 2, διότι ἰσοδυναμεῖ μὲ $2\times 2\times 2$· ὡσαύτως δὲ οἱ ἀριθμοὶ 9, 27, 81 εἶναι δυνάμεις τοῦ 3.

ὁ μὲν 9. β'. βαθμοῦ, διότι ἰσοῦται μὲ 3×3,
ὁ δὲ 27. γ'. » » » » $3\times 3\times 3$,
ὁ δὲ 81. δ'. » » » » $3\times 3\times 3\times 3$.

Ἐν γένει αα ἢ $α^2$ εἶναι δευτέρα δύναμις τοῦ α,
καὶ ααα ἢ $α^3$ εἶναι τρίτη δύναμις τοῦ α.

η'. Ῥίζα ἀριθμοῦ τινὸς καλεῖται ἄλλος τις ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιασθεὶς πολλάκις ἐφ' ἑαυτὸν παράγει τὸν προτεθέντα· βαθμὸς δὲ ῥίζης εἶναι ὁ ἀριθμός, ὅστις δεικνύει ποσάκις λαμβάνεται ὡς παράγων ἵνα παράξῃ τὸν προτεθέντα ἀριθμόν· π. χ. 5 εἶναι δευτέρα ῥίζα τοῦ 25, καὶ 3 εἶναι τρίτη ῥίζα τοῦ 27· διότι $5\times 5=25$ καὶ $3\times 3\times 3=27$.

Ἵνα σημειώσωμεν δὲ, ὅτι ζητεῖται ἡ ῥίζα ἀριθμοῦ τινός, μεταχειριζόμεθα τὸ σημεῖον, $\sqrt{}$, τὸ ὁποῖον λέγεται *ῥιζικόν*. Καὶ ὁ μὲν ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ ῥίζα, τίθεται ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν σημεῖον καὶ λέγεται ποσότης *ὑπόῤῥιζος*, ἄνω δὲ τοῦ ῥιζικοῦ τίθεται ἀριθμός, ὅστις δεικνύει τὸν βαθμὸν τῆς ῥίζης, καὶ λέγεται *δείκτης*. Οὕτω $\sqrt[2]{36}$ παριστάνει τὴν δευτέραν ῥίζαν τοῦ 36, καὶ $\sqrt[3]{64}$, τὴν τρίτην τοῦ 64.

Παρομοίως $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τὴν δευτέραν ῥίζαν τοῦ α. Σημειωτέον δέ, ὅτι ὁ δείκτης 2 τῆς δευτέρας ῥίζης παραλείπεται.

Ἡ μὲν δευτέρα δύναμις ἀριθμοῦ τινὸς λέγεται καὶ *τετράγωνον* αὐτοῦ, ἡ δὲ τρίτη, κύβος· ἑπομένως ἡ μὲν δευτέρα ῥίζα λέγεται *τετραγωνική*, ἡ δὲ τρίτη *κυβική*. Τὰ ὀνόματα ταῦτα ἐλήφθησαν ἐκ τῆς Γεωμετρίας, ὡς ὑπαρχούσης ἀναλογίας μεταξὺ τῶν δυναμένων τούτων καὶ τῶν ὁμωνύμων γεωμετρικῶν σχημάτων.

θ'. Τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος $=$, διὰ τοῦ ὁποίου φανερόνομεν, ὅτι δύο ποσότητες εἶναι ἴσαι, προφέρεται δὲ *ἴσον*.

Οὕτως ἵνα σημειώσωμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ 36 πρὸς 25 εἶναι ἴση μὲ 11 γράφομεν $36-25=11$. ὡσαύτως, ἵνα παραστήσωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν α καὶ β. εἶναι ἴσον μὲ τρίτον τινὰ ἀριθμόν, γ, γράφομεν $\alpha+\beta=\gamma$.

ι'. Τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος $>$ ἢ $<$, διὰ τοῦ ὁποίου σημειοῦμεν ὅτι ποσότης τις εἶναι μεγαλητέρα ἢ μικροτέρα ἄλλης τινός· καὶ ἡ μὲν μεγαλητέρα ποσότης τίθεται ἐντὸς τῆς γωνίας, ἡ δὲ μικροτέρα ἐκτὸς αὐτῆς. Οὕτως $\alpha>\beta$ παριστάνει ὅτι α εἶναι μεῖζον τοῦ β, ἐξ ἐναντίας $\alpha<\beta$ φανερόνει ὅτι α εἶναι ἔλασσον τοῦ β.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα βλέπομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν Ἄλγεβραν ὡς εἶδός τι γλώσσης συνισταμένης ἐκ διαφόρων σημείων, διὰ τῶν ὁποίων ἀκολουθοῦμεν μὲ περισσοτέραν εὐκολίαν τὸν σύνδεσμον τῶν ἰδεῶν εἰς τοὺς συλλογισμούς, τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ κάμωμεν εἴτε πρὸς ἀπόδειξιν τῶν θεωρημάτων, εἴτε πρὸς λύσιν τῶν προβλημάτων.

Ἐφαρμογαί.

§ 3. Ἵνα δείξωμεν τὴν ἐκ τῆς χρήσεως τῶν ἀλγεβρικῶν σημείων ὠφέλειαν ἂς λάβωμεν πρὸς ἐφαρμογὴν τὰ ἑξῆς ζητήματα.

Πρόβλημα Α'. Δοθέντος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν καὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, νὰ εὕρωμεν τοὺς δύο ἀριθμούς.

Λύσις μερική. Ἔστω τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν 67, καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν 19. Ποῖοι εἶναι οἱ δύο ἀριθμοί;

Ἂς προσπαθήσωμεν κατὰ πρῶτον νὰ συνδέσωμεν διὰ τῶν συμφωνηθέντων σημείων τοὺς γνωστοὺς ἀριθμοὺς μὲ τοὺς ἀγνώστους, δηλ. νὰ παραστήσωμεν ἀλγεβρικῶς τὰς μεταξὺ αὐτῶν σχέσεις, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος. Πρὸς τοῦτο ἰδοὺ πῶς συλλογιζόμεθα.

Ἐὰν ἦτο γνωστὸς ὁ μικρότερος τῶν δύο ζητουμένων ἀριθμῶν, ἠθέλαμεν ἔχει τὸν μεγαλήτερον προσθέτοντες 19 εἰς τὸν μικρότερον. Τούτου τεθέντος ἂς σημειώσωμεν διὰ χ τὸν μικρότερον· ὁ μεγαλήτερος τότε θέλει σημειωθῆ διὰ $\chi+19$. Τὸ ἄθροισμα αὐτῶν λοιπὸν εἶναι $\chi+\chi+19$ ἢ $2\chi+19$, ἀλλὰ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἰσοῦται μὲ 67, ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἰσότητα

$$2\chi+19=67$$

Ὅθεν ἐὰν 2χ ηὐξημένον κατὰ 19 δίδῃ 67, ἕπεται ὅτι 2χ μόνον εἶναι ἴσον μὲ 67 μεῖον 19, ἢ $2\chi=67-19$, ἢ $2\chi=48$· λοιπὸν χ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ 48, τουτέστι $\chi=\frac{48}{2}=24$. Ὄντος δὲ τοῦ μικροτέρου 24, ὁ μεγαλήτερος εἶναι $24+19$ ἢ 43.

Τῷ ὄντι $43+24=67$, καὶ $43-24=19$.

Πίναξ τῶν ἀλγεβρικῶν πράξεων.

Ἔστω ὁ μικρότερος ἀριθμὸς	χ
ὁ μεγαλήτερος θέλει εἶσθαι	$\chi+19$
τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ὅλον	$2\chi+19=67$
ἐπομένως	$2\chi=67-19=48$
λοιπὸν	$\chi=\frac{48}{2}=24$
καὶ	$\chi+19=24+19=43$

ΣΗΜ. Ὁ μαθητὴς δύναται νὰ λύσῃ τὸ αὐτὸ πρόβλημα σημειῶν διὰ χ τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν, ἐπομένως διὰ $\chi-19$ τὸν μικρότερον.

§ 4. *Γενικὴ λύσις.* Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι α, ἡ δὲ διαφορὰ αὐτῶν β, ζητοῦνται οἱ δύο ἀριθμοί.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο δυνατὸν νὰ λυθῇ καὶ διὰ μόνου τοῦ συλλογισμοῦ ἐκτεθειμένου εἰς κοινὴν γλῶσσαν, ἀλλ' ἵνα ἴδωμεν τὴν συντομίαν καὶ τὴν ἁπλότητα τῆς ἀλγεβρικῆς γλώσσης, ἀντιπαραθέτομεν τὴν σειρὰν τῶν εἰς τὴν λύσιν αὐτοῦ συλλογισμῶν ἐκτεθειμένων εἰς κοινὴν γλῶσσαν μὲ τὴν ἀντίστοιχον ἀλγεβρικὴν σημείωσιν.

ὁ μικρότερος ἀριθμὸς . . . . χ

ὁ μεγαλήτερος ἰσοῦται μὲ τὸν μικρότερον πλέον τὴν διαφορὰν . . . . $\chi+\beta$

ὁ μικρότερος πλέον ὁ μεγαλήτερος ἰσοῦται μὲ τὸ δοθὲν ἄθροισμα,

ἢ ὁ μικρότερος πλέον ὁ μικρότερος πλέον ἡ διαφορὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα . . . . . . $\chi+\chi+\beta=\alpha$

ἢ δὶς ὁ μικρότερος πλέον ἡ διαφορὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα . . . . $2\chi+\beta=\alpha$

ἑπομένως δὶς ὁ μικρότερος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα μεῖον ἡ διαφορὰ . . . . $2\chi=\alpha-\beta$

καὶ ἅπαξ ὁ μικρότερος ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος μεῖον τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς . . . . $\chi=\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}$

ἑπομένως γίνεται γνωςὸς καὶ ὁ μεγαλήτερος

$$\chi+\beta=\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}+\beta=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$$

Ἐπειδὴ ἡ μορφὴ τῶν δύο τούτων ἐξαγομένων εἶναι ἀνεξάρτητος πάσης μερικῆς τιμῆς, ἥτις δύναται νὰ δοθῇ εἰς τὰ γράμματα α καὶ β, ἕπεται ὅτι γνωρίζοντες τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, εὑρίσκομεν τὸν μὲν μεγαλήτερον προσθέτοντες εἰς τὸ ἡμιάθροισμα $\frac{\alpha}{2}$ τὴν ἡμιδιαφορὰν $\frac{\beta}{2}$, τὸν δὲ μικρότερον, ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὸ ἡμιάθροισμα τὴν ἡμιδιαφοράν.

Οὕτως ἔστω 237 τὸ δεδομένον ἄθροισμα καὶ 99 ἡ διαφορά.

ὁ μεγαλήτερος ἀριθμὸς εἶναι $\frac{237}{2}+\frac{99}{2}=\frac{237+99}{2}=\frac{336}{2}=168$

ὁ δὲ μικρότερος . . . . $\frac{237}{2}-\frac{99}{2}=\frac{237-99}{2}=\frac{138}{2}=69.$

τῷ ὄντι $168+69=237$, καὶ $168-69=99$.

§ 5. *Πρόβλημα β'.* Νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν α εἰς τρία μέρη τοιαῦτα, ὥστε ἡ διαφορὰ τοῦ μικροτέρου πρὸς τὸν μέσον νὰ ἦναι β καὶ ἡ τοῦ μέσου πρὸς τὸν μεγαλήτερον νὰ ἦναι γ.

Λύσις. Σημειοῦμεν τὸ μικρότερον μέρος διὰ χ
τὸ μέσον θέλει εἶσθαι . . . . $\chi+\beta$
τὸ μεγαλήτερον . . . . $\chi+\beta+\gamma$
ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν μερῶν ἰσοῦται
μὲ τὸ ὅλον, λοιπὸν ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν . . . . $3\chi+2\beta+\gamma=\alpha$
ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὰ δύο μέρη 2β καὶ γ συνάγομεν . . . . $3\chi=\alpha-2\beta-\gamma$
καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ 3 . . . . $\chi=\frac{\alpha-2\beta-\gamma}{3}$.

Μεταφράζοντες τὸ ἀλγεβρικὸν τοῦτο ἐξαγόμενον εἰς κοινὴν γλῶσσαν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα· « Ἵνα εὕρωμεν τὸ μικρότερον μέρος πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν μεριστέον ἀριθμὸν τὸ διπλάσιον τῆς διαφορᾶς τοῦ μικροτέρου πρὸς τὸν μέσον καὶ τὴν διαφορὰν τοῦ μέσου πρὸς τὸν μεγαλήτερον, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ ὑπόλοιπον διὰ τοῦ 3. » Εὑρεθέντος δὲ τοῦ μικροτέρου μέρους εὐκόλως προσδιορίζονται καὶ τὰ λοιπά.

Οὕτως $\alpha=90, \beta=10, \gamma=16$ εὑρίσκομεν διὰ τὸ μικρότερον μέρος

$$\chi=\frac{90-20-16}{3}=\frac{54}{3}=18$$

ἑπομένως τὸ μέσον εἶναι 28 καὶ τὸ μεγαλήτερον 44. Καὶ τῷ ὄντι

$$18+28+44=90.$$

ΣΗΜ. Κατὰ τὸ ἀφῃρημένον τοῦτο πρόβλημα, ὁ μαθητὴς δύναται πρὸς ἄσκησιν νὰ λύσῃ τὸ ἑξῆς συγκεκριμένον. Κύριός τις ἵνα ἐμψυχώσῃ τὸν ὑπηρέτην αὐτοῦ, ὑπεσχέθη ν' αὐξάνῃ κατ' ἔτος τὸν μισθόν. Οὕτω λοιπὸν τὸ μὲν δεύτερον ἔτος ηὔξησεν κατὰ 36 δραχμάς, τὸ δὲ τρίτον κατὰ 72. Εἰς τὸ τέλος δὲ τῶν τριῶν ἐτῶν ὁ ὑπηρέτης ἔλαβε 360 δραχ. Ζητεῖται πόσον ἔλαβε καθ' ἕκαστον ἔτος.

Σημειοῦμεν μόνον ὅτι μεριστέος εἶναι ὁ ἀριθμὸς 360, οἱ δὲ τρεῖς ζητούμενοι ἐτήσιοι μισθοὶ εἶναι τὰ τρία μέρη.

§ 6. Ἐννοοῦμεν ἤδη τὴν ἐκ τῆς χρήσεως τῶν γραμμάτων προκύπτουσαν ὠφέλειαν. Ἐπειδὴ ἐπὶ τῶν γραμμάτων αἱ ἀριθμητικαὶ πράξεις σημειοῦνται μόνον, τὸ ἐξαγόμενον φυλάττει τὸ ἴχνος τῶν πράξεων, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν, ἵνα εὕρωμεν τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων· ἐνῷ ἐπὶ τῶν μερικῶν ἀριθμῶν διὰ τῆς ἐκτελέσεως τῶν πράξεων οἱ διδόμενοι ἀριθμοὶ συγχωνεύονται πρὸς παραγωγὴν τοῦ ζητουμένου, καὶ τὸ ἐξαγόμενον οὐδαμῶς μαρτυρεῖ τὸν τρόπον τοῦ σχηματισμοῦ αὐτοῦ. Οὕτως εἰς τὸ πρῶτον πρόβλημα (§ 3) αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαὶ τῶν ἀγνώστων **24** καὶ **43** δὲν φανερόνουσι τίνι τρόπῳ ἐσχηματίσθησαν ἐκ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν· ὥστε ἡ Ἄλγεβρα δὲν ἀρκεῖται εἰς τὴν λύσιν ζητήματός τινος, ἀλλὰ δεικνύει τὸν τρόπον τῆς λύσεως ὅλων τῶν ζητημάτων τῆς αὐτῆς φύσεως, εἰς τὴν ἐκφώνησιν τῶν ὁποίων διαφέρουσι μόνον αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῶν δεδομένων.

Αἱ ἐκφράσεις $\chi=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$ καὶ $\chi=\frac{\alpha-2\beta-\gamma}{3}$, τὰς ὁποίας εὕρομεν εἰς τὰ προηγηθέντα προβλήματα, ὀνομάζονται *τύποι*.

§ 7. Ἵνα ἴδωμεν προσέτι πόσον ἡ χρῆσις τῶν γραμμάτων διευκρινίζει καὶ γενικεύει τὴν ἀπόδειξιν τῶν θεωρημάτων, λαμβάνομεν τὸ ἑξῆς παράδειγμα.

Ὁποίαν μεταβολὴν φέρει εἴς τι κλάσμα ἡ πρόσθεσις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἰς τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ;

Ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ προτεθὲν κλάσμα καὶ μ ὁ ἀριθμὸς, τὸν ὁποῖον προσθέτομεν εἰς τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ· πρέπει νὰ συγκρίνωμεν τὰ δύο κλάσματα. $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\alpha+\mu}{\beta+\mu}$

Ἐὰν ἀχθῶσι τὰ κλάσματα ταῦτα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν τρέπονται εἰς $\frac{\alpha\beta+\alpha\mu}{\beta^2+\beta\mu}$, $\frac{\alpha\beta+\beta\mu}{\beta^2+\beta\mu}$ (1)

πρέπει λοιπὸν νὰ συγκρίνωμεν τοὺς ἀριθμητὰς $\alpha\beta+\alpha\mu$, $\alpha\beta+\beta\mu$. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέρος αὐτῶν $\alpha\beta$ εἶναι κοινόν, ἀρκεῖ νὰ συγκρίνωμεν τὰ δεύτερα μέρη $\alpha\mu$ καὶ $\beta\mu$, ἢ μόνον τὸ α καὶ β, διότι τὸ μ εἶναι κοινὸς παράγων ἀμφοτέρων.

Ἐὰν λοιπὸν $\beta>\alpha$, τουτέστιν ἐὰν τὸ προτεθὲν κλάσμα ἦναι κύριον, τὸ δεύτερον κλάσμα εἶναι μεῖζον τοῦ πρώτου. Ἐὰν $\alpha<\beta$, τουτέστιν, ἐὰν τὸ προτεθὲν κλάσμα ἦναι καταχρηστικὸν, τὸ δεύτερον κλάσμα εἶναι μικρότερον τοῦ πρώτου.

Ἀποδεικνύεται λοιπὸν γενικῶς ὅτι προστιθεμένου τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἰς τοὺς δύο ὅρους κλάσματός τινος, τὸ κλάσμα τοῦτο αὐξάνει μὲν, ἐὰν ἦναι κύριον, ἐλαττοῦται δὲ, ἐὰν ἦναι καταχρηστικόν.

---

(1) Ἡ ἀναγωγὴ τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ἐκτελεῖται ὡς ἡ τῶν ἀριθμητικῶν· δὲν ἐμμένομεν ἐνταῦθα νὰ δείξωμεν πῶς ἐκτελεῖται ὁ διὰ τὴν ἀναγωγὴν ἀναγκαῖος ἀλγεβρικὸς πολλαπλασιασμὸς, ἵνα μὴ διακόψωμεν τὴν μικρὰν σειρὰν τῶν παρατηρήσεων, δι' ὧν φθάνομεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος.

§ 8. Σκεπτόμενοι ἤδη ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω ζητημάτων παρατηροῦμεν, ὅτι ἂν καὶ ἕκαστον τούτων ἔχῃ ἰδίαν ἐπίλυσιν, ἐν τοσούτῳ πολλαὶ ἀριθμητικαὶ πράξεις εἶναι κοιναί· ὅθεν καταφαίνεται ἡ ἀνάγκη τῆς ἐν γένει ἐκθέσεως τῶν κανόνων, καθ' οὓς ἐκτελοῦνται αἱ πράξεις αὗται. Τοῦτο δὲ συνιστᾷ τὸν ἀλγεβρικὸν ὑπολογισμόν, τοῦ ὁποίου μέρος μὲν ἐκτίθεται εἰς τὸ προσεχὲς κεφάλαιον καὶ μέρος ἐν τοῖς ἐφεξῆς εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΑΛΓΕΒΡΙΚΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ.

Προοιμιώδεις ὁρισμοί.

§ 9. Πᾶσα ποσότης γεγραμμένη εἰς ἀλγεβρικὴν γλῶσσαν, τουτέστι διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν σημείων, ὀνομάζεται ποσότης *ἀλγεβρικὴ* ἢ ποσότης *γραμματική*, ἢ μᾶλλον *ἀλγεβρικὴ ἔκφρασις* τῆς προτεθείσης ποσότητος.

Οὕτω 3α εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ ἔκφρασις τοῦ τριπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ α· ὁμοίως $5\alpha^2$ εἶναι ἡ τοῦ πενταπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ α καὶ $7\alpha^3\beta^2$ εἶναι ἡ τοῦ ἑπταπλασίου γινομένου τοῦ κύβου τοῦ α ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ β.

ΣΗΜ. Εἶναι καλὸν ὁ μαθητὴς νὰ γυμνασθῇ εἰς τὴν διὰ λέξεων μετάφρασιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἐκφράσεων, καὶ τὸ ἐναντίον εἰς τὴν ἀλγεβρικὴν γραφὴν τῶν διὰ λέξεων ἐκφραζομένων σχέσεων μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν. Ἡ διττὴ αὕτη ἄσκησις οἰκειόνει αὐτὸν μὲ τὴν ἐπιστήμην εἰς τὰς διαφόρους αὐτῆς ἐφαρμογάς.

Οὕτως ἡ διὰ λέξεων ἔκφρασις, τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν γράφεται ἀλγεβρικῶς $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$

Μονώνυμον ἢ ἁπλῶς ὅρος ὀνομάζεται πᾶσα ἀλγεβρικὴ ποσότης, ἥτις δὲν συνδέεται μὲ ἄλλην διὰ τοῦ σημείου τῆς προσθέσεως ἢ τῆς ἀφαιρέσεως π. χ. 3α, $6\alpha^2$, $7\alpha^3\beta^2$ εἶναι μονώνυμα.

Πολυώνυμον λέγεται τὸ σύνολον πολλῶν μονωνύμων συνδεομένων πρὸς ἄλληλα διὰ τῶν σημείων $+$ ἢ $-$. π. χ. $2\alpha^2-3\alpha\beta+4\beta^2$ Τὰ μονώνυμα $2\alpha^2$, $3\alpha\beta$, $4\beta^2$ εἶναι οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου.

Τὸ ἐκ δύο ὅρων συγκείμενον πολυώνυμον λέγεται δυώνυμον, τὸ δ' ἐκ τριῶν *τριώνυμον*.

Ἐκ τῶν ὅρων πολυωνύμου *τινὸς* ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων προηγεῖται τὸ σημεῖον $+$ ὀνομάζονται *ὅροι θετικοί*· ἐκεῖνοι δέ, τῶν ὁποίων προηγεῖται τὸ σημεῖον $-$ ὀνομάζονται *ἀρνητικοί*.

Πᾶν μονώνυμον μεμονωμένον καὶ ἄνευ σημείου τινὸς γεγραμμένον θεωρεῖται ὡς ἔχον πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον $+$.

Ὡσαύτως ὁ πρῶτος ὅρος παντὸς πολυωνύμου πρέπει νὰ θεωρῆται ὡς θετικός, ὅταν δὲν προηγῆται αὐτοῦ οὐδὲν σημεῖον.

Ἵνα σημειώσωμεν ὅτι πρᾶξίς τις ἀφορᾷ ὅλον τὸ πολυώνυμον καὶ οὐχὶ ἕνα ἐκ τῶν ὅρων αὐτοῦ περικλείομεν συνήθως τὸ πολυώνυμον μεταξὺ παρενθέσεων ( ), ὡς ἕπεται, $(\alpha^2-3\alpha\beta+4\gamma)$ καὶ ἔπειτα θέτομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον δεικνύει τὴν πρᾶξιν εἰς τὸ πλάγιον τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης παρενθέσεως, εἰς τὰ δεξιὰ ἢ εἰς τ' ἀριστερά, καθὼς ἠθέλαμεν θέσει αὐτὸ εἰς τὰ δεξιὰ ἢ εἰς τ' ἀριστερὰ ἁπλοῦ τινὸς γράμματος, εἰς τὸ ὁποῖον ἐφηρμόζετο ἡ αὐτὴ πρᾶξις.

Π. χ. Ἵνα φανερώσωμεν ὅτι ἐκ τοῦ μονωνύμου $3\alpha^2\beta$ πρέπει ν' ἀφαιρεθῇ τὸ πολυώνυμον $5\alpha^2+4\alpha-7$, γράφομεν $3\alpha^2\beta-(5\alpha^2+4\alpha-7)$. Ἵνα σημειώσωμεν δὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ δυωνύμου $\alpha+\beta$ ἐπὶ τὸ τριώνυμον $\gamma+\delta+\varepsilon$ γράφομεν $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta+\varepsilon)$. Εἰς τὴν διαίρεσιν μόνον αἱ παρενθέσεις δὲν εἶναι ἀναγκαῖαι, ἐκτὸς ἐὰν ἡ πρᾶξις σημειοῦται διὰ δύο στιγμῶν : οὕτως $\frac{3\alpha-2\beta}{2\gamma-5\delta}$ καὶ $(3\alpha-2\beta):(2\gamma-5\delta)$ σημαίνουσιν ἐπίσης τὸ πηλίκον τοῦ $3\alpha-2\beta$ διὰ $2\gamma-5\delta$.

Ἵνα δείξωμεν ὅτι πολυώνυμόν τι πρέπει νὰ ὑψωθῇ εἰς δύναμίν τινα, κλείομεν αὐτὸ ἐντὸς δύο παρενθέσεων καὶ ἐκτὸς τῆς πρὸς τὰ δεξιὰ παρενθέσεως καὶ ὀλίγον ἄνω γράφομεν τὸν ἐκθέτην, ὅστις δεικνύει τὸν βαθμὸν τῆς δυνάμεως.

Οὕτω τὸ τετράγωνον τοῦ $\alpha+\beta$ γράφεται $(\alpha+\beta)^2$
ἡ τρίτη δύναμις τοῦ $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ γράφεται $(\alpha^2+2\alpha\beta^2+\beta^2)^3$

Ὡσαύτως ἐγκλείεται ἐντὸς παρενθέσεων καὶ τὸ μονώνυμον, ὅταν ἡ συνήθης σημείωσις (§ 2) δὲν δεικνύῃ τὴν πρᾶξιν, περὶ τῆς ὁποίας πρόκειται καθ' ὁλοκληρίαν, τόσον ὡς πρὸς τὸ σημεῖον καθὼς καὶ ὡς πρὸς ὅλα τὰ εἰσερχόμενα γράμματα. π. χ. ὁ κύβος τοῦ $5\alpha^3\beta^2\gamma$ σημειοῦται οὕτως $(5\alpha^3\beta^2\gamma)^3$. Διότι ἐὰν ἐγράφομεν $5\alpha^3\beta^2\gamma^3$ ἄνευ παρενθέσεως, ἠθέλαμεν σημειώσει ὅτι μόνον τὸ γράμμα γ ὑψοῦται εἰς τὸν κύβον, ἐνῷ ὁλόκληρον τὸ γινόμενον $5\alpha^3\beta^2\gamma$ πρέπει νὰ κυβισθῇ. Ὡσαύτως διὰ νὰ σημειώσωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ $-\alpha$ πρέπει νὰ γράψωμεν $(-\alpha)^2$.

§ 10. *Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικῆς* τινὸς ἐκφράσεως εἶναι ὁ ἀριθμός ἢ μᾶλλον τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ἀντικαθιστῶντες διὰ μερικῶν ἀριθμῶν τὰ εἰς αὐτὴν εἰσερχόμενα γράμματα καὶ ἐκτελοῦντες ἐπ' αὐτῶν τὰς σημειωμένας πράξεις.

Π. χ. Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $\chi=\frac{\alpha\tau\psi}{100}$

θέσωμεν $\alpha=1250$, $\tau=2+\frac{8}{12}=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}$, $\psi=4,50$.

εὑρίσκομεν $\chi=\frac{1250\times4,50\times\frac{8}{3}}{100}=\frac{1250\times4,50\times8}{100\times3}=\frac{45000}{300}=150.$

τὸ τελευταῖον τοῦτο ἐξαγόμενον 150 εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ προτεθέντος τύπου, ὅταν τὰ γράμματα α, τ, ψ ἔχωσι τὰς ἀνωτέρω ὁρισθείσας τιμάς.

Ὡσαύτως ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ $5\alpha^2\beta^3$, ὅταν $\alpha=4$ καὶ $\beta=2$ εἶναι

$$5\alpha^2\beta^3=5\times4^2\times2^3=5\times16\times8=640.$$

Ἔστω προσέτι ἡ ἔκφρασις $5\alpha^2\beta^3-3\alpha\beta\gamma+2\alpha\beta$

ὅταν $\alpha=4$, $\beta=2$, $\gamma=3$, ἀριθμητικὴ τιμὴ αὐτῆς εἶναι 584.

$$5\times4^2\times2^3-3\times4\times2\times3+2\times4\times2=640-72+16=584.$$

§ 11. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ πολυωνύμου τινὸς εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν θετικῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀρνητικῶν ὅρων αὐτοῦ.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ πολυωνύμου τινὸς δὲν μεταβάλλεται ὅταν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ὅρων αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ διατηρήσωμεν τ' ἀμοιβαῖα σημεῖα αὐτῶν. Καὶ τῷ ὄντι καθ' ὅλας τὰς μεταλλαγὰς ὑπάρχουσι πάντοτε οἱ αὐτοὶ ὅροι θετικοὶ καὶ οἱ αὐτοὶ ἀρνητικοί· ἡ παρατήρησις αὕτη εἶναι ὠφέλιμος, διότι δι' αὐτῆς ἁπλοποιοῦμεν πολλάκις τὰ πολυώνυμα.

Ὅμοιοι ὅροι καὶ ἀναγωγὴ αὐτῶν.

§ 12. Ὅμοιοι ὅροι ὀνομάζονται οἱ συνιστάμενοι ἐκ τῶν αὐτῶν γραμμάτων ἐχόντων τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας καὶ μόνον κατὰ τὰ σημεῖα καὶ τοὺς συντελεστὰς δυνάμενοι νὰ διαφέρωσιν. Οὕτως $7\alpha\beta$ καὶ $5\alpha\beta$ εἶναι ὅροι ὅμοιοι· ὡσαύτως $4\alpha^3\beta$ καὶ $5\alpha^3\beta$. Οἱ ὅροι ὅμως $8\alpha^2\beta$ καὶ $7\alpha\beta^2$, ἢ $5\alpha^2\beta$ καὶ $3\alpha^2\beta\gamma$ εἶναι ἀνόμοιοι, ἐπειδὴ διαφέρουσιν οἱ μὲν κατὰ τοὺς ἐκθέτας, οἱ δὲ κατὰ τὰ γράμματα.

Συμβαίνει συχνάκις ὥστε πολυώνυμόν τι νὰ περιέχῃ πολλοὺς ὁμοίους ὅρους, καὶ τότε εἶναι δεκτικὸν ἁπλουστέρας μορφῆς, ὡς ἑξῆς.

ά. Ἔστω τὸ πολυώνυμον $4\alpha^2\beta-3\alpha^2\gamma+9\alpha\gamma^2-2\alpha^2\beta+7\alpha^2\gamma-6\beta^3$ εἰς τὸ ὁποῖον παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ ὅροι $4\alpha^2\beta-2\alpha^2\beta$ ἄγονται εἰς $2\alpha^2\beta$ παρομοίως $7\alpha^2\gamma-3\alpha^2\gamma$ ἄγονται εἰς $4\alpha^2\gamma$, ὥστε τὸ πολυώνυμον ἀποβαίνει $2\alpha^2\beta+4\alpha^2\gamma+9\alpha\gamma^2-6\beta^3$.

β'. Ἔστωσαν εἴς τι πολυώνυμον οἱ ὅμοιοι ὅροι

$$+9\alpha^3\beta\gamma^2, -4\alpha^3\beta\gamma^2, +6\alpha^3\beta\gamma^2, -8\alpha^3\beta\gamma^2, +11\alpha^3\beta\gamma^2.$$

κατὰ πρῶτον τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν θετικῶν ὅρων

$$+9\alpha^3\beta\gamma^2+6\alpha^3\beta\gamma^2+11\alpha^3\beta\gamma^2 \text{ ἰσοῦται μὲ } 26\alpha^3\beta\gamma^2,$$

τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀρνητικῶν

$$-4\alpha^3\beta\gamma^2-8\alpha^3\beta\gamma^2 \text{ ἰσοῦται μὲ } -12\alpha^3\beta\gamma^2,$$

λοιπὸν τὸ ὅλον τῶν πέντε προτεθέντων ὅρων ἄγεται εἰς

$$26\alpha^3\beta\gamma^2-12\alpha^3\beta\gamma^2 \text{ καὶ ἑπομένως εἰς } 14\alpha^3\beta\gamma^2.$$

γ'. Δυνατὸν νὰ συμβῇ, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρνητικῶν νὰ ἦναι μεῖζον τοῦ ἀθροίσματος τῶν θετικῶν εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀφαιροῦμεν τὸν θετικὸν συντελεστὴν ἀπὸ τὸν ἀρνητικόν, καὶ θέτομεν εἰς τὸ ἐξαγόμενον τὸ σημεῖον —. Ὑποτεθείσθω π. χ. ὅτι $+5\alpha^2\beta$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν ὅρων καὶ $-8\alpha^2\beta$ εἶναι τὸ τῶν ἀρνητικῶν ἐπειδὴ $-8\alpha^2\beta$ ἄγεται εἰς $-5\alpha^2\beta-3\alpha^2\beta$, ἕπεται ὅτι $+5\alpha^2\beta-8\alpha^2\beta$ ἰσοδυναμεῖ μὲ $+5\alpha^2\beta-3\alpha^2\beta$, ἤτοι μὲ $-3\alpha^2\beta$. Ὅθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

« Ἵνα πράξωμεν ἀναγωγὴν εἰς τοὺς ὁμοίους ὅρους, σχηματίζομεν » κατὰ πρῶτον ἕνα μόνον ὅρον θετικὸν ἀπὸ ὅλους τοὺς ὅρους, εἰς τοὺς » ὁποίους προηγεῖται τὸ σημεῖον +, τοῦτο δὲ γίνεται, ἀφοῦ προστεθῶσιν οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τούτων καὶ τεθῇ τὸ ἄθροισμα αὐ» τῶν ὡς συντελεστὴς τοῦ κοινοῦ γραμματικοῦ μέρους. Σχηματί» ζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἕνα μόνον ὅρον ἀρνητικὸν ἀπὸ ὅ» λους τοὺς ὅρους, τοὺς ἔχοντας πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον —. Ἀφαι» ροῦμεν ἔπειτα τὸ μικρότερον ἄθροισμα ἀπὸ τὸ μεγαλήτερον, εἰς » δὲ τὸ ἐξαγόμενον δίδομεν τὸ σημεῖον τοῦ μεγαλητέρου. »

ΣΗΜ. Κρίνομεν ὠφέλιμον νὰ σημειώσωμεν διὰ τοὺς πρωτοπείρους, ὅτι ἡ ἀναγωγὴ ἐκτελεῖται ἐπὶ τῶν συντελεστῶν, οὐδέποτε δὲ ἐπὶ τῶν ἐκθετῶν.

Εὑρίσκομεν κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον, ὅτι

$6\alpha^2\beta - 8\alpha^2\beta - 9\alpha^2\beta + 15\alpha^2\beta - \alpha^2\beta$ ἄγεται εἰς $+3\alpha^2\beta$.

$11\alpha\beta\gamma^2 - \alpha\beta\gamma^2 - 7\alpha\beta\gamma^2 - 8\alpha\beta\gamma^2 + 4\alpha\beta\gamma^2$ » εἰς $-\alpha\beta\gamma^2$.

Ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων εἶναι ἰδιαιτέρα τις πρᾶξις τῆς Ἀλγέβρας, ἥτις ἀπαντᾶται εἰς τὴν Πρόσθεσιν, Ἀφαίρεσιν, Πολλαπλασιασμὸν καὶ Διαίρεσιν. Τῶν ἀλγεβρικῶν τούτων πράξεων τὴν ἀνάπτυξιν θέλομεν ἀρχίσει ἀμέσως.

§ 13. Σκοπὸς τῆς ἐπὶ ἀλγεβρικῶν ἐκφράσεων ἐκτελουμένης πράξεως εἶναι τὸ ν' ἀντικαταστήσῃ τὴν ἀριθμητικὴν πρᾶξιν, ἥτις θὰ ἐκτελεῖτο ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν αὐτῶν, ἐὰν αἱ τιμαὶ αὗται ἦσαν γνωσταί. Καὶ καθὼς ἡ ἀριθμητικὴ πρᾶξις θὰ εἶχεν ὡς ἐξαγόμενον ἕνα *μόνον* ἀριθμόν, οὕτως ἡ ἀλγεβρικὴ πρᾶξις ἔχει σκοπὸν νὰ εὕρῃ μίαν *μόνην* ἀλγεβρικὴν ἔκφρασιν, ἔχουσαν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ὡς ἀριθμητικὴν τιμήν, οἱαιδήποτε καὶ ἂν ὦσιν αἱ τιμαὶ τῶν εἰς τὰς δεδομένας ἐκφράσεις εἰσερχομένων γραμμάτων.

Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ἀλγεβρικαὶ πράξεις ἔχουσι τὸν αὐτὸν σκοπὸν μὲ τὰς ἀναλόγους ἀριθμητικὰς πράξεις, δὲν ἐπαναλαμβάνομεν ἐδῶ τοὺς ὁρισμοὺς αὐτῶν, οἱ ὁποῖοι πρέπει νὰ ἦναι ἱκανῶς γνωστοὶ εἰς τοὺς σπουδάσαντας τὴν ἀριθμητικήν. Ὁ τρόπος ὅμως τοῦ ἐκτελεῖν αὐτὰς δὲν εἶναι ὁ αὐτός, ἐπειδὴ τὰ σύμβολα εἶναι διάφορα. Πολλάκις αἱ πράξεις αὗται ἄγονται εἰς ἁπλᾶς σημειώσεις, καὶ πολλάκις πρέπει πραγματικῶς νὰ ἐκτελεσθῶσι, καὶ τότε ἀπαιτοῦνται κανόνες ἰδιαίτεροι ὡς πρὸς τὰ σύμβολα, τὰ ὁποῖα μεταχειριζόμεθα.

Γενικαὶ ἀρχαὶ Προσθέσεως καὶ Ἀφαιρέσεως.

§ 14. Οἱ κανόνες τῆς ἀλγεβρικῆς Προσθέσεως καὶ Ἀφαιρέσεως ἐπιστηρίζονται ἐπὶ τῶν ἑξῆς ἀρχῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι προφανεῖς.

ά. Τὸ ἄθροισμα μένει τὸ αὐτὸ καθ' οἱανδήποτε τάξιν προστεθῶσι τὰ μέρη αὐτοῦ. Π. χ. $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\gamma+\alpha+\delta+\beta$.

β΄. Ἵνα προσθέσωμεν εἰς ἀριθμόν τινα τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἄλλων, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν ἕκαστον τούτων,

$$\alpha+(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon.$$

γ΄. Ἵνα προσθέσωμεν εἰς ἀριθμόν τινα α τὴν διαφορὰν $\beta-\gamma$ δύο ἄλλων, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς αὐτὸν τὸν πρῶτον ἀριθμὸν β, καὶ ἐκ τοῦ ἐξαγομένου ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν δεύτερον γ

$$\alpha+(\beta-\gamma)=\alpha+\beta-\gamma.$$

δ΄. Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπό τινα ἀριθμὸν τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἄλλων ἀρκεῖ ν' ἀφαιρέσωμεν διαδοχικῶς ἕκαστον ἀριθμὸν ἐκ τῶν συνιστώντων τὸ ἄθροισμα. $\alpha-(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon.$

ε΄. Ἵν' ἀφαιρέσωμεν ἀπό τινα ἀριθμὸν α τὴν διαφορὰν $\beta-\gamma$ δύο ἄλλων, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς αὐτὸν τὸν δεύτερον γ, καὶ ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν πρῶτον β ἐκ τοῦ ἀθροίσματος.

$$\alpha-(\beta-\gamma)=\alpha+\gamma-\beta$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς τελευταίας ταύτης ἀρχῆς παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν προστεθῇ καὶ εἰς τοὺς δύο ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Ὅθεν ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν	α	καὶ	$\beta-\gamma$
εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τῶν »	$\alpha+\gamma$	»	$\beta-\gamma+\gamma$
ἢ μὲ τὴν τῶν »	$\alpha+\gamma$	»	β
αὕτη δὲ εἶναι	$\alpha+\gamma-\beta$		

Πρόσθεσις.

§ 15. Κανών. «Τὸ ἄθροισμα πολλῶν μονωνύμων ἢ πολυωνύμων » εὑρίσκεται, ἀφοῦ γραφθῶσι ταῦτα τὸ ἓν κατ' ἐξακολούθησιν τοῦ » ἄλλου μὲ τὰ ἴδια αὐτῶν σημεῖα· ἐκτελεῖται ἔπειτα ἐπὶ τοῦ ἀθροί» σματος ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων, ὁσάκις ἔχει χώραν.»

Ἔστω Π μονώνυμόν τι ἢ πολυώνυμον, εἰς τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ προστεθῇ τὸ πολυώνυμον $\alpha-\beta+\gamma-\delta-\varepsilon+\zeta$.

Τὸ τελευταῖον τοῦτο πολυώνυμον δυνατὸν νὰ γραφθῇ οὕτως

$$\alpha+\gamma+\zeta-\beta-\delta-\varepsilon \cdot\cdot\cdot\cdot \quad (\S\ 11)$$

καὶ κατὰ τὴν δ΄. ἀρχὴν (§ 14)

$$(\alpha+\gamma+\zeta)-(\beta+\delta+\varepsilon)$$

πρόκειται λοιπὸν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν Π τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων, ἑκάτερος τῶν ὁποίων εἶναι ἄθροισμά τι, ὅθεν κατὰ τὴν γ΄. ἀρχὴν (§ 14) τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι

$$\Pi+(\alpha+\gamma+\zeta)-(\beta+\delta+\varepsilon)=$$
$$\Pi+\alpha+\gamma+\zeta-\beta-\delta-\varepsilon$$

κατὰ τὴν β΄. καὶ δ΄. ἀρχήν.

Καὶ ἀλλάσσοντες τὴν θέσιν τῶν ὅρων δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\Pi+\alpha-\beta+\gamma-\delta-\varepsilon+\zeta$$

καὶ τοῦτο εἶναι τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον ἤθελε δώσει ὁ ἀνωτέρω κανὼν τῆς Προσθέσεως.

Ἐὰν $\Pi=\mu-\nu+\pi-\rho$, τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι

$$\mu-\nu+\pi-\rho+\alpha-\beta+\gamma-\delta-\varepsilon+\zeta.$$

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν πλειότερα πολυώνυμα, προσθέτομεν τὸ δεύτερον εἰς τὸ πρῶτον κατὰ τὸν κανόνα, καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν προσθέτομεν ὁμοίως τὸ τρίτον καὶ ἐφεξῆς. Ἀλλ' οὕτω πράττοντες ἐφαρμόζομεν ἀκριβῶς τὸν ἐκτεθέντα κανόνα εἰς ὅλα τὰ πολυώνυμα.

Ὅταν εἰς τὰ προσθετέα πολυώνυμα ὑπάρχωσιν ὅμοιοι ὅροι ἀντὶ νὰ γράφωμεν αὐτὰ τὸ ἓν κατ' ἐξακολούθησιν τοῦ ἄλλου, κατὰ τὸν κανόνα, εἶναι προτιμότερον νὰ γράφωμεν αὐτὰ τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἄλλο, διατάσσοντες τοὺς ὅρους αὐτῶν, ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ ἦναι εἰς τὴν αὐτὴν στήλην. Θεωροῦντες δὲ ὅλους τούτους τοὺς ὅρους, ὡς ἀποτελοῦντας ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, πράττομεν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων. Γράφομεν οὕτως τὰ ἐξαγόμενα τῶν ἀναγωγῶν κατὰ σειράν, καὶ εἰς τὸ τέλος θέτομεν τοὺς ὅρους τοῦ ἀθροίσματος, οἵτινες δὲν ἔχουσιν ὁμοίους.

Παραδείγματα.

Α΄.

$$\begin{array}{r} 2\alpha^3-3\alpha^2\beta+4\alpha\gamma \\ 5\alpha^3+4\alpha^2\beta \\ -3\alpha^3-6\alpha^2\beta+3\alpha\gamma \\ \hline 4\alpha^3-5\alpha^2\beta+7\alpha\gamma \end{array}$$

Β΄.

$$\begin{array}{r} 5\alpha^2\beta^2-8\alpha^2\beta-7\alpha \\ 4\alpha^2\beta^2-6\alpha^2\beta+15\alpha \\ -2\alpha^2\beta^2+4\alpha^2\beta+6\alpha-4 \\ \hline 7\alpha^2\beta^2-10\alpha^2\beta+14\alpha-4 \end{array}$$

Ἀφαίρεσις.

§ 16. Κανών. « Ἵν' ἀφαιρέσωμεν δύο ἀλγεβρικὰς ποσότητας τὴν » μίαν ἀπὸ τὴν ἄλλην, γράφομεν τὴν ἀφαιρετέαν ποσότητα κατ' ἐ» ξακολούθησιν τῆς ἀπὸ τὴν ὁποίαν πρόκειται ν' ἀφαιρεθῇ, μεταβάλ-

» λοντες μόνον τὰ σημεῖα τῆς ἀφαιρετέας, καὶ πράττομεν ἐπὶ τοῦ » ἐξαγομένου τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, ἐὰν ἔχῃ χώραν. »

Ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν ποσότητα Π τὸ πολυώνυμον

$$\alpha-\beta+\gamma-\delta-\varepsilon+\zeta,$$

ἔχομεν ὡς ὑπόλοιπον $\Pi-\alpha+\beta-\gamma+\delta+\varepsilon-\zeta$.

ἐπειδὴ τὸ ἀφαιρετέον πολυώνυμον δύναται νὰ γραφθῇ οὕτως

$$\alpha+\gamma+\zeta-\beta-\delta-\varepsilon \text{ ἢ } \alpha+\gamma+\zeta-(\beta+\delta+\varepsilon).$$

καὶ ἐφαρμόζοντες τὴν ε. ἀρχὴν τοῦ § 14, εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον

$$\Pi+(\beta+\delta+\varepsilon)-(\alpha+\gamma+\zeta)$$

ἢ $\Pi+\beta+\delta+\varepsilon-\alpha-\gamma-\zeta$, . . . κατὰ τὴν β'. ἀρχήν.

ἢ $\Pi-\alpha+\beta-\gamma+\delta+\varepsilon-\zeta$, . . . (§ 11).

Καὶ τοῦτο εἶναι τὸ ἐξαγόμενον τὸ ὁποῖον δίδει ὁ ἐκτεθεὶς κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως.

Ἐὰν δὲ $\Pi=\mu-\nu+\pi-\rho$, θέλομεν ἔχει ὡς ὑπόλοιπον

$$\mu-\nu+\pi-\rho-\alpha+\beta-\gamma+\delta+\varepsilon-\zeta.$$

Προτεθείσθω π. χ. τὸ πολυώνυμον $5\alpha^2\beta^2-4\alpha^2\beta+5\alpha\gamma-3\alpha$

ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ . . . . . . $7\alpha^2\beta+3\alpha^2\beta^2-2\alpha\gamma-8\alpha$

κατὰ τὸν κανόνα ἔχομεν ὡς ὑπόλοιπον,

$$7\alpha^2\beta+3\alpha^2\beta^2-2\alpha\gamma-8\alpha-5\alpha^2\beta^2+4\alpha^2\beta-5\alpha\gamma+3\alpha.$$

Ἵνα πράξωμεν ὅμως εὐκολώτερον τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων ἅμα διακρίνωμεν αὐτοὺς ἐκ πρώτης ὄψεως, τοὺς γράφομεν ὑπὸ τοὺς ὁμοίους μὲ ἀντίθετα σημεῖα οὕτως

$$\begin{array}{ll} & 7\alpha^2\beta+3\alpha^2\beta^2-2\alpha\gamma-8\alpha \\ & 4\alpha^2\beta-5\alpha^2\beta^2-5\alpha\gamma+3\alpha \\ \hline \text{ὑπόλοιπον} & 11\alpha^2\beta-2\alpha^2\beta^2-7\alpha\gamma-5\alpha. \end{array}$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι δὲν ἀπαιτεῖται ἰδιαίτερος κανὼν, ὅταν πρόκηται ν' ἀφαιρέσωμεν μονώνυμόν τι ἀπό τινος ἀλγεβρικῆς ποσότητος, διότι ἀρκεῖ νὰ τὸ γράψωμεν κατ' ἐξακολούθησιν τῆς μειωτέας μὲ τὸ σημεῖον —.

ΣΗΜ. Ἐδῶ δὲν θεωροῦμεν εἰμὴ μονώνυμα θετικά.

§ 17. Κατὰ τὸν κανόνα τῆς ἀφαιρέσεως δυνάμεθα νὰ καθυποβάλλωμεν τὰ πολυώνυμα εἴς τινας μεταμορφώσεις.

Π. χ. $6\alpha^2-3\alpha\beta+2\beta^2-2\beta\gamma$

ἄγεται εἰς $6\alpha^2+2\beta^2-(3\alpha\beta+2\beta\gamma)$

ἢ εἰς $6\alpha^2-2\beta\gamma-(3\alpha\beta-2\beta^2)$

Αἱ μεταμορφώσεις αὗται, διὰ τῶν ὁποίων ἀναλύεται πολυώνυμόν τι εἰς δύο χωριστὰ μέρη διὰ τοῦ σημείου —, εἶναι πολλάκις ὠφελιμώταται εἰς τὴν Ἄλγεβραν.

Πολλαπλασιασμός.

§ 18. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ (§ 62) ἀποδειχθεῖσαν ἀρχὴν ὅτι « Τὸ γινόμενον δύο ἢ πλειοτέρων παραγόντων εἶναι πάντοτε τὸ αὐτὸ, καθ' οἱανδήποτε τάξιν ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμὸς » ἂς θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον τὴν περίστασιν, καθ' ἣν πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσωμεν μονώνυμον ἐπὶ μονώνυμον.

Ἔστω $7\alpha^3\beta^2$ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $4\alpha^2\beta\gamma$.

Τὸ γινόμενον δύναται κατὰ πρῶτον νὰ σημειωθῇ οὕτως.

$$7\alpha^3\beta^2 \times 4\alpha^2\beta\gamma$$

τὴν ἔκφρασιν ὅμως ταύτην δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν ἁπλουστέραν, παρατηροῦντες ὅτι κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἀρχὴν καὶ κατὰ τὴν σημασίαν τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων (§ 2—ζ') αὕτη ἄγεται εἰς

$$7 \times 4\alpha^3\alpha^2\beta^2\beta\gamma = 7 \times 4\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta\gamma = 28\alpha^5\beta^3\gamma.$$

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

« Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο μονώνυμα πρὸς ἄλληλα, πρέπει α'. » νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο συντελεστὰς αὐτῶν, β'. νὰ γράψω- » μεν κατ' ἐξακολούθησιν εἰς τὸ γινόμενον ὅλα τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα » εἰσέρχονται συγχρόνως εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ πολλαπλα- » σιαστὴν δίδοντες εἰς ἕκαστον τούτων ἐκθέτην ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα » τῶν δύο ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους τὸ κοινὸν τοῦτο γράμμα ἔχει εἰς » τοὺς δύο παράγοντας· γ'. νὰ γράψωμεν εἰς τὸ γινόμενον τὰ μὴ » κοινὰ γράμματα μὲ τοὺς ἰδίους αὐτῶν ἐκθέτας. »

Ὁ εἰς τοὺς συντελεστὰς ἀναφερόμενος κανὼν δὲν προσφέρει τινὰ δυσκολίαν. Ἵνα δώσωμεν δὲ λόγον περὶ τῶν ἐκθετῶν, παρατηροῦμεν, ὅτι ἐν γένει ἀριθμός τις α πρέπει νὰ εὑρίσκηται τοσάκις παράγων εἰς τὸ γινόμενον, ὁσάκις εὑρίσκεται εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ πολλαπλασιαστήν. Ὅθεν ἐπειδὴ οἱ ἐκθέται (§ 2) σημειοῦσι τὸν ἀριθμὸν τῶν παραγόντων, λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐκθετῶν τοῦ αὐτοῦ γράμματος σημειοῖ τὸν ἀριθμὸν τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου.

Εὑρίσκομεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα ὅτι

$$8\alpha^2\beta\gamma^2 \times 7\alpha\beta\gamma\delta^2 = 56\alpha^3\beta^2\gamma^3\delta^2,$$
$$12\alpha^3\beta^2\gamma\delta \times 8\alpha\beta\gamma^2 = 96\alpha^4\beta^3\gamma^3\delta,$$
$$8\alpha\beta\gamma \times 7\delta\varepsilon = 56\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon.$$

2

§ 19. Μεταβαίνομεν ἤδη εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν πολυωνύμων.

Ἔστωσαν κατὰ πρῶτον τὰ πολυώνυμα $\alpha+\beta+\gamma$ καὶ $\delta+\zeta$ συγκείμενα ἀπὸ μόνον θετικοὺς ὅρους· δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τὸ γινόμενον ὑπὸ τὴν μορφὴν $(\alpha+\beta+\gamma)\ (\delta+\zeta)$. Ἀλλ' ἔχομεν συχνάκις ἀνάγκην νὰ σχηματίσωμεν ἓν μόνον πολυώνυμον τοῦ γινομένου τούτου, καὶ εἰς τοῦτο συνίσταται κυρίως ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν πολυωνύμων.

Ὅθεν εἶναι φανερὸν, ὅτι τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma$ ἐπὶ $\delta+\zeta$ ἄγεται εἰς τὸ νὰ λάβωμεν τοσάκις $\alpha+\beta+\gamma$, ὅσας μοναδας ἔχει τὸ δ πλέον τοσάκις, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ ζ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο γινόμενα. Ἀλλὰ τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\alpha+\beta+\gamma$ ἐπὶ δ δηλοῖ νὰ λάβωμεν δ φορὰς ἕκαστον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα λοιπὸν

$$(\alpha+\beta+\gamma)\ (\delta+\zeta)=\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta+\alpha\zeta+\beta\zeta+\gamma\zeta.$$

Ὅθεν « Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο πολυώνυμα σύνθετα ἐκ θετι-
» κῶν ὅρων, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαδοχικῶς ἕκαστον ὅρον
» τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ
» νὰ προσθέσωμεν ὅλα τὰ μερικὰ γινόμενα. »

Ἐὰν οἱ ὅροι ἔχωσι συντελεστὰς καὶ ἐκθέτας ἀκολουθοῦμεν τοὺς περὶ πολλαπλασιασμοῦ τῶν μονωνύμων ἀποδοθέντας κανόνας (§ 18).

Π. χ.

$$\begin{array}{rl}
 & 3\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2 \\
 & 2\alpha+5\beta \\
\hline
 & 6\alpha^3+8\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2 \\
 & \quad\quad +15\alpha^2\beta+20\alpha\beta^2+5\beta^3 \\
\hline
\text{καὶ δι' ἀναγωγῆς} & 6\alpha^3+23\alpha^2\beta+22\alpha\beta^2+5\beta^3
\end{array}$$

§ 20. Θεωροῦντες ἤδη τὴν γενικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς περιέχουσι θετικοὺς καὶ ἀρνητικοὺς ὅρους, παρατηροῦμεν, ὅτι ἕκαστος τῶν τοιούτων παραγόντων ἐκφράζει διαφορὰν μεταξὺ τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τῶν θετικῶν ὅρων καὶ τῆς τῶν ἀρνητικῶν. Ὅθεν, ἕπεται, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο οἱωνδήποτε πολυωνύμων ἄγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο διωνύμων τοιούτων, $\alpha-\beta$ καὶ $\gamma-\delta$, εἰς τὰ ὁποῖα, τὸ μὲν α παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν ὅρων, τὸ δὲ β, τὸ τῶν ἀρνητικῶν τοῦ πολλαπλασιαστέου. Παρομοίως τὸ μὲν γ παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τὸ δὲ δ, τὸ τῶν ἀρνητικῶν αὐτοῦ. Ἂς ἴδωμεν λοιπὸν πῶς δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν, ὅστις ἐκφράζεται ὑπὸ $(\alpha-\beta)\ (\gamma-\delta)$.

Ὅθεν τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν α—β ἐπὶ γ—δ ἄγεται προφανῶς εἰς τὸ νὰ λάβωμεν α—β τοσάκις, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ γ, μεῖον τοσάκις, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ δ, ἢ μᾶλλον εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν α—β ἐπὶ γ καὶ ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ γινόμενον τοῦτο τὸ τοῦ α—β ἐπὶ δ. Ἀλλὰ τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν α—β ἐπὶ γ ἄγεται εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν γ ἐπὶ α—β, τὸ ὁποῖον δίδει αγ—βγ. Παρομοίως τὸ γινόμενον τοῦ α—β ἐπὶ δ δίδει αδ—βδ, καὶ ἐπειδὴ τὸ τελευταῖον τοῦτο γινόμενον πρέπει ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ προηγηθὲν αγ—βγ, ἄρα πρέπει νὰ μεταβάλωμεν τὰ σημεῖα τοῦ αδ—βδ καὶ νὰ τὸ γράψωμεν κατ' ἐξακολούθησιν τοῦ αγ—βγ. Οὕτως ἔχομεν

$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)=\alpha\gamma-\beta\gamma-\alpha\delta+\beta\delta.$$

Παρατηροῦντες τὸν τρόπον, καθ' ὃν ἐσχηματίσθη τὸ γινόμενον τοῦτο, βλέπομεν ὅτι τὰ μὲν γινόμενα τῶν θετικῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἶναι ταυτόσημα μὲ τοὺς ὅρους τοῦ πολλαπλασιαστέου, τὰ δὲ γινόμενα τῶν ἀρνητικῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἶναι ἑτερόσημα πρὸς τοὺς ὅρους τοῦ πολλαπλασιαστέου.

Διὰ τὸν μερικὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ὅρων ἀκολουθοῦμεν τοὺς διὰ τὰ μονώνυμα ἀποδοθέντας κανόνας (§ 18).

Ὁ κανὼν τῶν σημείων ὅστις εἶναι ὁ ἀναγκαιότερος εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν πολυωνύμων ἐκφωνεῖται οὕτως,

« Ὅταν οἱ δύο ὅροι τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τοῦ πολλαπλασια-
» στοῦ ἔχουσι τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ἐκ τούτων προκύπτον γινόμενον
» ἔχει τὸ σημεῖον +, ὅταν δὲ οἱ δύο ὅροι ἔχωσιν ἀντίθετα σημεῖα,
» τὸ γινόμενον ἔχει τὸ σημεῖον —. »

Λέγομεν ἀκόμη εἰς ἀλγεβρικὴν γλῶσσαν, ὅτι

$$\left.\begin{matrix}+\ \text{ἐπὶ}\ +\\ \text{ἢ}\ -\ \text{ἐπὶ}\ -\end{matrix}\right\}\text{δίδει}\ + \qquad \left.\begin{matrix}-\ \text{ἐπὶ}\ +\\ \text{ἢ}\ +\ \text{ἐπὶ}\ -\end{matrix}\right\}\text{δίδει}\ -.$$

Διὰ τῆς συντόμου ταύτης ἐκφράσεως ἐντυποῦται καλήτερα εἰς τὴν μνήμην ὁ κανών.

§ 21. Ἐφαρμόζομεν ἤδη τοὺς εἰρημένους κανόνας τῶν γραμμάτων, συντελεστῶν, ἐκθετῶν καὶ σημείων εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα.

$$\begin{array}{l}4\alpha^5-3\alpha^4\beta+7\alpha^3\beta^2\\ 3\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2\\ \hline 12\alpha^8-9\alpha^7\beta+21\alpha^6\beta^2\\ \qquad -4\alpha^7\beta+3\alpha^6\beta^2-7\alpha^5\beta^3\\ \qquad\qquad -4\alpha^6\beta^2+3\alpha^5\beta^3-7\alpha^4\beta^4\\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Γινόμενον}\\ \text{ἠγμένον}\end{matrix}\right\}\ 12\alpha^8-13\alpha^7\beta+20\alpha^6\beta^2-4\alpha^5\beta^3-7\alpha^4\beta^4.$$

§ 22. Εἰς τὴν προηγηθεῖσαν πρᾶξιν διετάξαμεν τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ πολλαπλασιαστὴν ὡς πρός τι κοινὸν γράμμα, τὸ α, τοιουτοτρόπως καὶ ἡ πρᾶξις ἀποβαίνει κανονικωτέρα καὶ ἡ ἀναγωγὴ εὐκολωτέρα.

Διάταξις πολυωνύμου τινὸς ὡς πρός τι γράμμα, α, εἶναι ἡ κατά τινα τάξιν γραφὴ τῶν ὅρων αὐτοῦ, ὥστε οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος τούτου νὰ χωρῶσιν ἐλαττούμενοι ἢ αὐξανόμενοι. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ πολυώνυμον λέγεται *διατεταγμένον* ὡς πρὸς τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ α, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται γράμμα *διατακτικόν*· εἰς δὲ τὴν δευτέραν, τὸ πολυώνυμον λέγεται *διατεταγμένον* ὡς πρὸς τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ διατακτικοῦ γράμματος.

Παρατηροῦντες τοὺς δύο παράγοντας καθὼς καὶ τὸ γινόμενον τοῦ προηγηθέντος πολλαπλασιασμοῦ βλέπομεν, ὅτι ἕκαστον τῶν πολυωνύμων τούτων εἶναι διατεταγμένον ὡς πρὸς τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ α.

Ὄντων δὲ οὕτω διατεταγμένων τῶν δύο πολυωνύμων ὡς πρός τι κοινὸν γράμμα, κάμνομεν εὐκολώτερον τὴν ἑξῆς παρατήρησιν, ἥτις εἶναι ὠφελιμωτάτη εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν πολυωνύμων.

« Ἐὰν δύο πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα ὡς πρὸς τὰς δυνάμεις
» κοινοῦ τινὸς γράμματος εἰς τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον ὡσαύτως θὰ
» ἦναι διατεταγμένον, ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι, ἄνευ ἀναγωγῆς, τὸ γινό-
» μενον τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον
» τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ γινομένου εἶναι,
» ἄνευ ἀναγωγῆς, τὸ γινόμενον τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ πολλαπλα-
» σιαστέου ἐπὶ τὸν τελευταῖον ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. »

Καὶ τῷ ὄντι τὰ δύο ταῦτα γινόμενα, καθὸ ἔχοντα τὸ γράμμα τοῦτο μὲ τὸν ὑψηλότερον βαθμόν, ἢ μὲ τὸν μικρότερον, παρὰ πᾶν ἄλλο μερικὸν γινόμενον, δὲν δύνανται νὰ ἦναι ὅμοια μὲ τὰ ἄλλα μερικὰ γινόμενα, καὶ ἑπομένως οὐδὲ νὰ ὑποκύψωσιν εἰς ἀναγωγήν, ὡς δείκνυται εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα.

Ἐκ τῆς παρατηρήσεως ταύτης συνάγομεν ὅτι « Ὅσην δήποτε ἀνα-
» γωγὴν καὶ ἂν λάβῃ τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων, θέλει ἔχει πάν-
» τοτε δύο ὅρους πολυωνύμων. »

Εἶναι δὲ εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι ὁ μέγιστος ἀριθμὸς τῶν ὅρων τοῦ γινομένου, ὅταν δὲν λαμβάνῃ ἀναγωγήν, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Τοῦτο εἶναι συνέπεια τοῦ εἰς τὸν § 19 ἀποδοθέντος κανόνος. Οὕτως, ἐὰν ἔχωμεν 5 ὅρους εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ 4 εἰς τὸν πολλαπλασιαστήν, τὸ γινόμενον θέλει ἔχει 5×4 ἤτοι 20 ὅρους. Καὶ ἐν γένει ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστέος σύγκειται ἀπὸ μ ὅρους, ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς ἀπὸ ν, τὸ γινόμενον θέλει ἔχει $\mu \times \nu$.

§ 23. Τὰ ἑξῆς παραδείγματα εἶναι ἀξιοσημείωτα διὰ τὴν μεγάλην αὐτῶν χρῆσιν.

$$\text{Α}'.\ (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$
$$\text{Β}'.\ (\alpha-\beta)(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$
$$\Gamma'.\ (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2.$$

Οἱαιδήποτε καὶ ἂν ἦναι αἱ τιμαὶ τῶν εἰς τοὺς δύο παράγοντας εἰσερχομένων γραμμάτων α καὶ β, τὰ γινόμενα σχηματίζονται πάντοτε κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον· ὁ σταθερὸς οὗτος τρόπος τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ γινομένου ἐκ τῶν παραγόντων αὐτοῦ ὀνομάζεται *νόμος*.

Οἱ τύποι τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων μεταφραζόμενοι εἰς κοινὴν γλῶσσαν δίδουσι τὰ ἑξῆς τρία θεωρήματα.

Α΄. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ποσοτήτων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης ποσότητος, πλέον τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς πρώτης ἐπὶ τὴν δευτέραν, πλέον τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας.

Β΄. Τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς δύο ποσοτήτων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης ποσότητος, μεῖον τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς πρώτης ἐπὶ τὴν δευτέραν, πλέον τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας.

Γ΄. Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος δύο ποσοτήτων ἐπὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν αὐτῶν ποσοτήτων.

Παραδείγματα.

$$(5\alpha^3+8\alpha^2\beta)^2=25\alpha^6+80\alpha^5\beta+64\alpha^4\beta^2$$
$$(5\alpha^2\beta-2\alpha\gamma)^2=25\alpha^4\beta^2-20\alpha^3\beta\gamma+4\alpha^2\gamma^2$$
$$(8\alpha^3+7\alpha\beta^2)(8\alpha^3-7\alpha\beta^2)=64\alpha^6-49\alpha^2\beta^4$$

§ 24. Δοθέντος πολυωνύμου τινός, δυνάμεθα ἐνίοτε, δι' ἁπλῆς ὄψεως, ν' ἀναλύσωμεν αὐτὸ εἰς παράγοντας, καὶ τοῦτο εἶναι συχνάκις ἀναγκαῖον. Ἔστω τὸ πολυώνυμον $25\alpha^4-30\alpha^3\beta+15\alpha^2\beta^2$, εἶναι φανερὸν ὅτι οἱ παράγοντες 5 καὶ α^2 εἰσέρχονται εἰς ἕκαστον ὅρον. Ὅθεν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸ πολυώνυμον ὑπὸ τὴν μορφήν.

$$5\alpha^2(5\alpha^2-6\alpha\beta+3\beta^2)$$

Παρομοίως τὸ διώνυμον $\quad 64\alpha^4\beta^6-25\alpha^2\beta^4$

τρέπεται εἰς $\quad (8\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^2)(8\alpha^2\beta^3-5\alpha\beta^2)$

Διότι οἱ ὅροι $64\alpha^4\beta^6$ καὶ $25\alpha^2\beta^4$ εἶναι τὰ τετράγωνα τῶν $8\alpha^2\beta^3$ καὶ $5\alpha\beta^2$, ἑπομένως ἡ προτεθεῖσα ἔκφρασις εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο τετραγώνων, δύναται ἄρα νὰ ἀναλυθῇ εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν τούτων τῶν παραγόντων, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν ἰδίων.

Διαίρεσις.

§ 25. Ἡ ἀλγεβρικὴ διαίρεσις, ὡς ἡ ἀριθμητική, ἔχει τὸν αὐτὸν σκοπόν.

Δοθέντος τοῦ γινομένου καὶ ἑνὸς τῶν παραγόντων νὰ εὕρωμεν τὸν ἕτερον παράγοντα.

Διαίρεσις τῶν μονωνύμων.

Ἔστω τὸ μονώνυμον $12\alpha^4\beta^3\gamma^2$ νὰ διαιρεθῇ διὰ $3\alpha\beta^2$

Τὸ πηλίκον σημειοῦται οὕτω $\dfrac{12\alpha^4\beta^3\gamma^2}{3\alpha\beta^2}$

Ἐνταῦθα ζητεῖται τρίτη ποσότης, ἥτις πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὴν δευτέραν νὰ παράγῃ τὴν πρώτην. Ὅθεν κατὰ τοὺς εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν μονωνύμων ἀποδοθέντας κανόνας, ἡ ζητουμένη ποσότης πρέπει νὰ ἦναι τοιαύτη, ὥστε ὁ συντελεστής, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 3, νὰ δίδῃ 12, λοιπὸν «ἵνα εὕρωμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ πηλίκου, » πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ διαιρετέου 12 διὰ τοῦ » συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου 3.» Διαιροῦντες 12 : 3 ἔχομεν 4.

Ὁ ἐκθέτης τοῦ γράμματος α εἰς τὸν διαιρετέον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τοῦ αὐτοῦ γράμματος εἰς τὸν διαιρέτην καὶ τὸ πηλίκον. Ἔχοντες λοιπὸν γνωστὸν τὸ ἄθροισμα 4 καὶ ἓν τῶν μερῶν αὐτοῦ 1, « ἵνα εὕρωμεν τὸ ἄλλο μέρος, τουτέστι τὸν ἐκθέτην τοῦ πηλίκου » ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν ἐκθέτην 4 τοῦ διαιρετέου τὸν ἐκθέτην 1 τοῦ » διαιρέτου » ἔχομεν οὕτως $4-1=3$· γράφομεν εἰς τὸ πηλίκον α^3.

Ὡσαύτως συλλογιζόμεθα καὶ διὰ τὸ β.

Ὡς πρὸς τὸ γ « ἐπειδὴ τὸ γράμμα τοῦτο δὲν εἰσέρχεται εἰς τὸν » διαιρέτην, γράφομεν αὐτὸ εἰς τὸ πηλίκον μὲ τὸν ἴδιον ἐκθέτην. » Ἐπειδὴ δὲ τὸ γράμμα τοῦτο εἰσέρχεται μόνον εἰς τὸ πηλίκον τουτέστιν εἰς τὸν ἕνα παράγοντα, πρέπει νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν ἐκθέτην, τὸν ὁποῖον ἔχει εἰς τὸ γινόμενον.

Τὸ ζητούμενον λοιπὸν πηλίκον εἶναι $4\alpha^3\beta\gamma^2$

Καὶ τῷ ὄντι $\qquad 4\alpha^3\beta\gamma^2\times 3\alpha\beta^2=12\alpha^4\beta^3\gamma^2.$

Ὅθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

« Ἵνα διαιρέσωμεν μονώνυμον διὰ μονωνύμου πρέπει νὰ διαιρέσω- » μεν τὸν συντελεστὴν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαι- » ρέτου, νὰ γράψωμεν τὰ κοινὰ γράμματα, δίδοντες εἰς ἕκαστον αὐ-

» τῶν ἐκθέτην ἴσον τῇ ὑπεροχῇ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου πρὸς τὸν » τοῦ διαιρέτου, καὶ νὰ γράψωμεν κατ' ἐξακολούθησιν ὑπὸ τοὺς αὐ» τοὺς ἐκθέτας τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα εἰσέρχονται εἰς τὸν διαιρε» τέον μόνον. »

§ 26. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω κανόνος συνάγομεν, ὅτι ἡ διαίρεσις τῶν μονωνύμων καθίσταται ἀδύνατος, πρῶτον, ἐὰν οἱ συντελεσταὶ δὲν ἦναι διαιρετοὶ ὁ εἷς διὰ τοῦ ἄλλου· δεύτερον, ἐὰν ἐκθέται τινὲς ἦναι μεγαλήτεροι εἰς τὸν διαιρέτην, ἢ εἰς τὸν διαιρετέον, τρίτον, ἐὰν ὁ διαιρέτης περιέχῃ ἓν ἢ περισσότερα γράμματα μὴ περιεχόμενα εἰς τὸν διαιρετέον.

Ὅταν μία τῶν τριῶν τούτων περιπτώσεων ἀκολουθήσῃ, τὸ πηλίκον μένει ὑπὸ μορφὴν κλασματικὴν τουτέστιν ὑπὸ ἔκφρασιν, εἰς τὴν ὁποίαν ἐμβαίνει ἀναγκαίως τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως, ἀλλὰ τὴν ὁποίαν δυνάμεθα συχνάκις ν' ἁπλουστεύσωμεν.

Ἔστω π. χ. $12\alpha^4\beta^2\gamma\delta$ νὰ διαιρεθῇ διὰ $8\alpha^2\beta\gamma^2$

Δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐνταῦθα ὡς πηλίκον ἀκέραιόν τι μονώνυμον, τουτέστιν ἐλεύθερον τοῦ σημείου τῆς διαιρέσεως· διότι 12 δὲν διαιρεῖται διὰ 8, καὶ πρὸς τούτοις, διότι ὁ ἐκθέτης τοῦ γ εἶναι μικρότερος εἰς τὸν διαιρετέον, ἢ εἰς τὸν διαιρέτην. Θέλομεν παραστήσει λοιπὸν τὸ ζητούμενον πηλίκον ὑπὸ τὴν μορφὴν $\dfrac{12\alpha^4\beta^2\gamma\delta}{8\alpha^2\beta\gamma^2}$. Δυνάμεθα ὅμως ν' ἁπλουστεύσωμεν τὴν ἔκφρασιν ταύτην, παρατηροῦντες ὅτι οἱ παράγοντες 4, α^2, β καὶ γ ὄντες κοινοὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος τούτου δυνατὸν νὰ ἐξαλειφθῶσι, καὶ οὕτως ἔχομεν ὡς ἐξαγόμενον $\dfrac{3\alpha^2\beta\delta}{2\gamma}$.

§ 27. Πρὸς ἁπλούστευσιν τοῦ κλασματικοῦ πηλίκου δύο μονωνύμων καὶ ἐν γένει παντὸς ἀλγεβρικοῦ κλάσματος, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι εἶναι μονώνυμα ἔχομεν τὴν ἑξῆς κανόνα.

« Ἐξαλείφομεν τὸν μεγαλήτερον κοινὸν παράγοντα εἰς τοὺς δύο » συντελεστάς. Ἀφαιροῦμεν τὸν μικρότερον τῶν δύο ἐκθετῶν τοῦ αὐ» τοῦ γράμματος ἀπὸ τὸν μεγαλήτερον, καὶ γράφομεν τὸ γράμμα μὲ » τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν εἰς ἐκεῖνον ἐκ τῶν δύο ὅρων τοῦ κλά» σματος, εἰς τὸν ὁποῖον ἦτο ὁ μεγαλήτερος ἐκθέτης. Γράφομεν » τέλος τὰ μὴ κοινὰ γράμματα μὲ τοὺς ἰδίους αὐτῶν ἐκθέτας εἰς » ὅντινα ἐκ τῶν δύο ὅρων τοῦ κλάσματος τὰ γράμματα ταῦτα εἰ» σήρχοντο. »

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον εὑρίσκομεν

$$\frac{48\alpha^3\beta^2\gamma\delta^3}{36\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta\varepsilon}=\frac{4\alpha\delta^2}{3\gamma\varepsilon} \qquad \frac{37\alpha\beta^2\gamma^2\delta}{6\alpha^3\beta\gamma\delta^2}=\frac{37\beta\gamma}{6\alpha^2\delta}$$

$$\frac{7\alpha^2\beta}{14\alpha^3\beta^2}=\frac{1}{2\alpha\beta}$$

Εἰς τὸ τελευταῖον τοῦτο παράδειγμα, ἐπειδὴ ὅλοι οἱ παράγοντες τοῦ διαιρετέου εὑρίσκονται εἰς τὸν διαιρέτην, ὁ ἀριθμητὴς ἄγεται εἰς τὴν μονάδα· ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς ἐὰν ἐδιαιροῦντο καὶ οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ $7\alpha^2\beta$.

§ 28. Συμβαίνει συχνάκις, ὥστε οἱ ἐκθέται γραμμάτων τινῶν νὰ ἦναι ἴσοι εἰς τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην.

Ἔστω $24\alpha^3\beta^2$ νὰ διαιρεθῇ διὰ $8\alpha^2\beta^2$.

Ἐπειδὴ τὸ γράμμα β ἔχει τὸν αὐτὸν ἐκθέτην, ἄρα τὸ πηλίκον δὲν πρέπει νὰ περιέχῃ αὐτὸ οὐδόλως, καὶ ἑπομένως πρέπει νὰ ἔχωμεν $\dfrac{24\alpha^3\beta^2}{8\alpha^2\beta^2}=3\alpha$.

Ἐὰν ὅμως ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τῶν ἐκθετῶν (§ 24) λαμβάνομεν ὡς πηλίκον $3\alpha\beta^0$. Τοῦ νέου τούτου συμβόλου δὲν δυνάμεθα νὰ δώσωμεν ἐξήγησιν κατὰ τὴν σημασίαν τῶν ἐκθετῶν· διότι κατὰ τὴν ἀρχὴν (§ 1) β^0 σημαίνει γινόμενον, εἰς τὸ ὁποῖον β οὐδ' ἅπαξ εἰσέρχεται ὡς παράγων.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἔχωμεν ἀκριβεῖς γνώσεις περὶ τῆς ἀρχῆς καὶ τῆς σημασίας τῶν εἰς τὴν Ἄλγεβραν ἐν χρήσει συμβόλων θέλομεν ἀποδείξει ὅτι « Πᾶσα ποσότης α, ἔχουσα ἐκθέτην 0, ἰσο» δυναμεῖ μὲ τὴν μονάδα, τουτέστιν $\alpha^0=1$. »

Ἡ ἔκφρασις αὕτη προκύπτει ἀπὸ διαίρεσιν, τῆς ὁποίας ὁ διαιρετέος καὶ διαιρέτης ἔχει τὸ γράμμα α εἰς τὸν αὐτὸν ἐκθέτην.

$$\text{Οὕτως}\quad \frac{\alpha^\mu}{\alpha^\mu}=\alpha^{\mu-\mu}=\alpha^0$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ πηλίκον πάσης ποσότητος διαιρεθείσης δι' ἑαυτῆς ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα ἄρα $\dfrac{\alpha^\mu}{\alpha^\mu}=1$.

Ἑπομένως α^0 εἶναι ταυτόσημον μὲ τὴν μονάδα ἤτοι, $\alpha^0=1$

Τὸ σύμβολον α^0 μεταχειριζόμεθα ἐνίοτε ἐκ συνθήκης, ἵνα διατηρῶμεν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τὸ ἴχνος τοῦ γράμματος τούτου, τὸ ὁποῖον εἰσήρχετο εἰς τὴν ἔκφρασιν ζητήματός τινος, καὶ τὸ ὁποῖον ἐξαλείφεται ἐξ αἰτίας τῆς διαιρέσεως. Πολλάκις δὲ εἶναι ἀναγκαῖον νὰ διατηρῆται τὸ ἴχνος τοῦτο.

Διαίρεσις τῶν πολυωνύμων.

§ 29. Ἡ διαίρεσις τῶν πολυωνύμων ἐπιστηρίζεται εἰς τὴν ἀρχήν, τὴν ὁποίαν ἀπεδείξαμεν εἰς τὸν § 21, « Ἐὰν δύο πολυώνυμα ἦναι

» διατεταγμένα ὡς πρὸς τὰς δυνάμεις κοινοῦ τινὸς γράμματος, ὁ » πρῶτος ὅρος τοῦ γινομένου, ὄντος ἐπίσης διατεταγμένου, εἶναι, ἄνευ » ἀγωγῆς, τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ » τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. »

Τούτου τεθέντος ἂς λάβωμεν ὡς διαιρετέον τὸ ἐν τῷ § 21 εὑρεθὲν γινόμενον καὶ ἂς διαιρέσωμεν αὐτὸ δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἵνα εὕρωμεν τὸν ἕτερον παράγοντα.

$$\begin{array}{r|l}
12\alpha^8-13\alpha^7\beta+20\alpha^6\beta^2-4\alpha^5\beta^3-7\alpha^4\beta^4 & 4\alpha^5-3\alpha^4\beta+7\alpha^3\beta^2 \\ \cline{2-2}
-12\alpha^8+9\alpha^7\beta-21\alpha^6\beta^2 \qquad\qquad\qquad\quad & 3\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2 \\ \cline{1-1}
-4\alpha^7\beta-\alpha^6\beta^2-4\alpha^5\beta^3-7\alpha^4\beta^4 & \\
+4\alpha^7\beta-3\alpha^6\beta^2+7\alpha^5\beta^3 \qquad\qquad & \\ \cline{1-1}
-4\alpha^6\beta^2+3\alpha^5\beta^3-7\alpha^4\beta^4 & \\
+4\alpha^6\beta^2-3\alpha^5\beta^3+7\alpha^4\beta^4 & \\ \cline{1-1}
0 \qquad\qquad\quad &
\end{array}$$

Ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ διατάξωμεν πάντοτε τὰ πολυώνυμα τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου ὡς πρὸς τὰς κατιούσας δυνάμεις κοινοῦ τινὸς γράμματος, λαμβάνομεν αὐτὰ ἤδη διατεταγμένα, καὶ φανταζόμεθα τὸ πηλίκον ὡσαύτως διατεταγμένον. Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον, ὁ δὲ διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκον οἱ δύο παράγοντες, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου εἶναι γινόμενον, ἄνευ ἀναγωγῆς, τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου· λαμβάνομεν λοιπὸν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου διαιροῦντες τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου $12\alpha^8$ διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου $4\alpha^5$. Ὅθεν κατὰ τοὺς κανόνας τῆς διαιρέσεως τῶν μονωνύμων ἔχομεν $3\alpha^3$.

Ὡς πρὸς τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἔχῃ ὁ ὅρος οὗτος, καθὼς καὶ πᾶς ἄλλος, πρέπει νὰ συστήσωμεν ἰδιαίτερον κανόνα τῶν σημείων.

Ἐπειδὴ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τὸ γινόμενον τῶν ταυτοσήμων ὅρων ἔχει τὸ σημεῖον $+$, καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἑτεροσήμων ἔχει τὸ σημεῖον $-$, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι,

Ἐὰν ὁ ὅρος τοῦ διαιρετέου ἔχῃ $+$ ὁ ὅρος τοῦ πηλίκου εἶναι ταυτόσημος μὲ τὸν τοῦ διαιρέτου.

Ἐὰν ὁ ὅρος τοῦ διαιρετέου ἔχῃ $-$, ὁ ὅρος τοῦ πηλίκου εἶναι ἑτερόσημος μὲ τὸν τοῦ διαιρέτου.

Λέγομεν προσέτι συμβολικώτερον,

$$\left.\begin{array}{r} + \text{ διὰ } + \\ \text{ἢ } - \text{ διὰ } - \end{array}\right\} \text{δίδει } + \qquad \left.\begin{array}{r} - \text{ διὰ } + \\ \text{ἢ } + \text{ διὰ } - \end{array}\right\} \text{δίδει } -$$

Ὥστε οἱ ταυτόσημοι ὅροι δίδουσιν εἰς τὸ πηλίκον +, οἱ δὲ ἑτερόσημοι —.

Ἂς ἐπανέλθωμεν ἤδη εἰς τὸ προκείμενον.

Ὁ πρῶτος λοιπὸν ὅρος τοῦ πηλίκου εἶναι θετικὸς εἰς τὸ προτεθὲν παράδειγμα. Ἀφοῦ γράψωμεν τὸν εὑρεθέντα ὅρον ὑπὸ τὸν διαιρέτην, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ὅρον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν ὅρον τοῦτον, ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸν διαιρετέον, ὡς φαίνεται εἰς τὸ παράδειγμα, καὶ ἀνάγομεν. Ἔχομεν οὕτως ὡς ἐξαγόμενον τῆς πρώτης μερικῆς πράξεως.

$$-4\alpha^7\beta-\alpha^6\beta^2-4\alpha^5\beta^3-7\alpha^4\beta^4 \ldots\ldots \quad (1)$$

Εὑρεθέντος ἤδη τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πηλίκου παρατηροῦμεν, ὅτι ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν γινομένων τοῦ διαιρέτου ἐπὶ ἕκαστον ὅρον τοῦ πηλίκου, καὶ ἐπειδὴ ἐκ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρέσαμεν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου, ἕπεται ὅτι τὸ ὑπόλοιπον (1) εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς λοιποὺς ὅρους (β', γ',....) τοῦ πηλίκου. Ὅθεν, κατὰ τὴν ἀνωτέρω μνημονευθεῖσαν ἀρχὴν, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διατεταγμένου ὑπολοίπου εἶναι γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου. Διαιροῦντες λοιπὸν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ὑπολοίπου $-4\alpha^7\beta$ διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου $4\alpha^5$ λαμβάνομεν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου· ὅθεν ἐκτελοῦντες τὴν πρᾶξιν, καὶ προσέχοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω ἐκτεθέντα κανόνα τῶν σημείων, εὑρίσκομεν ὡς δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου $-\alpha^2\beta$. Πολλαπλασιάζοντες ἔπειτα τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν δεύτερον τοῦτον ὅρον καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον συνάγομεν δεύτερον ὑπόλοιπον

$$-4\alpha^6\beta^2+3\alpha^5\beta^3-7\alpha^4\beta^4 \ \ldots\ldots \quad (2)$$

Τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς λοιποὺς ὅρους τοῦ πηλίκου (γ', δ',......). Συλλογιζόμενοι ἐπὶ τοῦ ὑπολοίπου τούτου, ὡς ἐπὶ τοῦ ἀρχικοῦ διαιρετέου καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου, ὁδηγούμεθα εἰς τὸ νὰ διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον αὐτοῦ $-4\alpha^6\beta^2$ διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, $4\alpha^5$ καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὸν τρίτον ὅρον τοῦ πηλίκου $-\alpha\beta^2$. Πολλαπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν ὅρον τοῦτον καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0.

Λοιπὸν τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι $3\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2$.

§ 30. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

« Ἀφοῦ διατάξωμεν τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ » γράμμα, διαιροῦμεν τὸν πρῶτον πρὸς τ' ἀριστερὰ ὅρον τοῦ διαιρε-

» τέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, καὶ λαμβάνομεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου· πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν ὅρον τοῦτον, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸν προτεθέντα διαιρετέον. Διαιροῦμεν ἔπειτα τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ὑπολοίπου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, καὶ λαμβάνομεν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν δεύτερον τοῦτον ὅρον, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον. Ἐξακολουθοῦμεν τὴν αὐτὴν σειρὰν τῶν πράξεων, ἕως οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0, καὶ τότε ἡ διαίρεσις εἶναι ἀκριβής. »

Παράδειγμα δεύτερον.

§ 31. Νὰ διαιρεθῇ τὸ πολυώνυμον,

$$21\chi^3\psi^2+25\chi^2\psi^3+68\chi\psi^4-40\psi^5-56\chi^5-18\chi^4\psi,$$

διὰ $\quad 5\psi^2-8\chi^2-6\chi\psi.$

Ἰδοὺ ὁ πίναξ τῶν πράξεων, διαταχθέντων τῶν πολυωνύμων ὡς πρὸς τὸ ψ.

$$\begin{array}{l|l}
-40\psi^5+68\chi\psi^4+25\chi^2\psi^3+21\chi^3\psi^2-18\chi^4\psi-56\chi^5 & 5\psi^2-6\chi\psi-8\chi^2 \\ \cline{2-2}
\quad -48\chi\psi^4-64\chi^2\psi^3 & 8\psi^3+4\chi\psi^2-3\chi^2\psi+7\chi^3 \\ \cline{1-1}
\qquad 20\chi\psi^4-39\chi^2\psi^3+21\chi^3\psi^2 & \\
\qquad\qquad +24\chi^2\psi^3+32\chi^3\psi^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad -15\chi^2\psi^3+53\chi^3\psi^2-18\chi^4\psi & \\
\qquad\qquad\qquad -18\chi^3\psi^2-24\chi^4\psi & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 35\chi^3\psi^2-42\chi^4\psi-56\chi^5 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +42\chi^4\psi+56\chi^5 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

ΣΗΜ. Ἂς ἐπαναλάβῃ ὁ μαθητὴς τὴν διαίρεσιν ταύτην, διατάσσων τὰ πολυώνυμα ὡς πρὸς τὸ χ.

§ 32. Ἐπειδὴ ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου καὶ ὁ πρῶτος ὅρος, τὸν ὁποῖον ἀφαιροῦμεν, εἶναι, κατὰ τὸν κανόνα, ἴσοι, πρέπει πάντοτε ν' ἀφανίζωνται ἀμοιβαίως. Καὶ τῷ ὄντι ἕκαστος τῶν ὅρων τούτων εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου. Δυνάμεθα λοιπόν, πρὶν τῆς ἀφαιρέσεως, νὰ παραλείψωμεν τὸν σχηματισμὸν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ μερικοῦ γινομένου. Διαγράφομεν ὅμως τότε τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου, καὶ ἀρχόμεθα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ διαιρέτου ἐκ τοῦ δευτέρου ὅρου αὐτοῦ.

Τὴν αὐτὴν παρατήρησιν κάμνομεν εἰς ἑκάστην μερικὴν διαίρεσιν, Πρὶν ἑκάστης ἀφαιρέσεως παραλείπομεν τὸν σχηματισμὸν τοῦ γινομένου τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα ὅρον τοῦ πηλίκου. Διαγράφομεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ὑπολοίπου, τὸν ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς μερικὸν διαιρετέον, καὶ ἀρχόμεθα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐκ τοῦ δευτέρου ὅρου τοῦ διαιρέτου. Τοῦτο ἤδη ἐπράξαμεν ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος.

§ 33. Δυνατὸν νὰ συμβῇ, ὥστε ἓν τῶν δύο πολυωνύμων, ἢ καὶ τὰ δύο, νὰ περιέχωσι πολλοὺς ὅρους μὲ τὴν αὐτὴν δύναμιν τοῦ γράμματος, ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ γίνῃ ἡ διάταξις. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην δυσκολευόμεθα ὡς πρὸς τὴν διάταξιν, ἀλλὰ κατὰ τὴν ἑξῆς παρατήρησιν διευκολύνεται ἡ πρᾶξις.

Προτεθείσθω π. χ. τὸ πολυώνυμον

$$11\alpha^2\beta - 19\alpha\beta\gamma + 10\alpha^3 - 15\alpha^2\gamma + 3\alpha\beta^2 + 15\beta\gamma^2 - 5\beta^2\gamma.$$

νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ $\quad 5\alpha^2 + 3\alpha\beta - 5\beta\gamma.$

Τὸ διατακτικὸν γράμμα εἶναι τὸ α.

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ὅτι οἱ δύο ὅροι $11\alpha^2\beta - 15\alpha^2\gamma$ δύνανται νὰ διαταχθῶσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν $(11\beta - 15\gamma)\alpha^2$ ἢ $\left.\begin{array}{r} 11\beta \\ -15\gamma \end{array}\right| \alpha^2$

γραφομένου ἅπαξ τοῦ κοινοῦ παράγοντος α^2, καὶ τιθεμένου εἰς τ' ἀριστερὰ ὑπὸ τὴν αὐτὴν κάθετον στήλην τοῦ ἀθροίσματος τῶν ποσοτήτων, αἱ ὁποῖαι πολλαπλασιάζουσι τὸν κοινὸν παράγοντα. Τὸ πρὸ τοῦ διατακτικοῦ γράμματος ἄθροισμα, ἤτοι τὸ πολυώνυμον $11\beta - 15\gamma$, τὸ ὁποῖον εἶναι πολλαπλασιαστὴς τοῦ α^2 ὀνομάζεται συντελεστὴς αὐτοῦ.

Παρομοίως $\quad -19\alpha\beta\gamma + 3\alpha\beta^2,$

γράφεται $\quad \left.\begin{array}{r} +3\beta^2 \\ -19\beta\gamma \end{array}\right| \alpha.$

Τούτου τεθέντος ἰδοὺ πῶς ἐκτελεῖται ἡ πρᾶξις,

$$\begin{array}{l|l|l|l} \begin{array}{r} 10\alpha^3 + 11\beta \\ -15\gamma \end{array} & \begin{array}{r} \alpha^2 + 3\beta^2 \\ -19\beta\gamma \end{array} & \alpha \;\; -5\beta^2\gamma + 15\beta\gamma^2 & \begin{array}{l} 5\alpha^2 + 3\beta\alpha - 5\beta\gamma \\ \hline 2\alpha + \beta - 3\gamma \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} \alpha'.\ \text{ὑπόλ.}\ \ 5\beta \\ -15\gamma \end{array} & \begin{array}{r} \alpha^2 + 3\beta^2 \\ -9\beta\gamma \end{array} & \alpha \;\; -5\beta^2\gamma + 15\beta\gamma^2 & \\ \hline \beta'.\ \text{ὑπόλ.} & \quad 0 & & \end{array}$$

Διασάφησις. Διαιροῦντες κατὰ πρῶτον $10\alpha^3$ διὰ $5\alpha^2$ εὑρίσκομεν 2α ὡς πηλίκον. Ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ 2α λαμβάνομεν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον.

Διαιροῦντες ἔπειτα τὸ πρῶτον μέρος τοῦ ὑπολοίπου, τὸ ἔχον α^2, διὰ $5\alpha^2$ λαμβάνομεν ὡς πηλίκον $\beta-3\gamma$. Πολλαπλασιάζοντες διαδοχικῶς ἕκαστον ὅρον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ $\beta-3\gamma$, καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0.

Λοιπὸν $2\alpha+\beta-3\gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

§ 34. Ἵνα θεωρήσωμεν γενικώτερον τὴν περίπτωσιν ταύτην τῆς διαιρέσεως, ἥτις εἶναι ἡ μᾶλλον συμπεπλεγμένη, παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ μὲν διαιρετέος δύναται νὰ σημειωθῇ διὰ $A\alpha^4+B\alpha^3+\Gamma\alpha^2+\Delta\alpha+E$.
ὁ δὲ διαιρέτης » » διὰ $A'\alpha^2+B'\alpha+\Gamma'$.

ΣΗΜ. Ὅταν εἰς ζήτημά τι εἰσέρχονται πολλαὶ ποσότητες, οἱ ἀλγεβρισταὶ σημειοῦσι συνήθως τινὰς ἐξ αὐτῶν διὰ διαφόρων γραμμάτων, τὰς δὲ ἐχούσας ἀναλογίαν τινὰ πρὸς αὐτὰς ἢ ὁμοιοπάθειαν σημειοῦσι διὰ τῶν αὐτῶν, ἀλλὰ τονιζομένων γραμμάτων.

Εἰς τὰ πολυώνυμα ταῦτα ἕκαστος τῶν συντελεστῶν A, B, Γ, Δ, E, καὶ A', B', Γ', παριστάνει τὸ ἄθροισμα πολλῶν ὅρων. Ἑπομένως $A\alpha^4$ παριστάνει ὅλον τὸ *μέρος* τοῦ διαιρέτου, τὸ ὁποῖον ἔχει α^4 καὶ οὕτω περὶ τῶν ἄλλων.

Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ὁ μεγαλήτερος ἐκθέτης τοῦ α εἶναι 4 εἰς τὸν διαιρετέον καὶ 2 εἰς τὸν διαιρέτην, πρέπει εἰς τὸ πηλίκον νὰ ἦναι ἴσος μὲ 2. Ἄρα τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι τῆς μορφῆς $A''\alpha^2+B''\alpha+\Gamma''$.

Ἵνα προσδιορίσωμεν τὸ μέρος τοῦ πηλίκου τούτου μὲ τὸν μεγαλήτερον ἐκθέτην, παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν δύο μερῶν $A''\alpha^2$ καὶ $A'\alpha^2$ δὲν δύναται νὰ λάβῃ ἀναγωγὴν μὲ τ' ἄλλα γινόμενα τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, καὶ ἑπομένως πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ μέρος $A\alpha^4$ τοῦ διαιρετέου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν μεγαλήτερον ἐκθέτην τοῦ α τουτέστι πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$A''\alpha^2\times A'\alpha^2=A\alpha^4 \quad \text{ἢ} \quad A''A'\alpha^4=A\alpha^4, \quad \text{ἢ} \quad A''A'=A.$$

Καὶ διαιροῦντες ἑκατέραν τῶν δύω τούτων ἴσων ποσοτήτων διὰ A' συνάγομεν $A''=\frac{A}{A'}$. Ἵνα εὕρωμεν λοιπὸν τὸν συντελεστὴν τοῦ πρώτου μέρους τοῦ πηλίκου, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ πρώτου μέρους τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ πρώτου μέρους τοῦ διαιρέτου.

Ἐὰν A καὶ A' ἦναι αὐτὰ καθ' ἑαυτὰ πολυώνυμα σύνθετα ἐξ ἑνὸς ἢ πλειοτέρων γραμμάτων, ἐφαρμόζομεν ἐπ' αὐτῶν τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως τῶν πολυωνύμων. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι τὰ πολυώνυμα ταῦτα πρέπει νὰ ἦναι ἐξ ἀρχῆς διατεταγμένα ὡς πρός τι δεύτερον γράμμα.

Εὑρεθέντος τοῦ $A''\alpha^2$ πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον μέρος τοῦ διαιρέτου ἐπὶ $A'\alpha^2$ καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον ἔχομεν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου πράττομεν ὡς ἐπὶ τοῦ προτεθέντος διαιρετέου.

§ 35. Ἰδοὺ παράδειγμα τῆς προκειμένης περιπτώσεως, εἰς τὸ ὁποῖον ἐκτίθενται καὶ αἱ μερικαὶ διαιρέσεις, τῶν ὁποίων ἔχει ἀνάγκην ἡ ἀρχικὴ πρᾶξις.

$$\begin{array}{lr|l|l|l}
 & 12\beta^2 & \alpha^3+23\beta^3 & \alpha^2+10\beta^4 & \alpha \\
 & -29\beta\gamma & \quad -31\beta^2\gamma & \quad -6\beta^2\gamma^2 & \\
 & +15\gamma^2 & \quad -9\beta\gamma^2 & & \\
 & & \quad +15\gamma^3 & & \\ \hline
\alpha'.\ \text{ὑπόλ.} & & +15\beta^3 & \alpha^2+10\beta^4 & \alpha \\
 & & -25\beta^2\gamma & \quad -6\beta^2\gamma^2 & \\
 & & -9\beta\gamma^2 & & \\
 & & +15\gamma^3 & & \\ \hline
\beta'.\ \text{ὑπόλ.} & & 0 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l|l}
3\beta & \alpha+2\beta^2 & \\
-5\gamma & & \\ \hline
4\beta & \alpha^2+5\beta^2 & \alpha. \\
-3\gamma & \quad -3\gamma^2 &
\end{array}$$

Πρώτη μερικὴ διαίρεσις.

$$\begin{array}{r|l}
12\beta^2-29\beta\gamma+15\gamma^2 & 3\beta-5\gamma \\ \cline{2-2}
-9\beta\gamma+15\gamma^2 & 4\beta-3\gamma \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Δευτέρα μερικὴ διαίρεσις.

$$\begin{array}{r|l}
15\beta^3-25\beta^2\gamma-9\beta\gamma^2+15\gamma^3 & 3\beta-5\gamma \\ \cline{2-2}
-9\beta\gamma^2+15\gamma^3 & 5\beta^2-3\gamma^2 \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Παράδειγμα δεύτερον.

$$\begin{array}{lr|l|l|l|l|l}
 & 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & \\
\text{Διαιρετέος} & 6\beta & \alpha^4\ -7\beta^2 & \alpha^3\ -3\beta^3 & \alpha^2+\beta^2-2\beta & +4\beta^3 & \alpha \\
 & -10 & \quad +23\beta & \quad +22\beta^2 & & -9\beta^2 & \\
 & & \quad -20 & \quad -31\beta & & +5\beta & \\
 & & & \quad +5 & & -5 & \\
 & & & & & & \\
\text{Διαιρέτης} & 3\beta & \alpha\ +\beta^2-2\beta & & & & \\
 & -5 & & & & & \\
 & & & & & & \\
\text{Πηλίκον} & 2\alpha^3-3\beta & \alpha^2\ +\ 4\beta & \alpha\ +1. & & & \\
 & +4 & \quad -\ 1 & & & &
\end{array}$$

§ 36. Εἰς τ' ἀνωτέρω παραδείγματα ἐλάβομεν ὡς διαιρετέους πολυώνυμα ἀκριβῶς διαιρετά, τουτέστι πολυώνυμα, τὰ ὁποῖα ἦσαν ἀκριβῆ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ ἀκέραιόν τι πηλίκον, ἀλλὰ τοῦτο δὲν συμβαίνει πάντοτε· ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἀπαντῶνται πολυώνυμα, τῶν ὁποίων ἡ διαίρεσις δὲν εἶναι δυνατή, τουτέστι δὲν εὑρίσκεται τρίτον πολυώνυμον ἀκέραιον, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην νὰ παράγῃ τὸν διαιρετέον. Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην γνωρίζομεν τὸ ἀδύνατον τῆς πράξεως, πρὶν ἔτι φθάσωμεν εἰς τὸ τέλος αὐτῆς.

Σημεῖα δι' ὧν γνωρίζομεν τὸ ἀδύνατον τῆς ἀκριβοῦς διαιρέσεως.

§ 37. Α'. Ὁσάκις κατὰ μίαν τῶν μερικῶν διαιρέσεων ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου.

Β'. Ὁσάκις ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ διατεταγμένου διαιρέτου δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ διαιρέτου.

Γ'. Ἐὰν τὰ δύο πολυώνυμα τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου περιέχωσι δύο ἢ πλειότερα γράμματα, δυνάμεθα καὶ πρὶν διατάξωμεν τοὺς ὅρους νὰ κρίνωμεν ἐκ πρώτης ὄψεως περὶ τοῦ δυνατοῦ τῆς διαιρέσεως· οὕτω ῥίπτοντες βλέμμα ἐπὶ τῶν δύο ὅρων τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου, τῶν ἐχόντων τὸν μεγαλήτερον ἐκθέτην ἐφ' ἕκαστον γράμμα, ἐὰν ἴδωμεν, ὅτι δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς ὁ εἷς διὰ τοῦ ἑτέρου, συμπεραίνομεν, ὅτι καὶ ἡ ὁλικὴ διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος. Ἡ παρατήρησις δὲ αὕτη πρέπει νὰ ἐπαναλαμβάνηται εἰς ἑκάστην μερικὴν διαίρεσιν.

Δ'. Ἐὰν ὁ διαιρέτης περιέχῃ γράμμα τι μὴ εὑρισκόμενον εἰς τὸν διαιρετέον, ἐπειδὴ δὲν δύναται τρίτη ποσότης πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τοιοῦτον διαιρέτην νὰ παράξῃ γινόμενον ἀνεξάρτητον τοῦ γράμματος τούτου.

§ 38. Ἡ ἑξῆς περίπτωσις τῆς διαιρέσεως εἶναι ἀξιοσημείωτος. Ὅταν ὁ διαιρέτης δὲν περιέχῃ τὸ γράμμα, ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον εἶναι διατεταγμένος ὁ διαιρετέος, ἢ ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὅταν ὁ διαιρέτης ἦναι ἀνεξάρτητος τοῦ διατακτικοῦ γράμματος τοῦ διαιρετέου.

Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἠδυνάμεθα μὲν νὰ διατάξωμεν τὰ δύο πολυώνυμα ὡς πρὸς ἓν τῶν κοινῶν γραμμάτων, καὶ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸν συνήθη τρόπον, ἀλλὰ δίδεται μέσον πολὺ εὐκολώτερον πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου, καὶ διὰ τοῦ ὁποίου φθάνομεν εἰς ὠφέλιμον συμπέρασμα περὶ τῆς διαιρετότητος τῶν πολυωνύμων.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ὁ διαιρετέος περιέχει διαφόρους δυνάμεις τοῦ γράμματος α, τὸ ὁποῖον δὲν εἰσέρχεται εἰς τὸν διαιρέτην. Διατάσσοντες τὸν διαιρετέον ὡς πρὸς τὸ α, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν αὐτὸν ὑπὸ τὴν μορφὴν $Α α^4 + Β α^3 + Γ α^2 + Δ α + Ε$ ὅπου 4 ὑποτίθεται ὁ μεγαλείτερος ἐκθέτης τοῦ α, τὰ δὲ γράμματα Α,Β,Γ,Δ,Ε, εἶναι μονώνυμα ἢ πολυώνυμα, μὴ περιέχοντα α, καὶ πολλαπλασιάζοντα τὰς διαφόρους δυνάμεις τοῦ διατακτικοῦ γράμματος· αἱ ὑπὸ τῶν γραμμάτων τούτων παριστανόμεναι ποσότητες λέγονται ἑπομένως συντελεσταὶ τοῦ α· μηδὲ τοῦ Ε ἐξαιρουμένου, διότι καὶ τοῦτο θεωρεῖται ὡς συντελεστὴς τοῦ α^0. Τὸ πολυώνυμον τοῦ διαιρέτου, μὴ περιέχων α, δύναται ὡσαύτως νὰ θεωρηθῇ ὡς συντελεστὴς τοῦ α^0, καὶ ἑπομένως νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ ἁπλοῦ γράμματος Μ.

Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸ πηλίκον πρέπει νὰ παράξῃ τὸν διαιρετέον, καὶ ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης Μ δὲν περιέχει α, φανερὸν ὅτι τὸ πηλίκον πρέπει νὰ ἦναι πολυώνυμόν τι ἔχον τὰς αὐτὰς τοῦ γράμματος α δυνάμεις, τὰς ὁποίας ἔχει ὁ διαιρετέος. Τὸ πηλίκον λοιπὸν τοῦτο ἀναγκαίως εἶναι τῆς μορφῆς $A'\alpha^4+B'\alpha^3+\Gamma'\alpha^2+\Delta'\alpha+E'$.

Ὅθεν, ἂν ὑποθέσωμεν γνωστὸν τὸ πηλίκον τοῦτο, καὶ ὅτι ἐπολλαπλασιάσαμεν διαδοχικῶς ὁλόκληρον τὸν διαιρέτην ἐπὶ ἕκαστον τῶν μερῶν $A'\alpha^4$, $B'\alpha^3$ $\Gamma'\alpha^2$ . . . τὰ γινόμενα $A'M\alpha^4$ $B'M\alpha^3$, $\Gamma'M\alpha^2$ . . . δὲν δύνανται ν' ἀναχθῶσι, διότι διαφέρουσι κατὰ τοὺς ἐκθέτας τοῦ α πρέπει ἄρα ταῦτα νὰ ἦναι ἀμοιβαίως ἴσα μὲ τοὺς ὅρους $A\alpha^4$, $B\alpha^3$, $\Gamma\alpha^2$ . . . τοῦ διαιρετέου.

Ἐκ τούτου ἔχομεν
$$\left.\begin{array}{l} A'M=A \\ B'M=B \\ \Gamma'M=\Gamma \\ \Delta'M=\Delta \\ E'M=E \end{array}\right\} \text{ἑπομένως} \quad \begin{array}{l} A'=\frac{A}{M} \\ B'=\frac{B}{M} \\ \Gamma'=\frac{\Gamma}{M} \\ \Delta'=\frac{\Delta}{M} \\ E'=\frac{E}{M} \end{array}$$

Ὅθεν συνάγομεν τὸ γενικὸν τοῦτο συμπέρασμα.

« Πολυώνυμόν τι διατεταγμένον ὡς πρός τι γράμμα, ἵνα διαι-
» ρῆται ἀκριβῶς διὰ πολυωνύμου ἀνεξαρτήτου τοῦ γράμματος τού-
» του, πρέπει ἕκαστος συντελεστὴς τοῦ πρώτου πολυωνύμου νὰ ἦ-
» ναι ἀκριβῶς διαιρετὸς διὰ τοῦ δευτέρου. Οἱ συντελεσταὶ τῶν δια-
» φόρων δυνάμεων τοῦ πηλίκου εἶναι τὰ διαδοχικὰ πηλίκα τῆς διαι-
» ρέσεως τῶν συντελεστῶν τοῦ διαιρετέου διὰ τῶν συντελεστῶν τοῦ
» πηλίκου. »

Ἔστω τὸ πολυώνυμον

$$(3\beta^3+\beta^2\gamma-3\beta\gamma^2-\gamma^3)\alpha^2+(3\beta^3\gamma-3\beta\gamma^3)\alpha+\beta^5-2\beta^3\gamma^2+\beta\gamma^4,$$

νὰ διαιρεθῇ διὰ $\beta^2-\gamma^2$,

Ἐκτελουμένων τῶν τριῶν μερικῶν διαιρέσεων

$$\frac{3\beta^3+\beta^2\gamma-3\beta\gamma^2-\gamma^3}{\beta^2-\gamma^2} \quad \frac{3\beta^3\gamma-3\beta\gamma^3}{\beta^2-\gamma^2} \quad \frac{\beta^5-2\beta^3\gamma^2+\beta\gamma^4}{\beta^2-\gamma^2}$$

συνάγονται τὰ μερικὰ πηλίκα $3\beta+\gamma$, $3\beta\gamma$, $\beta^3-\beta\gamma^2$, τὰ ὁποῖα εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν δυνάμεων τοῦ α εἰς τοὺς ὅρους τοῦ ὅλου πηλίκου, τὸ ὁποῖον εἶναι

$$(3\beta+\gamma)\alpha^2+3\beta\gamma\alpha+\beta^3-\beta\gamma^2.$$

§ 39. Δυνατὸν ἐνίοτε δι' ἁπλῆς ἀποσυνθέσεως τοῦ διαιρετέου νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον εὐκολώτερον ἢ διὰ τῆς κοινῆς μεθόδου. Εἰς τοῦτο ὅμως ἀπαιτεῖται μεγάλη οἰκειότης μὲ τὸν ἀλγεβρικὸν ὑπολογισμόν. Π. χ. $\dfrac{3\beta^2\gamma-3\gamma^3}{\beta^2-\gamma^2}$ καὶ $\dfrac{\beta^5-2\beta^3\gamma^2+\beta\gamma^4}{\beta^2-\gamma^2}$

Ἐπειδὴ $3\beta^2\gamma-3\gamma^3$ ἰσοῦται μὲ $3\gamma(\beta^2-\gamma^2)$ τὸ πηλίκον εἶναι 3γ. ὡσαύτως $\beta^5-2\beta^3\gamma^2+\beta\gamma^4=\beta(\beta^4-2\beta^2\gamma^2+\gamma^4)=\beta(\beta^2-\gamma^2)^2$, ἑπομένως τὸ πηλίκον εἶναι $\beta(\beta^2-\gamma^2)$.

§ 40. Μεταξὺ τῶν διαφόρων παραδειγμάτων τῆς ἀλγεβρικῆς διαιρέσεως τὸ ἑξῆς εἶναι ἀξιοσημαίωτον διὰ τὰς ἐφαρμογὰς αὐτοῦ, ἀπαντᾶται δὲ συχνότατα εἰς τὴν λύσιν τῶν ζητημάτων.

Εἴδομεν (§ 23) ὅτι $(\alpha+\beta)\ (\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$.

Λοιπὸν ἀντιστρόφως $\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta$

Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως θέλομεν εὕρει ὡσαύτως

$$\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$$

$$\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta}=\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3$$

Τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα παρουσιάζουσιν ἀξιοσημείωτον σχηματισμὸν τῶν ὅρων, δηλαδὴ, τὸ μὲν πρῶτον γράμμα α φέρει βαθμηδὸν κατὰ μονάδα μικροτέρους, τὸ δὲ δεύτερον β, κατὰ μονάδα μεγαλητέρους ἐκθέτας. Τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν δύο ἐκθετῶν εἰς ἕκαστον ὅρον εἶναι πάντοτε τὸ αὐτό.

Ἐξ ἀναλογίας συμπεραίνομεν, ὅτι ὅσον μέγας καὶ ἂν ἦναι ὁ ἐκθέτης τῶν δύο γραμμάτων α καὶ β, ἡ διαίρεσις πρέπει νὰ ἐκτελῆται ἐπίσης ἀκριβῶς. Ἀλλ' ἡ ἐξ ἀναλογίας ἀπόδειξις δὲν εἶναι τελεία βεβαιότης. Ἵνα λάβωμεν τὴν βεβαιότητα ταύτην, ἂς σημειώσωμεν διὰ μ τὸν ἐκθέτην καὶ ἂς ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ $\alpha^\mu-\beta^\mu$ διὰ $\alpha-\beta$, ὡς ἕπεται

$$\begin{array}{l|l} \alpha^\mu-\beta^\mu & \alpha-\beta \\ \cline{2-2} \underline{-\alpha^\mu+\alpha^{\mu-1}\beta} & \alpha^{\mu-1} \end{array}$$

α. ὑπόλοιπον.... $+\alpha^{\mu-1}\beta-\beta^\mu$

ἢ μᾶλλον..... $\beta(\alpha^{\mu-1}-\beta^{\mu-1})$

Διαιροῦντες κατὰ πρῶτον α^μ διὰ α λαμβάνομεν πηλίκον $\alpha^{\mu-1}$ ἀφαιροῦντες δὲ τὸ γινόμενον τοῦ $\alpha-\beta$ ἐπὶ $\alpha^{\mu-1}$ ἀπὸ τὸν διαιρετέον λαμβάνομεν πρῶτον ὑπόλοιπον $\alpha^{\mu-1}\beta-\beta^\mu$, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\beta(\alpha^{\mu-1}-\beta^{\mu-1})$. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ἐὰν ὑποθέσωμεν $\alpha^{\mu-1}-\beta^{\mu-1}$ διαιρετὸν ἀκριβῶς διὰ τοῦ $\alpha-\beta$, πρέπει νὰ διαιρῆται παρομοίως καὶ $\alpha^\mu-\beta^\mu$. Τουτέστιν, ἐὰν ἡ διαφορὰ τῶν αὐτῶν δυνάμεων βαθμοῦ τινός, $\mu-1$, δύο ποσοτήτων διαιρῆται διὰ τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν ποσοτήτων, ἡ διαφορὰ τῶν δυνάμεων βαθμοῦ κατὰ μονάδα μεγαλητέρου, μ, διαιρεῖται παρομοίως. Ἀλλ' ἐπειδὴ $\alpha^3-\beta^3$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $\alpha-\beta$, ἄρα καὶ $\alpha^4-\beta^4$ διαιρεῖται ὡσαύτως. Ἡ διαιρετότης δὲ τούτου συνεπάγει τὴν διαιρετότητα τοῦ $\alpha^5-\beta^5$ καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως, ἄρα $\alpha^\mu-\beta^\mu$ διαιρεῖται διὰ $\alpha-\beta$. Λοιπόν,

« Ἡ διαφορὰ τῶν αὐτῶν δυνάμεων δύο ποσοτήτων διαιρεῖται διὰ » τῆς διαφορᾶς αὐτῶν. »

§ 41. Ἡ ἀκρίβεια τῆς προτάσεως ταύτης ἀποδεικνύεται καὶ ἐκ τῶν ὑστέρων. Τῷ ὄντι ἐὰν $\alpha^\mu-\beta^\mu$ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ $\alpha-\beta$ καὶ δίδῃ πηλίκον κατὰ τὸν ἀνωτέρω ἐκτεθέντα σχηματισμόν,

$$\alpha^{\mu-1}+\alpha^{\mu-2}\beta+\alpha^{\mu-3}\beta^2+\dots\dots+\alpha\beta^{\mu-2}+\beta^{\mu-1}$$

πρέπει πολλαπλασιαζομένου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\alpha-\beta$ νὰ παράγηται ὁ διαιρετέος $\alpha^\mu-\beta^\mu$.

Ἐκτελεσθέντος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εὑρίσκομεν δύο μερικὰ γινόμενα, τῶν ὁποίων οἱ ὅροι εἰς μὲν τὸ πρῶτον εἶναι ὅλοι θετικοί, εἰς δὲ τὸ δεύτερον ὅλοι ἀρνητικοί, καὶ παρατηροῦμεν ὅτι δύο ὅροι μόνον α^μ καὶ $-\beta^\mu$ μένουσιν ἀνάγωγοι, ὅλοι δὲ οἱ λοιποὶ ἐξαλείφονται ἀμοιβαίως.

ΣΗΜ. Ὁ πολλαπλασιασμὸς οὗτος νὰ ἐκτελεσθῇ ἐξάπαντος ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ.

Περὶ ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.

§ 42. Ὅταν ἡ ἀλγεβρικὴ διαίρεσις δὲν ἐκτελῆται ἀκριβῶς, τὸ πηλίκον σημειοῦται ὑπὸ μορφὴν κλασματικὴν, γραφομένου τοῦ μὲν διαιρετέου ὡς ἀριθμητοῦ, τοῦ δὲ διαιρέτου ὡς παρονομαστοῦ. Περὶ τῶν ἀλγεβρικῶν τούτων κλασμάτων πρέπει νὰ σχηματίσωμεν τὴν αὐτὴν ἰδέαν, τὴν ὁποίαν ἐλάβομεν περὶ τῶν ἀριθμητικῶν. Ἐπειδὴ δὲ ἡ θεωρία τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων εἶναι ἀνεξάρτητος πάσης μερικῆς τιμῆς τῶν ὅρων αὐτῶν, πρέπει ἄρα νὰ ἐφαρμόζηται καὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἐκφράσεων, τῶν ὁποίων οἱ ὅροι παριστάνονται διὰ γραμμάτων. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων ἐκτελεῖται κατὰ τοὺς εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ἀποδοθέντας κανόνας. εἰς τὴν ἐφαρμογὴν ὅμως τῶν κανόνων τούτων πρέπει νὰ ὁδηγώμεθα ἀπὸ τὰς ἐκτεθείσας μεθόδους τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀκεραίων ποσοτήτων, μονωνύμων ἢ πολυωνύμων. Εἶναι λοιπὸν περιττὸν νὰ ἐπιμείνωμεν εἰς τοῦτο, θέλομεν δὲ λαβεῖ ἀκολούθως εὐκαιρίαν νὰ οἰκειωθῶμεν μὲ τοὺς κανόνας τούτους.

§ 43. Χάριν ἀσκήσεως τῶν πρωτοπείρων παραθέτομεν τὰ ἑξῆς παραδείγματα ἐπὶ τῶν κυριωτέρων ἀριθμητικῶν πράξεων.

Ἀναγωγὴ τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Α΄.) $\frac{\alpha}{\beta} \quad \frac{\gamma}{\delta} \quad \frac{\varepsilon}{\zeta}$ τρέπονται εἰς ὁμοειδῆ $\frac{\alpha\delta\zeta}{\beta\delta\zeta} \quad \frac{\beta\gamma\zeta}{\beta\delta\zeta} \quad \frac{\beta\delta\varepsilon}{\beta\delta\zeta}$

Β΄.) $\frac{2\alpha}{3\beta^2\gamma^3} \quad \frac{5\beta}{6\beta\gamma^2} \quad \frac{\delta}{2\alpha\beta^3}$ ἁπλοῦς. πολλαπλάσιον $12\alpha\beta^3\gamma^3$

$4\alpha\beta \quad 2\alpha\beta^2\gamma \quad 6\gamma^3$ πηλίκα.

$\frac{8\alpha^2\beta}{12\alpha\beta^3\gamma^3} \quad \frac{10\alpha\beta^3\gamma}{12\alpha\beta^3\gamma^3} \quad \frac{6\gamma^3\delta}{12\alpha\beta^3\gamma^3}$ ὁμοειδῆ.

Τὸ ἁπλούστερον πολλαπλάσιον, ἤτοι ὁ κοινὸς παρονομαστὴς συνίσταται ἐξ ὅλων τῶν γραμματικῶν παραγόντων τῶν παρονομαστῶν μὲ τοὺς μεγαλητέρους ἐκθέτας, ὁ δὲ συντελεστὴς τούτου εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν ἁπλούστερον πολλαπλάσιον τῶν συντελεστῶν.

Πρόσθεσις.

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}$$

Ἀφαίρεσις.

$$\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta\delta}$$

Πολλαπλασιασμός. *Διαίρεσις.*

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} \qquad \frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

§ 44. Ἡ ἁπλούστευσις τῶν κλασμάτων ἀπαιτεῖ ἰδιαιτέρας τινὰς ἀναπτύξεις, καὶ καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὰ ἐκ μονωνύμων συνιστάμενα ἀλγεβρικὰ κλάσματα ἔγεινεν ἤδη λόγος (§ 27)· ὡς πρὸς τὰς πολυωνύμους δὲ κλασματικὰς ἐκφράσεις, ἰδοὺ περιπτώσεις τινές, κατὰ τὰς ὁποίας εἶναι εὔκολον νὰ τὰς ἀνάξωμεν.

Ἔστω ἡ ἔκφρασις $\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ κλάσμα τοῦτο δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{(\alpha+\beta)\ (\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)\ (\alpha-\beta)}$$

καὶ ἐκθλίβοντες τὸν παράγοντα $\alpha-\beta$ κοινὸν εἰς τοὺς δύο ὅρους λαμβάνομεν $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$.

Ἔστω πρὸς τούτοις ἡ ἔκφρασις $\dfrac{5\alpha^3-10\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2}{8\alpha^3-8\alpha^2\beta}$

Αὕτη ἀναλύεται οὕτω $\dfrac{5\alpha(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)}{8\alpha^2(\alpha-\beta)}=\dfrac{5\alpha(\alpha-\beta)^2}{8\alpha^2(\alpha-\beta)}$.

ἐκθλίβοντες τὸν κοινὸν παράγοντα $\alpha(\alpha-\beta)$ ἔχομεν $\dfrac{5(\alpha-\beta)}{8\alpha}$,

Αἱ μερικαὶ περιπτώσεις, τὰς ὁποίας ἐθεωρήσαμεν, εἶναι ἐξ ἐκείνων, εἰς τὰς ὁποίας οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος ἀναλύονται εὐκόλως εἰς τοὺς αὐτῶν παράγοντας, διὰ μόνης τῆς εἰς τὸν ὑπολογισμὸν ἀποκτηθείσης ἤδη ἕξεως. Δυνατὸν ὅμως οἱ ὅροι οὗτοι νὰ ἦναι πολυώνυμα συνθετώτερα, καὶ τότε, ἐπειδὴ ἡ εἰς παράγοντας ἀνάλυσις δὲν εἶναι τόσον εὔκολος, πρέπει νὰ συντρέξωμεν εἰς τὴν μέθοδον τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.

Ἡ θεωρία αὕτη, συνδεδεμένη οὖσα μὲ τὴν θεωρίαν τῶν ἐξισώσεων, δὲν δύναται ἐνταῦθα ἐντελῶς ν' ἀναπτυχθῇ· ἄλλως τε ἡ ἐφαρμογὴ τῆς θεωρίας ταύτης δὲν ἀπαιτεῖται εἰς τὴν στοιχειώδη ταύτην πραγματείαν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΠΕΡΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ.

Προοιμιώδεις ἀρχαὶ περὶ ἐξισώσεων.

§ 45. Γενικὸς χαρακτὴρ ὅλων τῶν ἀλγεβρικῶν προβλημάτων εἶναι ὅτι αἱ ἐκφωνήσεις αὐτῶν μεταφραζόμεναι ἀλγεβρικῶς παράγουσιν ἐξισώσεις.

Σκεπτόμενοι ἐπὶ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος (§ 3, 4) βλέπομεν ὅτι ἡ λύσις αὕτη συνίσταται ἐκ δύο διακεκριμένων μερῶν. Εἰς τὸ πρῶτον γράφομεν ἀλγεβρικῶς τὰς σχέσεις, τὰς ὁποίας ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος στερεόνει μεταξὺ τῶν γνωστῶν καὶ ἀγνώστων, ποσοτήτων, καὶ οὕτω φθάνομεν εἰς τὴν ἔκφρασιν δύο ἴσων ποσοτήτων. Τὸ μέρος τοῦτο ὀνομάζομεν *θέσιν τοῦ προβλήματος εἰς ἐξίσωσιν*.

Εἰς τὸ δεύτερον μέρος, ἐξάγομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος σειρὰν τινὰ ἄλλων ἐξισώσεων, τῶν ὁποίων ἡ τελευταία δίδει τὴν τιμὴν τῆς ἀγνώστου, διὰ μέσου τῶν γνωστῶν ποσοτήτων. Ἡ πρᾶξις αὕτη ὀνομάζεται *ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως*.

Ἐπειδὴ δὲ οἱ κανόνες τοῦ θέτειν πρόβλημά τι εἰς ἐξίσωσιν εἶναι τρόπον τινὰ ἀόριστοι, κάμνομεν ἀρχὴν ἀπὸ τὸ δεύτερον μέρος, τὸ ὁποῖον ὑπόκειται εἰς σταθεροὺς καὶ ἀμεταβλήτους κανόνας.

§ 46. Ἡ διὰ τοῦ σημείου $=$ παράστασις δύο ἴσων πρὸς ἀλλήλας ποσοτήτων ὀνομάζεται ἐν γένει *ἰσότης*.

Αἱ δύο παραβαλλόμεναι ἴσαι ποσότητες λέγονται μέλη τῆς ἰσότητος, ἐξ ὧν τὸ μὲν πρὸς τ' ἀριστερὰ καλεῖται *πρῶτον*, τὸ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ *δεύτερον* μέλος τῆς ἰσότητος.

Διακρίνονται συνήθως τρία εἴδη ἰσοτήτων.

α΄. Ἡ *ταυτότης*, ὅταν τὸ δεύτερον μέλος ἦναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ πρῶτον. $5=5$, $3+5=3+5$, $\alpha+\beta=\alpha+\beta$.

Ἢ ὅταν τὰ δύο μέλη ἀποβαίνουσι τὰ αὐτά, μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων καὶ τῆς ἀναγωγῆς τῶν ὁμοίων ὅρων.

$$3\alpha+5\alpha=15\alpha-7\alpha. \qquad (\chi-\alpha)(\chi+\alpha)=\chi^2-\alpha^2.$$

Ὥστε ἡ ταυτότης εἶναι ἰσότης ἐπαληθεύουσα διὰ πᾶσαν τιμὴν δεδομένην εἰς τὰ εἰσερχόμενα ἐν αὐτῇ γράμματα.

β΄. Ἡ *ἰδίως ἰσότης*, ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ γνωστῶν μὲν καὶ δεδομένων ἀριθμῶν, ἀλλὰ παριστανομένων διὰ γραμμάτων.

$$\alpha-\beta=\gamma-\delta, \qquad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$$

Οὕτως αἱ δύο αὗται ἰσότητες ἐπαληθεύουσιν, ἐὰν τὰ γράμματα α, β, γ, δ, παριστάνωσι τοὺς τέσσαρας γνωστοὺς ὅρους μιᾶς ἀναλογίας ἀριθμητικῆς ἢ γεωμετρικῆς.

γ΄. Ἡ ἐξίσωσις, ἥτις περιέχουσα μίαν ἢ πλειοτέρας ἀγνώστους, ἐπαληθεύει, ὅταν τεθῶσιν εἰς αὐτὴν ἀντὶ τῶν ἀγνώστων ἀριθμοί τινες, τῶν ὁποίων αἱ τιμαὶ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τοὺς εἰς τὴν ἰσότητα περιεχομένους γνωστοὺς καὶ δεδομένους ἀριθμούς.

Περὶ τῶν ἐξισώσεων τούτων θέλομεν ἐνασχοληθῆ.

§ 47. Αἱ ἐξισώσεις διαιροῦνται εἰς διαφόρους κλάσεις ἢ βαθμούς.

Ὁ βαθμὸς τῆς ἐξισώσεως προσδιορίζεται ἐκ τοῦ μεγαλητέρου ἐκθέτου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ἄγνωστος.

Πρωτοβάθμιοι λέγονται αἱ ἐξισώσεις εἰς τὰς ὁποίας ἡ ἄγνωστος εἰσέρχεται εἰς τὴν πρώτην δύναμιν. Τοιαῦται εἶναι αἱ

$$3\chi+5=29-5\chi, \qquad \alpha\chi+\beta=\gamma\chi+\delta.$$

Δευτεροβάθμιοι λέγονται ἐκεῖνοι εἰς τὰς ὁποίας ἡ ἄγνωστος εἰσέρχεται εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν.

$$\left.\begin{array}{r} 3\chi^2=108 \\ 2\chi^2-3\chi=-2+\chi^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha\chi^2=\beta \\ \alpha\chi^2+\beta\chi=\gamma, \end{array}$$

ὡσαύτως ἡ ἐξίσωσις $4\chi^3-5=\chi^2+\chi=2\chi^2+11$ λέγεται τριτοβάθμιος καὶ ἐφεξῆς.

§ 48. Ὅταν εἰς ἐξίσωσίν τινα εἰσέρχωνται πολλοὶ ἄγνωστοι, τότε ὁ βαθμὸς αὐτῆς ἰσοῦται μὲ τὸ μεγαλητερον ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν εἰς τὸν αὐτὸν ὅρον περιεχομένων ἀγνώστων.

Οὕτω $3\chi^2y+4=5\chi y^2$ εἶναι ἐξίσωσις τρίτου βαθμοῦ, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τοῦ χ καὶ y ἐν τῷ αὐτῷ ὅρῳ εἶναι $2+1=3$.

ΣΗΜ. Ὁ βαθμὸς τῶν ἐξισώσεων δὲν διακρίνεται εἰμὴ ἀφοῦ ἐκτελεσθῶσιν ἐπ' αὐτῆς αἱ ἀναγκαῖαι πράξεις, δι' ὧν τὰ δύο μέλη αὐτῆς νὰ ἦναι πολυώνυμα ἀκέραια καὶ ἄνευ παρενθέσεων

§ 49. Διακρίνονται πρὸς τούτοις αἱ ἐξισώσεις εἰς ἀριθμητικὰς καὶ εἰς γραμματικάς.

Ἀριθμητικαὶ μὲν εἶναι ἐκεῖναι, εἰς τὰς ὁποίας αἱ γνωσταὶ ποσότητες παριστάνονται διὰ μερικῶν ἀριθμῶν ὡς

$$4\chi-3=2\chi+5,$$
$$3\chi^2-\chi=8.$$

αὗται δὲ εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ μετάφρασις προβλημάτων, τῶν ὁποίων τὰ διδόμενα εἶναι μερικοὶ ἀριθμοί.

Γραμματικαὶ δὲ εἶναι αἱ ἐξισώσεις, εἰς τὰς ὁποίας ἐκτὸς τῶν ἀγνώστων περιέχονται καὶ ποσότητες γνωσταὶ παριστανόμεναι διὰ γραμμάτων· ὡς,

$$\alpha\chi+\beta=\gamma\chi+\delta.$$
$$\alpha\chi^2+\beta\chi=\gamma.$$

ΣΗΜ. Πρὸς διάκρισιν συνήθως σημειοῦνται αἱ ἄγνωστοι ποσότητες διὰ τῶν τελευταίων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου φ, χ, ψ, ω, y, αἱ δὲ γνωσταὶ διὰ τῶν πρώτων α, β, γ.

Ἄς ἴδωμεν ἤδη τίνι τρόπῳ δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον· νὰ εὕρωμεν δηλαδὴ διὰ τὴν ἄγνωστον ἀριθμόν τινα, ὅστις ἀντεισαχθεὶς ἀντὶ τῆς ἀγνώστου ταύτης νὰ ταυτοποιῇ, τουτέστι ν' ἀποτελῇ τὸ πρῶτον μέλος ἴσον τῷ δευτέρῳ.

Ἐπίλυσις τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον.

§ 50. Ἀναχωροῦντες ἐκ τῶν ἀξιωμάτων, ά. ἐὰν εἰς ἴσα προστεθῶσιν ἴσα, ἢ ἀπὸ ἴσων ἀφαιρεθῶσιν ἴσα, τὰ ἐξαγόμενα εἶναι ἴσα. β'. Ἐὰν ἴσα πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσι δι' ἴσων, τὰ ἐξαγόμενα εἶναι ἴσα· δυνάμεθα νὰ καθυποβάλλωμεν τὰς ἐξισώσεις εἰς τροποποιήσεις τινὰς ἢ μεταμορφώσεις πρὸς ἐπίλυσιν αὐτῶν ἀναγκαίας.

Α'. *Μετάθεσις τῶν ὅρων*. Ὅταν τὰ δύο μέλη ἐξισώσεώς τινος ἦναι ἀκέραια πολυώνυμα, νὰ μεταφέρωμεν ὅρους τινὰς ἀπὸ τὸ ἓν εἰς τὸ ἕτερον μέλος.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $5\chi-6=8+2\chi$.

Ἐὰν ἠδυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον, ἔχουσαν εἰς τὸ ἓν μέλος αὐτῆς τὴν ἄγνωστον χ μεμονωμένην καὶ εἰς τὸ ἕτερον τοὺς γνωστοὺς ἀριθμούς, ἠθέλαμεν λάβει τὴν τιμὴν τῆς ἀγνώστου. Ὅθεν παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ὅρος 2χ ἤθελεν ἐκλείψει ἀπὸ τὸ δεύτερον μέλος, ἐὰν ὑπῆρχε παρ' αὐτῷ ἕτερος ὅρος -2χ. Ἂς γράψωμεν λοιπὸν τὸν ὅρον τοῦτον εἰς τὸ δεύτερον μέλος· ἀλλ' οὕτως ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτοῦ τὴν ποσότητα 2χ· ἵνα δὲ μὴ βλάψωμεν τὴν ἰσότητα πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν τὴν αὐτὴν ποσότητα καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτον μέλος· λαμβάνομεν λοιπόν.

$$5\chi-6-2\chi=8+2\chi-2\chi \quad \text{ἢ} \quad 5\chi-6-2\chi=8.$$

Κάμνοντες τὴν αὐτὴν παρατήρησιν ὡς πρὸς τὸν γνωστὸν ὅρον -6 τοῦ πρώτου μέλους ὁδηγούμεθα εἰς τὸ νὰ προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸν ἀριθμὸν 6· οὕτως ἔχομεν

$$5\chi-6-2\chi+6=8+6 \quad \text{ἢ} \quad 5\chi-2\chi=8+6.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ὁ ὅρος 2χ, ὅστις ἦτο θετικὸς εἰς τὸ δεύτερον μέλος, μετετέθη εἰς τὸ πρῶτον ὡς ἀρνητικὸς, καὶ ὁ ὅρος -6, ὅστις ἦτο ἀρνητικὸς εἰς τὸ πρῶτον μέλος, μετετέθη εἰς τὸ δεύτερον ὡς θετικός. Ὅθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

« Ὅταν μεταθέτωμεν ὅρον τινὰ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς εἰς τὸ ἕτερον μέλος, » πρέπει ν' ἀλλάσσωμεν τὸ σημεῖον αὐτοῦ. »

§ 51. Β'. *Ἐξαφάνισις παρονομαστῶν.* Ὅταν οἱ ὅροι ἐξισώσεώς τινος ἦναι κλασματικοὶ νὰ τρέψωμεν αὐτὴν εἰς ἄλλην ἔχουσαν ἀκεραίους μόνον ὅρους.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{2\chi}{3}-\frac{3}{4}=11+\frac{\chi'}{5}$

Ἐὰν ὅλοι οἱ ὅροι εἶχον τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ἠδυνάμεθα, ἄνευ ἀτόπου τινὸς νὰ τὸν ἐξαλείψωμεν, διότι διὰ τῆς ἐξαλείψεως ταύτης ἐπολλαπλασιάζοντο ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Ἐκ τούτου ὁδηγούμεθα εἰς τὸ νὰ φέρωμεν τοὺς κλασματικοὺς ὅρους εἰς τον αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ να δώσωμεν εἰς τοὺς ἀκεραίους μορφὴν κλασματικήν. Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο τὸ ἁπλούστερον πολλαπλάσιον εἶναι 60, τὸ ὁποῖον ἵνα δώσωμεν ὡς κοινὸν παρονομαστὴν εἰς ὅλους τοὺς ὅρους, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ ἁπλουστέρου πολλαπλασίου διαιρεθέντος διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τοὺς ἀκεραίους ὅρους ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον πολλαπλάσιον οὕτως ἔχομεν,

$$\frac{40\chi}{60}-\frac{45}{60}=\frac{660}{60}+\frac{12\chi}{60}$$

καὶ ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν παρονομαστήν.

$$40\chi-45=660+12\chi.$$

Ἐπειδὴ ὁ κοινὸς παρονομαστὴς ἐξαλείφεται, συντομίας χάριν πολλαπλασιάζομεν μονον τοὺς ἀριθμητας ἐπὶ τὰ ἀντιστοιχοῦντα πηλίκα καὶ τοὺς ἀκεραίους ὅρους ἐπὶ ὁλόκληρον τὸ πολλαπλάσιον.

Παράδειγμα β'.

$$\frac{5\chi}{12}-\frac{\chi}{3}-13=\frac{7}{8}-\frac{13\chi}{6} \quad \text{ἁπλούςερον πολ. } 24$$

$$2 \quad 8 \quad 24 \quad 3 \quad 4 \quad \text{πηλίκα (α)}$$

$$10\chi-8\chi-312=21-52\chi$$

(α) Ὡς πηλίκον θεωροῦμεν καὶ τὸν 24, διότι πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἀκριβής, ἐπειδὴ ἕκαστος ὅρος ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ 24.

§ 52. Κανών. « Ἵνα ἀφανίσωμεν τοὺς παρονομαστὰς ἀπὸ ἐξίσωσίν » τινα σχηματίζομεν κατὰ πρῶτον τὸ ἁπλούστερον πολλαπλάσιον » ὅλων τῶν παρονομαστῶν (ἐὰν οἱ παρονομασταὶ δὲν ἔχωσι κοινοὺς » παράγοντας, λαμβάνομεν τὸ γινόμενον ὅλων αὐτῶν). Πολλαπλασιά» ζομεν ἔπειτα ἕκαστον ὅρον ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον τοῦ πολ» λαπλασίου διαιρεθέντος διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, παραλείποντες τοὺς » παρονομαστάς. »

Παράδειγμα γ'.

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta}-\frac{2\gamma^2\chi}{\alpha\beta}+4\alpha=\frac{4\beta\gamma^2\chi}{\alpha^3}-\frac{3\alpha^3}{\beta^2}+\frac{2\gamma^2}{\alpha} \quad \text{Α. Π. } \alpha^3\beta^2.$$

$$\alpha^3\beta \quad \alpha^2\beta \quad \alpha^3\beta^2 \quad \beta^2 \quad \alpha^3 \quad \alpha^2\beta^2 \quad \text{πηλίκα.}$$

$$\alpha^4\beta\chi-2\alpha^2\beta\gamma^2\chi+4\alpha^4\beta^2=4\beta^3\gamma^2\chi-3\alpha^6+2\alpha^2\beta^2\gamma^2$$

§ 53. Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὰς προηγηθείσας ἀρχὰς εἰς τὴν λύσιν τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων.

α) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις .... $4\chi-3=2\chi+5$,

μεταθέτοντες τοὺς ὅρους ἔχομεν .... $4\chi-2\chi=5+3$,

καὶ ἀνάγοντες .... $2\chi=8$

διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ 2...... $\chi=\frac{8}{2}=4.$

Καὶ τῷ ὄντι, ἀντεισάγοντες 4 ἀντὶ τοῦ χ εἰς τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν

$$4\times4-3=2\times4+5 \text{ ἢ } 13=13.$$

β') Ἔστω προσέτι ἡ ἐξίσωσις $\frac{5\chi}{12}-\frac{4\chi}{3}-13=\frac{7}{8}-\frac{13\chi}{6}$

ἀφανίζοντες τοὺς παρονομαστὰς $10\chi-32\chi-312=21-52\chi$,

μεταθέτοντες .... $10\chi-32\chi+52\chi=21+312$,

ἀναγοντες .... $30\chi=333.$

καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ συντελεσοῦ $\chi=\frac{333}{30}=\frac{111}{10}$

ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον ταυτοποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν.

γ) Ἔστω ἡ γραμματικὴ ἐξίσωσις

$$(3\varkappa-\chi)\ (\alpha-\beta)+2\varkappa\chi=4\beta\ (\chi+\varkappa),$$

Ἵνα διακρίνωμεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τοὺς περιέχοντας τὴν ἄγνωστον χ, πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν τοὺς πολλαπλασιασμούς· ὅθεν

λαμβάνομεν .... $3\alpha^2 - \alpha\chi - 3\alpha\beta + \beta\chi + 2\alpha\chi = 4\beta\chi + 4\alpha\beta.$
μεταθέτοντες .. $-\alpha\chi + \beta\chi - 4\beta\chi + 2\alpha\chi = 4\alpha\beta + 3\alpha\beta - 3\alpha^2.$
ἀνάγοντες .... $\alpha\chi - 3\beta\chi = 7\alpha\beta - 3\alpha^2.$

Παρατηροῦντες ἤδη ὅτι $\alpha\chi - 3\beta\chi$ ἄγεται εἰς $(\alpha - 3\beta)\chi$,
συνάγομεν .... $(\alpha - 3\beta)\chi = 7\alpha\beta - 3\alpha^2,$

καὶ διαιροῦντες .... $\chi = \dfrac{7\alpha\beta - 3\alpha^2}{\alpha - 3\beta}$

Κανών. « Ἵνα ἐπιλύσωμεν οἱανδήποτε πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν, » πρέπει, α΄. ν' ἀφανίσωμεν τοὺς παρονομαστὰς ἐὰν ἔχῃ· β΄. νὰ ἐκ- » τελέσωμεν τὰς σημειωμένας πράξεις· γ΄. νὰ μεταθέσωμεν εἰς τὸ » πρῶτον μέλος ὅλους τοὺς περιέχοντας τὴν ἄγνωστον ὅρους, καὶ εἰς » τὸ δεύτερον ὅλους τοὺς γνωστούς· δ΄. ν' ἀνάξωμεν εἰς ἕνα μόνον » ὅρον ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου μέλους, ἐὰν ἡ ἐξίσωσις ἦναι » ἀριθμητική· ἐὰν δὲ ἦναι γραμματική, νὰ σχηματίσωμεν ἐξ ὅλων » τούτων τῶν ὅρων ἓν μόνον γινόμενον, συγκείμενον ἀπὸ δύο παρά- » γοντας, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μὲν εἷς εἶναι ἡ ἄγνωστος, ὁ δ' ἕτερος τὸ » ἄθροισμα τῶν ποσοτήτων, αἱ ὁποῖαι πολλαπλασιάζουσι τὴν ἄγνω- » στον, μὲ τὰ ἴδια αὐτῶν σημεῖα· ε΄. νὰ διαιρέσωμεν τὰ δύο μέλη » τῆς ἐξισώσεως διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ἢ διὰ τοῦ πολυωνύμου, τὸ ὁποῖον » πολλαπλασιάζει τὴν ἄγνωστον, τουτέστι διὰ τοῦ συντελεστοῦ τῆς » ἀγνώστου. »

§ 54. Ἰδοὺ συμπεπλεγμένον παράδειγμα, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ κανὼν οὗτος ἐφαρμόζεται καθ' ὅλα τὰ μέρη.

$$\frac{(\alpha+\beta)\ (\chi-\beta)}{\alpha-\beta} - 3\alpha = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} - 2\chi + \frac{\alpha^2-\beta\chi}{\beta}$$

ἁπλούστερον πολλαπλάσιον .... $\beta(\alpha-\beta)\ (\alpha+\beta) = \beta(\alpha^2-\beta^2).$
πηλίκα, $\beta(\alpha+\beta)$, $\beta(\alpha^2-\beta^2)$, $\beta(\alpha-\beta)$, $\beta(\alpha^2-\beta^2)$, $(\alpha^2-\beta^2).$
ἐξαγομ.. $\beta(\alpha+\beta)^2(\chi-\beta) - 3\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2) = \beta(\alpha-\beta)^2 - 2\beta\chi(\alpha^2-\beta^2).$
$+(\alpha^2-\beta\chi)(\alpha^2-\beta^2).$

ἐκτελοῦντες τοὺς σημειωμένους πολλαπλασιασμοὺς εὑρίσκομεν

$$\alpha^2\beta\chi+2\alpha\beta^2\chi+\beta^3\chi-\alpha^2\beta^2-2\alpha\beta^3-\beta^4-3\alpha^3\beta+3\alpha\beta^3=$$
$$\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+\beta^3-2\alpha^2\beta\chi+2\beta^3\chi+\alpha^4-\alpha^3\beta\chi-\alpha^2\beta^2+\beta^3\chi.$$

μεταθέτοντες καὶ ἀνάγοντες λαμβάνομεν,

$$4\alpha^2\beta\chi+2\alpha\beta^2\chi-2\beta^3\chi=\alpha^4+3\alpha^3\beta+\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+\beta^3.$$

ὅθεν $$(4\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2-2\beta^3)\chi=\alpha^4+3\alpha^3\beta+\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+\beta^3.$$

λοιπὸν .... $$\chi=\frac{\alpha^4+3\alpha^3\beta+\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+\beta^3}{4\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2-2\beta^3}.$$

§ 55. Ἔστω προσέτι ἡ ἐξίσωσις .... $3\chi-2=4\chi-7$, μεταθέτοντες τοὺς ὅρους, οἵτινες ἔχουσι τὴν ἄγνωστον εἰς τὸ πρῶτον μέλος, καὶ τοὺς γνωστοὺς εἰς τὸ δεύτερον, ἔχομεν $3\chi-4\chi=2-7$, καὶ δι' ἀναγωγῆς .... $-\chi=-5$.

Ἵνα ἐξηγήσωμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῆς μεταθέσεως, τουτέστι νὰ μεταφέρωμεν εἰς τὸ δεύτερον μέλος τοὺς ἔχοντας τὸ χ ὅρους· οὕτως ἔχομεν .... $7-2=4\chi-3\chi$, ὅθεν $5=\chi$, τουτέστι .... $\chi=5$.

Ὁσάκις λοιπὸν φθάνομεν εἰς ἐξαγόμενον τοιοῦτον $-\chi=-5$, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα τῶν δύο μελῶν, καὶ ἐν γένει εἰς πᾶσαν ἐξίσωσιν δυνάμεθα νὰ μεταβάλλωμεν τὰ σημεῖα τῶν ὅρων ἑκατέρου μέλους, τὸ $+$ εἰς $-$, καὶ τ' ἀνάπαλιν, χωρὶς νὰ καταστρέφηται διὰ τοῦτο ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος.

Προβλήματα τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ μίαν ἄγνωστον.

§ 56. Πρὶν ἢ ἀσχοληθῶμεν εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἐξισώσεων περιεχουσῶν πλειοτέρας ἀγνώστους, θέλομεν λύσει προβλήματά τινα, τῶν ὁποίων αἱ ἐκφωνήσεις μεταφραζόμεναι ἀλγεβρικῶς παράγουσιν ἐξισώσεις πρωτοβαθμίους, καὶ τὰ ὁποῖα διὰ τοῦτο λέγονται προβλήματα τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

Εἴπομεν ἤδη ὅτι ἡ θέσις τοῦ προβλήματος εἰς ἐξίσωσιν δὲν ὑπόκειται εἰς σταθερὸν κανόνα. Ἐνίοτε ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος δίδει ἀμέσως τὴν ἐξίσωσιν, διότι αἱ σχέσεις μεταξὺ τῶν γνωστῶν καὶ ἀγνώστων ποσοτήτων εἶναι καταφανεῖς, καὶ ἀρκεῖ μόνον νὰ παρασταθῶσιν ἀλγεβρικῶς. Ἄλλοτε εἶναι μᾶλλον συμπεπλεγμέναι, ἀλλὰ *ῥηταί*. Ἐνίοτε ὅμως δὲν ἀρκοῦσιν αἱ μόναι ἐκφωνούμεναι εἰς τὸ πρόβλημα, ἀλλ' ἀπαιτοῦνται καὶ συνθῆκαι ἄλλαι, θεωρούμεναι ὡς συνέπειαι τῶν πρώτων, αἱ ὁποῖαι διὰ τοῦτο λέγονται *ὑπονοούμεναι* ἢ αἱ μὲν πρῶται λέγονται *συνεπτυγμέναι*, αἱ δὲ δεύτεραι *ἀνεπτυγμέ-*

ναι· ὥστε πρὸς διάγνωσιν τῶν μεταξὺ τῶν γνωστῶν καὶ ἀγνώστων ποσοτήτων σχέσεων ἀπαιτεῖται ἀναλυτικὴ ἔρευνα. Τὴν δυσκολίαν ταύτην ὑπερνικᾷ ἡ ἄσκησις εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων, δι' ἧς οἰκειοῦταί τις μὲ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον. Μολοντοῦτο ὁ περιώνυμος ἀναλυτικὸς Lacroix ἔδωκεν ἑρμηνείαν, διευκολύνουσαν μεγάλως τὴν ἀνάλυσιν ταύτην, ἡ ἑρμηνεία δὲ αὕτη ἐπέχει τόπον κανόνος· εἶναι δὲ ἡ ἑξῆς.

« Υποθέτομεν τὸ πρόβλημα ὡς λελυμένον, ἤτοι τὴν ἄγνωστον ὡς » γνωστὴν, παριστάνοντες αὐτὴν δι' ἑνὸς τῶν τελευταίων γραμμά- » των, καὶ σημειοῦμεν ἀλγεβρικῶς ὅλας τὰς μεταξὺ τῆς ἀγνώστου » ταύτης καὶ τῶν γνωστῶν ποσοτήτων ἀναφερομένας πράξεις, ὡς » ἐὰν ἐπρόκειτο, ἔχοντες γνωστὴν τὴν τιμὴν, νὰ βεβαιώσωμεν αὐτὴν » διὰ τῆς ἰδίας τοῦ προβλήματος βασάνου. Φθάνομεν δὲ οὕτως εἰς » τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος. »

§ 57. Ἄς ἐφαρμόσωμεν ἤδη τὸν κανόνα τοῦτον εἰς τὴν λύσιν τῶν ἑξῆς προβλημάτων.

Πρόβλημα Α΄. Νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν, εἰς τοῦ ὁποίου τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, καὶ τὸ τέταρτον ὁμοῦ προστιθέμενος ὁ 45 δίδει ἄθροισμα 448.

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς $\quad \frac{\chi}{2}, \quad \frac{\chi}{3}, \quad \frac{\chi}{4},$

παριστάνουσι τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου. Ὅθεν πρέπει κατὰ τὴν ἐκφώνησιν, τὰ τρία ταῦτα μέρη, ὁμοῦ μὲ 45, νὰ δίδωσιν ἄθροισμα 448· ἔχομεν λοιπὸν ὡς ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος.

$$\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{4}+45=448.$$

ἀφαιροῦντες ἀφ' ἑκάτερον μέλος 45, ἔχομεν

$$\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{4}=403.$$

ἀφανίζοντες τοὺς παρονομαστὰς εὑρίσκομεν,

$$6\chi+4\chi+3\chi=4836,$$

καὶ ἀνάγοντες $\quad 13\chi=4836,$

λοιπὸν $\quad \chi=\frac{4836}{13}=372.$

Τῷ ὄντι $\quad \frac{372}{2}+\frac{372}{3}+\frac{372}{4}+45=448.$

§ 58. *Πρόβλημα Β'.* Ποσόν τι δραχμῶν διενεμήθη μεταξὺ τεσσάρων ἀνθρώπων, ἐξ ὧν ὁ μὲν πρῶτος ἔλαβε τὸ ἥμισυ μεῖον 6· ὁ δὲ δεύτερος ἔλαβε τὸ τρίτον τοῦ ὑπολοίπου μεῖον 2· ὁ τρίτος ἔλαβε τὸ τέταρτον τοῦ ὑπολοίπου μεῖον 1 καὶ ὁ τέταρτος ἔλαβε τὰς ἐναπολειφθείσας 13 δραχμάς.

Ζητεῖται, πόσαι ἦσαν αἱ δραχμαί, καὶ πόσας ἔλαβεν ἕκαστος τῶν τριῶν ἀνθρώπων ;

Ἔστω χ ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν δραχμῶν·

ὁ πρῶτος ἔλαβε . . $\frac{\chi}{2}-6$ . . . . (1)

ἔμειναν μετὰ τοῦτον $\chi-(\frac{\chi}{2}-6)=\frac{\chi}{2}+6.$

ὁ δεύτερος ἔλαβε . $\frac{1}{3}(\frac{\chi}{2}+6)-2=\frac{\chi}{6}+2-2=\frac{\chi}{6}$ . . (2)

μετὰ τοὺς δύο ἔμειναν $\frac{\chi}{2}+6-\frac{\chi}{6}=\frac{2\chi}{6}+6=\frac{\chi}{3}+6.$

ὁ τρίτος ἔλαβε . . $\frac{1}{4}(\frac{\chi}{3}+6)-1=\frac{\chi}{12}+\frac{6}{4}-1=\frac{\chi}{12}+\frac{1}{2}$ (3)

ὁ τέταρτος ἔλαβε 13, ἄνευ ὑπολοίπου.

Ὑποθέτοντες τὸ χ ὡς γνωστὸν ἂς δοκιμάσωμεν, ἐὰν δὲν ἔμεινε τίποτε, τουτέστιν, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων μερῶν ἀποτελεῖ τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν διανεμηθεισῶν δραχμῶν,

$$\frac{\chi}{2}-6+\frac{\chi}{6}+\frac{\chi}{12}+\frac{1}{2}+13=\chi.$$

Τὸ πρόβλημα ἐτέθη εἰς ἐξίσωσιν. Ἂς λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα·

Ἀφανίζοντες τοὺς παρονομαστὰς $6\chi-72+2\chi+\chi+6+156=12\chi.$
Ἀνάγοντες καὶ μεταθέτοντες $3\chi=90$, ὅθεν $\chi=30$.

Ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ εἰς τοὺς τύπους (1), (2), (3), εὑρίσκομεν τὰς δραχμάς, τὰς ὁποίας ἕκαστος ἔλαβε

τουτέστι 9, 5 καὶ 3.

§ 59. *Πρόβλημα Γ'.* Ἐμίσθωσέ τις ἐργάτην διὰ 48 ἡμέρας ἐπὶ συμφωνίᾳ νὰ τὸν δίδῃ διὰ πᾶσαν ἐργάσιμον ἡμέραν 3 δραχμάς· νὰ χρεώνῃ δὲ αὐτὸν διὰ τὴν τροφήν, δραχ. 2, διὰ πᾶσαν ἡμέραν ἀργίας· εἰς τὸ τέλος τῶν 48 ἡμερῶν ὁ ἐργάτης ἔλαβεν 84 δραχμάς. Ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργασίμων ἡμερῶν καὶ ὁ τῶν τῆς ἀργίας.

Ἄς σημειώσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐργασίμων ἡμερῶν διὰ χ,
ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν τῆς ἀργίας θέλει παρασταθῇ διὰ $48-\chi$,
τὸ δὲ σύνολον τῶν ἡμερομισθίων διὰ 3χ,
καὶ ἡ ὁλικὴ δαπάνη διὰ τὴν τροφὴν διὰ . . . . . . $2(48-\chi)$.

Ἐὰν ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν ἡμερομισθίων ἀφαιρέσωμεν τὴν ὁλικὴν δαπάνην, πρέπει νὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 84· ἔχομεν λοιπὸν

τὴν ἐξίσωσιν, $3\chi-2(48-\chi)=84$.

ἐκτελοῦντες τοὺς ὑπολογισμοὺς λαμβάνομεν διαδοχικῶς

$$3\chi-96+2\chi=84,$$
$$5\chi=84+96=180,$$
$$\chi=\frac{180}{5}=36.$$

ὅθεν $48-\chi=12$.

Εἰργάσθη λοιπὸν ὁ ἐργάτης 36 ἡμέρας καὶ ἀνεπαύθη 12 ἡμέρας.

Τῷ ὄντι διὰ 36 ἡμέρας ἔπρεπε νὰ λάβῃ 36×3 ἢ 108 δρχ.
διὰ 12 ἡμέρας ἀργίας ἔπρεπε ν' ἀφήσῃ 12×2 ἢ 24

Λοιπὸν δικαιοῦται νὰ λάβῃ μόνον $108-24$ ἤτοι δρχ. 84.

§ 60. Δυνάμεθα νὰ γενικεύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο παριστάνοντες διὰ γραμμάτων τὰς γνωστὰς ποσότητας.

Ἔστω ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, η,
τὸ ἡμερομίσθιον τοῦ ἐργάτου . . . . α,
ἡ ἡμερησία δαπάνη . . . . β,
τὸ ληφθὲν ποσὸν τῶν δραχμῶν . . . γ,

χ, αἱ ἐργάσιμοι ἡμέραι
$\eta-\chi$ αἱ τῆς ἀργίας.

Ἐὰν διὰ 1 ἡμέραν ὁ ἐργάτης λαμβάνῃ α, διὰ χ πρέπει νὰ λάβῃ $\alpha\chi$, ὡσαύτως, ἐὰν διὰ 1 ἡμέραν πρέπει ν' ἀφίνῃ β, διὰ $\eta-\chi$ ἡμέρας πρέπει ν' ἀφήσῃ $\beta(\eta-\chi)$ ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν

$$\alpha\chi-\beta(\eta-\chi)=\gamma.$$

ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις κατὰ τὸν κανόνα, λαμβάνομεν διαδοχικῶς

$$\alpha\chi-\beta\eta+\beta\chi=\gamma,$$
$$\alpha\chi+\beta\chi=\gamma+\beta\eta,$$
$$(\alpha+\beta)\chi=\gamma+\beta\eta,$$
$$\chi=\frac{\gamma+\beta\eta}{\alpha+\beta}$$

ἐπομένως

$$\eta-\chi=\eta-\frac{\gamma+\beta\eta}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha\eta+\beta\eta-\gamma-\beta\eta}{\alpha+\beta}$$

$$\eta-\chi=\frac{\alpha\eta-\gamma}{\alpha+\beta}$$

§ 61. *Πρόβλημα Δ΄*. Ἄνθρωπός τις κατέθεσεν εἰς τόκον 100000 δραχ. ἐκ τῶν ὁποίων μέρος μὲν πρὸς 5 τοῖς $^0/_0$, μέρος δὲ πρὸς 6 τοῖς $^0/_0$, ἀπολαμβάνει δὲ ὁλικὸν ἐτήσιον εἰσόδημα 5460 δραχ. Ζητοῦνται τὰ δύο μέρη.

Σημειόνοντες διὰ χ τὸ πρῶτον μέρος, θέλομεν παραστήσει τὸ δεύτερον διὰ $100000-\chi$.

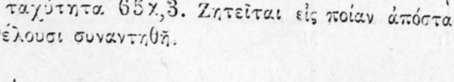
Ὑποθέτοντες τὸ χ γνωστὸν εὑρίσκομεν τὸν ἐτήσιον τόκον αὐτοῦ διὰ τῆς ἀναλογίας
$$100 : 5 :: \chi : \frac{5\chi}{100}.$$

Ὡσαύτως εὑρίσκομεν τὸν τόκον τοῦ δευτέρου μέρους διὰ τῆς
$$100 : 6 :: 100000-\chi : \frac{6(100000-\chi)}{100},$$
ἀλλὰ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος οἱ δύο οὗτοι μερικοὶ ἐτήσιοι τόκοι ὁμοῦ λαμβανόμενοι πρέπει ν᾽ ἀποτελῶσι 5460, ἄρα πρέπει νὰ ἔχωμεν
$$\frac{5\chi}{100}+\frac{6(100000-\chi)}{100}=5460.$$

Τὸ πρόβλημα ἐτέθη εἰς ἐξίσωσιν. Πρέπει νὰ λύσωμεν αὐτήν. Ἀφανίζοντες τὸν παρονομαστὴν καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις, ἔχομεν
$$5\chi+600000-6\chi=546000.$$
μεταθέτοντες,
$$600000-546000=6\chi-5\chi.$$
ἢ
$$\chi=54000.$$
ἑπομένως τὸ δεύτερον μέρος εἶναι 46000.

Βάσανος	54000	πρὸς	5 $^0/_0$	δίδουσι	2700,
	46000	»	6 $^0/_0$	»	2760,
	100000			»	5460.

§ 62. *Πρόβλημα Ε΄*. Δύο ἁτμάμαξαι ἀναχωροῦσι ταυτοχρόνως ἐκ Παρισίων καὶ Λίλλης, μεταξὺ τῶν ὁποίων τὸ διὰ τοῦ σιδηροδρόμου διάστημα εἶναι χιλιόμετρα 274,2. Ἐκ τούτων δὲ ἡ μὲν πρώτη, οὖσα κοινή, ἔχει ταχύτητα (1) 42χ,2, ἡ δὲ δευτέρα ταχυδρομική, ἔχει ταχύτητα 65χ,3. Ζητεῖται εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἐκ τῶν Παρισίων θέλουσι συναντηθῆ.



(1) Ταχύτης εἶναι τὸ διανυόμενον διάστημα εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου, ὅθεν 42,2 καὶ 65,3 ἐκφράζουσιν εἰς χιλιόμετρα τὰ εἰς μίαν ὥραν διανυόμενα διαστήματα

Ἂς παραστήσωμεν διὰ τῆς εὐθείας γραμμῆς ΠΛ τὸν μεταξὺ Παρισίων καὶ Λίλλης σιδηρόδρομον. Ἔστω Σ τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως τῶν δύο ἀτμαμαξῶν.

Ἔχομεν γνωστὸν τὸ διάστημα . . . . $ΠΛ=274,2$,
καὶ ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὸ . . . . $ΠΣ=χ$,
ἐπομένως καὶ τὸ . . . . $ΛΣ=274,2-χ$.

Ἐπειδὴ αἱ δύο ἀτμάμαξαι ἀναχωροῦσαι ταυτοχρόνως ἡ μὲν ἐκ τοῦ Π, ἡ δὲ ἐκ τοῦ Λ φθάνουσι τὴν αὐτὴν στιγμὴν τοῦ χρόνου εἰς τὸ σημεῖον Σ, δαπανῶσιν ἄρα τὸν αὐτὸν χρόνον, ἡ μὲν ἵνα διατρέξῃ $ΠΣ=χ$, ἡ δὲ ἵνα διατρέξῃ $ΛΣ=274,2-χ$.

Ἐὰν λοιπὸν εὕρωμεν τὸν χρόνον, τὸν ὁποῖον δαπανᾷ ἑκατέρα τῶν ἀτμαμαξῶν, θέλομεν σχηματίσει ἀμέσως τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος.

Ὅθεν τὸν μὲν ὑπὸ τῆς πρώτης ἀτμαμάξης δαπανώμενον χρόνον

εὑρίσκομεν διὰ τῆς ἀναλογίας . . . $42,2 : 1 :: χ : \frac{χ}{4,22}$

τὸν δὲ ὑπὸ τῆς δευτέρας διὰ τῆς . $65,3 : 1 :: 274,2-χ : \frac{274,2-χ}{65,3}$

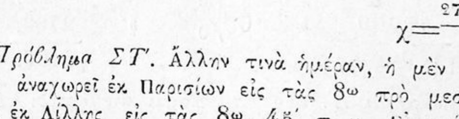
ἔχομεν λοιπὸν . . . . $\frac{χ}{42,2}=\frac{274,2-χ}{65,3}$

ἢ ἁπλούστερον . . . . $\frac{χ}{422}=\frac{274,2-χ}{653}$

Ἂς ἐπιλύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην.
ἀφανίζοντες τοὺς παρονομ. εὑρίσκομεν $653χ=274,2\times 422-422χ$
ὅθεν . . . . $(653+422)χ=274,2\times 422$

$$χ=\frac{274,2\times 422}{1075}$$

§ 63. *Πρόβλημα ΣΤ'.* Ἄλλην τινὰ ἡμέραν, ἡ μὲν πρώτη τῶν ἀτμαμαξῶν ἀναχωρεῖ ἐκ Παρισίων εἰς τὰς $8^ω$ πρὸ μεσημβρίας· ἡ δὲ δευτέρα ἐκ Λίλλης, εἰς τὰς $8^ω$, 45' π. μ. Εἰς ποίαν ἐκ τῶν Παρισίων ἀπόστασιν θέλουσι συναντηθῇ;



Δυνάμεθα ν' ἀνάξωμεν τὴν περίπτωσιν ταύτην εἰς τὴν πρώτην, παρατηροῦντες ὅτι ἡ πρώτη ἀτμάμαξα εἰς 45', ἤτοι εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας διατρέχει μόνη διάστημα, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν διὰ τῆς ἀναλογίας

$$1 : 42,2 :: \frac{3}{4} : 42,2\times\frac{3}{4}=31,65.$$

Ἔστω πάντοτε $\Pi\Sigma = \chi$ καὶ $\Lambda\Sigma = 274{,}2 - \chi$ ἔπεται ὅτι

$$M\Sigma = \Pi\Sigma - \Pi M \quad \text{ἢ} \quad M\Sigma = \chi - 31{,}65$$

Ἐνῷ λοιπὸν ἡ πρώτη ἀτμάμαξα εἰς τὰς ὥρας 8 $\frac{3}{4}$ φθάσασα εἰς τὸ Μ ἐξακολουθεῖ τὸν δρόμον της πρὸς τὸ Σ, ἡ δευτέρα κατὰ τὴν αὐτὴν ὥραν ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Λ πρὸς τὸ Σ, ὡς εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

Τὰ διαστήματα ΜΣ καὶ ΛΣ διατρέχονται εἰς ἴσους χρόνους, οὓς εὑρίσκομεν διὰ τῶν ἀναλογιῶν

$$42{,}2 : 1 :: \chi - 31{,}65 : \frac{\chi - 31{,}65}{42{,}2}$$

$$65{,}3 : 1 :: 274{,}2 - \chi : \frac{274{,}2 - \chi}{65{,}3}$$

ἑπομένως $$\frac{\chi - 31{,}65}{42{,}2} = \frac{274{,}2 - \chi}{65{,}3}$$

§ 64. *Πρόβλημα Ζ'*. Μία ἀτμάμαξα ἀναχωρεῖ ἐκ Παρισίων διὰ Λίλλην εἰς τὰς 8 ὥρας π. μ. μὲ ταχύτητα $42^{\chi},2$, καθ' ὥραν, εἰς τὰς 8^{ω}, 45' πέμπεται ἑτέρα ταχυδρομικὴ ἀτμάμαξα, ἥτις πρέπει νὰ φθάσῃ τὴν πρώτην εἰς ἀπόστασιν 180 χιλιομέτρων ἐκ Παρισίων. Ζητεῖται, πόσην ταχύτητα πρέπει νὰ ἐντυπώσῃ ἡ ταχυδρομικὴ αὕτη ἀτμάμαξα;

Ἔστω χ ἡ ζητουμένη ταχύτης.

Τὸ διάστημα 180 χιλιομέτρων θέλει διανυθῆ ἀπὸ μὲν τὴν πρώτην ἀτμάμαξαν εἰς χρόνον, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν διὰ τῆς ἀναλογίας

$$42{,}2 : 1 :: 180 : \frac{180}{42{,}2} \text{ ὥρας.}$$

Τὸ αὐτὸ διάστημα θέλει διανυθῆ ἀπὸ τὴν ταχυδρομικὴν εἰς χρόνον, τὸν ὁποῖον ὡσαύτως εὑρίσκομεν διὰ τῆς ἀναλογίας

$$\chi : 1 :: 180 : \frac{180}{\chi} \text{ ὥρας.}$$

Ἀλλ' ἡ ταχυδρομικὴ ἀναχωροῦσα 45 λεπτὰ ἤτοι $\frac{3}{4}$ ὥρας βραδύτερον τῆς πρώτης, ἔπεται ὅτι πρέπει νὰ δαπανήσῃ ὀλιγώτερον ταύτης $\frac{3}{4}$ ἵνα διανύσῃ τὸ διάστημα 180 χιλιομέτρων. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν.

$$\frac{180}{\chi} = \frac{180}{42{,}2} - \frac{3}{4}$$

τὴν ὁποίαν εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν.

§ 65. *Πρόβλημα Η'*. Πατὴρ διατάσσει διὰ διαθήκης τὴν διανομὴν τῆς περιουσίας αὐτοῦ εἰς τρεῖς υἱούς, οὕτω πως· ὁ πρῶτος νὰ λάβῃ προσδιωρισμένην τινὰ ποσότητα α, πλέον τὸ $\frac{1}{\nu}$ μέρος τοῦ ὑπολοίπου· ὁ δεύτερος, 2α, πλέον τὸ $\frac{1}{\nu}$ μέρος τοῦ ὑπολοίπου, ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ τὸ πρῶτον μέρος καὶ 2α· ὁ τρίτος 3α, πλέον τὸ $\frac{1}{\nu}$ μέρος τοῦ νέου ὑπολοίπου, ἀφοῦ ἀφαιρεθῶσι τὰ δύο πρῶτα μέρη καὶ 3α. Οὕτως ἡ οὐσία τοῦ πατρὸς ἐμερίσθη ὁλοκλήρως, ἤτοι ἄνευ ὑπολοίπου. Ζητεῖται ἡ πατρικὴ περιουσία.

Ἄς σημειώσωμεν διὰ χ τὴν περιουσίαν. Ἐὰν διὰ τῆς ποσότητος ταύτης σχηματίσωμεν τὰς ἀλγεβρικὰς ἐκφράσεις τῶν τριῶν μερῶν, ἀφαιροῦντες τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἀπὸ τὴν ὁλικὴν περιουσίαν χ, καὶ ἐξισοῦντες τὸ ὑπόλοιπον μὲ τὸ 0, θέλομεν λάβει τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος.

Ἐπειδὴ χ παριστάνει τὴν πατρικὴν οὐσίαν, $\chi-\alpha$ εἶναι τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον, καὶ ἐπομένως $\alpha+\frac{\chi-\alpha}{\nu}$ εἶναι τὸ πρῶτον μέρος, ἢ δι' ἀναγωγῆς

$$\frac{\alpha\nu+\chi-\alpha}{\nu} \qquad \text{(α'. μέρος).}$$

Ἵνα σχηματίσωμεν τὸ δεύτερον μέρος, πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ χ τὸ πρῶτον μέρος καὶ 2α· οὕτως εὑρίσκομεν β'. ὑπόλοιπον.

$$\chi-\frac{(\alpha\nu+\chi-\alpha)}{\nu}-2\alpha=\frac{\nu\chi-3\alpha\nu-\chi+\alpha}{\nu} \qquad \text{(β'. ὑπόλοιπον).}$$

Ὅθεν τὸ δεύτερον μέρος ἐκφράζεται διὰ

$$2\alpha+\frac{\nu\chi-3\alpha\nu-\chi+\alpha}{\nu^2}=\frac{2\alpha\nu^2+\nu\chi-3\alpha\nu-\chi+\alpha}{\nu^2} \qquad \text{(β'. μέρος).}$$

Ἀφαιροῦντες ἀπὸ χ τὰ δύο πρῶτα μέρη καὶ 3α συνάγομεν

$$\chi-\frac{(\alpha\nu+\chi-\alpha)}{\nu}-\frac{(2\alpha\nu^2+\nu\chi-3\alpha\nu-\chi+\alpha)}{\nu^2}-3\alpha$$

καὶ δι' ἀναγωγῆς

$$\frac{\nu^2\chi-6\alpha\nu^2-2\nu\chi+4\alpha\nu+\chi-\alpha}{\nu^2}, \qquad \text{(γ'. ὑπόλοιπον).}$$

Τὸ τρίτον μέρος λοιπὸν εἶναι

$$3\alpha+\frac{\nu^2\chi-6\alpha\nu^2-2\nu\chi+4\alpha\nu+\chi-\alpha}{\nu^2}$$

ἢ

$$\frac{3\alpha\nu^3+\nu^2\chi-6\alpha\nu^2-2\nu\chi+4\alpha\nu+\chi-\alpha}{\nu^3} \qquad \text{(γ'. μέρος).}$$

Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν, ἡ περιουσία τοῦ πατρὸς ἐμερίσθη ὁλοκλήρως· λοιπὸν ἡ διαφορὰ μεταξὺ χ καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν μερῶν πρέπει νὰ ἐξισοῦται τῷ μηδενί. Ἐκ τούτου λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\left.\begin{matrix}\chi-\dfrac{(\alpha\nu+\chi-\alpha)}{\nu}-\dfrac{(2\alpha\nu^2+\nu\chi-3\alpha\nu-\chi+\alpha)}{\nu^2}\\ -\dfrac{(3\alpha\nu^3+\nu^2\chi-6\alpha\nu^2-2\nu\chi+4\alpha\nu+\chi-\alpha)}{\nu^3}\end{matrix}\right\}=0$$

Ἐπιλύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην προσδιορίζομεν τὴν τιμὴν τοῦ χ.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ λάβωμεν ἁπλουστέραν ἐξίσωσιν καὶ νὰ φθάσωμεν ἐπομένως εἰς ἁπλούστερα ἐξαγόμενα παρατηροῦντες ὅτι, τὸ νὰ λαμβάνῃ ὁ τρίτος υἱὸς 3α πλέον τὸ $\frac{1}{\nu}$ *μέρος τοῦ ὑπολοίπου*, καὶ τὸ νὰ μερίζεται ἡ οὐσία ὁλοκλήρως, δὲν συμβιβάζεται, εἰμὴ ὅταν ὁ τρίτος υἱὸς λάβῃ μόνον 3α, ὅταν δηλαδὴ τὸ τρίτον ὑπόλοιπον ὑποτεθῇ μηδέν.

Ἐκ τῆς παρατηρήσεως ταύτης λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\nu^2\chi-6\alpha\nu^2-2\nu\chi+4\alpha\nu+\chi-\alpha}{\nu^2}=0.$$

ἀφανίζοντες τὸν παρονομαστὴν ἔχομεν

$$\nu^2\chi-6\alpha\nu^2-2\nu\chi+4\alpha\nu+\chi-\alpha=0$$

ἐκ τῆς ὁποίας $\chi=\dfrac{6\alpha\nu^2-4\alpha\nu+\alpha}{\nu^2-2\nu+1}=\dfrac{\alpha(6\nu^2-4\nu+1)}{\nu^2-2\nu+1}$

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου μανθάνομεν, ὅτι εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἐννοῶμεν καλῶς πάσας τὰς ἐν τῇ ἐκφωνήσει τοῦ προβλήματος ὑπονοουμένας συνθήκας, διότι δι' αὐτῶν μορφοῦται ἁπλούστερον ἡ ἐξίσωσις, καὶ ἐπομένως οἱ ἐκ ταύτης προκύπτοντες τύποι.

Ἐφαρμογή. Ἔστω $\alpha=10000$ καὶ $\nu=5$

ἔχομεν $\chi=\dfrac{10000(6\times25-4\times5+1)}{25-10+1}=81875.$

§ 66. ΣΗΜ. Δυνατὸν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος τούτου, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν υἱῶν εἶναι ἄγνωστος, καὶ ὅτι τὰ μέρη αὐτῶν εἶναι ὅλα ἴσα, νὰ ζητήσωμεν ἐπομένως οὐ μόνον τὴν πατρικὴν οὐσίαν, ἀλλὰ καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν υἱῶν, καὶ τὸ μέρος ἑκάστου.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀρκεῖ νὰ ἐξισώσωμεν τοὺς ἤδη εὑρεθέντας τύπους τῶν δύο πρώτων μερῶν, καὶ νὰ λάβωμεν ἀμέσως τὴν ἐξίσωσιν.

$$\frac{\alpha\nu+\chi-\alpha}{\nu}=\frac{2\alpha\nu^2+\nu\chi-3\alpha\nu-\chi+\alpha}{\nu^2}$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἐξάγομεν $\chi=\alpha\nu^2-2\alpha\nu+\alpha=\alpha(\nu^2-2\nu+1)=\alpha(\nu-1)^2$ ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ πρώτου μέρους εὑρίσκομεν $\dfrac{\alpha\nu+\alpha\nu^2-2\alpha\nu+\alpha-\alpha}{\nu}=\dfrac{\alpha\nu^2-\alpha\nu}{\nu}=\alpha\nu-\alpha=\alpha(\nu-1)$.

Καὶ ἐπειδὴ ὅλα τὰ μέρη εἶναι ἴσα, διαιροῦντες τὴν οὐσίαν διὰ τοῦ μέρους πρέπει νὰ λάβωμεν ὡς πηλίκον τὸν ἀριθμὸν τῶν υἱῶν.

Οὕτως $\frac{\alpha(\nu-1)^2}{\alpha(\nu-1)}$ ἤτοι $\nu-1$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν υἱῶν· ὅθεν ἐν περιλήψει

περιλήψει	πατρικὴ οὐσία	$\alpha\nu^2-2\alpha\nu+\alpha=\alpha(\nu-1)^2$,
	μέρος ἑκάστου υἱοῦ . .	$\alpha(\nu-1)$,
	ἀριθμὸς τῶν υἱῶν . . .	$\nu-1$.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

§ 67. Προτείνομεν χάριν ἀσκήσεως καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

Πρόβλημα ά. Πεζὸς διανύει 3 στάδια τὴν ὥραν· μετὰ 10 ὥρας πέμπεται ἕτερος ἔφιππος διανύων 7 στάδια τὴν ὥραν. Ζητεῖται μετὰ πόσας ὥρας ὁ δεύτερος θέλει φθάσει τὸν πρῶτον;

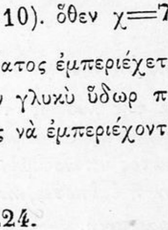
χ αἱ ζητούμεναι ὧραι. ἐξίσωσις $7\chi=3(\chi+10)$. ὅθεν $\chi=7\,\frac{1}{2}$.

Πρόβλημα β'. Εἰς 32 λίτρας θαλασσίου ὕδατος ἐμπεριέχεται 1 λίτρα ἤτοι 16 οὐγγίαι ἅλατος. Ζητεῖται πόσον γλυκὺ ὕδωρ πρέπει νὰ προστεθῇ, ὥστε εἰς 32 λίτρας τοῦ κράματος νὰ ἐμπεριέχονται 2 οὐγγίαι ἅλατος;

$$\text{'Εξίσωσις}\quad \frac{32+\chi}{16}=2\quad \text{ὅθεν}\quad \chi=224.$$

Πρόβλημα γ'. Ὡρολόγιον δεικνύον μεσημβρίαν ἔχει τὸν λεπτοδείκτην ἐπὶ τοῦ ὡροδείκτου. Ζητεῖται πότε πάλιν ὁ λεπτοδείκτης θέλει συναπαντήσει τὸν ὡροδείκτην, καὶ πόσαι συναντήσεις θὰ γίνωσι μέχρι τοῦ μεσονυκτίου;

Πρὸς διασάφησιν τοῦ προβλήματος τούτου παραθέτομεν τὸ σχῆμα τοῦ ὡρολογίου. Ἐν ὥρᾳ μεσημβρίας ὁ λεπτοδείκτης καὶ ὁ ὡροδείκτης εἶναι εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἀμέσως ἔπειτα οἱ δύο δεῖκται κινοῦνται μὲ ἄνισον ταχύτητα· ὁ λεπτοδείκτης διανύει ὅλον τὸν κύκλον, τουτέστι 12 ὥρας ἕως οὗ ὁ ὡροδείκτης φθάσῃ εἰς τὴν 1 ὥραν· ἤτοι ὁ μεταξὺ τῆς ταχύτητος τοῦ ὡροδείκτου καὶ τῆς τοῦ λεπτοδείκτου λόγος εἶναι ὡς 1 : 12.



Ἔστω Β τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως, πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ διάστημα ΑΒ. Ἂς σημειώσωμεν αὐτὸ διὰ χ. Ἑπομένως τὸ διάστημα τοῦ λεπτοδείκτου θέλει σημειωθῆ διὰ $12+\chi$. Ἀλλὰ τὸ διάστημα τοῦτο εὑρίσκεται καὶ ἐκ τῆς ἀναλογίας $1 : 12 : : \chi : 12\chi$. Ἔχομεν λοιπὸν δύο ἐκφράσεις τοῦ αὐτοῦ διαστήματος ἐξισοῦντες αὐτὰς ἔχομεν, $12\chi=12+\chi$,

ὅθεν $11\chi=12$.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης μανθάνομεν ὅτι ἑνδεκάκις τὸ χ ἰσοῦται μὲ 12 ὥρας, καὶ ἐπειδὴ ἕκαστον ἴσον διάστημα χ ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν συνάντησιν, ἄρα αἱ συναντήσεις μέχρι τῆς 12 ὥρας τοῦ μεσονυκτίου εἶναι 11. Διαιροῦντες δὲ διὰ τοῦ συντελεστοῦ λαμβάνομεν $\chi=\frac{12}{11}=1^{\omega}-5'\ \frac{5}{11}$. Διπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εὑρίσκομεν τὴν ὥραν, καθ' ἣν γίνεται ἡ δευτέρα συνάντησις, ἤτοι εἰς τὰς $2^{\omega}-10\ \frac{10}{11}$. Καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως μέχρι τῆς ἑνδεκάτης συναντήσεως, ἥτις θέλει γίνει τὴν $12^{\eta\nu}$ ὥραν.

Πρόβλημα δ'. Πατὴρ ἐρωτηθεὶς περὶ τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ του ἀπεκρίθη. Ἂν ἀπὸ τὸ διπλοῦν τῆς παρούσης, ἀφαιρεθῇ τὸ τριπλοῦν τῆς πρὸ ἓξ ἐτῶν, εὑρίσκεται ἡ παροῦσα ἡλικία. Ζητεῖται πόσων ἐτῶν ἦτον ὁ υἱός;

(Ἀπόκρ. 9 ἐτῶν).

Πρόβλημα ε'. Παῖς ἐρωτηθεὶς περὶ τῆς ἡλικίας αὐτοῦ ἀπεκρίθη. Μετὰ 15 ἔτη θέλω ἔχει τὸ τριπλοῦν τῆς ἡλικίας, τὴν ὁποίαν εἶχον πέρυσιν. Ζητεῖται, πόσων ἐτῶν ἦτον;

(Ἀπόκρ. 9 ἐτῶν).

Πρόβλημα στ'. Ἔμπορος ἀφαιρεῖ κατ' ἔτος ἐκ τῶν κεφαλαίων 1000 δραχμὰς, δι' ἔξοδα οἰκιακά· εἰς τὸ τέλος δ' ἑκάστου ἔτους τὰ κεφάλαια αὐτοῦ αὐξάνουσι κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὑπολοίπου. Μετὰ τρία ἔτη τὰ πρῶτα κεφάλαια διπλασιάζονται. Ζητεῖται πόσα ἦσαν;

(Ἀπόκρ. $\chi=14800$ δραχμάς).

Πρόβλημα ζ'. Ἵππος μεταπωληθεὶς διὰ δραχ. 546 ἄφησε κέρδος 5 $^0/_0$ ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορασίας. Ζητεῖται πόσον ἠγοράσθη;

(Ἀπόκρ. 520 δραχμάς).

Περὶ ἐξισώσεων καὶ προβλημάτων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ πολλὰς ἀγνώστους.

§ 68. Μολονότι τινὰ ἐκ τῶν ἤδη λυθέντων προβλημάτων περιεῖχον εἰς τὴν ἐκφώνησιν αὐτῶν πλειοτέρας ἀγνώστους, ἐφθάσαμεν μολοντοῦτο εἰς τὴν λύσιν αὐτῶν μεταχειρισθέντες ἓν μόνον γράμμα, πρὸς παράστασιν μιᾶς ἐκ τῶν ἀγνώστων τούτων· διότι εἰς τὰ προβλήματα ταῦτα αἱ ἄγνωστοι συνδεόμεναι δι' ἀμοιβαίων σχέσεων δύνανται νὰ ἐκφρασθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ γράμματος, ὅθεν καὶ προσδιορίζονται εὐκόλως, γενομένης μιᾶς τούτων γνωστῆς. Ἀλλ' οὐχὶ πάντοτε συμβαίνει τοῦτο εἰς τὰ προβλήματα, ὅσα περιέχουσι πολλὰς ἀγνώστους, ὡς μὴ ἐξαρτωμένης πάντοτε τῆς μιᾶς τούτων ἐκ τῆς ἄλλης.

Ὅταν πρόβλημά τι περιέχῃ πολλὰς ἀγνώστους ἀνεξαρτήτους ἀπ' ἀλλήλων ὑποχρεούμεθα νὰ παραστήσωμεν ἑκάστην ἐξ αὐτῶν δι' ἰδιαιτέρου γράμματος· ἀλλὰ τότε πρέπει νὰ σχηματίσωμεν τοσαύτας ἐξισώσεις, ὅσαι εἶναι αἱ ἄγνωστοι. Θέλομεν δὲ ἀποδείξει κατωτέρω, ὅτι *αἱ ἐξισώσεις παντὸς ὡρισμένου προβλήματος πρέπει νὰ ἦναι ἰσάριθμοι τῶν ἀγνώστων*. Ἄλλως τὸ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον, ἤτοι ἀπείρων λύσεων ἐπιδεκτικόν.

§ 69. Πρὶν δὲ ἴδωμεν τίνι τρόπῳ λύονται τὰ πολλὰς ἀνεξαρτήτους ἀπ' ἀλλήλων ἀγνώστους περιέχοντα ὡρισμένα προβλήματα, ἐπαναλαμβάνομεν τινὰ ἐκ τῶν ἤδη λυθέντων δι' ἑνὸς μόνου ψηφίου.

Νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμούς, τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα α καὶ τὴν διαφορὰν β.

Σημειοῦντες τοὺς ζητουμένους ἀριθμοὺς διὰ χ καὶ y, ἔχομεν κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τὰς δύο ἐξισώσεις

$$\chi+y=\alpha$$
$$\chi-y=\beta.$$

Προσθέτοντες προσάλληλα τὰ μέλη τῶν ἐξισώσεων τούτων λαμβάνομεν

$$2\chi=\alpha+\beta$$

καὶ ἀφαιροῦντες τὴν δευτέραν ἀπὸ τὴν πρώτην,

$$2y=\alpha-\beta$$

ἑκατέρα τῶν ἐξισώσεων τούτων περιέχει μίαν μόνην ἄγνωστον.

ὅθεν συνάγομεν, ἐκ μὲν τῆς πρώτης . . . . . $\chi=\frac{\alpha+\beta}{2}$,

ἐκ δὲ τῆς δευτέρας . . . . $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$.

τιμὰς ἀπαραλλάκτους μὲ τὰς εὑρεθείσας, § 3.

Ἂς ἐπαναλάβωμεν προσέτι καὶ τὸ πρόβλημα τοῦ ἐργάτου, κατὰ τὴν γενικὴν ἐκφώνησιν αὐτοῦ. (§ 60).

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργασίμων ἡμερῶν, καὶ y ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν τῆς ἀργίας· ἔχομεν ἀναγκαίως

$$\chi+y=\eta, \quad . \; . \; . \; (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ αχ ἐκφράζει τὴν ποσότητα, τὴν ὁποίαν ὁ ἐργάτης πρέπει νὰ λάβῃ ὡς μισθὸν τῆς ἐργασίας, καὶ βy, τὴν ποσότητα, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ δώσῃ διὰ τὰς ἡμέρας τῆς ἀργίας, πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$\alpha\chi-\beta y=\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Παρατηροῦντες τὰς ἐξισώσεις ταύτας (1) καὶ (2) βλέπομεν, ὅτι δὲν ἀρκεῖ ἡ ἁπλῆ πρόσθεσις ἢ ἀφαίρεσις ἵνα παράξῃ μίαν ἐξίσωσιν μὲ μίαν ἄγνωστον· διότι αἱ ἄγνωστοι χ καὶ y ἔχουσι διαφόρους συντελεστὰς εἰς τὰς ἐξισώσεις. Δυνάμεθα ὅμως νὰ τρέψωμεν τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις εἰς ἄλλας δύο ἰσοδυνάμους, ἐχούσας τὸν αὐτὸν συντελεστὴν, ὡς πρὸς μίαν τῶν ἀγνώστων. Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ β, συντελεστὴν τοῦ y εἰς τὴν (2) συνάγομεν

$$\beta\chi+\beta y=\beta\eta$$

καὶ προσθέτοντες τὴν (2) $\quad \alpha\chi-\beta y=\gamma,$

λαμβάνομεν $\quad \beta\chi+\alpha\chi=\beta\eta+\gamma,\quad$ ὅθεν $\quad \chi=\dfrac{\beta\eta+\gamma}{\alpha+\beta}$

Πολλαπλασιάζοντες παρομοίως τὴν (1) ἐπὶ α, συντελεστὴν τοῦ χ εἰς τὴν (2), λαμβάνομεν $\quad \alpha\chi+\alpha y=\alpha\eta$

καὶ ἀφαιροῦντες τὴν (2) $\quad \alpha\chi-\beta y=\gamma,$

συνάγομεν $\quad (\alpha+\beta)\, y=\alpha\eta-\gamma,\quad$ ὅθεν $\quad y=\dfrac{\alpha\eta-\gamma}{\alpha+\beta}$

Εὐκόλως ἤδη βλέπομεν, ὅτι ὁ τρόπος οὗτος, νὰ σημειοῦται δηλ. ἑκάστη ἄγνωστος δι' ἰδίου ψηφίου, εἶναι προτιμότερος, ἐπειδὴ δίδει τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων ἀνεξαρτήτως τὴν μίαν ἐκ τῆς ἄλλης.

§ 70. Σκεπτόμενοι ἐπὶ τῆς λύσεως τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων βλέπομεν, ὅτι ἔχοντες δύο ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους ἀναγκαζόμεθα νὰ συμπλέξωμεν αὐτὰς καὶ νὰ πορισθῶμεν μίαν μόνην ἐξίσωσιν μὲ μίαν ἄγνωστον, τῆς ὁποίας ἀμέσως προσδιορίζομεν τὴν τιμήν. Ἡ πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον ἐκτελουμένη πρᾶξις ὀνομάζεται *ἀπάλειψις*.

Περὶ ἀπαλείψεως.

§ 71. Ἔστωσαν αἱ δύο ἐξισώσεις $\quad 5\chi+7y=43 \quad (1)$

$$11\chi+9y=69 \quad (2),$$

τὰς ὁποίας ὑποθέτομεν ὡς τὴν ἀλγεβρικὴν μετάρρασιν τῆς ἐκφωνήσεως προβλήματός τινος μὲ δύο ἀγνώστους.

Ἐὰν εἰς τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις ἡ μία τῶν ἀγνώστων εἶχε τὸν αὐτὸν συντελεστὴν, ἠθέλαμεν εὐκόλως σχηματίσει, δι' ἁπλῆς ἀφαιρέσεως, τρίτην ἐξίσωσιν, περιέχουσαν μόνον τὴν ἄλλην ἄγνωστον. Ὅθεν ἐπερειδόμενοι εἰς τὰ ἀξιώματα πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ 9, συντελεστὴν τοῦ y εἰς τὴν (2), καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ 7, συντελεστὴν τοῦ y εἰς τὴν (1), καὶ οὕτως ἔχομεν,

$$45\chi+63y=387,$$
$$77\chi+63y=483.$$

καὶ ἀφαιροῦντες τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων τούτων ἀπὸ τὴν δευτέραν συνάγομεν $32\chi=96$ καὶ $\chi=3$.

Παρομοίως πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ 11, συντελεστὴν τοῦ χ εἰς τὴν (2) καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ 5, συντελεστὴν τοῦ χ εἰς τὴν (1), ἔχομεν . . . . $55\chi+77y=473$

$$55\chi+45y=345$$

καὶ ἀφαιροῦντες τὴν δευτέραν τούτων ἀπὸ τὴν πρώτην λαμβάνομεν

$$32y=128, \quad \text{καὶ} \quad y=4.$$

Ὅθεν $\chi=3$ καὶ $y=4$ εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων χ καὶ y, αἱ ὁποῖαι ταυτοποιοῦσι τὰς προτεθείσας ἐξισώσεις· τῷ ὄντι ἔχομεν,

$$5\times3+7\times4=15+28=43,$$
$$11\times3+9\times4=33+36=69.$$

§ 72. Ἡ ἐκτεθεῖσα μέθοδος εἰς τὴν ἰσότητα τῶν συντελεστῶν τῆς αὐτῆς ἀγνώστου βασιζομένη, ἐπιδέχεται τὰς αὐτὰς ἁπλουστεύσεις μὲ τὴν ἀναγωγὴν τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις $\left\{\begin{array}{l}8\chi-21y=33\\ 6\chi+35y=177\end{array}\right.$

Ἵνα καταστήσωμεν τοὺς δύο συντελεστὰς τῆς y ἴσους, παρατηροῦμεν ὅτι 21 καὶ 35 ἔχουσι κοινὸν παράγοντα 7, ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν μὲν πρώτην ἐξίσωσιν ἐπὶ 5, τὴν δὲ δευτέραν ἐπὶ 3.

Ἐκ τούτου συνάγομεν $\left\{\begin{array}{l}40\chi-105y=165\\ 18\chi+105y=531,\end{array}\right.$

καὶ προσθέτοντες λαμβάνομεν $58\chi=696$, ὅθεν $\chi=12$.

Παρομοίως οἱ δύο συντελεσταὶ τοῦ χ περιέχοντες τὸν κοινὸν παράγοντα 2, ἀποκαθίστανται ἴσοι, ἀφοῦ πολλαπλασιασθῇ ἡ μὲν πρώτη ἐξίσωσις ἐπὶ 3, ἡ δὲ δευτέρα ἐπὶ 4.

Οὕτως ἔχομεν $\left\{\begin{array}{l}24\chi-\ 63y=99\\ 24\chi+140y=708,\end{array}\right.$

καὶ ἀφαιροῦντες τὴν πρώτην τούτων ἀπὸ τὴν δευτέραν συνάγομεν

$$203y=609 \quad \text{ὅθεν} \quad y=3.$$

Ἔστωσαν πρὸς τούτοις αἱ ἐξισώσεις

$$\frac{2\chi}{3}-4+\frac{y}{2}+\chi=8-\frac{3y}{4}+\frac{1}{12},$$

$$\frac{y}{6}-\frac{\chi}{2}+2=\frac{1}{6}-2\chi+6.$$

Ἀφανίζοντες κατὰ πρῶτον τοὺς παρονομαστὰς λαμβάνομεν

$$\begin{cases} 8\chi-48+6y+12\chi=96-9y+1, \\ y-3\chi+12=1-12\chi+36. \end{cases}$$

καὶ ἀνάγοντες
$$\begin{cases} 20\chi+15y=145, \\ 9\chi+\ \ y=25. \end{cases}$$

ἢ μᾶλλον
$$\begin{cases} 4\chi+\ 3y=29, \\ 9\chi+\ \ y=25. \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζοντες τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων τούτων ἐπὶ 3 καὶ ἀφαιροῦντες τὴν πρώτην συνάγομεν $23\chi=46$, ὅθεν $\chi=2$.

Ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν δευτέραν, λαμβάνομεν

$$18+y=25, \quad \text{ὅθεν} \quad y=7.$$

§ 72. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

« Ἵνα ἐκτελέσωμεν τὴν ἀπαλειψιν ἐπὶ δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀ-
» γνώστους, ἀφοῦ φέρωμεν αὐτὰς ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha\chi+\beta y=\gamma$, ἀπο-
» καθιστῶμεν τοὺς συντελεστὰς τῆς ἀπαλειπτέας ἀγνώστου ἴσους,
» καὶ προσθέτομεν τὰς δύο ἐξισώσεις, ἐὰν οἱ ἀπαλειπτέοι ὅροι ἦναι
» ἑτερόσημοι, ἀφαιροῦμεν δὲ τὴν μίαν ἐκ τῆς ἄλλης, ἐὰν οἱ ὅροι
» οὗτοι ἦναι ταυτόσημοι. »

§ 73. Ἂς λάβωμεν τώρα τρεῖς ἐξισώσεις μὲ τρεῖς ἀγνώστους.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις
$$\begin{cases} 5\chi-6y+4\omega=15, \ \cdots\cdots (1) \\ 7\chi+4y-3\omega=19, \ \cdots\cdots (2) \\ 2\chi+\ y+6\omega=46. \ \cdots\cdots (3) \end{cases}$$

Δυνάμεθα συμπλέκοντες ἀνὰ δύο τὰς ἐξισώσεις ταύτας καὶ ἀπαλείφοντες τὴν αὐτὴν ἄγνωστον νὰ φθάσωμεν εἰς δύο νέας ἐξισώσεις περιεχούσας τὰς δύο λοιπὰς ἀγνώστους. Τῷ ὄντι,

Ἵνα ἀπαλείψωμεν ω μεταξὺ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων, πολλαπλασιάζομεν τὴν (1) ἐπὶ 3 καὶ τὴν (2) ἐπὶ 4, καὶ προσθέτομεν τὰ δύο ἐξαγόμενα (ἐπειδὴ οἱ συντελεσταὶ τοῦ ω ἔχουσιν ἀντίθετα σημεῖα)· ὅθεν λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $43\chi-2y=121$ . . (4)

Πολλαπλασιάζοντες τὴν (2) ἐπὶ 2,
καὶ προσθέτοντες τὴν (3), ἔχομεν $16\chi+9y=84$ . . (5)

Τὸ ζήτημα λοιπὸν ἤχθη εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ χ καὶ y, αἱ ὁποῖαι ταυτοποιοῦσι τὰς νέας ταύτας ἐξισώσεις

Ὅθεν πολλαπλασιάζοντες τὴν (4) ἐπὶ 9, καὶ τὴν (5) ἐπὶ 2, καὶ προσθέτοντες τὰ δύο ἐξαγόμενα, εὑρίσκομεν

$$419\chi=1257, \quad \text{ὅθεν} \quad \chi=3.$$

Δυνάμεθα διὰ τῶν αὐτῶν ἐξισώσεων νὰ προσδιορίσωμεν τὸ y, καθὼς προσδιωρίσαμεν τὸ χ· ἀλλὰ φθάνομεν ἁπλούστερον εἰς τὴν τιμὴν τοῦ y, ἀντεισάγοντες εἰς τὴν δευτέραν τούτων τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ χ. Οὕτω λαμβάνομεν

$$48+9y=84$$

ὅθεν
$$y=\frac{84-48}{9}, \quad \text{ἢ} \quad y=4.$$

Παρομοίως ἀντεισάγοντες εἰς τὴν πρώτην τῶν τριῶν ἐξισώσεων, ἤτοι εἰς τὴν (1), τὰς τιμὰς τοῦ χ καὶ y, εὑρίσκομεν

$$15-24+4\omega=15$$

ὅθεν
$$\omega=\frac{24}{4} \quad \text{ἢ} \quad \omega=6.$$

§ 71. Εὐκόλως ἤδη βλέπομεν τὴν σειρὰν τῶν πράξεων, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν ἐπὶ τεσσάρων ἐξισώσεων. Ἀλλ' ἵνα γενικεύσωμεν τὴν θεωρίαν τῆς ἀπαλείψεως, ἂς θεωρήσωμεν μ ἐξισώσεις μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους.

Κανὼν γενικός. « Ἀπαλείφομεν διαδοχικῶς μεταξὺ τῆς πρώτης » ἐξισώσεως καὶ ἑκάστης τῶν ἄλλων $\mu-1$, τὴν αὐτὴν ἄγνωστον, » καὶ λαμβάνομεν $\mu-1$ νέας ἐξισώσεις περιεχούσας $\mu-1$ ἀγνώ- » στους. Μεταξὺ τῆς πρώτης τῶν νέων ἐξισώσεων καὶ ἑκάστης τῶν » ἄλλων $\mu-2$ ἀπαλείφομεν μίαν ἄλλην ἄγνωστον, καὶ λαμβά- » νομεν $\mu-2$ ἐξισώσεις, περιεχούσας $\mu-2$ ἀγνώστους. Ἐξακο- » λουθοῦμεν τὴν σειρὰν ταύτην τῶν πράξεων ἕως οὗ τέλος φθάσω- » μεν εἰς μίαν ἐξίσωσιν μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον, τῆς ὁποίας εὐ- » κόλως εὑρίσκομεν τὴν τιμήν. Μετὰ ταῦτα ἀνατρέχοντες βαθμη- » δὸν εἰς τὰς προηγηθείσας ἐξισώσεις, μέχρι μιᾶς τῶν προτεθει- » σῶν, δι' ἀντεισαγωγῆς, προσδιορίζομεν τὰς τιμὰς τῶν ἄλλων ἀ- » γνώστων. »

Ἡ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσα μέθοδος τῆς ἀπαλείψεως ὀνομάζεται *μέθοδος διὰ προσθαφαιρέσεως*, ἐπειδὴ ἀπαλείφονται οἱ ὅροι τῆς αὐτῆς ἀγνώστου διὰ προσθέσεως ἢ δι' ἀφαιρέσεως, ἀφοῦ προηγουμένως ἑτοιμασθῶσιν, ὥστε νὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν συντελεστὴν εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις, τὰς ὁποίας συμπλέκομεν.

§ 75. Ὑπάρχουσιν ἀκόμη ἄλλαι δύο μέθοδοι ἀπαλείψεως· ἡ πρώτη τούτων ὀνομάζεται *μέθοδος δι' ἀντεισαγωγῆς*, ἡ δὲ δευτέρα, *μέθοδος διὰ συγκρίσεως* (1).

Ἡ δι' ἀντεισαγωγῆς μέθοδος συνίσταται εἰς τὸ νὰ λάβωμεν ἐκ μιᾶς τῶν ἐξισώσεων τὴν τιμὴν μιᾶς ἀγνώστου, ὑποθέτοντες τὰς ἄλλας ὡς γνωστάς, καὶ ν' ἀντεισάξωμεν τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὰς ἄλλας ἐξισώσεις· λαμβάνομεν οὕτω νέας ἐξισώσεις περιεχούσας μίαν ἄγνωστον ὀλιγώτερον. Ἀκολούθως πράττομεν ἐπὶ τῶν νέων ἐξισώσεων ὡς καὶ ἐπὶ τῶν προτεθεισῶν.

Ἡ δὲ δευτέρα μέθοδος, τουτέστιν ἡ διὰ συγκρίσεως, συνίσταται εἰς τὸ νὰ λάβωμεν τὴν τιμὴν τῆς αὐτῆς ἀγνώστου ἀφ' ἑκάστην ἐξίσωσιν, καὶ νὰ ἐξισώσωμεν ἀνὰ δύο τὰς διαφόρους ταύτας ἐκφράσεις τῆς αὐτῆς τιμῆς. Τοιουτοτρόπως συνάγομεν νέας ἐξισώσεις, περιεχούσας μίαν ἄγνωστον ὀλιγώτερον, ἐπὶ τῶν ὁποίων πράττομεν ὡς ἐπὶ τῶν προτεθεισῶν.

Χάριν παραδείγματος ἂς ἐφαρμόσωμεν τὰς δύο ταύτας μεθόδους τῆς ἀπαλείψεως ἐπὶ τῶν δύο ἐξισώσεων τοῦ § 71.

$$5\chi+7y=43,$$
$$11\chi+9y=69.$$

Πρῶτον δι' ἀντεισαγωγῆς. Ὑποθέτοντες τὴν ἄγνωστον y ὡς γνωστήν, λαμβάνομεν ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως $\chi=\frac{43-7y}{5}$, καὶ ἀντεισάγοντες τὸν τύπον τοῦτον ἀντὶ τῆς χ εἰς τὴν δευτέραν εὑρίσκομεν

$$11\left(\frac{43-7y}{5}\right)+9y=69.$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν διαδοχικῶς

$$11(43-7y)+45y=345,$$
$$473-77y+45y=345,$$
$$-32y=-128.$$
$$y=4.$$

Ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τῆς y εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον τῆς χ, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{43-28}{5}=\frac{15}{5}=3.$$

(1) Ἐκτὸς τούτων ὑπάρχει προσέτι καὶ ἡ διὰ τῶν ἀπροσδιορίστων συντελεστῶν μέθοδος, ἐπινοηθεῖσα ὑπὸ τοῦ Κ. Bezout. Δὲν ἀναπτύσσομεν δὲ τὴν θεωρίαν ταύτης ὡς οὖσαν ἀνωτέραν τῆς στοιχειώδους πραγματείας, ἄλλως τε καὶ περιττήν.

Δεύτερον διὰ συγκρίσεως. Ἔστωσαν αἱ αὐταὶ ἐξισώσεις

$$5\chi+7y=43,$$
$$11\chi+9y=69.$$

Λαμβάνοντες τὴν τιμὴν τῆς αὐτῆς ἀγνώστου χ, ἀφ' ἑκατέρας τῶν ἐξισώσεων, ἔχομεν

$$\chi=\frac{43-7y}{5} \quad \text{καὶ} \quad \chi=\frac{69-9y}{11}$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τῆς χ πρέπει νὰ ἦναι ἡ αὐτὴ καὶ διὰ τὰς δύο ἐξισώσεις· συγκροτοῦμεν τὴν ἰσότητα τῶν δύο δευτέρων μελῶν· ὅθεν

ἔχομεν
$$\frac{43-7y}{5}=\frac{69-9y}{11},$$

ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $y=4$, καὶ ἑπομένως, ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς ἕνα τῶν δύο τύπων τῆς χ, λαμβάνομεν

$$\chi=\frac{43-7\times4}{5}=\frac{15}{5}=3$$

τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν καὶ ἐκ τοῦ δευτέρου τύπου τῆς χ.

Ἀλλὰ διὰ τῶν μεθόδων τούτων φθάνομεν, σχεδὸν πάντοτε, εἰς ἐξισώσεις ἐχούσας παρονομαστάς, τοὺς ὁποίους πρέπει ἔπειτα ν' ἀφανίσωμεν. Ἐνῷ τὴν δυσκολίαν ταύτην δὲν παρουσιάζει ἡ διὰ προσθαφαιρέσεως μέθοδος. Αὕτη μάλιστα εἶναι προτιμητέα, καὶ διότι δυνατὸν νὰ ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμὸς συγχρόνως μὲ τὴν πρόσθεσιν ἢ ἀφαίρεσιν, ὅταν οἱ συντελεσταὶ δὲν ἦναι μεγάλοι. Δίδονται μολοντοῦτο περιστάσεις, καθ' ἃς προτιμῶμεν τὴν δι' ἀντεισαγωγῆς μέθοδον.

§ 76. Συμβαίνει συχνάκις, ὥστε ἑκάστη ἐξίσωσις νὰ μὴ περιέχῃ ὅλας τὰς ἀγνώστους· εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην μὲ ὀλίγην ἐπιδεξιότητα ἡ ἀπάλειψις ἐκτελεῖται συντομώτερον.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις
$$2\chi-3y+2\omega=13 \quad \ldots\ldots (1)$$
$$4\varphi-2\chi=30 \quad \ldots\ldots (2)$$
$$4y+2\omega=14 \quad \ldots\ldots (3)$$
$$5y+3\varphi=32 \quad \ldots\ldots (4)$$

Παρατηροῦντες τὰς ἐξισώσεις ταύτας βλέπομεν, ὅτι ἡ ἀπάλειψις τοῦ ω μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (3) δίδει μίαν ἐξίσωσιν εἰς χ καὶ y· ἡ δὲ ἀπάλειψις τοῦ φ μεταξὺ τῶν (2) καὶ (4) δίδει παρομοίως μίαν δευτέραν ἐξίσωσιν εἰς χ καὶ y. Αἱ δύο αὗται ἄγνωστοι προσδιορίζονται ἔπειτα εὐκόλως. Ὅθεν ἐκτελοῦντες τὰς ἀπαλείψεις ταύτας λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις

$$7y-2\chi=1, \quad \ldots\ldots (5)$$
$$20y+6\chi=38. \quad \ldots\ldots (6)$$

Πολλαπλασιάζοντες τὴν πρώτην τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων ἐπὶ 3, καὶ προσθέτοντες τὴν (6) ἔχομεν $41y=41$, ὅθεν . . . $y=1$.
ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν (5) λαμβάνομεν . . $\chi=3$.
ὁμοίως ἐκ τῆς (2) εὑρίσκομεν . . . . $\varphi=9$
καὶ τέλος ἐκ τῆς (3) » . . . . $\omega=5$.

Προβάλλομεν πρὸς ἄσκησιν τὰ ἑξῆς παραδείγματα,

Α'.
$$\left.\begin{array}{r}\varphi+3\chi+3y=21\\2\varphi+7\chi-3y=8\\\varphi-2\chi+\omega=4\\3\varphi-2\chi+\omega=10\end{array}\right\}\text{ ἐξ ὧν }\begin{array}{l}\varphi=3\\\chi=2\\y=4\\\omega=5.\end{array}$$

Β'.
$$\left.\begin{array}{r}7\chi-2\omega+3\varphi=17\\4y-2\omega+\tau=11\\5y-3\chi-2\varphi=8\\4y-3\varphi+2\tau=9\\3\omega+8\varphi=33\end{array}\right\}\text{ ἐξ ὧν }\begin{array}{l}\chi=2\\y=4\\\omega=3\\\tau=1\\\varphi=3.\end{array}$$

Προβλήματα πρωτοβάθμια μὲ δύο ἢ πλειοτέρας ἀγνώστους.

§ 77. *Πρόβλημα Α'.* Δύο τεχνῖται, πατὴρ καὶ υἱὸς, ἐργασθέντες παρά τινι ἐργοστασιάρχῃ ἐπὶ ἕνα μῆνα, ἔλαβον ὁμοῦ 177 δραχμὰς, ἐνῷ ὁ μὲν πατὴρ εἰργάσθη 24 ἡμέρας, ὁ δὲ υἱὸς 19. ἐξακολουθήσαντες ἐργαζόμενοι καὶ τὸν δεύτερον μῆνα, ὁ μὲν πατὴρ 21 ἡμέρας, ὁ δὲ υἱὸς 17, ἔλαβον ὁμοῦ 156 δραχμάς.

Ζητοῦνται τὰ δύο ἡμερομίσθια.

Ἔστω χ τὸ ἡμερομίσθιον τοῦ πατρὸς, καὶ y τὸ τοῦ υἱοῦ.
τὸν πρῶτον μῆνα ἔλαβον ὁμοῦ . . . . $24\chi+19y$,
τὸν δεύτερον μῆνα ἔλαβον . . . . $21\chi+17y$,

ὅθεν κατὰ τὴν ἐκφώνησιν πρέπει νὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις,

$$24\chi+19y=177 \quad \ldots\ldots (1)$$
$$21\chi+17y=156 \quad \ldots\ldots (2)$$

Ἀπαλείφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ χ· ὅθεν ἐπειδὴ οἱ συντελεσταὶ αὐτοῦ 24 καὶ 21 ἔχουσι τὸν κοινὸν παράγοντα 3, πολλαπλασιάζομεν τὴν μὲν (1) ἐπὶ 7, τὴν δὲ (2) ἐπὶ 8 οὕτως ἔχομεν

$$168\chi+133y=1239,$$
$$168\chi+136y=1248.$$

καὶ ἀφαιροῦντες τὴν πρώτην τούτων ἐκ τῆς δευτέρας λαμβάνομεν

$$3y=9, \text{ ὅθεν } y=3.$$

ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν (2) συνάγομεν

$$21\chi+51=156$$

$$\text{ἢ} \quad 21\chi=105, \quad \text{ὅθεν} \quad \chi=5.$$

§ 78. *Πρόβλημα Β'.* Ἄνθρωπός τις ἔχων 30000 δραχ. εἰς τόκον, κατά τι ἄγνωστον ἐπιτόκιον, χρεωστεῖ τὴν ποσότητα 20000 δραχ. διὰ τὴν ὁποίαν πληρόνει τόκον, κατ' ἄλλο ἐπίσης ἄγνωστον ἐπιτόκιον· ὁ ἐτήσιος τόκος, τὸν ὁποῖον λαμβάνει, ὑπερέχει τὸν τόκον, τὸν ὁποῖον πληρόνει, κατὰ 800 δραχ.

Ἄλλος τις ἔχων 35000 δραχ. εἰς τόκον, κατὰ τὸ δεύτερον ἐπιτόκιον, χρεωστεῖ τὴν ποσότητα 24000 διὰ τὴν ὁποίαν πληρόνει τόκον, κατὰ τὸ πρῶτον ἐπιτόκιον· ὁ τόκος, τὸν ὁποῖον λαμβάνει, ὑπερέχει τὸν τόκον, τὸν ὁποῖον πληρόνει, κατὰ 310 δραχ.

Ζητοῦνται τὰ δύο ἐπιτόκια.

Ἔστωσαν χ καὶ y τὰ δύο ἐπιτόκια.

Ὁ τόκος τοῦ κεφαλαίου 30000 πρὸς χ % εἶναι $\frac{30000\chi}{100}=300\chi$

Ὁ τόκος τοῦ » 20000 » y % » $\frac{20000y}{100}=200y$

ἀλλὰ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ πρώτου τόκου πρὸς τὸν δεύτερον εἶναι 800 ἄρα πρεπει νὰ ἔχωμεν $300\chi-200y=800$ (1)

Εὑρίσκομεν παρομοίως ὅτι ὁ δεύτερος λαμβάνει ἐτήσιον τόκον $\frac{35000y}{100}$ ἢ $350y$ πληρόνει δὲ τόκον $\frac{24000\chi}{100}$ ἢ 240χ.

Κατὰ τὴν δευτέραν λοιπὸν συνθήκην τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ ἔχωμεν . . . . $350y-240\chi=310$ (2)

Αἱ δύο ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος (1) καὶ (2) ἁπλουστεύονται διαιρουμένων τῶν δύο μελῶν τῆς (1) διὰ (100) καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς (2) διὰ 10· ὅθεν ἔχομεν . . . . $3\chi-2y=8$, (3)

$$35y-24\chi=31 \quad (4)$$

Ἵνα ἀπαλείψωμεν τὸ χ πολλαπλασιάζομεν τὴν (3) ἐπὶ 8, καὶ προσθέτομεν τὴν (4) ἐκ τούτου συνάγομεν

$$19y=95, \quad \text{ὅθεν} \quad y=5.$$

ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ y εἰς τὴν (3) εὑρίσκομεν,

$$3\chi-10=8, \quad \text{ὅθεν} \quad \chi=6.$$

Λοιπὸν τὸ πρῶτον ἐπιτόκιον εἶναι 6, καὶ τὸ δεύτερον 5.

§ 79. *Πρόβλημα Γ'.* Δεδομένων τριῶν ὄγκων μετάλλων, συνισταμένων ἐκ τῶν αὐτῶν μὲν, ἀλλὰ κατὰ διάφορον γνωστὴν ἀναλογίαν μεμιγμένων στοιχείων, ζητεῖται νὰ σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν τέταρτον ὄγκον, κατ' ἄλλην ἐπίσης δεδομένην ἀναλογίαν.

Μερικεύοντες τὴν γενικὴν ταύτην ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ὑποθέτομεν, ὅτι οἱ τρεῖς ὄγκοι συνίστανται ἐξ ἀργύρου, χαλκοῦ καὶ κασσιτέρου, καὶ ὅτι εἰς μίαν λίτραν, ἤτοι 16 οὐγγίας, ἑκάστου ἐμπεριέχονται τὰ τρία ταῦτα στοιχεῖα, κατὰ τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν,

$$\begin{array}{l|l} \text{Α΄.} & 7^{\text{A}}+3^{\text{X}}+6^{\text{K}}=16 \text{ οὐγ.} \\ \text{Β΄.} & 12+3+1=16, \\ \text{Γ΄.} & 4+7+5=16. \end{array}$$

Ζητεῖται πόσας οὐγγίας πρέπει νὰ λάβωμεν ἀφ' ἕκαστον ὄγκον, ἵνα σχηματίσωμεν μίαν λίτραν τετάρτου ὄγκου, ὅστις νὰ περιέχῃ,

$$8^{\text{A}}+3\tfrac{3}{4}^{\text{X}}\cdot 4\tfrac{1}{4}^{\text{K}}=16.$$

Λύσις. Ἔστωσαν χ, y, ω, οἱ ἀριθμοὶ τῶν οὐγκιῶν, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ λάβωμεν ἀναλόγως ἀπὸ τοὺς τρεῖς ὄγκους, ἵνα σχηματίσωμεν μίαν λίτραν τοῦ ζητουμένου ὄγκου.

Ἐπειδὴ εἰς μίαν λίτραν, ἤτοι 16 οὐγκίας τοῦ πρώτου ὄγκου ἐμπεριέχονται 7 οὐγ. ἀργύρου, ἕπεται ὅτι εἰς χ οὐγ. ἐμπεριέχονται $\frac{7\chi}{16}$. Εὑρίσκομεν παρομοίως διὰ τῶν ἀναλογιῶν

$$16 : 12 :: y : \frac{12y}{16}$$

$$16 : 4 :: \omega : \frac{4\omega}{16},$$

ὅτι $\frac{12y}{16}$ καὶ $\frac{4\omega}{16}$ ἐκφράζουσι τοὺς ἀριθμοὺς τῶν οὐγ. τοῦ ἀργύρου τοὺς ἐμπεριεχομένους εἰς τὰ τεμάχια y καὶ ω τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου ὄγκου

Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν ὁ τέταρτος ὄγκος πρέπει νὰ περιέχῃ 8 οὐγ. ἀργύρου· ἔχομεν λοιπὸν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν

$$\frac{7\chi}{16}+\frac{12y}{16}+\frac{4\omega}{16}=8 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Δι' ὁμοίων ἀναλογιῶν εὑρίσκομεν τὰς ποσότητας τοῦ χαλκοῦ καὶ τὰς τοῦ κασσιτέρου, αἵτινες ἐμπεριέχονται εἰς τὰ τεμάχια χ, y καὶ ω· ἐξισοῦντες δὲ τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν πρώτων μὲ $3\frac{3}{4}$, τὸ δὲ τῶν δευτέρων μὲ $4\frac{1}{4}$, λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\frac{3\chi}{16}+\frac{3y}{16}+\frac{7\omega}{16}=3\tfrac{3}{4}=\frac{15}{4} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$\frac{6\chi}{16}+\frac{y}{16}+\frac{5\omega}{16}=4\tfrac{1}{4}=\frac{17}{4} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Ἀφανίζοντες τοὺς παρονομαστὰς ἔχομεν

$$7\chi+12y+4\omega=128 \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$
$$3\chi+\ 3y+7\omega=60 \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$
$$6\chi+\ \ y+5\omega=68 \quad \dots\dots\dots \quad (6)$$

Ἐπειδὴ οἱ συντελεσταὶ τοῦ y εἶναι ἁπλούστεροι, ἀπαλείφομεν κατὰ πρῶτον τὴν ἄγνωστον ταύτην· καὶ οὕτως

ἐκ μὲν τῶν (4) καὶ (5) συνάγομεν $5\chi+24\omega=112 \dots (7)$
ἐκ δὲ τῶν (5) καὶ (6) » $15\chi+\ 8\omega=144 \dots (8)$

Ἀπαλείφοντες δὲ μεταξὺ τούτων τὸ ω ἔχομεν

$$40\chi=320, \quad \text{ὅθεν} \quad \chi=8.$$

καὶ ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν (8) συνάγομεν $\omega=3$· ἀντεισάγοντες τέλος τὰς τιμὰς τοῦ χ καὶ ω εἰς τὴν (6) λαμβάνομεν $y=5$.

Ὅθεν ἵνα σχηματίσωμεν μίαν λίτραν τοῦ τετάρτου ὄγκου, πρέπει νὰ λάβωμεν 8 οὐγ. ἀπὸ τὸν Α′, 5 ἀπὸ τὸν Β′, καὶ 3 ἀπὸ τὸν Γ′.

Τῷ ὄντι ἔχομεν κατὰ πρῶτον $8+5+3=16$.

Προσέτι, ἐὰν εἰς 16 οὐγ. τοῦ Α′. ἐμπεριέχωνται 7 οὐγ. ἀργύρου, εἰς 8 οὐγ. πρέπει νὰ περιέχωνται $\frac{7\times8}{16}=3\,\frac{1}{2}$. Παρομοίως $\frac{12\times5}{16}=3\,\frac{3}{4}$, καὶ $\frac{4\times3}{16}=\frac{3}{4}$ ἐκφράζουσι τὰς ποσότητας τοῦ ἀργύρου, αἱ ὁποῖαι ἐμπεριέχονται εἰς τὰς 5 οὐγ. τοῦ Β′, καὶ εἰς τὰς 3 τοῦ Γ′. οὕτως ἔχομεν $3\,\frac{1}{2}+3\,\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=8$.

Λοιπὸν ὁ τέταρτος ὄγκος περιέχει 8 οὐγ. ἀργύρου, καθὼς ἀπαιτεῖ ἡ ἐκφώνησις.

Δεικνύομεν παρομοίως ὅτι ἐπαληθεύουσι καὶ αἱ εἰς τὸν χαλκὸν καὶ κασσίτερον ἀναφερόμεναι συνθῆκαι.

§ 80. *Πρόβλημα Δ′.* Ἀριθμός τις σύγκειται ἐκ τριῶν ψηφίων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι 11· τὸ δὲ ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι διπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων· καὶ προστιθεμένου εἰς αὐτὸν τοῦ ἀριθμοῦ 297, προκύπτει ὡς ἄθροισμα ὁ ἀριθμὸς ἀντεστραμμένος. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς, ὅστις ἔχει τὰς ἰδιότητας ταύτας;

Ἂς σημειώσωμεν διὰ χ τὰς μονάδας, διὰ y τὰς δεκάδας καὶ διὰ ω τὰς ἑκατοντάδας.

Κατὰ τὴν πρώτην συνθήκην ἔχομεν $\chi+y+\omega=11 \dots (1)$
κατὰ δὲ τὴν δευτέραν $\dots\dots\dots \chi=2\omega \dots (2)$

Ἵνα μεταφράσωμεν ἀλγεβρικῶς τὴν τρίτην συνθήκην τοῦ προβλή-

ματος πρέπει νὰ ἀναλύσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν εἰς ἁπλᾶς μονάδας, οὕτω δὲ θέλομεν παραστήσει αὐτὸν διὰ $\chi+10y+100\omega$, ἑπομένως τὸν ἀντίστροφον, διὰ $\omega+10y+100\chi$, ἔχομεν λοιπὸν $\chi+10y+100\omega+297=\omega+10y+100\chi$.
καὶ διὰ μεταθέσεως καὶ ἀναγωγῆς . . $99\chi-99\omega=297$
ἢ ἁπλούστερον . . . . $\chi-\omega=3$ . . . (3)

Ἐκτελοῦντες τὴν ἀπάλειψιν τοῦ χ, δι' ἀντεισαγωγῆς, μεταξὺ τῆς (2) καὶ (3) ἔχομεν $2\omega-\omega=3$ ἢ $\omega=3$. ἑπομένως
$\chi=6$. καὶ $y=11-3-6$ ἤτοι $y=2$.

Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι 326.

§ 81. *Πρόβλημα Ε'.* Ἀνεδέχθη τις τὴν μετακόμισιν δοχείων τριῶν μεγεθῶν, ἐπὶ συμφωνίᾳ δι' ἕκαστον, τὸ ὁποῖον ἤθελε θραύσει, ν' ἀποζημιώνῃ τόσον, ὅσον ἤθελε λάβει, ἂν ἤθελε μεταφέρῃ αὐτὸ σῶον. Ὅθεν.

Μετακομίσας κατ' ἀρχὰς 2 μικρὰ, 4 μεσαῖα, καὶ 9 μεγάλα, ἔθραυσε τὰ μεσαῖα, ἔλαβε δὲ δραχ. 28

Δεύτερον, μετακομίσας 7 μικρὰ, 3 μεσαῖα, καὶ 5 μεγάλα, ἔθραυσε τὰ μεγάλα, καὶ οὕτως ἔλαβε μόνον δραχ. 3.

Τέλος μετακομίσας 9 μικρὰ, 10 μεσαῖα, καὶ 11 μεγάλα, ἔθραυσε τὰ μεγάλα, καὶ οὕτως ἔλαβε δραχ. 4.

Ζητεῖται πόσον συνεφωνήθη ἡ μετακόμισις ἑνὸς δοχείου ἑκάστου μεγέθους;

Ἂς σημειώσωμεν τὴν τιμὴν τῆς μετακομίσεως

τοῦ μικροῦ διὰ χ
τοῦ μεσαίου διὰ y
τοῦ μεγάλου διὰ ω
ἔχομεν

$$2\chi+9\omega-4y=28,$$
$$7\chi+3y-5\omega=3,$$
$$9\chi+10y-11\omega=4.$$

ἐκ τῶν ὁποίων συνάγομεν $\chi=2$, $y=3$, $\omega=4$.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

§ 82. ΣΤ'. Ἄνθρωπός τις κατέθεσεν εἰς τόκον χρηματικόν τι κεφάλαιον πρός τινα τιμὴν τόκου. Ἄλλος τις καταθέσας 10000 περισσότερον τοῦ πρώτου, καὶ πρὸς τιμὴν τόκου κατὰ 1 μεγαλητέραν, κερδίζει περισσότερον τοῦ πρώτου 800. Τρίτος τις καταθέσας 15000 περισσότερον τοῦ πρώτου, καὶ πρὸς τιμὴν κατὰ 2 μεγαλητέραν, κερδίζει περισσότερον 1500.

Ζητοῦνται τὰ χρηματικὰ κεφάλαια τῶν τριῶν δανειστῶν καὶ τὰ τρία ἐπιτόκια.

$\left\{\begin{array}{llll} \text{'Απόκρ. Κεφάλαια} & 30000, & 40000, & 45000. \\ \quad\text{'Επιτόκια} & 4, & 5, & 6. \end{array}\right\}$

Ζ'. Ἠγόρασέ τις τριῶν ἁμαξῶν τὰ φορτία· τὸ μὲν πρῶτον, συνιστάμενον ἐκ 20 κοιλῶν βρίζης, 30 κριθῆς καὶ 10 σίτου, διὰ 220 δραχμάς. Τὸ δὲ δεύτερον, συνιστάμενον ἐκ 15 κοιλῶν βρίζης, 6 κριθῆς καὶ 12 σίτου, διὰ δραχ. 138. Καὶ τέλος τὸ τρίτον, συνιστάμενον ἐκ 10 κοιλῶν βρίζης, 5 κριθῆς, καὶ 4 σίτου, διὰ δραχ. 75. Ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ κοιλοῦ δι' ἕκαστον τῶν σιτηρῶν.

('Απόκρ. Ἡ βρίζα τιμᾶται δραχμῶν 4, ἡ κριθὴ 3, καὶ ὁ σῖτος 5).

Η'. Πατήρ τις ἔχει ἡλικίαν 42 ἐτῶν, ὁ υἱὸς αὐτοῦ 11. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ γίνῃ διπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ;

('Απόκρ. Μετὰ 20 ἔτη).

Θ'. Ἠξεύροντες ὅτι 36 χιλιόγραμμα κασσιτέρου χάνουσιν ἐντὸς τοῦ ὕδατος 5 χιλ. καὶ 25 χιλ. μολύβδου χάνουσι 2 χιλ. Προσέτι ἠξεύροντες ὅτι μίγμα τι ἐκ μολύβδου καὶ κασσιτέρου ζυγίζον 120 χιλιόγραμμα χάνει ἐντὸς τοῦ ὕδατος 14 χιλ. ζητοῦμεν πόσος μόλυβδος καὶ πόσος κασσίτερος ὑπάρχει εἰς τὸ μίγμα;

$$\left.\begin{array}{ll} \text{κασσιτέρου χιλ...} & \chi \\ \text{μολύβδου} \quad » & y \end{array}\right\} \text{ἐξισώσεις} \left\{\begin{array}{l} \chi+y=120 \\ \frac{5\chi}{36}+\frac{2y}{25}=14. \end{array}\right.$$

Ι'. Ἡ εἰδικὴ βαρύτης τοῦ σφυρηλάτου σιδήρου εἶναι 7,79· ἡ τοῦ χωνευμένου ζίγκου, 6,80· ἡ τοῦ ἀνθρακίτου, 1,8. Ζητεῖται, πόσα χιλιόγραμμα σιδήρου, καὶ πόσα ἀνθρακίτου πρέπει νὰ λάβωμεν, ἵνα σχηματίσωμεν μίγμα, ἔχον βάρος 150 χιλιογράμμων καὶ τὴν εἰδικὴν βαρύτητα τοῦ ζίγκου;

ΣΗΜ. Εἰδικὴ βαρύτης σώματός τινος εἶναι τὸ βάρος αὐτοῦ παραβαλλόμενον πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ἀπεσταγμένου ὕδατος, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονάς.

Ἵνα διευκολύνωμεν τοὺς πρωτοπείρους εἰς τὴν *θέσιν* τοῦ προβλήματος τούτου κρίνομεν ἀναγκαῖον νὰ κάμωμεν τὰς ἑξῆς παρατηρήσεις.

Ἐὰν ὄγκος σιδήρου ἕλκων βάρος ἑνὸς χιλιογράμμου ἰσοδυναμῇ μὲ 7,79 ἴσους ὄγκους ὕδατος, ὄγκος σιδήρου χ χιλιογράμμων ἰσοδυναμεῖ μὲ $7{,}79\chi$ ὄγκους ὕδατος.

Ὡσαύτως, ἐὰν ὄγκος ἀνθρακίτου ἕλκων βάρος ἑνὸς χιλιογράμμου ἰσοδυναμῇ μὲ 1,8 ἴσους ὄγκους ὕδατος, ὄγκος ἀνθρακίτου y χιλιογράμμων ἰσοδυναμεῖ μὲ $1{,}8y$ ὄγκους ὕδατος.

Λοιπὸν ὁ ὄγκος τοῦ μίγματος ἐκ $\chi+y$ ἢ 150 χιλιογράμμων ἰσοδυναμεῖ μὲ $7{,}79\chi+1{,}8y$ ὄγκους ὕδατος.

Ἑπομένως, ἐὰν ὄγκος μίγματος ἐξ 150 χιλιογράμμων ἰσοδυναμῇ μὲ $7,79\chi+1,8y$ ὄγκους ὕδατος, ὄγκος μίγματος ἑνὸς χιλιογράμμου μὲ πόσους ὄγκους ἰσοδυναμεῖ; ἤτοι

$$150 : 7,79\chi+1,8y :: 1 : \frac{7,79\chi+1,8y}{150}$$

ἀλλὰ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ὁ ὄγκος οὗτος πρέπει νὰ ἰσοδυναμῇ μὲ 6,86 ὄγκους ὕδατος· διότι ἡ εἰδικὴ βαρύτης αὐτοῦ πρέπει νὰ ἦναι ἴση μὲ τὴν τοῦ ζίγκου· ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{7,79\chi+1,8y}{150}=6,80$$

ἢ $$7,79\chi+1,8y=1020$$

πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 100, $779\chi+180y=102000$ . . (1)

ἔχομεν προσέτι καὶ $\chi+y=150$ . . (2)

Λύοντες τὰς ἐξισώσεις ταύτας λαμβάνομεν,

$$\chi=131,72 \quad 9y=18,28.$$

ΙΑ'. Ἱέρων ὁ βασιλεὺς τῶν Συρακουσῶν, ἔδωκεν εἴς τινα χρυσοχόον 10 λίτρας χρυσοῦ, ἵνα κατασκευάσῃ στέφανον, τὸν ὁποῖον ἤθελε νὰ προσφέρῃ εἰς τὸν Δία. Τελειωθέντος τοῦ ἔργου, ὁ στέφανος εὑρέθη μὲν ἔχων βάρος 10 λιτρῶν, ἀλλ' ὁ βασιλεὺς ὑποπτευόμενος μήπως ὁ χρυσοχόος ἀνέμιξεν ἄργυρον μὲ τὸν χρυσὸν, ἐζήτησε πληροφορίαν παρὰ τοῦ Ἀρχιμήδους. Οὗτος δὲ γνωρίζων ὅτι ὁ μὲν χρυσὸς χάνει ἐντὸς τοῦ ὕδατος 52 χιλιοστὰ τοῦ βάρους αὐτοῦ, ὁ δὲ ἄργυρος χάνει 79 χιλιοστὰ, προσδιώρισε τὸ βάρος τοῦ στεφάνου ἐντὸς τοῦ ὕδατος καὶ εὗρεν ὅτι ἦτο 9 λιτρῶν καὶ 6 οὐγκιῶν, καὶ τοιουτοτρόπως ἐγνώρισε τὴν ἀπάτην.

Ζητεῖται πόσας λίτρας ἐξ ἑκατέρου μετάλλου περιεῖχεν ὁ ςέφανος;

Λύσις. Ἔστωσαν χ αἱ λίτραι τοῦ χρυσοῦ
καὶ y » τοῦ ἀργύρου.

ἔχομεν $\chi+y=10$ . . . . (1)

Ἐπειδὴ δὲ 1 λιτ. χρ. χάνει 52 χιλ. χ λίτραι χάνουσι 52χ
ὁμοίως 1 » ἀρ. » 89 » y » » $89y$

καὶ ἐπειδὴ ὁ ἐκ 10 λιτρῶν συγκείμενος στέφανος ζυγίζει ἐντὸς τοῦ ὕδατος 9 λιτρ. καὶ 6 οὐγκίας, χάνει ἄρα 10 οὐγγίας, ἤτοι $\frac{10}{16}$ τῆς λίτρας, ἤτοι 0,625 χιλιοστὰ, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$52\chi+89y=625 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν,

$$\chi=7,063, \quad y=2,837.$$

ΘΕΩΡΙΑ

τῶν ἀρνητικῶν ποσοτήτων.

§ 83. Ἡ χρῆσις τῶν ἀλγεβρικῶν σημείων εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων δίδει συχνάκις χώραν εἰς περίεργα ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα κατὰ πρώτην προσβολὴν φαίνονται παράδοξα. Περὶ τούτων, καθόσον ἀναφέρεται εἰς τὰ πρωτοβάθμια προβλήματα, θέλομεν ἤδη πραγματευθῇ· ἵνα καταστήσωμεν δὲ εὐληπτοτέραν τὴν ἑρμηνείαν αὐτῶν λαμβάνομεν τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

Α΄. Νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν ἀριθμὸν β, δίδει ἄθροισμα τὸν ἀριθμὸν α.

Λύσις. Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός· ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν,

$$\beta+\chi=\alpha, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \chi=\alpha-\beta$$

Ὁ τύπος οὗτος δίδει τὴν τιμὴν τοῦ χ εἰς ὅλας τὰς μερικὰς περιπτώσεις τοῦ προτεθέντος προβλήματος.

Ἐὰν π. χ. $\alpha=47$, $\beta=29$, εὑρίσκομεν $\chi=47-29=18$.

Ἡ εὑρεθεῖσα αὕτη τιμὴ λύει τὸ πρόβλημα ταυτοποιοῦσα τὴν ἐξίσωσιν αὐτοῦ $\quad 29+18=47$, ἤτοι $47=47$.

Ἀλλ᾽ ἐὰν δώσωμεν ἄλλας τιμὰς εἰς τὰ γράμματα α καὶ β, ὑποθέτοντες $\alpha=24$, $\beta=31$, τότε ὁ τύπος τῆς τιμῆς τοῦ χ θέλει δώσει

$$\chi=24-31.$$

Ἐπειδὴ δὲ 31 ἰσοῦται μὲ $24+7$, ἡ ἔκφρασις τῆς μερικῆς ταύτης τιμῆς τοῦ χ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\chi=24-24-7, \quad \text{ἢ} \quad \chi=-7.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ χ, καθὼς πᾶσα τιμὴ ἔχουσα πρὸ αὐτῆς τὸ σημεῖον — ὀνομάζεται *ἀρνητικὴ λύσις*· ἀλλὰ ποίαν ἰδέαν νὰ λάβωμεν περὶ αὐτῆς; πῶς νὰ τὴν ἐξηγήσωμεν;

Ἀνατρέχοντες εἰς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος βλέπομεν, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ προστεθῇ ἀριθμός τις εἰς τὸν 31 καὶ νὰ δώσῃ ἄθροισμα 24. Οὐδεὶς λοιπὸν ἀριθμὸς δύναται νὰ ἐκπληρώσῃ τὴν συνθήκην τοῦ προβλήματος εἰς τὴν μερικὴν ταύτην περίπτωσιν. Καὶ μολοντοῦτο, ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $31+\chi=24$ θέσωμεν ἀντὶ τοῦ $+\chi$ τὴν ἀρνητικὴν τιμὴν -7, συνάγομεν $31-7=24$, ἐξίσωσιν ἀκριβῆ, ἐκ τῆς ὁποίας μανθάνομεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 31 ἐλαττωθεὶς κατὰ 7 δίδει διαφορὰν 24.

Ἡ ἀρνητικὴ λύσις $\chi=-7$ φανερόνει λοιπὸν, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα κατὰ τὴν μερικὴν ἔννοιαν τῆς προτάσεως αὐτοῦ· θεωρουμένη ὅμως ἡ λύσις αὕτη ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου, τουτέστι $\chi=7$, ἐκπληροῖ εἰς τὴν ἐκφώνησιν αὐτοῦ, οὕτω τροπολογουμένην.

«Νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν ὅστις ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ 31 δίδει διαφορὰν 24.» Ἡ ἐκφώνησις αὕτη δὲν διαφέρει ἀπὸ τὴν πρώτην, εἰμὴ καθότι ἡ ἀφαίρεσις ἀντικαθιστᾷ τὴν πρόσθεσιν, καὶ ἡ διαφορὰ τὸ ἄθροισμα. Ἐὰν ἐπρόκειτο εἰς λύσιν τὸ τροπολογηθὲν τοῦτο πρόβλημα, ἤρκει νὰ θέσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $31-\chi=24$, ἐκ τῆς ὁποίας $\chi=7$.

§ 84. Β΄. Πατὴρ εἶναι α ἐτῶν ἡλικίας, ὁ δὲ υἱὸς ϐ. Ζητεῖται, μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ θὰ ἦναι τὸ τέταρτον τῆς τοῦ πατρός;

Λύσις. Ἂς σημειωθῇ διὰ χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν, ἑπομένως $\alpha+\chi$ καὶ $\beta+\chi$ παριστάνουσι τὰς ἡλικίας τοῦ πατρὸς καὶ υἱοῦ μετὰ παρέλευσιν τῶν χ ἐτῶν. Ὅθεν ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν,

$$\beta+\chi=\frac{\alpha+\chi}{4} \text{ ἐκ τῆς ὁποίας } \chi=\frac{\alpha-4\beta}{3}.$$

Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὸν γενικὸν τοῦτον τύπον τῆς τιμῆς τοῦ χ εἰς μερικὰ παραδείγματα.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Ἔστω} & \alpha=54\\ \text{καὶ} & \beta=9\end{array}\right\} \text{ συνάγομεν } \chi=\frac{54-36}{3}=\frac{18}{3}=6.$$

Τῷ ὄντι ὁ μὲν πατὴρ μετὰ 6 ἔτη θὰ ἦναι ἐτῶν 60 ὁ δὲ υἱὸς 15, ἤτοι τὸ τέταρτον τοῦ 60.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Ἔστω} & \alpha=45\\ \text{καὶ} & \beta=15\end{array}\right\} \text{ συνάγομεν } \chi=\frac{45-60}{3}=\frac{-15}{3}=-5.$$

Πρὸς ἐξήγησιν τῆς ἀρνητικῆς ταύτης λύσεως, ἂς ἀνατρέξωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος, ἡ ὁποία εἰς τὴν προκειμένην μερικὴν περίπτωσιν εἶναι

$$15+\chi=\frac{45+\chi}{4}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη περιέχει ἀντίφασιν προφανῆ· ἐπειδὴ τὸ δεύτερον μέλος ἄγεται εἰς $\frac{45}{4}+\frac{\chi}{4}$, εἰς τὸ ὁποῖον ἀμφότεροι οἱ ὅροι εἶναι σχετικῶς μικρότεροι τῶν ὅρων $15+\chi$ τοῦ πρώτου μέλους.

Δυνάμεθα προσέτι καὶ κατ' ἄλλον τρόπον νὰ ἴδωμεν τὴν ἀντίφασιν ταύτην, ἀνάγοντες τὴν ἐξίσωσιν εἰς

$$60+4\chi=45+\chi,$$

ἤτοι $$60+3\chi=45,$$

ἐξ ἧς βλέπομεν, ὅτι εἶναι ἀδύνατον ἀριθμός τις, τρὶς λαμβανόμενος καὶ προστιθέμενος εἰς τὸν 60 νὰ δίδῃ ἄθροισμα 45.

Οὐδεὶς λοιπὸν ἀριθμὸς θετικὸς ταυτοποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν (1) καὶ ἐπομένως οὐδεὶς ἀριθμὸς λύει το πρόβλημα κατὰ τὴν δευτέραν μερικὴν περίπτωσιν.

Ἀλλ' ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) ἀντεισάξωμεν τὴν εὑρεθεῖσαν ἀρνητικὴν τιμὴν —5 ἀντὶ τοῦ χ, λαμβάνομεν

$$15-5=\frac{45-5}{4} \quad ἢ \quad 10=\frac{40}{4},$$

ἐξίσωσιν ἀκριβῆ, ἥτις δεικνύει ὅτι ἐάν, ἀντὶ νὰ προσθέσωμεν ἀριθμόν τινα ἐτῶν εἰς τὰς δύο ἡλικίας, ἀφαιρέσωμεν 5 ἔτη, ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ θὰ ἦναι τὸ τέταρτον τῆς τοῦ πατρός. Συμπεραίνομεν λοιπόν, ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα λύσις, θεωρουμένη ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου αὐτῆς, ἤτοι $\chi=5$, ἐκπληροῖ τὴν συνθήκην τοῦ προβλήματος κατὰ τὴν νέαν ταύτην ἐκφώνησιν.

Πατὴρ εἶναι 45 ἐτῶν ἡλικίας, ὁ δὲ υἱὸς 15· ζητεῖται, πρὸ πόσων ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ ἦτο τὸ τέταρτον τῆς τοῦ πατρός ;

Ἡ ἐκφώνησις αὕτη κατὰ τοῦτο μόνον διαφέρει ἀπὸ τὴν πρώτην, καθότι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν ἀντὶ νὰ προστεθῇ εἰς τὰς δύο ἡλικίας, πρέπει ν' ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῶν.

Ἡ δὲ ἐξίσωσις τοῦ τροπολογηθέντος τούτου προβλήματος θὰ ἦτο

$$15-\chi=\frac{45-\chi}{4}$$

μὴ διαφέρουσα τῆς ἐξισώσεως (1) τοῦ πρώτου προβλήματος, εἰμὴ κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ χ.

ΓΕΝΙΚΗ ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§ 85. Παρατηροῦμεν ἐν γένει, ὅτι δυνατὸν νὰ συμβῇ ὥστε, μολονότι πρόβλημά τι εἶναι δεκτικὸν λύσεως, ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ μορφοῦται κατ' ἐσφαλμένην ὑπόθεσιν, διότι ἐνῷ πρέπει νὰ ἐκλέξωμεν μεταξὺ δύο ὑποθέσεων, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία μόνη εἶναι ἀληθής ἐκλέγομεν τὴν ἐσφαλμένην. Εἰδοποιούμεθα ὅμως τότε διὰ τῶν ἀρνητικῶν ποσοτήτων ὅτι ἐσφάλαμεν, ἐκλέξαντες τὴν ψευδῆ ὑπόθεσιν. Ἐκτὸς τούτου ἔχομεν καὶ τότε τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, κατὰ τὴν ἀληθῆ αὐτοῦ συνθήκην, δι' ἁπλῆς μόνον μεταβολῆς τοῦ σημείου καὶ δὲν ἀναγκαζόμεθα ν' ἀρχίσωμεν ἐκ νέου τον ὑπολογισμὸν πρὸς μόρφωσιν τῆς ἐξισώσεως κατὰ τὴν ἀληθῆ ὑπόθεσιν.

§ 86. Θεωρούμενον ὑπὸ γενικωτέραν ἔννοιαν τὸ πρόβλημα τῆς ἡλικίας, πρέπει νὰ προταθῇ οὕτω.

Πατὴρ εἶναι α ἐτῶν ἡλικίας, ὁ δὲ υἱὸς β. Ζητεῖται, πότε ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ εἶναι τὸ τέταρτον τῆς τοῦ πατρός ;

Ἡ ἐκφώνησις αὕτη ἐμπερικλείει δύο μερικὰς περιστάσεις, ἤτοι δύο χρόνους, μέλλοντα καὶ παρελθόντα· διότι ἵνα ἔχωσιν αἱ δύο ἡλικίαι τὴν ὑπὸ τοῦ προβλήματος ἀπαιτουμένην σχέσιν, δυνατὸν νὰ παρέλθωσιν ἔτη τινά, ἢ δυνατὸν νὰ παρῆλθον· τοῦτο ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς καταστάσεως, εἰς ἣν εὑρίσκονται αἱ δύο ἡλικίαι, ἤτοι ἐκ τῶν μερικῶν τιμῶν τοῦ α καὶ β. Ὥστε τὸ πρόβλημα εἶναι πάντοτε δυνατόν, τουτέστι δεκτικὸν λύσεως. Ἵνα συμπεριλάβῃ δὲ ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ ἀμφοτέρας τὰς περιστάσεις ἔπρεπε νὰ τεθῇ οὕτω.

$$\beta \pm \chi = \frac{\alpha \pm \chi}{4}$$

Ἐκ τοῦ διπλοῦ σημείου $\pm$ τὸ μὲν $+$ ἀνήκει εἰς τὴν πρώτην περίστασιν, δηλ. τοῦ μέλλοντος χρόνου, τὸ δὲ $-$ εἰς τὴν δευτέραν, δηλ. τοῦ παρελθόντος.

Θεωρήσαντες ὅμως τὸ πρόβλημα ὑπὸ μίαν ἔννοιαν, τουτέστι τὴν τοῦ μέλλοντος, ἐθέσαμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\beta + \chi = \frac{\alpha + \chi}{4} \quad \text{ἐκ τῆς ὁποίας ἐλάβομεν} \quad \chi = \frac{\alpha - 4\beta}{3}$$

Ὁ τύπος οὗτος κατὰ τὴν πρώτην ἐφαρμογὴν μᾶς ἔδωκεν ἐξαγόμενον θετικὸν $\chi = 6$, διότι αἱ τιμαὶ τοῦ α καὶ β ἀπῄτουν μέλλοντα· κατὰ δὲ τὴν δευτέραν ἐφαρμογὴν μᾶς ἔδωκεν ἐξαγόμενον ἀρνητικόν, ἤτοι $\chi = -5$, διότι αἱ τιμαὶ τοῦ α καὶ β ἀπῄτουν χρόνον παρελθόντα, ἡ δὲ ἐξίσωσις ἐτέθη κακῶς. Ἅμα δὲ ἐπανωρθώθη τὸ σφάλμα εἰς τὴν ἐξίσωσιν, ἡ τιμὴ τοῦ χ ἀπέβη θετική.

Ἀρχαὶ ἐπὶ τῶν ἀρνητικῶν λύσεων.

§ 87. Ὁδηγούμενοι ἐξ ἀναλογίας δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὰς γενικὰς ταύτας ἀρχάς.

Α΄. Ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ τῆς ἀγνώστου πρωτοβαθμίου τινὸς προβλήματος φανερόνει ἀτοπίαν τινὰ ὑπάρχουσαν εἰς τὰς συνθήκας τῆς προτάσεως, ἢ τοὐλάχιστον εἰς τὴν ἐξίσωσιν, ἥτις εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ μετάφρασις τῶν συνθηκῶν τοῦ προβλήματος.

Β΄. Ἡ τιμὴ αὕτη, ἀπολύτως θεωρουμένη, δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς λύσις προβλήματος, τοῦ ὁποίου ἡ ἐκφώνησις διαφέρει ἀπὸ τὴν τοῦ προτεθέντος, καθότι ποσότητές τινες, ἀντὶ νὰ προστεθῶσι, πρέπει ν' ἀφαιρεθῶσι, καὶ τ' ἀνάπαλιν. Τουτέστι λαμβανομένη ἡ τιμὴ ἀπολύτως λύει τὸ πρόβλημα τροπολογημένον κατά τινα ἔννοιαν ἀντίθετον.

Γ΄. Ἵνα λάβωμεν τὴν νέαν ἐκφώνησιν, ἀνατρέχομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος, τρέπομεν τὸ $+\chi$ εἰς $-\chi$ καὶ ἀντιστρόφως τὸ $-\chi$ εἰς $+\chi$, καὶ μεταφράζομεν εἰς κοινὴν γλῶσσαν τὴν νέαν ἐξίσωσιν. (*)

Ὑπολογισμὸς τῶν ἀρνητικῶν ποσοτήτων.

§ 88. Ἐκ τῆς χρήσεως τῶν ἀρνητικῶν ποσοτήτων εἰς τὸν ἀλγεβρικὸν ὑπολογισμὸν προκύπτουσιν αἱ ἐφεξῆς προτάσεις.

(*) Περὶ τῆς γενικῆς ἀποδείξεως τῶν ἀρχῶν τούτων βλέπε τὸ ἀξιόλογον σύγγραμμα τοῦ Κ. Καρνότ, ἐπιγραφόμενον, Reflexions sur la metaphysique de calcul differentiel, par Carnot.

α΄. Πᾶσα ἀρνητικὴ ποσότης $-\alpha$ εἶναι μικροτέρα τοῦ 0.

β΄. Ἐκ δύο ἀρνητικῶν ποσοτήτων μικροτέρα εἶναι ἐκείνη, ἥτις θεωρουμένη ἀπολύτως, ἀνεξαρτήτως δηλαδὴ τοῦ σημείου, εἶναι μεγαλητέρα.

Αἱ δύο αὗται ἀρχαὶ ἐκφράζονται ἀλγεβρικῶς

$$-\alpha<0 \quad \text{καὶ} \quad -(\alpha+\mu)<-\alpha$$

ἢ μερικώτερον $\quad -2<0 \quad$ » $\quad -3<-2$

Δεῖξις. Πρὸς ἀπόδειξιν τῶν δύο τούτων προτάσεων ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἐὰν ἀπὸ ἀριθμόν τινα ἀφαιρέσωμεν σειρὰν ἀριθμῶν, βαθμηδὸν αὐξανομένων, τὰ ὑπόλοιπα θέλουσιν εἶσθαι βαθμηδὸν μικρότερα.

Τούτου τεθέντος, ἂς λάβωμεν ὡς ἔτυχεν ἀκέραιόν τινα ἀριθμὸν, π. χ. τὸν 5, καὶ ἀπὸ τούτου ἂς ἀφαιρέσωμεν διαδοχικῶς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Θέλομεν ἔχει,

$$5-1>5-2>5-3>5-4>5-5>5-6>5-7>5-8,$$

ἢ ἀνάγοντες $\quad 4>3>2>1>0>-1>-2>-3.$

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι, -1 πρέπει νὰ θεωρηθῇ μικρότερον τοῦ 0, ἐπειδὴ τὸ 0 ἐκφράζει τὴν διαφορὰν τοῦ 5 καὶ αὐτοῦ τούτου, ἐνῷ -1 ἐκφράζει τὴν διαφορὰν τοῦ 5 καὶ ἑνὸς ἀριθμοῦ μεγαλητέρου. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ -1 εἶναι μεῖζον τοῦ -2, καὶ -3 μεῖζον τοῦ -4, μολονότι αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι μικρότεραι ἀπὸ τὰς τῶν δευτέρων.

Ἄλλη ἀπόδειξις. Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἀξίωμα, ὅτι ἐὰν ἀριθμός τις ἦναι μείζων ἑτέρου τινός 6, πρέπει ἀφοῦ προσθέσωμεν εἰς ἑκάτερον τούτων τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν δ, τὸ πρῶτον ἐξαγόμενον νὰ ἦναι μεῖζον τοῦ δευτέρου. Καὶ ἀντιστρόφως ἐὰν τὸ μετὰ τὴν πρόσθεσιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πρῶτον ἐξαγόμενον ἦναι μεῖζον τοῦ δευτέρου, καὶ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι μείζων τοῦ δευτέρου.

Ὅθεν ἐὰν εἰς τὰς δύο ἐκφράσεις 0 καὶ $-\alpha$ προσθέσωμεν τὴν αὐτὴν ποσότητα $\alpha+\mu$ συνάγομεν $0+\alpha+\mu$ καὶ $-\alpha+\alpha+\mu$, ἤτοι $\alpha+\mu$ καὶ μ, ἀλλὰ $\alpha+\mu>\mu$, ἄρα $0>-\alpha$.

Ὡσαύτως ἐὰν εἰς τὰς ἐκφράσεις	$-\alpha$	καὶ	$-(\alpha+\mu)$
προσθέσωμεν τὴν αὐτὴν ποσότητα		$\alpha+\mu$	
συνάγομεν	$\alpha+\mu-\alpha$	καὶ	$\alpha+\mu-(\alpha+\mu)$
ἢ	μ	καὶ	0
ἀλλὰ $\mu>0$, ἄρα . . .	$-\alpha$		$>-(\alpha+\mu)$.

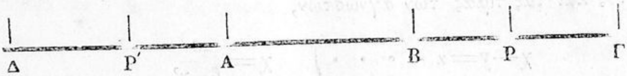
Πρέπει νὰ δεχθῶμεν τὰς ἀνωτέρω δύο προτάσεις, ἐὰν θέλωμεν νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ ἐπὶ τῶν ἀρνητικῶν ἐκφράσεων τὸν ἐπὶ τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν ὑπολογισμόν. Αἱ προτάσεις δὲ αὗται εἶναι εἶδός τι ἀλγεβρικῆς ἐκφράσεως ἀναλόγου μὲ τὴν ὁποίαν μεταχειριζόμεθα συχνάκις εἰς τὴν κοινὴν γλῶσσαν. Λέγοντες, ἄνθρωπός τις ἔχει ὀλιγώτερον τοῦ μηδενὸς, ἐκφράζομεν ὅτι χρεωστεῖ περισσότερον παρ' ὅτι ἔχει, καὶ ἐκ δύο ὀφειλετῶν πλουσιώτερος εἶναι, ὅστις χρεωστεῖ ὀλιγώτερον.

Διερεύνησις τῶν προβλημάτων
τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

§ 89. Ἀφοῦ λύσωμεν πρόβλημά τι γενικῶς, παριστάνοντες δηλαδὴ τὰ διδόμενα διὰ γραμμάτων, δυνάμεθα νὰ ζητήσωμεν τί γίνονται αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων, εἰς τὰς ἐπὶ τῶν δεδομένων μερικὰς ὑποθέσεις. Ἡ ἐξέτασις αὕτη τῶν διαφόρων μεταβολῶν, τὰς ὁποίας ἐπιδέχονται αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων καὶ ἡ ἑρμηνεία τῶν περιέργων ἐξαγομένων, τὰ ὁποῖα προκύπτουσι, συνιστᾷ τὴν λεγομένην *διερεύνησιν* τοῦ προβλήματος.

Τὸ ἑξῆς πρόβλημα παρουσιάζει ὅλας σχεδὸν τὰς περιπτώσεις, αἱ ὁποῖαι ἀπαντῶται εἰς τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

Πρόβλημα. Δύο ταχυδρόμοι ἀναχωροῦσι ταυτοχρόνως ἀπὸ δύο διάφορα σημεῖα Α καὶ Β τῆς εὐθείας ΑΒ, καὶ διευθύνονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ΑΓ ἢ ΒΔ. Εἶναι γνωστὸν τὸ διάστημα ΑΒ, γνωστὴ ἡ ταχύτης ἑκατέρου, καὶ ζητεῖται εἰς ποῖον σημεῖον θέλουσι συναντηθῆ.



Λύσις. Παραδεχόμενοι τὴν μίαν τούτων τῶν διευθύνσεων, τὴν ΑΓ, ἂς λύσωμεν τὸ πρόβλημα, ὑπὸ τὴν μερικὴν ταύτην ἔννοιαν.

Ἔστω β ἡ ταχύτης τοῦ ἀπὸ τοῦ Α ἀναχωροῦντος ταχυδρόμου.

γ ἡ ταχύτης τοῦ ἀναχωροῦντος ἀπὸ τοῦ Β.

Ρ τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως.

$$\left.\begin{array}{l} \chi = \mathrm{AP} \\ y = \mathrm{BP} \end{array}\right\} \text{ τὰ ζητούμενα διαστήματα.}$$

Ἐκ τῆς ἁπλῆς παρατηρήσεως τοῦ σχήματος βλέπομεν τὴν σχέσιν, τὴν ὁποίαν ἔχουσι τὰ ζητούμενα διαστήματα μὲ το γνωστὸν διάστημα· ἡ σχέσις αὕτη ἐκφράζεται διὰ τῆς ἰσότητος $\mathrm{AP}-\mathrm{BP}=\mathrm{AB}$. Θέτοντες δὲ ἀντὶ τῶν γραμμῶν, τὰς τιμὰς αὐτῶν εἰς ὁδοιπορικὰ μέτρα, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν . . . . . $\chi - y = \alpha$ . . . . . (1)

Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀναγκαῖοι χρόνοι εἰς τὸ νὰ διατρεχθῶσι τὰ διαστήματα χ καὶ y εἶναι ἴσοι, ἐὰν εὕρωμεν τὰς ἐκφράσεις αὐτῶν θέλομεν σχηματίσει τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος. Ὅθεν ἐπειδὴ ὁ πρῶτος ταχυδρόμος διατρέχει β στάδια εἰς μίαν ὥραν, θέλει διατρέξει τὰ χ εἰς ὥρας $\frac{\chi}{\beta}$. Παρομοίως ὁ δεύτερος ταχυδρόμος θέλει διατρέξει τὰ y στάδια εἰς ὥρας $\frac{y}{\gamma}$ ἔχομεν λοιπὸν

$$\frac{\chi}{\beta}=\frac{y}{\gamma}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (2)$$

ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν $\gamma\chi=\beta y$ ὅθεν $\chi=\frac{\beta y}{\gamma}\;.\;.\;(3)$

ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ εἰς τὴν (1), ἔχομεν

$$\frac{\beta y}{\gamma}-y=\alpha, \quad \text{ἤτοι} \quad \beta y-\gamma y=\alpha\gamma$$

ὅθεν $$y=\frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}.$$

ἐκ δὲ τοῦ τύπου (3) λαμβάνομεν $$\chi=\frac{\beta}{\gamma}\times\frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}$$

ὅθεν $$\chi=\frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}$$

Διερεύνησις. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς δύο ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος καὶ τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων,

$$\left.\begin{array}{l} \chi-y=\alpha\;.\;.\;.\;. \\ \frac{\chi}{\beta}=\frac{y}{\gamma}\;.\;.\;.\;. \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \chi=\frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}, \\ y=\frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}, \end{array}$$

δυνάμεθα νὰ κάμωμεν ἐπὶ τῶν γνωστῶν ποσοτήτων α, β, γ, διαφόρους ὑποθέσεις, αἱ ὁποῖαι συγκεφαλαιοῦνται εἰς τὰς ἑξῆς.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Α}',\;.\;.\;.\;\beta>\gamma \\ \text{Β}',\;.\;.\;.\;\beta<\gamma \\ \text{Γ}',\;.\;.\;.\;\beta=\gamma \end{array}\right\} \quad \alpha \text{ ὄντος οἱουδήποτε ἀριθμοῦ.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Δ}',\;.\;.\;.\;\beta=\gamma \\ \text{Ε}',\;.\;.\;.\;\beta> \text{ἢ} <\gamma \end{array}\right\} \quad \text{καὶ } \alpha=0$$

Δυνάμεθα προσέτι νὰ κάμωμεν διαφόρους ἄλλας ὑποθέσεις εἰς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, τὰς ὁποίας θέλομεν ἐξετάσει μετὰ ταῦτα.

Α΄. Καθ' ὅσον ὑποθέτομεν $\beta > \gamma$, αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων εἶναι θετικαί, καὶ τὸ πρόβλημα λύεται κατὰ τὴν ἔννοιαν τῆς ἐκφωνήσεως αὐτοῦ. Τῷ ὄντι, ἐὰν ὁ ταχυδρόμος Α ὑποτεθῇ ταχύτερος τοῦ Β, εἶναι φανερόν, ὅτι ἀδιακόπως πλησιάζει πρὸς αὐτόν, καὶ τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον ἐχώριζεν αὐτούς, ἐλαττοῦται βαθμηδόν, ἕως οὗ τέλος μηδενίζεται καὶ τότε οἱ δύο ταχυδρόμοι εὑρίσκονται ἀναγκαίως εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν διατρέχουσιν.

Β΄. Ἐὰν ὑποθέσωμεν $\beta < \gamma$, τότε ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς $\beta - \gamma$ εἶναι ἀρνητικός, αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων εἶναι ἐπίσης ἀρνητικαὶ καὶ δύνανται νὰ τεθῶσιν ὑπὸ τὴν μορφήν,

$$\chi = -\frac{\alpha\beta}{\gamma-\beta}, \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;(4) \qquad y = -\frac{\alpha\gamma}{\gamma-\beta} \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;(5)$$

Ἵνα ἐξηγήσωμεν τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα, παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ συναντηθῶσιν οἱ δύο ταχυδρόμοι κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΑΓ, ἐπειδὴ ὁδεύων ὁ Β ταχύτερον τοῦ Α, ἀπομακρύνεται πάντοτε περισσότερον, καὶ τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον ἐχώριζεν αὐτούς, αὐξάνει κατὰ πᾶσαν στιγμήν. Τὸ ἀδύνατον τοῦτο τῆς λύσεως ἐπρόκυψεν ἐκ τῆς κακῆς ἐκλογῆς, τὴν ὁποίαν ἐκάμαμεν εἰς τὴν μερικὴν ταύτην περίπτωσιν, ὑποθέτοντες ὅτι οἱ δύο ταχυδρόμοι διευθύνονται πρὸς τὸ Γ, τουτέστι πρὸς τὰ δεξιά, ἐνῷ ὑπάρχει καὶ ἄλλη διεύθυνσις, ἡ πρὸς τ' ἀριστερά.

Ἂς ἀνατρέξωμεν λοιπὸν εἰς τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος καὶ ἂς μεταβάλωμεν τὸ σημεῖον ἑκατέρας τῶν ἀγνώστων χ καὶ y ἔχομεν οὕτως,

$$\left.\begin{array}{l} -\chi + y = \alpha \\ -\dfrac{\chi}{\beta} = -\dfrac{y}{\gamma} \end{array}\right\} \;\text{ἢ}\; \left\{\begin{array}{l} y - \chi = \alpha \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;(6) \\ \dfrac{\chi}{\beta} = \dfrac{y}{\gamma} \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;(7) \end{array}\right.$$

Παρατηροῦντες τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις βλέπομεν, ὅτι ἡ δευτέρα, τουτέστιν ἡ ἐξίσωσις τοῦ χρόνου δὲν ἔλαβεν οὐδεμίαν μεταβολήν, εἶναι ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις (2). Καὶ τῷ ὄντι καθ' οἱανδήποτε διεύθυνσιν ὁδεύσωσιν οἱ ταχυδρόμοι, πρὸς τὰ δεξιά, ἢ πρὸς τ' ἀριστερά, οἱ δαπανώμενοι χρόνοι, ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς ταυτοχρόνου ἀναχωρήσεως αὐτῶν, μέχρι τῆς στιγμῆς τῆς συναντήσεως εἶναι πάντοτε ἴσοι καὶ παριστάνονται διὰ τῶν αὐτῶν ἐκφράσεων $\frac{\chi}{\beta}$ καὶ $\frac{y}{\gamma}$. Ἡ δὲ πρώτη ἐξίσωσις μεταβληθεῖσα δεικνύει, ὅτι τὸ διάστημα y εἶναι μεῖζον τοῦ διαστήματος χ, καὶ ὅτι ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι α΄ ἄρα πρέπει, κατὰ τὴν δευτέραν ταύτην περίπτωσιν, νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ ταχυδρόμοι διευθύνονται πρὸς τὸ Δ, καὶ ὅτι συναπαντῶνται κατὰ τὸ σημεῖον Ρ'. Καὶ τῷ ὄντι τότε θέλομεν ἔχει

$$\mathrm{BP'} - \mathrm{AP'} = \mathrm{AB} \quad \text{ἤτοι} \quad y - \chi = \alpha.$$

Βλέπομεν δὲ εὐκόλως, ὅτι ἢ λύσωμεν ἐκ νέου τὰς ἐξισώσεις (6) καὶ (7) ἢ ἁπλῶς ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον τῶν τιμῶν τοῦ χ καὶ y δηλ. (4) καὶ (5) λαμβανομεν

$$\chi = \frac{\alpha\beta}{\gamma-\beta}, \qquad y = \frac{\alpha\gamma}{\gamma-\beta}.$$

Συμπεραίνομεν λοιπόν, ὅτι ἐὰν λάβωμεν τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς (4) καὶ (5) ἀπολύτως, λύομεν τὸ πρόβλημα κατὰ τὴν τροπολογημένην ἐκφώνησιν αὐτοῦ, ὡς πρὸς τὴν διεύθυνσιν· ὥστε τὸ σημεῖον — εἰς τὴν περίστασιν ταύτην δηλοῖ ἁπλῶς μεταβολὴν διευθύνσεως.

Γ'. Ὑποθέτοντες $\beta = \gamma$, τουτέστιν ὅτι οἱ δύο ταχυδρόμοι ἀναχωροῦντες ἐκ δύο διαφόρων σημείων Α κα Β εἶναι ἰσοταχεῖς, ἔχομεν $\beta - \gamma = \infty$ Αἱ γενικαὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ἄγονται τότε εἰς

$$\chi = \frac{\alpha\beta}{0}, \qquad y = \frac{\alpha\gamma}{0}.$$

Πῶς νὰ ἐξηγήσωμεν τὰ νέα ταῦτα ἐξαγόμενα ;

Ἀνατρέχοντες κατὰ πρῶτον εἰς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος βλέπομεν, ὅτι εἶναι ἀπολύτως ἀδύνατον νὰ ἐκπληρωθῶσιν αἱ συνθῆκαι αὐτῆς, τουτέστι, καθ' οἱονδήποτε μέρος τῆς γραμμῆς ΑΒ διευθυνθῶσιν οἱ δύο ταχυδρόμοι, δὲν δύνανται νὰ συναντηθῶσιν. Ἐπειδὴ ἀπέχοντες ἀπ' ἀλλήλων κατά τι διάστημα α, καὶ ὁδεύοντες ἰσοταχῶς, πρέπει νὰ φυλάττωσι πάντοτε τὸ αὐτὸ διάστημα. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ θεωρήσωμεν τὸ ἐξαγόμεεον $\frac{\alpha\beta}{0}$ ὡς νέον σημεῖον ἀδυνάτου.

Περὶ τοῦ ἀδυνάτου τούτου πληροφορούμεθα καὶ ἐκ τῶν ἐξισώσεων τοῦ προβλήματος $\quad \chi - y = \alpha, \quad \frac{\chi}{\beta} = \frac{y}{\gamma},$

αἱ ὁποῖαι, κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην $\beta = \gamma$, τρέπονται εἰς

$$\chi - y = \alpha, \qquad \chi - y = 0.$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶναι προφανῶς ἀσυμβίβαστοι, διότι τὸ διάστημα α δὲν εἶναι 0.

Καὶ ὅμως οἱ ἀλγεβρισταὶ θεωροῦσι τὸ ἐξαγόμενον $\chi = \frac{\alpha\beta}{0}$ ὡς εἶδος τιμῆς, τὴν ὁποίαν ὀνομάζουσιν *ἄπειρον*· ἰδοὺ ὁ λόγος.

Ὅταν ἡ διαφορὰ $\beta - \gamma$, ἀντὶ νὰ ὑποτεθῇ μηδέν, ὑποτεθῇ ἐλαχίστη, τὰ δύο ἐξαγόμενα $\frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}$ καὶ $\frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}$ ἀποβαίνουσι μέγιστα.

Ἐὰν π. χ. ὑποθέσωμεν ὅτι $\left.\begin{array}{l}\beta=3\\ \text{καὶ } \gamma=2{,}99\end{array}\right\}$ ἤτοι $\beta-\gamma=0{,}01$

συνάγομεν $\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}=\dfrac{3\alpha}{0{,}01}=300\alpha,\quad \dfrac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}=\dfrac{2{,}99\alpha}{0{,}01}=299\alpha.$

Ἐὰν δὲ $\left.\begin{array}{l}\beta=3\\ \text{καὶ } \gamma=2{,}9999\end{array}\right\}$ ἤτοι $\beta-\gamma=0{,}0001$

συνάγομεν $\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}=\dfrac{3\alpha}{0{,}0001}=30000\alpha,\quad \dfrac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}=\dfrac{2{,}9999\alpha}{0{,}0001}=29999\alpha$

Ἐν ἑνὶ λόγῳ, ἐνόσῳ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ταχυτήτων δὲν εἶναι μηδὲν, οἱ δύο ταχυδρόμοι συναπαντῶνται, ἀλλὰ τὰ διαστήματα μεταξὺ τοῦ σημείου τῆς συναντήσεως καὶ τῶν δύο σημείων τῆς ἀναχωρήσεως γίνονται ἐπὶ τοσοῦτον μεγαλήτερα, ὅσον ἡ διαφορὰ αὕτη ἐλαττοῦται.

Ἐὰν λοιπὸν ὑποθέσωμεν τὴν διαφορὰν ταύτην *μικροτέραν πάσης δεδομένης ποσότητος*, τὰ διαστήματα $\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}$ καὶ $\dfrac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}$, ἀποβαίνουσι *μεγαλήτερα πάσης δεδομένης ποσότητος*, ἢ *ἄπειρα*.

§ 90. Ἐπειδὴ 0 εἶναι ἐλάχιστον πάσης ἀπολύτου ποσότητος, ἕπεται ὅτι δυνάμεθα διὰ τοῦ ψηφίου τούτου νὰ σημειώσωμεν τὴν τελευταίαν κατάστασιν ποσότητός τινος καταβλητῆς δυναμένης δηλαδὴ νὰ σμικρυνθῇ ὅσῳ θέλομεν Ἐπειδὴ δὲ ἀριθμός τις κλασματικὸς εἶναι τοσοῦτον μεγαλήτερος, καθ' ὅσον, διαμένοντος τοῦ αὐτοῦ ἀριθμητοῦ, ὁ παρονομαστὴς ἐλαττοῦται ἕπεται ὅτι πᾶσα ἔκφρασις τῆς μορφῆς $\dfrac{A}{0}$ (Α ὄντος ἀριθμοῦ ἀπολύτου οἱουδήποτε) εἶναι ἁρμοδιωτάτη πρὸς παράστασιν συμβολικὴν τῆς ἀπείρου, τουτέστι μεγαλητέρας πάσης δυνατῆς εἰς παράστασιν ποσότητος.

Τὸ ἄπειρον παριστάνεται καὶ διὰ τοῦ σημείου ∞, καὶ ἑπομένως ἡ πάσης δεδομένης ποσότητος ἐλαχίστη, ἡ 0, δύναται νὰ σημειωθῇ διὰ $\dfrac{A}{\infty}$. Ἐπειδὴ κλάσμα τι εἶναι τόσον μικρότερον, καθ' ὅσον ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ εἶναι μεγαλήτερος ὡς πρὸς τὸν ἀριθμητὴν, ὥστε 0 καὶ $\dfrac{A}{\infty}$ εἶναι σύμβολα συνώνυμα τοῦ μηδενὸς, ὡς καὶ τὰ $\dfrac{A}{0}$ καὶ ∞, συνώνυμα τοῦ ἀπείρου.

ΣΗΜ. Ἐπεμείναμεν εἰς τὰς τελευταίας ταύτας ἐπεξηγήσεις, πειδὴ ὑπάρχουσι ζητήματα τοιαύτης φύσεως, ὥστε τὸ ἄπειρον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀληθὴς ἀπόκρισις τοῦ ζητήματος. Τούτων συχνὰ παραδείγματα βλέπομεν εἰς τὴν Ἐφαρμογὴν τῆς Ἀλγέβρας εἰς τὴν Γεωμετρίαν καὶ εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν.

§ 91. Δ΄. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ἐν ταὐτῷ $\beta=\gamma$ καὶ $\alpha=0$, αἱ δύο τιμαὶ τῶν ἀγνώστων γίνονται $\chi = 0/0$, $y = 0/0$. Ποίαν ἔννοιαν πρέπει νὰ σχηματίσωμεν περὶ τοῦ νέου τούτου ἐξαγομένου ;

Ἐπαναλαμβάνοντες τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην, παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ οἱ δύο ταχυδρόμοι ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον κινοῦνται ἰσοταχῶς, εὑρίσκονται ἀναγκαίως πάντοτε ὁμοῦ καθ' ὅλα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν διατρέχουσιν. Οἱαιδήποτε ἄρα τιμαὶ δοθῶσιν εἰς τὰς ἀγνώστους χ καὶ y, ἀρκεῖ μόνον νὰ ἦναι ἴσαι, αἱ συνθῆκαι τοῦ προβλήματος, κατὰ τὴν μερικὴν ἐκφώνησίν του, ἐκπληροῦνται.

Παρατηροῦντες προσέτι τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις βλέπομεν, ὅτι κατὰ τὴν διπλῆν ταύτην ὑπόθεσιν $\beta = \gamma$ καὶ $\alpha = 0$, ἀποβαίνουσι

$$\left.\begin{array}{l} \chi - y = 0 \\ \dfrac{\chi}{\beta} - \dfrac{y}{\beta} = 0 \end{array}\right\} \text{ἢ μᾶλλον } \left\{\begin{array}{l} \chi - y = 0, \\ \chi - y = 0, \end{array}\right.$$

ἤτοι ταυτίζονται. Ὅθεν τὸ πρόβλημα εἶναι *ἀπροσδιόριστον* (§ 68) ἐπειδὴ δὲν ἔχομεν πραγματικῶς, εἰμὴ μίαν μόνην ἐξίσωσιν μὲ δύο ἀγνώστους.

Ἡ ἔκφρασις λοιπὸν $0/0$, εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, εἶναι τὸ σύμβολον *τοῦ ἀπροσδιορίστου*.

§ 92 Σημείωσις. Ἐνταῦθα πρέπει νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἡ ἔκφρασις $\frac{0}{0}$ δὲν σημαίνει πάντοτε τὸ ἀπροσδιόριστον, ἀλλ' ἐνίοτε ὑποδεικνύει τὴν ὕπαρξιν κοινοῦ τινος παράγοντος εἰς τοὺς δύο ὅρους κλασματικῆς ἐκφράσεως, ὅστις ἀποβαίνει μηδὲν, ἐξ αἰτίας μερικῆς τινος ὑποθέσεως, καὶ ἐπομένως, μηδενίζει τοὺς ὅρους τούτους. Ἐξαλειφομένου ὅμως τοῦ κοινοῦ τούτου παράγοντος ἀναδεικνύεται ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῆς κλασματικῆς ἐκφράσεως.

Ἔστωσαν τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι λύοντες πρόβλημά τι εὕρομεν ὡς ἐξαγόμενον

$$\chi = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον τοῦτον κάμωμεν $\alpha = \beta$, προκύπτει $\chi = \frac{0}{0}$. Καὶ ὅμως ἠθέλαμεν ἀπατηθῇ παραδεχόμενοι, ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριστον.

Τῷ ὄντι ἐὰν παρατηρήσωμεν, ὅτι $\alpha^3 - \beta^3$ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$, καὶ ὅτι $\alpha^2 - \beta^2$ ἰσοῦται μὲ $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$, θέτομεν τὴν τιμὴν τοῦ χ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\chi = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}.$$

Ὅθεν ἐξαλειφομένου τοῦ κοινοῦ παράγοντος $\alpha - \beta$, ἡ τιμὴ τοῦ χ ἄγεται εἰς

$$\chi = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha + \beta},$$

ἔκφρασις, ἥτις ἀποβαίνει $\chi = \dfrac{3\alpha^2}{2\alpha}$ ἢ μᾶλλον $\chi = \dfrac{3\alpha}{2}$, εἰς τὴν ὑπόθεσιν $\alpha = \beta$, Ἔστω προσέτι ἡ ἔκφρασις

$$\chi=\frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha-\beta)^2}=\frac{(\alpha+\beta)\,(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\beta)}.$$

Ὑποθέτοντες $\alpha=\beta$, λαμβάνομεν ὡς τιμὴν τοῦ χ τὸ σύμβολον τοῦ ἀπροσδιορίστου $\frac{0}{0}$, ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ παράγοντος $\alpha-\beta$. Ἀλλ' ἐξαλείφοντες τὸν παράγοντα τοῦτον λαμβάνομεν

$$\chi=\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta},$$

ἔκφρασιν, ἥτις ἄγεται εἰς $\chi=\frac{2\alpha}{0}$ ἢ $\chi=\infty$, ὅταν ὑποθέσωμεν $\alpha=\beta$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι πρὶν ἀποφασίσωμεν περὶ τῆς ἀληθοῦς τιμῆς τοῦ συμβόλου $\frac{0}{0}$, πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν, ἂν ἡ κλασματικὴ ἔκφρασις, ἥτις ἄγεται εἰς τὴν μορφὴν ταύτην, περιέχῃ κοινόν τινα παράγοντα. Καὶ ἐὰν μὲν δὲν ὑπάρχῃ τοιοῦτος, συνάγομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις, ἐξ ἧς προέκυψεν, εἶναι ἀπροσδιόριστος. Ἐὰν δὲ ὑπάρχῃ, τότε ἀφοῦ τὸν ἐξαλείψωμεν, κάμνομεν ἐκ νέου τὴν μερικὴν ὑπόθεσιν, καὶ λαμβάνομεν οὕτω τὴν ἀληθῆ τιμὴν τοῦ κλάσματος, ἥτις δύναται νὰ παρουσιασθῇ ὑπὸ μίαν τῶν τριῶν μορφῶν

$$\chi=\frac{A}{B},\quad \chi=\frac{A}{0},\quad \chi=\frac{0}{0},$$

καὶ τότε ἡ ἐξίσωσις εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν εἶναι ὡρισμένη· εἰς τὴν δευτέραν, ἀδύνατος, καὶ εἰς τὴν τρίτην ἀπροσδιόριστος.

Τὸ ἀδύνατον τῆς δευτέρας περιπτώσεως καταφαίνεται καὶ ἐκ τῆς ἀτόπου ἰσότητος $\chi\times 0=A$, διότι ἀδύνατον νὰ ὑπάρξῃ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0 νὰ δίδῃ γινόμενον ὡρισμένον τινα ἀριθμὸν A.

Τὸ δὲ ἀπροσδιόριστον τῆς τρίτης περιπτώσεως καταφαίνεται ἐκ τῆς ἰσότητος $\chi\times 0=0$, διότι πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0 δίδει γινόμενον 0.

Παρατηροῦμεν τελευταῖον, ὅτι δίδονται περιστάσεις, καθ' ἃς δὲν ἐξαρκεῖ ἡ ἐκτεθεῖσα αὕτη μέθοδος πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀληθοῦς τιμῆς τοῦ συμβόλου $\frac{0}{0}$. Περὶ τούτου δὲ γίνεται λόγος εἰς τὸν Διαφορικὸν Ὑπολογισμόν.

§ 93. Ε'. Ἐὰν οἱ δύο ταχυδρόμοι ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον δὲν ὁδεύωσιν ἰσοταχῶς, τουτέστιν, ἐὰν $\beta >$ ἢ $<\gamma$ καὶ $\alpha=0$. Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ἀποβαίνουσι $\chi=0$, $y=0$.

Τῷ ὄντι οἱ δύο ταχυδρόμοι ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἔχοντες διαφόρους ταχύτητας, δὲν δύνανται προφανῶς νὰ εὑρεθῶσιν ὁμοῦ, εἰμὴ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως αὐτῶν, ἤτοι εἰς ἀπόστασιν 0.

§ 94. ΣΤ'. Δυνατὸν νὰ προστεθῇ εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο περίστασίς τις ἥτις μολοντοῦτο δὲν ἀποκαθιστᾷ δυσκολωτέραν τὴν λύσιν.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ εἷς ἐκ τῶν δύο ταχυδρόμων, π. χ. ὁ B, ἀναχωρεῖ δ ὥρας πρὶν ἀναχωρήσῃ ὁ A.

Εἶναι φανερόν, ὅτι τοῦτο ἄγεται εἰς τὸ ν' ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ ταχυδρόμου Β, νὰ θέσωμεν δηλαδὴ τὸ σημεῖον τοῦτο πέραν τοῦ Β, εἰς διάστημά τι ΒΓ, τὸ ὁποῖον προλαμβάνει νὰ διατρέξῃ κατὰ τὰς δ ὥρας. Τὸ διάστημα δὲ τοῦτο εὑρίσκομεν εὐκόλως, ἐπειδὴ ἐὰν εἰς μίαν ὥραν διατρέχῃ γ στάδια, εἰς δ ὥρας θὰ διατρέξῃ γδ. Ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν δύο σημείων τῆς ταυτοχρόνου κινήσεως διάστημα εἶναι $ΑΓ=ΑΒ+ΒΓ=α+γδ$, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος,

Ὅθεν ἔστω $\left.\begin{array}{l} ΑΡ=χ \\ ΓΡ=y \end{array}\right\}$ ἐπειδὴ $\left\{\begin{array}{l} ΑΡ-ΓΡ=ΑΓ \\ ἢ\ ΑΡ-ΓΡ=ΑΒ+ΒΓ \end{array}\right.$

ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ διαστήματος . . . . . $χ-y=α+γδ$

ἡ δὲ ἐξίσωσις τοῦ χρόνου μένει ἡ αὐτὴ . . . . . $\dfrac{χ}{ε}=\dfrac{y}{γ}$.

λύοντες τὰς ἐξισώσεις ταύτας λαμβάνομεν . . . $\left\{\begin{array}{l} χ=\dfrac{ε(α+γδ)}{ε-γ} \\ y=\dfrac{γ(α+γδ)}{ε-γ} \end{array}\right.$

§ 95. Ζ΄. Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι οἱ δύο ταχυδρόμοι ἀναχωροῦντες ταυτοχρόνως ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β, ὁδεύουσιν ὁ εἷς ἐναντίον τοῦ ἑτέρου.

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως εὑρίσκεται τότε μεταξὺ τῶν δύο σημείων Α καὶ Β. Ἔστω Ρ.

Σημειοῦντες $\left.\begin{array}{l} ΑΡ=χ \\ ΒΡ=y \end{array}\right\}$ ἔχομεν $\left\{\begin{array}{l} ΑΡ+ΒΡ=ΑΒ \\ ἢ\ \ χ+y=α \end{array}\right.$

καὶ $\dfrac{χ}{ε}=\dfrac{y}{γ}$.

Λύοντες τὰς ἐξισώσεις ταύτας εὑρίσκομεν

$$χ=\frac{αε}{ε+γ} \quad καὶ \quad y=\frac{αγ}{ε+γ}.$$

§ 96. Η'. Ἂς ὑποθέσωμεν τέλος, ὅτι οἱ δύο ταχυδρόμοι ὁδεύοντες ὁ εἷς ἐναντίον τοῦ ἄλλου δὲν ἀναχωροῦσι ταυτοχρόνως, ἀλλ' ὅτι ὁ Β προλαμβάνει δ ὥρας τὴν ἀναχώρησιν τοῦ Α.

Ἐπειδὴ ὁ Β διατρέχει τὸ διάστημα $ΒΓ=γδ$ πρὶν κινηθῇ ὁ Α, ἕπεται ὅτι τὸ μεταξὺ αὐτῶν διάστημα κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ταυτοχρόνου ἀναχωρήσεως ἀμφοτέρων εἶναι

$$ΑΓ=ΑΒ-ΒΓ \text{ ἤτοι } ΑΓ=α-γδ.$$

Ὑποθέτοντες γνωστὸν τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως Ρ καὶ σημειοῦντες διὰ $χ$ τὸ διάστημα τοῦ πρώτου ΑΡ, καὶ διὰ y τὸ διάστημα τοῦ δευτέρου ΓΡ, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν,

$$ΑΡ+ΓΡ=ΑΓ \quad \text{ἢ} \quad χ+y=α-γδ \ldots \quad (1)$$

ὡσαύτως ἔχομεν κατὰ τὰ προειρημένα $\cdot\cdot\ \frac{χ}{β}=\frac{y}{γ} \ldots \quad (2)$

Λύοντες τὰς ἐξισώσεις ταύτας λαμβάνομεν,

$$χ=\frac{β(α-γδ)}{β+γ}, \qquad y=\frac{γ(α-γδ)}{β+γ}.$$

Προταθὲν οὕτω τὸ πρόβλημα παρουσιάζει περίστασιν ἀξιοσημείωτον, ὅταν κινούμενος ὁ Β εἰς ὑπάντησιν τοῦ Α, κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΒΑ, διατρέξῃ εἰς τὰς δ ὥρας διάστημα ΒΓ' μεῖζον τοῦ ΒΑ, τουτέστιν ὅταν $γδ>α$. Τότε ὁ ἀπὸ τοῦ Β ἀναχωρήσας ταχυδρόμος εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον Γ', πρὸς τ' ἀριστερὰ τοῦ Α, εἰς τὴν αὐτὴν στιγμήν, καθ' ἣν ὁ ἀπὸ τοῦ Α ἀναχωρῶν ὁδεύει πρὸς τὸ Β, ἤτοι πρὸς τὰ δεξιά. Εἶναι λοιπὸν ἄτοπον νὰ ὑποθέσωμεν τότε, ὅτι οἱ δύο ταχυδρόμοι θὰ συναντηθῶσι.

Ἔστω π. χ. $α=400$ στάδια, $β=12$, $γ=8$, $δ=60$. ἑπομένως $γδ=480$ στάδια. Ἄρα τὸ σημεῖον Γ' κεῖται 60 στάδια πέραν τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Β.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην οἱ δύο τύποι τῶν ἀγνώστων δίδουσι

$$χ=-48. \text{ καὶ } y=-32.$$

Αἱ ἀρνητικαὶ αὗται λύσεις δηλοῦσι μεταβολὴν διευθύνσεως ἀμφοτέρων τῶν ταχυδρόμων. Ἡ δὲ συνάντησις αὐτῶν γίνεται εἴς τι σημεῖον Ρ', κείμενον 48 στάδια πέραν τοῦ Α, ὥστε ὁ μὲν ἐκ τοῦ σημείου Α ἀναχωρῶν πρέπει νὰ διατρέξῃ κατ' ἀντίθετον διεύθυνσιν στάδια 48, ὁ δὲ ἐκ τοῦ Γ' ὡσαύτως πρέπει ν' ἀλλάξῃ διεύθυνσιν καὶ ἐπιστρέφων νὰ διατρέξῃ στάδια 32.

§ 97. Αἱ ἀνωτέρω ὑποθέσεις, αἱ ὁποῖαι μᾶς ἔφερον εἰς ἀξιοσημείωτα ἐξαγόμενα, ἀρκοῦσι νὰ δείξωσιν εἰς τοὺς πρωτοπείρους, τίνι τρόπῳ ἡ Ἄλγεβρα ἀποκρίνεται εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος. Μὴ ἀρκουμένη νὰ δείξῃ τὴν ἀτοπίαν, ἥτις δύναται νὰ παρεισφρύσῃ εἰς τὴν ἐκφώνησιν αὐτοῦ, δίδει τὰ μέσα τῆς ἐπανορθώσεως καὶ λύει τὸ πρόβλημα τροπολογημένον. Τὸ προτέρημα τοῦτο ἀποκαθιστᾷ τὴν Ἄλγεβραν οὐχὶ μόνον ἐπιστήμην ἀκριβῆ, ἀλλὰ καὶ ἁρμοδιωτάτην πρὸς ἀνακάλυψιν τῶν ἀληθειῶν.

Χρῆσις τῶν ἀρνητικῶν ποσοτήτων ἐπὶ τῶν δεδομένων.

§ 98. Λυθέντος γενικοῦ τινος προβλήματος δυνάμεθα, διὰ τῶν εὑρεθέντων τύπων τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων, νὰ λάβωμεν τὰς ἀνηκούσας τιμὰς εἰς νέα προβλήματα (τῶν ὁποίων αἱ ἐκφωνήσεις δὲν διαφέρουσιν ἀπὸ τὴν τοῦ προτεθέντος προβλήματος, εἰμὴ καθ' ὅ,τι ποσότητές τινες, οὖσαι θετικαί, πρέπει νὰ ἐκληφθῶσιν ὡς ἀρνητικαί, καὶ τ' ἀνάπαλιν) δι' ἁπλῆς μεταβολῆς σημείου ἐπὶ τῶν δεδομένων, ὅσα πρέπει νὰ ἐκληφθῶσι κατ' ἔννοιαν ἀντίθετον.

Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸ πρόβλημα τοῦ ἐργάτου (§ 60). Ὑποθέτοντες ὅτι ὁ ἐργάτης λαμβάνει μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῆς δαπάνης ὑπόλοιπόν τι γ, ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\left.\begin{array}{l}\chi+y=\eta\\ \alpha\chi-\beta y=\gamma\end{array}\right\}\text{ἐξ ὧν}\quad \chi=\frac{\beta\eta+\gamma}{\alpha+\beta},\quad y=\frac{\alpha\eta-\gamma}{\alpha+\beta}.$$

Ἀλλ' ἐὰν ἐξ ἐναντίας ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ ἐργάτης, ἀντὶ νὰ λάβῃ, μένει ὀφειλέτης κατὰ τὴν ποσότητα γ, αἱ ἐξισώσεις τότε θὰ ἦσαν

$$\left.\begin{array}{r}\chi+y=\eta\\ \beta y-\alpha\chi=\gamma\end{array}\right\}\quad \text{ἢ}\quad \left\{\begin{array}{l}\chi+y=\eta\\ \alpha\chi-\beta y=-\gamma\end{array}\right.$$

διαφέρουσαι μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ γ. Ὅθεν εἶναι φανερόν, ὅτι χωρὶς νὰ θέσωμεν τὸ νέον πρόβλημα εἰς ἐξίσωσιν, καὶ νὰ ἐπιλύσωμεν τὰς νέας ἐξισώσεις, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀμέσως τὰς τιμὰς τοῦ χ καὶ y, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, *ἀλλάττοντες ἁπλῶς τὸ σημεῖον τοῦ* γ, εἰς τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν ἀγνώστων τοῦ πρώτου προβλήματος· καὶ οὕτως εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{\beta\eta-\gamma}{\alpha+\beta},\qquad y=\frac{\alpha\eta+\gamma}{\alpha+\beta}.$$

Πρὸς ἐπιβεβαίωσιν τούτου ἂς λύσῃ ὁ μαθητὴς τὰς δευτέρας ἐξισώσεις.

Δυνάμεθα δὲ νὰ συμπεριλάβωμεν εἰς τοὺς αὐτοὺς τύπους τὰ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα ἀνήκουσιν εἰς τὰς δύο ἐκφωνήσεις, γράφοντες

$$\chi=\frac{\beta\eta\pm\gamma}{\alpha+\beta}, \qquad y=\frac{\alpha\eta\mp\gamma}{\alpha+\beta}.$$

Τὰ μὲν ἄνω σημεῖα ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ ἐργάτης λαμβάνει, τὰ δὲ κάτω, εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὀφείλει τὴν ποσότητα γ.

Οἱ τύποι οὗτοι περιλαμβάνουσι προσέτι καὶ τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ ἐργάτης οὔτε νὰ λάβῃ ἀπαιτεῖ, οὔτε νὰ δώσῃ ὀφείλει· διότι ἀρκεῖ νὰ ὑποθέσωμεν $\gamma=0$, καὶ τότε ἔχομεν

$$\chi=\frac{\beta\eta}{\alpha+\beta}, \qquad y=\frac{\alpha\eta}{\alpha+\beta}.$$

§ 99. Σημείωσις. Τὸ ἀδύνατον τῆς λύσεως ὡς πρὸς τὰ προβλήματα παρουσιάζεται πρὸς τούτοις καὶ κατ' ἄλλας περιστάσεις. Διότι ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος ἐπιβάλλει ἐνίοτε εἰς τὰς ἀγνώστους τοιαύτας συνθήκας, ὁποίας δὲν δυνάμεθα νὰ ἑρμηνεύσωμεν ἀκριβῶς διὰ τῆς ἀλγεβρικῆς γλώσσης εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος· ὡς ἐκ τούτου δὲ καὶ αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων, αἱ προκύπτουσαι ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις ταύτας, δὲν δύνανται, οὔτε εἶναι ὑπόχρεοι νὰ πληρώσωσιν ὅλας αὐτὰς τὰς συνθήκας.

Ἐξηγούμεθα σαφέστερον διὰ τοῦ ἑξῆς προβλήματος.

Πρόβλημα. Ἐννέα ἄτομα, ἄνδρες καὶ γυναῖκες δαπανῶσιν α δραχμὰς διὰ τὸ δεῖπνον. Καὶ οἱ μὲν ἄνδρες πληρόνουσι 5 δραχμὰς ἕκαστος, αἱ δὲ γυναῖκες 3. Ζητεῖται, πόσοι εἶναι οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

Λύσις. Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν· ὁ τῶν γυναικῶν ἑπομένως εἶναι $9-\chi$. Ὅθεν ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$5\chi+3(9-\chi)=\alpha$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν . . . . $\chi=\dfrac{\alpha-27}{2}$

Ἂς κάμωμεν ἤδη μερικὰς ἐφαρμογάς.

α΄. Ἔστω $\alpha=33$ ὁ τύπος τοῦ χ δίδει . . . . $\chi=\dfrac{33-27}{2}=\dfrac{6}{2}=3$

Βάσανος	ἄνδρες	3	πρὸς δρχ.	5	. . δρχ.	15
	γυναῖκες	6	»	3	. . »	18
	ἄτομα	9			δραχ.	33.

β΄. Ἔστω $\alpha=32$. Τότε εὑρίσκομεν . . . . . . $\chi=\dfrac{32-27}{2}=\dfrac{5}{2}=2\tfrac{1}{2}$

Ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς τῶν γυναικῶν εἶναι . . . . $9-\chi=9-2\tfrac{1}{2}=6\tfrac{1}{2}$.

Τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα ταυτοποιοῦσι μὲν τὴν ἐξίσωσιν, δὲν συμβιβάζονται ὅμως μὲ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, διότι εὑρίσκομεν $2\frac{1}{2}$ ἄνδρας καὶ $6\frac{1}{2}$ γυναῖκας ὅπερ ἄτοπον.

Ἀλλὰ διατὶ ἐνῷ τὸ πρόβλημα, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν ταύτην, εἶναι ἀδύνατον ἡ ἐξίσωσις πληροῦται διὰ τῶν τιμῶν $2\frac{1}{2}$ καὶ $6\frac{1}{2}$;

Διότι ἡ ἐξίσωσις εἶναι κοινὴ μετάφρασις πολλῶν προβλημάων. Ἐὰν π. χ. εἴχομεν τὸ πρόβλημα τοῦτο.

Ἠγόρασέ τις δύο εἴδη καφφὲ, τὸ ὅλον ὀκκάδας 9, τὸ μὲν πρῶτον εἶδος πρὸς 5 δραχμὰς, τὸ δὲ δεύτερον πρὸς 3 δραχμάς· ἐπλήρωσε διὰ τὸ ὅλον δραχμὰς 32 Ζητεῖται, πόσας ὀκκάδας τοῦ ά. εἴδους ἠγόρασε καὶ πόσας τοῦ 6'.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος τούτου εἶναι ἡ αὐτὴ

$$5\chi+3(9-\chi)=32$$

ἥτις δίδει . . . . . $\chi=2\frac{1}{2}$ καὶ $9-\chi=6\frac{1}{2}$.

γ'. Ἔστω $\alpha=49$. Τότε εὑρίσκομεν . . . $\chi=\frac{49-27}{2}=\frac{22}{2}=11$

Ἀλλ' ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος ἔλεγεν 9 ὅλα ἄτομα, ἐνῷ ἐνταῦθα εὑρίσκονται 11 μόνον οἱ ἄνδρες.

δ'. Ἔστω $\alpha=23$. Τότε εὑρίσκομεν . . $\chi=\frac{23-27}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δὲν ἔχει οὐδεμίαν σημασίαν ὡς πρὸς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος καὶ δεικνύει τὸ ἀδύνατον.

Ἐρευνῶντες σκεπτικώτερον τὰς τρεῖς τελευταίας ὑποθέσεις, δυνάμεθα νὰ προΐδωμεν τὸ ἀδύνατον τῆς λύσεως. Εἰς μὲν τὴν 6'. ὑπόθεσιν $\alpha=32$, διότι τὸ ποσὸν α δὲν δύναται νὰ ἦναι ἀριθμὸς ἄρτιος, ὡς πληροφορούμεθα ἐκ τοῦ τύπου $\chi=\frac{\alpha-27}{2}$ διότι ἀπὸ ἀρτίου ἀφαιρούμενος περιττὸς ὁ 27 δίδει ὑπόλοιπον περιττὸν ἀριθμὸν, καὶ ἑπομένως ἀδιαίρετον ὁλοσχερῶς διὰ τοῦ 2, ὡς ἀπαιτεῖ τὸ πρόβλημα. ἀκεραίους τοὺς ζητουμένους ἀριθμοὺς τῶν ἀτόμων.

Εἰς τὴν 6' ὑπόθεσιν $\alpha=49$, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ποσὸν α δὲν δύναται νὰ ἦναι μεῖζον τοῦ 45. Διότι καὶ ἐπὶ τῇ ὑποθέσει, ὅτι ὅλα τὰ ἄτομα ἦσαν ἄνδρες πληρόνοντες 5 δραχμὰς, ἔπρεπε νὰ ἔχωμεν ὡς μέγιστον ὅριον δαπάνης $5\times9=45$.

Εἰς τὴν δ'. ὑπόθεσιν $\alpha=23$, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ποσὸν α δὲν δύναται νὰ ἦναι ἔλασσον τοῦ 27, διότι, κα' ἂν ὅλοι οἱ συνευωχούμενοι ὑποτεθῶσι γυναῖκες, πάλιν πρέπει νὰ πληρώσωσι 3×9 ἤτοι 27 δραχμάς.

Οὕτως αἱ τρεῖς ὑποθέσεις $\alpha=32$, $\alpha=49$, $\alpha=23$, ἦσαν ἐξ ἀπερισκεψίας διδόμενα ἀσυμβίβαστα πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν προσώπων καὶ τὴν καταβολὴν ἑκάστου.

ΤΥΠΟΙ ΓΕΝΙΚΟΙ

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων.

§ 100. Πᾶσα πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις, περιέχουσα μίαν μόνην ἄγνωστον, δύναται διὰ τῶν γνωστῶν τροπῶν, νὰ ἀχθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\alpha\chi=\beta.$$

ὅπου τὸ μὲν α παριστάνει τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ποσοτήτων, αἱ ὁποῖαι πολλαπλασιάζουσι τὴν ἄγνωστον, τὸ δὲ β τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν γνωστῶν ὅρων.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐξάγομεν $\chi=\frac{\beta}{\alpha}$.

Παρομοίως δύο πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις περιέχουσαι δύο ἀγνώστους, ἄγονται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha\chi+\beta y=\gamma,\\ \alpha'\chi+\beta' y=\gamma'.\end{array}\right.$$

ὅπου οἱ συντελεσταὶ τῆς αὐτῆς ἀγνώστου καὶ τὰ γνωστὰ μέλη παριστάνονται διὰ τοῦ αὐτοῦ γράμματος, διακρίνονται δὲ μόνον ἐκ τοῦ τόνου. Οὕτω δυνάμεθα δι' ἁπλῆς ὄψεως νὰ διακρίνωμεν τὰ ὑπὸ τῶν γραμμάτων τούτων παριστανόμενα, καὶ ὁδηγούμεθα εὐκολώτερον εἰς τὴν ἀνακάλυψιν τοῦ νόμου, καθ' ὃν σχηματίζονται οἱ τύποι τῶν ἀγνώστων, ὡς θέλομεν ἰδεῖ ἐφεξῆς.

Ἐφαρμόζοντες ἐπὶ τῶν ἐξισώσεων τούτων τὴν διὰ προσθαφαιρέσεως μέθοδον τῆς ἀπαλείψεως (§ 72) λαμβάνομεν

$$\chi=\frac{\gamma\beta'-\beta\gamma'}{\alpha\beta-\beta\alpha'},\qquad \chi=\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}.$$

Ἔστωσαν ἤδη αἱ τρεῖς ἐξισώσεις μὲ τρεῖς ἀγνώστους ;

$$\alpha\,\chi+\beta\,y+\gamma\,\omega=\delta\;\ldots\ldots\ldots\;(1)$$
$$\alpha'\chi+\beta'\,y+\gamma'\,\omega=\delta'\;\ldots\ldots\ldots\;(2)$$
$$\alpha''\chi+\beta''y+\gamma''\omega=\delta''\;\ldots\ldots\ldots\;(3)$$

Ἀπαλείφοντες τὴν ἄγνωστον ω μεταξὺ τῆς (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν

$$(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')\chi+(\beta\gamma'-\gamma\beta')y=\delta\gamma'-\gamma\delta'\;\ldots\ldots\;(4)$$

Ἀπαλείφοντες τὴν αὐτὴν ἄγνωστον μεταξὺ τῆς (2) καὶ (3) λαμβάνομεν

$$(\alpha'\gamma''-\gamma'\alpha'')\chi+(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')y=\delta'\gamma''-\gamma'\delta''\;\ldots\;(5)$$

Ἵνα ἀπαλείψωμεν τώρα τὴν ἄγνωστον y μεταξὺ τῆς (4) καὶ (5) πολλαπλασιάζομεν τὴν μὲν (4) ἐπὶ $\beta'\gamma''-\gamma'\beta''$, τὴν δὲ (5) ἐπὶ $\beta\gamma'-\gamma\beta'$, καὶ ἀφαιροῦμεν ἔπειτα τὸ ἓν ἐξαγόμενον ἐκ τοῦ ἑτέρου.

Οὕτως ἔχομεν,

$$[(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')-(\alpha'\gamma''-\gamma'\alpha'')(\beta\gamma'-\gamma\beta')]\chi=$$
$$(\delta\gamma'-\gamma\delta')(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')-(\delta'\gamma''-\gamma'\delta'')(\beta\gamma'-\gamma\beta')$$

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις καὶ ἀνάγοντες εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{\delta\beta'\gamma''-\delta\gamma'\beta''+\gamma\delta'\beta''-\beta\delta'\gamma''+\beta\gamma'\delta''-\gamma\beta'\delta''}{\alpha\beta'\gamma''-\alpha\gamma'\beta''+\gamma\alpha'\beta''-\beta\alpha'\gamma''+\beta\gamma'\alpha''-\gamma\beta'\alpha'}.$$

Ἀπαλείφοντες παρομοίως χ καὶ ω ἔπειτα χ καὶ y συνάγομεν

$$y=\frac{\alpha\delta'\gamma''-\alpha\gamma'\delta''+\gamma\alpha'\delta''-\delta\alpha'\gamma''+\delta\gamma'\alpha''-\gamma\delta'\alpha''}{\alpha\beta'\gamma''-\alpha\gamma'\beta''+\gamma\alpha'\beta''-\beta\alpha'\gamma''+\beta\gamma'\alpha''-\gamma\beta'\alpha''}.$$

$$\omega=\frac{\alpha\beta'\delta''-\alpha\delta'\beta''+\delta\alpha'\beta''-\beta\alpha'\delta''+\beta\delta'\alpha''-\delta\beta'\alpha''}{\alpha\beta'\gamma''-\alpha\gamma'\beta''+\gamma\alpha'\beta''-\beta\alpha'\gamma''+\beta\gamma'\alpha''-\gamma\beta'\alpha''}.$$

§ **101.** Ἡ χρῆσις τῶν τόνων μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν παρατήρησιν νόμου τινός, κατὰ τὸν ὁποῖον δυνάμεθα εὐκόλως νὰ λάβωμεν τοὺς τύπους τῶν ἀγνώστων, χωρὶς νὰ ἐκτελῶμεν τὴν ἀπάλειψιν.

Παρατηροῦντες μετὰ προσοχῆς τοὺς δύο ἤδη εὑρεθέντας τύπους τῶν ἀγνώστων χ καὶ y ἐκ τοῦ συστήματος δύο ἐξισώσεων,

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\chi+\beta y=\gamma\\ \alpha'\chi+\beta'y=\gamma'\end{array}\right\}\qquad \chi=\frac{\gamma\beta'-\beta\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'},\qquad y=\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'},$$

βλέπομεν ὅτι ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, τὸν ὁποῖον εὐκόλως δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν. Βλέπομεν προσέτι ὅτι ἐκ τοῦ κοινοῦ τούτου παρονομαστοῦ δυνάμεθα νὰ συνάξωμεν τοὺς ἀριθμητάς. Ὥστε ἔχομεν τοὺς ἑξῆς ἁπλουστάτους κανόνας.

Α΄. « Ἵνα λάβωμεν τὸν εἰς τοὺς δύο τύπους κοινὸν παρονομα-
» στὴν σχηματίζομεν μὲ τὰ γράμματα α καὶ β (τὰ ὁποῖα παρι-
» στάνουσι τοὺς συντελεστὰς τοῦ χ καὶ y εἰς τὴν πρώτην ἐξίσω-
» σιν) τὰς δύο διατάξεις $\alpha\beta$ καὶ $\beta\alpha$, ἔπειτα παρενθέτομεν τὸ ση-
» μεῖον — καὶ ἔχομεν $\alpha\beta-\beta\alpha$, τονίζομεν τέλος τὸ τελευταῖον
» γράμμα ἑκάστου ὅρου, καὶ συνάγομεν $\alpha\beta'-\beta\alpha'$. »

Β΄. « Ἵνα σχηματίσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἑκάστης ἀγνώστου, ἀν-
» τεισάγομεν εἰς τὸν παρονομαστήν, ἀντὶ τοῦ γράμματος, τὸ ὁποῖον
» παριστάνει τὸν συντελεστὴν τῆς ἀγνώστου, τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ
» προσδιορίσωμεν, τὸ γράμμα, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ γνωστὸν μέ-
» λος, διατηροῦντες ὅμως τοὺς τόνους εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν. Τοιουτο-
» τρόπως ὁ παρονομαστὴς $\alpha\beta'-\beta\alpha'$ τρέπεται ὡς πρὸς τὸ χ εἰς
» $\gamma\beta'-\beta\gamma'$, καὶ ὡς πρὸς τὸ y εἰς $\alpha\gamma'-\gamma\alpha'$. »

Ἔστωσαν τώρα τρεῖς ἐξισώσεις μὲ τρεῖς ἀγνώστους. Πρὸς εὕρεσιν τῶν τριῶν τύπων τῶν ἀγνώστων ἔχομεν τοὺς ἑξῆς κανόνας.

Α΄. « Ἵνα εὕρωμεν τὸν κοινὸν παρονομαστήν, λαμβάνομεν τὰ τρία
» γράμματα α, β, γ, καὶ ἐκ τῶν δύο πρώτων σχηματίζομεν τὰς
» διοταξεις $\alpha\beta$ καὶ $\beta\alpha$, θέτομεν τὸ γράμμα γ εἰς τὸ τέλος, εἰς
» τὸ μέσον καὶ εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκατέρου τῶν ὅρων $\alpha\beta$ καὶ $\beta\alpha$, παρεν-
» θέτομεν ἔπειτα διαδοχικῶς τὸ + καὶ — καὶ οὕτω συνάγομεν

$$\alpha\beta\gamma-\alpha\gamma\beta+\gamma\alpha\beta-\beta\alpha\gamma+\beta\gamma\alpha-\gamma\beta\alpha$$

» θέτοντες τέλος εἰς ἕκαστον ὅρον ἕνα τόνον ἐπὶ τοῦ δευτέρου » γράμματος, καὶ δύο ἐπὶ τοῦ τρίτου, εὑρίσκομεν τὸν παρονομαστὴν

$$\alpha\beta'\gamma''-\alpha\gamma'\beta''+\gamma\alpha'\beta''-\beta\alpha'\gamma''+\beta\gamma'\alpha''-\gamma\beta'\alpha''.$$

Β'. « Ἵνα σχηματίσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἑκάστης ἀγνώστου, ἀντει» σάγομεν εἰς τὸν παρανομαστὴν, ἀντὶ τοῦ γράμματος, τὸ ὁποῖον » παριστάνει τὸν συντελεστὴν τῆς ἀγνώστου, τὸ γράμμα, τὸ ὁποῖον » παριστάνει τὸ γνωστὸν μέλος, διατηροῦντες τοὺς τόνους εἰς τὴν θέ» σιν αὐτῶν. Οὕτω διὰ μὲν τὸ χ τρέπομεν τὸ α εἰς δ, διὰ δὲ » τὸ y, τὸ β εἰς δ, καὶ διὰ τὸ ω, τὸ γ εἰς δ. »

Ὁ νόμος οὗτος, ὅστις εἶναι τὸ ἐξαγόμενον τῆς παρατηρήσεως ἐπὶ δύο ἢ τριῶν ἐξισώσεων, εἶναι γενικός. Ἡ ἀπόδειξις ὅμως τούτου εἶναι πολὺ συμπεπλεγμένη καὶ ἀνωτέρα τῶν στοιχείων. (*)

§ **102.** Ἂς ἴδωμεν ἤδη ὁποίαν χρῆσιν δυνάμεθα νὰ κάμωμεν τῶν τύπων τούτων εἰς τὰς μερικὰς ἐφαρμογάς.

Ἔστωσαν αἱ δύο ἐξισώσεις $\quad 5\chi-\ \ 7y=34,$

$$3\chi-13y=-6.$$

Συγκρίνοντες αὐτὰς μὲ τὰς γενικὰς ἐξισώσεις

$$\alpha\chi+\beta y=\gamma,$$
$$\alpha'\chi+\beta' y=\gamma',$$

βλέπομεν ὅτι πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς τὰ γράμματα τὰς μερικὰς ταύτας τιμὰς,

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=5\\ \beta=-7\\ \gamma=34\end{array}\right\}\begin{array}{l}\alpha'=3\\ \beta'=-13\\ \gamma'=-6.\end{array}$$

Ὅθεν ἀντεισάγοντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τοὺς τύπους

$$\chi=\frac{\gamma\beta'-\beta\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}\qquad y=\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'},$$

συνάγομεν . . . . . . $\chi=11,\quad y=3.$

Ἐν γένει ἵνα λάβωμεν τὰς τιμὰς, αἱ ὁποῖαι ἀνήκουσιν εἰς τὰς μερικὰς ἐξισώσεις, πρέπει ν' ἀντεισάξωμεν εἰς τοὺς γενικοὺς τύπους,

(*) Ὁ νόμος οὗτος ἀπεδείχθη ὑπὸ τοῦ Laplace καταχωρηθεὶς εἰς τὸ Β'. μέρος τῶν Ὑπομνημάτων τῆς Ἀκαδημίας τῶν ἐπιστημῶν, τοῦ 1772. Βλέπε προσέτι καὶ Annales de Mathématiques pures et appliquées, par Gergonne, T. IV. page 148, T. XII. p. 381.

Ὁ Garnier εἰς τὸ Β'. μέρος τῆς Ἀλγέβρας αὐτοῦ ἐκθέτει τὴν ἀπόδειξιν ταύτην.

ἀντὶ τῶν συντελεστῶν $\alpha, \beta, .. \alpha', \beta'$.. τὰς μερικὰς αὐτῶν τιμὰς, μὲ τὰ ἴδια σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν εἰς τὰς μερικὰς ἐξισώσεις, καὶ νὰ ἐκτελέσωμεν ὅλας τὰς σημειωμένας πράξεις κατὰ τὰς γνωστὰς μεθόδους.

Σημειοῦμεν δὲ ὅτι οἱ γενικοὶ τύποι τῶν τριῶν ἐξισώσεων ὄντες πολύπλοκοι δὲν χρησιμεύουσι πρὸς ἐφαρμογὴν εἰς τὰς μερικὰς περιστάσεις· εἶναι προτιμότερον τότε νὰ ἐκτελέσωμεν ἐπὶ τῶν ἐξισώσεων ὁλόκληρον τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἀπαλείψεως. Οἱ εὑρεθέντες γενικοὶ τύποι χρησιμεύουσι κυρίως εἰς τὴν γενίκευσιν τῶν ζητημάτων, τὰ ὁποῖα λύονται διὰ τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους.

ΣΗΜ. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων ἦναι ἀνώτερος τῶν τριῶν, οἱ γενικοὶ τύποι ἀποβαίνουσιν ὅλως ἄχρηστοι διὰ τὸ πολύπλοκον αὐτῶν. Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὅταν αἱ ἐξισώσεις ἦναι τέσσαρες οἱ γενικοὶ τύποι τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων ἔχουσιν 24 ὅρους εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ ἰσαρίθμους εἰς τὸν παρονομαστήν. Ὅταν δὲ αἱ ἐξισώσεις ἦναι πέντε, οἱ τύποι ἔχουσιν 120 ὅρους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΚΑΙ ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.

§ 103 Ὅταν ἡ ἐξίσωσις ἦναι δευτεροβάθμιος, αἱ εἰς τὰ δύο προηγηθέντα κεφάλαια ἐκτεθεῖσαι ἀρχαὶ δὲν ἀρκοῦσι πρὸς λύσιν αὐτῆς. Τῷ ὄντι ἀφοῦ ἐκτελεσθῶσιν ὅλαι αἱ πρὸς ἁπλοποίησιν γνωσταὶ μεταμορφώσεις, ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha\chi^2=\beta$. Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς διὰ τοῦ συντελεστοῦ τῆς ἀγνώστου λαμβάνομεν $\chi^2=\frac{\beta}{\alpha}$.

Ἄλλο τι νὰ πράξωμεν δὲν δυνάμεθα, διὰ τῶν μέχρι τοῦ νῦν ἀποκτηθεισῶν γνώσεων. Ὅθεν βλέπομεν ὅτι ἡ ἄγνωστος δὲν προσδιωρίσθη ἀκόμη, ἀλλ' ὅτι τὸ ζήτημα ἤχθη εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν τινα, ὅστις πολλαπλασιασθεὶς ἐφ' ἑαυτὸν παράγει γνωστὸν ἀριθμὸν, τὸν διὰ $\frac{\beta}{\alpha}$ παριστανόμενον, τουτέστιν ἔχοντες γνωστὸν τὸ τετράγωνον νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν αὐτοῦ.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι πρὸς λύσιν τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων εἶναι ἀπαραιτήτως ἀναγκαία ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης. (*) Πρέπει ἄρα νὰ ἐκθέσωμεν κατὰ πρῶτον τὰς ἀφορώσας τὴν πρᾶξιν ταύτην μεθόδους. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀπαιτεῖται ἡ περὶ τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ τετραγώνου ἀκριβὴς γνῶσις, καὶ ἐπειδὴ αἱ ποσότητες ἐπὶ τῶν ὁποίων πρόκειται νὰ ἐργασθῶμεν δυνατὸν νὰ ἦναι εἴτε μερικοὶ ἀριθμοί, εἴτε γραμματικαὶ ἐκφράσεις, διὰ τοῦτο θέλομεν διαιρέσει τὴν θεωρίαν ταύτην εἰς δύο γενικὰ τμήματα, εἰς μὲν τὸ πρῶτον θέλομεν πραγματευθῆ περὶ σχηματισμοῦ τετραγώνου καὶ περὶ ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀριθμῶν· εἰς δὲ τὸ δεύτερον, περὶ σχηματισμοῦ τετραγώνου καὶ περὶ ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν γραμματικῶν ποσοτήτων.

Α΄. Σχηματισμὸς τοῦ τετραγώνου καὶ ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀριθμῶν.

α΄. Σχηματισμὸς τοῦ τετραγώνου.

§ 104. Ὁ σχηματισμὸς τοῦ τετραγώνου παντὸς ἀριθμοῦ, ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ, μικτοῦ ἢ δεκαδικοῦ, δὲν ἔχει οὐδεμίαν δυσκολίαν, ἐπειδὴ ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἐφ᾽ ἑαυτὸν, κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνας. Ἰδοὺ τινὰ παραδείγματα.

$$(8)^2=8\times 8=64, \qquad (\tfrac{3}{4})^2=\tfrac{3}{4}\times\tfrac{3}{4}=\tfrac{9}{16}.$$

$$(12)^2=12\times 12=144, \qquad (3\tfrac{1}{2})^2=3\tfrac{1}{2}\times 3\tfrac{1}{2}=\tfrac{49}{4}.$$

$$(5,12)^2=5,12\times 5,12=26,2144,$$

$$(0,6)^2=0,6\times 0,6=0,36.$$

β΄. Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀκεραίων.

§ 105. Ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δοθέντος ἀριθμοῦ τινὸς εὑρίσκομεν ἄλλον ἀριθμὸν, ὅστις πολλαπλασιασθεὶς ἐφ᾽ ἑαυτὸν παράγει τὸν προτεθέντα. Ἡ πρᾶξις αὕτη οὖσα πολύπλοκος ἀπαιτεῖ ἰδιαιτέραν ἑρμηνείαν.

Ἵνα ἴδωμεν τὴν σχέσιν, ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν τετραγώνων

(*) Ἐνταῦθα θεωροῦμεν τὴν ἁπλουστέραν περίπτωσιν, καθ᾽ ἣν ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις παρουσιάζεται· ἡ ἀνωτέρω παρατήρησις ὅμως εἶναι γενική. Καὶ τῷ ὄντι ἵνα ἐπιλύσωμεν τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν, πρέπει νὰ ἐλευθερώσωμεν τὴν ἄγνωστον χ ἀπὸ τὸν ἐκθέτην αὐτῆς· ἀπαιτεῖται ἄρα ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

καὶ τῶν ῥιζῶν αὐτῶν, σχηματίζομεν κατὰ πρῶτον τὸν ἑξῆς πίνακα τῶν δέκα πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν καὶ τῶν τετραγώνων αὐτῶν.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Οὕτω τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης γραμμῆς ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὴν δευτέραν γραμμήν· καὶ αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὴν πρώτην.

Ἐκ τῆς παρατηρήσεως τοῦ πίνακος τούτου γίνεται φανερὸν, ὅτι μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν τῆς δευτέρας γραμμῆς ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τὸν 100, τουτέστι μεταξὺ ὅλων τῶν συγκειμένων ἐξ ἑνὸς ἢ δύο ψηφίων, ἐννέα μόνον ὑπάρχουσιν, οἵτινες εἶναι τετράγωνα ἄλλων ἀκεραίων ἀριθμῶν, καὶ ἐπομένως ἔχουσι ῥίζας ἀκεραίας. Οἱ ἄλλοι δὲ, μὴ περιεχόμενοι εἰς τὸν πίνακα, φαίνεται κατὰ πρώτην προσβολὴν, ὅτι ἔχουσι ῥίζας κλασματικοὺς ἀριθμούς. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 53, μὴ περιεχόμενος εἰς τὸν πίνακα, ἀλλὰ περιλαμβανόμενος μεταξὺ 49 καὶ 64, φαίνεται ὅτι ἔχει τετραγωνικὴν ῥίζαν περιλαμβανομένην μεταξὺ 7 καὶ 8, ἤτοι 7 πλέον κλάσμα τι.

§ 106. Ἀξιοπαρατήρητον ὅμως εἶναι, ὅτι «Πᾶς ἀκέραιος ἀριθ- » μὸς, ὅστις δὲν ἔχει ῥίζαν ἀκεραίαν, δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἀκριβῶς » οὐδὲ κλασματικήν.»

Ἡ πρότασις αὕτη, ἥτις ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνεται παράδοξος, εἶναι συνέπεια τῶν ἀρχῶν περὶ τῆς διαιρετότητος τῶν ἀριθμῶν. (*)

Τῷ ὄντι ἵνα θεωρῆται κλασματικός τις ἀριθμὸς $\frac{\alpha}{\beta}$ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀκεραίου ἀριθμοῦ N, πρέπει τὸ τετράγωνόν του $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ $\frac{\alpha\alpha}{\beta\beta}$ ἢ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν N, τουτέστι πρέπει νὰ ἔχωμεν $N=\frac{\alpha\alpha}{\beta\beta}$. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον· ἐπειδὴ ὑποθέτοντες $\frac{\alpha}{\beta}$ ἠγμένον εἰς τοὺς ἐλαχίστους ὅρους, καὶ ἐπομένως ἀνάγωγον, βλέπομεν ὅτι αα καὶ ββ εἶναι σύνθετα ἀπὸ τοὺς εἰς α καὶ β εἰσερχομένους πρώτους παράγοντας, καὶ ἐπειδὴ α καὶ β εἶναι πρῶτοι σχετικῶς, ἄρα ἐπίσης πρῶτοι σχετικῶς εἶναι καὶ οἱ αα καὶ ββ. Λοιπὸν $\frac{\alpha\alpha}{\beta\beta}$ εἶναι ἀνάγωγος κλασματικὸς ἀριθμὸς καὶ ἐπομένως δὲν εἶναι ἴσος μὲ ἀκέραιον.

(*) Ὁ Legendre, εἰς τὸ ἀξιόλογον σύγγραμμά του, Théorie des nombres, ἀποδεικνύει τὰς ἀρχὰς ταύτας, τὰς ὁποίας καὶ ὁ Bourdon ἀναπτύσσει εἰς τὴν Ἀριθμητικήν του, § 130—137.

§ 107. Οἱ ἀριθμοί, οἵτινες δὲν ἔχουσιν ἀκριβεῖς ῥίζας, λέγονται *ἀτελῆ τετράγωνα.*

Ἐπειδὴ δὲ τὰς ῥίζας τῶν ἀτελῶν τετραγώνων δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν ἀκριβῶς δι' οὐδενὸς ἀριθμοῦ, τουτέστι δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον αὐτῶν πρὸς τὴν μονάδα, ὀνομάζομεν διὰ τοῦτο ποσότητας *ἀλόγους* ἢ *ἀσυμμέτρους.*

Οὕτω $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, εἶναι ποσότητες ἀσύμμετροι ἢ ἄλογοι.

§ 108. Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν, ἤτοι κατὰ μονάδα διαφερόντων, δὲν εἶναι σταθερά, ἀλλ' εἶναι τοσοῦτον μεγαλητέρα, ὅσον οἱ διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι μεγαλήτεροι.

Ἔστωσαν π. χ. οἱ διαδοχικοὶ ἀριθμοί,

$$\left.\begin{array}{r} 4 \text{ καὶ } 5 \\ 8 \text{ καὶ } 9 \\ 24 \text{ καὶ } 25 \end{array}\right\} \text{ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι} \left\{\begin{array}{r} 9, \\ 17, \\ 49. \end{array}\right.$$

Τὴν διαφορὰν ταύτην τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν διαφερόντων κατὰ μονάδα δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ χωρὶς νὰ γνωρίζωμεν τὰ δύο τετράγωνα αὐτῶν, τοῦτο δὲ εἶναι πολλάκις ἀναγκαῖον.

Ἔστωσαν ἐν γένει δύο διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ $\alpha+1$,

ἔχομεν . . . . $(\alpha+1)^2=\alpha^2+2\alpha+1$,

ὅθεν . . . . . $(\alpha+1)^2-\alpha^2=2\alpha+1$.

ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι « Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ μικροτέρου πλέον ἕν. »

Οὕτως ἡ διαφορὰ τοῦ 6^2 καὶ 7^2 εἶναι $2\times6+1$ ἤτοι 13.

Ὥστε μεταξὺ τῶν δύο τούτων τετραγώνων 6^2 καὶ 7^2 (36 καὶ 49) ὑπάρχουσι δώδεκα ἀριθμοί, 37, 38, 39 . . . 48, ἐξ ὧν οὐδεὶς εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Ἐν γένει ἀριθμός τις α^2, ὅστις εἶναι τέλειον τετράγωνον ἄλλου ἀκεραίου α, ἔχει μετ' αὐτὸν 2α ἀκεραίους ἀριθμούς, ἐξ ὧν οὐδεὶς εἶναι τέλειον τετράγωνον. Οἱ πλεῖστοι ἄρα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα ἄλλων.

Μετὰ τὰς ἀρχὰς ταύτας, ἂς ἴδωμεν τίνι τρόπῳ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

§ 109. Ὅταν ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς δὲν ὑπερβαίνῃ τὰ δύο ψηφία, ἡ ῥίζα αὐτοῦ λαμβάνεται ἀμέσως ἐκ τοῦ πίνακος (§ 105) εἴτε ἀκριβῶς, ἐὰν ἦναι τέλειον τετράγωνον, εἴτε ὡς ἔγγιστα, ἐὰν ἦναι ἀτελὲς τετράγωνον, λαμβανομένου τοῦ μικροτέρου ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν τοῦ πίνακος, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἡ ζητουμένη ῥίζα περιλαμβάνεται. Ἄς θεωρήσωμεν λοιπὸν τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς γράφεται μὲ πολλὰ ψηφία, καὶ ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 6084.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ὑπερβαίνει τὰ δύο ψηφία, καὶ εἶναι ἀνώτερος τοῦ 100, ἡ ῥίζα αὐτοῦ πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν 10, τουτέστι πρέπει νὰ ἔχῃ ὑπὲρ τὸ ἓν ψηφίον. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι μικρότερος τοῦ 10000, ὅστις εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ 100, ἡ ῥίζα αὐτοῦ πρέπει νὰ ἦναι μικροτέρα τοῦ 100, τουτέστι πρέπει νὰ ἔχῃ ὀλιγώτερα τῶν τριῶν ψηφίων· ἄρα ἡ ζητουμένη ῥίζα σύγκειται ἐκ δύο ψηφίων· ἐπομένως περιέχει δεκάδας καὶ μονάδας. Ὅθεν σημειοῦντες τὰς μὲν δεκάδας διὰ τοῦ α, τὰς δὲ μονάδας διὰ τοῦ β, ἔχομεν (§ 23).

$$6084=(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ συγκειμένου ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων, πρέπει νὰ περιέχῃ τρία μέρη,

α^2 τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων,

$2\alpha\beta$ τὸ γινόμενον τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας

β^2 τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν ἦτο δυνατὸν νὰ ἀνεύρωμεν ἐντὸς τοῦ 6084 τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης, εὐκόλως ἠθέλαμεν λάβει τὰς δεκάδας. Ὅθεν, ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων δὲν δίδει ὀλιγώτερον τῶν ἑκατοντάδων, πρέπει νὰ εὑρίσκεται εἰς τὰς ἑκατοντάδας τοῦ 6084, ἤτοι εἰς τὸ τμῆμα 60, πρὸς τ' ἀριστερὰ τῶν δύο τελευταίων ψηφίων, τὰ ὁποῖα διὰ τὸν λόγον τοῦτον χωρίζωμεν δι' ὑποστιγμῆς.

Εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα 60 περιέχονται πρὸς τούτοις καὶ ἐκ τῶν ἄλλων ὅρων τοῦ τετραγώνου προκείψασαι ἑκατοντάδες.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμὸς 60 περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν τετραγώνων 49 καὶ 64 τῶν ὁποίων αἱ ῥίζαι εἶναι 7 καὶ 8, ἄρα 7 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τῆς ζητουμένης ῥίζης.

Καὶ τῷ ὄντι ὁ ἀριθμὸς 6084 περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν 7 δεκάδων καὶ τῶν 8 ἤτοι μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν 70 καὶ 80 τουτέστι μεταξὺ 4908 καὶ 6400.

Γράφομεν λοιπὸν τὸ εὑρεθὲν ψηφίον 7 εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, τετραγωνίζοντες δὲ τὸ ψηφίον τοῦτο καὶ ἀφαιροῦντες τὸ τετράγωνον 49 ἀπὸ τοῦ 60, ἔχομεν ὑπόλοιπον 11, πλησίον τοῦ ὁποίου καταβιβάζωμεν τὸ ἀκόλουθον τμῆμα.

Τὸ ἐξαγόμενον 1184 περιέχει τὰ δύο ἐναπολειφθέντα μέρη, τουτέστι τὸ γινόμενον τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, πλέον τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων. Ἀλλ' ἐπειδὴ δεκάδες πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ μονάδας δὲν δίδουσιν ὀλιγώτερον τῶν δεκάδων ὡς γινόμενον, ἕπεται ὅτι τὸ τελευταῖον ψηφίον 4 δὲν ἀποτελεῖ μέρος τοῦ γινομένου τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας· ὅθεν χωρίζομεν αὐτὸ δι' ὑποστιγμῆς· ἄρα τὸ γινόμενον τοῦτο περιέχεται εἰς τὸ πρὸς τ' ἀριστερὰ μέρος 118.

Διπλασιάζοντες λοιπὸν τὰς δεκάδας 7 καὶ διὰ τοῦ διπλασίου 14 διαιροῦντες τὸ 118, λαμβάνομεν πηλίκον 8, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, ὅθεν τὸ γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἤδη εὑρεθέντος 7, καὶ οὕτως ἔχομεν 78 ὡς ῥίζαν τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

Διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν δὲ περὶ τούτου, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν 8 πλησίον τοῦ διπλασίου 14 καὶ ὑποκάτω, καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 148 ἐπὶ 8. Σχηματίζομεν οὕτω διὰ μιᾶς τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων, καὶ τὸ γινόμενον τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας. Ἐκτελεσθέντος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ λαμβάνομεν 1184 ἴσον μὲ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πρώτης πράξεως, καὶ ἀφαιροῦντες τοῦτο ἐξ ἐκείνου ἔχομεν ὑπόλοιπον 0. Ὅθεν 78 εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα.

$$\begin{array}{l|r}
60{,}84 & 78 \\ \cline{2-2}
49 & 148 \\ \cline{1-1}
118{,}4 & 8 \\ \cline{2-2}
118\,4 & 1184 \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Τῷ ὄντι, ἕπεται ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι, ἐπειδὴ ἀφαιρέσαντες διαδοχικῶς ἀπὸ 6084, τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης, πλέον τὸ γινόμενον τοῦ διπλασίου τῶν δεκαδων ἐπὶ τὰς μονάδας, πλέον τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων, τουτέστι τὰ τρία μέρη, τὰ ὁποῖα περιέχει τὸ τετράγωνον τοῦ 78, εὕρομεν ὑπόλοιπον 0, ἕπεται ὅτι 6084 εἶναι τετράγωνον τοῦ 78.

§ 110. ΣΗΜ. Εἴπομεν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς, ὅστις ἔχει εἰς τὴν ῥίζαν αὐτοῦ δεκάδας καὶ μονάδας, περιέχει τρία μέρη $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$. Εὕρομεν δὲ ὅτι ἡ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 6084 ἔχει 7 δεκάδας καὶ 8 μονάδας, τουτέστι συνίσταται ἀπὸ δύο μέρη $70+8$. Ὅθεν σχηματίζοντες τὰ τρία μέρη ἔχομεν

$$(\alpha+\beta)^2=\left\{\begin{array}{r}
\alpha^2=(70)^2=70\times70=4900\\
2\alpha\beta=2\times70\times8=140\times8=1120\\
\beta^2=(8)^2=8\times8\quad=\quad 64\\ \hline
6084.
\end{array}\right.$$

Βλέπομεν δὲ ὅτι τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων δὲν ἔχει σημαντικὸν ψηφίον εἰς τὰς δύο τελευταίας τάξεις τοῦ ἀριθμοῦ· ἐπίσης τὸ γινόμενον τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας δὲν ἔχει σημαντικὸν ψηφίον εἰς τὴν τελευταίαν τάξιν.

§ 111. Συμβαίνει πολλάκις ὥστε τὸ πηλίκον τῆς διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκαδων διαιρέσεως νὰ ἦναι μεγαλήτερον τοῦ δέοντος, διότι εἰς τὸ πρὸς τ' ἀριστερὰ τμῆμα τοῦ ἐξαγομένου τῆς πρώτης πράξεως, ἐκτὸς τοῦ γινομένου τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, περιέχονται καὶ πολλαὶ μονάδες, προκύψασαι ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων, καὶ τότε πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ. Ἡ περίπτωσις αὕτη ἀπαντᾶται εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 324. Ἀκολουθοῦντες τὴν αὐτὴν σειρὰν τῶν συλλογισμῶν, ὡς ἐπὶ τοῦ προηγηθέντος παραδείγματος, εὑρίσκομεν 1 ὡς ψηφίον τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης· ὅθεν διπλασιάζοντες τὸ ψηφίον τοῦτο ἔχομεν 2, διὰ τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὰ δύο πρὸς τ' ἀριστερὰ ψηφία

43,2	18
1	28
22,4	8
2,24	224
0	

τοῦ ὑπολοίπου. Ὅθεν 22 περιέχει ἑνδεκάκις τὸ 2, καὶ ὄχι μόνον δὲν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν εἰς τὴν ῥίζαν πλέον τῶν 9 (διότι τότε ὑποτίθεται ὅτι τὸ εὑρεθὲν ψηφίον τῶν δεκάδων δὲν εἶναι ἀκριβὲς) ἀλλὰ καὶ τὸ 9 αὐτὸ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ δέοντος εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν. Διότι γράφοντες 9 πλησίον τοῦ 2 ἔχομεν 29 καὶ πολλαπλασιάζοντες 29 ἐπὶ 9, ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν, ἔχομεν ἐξαγόμενον 261, τὸ ὁποῖον δὲν δυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ 224. Δὲν πρέπει λοιπὸν νὰ θεωρήσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ 22 διὰ 2, εἰμὴ ὡς μέσον προσεγγίσεως, πρὸς εὕρεσιν τῶν μονάδων, καὶ πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ τὸ πηλίκον, ἕως οὗ φθάσωμεν εἰς γινόμενον, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸ ὑπόλοιπον 224. Τὴν συνθήκην ταύτην ἐκπληροῖ ὁ ἀριθμὸς 8, ἐπειδὴ $28\times8=224$. Λοιπὸν ἡ ζητουμένη ῥίζα εἶναι 18.

Τῷ ὄντι $18\times18=324$.

§ 112. Προτεθείσθω ἤδη νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 1287, ὅστις δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Ἐφαρμόζοντες ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου τὴν ἀνωτέρω μέθοδον εὑρίσκομεν ὡς ῥίζαν 35 καὶ ὑπόλοιπον 62. Τοῦτο δεικνύει ὅτι 1287 δὲν εἶναι ἀκριβὲς τετράγωνον, ἀλλὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν 35 καὶ 36.

12,87	35
9	65
38,7	5
325	325
62	

Τῷ ὄντι τὰ τετράγωνα ταῦτα εἶναι $(35)^2=1225$ καὶ $(36)^2=1296$, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 1287.

Τὸ ὑπόλοιπον 62 δὲν πρέπει νὰ μᾶς φέρῃ εἰς δισταγμὸν, μήπως ἡ ῥίζα 35 εἶναι μικροτέρα τῆς πρεπούσης, διότι ἂν ἡ ῥίζα ἦτο 36, καὶ κατὰ παραδρομὴν ἐτέθη 35, ἔπρεπε νὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον τοὐλάχιστον ἴσον μὲ $2\times35+1$ ἤτοι 71. Ἀλλὰ τὸ ὑπόλοιπον 62 εἶναι μικρότερον τούτου. Θέλομεν ἰδεῖ ἀκολούθως τίνι τρόπῳ προσδιορίζομεν τὸ κλάσμα, διὰ τοῦ ὁποίου προσεγγίζομεν εἰς τὴν ῥίζαν τοῦ ἀτελοῦς τετραγώνου.

§ 113. Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος τῆς ἐξαγωγῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐφαρμόζεται καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι περιέχουσι πλειότερα ψηφία.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 56821444.

Διάταξις τῆς πράξεως.

56,82,14,44	7538		
49	145	1503	15068
78,2	5	3	8
725	725	4509	120544
571,4			
4509			
12054,4			
120544			
0			

Ἐπεξήγησις. Ἐπειδὴ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὑπερβαίνει 10000, ἡ ῥίζα αὐτοῦ πρέπει νὰ ἦναι μεγαλητέρα τοῦ 100, τουτέστι πρέπει νὰ ἔχῃ ὑπὲρ τὰ δύο ψηφία. Ἀλλ' οἱοσδήποτε καὶ ἂν ἦναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος δύναται νὰ θεωρηθῇ πάντοτε ὡς συγκείμενος ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων. (Οὕτω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 5367 δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς 5360+7 ἢ 536 δεκάδας καὶ 7 μονάδας.) Ὅθεν τὸ τετράγωνον παντὸς πολυψηφίου ἀριθμοῦ περιέχει πάντοτε τὰ τρία μέρη, δηλαδὴ τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων, πλέον τὸ διπλάσιον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, πλέον τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων δίδει τοὐλάχιστον ἑκατοντάδας, τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ τμῆμα 44 δὲν ἀποτελεῖ μέρος αὐτοῦ· εὑρίσκεται δὲ τὸ τετράγωνον τοῦτο εἰς τὸ πρὸς τ' ἀριστερὰ μέρος 568214. Ζητοῦντες λοιπὸν τὴν ῥίζαν τοῦ εἰς τὸ μέρος τοῦτο περιεχομένου μεγαλητέρου τετραγώνου, θέλομεν ἔχει τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης.

Συλλογιζόμενοι ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου 568214, ὡς ἐπὶ τοῦ προτεθέντος, συνάγομεν, ὅτι ἵνα εὕρωμεν τὰς δεκάδας τῆς ῥίζης αὐτοῦ (τουτέστι τὰς ἑκατοντάδας τῆς ζητουμένης), πρέπει νὰ χωρίσωμεν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία 14, καὶ νὰ ἐξάξωμεν τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸ πρὸς τ' ἀριστερὰ τοῦ 14 μέρος, τουτέστι εἰς τὸ 5682.

Παρομοίως ἵνα εὕρωμεν τὰς δεκάδας τῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ τούτου 5682 (τουτέστι τὰς χιλιάδας τῆς ζητουμένης) πρέπει νὰ χωρίσωμεν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία 82, καὶ νὰ ἐξάξωμεν τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸ πρὸς τ' ἀριστερὰ τμῆμα 56.

Ἐξάγοντες λοιπὸν τὴν ῥίζαν τοῦ 56, εὑρίσκομεν 7, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὸν οἰκεῖον τόπον, πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ. Ἵνα προσδιορίσωμεν τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης τοῦ 5682, πρέπει, κατὰ τὰ εἰρημένα, ν' ἀφαιρέσωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ 7 ἤτοι 49 ἐκ τοῦ 56, πλησίον δὲ τοῦ ὑπολοίπου 7 νὰ καταβιβάσωμεν τὸ ἀκόλουθον τμῆμα 82, νὰ χωρίσωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον 2, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ πρὸς τ' ἀριστερὰ μέρος 78 διὰ τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης 7. Πράττοντες οὕτω εὑρίσκομεν τὸ ψηφίον 5, τὸ ὁποῖον γράφομεν πλησίον τοῦ προευρεθέντος 7, πλησίον τοῦ διπλασίου 14 καὶ ὑπ' αὐτό. Πολλαπλασιάζοντες ἔπειτα 145 ἐπὶ 5, καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον 725 ἀπὸ τοῦ 782, ἔχομεν ὑπόλοιπον 57. Ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς 75, ῥίζα τοῦ 5682, ἐκφράζει μόνον τὰς δεκάδας τῆς ῥίζης τοῦ 568214.

Ἵνα προσδιορίσωμεν τὰς μονάδας, καταβιβάζομεν πλησίον τοῦ ὑπολοίπου 57 τὸ τμῆμα 14 καὶ οὕτως ἔχομεν 5714, τοῦ ὁποίου χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον. Διπλασιάζοντες τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν 75 ἔχομεν 150 καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ διπλασίου τούτου τὸ πρὸς τ' ἀριστερὰ μέρος 571, εὑρίσκομεν 3 ὡς τρίτον ψηφίον τῆς ζητουμένης ῥίζης, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τῆς προευρεθείσης 75, πλησίον τοῦ διπλασίου 150 καὶ ὑπ' αὐτό. Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν 1503 ἐπὶ 3, καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον 4509 ἀπὸ 5714, ἔχομεν ὑπόλοιπον 1205. Ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς 753 ἐκφράζει τὰς δεκάδας τῆς ὅλης ζητουμένης ῥίζης.

Ἵνα λάβωμεν, τέλος, τὸ ψηφίον τῶν μονάδων αὐτῆς καταβιβάζομεν πλησίον τοῦ ὑπολοίπου 1205 τὸ τελευταῖον τμῆμα 44, καὶ οὕτως ἔχομεν 120544, χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον, καὶ διαιροῦμεν τὸ πρὸς τ' ἀριστερὰ μέρος 12054 διὰ τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης 753, ἤτοι διὰ 1506. Ἔχομεν οὕτω πηλίκον 8, τὸ ὁποῖον γράφομεν πλησίον τῶν ἤδη εὑρεθέντων, πλησίον τοῦ διπλασίου αὐτῶν καὶ ὑπ' αὐτό. Πολλαπλασιάζομεν 15068 ἐπὶ 8 καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον 120544 εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0.

Λοιπὸν 7538 εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα.

Καὶ τῷ ὄντι πολλαπλασιάζοντες 7538 ἐφ' ἑαυτὸν λαμβάνομεν 56821444.

§ 114. Κανών. « Ἵνα ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν οἱουδήποτε ἀκεραίου ἀριθμοῦ χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τμήματα, ἀνὰ δύο ψηφία ἕκαστον, ἀρχόμενοι δεξιόθεν· τὸ τελευταῖον πρὸς τ' ἀριστερὰ τμῆμα δυνατὸν νὰ συνίσταται ἐξ ἑνὸς μόνου ψηφίου. Λαμβάνομεν τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς

» τὸ πρῶτον πρὸς τ' ἀριστερὰ τμῆμα, τετραγωνίζομεν τὸ εὑρεθὲν » ψηφίον καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον ἀπὸ τὸ πρῶτον τμῆμα. »

« Πλησίον τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ δεύτερον τμῆμα, χω» ρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον· διπλασιάζομεν τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν » καὶ διὰ τοῦ διπλασίου διαιροῦμεν τὸ πρὸς τ' ἀριστερὰ μέρος τοῦ » ὑπολοίπου. Γράφομεν τὸ πηλίκον πλησίον τῆς ῥίζης, πλησίον τοῦ » διπλασίου καὶ ὑπ' αὐτό· πολλαπλασιάζομεν καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γι» νόμενον ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τοῦ πρώτου ὑπολοίπου μετὰ τοῦ δευτέρου » τμήματος.

« Πλησίον τοῦ νέου ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ τρίτον τμῆμα, » χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον διπλασιάζομεν τὴν εὑρεθεῖσαν ῥί» ζαν· καὶ διὰ τοῦ διπλασίου διαιροῦμεν τὸ πρὸς τ' ἀριστερὰ μέρος. » Γράφομεν τὸ πηλίκον πλησίον τῆς ῥίζης, πλησίον τοῦ διπλασίου » καὶ ὑπ' αὐτό· πολλαπλασιάζομεν καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ » τὴν ἕνωσιν τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου μετὰ τοῦ τρίτου τμήματος.

« Ἐξακολουθοῦμεν τὴν σειρὰν ταύτην τῶν πράξεων, ἕως οὗ κατα» βιβασθῶσιν ὅλα τὰ τμήματα. Ἐὰν τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον ἦναι » μηδὲν, ὁ δεδομένος ἀριθμὸς εἶναι τέλειον τετράγωνον, καὶ ἡ εὑ» ρεθεῖσα ῥίζα εἶναι ἀκριβής. Ἐὰν δὲ εὕρωμεν ὑπόλοιπον, ὁ δεδομέ» νος ἀριθμὸς εἶναι ἀτελὲς τετράγωνον, καὶ ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς ἐκ» φράζει τὴν ῥίζαν τοῦ εἰς τὸν προτεθέντα ἀριθμὸν περιεχομένου » μεγαλητέρου τετραγώνου. »

ΣΗΜ. Α'. Τὸ ὑπόλοιπον πρέπει νὰ ἦναι μικρότερον τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης, ηὐξημένου κατὰ μονάδα (108). Ἐὰν τοὐναντίον τὸ ὑπόλοιπον ἦναι ἴσον ἢ μεγαλήτερον, σημεῖον ὅτι ἐπράχθη σφάλμα τι εἰς τὴν ὁδὸν τῶν πράξεων, καὶ τότε πρέπει ἡ ῥίζα ν' αὐξηνθῇ.

ΣΗΜ. Β'. Ῥίζα τετραγωνικὴ ἀριθμοῦ τινος μεῖον μονάδος ὀνομάζεται κοινῶς ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς ὅστις εἶναι ῥίζα τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου, τοῦ εἰς αὐτὸν περιεχομένου. Π. χ. ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 42 μεῖον μονάδος εἶναι 6. Διὰ τῆς φράσεως ταύτης, μεῖον μονάδος, ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ ὡς ῥίζα θεωρούμενος ἀριθμὸς διαφέρει τῆς ἀκριβοῦς ῥίζης ὀλιγώτερον μονάδος. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς 6, ὅστις εἶναι ῥίζα τοῦ 36, θεωρούμενος ὡς πρὸς τὸν 42 διαφέρει τῆς ῥίζης τούτου ὀλιγώτερον μονάδος.

Ἔστωσαν πρὸς ἐφαρμογὴν τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

$$\sqrt{17698849}=5297.$$

$$\sqrt{698495}=835, \quad \text{μεῖον μονάδος.}$$

§ 115. *Παρατηρήσεις.* Α'. Ἐάν, ἀφοῦ πλησίον ὑπολοίπου τινὸς καταβιβασθῇ τὸ ἀκόλουθον τμῆμα, καὶ χωρισθῇ τὸ τελευταῖον ψηφίον, τὸ πρὸς τ' ἀριστερὰ μέρος δὲν διαιρῆται διὰ τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης, σημεῖον ὅτι ἡ ζητουμένη ῥίζα δὲν ἔχει σημαντικὸν ψηφίον τῆς ἀντιστοιχούσης τάξεως εἰς τὸ καταβιβασθὲν τμῆμα. Ὅθεν πρέπει τότε νὰ θέσωμεν 0 εἰς τὴν ῥίζαν καὶ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸν κανόνα.

Β΄. Προκύπτει ἐξ αὐτῆς τῆς φύσεως τῆς πράξεως, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς ῥίζης ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν διψηφίων τμημάτων τοῦ διδομένου ἀριθμοῦ. Ὥστε δυνάμεθα νὰ γνωρίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ψηφίων τῆς ῥίζης πρὶν τῆς ἐξαγωγῆς αὐτῆς,

§ 116. Σημείωσις. Δυνάμεθα πολλάκις νὰ γνωρίσωμεν ἐκ πρώτης ὄψεως, ἐὰν ὁ δεδομένος ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν ἦναι τέλειον τετράγωνον. Πρὸς τοῦτο δὲ ἔχομεν τὰ ἑξῆς σημεῖα.

ά Παντὸς ἀρτίου ἀριθμοῦ, ἐκφραζομένου διὰ 2ν, τὸ τετράγωνον $4\nu^2$ εἶναι ἐπίσης ἀριθμὸς ἄρτιος καὶ διαιρετὸς διὰ 4. Ὅθεν πᾶς ἄρτιος ἀριθμός, ὅστις δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Οὕτως οἱ ἄρτιοι ἀριθμοὶ 18, 26, 378, μὴ ὄντες διαιρετοὶ διὰ 4 δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα.

β΄. Παρομοίως παντὸς ἀριθμοῦ περιττοῦ, ἐκφραζομένου διὰ $2\nu+1$, τὸ τετράγωνον $4\nu^2+4\nu+1$, εἶναι ἀριθμὸς περιττός, ὅστις ἀφοῦ ἐλαττωθῇ κατὰ μονάδα ἀποβαίνει διαιρετὸς διὰ 4. Ὅθεν πᾶς περιττὸς ἀριθμὸς ὅστις ἐλαττούμενος κατὰ μονάδα δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Οὕτως οἱ περιττοὶ ἀριθμοὶ 175, 299, 351, ἐλαττούμενοι κατὰ μονάδα ἀποβαίνουσιν 174, 298, 350, ἀλλὰ μὴ ὄντες διαιρετοὶ διὰ 4, δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα.

Κρίνομεν ἀναγκαῖον νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἡ διὰ τοῦ 4 διαιρετότης ἀπαιτεῖται μέν, ἀλλὰ δὲν ἀρκεῖ πάντοτε ἵνα δείξῃ, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι τέλεια τετράγωνα

Οὕτως εἰς τὴν πρώτην περίστασιν οἱ ἄρτιοι ἀριθμοὶ 40, 52, 124, διαιροῦνται διὰ 4, δὲν εἶναι ὅμως τέλεια τετράγωνα

Ὡσαύτως οἱ περιττοὶ ἀριθμοὶ 173, 317, ἐλαττούμενοι κατὰ μονάδα ἀποβαίνουσι 172, 316, διαιρετοὶ διὰ 4, δὲν εἶναι μολοντοῦτο τέλεια τετράγωνα.

Ὥστε μόνον ἐκ τῆς μὴ διαιρετότητος διὰ 4, μανθάνομεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα.

γ΄. Πᾶς ἀριθμός, ὅστις τελευτᾷ εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον· ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον πρέπει νὰ ἔχῃ δὶς τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχει ἡ ῥίζα, τουτέστιν ἀριθμὸν ἄρτιον μηδενικῶν.

γ΄. Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀκεραίων διὰ προσεγγίσεως,

§ 117. Μολονότι δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν ἀκριβῶς τὰς ῥίζας τῶν ἀτελῶν τετραγώνων δι' οὐδενὸς ἀριθμοῦ· εὑρίσκομεν ὅμως, διὰ τῆς ἐκτεθείσης μεθόδου τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸν ἀριθμόν, ὅστις εἶναι ἀτελὲς τετράγωνον. Τουτέστι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν δύο διαδοχικοὺς ἀριθμούς, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται ἡ ζητουμένη ῥίζα· ὥστε λαμβάνοντες τὸν μικρότερον τούτων ἀντὶ τῆς ῥίζης, παραλείπομεν κλάσμα τι· ὅθεν τὸ πραττόμενον σφάλμα εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος. Του-το, ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω (§ **114**. Σημ. Β'.) ἐννοοῦμεν λέγοντες, μεῖον μονάδος.

Πρόκειται ἤδη νὰ δείξωμεν πῶς δυνάμεθα νὰ προσεγγίσωμεν, ὅσῳ θέλομεν, τὰ δύο ὅρια, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται ἡ ζητουμένη ῥίζα· ὥστε λαμβάνοντες τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο τούτων ὁρίων ἀντὶ τῆς ῥίζης, νὰ παραλείπωμεν μικρότατόν τι κλάσμα.

Παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον κλασματικοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$, ἀντιστρόφως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ἢ ἀλγεβρικῶς, ἐπειδὴ . . . $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$.

$$\text{ἄρα}\quad \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Λοιπὸν ἵνα ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κλάσματός τινος, πρέπει νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τὴν τοῦ παρονομαστοῦ καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὴν μίαν διὰ τῆς ἄλλης.

Τούτου τεθέντος, προβάλλομεν τὸ ἑξῆς ζήτημα.

Δοθέντος ἀτελοῦς τινος τετραγώνου α, νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν διαφέροντα τῆς ῥίζης αὐτοῦ κατὰ ποσότητα μικροτέραν τοῦ κλάσματος $\frac{1}{\nu}$.

Πρὸς λύσιν τοῦ ζητήματος τούτου παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς α δυνατὸν νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\alpha\nu^2}{\nu^2}$. Ὅθεν σημειοῦντες διὰ ρ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης τοῦ $\alpha\nu^2$, βλέπομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\alpha\nu^2$ περιλαμβάνεται μεταξὺ ρ^2 καὶ $(\rho+1)^2$, τουτέστιν ἔχομεν

$$\rho^2 < \alpha\nu^2 < (\rho+1)^2.$$

διαιροῦντες διὰ ν^2 $\quad \frac{\rho^2}{\nu^2} < \frac{\alpha\nu^2}{\nu^2} < \frac{(\rho+1)^2}{\nu^2}$.

καὶ ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν

$$\sqrt{\frac{\rho^2}{\nu^2}} < \sqrt{\frac{\alpha\nu^2}{\nu^2}} < \sqrt{\frac{(\rho+1)^2}{\nu^2}}$$

ἤτοι $\quad \frac{\rho}{\nu} < \sqrt{\alpha} < \frac{\rho+1}{\nu}$.

Ἡ ζητουμένη ῥίζα τοῦ α περιλαμβάνεται λοιπὸν μεταξὺ τῶν δύο ὁρίων $\frac{\rho}{\nu}$ καὶ $\frac{\rho+1}{\nu}$. Καὶ ἐπειδὴ τὰ ὅρια ταῦτα διαφέρουσι κατὰ $\frac{1}{\nu}$, ἄρα $\frac{\rho}{\nu}$ ἐκφράζει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ α μεῖον $\frac{1}{\nu}$.

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

« Πολλαπλασιάζομεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ τετράγωνον » τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος, τὸ ὁποῖον προσδιορίζει τὸν βαθ-» μὸν τῆς προσεγγίσεως, τὸν ὁποῖον ζητοῦμεν· ἐξάγομεν τὸ ἀκέραιον » μέρος τῆς ῥίζης τοῦ γινομένου, καὶ διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ παρο-» νομαστοῦ. »

§ 118. *Ἐφαρμογή.* Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 35, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, μεῖον $\frac{1}{12}$.

Πολλαπλασιάζοντες 35 ἐπὶ 144, τετράγωνον τοῦ 12, ἔχομεν 5040. Ἐξάγοντες τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης τοῦ γινομένου τούτου εὑρίσκομεν 70, καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ 12 συνάγομεν $\frac{70}{12}$ ἢ $5\frac{5}{12}$. Λοιπὸν $\sqrt{35} = 5\frac{5}{12}$ μεῖον $\frac{1}{12}$.

Διότι . . . . 35 $= \frac{35 \times 144}{144} = \frac{5040}{144} = \frac{5040}{(12)^2}$.

ἀλλὰ . . . . 70 $< \sqrt{5040} < 71$.

ἑπομένως . . . . $(70)^2 < 5040 < (71)^2$

καὶ διαιροῦντες διὰ $(12)^2$ $\frac{(70)^2}{(12)^2} < \frac{5040}{(12)^2} < \frac{(71)^2}{(12)^2}$.

καὶ ἐξάγοντες τὴν ῥίζαν $\frac{70}{12} < \sqrt{35} < \frac{71}{12}$.

Παραδείγματα. $\sqrt{11}$ μεῖον $\frac{1}{20} = 3\frac{6}{20}$.

$\sqrt{223}$, μεῖον $\frac{1}{40} = 14\frac{37}{40}$.

δ'. Ἐξαγωγὴ διὰ προσεγγίσεως εἰς δεκαδικὰ κλάσματα.

§ 119. Διὰ τοῦ ἀνωτέρω κανόνος δυνάμεθα νὰ προσεγγίσωμεν πολὺ περισσότερον καὶ μὲ περισσοτέραν εὐκολίαν, ἐὰν ἀντὶ κοινῶν κλασμάτων λάβωμεν δεκαδικά, ἵνα παραστήσωμεν τὸν βαθμὸν τῆς προσεγγίσεως.

Οὕτως ἵνα εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ, μεῖον $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, . . . πρέπει, κατὰ τὸν κανόνα, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν ἐπὶ

$$(10)^2,\qquad (100)^2,\qquad (1000)^2$$
$$\text{ἢ}\quad 100,\qquad 10000,\qquad 1000000,$$

τουτέστι νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ *δὶς τόσα μηδενικά*, ὅσα ἔχει ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος τῆς προσεγγίσεως ἢ ὅσα δεκαδικὰ ψηφία θέλομεν νὰ ἔχῃ ἡ ῥίζα, (διότι ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχῃ τὸ κλάσμα τῆς προσεγγίσεως τόσα πρέπει νὰ ἔχῃ καὶ ἡ ῥίζα). Ἐξάγοντες ἔπειτα τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης τοῦ γινομένου, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸ διὰ τοῦ παρονομαςοῦ 10, 100, 1000, . . τουτέστι πρέπει νὰ χωρίσωμεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχει τὸ κλάσμα τῆς προσεγγίσεως.

§ 120. Κανών. « Ἵνα ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀκεραίου » ἀριθμοῦ, διὰ προσεγγίσεως εἰς δεκαδικὰ κλασματα, γράφομεν εἰς » τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ δὶς τόσα μηδενικὰ, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία θέ» λομεν νὰ ἔχῃ ἡ ῥίζα, ἐξάγομεν τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης, καὶ » χωρίζομεν τὰ ἀπαιτούμενα δεκαδικὰ ψηφία. »

§ 121. *Ἐφαρμογή*. Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 7, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, μεῖον 0,001.

Γράφομεν κατ' ἐξακολούθησιν τοῦ 7 μηδενικά. Ἐξάγομεν τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης τοῦ γινομένου. Χωρίζομεν τρία δεκαδικὰ ψηφία. Καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν ζητουμένην ῥίζαν, 2,645. Καὶ τῷ ὄντι ἡ ῥίζα τοῦ 7 περιλαμβάνεται μεταξὺ 2,645 καὶ 2,646

7,00,00,00	2645	
4	46	524
30,0	6	4
27 6	276	2096
240,0		
209 6		
3040,0		5285
2642 5		5
397 5		26425

Παραδείγματα. $\sqrt{29} = 5,38$ μεῖον 0,01.
$\sqrt{227} = 15,0665$, μεῖον 0,0001.

ε. Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν κοινῶν κλασμάτων.

§ 122. Ἐὰν οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος ἦναι τέλεια τετράγωνα, ἡ ῥίζα αὐτῶν λαμβάνεται εὐκόλως, διαιρουμένης τῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τῆς τοῦ παρονομαστοῦ (§ 117).

Οὕτω $\sqrt{\frac{25}{81}}=\frac{5}{9}$, καὶ $\sqrt{\frac{144}{196}}=\frac{12}{14}$.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀτελῆ τετράγωνα, ἐξάγοντες ὡς ἔγγιστα τὴν ῥίζαν αὐτῶν πράττομεν διπλοῦν λάθος. Ἐὰν ὅμως καταστήσωμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος τέλειον τετράγωνον, πολλαπλασιάζοντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν β, συνάγομεν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\times\beta}{\beta^2}$ καὶ ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἔχομεν

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha\times\beta}{\beta^2}}=\frac{\sqrt{\alpha\times\beta}}{\beta}$$

Σημειόνοντες διὰ ρ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμητοῦ $\alpha\times\beta$

ἐπειδὴ . . . . . . $\rho<\sqrt{\alpha\times\beta}<\rho+1$

ἕπεται ὅτι . . . . . $\frac{\rho}{\beta}<\frac{\sqrt{\alpha\times\beta}}{\beta}<\frac{\rho+1}{\beta}$.

ἤτοι . . . . $\frac{\rho}{\beta}<\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}<\frac{\rho+1}{\beta}$.

Ὥστε λαμβάνοντες ἀντὶ τῆς ῥίζης τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ ὅριον $\frac{\rho}{\beta}$ σφαλλομεν ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{\beta}$.

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

« Ἵνα ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κοινοῦ τινος κλάσματος » ἀποκαθιστῶμεν τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ τέλειον τετράγωνον, πολ» λαπλασιάζοντες καὶ τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ τὸν παρονομαστήν. Ἐξάγο» μεν τὴν ῥίζαν τοῦ νέου ἀριθμητοῦ μεῖον μονάδος, καὶ διαιροῦμεν » αὐτὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. »

Παραδείγματα. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{7}{13}$.

Τὸ κλάσμα τοῦτο τρέπεται εἰς $\frac{7\times13}{(13)^2}$ ἢ $\frac{91}{(13)^2}$.

Ἀλλ' ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 91 εἶναι 9, μεῖον μονάδος. Λοιπὸν $\frac{9}{13}$ εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα, μεῖον $\frac{1}{13}$.

§ 123. Ἐὰν θέλωμεν μεγαλήτερον βαθμὸν προσεγγίσεως, ἐξάγομεν ὡς ἔγγιστα τὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ νέου κλάσματος.

Οὕτως ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος $\frac{7}{13} = \frac{91}{(13)^2}$, ἐὰν ἐξάξωμεν τὴν ῥίζαν τοῦ 91, μεῖον 0,01, θέλομεν ἔχει $\sqrt{91} = 9,53$.

Λοιπὸν $$\sqrt{\frac{7}{13}} = \sqrt{\frac{91}{(13)^2}} = \frac{9,53}{13} \text{ μεῖον } \frac{0,01}{13} \text{ ἢ } \frac{1}{1300}$$

§ 124. Σημείωσις. Πολλάκις ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος, καίτοι μὴ ὢν τέλειον τετράγωνον, περιέχει παράγοντα τέλειον τετράγωνον. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν παράγοντα, τὸν μὴ τέλειον τετράγωνον, καὶ ἡ πρᾶξις ἁπλουστεύεται.

Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{23}{48}$. Εὐκόλως βλέπομεν ὅτι $48 = 16 \times 3$, ἢ $(4)^2 \times 3$. Ὅθεν πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο ὅρων ἐπὶ 3, τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς $\frac{23 \times 3}{(4)^2 \times (3)^2}$ ἢ $\frac{69}{(12)^2}$ καὶ οὕτως ὁ παρονομαστὴς ἄγεται εἰς τέλειον τετράγωνον. Ἐξάγοντες δὲ τὴν ῥίζαν τοῦ 69, μεῖον 0,1 ἔχομεν 8,3. Λοιπὸν

$$\sqrt{\frac{23}{48}} = \sqrt{\frac{69}{(12)^2}} = \frac{8,3}{12} \text{ ἢ } \frac{83}{120} \text{ μεῖον } \frac{1}{120}.$$

ς'. Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

§ 125. Ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων δὲν παρουσιάζει περισσοτέραν δυσκολίαν. Αὕτη συνάγεται ἐκ τῆς παρατηρήσεως ταύτης. Τὸ τετράγωνον δεκαδικοῦ τινος κλάσματος ἤτοι τὸ γινόμενον τούτου ἐφ' ἑαυτό, πρέπει νὰ περιέχῃ ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τῆς ῥίζης. Ὅθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

« Ἵνα ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν δεκαδικοῦ τινος κλά-
» σματος, καθιστάνομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκαδικῶν ψη-
» φίων, ἄρτιον καὶ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκαδικῶν ψηφίων,
» τὰ ὁποῖα θέλομεν νὰ ἔχῃ ἡ ῥίζα, τοῦτο δὲ γίνεται διὰ τῆς προσ-
» θέσεως ἱκανοῦ ἀριθμοῦ μηδενικῶν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ δεδομένου
» ἀριθμοῦ. Ἐξαλείφοντες ἔπειτα τὴν ὑποστιγμὴν ἐξάγομεν τὴν τε-
» τραγωνικὴν ῥίζαν, μεῖον μονάδος, καὶ χωρίζομεν πρὸς τὰ δε-
» ξιὰ τῆς ῥίζης ταύτης τὸν ἀπαιτούμενον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψη-
» φίων. »

Παραδείγματα. Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 3,425. Νὰ εὕρωμεν τὴν ῥίζαν αὐτοῦ, μεῖον 0,01.

Ἐπειδὴ ἡ ζητουμένη ῥίζα πρέπει νὰ ἔχῃ δύο δεκαδικὰ ψηφία, ἄρα τὸ τετράγωνον πρέπει νὰ ἔχῃ τέσσαρα. Ὅθεν προσγράφοντες εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἐν ῷ ἔχομεν 3,4250. Ἐξάγοντες δὲ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης καὶ χωρίζοντες δύο δεκαδικὰ ψηφία λαμβάνομεν 1,85.

Ὡσαύτως $\sqrt{0,05409}=0,23257$, μεῖον 0,00001.

§ 126. *Σημείωσις.* Δυνατὸν νὰ ζητηθῇ εἰς δεκαδικὰ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κοινοῦ τινος κλάσματος, καὶ τοῦτο εἶναι τὸ χρησιμότερον. Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην ἀρκεῖ νὰ τρέψωμεν τὸ δεδομένον κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικόν, καὶ ἂν ἀπαντήσωμεν περιοδικόν, νὰ προεκτείνωμεν τὰς πράξεις, ἕως οὗ εὕρωμεν δὶς τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα θέλομεν νὰ ἔχῃ ἡ ῥίζα, (ἐὰν ἐξ ἐναντίας εὕρωμεν τέλειον δεκαδικὸν ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθὲν κοινόν, προσγράφομεν μηδενικά.) Πράττομεν ἔπειτα ἐπὶ τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

Παραδείγματα. Ἔστω $\frac{11}{14}$. Ζητεῖται ἡ ῥίζα μεῖον 0,001.

Τὸ κλάσμα τοῦτο ἠγμένον εἰς δεκαδικὰ δίδει 0,785714, Μένομεν εἰς τὴν ἕκτην τάξιν διότι ἡ ζητουμένη ῥίζα πρέπει νὰ ἔχῃ τρία δεκαδικὰ ψηφία. Ἀλλ' ἡ ῥίζα τοῦ 0,785714, μεῖον μονάδος, εἶναι 886. Λοιπὸν $\sqrt{\frac{11}{14}} = 0,886$, μεῖον 0,001.

Ὡσαύτως $\sqrt{31,027}=5,560$, μεῖον 0,001.

$\sqrt{0,01001}=0,10004$, μεῖον 0,00001.

$\sqrt{2\frac{13}{15}}=\sqrt{\frac{43}{15}}=\sqrt{2,8666666}=1,6931$, μεῖον 0 0001

Β'. Σχηματισμὸς τετραγώνου καὶ ἐξαγωγὴ τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀλγεβρικῶν ποσοτήτων.

α. Μονώνυμα.

§ 127. Τὸ τετράγωνον παντὸς μονωνύμου σχηματίζεται κατὰ τοὺς κανόνας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἔστω τὸ μονώνυμον $5\alpha^3\beta^2\gamma$ πολλαπλασιάζοντες αὐτὸ ἐφ' ἑαυτὸ ἔχομεν, $(5\alpha^3\beta^2\gamma)^2=5\alpha^3\beta^2\gamma\times 5\alpha^3\beta^2\gamma=25\alpha^6\beta^4\gamma^2$.

Παρατηροῦντες τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

« Τὸ τετράγωνον παντὸς μονωνύμου σχηματίζεται ἀφοῦ τετραγωνισθῇ ὁ συντελεστὴς αὐτοῦ καὶ διπλασιασθῇ ὁ ἐκθέτης ἑκάστου » γράμματος. »

Καὶ ἀντιστρόφως, ἵνα ἐπιστρέψωμεν ἐκ τοῦ τετραγώνου εἰς τὴν ῥίζαν, τουτέστι ἵνα εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν οἱουδήποτε μονωνύμου, ἀκολουθοῦμεν τὰς ἀντιθέτους πράξεις.

« Ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ συντελεστοῦ καὶ λαμ» βάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ ἐκθέτου ἑκάστου γράμματος. »

Παραδείγματα. $\sqrt{25\alpha^6\beta^4\gamma^2} = 5\alpha^3\beta^2\gamma.$

$\sqrt{64\alpha^6\beta^4} = 8\alpha^3\beta^2.$

$\sqrt{625\alpha^2\beta^8\gamma^6} = 25\alpha\beta^4\gamma^3.$

§ 128. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω κανόνος ἕπεται, ὅτι δυνάμεθα ἐκ πρώτης ὄψεως νὰ γνωρίσωμεν ἂν μονώνυμόν τι ἦναι τέλειον τετράγωνον. Διότι πρὸς τοῦτο ἀπαιτεῖται α. ὁ συντελεστὴς αὐτοῦ, κατ᾽ ἰδίαν θεωρούμενος, νὰ ἦναι τέλειον τετράγωνον· β'. οἱ ἐκθέται νὰ ἦναι ἄρτιοι. Οὕτω τὰ μονώνυμα, $12\alpha^2$, $16\alpha\beta^4$, $15\alpha^3\beta\gamma^2$, δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα. Διότι εἰς μὲν τὸ πρῶτον τούτων ὁ συντελεστὴς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον· εἰς δὲ τὸ δεύτερον διότι ὁ ἐκθέτης τοῦ α εἶναι περιττὸς, καὶ εἰς τὸ τρίτον διότι συντρέχουσιν ἀμφότερα.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου $\sqrt{}$, γραφομένης ὑπ᾽ αὐτὸ τῆς προτεθείσης ποσότητος· ὡς

$$\sqrt{12\alpha^2},\quad \sqrt{16\alpha\beta^4},\quad \sqrt{15\alpha^3\beta^2\gamma}.$$

Ὀνομάζονται δὲ αἱ ἐκφράσεις αὗται *ἄλογοι* ἢ *ἀσύμμετροι ποσότητες*, ἢ μᾶλλον *ῥιζικὰ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ*.

ΣΗΜ. Προτιμῶμεν τὴν δευτέραν φράσιν διότι τὰ ῥιζικὰ ταῦτα θεωρούμενα ἀλγεβρικῶς, τουτέστιν ὑπὸ γενικὴν μορφὴν, εἶναι ποσότητες ἀσύμμετροι, ὡς μὴ εὑρισκομένης ἄλλης ἀλγεβρικῆς ἐκφράσεως, ἥτις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτῶν. Δυνατὸν ὅμως ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ αὐτῶν νὰ ἦναι τέλειον τετράγωνον.

Οὕτως ἡ ἔκφρασις $\sqrt{2\alpha}$ θεωρουμένη ἀλγεβρικῶς εἶναι ἀσύμμετρος, ἐὰν δὲ $\alpha=8$, ἔχομεν $\sqrt{2\times 8} = \sqrt{16} = 4$, τιμὴ συμμετρική.

§ 129. Δυνάμεθα μολοντοῦτο πολλάκις ν᾽ ἁπλουστεύσωμεν τὰ ῥιζικὰ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἐπιστηριζόμενοι εἰς τὴν ἑξῆς ἀρχήν.

« Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ γινομένου δύο ἢ πολλῶν παραγόντων » ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν τῶν παραγόντων τούτων »

ἢ ἀλγεβρικῶς $\sqrt{\alpha\beta\gamma\ldots} = \sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}\times\sqrt{\gamma}\ldots$

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς ἀρχῆς ταύτης ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, ἔχομεν

$$(\sqrt{\alpha\beta\gamma\ldots})^2 = \alpha\beta\gamma\ldots$$

ἄλλοθεν $(\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}\times\sqrt{\gamma}..)^2=(\sqrt{\alpha})^2..(\sqrt{\beta})^2...(\sqrt{\gamma})^2..\sqrt{\delta})^2..$ $=\alpha\beta\gamma..$ καὶ ἐπειδὴ τὰ τετράγωνα τῶν δύο ἐκφράσεων $\sqrt{\alpha\beta\gamma..}$ καὶ $\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}\times\sqrt{\gamma}...$ εἶναι ἴσα· ἄρα καὶ αἱ ποσότητες αὗται εἶναι ἴσαι.

Ἂς ἐφαρμόσωμεν ἤδη τὴν ἀρχὴν ταύτην.

Ἔστω τὸ ῥιζικὸν $\sqrt{98\alpha\beta^4}$. Τοῦτο δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\sqrt{49\beta^4\times 2\alpha}=\sqrt{49\beta^4}\times\sqrt{2\alpha}=7\beta^2\sqrt{2\alpha}$.

Ὅθεν πρὸς ἁπλούστευσιν τῶν ῥιζικῶν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

« Ἀποσυνθέτομεν τὴν ὑπόῤῥιζον ποσότητα εἰς δύο παράγοντας, » ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς περιέχει ὅλους τοὺς μερικοὺς παράγοντας, » οἱ ὁποῖοι εἶναι τέλεια τετράγωνα, ὁ δὲ ἕτερος τοὺς παράγοντας, » ὅσοι δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα, ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου » παράγοντος καὶ γράφομεν αὐτὴν πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ σημείου, ὑπὸ τὸ » ὁποῖον ἀφίνομεν τὸν δεύτερον παράγοντα. »

Τὸ σύνολον τῶν πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ ποσοτήτων ὀνομάζεται *συντελεστὴς* τοῦ ῥιζικοῦ. Οὕτως εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, $7\beta^2$ εἶναι συντελεστής.

Παραδείγμ. $\sqrt{45\alpha^2\beta^3\gamma^2\delta}=\sqrt{9\alpha^2\beta^2\gamma^2\times 5\beta\delta} \;=3\alpha\beta\gamma\sqrt{5\beta\delta}$.

$$\sqrt{288\alpha^2\beta^5\gamma^7}=\sqrt{144\alpha^2\beta^4\gamma^6\times 2\beta\gamma}=12\alpha\beta^2\gamma^3\sqrt{2\beta\gamma}.$$

§ 130. Εἰς ὅλα τὰ προηγηθέντα παραδείγματα ἐθεωρήσαμεν πάντοτε τὰ τετράγωνα καὶ τὰς ῥίζας αὐτῶν ἀπολύτως, χωρὶς δηλαδὴ νὰ προσέξωμεν εἰς τὸ σημεῖον αὐτῶν. Ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀλγεβρικῶν ζητημάτων ἀπαντῶμεν θετικὰς καὶ ἀρνητικὰς ποσότητας, πρέπει νὰ ἴδωμεν, ποῖον σημεῖον πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ ῥίζα τῶν τοιούτων ποσοτήτων. Ὅθεν ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον πάσης ποσότητος εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῆς ἐφ' ἑαυτήν, ἕπεται ὅτι οἱονδήποτε καὶ ἂν ἦναι τὸ σημεῖον τῆς ῥίζης, τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι πάντοτε θετικόν. Οὕτω τὸ τετράγωνον τοῦ $+3$ ἢ τοῦ -3 εἶναι ἐπίσης $+9$, καὶ τὸ τοῦ $+\alpha$ ἢ τοῦ $-\alpha$ εἶναι $+\alpha^2$.

Ἐκ τούτου συνάγομεν, ὅτι « ἡ ῥίζα θετικῆς ποσότητος δύναται » νὰ ἔχῃ ἀδιαφόρως τὸ σημεῖον $+$ ἢ τὸ $-$. »

Οὕτω $\sqrt{9\alpha^4} = \pm 3\alpha^2$, ἐπειδὴ $+3\alpha^2 \times +3\alpha^2 = +9\alpha^4$,
καὶ $-3\alpha^2 \times -3\alpha^2 = +9\alpha^4$.

Ἐὰν δὲ ἡ ποσότης, τῆς ὁποίας ζητοῦμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἦναι ἀρνητική, ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης αὐτῆς εἶναι ἀδύνατος· μὴ δυναμένης τῆς ῥίζης νὰ σημειωθῇ δι' οὐδενὸς σημείου· ἐπειδὴ εἴπομεν ὅτι τὸ τετράγωνον πάσης ποσότητος, θετικῆς ἢ ἀρνητικῆς εἶναι πάντοτε θετικόν.

Οὕτω $\sqrt{-9}$ δὲν εἶναι οὔτε $+3$ οὔτε -3, διότι $+3 \times +3 = +9$,
καὶ $-3 \times -3 = +9$.

Ἡ ῥίζα λοιπὸν αὕτη δὲν δύναται νὰ σημειωθῇ δι' οὐδενὸς σημείου.

Ὡσαύτως αἱ ἐκφράσεις $\sqrt{-4\alpha^2}$, $\sqrt{-3\beta}$, εἶναι σύμβολα ἀλγεβρικά, τὰ ὁποῖα παριστάνουσι πράξεις ἀδυνάτους. Ὀνομάζονται δὲ διὰ τοῦτο ποσότητες *ἰδανικαί*. Ἐξ ἐναντίας αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν θετικῶν ποσοτήτων ὀνομάζονται ποσότητες πραγματικαί.

Σημ. Πολλάκις ἡ ῥιζικὴ ἔκφρασις γενικῶς θεωρουμένη εἶναι ἰδανικὴ μερικῶς δὲ δύναται νὰ ἦναι πραγματική· διότι δυνατὸν τὰ εἰς τὴν ὑπόρριζον ποσότητα εἰσερχόμενα γράμματα νὰ λάβωσι τοιαύτας μερικὰς τιμάς, ὥστε ἡ ὅλη ἀριθμητικὴ τιμὴ αὐτῆς ν' ἀποβῇ θετική. Οὕτως εἰς τὸ παράδειγμα $\sqrt{-3\beta}$ ἐὰν $\beta = -3$, τότε ἔχομεν $\sqrt{-3 \times -3} = \sqrt{+9} = 3$.

§ 131. Αἱ ἰδανικαὶ ποσότητες δυνατὸν νὰ καθυποβληθῶσιν εἰς τὰς αὐτὰς ἁπλουστεύσεις τῶν ἀσυμμέτρων ποσοτήτων (§ 129).

Οὕτω $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \times -1} = 3\sqrt{-1}$.

καὶ $\sqrt{-4\alpha^2} = \sqrt{4\alpha^2 \times -1} = 2\alpha\sqrt{-1}$.

$\sqrt{-8\alpha^2\beta} = \sqrt{4\alpha^2 \times 2\beta \times -1} = 2\alpha\sqrt{2\beta}\sqrt{-1}$.

§ 132. Πᾶσα ἰδανικὴ ποσότης δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, τοῦ μὲν πραγματικοῦ, τοῦ δὲ ἰδανικοῦ καὶ ἴσου μὲ $\sqrt{-1}$. Τῷ ὄντι ἡ ποσότης Α, οὖσα καθ' ἑαυτὴν θετική, $\sqrt{-A}$ εἶναι ἰδανικὴ ποσότης ἐξ ἐναντίας ἐὰν Α ὑποτεθῇ ἀρνητικὴ καὶ ἴση μὲ $-x$, τότε $\sqrt{-A} = \sqrt{-(-x)} = \sqrt{+x}$, εἶναι πραγματική. Ἀλλ' ἔχομεν $\sqrt{-A} = \sqrt{A \times -1} = \sqrt{A} \times \sqrt{-1}$.

Ὁ πραγματικὸς παράγων $\sqrt{A}$ δύναται νὰ ἦναι συμμετρικὸς ἢ ἀσύμμετρος, ἢ προσέτι δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς δύο μερικοὺς παράγοντας, συμμετρικὸν καὶ ἀσύμμετρον.

Παραδείγματα. $\sqrt{-\alpha^2} = \sqrt{\alpha^2 \times -1} = \alpha\sqrt{-1}$,

$\sqrt{-\beta} = \sqrt{\beta \times -1} = \sqrt{\beta}\sqrt{-1}$,

$\sqrt{-\alpha^2\beta} = \sqrt{\alpha^2 \times \beta \times -1} = \alpha\sqrt{\beta}\sqrt{-1}$.

β'. Πολυώνυμα.

§ 133. Ἂς ἀνιχνεύσωμεν ἤδη κατὰ ποῖον νόμον σχηματίζεται τὸ τετράγωνον παντὸς πολυωνύμου. Θέλομεν δὲ ὁδηγηθῇ ἐκ τοῦ νόμου τούτου εἰς τὴν μέθοδον τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν πολυωνύμων.

Ἔχομεν ἤδη γνωστὸν (§ 23) ὅτι

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2.$$

Ἂς σχηματίσωμεν τώρα τὸ τετράγωνον τοῦ τριωνύμου $\alpha+\beta+\gamma$, σημειοῦντες δι' ἑνὸς μόνου γράμματος σ τὸ μέρος $\alpha+\beta$, ἔχομεν

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=(\sigma+\gamma)^2=\sigma^2+2\sigma\gamma+\gamma^2,$$

καὶ ἀντεισάγοντες τὸ ἴσον τοῦ σ, λαμβάνομεν,

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=(\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2,$$

ἤτοι

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2.$$

τουτέστι. « Τὸ τετράγωνον παντὸς τριωνύμου σχηματίζεται ἀπὸ τὸ » τετράγωνον τοῦ πρώτου ὅρου, πλέον τὸ διπλάσιον γινόμενον τοῦ » πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, πλέον τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου, » πλέον τὰ διπλάσια γινόμενα τῶν δύο πρώτων ὅρων ἐπὶ τὸν τρί- » τον, πλέον τὸ τετράγωνον τοῦ τρίτου. »

Δυνάμεθα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον νὰ εὕρωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ τετραωνύμου $\alpha+\beta+\gamma+\delta$,

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2$$
$$+2\alpha\delta+2\beta\delta+2\gamma\delta+\delta^2.$$

Ἀλλ' ἵνα δείξωμεν τὴν ὕπαρξιν τοῦ νόμου τούτου δι' οἱονδήποτε πολυώνυμον, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ νόμος οὗτος ὑπάρχει διὰ πολυώνυμόν τι ἐκ μ ὅρων, καὶ ἂς ἴδωμεν ἂν ἐξακολουθῇ νὰ ὑπάρχῃ καὶ διὰ πολυώνυμον περιέχον ἕνα ὅρον περισσότερον, ἤτοι $\mu+1$.

Ὅθεν ἔστω πολυώνυμον συγκείμενον ἐκ $\mu+1$ ὅρων,

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdot\cdot\cdot+\iota+\kappa,$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ σ τὸ ἄθροισμα τῶν μ πρώτων ὅρων,

$$\sigma=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdot\cdot\cdot+\iota,$$

τὸ προτεθὲν πολυώνυμον θέλει σημειωθῆ διὰ $\sigma+\kappa$, ἑπομένως τὸ τετράγωνον αὐτοῦ θέλει ἐκφρασθῆ διὰ

$$(\sigma+\kappa)^2=\sigma^2+2\sigma\kappa+\kappa^2.$$

Ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν τοῦ σ, ἔχομεν

$$(\sigma+\varkappa)^2=(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdot\cdot\cdot+\iota^2+\varkappa)^2=$$
$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdot\cdot\cdot+1)^2+2(\alpha+\beta+\gamma+\delta\cdot\cdot+1)\varkappa+\varkappa^2.$$

Ὅθεν τὸ πρῶτον μέρος τῆς ἐκφράσεως ταύτης περιέχει τὰ τετράγωνα τῶν μ πρώτων ὅρων καὶ τὰ διπλάσια γινόμενα τῶν ὅρων τούτων ἀνὰ δύο, ἐπειδὴ ὁ νόμος ὑπετέθη ὑπάρχων διὰ μ ὅρους.

Τὸ δεύτερον μέρος περιλαμβάνει ὅλα τὰ διπλάσια γινόμενα τῶν μ ὅρων ἐπὶ τὸν ὅρον κ.

Τὸ τρίτον μέρος εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ ὅρου κ.

Βλέπομεν λοιπὸν, ὅτι ὁ ἀνωτέρω ἐκτεθεὶς νόμος τῆς συνθέσεως τοῦ τετραγώνου ὑπάρχει διὰ μ+1 ὅρους, ἐὰν ὑπάρχῃ διὰ μ.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἀπεδείχθη ὅτι ὑπάρχει διὰ τρεῖς ὅρους, ἄρα ὑπάρχει καὶ διὰ τέσσαρας· ἀληθεύων δὲ διὰ τέσσαρας, ἀληθεύει ἐπίσης καὶ διὰ πέντε· καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἄρα ὁ νόμος εἶναι γενικὸς καὶ ἐκφράζεται οὕτω.

« Τὸ τετράγωνον παντὸς πολυωνύμου περιέχει τὸ τετράγωνον τοῦ » πρώτου ὅρου, πλέον τὸ διπλάσιον γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν » δεύτερον, πλέον τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου, πλέον τὰ διπλά- » σια γινόμενα ἑκάστου τῶν δύο πρώτων ὅρων ἐπὶ τὸν τρίτον, πλέον » τὸ τετράγωνον τοῦ τρίτου, πλέον τὰ διπλάσια γινόμενα ἑκάστου » τῶν τριῶν πρώτων ὅρων ἐπὶ τὸν τέταρτον, πλέον τὸ τετράγωνον » τοῦ τετάρτου καὶ οὕτως ἐφεξῆς. »

Ἐφαρμογή. Ἔστωσαν τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

$$(5\alpha^3-4\alpha\beta^2)^2=25\alpha^6-40\alpha^4\beta^2+16\alpha^2\beta^4$$

$$(3\alpha^2-2\alpha\beta+4\beta^2)^2=9\alpha^4-12\alpha^3\beta+4\alpha^2\beta^2+24\alpha^2\beta^2$$
$$-16\alpha\beta^3+16\beta^4.$$

καὶ δι' ἀναγωγῆς $9\alpha^4-12\alpha^3\beta+28\alpha^2\beta^2-16\alpha\beta^3+16\beta^4.$

§ 134. *Παρατήρησις.* Ἐὰν τὸ πολυώνυμον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ὑποτεθῇ διατεταγμένον ὡς πρὸς τὰς δυνάμεις γράμματός τινος, π. χ. τοῦ α, καὶ σχηματισθῇ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ κατὰ τὸν ἀνωτέρω ἐκτεθέντα νόμον, πρέπει ὁ πρῶτος ὅρος αὐτοῦ, τουτέστι τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης, νὰ ἔχῃ τὸν ἀνώτατον ἐκθέτην τοῦ διατακτικοῦ γράμματος α· ὁ δὲ δεύτερος, τουτέστι τὸ διπλάσιον γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης ἐπὶ τὸν δεύτερον, νὰ ἔχῃ τὸν ἀμέσως μικρότερον ἐκθέτην.

Προσέτι οἱ δύο οὗτοι ὅροι εἶναι ἀνεπίδεκτοι ἀναγωγῆς.

Τῷ ὄντι ἂς σημειώσωμεν τὸ πολυώνυμον τῆς ῥίζης διὰ

$$A\alpha^4+B\alpha^3+\Gamma\alpha^2+\Delta\alpha+E.$$

τὸ τετράγωνον αὐτοῦ εἶναι

$$(A\alpha^4)^2+2A\alpha^4\times B\alpha^3+(B\alpha^3)^2+2A\alpha^4\times\Gamma\alpha^2\ldots$$

τουτέστι $\quad A^2\alpha^8+2AB\alpha^7+B^2\alpha^6+2A\Gamma\alpha^6+\ldots$

Ὅπου βλέπομεν ὅτι ὁ ἐκθέτης 8 εἶναι ὁ μέγιστος καὶ οὐδεὶς ἄλλος δύναται νὰ ἐξισωθῇ μὲ αὐτόν. Ὡσαύτως βλέπομεν ὅτι ὁ ἐκθέτης 7 εἶναι ὁ ἀμέσως μικρότερος καὶ οὐδεὶς ἄλλος ἐξισοῦται μὲ αὐτόν.

Ἄρα οἱ δύο οὗτοι ὅροι εἶναι ἀνεπίδεκτοι ἀναγωγῆς.

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι ἐὰν διατάξωμεν τὸ πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς τετράγωνον, κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις γράμματός τινος, τότε ὁ πρῶτος ὅρος αὐτοῦ θὰ εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης, ὁ δὲ δεύτερος θὰ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον. Ἡ ἁπλουστάτη αὕτη παρατήρησις μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν πολυωνύμων.

§ 135. Κανών. « Ἵνα ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν πολυωνύμου τινός, διατάσσομεν αὐτὸ κατὰ τὰς δυνάμεις ἑνὸς τῶν εἰς αὐτὸ εἰσερχομένων γραμμάτων. Ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου ὅρου καὶ οὕτως ἔχομεν τὸν πρῶτον ὅρον τῆς ζητουμένης ῥίζης. Διπλασιάζομεν τὸν εὑρεθέντα ὅρον, καὶ διὰ τοῦ διπλασίου διαιροῦντες τὸν δεύτερον ὅρον λαμβάνομεν τὸν δεύτερον ὅρον τῆς ῥίζης. Σχηματίζομεν ἔπειτα τὸ τετράγωνον τῶν δύο εὑρεθέντων ὅρων καὶ ἀφαιροῦμεν αὐτὸ ἀπὸ τὸ δοθὲν πολυώνυμον. Διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ὑπολοίπου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης, καὶ λαμβάνομεν τὸν τρίτον ὅρον αὐτῆς, τὸν ὁποῖον γράφομεν πλησίον τῶν δύο εὑρεθέντων, πλησίον τοῦ διπλασίου αὐτῶν καὶ ὑπ' αὐτούς, καὶ πολλαπλασιάζοντες σχηματίζομεν συγχρόνως τὰ διπλάσια τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τρίτου. Ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου καὶ λαμβάνομεν δεύτερον ὑπόλοιπον. Διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ νέου ὑπολοίπου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης, καὶ εὑρίσκομεν τὸν τέταρτον ὅρον αὐτῆς καὶ οὕτως ἐφεξῆς »

Ἐφαρμογὴ ἐπὶ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων.

Παράδειγμα α΄.

$$\begin{array}{lr|l}
 & 25\alpha^4-30\alpha^3\beta+49\alpha^2\beta^2-24\alpha\beta^3+16\beta^4 & \underline{5\alpha^2-3\alpha\beta+4\beta^2} \\
 & \underline{-25\alpha^4+30\alpha^3\beta-9\alpha^2\beta^2} & 10\alpha^2-6\alpha\beta+4\beta^2 \\
\text{α΄. ὑπόλοιπον} & +40\alpha^2\beta^2-24\alpha\beta^3+16\beta^4 & \underline{+4\beta^2} \\
 & \underline{-40\alpha^2\beta^2+24\alpha\beta^3-16\beta^4} & 40\alpha^2\beta^2-24\alpha\beta^3+16\beta^4 \\
\text{β΄. ὑπόλοιπον} & 0 &
\end{array}$$

Παράδειγμα β΄.

Ἔστω τὸ πολυώνυμον . . $9\alpha^4-12\alpha^3\beta+28\alpha^2\beta^2-16\alpha\beta^3+16\beta^4$,
Τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ . . $3\alpha^2-2\alpha\beta+4\beta^2$.

§ 136. Σημείωσις. Συμβαίνει ἐνίοτε, ἀλλὰ σπανιώτατα, ὥστε τὸ πολυώνυμον νὰ περιέχῃ πολλοὺς ὅρους μὲ τὴν αὐτὴν δύναμιν τοῦ γράμματος, ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ἔγεινεν ἡ διάταξις· τότε τὸ πολυώνυμον διατάσσεται ὡς εἴπομεν εἰς ὁμοίαν περίπτωσιν τῆς διαιρέσεως τῶν πολυωνύμων (§ 33). Ὁ κανὼν ἐφαρμόζεται ἀκριβῶς, ἀλλ' αἱ μερικαὶ πράξεις πρέπει νὰ ἐκτελῶνται κατὰ μέρος.

§ 137. *Παρατηρήσεις.* Ὅλα τὰ εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα θεωρηθέντα πολυώνυμα εἶναι τέλεια τετράγωνα, ὅθεν διὰ τοῦ ἀποδοθέντος κανόνος εὕρομεν τὰς ῥίζας αὐτῶν. Ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ὅμως δὲν συμβαίνει τοῦτο· ἀλλὰ καθὼς οἱ ἀριθμοί, οὕτω καὶ τὰ πολυώνυμα εἶναι ἀτελῆ τετράγωνα. Ἔχομεν δὲ σημεῖα τινά, δι' ὧν δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα, εἴτε ἐξ ἀρχῆς, πρὶν ἀρχίσωμεν τὴν πρᾶξιν τῆς ἐξαγωγῆς, εἴτε κατὰ τὸ μέσον τῆς πράξεως.

Α΄. Δυώνυμον δὲν δύναται ποτὲ νὰ ἦναι τέλειον τετράγωνον. Ἐπειδὴ ἐὰν ἡ ῥίζα ὑποτεθῇ μονώνυμον, τὸ τετράγωνον αὐτῆς ἔπρεπε νὰ ἦναι ὡσαύτως μονώνυμον (§ 127). Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ διώνυμον, τὸ τετράγωνον αὐτῆς ἔπρεπε νὰ περιέχῃ τρία μέρη, τὰ ὁποῖα δὲν ἐπιδέχονται ἀναγωγὴν (§ 23) τουτέστιν ἔπρεπε νὰ ἦναι τριώνυμον.

Οὕτως $\alpha^2+\beta^2$ δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Ἐνίοτε τὸ διώνυμον, καίτοι καθ' ἑαυτὸ εἶναι ἀτελὲς τετράγωνον, δύναται ὅμως νὰ ἦναι μέρος τελείου τετραγώνου, καὶ τότε δυνατὸν νὰ συμπληρωθῇ. Π. χ. τὸ ἀνωτέρω δυώνυμον $\alpha^2+\beta^2$ συμπληροῦται διὰ τοῦ ὅρου τούτου $\pm 2\alpha\beta$ καὶ ἀποκαθίσταται τέλειον τετράγωνον $\alpha^2\pm 2\alpha\beta+\beta^2$ τοῦ $\alpha\pm\beta$.

Ὡσαύτως τὸ διώνυμον $\chi^2+\pi\chi$ ἐπειδὴ ἀπαρτίζει μέρος τελείου τετραγώνου· ἑνὸς δυωνύμου, τοῦ ὁποίου ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι χ, δυνατὸν νὰ συμπληρωθῇ. Ἀρκεῖ νὰ παραβάλλωμεν αὐτὸ μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ δυωνύμου $\chi+y$, τοῦ ὁποίου ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι χ, ὁ δὲ δεύτερος ἄγνωστος.

Τὸ τετράγωνον τοῦ $\chi+y$ εἶναι . . . . $\chi^2+2\chi y+y^2$,
τὸ δὲ δοθὲν δυώνυμον . . . . $\chi^2+\pi\chi$.

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν δύο τούτων ἐκφράσεων βλέπομεν, ὅτι ἀπὸ τὸ δοθὲν δυώνυμον ἐλλείπει τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς ῥίζης, καὶ ὅτι ὁ ὅρος $\pi\chi$ πρέπει νὰ θεωρηθῇ ἴσος μὲ τὸν ὅρον $2\chi y$· ὅθεν ἐκ τῆς ἰσότητος $\pi\chi=2\chi y$ συνάγομεν $\pi=2y$ καὶ $y=\frac{\pi}{2}$. Ἐπειδὴ λοιπὸν $\frac{\pi}{2}$ εἶναι ὁ δεύτερος ὅρος τῆς ῥίζης, ἕπεται ὅτι τὸ ἐλλεῖπον τετράγωνον αὐτοῦ εἶναι $\frac{\pi^2}{4}$. Προσθέτοντες αὐτὸ εἰς τὸ δοθὲν δυώνυμον ἀποκαθιστῶμεν αὐτὸ τέλειον τετράγωνον $\chi^2+\pi\chi+\frac{\pi^2}{4}$ τοῦ δυωνύμου $\chi+\frac{\pi}{2}$.

Καὶ τῷ ὄντι $\left(\chi+\frac{\pi}{2}\right)^2=\chi^2+\pi\chi+\frac{\pi^2}{4}$.

ΣΗΜ. Ἡ παρατήρησις αὕτη εἶναι ἀπαραιτήτως ἀναγκαία διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.

Β΄. Τριώνυμόν τι διατεταγμένον δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐὰν οἱ εἰς τὰ δύο ἄκρα ὅροι δὲν ἦναι τετράγωνα, καὶ ἑπομένως θετικοί, καὶ ἐὰν ὁ μέσος ὅρος δὲν ἦναι τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν ῥιζῶν τῶν δύο ἄλλων.

Ὅθεν ἡ ῥίζα τοῦ τριωνύμου δύναται νὰ ληφθῇ ἀμέσως, ἐξαγομένων τῶν ῥιζῶν τῶν δύο ἄκρων, καὶ παρεντιθεμένου μεταξὺ αὐτῶν τοῦ σημείου τοῦ μέσου.

Οὕτως ἡ ῥίζα τοῦ $9\alpha^6-48\alpha^4\beta^2+64\alpha^2\beta^4$
εἶναι $\sqrt{9\alpha^6}-\sqrt{64\alpha^2\beta^4}$, ἤτοι $3\alpha^3-8\alpha\beta^2$
ἐπειδὴ $2\times3\alpha^3\times-8\alpha\beta^2=-48\alpha^4\beta^2$.

Τὸ τριώνυμον $4\alpha^2+12\alpha\beta-9\beta^2$ δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, καίτοι οἱ τρεῖς ὅροι αὐτοῦ εἶναι ἐσχηματισμένοι κατὰ τὸν νόμον τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ δυωνύμου. Διότι ὁ τρίτος ὅρος $-9\beta^2$ εἶναι ἀρνητικός.

Γ΄. Ὅταν, εἰς τὴν σειρὰν τῶν πράξεων, ὁ πρῶτος ὅρος ὑπολοίπου τινος δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης, τὸ πολυώνυμον δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

§ 138. Δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ ἐπὶ τῶν ῥιζῶν τῶν πολυωνύμων, τῶν μὴ τελείων τετραγώνων, τὰς ἁπλουστεύσεις τοῦ (§ 129).

Ἔστω ἡ ἔκφρασις $\sqrt{\alpha^3\beta+4\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3}$.

Ἡ ὑπόρριζος ποσότης δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ μορφὴν

$$\alpha\beta(\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2)$$

ὑπὸ τὴν ὁποίαν βλέπομεν, ὅτι ὁ ἐντὸς τῶν παρενθέσεων παράγων εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ $\alpha+2\beta$, ὅθεν ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις ἄγεται εἰς

$$(\alpha+2\beta)\sqrt{\alpha\beta}.$$

Ὑπολογισμὸς τῶν ῥιζικῶν τοῦ β'. βαθμοῦ.

§ 139. Ἐπειδὴ εἰς τοὺς ἀλγεβρικοὺς ὑπολογισμοὺς ἀπαντῶται συχνάκις ῥιζικαὶ ἐκφράσεις, πρέπει νὰ δείξωμεν πῶς ἐκτελοῦνται ἐπ' αὐτῶν αἱ τέσσαρες ἀριθμητικαὶ πράξεις.

Πρόσθεσις καὶ Ἀφαίρεσις.

§ 140. Τὰ ῥιζικὰ λέγονται *ὅμοια*, ὅταν ἔχωσι τὴν αὐτὴν ὑπόρριζον ποσότητα. Π. χ. $3\alpha\sqrt{\beta}$ καὶ $5\gamma\sqrt{\beta}$, ἢ $9\sqrt{2}$ καὶ $7\sqrt{2}$ εἶναι ὅμοια. Οἱ συντελεσταὶ αὐτῶν δυνατὸν νὰ ἦναι οἱοιδήποτε ἀριθμοί, ἢ ἀλγεβρικαὶ ἐκφράσεις.

Ἡ πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις τῶν ὁμοίων ῥιζικῶν ἐκτελεῖται ἐπὶ τῶν συντελεστῶν αὐτῶν καὶ τίθεται τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ ὡς συντελεστὴς τοῦ κοινοῦ ῥιζικοῦ.

Παραδείγματα. $3\alpha\sqrt{\beta}+5\gamma\sqrt{\beta}=(3\alpha+5\gamma)\sqrt{\beta}$.

$$3\alpha\sqrt{\beta}-5\gamma\sqrt{\beta}=(3\alpha-5\gamma)\sqrt{\beta}.$$

$$7\sqrt{2\alpha}+3\sqrt{2\alpha}=10\sqrt{2\alpha}.$$

$$7\sqrt{2\alpha}-3\sqrt{2\alpha}=4\sqrt{2\alpha}.$$

§ 141. Πολλάκις τὰ ῥιζικὰ φαίνονται ἐκ πρώτης ὄψεως ἀνόμοια, ἐνῷ ἀποβαίνουσιν ὅμοια διὰ τῶν γνωστῶν ἁπλουστεύσεων, π. χ.

$$\sqrt{48\alpha\beta^2}+6\sqrt{75\alpha}=4\beta\sqrt{3\alpha}+5\beta\sqrt{3\alpha}=9\beta\sqrt{3\alpha}.$$

$$2\sqrt{45}-3\sqrt{5}=6\sqrt{5}-3\sqrt{5}=3\sqrt{5}.$$

§ 142. Ἐὰν τὰ ῥιζικὰ ἦναι ἀνόμοια αἱ πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως σημειοῦνται ἁπλῶς, π. χ.

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$. $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

$2\sqrt{5}-3\sqrt{7}$. $2\alpha\sqrt{3\beta}-4\gamma\sqrt{5\beta}$.

Πολλαπλασιασμός.

§ 143. Ἐκ τῆς ἀποδειχθείσης ἀρχῆς (§ 129). « Ἡ ῥίζα τοῦ γι-
» νομένου δύο παραγόντων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν τῶν
» παραγόντων » ἤτοι ἐκ τῆς ἰσότητος $\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}$,
συνάγομεν τὴν ἀντίστροφον « Τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν δύο ποσοτή-
» των ἰσοῦται μὲ τὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου αὐτῶν » ἤτοι ἔχομεν
τὴν ἰσότητα $\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\beta}$,

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι « ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο ῥιζικὰ τὸ
» ἓν ἐπὶ τὸ ἄλλο, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς ὑποῤῥίζους ποσό-
» τητας καὶ νὰ δώσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τὸ ῥιζικὸν σημεῖον. »

Ἐὰν τὰ ῥιζικὰ ἔχωσι συντελεστάς, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς καὶ
θέτομεν τὸ γινόμενον αὐτῶν πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ.

Παραδείγματα.

$$3\sqrt{5\alpha\beta}\times4\sqrt{20\alpha}=12\sqrt{100\alpha^2\beta}=120\alpha\sqrt{\beta}.$$

$$2\alpha\sqrt{\beta\gamma}\times3\alpha\sqrt{\beta\gamma}=6\alpha^2\sqrt{\beta^2\gamma^2}=6\alpha^2\beta\gamma.$$

$$\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{16}=4.$$

$$5\sqrt{-8}\times4\sqrt{-2}=20\sqrt{16}=80.$$

$$2\sqrt{-\alpha}\times3\sqrt{-\alpha\beta}=6\sqrt{\alpha^2\beta}=6\alpha\sqrt{\beta}.$$

$$2\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\times-3\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=-6\alpha^2\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^2}=-6\alpha^2(\alpha^2+\beta^2).$$

ΣΗΜ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων βλέπομεν, ὅτι δυνατὸν ἐνίοτε τὸ γινόμενον δύο ἀσυμμέτρων ποσοτήτων νὰ ἦναι συμμετρικόν· τὸ δὲ γινόμενον δύο ἰδανικῶν ποσοτήτων νὰ ἦναι πραγματικόν.

Διαίρεσις.

§ 144. Εἴδομεν (§ 117) ὅτι $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$

λοιπὸν ἀντιστρόφως ἔχομεν $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

Ὅθεν συνάγομεν ὅτι « Ἵνα διαιρέσωμεν ῥιζικὸν διὰ ῥιζικοῦ, ἀρκεῖ
» νὰ διαιρέσωμεν τὰς ὑποῤῥίζους ποσότητας, τὴν μίαν διὰ τῆς ἄλ-
» λης, καὶ νὰ θέσωμεν τὸ πηλίκον ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν σημεῖον. »

Ἐὰν τὰ ῥιζικὰ ἔχωσι συντελεστὰς διαιροῦμεν πρῶτον αὐτούς, τὸν ἕνα διὰ τοῦ ἄλλου καὶ γράφομεν τὸ πηλίκον αὐτῶν ὡς συντελεστὴν τοῦ ῥιζικοῦ.

Παραδείγματα.
$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}.$$
$$\frac{4\sqrt{27}}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{9} = 6.$$
$$5\alpha\sqrt{\alpha^2\beta} : 3\gamma\sqrt{\alpha\beta^2} = \frac{5\alpha}{3\gamma}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$
$$3\sqrt{-\alpha} : 2\sqrt{-\beta} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$
$$10\sqrt{-10} : 2\sqrt{-5} = 5\sqrt{\frac{-10}{-5}} = 10.$$

ΣΠΜ Τὸ πηλίκον δύο ἀσυμμέτρων ποσοτήτων ἐνίοτε δύναται νὰ ἦναι συμμετρικὸν τὸ δὲ πηλίκον δύο ἰδανικῶν ποσοτήτων δύναται νὰ ἦναι πραγματικόν.

Μεταμορφώσεις τῶν ῥιζικῶν.

§ 145. Δύο εἶναι αἱ ἀναγκαιότεραι μεταμορφώσεις, εἰς τὰς ὁποίας καθυποβάλλονται αἱ ῥιζικαὶ ἐκφράσεις.

Α'. Μεταφορὰ τοῦ συντελεστοῦ τῆς ῥιζικῆς ἐκφράσεως ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν σημεῖον.

Ἔστω ἡ ἔκφρασις $3\alpha\sqrt{56}$, αὕτη ἄγεται εἰς $\sqrt{9\alpha^2}\sqrt{56} = \sqrt{45\alpha^2 6}$.

«Ἵνα μεταφέρωμεν τὸν συντελεστὴν ὑπὸ τὸ ῥιζικόν, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τὸ τετράγωνον αὐτοῦ ὡς παράγοντα τῆς ὑποῤῥίζου ποσότητος.»

Μεταχειριζόμεθα τὴν τροπὴν ταύτην, ὁσάκις θέλομεν νὰ ἐκτιμήσωμεν μὲ πλειοτέραν ἀκρίβειαν τὰς ῥιζικὰς ἐκφράσεις. Π. χ. ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ἐκφράσεως $6\sqrt{13}$ εἶναι 18, ὅταν ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα τοῦ 13 μεῖον μονάδος. Ἀλλ' ἐὰν τὴν μεταμορφώσωμεν εἰς $\sqrt{36\times 13} = \sqrt{468}$ καὶ ἐξάξωμεν παρομοίως τὴν ῥίζαν τοῦ 468 μεῖον μονάδος, λαμβάνομεν 21 ὡς τιμὴν αὐτῆς. Ἡ δευτέρα τιμὴ εἶναι πολὺ ἀκριβεστέρα τῆς πρώτης, διότι ἡ ἔκφρασις $6\sqrt{13}$ δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς
$$\sqrt{13}+\sqrt{13}+\sqrt{13}+\sqrt{13}+\sqrt{13}+\sqrt{13}$$
καὶ τὸ πραττόμενον σφάλμα εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς ῥίζης τοῦ 13 ἐπαναλαμβάνεται ἑξάκις.

Β' Κλασματικαὶ ἐκφράσεις ἔχουσαι παρονομαστὰς ἀσυμμέτρους τρέπονται εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους ἐχούσας παρονομαστὰς συμμετρικούς.

Ἔστωσαν αἱ ἐκφράσεις $\frac{\alpha}{\pi+\sqrt{x}}$ καὶ $\frac{\alpha}{\pi-\sqrt{x}}$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους τῆς μὲν πρώτης ἐκφράσεως ἐπὶ $\pi-\sqrt{x}$, τῆς δὲ δευτέρας ἐπὶ $\pi+\sqrt{x}$, συνάγομεν

$$\frac{\alpha}{\pi+\sqrt{x}}=\frac{\alpha(\pi-\sqrt{x})}{(\pi+\sqrt{x})(\pi-\sqrt{x})}=\frac{\alpha(\pi-\sqrt{x})}{\pi^2-x}$$

$$\frac{\alpha}{\pi-\sqrt{x}}=\frac{\alpha(\pi+\sqrt{x})}{(\pi-\sqrt{x})(\pi+\sqrt{x})}=\frac{\alpha(\pi+\sqrt{x})}{\pi^2-x}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΠΕΡΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ.

Ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ μίαν ἄγνωστον.

§ 146. Πᾶσα δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ὅταν ἦναι πλήρης περιέχει ὅρους μὲ τὴν δευτέραν δύναμιν τῆς ἀγνώστου, ὅρους μὲ τὴν πρώτην δύναμιν αὐτῆς καὶ ὅρους γνωστούς· ἀφοῦ δὲ ἐκτελεσθῶσιν ἐπ' αὐτῆς αἱ γνωσταὶ πρὸς ἁπλοποίησιν πράξεις, δηλ. ἡ ἐξηφάνισις τῶν παρονομαστῶν, ἡ μετάθεσις τῶν ὅρων καὶ ἡ ἀναγωγή, τότε ὅλοι οἱ ὅροι, οἱ ἔχοντες τὸ τετράγωνον τῆς ἀγνώστου ἀνάγονται εἰς ἕνα μόνον, ὅλοι δὲ οἱ ἔχοντες τὴν πρώτην δύναμιν αὐτῆς εἰς ἕνα δεύτερον, καὶ ὅλοι οἱ γνωστοί, εἰς ἕνα τρίτον· ὥστε ἡ πλήρης ἐξίσωσις ἄγεται ὑπὸ τὴν μορφήν,

$$\alpha\chi^2+\beta\chi=\gamma.$$

καὶ λέγεται διὰ τοῦτο τρίορος.

Παράδειγμα. $7\chi^2-3\chi+\frac{2}{3}=\frac{3}{2}\chi-8.$

ἀφανίζοντες τοὺς παρονομαστὰς $42\chi^2-18\chi+4=9\chi-48$

μεταθέτοντες . . . . . . $42\chi^2-18\chi-9\chi=-48-4$

καὶ ἀνάγοντες . . . . . . $42\chi^2-27\chi=-52.$

§ 147. Ὅταν, μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν προπαρασκευαστικῶν τούτων πράξεων, ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δὲν περιέχῃ τὴν πρώτην δύναμιν τῆς ἀγνώστου, λέγεται μὴ πλήρης ἢ δύορος καὶ ἄγεται ὑπὸ τὴν μορφήν, $\alpha\chi^2=\beta.$

Παράδειγμα. $\frac{1}{3}\chi^2-3+\frac{5}{12}\chi^2=\frac{7}{24}-\chi^2+\frac{299}{24}$.

ἀφανίζοντες τοὺς παρονομ. $8\chi^2-72+10\chi^2=7-24\chi^2+299$.

μεταθέτοντες . . . . . $8\chi^2+10\chi^2+24\chi^2=7+299+72$

ἀνάγοντες . . . . . . $42\chi^2=378$.

§ 148. Δυνατὸν προσέτι ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις νὰ ἦναι ἐλλειπὴς κατὰ τὸν γνωστὸν ὅρον, καὶ τότε παρουσιάζεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\alpha\chi^2+\beta\chi=0.$$

Ἐπίλυσις τῶν δυόρων ἐξισώσεων.

§ 149. Ἡ ἐξίσωσις, $\alpha\chi^2+\beta\chi=0$, ἄγεται εἰς $\chi\,(\alpha\chi+\beta)=0$.

Ἡ τιμὴ ἄρα τοῦ χ πρέπει νὰ ἦναι τοιαύτη, ὥστε νὰ μηδενίζῃ τὸ γινόμενον τῶν δύο τούτων παραγόντων, ἀλλὰ πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ τιμὴ αὕτη νὰ μηδενίζῃ ἕνα τῶν δύο παραγόντων· τουτέστι πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$\chi=0, \text{ ἢ } \alpha\chi+\beta=0 \text{ ἤτοι } \chi=-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Αἱ μόναι λοιπὸν λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi=0$ εἶναι

$$\chi=0 \quad \text{καὶ} \quad \chi=-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ἐφαρμογή. $$\left.\begin{array}{l}5\chi^2-3\chi=0\\ \chi(5\chi-3)=0\end{array}\right\} \text{ ὅθεν } \begin{array}{l}\chi=0\\ 5\chi-3=0, \text{ ἢ } \chi=\frac{3}{5}.\end{array}$$

§ 148. Ἔστω ἤδη ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2=\beta$.

Οὐδεμίαν δυσκολίαν παρουσιάζει ἡ ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως ταύτης, διότι διαιροῦντες διὰ τοῦ συντελεστοῦ ἔχομεν $\chi^2=\frac{\beta}{\alpha}$,

καὶ ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν . . . $\chi=\pm\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$

Θέτομεν πρὸ τῆς ῥίζης τὸ διπλοῦν σημεῖον $\pm$ διότι

$$\left(+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2=\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \left(\chi-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2=\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ἕπεται λοιπὸν ὅτι ἡ ἐξίσωσις ἐπιδέχεται δύο λύσεις,

$$\chi=+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad \text{καὶ} \quad \chi=-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Τῷ ὄντι ἀντεισάγοντες ἑκατέραν τῶν τιμῶν τούτων εἰς τὴν ἐξίσωσιν βλέπομεν ὅτι ταυτοποιεῖται.

Παράδειγμα Α΄. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις . . . . $4\chi^2-7=3\chi^2+9.$

μεταθέτοντες . . . . . $\chi^2=16$

ὅθεν . . . . $\chi=\pm\sqrt{16}$

ἢ $\begin{cases}\chi=+4\\ \chi=-4\end{cases}$

Παράδειγμα Β΄. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{1}{3}\chi^2-3+\frac{5}{12}\chi^2=\frac{7}{24}-\chi^2+\frac{299}{24}$

αὕτη ἄγεται (§ 147) εἰς $42\chi^2=378.$

Ὅθεν $\chi^2=\frac{378}{42}=9,$ ἑπομένως $\chi=\pm\sqrt{9}$

ἤτοι $\chi=+3,$ καὶ $\chi=-3.$

Παράδειγμα Γ΄. Ἔστω . . $3\chi^2=5$

συνάγομεν . . . . . . $\chi=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$ ἢ $\chi=\pm\sqrt{\frac{15}{9}}$

ὅθεν . . . . $\chi=\pm\frac{1}{3}\sqrt{15}$

§ 149. Παρατήρησις. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως . . . $\alpha\chi^2=\beta$

ἐλάβομεν . . . . $\chi^2=\frac{\beta}{\alpha}$

Ἐὰν σημειώσωμεν ὅτι . . . . $\frac{\beta}{\alpha}=\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2$

καὶ ἀντεισάξωμεν εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως τὴν ποσότητα ταύτην

λαμβάνομεν . . . . $\chi^2=\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2$

ἐκ ταύτης δὲ συνάγομεν . . . . $\chi^2-\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2=0$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ πρῶτον μέλος ταύτης εἶναι διαφορὰ δύο τετραγώνων ἀναλύεται εἰς

$$\left(\chi-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)\quad\left(\chi+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)=0.$$

Τὸ πρῶτον λοιπὸν μέλος τῆς ἐξισώσεως ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο παραγόντων πρωτοβαθμίων εἰς χ.

Λέγομεν δὲ τότε ὅτι τὸ χ πρέπει νὰ ἔχῃ τοιαύτην τιμὴν ὥστε ν᾽ ἀποκαθιστᾷ μηδὲν ἑκάτερον τῶν παραγόντων τούτων, τουτέστι πρέπει νὰ ἔχωμεν $\chi-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}=0$, ἢ $\chi+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}=0$.

τοῦτο δὲ ἐκπληροῦται ἢ ὅταν . . $\chi=+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ ἢ ὅταν $\chi=-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$.

Οὕτως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2=\beta$ ἐπιδέχεται δύο καὶ μόνας λύσεις.

Ἐπίλυσις τῶν τριόρων ἐξισώσεων.

§ 150. Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη τὴν πλήρη ἐξίσωσιν

$$\alpha\chi^2+\beta\chi=\gamma.$$

Διαιροῦντες ὅλους τοὺς ὅρους διὰ τοῦ α, συντελεστοῦ τοῦ χ^2, λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Σημειοῦντες δὲ πρὸς περισσοτέραν ἁπλότητα, $\frac{\beta}{\alpha}=\pi$, καὶ $\frac{\gamma}{\alpha}=\varkappa$ δίδομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τὴν μορφὴν

$$\chi^2+\pi\chi=\varkappa.$$

Ἐὰν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἦτο τέλειον τετράγωνον, ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἠθέλαμεν λάβει μίαν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν, τὴν ὁποίαν εὐκόλως ἠθέλομεν λύσει. Ἀλλὰ τὸ πρῶτον μέλος, ὡς δυώνυμον, εἶναι ἀτελὲς τετράγωνον, ἐπειδὴ ὅμως ἀποτελεῖ μέρος τελείου τετραγώνου, ἀποκαθίσταται τέλειον τετράγωνον διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ ὅρου $\frac{\pi^2}{4}$ (§ 137). Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως $\frac{\pi^2}{4}$, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\chi^2+\pi\chi+\frac{\pi^2}{4}=\varkappa+\frac{\pi^2}{4}.$$

Ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν καὶ τῶν δύο μελῶν, λαμβάνομεν

$$\chi+\frac{\pi}{2}=\pm\sqrt{\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}.$$

μεταθέτοντες τὸν γνωστὸν ὅρον $\frac{\pi}{2}$ εἰς τὸ δεύτερον μέλος, συνάγομεν

$$\chi=-\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}.$$

§ 151. Μεταφράζοντες τὸν τύπον τοῦτον τῆς τιμῆς τῆς ἀγνώστου εἰς κοινὴν γλῶσσαν συνάγομεν τὸν ἑξῆς εὔκολον κανόνα διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῆς τριόρου δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, ἠγμένης κατὰ πρῶτον ὑπὸ τὴν μορφὴν $\chi^2+\pi\chi=\kappa$.

Κανών. « Ἡ ἄγνωστος ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ » χ, εἰλημένον μ' ἐναντίον σημεῖον, πλέον ἢ μεῖον ἡ τετραγωνικὴ » ρίζα τοῦ γνωστοῦ μέλους, ηὐξημένου κατὰ τὸ τετράγωνον τοῦ ἡ» μίσεως τοῦ συντελεστοῦ τοῦ χ. »

§ 152. Ἔστωσαν πρὸς ἐφαρμογὴν τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

Α΄.
$$\chi^2-5\chi=-6$$
$$\chi=+\frac{5}{2}\pm\sqrt{-6+\frac{25}{4}}$$
$$\sqrt{-6+\frac{25}{4}}=\sqrt{-\frac{24}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

ὅθεν . . . . $\chi=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}$

ἤτοι . . . . . . $\begin{cases}\chi=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=\frac{6}{2}=3,\\ \chi=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2.\end{cases}$

Β΄.
$$3\chi^2+7\chi=-4.$$

γράφομεν . . . . $\chi^2+\frac{7}{3}\chi=-\frac{4}{3}.$

ὅθεν . . . . $\chi=-\frac{7}{6}\pm\sqrt{-\frac{4}{3}+\frac{49}{36}}.$

ἀνάγοντες τὴν ὑπόρριζον ποσότητα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ἔχομεν

$$-\frac{4}{3}+\frac{49}{36}=-\frac{48}{36}+\frac{49}{36}=\frac{1}{36}\quad\text{καὶ}\quad\sqrt{\frac{1}{36}}=\frac{1}{6}.$$

λοιπὸν . . . . $\chi=-\frac{7}{6}\pm\frac{1}{6}.$

ἤτοι . . . . . $\begin{cases}\chi=-\frac{7}{6}+\frac{1}{6}=-\frac{6}{6}=-1.\\ \chi=-\frac{7}{6}-\frac{1}{6}=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}.\end{cases}$

Γ′. $$3\chi^2+7\chi=4.$$

γράφομεν . . . . $\chi^2+\frac{7}{3}\chi=\frac{4}{3}$.

ὅθεν . . . . . $\chi=-\frac{7}{6}\pm\sqrt{\frac{4}{3}+\frac{49}{36}}$.

ἀλλὰ . . . . $\frac{4}{3}+\frac{49}{36}=\frac{48}{36}+\frac{49}{36}=\frac{97}{36}$.

λοιπὸν . . . . $\chi=-\frac{7}{6}\pm\sqrt{\frac{97}{36}}$.

Αἱ τιμαὶ τοῦ χ εἶναι ἀσύμμετροι.

Δ′. $$3\chi^2+5\chi=-4.$$

γράφομεν . . . . . . $\chi^2+\frac{5}{3}=-\frac{4}{3}$.

ὅθεν . . . . $\chi=-\frac{5}{6}\pm\sqrt{-\frac{4}{3}+\frac{25}{36}}$.

ἀλλὰ . . . . $-\frac{4}{3}+\frac{25}{36}=-\frac{48}{36}+\frac{25}{36}=-\frac{23}{36}$.

λοιπὸν . . . . . . $\chi=-\frac{5}{6}\pm\sqrt{-\frac{23}{36}}$.

Αἱ τιμαὶ τοῦ χ εἶναι ἰδανικαί.

Ε′. $$(\alpha^2-\beta^2)\,\chi^2-2\alpha^2\beta\chi+\alpha^2\beta^2=0.$$

γράφομεν . . . . $\chi^2-\frac{2\alpha^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\chi=-\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$.

ὅθεν . . . $\chi=\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\pm\sqrt{-\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}+\left(\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\right)^2}$.

Ἄγοντες εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν τὴν ὑπόρριζον ποσότητα καὶ ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἑκατέρου τῶν ὅρων τοῦ προκύπτοντος κλάσματος, τοῦ ὁποίου παρονομαστὴς εἶναι $(\alpha^2-\beta^2)^2$, λαμβάνομεν διαδοχικῶς,

$$\chi = \frac{\alpha^2\beta \pm \sqrt{\alpha^4\beta^2 - \alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)}}{\alpha^2-\beta^2}$$

$$\chi = \frac{\alpha^2\beta \pm \sqrt{\alpha^2\beta^4}}{\alpha^2-\beta^2}$$

$$\chi = \frac{\alpha^2\beta \pm \alpha\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}.$$

Χωρίζοντες τὰς δύο τιμὰς καὶ θέτοντες ἐκτὸς παρενθέσεως τὸν κοινὸν παράγοντα $\alpha\beta$, εὑρίσκομεν

$$\chi = \frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^2-\beta^2} = \frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}$$

$$\chi = \frac{\alpha\beta(\alpha-\beta)}{\alpha^2-\beta^2} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

§ 153. Ἔστωσαν πρὸς λύσιν αἱ ἐξισώσεις,

$$5\chi^2 - 37\chi + 664 = 0$$

$$\chi^2 - (4\alpha - 2\beta)\chi + 3\alpha^2 - 8\alpha\beta - 3\beta^2 = 0$$

$$\frac{\alpha}{\chi-\beta} + \frac{\beta}{\chi-\alpha} = 2$$

$$\frac{3\alpha}{\chi+\beta} + \frac{\chi-\beta}{\alpha-\beta} = 4$$

$$\frac{\alpha}{\chi+\alpha} + \frac{\beta}{\chi-\beta} + \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta} = 0$$

$$\frac{\chi}{\chi+1} + \frac{3-\chi}{\chi+1} - \frac{1}{\chi-1} = 0.$$

Προβλήματα τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

§ 154. Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὰς ἀνωτέρω ἀρχὰς εἰς τὴν λύσιν τινῶν προβλημάτων.

Πρόβλημα Α'. Νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε ἐὰν εἰς τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ προστεθῇ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ νὰ προκύπτῃ ἄθροισμα 65.

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$2\chi^2 + 3\chi = 65.$$

ἐκ τῆς ὁποίας . . . $\chi = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{65}{2} + \frac{9}{16}}$

$$\chi = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{529}{16}}$$

$$\chi=-\frac{3}{4}\pm\frac{23}{4}$$

τουτέστι . . . . . $\begin{cases} \chi=-\frac{3}{4}+\frac{23}{4}=\frac{20}{4}=5 \\ \chi=-\frac{3}{4}-\frac{23}{4}=-\frac{26}{4}=-\frac{13}{2}. \end{cases}$

Ἡ πρώτη τῶν τιμῶν τούτων ἐκπληροῖ τὴν συνθήκην τοῦ προβλήματος, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν αὐτοῦ.

Τῷ ὄντι $\qquad 2(5)^2+3\times5=50+15=65.$

Ὡς πρὸς τὴν δευτέραν δὲ παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν ἀντὶ τοῦ $+\chi$ θέσωμεν $-\chi$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $2\chi^2+3\chi=65$, μόνον ὁ δεύτερος ὅρος ἀλλάσσει σημεῖον, διότι

$$2(-\chi)^2+3(-\chi)=65$$

ἤτοι $\qquad 2\chi^2-3\chi=65.$

Ὅθεν λαμβάνοντες τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν $\chi=-\frac{13}{2}$ ἀπολύτως, ἤτοι ἄνευ σημείου, $\chi=-\frac{13}{2}$, θέλομεν ἔχει τὴν λύσιν τῆς μετασχηματισθείσης ἐξισώσεως, τουτέστι θέλομεν λύσει τὸ πρόβλημα, κατὰ τὴν νέαν ταύτην ἐκφώνησιν.

« Νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε ἐὰν ἀπὸ τὸ διπλάσιον τοῦ » τετραγώνου αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ, νὰ προκύπτῃ » διαφορὰ 65. »

Πρόβλημα Β΄. Ἠγόρασέ τις ἀριθμόν τινα πήχεων ὑφάσματος διὰ 240 δραχμάς. Ἐὰν δὲ μὲ τὴν αὐτὴν ποσότητα ἠγόραζε 3 πήχεις ὀλιγώτερον, ὁ πῆχυς ἤθελε στοιχίσει 4 δραχμὰς περισσότερον. Ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγορασθέντων πήχεων.

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν πήχεων.

$\frac{240}{\chi}$ ἐκφράζει τὴν τιμὴν τοῦ πήχεως.

$\chi-3$ εἶναι ὁ κατὰ τὴν δευτέραν ὑπόθεσιν ἀριθμὸς τῶν πήχεων

$\frac{240}{\chi-3}$ ἐκφράζει τὴν δευτέραν τιμὴν τοῦ πήχεως.

Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν ἡ δευτέρα τιμὴ ὑπερέχει τὴν πρώτην κατὰ 4, ὅθεν ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν,

$$\frac{240}{\chi-3}-\frac{240}{\chi}=4$$

ἐκ ταύτης συνάγομεν $\chi^2-3\chi=180$

καὶ κατὰ τὸν τύπον $\chi=\frac{3}{2}\pm\sqrt{180+\frac{9}{4}}$

ἤτοι . . . . $\chi=\frac{3}{2}+\frac{27}{2}$

Αἱ δύο τιμαὶ τῆς ἀγνώστου εἶναι

$$\chi=15 \quad \text{καὶ} \quad \chi=-12.$$

Ἐκ τούτων ἡ μὲν πρώτη $\chi=15$ ἐκπληρεῖ τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος, ἐπειδὴ

ὅταν αἱ πήχεις ἦναι 15 ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως εἶναι $\frac{240}{15}=16$

ὅταν » ἦναι $15-3=12$ » » εἶναι $\frac{240}{12}=20$

ἡ δευτέρα τιμὴ 20 ὑπερέχει τὴν πρώτην, 16, κατὰ 4.

Ὡς πρὸς τὴν δευτέραν τιμὴν δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν νέαν τινα ἐκφώνησιν, εἰς τὴν ὁποίαν αὕτη ἀνήκει. Τῷ ὄντι θέτοντες $-\chi$ ἀντὶ τοῦ χ εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἔχομεν

$$\frac{240}{-\chi-3}-\frac{240}{-\chi}=4$$

ἢ

$$\frac{240}{\chi}-\frac{240}{\chi+3}=4.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀλγεβρικὴ μετάφρασις τοῦ ἑξῆς προβλήματος.

« Ἠγόρασέ τις ἀριθμόν τινα πήχεων ὑφάσματος διὰ 240 δραχ-» μάς. Ἐὰν δὲ μὲ τὴν αὐτὴν ποσότητα ἠγόραζε 3 πήχεις *περισσό-» τερον*, ὁ πῆχυς ἤθελε στοιχίσει 4 δραχμὰς *ὀλιγώτερον*. »

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν τοῦ νέου τούτου προβλήματος εὑρίσκομεν

$$\chi=12 \quad \text{καὶ} \quad \chi=-15.$$

Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις ἄγεται εἰς $\chi^2+2\chi=180$.

ΣΗΜ. Τὰ προηγηθέντα προβλήματα ἐπιβεβαιοῦσι τὴν ἐπὶ τῶν ἀρνητικῶν λύσεων συσταθεῖσαν ἀρχὴν (§ 87) διὰ τὰ πρωτοβάθμια προβλήματα.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις δίδει συγχρόνως τὴν λύσιν καὶ τοῦ προτεθέντος προβλήματος καὶ τοῦ τροπολογουμένου. Ἀκολούθως θέλομεν ἐκθέσει τὴν διερεύνησιν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως ἐν γένει.

Πρόβλημα Γ΄. Τραπεζίτης ἐξαργυρώσας δι' ὑφαιρέσεως ἐσωτερικῆς δύο γραμμάτια, τὸ μὲν ἐξ 8776 δραχμῶν, πληρωτέων μετὰ 9 μῆνας, τὸ δὲ ἐξ 7488 δραχ. πληρωτέων μετὰ 8 μῆνας· ἔδωκε δὲ διὰ τὸ πρῶτον 1200 δραχμὰς περισσότερον, παρ' ὅσον ἔδωκε διὰ τὸ δεύτερον. Ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον, κατὰ τὸ ὁποῖον ἔγεινεν ἡ ὑφαίρεσις.

Πρὸς ἁπλούστευσιν τῶν ὑπολογισμῶν ἂς σημειώσωμεν διὰ χ τὸν τόκον τῶν 100 δραχ. δι' ἕνα μῆνα, καὶ οὕτω τὸ μὲν ζητούμενον ἐπιτόκιον δι' ἓν ἔτος θέλει ἐκφρασθῆ διὰ 12χ, οἱ δὲ τόκοι τῶν 100 δραχ. διὰ 9 μῆνας καὶ 8 μῆνας θέλουσι σημειωθῆ διὰ 9χ καὶ 8χ.

Ὅθεν ἵνα προσδιορίσωμεν τὰς τιμὰς τῆς προεξοφλήσεως τῶν γραμματίων, πρέπει νὰ συστήσωμεν τὰς ἀναλογίας,

$$100+9\chi : 100 :: 8776 : \frac{877600}{100+9\chi},$$

$$100+8\chi : 100 :: 7488 : \frac{748800}{100+8\chi},$$

τῶν ὁποίων οἱ τέταρτοι ὅροι ἐκφράζουσι τὰς ὑπὸ τοῦ τραπεζίτου πληρωθείσας ποσότητας. Ἔχομεν λοιπὸν κατὰ τὴν ἐκφώνησιν, τὴν ἐξίσωσιν,

$$\frac{877600}{100+9\chi}-\frac{748800}{100+8\chi}=1200$$

ἢ διαιρουμένων τῶν δύο μελῶν διὰ 400,

$$\frac{2194}{100+9\chi}-\frac{1872}{100+8\chi}=3.$$

Ἀφανίζοντες τοὺς παρονομαστὰς καὶ ἀνάγοντες λαμβάνομεν

$$216\chi^2+4396\chi=2200$$

ἤτοι . . . . $\chi^2+\frac{4396}{216}\chi=\frac{2200}{216},$

ἐκ τῆς ὁποίας $\chi=-\frac{2198}{216}\pm\sqrt{\frac{2200}{216}+\frac{(2198)^2}{(216)^2}}$

Ἀνάγοντες τοὺς ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν δύο ὅρους εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, καὶ ἐκτελοῦντες τὰς σημειωμένας πράξεις συνάγομεν,

$$\chi=\frac{-2198\pm\sqrt{5306404}}{216}$$

καὶ ἐπομένως $12\chi=\frac{-2198\pm\sqrt{5309404}}{18}$

ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν μεῖον 0, 1 ἔχομεν

$$12\chi=\frac{-2198\pm2303,5}{18}$$

ὅθεν . . . . $\begin{cases} 12\chi=\dfrac{-2198+2303,5}{18}=\dfrac{105,5}{18}, \\ 12\chi=\dfrac{-2198-2303,5}{18}=\dfrac{-4501,5}{18}, \end{cases}$

ἤτοι . . . . $\begin{cases} 12\chi=5,86 \\ 12\chi=-250,08. \end{cases}$

Ἡ θετικὴ τιμὴ ἐκφράζει τὸ ζητούμενον ἐπιτόκιον· ἡ δὲ ἀρνητικὴ εἶναι ὅλως ἀλλοτρία τοῦ προβλήματος τούτου, καὶ ἀνήκει εἰς πρόβλημα συνδεόμενον μετὰ τοῦ προταθέντος διὰ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως.

Πρόβλημα Δ΄. Ἠγόρασέ τις ἵππον, τὸν ὁποῖον μεταπωλήσας ἀντὶ διστήλων 24, ἐζημιώθη τόσα τοῖς ἑκατὸν ἐκ τῆς πρώτης τιμῆς, ὅση ἡ τιμὴ αὕτη. Ζητεῖται ἡ τιμή, κατὰ τὴν ὁποίαν ἠγοράσθη ὁ ἵππος.

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν διστήλων τῆς τιμῆς τοῦ ἵππου,

$24-\chi$, ἐκφράζει τὴν ζημίαν.

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν, ὁ ἀγοραστὴς ἐπὶ τοῖς 100 χάνει χ, ἄρα ἐπὶ μόνον τοῖς χ χάνει $\frac{\chi^2}{100}$.

Ἐξισοῦντες λοιπὸν τὰς δύο ἐκφράσεις τῆς ζημίας ἔχομεν

$$\frac{\chi^2}{100}=\chi-24$$

ἐκ τῆς ὁποίας . . . . . $\chi^2-100\chi=-2400.$

ὅθεν . . . . $\chi=50\pm\sqrt{-2400+2500}$

ἤτοι . . . . $\chi=50\pm\sqrt{100}=50\pm10$

λοιπὸν . . . . $\chi=60$ καὶ $\chi=40.$

Ἀμφότεραι αὗται αἱ τιμαὶ πληροῦσι τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος. Τῷ ὄντι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἠγοράσθη 60, ἡ ζημία εἶναι 60—24 ἤτοι 36. Ἀλλ᾽ ἂν ἐπὶ 60 ζημιοῦται ὁ ἀγοραστὴς 36, ἐπὶ 100 ζημιοῦται 60.

Παρομοίως ἔστω ἡ τιμὴ 40

ἡ ζημία εἶναι . . . . $40-24=16,$

ἀλλ᾽ ἔχομεν . . . . . $40:16::100:\frac{1600}{40}=40.$

Γενικὴ διερεύνησις τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.

§ 155. Ὅλα τὰ προηγηθέντα δευτεροβάθμια προβλήματα ἦσαν μερικά· διὸ καὶ τὰ ἐκ τῆς λύσεως αὐτῶν ἐξαγόμενα ἡρμηνεύθησαν μερικῶς. Πρὸ τῆς λύσεως ὅμως γενικῶν προβλημάτων καὶ τῆς ἑρμηνείας ὅλων τῶν ἐξαγομένων, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν κάμνοντες τὰς δυνατὰς ὑποθέσεις ἐπὶ τῶν διδομένων, τουτέστι περὶ τῆς γενικῆς διερευνήσεως τῶν δευτεροβαθμίων προβλημάτων εἶναι ἀναγκαῖον νὰ θεωρήσωμεν τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν ὑπὸ γενικὴν ἔποψιν, νὰ διερευνήσωμεν τοὺς γενικοὺς τύπους τῶν τιμῶν τῆς ἀγνώστου, καὶ νὰ ἐξετάσωμεν τὰς μεταξὺ τῶν τιμῶν τούτων καὶ τῆς ἐξισώσεως σχέσεις.

§ 156. Ἂς θεωρήσωμεν τὴν πλήρη καὶ γενικὴν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ,

$$\chi^2+\pi\chi=\kappa \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

ΣΗΜ. Συντελεσταὶ τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, καὶ ἐν γένει πάσης ἄλλης, λέγονται οὐχὶ μόνον οἱ πολλαπλασιασταὶ τοῦ χ, ἀλλὰ καὶ ὁ γνωστὸς ὅρος, διότι ὑποτίθεται ὡς πολλαπλασιαστὴς τοῦ χ^0, καὶ ἡ ἐξίσωσις θεωρεῖται ὡς πολυώνυμόν τι διατεταγμένον ὡς πρὸς τὸ χ, οὕτω $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$.

Εἴδομεν ἤδη (§ 150) ὅτι, ἵνα λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην (1) πρέπει νὰ καταστήσωμεν τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς τέλειον τετράγωνον, διὰ προσθέσεως τοῦ ὅρου $\frac{\pi^2}{4}$ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς.

οὕτως ἔχομεν . . . . $\chi^2+\pi\chi+\frac{\pi^2}{4}=\kappa+\frac{\pi^2}{4}$

ἤτοι . . . . $\left(\chi+\frac{\pi}{2}\right)^2 = \kappa+\frac{\pi^2}{4}$ . . . . (2)

Σημειοῦντες δὲ, πρὸς περισσοτέραν ἁπλότητα, διὰ μ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ δευτέρου μέλους, τουτέστι θέτοντες

$$\sqrt{\kappa+\frac{\pi^2}{4}}=\mu$$

καὶ ἐπομένως . . . . . . $\kappa+\frac{\pi^2}{4}=\mu^2$

καὶ ἀντεισάγοντες τὸ ἴσον τοῦτο εἰς τὴν (2), λαμβάνομεν

$$\left(\kappa+\frac{\pi}{2}\right)^2=\mu^2$$

ἤτοι . . . . $\left(\chi+\frac{\pi}{2}\right)^2-\mu^2=0$ . . . . . . (3)

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν (1), ἐπειδὴ δὲ τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς εἶναι διαφορὰ δύο τετραγώνων, δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\left(\chi+\frac{\pi}{2}-\mu\right) \quad \left(\chi+\frac{\pi}{2}+\mu\right)=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον δύο παραγόντων ἀποβαίνει ἴσον τῷ 0 μόνον ὅταν ἐξισωθῇ μὲ τὸ 0 ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν ἀδιαφόρως· ὅθεν ἡ ἐξίσωσις αὕτη καὶ ἑπομένως ἡ (1) ταυτοποιεῖται,

ἢ ὅταν $\chi+\frac{\pi}{2}-\mu=0$ ὅθεν $\chi=-\frac{\pi}{2}+\mu$

ἢ ὅταν $\chi+\frac{\pi}{2}+\mu=0$ ὅθεν $\chi=-\frac{\pi}{2}-\mu$

καὶ ἀντεισαγομένης τῆς τιμῆς τοῦ μ συνάγονται αἱ τιμαὶ τοῦ χ

$$\chi=-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\kappa+\frac{\pi^2}{4}}$$

$$\chi=-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\kappa+\frac{\pi^2}{4}},$$

Ἐκ τούτου περιοριζόμεθα τὴν ἑξῆς ἀρχήν,

« Πάσης δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως ἡ ἄγνωστος ἔχει δύο τιμάς,
» καὶ δύο μόνον. »

ΣΗΜ. Τοῦτο δὲ πηγάζει ἐκ τῆς φύσεως τῆς ἐξισώσεως, ἤτοι ἐκ τῆς συνθέσεως αὐτῆς, καὶ οὐχὶ ἐκ τοῦ διπλοῦ σημείου τῆς ῥίζης. Ἡ ἀρχὴ αὕτη εἶναι γενικὴ καὶ διὰ τὰς ἐξισώσεις παντὸς βαθμοῦ. Οὕτως ἡ ἄγνωστος τῆς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως ἔχει τρεῖς τιμάς καὶ ἐν γένει ἡ ἄγνωστος ἔχει τοσαύτας τιμάς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ βαθμὸς τῆς ἐξισώσεως

§ 157. Αἱ τιμαὶ αὗται ἔχουσιν ἀξιοσημειώτους ἰδιότητας.

Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις . . . $\chi^2+\pi\chi=\kappa$

ἤτοι . . . . $\chi^2+\pi\chi-\kappa=0$

ἄγεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (4).

$$\left(\chi+\frac{\pi}{2}-\mu\right)\quad\left(\chi+\frac{\pi}{2}+\mu\right)=0$$

ἐὰν θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ μ ἔχομεν

$$\left(\chi+\frac{\pi}{2}-\sqrt{\kappa+\frac{\pi^2}{4}}\right)\quad\left(\chi+\frac{\pi}{2}+\sqrt{\kappa+\frac{\pi^2}{4}}\right)=0.$$

Βλέπομεν δέ, ὅτι ἑκάτερος τῶν παραγόντων τούτων εἶναι ἡ ἄγνωστος χ μεῖον ἡ τιμὴ τῆς ἀγνώστου. Ὅθεν ἕπεται ἡ δευτέρα αὕτη ἀρχή.

« Τὸ πρῶτον μέλος πάσης δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, τῆς ὁποίας
» τὸ δεύτερον εἶναι 0, σχηματίζεται ἐκ τοῦ γινομένου δύο παραγόν-
» των δυωνύμων καὶ πρωτοβαθμίων εἰς χ, ἐχόντων κοινὸν τὸν πρῶ-
» τον ὅρον χ, καὶ ὡς δευτέρους ὅρους, τὰς τιμὰς τῆς ἀγνώστου εἰ-
» λημμένας μ' ἐναντίον σημεῖον. »

Κατὰ τὴν ἀρχὴν λοιπὸν ταύτην ἔχοντες τὰς τιμὰς τῆς ἀγνώστου δυνάμεθα εὐκόλως νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν. Ἐκ τούτου δὲ αἱ τιμαὶ τῆς ἀγνώστου ὀνομάζονται *ῥίζαι* τῆς ἐξισώσεως.

Ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+3\chi-28=0$, ἥτις ἐπιλυθεῖσα δίδει

$$\chi=4 \quad \text{καὶ} \quad \chi=-7.$$

Τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς σχηματίζεται ἐκ τοῦ γινομένου

$$(\chi-4)\ (\chi+7)$$

Τῷ ὄντι.. $(\chi-4)\ (\chi+7)=\chi^2-4\chi+7\chi-28=\chi^2+3\chi-28.$

Παράδειγμα. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις, τῆς ὁποίας ἡ ἄγνωστος ἔχει τὰς δύο τιμὰς . . . . . $\chi=5$, $\chi=3$.

$$(\chi-5)\ (\chi-3)=\chi^2-8\chi+15=0.$$

§ 158. Σημειοῦντες διὰ χ' καὶ χ'' τὰς δύο ῥίζας τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως ἔχομεν κατὰ τὴν δευτέραν ἀρχήν,

$$\chi^2+\pi\chi-\kappa=(\chi-\chi')\ (\chi-\chi'')$$

καὶ ἐκτελοῦντες τοὺς ὑπολογισμοὺς

$$\chi^2+\pi\chi-\kappa=\chi^2-(\chi'+\chi'')\,\chi+\chi'\chi''$$

συγκρίνοντες πρὸς ἀλλήλους τοὺς ἀντιστοιχοῦντας ὅρους τῶν δύο μελῶν, λαμβάνομεν

$$\begin{cases} +\pi=-(\chi'+\chi'') \\ -\kappa=+\chi'\chi'' \end{cases}$$

ἤτοι . . . . $\begin{cases} \chi'+\chi''=-\pi \\ \chi'\cdot\chi''=-\kappa \end{cases}$

Συνάγομεν λοιπὸν ἐκ τούτου τὴν τρίτην ἀρχήν,

« Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν δύο ῥιζῶν ἰσοῦται μὲ τὸν συντελε-
» στὴν τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς ἐξισώσεως, λαμβανόμενον μὲ σημεῖον
» ἐναντίον. Τὸ δὲ γινόμενον τῶν δύο ῥιζῶν ἰσοῦται μὲ τὸν συντελε-
» στὴν τοῦ τρίτου ὅρου τῆς ἐξισώσεως, μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἤτοι μὲ
» τὸν τελευταῖον ὅρον. »

Τὴν τελευταίαν ταύτην ἀρχὴν δυνάμεθα νὰ ἐπιβεβαιώσωμεν διὰ τῶν γενικῶν ἐκφράσεων τῶν ῥιζῶν. Διότι ἐὰν προσθέσωμεν τὰς γενικὰς τιμὰς τοῦ χ θέλομεν εὕρει ἄθροισμα $-\pi$. Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν αὐτάς, θέλομεν εὕρει γινόμενον $-\kappa$. Τῷ ὄντι προσθέτοντες.

$$\chi'=-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\kappa+\frac{\pi^2}{4}}$$

$$\chi''=-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\kappa+\frac{\pi^2}{4}}$$

λαμβάνομεν $\chi'+\chi''=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}-\sqrt{\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}$

καὶ ἀνάγοντες $\chi'+\chi''=-\pi.$

πολλαπλασιάζοντες δὲ συνάγομεν

$$\chi'\chi''=\left(-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}\right)\left(-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}\right)$$

ἤτοι $\chi'\chi''=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}\sqrt{\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}+\frac{\pi}{2}\sqrt{\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}-\left(\varkappa+\frac{\pi^2}{4}\right)$

$$\chi'\chi''=-\varkappa.$$

§ 159. Μετὰ τὰς ἀρχὰς ταύτας ἃς θεωρήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν καὶ τὸν γενικὸν τύπον τῶν ῥιζῶν αὐτῆς

$$\chi^2+\pi\chi=\varkappa. \qquad \chi=-\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}$$

Ἐπειδὴ οἱ συντελεσταὶ π καὶ κ δυνατὸν νὰ ἔχωσιν ἀδιαφόρως τὸ σημεῖον + ἢ —, ἡ ἐξίσωσις ἄρα τοῦ β'. βαθμοῦ καὶ οἱ τύποι τῶν ῥιζῶν αὐτῆς δύνανται νὰ παρουσιασθῶσιν ὑπὸ τὰς ἑξῆς μορφάς,

$$+\varkappa\begin{cases}+\pi, \ldots \chi^2+\pi\chi=+\varkappa & \chi=-\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}\\ -\pi, \ldots \chi^2-\pi\chi=+\varkappa & \chi=+\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}\end{cases}$$

$$-\varkappa\begin{cases}+\pi, \ldots \chi^2+\pi\chi=-\varkappa & \chi=-\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{-\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}\\ -\pi, \ldots \chi^2-\pi\chi=-\varkappa & \chi=+\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{-\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}\end{cases}$$

Παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον ὅτι ἐπειδὴ ὁ ὅρος $\frac{\pi^2}{4}$ τῆς ὑποῤῥίζου ποσότητος εἶναι πάντοτε θετικός, οἱονδήποτε ἂν ὑποτεθῇ τὸ σημεῖον τοῦ π, ἄρα τὸ σημεῖον τῆς ὑποῤῥίζου ποσότητος, καὶ ἑπομένως ἡ πραγματικότης τῶν τιμῶν τοῦ χ, ἐξαρτᾶται ἐκ μόνου τοῦ κ. Θέλομεν λοιπὸν διαιρέσει τὴν διερεύνησιν ταύτην εἰς δύο γενικὰς περιπτώσεις· κατὰ τὴν πρώτην θεωροῦμεν τὸ κ θετικόν, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν ἀρνητικόν· ἑκατέραν τῶν περιπτώσεων τούτων ὑποδιαιροῦμεν εἰς δύο μερικωτέρας, κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ π, ὡς εἰς τὸ ἀνωτέρω διάγραμμα φαίνεται. Ὅθεν

Α΄. Ἔστω κ θετικόν.

Ἡ ποσότης $\kappa+\frac{\pi^2}{4}$ οὖσα θετική, $\sqrt{\kappa+\frac{\pi^2}{4}}$ εἶναι πραγματική.

ἐπειδὴ δὲ . $\kappa+\frac{\pi^2}{4}>\frac{\pi^2}{4}$ ἑπομένως $\sqrt{\kappa+\frac{\pi^2}{4}}>\frac{\pi}{2}$.

ἕπεται ὅτι ὁ πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ ὅρος, $-\frac{\pi}{2}$ ἢ $+\frac{\pi}{2}$, δὲν μεταβάλλει τὰ σημεῖα τῶν δύο τιμῶν.

Ἄρα ὅταν τὸ κ ἦναι θετικόν, αἱ δύο τιμαὶ τοῦ χ εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἐναντίων σημείων· ἐκ τούτων δὲ ἡ μὲν πρώτη εἶναι θετική, ἡ δὲ δευτέρα ἀρνητική, οἱονδήποτε ὑποτεθῇ τὸ σημεῖον τοῦ π.

Β΄. Ἔστω κ ἀρνητικόν.

Ἐπειδὴ ἡ ὑπόῤῥιζος ποσότης συνίσταται ἐκ τῶν δύο ὅρων $-\kappa$ καὶ $\frac{\pi^2}{4}$ πρέπει νὰ θεωρήσωμεν τρεῖς μερικὰς περιπτώσεις.

ά. ὅταν $\kappa<\frac{\pi^2}{4}$

β΄. ὅταν $\kappa>\frac{\pi^2}{4}$

γ΄. ὅταν $\kappa=\frac{\pi^2}{4}$.

Ὅθεν, ἐὰν $\kappa<\frac{\pi^2}{4}$, ἡ ποσότης $\sqrt{-\kappa+\frac{\pi^2}{4}}$ εἶνε πραγματική.

Ἐπειδὴ δὲ . . $-\kappa+\frac{\pi^2}{4}<\frac{\pi^2}{4}$ ἑπομένως $\sqrt{-\kappa+\frac{\pi^2}{4}}<\frac{\pi}{2}$

ἄρα αἱ δύο τιμαὶ τοῦ χ εἶναι πραγματικαί.

Ὡς πρὸς τὸ σημεῖον αὐτῶν παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἔχωμεν $+\pi$, αἱ δύο τιμαὶ εἶναι ἀρνητικαί. Ἐὰν δὲ ἔχωμεν $-\pi$ αἱ δύο τιμαὶ εἶναι θετικαί.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἂς σημειώσωμεν $\sqrt{-\kappa+\frac{\pi^2}{4}}=\frac{\pi}{2}-\alpha$

ὅθεν ἔχομεν

$$+\pi\left\{\begin{aligned}\chi&=-\frac{\pi}{2}+\sqrt{-\kappa+\frac{\pi^2}{4}}=-\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-A\\ \chi&=-\frac{\pi}{2}+\sqrt{-\kappa+\frac{\pi^2}{4}}=-\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-B\end{aligned}\right.$$

$$-\pi\left\{\begin{array}{l}\chi=+\frac{\pi}{2}+\sqrt{-\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}=+\frac{\pi}{2}+(\frac{\pi}{2}-\alpha)=+A\\ \chi=+\frac{\pi}{2}-\sqrt{-\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}=+\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2}-\alpha)=+B.\end{array}\right.$$

Ἐὰν $\varkappa > \frac{\pi^2}{4}$ ἡ ποσότης $\sqrt{-\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}$ εἶναι ἰδανική.

Ἄρα αἱ δύο τιμαὶ τοῦ χ εἶναι ἰδανικαί.

Ἐὰν $\varkappa=\frac{\pi^2}{4}$ ἡ ὑπόῤῥιζος ποσότης μηδενίζεται, καὶ αἱ δύο τιμαὶ τοῦ χ καταντῶσιν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τιμήν. Τουτέστιν αἱ δύο τιμαὶ τοῦ χ εἶναι ἴσαι τῷ ἡμίσει τοῦ συντελεστοῦ π εἰλημμένου μ' ἐναντίον σημεῖον, ἤτοι

ὅταν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ὑπάρχῃ $+\pi$ τότε $\chi=-\frac{\pi}{2}$

ὅταν δὲ » » » $-\pi$ » $\chi=+\frac{\pi}{2}$.

Γ'. Ἐὰν $\varkappa=0$, αἱ δύο τιμαὶ τοῦ χ ἀποβαίνουσιν

εἰς μὲν τὴν περίπτωσιν τοῦ $+\pi$ εἰς $\left\{\begin{array}{l}\chi=0\\ \chi=-\pi\end{array}\right.$

εἰς δὲ τὴν περίπτωσιν τοῦ $-\pi$ εἰς $\left\{\begin{array}{l}\chi=+\pi\\ \chi=0.\end{array}\right.$

Καὶ τῷ ὄντι ἡ ἐξίσωσις ἄγεται εἰς $\chi^2+\pi\chi=0$ ἢ εἰς $\chi^2-\pi\chi=0$ τουτέστιν εἰς $\chi(\chi+\pi)=0$ ἢ εἰς $\chi(\chi-\pi)=0$

Δ'. Ἐὰν $\pi=0$. Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις $\chi^2+\pi\chi=\varkappa$ ἀποβαίνουσα δύορος $\chi^2=\varkappa$ δίδει $\chi=\pm\sqrt{\varkappa}$, τουτέστιν αἱ δύο τιμαὶ τοῦ χ εἶναι ἴσαι καὶ ἐναντίων σημείων, πραγματικαὶ ἢ ἰδανικαὶ κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ $\varkappa$.

Ε'. Ἐὰν $\pi=0$ καὶ $\varkappa=0$, ἡ ἐξίσωσις ἄγεται εἰς $\chi^2=0$, ὅθεν αἱ τιμαὶ τοῦ χ ἰσοῦνται τῷ 0.

Εἰς τὸν ἑπόμενον πίνακα ἐκθέτομεν περιληπτικῶς τὰ ἐξαγόμενα τῶν τιμῶν τοῦ χ, κατὰ τὰς δύο γενικὰς ὑποθέσεις.

$$+\cdots\cdot\varkappa\left\{\begin{array}{l}+\pi\left\{\begin{array}{l}\chi'=+A\\ \chi''=-B\end{array}\right.\\ -\pi\left\{\begin{array}{l}\chi'=+A\\ \chi''=-B\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$
-\kappa \begin{cases}
\kappa < \frac{\pi^2}{4} & \begin{cases} +\pi \begin{cases} \chi' = -A \\ \chi'' = -B \end{cases} \\ -\pi \begin{cases} \chi' = +A \\ \chi'' = +B \end{cases} \end{cases} \\
\kappa > \frac{\pi^2}{4} & \begin{cases} +\pi \begin{cases} \chi' = -A + \sqrt{-B} \\ \chi'' = -A - \sqrt{-B} \end{cases} \\ -\pi \begin{cases} \chi' = +A + \sqrt{-B} \\ \chi'' = +A - \sqrt{-B} \end{cases} \end{cases} \\
\kappa = \frac{\pi^2}{4} & \begin{cases} +\pi \begin{cases} \chi' = -\frac{\pi}{2} \\ \chi'' = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \\ -\pi \begin{cases} \chi' = +\frac{\pi}{2} \\ \chi'' = +\frac{\pi}{2} \end{cases} \end{cases}
\end{cases}
$$

Διερεύνησις προβλημάτων τινῶν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

§ 160. Πρόβλημα Ε΄. Δύο φῶτα Α καὶ Β διαφόρου ἐντάσεως κεῖνται ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ, ζητεῖται νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ἐπ' αὐτῆς ἐπίσης φωτιζόμενον σημεῖον.

Ὑποθέτομεν γνωστὴν τὴν ἀρχὴν ταύτην τῆς φυσικῆς (*) ὅτι αἱ ἐντάσεις τοῦ αὐτοῦ φωτὸς εἰς δύο διάφορα διαστήματα εἶναι εἰς ἀντίστροφον λόγον τῶν τετραγώνων τῶν διαστημάτων.

Λύσις. Ἂς σημειώσωμεν διὰ

α, τὸ μεταξὺ τῶν δύο φώτων διάστημα ΑΒ.

ϐ, τὴν ἔντασιν τοῦ φωτὸς Α εἰς τὴν μονάδα τοῦ διαστήματος.

γ, τὴν » » » Β » » » » »

(*) Τὴν γεωμετρικὴν ἀπόδειξιν τῆς ἀρχῆς ταύτης ἐκθέτομεν εἰς τὸ παράρτημα τῆς Στοιχειώδους ταύτης σειρᾶς, ἐπιγραφόμενον Μαθηματικὰ Γυμνάσματα.

Έστω Σ, τὸ ζητούμενον σημεῖον,
καὶ ΑΣ$=\chi$, ἑπομένως ΒΣ$=\alpha-\chi$.

Σημειοῦντες προσέτι διὰ y τὴν εἰς τὸ σημεῖον Σ ἴσην ἔντασιν τῶν φώτων ἔχομεν κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἀρχὴν

$$\left.\begin{array}{l} \beta : y :: \chi^2 : 1 \\ \gamma : y :: (\alpha-\chi)^2 : 1 \end{array}\right\} \text{ ὅθεν } \left|\begin{array}{l} y=\dfrac{\beta}{\chi^2} \\ y=\dfrac{\gamma}{(\alpha-\chi)^2} \end{array}\right.$$

ἑπομένως λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\beta}{\chi^2}=\frac{\gamma}{(\alpha-\chi)^2}$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ $(\alpha-\chi)^2$ καὶ διαιροῦντες αὐτὰ διὰ β

συνάγομεν $$\frac{(\alpha-\chi)^2}{\chi^2}=\frac{\gamma}{\beta}$$

Ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῶν δύο μελῶν, λαμβάνομεν

$$\frac{(\alpha-\chi)}{\chi}=\pm\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\beta}}$$

Ἀφανίζοντες τοὺς παρονομαστάς, μεταθέτοντες καὶ ἀνάγοντες

ἔχομεν διαδοχικῶς
$$\begin{aligned} \alpha\sqrt{\beta}-\chi\sqrt{\beta}&=\pm\chi\sqrt{\gamma} \\ -\chi\sqrt{\beta}+\chi\sqrt{\gamma}&=-\alpha\sqrt{\beta} \\ \chi\sqrt{\beta}\pm\chi\sqrt{\gamma}&=\ \ \alpha\sqrt{\beta} \\ (\sqrt{\beta}\pm\sqrt{\gamma})\chi&=\ \ \alpha\sqrt{\beta} \end{aligned}$$

ὅθεν . . . . $\chi=\dfrac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}\pm\sqrt{\gamma}}$

Αἱ δύο τιμαὶ τοῦ χ εἶναι

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha'. & \chi=\dfrac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}} \\ \beta'. & \chi=\dfrac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}} \end{array}\right\} \text{ ὅθεν } \left\{\begin{array}{l} \alpha-\chi=\dfrac{\alpha\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}} \\ \alpha-\chi=-\dfrac{\alpha\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}} \end{array}\right.$$

Διερεύνησις. Ἐπὶ τῶν ποσοτήτων α, β, καὶ γ, αἵτινες εἰσέρχονται εἰς τὰς τιμὰς τῆς ἀγνώστου, πέντε ὑποθέσεις δυνάμεθα νὰ κάμωμεν, τὰς ἑξῆς.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Α΄. } \beta > \gamma \\ \text{Β΄. } \beta < \gamma \\ \text{Γ΄. } \beta = \gamma\end{array}\right\} \text{ τοῦ διαστήματος } \alpha \text{ ὄντος οἱουδήποτε.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Δ΄. } \beta = \gamma \\ \text{Ε΄. } \beta \gtrless \gamma\end{array}\right\} \text{ καὶ } \alpha = 0.$$

Ὅθεν ἂς ἐξετάσωμεν μίαν ἑκάστην τῶν περιπτώσεων τούτων.

Α΄. Ἔστω $\beta > \gamma$.

Ἡ πρώτη τιμὴ τοῦ χ εἶναι θετικὴ καὶ μικροτέρα τοῦ α.

Ἐπειδὴ δὲ $\sqrt{\beta} > \sqrt{\gamma}$ ὅθεν $\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta} > \sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}$.

ἕπεται ὅτι $$\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}} > \frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}}$$

ἤτοι $$\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}} > \frac{\alpha\sqrt{\beta}}{2\sqrt{\beta}}$$

τουτέστι $$\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}} > \frac{\alpha}{2}.$$

Λοιπὸν τὸ σημεῖον Σ κεῖται μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β, ἀλλὰ πλησιέστερον τοῦ Β, τοῦτο δὲ συμφωνεῖ μὲ τὴν ὑπόθεσιν τῆς μεγαλητέρας ἐντάσεως τοῦ φωτὸς Α.

Ἀποδεικνύομεν παρομοίως ὅτι ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ $\alpha-\chi$ εἶναι μικροτέρα τοῦ $\frac{\alpha}{2}$.

Ἡ δευτέρα τιμὴ τοῦ χ εἶναι ἐπίσης θετικὴ, ἀλλὰ μείζων τοῦ α.

Ἐπειδὴ $$\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma} < \sqrt{\beta}$$

ἄρα . . . . . . $$\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}} > \frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}}$$

ἤτοι . . . . . . $$\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}} > \alpha.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη λοιπὸν δίδει σημεῖόντι Σ΄ κείμενον ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΑΒ, δεξιόθεν τῶν δύο φώτων.

Τὸ ἐπίσης φωτιζόμενον τοῦτο σημεῖον Σ΄, δίδεται τῷ ὄντι, ὅταν ἡ ὑπεροχὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ φωτὸς Α ἦναι τοιαύτη, ὥστε δὲν ἐξαρκεῖ τὸ διάστημα ΑΒ, νὰ ἐξασθενίσῃ αὐτὴν ἐπὶ τοσοῦτον, ὥστε νὰ καταστῃθῇ ἴση μὲ τὴν ἔντασιν τοῦ φωτὸς Β.

Ἡ δευτέρα τιμὴ τοῦ $\alpha-\chi$ εἶναι ἀρνητική. Καὶ τῷ ὄντι πρέπει νὰ ἦναι τοιαύτη, διότι $\mathrm{A\Sigma'} > \mathrm{AB}$ ἤτοι $\chi > \alpha$.

Βλέπομεν δὲ, ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ σημείου Σ΄, ἀνάγκη ν' ἀλλαχθῇ ἡ διεύθυνσις ἀπὸ ΒΣ εἰς ΒΣ΄.

Τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ $\alpha-\chi$ εὑρίσκομεν μεταβάλλοντες τὰ σημεῖα τῆς ἐξισώσεως.

$$\alpha-\chi=\frac{-\alpha\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}$$

οὕτως ἔχομεν $$\mathrm{B\Sigma'}=\chi-\alpha=\frac{\alpha\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}-\sqrt{\beta}}$$

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι ἐπειδὴ ὑπετέθη μὲν ἡ ἔντασις τοῦ φωτὸς Α μείζων τῆς τοῦ Β, ἤτοι $\beta > \gamma$, ἀλλὰ δὲν προσδιωρίσθη ἡ ὑπεροχὴ, ἡ ἐξίσωσις ἔπρεπεν ἀναγκαίως νὰ συνδέσῃ καὶ τὰς δύο περιστάσεις, καὶ νὰ δώσῃ ἐπομένως καὶ διὰ τὰς δύο τὰς ἀνηκούσας τιμάς. Μίαν προσδιορίζουσαν τὸ Σ, ὅταν ἡ ὑπεροχὴ τῆς ἐντάσεως ἦναι μετρία καὶ ἄλλην προσδιορίζουσαν τὸ Σ΄, ὅταν ἡ ὑπεροχὴ τῆς ἐντάσεως ἦναι μεγάλη.

Δυνάμεθα δὲ νὰ ἴδωμεν καὶ ἀλγεβρικῶς, διατὶ αἱ δύο αὗται τιμαὶ συνδέονται διὰ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως. Ἐπειδὴ $(\chi-\alpha)^2$ ἰσοῦται μὲ $(\alpha-\chi)^2$, ἡ νέα ἐξίσωσις εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν προευρεθεῖσαν, ἄρα πρέπει ἐπίσης νὰ δίδῃ ΑΣ καθὼς καὶ ΑΣ΄.

Β΄. Ἔστω $\beta < \gamma$.

Ἡ πρώτη τιμὴ τοῦ χ εἶναι πάντοτε θετική, ἀλλὰ μικροτέρα τοῦ $\frac{\alpha}{2}$

διότι ἐκ τῆς ἀνισότητος $\sqrt{\beta} < \sqrt{\gamma}$

ἔχομεν . . . $\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta} < \sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}$

ἤτοι . . . . $2\sqrt{\beta} < \sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}$

ἐπομένως . . . $\dfrac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}} < \dfrac{\alpha\sqrt{\beta}}{2\sqrt{\beta}}$ ἤτοι $\dfrac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}} < \dfrac{\alpha}{2}$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λοιπὸν τὸ ζητούμενον σημεῖον Σ΄΄ κεῖται μὲν μεταξὺ τοῦ Α καὶ Β, πλησιάζει δὲ μᾶλλον εἰς τὸ Α. Τοῦτο δὲ ἀπαιτεῖ ἡ μεταξὺ τῶν ἐντάσεων δευτέρα ὑπόθεσις.

Ἡ δευτέρα τιμὴ τοῦ χ εἶναι ἀρνητικὴ, διότι $\sqrt{\beta} < \sqrt{\gamma}$.

Ἵνα ἑρμηνεύσωμεν αὐτὴν, ἀνατρέχομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\beta}{\chi^2}=\frac{\gamma}{(\alpha-\chi)^2}$$

καὶ θέτομεν $+\chi$ ἀντὶ τοῦ $-\chi$, ὥστε λαμβάνομεν

$$\frac{\beta}{\chi^2}=\frac{\gamma}{(\alpha+\chi)^2}$$

Συγκρίνοντες τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις, βλέπομεν, ὅτι ἐνῷ ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἀπόστασις τοῦ ζητουμένου σημείου ἐξεφράζετο διὰ $\alpha-\chi$, ἡ αὐτὴ ἀπόστασις ἐκφράζεται ἤδη διὰ τοῦ $\alpha+\chi$. Πρέπει λοιπὸν τὸ ζητούμενον σημεῖον νὰ κεῖται ἀριστερόθεν τοῦ Α, ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τοῦ ΒΑ, δηλαδὴ εἰς τὸ Σ΄΄. Καὶ τῷ ὄντι οὔσης τῆς τοῦ φωτὸς Β ἐντάσεως μείζονος τῆς τοῦ Α, δυνατὸν νὰ ὑπάρξῃ τὸ σημεῖον τοῦτο, ὅταν ἡ ὑπεροχὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ Β ἦναι ἱκανῶς μεγάλη, ὥστε νὰ μὴ ἐξαρκῇ τὸ διάστημα ΒΑ πρὸς ἐξίσωσιν μὲ τὴν πυκνότητα τοῦ φωτὸς Α.

Ἡ δευτέρα τιμὴ τοῦ $\alpha-\chi$ εἶναι θετικὴ, καὶ συμφωνεῖ μὲ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην, διότι πρέπει νὰ διατηρηθῇ ἡ αὐτὴ τῆς ΒΣ διεύθυνσις. Εἶναι δὲ προσέτι $>\alpha$.

Γ΄. Ἔστω $\beta=\gamma$.

Αἱ δύο πρῶται τιμαὶ

$$\chi=\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}} \quad \text{καὶ} \quad \alpha-\chi=\frac{\alpha\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}$$

ἄγονται τότε εἰς $\frac{\alpha}{2}$ καὶ δίδουσι τὸ μέσον τῆς ΑΒ, ἤτοι τὸ σημεῖον Ο, ὡς ἐξίσου φωτιζόμενον.

Αἱ δύο ἄλλαι τιμαὶ

$$\chi=\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}} \quad \text{καὶ} \quad \alpha-\chi=\frac{-\alpha\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}$$

ἄγονται εἰς $\chi=\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{0}$ καὶ $\alpha-\chi=-\frac{\alpha\sqrt{\gamma}}{0}$

ἤτοι . . . . $\chi=+\infty$ καὶ $\alpha-\chi=-\infty$.

τουτέστι γίνονται ἄπειροι. Τοῦτο δεικνύει, ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἐνόσῳ ὑπάρχει διάστημά τι μεταξὺ τῶν δύο φώτων, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ δεύτερόν τι σημεῖον ἐξίσου φωτιζόμενον εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν· ὅταν δὲ τὸ σημεῖον τοῦτο ὑποτεθῇ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν, τότε τὸ διάστημα α δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς 0.

Δ'. Ἔστω $\beta=\gamma$ καὶ $\alpha=0$.

Τὸ μὲν πρῶτον σύστημα τῶν τιμῶν τοῦ χ καὶ $\alpha-\chi$ ἄγεται εἰς 0.

Τὸ δὲ δεύτερον εἰς $\frac{0}{0}$ ἤτοι ἐμφαίνεται ὑπὸ τὸ σύμβολον τοῦ ἀπροσδιορίστου. Τοῦτο δὲ συμφωνεῖ ἐντελῶς μὲ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην τῆς ἴσης ἐντάσεως. Πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ φωτίζεται ἐξίσου.

Ε'. Ἔστω $\alpha=0$ καὶ $\beta \gtrless \gamma$.

Ἑκάτερον τῶν δύο συστημάτων τῶν τιμῶν τοῦ χ καὶ $\alpha-\chi$ ἄγεται εἰς 0.

Καὶ τῷ ὄντι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, καθ' ἣν δύο φῶτα διαφόρου ἐντάσεως κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρξῃ ἕτερόν τι σημεῖον ἐξ ἴσου φωτιζόμενον, εἰμὴ ἐκεῖνο, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται τὰ δύο φῶτα.

Πρόβλημα ϛ'. Δοθέντος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν καὶ τοῦ γινομένου αὐτῶν, νὰ εὕρωμεν τοὺς δύο ἀριθμούς.

Ἂς σημειώσωμεν διὰ π τὸ ἄθροισμα, καὶ διὰ $\varkappa$ τὸ γινόμενον.

Ἔστωσαν χ καὶ y οἱ δύο ἀριθμοί.

Ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις $\quad \chi+y=\pi \cdots\cdots (1)$

$\chi \cdot y=\varkappa \cdots\cdots (2)$

Λύσις. Εἶναι φανερόν, ἐξ ὅσων εἴπομεν (§ 158) ὅτι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι αἱ δύο ῥίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως

$$\chi^2-\pi\chi+\varkappa=0 \cdots\cdots (3)$$

Διότι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸν συντελεστὴν τοῦ δευτέρου ὅρου π, εἰλημμένον μ' ἐναντίον σημεῖον, τὸ δὲ γινόμενον, μὲ τὸν τρίτον ὅρον τῆς ἐξισώσεως, εἰλημμένον μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον ἠθέλαμεν φθάσει καὶ διὰ τῆς ἀπαλείψεως. Τῷ ὄντι λαμβάνοντες ἐκ τῆς (1) τὴν τιμὴν τοῦ y ἔχομεν

$$y=\pi-\chi$$

καὶ ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν (2) εὑρίσκομεν

$$\chi(\pi-\chi)=\varkappa \text{ ἢ } \pi\chi-\chi^2=\varkappa$$

ἀλλάσσοντες τὰ σημεῖα τῶν ὅρων καὶ μεταθέτοντες συνάγομεν

$$\chi^2-\pi\chi+\varkappa=0.$$

Λαμβάνοντες λοιπὸν τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως (3) θέλομεν ἔχει τοὺς δύο ζητουμένους ἀριθμούς.

$$\chi=\frac{\pi}{2}+\sqrt{-\varkappa+\frac{\pi^2}{4}} \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{\pi}{2}-\sqrt{-\varkappa+\frac{\pi^2}{4}}.$$

Διερεύνησις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο δὲν εἶναι πάντοτε δυνατόν, διότι ἐὰν $\kappa > \frac{\pi^2}{4}$ ἡ ὑπόῤῥιζος ποσότης εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἐπομένως αἱ τιμαὶ τοῦ χ καὶ y εἶναι ἰδανικαί. Ἡ μεγίστη τιμή, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ ἔχῃ τὸ κ εἶναι $\frac{\pi^2}{4}$ ἀλλὰ τότε

$$\chi = \frac{\pi}{2} \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{\pi}{2}$$

τουτέστιν ἑκάτερος τῶν δύο ζητουμένων ἀριθμῶν εἶναι ἴσος μὲ $\frac{\pi}{2}$ ἤτοι μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ δοθέντος ἀθροίσματος. Ἐπειδὴ δὲ τὸ κ παριστάνει τὸ γινόμενον, ἄρα δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι,

« Τὸ μέγιστον γινόμενον, τὸ ὁποῖον δυνατὸν νὰ γίνῃ ἐκ τῶν δύο » μερῶν ἀριθμοῦ τινος, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεως τοῦ » ἀριθμοῦ τούτου. »

Οὕτω τὸ μέγιστον γινόμενον, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἐκ δύο μερῶν τοῦ ἀριθμοῦ 12 εἶναι 36.

ΣΗΜ. Ἐὰν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ π παραστήσωμεν εὐθεῖάν τινα, καὶ διὰ τοῦ κ τετραγωνικήν τινα ἐπιφάνειαν, θέλομεν ἔχει τὸ ἑξῆς γεωμετρικὸν πρόβλημα.

« Νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ δεδομένον τετράγωνον κ, καὶ » τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν δύο διαστάσεων εἶναι ἡ εὐθεῖα π. »

Τὸ γεωμετρικὸν τοῦτο πρόβλημα δὲν λύεται ὅταν ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου ἦναι μείζων τοῦ ἡμίσεως τῆς δεδομένης εὐθείας, τουτέστιν ὅταν $\sqrt{\kappa} > \frac{\pi}{2}$ ἤτοι ὅταν $\kappa > \frac{\pi^2}{4}$.

Πρόβλημα Ζ'. Δοθέντος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν, καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων αὐτῶν, νὰ εὕρωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.

Ἂς σημειώσωμεν διὰ α τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν καὶ διὰ β τὸ τῶν τετραγώνων.

Ἔστωσαν χ καὶ y οἱ δύο ζητούμενοι ἀριθμοί.

Ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις $\chi + y = \alpha$ . . . . (1)

$\chi^2 + y^2 = \beta$ . . . . (2)

Λύσις. Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $(\chi + y)^2 = \alpha^2$

ἤτοι . . . . $\chi^2 + 2\chi y + y^2 = \alpha^2$

καὶ ἀφαιροῦντες τὴν (2) . . . . $\chi^2 + y^2 = \beta$

συνάγομεν . . . . $2\chi y = \alpha^2 - \beta$ (3)

Παρατηροῦντες τὰς δύο ἐξισώσεις (1) καὶ (3) βλέπομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι α, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν $\frac{\alpha^2-\beta}{2}$. Ὅθεν κατὰ τὸ προηγηθὲν πρόβλημα οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\chi^2-\alpha\chi+\frac{\alpha^2-\beta}{2}=0.$$

Λαμβάνοντες λοιπὸν ταύτας ἔχομεν

$$\chi=\frac{\alpha}{2}+\sqrt{-\frac{\alpha^2-\beta}{2}+\frac{\alpha^2}{4}} \quad y=\frac{\alpha}{2}-\sqrt{-\frac{\alpha^2-\beta}{2}+\frac{\alpha^2}{4}}$$

καὶ δι' ἀναγωγῆς,

$$\chi=\frac{\alpha+\sqrt{2\beta-\alpha^2}}{2}, \quad y=\frac{\alpha-\sqrt{2\beta-\alpha^2}}{2}$$

Πρόβλημα Η'. Ζητοῦνται δύο ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι α, και ὁ μείζων ἐξ αὐτῶν εἶναι μέσος ἀνάλογος μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος α καὶ τοῦ ἐλάσσονος.

Ἔστω χ ὁ μείζων
$\alpha-\chi$ ὁ ἐλάσων

ἔχομεν κατὰ τὴν ἐκφώνησιν, τὴν ἀναλογίαν

$$\alpha : \chi :: \chi : \alpha-\chi \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \chi^2=\alpha\,(\alpha-\chi)$$

ἤτοι $\chi^2+\alpha\chi=\alpha^2$

ἐκ ταύτης λαμβάνομεν $\chi=-\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\alpha^2+\frac{\alpha^2}{4}}$ . . . (1)

Ἡ πρώτη τιμὴ εἶναι θετικὴ καὶ $>$ τοῦ $\frac{\alpha}{2}$, ὡς ἀπαιτεῖ τὸ πρόβλημα.

Ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ δευτέρου μέρους $\alpha-\chi$ εἶναι

$$\alpha-\chi=\alpha+\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\alpha^2+\frac{\alpha^2}{4}}$$

ἤτοι . . . . . $\alpha-\chi+\frac{3\alpha}{2}-\sqrt{\alpha^2+\frac{\alpha^2}{4}}$ . . . (2)

καὶ αὕτη εἶναι θετικὴ καὶ $<\frac{\alpha}{2}$.

Αἱ δύο αὗται τιμαὶ δύνανται ν' ἀχθῶσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\chi=\frac{\alpha}{2}(-1+\sqrt{5})$$

$$\alpha-\chi=\frac{\alpha}{2}(3-\sqrt{5})$$

ὥστε ὁ λόγος αὐτῶν

$$\frac{\chi}{\alpha-\chi}=\frac{-2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ α, τουτέστιν εἶναι πάντοτε ὁ αὐτὸς οἱονδήποτε ὑποτεθῇ τὸ α.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

§ 161. Α′. Δύο ἔμποροι ἔλαβον ὡς ἐξαγόμενον τῆς μεταξὺ αὐτῶν ἑταιρίας, συμποσούμενον ἐκ τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ κέρδους δρχ. 3000. Τὸ μὲν κεφάλαιον τοῦ πρώτου εἶναι 600 δραχ. τὸ δὲ κέρδος τοῦ δευτέρου εἶναι 800 δραχ. Ζητεῖται τὸ κέρδος τοῦ πρώτου καὶ τὸ κεφαλαιον τοῦ δευτέρου.

	Κεφάλαιον	Κέρδος	Ἐξαγόμενον
Α′	600	χ	3000
Β′	y	800	

Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν . . . $600+\chi+y+800=3000$

ἤτοι . . . . $\chi+y=1600$. (1)

τὰ κέρδη εἶναι ἀνάλογα τῶν κεφαλαίων

ὅθεν . . . . $600 : y :: \chi : 800$

ἐξ ἧς . . . . $\chi y=480000.$ (2)

$$\chi=1200 \qquad y=400.$$

Β′. Δύο γραμμάτια, ἐξ ὧν τὸ μὲν ἐκ δραχμῶν 6240, πληρωτέων μετὰ 8 μῆνας, τὸ δὲ ἐκ δραχμῶν 7632, πληρωτέων μετὰ 9 μῆνας, ἀνταλλάσσονται διὰ τρίτου ἐκ δραχμῶν 14256, πληρωτέον μετὰ 12 μῆνας Ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον τῆς ὑφαιρέσεως.

Ὁδηγία. Εὑρίσκεται ἡ τιμὴ τῆς προεξοφλήσεως ἑκατέρου τῶν γραμματίων. Προσδιορίζεται ὁ τόκος τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν διὰ 12 μῆνας. Ἐξισοῦται τὸ σύνολον τῶν τιμῶν μετὰ τοῦ τόκου αὐτῶν μὲ τὸν ἀριθμὸν 14256.

Ἀπόκρ. 10,33 τοῖς $\frac{0}{0}$ κατ' ἔτος.

Γ'. Ἔχων τις 13000 δραχμάς, μερίζει αὐτὰς εἰς δύο ἄνισα μέρη, τὰ ὁποῖα τοκίζει ἐπὶ διαφόρῳ τιμῇ καὶ ἀπολαμβάνει ἐτησίως ἐξ ἑκατέρου μέρους τὸν αὐτὸν τόκον. Ἐὰν δὲ ἐτόκιζε τὸ πρῶτον μέρος, ἐπὶ τῇ τιμῇ τοῦ δευτέρου ἤθελε λάβει ἐκ τούτου 360 δραχ. Καὶ ἐὰν ἐτόκιζε τὸ δεύτερον, ἐπὶ τῇ τιμῇ τοῦ πρώτου, ἤθελε λάβει 490 δρχ. Ζητοῦνται τὰ δύο μερικὰ κεφάλαια καὶ τὰ δύο ἐπιτόκια.

Ἀπόκρ. α΄ μέρος δρχ. 6000 ἐπιτόκιον 7.
β΄. » 7000 » 6.

Δ'. Ἐργασθέντες δύο τεχνῖται μὲ διάφορον ἡμερομίσθιον ἐπληρώθησαν ἀναλόγως τῶν ἡμερῶν, τὰς ὁποίας εἰργάσθησαν. Καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἔλαβεν 96 δραχμάς, ὁ δὲ δεύτερος 6 ἡμέρας ὀλιγώτερον τοῦ πρώτου ἐργασθεὶς ἔλαβε 54 δραχ. Ἂν ὅμως ὁ δεύτερος ἤθελεν ἐργασθῇ ὅλας τὰς ἡμέρας, ὁ δὲ πρῶτος 6 ἡμέρας ὀλιγώτερον, ἤθελον λάβει καὶ οἱ δύο ἴσα.

Ζητοῦνται αἱ ἡμέραι, τὰς ὁποίας εἰργάσθη ἑκάτερος τῶν τεχνιτῶν καὶ τὰ δύο ἡμερομίσθια.

Ἀπόκρ. Ἡμέραι τοῦ πρώτου 24, ἡμερομίσθιον 4. δρ.
Ἡμέραι τοῦ δευτέρου 18, ἡμερομίσθιον 3. δρ.

Ε'. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι α, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν β. Ποῖοι εἶναι οἱ δύο ἀριθμοί;

Ἀπόκρ. $\chi=\frac{1}{2}(\sqrt{\beta+2\alpha}+\sqrt{\beta-2\alpha})$, $y=\frac{1}{2}(\sqrt{\beta+2\alpha}-\sqrt{\beta-2\alpha})$

Γενικὴ λύσις δύο δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.

§ 162. Ἡ γενικὴ μορφὴ πάσης δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως μὲ δύο ἀγνώστους εἶναι

$$\alpha\chi^2+\beta y\chi+\gamma y^2+\delta\chi+\varepsilon y+\zeta=0$$

Παριστάνοντες δὲ τοὺς συντελεστὰς τῶν ὁμοταγῶν ὅρων διὰ τῶν αὐτῶν μέν, ἀλλὰ τονισμένων γραμμάτων, θέλομεν παραστήσει δύο γενικὰς δευτεροβαθμίους ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους ὡς ἕπεται,

$$\alpha\chi^2+\beta y\chi+\gamma y^2+\delta\chi+\varepsilon y+\zeta=0$$
$$\alpha'\chi^2+\beta' y\chi+\gamma' y^2+\delta'\chi+\varepsilon' y+\zeta'=0.$$

Διατάσσοντες αὐτὰς ὡς πρὸς τὸ χ, ἔχομεν

$$\alpha\chi^2+(\beta y+\delta)\chi+\gamma y^2+\varepsilon y+\zeta=0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
$$\alpha'\chi^2+(\beta' y+\delta')\chi+\gamma' y^2+\varepsilon' y+\zeta'=0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Τούτου τεθέντος παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν οἱ συντελεσταὶ τοῦ χ^2 ἦναι οἱ αὐτοὶ εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις, ἠθέλαμεν λάβει δι' ἀφαιρέσεως, μίαν πρωτοβάθμιον εἰς χ ἐξισωσιν, ἐκ τῆς ὁποίας ἐξάγοντες τὴν τιμὴν τοῦ χ εἰς y. καὶ ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς μίαν τῶν προτεθεισῶν ἐξισώσεων ἠθέλαμεν φθάσει εἰς μίαν ἐξίσωσιν περιέχουσαν μίαν μόνην ἄγνωστον y.

Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι ἡ οὕτω λαμβανομένη ἔκφρασις τῆς τιμῆς τοῦ χ, περιέχει τὸ y^2, καὶ ἀντεισαγομένη εἰς μίαν τῶν προτεθεισῶν ἐξισώσεων θέλει παράξει ἐξίσωσιν τεταρτοβάθμιον.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι ἡ γενικὴ ἐπίλυσις δύο δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους ἐξαρτωμένη ἐκ τεταρτοβαθμίου ἐξισώσεως μὲ μίαν ἄγνωστον, δὲν δύναται ν' ἀναπτυχθῇ ἐνταῦθα. Περιοριζόμεθα διὰ τοῦτο εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἐξισώσεων κατ' ἰδιαιτέρας περιστάσεις

Μερικαὶ περιπτώσεις δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων.

§ 193. Ἔστωσαν χάριν ἐφαρμογῆς τὰ ἑξῆς προβλήματα.

Α'. Νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμούς, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι ρ τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν γινομένων αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων, τοῦ μὲν ἐπὶ α, τοῦ δὲ ἐπὶ β, εἶναι 2σ.

Σημειοῦντες διὰ χ καὶ y τοὺς δύο ζητουμένους ἀριθμούς, ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\chi y=\rho \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$\alpha\chi+\beta y=2\sigma \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

λαμβάνοντες ἐκ τῆς (2) τὴν τιμὴν τοῦ y, ἤτοι $y=\frac{2\sigma-\alpha\chi}{\beta}$ ἀντεισάγοντες αὐτὴν εἰς τὴν (1) καὶ ἀνάγοντες ἔχομεν

$$\alpha\chi^2-2\sigma\chi=-\beta\rho \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

ἐκ τῆς ὁποίας $\chi=\frac{\sigma}{\alpha}\pm\frac{1}{\alpha}\sqrt{\sigma^2-\alpha\beta\rho}$

καὶ ἑπομένως $y=\frac{\sigma}{\beta}\mp\frac{1}{\beta}\sqrt{\sigma^2-\alpha\beta\rho}$

Τὸ πρόβλημα δέχεται προφανῶς δύο λύσεις, διότι $\sigma>\sqrt{\sigma^2-\alpha\beta\rho}$ Διὰ νὰ ἦναι ὅμως πραγματικαὶ ἀπαιτεῖται ἡ συνθήκη

$$\sigma^2>\alpha\beta\rho \text{ ἢ } \sigma^2=\alpha\beta\rho.$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν $\alpha=\beta=1$,

αἱ μὲν ἐξισώσεις ἄγονται εἰς $\left\{\begin{array}{ll}\chi y=\rho & \cdots\cdots\cdots \quad (4)\\ \chi+y=2\sigma & \cdots\cdots\cdots \quad (5)\end{array}\right.$

αἱ δὲ τιμαὶ τῶν ἀγνώσων εἰς $\left\{\begin{array}{l}\chi=\sigma\pm\sqrt{\sigma^2-\rho}\\ y=\sigma\pm\sqrt{\sigma^2-\rho}\end{array}\right.$

τουτέστιν αἱ δύο τιμαὶ τοῦ y εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ τὰς τοῦ χ, εἰλημμένας κατ' ἐναντίαν τάξιν· ὥστε ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ χ ἦναι

$\sigma+\sqrt{\sigma^2-\rho}$ ἡ τοῦ y εἶναι $\sigma-\sqrt{\sigma^2-\rho}$

Τοῦτο δὲ ἑρμηνεύεται εὐκόλως, διότι αἱ προτεθεῖσαι ἐξισώσεις (1) καὶ (2) τρέπονται κατὰ τὴν μερικὴν περίπτωσιν εἰς τὰς (4) καὶ (5), καὶ τὸ πρόβλημα ἄγεται εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμούς, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι 2σ, τὸ δὲ γινόμενον ρ· ὅθεν οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοὶ εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\chi^2-2\sigma\chi-\rho=0,$$

τῆς ὁποίας ὁ μὲν συντελεστὴς τοῦ δευτέρου ὅρου εἶναι τὸ ἄθροισμα 2σ τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν, ὁ δὲ τελευταῖος ὅρος εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν ρ.

Β΄. Νὰ εὕρωμεν τοὺς τέσσαρας ὅρους μιᾶς ἀναλογίας, ἔχοντες γνωστὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων 2σ, τὸ ἄθροισμα τῶν μέσων $2\sigma'$, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων ὅρων $4\gamma^2$.

Ἔστωσαν οἱ ζητούμενοι ὅροι $\varphi,\ \chi,\ \psi,\ \omega$
συνιστῶντες τὴν ἀναλογίαν $\varphi : \chi :: \psi : \omega$

Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν ἔχομεν $\varphi+\omega=2\sigma$ . . . . (1)

$\chi+\psi=2\sigma'$ . . . . (2)

$\varphi^2+\chi^2+\psi^2+\omega^2=4\gamma^2$ . . . . (3)

κατὰ τὴν θεμελιώδη δὲ ἀρχὴν πάσης ἀναλογίας, ἔχομεν καὶ τὴν τετάρτην ἐξίσωσιν $\varphi\omega=\chi\psi$ . . . . (4)

Καλοῦντες συμβοηθητικῶς $\varphi\omega=\chi\psi=\rho$

ἔχομεν δύο συστήματα ἐξισώσεων, ἑκάτερον τῶν ὁποίων λύεται ἀμέσως, κατὰ τὸ προηγηθὲν πρόβλημα, τουτέστι

$$\left.\begin{array}{l}\varphi+\omega=2\sigma\\ \varphi\omega=\rho\end{array}\right\}\text{ ἐξ ὧν }\left\{\begin{array}{l}\varphi=\sigma+\sqrt{\sigma^2-\rho}\\ \varphi=\sigma-\sqrt{\sigma^2-\rho}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\chi+y=2\sigma'\\ \chi y=\rho\end{array}\right\}\text{ ἐξ ὧν }\left\{\begin{array}{l}y=\sigma'+\sqrt{\sigma'^2-\rho}\\ y=\sigma'-\sqrt{\sigma'^2-\rho}\end{array}\right.$$

Ἵνα προσδιορίσωμεν δὲ τὴν συμβοηθητικὴν ἄγνωστον ρ, ἀρκεῖ ν' ἀντεισάξωμεν εἰς τὴν (3) τὰς τιμὰς ταύτας· οὕτως ἔχομεν

$$\left.\begin{array}{l}(\sigma+\sqrt{\sigma^2-\rho})^2+(\sigma-\sqrt{\sigma^2-\rho})^2\\ +(\sigma'+\sqrt{\sigma'^2-\rho})^2+(\sigma'-\sqrt{\sigma'^2-\rho})^2\end{array}\right\}=4\gamma^2$$

καὶ δι' ἀναπτύξεως καὶ ἀναγωγῆς

$$4\sigma^2+4\sigma'^2-4\rho=4\gamma^2$$

ὅθεν

$$\rho=\sigma^2+\sigma'^2-\gamma^2.$$

Ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ρ εἰς τοὺς τύπους τῶν ἀγνώστων, εὑρίσκομεν

$$\varphi=\sigma+\sqrt{\gamma^2-\sigma'^2} \qquad \chi=\sigma'+\sqrt{\gamma^2-\sigma^2}$$
$$\omega=\sigma-\sqrt{\gamma^2-\sigma'^2} \qquad \psi=\sigma'-\sqrt{\gamma^2-\sigma^2}$$

Γ'. Ζητοῦνται τρεῖς ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, καὶ τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἄθροισμα εἶναι 21, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν 189.

Ἔστωσαν οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ χ, ψ, ω,

Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν ἔχομεν

α' . . . $\chi : y :: y : \omega$ ὅθεν $y^2=\chi\omega$ . . . (1)

ϐ' . . . $\chi+y+\omega=21$ . . . (2)

γ' . . . . $\chi^2+y^2+\omega^2=189$ . . . (3)

Ἀφαιροῦντες τὴν (1) ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν

$$\chi^2+\omega^2=189-\chi\omega$$

προσθέτοντες εἰς ἑκάτερον μέλος $2\chi\omega$

ἔχομεν . . . . $\chi^2+2\chi\omega+\omega^2=189+\chi\omega$

ἤτοι $(\chi+\omega)^2=189+\chi\omega$ ὅθεν $\chi+\omega=\sqrt{189+\chi\omega}$ . . (4)

Ἀφαιροῦντες ταύτην ἐκ τῆς (2) συνάγομεν

$$y=21-\sqrt{189+\chi\omega}$$

ἀντεισάγοντες ἀντὶ τοῦ $\chi\omega$ τὸ y^2 . . . $y=21-\sqrt{189+y^2}$

μεταθέτοντες $\sqrt{189+y^2}=21-y$

τετραγωνίζοντες $189+y^2=(21-y)^2=441-42y+y^2$

ὅθεν . . . . . . $42y=252$ καὶ $y=6$.

ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν (2) καὶ (1) ἔχομεν

$$\chi+\omega=15$$
$$\chi\omega=36$$

αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων χ καὶ ω εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\chi^2-15\chi=-36$$

τὴν ὁποίαν λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=12$ καὶ $\omega=3$.

Τῷ ὄντι ἡ συνεχὴς ἀναλογία $12 : 6 :: 6 : 3$ πληροῖ τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος.

Λύσις τῶν διτετραγώνων ἐξισώσεων.

§ 164. Εἰς τὴν τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων ἐπίλυσιν ἄγεται καὶ ἡ τῶν τριόρων τεταρτοβαθμίων, ἐκείνων δηλαδὴ, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὴν ἄγνωστον εἰς τὰς ἀρτίας δυνάμεις· τὰς ἐξισώσεις ταύτας ὀνομάζουσι κοινῶς *διπλοτετραγωνικάς*.

Ἐξίσωσις διπλοτετραγωνικὴ μὲ μίαν ἄγνωστον λέγεται ἡ ἔχουσα ὅρους μὲ τὴν τετάρτην δύναμιν τῆς ἀγνώστου, ὅρους μὲ τὸ τετράγωνον αὐτῆς καὶ ὅρους γνωστούς. Ἡ μορφὴ λοιπὸν αὐτῆς εἶναι

$$\chi^4+\pi\chi^2+\varkappa=0.$$

Σημειοῦντες $\chi^2=y$, τρέπομεν τὴν ἐξίσωσιν εἰς

$$y^2+\pi y+\varkappa=0$$

ὅθεν . . . . $y=-\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\varkappa}$

ἐπομένως . . . . . . $\chi=\pm\sqrt{-\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\varkappa}}$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι συνδυαζομένων τῶν δύο σημείων τοῦ πρώτου ῥιζικοῦ μετὰ τοῦ δευτέρου, προκύπτουσι διὰ τὴν ἄγνωστον τέσσαρες τιμαὶ, ἀνὰ δύο ἴσαι καὶ ἀντιθέτων σημείων.

Παραδείγματα. Α΄. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^4-25\chi^2=-144$.

Ἔστω . . . . $\chi^2=y$ ἐπομένως $\chi^4=y^2$

ὅθεν . . . . $y^2-25y=-144$

καὶ . . . . $y=16,\ y=9,$

ἀντεισάγοντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2=y$

συνάγομεν $\left\{\begin{array}{l}\chi^2=16\\ \chi^2=9\end{array}\right.$ ὅθεν $\left\{\begin{array}{l}\chi=\pm 4\\ \chi=\pm 3\end{array}\right.$

Β΄. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^4-7\chi^2=8$

θέτοντες $\chi^2=y$, λαμβάνομεν $y^2-7y=8$ ὅθεν $\left\{\begin{array}{l}y=8,\\ y=-1\end{array}\right.$

λοιπὸν $\left\{\begin{array}{l}\chi^2=8\\ \chi^2=-1\end{array}\right.$ ὅθεν $\left\{\begin{array}{l}\chi=\pm\sqrt{8}\\ \chi=\pm\sqrt{-1}\end{array}\right.$

Γ΄. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^4-(2\beta\gamma+4\alpha^2)\chi^2=-\beta^2\gamma^2$

θέτοντες $\chi^2=y$, λαμβάνομεν $y^2-(2\beta\gamma+4\alpha^2)y=-\beta^2\gamma^2$

ἐκ τῆς ὁποίας . . . . $y=\beta\gamma+2\alpha^2\pm 2\alpha\sqrt{\beta\gamma+\alpha^2}$,

ἐπομένως . . . . $y=\pm\sqrt{\beta\gamma+2\alpha^2\pm 2\alpha\sqrt{\beta\gamma+\alpha^2}}$

§ 165. Σημείωσις. Κατὰ τὰς ἀρχὰς ταύτας δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν καί τινας μερικὰς ἐξισώσεις δευτεροβαθμίους μὲ δύο ἀγνώστους.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις . . . $\chi^2+\chi y-3y^2=3$ . . . . (1)

$2\chi^2-3\chi y+y^2=4$ . . . . (2)

Ἀπαλείφοντες κατὰ πρῶτον τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν ἀγνώστων, φερ' εἰπεῖν τῆς χ ἔχομεν . . $5\chi y-7y^2=2$

ἐξ ἧς . . . . $\chi=\frac{7y^2+2}{5y}$ . . . . (3)

Ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν

$$\left(\frac{7y^2+2}{5y}\right)^2+\frac{7y^2+2}{5}-3y^2=3.$$

Ἀφανίζοντες τοὺς παρονομαστὰς καὶ ἀνάγοντες ἔχομεν

$$y^4-\frac{37}{9}y^2=\frac{4}{9}$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσαν μέθοδον λαμβάνομεν

$$y=\pm 2 \qquad y=\pm\frac{1}{3}$$

Ἀντικαθιστῶντες δὲ τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὸν τύπον (3) τῆς χ λαμβάνομεν

$$\chi=\pm 3 \qquad \chi=\pm\frac{5}{3}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

ΠΕΡΙ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΚΑΙ ΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΠΑΝΤΟΣ ΒΑΘΜΟΥ.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.

§ 166. Καθὼς διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων εἶναι ἀναγκαία ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, οὕτω καὶ διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν ἐξισώσεων τοῦ τρίτου, τετάρτου καὶ ἐν γένει τοῦ ν βαθμοῦ εἶναι ἀναγκαία ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τρίτης, τετάρτης καὶ ἐν γένει τῆς ν ῥίζης τῶν ἀριθμητικῶν ἢ ἀλγεβρικῶν ποσοτήτων.

Μολονότι δὲ πᾶσα δύναμις ἀριθμοῦ τινος δύναται νὰ ληφθῇ κατὰ τοὺς κανόνας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, εἶναι μολοντοῦτο ἀπαραιτήτως ἀναγκαῖον νὰ γνωρίζωμεν τὸν νόμον τοῦ σχηματισμοῦ αὐτῆς· διότι ἐξ αὐτοῦ ὁδηγούμενοι συνάγομεν τοὺς κανόνας τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ νόμος οὗτος ἐπιστηρίζεται εἰς τὴν ἔκφρασιν τῶν τοῦ διωνύμου δυνάμεων, πρέπει διὰ τοῦτο ν' ἀναπτύξωμεν ἐν πρώτοις τὴν περὶ τῆς ἐκφράσεως ταύτης θεωρίαν, ἔπειτα δὲ θέλομεν ἐφαρμόσει αὐτὴν, πρῶτον εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ῥιζῶν τῶν ἀριθμῶν, καὶ δεύτερον εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν δυνάμεων καὶ εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ῥιζῶν τῶν ἀλγεβρικῶν ποσοτήτων· ὡς ἐπίμετρον τέλος πάντων τοῦ κεφαλαίου τούτου θέλομεν θεωρήσει τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ῥιζικῶν.

Α΄. Δυώνυμον
τοῦ Νεύτωνος.

§ 167. Πολλαπλασιάζοντες τὸ δυώνυμον $\chi+\alpha$ πολλάκις ἐφ' ἑαυτὸ σχηματίζομεν τὰς διαδοχικὰς αὐτοῦ δυνάμεις, ὡς ἕπεται

$$(\chi+\alpha)^1=\chi+\alpha$$
$$(\chi+\alpha)^2=\chi^2+2\alpha\chi+\alpha^2$$
$$(\chi+\alpha)^3=\chi^3+3\alpha\chi^2+3\alpha^2\chi+\alpha^3$$
$$(\chi+\alpha)^4=\chi^4+4\alpha\chi^3+6\alpha^2\chi^2+4\alpha^3\chi+\alpha^4$$
$$(\chi+\alpha)^5=\chi^5+5\alpha\chi^4+10\alpha^2\chi^3+10\alpha^3\chi^2+5\alpha^4\chi+\alpha^5$$

Θεωροῦντες τὰ διάφορα ταῦτα ἐκτυλίγματα εὐκόλως γνωρίζομεν τὸν νόμον, κατὰ τὸν ὁποῖον σχηματίζονται οἱ ἐκθέται τοῦ χ καὶ α· οἱ μὲν ἐκθέται τοῦ χ χωροῦσιν ἐλαττούμενοι κατὰ μονάδα, ἀπὸ τοῦ βαθμοῦ τῆς δυνάμεως τοῦ δυωνύμου μέχρι τοῦ 0· οἱ δὲ ἐκθέται τοῦ α χωροῦσιν ἀντιστρόφως αὐξανόμενοι κατὰ μονάδα. Ὁ νόμος ὅμως τὸν ὁποῖον ἀκολουθοῦσιν εἰς τὸν σχηματισμὸν αὐτῶν οἱ συντελεσταὶ δὲν εἶναι προφανής. Ὁ περιώνυμος Νεύτων ἀνεκάλυψεν ὅτι καὶ οἱ συντελεσταὶ ἔχουσι σταθερόν τινα νόμον, κατὰ τὸν ὁποῖον, δοθέντος τοῦ βαθμοῦ τῆς δυνάμεως, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἀμέσως τὴν δύναμιν ταύτην τοῦ δυωνύμου, χωρὶς ν' ἀναγκαζώμεθα νὰ σχηματίζωμεν πρότερον ὅλας τὰς προηγουμένας. Ὅθεν καὶ ὁ τύπος, διὰ τοῦ ὁποίου ἐκφράζεται ὁ νόμος οὗτος, φέρει τὸ ὄνομα τοῦ ἐφευρετοῦ *Δυώνυμον τοῦ Νεύτωνος*. Μολονότι δὲ ὁ μέγας οὗτος ἀνὴρ δὲν ἄφησεν οὐδὲν ἴχνος τῶν συλλογισμῶν, διὰ τῶν ὁποίων ἔφθασεν εἰς τὴν ἀνακάλυψιν τοῦ νόμου τούτου, ἡ ὕπαρξις ὅμως αὐτοῦ ἀπεδείχθη μετὰ ταῦτα ἀκριβέστατα.

Στοιχειωδεστέρα μεταξὺ τῶν γνωστῶν ἀποδείξεων εἶναι ἡ ἐπιστηριζομένη εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συνδυασμῶν· ὅθεν πρὶν τῆς ἀναπτύξεως αὐτῆς πρέπει νὰ προηγηθῇ ἡ λύσις προβλημάτων τινῶν, ἀναφερομένων εἰς τοὺς συνδυασμούς.

Β΄. Περὶ συνδυασμῶν.

§ 168. *Ὁρισμοί.* Ὑπὸ γενικὴν σημασίαν θεωρουμένη ἡ λέξις συνδυασμὸς περιλαμβάνει τρία τινά, τὰς μεταθέσεις, τὰς διατάξεις καὶ τοὺς ἰδίως λεγομένους συνδυασμούς.

Μεταθέσεις ἀριθμοῦ τινος γραμμάτων ὀνομάζονται τὰ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν θέτοντες ὅλα τὰ γράμματα τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου, καὶ ἀλλάττοντες καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους τὴν τάξιν αὐτῶν.

Οὕτω π. χ. αἱ μεταθέσεις τῶν γραμμάτων α καὶ β εἶναι αβ, βα. Παρομοίως αἱ μεταθέσεις τριῶν γραμμάτων α, β, γ, εἶναι αβγ, αγβ, γαβ, βαγ, βγα, γβα· καὶ ἐφεξῆς.

Αἱ μεταθέσεις ἄρα εἶναι γινόμενα, συνιστάμενα ἐκ τῶν αὐτῶν γραμμάτων καὶ διαφέροντα μόνον κατὰ τὴν τάξιν τῶν παραγόντων.

Διατάξεις λέγονται τὰ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν διατάσσοντες τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο, καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, ἀνὰ δύο, ἀνὰ τρία, καὶ ἐν γένει ἀνὰ ν, δεδομένον τινὰ ἀριθμὸν γραμμάτων μ. Ἐκ τῶν ἐξαγομένων τούτων τὰ μὲν διαφέρουσι κατὰ τὴν τιμήν, τὰ δὲ μόνον κατὰ τὴν μορφήν.

Οὕτω π. χ. τριῶν γραμμάτων α, β, γ, αἱ ἀνὰ δύο διατάξεις εἶναι

αβ, αγ, βγ
βα, γα, γβ

Καὶ ἐν γένει αἱ διατάξεις μ γραμμάτων α, β, γ, δ, . . .

ἀνὰ δύο εἶναι . αβ, αγ, αδ, . . . βγ, βδ, βε, . . .
βα, γα, δα, . . . γβ, δβ, εβ, . . .

ἀνὰ τρία δὲ εἶναι αβγ, αβδ, . . . βγδ, βγε, . . .
αγβ, αδβ, . . . βδγ, βεγ, . . .
γαβ, δαβ, . . . δβγ, εβγ, . . .

Ἐννοεῖται δὲ, ὅτι πρέπει πάντοτε νὰ ἔχωμεν μ > ν, τουτέστιν ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν δεδομένων γραμμάτων πρέπει νὰ ἦναι μείζων τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εἰς ἕκαστον ἐξαγόμενον εἰσερχομένων.

Ὅταν δὲ ὑποτεθῇ μ = ν, αἱ διατάξεις ἀποβαίνουσι μεταθέσεις.

Συνδυασμοὶ λέγονται αἱ διατάξεις, αἱ ὁποῖαι διαφέρουσι πρὸς ἀλλήλας τοὐλάχιστον καθ' ἓν γράμμα.

Οὕτω π. χ. οἱ ἀνὰ δύο συνδυασμοὶ τῶν τριῶν γραμμάτων α, β, γ, εἶναι αβ, αγ, βγ,

Παρομοίως μ γραμμάτων α, β, γ, δ, . . . οἱ συνδυασμοὶ
ἀνὰ δύο εἶναι . . . . . . αβ, αγ, αδ, . . . βγ, βδ, βε . . .
οἱ ἀνὰ τρία εἶναι . . . . . αβγ, αβδ, αγδ, . . . βγδ, βγε, βδε . . .

Μετὰ τὰς ἀρχὰς ταύτας μεταβαίνομεν εἰς τὴν λύσιν τῶν ἑξῆς γενικῶν προβλημάτων.

§ 169. *Πρόβλημα Α'.* Νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν μεταθέσεων ν γραμμάτων.

Κατὰ πρῶτον μὲ δύο γράμματα α, β, γίνονται δύο μεταθέσεις

$$\alpha\beta, \quad \beta\alpha,$$

ὅθεν ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων 2 γραμμάτων εἶναι 1×2.

Ἵνα μορφώσωμεν τὰς μεταθέσεις τριῶν γραμμάτων α, β, γ, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν ἕκαστον τῶν τριῶν τούτων γραμμάτων εἰς τὰ δεξιὰ ἑκατέρας τῶν δύο μεταθέσεων τῶν δύο ἄλλων γραμμάτων, οὕτω,

θέτοντες τὸ γ εἰς τὰ δεξιὰ τῶν αβ, βα ἔχομεν αβγ, βαγ,
θέτοντες τὸ β » αγ, γα » αγβ, γαβ,
θέτοντες τὸ α » βγ, γβ » βγα, γβα.

ὅθεν ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων 3 γραμμάτων εἶναι 6 ἤτοι $1 \times 2 \times 3$.

Ἔστω ἐν γένει ἀριθμός τις ν γραμμάτων α, β, γ, δ, . . . ἂς ὑποθέσωμεν γνωστὸν τὸν ἀριθμὸν τῶν μεταθέσεων $\nu - 1$ γραμμάτων, τὸν ὁποῖον σημειοῦμεν διὰ Κ. Ἀφ' ἑκάστην τούτων ἄρα ἐλλείπει ἓν ἐκ τῶν ν γραμμάτων, φερ' εἰπεῖν τὸ α. Θέτοντες τὸ γράμμα τοῦτο εἰς τὰ δεξιὰ ἑκάστης τῶν Κ μεταθέσεων, θέλομεν ἔχει Κ μεταθέσεις ἐκ ν γραμμάτων, ληγούσας εἰς τὸ γράμμα α. Ἀλλ' ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν κατὰ μέρος καὶ τὸ γράμμα β, καὶ νὰ σχηματίσωμεν ἐκ τῶν λοιπῶν $\nu - 1$ γραμμάτων ἄλλας Κ μεταθέσεις· ἐὰν θέσωμεν εἰς τὰ δεξιὰ ἑκάστης τούτων τὸ παραλειφθὲν γράμμα β, θέλομεν ἔχει Κ μεταθέσεις ἐκ ν γραμμάτων ληγούσας εἰς τὸ γράμμα β. Ἐπειδὴ δὲ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν κατὰ μέρος ἕκαστον τῶν ν γραμμάτων, καὶ ἔπειτα νὰ τὸ γράψωμεν εἰς τὰ δεξιὰ ἑκάστης τῶν Κ μεταθέσεων, ἕπεται ὅτι θέλομεν ἔχει τοσάκις Κ μεταθέσεις, ὅσα εἶναι τὰ γράμματα· τουτέστιν ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων ν γραμμάτων εἶναι $K \times \nu$.

Ὁ τύπος οὗτος συμπεριλαμβάνει ὅλας τὰς μερικὰς περιπτώσεις.

Ἐὰν $\nu = 4$ τότε Κ παριστάνει τὸν ἀριθμὸν τῶν μεταθέσεων τριῶν γραμμάτων, ἤτοι $K = 1 \times 2 \times 3$ ἑπομ. $K \times \nu = 1 \times 2 \times 3 \times 4$

Ἐὰν $\nu = 5$, τότε $K = 1 \times 2 \times 3 \times 4$ ἑπομ. $K \times \nu = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$

Λοιπὸν ἐν γένει $K \times \nu = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \nu$.

Τουτέστιν ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων ἀριθμοῦ τινος γραμμάτων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν τῆς φυσικῆς σειρᾶς ἀριθμῶν ἐκ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεδομένων γραμμάτων περιληπτικῶς.

Οὕτως οἱ ἀριθμοὶ τῶν μεταθέσεων 5 γραμμάτων εἶναι 120· ὁ δὲ τῶν 6 γραμμάτων εἶναι 720.

§ 170. *Πρόβλημα Β'.* Νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν διατάξεων μ γραμμάτων ἀνὰ ν.

Ἂς ὑποθέσωμεν γνωστὸν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνὰ $\nu-1$ διατάξεων τῶν μ γραμμάτων, καὶ ἂς σημειώσωμεν αὐτὸν διὰ Π.

Ἐπειδὴ ἑκάστη τούτων ἔχει $\nu-1$ γράμματα, ἄρα ἐλλείπουσιν ἀφ' ἑκάστην $\mu-(\nu-1)$ ἢ $\mu-\nu+1$ γράμματα.

Ἐὰν θεωρήσωμεν μίαν τῶν διατάξεων τούτων, τὴν πρώτην, καὶ θέσωμεν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτῆς, ἓν μετὰ τὸ ἄλλο, ἕκαστον τῶν μὴ εἰσερχομένων εἰς αὐτὴν γραμμάτων $\mu-\nu+1$, εἶναι φανερὸν ὅτι θέλομεν σχηματίσει $\mu-\nu+1$, διαταξεις ἀνὰ ν γράμματα.

Ἐὰν παρομοίως θεωρήσωμεν μίαν ἄλλην διάταξιν ἐκ τῶν ἀνὰ $\nu-1$, τὴν δευτέραν, καὶ θέσωμεν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτῆς ἕκαστον τῶν μὴ εἰσερχομένων εἰς αὐτὴν γραμμάτων $\mu-\nu+1$, θέλομεν σχηματίσει ἄλλας $\mu-\nu+1$, διατάξεις ἀνὰ ν γράμματα.

Ἐπειδὴ δὲ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν κατὰ μέρος ἑκάστην τῶν Π διατάξεων ἀνὰ $\nu-1$, καὶ νὰ γράψωμεν διαδοχικῶς εἰς τὰ δεξιὰ αὐτῆς ἕκαστον τῶν μὴ εἰσερχομένων εἰς αὐτὴν γραμμάτων $\mu-\nu+1$, ἕπεται ὅτι θέλομεν σχηματίσει τοσάκις $\mu-\nu+1$ διατάξεις ἀνὰ ν γράμματα, ὅσαι εἶναι αἱ Π διατάξεις ἀνὰ $\nu-1$.

Τουτέστιν ὁ ἀριθμὸς τῶν διατάξεων μ γραμμάτων ἀνὰ ν εἶναι

$$\Pi(\mu-\nu+1).$$

Θέλοντες δὲ ἐκ τοῦ γενικοῦ τούτου τύπου νὰ συνάξωμεν τοὺς εἰς τὰς μερικὰς περιπτώσεις ἀναφερομένους, δίδομεν μερικὰς τιμὰς εἰς τὸ ν.

Ἔστω $\nu=2$, ὅθεν $\mu-\nu+1=\mu-2+1=\mu-1$.

Τότε Π ἐκφράζει τὸν ἀριθμὸν τῶν διατάξεων μ γραμμάτων ἀνὰ $2-1$ ἢ ἀνὰ ἓν καὶ ἑπομένως ἰσοῦται μὲ μ. Λοιπὸν ὁ τύπος ἄγεται εἰς $\mu(\mu-1)$.

Ἔστω $\nu=3$, ὅθεν $\mu-\nu+1=\mu-3+1=\mu-2$,

Τότε Π ἐκφράζει τὸν ἀριθμὸν τῶν διατάξεων μ γραμμάτων ἀνὰ $3-1$ ἢ ἀνὰ 2 καὶ ὡς εἴδομεν ἰσοῦται μὲ $\mu(\mu-1)$.

Λοιπὸν ὁ τύπος ἄγεται εἰς . . . . . $\mu(\mu-1)(\mu-2)$.

Ἔστω προσέτι $\nu=4$, ὅθεν $\mu-\nu+1=\mu-4+1=\mu-3$.

Τότε Π ἐκφράζει τὸν ἀριθμὸν τῶν διατάξεων μ γραμμάτων ἀνὰ $4-1$ ἢ ἀνὰ 3, καὶ ὡς εἴδομεν ἰσοῦται μὲ $\mu(\mu-1)(\mu-2)$.

Λοιπὸν ὁ τύπος ἄγεται εἰς . . . . . $\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)$.

Λοιπὸν ἐν γένει $\Pi(\mu-\nu+1)=\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)\ldots(\mu-\nu+1)$.

Τουτέστιν ὁ γενικὸς τύπος τῶν ἀνὰ ν διατάξεων τῶν μ γραμμάτων συνίσταται ἐκ τοῦ γινομένου ν παραγόντων ἀρχομένων ἐκ τοῦ μ καὶ βαθμηδὸν ἐλαττουμένων κατὰ μονάδα, μέχρι τοῦ $\mu-\nu+1$.

Ἔστω $\left.\begin{matrix}\mu=10\\ \nu=3\end{matrix}\right\}\ \Delta=10\ .\ 9\ .\ 8\ =720.$

$$\left.\begin{matrix}\mu=12\\ \nu=4\end{matrix}\right\}\ \Delta=12\ .\ 11\ .\ 10\ .\ 9=11880.$$

ΣΗΜ. Εἴδομεν (§ 168) ὅτι, ἐὰν $\mu=\nu$, αἱ διατάξεις ἀποβαίνουσι μεταθέσεις. Εἰς τὴν περίπτωσιν λοιπὸν ταύτην, ὁ προευρεθεὶς τύπος τῶν μεταθέσεων συνάγεται ἐκ τοῦ τύπου τῶν διατάξεων, ἀρκεῖ μόνον νὰ τρέψωμεν τὸ μ εἰς ν.

Τῷ ὄντι ἔχομεν $\nu(\nu-1)\ (\nu-2)\ldots 3\ .\ 2\ .\ 1$

καὶ ἀντιστρέφοντες τὴν τάξιν τῶν παραγόντων

$$1\ .\ 2\ .\ .\ 3\ .\ .\ .\ (\nu-1)\nu.$$

§ 171. *Πρόβλημα Γ'*. Νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν.

Ἔστω Σ ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν.

Δ ὁ ἀριθμὸς τῶν διατάξεων μ γραμμάτων ἀνὰ ν.

Μ ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων ν γραμμάτων.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν εἰς ἕκαστον συνδυασμὸν ἐκ ν γραμμάτων κάμωμεν τὰς δυνατὰς μεταθέσεις, θέλομεν σχηματίσει ὅλας τὰς διατάξεις μ γραμμάτων ἀνὰ ν.

Ὅθεν ἐπειδὴ δι' ἕκαστον συνδυασμὸν ν γραμμάτων ἔχομεν Μ μεταθέσεις, διὰ Σ συνδυασμοὺς θέλομεν ἔχει $\Sigma\times M$ διατάξεις ἀνὰ ν. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς τῶν διατάξεων ἐσημειώθη διὰ Δ,

λοιπὸν ἔχομεν $\Delta=\Sigma\times M$,

ὅθεν συνάγομεν $\Sigma=\frac{\Delta}{M}$ . . . . (1)

Τουτέστιν ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν διατάξεων μ γραμμάτων ἀνὰ ν, διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μεταθέσεων ν γραμμάτων.

Ἀντεισάγοντες εἰς τὸν τύπον (1) ἀντὶ τοῦ Δ καὶ Μ τοὺς ἤδη εὑρεθέντας τύπους, συνάγομεν τὸν γενικὸν τύπον τῶν συνδυασμῶν

$$\frac{\Pi(\mu-\nu+1)}{1\times\nu}=\frac{\mu(\mu-1)\ (\mu-2)\ (\mu-3)\ldots.\ (\mu-\nu+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ldots.\ \nu}$$

Ἐφαρμογαί. Ὅταν $\nu=2$ ἔχομεν $\frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}$

Ὅταν $\nu=3$ » $\frac{\mu(\mu-1)\,(\mu-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$ καὶ ἐφεξῆς

Ὅταν $\mu=6$ καὶ $\nu=3$ » $\frac{6(6-1)\,(6-2)}{1\,.\,2\,.\,3}=20.$

Γ'. Ἀπόδειξις τοῦ τύπου τοῦ δυωνύμου.

§ 172. Πρὸς ἀνακάλυψιν τοῦ νόμου, κατὰ τὸν ὁποῖον σχηματίζεται ἡ γενικὴ ἔκφρασις τῶν τοῦ δυωνύμου δυνάμεων, πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἐκφράσεων τῶν μερικῶν δυνάμεων τοῦ $\chi+\alpha$ (§ 167) προέκυψαν ἐκ τῶν διαφόρων ἀναγωγῶν τῶν ὁμοίων ὅρων. Ἐὰν λοιπὸν, ἀντὶ τοῦ γινομένου πολλῶν ἴσων δυωνύμων παραγόντων, σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον πολλῶν δυωνύμων $\chi+\alpha$, $\chi+\beta$, $\chi+\gamma$, ... τῶν ὁποίων οἱ δεύτεροι ὅροι διαφέρουσιν, ἡ ἀναγωγὴ δὲν θέλει ἔχει χώραν, καὶ ἑπομένως θέλει ἀναφανῆ ὁ νόμος τοῦ σχηματισμοῦ αὐτῶν.

Σχηματίζομεν λοιπὸν τὰ ἑξῆς τρία διαδοχικὰ γινόμενα,

$$(\chi+\alpha)(\chi+\beta)=\chi^2\begin{array}{l|l}+\alpha & \chi+\alpha\beta\\ +\beta & \end{array}$$

$$(\chi+\alpha)(\chi+\beta)(\chi+\gamma)=\chi^3\begin{array}{l|l|l}+\alpha & \chi^2+\alpha\beta & \chi+\alpha\beta\gamma\\ +\beta & \quad+\alpha\gamma & \\ +\gamma & \quad+\beta\gamma & \end{array}$$

$$(\chi+\alpha)(\chi+\beta)(\chi+\gamma)(\chi+\delta)=\chi^4\begin{array}{l|l|l|l}+\alpha & \chi^3+\alpha\beta & \chi^2+\alpha\beta\gamma & \chi+\alpha\beta\gamma\delta\\ +\beta & \quad+\alpha\gamma & \quad+\alpha\beta\delta & \\ +\gamma & \quad+\alpha\delta & \quad+\alpha\gamma\delta & \\ +\delta & \quad+\beta\gamma & \quad+\beta\gamma\delta & \\ & \quad+\beta\delta & & \\ & \quad+\gamma\delta & & \end{array}$$

Παρατηροῦντες τὰ γινόμενα ταῦτα βλέπομεν, ὅτι ἀκολουθοῦσι τὸν ἑξῆς νόμον.

Α'. *Ὡς πρὸς τοὺς ἐκθέτας.*

Εἰς μὲν τὸν πρῶτον ὅρον ὁ ἐκθέτης τοῦ χ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν δυωνύμων παραγόντων· ἀκολούθως δὲ προβαίνει ἐλαττούμενος κατὰ μονάδα, μέχρι τοῦ τελευταίου ὅρου, ὅπου εἶναι ἴσος τῷ 0.

Β'. *Ὡς πρὸς τοὺς συντελεστάς.*

Ὁ μὲν συντελεστὴς τοῦ πρώτου ὅρου εἶναι ἡ μονάς.

Ὁ δὲ τοῦ δευτέρου ὅρου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δευτέρων ὅρων τῶν δυωνύμων, ἀνὰ ἕνα λαμβανομένων.

Ὁ τοῦ τρίτου ὅρου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν διαφόρων γινομένων τῶν δευτέρων ὅρων, ἀνὰ δύο συνδυαζομένων.

Ὁ τοῦ τετάρτου ὅρου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν διαφόρων γινομένων τῶν δευτέρων ὅρων, ἀνὰ τρεῖς συνδυαζομένων.

Ὁ τελευταῖος ὅρος εἶναι τὸ γινόμενον ὅλων τῶν δευτέρων ὅρων τῶν δυωνύμων.

Κατ' ἀναλογίαν δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι ὁ *συντελεστὴς ὅρου τινὸς, ἔχοντος ν ὅρους πρὸ αὐτοῦ, εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν διαφόρων γινομένων τῶν δευτέρων ὅρων ἀνὰ ν συνδυαζομένων.*

Ἵνα βεβαιωθῶμεν περὶ τῆς ὑπάρξεως τοῦ γενικοῦ τούτου νόμου, τὸν ὁποῖον ἐξ ἀναλογίας ἐσυμπεράναμεν, ἀποδεικνύομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα.

Ἂν ὁ νόμος οὗτος ἀληθεύῃ διὰ τὸ γινόμενον μ. δυωνύμων, ἀληθεύει ἐπίσης καὶ διὰ τὸ γινόμενον ἑνὸς παράγοντος περισσότερον, τουτέστι διὰ τὸ γινόμενον $\mu+1$ παραγόντων.

Ἔστω λοιπὸν τὸ γινόμενον μ παραγόντων δυωνύμων

$$(\chi+\alpha)(\chi+\beta)(\chi+\gamma)\dots(\chi+\varkappa)= \qquad (1)$$

$$\chi^{\mu}+A\chi^{\mu-1}+B\chi^{\mu-2}+\Gamma\chi^{\mu-3}+\dots+M\chi^{\mu-\nu+1}+N\chi^{\mu-\nu}\dots+y$$

Ἐπαραστήσαμεν τοὺς συντελεστὰς διὰ κεφαλαίων γραμμμάτων, ὑποθέτοντες

$$\begin{aligned} A&=\alpha+\beta+\gamma+\dots+\varkappa \\ B&=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\dots \\ \Gamma&=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\beta\gamma\delta+\dots \end{aligned}$$

καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως.

Ὁ ὅρος $N\chi^{\mu-\nu}$ παριστάνει τὸν ἔχοντα πρὸ αὐτοῦ ν ὅρους, ὁ δὲ $M\chi^{\mu-\nu+1}$ τὸν ἀμέσως πρὸ αὐτοῦ, τουτέστι τὸν ἔχοντα πρὸ αὐτοῦ $\nu-1$ ὅρους. Ὅθεν τὸ M παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν συνδυασμῶν τῶν δευτέρων ὅρων ἀνὰ ν, τὸ δὲ N παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν συνδυασμῶν τῶν δευτέρων ὅρων ἀνὰ $\nu-1$.

Τούτου τεθέντος ἂς πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (1) ἐπί τινα νέον παράγοντα $\chi+\lambda$ καὶ ἂς γράψωμεν τὸ γινόμενον διατεταγμένον. Ἔχομεν

$$(\chi+\alpha)(\chi+\beta)(\chi+\gamma)\dots(\chi+\varkappa)(\chi+\lambda)=$$

$$\chi^{\mu+1}\begin{array}{l|}+A\\+\lambda\end{array}\chi^{\mu}\begin{array}{l|}+B\\+A\lambda\end{array}\chi^{\mu-1}\begin{array}{l|}+\Gamma\\+B\lambda\end{array}\chi^{\mu-2}\dots\begin{array}{l|}+N\\+M\lambda\end{array}\chi^{\mu-\nu+1}\dots+y\lambda.$$

Παρατηροῦντες τὸ γινόμενον τοῦτο τῶν $\mu+1$ παραγόντων βλέπομεν, ὅτι ὡς πρὸς τοὺς ἐκθέτας τοῦ χ, ὁ νόμος ὑπάρχει προφανῶς ὁ αὐτός.

Ὅτι δὲ ὑπάρχει καὶ ὡς πρὸς τοὺς συντελεστὰς, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι,

α΄. Ὁ συντελεστὴς τοῦ πρώτου ὅρου εἶναι ἡ μονάς.

β΄. Ὁ τοῦ δευτέρου ὅρου εἶναι $A+\lambda$, τουτέστι τὸ ἄθροισμα τῶν $\mu+1$ δευτέρων ὅρων, διότι A παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν δευτέρων ὅρων τῶν μ δυωνύμων.

γ΄. Ὁ συντελεστὴς τοῦ τρίτου ὅρου εἶναι $B+A\lambda$. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ μὲν B παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀνὰ δύο συνδυασμῶν τῶν μ δευτέρων ὅρων, τὸ δὲ $A\lambda$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν νέων συνδυασμῶν, οἵτινες προκύπτουσιν ὡς ἐκ τοῦ δευτέρου ὅρου λ, συνδυαζομένου μεθ' ἑνὸς ἑκάστου τῶν ἄλλων μ δευτέρων, ἕπεται ὅτι $B+A\lambda$ εἶναι τὸ ἄθροισμα ὅλων ἐν γένει τῶν ἀνὰ δύο συνδυασμῶν τῶν $\mu+1$ δευτέρων ὅρων.

δ΄. Ὁ συντελεστὴς τοῦ τετάρτου ὅρου εἶναι $\Gamma+B\lambda$.

Ἀλλὰ . . . . $\Gamma=\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta+\ldots$

καὶ $B\lambda=(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma\ldots)\lambda=\alpha\beta\lambda+\alpha\gamma\lambda+\beta\gamma\lambda+\ldots$

ἄρα $\Gamma=B\lambda$ παριστάνει τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀνὰ τρία συνδυασμῶν τῶν $\mu+1$ δευτέρων ὅρων.

Ἐν γένει ἐπειδὴ N παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀνὰ ν συνδυασμῶν τῶν δευτέρων ὅρων καὶ $M\lambda$, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀνὰ ν νέων συνδυασμῶν, οἵτινες προκύπτουσιν ἐκ τοῦ νέου δευτέρου ὅρου λ, συνδυαζομένου μεθ' ἑνὸς ἑκάστου τῶν ἀνὰ $\nu-1$ συνδυασμῶν τῶν μ δευτέρων ὅρων, ἕπεται ὅτι $N+M\lambda$, ἢ ὁ συντελεστὴς τοῦ γενικοῦ ὅρου, τοῦ ἔχοντος ν ὅρους πρὸ αὐτοῦ, εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀνὰ ν συνδυασμῶν τῶν $\mu-1$ δευτέρων ὅρων.

Ὁ τελευταῖος ὅρος $y\lambda$ εἶναι προφανῶς τὸ γινόμενον τῶν $\mu+1$ δευτέρων ὅρων.

Ὥστε ὑποτεθεὶς ἀληθεύων ὁ νόμος τῆς συνθέσεως διὰ μ δυώνυμα, ἀληθεύει ἐπίσης καὶ διὰ $\mu+1$.

Ἀλλὰ περὶ τῆς ὑπάρξεως τοῦ νόμου τούτου, μέχρι τῶν τεσσάρων δυωνύμων, ἐπληροφορήθημεν ἤδη διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· συμπεραίνομεν λοιπὸν, ὅτι πρέπει νὰ ὑπάρχῃ καὶ ὅταν τὰ δυώνυμα ἦναι πέντε. Ἀληθεύων δὲ διὰ πέντε, πρέπει ν' ἀληθεύῃ καὶ διὰ ἕξ, ἑπομένως διὰ ἑπτὰ, καὶ ἐφεξῆς. Ἄρα ὁ νόμος εἶναι γενικός.

§ 173. Εὐκόλως ἤδη μεταβαίνομεν ἐκ τοῦ γινομένου τῶν μ δυωνύμων παραγόντων $\chi+\alpha,\quad \chi+\beta,\quad \chi+\gamma\ldots.$

εἰς τὸ γινόμενον τῶν $\chi+\alpha,\quad \chi+\alpha,\quad \chi+\alpha,\ldots$

τουτέστιν εἰς τὴν μ δύναμιν τοῦ $\chi+\alpha$. Ἀρκεῖ νὰ ὑποθέσωμεν ὅλους τοὺς δευτέρους ὅρους ἴσους, $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\ldots$

Καὶ τῷ ὄντι τότε ἔχομεν

$$(\chi+\alpha)\,(\chi+\beta)\,(\chi+\gamma)\ldots(\chi+\varkappa)=(\chi+\alpha)^\mu$$

Ἄς ἴδωμεν λοιπὸν ποίαν μορφὴν λαμβάνει, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην, καὶ ὁ ἤδη ἀναπτυχθεὶς τύπος τοῦ γινομένου (1).

Ὁ μὲν συντελεστὴς τοῦ δευτέρου ὅρου $A=\alpha+\beta+\gamma+\ldots$
τρέπεται εἰς . . . . $A=\alpha+\alpha+\alpha+\ldots=\mu\alpha$.
Ὁ δὲ τοῦ τρίτου ὅρου . . . . . $B=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta\ \ldots$
τρέπεται εἰς . . . . $B=\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2\ \ldots$
ἤτοι τοσάκις α^2, ὅσοι εἶναι ἀνὰ δύο συνδυασμοὶ τῶν μ γραμμάτων, ὅθεν ἄγεται εἰς

$$\frac{\mu(\mu-)}{1\ .\ 2}\alpha^2.$$

Ὁ τοῦ τετάρτου ὅρου . . . . . $\Gamma=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta\ \ldots$
τρέπεται εἰς . . . . $\Gamma=\alpha^3+\alpha^3+\alpha^3\ \ldots$
ἤτοι τοσάκις α^3, ὅσοι εἶναι οἱ ἀνὰ τρία συνδυασμοὶ τῶν μ γραμματων, ὅθεν ἄγεται εἰς

$$\frac{\mu(\mu-1)\,(\mu-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\alpha^3.$$

Καὶ ἐν γένει ὁ συντελεστὴς τοῦ γενικοῦ ὅρου Ν τρέπεται εἰς α^ν εἰλημμένον τοσάκις, ὅσοι εἶναι οἱ ἀνὰ ν συνδυασμοὶ τῶν δευτέρων μ ὅρων, ὅθεν ἄγεται εἰς

$$\frac{\Pi(\mu-\nu+1)}{K\ .\ \nu}\alpha^\nu,$$

Ἔχομεν λοιπὸν

$$(\chi+\alpha)^\mu=\chi^\mu+\mu\alpha\chi^{\mu-1}+\frac{\mu(\mu-1)}{1\ .\ 2}\alpha^2\chi^{\mu-2}+\frac{\mu(\mu-1)\ (\mu-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\alpha^3\chi^{\mu-3}\ldots$$
$$+\frac{\Pi(\mu-\nu+1)}{K\ .\ \nu}\alpha^\nu\chi^{\mu-\nu}\ \ldots\ +\alpha^\mu$$

ΣΗΜ. Ὁ ὅρος $\dfrac{\Pi(\mu-\nu+1)}{K\ .\ \nu}\alpha^\nu\chi^{\mu-\nu}$ ὀνομάζεται **Γενικὸς ὅρος**, διότι δι' αὐτοῦ ἀνευρίσκομεν ὅλους τοὺς λοιπούς, ὅταν θέσωμεν $\nu=2,\ 3,\ 4\ldots$

§ 174. Μόλις ῥίψωμεν τὰ βλέμματά μας ἐπὶ τῶν διαφόρων τοῦ ἀνελίγματος τούτου ὅρων, κατανοοῦμεν εὐθὺς ἁπλοῦν τινα νόμον, κατὰ τὸν ὁποῖον ἕκαστος συντελεστὴς σχηματίζεται διὰ τοῦ προηγουμένου· εἶναι δὲ οὗτος.

« Ὁ συντελεστὴς οἱουδήποτε ὅρου σχηματίζεται, πολλαπλασιαζο-
» μένου τοῦ συντελεστοῦ τοῦ προηγουμένου ὅρου ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ
» χ, εἰς τὸν αὐτὸν ὅρον, καὶ διαιρουμένου τοῦ γινομένου διὰ τοῦ ἀ-
» ριθμοῦ τῶν προηγουμένων ὅρων. »

Ἄς θεωρήσωμεν τὸν γενικὸν ὅρον, ἤτοι τὸν ἔχοντα πρὸ αὐτοῦ ν ὅρους,
$$\frac{\Pi(\mu-\nu+1)}{K\,.\,\nu}\alpha^{\nu}\chi^{\mu-\nu}$$

Ὁ ἀμέσως προηγούμενος τούτου, ἔχων πρὸ αὐτοῦ ν—1 ὅρους πρέπει νὰ ἦναι
$$\frac{\Pi}{K}\alpha^{\nu-1}\chi^{\mu-\nu+1}$$
διότι $\frac{\Pi}{K}$ παριστάνει τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν ἀνὰ ν—1.

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι ὁ συντελεστὴς $\frac{\Pi(\mu-\nu+1)}{K\,.\,\nu}$ ἰσοῦται μὲ τὸν συντελεστὴν $\frac{\Pi}{K}$ τοῦ προηγουμένου ὅρου, πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ μ—ν+1, ἐκθέτην τοῦ χ εἰς τὸν αὐτὸν ὅρον καὶ διαιρεθέντα διὰ ν, ἀριθμοῦ τῶν προηγουμένων ὅρων.

Οὕτως εἶναι κυρίως ὁ τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος νόμος, διὰ τοῦ ὁποίου ἀναπτύσσομεν οἱανδήποτε δύναμιν, χωρὶς νὰ διερχώμεθα δι' ὅλων τῶν προηγουμένων.

Παραδείγματα.

$$(\chi+\alpha)^6=\chi^6+6\alpha\chi^5+15\alpha^2\chi^4+20\alpha^3\chi^3+15\alpha^4\chi^2+6\alpha^5\chi+\alpha^6$$
$$(\chi+\alpha)^{10}=\chi^{10}+10\alpha\chi^9+45\alpha^2\chi^8+120\alpha^3\chi^7+210\alpha^4\chi^6+252\alpha^5\chi^5$$
$$+210\alpha^6\chi^4+120\alpha^7\chi^3+45\alpha^8\chi^2+10\alpha^9\chi+\alpha^{10}.$$

Συνέπειαι τοῦ τύπου τοῦ διωνύμου καὶ τῆς θεωρίας τῶν συνδυασμῶν.

§ 175. Α'. Ἐπειδὴ ἡ ἔκφρασις $(\chi+\alpha)^{\mu}$ συντίθεται ἐκ τοῦ χ καὶ α, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ ἐπομένως ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ αὐτῆς δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντὶ τοῦ χ τεθῇ α καὶ ἀντιστρόφως, διότι ἔχομεν
$$(\chi+\alpha)^{\mu}=(\alpha+\chi)^{\mu}$$
πρέπει ἐπίσης καὶ τὸ ἀνέλιγμα αὐτῆς, ἤτοι τὸ δεύτερον μέλος τοῦ τύπου (2), εἰς τὴν ἀλλαγὴν ταύτην, νὰ διατηρῇ τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμήν. Ἕπεται λοιπόν, ὅτι ὑπάρχοντος εἰς τὸ ἀνέλιγμα τοῦ ὅρου $K\alpha^{\nu}\chi^{\mu-\nu}$ (διὰ τοῦ Κ παριστάνομεν τὸν συντελεστὴν τοῦ γενικοῦ ὅρου, οἱοσδήποτε καὶ ἂν ἦναι) πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ὡσαύτως καὶ ἕτερος ὅρος $K\chi^{\nu}\alpha^{\mu-\nu}$ ἢ $K\alpha^{\mu-\nu}\chi^{\nu}$ διότι τότε, διὰ τῆς ἀλλαγῆς τοῦ χ εἰς

α καὶ τοῦ α εἰς χ ὁ μὲν πρῶτος ὅρος τρέπεται εἰς τὸν δεύτερον, ὁ δὲ δεύτερος εἰς τὸν πρῶτον, καὶ οὕτω συνυπάρχοντες ἀμφότεροι οἱ ὅροι δὲν προσγίνεται οὐδεμία μεταβολὴ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς ὅλης ἐκφράσεως. Βλέπομεν δέ, ὅτι οἱ δύο οὗτοι ὅροι ἀπέχουσιν ἐξίσου ἐκ τῶν ἄκρων· διότι εἰς οἱονδήποτε ὅρον τοῦ ἀνελίγματος, ὁ ἀριθμὸς τῶν προηγουμένων δεικνύεται ἐκ τοῦ ἐκθέτου τοῦ α ἑπομένως ὁ μὲν ὅρος $K\alpha^{\nu}\chi^{\mu-\nu}$ ἔχει ν ὅρους πρὸ αὐτοῦ, ὁ δὲ $K\alpha^{\mu-\nu}\chi^{\nu}$ ἔχει μ—ν πρὸ αὐτοῦ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν ὅρων τοῦ ἀνελίγματος εἶναι $\mu+1$, ἐὰν ἐκ τούτου ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν προηγουμένων ὅρων $\mu-\nu$, καὶ αὐτὸς οὗτος, συνάγεται ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑπομένων. Ἀλλὰ $\mu+1-(\mu-\nu)-1=\nu$. Ἄρα μετὰ τὸν δεύτερον ὅρον $K\alpha^{\mu-\nu}\chi^{\nu}$ ὑπάρχουσι ν ὅροι.

Ἕπεται λοιπὸν ὅτι « Οἱ συντελεσταὶ τῶν ἐξίσου τῶν ἄκρων ἀπεχόντων ὅρων τοῦ » ἀνελίγματος εἶναι ἴσοι. »

Ἡ παρατήρησις αὕτη χρησιμεύει διὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀνελίγματος· διότι ἀφοῦ σχηματισθῇ τὸ ἥμισυ ἐξ αὐτῶν, οἱ λοιποὶ γράφονται κατ' ἀντίστροφον τάξιν.

Β'. Ἐπειδὴ εἰς τοὺς ὅρους $K\alpha^{\nu}\chi^{\mu-\nu}$ καὶ $K\alpha^{\mu-\nu}\chi^{\nu}$ οἱ συντελεσταὶ ἐκφράζουσι τοὺς ἀριθμοὺς τῶν συνδυασμῶν τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν καὶ ἀνὰ μ—ν ἕπεται ὅτι·

« Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνὰ ν συνδυασμῶν τῶν μ γραμμάτων ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθ» μὸν τῶν ἀνὰ μ—ν συνδυασμῶν τῶν αὐτῶν γραμμάτων. »

Παραδείγματα Ἔστω $\mu=12$ καὶ $\nu=5$.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν 12 γραμμάτων ἀνὰ 5 ἰσοῦται μὲ τὸν ἀνὰ 12—5 ἢ ἀνὰ 7.

Ὡσαύτως 5 γράμματα ἀνὰ 2 συνδυαζόμενα δίδουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν συνδυασμῶν, τὸν ὁποῖον δίδουσι συνδυαζόμενα ἀνὰ 5—2 ἢ ἀνὰ 3.

§ 176. Γ'. Ἐὰν εἰς τὸν γενικὸν τύπον

$$(\chi+\alpha)^{\mu}=\chi^{\mu}+\mu\alpha\chi^{\mu-1}+\frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}\alpha^2\chi^{\mu-2}+\ldots,$$

ὑποθέσωμεν $\chi=1$ καὶ $\alpha=1$, λαμβάνομεν

$$(1+1)^{\mu}=2^{\mu}=1+\mu+\frac{\mu(\mu-1)}{\mu\cdot 2}+\frac{(\mu(\mu-1)\,\mu-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots.$$

τουτέστι « Τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν διαφόρων ὅρων τοῦ τύπου τοῦ δυω» νύμου ἰσοῦται μὲ ἰσοβάθμιον δύναμιν τοῦ 2. »

Οὕτω π. χ. εἰς τὸν μερικὸν τύπον

$$(\chi+\alpha)^5=\chi^5+5\alpha\chi^4+10\alpha^2\chi^3+10\alpha^3\chi^2+5\alpha^4\chi+\alpha^5$$

τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν $1+5+10+10+5+1$ ἢ 32 ἰσοῦται μὲ τὴν πέμπτην δύναμιν τοῦ 2.

§ 177. Δ'. Ἐπειδὴ ὁ τύπος $\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,\nu}$ παριστάνει τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν, καὶ ἐπειδὴ ὡς ἐκ τούτου ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ἀκέραιος, συμπεραίνομεν ὅτι « Τὸ γινόμενον τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων » ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ὁ μὲν πρῶτος εἶναι μ, ὁ δὲ τελευταῖος $\mu-\nu+1$, διαιρεῖται » ἀκριβῶς διὰ τοῦ γινομένου τῶν τῆς φυσικῆς σειρᾶς ἀριθμῶν, ἀπὸ 1 ἕως ν. »

Ἐξαγωγὴ τῶν ῥιζῶν τῶν ἀριθμῶν.

178. Πρὶν ἀναπτύξωμεν τὴν περὶ ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν παντὸς βαθμοῦ γενικὴν θεωρίαν, κρίνομεν ἀναγκαῖον νὰ ἐκθέσωμεν τοὺς κανόνας τῆς ἐξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ῥίζης· διότι οὐχὶ μόνον, μετὰ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἡ κυβικὴ ἀπαντᾶται συχνότερον εἰς τὴν πρᾶξιν, ἀλλὰ καὶ διὰ τῆς ἀντιπαραθέσεως τῶν δύο τούτων θεωριῶν χειραγωγούμεθα εὐκόλως εἰς τὴν ἀνακάλυψιν τῶν περὶ ἐξαγωγῆς παντὸς βαθμοῦ μεθόδων. Ἀπαιτεῖται δὲ νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἤδη ἐκτεθεῖσαν θεωρίαν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, ἥτις ἔχει πρὸς τὰς τῶν ἀνωτέρων βαθμῶν ῥίζας μεγαλην ἀναλογίαν, οὖσα οὕτως εἰπεῖν, ἡ πρώτη βαθμὶς τῆς περὶ ῥιζῶν ἐν γένει θεωρίας.

Α'. Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης.

§ 179. Σχηματίζομεν κατὰ πρῶτον τὸν πίνακα τῶν κύβων τῶν δέκα πρώτων ἀριθμῶν.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

Ἐκ της παρατηρήσεως τοῦ πίνακος τούτου συνάγομεν, ὅτι μεταξὺ ὅλων τῶν ἀριθμῶν, τῶν μικροτέρων τῶν 1000, οἱ ἐννέα μόνον ἀριθμοὶ τῆς δευτέρας γραμμῆς εἶναι τέλειοι κύβοι οἱ δὲ λοιποὶ περιλαμβανόμενοι μεταξὺ αὐτῶν, ἔχουσι, κατὰ τὸ φαινόμενον, ῥίζας περιεχομένας μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν τῆς πρώτης γραμμῆς καὶ ἐπομένως κλασματικάς.

Οὕτω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 300, περιλαμβανόμενος μεταξὺ τῶν 216 καὶ 343, τῶν ὁποίων αἱ ῥίζαι εἶναι 6 καὶ 7, ἔχει ῥίζαν περιλαμβανομένην μεταξὺ τοῦ 6 καὶ 7, ἤτοι 6 μεθ' ἑνὸς κλάσματος.

Τὸ κλάσμα τοῦτο, τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ συμπληρώσῃ τὴν ῥίζαν, δὲν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ἀκριβῶς διὰ τῆς μονάδος, τουτέστι δὲν δύναται νὰ προσδιορισθῇ, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης· διότι « Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς μὴ ἔχων ῥίζαν ἀκεραίαν, δὲν δύναται νὰ ἔχῃ οὐδὲ κλασματικήν »

Τῷ ὄντι ἐὰν ἀκέραιός τις ἀριθμὸς Ν ὑποτεθῇ, ὅτι ἔχει ῥίζαν κλασματικὴν $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha\times\alpha\times\alpha}{\varepsilon\times\varepsilon\times\varepsilon} \text{ ἢ } \frac{\alpha^3}{\varepsilon^3}=\mathrm{N}$$

τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον. Διότι ὑποτιθεμένου τοῦ $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἀναγώγου, οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι πρῶτοι σχετικῶς, ἑπομένως καὶ οἱ α^3 καὶ β^3· ὥστε $\frac{\alpha^3}{\beta^3}$ εἶναι ἀνάγωγος κλασματικὸς ἀριθμὸς καὶ δὲν δύναται νὰ ἰσοῦται μὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν N.

Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, ὅσοι δὲν ἔχουσι ῥίζας ἀκεραίας ὀνομάζονται *ἀτελεῖς κύβοι*· καθὼς $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{120}$.

Τῶν ἀτελῶν κύβων αἱ ῥίζαι εἶναι ἀσύμμετροι καὶ προσδιορίζονται ὡς ἔγγιστα.

§ 180. Ἡ διαφορὰ τῶν κύβων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι τοσοῦτον μεγαλητέρα, καθόσον οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶναι μεγαλήτεροι. Τὴν διαφορὰν ταύτην δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ἐκτιμήσωμεν.

Ἔστωσαν α καὶ $\alpha+1$ δύο ἀκέραιοι διαδοχικοὶ ἀριθμοί.

ἔχομεν . . . . $(\alpha+1)^3=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1$

ὅθεν . . . . $(\alpha+1)^3-\alpha^3=3\alpha^2+3\alpha+1$,

τουτέστιν «Ἡ διαφορὰ δύο τελείων διαδοχικῶν κύβων ἰσοῦται μὲ » τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας ῥίζης, πλέον τὸ τρι» πλάσιον αὐτῆς, πλέον 1.»

Οὕτως ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ κύβου τοῦ 90 καὶ τοῦ κύβου τοῦ 89 ἰσοῦται μὲ

$$3(89)^2+3\times 89+1=24031.$$

Α'. Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

§ 181. Εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς κυβικῆς ῥίζης τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν διακρίνονται δύο περιπτώσεις.

α'. Ὁ δεδομένος ἀριθμὸς δὲν ὑπερβαίνει τὸν 1000.

β'. Ὁ δεδομένος ἀριθμὸς εἶναι μείζων τοῦ 1000.

Περίπτωσις α'. Ἐὰν ὁ δεδομένος ἀριθμὸς δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν 1000, ἡ ῥίζα αὐτοῦ εὑρίσκεται ἀμέσως ἐκ τοῦ πίνακος, ἢ ἀκριβῶς, ἢ ὡς ἔγγιστα μεῖον μονάδος.

Παραδείγματα. Ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 125 εἶναι 5, ⎫
» » τοῦ 729 » 9, ⎭ ἀκριβῶς
» » τοῦ 72 » 4 μεῖον μονάδος.

Περίπτωσις β'. Προτεθείσθω νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 103823.

103,823	47	48	47
64	48	48	47
398,23		384	329
		192	188
		9304	2209
		48	47
		20432	15463
		9216	8836
		112592	103823

Τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, περιεχομένου μεταξὺ τοῦ 1000 καὶ 1000000 ἤτοι μεταξὺ τοῦ $(10)^3$ καὶ $(100)^3$, ἡ ῥίζα εἶναι ἀναγκαίως σύνθετος ἐκ δύο ψηφίων, τουτέστιν ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων. Σημειοῦντες διὰ α τὰς δεκάδας καὶ διὰ β τὰς μονάδας, ἔχομεν

$$103,823=(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ κύβος ἀριθμοῦ συνθέτου ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων περιέχει τὸν κύβον τῶν δεκάδων, τὸ τριπλάσιον γινόμενον τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, τὸ τριπλάσιον γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων, πλέον τὸν κύβον τῶν μονάδων.

Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ὁ κύβος τῶν δεκάδων δίδει τοὐλάχιστον χιλιάδας, τὰ τρία πρὸς τὰ δεξιὰ τελευταῖα ψηφία δὲν ἀποτελοῦσι μέρος αὐτοῦ, ἐπομένως εὑρίσκεται εἰς τὸ μέρος 103, τὸ ὁποῖον χωρίζομεν δι' ὑποστιγμῆς. Ἀλλ' ἡ ῥίζα τοῦ εἰς τὸ τμῆμα 103 περιεχομένου κύβου εἶναι 4· ὅθεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τῆς ζητουμένης ῥίζης εἶναι 4.

Εὑρεθέντος δὲ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων σχηματίζομεν τὸν κύβον αὐτοῦ 64 καὶ ἀφαιροῦντες αὐτὸν ἀπὸ 103 ἔχομεν ὑπόλοιπον 39. Πλησίον τοῦ ὑπολοίπου τούτου καταβιβάζοντες τὸ δεύτερον τμῆμα ἔχομεν 39823. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο περιέχει τὸ τριπλάσιον γινόμενον τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, πλέον τὰ δύο ἄλλα μέρη, ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν.

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων δίδει τοὐλάχιστον ἑκατοντάδας, ἔπεται ὅτι τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας δὲν περιλαμβάνεται εἰς τ' ἀριστερὰ τῶν δύο τελευταίων ψηφίων 23, τὰ ὁποῖα διὰ τοῦτο χωρίζομεν δι' ὑποστιγμῆς. Σχηματίζοτες δὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῶν 4 δεκάδων, ἤτοι 48, καὶ διαιροῦντες 398 διὰ 48 εὑρίσκομεν πηλίκον 8. Τὸ ψηφίον τοῦτο ἢ παριστάνει τὰς μονάδας τῆς ῥίζης, ἢ εἶναι μεγαλήτερον· (ἐπειδὴ εἰς τὰς 398 διαιρεθείσας ἑκατοντάδας δὲν περιέχεται μόνον τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, ἀλλὰ καὶ ἕτεραι ἑκατοντάδες, προκύψασαι ἐκ τῶν ἄλλων δύο μερῶν). Διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν δὲ ἂν τὸ ψηφίον τοῦτο δὲν ἦναι μεγατερον τοῦ πρέποντος, δυνάμεθα, καθὼς εἰς τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, νὰ σχηματίσωμεν διὰ τοῦ ψηφίου τούτου 8, καὶ διὰ τῶν 4 δεκάδων τὰ τρία μέρη, τὰ ὁποῖα περιέχονται εἰς 39823. Ἀλλ' εἶναι πολὺ ἁπλούστερον νὰ σχηματίσωμεν τὸν κύβον τοῦ 48.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ κύβος τοῦ 48 εἶναι 110592, ἀριθμὸς μεγαλήτερος τοῦ 103823, φανερὸν ὅτι τὸ ψηφίον 8 εἶναι μεγαλήτερον τοῦ πρέποντος. Γράφομεν λοιπὸν εἰς τὸν τόπον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης 7, καὶ σχηματίζοντες τὸν κύβον τοῦ 47, εὑρίσκομεν 103823.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι ὁ δεδομένος ἀριθμὸς εἶναι τέλειος κύβος καὶ ἡ ῥίζα αὐτοῦ εἶναι 47.

§ 182. Ἔστω προσέτι ὁ ἀριθμὸς 47954.

```
47,954 |36             36
27     |27             36
209                    216
                       108
                       1296
                       36
47954                  7775
46656                  3888
1298                   46656
```

Κατὰ τὰ εἰρημένα ἡ ῥίζα τοῦ 47954 σύγκειται ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων· τοῦ δὲ κύβου τῶν δεκάδων εὑρισκομένου εἰς τὰς 47 χιλιάδας, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τῆς ζητουμένης ῥίζης εἶναι 3. Ἀφαιροῦντες δὲ τὸν κύβον τοῦ 3 ἤτοι 27 ἐκ τοῦ 47 καὶ πλησίον τοῦ ὑπολοίπου 20 καταβιβάζοντες μόνον τὸ πρῶτον ψηφίον 9 τοῦ δευτέρου τμήματος, ἔχομεν 209 ἑκατοντάδας. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος συνίσταται ἐκ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, καὶ ἐκ τῶν ἑκατοντάδων, αἱ ὁποῖαι προέκυψαν ἐκ τῶν ἄλλων δύο μερῶν. Σχηματίζοντες τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῶν 3 δεκάδων, ἤτοι 27, καὶ δι' αὐτοῦ διαιροῦντες τὸν ἀριθμὸν 209 εὑρίσκομεν πηλίκον 7. Τὸ ψηφίον τοῦτο εἶναι ἀνώτερον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων, διότι κυβίζοντες τὸν 37 εὑρίσκομεν 50653 ἀριθμὸν μεγαλήτερον τοῦ δοθέντος.

Σχηματίζοντες ὅμως τὸν κύβον τοῦ 36 εὑρίσκομεν 46656, ἀριθμόν, ὅστις ἀφαιρεθεὶς ἐκ τοῦ προτεθέντος δίδει ὑπόλοιπον 1298.

Ὅθεν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειος κύβος, ἡ δὲ ῥίζα αὐτοῦ μεῖον μονάδος εἶναι 36.

§ 183. Ἔστω προσέτι τὸ ἑξῆς παράδειγμα.

```
  43,725,658   |352
  27            27        (35)³=42875
  167                    3(35)²=3675

  43725                  (352)³=43614208
  42875
   8506

  43725658
  43614208
ὑπόλοιπον  111450
```

Οἱαδήποτε καὶ ἂν ἦναι ἡ ζητουμένη ῥίζα, ἔχουσα ὑπὲρ τὸ ἓν ψηφίον, δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς δεκάδας καὶ μονάδας. Ἐπειδὴ δὲ ὁ κύβος τῶν δεκάδων δὲν ἀποτελεῖ μέρος τῶν πρὸς τ' ἀριστερὰ τριῶν τελευταίων ψηφίων, (§ 181) εὑρίσκεται ἀναγκαίως εἰς τὸ μέρος 43725: ὅθεν ἡ ῥίζα τοῦ εἰς τὸ μέρος τούτου ἐμπεριεχομένου μεγαλητέρου κύβου ἐκφράζει τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς ζητουμένης.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 43725 ἔχει ὑπὲρ τὰ τρία ψηφία, ἡ ῥίζα αὐτοῦ ἔχει ὑπὲρ τὸ ἕν, ἤτοι δεκάδας καὶ μονάδας. Διὰ νὰ λάβωμεν τὰς δεκάδας, πρέπει νὰ χωρίσωμεν τὰ τρία τελευταῖα ψηφία 725, καὶ νὰ ἐξάξωμεν τὴν ῥίζαν τοῦ εἰς τὸ μέρος 43 ἐμπεριεχομένου μεγαλητέρου κύβου. Ἡ ῥίζα αὕτη εἶναι 3, ὅθεν τὸ ψηφίον τοῦτο ἐκφράζει τὰς δεκάδας τῆς ῥίζης τοῦ 43725 (τουτέστι τὰς ἑκατοντάδας τῆς ζητουμένης).

Ἀφαιροῦντες τὸν κύβον τοῦ 3 ἤτοι 27 ἐκ τοῦ 43, καὶ πλησίον τοῦ ὑπολοίπου 16 καταβιβάζοντες τὸ πρῶτον ψηφίον 7 τοῦ ἑπομένου τμήματος ἔχομεν 167.

Σχηματίζοντες τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῶν 3 δεκάδων, ἤτοι 27, καὶ δι' αὐτοῦ διαιροῦντες 167 λαμβάνομεν πηλίκον 6. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι μεγαλήτερον τοῦ πρέποντος. Γράφοντες δὲ 5 καὶ κυβίζοντες τὸν ἀριθμὸν 35 λαμβάνομεν 42873 ἀριθμόν, ὅστις ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ 43725 δίδει ὑπόλοιπον 850, ὥστε 35 εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς ζητουμένης ῥίζης.

Ἵνα λάβωμεν τὰς μονάδας καταβιβάζομεν πλησίον τοῦ ὑπολοίπου

850 τὸ πρῶτον ψηφίον 6 τοῦ τελευταίου τμήματος καὶ οὕτως ἔχομεν 8506. Σχηματίζομεν ἔπειτα τὸ τριπλάσιον τετράγωνον τῶν δεκάδων 35, ἤτοι 3975. καὶ δι' αὐτοῦ διαιροῦντες 8506 λαμβάνομεν πηλίκον 2.

Κυβίζοντες τέλος τὸν ἀριθμὸν 352 ἔχομεν 43614208, ἐξαγόμενον μικρότερον τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ, τὸ ὁποῖον ἀφαιροῦντες ἔχομεν ὑπόλοιπον 111450. Ὅθεν 352 εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 43725658· μεῖον μονάδος.

§ **184.** Κανών. « Χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα τριψήφια, » ἀρχόμενοι δεξιόθεν. Τὸ τελευταῖον τμῆμα δυνατὸν νὰ ἔχῃ δύο ἢ » ἕν. Ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τοῦ εἰς τὸ πρῶτον πρὸς τ' ἀριστερὰ τμῆ- » μα ἐμπεριεχομένου μεγαλητέρου κύβου καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ πρῶ- » τον ψηφίον τῆς ῥίζης.

« Κυβίζομεν τὸ εὑρεθὲν ψηφίον καὶ ἀφαιροῦμεν τὸν κύβον ἀπὸ τὸ » πρῶτον τμῆμα. Πλησίον τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον » ψηφίον τοῦ δευτέρου τμήματος· διαιροῦμεν τὸν οὕτω σχηματισθέν- » τα ἀριθμὸν, διὰ τοῦ τριπλασίου τετραγώνου τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου, » καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης.

« Κυβίζομεν τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν καὶ ἀφαιροῦμεν τὸν κύβον ἀπὸ » τὰ δύο πρῶτα τμήματα. Πλησίον τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν » τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ τρίτου τμήματος· διαιροῦμεν τὸν οὕτω σχη- » ματισθέντα ἀριθμὸν, διὰ τοῦ τριπλασίου τετραγώνου τῆς εὑρεθεί- » σης ῥίζης καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ τρίτον ψηφίον τῆς ῥίζης. »

« Ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως ἕως οὗ καταβιβασθῶσιν ὅλα τὰ » τμήματα. »

ΣΗΜ Α'. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς ῥίζης ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν τμημάτων.

ΣΗΜ Β'. Εἴδομεν ὅτι συχνάκις εἰς τὴν ὁδὸν τῶν πράξεων ἀπαντῶμεν πηλίκα μεγαλήτερα τοῦ πρέποντος, καὶ σμικρύνομεν αὐτὰ κατὰ μίαν ἢ δύο μονάδας· ὡς ἐκ τῆς ἐλαττώσεως δὲ ταύτης τῶν πηλίκων δυνατὸν νὰ ὑποπέσωμεν εἰς λάθος, λαμβάνοντες ὡς ψηφίον τῆς ῥίζης μικρότερον τοῦ πρέποντος. Ἀλλ' ἔχομεν σημεῖον, δι' οὗ γνωρίζομεν τὸ λάθος τοῦτο· διότι τότε τὸ ὑπόλοιπον ἰσοῦται ἢ ὑπερβαίνει τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης, πλέον τὸ τριπλάσιον αὐτῆς, πλέον ἕν.

Παραδείγματα. $\sqrt[3]{483249} = 78$ } μεῖον μονάδος

$\sqrt[3]{91632508741} = 4508$ }

$\sqrt[3]{32977340218432} = 32068$, ἀκριβῶς

Β΄. Ἐξαγωγὴ τῆς ν ῥίζης τῶν ἀριθμῶν.

§ 185. Ἵνα γενικεύσωμεν τὴν περὶ ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν θεωρίαν, ἂς σημειώσωμεν διὰ N τὸν προτεθέντα ἀριθμὸν καὶ διὰ ν τὸν βαθμὸν τῆς ῥίζης.

Α΄. Περίπτωσις. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς N δὲν ἔχῃ ὑπὲρ τὰ ν ψηφία, ἡ ῥίζα αὐτοῦ ἔχει ἓν μόνον· διότι ἡ ν δύναμις τοῦ μικροτέρου διψηφίου ἀριθμοῦ, τουτέστι $10^ν$ ἔχει $ν+1$ ψηφία.

Ὅθεν κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ῥίζα τοῦ N λαμβάνεται ἀμέσως ἐκ τοῦ πίνακος τῶν ν δυνάμεων τῶν δέκα πρώτων ἀριθμῶν, ἀκριβῶς ἢ ὡς ἔγγιστα.

Β΄. Περίπτωσις. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς N ἔχῃ ὑπὲρ τὰ ν ψηφία, ἡ ῥίζα αὐτοῦ ἔχουσα ὑπὲρ τὸ ἕν, δύναται πάντοτε νὰ θεωρηθῇ ὡς συνισταμένη ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων.

Σημειοῦντες διὰ α τὰς δεκάδας καὶ διὰ β τὰς μονάδας, ἔχομεν

$$N=(α+β)^ν=α^ν+να^{ν-1}β+\ldots$$

τουτέστιν ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς περιέχει,

Τὴν ν δύναμιν τῶν δεκάδων,

Τὸ νιπλάσιον τοῦ γινομένου τῆς $ν-1$ δυνάμεως τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας,

Πλέον ἄλλα μέρη, κατὰ τὸ ἐκτύλιγμα τοῦ δυωνύμου.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ν δύναμις τῶν δεκάδων δίδει ἀριθμὸν συνιστάμενον τοὐλάχιστον ἐκ $ν+1$ ψηφίων, ἕπεται ὅτι τὰ ν τελευταῖα πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφία δὲν ἀποτελοῦσι μέρος αὐτῆς. Χωρίζομεν λοιπὸν αὐτὰ καὶ ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τῆς μεγαλητέρας ν δυνάμεως, τῆς περιεχομένης εἰς τὸ πρὸς τ' ἀριστερὰ μέρος. Ἡ ῥίζα αὕτη θέλει ἐκφράζει τὰς δεκάδας τῆς ζητουμένης.

Ἐὰν τὸ πρὸς τ' ἀριστερὰ τοῦτο μέρος περιέχῃ ἀκόμη ὑπὲρ τὰ ν ψηφία, χωρίζομεν ἐξ αὐτῶν τὰ ν τελευταῖα, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἀφοῦ τοιουτοτρόπως χωρίσωμεν τὸν ἀριθμὸν N εἰς τμήματα ἐκ ν ψηφίων (τὸ τελευταῖον πρὸς τ' ἀριστερὰ δυνατὸν νὰ ἔχῃ ὀλιγώτερα), καὶ ἐξάξωμεν τὴν ῥίζαν τῆς μεγαλητέρας ν δυνάμεως, τῆς εἰς τὸ πρῶτον τμῆμα περιεχομένης, ἔχομεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως τῆς ζητουμένης.

Ἀφαιροῦντες τὴν ν δύναμιν τοῦ ψηφίου τούτου ἐκ τοῦ πρώτου πρὸς τ' ἀριστερὰ τμήματος, λαμβάνομεν ὑπόλοιπόν τι, τὸ ὁποῖον ἀκολουθούμενον ὑπὸ τοῦ δευτέρου τμήματος περιέχει πρὸς τοῖς ἄλλοις, τὸ διπλάσιον τῆς $ν-1$ δυνάμεως τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας. Ἀλλὰ τὸ μέρος τοῦτο δὲν δύναται νὰ δώσῃ μονάδας τάξεως κατωτέρας τοῦ $10^{\nu-1}$, ἐπομένως τὰ $\nu-1$ τελευταῖα ψηφία τοῦ δευτέρου τμήματος δὲν ἀποτελοῦσι μέρος αὐτοῦ. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ καταβιβάσωμεν πλησίον τοῦ ὑπολοίπου τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ δευτέρου τμήματος.

Σχηματίζοντες δὲ τὸ νιπλάσιον τῆς $\nu-1$ δυνάμεως τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης διαιροῦμεν δι' αὐτοῦ τὸ ὑπόλοιπον μετὰ τοῦ καταβιβασθέντος ψηφίου, καὶ τὸ πηλίκον, ἂν δὲν ἦναι μεγαλήτερον τοῦ πρέποντος, παριστάνει τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης.

Σχηματίζομεν τὴν ν δύναμιν τῆς εὑρεθείσης ῥίζης καὶ ἀφαιροῦμεν αὐτὴν ἐκ τῶν δύο πρώτων τμημάτων. Πλησίον τοῦ νέου ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ τρίτου τμήματος, καὶ διαιροῦμεν τὸν οὕτω σχηματισθέντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ νιπλασίου τῆς $\nu-1$ δυνάμεως τῆς εὑρεθείσης ῥίζης, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΣΗΜ. Α'. Δύναται ὁ μαθητής, ἐννοήσας τὴν γενικὴν ταύτην μέθοδον, νὰ ἐφαρμόσῃ αὐτὴν εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετάρτης. πέμπτης, . . . ῥίζης.

ΣΗΜ. Β'. Ἐπειδὴ ἡ ἐξαγωγὴ τῶν ῥιζῶν τῶν ἀριθμῶν ἀνωτέρου βαθμοῦ σπανίως ἀπαντᾶται εἰς τὰ στοιχειώδη ζητήματα, καὶ ἐπειδὴ ὁ βαθμὸς οὗτος πολλάκις ἁπλοποιεῖται. προσέτι δέ, ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι δυνατὸν νὰ εὑρεθῶσιν εὐκολώτερον διὰ τῶν λογαρίθμων, περὶ ὧν θέλομεν πραγματευθῇ κατωτέρω, τὸν παράγραφον τοῦτον δύνανται νὰ παραλείψωσιν οἱ μὴ προτιθέμενοι τὴν βαθυτέραν σπουδὴν τῶν Μαθηματικῶν.

Ἁπλοποίησις τοῦ βαθμοῦ τῆς ῥίζης.

§ 186. Αἱ ῥίζαι τῶν ὁποίων ὁ βαθμὸς εἶναι πολλαπλάσιός τις ἀριθμός, δύνανται ν' ἀναχθῶσιν εἰς ἄλλας κατωτέρου βαθμοῦ.

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι

$$(\alpha^3)^4 = \alpha^3 \times \alpha^3 \times \alpha^3 \times \alpha^3 = \alpha^{12}$$

καὶ ἐν γένει $\quad (\alpha^\mu)^\nu = \alpha^\mu \times \alpha^\mu \times \alpha^\mu \ldots = \alpha^{\mu \times \nu}$

Ἐκ τούτου συνάγεται ἡ ἑξῆς ἀρχή,

« Ἡ ν δύναμις τῆς μ δυνάμεως ἀριθμοῦ τινος ἰσοῦται μὲ τὴν » μ . ν δύναμιν αὐτοῦ. »

Ἀποδεικνύομεν δὲ καὶ τὴν ἀντίστροφον ἀρχήν,

« Ἡ μ . ν ῥίζα ἀριθμοῦ τινος ἰσοῦται μὲ τὴν μ ῥίζαν τῆς ν ῥίζης » αὐτοῦ » ἢ ἀλγεβρικῶς

$$\sqrt[\mu\nu]{\alpha} = \sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς ἰσότητος ταύτης σημειοῦμεν

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \pi \ldots \ldots (1)$$

ὑψόνοντες τὰ δύο μέλη ταύτης εἰς τὴν μ δύναμιν ἔχομεν

$$\sqrt[\nu]{\alpha} = \pi^{\mu}$$

ὑψόνοντες ἐκ νέου εἰς τὴν ν δύναμιν λαμβάνομεν

$$\alpha = (\pi^{\mu})^{\nu} \text{ ἤτοι } \alpha = \pi^{\mu\nu}$$

καὶ ἐξάγοντες τὴν μν ῥίζαν τῶν δύο μελῶν,

$$\sqrt[\mu\nu]{\alpha} = \pi \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Συγκρίνοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν

$$\sqrt[\mu\nu]{\alpha} = \sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}$$

Κατὰ τὴν ἀρχὴν ταύτην ἔχομεν,

$$\sqrt[4]{256} = \sqrt{\sqrt{256}} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt[6]{2985984} = \sqrt[3]{\sqrt{2985984}} = \sqrt[3]{1728} = 12$$

$$\sqrt[8]{1679616} = \sqrt[4]{\sqrt{1679616}} = \sqrt[4]{1296} = \sqrt{\sqrt{1296}} = 6$$

ΣΗΜ. Εἰς τὴν διαδοχικὴν ἐξαγωγὴν τῶν ῥιζῶν εἶναι προτιμώτερον ν' ἀρχίζωμεν ἐκ τῆς ἁπλουστέρας, διότι ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τοῦ ἀνωτέρου βαθμοῦ ῥίζης, ἥτις εἶναι συνθετωτέρα πρᾶξις, ἐκτελεῖται οὕτως ἐπὶ ἁπλουστέρου ἀριθμοῦ.

Ἐξαγωγὴ τῆς ν ῥίζης διὰ προσεγγίσεως.

§ 187. Ὅταν ἀκέραιός τις ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ῥίζαν ἀκεραίαν, βαθμοῦ ν, δὲν δύναται νὰ ἔχῃ οὐδὲ κλασματικήν, καὶ ἐπομένως δὲν εἶναι τελεία δύναμις. Διότι ἡ ν δύναμις κλασματικοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἐπίσης κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, οὔσης τῆς ῥίζης ἀσυμμέτρου, λαμβάνομεν, διὰ τῆς ἀνωτέρω ἐκτεθείσης μεθόδου (§ 185) μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτῆς. Δυνάμεθα δὲ νὰ προσεγγίσωμεν εἰς τὴν ῥίζαν ὅσῳ θέλομεν, γενικεύοντες τὸ περὶ προσεγγίσεως τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀναφερόμενον πρόβλημα (§ 117), ὡς ἕπεται.

« Νὰ ἐξάξωμεν τὴν ν ῥίζαν ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ α, μεῖον $\frac{1}{\pi}$. »

Θέτοντες κατὰ πρῶτον τὸν ἀριθμὸν α ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\alpha\pi^\nu}{\pi^\nu}$ ἄς σημειώσωμεν διὰ ρ τὴν ν ῥίζαν τοῦ $\alpha\pi_\nu$ μεῖον μονάδος.

ὅθεν ἔχομεν $\rho^\nu < \alpha\pi^\nu < (\rho+1)_\nu$

διαιροῦντες διὰ π^ν $\frac{\rho^\nu}{\pi^\nu} < \frac{\alpha\pi^\nu}{\pi^\nu} < \frac{(\rho+1)_\nu}{\pi^\nu}$

ἐξάγοντες τὴν ν ῥίζαν $\sqrt[\nu]{\frac{\rho^\nu}{\pi_\nu}} < \sqrt[\nu]{\frac{\alpha\pi_\nu}{\pi^\nu}} < \sqrt[\nu]{\frac{(\rho+1)^\nu}{\pi^\nu}}$

λαμβάνομεν . . . . $\frac{\rho}{\pi} < \sqrt[\nu]{\alpha} < \frac{\rho+1}{\pi}$

ἄρα $\frac{\rho}{\pi}$ διαφέρει τῆς $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{\pi}$.

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

« Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ π_ν, ἐξάγομεν τοῦ γινομένου » τὴν ν ῥίζαν, μεῖον μονάδος, καὶ διαιροῦμεν αὐτὴν διὰ π. »

Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῆς κυβικῆς ῥίζης.

§ 188. Νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 15, μεῖον $\frac{1}{12}$

Ἀκολουθοῦντες τὸν ἀνωτέρω κανόνα ἔχομεν

$$15\times(12)^3=15\times1728=25920$$

ἀλλὰ $\sqrt[3]{25920}=29$, μεῖον μονάδος,

λοιπὸν $\sqrt[3]{15}=\frac{29}{12}=2\frac{5}{12}$, μεῖον $\frac{1}{12}$

Προσέγγισις εἰς δεκαδικά.

§ 189. Νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 25 μεῖον 0,01 ἢ $\frac{1}{100}$ ἐπειδὴ ὁ κύβος τοῦ παρονομαστοῦ 100 εἶναι 1000000, τουτέστι γράφεται διὰ τῆς μονάδος καὶ τρὶς τόσων μηδενικῶν ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ κλάσματος τῆς προσεγγίσεως, πολλαπλασιάζοντες 25 ἐπὶ τὸν κύβον τοῦτον ἔχομεν 25000000.

Ἀλλ' ἡ ῥίζα τοῦ γινομένου τούτου εἶναι 292.

Λοιπὸν $\sqrt[3]{25}=2{,}92$ μεῖον $0{,}01$.

Ἐν γένει. « Ἵνα ἐξάξωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἀκεραίου τινὸς ἀριθ-
» μοῦ, διὰ προσεγγίσεως εἰς δεκαδικὰ κλάσματα, πρέπει νὰ θέσωμεν
» εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ τρὶς τόσα μηδενικά, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία
» θέλομεν νὰ ἔχῃ ἡ ῥίζα· νὰ ἐξάξωμεν τὴν ῥίζαν τοῦ προκύπτοντος
» ἀριθμοῦ, μεῖον μονάδος· καὶ νὰ χωρίσωμεν εἰς αὐτὴν τὸν ζητούμε-
» νον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων. »

Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

§ 190. Ἐπειδὴ ὁ κύβος παντὸς δεκαδικοῦ κλάσματος πρέπει νὰ ἔχῃ τρὶς τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχει τὸ δεκαδικὸν κλασμα, ἕπεται ὅτι « πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ καταστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν
» δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ τριπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ
» τῶν δεκαδικῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα θέλομεν νὰ ἔχῃ ἡ ῥίζα. Τοῦτο
» δὲ κάμνομεν θέτοντες εἰς τὸ τέλος μηδενικά. Ἐξάγομεν ἔπειτα τὴν
» κυβικὴν ῥίζαν τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ καὶ χωρίζομεν εἰς αὐτὴν τὸν ἀπαι-
» τούμενον ἀριθμὸν τῶν δεκαδικῶν ψηφίων. »

Παραδείγματα. $\sqrt[3]{3{,}1415}=1{,}46$ μεῖον $0{,}01$.

$\sqrt[3]{79}=4{,}29008$ μεῖον $0{,}0001$.

$\sqrt[3]{0{,}00101}=0{,}10$ μεῖον $0{,}01$.

$\sqrt[3]{\frac{14}{25}}=0{,}824$ μεῖον $0{,}001$.

Σχηματισμὸς τῶν δυνάμεων καὶ ἐξαγωγὴ τῶν ῥιζῶν τῶν ἀλγεβρικῶν ποσοτήτων.

Α'. Μονώνυμα.

§ 191. Ἂς σχηματίσωμεν τὴν πέμπτην δύναμιν τοῦ $2a^3b^2$.

Κατὰ τοὺς κανόνας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔχομεν

$$(2a^3b^2)^5=2a^3b^2\times2a^3b^2\times2a^3b^2\times2a^3b^2\times2a^3b^2=32a^{15}b^{10}.$$

Παρατηροῦντες τὸν σχηματισμὸν τοῦ γινομένου τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

« Ἵνα ὑψώσωμεν μονώνυμόν τι εἰς τὴν ν δύναμιν, πρέπει νὰ ὑ-

» ψώσωμεν ἰδιαιτέρως τὸν συντελεστὴν αὐτοῦ εἰς τὴν ν δύναμιν, καὶ » νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἐκθέτην ἑκάστου γράμματος, ἐπὶ τὸν » ἐκθέτην τῆς δυνάμεως. »

Ἀντιστρόφως. « Ἵνα ἐξάξωμεν τὴν ν ῥίζαν μονωνύμου τινὸς πρέ» πει νὰ ἐξάξωμεν τὴν ν ῥίζαν τοῦ συντελεστοῦ, καὶ νὰ διαιρέσω» μεν τὸν ἐκθέτην ἑκάστου γράμματος, διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης. »

$$\sqrt[3]{64\alpha^9\beta^3\gamma^6}=4\alpha^3\beta\gamma^2. \qquad \sqrt[4]{16\alpha^8\beta^{12}\gamma^4}=2\alpha^2\beta^3\gamma,$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι μονώνυμόν τι εἶναι τελεία δύναμις τοῦ βαθμοῦ τῆς ζητουμένης ῥίζης, ὅταν ὁ μὲν συντελεστὴς αὐτοῦ ἦναι τελεία δύναμις, οἱ δὲ ἐκθέται τῶν γραμμάτων ἦναι διαιρέσιμοι διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης.

ΣΗΜ. Ἀκολούθως θέλομεν δείξει πῶς ἁπλουστεύονται αἱ ῥιζικαὶ ἐκφράσεις τῶν ἀτελῶν δυνάμεων.

§ 172. Ὡς πρὸς τὰ σημεῖα παρατηροῦμεν ὅτι πᾶσα δύναμις ἀρτίου βαθμοῦ, θετικῆς ἢ ἀρνητικῆς ποσότητος, εἶναι πάντοτε θετική. Πᾶσα δὲ δύναμις περιττοῦ βαθμοῦ ἔχει τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ποσότητος, ἐκ τῆς ὁποίας ἐσχηματίσθη.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ πᾶσα δύναμις ἀρτίου βαθμοῦ 2ν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ ν δύναμις τοῦ τετραγώνου· τουτέστιν $\alpha^{2\nu}=(\alpha^2)^\nu$, τὸ δὲ τετράγωνον μονωνύμου τινὸς εἶναι πάντοτε θετικὸν, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ν δύναμις αὐτοῦ εἶναι ἐπίσης θετική.

Παρομοίως, ἐπειδὴ πᾶσα δύναμις περιττοῦ βαθμοῦ $2\nu+1$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ γινόμενον δυνάμεως ἀρτίου βαθμοῦ 2ν ἐπὶ τὴν πρώτην δύναμιν, τουτέστιν $\alpha^{2\nu+1}=\alpha^{2\nu}\times\alpha$, τὸ δὲ σημεῖον τοῦ $\alpha^{2\nu}$ εἶναι πάντοτε θετικὸν, ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον τῆς δυνάμεως περιττοῦ βαθμοῦ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σημείου τοῦ α.

Οὕτως ἔχομεν $(\pm 2\alpha^2\beta^3\gamma)^4=+16\alpha^8\beta^{12}\gamma^4$.

καὶ $\left\{\begin{array}{l}(+4\alpha^2\beta)^3=+64\alpha^6\beta^3\\(-4\alpha^2\beta)^3=-64\alpha^4\beta^2\end{array}\right.$

Ἐκ τούτου συνάγομεν,

α. Πᾶσα ῥίζα περιττοῦ βαθμοῦ πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ποσότητος.

$$\sqrt[3]{+8\alpha^3}=+2\alpha, \qquad \sqrt[3]{-8\alpha^3}=-2\alpha.$$

β'. Πᾶσα ῥίζα ἀρτίου βαθμοῦ θετικῆς ποσότητος δύναται νὰ ἔχῃ ἀδιαφόρως τὸ $+$ ἢ $-$.

$$\sqrt[4]{81\alpha^4\beta^8}=\pm 3\alpha\beta^2$$

γ΄. Πᾶσα ῥίζα ἀρτίου βαθμοῦ ἀρνητικῆς ποσότητος εἶναι ἰδανική. Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει οὐδεμία ποσότης, ἥτις ὑψωθεῖσα εἰς δύναμιν ἀρτίου βαθμοῦ νὰ παράγῃ ἀρνητικὸν ἐξαγόμενον.

$$\sqrt[4]{-\alpha}, \quad \sqrt[6]{-\beta}, \quad \sqrt[8]{-\gamma},$$

εἶναι σύμβολα πράξεων ἀδυνάτων.

Β΄. Πολυώνυμα.

§ 193. Εἴδομεν ἤδη πῶς σχηματίζονται αἱ δυνάμεις τοῦ διωνύμου $\chi+\alpha$, ὅταν δὲ οἱ ὅροι αὐτοῦ ἔχωσι συντελεστὰς καὶ ἐκθέτας ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπ' αὐτῶν τὸν περὶ σχηματισμοῦ τῶν δυνάμεων τῶν μονωνύμων κανόνα.

Ἐπειδὴ ὁ τύπος τοῦ $(\chi-\alpha)^\mu$ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ ἀνελίγματος τοῦ $(\chi+\alpha)^\mu$, ἀφοῦ εἰς αὐτὸ τεθῇ $-\alpha$ ἀντὶ $+\alpha$, ἔπεται ὅτι οἱ τὰς περιττὰς τοῦ α δυνάμεις ἔχοντες ὅροι, τουτέστιν οἱ κείμενοι εἰς ἀρτίαν τάξιν, θέλουσιν ἔχει τὸ $-$, οἱ δὲ ἔχοντες τὰς ἀρτίας δυνάμεις τοῦ α, θέλουσιν ἔχει τὸ $+$.

§ 194. Ἂς μεταβῶμεν ἤδη εἰς τὰ τριώνυμα. Ἂς ἀναπτύξωμεν π. χ. τὴν ἔκφρασιν $(\chi+y+\omega)^3$. Θέτοντες κατὰ πρῶτον $\chi+y=\varphi$, ἔχομεν

$$(\varphi+\omega)^3=\varphi^3+3\varphi^2\omega+3\varphi\omega^2+\omega^3.$$

Ἀντεισάγοντες δὲ τὴν τιμὴν τοῦ φ καὶ ἐκτελοῦντες τοὺς ὑπολογισμούς, λαμβάνομεν

$$(\chi+y+\omega)^3=$$
$$\chi^3+3\chi^2y+3\chi y^2+y^3+3\chi^2\omega+6\chi y\omega+3y^2\omega+3\chi\omega^2+3y\omega^2+\omega^3$$

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, τρέποντες, δηλαδὴ τὸ πολυώνυμον εἰς διώνυμον, δυνάμεθα ν' ἀναπτύξωμεν καὶ τὰς ἀνωτέρας αὐτοῦ δυνάμεις.

§ 195. Ὡς πρὸς τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ῥιζῶν τῶν πολυωνύμων περιοριζόμεθα εἰς τὴν ἔκθεσιν τῆς μεθόδου τῆς κυβικῆς ῥίζης· εἶναι δὲ εὔκολον ἔπειτα νὰ γενικεύσωμεν τὴν μέθοδον.

Ἔστω Ν τὸ προτεθὲν πολυώνυμον καὶ Ρ ἡ κυβικὴ ῥίζα αὐτοῦ.

Ἂς ὑποθέσωμεν τὰ δύο ταῦτα πολυώνυμα διατεταγμένα ὡς πρός τι γράμμα, π. χ. ὡς πρὸς τὸ α. Ἐκ τοῦ νόμου τῆς συνθέσεως τοῦ κύβου πολυωνύμου τινὸς ἔπεται, ὅτι ὁ κύβος τοῦ Ρ περιέχει δύο μέρη, τὰ ὁποῖα δὲν δύνανται ν' ἀναχθῶσι μὲ τ' ἄλλα· εἶναι δὲ ὁ κύβος τοῦ πρώτου ὅρου καὶ τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον· ἐπειδὴ εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ δύο ταῦτα μέρη περιέχουσι τὸ γράμμα α μὲ ἐκθέτην μεγαλήτερον παρὰ τοὺς λοιποὺς ὅρους· λοιπὸν ταῦτα σχηματίζουσιν ἀναγκαίως τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον ὅρον τοῦ N ἔχομεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ P. Διαιροῦντες ἔπειτα τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ N διὰ τοῦ τριπλασίου τετραγώνου τοῦ εὑρεθέντος πρώτου ὅρου ἔχομεν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ P. Εὑρεθέντων τῶν δύο πρώτων ὅρων τῆς ῥίζης σχηματίζομεν τὸν κύβον τοῦ διωνύμου τούτου, καὶ ἀφαιροῦμεν αὐτὸν ἐκ τοῦ N. Τὸ ὑπόλοιπον N′ περιέχει προσέτι τὸ τριπλάσιον γινόμενον τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ P ἐπὶ τὸν τρίτον, πλέον ἄλλα μέρη, τὰ ὁποῖα περιέχουσιν α μὲ ἐκθέτην μικρότερον· λοιπὸν διαιροῦντες τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ N′ διὰ τοῦ τριπλασίου τετραγώνου τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ P, ἔχομεν ἀναγκαίως τὸν τρίτον ὅρον αὐτοῦ. Σχηματιζοντες τὸν κύβον τοῦ εἰς τὴν ῥίζαν εὑρεθέντος τριωνύμου καὶ ἀφαιροῦντες αὐτὸν ἐκ τοῦ N, ἔχομεν νέον ὑπόλοιπον N″, ἐπὶ τοῦ ὁποίου πράττομεν ὡς ἐπὶ τοῦ N, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἐφαρμογή. Ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ

$$8\alpha^6-48\alpha^5\beta+132\alpha^4\beta^2-208\alpha^3\beta^3+198\alpha^2\beta^4-108\alpha\beta^5+27\beta^6$$

εἶναι $$2\alpha^2-4\alpha\beta+3\beta^2.$$

Ὑπολογισμὸς τῶν ῥιζικῶν.

§ 196. Αἱ ῥιζικαὶ ἐκφράσεις δυνατὸν πολλάκις ν' ἁπλουστευθῶσιν· αἱ δὲ ἁπλουστεύσεις αὐτῶν ἐπιστηρίζονται εἰς τὴν ἀρχὴν ταύτην.

« Ἡ ν ῥίζα γινομένου τινὸς ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ν ῥιζῶν » τῶν διαφόρων παραγόντων. »

τουτέστι $$\sqrt[\nu]{\alpha\beta\gamma\ldots}=\sqrt[\nu]{\alpha}\,.\,\sqrt[\nu]{\beta}\,.\,\sqrt[\nu]{\gamma}\ldots$$

Τῷ ὄντι ὑψόνοντες ἑκατέραν τῶν δύο τούτων ἐκφράσεων εἰς τὴν ν δύναμιν λαμβάνομεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον αβγ... Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ν δυνάμεις τῶν ἐκφράσεων τούτων εἶναι ἴσαι, πρέπει ἐπίσης καὶ αὐταὶ αἱ ἐκφράσεις νὰ ἦναι ἴσαι.

Ὁδηγούμενοι λοιπὸν ἐκ τῆς ἀρχῆς ταύτης ἀναλύομεν τὴν ὑπόρριζον ποσότητα εἰς δύο παράγοντας, ἐξ ὧν ὁ μὲν εἶναι τελεία δύναμις τοῦ βαθμοῦ τῆς ῥίζης, ὁ δὲ, ἀτελής. Ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου παράγοντος καὶ σημειοῦμεν ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν τὴν τοῦ ἀτελοῦς.

Παραδείγματα $$\sqrt[3]{8\alpha^2}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{\alpha^2}=2\sqrt[3]{\alpha^2}$$

$$\sqrt[3]{54\alpha^4\beta^3\gamma^2}=\sqrt[3]{27\alpha^3\beta^3}\,.\,\sqrt[3]{2\alpha\gamma^2}=3\alpha\beta\sqrt[3]{2\alpha\gamma^2}$$

$$\sqrt[4]{48\alpha^5\beta^8\gamma^6}=2\alpha\beta^2\gamma\sqrt[4]{3\alpha\gamma^2}$$

§ 197. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἀρχὴν (§ 186) ἔχομεν

$$\sqrt[\mu\nu]{A} = \sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{A}}$$

ἔπεται $$\sqrt[\mu\nu]{\alpha^\nu} = \sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}} = \sqrt[\mu]{\alpha} \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

Ὅθεν συνάγομεν ὅτι ὅταν ὁ δείκτης τοῦ ῥιζικοῦ ἦναι πολλαπλάσιό τι τοῦ ἐκθέτου τῆς ὑποῤῥίζου ποσότητος, δυνάμεθα ν' ἁπλουστεύσωμεν τὸν βαθμὸν τῆς ῥίζης, διαιροῦντες τὸν δείκτην τοῦ ῥιζικοῦ καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς ὑποῤῥίζου ποσότητος διὰ τοῦ ἐκθέτου τούτου.

Παραδείγματα. $$\sqrt[6]{4\alpha^2} = \sqrt[6]{(2\alpha)^2} = \sqrt[3]{2\alpha}$$
$$\sqrt[6]{36\alpha^2\beta^2} = \sqrt[6]{(6\alpha\beta)^2} = \sqrt[3]{6\alpha\beta}$$

Θεωροῦντες δὲ ἀντιστρόφως τὴν ἰσότητα (1), τουτέστι,

$$\sqrt[\mu]{\alpha} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha^\nu}$$

συνάγομεν τὴν ἑξῆς ἀντίστροφον ἀρχήν. « Ἡ τιμὴ τῆς ῥιζικῆς ἐκ» φράσεως δὲν μεταβάλλεται ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν » ἀριθμὸν τὸν δείκτην τοῦ ῥιζικοῦ καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς ὑποῤῥίζου. »

Διὰ τῆς τελευταίας ταύτης ἀρχῆς ἀποκαθιστῶμεν *ὁμώνυμα* δύο, ἢ πολλὰ *ἑτερώνυμα* ῥιζικά.

Ἔστωσαν τὰ ῥιζικὰ

$$\sqrt[3]{2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \sqrt[4]{(\alpha+\beta)}$$

Πολλαπλασιάζοντες, ἐπὶ τὸν δείκτην τοῦ δευτέρου 4, τὸν δείκτην τοῦ πρώτου καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς ὑποῤῥίζου, ἔχομεν

$$\sqrt[3]{2\alpha} = \sqrt[12]{(2\alpha)^4} = \sqrt[12]{16\alpha^4}$$

πολλαπλασιάζοντες ἔπειτα, ἐπὶ τὸν δείκτην τοῦ πρώτου 3, τὸν δείκτην τοῦ δευτέρου καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς ὑποῤῥίζου, λαμβάνομεν

$$\sqrt[4]{(\alpha+\beta)} = \sqrt[12]{(\alpha+\beta)^3}$$

Κανών. « Ἵνα καταστήσωμεν ὁμώνυμα δύο ἢ πολλὰ ἑτερώνυμα » ῥιζικά, πολλαπλασιάζομεν τὸν δείκτην ἑκάστου ῥιζικοῦ καὶ τὸν » ἐκθέτην τῆς ὑποῤῥίζου ποσότητος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων » δεικτῶν. »

Ὁ κανὼν οὗτος, ἔχων μεγάλην ἀναλογίαν μὲ τὴν ἀναγωγὴν τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ἐπιδέχεται τὰς αὐτὰς ἁπλουστεύσεις.

$$\begin{array}{llll} \text{ἑτερώνυμα} \ldots & \sqrt[4]{\alpha}, & \sqrt[6]{\beta}, & \sqrt[8]{\gamma}, \\ \text{πηλίκα} \ldots & 6 & 4 & 3 \\ \hline \text{ὁμώνυμα} \ldots & \sqrt[24]{\alpha^6} & \sqrt[24]{\beta^4} & \sqrt[24]{\gamma^3}. \end{array}$$

Πρόσθεσις καὶ Ἀφαίρεσις.

§ 198. *Ὅμοια* ῥιζικὰ λέγονται τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν ὑπόῤῥιζον ποσότητα καὶ ὄντα ὁμώνυμα.

Ὅταν τὰ ῥιζικὰ ἦναι ὅμοια, ἡ Πρόσθεσις ἢ ἡ Ἀφαίρεσις ἐκτελεῖται ἐπὶ τῶν συντελεστῶν, καὶ τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ αὐτῶν τίθεται ὡς συντελεστὴς τοῦ κοινοῦ ῥιζικοῦ.

$$3\sqrt[3]{\beta}+2\sqrt[3]{\beta}=5\sqrt[3]{\beta}$$

$$3\sqrt[3]{\beta}-2\sqrt[3]{\beta}=\sqrt[3]{\beta}$$

Πολλάκις τὰ ῥιζικὰ φαίνονται κατὰ πρώτην ἔποψιν, ὅτι δὲν εἶναι ὅμοια, ἀλλ' ἀποβαίνουσι τοιαῦτα, ἀφοῦ ἐκτελεσθῶσιν ἐπ' αὐτῶν αἱ ἁπλουστεύσεις περὶ τῶν ὁποίων ἔγεινεν ἤδη λόγος ἀνωτέρω.

Ὅταν τὰ ῥιζικὰ ἦναι ἀνόμοια, ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις σημειοῦνται μόνον.

Πολλαπλασιασμὸς καὶ Διαίρεσις.

§ 199. Ὅταν τὰ ῥιζικὰ ἦναι ὁμώνυμα, ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις ἐκτελοῦνται ἐπὶ τῶν ὑποῤῥίζων ποσοτήτων, καὶ πρὸ τοῦ γινομένου, ἢ πρὸ τοῦ πηλίκου αὐτῶν τίθεται τὸ κοινὸν ῥιζικόν.

Ὁ κανὼν οὗτος εἶναι συνέπεια τῶν προηγουμένων ἀρχῶν· τῷ ὄντι

ἔχομεν $\sqrt[\nu]{\alpha}\times\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta}$ καὶ $\sqrt[\nu]{\alpha}:\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

Ἐὰν τὰ ῥιζικὰ ἔχωσι καὶ συντελεστὰς, πολλαπλασιάζομεν ἢ διαιροῦμεν αὐτοὺς κατὰ μέρος

$$5\sqrt[3]{\alpha^2}\times4\sqrt[3]{\alpha\beta}=20\sqrt[3]{\alpha^3\beta}=20\alpha\sqrt[3]{\beta}$$

$$5\sqrt[3]{\alpha^2}:4\sqrt[3]{\alpha\beta}=\frac{5}{4}\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}}$$

Ὅταν τὰ ῥιζικὰ ἦναι ἑτερώνυμα, πρέπει προηγουμένως ν' ἀχθῶσιν εἰς ὁμώνυμα.

Σχηματισμὸς τῶν δυνάμεων.

§ 200. Ἔστω κατὰ πρῶτον $\sqrt[\nu]{\alpha}$ νὰ ὑψωθῇ εἰς τὴν μ. δύναμιν.

Ἔχομεν $$(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\mu} = \sqrt[\nu]{\alpha} \times \sqrt[\nu]{\alpha} \times \sqrt[\nu]{\alpha} \ldots = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$
κατὰ τὸν ἀποδοθέντα κανόνα περὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ὁμωνύμων ῥιζικῶν.

Ἕπεται λοιπόν, ὅτι « Ἵνα ὑψώσωμεν ῥιζικήν τινα ἔκφρασιν εἰς δύ-
» ναμιν δεδομένου βαθμοῦ, πρέπει νὰ ὑψώσωμεν τὴν ὑπόῤῥιζον
» ποσότητα εἰς τὴν δύναμιν, καὶ νὰ θέσωμεν πρὸ τοῦ ἐξαγομένου τὸ
» σημεῖον τῆς ῥίζης μὲ τὸν ἀρχικὸν αὐτοῦ δείκτην. Ἐὰν ἡ ἔκφρασις
» ἔχῃ καὶ συντελεστήν, πρέπει κατὰ μέρος νὰ ὑψωθῇ εἰς τὴν αὐτὴν
» δύναμιν. »

$$(2\sqrt[3]{2\alpha})^2 = 4\sqrt[3]{4\alpha^2}$$

Ὅταν ὁ δείκτης τοῦ ῥιζικοῦ ἦναι πολλαπλάσιος τοῦ ἐκθέτου τῆς δυνάμεως, τὴν ὁποίαν πρόκειται νὰ σχηματίσωμεν ἡ πρᾶξις ἁπλουστεύεται

$$(\sqrt[6]{2\alpha})^2 = \left(\sqrt{\sqrt[3]{2\alpha}}\right)^2 = \sqrt[3]{2\alpha}$$

Τουτέστιν, ἐὰν ὁ δείκτης τοῦ ῥιζικοῦ διαιρῆται διὰ τοῦ ἐκθέτου τῆς δυνάμεως, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν καὶ ν' ἀφήσωμεν τὴν ὑπόῤῥιζον ποσότητα εἰς τὴν πρώτην αὐτῆς κατάστασιν.

Ἐξαγωγὴ τῶν ῥιζῶν.

§ 201. Ἵνα ἐξάξωμεν ῥίζαν ῥιζικῆς τινος ἐκφράσεως, πολλαπλασιάζομεν τὸν δείκτην τοῦ ῥιζικοῦ μὲ τὸν βαθμὸν τῆς ζητουμένης ῥίζης, ἀφίνοντες, ὡς ὑπάρχει, τὴν ὑπόῤῥιζον ποσότητα.

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$$

Ὁ κανὼν οὗτος εἶναι συνέπεια τῆς ἀρχῆς (§ 186)

Ἐὰν ἡ ὑπόῤῥιζος ποσότης, ἦναι τελεία δύναμις τοῦ βαθμοῦ τῆς ζητουμένης ῥίζης, ἡ πρᾶξις ἁπλουστεύεται, ἐξαγομένης τῆς ῥίζης τῆς ὑποῤῥίζου ποσότητος

$$\sqrt[3]{\sqrt{8\alpha^3}} = \sqrt{\sqrt[3]{8\alpha^3}} = \sqrt{2\alpha}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΟΔΩΝ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ.

Α'. Περὶ Προόδων.

Ι. Πρόοδοι Ἀριθμητικαί.

§ 202. *Πρόοδος* ἐν γένει ὀνομάζεται σειρά τις ὅρων συνεχῶς ἀναλόγων. Εἶναι δὲ διττή, *Ἀριθμητικὴ καὶ Γεωμετρική.*

Ἀριθμητικὴ ἢ *κατὰ διαφορὰν* πρόοδος ὀνομάζεται σειρά τις ὅρων συνεχῶς ἰσοδιαφόρων, τουτέστιν ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει πρὸς τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ τὴν αὐτὴν διαφοράν.

Ἡ σταθερὰ αὕτη διαφορὰ ὀνομάζεται *λόγος* τῆς προόδου.

Αὔξουσα μὲν λέγεται ἡ πρόοδος, ὅταν οἱ ὅροι αὐτῆς χωρῶσιν αὐξανόμενοι. *Φθίνουσα* δὲ ἢ *ἀπαύξουσα*, ὅταν χωρῶσιν ἐλαττούμενοι.

Πᾶσα πρόοδος πρέπει νὰ ἦναι σταθερῶς αὔξουσα, ἢ σταθερῶς φθίνουσα.

Ὁ λόγος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου προσδιορίζεται ἀφαιρουμένου ἑνὸς ὅρου ἐκ τοῦ ἑπομένου αὐτοῦ, ἐὰν ἦναι αὔξουσα, καὶ ἐκ τοῦ προηγουμένου, ἐὰν ἦναι φθίνουσα.

Ἔστωσαν αἱ δύο σειραὶ

$$\div\ 1\ .\ 4\ .\ 7\ .\ 10\ .\ 13\ .\ 16\ .\ 19\ .\ 22\ldots$$
$$\div\ 60\ .\ 56\ .\ 52\ .\ 48\ .\ 44\ .\ 40\ .\ 36\ .\ 32\ldots$$

γεγραμμέναι κατὰ τὸν κοινῶς παραδεδεγμένον τρόπον. Ἐκ τούτων ἡ μὲν πρώτη εἶναι πρόοδος αὔξουσα, ἡ δὲ δευτέρα, φθίνουσα. Καὶ τῆς μὲν πρώτης ὁ λόγος εἶναι 3, τῆς δὲ δευτέρας 4.

Τύπος τοῦ γενικοῦ ὅρου.

§ 203. Ἔστω ἐν γένει ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος

$$\div\,\alpha\ .\ \beta\ .\ \gamma\ .\ \delta\ .\ \varepsilon\ .\ \zeta\ .\ \eta\ldots$$

εἶναι φανερόν, ὅτι ἕκαστος ὅρος αὐτῆς ἰσοῦται μὲ τὸν προηγούμενον αὐτοῦ *πλέον τὴν διαφοράν*, ἐὰν ἦναι αὔξουσα, καὶ *μεῖον τὴν διαφοράν*, ἐὰν ἦναι φθίνουσα.

Ὅθεν σημειοῦντες διὰ Δ τὸν λόγον ἐν γένει τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, ἔχομεν

Ἐπὶ μὲν τῆς αὐξούσης

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha + \Delta \\ \gamma &= \beta + \Delta = \alpha + \Delta + \Delta = \alpha + 2\Delta \\ \delta &= \gamma + \Delta = \alpha + 2\Delta + \Delta = \alpha + 3\Delta \\ \varepsilon &= \delta + \Delta = \alpha + 3\Delta + \Delta = \alpha + 4\Delta \end{aligned}$$

ἕκαστος ὅρος ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον, *πλέον* τοσάκις τὸν λόγον, ὅσοι εἶναι οἱ ὅροι πρὸ αὐτοῦ.

Ἐπὶ δὲ τῆς φθινούσης

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha - \Delta \\ \gamma &= \beta - \Delta = \alpha - \Delta - \Delta = \alpha - 2\Delta \\ \delta &= \gamma - \Delta = \alpha - 2\Delta - \Delta = \alpha - 3\Delta \\ \varepsilon &= \delta - \Delta = \alpha - 3\Delta - \Delta = \alpha - 4\Delta \end{aligned}$$

Ἕκαστος ὅρος ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον, *μεῖον* τοσάκις τὸν λόγον, ὅσοι εἶναι οἱ ὅροι πρὸ αὐτοῦ.

Παριστάνοντες λοιπὸν διὰ λ τὸν γενικὸν ὅρον τῆς προόδου, τὸν κατέχοντα τὴν ν θέσιν, ἑπομένως ἔχοντα πρὸ αὐτοῦ $\nu - 1$ ὅρους, συνάγομεν,

$$\lambda = \alpha \pm (\nu - 1)\Delta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Ἡ ἰσότης αὕτη εἶναι ὁ *τύπος τοῦ γενικοῦ ὅρου.*

Λαμβάνομεν δὲ τὸ σημεῖον $+$, ὅταν ἡ πρόοδος ἦναι αὔξουσα, καὶ τὸ $-$, ὅταν ἦναι φθίνουσα.

Διὰ τοῦ τύπου τούτου δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εὕρωμεν ὅρον τινά, οἱασδήποτε τάξεως, χωρὶς νὰ γνωρίζωμεν ὅλους τοὺς προηγουμένους.

Ἔστω ἡ πρόοδος . . . . $\div$ 3 . 7 . 11 . 15 .

Ζητεῖται ὁ 60ος ὅρος αὐτῆς.

Κατὰ τὸν γενικὸν τύπον (1) ἔχομεν $\lambda = 3 + 59 \times 4 = 3 + 236 = 239$

§ 204. *Θεώρημα.* Εἰς πᾶσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον, τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων ἐξίσου ἀπεχόντων ἐκ τῶν ἄκρων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων.

Ἔστω ἡ πρόοδος $\div \alpha . \beta . \gamma \ldots \chi \ldots y \ldots \iota . \kappa . \lambda .$ τῆς ὁποίας ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων εἶναι ν. Διὰ τοῦ χ σημειοῦμεν ὅρον τινά, ἔχοντα πρὸ αὐτοῦ π ὅρους· διὰ τοῦ y σημειοῦμεν τὸν ὅρον, ὅστις ἔχει μετ᾽ αὐτὸν ὡσαύτως π ὅρους.

Κατὰ τὸν τύπον τοῦ γενικοῦ ὅρου ἔχομεν . . $\quad \chi = \alpha + \pi\Delta$

Θεωροῦντες δὲ τὴν πρόοδον ἀντιστρόφως . . $\quad y = \lambda - \pi\Delta$

Προσθέτοντες συνάγομεν . . . . $\quad \chi + y = \alpha + \lambda .$

Τύπος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων

§ 205. *Πρόβλημα.* Νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου.

Ἔστω ἡ πρόοδος $\div \alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma\,\ldots\,\iota\,.\,\varkappa\,.\,\lambda$

Σημειοῦντες δι' Α τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων αὐτῆς, ἔχομεν

$$A=\alpha+\beta+\gamma\ldots+\iota+\varkappa+\lambda$$

καὶ κατ' ἀντίστροφον τάξιν . . . . $A=\lambda+\varkappa+\iota\ldots+\gamma+\beta+\alpha$

Προσθέτοντες κατὰ τάξιν τὰς ἰσότητας συνάγομεν

$$2A=(\alpha+\lambda)+(\beta+\varkappa)+(\gamma+\iota)\ldots+(\iota+\gamma)+(\varkappa+\beta)+(\lambda+\alpha)$$

Ἔχομεν οὕτω τοσαῦτα μερικὰ ἀθροίσματα, μεταξὺ παρενθέσεων, ὅσοι εἶναι οἱ ὅροι τῆς προόδου, τουτέστι ν· ἐπειδὴ δὲ ἕκαστον τούτων εἶναι ἄθροισμα δύο ὅρων ἐξίσου ἀπεχόντων ἐκ τῶν ἄκρων, καὶ ἐπομένως ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄκρων $\alpha+\lambda$, ἕπεται ὅτι

$$2A=(\alpha+\lambda)\nu$$

λοιπὸν $A=\frac{(\alpha+\lambda)\nu}{2}$ . . . . (2)

« Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ τὸ » ἄθροισμα τῶν δύο ἄκρων, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν » ὅρων, καὶ διαιρεθὲν διὰ τοῦ 2. »

Ἐφαρμογή. Ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν 50 ὅρων τῆς προόδου.

$$\div 2\,.\,9\,.\,16\,.\,23\,.\,30\ldots$$

Εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον τὸν 50ον ὅρον, ὡς ἀνωτέρω,

$$\lambda=2+49\times7=345$$

ὅθεν $A=\frac{(2+345)50}{2}=347\times25=8675.$

Ἠθέλαμεν εὕρει τὸν ἑκατοστὸν ὅρον τῆς αὐτῆς προόδου

$$\lambda=2+99\times7=695$$

καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν 100 ὅρων $A=\frac{(2+695)100}{2}=34850.$

§ 206. Οἱ δύο εὑρεθέντες τύποι

$\lambda=\alpha+(\nu-1)\Delta$ . . . . (1) καὶ $A=\frac{(\alpha+\lambda)\nu}{2}$ . . . (2)

περικλείοντες πέντε ποσότητας α, Δ, ν, λ, Α, χρησιμεύουσι πρὸς εὕρεσιν δύο οἱωνδήποτε ἐξ αὐτῶν, ὅταν αἱ ἄλλαι τρεῖς ἦναι γνωσταί.

Λύονται λοιπὸν δι' αὐτῶν τόσα διάφορα προβλήματα, ὅσους συνδυασμοὺς δυνάμεθα νὰ κάμωμεν ἐπὶ πέντε γραμμάτων ἀνὰ δύο τουτέστι . . . . $\frac{5\times4}{2}$ ἢ 10

Ἰδοὺ ὁ πίναξ τῶν δέκα τούτων προβλημάτων,

δοθέντων	(1),	α,	Δ,	ν,	νὰ εὕρωμεν	λ καὶ	Λ,
	(2)	α,	Δ,	λ,	. . . . . .	ν »	Λ,
	(3),	α,	Δ,	Λ,	. . . . . .	ν »	λ,
	(4),	α,	ν,	λ,	. . . . . .	Δ »	Λ,
	(5),	α,	ν,	Λ,	. . . . . .	Δ »	λ,
	(6),	α,	λ,	Λ,	. . . . . .	Δ »	ν,
	(7),	Δ,	ν,	λ,	. . . . . .	α »	Λ,
	(8),	Δ,	ν,	Λ,	. . . . . .	α »	λ,
	(9),	Δ,	λ,	Λ,	. . . . . .	α »	ν,
	(10),	ν,	λ,	Λ,	. . . . . .	α »	Δ.

Τὸ πρῶτον πρόβλημα ἐλύθη ἤδη. Ἐπειδὴ οἱ δύο τύποι (1) καὶ (2) δίδουσιν ἀμέσως λ καὶ Λ, διὰ τῶν α, Δ, ν. Τῶν λοιπῶν προβλημάτων ἡ λύσις δὲν παρουσιάζει δυσκολίαν.

Τοὺς τύπους τῶν προβλημάτων τούτων, ὡς ἁπλοῦν βοήθημα, ἐκθέτομεν εἰς τὸν ἑπόμενον πίνακα.

Τύποι τῶν ἀριθμητικῶν προόδων.

	Διδόμενα	Ζητούμενα
1	α, Δ, ν, ...	$\lambda=\alpha+(\nu-1)\Delta$ $\Lambda=\frac{(\alpha+\lambda)\nu}{2}$
2	α, Δ, λ, ...	$\nu=1+\frac{\lambda-\alpha}{\Delta}$ $\Lambda=\frac{\alpha+\lambda}{2}+\frac{\lambda^2-\alpha^2}{2\Delta}$
3	α, Δ, Λ, ...	$\nu=\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{\Delta}\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{\Delta^2}-\frac{\alpha}{\Delta}+\frac{1}{4}+\frac{2\Lambda}{\Delta}}$ $\lambda=-\frac{\Delta}{2}\pm\sqrt{\alpha^2-\alpha\Delta+\frac{\Delta^2}{4}+2\Delta\Lambda}$
4	α, ν, λ, ...	$\Delta=\frac{\lambda-\alpha}{\nu-1}$ $\Lambda=\frac{(\alpha+\lambda)\nu}{2}$
5	α, ν, Λ, ...	$\Delta=\frac{2(\Lambda-\alpha\nu)}{\nu^2-\nu}$ $\lambda=\frac{2\Lambda}{\nu}-\alpha$
6	α, λ, Λ, ...	$\Delta=\frac{\lambda^2-\alpha^2}{2\alpha-\mu-\lambda}$ $\nu=\frac{2\Lambda}{\alpha+\lambda}$

	Διδόμενα	Ζητούμενα
7	Δ, ν, λ, ...	$\alpha=\lambda-\Delta(\nu-1)$ $A=\nu\lambda-\frac{\Delta\nu(\nu-1)}{2}$
8	Δ, ν, A, ...	$\alpha=\frac{A}{\nu}-\frac{\Delta(\nu-1)}{2}$ $\lambda=\frac{A}{\nu}+\frac{\Delta(\nu-1)}{2}$
9	Δ, λ, A, ...	$\alpha=\frac{\Delta}{2}\pm\sqrt{\lambda^2+\Delta\lambda+\frac{\Delta^2}{4}-2\Delta A}$ $\nu=\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{\Delta}\pm\sqrt{\frac{\lambda^2}{\Delta^2}+\frac{\lambda}{\Delta}+\frac{1}{4}-\frac{2A}{\Delta}}$
10	ν, λ, A, ...	$\alpha=\frac{2A}{\nu}-\lambda$ $\Delta=\frac{2(\lambda\nu-A)}{\nu^2-\nu}$

Προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς τὰς ἀριθμητικὰς προόδους.

§ 207. Α΄. Νὰ παρενθέσωμεν μεταξὺ δύο δεδομένων ἀριθμῶν α καὶ β, ἀριθμόν τινα *μέσων διαφορικῶν* μ.

Μέσοι διαφορικοὶ ὀνομάζονται οἱ περιεχόμενοι μεταξὺ δύο ἀριθμῶν, καὶ σχηματίζοντες μετ' αὐτῶν πρόοδον ἀριθμητικήν.

Ἡ ἔννοια τοῦ προβλήματος τούτου εἶναι νὰ σχηματίσωμεν μίαν πρόοδον ἀριθμητικήν, τῆς ὁποίας α καὶ β εἶναι τὰ δύο ἄκρα, καὶ μεταξὺ τούτων ὑπάρχουσι μ. ὅροι.

Ἐὰν ἐγνωρίζαμεν τὸν λόγον τῆς προόδου ταύτης ἠθέλαμεν εὐκόλως σχηματίσει αὐτήν.

Ἄς ὑποθέσωμεν λοιπὸν τὸν λόγον τοῦτον Δ. Ἡ πρόοδος ἔχουσα μ+2 ὅρους, ὁ τελευταῖος ὅρος β ἔχει μ+1 πρὸ αὐτοῦ. Ὅθεν κατὰ τὸν τύπον τοῦ γενικοῦ ὅρου ἔχομεν . . . . . . $\beta=\alpha+(\mu+1)\Delta$ ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης συνάγομεν

$$\Delta=\frac{\beta-\alpha}{\mu+1}$$

Τουτέστιν « Ὁ λόγος τῆς ζητουμένης προόδου ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν α καὶ β, διαιρεθεῖσαν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μέσων διαφορικῶν ηὐξημένου κατὰ μονάδα. »

Ἐφαρμογή. Νὰ παρενθέσωμεν 9 μέσους διαφορικούς, μεταξὺ 12 καὶ 72. Ἔχομεν

$$\Delta=\frac{72-12}{10}=\frac{60}{10}=6$$

Ὅθεν ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι

$\div$ 12 . 18 . 24 . 30 . 36 . 42 . 48 . 54 . 60 . 66 . 72.

ΣΗΜ. Ἐὰν μεταξὺ ἑκάστου τῶν ὅρων δεδομένης τινὸς ἀριθμητικῆς προόδου καὶ τοῦ ἑπομένου, παρενθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μέσων διαφορικῶν, ἡ προκύπτουσα σειρὰ ὅλων ἐν γένει τῶν ὅρων θέλει εἶσθαι ἐπίσης ἀριθμητικὴ πρόοδος.

Ἄς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὴν πρόοδον $\div$ 3 . 7 . 11 . 15 ... καὶ ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι παρενθέτομεν μ μέσους διαφορικοὺς μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων.

Ἐκ τοῦ 3 καὶ 7 θέλει σχηματισθῇ πρόοδος, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι $\dfrac{7-3}{\mu+1}$

Ἐκ τοῦ 7 καὶ 11 » » » » ὁ λόγος εἶναι $\dfrac{11-7}{\mu+1}$

Ἐκ τοῦ 11 καὶ 15 » » » ὁ λόγος εἶναι $\dfrac{15-11}{\mu+1}$

καὶ ἐφεξῆς

Ὅλοι οἱ λόγοι οὗτοι εἶναι ἴσοι, ἐπειδὴ $7-3=11-7=15-11$ . . . .

Παρενθέτοντες τοὺς μέσους θέλομεν ἔχει νέαν πρόοδον,

$\div$ 3 . $(3+\delta)$. $(3+2\delta)$ .... 7 . $(7+\delta)$. $(7+2\delta)$ ... 11 . $(11+\delta)$. $(11+2\delta)$ ....

§ 208 Β'. Ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν ἐκ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ν. Ἤτοι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου $\div$ 1 . 2 . 3 . 4 . . . . ν

Ἐκ τοῦ τύπου . . . $A=\dfrac{(\alpha+\lambda)\nu}{2}$

συνάγομεν . . . . . $A=\dfrac{(1+\nu)\nu}{2}$

Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν 100 πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι 5050.

§ 209. Γ'. Ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν, ἀρχομένων ἀπὸ τοῦ 1.

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι σχηματίζουσι τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον

$\div$ 1 . 3 . 5 . 7 . . . . .

τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι 2. Ὁ τελευταῖος ὅρος αὐτῆς κατέχων τὴν ν θέσιν εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου τοῦ γενικοῦ ὅρου,

$$\lambda=1+(\nu-1)2$$

Ὅθεν ἀντεισάγοντες εἰς τὸν τύπον τοῦ ἀθροίσματος $A=\dfrac{(\alpha+\lambda)\nu}{2}$ τὴν τιμὴν τοῦ λ καὶ τὴν τοῦ α, ἔχομεν

$$A=\frac{[1+1+(\nu-1)2]\nu}{2}$$

ἤτοι . . . . $A=\dfrac{(2+2\nu-2)\nu}{2}=\dfrac{2\nu^2}{2}=\nu^2.$

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸ ἑξῆς ἀξιοσημείωτον θεώρημα.

« Τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν, ἀρχομένων ἀπὸ » τοῦ 1, ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ ν τῶν περιττῶν » τούτων ἀριθμῶν. »

Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν ἐννέα περιττῶν ἀριθμῶν

$$\div\, 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 9 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 15 \,.\, 17$$

εἶναι $(9)^2$ ἤτοι 81.

§ 210. Δ'. Πεζός τις ἀναχωρήσας ἔκ τινος πόλεως διατρέχει 10 στάδια τὴν ἡμέραν· ἱππεὺς δέ τις συγχρόνως ἀναχωρήσας καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος διευθυνόμενος διατρέχει καθ' ἡμέραν ἄνισα διαστήματα· τὴν μὲν πρώτην ἡμέραν 3 στάδια, κατὰ πᾶσαν δὲ ἀκόλουθον ἡμέραν 2 στάδια περισσότερον τῶν τῆς προτεραίας.

Ζητεῖται, μετὰ πόσας ἡμέρας ὁ ἱππεὺς θέλει φθάσει τὸν πεζόν, καὶ πόσος ὁ διανυθησόμενος δρόμος;

Ἔστωσαν χ αἱ ἡμέραι.

10χ εἶναι τὸ ὑπὸ τοῦ πεζοῦ διανυόμενον διάστημα.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ ὑπὸ τοῦ ἱππέως κατὰ πᾶσαν ἡμέραν διανυόμενα διαστήματα ἀποτελοῦσι τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον

$$\div\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 9 \ldots \lambda$$

τῆς ὁποίας ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν χ, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τούτων ἐκφράζει τὸ ὁλικὸν διάστημα, τὸ ὁποῖον διανύεται ὑπὸ τοῦ ἱππέως.

Ἂς προσδιορίσωμεν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τοῦτο.

Κατὰ τὸν τύπον (1) ἔχομεν $\lambda=3+(\chi-1)2$,

ἤτοι $\lambda=2\chi+1$,

Καὶ κατὰ τὸν (2) ἔχομεν $\Lambda=\frac{(3+2\chi+1)\chi}{2}$

ἤτοι $\Lambda=\chi^2+2\chi$

Ἐπειδὴ δὲ ἑκάτερος τῶν δρομαίων τούτων διανύει τὸ αὐτὸ διάστημα

ἔχομεν $\chi^2+2\chi=10\chi$,

ἤτοι $\chi+2=10$, ἐξ ἧς $\chi=8$.

Λοιπὸν αἱ ζητούμεναι ἡμέραι εἶναι 8, τὸ δὲ διάστημα 80.

ΙΙ. Πρόοδοι Γεωμετρικαί.

§ 211. Γεωμετρικὴ ἢ κατὰ πηλίκον πρόοδος εἶναι σειρά τις ὅρων, ἕκαστος τῶν ὁποίων διαιρεθεὶς διὰ τοῦ προηγουμένου δίδει τὸ αὐτὸ πηλίκον.

Τὸ σταθερὸν τοῦτο πηλίκον ὀνομάζεται *λόγος* τῆς προόδου.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς γεωμετρικῆς προόδου ἕπεται ὅτι ἕκαστος ὅρος ἰσοῦται μὲ τὸν προηγούμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν λόγον πολλαπλασιασθέντα.

Η γεωμετρική πρόοδος γράφεται, ὡς εἰς τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

$$\div\; 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 \ldots\ldots$$

$$\div\; 64 : 16 : 4 : 1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{16} : \frac{1}{64}$$

ἐκ τῶν ὁποίων, ἡ μὲν πρώτη λέγεται *αὔξουσα*, διότι οἱ ὅροι αὐτῆς χωροῦσιν αὐξανόμενοι· ἡ δὲ δευτέρα *φθίνουσα* ἢ *ἀπαύξουσα*, διότι οἱ ὅροι αὐτῆς χωροῦσιν ἐλαττούμενοι· καὶ τῆς μὲν πρώτης ὁ λόγος εἶναι 2, τῆς δὲ δευτέρας $\frac{1}{4}$.

§ 212. Σημειοῦντες διὰ π τὸν λόγον ἐν γένει τῆς γεωμετρικῆς προόδου.

$$\div\; \alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon : \zeta \ldots\ldots \lambda$$

ἐὰν ἡ πρόοδος ἦναι αὔξουσα ἔχομεν $\pi > 1$

ἐὰν ἡ πρόοδος ἦναι φθίνουσα ἔχομεν $\pi < 1$.

Τύπος τοῦ γενικοῦ ὅρου.

§ 213. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς γεωμετρικῆς προόδου συνάγομεν, ὅτι

ὁ δεύτερος ὅρος ... $\beta = \alpha\pi$

ὁ τρίτος ὅρος ... $\gamma = \beta\pi = \alpha\pi \times \pi = \alpha\pi^2$

ὁ τέταρτος ὅρος ... $\delta = \gamma\pi = \alpha\pi^2 \times \pi = \alpha\pi^3$

ὁ πέμπτος ὅρος ... $\varepsilon = \delta\pi = \alpha\pi^3 \times \pi = \alpha\pi^4$.

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ἕκαστος ὅρος τῆς προόδου σχηματίζεται ἐκ τοῦ πρώτου πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸν λόγον ὑψωμένον εἰς δύναμιν ἰσοβάθμιον μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν προηγουμένων ὅρων. Λοιπὸν ὁ ὅρος λ κατέχων τὴν ν θέσιν καὶ ἔχων ἑπομένως ν—1 ὅρους πρὸ αὐτοῦ σχηματίζεται κατὰ τὸν τύπον

$$\lambda = \alpha\pi^{\nu-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀμέσως ὅρον τινα οἱασδήποτε τάξεως, χωρὶς νὰ διέλθωμεν τὴν σειρὰν ὅλων τῶν προηγουμένων. Οὕτω π. χ. ὁ ὄγδοος ὅρος τῆς προόδου.

$\div\; 2 : 6 : 18 : 54 \ldots$ ἰσοῦται μὲ $2 \times 3^7 = 4374$.

ὡσαύτως ὁ ἑκατοστὸς ὅρος τῆς προόδου

$\div\; 2 : 4 : 8 : 16 : 32 \ldots$ ἰσοῦται μὲ 2×2^{99}.

ΣΗΜ. Ὁ ἀριθμητικὸς ὑπολογισμὸς πρὸς εὕρεσιν ὑψηλῆς τινος δυνάμεως ἐκτελούμενος διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀποβαίνει βέβαια πρᾶξις πολὺ δυσχερής. Θέλομεν δὲ ἴδει κατωτέρω ὅτι ἡ πρᾶξις αὕτη δυνατὸν νὰ ἐκτελεσθῇ ἁπλούστατα δι' ἄλλης μεθόδου, τουτέστι διὰ τῶν λογαρίθμων.

Τύπος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων.

§ 214. Πρόβλημα. Νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς προόδου

$$\div\div\ \alpha : \beta : \gamma : \delta \ldots\ldots \iota : \varkappa : \lambda$$

Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι

$$\beta=\alpha\pi,\ \gamma=\beta\pi,\ \delta=\gamma\pi,\ \ldots\ \lambda=\varkappa\pi$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας ταύτας συνάγομεν

$$\beta+\gamma+\delta+\ \ldots\ +\lambda=(\alpha+\beta+\gamma+\ \ldots\ +\varkappa)\pi$$

Σημειοῦντες δὲ δι' Α τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων, ἔχομεν

$$\beta+\gamma+\delta+\ \ldots\ +\lambda=A-\alpha$$

καὶ $\cdots\cdots$ $\alpha+\beta+\gamma+\ \ldots\ +\varkappa=A-\lambda$

Λοιπὸν ἡ ἀνωτέρω ἰσότης ἄγεται εἰς

$$A-\alpha=(A-\lambda)\pi=A\pi-\lambda\pi,$$

ἐκ ταύτης, $A\pi-A=\lambda\pi-\alpha$ ἢ $A(\pi-1)=\lambda\pi-\alpha$

ὅθεν $\cdots\cdots$ $A=\frac{\lambda\pi-\alpha}{\pi-1}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (2)

Ἐκ τοῦ τύπου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα,

« Ἵνα εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προό-
» δου, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν τελευταῖον ὅρον ἐπὶ τὸν
» λόγον· ν' ἀφαιρέσωμεν ἐκ τοῦ γινομένου τὸν πρῶτον· καὶ νὰ διαιρέ-
» σωμεν τὴν διαφορὰν διὰ τοῦ λόγου ἐλαττουμένου κατὰ μοναδα. »

Ὅταν ἡ πρόοδος ἦναι φθίνουσα, ἐπειδὴ ἔχομεν $\pi<1$ καὶ $\lambda<\alpha$, οἱ δύο ὅροι τῆς κλασματικῆς ἐκφράσεως τοῦ τύπου (2) εἶναι ἀρνητικοί, ἀλλάσσοντες ὅμως τὰ σημεῖα ἀμφοτέρων τῶν ὅρων, θέτομεν τὸν τύπον ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$A=\frac{\alpha-\pi\lambda}{1-\pi}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (3)$$

καὶ οὕτω μένουσι πάντοτε οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος θετικοί.

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον τοῦ ἀθροίσματος (2) θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ λ ἐκ τοῦ (1) λαμβάνομεν

$$A=\frac{(\alpha\pi^{\nu-1})\pi-\alpha}{\pi-1}\quad \text{ἤτοι}\quad A=\frac{\alpha\pi^{\nu}-\alpha}{\pi-1}\ \cdots\cdots\ (4)$$

Ἄς ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τοῦτον εἰς τὴν πρόοδον

$$\div\div\ 1 : 2 : 4 : 8 : \ldots.$$

Νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν εἰκοσιτεσσάρων πρώτων ὅρων αὐτῆς.

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (4), $\alpha=1$, $\pi=2$, $\nu=24$, συνάγομεν

$$A=\frac{(2)^{24}-1}{2-1}=(2)^{24}-1.$$

Πρὸς συντόμευσιν τοῦ ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ παρατηροῦμεν ὅτι

$(2)^3=8$, ἑπομένως $(2)^6=(8)^2=64$

$$(2)^{12}=(64)^2=4096$$

$$(2)^{24}=(4096)^2=16777216$$

Λοιπὸν τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι $A=16777216$

§ 215. *Παρατήρησις*. Ὑποθέτοντες $\pi=1$, ὁ τύπος τοῦ ἀθροίσματος (4) ἀποβαίνει $\frac{0}{0}$. Πρὸς ἐξήγησιν τοῦ συμβόλου τούτου πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν μήπως ὑπάρχει εἰς τοὺς δύο ὅρους τῆς κλασματικῆς ἐκφράσεως κοινός τις παράγων, ὅστις ἐπὶ ταύτῃ τῇ ὑποθέσει μηδενίζεται.

Ὅθεν, ἐπειδὴ $\pi^\nu-1$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $\pi-1$, (§ 40) ἔχομεν

$$A=\frac{\alpha(\pi^\nu-1)}{\pi-1}=\alpha(\pi^{\nu-1}+\pi^{\nu-2}+\pi^{\nu-3}\ \ldots\ +\pi+1)$$

Κάμνοντες τώρα εἰς τὸν νέον τοῦτον τύπον τοῦ A τὴν ὑπόθεσιν

$\pi=1$ λαμβάνομεν $A=\alpha(1+1+1\ \ldots\ +1+1)$

ἤτοι $A=\alpha+\alpha+\alpha\ \ldots\ +\alpha+\alpha=\nu\alpha$.

Ἠδυνάμεθα δὲ νὰ λάβωμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο καὶ ἐξ αὐτῆς τῆς προόδου $\div\!\!\div\ \alpha : \beta : \gamma : \ldots . \lambda$,

ἥτις κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $\pi=1$, ἄγεται εἰς

$$\div\!\!\div\ \alpha : \alpha : \alpha : \ldots . \alpha,$$

σειρὰν ν ὅρων ἴσων τῷ α, ἑπομένως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι να.

Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν ἀπεράτων γεωμετρικῶν προόδων.

§ 216 *Ἀπέρατος* ὀνομάζεται ἡ πρόοδος, τῆς ὁποίας οἱ ὅροι χωροῦσιν ἐπ' ἄπειρον αὐξανόμενοι ἢ ἐλαττούμενοι. τουτέστιν ἐκείνη, τῆς ὁποίας ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων εἶναι ἄπειρος.

Ἔστω ἡ φθίνουσα πρόοδος $\div\!\!\div\ \alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon : \zeta \ldots$ προεκτεινομένη ἀορίστως.

Θέτοντες τὸν τύπον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ν ὅρων

$$A=\frac{\alpha-\alpha\pi^\nu}{1-\pi}$$

ὑπὸ τὴν μορφήν, $A=\frac{\alpha}{1-\pi}-\frac{\alpha\pi^\nu}{1-\pi}$

παρατηροῦμεν, ὅτι ἐπειδὴ π εἶναι κλάσμα π^ν εἶναι ἐπίσης κλάσμα, καὶ τοσοῦτον μικρότερον, καθ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων ν εἶναι μεγαλήτερος· ἐπομένως ὅσους περισσοτέρους ὅρους λάβωμεν εἰς τὴν πρόσθεσιν, τοσοῦτον τὸ $\frac{\alpha-\alpha\pi^\nu}{1-\pi}$ σμικρύνει καὶ τοσοῦτον τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων θέλει πλησιάσει νὰ ἐξισωθῇ μὲ τὸ πρῶτον μέρος τοῦ A, ἤτοι μὲ $\frac{\alpha}{1-\pi}$. Ἐὰν δὲ λάβωμεν ἀριθμὸν ὅρων μεγαλήτερον πάσης δεδομένης ποσότητος, ἤτοι ἐὰν ὑποθέσωμεν $\nu=\infty$, τότε $\frac{\alpha-\alpha\pi^\nu}{1-\pi}$ θέλει ἀποβῇ μικρότερον πάσης δεδομένης ποσότητος, ἤτοι θέλει γίνει ἴσον τῷ 0 καὶ ἡ ἔκφρασις $\frac{\alpha}{1-\pi}$ θέλει παριστάνει τὴν τιμὴν τῆς ὅλης σειρᾶς.

Ἐκ τούτου συνάγομεν, ὅτι « Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς ἐπ' ἄπειρον φθινούσης προόδου ἐκφράζεται διὰ $A=\frac{\alpha}{1-\pi}$. »

Ἡ ἔκφρασις αὕτη, κυρίως εἰπεῖν, εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνουσιν ὅλα τὰ μερικὰ ἀθροίσματα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν λαμβάνοντες εἰς τὴν πρόοδον ἀριθμὸν ὅρων βαθμηδὸν μεγαλήτερον· ἡ δὲ μεταξὺ τῶν ἀθροισμάτων τούτων καὶ τοῦ $\frac{\alpha}{1-\pi}$ διαφορὰ δύναται νὰ γίνῃ ὅσον θέλομεν μικρὰ καὶ τότε μηδενίζεται, ὅταν λάβωμεν ἄπειρον ἀριθμὸν ὅρων.

Παράδειγμα. Ἔστω ἡ ἐπ' ἄπειρον φθίνουσα πρόοδος

$$\div\div\ 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \frac{1}{81} \ldots$$

τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτῆς εἶναι

$$A=\frac{\alpha}{1-\pi}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

τουτέστι τὸ ὅριον, εἰς τὸ ὁποῖον τείνουσι τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν ὅρων αὐτῆς εἶναι $\frac{3}{2}$, τὸ ὁποῖον τότε μόνον φθάνομεν, ὅταν λάβωμεν ἄπειρον ἀριθμὸν ὅρων.

Μεταχειριζόμενοι δὲ τὸν τύπον τοῦτον $\frac{\alpha}{1-\pi}$ εἰς τὸν προσδιορισμὸν πεπερασμένου τινὸς ἀριθμοῦ ν ὅρων τῆς προόδου, πράττομεν σφάλμα παριστανόμενον ὑπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha\pi^\nu}{1-\pi}$, τὸ ὁποῖον εἰς τὸ προτεθὲν παράδειγμα εἶναι $\frac{1\cdot(\frac{1}{3})^\nu}{1-\frac{1}{3}}$ ἤτοι $\frac{3}{2}(\frac{1}{3})^\nu$. Ἐξαρτᾶται δὲ ἐκ τοῦ λαμβανομένου ἀριθμοῦ τῶν ὅρων ν νὰ ἦναι ὅσον θέλομεν μικρόν.

Οὕτως, ἐὰν $\nu=5$, ἔχομεν $\frac{3}{2}(\frac{1}{3})^5=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3^5}=\frac{3}{2.3^5}=\frac{1}{162}$

Ἐὰν δὲ $\nu=6$, ἔχομεν $\frac{3}{2}(\frac{1}{3})^6=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3^6}=\frac{3}{2.3^6}=\frac{1}{486}$.

§ **217.** Ὅταν ἡ πρόοδος ἦναι αὔξουσα ἡ ἔκφρασις $A=\frac{\alpha}{1-\pi}$ δὲν δύναται πλέον νὰ θεωρηθῇ ὡς ὅριον τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων· ἐπειδὴ τοῦ τύπου τοῦ ἀθροίσματος τῶν ν ὅρων αὐτῆς ὄντος

$$A=\frac{\alpha}{1-\pi}-\frac{\alpha\pi^\nu}{1-\pi}$$

τὸ δεύτερον μέρος $\frac{\alpha\pi^\nu}{1-\pi}$ αὐξάνει βαθμηδὸν, καθ' ὅσον αὐξάνει καὶ ὁ ἀριθμὸς ν, τουτέστιν ὅσον περισσοτέρους ὅρους λαμβάνομεν, τοσοῦτον ἡ ἔκφρασις τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων τούτων διαφέρει ἀριθμητικῶς τοῦ $\frac{\alpha}{1-\pi}$· ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς ἐπ' ἄπειρον αὐξούσης προόδου εἶναι ἀνώτερον παντὸς ὁρίου, ἤτοι ἄπειρον.

Ὁ τύπος $\frac{\alpha}{1-\pi}$, εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, εἶναι ἡ συνεπτυγμένη ἔκφρασις τῆς σειρᾶς $\alpha+\alpha\pi+\alpha\pi^2+\alpha\pi^3$ ...., ἥτις παράγεται ἐκτελουμένης τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ τοῦ $1-\pi$.

Παρουσιάζεται δὲ περίστασίς τις, ἥτις κατὰ πρώτην προσβολὴν φαίνεται περίεργος. Ἐπειδὴ $\frac{\alpha}{1-\pi}$ εἶναι τὸ παράγον τὴν σειρὰν κλάσμα, πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha}{1-\pi}=\alpha+\alpha\pi+\alpha\pi^2+\alpha\pi^3+\ \ldots$$

ἀλλὰ θέτοντες $\alpha=1$ καὶ $\pi=2$ συνάγομεν

$$\frac{1}{1-2}=-1=1+2+4+8+16+32\ \ldots$$

ἐξίσωσιν, τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον μέλος εἶναι ἀρνητικὸν, —1, ἐνῷ τὸ δεύτερον εἶναι θετικὸν καὶ αὐξανόμενον, καθ' ὅσον λαμβάνομεν περισσοτέρους ὅρους.

Πρὸς ἐξήγησιν τοῦ παραδόξου τούτου ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι, ὅταν εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\alpha}{1-\pi}=\alpha+\alpha\pi+\alpha\pi^2+\alpha\pi^3+\ \ldots$$

μείνωμεν μέχρι τινὸς ὅρου, πρέπει, ἵνα ὑπάρξῃ ἡ ἐξίσωσις, νὰ συμπληρώσωμεν τὸ πηλικον, οὕτω μένοντες π. χ. εἰς τὸν τέταρτον ὅρον $\alpha\pi^3$, ὡς δείκνυται εἰς τὸν πίνακα τῆς διαιρέσεως.

$$\begin{array}{lll|l} & & \alpha & 1-\pi \\ \hline \text{α΄ ὑπόλοιπον} & \ldots & +\alpha\pi & \alpha+\alpha\pi+\alpha\pi^2+\alpha\pi^3+\frac{\alpha\pi^4}{1-\pi} \\ \text{β΄.} & \text{»} \ \ldots & +\alpha\pi^2 & \\ \text{γ΄.} & \text{»} \ \ldots & +\alpha\pi^3 & \\ \text{δ΄.} & \text{»} \ \ldots & +\alpha\pi^4 & \end{array}$$

πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ πηλίκον τὴν κλασματικὴν ἔκφρασιν $\frac{\alpha\pi^4}{1-\pi}$ ἵνα παραστήσωμεν ἀκριβῶς τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως.

Οὕτω δὲ ἔχομεν $\frac{\alpha}{1-\pi}=\alpha+\alpha\pi+\alpha\pi^2+\alpha\pi^3+\frac{\alpha\pi^4}{1-\pi}$.

Ἐὰν τώρα κάμωμεν εἰς τὴν ἀκριβῆ ταύτην ἐξίσωσιν $\alpha=1$ καὶ $\pi=2$,

λαμβάνομεν . . $-1=1+2+4+8+\frac{16}{-1}$

ἤτοι . . . . . $-1=1+2+4+8-16$

ἢ τέλος . . . $-1=15-16$ ἐξίσωσιν ἀκριβῆ,

Ἐν γένει « Δὲν δυνάμεθα νὰ ἐξισώσωμεν παράγουσαν τινὰ ἔκ» φρασιν μὲ τὴν ἐξ αὐτῆς παραγομένην σειρὰν, μένοντες μέχρι τινὸς » ὅρου αὐτῆς, εἰμὴ καθ' ὅσον θεωροῦμεν ταύτην συμπληρωμένην διά » τινος ἄλλης ἐκφράσεως. »

Ἐὰν εἰς μερικάς τινας περιστάσεις ἡ σειρὰ ἦναι φθίνουσα. ἡ συμπληρωματικὴ αὕτη ἔκφρασις δυνατὸν νὰ ὑποτεθῇ ὅσον θέλομεν μικρὰ, προεκτεινομένης ἱκανῶς τῆς σειρᾶς. Ἐξ ἐναντίας δὲ, ἐὰν ἡ σειρὰ ἦναι αὔξουσα. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι αἱ αὔξουσαι σειραὶ δὲν δύνανται νὰ χρησιμεύσωσιν εἰς τὴν κατὰ προσέγγισιν ἐκτίμησιν τῶν ἀριθμῶν.

Διὰ τοῦτο αἱ μὲν φθίνουσαι σειραὶ ὀνομάζονται *συγκλίνουσαι* (convergentes), αἱ δὲ αὔξουσαι *ἀποκλίνουσαι* (divergentes). Εἰς μὲν τὴν συγκλίνουσαν, ὅσον περισσοτέρους ὅρους λαμβάνομεν, τόσον περισσότερον τὸ ἄθροισμα προσεγγίζει ἀριθμητικῶς εἰς τὴν παράγουσαν ἔκφρασιν· εἰς δὲ τὴν ἀποκλίνουσαν ἐξ ἐναντίας, ὅσον περισσοτέρους ὅρους λαμβάνομεν, τοσούτῳ μᾶλλον τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διαφέρει τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τῆς συνεπτυγμένης ἐκφράσεως.

Τύποι ἀναφερόμενοι εἰς τὰς Γεωμετρικὰς προόδους.

§ 218. Οἱ δύο εὑρεθέντες τύποι $\lambda=\alpha\pi^{\nu-1}$ καὶ $A=\frac{\pi\lambda-\alpha}{\pi-1}$ περικλείοντες πέντε ποσότητας α, π, ν, λ, Α, χρησιμεύουσι πρὸς εὕρεσιν δύο οἱωνδήποτε ἐξ αὐτῶν, ὅταν αἱ ἄλλαι τρεῖς ἦναι γνωσταί· ὅθεν ὡς εἰς τὰς ἀριθμητικὰς προόδους, οὕτω καὶ εἰς τὰς γεωμετρικὰς, δυνατὸν νὰ γίνωσι δέκα διάφορα προβλήματα, τῶν ὁποίων αἱ ἐκφωνήσεις δὲν διαφέρουσιν ἀπὸ τὰς ἐκφωνήσεις ἐκείνων, εἰμὴ καθότι τὸ γράμμα π ἐπέχει τὸν τύπον τοῦ Δ.

Ἰδοὺ ὁ πίναξ τῶν δέκα τούτων προβλημάτων,

δοθέντων	(1),	α, π, ν,	νὰ εὕρωμεν	λ,	καὶ	Α,
	(2),	α, ν, λ,	. . . . . .	π,	»	Α,
	(3),	π, ν, λ,	. . . . . .	α,	»	Α,
	(4),	π, ν, Α,	. . . . . .	α,	»	λ,
	(5),	ν, λ, Α,	. . . . . .	α,	»	π,
	(6),	ν, ν, Α,	. . . . . .	π,	»	λ,
	(7),	α, π, λ,	. . . . . .	ν,	»	Α,
	(8),	α, π, Α,	. . . . . .	ν,	»	λ,
	(9),	α, λ, Α,	. . . . . .	π,	»	ν,
	(10),	π, λ, Α,	. . . . . .	α,	»	ν,

§ 219. Ἐκ τῶν δέκα τούτων ζητημάτων τὰ τέσσαρα πρῶτα δέχονται εὔκολον λύσιν, κατὰ τὰς μέχρι τοῦδε ἀποκτηθείσας γνώσεις· τούτων τοὺς τύπους ἐκθέτομεν εἰς τὸν ἑπόμενον πίνακα.

	Διδόμενα	Ζητούμενα
1	α, π, ν,	$\lambda=\alpha\pi^{\nu-1}$ $A=\frac{\lambda\pi-\alpha}{\pi-1}=\frac{\alpha(\pi^{\nu}-1)}{\pi-1}$
2	α, ν, λ,	$\pi=\sqrt[\nu-1]{\frac{\lambda}{\alpha}}$ $A=\frac{\sqrt[\nu-1]{\lambda^{\nu}}-\sqrt[\nu-1]{\alpha^{\nu}}}{\sqrt[\nu-1]{\lambda^{\nu}}-\sqrt[\nu-1]{\alpha}}$
3	π, ν, λ,	$\alpha=\frac{\lambda}{\pi^{\nu-1}}$ $A=\frac{\lambda(\pi^{\nu}-1)}{\alpha^{\nu-1}(\pi-1)}$
4	π, ν, Α,	$\alpha=\frac{A(\pi-1)}{\pi^{\nu}-1}$ $\lambda=\frac{A\pi^{\nu-1}(\pi-1)}{\alpha^{\nu}-1}$

Δύο ζητήματα τὸ (5) καὶ (6) ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς ἐπιλύσεως ἐξισώσεως βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου. Εἶναι δὲ ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητοῦνται αἱ ποσότητες α καὶ π ἢ λ καὶ π.

Τῷ ὄντι ἐκ τοῦ τύπου $Α=\frac{λπ-α}{π-1}$

συνάγομεν . . . . $α=λπ-Απ+Α$

καὶ ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ α εἰς τὸν τύπον $λ=απ^{ν-1}$

λαμβάνομεν . . . . $λ=(λπ-Απ+Α)π^{ν-1}$

ἐπομένως . . . . $λ=λπ^ν-Απ^ν+Απ^{ν-1}$

$$Απ^ν-λπ^ν-Απ^{ν-1}+λ=0$$
$$(Α-λ)π^ν-Απ^{ν-1}+λ=0.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη οὖσα βαθμοῦ ν, ἴσου δηλαδὴ μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὅρων, καὶ ἐπομένως ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου, δὲν δύναται νὰ ἐπιλυθῇ μὲ τὰς στοιχειώδεις γνώσεις, τὰς ὁποίας ἔχομεν.

Ὡσαύτως θέλοντες νὰ προσδιορίσωμεν τὰς ποσότητας λ καὶ π, πρέπει ν' ἀντισάξωμεν τὴν τιμὴν τοῦ λ ἐκ τοῦ τύπου (1) εἰς τὸν τύπον τοῦ Α καὶ οὕτως λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$Α=\frac{α(π^ν-1)}{π-1}$$

ἐκ ταύτης δὲ . . . . $Απ-Α=απ^ν-α$

$$απ^ν-Απ+Α-α=0$$

πρέπει λοιπὸν νὰ λύσωμεν ἐξίσωσιν βαθμοῦ ν.

Τὰ λοιπὰ τέσσαρα ζητήματα (7), (8), (9), (10) ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς ἐπιλύσεως ἐξισώσεων πάντη ἰδιαιτέρας φύσεως· εἰς ταῦτα δὲ ὑποτίθενται ἄγνωστοι ὁ ἀριθμὸς ν καὶ μία τῶν ἄλλων τεσσάρων ποσοτήτων.

Ὁ δεύτερος τύπος . . . $Α=\frac{λπ-α}{π-1}$

δίδει εὐκόλως τὴν τιμὴν μιᾶς τῶν τεσσάρων ποσοτήτων, α, π, λ, Α, διὰ τῶν λοιπῶν τριῶν. Ὁ δὲ ἀριθμὸς ν προσδιορίζεται μόνον διὰ τοῦ τύπου . . . . $λ=απ^{ν-1}$.

Ὅθεν ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἄγεται εἰς $π^{ν-1}=\frac{λ}{α}$ ἢ εἰς $π^ν=\frac{λπ}{α}$

τουτέστιν εἰς ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $α^x=β$,

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην α καὶ β εἶναι γνωσταὶ ποσότητες, ὁ ἐκθέτης ὅμως εἶναι ἄγνωστος. Τὰς ἐξισώσεις τοῦ εἴδους τούτου ὀνομάζομεν *ἐκθετικὰς ἐξισώσεις*, πρὸς διάκρισιν τῶν κοινῶν ἐξισώσεων, εἰς τὰς ὁποίας ὁ βαθμὸς τῆς ἀγνώστου εἶναι γνωστὸς ἀριθμός.

ΣΗΜ. Περὶ τῶν ἐκθετικῶν ἐξισώσεων θέλομεν πραγματευθῇ ἐν συντόμῳ εἰς τὸ δεύτερον τμῆμα τοῦ Κεφαλαίου τούτου.

§ 220 *Πρόβλημα.* Νὰ παρενθέσωμεν μεταξὺ δύο δεδομένων ἀριθμῶν α καὶ β ἀριθμόν τινα μ μέσων γεωμετρικῶν ἀναλόγων.

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου ἀπαιτεῖ νὰ γνωρίσωμεν τὸν λόγον τῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι α, ὁ τελευταῖος β, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων $\mu+2$.

Ὅθεν ἐκ τοῦ τύπου . . . $\lambda=\alpha\pi^{\nu-1}$

λαμβάνομεν . . . . $\pi=\sqrt[\nu-1]{\frac{\lambda}{\alpha}}$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου προσδιορίζεται ὁ λόγος τῆς προόδου ὅταν ἦναι γνωστὸς ὁ πρῶτος ὅρος αὐτῆς, ὁ τελευταῖος, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων.

Ὅθεν θέτοντες εἰς τὸν τύπον τοῦτον $\lambda=\beta$ καὶ $\nu=\mu+2$, συνάγομεν

$$\pi=\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$$

τουτέστι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς β καὶ α τὸν ἕνα διὰ τοῦ ἄλλου καὶ νὰ ἐξάξωμεν τὴν ῥίζαν τοῦ πηλίκου, παριστανομένην ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μέσων ἀναλόγων, ηὐξημένου κατὰ μονάδα.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ παρενθέσωμεν 6 μέσους ἀναλόγους μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 384. Ἔχομεν

$$\pi=\sqrt[7]{\frac{384}{3}}=\sqrt[7]{128}=2,$$

ὅθεν ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι

$$\div\!\div\ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 . 192 : 384.$$

ΣΗΜ. Α΄. Ἀκολούθως θέλομεν δείξει εὐκολώτερον μέσον ὑπολογισμὸν τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ τύπου τούτου.

ΣΗΜ Β΄. Ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ὡς ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν προόδων (§ 207) ὅτι ἐὰν μεταξὺ ὅλων τῶν ὅρων γεωμετρικῆς τινος προόδου, ἀνὰ δύο θεωρουμένων, παρενθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μέσων ἀναλόγων ἡ προκύπτουσα σειρὰ ὅλων ἐν γένει τῶν ὅρων θέλει εἶναι ἐπίσης γεωμετρικὴ πρόοδος.

Προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς τὰς προόδους πρὸς ἄσκησιν.

§ 221. Α΄. Σῶμά τι πίπτον ἐντὸς τοῦ κενοῦ διατρέχει

εἰς μὲν τὸ πρῶτον	δευτερόλεπτον	μέτρα	4,9044
εἰς δὲ τὸ δεύτερον	»	»	4,9044×3
εἰς δὲ τὸ τρίτον	»	»	4,9044×5

καὶ οὕτως ἐφεξῆς, αὐξανομένων τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ 4,9044 κατὰ πρόοδον ἀριθμητικὴν $\div 1 . 3 . 5 . 7 \ldots$

Ζητεῖται πόσα μέτρα διέτρεξε τὸ σῶμα τοῦτο εἰς 40 δευτερόλεπτα;

Ἀπόκρ. $\chi = 4,9044 + 4,9044 \times 3 + 4,9044 \times 5 \ldots\ldots$

$$\chi = 4,9044(1+3+5+ \ldots\ldots +79)$$

$$\chi = 4,9044 \times 1600 = 7847,\ 04.$$

Β'. Σῶμά τι ἐντὸς τοῦ κενοῦ ἔπεσεν ἐξ ὕψους $1961^{\mu}, 76$.

Ζητεῖται ἡ διάρκεια τῆς πτώσεως αὐτοῦ.

Λύσις. Κατὰ τὸν ἐν τῇ ἐκφωνήσει τοῦ προηγηθέντος προβλήματος ἐκτεθέντα νόμον τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν δευτερολέπτων εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου $\div 1 . 3 . 5 \ldots\ldots$

Ἐπίσης εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ διατρεχθὲν διάστημα $1961^{\mu}, 76$ εἶναι γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 4,9044 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς προόδου· τουτέστι

$$(1+3+5+ \ldots 4,9044 = 1961,76$$

ὅθεν .... $A = 1+3+5+ \ldots = \frac{1961,76}{4,9044} = 400.$

Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὸν τύπον $\nu = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\Delta} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{\Delta^2} - \frac{\alpha}{\Delta} + \frac{1}{4} + \frac{2A}{\Delta}}$

θέσωμεν .... $\alpha = 1,\ \Delta = 2,\ A = 400.$

συνάγομεν ..... $\nu = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 400}$

ἤτοι .... $\nu = 20.$

Γ'. Ὁ ἐπινοήσας τὸ Ζατρίκιον ἐζήτησεν ὡς ἀμοιβὴν ἕνα κόκκον σίτου διὰ τὸ πρῶτον τετραγωνίδιον, 2 διὰ τὸ δεύτερον, 4 διὰ τὸ τρίτον, 8 διὰ τὸ τέταρτον καὶ οὕτως ἐφεξῆς, διπλασιαζομένου πάντοτε τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κόκκων τοῦ προηγουμένου τετραγωνιδίου, μέχρι τοῦ ἑξηκοστοῦ τετάρτου.

Ζητεῖται ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν κόκκων τοῦ σίτου.

Ἀπόκρ. $A = 2^{64} - 1.$

$$A = 18,446,744,073,707,550,615.$$

Β'. Περὶ τῶν ἐκθετικῶν ἐξισώσεων.

§ 222. Αἱ ἐξισώσεις εἰς τὰς ὁποίας ἡ ἄγνωστος εἰσέρχεται ὡς ἐκθέτης, ὀνομάζονται *ἐκθετικαί*. Αὗται εἶναι τῆς μορφῆς

$$\alpha^{\chi} = 6.$$

Ἡ ἐπίλυσις τῶν ἐξισώσεων τούτων συνίσταται εἰς τὸ νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως, εἰς τὴν ὁποίαν ὑψωθεὶς δεδομένος τις ἀριθμὸς α, παράγει ἄλλον, ἐπίσης δεδομένον ἀριθμὸν β.

Ἂς λάβωμεν κατὰ πρῶτον μερικά τινα παραδείγματα.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $2^{\chi}=64.$

Ὑψοῦντες τὸν ἀριθμὸν 2 εἰς τὰς διαφόρους δυνάμεις αὐτοῦ εὑρίσκομεν

$$2^6=64, \quad \text{λοιπὸν} \quad \chi=6.$$

Ἔστω προσέτι ἡ ἐξίσωσις $3^{\chi}=243$ εὑρίσκομεν $\chi=5.$

Εἶναι φανερὸν, ὅτι καθ' ὅσον τὸ δεύτερον μελος β εἶναι τελεία τις δύναμις τοῦ α, ὁ ἐκθέτης χ εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος, τὸν ὁποῖον προσδιορίζομεν ὑψοῦντες τὸν ἀριθμὸν α εἰς τὰς διαδοχικὰς αὐτοῦ δυνάμεις, ἀρχόμενοι ἐκ τοῦ 0.

Ἔστω ἤδη ἡ ἐξίσωσις $2^{\chi}=6 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$$\text{θέτοντες} \left\{ \begin{array}{l} \chi=2 \\ \chi=3 \end{array} \right. \text{λαμβάνομεν} \quad \begin{array}{l} 2^2=4 \\ 2^3=8 \end{array} \Big| \ \text{ἀλλὰ} \left\{ \begin{array}{l} 4<6 \\ 8>6 \end{array} \right.$$

ἄρα ἡ τιμὴ τοῦ χ περιλαμβάνεται μεταξὺ 2 καὶ 3.

Ἂς θέσωμεν λοιπὸν $\chi=2+\frac{1}{\chi'} \ldots\ldots\ldots (\alpha)$

ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν προτεθεῖσαν ἐξίσωσιν (1)

ἔχομεν $2^{2+\frac{1}{\chi'}}=6$ ἢ $2^2\times 2^{\frac{1}{\chi'}}=6$, λοιπὸν $2^{\frac{1}{\chi'}}=\frac{3}{2}$

ὑψοῦντες τὰ δύο μέλη εἰς τὴν δύναμιν χ′ ἔχομεν

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\chi'}=2 \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\text{θέτοντες} \left\{ \begin{array}{l} \chi'=1 \\ \chi'=2 \end{array} \right. \text{λαμβάνομεν} \quad \begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^1=\frac{3}{2} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4} \end{array} \Big| \ \text{ἀλλὰ} \ \Big| \begin{array}{l} \frac{3}{2}<2 \\ \frac{9}{4}>2 \end{array}$$

ἄρα ἡ τιμὴ τοῦ χ′ περιλαμβάνεται μεταξὺ 1 καὶ 2.

Ἂς θέσωμεν $\ldots \chi'=1+\frac{1}{\chi''} \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$

ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2)

ἔχομεν $\ldots\ldots\ldots \left(\frac{3}{2}\right)^{1+\frac{1}{\chi''}}=2$, ἢ $\left(\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{\chi''}}=2$

καὶ δι' ἀναγωγῆς . . . $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{\chi''}}=\left(\frac{4}{3}\right)$

τουτέστι . . . . $\left(\frac{4}{3}\right)^{\chi''}=\frac{3}{2}$) . . . . (3)

θέτοντες $\left\{\begin{array}{l}\chi''=1\\ \chi''=2\end{array}\right.$ λαμβάνομεν $\left.\begin{array}{l}\left(\frac{4}{3}\right)^{1}=\frac{4}{3}\\ \left(\frac{4}{3}\right)^{2}=\frac{16}{9}\end{array}\right\}$ ἀλλὰ $\left\{\begin{array}{l}\frac{4}{3}<\frac{3}{2}\\ \frac{16}{9}>\frac{3}{2}\end{array}\right.$

ἄρα ἡ τιμὴ τοῦ χ'' περιλαμβάνεται μεταξὺ 1 καὶ 2.

Ἂς θέσωμεν . . . . $\chi''=1+\frac{1}{\chi'''}$ . . . . (γ)

ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3)

ἔχομεν . . . . $\left(\frac{4}{3}\right)^{1+\frac{1}{\chi'''}}=\frac{3}{2}$ ἢ $\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{\chi'''}}=\frac{3}{2}$

καὶ δι' ἀναγωγῆς . . . $\left(\frac{9}{8}\right)^{\chi'''}=\frac{4}{3}$ . . . . (4)

Ἀκολουθοῦντες τὴν αὐτὴν μέθοδον εὑρίσκομεν ὅτι χ''' περιλαμβάνεται μεταξὺ 2 καὶ 3. Θέτομεν ἐπομένως $\chi'''=2+\frac{1}{\chi''''}$ . . (δ)

Δυνάμεθα ν' ἀκολουθήσωμεν τὴν αὐτὴν σειρὰν τῶν πράξεων, καθ' ὅσον θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν μὲ πλειοτέραν ἀκρίβειαν τὴν ἀρχικὴν ἄγνωστον χ.

Μένοντες δὲ ἕως ἐδῶ, ἂς συγκρίνωμεν τὰς ἐξισώσεις (α), (β), (γ), (δ)

$$\chi=2+\frac{1}{\chi'}\quad \chi'=1+\frac{1}{\chi''}\quad \chi''=1+\frac{1}{\chi'''}\quad \chi'''=2+\frac{1}{\chi''''}\ \ldots$$

λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ χ ὑπὸ τὴν μορφὴν τοῦ συνεχοῦς κλάσματος

$$\chi=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\chi''''}}}}$$

Παραλείποντες τὸ τελευταῖον κλάσμα $\frac{1}{\chi'''}$ συνάγομεν $\chi=2\frac{3}{5}$.

Ἐὰν λάβωμεν ἐκ τοῦ συνεχοῦς κλάσματος μεγαλήτερον ἀριθμὸν συστατικῶν κλασμάτων, παραλείποντες τὸ τελευταῖον, θέλομεν προσδιορίσει τὴν τιμὴν τοῦ χ μὲ ὅσον θέλομεν βαθμὸν προσεγγίσεως.

§ 223. Ἔστω ἐν γένει ἡ ἐξίσωσις $\alpha^{\chi}=\beta$ . . . . (1)
ὑποθέτομεν πάντοτε . . . . . $\alpha>1$.

Ἐὰν σχηματίσωμεν τὰς διαδοχικὰς δυνάμεις τοῦ α, θέλομεν εὕρει ὅτι β περιλαμβάνεται μεταξὺ α^{ν} καὶ $\alpha^{\nu+1}$, ἐπομένως χ περιλαμβάνεται μεταξὺ ν καὶ $\nu\times1$.

Θέτοντες . . . . . . $\chi=\nu+\frac{1}{\chi'}$ . . . . (α)

καὶ ἀντεισάγοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) $\qquad \alpha^{\nu+\frac{1}{\chi'}}=\beta$

λαμβάνομεν διαδοχικῶς . . . . $\qquad \alpha^{\nu}\times\alpha^{\frac{1}{\chi'}}=\beta$

$$\alpha^{\frac{1}{\chi'}}=\frac{\beta}{\alpha^{\nu}}$$

σημειοῦντες διὰ συντομίαν $\frac{\beta}{\alpha^{\nu}}=\gamma$ $\qquad \alpha^{\frac{1}{\chi'}}=\gamma$

καὶ ὑψοῦντες εἰς τὴν δύναμιν χ' $\qquad \gamma^{\chi'}=\alpha$ . . (2)

Πράττοντες ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ὡς ἐπὶ τῆς προηγηθείσης, θέλομεν ἰδεῖ, ὅτι χ' περιλαμβάνεται μεταξὺ ν' καὶ $\nu'+1$,
ὅθεν θέτοντες . . . . . $\chi'=\nu'+\frac{1}{\chi''}$ . . . . . (β)
καὶ ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) θέλομεν φθάσει εἰς τὴν ἐξίσωσιν . . $\delta^{\chi''}=\gamma$ . . . . . . (3)
καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Συγκρίνοντες ἔπειτα τὰς ἐξισώσεις

$$\chi=\nu+\frac{1}{\chi'} \quad \chi'=\nu'+\frac{1}{\chi''} \quad \chi''=\nu''+\frac{1}{\chi'''}\ldots$$

λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ 9 εἰς συνεχὲς κλάσμα

$$\chi=\nu+\cfrac{1}{\nu'+\cfrac{1}{\nu''+\ldots}}$$

§ 224. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσα μέθοδος δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ καθ' ὅλας τὰς περιπτώσεις, οἱ ἀπαιτούμενοι ὅμως ὑπολογισμοὶ εἶναι ἱκανῶς ἐπίπονοι. Πρὸς τὸ παρὸν ἀρκούμεθα εἰς τὴν μέθοδον ταύτην ἵνα θεωρήσωμεν δυνατὴν τὴν ἐπίλυσιν τῶν ἐκθετικῶν ἐξισώσεων· ἐν τοῖς ἐφεξῆς δὲ θέλομεν δώσει μέσον πολὺ εὔκολον τῆς ἐπιλύσεως αὐτῶν.

Γ΄. Θεωρία τῶν λογαρίθμων.

§ 225. Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\alpha^\chi=y$, ὑποθέσωμεν ὅτι α φυλάττει πάντοτε τὴν αὐτὴν τιμὴν, καὶ θέσωμεν ἀντὶ τοῦ y ὅλους τοὺς δυνατοὺς θετικοὺς ἀριθμοὺς, δυνάμεθα διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ y νὰ προσδιορίσωμεν, κατὰ τὴν προεκτεθεῖσαν μέθοδον τῆς ἐπιλύσεως τῶν ἐκθετικῶν ἐξισώσεων, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τοῦ χ, ἂν οὐχὶ ἀκριβῶς, τοὐλάχιστον κατὰ προσέγγισιν.

Ὁ σταθερὸς ἀριθμὸς α πρέπει νὰ ἦναι διάφορος τῆς μονάδος.

Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον $\alpha>1$,

θέτοντες διαδοχικῶς $\chi=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$

συνάγομεν . . . . . $y=1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5,\ldots$

Εἶναι φανερὸν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5,\ \ldots$ εἶναι ἀκέραιοι, ἀλλὰ μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουσι χάσματα, ἤτοι ἄλλοι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Δίδοντες ὅμως τιμὰς εἰς τὸ χ, μεταξὺ 0 καὶ 1, μεταξὺ 1 καὶ 2, μεταξὺ 2 καὶ 3 καὶ ἐφεξῆς, τουτέστι τιμὰς κλασματικὰς, θέλομεν λάβει διὰ τὸ y τιμὰς διαφερούσας ἀπ' ἀλλήλων, ὅσον ὀλίγον θέλομεν.

Ὅθεν συνάγομεν τὴν ἑξῆς ἀρχὴν,

« Ὅλοι οἱ ἀνώτεροι τῆς μονάδος ἀριθμοὶ παράγονται διὰ τῶν δυ-
» νάμεων οἱουδήποτε σταθεροῦ ἀριθμοῦ α, τῶν ὁποίων οἱ ἐκθέται
» εἶναι *θετικοὶ*, ἀκέραιοι ἢ κλασματικοί. »

Θέτοντες δὲ . . . $\chi=-0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,-5,\ \ldots$

συνάγομεν . . . . . $y=\alpha^0,\ \bar{\alpha}^1,\ \bar{\alpha}^2,\ \bar{\alpha}^3,\ \bar{\alpha}^4,\ \bar{\alpha}^5,\ldots$

ἤτοι . . . . $y=1,\ \frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\alpha^2},\ \frac{1}{\alpha^3},\ \frac{1}{\alpha^4},\ \frac{1}{\alpha^5},\ldots$

Λοιπὸν, « Ὅλοι οἱ κατώτεροι τῆς μονάδος ἀριθμοὶ παράγονται διὰ
» τῶν δυνάμεων τοῦ α, τῶν ὁποίων οἱ ἐκθέται εἶναι *ἀρνητικοί*. »

Παρατηροῦμεν δὲ, ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι τοσοῦτον μεγαλητέρα *θετικῶς*, ὅσον καὶ ἡ τοῦ y· τοσοῦτον δὲ μεγαλητέρα *ἀρνητικῶς*, ὅσον ἡ τοῦ y πλησιάζει εἰς τὸ 0. Ὥστε

$$\text{ἐὰν}\ \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ y=\infty \end{array}\right.\quad \text{ἔχομεν}\quad \left\{\begin{array}{l} \chi=-\infty \\ \chi=\infty \end{array}\right.$$

« Ὅλοι λοιπὸν οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ ∞ δύνανται νὰ
» παραχθῶσιν ἀπὸ τὰς δυνάμεις σταθεροῦ τινος ἀριθμοῦ α μείζονος
» τῆς μονάδος, οἱ μὲν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ∞ ἀπὸ δυνάμεις θε-
» τικὰς, οἱ δὲ ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 0 ἀπὸ δυνάμεις ἀρνητικάς. »

ΣΗΜ. Δυνάμεθα ὡσαύτως ν' ἀποδείξωμεν ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ δύνανται νὰ παραχθῶσιν ἀπὸ τὰς δυνάμεις σταθεροῦ τινος ἀριθμοῦ ἐλάσσονος τῆς μονάδος· ἀλλὰ κατ' ἀντίστροφον τάξιν, τουτέστιν οἱ μὲν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ∞ ἀπὸ δυνάμεις ἀρνητικὰς οἱ δὲ ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 0 ἀπὸ δυνάμεις θετικάς.

§ 226. *Λογάριθμοι* τῶν ἀριθμῶν λέγονται οἱ ἐκθέται τῶν δυνάμεων, εἰς τὰς ὁποίας ὑψωθεὶς σταθερός τις ἀριθμὸς παράγει αὐτούς. Ὁ σταθερὸς ἀριθμὸς, διὰ τῶν δυνάμεων τοῦ ὁποίου σχηματίζονται ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ, λέγεται *βάσις* τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος.

Ἐπειδὴ ἡ βάσις δύναται νὰ ληφθῇ κατ' ἀρέσκειαν, ἀρκεῖ μόνον νὰ ἦναι σταθερὰ καὶ διάφορος τῆς μονάδος, ἕπεται ὅτι δυνατὸν νὰ ὑπάρξωσι διάφορα συστήματα λογαρίθμων, κατὰ τοὺς διαφόρους προσδιορισμοὺς τῆς βάσεως.

Ἀλλ' οἱονδήποτε καὶ ἂν ἦναι τὸ σύστημα τῶν λογαρίθμων, ἐπειδὴ ἔχομεν πάντοτε $\alpha^1=\alpha$, καὶ $\alpha^0=1$ συνάγομεν ὅτι,

« Ὁ λογάριθμος τῆς βάσεως εἶναι ἡ μονὰς » καὶ
« Ὁ λογάριθμος τῆς μονάδος εἶναι 0. »

Τοῦτο συντόμως ἐκφράζομεν ἀλγεβρικῶς,

$$\text{λογ. } \alpha=1, \quad \text{καὶ} \quad \text{λογ. } 1=0.$$

§ 227. Ἐὰν ἐννοήσωμεν, ὅτι ἐσχηματίσαμεν πίνακα, περιέχοντα εἰς μίαν στήλην ὅλους τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς, εἰς ἄλλην δὲ τοὺς λογαρίθμους αὐτῶν, κατὰ τάξιν ἀντιστοιχοῦντας ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς, θέλομεν λάβει ἰδέαν τῶν *πινάκων τῶν λογαρίθμων*.

Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων ἐν γένει.

§ 228. Οἱ λογάριθμοι ἔχουσιν ὠφελιμωτάτας ἰδιότητας τῶν ὁποίων ἡ παρατήρησις δὲν διέφυγε βεβαίως τὴν προσοχὴν τῶν ἀρχαίων Μαθηματικῶν· ἀλλ' εἰς μόνην τὴν ἐμβριθῆ παρατήρησιν τοῦ ἐκ τῆς Σκωτίας Νεπέρου ἀπέκειτο ἡ δόξα τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῶν διὰ τῆς ἀνακαλύψεως τῶν πινάκων τῶν λογαρίθμων. Ὁ μεγαλοφυὴς οὗτος γεωμέτρης συνέλαβε τὴν ἰδέαν ν' ἀντικαταστήσῃ τοὺς ἐν τοῖς ζητήμασιν ἀριθμοὺς δι' ἄλλων, ἐπιδεχομένων ἁπλουστέρας πράξεις. Ὡρμήθη δὲ εἰς τοῦτο ἐκ τῆς παρατηρήσεως τῆς σχέσεως, ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ὁμοταγῶν ὅρων δύο προόδων, τῆς μὲν γεωμετρικῆς ἀρχομένης ἀπὸ τοῦ 1, τῆς δὲ ἀριθμητικῆς, ἀρχομένης ἀπὸ τοῦ 0, καὶ ἐπενόησε τὸ λαμπρὸν τοῦτο σύστημα, τοῦ ὁποίου τὴν θεωρίαν ἐξέδωκε κατὰ τὸ 1614, ἐπιγραφομένην Mirifici logarithorum canonis descriptio.

Ἄς ἴδωμεν λοιπὸν τὰς ἰδιότητας, τὰς ὁποίας ἔχουσιν οἱ λογάριθμοι, καὶ ποίαν ἐφαρμογὴν τούτων δυνάμεθα νὰ κάμωμεν εἰς τὸ ἀριθμητικὸν ὑπολογισμόν.

§ 229. *Ἰδιότης Α'.* « Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου ἰσοῦται μὲ » τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων. »

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ . . . $y, y', y'', y''', \dots$

τῶν ὁποίων οἱ λογάριθμοι εἶναι . $\chi, \chi', \chi'', \chi''', \dots$

καὶ α ἡ βάσις τοῦ συστήματος.

Ἔχομεν κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 226)

$$y=\alpha^{\chi} \quad y'=\alpha^{\chi'} \quad y''=\alpha^{\chi''} \quad y'''=\alpha^{\chi'''} \dots$$

Πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλος τὰς ἐξισώσεις ταύτας συνάγομεν

$$yy'y''y''' \dots = \alpha^{\chi+\chi'+\chi''+\chi''' \dots}$$

λοιπὸν . λογ. $yy'y''y''' \dots = \chi+\chi'+\chi''+\chi''' \dots$

ἤτοι . . λογ. $yy'y''y''' \dots =$ λογ.$y+$λογ.$y'+$λογ.$y''+$λογ.y'''

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

§ 230. *Ἰδιότης Β'.* « Ὁ λογ. τοῦ πηλίκου ἰσοῦται μὲ τὴν δια» φορὰν τοῦ λογ. τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρέτου.»

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ . . . y καὶ y',

οἱ λογάριθμοι αὐτῶν . . . χ » χ',

ἔχομεν . . . . $y=\alpha^{\chi}$ » $y'=\alpha^{\chi'}$,

Διαιροῦντες κατὰ μέλος τὰς ἐξισώσεις ταύτας συνάγομεν

$$\frac{y}{y'}=\alpha^{\chi-\chi'}$$

λοιπὸν . . . . . . λογ. $\frac{y}{y'}=\chi-\chi'$

ἤτοι . . . . . . λογ. $\frac{y}{y'}=$λογ.$y-$λογ y'.

§ 231. *Ἰδιότης Γ'.* « Ὁ λογάριθμος τῆς δυνάμεως ἀριθμοῦ τινος » ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν ἐκθέ» την τῆς δυνάμεως. »

Ἐὰν ὑψώσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως . . $y=\alpha^{\chi}$

εἰς τὴν μ. δύναμιν, ἔχομεν . . . . $y^{\mu}=\alpha^{\mu\chi}$

λοιπὸν . . . . λογ.$y^{\mu}=\mu\chi$, ἤτοι λογ.$y^{\mu}=\mu$. λογ.y.

§ 232. *Ἰδιότης Δ'.* « Ὁ λογάριθμος τῆς ῥίζης ἀριθμοῦ τινος » ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διαιρε» θέντος διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης. »

Ἐξάγοντες τὴν μ ῥίζαν τῶν δύο μελῶν τῆς ἐξισώσεως $y = \alpha^{\chi}$

ἔχομεν . . . . $\sqrt[\mu]{y} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\chi}} = \alpha^{\frac{\chi}{\mu}}$

λοιπὸν . . . $\lambda o\gamma.\sqrt[\mu]{y} = \frac{\chi}{\mu}$ ἤτοι $\lambda o\gamma.\sqrt[\mu]{y} = \frac{\lambda o\gamma.\, y}{\mu}$

§ 233. *Συνέπειαι Α'*. Θέλοντες νὰ ἐκτελέσωμεν πολλαπλασιασμόν τινα, λαμβάνομεν εἰς τὸν πίνακα τοὺς λογαρίθμους τῶν παραγόντων καὶ προσθέτοντες αὐτοὺς ἔχομεν τὸν λογάριθμον τοῦ γινομένου. Ζητοῦμεν τὸν νέον τοῦτον λογάριθμον εἰς τὸν πίνακα, καὶ λαμβάνοντες τὸν ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμόν, θέλομεν ἔχει τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Οὕτω δι' ἁπλῆς προσθέσεως εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον.

Β'. Θέλοντες νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα δι' ἄλλου, ἀφαιροῦμεν τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρετέου. Ζητοῦμεν τὸν εἰς τὴν διαφορὰν τῶν λογαρίθμων ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμὸν καὶ οὗτος εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Ὥστε δι' ἁπλῆς ἀφαιρέσεως εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον.

Γ'. Ἵνα σχηματίσωμεν οἱανδήποτε δύναμιν ἀριθμοῦ τινος, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν εἰς τὸν πίνακα τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, νὰ τὸν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως καὶ νὰ ζητήσωμεν ἔπειτα τὸν ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμὸν εἰς τοῦτο τὸ γινόμενον. Ἔχομεν οὕτω τὴν ζητουμένην δύναμιν

Τοιουτοτρόπως, δι' ἁπλοῦ πολλαπλασιασμοῦ σχηματίζομεν τὴν δύναμιν.

Δ'. Ἵνα ἐξάξωμεν ῥίζαν ἀριθμοῦ τινος, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης, νὰ ζητήσωμεν εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀντιστοιχεῖ τὸ πηλίκον, καὶ ἔχομεν τὴν ῥίζαν.

Ὥστε δι' ἁπλῆς διαιρέσεως ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν.

Ἰδιότητες τῶν κοινῶν λογαρίθμων.

§ 234. Αἱ ἀνωτέρω ἀποδειχθεῖσαι ἰδιότητες, εἶναι μὲν ἀνεξάρτητοι παντὸς συστήματος λογαρίθμων, αἱ συνέπειαι ὅμως αὐτῶν, τουτέστιν ἡ ἐφαρμογὴ εἰς τὸν ἀριθμητικὸν ὑπολογισμόν, ὑποθέτουσι κατεσκευασμένον πίνακά τινα, περιέχοντα ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς καὶ εἰς τὸ πλάγιόν των τοὺς λογαρίθμους αὐτῶν, κατά τινα δεδομένην βάσιν. Ὅθεν, ἵνα σχηματίσωμεν τὸν πίνακα τοῦτον, πρέπει εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\alpha^{\chi} = y$ νὰ μεταβάλωμεν τὸ y καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς ἀριθμούς, καὶ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τοῦ χ κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ (§ 222).

ΣΗΜ. Τὴν μέθοδον ταύτην ἀνεφέρομεν μόνον, ἵνα δείξωμεν τὸ δυνατὸν τῆς κατασκευῆς τῶν λογαριθμικῶν πινάκων, ἔχομεν ὅμως ἄλλας μεθόδους πολὺ ἁπλουστέρας, δι' ὧν δοθέντος ἀριθμοῦ τινος εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ. Ἡ θεωρία τῶν μεθόδων τούτων, ὡς ἀνωτέρα τῆς στοιχειώδους ταύτης πραγματείας παραπέμπεται εἰς τὴν ὑψηλοτέραν ἀνάλυσιν.

§ 235. Οἱ ἐν χρήσει πίνακες, οἵτινες λέγονται *κοινοὶ* ἢ *πίνακες τοῦ συστήματος τοῦ Βριγγίου (Briggs)*, ἔχουσι βάσιν τὸν ἀριθμὸν 10. Ἡ δὲ κατασκευὴ αὐτῶν ἄγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως

$$10^x=y.$$

Θέτοντες ἀντὶ τοῦ y διαδοχικῶς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς φυσικῆς σειρᾶς 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... ἔχομεν νὰ ἐπιλύσωμεν τὰς ἐξισώσεις,

$$10^x=1, \quad 10^x=2, \quad 10^x=3, \quad 10^x=4, \ldots$$

Παρατηροῦμεν δέ, ὅτι ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν πρώτων ἀριθμῶν 1, 2, 3, 5, 7, 11, ... διότι ὅλοι οἱ ἄλλοι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ παράγονται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν διαφόρων τούτων παραγόντων, ὅθεν οἱ λογάριθμοι αὐτῶν δύνανται νὰ ληφθῶσι (§ 229) διὰ προσθέσεως τῶν λογαρίθμων τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

Οὕτω $\quad λογ.\ 6=λογ.2\times3=λογ.2+λογ.3$

ὡσαύτως $\quad λογ.24=λογ.2^3\times3=3λογ.2+λογ.3$

Εἰς τοὺς πίνακας τῶν λογαρίθμων ἀρκεῖ πρὸς τούτοις νὰ θέσωμεν μόνον ἀκεραίους ἀριθμούς. Ἐπειδὴ κατα τὴν Β'. Ἰδιότητα (§ 230) λαμβάνομεν τὸν λογάριθμον κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, ἀφαιροῦντες τὸν λογάριθμον τοῦ παρονομαστοῦ ἀπὸ τὸν τοῦ ἀριθμητοῦ.

§ 236. Ὑποθέτοντες ἤδη κατεσκευασμένον πίνακα λογαρίθμων, κατά τι σύστημα, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ κατασκευάσωμεν ἄλλον διαφόρου συστήματος.

Ἔστω α ἡ βάσις τοῦ κατασκευασμένου συστήματος,
β ἡ βάσις τοῦ εἰς κατασκευὴν προκειμένου,
Α ἀριθμός τις οἱοσδήποτε,
x ὁ λογάριθμος τοῦ Α, κατὰ τὸ πρῶτον σύστημα,
y ὁ λογάριθμος τοῦ Α, κατὰ τὸ δεύτερον σύστημα,

ἔχομεν $\quad α^x=Α, \quad β^y=Α.$

λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο μελῶν τῆς δευτέρας ἐξισώσεως, κατὰ τὸ σύστημα τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι α, συνάγομεν

$$λογ.β^y=λογ.Α \quad ἢ \quad y.λογ.β=λογ.Α=x$$

ὅθεν $$y=\frac{λογ.Α}{λογ.β} \quad ἢ \quad y=\frac{x}{λογ\ β}$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι « γνωρίζοντες τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ » τινος, κατά τι σύστημα, ἵνα λαβωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ αὐτοῦ » ἀριθμοῦ, κατὰ δεύτερον σύστημα, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεδο- » μένον λογάριθμον διὰ τοῦ λογαρίθμου τῆς νέας βάσεως κατὰ τὸ πρῶ- » τον σύστημα. »

Οὕτως ὁ λογάριθμος τοῦ 4, εἰς τὸ σύστημα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 3, ἰσοῦται μὲ $\frac{\lambda o\gamma\, 4}{\lambda o\gamma.3}$. Οἱ δύο λογάριθμοι, λογ.4 καὶ λογ.3, ὑποτίθενται τοῦ γνωστοῦ συστήματος τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 10.

§ 237. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ A, A′, A″, . . . καὶ α ἡ βάσις συστήματός τινος ἤδη κατεσκευασμένου. Ἔστω β ἡ βάσις τοῦ κατασκευασθησομένου, ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις

$$y=\frac{x}{\lambda o\gamma.\beta} \qquad y'=\frac{x'}{\lambda o\gamma\,\beta} \qquad y''=\frac{x''}{\lambda o\gamma\,\beta} \dots$$

ἤτοι
$$y=\frac{1}{\lambda o\gamma\,\beta}.x, \quad y'=\frac{1}{\lambda o\gamma.\beta}.x', \quad y''=\frac{1}{\lambda o\gamma\,\beta}.x'' \dots$$

Τουτέστι « Κατασκευασθέντος πίνακός τινος, ἐὰν θέλωμεν νὰ κα- » τασκευάσωμεν νέον πίνακα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς λογα- » ρίθμους τοῦ πρώτου συστήματος ἐπὶ τὴν σταθερὰν ποσότητα $\frac{1}{\lambda o\gamma\,\beta}$.

Ἡ σταθερὰ ποσότης $\frac{1}{\lambda o\gamma\,\beta}$ ἥτις χρησιμεύει πρὸς μετάβασιν ἐκ τοῦ ἑνὸς εἰς τὸ ἄλλο σύστημα, λέγεται *διαστολεύς*.

Διάταξις καὶ χρῆσις τῶν κοινῶν πινάκων.

§ 238 Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $10^{\chi}=y$

θέσωμεν . $\chi = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \dots \nu-1\ \ \nu.$

θέλομεν λάβει $y = 1, 10,\ 100,\ 1000,\ 10000, \dots 10^{\nu-1}\ \ 10^{\nu},$

ἐὰν δὲ . . $\chi = 0, -1, -2,\ -3,\ -4, \dots -[\nu-1], -\nu,$

ἔχομεν . . $y = 1, \frac{1}{10}, \frac{10}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \dots \frac{1}{10^{\nu-1}}, \frac{1}{10^{\nu}}$

Ἐκ τούτου συνάγομεν

α′. Οἱ λογάριθμοι ὅλων τῶν μεγαλητέρων τῆς μονάδος ἀριθμῶν εἶναι θετικοὶ καὶ αὐξάνουσιν ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ ἀπείρου.

β′. Οἱ λογάριθμοι ὅλων τῶν μικροτέρων τῆς μονάδος ἀριθμῶν εἶ-
ναι ἀρνητικοί, καὶ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ αὐτῶν εἶναι τοσοῦτον μεγαλητέρα
ὅσον τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερον. Ὥστε ὁ λογάριθμος τοῦ μικροτέ-
ρου πάσης δεδομένης ποσότητος κλάσματος εἶναι ἀρνητικὸς καὶ ἡ

ἀπόλυτος τιμὴ αὐτοῦ εἶναι ἄπειρος, τοῦτο ἐκφράζεται ἀλγεβρικῶς, λογ.$0 = -\infty$.

γ΄. Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουσι πραγματικοὺς λογαρίθμους. Ἐπειδὴ ἐὰν διατρέξωμεν τὴν σειρὰν ὅλων τῶν τιμῶν τοῦ χ. ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$, δὲν θέλομεν εὕρει διὰ τὸ y, εἰμὴ θετικοὺς ἀριθμούς, ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$.

§ 239. Προκύπτει ἐκ τῆς φύσεως αὐτῆς τῆς ἐκθετικῆς ἐξισώσεως ὅτι μόνον αἱ τέλειαι δυνάμεις τοῦ 10 ἔχουσι συμμετρικοὺς λογαρίθμους.

ἀριθμοὶ .	1,	10,	100,	1000,	1000,	100000,	...
λογάριθμοι	0,	1,	2 ~~1~~,	3,	4,	5,	...

Ὅλοι δὲ οἱ λοιποὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἔχουσιν ἀσυμμέτρους λογαρίθμους, τοὺς ὁποίους δυνάμεθα νὰ λάβωμεν διὰ προσεγγίσεως.

Οἱ πίνακες τοῦ Καλλέτου, τοὺς ὁποίους ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν ὑπ' ὄψιν, δίδουσι τοὺς λογαρίθμους τούτους ἀκριβῶς μέχρι τοῦ ἑβδόμου δεκαδικοῦ ψηφίου περιληπτικῶς.

Ἐπειδὴ δὲ πᾶς ἀκέραιος ἀριθμός, ἐκτὸς τῶν τελείων δυνάμεων τοῦ 10, συγκείμενος ἐξ ἑνός, δύο τριῶν, καὶ ἐν γένει ν ψηφίων, περιλαμβάνεται μεταξὺ 1 καὶ 10, 10 καὶ 100, 100 καὶ 1000, καὶ ἐν γένει μεταξὺ $10^{\nu-1}$ καὶ 10^{ν}, ἕπεται ὅτι ὁ λογάριθμος αὐτοῦ συνίσταται ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος. Οὕτως ὅλοι οἱ ἀριθμοί.

μεταξὺ				ἔχουσι λογαρίθμους
1	καὶ	10	οἱ μονοψήφιοι . . .	0 + κλάσμα τι
10	καὶ	100	οἱ διψήφιοι	1 + »
100	καὶ	1000	οἱ τριψήφιοι	2 + »
1000	καὶ	10000	οἱ τετραψήφιοι . . .	3 + » κτλ.

ἕπεται ὅτι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου περιέχει τοσαύτας μονάδας μεῖον μιᾶς, ὅσα ψηφία ἔχει ὁ ἀριθμός.

Π. χ. Τοῦ ἀριθμοῦ 285 περιλαμβανομένου μεταξὺ 100 καὶ 1000 ὁ λογάριθμος ἔχει ἀκέραιον μέρος 2.

Ὡσαύτως τὰ ἀκέραια μέρη τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν

	8,	15,	356,	6744,
εἶναι	0,	1,	2,	3,

Τὸ ἀκέραιον μέρος λογαρίθμου τινὸς ὀνομάζεται *χαρακτηριστικόν*, διότι δι' αὐτοῦ διακρίνομεν ἀμέσως ἐκ πόσων ψηφίων σύγκειται ὁ ἀντίστοιχος τοῦ λογαρίθμου ἀριθμός.

Π. χ. Ὁ λογάριθμος 2,74036 ἀντιστοιχεῖ εἰς ἀριθμὸν τριψήφιον.

§ 240. Γνωστοῦ ὄντος τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ τινος οἱουδήποτε, λαμβάνομεν εὐκόλως τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ δεκαπλασίου, ἑκατονταπλασίου, χιλιοπλασίου, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν 1, 2, 3 . . . εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ.

Τῷ ὄντι ἔστω ἀριθμός τις α, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὸν λογάριθμον, ἔχομεν (§ 229 καὶ 231).

$$\lambda o\gamma.(\alpha \times 10^{\nu}) = \lambda o\gamma.\,\alpha + \lambda o\gamma.\,10^{\nu} = \lambda o\gamma\;\alpha + \nu.$$

§ 241. Γνωστοῦ ὄντος τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ τινος λαμβάνομεν ἀμέσως τὸν λογάριθμον τοῦ ὑποδεκαπλασίου, ὑφεκατονταπλασίου,... ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν 1, 2, 3 . . . μονάδας.

Τῷ ὄντι ἔχομεν (§ 230 καὶ 231).

$$\lambda o\gamma.\frac{\alpha}{10^{\nu}} = \lambda o\gamma.\,\alpha - \lambda o\gamma.\,10^{\nu} = \lambda o\gamma.\,\alpha - \nu.$$

Συνέπεια. Ἐκ τούτου ἔπεται, ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν

$$2185 \left\{ \begin{array}{lll} 21850, & 218500, & 2185000, \\ 218,5. & 21,85. & 2,185. \end{array} \right.$$

δὲν διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων, εἰμὴ κατὰ τὸ χαρακτηριστικόν.

Ἐν γένει « Οἱ λογάριθμοι τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων εἶναι, ἐκτὸς » τοῦ χαρακτηριστικοῦ, οἱ αὐτοὶ μὲ τοὺς τῶν ἀριθμῶν τοὺς ὁποίους » λαμβάνομεν ἐξαλείφοντες τὴν ὑποστιγμήν. »

Ἡ ὠφέλιμος αὕτη ἰδιότης ἀνήκει εἰς τὸ σύστημα τῶν λογαρίθμων τοῦ Βριγγίου, τοῦ ὁποίου δηλαδὴ ἡ βάσις εἶναι 10, καὶ ἀποκαθιστᾷ αὐτὸ προκριτώτερον παντὸς ἄλλου συστήματος.

§ 242. Ἐπειδὴ εἶναι ἀδύνατον νὰ τεθῶσιν εἰς τοὺς πίνακας οἱ λογάριθμοι ὅλων τῶν ἀριθμῶν, ἐτέθησαν μόνον οἱ λογάριθμοι τῶν ἀκεραίων μέχρις ὁρίου τινός. Οὕτως ἄλλοι μὲν πίνακες φθάνουσι μέχρι 10000, ἄλλοι μέχρι 20000, καὶ οἱ πληρέστεροι, οἱ τοῦ Καλλέτου μέχρι 108000.

Ἀλλ' ἡ ἐφαρμογὴ τῶν λογαρίθμων εἰς τοὺς ἀριθμητικοὺς ὑπολογισμοὺς ἀπαιτεῖ πολλάκις τὴν εὕρεσιν λογαρίθμων ἀριθμῶν ὑπερβαινόντων τὰ τῶν πινάκων ὅρια, ἢ ἀριθμῶν κλασματικῶν. Ὅθεν ἀναπόφευκτος εἶναι ἡ λύσις τῶν δύο τούτων ζητημάτων.

Α'. Δοθέντος ἀριθμοῦ τινος νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ.

Β'. Δοθέντος λογαρίθμου τινὸς νὰ εὕρωμεν τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμόν.

§ 243. Ζήτημα Α'. Δοθέντος ἀριθμοῦ τινος Α, νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ.

Εἰς τὸ ζήτημα τοῦτο ἀπαντῶνται τρεῖς περιπτώσεις.

ά. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς εὑρίσκεται εἰς τὸν πίνακα,
β'. Ὅταν ὑπερβαίνῃ τὰ ὅρια τοῦ πίνακος,
γ'. Ὅταν ἦναι κλασματικός.

ά. Περίπτωσις.

Ζητοῦμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τὴν στήλην τοῦ πίνακος, ἥτις ἔχει ἐπὶ κεφαλῆς τὸ γράμμα N. καὶ ἀμέσως εἰς τὸ πλάγιον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου εὑρίσκομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου· προσθέτομεν ἔπειτα καὶ τὸ χαρακτηριστικόν, τὸ ὁποῖον ἐκ πρώτης ὄψεως γνωρίζομεν.

ΣΗΜ. Τὰ τρία πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία, ὄντα κοινὰ εἰς πολλοὺς λογαρίθμους, γράφονται ἅπαξ εἰς τοὺς πίνακας, καὶ ὑπ' αὐτὰ ἀφίνεται κενὸς ὁ τόπος. Οὕτω π. χ. εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3456 κεῖνται τὰ ψηφία 5737 καὶ πρὸ αὐτῶν παρατηρεῖται τόπος κενός, ὅπου ἐννοεῖται, ὅτι ἐπαναλαμβάνονται τὰ ἀνωτέρω ψηφία 538, ὥστε ὁλόκληρον τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου εἶναι 5385737, προτάσσοντες δὲ καὶ τὸ χαρακτηριστικὸν 3 ἔχομεν

$$\lambda o \gamma .5737 = 3{,}538737.$$

Ἐπέκεινα τοῦ ἀριθμοῦ 108000 οἱ πίνακες τοῦ Καλλέτου, διὰ τὸ περιεκτικώτερον, εἶναι διατεταγμένοι κατά τινα μέθοδον, τὴν λεπτομερῆ ἀνάπτυξιν τῆς ὁποίας εὑρίσκει τις εἰς τὴν εισαγωγὴν τῶν αὐτῶν πινάκων.

β'. Περίπτωσις.

§ 244. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 34735879.

Χωρίζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοσαῦτα ψηφία, ὥστε τὸ πρὸς τ' ἀριστερὰ μέρος νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸ ὅριον τοῦ πίνακος, τὸν ὁποῖον ἔχομεν ὑπ' ὄψιν. Κατὰ τοὺς πίνακας τοῦ Καλλέτου, πρέπει νὰ χωρίσωμεν τρία ψηφία. Ἔχομεν οὕτω νέον ἀριθμόν.

$$N' = 34735{,}879.$$

ὁ λογάριθμος τούτου ἔχει τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ ὁ προτεθεὶς N. (§ 241).

Διὰ τῆς προπαρασκευῆς ταύτης ἔχομεν ἀριθμὸν περιλαμβανόμενον μεταξὺ 34735 καὶ 34736· ἑπομένως ὁ λογάριθμος τοῦ N' ἰσοῦται μὲ τὸν λαγάριθμον τοῦ 34735 πλέον μέρος τι τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν 34735 καὶ 34736.

Εὑρίσκομεν εἰς τὸν πίνακα τὸν λογάριθμον τοῦ μικροτέρου τούτων, λογ.34735=5407673 (ἐκτὸς τοῦ χαρακτηριστικοῦ, τὸ ὁποῖον, ὡς γνωστὸν παραλείπεται).

Ἵνα εὕρωμεν καὶ τὸ μέρος τῆς διαφορᾶς τῶν λογαρίθμων, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ προσθέσωμεν, παρατηροῦμεν ὅτι, εἰς τὴν τελευταίαν πρὸς τὰ δεξιὰ στήλην, οἱ πίνακες περιέχουσι τὰς διαφορὰς τῶν λογαρίθμων τῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν. Εὑρίσκομεν λοιπὸν, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν 34735 καὶ 34736 εἶναι 125 μονάδες τῆς τελευταίας τάξεως, δηλαδὴ τοῦ ἑβδόμου δεκαδικοῦ ψηφίου. Ὅθεν συσταίνομεν τὴν ἀναλογίαν ταύτην.

Ἐὰν διὰ τὴν διαφορὰν 1, μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν, ἔχωμεν διαφορὰν 125. μεταξὺ τῶν λογαρίθμων αὐτῶν, διὰ τὴν διαφορὰν 0,879, μεταξὺ τῶν 34735 καὶ 34735,879, πόσην διαφορὰν θέλομεν ἔχει μεταξὺ τῶν λογαρίθμων;

Τουτέστι $1 : 125 :: 0,879 : \chi = 125 \times 0,879 = 109,875$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο, ἢ μᾶλλον 110 μονάδες τῆς ἑβδόμης τάξεως τῶν δεκαδικῶν ψηφίων, ἐκφράζει τὴν ποσότητα, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ ἤδη εὑρεθὲν μέρος 5407673 καὶ οὕτως ἔχομεν 5407783. Λοιπὸν ὁ λογαριθμος τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ εἶναι 7,5407783.

Διάταξις τῆς πράξεως.

α'. Παράδειγμα.

Ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς			34735879
χωρίζομεν τρία ψηφία			34735,879
			λογ.34735= 5407673
διαφορὰ τοῦ πίνακος	125		
διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν	0,879		
γινόμενον	109,875	προσθέτομεν	110
			λογ.34735879=7,5407783

β'. Παράδειγμα.

Ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς			7654639
χωρίζομεν δύο ψηφία			76546,39
			λογ.76546=8484355
διαφορὰ τοῦ πίνακος	63		
διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν	0,39		
γινόμενον	24,18	προσθέτομεν	24
			λογ.7654639=6,848379

ΣΗΜ. Πρὸς λύσιν τοῦ ἀνωτέρω ζητήματος ἀναγκαζόμεθα νὰ συστήσωμεν ἀναλογίαν μεταξὺ τῶν διαφορῶν τῶν ἀριθμῶν, καὶ τῶν διαφορῶν τῶν λογαριθμων αὐτῶν. Ἡ ἀναλογία αὕτη δὲν εἶναι ἀκριβὴς, ἀλλὰ πλησιάζει τοσοῦτον εἰς τὴν ἀκρίβειαν, καθόσον οἱ ἀριθμοὶ εἶναι μεγαλήτεροι. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον, ὅταν ἀριθμός τις ὑπερβαίνῃ τὰ ὅρια τοῦ πίνακος, πρέπει νὰ χωρίζωμεν, πρὸς τὰ δεξιὰ, ὅσον τὸ δυνατὸν ὀλιγώτερα ψηφία.

γ'. Περίπτωσις.

§ 245. Ἐὰν ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς συνίσταται ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος, ἄγεται κατὰ πρῶτον εἰς καταχρηστικὸν κλάσμα, καὶ ἔπειτα ἀφαιρεῖται ὁ λογάριθμος τοῦ παρονομαστοῦ ἀπὸ τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμητοῦ.

Ἔστω $N=359\frac{27}{43}=\frac{15464}{43}$

ἔχομεν $λογ.359\frac{27}{43}=λογ.15464-λογ.43,$

$=4,1893218-1,6334685,$

$=2,5558533.$

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἦναι κλάσμα, ὁ λογάριθμος αὐτοῦ εἶναι ἀρνητικός. Λαμβάνομεν δὲ αὐτόν, ἀφαιροῦντες τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμητοῦ ἀπὸ τὸν τοῦ παρονομαστοῦ καὶ δίδοντες εἰς τὸ ἐξαγόμενον τὸ σημεῖον —.

Οὕτω $λογ.\frac{7}{9}=λογ.7-λογ.9=-(λογ.9-λογ.7)$

$=-0,10914447.$

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς εἶναι δεκαδικὸν κλάσμα, ἐξαλείφομεν κατὰ πρῶτον τὴν ὑποστιγμήν. λαμβάνομεν ἔπειτα τὸν λογάριθμον τοῦ νέου ἀριθμοῦ, καὶ ἀφαιροῦμεν ἐξ αὐτοῦ τοσαύτας μονάδας, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχει.

Παραδείγματα.

$λογ.75,47325=λογ.7547325-5=1,8777931.$

$λογ.\ 0,0739=λογ.\ 739-4=-(4-λογ.\ 739)=-1,1313556$

$λογ.0,004734=λογ.4734-6=-(6-λογ.4374)=-2,3477327$

§ 246. Ζήτημα Β'. Δοθέντος λογαρίθμου τινὸς Λ, νὰ εὕρωμεν τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμόν.

Δύο ἀρχικαὶ περιπτώσεις ἀπαντῶνται εἰς τὸ ζήτημα τοῦτο· ἢ ὁ δοθεὶς λογάριθμος εἶναι θετικός, ἢ εἶναι ἀρνητικός, εἰς ἑκατέραν δὲ τούτων ἀπαντῶνται ἄλλαι μερικώτεραι.

α'. Περίπτωσις.

I. Ὁ δοθεὶς λογάριθμος Λ εἶναι θετικὸς καὶ τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ 4, τουτέστι τὸ μέγιστον χαρακτηριστικὸν τῶν πινάκων.

Ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον τοῦτον μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν πενταψηφίων ἀριθμῶν, καὶ ἐὰν μὲν εὑρίσκεται εἰς τὸν πίνακα, λαμβάνομεν ἀμέσως εἰς τὸ πλάγιον τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμόν.

Ἐὰν δὲ περιλαμβάνηται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν λογαρίθμων, λαμβάνομεν τὸν εἰς τὸν μικρότερον τῶν δύο λογαρίθμων ἀντιστοίχοῦντα ἀριθμὸν, καὶ προσθέτομεν εἰς αὐτὸν κλάσμα τι, τὸ ὁποῖον προσδιορίζομεν ὡς ἔγγιστα, διὰ τῆς ἑπομένης μεθόδου.

Ἄς σημειωθῶσι διὰ λογ. Α καὶ λογ. (Α+1) οἱ δύο διαδοχικοὶ λογάριθμοι, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται ὁ δοθεὶς Λ.

Ἔστω δ ἡ μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν λογαρίθμων διαφορὰ, ἥτις σημειοῦται εἰς τοὺς πίνακας.

Ἔστω δ' ἡ μεταξὺ τοῦ Λ καὶ τοῦ λογ. Α διαφορά.

Ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $\delta : \delta' :: 1 : \chi = \frac{\delta'}{\delta}$

Τουτέστι « Πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ δο-
» θέντος λογαρίθμου καὶ τοῦ μικροτέρου τῶν ὁρίων, διὰ τῆς διαφορᾶς
» τῶν πινάκων. »

Παράδειγμα.

Ἔστω ὁ λογάριθμος 4,7325679=λογ. Χ,
εὑρίσκομεν εἰς τὸν πίνακα,ὅτι περιέχεται μεταξὺ λογ.Α καὶ λογ.(Α+1)

	N	L	D	
Α	54621	7325626		
	X	7325679	81	$\delta=81,\ \delta'=53.$
Α+1 ..	54622	7325767		

Ὅθεν $\frac{\delta'}{\delta}=\frac{53}{81}=0,65$

λοιπὸν Χ=54621,65.

Εὑρίσκομεν παρομοίως ὅτι 4,0794685=λογ. 12007,74.

II. Ὁ δοθεὶς λογάριθμος εἶναι θετικὸς καὶ τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ μικρότερον τοῦ 4, τουτέστι τοῦ μεγίστου χαρακτηριστικοῦ τῶν πινάκων.

Ἐὰν ὁ λογάριθμος εὑρίσκεται ὁλόκληρος εἰς τὸν πίνακα, λαμβάνομεν ἀμέσως τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμόν.

Ἐὰν δὲν εὑρίσκεται ὁλόκληρος ἀποκαθιστῶμεν ἐν πρώτοις τὸ χαρακτηριστικὸν ἴσον μὲ 4, διὰ τῆς προσθέσεως ἱκανοῦ ἀριθμοῦ μονάδων, (διότι ὅσον μεγαλήτεροι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ, τοσοῦτον ἀκριβεστέρα ἀποβαίνει καὶ ἡ μεταξὺ τῶν διαφορῶν τῶν λογαρίθμων ἀναλογία).

Ζητοῦμεν τὸν εἰς τὸν νέον τοῦτον λογάριθμον ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμὸν, κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσαν μέθοδον.

Διαιροῦμεν τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ 10, 100, 1000 ... κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τὰς ὁποίας ἐπροσθέσαμεν εἰς τὸ χαρακτηριστικόν.

Ἔστω ὁ λογάριθμος . .	2,4567398
προσθέτοντες	2
ἔχομεν	4,4567398=λογ.28624,63
λοιπὸν	2,4567398=λογ.286,2473
Εὑρίσκομεν παρομοίως . . .	0,3472586=λογ.2,224634

III. Ὁ δοθεὶς λογάριθμος εἶναι θετικὸς καὶ τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ μεῖζον τοῦ 4, τουτέστι τοῦ μεγίστου τῶν πινάκων.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν ἱκανὰς μονάδας, ὥστε νὰ καταστήσωμεν αὐτὸ ἴσον μὲ 4.

Εὑρίσκομεν τὸν εἰς τὸν νέον τοῦτον λογάριθμον ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμὸν, ὡς ἀνωτέρω.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀφαιρεθεισῶν μονάδων.

Ἔστω ὁ λογάριθμος . .	7,6840567
ἀφαιροῦντες	3
ἔχομεν	4,6840567=λογ.48312,19
λοιπὸν	7,6840567=λογ.48312190.

ΣΗΜ. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὁ εὑρισκόμενος ἀριθμὸς εἶναι μεῖον δεκάδος. Οἱ πίνακες δὲν δίδουσι μεγαλητέραν προσέγγισιν.

β'. Περίπτωσις.

§ 247. Ὁ δοθεὶς λογάριθμος εἶναι ἀρνητικός.

Εἶναι φανερὸν (§ 237) ὅτι ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς εἶναι κλάσμα, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς ἕπεται διὰ μεγίστου βαθμοῦ προσεγγίσεως.

Ἔστω ὁ λογάριθμος —2,4537875.

Ἐπειδὴ ὁ λογάριθμος οὗτος περιλαμβάνεται μετὰ —2 καὶ —3, ἕπεται ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς περιλαμβάνεται μεταξὺ 0,01 καὶ 0,001.

Ἵνα εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον προσθέτομεν εἰς τὸν λογάριθμον τοσαύτας μονάδας, ὥστε νὰ καταστήσωμεν τὸ χαρακτηριστικὸν 4, τουτέστιν 7 μονάδας· ἢ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, ἀφαιροῦμεν τὸν λογάριθμον ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 70000000, καὶ λαμβάνομεν τὸν εἰς τὴν διαφορὰν ἀντίστοιχον ἀριθμὸν,

$$+7-2,4537875=4,5462125=\text{λογ}.35173,25.$$

Ἐπειδὴ δὲ διὰ τῆς προσθέσεως τῶν 7 μονάδων εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν ἐπολλαπλασιάσθη ὁ ἀριθμὸς ἐπὶ 10000000 πρέπει ἵνα λάβωμεν τὴν ἀληθῆ τιμὴν τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ, νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἤδη εὑρεθέντα 35173,25 διὰ 10000000. Ὅθεν ἔχομεν

$$-2,4537875=\text{λογ}.0,003517325.$$

Ἐπειδὴ $\chi < 1$, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 10^{ν}.

$$10^{\nu}\times\chi=10^{\nu}\times\sqrt[7]{\left(\frac{7}{11}\right)^3}$$

$$\lambda o\gamma.(10^{\nu}\times\chi)=\nu+\frac{3\lambda o\gamma.7-3\lambda o\gamma\,11}{7}$$
$$=\frac{7\nu+3\lambda o\gamma.7-3\lambda o\gamma\,11}{7}$$

$$3\ \lambda o\gamma.7=5352941,\quad 3\ \lambda o\gamma.11=3{,}1241781,$$

βλέπομεν ὅτι ἵνα ἐκτελεσθῇ ἡ ἀφαίρεσις, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν $\nu=1$, ὅθεν $7\nu=7$.

$$7+3\lambda o\gamma.7=9{,}5352941$$
$$3\lambda o\gamma.11=3{,}1241781$$
$$6{,}4111160$$

$$\lambda o\gamma.10\chi=\frac{6{,}4111160}{7}=0{,}9175023$$

$$10\chi=8{,}26613,\qquad \chi=0{,}826613.$$

§ 251. Ἐπειδὴ ἡ χρῆσις τῶν λογαρίθμων εἶναι κατ' ἐξοχὴν ἀναγκαία εἰς τὴν λύσιν τῶν εἰς τὰς γεωμετρικὰς προόδους ἀναφερομένων ζητημάτων· ἂς λάβωμέν τινας ἐκ τῶν τύπων τοῦ εἰς τὸν (§ 219) ἐκτεθέντος πίνακος.

Τύπος τοῦ γενικοῦ ὅρου . . . . . $\lambda=\alpha\pi^{\nu-1}$

λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους . . $\lambda o\gamma.\lambda=\lambda o\gamma.\alpha+(\nu-1)\lambda o\gamma.\pi$

Προτεθείσθω νὰ εὕρωμεν τὸν εἰκοστὸν ὅρον τῆς προόδου

$$\div\ 1:\frac{3}{2}:\frac{9}{4}:\frac{27}{3}\ \ldots\ldots$$

Ἐπειδὴ . . . . $\alpha=1,\quad \pi=\frac{3}{2},\quad \nu=20$

ἔχομεν . . . . $\lambda o\gamma.\lambda=\lambda o\gamma.1+19(\lambda o\gamma.3-\lambda o\gamma.2$

ἤτοι . . . . $\lambda o\gamma.\lambda=19(\lambda o\gamma\,3-\lambda o\gamma.2)$.

Εὑρίσκομεν δὲ ὅτι . . . . . . $\lambda o\gamma.3=0{,}47712125$

$$\lambda o\gamma.2=0{,}30103000$$
$$0{,}17609125$$
$$19$$
$$\lambda o\gamma.\lambda=3{,}34573375$$
$$\lambda=2216{,}84$$

Τύπος τοῦ λόγου . . . . . . $\pi=\sqrt[\nu-1]{\frac{\lambda}{\alpha}}$

ἔχομεν . . . . $λογ.π=\frac{λογ.λ-λογ.α}{ν-1}$,

Τύπος τοῦ ἀθροίσματος . . $A=\frac{α(π^ν-1)}{π-1}$,

ἔχομεν . . . $λογ.A=λογ.α+λογ.(π^ν-1)λογ.(π-1)$.

Ἡ περίπτωσις ὅμως, καθ' ἣν εἶναι ἀναπόφευκτοι οἱ λογάριθμοι, εἶναι, ὅταν πρόκειται νὰ προσδιορισθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου· διότι τὸ ζήτημα τότε ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐκθετικῆς ἐξισώσεως $λ=απ^{ν-1}$, εἰς τὴν ὁποίαν ἄγνωστος εἶναι ὁ ἐκθέτης $ν$.

Ὅθεν λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο μελῶν ἔχομεν

$$λογ.λ=λογ.α+(ν-1)λογ.π.$$

ἐκ ταύτης δὲ συνάγομεν $ν=1+\frac{λογ.λ-λογ.α}{λογ.π}$.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ὅρων τῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 3, ὁ λόγος 2 καὶ ὁ τελευταῖος 6144.

Ἔχομεν . . . $ν=1+\frac{λογ.6144-λογ.3}{λογ.2}$.

$$ν=1+\frac{3,7884512-0,4771212}{0,3010300}$$

$$ν=1+\frac{3113300}{0,3010300}=1+11=12.$$

Καὶ τῷ ὄντι ἡ πρόοδος εἶναι,

$\div\!\div$ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384 : 768 : 1536 : 3072 : 6144.

Ζητήματα ἐξαρτώμενα ἐκ τῶν Γεωμετρικῶν προόδων.

Α΄. Περὶ ἀνατοκισμοῦ.

§ 252. Μεταξὺ τῶν ζητημάτων, τὰ ὁποῖα ἐξαρτῶνται ἐκ τῶν γεωμετρικῶν προόδων ἀναγκαιότερα εἶναι, διὰ τὴν κοινὴν αὐτῶν χρῆσιν, τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὸν ἀνατοκισμόν. Περὶ τούτων λοιπὸν θέλομεν ἐνασχοληθῇ κατὰ πρῶτον.

Τόκος *ἁπλοῦς* λέγεται ὁ ἐπὶ τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου μόνον ὑπολογιζόμενος· *σύνθετος* δὲ τόκος, ὁ ὑπολογιζόμενος καθ' ἕκαστον ἔτος ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ κεφαλαίου τοῦ προηγηθέντος ἔτους καὶ τοῦ τόκου αὐτοῦ. Ὁ δεύτερος οὗτος τρόπος τοῦ τοκίζειν λέγεται *ἀνατοκισμός*.

ΣΗΜ. Οἱ τόκοι συγκεφαλαιοῦνται συνήθως κατ' ἔτος· δυνατὸν ὅμως νὰ συμφωνηθῇ ἡ συγκεφαλαίωσις αὐτῶν καὶ κατ' ἄλλην χρονικὴν περίοδον, ὡς καθ' ἑξαμηνίαν ἢ κατὰ μῆνα.

Πρῶτον γενικὸν ζήτημα.

§ 253. Ζητεῖται, πόσον θέλει γίνει, μετά τινα δεδομένον χρόνον, κεφάλαιόν τι ἀνατοκιζόμενον, κατά τι δεδομένον ἐπιτόκιον.

Λύσις. Ἔστω α, τὸ δανεισθὲν κεφάλαιον,
ε, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν,
τ, ὁ τόκος τῆς μονάδος κατ' ἔτος.

Εἶναι φανερὸν, ὅτι τὸ κεφάλαιον α μετὰ ἓν ἔτος πρέπει νὰ φέρῃ τόκον ατ. Εἰς τὸ τέλος λοιπὸν τοῦ πρώτου ἔτους τὸ κεφάλαιον α θέλει γίνει μετὰ τοῦ τόκου αὐτοῦ.

$$α+ατ=α(1+τ)$$

Ἔστω . . . . . . $α(1+τ)=α'$,

Τὸ νέον τοῦτο κεφάλαιον α θέλει γίνει εἰς τὸ τέλος τοῦ β'. ἔτους $α'+α'τ=α'(1+τ)=α(1+τ)^2$,

Ἔστω . . . . . . $α(1+τ)^2=α''$.

Τὸ κεφάλαιον α'' θέλει γίνει εἰς τὸ τέλος τοῦ γ'. ἔτους . . $α''+α''τ=α''(1+τ)=α(1+τ)^3$,

Εἰς τὸ τέλος τοῦ δ'. ἔτους . . . . $α(1+τ)^4$,

.. ..

Καὶ ἐν γένει εἰς τὸ τέλος τῶν ε ἐτῶν . . . . . $α(1+τ)^ε$.

Σημειοῦντες δι' Α τὴν ζητουμένην ταύτην τιμὴν ἔχομεν

$$Α=α(1+τ)^ε \quad . . . . \quad (1)$$

Οὗτος εἶναι ὁ τύπος τοῦ ἀνατοκισμοῦ.

λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἔχομεν,

$$λογ.Α=λογ.α+ε.λογ.(1+τ) \quad . . . . . \quad (α)$$

§ 254. Ὁ τύπος τοῦ ἀνατοκισμοῦ $Α=α(1+τ)^ε$, περιλαμβάνων τέσσαρας ποσότητας Α, α, τ, ε, δίδει τὴν τιμὴν μιᾶς τούτων ὅταν αἱ λοιπαὶ τρεῖς ἦναι γνωσταί· ὅθεν δι' αὐτοῦ λύονται τέσσαρα διάφορα γενικὰ προβλήματα τὰ ἑξῆς.

	Διδόμενα	Ζητούμενα
1.	α, τ, ε,	Α,
2.	Α, τ, ε,	α,
3.	Α, α, ε,	τ,
4.	Α, α, τ,	ε,

§ 255. Πρόβλημα Α'. Δοθέντος τοῦ κεφαλαίου α, τοῦ τόκου τῆς μονάδος τ (ἤτοι τὸ ἑκατοστὸν τοῦ ἐν χρήσει ἐπιτοκίου) καὶ τοῦ χρόνου ε, νὰ εὕρωμεν Α, τουτέστι τὸ ἄθροισμα τοῦ κεφαλαίου καὶ τῶν τόκων.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐλύσαμεν ἤδη (§ 253) διὰ τοῦ τύπου

$$\mathrm{A}=\alpha(1+\tau)^{\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ἢ διὰ τοῦ ... $\lambda o\gamma.\mathrm{A}=\lambda o\gamma.\alpha+\varepsilon.\lambda o\gamma.(1+\tau)$ ..... (α)

Πρόβλημα Β΄. Νὰ προσδιορίσωμεν τὸ κεφάλαιον α, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ καταθέσωμεν εἰς ἀνατοκισμὸν, διὰ νὰ λάβωμεν μετὰ ε ἔτη, ὡρισμένον τι ἄθροισμα Α, ὑπολογιζομένου τοῦ ἐπιτοκίου πρὸς τ ἐπὶ ἑνί.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως .. $\lambda o\gamma.\mathrm{A}=\lambda o\gamma.\alpha+\varepsilon\,\lambda o\gamma.(1+\tau)$ ... (α)

λαμβάνομεν ..... $\lambda o\gamma.\alpha=\lambda o\gamma.\mathrm{A}-\varepsilon.\lambda o\gamma.(1+\tau)$ ... (β)

Τὸ δεύτερον τοῦτο πρόβλημα εἶναι τῆς *Συνθέτου Ὑφαιρέσεως·* διότι δι' αὐτοῦ ζητοῦμεν τὴν παροῦσαν τιμὴν τῆς ποσότητος Α πληρωτέας μετὰ ε ἔτη, κατ' ἀνατοκισμὸν, ἐπὶ γνωστῷ ἐπιτοκίῳ τ.

Πρόβλημα Γ΄. Νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ἐπιτόκιον, κατὰ τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ δανεισθὲν κεφάλαιον α, ἵνα λάβωμεν μετὰ ε ἔτη τὴν ποσότητα Α.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως .. $\lambda o\gamma.\mathrm{A}=\lambda o\gamma\,\alpha+\varepsilon.\lambda o\gamma.(1+\tau)$ ... (α)

λαμβάνομεν ...... $\lambda o\gamma.(1+\tau)=\dfrac{\lambda o\gamma.\mathrm{A}-\lambda o\gamma\,\alpha}{\varepsilon}$ .... (γ)

Διὰ τοῦ τύπου τούτου προσδιορίζομεν τὸν λογάριθμον τοῦ 1+τ, καὶ ἑπομένως τὸν ἀριθμὸν 1+τ. Εὑρεθέντος δὲ τούτου, λαμβάνομεν εὐκόλως τὴν τιμὴν τοῦ τ καὶ ἑπομένως τὴν τοῦ 100τ, τουτέστι τοῦ ἐπιτοκίου.

Πρόβλημα Δ΄. Νὰ προσδιορίσωμεν τὸν χρόνον μετὰ τὸν ὁποῖον τὸ κεφάλαιον α ἀνατοκιζόμενον πρὸς τ ἐπὶ 1, δίδει τὴν ποσότητα Α.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως .. $\lambda o\gamma.\mathrm{A}=\lambda o\gamma\,\alpha+\varepsilon.\lambda o\gamma.(1+\tau)$ ... (α)

λαμβάνομεν ..... $\varepsilon=\dfrac{\lambda o\gamma\,\mathrm{A}-\lambda o\gamma\,\alpha}{\lambda o\gamma\,(1+\tau)}$ .... (δ)

§ 255 Ἐκ τοῦ τελευταίου τούτου τύπου λαμβάνομεν νέον τύπον, δι' οὗ λύομεν τὸ ἑξῆς Πρόβλημα.

Πρόβλημα Ε΄. Ζητεῖται μετὰ πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι α, ἀνατοκιζόμενον ἐπὶ γνωστῷ ἐπιτοκίῳ τ, διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται καὶ ἐν γένει ἀποβαίνει γνωστόν τι πολλαπλάσιον.

Ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν εἰς τὸν τύπον (δ) $\mathrm{A}=2\alpha,\ 3\alpha,\ \ldots\ldots\ \pi\alpha.$

Θεωροῦντες τὸ πρόβλημα ὑπὸ γενικὴν ἔποψιν καὶ θέτοντες

$$\mathrm{A}=\pi\alpha \quad \text{καὶ ἑπομένως} \quad \lambda o\gamma.\mathrm{A}=\lambda o\gamma\,\pi+\lambda o\gamma\,\alpha,$$

ὁ τύπος (δ) ἄγεται εἰς $\varepsilon=\dfrac{\lambda o\gamma\,\pi+\lambda o\gamma\,\alpha-\lambda o\gamma\,\alpha}{\lambda o\gamma.(1+\tau)}$ ἤτοι $=\dfrac{\lambda o\gamma.\pi}{\lambda o\gamma\,(1+\tau)}$ (ε)

'Εφαρμογαί.

§ 256. Α'. Ζητεῖται πόσον θέλει γίνει τὸ κεφάλαιον 30000 δραχμῶν, δανεισθὲν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 5 τοῖς 100, μετὰ 30 ἔτη.

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (α)

$$α=30000,\ ε=30,\ τ=0{,}05$$

λαμβάνομεν . . . . λογ.Α=λογ. 30000+30λογ.(1,05)

Εὑρίσκομεν δὲ διὰ τῶν πινάκων τοῦ Callet

$$λογ.(1{,}05)=0{,}00211893$$

ὅθεν . . . . . 30λογ.(1.05)=0, 635679

καὶ . . . . . λογ.30000=4, 477121

προσθέτοντες ἔχομεν . . λογ.Α=5, 112800 Α=129658,26.

Β'. Ζητεῖται πόσον θέλει γίνει τὸ κεφάλαιον 12000 δρχ. ἀνατοκιζόμενον πρὸς 5 τοῖς 100 μετὰ 8 ἔτη, 3 μῆνας καὶ 20 ἡμέρας.

Εἰς τὸ τέλος τῶν 8 ἐτῶν τὸ κεφάλαιον θέλει γίνει ὡς ἀνωτέρω,

$$12000(1{,}05)^8.$$

Τὸ ποσὸν τοῦτο πρέπει νὰ μείνῃ ἀκόμη εἰς ἁπλοῦν τόκον $3^{μ}+20,^{ἡμ}$ ἢ 110 ἡμέρας.

Ὁ τόκος 1 δραχμῆς εἰς 110 ἡμέρας πρὸς 5 % κατ' ἔτος εἶναι κατὰ τὸν τύπον τοῦ τόκου $\frac{5\times110}{100\times360}=\frac{550}{36000}=\frac{55}{3600}$

Μία δραχμὴ λοιπὸν μετὰ τοῦ τόκου αὐτῆς εἰς 110 ἡμέρας γίνεται

$$1+\frac{55}{3600}=\frac{3355}{3600}=\frac{731}{720}.$$

Ἄρα τὸ κεφάλαιον ἐκ δραχμῶν $12000(1{,}05)^8$,

θέλει γίνει . . . . $Α=12000(1{,}05)^8\times\frac{731}{720}.$

λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἔχομεν

$$λογ.Α=λογ.1200+8λογ(1{,}05)+λογ.731-λογ.720$$

λογ. 12000=4,0791812
+8λογ. (1.05)=0,1 695144
+ λογ. 731 =2,8639174

7112.8130

— λογ. Α720 =2,8573325

λογ. Α =4,2552895 Α= 18003.

§ 256. Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν λοιπῶν τριῶν προβλημάτων καὶ πρὸς ἀμοιβαίαν βάσανον αὐτῶν διατηροῦμεν τὰς αὐτὰς τιμὰς ἐπὶ τῶν δεδομένων.

Γ'. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ καταθέσωμεν εἰς ἀνατοκισμὸν πρὸς 5 % ἵνα λάβωμεν, μετὰ 30 ἔτη, δραχμὰς 129658,25;

Θετοντες εἰς τὸν τύπον (β) $A=129658,25$, $\varepsilon=30$, $\tau=0,05$

λαμβάνομεν · $\lambda o\gamma.\alpha=\lambda o\gamma.129658,25-30\lambda o\gamma.(1,05)$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma.129658,25&=5,1128017\\ 30\lambda o\gamma.(1,05)&=0,6356790\\ \hline \lambda o\gamma.\alpha&=4,4771227 \quad \alpha=30000 \end{aligned}$$

Δ'. Νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ἐπιτόκιον τ, κατὰ τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ δανεισθὲν κεφάλαιον 30000 δραχ. Ἵνα λάβωμεν μετὰ 30 ἔτη τὸ ποσὸν 129658,25 δρ.

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (γ) $\alpha=30000$, $\varepsilon=30$, $A=129658,25$

λαμβάνομεν . . . $\lambda o\gamma.(1+\tau)=\dfrac{\lambda o\gamma.129658,25-\lambda o\gamma\ 30000}{30}$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma.129658\ 25&=5,1128017\\ \lambda o\gamma.30000&=4,4771213\\ \hline &\ \ 0,6356804 \end{aligned}$$

$$\lambda o\gamma.(1+\tau)=\frac{0,6356804}{30}=0,0211893 \quad (*)$$

$$1+\tau=1,05 \quad \text{ἢ} \quad \tau=0,05.$$

Ε'. Νὰ προσδιορίσωμεν τὸν χρόνον ε, μετὰ τὸν ὁποῖον τὸ κεφάλαιον 30000 ἀνατοκιζόμενον πρὸς 5 % κατ' ἔτος θέλει δώσει 129658,25.

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (δ) $A=129658,25$, $\alpha=30000$, $\tau=0,05$

λαμβάνομεν . . . . $\varepsilon=\dfrac{\lambda o\gamma\ 129658,25-\lambda o\gamma\ 30000}{\lambda o\gamma.(1,05)}$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma.129658,&=5.1128017\\ \lambda o\gamma.30000\ &=4,4771213\\ \hline &\ \ 0,6356804 \ \Big|\ \dfrac{0,0211893=\lambda o\gamma\,(1,05)}{30=\varepsilon} \end{aligned}$$

ΣΗΜ. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης ἔχει καί τινα χιλιοστημόρια, τὰ ὁποῖα προκύπτουσιν ἐκ τῆς παραλείψεως τῶν τελευταίων δεκαδικῶν ψηφίων εἰς τοὺς λογαρίθμους, ὄντας ἀσυμμέτρους.

ϛ'. Μετὰ πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι ἀνατοκιζόμενον πρὸς 10 % διπλασιάζεται;

(*) Ὁ ἀντίστοιχος τοῦ λογαρίθμου 0,0211893 εἶναι 10500, ἐκ τοῦ χαρακτηριστικοῦ δὲ 0 συμπεραίνομεν ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἔχῃ ἓν ψηφίον ἀκέραιον, ὅθεν ὁ ζητούμενος εἶναι 1,0500 ἢ ἁπλῶς 1,05.

Θέτοντες εἰς τὸν γενικὸν τύπον $\varepsilon=\frac{\lambda o\gamma\,\pi}{\lambda o\gamma.(1+\tau)}$

$\pi=2$ καὶ $\tau=0{,}1$

λαμβάνομεν . . . . $\varepsilon=\frac{\lambda o\gamma.2}{\lambda o\gamma.(1{,}1)}$

$$\lambda o\gamma.2-0{,}3010300 \;\Big|\; \frac{0{,}0413926=\lambda o\gamma.(1{,}1)}{7^{\varepsilon.}-3^{\mu.}-8^{\dot{\eta}\mu.}}$$

Β΄. Περὶ Χρεωλυσίας.

§ 257. *Χρεωλυσία* ὀνομάζεται ἡ ἀπόσβεσις τοῦ χρέους, συμποσουμένου ἐκ τοῦ κεφαλαίου καὶ τῶν συνθέτων τόκων, δι' ἐτησίας πληρωμῆς ἴσου ποσοῦ, *χρεωλύτρου* ὀνομαζομένου.

Ἡ χρεωλυσία ἐπιστηρίζεται εἰς τὴν ἑξῆς συνθήκην «Τὸ ἄθροισμα » ὅλων τῶν χρεωλύτρων ὁμοῦ μὲ τοὺς συνθέτους τόκους αὐτῶν » ἰσοῦται μὲ τὸ κεφάλαιον καὶ τοὺς τόκους αὐτοῦ, μετά τινα δεδο- » μένον χρόνον. »

Δεύτερον γενικὸν ζήτημα.

§ 258. Ἐδόθη εἰς δάνειον κεφάλαιόν τι, ἐπὶ συνθήκῃ ν' ἀποσβεσθῇ τὸ χρέος διὰ χρεωλύτρων μετά τινα δεδομένον χρόνον, καὶ κατά τι ὡμολογημένον ἐπιτόκιον. Ζητεῖται τὸ χρεώλυτρον.

Λύσις. Ἔστω α τὸ δανεισθὲν κεφάλαιον,

ε ὁ ἀριθμὸς τῶν πρὸς ἀπόσβεσιν ὡρισμένων ἐτῶν,

τ ὁ τόκος τῆς μονάδος,

X τὸ χρεώλυτρον.

Εἶναι φανερὸν, ὅτι κατὰ τὸ Α΄. γενικὸν ζήτημα τοῦ ἀνατοκισμοῦ τὸ κεφάλαιον α θέλει γίνει εἰς τὸ τέλος τῶν ε ἐτῶν

$$A=\alpha(1+\tau)^{\varepsilon}.$$

Ἂς εὕρωμεν ἤδη καὶ τῶν χρεωλύτρων τὰς τιμάς.

Ὅθεν ἐπειδὴ X, δοθὲν εἰς τὸ τέλος τοῦ α΄. ἔτους ἢ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ β΄. γίνεται εἰς το τέλος τῶν ε ἐτῶν $X(1+\tau)^{\varepsilon-1}$

Το X. δοθὲν εἰς τὸ τέλος τοῦ β΄. ἔτους ἢ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ γ΄. γίνεται εἰς τὸ τέλος τῶν ε ἐτῶν . . . $X(1+\tau)^{\varepsilon-2}$

Τὸ τρίτον χρεώλυτρον γίνεται . . . . $X(1+\tau)^{\varepsilon-3}$

.. ..

Τὸ προτελευταῖον » . . . . $X(1+\tau)$

Τὸ τελευταῖον μένει X

Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν ὅλων τούτων τῶν τιμῶν εἶναι

$$X(1+\tau)^{\varepsilon-1}+X(1+\tau)^{\varepsilon-2}+X(1+\tau)^{\varepsilon-3}\ldots+X(1+\tau)+X$$

ἢ κατ' ἀντίστροφον τάξιν

$$X+X(1+\tau)+\ldots+X(1+\tau)^{\varepsilon-3}+X(1+\tau)^{\varepsilon-2}X+(1+\tau)^{\varepsilon-1}$$

Ἐπειδὴ οἱ ὅροι οὗτοι ἀποτελοῦσι γεωμετρικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι X, ὁ λόγος $1+\tau$, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων εἶναι ε, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εὑρίσκεται κατὰ τὸν γενικὸν τύπον

$$A=\frac{\alpha(\pi^{\nu}-1)}{\nu-1}$$

Ὅθεν ἀντεισάγοντες τὰς τιμὰς τοῦ α, π καὶ ν ἔχομεν

$$A=\frac{X\,|\,(1+\tau)^{\varepsilon}-1\,|}{(1+\tau)-1}=\frac{X\,|\,(1+\tau)^{\varepsilon}-1\,|}{\tau}$$

Κατὰ τὴν ἀνωτέρω λοιπὸν συνθήκην ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν,

$$\frac{X\,|\,(1+\tau)^{\varepsilon}-1\,|}{\tau}=\alpha(1+\tau)^{\varepsilon}$$

ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν τὴν τιμὴν τοῦ χρεωλύτρου,

$$X=\frac{\alpha\tau(1+\tau)^{\varepsilon}}{(1+\tau)^{\varepsilon}-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\zeta)$$

Ἐφαρμογή. Ἔστω $\alpha=1$, $\tau=0{,}05$, $\varepsilon=10$.

ἔχομεν . . . . . $X=\dfrac{0{,}05\,(1{,}05)^{10}}{(1{,}05)^{10}-1}$

ὑπολογίζομεν τὴν ποσότητα $(1{,}05)^{10}$ διὰ τῶν λογαρίθμων

Ἔστω . . . . . . $\pi=(1{,}05)^{10}$

$$\lambda o\gamma.\omega=\lambda o\gamma.(1{,}05)$$

$$\lambda o\gamma.(1{,}05)=0{,}0211893$$

$$10\lambda o\gamma\,(1{,}05)=0{,}\ 211793$$

$$\omega=1{,}\ 628894$$

Ὅθεν $\quad X=\dfrac{0{,}05\times 1{,}628894}{0{,}628894}=\dfrac{0{,}08144470}{0{,}628894}$

$$X=\frac{0{,}08144470}{0{,}62889400}=\frac{814447}{6288940}$$

$$X=0{,}1295.$$

Τὸ χρεώλυτρον τοῦτο πρέπει νὰ πληρώνηται κατ' ἔτος ἵνα ἐξοφληθῇ μετὰ 10 ἔτη χρέος ἴσον τῇ μονάδι τοῦ νομίσματος.

Ἐὰν τὸ δάνειον συνίσταται ἐκ 10000 δραχμῶν, τὸ χρεώλυτρον εἶναι 1295 δραχμαί.

§ 159. Ὁ τύπος τοῦ χρεωλύτρου $X=\dfrac{\alpha\tau(1+\tau)^{\varepsilon}}{(1+\tau)^{\varepsilon}-1}$, . . . (ζ)

περικλείων τέσσαρας ποσότητας X, α, ε, τ, δίδει τὴν λύσιν τεσσάρων διαφόρων προβλημάτων.

Α'. Γνωστῶν ὄντων τοῦ κεφαλαίου α, τοῦ χρόνου ε, καὶ τοῦ ἐπιτοκίου τ, νὰ εὕρωμεν τὸ χρεώλυτρον Χ.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐλύθη ἤδη διὰ τοῦ τύπου (ζ).

Β'. Νὰ προσδιορίσωμεν τὸ κεφάλαιον α, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ καταθέσωμεν σήμερον, ἵνα λαμβάνωμεν κατ' ἔτος ὡρισμένην τινα ποσότητα β, ὥστε μετὰ ἔτη ε, ν' ἀναπληρωθῶμεν, οὐχὶ μόνον διὰ τὸ κεφάλαιον καὶ τοὺς τόκους αὐτοῦ, ἀλλὰ καὶ διὰ τοὺς τόκους τῶν τόκων.

Ἐκ τοῦ τύπου (ζ) λαμβάνομεν $$α=\frac{Χ[(1+τ)^ε-1]}{ατ(1+τ)^ε} \quad . \; . \; . \quad (η)$$

Γ'. Ζητεῖται μετὰ πόσα ἔτη ἐξοφλίζεται χρέος τι α μετὰ τῶν συνθέτων τόκων αὐτοῦ.

Ἐκ τοῦ τύπου (ζ) λαμβάνομεν διαδοχικῶς.

$$Χ(1+τ)^ε-Χ=ατ(1+τ)^ε$$
$$Χ(1+τ)^ε-ατ(1+τ)^ε=Χ$$
$$(Χ-ατ)\,(1+τ)^ε=Χ$$
$$(1+τ)^ε=\frac{Χ}{Χ-ατ}$$
$$ε.λογ.(1+τ)=λογ\,Χ-λογ.(Χ-ατ)$$
$$ε=\frac{λογ\,Χ-λογ\,(Χ-ατ)}{λογ\,(1+τ)}.$$

ΣΗΜ. Τὸ τέταρτον πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον δὲν εἶναι εὔχρηστον, διότι τὸ ἐπιτόκιον τῶν τραπεζῶν εἶναι πάντοτε γνωστόν.

Τρίτον γενικὸν ζήτημα.

§ 260. Ποία τιμὴ θέλει παραχθῇ εἰς τὸ τέλος τινῶν ἐτῶν, ἐὰν καθ' ἕκαστον ἔτος προστεθῇ εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦ προηγουμένου ἔτους ἄλλο κεφάλαιον, ἴσον μὲ τὸ ἀρχικὸν. καὶ εἰς ὅλα ταῦτα τὰ ἀθροίσματα ἐπιπροστεθῶσι καὶ οἱ σύνθετοι τόκοι αὐτῶν;

Λύσις. Ἔστω α τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον καὶ ἐτησίως προσθετόμενον
ε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν,
τ τὸ ἐπιτόκιον τῆς μονάδος,
Β ἡ ὁλικὴ τιμὴ τῶν κατ' ἔτος δεδομένων κεφαλαίων μετὰ τῶν συνθέτων τόκων αὐτῶν.

Τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον α μετὰ τῶν συνθέτων τόκων αὐτοῦ εἰς τὸ τέλος τῶν ε ἐτῶν γίνεται . . . . . $α(1+τ)^ε$
Τὸ δεύτερον κεφάλαιον α, μετὰ ἔτη ε—1 . . . $α(1+τ)^{ε-1}$
Τὸ τρίτον κεφάλαιον α, μετὰ ἔτη ε—2 . . . $α(1+τ)^{ε-2}$
Τὸ τελευταῖον κεφάλαιον α, προστιθέμενον εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τελευταίου ἔτους γίνεται εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους $α(1+τ)$.

Ἡ ζητουμένη λοιπὸν τιμὴ συνίσταται ἐκ τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν τιμῶν τῶν κατ' ἔτος διδομένων κεφαλαίων, μετὰ τῶν τόκων αὐτῶν.

Ὅθεν ἔχομεν $B=\alpha(1+\tau)^{\varepsilon}+\alpha(1+\tau)^{\varepsilon-1}+\alpha(1+\tau)^{\varepsilon-2} \ldots \alpha(1+\tau)$.

ἢ θέτοντες κατὰ μέρος τὸν κοινὸν παράγοντα $\alpha(1+\tau)$ καὶ γράφοντες τοὺς ὅρους κατ' ἀντίστροφον τάξιν,

$$A=\alpha(1+\tau)\left[1+(1+\tau)+(1+\tau^{2}\ldots+(+\tau)^{\varepsilon-2}+(1+\tau)^{\varepsilon-1}\right]$$

Ὁ δεύτερος τῶν δύο τούτων παραγόντων εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 1, ὁ τελευταῖος $(1+\tau)^{\varepsilon-1}$, ὁ λόγος $1+\tau$ καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων ε

Ὅθεν κατὰ τὸν τύπον τοῦ ἀθροίσματος $A=\dfrac{\alpha\pi^{\nu}-1}{\pi-1}$

ἔχομεν . . . . . $A=\dfrac{(1+\tau)^{\varepsilon}-1}{1+\tau-1}=\dfrac{(1+\nu)^{\varepsilon}-1}{\tau}$

καὶ ἑπομένως . . . $B=\dfrac{\alpha(1+\tau)\left[(1+\tau)^{\varepsilon}-1\right]}{\tau}$ . . . . . . (θ)

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

§ 261. Α'. Ζητεῖται ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ καταθέσωμεν εἰς ἀνατοκισμόν, ἵνα λαμβάνωμεν ἐτησίως 1500 δρ. ὥστε νὰ ἐξοφλήσωμεν τὸ κεφάλαιον καὶ τοὺς τόκους αὐτοῦ μετὰ 12 ἔτη ὑπολογίζοντες τὸ ἐπιτόκιον 7,50 τοῖς 100;

(Πρόβλ. Β'. χρεωλυσίας, τύπος (κ), δραχ. 11602,91).

Β'. Ἠγόρασέ τις κτῆμα ἀντὶ 100000 δραχμῶν, τὰς ὁποίας ὑπεσχέθη νὰ πληρώσῃ μετὰ τῶν συνθέτων τόκων αὐτῶν εἰς 15 ἔτη δι' ἴσων μερίδων ἐτησίως διδομένων. Τὸ ἐπιτόκιον ὡμολογήθη 5 % καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ ἑκάστης μερίδος, ἤτοι τὸ χρεώλυτρον.

(Προβλ. Α'. χρεωλ. τύπος (ζ) δρχ. 9632,22.)

Γ'. Δεδομένος τις ἀριθμὸς ἀνθρώπων α αὐξάνει ἐτησίως κατὰ τὸ ἑκατοστὸν τοῦ προηγουμένου ἔτους. Πόσα ἔτη ἀπαιτοῦνται ἵνα δεκαπλασιασθῇ ὁ πληθυσμός;

(Πρόβλ. Ε'. ἀνατοκ. τύπος (ε) ἔτη 231 περίπου).

Δ'. Οἱ Ἑβραῖοι παρῴκησαν εἰς τὴν Αἴγυπτον 330 ἔτη καὶ παραδόξως ἐπληθύνθησαν, διότι εἰσῆλθον μὲν 75 ἄνδρες, ἔφθασαν δὲ εἰς Χαναὰν ὑπὲρ τὰς 600000 ἀνδρῶν. Ζητεῖται κατὰ πόσον τοῖς 100 ηὔξανεν ἐτησίως ὁ πληθυσμός;

(Πρόβλ. ἀνατοκ. Γ'. τύπος (γ) 2,76 τοῖς 100 περίπου).

Ε'. Ἐκ πίθου περιέχοντος 100 ὀκκάδας οἴνου ἐξάγομεν καθ' ἑκάστην ἡμέραν μίαν ὀκὰν οἴνου καὶ ἀναπληροῦμεν αὐτὴν διὰ μιᾶς ὀκᾶς ὕδατος. Ζητεῖται, ά. Πόσος οἶνος θέλει μείνει εἰς τὸν πίθον μετὰ 50 τοιαύτας ἐκκενώσεις καὶ ἀναπληρώσεις; β'. Εἰς πόσας ἡμέρας ὁ οἶνος θέλει καταντήσει εἰς τὸ ἥμισυ, τοῦ ὅλου;

Λύσις. Μετὰ τὴν ά ἐκκένωσιν μένει ἐν τῷ πίθῳ οἶνος 99 ὀκ.

Μετὰ τὴν πρόσθεσιν δὲ τοῦ ὕδατος γίνεται κράμμα 100 ὀκ. περιέχον τὰς 99 ὀκ. οἴνου.

Ἀφαιρουμένης ἐκ τοῦ κράμματος μιᾶς ὀκκᾶς, ἀφαιρεῖται μέρος οἴνου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἀναλογίας

$$100 : 99 : : 1 : \frac{99}{100}$$

Μετὰ τὴν δευτέραν λοιπὸν ἐκκένωσιν μένει οἶνος

$$99-\frac{99}{100} \quad \text{ἢ} \quad 99\frac{99}{100}$$

Μετὰ τὴν τρίτην μένει 99 $\left(\frac{99}{100}\right)^2$ καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως.

Ὥστε αἱ μετὰ τὰς διαδοχικὰς ἐκκενώσεις ποσότητες τοῦ οἴνου συνιστῶσι τοὺς ὅρους τῆς γεωμετρικῆς προόδου

$$99 : 99\left(\frac{99}{100}\right) : 99\left(\frac{99}{100}\right)^2 : \dots\; 99\left(\frac{99}{100}\right)^{49}$$

Ὁ τελευταῖος ὅρος τῆς προόδου ταύτης εἶναι ἡ ποσότης τοῦ οἴνου, ἥτις μένει ἐν τῷ πίθῳ μετὰ τὴν πεντηκοστὴν ἐκκένωσιν.

Ἐκτιμοῦντες διὰ τῶν λογαρίθμων τὸν ὅρον τοῦτον εὑρίσκομεν 60 $\frac{1}{2}$ περίπου.

Ὡς πρὸς τὸ δεύτερον μέρος τοῦ ζητήματος παρατηροῦμεν, ὅτι πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου.

$$99 : 99\left(\frac{99}{100}\right) : 99\left(\frac{99}{100}\right)^2 \dots\; 50$$

κατὰ τὸν τύπον $\nu=1+\frac{\text{λογ.}\lambda-\text{λογ }\alpha}{\text{λογ.}\pi}$

ὅθεν ἔχομεν $\nu=1+\frac{\text{λογ.}50-\text{λογ.}99}{\text{λογ.}99-\text{λογ.}100}$

ἢ ἀλλάττοντες τὰ σημεῖα τῶν δύο ὅρων τοῦ κλάσματος

$$\nu=1+\frac{\text{λογ.}99-\text{λογ.}50}{\text{λογ.}100-\text{λογ.}99}=60.$$

Κατασκευὴ καὶ χρῆσις τῶν πινάκων τοῦ ἀνατοκισμοῦ.

§ 262. Ἐκ τῆς κατασκευῆς τοῦ γενικοῦ τύπου τοῦ ἀνατοκισμοῦ προκύπτει, ὅτι αἱ παραγόμεναι ἀξίαι διαφόρων κεφαλαίων, τοκιζομένων εἰς ἴσους χρόνους καὶ ἐπὶ τῷ αὐτῷ ἐπιτοκίῳ, εἶναι εἰς εὐθὺν λόγον τῶν κεφαλαίων.

Ἔστωσαν δύο κεφάλαια α καὶ β

αἱ παραγόμεναι ἀξίαι A καὶ B

ἔχομεν . . . . $A=\alpha(1+\tau)^\varepsilon$ $\quad B=\beta(1+\tau)^\varepsilon$

ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει ἡ ἀναλογία $A : B : : \alpha : \beta$.

Ἐὰν λοιπὸν κατασκευάσωμεν πίνακα τοῦ ἀνατοκισμοῦ δι' ὡρισμένον κεφάλαιον 1000 μονάδων, πρὸς 4, 5, 6 τοῖς $^0/_0$ κατ' ἔτος, διὰ ἕν, δύο, τρία.... εἴκοσιν ἔτη, θέλομεν ἐπιλύει εὐκόλως δι' αὐτοῦ τὰ ζητήματα τοῦ ἀνατοκισμοῦ.

Πίναξ τοῦ ἀνατοκισμοῦ

1000 *δραχμῶν διὰ* 20 *ἔτη.*

ἔτη	4 τοῖς 0|0	5 τοῖς 0|0	6 τοῖς 0|0	ἔτη	4 τοῖς 0|0	5 τοῖς 0|0	6 τοῖς 0|0
1	1040,00	1050,00	1060,00	11	1539,31	1710,38	1890,30
2	1081,60	1102,50	1123,60	12	1600,88	1795,95	2012.20
3	1124,86	1157,63	1191,92	13	1664,92	1885.75	2132,93
4	1169,75	1215,51	1262,49	14	1731,52	1979.99	2260,91
5	1216.54	1276,29	1338,23	15	1800,70	2078,99	2396,56
6	1265,20	1340,11	1418,52	16	1872,81	2182,99	2540,35
7	1315,81	1407,12	1503,63	17	1947,72	2292,14	2692,79
8	1368,44	1477,48	1593,85	18	2026,63	2406,74	2854,36
9	1423,18	1551,36	1689,48	19	2106,66	2527,08	3025,62
10	1480,11	1628.93	1790,85	20	2190,93	2653,43	3207,16

§ 263. Διὰ τοῦ πίνακος τούτου οὐχὶ μόνον εὑρίσκομεν ἀμέσως τὴν παραγομένην ἀξίαν 1000 δραχμῶν ἀνατοκιζομένων κατ' ἔτος μετά τινα ἔτη, ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 20, ἀλλὰ καὶ παντὸς ἄλλου ἀριθμοῦ α. Διότι καθὼς παρετηρήσαμεν ἀνωτέρω αἱ παραγόμεναι ἀξίαι εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι τῶν κεφαλαίων.

Ζητεῖται π χ. ἡ παραγομένη ἀξία 3560 δρ. μετὰ 12 ἔτη πρὸς 6 $\frac{0}{0}$.

Εὑρίσκομεν εἰς τὸν πίνακα ὅτι αἱ 1000 δραχμαὶ ἀνατοκιζόμεναι κατὰ τὰς αὐτὰς συνθήκας φέρουσι 2012,20, ὅθεν προσδιορίζομεν τὴν ζητουμένην ἀξίαν, διὰ τῆς ἀναλογίας

$$1000 : 3560 : : 2012,20 : X = 7163,43.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸν ἐν τῷ πίνακι ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ δεδομένον κεφάλαιον καὶ νὰ διαιρῶμεν διὰ τοῦ 10000.

Οὕτω 500 δραχμαὶ μετὰ 20 ἔτη πρὸς 5 $^0/_0$ φέρουσι 1326,71

Καὶ 20000 » » 10 » » 6 $^0/_0$ » 35817

Ὡσαύτως 1 δραχμὴ ἀνατοκιζομένη πρὸς 6 $^0/_0$ γίνεται μετὰ 20 ἔτη δραχμαὶ 3,20716

Διὰ τῆς τελευταίας ταύτης τιμῆς λαμβάνομεν δι' ἁπλοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὴν μέλλουσαν ἀξίαν οἱασδήποτε ποσότητος δραχμῶν.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ Β'. ΒΙΒΛΙΟΥ

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΣ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ.

333. Εἴδομεν ἐν τῷ κεφ. ς'. τοῦ Β'. βιβλίου ὅτι τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται ἀπείρους λύσεις, οἱασδήποτε κλασματικὰς ἢ ἀκεραίας κτλ. καὶ ὅταν ἐν τῷ πρὸς λύσιν αὐτοῦ σχηματιζομένῳ συστήματι ἐξισώσεων ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγνώστων ἦναι μείζων τοῦ τῶν ἐξισώσεων, ὅπου περιλαμβάνεται καὶ μία ἐξίσωσις μετὰ πλειόνων τοῦ ἑνὸς ἀγνώστων. Ἀλλ' ὅταν αἱ συνθῆκαι τοῦ προβλήματος, ὡς ἐν τῇ διερευνήσει παρετηρήσαμεν, ἀπαιτοῦσι τὰς λύσεις ἀκεραίας ἢ ἀκεραίας καὶ θετικάς. τότε εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῶσι τύποι καθ' οὓς ὑπολογίζονται αὗται, εἴτε εἶναι περιωρισμέναι τὸν ἀριθμόν, εἴτε ἄπειροι.

Τὸ δὲ μέρος τῆς Ἀλγέβρας τὸ πραγματευόμενον περὶ τῆς λύσεως τῶν τοιούτων προβλημάτων καλεῖται ἀπροσδιόριστος ἀνάλυσις.

Ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$.

334. Ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ (1)

ά. Ὅταν ἔχῃ τὸν ἕτερον τῶν συντελεστῶν ἴσον τῇ μονάδι, τότε ἐπιδέχεται ἀπείρους ἀκεραίας λύσεις. Ἔστω $\alpha=1$, τότε ἡ ἐξίσωσις(1) καθίστατα $\chi+\beta\psi=\gamma$· ὅθεν λαμβάνομεν τὸν τύπον τοῦ χ, $\chi=\gamma-\beta\psi$, δι' οὗ λαμβάνονται πάντα τὰ συστήματα τῶν ἀκεραίων τιμῶν τοῦ χ καὶ ψ τὰ ταυτοποιοῦντα τὴν (1) ἀντικαθισταμένου τοῦ ψ διαδοχικῶς διὰ πάντων τῶνδιαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μεχρι τοῦ $+\infty$ καὶ ἐκτελουμένων τῶν πράξεων.

β'. Ὅταν καὶ οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων καὶ ὁ ἀνεξάρτητος αὐτῶν ὅρος ἦναι οἱοσδήποτε μὲν ἀριθμὸς ἀλλα διάφορος τοῦ μηδενός, τότε μόνον ἡ ἐξίσωσις (1) ἐπιδέχεται ἀκεραίας λύσεις ὅταν οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ δῆλον γίνεται διὰ τῶν ἑξῆς θεωρημάτων.

335. *Θεώρημα Α'*. Ὅταν οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἡ ἐξίσωσις οὐδεμίαν ἐπιδέχεται ἀκεραίαν λύσιν.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι οἱ συντελεσταὶ α καὶ β, καὶ ὁ ἀνεξάρτητος τῶν ἀγνώστων ὅρος γ δύνανται νὰ ὑποτεθῶσι πάντοτε ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· διότι, ἐὰν οὗτοι δὲν ἦναι πρῶτοι, καθίστανται τοιοῦτοι ἐξαλειφομένων τῶν κοινῶν αὐτοῖς παραγόντων, τῇ διαιρέσει δι' αὐτῶν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως,

Τούτων τεθέντων, ἐὰν οἱ α καὶ β δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἐπειδὴ ἔχουσι κοινόν τινα διαιρέτην δ, ὁποιοιδήποτε ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ ἂν ἀντικαταστήσωσι τοὺς ἀγνώστους χ καὶ ψ, τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως (1) $\alpha\chi+\beta\psi$, ὡς ἄθροισμα ἀριθμῶν διαιρετῶν διὰ δ, θέλει διαιρεῖσθαι δι' αὐτοῦ, ἐν ᾧ ὁ τοῦ δευτέρου μέλους αὐτῆς ἀριθμὸς γ, ὅστις ὑπετέθη πρῶτος πρὸς τοὺς α καὶ β, δὲν θέλει διαιρεῖσθαι διὰ δ, ὅπερ ἄτοπον, καὶ δηλοῖ ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ ταυτοποιηθῇ ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ δι' ἀκεραίων τιμῶν τοῦ χ καὶ ψ. ὅ. ἔ. δ.

336. *Θεώρημα Β'*. Ὅταν οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ (1) ἐπιδέχεται ἀκεραίαν λύσιν.

Λύοντες αὐτὴν πρὸς τὸν χ, τοῦ ὁποίου τὸν συντελεστὴν α δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν θετικόν, διότι ἂν δὲν ἦναι θετικὸς τὸν καθιστῶμεν τοιοῦτον τῇ μεταβολῇ τῶν σημείων πάντων τῶν ὅρων αὐτῆς, λαμβάνομεν $\chi=\dfrac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}$. Ἐὰν δὲ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸ δεύτερον μέλος τὸν ἄγνωστον ψ διαδοχικῶς διὰ τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων τιμῶν $0, 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots \alpha-1$, οἵτινες εἶναι α τὸν ἀριθμὸν καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς ἐν αὐτῷ σημειωμένας πράξεις, θέλομεν εὕρει ἀναγκαίως ἀκεραίαν τιμὴν διὰ τὸν χ, καὶ μίαν μόνην, ἥτις μετὰ τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς τοῦ ψ ἀποτελεῖ, ὡς γνωστὸν (139), ἓν σύστημα ἀκεραίων τιμῶν ταυτοποιουσῶν τὴν ἐξίσωσιν (1), διότι τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαδοχικῶν διαιρέσεων τῶν γινομένων κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων τοῦ τύπου τοῦ χ πρὸς εὕρεσιν τῶν διαδοχικῶν τιμῶν αὐτοῦ, ὅταν αἱ διαιρέσεις γίνωνται οὕτως, ὥστε πάντα τὰ ὑπόλοιπα νὰ ἦναι θετικὰ *), εἶναι διάφορα (ὡς θέλομεν ἀποδείξει) καὶ ἐπειδὴ εἶναι α τὸν ἀριθμὸν καὶ ἕκαστον αὐτῶν εἶναι μικρότερον τοῦ α, θέλουσιν εἶσθαι τοιοῦτοι ἀριθμοὶ ὁποῖοι οἱ $0, 1, 2, 3, 4, \cdots\cdots \alpha-1$, διότι μόνον τοιοῦτοι ἀριθμοὶ ἐκπληροῦσι τὰς συνθήκας τῶν ὑπολοίπων δηλ. νὰ ἦναι α τὸν ἀριθμόν, πάντες διάφοροι καὶ ἕκαστος αὐτῶν μικρότερος τοῦ α, ὅπερ δηλοῖ ὅτι ἓν τῶν ἀνωτέρω ὑπολοίπων καὶ μόνον ἓν ἀναγκαίως εἶναι 0, ἢ ὅπερ ταὐτόν, ὅτι μία τῶν ἀνωτέρω διαδοχικῶν ἀκεραίων τιμῶν τοῦ ψ καὶ μόνον μία θέλει καταστήσει τὸν τύπον τοῦ χ ἀκέραιον ἀριθμόν, ὅστις εἶναι καὶ ἀκεραία τιμὴ τοῦ χ, ἥτις μετὰ τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς τοῦ ψ ἀποτελεῖ ἀκεραίαν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ (1).

Ἀποδείξωμεν ἤδη ὅτι πάντα τ' ἀνωτέρω ὑπόλοιπα εἶναι διάφορα. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι δύω τούτων εἶναι ἴσα

Ἔστω ψ′ μία τῶν μερικῶν τιμῶν τοῦ ψ, π τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\dfrac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}$ καὶ υ τὸ ὑπόλοιπον.

Ἔστω ψ″, ἄλλη τῶν μερικῶν τιμῶν τοῦ ψ, π′ τὸ πηλίκον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τὸ αὐτὸ τῷ τῆς ἄλλης διαιρέσεως, δηλ. υ, θέλομεν ἔχει

$$\left.\begin{array}{l}\gamma-\beta\psi'=\alpha\pi+\upsilon\\ \gamma-\beta\psi''=\alpha\pi'+\upsilon\end{array}\right\}$$ καὶ ἀφαιροῦντες τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἀπὸ τῶν τῆς πρώτης ἔχομεν

$$\beta(\psi''-\psi')=\alpha(\pi-\pi')$$

ἥτις δεικνύει ὅτι ὁ α, ὡς παράγων τοῦ δευτέρου μέλους διαιρεῖ αὐτό, καὶ δὴ καὶ τὸ πρῶτον μέλος, ὅπερ ἀδύνατον· διότι ὁ α τὸν μὲν παράγοντα β δὲν διαιρεῖ, ὡς πρῶτος πρὸς αὐτόν, τὸν δὲ ψ″—ψ′ ἐπίσης· διότι εἶναι διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, ὧν ἑκάτερος εἶναι μικρότερος τοῦ α· τουτέστιν ἡ ὑπόθεσις ὅτι δύω τῶν ἀνωτέρω ὑπο-

---

*) Ὅπερ πάντοτε εἶναι δυνατὸν λαμβανομένου τοῦ πηλίκου καθ' ὑπεροχὴν μονάδος, ὅταν κατ' ἔλλειψιν δίδῃ ἀρνητικὸν ὑπόλοιπον.

λοίπων εἶναι ἴσα, ἄγει εἰς ἄτοπον ἰσότητα, ὅπερ δηλοῖ ὅτι πάντα τὰ ὑπόλοιπα εἶναι διάφορα· ὅ ἔ. δ.

Παράδειγμα μερικόν.

$$5\chi - 7\psi = 18 \text{· ὅθεν } \chi = \frac{18+7\psi}{5}.$$

Ἐὰν τὸ ψ ἀντικαταστήσωμεν διὰ τῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ 5—1, δηλ. ἐὰν θέσωμεν $\psi = 0, 1, 2, 3, 4$, αἱ τιμαὶ τοῦ χ εἶναι $\chi = \frac{18}{5}, 5, \frac{32}{5}, \frac{39}{5}, \frac{46}{5}$, ὧν μία μόνον ἀκεραία, ἡ τιμὴ 5, ἥτις μετὰ τῆς 1 ἀντιστοίχου τιμῆς τοῦ ψ, ἀποτελεῖ τὴν ἀκεραίαν λύσιν, τὰ δὲ διὰ τῶν διαδοχικῶν διαιρέσεων εὑρεθέντα διαδοχικὰ ὑπόλοιπα 3, 0, 2, 4, 1, ὧν ἓν μόνον εἶναι 0, εἶναι τὰ αὐτὰ ταῖς τιμαῖς τοῦ ψ, διαφέρουσι δὲ μόνον κατὰ τὴν τάξιν.

337 *Θεώρημα Γ'.* Ὅταν ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχῃ μίαν ἀκεραίαν λύσιν, ἤτοι ὅταν μία ἀκεραία λύσις αὐτῆς ἦναι $\chi = \theta$ καὶ $\psi = \kappa$, τότε αὕτη ἐπιδέχεται ἀπείρους ἀκεραίας λύσεις, αἵτινες δίδονται ὑπὸ τῶν γενικῶν τύπων $\chi = \theta - \beta\tau$ καὶ $\psi = \kappa + \alpha\tau$ (2) τῇ διαδοχικῇ ἀντικαταστάσει τοῦ ἀπροσδιορίστου τ διὰ τῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$.

Καὶ εἶναι μὲν ἄπειροι αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1), ὅταν $\chi = \theta$ κα $\psi = \kappa$ εἶναι μία ἀκεραία λύσις αὐτῆς· διότι αἱ ἄπειροι ἀντίστοιχοι ἀκέραιαι τιμαὶ τῶν χ καὶ ψ, αἱ διδόμεναι ὑπὸ τῶν τύπων (2) τῇ διαδοχικῇ ἀντικαταστάσει ἐν αὐτοῖς τοῦ ἀπροσδιορίσοου τ διὰ τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$, ταυτοποιοῦσι τὴν ἐξίσωσιν (1) καὶ δὴ καὶ ἀποτελοῦσιν ἀπείρους ἀκεραίας λύσεις αὐτῆς· διότι ἡ ἐξίσωσις (1) $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$ τῇ ἀντικαταστάσει τῶν χ καὶ ψ διὰ τῶν τύπων αὐτῶν γίνεται

$$\alpha\theta - \alpha\beta\tau + \beta\kappa + \beta\alpha\tau = \gamma$$

ἥτις εἶναι ταυτότης· διότι τὰ μὲν $\alpha\beta\tau$ καὶ $+\beta\alpha\tau$, ὡς ἴσα καὶ ἀντιθέτων σημείων ἀναιροῦνται, ὁποιαιδήποτε καὶ ἂν ἦναι αἱ τιμαὶ τοῦ τ, τὸ δὲ $\alpha\theta + \beta\kappa$ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ἴσον τῷ γ, ὑποτεθέντος ὅτι θ καὶ κ ἀποτελοῦσιν ἀκεραίαν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (1).

Πᾶσαι δὲ αἱ ἄπειροι ἀκέραιοι λύσεις αὐτῆς δίδονται ὑπὸ τῶν τῶν τύπων (3) δι' ἀντικκαταστάσεως τοῦ τ δι' ἀριθμοῦ ἀκεραίου.

π. χ. ἂν $\chi=\mu$ καὶ $\psi=\nu$ ἀποτελοῦσιν ἀκεραίαν τινὰ λύσιν τῆς ἐξισώσεως (1), θ' ἀποδείξωμεν ὅτι αὕτη ἡ λύσις δίδεται ὑπὸ τῶν τύπων (2), ὡς εἴπομεν, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ἦναι αὕτη· διότι τότε θέλομεν ἔχει τὰς ἑξῆς ταυτότητας

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\mu+\beta\nu=\gamma\\ \alpha\theta+\beta\kappa=\gamma\end{array}\right\}\text{καὶ ἀφαιρουμένης τῆς δευτέρας ἀπὸ τῆς πρώτης ἔχομεν τὴν ἑξῆς.}$$

$$\alpha(\mu-\theta)+\beta(\nu-\kappa)=0,\ \text{ὅθεν}$$

$$\mu-\theta=-\frac{\beta(\nu-\kappa)}{\alpha},$$ ἥτις δεικνύει ὅτι ὁ α διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸ γινόμενον $\beta(\nu-\kappa)$ καὶ ὡς πρῶτος πρὸς τὸν β διαιρεῖ τὸν $\nu-\kappa$. Καλοῦντες δὲ π τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\nu-\kappa$ διὰ τοῦ α, ἔχομεν $\nu-\kappa=\alpha\pi$, ὅθεν $\nu=\kappa+\alpha\pi$

καὶ $\mu-\theta=-\beta\pi$ » $\mu=\theta-\beta\pi$.

αἵτινες δεικνύουσιν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ μ καὶ ν, οἱ καθ' ὑπόθεσιν ἀποτελοῦντες οἱανδήποτε ἀκεραίαν λύσιν, δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων (2) τῇ ἀντικαταστάσει ἐν αὐτοῖς τοῦ ἀπροσδιορίστου τ διά τινος ἀκεραίου ἀριθμοῦ π. ὅ ἔ. δ.

ΣΗΜ. Παραβάλλοντες τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ καὶ τὴν γνωστὴν ἀκεραίαν λύσιν $\chi=\theta$ καὶ $\psi=\kappa$ πρὸς τοὺς γενικοὺς τύπους $\chi=\theta-\beta\tau$, $\psi=\kappa-\alpha\tau$, συμπεραίνομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα πρὸς σχηματισμὸν τῶν γενικῶν τύπων τῶν ἀκεραίων λύσεων τοιαύτης ἐξισώσεως, ὅταν εὑρεθῇ μία τούτων.

Γνωστῆς οὔσης μιᾶς ἀκεραίας λύσεως ἐξισώσεως τῆς μορφῆς (1), σχηματίζονται οἱ γενικοὶ τύποι αὐτῶν, ἐὰν ἀπὸ μὲν τῆς γνωστῆς τιμῆς τοῦ χ, δηλ. ἀπὸ τοῦ θ, ἀφαιρεθῇ τὸ γινόμενον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ψ ἐπὶ ἀπροσδιόριστόν τινα ἀριθμόν, εἰς δὲ τὴν γνωστὴν τιμὴν τοῦ ψ, δηλ. εἰς τὸ κ, προστεθῇ τὸ γινόμενον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ χ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀπροσδιόριστον ἀριθμόν.

Παράδειγμα μερικὸν

Ἔστω ἡ ἀνωτέρα ἐξίσωσις $5\chi-7\psi=18$

τῆς ὁποίας μία ἀκεραία λύσις (336. παράδ.) εἶναι $\chi=5$ καὶ $\psi=1$

οἱ γενικοὶ τύποι εἶναι $\left\{\begin{array}{l}\chi=5-(-7\tau)=5+7\tau\\ \psi=1+5\tau\end{array}\right.$

οἵτινες διὰ τὰς ἀπείρους διαδοχικὰς τιμὰς τοῦ τ

	0,	1,	2,	3,	4	....	δίδουσι τὰς ἀντιστοί-
$\chi=$	5,	12,	19,	26,	33,	....	χους ἀπείρους ἀκεραίας
$\psi=$	1,	6,	11,	16,	21,	....	λύσεις.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΤΥΠΩΝ ΔΙ' ΩΝ ΕΥΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΑΙ ΔΙΑΔΟΧΙΚΑΙ ΑΠΕΙΡΟΙ ΑΚΕΡΑΙΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ(1)

338. Ἔστω ἡ γενικὴ ἐξίσωσις (1) $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$, ἔστωσαν θ καὶ κ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες μερικὴν λύσιν αὐτῆς· ἀντικαθιστῶντες αὐτοὺς ἐν τῇ (1) ἔχομεν τὴν ἰσότητα $\alpha\theta+\beta\kappa=\gamma$, ἀφαιροῦντες δὲ τὰ μέλη ταύτης ἀπὸ τῶν τῆς (1) ἕξομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\alpha(\chi-\theta)+\beta(\psi-\kappa)=0, \text{ ὅθεν}$$

$$\chi-\theta=\frac{-\beta(\psi-\kappa)}{\alpha} \qquad (2)$$

ἥτις δεικνύει ὅτι, ἵνα τις ἀκεραία τιμὴ τῆς ψ ἀποτελῇ μετ' ἀκεραίας τινὸς τιμῆς τοῦ χ λύσιν αὐτῆς καὶ δὴ καὶ τῆς (1), πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ τιμὴ τοῦ ψ νὰ ἦναι τοιαύτη ὥστε τὸ πηλίκον $\frac{\psi-\kappa}{\alpha}$ νὰ καθίσταται ἴσον ἀκεραίῳ τινὶ ἀριθμῷ τ, ἤτοι νὰ ἐπαληθεύηται ἡ ἑξῆς ἐξίσωσις

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\psi-\kappa}{\alpha}=\tau, \text{ ὅθεν} & \psi=\kappa+\alpha\tau \\ \text{τότε δὲ ἡ (2) γίνεται } \chi-\theta=-\beta\tau, \text{ ὅθεν} & \chi=\theta-\beta\tau \end{array}\right\} \quad (3)$$

ΣΗΜ. Ἐκ τοῦ τρόπου καθ' ὃν εὕρομεν αὐτοὺς εἶνε δῆλον μόνον τὸ ἑξῆς, ὅτι διὰ τὰς ἀπείρους διαδοχικὰς ἀκεραίας τιμὰς τοῦ τ παράγονται ἄπειροι διαδοχικαὶ τιμαὶ τῶν ψ καὶ χ ἀποτελοῦσαι ἀπείρους διαδοχικὰς λύσεις, οὐχὶ δὲ καὶ ὅτι πᾶσα ἀκεραία λύσις τῆς (1) περιέχεται εἰς τὰς ὑπ' αὐτῶν παρεχομένας ἀπείρους τοιαύτας.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣ ΕΥΡΕΣΙΝ ΜΙΑΣ ΑΚΕΡΑΙΑΣ ΛΥΣΕΩΣ.

339. Ὅταν ὁ ἕτερος τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων ἦναι πολὺ μικρὸς ἀριθμὸς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μίαν ἀκεραίαν λύσιν αὐτῆς, ἐὰν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν πρὸς τὸν ἄγνωστον τὸν ἔχοντα τὸν μικρότερον συντελεστὴν καὶ εἰς τὸν τύπον αὐτοῦ ἀντικαταστήσωμεν

τὸν ἕτερον ἄγνωστον διὰ τῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ μικροτέρου συντελεστοῦ ἠλαττωμένου κατὰ μονάδα καὶ ἐκτελέσωμεν διαδοχικῶς τὰς πράξεις, ἤτοι ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον δι' ἧς ἀπεδείξαμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$, ὅταν α καὶ β ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἐπιδέχεται μίαν ἀκεραίαν λύσιν.

Ἔστω ἡ μερικὴ ἐξίσωσις $5\chi-7\psi=18$· ὅθεν

$\chi=\frac{18+7\psi}{5}$, ἀντικαθιστῶντες ἐν αὐτῷ τὸ ψ διαδοχικῶς διὰ τῶν 0, 1, 3, 4, εὑρίσκομεν ὅτι $\psi=1$ δίδει $\chi=5$, ἤτοι εὑρίσκομεν τὴν ἀκεραίαν λύσιν $\chi=5$ καὶ $\psi=1$.

340. Ὅταν ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχῃ τὴν μορφὴν τῆς α'. περιπτώσεως $\chi+\beta\psi=\gamma$, τότε δῆλον ὅτι μία ἀκεραία λύσις εἶναι $\chi=\gamma$ καὶ $\psi=o$, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκονται οἱ γενικοὶ τύποι τῶν ἀπείρων ἀκεραίων λύσεων κατὰ τὸν πρακτικὸν κανόνα (337. Σημ.), ὅταν δὲ ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχῃ τὴν μορφὴν τῆς δευτέρας περιπτώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$, ἐν ᾗ α καὶ β ὑποτίθενται, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους τότε διὰ τῆς ἐπομένης μεθόδου λαμβάνομεν ἐξ αὐτῆς ἄλλην ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $\chi+\beta\psi=\gamma$ σχετιζομένην οὕτω πρὸς τὴν δοθεῖσαν, ὥστε ἐκ τῆς ἀκεραίας λύσεως ἐκείνης (ἥν, ὡς εἴδομεν, ἀμέσως εὑρίσκομεν) νὰ παράγηται ἡ ἀκεραία λύσις αὐτῆς.

Λύοντες τὴν $\alpha\chi\pm\beta\psi=\gamma$ (1) πρὸς τὸν ἄγνωστον τὸν ἔχοντα μικρότερον συντελεστήν, ἔστω δὲ τοιοῦτος ὁ α, ἔχομεν $\chi=\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}$ (2)·

Ἔστω π τὸ ἀκέραιον πηλίκον τοῦ γ δι' α καὶ κ τὸ ἀκέραιον πηλίκον τοῦ β δι' α, γ' δὲ καὶ β' τ' ἀντίστοιχα ὑπόλοιπα, τότε τὸ πηλίκον $\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}$, ὡς ἔχον ἀκέραιον μὲν μέρος $\pi-\kappa\psi$, ὑπόλοιπον δὲ $\gamma'-\beta'\psi$, παρίσταται οὕτω $\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}=\pi-\kappa\psi+\frac{\gamma'-\beta'\psi}{\alpha}$, ἤτοι τότε ἔχομεν $\chi=\pi-\kappa\psi+\frac{\gamma'-\beta'\psi}{\alpha}$ (3), ἥτις δεικνύει ὅτι διὰ νὰ ἦναι ἀκεραία ἡ τιμὴ τοῦ χ, πρέπει ἡ ἀκεραία τιμὴ τοῦ ψ νὰ ἦναι τοιαύτη ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{\gamma'-\beta'\psi}{\alpha}$ νὰ καθίσταται ἴσον ἀκεραίῳ τινὶ ἀριθμῷ τ, ὅτε $\chi = \pi - \kappa\psi + \tau$ (4), ἤτοι πρέπει νὰ ἐπαληθεύηται ἡ ἐξίσωσις $\frac{\gamma' - \beta'\psi}{\alpha} = \tau$, ἢ $\beta'\psi + \alpha\tau = \gamma'$ (5).

Τότε, ἐὰν ἔχωμεν σύστημα ἀκεραίων τιμῶν τοῦ ψ καὶ τ ταυτοποιοῦν τὴν ἐξίσωσιν (5), λαμβάνομεν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ χ, ἀντικαθιστῶντες αὐτὸ εἰς τὸν τύπον (4), ἥτις μετὰ τῆς τιμῆς τοῦ ψ ἀποτελεῖ ἀκεραίαν λύσιν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως (1).

Ἡ ἐξίσωσις (5) ἥτις ἐπιδέχεται ἀπείρους ἀκεραίας λύσεις (ἐπειδὴ β' καὶ α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους) ἔχει τὸν συντελεστὴν τοῦ ψ μικρότερον τοῦ β καὶ τὸν ἀνεξάρτητον τῶν ἀγνώστων ὅρον γ' μικρότερον τοῦ ἀντιστοίχου γ τῆς (1), ἐφαρμόζοντες δὲ καὶ ἐν τῇ (5) τὴν μέθοδον δι' ἧς ἐκ τῆς (1) ἐλάβομεν αὐτήν, θέλομεν λάβει ἐξ αὐτῆς ἄλλην ἐξίσωσιν ἔχουσαν ἀπείρους ἀκεραίας λύσεις συντελεστὴν δὲ τοῦ μὲν χ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ τοῦ β' καὶ ἀνεξάρτητον τῶν ἀγνώστων ὅρον τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ γ' διὰ τοῦ β'. Ἐὰν δὲ καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην ἐφαρμόσωμεν τὴν ἰδίαν ἐργασίαν θέλομεν λάβει ἐξ αὐτῆς ἄλλην σχετιζομένην πρὸς τὴν ἐξ ἧς παρήχθη ὁμοίως ὅπως καὶ ἡ (5) πρὸς τὴν (1), ἐξακολουθοῦντες δὲ οὕτω θέλομεν σχηματίσει σειρὰν ἐξισώσεων τοιούτων, ὥστε ά.) Ἡ τελευταία νὰ ἔχῃ τὸν ἕνα ἐκ τῶν δύο συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων ἴσον τῇ μονάδι, ὅπερ πάντοτε εἶναι δυνατόν· διότι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων τῶν διαδοχικῶν ἐξισώσεων εἶναι τὰ διαδοχικὰ ὑπόλοιπα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν ζητοῦντες τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων τῆς δοθείσης, οἵτινες, ἐπειδὴ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἔξουσι κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον, ὅπερ εἶναι καὶ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν, ἴσον τῇ μονάδι, β'.) ἐκ δὲ τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς τελευταίας νὰ παράγωνται αἱ ἀκέραιαι λύσεις διαδοχικῶς πασῶν τῶν προηγουμένων αὐτῆς καὶ δὴ καὶ τῆς (1).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δῆλον ὅτι πρὸς εὕρεσιν μιᾶς ἀκεραίας λύσεως ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$ δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν διὰ τῆς ἀνωτέρω μεθόδου σειρὰν διαδοχικῶν ἐξισώσεων, ὁποία ἡ ἀνωτέρω, καὶ ἐκ τῆς ἀκεραίας λύσεως τῆς τελευταίας αὐτῶν νὰ εὕρωμεν μίαν ἀκεραίαν λύσιν, τῆς δοθείσης, ἐκ ταύτης δὲ νὰ σχηματίσωμεν τοὺς γενικοὺς τύπους δι' ὧν εὑρίσκομεν τὰς ἀπείρους λύσεις αὐτῆς, ὡς εἴπομεν.

Ἐφαρμόσωμεν τὴν ἀνωτέρω μέθοδον ἐπὶ τοῦ ἑξῆς μερικοῦ παραδείγματος $8\chi-29\psi=38$ (1)

λύοντες αὐτὴν πρὸς τὸν ἄγνωστον χ, τὸν ἔχοντα τὸν μικρότερον συντελεστήν, ἔχομεν

$$\chi=\frac{38+29\psi}{8} \qquad (2)$$

διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρανομαστοῦ εὑρίσκομεν ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου $4+3\psi$ καὶ ὑπόλοιπον $6+5\psi$, ὅθεν ὅλον τὸ πηλίκον εἶναι

$$5+3\psi+\frac{9+5\psi}{8}, \text{ ἤτοι } \chi=4+3\psi+\frac{6+4\psi}{8} \qquad (3).$$

Διὰ νὰ ἦναι ἀκεραία ἡ τιμὴ τοῦ χ πρέπει ἡ ἀκεραία τιμὴ τοῦ ψ νὰ ἦναι τοιαύτη ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{6+5\psi}{8}$ νὰ καθίσταται ἴσον ἀκεραίῳ τινὶ ἀριθμῷ τ, ὅτε $\chi=4+3\psi+\tau$ (4), ἤτοι πρέπει νὰ ἐπαληθεύηται ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{6+5\psi}{8}=\tau, \text{ ἢ } 5\psi-8\tau=-6 \qquad (5)$$

Λύοντες τὴν (5) ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον τὸν ἔχοντα τὸν μικρότερον συντελεστήν, δηλ. πρὸς τὸν ψ, ἔχομεν

$$\psi=\frac{8\tau-6}{5} \qquad (6)$$

διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρανομαστοῦ εὑρίσκομεν ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου $\tau-1$ καὶ ὑπόλοιπον $3\tau-1$, ὅλον δὲ τὸ πηλίκον εἶναι $\tau-1+\frac{3\tau-1}{5}$, ἤτοι $\psi=\tau-1+\frac{3\tau-1}{5}$ (7).

Διὰ νὰ ἦναι ἀκεραία ἡ τιμὴ τοῦ ψ πρέπει ἡ ἀκεραία τιμὴ τοῦ τ νὰ ἦναι τοιαύτη ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{3\tau-1}{5}$ νὰ καθίσταται ἴσον ἀκεραίῳ τινὶ ἀριθμῷ, τ′, ὅτε $\psi=\tau-1+\tau'$ (8)·
ἤτοι πρέπει νὰ ἐπαληθεύηται ἡ ἑξῆς ἐξίσωσις

$$\frac{3\tau-1}{5}=\tau', \text{ ἢ } 3\tau-5\tau'=1. \quad (9).$$

Λύοντες τὴν (9) πρὸς τὸ τ ἔχομεν $\tau=\dfrac{1+5\tau'}{3}$ (10).

Διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ εὑρίσκομεν ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου $0+\tau'$, ἢ τ' καὶ ὑπόλοιπον $1+2\tau'$· ὅλον δὲ τὸ πηλίκον εἶναι

$$\tau+\frac{2\tau'+1}{3}, \text{ ἤτοι } \tau=\tau'+\frac{2\tau'+1}{3} \quad (11).$$

Διὰ νὰ ἦναι ἀκεραία ἡ τιμὴ τοῦ τ, πρέπει ἡ ἀκεραία τιμὴ τοῦ τ' νὰ ἦναι τοιαύτη ὥστε τὸ κλάσμα $\dfrac{2\tau'+1}{3}$ νὰ καθίσταται ἴσον ἀκεραίῳ τινὶ ἀριθμῷ τ'', ὅτε $\tau=\tau'+\tau''$, (12), ἤτοι πρέπει νὰ ἐπαληθεύηται ἡ ἑξῆς ἐξίσωσις

$$\frac{1+2\tau'}{3}=\tau'', \text{ ἢ } 2\tau'-3\tau''=-1. \quad (13).$$

Λύοντες καὶ τὴν (13) πρὸς τὸ τ' ἔχομεν

$$\tau'=\frac{3\tau''-1}{2} \quad (14)$$

διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ εὑρίσκομεν ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου $\tau''-0$, ἢ τ'' καὶ ὑπόλοιπον $\tau''-1$ ὅλον δὲ τὸ πηλίκον $\tau''+\dfrac{\tau''-1}{2}$, ἤτοι $\tau'=\tau''+\dfrac{\tau''-1}{2}$ (15).

Διὰ νὰ ἦναι ἀκεραία ἡ τιμὴ τοῦ τ' πρέπει ἡ τοῦ τ'' νὰ ἦναι τοιαύτη ὥστε τὸ κλάσμα $\dfrac{\tau''-1}{2}$ νὰ καθίσταται ἴσον ἀκεραίῳ τινὶ ἀριθμῷ τ''', ὅτε $\tau'=\tau''+\tau'''$ (16), ἤτοι πρέπει νὰ ἐπαληθεύηται ἡ ἑξῆς ἐξίσωσις $\dfrac{\tau''-1}{2}=\tau'''$, ἢ $\tau''-2\tau'''=1$. (17).

ἥτις ἔχει τὴν μορφὴν τῆς πρώτης περιπτώσεως (334. α'.) καὶ ἐπιδέχεται τὴν ἀκεραίαν λύσιν $\tau'''=0$ καὶ $\tau''=1$.

Ἐκ τῆς λύσεως δὲ τῆς (17) εὑρίσκομεν ἀκεραίαν λύσιν τῆς (13) $\tau''=1$ καὶ $\tau'=1$, διότι ἐκ μὲν τῆς (17) ἔχομεν τὴν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ τ'', ἐκ δὲ τῆς (16) ἀντικαθιστῶντες ἐν αὐτῇ τὰς τιμὰς τῶν $\tau''=1$ καὶ $\tau'''=0$ λαμβάνομεν τὴν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ $\tau'=1$.

Ἐκ δὲ τῆς ἀκεραίας λύσεως τῆς (13) εὑρίσκομεν ἀκεραίαν λύσιν τῆς (9), $\tau=2$ καὶ $\tau'=1$· διότι ἐκ τῆς ἀκεραίας λύσεως τῆς (13) ἔχομεν τὴν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ $\tau'=1$, ἥτις μετὰ τῆς ἀκεραίας τιμῆς τοῦ $\tau=2$, ἣν λαμβάνομεν ἐκ τῆς (12) τῇ ἀντικαταστάσει ἐν αὐτῇ τῶν $\tau'=1$ καὶ $\tau''=1$, ἀποτελεῖ ἀκκεραίαν λύσιν τῆς (9).

Ἐκ δὲ τῆς ἀκεραίας λύσεως ταύτης εὑρίσκομεν ἀκεραίαν λύσιν τῆς (5) $\psi=2$ καὶ $\tau=2$· διότι ἐκ τῆς ἀκεραίας λύσεως τῆς (9) ἔχομεν τὴν ἀκεραίαν τιμὴν $\tau=2$, ἥτις μετὰ τῆς ἀκεραίας τιμῆς τοῦ $\psi=2$, ἣν λαμβάνομεν ἐκ τῆς (8) τῇ ἀντικαταστάσει ἐν αὐτῇ $\tau=2$ καὶ $\tau'=1$, ἀποτελεῖ ἀκεραίαν λύσιν τῆς (5). Ἐκ δὲ τῆς ἀκεραίας λύσεως ταύτης εὑρίσκομεν ἀκεραίαν λύσιν τῆς (1) $\chi=12$ καὶ $\psi=2$· διότι ἐκ τῆς ἀκεραίας λύσεως τῆς (5) ἔχομεν τὴν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ $\psi=2$, ἥτις μετὰ τῆς ἀκεραίας τιμῆς τοῦ $\chi=12$, ἣν ἐκ τῆς (4) λαμβάνομεν τῇ ἀντικαταστάσει ἐν αὐτῇ τῶν τιμῶν τῶν $\psi=2$ καὶ $\tau=2$, ἀποτελεῖ ἀκεραίαν λύσιν τῆς (1).

Οἱ δὲ γενικοὶ τύποι τῶν ἀπείρων ἀκεραίων λύσεων αὐτῆς εἶναι (337. Σημ.)

$$\chi=12-(-29)\tau=12+29\tau$$
$$\chi=\qquad\qquad 2+\ 8\tau$$

οἵτινες διὰ τὰς ἀπείρους διαδοχικὰς τιμὰς τοῦ τ

$$\left.\begin{array}{l} \ldots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots \\ \chi=\ldots -75,-46,-17,\ 12,\ 41,\ 70,\ 69\ \cdots \\ \psi=\ldots -22,-14,-\ 6,\ 2,\ 10,\ 18,\ 26\ \cdots \end{array}\right\}$$ δίδουσι τὰς ἀντιστοίχους ἀπείρους ἀκεραίας λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Σημ. Ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς τοῦ χ τῆς ἐξισώσεως τοῦ προηγουμένου παραδείγματος $8\chi-23\psi=(1)$ δὲν εἶναι μέγας ἀριθμός, εὐκόλως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μίαν λύσιν διὰ τῆς ἄλλης μεθόδου, δηλ. διὰ τῆς διαδοχικῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ ψ εἰς τὸν τύπον (2) δι' ἀριθμῶν ἀπὸ 0 μέχρις $8-1$ καὶ ἐκτελέσεως τῶν πράξεων, καθ' ἣν διὰ τῆς τρίτης ἀντικαταστάσεως τοῦ ψ διὰ 2 ἠθέλομεν εὕρει τὴν καὶ διὰ τῆς ἄλλης μεθόδου εὑρεθεῖσαν ἀκεραίαν λύσιν $\chi=12$ καὶ $\psi=2$.

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΠΡΟΣ ΕΥΡΕΣΙΝ ΑΚΕΡΑΙΑΣ ΛΥΣΕΩΣ ΕΚΤΕΛΟΥΜΕΝΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ.

341 Ἐπὶ τῶν πράξεων τῶν ἐκτελουμένων πρὸς εὕρεσιν ἀκεραίας τινος λύσεως τῆς $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$, ὅταν α καὶ β ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, δυνάμεθα νὰ κάμωμεν τὰς ἑξῆς ἁπλοποιήσεις.

ά. Ὅταν ὁ ἕτερος τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων, π. χ. ὁ τοῦ χ, καὶ ὁ ἀνεξάρτητος αὐτῶν ὅρος, ὁ γ, ἔχουσι κοινόν τινα διαιρέτην δ. τότε θέτοντες $\psi=\delta\psi'$ καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς δοθείσης διὰ δ, εὑρίσκομεν ἁπλουστέραν ἐξίσωσιν ἐκ τῆς ἀκεραίας λύσεως τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τὴν τῆς δοθείσης, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ψ' ἐπὶ δ, τὸν κοινὸν διαιρέτην τοῦ α καὶ τοῦ γ. Ἐὰν καλέσωμεν α καὶ γ τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τῶν α καὶ γ διὰ τοῦ δ, ὅτε $\alpha=\alpha'\delta$ καὶ $\gamma=\gamma'\delta$, καὶ ἀντικαστήσωμεν τοὺς α καὶ γ, ἐν τῇ (1) διὰ τῶν ἴσων αὐτοῖς ἔχομεν

$$\alpha'\delta\chi+\beta\psi=\gamma'\delta.$$

καὶ διαιροῦντες τὰ μέλη αὐτῆς διὰ δ, τὴν ἑξῆς.

$$\alpha'\chi+\frac{\beta\psi}{\delta}=\gamma'.$$

Ἐπειδὴ δὲ διὰ τὰς ἀκεραίας λύσεις $\alpha'\chi$ καὶ γ' εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, πρέπει καὶ $\frac{\beta\psi}{\delta}$ νὰ ἦναι ἀκέραιος ἀριθμός, ἤτοι πρέπει $\beta\psi$ νὰ διαιρῆται διὰ δ, καὶ ἐπειδὴ ὁ δ δὲν διαιρεῖ τὸν β (διότι α καὶ β ὑπετέθησαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους) πρέπει νὰ διαιρῇ τὴν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ ψ, ἥτις μετὰ τῆς τοῦ χ ἀποτελεῖ ἀκεραίαν λύσιν· ἤτοι ἐὰν καλέσωμεν ψ' τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ψ διὰ δ, τὸ μὲν $\psi=\delta\psi'$, ἡ δὲ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ (2) γίνεται $\alpha'\delta\chi+\beta\delta\psi'=\gamma'\delta$, ὅθεν

$$\alpha'\chi+\beta\psi'=\gamma' \qquad (2)$$

Δῆλον δὲ ὅτι ἐκ τῆς ἀκεραίας λύσεως ταύτης λαμβάνομεν τὴν τῆς (1), ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀκεραίαν τιμὴν ψ' ἐπὶ δ, τὸν κοινὸν διαιρέτην τῶν α καὶ γ.

β'. Ὅταν ἐν διαιρέσει τινί, λαμβάνοντες τὸ πηλίκον κατ' ἔλλειψιν ἔχομεν ὑπόλοιπον μεῖζον τοῦ ἡμίσεως τοῦ διαιρέτου, τότε λαμβάνομεν τὸ πηλίκον καθ' ὑπεροχὴν διὰ νὰ ἔχωμεν ὑπόλοιπον ἔλασσον τοῦ ἡμίσεως τοῦ διαιρέτου. Θεωρήσωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ γ δι' α, ἧς τὸ μὲν πηλίκον ἔστω π, τὸ δὲ ὑπόλοιπον υ, ἔχομεν τὴν ἑξῆς ἰσότητα

$$γ=απ+υ$$

προσθέτοντες δὲ καὶ ἀφαιροῦντες εἰς τὸ δεύτερον μέλος α, τὴν ἑξῆς $$γ=απ+α-α+υ$$

ἥτις γράφεται καὶ οὕτω $$γ=α(π+1)-(α-υ)$$

Τὸ μὲν υ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως γ δι' α, ἐν ᾗ τὸ πηλίκον ἐλήφθη κατ' ἔλλειψιν, τὸ δὲ α—υ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς αὐτῆς διαιρέσεως, ἐν ᾗ τὸ πηλίκον ἐλήφθη καθ' ὑπεροχήν. Δῆλον δὲ ὅτι, ὅταν τὸ υ ἦναι μεῖζον τοῦ ἡμίσεως τοῦ διαιρέτου α, τότε τὸ α—υ εἶναι ἔλασσον τοῦ ἡμίσεως τοῦ ἰδίου διαιρέτου.

γ'. Ὅταν οἱ ὅροι τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ κλάσματος, ὅπερ ἐξισοῦται ἀπροσδιορίστῳ τινὶ ἀκεραίῳ ἀριθμῷ, ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην, δηλ. ὅταν

$$\frac{γ'-β'ψ}{α} \text{ δύναται νὰ γραφῇ οὕτω } \frac{κ(γ''-β''ψ)}{α}$$

τότε, ἐξισοῦμεν ἀπροσδιορίστῳ τινὶ ἀκεραίῳ ἀριθμῷ τ μόνον τὸ κλάσμα $\frac{γ''-β''ψ}{α}$. διότι ὁ α ὡς πρῶτος πρὸς τὸν β καὶ δὴ πρὸς καὶ τὸν παράγοντα αὐτοῦ κ, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον παράγοντα τοῦ ἀριθμητοῦ, τὸν $γ''-β''ψ$. Τότε δὲ τὸ κλάσμα $\frac{κ(γ''-β''ψ)}{α}$ θέλει παρασταθῇ ἐν τῷ τύπῳ τοῦ χ διὰ κτ.

δ'. Ὅταν ὁ συντελεστὴς τοῦ ἀγνώστου ἐν τῷ ἀριθμητῇ τοῦ κλάσματος, ὅπερ ἐξισοῦται ἀπροσδιορίστῳ τινὶ ἀκεραίῳ ἀριθμῷ, εἶναι ἴσος τῇ μονάδι, δηλ. ὅταν τὸ κλάσμα ἔχῃ τὴν ἑξῆς μορφὴν $\frac{γ'+ψ}{α}$, τότε δυνάμεθα ἀμέσως νὰ εὕρωμεν ἀκεραίαν λύσιν, διδόντες τῷ ἀγνώστῳ τιμὴν ἴσην τῷ ἀνεξαρτήτῳ τοῦ ἀγνώστου ὅρῳ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμητοῦ μὲ ἀντίθετον σημεῖον, δηλ. λαμβάνοντες $ψ=-γ'$· διότι ἡ τοιαύτη τιμὴ τοῦ ψ, ἐπειδὴ καθιστᾷ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ δὴ καὶ αὐτὸ κλάσμα μηδέν, καθιστᾷ τὸν ἕτερον ἄγνωστον ἀριθμὸν ἀκέραιον καὶ μετ' αὐτοῦ ἀποτελεῖ ἀκεραίαν λύσιν τῆς ἀντιστοίχου ἐξισώσεως.

Παράδειγμα ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$85\chi - 47\psi = 500.$$

Ἐπειδὴ ὁ 85 καὶ ὁ 500 ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην, θέτοντες $\psi = 5\psi'$ καὶ διαιροῦντες διὰ 5

$$85\chi - 47.5\psi' = 500 \text{ καὶ}$$

λαμβάνομεν $\quad 17\chi - 47\ \psi' = 100$ ὅθεν

$$\chi = \frac{100 + 47\ \psi'}{17}$$

Τὰ κατ' ἔλλειψιν πηλίκα τῶν διαιρέσεων τῶν 100 καὶ 47 διὰ 17 εἶναι 5 καὶ 2 τὰ δὲ ὑπόλοιπα αὐτῶν 15 καὶ 13, ὧν ἑκάτερον εἶναι μεῖζον τοῦ ἡμίσεως τοῦ διαιρέτου. Διὸ προτιμῶμεν νὰ λάβωμεν τὰ καθ' ὑπεροχὴν πηλίκα, ἅπερ εἶναι 6 καὶ 3, τὰ δὲ ὑπόλοιπα -2 καὶ -4· ὅθεν

$$\chi = \frac{100 + 47\psi'}{17} = 6 + 3\psi' - \frac{2 + 4\psi'}{17}$$

Ἤδη κατὰ τ' ἀνωτέρω θέλομεν θέσει

$$\frac{2 + 4\psi'}{17} = \tau$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος ἔχει εἰς τοὺς ὅρους του κοινὸν παράγοντα τὸν 2 καὶ δύναται νὰ γραφῇ οὕτω

$\dfrac{2(1 + 2\psi')}{17}$, θέλομεν ἔχει τὴν ἑξῆς ἐξίσωσιν $\dfrac{1 + 2\psi'}{17} = \tau$·

ὅθεν $2\psi' - 17\tau = -1$ (2), τότε τὸ μὲν $\chi = 6 + 3\psi' - 2\tau$.

Ἐκ δὲ τῆς (2) λαμβάνομεν

$$\psi' = \frac{17\tau - 1}{2} = 8\tau + \frac{\tau - 1}{2}$$

Ἤδη θέλομεν θέσει $\dfrac{\tau - 1}{2} = \tau'$ κτλ. ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ ἔχει τὸν ἄγνωστον μὲ συντελεστὴν τὴν μονάδα, λαμβάνομεν ἀμέσως μίαν ακεραίαν λύσιν, θέτοντες $\tau = +1$, ἥτις τὸ $\dfrac{\tau - 1}{2}$, ἤτοι τὸ τ', καθιστᾷ μηδὲν

Τὸ $\psi' = 8(+1) + 0 = 8$

Τὸ $\chi = 6 + 3.(+8) - \dfrac{2 + 4(+8)}{17} = 6 + 24 - \dfrac{2 + 32}{17} = 6 + 24 - \dfrac{34}{17}$,

ἢ $\chi = 6 + 24 - 2 = 28$

Τὸ $\psi = 5\psi' = 5 \times 8 = 40$.

Λοιπὸν αἱ τιμαὶ τῶν χ, καὶ ψ αἱ ἀποτελοῦσαι ἀκεραίαν λύσιν τῆς (1) εἶναι $\chi=28$ καὶ $\psi=40$.

Οἱ δὲ γενικοὶ τύποι τῶν λύσεων αὐτῆς εἶναι

$$\begin{cases} \chi=28+47\tau \\ \psi=40+85\tau. \end{cases}$$

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΚΑΙ ΘΕΤΙΚΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ.

$$\alpha\chi+\beta\psi=\gamma \qquad (1)$$

342 Ἐν τῇ ἀνωτέρω θεωρίᾳ ὑποθέτομεν τοὺς συντελεστὰς τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ ἀριθμοὺς ἀλγεβρικούς, ὅθεν ἡ γενομένη θεωρία ἁρμόζει εἰς τὰς ἑξῆς ἐξισώσεις.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\chi+\beta\psi=\ \ \gamma \\ \alpha\chi-\beta\psi=\ \ \gamma \\ \alpha\chi+\beta\psi=-\gamma \\ \alpha\chi-\beta\psi=-\gamma \end{array}\right\}$$ ἐν αἷς ὁ εἷς τῶν συντελεστῶν, ὁ τοῦ χ, ὑποτίθεται θετικὸς (336)

Ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων ἐξισώσεων ἡ μὲν τρίτη ἀδύνατον νὰ ἐπιδέχηται ἀκεραίας καὶ θετικὰς τιμάς· διότι τοιαῦται τιμαὶ τοῦ χ καὶ ψ καθιστῶσι τὸ πρῶτον μέλος ἄθροισμα θετικῶν ἀριθμῶν, ὅπερ ὡς θετικὸς ἀριθμὸς δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς τῷ τοῦ δευτέρου μέλους, ὅστις ὑπετέθη ἀριθμὸς ἀρνητικός. Ἡ δὲ τετάρτη εἶναι ὁμοία τῇ δευτέρᾳ· διότι τῇ μεταβολῇ τῶν σημείων τῶν ὅρων αὐτῆς γίνεται ἐξίσωσις, ἔχουσα τὸν ἕνα ἐκ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων ἀρνητικὸν τοὺς δὲ ἄλλους ὅρους αὐτῆς θετικούς, ὡς καὶ ἡ δευτέρα· ὥστε ἔχομεν νὰ ἐξετάσωμεν τὰς ἑξῆς δύο ἐξισώσεις

$$\alpha\chi+\beta\psi=\gamma \qquad (1)$$
$$\alpha\chi-\beta\psi=\gamma \qquad (2)$$

αἵτινες ἀποτελοῦσι τὰς ἑξῆς δύο γενικὰς περιστάσεις τῆς (1)

α'.) ὅταν οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων ἔχωσι τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ β'.) ὅταν ἔχωσιν ἀντίθετα σημεῖα.

343. Τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$, καθ' ἑκατέραν τῶν ἀνωτέρω δύο περιπτώσεων, εὑρίσκομεν ἐκ τῶν τύπων τῶν ἀκεραίων λύσεων αὐτῆς, διακρίνοντες τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις δι' ἀνισοτήτων (174. Σημ..), προσδιορίζοντες

δι' ἐπιλύσεων αὐτῶν τὰ ὅρια τῶν τιμῶν τοῦ ἀγνώστου αὐτῶν τ, καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς τύπους τὰς μεταξὺ τῶν προσδιορισθέντων ὁρίων τιμὰς τοῦ ἀπροσδιορίστου τ. τουτέστι διὰ τῶν γενικῶν τύπων τῶν ἀντιστοίχων εἰς τὰς (1) καὶ (2) ἐξισώσεις

$$(3)\ \left.\begin{array}{l}\chi=\theta-\beta\tau\\ \psi=\varkappa+\alpha\tau\end{array}\right\}\ \text{ἀντιστοίχων τῇ}\quad (1)$$

$$(4)\ \left.\begin{array}{l}\chi=\theta+\beta\tau\\ \psi=\varkappa+\alpha\tau\end{array}\right\}\ \text{ἀντιστοίχων τῇ}\quad (2)$$

σχηματίζοντες τὰς ἑξῆς ἀνισότητας

$$(\nu)\ \left.\begin{array}{l}\theta-\beta\tau>0\\ \varkappa+\alpha\tau>0\end{array}\right\}\ \text{διὰ τὴν ἐξίσωσιν}\quad (1)$$

$$(\mu)\ \left.\begin{array}{l}\theta+\beta\tau>0\\ \varkappa+\alpha\tau>0\end{array}\right\}\ \text{διὰ τὴν ἐξίσωσιν}\quad (2)$$

Λύοντες αὐτὰς προσδιορίζομεν τὰ ὅρια τῶν ἀκεραίων τιμῶν τοῦ τ, εἴτε εἶναι ἄπειροι τοιαῦται, εἴτε περιωρισμέναι, καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς γενικοὺς τύπους τὰς μεταξὺ τῶν προσδιορισθέντων ὁρίων τοῦ τ ἀκεραίας τιμὰς αὐτοῦ λαμβάνομεν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῶν ἀντιστοίχων ἐξισώσεων (1) καὶ (2).

Ζητήσωμεν πρῶτον τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1) $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$. Λύοντες τὰς ἀντιστοίχους αὐτῇ ἀνισότητας (ν) λαμβάνομεν τοὺς ἑξῆς τύπους τοῦ τ

$$\left.\begin{array}{l}\tau<\dfrac{\theta}{\beta}\ \text{καὶ}\\[2ex] \tau>-\dfrac{\varkappa}{\alpha}\end{array}\right\}\ (5)$$

οἵτινες δεικνύουσιν ὅτι, ἀνώτερον μὲν ὅριον τῶν ἀκεραίων τιμῶν τοῦ τ, τῶν καθιστωσῶν ἀκεραίους καὶ θετικοὺς ἀριθμοὺς τοὺς τύπους τῶν χ καὶ ψ, εἶναι ὁ $\frac{\theta}{\beta}$, δηλ. ὅτι πᾶσαι αἱ τοιαῦται τιμαὶ τοῦ τ πρέπει νὰ ἦναι ἀριθμοὶ μικρότεροι τοῦ $\frac{\theta}{\beta}$, κατώτερον δὲ ὅριον τῶν ἰδίων ἀκεραίων τιμῶν τοῦ τ εἶναι ὁ $-\frac{\varkappa}{\alpha}$, δηλ. ὅτι πᾶσαι αἱ τοιαῦται τιμαὶ τοῦ τ πρέπει νὰ ἦναι μείζονες τοῦ $-\frac{\varkappa}{\alpha}$, τουτέστιν αἱ ἀκέραιαι τιμαὶ τοῦ τ εἶναι οἱ ἀκέραιοι οἱ περιεχόμενοι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $\frac{\theta}{\beta}$ καὶ $-\frac{\varkappa}{\alpha}$, δηλ. οἱ μικρότεροι μὲν τοῦ $\frac{\theta}{\beta}$ μείζονες δὲ τοῦ $-\frac{\varkappa}{\alpha}$.

Ζητήσωμεν δεύτερον τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως. (2) $\alpha\chi-\beta\psi=\gamma$
λύοντες τὰς ἀντιστοίχους αὐτῇ ἀνισότητας (μ) λαμβάνομεν τοὺς ἑξῆς τύπους τοῦ τ.

$$\left.\begin{array}{l} \tau > -\frac{\theta}{\beta} \\ \tau > -\frac{\varkappa}{\alpha} \end{array}\right\} (7)$$

Οἵτινες δεικνύουσιν ὅτι κατώτερα ὅρια τῶν ζητουμένων ἀκεραίων τιμῶν τοῦ τ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ $-\frac{\theta}{\beta}$ καὶ $-\frac{\varkappa}{\alpha}$, δηλ. ὅτι πᾶσαι αἱ ἀκέραιαι τιμαὶ τοῦ τ, αἱ μείζονες τῶν ἀριθμῶν $-\frac{\theta}{\beta}$ καὶ $-\frac{\varkappa}{\alpha}$ ἢ τοῦ μείζονος αὐτῶν, αἵτινες, εἶναι ἄπειροι, εἶναι τοιαῦται· ἀνώτερον δὲ ὅριον εἶναι τὸ ἄπειρον, ὅθεν δῆλον ὅτι αἱ διαδοχικαὶ ἀκέραιαι τιμαὶ τοῦ τ, αἵτινες ἀντικαθιστάμεναι εἰς τοὺς ἀντιστοίχους τῇ ἐξισώσει (2) τύπους (4), παρέχουσιν ἄπειρα διαδοχικὰ ζεύγη ἀκεραίων καὶ θετικῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων χ καὶ ψ, ἀποτελοῦντα τὰς ἀπείρους διαδοχικὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις τῆς (2).

ΣΗΜ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δῆλον εἶναι

α΄. Ὅταν οἱ σεντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων ἔχωσι τὸ αὐτὸ σημεῖον, τότε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκεραίων καὶ θετικῶν λύσεων εἶναι ὡρισμένος, ἐνίοτε δὲ καὶ δὲν ὑπάρχουσι τοιαῦται λύσεις.

β΄. Ὅταν οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων ἔχωσι τὸ αὐτὸ σημεῖον, τότε ὑπάρχουσιν ἄπειροι ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.

Πρόβλημα **Α΄**. Εὑρεῖν δύο κλάσματα, ὧν τὸ μὲν ἄθροισμα νὰ ἦναι $\frac{39}{35}$, οἱ δὲ παρονομασταὶ αὐτῶν νὰ ἦναι 5 καὶ 7.

Ἐν τῷ παρόντι προβλήματι ἄγνωστοι εἶναι οἱ ἀριθμηταὶ τῶν κλασμάτων· ἔστωσαν οὗτοι χ καὶ ψ.

Τὰ ζητούμενα κλάσματα εἶναι

$\frac{\chi}{5}$ καὶ $\frac{\psi}{7}$, ἡ δ' ἐξίσωσις $\frac{\chi}{5}+\frac{\psi}{7}=\frac{39}{35}$, ὅθεν

$$7\chi+5\psi=39. \qquad (1)$$

Ἐξ ἧς διὰ τῆς ἑτέρας τῶν πρὸς λύσιν αὐτῆς μεθόδων λαμβάνομεν τὴν ἀκεραίαν λύσιν

$$\chi=2 \text{ καὶ } \psi=5\cdot$$

δι' αὐτῆς δὲ τοὺς τύπους τῶν ἀκεραίων λύσεων

$$\left.\begin{array}{l}\chi=2-5\tau\\ \psi=5+7\tau\end{array}\right| \text{ ἢ } \begin{array}{l}\chi=2+5\tau\\ \psi=5-7\tau.\end{array}$$

Καὶ ἐκ τούτων τὰς ἑξῆς ἀνισότητας

$$\left.\begin{array}{l}2-5\tau>0\\ 5+7\tau>0\end{array}\right\} \text{ ἢ } \begin{array}{l}2+5\tau>0\\ 5-7\tau>0\end{array}$$

Ἐξ ὧν λαμβάνομεν τοὺς ἑξῆς τύπους τοῦ τ

$$\left.\begin{array}{l}\tau<\frac{2}{5}\\ \tau>-\frac{5}{7}\end{array}\right\} \text{ ἢ } \begin{array}{l}\tau>-\frac{2}{5} \text{ καὶ}\\ \tau<\frac{5}{7}\end{array}$$

οἵτινες δεικνύουσιν ὅτι ἀκέραιαι τιμαί, παρέχουσαι τῇ ἀντικαταστάσει τοῦ τ εἰς τοὺς τύπους τῶν χ καὶ ψ ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1), εἶναι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ περιεχόμενοι μεταξὺ $\frac{2}{5}$ καὶ $-\frac{5}{7}$, ἢ μεταξὺ $-\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{5}{7}$· τοιοῦτος δὲ μόνον εἷς εἶναι, τὸ μηδέν, ὅπερ, ἀντικαθιστάμενον εἰς τοὺς τύπους τῶν χ καὶ ψ, παράγει τὴν εὑρεθεῖσαν ἀκεραίαν λύσιν· ὅθεν καὶ τὸ πρόβλημα μίαν μόνην λύσιν ἐπιδέχεται τὴν ἑξῆς $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{5}{7}$, δηλ. μόνον αὐτὰ τὰ δύο κλάσματα εἶναι ὁποῖα τὰ ζητούμενα.

Πρόβλημα Β'. Εὑρεῖν κλάσμα τοιοῦτον ὥστε, ὅταν ὁ μὲν ἀριθμητὴς αὐξάνῃ κατὰ 2, ὁ δὲ παρονομαστὴς κατὰ 10 νὰ καθίσταται ἴσον τῷ $\frac{5}{9}$.

Ἔστω $\frac{\chi}{\psi}$ τὸ ζητούμενον κλάσμα.

Ἡ ἐξίσωσις εἶναι $\frac{\chi+2}{\psi+10}=\frac{5}{9}$, ὅθεν

$$9\chi-5\psi=32 \qquad (2)$$

ἐξ ἧς διὰ τῆς ἑτέρας τῶν πρὸς λύσιν αὐτῆς μεθόδων λαμβάνομεν τὴν ἀκεραίαν λύσιν $\chi=3$ καὶ $\psi=-1$, δι' αὐτῆς δὲ τοὺς τύπους τῶν ἀκεραίων λύσεων

$$\chi=3+5\tau$$
$$\psi=-1+9\tau.$$

Καὶ ἐκ τούτων τὰς ἑξῆς ἀνισότητας

$$\left.\begin{array}{l}3+5\tau>0\\-1+9\tau>0\end{array}\right\}\text{ ὅθεν }\begin{array}{l}\tau>-\frac{3}{5}\\\tau>\frac{1}{9}\end{array}$$

αἵτινες δεικνύουσιν ὅτι ἀκέραιαι τιμαὶ τοῦ τ, παρέχουσαι ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως (2) καὶ δὴ καὶ τοῦ προβλήματος, εἶναι πάντες οἱ ἀπὸ τῆς 1 μέχρι τοῦ ∞ ἄπειροι διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ $1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots$

αἱ ἀντίστοιχοι δὲ τιμαὶ τῶν χ καὶ ψ αἱ ἀποτελοῦσαι τὰς ἀπείρους ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως εἶναι.

$$\left.\begin{array}{l}\chi=8, 13, 18, 23, 28, \cdots\\\psi=8, 17, 26, 35, 44, \cdots\end{array}\right.$$

Τὰ δ' ἄπειρα κλάσματα τ' ἀποτελοῦντα τὰς ἀπείρους λύσεις τοῦ προβλήματος εἶναι.

$$\frac{8}{8}, \frac{13}{17}, \frac{18}{26}, \frac{23}{35}, \frac{28}{44} \ldots$$

Πρόβλημα Γ'. Ἠγόρασέ τις χήνας καὶ πετεινούς, τὰς μὲν χήνας πρὸς 2,90 δραχμὰς ἑκάστην, τοὺς δὲ πετεινοὺς πρὸς 1,70 ἕκαστον, ἐπλήρωσε δὲ διὰ τὰς χήνας 7 δραχμὰς περισσότερον. Ζητεῖται πόσας χήνας ἠγόρασε καὶ πόσους πετεινούς;

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν χηνῶν καὶ ψ ὁ τῶν πετεινῶν.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$2{,}90\chi-1{,}70\psi=7$$

ἁπλοποιουμένη δὲ ἡ ἑξῆς

$$29\chi-17\psi=70 \qquad (3)$$

ἐξ ἧς διὰ τῆς ἑτέρας τῶν πρὸς λύσιν αὐτῆς μεθόδων λαμβάνομεν τὴν ἀκεραίαν λύσιν $\chi=3$ καὶ $\psi=1$, δι' αὐτῆς δὲ τοὺς τύπους τῶν ἀκεραίων λύσεων αὐτῆς·

$$\chi=3+17\tau$$
$$\psi=1+29\tau.$$

Ἐκ δὲ τούτων τὰς ἀνισότητας

$$\left.\begin{matrix}3+17\tau>0\\1+29\tau>0\end{matrix}\right\} \text{ ὅθεν } \begin{matrix}\tau>-\frac{3}{17}\\\tau>-\frac{1}{29}\end{matrix}$$

αἵτινες δεικνύουσιν ὅτι, ἀκέραιαι τιμαὶ τοῦ τ, παρέχουσαι ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως (3) καὶ δὴ καὶ τοῦ προβλήματος, εἶναι πάντες οἱ ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τοῦ ∞ ἄπειροι διαδοχικοὶ ἀριθμοί, ἤτοι δεικνύουσιν ὅτι $\tau=0,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots\ldots$

ἀντίστοιχοι δὲ τιμαὶ τῶν χ καὶ ψ, ἀποτελοῦσαι τὰς ἀπείρους ἀκεραίας λύσεις τοῦ προβλήματος, εἶναι.
$$\left\{\begin{matrix}\chi=3,\ 20,\ 37,\ 54,\ 71\ldots\\\psi=1,\ 30,\ 59,\ 88,\ 117\ldots\end{matrix}\right.$$

Πρόβλημα Δ'. Ἔμπορος ἠγόρασεν ἵππους καὶ βόας ἀντὶ **1770** ταλλήρων, πληρώσας δι' ἕκαστον μὲν ἵππον **31** τάλληρα, δι' ἕκαστον δὲ βοῦν **21**. Πόσους ἵππους καὶ πόσους βόας ἠγόρασε;

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἵππων καὶ ψ ὁ τῶν βοῶν.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$31\chi+21\psi=1770 \qquad (4)$$

Ἐξ ἧς διὰ τῆς ἑτέρας τῶν πρὸς λύσιν αὐτῆς μεθόδων λαμβάνομεν τὴν ἀκεραίαν λύσιν $\chi=9$ καὶ $\psi=71$, δι' αὐτῆς δὲ τοὺς τύπους τῶν ἀκεραίων λύσεων

$$\begin{matrix}\chi=9\ -21\tau\\\psi=71+31\tau\end{matrix}$$

Καὶ ἐκ τούτων τὰς ἀνισότητας

$$\left.\begin{matrix}9-21\tau>0\\71+31\tau>0\end{matrix}\right\} \text{ ὅθεν } \begin{matrix}\tau<\frac{9}{21}\\\tau>-\frac{71}{31}\end{matrix}$$

αἵτινες δεικνύουσιν ὅτι ἀκέραιαι τιμαὶ τοῦ τ, παρέχουσαι ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως (4) καὶ δὴ καὶ τοῦ προβλήματος, εἶναι οἱ περιεχόμενοι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν $\frac{9}{21}$ καὶ $-\frac{71}{31}$

οἵτινες εἶναι οἱ ἑξῆς $\tau=0,-1,-2.$

ἀντίστοιχοι δὲ τιμαὶ τῶν χ καὶ ψ, ἀποτελοῦσαι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως καὶ τοῦ προβλήματος, εἶναι
$$\left\{\begin{matrix}\chi=9,\ 30,\ 51.\\\psi=71,40,\ \ 9.\end{matrix}\right.$$

Πρόβλημα Ε'. Νὰ σχηματισθῇ ποσὸν 23 δραχμῶν διὰ νομισμάτων δύο εἰδῶν μόνον, πενταδράχμων καὶ ἑπταδράχμων. Ζητεῖται πόσα θὰ ληφθῶσιν ἐξ ἑκατέρου εἴδους;

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν πενταδράχμων καὶ ψ ὁ τῶν ἑπταδράχμων. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$5\chi+7\psi=24 \qquad (5)$$

ἐξ ἧς εὐκόλως λαμβάνομεν τὴν ἀκεραίαν λύσιν

$$\chi=6 \text{ καὶ } \psi=-1$$

δι' αὐτῆς δὲ τοὺς τύπους

$$\chi=6-7\tau, \text{ καὶ } \psi=-1+5\tau$$

Καὶ ἐκ τούτων τὰς ἀνισότητας

$$\begin{array}{lcl} 6-7\tau>0 & & \tau<\frac{6}{7} \\ & \text{ὅθεν} & \\ -1+5\tau>0 & & \tau>\frac{1}{5} \end{array}$$

οἵτινες δεικνύουσιν ὅτι ἀκεραία τιμὴ τοῦ τ, παρέχουσα τῇ ἀντικαταστάσει αὐτῆς εἰς τοὺς τύπους τῶν χ καὶ ψ ἀκεραίαν καὶ θετικὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως καὶ δὴ καὶ τοῦ προβλήματος, οὐδεμία ὑπάρχει· διότι μεταξὺ τῶν κλασμάτων $\frac{1}{5}$ καὶ $\frac{6}{7}$ οὐδεὶς ἀκέραιος ἀριθμὸς περιέχεται.

Πρόβλημα ΣΤ'. Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 1591 εἰς δύο μέρη διαιρετά, τὸ μὲν διὰ 23, τὸ δὲ διὰ 34.

Ἔστωσαν χ καὶ ψ τὰ πηλίκα τῶν μερῶν τοῦ 1591 διὰ 23 καὶ 34.

Ἐν τῷ παρόντι προβλήματι κάμνομεν χρῆσιν βοηθητικῶν ἀγνώστων, λαμβάνοντες ὡς ἀγνώστους τὰ πηλίκα, ἐν ᾧ ἄγνωστοι εἶναι τὰ μέρη τοῦ 1591· διότι τὰ μέρη αὐτοῦ ὡς διαιρετέοι εἶναι γινόμενα τῶν ἀγνώστων πηλίκων ἐπὶ τοὺς γνωστοὺς διαιρέτας 23 καὶ 34· καὶ κατ' ἀκολουθίαν εὑρίσκομεν τὰ ζητούμενα μέρη, ἀφοῦ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα, πολλαπλασιάζοντες αὐτὰ ἐπὶ τοὺς ἀντιστοίχους διαιρέτας.

Κατὰ ταῦτα 23χ καὶ 34ψ παριστῶσι τὰ μέρη τοῦ 1591, ὅθεν ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$23\chi+34\psi=1591 \qquad (6).$$

Ἐξ ἧς διὰ τῆς ἑτέρας τῶν πρὸς λύσιν αὐτῆς μεθόδων λαμβάνομεν τὴν ἀκεραίαν λύσιν

$$\chi=81, \qquad \psi=-8,$$

δι᾽ αὐτῆς δὲ τοὺς τύπους

$$\chi=81-34\tau, \qquad \psi=-8+23\tau.$$

Καὶ ἐκ τούτων τὰς ἀνισότητας

$$\left.\begin{array}{l} 81-34\tau>0 \\ -8+23\tau>0 \end{array}\right\} \text{ ὅθεν } \begin{array}{l} \tau<\frac{81}{34} \\ \tau>\frac{8}{23} \end{array}$$

οἵτινες δεικνύουσιν ὅτι ἀκέραιαι τιμαὶ τοῦ τ, παρέχουσαι ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως (6), εἶναι οἱ περιεχόμενοι μεταξὺ τῶν $\frac{81}{34}$ καὶ $\frac{8}{23}$ ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἤτοι οἱ $\tau=1, 2$.

αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν χ καὶ ψ, αἱ ἀποτελοῦσαι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως, εἶναι $\left\{\begin{array}{l}\chi=47, 13. \\ \psi=15, 38.\end{array}\right.$

ἀντίστοιχοι δὲ τιμαί, ἀποτελοῦσαι τὰ μέρη τοῦ ἀριθμοῦ 1591 καὶ δὴ τὰς λύσεις τοῦ προβλήματος, εἶναι. $\left\{\begin{array}{l}\alpha'.=1081, 299. \\ \beta'.=510, 1292.\end{array}\right.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ.

1). Παιδιά, ἄρρενα καὶ θήλεα, κατὰ τὴν παραμονὴν τοῦ Πάσχα ἔδωκαν ἐντολῇ τῶν γονέων των εἰς πτωχούς, τὰ μὲν ἄρρενα ἀνὰ 25 λεπτὰ εἰς ἕκαστον, τὰ δὲ θήλεα ἀνὰ 16· συνέβη δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἀρρένων δοθὲν ποσὸν νὰ ἦναι ἔλασσον τοῦ ὑπὸ τῶν θηλέων κατὰ ἓν λεπτόν. Ζητεῖται πόσα ἦσαν τ᾽ ἄρρενα καὶ πόσα τὰ θήλεα.

2), Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς τοιούτους ὥστε τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ 17 νὰ ἦναι κατὰ 7 μεῖζον τοῦ γινομένου τοῦ δευτέρου ἐπὶ 26.

3). Τίνες οἱ ἀριθμοὶ οἵτινες διαιρούμενοι διὰ τοῦ 3. μὲν νὰ δίδωσιν ὑπόλοιπον 1, διὰ τοῦ 5 δὲ ὑπόλοιπον 2 ;

4). Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 4890 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα ὥστε τὸ πρῶτον διαιρούμενον διὰ τοῦ 37 νὰ δίδῃ ὑπόλοιπον 3, τὸ δὲ δεύτερον διὰ τοῦ 54 νὰ δίδῃ ὑπόλοιπον 6.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ Γ. ΒΙΒΛΙΟΥ

ΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ

$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, ὅταν τὸ α εἶναι ἐλάχιστον

344. Ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, ὅταν ἐν αὐτῇ ὑποτεθῇ $\alpha=0$, ἀνάγεται εἰς τὴν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν

$$\beta\chi+\gamma=0$$

ἥτις δίδει τὴν λύσιν $\chi=-\frac{\gamma}{\beta}$, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν, διὰ μετασχηματισμοῦ καὶ ἐκ τῶν τύπων τῶν ριζῶν αὐτῆς (197)

$$\chi'=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \text{ καὶ } \chi''=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha},$$

καίτοι οὗτοι εὑρέθησαν ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι α εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός, διότι ἄνευ τούτου διὰ τῆς ἀνωτέρω ὑποθέσεως $\alpha=0$, ὁ μὲν εἷς δίδει $\chi'=\frac{0}{0}$, ὁ δὲ $\chi''=\frac{-2\beta}{0}$, ὧν τὸ μὲν $\frac{0}{0}$, προέρχεται ἐξ ἀφανοῦς κοινοῦ παράγοντος εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν αὐτοῦ, ἐνῷ θὰ ἐδίδετο ἡ αὐτὴ τιμὴ $\frac{\gamma}{\beta}$ ἀνακαλυπτομένου διὰ μετασχηματισμοῦ τοῦ τύπου τῆς πρώτης ρίζης χ′ τοῦ κοινοῦ παράγοντος καὶ ἐξαλειφομένου (**171** σημ.), τὸ δὲ $\frac{-2\beta}{0}$ ἑρμηνευόμενον κατὰ παράγραφον (167) δεικνύει τὸ πράγματι συμβαῖνον ὅτι, ἐν ὅσῳ ὁ α προσεγγίζει τῷ μηδενί, τόσῳ ἡ δευτέρα ρίζα αὐξάνει ἀπεριορίστως, ὅταν δὲ $\alpha=0$ τότε ἡ ἐξίσωσις $0\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, ἢ ἡ $\beta\chi+\gamma=0$ ἄλλην ρίζαν δὲν ἔχει ἐκτὸς τῆς $-\frac{\gamma}{\beta}$, ἣν εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς διὰ τοῦ πρώτου τύπου $\chi'=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

πολλαπλασιάζοντες ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ τὴν παράστασιν $-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$, ἔχομεν

$$\chi'=\frac{(-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})(-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})}{2\alpha(-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})}$$

ἐκτελοῦντες τὸ ἐν τῷ ἀριθμητῇ γινόμενον, ὅπερ, ὡς γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν $-\beta$ καὶ $\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$ καὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, εἶναι ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν τετραγώνων αὐτῶν, λαμβάνομεν $(-\beta)^2-(-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})^2$, ἢ $\beta^2-\beta^2+4\alpha\gamma$, ἤτοι $4\alpha\gamma$· ὁ δὲ τύπος τοῦ χ' γίνεται, $\chi'=\frac{4\alpha\gamma}{2\alpha(-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})}$ καὶ ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν παράγοντα 2α εὑρίσκομεν

$$\chi'=\frac{2\gamma}{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}$$

ὅστις δεικνύει ὅτι ἐν ὅσῳ α προσεγγίζει τῷ 0, τόσῳ ἡ τιμὴ τοῦ χ' προσεγγίζει τῷ $-\frac{2\gamma}{2\beta}$, ἢ $-\frac{\gamma}{\beta}$, καὶ γίνεται ἀκριβῶς $\chi'=-\frac{\gamma}{\beta}$ ὅταν $\alpha=0$, ἥτις, ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν, εἶναι ἡ πραγματικὴ ῥίζα τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, ὅταν $\alpha=0$.

345. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δῆλον ὅτι, ὅταν ὁ α ἦναι ἐλάχιστος τότε ἡ μία τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ ὀλίγον διαφέρει τῆς $-\frac{\gamma}{\beta}$, ἡ δὲ ἄλλη εἶναι πολὺ μεγάλη· ὁ δὲ τύπος τῶν ῥιζῶν αὐτῆς $\chi'=-\frac{\beta}{2\alpha}\pm\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ καταντᾷ δύσχρηστος εἰς τοὺς ἀριθμητικοὺς ὑπολογισμούς· διότι πρὸς ὑπολογισμὸν αὐτῶν, ὅταν τὸ ὑπόρριζον $\beta^2-4\alpha\gamma$ δὲν ἦναι τέλειον τετράγωνον, διαιρουμένης τῆς κατὰ προσέγγισιν εὑρεθείσης τιμῆς τοῦ ῥιζικοῦ $\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$ διὰ 2α, διαιρεῖται καὶ τὸ λάθος διὰ 2α, ὅστις, ὡς διαιρέτης πολὺ ἐλάσσων τῆς μονάδος, θέλει αὐξήσει αὐτὸ πολύ. Δι' ὃ τότε πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀνωτέρω ῥιζῶν κατὰ προσέγγισιν μεταχειριζόμεθα τὸν ἑξῆς τρόπον, διὰ τοῦ ὁποίου μόνον τὴν μικρὸν διαφέρουσαν τοῦ $-\frac{\gamma}{\beta}$ ῥίζαν ὑπολογίζομεν, καθόσον τὴν ἄλλην εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες αὐτὴν ἀπὸ τοῦ γνωστοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ῥιζῶν $-\frac{\beta}{\alpha}$. (205).

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$

λαμβάνομεν
$$\chi=-\frac{\gamma}{\beta}-\frac{\alpha\chi^2}{\beta} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ὁ α εἶναι ἐλάχιστος, ὅταν χ δὲν ἦναι μέγας ἀριθμός, ὁ δὲ β ὄχι πολὺ μικρός. Τὸ λάθος $\frac{\alpha\chi^2}{\beta}$ θέλει παριστᾷ ἐλάχιστον ἀριθμόν· δυνάμεθα λοιπὸν νὰ τὸ παραλείψωμεν καὶ νὰ λάβωμεν ὡς πρώτην προσέγγισιν $\chi_1 = -\frac{\gamma}{\beta}$ (2), τότε τὸ πραττόμενον λάθος εἶναι $-\frac{\alpha\chi^2}{\beta}$, ὅπερ καλεῖται ἐλάχστον πρώτης τάξεως, διότι περιέχει ὡς παράγοντα τὴν πρώτην δύναμιν τοῦ α.

Παρισταμένου δὲ αὐτοῦ διὰ σ_1, ἡ ἀκριβὴς τιμὴ τοῦ χ εἶναι·

$$\chi = -\frac{\gamma}{\beta} - \sigma_1$$

Ταύτην ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς (1) (ὅπερ θεωρεῖται ὡς ὁ τύπος τῆς τιμῆς τοῦ χ) λαμβάνομεν τὸν ἑξῆς τύπον τοῦ χ.

$$\chi = -\frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\left(-\frac{\gamma}{\beta} - \sigma_1\right)^2, \text{ ἢ}$$

$$\chi = -\frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} + \frac{2\alpha\sigma_1\gamma}{\beta^2} - \frac{\alpha\sigma_1^{\,2}}{\beta}, (3)$$

Εἰς ὃν παραλείποντες τοὺς δύο τελευταίους ὅρους

$$\frac{2\alpha\sigma_1\gamma}{\beta^2} \text{ καὶ } \frac{\alpha\sigma_1^{\,2}}{\beta}$$

ὡς παριστῶντας ἔτι ἐλαχίστους ἀριθμοὺς τοῦ α, (διότι περιέχει ἑκάτερος εἰς τὸν ἀριθμητὴν γινόμενα παραγόντων ἐλαχίστων, ὁ μὲν δύο, τῶν α καὶ σ_1, ὁ δὲ τριῶν, τῶν α, σ_1 καὶ σ_1· διὸ καὶ καλοῦνται ἐλάχιστα ὁ μὲν δευτέρας τάξεως, ὁ δὲ τρίτης), ἔξομεν τὴν ἑξῆς δευτέραν κατὰ προσέγγισιν τιμὴν τοῦ χ.

$$\chi_2 = -\frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} \qquad (4)$$

Παρισταμένων δὲ διὰ σ_2 τῶν παραλειφθέντων ὅρων, οἵτινες παριστῶσι τὸ πραττόμενον ἐν τῇ δευτέρᾳ προσεγγίσει λάθος δευτέρας τάξεως (οὕτω καλουμένου· διότι ὁ μέγιστος ὅρος τῶν παραλειφθέντων εἶναι ἐλάχιστον δευτέρας τάξεως), ἡ ἀκριβὴς τιμὴ τοῦ χ παρίσταται οὕτω

$$\chi' = -\frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} + \sigma_2$$

Ταύτην ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς (1) λαμβάνομεν τὸν ἑξῆς τύπον τοῦ χ.

$$\chi = -\frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\left(-\frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} + \sigma_2\right)^2, \text{ἢ}$$

$$\chi = -\frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} - \frac{2\alpha^2\gamma^3}{\beta^5} - \frac{\alpha^3\gamma^4}{\beta^7} + 2\sigma_2\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\gamma}{\beta} + \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3}\right) - \frac{\beta\sigma_2^2}{\beta}.$$

Εἰς ὃν παραλείποντες τοὺς ὅρους τοὺς περιέχοντας ὡς παράγοντας ἐλάχιστα τρίτης, τετάρτης καὶ πέμπτης τάξεως, ὁποῖα τὰ α^3, $\sigma_2\alpha$, καὶ $\alpha\sigma_2^2$ (ὅπερ εἶναι πέμπτης τάξεως, διότι τοῦ σ_2 ὄντος ἐλαχίστου δευτέρας τάξεως σ_2^2 ἔσται ἐλάχιστον τετάρτης) ἕξομεν τὴν ἑξῆς τρίτην κατὰ προσέγγισιν τιμὴν τοῦ χ.

$$\chi_3 = -\frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} - \frac{2\alpha^2\gamma^3}{\beta^5} \qquad (5)$$

ἐν ᾗ τὸ πραττόμενον λάθος εἶναι ἐλάχιστον τρίτης τάξεως· δῆλον δὲ ὅτι, ἐπαναλαμβάνοντες τὴν αὐτὴν μέθοδον, δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν εἰς προσέγγισιν, ἧς τὸ λάθος νὰ ἦναι οἱασδήποτε τάξεως.

ΣΠΜ. Οἱ τύποι τῶν διαδοχικῶν προσεγγίσεων

$$\chi_1 = -\frac{\gamma}{\beta},\ \chi_2 = -\frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3},\ \chi_3 = -\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} - \frac{2\alpha^2\gamma^3}{\beta^5}.$$

Ἐκπληροῦσι τὰς συνθήκας, τὰς ἀπαιτουμένας πάντοτε εἰς σύστημα διαδοχικῶν προσεγγίσεων.

1ον Ἑκάστη προσέγγισις ἀπὸ τῆς δευτέρας καὶ πέραν σχηματίζεται ἐκ τῆς ἀμέσως προηγουμένης προσεγγίσεως τῇ προσθέσει ἑνὸς ὅρου διορθωτικοῦ.

2ον) Τὸ συμβαῖνον λάθος εἰς ἑκάστην προσέγγισιν εἶναι ἔλασσον τοῦ πρὸς σχηματισμὸν αὐτῆς προστιθεμένου διορθωτικοῦ ὅρου· διότι τὸ παραλειπόμενον ποσὸν ἑκάστης προσεγγίσεως εἶναι πάντοτε ἐλάχιστον ἀνωτέρας τάξεως τοῦ ἐλαχίστου, ὅπερ εἶναι ὁ διορθωτικὸς ὅρος.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ.

346. αον) Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὸν κατὰ προσέγγισιν προσδιορισμὸν τοῦ βάθους τοῦ φρέατος (κεφαλ.

Γ. πρόβλ. ἑ.). Ὁ τύπος τῶν ῥιζῶν τῆς πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος σχηματισθείσης ἐξισώσεως εἶναι

$$\chi=\frac{\frac{\theta}{\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\pm\sqrt{\left(\frac{\theta}{\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\right)^2-\frac{\theta^2}{\tau^2}}}{\frac{1}{\tau^2}}$$

Ἐπειδή, τ ὡς παριστῶν τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου, εἶναι περίπου 335, ὁ παρονομαστὴς $\frac{1}{\tau^2}$, ἢ $\frac{1}{(335)^2}$, ἢ 0,0000008 εἶναι ἀριθμὸς ἐλάχιστος. Ἡ δὲ ζητουμένη λύσις εἶναι ἡ ἐλάσσων τῶν δύο ῥιζῶν

$$\chi'=\frac{\frac{\theta}{\tau}-\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt{\left(\frac{\theta}{\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\right)^2-\frac{\theta^2}{\tau^2}}}{\frac{1}{\tau^2}}$$

Ἡ πρώτη προσέγγισις αὐτῆς, κατὰ τὸν ἀνάλογον τύπον

$$\chi_1=-\frac{\gamma}{\beta},\ \text{εἶναι}\ \chi_1=\frac{\theta^2}{2\left(\frac{\theta}{\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\right)} \qquad (6)$$

καθ' ἣν τὸ λάθος παρίσταται ὑπὸ τοῦ $+\frac{\frac{1}{\tau^2}\chi^2}{2\left(\frac{\theta}{\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\right)}$, ὅπερ, ἐπειδὴ τὸ μὲν $\frac{1}{\tau^2}$ εἶναι ἔλασσον $\frac{1}{1000000}$, ἡ δὲ μονὰς πρὸς ἣν ἀναφέρεται εἶναι ὁ βασιλικὸς πῆχυς, εἶναι λίαν ἀνεπαίσθητον ποσὸν καὶ οὔτε λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν, οὔτε εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκτιμηθῇ ἐν τῷ πρακτικῷ, ὅθεν δῆλον ὅτι ἡ πρώτη προσέγγισις εἶναι ἐπαρκής.

Ὁ τύπος (6) δύναται ν' ἁπλοποιηθῇ, διότι, ἐπειδὴ τὸ τ εἶναι ἀριθμὸς ἱκανῶς μέγας, τὸ $\frac{\theta}{\tau}$ ἔσται πολὺ μικρὸς ἀριθμὸς καὶ δύναται νὰ παραλειφθῇ, ὥστε ὡς πρώτη προσέγγισις δύναται νὰ ληφθῇ $\chi_1=\frac{\varepsilon\theta^2}{2}$.

6ον) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $0{,}000047\chi^2+6724\chi-334=0$ ἢ πρώτη προσέγγισις τῆς μικροτέρας ῥίζης αὐτῆς κατὰ τὸν ἀνάλογον τύπον $\chi_1 = -\frac{\gamma}{\beta}$, εἶναι

$$\chi_1 = -\frac{-334}{6724} = \frac{334}{6724},\ \text{ἥτις εἶναι} < \frac{1}{10}$$

Ἡ δευτέρα προσέγγισις κατὰ τὸν ἀνάλογον τύπον,

$$\chi_2 = -\frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3},\quad \text{ἢ}\quad \chi_2 = -\frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma^2}{\beta^2},$$

$$\text{εἶναι}\ \chi_2 = \frac{334}{6724} - \frac{0{,}000047}{6724}\left(\frac{334}{6724}\right)^2$$

Ἐνῷ παρατηροῦμεν α΄ ὅτι ὁ διορθωτικὸς ὅρος εἶναι ἀφαιρ. καὶ δὴ ὅτι ἡ πρώτη προσέγγισις ἦτο καθ᾽ ὑπεροχήν· ἔπειτα δὲ ὅτι αὕτη εἶναι ἐλάσσων $\frac{1}{10^{10}}$· διότι ὁ μὲν πρῶτος παράγων αὐτοῦ $\frac{0{,}000047}{6724}$, ἢ $0{,}000000\frac{47}{6724}$, εἶναι ἐλάσσων $0{,}000000\frac{1}{100}$, ἤτοι $\frac{0{,}000047}{6724} < \frac{1}{10^8}$, ὁ δὲ $\left(\frac{334}{6724}\right)^2 < \frac{1}{10^2}$. Ὅθεν δῆλον ὅτι ἡ πρώτη προσέγγισις θέλει δώσει ἀκριβῶς τὰ ἐννέα πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία αὐτῆς καὶ δὴ ἐπαρκῆ προσέγγισιν, ὅταν ἡ μονὰς δὲν ἦναι ἐκ τῶν λαμβανομένων εἰς τὴν ἐκτίμησιν τῶν μεγίστων ποσῶν.

$$-\frac{\gamma}{\beta} = \frac{334}{6724},\ \text{ἢ} = \qquad 0{,}0496728138$$

$$-\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} = \frac{0{,}000047}{6724}\left(\frac{334}{6724}\right)^2 = \qquad -0{,}000000000017$$

$$\chi_2 = -\frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} = \qquad 0{,}049672813783.$$

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἡ δευτέρα προσέγγισις, κατὰ μείζονα δὲ λόγον πᾶσα ἀνωτέρα προσέγγισις, ἔχει τὰ ἐννέα πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία τὰ αὐτὰ μετὰ τῆς πρώτης προσεγγίσεως.

Τὴν ἑτέραν ῥίζαν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν (205) ἀφαιροῦντες τὴν εὑρεθεῖσαν 0,049672813783· ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ῥιζῶν, ὅπερ, κατὰ τὸν ἀνάλογον τύπον

$$-\frac{\beta}{\alpha},\ \text{εἶναι} -\frac{6724}{0{,}000047},\ \text{ἢ}\ \frac{6724 \times 10^6}{47}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ Δ΄. ΒΙΒΛΙΟΥ

ΣΥΝΕΧΗ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ.

347. Συνεχὲς κλάσμα λέγεται ἡ παράστασις,

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}} \qquad (1)$$

ἡ ἔχουσα τὴν ἑξῆς μορφὴν

Δι' ἧς ὁρίζεται ἡ ἑξῆς σειρὰ διαδοχικῶν πράξεων, ἡ πρόσθεσις τοῦ 5 καὶ $\frac{1}{6}$, ἡ διὰ τοῦ εὑρεθέντος ἀθροίσματος διαίρεσις τῆς μονάδος, ἡ πρόσθεσις τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου εἰς τὸν 4, ἡ διὰ τοῦ δευτέρου ἀθροίσματος διαίρεσις τῆς μονάδος, ἡ πρόσθεσις τοῦ δευτέρου πηλίκου εἰς τὸν 3, ἡ διὰ τοῦ εὑρεθέντος τρίτου ἀθροίσματος διαίρεσις τῆς μονάδος, καὶ τελευταῖον ἡ πρόσθεσις τούτου τοῦ πηλίκου εἰς τὸν ἀριθμὸν 2.

Παριστᾷ δὲ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{972}{421}$

ΣΗΜ. Διὰ τῶν συνεχῶν κλασμάτων, ὡς θέλομεν ἀποδείξει ἐν τοῖς ἑξῆς, παρίσταται πᾶς μὴ ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ τῇ ἐκτελέσει τῶν σημειουμένων πράξεων εὑρίσκονται τὰ κατὰ προσέγγισιν τοῦ δοθέντος μὴ ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἁπλούστερα κλάσματα, ἤτοι τὰ προσεγγίζοντα αὐτῷ καὶ ἔχοντα ὅρους πρώτους πρὸς ἀλλήλους.

348. Τὰ κλάσματα $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$, καλοῦνται συστατικὰ κλάσματα τοῦ συνεχοῦς κλάσματος (1), ὧν ἀριθμητὴς μὲν πάντοτε εἶναι 1, παρονομαστὴς δὲ ἀκέραιός τις ἀριθμός· ὁ δὲ ἀκέραιος ἀριθμὸς 2 καὶ οἱ παρονομασταὶ τῶν συστατικῶν κλασμάτων 3, 4, 5, 6, καλοῦνται *ἀτελῆ πηλίκα*.

Τὰ μέρη τοῦ συνεχοῦς κλάσματος τ' ἀρχόμενα ἀπό τινος ἀτελοῦς πηλίκου καὶ λήγοντα εἰς τὸ αὐτὸ συστατικὸν κλάσμα, εἰς ὃ καὶ τὸ συνεχὲς κλάσμα, ἅπερ κατὰ τὸν ὁρισμὸν (347) εἶναι συνεχῆ κλάσματα, καλοῦνται τέλεια πηλίκα, π.χ. τάδε·

$$3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}},\quad 4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}},\quad 5+\frac{1}{6},$$

349. Ἡ ἀξία τῶν μερῶν τοῦ συνεχοῦς, ἤ, ὅπερ ταὐτόν, αἱ ἀξίαι τῶν συνεχῶν κλασμάτων, τῶν ἐχόντων μὲν τὴν αὐτὴν μὲ τὸ δοθὲν ἀρχήν, ληγόντων δὲ διαδοχικῶς εἰς τὰ συστατικὰ αὐτοῦ κλάσματα, καλοῦνται ἡγμένα.

Ὡς π. χ. αἱ ἀξίαι τῶν ἑξῆς ν μερῶν, (ἐν οἷς καὶ τὸ ὅλον τοῦ δοθέντος συνεχοῦς).

$$2,\ 2+\frac{1}{3},\ 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}},\ 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}},\ 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}.$$

$$\frac{2}{1},\ \frac{7}{3},\ \frac{30}{13},\ \frac{157}{68},\ \frac{972}{421}.$$

καλοῦνται ἡγμένα τοῦ συνεχοῦς (1), ἅπερ διακρίνονται καὶ κατὰ τὴν τάξιν, καὶ τὸ μὲν $\frac{2}{1}$ καλεῖται πρῶτον ἡγμένον, τὸ $\frac{7}{3}$ δεύτερον ἡγμένον, τὸ $\frac{30}{13}$ τρίτον ἡγμένον κτλ.

350. Τὰ πρὸ τοῦ τελευταίου ἡγμένα κλάσματα τοῦ συνεχοῦς εἶναι τὰ ἁπλούστερα κλάσματα καὶ προσεγγίζοντα ἕκαστον κατὰ τὴν τάξιν του τῷ μὴ ἀκεραίῳ ἀριθμῷ, ὅνπερ παριστᾷ τὸ δοθὲν συνεχὲς κλάσμα,

Ἔστω τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{972}{421}$.

Ἐξάγοντες τὸν ἀκέραιον αὐτοῦ ἀριθμὸν (ὅστις, ὅταν αὐτὸ ἦναι ἔλασσον τῆς μονάδος, εἶναι μηδέν)

ἔχομεν $\frac{972}{421}=2+\frac{130}{421}$, ἤ $=\frac{2}{1}+\frac{130}{421}$ (1).

Ἐπειδή, ὡς γνωστόν, τὸ $\frac{130}{421}$ εἶναι ἔλασσον τῆς μονάδος, τὸ $\frac{2}{1}$ διαφέρει τοῦ $\frac{972}{421}$ ἔλασσον ἀκεραίας μονάδος, καὶ δι' ὃ τὸ κλάσμα $\frac{2}{1}$ δύναται νὰ ληφθῇ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος ἀντὶ τοῦ $\frac{972}{421}$.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ δεύτερον μέλος γράφεται καὶ οὕτω

$2+\frac{130}{421}=2+\cfrac{1}{\frac{421}{130}}$, ἤ, ἐξαγομένου τοῦ ἀκεραίου τοῦ $\frac{421}{130}$,

$$\text{καὶ οὕτω } 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{31}{130}}$$

$$\frac{972}{421}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{31}{130}} \qquad (2).$$

Ἐὰν ἐκ τοῦ παρανομαστοῦ τοῦ κλάσματος $\cfrac{1}{3+\cfrac{31}{130}}$ παραλειφθῇ τὸ $\frac{31}{130}$, ὅπερ ἔλασσον τῆς μονάδος, τὸ ἀποτελούμενον κλάσμα $\frac{1}{3}$, ὡς ἔχον παρονομαστὴν ἐλάσσονα τοῦ $3+\frac{31}{130}$, εἶναι μεῖζον τοῦ κλάσματος $\cfrac{1}{3+\cfrac{31}{130}}$, ὅπερ ἔπρεπε νὰ προστεθῇ εἰς τὸν 2 διὰ νὰ γείνῃ ἴσον τῷ $\frac{972}{421}$· ὥστε, ἐὰν εἰς τὸν 2 προστεθῇ ἀντὶ τοῦ $\cfrac{1}{3+\cfrac{31}{130}}$ τὸ $\frac{1}{3}$, ὁ ἀποτελούμενος ἀριθμὸς $2+\frac{1}{3}$, ἢ ὁ $\frac{7}{3}$, ἔσται μείζων τοῦ $\frac{972}{421}$ καὶ μᾶλλον προσεγγίζων αὐτῷ ἢ τὸ $\frac{2}{1}$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ $\frac{31}{130}$ εἶναι ἴσον τῷ $\cfrac{1}{\frac{130}{31}}$, ἤ, ἐξαγομένου τοῦ ἀκεραίου μέρους

4 τοῦ κλάσματος $\frac{130}{31}$, εἶναι ἴσον τῷ $\cfrac{1}{4+\cfrac{6}{31}}$, ἡ ἰσότης (2) γράφεται

οὕτω $\frac{972}{421} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{6}{31}}$ (3)

Ἐὰν ἐκ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος $\cfrac{1}{4+\cfrac{6}{31}}$ παραλειφθῇ τὸ κλάσμα $\frac{6}{31}$, ὅπερ εἶναι ἔλασσον τῆς μονάδος, τὸ ἀποτελούμενον κλάσμα $\frac{1}{4}$ εἶναι μεῖζον τοῦ κλάσματος $\cfrac{1}{4+\cfrac{6}{31}}$, ὅπερ ἔπρεπε νὰ προστεθῇ εἰς τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος $\frac{1}{3}$ ἵνα τὸ δεύτερον μέλος εἶναι ἴσον τῷ $\frac{972}{421}$, ὅθεν τὸ κλάσμα $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}$ εἶναι ἔλασσον τοῦ $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{6}{31}}}$ ἢ ἔλασσον $\frac{972}{421}$ καὶ μᾶλλον προσεγγίζον αὐτῷ ἢ τὰ προηγούμενα $\frac{2}{1}$ καὶ $\frac{7}{3}$, διότι ἡ διαφορὰ $\frac{6}{5473}$ τοῦ $\frac{30}{13}$ ἀπὸ $\frac{972}{421}$ εἶναι ἐλάσσων τῆς διαφορᾶς $\frac{31}{1263}$ τοῦ $\frac{972}{421}$ ἀπὸ $\frac{7}{3}$ καὶ ἔτι μᾶλλον ἐλάσσων τῆς διαφορᾶς $\frac{130}{421}$ τοῦ $\frac{2}{1}$ ἀπὸ $\frac{972}{421}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δῆλον ἐγένετο ὅτι τὰ διαδοχικὰ ἠγμένα προσεγγίζουσι τῷ δοθέντι κατὰ τὴν τάξιν αὐτῶν καὶ διαδοχικῶς κατ' ἔλλειψιν καὶ καθ' ὑπεροχὴν, καὶ κατ' ἔλλειψιν μὲν τὰ περιττῆς τάξεως, καθ' ὑπεροχὴν δὲ τὰ ἀρτίας, ἤτοι ὅτι τὸ δοθὲν ἀνάγωγον κλάσμα περιέχεται πάντοτε μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ἠγμένων αὐτοῦ ἀνὰ δύο· διότι ἐδείχθη ὅτι τὸ πρῶτον ἠγμένον $\frac{2}{1}$ εἶναι ἔλασστν τοῦ δοθέντος $\frac{972}{421}$, τὸ δεύτερον $\frac{7}{3}$ μεῖζον αὐτοῦ, τὸ δὲ τρίτον ἔλασσον αὐτοῦ κτλ.

ΣΗΜ. Ταύτας τὰς ἰδιότητας τῶν ἠγμένων κλασμάτων παντὸς συνεχοῦς κλάσματος κατόπιν θέλομεν ἀποδείξει γενικῶς, οἱοσδήποτε καὶ ἂν ἦναι ὁ ὑπὸ τοῦ συνεχοῦς κλάσματος παριστώμενος μὴ ἀκέραιος ἀριθμὸς, συμμέτρος ἢ ἀσύμετρος, ἀρκούμενοι ἤδη εἰς τὴν ἐπὶ μερικοῦ παραδείγματος γενομένην βεβαίωσιν αὐτῶν.

351. Ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν τὴν πρᾶξιν δι' ἧς ἐδώκαμεν εἰς τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{972}{421}$ τὰς ἰσοδυνάμους αὐτῷ παραστάσεις

$$2+\frac{130}{421},\ 2+\frac{1}{3}+\frac{31}{130},\ 2+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{6}{31}$$ μέχρις οὗ καὶ τοῦ

τελευταίου μερικοῦ κλάσματος ὁ ἀριθμητὴς γείνῃ ἴσος τῇ μονάδι, (ὅπερ, ὡς θέλομεν ἴδει, πάντοτε εἶναι δυνατὸν, ὅταν ὁ μὴ ἀκέραιος ἀριθμὸς ἦναι σύμμετρος) θέλομεν εὕρει τὸ συνεχὲς κλάσμα τὸ ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι ἀναγώγῳ κλάσματι· ὅθεν δῆλον ὅτι διὰ τοῦ ἀνωτέρω τρόπου τρέπεται δοθὲν ἀνάγωγον κλάσμα εἰς ἰσοδύναμον συνεχὲς κλάσμα. Παρατηροῦντες δὲ ὅτι τὰ λοιπὰ ἀτελῆ πηλίκα εἶναι τὰ ἀκέραια πηλίκα, ἅπερ εὑρίσκομεν ζητοῦντες τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τοῦ δοθέντος κλάσματος, ὧν τὸ πρῶτον εἶναι ὁ ἐν τῷ κλάσματι περιεχόμενος ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὅστις ἀντικαθίσταται διὰ τοῦ μηδενὸς, ὅταν τὸ κλάσμα εἶναι ἔλασσον τῆς μονάδος, συμπεραίνομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

Κανών. «Ἵνα τρέψωμεν ἀνάγωγον κλάσμα εἰς συνεχὲς, μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν ὅρων αὐτοῦ πράξεως, γράφομεν πρῶτον τὸν ἐν τῷ κλάσματι περιεχόμενον ἀκέραιον ἀριθμὸν, εἶτα δὲ τὰ διαδοχικὰ αὐτοῦ συστατικὰ κλάσματα, ἐν οἷς γράφονται παρονομασταὶ διαδοχικῶς τὰ λοιπὰ ἀκέραια πηλίκα τὰ εὑρεθέντα διὰ τῆς πράξεως τῆς γενομένης πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου».

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ δοθὲν κλάσμα εἶναι ἀνάγωγον, πάντοτε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ὅρων αὐτοῦ εἶναι ἡ μονὰς, ἥτις εἶναι τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον καὶ δὴ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ τελευταίου κλάσματος.

Ἂς τραπῶσιν εἰς συνεχῆ κλάσματα τὰ ἑξῆς·

1) Τὸ $\frac{972}{421}$.

	2	3	4	5	6
972	421	130	31	6	1
130	31	6	1	0	

ὅθεν ἔξομεν $$\frac{972}{421}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}$$

2) Τὸ $\frac{85}{23}$.

	3	1	2	3	2
85	23	16	7	2	1
16	7	2	1	0	

ὅθεν ἔξομεν $$\frac{85}{23}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}$$

3) Τὸ $\frac{65}{149}$.

	0	2	3	2	2	1	2
65	149	65	19	8	3	2	1
	19	8	3	2	1	0	

ὅθεν ἔξομεν $$\frac{65}{149}=0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}.$$

ΣΥΝΕΧΗ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΩΝ Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΣΤΑΤΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΕΙΝΑΙ ΑΠΕΙΡΟΣ.

352. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν συστατικῶν κλασμάτων εἶναι πεπερασμένος τότε τὸ συνεχὲς κλάσμα καλεῖται *πεπερασμένον συνεχὲς κλάσμα*, ὅπερ διὰ τῆς ἐκτελέσεως τῶν ἐν αὐτῷ σημειωμένων πράξεων (347) παράγει πάντοτε ἀριθμὸν σύμμετρον. Ἐκ δὲ τοῦ τρόπου καθ' ὃν τρέπεται κοινὸν κλάσμα, ἤτοι πᾶς σύμμετρος ἀριθμὸς μὴ ἀκέραιος, (διότι πᾶς σύμμετρος ἀριθμὸς δύναται ν' ἀναχθῇ εἰς κλασματικὸν) εἰς συνεχὲς κλάσμα δῆλον ὅτι πᾶς σύμμε-

τρος ἀριθμὸς τρέπεται εἰς πεπερασμένον συνεχὲς κλάσμα· διότι ἡ πρᾶξις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου, δι' ἧς γίνεται ἡ τροπὴ τοῦ κοινοῦ κλάσματος εἰς συνεχὲς κλάσμα ἔχει πάντοτε πέρας.

353. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν συστατικῶν κλασμάτων εἶναι ἄπειρος τότε τὸ συνεχὲς κλάσμα καλεῖται *ἀπέραντον συνεχὲς κλάσμα*. Οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ τρέπονται εἰς τοιαῦτα συνεχῆ κλάσματα, δι' ὧν λαμβάνονται τὰ κατὰ προσέγγισιν τοῖς ἀσυμμέτροις ἀριθμοῖς ἀνάγωγα κλάσματα.

Ἔστω Α ἀσύμμετρός τις ἀριθμὸς, α ὁ ἐν αὐτῷ μέγιστος ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ φ ὁ ἀσύμμετρος καὶ ἐλάσσων τῆς μονάδος ἀριθμὸς, ὁ παριστῶν τὴν διαφορὰν τοῦ α ἀπὸ Α· ἔχομεν

$$A=\alpha+\varphi \quad (1), \text{ ἢ } A=\alpha+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\varphi}} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ὁ φ εἶναι ἐλάσσων μονάδος, ὁ $\frac{1}{\varphi}$ ἔσται μείζων μονάδος· ἔστω β, ὁ ἐν τῷ $\frac{1}{\varphi}$ μέγιστος ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ φ' ὁ ἀσύμμετρος καὶ ἐλάσσων τῆς μονάδος ἀριθμὸς, ὁ παριστῶν τὴν διαφορὰν τοῦ β ἀπὸ τοῦ $\frac{1}{\varphi}$· τότε $\frac{1}{\varphi}=\beta+\varphi'$, ὅπερ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) ἔξομεν

$$A=\alpha+\frac{1}{\beta+\varphi'}, \text{ ἢ } A=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\varphi'}}} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ ὁ φ' εἶναι ἀσύμμετρος καὶ ἐλάσσων τῆς μονάδος ἀριθμὸς, ὁ $\frac{1}{\varphi'}$ ἔσται ἀσύμμετρος καὶ μείζων τῆς μονάδος· ἔστω γ ὁ ἐν τῷ $\frac{1}{\varphi'}$ μέγιστος ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ φ'' ὁ ἀσύμμετρος καὶ ἐλάσσων τῆς μονάδος ἀριθμὸς, ὁ παριστῶν τὴν διαφορὰν τοῦ γ ἀπὸ τοῦ $\frac{1}{\varphi'}$· τότε

$$\frac{1}{\varphi'}=\gamma+\varphi'',$$ ὅπερ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (3)

ἔξομεν $A=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\varphi''}}$ (4)

Δῆλον δὲ ὅτι τὴν ἀνωτέρω ἐργασίαν δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν ἐπ' ἄπειρον, καὶ δὴ ὅτι δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἄπειρα συστατικὰ κλάσματα καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὅτι τὸ συνεχὲς κλάσμα τὸ παριστῶν ἀσύμμετρον ἀριθμὸν εἶναι ἀπέραντον· διότι πάντα τὰ διαδοχικὰ ὑπόλοιπα φ, φ', φ'', ..., ὡς διαφορὰ ἀριθμῶν συμμέτρων ἀπὸ ἀσυμμέτρων, εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ καὶ γραφόμενα οὕτω $\cfrac{1}{\cfrac{1}{\varphi}}$, $\cfrac{1}{\cfrac{1}{\varphi'}}$, $\cfrac{1}{\cfrac{1}{\varphi''}}$ . . . . . . εἶναι καὶ μείζονες τῆς μονάδος ἀριθμοὶ καὶ περιέχουσι πάντοτε ἀκεραίους ἀριθμοὺς καὶ ὑπόλοιπα ἀσύμμετρα καὶ ἐλάσσονα τῆς μονάδος, Ἄλλως τε δὲ καὶ ἐκ τῶν προτέρων δῆλον ὅτι τὸ συνεχὲς κλάσμα, τὸ παριστῶν ἀσύμμετρον ἀριθμὸν, ἔπρεπε νὰ ἦναι ἀπέραντον· διότι τὸ πεπερασμένον παριστᾷ πάντοτε σύμμετρον ἀριθμὸν (**352**).

354. Ὅταν τοῦ ἀπεράντου συνεχοῦς κλάσματος τινὰ τῶν συστατικῶν κλασμάτων ἐπαναλαμβάνονται κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, τότε τὸ ἀπέραντον συνεχὲς κλάσμα καλεῖται *περιοδικὸν*, καὶ ἁπλοῦν μὲν καλεῖται, ὅταν ἡ περίοδος ἄρχεται μετ' αὐτοῦ, μικτὸν δὲ, ὅταν ἄρχηται ἢ μετὰ τὸ πρῶτον ἀκέραιον πηλίκον (ἂν δὲν ἦναι μηδὲν), ἢ μετά τινα συστατικὰ κλάσματα· π.χ. τὸ μὲν

$$3+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}}}$$

εἶναι μικτὸν περιοδικὸν, οὗ τὸ περιοδικὸν μέρος εἶναι· $\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}$.

Τὸ δὲ

$$5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}}}$$

εἶναι ἁπλοῦν περιοδικὸν

οὗ τὸ περιοδικὸν μέρος εἶναι· $5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}$.

ΣΗΜ. Ὁ τρόπος καθ' ὃν τρέπεται ἀσύμμετρος ἀριθμὸς εἰς συνεχὲς κλάσμα δὲν εἶναι πάντοτε εὔκολος, ὅπως ὁ καθ' ὃν τρέπεται σύμμετρος ἀριθμὸς εἰς τοιοῦτον κλάσμα. Εἴς τινας ὅμως περιστάσεις μετ' εὐκολίας καὶ οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ τρέπονται εἰς συνεχῆ κλάσματα, ὡς ὅταν ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς περιέχεται μεταξὺ δύο γνωστῶν συμμέτρων ἀριθμῶν μὴ ἀκεραίων. διότι τότε, τρέποντες ἑκάτερον τῶν ὁρίων εἰς συνεχὲς κλάσμα (351) μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς δύο διάφορα πηλίκα, σχηματίζομεν τὸ συνεχὲς κλάσμα τὸ παριστῶν τὸν ἀσύμμετρον ἀριθμὸν λαμβάνοντες ὡς ἀτελῆ πηλίκα τὰ κοινὰ τοιαῦτα τῶν τὰ ὅρια παριστώντων συνεχῶν κλασμάτων.

355. Ὅτι δὲ τὰ κοινὰ ἀτελῆ πηλίκα τῶν συνεχῶν κλασμάτων τῶν ὁρίων (μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ ἀσύμμετρος) εἶναι τοιαῦτα καὶ τοῦ συνεχοῦς, τοῦ παριστῶντος τὸν ἀσύμμετρον ἀριθμόν, ἀποδεικνύεται οὕτω·

Ἔστωσαν Σ καὶ Σ′ δύο σύμμετροι ἀριθμοὶ καὶ Α ὁ μεταξὺ αὐτῶν περιεχόμενος ἀσύμμετρος ἀριθμός, καὶ ὅτι

$$\Sigma=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon+\cfrac{1}{\zeta..}}}}}\qquad \Sigma'=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon+\cfrac{1}{\zeta'..}}}}}$$

καὶ παριστῶντες

διὰ φ τὸ $\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon+\cfrac{1}{\zeta..}}}}$ διὰ φ' τὸ $\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon+\cfrac{1}{\zeta'...}}}}$

ἔχομεν $\Sigma=\alpha+\frac{1}{\varphi}$ καὶ $\Sigma'=\alpha+\frac{1}{\varphi'}$

Ἐπειδὴ ὁ Α περιέχεται μεταξὺ $\alpha+\frac{1}{\varphi}$ καὶ $\alpha+\frac{1}{\varphi'}$, δῆλον ὅτι ὁ μὲν ἐν αὐτῷ μέγιστος ἀκέραιος ἀριθμὸς θὰ ἦναι ὁ α, ὁ κοινὸς τοῖς Σ καὶ Σ′, ὁ δὲ $\frac{1}{\chi}$, γραφομένου τοῦ Α οὕτω (353) $A=\alpha+\frac{1}{\chi}$

ὅπου χ παριστᾷ ἀριθμὸν ἀσύμμετρον, περιέχεται μεταξὺ τῶν $\frac{1}{\varphi}$, καὶ $\frac{1}{\varphi'}$, καὶ δὴ καὶ ὅτι ὁ χ περιέχεται μεταξὺ τῶν φ καὶ φ′

Ἐπειδὴ δὲ ὁ μέγιστος ἀκέραιος ἀριθμὸς ὁ περιεχόμενος ἔν τε τῷ φ καὶ φ′ ὑπετέθη ὁ αὐτὸς ἀκέραιος β, δῆλον ὅτι θέλει περιέχεσθαι καὶ ἐν τῷ χ ὁ αὐτὸς ἀκέραιος β. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ τὰ λοιπὰ κοινὰ ἀτελῆ πηλίκα τῶν συνεχῶν κλασμάτων τῶν ὁρίων εἶναι τοιαῦτα καὶ τοῦ συνεχοῦς τοῦ ἀσυμμέτρου καὶ δὴ ὅτι

$$A=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon\ldots}}}}$$

Τοιαῦτα δὲ ὅρια, περιέχοντα τοὺς ὑπὸ τῶν τετραγωνικῶν ἢ κυβικῶν ῥιζῶν μὴ τελείων τετραγώνων ἢ κύβων παρισταμένους ἀσυμμέτρους ἀριθμούς, εὐκόλως λαμβάνονται κατὰ τὴν ἀριθμητικήν, λαμβανομένων τῶν ῥιζῶν εἰς προσέγγισιν κλασματικῆς μονάδος ἱκανῶς μικρᾶς κατ' ἔλλειψιν καὶ καθ' ὑπεροχήν.

356. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα πρὸς τροπὴν τοῦ ὑπὸ τοιούτου ῥιζικοῦ ἀριθμοῦ παριστωμένου ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ εἰς συνεχὲς κλάσμα.

Κανών. Ἵνα τρέψωμεν τοιοῦτον ἀσύμμετρον ἀριθμὸν εἰς συνεχὲς κλάσμα, εὑρίσκομεν τὴν ῥίζαν αὐτοῦ κατ' ἔλλειψιν καὶ καθ' ὑπεροχὴν κατὰ προσέγγισιν κλασματικῆς μονάδος, καὶ τρέποντες ἀμφοτέρας τὰς ῥίζας εἰς συνεχῆ κλάσματα λαμβάνομεν μόνον τὸ κοινὸν μέρος αὐτῶν.

Παράδειγμα Α′. Νὰ εὑρεθῇ τὸ συνεχὲς κλάσμα τὸ παριστῶν τὸν ἀσύμμετρον ἀριθμὸν $\sqrt{6}$

$\sqrt{6}=2{,}44948$ εἰς προσέγγισιν κατ' ἔλλειψιν

$\sqrt{6}=2{,}44949$ » » καθ' ὑπεροχὴν

	2	2	4	2	4	2	1
244948 44948	100000 10104	44948 4532	10104 1040	4532 372	1040 296	372 86	296

	2	2	4	2	4	2	4
244949 44949	100000 10102	44949 4541	10102 1020	4541 461	1020 98	461 69	98

Ἐπειδὴ μόνον τὰ ἓξ πρῶτα πηλίκα εἶναι κοινά, τὸ συνεχὲς τὸ παριστῶν τὸν ἀσύμμετρον ἀριθμὸν $\sqrt{6}$ εἶναι

$$\sqrt{6}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}$$

ὅπερ εἶναι συνεχὲς περιοδικόν, οὗτινος ἡ περίοδος εἶναι $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}$.

Παράδειγμα Β'. Νὰ εὑρεθῇ τὸ συνεχὲς κλάσμα τὸ παριστῶν τὸν λόγον τῆς περιφερείας κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον αὐτοῦ. Διὰ τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας εὑρίσκεται ὁ 3,1415926 ἀριθμός, ὡς τιμὴ κατ' ἔλλειψιν προσεγγίζουσα ἧττον $\frac{1}{10000000}$ τῷ ἀσυμμέτρῳ ἀριθμῷ π, τῷ παριστῶντι τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, ὁ δὲ κατὰ $\frac{1}{10000000}$ μείζων αὐτοῦ ἀριθμὸς 3,1415927, εἶναι τιμὴ προσεγγίζουσα τῷ π καθ' ὑπεροχὴν ἧττον $\frac{1}{10000000}$, τουτέστιν εὑρίσκονται οἱ ἀριθμοὶ 3,1415926 καὶ 3,1415927, οἵτινες εἶναι δύο ὅρια περιέχοντα τὸν ἀσύμμετρον ἀριθμὸν π.

	3	7	15	1	243
31415926	10000000	1415926	88518	88156	362
1415926	88518	530746	362	1575	
		88156		1276	
				190	
	3	7	15	1	354
31415927	10000000	1415927	88511	88262	249
1415927	88511	530817	249	1356	
		88262		1112	
				116	

Ἐπειδὴ τὰ τέσσαρα πρῶτα ἀτελῆ πηλίκα εἶναι τὰ αὐτά, τὸ συνεχὲς κλάσμα, τὸ παριστῶν κατὰ προσέγγισιν τὸν ἀνωτέρω ἀσύμμετρον ἀριθμὸν π, εἶναι·

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 \ldots}}}$$

357. Δυνάμεθα τ' ἀτελῆ πηλίκα τῶν συνεχῶν κλασμάτων, τῶν παριστώντων τ'ἀνωτέρω ριζικὰ, νὰ εὕρωμεν καὶ οὕτω. (353)· Ἔστω ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς $\sqrt{7}$, ἐπειδὴ ὁ μέγιστος ἐν τῷ $\sqrt{7}$ περιεχόμενος ἀκέραιος εἶναι ὁ 2, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\sqrt{7}=2+\frac{1}{\chi}$, ὅθεν λαμβάνομεν $\chi=\frac{1}{\sqrt{7}-2}$, ἢ πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος (100) ἐπὶ $\sqrt{7}+2$, ἔχομεν

$$\chi=\frac{\sqrt{7}+2}{3}.$$

Ἐπειδὴ ὁ ἐν τῷ $\sqrt{7}$ μέγιστος ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 2, τὸ κλάσμα $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$ περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $\frac{4}{3}$ καὶ $\frac{5}{3}$ καὶ δὴ ὁ ἐν τῷ χ περιεχόμενος μέγιστος ἀκέραιος εἶναι 1, καὶ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi=1+\frac{1}{\chi'}$, ἢ, ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ χ τὸ $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$, τὴν ἐξῆς $\frac{\sqrt{7}+2}{3}=1+\frac{1}{\chi'}$· ὅθεν $\chi'=\frac{3}{\sqrt{7}+1}$ καὶ κάμνοντες τὸν παρονομαστὴν παράστασιν ῥητὴν (100) ἔχομεν

$$\chi'=\frac{3(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)}=\frac{3(\sqrt{7}+1)}{6}=\frac{\sqrt{7}+1}{2}$$

Ἐπειδὴ ὁ ἐν τῷ $\sqrt{7}$ μέγιστος ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 2, τὸ κλάσμα $\frac{\sqrt{7}+1}{2}$, δηλαδὴ τὸ χ′ περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $\frac{3}{3}$ καὶ $\frac{4}{3}$, καὶ δὴ ὁ ἐν τῷ χ′ περιεχόμενος μέγιστος ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι 1 καὶ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\chi'=1+\frac{1}{\chi''}$, καί, ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ χ' τὴν τιμὴν αὐτοῦ $\frac{\sqrt{7}+1}{2}$, τὴν ἑξῆς

$\frac{\sqrt{7}+1}{2}=1+\frac{1}{\chi''}$ ὅθεν ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν·

$$\chi''=\frac{2}{\sqrt{7}-1}=\frac{2(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)}=\frac{2(\sqrt{7}+1)}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{7}+1}{3}=1+\frac{1}{\chi'''}$$

ἤτοι $\chi''=1+\frac{1}{\chi'''}$, καὶ ἐκ ταύτης δι' ὁμοίων ἐργασιῶν, διαδοχικῶς ἄλλους ἀπείρους τὸν ἀριθμὸν, ἤτοι θέλομεν ἔχει

$$\sqrt{7}=2+\frac{1}{\chi},\ \chi=1+\frac{1}{\chi'},\ \chi'=1+\frac{1}{\chi''}\ \chi''=1+\frac{1}{\chi'''}\ \text{κτλ.}$$

καὶ μετὰ τὰς διαδοχικὰς ἀντικαταστάσεις τὸ συνεχὲς κλάσμα.

$$\sqrt{7}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\chi'''}}}}$$

ΗΓΜΕΝΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ.

Κανὼν τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ἡγμένων.—Ἰδιότητες τῶν ἡγμένων.

1. Κανὼν τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ἡγμένων δοθέντος συνεχοῦς κλάσματος.

358. Ἔστω τὸ συνεχὲς κλάσμα.

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon\ldots}}}}$$

Κατὰ τὸν § (349) τὸ πρῶτον ἡγμένον εἶναι α, ἢ $\frac{\alpha}{1}$, τὸ δεύτερον ἡγμένον εἶναι $\alpha+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha\beta+1}{\beta}$, τὸ τρίτον ἡγμένον εἶναι

$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma}}$, ὅπερ λαμβάνεται ἐκ τοῦ δευτέρου ἡγμένου $\alpha+\frac{1}{\gamma}$, ἐὰν ἐν αὐτῷ τραπῇ τὸ β εἰς $\beta+\frac{1}{\gamma}$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\alpha\beta+1}{\beta}$ εἶναι ταυτὸ τῷ $\alpha+\frac{1}{\beta}$ διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ β, τὸ τρίτον ἡγμένον θέλει παραχθῇ καὶ ἐὰν ἐν τῷ $\frac{\alpha\beta+1}{\beta}$ τραπῇ τὸ β εἰς $\beta+\frac{1}{\gamma}$, ἤτοι τὸ τρίτον ἡγμένον

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma}}=\frac{\alpha\left(\beta+\frac{1}{\gamma}\right)+1}{\beta+\frac{1}{\gamma}}=\frac{\alpha\beta\gamma+\alpha+\gamma}{\beta\gamma+1}=\frac{(\alpha\beta+1)\gamma+\alpha}{\beta\gamma+1}$$

Τὸ τέταρτον ἡγμένον $\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta}}}$, ὅπερ λαμβάνεται ἐκ τοῦ τρίτου $\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma}}$, καὶ δὴ καὶ ἐκ τῆς τελικῆς μορφῆς τοῦ τρίτου ἡγμένου, τροπὴ τοῦ γ εἰς $\gamma+\frac{1}{\delta}$, εἶναι

$$\frac{(\alpha\beta+1)\left(\gamma+\frac{1}{\delta}\right)+\alpha}{\beta\left(\gamma+\frac{1}{\delta}\right)+1}=\frac{(\alpha\beta+1)\gamma+\alpha+\frac{\alpha\beta+1}{\delta}}{\beta\gamma+1+\frac{\beta}{\delta}}$$

καὶ πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ δ (θεωρουμένου ὡς ἑνὸς ὅρου ἐν μὲν τῷ ἀριθμητῇ τοῦ $(\alpha\beta+1)\gamma+\alpha$, ἐν δὲ τῷ παρονομαστῇ τοῦ $\beta\gamma+1$) εἶναι ἴσον τῷ

$$\frac{\left[(\alpha\beta+1)\gamma+\alpha\right]\delta+\alpha\beta+1}{(\beta\gamma+1)\delta+\beta.}$$

359. Παραβάλλοντες τὰ σχηματισθέντα διαδοχικὰ ἡγμένα παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ μὲν τρίτον ἡγμένον $\frac{(\alpha\beta+1)\gamma+\alpha}{\beta\gamma+1}$ παράγεται ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ πρώτου ἡγμένου, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ὅροι τοῦ δευτέρου ἡγμένου $\frac{\alpha\beta+1}{\beta}$ ἐπὶ τὸ τρίτον ἀτελὲς πηλίκον γ καὶ εἰς τοὺς ὅρους τοῦ οὕτω προκύψαντος κλάσματος $\frac{(\alpha\beta+1)\gamma}{\beta\gamma}$ προστεθῶσιν ἀμοιβαίως οἱ ὅροι τοῦ πρώτου ἡγμένου $\frac{\alpha}{1}$, τὸ δὲ τέταρτον ἡγμένον ὁμοίως ἐκ τοῦ τρίτου καὶ δευτέρου ἡγμένου, ὅπερ καὶ γενικῶς ἀληθεύει, δῆλα δὴ ὅτι «πᾶν ἡγμένον παράγεται ἐκ τῶν δύω προηγουμένων αὐτοῦ ἡγμένων, ἐὰν οἵ ὅροι τοῦ ἀμέσως προηγουμένου αὐτοῦ ἡγμένου πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸ ἀτελὲς πηλίκον τῆς αὐτῆς τάξεως ὁποίας εἶναι καὶ τὸ σχηματιζόμενον ἡγμένον καὶ εἰς τοὺς ὅρους τοῦ οὕτω προκύψαντος κλάσματος προστεθῶσιν ἀμοιβαίως οἱ ὅροι τοῦ δύω τάξεις πρὸ αὐτοῦ ἡγμένου.» Διότι ὅπως ἐκ μὲν τοῦ δευτέρου ἡγμένου τροπῇ τοῦ β εἰς $\beta+\frac{1}{\gamma}$ ἐλάβομεν τὸ τρίτον ἡγμένον, ἐκ τούτου δὲ τὸ τέταρτον ἡγμένον τροπῇ τοῦ γ εἰς $\gamma+\frac{1}{\delta}$, οὕτω δυνάμεθα νὰ λάβωμεν καὶ πᾶν ἡγμένον ἀνωτέρας τάξεως ἐκ τοῦ ἀμέσως προηγουμένου αὐτοῦ διὰ τροπῆς τοῦ ἀντιστοίχου ἀκεραίου ἀτελοῦς πηλίκου εἰς μικτὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου (τοῦ τρεπομένου δηλ. εἰς μικτὸν) καὶ κλάσματος ἔχοντος ἀριθμητὴν μὲν τὴν μονάδα παρονομαστὴν δὲ τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ἀτελὲς πηλίκον. Βεβαιούμεθα δὲ ἀκριβῶς ὅτι ὁ ἀνωτέρω κανὼν πρὸς παραγωγὴν τῶν διαδοχικῶν ἡγμένων εἶναι γενικός, ἐφαρμόζοντες τὴν ἀνωτέρω τροπὴν εἰς οἱονδήποτε ἡγμένον καὶ μετασχηματίζοντες ἁρμοδίως τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἀληθεύει διὰ τὸ ἀμέσως προηγούμενον αὐτοῦ ἡγμένον.

Ἔστωσαν τὰ διαδοχικὰ ἡγμένα $\frac{K}{K'}$, $\frac{\Lambda}{\Lambda'}$, $\frac{\Pi}{\Pi'}$ καὶ $\frac{P}{P'}$ μ καὶ ν δὲ τὰ ἀτελῆ πηλίκα τὰ ἀντίστοιχα τοῖς ἡγμένοις $\frac{\Pi}{\Pi'}$ καὶ $\frac{P}{P'}$.

Ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν $\frac{\Pi}{\Pi'}=\frac{\Lambda\mu+K}{\Lambda'\mu+K'}$.

Τὸ δὲ $\dfrac{P}{P'}=\dfrac{\Lambda\left(\mu+\frac{1}{\nu}\right)+K}{\Lambda'\left(\mu+\frac{1}{\nu}\right)+K'}$ καθ' ἃ εἴπομεν ἀνωτέρω, ἢ

$$\frac{P}{P'}=\frac{\Lambda\mu\nu+\Lambda+K\nu}{\Lambda'\mu\nu+\Lambda'+K'\nu}=\frac{(\Lambda\mu+K)\nu+\Lambda}{(\Lambda'\mu+K')\nu+\Lambda}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες διὰ Π καὶ Π′ τὰς παρενθέσει, αἵτινες εἶναι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{\Pi}{\Pi'}$, ἔχομεν $\frac{P}{P'}=\frac{\Pi\nu+\Lambda}{\Pi'\nu+\Lambda'}$, ὅπερ δηλοῖ ὅτι καὶ τὸ $\frac{P}{P'}$ παράγεται ἐκ τῶν δύω ἀμέσως προηγουμένων αὐτοῦ, $\frac{\Lambda}{\Lambda'}$, $\frac{\Pi}{\Pi'}$ καὶ τοῦ ἀντιστοίχου ἀτελοῦς πηλίκου ν ὅπως καὶ τὸ ἀμέσως προηγούμενον αὐτοῦ ἐκ τῶν $\frac{K}{K'}$, $\frac{\Lambda}{\Lambda'}$ καὶ τοῦ ἀντιστοίχου ἀτελοῦς πηλίκου μ.

ΣΗΜ. Ὁ κανὼν οὗτος ἀληθεύει καὶ διὰ τὸ δεύτερον ἠγμένον, ἐὰν προταχθῇ τοῦ πρώτου ἠγμένου $\frac{1}{0}$, ἢ $\frac{0}{1}$, καθ' ὅσον τὸ πρῶτον ἠγμένον εἶναι μεῖζον ἢ ἔλασσον τῆς μονάδος.

360 Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα τὰ ἠγμένα τῶν ἑξῆς συνεχῶν κλασμάτων (351)

1′) $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}$ | 2′) $0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}$ εἶναι τὰ ἑξῆς

$$1')\left\{\begin{array}{llllll} & \alpha'. & \beta'. & \gamma'. & \delta'. & \varepsilon'. \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{2.2+1}{1.3+0}, & \frac{7\times4+2}{3\times4+1}, & \frac{30\times5+7}{13\times5+3}, & \frac{157.6+30}{68.6+13} \\ & & \text{ἢ} & \text{ἢ} & \text{ἢ} & \text{ἢ} \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{7}{3}, & \frac{30}{13}, & \frac{157}{68}, & \frac{972}{421}, \end{array}\right.$$

$$2')\left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha'. & \beta'. & \gamma'. & \delta'. & \varepsilon'. & \varsigma' \\ \frac{0}{1},\frac{1}{2}, & \frac{1.3+0}{2.3+1}, & \frac{3\times2+1}{7\times2+2}, & \frac{7\times2+3}{16\times2+7}, & \frac{17\times1+7}{39\times1+16}, & \frac{24.2+17}{55.2+39} \\ & \text{ἢ} & \text{ἢ} & \text{ἢ} & \text{ἢ} & \text{ἢ} \\ \frac{0}{1}\frac{1}{2}, & \frac{3}{7}, & \frac{7}{16}, & \frac{17}{39}, & \frac{24}{55}, & \frac{65}{149}, \end{array}\right.$$

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΗΓΜΕΝΩΝ.

361. *Θεώρημα. Α'.* Ἡ διαφορὰ ἡγμένου τινὸς ἀπὸ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου αὐτῷ εἶνε κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν $+1$ ἢ -1, καθόσον τὸ δεύτερον τῶν ἡγμένων εἶνε τάξεως ἀρτίας ἢ περιττῆς, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν.

Ἔστωσαν τρία διαδοχικὰ ἡγμένα κλάσματα $\frac{K}{K'}$, $\frac{\Pi}{\Pi'}$, $\frac{P}{P'}$, οἱαδήποτε, καὶ π τὸ εἰς τὸ ἡγμένον $\frac{P}{P'}$, ἀντίστοιχον ἀτελὲς πηλίκον. Ἡ μὲν διαφορὰ τοῦ $\frac{K}{K'}$ ἀπὸ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου αὐτοῦ ἡγμένου $\frac{\Pi}{\Pi'}$, ἤτοι ἡ $\frac{\Pi}{\Pi'}-\frac{K}{K'}$, εἶναι ἴση $\frac{\Pi K'-\Pi' K}{\Pi' K'}$· ἡ δὲ διαφορὰ $\frac{\Pi}{\Pi'}$ ἀπὸ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου αὐτοῦ $\frac{P}{P'}$, ἤτοι ἡ $\frac{P}{P'}-\frac{\Pi}{\Pi'}$, ἤ, ἀντικαθιστῶντες τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{P}{P'}$ διὰ παραστάσεων ἰσοδυνάμων αὐτοῖς (359), ἡ $\frac{\Pi\pi+K}{\Pi'\pi+K'}-\frac{\Pi}{\Pi'}$ εἶναι ἴση

$$\frac{\Pi\Pi'\pi+K\Pi'-\Pi\Pi'\pi-\Pi K'}{(\Pi'\pi+K')\Pi'}, \text{ ἢ } \frac{\Pi' K-\Pi K'}{P'\Pi'}$$

τῆς ὁποίας ὁ ἀριθμητὴς $\Pi' K-\Pi K'$ δῆλον ὅτι διαφέρει τοῦ ἀριθμητοῦ τῆς προηγουμένης διαφορᾶς $\Pi K'-\Pi' K$ μόνον κατὰ τὸ σημεῖον, τοῦθ' ὅπερ δηλοῖ ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν διαδοχικῶν ἡγμένων εἶναι σταθερὰ καὶ διαδοχικῶς μεταβάλλει σημεῖον.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ τοῦ πρώτου ἡγμένου $\alpha+\frac{1}{6}$, ἢ $\frac{\alpha6+1}{6}$ εἶναι $\frac{1}{6}$, δηλ. ἐπειδὴ ἔχει ἀριθμητὴν τὴν θετικὴν μονάδα, $+1$, ἡ διαφορὰ τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ τρίτου ἔξει ἀριθμητὴν τὴν ἀρνητικὴν μονάδα, ἤτοι —1, ἡ δὲ διαφορὰ τοῦ τρίτου ἀπὸ τοῦ τετάρτου ἔξει ἀριθμητὴν τὴν +1, καὶ ἡ τοῦ τετάρτου ἀπὸ τοῦ πέμπτου —1· ὅπερ δηλοῖ α'.) ὅτι ἡ διαφορὰ εἶναι +1 ἢ —1, καθόσον τὸ δεύτερον τῶν ἠγμένων εἶναι τάξεως ἀρτίας ἢ περιττῆς· β'.) ὅτι τὰ διαδοχικὰ ἠγμένα εἶναι ἐναλλὰξ μείζω καὶ ἐλάσσω τῶν προηγουμένων καὶ ἑπομένων αὐτοῖς, ἤτοι ὅτι τὰ μὲν ἀρτίας τάξεως εἶναι μείζω τῶν ἀμέσων ἡγουμένων καὶ ἑπομένων αὐτοῖς· τὰ δὲ περιττῆς ἐλάσσω.

Πόρισμα Α'. Πᾶν ἠγμένον εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον. Διότι, τῆς διαφορᾶς δύο διαδοχικῶν ἠγμένων $\frac{\text{Κ}}{\text{Κ}'}$ καὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}$, οἱωνδήποτε, $\text{Κ}\Pi' - \Pi\text{Κ}'$ οὔσης ± 1, ἐὰν οἱ ὅροι θατέρου τῶν ἠγμένων, ἔστω τοῦ $\frac{\text{Κ}}{\text{Κ}'}$, εἶχον κοινὸν διαιρέτην, τότε οὗτος ὡς διαιρῶν τοὺς $\text{Κ}\Pi'$ καὶ $\Pi\text{Κ}'$, ὡς πολλαπλασίους τῶν Κ καὶ Κ', θέλει διαιρεῖ καὶ τὴν ± 1, ὅπερ ἄτοπον. Ὅθεν δῆλον ὅτι οὐδ' ἑνὸς τῶν ἠγμένων οἱ ὅροι δύνανται νὰ ἔχωσι κοινοὺς διαιρέτας καὶ δὴ καὶ ὅτι πᾶν ἠγμένον εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον.

362. *Θεώρημα Β'.* Ἡ ἀξία τοῦ συνεχοῦς κλάσματος περιλαμβάνεται πάντοτε μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἠγμένων. Ἔστωσαν τρία διαδοχικὰ ἠγμένα $\frac{\text{Κ}}{\text{Κ}'}, \frac{\Pi}{\Pi'}$ καὶ $\frac{\text{Ρ}}{\text{Ρ}'}$, οἱαδήποτε, καὶ π τὸ ἀτελὲς πηλίκον τὸ ἀντίστοιχον εἰς τὸ $\frac{\text{Ρ}}{\text{Ρ}'}$.

Τὸ $\frac{\text{Ρ}}{\text{Ρ}'}$ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{\Pi\pi + \text{Κ}}{\Pi'\pi + \text{Κ}'}$. Ἐὰν ἀντὶ τοῦ ἀτελοῦς πηλίκου π τεθῇ ἐν αὐτῇ τὸ τέλειον πηλίκον $\pi + \cfrac{1}{\rho + \cfrac{1}{\sigma + \cfrac{1}{\tau + \ldots}}}$

ὅπερ ἂς παραστήσωμεν διὰ φ. Τότε τὸ κλάσμα $\frac{\Pi\varphi + \text{Κ}}{\Pi'\varphi + \text{Κ}'}$ θέλει παριστᾷ τὴν ἀξίαν τοῦ συνεχοῦς κλάσματος.

Ἐὰν δ' ἐκ τούτου ἀφαιρεθῶσι διαδοχικῶς τὰ δύο διαδοχικὰ ἡγμένα $\frac{K}{K'}$ καὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}$, ἔχομεν

$$\frac{\Pi\varphi+K}{\Pi'\varphi+K'}-\frac{K}{K'}=\frac{\Pi\varphi K'+KK'-\Pi'\varphi K-KK'}{(\Pi'\varphi+K')K'}=\frac{(\Pi K'-\Pi' K)\varphi}{(\Pi'\varphi+K')K'}$$

$$\frac{\Pi\varphi+K}{\Pi'\varphi+K'}-\frac{\Pi}{\Pi'}=\frac{\Pi\varphi\Pi'+K\Pi'-\Pi'\varphi\Pi-\Pi K'}{(\Pi'\varphi+K')\Pi'}=\frac{K\Pi'-\Pi K'}{(\Pi'\varphi+K')\Pi'}.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ $\Pi K'-\Pi' K=\pm 1$ καὶ $K\Pi'-\Pi K'=\mp 1$ (361) ἔχομεν τὰς ἑξῆς μορφὰς τῶν διαφορῶν.

$$\frac{\Pi\varphi+K}{\Pi'\varphi+K'}-\frac{K}{K'}=\frac{\pm\varphi}{(\Pi'\varphi+K')K'}$$

$$\frac{\Pi\varphi+K}{\Pi'\varphi+K'}-\frac{\Pi}{\Pi'}=\frac{\mp 1}{(\Pi'\varphi+K')\Pi'}$$

δι' ὧν δεικνύεται ὅτι αἱ διαφοραὶ δύο διαδοχικῶν ἡγμένων ἀπὸ τῆς ἀξίας τοῦ συνεχοῦς εἶναι ἀντιθέτων σημείων, τοῦθ' ὅπερ δηλοῖ ὅτι θάτερον μὲν τούτων εἶναι ἔλασσον τῆς ὅλης ἀξίας τοῦ συνεχοῦς, θἄτερον δὲ μεῖζον, ἤ, ὅπερ ταὐτὸν, ὅτι ἡ ἀξία τοῦ συνεχοῦς περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἡγμένων· ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Α'. Ἐπειδὴ ἕκαςον μὲν ἀρτίας τάξεως ἡγμένον εἶναι μεῖζον ἑκατέρου τῶν ἀμέσως ἡγουμένων καὶ ἑπομένων αὐτοῦ, ἕκαστον δὲ περιττῆς τάξεως ἡγμένον ἔλασσον ἑκατέρου αὐτῶν (361), συμπεραίνομεν ὅτι πᾶν συνεχὲς κλάσμα εἶναι ἔλασσον μὲν ἑκάστου τῶν ἡγμένων ἀρτίας τάξεως, μεῖζον δὲ ἑκάστου τῶν περιττῆς. Τοῦτο δὲ πορίζόμεθα ἐκ τοῦ ἰδίου θεωρήματος καὶ οὕτω. Ἐπειδὴ εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ πρῶτον ἡγμένον $\frac{\alpha}{1}$, ἢ α εἶναι ἔλασσον τοῦ συνεχοῦς, τὸ δεύτερον ἡγμένον (362) ἔσται μεῖζον αὐτοῦ, τὸ τρίτον ἡγμένον κατὰ τὸ ἴδιον θεώρημα ἔλασσον, τὸ τέταρτον διὰ τὸν αὐτὸν λόγον μεῖζον, κ. ο. ε.

ΣΗΜ. Β'. Ἕκαστον ἡγμένον περιλαμβάνεται μεταξὺ δύω προηγουμένων αὐτοῦ διαδοχικῶν ἡγμένων· διότι πᾶν ἡγμένον εἶναι ἡ ἀξία συνεχοῦς κλάσματος περατουμένου εἰς τὸ ἀντίστοιχον ἀτελὲς πηλίκον (349) καὶ ὡς τοιαύτη κατὰ τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα περιλαμβάνεται μεταξὺ δύω διαδοχικῶν ἐκ τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ἡγμένωνι

363. *Θεώρημα Γ'.* Πᾶν ἡγμένον προσεγγίζει μᾶλλον τῇ ἀξίᾳ τοῦ συνεχοῦς κλάσματος ἢ ἕκαστον τῶν προηγουμένων αὐτοῦ.

Ἔστωσαν δύω διαδοχικὰ ἡγμένα τὰ $\frac{K}{K'}$ καὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}$. Κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα (362) αἱ διαφοραὶ ἑκατέρου αὐτῶν ἀπὸ τῆς ἀξίας τοῦ συνεχοῦς ἀνεξαρτήτως τῶν σημείων εἶναι·

$\frac{\varphi}{(\Pi'\varphi+K')K'}$ καὶ $\frac{1}{(\Pi'\varphi+K')\Pi'}$, ὧν ἡ δευτέρα, ἤτοι ἡ διαφορὰ τοῦ $\frac{\Pi}{\Pi'}$ ἀπὸ τοῦ συνεχοῦς, εἶναι ἐλάσσων τῆς πρώτης διαφορᾶς, ἤτοι τῆς τοῦ ἀμέσως προηγουμένου $\frac{K}{K'}$ ἀπὸ τοῦ ἰδίου συνεχοῦς· διότι ὁ μὲν ἀριθμητὴς ταύτης φ, ὡς τέλειον πηλίκον εἶναι μείζων τοῦ ἀριθμητοῦ ἐκείνης, 1, ὁ δὲ παρονομαστὴς $(\Pi'\varphi+K')K'$ εἶναι ἐλάσσων τοῦ $(\Pi'\varphi+K')\Pi'$, διότι ὁ δεύτερος παράγων τοῦ παρονομαστοῦ ταύτης Π' εἶναι μείζων τοῦ δευτέρου παράγοντος τοῦ παρονομαστοῦ ἐκείνης Κ'.

ΣΗΜ. Α'. Ἐπειδὴ ἐκ τῶν ἡγμένων ἕκαστον μὲν περιττῆς τάξεως εἶναι ἔλασσον τοῦ συνεχοῦς, ἕκαστον δὲ τῶν ἀρτίας τάξεως εἶναι μεῖζον, καὶ τόσῳ μᾶλλον προσεγγίζει τῇ ἀξίᾳ τοῦ συνεχοῦς, ὅσῳ ἀνωτέρα εἶναι ἡ τάξις αὐτοῦ, συμπεραίνομεν ὅτι τὰ μὲν περιττῆς τάξεως ἡγμένα βαίνουσιν αὐξανόμενα, τὰ δὲ ἀρτίας ἐλαττούμενα.

364. *Θεώρημα.* Πᾶν ἡγμένον προσεγγίζει μᾶλλον τῇ ἀξίᾳ τοῦ συνεχοῦς, ἢ πᾶν ἄλλο κλάσμα ἔχον ὅρους ἐλάσσονας.

Ἔστω Α ἡ ἀξία τοῦ συνεχοῦς, $\frac{\Pi}{\Pi'}$ ἡγμένον τι, $\frac{K}{K'}$ τὸ ἀμέσως πρὸ τοῦ $\frac{\Pi}{\Pi'}$ ἡγμένον καὶ $\frac{P}{P'}$ κλάσμα τι μᾶλλον προσεγγίζον τῇ ἀξίᾳ τοῦ συνεχοῦς ἢ τὸ $\frac{\Pi}{\Pi'}$. Θ' ἀποδείξωμεν, ὅτι οἱ ὅροι τοῦ $\frac{P}{P'}$ εἶναι μείζονες τῶν ὅρων τοῦ $\frac{\Pi}{\Pi'}$.

Ἡ μόνη περίστασις καθ' ἣν τὸ θεώρημα ἔχει ἀνάγκην ἀποδείξεως εἶναι ἐκείνη, καθ' ἣν τὸ $\frac{P}{P'}$ δὲν εἶναι ἡγμένον τοῦ συνεχοῦς, διότι ἐὰν τὸ $\frac{P}{P'}$ ἦτο ἓν τῶν ἡγμένων τοῦ συνεχοῦς, ὡς μᾶλλον προσεγγίζον τῇ ἀξίᾳ αὐτοῦ, ἤθελεν εἶσθαι ἠγμένον ἀνωτέρας τάξεως ἢ τὸ $\frac{\Pi}{\Pi'}$ καὶ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα (363) ἤθελεν ἔχει ὅρους μείζονας τῶν τοῦ $\frac{\Pi}{\Pi'}$.

Οἱ ἀριθμοὶ $\frac{K}{K'}$, $\frac{P}{P'}$, χ, $\frac{\Pi}{\Pi'}$, ἢ οἱ ἑξῆς $\frac{K}{K'}$, χ, $\frac{P}{P'}$, $\frac{\Pi}{\Pi'}$ βαίνουσι κατὰ τάξιν μεγέθους ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος μὲν ἐὰν τὸ $\frac{K}{K'}$ ἦναι τάξεως περιττῆς, ἀπὸ τοῦ μείζονος δὲ ἐὰν ἦναι ἀρτίας. Διότι τὸ $\frac{P}{P'}$, ὡς προσεγγίζον ἐξ ὑποθέσεως τῷ χ μᾶλλον τοῦ $\frac{\Pi}{\Pi'}$, θὰ προσεγγίζῃ τῷ χ ἔτι μᾶλλον τοῦ $\frac{K}{K'}$, καὶ δὴ θὰ περιέχηται μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ἠγμένων ὡς καὶ ἡ ἀξία τοῦ συνεχοῦς. Ἡ δὲ διαφορὰ αὐτοῦ καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν ἠγμένων πρέπει νὰ ἦναι ἐλάσσων τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, ἤτοι πρέπει νὰ ἐπαληθεύηται ἡ ἑξῆς ἀνισότης

$$\frac{P}{P'}-\frac{K}{K'}<\frac{\Pi}{\Pi'}-\frac{K}{K'}$$

$$\text{ἢ } \frac{K'P-KP'}{P'K'}<\frac{\Pi K'-\Pi' K}{\Pi' K'}$$

$$\text{ἢ } \frac{K'P-KP'}{P'K'}<\frac{\pm 1}{\Pi' K'}$$

ἥτις διότι $K'P-KP'$ ἔσται $=$ ἢ $> \pm 1$, ὡς διαφορὰ ἀκεραίων ἀνίσων*, ἀληθεύει μόνον ὅταν $P'K' > \Pi' K'$, ἤτοι ὅταν $P' > \Pi'$, δῆλα δὴ ὅταν ὁ παρονομαστὴς τοῦ $\frac{P}{P'}$ εἶναι μεῖζον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ $\frac{\Pi}{\Pi'}$.

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{P}{P'}$ περιέχεται μεταξὺ τῶν $\frac{K}{K'}$ καὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}$, καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ κλάσμα $\frac{P'}{P}$ πρέπει νὰ περιέχηται μεταξὺ τῶν ἀντιστρόφων αὐτῶν $\frac{K'}{K}$ καὶ $\frac{\Pi'}{\Pi}$ καὶ δὴ πρέπει ν' ἀληθεύῃ καὶ ἡ ἑξῆς ἀνισότης.

---

* Διότι ἂν $K'P-KP'=0$ τότε ἤθελεν εἶσθαι $\frac{P}{P'}=\frac{K}{K'}$, ὅπερ εἶναι ἐναντίον τῇ ὑποθέσει».

$$\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}-\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}<\frac{\Pi'}{\Pi}-\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}$$

$$\text{ἢ}\ \frac{\mathrm{KP}'-\mathrm{K}'\mathrm{P}}{\mathrm{KP}}<\frac{\mathrm{K}\Pi'-\mathrm{K}'\Pi}{\Pi\mathrm{K}}$$

$$\text{ἢ}\ \frac{\mathrm{KP}'-\mathrm{K}'\mathrm{P}}{\mathrm{KP}}<\frac{\pm 1}{\Pi\mathrm{K}}$$

ἥτις, δι' ὃν λόγον ἐν τῇ ἀνωτέρω ἀνισότητι εἴπομεν, ἀληθεύει μόνον, ὅταν $\mathrm{KP}>\Pi\mathrm{K}$ ἤτοι, ὅταν $\mathrm{P}>\Pi$, δῆλα δὴ ὅταν καὶ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'}$ εἶναι μείζων τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ $\frac{\Pi}{\Pi'}$.

365. *Θεώρημα*. Τὸ λάθος, ὅπερ πράττομεν λαμβάνοντες ἡγμένον τι ἀντὶ τῆς τιμῆς τοῦ συνεχοῦς, εἶναι ἔλασσον τῆς μονάδος διαιρουμένης διὰ τοῦ γινομένου τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἀμέσως προηγουμένου ἢ ἑπομένου ἡγμένου.

Ἔστωσαν δύω διαδοχικὰ ἡγμένα $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}$ καὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}$ οἱαδήποτε. Ἐπειδὴ ἡ ἀξία τοῦ συνεχοῦς περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν τούτων ἡγμένων (362), ἡ διαφορὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἀπὸ τῆς ἀξίας τοῦ συνεχοῦς ἔσται ἐλάσσων τῆς διαφορᾶς αὐτῶν $\frac{\pm 1}{\mathrm{K}'\Pi'}$ (361), ἤτοι τὸ πραττόμενον λάθος, ὅταν λαμβάνωμεν ἀντὶ τῆς ἀξίας τοῦ συνεχοῦς ἡγμένον τι, εἶναι ἔλασσον, κατ' ἔλλειψιν ἢ καθ' ὑπεροχὴν, τῆς μονάδος διαιρουμένης διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἀμέσως προηγουμένου ἢ ἑπομένου ἡγμένου. ὅ.ἔ.δ.

ΣΗΜ. Εἴδομεν ἀνωτέρω (362) ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ $\frac{\Pi}{\Pi'}$ (ὅπερ ὑπετέθη οἷον δήποτε) ἀπὸ τῆς ἀξίας τοῦ συνεχοῦς $\frac{\Pi\varphi+\mathrm{K}}{\Pi'\varphi+\mathrm{K}'}$, ὅπου, τὸ φ παριστᾷ τὸ ἀντίστοιχον τῷ $\frac{\Pi}{\Pi'}$ πλῆρες πηλίκον, εἶναι $\frac{1}{(\Pi'\varphi+\mathrm{K}')\Pi'}$ ἥτις, ἐπειδὴ $\varphi>1$, εἶναι ἐλάσσων τοῦ $\frac{1}{(\Pi'+\mathrm{K}')\Pi'}$ καὶ ἔτι ἐλάσσων τοῦ $\frac{1}{\Pi'^2}$. Ὅθεν δῆλον ὅτι τὸ πραττόμενον λάθος, ὅταν λαμβάνηται ἡγμένον τι ἀντὶ τοῦ συνεχοῦς, εἶναι ἔλασσον τῆς μονάδος διαιρουμένης διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα αὐτοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ἀμέσως προηγουμένου ἡγμένου, ἢ ὅτι εἶναι ἔλασσον τῆς μονάδος διαιρουμένης διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ.

366. *Ἐφαρμογαί. Α'.* Ἔστω τὸ ἀπέραντον συνεχὲς κλάσμα τὸ παριστῶν τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1\cdots}}}$$

οὗτινος τὰ διαδοχικὰ ἡγμένα εἶναι $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113} \ldots$ Ἐκ τούτων τὸ μὲν δεύτερον $\frac{22}{7}$ εἶναι ὁ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους εὑρεθεὶς λόγος, προσεγγίζει δὲ αὐτῷ καθ' ὑπεροχὴν ἔλασσον τοῦ $\frac{1}{7106}$, ἢ ἔλασσον τοῦ $\frac{1}{742}$, τὸ δὲ τέταρτον $\frac{355}{113}$ εἶναι ὁ ὑπὸ τοῦ Μετίου εὑρεθεὶς λόγος, προσεγγίζει δὲ αὐτῷ καθ' ὑπεροχὴν ἔλασσον τοῦ $\frac{1}{113(113+106)}$, ἤτοι τοῦ $\frac{1}{24742}$, ἢ ἁπλούστερον ἔλασσον τοῦ $\frac{1}{113.113}$, ἤτοι τοῦ $\frac{1}{12767}$.

Β'. Νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{9000}$ ἡ τιμὴ τοῦ $\sqrt{6}$ διὰ τοῦ παριστῶντος αὐτοῦ ἀπεράντου συνεχοῦς κλάσματος

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\ldots}}}}$$

οὗτινος τὰ ἡγμένα εἶναι $\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{22}{9}, \frac{49}{20}, \frac{218}{89} \ldots$

Ἐπειδὴ ἡ $\sqrt{9000}$ εἶναι 94, ἀριθμὸς ὀλίγον διαφέρων τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ τελευταίου ἡγμένου 89, λαμβάνοντες αὐτὸ ἔξομεν τὴν τιμὴν τοῦ συνεχοῦς εἰς προσέγγισιν κατ' ἔλλειψιν ἔλασσον τοῦ $\frac{1}{89(89+20)}$, ἤτοι τοῦ $\frac{1}{9701}$, ὅπερ εἶναι ἔλασσον τῆς ζητουμένης προσεγγίσεως $\frac{1}{9000}$.

367. Διὰ τῶν ἡγμένων τῶν συνεχῶν κλασμάτων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μίαν λύσιν ἀκεραίαν δοθείσης ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ μετὰ δύω ἀγνώστων.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta\psi=\kappa$ τρέπομεν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ (ὅπερ εἶναι ἀνάγωγον· διότι ὑποτίθεται ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις περιέχει ἀκεραίας λύσεις) εἰς κλάσμα συνεχές, σχηματίζομεν τὰ ἡγμένα αὐτοῦ, ὧν τὸ τελευταῖον εἶναι αὐτὸ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$, εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμητὴν τῆς διαφορᾶς τοῦ τελευταίου καὶ τοῦ προτελευταίου ἡγμένου, (ὅπερ ἔστω $\frac{\pi}{\nu}$), ὅστις εἶναι ἴσος ± 1 (361). Ὅθεν λαμβάνομεν τὴν ἑξῆς ἰσότητα $\alpha\nu-\beta\pi=\pm 1$ καὶ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $+\kappa$ μέν, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς τῆς ἀνωτέρω διαφορᾶς εἶναι $+1$, ὅπερ συμβαίνει ὅταν τὸ $\frac{\pi}{\nu}$ εἶναι τάξεως περιττῆς (361), λαμβάνομεν
$$\alpha\nu\kappa-\beta\pi\kappa=\kappa$$
ἐξ ἧς δῆλον ὅτι, ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta\psi=\kappa$ ταυτοποιεῖται διὰ τῆς ἀκεραίας λύσεως $\chi=\nu\kappa,\quad \psi=-\pi\kappa$
ἐπὶ $-\kappa$ δέ, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς τῆς ἀνωτέρω διαφορᾶς εἶναι -1, ὅπερ συμβαίνει ὅταν τὸ προτελευταῖον ἡγμένον εἶναι τάξεως ἀρτίας (361), λαμβάνομεν
$$-\alpha\nu\kappa+\beta\pi\kappa=\kappa$$
ἐξ ἧς δῆλον ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta\psi=\kappa$ ταυτοποιεῖται διὰ τῆς ἀκεραίας λύσεως $\chi=-\nu\kappa\quad \psi=\pi\kappa.$

Παραδείγματα.

1ον. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $972\chi+421\psi=19$ (1), τὸ συνεχὲς κλάσμα, εἰς ὃ τρέπεται τὸ $\frac{972}{421}$ εὑρέθη (351), ὡς καὶ τὰ ἡγμένα αὐτοῦ $\frac{2}{1}, \frac{7}{3}, \frac{30}{13}, \frac{157}{68}, \frac{972}{421}$

Ὁ δὲ ἀριθμητὴς τῆς διαφορᾶς $\frac{972}{421}-\frac{157}{68}$ εἶναι
$972\times 68-157\times 421=-1$ καὶ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ -19 ἔχομεν
$$972\times 68(-19)-421\times 157(-19)=19$$
$$\text{ἢ}\quad -972\times 1292+421\times 2983=19$$

ἐξ ἧς δῆλον ὅτι ἡ ἐξίσωσις $972\chi+421\psi=19$ ταυτοποιεῖται διὰ τῆς ἀκεραίας λύσεως $\chi=-1292,\ \psi=2983.$

Ἐκ ταύτης ὡς γνωστὸν (337. Σημ.) εὑρίσκομεν τοὺς γενικοὺς τύπους τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς δοθείσης ἐξισώσεως (1).

2ον. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $65\chi-149\psi=7$ (2).

Τὸ συνεχὲς κλάσμα εἰς ὃ τρέπεται τὸ $\frac{65}{149}$ εὑρέθη (351) ὡς καὶ τὰ ἡγμένα αὐτοῦ

$$\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{7},\frac{7}{16},\frac{17}{39},\frac{24}{55},\frac{65}{149}.$$

ὁ δὲ ἀριθμητὴς τῆς διαφορᾶς $\frac{65}{149}-\frac{24}{55}$ εἶναι

$$65\times55-149\times24=-1$$

καὶ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ -7 ἔχομεν

$$65\times55(-7)-149\times24(-7)=7$$

$$\text{ἢ}\quad -65\times385+149\times168=7$$

ἐξ ἧς δῆλον ὅτι ἡ ἐξίσωσις $65\chi-149\psi=7$ ταυτοποιεῖται διὰ τῆς ἀκεραίας λύσεως $\chi=-385,\ \psi=-168$

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ

$$\alpha^{\chi}=\beta.$$

368. Ἐκθετικὴ ἐξίσωσις λέγεται ἡ ἔχουσα ἄγνωστον ἀριθμὸν εἰς τὸν ἐκθέτην.

369. *Θεώρημα.* Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως $\alpha^{\chi}=\beta$, ἥτις εἶναι ἡ ἁπλουστέρα τῶν ἐκθετικῶν ἐξισώσεων, δυνατὸν νὰ παραστήσῃ κατὰ συνέχειαν πάντας τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τοῦ ∞, ὅταν τὸ α ἦναι θετικὸν καὶ διάφορον τῆς μονάδος, αὐξανομένου τοῦ χ συνεχῶς ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$.

Ἐν πρώτοις θέλομεν ἀποδείξει ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ δοθῇ τῷ χ ἐλαχίστη αὔξησις τοιαύτη ὥστε ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς τοῦ α^{χ} νὰ ἦναι ἐλάσσων παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ.

1ον. Ἔστω $\alpha>$· ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ α^{χ} τὸ χ διαδοχικῶς διὰ τῶν ἀριθμῶν μ καὶ $\mu+\frac{1}{\nu}$, (ὧν ἡ διαφορά, ὅταν τὸ ν ὑποτεθῇ ἀπεριορίστως μέγα, εἶναι ἐλάσσων παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ) λαμβάνομεν τοὺς ἀριθμοὺς α^{μ} καὶ $\alpha^{\mu+\frac{1}{\nu}}$. Θέλομεν ἀποδείξει ὅτι ἡ διαφορὰ $(\alpha^{\mu+\frac{1}{\nu}}-\alpha^{\mu})$ δύναται νὰ ἦναι ἐλάσσων παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ δ, ἤτοι ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπαληθεύηται ἡ ἑξῆς ἀνισότης

$\alpha^{\mu+\frac{1}{\nu}}-\alpha^{\mu}<\delta$, ἢ $\alpha^{\mu}\times\alpha^{\frac{1}{\nu}}-\alpha^{\mu}<\delta$ (1)

διότι διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος δι' α^{μ} λαμβάνομεν $\alpha^{\frac{1}{\nu}}-1<\frac{\delta}{\alpha^{\mu}}$· ὅθεν $\alpha^{\frac{1}{\nu}}<1+\frac{\delta}{\alpha^{\mu}}$, ἐκ ταύτης δὲ ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὴν νστὴν δύναμιν τὴν ἑξῆς

$\alpha<(1+\frac{\delta}{\alpha^{\mu}})^{\nu}$ (2), τῆς ὁποίας τὸ δεύτερον μέλος $(1+\frac{\delta}{\alpha^{\mu}})^{\nu}$, ὡς γενικὸς τύπος τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου αὐξούσης, ἧς ὁ λόγος $1+\frac{\delta}{\alpha^{\mu}}>1$, δύναται νὰ γείνῃ μεῖζον παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ (261) καὶ δὴ καὶ τοῦ α· ἀληθευούσης δὲ τῆς (2), ἀληθεύει καὶ ἡ (1), ἥτις δηλοῖ ὅτι ἡ αὔξησις ἣν ἔλαβε ὁ α^{μ}, αὐξηθέντος τοῦ μ κατὰ $\frac{1}{\nu}$, ἀριθμὸν ἐλάχιστον, εἶναι ἐλαχίστη.

2ον. Ἔστω $\alpha<1$. Ἐνταῦθα θέλομεν ἀποδείξει ὅτι ἡ ἐλάττωσις, ἣν ἔλαβε τὸ α^{μ}, αὐξηθέντος τοῦ μ κατὰ $\frac{1}{\nu}$, ἀριθμὸν ἐλάχιστον, εἶναι ἐλαχίστη, ἤτοι ὅτι ἀληθεύει ἡ ἑξῆς ἀνισότης

$$\alpha^{\mu}-\alpha^{\mu+\frac{1}{\nu}}<\delta \quad (3)$$

διότι διαιροῦντες δι' α^{μ} λαμβάνομεν

$1-\alpha^{\frac{1}{\nu}}<\frac{\delta}{\alpha^{\mu}}$, ὅθεν $1-\frac{\delta}{\alpha^{\mu}}<\alpha^{\frac{1}{\nu}}$ καὶ ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὴν νστὴν δύναμιν, τὴν ἑξῆς $(1-\frac{\delta}{\alpha^{\mu}})^{\nu}<\alpha$ (4)

τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον μέλους $(1-\frac{\delta}{\alpha^{\mu}})^{\nu}$, ὡς γενικὸς τύπος τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου φθινούσης, ἧς ὁ λόγος $1-\frac{\delta}{\alpha^{\mu}}<1$, δύναται νὰ γείνῃ ἔλασσον παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ δῆκαὶ τοῦ α· ἀληθευούσης δὲ τῆς (4) ἀληθεύει καὶ ἡ (3). ὅ.ἔ.δ.

Τούτων τεθέντων ὑποθέσωμεν Α′. ὅτι ἀντικαθιστῶμεν ἐν τῇ α^{χ} (ἔνθα ὑποτίθεται $\alpha>1$) ἀντὶ τοῦ χ πάντας τοὺς διαδοχικοὺς ἀριθμοὺς τῆς ἑξῆς αὐξούσης ἀριθμητικῆς προόδου

$$0, \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \frac{3}{\nu}, \frac{4}{\nu} \ldots\ldots$$

τῆς ὁποίας τοὺς ὅρους, ὅταν ν ὑποτεθῇ ἀπεριορίστως μέγα, ὡς διαφέροντας ἀνὰ δύω ἔλασσον παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι παριστῶσι κατὰ συνέχειαν πάντας τοὺς ἀριθμοὺς (ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ ∞), αἱ δὲ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς α^{χ} μετὰ τὴν ἀνωτέρω ἀντικατάστασιν ἀποτελοῦσι τὴν ἑξῆς σειρὰν α^0 ἢ $1, \alpha^{\frac{1}{\nu}}, \alpha^{\frac{2}{\nu}}, \alpha^{\frac{3}{\nu}}, \alpha^{\frac{4}{\nu}} \ldots\ldots$ τῆς ὁποίας οἱ ὅροι, κατὰ τ' ἀνωτέρω ἀποδειχθέντα, βαίνοντες αὐξανόμενοι διαφέρουσι καὶ οὗτοι ἀνὰ δύο ἔλασσον παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ δυνατὸν νὰ θεωρηθῶσιν ὅτι παριστῶσι κατὰ συνέχειαν πάντας τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ∞.

Β′. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἀντικαθιστῶμεν ἐν τῇ α^{χ} ἀντὶ τοῦ χ πάντας τοὺς διαδοχικοὺς ἀριθμοὺς τῆς ἑξῆς φθινούσης ἀριθμητικῆς προόδου $0, -\frac{1}{\nu}, -\frac{2}{\nu}, -\frac{3}{\nu}, -\frac{4}{\nu} \ldots\ldots$ τῆς ὁποίας τοὺς ὅρους, ὅταν ν ὑποτεθῇ ἀπεριορίστως μέγα, ὡς διαφέροντας ἀνὰ δύω ἔλασσον παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι παριστῶσι κατὰ συνέχειαν πάντας τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $-\infty$, αἱ δὲ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς α^{χ} μετὰ τὴν ἀνωτέρω ἀντικατάστασιν ἀποτελοῦσι τὴν ἑξῆς σειρὰν

$$\alpha^0, \alpha^{-\frac{1}{\nu}}, \quad \alpha^{-\frac{2}{\nu}}, \quad \alpha^{-\frac{3}{\nu}} \quad \alpha^{-\frac{4}{\nu}} \ldots\ldots$$

$$\text{ἢ } 1, \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2}{\nu}}, \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{3}{\nu}}, \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{4}{\nu}} \ldots\ldots$$

τῆς ὁποίας οἱ ὅροι κατὰ τ' ἀνωτέρω ἀποδειχθένα βαίνοντες ἐλαττούμενοι διαφέρουσι καὶ οὗτοι ἀνὰ δύω ἔλασσον παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθῶσιν ὅτι παριστῶσι κατὰ συνέχειαν πάντας τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς ἐλάσσονας τῆς μονάδος, ἤτοι τοὺς περιεχομένους μεταξὺ τῆς 1 καὶ τοῦ 0.

Διὰ τῶν ἀνωτέρω ἐδείχθη ὅτι διὰ τῆς α^{χ} δύνανται νὰ παρασταθῶσι κατὰ συνέχειαν πάντες οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τοῦ ἀπείρου, ὅταν α ἦναι θετικὸς καὶ διάφορος τῆς μονάδος.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΣ α^{χ} ΟΤΑΝ χ ΗΝΑΙ ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

370. Ἔστω ἡ ἐκθετικὴ ἐξίσωσις $2^{\chi}=6$, ἐν ᾗ παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι μείζων τῆς μονάδος· διότι διὰ $\chi=1$ ἔχομεν $(2=2)$, δεύτερον ὅτι ὁ χ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός· διότι, ἐὰν χ ἦτο σύμμετρός τις ἀριθμὸς $\frac{\pi}{\kappa}$, ἠθέλομεν ἔχει $2^{\frac{\pi}{\kappa}}=6$· ὅθεν ὑψοῦντες τὰ μέλη εἰς τὴν κ δύναμιν ἔχομεν $2^{\pi}=6^{\kappa}$, ἥτις εἶναι ἀδύνατος, τοῦ 2^{π} μὴ περιέχοντος τὸν παράγοντα 3, ὃν περιέχει ὁ 6^{κ} (265).

Ἐὰν δὲ ἀντὶ τοῦ χ ἀντικατασταθῇ σειρὰ ἀριθμῶν ἐχόντων ὅριον τὸν ὑπὸ τοῦ χ παριστάμενον ἀσύμμετρον ἀριθμόν, θέλομεν εὕρει κατὰ τὰ ἀνωτέρω (369) σειρὰν ἀριθμῶν ἔχουσαν ὅριον τὸν 6.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ῥηθὲν διὰ τὴν ἀνωτέρω μερικὴν ἐξίσωσιν $2^{\chi}=6$ ἀληθεύει καὶ διὰ πᾶσαν ἄλλην, ἐν ᾗ τὸ χ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός· ὁρίζεται ὡς τιμὴ τῆς α^{χ}, ὅταν χ ἦναι ἀσύμμετρος ἀριθμός, τὸ ὅριον τῶν τιμῶν, ἃς λαμβάνει ἡ παράστασις α^{χ} διὰ συμμέτρους τιμὰς τοῦ χ ἐχούσας ὅριον τὸν ἀσύμμετρον ἀριθμόν.

ΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha^{\chi}=\beta$.

371. Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ὑπάρχει σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος τιμὴ τοῦ χ ταυτοποιοῦσα τὴν ἐξίσωσιν $\alpha^{\chi}=\beta$, ὅταν β ἦναι οἱοσδήποτε θετικὸς ἀριθμός· διότι ἀπεδείχθη ὅτι τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς α^{χ} δύναται νὰ παραστήσῃ κατὰ συνέχειαν πάντας τοὺς ἀριθμούς. Εὑρίσκεται δὲ ἡ τιμὴ τοῦ χ, ἤτοι ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha^{\chi}=\beta$, ὅταν αὕτη ἦναι ἀκέραιος ἀριθμός, δηλ. ὅταν α^{χ} ἦναι τελεία δύναμις, δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ χ διὰ τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν καὶ σχηματισμοῦ τῶν διαδοχικῶν τελείων δυνάμεων τοῦ α μέχρις οὗ εὑρεθῇ ἡ τελεία δύναμις τοῦ α ἡ ἴση τῷ β.

Ὅταν ὅμως ἡ τιμὴ τοῦ χ ἦναι μὴ ἀκέραιος ἀριθμὸς (σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος) τότε εὑρίσκομεν διὰ τῶν συνεχῶν κλασμάτων τὴν τιμὴν τοῦ χ, ἀκριβῶς μὲν ἐὰν ὁ μὴ ἀκέραιος χ ἦναι σύμμετρος ἀριθμός, κατὰ προσέγγισιν δέ, ὅταν ὁ μὴ ἀκέραιος χ ἦναι ἀσύμμετρος ἀριθμός, εὑρίσκοντες τὸ συνεχὲς κλάσμα τὸ παριστῶν τὸν χ, ὡς γενικῶς θέλομεν ἀποδείξει ἐν τοῖς ἑξῆς, πεπερασμένον μὲν ὅταν ἦναι σύμμετρος ἀριθμός, ἀπέραντον δὲ ὅταν ἦναι ἀσύμμετρος, καὶ σχηματίζοντες τὰ διαδοχικὰ ἡγμένα, ἅπερ εἶναι αἱ κατὰ προσέγγισιν διαδοχικαὶ τιμαὶ τοῦ χ.

ΣΗΜ. Ὅταν τὸ χ ἦναι σύμμετρος ἀριθμὸς μὴ ἀκέραιος τότε τὸ τελευταῖον ἡγμένον τοῦ εὑρεθέντος συνεχοῦς κλάσματος εἶναι ἡ ἀκριβὴς τιμὴ τοῦ χ.

Παραδείγματα.

Ἔστω 1ον) $2^{\chi}=64$. Ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ χ διαδοχικῶς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4, 5, 6 εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἕκτη δύναμις τοῦ 2 εἶναι 64, ἤτοι ὅτι $\chi=6$ εἶναι ἡ λύσις τῆς ἐκθετικῆς ἐξισώσεως $2^{\chi}=64$.

Ἔστω 2ον) $216^{\chi}=1296$. Ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ χ τὴν 1 μὲν εὑρίσκομεν $216<1296$, τὸν 2 δὲ εὑρίσκομεν $46656>1296$. ὅθεν δῆλον ὅτι τὸ χ κεῖται μεταξὺ 1 καὶ 2, θέτοντες δὲ

$$\chi=1+\frac{1}{\chi'} \text{ ἔχομεν } 216^{1+\frac{1}{\chi'}}=1296, \text{ ἢ } 216^{1}.216^{\frac{1}{\chi'}}=1296.$$

καὶ διαιροῦντες διὰ 216 ἔχομεν $216^{\frac{1}{\chi'}}=6$

καὶ ὑψοῦντες τὰ μέλη εἰς τὴν χ' δύναμιν ἔχομεν $6^{\chi'}=216$, ἥτις κατὰ τὸ πρῶτον παράδειγμα ταυτοποιεῖται διὰ $\chi'=3$.

Ὅθεν ἔχομεν $\chi=1+\frac{1}{\chi'}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$, τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $216^{\chi}=1296$.

ΣΗΜ. Τὸ συνεχὲς κλάσμα τοῦ ἀνωτ. παραδείγ. ἔχει ἓν μόνον συζυγατικὸν κλάσμα, τὰ δὲ ἡγμένα αὐτοῦ εἶναι $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{3}$, ὧν τὸ δεύτερον εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ χ.

Ἔστω 3ον) $2^{\chi}=6$ (1). Ἐπειδὴ αἱ διαδοχικαὶ δυνάμεις τοῦ 2, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται ὁ 6, εἶναι ἡ δευτέρα καὶ ἡ τρίτη, ὁ χ θέλει περιέχηται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3. Ὅθεν θέτοντες $\chi=2+\frac{1}{\chi'}$, ὅπου $\chi'>1$, ἔχομεν $2^{2+\frac{1}{\chi'}}=6$, ἢ $2^2.2^{\frac{1}{\chi'}}=6$, ἢ $4.2^{\frac{1}{\chi'}}=6$, καὶ διαιροῦντες διὰ 4 ἔχομεν $2^{\frac{1}{\chi'}}=\frac{6}{4}$ ἢ $2^{\frac{1}{\chi'}}=\frac{2}{3}$, καὶ ὑψοῦντες τὰ μέλη εἰς τὴν δύναμιν χ' ἔχομεν

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\chi'}=2.$$

Αἱ διαδοχικαὶ δυνάμεις τοῦ $\frac{3}{2}$ μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται ὁ 2 εἶναι ἡ πρώτη καὶ ἡ δευτέρα· ὅθεν θέτοντες $\chi'=1+\frac{1}{\chi''}$ ἔχομεν $\left(\frac{3}{2}\right)^{1+\frac{1}{\chi''}}=2$, ἢ $\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{\chi''}}=2$, καὶ διαιροῦντες διὰ $\frac{3}{2}$ τὴν ἑξῆς $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{\chi''}}=2.\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$, τῆς ὁποίας ὑψοῦντες τὰ μέλη εἰς τὴν δύναμιν χ'' λαμβάνομεν

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\chi''}=\frac{3}{2},\text{ ἐν ᾗ } \frac{4}{3} \text{ ἔλασσον } \frac{3}{2}.$$

Αἱ διαδοχικαὶ δυνάμεις τοῦ $\frac{4}{3}$ μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται ὁ $\frac{3}{2}$ εἶναι ἡ πρώτη καὶ ἡ δευτέρα· ὅθεν θέτοντες $\chi''=1+\frac{1}{\chi'''}$ λαμβάνομεν $\left(\frac{4}{3}\right)^{1+\frac{1}{\chi'''}}=\frac{3}{2}$, ἢ $\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{\chi'''}}=\frac{3}{2}$ ἢ $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{\chi'''}}=\frac{9}{8}$. Ὅθεν $\left(\frac{9}{8}\right)^{\chi'''}=\frac{4}{3}$. Ἐκ ταύτης δὲ, διότι αἱ διαδόχικαὶ δυνάμεις τοῦ $\frac{9}{8}$ μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται ὁ $\frac{4}{3}$ εἶναι ἡ δευτέρα καὶ ἡ τρίτη, θέτοντες $\chi'''=2+\frac{1}{\chi^{IV}}$ καὶ κάμνοντες τοὺς ἀνωτέρω μετασχηματισμοὺς λαμβάνομεν

$$\left(\frac{256}{246}\right)^{\chi^{IV}}=\frac{9}{8} \text{ κτλ.}$$

Ἐπειδὴ $\chi=2+\frac{1}{\chi'}$, $\chi'=1+\frac{1}{\chi''}$, $\chi''=1+\frac{1}{\chi'''}$, $\chi'''=2+\frac{1}{\chi^{IV}}$

ἔχομεν $\chi=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots}}}$

ἐξακολουθοῦντες δ' ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ὅσα δήποτε ἄλλα συστατικὰ κλάσματα, τοῦ τὸν χ παριστῶντος ἀπεράντου συνεχοῦς, οὗτινος τὰ διαδοχικὰ ἠγμένα εἶναι αἱ διαδοχικαὶ κατὰ προσέγγισιν λύσεις τῆς ἐξισώσεως $2^{\chi}=6$.

372. Ἔστω ἤδη ἡ γενικὴ ἐξίσωσις $\alpha^{\chi}=\beta$ (1).

Αἱ ἑξῆς ὑποθέσεις δυνατὸν νὰ γείνωσιν ἐπὶ τοῦ α καὶ β.

Α'. $\left\{\begin{array}{l}\alpha>1\\ \beta>1\end{array}\right.$ ἥτις περιέχει τὰς ἑξῆς δύω μερικωτέρας περιπτώσεις $\left\{\begin{array}{l}1^{ον}\ \alpha<\beta\\ 2^{ον}\ \alpha>\beta\end{array}\right.$

Β'. $\left\{\begin{array}{l}\alpha>1\\ \beta<1\end{array}\right.$ Γ'. $\left\{\begin{array}{l}\alpha<1\\ \beta>1\end{array}\right.$ καὶ Δ'. $\left\{\begin{array}{l}\alpha<1.\\ \beta<1.\end{array}\right.$

Α'. περίπτωσις $1^{ον}$ $\alpha>1$, $\beta>1$ καὶ $\alpha<\beta$, καθ' ἣν ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι μείζων τῆς μονάδος, διότι διὰ $\chi=1$ ἡ ἐξίσωσις $\alpha^{\chi}=\beta$ γίνεται $\alpha=\beta$, ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει $\alpha<\beta$. Ἔστωσαν ν καὶ $\nu+1$ αἱ διαδοχικαὶ δυνάμεις τοῦ α, (ὅπου $\nu>1$, καθ' ἃ εἴπομεν), μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ β, ἤτοι ὅτι ὑπάρχει ἡ ἀνισότης $\alpha^{\nu}<\beta<\alpha^{\nu+1}$ (1), θέτοντες $\chi=\nu+\frac{1}{\chi'}$ λαμβάνομεν

$\alpha^{\nu+\frac{1}{\chi'}}=\beta$, ἢ $\alpha^{\nu}.\alpha^{\frac{1}{\chi'}}=\beta$, ἢ $\alpha^{\frac{1}{\chi'}}=\frac{\beta}{\alpha^{\nu}}$ καὶ ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὴν χ' δύναμιν τὴν ἑξῆς $\left(\frac{\beta}{\alpha^{\nu}}\right)^{\chi'}=\alpha$ (2), τῆς ὁποίας οἱ συντελεσταὶ ἐκπληροῦσι τὴν πρώτην περίπτωσιν $\frac{\beta}{\alpha^{\nu}}>1$,

$\alpha>1$ καὶ $\frac{\beta}{\alpha^{\nu}}<\alpha$· διότι ὑπετέθη $\alpha^{\nu}<\beta<\alpha^{\nu+1}$(1), ὅπερ δεικνύει πρῶτον ὅτι $\frac{\beta}{\alpha^{\nu}}>1$, δεύτερον ὅτι $\frac{\beta}{\alpha^{\nu}}<\alpha$· διότι διαιρουμένων τῶν μελῶν τῆς ἀνισότητος (1) διὰ τοῦ α^{ν}, ἔχομεν $\frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\nu}}<\frac{\beta}{\alpha^{\nu}}<\frac{\alpha^{\nu+1}}{\alpha^{\nu}}$, ἢ $1<\frac{\beta}{\alpha^{\nu}}<\alpha$, ἥτις μετὰ τῆς ὑποθέσεως $\alpha>1$ δεικνύει ὅτι καὶ ἐν τῇ ἐξισώσει (2) ἀληθεύουσιν αἱ ὑποθέσεις τῆς πρώτης περιπτώσεως. Δῆλον δὲ ὅτι καὶ οἱ συντελεσταὶ τῶν διαδοχικῶς ἐξ αὐτῆς παραχθησομένων ἐξισώσεων, ὅπως αὕτη παρήχθη ἐκ τῆς $\alpha^{\chi}=\beta$ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον θὰ ἐκπληρῶσι τὰς ὑποθέσεις τῆς πρώτης περιπτώσεως· ὅθεν ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸ

$\chi=\nu+\frac{1}{\chi'}$ τὸ $\chi'=\nu'+\frac{1}{\chi''}$, ἐν τούτῳ δὲ τὸ $\chi''=\nu''+\frac{1}{\chi'''}$ κ.τ.λ.

ἅπερ θὰ εὕρωμεν διὰ τῶν διαδοχικῶν ἐξισώσεων, τὰς ὁποίας θὰ λάβωμεν ἐκ τῆς (2), ὅπως ταύτην ἐλάβομεν ἐκ τῆς πρώτης (1), θέλομεν εὕρει τὸ συνεχὲς κλάσμα $\chi=\nu+\cfrac{1}{\nu'+\cfrac{1}{\nu''+\cfrac{1}{\nu'''\ldots\ldots}}}$

ὅπερ, ὡς εἴπομεν (371), ἂν ὁ χ δὲν ἦναι ἀκέραιος, θὰ ἦναι πεπερασμένον μέν, ἤτοι ἡ τελευταία τῶν ἀνωτέρω διαδοχικῶν ἐξισώσεων θὰ ταυτοποιῆται δι' ἀκεραίας τιμῆς τοῦ ἐκθέτου αὐτῆς, ὅταν ὁ χ ἦναι σύμμετρος ἀριθμός, ἀπέραντον δὲ ὅταν ὁ χ ἦναι ἀσύμμετρος.

Α'. περίπτωσις 2ον $\alpha>1$, $\beta>1$ καὶ $\alpha>\beta$

τότε θέτοντες $\chi=\frac{1}{\chi'}$ ἐν τῇ $\alpha^{\chi}=\beta$ λαμβάνομεν $\alpha^{\frac{1}{\chi'}}=\beta$. Ἐκ ταύτης δὲ τὴν $\beta^{\chi'}=\alpha$. (3), τῆς ὁποίας, ἐπειδὴ οἱ συντελεσταὶ ἐκπληροῦσι τὰς ὑποθέσεις τῆς πρώτης περιπτώσεως, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν λύσιν, ἤτοι τὸ συνεχὲς κλάσμα τὸ παριστῶν τὸν ἐκθέτην χ'. Ἐκ τούτου δὲ τὴν λύσιν τῆς $\alpha^{\chi}=\beta$, διαιροῦντες διὰ τῆς τιμῆς τοῦ χ' τὴν μονάδα, τουτέστιν, ἐὰν εὕρωμεν

$$\chi'=\nu+\cfrac{1}{\nu'+\cfrac{1}{\nu''+\cfrac{1}{\nu'''+\ldots\ldots}}}$$

ἡ λύσις τῆς $\alpha^{\chi}=\beta$ εἶναι $\chi=\cfrac{1}{\nu+\cfrac{1}{\nu'+\cfrac{1}{\nu''+\cfrac{1}{\nu'''\ldots\ldots}}}}$

Β'. $\alpha>1$, $\beta<1$ τότε ἡ λύσις τῆς $\alpha^{\chi}=\beta$ εἶναι ἀρνητικὴ (369.Β'.) καὶ θέτοντες $\chi=-\chi'$ λαμβάνομεν $\alpha^{-\chi'}=\beta$, ἢ $\frac{1}{\alpha^{\chi'}}=\beta$, ἢ $\alpha^{\chi'}=\frac{1}{\beta}$ (4), τῆς ὁποίας, ἐπειδὴ οἱ συντελεσταὶ ἐκπληροῦσι τὰς ὑποθέσεις τῆς Α'. $\alpha>1$, $\frac{1}{\beta}>1$ καὶ $\alpha><\frac{\alpha}{\beta}$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν λύσιν, ἤτοι τὸ συνεχὲς κλάσμα τὸ παριστῶν τὸν ἐκθέτην χ', ἐκ τούτου δὲ νὰ εὕρωμεν τὴν λύσιν τῆς $\alpha^{\chi}=6$, ἤτοι τὸ συνεχὲς κλάσμα τὸ παριστῶν τὸν ἐκθέτην αὐτῆς χ, ἐὰν μεταβάλωμεν εἰς — τὸ σημεῖον τῆς τιμῆς τοῦ χ', τουτέστιν ἐὰν εὕρωμεν

$$\chi'=\nu+\cfrac{1}{\nu'+\cfrac{1}{\nu''+\cfrac{1}{\nu'''\ldots\ldots}}}$$

ἡ λύσις τῆς $\alpha^{\chi}=6$ εἶναι $\chi=-\left(\nu+\cfrac{1}{\nu'+\cfrac{1}{\nu''+\cfrac{1}{\nu'''\ldots\ldots}}}\right)$

Γ'. $\alpha<1$ καὶ $6>1$ τότε ἡ λύσις τῆς $\alpha^{\chi}=6$ (1) δύναται νὰ ληφθῇ ὁμοίως διὰ μεταβολῆς τοῦ σημείου $+$ εἰς $-$ ἐκ τῆς λύσεως τῆς $\frac{1}{\alpha^{\chi'}}=6$ (5), (τῆς ὁποίας οἱ συντελεσταὶ ἐκπληροῦσι τὰς ὑποθέσεις τῆς Α'.), διότι παράγεται ἐκ τῆς (1) ἐὰν τεθῇ $\chi=-\chi'$.

Δ'. $\alpha<1$, $6<1$ τότε τὴν λύσιν τῆς $\alpha^{\chi}=6$ λαμβάνομεν ἐκ τῆς $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\chi}=\frac{1}{6}$ (6), ἥτις καὶ συντελεστὰς ἔχει ἐκπληροῦντας τὰς ὑποθέσεις τῆς (Α'.) $\frac{1}{\alpha}>1$, $\frac{1}{6}>1$ καὶ $\frac{1}{\alpha}><\frac{1}{6}$ καὶ ἰσοδύναμος τῇ $\alpha^{\chi}=6$ εἶναι· διότι παράγεται ἐκ τῆς (1), διαιρουμένης τῆς μονάδος διὰ τῶν μελῶν αὐτῆς.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ ΘΕΩΡΟΥΜΕΝΩΝ ΩΣ ΕΚΘΕΤΩΝ

373. Κατὰ τὸν δεύτερον ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων, ὃν ἀνεφέραμεν ἐν παραγράφῳ (288. Σημ.), δηλ. καθ' ὃν λογάριθμος ἀριθμοῦ τινός, ν, καλεῖται ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως εἰς ἣν ὑψωθήσεται δοθεὶς ἀριθμός, καλούμενος βάσις τοῦ συστήματος τῶν λογαρίθμων, πρὸς παραγωγὴν τοῦ ἀριθμοῦ ν, ἡ τιμὴ τοῦ χ ἐν τῇ ἐξισώσει $\alpha^{\chi}=6$ εἶναι λογάριθμος τοῦ 6, καὶ ἐπειδὴ ἡ ἐκθετικὴ ἐξίσωσις $\alpha^{\chi}=6$ διὰ συνεχεῖς τιμὰς τοῦ χ ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$ παριστᾷ κατὰ συνέχειαν πάντας τοὺς θετικοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ ∞ (369), εἶναι δυνατὸν νὰ ληφθῶσιν οἱ λογάριθμοι πάντων τῶν ἀριθμῶν διὰ τῆς ἐκθετικῆς ἐξισώσεως $\alpha^{\chi}=6$.

Διερευνῶντες τὰς τιμὰς τῆς $\alpha^{\chi}=6$ πληροφορούμεθα τὰ ἑξῆς.

α'. Ἐν παντὶ λογαριθμικῷ συστήματι ὁ λογάριθμος τῆς 1 εἶναι 0, ὁ δὲ τῆς βάσεως α εἶναι ἡ μονάς· διότι ἐὰν θέσωμεν $\chi=0$ ἔχομεν $\alpha^0=1$, ἥτις δηλοῖ ὅτι ὁ λογάριθμος τῆς 1 εἶναι 0, ἐὰν δὲ θέσωμεν $\chi=1$ ἔχομεν $\alpha^1=\alpha$, ἥτις δηλοῖ ὅτι ὁ λογάριθμος τοῦ α (τῆς βάσεως) εἶναι 1.

β'. Ὅταν ἡ βάσις εἶναι μείζων τῆς μονάδος οἱ λογάριθμοι τῶν μὲν μειζόνων τῆς μονάδος ἀριθμῶν εἶναι θετικοὶ καὶ συναυξάνουσιν ἐπ' ἄπειρον μετ' αὐτῶν, τῶν δὲ ἐλασσόνων τῆς μονάδος ἀριθμῶν εἶναι ἀρνητικοὶ καὶ συνελαττοῦνται μετ' αὐτῶν τείνοντες εἰς τὸ $-\infty$, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ ἐλαττούμενοι τείνωσιν εἰς τὸ 0. (369).

γ'. Ὅταν ἡ βάσις εἶναι ἐλάσσων τῆς μονάδος οἱ λογάριθμοι τῶν μὲν ἐλασσόνων τῆς μονάδος ἀριθμῶν εἶναι θετικοί, καὶ αὐξάνουσιν ἐπ' ἄπειρον, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ ἐλαττούμενοι τείνωσιν εἰς τὸ 0, τῶν δὲ μειζόνων τῆς μονάδος ἀριθμῶν ἀρνητικοὶ καὶ ἐλαττοῦνται μέχρι τοῦ $-\infty$, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ αὐξάνωσιν ἐπ' ἄπειρον· διότι τὸ α^{χ} ἐὰν $\alpha<1$· ὅταν μὲν $\chi=+\mu$ παριστᾷ τοὺς ὅρους φθινούσης προόδου, ἧς οἱ ὅροι δύνανται νὰ γείνωσιν ἐλάσσονες παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ (262), ὅταν δὲ $\chi=-\mu$ παριστᾷ τοὺς ὅρους αὐξούσης προόδου $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\mu}$, τῆς ὁποίας οἱ ὅροι αὐξάνουσιν ἐπ' ἄπειρον (261).

ΣΗΜ. **1.** Αἱ ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων ἀποδεικνύονται ἐπίσης εὐκόλως καὶ κατὰ τὸν ὁρισμὸν (373). Ἔστω ν' ἀποδειχθῇ ἡ ἑξῆς ἰδιότης, «ὁ λογάριθμος τῆς νστῆς δυνάμεως ἀριθμοῦ τινὸς ἰσοῦται τῷ λογαρίθμῳ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ν.»

Ἔστω α ἡ βάσις συστήματός τινος λογαρίθμων καὶ μ ὁ εὑρεθεὶς λογάριθμος τοῦ β κατὰ τὸν ὁρισμὸν (373) θέλομεν ἔχει $\alpha^{\mu}=\beta$, ὑψοῦντες τὰ μέλη εἰς τὴν νστὴν δύναμιν ἔχομεν $\alpha^{\nu\mu}=\beta^{\nu}$, ἥτις προσδιορίζει ὅτι ὁ λογάριθμος τῆς νστῆς δυνάμεως τοῦ β εἶναι νμ. ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. **2.** Οἱ λογάριθμοι οἱ διδόμενοι διὰ τῆς ἐκθετικῆς ἐξισώσεως εἶναι οἱ αὐτοὶ τοῖς λαμβανομένοις διὰ τῶν προόδων, ὅπερ εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Πρῶτον ἔστω ἡ πρόοδος

$\div 1:\pi:\pi^2:\pi^3:\pi^4:\ldots\ldots:\pi^{\nu}$ (1), καλοῦντες δ τὸν λογάριθμον τοῦ π, τότε οἱ μὲν λογάριθμοι τῶν διαφόρων τοῦ π δυνάμεων $\pi, \pi^2, \pi^3 \ldots$ θέλουσιν εἶσθαι κατὰ τ' ἀνωτέρω ἀποδειχθέντα ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν λογαρίθμων θεωρουμένων ὡς ἐκθετῶν (373 Σημ. 1) δ, 2δ, 3δ,......... τῆς δὲ μονάδος 0, ἤτοι οἱ λογάριθμοι τῶν ὅρων τῆς ἀνωτέρω γεωμετρικῆς προόδου (1) εἶναι 0, δ, 2δ, 3δ, . . . οἵτινες εἶναι ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου ἀρχομένης ἀπὸ τοῦ 0 ἀντίστοιχοι τοῖς ὅροις τῆς γεωμετρικῆς, τουτέστιν οἱ ἀριθμοὶ οἱ εὑρεθέντες ὡς λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν $1, \pi, \pi^2 \ldots$ κατὰ τὸν ἕνα ὁρισμόν, 0, δ, 2δ . . . . εἶναι λογάριθμοι τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν καὶ κατὰ τὸν ἕτερον ὁρισμὸν (284).

Δεύτερον ἔστωσαν αἱ δύω πρόοδοι.

$\because\!\div\ 1 : \alpha : \alpha^2 : \alpha^3 : \ldots \ldots$

$\div\ 0.\ \delta.\ 2\delta.\ 3\delta.\ \ldots\ldots$

Αἱ προσδιορίζουσαι κατὰ τὸν ὁρισμὸν (284) ὡς λογαρίθμους τῶν $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots$ τοὺς ἀριθμοὺς $0, \delta, 2\delta, 3\delta \ldots\ldots$ κτλ. θέλομεν ἀποδείξει ὅτι οἱ αὐτοὶ $0, \delta, 2\delta, 3\delta$, εἶναι λογάριθμοι τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots$ καὶ κατὰ τὸν ἕτερον ὁρισμὸν (373). Διότι θέτοντες $\alpha^{\frac{1}{\delta}} = \pi$, ἔχομεν $\alpha = \pi^{\delta}$, $\alpha^2 = \pi^{2\delta} \ldots$ καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ πρώτῃ τῶν προόδων $\alpha, \alpha^2 \ldots$ ἔχομεν τὸ σύστημα τῶν προόδων $\because\!\div\ 1 : \pi^{\delta} : \pi^{2\delta} : \pi^{3\delta} \ldots$

$\div\ 0.\ \delta.\ 2\delta.\ 3\delta.\ \ldots\ldots$

ὅπερ δεικνύει ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $0, \delta, 2\delta\ 3\delta$, οἱ προσδιορισθέντες ὡς λογάριθμοι κατὰ τὸν ὁρισμὸν (284), οἱ αὐτοὶ εἶναι λογάριθμοι τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν $1, \alpha, \alpha^2 \ldots$ καὶ κατὰ τὸν ὁρισμὸν (373)· διότι εἶναι οἱ ἐκθέται εἰς οὓς θὰ ὑψωθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς π (ὅστις ἔσται ἡ βάσις) πρὸς παραγωγὴν τῶν ἀριθμῶν, $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots$

ΤΕΛΟΣ

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελ. 7 στίχος τελευτ. ἀριθμητικῶς ἀντὶ ἀριθμητι-. Σελ. 40 στίχ. 13ος διαιρέτου ἀντὶ διαιρετέου. Σελ. 44 στίχ. 23ος $(-\alpha)^{\mu}$ ἀντὶ $(-^{\mu}\alpha)$ καὶ $-2\alpha^{\mu}$ ἀντὶ $2\alpha^{\mu}$· στίχ. 27ος $(-\alpha)^{\mu}$ ἀντὶ $(-\alpha^{\mu})$ καὶ ἐν τέλει προσθετ. $=0$. Σελ. 45 στίχ. 17ος καὶ 18ος $\chi^5-\alpha^5$ ἀντὶ $\chi^5-\chi^5$, $\chi^5+\alpha^5$ ἀντὶ $\chi^5+\chi^5$, $\chi^8+\alpha^8$ ἀντὶ $\chi^8+\chi^8$. Σελ. 46 στιχ. 16ος $\beta\mu$ ἀντὶ $\alpha\mu$. Σελ. 47 στιχ. 23ος $2\alpha^3$ ἀντὶ $2\alpha^2$. Σελ. 48 στιχ. 20ος $\alpha^5\chi$ ἀντὶ $\alpha^1\chi$. Σελ. 55 στιχ. 3ος $\beta^2(\beta^2-\gamma^2)$ ἀντὶ $\beta(\beta^2-\gamma^2)$. Σελ. 56 στίχ. 10ος α ἀντὶ Α καὶ στίχ. 22ος πολυώνυμον Π ἀντὶ πολυωνυμον. Σελ. 62 στίχ. 7ος $\kappa\nu\sqrt{\ }\alpha$ ἀντὶ $\alpha\nu\sqrt{\ }\alpha$. Σελ. 68 στίχ. 17ος $\chi+1$ ἀντὶ $\chi-1$ καὶ στίχ. 26ος ἢ $2\chi=1$·(2) ἀντὶ (2) ἢ $2\chi=1$. Σελ. 69 στίχ. 17ος $\chi-9$ ἀντὶ $\chi-7$. Σελ. 78 στίχ. 27ος 36 ἀντὶ 26. Σελ. 79 στίχ. 14ος 18 ἀντὶ 13. Σελ. 90 στίχ. 15ος $+\alpha\mu$ ἀντὶ $-\alpha\mu$. Σελ. 99 στίχ. 17ος 11χ ἀντὶ 12χ καὶ στίχ. 19ος 118 ἀντὶ 188. Σελ. 120 στίχ. 3ος Σ ἀντὶ (2) καὶ ἐν τέλει προσθετ, «τότε $\Sigma T=225-\psi$» καὶ στίχ. 22ος 120 ἀντὶ 12. Σελ. 137 στίχ. 14ος ψ εἰς $-\psi$ ἀντὶ χ εἰς $-\chi$. Σελ. 144 στίχ. 12ος $=0$ ἀντὶ $=8$. Σελ. 146 στίχ. 4ος α^3 ἀντὶ ω^3. Σελ. 168 στίχ. 15ος $\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$ ἀντὶ $\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}$ καὶ στ. 21ος $-\frac{\beta}{2\alpha}$ ἀντὶ $-\frac{\alpha}{2\alpha}$. Σελ. 171 στίχ. τελευτ. $4\alpha^2$ ἀντὶ 4α. Σελ. 172 στίχ. 4ος 4 ἀντὶ α^3. Σελ. 174 στίχος 7ος $\sqrt{1-22(-360)}$ ἀντὶ $\sqrt{-22(1360)}$, καὶ 7920 ἀντὶ 1520 καὶ 7921 ἀντὶ 1521 καὶ στίχ. 13ος 7920 ἀντὶ 1520 καὶ 7921 ἀντὶ 1521. Σελ. 175 στ. 4ος 7920 ἀντὶ 702 0. Σελ. 177 στ. 3ος -4 ἀντὶ -5. Σελ. 180 στ. 6 $\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\rho}$ ἀντὶ $\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-}$. σελ. 186 ς. 8ος καὶ 9ος γραπτέον οὕτω

$$\alpha\left(\frac{\alpha\chi^2}{\alpha}+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)=0, \text{ ἢ } \alpha\left(\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)=0$$

$$\text{ἢ } \alpha\left(\chi+\frac{\beta}{4\alpha}\right)^2=0, \text{ ἢ } \alpha\left(\chi^2+\pi\chi+\frac{\pi^2}{4}\right)=0, \text{ ἢ } \alpha\left(\chi+\frac{\pi}{2}\right)^2=0$$

Σελ. 192 στ. 11ος $-\Lambda$ ἀντὶ Λ. ἐν τῷ προτελευτ. καὶ τελευτ. στ. θετ. παντταχοῦ ψ ἀντὶ χ. Σελ. 193 στίχ. 5ρς χ^3+1 ἀντὶ $\chi+1$ καὶ στ. 15ος $2\chi^2$ ἀντὶ 2χ. Σελ. 194 στίχ. 5ος χ^ν ἀντὶ χ^2. Σελ. 197 στίχ. 9ος 7488 ἀντὶ 7487. Σελ. 200 στ. 18ος

$2\left(\frac{\theta}{\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\chi$ ἀντὶ $2\left(\frac{\theta}{\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Σελ. 201 στ. 1 καὶ 2ος διορθ. $\chi'=$

$$\frac{\frac{\theta}{\tau}+\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt{\left(\frac{\theta}{\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\right)^2-\frac{\theta^2}{\tau^2}}}{\frac{1}{\tau^2}},\ \chi''=\frac{\frac{\theta}{\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\left(\frac{\theta}{\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\right)^2-\frac{\theta^2}{\tau^2}}}{\frac{1}{\tau^2}}.$$

Σελ. 208 στίχ. 4ος ε ἀντὶ Ε καὶ $\frac{\varepsilon}{\varepsilon}$ ἀντὶ $\frac{1}{\varepsilon}$. Σελ. 220 στ. 22ος μκστὴν ἀντὶ μστὴν. Σελ. 221 στ. 24ος β^τ ἀντὶ $\beta\tau$. Σελ. 223 στίχ. 17 $\alpha^{\nu\pi}$ ἀντὶ α. Σελ. 225 στίχ. 11ος $\alpha^{\mu-\nu}$ ἀντὶ $\alpha^{\nu-\mu}$, Σελ. 228 στ. τελευτ. προσθετ. $=\alpha^{\mu\nu}$. Σελ. 231 στ. 14ος $\alpha^{-\frac{\pi}{\nu}}$ ἀντὶ $\alpha-\frac{\pi}{\nu}$. Σελ. 240 στ. 22ος $(1+\nu)\nu$ ἀντὶ $(1+\nu)^\nu$. Σελ. 242 στ. 1ος $\psi-1$ ἀντὶ $\chi-1$. Σελ. 258 στ. 21ος $\sqrt{2}$ ἀντὶ $\sqrt{\alpha}$. Σελ. 281 στ. 10 καὶ 11ος διορ. ἤτοι ὁ λόγος τῶν διαφορῶν τῶν ἀριθ. σχεδὸν εἶναι ὁ αὐτὸς τῷ τῶν διαφορῶν τῶν λογαρίθμων. Σελ. 287 στ. 21ος 0,8873359 ἀντὶ 0,887,3359 καὶ στ. 22ος $\overline{1}$,8873359 ἀντὶ 1,8873359. Σελ. 291 στ. 16ος 1145949 ἀντὶ 145949. Σελ. 302. ς. 8ος $\overline{3}$,74652 ἀντὶ -374652. Σελ. 319 στ. 3ος $X(1+\tau)^\nu-X$ ἀντὶ $X(1+\tau)-{}^\nu X$ καὶ στίχ. 7 διορθωτ. $X\left[(1+\tau)^\nu-1\right]=K\tau(1+\tau)^\nu$. Σελ. 320 στίχ. 4ος $K(1+\tau)^\nu$ ἀντὶ $K(1+{}^\nu\tau)$.

ΠΙΝΑΞ Ζ'.

$$(4\alpha^2-12\alpha\beta+9\beta^2)\chi^4-(20\alpha^2\beta-30\alpha\beta^2)\chi^3+(21\alpha^2\beta^2+6\alpha\beta^3)\chi^2+10\alpha^2\beta^3\chi+\alpha^2\beta^4 \;\Big|\; (2\alpha-3\beta)\chi^2-5\alpha\beta\chi-\alpha\beta^2$$

$$\begin{array}{l}
-(4\alpha^2-12\alpha\beta+9\beta^2)\chi^4 \\
\hline
-(20\alpha^2\beta-30\alpha\beta^2)\chi^3+(21\alpha^2\beta^2+6\alpha\beta^3)\chi^2+\dots\dots \\
+(20\alpha^2\beta-30\alpha\beta^2)\chi^3-25\alpha^2\beta^2\chi^2 \\
\hline
-(4\alpha^2\beta^2-6\alpha\beta^3)\chi^2+10\alpha^2\beta^3\chi+\alpha^2\beta^4 \\
+(4\alpha^2\beta^2-6\alpha\beta^3)\chi^2-10\alpha^2\beta^3\chi-\alpha^2\beta^4 \\
\hline
0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
(4\alpha-6\beta)\chi^2-5\alpha\beta\chi \\
-5\alpha\beta\chi \\
\hline
-(20\alpha^2\beta-30\alpha\beta^2)\chi^3+25\alpha^2\beta^2\chi^2 \\
(4\alpha-6\beta)\chi^2-10\alpha\beta\chi-\alpha\beta^2 \\
-\alpha\beta^2 \\
\hline
-(4\alpha^2\beta^2-6\alpha\beta^3)\chi^2+10\alpha^2\beta^3\chi+\alpha^2\beta^4
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
4\alpha^2-12\alpha\beta+9\beta^2 & 2\alpha-3\beta \\
\cline{2-2}
-4\alpha^2 & 4\alpha-3\beta \\
\cline{1-1}
-12\alpha\beta+9\beta^2 & -3\beta \\
\cline{2-2}
+12\alpha\beta-9\beta^2 & -12\alpha\beta+9\beta^2 \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
-(20\alpha^2\beta-30\alpha\beta^2)\chi^3 & (4\alpha-6\beta)\chi^2 \\
\cline{2-2}
+(20\alpha^2\beta-30\alpha\beta^2)\chi^3 & -5\alpha\beta\chi \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
-(4\alpha^2\beta^2-6\alpha\beta^3)\chi^2 & (4\alpha-6\beta)\chi^2 \\
\cline{2-2}
+(4\alpha^2\beta^2-6\alpha\beta^3)\chi^2 & -\alpha\beta^2 \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

ΠΙΝΑΞ Η'

$$(4\alpha^4+36\beta^4-24\alpha^2\beta^2)\chi^4-(20\alpha^3\beta^2-40\alpha^4\beta-60\alpha\beta^4+120\alpha^2\beta^3)\chi^3+(-11\alpha^2\beta^4-100\alpha^3\beta^3+112\alpha^4\beta^2)\chi^2-(30\alpha^3\beta^4-60\alpha^4\beta^3)\chi+9\alpha^4\beta^4 \;\Big|\; (2\alpha^2-6\beta^2)\chi^2-(-10\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2)\chi+3\alpha^2\beta^2$$

$$\begin{array}{l}
-(\text{————————})\chi^4 \\
\hline
-(20\alpha^3\beta^2-40\alpha^4\beta-60\alpha\beta^4+120\alpha^2\beta^3)\chi^3+(-11\alpha^2\beta^4-100\alpha^3\beta^3+112\alpha^4\beta^2)\chi^2-\dots\dots \\
+(\text{————————————————})\chi^3-(100\alpha^4\beta^2-100\alpha^3\beta^3+25\alpha^2\beta^4)\chi^2 \\
\hline
+(-36\alpha^2\beta^4+12\alpha^4\beta^2)\chi^2-(30\alpha^3\beta^4-60\alpha^4\beta^3)\chi+9\alpha^4\beta^4 \\
-(\text{————————})\chi^2+(-60\alpha^4\beta^3+30\alpha^3\beta^4)\chi-9\alpha^4\beta^4 \\
\hline
0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
(4\alpha^2-12\beta^2)\chi^2-(-10\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2)\chi \\
-(-10\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2)\chi \\
\hline
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(4\alpha^2-12\beta^2)\chi^2-(-20\alpha^2\beta+10\alpha\beta^2)\chi+3\alpha^2\beta^2 \\
+3\alpha^2\beta^2 \\
\hline
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
4\alpha^4-24\alpha^2\beta^2+36\beta^4 & 2\alpha^2-6\beta^2 \\
\cline{2-2}
-4\alpha^4 & 4\alpha^2-6\beta^2 \\
\cline{1-1}
-24\alpha^2\beta^2+36\beta^4 & -6\beta^2 \\
\cline{2-2}
+24\alpha^2\beta^2-36\beta^4 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
-40\alpha^4\beta+20\alpha^3\beta^2+120\alpha^2\beta^3-60\alpha\beta^4 & 4\alpha^2-12\beta^2 \\
\cline{2-2}
+40\alpha^4\beta-120\alpha^2\beta^3 & -10\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2 \\
\cline{1-1}
+20\alpha^3\beta^2-60\alpha\beta^4 & \\
-20\alpha^3\beta^2+60\alpha\beta^4 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
12\alpha^4\beta^2-36\alpha^2\beta^4 & 4\alpha^2-12\beta^2 \\
\cline{2-2}
-12\alpha^4\beta^2+36\alpha^2\beta^4 & 3\alpha^2\beta^2 \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

ΓΝΩΣΤΟΠΟΙΗΣΙΣ

Τὸ παρὸν ἔργον λαμβάνεται ὑποχρεωτικῶς μετὰ τοῦ *Πρώτου Μέρους* καὶ τιμᾶται.. δρ. 2,25

Ὅταν ἀγοράζηται μόνον, τιμᾶται.. » 3,25

Οἱ λογαριθμικοὶ τοῦ Καλλέτου πίνακες ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 1 μέχρι τοῦ 50400 θέλουσιν ἐκδοθῇ προσεχῶς καὶ θέλουσι τιμᾶσθαι διὰ πάντας.. δρ. 2,00

Οἱ προπληρώσαντες δι' ἀμφότερα τὰ *Μέρη* δραχμὰς 8 θέλουσι λάβει αὐτοὺς δωρεάν.
