ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ καθηγητοῦ τῶν μαθηματικῶν ἐν τῷ Πρακτικῷ Λυκείῳ Ἀθηνῶν

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΚΑΙ ΜΑΘΗΤΡΙΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ Α΄.

[«Ἡ ἔκτασις καὶ τὸ περιεχόμενον τοῦ βιβλίου τούτου συμφωνοῦσι πλήρως πρὸς τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προγράμματος. Ἡ δὲ διαπραγμάτευσις τῆς ὕλης εἶναι καλὴ ἀπό τε ἐπιστημονικῆς καὶ διδακτικῆς ἀπόψεως». (Ἐκ τῆς ἐκθέσεως τῶν κ. κ. εἰσηγητῶν.)]

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΕΚΔΟΤΑΙ Ν. ΤΖΑΚΑΣ & ΣΤΕΦ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑΣ

81Α — Ὁδὸς Πανεπιστημίου — 81Α

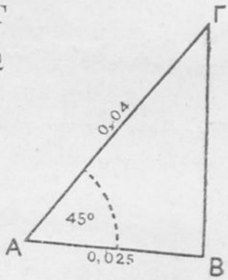
1922

ΤΥΠΟΙΣ: Α. ΦΡΑΝΤΖΕΣΚΑΚΗ & Α. ΚΑΪΤΑΤΖΗ
4.—Ὁδὸς Σατωβριάνδου—4

ΕΙΑ
ΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ
ΓΗ

§ 1. Πρόβλημα $A^{ον}$. *Τριγώνου τινὸς μία γωνία εἶναι $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς γωνίας, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς ἔχουσι μῆκος 0,025 μ. ἡ μὲν καὶ 0,04 μ. ἡ ἄλλη. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς καὶ τὸ μέγεθος ἑκατέρας τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ;*

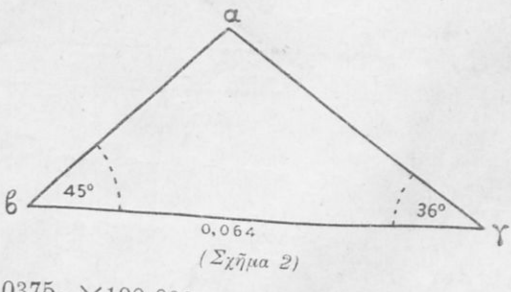
Λύσις. Κατασκευάζομεν τρίγων (Σχ. 1) ἔχον $A = \frac{1}{2}$ ὀρθ, (ΑΒ)=0,025μ. καὶ (ΑΓ)=0,04μ. Μετροῦντες εἶτα τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ τὰς γωνίας Β καὶ Γ αὐτοῦ εὑρίσκομεν ὅτι (ΒΓ)=0,028μ. Β=95° καὶ Γ = 40°.



(Σχῆμα 1)

***Πρόβλημα Β^{ον}**. Τριγώνου ΑΒΓ μία πλευρὰ ἔχει μῆκος 6400 μ., αἱ δὲ παρ' αὐτὴν γωνίαι εἶναι 45° ἡ μὲν καὶ 36° ἡ ἄλλη. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκατέρας τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ;*

Λύσις. Κατασκευάζομεν τρίγωνον αβγ (Σχ. 2) τοιοῦτον ὥστε $(\beta\gamma) = 6400\mu. \cdot \frac{1}{100000} = 0{,}064\mu.$, β=45° καὶ γ=36°· μετροῦντες εἶτα τὰς ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ εὑρίσκομεν ὅτι (αβ)= 0,0375μ. καὶ (αγ) = 0,046μ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ εἶναι ὅμοια ἕπεται ὅτι:



(Σχῆμα 2)

$$(AB) = 0{,}0375\mu. \times 100.000 = 3750\mu$$
$$\text{καὶ } (A\Gamma) = 0{,}046 \times 100000 = 4600\mu.$$

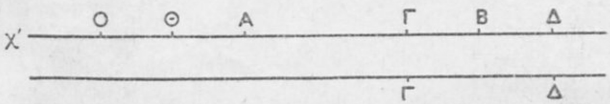
§ 2. ***Σκοπὸς τῆς Τριγωνομετρίας.***—Ἡ γραφικὴ αὕτη μέθοδος, τὴν ὁποίαν μετεχειρίσθημεν διὰ τὴν λύσιν τῶν προηγουμένων προβλημάτων, ἅτινα ὡς παραδείγματα ἐλάβομεν, ἄγει εἰς ἐξαγόμενα ἐνέχοντα σημαντικὰ πολλάκις σφάλματα. Ταῦτα προέρχονται τὸ μὲν ἐκ τῆς ἀτελείας τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων, ὧν γίνεται χρῆσις, τὸ δὲ καὶ ἐξ ἀδεξίας τυχὸν αὐτῶν χρήσεως περὶ τὴν κατασκευὴν καὶ μέτρησιν. Ἐνισχύονται δὲ ταῦτα σημαντικῶς ὅταν γίνηται χρῆσις ὁμοίων σχημάτων. Οὕτω π.χ. ἂν τὸ μῆκος τῆς αγ (Σχ. 2) εὑρέθη μὲ σφάλμα $\frac{1^{\mu.}}{1000}$, τὸ μῆκος τῆς ΑΓ, θὰ ἔχῃ σφάλμα $\frac{1}{1000} \times 100000 = 100_{\mu}$.

Διὰ τὴν ἀποφυγὴν τῶν τοιούτων σφαλμάτων ἐζητήθη καὶ ἀνευρέθη μέθοδος καθαρὸς λογιστική, διὰ τῆς ὁποίας ὁρίζονται, μεθ' ἱκανῆς προσεγγίσεως, αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων στοιχείων τριγώνου, ὅταν ἱκανὰ πρὸς τοῦτο στοιχεῖα αὐτοῦ δοθῶσιν. Ἡ ἔκθεσις τῆς μεθόδου ταύτης ἀποτελεῖ τὸν σκοπὸν τῆς τριγωνομετρίας. Ὥστε: *Σκοπὸς τῆς τριγωνομετρίας εἶναι ὁ διὰ λογισμοῦ προσδιορισμὸς τῶν ἀγνώστων στοιχείων τριγώνου, ὅταν ἱκανὰ πρὸς τοῦτο στοιχεῖα δοθῶσιν.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Αον

Ἀνύσματα.— Προβολαὶ ἐπὶ ἄξονα.
Τόξα.— Γωνίαι.

§ 3. ***Ἄνυσμα.— Μῆκος Ἀνύσματος.— Ἄξων.***— Κινητὸν σημεῖον, ὅπερ ἐπὶ εὐθείας χ′ χ (Σχ. 3) κινούμενον μεταβαίνει ἔκ



(Σχῆμα 3)

τινος σημείου Α εἰς ἄλλο Β αὐτῆς, γράφει τὸν δρόμον ΑΒ, ὃν καλοῦμεν *ἄνυσμα*. Τὸ ἄνυσμα τοῦτο ἔχει ἀρχὴν τὸ σημεῖον Α τέλος τὸ σημεῖον Β καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, ἤτοι τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ.

Ἐὰν τὸ κινητὸν μετέβαινεν ἐκ τοῦ Β εἰς τὸ Α πάντοτε ἐπὶ τῆς χ′ χ κινούμενον, θὰ διέγραφεν ἄλλο ἄνυσμα, τὸ ΒΑ, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν Β, τέλος Α καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α.

Ὥστε. Ἄνυσμα καλεῖται τμῆμα εὐθείας, τὸ ὁποῖον νοεῖται διαγραφὲν ὑπὸ σημείου κινουμένου ἐπ' αὐτῆς κατά τινα φοράν.

Εἰς ἕκαστον ἄνυσμα διακρίνομεν κατὰ τὰ προειρημένα, ἀρχήν, τέλος καὶ φοράν, ὅταν δὲ ὀνομάζωμεν ἕκαστον ἄνυσμα, προτάσσομεν τὸ γράμμα τῆς ἀρχῆς.

Τὰ ἀνύσματα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἢ ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν, καλοῦνται *ὁμόρροπα* μέν, ἂν ἔχωσι τὴν αὐτὴν φοράν, *ἀντίρροπα* δέ, ἂν ἔχωσιν ἀντίθετον φοράν· Οὕτω τὰ ἀνύσματα ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 3) εἶναι ὁμόρροπα, τὰ δὲ ΑΒ καὶ ΔΓ εἶναι ἀντίρροπα ἀνύσματα. Συνήθως τὰ ἀντίρροπα ἀνύσματα, ἅτινα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ἄκρα, καλοῦνται *ἀντίθετα* ἀνύσματα. Τοιαῦτα π.χ. εἶναι τὰ ΑΒ καὶ ΒΑ (Σχ. 3). Ἐὰν δύο ἀνύσματα εἶναι ὁμόρροπα καὶ ἐφαρμόσιμα, καλοῦνται *ὁμορρόπως ἴσα*, ἐὰν δὲ εἶναι ἀντίρροπα καὶ ἐφαρμόσιμα, καλοῦνται *ἀντιρρόπως ἴσα*.

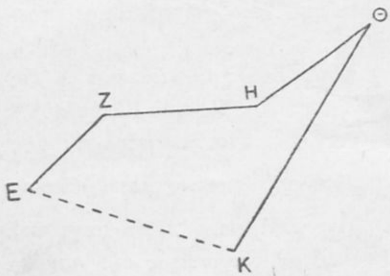
Ἐὰν ἐπὶ εὐθείας $\chi'\chi$ ληφθῇ κατὰ βούλησιν ἄνυσμά τι ΟΘ (Σχ. 3) ὡς μονὰς τῶν ἀνυσμάτων, εἰς ἕκαστον ἄνυσμα ΓΔ ἐπ' αὐτῆς ἢ ἄλλης παραλλήλου εὐθείας κείμενον ἀντιστοιχεῖ εἷς ἀριθμός· εἶναι δὲ οὗτος ὁ λόγος $\frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{O}\Theta}$, ὃν καλοῦμεν μῆκος καὶ σημειοῦμεν συντόμως οὕτω (ΓΔ) (ὅρα εἰς Γεωμετρίαν περὶ μετρήσεως μεγεθῶν). Ὥστε: *Μῆκος ἀνύσματος καλεῖται ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὴν μονάδα τῶν ἀνυσμάτων.* Κατὰ συνθήκην τὸ μῆκος ἀνύσματος παρίσταται διὰ θετικοῦ μὲν ἀριθμοῦ, ἂν τοῦτο εἶναι ὁμόρροπον πρὸς τὴν μονάδα ΟΘ τῶν ἀνυσμάτων, δι' ἀρνητικοῦ δέ, ἂν τοῦτο εἶναι ἀντίρροπον πρὸς τὸ ΟΘ. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς $(\mathrm{AB}) = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{O}\Theta}$ εἶναι θετικὸς (Σχ. 3), ὁ δὲ $(\Delta\Gamma) = \frac{\Delta\Gamma}{\mathrm{O}\Theta}$ εἶναι ἀρνητικός. Εἶναι εὐνόητον ὅτι τὰ ὁμορρόπως ἴσα ἀνύσματα ἔχουσιν ἴσα μήκη, τὰ δὲ ἀντιρρόπως ἴσα ἔχουσιν ἀντίθετα μήκη, ἂν πάντα μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα ἀνυσμάτων μετρῶνται. Κατὰ ταῦτα οἱ ἀριθμοὶ (ΑΒ) καὶ (ΒΑ) εἶναι ἀντίθετοι, ἤτοι $(\mathrm{AB}) + (\mathrm{BA}) = 0$.

Τὰ ὁμόρροπα τῇ μονάδι ΟΘ ἀνύσματα καλοῦνται *θετικὰ ἀνύσματα*, καὶ ἡ φορὰ αὐτῶν καλεῖται *θετικὴ φορὰ* τὰ δὲ ἀντίρροπα τῇ μονάδι ταύτῃ καλοῦνται *ἀρνητικὰ* ἀνύσματα καὶ ἡ φορὰ αὐτῶν καλεῖται *ἀρνητικὴ φορά*.

Πᾶσα εὐθεῖα, ἐφ' ἧς εἶναι ὡρισμένη ἡ θετικὴ κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ἡ ἀρνητικὴ φορὰ καλεῖται ἄξων. Τὸ ἄνυσμα ΟΘ ἄξονός τινος χ΄χ, ὅπερ λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν ἀνυσμάτων καὶ δι' οὗ ὁρίζεται ἡ θετικὴ φορὰ ἐπ' αὐτοῦ, καλεῖται *διευθῦνον ἄνυσμα* τοῦ ἄξονος τούτου καὶ παντὸς ἄλλου παραλλήλου αὐτῷ.

Ἡ ἀρχὴ Ο τοῦ διευθύνοντος ἀνύσματος ἄξονός τις διαιρεῖ αὐτὸν εἰς δύο μέρη ἀπέραντα κοινὴν ἔχοντα ἀρχὴν τὸ Ο. Ἐκ τούτων τὸ μὲν περιέχον τὸ διευθῦνον ἄνυσμα ΟΘ καλεῖται *θετικὸς ἡμιάξων*, τὸ δὲ ἕτερον *ἀρνητικὸς ἡμιάξων*. Οὕτω Οχ (Σχ. 3) εἶναι ὁ θετικὸς ἡμιάξων καὶ Οχ΄ ὁ ἀρνητικὸς ἡμιάξων τοῦ ἄξονος χ΄χ.

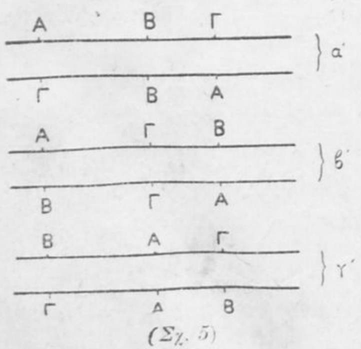
§ 4. ***Διαδοχικὰ ἀνύσματα συνισταμένη αὐτῶν.***—Τὰ ἀνύσματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, (ΣΧ. 3) ὧν ἕκαστον (πλὴν τοῦ α΄) ἔχει ἀρχὴν τὸ τέλος τοῦ προηγουμένου, καλοῦνται διαδοχικὰ ἀνύσματα· τοιαῦτα εἶναι καὶ τὰ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, (Σχ. 4)· ὥστε: *Δύο ἢ πλείονα ἀνύσματα λέγονται διαδοχικά, ἐὰν ἀρχὴ ἑκάστου (πλὴν τοῦ α΄) εἶναι τὸ τέλος τοῦ προηγουμένου.*



(*Σχῆμα 4*)

Συνισταμένη ἢ γεωμ. ἄθροισμα διαδοχικῶν ἀνυσμάτων καλεῖται τὸ ἄνυσμα, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν μὲν τὴν τοῦ πρώτου ἀρχήν, τέλος δὲ τὸ τέλος τοῦ τελευταίου τῶν ἀνυσμάτων τούτων. Οὕτω τὸ ΕΚ εἶναι συνισταμένη τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ (Σχ. 4).

§ 5. ***Σχέσις τῶν μηκῶν δύο διαδοχικῶν ἀνυσμάτων τοῦ αὐτοῦ ἄξονος πρὸς τὸ μῆκος τῆς συνισταμένης αὐτῶν.*** Ἔστωσαν δύο διαδοχικὰ ἀνύσματα ΑΒ, ΒΓ (Σχ. 5) ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κείμενα ἄξονος.



(*Σχ. 5*)

Ἐὰν τὸ σημεῖον Β κεῖται μεταξὺ Α καὶ Γ (Σχ. 5, α΄) τὰ ἀνύσματα ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ εἶναι ὁμόρροπα, οἱ δὲ ἀριθμοὶ (ΑΒ), (ΒΓ), (ΑΓ) εἶναι ὁμόσημοι· ἀληθεύει ἄρα προφανῶς ἡ ἰσότης (ΑΒ) + (ΒΓ) = (ΑΓ). (1).

Ἐὰν τὸ σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ τῶν ἄλλων (Σχ. 5, β΄) ἀληθεύει ἡ ἰσότης (ΑΓ) + (ΓΒ) = (ΑΒ). Ἐὰν δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς προστεθῇ ὁ ἀριθμὸς (ΒΓ) καὶ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι (ΒΓ) + (ΓΒ) = 0 (§ 3) προκύπτει πάλιν ἡ ἰσότης (1). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ρηθεῖσα ἰσότης (1) ἀληθεύει καὶ ὅταν τὸ Α κεῖται μεταξὺ τῶν ἄλλων (Σχ. 5, γ'). Ἄρα:

Τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν δύο διαδοχικῶν ἀνυσμάτων τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τῆς συνισταμένης αὐτῶν.

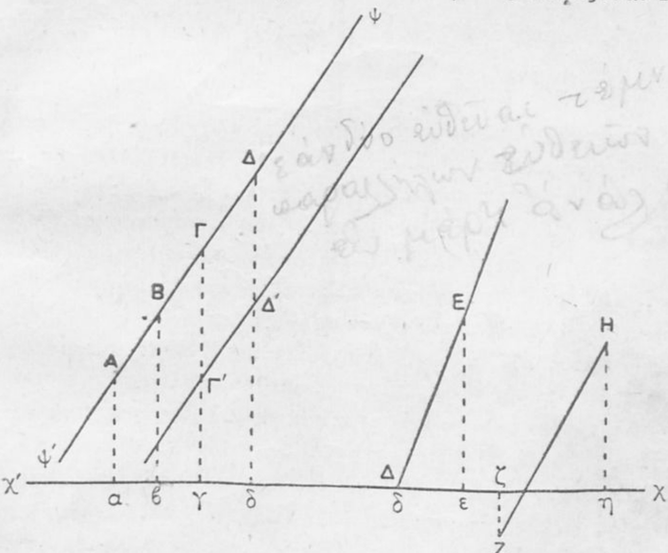
Ἀσκήσεις 1). Τῶν σημείων Α, Β, Γ ὁπωσδήποτε κειμένων ἐπ' εὐθείας νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (ΑΒ) + (ΒΓ) + (ΓΑ) = 0.

2) Τῶν σημείων Α, Β, Γ ὁπωσδήποτε κειμένων ἐπ' εὐθείας καὶ Μ ὄντος τοῦ μέσου τοῦ ΑΒ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (ΓΑ) + (ΓΒ) = 2 (ΓΜ).

3) Τῶν σημείων Α, Β, Γ ὁπωσδήποτε κειμένων ἐπὶ εὐθείας καὶ Μ ὄντος τοῦ μέσου τοῦ ΒΓ, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι

$$(ΑΒ)\,(ΑΓ) = (ΑΜ)^2 - (ΒΜ)^2.$$

§ 6. ***Ὀρθὴ προβολὴ σημείου καὶ ἀνύσματος ἐπὶ ἄξονα. Προ-***



(*Σχῆμα 6*)

βολικαὶ ἰδιότητες ἀνυσμάτων. Κ*αλεῖται ὀρθὴ προβολὴ σημείου ἐπὶ ἄξονα ὁ πούς τῆς καθέτου, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦτον.* Οὕτω τοῦ σημείου Α (σχ. 6) ὀρθὴ προβολὴ ἐπὶ τὸν ἄξονα χ'χ εἶναι τὸ σημεῖον α, τοῦ δὲ Δ ὀρθὴ προβολὴ εἶναι αὐτὸ τὸ Δ.

Ὀρθὴ προβολὴ ἀνύσματος ἐπὶ ἄξονα καλεῖται τὸ *ἄνυσμα τοῦ* *ἄξονος τούτου, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν μὲν τὴν προβολὴν τῆς ἀρχῆς, τέλος δὲ τὴν προβολὴν τοῦ τέλους τοῦ ἀνύσματος τούτου.*

Οὕτω τοῦ ΑΒ προβολὴ εἶναι τὸ αϐ, τοῦ ΔΕ τὸ δε καὶ τοῦ ΖΗ τὸ ζη (Σχ. 6).

ΣΗΜ. Χάριν συντομίας τὴν ὀρθὴν προβολὴν θέλομεν πολλάκις καλῇ καὶ ἁπλῶς προβολήν.

Α΄. Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ δύο ἀνύσματα τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ψψ΄ (Σχ. 6) καὶ αϐ, γδ αἱ προβολαὶ αὐτῶν ἐπὶ τὸν ἄξονα χ΄χ. Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ψψ΄ καὶ χ΄χ τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν Αα, Βϐ, Γγ, Δδ εἰς μέρη ἀνάλογα ἕπεται ὅτι $\frac{ΑΒ}{ΓΔ}=\frac{αϐ}{γδ}$ (1). Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἀνύσματα αϐ, γδ εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα, καθ' ὅσον καὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ εἶναι τοιαῦτα, ἕπεται ὅτι ἡ ἰσότης (1) ἀληθεύει καὶ διὰ τὰ ἀνύσματα ΑΒ, ΓΔ, αβ, γδ. Ἐὰν δὲ ἐν ταύτῃ ἀντὶ τοῦ ΓΔ τεθῇ τὸ ὁμορρόπως ἴσον αὐτῷ ἄνυσμα ΓΔ΄, αὕτη γίνεται $\frac{ΑΒ}{ΓΔ'}=\frac{αβ}{γδ}$ (2). Ἄρα:

Ὁ λόγος δύο ἀνυσμάτων κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἐπὶ παραλλήλων ἀξόνων ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα. Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης ἕπεται εὐκόλως ὅτι:

Β΄. *Τῶν ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσων ἀνυσμάτων αἱ προβολαὶ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα εἶναι ἀνύσματα ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσα.*

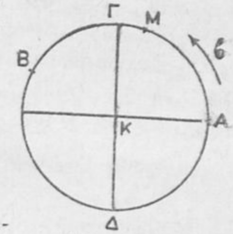
§ 7. *Προβολὴ τεθλ. γραμμῆς ἐπὶ ἄξονα καλεῖται ἡ προβολὴ τῆς συνισταμένης αὐτῆς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα.*

Ἀσκήσεις. 4) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ προβολαὶ ἀνύσματος ἐπὶ ἄξονας παραλλήλους εἶναι ἀνύσματα ὁμορρόπως ἴσα.

5) Δεδομένων τῶν προβολῶν α καὶ β ἀνύσματος ΑΒ νὰ εὑρεθῇ ἡ προβολὴ τοῦ μέσου αὐτοῦ.

§ 8. ***Μέτρον τόξου.—Θετικὰ καὶ ἀρνητικὰ τόξα.***—Ἔστω ΑΒ τυχὸν τόξον τῆς περιφερείας Κ. (Σχ. 7) καὶ ἕτερον τόξον ΑΜ τῆς αὐτῆς (ἢ ἄλλης ἴσης) περιφερείας, ὅπερ λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν τόξων. Ὁ λόγος τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΑΜ καλεῖται μέτρον τοῦ ΑΒ καὶ σημειοῦται συντόμως οὕτω: (ΑΒ). Ὥστε: *Μέτρον τόξου καλεῖται ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὴν μονάδα τῶν τόξων.* Ἐν τοῖς ἀκολούθοις θέλομεν θεωρῇ ὡς μονάδα τόξων τὸ $\frac{1}{360}$ τῆς περιφερείας, ὅπερ καλεῖται μοῖρα (°)· ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ (′) καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα λεπτὰ (″). Ἐὰν τόξον τι ἔχῃ μέτρον π. χ. 30, εἶναι εὐνόητον ὅτι γίνεται ἐκ τῆς μοίρας τριακοντάκις ληφθείσης, δι᾽ αὐτὸ λέγομεν ὅτι τὸ τόξον τοῦτο εἶναι τριάκοντα μοιρῶν (30°).

Ἕκαστον τόξον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δρόμος, ὃν διαγράφει κινητὸν σημεῖον ἐπ᾽ αὐτοῦ κινούμενον καὶ τὸ ὁποῖον ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτοῦ καταλήγει εἰς τὸ ἕτερον. Οὕτως, ἂν κινητὸν σημεῖον ἐκ τοῦ Α (σχ. 7) ἀναχωροῦν καταλήξῃ εἰς τὸ Β ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ καὶ κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους β κινούμενον, εἶνε εὐνόητον ὅτι διαγράφει τὸ τόξον ΑΜΒ, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν Α, τέλος Β καὶ φορὰν τὴν τοῦ βέλους β, ἥτις εἶναι καὶ ἡ τοῦ κινητοῦ σημείου φορά· κατὰ ταῦτα εἰς ἕκαστον τόξον διακρίνομεν ἀρχήν, τέλος καὶ φοράν, ὅταν δὲ ὀνομάζωμεν τόξον τι, προτάσσομεν τὸ γράμμα τῆς ἀρχῆς. Ἡ μονὰς τῶν τόξων ΑΜ λαμβάνεται πάντοτε οὕτως ὥστε νὰ ἔχῃ φορὰν ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν ὡρολογίου· τὴν φορὰν ταύτην (βέλος β) καλοῦμεν *θετικὴν φοράν*, τὴν δὲ ἀντίθετον ταύτης *ἀρνητικὴν φοράν*. Κατὰ συνθήκην τὸ μέτρον τῶν τόξων, ἅτινα ἔχουσι θετικὴν φοράν, παρίσταται διὰ θετικοῦ ἀριθμοῦ, τὸ δὲ τῶν ἀρνητικὴν φορὰν ἐχόντων τόξων δι᾽ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ. Κατὰ ταῦτα οἱ ἀριθμοὶ (ΑΜΒ) καὶ (ΒΜΑ) εἶναι ἀντίθετοι. Τὰ τόξα, ἅτινα ἔχουσι θετικὴν φοράν, καλοῦνται *θετικὰ τόξα*, τὰ δὲ ἔχοντα ἀρνητικὴν φορὰν καλοῦνται *ἀρνητικὰ τόξα*.

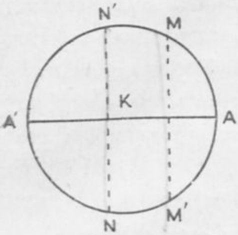


(*Σχῆμα 7*)

§ 9. **Ἴσα καὶ ἀντίθετα τόξα.**—*Δύο τόξα τῆς αὐτῆς ἢ ἴσων περιφερειῶν λέγονται ἴσα, ἐὰν τὰ μέτρα αὐτῶν, εἶναι ἀριθμοὶ ἴσοι.* Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι δύο ἴσα τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας κοινὴν ἔχοντα ἀρχὴν ἔχουσι καὶ πέρας κοινόν.

Δύο τόξα τῆς αὐτῆς ἢ ἴσων περιφερειῶν λέγονται ἀντίθετα, ἐὰν τὰ μέτρα αὐτῶν εἶναι ἀντίθετα. Οὕτω τὰ τεταρτημόρια ΑΓ καὶ ΑΔ (σχ. 7) εἶναι τόξα ἀντίθετα. Ἐξετάσωμεν ἤδη τίς ἡ ἀμοιβαία θέσις τῶν περάτων δύο τόξων ἀντιθέτων, ἅτινα ἔχουσι κοινὴν ἀρχὴν καὶ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Ἔστω ΑΜ τόξον μικρότερον ἡμιπεριφερείας καὶ ΑΜ′ τὸ ἀντίθετον αὐτοῦ (Σχ. 8). Ἐπειδὴ ταῦτα ἀπολύτως θεωρούμενα εἶναι ἴσα, τὸ Α εἶναι μέσον τοῦ τόξου Μ'ΑΜ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ διάμετρος Α'ΚΑ τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὴν χορδὴν ΜΜ'. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ ἀντίθετα τόξα ΑΝ καὶ ΑΝ', ὧν ἕκαστον εἶναι ἀπολύτως μεγαλύτερον ἡμιπεριφερείας, καὶ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' αὐτῶν ἀπολύτως θεωρουμένων μίαν ἡμιπεριφέρειαν, προκύπτουσι τόξα Α'Ν, Α'Ν', μικρότερα ἡμιπεριφερείας καὶ ἀπολύτως ἴσα, τέμνει ἄρα ἡ Α'ΚΑ δίχα καὶ καθέτως τὴν χορδὴν ΝΝ'.



(*Σχῆμα 8*)

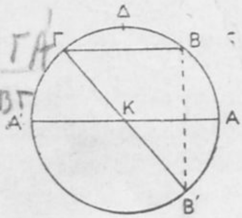
Ἄρα: *Ἐὰν δύο τόξα ἀντίθετα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἔχωσι κοινὴν ἀρχήν, τὰ πέρατα αὐτῶν εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν διὰ τῆς κοινῆς ἀρχῆς διερχομένην διάμετρον.*

§ 10. **Διαδοχικὰ τόξα.— Ἄθροισμα τόξων.— Διαφορὰ τόξων.**— *Δύο ἢ πλείονα τόξα λέγονται διαδοχικά, ἐὰν ἡ ἀρχὴ ἑκάστου* (πλὴν τοῦ α') *εἶναι τὸ τέλος τοῦ προηγουμένου.* Τοιαῦτα π. χ. εἶναι τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ (Σχ. 9).

Ἄθροισμα διαδοχικῶν τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας καλεῖται τὸ τόξον, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν μὲν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου, τέλος δὲ τὸ τοῦ τελευταίου καὶ μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν τόξων τούτων. Οὕτω τῶν θετικῶν τόξων ΑΒ, ΒΔ ΔΓ (Σχ. 9) ἄθροισμα εἶναι τὸ θετικὸν τόξον ΑΓ, ὅπερ προφανῶς ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν εἰρημένων τόξων· τῶν δὲ τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ἄθροισμα εἶναι τὸ ΑΒΔ, οὗ μέτρον εἶναι τὸ ἄθροισμα (ΑΒ)+(ΒΓ)+(ΓΔ).

=ΒΓ+ΓΑ

=ΑΒ+ΒΓ



(*Σχῆμα 9*)

Ἄθροισμα τόξων οἱωνδήποτε τῆς αὐτῆς ἢ ἴσων περιφερειῶν καλεῖται τὸ ἄθροισμα τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας, διαδοχικῶν καὶ ἀντιστοίχως ἴσων ἐκείνοις.

Διαφορὰ δύο τόξων καλεῖται τὸ ἄθροισμα τοῦ μειωτέου τόξου καὶ τοῦ ἀντιθέτου τοῦ ἀφαιρετέου τόξου.

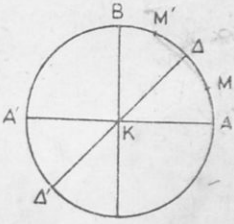
§ 11. **Παραπληρωματικὰ τόξα.** *Δύο τόξα λέγονται παραπληρωματικά, ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἴσον πρὸς θετικὴν ἡμιπεριφέρειαν.* Τοιαῦτα π. χ. εἶναι τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΒΓΑ' (Σχ. 9), ὧν ἄθροισμα ἡ ἡμιπεριφέρεια ΑΒΑ'. Ἐὰν τόξον τι ΑΒ εἶναι τ° τὸ παραπληρωματικὸν αὐτοῦ θὰ εἶναι $180^0 - \tau^0$. Ἐπειδὴ δὲ $180^0 - \tau^0 = (-\tau^0) + 180^0$, ἕπεται ὅτι τὸ παραπληρωματικὸν τοῦτο τόξον εἶναι ἄθροισμα τοῦ ΑΒ′ (ἀντιθέτου τοῦ ΑΒ) καὶ τῆς θετικῆς ἡμιπεριφερείας Β′ΒΓ περατοῦται ἄρα τοῦτο εἰς τὸ Γ συμμετρικὸν τοῦ Β′ πρὸς τὸ κέντρον, ἂν ἄρχηται ἀπὸ τοῦ Α. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΓΒΒ′ εἶναι ὀρθὴ ἡ χορδὴ ΒΓ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΑ′. Ἄρα: *Τὰ πέρατα δύο τόξων παραπληρωματικῶν καὶ κοινὴν ἐχόντων ἀρχὴν κεῖνται ἐπὶ χορδῆς παραλλήλου τῇ διαμέτρῳ ἥτις διέρχεται διὰ τῆς κοινῆς αὐτῶν ἀρχῆς.*

Ἀσκήσεις. 6). Δεδομένης κοινῆς τινὸς ἀρχῆς νὰ εὑρεθῇ τὸ πέρας ἑκάστου τῶν τόξων $45^0, -45^0, 135^0, -135^0$.

7) Δεδομένης κοινῆς τινὸς ἀρχῆς νὰ εὑρεθῇ τὸ πέρας ἑκάστου τῶν τόξων 225^0 καὶ -225^0.

8) Δεδομένης κοινῆς τινὸς ἀρχῆς νὰ εὑρεθῇ τὸ πέρας ἑκάστου τῶν τόξων $30^0, -30^0, 150^0, -150^0$.

§ 12. ***Συμπληρωματικὰ τόξα.***—*Δύο τόξα λέγονται συμπληρωματικά, ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς θετικὸν τεταρτημόριον περιφερείας.* Οὕτω τὰ θετικὰ τόξα ΑΜ καὶ ΜΒ (Σχ. 10) εἶναι συμπληρωματικά. Ἐξετάσωμεν ἤδη τίνα θέσιν ἔχουσι τὰ πέρατα δύο τόξων συμπληρωματικῶν τῆς αὐτῆς περιφερείας καὶ κοινὴν ἐχόντων ἀρχήν. Ἐὰν τόξον τι ΑΜ εἶναι τ^0, τὸ συμπληρωματικὸν αὐτοῦ ΑΜ′ θὰ εἶναι $90^0 - \tau^0$. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῶσι ταῦτα ἄνισα τὸ μέτρον τοῦ μὲν θὰ εἶναι $45^0 - \omega^0$, ὅτε τὸ τοῦ ἄλλου θὰ εἶναι $45^0 + \omega^0$. Ἐπειδὴ τοῦ ἡμίσεως τοῦ τεταρτημορίου ΑΒ δηλ. τοῦ ΑΔ μέτρον εἶναι 45^0, ἕπεται ὅτι τὸ μὲν ΑΜ εἶναι ἄθροισμα τοῦ ΑΔ καὶ ἑτέρου τόξου ΔΜ, ὅπερ ἔχει μέτρον $(-\omega)$ τὸ δὲ ΑΜ′ εἶναι ἄθροισμα τοῦ ΑΔ καὶ ἑτέρου τόξου ΔΜ′ ὅπερ ἔχει μέτρον $+\omega$. Τὰ τόξα λοιπὸν ΔΜ καὶ ΔΜ′ εἶναι ἀντίθετα (9). Ἄρα: *Τὰ πέρατα δύο τόξων συμπληρωματικῶν, κοινὴν ἐχόντων ἀρχὴν καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς κειμένων περιφερείας εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν διάμετρον, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ θετικοῦ τεταρτημορίου, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν μὲ τὰ τόξα ἀρχήν.*

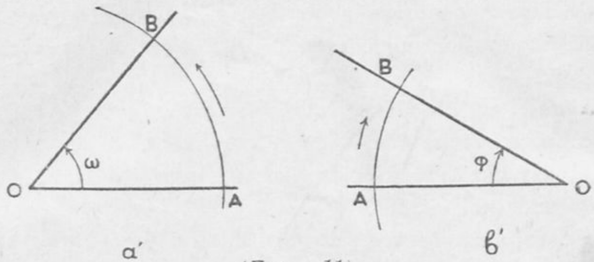


(*Σχῆμα 10*).

Ἀσκήσεις 9) Δεδομένης κοινῆς τινὸς ἀρχῆς νὰ εὑρεθῇ τὸ πέρας ἑκάστου τῶν τόξων $60^0, -60^0, 240^0$.

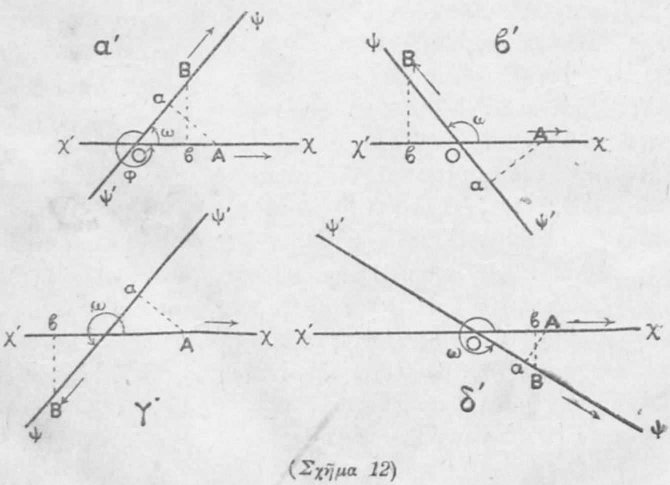
10) Δεδομένης κοινῆς τινὸς ἀρχῆς νὰ εὑρεθῇ τὸ πέρας ἑκάστου τῶν τόξων 150°, —150°, 120, —120°.

§ 13. ***Γέννεσις γωνίας.—Θετικαὶ καὶ ἀρνητικαὶ γωνίαι.***—Αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ (Σχ. 11), αἵτινες ἄρχονται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο ἀποτελοῦσιν, ὡς γνωστόν, τὴν γωνίαν ω. Ἐὰν ἡ πλευρὰ ΟΑ αὐτῆς στραφῇ περὶ τὴν κορυφὴν Ο, χωρὶς νὰ ἐξέλθῃ τοῦ ἐπιπέδου τῶν



(Σχῆμα 11).

εὐθειῶν ΟΑ, ΟΒ καὶ κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν (8), μέχρις οὗ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΟΒ, θὰ διαγράψῃ τὴν γωνίαν ω. Ἡ ἀρχικὴ θέσις ΟΑ τῆς στρεφομένης εὐθείας καλεῖται ἀρχικὴ πλευρά, ἡ δὲ τελικὴ θέσις αὐτῆς καλεῖται τελικὴ πλευρὰ τῆς διαγραφείσης γωνίας. Ἡ οὕτω γραφομένη γωνία καλεῖται *θετικὴ* ἢ *ἀρνητική*, καθ' ὅσον ἡ διαγράφουσα ταύτην εὐθεῖα κινεῖται κατὰ τὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φοράν. Οὕτως ἡ ω (Σχ. 11 α′) εἶναι θετική, ἡ δὲ φ (Σχ. 11 β′) εἶναι



(Σχῆμα 12)

ἀρνητική. Εἶναι φανερὸν ὅτι τυχὸν σημεῖον Α τῆς στρεφομένης πλευρᾶς γράφει τὸ τόξον ΑΒ, ὅπερ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν ὑπὸ τῆς ΟΑ γραφομένην γωνίαν. Καὶ ἂν μὲν ἡ ΟΑ γράφῃ θετικὴν γωνίαν, τὸ Α γράφει θετικὸν τόξον, ἐὰν δὲ ἡ ΟΑ γράφῃ ἀρνητικὴν γωνίαν, τὸ Α γράφει ἀρνητικὸν τόξον.

§ 14. ***Γωνία τῶν θετικῶν διευθύνσεων δύο ἀξόνων.***—*Γωνία τῶν θετικῶν διευθύνσεων δύο τεμνομένων ἀξόνων καλεῖται ἡ γωνία, ἣν γράφει ὁ θετικὸς ἡμιάξων τοῦ ἑνός στρεφόμενος κατὰ θετικὴν φορὰν περὶ τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον, μέχρις οὗ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος τοῦ ἄλλου.* Οὕτως, ΟΑ καὶ ΟΒ ὄντων τῶν διευθυνόντων ἀνυσμάτων τῶν ἀξόνων $\chi'\chi$ καὶ $\psi'\psi$ (Σχ. 12) γωνία τῶν θετικῶν διευθύνσεων αὐτῶν εἶναι ἡ ω ἢ ἡ φ, καθ' ὅσον ὡς ἀρχικὴ πλευρὰ λαμβάνεται ὁ ἡμιάξων Οχ ἢ ὁ Οψ

ΣΗΜ. Ἐὰν τὰ διευθύνοντα ἀνύσματα ΟΑ καὶ ΟΒ τῶν ἀξόνων $\chi'\chi$, $\psi'\psi$ ληφθῶσιν ἴσα καὶ προβληθῇ ἑκάτερον ἐπὶ τὸν ἕτερον ἄξονα, σχηματίζονται τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΟΑα καὶ ΟΒβ, ἅτινα εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως αἱ προβολαὶ Οα, καὶ Οβ εἶναι ἀπολύτως ἴσα ἀνύσματα. Ἐπειδὴ δὲ ταῦτα εἶναι ἀμφότερα ὁμόρροπα (Σχ. 12 α', δ') ἢ ἀμφότερα ἀντίρροπα (Σχ. 12 β' γ') πρὸς τὰ ΟΒ, ΟΑ, ἕπεται ὅτι εἶναι πάντοτε $\frac{O\alpha}{OB} = \frac{O\beta}{OA}$ ἤτοι $(O\alpha) = (O\beta)$.

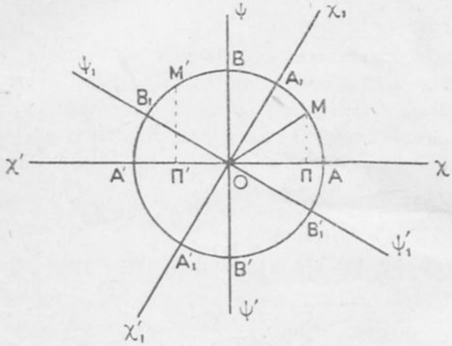
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Βον

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τόξου ἢ γωνίας.

§ 15. *Τριγωνομετρικὸς κύκλος.*—*Ἀρχικὴ καὶ τελικὴ ἀκτὶς* ***τόξου.***—***Πρωτεύοντες ἄξονες.***—Συνήθως ἐν τῇ Τριγωνομετρίᾳ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ὁποίου κεῖνται τὰ θεωρούμενα τόξα, λαμβάνεται ὡς μονὰς τοῦ μήκους, καλεῖται δὲ ὁ τοιοῦτος κύκλος ἰδιαιτέρως *τριγωνομετρικὸς κύκλος.* Ἔστω ΑΜ τυχὸν τόξον τῆς περιφερείας τριγ. κύκλου Ο καὶ ΟΑ, ΟΜ αἱ εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ καταλήγουσαι ἀκτῖνες (Σχ. 13). Τούτων ἡ ΟΑ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τόξου καταλήγουσα καλεῖται *ἀρχικὴ ἀκτίς*, ἡ δὲ ΟΜ καλεῖται *τελικὴ ἀκτὶς* τοῦ τόξου ΑΜ. Ἡ *ἀρχικὴ ἀκτὶς* λαμβάνεται πάντοτε ὡς διευθύνον ἄνυσμα τοῦ περιέχοντος αὐτὴν ἄξονος $\chi'\chi$· ἐὰν δὲ αὕτη στραφῇ περὶ τὸ Ο κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν μέχρις οὗ διαγράψῃ ὀρθὴν γωνίαν, θέλει καταλάβῃ τὴν θέσιν ΟΒ· αὕτη λαμβάνεται ὡς διευθύνων ἄνυσμα τοῦ περιέχοντος αὐτὴν ἄξονος $\psi'\psi$, ὅστις τέμνει καθέτως τὸν $\chi'\chi$.

Οἱ δύο οὗτοι ἄξονες $\chi'\chi$ καὶ $\psi'\psi$ καλοῦνται *πρωτεύοντες ἄξονες* τοῦ τριγων. κύκλου πρὸς ἀρχὴν τόξων Α· εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι πρὸς ἀρχὴν τόξων A_1 ἀντιστοιχεῖ ἄλλο σύστημα πρωτευόντων ἀξόνων $\chi_1'\chi_1$, $\psi_1'\psi_1$, οἵτινες ἔχουσι διευθύνοντα ἀνύσματα OA_1, OB_1, ὁμοίως ὁριζόμενα. Οἱ πρωτεύοντες ἄξονες ἑκάστου συστήματος διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν τοῦ τριγ. κύκλου εἰς τέσσαρα ἴσα τόξα, ἅτινα κατὰ σειρὰν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν τόξων καὶ κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν καλοῦνται πρῶτον, δεύτερον, τρίτον, τέταρτον τεταρτημόριον.

§ 16. ***Συνημίτονον τόξου.***—Ἔστω ΑΜ τυχὸν τόξον τῆς περιφερείας τριγ. κύκλου Ο (Σχ. 13). Τῆς τελικῆς αὐτοῦ ἀκτῖνος ΟΜ προβολὴ ἐπὶ τὸν πρωτεύοντα ἄξονα $\chi'\chi$ εἶναι τὸ ἄνυσμα ΟΠ, ὅπερ ἔχει μῆκος $\frac{O\Pi}{OA} = (O\Pi)$.



(*Σχῆμα 13*)

Τὸ ἄνυσμα τοῦτο ΟΠ ἢ καὶ τὸ μῆκος αὐτοῦ (ΟΠ) καλεῖται συνημίτονον τοῦ τόξου ΑΜ. Ὁμοίως τοῦ ΑΜ' συνημίτονον εἶναι τὸ ἄνυσμα ΟΠ' ἢ καὶ τὸ μῆκος αὐτοῦ $\frac{O\Pi'}{OA} = (O\Pi')$.

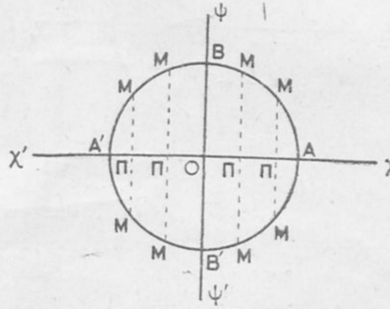
Γενικῶς: *Συνημίτονον τόξου καλεῖται ἡ προβολὴ τῆς τελικῆς αὐτοῦ ἀκτῖνος ἐπὶ τὸν διὰ τῆς ἀρχῆς αὐτοῦ διερχόμενον πρωτεύοντα ἄξονα ἢ καὶ τὸ μῆκος τῆς προβολῆς ταύτης.*

Ὁ πρωτεύων ἄξων, ἐφ' οὗ κεῖνται τὰ συνημίτονα καλεῖται διὰ τοῦτο *ἄξων τῶν συνημιτόνων.*

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ συνημιτόνου τόξου ἕπεται ὅτι α'). *Τὰ τόξα, ἅτινα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὸ αὐτὸ συνημίτονον* β'). *Τό συνημίτονον τόξου εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, καθ' ὅσον τοῦτο εἶναι ἄνυσμα ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον πρὸς τὸ διευθύνον ἄνυμα ΟΑ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων.* Ὅθεν παντὸς τόξου περατουμένου εἰς τὸ α' ἢ δ' τεταρτημόριον τὸ συνημίτονον εἶναι θετικόν, ἐνῷ τῶν εἰς τὸ β′ καὶ γ′ τεταρτημόριον περατουμένων τόξων τὸ συνημίτονον εἶναι ἀρνητικόν.

ΣΗΜ. Τὸ συνημίτονον τόξου ἔχοντος μέτρον τ σημειοῦμεν συντόμως οὕτω συντ.

§ 17. ***Μεταβολὴ τοῦ συνημιτόνου μετὰ τοῦ τόξου.***—Τοῦ τόξου 0^0 τελικὴ ἀκτὶς εἶναι ἡ ΟΑ, ἥτις συμπίπτει μετὰ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων· συνημίτονον ἄρα τοῦ τόξου 0^0 εἶναι τὸ ἄνυσμα ΟΑ ἢ ὁ ἀριθμὸς $\frac{OA}{OA}=+1$. Νοήσωμεν ἤδη ὅτι τὸ πέρας Μ τοῦ τόξου τούτου κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ἤτοι τὸ τόξον βαίνει ἀπὸ 0^0 αὐξανόμενον. Ἐφ᾿ ὅσον τὸ Μ διαγράφει τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΒΑ′, ὁ ποὺς Π διαγράφει συνεχῶς τὸ ἄνυσμα ΑΑ′ καὶ κατ᾿ ἀκολουθίαν ὁ ἀριθμὸς (ΟΠ) ἤτοι τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου, βαίνει συνεχῶς ἐλαττούμενον ἀπὸ $+1$ μέχρι -1, καθιστάμενον ἐν τῷ μεταξὺ 0, ὅταν τόξ.(ΑΜ) $=90^0$.



(*Σχῆμα 14*)

Ὅταν δὲ τὸ Μ διαγράφῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν Α′Β′Α, ὁ ποὺς Π διαγράφει τὸ ἄνυσμα Α′Α καὶ συνεπῶς τὸ συνημίτονον βαίνει συνεχῶς αὐξανόμενον ἀπὸ -1 ἕως $+1$, καθιστάμενον πάλιν μηδέν, ὅταν τόξ. (ΑΜ) $=270^0$ (Σχ. 14). Τὴν τοιαύτην μεταβολὴν τοῦ συνημιτόνου συνοψίζομεν ἐν τῷ ἀκολούθῳ πίνακι.

Τόξον	0^0.. αὐξάν. 90^0.. αὐξ.. 180^0... αὐξ. 270^0... αὐξ. 360^0
συνημ.	$+1$.. ἐλατ. 0.. ἐλατ.. -1... αὐξάν... 0 ... αὐξ.. $+1$

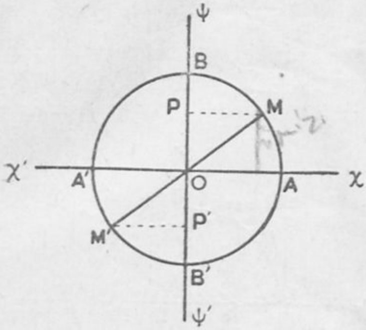
Κατὰ τὰ προειρημένα ἡ μεγίστη τιμή, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ τὸ συνημίτονον εἶναι $+1$, ἡ δὲ ἐλαχίστη -1. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ἀρνητικὰ τόξα, ὡς εὐκόλως πειθόμεθα.

§ 18. ***Ἡμίτονον τόξου.***— Τῆς τελικῆς ἀκτῖνος ΟΜ τυχόντος τόξου ΑΜ (Σχ. 15) προβολὴ ἐπὶ τὸν ἄξονα ψ′ψ εἶναι τὸ ἄνυσμα ΟΡ, ὅπερ ἔχει μῆκος $\frac{OP}{OB}=(OP)$. Τὸ ἄνυσμα ΟΡ ἢ καὶ τὸ μῆκος αὐτοῦ (ΟΡ) καλεῖται ἡμίτονον τοῦ τόξου ΑΜ· ὁμοίως τοῦ τόξου ΑΜ″ ἡμίτονον εἶναι τὸ ἄνυσμα ΟΡ′ ἢ τὸ μῆκος αὐτοῦ $\frac{OP'}{OB}=(OP')$.

Γενικῶς. *Ἡμίτονον τόξου καλεῖται ἡ προβολὴ τῆς τελικῆς αὐτοῦ ἀκτῖνος ἐπὶ τὸν πρωτεύοντα ἄξονα, ὅστις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ τόξου διερχόμενον πρωτεύοντα ἄξονα, ἢ καὶ τὸ μῆκος τῆς προβολῆς ταύτης.*

Ὁ πρωτεύων ἄξων ψ΄ψ, ἐφ' οὗ κεῖνται τὰ ἡμίτονα, καλεῖται *ἄξων τῶν ἡμιτόνων.*

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἡμιτόνου τόξου ἕπεται ὅτι:



(*Σχῆμα 15*)

α΄) *Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον.* β΄) *Τὸ ἡμίτονον τόξου εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, καθ' ὅσον τοῦτο εἶναι ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον πρὸς τὸ διευθύνον ἄνυσμα ΟΒ τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων.* Κατὰ ταῦτα τὰ εἰς τὸ α΄ καὶ δ΄ τεταρτημόριον καταλήγοντα τόξα ἔχουσιν ἡμίτονον θετικόν, τὰ δὲ εἰς τὸ γ΄ καὶ δ΄ ἔχουσιν ἡμίτονον ἀρνητικόν.

ΣΗΜ. Τὸ ἡμίτονον τόξου ἔχοντος μέτρον τ σημειοῦμεν συντόμως οὕτω ἡμ τ·

§ 19. ***Μεταβολὴ τοῦ ἡμιτόνου μετὰ τοῦ τόξου.***—Σπουδάζοντες τὴν μεταβολὴν τοῦ ἡμιτόνου τόξου μετὰ τοῦ τόξου, καθ' ὃν τρόπον προηγουμένως (§ 17) ἐσπουδάσαμεν τὴν τοῦ συνημιτόνου μεταβολὴν καταλήγομεν εὐκόλως εἰς τὰ ἐν τῷ ἀκολούθῳ πίνακι συνοψιζόμενα πορίσματα.

Τόξον	0^o..	αὐξάν.	90^o..	αὐξ..	180^o..	αὐξ.	270^o..	αὐξ. ..	360^o
ἡμίτονον	0...	αὐξάν.	+1..	ἐλατ...	0..	ἐλατ.	—1 ..	αὐξ. ..	0

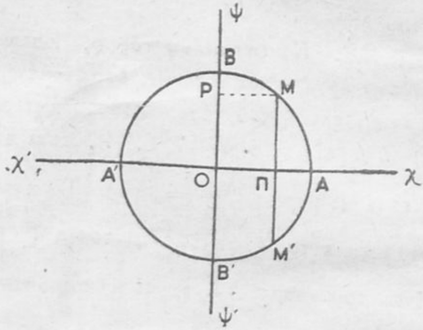
Κατὰ ταῦτα ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ ἡμιτόνου εἶναι +1 ἡ δὲ ἐλαχίστη —1. Ἰσχύει δὲ τὸ συμπέρασμα τοῦτο καὶ διὰ τὰ ἀρνητικὰ τόξα.

Ἀσκήσεις 11) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ συνημίτονον τόξου εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως, ἣν τοῦτο κατέχει ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τριγ. κύκλου. 12) Νὰ ἀποδειχθῇ τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὸ ἡμίτονον τόξου.

§ 20. ***Σχέσεις τοῦ ἡμιτόνου τόξου θετικοῦ καὶ μικροτέρου 90° πρὸς τὴν χορδὴν τοῦ διπλασίου τόξου.***—Ἔστω ΑΜ (Σχ. 16) τόξον θετικὸν καὶ μικρότερον 90^o, (ΟΡ) τὸ ἡμίτονον καὶ (ΟΠ) τὸ συνημίτονον αὐτοῦ· προεκτεινομένης τῆς ΠΜ πέραν τοῦ Π μέχρι τῆς περιφερείας ὁρίζεται τὸ Μ′, ὅπερ εἶναι ἀρχὴ τοῦ τόξου Μ′ΑΜ διπλασίου τοῦ ΑΜ καὶ ἔχοντος χορδὴν Μ′Μ διπλασίαν τοῦ ΠΜ.

Ἐπειδὴ δὲ (ΟΡ) = (ΠΜ), ἕπεται ὅτι $(ΟΡ) = \frac{(Μ'Μ)}{2}$. Ἄρα:

Τὸ ἡμίτονον τόξου θετικοῦ καὶ μικροτέρου 90° ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου τόξου.—



(*Σχῆμα 16*)

§ 21.—***Σχέσις τοῦ συνημιτόνου τόξου θετικοῦ καὶ μικροτέρου 90° πρὸς τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου τόξου.*** —

Ἀναφερόμενοι εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα παρατηροῦμεν ὅτι τοῦ θετικοῦ καὶ μικροτέρου 90° τόξου ΑΜ τὸ συνημίτονον ΟΠ παριστᾷ τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου τοῦ τριγ. κύκλου ἀπὸ τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου τόξου.

Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο συμβαίνει καὶ διὰ πᾶν ἄλλο τοιοῦτον τόξον, ἕπεται γενικῶς ὅτι: *Τὸ συνημίτονον τόξου θετικοῦ καὶ μικροτέρου 90° ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου τοῦ τριγ. κύκλου ἀπὸ τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου τόξου.*

Ἐφαρμογή: Κατὰ τὰ προειρημένα (§ 20, 21) ἂν εἶναι $0° < μ° < 90°$ καὶ $\frac{360°}{2μ°} = \frac{180°}{μ°} = λ$, ἔνθα λ εἶναι ἀκέραιος, τὸ μὲν ἡμίτονον τοῦ τόξου μ° ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν τριγ. κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, ὅπερ ἔχει λ πλευράς, τὸ δὲ συνημίτονον τοῦ τόξου μ° ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀπόστημα τοῦ αὐτοῦ πολυγώνου. Οὕτως, ἐπειδὴ εἶναι $\frac{360°}{2.45°} = \frac{180°}{45°} = 4$, τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου 45° εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν τριγ. κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραγώνου, ἤτοι ἡμ. $45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, τὸ δὲ συνημίτονον τοῦ τόξου 45° ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀπόστημα τοῦ εἰρημένου τετραγώνου, ἤτοι συν. $45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

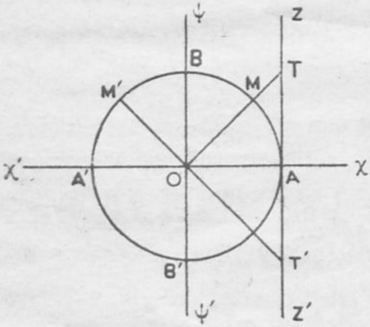
῾Ομοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡμ. $30^0 = \frac{1}{2}$, ἡμ $60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

συν. $30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, συν. $60^0 = \frac{1}{2}$.

᾿Ασκήσεις 13) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου 18^0.

§ **22.** ***᾿Εφαπτομένη τόξου.*** ῎Εστω ΑΜ τυχὸν τόξον καὶ Z΄Z ἡ εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν τόξων Α ἐφαπτομένη τοῦ τριγ. κύκλου (Σχ. 17). ᾿Εὰν ἡ τελικὴ τοῦ τόξου τούτου ἀκτὶς ΟΜ προεκτεινομένη τέμνη τὴν Z΄Z εἰς τι σημεῖον Τ, ὁρίζεται ἐπὶ τῆς Z΄Z ἄνυσμά τι ΑΤ, ὅπερ ἔχει μῆκος $\frac{AT}{OB} = (AT)$. Τὸ ἄνυσμα ΑΤ ἢ τὸ μῆκος αὐτοῦ (ΑΤ) καλεῖται ἐφαπτομένη τοῦ ΑΜ· ὁμοίως τοῦ ΑΜ΄ ἐφαπτομένη εἶναι τὸ ἄνυσμα ΑΤ΄ ἢ τὸ μῆκος αὐτοῦ $\frac{AT'}{OB} = (AT')$. Γενικῶς.

᾿Εφαπτομένη τόξου καλεῖται τὸ ἄνυσμα, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν μὲ τὸ τόξον ἀρχὴν καὶ πέρας τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς εἰς τὴν ἀρχὴν ταύτην ἐφαπτομένης τοῦ τριγ. κύκλου καὶ τῆς προεκτάσεως τῆς τελικῆς τοῦ τόξου ἀκτῖνος, ἢ καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος τούτου.



(Σχῆμα 17)

῾Η εὐθεῖα Z΄Z, ἐφ᾿ ἧς κεῖνται αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν τόξων καλεῖται *ἄξων τῶν ἐφαπτομένων.*

᾿Εκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐφαπτομένης τόξου ἕπεται ὅτι :

α΄). Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην.

β΄). ῾Η ἐφαπτομένη τόξου εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ καθ᾿ ὅσον αὕτη εἶναι ἄνυσμα ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον τῷ ΟΒ.

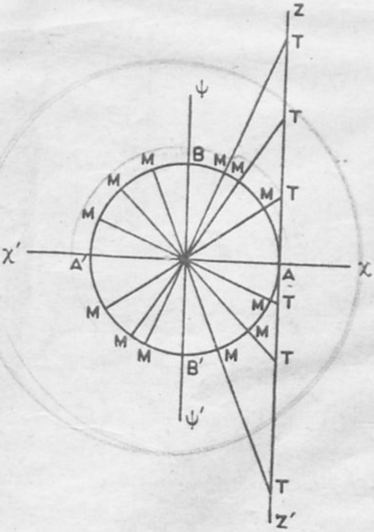
῞Οθεν τὰ εἰς τὸ α΄ καὶ γ΄ τεταρτημόριον περατούμενα τόξα ἔχουσι θετικὴν ἐφαπτομένην, τὰ δὲ εἰς τὸ β΄ καὶ δ΄ ἀρνητικήν.

ΣΗΜ. Τὴν ἐφαπτομένην τόξου ἔχοντος μέτρον τ σημειοῦμεν συντόμως οὕτω ἐφτ.

§ **23.** ***Μεταβολὴ τῆς ἐφαπτομένης μετὰ τοῦ τόξου.*** Τοῦ τόξου 0^0 ἡ ἀρχὴ Α καὶ τὸ τέλος Μ συμπίπτουσιν καὶ ἑπομένως ὁ (ΑΤ) ἤτοι ἡ ἐφαπτομένη εἶναι μηδέν. ᾿Εὰν τὸ πέρας Μ κινῆται κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἤτοι τὸ τόξον AM βαίνῃ συνεχῶς ἀπὸ τοῦ O αὐξανόμενον, ἡ ἐφαπτομένη μεταβάλλεται· καὶ ἐφ' ὅσον τὸ M διαγράφει τὸ τεταρτημόριον AB, τὸ T κινεῖται ἐπὶ τοῦ Z'Z κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν ἤτοι τὸ ἄνυσμα AT βαίνει συνεχῶς αὐξανόμενον ταχύτατα καί, τοῦ M πλησιάζοντος πρὸς τὸ B, τὸ μῆκος τοῦ AT τείνει νὰ ὑπερβῇ πάντα ἀριθμόν. Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι :

Τοῦ τόξου τείνοντος πρὸς τὰς 90^0 ἐκ τιμῶν ἐλασσόνων ἡ ἐφαπτομένη αὐτοῦ τείνει πρὸς τὸ θετικὸν ἄπειρον $(+\infty)$. Ὅταν τὸ M ὑπερβὰν τὸ B εἶναι ἀκόμη πολὺ πλησίον αὐτοῦ, ἤτοι τὸ τόξον ἔχῃ μέτρον μεῖζον τῶν 90^0 κατ' ἐλάχιστον, τὸ T ἐπὶ τοῦ AZ' ἐμφανιζόμενον ἀπέχει τοῦ A ἀπόστασιν πολὺ μεγάλην ἀπολύτως.

Ὥστε καθ' ἣν στιγμὴν τὸ M διέρχεται διὰ τοῦ B μεταβαίνων ἐκ τοῦ α' εἰς τὸ β' τεταρτημόριον ἡ ἐφαπτομένη τοῦ AM μεταπηδᾷ ἀπὸ τοῦ $+\infty$ εἰς τὸ $-\infty$ διακοπτομένης οὕτω τῆς συνεχείας τῶν τιμῶν αὐτῆς. Τοῦ M εἶτα ἀπομακρυνομένου τοῦ B, ἡ ἐφαπτομένη τοῦ AM αὐξάνει ἀπὸ τοῦ $-\infty$ καὶ γίνεται μηδέν, ὅταν $(AM)=180^0$. Ὅταν τὸ M διαγράφῃ τὸ γ' τεταρτημόριον, τὸ T κινεῖται πάλιν ἐπὶ τοῦ AZ συνεχῶς καὶ ταχύτατα ἀπομακρυνόμενον τοῦ A, ἡ ἐφαπτομένη ἄρα τοῦ AM αὐξάνει ταχύτατα ἀπὸ τοῦ μηδενὸς καὶ τείνει πρὸς τὸ $+\infty$, ὅταν (AM) τείνῃ πρὸς τὰς 270^0· καθ' ἣν στιγμὴν τὸ M διέρχεται διὰ τοῦ B' ἡ ἐφαπτομένη μεταπηδᾷ πάλιν ἀπὸ τοῦ $+\infty$ εἰς τὸ $-\infty$ καὶ βαίνει εἶτα συνεχῶς αὐξανομένη, ἐφ' ὅσον τὸ M διαγράφει τὸ δ' τεταρτημόριον, καθίσταται δὲ μηδέν, ὅταν $(AM)=360^0$. Τὴν τοιαύτην τῆς ἐφαπτομένης μεταβολὴν συνοψίζομεν ὧδε :



(Σχῆμα 18)

Τόξον	0^0..	αὐξ..	90^0..	αὐξ..	180^0..	αὐξ..	270^0..	αὐξ..	360^0
ἐφαπτ.	0...	αὐξ...	$\pm\infty$..	αὐξ...	0..	αὐξ..	$\pm\infty$...	αὐξ...	0

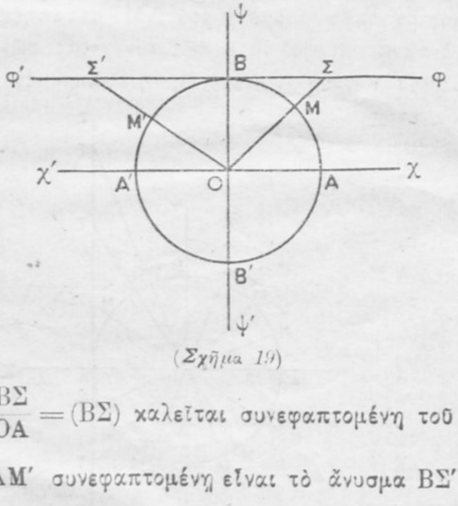
Κατὰ ταῦτα ἡ ἐφαπτομένη τόξου δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν πραγματικὴν τιμήν.

Ἀσκήσεις 14) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τόξου εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως, ἣν τοῦτο κατέχει ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τριγ. κύκλου.

15) Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου 45^0 καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αὕτη ἰσοῦται πρὸς $+1$.

16) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τόξου ἰσοῦται ἀπολύτως πρὸς τὸ ἄνυσμα, ὅπερ ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου τούτου καὶ τοῦ κοινοῦ σημείου τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων καὶ τῆς εἰς τὸ πέρας τοῦ τόξου ἐφαπτομένης τοῦ τριγ. κύκλου.

§ 24. ***Συνεφαπτομένη τόξου.*** Ἔστω ΑΜ τυχὸν τόξον καὶ φ΄φ ἡ εἰς τὸ πέρας τοῦ α΄ τεταρτημορίου ἐφαπτομένη τοῦ τριγ. κύκλου Ο (Σχ. 19). Ἐὰν ἡ τελικὴ ἀκτὶς ΟΜ προεκτεινομένη τέμνῃ τὴν φ΄φ εἴς τι σημεῖον Σ, ὁρίζεται ὑπ᾽ αὐτοῦ καὶ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς Β ἄνυσμά τι ΒΣ. Τὸ ἄνυσμα τοῦτο ἢ καὶ τὸ μῆκος αὐτοῦ



(*Σχῆμα 19*)

$\frac{\text{ΒΣ}}{\text{ΟΑ}} = (\text{ΒΣ})$ καλεῖται συνεφαπτομένη τοῦ τόξου ΑΜ. Ὁμοίως τοῦ ΑΜ΄ συνεφαπτομένη εἶναι τὸ ἄνυσμα ΒΣ΄ ἢ τὸ μῆκος αὐτοῦ $\frac{\text{ΒΣ}'}{\text{ΟΑ}} = (\text{ΒΣ}')$. Γενικῶς:

Συνεφαπτομένη τόξου καλεῖται τὸ ἄνυσμα, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν μὲν τὸ πέρας τοῦ α΄ τεταρτημορίου, τέλος δὲ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς εἰς τὸ πέρας τοῦτο ἐφαπτομένης τοῦ τριγ. κύκλου καὶ τῆς προεκτάσεως τῆς τελικῆς τοῦ τόξου ἀκτῖνος, ἢ καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος τούτου.

Ἡ εὐθεῖα φ΄φ, ἐφ᾽ ἧς κεῖνται αἱ συνεφαπτόμεναι, καλεῖται *ἄξων τῶν συνεφαπτομένων.*

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συνεφαπτομένης τόξου ἕπεται εὐκόλως ὅτι:

α'). Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὴν αὐτὴν συνεφαπτομένην.

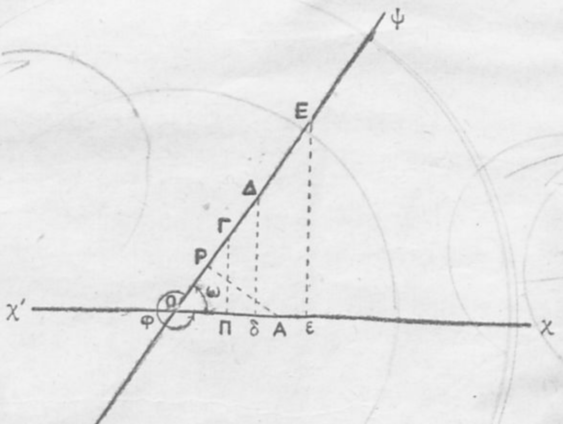
β'). Ἡ συνεφαπτομένη τόξου εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, καθ' ὅσον αὔτη εἶναι ἄνυσμα ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον πρὸς τὸ διευθύνον ἄνυσμα ΟΑ.

Κατὰ ταῦτα, τὰ εἰς τὸ α' καὶ γ' τεταρτημόριον περατούμενα τόξα ἔχουσι συνεφαπτομένην θετικὴν τὰ δὲ εἰς τὸ β' καὶ δ' ἀρνητικήν.

ΣΗΜ. Τὴν συνεφαπτομένην τόξου, ὅπερ ἔχει μέτρον τ, σημειοῦμεν συντόμως οὕτω σφτ.

§ 25. **Μεταβολὴ τῆς συνεφαπτομένης μετὰ τοῦ τόξου.** Σπουδάζοντες τὴν μεταβολὴν τῆς συνεφαπτομένης τόξου, ὡς ἐσπουδάσαμεν (§ 23) τὴν μεταβολὴν τῆς ἐφαπτομένης, καταλήγομεν εἰς πορίσματα, ἅτινα συνοψίζομεν ἐν τῷ ἀκολούθῳ πίνακι.

Τόξον	0°.. αὐξ.. 90°..αὐξ.. 180°.. αὐξ.. 270° ..αὐξ.. 360°
συνεφαπτ.	$+\infty$ ἐλατ... 0..ἐλατ..$+\infty$... ἐλατ... 0.. ἐλατ...$-\infty$



(*Σχῆμα 20*)

Δύναται ὅθεν ἡ συνεφαπτομένη νὰ λάβῃ πᾶσαν πραγματικὴν τιμήν.

Ἀσκήσεις: 17) Νὰ κατασκευασθῇ ἡ συνεφαπτομένη 45° καὶ ν' ἀποδειχθῇ ὅτι αὕτη ἰσοῦται πρὸς $+1$.

§ 26. **Τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ καὶ τριγ. ἀριθμοὶ τόξου.**— Τὰ ἀνύσματα, ἅτινα ἐκαλέσαμεν κατὰ σειρὰν συνημίτονον, ἡμίτονον, ἐφαπτομένην καὶ συνεφαπτομένην τόξου, καλοῦνται πάντα ὁμοῦ *τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ* τοῦ τόξου τούτου. Τὰ δὲ μήκη αὐτῶν, ἅτινα μὲ τὰ αὐτὰ ἐκαλέσαμεν ὀνόματα, καλοῦνται *τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ* τοῦ τόξου.

§ 27. ***Τριγων. ἀριθμοὶ καὶ γραμμαὶ γωνίας.***—Καλεῖται *συνημίτονον, ἡμίτονον, ἐφαπτομένη* καὶ *συνεφαπτομένη* γωνίας ὁ ὁμώνυμος τριγ. ἀριθμὸς ἢ γραμμὴ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου (§ 13) τῆς περιφερείας τριγ. κύκλου.

§ 28. ***Συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν θετικῶν διευθύνσεων δύο ἀξόνων.*** – Ἔστωσαν ΟΑ καὶ ΟΓ [(ΟΑ)=(ΟΓ)] τὰ διευθύνοντα ἀνύσματα δύο ἀξόνων χ΄χ καὶ ψ΄ψ τεμνομένων εἴς τι σημεῖον Ο (Σχ. 20) Ἐμάθομεν (§ 14) ὅτι γωνία τῶν θετικῶν διευθύνσεων τῶν ἀξόνων τούτων εἶναι ἡ ω ἢ ἡ φ, καθ' ὅσον ὡς ἀρχικὴ πλευρὰ λαμβάνεται ὁ ἡμιάξων Οχ ἢ ὁ Οψ. Κατὰ τὴν α' περίπτωσιν εἶναι συν ω=(ΟΠ) κατὰ δὲ τὴν β' συνφ=(ΟΡ). Ἐπειδὴ δὲ (§ 14 σημ.) εἶναι (ΟΠ) = (ΟΡ), ἕπεται ὅτι συνω = συνφ, ἤτοι: *Τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν θετικῶν διευθύνσεων δύο ἀξόνων εἶναι τὸ αὐτό, οἱασδήποτε οὔσης τῆς ἀρχικῆς πλευρᾶς.*

§ 29. *Μῆκος τῆς ἐπὶ ἄξονα προβολῆς ἀνύσματος.*—Ἔστω ΔΕ (Σχ. 20) τυχὸν ἄνυσμα, ΟΓ τὸ διευθύνον ἄνυσμα τοῦ περιέχοντος αὐτὸ ἄξονος ψ΄ψ καὶ δε ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ ἕτερον ἄξονα χ΄χ, ὅστις τέμνεται ὑπὸ τοῦ α' κατὰ τὸ Ο καὶ ἔχει διευθύνον ἄνυσμα ΟΑ ἴσον τῷ ΟΓ. Ἐπειδὴ τὰ ΔΕ καὶ ΟΓ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος, ἕπεται (§ 6, Α') ὅτι $\frac{\delta\varepsilon}{\mathrm{O\Pi}} = \frac{\Delta\mathrm{E}}{\mathrm{O\Gamma}}$, ὅθεν (δε) = (ΔΕ). (ΟΠ).

Ἐπειδὴ δὲ ΟΠ=συνω=συνφ, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται

$$(\delta\varepsilon)=(\Delta\mathrm{E}).\,\sigma\upsilon\nu\,\omega=(\Delta\mathrm{E}).\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi.$$

Ἄρα: ***Τὸ μῆκος τῆς προβολῆς ἀνύσματος ἐπὶ ἄξονα ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους αὐτοῦ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν θετικῶν διευθύνσεων τοῦ προβολικοῦ ἄξονος καὶ τοῦ περιέχοντος τὸ ἄνυσμα τοῦτο ἄξονος.***

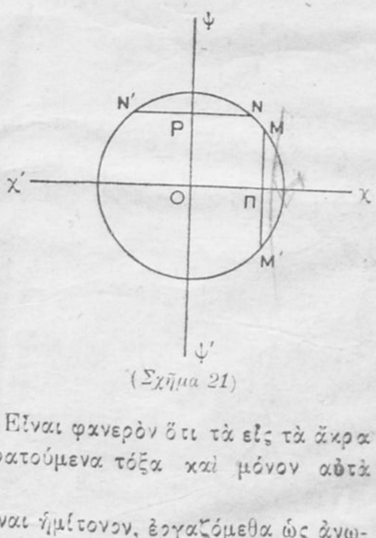
Ἀσκήσεις: 18). Ἄνυσμα μήκους 0,15 κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν τῶν θετικῶν διευθύνσεων δύο πρωτευόντων ἀξόνων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς προβολῆς αὐτοῦ ἐπὶ ἑκάτερον τῶν ἀξόνων τούτων.

19). Ἄνυσμα μήκους 0,40μ. κεῖται ἐπὶ ἄξονος, ὅστις τέμνει τὸν προβ. ἄξονα ὑπὸ γωνίαν 60°. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς προβολῆς αὐτοῦ;

20) Ἀνύσματος κειμένου ἐπὶ ἄξονος τέμνοντος τὸν προβ. ἄξονα ὑπὸ γωνίαν 30° ἡ προβολὴ ἔχει μῆκος $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος τούτου;

§ 30. *Τόξα, ὧν δίδεται τριγωνομετρικός τις ἀριθμός.*—Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων κατέστη φανερὸν ὅτι εἰς ἕκαστον τόξον ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένος τριγ. ἀριθμὸς ἐξ ἑκάστου εἴδους. Ἐξετάσωμεν ἤδη, ἂν εἰς δεδομένον τριγ. ἀριθμὸν ἀντιστοιχῇ ἢ οὐ ὡρισμένον τόξον.

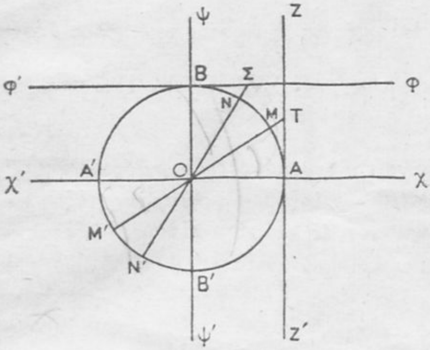
Α'. Ἔστω ὅτι δίδεται ἀριθμός τις α μὴ ὑπερβαίνων ἀπολύτως τὴν μονάδα καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τόξον χ ἔχον συνημίτονον α. Ὁρίζομεν πρῶτον ἐπὶ τῆς περιφερείας τριγ. κύκλου τὴν ἀρχὴν Α τῶν τόξων καὶ κατασκευάζομεν τὸ ἀντίστοιχον σύστημα πρωτευόντων ἀξόνων (Σχ. 21). Εἶτα ἀρχόμενοι ἐκ τοῦ κέντρου Ο λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων ἄνυσμα ΟΠ ἔχον μῆκος α καὶ ἄγομεν διὰ τοῦ Π τὴν χορδὴν ΜΜ' κάθετον ἐπὶ τὸν χ'χ. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ εἰς τὰ ἄκρα Μ καὶ Μ' τῆς χορδῆς ταύτης περατούμενα τόξα καὶ μόνον αὐτὰ ἔχουσι τὸ δεδομένον συνημίτονον.



(Σχῆμα 21)

Β'. Ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς α εἶναι ἡμίτονον, ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων ψ'ψ καὶ κατανοοῦμεν ὅτι δεδομένον ἡμίτονον α=(ΟΡ) ἔχουσι τὰ εἰς τὰ σημεῖα Ν καὶ Ν' περατούμενα τόξα καὶ μόνον αὐτά. (Σχ. 21).

Γ'. Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τόξον ἔχον ἐφαπτομένην ἴσην πρὸς τυχόντα δεδομένον ἀριθμὸν α, λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἐφαπτομένων (Σχ. 22) ἄνυσμα ΑΤ ἔχον μῆκος α καὶ ἄγομεν τὴν διὰ τοῦ Τ διερχομένην διάμετρον· ἂν Μ καὶ Μ' εἶναι τὰ σημεῖα, εἰς ἃ αὐτη τέμνει τὴν περιφέρειαν, τὰ τόξα, ἅτινα περατοῦνται εἰς τὸ Μ καὶ Μ′ καὶ μόνον αὐτὰ ἔχουσι τὴν δεδομένην ἐφαπτομένην.



(*Σχῆμα 22*)

Δ′. Ἂν ὁ δεδομένος τυχὼν ἀριθμὸς α εἶναι συνεφαπτομένη τόξου, λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνεφαπτομένων ἄνυσμα ΒΣ ἔχον μῆκος α καὶ ἄγομεν τὴν διάμετρον ΟΣ. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι τὴν δοθεῖσαν συνεφαπτομένην ἔχουσι τὰ εἰς τὰ Ν καὶ Ν′ (σχ. 22) περατούμενα τόξα καὶ μόνον αὐτά. Κατὰ ταῦτα τὸν δεδομένον τριγ. ἀριθμὸν ἔχουσι 4 τόξα [1], ὧν τὰ δύο θετικὰ καὶ τὰ δύο ἀρνητικὰ (ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ εἶναι α ἀπολύτως μικρότερος τῆς μονάδος, ἐφ᾿ ὅσον οὗτος εἶναι ἡμίτονον ἢ συνημίτονον).

ΣΗΜ. Ἂν $\alpha = \pm 1$ διὰ τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ἢ $\alpha = 0$ διὰ τὴν ἐφ. ἢ σφ, ὁ ἀριθμὸς τῶν τόξων περιορίζεται εἰς 2.

Ἀσκήσεις 21). Ὁρισθείσης τῆς κοινῆς τῶν τόξων ἀρχῆς Α νὰ εὑρεθῶσι τὰ πέρατα τῶν τόξων, ὧν ἕκαστον ἔχει συνημίτονον $\frac{1}{2}$

22) Τὸ αὐτὸ διὰ τὰ τόξα, ὧν ἕκαστον ἔχει ἡμίτονον $\frac{2}{3}$

23) Τὸ αὐτὸ διὰ τὰ τόξα, ὧν ἕκαστον ἔχει ἐφαπτομένην 3.

24) Τὸ αὐτὸ διὰ τὰ τόξα, ὧν ἕκαστον ἔχει συνεφαπτομένην —1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γον.

Τριγωνομετρικοὶ τύποι.

§ 31. ***Σχέσεις τῶν τριγων. ἀριθμῶν τοῦ αὐτοῦ τόξου.*** Α′. Ἔστω ΑΜ (Σχ. 23) τυχὸν τόξον ἔχον μέτρον τ καὶ (ΟΠ), (ΟΡ), (ΑΤ) καὶ (ΒΣ) οἱ τριγ. ἀριθμοὶ αὐτοῦ. Τοῦ τριγώνου ΟΜΠ ὄντος ὀρθογω-

(1) Ἐν τῷ συγγράμματι τούτῳ δὲν θεωροῦμεν τόξα ὑπερβαίνοντα ἀπολύτως τὴν περιφέρειαν.

νίου ἀληθεύει, εἰς οἱονδήποτε τεταρτημόριον καὶ ἂν κεῖται τὸ Μ, ἡ ἰσότης $(\text{ΟΠ})^2 + (\text{ΠΜ})^2 = (\text{ΟΜ})^2$.

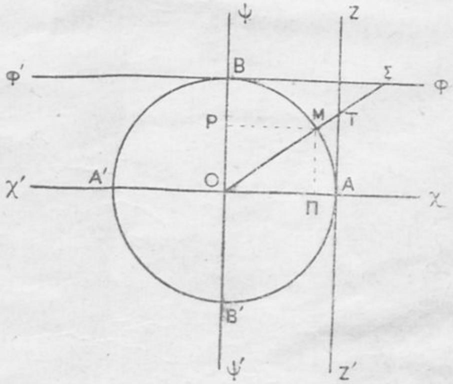
Ἐπειδὴ δὲ $(\text{ΟΠ}) = \text{συν}\ \tau$, $(\text{ΠΜ}) = \text{ἡμ.}\ \tau$ καὶ $(\text{ΟΜ})^2 = 1$, αὕτη γίνεται $\text{συν}^2\ \tau + \text{ἡμ}^2\ \tau = 1$. (1)

Ἄρα: *Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τοῦ συνημιτόνου καὶ τοῦ ἡμιτόνου τοῦ αὐτοῦ τόξου ἰσοῦται τῇ θετικῇ μονάδι.*

Β΄. Ἕνεκα τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΑΤ καὶ ΟΠΜ ἀληθεύει ἡ ἀναλογία $\frac{\text{ΑΤ}}{\text{ΠΜ}} = \frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΟΠ}}$ ἢ $\frac{\text{ΑΤ}}{\text{ΟΡ}} = \frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΟΠ}}$. Ἐπειδὴ δέ, ὅταν ΑΤ καὶ ΟΡ εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα καὶ τὰ ΟΑ καὶ ΟΠ εἶναι ὁμοίως ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα, οἱ λόγοι $\frac{\text{ΑΤ}}{\text{ΟΡ}}$ καὶ $\frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΟΠ}}$ εἶναι πάντοτε ὁμόσημοι· ἀληθεύει ἄρα ἡ ἰσότης αὐτῶν καὶ ὅταν οἱ ὅροι αὐτῶν λάβωσι τὸ προσῆκον ἕκαστος σημεῖον· εἶναι ἄρα καὶ $\frac{(\text{ΑΤ})}{(\text{ΟΡ})} = \frac{1}{(\text{ΟΠ})}$ ἢ $\frac{\text{ἐφ}\tau}{\text{ἡμ}\ \tau} = \frac{1}{\text{συν}\tau}$, ἄρα $\text{ἐφ}\tau = \frac{\text{ἡμ}\ \tau}{\text{συν}\tau}$. (2)

Ἤτοι: *Ἡ ἐφαπτομένη τόξου ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ ἡμιτόνου διὰ τοῦ συνημιτόνου τοῦ αὐτοῦ τόξου.*—Γ΄ Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΒΣ καὶ ΟΡΜ προκύπτει ἡ ἰσότης $\text{σφ}\tau = \frac{\text{συν}\tau}{\text{ἡμ.}\ \tau}$. (3)

Ἤτοι: *Ἡ συνεφαπτομένη τόξου ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ συνημιτόνου διὰ τοῦ ἡμιτόνου τοῦ αὐτοῦ τόξου.*



(*Σχ.* 23)

Ἀσκήσεις. 25) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη ἑκάστου τῶν τόξων 45°, 30°, 60°.

26) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη τοῦ αὐτοῦ τόξου εἶναι ἀριθμοὶ ἀντίστροφοι καὶ ὁμόσημοι.

27) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $1 + \text{ἐφ}^2\tau = \frac{1}{\text{συν}^2\tau}$.

28) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $1 + \sigma\varphi^2\tau = \frac{1}{\eta\mu^2\tau}$.

29) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\sigma\varphi^2\tau - \sigma\upsilon\nu^2\tau = \sigma\varphi^2\tau.\ \sigma\upsilon\nu^2\tau$.

30) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta} = \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha.\ \varepsilon\varphi\beta}$.

31) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πέρατα τῶν τόξων χ, δι' ἃ ἀληθεύει ἡ ἰσότης $\frac{\varepsilon\varphi\chi}{\sigma\varphi\chi} = 4$.

Ἐφαρμογαί.

§ 32. ***Πρόβλημα Αον. Δεδομένου τοῦ συνημιτόνου τόξου νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγ. ἀριθμοὶ αὐτοῦ.***

Α'. *εὕρεσις τοῦ ἡμιτόνου.* Λύοντες τὴν ἰσότητα (1) πρὸς ἡμτ. εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα $\eta\mu\tau = \pm\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\tau}$ (4)
δι' ἧς εὑρίσκομεν τὸ ἡμ τ δεδομένου τοῦ συντ. Τὸ πρὸ τοῦ ριζικοῦ τῆς ἰσότητος (4) σημεῖον ὁρίζεται ἂν εἶναι γνωστὸν τὸ τεταρτημόριον, εἰς ὃ λήγει τὸ τόξον τ.

ΣΗΜ. Τὴν ὕπαρξιν τοῦ διπλοῦ σημείου ἐξηγοῦμεν εὐκόλως ἐνθυμούμενοι (§ 30 Α') ὅτι τὸ δεδομένον συνημίτονον π. χ. (ΟΠ) (Σχ. 21) ἔχουσι τὰ εἰς τὸ Μ καὶ Μ' περατούμενα τόξα, ὧν τὰ ἡμίτονα εἶναι ἀντίθετα.

β' Εὕρεσις τῆς ἐφαπτομένης.— Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (4) προκύπτει εὐκόλως ἡ ἰσότης

$$\varepsilon\varphi\tau = \frac{\pm\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\tau}}{\sigma\upsilon\nu\ \tau} \qquad (5)$$

γ' Εὕρεσις τῆς συνεφαπτομένης.—Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (3) καὶ (4) προκύπτει εὐκόλως ἡ ἰσότης

$$\sigma\varphi\tau = \frac{\sigma\upsilon\nu\tau}{\pm\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\tau}}. \qquad (6)$$

ΣΗΜ Τὸ διπλοῦν σημεῖον τῶν (5) καὶ (6) ἐξηγεῖται ὡς καὶ τὸ τῆς ἰσότητος (4) ὁρίζεται δὲ τὸ σημεῖον ἐν ἑκατέρα τῶν (5) καὶ (6) ἂν ὁρισθῇ τὸ τεταρτημόριον, εἰς ὃ περατοῦται τὸ τόξον τ.

§ 33. ***Πρόβλημα Βον. Δεδομένου τοῦ ἡμιτόνου τόξου νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγ. ἀριθμοὶ αὐτοῦ.***—Ἐργαζόμενοι ὡς προηγουμένως εὑρίσκομεν τὰς ἰσότητας

$$\sigma\upsilon\nu\tau = \pm\sqrt{1 - \eta\mu^2\tau},\quad \varepsilon\varphi\tau = \frac{\eta\mu\tau}{\pm\sqrt{1 - \eta\mu^2\tau}},\quad \sigma\varphi\tau = \frac{\pm\sqrt{1 - \eta\mu^2\tau}}{\eta\mu\ \tau} \qquad (7),$$

δι' ὧν λύεται τὸ πρόβλημα. Διὰ τὰ πρὸ τῶν ριζικῶν σημεῖα ἰσχύουσιν ὅσα εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα σχετικὰ εἴπομεν.

§ 34. ***Πρόβλημα Γον. Δεδομένης τῆς ἐφαπτομένης τόξου νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγ. ἀριθμοὶ αὐτοῦ.***

α'. Εὕρεσις τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου.—Ἐκ τῆς ἰσότητος (2) τεθειμένης ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\text{ἡμτ}}{\text{συντ}}=\frac{\text{ἐφτ}}{1}$ προκύπτει δι' ἀλλαγῆς τῶν μέσων $\frac{\text{ἡμτ}}{\text{ἐφτ}}=\frac{\text{συντ}}{1}$, ἐξ' ἧς δι' ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφοτέρων τῶν μελῶν προκύπτει ἡ ἰσότης $\frac{\text{ἡμ}^2\text{τ}}{\text{ἐφ}^2\text{τ}}=\frac{\text{συν}^2\text{τ}}{1}$. Ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν εἰς ταύτην γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν ἰσότητα (1) εὑρίσκομεν τὰς ἰσότητας $\frac{\text{ἡμ}^2\text{τ}}{\text{ἐφ}^2\text{τ}}=\frac{\text{συν}^2\text{τ}}{1}=\frac{1}{1+\text{ἐφ}^2\text{τ}}$, ἐξ' ὧν $\frac{\text{ἡμτ}}{\text{ἐφτ}}=\frac{\text{συντ}}{1}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{ἐφ}^2\text{τ}}}$

ὅθεν
$$\text{ἡμτ}=\frac{\text{ἐφτ}}{\pm\sqrt{1+\text{ἐφ}^2\text{τ}}} \text{ καὶ } \text{συντ}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{ἐφ}^2\text{τ}}}. \quad (9)$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων βλέπομεν ὅτι διὰ τῆς ἐφτ μόνον δὲν ὁρίζεται τελείως τὸ ἡμτ καὶ συντ· χρειάζεται πλὴν ταύτης νὰ ὁρισθῇ καὶ τὸ τεταρτημόριον εἰς ὃ περατοῦται τὸ τόξον τ.

Εὕρεσις τῆς συνεφαπτομένης.—Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3) πολλαπλασιαζομένων κατὰ μέλη προκύπτει ἡ ἰσότης σφτ.ἐφτ=1, ὅθεν $\text{σφτ}=\frac{1}{\text{ἐφτ}}$ (10), δι' ἧς ὁρίζεται ἡ σφτ ἐκ τῆς ἐφτ.

Ἀσκήσεις. 32) Εὑρεῖν τὸ ἡμίτονον καὶ τὴν ἐφαπτομένην τόξου λήγοντος εἰς τὸ γ' τεταρτημόριον καὶ ἔχοντος συνημίτονον $\frac{3}{5}$.

33) Εὑρεῖν τοὺς ἄλλους τριγ. ἀριθμοὺς τόξου περατουμένου εἰς τὸ α' τεταρτημόριον καὶ ἔχοντος ἐφαπτομένην $\frac{3}{4}$.

34) Νὰ εὑρεθῶσιν ἐκ τῆς συνεφαπτομένης τόξου οἱ ἄλλοι τριγ. ἀριθμοὶ αὐτοῦ.

35) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{\text{συν}^2\text{α}-\text{ἡμ}^2\text{β}}{\text{ἡμ}^2\text{α}.\text{ἡμ}^2\text{β}}=\frac{1-\text{ἐφ}^2\text{α}.\text{ἐφ}^2\text{β}}{\text{ἐφ}^2\text{α}.\text{ἐφ}^2\text{β}}$.

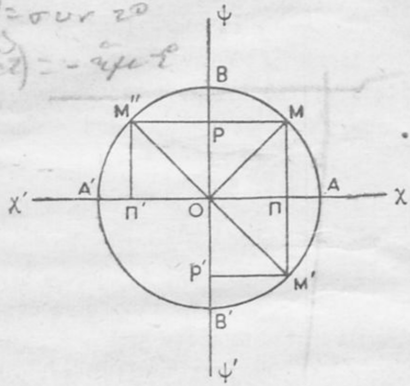
§ 35. ***Σχέσεις τῶν τριγ. ἀριθμῶν τόξων ἀντιθέτων.***—Ἔστω ΑΜ τυχὸν τόξον, ΑΜ' τὸ ἀντίθετόν του (Σχ. 24), τ δὲ καὶ —τ τὰ μέτρα αὐτῶν. Ἐπειδὴ (§ 9) ἡ χορδὴ ΜΜ' τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων, ἕπεται ὅτι ἀμφότεραι αἱ ἀκτῖνες OM καὶ OM′ ἔχουσι τὴν αὐτὴν προβολὴν OΠ ἐπὶ τὸν χχ′ καὶ (ΠM)=—(ΠM′) ἢ (OP)=—(OP′).

Ἄρα: συν (—τ) = συντ καὶ ἡμ (—τ) = — ἡμτ. (11)

Ἐκ τούτου δὲ προκύπτουσιν εὐκόλως καὶ αἱ ἰσότητες

ἐφ (— τ) = — ἐφτ, σφ (— τ) = — σφτ. (12)

Ἤτοι: *Δύο τόξα ἀντίθετα ἔχουσι τὸ αὐτὸ συνημίτονον, ἀντιθέτους δὲ τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγ. ἀριθμούς.*



(*Σχ. 24*).

Ἀσκήσεις. 36) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων —45°, — 30°, — 60°.

§ 36. ***Σχέσεις τῶν τριγ. ἀριθμῶν τόξων παραπληρωματικῶν.*** — Ἔστω AM (Σχ. 24) τυχὸν τόξον ἔχον μέτρον τ, AM′ τὸ παραπληρωματικὸν (§ 11) αὐτοῦ, οὗ τὸ μέτρον εἶναι 180° — τ. Ἐπειδὴ ἡ χορδὴ MM″ εἶναι (§ 11) κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ψ′ψ, ἕπεται ὅτι

(OP) = ἡμτ = ἡμ (180 + τ). — τ°)

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι προφανῶς (PM″) = (OΠ′), (PM) = (OΠ) καὶ (PM″) = — (PM) ἕπεται ὅτι (OΠ′) = — (OΠ) ἢ

συν (180° — τ) = — συντ. Ὥστε:

ἡμ. (180° — τ) = ἡμτ, συν (180° — τ) = — συντ. (13)

Ἐκ τούτων δὲ προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ ἰσότητες

ἐφ (180 — τ) = — ἐφτ, σφ (180 — τ) = — σφτ. (14)

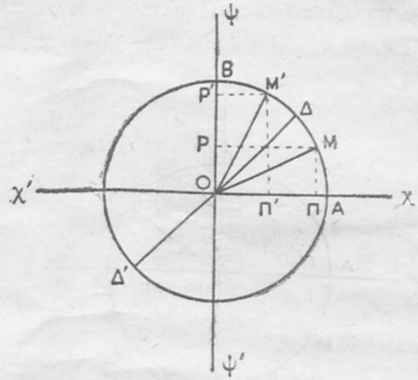
Ἄρα: *Δύο τόξα παραπληρωματικὰ ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον, ἀντιθέτους δὲ τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγ. ἀριθμούς.*

Ἀσκήσεις. 37) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων 135°, 150°, 120°.

38) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων — 135°, — 150°, — 120°.

§ 37. ***Σχέσεις τῶν τριγ. ἀριθμῶν τόξων συμπληρωματικῶν.*** — Ἔστω Δ τὸ μέσον τοῦ α′ τεταρτημορίου AB καὶ τόξον τι AM (Σχ. 25), ὅπερ λήγει εἰς τὸ α′ τεταρτημόριον καὶ ἔχει μέτρον τ· τὸ συμπληρωματικὸν αὐτοῦ ΑΜ′ ἔχει μέτρον $90^0 - τ$ καὶ περατοῦται εἰς τὸ Μ′ συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς τὴν διάμετρον Δ′ΟΔ (§ 12).

Ἐπειδὴ δὲ ἀφαιρουμένων ἀπὸ τῶν ἡμίσεων τεταρτημορίου τόξων ΑΔ καὶ ΔΒ τῶν ἴσων ΜΔ καὶ ΔΜ′ ὑπολείπονται τόξα ΑΜ καὶ Μ′Β ἴσα, ἕπεται ὅτι γων. ΑΟΜ = γων. Μ′ΟΒ. Τὰ ὀρθογώνια ὅθεν τρίγωνα ΟΜΠ καὶ ΟΡ′Μ′ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως ΠΜ = Ρ′Μ′ καὶ ΟΠ = ΟΡ′. Ἐπειδὴ δὲ ΠΜ = ΟΡ καὶ Ρ′Μ′ = ΟΠ′, ἕπεται ὅτι ΟΡ = ΟΠ′ καὶ ΟΠ = ΟΡ′. Ἀλλὰ τὰ εὐθ. τμήματα ἑκατέρας τῶν ἰσοτήτων τούτων εἶναι ἀμφότερα ὁμόρροπα πρὸς τὰ διευθύνοντα ἀνύσματα τῶν ἀξόνων, ἐφ' ὧν ταῦτα κεῖνται, διὰ τοῦτο δὲ τὰ μήκη τῶν ἀντιστοίχων ἀνυσμάτων εἶναι ἴσα, ἤτοι (ΟΠ′) = (ΟΡ) καὶ (ΟΡ′) = (ΟΠ) ἢ



(Σχ. 25)

συν$(90^0 - τ)$ = ἡμτ καὶ ἡμ$(90^0 - τ)$ = συντ (15).

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ ἀλήθεια τῶν ἰσοτήτων τούτων καὶ ὅταν τὸ Μ λήγῃ εἰς οἱονδήποτε ἄλλο τεταρτημόριον. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (15) προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ

σφ $(90^0 - τ)$ = ἐφτ, ἐφ $(90^0 - τ)$ = σφτ. (16). Ἄρα:

Ἐὰν δύο τόξα εἶναι συμπληρωματικά, τὸ μὲν ἡμίτονον ἑκατέρου ἰσοῦται πρὸς τὸ συνημίτονον, ἡ δὲ ἐφαπτομένη πρὸς τὴν συνεφαπτομένην τοῦ ἑτέρου.

Ἀσκήσεις. 39) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ θετικὸν καὶ μικρότερον τεταρτημορίου τόξον, ὅπερ ἔχει ἡμίτονον $\frac{2}{5}$ καὶ νὰ ὁρισθῇ εἶτα τὸ πέρας τοῦ συμπληρωματικοῦ του.

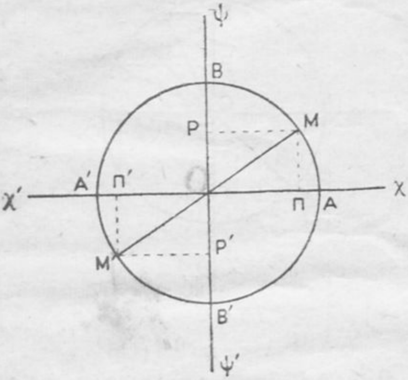
40) Νὰ ὁρισθῶσι τὰ πέρατα τῶν τόξων, ὧν ἕκαστον ἔχει ἡμίτονον ἴσον πρὸς τὸ συνημίτονόν του.

41) Ἂν τρία τόξα Α, Β, Γ (ἢ γωνίαι) ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 180^0, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: ἐφ $\left(\frac{Α + Β}{2}\right)$ = σφ $\left(\frac{Γ}{2}\right)$.

42) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡμ$(90^0 + τ)$ = συντ, συν$(90 + τ)$ = − ἡμτ.

§ 38. ***Σχέσεις τῶν τριγ. ἀριθμῶν τόξων διαφερόντων κατὰ ἡμιπεριφέρειαν.*** — Ἔστω ΑΜ (Σχ. 26) τόξον τι ἔχον μέτρον τ καὶ ΜΟΜ′ ἡ διὰ τοῦ πέρατος αὐτοῦ διερχομένη διάμετρος· προφανῶς τὸ τόξον ΑΜΜ′ ὑπερβαίνει τὸ ΑΜ κατὰ 180^0 καὶ ἔχει κατ' ἀκολουθίαν μέτρον $180^0 + τ$.

Προβαλλομένων τῶν τελικῶν αὐτῶν ἀκτίνων ἐπὶ τοὺς ἄξονας τῶν συνημιτόνων καὶ ἡμιτόνων εἶναι προφανὲς ὅτι ἡμ $(180^0 + τ) = (ΟΡ')$, ἡμ $τ = (ΟΡ)$ συν $(180^0 + τ) = (ΟΠ')$, συν $τ = (ΟΠ)$. (1)



(Σχ. 26)

Ἕνεκα δὲ τῆς ἰσότητος τῶν ὀρθ. τριγώνων ΟΜΠ, ΟΜ′Π′ τὰ ἀνύσματα ΠΜ (=ΟΡ) καὶ Π′Μ′(=ΟΡ′) εἶναι ἐφαρμόσιμα ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ΟΠ, ΟΠ′. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἐφαρμόσιμα ταῦτα ἀνύσματα εἶναι ἀντίρροπα, ἕπεται ὅτι: $(ΟΡ') = -(ΟΡ)$ καὶ $(ΟΠ') = -(ΟΠ)$ παραβάλλοντες ταύτας πρὸς τὰς ἰσότητας (1) συνάγομεν ὅτι:

$$\left.\begin{array}{l} ἡμ\ (180^0 + τ) = -ἡμτ \\ συν\ (180^0 + τ) = -συντ \end{array}\right\} \quad (17)$$

ἐξ ὧν προκύπτουσι καὶ αἱ

$$ἐφ\ (180^0 + τ) = ἐφτ \text{ καὶ } σφ\ (180^0 + τ) = σφτ. \qquad (18)$$

Ἄρα: *Ἐὰν δύο τόξα διαφέρωσι κατὰ ἡμιπεριφέρειαν, ἔχωσι τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν αὐτὴν συνεφαπτομένην, ἀντιθέτους δὲ τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγ. ἀριθμούς.*

Ἀσκήσεις. 43). Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων 225^0, 210^0 καὶ 240^0.

44). Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων -225^0, -210^0 καὶ -240^0.

§ 39. ***Σχέσεις τῶν τριγ. ἀριθμῶν δύο τόξων ἐχόντων ἄθροισμα μίαν περιφέρειαν.*** — Ἔστω τόξον τι ΑΜ (Σχ. 24) ἔχον μέτρον τ καὶ ΑΜ′ ἕτερον τόξον, ὅπερ μετὰ τοῦ ΑΜ ἔχει ἄθροισμα μίαν περιφέρειαν, καὶ οὗ τὸ μέτρον θὰ εἶναι προφανῶς $360^0 - τ$. Ἐπειδὴ $360^0 - τ = (-τ) + 360^0$ τὸ τόξον, ὅπερ ἔχει μέτρον $360^0 - τ$ περατοῦται εἰς ὃ σημεῖον καὶ τὸ τόξον, ὅπερ ἔχει μέτρον $(-τ)$

ἤτοι, εἰς τὸ M′ συμμετρικὸν τοῦ M πρὸς τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων. Διὰ τοῦτο μεταξὺ τῶν τριγ. ἀριθμῶν τῶν τόξων τούτων ὑφίστανται αἱ μεταξὺ τῶν τριγ. ἀριθμῶν δύο ἀντιθέτων τόξων (§ 35) ὑπάρχουσαι σχέσεις ἤτοι :

$$\left.\begin{array}{l} ἡμ\,(360^\circ - τ) = -\,ἡμτ,\ συν\,(360^\circ - τ) = συντ \\ ἐφ\,(360 - τ) = -\,ἐφτ,\ σφ\,(360^\circ - τ) = -\,σφτ \end{array}\right\} \quad (19)$$

Ἄρα: *Ἐὰν δύο τόξα ἔχωσιν ἄθροισμα μίαν περιφέρειαν, ἔχουσι τὸ αὐτὸ συνημίτονον ἀντιθέτους δὲ τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγ. ἀριθμούς.*

Ἀσκήσεις. 45) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων 315°, 330° καὶ 300°.

46) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων — 315°, — 330° καὶ — 300°.

§ 40. ***Ἀναγωγὴ τόξου εἰς τὸ α′ τεταρτημόριον.***—Οὕτω καλεῖται ἡ ἐργασία, δι᾿ ἧς ἀνάγεται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν τριγ. ἀριθμῶν τυχόντος τόξου εἰς ὑπολογισμὸν τῶν τριγ. ἀριθμῶν τόξου θετικοῦ καὶ μικροτέρου 90°. Ἡ ἀναγωγὴ αὕτη γίνεται ὡς ἀκολούθως.

α′). Ἔστω τόξον θετικὸν καὶ μικρότερον ἡμιπεριφερείας, π. χ. 127°. Τούτου παραπληρωματικὸν εἶναι τὸ 180° — 127° = 53° καὶ ὡς γνωστὸν (§ 36) εἶναι ἡμ 127° = ἡμ. 53°, συν 127° = — σφ 53°

ἐφ 127° = — ἐφ 53°, σφ 127° = — σφ 53°

β′). Ἔστω τόξον 200°, ὅπερ περατοῦται εἰς τὸ γ′ τεταρτημόριον. Ἀφαιροῦντες ἀπ᾿ αὐτοῦ 180° εὑρίσκομεν 20° καὶ ὡς γνωστὸν (§ 38) εἶναι ἡμ 200° = — ἡμ 20°, συν 200° = — συν 20°, ἐφ᾿ 200° = ἐφ 20° καὶ σφ 200° = σφ 20°.

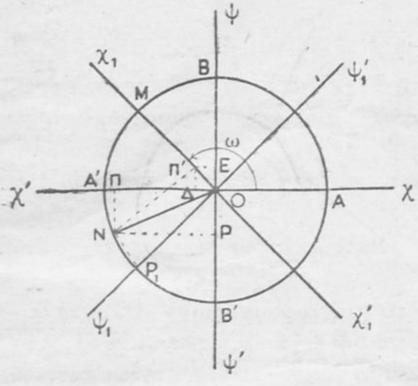
γ′). Ἔστω τόξον 310°, ὅπερ περατοῦται εἰς τὸ δ′ τεταρτημόριον. Ἀφαιροῦντες αὐτὸ ἀπὸ 360° εὑρίσκομεν τόξον 50° καὶ ὡς γνωστὸν (§ 39) εἶναι ἡμ 310° = — ἡμ 50° κλπ.

Ἐὰν τὸ δεδομένον τόξον εἶναι ἀρνητικόν, διὰ τῶν τύπων (11) καὶ (12) ἀναγόμεθα εἰς μίαν τῶν προηγουμένων περιπτώσεων. Οὕτω ἡμ (— 132°) = — ἡμ 132° = — ἡμ. 48°, συν (— 132°) = συν 132° = — συν 48° κλπ.

Ἀσκήσεις. 47) Νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸ α′ τεταρτημόριον ἕκαστον τῶν τόξων 113°, — 20° καὶ 325°.

Τριγ. ἀριθμοὶ ἀθροισμάτων τόξων (ἢ γωνιῶν).

§ 41 ***Εὕρεσις τοῦ συν (α+β) καὶ τοῦ ἡμ. (α+β).***—Ἔστωσαν AM καὶ MN (Σχ. 27) δύο διαδοχικὰ τόξα ἔχοντα ἀντιστοίχως μέτρα α καὶ β καὶ ἄθροισμα τὸ τόξον AN, ὅπερ ἔχει μέτρον (α+β). Ἔστωσαν δὲ ἔτι δύο συστήματα πρωτευόντων ἀξόνων, ἓν μὲν $(\chi'\chi, \psi'\psi)$ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἀρχὴν τόξων τὸ A καὶ ἕτερον $(\chi_1'\chi_1, \psi_1'\psi_1)$ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἀρχὴν τόξων τὸ M. Τούτων τεθέντων, ἂν Π, P, Π_1, P_1 εἶναι αἱ προβολαὶ τοῦ N ἐπὶ τοὺς εἰρημένους ἄξονας, θὰ ἀληθεύωσιν (§ 16, καὶ 18) αἱ ἰσότητες:



(Σχ. 27)

συν (α+β)=(OΠ), ἡμ (α+β)=(OP), συν β=$(O\Pi_1)$, καὶ ἡμ β=(OP_1).

Ἐὰν ἤδη θεωρήσωμεν τὸν $\chi'\chi$ ὡς προβολικὸν ἄξονα καὶ καλέσωμεν Δ τὴν ἐπ' αὐτὸν προβολὴν τοῦ Π_1, θέλομεν ἔχει (§ 5, 6):

συν (α+β)=(OΠ)=(OΔ)+(ΔΠ)=προβ. $(O\Pi_1)$ + προβ.$(\Pi_1 N)$ (1)

Ἐπειδὴ δὲ προβ.$(O\Pi_1)$ = $(O\Pi_1)$. συν ω=συν β. συν ω =συν α. συν β (§ 29, 27).

καὶ προβ $(\Pi_1 N)$=πρ (OP_1) = (OP_1) συν (ω+90°) = — ἡμβ ἡμω = —ἡμ α ἡμ β, (§ 6 B', 29, 27)

ἡ ἰσότης (1) γίνεται:

συν (α+β)=συν α συν β — ἡμ α ἡμ β (20)

Ἐὰν δὲ ληφθῇ ὡς προβολικὸς ἄξων ὁ ψ'ψ, ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι $\chi\hat{O}\chi_1$=$\psi\hat{O}\psi_1$, καὶ κληθῇ E ἡ ἐπ' αὐτὸν προβολὴ τοῦ Π_1, θέλομεν ἔχει ὁμοίως:

ἡμ (α+β)=(OP)=(OE)+(EP)=προβ. $(O\Pi_1)$+προβ. $(\Pi_1 N)$ (2)

Ἐπειδὴ δὲ προβ $(O\Pi_1)$=$(O\Pi_1)$συν(ω—90°)=συνβἡμω=ἡμασυνβ

καὶ προβ. $(\Pi_1 N)$=προβ (OP_1)=(OP_1) συνω=συνα ἡμβ,

ἡ ἰσότης (2) γίνεται:

ἡμ (α+β)=ἡμα συν β+συνα ἡμ β. (21)

§ 42. ***Εὕρεσις τοῦ συν(α—β) καὶ ἡμ (α—β).*** Ἐφαρμόζοντες τὰς ἰσότητας (20) καὶ (21) εἰς τὰ τόξα α καὶ (—β) καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ἰσότητας (11) εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

$$\begin{aligned} \text{συν}\,(\alpha-\beta) &= \text{συν}\alpha\ \text{συν}\,\beta + \text{ἡμ}\alpha\ \text{ἡμ}\beta \\ \text{ἡμ}\,(\alpha-\beta) &= \text{ἡμ}\alpha\ \text{συν}\,\beta - \text{συν}\alpha\ \text{ἡμ}\beta \end{aligned} \qquad (22)$$

Ἀσκήσεις. 48). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ἑκατέρου τῶν τόξων 75^0 καὶ 15^0.

49) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\text{συν}\,(\alpha+\beta).\ \text{συν}\,(\alpha-\beta) = \text{συν}^2\alpha - \text{ἡμ}^2\beta$.

50) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\text{ἡμ}\,(\alpha+\beta).\ \text{ἡμ}\,(\alpha-\beta) = \text{ἡμ}^2\alpha - \text{ἡμ}^2\beta$.

51) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\dfrac{2\,\text{ἡμ}\,(\alpha+\beta)}{\text{συν}(\alpha+\beta)+\text{συν}(\alpha-\beta)} = \text{ἐφ}\alpha + \text{ἐφ}\beta$.

§ 43. *Εὕρεσις τῆς ἐφ (α+β) καὶ ἐφ (α—β)*. Διαιροῦντες τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (21) διὰ τῶν ἀντιστοίχων μελῶν τῆς ἰσότητος (20) εὑρίσκομεν ὅτι

$\text{ἐφ}(\alpha+\beta) = \dfrac{\text{ἡμ}\alpha\,\text{συν}\beta + \text{συν}\alpha\,\text{ἡμ}\beta}{\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta - \text{ἡμ}\alpha\,\text{ἡμ}\beta}$. Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ β' μέλους ταύτης διὰ συνα συνβ, εὑρίσκομεν ὅτι

$$\text{ἐφ}\,(\alpha+\beta) = \frac{\text{ἐφ}\alpha + \text{ἐφ}\beta}{1 - \text{ἐφ}\alpha.\text{ἐφ}\beta} \qquad (23)$$

Ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν ταύτην εἰς τὰ τόξα α καὶ (—β) εὑρίσκομεν (§ 35) ὅτι

$$\text{ἐφ}\,(\alpha-\beta) = \frac{\text{ἐφ}\alpha - \text{ἐφ}\beta}{1 + \text{ἐφ}\alpha.\text{ἐφ}\beta} \qquad (24)$$

Ἀσκήσεις. 52) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη ἑκατέρου τῶν τόξων 75^0 καὶ 15^0.

53) Ἂν $\alpha+\beta+\gamma=180^0$, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι α') $\text{ἐφ}\alpha+\text{ἐφ}\beta+\text{ἐφ}\gamma = \text{ἐφ}\alpha.\ \text{ἐφ}\beta.\ \text{ἐφ}\gamma$. β') $\text{σφ}\alpha.\ \text{σφ}\beta + \text{σφ}\alpha.\ \text{σφ}\gamma + \text{σφ}\beta.\ \text{σφ}\gamma = 1$.

54) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\text{ἐφ}.\ (45^0-\alpha) = \dfrac{\text{συν}\alpha - \text{ἡμ}\alpha}{\text{συν}\alpha + \text{ἡμ}\alpha}$.

55) Ἂν $\alpha+\beta+\gamma=90^0$ ν' ἀποδειχθῇ ὅτι α') $\text{ἐφ}\alpha.\ \text{ἐφ}\beta + \text{ἐφ}\alpha.\ \text{ἐφ}\gamma + \text{ἐφ}\beta.\ \text{ἐφ}\gamma = 1$. β') $\text{σφ}\alpha.\ \text{σφ}\beta.\ \text{σφ}\gamma. = \text{σφ}\alpha + \text{σφ}\beta + \text{σφ}\gamma$.

Τριγ. ἀριθμοὶ τοῦ διπλασίου τόξου τινός.

§ 44. *Εὕρεσις τοῦ συν. 2α*.—.Ἐὰν ἐν τῇ β'. τῶν ἰσοτήτων (20) τεθῇ α ἀντὶ β, προκύπτει ἡ ἰσότης

$$\text{συν}\ 2\,\alpha = \text{συν}^2\,\alpha - \text{ἡμ}^2\alpha, \qquad (25)$$

δι' ἧς ὁρίζεται τὸ συνημίτονον τοῦ 2 α ἐκ τοῦ συνημιτόνου καὶ τοῦ ἡμιτόνου τοῦ α.

Ἐὰν δὲ ἐν ταύτῃ ἀντὶ $\text{ἡμ}^2\alpha$ τεθῇ $1 - \text{συν}^2\alpha$, προκύπτει ὅτι

$$συν\,2α = 2\,συν^2α - 1 \qquad (26)$$

δι' ἧς ὁρίζεται τὸ συν2α ἐκ τοῦ συνα.

§ 45. ***Εὕρεσις τοῦ ἡμ 2α.***—᾿Εὰν ἐν τῇ ἰσότητι (21) τεθῇ α ἀντὶ β, προκύπτει

$$ἡμ.\,2α = 2\,ἡμ\,α\;συνα \qquad (27).$$

§ 46. ***Εὕρεσις τῆς ἐφ. 2α.***—᾿Εὰν ἐν τῇ ἰσότητι (23) τεθῇ α ἀντὶ β προκύπτει ὅτι

$$ἐφ.\,2α = \frac{2\,ἐφα}{1-ἐφ^2α} \qquad (28).$$

Παρατήρησις. ᾿Εὰν τεθῇ $2α=ω$, ὅτε καὶ $α=\frac{ω}{2}$, αἱ ἰσότητες (25), (27) καὶ (28) γίνονται

$$\left.\begin{aligned} συνω &= συν^2\left(\frac{ω}{2}\right) - ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right) \\ ἡμω &= 2\,ἡμ\left(\frac{ω}{2}\right)\,συν\left(\frac{ω}{2}\right) \\ ἐφω &= \frac{2\,ἐφ.\left(\frac{ω}{2}\right)}{1-ἐφ^2\left(\frac{ω}{2}\right)} \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

᾿Ασκήσεις. 56). Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $συνω = \dfrac{1-ἐφ^2\left(\frac{ω}{2}\right)}{1+ἐφ^2\left(\frac{ω}{2}\right)}$ καὶ

$$ἡμω = \frac{2ἐφ\left(\frac{ω}{2}\right)}{1+ἐφ^2\left(\frac{ω}{2}\right)}$$

57) ῾Ομοίως ὅτι $1+ἐφα.\,ἐφ2α = \dfrac{1}{συν2α}$.

58) ῾Ομοίως ὅτι α') $σφ2α = \dfrac{σφ^2α-1}{2σφα}$ β') $σφα - ἐφα = 2σφ2α$.

59) ὁμοίως ὅτι $ἡμ2α = \dfrac{2}{ἐφα + σφα}$.

Τριγ. ἀριθμοὶ τοῦ ἡμίσεος τόξου.

§ 47. ***Εὕρεσις τοῦ συν*** $\left(\frac{ω}{2}\right)$ ***καὶ ἡμ*** $\left(\frac{ω}{2}\right)$ ***ἐκ τοῦ συνω.***

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς γνωστὰς (1,29) ἰσότητας

$συν^2\left(\frac{ω}{2}\right)+ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right)=1, συν^2\left(\frac{ω}{2}\right)-ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right)=συνω$ εὑρίσκομεν ὅτι $2\,συν^2\left(\frac{ω}{2}\right)=1+συν\,ω.$

ὅθεν $$συν\left(\frac{ω}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+συνω}{2}} \qquad (30)$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν μελῶν τῆς α′ τῶν αὐτῶν ἰσοτήτων ἀφαιρέσωμεν τὰ ἀντίστοιχα μέλη τῆς β′ εὑρίσκομεν ὅτι $2ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right)=1-συνω,$

ὅθεν $$ἡμ\left(\frac{ω}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-συνω}{2}} \qquad (31)$$

Ἕνεκα τῆς παρουσίας τοῦ διπλοῦ σημείου αἱ ἰσότητες (30) καὶ (31) δὲν ὁρίζουσι τελείως τὸ συν $\left(\frac{ω}{2}\right)$ καὶ ἡμ $\left(\frac{ω}{2}\right)$ ἐκ μόνου τοῦ συν ω· ἀπαιτεῖται πλὴν τούτου νὰ εἶναι γνωστὸν καὶ τὸ τόξον ω ἢ τοὐλάχιστον τὸ τεταρτημόριον, εἰς ὃ περατοῦται τὸ $\left(\frac{ω}{2}\right)$.

§ 48. *Εὕρεσις τῆς ἐφ $\left(\frac{ω}{2}\right)$ ἐκ τοῦ συνω.*—Προηγουμένως (§ 47) εὕρομεν ὅτι $2\,ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right)=1-συνω$ καὶ $2συν^2\left(\frac{ω}{2}\right)=1+συνω.$ Διαιροῦντες ταύτας κατὰ τὰ μέλη κλπ. εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι

$$ἐφ\,\frac{ω}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-συνω}{1+συνω}} \qquad (32)$$

Ἡ ἰσότης αὕτη ὁρίζει τὴν ἐφ$\left(\frac{ω}{2}\right)$ ἐκ τοῦ συνω, ἂν εἶναι γνωστὸν καὶ τὸ τεταρτημόριον, εἰς ὃ περατοῦται τὸ τόξον $\left(\frac{ω}{2}\right)$.

Ἀσκήσεις. 60) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκατέρου τῶν τόξων 15^0 καὶ $22^0 30'$.

61) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ τόξου $\left(\frac{ω}{2}\right)$, ὅπερ λήγει εἰς τὸ α′ τεταρτημόριον, ἂν συνω $=\frac{2}{3}$.

62) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$ἐφ\,\frac{ω}{2}=\frac{-1+\sqrt{1+ἐφ^2ω}}{ἐφω}.$$

Χρήσιμοί τινες μετασχηματισμοί.

§ 49 *Μετασχηματισμὸς τῶν παραστάσεων ἡμ $A \pm$ ἡμB εἰς γινόμενα.*—Ἐκ τῶν γνωστῶν ἰσοτήτων:

$$\text{ἡμ}\,(\alpha+6)=\text{ἡμ}\alpha\;\text{συν}6+\text{συν}\alpha\;\text{ἡμ}6,$$
$$\text{ἡμ}\,(\alpha-6)=\text{ἡμ}\alpha\;\text{συν}\;6-\text{συν}\alpha\;\text{ἡμ}6$$

διὰ προθέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{ἡμ}\,(\alpha+6)+\text{ἡμ}\,(\alpha-6)=2\;\text{ἡμ}\alpha\text{συν}6. \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ τὰς αὐτὰς ἰσότητας ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι

$$\text{ἡμ}\,(\alpha+6)-\text{ἡμ}\,(\alpha-6)=2\;\text{ἡμ}6\;\text{συν}\alpha. \qquad (2)$$

Ἐὰν δὲ τεθῇ $\alpha+6=A$ καὶ $\alpha-6=B$ εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι $\alpha=\dfrac{A+B}{2}$ καὶ $6=\dfrac{A-B}{2}$ αἱ δὲ ἰσότητες (1) καὶ (2) γίνονται.

$$\left.\begin{aligned}\text{ἡμ}\;A+\text{ἡμ}B&=2\;\text{ἡμ}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{A-B}{2}\right)\\ \text{ἡμ}\;A-\text{ἡμ}B&=2\;\text{ἡμ}\left(\frac{A-B}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{A+B}{2}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

§ 50. Ἐφαρμογὴ εἰς τὴν παράστασιν $\dfrac{\text{ἡμ}A-\text{ἡμ}B}{\text{ἡμ}A+\text{ἡμ}B}$.

Ἐὰν τὰ μέλη τῆς β΄. τῶν ἰσοτήτων (33) διαιρέσωμεν διὰ τῶν ἀντιστοίχων μελῶν τῆς α΄ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{\text{ἡμ}A-\text{ἡμ}B}{\text{ἡμ}A+\text{ἡμ}B}=\frac{\text{ἡμ}\left(\frac{A-B}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\text{ἡμ}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{A-B}{2}\right)}=\frac{\text{ἡμ}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\text{συν}\left(\frac{A-B}{2}\right)}\cdot\frac{\text{συν}\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\text{ἡμ}\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

ὅθεν $$\frac{\text{ἡμ}A-\text{ἡμ}B}{\text{ἡμ}A+\text{ἡμ}B}=\text{ἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right).\text{σφ}\left(\frac{A+B}{2}\right)=\frac{\text{ἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\text{ἐφ}\left(\frac{A+B}{2}\right)} \qquad (34)$$

§ 51. *Μετασχηματισμὸς τῶν παραστάσεων συν $A \pm$ συν B εἰς γινόμενα.*—Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\text{συν}\,(\alpha+\beta)=\text{συν}\alpha\;\text{συν}\beta-\text{ἡμ}\alpha.\text{ἡμ}\beta$

$\text{συν}\,(\alpha-\beta)=\text{συν}\alpha\;\text{συν}\beta+\text{ἡμ}\alpha\;\text{ἡμ}\beta$ προκύπτουσι κατὰ τὸν προηγούμενον τρόπον αἱ ἰσότητες:

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\acute{\eta}\mu\left(\frac{A+B}{2}\right)\acute{\eta}\mu\left(\frac{B-A}{2}\right) \qquad (\S\ 35)$$

Ἀσκήσεις. 63) Τῇ βοηθείᾳ τῶν ἰσοτήτων (35) ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $1 + \sigma\upsilon\nu A = 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A}{2}\right)$ καὶ $1 - \sigma\upsilon\nu A = 2\acute{\eta}\mu^2\left(\frac{A}{2}\right)$ (§ 47)

64). Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\tau}{1 + \sigma\upsilon\nu\tau}$

65). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\grave{\epsilon}\varphi A + \grave{\epsilon}\varphi B = \frac{\acute{\eta}\mu(A+B)}{\sigma\upsilon\nu A\ \sigma\upsilon\nu B}$

66). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\sigma\varphi A + \sigma\varphi B = \frac{\acute{\eta}\mu(A+B)}{\acute{\eta}\mu A\ \acute{\eta}\mu B}$

67). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{\grave{\epsilon}\varphi A + \grave{\epsilon}\varphi B}{\sigma\varphi A + \sigma\varphi B} = \grave{\epsilon}\varphi A . \grave{\epsilon}\varphi B.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δον

Τριγωνομετρικοὶ Πίνακες.

§ 52. *Περιγραφὴ τῶν λογαριθμικῶν τριγ. πινάκων* Dupuis.—Οἱ πίνακες οὗτοι περιέχουσι μὲ πέντε δεκαδικὰ ψηφία τοὺς λογαρίθμους τῶν τριγ. ἀριθμῶν τῶν ἀπὸ 0° μέχρις 90° τόξων κατὰ 1′ προχωρούντων. Ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν εἶναι ἀναγεγραμμένος ἐκτὸς τοῦ πλαισίου καὶ διὰ μὲν τὰ μικρότερα 45° τόξα εἰς τὸ ἄνω μέρος ἑκάστης σελίδος, διὰ δὲ τὰ λοιπὰ εἰς τὸ κάτω. Οἱ δὲ ἀριθμοὶ τῶν πρώτων λεπτῶν διὰ μὲν τὰ μικρότερα 45° τόξα ἀναγράφονται εἰς τὴν α′ ἐξ ἀριστερῶν στήλην, ἥτις ἔχει ὡς ἐπικεφαλίδα ὀξὺν τόνον (′), διὰ δὲ τὰ λοιπὰ εἰς τὴν α′ ἐκ δεξιῶν στήλην· βαίνουσι δὲ τὰ πρῶτα λεπτὰ τῆς μὲν α′ ἐξ ἀριστερῶν στήλης αὐξανόμενα ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἀντιστρόφως δὲ τὰ τῆς ἄλλης. Ἕνεκα τῆς τοιαύτης διατάξεως οἱ ἀριθμοὶ τῶν πρώτων λεπτῶν δύο τόξων συμπληρωματικῶν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντίου γραμμῆς. Παντὸς τόξου μικροτέρου τῶν 45° καὶ μὴ περιέχοντος δεύτερα λεπτὰ οἱ λογάριθμοι τῶν τριγ. ἀριθμῶν ἀναγράφονται εἰς τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν τῶν πρώτων λεπτῶν αὐτοῦ καὶ εἰς τὴν στήλην, ἥτις φέρει ἄνω τὴν συγκεκομένην λέξιν Sin. διὰ τὸ ἡμίτονον Tang. διὰ τὴν ἐφαπτομένην Cotg. διὰ τὴν συνεφαπτομένην καὶ Cos. διὰ τὸ συνημίτονον· παντὸς δὲ τόξου περιεχομένου μεταξὺ 45^0 καὶ 90^0 καὶ μὴ περιέχοντος δεύτερα λεπτὰ οἱ λογάριθμοι τῶν τριγ. ἀριθμῶν εὑρίσκονται ὁμοίως εἰς τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν τῶν πρώτων λεπτῶν αὐτοῦ καὶ ἕκαστος εἰς τὴν στήλην, ἥτις φέρει κάτω τὸ ὄνομα τοῦ τριγ. ἀριθμοῦ. Σημειωτέον δὲ ὅτι, ὅταν πλείονες λογάριθμοι ἔχωσι κοινὰ τὰ δύο πρῶτα ψηφία αὐτῶν, ταῦτα γράφονται μόνον εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ τέλος ἑκάστης στήλης, νοοῦνται δὲ καὶ διὰ τοὺς ἐνδιαμέσους λογαρίθμους· ἐὰν δὲ ἐν τῷ μεταξὺ μεταβληθῇ τὸ ἕτερον τῶν ψηφίων τούτων, ἀναγράφεται πλήρης ὁ λογάριθμος, ὡς καὶ ὁ προηγούμενος αὐτοῦ, Μετὰ τὰς στήλας τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων εὑρίσκονται στῆλαι, ὧν ἑκατέρα ἐπιγράφεται διὰ τοῦ D (Difference=διαφορά), ἐν αἷς ἀναγράφονται εἰς μονάδας πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως (μ. ε΄. δ. τ) αἱ διαφοραὶ τῶν λογαρίθμων τῶν εἰρημένων τριγωνομ. ἀριθμῶν δύο διαδοχικῶς ἀναγεγραμμένων τόξων. Ὁμοία στήλη ὑπάρχει καὶ μεταξὺ τῶν στηλῶν Tang καὶ Cotg περιέχουσα τὰς κοινὰς διαφορὰς (1) τῶν λογαρίθμων τῶν ἐφαπτομένων καὶ συνεφαπτομένων δύο διαδοχικῶς ἀναγεγραμμένων τόξων,

ΣΗΜ. Ἡ δεξιὰ τῶν συνημιτόνων στήλη διαφορῶν δὲν ὑπάρχει διὰ τὰ μικρότερα 18^0 καὶ μεγαλύτερα 71^0, καθ' ὅσον αἱ διαφοραὶ αὗται οὖσαι μικρότεραι τοῦ 5 εὑρίσκονται ταχύτατα δι' ἁπλῆς τῶν λογαρίθμων παρατηρήσεως.

Εἰς τὰς σελίδας τῶν ἀπὸ 6^0 ἕως 83^0 τόξων ὑπάρχουσιν ἐκτὸς τοῦ πλαισίου πινακίδια, ὧν ἕκαστον φέρει ὡς ἐπικεφαλίδα μίαν τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σελίδι (μεγαλυτέρων τοῦ 12) διαφορῶν καὶ διαιρεῖται εἰς δύο στήλας. Τούτων ἡ α΄ περιέχει τοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς, οἵτινες δηλοῦσι δεύτερα λεπτά, ἡ δὲ ἄλλη εἰς μ. ε΄. δ. τ. τὰς ἀντιστοίχους τῶν λογαρίθμων τῶν τριγ. ἀριθμῶν μεταβολάς.

§ 53. *Χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων.*— Τοὺς λογαριθμικοὺς τριγ. πίνακας χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὴν λύσιν τῶν ἀκολούθων δύο προβλημάτων.

Πρόβλημα Αον.—Εὑρεῖν τὸν λογάριθμον ὡρισμένου τριγ. ἀριθμοῦ δεδομένου τόξου.

Λύσις. Ἐὰν τὸ δεδομένον τόξον δὲν ἔχῃ δεύτερα λεπτά, ὁ ζητούμενος λογάριθμος εἶναι ἀναγεγραμμένος εἰς τὴν σελίδα τῶν

(1) Ἐπειδὴ $\text{ἐφα} = \dfrac{1}{\text{σφα}}$ καὶ $\text{ἐφβ} = \dfrac{1}{\text{σφβ}}$ ἕπεται ὅτι:
$\text{λογ ἐφα} = -\text{λογσφα}$ καὶ $\text{λογἐφβ} = -\text{λογσφβ}$. Ἄρα:
$\text{λογ ἐφα} - \text{λογἐφβ} = \text{λογσφβ} - \text{λογσφα}$.

μοιρῶν τοῦ τόξου καὶ εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς τῶν πρώτων λεπτῶν καὶ τῆς ὁμωνύμου πρὸς τὸν τριγ. ἀριθμὸν στήλης. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι λογήμ $(15^0 42') = \overline{1},43233$, λογ ἐφ $(28^0 49') = \overline{1},74047$, λογσυν $(61^0 20') = \overline{1},68098$, λογ σφ $(57^0 45') = \overline{1},80000$ κ, λ. π.

Ἔστω ἤδη ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογ. ἡμ $(24^0 10' 45'')$. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι $24^0 10' < 24^0 10' 45'' < 24^0 11'$, ἄρα καὶ (§ 19 πίναξ) ἡμ $(24^0 10') <$ ἡμ $(24^0 10' 45'') <$ ἡμ $(24^0 11')$ ὅθεν λογ. ἡμ $(24^0 10') <$ λογ. ἡμ $(24^0 10' 45'') <$ λογ ἡμ $(24^0 11')$.

Ὁ ζητούμενος ὅθεν λογάριθμος περιέχεται μεταξὺ δύο λογαρίθμων ἀναγεγραμμένων εἰς τοὺς πίνακας καὶ οἵτινες διαφέρουσιν ἀλλήλων κατὰ 28μ ε΄.δ.τ. Ἀλλ' ἁπλοῦν βλέμμα ἐπὶ τῶν πινάκων πείθει ἡμᾶς ὅτι εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ 1΄ ἀντιστοιχεῖ ἡ αὐτὴ αὔξησις τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου αὐτοῦ, ἀρκεῖ τὸ τόξον νὰ μὴ διαφέρῃ πολὺ τοῦ $(24^0 10')$· δυνάμεθα, ὅθεν, νὰ θεωρήσωμεν τὴν αὔξησιν τῶν λογαρίθμων ὡς ἔγγιστα ἀνάλογον πρὸς τὴν αὔξησιν τῶν τόξων καὶ νὰ ὑπολογίσωμεν πόσον πρέπει ν' αὐξηθῇ ὁ λογ ἡμ. $(24^0 10') = \overline{1},61214$ διὰ νὰ προκύψῃ ὁ ζητούμενος λογάριθμος. Ὁ ὑπολογισμὸς γίνεται οὕτω:

Ἀφ' οὗ εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ 60΄΄ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ λογ. κατὰ 28 μ. ε΄.δ.τ. εἰς αὔξησιν τόξου κατὰ 45΄΄ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ λογ. κατὰ $X = 28 \times \frac{45}{60} = 21$ μ ε΄δ.τ. ὥστε λογ. ἡμ. $(24^0 10' 45'') = \overline{1},61214 + 0{,}00021 = \overline{1},61235$. Τὴν αὔξησιν 21 δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ταχύτερον τῇ βοηθείᾳ τοῦ πινακιδίου, ὅπερ φέρει ἐπικεφαλίδα τὴν διαφορὰν 28, ὡς ἑξῆς: Ἐπειδή, ὡς ἐκ τοῦ πινακιδίου φαίνεται, εἰς αὔξησιν τόξου κατὰ 4΄΄ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ λογ. κατὰ 1.87 μ.ε΄δ.τ, ἕπεται ὅτι εἰς αὔξησιν τόξου κατὰ 40΄΄ θ' ἀντιστοιχῇ αὔξησις τοῦ λογ. κατὰ $1{,}87 \times 10 = 18{,}7$ μ.έ.δ.τ, εἰς αὔξησιν δὲ τοῦ τόξου κατὰ 5΄΄ ἀντιστοιχεῖ ἑτέρα αὔξησις τοῦ λογ. κατὰ 2,33. Ὥστε εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ 45΄΄ ἀντιστοιχεῖ ὁλικὴ αὔξησις τοῦ λογ. κατὰ

$$18{,}7 + 2{,}33 = 21{,}03 \text{ ἢ } 21 \text{ περίπου.}$$

Πᾶσα δὲ ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὧδε λογ ἡμ. (24°10′) $= \overline{1},61214$

εἰς αὔξησιν τόξου κατὰ 40″ ἀντιστ. αὔξ λογ. κατὰ 18,7

» » » » 5″ » » » » 2,33

» » » » 45″ » » » » 21,03 ἢ 21

Ὥστε λογ. ἡμ. (24°10′45″) $= \overline{1},61235$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ λογαρίθμου τῆς ἐφαπτομένης δεδομένου τόξου.

Ἔστω ἔτι ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογσφ (36°54′38″). Ἐπειδὴ 36°54′ < 36°54′28″ < 36°55″ ἕπεται (§ 25 πίναξ) ὅτι σφ (36°54′) > σφ (36°54′38″) > σφ (36°55′) καὶ λογσφ (36°54″) > λογσφ (36°54′38″) > λογσφ (36°55′) ἤτοι ὁ ζητούμενος λογάριθμος περιέχεται μεταξὺ δύο λογαρίθμων διαφερόντων κατὰ 26 μ.ε′δ.τ. Ἤδη τῇ βοηθείᾳ καὶ τοῦ πινακιδίου 26 ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως.

λογ. σφ. (36°54′) =0,12446

εἰς αὔξ. τόξου κατὰ 30″ ἀντιστ. μείωσις λογ κατὰ 13

» » » » 8″ » » » » 3,47

» » » » 38″ » » » » 16,47 ἢ 16

Ὥστε λογ. σφ. (36°54′38″) =0,12430

Ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ ὁ λογ. τοῦ συνημιτόνου τόξου, ὅπερ περιέχει καὶ δεύτερα λεπτά.

Ἀσκήσεις. 68) Εὑρεῖν τὸν λογἡμ. (48°12′50″).

69) Εὑρεῖν τὸν λόγ συν (62°6′37″).

70) Εὑρεῖν τὸν λογ ἐφ (34°17′46″)

71) Εὑρεῖν τὸν λογσφ (24°14′39″).

72) Εὑρεῖν τὸν λογ ἡμ (120°35′).

73) Εὑρεῖν τὸν λογ ἐφ (235°40′23″).

74) Εὑρεῖν τὸν λογ συν (320°12′20″).

§ 54. ***Πρόβλημα Βον. Νὰ εὑρεθῇ (τὸ ἐλάχιστον) θετικὸν τόξον, οὗ ὡρισμένος τριγ. ἀριθμὸς ἔχει δεδομένον λογάριθμον.***

Α′ περίπτωσις.—Ὁ δοθεὶς λογάριθμος εἶναι ἀναγεγραμμένος εἰς τοὺς πίνακας.—Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν (τὸ ἐλ.) θετικὸν τόξον χ, δι᾽ ὃ εἶναι λογ ἡμ. χ $= \overline{1},46011$. Ἐπειδὴ λογ ἡμ. 45° =λογ συν 45° $= \overline{1},84949$ καὶ $\overline{1},46011 < \overline{1},84949$, ἕπεται ὅτι χ < 45°· θὰ ἀναζητήσωμεν ἄρα τὸν δοθέντα λογάριθμον εἰς τὰς στήλας αἵτινες ἄνω φέρουσι τὴν λέξιν Sin. Καὶ κατὰ πρῶτον εὑρίσκομεν τὰ δύο πρῶτα ψηφία αὐτῶν $\overline{1},4$, εἶτα δὲ ἀναζητοῦμεν καὶ τὰ ἄλλα ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν ἡμιτόνων αὐξάνουσι, καθ' ἣν φορὰν καὶ οἱ ἀριθμοὶ τῶν πρώτων λεπτῶν τῶν τόξων. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $\chi=16^o46'$. Ἂν ζητῆται τόξον χ, δι' ὃ εἶναι λογ ἡμ $\chi=\overline{1},96267$, ἐπειδὴ $\overline{1},96267>\overline{1},84949$, ἕπεται ὅτι $\chi>45^o$ καὶ ἑπομένως ἀναζητοῦμεν τὸν δοθέντα λογάριθμον εἰς τὰς στήλας τῶν ἡμιτόνων κάτω· οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $\chi=66^o35'$.

Ἐὰν εἶναι λογ συνω $=\overline{1},96893$, ἐπειδὴ $\overline{1},96893>\overline{1},84949$ ἕπεται ὅτι συνω>συν 45^o καὶ ἑπομένως $\omega<45^o$ (§ 17)· θὰ ἀναζητήσωμεν λοιπὸν τὸν δοθέντα λογάριθμον εἰς τὰς στήλας τῶν συνημιτόνων ἄνω. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $\omega=21^o25'$. Ἂν δοθῇ λογ συνημιτόνου μικρότερος τοῦ $\overline{1},84949$, θὰ ἀναζητήσωμεν αὐτὸν εἰς τὰς στήλας τῶν συνημιτόνων κάτω. Οὕτως, ἂν λογ συνψ$=\overline{1},76835$, εὑρίσκομεν ὅτι $\psi=54^o5'$.

Ἔστω ὅτι λογ ἐφ $\tau=\overline{1},79776$. Ἐπειδὴ λογ ἐφ $45^o=$λογ σφ $45^o=0$ καὶ ὁ λογ. τῆς μὲν ἐφαπτομένης αὐξάνεται τῆς δὲ συνεφαπτομένης ἐλαττοῦται, ὅταν τὸ τόξον αὐξάνηται ἀπὸ 0^o ἕως 90^o, ἕπεται ὅτι διὰ τὰ μεταξὺ 0^o καὶ 45^o τόξα ὁ λογάριθμος τῆς μὲν ἐφαπτομένης εἶναι ἀρνητικὸς τῆς δὲ συνεφαπτομένης θετικός, διὰ δὲ τὰ μεταξὺ 45^o καὶ 90^o συμβαίνει τὸ ἀντίστροφον. Κατὰ ταῦτα τοῦ δοθέντος λογ ἐφτ ὄντος ἀρνητικοῦ εἶναι $\tau<45^o$ καὶ δέον ν' ἀναζητήσωμεν τὸν λογάριθμον τοῦτον εἰς τὰς στήλας τῶν ἐφαπτομένων ἄνω. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $\tau=32^o7'$.

Ἔστω τέλος ὅτι λογ σφ$\chi=\overline{1},87317$. Κατὰ τὰ προειρημένα εἶναι $\chi>45^o$ καὶ ἑπομένως δέον ν' ἀναζητήσωμεν τὸν δοθέντα λογάριθμον εἰς τὰς στήλας τῶν συνεφαπτομένων κάτω. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $\chi=53^o15'$.

Β' Περίπτωσις.—Ὁ δοθεὶς λογάριθμος δὲν εἶναι ἀναγεγραμμένος εἰς τοὺς πίνακας. Ἔστω ὅτι λογ. ἡμ. $\chi=\overline{1},77127$. Ἀναζητοῦντες τὸν δοθέντα λογάριθμον εἰς τοὺς πίνακας πειθόμεθα ὅτι $\overline{1},77112<\overline{1},77127<\overline{1},77130$ τῶν ἄκρων λογαρίθμων ὄντων ἀναγεγραμμέ- εἰς τοὺς πίνακας καὶ ἀντιστοιχούντων εἰς τὰ τόξα $36^o11'$ καὶ $36^o12'$. ἄρα εἶναι $36^o11'<\chi<36^o12'$. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἄκροι λογάριθμοι τῶν προηγουμένων ἀνισοτήτων διαφέρουσιν ἀλλήλων κατὰ 18 μ. ε'. δ. τ. ὁ δὲ δοθεὶς εἶναι μείζων τοῦ $\overline{1},77112$ κατὰ 15 τοιαύτας μονάδας. Ἐπειδὴ δὲ τοῦ λογ. αὐξάνοντος κατὰ 18 τὸ τόξον αὐξάνει κατὰ 60″, ἔπεται ὅτι εἰς αὔξησιν τοῦ λογ. κατὰ 15 ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ τόξου κατὰ $60'' \times \left(\frac{15}{18}\right) = 50''$. Ὥστε

$\chi = 36^{0}\, 11'\, 50''$. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται οὕτω:

Ὅταν ὁ λογ. εἶναι $\overline{1},77112$ τὸ τόξον εἶναι $36^{0}11'$
αὐξάνοντος τοῦ λογ. κατὰ 15 » » αὐξάνει κατὰ $50''$
ἄρα ὅταν ὁ λογ εἶναι $\overline{1},77127$ » » εἶναι $36^{0}11'50''$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν εἶναι δεδομένος ὁ λογάριθμος τῆς ἐφαπτομένης.

Ἔστω ἤδη ὅτι λογ συνψ$=\overline{1},85842$. Τῇ βοηθείᾳ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν ὅτι:

$\overline{1},85851 > \overline{1},85842 > \overline{1},85839$ καὶ (§ 17) $43^{0}47' < \psi < 43^{0}48'$.

Ἐπειδὴ δὲ εἰς μείωσιν τοῦ λογ κατὰ 12 ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ τόξου κατὰ 60″ εἰς μείωσιν τοῦ λογ κατὰ 9 ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ τόξου κατὰ $60'' \times \left(\frac{9}{12}\right) = 45''$ ὥστε $\psi = 43^{0}47'45''$. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται οὕτω:

Ὅταν ὁ λογ. εἶναι $\overline{1},85851$ τὸ τόξον εἶναι $43^{0}47'$
εἰς μείωσιν τοῦ λογ. κατὰ 9 ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τόξου κατὰ $45''$
ἄρα εἰς λογ. $\overline{1},85842$ » τόξον $43^{0}47'45''$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν δίδηται ὁ λογάριθμος τῆς συνεφαπτομένης τόξου.

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ λογ.ἐφα=λογ ἡμα—λογσυνα καὶ
λογ. ἐφϐ=λογ. ἡμϐ—λογ. συνϐ, ἔπεται ὅτι
λογ. ἐφϐ—λογ. ἐφα = (λογ. ἡμϐ—λογ. ἡμα) + (λογ. συνα—λογ συνϐ)

ἤτοι ἡ διαφορὰ Δ τῶν λογαρίθμων τῆς ἐφαπτομένης δύο τόξων ἀνίσων θετικῶν καὶ μικροτέρων 90^{0} ὑπερβαίνει ἑκατέραν τῶν διαφορῶν δ καὶ δ′ τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων τῶν αὐτῶν τόξων. Ἐπειδὴ δὲ λάθος ν μ.ε′.δ.τ συμϐὰν εἰς τὸν λογάριθμον τῆς ἐφαπτομένης προξενεῖ εἰς τὸ τόξον λάθος $\frac{60'' \times \nu}{\Delta}$, ἐν ᾧ τοιοῦτον λάθος εἰς τὸν λογ. τοῦ ἡμιτόνου ἢ συνημιτόνου προκαλεῖ εἰς τὸ τόξον λάθος $\frac{60'' \times \nu}{o}$ ἢ $\frac{60 \times'' \nu}{\delta'}$ ὧν ἑκάτερον μεγαλύτερον τοῦ $\frac{60''\times\nu}{\Delta}$, ἕπεται ὅτι τόξον τι προσδιορίζεται ἀκριβέστερον ἐκ τοῦ λογαρίθμου τῆς ἐφαπτομένης ἢ ἐκ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου ἢ συνημιτόνου αὐτοῦ.

ΣΗΜ. β΄. Ἂν ἀντὶ τοῦ λογαρίθμου τριγ. ἀριθμοῦ δοθῇ αὐτὸς ὁ τριγ. ἀριθμός, εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν λογάριθμον αὐτοῦ καὶ εἶτα τὸ τόξον ὡς προηγουμένως. Ἂν ὅμως ὁ δοθεὶς τριγ. ἀριθμὸς εἶναι ἀρνητικός, ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα φαίνεται.

Παράδ. α΄.—Εὑρεῖν (τὸ ἐλ) θετικὸν τόξον χ, ὅπερ ἔχει ἐφαπτομένην —3. Τὸ τόξον $(180^0-\chi)$ ἔχει (§ 36) ἐφαπτομένην 3· ἄρα λογέφ $(180^0-\chi)=$λογ $3=0,47712$ καὶ $180^0-\chi=71^0 33' 54'$· ὅθεν $\chi=108^0 26' 6''$. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν ὁ δεδομένος τριγ. ἀριθμὸς εἶναι συνημίτονον ἢ συνεφαπτομένη.

Παραδ. β΄.—Εὑρεῖν (τὸ ἐλ)θετικὸν τόξον, ὅπερ ἔχει ἡμίτονον $-\frac{3}{4}$. Ἐπειδὴ ἡμ$\chi<0$, ἕπεται ὅτι $\chi>180^0$· ἐὰν δὲ τεθῇ $\chi-180^0=\psi$ θὰ εἶναι $0^0<\psi<180^0$ καὶ (§ 38) ἡμ$\psi=-$ἡμ$\chi=\frac{3}{4}$, ὅθεν εὑρίσκομεν $\psi=48^0 35' 25'$ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν $\chi=180^0+\psi=228^0 35' 25''$.

Ἀσκήσεις: 75) Εὑρεῖν (τὸ ἐλ)θετικὸν τόξον, ὅπερ ἔχει ἡμίτονον $\frac{2}{3}$.

76) Ὁμοίως τὸ ἔχον ἐφαπτομένην 3.

77) Ὁμοίως τὸ ἔχον συνεφαπτομένην $\frac{1}{2}$. Ὁμοίως τὸ ἔχον ἡμίτονον $-\frac{5}{6}$.

78) Ὁμοίως τὸ ἔχον συνημίτονον $\frac{6}{10}$.

79) Ὁμοίως τὸ ἔχον ἡμίτονον $\sqrt{2}$.

80) Ὁμοίως τὸ ἔχον συνεφαπτομένην $3\sqrt{3}$.

Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι παραστάσεις.

81) ἡμ $(42^0 5')$ ἡμ$+(37^0 6' 57')$.

82) ἡμ $(25^0 15' 30'')+$ ἡμ $(40^0 53' 12'')$.

83) ἡμ $(54^{0}6'17'')$ — ἡμ $(23^{0}4'9'')$.

84) συν $(21^{0}15'20'')$ + συν $(35^{0}10'40^{0})$.

85) συν $(12^{0}16'30'')$ — συν $(40^{0}20'24'')$.

86) 1 + συν $(35^{0}15')$

87) 1 — συν $(75^{0}20'42'')$

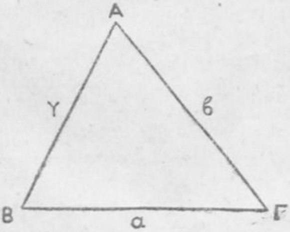
88) ἐφ $(5^{0}18')$ + ἐφ $(22^{0}15'20'')$ (ἄσκ. 65).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε^ον^

Ἐπίλυσις ὀρθογωνίων τριγώνων.

§ 55. ***Στοιχεῖα τριγώνου.*** Αἱ πλευραί, αἱ γωνίαι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου καλοῦνται *κύρια στοιχεῖα* αὐτοῦ. Πᾶν δὲ ἄλλο μέγεθος (περίμετρος διάμεσοι, ὕψη κλπ.) ὅπως δήποτε μετὰ τοῦ τριγώνου συνδεόμενον καλεῖται *δευτερεῦον στοιχεῖον* αὐτοῦ.

ΣΗΜ. Ἐν τοῖς ἀκολούθοις λέγοντες ἁπλῶς στοιχεῖα τριγώνου θέλομεν νοῆ τὰ κύρια στοιχεῖα αὐτοῦ, περὶ ὧν κυρίως ἐνταῦθα πρόκειται.



(Σχ. 28)

Συνήθως τὰς γωνίας τριγώνου παριστῶμεν καὶ ὀνομάζομεν διὰ τῶν γραμμάτων Α,Β,Γ, ἅτινα τίθενται πλησίον τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, τὰ δὲ μήκη τῶν ἀντικειμένων πλευρῶν διὰ τῶν ἀντιστοίχων μικρῶν α,β,γ, (Σχ. 28).

Ἐὰν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, θέτομεν συνήθως τὸ Α εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ ἑπομένως διὰ τοῦ α παρίσταται τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης.

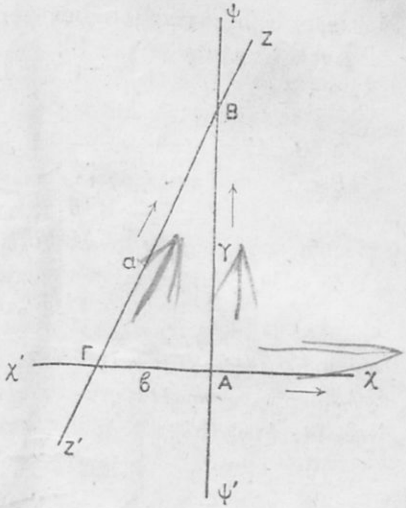
§ 56. ***Τριγωνομετρικαὶ σχέσεις τῶν στοιχείων ὀρθογωνίου τριγώνου.*** Α΄. Ἔστω ΑΒΓ (Σχ. 29) ὀρθογώνιόν τι τρίγωνον καὶ χ΄χ, ψ΄ψ, z΄z οἱ ἄξονες, ἐφ᾽ ὧν κεῖνται αἱ πλευραὶ αὐτοῦ, ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ θετικὴ φορὰ δηλοῦται ὑπὸ τοῦ ἀντιστοίχου βέλους. Ἐφαρμόζοντες τὴν ἰδιότητα (§ 29) εἰς τὸ ἄνυσμα ΓΒ καὶ τὰς προβολὰς αὐτοῦ, ΓΑ καὶ ΑΒ ἐπὶ τοὺς ἄξονας χ΄χ καὶ ψ΄ψ εὑρίσκομεν (§ 28) ὅτι

$$β = α \text{ συν } Γ, \quad γ = α \text{ συν } Β. \qquad (36)$$

Ἐπειδὴ $B+\Gamma=90^\circ$ ἕπεται (§ 27,37) ὅτι συν$\Gamma=$ἡμ B, συν$B=$ἡμΓ αἱ δὲ ἰσότητες (36) γίνονται

$\beta=\alpha$ἡμB, $\gamma=\alpha$ἡμΓ (37)

Ἄρα: *ἑκατέρα τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ὑποτεινούσης ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀντικειμένης ἢ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς προσκειμένης ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.*



(Σχ. 29)

Β'. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\beta=\alpha$ ἡμ B καὶ $\gamma=\alpha$ συνB διαιρουμένων κατὰ μέλη προκύπτει ἡ ἰσότης $\frac{\beta}{\gamma}=$ἐφ B, ὅθεν $\beta=\gamma$ ἐφB. Ὁμοίως ἐκ τῶν $\gamma=\alpha$ ἡμ Γ καὶ $\beta=\alpha$ συν Γ προκύπτει ἡ $\gamma=\beta$ἐφΓ. Ἐπειδὴ δὲ ἐφ $B=$σφΓ καὶ ἐφ$\Gamma=$σφB, αἱ ἰσότητες

γίνονται $\beta=\gamma$ ἐφ B, $\gamma=\beta$ ἐφ Γ
$\beta=\gamma$ σφ Γ, $\gamma=\beta$ σφ B (38)

Ἄρα: *ἑκατέρα τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθ. τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἑτέρας ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀντικειμένης ἢ ἐπὶ τὴν συνεφαπτομένην τῆς προσκειμένης ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.*

Ἀσκήσεις: 89) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι ἐφ $\frac{B}{2}=\frac{\beta}{\alpha+\gamma}$.

90) Ὁμοίως ὅτι ἐφ $2B=\frac{2\beta\gamma}{\gamma^2-\beta^2}$

91) Ὁμοίως ὅτι συν $(B-\Gamma)=\frac{2\beta\gamma}{\alpha^2}$

§ 57. ***Ἐπίλυσις ὀρθογωνίου τριγώνου.*** — Ὁ διὰ λ/σμοῦ προσδιορισμὸς τῶν ἀγνώστων στοιχείων τριγώνου, ὅταν ἱκανὰ πρὸς τοῦτο στοιχεῖα αὐτοῦ δοθῶσιν, καλεῖται ἐπίλυσις τοῦ τριγώνου τούτου (§ 2). Προκειμένου περὶ ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ἐπίλυσις εἶναι δυνατή, ὅταν δοθῶσι μία πλευρὰ καὶ μία ὀξεῖα γωνία αὐτοῦ ἢ δύο πλευραὶ αὐτοῦ, καθ' ὅσον ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περιπτώσεων τούτων δύναται νὰ κατασκευασθῇ, ὡς ἡ Γεωμετρία διδάσκει, ἄρα εἶναι τελείως ὡρισμένον τὸ τρίγωνον. Διακρίνομεν ὅθεν κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν ὀρθ. τριγώνων τέσσαρας περιπτώσεις, ἃς συνοψίζομεν οὕτω:

	1)	2)	3)	4)
Γνωστὰ στοιχεῖα	α,Β	β,Β	β, γ,	α, β
ἄγνωστα »	β,γ,Γ,Ε	α,γ,Γ,Ε	α,Β,Γ,Ε	γ,Β,Γ,Ε

Ἡ δὲ ἐπίλυσις ἐν ἑκάστῃ περιπτώσει γίνεται ὡς ἀκολούθως.

§ 58. ***Α΄ περίπτωσις.***—*Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ ὑποτείνουσα α καὶ ἡ ὀξεῖα γωνία Β.* Αἱ ἰσότητες

$$\Gamma=90^0-B,\ \beta=\alpha \text{ ἡμ } B,\ \gamma=\alpha \text{ συν } B$$

ἀρκοῦσι πρὸς ὁρισμὸν τῶν στοιχείων Γ,β,γ, δι' ἐκτελέσεως τῶν εἰς τὰ β΄ μέλη σεσημειωμένων πράξεων. Τὸ δὲ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται εἶτα ἐκ τῆς ἰσότητος $E=\frac{1}{2}\beta\gamma$. Ἂν ὅμως θέλωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν καὶ τοῦτο ἀπ' εὐθείας ἐκ τῶν δεδομένων στοιχείων α καὶ Β μετασχηματίζομεν τὴν ἰσότητα ταύτην θέτοντες ἀντὶ β καὶ γ τὰς ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων (37) καὶ (36) παρεχομένας τιμὰς α ἡμ Β, α συν Β αὐτῶν. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $E=\frac{1}{2}\alpha^2 \text{ ἡμ } B \text{ συν} B=\frac{1}{4}\alpha 2 \text{ ἡμ } B \text{ συν } B$,

ὅθεν (§ 45). $E=\frac{1}{4}\alpha^2 \text{ ἡμ } (2B)$. (39)

Παράδειγμα.—Ἔστω α=753μ. Β=30°15′20″.

Ὑπολογισμὸς τῆς Γ.

Γ=90°—Β

$$\begin{aligned} 90^0 &= 89^0 59' 60'' \\ B &= 30^0 15' 20'' \\ \hline \Gamma &= 59^0 44' 40'' \end{aligned}$$

Ὑπολογισμὸς τῆς β.

β=αἡμΒ. ἄρα

$$\begin{aligned} \text{λογ } \beta &= \text{λογ}\alpha + \text{λογημ}B \\ \text{λογ}\alpha &= 2,87679 \\ \text{λογημ}B &= \bar{1},70231 \\ \hline \text{λογ } \beta &= 2,57910 \\ \beta &= 379,5\mu. \end{aligned}$$

Ὑπολογισμὸς τῆς γ.

γ=ασυνΒ ἄρα

$$\begin{aligned} \text{λογ}.\gamma &= \text{λογ}\alpha + \text{λογσυν}B. \\ \text{λογ}\alpha &= 2,87679 \\ \text{λογσυν}B &= \bar{1},93641 \\ \hline \text{λογ}\gamma &= 2,81320 \\ \gamma &= 650,43\mu. \end{aligned}$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε.—.$E=\frac{1}{4}\alpha^2\text{ἡμ } (2B)$. ἄρα

$$\begin{aligned} \text{λογ } E &= 2 \text{ λογ}\alpha + \text{λογημ } (2B) - \text{λογ } 4 \\ 2B=60^0\ 30',40',\ 2 \text{ λογ } \alpha &= 5,75358 \\ \text{λογ ημ } (2B) &= \bar{1},93975 \\ \hline \text{ἄθροισμα} &= 5,69333 \\ \text{λογ } 4 &= 0,60206 \\ \hline \text{λογ } E &= 5,09127 \\ E &= 123386,11 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Ἀσκήσεις. 92) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ $\alpha = 142$ μ. καὶ $\Gamma = 48^o 48' 48''$.

93) Ὀρθογωνίου ἡ διαγώνιος ἔχει μῆκος 0,75 μ. καὶ σχηματίζει μετὰ τῆς βάσεως γωνίαν $32^o 15'$. Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ.

94) Ρόμβου ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος 7,04 μ. ἡ δὲ γωνία αὐτῆς μετὰ τῆς μικροτέρας διαγωνίου εἶναι $\frac{3}{5}$ ὀρθ. Νὰ ὑπολογισθῶσιν τὰ μήκη τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

§ 59. ***Β' περίπτωσις:*** *Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ πλευρὰ β καὶ καὶ ἡ γωνία Β.*

Διὰ τῶν ἰσοτήτων $\Gamma = 90^o - B$, $\gamma = \beta\sigma\varphi B$ ὑπολογίζονται τὰ στοιχεῖα Γ καὶ γ. Ἐκ δὲ τῆς $\beta = \alpha$ ἡμ. Β λυομένης πρὸς α προκύπτει ἡ $\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$, δι' ἧς ὁρίζεται ἡ ὑποτείνουσα. Τέλος θέτοντες ἐν τῇ ἰσότητι $E = \frac{1}{2}\beta\gamma$ ἀντὶ γ τὴν τιμὴν βσφ Β αὐτῆς, εὑρίσκομεν ὅτι

$$E = \frac{1}{2}\beta^2 \sigma\varphi B, \qquad (40)$$

δι' ἧς ὁρίζεται τὸ Ε ἐκ τῶν δεδομένων στοιχείων β καὶ Β.

Παράδειγμα. Ἔστω $\beta = 2347{,}50$μ, $B = 51^o 12' 38''$.

Ὑπολογισμὸς τῆς Γ

$$90^o = 89^o 59' 60''$$
$$B = 51^o 12' 38''$$
$$\Gamma = 38^o 47' 22''$$

Ὑπολογισμὸς τῆς γ.

$\gamma = \beta\sigma\varphi B$, $\lambda o\gamma\gamma = \lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\sigma\varphi B$

$$\lambda o\gamma\beta = 3{,}37060$$
$$\lambda o\gamma.\ \sigma\varphi.\ B = \overline{1},90511$$
$$\lambda o\gamma\gamma = 3{,}27571$$
$$\gamma = 1886{,}74\mu$$

Ὑπολογισμὸς τῆς α

$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$, ἄρα $\lambda o\gamma\alpha = \lambda o\gamma\beta - \lambda o\gamma\ \eta\mu B$

$$\lambda o\gamma\beta = 3{,}37060$$
$$\lambda o\gamma\ \eta\mu B = \overline{1},89179$$
$$\lambda o\gamma\alpha = 3{,}47881$$
$$\alpha = 3011{,}71\mu$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε.

$E = \frac{1}{2}\beta^2\sigma\varphi\ B$ ἄρα

$$\lambda o\gamma E = 2\lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\sigma\varphi B - \lambda o\gamma 2$$

$$2\lambda o\gamma\beta = 6{,}74120$$
$$\lambda o\gamma\ \sigma\varphi\ B = \overline{1},90511$$
$$\text{ἄθροισμα} = 6{,}64631$$
$$\lambda o\gamma 2 = 0{,}30103$$
$$\lambda o\gamma E = 6{,}34528$$
$$E = 2214526{,}32 \text{ τ. μ.}$$

Ἀσκήσεις: 95) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγ. οὗ $\beta = 47\mu$ καὶ $B = 47^\circ$.

96) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ $\beta = 125\mu$ καὶ $\Gamma = 23^\circ 45' 23''$.

97) Χορδή τις κύκλου ἔχει μῆκος 1,65μ ἡ δὲ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς καταλήγουσα ἀκτὶς σχηματίζει μετ' αὐτῆς γωνίαν $40^\circ 18' 38''$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τούτου, ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς χορδῆς καὶ τὸ μέτρον ἑκατέρου τῶν εἰς τὴν χορδὴν ταύτην ἀντιστοιχούντων τόξων.

§ 60. **Γ. Περίπτωσις.** *Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον οὗ δίδονται αἱ δύο κάθετοι πλευραί.*—Ἐκ τῆς ἰσότητος $\beta = \gamma$ ἐφ B προκύπτει ἡ ἐφ$B = \frac{\beta}{\gamma}$, δι' ἧς ὑπολογίζεται ἡ B· εἶτα ἐκ τῆς $\Gamma = 90^\circ - B$ εὑρίσκεται ἡ Γ· ἐκ δὲ τῆς $\alpha = \frac{\beta}{\text{ἡμ}B}$ ὁρίζεται ἡ α. Τέλος τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἰσότητος $E = \frac{1}{2}\beta\gamma$.

Παράδειγμα: Ἔστω $\beta = 3456\mu$ καὶ $\gamma = 1280\mu$.

Ὑπολογισμὸς τῆς B καὶ Γ.

$$\text{ἐφ}B = \frac{\beta}{\gamma} \text{ ἄρα}$$

$$\text{λογεφ}B = \text{λογ}\beta - \text{λογ}\gamma.$$

$$\begin{aligned} \text{λογ}\beta &= 3{,}53857 \\ \text{λογ}\gamma &= 3{,}10721 \\ \hline \text{λογ ἐφ}B &= 0{,}43136 \\ B &= 69^\circ 40' 36'' \\ \hline 90^\circ &= 89^\circ 59' 60'' \\ B &= 69^\circ 40' 36'' \\ \hline \Gamma &= 20^\circ 19' 24'' \end{aligned}$$

Ὑπολογισμὸς τῆς α.

$$\alpha = \frac{\beta}{\text{ἡμ}B}, \text{ ἄρα}$$

$$\text{λογ}\alpha = \text{λογ }\beta - \text{λογἡμ }B$$

$$\begin{aligned} \text{λογ }\beta &= 3{,}53857 \\ \text{λογημ }B &= 1{,}97208 \\ \hline \text{λογ}\alpha &= 3{,}56649 \\ \alpha &= 3685{,}41\mu \end{aligned}$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ E.

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma, \text{ ἄρα λογ}E = \text{λογ}\beta + \text{λογ}\gamma - \text{λογ}2$$

$$\begin{aligned} \text{λογ}\beta &= 3{,}53857 \\ \text{λογ. }\gamma &= 3{,}10721 \\ \hline \text{ἄθροισμα} &= 6{,}64578 \\ \text{λογ}2 &= 0{,}30103 \\ \hline \text{λογ}E &= 6{,}34475 \\ E &= 2211800 \text{ τ. μ.} \end{aligned}$$

Ἀσκήσεις. 98) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ $6 = 256,25$μ καὶ $γ = 348$μ.

99) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ $6 = 48$μ καὶ $γ = 36$μ.

100) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον οὗ $6 = 2γ$.

101) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ καὶ αἱ γωνίαι ῥόμβου, ὅστις ἔχει διαγωνίους 3,48μ καὶ 2,20μ.

102) Τὸ κέντρον κύκλου ἀπέχει 8μ ἀπὸ χορδῆς 12μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ τὰ μέτρα τῶν εἰς τὴν χορδὴν ταύτην ἀντιστοιχούντων τόξων.

§ 61. ***Δ'. Περίπτωσις.*** *Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ ὑποτείνουσα α καὶ ἡ ἑτέρα τῶν καθέτων πλευρῶν 6.*—Τὴν πλευρὰν γ ὑπολογίζομεν διὰ τῆς γνωστῆς ἰσότης $γ^2 = α^2 - 6^2 = (α + 6)(α - 6)$. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐκ τῆς σχέσεως $6 = α$ συν Γ εὑρίσκομεν συν $Γ = \frac{6}{α}$· θέτοντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ συν Γ. ἐν τῇ γνωστῇ (§ 48) ἰσότητι $εφ\left(\frac{Γ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - συν Γ}{1 + συν Γ}}$ εὑρίσκομεν τὴν $εφ \frac{Γ}{2} = \sqrt{\frac{α - 6}{α + 6}}$, δι' ἧς ὑπολογίζεται ἡ Γ καὶ εὐκόλως εἶτα ἡ Β. Τέλος τὸ ἐμβαδὸν ὑπολογίζομεν ἐκ τῆς ἰσότητος $Ε = \frac{1}{2} 6 \sqrt{(α+6)\ (α-6)}$, ἣν εὑρίσκομεν ἐκ τῆς $Ε = \frac{1}{2} 6γ$. ἂν τεθῇ ἀντὶ γ ἡ τιμὴ αὐτοῦ $\sqrt{(α + 6)\ (α - 6)}$. Ἁπλούστερον ὅμως ὑπολογίζεται τοῦτο ἐκ τῆς $Ε = \frac{1}{2} 6γ$, ἂν προταχθῇ ὁ ὑπολογισμὸς τῆς γ.

Παράδειγμα: Ἔστω $α = 15694$μ καὶ $6 = 11465$.

Βοηθητικὸς πίναξ

$α = 15964$
$6 = 11465$
$α + 6 = 27429$
$α - 6 = 4499$

Ὑπολογισμὸς τῆς γ.

$γ^2 = (α + 6)(α - 6)$, ἄρα
2 λογ. $γ =$ λογ $(α + 6) +$ λογ $(α - β)$
λογ $(α + 6) = 4,43821$
λογ $(α - 6) = 3,65312$
2 λογ $γ = 8,09133$

Ὑπολογισμὸς τῆς Γ.

$$\varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} \text{ ἄρα}$$

$$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} = \frac{\lambda o\gamma(\alpha - \beta) - \lambda o\gamma(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\lambda o\gamma(\alpha - \beta) = 3{,}65312$$

$$\lambda o\gamma(\alpha + \beta) = 4{,}43821$$

$$\text{διαφορὰ} = \bar{1}{,}21491$$

$$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} = \bar{1}{,}60745$$

$$\frac{\Gamma}{2} = 22^\circ 2' 51'',66$$

$$\Gamma = 44^\circ 5' 43'',32$$

Ὑπολογισμὸς τῆς Β

$$90^\circ = 89^\circ 59' 60''$$

$$\Gamma = 44^\circ 43' 43{,}32''$$

$$B = 45^\circ 54' 16{,}68''$$

$$2\lambda o\gamma\, \gamma = 8{,}09133$$

$$\lambda o\gamma.\, \gamma = 4\;04566$$

$$\gamma = 11108{,}72\mu$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε.

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma, \text{ ἄρα}$$

$$\lambda o\gamma E = \lambda o\gamma \beta + \lambda o\gamma\, \gamma - \lambda o\gamma\, 2$$

$$\lambda o\gamma \beta = 4{,}05937$$

$$\lambda o\gamma\, \gamma = 4{,}04566$$

$$\text{ἄθροισμα} = 8{,}10503$$

$$\lambda o\gamma 2 = 0{,}30103$$

$$\lambda o\gamma E = 7{,}80400$$

$$E = 63680000 \text{τ.μ.}$$

ΣΗΜ. α΄. Ἡ γωνία Γ εἶναι προτιμώτερον νὰ ὑπολογίζηται διὰ τῆς ἰσότητος $\varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}}$ ἢ διὰ τῆς $\sigma\upsilon\nu\, \Gamma = \frac{\beta}{\alpha}$, πρῶτον μὲν διότι ἐκ τῆς ἐφαπτομένης προσδιορίζεται ἀκριβέστερον (§ 54 Β΄. σημ α΄) δεύτερον δὲ διότι γίνεται χρῆσις μόνον τῶν λογ $(\alpha - \beta)$ καὶ λογ $(\alpha + \beta)$, οἵτινες χρησιμοποιοῦνται καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς γ.

ΣΗΜ. β΄. Τὸ πηλῖκον $\bar{1},21491 : 2$ εὑρίσκομεν προσθέτοντες εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ διαιρετέου -1 καὶ εἰς τὸ δεκαδικὸν μέρος $+1$· εἶτα δὲ διαιροῦμεν χωριστὰ τὸ ἀρνητικὸν καὶ χωριστὰ τὸ θετικὸν μέρος καὶ προσθέτομεν τὰ πηλίκα. Οὕτω $\bar{1},21491 : 2 = (-2 + 1,21491) : 2 = -1 + 0,60745 = \bar{1},60745$.

Ἀσκήσεις : 103). Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον οὗ $\alpha = 25\mu$ καὶ $\beta = 15{,}25\mu$.

104) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ βάσις εἶναι 5,60μ, ἑκατέρα δὲ τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ 4μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος καὶ αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

105) Ρόμβου ἡ πλευρὰ εἶναι 8μ καὶ ἡ μικροτέρα διαγώνιος 5,30μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἄλλης διαγωνίου καὶ αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

106) Ὑπὸ ποίαν γωνίαν φαίνεται κύκλος ἀκτῖνος ρ ἀπὸ σημείου ἀπέχοντος τοῦ κέντρου ἀπόστασιν 2ρ;

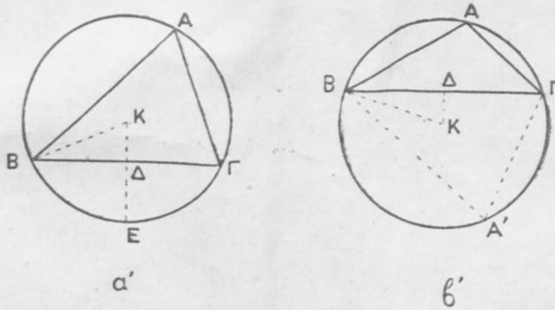
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ϛον

Ἐπίλυσις τῶν μὴ ὀρθογωνίων τριγώνων.

§ 62. ***Τριγωνομετρικαὶ σχέσεις τῶν κυρίων στοιχείων οἱουδήποτε τριγώνου.*** Α′.—Ἔστω ΑΒΓ (Σχ. 30) τυχὸν τρίγωνον, Κ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ Ρ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ. Ἡ ἐκ τοῦ Κ ἐπί τινα πλευρὰν π. χ. τὴν ΒΓ κάθετος τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον Δ· ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΒΚΔ ἕπεται ὅτι

$$(\text{Β}\Delta) = \frac{\alpha}{2} = \text{Ρ ἡμ } (\text{ΒΚ}\Delta). \qquad (1)$$

Καὶ ἂν μὲν ἡ Α εἶναι ὀξεῖα (Σχ. 30 α′), εἶναι προφανῶς ἴση πρὸς $\frac{\text{ΒΚΓ}}{2} = \text{ΒΚ}\Delta$, ἡ δὲ ἰσότης (1) γίνεται $\frac{\alpha}{2} = \text{Ρ ἡμ Α}$. (2)



(Σχ. 30)

Ἐὰν δὲ ἡ Α εἶναι ἀμβλεῖα (Σχ. 30 β′) καὶ ληφθῇ ἐπὶ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου τυχὸν σημεῖον Α′, ἀχθῶσι δὲ καὶ αἱ χορδαὶ Α′Β, Α′Γ, σχηματίζεται τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον ΑΒΑ′Γ, οὗ ἕνεκα εἶναι Α+Α′=2 ὀρθ. καὶ ἐπομένως ἡμ Α=ἡμ Α′=ἡμ (ΒΚΔ). Ὥστε πάλιν ἐκ τῆς (1) προκύπτει ἡ (2), ἐξ ἧς $2\text{Ρ} = \frac{\alpha}{\text{ἡμ Α}}$. Ὁμοίως ἀποδεικνύει ὅτι καὶ $2\text{Ρ} = \frac{\beta}{\text{ἡμ Α}}$, $2\text{Ρ} = \frac{\gamma}{\text{ἡμ Γ}}$. Ὅθεν

$$\frac{\alpha}{\text{ἡμ Α}} = \frac{\beta}{\text{ἡμ Β}} = \frac{\gamma}{\text{ἡμ Γ}} \qquad (41).$$ Ἄρα

Αἱ πλευραὶ παντὸς τριγώνου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ.

ΣΗΜ. Ἐκ τῶν σχέσεων $\beta=\alpha$ ἡμB, $\gamma=\alpha$ ἡμΓ, ἡμ$A=1$, προκύπτει εὐκόλως ὅτι αἱ ἰσότητες (41) ἀληθεύουσι καὶ διὰ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα.

Β'. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\alpha=2P$ ἡμ A, $\beta=2P$ ἡμ B προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ ἰσότητες $\alpha-\beta=2P$ (ἡμA—ἡμB) καὶ

$$\alpha+\beta=2P.(\text{ἡμ} A+\text{ἡμ} B).$$

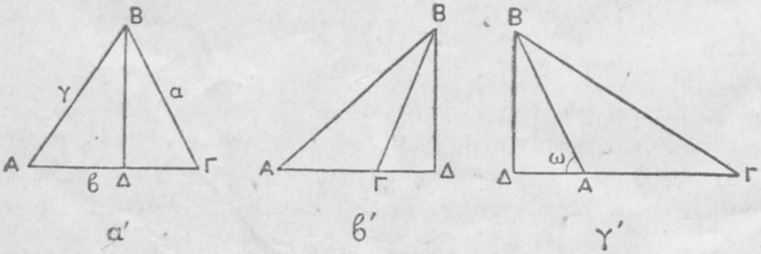
ἐκ τούτων δὲ προκύπτει ἡ $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{\text{ἡμ} A-\text{ἡμ} B}{\text{ἡμ} A+\text{ἡμ} B}$. Ἐπειδὴ δὲ (§50) εἶναι $\dfrac{\text{ἡμ} A-\text{ἡμ} B}{\text{ἡμ} A+\text{ἡμ} B}=\dfrac{\text{ἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\text{ἐφ}\left(\frac{A+B}{2}\right)}$ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\text{ἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\text{ἐφ}\left(\frac{A+B}{2}\right)} \qquad (42)$$

Ἄρα: *Ὁ λόγος τῆς διαφορᾶς δύο πλευρῶν τριγώνου πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν ἀπέναντι γωνιῶν πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἡμιαθροίσματος αὐτῶν.*

Γ'. Ἔστω ΑΒΓ (Σχ. 31) τυχὸν τρίγωνον καὶ ΒΔ τυχὸν αὐτοῦ ὕψος. Ἕνεκα τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΔ εἶναι (ΑΔ)$=\gamma$ συν (ΔΑΒ) (1)

Ἐὰν ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα (Σχ. 31 α', β'). γων. ΔΑΒ εἶναι αὐτὴ



(Σχ. 31).

ἡ Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἡ ἰσότης (1) γίνεται (ΑΔ)$=\gamma$ συν Α· ἡ δὲ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἀποδεικνυομένη ἰσότης

$(B\Gamma)^2=(AB)^2+(A\Gamma)^2-2(A\Gamma)(A\Delta)$ γίνεται $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma$συν$A$. (2)

Ἐὰν δὲ ἡ Α εἶναι ἀμβλεῖα (Σχ. 31 γ') ἡ γωνία ΔΑΒ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς Α καὶ ἑπομένως συν (ΔΑΒ)$=-$συν Α, ἡ δὲ

(1) γίνεται $(A\Delta) = -\gamma$ συν Α. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀποδεικνυομένης σχέσεως $(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma^2) + 2(A\Gamma)(A\Delta)$ προκύπτει πάλιν ἡ (2), ἥτις εἶναι οὕτω γενική. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \text{ συν} B, \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \text{συν } \Gamma.$$

Ὥστε μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ γωνιῶν παντὸς τριγώνου ὑφίστανται καὶ αἱ σχέσεις

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \text{ συν } A \\ \beta^2 &= \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \text{ συν } B \\ \gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \text{ συν } \Gamma. \end{aligned} \qquad (43)$$

Ἄρα: *Τὸ τετράγωνον ἑκάστης πλευρᾶς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἄλλων πλευρῶν ἠλαττωμένον κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου αὐτῶν πολ/σθέντος καὶ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.*

Δ΄. Ἔστω ΑΒΓ τυχὸν τρίγωνον (Σχ. 31) καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. Ἐκ τῶν γνωστῶν ἰσοτήτων $E = \frac{1}{2}\beta(B\Delta)$ καὶ $(B\Delta) = \gamma$ ἡμ (ΔAB) προκύπτει ἡ ἰσότης $E = \frac{1}{2}\beta\gamma$ ἡμ (ΔAB). Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΔΑΒ εἶναι ἴση (Σχ. 31 α΄, β΄,) ἢ παραπληρωματικὴ (Σχ. 31 γ΄) τῆς Α, ἕπεται ὅτι ἡμ ΔΑΒ = ἡμ Α καὶ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma \text{ἡμ } A. \qquad (44)$$

Ἄρα: *Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν αὐτοῦ πολ/σθέντος καὶ ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.*

Ἀσκήσεις: 107) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον εἶναι

$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha} = \frac{\text{συν}\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}{\text{ἡμ}\left(\frac{A}{2}\right)}.$$

108) Ὁμοίως ὅτι $\frac{\text{ἡμ }(A-B)}{\text{ἡμ }(A+B)} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2}$

109) Ὁμοίως ὅτι $\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2} = \frac{\text{ἐφ } A}{\text{ἐφ } B}$.

110) Ὁμοίως ὅτι $E = 2P^2$ἡμ Α ἡμΒἡμΓ.

111) Τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Β τριγώνου ΑΒΓ ἀγόμενον ὕψος ἰσοῦται πρὸς 2Ρ ἡμ Α ἡμ Γ.

112) Ἐὰν ἡμ²Α = ἡμ²Β + ἡμ²Γ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον.

§ 63. ***Ἐπίλυσις οἱωνδήποτε τριγώνων.*** Ἐκ τῆς Γεωμετρίας εἶναι γνωστὸν ὅτι τρίγωνόν τι κατασκευάζεται, ἂν δοθῶσι 3 στοιχεῖα ἐκ τῶν πλευρῶν καὶ γωνιῶν αὐτοῦ, ἀρκεῖ ἓν τοὐλάχιστον τούτων νὰ εἶναι πλευρά. Εἶναι ὅθεν κατὰ τὰς αὐτὰς περιπτώσεις δυνατὴ καὶ ἡ ἐπίλυσις τοῦ τριγώνου· ἐντεῦθεν προκύπτουσιν αἱ ἀκόλουθοι τέσσαρες περιπτώσεις ἐπιλύσεως οἱωνδήποτε τριγώνων.

§ 64. ***Α′. Περίπτωσις.*** *Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ πλευρὰ α καὶ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ αὐτοῦ.*

Προφανῶς ἵνα ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν πρέπει $B + \Gamma < 180^\circ$. Ἐκ τῆς σχέσεως $A + B + \Gamma = 180^\circ$ ἕπεται ὅτι
$$A = 180^\circ - (B + \Gamma),$$ ὅθεν ὁρίζεται ἡ Α.

Ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ προκύπτουσιν αἱ

$\beta = \frac{\alpha\eta\mu\, B}{\eta\mu\, A}$, $\gamma = \frac{\alpha\eta\mu\, \Gamma}{\eta\mu\, A}$. Ἐπειδὴ δὲ $\eta\mu A = \eta\mu\,(B + \Gamma)$, αὗται γίνονται $\beta = \frac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu(B+\Gamma)}$, $\gamma = \frac{\alpha\eta\mu\,\Gamma}{\eta\mu\, B + \Gamma}$, δι' ὧν ὑπολογίζονται αἱ πλευρὰ β καὶ γ. Τέλος πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ θέτομεν ἐν τῇ ἰσότητι $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\ \eta\mu\ A$ τὰς προηγουμένως εὑρεθείσας τιμὰς τῶν β,γ, ημΑ καὶ εὑρίσκομεν
$$E = \frac{\alpha^2\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{2\eta\mu\,(B+\Gamma)} \qquad (45)$$

Παράδειγμα. Ἔστω $\alpha = 3475{,}6\mu$, $B = 27^\circ 12' 18''$, $\Gamma = 50^\circ 40' 15''$

Ὑπολογισμὸς τῆς Α

$B = 27^\circ 12' 18''$	$180^\circ = 179^\circ 59' 60''$
$\Gamma = 50^\circ 40' 15''$	$B + \Gamma = 77^\circ 52' 33''$
$B + \Gamma = 77^\circ 52' 33''$	$A = 102^\circ 7' 27''$

Ὑπολογισμὸς τῆς $\beta = \frac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu(B+\Gamma)}$ καὶ $\gamma = \frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu\,(B+\Gamma)}$

$$\lambda o\gamma\beta = \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\eta\mu B - \lambda o\gamma\eta\mu\,(B+\Gamma)$$
$$\lambda o\gamma\gamma = \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\eta\mu\,\Gamma - \lambda o\gamma\eta\mu\,(B+\Gamma)$$

$\lambda o\gamma\alpha = 3{,}54103$	$\lambda o\gamma\alpha = 3.54103$
$\lambda o\gamma\eta\mu B = \overline{1},66008$	$\lambda o\gamma\eta\mu\Gamma = \overline{1}.88847$
ἄθροισμα $= 3{,}20111$	ἄθροισμα $= 3{,}42950$
$\lambda o\gamma\eta\mu(B+\Gamma) = \overline{1},99021$	$\lambda o\gamma\eta\mu\,(B+\Gamma) = \overline{1},99021$
$\lambda o\gamma\eta\mu\ \beta = 3{,}21090$	$\lambda o\gamma.\ \gamma = 3{,}43929$
$\beta = 1625{,}18\mu$	$\gamma = 2749{,}75\mu$

Ὑπολογισμὸς τοῦ $E=\frac{\alpha^2 \eta\mu B\, \eta\mu\Gamma}{2\eta\mu(B+\Gamma)}$

$\lambda o\gamma(2E)=2\,\lambda o\gamma\alpha+\lambda o\gamma\eta\mu B+\lambda o\gamma\eta\mu\Gamma-\lambda o\gamma\eta\mu(B+\Gamma)$

$2\ \lambda o\gamma\alpha = 7{,}08206$

$\lambda o\gamma\ \eta\mu B=\bar{1}{,}66008$

$\lambda o\gamma\ \eta\mu\ \Gamma=\bar{1}{,}88847$

ἄθροισμα $=6{,}63061$

ἄθροισμα $=6{,}63061$

$\lambda o\gamma\eta\mu(B+\Gamma)=\bar{1}{,}99021$

$\lambda o\gamma(2E)=6{,}64040$

$2E=4\,369200$ τ.μ.

$E=2\,184600$ τ.μ.

Ἀσκήσεις: 113) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗ $\alpha=1250$ μ. $B=28^\circ16'$ καὶ $\Gamma=56^\circ20'$.

114) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\alpha=333$ μ. $A=33^\circ33'$ καὶ $B=55^\circ55'$.

115) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\alpha=140$μ $B=24^\circ24'24''$ καὶ $\Gamma=32^\circ23'$.

§ 65. **Β΄ Περίπτωσις.** *Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ δίδονται δύο πλευραὶ καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία.* Ἔστωσαν α,β,Γ τὰ δεδομένα στοιχεῖα καὶ α>β. Ἐκ τῆς ἰσότητος (42) προκύπτει ὅτι

$$\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\cdot\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}.$$ Ἐπειδὴ ὅμως $A+B+\Gamma=180^\circ$, ἕπεται ὅτι $\frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{\Gamma}{2}$ καὶ $\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}=\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$, ἡ δὲ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\,\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}.$$

Διὰ ταύτης ὑπολογίζομεν τὴν διαφορὰν Α—Β καὶ ἔστω Δ ἡ τιμὴ αὐτῆς.

Λύοντες εἶτα τὸ σύστημα $A+B=180^\circ-\Gamma$, $A-B=\Delta$ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν ἑκατέρας τῶν γωνιῶν Α καὶ Β. Μεθ' ὃ ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\gamma}{\eta\mu\,\Gamma}=\frac{\alpha}{\eta\mu A}$ λαμβάνομεν τὴν $\gamma=\frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$ δι' ἧς ὑπολογίζεται ἡ πλευρὰ γ. Τὸ ἐμβαδὸν τέλος ὑπολογίζομεν ἐκ τῆς ἰσότητος $E=\frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu\Gamma$.

ΣΗΜ. Ἂν $\alpha=\beta$, θὰ εἶναι καὶ $A=B$ καὶ ἑκατέρα ὑπολογίζεται ἐκ τῆς ἰσότητος $\Gamma+2A=180^\circ$.

Παράδειγμα. Ἔστω $\alpha=3475{,}6$ μ. $\beta=1625{,}2$, $\Gamma=50^\circ40'15''$.

Ὑπολογισμὸς τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ.

$$\text{ἐφ}\ \frac{A-B}{2} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\cdot \text{σφ}\ \frac{\Gamma}{2}$$

Βοηθητικὸς πίναξ. $\text{λογἐφ}\ \frac{A-B}{2} = \text{λογ}(\alpha-\beta) + \text{λογ σφ}\ \frac{\Gamma}{2} - \text{λογ}(\alpha+\beta)$

$\alpha=3475,6$	$\text{λογ}(\alpha-\beta)=$	$3,26727$
$\beta=1625,2$		
$\alpha+\beta=5100,8$	$\text{λογσφ}\ \frac{\Gamma}{2}$	$=0,32480$
$\alpha-\beta=1850,4$	ἄθροισμα	$=3,59207$
$\Gamma=50^0 40' 15''$	$\text{λογ}(\alpha+\beta)$	$=3,70764$
$\frac{\Gamma}{2}=25^0 20' 7'',5$	$\text{λογἐφ}\ \frac{A-B}{2}$	$=1,88443$
$180^0=179^0 59' 60''$	$\frac{A-B}{2}$	$=37^0 27' 53''$
$\Gamma=50^0 40' 15''$	$A-B$	$=74^0 55' 46''$
$A+B=129^0 19' 45''$	$A+B$	$=129^0 19' 45''$
$180^0=179^0 59' 60''$	$2A$	$=204^0 15' 31''$
$A=102^0 7' 45,5$	$2B$	$=54^0 23' 59''$
$180^0-A=77^0 52' 14'',5$	A	$=102^0 7' 45'',5$
$\text{ἡμ}.A=\text{ἡμ}(77^0 52' 14'',5)$	B	$=27^0 11' 59'',5$

Ὑπογισμὸς τῆς πλευρᾶς $\gamma=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}\ A}$. Ὑπολογισμὸς τοῦ $E=\frac{1}{2}\alpha\beta\,\text{ἡμ}\ \Gamma$.

$\text{λογ}\gamma=\text{λογ}\alpha+\text{λογἡμ}\Gamma-\text{λογἡμ}A$		$\text{λογ}(2E)=\text{λογ}\alpha+\text{λογ}\beta+\text{λογἡμ}\Gamma$	
λογ α	$=3,54103$	λογ α	$=3,54103$
λογ ἡμΓ	$=1,88847$	λογ β	$=3,21090$
ἄθροισμα	$=3,42950$	λογ ἡμ Γ	$=1,88847$
λογἡμ Α	$=1,99020$	λογ (2Ε)	$=6,64040$
λογ γ	$=3,43930$	2Ε	$=4369200$ τ.μ.
γ	$=2749,81$ μ.	Ε	$=2184600$ τ.μ.

Ἀσκήσεις. 116) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\alpha=300$ μ $\beta=127$ μ καὶ $\Gamma=68^0 40'$.

117) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον $\alpha=144,44$ μ, $\beta=888,88$ μ καὶ $\Gamma=40^0 44' 44''$.

118) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\beta=\frac{3}{4}$ μ, $\gamma=\frac{5}{12}$ μ καὶ $A=40^0$.

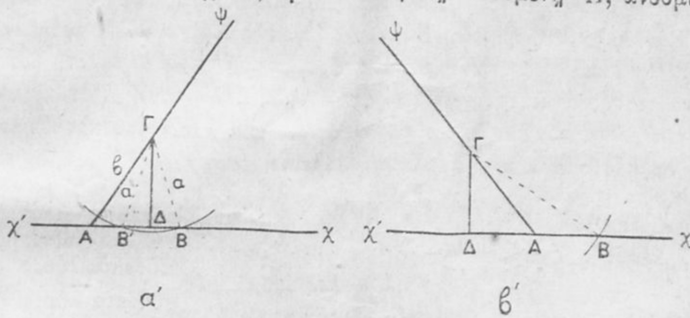
§ 66. ***Γ' Περίπτωσις.*** *Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον οὗ δίδονται δύο πλευραὶ καὶ μία γωνία κειμένη ἀπέναντι τῆς μιᾶς τῶν δεδομένων πλευρῶν.*

Ἔστωσαν α, β, καὶ A τὰ δεδομένα στοιχεῖα. Ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}$ προκύπτει ἡ ἰσότης $\eta\mu B=\frac{\beta\,\eta\mu A}{\alpha}$. (1)

Ὑπολογιζομένης ἐκ ταύτης τῆς B, εὑρίσκεται εἶτα ἡ Γ ἐκ τῆς ἰσότητος $\Gamma=180^0-(A+B)$ καὶ ἡ πλευρὰ γ ἐκ τῆς $\gamma=\frac{\alpha\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$. Τέλος τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται ἐκ τῆς $E=\frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu\Gamma$.

Διερεύνησις.—. Ἐκ τῆς γεωμετρίας εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ ἔχῃ δύο, μίαν ἢ καὶ οὐδεμίαν λύσιν. Διὰ τοῦτο θὰ ἀναζητήσωμεν τοὺς ὅρους, ἀφ' ὧν ἐξαρτᾶται ὁ ἀριθμὸς τῶν λύσεων ἀκολουθοῦντες χάριν ἁπλότητος ἐν γενικαῖς γραμμαῖς τὴν πορείαν, καθ' ἣν καὶ ἡ γεωμετρικὴ λύσις αὐτοῦ γίνεται.

Ἔστω $\psi A\chi$ (Σχ. 32) γωνία ἴση τῇ δεδομένῃ A, ἄνυσμά τι



(Σχ. 32).

$(A\Gamma)=\beta$ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $A\psi$ καὶ $\Gamma\Delta$ ἡ ἀπόστασις τοῦ Γ ἀπὸ τῆς $A\chi$. Ἕνεκα τοῦ ὀρθογ. τριγώνου $A\Gamma\Delta$ εἶναι $(\Gamma\Delta)=\beta\,\eta\mu\,(\Gamma A\Delta)$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ $\Gamma A\Delta$ εἶναι ἴση ἢ παραπληρωματικὴ τῆς A, ἕπεται ὅτι $\eta\mu\,(\Gamma A\Delta)=\eta\mu A$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $(\Gamma\Delta)=\beta\,\eta\mu A$. Τούτων τεθέντων παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τρίτη κορυφὴ τριγώνου ἔχοντος πλευρὰν τὴν $(A\Gamma)=\beta$, μίαν γωνίαν τὴν $\psi A\chi=A$ καὶ ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰν α, ὀφείλει νὰ εἶναι τομὴ τῆς πλευρᾶς $A\chi$ καὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα α. Ἄρα, ἂν $\alpha<(\Gamma\Delta)$ ἢ $\alpha<\beta\,\eta\mu A$, τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν, διότι δὲν ὑπάρχει τοιαύτη τομή. Ἂν $\alpha=(\Gamma\Delta)=\beta\,\eta\mu A$, τὸ Δ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν εἰρημένων γραμμῶν καὶ τὸ τρίγωνον $A\Gamma\Delta$ ἀποτελεῖ λύσιν τοῦ προβλήματος, ἂν εἶναι καὶ $A<90^0$.

Ἐὰν $\alpha >$ ΓΔ) ἢ $\alpha > \beta$ ἡμΑ, ἡ εὐθεῖα χ′Αχ καὶ ἡ ῥηθεῖσα περιφέρεια ἔχουσι δύο κοινὰ σημεῖα Β καὶ Β′, ὧν ἡ θέσις σχετικῶς πρὸς τὴν κορυφὴν Α ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ εἴδους τῆς γωνίας Α καὶ τοῦ σχετικοῦ μεγέθους τῶν πλευρῶν α καὶ β.

Ἐὰν $A < 90^0$· διακρίνομεν τὰς ἀκολούθους μερικοτέρας περιπτώσεις.

1ον. Ἐὰν $\alpha > \beta$, αἱ τομαὶ Β′ καὶ Β κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ Α καὶ μόνον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκπληροῖ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος, ἤτοι τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν.

2ον) Ἐὰν $\alpha = \beta$, τὸ Β′ συμπίπτει μετὰ τοῦ Α καὶ πάλιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ λύει τὸ πρόβλημα.

3ον) Ἂν $\alpha < \beta$ ἀμφότεραι αἱ τομαὶ Β καὶ Β′ κεῖνται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Αχ καὶ ἑκάτερον τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒ′Γ ἐκπληροῖ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος ἤτοι ὑπάρχουσι δύο λύσεις.

Ἐὰν $A > 90^0$, ἡ τομὴ Β′ κεῖται ἐπὶ τῆς Αχ′ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒ′Γ δὲν ἐκπληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος, διότι ἀπέναντι τῆς α κεῖται γωνία $(180^0 - A)$· ἡ ἄλλη τομὴ Β θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς Αχ μόνον ἐὰν $\alpha > \beta$, ὅτε ὑπάρχει μία λύσις τοῦ προβλήματος. Τὰ πορίσματα τῆς ἀνωτέρω διερευνήσεως συνοψίζομεν ἐν τῷ ἀκολούθῳ πίνακι.

$\alpha < \beta$ἡμΑ			οὐδεμία λύσις
$\alpha = \beta$ἡμΑ	$A < 90^0$		μία λύσις
	$A \geq 90^0$		οὐδεμία λύσις
$\alpha > \beta$ἡμΑ	$A < 90^0$	$\alpha \geq \beta$	μία λύσις
		$\alpha < \beta$	δύο λύσεις
	$A > 90^0$	$\alpha \leq \beta$	οὐδεμία λύσις
		$\alpha > \beta$	μία λύσις

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω $\alpha = 300^{\mu}$, $\beta = 456{,}75^{\mu}$, $A = 34^0 16'$.

Κατὰ πρῶτον ὑπολογίζομεν τὴν παράστασιν βἡμ Α, ἵνα γνωρίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν λύσεων.

λογ (βἡμΑ)=λογβ+λογἡμΑ=2,41022, ἄρα βἡμ Α=257,17 ἤτοι $\alpha > \beta$ ἡμ Α. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $A < 90^0$ καὶ $\alpha < \beta$, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

Ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τῆς γωνίας Β.—.ἡμ Β$=\dfrac{\beta \text{ἡμ} A}{\alpha}$ (1)

ἄρα λογἡμΒ=λογβ+λογἡμΑ −λογα

λογβ	= 2,65968	ἄθροισμα	=2,41022
λογἡμΑ	= 1.75054	λογα	=2,47712
ἄθροισμα	= 2,41022	λογἡμ Β	= 1,93310,

ἄρα $B=59^\circ 0'25'',7$. Ἐπειδὴ δὲ ἡμ $B=$ ἡμ $(180^\circ-B)$ ἕπεται ὅτι ἡ ἰσότης (1) ἀληθεύει καὶ διὰ τὴν γωνίαν

$$B'=180^\circ-B=120^\circ 59'34,3''.$$

Εἰς ἑκάστην δὲ τῶν τιμῶν τούτων B καὶ B′ ἀντιστοιχοῦσιν ἴδιαι τιμαὶ ἑκάστου τῶν στοιχείων Γ, γ καὶ Ε, ἃς ὑπολογίζομεν ὧδε

Ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τῆς Γ.

$$A=34^\circ 16'$$
$$B=59^\circ 0'\,25'',7$$
$$B'=120^\circ 59'34,3''$$
$$A+B=93^\circ 16'25'',7$$
$$A+B'=155^\circ 15'34'',3$$

$$180^\circ=179^\circ 59'60''$$
$$A+B=93^\circ 16'25'',7$$
$$\Gamma_1=86^\circ 43'34,3''$$
$$A+B'=155^\circ 15'34,3''$$
$$\Gamma_2=24^\circ 44'25,7''$$

Ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τῆς πλευρᾶς γ

$$\gamma_1=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}\,\Gamma_1}{\text{ἡμ}A} \text{ ἄρα}$$
$$\text{λογ}\gamma_1=\text{λογ}\alpha+\text{λογἡμ}\Gamma_1-\text{λογἡμ}A$$
$$\text{λογ}\alpha=2,47712$$
$$\text{λογ ἡμ}\Gamma_1=\bar{1},99929$$
$$\text{ἄθροισμα}=2,47641$$
$$\text{λογἡμ }A=\bar{1}.75054$$
$$\text{λογ }\gamma_1=2,72587$$
$$\gamma_1=531,95\mu$$

$$\gamma_2=\frac{\alpha\text{ ἡμ}\Gamma_2}{\text{ἡμ}A} \text{ ἄρα,}$$
$$\text{λογ}\gamma_2=\text{λογ}\alpha+\text{λογἡμ}\Gamma_2-\text{λογἡμ}A$$
$$\text{λογ}\alpha=2.47712$$
$$\text{λογ ἡμ}\Gamma_2=\bar{1},62171$$
$$\text{ἀθρ.}=2.09883$$
$$\text{λογἡμ }A=\bar{1}.75054$$
$$\text{λογ }\gamma_2=2,34829$$
$$\gamma_2=222,995\mu$$

Ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τοῦ ἐμβαδοῦ

$$2E_1=\alpha\beta\text{ ἡμ }\Gamma_1\text{, ἄρα}$$
$$\text{λογ}(2E_1)=\text{λογ}\alpha+\text{λογ}\beta+\text{λογἡμ}\Gamma_1$$
$$\text{λογ}\alpha=2,47712$$
$$\text{λογ}\beta=2,65968$$
$$\text{λογἡμ}\Gamma_1=\bar{1}.99929$$
$$\text{λογ}(2E_1)=5,13609$$
$$2E_1=136800\text{τ.μ.}$$
$$E_1=68400\text{τ.μ.}$$

$$2E_2=\alpha\beta\text{ ἡμ }\Gamma_2\text{, ἄρα}$$
$$\text{λογ}(2E_2)=\text{λογ}\alpha+\text{λογ}\beta+\text{λογἡμ}\Gamma_2$$
$$\text{λογ}\alpha=2,47712$$
$$\text{λογ}\beta=2,65968$$
$$\text{λογἡμ}\Gamma_2=\bar{1}.62171$$
$$\text{λογ }(2E_2)=4,75851$$
$$2E_2=57347,14\text{τ.μ.}$$
$$E_2=28673,57\text{τ.μ.}$$

Παράδειγμα 2ον.— Ἔστω ὅτι $\alpha=900\mu$, $\beta=1245\mu$ καὶ $A=53^\circ 12'20''$.

Ὑπολογίζοντες ὡς καὶ προηγουμένως, τὴν παράστασιν βἡμA εὑρίσκομεν ὅτι αὕτη ἰσοῦται πρὸς 996,98μ ἤτοι $\alpha<\beta$ἡμA, ἄρα τὸ πρόβλημα οὐδεμίαν ἔχει λύσιν.

ΣΗΜ. Ἐὰν δὲν ὑπολογίσωμεν ἐκ τῶν προτέρων τὴν παράστασιν βἡμ A, ἀλλ ἐπιχειρήσωμεν ἀμέσως τὸν ὑπολογισμὸν τῆς B, θέλομεν εὕρει λογἡμA $=0,04445$ ὅθεν ἡμB >1, ὅπερ ἄτοπον.

Ἀσκήσεις. 119) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\alpha=560$ μ. $\beta=840$ μ. καὶ $A=40^{\circ}20'10''$.

120) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον οὗ $\alpha=500$ μ., $\beta=415{,}5$ μ. καὶ $A=115^{\circ}$.

121) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\alpha=40$ μ., $\beta=45$ μ. καὶ $A=50^{\circ}15'$.

122) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\alpha=23$ μ., $\beta=38$ μ. καὶ $B=32^{\circ}$.

§ 67. *Δ΄ περίπτωσις. Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ δίδονται αἱ τρεῖς πλευραί.*— Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις ὅτι τὸ πρόβλημα τότε μόνον ἔχει λύσιν, ὅταν ἡ μεγαλυτέρα (ἢ ἡ μηδεμιᾶς μικροτέρα) πλευρὰ εἶναιμικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων. Ὑποθέτοντες δὲ ὅτι αἱ δεδομέναι πλευραὶ α, β, γ ἐκπληροῦσι τὸν περιορισμὸν τοῦτον θέλομεν ὑπολογίσῃ τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου.

Ἐκ τῆς γνωστῆς (43) ἰσότητος $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\,\beta\gamma\,\text{συν}A$ προκύπτει ἡ ἰσότης $\text{συν}\,A=\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\,\beta\gamma}$ (1).

Ἐπειδὴ τὸ β΄ μέλος αὐτῆς δὲν εἶναι λογιστὸν διὰ τῶν λογαρίθμων ἀναζητοῦμεν ἑτέραν ἰσότητα κατάλληλον εἰς τὸν διὰ τῶν λογαρίθμων λογισμόν Πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὴν ἰσότητα $\text{ἐφ}\frac{\omega}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\text{συν}\omega}{1+\text{συν}\omega}}$ εἰς τὴν γωνίαν Α θέτοντες πρὸ τοῦ ριζικοῦ μόνον τὸ $+$, διότι τῆς $\frac{A}{2}$ οὔσης ὀξείας ἡ ἐφ $\frac{A}{2}$ εἶναι θετική. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι

$$\text{ἐφ}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\text{συν}A}{1+\text{συν}A}} \qquad (2)$$

Λαμβάνοντες δὲ ὑπ' ὄψιν τὴν ὑπὸ τῆς (1) παρεχομένην τιμὴν τοῦ συν Α εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{1-\text{συν}A}{1+\text{συν}A}=\frac{1-\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}}{1+\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}}$$

$$=\frac{2\beta\gamma-\beta^2-\gamma^2+\alpha^2}{2\beta\gamma+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}=\frac{\alpha^2-(\beta-\gamma)^2}{(\beta+\gamma)^2-\alpha^2}=\frac{(\alpha+\beta-\gamma)\,(\alpha-\beta+\gamma)}{(\beta+\gamma+\alpha)\,(\beta+\gamma-\alpha)}.$$

Ἐὰν δὲ χάριν συντομίας τεθῇ $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$, (3) καὶ ἀφαιρεθῇ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 2α, 2β, 2γ προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες $\beta+\gamma-\alpha=2(\tau-\alpha)$, $\alpha-\beta+\gamma=2(\tau-\beta)$, $\alpha+\beta-\gamma=2(\tau-\gamma)$. Ἕνεκα τούτων $\dfrac{1-\text{συν}A}{1+\text{συν}A}=\dfrac{(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}$, ἡ δὲ ἰσότης (2) γίνεται $$\grave{\epsilon}\varphi\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι: $$\grave{\epsilon}\varphi\left(\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\beta)}} \qquad (46)$$
$$\grave{\epsilon}\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}}.$$

Διὰ τῶν ἰσοτήτων τούτων ὑπολογίζονται αἱ γωνίαι $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ καὶ $\frac{\Gamma}{2}$, εἶτα δὲ ἐξ αὐτῶν καὶ αἱ A, B, Γ. Δυνάμεθα ὅμως εἰς τὰς ἰσότητας (46) νὰ δόσωμεν ἄλλην μορφήν, δι᾽ ἧς τὰ μέγιστα ἐπιταχύνεται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν γωνιῶν. Πρὸς τοῦτο πολ)ζομεν καὶ διαιροῦμεν τὸ β′ μέλος τῆς α′ τῶν ἰσοτήτων τούτων διὰ (τ—α) καὶ εὑρίσκομεν $\grave{\epsilon}\varphi\frac{A}{2}=\frac{1}{\tau-\alpha}\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$, ἐὰν δὲ χάριν συντομίας τεθῇ $\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}=\lambda$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $$\grave{\epsilon}\varphi\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{\lambda}{\tau-\alpha}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $$\grave{\epsilon}\varphi\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{\lambda}{\tau-\beta},\quad \grave{\epsilon}\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\frac{\lambda}{\tau-\gamma}. \qquad (47)$$

Διὰ τούτων ὑπολογίζονται αἱ γωνίαι $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{\Gamma}{2}$ ἀφ᾽ οὗ προηγουμένως ὑπολογισθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ λ. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐν τῇ ἰσότητι $\eta\mu^2 A+\sigma\upsilon\nu^2 A=1$ θέτομεν ἀντὶ συνA τὴν ὑπὸ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος (1) παρεχομένην τιμὴν αὐτοῦ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι: $\eta\mu^2 A=1-\frac{(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2}{4\beta^2\gamma^2}=$

$$\frac{4\beta^2\gamma^2-(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)}{4\beta^2\gamma^2}=\frac{(2\beta\gamma+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)\,2\beta\gamma-\beta^2-\gamma^2+\alpha^2)}{4\beta^2\gamma^2}=$$
$$\frac{[(\beta+\gamma)^2-\alpha^2][\alpha^2-(\beta-\gamma)^2]}{4\beta^2\gamma^2}=\frac{(\beta+\gamma+\alpha)(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)}{4\beta^2\gamma^2}$$
$$=\frac{4\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)\tau-\gamma)}{\beta^2\gamma^2} \quad \text{ἄρα } \eta\mu A=\frac{2}{\beta\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}.$$

Ἐὰν ἤδη τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ἡμA θέσωμεν ἐν τῇ ἰσότητι $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$, προκύπτει ἡ ἰσότης

$$E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}, \qquad (48)$$

δι' ἧς ὁρίζεται τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

ΣΗΜ. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\sqrt{\dfrac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}=\lambda$

καὶ $E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες:

$2\log\lambda=[\log(\tau-\alpha)+\log(\tau-\beta)+\log(\tau-\gamma)]-\log\tau$ καὶ
$2\log E=[\log(\tau-\alpha)+\log(\tau-\beta)+\log(\tau-\gamma)]+\log\tau$.

Ἐκ τούτων καθίσταται φανερὸν ὅτι ὁ $2\log E$ εὑρίσκεται, ἂν εἰς τὸ κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ $2\log\lambda$ εὑρισκόμενον ἄθροισμα $\log(\tau-\alpha)+\log(\tau-\beta)+\log(\tau-\gamma)$ προστεθῇ ὁ $\log\tau$.

Παράδειγμα Ἔστω α=4562,30 μ. β=3964 μ., γ=2872,50

Βοηθητικὸς πίναξ

α	=4562,30 μ.
β	=3964
γ	=2872,50
2τ	=11398,80
τ	=5699,40
τ—α	=1137,10
τ—β	=1735,40
τ—γ	=2826,90

Ὑπολογισμὸς τοῦ λογλ καὶ Ε

λογ(τ—α)	=3,05580
λογ(τ—β)	=3,23940
λογ(τ—γ)	=3,45131
ἄθροισμα	=9,74651
λογ τ	=3,75831
2λογ λ	=5,99068
λογ λ	=2,99534
2λογ Ε	=13,50234
λογ Ε	=6,75117
Ε	=5638571,428 τ. μ.

Ὑπολογισμὸς τῆς Α

$\varepsilon\varphi\left(\dfrac{A}{2}\right)=\dfrac{\lambda}{\tau-\alpha}$ ἄρα

$\log\varepsilon\varphi\left(\dfrac{A}{2}\right)=\log\lambda-\log(\tau-\alpha)$

λογλ	=2,99534
λογ(τ—α)	=3,05580
$\log\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right)$	$=\overline{1},93954$
$\frac{A}{2}$	=41°1′28″
Α	=82°2′56″

Ὑπολογισμὸς τῆς Β.

$\varepsilon\varphi\left(\dfrac{B}{2}\right)=\dfrac{\lambda}{\tau-\beta}$ ἄρα

$\log\varepsilon\varphi\left(\dfrac{B}{2}\right)=\log\lambda-\log(\tau-\beta)$

λογ λ	=2,99534
λογ(τ—β)	=3,23940
$\log\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right)$	$=\overline{1},75594$
$\frac{B}{2}$	=29°41′12″,4
Β	=59°22′24″, 8

Υπολογισμὸς τῆς Γ.

$$\text{ἐφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\frac{\lambda}{\tau-\gamma}\ \text{ἄρα}$$

$$\text{λογἐφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\text{λογ}\lambda-\text{λογ}(\tau-\gamma)$$

$$\text{λογ}\,\lambda=2{,}99534$$

$$\text{λογ}\,(\tau-\gamma)=3{,}45131$$

$$\text{λογἐφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\overline{1}{,}54403$$

$$\frac{\Gamma}{2}=19^{0}17'19''$$

$$\Gamma=38^{0}34'38''$$

Ἀσκήσεις. 123) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, ὅπερ ἔχει πλευρὰς 8 μ., 9 μ., 10 μ.

124) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, ὅπερ ἔχει πλευρὰς 147 μ., 247 μ., καὶ 347 μ.

125) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, ὅπερ ἔχει πλευρὰς 7964 5 μ., 10368,6 μ. καὶ 5872 μ.

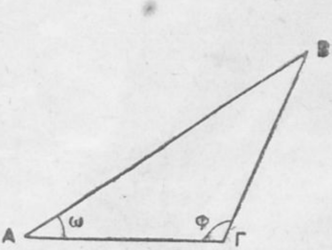
126) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν μεταξὺ τῶν στοιχείων τριγώνου ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης $E=\tau(\tau-\alpha)$, τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἀντιστρόφως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζον

Τοπογραφικαὶ ἐφαρμογαί.

§ 68. ***Πρόβλημα 1ον.*** *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις προσιτοῦ ἀπὸ ἀπροσίτου καὶ ὁρατοῦ σημείου.*

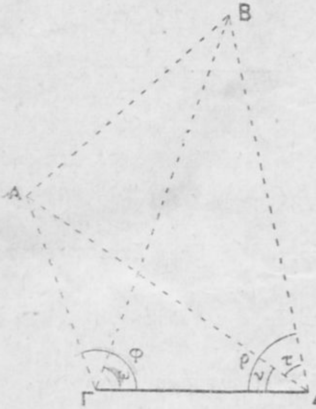
Ἔστω Α τὸ προσιτὸν καὶ Β τὸ ἀπρόσιτον σημεῖον, ὧν ἡ ἀπόστασις (ΑΒ) ζητεῖται (Σχ. 33).



(Σχ. 33)

Πρὸς εὕρεσιν ταύτης ἐπὶ ὁμαλοῦ ἐδάφους ἐκλέγομεν σημεῖόν τι Γ καὶ τοιοῦτον ὥστε ἐξ αὐτοῦ νὰ φαίνωνται ἀμφότερα τὰ σημεῖα Α, Β καὶ νὰ εἶναι εὔκολος ἡ μετὰ πάσης δυνατῆς ἀκριβείας μέτρησις τῆς ἀποστάσεως (ΑΓ). Μετὰ τὴν μέτρησιν ταύτης διὰ καταλλήλου γωνιομετρικοῦ ὀργάνου μετροῦμεν τὰς γωνίας ω καὶ φ καὶ εἶτα ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{(AB)}{ἡμφ}=\frac{(AΓ)}{ἡμB}$, ὅθεν

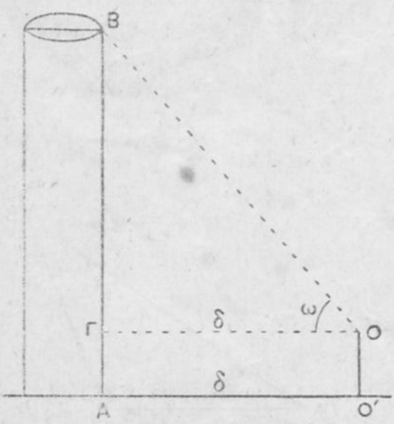
$$(AB)=\frac{(AΓ)\,ἡμφ}{ἡμ(ω+φ)}.$$



(Σχ. 34)

§ 69. ***Πρόβλημα 2ον.*** *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις δύο σημείων ἀπροσίτων καὶ ὁρατῶν.*

Ἔστωσαν Α καὶ Β (σχ. 34) τὰ δύο σημεῖα, ὧν ζητεῖται ἡ ἀπόστασις (ΑΒ). Πρὸς εὕρεσιν ταύτης ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως. Ἐπὶ ὁμαλοῦ ἐδάφους ἐκλέγομεν δύο σημεῖα Γ καὶ Δ τοιαῦτα ὥστε ἀπ' ἀμφοτέρων νὰ εἶναι ὁρατὰ τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἑκάτερον νὰ εἶναι ὁρατὸν ἐκ τοῦ ἑτέρου. Μετροῦμεν εἶτα τὴν ἀπόστασιν (ΓΔ) αὐτῶν μετὰ πάσης τῆς δυνατῆς ἀκριβείας, ὡς καὶ τὰς γωνίας ΒΓΔ=ω, ΑΓΔ=φ, ΒΔΓ=ρ, ΑΔΓ=ν καὶ ΒΔΑ=τ.

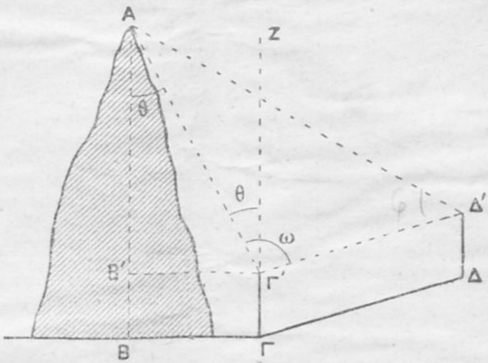


(Σχ. 35)

Εἶτα ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ εὑρίσκομεν $(AΔ)=\frac{(ΓΔ)ἡμφ}{ἡμ(φ+ν)}$. ἐκ δὲ τοῦ ΒΓΔ εὑρίσκομεν $(BΔ)=\frac{(ΓΔ)ἡμω}{ἡμ(ρ+ω)}$. Γνωρίζοντες ἤδη τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΔ καὶ τὴν γωνίαν αὐτῶν τ ἐπιλύομεν (§ 65) τὸ τρίγωνον ΑΒΔ καὶ εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν (ΑΒ).

§ 70. ***Πρόβλημα 3ον.*** *Νὰ εὑρεθῇ, τὸ ὕψος πύργου, οὗ ἡ βάσις εἶναι προσιτή.* Ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ποδὸς Α (Σχ. 35) τοῦ πύργου μετροῦμεν ὁριζόντιόν τινα εὐθεῖαν ΑΟ′ καὶ ἔστω (ΑΟ′)=δ. Τοποθετοῦντες τὸ γωνιομετρικὸν ὄργανον εἰς τὸ ἄκρον Ο′ τῆς μετρηθείσης εὐθείας μετροῦμεν τὴν γωνίαν ΓΟΒ=ω (ΟΟ′ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ὀργάνου καὶ ΟΓ ὁριζόντιος εὐθεῖα). Μεθ' ὃ ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΟΓΒ εὑρίσκομεν (ΓΒ)=δ. ἐφω καὶ εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον ὕψος προσθέτοντες εἰς τὸ διὰ τῆς ἰσότητος ταύτης ὑπολογιζόμενον μῆκος (ΓΒ) τὸ τοῦ ὀργάνου ὕψος (ΟΟ′).

§ 71. ***Πρόβλημα 4ον.*** *Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ὄρους.* Ἔστω Α ἡ κορυφὴ τοῦ ὄρους (Σχ. 36) καὶ Γ σημεῖόν τι τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἀφ' οὗ λογίζεται τὸ ὕψος τοῦ ὄρους, καὶ τοιοῦτον ὥστε νὰ φαίνηται ἐξ αὐτοῦ ἡ κορυφὴ Α. Ἔστω δὲ ΑΒ τὸ ἀόρατον ὕψος, ὅπερ πρόκειται νὰ εὕρωμεν. Πρὸς τοῦτο ἀπὸ τοῦ Γ ἀρχόμενοι μετροῦμεν ἐπὶ ὁμαλοῦ, ὅσον ἔνεστι, ἐδάφους εὐθεῖαν τινὰ ΓΔ, ἀπὸ τοῦ ἄκρου Δ τῆς ὁποίας φαίνονται ἀμφότερα τὰ σημεῖα Α καὶ Γ, ἔστω δὲ α τὸ μῆκος αὐτῆς. Μετὰ τοῦτο τοποθετοῦμεν εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ τὸ γωνιομετρικὸν ὄργανον, οὗ τὸ ὕψος ἔστω (ΓΓ′)=(ΔΔ′) καὶ μετροῦμεν τὰς γωνίας ΑΓ′Δ′=ω καὶ ΑΔ′Γ′=φ· ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου ΑΓ′Δ′ λαμβάνομεν εἶτα $(ΑΓ')=\frac{α ἡμφ}{ἡμ\,(ω+φ)}$ δι' ἧς ὑπολογίζομεν τὴν (ΑΓ′). Εἶτα μετροῦμεν τὴν γωνίαν ἣν σχηματίζει ἡ ΑΓ′ μετὰ τῆς κατακορύφου ΓΓ′Ζ καὶ ἔστω ὅτι ΑΓ′Ζ=θ, ὅτε καὶ ΒΑΓ′=θ.



(Σχ. 36)

Εἶτα ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒ′Γ′ (Β′Γ′ εἶναι νοητὴ ὁριζόντιος εὐθεῖα) εὑρίσκομεν

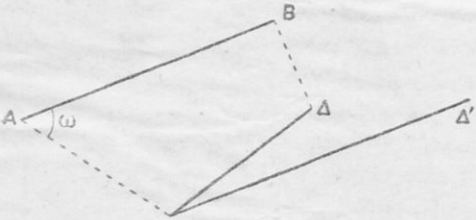
$$(ΑΒ')=(ΑΓ')συνθ=\frac{α ἡμφ\; συνθ}{ἡμ\,(ω+φ)}\cdot$$

δι' ἧς εὑρίσκομεν τὸ ὕψος (ΑΒ′)· ἐὰν δὲ εἰς αὐτὸ προσθέσωμεν καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀργάνου (ΓΓ′)=(ΒΒ′) εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον ὕψος τοῦ ὄρους.

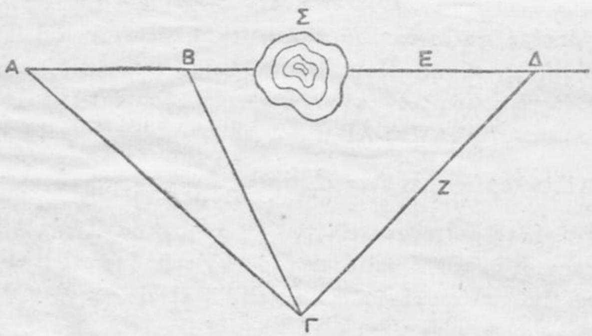
§ 72. ***Πρόβλημα 5ον*** *Διὰ τοῦ προσιτοῦ σημείου Γ κειμένου ἐπὶ ὁμαλοῦ ἐδάφους νὰ χαραχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ἀπρό-*

σιτον εὐθεῖαν ΑΒ (Σχ. 37). — Ἐργαζόμενοι ὡς ἐν τῷ 2ῳ προβλήματι (§ 69) ὑπολογίζομεν τὴν γωνίαν ΓΑΒ=ω. Εἶτα τῇ βοηθείᾳ τοῦ γωνιομετρικοῦ ὀργάνου τοποθετουμένου εἰς τὸ Γ χαράσσομεν δι᾽ἀκοντίων εὐθεῖαν ΓΔ′ τοιαύτην ὥστε νὰ εἶναι ΑΓΔ′=180°—ω. Ἡ οὕτως ὁριζομένη εὐθεῖα ΓΔ′ εἶναι ἡ ζητουμένη.

§ 73. ***Πρόβλημα 6ον.*** *Ἐπὶ ἐπιπέδου ἐδάφους νὰ χαραχθῇ ἡ προέκτασις εὐθείας ὄπισθεν κωλύματος, ὅπερ ἐμποδίζει νὰ βλέπωμεν τὴν ὄπισθέν του διεύθυνσιν αὐτῆς.* Ἔστω ΑΒ (Σχ. 38) ἡ δεδομένη εὐθεῖα, Σ τὸ κώλυμα καὶ ΕΔ ἡ ζητουμένη προέκτασις τῆς ΑΒ πέραν τοῦ Σ. Ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας ὁρίζομεν δύο σημεῖα Α καὶ Β, ὧν τὴν ἀπόστασιν, μετροῦμεν μετὰ πάσης τῆς δυνατῆς ἀκριβείας. Εἶτα εἴς τι σημεῖον Γ, ἀφ᾽οὗ φαίνονται τὰ Α καὶ Β καὶ ὁ ὄπισθεν τοῦ Σ χῶρος, τοποθετοῦμεν σῆμά τι καὶ μετροῦμεν τὰς γωνίας



(Σχ. 37)



(Σχ. 38)

ΒΑΓ καὶ ΑΒΓ. Ἐκ τούτων καὶ τῆς ΑΒ εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς ΑΓ· εἶτα δι᾽ἀκοντίων χαράσσομεν εὐθεῖαν ΓΖ κατευθυνομένην εἰς τὸν ὄπισθεν τοῦ Σ χῶρον καὶ μετροῦμεν τὴν γωνίαν αὐτῆς μετὰ τῆς ΑΓ. Ἐὰν ἤδη ὑποθέσωμεν ὅτι Δ εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς ὃ ἡ ΓΖ τέμνει τὴν ἄγνωστον ἔτι προέκτασιν τῆς ΑΒ καὶ ἐπιλύσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΓΔ, εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς ΓΔ καὶ τὴν γωνίαν Δ.

Ἀρκεῖ εἶτα τοποθετοῦντες τὸ γωνιομετρικὸν ὄργανον εἰς τὸ ἄκρον Δ τῆς ὑπολογισθείσης πλευρᾶς ΓΔ νὰ χαράξωμεν δι᾽ἀκοντίων τῇ βοηθείᾳ αὐτοῦ εὐθεῖαν, κειμένην, πρὸς ὃ καὶ τὸ Σ μέρος τῆς ΓΔ καὶ σχηματίζουσαν μετ᾽αὐτῆς γωνίαν ἴσην τῇ ὑπολογισθείσῃ Δ. Ἡ οὕτω χαρασσομένη εὐθεῖα εἶναι ζητουμένη προέκτασις τῆς ΑΒ.

Ἀσκήσεις. 127). Παρατηρητὴς βλέπει πύργον ὑπὸ γωνίαν 60°· ἐὰν δὲ ἀπομακρυνθῇ τῆς θέσεώς του κατὰ 100μ ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἣν ὁρίζει ἡ ἀρχική του θέσις καὶ ὁ ποῦς τῆς ἐκ τοῦ ὑψηλοτέρου σημείου τοῦ πύργου διερχομένης κατακορύφου, βλέπει αὐτὸν ὑπὸ γωνίαν 30°. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ πύργου;

128) Δύο παρατηρηταὶ ἀπέχοντες ἀλλήλων 1000μ καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κείμενοι ὁριζοντίου ἐπιπέδου βλέπουσιν ἀπρόσιτον σημεῖον ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὕψους 35°, ἐν ᾧ ἑκάτερος τούτων βλέπει τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἀπροσίτου σημείου ἀπὸ τοῦ ἄλλου παρατηρητοῦ ὑπὸ γωνίαν 60°. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἀπροσίτου σημείου.

129) Ἐκ τριῶν σημείων Α, Β, Γ ἐπὶ εὐθείας κειμένων τὸ πρῶτον μόνον εἶναι προσιτόν. Ἀπὸ τετάρτου σημείου Δ ἀπέχοντος τοῦ Α 600μ φαίνεται ἡ μὲν ΑΒ ὑπὸ γωνίαν 42°, ἡ δὲ ΑΓ ὑπὸ γωνίαν 75°, ἐν ᾧ ἀπὸ τοῦ Α φαίνεται ἡ ΒΔ ὑπὸ γωνίαν 40°. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις (ΒΓ).

Διάφοροι ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν.

130. Ἐὰν τὰ σημεῖα Ο, Α, Β κεῖνται ὁπωσδήποτε ἐπὶ ἄξονος καὶ ἕτερον σημεῖον Μ ἔχῃ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος τοιαύτην θέσιν, ὥστε νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης $\frac{(AM)}{(BM)} = -\frac{\mu}{\nu}$, νὰ ἀποδεχθῇ ὅτι

$$(\mu+\nu)\,(OM) = \nu\,(OA) + \mu\,(OB)$$

131. Δεδομένων τῶν ἐπὶ ἄξονα προσβολῶν α καὶ 6 τῶν ἄκρων ἀνύσματος ΑΒ νὰ εὑρεθῇ ἡ προβολὴ τοῦ σημείου Μ, δι᾽ ὃ εἶναι $\frac{AM}{MB} = \frac{}{4}$.

132) Δεδομένων τῶν ἐπὶ ἄξονα προβολῶν τῶν κορυφῶν τριγώνου νὰ εὑρεθῇ ἡ προβολὴ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαμέσων αὐτοῦ.

133) Νὰ στραφῇ δεδομένον σύστημα πρωτευόντων ἀξόνων θετικὴν στροφὴν κατὰ [illegible]

134) Ὁμοίως κατα 30°.

135) Γνωστοῦ ὄντος ἐκ τῆς Γεωμετρίας ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον ἀκτῖνος ρ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι

$\frac{\rho}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον, εἶτα δὲ καὶ οἱ ἄλλοι τριγ. ἀριθμοὶ τοῦ τόξου 36^0.

136) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πέρατα τῶν τόξων, ὧν ἕκαστον ἔχει ἐφαπτομένην ἢ συνεφαπτομένην 3.

137) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πέρατα τῶν τόξων, ὧν ἕκαστον ἔχει ἡμίτονον ἢ συνημίτονον $\frac{2}{3}$

138) Ἄνυσμα μήκους 0,60 μ. κεῖται ἐπὶ ἄξονος τέμνοντος τὸν προβολικὸν ἄξονα ὑπὸ γωνίαν 30^0, πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς προβολῆς αὐτοῦ;

139) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐφ $(90^0+\tau)=-$ σφτ καὶ σφ$(90^0+\tau)$ $=-$ἐφτ.

140) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον, συνημίτονον καὶ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου $(\alpha+\beta+\gamma)$ ἐκ τῶν ὁμωνύμων τριγ. ἀριθμῶν τῶν τόξων α,β,γ.

141) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι α′) συν $3\alpha=4$ συν$^3\alpha-3$συνα β′) ἡμ $3\alpha=3$ημα-4ημ$^3\alpha$ καὶ γ′)

$$\text{ἐφ}3\alpha=\frac{3\text{ἐφ}\alpha-\text{ἐφ}^3\alpha}{1-3\text{ἐφ}^2\alpha}.$$

142) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡμ $2\alpha=\frac{1-\text{ἐφ}^2(45^0-\alpha)}{1+\text{ἐφ}^2(45^0-\alpha)}$.

143) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $1-\text{ἐφ}\omega=\frac{\sqrt{2}\,\text{ἡμ}(45^0-\omega)}{\text{συν}\,\omega}$.

144) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ βάσις ἔχει μῆκος 80,30 μ. ἡ δὲ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι $20^0 10' 35''$. Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ ἄλλαι πλευραὶ καὶ γωνίαι αὐτοῦ.

145) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου, οὗ ἡ βάσις εἶναι τὸ ἥμισυ ἑκατέρας τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ.

146) Ἀνύσματος ἡ ἐπὶ ἄξονα προβολὴ εἶναι 3,4 μ. ἡ δὲ γωνία αὐτοῦ μετὰ τοῦ προβολ. ἄξονος εἶναι $25^0 18' 30''$. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος τούτου;

147) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς τόξου 40^0 περιφερείας ἥτις ἔχει ἀκτῖνα 12 μ.

148) Αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἔχουσι λόγον $\frac{2}{3}$. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι ἑκατέρας μετά τινος τῶν διαγωνίων.

149) Ἐὰν μεταξὺ στοιχείων τῶν τριγώνου ΑΒΓ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης

$\alpha = 2\beta \eta\mu \frac{A}{2}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.

150) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\beta = 47958$ μ., $A = 88^0 17'$ καὶ $B = 47^0$:

151) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\alpha = 78462$ μ, $\beta = 4962$μ καὶ $\Gamma = 12^0 42'$.

152) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\alpha = 15642$ μ., $\beta = 12923$. $\gamma = 8964$ μ.

153 Πόσα τρίγωνα ἔχουσιν $\alpha = 40$ μ., $\beta = 100$ μ. καὶ $A = 30^0$;

154) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἶναι ἴση πρὸς $\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$

155) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον δύο προσκειμένων πλευρῶν αὐτοῦ πολλαπλασιασθὲν καὶ ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας αὐτῶν.

ΤΕΛΟΣ

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Ἐν σελ.	6	καὶ στίχ.	35	ἀντὶ	με	γράφε	μεταξύ.
»	7	»	18	»	εἶναι αὐτὸ τὸ Δ	»	εἶναι τὸ δ ἢ αὐτὸ τὸ Δ.
»	27	»		»	$\frac{3}{5}$	»	$-\frac{3}{5}$
»	31	»	2	»	συν $127^0 = -$σφ 53^0	»	συν $127^0 = -$συν53^0.
»	32	»	28	»	$\chi\hat{o}\chi_1 = \psi\hat{o}\psi$,	»	$\chi\hat{o}\chi_1 = \psi\hat{o}\psi_1$,
»	33	»		»	ἐν τῇ 6′ τῶν ἰσοτήτων (20)	»	ἐν τῇ ἰσότητι (20)
»	42	»	22	»	ΣΗΜ.	»	ΣΗΜ. α′.
»	46	»	27	»	$6 = 379{,}5^{\mu}$	»	$6 = 379{,}4^{\mu}$
»	46	»			$2B = 60^0 30' 40'$	»	$2B = 60^0 30' 40''$
»	47	»	22	»	Ὑπολοδισμὸς	»	Ὑπολογισμὸς
»	2	»	16	»	λογτ $= 3{,}75831$	»	λογτ $= 3{,}75583$

Σημ. Τὰ πλεῖστα τῶν εἰρημένων σφαλμάτων φέρονται εἰς τινα μόνον ἀντίτυπα.

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ

1) Εὐθύγραμμος τριγωνομετρία (μεγάλη) πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Πρακτικῶν Λυκείων, τῶν σπουδαστῶν τῶν Μαθηματικῶν καὶ Φυσικῶν Ἐπιστημῶν, τῶν μαθητῶν τῶν στρατιωτικῶν σχολῶν καὶ τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς ἀνωτάτας σχολὰς τοῦ Πολυτεχνείου, τὴν Γεωπονικὴν καὶ Δασονομικὴν σχολήν. Ἡ μόνη ἐγκεκριμένη (ὑπὸ τύπωσιν).

2) Πρακτικὴ Γεωμετρία πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν καὶ μαθητριῶν τῶν Ἑλληνικῶν καὶ ἀστικῶν σχολείων, ἐγκεκριμένη καὶ μεθοδικωτάτη.