ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ καθηγητοῦ τῶν μαθηματικῶν
ἐν τῷ Πρακτικῷ Λυκείῳ Ἀθηνῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΚΟΣΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

ΗΤΟΙ

Λύσεις τῶν ἐν τῇ Τριγωνομετρίᾳ καὶ Κοσμογραφίᾳ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

Περιεχομένων ἀσκήσεων.

ΕΚΔΟΣΙΣ Α΄.

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΤΖΑΚΑ & ΣΤΕΦ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ
ΑΘΗΝΑΙ.— 81 Α Πανεπιστημίου—81 Α.
1924

Πᾶν ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τῶν ἐκδοτῶν.

ΕΚΔΟΤΙΚΟΝ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
Ν. ΤΖΑΚΑ & Σ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΤΥΠΟΙΣ: Α. ΦΡΑΝΤΖΕΣΚΑΚΗ καὶ Α. ΚΑΪΤΑΤΖΗ
Ὁδὸς Σατωβριάνδου 4.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ παντελὴς παρ᾽ ἡμῖν ἔλλειψις βιβλίου ἀσκήσεων Τριγωνομετρίας καὶ Κοσμογραφίας καὶ ἡ ἐπιθυμία νὰ διευκολύνωμεν τοὺς μαθητὰς εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐν ἀμφοτέραις ταῖς ἡμετέραις Τριγωνομετρίαις (τῶν στοιχείων καὶ τῆς μεγάλης) καὶ τῇ Κοσμογραφίᾳ περιεχομένων ἀσκήσεων ἤγαγεν ἡμᾶς εἰς τὴν ἀπόφασιν νὰ ἐκδόσωμεν τὰς λύσεις τῶν εἰρημένων ἀσκήσεων. Ἐν τῷ ἔργῳ τούτῳ κατὰ τὸ πλεῖστον ὑποδεικνύεται ἐν γενικαῖς γραμμαῖς ἡ πορεία, ἣν δέον νὰ ἀκολουθήσῃ ὁ μαθητὴς πρὸς λύσιν ἑκάστης ἀσκήσεως, ἀφιεμένων τῶν λεπτομερειῶν διὰ τὴν αὐτενέργειαν τῶν μαθητῶν. Οὕτω δὲ τὸ μὲν ἀποφεύγομεν τὸν κίνδυνον νὰ παρασύρωμεν τοὺς μαθητὰς εἰς μηχανικὴν τῶν λύσεων ἀπομνημόνευσιν τὸ δὲ διὰ τῆς μικρᾶς βοηθείας, ἣν παρέχομεν αὐτοῖς, καθιστῶμεν δυνατὴν τὴν λύσιν πλειόνων ἀσκήσεων καὶ μείζονα ἕνεκα τούτου προσαρμογὴν αὐτῶν καὶ οἰκειότητα πρὸς τὰς μαθηματικὰς μεθόδους. Χάριν δὲ συντομίας ἀναγράφονται μόνον οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἀσκήσεων, πλὴν εὐαρίθμων ἐσφαλμένως διατυπουμένων ἐν τῇ Τριγωνομετρίᾳ, ὧν ἀναγράφεται ἡ ὀρθὴ διατύπωσις. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον παραλείπονται καὶ τὰ σχήματα, ὧν ἡ κατασκευὴ δὲν παρουσιάζει δυσκολίας, ὡς καὶ ἐκεῖνα, ἅτινα περιέχονται εἰς τὰ εἰρημένα συγγράμματά μου, εἰς ἃ γίνονται αἱ προσήκουσαι παραπομπαί.

Ὁ συγγραφεὺς

ΜΕΡΟΣ Α'.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

[Οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἀσκήσεων τῆς (μικρᾶς) γυμνασιακῆς Τριγωνομετρίας εὑρίσκονται ἐντὸς ἀγκυλῶν. Ὁμοίως ἐντὸς ἀγκυλῶν εὑρίσκονται καὶ αἱ παραπομπαὶ εἰς τὴν ἰδίαν μικρὰν Τριγωνομετρίαν. Π. χ. ἡ ὑπ' ἀριθμοὺς 4[130] ἄσκησις φέρει ἐν μὲν τῇ μεγάλῃ Τριγωνομετρίᾳ τὸν ἀριθμὸν 4 ἐν δὲ τῇ μικρᾷ τὸν ἀριθμὸν 130].

1. [1]—Κατὰ τὴν ἰδ. (§ 10) εἶναι $(\overline{AB})+(\overline{B\Gamma})+\dots+(\overline{\Lambda M})=(\overline{AM})$, ἐξ ἧς εὐκόλως προκύπτει ὅτι $(\overline{AB})+(\overline{B\Gamma})+\dots+(\overline{\Lambda M})+(\overline{MA})=(\overline{AM})+(\overline{MA})=0$.

Σημ. Μερικὴ περίπτωσις ταύτης εἶναι ἡ ἰσότης $(\overline{AB})+(\overline{B\Gamma})+(\overline{\Gamma A})=0$, ἥτις ἀποδεικνύεται ὁμοίως [§ 5].

2. [2]—Κατὰ τὴν ἰδ. (§ 10 [§ 5]) εἶναι $(\overline{\Gamma A})=(\overline{\Gamma M})+(\overline{MA})$, $(\overline{\Gamma B})=(\overline{\Gamma M}+\overline{MB})$, ἐξ ὧν διὰ προθέσεως κατὰ μέλη προκύπτει ὅτι $(\overline{\Gamma A})+(\overline{\Gamma B})=2(\overline{\Gamma M})+(\overline{MA})+(\overline{MB})$. Ἐπειδὴ τοῦ Μ ὄντος μέσου τοῦ $\overline{AB}$ τὰ $\overline{MA}$ καὶ $\overline{MB}$ εἶναι ἀντίθετα ἀνύσματα, αὕτη γίνεται $(\overline{\Gamma A})+(\overline{\Gamma B})=2(\overline{\Gamma M})$.

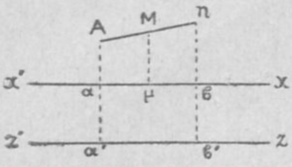
3. [3]—Ἐπειδὴ $(\overline{AB})=(\overline{AM}+\overline{MB})$, $(\overline{A\Gamma})=(\overline{AM})+(\overline{M\Gamma})$ καὶ $(\overline{M\Gamma})=-(\overline{MB})$, ἕπεται ὅτι $(\overline{AB})(\overline{A\Gamma})=[(\overline{AM})+(\overline{MB})][(\overline{AM})-(\overline{MB})]=(\overline{AM})^2-(\overline{MB})^2=(\overline{AM})^2-(\overline{BM})^2$.—

4. [130].—Ἐπειδὴ $(\overline{AM})=(\overline{AO})+(\overline{OM})$, $(\overline{BM})=(\overline{BO})+(\overline{OM})$ καὶ καθ' ὑπόθεσιν $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=-\dfrac{\mu}{\nu}$ ἕπεται ὅτι $\dfrac{(\overline{AO})+(\overline{OM})}{(\overline{BO})+(\overline{OM})}=-\dfrac{\mu}{\nu}$, ἐξ ἧς εὐκόλως προκύπτει ἡ ἀποδεικτέα ἰσότης.

5. —Ἐπειδὴ $(\overline{B\Gamma})=(\overline{B\Delta})+(\overline{\Delta\Gamma})$, $(\overline{\Gamma A})=(\overline{\Gamma\Delta}+\overline{\Delta A})$, $(\overline{AB})=(\overline{A\Delta})+(\overline{\Delta B})$ ἕπεται ὅτι: $(\overline{B\Gamma})(\overline{A\Delta})+(\overline{\Gamma A})(\overline{B\Delta})+(\overline{AB})(\overline{\Gamma\Delta})=(\overline{B\Delta})(\overline{A\Delta})+(\overline{\Delta\Gamma})(\overline{A\Delta})+(\overline{\Gamma\Delta})(\overline{B\Delta})+(\overline{\Delta A})(\overline{B\Delta})+(\overline{A\Delta})(\overline{\Gamma\Delta})+(\overline{\Delta B})(\overline{\Gamma\Delta})$

$= (\overline{B\Delta})\ [(\overline{A\Delta}) + (\overline{\Delta A})] + (\overline{A\Delta})[(\overline{\Delta \Gamma}) + (\overline{\Gamma\Delta})] + (\overline{\Gamma\Delta})[(\overline{B\Delta}) + (\overline{\Delta B})] = 0.$

6.[4].—Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον αα′6′6 (Σχ. 1) εἶναι ὀρθογώνιον, τὰ ἀνύσματα α6 καὶ α′6′ εἶναι ἐφαρμόσιμα· εἶναι δὲ ταῦτα καὶ ὁμόρροπα, διότι τὰ σημεῖα 6 καὶ 6′ κεῖνται ἀμφότερα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς Αα′. Ὥστε τὰ ἀνύσματα ταῦτα εἶναι ὁμορρόπως ἴσα.



(Σχ. 1)·

7.[5].—Ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσον ἀνύσματος ΑΜ (Σχ. 1), τὰ $\overline{AM}$ καὶ $\overline{MB}$ εἶναι ὁμορρόπως ἴσα καὶ κατ' ἀκολουθίαν καὶ αἱ προβολαὶ αὐτῶν αμ, μ6 εἶναι ἀνύσματα ὁμορρόπως ἴσα καὶ τὸ μγ ὅθεν εἶναι μέσον τοῦ α6, ἄρα κατασκευάζεται, καθ' ὃν ἡ γεωμετρία διδάσκει τρόπον.

8.[131].—Ἐὰν εἶναι μ ἡ προβολὴ τοῦ Μ, θὰ εἶναι $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{\alpha\mu}}{\overline{\mu 6}}$ (§

12.[§ 6] Α′). Ἐπειδὴ δὲ καθ' ὑπόθεσιν εἶναι $\frac{\overline{AM}}{\overline{MA}} = \frac{1}{4}$, θὰ εἶναι

καὶ $\frac{\overline{\alpha\mu}}{\overline{\mu 6}} = \frac{1}{4}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν πρὸς ὁρισμὸν τῆς θέσεως τοῦ μ ἀρκεῖ νὰ διαιρεθῇ τὸ ἄνυσμα α6 εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον 1:4.

9.—Κατὰ τὴν ἴδ. Γ′ (§ 12) τὸ ζητούμενον μῆκος εἶναι $0{,}12^{\mu}.\ 0{,}05 = 0{,}006\mu$.

10.—Ἐὰν κληθῇ χ ὁ ζητούμενος συντελεστής, θὰ εἶναι (§ 12Γ′) $0{,}6 = 1{,}20\chi$, ἄρα $\chi = \frac{0.6}{1{,}20} = 0{,}5\mu$.

11.—Ἐὰν $\overline{O\Theta}$ εἶναι τὸ διευθύνον ἄνυσμα τοῦ α′. τῶν παραλλήλων ἀξόνων, ἡ προβολὴ αὐτοῦ οθ ἐπὶ τὸν ἕτερον εἶναι ἄνυσμα ὁμορρόπως ἴσον ἐκείνῳ, ἄρα ὁ ζητούμενος συντελεστὴς προβολῆς, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς $(\overline{o\theta})$ εἶναι $\frac{\overline{o\theta}}{O\Theta} = \frac{\overline{O\Theta}}{O\Theta} = 1.$

12.—Τοῦ διευθύνοντος ἀνύσματος ΟΘ προβολὴ ἐπὶ τὸν ἕτερον ἄξονα εἶναι σημεῖον καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἔχει μῆκος μηδέν, ὥστε ὁ ζητούμενος συντελεστὴς προβολῆς εἶναι 0.

13.[132].—Ἐὰν α, 6, γ εἶναι κατὰ σειρὰν αἱ ἐπί τινα ἄξονα προβολαὶ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ, ἡ προβολὴ μ τοῦ μέσου Μ τῆς ΒΓ κεῖται εἰς τὸ μέσον τοῦ $\beta\gamma$ (ἄσκ. 7). Ἐπειδὴ δέ, ὡς ἡ γεωμ. διδάσκει, τὸ κοινὸν σημεῖον Δ τῶν διαμέσων εἶναι τοιοῦτον ὥστε $\frac{\overline{\mathrm{A}\Delta}}{\overline{\Delta\mathrm{M}}}=\frac{2}{1}$ καὶ (§ 12 [§ 6] Α')

$\frac{\overline{\mathrm{A}\Delta}}{\overline{\Delta\mathrm{M}}}=\frac{\overline{\alpha\delta}}{\overline{\delta\mu}}$, ἕπεται ὅτι $\frac{\overline{\alpha\delta}}{\overline{\delta\mu}}=\frac{2}{1}$. Τὸ δ ὅθεν ὁρίζεται, ἂν διαιρεθῇ τὸ $\overline{\alpha\mu}$ εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον 2:1.

14.—Ἐὰν β καὶ γ εἶναι αἱ προβολαὶ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ, ἡ ζητουμένη προβολὴ εἶναι (§ 13 Γ')
$(\overline{\mathrm{A}\beta})+(\overline{\beta\gamma})+(\overline{\gamma\mathrm{A}})=(\overline{\mathrm{A}\gamma})+(\overline{\gamma\mathrm{A}})=0.$

15.—Ἐὰν ληφθῇ ἡ ΑΓ ὡς προβολικὸς ἄξων, τὸ ζητούμενον εἶναι (§ 13 Γ') προβ. $(\overline{\mathrm{AB}})+$προβ. $(\overline{\mathrm{B\Gamma}})+$προβ. $(\overline{\mathrm{\Gamma A}})=0+(\overline{\mathrm{A\Gamma}})+(\overline{\mathrm{\Gamma A}})=0.$

16.—Ἐὰν α,β,γ,δ εἶναι αἱ προβολαὶ τῶν κορυφῶν τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, θὰ εἶναι (§ 12 Γ') $(\overline{\mathrm{AB}})\lambda_1=(\overline{\alpha\beta})$ $(\overline{\mathrm{B\Gamma}})\lambda_2=(\overline{\beta\gamma})$, $(\overline{\Gamma\Delta})\lambda_3=(\overline{\gamma\delta})$ καὶ $(\overline{\Delta\mathrm{A}})\lambda_4=(\overline{\delta\alpha})$. Ὅθεν $(\overline{\mathrm{AB}})\lambda_1+(\overline{\mathrm{B\Gamma}})\lambda_2+(\overline{\Gamma\Delta})\lambda_3+(\overline{\Delta\mathrm{A}})\lambda_4=(\overline{\alpha\beta})+(\overline{\beta\gamma})+(\overline{\gamma\delta})+(\overline{\delta\alpha})=0.$ (ἄσκ. 1).

17.—Κατὰ τὴν ἀναλογίαν $\frac{\mu}{180}=\frac{\beta}{200}$ εἶναι $\frac{30}{180}=\frac{\beta}{200}$, ὅθεν $\beta=33\frac{1}{3}$ γ.

18.—Ὁμοίως εἶναι $\frac{\mu}{180}=\frac{50}{200}$ ὅθεν $\mu=45^\circ$.

19.— » » $\frac{60}{180}=\frac{\alpha}{\pi}$ ὅθεν $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

20.— » » $\frac{\mu}{180}=\frac{\frac{5\pi}{3}}{\pi}=\frac{5}{3}$, ὅθεν $\mu=300^\circ$.

21.— » » $\frac{30\frac{1}{4}}{180}=\frac{\alpha}{\pi}$, ὅθεν $\alpha=\frac{121\pi}{720}$.

22.[6 καὶ 7].—Ἔστω Α ἡ κοινὴ τῶν τόξων ἀρχή. α') Διχοτομοῦντες τὸ α'. θετικὸν τεταρτημόριον ΑΒ εὑρίσκομεν τὸ πέρας Μ τοῦ τόξου 45°.

β') Ἐπειδὴ $45^\circ+135^\circ=180^\circ$, πέρας τοῦ τόξου 135° εἶναι τὸ ἕτερον ἄκρον Μ' τῆς χορδῆς ΜΜ', ἥτις εἶναι παράλληλος τῇ ΑΑ'.

γ') Ἐπειδὴ $225^\circ = 45^\circ + 180^\circ$, πέρας τοῦ τόξου 225° εἶναι τὸ ἕτερον ἄκρον M'' τῆς διὰ τοῦ M ἀγομένης διαμέτρου.

δ') Τῶν τόξων 45° καὶ -45° ὄντων ἀντιθέτων, πέρας τοῦ τόξου -45° εἶναι τὸ M''' συμμετρικὸν τοῦ M πρὸς τὴν διάμετρον AA'.

ε') Τοῦ -225° πέρας εἶναι τὸ M' συμμετρικὸν τοῦ M'' πρὸς τὴν AA'.

ϛ') Ἐπειδὴ $405^\circ = 45^\circ + 360^\circ$, τὰ τόξα 45° καὶ 405° ἔχουσι τὸ αὐτὸ πέρας M.

23. [8, 9, καὶ 10].—Διαιρουμένης τῆς ὀρθῆς γωνίας AOB εἰς τρία ἴσα μέρη, ὡς ἡ γεωμετρία διδάσκει (1), ὁρίζεται τὸ πέρας τοῦ τόξου 30°. Λαμβάνοντες εἶτα τούτου τὸ συμμετρικὸν πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας AOB ὁρίζομεν τὸ πέρας τοῦ τόξου 60° καὶ εἶτα ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν.

24.—Ἐπειδὴ τὸ ἐλ. θετικὸν τόξον AA' ἴσον ὂν θετικῇ ἡμιπεριφερείᾳ ἔχει μέτρον π, ἡ ζητουμένη γενικὴ μορφὴ τῶν μέτρων τῶν τόξων AA' εἶναι (§ 24 Α') $2K\pi + \pi = (2K+1)\pi$.

25.—α') Τοῦ ἐλ. θετικοῦ τόξου AB ἔχοντος μέτρου $\frac{\pi}{2}$, ἡ ζητουμένη γενικὴ μορφὴ εἶναι $2K\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{(4K+1)\pi}{2}$.

β') Τοῦ ἐλ. θετικοῦ τόξου AB' ἔχοντος μέτρον $\frac{3\pi}{2}$, ἡ ζητουμένη γενικὴ μορφὴ εἶναι $2K\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{(4K+3)\pi}{2}$.

26.—α') Τοῦ ἐλ. θετικοῦ τόξου $A\Delta$ ἔχοντος μέτρον $\frac{\pi}{4}$, ἡ ζητουμένη γενικὴ μορφὴ εἶναι $2K + \pi\frac{\pi}{4} = \frac{(8K+1)\pi}{4}$.

β') Τοῦ ἐλ. θετικοῦ τόξου ἔχοντος μέτρον $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$, ἡ ζητουμένη γενικὴ μορφὴ εἶναι $2K\pi + \frac{5\pi}{4} = \frac{(8K+5)\pi}{4}$.

27.—Ἐὰν τ εἶναι τὸ μέτρον τοῦ ἐλ. θετικοῦ τόξου AM, τὸ μέτρον παν-

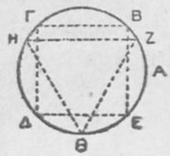
(1) Ὅρα Πρακτικήν μου Γεωμετρίαν (Σελ. 74).

τὸς ἄλλου τόξου ΑΜ εἶναι τῆς μορφῆς $2K\pi+\tau$ (§ 24 Α′.) καὶ κατ' ἀκολουθίαν :

α′) Τὸ μέτρον παντὸς τόξου $\frac{\overline{AM}}{4}$ εἶναι $\frac{2K\pi+\tau}{4}=K\frac{\pi}{2}+\frac{\tau}{4}$.

Ἐὰν δὲ Β εἶναι τὸ πέρας τοῦ τόξου $\frac{\tau}{4}$ καὶ ΒΔ, ΓΕ εἶναι δύο κάθετοι διάμετροι, εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ εἰς $K=1,2,3,4,5,....$ ἀντιστοιχοῦντα τόξα, ὧν μέτρα $\frac{\pi}{2}+\frac{\tau}{4}$, $2\frac{\pi}{2}+\frac{\tau}{4}$, $3\frac{\pi}{2}+\frac{\tau}{4}$, $4\frac{\pi}{2}+\frac{\tau}{4}$, $5\frac{\pi}{2}+\frac{\tau}{4}$,....ἔχουσι πέρατα τὰ ἄκρα Γ, Δ, Ε, Β τῶν εἰρημένων διαμέτρων ἅτινα εἶναι κορυφαὶ τοῦ τετραγώνου ΒΓΔΕ. Ὁμοίως κατανοοῦμεν ὅτι τὰ εἰς $K=-1,-2,-3$ κτλ. ἀντιστοιχοῦντα τόξα ἔχουσι πέρατα τὰ Ε, Δ, Γ, Β.

β′) Τὸ μέτρον παντὸς τόξου $\frac{AM}{3}$ εἶναι $\frac{2K\pi+\tau}{3}$ $=K\frac{2\pi}{3}+\frac{\tau}{3}$. Ἐὰν δὲ Ζ εἶναι τὸ πέρας τοῦ $\frac{\tau}{3}$ καὶ ΖΗΘ εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον, ἕκαστον τῶν τόξων ΖΗ, ΗΘ, ΘΖ εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς περιφερείας καὶ ἔχει μέτρον $\frac{2\pi}{3}$· ἄρα τὰ εἰς $K=1,2,3,...$ ἀντιστοιχοῦντα τόξα $\frac{2\pi}{3}+\frac{\tau}{3}$, $2\frac{2\pi}{3}+\frac{\tau}{3}$ κτλ. ἔχουσι πέρατα τὰ Ζ,Η,Θ· ὁμοίως καὶ τὰ $-\frac{2\pi}{3}+\frac{\tau}{3}$, $-2\frac{2\pi}{3}+\frac{\tau}{3}$, $-3\frac{2\pi}{3}+\frac{\tau}{3}$ κτλ. ἔχουσι πέρατα τὰ Θ, Η, Ζ.



(Σχ. 2).

28.—Ἡ ὀρθὴ γωνία βαίνει ἐπὶ τεταρτημορίου, ὅπερ ἔχει μέτρον $\frac{\pi}{2}$, ἄρα (§ 29) καὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας τὸ μέτρον εἶναι $\frac{\pi}{2}$.

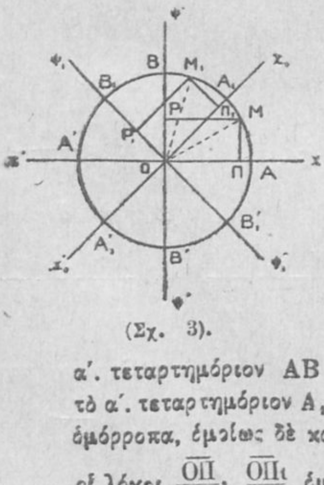
29.—Τὸ εἰς τὴν ἐλαχ. τῶν θετικῶν γωνιῶν $\widehat{OA,OA'}$ ἀντιστοιχοῦν τόξον ἔχει μέτρον π, ἄρα (§ 29) τοῦτο εἶναι καὶ τὸ μέτρον τῆς εἰρημένης γωνίας.

30.—Ἂν μία τούτων ἔχει μέτρον ω, τὸ εἰς ταύτην ἀντιστοιχοῦν τόξον θὰ ἔχῃ μέτρον ω. Πᾶν δὲ τόξον ἀντιστοιχοῦν εἰς οἱανδήποτε τῶν γωνιῶν $\widehat{OA,OB}$ τὰ αὐτὰ μετὰ τοῦ προηγουμένου ἔχον ὁμώνυμα ἄκρα, θὰ ἔχῃ μέτρον τῆς μορφῆς $2K\pi+\omega$, κατ' ἀκολουθίαν (§ 29) καὶ τὸ μέτρον πάσης γωνίας $\widehat{OA,OB}$ θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν $2K\pi+\omega$.

31.[133].—Διχοτομοῦμεν τὸ τόξον AB καὶ ὁρίζομεν τὸ μέσον A_1 αὐτοῦ, ὅπερ θὰ εἶναι ἡ νέα τῶν τόξων ἀρχή. Ἄγομεν εἶτα τὴν ἀκτῖνα OA_1, ἥτις θὰ εἶναι τὸ διευθύνον ἄνυσμα τοῦ περιέχοντος αὐτὴν ἄξονος $X'_1A_1\chi_1$, λαμβάνομεν εἶτα κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν τόξον A_1B_1 ἴσον πρὸς ἓν τεταρτημόριον καὶ ἄγομεν τὴν ἀκτῖνα OB_1. Αὕτη θὰ εἶναι τὸ διευθύνον ἄνυσμα τοῦ περιέχοντος αὐτὴν ἄξονος $\psi_1 O\psi_1$.

32.[134].—Διαιρουμένου τοῦ τόξου AB εἰς τρία ἴσα μέρη (ὅρα ἄσκ. 23) ὁρίζεται ἡ νέα τῶν τόξων ἀρχὴ καὶ εἶτα ἐργαζόμεθα ὡς προηγουμένως.

33.[11].—Ἔστω AM τόξον τι, $\overline{O\Pi}$ τὸ συνημίτονον αὐτοῦ, A_1M_1 νέα θέσις αὐτοῦ καὶ $O\Pi_1$ τὸ συνημίτονον αὐτοῦ. Τῶν τόξων AM καὶ A_1M_1 ὄντων ἴσων καὶ αἱ γωνίαι AOM καὶ A_1OM_1 εἶναι ἴσαι, ἄρα καὶ τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΜΟΠ καὶ $M_1O\Pi_1$ εἶναι ἴσα· ἄρα αἱ πλευραὶ ΟΠ καὶ $O\Pi_1$ αὐτῶν εἶναι ἴσαι. Ἀλλὰ τὰ ἀνύσματα $\overline{O\Pi}$ καὶ $\overline{O\Pi_1}$ εἶναι ἢ ἀμφότερα ὁμόρροπα ἢ ἀμφότερα ἀντίρροπα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα διευθύνοντα ἀνύσματα $\overline{OA}$ $\overline{OA_1}$, διότι τοῦ τόξου AM λήγοντος εἰς τὸ α΄. τεταρτημόριον AB καὶ τὸ ἴσον αὐτῷ A_1M_1 θὰ λήγῃ εἰς τὸ α΄. τεταρτημόριον A_1B_1, ἄρα τὰ ἀνύσματα ΟΠ καὶ ΟΑ εἶναι ὁμόρροπα, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ $\overline{O\Pi_1}$, $\overline{OA_1}$ εἶναι ὅθεν ἀμφότεροι οἱ λόγοι $\frac{\overline{O\Pi}}{\overline{OA}}$, $\frac{\overline{O\Pi_1}}{\overline{OA_1}}$ ὁμόσημοι· ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ ἀπολύτως



(Σχ. 3).

ἴσοι, ἕπεται ὅτι $(\overline{O\Pi})=(\overline{O\Pi_1})$. Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ ὅταν τὸ Μ εὑρίσκηται εἰς οἱονδήποτε τῶν ἄλλων τεταρτημορίων.

34.— Τοῦ πέρατος Μ τοῦ τόξου διαγράφοντος τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΒ'Α, ὁ πούς Π διαγράφει τὸ ἄνυσμα ΑΑ' καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ συνημίτονον ἐλαττοῦται ἀπὸ $+1$ μέχρι -1, καθιστάμενον ἐν τῷ μεταξὺ 0, ὅταν $(\widehat{AM})=90^0$. Ἐφ' ὅσον δὲ τὸ Μ διαγράφει τὴν ἡμιπεριφέρειαν Α'ΒΑ, τὸ Π διαγράφει τὸ Α'Α καὶ τὸ συνημίτονον αὐξάνει ἀπὸ -1 ἕως $+1$, καθιστάμενον ἐν τῷ μεταξὺ 0, ὅταν $(\widehat{AM})=-270^0$. Τὴν τοιαύτην μεταβολὴν συνοψίζομεν ἐν τῷ ἀκολούθῳ πίνακι:

τόξον	0^0	ἐλ.	$-\frac{\pi}{2}$	ἐλ.	$-\pi$	ἐλ.	$-\frac{3\pi}{2}$	ἐλ.	-2π
συνημίτονον	$+1$	ἐλ.	0	ἐλ.	-1	αὐξ.	0	αὐξ.	$+1$

35.— Θέσωμεν χάριν συντομίας $1+\text{συν}\chi=\psi$. Κατὰ τὸν πίνακα τῆς σελίδος 33, τοῦ τόξου χ διατρέχοντος συνεχῶς τὰς τιμὰς ἀπὸ 0 ἕως $+2\pi$, τὸ συνχ διατρέχει τὰς τιμὰς $+1$...ἐλ...0...ἐλ...-1 ....αὐξ....0....αὐξ.... $+1$, ἑπομένως ψ διατρέχει τὰς τιμὰς 2...., ἐλ...1....ἐλ....0....αὐξ...1... αὐξ....2. Διὰ τιμὰς τοῦ χ μείζονας τοῦ 2π, τοῦ συνχ τὰς αὐτὰς λαμβάνοντος τιμὰς καὶ ἡ συνάρτησις ψ λαμβάνει τὰς προειρημένας τιμὰς κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν. Ἐὰν τὸ τόξον χ ἐλαττοῦται ἀπὸ 0 ἕως -2π, τὸ συνχ λαμβάνει τὰς ἐν τῷ πίνακι τῆς ἀσκ. 34 τιμὰς καὶ ἑπομένως ἡ ψ λαμβάνει τὰς τιμὰς $+2$.. ἐλ....1...ἐλ... 0...αὐξ....1...αὐξ....$+2$. Διὰ τιμὰς τοῦ χ μικροτέρας τοῦ -2π ἡ ψ λαμβάνει κατὰ σειρὰν τὰς αὐτὰς τιμάς.

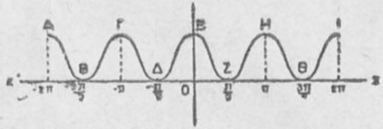
Πίναξ

χ	...-2π...		$-\frac{3\pi}{2}$		...$-\pi$...		$-\frac{\pi}{2}$		...0...		$\frac{\pi}{2}$		...π...		$\frac{3\pi}{2}$		...2π..
συνχ	$+1$	ἐλ.	0	ἐλ.	-1	αὐξ	0	αὐξ.	$+1$	ἐλ.	0	ἐλ.	-1	αὐξ	0	αὐξ.	$+1$
$\psi=1+$συνχ	$+2$	ἐλ.	1	ἐλ.	0	αὐξ.	1	αὐξ	$+2$	ἐλ.	$+1$	ἐλ.	0	αὐξ.	1	αὐξ.	$+2$

36.—Ἂς τεθῇ $\text{συν}^2\chi=\psi$ καὶ νοηθῇ τὸ τόξον χ αὐξανόμενον ἀπὸ -2π ἕως 0. Ἐφ' ὅσον τὸ χ διατρέχει τὰς τιμὰς -2π ἕως $-\frac{3\pi}{2}$, τὸ συνχ ἀπὸ $+1$ ἀρχόμενον ἐλαττοῦται ἀπαύστως μέχρι τοῦ 0 καὶ κατ' ἀκολουθίαν καὶ ἡ συνάρτησις ψ ἐλαττοῦται ἀπαύστως ἀπὸ $+1$ ἕως 0. Τοῦ χ διατρέχοντος τὰς τιμὰς $-\frac{3\pi}{2}$ ἕως $-\pi$, τὸ συνχ βαίνει ἀπὸ 0 ἐλαττούμενον μέχρι -1, ἄρα ψ αὐξάνει ἀπὸ 0 ἕως $+1$. Οὕτως ἐξακολουθοῦντες καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

χ	-2π	αὐξ.	$-\frac{3\pi}{2}$	αὐξ.	$-\pi$	αὐξ.	$-\frac{\pi}{2}$	αὐξ.	0	αὐξ.	$+\frac{\pi}{2}$	αὐξ.	π	αὐξ.	$+\frac{3\pi}{2}$	αὐξ.	$+2\pi$
συνχ	+1	ἐλ.	0	ἐλ.	−1	αὐξ.	0	αὐξ.	+1	ἐλ.	0	ἐλ.	−1	αὐξ.	0	αὐξ.	+1
$\psi=\sigma\upsilon\nu^2\chi$	+1	ἐλ.	0	αὐξ.	1	ἐλ.	0	αὐξ.	+1	ἐλ.	0	αὐξ.	+1	ἐλ.	0	αὐξ.	+1

Ἡ τοιαύτη μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $\psi=\sigma\upsilon\nu^2\chi$ αἰσθητοποιεῖται διὰ τῆς καμπύλης ΑΒΓΔΕΖΗΘΙ (Σχ. 4).



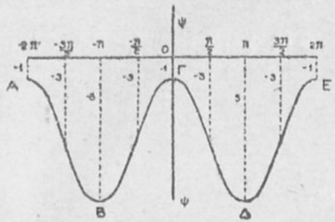
(Σχ. 4).

37.—Ἐργαζόμενοι ὡς προηγουμένως καταρτίζομεν τὸν ἑπόμενον πίνακα:

χ	-2π	αὐξ.	$-\frac{3\pi}{2}$	αὐξ.	$-\pi$	αὐξ.	$-\frac{\pi}{2}$	αὐξ.	0	αὐξ.	$\frac{\pi}{2}$	αὐξ.	π	αὐξ.	$\frac{3\pi}{2}$	αὐξ.	2π
συνχ	+1	ἐλ.	0	ἐλ.	−1	αὐξ.	0	αὐξ.	+1	ἐλ.	0	ἐλ.	−1	αὐξ.	0	αὐξ.	+1
2συνχ	2	ἐλ.	0	ἐλ.	−2	αὐξ.	0	αὐξ.	+2	ἐλ.	0	ἐλ.	−2	αὐξ.	0	αὐξ.	+2
$\psi=2\sigma\upsilon\nu\chi-3$	−1	ἐλ.	−3	ἐλ.	−5	αὐξ.	−3	αὐξ.	−1	ἐλ.	−3	ἐλ.	−5	αὐξ.	−3	αὐξ.	−1

Ἡ τοιαύτη μεταβολὴ παρίσταται ὑπὸ τῆς καμπύλης ΑΒΓΔΕ (Σχ. 5).

38.—[12]. Ἔστω A_1M_1 ἑτέρα θέσις τοῦ τόξου ΑΜ (Σχ. 3). Ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΟΠΜ καὶ $O\Pi_1M_1$ ἕπεται ὅτι τὰ ΠΜ καὶ Π_1M_1 εἶναι ἐφαρμόσιμα· ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἀμφότερα ὁμόρροπα ἢ ἀμφότερα ἀντίρροπα πρὸς τὰ διηθύνοντα ἀνύσματα ΟΒ καὶ OB_1, ἕπεται (ὅρα καὶ ἄσκ. 33) ὅτι $(\overline{\Pi M})=(\overline{M_1M_1})$ ὅ. ἔ.



(Σχ. 5).

39.—Τοῦ ἡμχ αὐξάνοντος ἢ ἐλαττουμένου καὶ ἡ παράστασις 1 + ἡμχ προφανῶς αὐξάνει ἢ ἐλαττοῦται· ἐὰν δὲ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν πίνακα τῶν μεταβολῶν τοῦ ἡμιτόνου (Σελ. 36) καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως $1+$ ἡμχ.

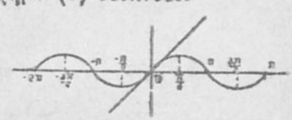
$$\begin{array}{l|l} \chi & 0 \ldots \text{αὐξ} \ldots \frac{\pi}{2} \ldots \text{αὐξ} \ldots \pi \ldots \text{αὐξ} \ldots \frac{3\pi}{2} \text{ αὐξ} \ldots 2\pi \\ \text{ἡμ}\chi & 0 \ldots \text{αὐξ} +1 \ldots \text{ἐλ} \ldots 0 \ldots \text{ἐλ} \ldots -1 \ldots \text{αὐξ} \ldots 0 \\ 1+\text{ἡμ}\chi & 1 \ldots \text{αὐξ} +2 \ldots \text{ἐλ} \ldots +1 \ldots \text{ἐλ} \ldots 0 \ldots \text{αὐξ} \ldots 1 \end{array}$$

40.—Νοήσωμεν τὸ πέρας Μ τοῦ τόξου (Σχ. 24 εὐθ. τριγ.) κινούμενον ἀπὸ τοῦ Α κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν. Ἐφ' ὅσον τὸ Μ διαγράφει τὸ τεταρτημόριον ΑΒ', ὁ ποὺς Ρ διαγράφει τὸ ἄνυσμα ΟΒ' καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἡμίτονον ἐλαττοῦται ἀπὸ 0 μέχρι -1, ἣν τιμὴν λαμβάνει, ὅταν $(\overset{\frown}{AM}) = -\frac{\pi}{2}$. Ἐφ' ὅσον δὲ τὸ Μ διαγράφει τὸ $\overset{\frown}{B'A'}$, τὸ Ρ διαγράφει τὸ $\overline{B'O}$ καὶ ἑπομένως τὸ ἡμίτονον αὐξάνει ἀπὸ -1 ἕως 0. Οὕτως ἐξακολουθοῦντες καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα.

$$\begin{array}{l|l} \text{τόξον } \chi & 0 \ldots \text{ἐλ} \ldots -\frac{\pi}{2} \text{ ἐλ} \ldots -\pi \ldots \text{ἐλ} \ldots -\frac{3\pi}{2} \text{ ἐλ} \ldots -2\pi \\ \text{ἡμ. } \chi & 0 \ldots \text{ἐλ} \ldots -1 \ldots \text{αὐξ} \ldots 0 \ldots \text{αὐξ} \ldots +1 \text{ ἐλ} \ldots 0 \end{array}$$

Τῇ βοηθείᾳ τοῦ πίνακος τούτου ἐπεκτείνεται πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἡ ἡμιτονοειδὴς καμπύλη, ὡς τὸ σχῆμα (6) δεικνύει.

41.[13].—α') Τὸ ἡμίτονον 18° εἶναι, ὡς γνωστόν, τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς τοῦ τόξου 36°, ἤτοι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν τριγ. κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου. Ἐπειδὴ δὲ ἡ πλευρὰ αὕτη ἔχει μῆκος $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,



(Σχ. 6).

ἕπεται ὅτι ἡμ. $18° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. β') Πρὸς εὕρεσιν τοῦ συν 18° ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου τοῦ τριγ. κύκλου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου. Πρὸς τοῦτο ἔχομεν ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ ἀπόστημα ψ εἶναι ἡ ἑτέρα τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθ. τριγώνου, οὗ ἡ μὲν ὑποτείνουσα εἶναι 1, ἡ δὲ ἑτέρα κάθετος πλευρὰ εἶναι $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

ἄρα $\psi^2 = 1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$, ἄρα συνχ$= \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

42.[135] — α′) Κατὰ τὰ γνωστὰ τὸ ἡμ 36^0 ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου $\left(\frac{360^0}{2.36}=5\right)$. Ἐπειδὴ δέ, ὡς ἡ Γεωμετρία διδάσκει, ἡ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου εἶναι $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$, ἕπεται ὅτι ἡμ $36^0=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

β′) Τὸ συν 36^0 εἶναι ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου, ἤτοι $συν^2 36^0=1-\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2=1-\frac{10-2\sqrt{5}}{16}=\frac{6+2\sqrt{5}}{16}$

ἄρα $συν\, 36^0=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}=\frac{\sqrt{1+5+2\sqrt{1.5}}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

43.[14]. – Στρεφομένου τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΟΜ (Σχ. 27 εὐθ. τριγ. [σχ. 22]) περὶ τὸ κέντρον Ο μέχρις οὗ τὸ τόξον ΑΜ καταλάβῃ ἑτέραν τινὰ θέσιν συστρέφεται καὶ ἡ ἐφαπτομένη ΑΓ χωρὶς νὰ μεταβάλῃ μέγεθος.

44.[15].—Κατασκευάζοντες τὴν διχοτόμον ΟΜ (Σχ. 27 εὐθ. τριγ. [σχ. 23]) τῆς γωνίας ΑΟΒ καὶ προεκτείνοντες αὐτὴν μέχρι τοῦ ἄξονος Z′Z ὁρίζομεν τὴν ἐφαπτομένην ΑΤ τοῦ τόξου $\widehat{AM}=45^0$. Ἐπειδὴ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΟΤ ἡ γωνία ΑΟΤ $=\frac{1}{2}$ ὀρθ. καὶ ἡ ΑΤΟ εἶναι ἐπίσης $\frac{1}{2}$ ὀρθ. ἄρα $(\overline{AT})=(\overline{OA})=+1$.

45 [16].—Ἐπειδὴ τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΟΑΤ καὶ ΟΜΓ ἔχουσι ΟΑ=ΟΜ καὶ τὴν γωνίαν ΑΟΜ κοινήν, εἶναι ἴσα, ἄρα ΑΤ=ΜΓ.

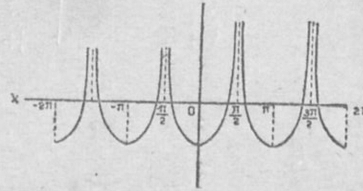
46. $\begin{array}{l} χ \\ ἐφχ \\ 1-ἐφχ \end{array}\left\{\begin{array}{l} 0^0 \ldots\, αὐξ \ldots\, 90^0 \ldots\, αὐξ \ldots\, 180^0 \ldots\, αὐξ \ldots\, 270^0 \ldots\, αὐξ \ldots\, 360^0 \\ 0 \ldots\, αὐξ \ldots \pm\infty \ldots\, αὐξ \ldots\, 0 \ldots\, αὐξ \ldots \pm\infty \ldots\, αὐξ \ldots\, 0 \\ 1 \ldots\, ἐλ \ldots \mp\infty \ldots\, ἐλ \ldots +1 \ldots\, ἐλ \ldots \mp\infty \ldots\, ἐλ \ldots +1 \end{array}\right.$

47. $\begin{array}{l} χ \\ ἐφχ \end{array}\left\{\begin{array}{l} 0 \ldots -90^0 \ldots -180^0 \ldots -270^0 \ldots -360^0 \\ 0 \ldots\, ἐλ \ldots \mp\infty \ldots\, ἐλ \ldots\, 0 \ldots\, ἐλ \ldots \mp\infty \ldots\, ἐλ \ldots\, 0 \end{array}\right.$

48. $\begin{array}{l|l} x & -2\pi \ldots \text{αὔξ} \ldots -\dfrac{3\pi}{2}\ \text{αὔξ} \ldots -\pi \ldots -\dfrac{\pi}{2} \ldots 0 \ldots \dfrac{\pi}{2} \ldots \pi \ldots -\dfrac{3\pi}{2} \ldots 2\pi \\ \text{εφ}x & 0 \ldots \text{αὔξ} \ldots \pm\infty \ldots \text{αὔξ} \ldots 0 \ldots \text{αὔξ} \ldots \pm\infty \ldots \text{αὔξ} \ldots 0 \ldots \text{αὔξ} \ldots \pm\infty\ \text{αὔξ} \ldots 0 \ldots \text{αὔξ} \ldots \pm\infty \ldots \text{αὔξ} \ldots 0 \\ \text{εφ}^2x & 0 \ldots \text{αὔξ} \ldots +\infty \ldots \text{ἐλ} \ldots 0 \ldots \text{αὔξ} \ldots +\infty \ldots \text{ἐλ} \ldots 0 \ldots \text{αὔξ} \ldots +\infty\ \text{ἐλ} \ldots 0 \ldots \text{αὔξ} \ldots +\infty \ldots \text{ἐλ} \ldots 0 \\ \varphi=\text{εφ}^2x-1 & -1 \ldots \text{αὔξ} \ldots +\infty \ldots \text{ἐλ} \ldots -1 \ldots \text{αὔξ} \ldots +\infty \ldots \text{ἐλ} \ldots -1 \ldots \text{αὔξ} +\infty \ldots \text{ἐλ} \ldots 1 \ldots \text{αὔξ} \ldots +\infty \ldots \text{ἐλ} \ldots -1 \end{array}$ (Σχ. 7).

49.[17].—Διχοτομοῦντες τὴν γωνίαν ΑΟΒ (Σχ. 31 εὐθ. τριγ. [σχ. 23]) καὶ προεκτείνοντες μέχρι τοῦ ἄξονος φ'φ τῶν συνεφαπτομένων ὁρίζομεν τὸ ἄνυσμα ΒΣ, ὅπερ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου

$(\overline{AM})=45^\circ$. Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{BO\Sigma} = \dfrac{1}{2}$ ὀρθ. καὶ ἡ $\Sigma=\dfrac{1}{2}$ὀρθ. ἄρα $(\overline{B\Sigma}) = (\overline{OB}) = +1$.

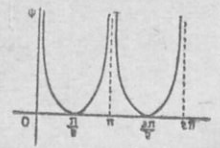


(Σχ. 7).

50.— Νὰ σπουδασθῇ κτλ. ἀπὸ 0° ἕως -360°.

$\begin{array}{l|l} x & 0 \ldots \text{ἐλ} \ldots -90^\circ \ldots \text{ἐλ} \ldots -180^\circ \ldots \text{ἐλ} \ldots -270^\circ \ldots \text{ἐλ} \ldots 360^\circ \\ \text{σφ}x & \pm\infty \ldots \text{αὔξ} \ldots 0 \ldots \text{αὔξ} \ldots \pm\infty \ldots \text{αὔξ} \ldots 0 \ldots \text{αὔξ} \ldots \pm\infty \end{array}$

51. $\begin{array}{l|l} x & 0 \ldots \text{αὔξ} \ldots \dfrac{\pi}{2}\ \text{αὔξ} \ldots \pi \ldots \text{αὔξ} \ldots \dfrac{3\pi}{2}\ \text{αὔξ} \ldots 2\pi \ldots \\ \text{σφ}x & +\infty \ldots \text{ἐλ} \ldots 0 \ldots \text{ἐλ} \ldots \mp\infty \ldots \text{ἐλ} \ldots 0 \ldots \text{αὔξ} \ldots +\infty \ldots \\ \text{σφ}^2x & +\infty \ldots \text{ἐλ} \ldots 0 \ldots \text{αὔξ} \ldots +\infty \ldots \text{ἐλ} \ldots 0 \ldots \text{αὔξ} \ldots +\infty \ldots \end{array}$ (Σχ. 8).



(Σχ. 8).

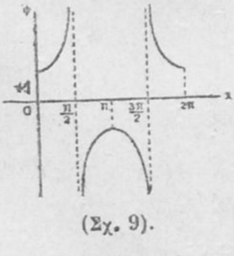
52.— Τοῦ πέρατος Μ τοῦ τόξου ΑΜ (Σχ 33 εὐθ. τριγ.) κινουμένου κατὰ τὴν ἀνάδρομον φορὰν μέχρι τοῦ Α τὸ σημεῖον Γ πλησιάζει πρὸς τὸ Α καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ τέμνουσα $(\overline{O\Gamma})$ βαίνει ἐλαττουμένη. Ὅταν δὲ τὸ Μ συμπέσῃ μετὰ τοῦ Α, καὶ τὸ Γ συμπίπτει μετ' αὐτοῦ, ἄρα τεμ.$0^\circ=+1$. Ἐὰν ἤδη τὸ Μ διαγράφῃ τὸ ΑΒ κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, τὸ Γ ἀπομακρύγεται τοῦ Α κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν καὶ συνεπῶς ἡ τέμνουσα τοῦ $\widehat{AM}$ βαίνει συνεχῶς καὶ ταχύτατα αὐξανομένη καὶ τοῦ τόξου τείνοντος πρὸς τὰς 90^{o}, αὕτη τείνει πρὸς τὸ $+\infty$. Καθ' ἣν δὲ στιγμὴν τὸ Μ ὑπερβαίνει τὸ Β, ἡ τέμνουσα μεταπηδᾷ εἰς τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον καὶ εἶτα τὸ Μ διαγράφοντος τὸ $\widehat{BA'}$ ἡ τέμνουσα αὐξάνει καὶ γίνεται -1, ὅταν $\widehat{AM}=180^{o}$. Οὕτως ἐξακολουθοῦντες καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα τῶν μεταβολῶν τῆς τεμνούσης.

$$\begin{array}{l|l} \chi & 0^{o} \ldots \text{αὐξ} \ldots 90^{o} \ldots \text{αὐξ} \ldots 180^{o} \ldots \text{αὐξ} \ldots 270^{o} \ldots \text{αὐξ} \ldots 360^{o} \\ & 0 \ldots\ldots \frac{\pi}{2} \ldots\ldots \pi \ldots\ldots \frac{3\pi}{2} \ldots\ldots 2\pi \\ \text{τεμ. } \chi & +1 \ldots \text{αὐξ} \ldots \pm\infty \ldots \text{αὐξ} \ldots -1 \ldots \text{ἐλ} \ldots \mp\infty \ldots \text{ἐλ} \ldots +1 \end{array}$$

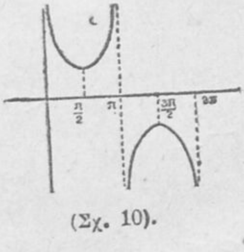
53.— Νοοῦντες, ὡς προηγουμένως κινούμενον τὸ Μ καὶ παρακολουθοῦντες τὴν ἀντίστοιχον τοῦ Δ κίνησιν καταλήγομεν εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα.

$$\begin{array}{l|l} \chi & 0 \ldots \text{αὐξ} \ldots 90^{o} \ldots \text{αὐξ} \ldots 180^{o} \ldots \text{αὐξ} \ldots 270^{o} \ldots \text{αὐξ} \ldots 360^{o} \\ & 0 \ldots\ldots \frac{\pi}{2} \ldots\ldots \pi \ldots\ldots \frac{3\pi}{2} \ldots\ldots 2\pi \\ \text{στεμ}\chi & +\infty \ldots \text{ἐλ} \ldots +1 \ldots \text{αὐξ} \ldots \pm\infty \ldots \text{αὐξ} \ldots -1 \ldots \text{ἐλ} \ldots -\infty \end{array}$$

54. α') Τῇ βοηθείᾳ τοῦ πίνακος τῆς ἀσκ. 52 κατανοοῦμεν ὅτι ἡ καμπύλη τοῦ σχήματος 9 παριστᾷ τὰς μεταβολὰς τῆς τεμχ, ὅταν χ μεταβάλληται ἀπὸ 0 ἕως 2π.



(Σχ. 9).



(Σχ. 10).

β') Ὁμοίως τῇ βοηθείᾳ τοῦ πίνακος τῆς ἀσκ. 53 καταρτίζομεν τὴν καμπύλην τοῦ (Σχ. 10), ἥτις παριστᾷ τὰς μεταβολὰς τῆς στεμχ, ὅταν χ μεταβάλληται ἀπὸ 0 εἰς 2π.

55.— Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΟΜΓ καὶ ΟΑΤ (Σχ. 39 εὐθ. τριγ.) εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα $OM=OA$, καὶ τὴν $\widehat{MOA}$ κοινήν· ἄρα $O\Gamma = OT$ δ. ἔ. δ.

56.— Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ὀρθ. τριγώνων ΟΜΔ καὶ ΟΒΣ ἕπεται εὐκόλως ὅτι ΟΔ=ΟΣ.

57.[18].—Κατὰ τὴν ἰδ. (§ 51 [29]) πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου πρέπει τὸ μῆκος 0,15μ νὰ πολ/σωμεν ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν θετικῶν διευθύνσεως κ.τ.λ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ δεδομένον ἄνυσμα κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν ΑΘΒ, τὸ εἰρημένον συνημίτονον εἶναι $\frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ μῆκος ἑκατέρας προβολῆς τοῦ ἀνύσματος εἶναι $0{,}15.\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}075\sqrt{2}.$

58.— Ἐὰν α εἶναι τὸ μῆκος ἀνύσματος κειμένου ἐπί τινος τῶν ἀξόνων τούτων, β τὸ μῆκος τῆς προβολῆς αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἕτερον καὶ χ ὁ ζητούμενος συντελεστὴς προβολῆς, κατὰ τὴν ἰδ. (§ 12 Γ') θὰ εἶναι β=α.χ. Ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου κατὰ τὴν ἰδ. (§ 51) εἶναι β=ασυν 30°· ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων ἕπεται ὅτι αχ=ασυν30°, ἄρα $\chi=\text{συν } 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

59.[19] — Τὸ ζητούμενον μῆκος εἶναι $0{,}40^{\mu}.\text{συν}60^{\circ}=0{,}40^{\mu}.\frac{1}{2}=0{,}20\mu.$

[20]. Ἐὰν χ εἶναι τὸ ζητούμενον μῆκος, κατὰ τὴν ἰδ. (§ 29) εἶναι $\frac{2\sqrt{3}}{3}=\chi.\text{συν}30^{\circ}$ ἢ $\frac{2\sqrt{3}}{3}=\chi.\frac{\sqrt{3}}{2}$, ὅθεν. $\chi=\frac{4}{3}.$

60.[21] —Ἄγομεν τὴν ἀρχικὴν ἀκτῖνα ΟΑ καὶ κατασκευάζομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς. Τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς καθέτου ταύτης καὶ τῆς περιφερείας εἶναι τὰ ζητούμενα σημεῖα.

61.— Κατασκευασθέντων τῶν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἀρχὴν Α ἀντιστοιχούντων πρωτευόντων ἀξόνων διαιροῦμεν τὴν ἀκτῖνα ΟΒ' εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ τοῦ πέρατος τοῦ δευτέρου τούτων ἄγομεν χορδὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΒ'. Τὰ κοινὰ σημεῖα ταύτης καὶ τῆς περιφερείας εἶναι τὰ ζητούμενα.

[22]. Διαιροῦμεν τὴν ἀκτῖνα ΟΒ εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ ἐργαζόμεθα ὡς προηγουμένως.

62.[23].—Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἐφαπτομένων λαμβάνομεν ἄνυσμα ΑΤ ἔχον μῆκος 3 καὶ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΤ. Τὰ κοινὰ σημεῖα ταύτης καὶ τῆς περιφερείας εἶναι τὰ ζητούμενα.

[24]. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνεφαπτομένων λαμβάνομεν ἄνυσμα ΒΣ″ ἔχον μῆκος -1 καὶ ἄγομεν τὴν ΟΣ′ Τὰ κοινὰ σημεῖα ταύτης καὶ τῆς περιφερείας εἶναι τὰ ζητούμενα.

63.— Ἔστω χ τὸ μέτρον τοιούτου τινὸς τόξου· ἐπειδὴ συνχ $=$ συν $\frac{\pi}{6}$, ἔπεται (§ 52 Α′) ὅτι $\chi = 2K\pi \pm \frac{\pi}{6} = \frac{(12K \pm 1)\pi}{6}$.

64.— Ἐὰν διὰ δύο τυχούσας συμμέτρους τοῦ Κ τιμὰς K_1 καὶ K_2 ἡ παράστασις αὕτη εἶχε τὴν αὐτὴν τιμήν, θὰ ἦτο $\text{ἐφ}\,\frac{K_1\pi}{\sqrt{2}} = \text{ἐφ}\,\frac{K_2\pi}{\sqrt{2}}$ ἄρα (§ 52 Ε′) $\frac{K_1\pi}{\sqrt{2}} - \frac{K_2\pi}{\sqrt{2}} = \lambda\pi$, ἔνθα λ τυχὼν ἀκέραιος ἢ μηδέν, ὅθεν $K_1 - K_2 = \lambda\sqrt{2}$. Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη εἶναι ἀδύνατος, διότι τὸ α′. μέλος αὐτῆς εἶναι σύμμετρος ἀριθμός, ἐν ᾧ τὸ β′. εἶναι ἀσύμμετρος.

65.[25].—α′.) Ἐπειδὴ ημ45° $= \frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ συν45° $= \frac{\sqrt{2}}{2}$, ἔπεται ὅτι

$$\text{ἐφ}45^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = +1\cdot \text{ ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι σφ}45^\circ = +1.$$

β′.) Ἐπειδὴ ημ30° $= \frac{1}{2}$ καὶ συν30° $= \frac{\sqrt{3}}{2}$, ἔπεται ὅτι ἐφ30° $=$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ καὶ σφ}30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

γ′.) Ἐπειδὴ ἡμ60° $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ συν60° $= \frac{1}{2}$, ἔπεται ὅτι ἐφ60°

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \text{ καὶ σφ}60^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

66.[26].— Ἐκ τῶν ἰσοτήτων ἐφτ $= \frac{\text{ημτ}}{\text{συντ}}$ καὶ σφτ $= \frac{\text{συντ}}{\text{ημτ}}$, ἔπεται ὅτι ἐφτ.σφτ $= \frac{\text{ημτ}}{\text{συντ}} \cdot \frac{\text{συντ}}{\text{ημτ}} = 1$, ἄρα οἱ ἀριθμοὶ ἐφτ καὶ σφτ εἶναι ἀντίστροφοι ὡς ἔχοντες γινόμενον 1. Ἐκ τῆς αὐτῆς δὲ ἰσότητος συνάγεται ὅτι οὗτοι εἶναι πάντοτε ὁμόσημοι, διότι τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι θετικόν.

67.[27].—Ἐπειδὴ $\text{εφ}\tau = \dfrac{\eta\mu\tau}{\sigma\upsilon\nu\tau}$, ἕπεται ὅτι $1 + \text{εφ}^2\tau = 1 + \dfrac{\eta\mu^2\tau}{\sigma\upsilon\nu^2\tau}$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\tau + \eta\mu^2\tau}{\sigma\upsilon\nu^2\tau} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\tau}.$$

68.[28]. Ἐπειδὴ $\sigma\varphi\tau = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\tau}{\eta\mu\tau}$, ἕπεται ὅτι $1 + \sigma\varphi^2\tau = 1 + \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\tau}{\eta\mu^2\tau}$

$$= \frac{\eta\mu^2\tau + \sigma\upsilon\nu^2\tau}{\eta\mu^2\tau} = \frac{1}{\eta\mu^2\tau}.$$

69.— α΄. τρόπος. Πολ/ζοντες καὶ διαιροῦντες τὸ ἄθροισμα $\text{εφ}\alpha + \text{εφ}\beta$ διὰ τοῦ γινομένου $\text{εφ}\alpha.\text{εφ}\beta$ εὑρίσκομεν τὴν ταυτότητα $\text{εφ}\alpha.\text{εφ}\beta$

$$= \text{εφ}\alpha.\text{εφ}\beta\left(\frac{\text{εφ}\alpha}{\text{εφ}\alpha\text{εφ}\beta} + \frac{\text{εφ}\beta}{\text{εφ}\alpha\text{εφ}\beta}\right) \text{ ἢ } \text{εφ}\alpha + \text{εφ}\beta =$$

$$\text{εφ}\alpha\text{εφ}\beta\left(\frac{1}{\text{εφ}\beta} + \frac{1}{\text{εφ}\alpha}\right) = \text{εφ}\alpha\text{εφ}\beta\,(\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta).$$

β΄. τρόπος. Ἐπειδὴ $\sigma\varphi\alpha = \dfrac{1}{\text{εφ}\alpha}$, $\sigma\varphi\beta = \dfrac{1}{\text{εφ}\beta}$, ἕπεται ὅτι

$$\text{εφ}\alpha\text{εφ}\beta\,(\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta) = \text{εφ}\alpha\text{εφ}\beta\left(\frac{1}{\text{εφ}\alpha} + \frac{1}{\text{εφ}\beta}\right) = \frac{\text{εφ}\alpha\text{εφ}\beta}{\text{εφ}\alpha}$$

$$+ \frac{\text{εφ}\alpha\text{εφ}\beta}{\text{εφ}\beta} = \text{εφ}\alpha + \text{εφ}\beta.$$

70.[29].—Ἐπειδὴ $\sigma\varphi\tau = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\tau}{\eta\mu\tau}$, ἕπεται ὅτι $\sigma\varphi^2\tau - \sigma\upsilon\nu^2\tau = \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\tau}{\eta\mu^2\tau}$

$$- \sigma\upsilon\nu^2\tau = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\tau - \sigma\upsilon\nu^2\tau\eta\mu^2\tau}{\eta\mu^2\tau} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\tau(1 - \eta\mu^2\tau)}{\eta\mu^2\tau} = \sigma\upsilon\nu^2\tau.\frac{\sigma\upsilon\nu^2\tau}{\eta\mu^2\tau}$$

$$= \sigma\upsilon\nu^2\tau.\,\sigma\varphi^2\tau.$$

71.[30]—Ἐπειδὴ $\sigma\varphi\alpha = \dfrac{1}{\text{εφ}\alpha}$, $\sigma\varphi\beta = \dfrac{1}{\text{εφ}\alpha}$, ἕπεται ὅτι $\dfrac{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}{\text{εφ}\alpha + \text{εφ}\beta}$

$$= \frac{\dfrac{1}{\text{εφ}\alpha} + \dfrac{1}{\text{εφ}\beta}}{\text{εφ}\alpha + \text{εφ}\beta} = \frac{\text{εφ}\alpha + \text{εφ}\beta}{\text{εφ}\alpha\text{εφ}\beta(\text{εφ}\alpha + \text{εφ}\beta)} = \frac{1}{\text{εφ}\alpha.\text{εφ}\beta}.$$

72.— Ἐπειδὴ $\tau\epsilon\mu\tau = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\tau}$ καὶ $\sigma\tau\epsilon\mu\tau = \dfrac{1}{\eta\mu\tau}$ ἕπεται ὅτι $\tau\epsilon\mu^2\tau +$

$\sigma\tau\epsilon\mu^2\tau = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\tau} + \dfrac{1}{\eta\mu^2\tau} = \dfrac{\eta\mu^2\tau + \sigma\upsilon\nu^2\tau}{\sigma\upsilon\nu^2\tau . \eta\mu^2\tau} = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\tau} . \dfrac{1}{\eta\mu^2\tau} =$ $\tau\epsilon\mu^2\tau . \sigma\tau\epsilon\mu^2\tau$.

73.— α'.) Γνωρίζομεν ὅτι ημ $\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ συν $\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

ἄρα τεμ $\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ καὶ στεμ $\dfrac{\pi}{4}$

$= \dfrac{1}{\eta\mu\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.—.β'). Ἐπειδὴ ημ $\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ καὶ

συν $\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ἕπεται ὁμοίως ὅτι τεμ $\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ καὶ στεμ $\dfrac{\pi}{6}$

$=2$.—γ'). Ἐπειδὴ ημ $\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, ἕπεται ὅτι τεμ $\dfrac{\pi}{3} = 2$ καὶ

στεμ $\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

74.— Ἔστω ὅτι $\eta\mu\alpha = \dfrac{\mu^2 - \nu^2}{\mu^2 + \nu^2}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\beta = \dfrac{2\mu\nu}{\mu^2+\nu^2}$. Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι $\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta = \dfrac{\mu^4 - 2\mu^2\nu^2 + \nu^4 + 4\mu^2\nu^2}{(\mu^2+\nu^2)^2} =$

$\dfrac{(\mu^2+\nu^2)^2}{(\mu^2+\nu^2)^2} = 1$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$, ἕπεται ὅτι $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\beta$· ἐπειδὴ δέ, ἐξ ὑποθέσεως, τὰ τόξα α καὶ β εἶναι θετικὰ καὶ μικρότερα 90^0, ἕπεται ὅτι συνα=συνβ, ὅθεν $\alpha - \beta = \pm 2K\pi$. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν τεθεῖσαν διὰ τὰ τόξα α καὶ β ὑπόθεσιν ἡ διαφορὰ α—β δὲν δύναται νὰ ἔχῃ τιμὴν ἀπολύτως μείζονα τοῦ $\dfrac{\pi}{2}$, ἕπεται ὅτι K=0 καὶ κατ' ἀκολουθίαν α=β ὅ. ἔ. δ.

75.[31]. Ἐπειδὴ $\sigma\varphi\chi = \dfrac{1}{\epsilon\varphi\chi}$, ἡ ἰσότης $\dfrac{\epsilon\varphi\chi}{\sigma\varphi\chi} = 4$ γίνεται $\epsilon\varphi^2\chi = 4$, ὅθεν $\epsilon\varphi\chi = \pm 2$. Λαμβάνοντες ὅθεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἐφαπτομένων ἀπὸ τῆς ὁρισθείσης ἀρχῆς Α ἀνύσματα $(\overline{AT}) = 2$ καὶ $(\overline{AT'}) = -2$ καὶ ἄγοντες τὰς ΟΤ καὶ ΟΤ' ὁρίζομεν τὰ ζητούμενα σημεῖα τῆς περιφερείας εὐκόλως.

76.— Ἐπειδὴ $\epsilon\varphi\chi = \dfrac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\chi = \dfrac{1}{\tau\epsilon\mu\chi}$, ἡ ἰσότης $\dfrac{\epsilon\varphi\chi}{\tau\epsilon\mu\chi} = \dfrac{1}{3}$

γίνεται $\frac{ημχ}{συνχ} \cdot συνχ = \frac{1}{3}$ ἢ $ημχ = \frac{1}{3}$. Ἤδη τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν περάτων τόξων ἐχόντων ἡμίτονον ἴσον πρὸς $\frac{1}{3}$. (ὅρα ἄσκ. 61).

77. [32].— α΄) Κατὰ τὸν τύπον (6[4]) εἶναι $ημτ = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$. Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως τὸ τ λήγει εἰς τὸ γ΄. τεταρτημόριον, ἔχει ἡμίτονον ἀρνητικόν, ἄρα $ημτ = -\frac{4}{5}$.

β΄.) Κατὰ τὸν τύπον (7[5]) εἶναι $εφτ = \frac{-\sqrt{1-\frac{9}{25}}}{-\frac{3}{5}} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$.

78. [33]. Τοῦ τόξου περατουμένου εἰς τὸ α΄. τεταρτημόριον τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον αὐτοῦ εἶναι θετικὰ καὶ κατὰ τοὺς τύπους (14 [9]) εἶναι :

$$ημτ = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}, συντ = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}.$$

[Ἡ σφτ εἶναι ἀντίστροφος τῆς εφτ ἤτοι $\frac{4}{3}$].

79. [34]. α΄.) Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{συντ}{ημτ} = \frac{σφτ}{1}$ λαμβάνομεν εὐκόλως τὴν $\frac{συντ}{σφτ} = \frac{ημτ}{1}$, ὅθεν $\frac{συν^2τ}{σφ^2τ} = \frac{ημ^2τ}{1} = \frac{1}{1+σφ^2τ}$. Ἐκ

τούτων δὲ ἕπεται ὅτι : $ημτ = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+σφ^2τ}}$ καὶ $συντ = \dfrac{σφτ}{\pm\sqrt{1+σφ^2τ}}$. — β'.) Τὴν ἐφτ παρέχει ἀμέσως ὁ γνωστὸς τύπος $ἐφτ = \dfrac{1}{σφτ}$.

γ'.) Ἐπειδὴ $τεμτ = \dfrac{1}{συντ}$ καὶ $στεμτ = \dfrac{1}{ημτ}$, ἕπεται ὅτι $τεμτ = \dfrac{\pm\sqrt{1+σφ^2τ}}{σφτ}$ καὶ $στεμτ = \pm\sqrt{1+σφ^2τ}$.

30 [35]. Ἐκ τῶν τύπων (14[9]) ἕπεται εὐκόλως ὅτι : $συν^2α = \dfrac{1}{1+εφ^2α}$ καὶ $ημ^2β = \dfrac{εφ^2β}{1+εφ^2β}$. Ὅθεν $συν^2α - ημ^2β = \dfrac{1}{1+εφ^2α} - \dfrac{εφ^2β}{1+εφ^2β} = \dfrac{1-εφ^2α.εφ^2β}{(1+εφ^2α)(1+εφ^2β)}$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν αὐτῶν τύπων προκύπτει ὅτι $ημ^2α.\ ημ^2β = \dfrac{ἐφ^2α.\ εφ^2β}{(1+εφ^2α)(1+εφ^2β)}$, ἕπεται ὅτι : $\dfrac{συν^2α - ημ^2β}{ημ^2α\ ημ^2β} =$

$$= \frac{1-εφ^2α.\ εφ^2β}{(1+εφ^2α)(1+εφ^2β)} \cdot \frac{(1+εφ^2α)(1+εφ^2β)}{ἐφ^2α.\ ἐφ^2β} = \frac{1-εφ^2α.\ εφ^2β}{εφ^2α.\ εφ^2β}$$

31. Ἔστω ὅτι $ημβ = \sqrt{\dfrac{χ}{χ+α}}$, ὅτε $συνβ = \sqrt{1-\dfrac{χ}{χ+α}} = \sqrt{\dfrac{α}{α+χ}}$ καὶ ἑπομένως $εφβ = \dfrac{\sqrt{\dfrac{χ}{χ+α}}}{\sqrt{\dfrac{α}{α+χ}}} = \sqrt{\dfrac{χ}{α}}$, ἤτοι τὸ αὐτὸ τόξον β ἔχει ἡμίτονον μὲν $\sqrt{\dfrac{χ}{χ+α}}$, ἐφαπτομένην δὲ $\sqrt{\dfrac{χ}{α}}$. δ. ἔ. δ.

32.— Ἐπειδὴ $τεμα = \dfrac{1}{συνα}$, $στεμα = \dfrac{1}{ημα}$ καὶ $ημα = \pm$

$\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$, ἕπεται ὅτι $\dfrac{\tau\varepsilon\mu\alpha}{\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha}=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$. $\eta\mu\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$

$=\pm\sqrt{\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}-1}=\pm\sqrt{\tau\varepsilon\mu^2\alpha-1}$.

83.[36].—α′) $\eta\mu.(-45^\circ)=-\eta\mu 45^\circ=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu(-45^\circ)=\sigma\upsilon\nu 45^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dot{\varepsilon}\varphi(-45^\circ)=-\dot{\varepsilon}\varphi 45^\circ=-1$, $\sigma\varphi(-45^\circ)=-\sigma\varphi 45^\circ=$

-1, $\tau\varepsilon\mu(-45^\circ)=\tau\varepsilon\mu 45^\circ=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu 45^\circ}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,

$\sigma\tau\varepsilon\mu(-45^\circ)=-\sigma\tau\varepsilon\mu 45^\circ=-\sqrt{2}$.

β′.) $\eta\mu(-30^\circ)=-\eta\mu 30^\circ=-\dfrac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu(-30^\circ)=\sigma\upsilon\nu 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\dot{\varepsilon}\varphi(-30^\circ)=-\varepsilon\varphi 30^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\sigma\varphi(-30^\circ)=-\sigma\varphi 30^\circ=-$

$\sqrt{3}$, $\tau\varepsilon\mu(-30^\circ)=\tau\varepsilon\mu 30^\circ=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $\sigma\tau\varepsilon\mu(-30^\circ)=-$

$\sigma\tau\varepsilon\mu\, 30^\circ=-2$.

γ′.) $\eta\mu(-60^\circ)=-\eta\mu 60^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu(-60^\circ)=\sigma\upsilon\nu 60^\circ=\dfrac{1}{2}$,

$\dot{\varepsilon}\varphi(-60^\circ)=-\varepsilon\varphi 60^\circ=-\sqrt{3}$ κ.τ.λ.

84.— Ἐπειδὴ $-\eta\mu\dfrac{\pi}{6}=\eta\mu\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$, ἡ ἰσότης $\eta\mu\chi=-\eta\mu\dfrac{\pi}{6}$

γίνεται $\eta\mu\chi=\eta\mu\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$, ὅθεν (§52Γ′ εὐθ. τρ.) $\chi-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=2\kappa\pi$ καὶ $\chi+\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=(2\kappa+1)\pi$, ἄρα $\chi=2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{6}$

$=\dfrac{(12\kappa-1)\pi}{6}$ καὶ $\chi=(2\kappa+1)\pi+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{(12\kappa+7)\pi}{6}$.

85.— Ἐπειδὴ $-\dot{\varepsilon}\varphi\dfrac{\pi}{8}=\dot{\varepsilon}\varphi\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$, ἡ ἰσότης $\dot{\varepsilon}\varphi\chi=-\dot{\varepsilon}\varphi\dfrac{\pi}{8}$ γί-

νεται $\dot{\varepsilon}\varphi\chi=\dot{\varepsilon}\varphi\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$, ἄρα (§ 52 Ε′, ε. τ.) $\chi-\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$

$=\lambda\pi$, ὅθεν $\chi=\lambda\pi-\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{(8\lambda-1)\pi}{8}$.

86.[37].— α′) Ἐπειδὴ $135^0 + 45^0 = 180^0$, ἕπεται ὅτι (§ 58[36]) ημ135^0=ημ$45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, συν$135^0$=—συν$45^0$=$-\frac{\sqrt{2}}{2}$, ἐφ$135^0$ =—εφ$45^0 = -1$,σφ135^0=—σφ$45^0 = -1$.

β′.) Ἐπειδὴ $150^0 + 30^0 = 180^0$, ἕπεται ὅτι ημ150^0 = ημ30^0= $\frac{1}{2}$, συν 150^0 = — συν30^0 = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, ἐφ150^0=—εφ30^0=— $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$, σφ150^0=—σφ30^0=$-\sqrt{3}$.

γ′.) Ἐπειδὴ $120^0 + 60^0 = 180^0$, ἕπεται ὅτι: ημ120^0 = ημ60^0= $\frac{\sqrt{3}}{2}$, συν 120^0=—συν 60^0=$-\frac{1}{2}$ κ.τ.λ.

87.[38].— α′) Τῶν τόξων 135^0 καὶ -135^0 ὄντων ἀντιθέτων, ἕπεται (§ 57[35]) ὅτι:ημ(-135^0)=—ημ135^0=$-\frac{\sqrt{2}}{2}$, συν (-135^0) =συν135^0=$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ κτλ. β′.) Ὁμοίως ημ(-150^0)=—ημ150^0 =$-\frac{1}{2}$ κτλ. γ′) Ὁμοίως ημ (-120^0) = — ημ120^0 = — $\frac{\sqrt{3}}{2}$ κ.τ.λ.

88.— Ἐπειδὴ (§ 58)—συν$\frac{\pi}{7}$=συν$\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)$=συν$\frac{6\pi}{7}$, ἡ ἰσότης συνχ=—συν $\frac{\pi}{7}$ γίνεται συνχ=συν $\frac{6\pi}{7}$, ἄρα (§ 52Α′) $\chi \pm \frac{6\pi}{7} = 2K\pi$, ὅθεν $\chi = 2K\pi \pm \frac{6\pi}{7}$.

89.[39] — α′) Ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΒ τοῦ τριγ. κύκλου λαμβάνομεν ἄνυσμα ΟΡ ἔχον μῆκος ἴσον πρὸς τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς μονάδος ΟΒ. Ἄγομεν εἶτα εἰς τὸ Ρ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΒ καὶ ἔστω Μ τὸ κοινὸν σημεῖον ταύτης καὶ τοῦ α′. τεταρτημορίου. Τὸ οὕτως εὑρεθὲν θετικὸν καὶ μικρότερον 90^0 τόξον ΑΜ εἶναι τὸ ζητούμενον. β′) Διχοτομοῦμεν τὴν γωνίαν ΑΟΒ καὶ ὁρίζομεν τὸ συμμετρικὸν Μ′ τοῦ Μ πρὸς τὴν διχοτόμον ταύτην. Οὕτως ὁρίζεται τὸ τόξον ΑΜ′, ὅπερ εἶναι συμπληρωματικὸν τοῦ $\overset{\frown}{AM}$.

90.[41]. Ἐπειδὴ Α+Β+Γ= 180^0, ἕπεται ὅτι $\frac{A+B}{2} + \frac{\Gamma}{2} = 90^0$, ἤτοι τὰ τόξα $\frac{A+B}{2}$ καὶ $\frac{\Gamma}{2}$ εἶναι συμπληρωματικά, ἄρα (§ 59 [37 $\text{ἐφ}\left(\frac{A+B}{2}\right)=\text{σφ}\frac{\Gamma}{2}$.

91. [40]. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι τοιοῦτον τόξον δὲν δύναται νὰ λήγῃ εἰς τὸ β′ καὶ δ′ τεταρτημόριον, διότι ἑκάστου τῶν εἰς ταῦτα περατουμένων τόξων τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ἑτερόσημα ὄντα εἶναι ἄνισα. Ἐπειδὴ δὲ τὸ μὲν ἡμίτονον παντὸς τόξου ἰσοῦται ἀπολύτως πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων ἀπόστασιν τοῦ πέρατος αὐτοῦ, τὸ δὲ συνημίτονον πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων ἀπόστασιν τοῦ αὐτοῦ πέρατος, ἕπεται ὅτι τὸ πέρας τοῦ ζητουμένου τόξου ὀφείλει νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπολύτως ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν εἰρημένων ἀξόνων· θὰ κεῖται ἄρα ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὰς γωνίας ΑΟΒ καὶ Α′ΟΒ′. Ἐπειδὴ δὲ ὀφείλει νὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας, θὰ εἶναι τὸ Δ καὶ Δ′ (σχ. 41 [25]).

[42]. Ἐπειδὴ $(90^0+\tau)$ καὶ $-\tau)$ εἶναι τόξα συμπληρωματικά, ἕπεται ὅτι: $\text{ημ}\,(90^0+\tau)=\text{συν}\,(-\tau)$ καὶ $\text{συν}\,(90^0+\tau)=\text{ημ}\,(-\tau)$. Ἐπειδὴ δὲ $\text{συν}\,(-\tau)=\text{συν}\,\tau$ καὶ $\text{ημ}\,(-\tau)=\text{ημ}\,\tau$, ἕπεται ὅτι $\text{ημ}\,(90+\tau)=\text{συν}\,\tau$ καὶ $\text{συν}\,(90^0+\tau)=-\text{ημ}\,\tau$.

92 [43]. α′.) Ἐπειδὴ $225^0-45^0=180^0$, ἕπεται (§ 60 [38]) ὅτι:

$\text{ημ}\,225^0=-\text{ημ}\,45^0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ κ.τ.λ.

β′.) Ὁμοίως, ἐπειδὴ $210^0-30^0=180^0$, ἕπεται ὅτι: $\text{ημ}\,210^0=-\text{ημ}\,30^0=-\frac{1}{2}$ κ.τ.λ. γ′) Ἐπειδὴ $240^0-60^0=180^0$ ἕπεται ὅτι: $\text{ημ}\,240^0=-\text{ημ}\,60^0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ κ.τ.λ.

93 [44]. α′.) Κατὰ τὴν ἰδ. (§ 57 [35]) καὶ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, εἶναι: $\text{ημ}\,(-225^0)=-\text{ημ}\,225^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$ κ.τ.λ.

$\text{ημ}(-210^0)=-\text{ημ}\,210^0=\frac{1}{2}$ κ.τ.λ. $\text{ημ}\,(-240^0)=-\text{ημ}\,240^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$. κ.τ.λ.

94. [45] α′.) Ἐπειδὴ $315^0+45^0=360^0$, ἕπεται (§ 62 [39]) ὅτι:

$\text{ημ}315^0=-\text{ημ}\,45^0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ κ.τ.λ.

β'.) Ὁμοίως, ἐπειδὴ $330^\circ + 30^\circ = 360^\circ$, ἕπεται ὅτι : $\eta\mu 330^\circ = -\eta\mu\, 30^\circ = -\frac{1}{2}$ κ. τ. λ. γ') Ἐπειδὴ $300^\circ + 60^\circ = 360^\circ$ ἕπεται ὅτι : $\eta\mu\, 300^\circ = -\eta\mu\, 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ κ.τ.λ.

95 [46]. α'.) Κατὰ τὴν ἰδ. (§ 57 [35]) καὶ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εἶναι : $\eta\mu\,(-315^\circ) = -\eta\mu\, 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ κ.τ.λ.

β'.) $\eta\mu\,(-330^\circ) = -\eta\mu\, 330^\circ = \frac{1}{2}$ κ.τ.λ. γ') $\eta\mu\,(-300^\circ)$ $= -\eta\mu\, 300^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ κ.τ.λ.

96 [47]. α') Τοῦ 113° παραπληρωματικὸν εἶναι τὸ $180^\circ - 113^\circ = 67^\circ$, ἄρα $\eta\mu\, 113^\circ = \eta\mu\, 67^\circ$, $\sigma\upsilon\nu\, 113^\circ = -\sigma\upsilon\nu\, 67^\circ$ κ.τ.λ. β') Ἐπειδὴ $208^\circ - 180^\circ = 28^\circ$, ἕπεται ὅτι $208^\circ - 28^\circ = 180^\circ$ καὶ ἑπομένως (§ 60 [38]) εἶναι $\eta\mu\, 208^\circ = -\eta\mu\, 28^\circ$, $\sigma\upsilon\nu\, 208^\circ = -\sigma\upsilon\nu\, 28^\circ$ κ.τ.λ. γ'.) Ἐπειδὴ $360^\circ - 325^\circ = 35^\circ$ ἕπεται ὅτι $325^\circ + 35^\circ = 360^\circ$ καὶ ἑπομένως (§ 62 [39]) εἶναι $\eta\mu\, 325^\circ = -\eta\mu\, 35^\circ$, $\sigma\upsilon\nu\, 325^\circ = \sigma\upsilon\nu\, 35^\circ$ κ.τ.λ.

97. α'). Διαιροῦντες τὰς 1125° διὰ 360° εὑρίσκομεν ὅτι $1125^\circ = 360^\circ \cdot 3 + 45^\circ$. Τὰ τόξα ἄρα 1125° καὶ 45° ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ τοὺς αὐτοὺς ὁμωνύμους τριγ. ἀριθμούς, ἤτοι : $\eta\mu\, 1125^\circ = \eta\mu\, 45^\circ$, $\sigma\upsilon\nu\, 1125^\circ = \sigma\upsilon\nu\, 45^\circ$ κ.τ.λ. β'.) Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι $1830^\circ = 360^\circ \cdot 5 + 30$, ἄρα $\eta\mu\, 1830^\circ = \eta\mu\, 30^\circ$, $\sigma\upsilon\nu\, 1830^\circ = \sigma\upsilon\nu\, 30^\circ$ κ.τ.λ. γ') Ὁμοίως εἶναι $\eta\mu\, 780^\circ = \eta\mu\, 60^\circ$, $\sigma\upsilon\nu\, 780^\circ = \sigma\upsilon\nu\, 60^\circ$ κ.τ.λ.

98. α'.) Κατὰ τὰς ἰδ. (§ 57, 58) εἶναι : $\eta\mu\,(-111^\circ) = -\eta\mu\, 111^\circ = -\eta\mu\, 69^\circ$, $\sigma\upsilon\nu\,(-111^\circ) = \sigma\upsilon\nu\, 111^\circ = -\sigma\upsilon\nu\, 69^\circ$ κτλ. β'.) Κατὰ τὰς ἰδ. (§ 57, 60) εἶναι : $\eta\mu\,(-229^\circ) = -\eta\mu 229^\circ = \eta\mu\, 49^\circ$, $\sigma\upsilon\nu\,(-229^\circ) = \sigma\upsilon\nu\, 229^\circ = -\sigma\upsilon\nu\, 49^\circ$ κτλ. γ'.) Κατὰ τὰς ἰδ. (§ 57, 62) εἶναι : $\eta\mu\,(-325^\circ) = -\eta\mu 325^\circ = \eta\mu\, 35^\circ$, $\sigma\upsilon\nu\,(-325^\circ) = \sigma\upsilon\nu\, 325^\circ = \sigma\upsilon\nu\, 35^\circ$ κτλ.

99. α'.) Ἐπειδὴ $\frac{17}{4} = 4\,\frac{1}{4}$, ἕπεται ὅτι $\frac{17\pi}{4} = 4\pi + \frac{\pi}{4}$ · τὰ τόξα ἄρα $\frac{17\pi}{4}$ καὶ $\frac{\pi}{4}$ διαφέροντα κατὰ 2 ἀκεραίας περιφερείας

ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα. Ἄρα: ημ $\frac{17\pi}{4}=$ ημ $\frac{\pi}{4}$, συν $\frac{17\pi}{4}=$ συν $\frac{\pi}{4}$ κτλ. β'.) Ἐπειδὴ $\frac{21}{6}=3\frac{1}{2}$, ἕπεται ὅτι $\frac{21\pi}{6}=3\pi+\frac{\pi}{2}=2\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)$. Ἄρα: ημ $\frac{21\pi}{6}=$ ημ $\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-$ ημ $\frac{\pi}{2}$, συν $\frac{21\pi}{6}=$ συν $\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-$ συν $\frac{\pi}{2}$ κτλ. γ'.) Ἐπειδὴ $850^{\gamma}=400^{\gamma}.2+50^{\gamma}$, ἕπεται ὅτι τὰ τόξα 850^{γ} καὶ 50^{γ} ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα. Ἄρα: ημ $850^{\gamma}=$ ημ 50^{γ}, συν $850^{\gamma}=$ συν 50^{γ} κτλ.

100. α'.) Ἐπειδὴ $\alpha+3\pi=(\alpha+\pi)+2\pi$, ἕπεται ὅτι: ημ$(\alpha+3\pi)=$ ημ $(\alpha+\pi)$. Ἀλλα τῶν τόξων $(\alpha+\pi)$ καὶ π διαφερόντων κατὰ π εἶ αι (§ 60) ημ $(\alpha+\pi)=-$ ημα, ἄρα ημ $(\alpha+3\pi)=-$ ημα. β'.) Ἐπειδὴ $\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$, ἕπεται ὅτι $\frac{5\pi}{2}=2\pi+\frac{\pi}{2}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\alpha+\frac{5\pi}{2}=\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+2\pi$. Ἄρα συν $\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)=$ συν $\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=$ ημ$(-\alpha)$ $=-$ ημα. γ'.) Ἐπειδὴ $\frac{7\pi}{2}=3\pi+\frac{\pi}{2}$, ἕπεται ὅτι $\chi-\frac{7\pi}{2}=\chi-3\pi-\frac{\pi}{2}=\chi-2\pi-\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)$. Ἄρα: εφ$\left(\chi-\frac{7\pi}{2}\right)=$ εφ$\left(\chi-\frac{3\pi}{2}\right)$. Ἐπειδὴ δὲ $\left(\chi-\frac{3\pi}{2}\right)+(2\pi-\chi)=2\pi-\frac{3\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$, ἕπεται ὅτι εφ $\left(\chi-\frac{3\pi}{2}\right)=$ σφ $(2\pi-\chi)=-$ σφ (χ) (§ 62). Ἡ προηγουμένη ὅθεν, ἰσότης γίνεται: εφ $\left(\chi-\frac{7\pi}{2}\right)=-$σφ$(\chi)$.

101. [48] α'.) Ἐπειδὴ $75^{\circ}=45^{\circ}+30^{\circ}$, ἕπεται ὅτι: ημ $75^{\circ}=$ ημ $(45^{\circ}+30^{\circ})=$ ημ 45° συν $30^{\circ}+$ ημ 30° συν $45^{\circ}=$ $\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$.
συν $75^{\circ}=$ συν $(45^{\circ}+30^{\circ})=$ συν 45°. συν $30^{\circ}-$ ημ 45°. ημ $30^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$.

β΄.) Ἐπειδὴ $15^0 = 45^0 - 30^0$, ἕπεται ὅτι : $\eta\mu\, 15^0 = \eta\mu(45^0 - 30^0) = \eta\mu\, 45^0 \;\sigma\upsilon\nu\, 30^0 - \sigma\upsilon\nu\, 45^0 \;\eta\mu\, 30^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$.
$\sigma\upsilon\nu\, 15^0 = \sigma\upsilon\nu\,(45^0 - 30^0) = \sigma\upsilon\nu\, 45^0 . \sigma\upsilon\nu\, 30^0 + \eta\mu\, 45^0 \;\eta\mu\, 30^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$.

Σημ. Ἐπειδὴ $15^0 + 75^0 = 90^0$ εἶναι δυνατὸν ἀμέσως ἐκ τοῦ ἡμ 75^0 καὶ συν 75^0 νὰ εὕρωμεν τὸ συν 15^0 καὶ ἡμ 15^0.

102. [49]. — Πολ)ζοντες κατὰ μέλη τὰς γνωστὰς ἰσότητας $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\,(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$ εὑρίσκομεν ὅτι : $\sigma\upsilon\nu\,(\alpha + \beta)\;\sigma\upsilon\nu\,(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha\;\sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta$. Ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu^2\beta = 1 - \eta\mu^2\alpha$ καὶ $\eta\mu^2\alpha = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$, αὕτη γίνεται : $\sigma\upsilon\nu\,(\alpha + \beta)\;\sigma\upsilon\nu\,(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha\,(1 - \eta\mu^2\beta) - \eta\mu^2\beta\,(1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha\;\eta\mu^2\beta - \eta\mu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\alpha\;\eta\mu^2\beta = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$.

103 [50]. — Ἐργαζόμενοι ὡς προηγουμένως ἐπὶ τῶν ἰσοτήτων $\eta\mu\,(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$ καὶ $\eta\mu\,(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$ καταλήγομεν εἰς τὴν ἀποδεικτέαν ἰσότητα.

104. [51]. — Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς γνωστοὺς τύπους, οἵτινες παρέχουσι τὸ ἡμ $(\alpha + \beta)$, συν $(\alpha + \beta)$ καὶ συν $(\alpha - \beta)$ εὑρίσκομεν ὅτι : $\frac{2\,\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu\,(\alpha - \beta)} =$

$$\frac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + 2\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}{2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta} = \frac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta} + \frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}{2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta} =$$

$\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta$.

105. — Ἐπειδὴ $(\alpha + \beta) + \gamma = 180^0$ ἕπεται (§ 58) ὅτι $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = -\,\sigma\upsilon\nu\gamma$, ὅθεν $\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta = -\,\sigma\upsilon\nu\gamma$, ἄρα $\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma = \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$. Ὑψοῦντες δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν ὅτι : $\sigma\upsilon\nu^2\alpha\;\sigma\upsilon\nu^2\beta + 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma + \sigma\upsilon\nu^2\gamma = \eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta$ ἢ $\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta + 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma + \sigma\upsilon\nu^2\gamma = (1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha)\;(1 - \sigma\upsilon\nu^2\beta)$, ὅθεν εὐκόλως προκύπτει ὅτι $\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\gamma + 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma = 1$.

106. — Ἔστωσαν α καὶ β δύο τόξα θετικὰ καὶ μικρότερα 90^0. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι $\sigma\upsilon\nu\beta < 1$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\alpha < 1$· ἐπειδὴ δὲ οἱ

ἀριθμοὶ ημα καὶ ημβ εἶναι ἀμφότεροι θετικοί, ἔπεται ὅτι : $\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta < \eta\mu\alpha$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta < \eta\mu\beta$ Προσθέτοντες ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι : $\eta\mu\,(\alpha+\beta) < \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta$. ὅ.ἔ.δ.

107. — Γνωρίζομεν (§ 64) ὅτι :

$\sigma\upsilon\nu\,(120^0 + \chi) = \sigma\upsilon\nu\,120^0 \sigma\upsilon\nu\,\chi - \eta\mu\,120^0\,\eta\mu\,\chi$ καὶ

$\sigma\upsilon\nu\,(120^0 - \chi) = \sigma\upsilon\nu\,120^0\ \sigma\upsilon\nu\,\chi + \eta\mu\,120^0\,\eta\mu\,\chi$. Τετραγωνίζοντες καὶ προσθέτοντες εἶτα ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι :

$\sigma\upsilon\nu^2\,(120^0 + \chi) + \sigma\upsilon\nu^2\,(120^0 - \chi) = 2\,(\sigma\upsilon\nu^2\,120^0$
$\sigma\upsilon\nu^2\,\chi + \eta\mu^2\,120^0\,\eta\mu^2\chi)$.

Ἐπειδὴ δὲ $\eta\mu\,120^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, καὶ $\sigma\upsilon\nu\,120^0 = -\frac{1}{2}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται :

$$\sigma\upsilon\nu^2\,(120^0 + \chi) + \sigma\upsilon\nu^2\,(120^0 - \chi) = 2\left(\frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu^2\,\chi + \frac{3}{4}\,\eta\mu^2\,\chi\right),$$ ἄρα :

$$\sigma\upsilon\nu^2\,\chi + \sigma\upsilon\nu^2\,(120^0 + \chi) + \sigma\upsilon\nu^2\,(120^0 - \chi)$$
$$= \frac{1}{2}\,\sigma\upsilon\nu^2\,\chi + \frac{3}{2}\,\eta\mu^2\,\chi + \sigma\upsilon\nu^2\,\chi =$$
$$\frac{3}{2}\,(\sigma\upsilon\nu^2\,\chi + \eta\mu^2\,\chi) = \frac{3}{2}.$$

108 [52]. — α'.) Ἐπειδὴ $75^0 = 45^0 + 30^0$, ἔπεται ὅτι : $\varepsilon\varphi 75^0 =$

$$\varepsilon\varphi\,(45^0 + 30^0) = \frac{\varepsilon\varphi 45^0 + \varepsilon\varphi 30^0}{1 - \varepsilon\varphi 45^0\,\varepsilon\varphi 30^0} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(3+\sqrt{3})^2}{6} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}.$$ Ἤδη εὑρίσκομεν ὅτι $$\sigma\varphi 75^0 = \frac{1}{\varepsilon\varphi 75^0} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{1} = 2 - \sqrt{3}.$$

β'.) Ἐπειδὴ $15^0 = 45^0 - 30^0$, ἔπεται ὅτι : $\varepsilon\varphi 15^0 =$

$$\varepsilon\varphi\,(45^0 - 30^0) = \frac{\varepsilon\varphi 45^0 - \varepsilon\varphi 30^0}{1 + \varepsilon\varphi 45^0\,\varepsilon\varphi 30^0} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(3-\sqrt{3})^2}{6} = 2 - \sqrt{3}.$$ Ἄρα $$\sigma\varphi\,15^0 = \frac{1}{\varepsilon\varphi 15^0} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$
$$= 2 + \sqrt{3}.$$

Σημ. Ὅρα σημείωσιν ἀσκήσεως 101 [48].

109. [53]. — α') Ἐπειδὴ $(\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, ἤτοι τὰ τόξα $(\alpha+\beta)$ καὶ γ εἶναι παραπληρωματικά, ἕπεται ὅτι $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=-\varepsilon\varphi\gamma$ ἢ $\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}=-\varepsilon\varphi\gamma$. Ἐκ ταύτης δὲ προκύπτει εὐκόλως ὅτι $\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta=-\varepsilon\varphi\gamma+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma$, ὅθεν $\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma=\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma$.

β'.) Ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi\alpha=\dfrac{1}{\sigma\varphi\alpha}$ κτλ. ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\dfrac{1}{\sigma\varphi\alpha}+\dfrac{1}{\sigma\varphi\beta}+\dfrac{1}{\sigma\varphi\gamma}=\dfrac{1}{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta\sigma\varphi\gamma}$, ὅθεν διὰ πολ/σμοῦ ἐπὶ $\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta\sigma\varphi\gamma$ προκύπτει ὅτι $\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\gamma+\sigma\varphi\beta\sigma\varphi\gamma=1$.

110 [54] — Κατὰ τὸν τύπον (39[24]) εἶναι $\varepsilon\varphi(45^\circ-\alpha)=\dfrac{\varepsilon\varphi45^\circ-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi45^\circ\varepsilon\varphi\alpha}$

Ἐπειδὴ δὲ $\varepsilon\varphi45^\circ=1$ καὶ $\varepsilon\varphi\alpha=\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$ αὕτη γίνεται $\varepsilon\varphi(45^\circ-\alpha)$

$$=\frac{1-\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{1+\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha}.$$

111. — Ἔστωσαν α καὶ β δύο τόξα περιεχόμενα μεταξὺ 0° καὶ 90° καὶ τοιαῦτα ὥστε $\varepsilon\varphi\alpha=\dfrac{1}{2}$ καὶ $\varepsilon\varphi\beta=\dfrac{1}{3}$. Ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=$

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}=\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{6}}=\frac{3+2}{5}=1=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4},$$ ἕπεται

ὅτι(§ 52Ε') ὅτι: $(\alpha+\beta)-\dfrac{\pi}{4}=\lambda\pi$. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ καὶ $\beta<\dfrac{\pi}{2}$, ἕπεται ὅτι $\alpha+\beta<\pi$ καὶ κατὰ μείζονα λόγον $(\alpha+\beta)-\dfrac{\pi}{4}<\pi$· ἄρα ὁ λ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἄλλην τιμὴν πλὴν τοῦ 0 καὶ ἐπομένως $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}=45^\circ$, ἤτοι $\tau o\xi\varepsilon\varphi\dfrac{1}{2}+\tau o\xi\varepsilon\varphi\dfrac{1}{3}=45^\circ$.

112.— Ἔστωσαν A, B, Γ, Δ αἱ γωνίαι κυρτοῦ τετραπλεύρου. Ὡς γνωστὸν $(A+B)+(\Gamma+\Delta)=2\pi$, ἄρα (§ 62) $\text{εφ}(A+B)=-\text{εφ}(\Gamma+\Delta)$ ἢ $\dfrac{\text{εφ}A+\text{εφ}B}{1-\text{εφ}A\,\text{εφ}B}=-\dfrac{\text{εφ}\Gamma+\text{εφ}\Delta}{1-\text{εφ}\Gamma\,\text{εφ}\Delta}$, ὅθεν εὐκόλως προκύπτει ἡ ἰσότης $\text{εφ}A+\text{εφ}B-\text{εφ}A\,\text{εφ}\Gamma\,\text{εφ}\Delta-\text{εφ}B\,\text{εφ}\Gamma\,\text{εφ}\Delta=-\text{εφ}\Gamma-\text{εφ}\Delta+\text{εφ}A\,\text{εφ}B\,\text{εφ}\Gamma+\text{εφ}A\,\text{εφ}B\,\text{εφ}\Delta$, ὅθεν $\text{εφ}A+\text{εφ}B+\text{εφ}\Gamma+\text{εφ}\Delta=\text{εφ}A\,\text{εφ}\Gamma\,\text{εφ}\Delta+\text{εφ}B\,\text{εφ}\Gamma\,\text{εφ}\Delta+\text{εφ}A\,\text{εφ}B\,\text{εφ}\Gamma+\text{εφ}A\,\text{εφ}B\,\text{εφ}\Delta$, ἤτοι: Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐφαπτομένων τῶν γωνιῶν κτλ. ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γενομένων τῶν ἐφαπτομένων τούτων λαμβανομένων ἀνὰ 3 καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.

113.— Θέτοντες $\alpha-\beta=A$, $\beta-\gamma=B$, $\gamma-\alpha=\Gamma$ καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $O=A+B+\Gamma$, ὅθεν $A+B=-\Gamma$ καὶ $\text{ἐφ}(A+B)=\text{εφ}(-\Gamma)$ ἢ $\dfrac{\text{εφ}A+\text{εφ}B}{1-\text{εφ}A\,\text{εφ}B}=-\text{εφ}\Gamma$, ὅθεν $\text{εφ}A+\text{εφ}B+\text{εφ}\Gamma=\text{εφ}A\,\text{εφ}B\,\text{εφ}\Gamma$ ἢ $\text{ἐφ}(\alpha-\beta)+\text{εφ}(\beta-\gamma)+\text{εφ}(\gamma-\alpha)=\text{εφ}(\alpha-\beta)\,\text{εφ}(\beta-\gamma)\,\text{εφ}(\gamma-\alpha)$.

114. [55].— α'.) Τῶν τόξων $(\alpha+\beta)$ καὶ γ ὄντων συμπληρωματικῶν εἶναι $\text{ἐφ}(\alpha+\beta)=\text{σφ}\gamma$ ἢ $\dfrac{\text{εφ}\alpha+\text{εφ}\beta}{1-\text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\beta}=\dfrac{1}{\text{εφ}\gamma}$, ὅθεν $\text{ἐφ}\alpha\,\text{εφ}\gamma+\text{εφ}\beta\,\text{εφ}\gamma+\text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\beta=1$.

β'.) Ἐπειδὴ $\text{εφ}\alpha=\dfrac{1}{\text{σφ}\alpha}$ κ.τ.λ. ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\frac{1}{\text{σφ}\alpha\,\text{σφ}\gamma}+\frac{1}{\text{σφ}\beta\,\text{σφ}\gamma}+\frac{1}{\text{σφ}\alpha\,\text{σφ}\beta}=1,$$

ὅθεν διὰ πολ/σμοῦ ἐπὶ $\text{σφ}\alpha\,\text{σφ}\beta\,\text{σφ}\gamma$ προκύπτει ὅτι $\text{σφ}\alpha+\text{σφ}\beta+\text{σφ}\gamma=\text{σφ}\alpha.\text{σφ}\beta.\text{σφ}\gamma$.

115.— Ἐπειδὴ $\alpha+\beta-\gamma=\alpha+\beta+(-\gamma)$ καὶ $\text{συν}(-\gamma)=\text{συν}\gamma$, $\text{ημ}(-\gamma)=-\text{ημ}\gamma$, οἱ τύποι (40) καὶ (41) δίδουσι: $\text{συν}(\alpha+\beta-\gamma)=\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta\,\text{συν}(-\gamma)-\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta\,\text{συν}(-\gamma)-\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}(-\gamma)\,\text{συν}\beta-\text{ημ}\beta\,\text{ημ}(-\gamma)\,\text{συν}\alpha=\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma-\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta\,\text{συν}\gamma+\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\gamma\,\text{συν}\beta+\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma\,\text{συν}\alpha$. § $\text{ημ}(\alpha+\beta-\gamma)=\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta\,\text{συν}(-\gamma)+\text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha\,\text{συν}(-\gamma)+\text{ημ}(-\gamma)\,\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta\,\text{ημ}(-\gamma)=\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma+\text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha\,\text{συν}\gamma-\text{ημ}\gamma\,\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta+\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma$.

116.— Ἐπειδὴ $\alpha-\beta+\gamma=\alpha+(-\beta)+\gamma$ καὶ $\text{εφ}(-\beta)=-\text{εφ}\beta$, ὁ τύπος (42) δίδει: $\text{εφ}(\alpha-\beta+\gamma)=\dfrac{\text{εφ}\alpha+\text{εφ}(-\beta)+\text{εφ}\gamma-\text{εφ}\alpha\,\text{εφ}(-\beta)\,\text{εφ}\gamma}{1-\text{εφ}\alpha\,\text{εφ}(-\beta)-\text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\gamma-\text{εφ}(-\beta)\,\text{εφ}\gamma}$

$$=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma+\varepsilon\varphi\alpha.\varepsilon\varphi\beta.\varepsilon\varphi\gamma}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\gamma+\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma}.$$

117.—Ἐπειδὴ ἡ ἐφαπτομένη τόξου εἶναι ἀντίστροφος τῆς συνεφαπτομένης αὐτοῦ, ἐκ τοῦ τύπου (42) προκύπτει ὅτι: $\sigma\varphi(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=\frac{1-\dfrac{1}{\sigma\varphi\alpha.\sigma\varphi\beta}-\dfrac{1}{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\gamma}-\dfrac{1}{\sigma\varphi\beta\sigma\varphi\gamma}}{\dfrac{1}{\sigma\varphi\alpha}+\dfrac{1}{\sigma\varphi\beta}+\dfrac{1}{\sigma\varphi\gamma}-\dfrac{1}{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta\sigma\varphi\gamma}}$$

$$=\frac{\sigma\varphi\alpha.\sigma\varphi\beta.\sigma\varphi\gamma-\sigma\varphi\alpha-\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\gamma}{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\gamma+\sigma\varphi\beta\sigma\varphi\gamma-1}.$$

[56]. α'). Ἡ α'. τῶν ἰσοτήτων [29] γράφεται καὶ οὕτω: $\sigma\upsilon\nu\omega$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)-\eta\mu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+\eta\mu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$ Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους

Είναι ήμα και

τοὺς ὅρους τοῦ β'. μέλους διὰ $\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$, εὑρίσκομεν ὅτι: $\sigma\upsilon\nu\omega$

είναι αι

$$=\frac{1-\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$ β'.) Ὁμοίως ἐκ τῆς β'. τῶν ἰσοτήτων [29]

προκύπτει ὅτι: $\eta\mu\omega=\dfrac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}{1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$

118 [57].— Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $1+\varepsilon\varphi\alpha.\varepsilon\varphi2\alpha=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu2\alpha}$. *Ἀπόδειξις.*

Ἐπειδή, ὡς γνωστόν, $\varepsilon\varphi2\alpha=\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$, ἕπεται ὅτι $1+\varepsilon\varphi\alpha.\varepsilon\varphi2\alpha$

$$=1+\frac{2\varepsilon\varphi^2\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}=\frac{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}=\frac{1+\dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{1-\dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha}$$

$$=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu2\alpha}.$$

119.— Ὡς γνωστὸν εἶναι $\varepsilon\varphi(45^0+\alpha)=\dfrac{1+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi\alpha}$ καὶ $\varepsilon\varphi(45^0-\alpha)$

$= \dfrac{1-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha}$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι : $\varepsilon\varphi(45^\circ+\alpha)-\varepsilon\varphi(45^\circ-\alpha)$

$$= \frac{1+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi\alpha} - \frac{1-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{4\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha} = 2\,\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha} = 2\varepsilon\varphi 2\alpha.$$

120.— Ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) = \dfrac{1-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha}$, ἕπεται ὅτι:

$$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \frac{(\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha)^2}{(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)^2} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha-2\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha+2\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\alpha}$$

$$= \frac{1-\eta\mu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha}.$$

121. [58]. — α′.) Γνωρίζομεν ὅτι $\sigma\varphi 2\alpha = \dfrac{1}{\varepsilon\varphi 2\alpha} = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{2\varepsilon\varphi\alpha}$. Ἐπειδὴ δὲ $\varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{1}{\sigma\varphi\alpha}$, αὕτη γίνεται $\sigma\varphi 2\alpha = \dfrac{1-\dfrac{1}{\sigma\varphi^2\alpha}}{\dfrac{2}{\sigma\varphi\alpha}} = \dfrac{\sigma\varphi^2\alpha-1}{2\sigma\varphi\alpha}$.

β′.) $\sigma\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\alpha = \sigma\varphi\alpha - \dfrac{1}{\sigma\varphi\alpha} = \dfrac{\sigma\varphi^2\alpha-1}{\sigma\varphi\alpha}$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς προηγουμένης ἀποδειχθείσης ἰσότητος προκύπτει ὅτι $2\sigma\varphi 2\alpha = \dfrac{\sigma\varphi^2\alpha-1}{\sigma\varphi\alpha}$, ἕπεται ὅτι καὶ $\sigma\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\alpha = 2\sigma\varphi\alpha$. — Δεύτερος τρόπος. $\sigma\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} - \dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}$

$$= \frac{2\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{2\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu 2\alpha} = 2\sigma\varphi 2\alpha.$$

122. [59]. $\eta\mu 2\alpha = \dfrac{\eta\mu 2\alpha}{\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \dfrac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \dfrac{2}{\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}}$

$$= \frac{2}{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha}.$$

123. [142]. — Α′. τρόπος. Κατὰ τὴν ἄσκ. 120 εἶναι $\varepsilon\varphi^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$

$= \dfrac{1-\eta\mu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha}$, ἑπομένως $\dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\varepsilon\varphi^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)} = \dfrac{1-\dfrac{1-\eta\mu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha}}{1+\dfrac{1-\eta\mu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha}}$

$= \dfrac{1+\eta\mu 2\alpha-1+\eta\mu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha+1-\eta\mu 2\alpha} = \dfrac{2\eta\mu 2\alpha}{2} = \eta\mu 2\alpha$. Β′. τρόπος. Θέτοντες τὴν γνωστὴν ἰσότητα $\text{εφ}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\text{ημ}2\alpha}{1+\text{ημ}2\alpha}$ ὑπὸ

τὴν μορφὴν $\frac{1-\text{ημ}2\alpha}{1+\text{ημ}2\alpha}=\frac{\text{εφ}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1}$ λαμβάνομεν εὐκό-

λως τὴν ἀναλογίαν $\frac{1-\text{ημ}2\alpha}{\text{εφ}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{1+\text{ημ}2\alpha}{1}$. Καλοῦντες δὲ

λ ἕκαστον τῶν ἴσων τούτων λόγων εὑρίσκομεν ὅτι $1+\text{ημ}2\alpha=$ λ καὶ $1-\text{ημ}2\alpha=\lambda\text{εφ}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$. Ἐκ τούτων δι' ἀφαιρέσεως καὶ εἶτα διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι: $2\text{ημ}2\alpha=\lambda\left[1-\text{εφ}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]$ καὶ $2=\lambda\left[1+\text{εφ}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]$. Ἐκ τούτων δὲ διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι: $\text{ημ}2\alpha=$

$$\frac{1-\text{εφ}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\text{εφ}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}.$$

124. — Κατὰ τὸν τύπον (44) εἶναι: $\text{συν}2\chi=2\text{συν}^2\chi-1$ καὶ $\text{συν}\,4\chi=2\,\text{συν}^2 2\chi-1=2\,(2\,\text{συν}^2\chi-1)^2-1=$ $2\,(4\,\text{συν}^4\chi-4\text{συν}^2\chi+1)-1=8\,\text{συν}^4\chi-8\,\text{συν}^2\chi+2-1$ $=8\text{συν}^4\chi-8\text{συν}^2\chi+1$. Ἄρα:
$3-4\,\text{συν}\,2\chi+\text{συν}4\chi=3-8\,\text{συν}^2\chi+4+8\text{συν}^4\chi-8\text{συν}^2\chi+$ $1=8+8\,\text{συν}^4\chi-16\text{συν}^2\chi=8\,(1-\text{συν}^2\chi)^2=8\text{ημ}^4\,\chi$.

125. — Ἐπειδὴ $\text{τεμ}2\alpha=\frac{1}{\text{συν}2\alpha}$ καὶ $\text{συν}2\alpha=2\text{συν}^2\alpha-1$, ἕπεται ὅτι: $\text{τεμ}2\alpha=\frac{1}{2\text{συν}^2\alpha-1}=\frac{\frac{1}{\text{συν}^2\alpha}}{2-\frac{1}{\text{συν}^2\alpha}}=\frac{\text{τεμ}^2\alpha}{2-\text{τεμ}^2\alpha}$.

126. — Ἐκ τοῦ τύπου (51) ἕπεται εὐκόλως ὅτι: $\text{σφ}3\alpha=$

$$\frac{1-3\frac{1}{\text{σφ}^2\alpha}}{\frac{3}{\text{σφ}\alpha}-\frac{1}{\text{σφ}^3\alpha}}=\frac{\text{σφ}^3\alpha-3\text{σφ}\alpha}{3\text{σφ}^2\alpha-1}.$$

127. — Παρατηροῦντες ὅτι ἑκάτερος τῶν ὅρων τοῦ α' μέλους εἶναι διαφορὰ τετραγώνων εὑρίσκομεν ὅτι: $\frac{\text{εφ}^2 2\alpha - \text{εφ}^2\alpha}{1-\text{εφ}^2 2\alpha\,\text{εφ}^2\alpha} =$

$$\frac{(\text{εφ}2\alpha+\text{εφ}\alpha)(\text{εφ}2\alpha-\text{εφ}\alpha)}{(1+\text{εφ}2\alpha.\text{εφ}\alpha)(1-\text{εφ}2\alpha\,\text{εφ}\alpha)} = \frac{\text{εφ}2\alpha+\text{εφ}\alpha}{1-\text{εφ}2\alpha\,\text{εφ}\alpha}\cdot\frac{\text{εφ}2\alpha-\text{εφ}\alpha}{1+\text{εφ}2\alpha\,\text{εφ}\alpha} =$$

$\text{εφ}\,(2\alpha+\alpha).\ \text{εφ}\,(2\alpha-\alpha) = \text{εφ}3\alpha.\ \text{εφ}\alpha.$

128. — Κατὰ τοὺς τύπους (50) εἶναι $\text{συν}4\alpha = \frac{1-\text{εφ}^2 2\alpha}{1+\text{εφ}^2 2\alpha}$ καὶ $\text{ημ}4\alpha$

$= \frac{2\text{εφ}2\alpha}{1+\text{εφ}^2 2\alpha}$. Ἐπειδὴ δὲ $\text{εφ}2\alpha = \frac{2\text{εφ}\alpha}{1-\text{εφ}^2\alpha} = \frac{4}{1-4} = -\frac{4}{3}$

αἱ προηγούμεναι ἰσότητες γίνονται:

$$\text{συν}\,4\alpha = \frac{1-\frac{16}{9}}{1+\frac{16}{9}} = \frac{9-16}{9+16} = -\frac{7}{25},\quad \text{ημ}\,4\alpha = \frac{-\frac{8}{3}}{1+\frac{16}{9}} = -\frac{24}{25}.$$

129. — Ἐπειδὴ $\text{τεμ}\,3\alpha = \frac{1}{\text{συν}3\alpha}$ καὶ $\text{συν}\,3\alpha = 4\,\text{συν}^3\alpha - 3\text{συν}\alpha$

(τύπος 51) ἕπεται ὅτι:

$$\text{τεμ}3\alpha = \frac{1}{4\text{συν}^3\alpha-3\text{συν}\alpha} = \frac{\frac{1}{\text{συν}^3\alpha}}{4-\frac{3}{\text{συν}^2\alpha}} = \frac{\text{τεμ}^3\alpha}{4-3\text{τεμ}^2\alpha}.$$

130. — Ὁμοίως $\text{στεμ}3\alpha = \frac{1}{3\text{ημ}\alpha-4\text{ημ}^3\alpha} = \frac{\frac{1}{\text{ημ}^3\alpha}}{\frac{3}{\text{ημ}^2\alpha}-4} = \frac{\text{στεμ}^3\alpha}{3\text{στεμ}^2\alpha-4}.$

131. — Αἱ ἰσότητες α', β', γ' εὑρίσκονται ἐφαρμοζομένων τῶν τύπων (36) καὶ (38) εἰς τὰ τόξα α καὶ (ν—1) α. Αἱ λοιπαὶ εὑρίσκονται ἐφαρμοζομένων τῶν τύπων (43), (45) καὶ (47) εἰς τὸ τόξον (να).

132 [60 α'.]. — Ἐπειδὴ $15^0 = \frac{30^0}{2}$ καὶ $\text{συν}\,30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ἕπεται ὅτι (τύποι 52, 53, 54 [30, 31, 32])

$$συν15^0=\sqrt{\frac{1+συν30^0}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$ημ15^0=\sqrt{\frac{1-συν30^0}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$εφ15^0=\sqrt{\frac{1-συν30^0}{1+συν30^0}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{4-3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}.$$

Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ὅτι: $σφ15^0=\frac{1}{εφ15^0}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$,

$$τεμ15^0=\frac{1}{συν15^0}=\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}.$$ $στεμ15^0$

$$=\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2-\sqrt{3}}.$$

133.[606′].— Ἐπειδὴ $22^0 30'=\frac{45^0}{2}$ ἕπεται ὅτι: $ημ(22^0 30')$

$$=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},\ συν(22^0 30')=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},\ εφ(22^0 30')=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{(2+\sqrt{2})^2}}=\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2}}{2}.=\sqrt{2}-1.$$

Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$σφ(22^0 30')=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=1+\sqrt{2}.$$

$$τεμ(22^0 30')=\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2+\sqrt{2}}\,(2-\sqrt{2})}{2}$$

$$=(2-\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\sigma\tau\epsilon\mu(22^{\circ}30')=\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}}(2+\sqrt{2})}{2}$$
$$=(2+\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

134.— Ἐπειδὴ $7^{\circ}30'=\frac{15^{\circ}}{2}$, ἔπεται ὅτι: $\sigma\upsilon\nu(7^{\circ}30')=\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 15^{\circ}}{2}}$

$=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. Ὁμοίως εὑρίσκονται καὶ οἱ ἄλλοι τριγ. ἀριθμοὶ αὐτοῦ.

135.[61].— Κατὰ τοὺς γνωστοὺς τύπους εἶναι: $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\frac{2}{3}}{2}}$

$$=\sqrt{\frac{5}{6}}=\frac{1}{6}\sqrt{30},\ \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6},$$

$\epsilon\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκεται εὐκόλως ὅτι $\sigma\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{5}$, $\tau\epsilon\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{\sqrt{30}}{5}$, $\sigma\tau\epsilon\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{6}$.

136.— $\mathrm{T}\epsilon\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\omega}{2}}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\omega}}$

$$=\pm\frac{\sqrt{\frac{2}{\sigma\upsilon\nu\,\omega}}}{\sqrt{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}+1}}=\pm\sqrt{\frac{2\tau\epsilon\mu\omega}{1+\tau\epsilon\mu\omega}}.$$

137.— Ἐπειδὴ $375^{\circ}=360^{\circ}+15^{\circ}$, τὸ τόξον 375° περατοῦται εἰς τὸ α΄. τεταρτημόριον καὶ μεταξὺ Α καὶ Δ (Σχ. 45 εὐθ. τ.)· εἶναι ἄρα τὸ ημ375° καὶ συν375° θετικὰ καὶ συν$375^{\circ}>$ημ375°. Τὸ ἄθροισμα ὅθεν αὐτῶν εἶναι θετικὸν ἡ δὲ διαφορὰ ημ375° —

συν375° εἶναι ἀρνητική. Ἁρμόζει ὅθεν (§ 75Γ') τὸ σύστημα:

$$ημ375^\circ + συν375^\circ = \sqrt{1 + ημ750^\circ} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$ημ375^\circ - συν375^\circ = -\sqrt{1 - ημ750^\circ} = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὑρίσκομεν $ημ375 = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$

καὶ $συν375^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$.

Σημ. Ἐπειδὴ τὰ τόξα 375° καὶ 15° ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, θὰ ἔχωσι καὶ τοὺς αὐτοὺς ὁμωνύμους τριγ. ἀριθμούς. Παραβάλατε τὰς εὑρεθείσας τιμὰς πρὸς τὰς τῶν ὁμωνύμων τριγ. ἀριθμῶν τοῦ 15° (ἄσκ. 132) καὶ δείξατε ὅτι ὄντως εἶναι ἴσαι.

138.—Ἐπειδὴ $600^\circ = 360^\circ + 240^\circ$, ἕπεται ὅτι τὸ τόξον 600° περατοῦται εἰς τὸ γ'. τεταρτημόριον καὶ μεταξὺ Δ' καὶ Β' (Σχ. 45 εὐθ. τρ)· εἶναι ἄρα τὸ ημ600° καὶ συν600° ἀριθμοὶ ἀρνητικοὶ καὶ τὸ ἡμ 600° ἀπολύτως μεγαλύτερον τοῦ συν600°. Διὰ τοῦτο τὸ ἄθροισμα ημ600°+συν600° καὶ ἡ διαφορὰ ημ600°—συν 600° εἶναι ἀριθμοὶ ἀρνητικοί· ἁρμόζει ὅθεν τὸ σύστημα:

$$ημ\,600^\circ + συν600^\circ = -\sqrt{1 + ημ1200^\circ} = -\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$$

$$ημ\,600^\circ - συν\,600^\circ = -\sqrt{1 - ημ1200^\circ} = -\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}.$$

Λύοντες τοῦτο εὑρίσκομεν : $ημ600^\circ = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}$

$$= -\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}}{4} = -\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$συν600^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1-1-\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2}.$$

139.—Τοῦ τόξου 112° 30' περατουμένου εἰς τὸ β'. τεταρτημόριον τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ εἶναι θετικόν, τὸ δὲ συνημίτονον ἀρνητικόν, ἄρα ἡ διαφορὰ ημ $(112^\circ 30')$ — συν$(112^\circ 30')$ εἶναι θετική. Ἐπειδὴ δὲ $112^\circ 30' < 90^\circ + 45^\circ$ τὸ ἡμ $(112^\circ 30')$ εἶναι μεῖζον καὶ τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ συν$(112^\circ 30')$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἄθροισμα ημ$(112^\circ 30')$ + συν$(112^\circ 30')$ εἶναι θετικόν. Ἁρμόζει ἄρα τὸ α'. σύστημα, ἤτοι :

$$\text{ημ}(112^\circ 30')+\text{συν}(112^\circ 30')=\sqrt{1+\text{ημ}225^\circ}=\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ημ}(112^\circ 30')-\text{συν}(112^\circ 30')=\sqrt{1-\text{ημ}\,225^\circ}=\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}.$$

Λύοντες τοῦτο εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{ημ}\,(112^\circ 30')=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4}\ \text{καὶ συν}(112^\circ 30')$$

$$=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}-\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4}.$$

140. — Ἐπειδὴ τὸ τόξον 115° λήγει εἰς τὸ 6'. τεταρτημόριον καὶ εἶναι μικρότερον τοῦ $90^\circ+45^\circ=135^\circ$, ἡ εφ 115°, εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἀπολύτως μείζων τῆς 1· δέον ὅθεν νὰ λάβωμεν ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ τύπου (56) τὴν πληροῦσαν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τούτους, ἤτοι εφ $115^\circ=\dfrac{\sqrt{1+\text{ημ}330^\circ}+\sqrt{1-\text{ημ}330^\circ}}{\sqrt{1+\text{ημ}330^\circ}-\sqrt{1-\text{ημ}330^\circ}}$

$$=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}-\sqrt{1+\frac{1}{2}}}=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-(2+\sqrt{3})$$

141.—Ἐπειδὴ τὸ τόξον $157^\circ 30'$ περατοῦται εἰς τὸ 6'. τεταρτημόριον καὶ εἶναι μεῖζον τοῦ $90^\circ+45^\circ=135^\circ$ ἡ ἐφαπτομένη αὐτοῦ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἀπολύτως μικροτέρα τῆς 1. Ἐκ τῶν δύο ὅθεν τιμῶν τοῦ τύπου (56) δέον νὰ ληφθῇ ἡ πληροῦσα ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τούτους, ἤτοι ἐφ(157°30′)

$$=\frac{\sqrt{1+\eta\mu 315^\circ}-\sqrt{1-\eta\mu 315^\circ}}{\sqrt{1+\eta\mu 315^\circ}+\sqrt{1-\eta\mu 315^\circ}}=\frac{\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$=-\sqrt{2}+1.$

[62]. Λύοντες πρὸς εφ $\left(\frac{\omega}{2}\right)$ τὴν γ′. τῶν ἰσοτήτων (29) καταλήγομεν εἰς τὴν ἀποδεικτέαν ἰσότητα· (ὅρα Εὐθ. Τριγ. σελὶς 79 § 77Ε′).

142. — Ἐπειδὴ 525° = 360° + 165°, τὸ τόξον 525° λήγει εἰς τὸ 6′. τεταρτημόριον καὶ ἔχει ἀρνητικὴν ἐφαπτομένην. Ἐκ τῶν δύο λοιπῶν τιμῶν τοῦ τύπου (57) δέον νὰ λάβωμεν τὴν ἀρνητικήν. Ὥστε :

$$\text{εφ } 525^\circ=\frac{-1+\sqrt{1+\frac{3}{9}}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{-1+\frac{\sqrt{12}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{-3+\sqrt{12}}{-\sqrt{3}}=\sqrt{3}-2.$$

143. — Ἐπειδὴ 750° = 360° × 2 + 30°, ἡ ἐφ 750° εἶναι θετική· ἄρα κατὰ τὸν τύπον (57) εἶναι :

$$\text{εφ } 750^\circ=\frac{-1+\sqrt{1+3}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Σημ. Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν παρατηροῦντες ὅτι ἐφ750° = ἐφ30°.

144 [68]. λογημ(48°12′) $=\bar{1},87243$

δι' αὔξ. τοῦ τόξου κατὰ 50″ αὔξ. λογημ $\frac{12}{60}\times 50=$ 10

ὥστε λογημ (48°12′50″) $=\bar{1},87253$

145.[69]. λογσυν(62°6′) $=\bar{1},67018$

δι' αὔξ. τόξου κατὰ 30′ ἐλάτ. λογ. 12

» » » » 7 » » 2,8

ἄρα » » » 37′ » » 14,8 ἤ 15

Ὥστε λογσυν(62°6′37″) $=\bar{1},67003$

146.[70]. λογεφ(34°17′) $=\bar{1}\ 83361$

δι' αὐξ. τόξου κατὰ 40″ αὐξ. λογέφ. 18

» » » » 6 » » » 2,70

ἄρα » » » 46″ » » » 20,70 ἢ 21

Ὥστε λογεφ$(34^\circ 17' 46'')$ $=\overline{1},83382$

147.[71].— λογσφ $(24^\circ 14')$ $=0,34667$

δι' αὐξ. τόξου κατὰ 30′ ἐλ. λογ. 16,5

» » » » 9″ » » 4,95

ἄρα » » » 39″ » » 21,45 ἢ 21

Ὥστε: λογσφ$(24^\circ 14' 39)$ $=0,34646$

148.[72].—Ἐπειδὴ $180^\circ-(120^\circ 35')=59^\circ 25'$ ἕπεται ὅτι ημ$(120^\circ 35')$ $=$ημ$(59^\circ 26')$, ἄρα λογημ$(120^\circ 35')=$λογημ$(59^\circ 25')=\overline{1},93495$.

149.[73].—Ἐπειδὴ $(235^\circ 40' 23'')-180^\circ=55^\circ 40' 23''$, ἕπεται ὅτι λογέφ$(235^\circ 40' 23'')=$λογεφ$(55^\circ 40' 23'')=0,16568$.

150.[74].—Ἐπειδὴ $360^\circ-(320^\circ 12' 20'')=39^\circ 47' 40''$ ἕπεται ὅτι λογσυν$(320^\circ 12' 20'')=$λογσυν$(39^\circ 47' 40'')=\overline{1},88556$.

151.—α′). Ἐπειδὴ $\pi-\frac{7\pi}{11}=\frac{4\pi}{11}$, ἕπεται ὅτι λογημ $\frac{7\pi}{11}$ $=$λογημ $\frac{4\pi}{11}$. Ἀλλ' ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\mu}{180}=\frac{\alpha}{\pi}$ (§ 16), ἂν τεθῇ $\alpha=\frac{4\pi}{11}$, προκύπτει $\mu=65^\circ\ 27'\ 16'$, 8. Ὥστε:

λογημ $\frac{7\pi}{11}=$λογημ$(65^\circ 27' 16'')=\overline{1},95887$.

β′. Ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\mu}{180}=\frac{\alpha}{\pi}$, ἂν τεθῇ $\alpha=\frac{3\pi}{14}$, προκύπτει ὅτι $\mu=38^\circ\ 34'\ 17''$· ἄρα λογεφ$\frac{3\pi}{14}=$λογεφ$(38^\circ 34' 17'')=1,90171$.

γ′. Ἐπειδὴ $1>\frac{5}{7}>\frac{1}{2}$, ἕπεται ὅτι $\pi>\frac{5\pi}{7}>\frac{\pi}{2}$, ὅθεν ἕπεται ὅτι τὸ τόξον $\frac{5\pi}{7}$ καταλήγει εἰς τὸ 6′. τεταρτημόριον καὶ ἡ σφ $\frac{5\pi}{7}$ εἶναι ἀριθμὸς ἀρνητικὸς καὶ δὲν ἔχει λογάριθμον.

δ′. Ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν, εὑρίσκομεν ὅτι τόξον $\frac{\pi}{17}$ εἶναι $10^\circ\ 35'\ 17'',65$. Ἄρα:

λογσυν $\frac{\pi}{17}=$λογσυν $(10^\circ\ 35'\ 17'',65)=\overline{1},99254$.

152.[75].—Ἐπειδὴ ημχ$= \frac{2}{3}$ ἕπεται ὅτι λογημχ $=$ λογ2 — λογ3 $=\bar{1},82391$, ἄρα $\chi=41^{\circ}\ 48'\ 38'',57$.

153.[76].—Ἐπειδὴ ἐφχ $=3$, ἕπεται ὅτι λογεφχ $=0,47712$, ἄρα $\chi=71^{\circ}\ 35'\ 54'',3$.

154[77α'].—Ἐπειδὴ σφχ$= \frac{1}{2}$, ἕπεται ὅτι λογσφχ $=-$ λογ2 $=-0,30103=\bar{1},69897$, ὅθεν $\chi=63^{\circ}\ 26'\ 5'',625$.

155[77β'].—Ἐπειδὴ ημχ $=-\frac{5}{6}$, τὸ τόξον χ εἶναι μεγαλύτερον τῶν 180°. Ἐὰν δὲ τεθῇ $\chi-180^{\circ}=\psi$, θὰ εἶναι (§ 60) ημψ $=-$ημχ$=\frac{5}{6}$ καὶ λογημψ$=$λογ5 $-$λογ6$=\bar{1},92082$· ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι $\psi=56^{\circ}26'33'',33$, ἄρα$\chi=180^{\circ}+\psi=236^{\circ}26'33'',33$.

156.—Ἐπειδὴ συνχ $=-\frac{6}{10}$, ἕπεται ὅτι συν$(180^{\circ}-\chi)=\frac{6}{10}$ καὶ καὶ λογσυν $(180^{\circ}-\chi)=\bar{1},77815$· ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι $180^{\circ}-\chi$ $=53^{\circ}7'49'',4$, ἄρα $\chi=180^{\circ}-(54^{\circ}7'49'',4)=126^{\circ}52'10'',6$.

[78]. Ἐπειδὴ συνχ$=\frac{6}{10}$, ἕπεται ὅτι λογσυνχ $=\bar{1},77815$, ἄρα $\chi=53^{\circ}7'49'',4$.

157.—Ἐὰν α εἶναι τὸ ἐλ. θετικὸν τόξον, ὅπερ ἔχει ἐφαπτομένην $\frac{2}{3}$. ἐκ τῆς ἰσότητος ἐφα $=\frac{2}{3}$ ἕπεται ὅτι λογεφα$=$λογ2$-$λογ3 $=\bar{1},82391$, ἄρα $\alpha=33^{\circ}41'24'',44$, Ἐὰν δὲ χ εἶναι τυχὸν τόξον ἔχον ἐφαπτομένην $\frac{2}{3}$, θὰ εἶναι εφχ$=$εφ$(33^{\circ}\ 41'\ 24'',44)$ καὶ ἑπομένως (§ 52 Ε') εἶναι $\chi-(33^{\circ}41'24'',44)=180^{\circ}.\lambda$, ἄρα $\chi=33^{\circ}41'24'',44+180^{\circ}.\lambda$.

158.[80].—Ἔστω α τὸ ἐλ. θετικὸν τόξον, ὅπερ ἔχει συνεφαπτομένην ἴσην πρὸς $3\sqrt{3}$. Ἐκ τῆς σφα $=3\sqrt{3}$ ἕπεται ὅτι λογσφα $=$λογ3$+\frac{\text{λογ}3}{2}=0,71568$, ἄρα $\alpha=10^{\circ}\ 53'\ 36''$. Ἐὰν δὲ σφχ$=3\sqrt{3}$, ἕπεται ὅτι σφχ$=$σφα, κατ' ἀκολουθίαν εφχ$=$εφ $(10^{\circ}\ 53'\ 36'')$, ἄρα $\chi-(10^{\circ}\ 53'\ 36'')=180^{\circ}.\lambda$ καὶ ἑπομένως $\chi=(10^{\circ}\ 53'\ 36'')+180^{\circ}\lambda$.

159.[79].—Ἔστω ὅτι ημα$=\sqrt{2}:2=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ἄρα $α=45^0$. Ἐὰν δὲ εἶναι καὶ ημχ$=\sqrt{2}:2$, ἔπεται ὅτι ημχ=ημ45^0 καὶ ἑπομένως (§ 52Γ') εἶναι $χ+45^0=(2K+1).180^0$ ἢ $χ-45^0=2K.180^0$, ὅθεν $χ=(2K+1)180^0-45^0$ καὶ $χ=2K.180^0+45^0$.

160.—Ἔστω χ τυχὸν καὶ α τὸ ἐλ.θετικὸν τῶν τόξων τούτων. Ἐπειδὴ τεμχ=τεμα$=1\ \frac{2}{5}=\frac{7}{5}$ ἔπεται ὅτι συνχ=συνα$=\frac{5}{7}$. Ἄρα λογσυνα $=\overline{1},85387$, ὅθεν $α=44^024'55'',38$. Ἐπειδὴ δὲ συνχ=συν$(44^024'55'',38)$, ἔπεται ὅτι (§ 52 Α') $χ=2K.180^0\pm(44^024'55'',38)$.

161.— Κατὰ τὴν ἰσότητα (α § 82) εἶναι λογημ $(8'',8)=$ λογ$8,8+S$ $=0,94448+\overline{6},68557=\overline{5},63005$.

162.— Ἐπειδὴ $90^0-(88^0\ 40'\ 25'')=1^0\ 19'35''=4775''$, ἔπεται ὅτι: λογσυν$(88^040'25'')$=λογημ $(4775'')$=λογ$4775+S=3,67897$ $+\overline{6},68554=\overline{2},36451$.

163.—Ἐπειδὴ $1^0\ 5'\ 32''=3932''$ κατὰ τὴν ἰσότητα (ϐ § 82) εἶναι: λογεφ$(1^05'32'')$=λογ$3932+T=3,59461+\overline{6},68563=\overline{2},28024$.

164.—Ἐπειδὴ $90^0-(89^03'40'')=56'\ 20''$, ἔπεται ὅτι εφ $(89^0\ 3'\ 40'')$ $=$σφ$(56'20'')=\frac{1}{εφ(56'20'')}$. Ἄρα λογεφ$(89^03'40'')=-$λογεφ $(56'20'')$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $56'20''=3380''$, εἶναι λογεφ$(56'20'')$ $=$λογ$3380+T=3,52892+\overline{6},68561=\overline{2},21453$. Ὥστε λογεφ $(89^03'40'')=-(\overline{2},21453)=2-0,21453=1,78547$.

165.—Ὅρα § 82 παράδ. 3ον Εὐθ. Τριγ.

166.—Ἐπειδὴ $90^0-(88^053'56'')=1^06'4''$, ἔπεται ὅτι λογσφ$(88^053'56'')$ $=$λογεφ$(1^06'4'')=3,59813+\overline{6},68563=\overline{2},28376$.

167.—Ἐπειδὴ $\overline{3},71900<\overline{3},72960<\overline{3},74248$, ἔπεται ὅτι $18'<τ<19'$ ἢ $1080''<τ<1140''$, ἄρα $S=\overline{6},68557$ καὶ ἑπομένως ἡ ἰσότης (α § 82) γίνεται $\overline{3},72960=$λογτ$+\overline{6},68557$, ἐξ ἧς λογτ$=3,04403$ καὶ $τ=1106'',69=18'26'',69$.

168.—Ἐπειδὴ $\overline{2},17128>\overline{2},16833>\overline{2},16268$ ἔπεται ὅτι $89^09'$ $<χ<89^010'$. Ἂν τὰ ἄνισα ταῦτα τόξα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ 90^0, εὑρίσκομεν ὅτι: $51'>90^0-χ>50'$ ἢ $3060''>90^0-χ>3000''$. Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι διὰ τὸ τόξον $90^0-χ$ τὸ S εἶναι $\overline{6},68556$. Ἐπειδὴ δὲ λογημ$(90^0-χ)=$ λογσυνχ $=\overline{2},16833$, ἡ ἰσότης (α § 82) γίνεται : $\bar{2},16833 = \lambda o\gamma(90^0-\chi)'' + \bar{6},68556$, ὅθεν $\lambda o\gamma(90^0-\chi)'' = 3,48277$, ἐξ ἧς $(90^0-\chi)'' = 3039',2857 = 50'39'',2859$. Λύοντες πρὸς χ εὑρίσκομεν ὅτι $\chi = 89^0\ 9'\ 20'',7143$.

169.— Ἐπειδὴ $\bar{2},45507 < \bar{2},45777 < \bar{2},45948$, ἕπεται ὅτι $1^0\ 38' < \chi < 1^0\ 39'$ ἢ $5880'' < \chi < 5940''$, ἄρα $T = \bar{6},68569$. Ἡ ἰσότης ὅθεν (6 § 82) γίνεται:
$\bar{2},45777 = \lambda o\gamma\chi + \bar{6},68569$, ἐξ ἧς $\lambda o\gamma\chi = 3,77208$, ὅθεν $\chi = 5916'',7 = 1^0 38' 36'',7$.

170.— Ἐπειδὴ $1,47541 < 1,47613 < 1,47921$, ἕπεται ὅτι $88^0 5' < \chi < 88^0 6'$, ἄρα $1^0 55' > 90^0-\chi > 1^0 54'$ ἢ $6900'' > 90^0-\chi > 6840''$, ὥστε $T = \bar{6},68573$. Ἐπειδὴ δὲ $\varepsilon\varphi(90^0-\chi) = \sigma\varphi\chi = \frac{1}{\varepsilon\varphi\chi}$, ἕπεται ὅτι $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi(90^0-\chi) = -\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\chi = -1,47613 = \bar{2},52378$. Ἡ ἰσότης ὅθεν (6 § 82) γίνεται $\bar{2},52387 = \lambda o\gamma(90^0-\chi)'' + \bar{6},68573$, ἐξ ἧς $\lambda o\gamma(90^0-\chi)' = 3,83814$, ἄρα $(90^0-\chi)'' = 6888'',7 = 1^0 54' 48'',7$· ἐκ ταύτης προκύπτει $\chi = 88^0 5' 11'',3$.

171.—Ἐπειδὴ $1,75808 > 1,75147 > 1,75090$ ἕπεται ὅτι $1^0 < \chi < 1^0 1'$ ἢ $3600'' < \chi < 3660''$, ἄρα $T = \bar{6},68562$. Ἐπειδὴ δὲ $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\chi = -\lambda o\gamma\sigma\varphi\chi = -1,75147 = \bar{2},24853$ ἡ ἰσότης (6 § 82) γίνεται: $\bar{2},24853 = \lambda o\gamma\chi + \bar{6},68562$, ὅθεν $\lambda o\gamma\chi = 3,56291$ καὶ $\chi = 3655'',16 = 1^0\ 0'\ 55'',16$.

172.— Ἐπειδὴ $\bar{3},94086 > \bar{3},92888 > \bar{3},92613$, ἕπεται ὅτι: $89^0\ 30' < \chi < 89^0 31'$, ὅθεν $30' > 90^0-\chi > 29'$ ἢ $1800'' > 90^0-\chi > 1740''$, ἄρα $T = \bar{6},68558$. Ἐπειδὴ $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi(90^0-\chi) = \lambda o\gamma\sigma\varphi\chi = \bar{3},92888$, ἡ ἰσότης (6 § 82) γίνεται:
$\bar{3},92888 = \lambda o\gamma(90^0-\chi) + \bar{6},68558$, ὅθεν $\lambda o\gamma(90^0-\chi) = 3,24330$ καὶ $(90^0-\chi) = 1751'' = 29'\ 11''$, ἄρα $\chi = 89^0\ 30'\ 49''$.

173.[81] — Κατὰ τὴν α'. τῶν ἰσοτήτων (58[33]) καλοῦντες χ τὸ ζητούμενον ἄθροισμα θέλομεν ἔχει $\chi = 2\eta\mu\left(\frac{42^0 5' + 37^0 6' 57''}{2}\right)$

$\sigma\upsilon\nu\frac{42^0 5' - (37^0 6' 57'')}{2} = 2\eta\mu(39^0\ 35'\ 58'',5)\ \sigma\upsilon\nu(2^0 29' 1'',5)$.

Ὅθεν $\lambda o\gamma\chi = \lambda o\gamma 2 + \lambda o\gamma\eta\mu(39^0 35' 58'',6) + \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu(2^0 29' 1'',5) = 0,30103 + \bar{1},80443 + \bar{1},99959 = 0,10505$ καὶ $\chi = 1,273647$.

174 [82] Καλοῦντες χ τὸ ζητούμενον εὑρίσκομεν, ὡς προηγουμένως

ὅτι $\chi=2\eta\mu(33^\circ 4'22'')\,\sigma\upsilon\nu(7^\circ 48''51'')$, ὅθεν $\lambda o\gamma\chi=0{,}03394$ καὶ $\chi=1{,}08127$.

175[83].— Κατὰ τὴν β΄. τῶν ἰσοτήτων (58[33]) εὑρίσκομεν ὅτι $\chi=2\eta\mu(15^\circ 31' 4'')\sigma\upsilon\nu(38^\circ 35' 13'')$, ὅθεν $\lambda o\gamma\chi=\bar{1}{,}62143$ καὶ $\chi=0{,}418245$.

176 [84].— Καλοῦντες χ τὸ ζητούμενον καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν α΄. τῶν τύπων (§ 59[35]) εὑρίσκομεν ὅτι $\chi=2\sigma\upsilon\nu(28^\circ 13')\ \sigma\upsilon\nu(6^\circ 57' 40'')$, ὅθεν $\lambda o\gamma\chi=0{,}24288$ καὶ $\chi=1{,}74936$.

177.[85].— Καλοῦντες χ τὸ ζητούμενον καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν β΄. τῶν τύπων (§ 59[34]) εὑρίσκομεν ὅτι $\chi=2\eta\mu\ (26^\circ 18' 27'')\ \eta\mu(14^\circ 1' 57'')$, ὅθεν $\lambda o\gamma\chi=\bar{1}{,}23227$ καὶ $\chi=0{,}214915$.

178.—Ἐπειδὴ $A+B+\Gamma=180^\circ$, ἕπεται ὅτι $\frac{A+B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=90^\circ$, ἤτοι τὰ τόξα $\left(\frac{A+B}{2}\right)$ καὶ $\frac{\Gamma}{2}$ εἶναι συμπληρωματικά. Κατὰ τὸν α΄. τῶν τύπων (59) εἶναι: $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B=2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\ \sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$. Ἐπίσης (§ 73) εἶναι $\sigma\upsilon\nu\Gamma-1=-(1-\sigma\upsilon\nu\Gamma)=-2\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}$. Προσθέτοντες ταύτας κατὰ μέλη καὶ παρατηροῦντες ὅτι $\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}=\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma-1=2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\right)$. Ἐπειδὴ δὲ $\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}=2\eta\mu\frac{A}{2}\ \eta\mu\frac{B}{2}$ (59), ἕπεται ὅτι

$$\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma-1=4\eta\mu\frac{A}{2}\ \eta\mu\frac{B}{2}\ \eta\mu\frac{\Gamma}{2}.$$

179.[63]. $1+\sigma\upsilon\nu A=\sigma\upsilon\nu 0+\sigma\upsilon\nu A=2\sigma\upsilon\nu\frac{A+0}{2}\ \sigma\upsilon\nu\frac{A-0}{2}=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}$.

$1-\sigma\upsilon\nu A=\sigma\upsilon\nu 0-\sigma\upsilon\nu A=2\eta\mu\frac{A+0}{2}\ \eta\mu\frac{A-0}{2}=2\eta\mu^2\frac{A}{2}$.

180.[86,87].—α΄.) Καλοῦντες χ τὴν ζητουμένην ποσότητα καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $1+\sigma\upsilon\nu\omega=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2}$ λαμβάνομεν $\chi=2\sigma\upsilon\nu^2(17^\circ 37' 30'')$, ὅθεν $\lambda o\gamma\chi=0{,}25927$ καὶ $\chi=1{,}81665$.

β'). Κατὰ τὸν τύπον $1-\sigma\upsilon\nu\omega=2\eta\mu^2\frac{\omega}{2}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\psi=2\eta\mu^2(37^\circ 40' 21'')$, ὅθεν $\lambda o\gamma\psi=\bar{1},87333$ καὶ $\psi=0{,}747016$.

181.— Ἐπειδὴ (59) $\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha=2\sigma\upsilon\nu 2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$, ἕπεται ὅτι $\sigma\upsilon\nu\alpha+2\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha=2\sigma\upsilon\nu 2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+2\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ $=2\sigma\upsilon\nu 2\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)$. Ἐπειδὴ δὲ $1+\sigma\upsilon\nu\alpha=2\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται: $\sigma\upsilon\nu\alpha+2\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha$ $=4\sigma\upsilon\nu 2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}$.

182.— Ἐπειδὴ (58) $\eta\mu\alpha+\eta\mu 3\alpha=2\eta\mu 2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$, ἕπεται ὅτι $\eta\mu\alpha+2\eta\mu 2\alpha+\eta\mu 3\alpha=2\eta\mu 2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+2\eta\mu 2\alpha=2\eta\mu 2\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)$ $=4\eta\mu 2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}$.

183.— Ἐπειδὴ $\eta\mu\alpha+\eta\mu 5\alpha=2\eta\mu 3\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha$, ὁ ἀριθμητὴς γίνεται $\eta\mu 3\alpha(1+2\sigma\upsilon\nu 2\alpha)$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ὁ παρονομαστὴς γίνεται $\sigma\upsilon\nu 3\alpha(1+2\sigma\upsilon\nu 2\alpha)$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα παράστασις ἰσοῦται πρὸς $\dfrac{\eta\mu 3\alpha(1+2\sigma\upsilon\nu 2\alpha)}{\sigma\upsilon\nu 3\alpha(1+2\sigma\upsilon\nu 2\alpha)}=\varepsilon\varphi 3\alpha$.

184.[64].— Γνωρίζομεν (§ 73 [47]) ὅτι $1-\sigma\upsilon\nu\tau=2\eta\mu^2\frac{\tau}{2}$ καὶ $1+\sigma\upsilon\nu\tau=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\tau}{2}$ · ἄρα $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\tau}{1+\sigma\upsilon\nu\tau}=\varepsilon\varphi^2\left(\dfrac{\tau}{2}\right)$.

185.— Κατὰ τοὺς τύπους (63) εἶναι: $\dfrac{\eta\mu A+\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu A-\sigma\upsilon\nu B}$

$$=\frac{2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-B}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\sigma\varphi\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

186.— Κατὰ τὴν α'. τῶν ἰσοτήτων (63) εἶναι : $ημτ + συντ$
$$=2ημ\frac{\pi}{4} συν\left(τ-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\, συν\left(τ-\frac{\pi}{4}\right).$$

187.— Καλοῦντες $χ$ τὴν ζητουμένην τιμὴν θὰ ἔχωμεν :
$$χ=τεμτ+στεμτ=\frac{1}{συντ}+\frac{1}{ημτ}=\frac{ημτ+συντ}{ημτσυντ}$$
$$=\frac{\sqrt{2}\, συν\left(τ-\frac{\pi}{4}\right)}{ημτσυντ}=\frac{2\sqrt{2}\, συν\left(τ-\frac{\pi}{4}\right)}{ημ2τ}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}\, συν(5^o17'18'')}{ημ(100^o34'36'')}=\frac{2\sqrt{2}\, συν(5^o17'18'')}{ημ(79^o25'24'')},$$ ὅθεν
$$λογχ=λογ2+\frac{λογ2}{2}+λογσυν(5^o17'18'')-λογημ(79^o25'24'')$$
$=0,45713$ καὶ $χ=2,86506$.

188.— Καλοῦντες $χ$ τὴν ζητουμένην τιμὴν θὰ ἔχωμεν $χ=τεμτ+εφτ$
$$=\frac{1+ημτ}{συντ}=\frac{ημ90^o+ημτ}{συντ}=\frac{2ημ\left(45^o+\frac{τ}{2}\right)συν\left(45^o-\frac{τ}{2}\right)}{συντ}$$
$$=\frac{2ημ^2\left(45^o+\frac{τ}{2}\right)}{συντ}=\frac{2ημ^2(58^o6'19'')}{συν(26^o12'38'')},$$ ὅθεν $λογχ=0,27707$
καὶ $χ=1,89265$.

[65]. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $εφA=\frac{ημA}{συνA}$, $εφB=\frac{ημB}{συνB}$ ἕπεται ὅτι
$$εφA\pm εφB=\frac{ημA}{συνA}\pm\frac{ημB}{συνB}=\frac{ημAσυνA\pm συνAημB}{συνA.συνB}.$$
Ἐπειδὴ δὲ [21,22] $ημAσυνB\pm συνAημB=ημ\,(A\pm B)$, ἕπεται
ὅτι $εφA+εφB=\frac{ημ(A\pm B)}{συνA.συνB}$.

189.[88].— Καλοῦντες $χ$ τὸ ζητούμενον θὰ ἔχωμεν (64)
$$χ=\frac{ημ(27^o33'20'')}{συν(5^o18')συν(22^o15'20'')},$$ ὅθεν $λογχ=λογημ(27^o33'20'')$
$-[λογσυν\,(5^o\,18')+λογσυν\,(22^o\,15'\,20'')]=\bar{1},70069$
καὶ $χ=0,5019875$.

190.[66].— Ἐπειδὴ $σφA=\frac{συνA}{ημA}$ καὶ $σφB=\frac{συνB}{ημB}$ ἕπεται ὅτι

$$σφA+σφB=\frac{συνA}{ημA}+\frac{συνB}{ημB}=\frac{συνAημB+ημAσυνB}{ημA.ημB}$$
$$=\frac{ημ(A+B)}{ημAημB},$$

191.[67].— α'. Τρόπος. Γνωρίζομεν ὅτι $εφA+εφB=\frac{ημ(A+B)}{συνA.συνB}$ καὶ $σφA+σφB=\frac{ημ(A+B)}{ημAημB}$, ἄρα:

$$\frac{εφA+εφB}{σφA+σφB}=\frac{ημ(A+B)}{συνA.συνB}.\frac{ημAημB}{ημ(A+B)}=\frac{ημAημB}{συνAσυνB}$$

$=εφAεφB$. β'. Τρόπος. Ἐπειδὴ $σφA=\frac{1}{εφA}$ καὶ $σφB=\frac{1}{εφB}$

ἕπεται ὅτι $\frac{εφA+εφB}{σφB+σφB}=\frac{εφA+εφB}{\frac{1}{εφA}+\frac{1}{εφB}}=\frac{(εφA+εφB)εφAεφB}{(εφA+εφB)}$

$=εφAεφB$.

192.—Ἐπειδὴ $εφA=\frac{ημA}{συνB}$, ἕπεται ὅτι $1+εφ^2A=1+\frac{ημ^2A}{συν^2A}$

$\frac{συν^2A+ημ^2A}{συν^2A}=\frac{1}{συν^2A}$. β'. τρόπος. Ἐμάθομεν (14) ὅτι

$συνA=\frac{1}{\pm\sqrt{1+εφ^2A}}$ ἐντεῦθεν εὐκόλως πρόκύπτει ὅτι $συν^2A$

$=\frac{1}{1+εφ^2A}$, ὅθεν $1+εφ^2A=\frac{1}{συν^2A}$.

193.— Κατὰ τὸν δ'. τῶν τύπων (66) εἶναι: $ημ20^0ημ80^0=\frac{1}{2}$

$(συν60^0—συν100^0)$ καὶ $ημ40^0.ημ60^0=\frac{1}{2}$ $(συν20^0—συν100^0)$·

ἄρα: $ημ20^0ημ80^0ημ40^0ημ60^0=\frac{1}{4}$ $(συν60^0\ συν20^0—συν20^0$

$συν100^0—συν100^0\ συν60^0+συν^2100^0)$. (1) Ἐπειδὴ δὲ (66γ')

$συν60^0\ συν20^0=\frac{1}{2}(συν80^0+συν40^0)$, $συν100^0\ συν20^0=\frac{1}{2}$

$(συν120+συν80^0)$, $συν60^0συν100^0=\frac{1}{2}(συν160^0+συν40^0)$ καὶ

$συν^2100=συν100^0\ συν100^0=\frac{1}{2}(συν200^0+συν0^0)$, ἡ ἰσότης

(1) γίνεται: $ημ20^0\, ημ80^0\, ημ40^0\, ημ60^0 = \frac{1}{8}$ (συν200^0 — συν 160^0 + συν0^0 — συν120^0). (2). Ἀλλὰ συν200^0 — συν160^0 = $-2ημ20^0 ημ180^0 = 0$ καὶ συν0^0—συν120^0 $=2ημ^2 60^0 = 2 . \frac{3}{4}$ $= \frac{6}{4}$. Ἡ ἰσότης ἄρα (2) γίνεται $ημ20^0\, ημ40^0\, ημ60^0\, ημ80 =$ $\frac{1}{8} . \frac{6}{4} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$.

194.— Κατὰ τὸν γ'. τῶν τύπων (66) εἶναι: συν20^0 συν80^0 = $\frac{1}{2}$ (συν 100^0 + συν60^0) καὶ συν 40^0 συν 60^0 = $\frac{1}{2}$ (συν 100^0 + συν 20^0). Ἄρα:

συν 20^0 συν 40^0 συν 60^0 συν 80^0 = $\frac{1}{4}$ (συν^2 100^0 + συν 100^0 συν 60^0 + συν 20^0 συν 100^0 + συν 20^0 συν 60^0).

Ἐπειδὴ δὲ συν^2 100^0 = συν 100^0. συν 100^0 = $\frac{1}{2}$ (συν200^0 + συν 0^0), συν 100^0 συν 60^0 = $\frac{1}{2}$ (συν 160^0 + συν 40^0), συν 20^0 συν 100^0 = $\frac{1}{2}$ (συν 120^0 + συν 80^0), συν 20^0 συν 60^0 = $\frac{1}{2}$ (συν 80^0 + συν 40^0), ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται: συν 20^0 συν 40^0 συν 60^0 συν 80^0 = $\frac{1}{8}$ (συν 200^0 + συν 0^0 + συν 160^0 + συν 40^0 + συν 120^0 + συν 80^0 + συν 80^0 + συν 40^0). Καὶ ἐπειδὴ συν 200^0 + συν 160^0 = 2 συν180^0 συν 20^0 = — 2 συν 20^0

συν 0^0 + συν 120^0 = 2 συν^2 $60^0 = 2 . \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

2 (συν 40^0 + συν 80^0) = 4 συν 60^0 συν 20^0 = 2 συν 20^0, ἕπεται ὅτι:

συν 20^0 συν 40^0 συν 60^0 συν 80^0 = $\frac{1}{8}\Big($ — 2 συν20^0 + $\frac{1}{2}$ + 2 συν$20^0\Big) = \frac{1}{16}$.

195. Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς προηγουμένως (ἄσκ. 193, 194) ἀποδειχθείσας ἰσότητας καταλήγομεν εἰς τὴν ἀποδεικτέαν.

196. Κατὰ τὰς ἰσότητας (64 καὶ 66) εἶναι : $εφ 9^\circ + εφ 81^\circ$

$$= \frac{ημ 90^\circ}{συν 9^\circ συν 81^\circ} = \frac{1}{συν 9^\circ συν 81^\circ} = \frac{2}{συν 90^\circ + συν 72^\circ} = \frac{2}{συν 72^\circ},$$

$$εφ 27^\circ + εφ 63^\circ = \frac{ημ 90^\circ}{συν 27^\circ συν 63^\circ} = \frac{1}{συν 27^\circ συν 63^\circ}$$

$$= \frac{2}{συν 90^\circ + συν 36^\circ} = \frac{2}{συν 36^\circ}.$$

$$\text{Ἄρα } εφ 9^\circ - εφ 27^\circ - εφ 63^\circ + εφ 81^\circ = \frac{2}{συν 72^\circ}$$

$$- \frac{2}{συν 36^\circ} = \frac{2(συν 36^\circ - συν 72^\circ)}{συν 36^\circ συν 72^\circ} = \frac{2(συν 36^\circ - συν 72^\circ)}{\frac{1}{2}(συν 108^\circ + συν 36^\circ)}$$

$$= \frac{4(συν 36^\circ - συν 72^\circ)}{συν 36^\circ + συν 108^\circ}$$

Ἐπειδὴ $72^\circ + 108^\circ = 180^\circ$, ἕπεται ὅτι $συν 108^\circ = -συν 72^\circ$ καὶ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$εφ 9^\circ - εφ 27^\circ - εφ 63^\circ + εφ 81^\circ = \frac{4(συν 36^\circ - συν 72^\circ)}{συν 36^\circ - συν 72^\circ} = 4.$$

197. — Ἐπειδὴ $ημχ\,(συν 2χ + συν 4χ + συν 6χ) = ημχ\,συν 2χ + ημχ\,συν 4χ + ημχ\,συν 6χ$ καὶ $ημχ\,συν 2χ = \frac{1}{2}(ημ 3χ - ημχ)$,

$ημχ\,συν 4χ = \frac{1}{2}(ημ 5χ - ημ 3χ)$, $ημχ\,συν 6χ = \frac{1}{2}(ημ 7χ - ημ 5χ)$,

ἕπεται ὅτι :

$2\,ημχ\,(συν 2χ + συν 4χ + συν 6χ) = (ημ 3χ - ημχ) + (ημ 5χ - ημ 3χ) + (ημ 7χ - ημ 5χ) =$

$$ημ 7χ - ημχ$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν $ημ 7χ - 2\,ημχ\,(συν 2χ + συν 4χ + συν 6χ) = ημ 7χ - (ημ 7χ - ημχ) = ημχ$.

198. — α'. Τρόπος. Ἀναπτύσσοντες τὰ $ημ(β-γ)$, $ημ(γ-α)$, $ημ(α-β)$, πολ/ζοντες ἐπὶ τοὺς ἀντιστοίχους παράγοντας καὶ ἐκτελοῦντες τὴν ἀναγωγὴν εὑρίσκομεν 0.

β'. Τρόπος. Κατὰ τὴν δ'. τῶν τύπων (66) εἶναι : $ημα\,ημ(β-γ)$

$= \frac{1}{2}\left[συν(α-β+γ) - συν(α+β-γ)\right]$, $ημβ\,ημ(γ-α) =$

$\frac{1}{2}\Big[$συν $(\beta-\gamma+\alpha)-$συν $(\beta+\gamma-\alpha)\Big[$ καὶ ημγημ$(\alpha-\beta)$ =

$\frac{1}{2}\Big[$συν $(\gamma-\alpha+\beta)-$συν $(\alpha-\beta+\gamma)\Big]$.

Ἄρα: ημαημ $(\beta-\gamma)+$ημβημ $(\gamma-\alpha)+$ημγημ $(\alpha-\beta)$ =

$\frac{1}{2}\Big[$συν $(\alpha-\beta+\gamma)-$συν $(\alpha+\beta-\gamma)+$συν $(\beta-\gamma+\alpha)-$συν

$(\beta+\gamma-\alpha)+$συν $(\gamma-\alpha+\beta)-$συν $(\alpha-\beta+\gamma\Big]=0$.

199.—Ἐπειδὴ $\alpha+\beta=\alpha\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)$, θέτοντες $\frac{\beta}{\alpha}=$ συνω $(\beta<\alpha)$ εὑρίσκομεν ὅτι:

$\chi=\alpha+\beta=\alpha$ (1+συνω) = 2α συν² $\frac{\omega}{2}$. Ἐκ τῆς $\frac{\beta}{\alpha}=$ συνω λαμβάνομεν λογ συνω = λογβ − λογα = 2,75964 − 3,35892 = $\bar{1}$,40072, ἄρα ω = 75° 25′ 39″ καὶ $\frac{\omega}{2}$ = 37° 42′50″. Ἤδη

ἐκ τῆς χ = 2ασυν² $\frac{\omega}{2}$ εὑρίσκομεν ὅτι:

λογχ = λογ2 + λογα + 2λογ συν (37° 42′ 50″) = 3,45639,
ὅθεν χ = 2860,13

200. Καλοῦντες χ τὴν ζητουμένην διαφορὰν θέλομεν ἔχει χ $=\alpha-\beta=\alpha\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)$. Ἐὰν δὲ θέσωμεν ημ²α $=\frac{\beta}{\alpha}$, εὑρίσκομεν ὅτι χ = ασυν²ω. Ἐκ τῆς τεθείσης ἰσότητος ημ²ω $=\frac{\beta}{\alpha}$ εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι: ω = 30° 6′ 22″. Εἶτα εὑρίσκομεν ὅτι: λογχ = 3,23306, ὅθεν χ = 1710,24.

201. Καλοῦντες χ τὴν ζητουμένην τιμὴν θὰ ἔχωμεν $\chi=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$

$=\frac{-\frac{\beta}{\alpha}}{1+\frac{\beta}{\alpha}}$. Ἐὰν δὲ τεθῇ εφω $=\frac{\beta}{\alpha}$, αὕτη γίνεται

$$\chi=\frac{1-\text{εφω}}{1+\text{εφω}}=\frac{\text{εφ}45^\circ-\text{εφω}}{1+\text{εφ}45^\circ\text{εφω}}=\text{εφ}\,(45^\circ-\omega).$$

'Εκ τῆς $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\beta}{\alpha}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\omega = 24^\circ\ 8'\ 21''$, ἄρα $45^\circ - \omega = 20^\circ\ 51'\ 29''$ καὶ $\lambda o\gamma\chi = \lambda o\gamma\varepsilon\varphi\ (20^\circ\ 51'\ 29'')$ $= \bar{1},58095$, ὅθεν $\chi = 0,381025$.

202. Καθιστῶμεν τὸ β΄. μέλος λογιστὸν διὰ τῶν λογαρίθμων ὡς κάτωθι φαίνεται·

$$\varepsilon\varphi\chi = \sqrt{2} + \eta\mu\, 20^\circ = \sqrt{2}\left(1 + \frac{\eta\mu 20^\circ}{\sqrt{2}}\right).$$ Θέτοντες δὲ $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu 20^\circ}{\sqrt{2}}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\varepsilon\varphi\chi = \sqrt{2}\ (1 + \varepsilon\varphi\omega) = \sqrt{2}$

$$(\varepsilon\varphi\ 45^\circ + \varepsilon\varphi\omega) = \sqrt{2}\ \frac{\eta\mu(45^\circ + \omega)}{\sigma\upsilon\nu 45^\circ\ \sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{2\eta\mu(45^\circ + \omega)}{\sigma\upsilon\nu\ \omega}. \quad (1)$$

'Εκ τῆς $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu 20^\circ}{\sqrt{2}}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\omega = \lambda o\gamma\eta\mu\ 20^\circ$ $- \frac{1}{2}\lambda o\gamma\, 2 = \bar{1},38354$, ὅθεν $\omega = 13^\circ\ 35'\ 44'',7$. Ἤδη ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν ὅτι $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\chi = 0,24458$ καὶ $\chi = 60^\circ$ $20'\ 33''$.

203.— Προφανῶς $\sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} = \sqrt{\frac{\alpha\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)}{\alpha\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)}}$. Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\frac{\beta}{\alpha}$ $=\sigma\upsilon\nu\varphi$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\sqrt{\frac{\alpha\ \beta}{\alpha + \beta}} = \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\varphi}{1 + \sigma\upsilon\nu\varphi}}$

$$= \sqrt{\frac{2\ \eta\mu^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{2\,\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}} = \varepsilon\varphi\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

204.—'Εργαζόμενοι ὡς προηγουμένως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} = \varepsilon\varphi\left(\frac{\varphi}{2}\right),\quad \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}} = \sigma\varphi\left(\frac{\varphi}{2}\right),\ \text{ἄρα}\ \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} +$$

$$\sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}} = \varepsilon\varphi\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sigma\varphi\left(\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$\frac{\eta\mu\ \frac{\varphi}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}} + \frac{\sigma\upsilon\nu\ \frac{\varphi}{2}}{\eta\mu\ \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{\eta\mu\ \frac{\varphi}{2}\ \sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}} = \frac{2}{\eta\mu\varphi}.$$

205.— Προφανῶς $\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta}=\sqrt{\alpha\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)}+$
$\sqrt{\alpha\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)}=\sqrt{\alpha}\left(\sqrt{1+\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{1-\frac{\beta}{\alpha}}\right)$. Ἐὰν δὲ τεθῇ $\text{συν}\omega=\frac{\beta}{\alpha}$, αὕτη γίνεται:

$$\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta}=\sqrt{\alpha}\left(\sqrt{1+\text{συν}\omega}+\sqrt{1-\text{συν}\omega}\right)=$$

$$\sqrt{\alpha}\left(\sqrt{2\text{συν}^2\frac{\omega}{2}}+\sqrt{2\text{ημ}^2\frac{\omega}{2}}\right)=\sqrt{2\alpha}\left(\text{συν}\frac{\omega}{2}+\text{ημ}\frac{\omega}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2\alpha}\left[\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2}\right)+\text{ημ}\frac{\omega}{2}\right]=2\sqrt{2\alpha}\,\text{ημ}\frac{\pi}{4}\,\text{συν}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)$$

$$=2\sqrt{\alpha}\,\text{συν}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right).$$

206.—α΄. τρόπος.—Ἐξάγοντες τὴν $\sqrt{3}$ ἐκτὸς παρενθέσεως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{συν}\chi+\sqrt{3}\,\text{ημ}\chi=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{συν}\chi+\text{ημ}\chi\right).$$ Ἐπειδὴ δὲ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $=\text{εφ}\frac{\pi}{6}$, αὕτη γίνεται $\text{συν}\chi+\sqrt{3}\,\text{ημ}\chi=$

$$\sqrt{3}\left(\frac{\text{ημ}\chi\,\text{συν}\frac{\pi}{6}+\text{ημ}\frac{\pi}{6}\,\text{συν}\chi}{\text{συν}\frac{\pi}{6}}\right)=\sqrt{3}\,\frac{\text{ημ}\left(\chi+\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=$$

$$2\text{ημ}\left(\chi+\frac{\pi}{6}\right).$$

β΄. τρόπος.—Ἐπειδὴ $\sqrt{3}=\text{εφ}\frac{\pi}{3}$, ἕπεται ὅτι:

$$\text{συν}\chi+\sqrt{3}\,\text{ημ}\chi=\text{συν}\chi+\frac{\text{ημ}\frac{\pi}{3}}{\text{συν}\frac{\pi}{3}}\,\text{ημ}\chi=\frac{\text{συν}\chi\,\text{συν}\frac{\pi}{3}+\text{ημ}\chi\,\text{ημ}\frac{\pi}{3}}{\text{συν}\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\text{συν}\left(\chi-\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{2}}=2\text{συν}\left(\chi-\frac{\pi}{3}\right).$$

207. — Προφανῶς $\eta\mu\tau - \dfrac{\sigma\upsilon\nu\tau}{\sqrt{3}} = \eta\mu\tau - \dfrac{\eta\mu\dfrac{\pi}{6}}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6}}\sigma\upsilon\nu\tau =$

$$\frac{\eta\mu\tau\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6} - \eta\mu\dfrac{\pi}{6}\,\sigma\upsilon\nu\tau}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6}} = \frac{\eta\mu\left(\tau-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6}} = \frac{2\eta\mu\left(\tau-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}\,\eta\mu\left(\tau-\dfrac{\pi}{6}\right)}{3}.$$

208. — Προφανῶς εἶναι $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} = \sqrt{\alpha^2\left(1+\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}\right)}$ $= \alpha\sqrt{1+\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}}$. Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\varepsilon\varphi^2\omega = \dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}$, αὕτη γίνεται $\chi = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} = \alpha\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\omega} = \dfrac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\omega}$.

Ἐκ δὲ τῆς τεθείσης ἰσότητος $\varepsilon\varphi^2\omega = \dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2} = \dfrac{1200^2+450^2}{895^2}$ $= \dfrac{1642500}{895^2}$ λαμβάνομεν $2\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\omega = \lambda o\gamma\,1642500 - 2\lambda o\gamma 895$ $=0{,}31186$, ὅθεν $\omega = 55^\circ\ 4'\ 17''$, 7. Ἤδη ἐκ τῆς $\chi = \dfrac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma\chi = \lambda o\gamma\alpha - \lambda o\gamma\,\sigma\upsilon\nu\omega = 3{,}19400$, ὅθεν χ $= 1563{,}14$.

209. — α΄.) Ἐπειδὴ $\eta\mu\dfrac{\chi}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\chi}{2}\right)$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\chi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\chi$. Ἄρα (§ 52 Α΄) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\chi}{2} \pm \chi = 2K\pi$. Ἐκ τῆς α΄. τούτων εὑρίσκομεν $\chi = (4K-1)\pi$, ἐκ δὲ τῆς β΄ $\chi = \dfrac{\pi}{3}(1-4K)$.

β΄. τρόπος. — Ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\chi}{2} - \eta\mu^2\dfrac{\chi}{2} = 1 - 2\eta\mu^2\chi$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $2\,\eta\mu^2\dfrac{\chi}{2} + \eta\mu\dfrac{\chi}{2} - 1 = 0$, ἐξ ἧς τεμ $\left(\frac{\gamma}{2}\right)=-1$ καὶ ημ $\frac{\chi}{2}=\frac{1}{2}$. Ἡ α΄. τούτων γράφεται

ημ $\frac{\chi}{2}=$ ημ $\frac{3\pi}{2}$, ἡ δὲ ημ $\frac{\chi}{2}=$ ημ $\frac{\pi}{6}$ καὶ ἀμφότεροι λύονται εὐκόλως (§ 52 Γ΄)

210. — α΄. Τρόπος Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ημ$^2\chi=1-$συν$^2\chi$ θέτομεν τὴν ἐξίσωσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν $1-2$ συν$^2\chi=0$, ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι συν$=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ἡ α΄ τούτων γράφεται συνχ$=$συν $\frac{\pi}{4}$ ἡ δὲ β΄. οὕτω συνχ$=$συν $\frac{3\pi}{4}$, ὧν ἑκατέρα λύεται εὐκόλως. (§ 52 Α΄).

β΄. τρόπος, Θέτοντες τὴν ἐξίσωσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν (ημχ$+$συνχ) (ημχ$-$συνχ)$=0$ ἀνάγομεν τὴν λύσιν αὐτῆς εἰς τὴν λύσιν ἑκατέρας τῶν ἀκολούθων ἐξισώσεων:

α΄) ημχ$+$συνχ$=0$ καὶ β΄) ημχ$-$συνχ$=0$. Ἡ α΄. τούτων εἶναι ἰσοδύναμος τῇ ημχ$=-$συνχ ἢ τῇ συν $\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right)=$ συν ($\pi-\chi$), ἥτις ὡς ἁπλῆ λύεται εὐκόλως (§ 52 Α΄.). Ἡ δὲ β΄ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ ημχ$=$συνχ ἢ τῇ συν $\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right)=$συνχ, ἥτις ἐπίσης λύεται εὐκόλως.

γ΄. Τρόπος. Ἐνθυμούμενοι ὅτι ημ$^2\chi+$συν$^2\chi=1$, θέτομεν τὴν ἐξίσωσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\text{ημ}^2\chi-\text{συν}^2\chi}{\text{ημ}^2\chi+\text{συν}^2\chi}=0$, ἐξ ἧς εὐκόλως προκύπτει $\frac{\text{εφ}^2\chi-1}{\text{εφ}^2\chi+1}=0$, ὅθεν εφ$^2\chi=1$ καὶ εφχ$=\pm1$. Ἡ α΄. τούτων γράφεται ἐφχ$=$εφ $\frac{\pi}{4}$, ἄρα $\chi=\lambda\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{(4\lambda+1)\pi}{4}$. Ἡ δὲ β΄. γράφεται εφχ$=$εφ $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, ἄρα $\chi=\lambda\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{(4\lambda-1)\pi}{4}$.

211. Λύοντες πρὸς συνχ εὑρίσκομεν συνχ$=1$ καὶ συνχ$=\frac{1}{2}$. Ἡ α΄. τούτων γράφεται συνχ$=$συν0, ἄρα $\chi=2K\pi$. Ἡ δὲ β΄.

γράφεται $\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}$, ἄρα $\chi \pm \frac{\pi}{3} = 2K\pi$ καὶ $\chi = \frac{(6K \pm 1)\pi}{3}$.

212. Ἐξαλείφοντες τὸν παρονομαστὴν κτλ. εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $\eta\mu\chi = \sigma\upsilon\nu\chi$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) = \sigma\upsilon\nu\chi$, ἄρα $\frac{\pi}{2} - \chi - \chi = 2K\pi$, καὶ $\chi = (1-4K)\frac{\pi}{4}$.

213. α'. τρόπος. Ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος τῇ $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \chi\right) = -\sigma\upsilon\nu 3\chi$ ἢ $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \chi\right) = \sigma\upsilon\nu(\pi - 3\chi)$, ἥτις γράφεται καὶ ὧδε:

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} - \chi\right) = \sigma\upsilon\nu(\pi - 3\chi)$ ἢ $\sigma\upsilon\nu(-\pi - \chi) = \sigma\upsilon\nu(\pi - 3\chi)$ ἢ $\sigma\upsilon\nu(\pi + \chi) = \sigma\upsilon\nu(\pi - 3\chi)$, ὅθεν $(\pi + \chi) \pm (\pi - 3\chi) = 2K\pi$. Ἐντεῦθεν $\chi = \frac{K\pi}{2}$ καὶ $\chi = (1-K)\pi$.

β'. τρόπος. Ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu 3\chi = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 3\chi\right)$ ἡ ἐξίσωσις γίνεται:

$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \chi\right) + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 3\chi\right) = 0$ ἢ $2\,\eta\mu(\pi - \chi)\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + 2\chi\right) = 0$, ἧς ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν τῶν δύο ἐξισώσεων $\eta\mu(\pi - \chi) = 0$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + 2\chi\right) = 0$. Ἡ α'. τούτων γράφεται $\eta\mu(\pi - \chi) = \eta\mu 0$, ἄρα $\pi - \chi = \lambda\pi$, ὅθεν $\chi = (1+\lambda)\pi$. Ἡ β'. γράφεται $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + 2\chi\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}$, ἐξ ἧς: $\frac{\pi}{2} + 2\chi \pm \frac{\pi}{2} = 2K\pi$, ἄρα $\chi = (2K-1)\frac{\pi}{2}$ καὶ $\chi = K\pi$.

214. α'. τρόπος. Ἐπειδὴ $\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - 3\chi\right) = \varepsilon\varphi 3\chi$ ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\varepsilon\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right) = -\varepsilon\varphi 3\chi$ ἢ $\varepsilon\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi(-3\chi)$.

ὅθεν $\chi+\frac{\pi}{3}+3\chi=\lambda\pi$, ἄρα $\chi=\frac{(3\lambda-1)\pi}{12}$.

6'. τρόπος. Ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi\left(\chi+\frac{\pi}{3}\right)+\varepsilon\varphi 3\chi=\frac{\eta\mu\left(4\chi+\frac{\pi}{3}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{3}\right)\sigma\upsilon\nu 3\chi}$,

ἡ ἐξίσωσις ἀνάγεται εἰς τὴν $\eta\mu\left(4\chi+\frac{\pi}{3}\right)=0$, ἥτις λύεται εὐκόλως.

215. Διαιρουμένων ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ εφ3χ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $\varepsilon\varphi\chi=\frac{1}{\varepsilon\varphi 3\chi}$ ἢ $\varepsilon\varphi\chi=\sigma\varphi\, 3\chi$, ὅθεν $\varepsilon\varphi\chi=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-3\chi\right)$, ἄρα $\chi-\frac{\pi}{2}+3\chi=\lambda\pi$ καὶ $\chi=\frac{(2\lambda+1)\pi}{8}$.

216. Ἐπειδὴ $\tau\varepsilon\mu\,\chi=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $2\,\sigma\upsilon\nu\chi=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$, ἐξ ἧς $\sigma\upsilon\nu\chi=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ἡ α'. τούτων γράφεται $\sigma\upsilon\nu\chi=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$ καὶ ἀληθεύει, ὅταν $\chi=2K\pi\pm\frac{\pi}{4}=\frac{(8K\pm1)\pi}{4}$. Ἡ δὲ 6. γράφεται $\sigma\upsilon\nu\chi=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}$ καὶ ἀληθεύει, ὅταν $\chi=\frac{(8K\pm3)\pi}{4}$.

217. Ἐξαλείφοντες τοὺς παρονομαστὰς κτλ. θέτομεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}-\chi\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}-\chi\right)=\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος τῇ $2\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}-\chi\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}-\chi\right)=2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi$ ἢ $\eta\mu\, 2\left(\frac{\pi}{3}-\chi\right)=\eta\mu 2\chi$. Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι $2\left(\frac{\pi}{3}-\chi\right)+2\chi=(2K+1)\,\pi$ καὶ $2\left(\frac{\pi}{3}-\chi\right)-2\chi=2K\pi$.

Ἡ α'. τούτων οὐδεμίαν τιμὴν τοῦ χ παρέχει, ἡ δὲ 6'. δίδει $\chi=\frac{(1-3K)\pi}{6}$.

218. Μετασχηματίζομεν τὸ α'. μέλος εἰς γινόμενον ὡς ἀκολούθως.

$1+\sigma\upsilon\nu 3\chi=\sigma\upsilon\nu 0+\sigma\upsilon\nu 3\chi=2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{3\chi}{2}\right)$, $\sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu 2\chi$

$=2\,\text{συν}\,\frac{3\chi}{2}\ \text{συν}\,\frac{\chi}{2}$, ἄρα τὸ α΄. μέλος γίνεται $2\,\text{συν}^2\left(\frac{3\chi}{2}\right)$ $+\,2\,\text{συν}\left(\frac{3\chi}{2}\right)\ \text{συν}\left(\frac{\chi}{2}\right)=2\,\text{συν}\left(\frac{3\chi}{2}\right)\left[\,\text{συν}\left(\frac{3\chi}{2}\right)+\text{συν}\frac{\chi}{2}\right]$.

Ἐπειδὴ δὲ $\text{συν}\left(\frac{3\chi}{2}\right)+\text{συν}\left(\frac{\chi}{2}\right)=2\,\text{συν}\chi\,\text{συν}\left(\frac{\chi}{2}\right)$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $4\,\text{συν}\left(\frac{3\chi}{2}\right)\ \text{συν}\chi\,\text{συν}\left(\frac{\chi}{2}\right)=0$ καὶ ἀληθεύει ὅταν

α΄) $\text{συν}\,\frac{3\chi}{2}=0$ ἢ $\text{συν}\,\frac{3\chi}{2}=\text{συν}\,\frac{\pi}{2}$, ἄρα $\frac{3\chi}{2}\pm\frac{\pi}{2}=2K\pi$, ὅθεν $\chi=\frac{(4K\pm1)\pi}{3}$. β΄.) $\text{συν}\chi=0$ ἢ $\text{συν}\chi=\text{συν}\,\frac{\pi}{2}$, ἄρα $\chi\pm\frac{\pi}{2}=2K\pi$, ὅθεν $\chi=\frac{(4K\pm1)\pi}{2}$ καὶ γ΄.) $\text{συν}\frac{\chi}{2}=0$ ἢ $\text{συν}\frac{\chi}{2}=\text{συν}\,\frac{\pi}{2}$, ἄρα $\frac{\chi}{2}\pm\frac{\pi}{2}=2K\pi$, ὅθεν $\chi=(4K\pm1)\pi$.

219. Ἐπειδὴ $\eta\mu\chi-\text{συν}\chi=\eta\mu\chi-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right)=2\,\eta\mu\left(\chi-\frac{\pi}{4}\right)$ $\text{συν}\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\ \eta\mu\left(\chi-\frac{\pi}{4}\right)$ ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$\sqrt{2}\ \eta\mu\left(\chi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ἐξ ἧς: $\eta\mu\left(\chi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ ἢ $\eta\mu\left(\chi-\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\,\frac{\pi}{6}$. Ἄρα $\chi-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=(2K+1)\pi$ καὶ $\chi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=2K\pi$, ἐξ ὧν προκύπτει $\chi=\frac{(24K+13)\pi}{12}$ καὶ $\chi=\frac{(24K+5)\pi}{12}$.

Σημ. Παρατηροῦντες ὅτι $\varepsilon\varphi\,\frac{\pi}{4}=1$ δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τὴν ἐξίσωσιν καὶ οὕτω:

$$\eta\mu\chi-\frac{\eta\mu\frac{\pi}{4}}{\text{συν}\frac{\pi}{4}}\,\text{συν}\chi=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{ἢ}\ \frac{\eta\mu\left(\chi-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{ὅθεν}$$

$\eta\mu\left(\chi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

220. — Ἐπειδὴ $\sqrt{3}=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}$, ἡ ἐξίσωσις γράφεται $\eta\mu\frac{\pi}{3}\ \eta\mu\chi$ $+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\ \sigma\upsilon\nu\chi=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\left(\chi-\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$. Ἄρα $\chi-\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}=2K\pi$, ὅθεν $\chi=2K\pi$ καὶ $\chi=\frac{2(3K+1)\pi}{3}$.

221. — Ἐπειδὴ $1=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$, ἡ ἐξίσωσις γράφεται καὶ οὕτω:

$$\frac{\eta\mu\frac{\pi}{4}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}\sigma\upsilon\nu\,3\chi+\eta\mu3\chi=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ ἢ }\eta\mu\frac{\pi}{4}\ \sigma\upsilon\nu\,3\chi+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\ \eta\mu3\chi$$
$$=\frac{1}{2}\text{ ἢ }\eta\mu\left(3\chi+\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6}.$$ Ἄρα $3\chi+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ $=(2K+1)\pi$ καὶ $3\chi+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=2K\pi$, ὅθεν $\chi=\frac{(24K+7)\pi}{36}$ καὶ $\chi=\frac{(24K-1)\pi}{36}$.

222. — Ἐπειδὴ $\tau\varepsilon\mu\chi=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\eta\mu\chi$ $+\ 2\ \sigma\upsilon\nu\chi=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$, ὅθεν $\eta\mu\chi\ \sigma\upsilon\nu\chi+2\sigma\upsilon\nu^2\chi=1$ ἢ $\frac{1}{2}\ \eta\mu\ 2\chi=1-2\sigma\upsilon\nu^2\chi$. Ἐπειδὴ δὲ $2\sigma\upsilon\nu^2\chi-1=\sigma\upsilon\nu2\chi$, αὕτη γίνεται $\frac{1}{2}\ \eta\mu2\chi=-\sigma\upsilon\nu2\chi$, ὅθεν $\varepsilon\varphi2\chi=-2$, ἄρα $\varepsilon\varphi(\pi-2\chi)=2$. Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\ (\pi-2\chi)=0{,}30103$, ὅθεν
$\varepsilon\varphi\ (180^\circ-2\chi)=\varepsilon\varphi\ (63^\circ\ 26'\ 5'', 625)$, κατ' ἀκολουθίαν
$180^\circ-2\chi-(63^\circ\ 26'\ 5'', 625)=180^\circ\lambda$, ὅθεν
$\chi=90^\circ\ (1-\lambda)-(31^\circ\ 43'\ 2'', 8125)$.

223. — Ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu^2\chi=1-\eta\mu^2\chi$ ἡ ἐξίσωσις γίνεται $12\ (1-\eta\mu^2\chi)$ $-\ \eta\mu\chi=-\ 11$ ἢ $12\ \eta\mu^2\chi+\eta\mu\chi-23=0$. Ἐπειδὴ ἡ διακρίνουσα ταύτης εἶναι $1+4.12.\ 23$ ἤτοι θετικὸς ἀριθμός, αὕτη ἔχει πρὸς ημχ δύο τιμὰς πραγματικὰς καὶ ἀνίσους.

Ἐπειδὴ δὲ ἑκάτερος τῶν ἀριθμῶν $+1$ καὶ -1 τιθέμενος ἐν τῷ τριωνύμῳ $12\, ημ^2χ + ημχ - 23$ ἀντὶ τοῦ ημχ καθιστᾷ τὸ τριώνυμον ἑτερόσημον πρὸς τὸν 12, ἕπεται ὅτι ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι κεῖνται μεταξὺ τῶν ριζῶν αὐτοῦ, ἤτοι ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ ημχ, αἵτινες ταὐτοποιοῦσι τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ἡ μὲν μείζων ὑπερβαίνει τὴν $+1$ ἡ δὲ ἐλάσσων εἶναι μικροτέρα τοῦ -1. Ἄρα οὐδὲν τόξον χ ταὐτοποιεῖ τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἥτις εἶναι ὅθεν ἀδύνατος.

224. Εὐνόητον ὅτι ἡ ἐξίσωσις γράφεται καὶ οὕτω: $\frac{συνχ}{ημχ} - \frac{ημχ}{συνχ}$ $= ημχ + συνχ$ ἢ $συν^2χ - ημ^2χ = (ημχ + συνχ)\, ημχσυνχ$, ὅθεν $(ημχ + συνχ)\,[(συνχ - ημχ) - ημχσυνχ] = 0$.

Αὕτη δὲ ἀληθεύει, ὅταν α΄.) $(συνχ + ημχ) = 0$ καὶ β΄.) $συνχ - ημχ - ημχσυνχ = 0$.

Ἡ α΄. τούτων ἐλύθη ἤδη (ὅρα ἄσκ. 210 β΄.), ἡ δὲ β΄. λύεται ὡς ἀκολούθως.

Ἐπειδὴ $συνχ - ημχ = ημ\left(\frac{π}{2} - χ\right) - ημχ = 2\, ημ\left(\frac{π}{4} - χ\right)$ $συν\left(\frac{π}{4}\right) = \sqrt{2}\, ημ\left(\frac{π}{4} - χ\right)$ καὶ $ημχσυνχ = \frac{1}{2} \cdot 2ημχσυνχ$ $= \frac{1}{2}\, ημ2χ$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη γίνεται:

$$\sqrt{2}\, ημ\left(\frac{π}{4} - χ\right) = \frac{1}{2}\, ημ2χ. \quad (1)$$

Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\frac{π}{4} - χ = ω$, εὑρίσκομεν ὅτι $2χ = \frac{π}{2} - 2ω$. καὶ $ημ\, 2χ = συν2ω$, ἡ δὲ ἐξίσωσις (1) γίνεται $\sqrt{2}\, ημω$ $= \frac{1}{2}\, συν2ω$. Ἐπειδὴ $συν\, 2ω = 2συν^2ω - 1$, αὕτη γίνεται

$$\sqrt{2}\, ημω = συν^2ω - \frac{1}{2} \text{ ἢ } \sqrt{2}\, ημω = 1 - ημ^2ω - \frac{1}{2}, \quad \text{ὅθεν}$$

$$ημ^2ω + \sqrt{2}\, ημω - \frac{1}{2} = 0 \text{ ἢ } 2ημ^2ω + 2\sqrt{2}\, ημω - 1 = ω$$

Λύοντες ταύτην πρὸς ημω εὑρίσκομεν ὅτι $ημω = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ $ημω = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, ὧν ἡ β΄. ἀπορρίπτεται ὡς μικροτέρα τοῦ -1.

Πρὸς λύσιν τῆς ημω $= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ θέτομεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν ημω$=$ ημ$\frac{\pi}{2}$ $-$ημ$\frac{\pi}{4} = 2$ημ $\frac{\pi}{8}$ συν $\frac{3\pi}{8} =$ 2ημ$(22^\circ\ 30')$ συν $(67^\circ\ 30')$.

Ἐπειδὴ δὲ $22^\circ 30^\circ + 67^\circ 30^\circ = 90^\circ$ ἕπεται ὅτι ημω $= 2$ ημ$^2 (22^\circ\ 30')$, ὅθεν λογ ημω $= \bar{1},46671$ καὶ ημω $=$ ημ $(17^\circ\ 1'\ 52'',\ 6829)$. Ἐκ ταύτης προκύπτει ὅτι $\omega + (17^\circ\ 1'\ 52'',\ 6829) = 180^\circ (2K+1)$ καὶ $\omega - (17^\circ\ 1'\ 52'',\ 6829) = 180^\circ.\ 2K$.

Ἐπειδὴ δὲ $\omega = \frac{\pi}{4} - \chi$, ἕπεται ὅτι·

$45^\circ - \chi + (17^\circ\ 1'\ 52'',\ 6829) = 180^\circ\ (2K+1)$ καὶ $45^\circ - \chi - (17^\circ\ 1'\ 52''.\ 6829) = 180^\circ.\ 2K$, ὅθεν $\chi = 45^\circ + 17^\circ 1' 52'',\ 6829 - 180^\circ\ (2K+1)$ καὶ $\chi = 45^\circ - (17^\circ\ 1'\ 52'',\ 6829) - 180^\circ.\ 2K$.

225.—Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ταὐτότητος ημ$^2\chi+$συν$^2\chi=1$ λαμβάνομεν ημ$^4\chi+$συν$^4\chi+2$ημ$^2\chi$συν$^2\chi$ $=1$· ἐπειδὴ δὲ ημ$^4\chi+$συν$^4\chi=\frac{2}{3}$, ἕπεται ὅτι

2ημ$^2\chi$συν$^2\chi = \frac{1}{3}$, ὅθεν ημχσυνχ $= \pm \frac{1}{\sqrt{6}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$,

ἐξ ἧς ημ$2\chi = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ἐκ τῆς α'. τούτων προκύπτει λογημ$2\chi = \frac{1}{2}$ λογ6—λογ3 $= \bar{1},91195$, ὅθεν ημ$2\chi=$ημ $(54^\circ\ 44'\ 6'',\ 66)$, ἄρα $2\chi + (54^\circ\ 44'\ 6',\ 66) = 180^\circ (2K+1)$ καὶ $2\chi - (54^\circ\ 44'\ 6'',\ 66) = 180^\circ.\ 2K$, ὅθεν $\chi = 90^\circ (2K+1) - (27^\circ\ 22'\ 3'',\ 33)$ καὶ $\chi = 90^\circ.\ 2K + (27^\circ\ 22'\ 3'',\ 33)$.

Ἡ β'. ημ$2\chi = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ λύεται ὧδε : Θέτοντες $2\chi = 180^\circ + \psi$ λαμβάνομεν ημψ $= -$ημ$2\chi = \frac{\sqrt{6}}{3}$, ὅθεν ημψ $=$ ημ $(54^\circ\ 44'\ 6'',\ 66)$, ἄρα

$\psi+(54^\circ\ 44'\ 6'', 66)=180^\circ\,(2K+1)$ καὶ $\psi-(54^\circ\ 44'\ 6'', 66)=180^\circ\ 2K$. Ἐντεῦθεν δὲ $2\chi-180^\circ+(54^\circ\ 44'\ 6'', 66)=180^\circ\,(2K+1)$ καὶ $2\chi-180^\circ-(54^\circ\ 44'\ 6'', 66)=180^\circ.\,2K$, ἄρα $\chi=180^\circ\,(K+1)-(27^\circ\ 22'\ 3'', 33)$ καὶ $\chi=90^\circ(2K+1)+(27^\circ\ 22'\ 3'', 33)$.

226.—Ὑψοῦντες εἰς τὸν κύβον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς $\eta\mu^2\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi=1$ εὑρίσκομεν $\eta\mu^6\chi+\sigma\upsilon\nu^6\chi+3\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi\,(\eta\mu^2\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi)=1$. Ἐκ ταύτης δὲ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν καὶ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἕπεται ὅτι $3\,\eta\mu^2\chi\ \sigma\upsilon\nu^2\chi=\frac{3}{4}$, ὅθεν $\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi=\pm\frac{1}{2}$ καὶ $\eta\mu 2\chi=\pm1$. Ἡ α'. τούτων γράφεται $\eta\mu 2\chi=\eta\mu\frac{\pi}{2}$, ὅθεν $2\chi+\frac{\pi}{2}=(2K+1)\pi$ καὶ $2\chi-\frac{\pi}{2}=2K\pi$, κατ' ἀκολουθίαν $\chi=\frac{(4K+1)\pi}{4}$. Ἡ β'. γράφεται $\eta\mu 2\chi=\eta\mu\frac{3\pi}{2}$, ὅθεν $2\chi+\frac{3\pi}{2}=(2K+1)\pi$ καὶ $2\chi-\frac{3\pi}{2}=2K\pi$. Ἐκ τῆς α'. τούτων προκύπτει $\chi=\frac{(4K-1)\pi}{4}$, ἐκ δὲ τῆς β'. $\chi=\frac{(4K+3)\pi}{4}$.

227. Ἐξαλείφοντες τοὺς παρονομαστὰς λαμβάνομεν $\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi=\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi$. Ἐπειδὴ δὲ $\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi=\sqrt{2}\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-\chi\right)$ καὶ $\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi=\frac{1}{2}\,\eta\mu 2\chi$, αὕτη γίνεται $\sqrt{2}\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-\chi\right)=\frac{1}{2}\,\eta\mu 2\chi$. Ἐὰν δὲ τεθῇ $\frac{\pi}{4}-\chi=\omega$, προκύπτει $2\chi=\frac{\pi}{2}-2\omega$, ἄρα $\eta\mu 2\chi=\sigma\upsilon\nu 2\omega=2\sigma\upsilon\nu^2\omega-1$, καὶ ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\sqrt{2}\ \sigma\upsilon\nu\omega=\sigma\upsilon\nu^2\omega-\frac{1}{2}$ ἢ $2\sigma\upsilon\nu^2\omega-2\sqrt{2}\ \sigma\upsilon\nu\omega-1=\omega$. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν ὅτι $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2+2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm2}{2}$, ὧν παραδεκτὴ μόνον ἡ $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{\sqrt{2}-2}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\eta\mu\frac{\pi}{4}-\eta\mu\frac{\pi}{2}=2\eta\mu\left(-\frac{\pi}{8}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

$= -2ημ^2\left(\frac{π}{8}\right)$ ἢ $-συνω = 2ημ^2\left(\frac{π}{8}\right)$ ἢ $συν\,(π-ω)$

$= 2ημ^2\left(\frac{π}{8}\right) = 2ημ^2\,(22^0\ 30')$. Ἐκ ταύτης $λογσυν\,(π-ω)$ $=\bar{1},46671$, ἄρα $συν\,(180^0-ω) = συν\,(72^0\ 58'\ 7'',3171)$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $180^0 - ω = 180^0.2K \pm (72^0\ 58'\ 7'',3171)$, ὅθεν $180^0-(45^0-χ) = 180^0.2K \pm (72^0\ 58'\ 7'',3171)$, ἄρα $χ = 180^0.2K - 135^0 \pm (72^0\ 58'\ 7'',3171)$.

228. Μεταφέροντες τὸν ὅρον $2συν\frac{χ}{3}$ εἰς τὸ β'. μέλος εὑρίσκομεν

$-ημ\frac{χ}{2} = 2\left(1 - συν\frac{χ}{3}\right)$, ἢ $-ημ\frac{χ}{2} = 4ημ^2\frac{χ}{6}$.

Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\frac{χ}{6} = ω$, αὕτη γίνεται:

$-ημ3ω = 4ημ^2ω$ ἢ (§ 72) $-3ημω + 4ημ^3ω - 4ημ^2ω = ω$, ὅθεν $ημω\,(4ημ^2ω - 4ημω - 3) = 0$. Αὕτη ἀληθεύει, ὅταν α'.) $ημω = 0$ ἢ $ημω = ημ0$, ἄρα $ω = (2K+1)π$ καὶ $ω = 2Kπ$ ἢ $ω = λπ$ καὶ ἑπομένως $χ = 6λπ$.

β'.) $4ημ^2ω - 4ημω - 3 = 0$, ἄρα $ημω = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{4} = \frac{2 \pm 4}{4}$,

ὧν παραδεκτὴ εἶναι μόνον ἡ $ημω = -\frac{1}{2} = ημ\left(-\frac{π}{6}\right)$,

ἐξ ἧς $ω - \frac{π}{6} = (2K+1)π$ καὶ $ω + \frac{π}{6} = 2Kπ$, ὅθεν

$χ = (12K+7)π$ καὶ $χ = (12K-1)π$.

229. Ἐπειδὴ $ημ2χ + συν2χ = \sqrt{2}\,συν\left(2χ - \frac{π}{4}\right)$, ἡ ἐξίσωσις

γίνεται $συν\left(2χ - \frac{π}{4}\right) = ημχ$ ἢ $συν\left(2χ - \frac{π}{4}\right) = συν\left(\frac{π}{2} - χ\right)$

Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι $χ = \frac{(8K+3)π}{12}$ καὶ $χ = \frac{(8K-1)π}{4}$.

230. Ὅρα ἄσκ. 222.

231. Ἐπειδὴ $ημ2χ = 2ημχσυνχ$ καὶ $συν3χ = 4συν^3χ - 3συνχ$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $2ημχσυνχ = 3(4συν^3χ - 3συνχ)$ ἢ $συνχ\,(2ημχ - 12συν^2χ + 9) = 0$. Αὕτη δὲ ἀληθεύει, ὅταν α'.) $συνχ = 0$ $= συν\frac{π}{2}$, ἄρα $χ = 2Kπ \pm \frac{π}{2} = \frac{(4K \pm 1)π}{2}$ καὶ β'.) $2ημχ$

$-12\text{συν}^2\chi+9=0$ ἢ $12\eta\mu^2\chi+2\eta\mu\chi-3=0$. ἄρα $\eta\mu\chi=\frac{-1\pm\sqrt{1+36}}{12}=\frac{-1\pm\sqrt{37}}{12}$. Ἐπειδὴ δὲ $\sqrt{37}=6{,}08276$, ἡ α'. τούτων γίνεται $\eta\mu\chi=0{,}42356$, ἡ δὲ β'. $\eta\mu\chi=-0{,}59023$, ὧν ἑκατέρα λύεται εὐκόλως.

232. Ἐπειδὴ $\eta\mu^2\chi=\frac{\varepsilon\varphi^2\chi}{1+\varepsilon\varphi^2\chi}$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $3\varepsilon\varphi^2\chi-\frac{16\varepsilon\varphi^2\chi}{1+\varepsilon\varphi^2\chi}+3=0$ ἢ $3\varepsilon\varphi^4\chi-10\varepsilon\varphi^2\chi+3=0$, ὅθεν $\varepsilon\varphi\chi=\pm\sqrt{3}$ καὶ $\varepsilon\varphi\chi=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ Ἐπειδὴ δὲ $\sqrt{3}=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}$, $-\sqrt{3}=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, αἱ προηγούμεναι ἐξισώσεις γίνονται $\varepsilon\varphi\chi=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}$, $\varepsilon\varphi\chi=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, $\varepsilon\varphi\chi=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}$, $\varepsilon\varphi\chi=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, ἐξ ὧν προκύπτει ὅτι $\chi=\frac{(3\lambda\pm1)\pi}{3}$ κα $\chi=\frac{(6\lambda\pm1)\pi}{6}$.

233. Ἐπειδὴ $\eta\mu2\chi=2\eta\mu\chi\text{συν}\chi$ καὶ $\eta\mu^2\chi+\text{συν}^2\chi=1$, ἡ ἐξίσωσις γράφεται καὶ οὕτω: $2\eta\mu^2\chi+2\sqrt{3}\ \eta\mu\chi\text{συν}\chi-3\ (\eta\mu^2\chi+\text{συν}^2\chi)=0$. Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν διὰ $\text{συν}^2\chi$ εὑρίσκομεν $2\varepsilon\varphi^2\chi+2\sqrt{3}\ \varepsilon\varphi\chi-3\ (1+\varepsilon\varphi^2\chi)=0$ ἢ $\varepsilon\varphi^2\chi-2\sqrt{3}\ \varepsilon\varphi\chi+3=0$, ὅθεν $\varepsilon\varphi\chi=\sqrt{3}=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}$ καὶ ἑπομένως $\chi=\frac{(3\lambda+1)\pi}{3}$.

234. Κατὰ τὰ προηγουμένως λεχθέντα, αὕτη γράφεται καὶ οὕτω: $2\ \eta\mu^2\chi+4\ \eta\mu\chi\text{συν}\chi-4\ \text{συν}^2\chi=\text{συν}^2\chi+\eta\mu^2\chi$, ὅθεν $\varepsilon\varphi^2\chi+4\varepsilon\varphi\chi-5=0$, ἄρα $\varepsilon\varphi\chi=1$ καὶ $\varepsilon\varphi\chi=-5$. Ἡ α' γραφομένη $\varepsilon\varphi\chi=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$ ἀληθεύει, ὅταν $\chi=\frac{(4\lambda+1)\pi}{4}$. Ἡ β' λύεται οὕτω: Ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi\ (\pi-\chi)=-\varepsilon\varphi\chi=5$, ἕπεται ὅτι $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\ (\pi-\chi)=0{,}69897$ ἄρα $\varepsilon\varphi\ (180^\circ-\chi)=\varepsilon\varphi\ (78^\circ\ 41'\ 24'',54)$, ὅθεν $180^\circ-\chi=180^\circ\lambda+(78^\circ\ 41'\ 24'',54)$ καὶ $\chi=180^\circ\ (1-\lambda)-(78^\circ\ 41'\ 24'',54)$.

235. Ἐπειδὴ (ὅρα ἄσκ. 183) τὸ α' μέλος εἶναι ἴσον πρὸς $\varepsilon\varphi3\chi=\frac{3\varepsilon\varphi\chi-\varepsilon\varphi^3\chi}{1-3\varepsilon\varphi^2\chi}$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\frac{3\varepsilon\varphi\chi-\varepsilon\varphi^3\chi}{1-3\varepsilon\varphi^2\chi}=4\varepsilon\varphi\chi$, ὅθεν $\varepsilon\varphi\chi\ (11\varepsilon\varphi^2\chi-1)=0$. Αὕτη δὲ ἀληθεύει ὅταν α'.) $\varepsilon\varphi\chi=0$

$=$ εφ0, ἄρα $\chi = \lambda\pi$ καὶ β') ὅταν $11\varepsilon\varphi^2\chi = 1$ ἢ $\varepsilon\varphi\chi = \pm\frac{\sqrt{11}}{11}$, ὧν ἑκατέρα λύεται εὐκόλως.

236. Ἐπειδὴ $\eta\mu^2\chi = \frac{\varepsilon\varphi^2\chi}{1+\varepsilon\varphi^2\chi}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu^2\chi = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\chi}$ ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\varepsilon\varphi^2\chi\,(\varepsilon\varphi^2\chi - 1) = 0$, ἧς ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων $\varepsilon\varphi\chi = 0$ καὶ $\varepsilon\varphi\chi = \pm 1$, αἵτινες λύονται εὐκόλως.

237. Αὕτη γράφεται προφανῶς οὕτω: $\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi} - \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} = 2$ ἢ $\frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi - \eta\mu^2\chi}{2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi} = 1$ ἢ $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\chi}{\eta\mu 2\chi} = 1$ ἢ $\varepsilon\varphi 2\chi = 1$, ἐξ ἧς $2\chi = 180^\circ\lambda + 45^\circ$ καὶ $\chi = 90^\circ\lambda + (22^\circ 30')$.

238. Ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi\chi = \frac{2\,\varepsilon\varphi\left(\frac{\chi}{2}\right)}{1-\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\chi}{2}\right)}$ καὶ $\varepsilon\varphi\lambda = \frac{2\,\varepsilon\varphi\left(\frac{\psi}{2}\right)}{1-\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\psi}{2}\right)}$, ἡ α' ἐξίσωσις τοῦ συστήματος γίνεται $\frac{2\,\varepsilon\varphi\left(\frac{\chi}{2}\right)}{1-\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\chi}{2}\right)} + \frac{2\,\varepsilon\varphi\left(\frac{\psi}{2}\right)}{1-\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\psi}{2}\right)} = 0$, ὅθεν $\left[\varepsilon\varphi\left(\frac{\chi}{2}\right) + \varepsilon\varphi\left(\frac{\psi}{2}\right)\right]\left[1 - \varepsilon\varphi\left(\frac{\chi}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\psi}{2}\right)\right] = 0$. Ἐκ ταύτης λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν 6'. ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος εὑρίσκομεν ὅτι $\varepsilon\varphi\left(\frac{\chi}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\psi}{2}\right) = 1$. Ὥστε οἱ ἀριθμοὶ $\varepsilon\varphi\left(\frac{\chi}{2}\right)$ καὶ $\varepsilon\varphi\left(\frac{\psi}{2}\right)$ ἔχουσιν ἄθροισμα 1 καὶ γινόμενον 1, ἤτοι εἶναι ῥίζαι τῆς $X^2 - X + 1 = 0$. Ἐπειδὴ δὲ αὕτη ἔχει ῥίζας φανταστικάς, τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

239.— *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα* $\eta\mu\chi + \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu\psi = 1$, $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Ἀπαλείφοντες τὸ ημχ εὑρίσκομεν $(\sqrt{3} - 1)\,\sigma\upsilon\nu\psi = 1 - \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, ὅθεν $\sigma\upsilon\nu\psi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\psi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}$, ἄρα $\psi = 2K\pi \pm \frac{\pi}{6} = \frac{(12K\pm 1)\pi}{6}$. Θέτοντες εἶτα ἐν τῇ α'. ἐξισώσει ἀντὶ συνψ τὴν τιμὴν αὐτοῦ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ εὑρίσκομεν ημχ $+\frac{3}{2}$ $=1$, ὅθεν ημχ $=-\frac{1}{2}=$ ημ$\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, ἄρα $\chi-\frac{\pi}{6}=(2K+1)\pi$ καὶ $\chi+\frac{\pi}{6}=2K\pi$, ὅθεν $\chi=\frac{(2K+7)\pi}{6}$ καὶ $\chi=\frac{(12K-1)\pi}{6}$.

240. ***Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi+\psi=\alpha$, ημχ$-$ημψ $=\beta$,***

Ἐπειδὴ ημχ — ημψ $=2$ημ$\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)$ συν$\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right)$ καὶ $\chi+\psi=\alpha$, ἡ β΄. ἐξίσωσις γίνεται ημ$\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)=\frac{\beta}{2\text{συν}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$. Ἐὰν δὲ ἐκ τῶν πινάκων εὕρωμεν ὅτι ημτ$=\frac{\beta}{2\text{συν}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$, ἕπεται ὅτι ημ$\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)=$ ημτ καὶ $\frac{\chi-\psi}{2}+\tau=(2K+1)\pi$ καὶ $\frac{\chi-\psi}{2}-\tau$ $=2K\pi$, ὅθεν $\chi-\psi=2\,(2K+1)\pi-2\tau$ καὶ $\chi-\psi=4K\pi+2\tau$. Οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀκολούθων συστημάτων:

α΄.) $\begin{cases}\chi+\psi=\alpha\\ \chi-\psi=2(2K+1)\pi-2\tau\end{cases}$ β΄.) $\begin{cases}\chi+\psi=\alpha\\ \chi-\psi=4K\pi+2\tau.\end{cases}$

241. Προφανῶς οἱ ἀριθμοὶ ημχ, ημψ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $X^2-\alpha X+\beta=0$, ἤτοι ημχ$=\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}$, ημψ $=\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}$ καὶ τἀνάπαλιν. Ἵνα δὲ αἱ τιμαὶ αὗται ὦσι πραγματικαί, πρέπει νὰ εἶναι $\alpha^2\geq 4\beta^2$ ἢ $1\geq\frac{4\beta^2}{\alpha^2}$. Καὶ ἂν μὲν $\alpha^2=4\beta^2$, θὰ εἶναι ημχ$=\frac{\alpha}{2}$ καὶ ημψ $=\frac{\alpha}{2}$. ὧν ἑκατέρα ἔχει λύσιν, ἂν $\frac{\alpha}{2}$ δὲν ὑπερβαίνῃ ἀπολύτως τὴν μονάδα· λύεται δὲ ἑκατέρα τούτων εὐκόλως. Ἂν δὲ $\alpha^2>4\beta$, τὰ β΄. μέλη τῶν εὑρεθεισῶν ἁπλῶν ἐξισώσεων γίνονται λογιστὰ διὰ τῶν λογαρίθμων ὧδε. Ἡ α΄. π. χ. τούτων γίνεται:

ημχ $=\frac{\alpha\left(1+\sqrt{1-\frac{4\beta}{\alpha^2}}\right)}{2}$. Ἐπειδὴ δέ, καθ' ὑπόθεσιν, εἶναι $\frac{46}{\alpha^2}<1$, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\frac{46}{\alpha^2}=\eta\mu^2\omega$, ὅτε ημχ

$=\frac{\alpha}{2}\left(1+\sqrt{1-\eta\mu^2\omega}\right)=\frac{\alpha}{2}(1+\sigma\upsilon\nu\omega)=\frac{\alpha}{2}\,2\,\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$

$=\alpha\ \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Ἡ δὲ β΄. γίνεται $\eta\mu\psi=$

$\frac{\alpha}{2}\left(1-\sqrt{1-\eta\mu^2\omega}\right)=\frac{\alpha}{2}(1-\sigma\upsilon\nu\omega)=\alpha\ \eta\mu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Ὁρίζοντες ἐκ τῆς τεθείσης ἰσότητος $\frac{46}{\alpha^2}=\eta\mu^2\omega$ τὴν γωνίαν ω ἀγόμεθα εἶτα εἰς τὴν λύσιν τῶν ἁπλῶν ἐξισώσεων $\eta\mu\chi=\alpha\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$ καὶ $\eta\mu\psi=\alpha\eta\mu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

242. Ἐπειδὴ $\eta\mu\chi+\eta\mu\psi=2\eta\mu\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)$ καὶ $\eta\mu\chi\eta\mu\psi$ $=\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)-\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)\right]$, ἡ β΄. ἐξίσωσις λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν καὶ τῆς α΄. γίνεται $4\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)-$ $\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)+\sigma\upsilon\nu\alpha=0$. Ἐπειδὴ δὲ $\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)=2\,\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)$ -1, αὕτη γίνεται $2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)-4\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)$ $-(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)=0$, ὅθεν $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)=$

$$\frac{2\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)\pm\sqrt{4\eta\mu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+2(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)}}{2}=$$

$$\frac{2\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)\pm\sqrt{4\eta\mu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{2}=\frac{2\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)\pm 2}{2}$$

$=\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)\pm 1$.

Οὕτως ἀνήχθημεν εἰς τὴν λύσιν τῶν ἁπλῶν ἐξισώσεων $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)=1+\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)=-1+\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Ἡ α΄. τούτων γράφεται κατὰ σειρὰν οὕτω :

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)+\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)$

$=2\eta\mu^2\left(\frac{\pi+\alpha}{4}\right)$ καὶ λύεται εἶτα εὐκόλως.

Ἡ β'. γράφεται: $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)=\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\eta\mu\left(\frac{3\pi+\alpha}{4}\right)$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi-\alpha}{4}\right)$ καὶ λύεται εἶτα εὐκόλως.

Ἐὰν ἐκ τῆς α'. εὕρωμεν $\frac{\chi-\psi}{2}=2K\pi\pm\tau$, θὰ εἶναι $\chi-\psi=$ $4K\pi\pm2\tau$ καὶ ἀναγόμεθα ἰδίως εἰς τὴν λύσιν τῶν συστημάτων
$$\left.\begin{array}{l}\chi+\psi=\alpha\\ \chi-\psi=4K\pi+2\tau\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\chi+\psi=\alpha\\ \chi-\psi=4K\pi-2\tau.\end{array}$$

Ὁμοίως, ἂν ἐκ τῆς β'. εὕρωμεν $\frac{\chi-\psi}{2}=2K\pi\pm\varphi$, ἀναγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τῶν συστημάτων
$$\left.\begin{array}{l}\chi+\psi=\alpha\\ \chi-\psi=4K\pi+2\varphi\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\chi+\psi=\alpha\\ \chi-\psi=4K\pi-2\varphi,\end{array}$$

243. Ἐπειδὴ $\eta\mu\chi+\eta\mu\psi=2\eta\mu\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)$ καὶ $\chi-\psi=30^\circ$, ἡ β'. ἐξίσωσις γίνεται $2\eta\mu\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\,15^\circ=1$, ὅθεν

$\eta\mu\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right)=\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu\,15^\circ}$ καὶ $\lambda o\gamma\eta\mu\left(\frac{\chi+1}{2}\right)=\bar{1},71403$, ἄρα

$\eta\mu\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right)=\eta\mu\,(31^\circ\,10'\,28''.\,57)$, ὅθεν $\frac{\chi+\psi}{2}=180^\circ\,(2K+1)$ $-(31^\circ\,10'\,28'',57)$ καὶ $\frac{\chi+\psi}{2}=180^\circ.\,2K+(31^\circ\,10'\,28'',57)$

καὶ ἑπομένως $\chi+\psi=360^\circ\,(2K+1)-62^\circ\,20'\,57'',14)$ καὶ $\chi+\psi=360^\circ.\,2K+(62^\circ\,20'\,57'',14)$.

Οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀκολούθων δύο συστημάτων.

$\chi-\psi=30^\circ$
$\chi+\psi=360^\circ.\,(2K+1)-(62^\circ\,20'\,57'',14)$ καὶ
$\chi-\psi=30^\circ$
$\chi+\psi=360^\circ.\,2K+(62^\circ\,20'\,57''.\,14)$.

Λύοντες τὸ α'. εὑρίσκομεν $\chi=180^\circ\,(2K+1)-(16^\circ\,10'\,28'',57)$ καὶ $\psi=180^\circ\,(2K+1)-(46^\circ\,10'\,28'',57)$· ἐκ δὲ τοῦ β'. εὑρίσκομεν $\chi=180^\circ.\,2K+(46^\circ\,10'\,28'',57)$ καὶ $\psi=180^\circ.\,2K+(16^\circ\,10'\,28'',57)$.

244. — Ἐκ τῆς β'. ἐξισώσεως προκύπτει ὅτι $\frac{\varepsilon\varphi\chi}{\varepsilon\varphi\psi}=\frac{3}{1}$, ὅθεν $\frac{\varepsilon\varphi\chi+\varepsilon\varphi\psi}{\varepsilon\varphi\chi-\varepsilon\varphi\psi}=\frac{4}{2}=2$ ἢ ἕνεκα τῶν τύπων (64) $\frac{\eta\mu(\chi+\psi)}{\eta\mu(\chi-\psi)}=2$. ἐπειδὴ δὲ $\chi-\psi=45^o$, ἕπεται ὅτι $\eta\mu(\chi+\psi)=2\eta\mu 45^o$ $=\sqrt{2}>1$, ὅπερ ἄτοπον. Τὸ σύστημα ἄρα εἶναι ἀδύνατον.

245. Ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi\chi+\varepsilon\varphi\psi=\frac{\eta\mu(\chi+\psi)}{\sigma\upsilon\nu\chi.\ \sigma\upsilon\nu\psi}$, ἡ α'. ἐξίσωσις γίνεται

$\eta\mu(\chi+\psi)=\sigma\upsilon\nu\chi.\ \sigma\upsilon\nu\psi$ ἢ ἕνεκα τῆς β'. $\eta\mu(\chi+\psi)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $=\eta\mu\frac{\pi}{4}$, ὅθεν $\chi+\psi=2K\pi+\frac{\pi}{4}$ καὶ $\chi+\psi=(2K+1)\pi-\frac{\pi}{4}$. Ἀπαλείφοντες ἤδη τὸν παρονομαστὴν τῆς β'. καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $2\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi=\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)+\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)$, θέτομεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)+\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)=\sqrt{2}$. (1). Καὶ ἂν μὲν $\chi+\psi=(2K+1)\pi-\frac{\pi}{4}=2K\pi+\frac{3\pi}{4}$, θὰ εἶναι $\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, ἡ δὲ (1) γίνεται $\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}>1$, ὅπερ ἄτοπον. Ἐὰν δὲ $\chi+\psi=2K\pi+\frac{\pi}{4}$, θὰ εἶναι $\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)$ $=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ ἡ (1) γίνεται $\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$, ὅθεν $\chi-\psi=2\lambda\pi\pm\frac{\pi}{4}$. Οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τῶν συστημάτων:

$$\left.\begin{array}{l}\chi+\psi=2K\pi+\frac{\pi}{4}\\ \chi-\psi=2\lambda\pi+\frac{\pi}{4}\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\chi+\psi=2K\pi+\frac{\pi}{4}\\ \chi-\psi=2\lambda\pi-\frac{\pi}{4}.\end{array}$$

Λύοντες τὸ α'. εὑρίσκομεν $\chi=(K+\lambda)\pi+\frac{\pi}{4}$, $\psi=(K-\lambda)\pi$.

Ἐκ δὲ τοῦ β'. εὑρίσκομεν $\chi=(K+\lambda)\pi$, $\psi=(K-\lambda)\pi+\frac{\pi}{4}$.

246. Καλοῦντες ρ ἕκαστον τῶν ἴσων λόγων τῶν τελευταίων ἐξισώσεων τοῦ συστήματος εὑρίσκομεν $\epsilon\varphi\chi=\mu\rho$, $\epsilon\varphi\psi=\nu\rho$, $\epsilon\varphi Z=\lambda\rho$. Ἐπειδὴ $\chi+\psi+=Z\pi$, ἕπεται (ἄσκ. 109) ὅτι $\epsilon\varphi\chi+\epsilon\varphi\psi+\epsilon\varphi Z=\epsilon\varphi\chi.\epsilon\varphi\psi.\epsilon\varphi Z$, ὅθεν $(\mu+\nu+\lambda)\rho=\mu\nu\lambda\rho^3$, ἄρα

$\rho=\pm\sqrt{\dfrac{\mu+\nu+\lambda}{\mu\nu\lambda}}$ καὶ ἑπομένως $\epsilon\varphi\chi=\pm\mu\sqrt{\dfrac{\mu+\nu+\lambda}{\mu\nu\lambda}}$,

$\epsilon\varphi\psi=\nu\sqrt{\dfrac{\mu+\nu+\lambda}{\mu\nu\lambda}}$, $\epsilon\varphi Z=\pm\lambda\sqrt{\dfrac{\mu+\nu+\lambda}{\mu\nu\lambda}}$, ἐξ ὧν προσδιορίζονται οἱ ἄγνωστοι χ, ψ, ζ.

Σημ. Ὑπετέθη ὅτι $\rho\pm 0$· ἂν $\rho=0$, θὰ εἶναι $\epsilon\varphi\chi=\epsilon\varphi\psi=\epsilon\varphi Z=0$, ὧν ἑκάστη λύεται εὐκόλως.

247.—Ἡ β'. ἐξίσωσις γράφεται καὶ οὕτω: $\dfrac{1}{\epsilon\varphi\chi}+\dfrac{1}{\epsilon\varphi\psi}=6$ ἢ

$\dfrac{\epsilon\varphi\chi+\epsilon\varphi\psi}{\epsilon\varphi\chi.\epsilon\varphi\psi}=6$· ἐπειδὴ δὲ $\epsilon\varphi\chi+\epsilon\varphi\psi=\alpha$, αὕτη γίνεται $\epsilon\varphi\chi\epsilon\varphi\psi=\dfrac{\alpha}{6}$. Εἶναι ἄρα αἱ $\epsilon\varphi\chi$ καὶ $\epsilon\varphi\psi$ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $X^2-\alpha X+6=0$.

248. Ἐπειδὴ $\sigma\varphi(\chi+\psi)=\dfrac{1}{\epsilon\varphi(\chi+\psi)}=\dfrac{1-\epsilon\varphi\chi\epsilon\varphi\psi}{\epsilon\varphi\chi+\epsilon\varphi\psi}=\dfrac{1-\epsilon\varphi\chi\epsilon\varphi\psi}{\alpha}$ ἡ β'. ἐξίσωσις γίνεται $1-\epsilon\varphi\chi\epsilon\varphi\psi=\alpha 6$, ὅθεν $\epsilon\varphi\chi\epsilon\varphi\psi=1-\alpha 6$. Εἶναι ἄρα ἡ $\epsilon\varphi\chi$ καὶ $\epsilon\varphi\psi$ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $X^2-\alpha X+1-\alpha 6=0$. Λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν τὴν $\epsilon\varphi\chi$ καὶ τὴν $\epsilon\varphi\psi$, εἶτα δὲ τὰ τόξα καὶ ψ.

249. Μετασχηματίζοντες τὸ α'. μέλος τῆς α'. ἐξισώσεως εἰς γινόμενον θέτομεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\eta\mu\left(\dfrac{\chi+\psi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\chi-\psi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ $2\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi=\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)+\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)$, ἡ β'. ἐξίσωσις γίνεται $\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)+\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)=-\dfrac{3}{2}$. Ἐὰν δὲ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι $\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)=1-2\eta\mu^2\left(\dfrac{\chi+\psi}{2}\right)$ καὶ

$\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)=2\sigma\upsilon\nu^2\left(\dfrac{\chi-\psi}{2}\right)-1$, ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις γίνεται $\eta\mu^2\left(\dfrac{\chi+\psi}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu^2\left(\dfrac{\chi-\psi}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$. Ἐὰν δὲ χάριν συντομίας θέσωμεν $\eta\mu\left(\dfrac{\chi+\psi}{2}\right)=\zeta$, $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\chi-\psi}{2}\right)=\varphi$, ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τοῦ συστήματος $\zeta\varphi = \frac{1}{2}$, $\zeta^2 - \varphi^2 = \frac{3}{4}$, ἐξ οὗ $\zeta = \pm 1$ καὶ $\varphi = \pm\frac{1}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ $\zeta\varphi = \frac{1}{2} > 0$, ἕπεται ὅτι οἱ ζ καὶ φ εἶναι ὁμόσημοι, ἤτοι, ὅταν $\zeta = 1$, θὰ εἶναι καὶ $\varphi = \frac{1}{2}$, καὶ ὅταν $\zeta = -1$, θὰ εἶναι καὶ $\varphi = -\frac{1}{2}$. Οὕτως ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὰ συστήματα:

$$\left.\begin{array}{l} \eta\mu\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right) = 1 \\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \eta\mu\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right) = -1 \\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right) = -\frac{1}{2}. \end{array} \qquad (1)$$

Ἐκ τοῦ α΄. τῶν συστημάτων τούτων ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀκολούθων συστημάτων

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\chi+\psi}{2} = 2K\pi + \frac{\pi}{2} \\ \frac{\chi-\psi}{2} = 2K'\pi + \frac{\pi}{3} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \frac{\chi+\psi}{2} = 2K\pi + \frac{\pi}{2} \\ \frac{\chi-\psi}{2} = 2K'\pi - \frac{\pi}{3} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \frac{\chi+\psi}{2} = (2K+1)\pi \frac{\pi}{2} \\ \frac{\chi-\psi}{2} = 2K'\pi + \frac{\pi}{3} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\chi+\psi}{2} = (2K+1)\pi - \frac{\pi}{2} \\ \frac{\chi-\psi}{2} = 2K'\pi - \frac{\pi}{3}. \end{array}\right.$$

Ἐκ δὲ τοῦ β΄. τῶν συστημάτων (1) ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀκολούθων συστημάτων

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\chi+\psi}{2} = 2K\pi + \frac{3\pi}{2} \\ \frac{\chi-\psi}{2} = 2K'\pi + \frac{2\pi}{3} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \frac{\chi+\psi}{2} = 2K\pi + \frac{3\pi}{2} \\ \frac{\chi-\psi}{2} = 2K'\pi - \frac{2\pi}{3} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \frac{\chi+\psi}{2} = (2K+1)\pi - \frac{3\pi}{2} \\ \frac{\chi-\psi}{2} = 2K'\pi + \frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\chi+\psi}{2} = (2K+1)\pi - \frac{3\pi}{2} \\ \frac{\chi-\psi}{2} = 2K'\pi - \frac{2\pi}{3}. \end{array}\right.$$

250. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς τύπους (66) θέτομεν τὴν β΄. ἐξίσωσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi) + \sigma\upsilon\nu(\chi-\psi) = 2\beta$ ἢ $\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi) = 2\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha$. Ἐὰν εἶναι $-1 \leq 2\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha \leq 1$, ἡ ἐξίσωσις

αὕτη εἶναι δυνατή. Πρὸς λύσιν δὲ αὐτῆς καθιστῶμεν τὸ β'. μέλος λογιστὸν διὰ λογαρίθμων ὡς ἀκολούθως φαίνεται :

$26-\text{συν}\alpha = 26\left(1-\dfrac{\text{συν}\alpha}{26}\right)$· ἐὰν δὲ θέσωμεν $\text{εφ}\omega=\dfrac{\text{συν}\alpha}{26}$,

θὰ εἶναι $26-\text{συν}\alpha=26\,(1-\text{εφ}\omega)=26\,(\text{εφ}\,45^0-\text{εφ}\omega)$

$=\dfrac{26\text{ημ}\,(45^0-\omega)}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\text{συν}\omega}=\dfrac{26\sqrt{2}\,\text{ημ}(45^0-\omega)}{\text{συν}\omega}$. Οὕτως ἡ προειρημένη ἐξίσωσις γίνεται $\text{συν}\,(\chi+\psi)=\dfrac{26\sqrt{2}\,\text{ημ}(45^0-\omega)}{\text{συν}\omega}$.

Ἐὰν δὲ ἐκ τῶν πινάκων εὕρωμεν ὅτι $\text{συν}\tau=\dfrac{26\sqrt{2}\,\text{ημ}(45^0-\omega)}{\text{συν}\omega}$, ἕπεται ὅτι $\text{συν}\,(\chi+\psi)=\text{συν}\tau$, ἄρα $\chi+\psi=2\text{K}\pi\pm\tau$. Οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τῶν συστημάτων

$$\left.\begin{aligned}\chi-\psi&=\alpha\\ \chi+\psi&=2\,\text{K}\pi+\tau\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}\chi-\psi&=\alpha\\ \chi+\psi&=2\,\text{K}\pi-\tau.\end{aligned}$$

251. Θέτοντες τὴν β'. ἐξίσωσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\dfrac{\text{συν}\chi}{\text{συν}\psi}=\dfrac{6}{1}$ συνάγομεν εὐκόλως ὅτι $\dfrac{\text{συν}\chi-\text{συν}\psi}{\text{συν}\chi+\text{συν}\psi}=\dfrac{6-1}{6+1}$. (1)

Ἐπειδὴ δὲ $\text{συν}\chi-\text{συν}\psi=-2\text{ημ}\left(\dfrac{\chi-\psi}{2}\right)\text{ημ}\left(\dfrac{\chi+\psi}{2}\right)$ καὶ

$\text{συν}\chi+\text{συν}\psi=2\text{συν}\left(\dfrac{\chi+\psi}{2}\right)\text{συν}\left(\dfrac{\chi-\psi}{2}\right)$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $\text{εφ}\left(\dfrac{\chi-\psi}{2}\right)\text{εφ}\left(\dfrac{\chi+\psi}{2}\right)=\dfrac{1-6}{1+6}$, ὅθεν λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν καὶ τῆς α'. προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $\text{εφ}\left(\dfrac{\chi-\psi}{2}\right)$ $=\dfrac{1-6}{1+6}$. σφα. Ἐὰν δὲ ἐκ τῶν πινάκων εὕρωμεν ὅτι

$\text{εφ}\tau=\dfrac{1-6}{1+6}\,\text{σφ}\alpha$, θὰ εἶναι $\text{εφ}\left(\dfrac{\chi-\psi}{2}\right)=\text{εφ}\tau$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\dfrac{\chi-\psi}{2}=\lambda\pi+\tau$, ἄρα $\chi-\psi=2\lambda\pi+2\tau$. Οὕτως ἤχθημεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ συστήματος $\chi+\psi=\alpha$, $\chi-\psi=2\lambda\pi+2\tau$.

252. Ἡ α'. γράφεται καὶ οὕτω· $\text{ημ}\chi+\dfrac{\text{ημ}\chi}{\text{συν}\chi}=\alpha$ ἢ ἕνεκα τῆς

6'. $ημχ + \frac{ημχ}{6} = α$, ὅθεν $ημχ = \frac{α6}{1+6}$. Ἕνεκα ταύτης καὶ τῆς $συνχ = 6$ ἡ ταυτότης $ημ^2χ + συν^2χ = 1$ γίνεται $\frac{α^2 6^2}{(1+6)^2} + 6^2 = 1$, ὅθεν $α^2 6^2 + (1+6)^2 (6^2-1)$.

253. Ὑψοῦντες εἰς τὸν κύβον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς α'. ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $ημ^3χ + συν^3χ + 3ημχσυνχ\ (ημχ+συνχ) = α^3$, ὅθεν λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν δεδομένων ἐξισώσεων προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$6+3α\ ημχσυνχ = α^3$, ἐξ ἧς $ημχσυνχ = \frac{α^3-6}{3α}$. Οἱ ἀριθμοὶ ἄρα ημχ καὶ συνχ εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $X^2 - αX + \frac{α^3-6}{3α} = 0$, ἤτοι εἶναι:

$$ημχ = \frac{3α^2+\sqrt{12α6-3α^4}}{6α},\quad συνχ = \frac{3α^2-\sqrt{12α6-3α^4}}{6α}$$

ἢ καὶ τἀνάπαλιν.

Τετραγωνίζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τούτων καὶ προσθέτοντες εἶτα κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι $1 = \frac{α^3+26}{3α}$, ὅθεν

$α^3 - 3α + 26 = 0$.

Σημ. Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀλγέβρας ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $X^2 - π,X + x = 0$ εἶναι $π^2 - 2x$. Κατὰ ταῦτα τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $X^2 - αX + \frac{α^3-6}{3α} = 0$ θὰ εἶναι $α^2 - \frac{2α^3-26}{3α}$.

ἐξισοῦντες δὲ τοῦτο τῇ 1 εὑρίσκομεν $α^2 - \frac{2α^3-26}{3α} = 1$, ὅθεν $α^3 - 3α + 26 = 0$.

254. Αἱ ἐξισώσεις αὗται γράφονται προφανῶς καὶ οὕτω:

$ημχ - \frac{1}{ημχ} = α$, $συνχ - \frac{1}{συνχ} = 6$ ἢ $ημ^2χ - 1 = αημχ$, $συν^2χ - 1 = 6συνχ$. Τούτων μίαν π. χ. τὴν 6'. ἀντικαθιστῶμεν διὰ τῆς ἐξ αὐτῶν προκυπτούσης $-1 = αημχ + 6συνχ$. Οὕτως ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις $ημ^2χ - 1 = αημχ$ καὶ $-1 = αημχ + 6συνχ$. Ἐκ τῆς 6'. τούτων λαμβάνομεν $συνχ = -\frac{1+αημχ}{6}$.

ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν $\eta\mu^2\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi=1$, εὑρίσκομεν ὅτι $\eta\mu^2\chi+\left(\frac{\alpha\eta\mu\chi+1}{6}\right)^2=1$ ἢ $(\alpha^2+6^2)\,\eta\mu^2\chi+2\alpha\eta\mu\chi+1-6^2=0$. Ὥστε τὸ ημχ ὀφείλει νὰ ταυτοποιῇ ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις $\eta\mu^2\chi-\alpha\eta\mu\chi-1=0$ καὶ $(\alpha^2+6^2)\,\eta\mu^2\chi+2\alpha\eta\mu\chi+1-6^2=0$.

Λύοντες τὸ ὑπ' αὐτῶν ἀποτελούμενον σύστημα πρὸς ἀγνώστους ημχ καὶ ημ²χ εὑρίσκομεν ὅτι $\eta\mu\chi=-\frac{1+\alpha^2}{\alpha(\alpha^2+6^2+2)}$ καὶ $\eta\mu^2\chi=\frac{1+6^2}{\alpha^2+6^2+2}$. Ἐκ τούτων δὲ ἕπεται εὐκόλως ὅτι πρέπει νὰ εἶναι: $\frac{(1+\alpha^2)^2}{\alpha^2(\alpha^2+6^2+2)^2}=\frac{1+6^2}{\alpha^2+6^2+2}$, ὅθεν $(1+\alpha^2)^2=\alpha^2\,(1+6^2)\,(\alpha^2+6^2+2)$ ἢ $\alpha^2 6^2(\alpha^2+6^2+3)-1=0$.

255. Ἀπαλείφοντες τὸν 6 μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τούτων εὑρίσκομεν $2\alpha=\gamma\,\eta\mu2\chi\eta\mu\chi+\gamma\sigma\upsilon\nu2\chi\sigma\upsilon\nu\chi+\gamma\,\sigma\upsilon\nu2\chi\sigma\upsilon\nu\chi$ $=\gamma\sigma\upsilon\nu(2\chi-\chi)+\gamma\sigma\upsilon\nu2\chi\sigma\upsilon\nu\chi=\gamma\sigma\upsilon\nu\chi\,(1+\sigma\upsilon\nu2\chi)=2\gamma\sigma\upsilon\nu^3\chi$, ἄρα $\alpha=\gamma\sigma\upsilon\nu^3\chi$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\chi=\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{1}{3}}$. Ὁμοίως ἀπαλείφοντες τὸν α εὑρίσκομεν ὅτι $-\eta\mu\chi=\left(\frac{6}{\gamma}\right)^{\frac{1}{3}}$. Ἐκ τούτων ἕπεται εὐκόλως, ὅτι $\eta\mu^2\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi=\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{6}{\gamma}\right)^{\frac{2}{3}}$, ὅθεν

$$1=\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{6}{\gamma}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ ἢ } \alpha^{\frac{2}{3}}+6^{\frac{2}{3}}=\gamma^{\frac{2}{3}}.$$

256. Τετραγωνίζοντες τὰ μέλη ἑκατέρας τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων καὶ προσθέτοντες εἶτα κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι: $2+2\,(\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi+\eta\mu\chi\eta\mu\psi)=\alpha^2+6^2$ ἢ $2+2\,\sigma\upsilon\nu\,(\chi-\psi)=\alpha^2+6^2$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς γ'. προκύπτει ὅτι $2+2\gamma=\alpha^2+6^2$.

257. Ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi\chi+\varepsilon\varphi\psi=\frac{\eta\mu(\chi+\psi)}{\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi}$ καὶ $\sigma\varphi\chi+\sigma\varphi\psi=\frac{\eta\mu(\chi+\psi)}{\eta\mu\chi\eta\mu\psi}$ ἡ 6'. καὶ γ'. τῶν δεδομένων ἐξισώσεων γίνονται $\frac{\eta\mu(\chi+\psi)}{\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi}=\varepsilon\varphi6$, $\frac{\eta\mu(\chi+\psi)}{\eta\mu\chi\eta\mu\psi}=\sigma\varphi\gamma$. Ἐκ τῆς α'. τούτων εὑρίσκομεν

διαδοχικῶς: $\frac{\eta\mu(\chi+\psi)}{\varepsilon\varphi\beta}=\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi$, $\frac{2\eta\mu\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}=2\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi$ $=\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)+\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)=\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)$, ὅθεν $\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)=\frac{2\eta\mu\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}-\sigma\upsilon\nu\alpha$. Ὁμοίως ἐκ τῆς β'. εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)=\frac{2\eta\mu\alpha}{\sigma\varphi\gamma}+\sigma\upsilon\nu\alpha$. Ἐξισοῦντες δὲ τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ συν(χ—ψ) εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{2\eta\mu\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}-\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{2\eta\mu\alpha}{\sigma\varphi\gamma}$ $+\sigma\upsilon\nu\alpha$, ὅθεν $\frac{2\eta\mu\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}-2\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{2\eta\mu\alpha}{\sigma\varphi\gamma}$. Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ 2συνα, λαμβάνομεν $\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}-1=\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\sigma\varphi\gamma}$, ὅθεν $\frac{1}{\varepsilon\varphi\beta}-\frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}=\frac{1}{\sigma\varphi\gamma}$ ἢ $\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha=\varepsilon\varphi\gamma$.

258. [89]. Α'. τρόπος. Ἐπειδὴ $\beta=\alpha\eta\mu B$, $\gamma=\alpha\sigma\upsilon\nu B$, ἕπεται ὅτι

$$\frac{\beta}{\alpha+\gamma}=\frac{\alpha\eta\mu B}{\alpha(1+\sigma\upsilon\nu B)}=\frac{2\,\eta\mu\left(\frac{B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B}{2}\right)}{2\,\alpha\sigma\upsilon\nu^2\frac{B}{2}}=\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right).$$

Β'. τρόπος. Κατὰ τὴν ἰσότητα (57) [ἄσκ. 62] εἶναι $\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{-1+\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 B}}{\varepsilon\varphi B}$. Ἐπειδὴ δὲ $\varepsilon\varphi B=\frac{\beta}{\gamma}$, αὕτη γίνεται $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{-\gamma+\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\beta}=\frac{\alpha-\gamma}{\beta}=$ $\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma)}{\beta(\alpha+\gamma)}=\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\beta(\alpha+\gamma)}=\frac{\beta^2}{\beta(\alpha+\gamma)}=\frac{\beta}{\alpha+\gamma}$. Γ'. τρόπος. Ἐκ τῆς $\gamma=\alpha\sigma\upsilon\nu B$, ἕπεται ὅτι $\sigma\upsilon\nu B=\frac{\gamma}{\alpha}$. Ἐπειδὴ δὲ $\sigma\upsilon\nu B$

$$=\frac{1-\varepsilon\varphi^2\left(\frac{B}{2}\right)}{1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{B}{2}\right)},$$ ἕπεται ὅτι $$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{1-\varepsilon\varphi^2\left(\frac{B}{2}\right)}{1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{B}{2}\right)},$$ ὅθεν

$$\frac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma}=\frac{2}{2\varepsilon\varphi^2\left(\frac{B}{2}\right)}=\frac{1}{\varepsilon\varphi^2\left(\frac{B}{2}\right)},$$ ἄρα $$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{\alpha-\gamma}{\alpha+\gamma}$$

$$=\frac{\alpha^2-\gamma^2}{(\alpha+\gamma)^2}=\frac{\beta^2}{(\alpha+\gamma)^2}$$ καὶ $$\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{\beta}{\alpha+\gamma}.$$

Σημ. Τῆς γωνίας $\frac{B}{2}$ οὔσης ὀξείας ἡ εφ $\left(\frac{B}{2}\right)$ εἶναι θετική.

259 [90]. Α'. τρόπος. Ἐπειδὴ $εφ2B = \frac{2εφB}{1-εφ^2B}$ καὶ $εφB = \frac{6}{γ}$,

ἕπεται ὅτι $εφ2B = \dfrac{2\,\frac{6}{γ}}{1-\frac{6^2}{γ^2}} = \frac{26γ}{γ^2-6^2}$. Β'. τρόπος. Ἐκ τῶν

$6 = αημB$, $γ = ασυνB$. ἕπεται ὅτι :

$$\frac{26γ}{γ^2-6^2} = \frac{2α^2ημBσυνB}{α^2(συν^2B-ημ^2B)} = \frac{ημ2B}{συν2B} = εφ2B.$$

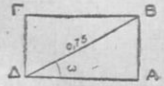
260. [91]. Ὡς γνωστὸν $συν(B-Γ) = συνBσυνΓ + ημBημΓ$. Ἐκ δὲ τῶν $6 = ασυνΓ = αημB$, $γ = ασυνB = αημΓ$ λαμβάνομεν $συνB = ημΓ = \frac{γ}{α}$ καὶ $συνΓ = ημB = \frac{6}{α}$· ἡ προηγουμένη ἄρα ἰσότης γίνεται $συν(B-Γ) = \frac{6γ}{α^2} + \frac{6γ}{α^2} = \frac{26γ}{α^2}$.

261. [92]. Ἐν πρώτοις $B = 90^0 - Γ = 41^0\,11'\,12''$. Ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων $6 = ασυνΓ$ καὶ $γ = αημΓ$ εὑρίσκομεν ὅτι $λογ6 = 1{,}97086$, ὅθεν $6 = 93{,}51μ$. καὶ $λογγ = 2{,}02884$, ὅθεν $γ = 106{,}86585μ$. Ἐκ δὲ τοῦ τύπου $E = \frac{1}{4}α^2\,ημ(2Γ)$ εὑρίσκομεν ὅτι $λογE = 3{,}69866$, ὅθεν $E = 4996{,}44$τ. μ.

262. Ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{α}{π} = \frac{μ}{180}$ θέτοντες $α = \frac{3π}{20}$ εὑρίσκομεν ὅτι $μ = 27^0$, δηλ. $B = 27^0$. Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι $Γ = 90^0 - B = 63^0$. Ἐκ δὲ τῶν $6 = αημB$ καὶ $γ = ασυνB$ εὑρίσκομεν $6 = 837{,}98μ$ καὶ $γ = 1644{,}59μ$. Τέλος ἐκ τοῦ τύπου $E = \frac{1}{4}α^2ημ(2B)$ εὑρίσκομεν ὅτι $E = 689066{,}66$τ.μ.

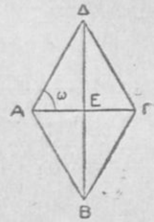
263. Κατὰ τὸν τύπον $\frac{μ}{180} = \frac{6}{200}$ εἶναι $μ = 180.\,\frac{42{,}5}{200} = 38^0\,15'$ ἤτοι $B = 38^0\,15'$, ἄρα $Γ = 51^0\,45'$. Εἶτα ἐργαζόμενοι ὡς προηγουμένως εὑρίσκομεν ὅτι $6 = 363{,}958$ μ. $γ = 461{,}666$μ. καὶ $E = 84014$τ.μ.

264. [93]. Τοῦ τριγώνου ΑΒΔ ὄντος ὀρθογωνίου, ἕπεται ὅτι (ΑΒ) $= 0{,}75$ ημ $(32^\circ\ 15')$ καὶ (ΑΔ) $= 0{,}75$ συν $(32^\circ\ 15')$, ἐξ ὧν εὑρίσκομεν ὅτι (ΑΒ) $= 0{,}400209$μ. καὶ (ΑΔ) $= 0{,}6343$.



(Σχ. 11)

265. [94]. Ἐπειδὴ $\omega = \frac{3}{5}$ ὀρθ. ἕπεται ὅτι $\omega = 90^\circ . \frac{3}{5} = 54^\circ$ καὶ (ΑΕ) = (ΑΔ) συν 54°, (ΔΕ) =(ΑΔ) ημ 54°, ὅθεν 2(ΑΕ) = (ΑΓ) $= 8{,}276$μ καὶ (ΔΒ) $= 11{,}3674$μ.



(Σχ. 12)

266. [95]. Ἐν πρώτοις $\Gamma = 90^\circ - B = 43^\circ$ ἐκ δὲ τῆς $\gamma = \beta \sigma\varphi B$ εὑρίσκομεν $\gamma = 43{,}829$μ καὶ ἐκ τῆς $\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$ εὑρίσκομεν $\alpha = 64{,}264$μ.

Τέλος ἐκ τῆς ἰσότητος $E = \frac{1}{2}\beta^2 \sigma\varphi B$ εὑρίσκομεν ὅτι $E = 1029{,}976$ τ. μ.

267. [96]. Ἐν πρώτοις $B = 90^\circ - \Gamma = 66^\circ\ 14'\ 37''$. Ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων $\gamma = \beta \varepsilon\varphi \Gamma$ καὶ $\alpha = \frac{\beta}{\sigma\upsilon\nu \Gamma}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\gamma = 55{,}0175$μ καὶ $\alpha = 136{,}572$μ. Τέλος ἐκ τῆς ἰσότητος $E = \frac{1}{2}\beta^2 \varepsilon\varphi \Gamma$ εὑρίσκομεν $E = 3438{,}5833$ τ. μ.

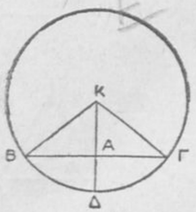
268. Ἐν πρώτοις $B = 90^\circ - \Gamma = 88^\circ\ 35'$. Ἐργαζόμενοι δὲ ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν $\gamma = 1{,}8578$μ. $\alpha = 75{,}022$μ καὶ $E = 69{,}5533$ τ. μ.

269. Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{\mu}{180} = \frac{\gamma}{200}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\Gamma = 22{,}2 . \frac{180}{200} = 19^\circ\ 58'\ 48''$, ἄρα $B = 90^\circ - \Gamma = 70^\circ\ 1'\ 12''$. Εἶτα ὡς ἀνωτέρω ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι $\beta = 610{,}6$μ. $\alpha = 649{,}714$μ καὶ $E = 67776{,}66$ τ. μ.

270. [97]. Ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ κύκλου εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθ. τριγώνου ΒΚΑ, οὗ $B = 40^\circ\ 18'\ 38''$, $BA = \frac{1{,}65}{2} = 0{,}825$μ καὶ τρίτη πλευρὰ (ΚΑ) = χ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς

ρηθείσης χορδῆς. Ἐπειδὴ (ΒΑ) = ρσυνΒ, ἕπεται ὅτι

$\rho = \frac{0{,}825}{\sigma\upsilon\nu\,(40^\circ\, 18'\, 38'')} = 1{,}0818$ μ. Ἐκ δὲ τῆς $\chi = \rho \varepsilon\varphi B$ εὑρίσκομεν $\chi = 0{,}6999$μ.



(Σχ. 13)

Ἡ γωνία ΒΚΑ ἔχει μέτρον $90^\circ - (40^\circ\, 18'\, 38'') = 49^\circ\, 41'\, 22''$, ἄρα ἡ γωνία ΒΚΓ καὶ κατ' ἀκολουθίαν καὶ τὸ τόξον ΒΔΓ ἔχει μέτρον $(49^\circ\, 41'\, 22'')\ \chi\ 2 = 99^\circ\, 22'\, 44''$, τὸ δὲ τόξον ΒΕΓ ἔχει μέτρον $360^\circ - (99^\circ\, 22'\, 44'') = 260^\circ 37' 16''$.

271. [98]. Ἐκ τῆς ἰσότητος $\varepsilon\varphi B = \frac{6}{\gamma} = \frac{256{,}25}{348}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\lambda o\gamma \varepsilon\varphi B = \bar{1}{,}86708$, ὅθεν $B = 36^\circ\, 21'\, 57'', 69$, ἄρα $\Gamma = 53^\circ\, 38'\, 2'', 31$. Ἐκ δὲ τῆς $\alpha = \frac{6}{\eta\mu B}$ εὑρίσκομεν $\alpha = 432{,}17$μ, ἐκ δὲ τῆς $E = \frac{1}{2}\, 6\gamma$ εὑρίσκομεν ὅτι $E = 44587$ τ. μ.

272 [99]. Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εὑρίσκομεν $B = 53^\circ\, 7'\, 48'', 46$ $\Gamma = 36^\circ\, 52'\, 11'', 54$, $\alpha = 60$μ καὶ $E = \frac{1}{2} \cdot 48.\, 36 = 24.\, 36 = 864$ τ. μ.

273. [100]. ***Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ $\beta = 2\gamma$ καὶ $\alpha = 3\mu$.***
Ἐπειδὴ $6 = 2\gamma$, ἡ ἰσότης $6 = \gamma\varepsilon\varphi B$ γίνεται $2\gamma = \gamma\varepsilon\varphi B$, ὅθεν $\varepsilon\varphi B = 2$ καὶ $B = 63^\circ\, 26'\, 5'', 625$, ἄρα $\Gamma = 26^\circ\, 33'\, 54'', 375$. Εἶτα ἐκ τῆς ἰσότητος $6 = \alpha\eta\mu B = 3\eta\mu\,(63^\circ\, 26'\, 5'', 625)$ εὑρίσκομεν $6 = 2{,}6833$μ, ὅθεν $\gamma = \frac{6}{2} = 1{,}34165$μ.

Τέλος ἐκ τῆς ἰσότητος $E = \frac{1}{2}\, 6\gamma = \gamma^2$ εὑρίσκομεν $E = 1{,}80004$ τ. μ.

274. [101]. Ἔστω ὅτι (ΔΒ) = 3.48μ καὶ (ΑΓ) = 2,20μ (σχ. 12). Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΕΔ ἕπεται ὅτι $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\Delta E}{AE} = \frac{1{,}74}{1{,}10}$, ὅθεν $\omega = 57^\circ\, 42'$ καὶ ἑπομένως $\widehat{A\Delta E} = 32^\circ\, 18'$. Ἐκ τού-

των ἕπεται ὅτι $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 115^o\ 24'$ καὶ $\hat{\Delta} = \hat{B} = 64^o\ 36'$. Ἐπειδὴ δὲ $(\Delta E) = (A\Delta)$ ημω, ἕπεται ὅτι $(A\Delta) = \frac{(\Delta E)}{\eta\mu\omega} = 2{,}0585\mu$.

275. [102]. Ἔστω $(B\Gamma) = 12\mu$ καὶ $(KA) = 8\mu$ (σχ. 13). Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου AKB ἕπεται ὅτι $\varepsilon\varphi B = \frac{8}{6}$, ὅθεν $B = 53^o\ 7'\ 48'', 46$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $B\hat{K}A = 36^o\ 52'\ 11'', 54$. Δι' ὃ τὸ μὲν τόξον ΒΔΓ ἔχει μέτρον $(36^o\ 52'\ 11'', 54)\ \chi 2 = 73^o\ 44''\ 23'', 08$, τὸ δὲ $\widehat{BE\Gamma}$ ἔχει μέτρον $360^o - (73^o 44'\ 23'', 08) = 286^o\ 15'\ 36'', 92$. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὀρθ. τριγώνου ἕπεται ὅτι $(AK) = (KB)\ \eta\mu B$, ὅθεν $(KB) = \frac{(AK)}{\eta\mu B}$

$$= \frac{8}{\eta\mu(53^o\ 7\ 48'', 46)} = 10\mu.$$

276. [103]. Ἐπειδὴ $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ καὶ $\alpha+\beta = 40, 25$, $\alpha-\beta = 9{,}75$ ἕπεται ὅτι $2\lambda o\gamma\gamma = \lambda o\gamma\ 40, 25 + \lambda o\gamma\ 9{,}75 = 2{,}59377$, ὅθεν $\lambda o\gamma.\ \gamma = 1{,}29688$ καὶ $\gamma = 19, 81\mu$.

Ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} = \sqrt{\frac{9{,}75}{40{,}25}}$ προκύπτει ὅτι $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = \bar{1}{,}69211$, ὅθεν $\frac{\Gamma}{2} = 26^o\ 12'\ 16'', 875$ καὶ $\Gamma = 52^o\ 24'\ 33'', 75$, ἄρα $B = 37^o\ 35'\ 26'', 25$. Τέλος ἐκ τῆς $E = \frac{1}{2}\beta\gamma$ εὑρίσκομεν ὅτι $E = 151{,}0512$ τ.μ.

277. [104]. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΔ προκύπτει ὅτι $(A\Delta)^2 = (4 + 2{,}80)\ (4-2{,}80) = 6{,}80.\ 1{,}20$, ὅθεν $\lambda o\gamma\ (A\Delta) = 0{,}45584$ καὶ $(A\Delta) = 2{,}8565\mu$. Ἐφαρμόζοντες εἰς τὸ αὐτὸ ὀρθ. τρίγωνον τὴν ἰσότητα $\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1{,}20}{6{,}80}}$, ὅθεν $B = 45^o\ 34'\ 20'', 5$, ἄρα $B\hat{A}\Delta = 44^o\ 25'\ 39'', 5$ καὶ $\hat{A} = 88^o\ 51'\ 19''$.

278. [105]. Ἔστω ὅτι $(A\Delta) = 8\mu$ καὶ $(A\Gamma) = 5{,}30\mu$ (σχ. 12).

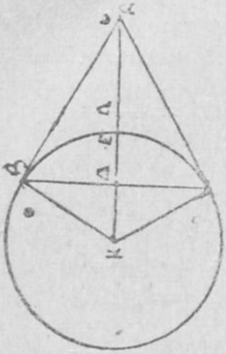
Τοῦ τριγώνου ΑΕΔ ὄντος ὀρθογωνίου ἕπεται ὅτι $(ΔΕ)^2 = (ΑΔ)^2 - (ΑΕ)^2 = 10,65 . 5,35$. ὅθεν $(ΔΕ) = 7,5483μ$ καὶ ἑπομένως $(ΔΒ) = 15,0966μ$. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὀρθ. τριγώνου προκύπτει ἐπίσης ὅτι $εφ\left(\frac{ω}{2}\right) = \sqrt{\frac{(ΑΔ)-(ΑΕ)}{(ΑΔ)+(ΑΕ)}} = \sqrt{\frac{5,35}{10,65}}$,

ὅθεν $ω = 70^o\ 39'\ 18''$, κατ' ἀκολουθίαν $\hat{Α} = \hat{Γ} = 141^o 18' 36''$ καὶ $\hat{Δ} = \hat{Β} = 38^o\ 41'\ 24''$.

279 [106]. Ἔστω Κ (σχ. 14) τὸ κέντρον κύκλου ἀκτῖνος $ρ$, Α σημεῖον τοιοῦτον ὥστε $(ΚΑ) = 2ρ$, καὶ ΑΓ, ΑΒ αἱ ἐκ τοῦ Α ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΚΓ εἶναι ὀρθογώνιον, ἕπεται ὅτι $ρ = (ΚΑ)\ ημω\left(\frac{Α}{2}\right)$ ἢ $ρ = 2ρημ\left(\frac{Α}{2}\right)$, ὅθεν $ημ\left(\frac{Α}{2}\right) = \frac{1}{2}$ καὶ

$λογημ\left(\frac{Α}{2}\right) = -0,30103 = \bar{1},69897$.

ὅθεν $\frac{Α}{2} = 30^o$ καὶ $Α = 60^o$.



(Σχ. 14)

280. Ἔστω $(ΔΒ) = 88μ$ καὶ $ω = 30^o\ 40'$ (σχ. 11). Ἕνεκα τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΔΒ εἶναι προφανῶς : $(ΑΔ) = 88συνω = 75,6916μ$. καὶ $(ΑΒ) = 88 . ημω = 44,884μ$.

281. Ἔστω $(ΔΒ) = 40μ$ καὶ $(ΑΓ) = 12,80μ$ (σχ. 12). Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΕΔ προκύπτει ὅτι $εφω = \frac{20}{6,40}$, ὅθεν

$ω = 72^o\ 15'\ 19''$. Ἄρα $\hat{Α} = \hat{Γ} = 144^o\ 30'\ 38''$, $\hat{Δ} = \hat{Β} = 35^o\ 29'\ 22'$. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου προκύπτει ὅτι $(ΑΔ) = \frac{20}{ημω} = 20,999μ$.

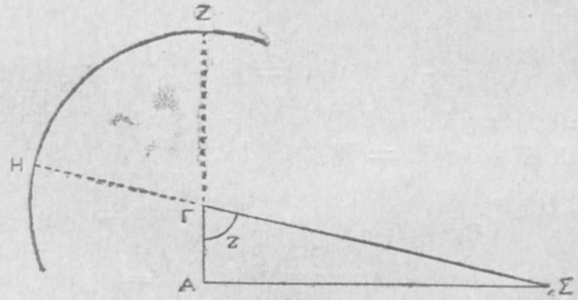
282 [144]. Ἔστω ὅτι $(ΒΓ) = 80,30μ$ καὶ $\hat{Α} = 20^o\ 10'\ 35''$. Ἐπειδὴ $\hat{Α} + 2\hat{Β} = 180^o$ ἕπεται ὅτι $2\hat{Β} = 180^o - (20^o\ 10'\ 35') = 159^o\ 49'\ 25''$, ἄρα $\hat{Β} = \hat{Γ} = 79^o\ 54'\ 42''$, 5. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ τὸ ὕψος ΑΔ αὐτοῦ ἐκ τοῦ σχηματιζομένου

ὀρθ. τριγώνου ΑΒΔ προκύπτει ὅτι : $(AB) = \frac{(B\Delta)}{\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)}$

$= \frac{40,15}{\eta\mu\,(10^\circ\ 5'\ 17'',\ 5)}$, ὅθεν $(AB) = (A\Gamma) = 229,\ 2158\mu$.

283 [145]. Ἔστω ὅτι $(B\Gamma) = \frac{(AB)}{2} = \frac{(A\Gamma)}{2}$. Ἀγομένου τοῦ ὕψους ΑΔ σχηματίζονται δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, ἐκ τοῦ ἑνὸς τῶν ὁποίων ἕπεται ὅτι $(\Delta\Gamma) = (A\Gamma)\ \eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)$. Ἐπειδὴ δὲ $(\Delta\Gamma) = \frac{(B\Gamma)}{2}$ $= \frac{(A\Gamma)}{4}$, αὕτη γίνεται $\frac{(A\Gamma)}{4} = (A\Gamma)\ \eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)$, ὅθεν $\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{4}$ καὶ $\frac{A}{2} = 14^\circ\ 28'\ 39'',\ 18$, ἄρα $A = 28^\circ\ 57'$ $18'',\ 36$ καὶ $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 75^\circ\ 31'\ 20'',\ 82$.

284. Ἔστω $(A\Gamma) = 2,15$ ἡ ράβδος καὶ $(A\Sigma) = 6,45\mu$ ἡ σκιὰ αὐτῆς. Τοῦ τριγώνου ΑΓΣ ὄντος ὀρθογωνίου εἶναι $(A\Gamma) =$



(Σχ. 15)

$(A\Sigma)$ ἐφΣ, ὅθεν ἐφ$\Sigma = \frac{2,15}{6,45}$, ὅθεν $\Sigma = 18^\circ\ 26'\ 5'',\ 7$.

285 [146]. Ἔστω χ τὸ ζητούμενον μῆκος. Κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 51) εἶναι $3,4 = \chi\,\sigma\upsilon\nu\,(25^\circ\ 18'\ 30'')$, ὅθεν

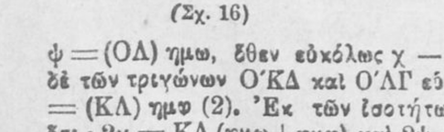
$$\chi = \frac{3,4}{\sigma\upsilon\nu(25^\circ\ 18'\ 30'')} = 3,761\mu.$$

286. [147] Ἔστω $\widehat{B\Delta\Gamma} = 40^\circ$ καὶ $KB = 12\mu$. (σχ. 13). Ἐπειδὴ $\widehat{B\Delta\Gamma} = 40^\circ$ ἕπεται ὅτι $B\hat{K}A = 20^\circ$ καὶ ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώ-

νου ΒΚΑ προκύπτει ὅτι (ΑΒ) $=$ 12. ημ $20^o = 4{,}1042$μ καὶ $(\overline{ΒΓ}) = 8{,}2084$μ.

287 [148]. Ἔστω ὅτι $\frac{(ΑΒ)}{(ΑΔ)} = \frac{2}{3}$ (σχ. 11). Ἐπειδὴ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ ὄντος ὀρθογωνίου εἶναι $\frac{(ΑΒ)}{(ΑΔ)} =$ εφω, ἕπεται ὅτι εφω $= \frac{2}{3}$, ὅθεν ω $= 33^o\, 41'\, 24''{,}44$ καὶ $\widehat{ΔΒΑ} = 56^o\, 18'\, 35''{,}56$.

288. Ἔστω (ΚΑ) $=$ 30μ καὶ (ΑΒ) $=$ 25,30μ. Ἀγομένων τῶν ἐφαπτομένων ΑΓ καὶ ΒΓ γίνεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗ ἡ πλευρὰ (ΑΒ) τέμνεται ὑπὸ τῆς ΚΓ εἴς τι σημεῖον Δ, καὶ οὗ αἱ παρὰ τὴν ΑΒ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν $\widehat{ΑΚΓ}$, ἔστω δὲ φ ἑκάστη τούτων. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΚΔ προκύπτει ὅτι (ΑΔ)$=$30ημφ, ὅθεν ημφ $= \frac{12.65}{30}$ καὶ φ $= 24^o\, 56'\, 24''{,}44$ καὶ Γ $= 180^o - (49^o\, 52'\, 48''{,}88) = 130^o\, 7'\, 11''{,}12$. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκεται ὧδε. Ἐν πρώτοις Ε $= \frac{1}{2}$ (ΑΒ) (ΓΔ) $=$ (ΑΔ) (ΔΓ). Ἐπειδὴ δὲ (ΔΓ) $=$ (ΑΔ) εφφ, ἕπεται ὅτι Ε$=$(ΑΔ)^2 εφφ$=(12{,}65)^2$ εφ $(24^o\, 56'\, 24''{,}44)$, ὅθεν Ε $=$ 74,424 τ. μ.



(Σχ. 16)

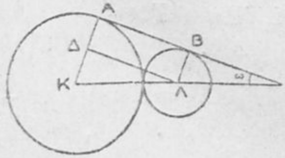
289. Ἔστω (ΚΔ)$=$714μ, 2ω$=36^o\, 8'$, 2φ$=104^o\, 12'$. (ΚΑ)$=$χ καὶ (ΛΒ) $=$ψ. Ἐκ τῶν ὀρθ. τριγώνων ΟΚΑ, ΟΛΒ προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες χ $=$ (ΟΚ) ημω ψ $=$ (ΟΛ) ημω, ὅθεν εὐκόλως χ $-$ ψ $=$ (ΚΛ) ημω (1). Ἐκ δὲ τῶν τριγώνων Ο΄ΚΔ καὶ Ο΄ΛΓ εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι χ$+$ψ $=$ (ΚΛ) ημφ (2). Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν ὅτι : 2χ $=$ ΚΛ (ημω$+$ημφ) καὶ 2ψ$=$(ΚΛ)(ημφ$-$ημω), ὅθεν :

$$χ = \frac{(ΚΛ)}{2} \cdot 2ημ \left(\frac{ω+φ}{2}\right) συν \left(\frac{φ-ω}{2}\right) = (ΚΛ)\, ημ(35^o 5')$$

συν $(17^o\, 1') =$ 392, 409μ. $ψ = \frac{ΚΛ}{2} \cdot 2ημ \left(\frac{φ-ω}{2}\right) συν \left(\frac{φ+ω}{2}\right)$

$= (\mathrm{ΚΛ})$ ημ $(17^\circ\ 1')$ συν $(35^\circ\ 5') = 170,988\mu$.

290. Ἔστω $(\mathrm{ΚΔ}) = 9\mu$, $(\mathrm{ΛΒ}) = 4\mu$ καὶ ΑΒ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν κύκλων Κ καὶ Λ, οἵτινες ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐκτός. Ἀγομένης τῆς ΛΔ παραλλήλου τῇ ΑΒ σχηματίζεται τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΛΚΔ, οὗ ἡ γωνία Λ ἰσοῦται τῇ ω,

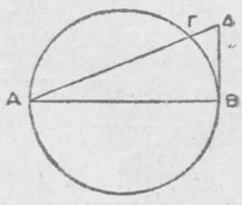


(Σχ. 17)

καὶ ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι $\eta\mu\Lambda = \eta\mu\omega = \dfrac{(\mathrm{ΚΔ})}{(\mathrm{ΚΛ})} = \dfrac{9-4}{9+4} = \dfrac{5}{13}$

ὅθεν $\omega = 22^\circ\ 37'\ 12''$ καὶ $2\omega = 45^\circ\ 14'\ 24''$.

291. Ἐκ τῶν ὀρθ. τριγώνων ΑΓΒ καὶ ΑΔΒ ἕπεται $(\mathrm{ΑΓ}) = (\mathrm{ΑΒ})$ συνω καὶ $(\mathrm{ΑΒ}) = (\mathrm{ΑΔ})$ συνω· ὅθεν $(\mathrm{ΑΓ}) = (\mathrm{ΑΔ})\text{συν}^2\omega$. Ἐπειδὴ δὲ πρέπει νὰ εἶναι $(\mathrm{ΑΔ}) = 4\ (\mathrm{ΑΓ})$, αὕτη γίνεται $(\mathrm{ΑΓ}) = 4\ (\mathrm{ΑΓ})\ \text{συν}^2\omega$, ὅθεν $\text{συν}^2\omega = \dfrac{1}{4}$



(Σχ. 18)

καὶ ἑπομένως συνω$= \pm\dfrac{1}{2}$. Ἐπειδή, ἕνεκα τῆς φύσεως τοῦ ζητήματος, ἡ γωνία ω ὀφείλει νὰ εἶναι ἀπολύτως μικροτέρα τῶν 90°, ἕπεται ὅτι $\omega = \pm 60^\circ$.

292. (Ὅρα ἡμετέραν Κοσμογραφίαν § 97).

293. Ἔστω $(\mathrm{ΒΓ}) = \dfrac{2}{3}.\,2\rho$ (σχ. 13), ὅτε $(\mathrm{ΒΑ}) = \dfrac{(\mathrm{ΒΓ})}{2} = \dfrac{2\rho}{3}$.

Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΒΑ εὑρίσκομεν ὅτι εφ$\dfrac{B}{2}$

$$= \sqrt{\frac{\rho - \frac{2\rho}{3}}{\rho + \frac{2\rho}{3}}} = \sqrt{\frac{1}{5}},$$ ὅθεν $\dfrac{B}{2} = 24^\circ\ 5'\ 40'',\ 588$ καὶ

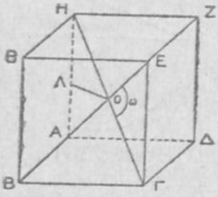
$B = 48^\circ\ 11'\ 21'',\ 176$, ἄρα $\widehat{\mathrm{ΒΚΑ}} = 41^\circ\ 48'\ 38'',\ 824$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\widehat{\mathrm{ΒΔΓ}} = 83^\circ\ 37'\ 17'',\ 648$, $\widehat{\mathrm{ΒΕΓ}}\ 96^\circ = 22'$ $42'',\ 352$.

Σημ. Τὴν γωνίαν ΒΚΑ εὑρίσκομεν καὶ ἀμέσως ἐκ τῆς ἰσότητος (ΔΒ) = ρημ (ΒΚΑ).

294. Ἔστω (ΓΔ) = 3μ καὶ (ΒΔ) = 4μ. (σχ. 48 Εὐθ. Τρ.). Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνων (ΑΔΓ) καὶ (ΑΔΒ) λαμβάνομεν (ΑΔ) = 3εφΓ, (ΑΔ) = 4εφΒ, ὅθεν $\frac{3}{4} = \frac{\text{εφΒ}}{\text{εφΓ}} = \frac{\text{εφΒ}}{\text{σφΒ}} = \text{εφ}^2\text{Β}$, ἄρα Β = 40° 53′ 36″ καὶ Γ = 49° 6′ 24″.

295. Ἔστω ὅτι $\frac{(\text{ΒΔ})}{(\text{ΑΔ})} = \frac{7}{5}$ (σχ. 48 Εὐθ. Τρ.). Ἐπειδὴ (ΑΔ) = (ΒΔ) εφΒ, ἔπεται ὅτι $\frac{(\text{ΒΔ})}{(\text{ΑΔ})} = \frac{1}{\text{εφΒ}} = \text{σφΒ} = \text{εφΓ}$.

Ἄρα εφΓ $= \frac{7}{5}$, ὅθεν Γ = 54° 27′ 44″, 44 καὶ Β = 35° 32′ 15″, 56.



(Σχ. 19)

296. Ἔστωσαν ΑΕ καὶ ΗΓ δύο διαγώνιοι τοῦ κύβου ΑΕ. Τὸ ἐπίπεδον τῶν ἀκμῶν ΑΗ καὶ ΓΕ τέμνει τὸν κύβον κατὰ τὸ ὀρθογώνιον ΑΓΕΗ, ὅπερ ἔχει διαστάσεις (ΑΗ) = α καὶ (ΑΓ) = $\alpha\sqrt{2}$. Ἐπειδὴ δὲ ΗΓ = ΑΕ, ἔπεται ὅτι ΑΟ=ΟΗ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΟΗ εἶναι ἰσοσκελές, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ ΟΛ εἶναι παράλληλον τῇ ΑΓ καὶ ἴσον πρὸς $\frac{(\text{ΑΓ})}{2} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$. Ἤδη ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΟΛΑ ἔπεται ὅτι (ΑΛ) = (ΟΛ) εφ$\left(\frac{\omega}{2}\right)$, ὅθεν εφ$\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{(\text{ΑΛ})}{(\text{ΟΛ})}$ $= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ $\frac{\omega}{2}$ = 35° 15′ 51″, 11. ἄρα ω = 70° 31′ 42″, 22.

297. Ἐκ τῶν γνωστῶν ἰσοτήτων β = αημΒ, γ = ασυνΒ, ἔπεται εὐκόλως ὅτι 2βγ = 2α² ημ ΒσυνΒ = α²ημ(2Β). Ἐπειδὴ 2βγ = 4Ε, ἔπεται ὅτι ημ (2Β) $= \frac{4\text{Ε}}{\alpha^2}$. Ὁριζομένης οὕτω τῆς Β καὶ γνωστῆς οὔσης τῆς α ὁρίζονται τὰ λοιπὰ στοιχεῖα κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον (§ 100 Α′).

Ἐφαρμογή. Διὰ Ε = 45968 καὶ α = 22840 ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται ημ(2Β) $= \frac{4.45968}{22840^2}$, ὅθεν λογημ (2Β) =

$\bar{4},54711$, ὅθεν $2B=1'\ 12'',716$ καὶ $B=36'',358$, $\Gamma=89^\circ\ 59'\ 23'',642$. Ἐκ τῆς ἰσότητος $\beta=\alpha\,\eta\mu B$ εὑρίσκομεν ὅτι $\beta=4,026$. Τέλος δὲ ἐκ τῆς $\gamma=\dfrac{2E}{\beta}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\gamma=22835,568$ μ.

298. Ἐκ τῆς προηγουμένως εὑρεθείσης ἰσότητος $4E=\alpha^2\,\eta\mu\,(2B)$, ἕπεται ὅτι $\alpha^2=\dfrac{4E}{\eta\mu\,(2B)}$, ἐξ ἧς ὁρίζεται ἡ α, ὅτε ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 100 Α').

Ἐφαρμογή. Διὰ $E=8940$ καὶ $B=48^\circ\ 50'$ εὑρίσκομεν $\alpha=189,956$ μ., εἶτα εὑρίσκομεν $\beta=142,9997$, μ. καὶ $\gamma=125,037$ μ.

299. Ἐκ τῆς ἰσότητος $\beta\gamma=2E$ ἕπεται ὅτι $\gamma=\dfrac{2E}{\beta}$, δι' ἧς ὁρίζεται ἡ γ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ $\beta=\gamma\,\varepsilon\varphi B$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\dfrac{\beta}{\varepsilon\varphi B}=\dfrac{2E}{\beta}$, ἐξ ἧς προκύπτει ἡ $\varepsilon\varphi B=\dfrac{\beta^2}{2E}$, δι' ἧς ὁρίζεται ἡ Β, εἶτα δὲ καὶ ἡ Γ. Τέλος ἐκ τῆς $\alpha=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}$ ὁρίζεται ἡ α.

Ἐφαρμογή. Διὰ $E=940,50$ καὶ $\beta=260,40$ εὑρίσκομεν $\gamma=\dfrac{2E}{\beta}=7,2235$ μ., $B=88^\circ\ 24'\ 39'',7$ $\Gamma=1^\circ\ 35'\ 20'',3$ καὶ $\alpha=260,5$ μ.

300 Ἐφαρμόζοντες τοὺς γνωστοὺς τύπους (§ 105) εἰς τὸ προκείμενον τρίγωνον εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\gamma=\frac{7,7}{\eta\mu\,(54^\circ 14')}=9,4896 \text{ μ.}\quad \beta=\frac{7,7}{\sigma\upsilon\nu\,(54^\circ\ 14')}=13,1739 \text{ μ.}$$

$$\alpha=\frac{7,7}{\eta\mu\,(54^\circ\ 14')\ \sigma\upsilon\nu\,(54^\circ\ 14')}=16,2359 \text{ μ.}$$

$$E=\frac{7,7^2}{\eta\mu\,(108^\circ\ 28')}=62,51 \text{ τ. μ.}$$

301. Ἐφαρμόζοντες τὸν γνωστὸν (§ 107) τύπον $\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}+B\right)=\dfrac{(\alpha+2\rho)\sqrt{2}}{2\alpha}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}+B\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$, ὅθεν $\lambda o\gamma\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}+B\right)=0,02557$, ἄρα $\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}+B\right)>1$, ὅπερ ἄτοπον. Τὸ πρόβλημα ἄρα δὲν ἔχει λύσιν.

302. Ἐπειδὴ $α.υ = 2Ε$, ἕπεται ὅτι $α = \frac{2Ε}{υ} = 60$ μ. Ἐπειδὴ δὲ (§ 106) $ημ(2Β) = \frac{2υ}{α}$, ἕπεται ὅτι $ημ(2Β) = \frac{υ^2}{Ε} = \frac{1}{2}$, ἐξ ἧς $2Β = 30^0$ καὶ $Β = 15^0$. Εἶτα ἐκ τῶν ἰσοτήτων $β = αημΒ$; $γ = ασυνΒ$ εὑρίσκομεν ὅτι $β = 15,529$ μ. καὶ $γ = 57\,955$.

303. Καλοῦντες $υ$ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ἔχομεν $υ^2 = μν = 54$, ὅθεν $υ = 7,348$ καὶ $α = μ + ν = 15μ$. Εἶτα ἡ ἐπίλυσις περατοῦται ὡς τὸ παράδ. 2ον (§ 106). Οὕτως εἶναι : $ημ(2Β) = \frac{2\ 7,348}{15}$, ὅθεν $Β = 39^0\ 13'\ 20''$, $β = 15ημ(39^0 13' 20'') = 9,4848μ$. $γ = 15\,συν(39^0 13' 20'') = 11,62μ$. καὶ $Ε = \frac{α.υ}{2} = \frac{15.7.348}{2} = 55,11$τ. μ.

304. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $β = αημΒ$, $γ = ασυνΒ = αημ\left(\frac{π}{2} - Β\right)$ εὑρίσκομεν διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη ὅτι : $μ = α\left[ημΒ + ημ\left(\frac{π}{2} - Β\right)\right] = α\sqrt{2}\,συν\left(Β - \frac{π}{4}\right)$, ὅθεν $συν\left(Β - \frac{π}{4}\right) = \frac{μ}{α\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$, ἄρα $Β - \frac{π}{4} = 8^0\ 8'$, καὶ $Β = 53^0\ 8'$. Εἶτα εὑρίσκομεν $β = αημΒ = 80,004μ$. $γ = 59,9957μ$ καὶ $Ε = \frac{1}{2}βγ = 2399,95$τ. μ.

305. Ἐπειδὴ $Δ = \frac{α}{2}$, ἕπεται ὅτι $α = 2Δ = 16μ$. Ἄρα (§ 107) $ημ\left(\frac{π}{4} + Β\right) = \frac{(16+6)\sqrt{2}}{32} = \frac{11\sqrt{2}}{16}$, ὅθεν $Β = 31^0\ 28'\ 20''$. Μεθ' ὃ ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὰ γνωστὰ (§100).

306. Ἐπειδὴ $\frac{μ}{ν} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{γ}{β}$ καὶ $εφΓ = \frac{γ}{β}$, ἕπεται ὅτι $εφΓ = \frac{μ}{ν} = \frac{4.319}{5,238}$, ὅθεν $Γ = 39^0\ 30'\ 25'', 38$, εἶναι δὲ καὶ $α = μ + ν = 9,557μ$. Μεθ' ὃ ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὰ γνωστά.

307. Ἐκ τῶν γνωστῶν ἰσοτήτων $2αυ = 2βγ$, $α^2 = β^2 + γ^2$ προς-

κύπτει ἡ ἰσότης $\alpha^2+2\alpha\upsilon=(\beta+\gamma)^2$ ἢ $\alpha^2+2\alpha\upsilon=(2\tau-\alpha)^2$ $=4\tau^2-4\alpha\tau+\alpha^2$, ὅθεν $2\alpha\upsilon+4\alpha\tau=4\tau^2$, ἄρα $\alpha=\dfrac{2\tau^2}{\upsilon+2\tau}$, ἐξ ἧς ὁρίζεται ἡ α. Ἐκ δὲ τῆς (§ 106) $\eta\mu 2B=\dfrac{2\upsilon}{\alpha}$ ὁρίζεται ἡ Β, καὶ περατοῦται εἶτα ἡ ἐπίλυσις κατὰ τὰ γνωστά.

308. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΔΒ (σχ. 48 Εὐθ. Τριγ.) προκύπτει ὅτι $\upsilon=\gamma\eta\mu B$· ἐπειδὴ δὲ $\gamma=\alpha\sigma\upsilon\nu B$, αὕτη γίνεται $\upsilon=\alpha\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B=\dfrac{\alpha}{2}\,\eta\mu\,(2B)$. Ἄρα $\delta=\alpha-\upsilon=$ $\alpha\left[1-\dfrac{1}{2}\,\eta\mu\,(2B)\right]$, ὅθεν $\alpha=\dfrac{\delta}{1-\dfrac{1}{2}\,\eta\mu(2B)}$.

Θέτοντες δὲ $\eta\mu^2\omega=\dfrac{1}{2}\,\eta\mu 2B$ λαμβάνομεν $\alpha=\dfrac{\delta}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$, ἐξ ἧς ὁρίζεται ἡ α. Μεθ' ὃ περατοῦται ἡ ἐπίλυσις κατὰ γνωστά.

309. Ἐκ τῶν ὀρθ. τριγώνων ΑΔΓ, ΑΔΒ (Σχ. 48 Εὐθ. Τριγ.) προκύπτει ὅτι $(\Delta\Gamma)=\upsilon\sigma\varphi\Gamma$, $(B\Delta)=\upsilon\sigma\varphi B$, ὅθεν $(\Delta B)-(\Delta\Gamma)$ $=\upsilon\,(\sigma\varphi B-\sigma\varphi\Gamma)$ ἢ $\upsilon=\upsilon\left(\varepsilon\varphi\Gamma-\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\Gamma}\right)$, ὅθεν $\varepsilon\varphi^2\Gamma-\varepsilon\varphi\Gamma$ $-1=0$, ἄρα $\varepsilon\varphi\Gamma=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Πρὸς λύσιν ἑκατέρας τούτων θέτομεν $\sqrt{5}=\varepsilon\varphi\omega$ καὶ εὑρίσκομεν $\omega=65^\circ\,54'\,17'',6$, ὅτε ἡ $\varepsilon\varphi\Gamma=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ γίνεται $\varepsilon\varphi\Gamma=\dfrac{1+\varepsilon\varphi\omega}{2}=\dfrac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}+\varepsilon\varphi\omega}{2}$ $=\dfrac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right)}{\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\omega}$, ἐξ ἧς $\Gamma=58^\circ\,16'\,55',7$. Ἡ β'. ἐξίσωσις $\varepsilon\varphi\Gamma=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ διδοῦσα τιμὴν τῆς Γ μεγαλυτέραν τῶν 90° ἀπορρίπτεται. Ὁρισθείσης τῆς Γ ἐκ τῶν ἰσοτήτων $(\Delta\Gamma)$ $=\upsilon\sigma\varphi\Gamma$ καὶ $(B\Delta)=\upsilon\sigma\varphi B=\upsilon\varepsilon\varphi\Gamma$ εὑρίσκομεν τὰ μήκη $(\Delta\Gamma)$ καὶ (ΔB), ἐκ τούτων δὲ καὶ τὴν $\alpha=(\Delta\Gamma)+(\Delta B)$. Εἶτα ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὰ γνωστά.

310. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\beta=\alpha\eta\mu B$, $\gamma=\alpha\sigma\upsilon\nu B$ προκύπτει διὰ προσ-

θέσεως κατὰ μέλη ἡ ἰσότης $\lambda=(\eta\mu B+\sigma\upsilon\nu B)$ ἢ $\lambda=\alpha\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-B\right)$, ὅθεν $\alpha=\frac{\lambda\sqrt{2}}{2\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-B\right)}$. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $\alpha=\frac{3180{,}863\sqrt{2}}{2\,\sigma\upsilon\nu\,(11^{\circ}\,41'\,8'')}=2296\,73\,\mu$. Μεθ' ὃ ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὰ γνωστά.

311. Ὡς προηγουμένως εὑρίσκομεν $\beta-\gamma=\alpha\sqrt{2}\;\eta\mu\left(B-\frac{\pi}{4}\right)$, ὅθεν $\eta\mu\left(B-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\lambda}{\alpha\sqrt{2}}$. Ὁριζομένης ἐκ ταύτης τῆς B ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὰ γνωστά.

312. Ἐκ τῶν ὀρθ. τριγώνων ΒΚΕ, ΕΚΓ (Σχ. 49 Εὐθ. Τριγ.) προκύπτει ὅτι $\rho=(BE)\,\epsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right)$, $\rho=(\Gamma E)\,\epsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$, ὅθεν $(BE)+(\Gamma E)=\rho\left(\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)$, ἄρα $\rho=\frac{\alpha}{\sigma\varphi\left(\frac{B}{2}\right)+\sigma\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}$

$$=\frac{\alpha\,\eta\mu\left(\frac{B}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)}=\frac{2\,\alpha\,\eta\mu\left(\frac{B}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2}\;\alpha\;\eta\mu\left(\frac{B}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right).$$

313 Ἔστω (ΑΔ) = μ καὶ (ΔΓ) = ν (Σχ. 50 Εὐθ. Τριγ.). Καθ' ἃ ἐκ τῆς Γεωμετρίας εἶναι γνωστόν.

$(A\Delta)=\mu=\frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma}$ καὶ $(A\Gamma)=\nu=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\gamma}$. Ἄρα $\frac{\mu}{\nu}=\frac{\gamma}{\alpha}=\eta\mu\Gamma$. Ὁριζομένης ἐκ ταύτης τῆς Γ καὶ τῆς β ἐκ τῆς $\beta=\mu+\nu$, ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὰ γνωστά.

314. Ἐπειδή, ὡς γνωστόν, εἶναι $\alpha=2\Delta$ καὶ (§ 106) $\eta\mu(2B)=\frac{2\upsilon}{\alpha}$, ἕπεται ὅτι $\eta\mu(2B)=\frac{\upsilon}{\Delta}$. Ὁριζομένης οὕτω τῆς α καὶ τῆς B ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὰ γνωστά. Οὕτως εὑρίσκομεν $\alpha=4\mu$ καὶ $B=30^{\circ}$.

315. Ἐκ τῶν ὀρθογ. τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ (Σχ. εὐθ. Τρ. 52) προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες $(A\Delta)=\gamma\sigma\upsilon\nu A$, $(\Delta\Gamma)=\alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma$,

ἄρα $\beta = (\mathrm{A\Delta}) + (\mathrm{A\Gamma}) = \gamma\,\text{συν}\mathrm{A} + \alpha\,\text{συν}\Gamma$. Ὁμοίως ἀποδεικνύονται καὶ αἱ ἄλλαι.

316. [107]. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\frac{\alpha}{\text{ημ}A} = \frac{\beta}{\text{ημ}B} = \frac{\gamma}{\text{ημ}\Gamma} = 2P$, ἕπεται ὅτι: $\alpha = 2P\,\text{ημ}A = 4\,P\,\text{ημ}\left(\frac{A}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{A}{2}\right)$, $\beta + \gamma = 2\,P$ $(\text{ημ}B + \text{ημ}\Gamma) = 4\,P\,\text{ημ}\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right) = 4\,P\,\text{συν}$ $\left(\frac{A}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)$· ἐκ τούτων ἕπεται εὐκόλως ὅτι

$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha} = \frac{\text{συν}\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}{\text{ημ}\left(\frac{A}{2}\right)}.$$

317. [108]. Πολ)ζοντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ α΄. μέλους ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\frac{\text{ημ}(A-B)}{\text{ημ}(A+B)} = \frac{\text{ημ}(A-B)\text{ημ}(A+B)}{\text{ημ}^2(A+B)} = \frac{\text{ημ}^2A\,\text{συν}^2B - \text{συν}^2A\,\text{ημ}^2B}{\text{ημ}^2\Gamma}$$

$$= \frac{\text{ημ}^2A(1-\text{ημ}^2B) - \text{ημ}^2B(1-\text{ημ}^2A)}{\text{ημ}^2\Gamma} = \frac{\text{ημ}^2A - \text{ημ}^2B}{\text{ημ}^2\Gamma}$$

$$= \frac{\frac{\alpha^2}{4P^2} - \frac{\beta^2}{4P^2}}{\frac{\gamma^2}{4P^2}} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2}.$$

318 [109]. Ἐπειδὴ $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\,\text{συν}B$ καὶ $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}A$, ἕπεται ὅτι:

$\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2} = \frac{2\alpha\gamma\,\text{συν}B}{2\beta\gamma\,\text{συν}A} = \frac{\alpha\,\text{συν}B}{\beta\,\text{συν}A}$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\text{ημ}A}{\text{ημ}B}$, ἕπεται ὅτι:

$$\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2} = \frac{\text{ημ}A\,\text{συν}B}{\text{ημ}B\,\text{συν}A} = \text{εφ}A.\text{σφ}B = \frac{\text{εφ}A}{\text{εφ}B}.$$

319 [110]. Ἐπειδὴ $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\text{ημ}A$ καὶ $\beta = 2P\,\text{ημ}B$, $\gamma = 2P\,\text{ημ}\Gamma$, ἕπεται ὅτι:

$$E = \frac{1}{2}\cdot 2P\,\text{ημ}\,B.\,2\,P\,\text{ημ}\Gamma.\,\text{ημ}A = 2P^2\,\text{ημ}A\,\text{ημ}B\,\text{ημ}\Gamma.$$

320. Ἐπειδὴ $\text{ημ}2A + \text{ημ}2B = 2\,\text{ημ}\,(A+B)\,\text{συν}\,(A-B)$, $\text{ημ}2\Gamma$

$= 2\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma$, $\eta\mu\Gamma = \eta\mu(A+B)$, καὶ $\sigma\upsilon\nu\Gamma = -\sigma\upsilon\nu(A+B)$, ἕπεται ὅτι:

$\eta\mu 2A + \eta\mu 2B + \eta\mu 2\Gamma = 2\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu(A-B) - 2\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu(A+B)$
$= 2\eta\mu\Gamma[\sigma\upsilon\nu(A-B) - \sigma\upsilon\nu(A+B)] = 4\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma$.

321. Α΄. τρόπος. Θέτοντες $\widehat{AMB} = \tau$, $\widehat{AM\Gamma} = \tau'$, $\widehat{BAM} = \omega$ καὶ $\widehat{MA\Gamma} = \varphi$ συνάγομεν ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΜ καὶ ΑΜΓ τὰς σχέσεις $\dfrac{(BM)}{\eta\mu\omega} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu\tau}$, $\dfrac{M\Gamma}{\eta\mu\varphi} = \dfrac{\beta}{\eta\mu\tau'}$, ὅθεν $(BM) = \dfrac{\gamma\eta\mu\omega}{\eta\mu\tau}$ καὶ $(M\Gamma) = \dfrac{\beta\eta\mu\varphi}{\eta\mu\tau'}$. Ἐπειδὴ δὲ $(BM) = (M\Gamma)$ καὶ $\eta\mu\tau = \eta\mu\tau'$, ἕπεται ὅτι $\gamma\eta\mu\omega = \beta\eta\mu\varphi$, ἄρα $\gamma\eta\mu\omega - \beta\eta\mu\varphi = 0$.

Β΄. τρόπος. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\dfrac{(BM)}{\eta\mu\omega} = \dfrac{(AM)}{\eta\mu B}$ καὶ $\dfrac{M\Gamma}{\eta\mu\varphi} = \dfrac{AM}{\eta\mu\Gamma}$, ἕπεται διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη ὅτι $\dfrac{\eta\mu\varphi}{\eta\mu\omega} = \dfrac{\eta\mu\Gamma}{\eta\mu B}$· ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{\eta\mu\Gamma}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\beta}$, αὕτη γίνεται $\dfrac{\eta\mu\varphi}{\eta\mu\omega} = \dfrac{\gamma}{\beta}$, ὅθεν $\gamma\eta\mu\omega - \beta\eta\mu\varphi = 0$.

322. [149] ***Ἐὰν μεταξὺ τῶν στοιχείων τριγώνου ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης $\alpha = 2\beta\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τοῦτο δύναται νὰ εἶναι ἰσοσκελές.*** Ἐκ τῆς ῥηθείσης ἰσότητος προκύπτει ὅτι $\dfrac{\alpha}{\beta} = 2\eta\mu\left(\dfrac{A}{2}\right)$· ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\eta\mu A}{\eta\mu B}$, αὕτη γίνεται $\dfrac{\eta\mu A}{\eta\mu B}$

$$= 2\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right) \text{ ἢ } \frac{2\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)}{\eta\mu B} = 2\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right), \text{ ὅθεν}$$

$\eta\mu B = \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{A}{2}\right) = \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2}\right)$. Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι

$$B - \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2} = 2K\pi \text{ ἢ } \left(B + \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = (2K+1)\pi.$$

Ἐκ τῆς α΄. τούτων διὰ $K=0$ προκύπτει $B = \dfrac{A}{2} - \dfrac{\pi}{2}$.

ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς $A+B+\Gamma = \pi$ προκύπτει ὅτι

$\Gamma = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2}$, ἄρα $B = \Gamma$.

323 [111] Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΔ προκύπτει ὅτι $(\mathrm{B\Delta})=\gamma\eta\mu\mathrm{A}$· ἐπειδὴ δὲ $\gamma=2\mathrm{P}\eta\mu\Gamma$, ἕπεται ὅτι $(\mathrm{B\Delta})=2\mathrm{P}\eta\mu\mathrm{A}\eta\mu\Gamma$.

324. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\beta=\dfrac{\alpha\eta\mu\mathrm{B}}{\eta\mu\mathrm{A}}$, $\gamma=\dfrac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu\mathrm{A}}$, εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι $\beta\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}=\dfrac{\alpha\eta\mu\mathrm{B}\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}}{\eta\mu\mathrm{A}}$, $\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma=\dfrac{\alpha\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu\mathrm{A}}$, ἐξ ὧν

$\beta\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}+\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma=\dfrac{\alpha}{\eta\mu\mathrm{A}}(\eta\mu\mathrm{B}\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}+\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma)=\dfrac{\alpha}{\eta\mu\mathrm{A}}\,\dfrac{1}{2}$

$(\eta\mu2\mathrm{B}+\eta\mu2\Gamma)=\dfrac{\alpha}{\eta\mu\mathrm{A}}\,\eta\mu(\mathrm{B}+\Gamma)\,\sigma\upsilon\nu(\mathrm{B}-\Gamma)$. Ἐπειδὴ δὲ $\eta\mu\mathrm{A}=\eta\mu(\mathrm{B}+\Gamma)$, ἕπεται ὅτι: $\beta\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}+\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma=\alpha\sigma\upsilon\nu(\mathrm{B}-\Gamma)$.

325. Ἐπειδὴ $\alpha=2\mathrm{P}\eta\mu\mathrm{A}$, $\beta=2\mathrm{P}\eta\mu\mathrm{B}$ καὶ $\gamma=2\mathrm{P}\eta\mu\Gamma$, ἕπεται ὅτι: $\alpha\eta\mu(\mathrm{B}-\Gamma)+\beta\eta\mu(\Gamma-\mathrm{A})+\gamma\eta\mu(\mathrm{A}-\mathrm{B})=2\mathrm{P}\,[\eta\mu\mathrm{A}\eta\mu(\mathrm{B}-\Gamma)+\eta\mu\mathrm{B}\eta\mu(\Gamma-\mathrm{A})+\eta\mu\Gamma\eta\mu(\mathrm{A}-\mathrm{B})]=2\mathrm{P}\,[\eta\mu(\mathrm{B}+\Gamma)\eta\mu(\mathrm{B}-\Gamma)+\eta\mu(\Gamma+\mathrm{A})\eta\mu(\Gamma-\mathrm{A})+\eta\mu(\mathrm{A}+\mathrm{B})\eta\mu(\mathrm{A}-\mathrm{B})]$.

Ἐπειδὴ δὲ (ἄσκ. 103) εἶναι $\eta\mu(\mathrm{B}+\Gamma)\eta\mu(\mathrm{B}-\Gamma)=\eta\mu^2\mathrm{B}-\eta\mu^2\Gamma$, $\eta\mu(\mathrm{A}+\mathrm{B})\eta\mu(\mathrm{A}-\mathrm{B})=\eta\mu^2\mathrm{A}-\eta\mu^2\mathrm{B}$, $\eta\mu(\Gamma+\mathrm{A})\eta\mu(\Gamma-\mathrm{A})=\eta\mu^2\Gamma-\eta\mu^2\mathrm{A}$, ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γίνεται: $\alpha\eta\mu(\mathrm{B}-\Gamma)+\beta\eta\mu(\Gamma-\mathrm{A})+\gamma\eta\mu(\mathrm{A}-\Gamma)=2\mathrm{P}\,[\eta\mu^2\mathrm{B}-\eta\mu^2\Gamma+\eta\mu^2\mathrm{A}-\eta\mu^2\mathrm{B}+\eta\mu^2\Gamma-\eta\mu^2\mathrm{A}]=0$.

326. Ἐπειδὴ $\alpha=2\mathrm{P}\eta\mu\mathrm{A}$, $\beta=2\mathrm{P}\eta\mu\Gamma$, $\gamma=2\mathrm{P}\eta\mu\Gamma$, ἕπεται ὅτι: $\alpha\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}+\beta\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}+\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma=\mathrm{P}(\eta\mu2\mathrm{A}+\eta\mu2\mathrm{B}+\eta\mu2\Gamma)$. Ἐπειδὴ δὲ (ἄσκ. 320) εἶναι
$\eta\mu2\mathrm{A}+\eta\mu2\mathrm{B}+\eta\mu2\Gamma=4\eta\mu\mathrm{A}\eta\mu\mathrm{B}\eta\mu\Gamma$, ἕπεται ὅτι:
$\alpha\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}+\beta\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}+\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}=4\mathrm{P}\eta\mu\mathrm{A}\eta\mu\mathrm{B}\eta\mu\Gamma$.

327. Ἐπειδὴ $\eta\mu\mathrm{A}=\dfrac{\alpha}{2\mathrm{P}}$, $\eta\mu\mathrm{B}=\dfrac{\beta}{2\mathrm{P}}$, $\eta\mu\Gamma=\dfrac{\gamma}{2\mathrm{P}}$, ἕπεται ὅτι $\alpha\eta\mu\mathrm{A}+\beta\eta\mu\mathrm{B}+\gamma\eta\mu\Gamma=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2\mathrm{P}}$. Ἀφ' ἑτέρου (ἄσκ. 326) εἶναι $\alpha\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}+\beta\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}+\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma=4\mathrm{P}\eta\mu\mathrm{A}\eta\mu\mathrm{B}\eta\mu\Gamma=4\mathrm{P}.\dfrac{\alpha\beta\gamma}{8\mathrm{P}^3}=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{2\mathrm{P}^2}$. Ἄρα:

$$\frac{\alpha\eta\mu\mathrm{A}+\beta\eta\mu\mathrm{B}+\gamma\eta\mu\Gamma}{\alpha\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}+\beta\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}+\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma}=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2\mathrm{P}}.\frac{2\mathrm{P}^2}{\alpha\beta\gamma}=\mathrm{P}.\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}.$$

328. Ἐπειδὴ $\eta\mu\mathrm{A}=\eta\mu(\mathrm{B}+\Gamma)$, ἡ ἰσότης $\eta\mu\mathrm{A}=2\eta\mu\mathrm{B}\sigma\upsilon\nu\Gamma$ γίνεται $\eta\mu(\mathrm{B}+\Gamma)=2\eta\mu\mathrm{B}\sigma\upsilon\nu\Gamma$, ὅθεν $\eta\mu\mathrm{B}\sigma\upsilon\nu\Gamma+\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}\eta\mu\Gamma-2\eta\mu\mathrm{B}\sigma\upsilon\nu\Gamma=0$ ἢ $\eta\mu(\Gamma-\mathrm{B})=0$, ἄρα $\Gamma-\mathrm{B}=\lambda\pi$. Ἐπειδὴ

$\Gamma - B$ δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀπολύτως μείζων τοῦ π, ἕπεται ὅτι $\lambda = 0$ καὶ ἑπομένως $\Gamma = B$.

329. Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον αὔξουσαν, ἕπεται ὅτι $\beta - \alpha = \gamma - \beta$, ὅθεν $2P\eta\mu B - 2P\eta\mu A = 2P\eta\mu\Gamma - 2P\eta\mu B$, ὅθεν εὐκόλως $2\eta\mu B = \eta\mu A + \eta\mu\Gamma$.

Ἐπειδὴ δὲ $\eta\mu B = \eta\mu(A+\Gamma) = 2\eta\mu\left(\frac{A+\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+\Gamma}{2}\right)$ καὶ $\eta\mu A + \eta\mu\Gamma = 2\eta\mu\left(\frac{A+\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-\Gamma}{2}\right)$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $4\,\eta\mu\left(\frac{A+\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+\Gamma}{2}\right) = 2\eta\mu\left(\frac{A+\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-\Gamma}{2}\right)$, ὅθεν $2\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+\Gamma}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-\Gamma}{2}\right)$ ἢ $2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} - \eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} + \eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$, ἐξ ἧς $3\,\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$, ὅθεν $3\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = 1$.

[112]. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = 2P$ προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες $\eta\mu A = \frac{\alpha}{2P}$, $\eta\mu B = \frac{\beta}{2P}$, $\eta\mu\Gamma = \frac{\gamma}{2P}$, ὧν ἕνεκα ἡ καθ' ὑπόθεσιν ἀληθεύουσα ἰσότης $\eta\mu^2 A = \eta\mu^2 B + \eta\mu^2\Gamma$ γίνεται $\frac{\alpha^2}{4P^2} = \frac{\beta^2}{4P^2} + \frac{\gamma^2}{4P^2}$, ἐξ ἧς $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, ἄρα τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

330. [113]. Ἐν πρώτοις εὑρίσκομεν $A = 180^\circ - (B+\Gamma) = 95^\circ\,24'$. Εἶτα ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\beta = \frac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu A}$, $\gamma = \frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$ εὑρίσκομεν $\beta = 594{,}6125\mu.$ καὶ $\gamma = 1044{,}976\mu.$. Τέλος ἐκ τῆς γνωστῆς (§ 112) ἰσότητος $E = \frac{\alpha^2\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{2\eta\mu(B+\Gamma)}$ εὑρίσκομεν ὅτι $E = 309300$ τ. μ.

331. [114]. Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εὑρίσκομεν $\Gamma = 90^\circ\,32'$, $\beta = 499{,}033\mu.$ $\gamma = 602{,}5\mu.$ καὶ $E = 83084$ τ. μ.

332. [115]. Ἐργαζόμενοι ὡς προηγουμένως εὑρίσκομεν $A = 123^\circ\ 12'\ 36''$, $\beta = 69{,}143\mu$. $\gamma = 89{,}622\mu$. καὶ $E = 2592{,}29\tau.\ \mu.$

333. Ἔστω $\alpha = 348\mu$, $A = 33{,}3^\gamma$ καὶ $B = 33^\circ\ 3'$. Ἐφαρμόζοντες τὴν ἰσότητα $\frac{\mu}{180} = \frac{\beta}{200}$ διὰ $\beta = A = 33{,}3^\gamma$ εὑρίσκομεν ὅτι $A = 29^\circ\ 58'\ 12''$. Μεθ' ὃ ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὰς προηγουμένας τρεῖς ἀσκήσεις. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $\Gamma = 116^\circ\ 58'\ 48''$, $\beta = 379{,}927\mu$, $\gamma = 620{,}828\mu$ καὶ $E = 58912{,}857\ \tau.\ \mu.$

334. Ἐργαζόμενοι κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν $\Gamma = 112^\circ\ 54'\ 12''$, $\beta = 4{,}9822\mu$. $\gamma = 241{,}994\mu$. καὶ $E = 550{,}72857\ \tau.\ \mu.$

Σημ. Ὁ λογημB εὑρίσκεται οὕτω: Ἐπειδὴ $B = 1^\circ\ 5'\ 12'' = 3912''$, κατὰ τὸν τύπον (§ 82, α) $\lambda o\gamma \eta\mu\tau = \lambda o\gamma \tau + \lambda o\gamma \frac{\eta\mu\tau}{\tau}$ εἶναι $\lambda o\gamma\eta\mu B = \lambda o\gamma\ 3912 + \bar{6}{,}68555 = 3{,}59240 + \bar{6}{,}68555 = \bar{2}{,}27795$.

335. [116]. Ἐπειδὴ $\alpha - \beta = 173$, $\alpha + \beta = 427$, $\frac{\Gamma}{2} = 34^\circ\ 20'$ διὰ τοῦ τύπου $\varepsilon\varphi\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\sigma\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$ εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{A-B}{2} = 30^\circ\ 40'\ 35'$, ἄρα $A - B = 61^\circ\ 21'\ 10''$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς $A + B = 111^\circ\ 20'$ εὑρίσκομεν $A = 86^\circ\ 20'\ 35''$ καὶ $B = 24^\circ\ 59'\ 25''$.

Εἶτα εὑρίσκομεν $\gamma = 280{,}013\mu$ καὶ $E = 17744{,}4\tau.\mu.$

336. [117]. ***Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\alpha = 444{,}44\mu$, $\beta = 888{,}88\mu$ καὶ $\Gamma = 40^\circ\ 44'\ 43''$.***

Ἐπειδὴ $\beta - \alpha = 444{,}44\mu$ καὶ $\beta + \alpha = 1333{,}32\mu$ διὰ τοῦ τύπου $\varepsilon\varphi\left(\frac{B-A}{2}\right) = \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\sigma\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$ εὑρίσκομεν $B - A = 83^\circ\ 49'\ 32''$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς $B + A = 139^\circ\ 15'\ 16''$ εὑρίσκομεν $B = 111^\circ\ 32'\ 24''$ καὶ $A = 27^\circ\ 42'\ 52''$. Μεθ' ὃ περατοῦται κατὰ τὰ γνωστὰ ἡ ἐπίλυσις.

337. [118]. Ἐπειδὴ $\beta - \gamma = \frac{4}{12}$, $\beta + \gamma = \frac{14}{12}$ καὶ $A = 40^\circ$, ὁ τύπος $\varepsilon\varphi\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right) = \frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right)$ γίνεται $\varepsilon\varphi\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right) = \frac{2}{7}\sigma\varphi\,20^\circ$, ὅθεν $B - \Gamma = 76^\circ\ 15'\ 46''$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς $B + \Gamma = 140^\circ$ εὑρίσκομεν $B = 108^\circ\ 7'\ 53''$ καὶ $\Gamma = 31^\circ\ 52'\ 7''$. Μεθ' ὃ ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὰ γνωστά.

338. Ἐκ τοῦ τύπου $\frac{\mu}{180}=\frac{\alpha}{\pi}$ (§16) εὑρίσκομεν θέτοντες $\alpha=\frac{5\pi}{9}$ ὅτι $\Gamma=100^\circ$, μεθ' ὃ ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὰς προηγουμένας τρεῖς ἀσκήσεις.

339. [119]. Ἐν πρώτοις εὑρίσκομεν ὅτι $\beta\eta\mu A=840\,\eta\mu\,(40^\circ\,20'\,10'')=543{,}7$ ἤτοι $\beta\eta\mu A<\alpha$· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $A<90^\circ$ καὶ $\alpha<\beta$, ἕπεται (ὅρα πίνακα σελ. 139 [58]) ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

Ἐκ τῆς ἰσότητος $\eta\mu B=\frac{\beta\eta\mu A}{\alpha}=\frac{840\,\eta\mu\,A}{560}=\frac{3\eta\mu A}{2}$ εὑρίσκομεν ὅτι $B=76^\circ\,8'\,30''$ καὶ $B'=103^\circ\,51'\,30''$. Εἶτα εὑρίσκομεν ὅτι $A+B=116^\circ\,28'\,40''$, $A+B'=144^\circ\,11'\,40''$, ὅθεν $\Gamma=63^\circ\,31'\,20$ καὶ $\Gamma'=35^\circ\,48'\,20''$. Ἐκ δὲ τῆς $\gamma=\frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\gamma=\frac{560\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}=774{,}42\mu$, $\gamma'=506{,}1626\mu$. Τέλος ἐκ τῆς ἰσότητος $E=\frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma$ εὑρίσκομεν $E=210528{,}57$ τ.μ. καὶ $E'=137600$ τ.μ.

340. [120]. Κατὰ πρῶτον εὑρίσκομεν ὅτι $\beta\eta\mu A=376{,}575$ ἤτοι $\beta\eta\mu A<\alpha$· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $A>90^\circ$ καὶ $\alpha>\beta$, τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν. Ἐκ τῆς $\eta\mu B=\frac{\beta\eta\mu A}{\alpha}$ εὑρίσκομεν $B=48^\circ\,51'\,49''$, μεθ' ὃ ἡ ἐπίλυσις περατοῦται, ὡς προηγουμένως, εὐκόλως.

341. [121]. Κατὰ πρῶτον εὑρίσκομεν ὅτι $\beta\eta\mu A=34{,}597$ ἤτοι $\beta\eta\mu A<\alpha$· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $A<90^\circ$ καὶ $\alpha<\beta$, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις. Ἐργαζόμενοι δέ, ὡς εἰς τὴν ἄσκησιν 339 [119] εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων στοιχείων ἑκατέρου τῶν τριγώνων.

342 [122]. Ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}$ εὑρίσκομεν $\eta\mu A=\frac{\alpha\eta\mu B}{\beta}$. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha\eta\mu B=12{,}188<\beta$, $B<90^\circ$ καὶ $\beta>\alpha$, ἕπεται ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν. Ἐκ τῆς $\eta\mu A=\frac{\alpha\eta\mu B}{\beta}$ εὑρίσκομεν $A=18^\circ\,42'\,29''$, μεθ' ὃ ἡ ἐπίλυσις περατοῦται εὐκόλως.

343 [123]. Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν τύπων (79[47]) εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι $2\tau=27$, ἄρα $\tau=13{,}50$, $\tau-\alpha=5{,}5$, $\tau-\beta=4{,}5$ καὶ

$\tau - \gamma = 3{,}5$. Μεθ' ὃ ἐκ τῆς ἰσότητος $\lambda = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$ εὑρίσκομεν ὅτι λογ.$\lambda = 0{,}40365$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἐκ τῆς ἰσότητος $\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\lambda}{\tau-\alpha}$ εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right) = \bar{1},66329$. ὅθεν $A = 49^\circ\, 27'\, 30'',90$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν $B = 58^\circ\, 45'\, 4''$ καὶ $\Gamma = 71^\circ\, 47'\, 20''$. Τέλος εἰς τὸ κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ λογ.λ εὑρισκόμενον ἄθροισμα $\lambda o\gamma(\tau-\alpha) + \lambda o\gamma(\tau-\beta) + \lambda o\gamma(\tau-\gamma) = 1{,}93764$ προσθέτοντες τὸν λογτ $= 1{,}13033$ εὑρίσκομεν $2\lambda o\gamma E = 3{,}06797$, ὅθεν $E = 34{,}196$ τ. μ.

344 [124] Θέτοντες $\alpha = 147{,}6 = 247$ καὶ $\gamma = 347$ εὑρίσκομεν $\tau = 370{,}5$, $\tau-\alpha = 223{,}5$, $\tau-\beta = 123{,}5$, $\tau-\gamma = 23{,}5$. Ἐκ τούτων δέ, ὡς προηγουμένως εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma\lambda = 1{,}62161$ καὶ $\lambda o\gamma E = 4{,}19040$, ἄρα $E = 15502{,}5$ τ. μ. Εἶτα ἐκ τῆς ἰσότητος $\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\lambda}{\tau-\alpha}$ εὑρίσκομεν $A = 21^\circ\, 12'\, 25'',714$. Ὁμοίως δὲ εὑρίσκονται καὶ ἄλλαι δύο γωνίαι αὐτοῦ.

345 [125]. Θέτοντες $\alpha = 7964$, $\beta = 10368{,}6$ καὶ $\gamma = 5872$ εὑρίσκομεν ὅτι $\tau = 12102{,}3$, $\tau-\alpha = 4138{,}3$, $\tau-\beta = 1733{,}7$, $\tau-\gamma = 6230{,}3$, μεθ' ὃ ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὰς δύο προηγουμένας ἀσκήσεις.

346. [150]. Ἐν πρώτοις εὑρίσκομεν $A+B = 135^\circ\, 17'$, ὅθεν $\Gamma = 44^\circ\, 43'$. Εἶτα ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\alpha = \frac{\beta\eta\mu A}{\eta\mu B}$ καὶ $\gamma = \frac{\beta\eta\mu\Gamma}{\eta\mu B}$ εὑρίσκομεν τὰς πλευρὰς α καὶ β, τέλος δὲ ἐκ τῆς ἰσότητος $E = \frac{1}{2}\,\alpha\beta\eta\mu\Gamma = \frac{\beta^2\eta\mu A\eta\mu\Gamma}{2\eta\mu B}$ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν Ε.

347 [151] ***Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\alpha = 7846{,}2\mu$, $\beta = 4962\mu$ καὶ $\Gamma = 12^\circ\, 42'$.***

Ὅρα ἄσκ. (335) [116].

348. Κατὰ πρῶτον εὑρίσκομεν ὅτι $\beta\eta\mu A = 1385{,}838 < \alpha$· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $A > 90^\circ$ καὶ $\alpha > \beta$, τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν. Ἐκ τῆς ἰσότητος $\eta\mu B = \frac{\beta\eta\mu A}{\alpha}$ εὑρίσκομεν τὴν Β καὶ εἶτα ἡ ἐπίλυσις περατοῦται εὐκόλως.

349. [152]. Ὅρα ἄσκ. (343) [123].

350. [153]. Ἐπειδὴ $\eta\mu\, 30^\circ = \frac{1}{2}$, ἔπεται ὅτι $\beta\eta\mu A = \frac{100}{2} = 50$, ἤτοι $\beta\eta\mu A > \alpha$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν οὐδὲν τοιοῦτον τρίγωνον ὑπάρχει.

351. [126] Γνωρίζομεν ὅτι $E^2 = \tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$. Ἐπειδὴ δὲ καθ' ὑπόθεσιν εἶναι $E = \tau(\tau-\alpha)$, ἔπεται ὅτι $\tau^2(\tau-\alpha)^2 = \tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$, ὅθεν $\tau(\tau-\alpha) = (\tau-\beta)(\tau-\gamma)$. Ἕνεκα τούτου ἡ ἰσότης $\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$ γίνεται $\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right) = 1$, ἄρα $\frac{A}{2} = 45^\circ$ καὶ $A = 90^\circ$.

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν $A = 90^\circ$, θὰ εἶναι $\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right) = 1$ καὶ ἑπομένως $1 = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$, ὅθεν $\tau(\tau-\alpha) = (\tau-\beta)(\tau-\gamma)$· ἡ δὲ ἰσότης $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ γίνεται $E = (\tau-\beta)(\tau-\gamma)$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς προηγουμένης ἀποδειχθείσης $\tau(\tau-\alpha) = (\tau-\beta)(\tau-\gamma)$ ἔπεται ὅτι $E = \tau(\tau-\alpha)$.

352. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $E = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma$, $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$, $E = \frac{1}{2}\alpha\gamma\eta\mu B$ διὰ πολ)σμοῦ κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι

$E^3 = \frac{1}{8}\alpha^2\beta^2\gamma^2\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma$, ὅθεν $(2E)^3 = \alpha^2\beta^2\gamma^2\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma$, ἐξ ἧς εὐκόλως προκύπτει ἡ ἀποδεικτέα.

353. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = 2P$ εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι·

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma} = 2P \text{ ἢ } \frac{2\tau}{\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma} = 2P, \text{ ὅθεν}$$

$$\frac{\tau}{P} = \eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma.$$

354. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta-\gamma}{\eta\mu B-\eta\mu\Gamma}$, ὅθεν

$$\frac{\alpha}{2\eta\mu\frac{A}{2}\ \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}=\frac{\beta-\gamma}{2\eta\mu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)}.$$ Ἐπειδὴ δὲ $\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}=\eta\mu\frac{A}{2}$ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\beta-\gamma}{\eta\mu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)},$$ ὅθεν $(\beta-\gamma)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)=\alpha\eta\mu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)$.

355. Ἐκ τῆς γνωστῆς (80) ἰσότητος $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}$ προκύπτει ὅτι $\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}$. ὁμοίως $\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{\tau(\tau-\beta)}{\alpha\gamma}$, $\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\frac{\tau(\tau-\gamma)}{\alpha\beta}$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι:

$$\beta\gamma\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A}{2}\right)+\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{B}{2}\right)+\alpha\beta\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\tau(\tau-\alpha)+\tau(\tau-\beta)+\tau(\tau-\gamma)=\tau[3\tau-(\alpha+\beta+\gamma)]=\tau^2.$$

356. Ἐκ τῆς $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$ εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu A=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$. Θέτοντες τὴν ὑπὸ ταύτης παρεχομένην τιμὴν τοῦ $\sigma\upsilon\nu A$ ἐν τῇ ἰσότητι $\eta\mu^2A+\sigma\upsilon\nu^2A=1$ εὑρίσκομεν (ὅρα Στ, Εὐθ. Τριγ. σελὶς 61) ὅτι $\eta\mu A=\frac{2}{\beta\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$ προκύπτει ὅτι·

$$E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}.$$

357. Ἐπειδὴ $\alpha=2P\eta\mu A$, $\beta=2P\eta\mu B$, $\gamma=2P\eta\mu\Gamma$, ἡ ἰσότης $\alpha=\sqrt{3}(\beta-\gamma)$ γίνεται:

$2P\eta\mu A=2P\sqrt{3}\,(\eta\mu B-\eta\mu\Gamma)$ ἢ $\eta\mu A=\sqrt{3}\,(\eta\mu B-\eta\mu\Gamma)$ ἢ $2\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)=2\sqrt{3}\,\eta\mu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)$ ὅθεν $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{3}\,\eta\mu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)$. Ἐπειδὴ δὲ $A=60^\circ$, ἕπεται ὅτι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\,30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\eta\mu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)=\frac{1}{2}=\eta\mu\frac{\pi}{6}$. Ἐντεῦθεν ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι B καὶ Γ εἶναι γωνίαι τριγώνου εὑρίσκομεν ὅτι

$\frac{B-\Gamma}{2}=30^0$, ὅθεν $B-\Gamma=60^0$. Ἐπειδὴ δὲ $B+\Gamma=180^0$ $-A=120^0$, ἕπεται ὅτι $B=90^0$ καὶ $\Gamma=30^0$.

358. Ἐκ τῆς $(B\Delta)=\frac{\beta}{2}$ καὶ τῆς γνωστῆς ἰσότητος $E=\frac{1}{2}\beta(B\Delta)$ προκύπτει ὅτι $E=\frac{\beta^2}{4}$. Ἐπειδὴ δὲ ἕνεκα τοῦ ὀρθ. τριγώνου $B\Delta\Gamma$ εἶναι $(B\Delta)=\frac{\beta}{2}=\alpha\eta\mu\Gamma$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $E=\alpha^2\eta\mu^2\Gamma.=15414,286$ τ. μ.

359. Ἐπειδὴ συν$A=$ συν $120^0=-\frac{1}{2}$ ἡ ἰσότης $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ $-2\beta\gamma$συνA γίνεται $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma$, ἄρα $\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{\beta^2+\beta\gamma}{\gamma^2+\beta\gamma}=$ $\frac{\beta(\beta+\gamma)}{\gamma(\beta+\gamma)}=\frac{\beta}{\gamma}$.

360. Καλοῦντες ω τὴν γωνίαν ΜΟΑ εὑρίσκομεν ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑΜ καὶ ΟΑ'Μ τὰς ἰσότητας $(MA)^2=\rho^2+\alpha^2-2\alpha\rho$συνω καὶ $(MA')^2=\rho^2+\beta^2-2\beta\rho$συνω, ἐξ ὧν ἕπεται ὅτι: $\frac{(MA)^2}{(MA')^2}=\frac{\rho^2+\alpha^2-2\alpha\rho\text{συν}\omega}{\rho^2+\beta^2-2\beta\rho\text{συν}\omega}$. Ἐπειδὴ δὲ τοῦ λόγου $\frac{(MA)}{(MA')}$ ὄντος σταθεροῦ καὶ ὁ $\frac{(MA)^2}{(MA')^2}$ εἶναι σταθερὸς καὶ τἀνάπαλιν, ἕπεται ὅτι δέον νὰ ἀναζητήσωμεν τοὺς ὅρους, ὑφ' οὓς τὸ κλάσμα $\frac{\rho^2+\alpha^2-2\alpha\rho\text{συν}\omega}{\rho^2+\beta^2-2\beta\rho\text{συν}\omega}$ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως τοῦ Μ καὶ κατ' ἀκολουθίαν τῆς γωνίας ω. Πρὸς τοῦτο καλοῦμεν λ τὴν τιμὴν τοῦ εἰρημένου κλάσματος καὶ ἐκ τῆς ταὐτότητος $\frac{\rho^2+\alpha^2-2\alpha\rho\text{συν}\omega}{\rho^2+\beta^2-2\beta\rho\text{συν}\omega}=\lambda$ λαμβάνομεν τὴν ταὐτότητα $\rho^2+\alpha^2-$ $\lambda(\rho^2+\beta^2)-2\rho(\alpha-\beta\lambda)$ συν$\omega=0$. Ἵνα δὲ αὕτη ἀληθεύῃ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ συνω, δέον νὰ εἶναι $(\rho^2+\alpha^2)-\lambda(\rho^2+\beta^2)$ $=0$ καὶ $\alpha-\beta\lambda=0$. Ἐκ τῆς α'. τούτων προκύπτει ὅτι $\lambda=\frac{\rho^2+\alpha^2}{\rho^2+\beta^2}$, ἐκ δὲ τῆς β'. $\lambda=\frac{\alpha}{\beta}$, ὅθεν $\frac{\rho^2+\alpha^2}{\rho^2+\beta^2}=\frac{\alpha}{\beta}$, ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι $\rho^2=\alpha\beta$.

361. Ἐκ τῆς $\Gamma = 180^\circ - (A+B)$ εὑρίσκομεν τὴν Γ, εἶτα εὑρίσκομεν τὰς πλευρὰς ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\alpha = 2P\eta\mu A$, $\beta = 2P\eta\mu B$ καὶ $\gamma = 2P\eta\mu\Gamma$. Τέλος ἐκ τῆς ἰσότητος (85) $E = 2P^2\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma$ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδόν.

362. Ἔστω ΕΒΖ ἡ εἰς τὸ Β ἐφαπτομένη περιφερείας καὶ ΒΑ, ΒΓ χορδαὶ τοιαῦται ὥστε $\widehat{ABZ} = 47^\circ\, 15'$ καὶ $\widehat{\Gamma B E} = 56^\circ\, 40'$. Ἐπειδὴ $\widehat{ABZ} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma B E} = 180^\circ$, ἕπεται ὅτι $\widehat{B} = 76^\circ\, 5'$ καὶ ἑπομένως $(A\Gamma) = 2P\eta\mu B = 0{,}50\eta\mu(76^\circ\, 5') = 0{,}48532\mu$.

363. Κατὰ τὸν τύπον (84) εἶναι $P = \dfrac{5.8.10}{\sqrt{11{,}5\cdot 6{,}5\cdot 3{,}5\cdot 1{,}5}} =$ 20,1919 μ.

364. Ἐκ τῆς ἰσότητος $\alpha = 2P\eta\mu A$ ἕπεται ὅτι $P = \dfrac{\alpha}{2\eta\mu A}$, δι' ἧς ὁρίζεται ἡ ἀκτὶς Ρ.

365. Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον (87).

366. Ἐφαρμόζομεν τοὺς τύπους (89) $\rho_\alpha = \sqrt{\dfrac{\tau(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau-\alpha}}$ κτλ.

367. Κατὰ τὸν τύπον (90) $E = \sqrt{2\cdot 6\cdot 7\cdot 7{,}5} = 25{,}09$ τ. μ.

368. Ἐφαρμόζομεν τοὺς τύπους (87) καὶ (89).

369. Ἐκ τῶν τύπων (91) εὑρίσκομεν $\varepsilon\varphi\left(\dfrac{A}{2}\right) = \dfrac{6}{15}$, $\varepsilon\varphi\left(\dfrac{B}{2}\right) = \dfrac{10}{15}$, καὶ $\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\Gamma}{2}\right) = \dfrac{7{,}5}{15}$, ἐξ ὧν ὑπολογίζονται αἱ γωνίαι.

370. Ἐφαρμόζομεν τοὺς τύπους (94).

371. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν Γ καὶ εἶτα ἐφαρμόζομεν τοὺς τύπους (95).

372. Ἐφαρμόζομεν τοὺς τύπους (100).

373. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν Γ καὶ εἶτα ἐφαρμόζομεν τοὺς τύπους (101).

374. Ἐφαρμόζομεν τοὺς τύπους (104).

375. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν Γ καὶ εἶτα ἐφαρμόζομεν τοὺς τύπους (105).

376. Α'. τρόπος. Ἐκ τῶν γνωστῶν ἰσοτήτων $\rho_\alpha = \sqrt{\dfrac{\tau(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau-\alpha}}$ $\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\Gamma}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}}$ εὑρίσκομεν $\rho_\alpha \cdot \varepsilon\varphi\left(\dfrac{\Gamma}{2}\right) = (\tau-\beta)$,

ὅθεν $\rho_\alpha = (\tau - \beta)\ \sigma\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$. Ὁμοίως ἐκ τῆς α'. τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων καὶ τῆς $\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\tau.(\tau-\beta)}}$ εὑρίσκομεν $\rho_\alpha = (\tau-\gamma)\ \sigma\varphi\left(\frac{B}{2}\right)$.

Β'. τρόπος. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου Κ'ΓΘ (σχ. 53 Εὐθ. Τριγ.) προκύπτει ὅτι :

$$\rho_\alpha = (\Theta\Gamma)\ \varepsilon\varphi(K'\Gamma\Theta) = [(A\Theta)-(A\Gamma)]\ \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma}{2}\right). \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $(AH) + (A\Theta) = (AB) + (A\Gamma) + (B\Lambda) + (\Lambda\Gamma) = 2\tau$ καὶ $(AH) = (A\Theta)$, ἕπεται ὅτι $2(A\Theta) = 2\tau$, ἄρα $(A\Theta) = \tau$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἰσότης (1) γίνεται :

$\rho_\alpha = (\tau-\beta)\ \sigma\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$. Ὁμοίως ἐκ τοῦ τριγώνου Κ'ΒΗ εὑρίσκομεν ὅτι $\rho_\alpha = (\tau-\gamma)\ \sigma\varphi\left(\frac{B}{2}\right)$.

377. Γνωρίζομεν (62) ὅτι $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma = 4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)$ $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$ καὶ (ἄσκ. 353) $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma = \frac{\tau}{P}$.

Ἐκ τούτων προκύπτει ὅτι :

$\tau = 4P\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$. Ἐπειδὴ δὲ (91) εἶναι $\rho_\alpha = \tau\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right)$, ἕπεται ὅτι $\rho_\alpha =$

$$4P\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$$

$$= 4P\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right).$$

378. Πολ)ζοντες κατὰ μέλη τὰς γνωστὰς (80) ἰσότητας $\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}$, $\eta\mu\left(\frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\alpha\gamma}}$, $\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta}}$ εὑρίσκομεν ὅτι :

$\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{B}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\alpha\beta\gamma}$. Ἐπειδὴ δὲ (87) εἶναι $\rho^2\tau = (\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$ καὶ (84) $\alpha\beta\gamma = 4PE$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{B}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$ $=\frac{\rho^2\tau}{4PE}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (86) $E=\tau.\rho$ προκύπτει ὅτι $\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{B}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\frac{\rho}{4P}$, ὅθεν $\rho=$ $4P\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{B}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$.

379. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (88) προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ ἰσότητες: $\sigma\varphi\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{\tau-\alpha}{\rho}$, $\sigma\varphi\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{\tau-\beta}{\rho}$ καὶ $\sigma\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\frac{\tau-\gamma}{\rho}$, ἐξ ὧν ἕπεται ὅτι: $\sigma\varphi\left(\frac{A}{2}\right)+\sigma\varphi\left(\frac{B}{2}\right)+\sigma\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=$ $\frac{3\tau-(\alpha+\beta+\gamma)}{\rho}=\frac{\tau}{\rho}$.

380. Ἐπειδὴ (ἄσκ. 326) εἶναι $\alpha\sigma\upsilon\nu A+\beta\sigma\upsilon\nu B+\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma=$ $4P\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma$ ἕπεται ὅτι:

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\sigma\upsilon\nu A+\beta\sigma\upsilon\nu B+\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma}=\frac{2\tau}{4P\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma}=\frac{\tau}{2P\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν ἰσοτήτων (82) προκύπτει εὐκόλως ὅτι $2P\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma=\frac{\alpha\beta\gamma}{4P^2}$ καὶ $\alpha\beta\gamma=4PE$, ἕπεται ὅτι

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\sigma\upsilon\nu A+\beta\sigma\upsilon\nu B+\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma}=\frac{4\tau P^2}{\alpha\beta\gamma}=\frac{4\tau P^2}{4PE}=\frac{4\tau P^2}{4P\tau\rho}=\frac{P}{\rho}.$$

381. ***Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον εἶναι*** $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma$ $=1+\frac{\rho}{P}$.

Λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν τὰς ἀσκήσεις 178 καὶ 378.

382. Γνωρίζομεν ὅτι $2(\tau-\alpha)=\beta+\gamma-\alpha$ ἢ ἕνεκα τῶν ἰσοτήτων (82) $2(\tau-\alpha)=2P(\eta\mu B+\eta\mu\Gamma-\eta\mu A)$. Ἐπειδὴ δέ, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύομεν, εἶναι $\eta\mu B+\eta\mu\Gamma-\eta\mu A=4\eta\mu\left(\frac{B}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)$, ἕπεται ὅτι $\tau-\alpha=4P\eta\mu\left(\frac{B}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)$.

383. Ἐκ τῶν γνωστῶν (92, 62) ἰσοτήτων $\Upsilon_\alpha=\frac{\alpha\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$, $\frac{\alpha}{\eta\mu A}$ $=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=\frac{\tau}{2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}$,

εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι :

$$\Upsilon_\alpha = \frac{\tau \eta\mu B \eta\mu \Gamma}{2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\tau\eta\mu\left(\frac{B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\tau\eta\mu\left(\frac{B}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)}.$$

384. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (88) προκύπτει ὅτι :

$\rho^3 = (\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς ἰσότητος (87) προκύπτει $\rho^2\tau = (\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$, ἕπεται ὅτι :

$$\frac{\rho}{\tau} = \varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right), \text{ ὅθεν } \rho = \tau\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right).$$

385. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τῶν δύο προηγουμένων ἀσκήσεων προκύπτει εὐκόλως ὅτι :

$$\frac{\rho}{\Upsilon_\alpha} = \tau\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)}{2\tau\eta\mu\left(\frac{B}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)},$$

$$\text{ὅθεν } \rho = \frac{\Upsilon_\alpha \eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)}{2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}.$$

386. ***Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον εἶναι ημΑ.ημΒ.ημΓ*** $= \frac{\tau\rho}{2P^2}$.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων(82) προκύπτει ὅτι $\eta\mu A.\eta\mu B\eta\mu\Gamma = \frac{\alpha\beta\gamma}{8P^3}$.

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha\beta\gamma = 4EP$, ἕπεται ὅτι $\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma = \frac{4EP}{8P^3}$

$=\frac{E}{2P^2}$· ἐκ ταύτης καὶ τῆς $E = τρ$ ἕπεται ὅτι

$ημAημBημΓ = \frac{τρ}{2P^2}$.

387. ***Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον εἶναι $E = αPημBημΓ$.*** Ἐπειδὴ (85) $E = 2P^2ημAημBημΓ$ καὶ $α = 2PημA$, ἕπεται ὅτι $E = αPημBημΓ$.

388. Αὕτη προκύπτει ἐκ τῶν ἰσοτήτων $E = \frac{1}{2}αΥ_α$ καὶ $α=2PημA$.

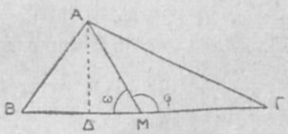
389. Αὕτη προκύπτει εὐκόλως ἐκ τῆς α΄. τῶν ἰσοτήτων (91).

390. Αὕτη προκύπτει εὐκόλως ἐκ τῶν $E = τρ$ καὶ $τ=ρ_α σφ\left(\frac{A}{2}\right)$.

391. Καλοῦντες Z τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ὑψῶν AΔ καὶ BE συνάγομεν ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου AZE ὅτι $(AZ)= \frac{(AE)}{συν(Δ\hat{A}Γ)}$ $=\frac{(AE)}{ημΓ}$, ἐκ δὲ τοῦ ABE ὅτι $(AE) = γσυνA$· ἐκ τῶν δύο τούτων ἰσοτήτων ἕπεται ὅτι $(AZ)= \frac{γσυνA}{ημΓ} = \frac{2PημΓσυνA}{ημΓ}$ $= 2PσυνA$.

392. Ἐπειδὴ εἶναι $B>Γ$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $AΓ>AB$, θὰ εἶναι $ω<φ$, ἄρα ω εἶναι ἡ ὀξεῖα γωνία, ἣν δέον νὰ ὑπολογίσωμεν. Ἂν ἀχθῇ τὸ ὕψος AΔ, ὁ ποὺς Δ θὰ πέσῃ μεταξὺ B καὶ M, ἐκ δὲ τῶν προφανῶν ἰσοτήτων $(\overline{ΔM}) = (\overline{ΔB}) + (\overline{BM})$ καὶ $(\overline{ΔM}) = (\overline{ΔΓ}) + (\overline{ΓM})$ προκύπτει ὅτι $2(\overline{ΔM}) = (\overline{ΔB}) + (\overline{ΔΓ})$, ὅθεν

$$(\overline{ΔM})=\frac{(\overline{ΔB})+(\overline{ΔΓ})}{2}=\frac{(\overline{ΔΓ})-(\overline{BΔ})}{2}. \quad (1)$$



(Σχ. 20)

Ἀλλ' ἐκ τῶν ὀρθ. τριγώνων AΔΓ, ABΔ, AΔM προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες $(ΔΓ) = (AΔ)σφΓ$, $(BΔ) = (AΔ)σφB$ καὶ $(ΔM)=(AΔ)σφω$, ὧν ἕνεκα ἡ (1) γίνεται:

$(AΔ)σφω = \frac{(AΔ)}{2}(σφΓ-σφB)$, ὅθεν $σφω = \frac{σφΓ-σφB}{2}$ $=\frac{ημ(B-Γ)}{2ημΓημB}$, δι' ἧς ὑπολογίζεται ἡ ω.

393. Ἐπειδὴ $αΥ_α = βΥ_β = γΥ_γ = 2E$, ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων (91) προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες $τ=ρ_α σφ\left(\frac{A}{2}\right) = ρ_β σφ\left(\frac{B}{2}\right)$

$=\rho_\gamma \tau\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$, τὸ α΄. μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος γίνεται $2E.\ 2E.\ 2E\ \tau^3 = 8\tau^3 E^3$.

394. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (89) ἕπεται ὅτι $\frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{\tau-\alpha}{E}$, $\frac{1}{\rho_\beta} = \frac{\tau-\beta}{E}$ καὶ $\frac{1}{\rho_\gamma} = \frac{\tau-\gamma}{E}$, ὅθεν $\frac{1}{\rho_\alpha} + \frac{1}{\rho_\beta} + \frac{1}{\rho_\gamma} = \frac{3\tau-(\alpha+\beta+\gamma)}{E} = \frac{\tau}{E}$. Ἐπειδὴ δὲ $E = \tau\rho$, αὕτη γίνεται:
$\frac{1}{\rho_\alpha} + \frac{1}{\rho_\beta} + \frac{1}{\rho_\gamma} = \frac{\tau}{\tau\rho} = \frac{1}{\rho}$.

395. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (89) καὶ (86) ἕπεται εὐκόλως ὅτι $\rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma - \rho = \frac{E}{\tau-\alpha} + \frac{E}{\tau-\beta} + \frac{E}{\tau-\gamma} - \frac{E}{\tau} =$
$$E\left(\frac{1}{\tau-\alpha} + \frac{1}{\tau-\beta} + \frac{1}{\tau-\gamma} - \frac{1}{\tau}\right) \quad (1)$$
Ἐπειδὴ δὲ $\frac{1}{\tau-\alpha} + \frac{1}{\tau-\beta} = \frac{2\tau-(\alpha+\beta)}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)} = \frac{\gamma}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}$ καὶ $\frac{1}{\tau-\gamma} - \frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{\tau(\tau-\gamma)}$, ἡ ἐντὸς παρενθέσεως ποσότης τῆς ἰσότητος (1) γίνεται $\frac{\gamma}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)} + \frac{\gamma}{\tau(\tau-\gamma)} =$
$\gamma\,\frac{2\tau^2-\tau(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\beta}{E^2} = \frac{\alpha\beta\gamma}{E^2} = \frac{4EP}{E^2} = \frac{4P}{E}$. Ἄρα ἡ (1) γίνεται $\rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma - \rho = 4P$.

396. Ὅρα § 125 παράδ. 3ον.

397. Ὅρα § 123 παράδ. 1ον.

398. Ὑπολογίζομεν πρῶτον τὴν Γ καὶ εἶτα ἐφαρμόζομεν τὰς ἰσότητας τῆς § 124.

399. Ὅρα § 126 παράδ. 4ον.

400. Ἐκ τῶν προφανῶν ἰσοτήτων $\alpha\Upsilon_\alpha = \beta\Upsilon_\beta = \gamma\Upsilon_\gamma$ προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες $\frac{\alpha}{\frac{1}{\Upsilon_\alpha}} = \frac{\beta}{\frac{1}{\Upsilon_\beta}} = \frac{\gamma}{\frac{1}{\Upsilon_\gamma}}$, ἐξ ὧν καθίσταται φανερὸν ὅτι τὸ περὶ οὗ πρόκειται τρίγωνον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ἔχον πλευρὰς $\frac{1}{\Upsilon_\alpha}$, $\frac{1}{\Upsilon_\beta}$ καὶ $\frac{1}{\Upsilon_\gamma}$. Ἕνεκα τούτου αἱ γωνίαι τοῦ α΄. τῶν τριγώνων τούτων εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς τοῦ ἄλλου.

Ἐὰν δὲ χάριν συντομίας τεθῇ $\frac{1}{\Upsilon_\alpha}=\alpha'$, $\frac{1}{\Upsilon_\beta}=\beta'$, $\frac{1}{\Upsilon_\gamma}=\gamma'$, $2\omega=\alpha'+\beta'+\gamma'$ καὶ $\lambda'=\sqrt{\frac{(\omega-\alpha')(\omega-\beta')(\omega-\gamma')}{\omega}}$. θέλομεν ἔχει (ὅρα σελ. 146 εὐθ. τριγ.) $\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{\lambda'}{\omega-\alpha'}$, $\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{\lambda'}{\omega-\beta'}$, $\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\frac{\lambda'}{\omega-\gamma'}$, δι' ὧν ὑπολογίζομεν τὰς γωνίας Α, Β, Γ. Ἐὰν εἶτα παραστήσωμεν διὰ Ε' τὸ ἐμβαδὸν τοῦ βοηθητικοῦ τριγώνου, θὰ εἶναι $E'=\frac{1}{2}\alpha'\beta'\eta\mu\Gamma$ καὶ $E'=\omega\lambda'$, ὅθεν $\alpha'\beta'\eta\mu\Gamma=2\omega\lambda'$. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha'=\frac{1}{\Upsilon_\alpha}=\frac{1}{\beta\eta\mu\Gamma}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\frac{\beta'}{\beta}=2\omega\lambda'$, ὅθεν $\beta=\frac{\beta'}{2\omega\lambda'}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\alpha=\frac{\alpha'}{2\omega\lambda'}$, $\gamma=\frac{\gamma'}{2\omega\lambda'}$. Διὰ τῶν ἰσοτήτων τούτων ὁρίζομεν τὰς πλευράς. Ἐφαρμογή. Διὰ $\Upsilon_\alpha=4$, $\Upsilon_\beta=5$, $\Upsilon_\gamma=8$ εἶναι $\omega=\frac{23}{80}$, $\omega-\alpha'=\frac{3}{80}$, $\omega-\beta'=\frac{7}{80}$, $\omega-\gamma'=\frac{13}{80}$, $\lambda o\gamma\lambda'=\bar{2},63412$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right)=\bar{2},63412-\lambda o\gamma\left(\frac{3}{80}\right)=0,06009$, ὅθεν $A=97^\circ\,54'\,9'',12$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν $B=52^\circ\,24'\,33'',75$ καὶ $\Gamma=29^\circ\,41'\,10'',58$. Ἐκ τῆς $\alpha=\frac{\alpha'}{2\omega\lambda'}$ εὑρίσκομεν $\alpha=\frac{10}{23\lambda'}$, ὅθεν $\alpha=10,096\mu$. Ὁμοίως δὲ ὑπολογίζομεν καὶ τὰς ἄλλας πλευράς. Τέλος εὑρίσκομεν ὅτι $E=\frac{1}{2}\alpha.\Upsilon_\alpha=2\alpha=20,192$ τ. μ.

401. Ἔστω ΑΕ ἡ διχοτόμος τῆς Α καὶ ΑΔ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου. Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΕΓ, ΑΕΒ προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες $\frac{E\Gamma}{\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\delta_\alpha}{\eta\mu\Gamma}$, $\frac{BE}{\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\delta_\alpha}{\eta\mu B}$, ἐξ ὧν διὰ προσθέσεως εὑρίσκομεν $\frac{\alpha}{\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\delta_\alpha(\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)}{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}$, ὅθεν $\alpha\eta\mu B\eta\mu\Gamma=$

$\delta_\alpha \eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)(\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)$. Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΔΓ λαμβάνομεν $6\eta\mu\Gamma = \Upsilon_\alpha$. Διαιροῦντες τὰς δύο τελευταίας ἰσότητας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\frac{\alpha}{6}\eta\mu B = \frac{\delta_\alpha}{\Upsilon_\alpha}\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)(\eta\mu B + \eta\mu\Gamma)$· ἐπειδὴ δὲ $\frac{\alpha}{6} = \frac{\eta\mu A}{\eta\mu B}$ καὶ $\eta\mu B + \eta\mu\Gamma = 2\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right) = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\eta\mu A = \frac{\delta_\alpha}{\Upsilon_\alpha}2\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)$, ὅθεν $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right) = \frac{\Upsilon_\alpha}{\delta_\alpha}$. Ὑπολογίζοντες ἐκ ταύτης τὴν διαφορὰν Β—Γ καὶ γνωρίζοντες ὅτι $B+\Gamma=180^\circ - A$, εὑρίσκομεν τὰς Β καὶ Γ. Εἶτα ἐκ τῶν $\Upsilon_\alpha = 6\eta\mu\Gamma$, $\Upsilon_\alpha = \gamma\eta\mu B$ λαμβάνομεν $6 = \frac{\Upsilon_\alpha}{\eta\mu\Gamma}$, $\gamma = \frac{\Upsilon_\alpha}{\eta\mu B}$, δι' ὧν ὑπολογίζομεν τὰς πλευρὰς 6 καὶ γ μεθ' ὃ ἡ α ὑπολογίζεται εὐκόλως. Τέλος τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται ἐκ τῆς $E = \frac{1}{2}\alpha.\Upsilon_\alpha$.

402. Ἐργαζόμενοι ὡς ἐν § 128 (μέθοδος τριγων.) εὑρίσκομεν $\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right)} = \frac{\alpha+(\gamma-6)}{\alpha-(\gamma-6)} = \frac{196{,}6}{87{,}4}$, ὅθεν $\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \frac{1966}{874}\varepsilon\varphi(14^\circ 23')$. Ὑπολογιζομένης ἐκ ταύτης τῆς Γ ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὰ γνωστά. (ὅρα καὶ ἄλλας μεθόδους § 128).

403. Ἐκ τῆς γ'. τῶν ἰσοτήτων (99) προκύπτει ἡ ἰσότης $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \frac{(\alpha+6)\delta_\gamma}{2\alpha 6}$, δι' ἧς ὁρίζεται ἡ Γ, μεθ' ὃ ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 113 Β'.).

404. Ὅρα τόπους (82) καὶ (85).

405. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $2\tau = \alpha+6+\gamma$ καὶ $6+\gamma = \mu$ προκύπτει ἡ ἰσότης $\tau = \frac{\alpha+\mu}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ $E = \frac{1}{2}\alpha.\Upsilon_\alpha = \tau.\rho$, ἔπεται

ὅτι $\rho = \frac{\alpha \Upsilon_\alpha}{2\tau} = \frac{\alpha \Upsilon_\alpha}{\alpha+\mu}$. Ἕνεκα ταύτης καὶ τῆς $2(\tau-\alpha) = \beta+\gamma-\alpha = \mu-\alpha$ ἡ ἰσότης $\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\rho}{\tau-\alpha}$ γίνεται

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{2\alpha\Upsilon_\alpha}{(\mu+\alpha)(\mu-\alpha)}.$$

Ὑπολογιζομένης ἐκ ταύτης τῆς Α ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὸ παράδ. 3ον (§ 125).

406. Καλοῦντες Κ τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ ἄγοντες τὸ ὕψος ΑΚΔ βλέπομεν ὅτι (ΑΚ) = (ΑΔ) — (ΚΔ) $= \Upsilon_\alpha - \rho$. Ἐὰν δὲ κληθῇ Ε τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς τῆς ΑΓ, ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΚΕ προκύπτει ὅτι $\rho = (\Upsilon_\alpha-\rho)\,\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)$, ἄρα $\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\rho}{\Upsilon_\alpha-\rho} = \frac{4}{5}$, ὅθεν $A = 106^\circ\, 15'\, 48''$, μεθ' ὃ εὑρίσκομεν $B = \Gamma = 36^\circ\, 52'\, 12''$. Ἤδη ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΔΓ προκύπτει ὅτι $\frac{\alpha}{2} = \Upsilon_\alpha\, \varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right)$, ὅθεν $\alpha = 54\varepsilon\varphi(53^\circ\, 7'\, 48'') = 72\mu$. Εἶτα ἡ ἐπίλυσις περατοῦται εὐκόλως.

407. Ἀχθείσης τῆς διαμέσου ΑΜ, ἥτις ἔχει δεδομένον μῆκος μ_α, σχηματίζονται τὰ τρίγωνα ΑΒΜ καὶ ΑΜΓ, ἐξ ὧν προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες $\frac{\mu_\alpha}{\eta\mu B} = \frac{(BM)}{\eta\mu 45^\circ}$, $\frac{\mu_\alpha}{\eta\mu\Gamma} = \frac{(M\Gamma)}{\eta\mu 60^\circ}$, ἐξ ὧν ἕπεται ὅτι $\frac{\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma} = \frac{\eta\mu 45^\circ}{\eta\mu 60^\circ}$, ἄρα $\frac{\eta\mu B + \eta\mu\Gamma}{\eta\mu\Gamma - \eta\mu B} = \frac{\eta\mu 60^\circ + \eta\mu 45^\circ}{\eta\mu 60^\circ - \eta\mu 45^\circ}$ ἢ

$$\frac{\eta\mu\left(\frac{\Gamma+B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma-B}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\Gamma-B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma+B}{2}\right)} = \frac{\eta\mu\,(52^\circ\, 30')\ \sigma\upsilon\nu\,(7^\circ\, 30')}{\eta\mu\,(7^\circ\, 30')\ \sigma\upsilon\nu\,(52^\circ\, 30')}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{45^\circ+60^\circ}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\,(52^\circ\, 30')$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right) = \eta\mu\,(52^\circ\, 30')$, ἐκ τῆς προηγουμένης ἰσότητος εὑρίσκομεν ὅτι $\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma-B}{2}\right) = \frac{\varepsilon\varphi\,(7^\circ\, 30')}{\varepsilon\varphi^2\, 52^\circ\, 30'}$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\Gamma - B = 8^\circ\, 51'\, 53'',4$. Ἐπειδὴ $\Gamma + B = 75^\circ$, ἕπεται ὅτι $\Gamma = 41^\circ\, 51'\, 56'',7$ καὶ $B = 33^\circ\, 4'\, 3'',3$. Ἐπιλύοντες ἤδη τὸ τρίγωνον ΑΜΓ (§ 112 Α'.) εὑρίσκομεν τὴν 6 καὶ τὴν (ΜΓ), ὅθεν $\alpha = 2(\mathrm{M\Gamma})$, εἶτα δὲ εὐκόλως τὴν γ καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἐκ τῆς ἰσότητος $\mathrm{E} = \frac{1}{2}\, 6\gamma \eta\mu\, 105^\circ$.

408. Ἐπειδὴ $\eta\mu \mathrm{A} = \eta\mu 2\Gamma = 2\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma$ ἡ ἰσότης $\frac{\alpha}{\eta\mu \mathrm{A}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ γίνεται $\frac{\alpha}{2\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$, ὅθεν $\alpha = 2\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma = 2.\,4.\,\frac{3}{4} = 6\mu$. Ἐκ τῆς ἰσότητος $6 = \alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}$ (ἄσκ. 315) εὑρίσκομεν $6 = 6.\frac{3}{4} + 4\sigma\upsilon\nu 2\Gamma = \frac{18}{4} + 4\,(2\sigma\upsilon\nu^2\Gamma - 1) = 5\mu$. Λύοντες δὲ τὴν ἐξίσωσιν $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{3}{4}$ εὑρίσκομεν τὴν Γ, καὶ εἶτα τὴν $\mathrm{A} = 2\Gamma$ καὶ τὴν Β. Τέλος τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκομεν καθ' οἱανδήποτε τῶν γνωστῶν μεθόδων.

Σημ. Εὑρεθέντος ὅτι $\alpha = 6$, ἡ ἰσότης $\gamma^2 = \alpha^2 + 6^2 - 2\alpha 6\sigma\upsilon\nu\Gamma$ γίνεται $16 = 36 + 6^2 - 96$, ὅθεν $6^2 - 96 + 20 = 0$, ἐξ ἧς $6 = 5$ καὶ $6 = 4$. Ἡ $6'$. τιμὴ τοῦ 6 εἶναι ἴση τῇ γ, ἄρα $\mathrm{B} = \Gamma = \frac{\mathrm{A}}{2}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $2\mathrm{A} = 180^\circ$, ἄρα $\mathrm{A} = 90^\circ$· ἔπρεπε λοιπὸν νὰ εἶναι $6^2 = 4^2 + 4^2$, ὅπερ ἄτοπον. Ἀπορρίπτεται ἄρα ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ 6.

409. Διὰ τῆς α'. τῶν ἰσοτήτων (92) ὁρίζεται ἡ α, μεθ' ὃ ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὰ γνωστά.

410. Ἐκ τῆς α'. τῶν ἰσοτήτων (95) λαμβάνομεν $\mathrm{P} = \frac{\Upsilon_\alpha}{2\eta\mu\mathrm{B}\eta\mu\Gamma}$, δι' ἧς ὁρίζεται ἡ Ρ, ἡ δὲ ρ ὁρίζεται ἐκ τῆς $\rho = \frac{\Upsilon_\alpha \eta\mu\left(\frac{\mathrm{A}}{2}\right)}{2\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\mathrm{B}}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}$ (ἄσκ. 385).

411. ***Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ περίμετρος, τὸ γινόμενον*** $\varepsilon\varphi\left(\frac{\mathrm{B}}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$ ***καὶ ἡ γωνία Α.*** Ἔστω ὅτι $\varepsilon\varphi\left(\frac{\mathrm{B}}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \mathrm{K}^2$. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\varepsilon\varphi\left(\frac{\mathrm{B}}{2}\right) = \frac{\rho}{\tau - 6}$, $\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \frac{\rho}{\tau - \gamma}$ καὶ $\rho^2 = \frac{(\tau-\alpha)(\tau-6)(\tau-\gamma)}{\tau}$ προκύπτει ὅτι $\mathrm{K}^2 = \frac{\tau - \alpha}{\tau}$, ἐξ ἧς $\alpha = \tau(1 - \mathrm{K}^2)$ δι' ἧς ὁρίζεται ἡ α. Ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος $6 + \gamma$

$=2\tau-\alpha=2\tau-\tau+\tau K^2=\tau\ (1+K^2)$, εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα $\beta+\gamma$, μεθ' ὃ ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 125).

412. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=\dfrac{\beta-\gamma}{\eta\mu B-\eta\mu\Gamma}$, ἕπεται ὅτι $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A}=\dfrac{\beta-\gamma}{2\eta\mu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)}$. Ἂν δὲ τεθῇ $\beta-\gamma=\lambda$ καὶ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{B+\Gamma}{2}\right)=\eta\mu\left(\dfrac{A}{2}\right)$ προκύπτει ἡ ἰσότης $\eta\mu\left(\dfrac{B-\Gamma}{2}\right)=\dfrac{\lambda\eta\mu A}{2\alpha\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)}=\dfrac{\lambda\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)}{\alpha}$. Ὁριζομένης ἐκ ταύτης τῆς $B-\Gamma$ καὶ γνωστοῦ ὄντος ὅτι $B+\Gamma=180^\circ-A$ ὁρίζονται αἱ γωνίαι B καὶ Γ. Εἶτα ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 112 Α′).

413. Ἔστω ὅτι $A\Delta$ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς A καὶ $A\hat{\Delta}\Gamma=20^\circ$. Ἐκ τοῦ τριγώνου $A\Delta\Gamma$ ἕπεται ὅτι $\dfrac{(\Delta\Gamma)}{\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)}=\dfrac{\beta}{\eta\mu 20^\circ}$, ὅθεν $\dfrac{(\Delta\Gamma)}{\beta}=\dfrac{\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)}{\eta\mu 20^\circ}$. Ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{(\Delta\Gamma)}{\beta}=\dfrac{(B\Delta)}{\gamma}=\dfrac{(\Delta\Gamma)+(B\Delta)}{\beta+\gamma}=\dfrac{20}{38}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\dfrac{20}{38}=\dfrac{\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)}{\eta\mu 20^\circ}$, ὅθεν $\eta\mu\left(\dfrac{A}{2}\right)=\dfrac{20}{38}\eta\mu 20^\circ$, δι' ἧς ὁρίζεται ἡ A. Εἶτα ἐκ τῆς ἰσότητος $20^\circ=B+\dfrac{A}{2}$ ὁρίζεται ἡ B καὶ τέλος ἡ Γ κατὰ τὰ γνωστά. Ἡ ἐπίλυσις εἶτα περατοῦται εὐκόλως.

414. Α′. Μέθοδος. Ἐκ τῆς $\rho=\tau\varepsilon\varphi\left(\dfrac{A}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\dfrac{B}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\Gamma}{2}\right)$ (ἄσκησ. 384) ὁρίζεται ἡ ἡμιπερίμετρος τ, μεθ' ὃ ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὸ παράδ. 1ον (§ 123).

Β′. Μέθοδος. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (88) εὑρίσκομεν ὅτι $(\tau-\alpha)=\rho\sigma\varphi\left(\dfrac{A}{2}\right)$, $(\tau-\beta)=\rho\sigma\varphi\left(\dfrac{B}{2}\right)$, $\tau-\gamma=\rho\sigma\varphi\left(\dfrac{\Gamma}{2}\right)$, δι' ὧν ὁρίζονται αἱ ποσότητες $(\tau-\alpha)$, $(\tau-\beta)$, $(\tau-\gamma)$, μεθ' ὃ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $(\tau-\alpha)+(\tau-\beta)+(\tau-\gamma)=3\tau-2\tau=\tau$. Μεθ' ὃ ὁρίζονται εὐκόλως αἱ πλευραὶ α, β, γ καὶ τὸ ἐμβαδὸν $E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$.

415. Ἔστω ὅτι $(B\Delta)=20$ καὶ $(\Delta\Gamma)=15$. Ἕνεκα τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ ἀληθεύουσιν αἱ ἰσότητες $(A\Delta)=15\varepsilon\varphi\Gamma=20\varepsilon\varphi B$, ὅθεν $\frac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi\Gamma}=\frac{15}{20}$ καὶ $\frac{\varepsilon\varphi\Gamma-\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi\Gamma+\varepsilon\varphi B}=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$.

Ἐπειδὴ δὲ $\varepsilon\varphi\Gamma-\varepsilon\varphi B=\frac{\eta\mu(\Gamma-B)}{\sigma\upsilon\nu\Gamma\sigma\upsilon\nu B}$ καὶ $\varepsilon\varphi\Gamma+\varepsilon\varphi B=\frac{\eta\mu(\Gamma+B)}{\sigma\upsilon\nu\Gamma\sigma\upsilon\nu B}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\frac{\eta\mu(\Gamma-B)}{\eta\mu(\Gamma+B)}=\frac{1}{7}$, ὅθεν $\eta\mu(\Gamma-B)=\frac{1}{7}\eta\mu A=\frac{1}{7}\eta\mu(50^\circ 18')$. Ὑπολογιζομένης ἐκ ταύτης τῆς διαφορᾶς $\Gamma-B$ καὶ γνωστοῦ ὄντος ὅτι $\Gamma+B=129^\circ 42'$ εὑρίσκονται αἱ γωνίαι Γ καὶ B. Μεθ' ὃ ἡ ἐπίλυσις περατοῦται εὐκόλως.

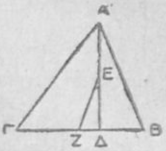
416. Κατὰ τὴν α'. τῶν ἰσοτήτων (98) εἶναι $\mu^2_\alpha=\frac{24.60^2+50^2}{2}-19{,}20^2=683{,}94$ ὅθεν $\mu_\alpha=26{,}15\mu$. Γνωρίζοντες ἤδη τοῦ τριγώνου $A\Delta\Gamma$ τὰς τρεῖς πλευρὰς ὑπολογίζομεν τὴν γωνίαν αὐτοῦ $A\hat{\Delta}\Gamma$ κατὰ τὰς ἰσότητας (78).

417. Γνωρίζομεν (§ 113 Β') ὅτι $\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)}=\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}$, Ἐπειδὴ δὲ $\beta-\gamma=2\gamma-\gamma=\gamma$ καὶ $\beta+\gamma=3\gamma$ καὶ $\varepsilon\varphi\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)=\sigma\varphi\left(\frac{A}{2}\right)$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\varepsilon\varphi\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)=\frac{1}{3}\sigma\varphi 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$, ὅθεν $\frac{B-\Gamma}{2}=30^\circ$ καὶ $B-\Gamma=60^\circ$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $B+\Gamma=120^\circ$, ἕπεται ὅτι $B=90^\circ$ καὶ $\Gamma=30^\circ$.

418. Α'. Μέθοδος. Ἐκ τοῦ τριγώνου $AB\Delta$ (Σχ. 56 εὐθ. τριγ.) προκύπτει ὅτι $\frac{\delta_\alpha}{\eta\mu 24^\circ}=\frac{\gamma}{\eta\mu(A\hat{\Delta}B)}$, ὅθεν $\delta_\alpha=\frac{120\,\eta\mu 24^\circ}{\eta\mu(A\hat{\Delta}B)}$.

Ἐπειδὴ δὲ $\eta\mu(\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}) = \eta\mu(\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma) = \eta\mu\left(\mathrm{B} + \frac{\mathrm{A}}{2}\right) = \eta\mu(48^\circ 6')$ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\delta_\alpha = \frac{120\eta\mu 24^\circ}{\eta\mu(48^\circ 6')}$.

419. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΕΖΔ προκύπτει ὅτι $\sigma\varphi \mathrm{Z} = \frac{(\Delta\mathrm{Z})}{(\Delta\mathrm{E})}$, Ἐπειδὴ δὲ $(\mathrm{Z}\Delta) = (\mathrm{ZB}) - (\Delta\mathrm{B}) = \frac{\alpha}{2} - \gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}$ καὶ $(\mathrm{EA}) = \frac{(\mathrm{A}\Delta)}{2} = \frac{\gamma\eta\mu\mathrm{B}}{2}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\sigma\varphi\mathrm{Z}$



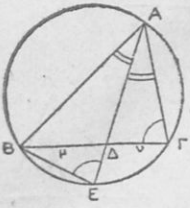
(Σχ. 21)

$= \frac{\alpha - 2\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}}{\gamma\eta\mu\mathrm{B}}$ ἤ, ἐπειδὴ $\alpha = \frac{\gamma\eta\mu\mathrm{A}}{\eta\mu\Gamma}$, $\sigma\varphi\mathrm{Z} = \frac{\gamma\eta\mu\mathrm{A} - 2\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}\eta\mu\Gamma}{\gamma\eta\mu\mathrm{B}\eta\mu\Gamma} = \frac{\eta\mu(\mathrm{B}+\Gamma) - 2\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}\eta\mu\Gamma}{\eta\mu\mathrm{B}\eta\mu\Gamma} = \frac{\eta\mu(\mathrm{B}-\Gamma)}{\eta\mu\mathrm{B}\eta\mu\Gamma}$ $= \frac{\eta\mu(17^\circ\, 10')}{\eta\mu(52^\circ\, 15')\eta\mu(35^\circ\, 5')}$, δι' ἧς ὁρίζεται ἡ ζητουμένη γωνία Ζ.

420. *Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\beta = 142\mu$, $\gamma = 42\mu$ καὶ $\mu_\alpha = \sqrt{142.42}$.* Γνωρίζομεν ὅτι $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$· ἐπειδὴ δὲ $\beta = 142$, $\gamma = 42$ καὶ $\mu_\alpha^2 = 142.42$, αὕτη γίνεται $142^2 + 42^2 = 2.142.42 + \frac{\alpha^2}{2}$, ὅθεν $\alpha^2 = 2(142 - 42)^2$. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}$, ἕπεται ὅτι $\sigma\upsilon\nu\mathrm{A} = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{142^2+42^2-2(142-42)^2}{2.142.42} = \frac{-142^2-42^2+4.142.42}{2.142.42} = 1 - \frac{(142-42)^2}{2.142.42}$. Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι $1 - \sigma\upsilon\nu\mathrm{A} = \frac{100^2}{2.142.42}$ ἢ $2\eta\mu^2\left(\frac{\mathrm{A}}{2}\right) = \frac{10000}{2.142.42}$, ὅθεν $\eta\mu^2\left(\frac{\mathrm{A}}{2}\right) = \frac{2500}{142.42}$. Ὑπολογιζομένης ἐκ ταύτης τῆς Α ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 113Β').

421. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια ἕπεται ὅτι

$\frac{(\mathrm{AE})}{\beta} = \frac{\gamma}{(\mathrm{A}\Delta)}$, ὅθεν $(\mathrm{A}\Delta)(\mathrm{AE}) = \beta\gamma$ ἢ $(\mathrm{A}\Delta)\,[(\mathrm{A}\Delta)+(\Delta\mathrm{E})] = \beta\gamma$, ὅθεν $(\mathrm{A}\Delta)^2 + (\mathrm{A}\Delta)(\Delta\mathrm{E}) = \beta\gamma$. Ἐπειδὴ δὲ $(\mathrm{A}\Delta)(\Delta\mathrm{E}) =$



(Σχ. 22)

$\mu\nu$, ἕπεται ὅτι $(\mathrm{A}\Delta)^2 + \mu\nu = \beta\gamma$· καὶ ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως $(\mathrm{A}\Delta)^2 = \mu\nu$, αὕτη γίνεται $\beta\gamma = 2\mu\nu$. Ἀλλ' ἐκ τῶν γνωστῶν ἐκ τῆς γεωμετρίας ἰσοτήτων $\frac{\mu}{\gamma} = \frac{\nu}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta+\gamma}$ προκύπτει ὅτι $\mu = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$, $\nu = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$, ὧν ἕνεκα ἡ προηγουμένη γίνεται $\beta\gamma = \frac{2\alpha^2\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2}$, ὅθεν $\beta+\gamma = \alpha\sqrt{2}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῶν (82) προκύπτει $\eta\mu\mathrm{B} + \eta\mu\Gamma = \sqrt{2}\ \eta\mu\mathrm{A}$ ἢ $2\eta\mu\left(\frac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\mathrm{B}-\Gamma}{2}\right) = 2\sqrt{2}\ \eta\mu\left(\frac{\mathrm{A}}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\mathrm{A}}{2}\right)$, ὅθεν $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\mathrm{B}-\Gamma}{2}\right) = \sqrt{2}\ \eta\mu\left(\frac{\mathrm{A}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ἄρα $\frac{\mathrm{B}-\Gamma}{2} = 45^\circ$ καὶ $\mathrm{B}-\Gamma = 90^\circ$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς $\mathrm{B}+\Gamma = 120^\circ$ ἕπεται ὅτι $\mathrm{B} = 105^\circ$ καὶ $\Gamma = 15^\circ$.

422. Ἔστω Α ἡ μεγαλυτέρα καὶ Γ ἡ μικροτέρα γωνία τοῦ τριγώνου· ἐπειδὴ αὗται ἀποτελοῦσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον εἶναι $\mathrm{B}-\mathrm{A} = \Gamma-\mathrm{B}$, ὅθεν $2\mathrm{B} = \mathrm{A}+\Gamma$ ἢ $2\mathrm{B} = 180^\circ - \mathrm{B}$, ὅθεν $\mathrm{B} = 60^\circ$. Ἐπειδὴ δὲ $\mathrm{E} = 222 = \frac{1}{2}\ \alpha\gamma\eta\mu\mathrm{B} = \frac{1}{2}\ \alpha\gamma\ \frac{\sqrt{3}}{2}$ ἕπεται ὅτι $\alpha\gamma = 300\sqrt{3}$, ἄρα $\gamma = 10\sqrt{3}$. Ἤδη ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 113 Β΄).

423. Ἐπειδὴ $\eta\mu\mathrm{A} = \eta\mu\,(\mathrm{B}+\Gamma)$ καὶ $\Gamma = 2\mathrm{B}$ ἕπεται ὅτι $\eta\mu\mathrm{A} = \eta\mu 3\mathrm{B}$, ἄρα $\frac{\alpha}{\eta\mu 3\mathrm{B}} = \frac{\beta}{\eta\mu\mathrm{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu 2\mathrm{B}}$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι $\beta = \frac{\alpha\eta\mu\mathrm{B}}{\eta\mu 3\mathrm{B}} = \frac{\gamma\eta\mu\mathrm{B}}{\eta\mu 2\mathrm{B}}$, ὅθεν (51) $\beta = \frac{\alpha\eta\mu\mathrm{B}}{3\eta\mu\mathrm{B} - 4\eta\mu^3\mathrm{B}}$ $= \frac{\gamma\eta\mu\mathrm{B}}{2\eta\mu\mathrm{B}\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}}$ ἢ $\beta = \frac{\alpha}{3-4\eta\mu^2\mathrm{B}} = \frac{\gamma}{2\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}}$. Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν ὅτι $\eta\mu^2\mathrm{B} = \frac{3\beta-\alpha}{4\beta}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\mathrm{B} = \frac{\gamma}{2\beta}$, ὅθεν

$$\frac{3\beta-\alpha}{4\beta} + \frac{\gamma^2}{4\beta^2} = 1,$$ ἐξ ἧς $\alpha\beta = \gamma^2 - \beta^2 = (\gamma+\beta)(\gamma-\beta)$

ἢ $25\beta = 40(\gamma-\beta)$, ὅθεν $65\beta - 40\gamma = 0$· ἐπειδὴ δὲ $\beta+\gamma = 40$, ἕπεται ὅτι $\beta = \frac{1600}{105}$ καὶ $\gamma = \frac{2600}{105}$. Ἤδη ἐκ τῆς ἰσότητος $\sigma\upsilon\nu B = \frac{\gamma}{2\beta} = \frac{13}{16}$ ὑπολογίζεται ἡ Β, ἐξ ἧς ἡ $\Gamma = 2B$ καὶ εἶτα ἡ Α. Τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται, καθ' ἕνα τῶν γνωστῶν τρόπων.

424. Αἱ ἰσότητες $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$, $\beta^2+\gamma^2 = 2\mu^2_\alpha + \frac{\alpha^2}{2}$ διὰ $\alpha = 50$, $A = 30^\circ$ καὶ $\mu_\alpha = 40$ γίνονται $\beta^2+\gamma^2 - \beta\gamma\sqrt{3} = 2500$ καὶ $\beta^2+\gamma^2 = 4450$, ἐξ ὧν εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι $2\beta\gamma = 1300\sqrt{3}$ καὶ $(\beta+\gamma)^2 = 4450 + 1300\sqrt{3}$, $(\beta-\gamma)^2$ $4450 - 1300\sqrt{3}$, ὅθεν $\beta = 64{,}3725$, $\gamma = 17{,}4865$ ἢ τἀνάπαλιν $\beta = 17{,}4865$, $\gamma = 64{,}3725$. Ἤδη ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\eta\mu B = \frac{\beta\eta\mu A}{\alpha}$ καὶ $\eta\mu\Gamma = \frac{\gamma\eta\mu A}{\alpha}$ εὑρίσκομεν ὅτι διὰ μὲν τὰς πρώτας τῶν ἀνωτέρω τιμῶν τῶν β καὶ γ εἶναι
$B = 40^\circ\ 4'\ 12''$ ἢ $B = 139^\circ\ 55'\ 48''$ καὶ
$\Gamma = 10^\circ\ 4'\ 14''$ ἢ $\Gamma = 169^\circ\ 4'\ 14''$, ὧν παραδεκταὶ εἶναι μόνον αἱ $B = 139^\circ\ 55'\ 48''$ καὶ $\Gamma = 10^\circ\ 4'\ 14''$, διότι δι' αὐτὰς εἶναι $A+B+\Gamma = 180^\circ$. Εἰς τὰς ἄλλας τιμὰς τῶν πλευρῶν β καὶ γ ἀντιστοιχοῦσιν αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν γωνιῶν ἐναλλὰξ ἤτοι $B = 10^\circ\ 4'\ 14''$ καὶ $\Gamma = 139^\circ\ 55'\ 48''$. Τὸ ἐμβαδὸν ὁρίζεται ἐκ τῆς ἰσότητος $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{4}\beta\gamma$.

425. Ἐὰν κληθῇ ΑΔ τὸ ὕψος, εἶναι φανερὸν ὅτι $(A\Delta) = \frac{\alpha}{2}\varepsilon\varphi B = \gamma\eta\mu B$, ὅθεν $\alpha = \frac{2\sqrt{11}}{\varepsilon\varphi B}$, $2\gamma = \frac{2\sqrt{11}}{\eta\mu B}$ καὶ ἑπομένως $22 = \alpha + 2\gamma = 2\sqrt{11}\left(\frac{1}{\varepsilon\varphi B} + \frac{1}{\eta\mu B}\right)$, ὅθεν $11\eta\mu B = \sqrt{11}(1+\sigma\upsilon\nu B)$ ἢ $22\eta\mu\left(\frac{B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B}{2}\right) = 2\sqrt{11}\,\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{B}{2}\right)$, ὅθεν $\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{\sqrt{11}}{11}$, δι' ἧς ὁρίζεται ἡ Β, μεθ' ὃ ἐκ τῆς $\gamma = \frac{\sqrt{11}}{\eta\mu B}$ ὁρίζεται ἡ γ κτλ.

426. Ἐπειδὴ $E = \frac{1}{2}\alpha\Upsilon_\alpha = \frac{1}{2}K^2$, ἕπεται ὅτι $\alpha\Upsilon_\alpha = \frac{K^2}{\alpha}$. Ἐκ δὲ

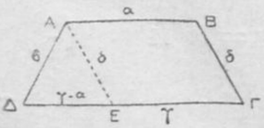
τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΔΓ λαμβάνομεν $\frac{\alpha}{2} = \Upsilon_\alpha$ εφ$\left(\frac{A}{2}\right) =$ $\frac{K^2}{\alpha}$εφ$\left(\frac{A}{2}\right)$, ὅθεν $\alpha^2 = 2K^2$εφ$\left(\frac{A}{2}\right)$, δι' ἧς ὁρίζεται ἡ α. Εἶτα ἐκ τῆς $\frac{\alpha}{2} = \gamma\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)$ ὁρίζεται ἡ γ καὶ ἡ β. Αἱ δὲ γωνίαι ὁρίζονται ἐκ τῶν Β=Γ καὶ Β+Γ=180°−Α.

427. Ἐκ τῆς προηγουμένως εὑρεθείσης ἰσότητος $\frac{\alpha}{2} = \frac{K^2}{\alpha}$εφ$\left(\frac{A}{2}\right)$ ἕπεται ὅτι εφ$\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\alpha^2}{2K^2}$, δι' ἧς ὁρίζεται ἡ Α, μεθ' ὃ ὁρίζονται αἱ Β καὶ Γ καὶ ἡ ἐπίλυσις περατοῦται εὐκόλως.

428. Ὅρα εὐθ. Τριγ. § 129.

429. Ἐπιλύεται (§ 113 Β') πρῶτον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, μεθ' ὃ τὸ ΑΔΓ (§ 115 Δ') κτλ.

430. Καλοῦντες Ε τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ω τὴν γωνίαν αὐτῶν καὶ παρατηροῦντες ὅτι πᾶσαι αἱ περὶ τὸ Ε γωνίαι ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον, θέλομεν ἔχει (75) τὰς ἰσότητας : (ΑΕΒ)$= \frac{1}{2}$ (ΑΕ) (ΕΒ) ημω, (ΒΕΓ) $= \frac{1}{2}$ (ΕΒ) (ΕΓ) ημω, (ΔΕΓ) $= \frac{1}{2}$ (ΔΕ) (ΕΓ) ημω καὶ (ΑΕΔ)$= \frac{1}{2}$ (ΑΕ) (ΕΔ) ημω. Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη ὅτι : (ΑΒΓΔ) $= \frac{1}{2}$ (ΑΓ) (ΒΔ) ημω $=$ $\frac{1}{2} \cdot$ 6,50. 5,42ημ(65° 15')=15,9966 τ. μ.

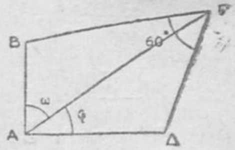


(Σχ. 23).

431. Ἔστω ὅτι $\alpha = 5$, $\beta = 12$, $\gamma = 20$ καὶ $\delta = 9$. Ἀγομένης τῆς ΑΕ παραλλήλως τῇ ΒΓ σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΔΕ, ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι : $(AE)^2 = \beta^2 + (\gamma-\alpha)^2 - 2\beta(\gamma-\alpha)$ συνΔ, ὅθεν συνΔ $= \frac{\beta^2 + (\gamma-\alpha)^2 - \delta^2}{2\beta(\gamma-\alpha)}$ $= \frac{4}{5}$, ὅθεν Δ = 36° 52' 12'', ἄρα Α = 143° 7' 48''. Ἐκ

τοῦ αὐτοῦ τριγώνου ἕπεται ὅτι :
$\beta^2 = \xi^2 + (\gamma-\alpha)^2 - 2\xi(\gamma-\alpha)\ \text{συν}E$, ὅθεν
$\text{συν}E = \text{συν}\Gamma = \frac{3}{5}$ καὶ $\Gamma = 53^\circ\,7'\,48''$, ἄρα $B = 126^\circ\,52'\,12''$.

432. *Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαγώνιος ΑΓ καὶ νὰ ἐπιλυθῇ κ. τετράπλευρον ΑΒΓΔ, οὗ $A = 90^\circ$, $\Gamma = 60^\circ$ $(AB) = 1$, $(A\Delta) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ΑΓ διχοτομεῖ τὴν Γ.*



(Σχ. 24).

Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ ἕπονται αἱ ἰσότητες :

$$\frac{(A\Gamma)}{\eta\mu B} = \frac{1}{\eta\mu 30^\circ} = \frac{B\Gamma}{\eta\mu\omega},\quad \frac{A\Gamma}{\eta\mu\Delta} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\eta\mu 30^\circ} = \frac{\Gamma\Delta}{\eta\mu\varphi},\ \text{ὅθεν}$$

$$\frac{\eta\mu B}{\eta\mu\Delta} = \frac{2\sqrt{3}}{3},\ \text{ἐξ ἧς :}$$

$$\frac{\eta\mu B - \eta\mu\Delta}{\eta\mu B + \eta\mu\Delta} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{3}+3} = \frac{2.3 - 3\sqrt{3}}{2.3 + 3\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\ \text{ἢ}$$

$$\frac{2\eta\mu\left(\frac{B-\Delta}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{B+\Delta}{2}\right)}{2\eta\mu\left(\frac{B+\Delta}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{B-\Delta}{2}\right)} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $(B+\Delta) = 360^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 210^\circ$ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{B-\Delta}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\, 105^\circ} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{(2+\sqrt{3})^2}$$ Ἀλλὰ $\varepsilon\varphi\, 105^\circ$

$$= -\sqrt{\frac{1-\text{συν}\,210^\circ}{1+\text{συν}\,210^\circ}} = -\sqrt{\frac{1+\text{συν}\,30^\circ}{1-\text{συν}\,30^\circ}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

$= -(2+\sqrt{3})$· ἡ προηγουμένη ὅθεν ἰσότης γίνεται :

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{B-\Delta}{2}\right) = -\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{\varepsilon\varphi\, 105^\circ} = \sigma\varphi 105^\circ = \varepsilon\varphi(-15^\circ),$$

ἄρα $\left(\frac{B-\Delta}{2}\right) + 15^\circ = 180^\circ.\lambda$. Ἐκ ταύτης διὰ $\lambda = 0$ προκύπτει $B - \Delta = -30^\circ$, ἐξ ἧς καὶ τῆς $B+\Delta = 210^\circ$ εὑρίσκομεν $B = 90^\circ$ καὶ $\Delta = 120^\circ$. Αἱ ἄλλαι τιμαὶ τοῦ λ ἄγουσιν εἰς τιμὰς τῶν γωνιῶν Β καὶ Δ ἀπαραδέκτους. Ἤδη εὑρίσκομεν $\omega = 60^\circ$ καὶ $\varphi = 30^\circ$. Ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων $\frac{(\text{ΑΓ})}{\eta\mu B}$ $= \frac{1}{\eta\mu 30^\circ} = \frac{(\text{ΒΓ})}{\eta\mu\omega}$ εὑρίσκομεν ὅτι $(\text{ΑΓ}) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, (\text{ΒΓ}) = \frac{\eta\mu\omega}{\eta\mu 30^\circ}$ $= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$) καὶ ἐκ τῆς $\frac{(\Gamma\Delta)}{\eta\mu\varphi} = \frac{(\text{ΑΔ})}{\eta\mu 30^\circ}$ εὑρίσκομεν $(\Gamma\Delta) =$ $(\text{ΑΔ}) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Τὸ ἐμβαδὸν τέλος εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ.

433. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ προκύπτει ὅτι: $(\text{ΒΔ})^2 = \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{16}(1+\sqrt{5})^2 - \frac{2\alpha^2(1+\sqrt{5})}{4}$ συνΑ· ἐπειδὴ δὲ συνΑ $=$ συν36° $= \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ (ὅρα ἄσκ. 42), ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $(\text{ΒΔ})^2$ $= \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{16}(1+\sqrt{5})^2 - 2\alpha^2 \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2} = \frac{\alpha^2}{16}\ (10-2\sqrt{5})$, ἄρα $(\text{ΒΔ}) = \frac{\alpha}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Ἐπειδὴ δὲ ημΑ $=$ ημ36° $= \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, ἕπεται ὅτι $(\text{ΒΔ}) = \alpha\,\eta\mu A$ καὶ ἑπομένως ἐκ τῆς $\frac{(\text{ΒΔ})}{\eta\mu A} = \frac{\alpha}{\eta\mu(\widehat{\text{ΑΔΒ}})}$ προκύπτει ὅτι $\eta\mu(\widehat{\text{ΑΔΒ}}) = 1$, ἄρα $\widehat{\text{ΑΔΒ}} = 90^\circ$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\widehat{\text{ΑΒΔ}} - 90^\circ - 36 = 54^\circ$.

Ἤδη ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ λαμβάνομεν $(\Delta\Gamma)^2 = (\text{ΒΓ})^2 +$ $(\text{ΒΔ})^2 - 2\,(\text{ΒΓ})\,(\text{ΒΔ})$ συν$(\widehat{\Delta\text{ΒΓ}}) = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{16}(10-2\sqrt{5}) -$ $\frac{\alpha}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ συν$\widehat{\Gamma\text{ΒΔ}}$. Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{\Gamma\text{ΒΔ}} = \widehat{B} - \widehat{\text{ΑΒΔ}} =$ $108^\circ - 54^\circ = 54^\circ = 90^\circ - 36^\circ$, ἕπεται ὅτι συν$\widehat{\Gamma\text{ΒΔ}} =$ ημ36°

$=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ καὶ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $(\Delta\Gamma)^2$ $=\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^2}{16}(10-2\sqrt{5})-\frac{\alpha^2}{16}(10-2\sqrt{5})=\frac{\alpha^2}{4}$ καὶ ἑπομένως $(\Delta\Gamma)=\frac{\alpha}{2}=(\mathrm{B}\Gamma)$. Τὸ τρίγωνον ἄρα ΔΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως $\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{B}=\Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta=54^\circ$ καὶ $\Gamma=180^\circ-54^\circ.2=72^\circ$, ἡ δὲ $\hat{\Delta}=\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}+54^\circ=90^\circ+54^\circ=144^\circ$.

434. ***Νὰ ὁρισθῶσιν αἱ γωνίαι κ. τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, οὗ Δ = 90° κ.τ.λ.*** Ἔστω ὅτι $(\mathrm{AB})=4\lambda$, $(\mathrm{B}\Gamma)=7\lambda$, $(\Gamma\Delta)=8\lambda$, $(\mathrm{A}\Delta)$ 3λ καὶ $\mathrm{A}=90^\circ$. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΔ ἕπεται ὅτι $(\mathrm{B}\Delta)^2=9\lambda^2+16\lambda^2=25\lambda^2$, ὅθεν $(\mathrm{B}\Delta)=5\lambda$. Ἤδη ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΔΓ λαμβάνομεν $(\mathrm{B}\Delta)^2=(\mathrm{B}\Gamma)^2+(\Gamma\Delta)^2-2(\mathrm{B}\Gamma)(\mathrm{A}\Gamma)$ συνΓ ἢ $25\lambda^2=49\lambda^2+64\lambda^2-112\lambda^2$συνΓ, ὅθεν συνΓ$=\frac{88\lambda^2}{112\lambda^2}=\frac{11}{14}$, ἄρα $\Gamma \doteq 38^\circ\,12'\,48''$. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου ἔχομεν ἐπίσης $(\mathrm{B}\Gamma)^2=(\mathrm{B}\Delta)^2+(\Delta\Gamma)^2-2(\mathrm{B}\Delta)(\Delta\Gamma)$ συν$(\mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma)$, ὅθεν συν$(\mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma)=\frac{1}{2}$, ἄρα $\mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma=60^\circ$, ἑπομένως $\Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma=$ $81^\circ\,47'\,12''$. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΔ λαμβάνομεν $(\mathrm{A}\Delta)$ $=(\mathrm{AB})$ εφ$(\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta)$, ὅθεν εφ$(\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta)=\frac{3}{4}$, ἄρα $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta=36^\circ\,52'$ $11'',5$ καὶ ἑπομένως $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}=53^\circ\,7'\,48'',5$. Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν ἤδη $\mathrm{B}=118^\circ\,39'\,23'',5$ καὶ $\Delta=113^\circ\,7'\,48'',5$.

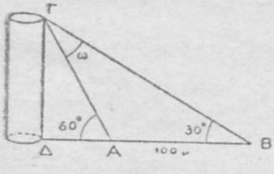
435. Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγεγραμμένον, ἕπεται ὅτι καὶ $\Delta=90^\circ$. Ἐπιλυομένου δὲ τοῦ τριγώνου ΒΑΔ ὁρίζεται ἡ ΒΔ καὶ αἱ γωνίαι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta$, $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$, ἐξ ὧν εἶτα αἱ $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta$, $\mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma$. Ἤδη ὅμως ἐπιλύεται καὶ τὸ τρίγωνον ΓΒΔ κ.τ.λ.

436. Ἐκ τῆς $\mathrm{B}+\Delta=180^\circ$ ὁρίζεται καὶ ἡ Δ. Ἐπιλυομένου δὲ τοῦ ΑΒΓ ὁρίζεται ἡ ΑΓ, ὅτε καὶ τὸ ΑΓΔ ἐπιλύεται κ.τ.λ.

437. Ἔστωσαν δεδομένα τὰ στοιχεῖα Α, 6 καὶ Ρ, ἤτοι ἡ γωνία Α, ἡ βάσις ΑΒ καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\mathrm{A}+\Gamma=180^\circ$, $\mathrm{A}+\Delta=180^\circ$ ὁρίζονται αἱ γωνίαι Γ καὶ Δ, εἶτα δὲ καὶ ἡ Β. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΑΔΒ εἶναι ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, ἕπεται ὅτι: $\frac{(\Delta\mathrm{B})}{\eta\mu\mathrm{A}}=2\mathrm{P}$, ὅθεν $(\Delta\mathrm{B})=2\mathrm{P}\eta\mu\mathrm{A}$, δι' ἧς ὁρίζεται ἡ διαγώ-

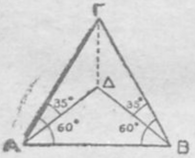
νιος ΔΒ. Ἤδη τὸ τρίγωνον ΑΔΒ ἐπιλύεται καὶ ὁρίζονται αἱ παρὰ τὴν ΔΒ γωνίαι αὐτοῦ, ἐξ ὧν εἶτα ὁρίζονται καὶ αἱ παρὰ τὴν ΔΒ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΓΔΒ, ὅπερ οὕτω ἐπιλύεται κ.τ.λ.

438. Ἄγοντες τὴν διαγώνιον ΑΓ, καὶ καλοῦντες φ τὴν γωνίαν αὐτῆς μεθ' ἑκατέρας τῶν βάσεων ΑΔ καὶ ΒΓ καὶ θέτοντες $(ΑΔ) = α$, $(ΔΓ) = β$, $(ΓΒ) = γ$, $(ΒΑ) = δ$ λαμβάνομεν ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΓΔ τὰς ἰσότητας:
$δ^2 = (ΑΓ)^2 + γ^2 - 2(ΑΓ)γ \,συνφ$, $β^2 = (ΑΓ)^2 + α^2 - 2(ΑΓ)α \,συνφ$,
ὅθεν $συνφ = \dfrac{(ΑΓ)^2 + γ^2 - δ^2}{2(ΑΓ)γ}$ $συνφ = \dfrac{(ΑΓ)^2 + α^2 - β^2}{2(ΑΓ)α}$, ἄρα
$\dfrac{(ΑΓ)^2 + γ^2 - δ^2}{2(ΑΓ)γ} = \dfrac{(ΑΓ)^2 + α^2 - β^2}{2(ΑΓ)α}$ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν ὅτι $(ΑΓ)^2$
$= \dfrac{αγ(α-γ) + (αδ^2 - γβ^2)}{α-γ}$, ἄρα $ΑΓ = \sqrt{\dfrac{αγ(α-γ) + (αδ^2 - γβ^2)}{α-γ}}$
Ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ ἡ ἄλλη διαγώνιος.



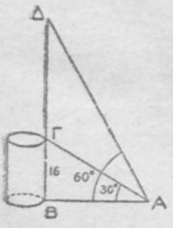
(Σχ. 25)

439. [127] Ἐπειδὴ $60° = ω + 30°$, ἔπεται ὅτι $ω = 30°$ καὶ $(ΑΓ) = (ΑΒ) = 100μ$. Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΔΓ προκύπτει ὅτι $(ΔΓ) = (ΑΓ)\,ημ60° = 100\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$.



(Σχ. 26)

440. [128]. Ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ θέσεις τῶν παρατηρητῶν, Γ τὸ ἀπρόσιτον σημεῖον καὶ Δ ὁ ποὺς τῆς ἐξ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ κεῖνται τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ἀγομένης καθέτου. Ἐπειδὴ $Γ\hat{Α}Β = Α\hat{Β}Γ = 60°$ ἔπεται ὅτι $\hat{Γ} = 60°$, ἄρα $(ΑΓ) = (ΓΒ) = (ΑΒ) = 1000μ$. Ἤδη ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΓΔ προκύπτει ὅτι $(ΓΔ) = (ΑΓ)\,ημ35° = 1000\,ημ35°$, ἐξ ἧς ὁρίζεται τὸ ζητούμενον ὕψος (ΓΔ).



(Σχ. 27)

441 [129]. Ἐπιλυομένου τοῦ τριγώνου ΑΔΓ εὑρίσκεται ἡ (ΑΓ), ἐπιλυομένου δὲ τοῦ ΑΒΔ εὑρίσκεται καὶ ἡ (ΑΒ), μεθ' ὃ καὶ ἡ $(ΒΓ) = (ΑΓ) - (ΑΒ)$.

442. Ἐπειδὴ $(ΒΓ) = (ΑΒ)\,εφ30° = (ΑΒ)\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, ἔπεται ὅτι $(ΑΒ) = \dfrac{3.16}{\sqrt{3}} = 16\sqrt{3}$. Ἤδη ἐκ τοῦ ΒΔΑ εὑρί-

σκομεν ὅτι $(Β\Delta) = 16\sqrt{3}\ \varepsilon\varphi 60^\circ = 16.\sqrt{3}.\sqrt{3} = 48$, ὅθεν $(\Gamma\Delta) = 32$ μ.

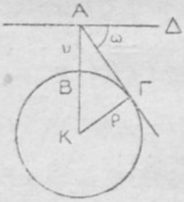
443. Τῶν ὀρθ. τριγώνων ΑΚΕ, ΒΚΕ ὄντων ἴσων ἕπεται ὅτι (ΑΕ) =(ΕΒ)=50μ. Ἤδη ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΕΚ ἕπεται ὅτι $\rho = 50\varepsilon\varphi\ (3^\circ\ 2')$, δι' ἧς ὁρίζεται ἡ ἀκτὶς ρ τῆς τομῆς.

(Σχ. 28)

444. Ἐὰν Δ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ ἀπροσίτου σημείου Γ, (σχ. 26) προβολὴ τῆς $\widehat{\mathrm{Α\Gamma Β}}$ εἶναι ἡ $\widehat{\mathrm{Α\Delta Β}} = \omega$. Τοῦ τριγώνου ΑΓΒ ἐπιλυομένου ὁρίζονται αἱ πλευραὶ ΑΓ καὶ ΓΒ· εἶτα δὲ ἐπιλυομένων τῶν ὀρθ. τριγώνων ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ ὁρίζονται αἱ πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΔ αὐτῶν. Εἶτα ὁρίζεται ἡ γωνία ω τοῦ τριγώνου ΑΔΒ ἐκ τῶν τριῶν αὐτοῦ πλευρῶν.

445. Ἔστω $\widehat{\mathrm{\Delta Α\Gamma}} = \omega$ τὸ δεδομένον βάθος τοῦ ὁρίζοντος πρὸς παρατηρητὴν κείμενον εἰς ὕψος (ΒΑ) = υ ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης. Ἐπειδὴ $\widehat{\mathrm{ΑΚ\Gamma}} = \omega$, ἕπεται ὅτι $\rho = (\rho+\upsilon)$ συνω, ὅθεν

$$\rho = \frac{\upsilon\sigma\upsilon\nu\omega}{1-\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\upsilon\sigma\upsilon\nu\omega}{2\,\eta\mu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)},$$ δι' ἧς



(Σχ. 29)

εὑρίσκεται ἡ ρ. Διὰ υ = 75 καὶ ω = 15′ 30″ εἶναι

$$\rho = \frac{75\ \sigma\upsilon\nu(25'\ 30'')}{2\eta\mu^2\ (7'\ 45'')} = 7378833{,}33\mu,$$ ἥτις τιμὴ εἶναι ἀρκούντως μεγαλυτέρα τῆς δι' ἄλλων ἀκριβῶν μεθόδων εὑρεθείσης μέσης τιμῆς τῆς ἀκτῖνος τῆς γῆς. (Ὅρα Κοσμογραφίαν μου § 47).

446. Ἔστω ὅτι Κ = 3λ+υ, ὅτε $\frac{Κ}{3} = \lambda + \frac{\upsilon}{3}$ καὶ $\varepsilon\varphi\ \frac{Κ\pi}{3} = \varepsilon\varphi\left(\lambda\pi + \frac{\upsilon}{3}\pi\right)$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ πέρατα τῶν τόξων $\frac{\upsilon}{3}\pi$ καὶ $\left(\lambda\pi + \frac{\upsilon}{3}\pi\right)$ ἢ συμπίπτουσιν ἢ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ κέντρον, ἕπεται ὅτι $\varepsilon\varphi\left(\lambda\pi + \frac{\upsilon}{3}\pi\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\upsilon}{3}\pi\right)$ καὶ κατ' ἀκο-

λουθίαν $εφ\frac{K\pi}{3}=εφ\left(\frac{υ}{3}\pi\right)$. Τοῦ υ δὲ ὄντος 0 ἢ 1 ἢ 2 ἡ $εφ\frac{K\pi}{3}$ ἔχει τὰς ἀκολούθους διαφόρους τιμὰς $εφ0=0$, $εφ\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ καὶ $εφ\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

447. Ἔστω ὅτι $K=5λ+υ$, ὅτε $\frac{K}{5}=λ+\frac{υ}{5}$ καὶ $συν\frac{2K\pi}{5}=συν\left(2λ\pi+\frac{2\pi υ}{5}\right)=συν\frac{2\pi υ}{5}$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ δυναταὶ τιμαὶ τοῦ υ εἶναι 0,1,2 3,4 τὸ $συν\frac{2K\pi}{2}$ δύναται νὰ λάβῃ τὰς ἀκο- τιμὰς $συν0$, $συν\frac{2\pi}{5}$, $συν\frac{4\pi}{5}$, $συν\frac{6\pi}{5}$, $συν\frac{8\pi}{5}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $\frac{2\pi}{5}+\frac{8\pi}{5}=2\pi$ καὶ $\frac{4\pi}{5}+\frac{6\pi}{5}=2\pi$, ἕπεται ὅτι $συν\frac{8\pi}{5}=συν\frac{2\pi}{5}$ καὶ $συν\frac{6\pi}{5}=συν\frac{4\pi}{5}$. Ὥστε διάφοροι τιμαὶ εἶναι μόνον αἱ $συν0$, $συν\frac{2\pi}{5}$, $συν\frac{4\pi}{5}$.

448. Γνωρίζομεν ὅτι $συν^2β=\frac{1}{1+εφ^2β}$, Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς $εφ^2τ=1+2εφ^2β$ προκύπτει ὅτι $εφ^2β=\frac{εφ^2τ-1}{2}$, ἕπεται ὅτι

$$συν^2β=\frac{1}{1+\frac{εφ^2τ-1}{2}}=\frac{2}{1+εφ^2τ}=2συν^2τ.$$

Ἀλλ' ἐκ τῆς ἰσότητος $συν2τ=2συν^2τ-1$ προκύπτει ὅτι $2συν^2τ=1+συν2τ$, ἄρα ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $συν^2β=1+συν2τ$.

449. Κατὰ τὸν τύπον $συν^2\left(\frac{ω}{2}\right)=\frac{1+συνω}{2}$ εἶναι $συν^2(α+β)=\frac{1+συν2(α+β)}{2}$ καὶ $συν^2(α-β)=\frac{1+συν2(α-β)}{2}$, ὅθεν

$$συν^2(α+β)+συν^2(α=β)=1+\frac{συν2(α+β)+συν2(α-β)}{2}$$

$$=1+\frac{συν2ασυν2β-ημ2βα\,ημ2β+συν2α\,συν2β+ημ2α\,ημ2β}{2}$$

$$=1+συν2α\,συν2β.$$

450. Ἐπειδὴ $(\eta\mu A + \eta\mu B)^2 = \eta\mu^2 A + 2\eta\mu A\,\eta\mu B + \eta\mu^2 B$ καὶ $(\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B)^2 = \sigma\upsilon\nu^2 A + 2\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu^2 B$, ἡ δοθεῖσα παράστασις ἰσοῦται πρὸς $2 + 2\,(\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B + \eta\mu A\,\eta\mu B) = 2 + 2\,\sigma\upsilon\nu\,(A - B) = 2\,[1 + \sigma\upsilon\nu(A - B)]$. Ἐπειδὴ δὲ $1 + \sigma\upsilon\nu(A - B) = 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A-B}{2}\right)$, ἕπεται ὅτι ἡ δοθεῖσα παράστασις ἰσοῦται πρὸς $4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

451. Ἐπειδὴ $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \sqrt{2}.\ \sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right)$ (ὅρα ἄσκ. 186), ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $\sqrt{2}.\ \sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right) = 1{,}15$, ὅθεν $\sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\,(35^\circ\,35'\,26'',6)$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\chi - \frac{\pi}{4} \pm (35^\circ\,35'\,26'',\ 6 = 2.\ K.\ 180^\circ$, ἄρα $\chi = 2\,K.\,180^\circ + 45^\circ \pm (35^\circ\,35'\,26'',6)$. Ἐπειδὴ δὲ δέον νὰ εἶναι $0 < \chi < 90^\circ$ ἕπεται ὅτι $K = 0$ καὶ $\chi = 80^\circ\,35'\,26'',6$ καὶ $\chi = 9^\circ\,24'\,33'',4$.

452. Ἐφαρμόζομεν τὴν γ' τῶν ἰσοτήτων (48) καὶ εὑρίσκομεν $\varepsilon\varphi\omega = 1$.

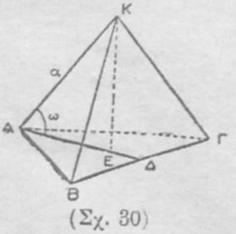
453. Ἔστω ὅτι $\sigma\upsilon\nu\chi = 0{,}548$· λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν $\chi = 360^\circ K \pm (56^\circ\,46'\,12'',6)$. Ἐκ τῶν τιμῶν, ἃς παρέχει ἡ α' τῶν ἰσοτήτων τούτων πρέπει νὰ λάβωμεν ἐκείνας μόνον, δι' ἃς εἶναι $0^\circ < 360^\circ.\,K + (56^\circ\,46'\,12'',6) < 1000^\circ$. Ἡ α' τῶν ἀνισοτήτων τούτων ἀληθεύει προφανῶς διὰ θετικὰς μόνον τιμὰς τοῦ K, ἡ δὲ β' διὰ τὰς τιμὰς τοῦ K, δι' ἃς εἶναι $K < \frac{1000^\circ - (56^\circ\,46''\,12''.\,6)}{360^\circ}$, ἤτοι διὰ $K=0$, ἢ 1 ἢ 2. Ὥστε τὸ πρόβλημα λύουσιν αἱ γωνίαι $(56^\circ\,46'\,12'',6)$, $360^\circ + (56^\circ\,46'\,12'',6)$, $360^\circ.2 + (56^\circ\,46'\,12'',6)$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἐκ τῶν ὑπὸ τῆς $\chi = 360^\circ.\,K - (56^\circ\,46'\,12'',6)$ παρεχομένων τιμῶν παραδεκταὶ εἶναι μόνον αἱ $360^\circ - (56^\circ 46'\,12'',6)$ καὶ $360^\circ 2 - (56^\circ\,46'\,12'',6)$ πλὴν τῆς $56^\circ\,46'\,12'',6$, ἣν καὶ προηγουμένως εὕρομεν.

454. Ἐὰν χ εἶναι τὸ ἓν τῶν ζητουμένων μερῶν, τὸ ἕτερον θὰ εἶναι $(45^\circ - \chi)$ καὶ ἑπομένως $\eta\mu\chi = 2\eta\mu(45^\circ = \chi)$ ἢ $\eta\mu\chi = \sqrt{2}\,(\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi)$. Ἐκ ταύτης διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ συνχ εὑρίσκομεν $\varepsilon\varphi\chi = \sqrt{2}\,(1 - \varepsilon\varphi\chi)$, ὅθεν $\varepsilon\varphi\chi = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$. Πρὸς λύσιν ταύτης καθιστῶμεν τὸ β'. μέλος λο-

γιστοῦ διὰ λογαρίθμων ἐργαζόμενοι ὡς ἀκολούθως: $2-\sqrt{2}$ $=2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2(1-\text{συν } 45^\circ)=4\eta\mu^2\left(\frac{45^\circ}{2}\right)=$ $4\eta\mu^2(22^\circ 30')$. Ἡ ἐξίσωσις, ὅθεν, γίνεται εφ$\chi=4\eta\mu^2(22^\circ 30')$, ἥτις λύεται εὐκόλως· οὕτως εὑρίσκομεν $\chi=180^\circ\lambda+30^\circ$ $56'\ 22'',76$· ἐπειδὴ δὲ πρέπει νὰ εἶναι $0^\circ<\chi<45^\circ$ ἕπεται ὅτι $\lambda=0$ καὶ $=30^\circ 56' 22'',76$ καὶ $45^\circ-\chi=14^\circ 3' 37'',24$.

455. Ἔστωσαν χ καὶ $30^\circ-\chi$ τὰ ζητούμενα τόξα καὶ ημ$(30^\circ-\chi)$ $=3$ημχ. Ἀναπτύσσοντες τὸ ημ$(30^\circ-\chi)$ κ.τ.λ. εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι συνχ$=(6+\sqrt{3})$ ημχ, ὅθεν εφχ$=\frac{1}{6+\sqrt{3}}$ $=\frac{6-\sqrt{3}}{33}$. Ἵνα καταστήσωμεν τὸ β΄. μέλος ταύτης λογιστὸν διὰ τῶν λογαρίθμων θέτομεν τοῦτο ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{6}{33}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ καὶ θέτοντες $\frac{\sqrt{3}}{6}=$ συν$^2\omega$ εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{6-\sqrt{3}}{33}=\frac{6\eta\mu^2\omega}{33}$, ὅτε ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις γίνεται εφχ$=\frac{6\eta\mu^2\omega}{33}$. Ἐκ τῆς $\frac{\sqrt{3}}{6}=$ συν$^2\omega$ εὑρίσκομεν ὅτι $\omega=$ $57^\circ\ 30'\ 6''$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\chi=7^\circ\ 22'\ 10''$.

456. Ἂν τεθῇ μ = εφχ + 3σφχ, προκύπτει εὐκόλως ὅτι εφ$^2\chi-$ μεφχ$+3=0$, ὅθεν εφχ$=\frac{\mu\pm\sqrt{\mu^2-12}}{2}$. Ἵνα δὲ αἱ ὑπὸ ταύτης παρεχόμεναι τιμαὶ τῆς εφχ ὦσι πραγματικαὶ πρέπει $\mu^2-12\geq 0$, ἤτοι $\mu\leq-2\sqrt{3}$ ἢ $\mu\geq 2\sqrt{3}$. Ἐπειδὴ ὅμως μ=εφχ+3σφχ διὰ τιμὰς τοῦ χ μεταξὺ 0° καὶ 90° περιεχομένας εἶναι θετική, αἱ πρῶται τιμαὶ τοῦ μ ἀποκλείονται καὶ κατ' ἀκολουθίαν πρέπει νὰ εἶναι $\mu\geq$ $2\sqrt{3}$· ἡ ἐλαχίστη ἄρα τιμὴ τοῦ μ εἶναι $2\sqrt{3}$, πρὸς ἣν ἀντιστοιχεῖ εφχ$=$ $\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\chi=60^\circ$.

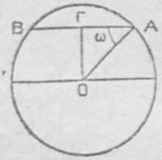


(Σχ. 30)

457. Ἔστω ΚΑΒΓ κανονικὸν τετράεδρον ἀκμῆς α καὶ ΚΕ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Τοῦ Ε ὄντος κέντρου τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ ἡ ΑΕΔ εἶναι ὕψος καὶ διάμεσος αὐτοῦ καὶ $(\text{ΑΕ})=\frac{2}{3}\ (\text{ΑΔ})$

$=\frac{2}{3}\cdot\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$. Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΚΕ ἕπεται ἀφ' ἑνὸς μὲν $(\text{ΚΕ})^2=\alpha^2-\frac{3\alpha^2}{9}=\frac{6\alpha^2}{9}$ ὅθεν (ΚΕ) $=\frac{\alpha}{3}\sqrt{6}$, ἀφ' ἑτέρου δὲ (ΚΕ)=(ΑΕ) εφω ἐξ ἧς εφω$=\frac{(\text{ΚΕ})}{(\text{ΑΕ})}$ $=\sqrt{2}$, ὅθεν $\omega = 54^\circ\ 44'\ 6'', 6$.

458. Ἔστω $\widehat{\text{ΙΑ}}=45^\circ$, χ τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν καὶ ρ ἡ ἀκτὶς τῆς γῆς. Ἐπειδή, ὡς ἡ γεωμετρία διδάσκει, $\chi = 2\pi\rho\,(\text{ΟΓ})$ καὶ (ΟΓ) $=\rho\,\text{ημ}\omega=\rho\,\text{ημ}45^\circ$, ἕπεται ὅτι $\chi=2\pi\rho^2\text{ημ}45^\circ$. Ἀλλ' εἶναι γνωστὸν ὅτι $2\pi\rho = 40000000$ καὶ ἑπομένως $\rho=\frac{20\,000\,000}{\pi}$. δι' ὃ $\chi =$



(Σχ. 31)

$$40\,000\,000.\ \frac{20\,000\,000}{\pi}\ \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{40\,000\,000.\ 10\,000\,000.\sqrt{2}}{\pi}$$

$= 1800\ 625$ τετρ. μυριάμετρα.

459. Ἐπειδὴ ἡ τομὴ ΑΗΕΓ (σχ. 19) εἶναι ὀρθογώνιον αἱ διαγώνιοι ΑΕ καὶ ΗΓ εἶναι ἴσαι καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν Ο μέσον ἑκατέρας· τὸ τρίγωνον ἄρα ΟΕΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑκατέρα τῶν παρὰ τὴν βάσιν ΕΓ γωνιῶν αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς $\frac{\text{Α}\hat{\text{Ο}}\text{Γ}}{2}$. Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΓΗΕ λαμβάνομεν (ΕΗ)= (ΕΓ) εφ $\left(\frac{\text{Α}\hat{\text{Ο}}\text{Γ}}{2}\right)$· ἐπειδὴ δὲ (ΕΓ) = 2 καὶ (ΗΕ) $=\sqrt{2}$, αὕτη γίνεται $\sqrt{2} = 2\,\text{εφ}\left(\frac{\text{Α}\hat{\text{Ο}}\text{Γ}}{2}\right)$, ὅθεν $\text{Α}\hat{\text{Ο}}\text{Γ}=70^\circ 31' 42''$.

460. Γνωρίζομεν ὅτι $\text{εφ}^2\left(\frac{\text{Β}}{2}\right)=\frac{1-\text{συν}\text{Β}}{1+\text{συν}\text{Β}}$ καὶ $\text{συν}\text{Β}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}$ $=\frac{2\mu\nu}{\sqrt{(\text{ΑΒ})^2+(\text{ΑΓ})^2}}=\frac{2\mu\nu}{\mu^2+\nu^2}$. Ἄρα $\text{εφ}^2\left(\frac{\text{Β}}{2}\right)=\frac{1-\frac{2\mu\nu}{\mu^2+\nu^2}}{1+\frac{2\mu\nu}{\mu^2+\nu^2}}$

$=\frac{(\mu-\nu)^2}{(\mu+\nu)^2}$, ὅθεν εφ $\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εφ $\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\frac{\nu}{\mu}$.

461. Ἔστωσαν α, $\beta=\alpha+1$, $\gamma=\alpha+2$ αἱ πλευραὶ καὶ $\Gamma=2A$, ὅτε $B=180-3A$. Ἕνεκα τῆς ἀναλογίας τῶν πλευρῶν κτλ. εἶναι $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\alpha+1}{\eta\mu 3A}=\frac{\alpha+2}{\eta\mu 2A}$ ἢ $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\alpha+1}{3\eta\mu A-4\eta\mu^3 A}=\frac{\alpha+2}{2\eta\mu A\sigma\upsilon\nu A}$ ὅθεν $\alpha=\frac{\alpha+1}{3-4\eta\mu^2 A}=\frac{\alpha+2}{2\sigma\upsilon\nu A}$. Ἐκ τῆς $\alpha=\frac{\alpha+2}{2\sigma\upsilon\nu A}$ προκύπτει $\sigma\upsilon\nu A=\frac{\alpha+2}{2\alpha}$, ἐξ ἧς: $\eta\mu^2 A=1-\left(\frac{\alpha+2}{2\alpha}\right)^2$ $=\frac{3\alpha^2-4\alpha-4}{4\alpha^2}$, ἄρα ἡ α′. τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων γίνεται $\alpha=\frac{\alpha+1}{3-\frac{3\alpha^2-4\alpha-4}{\alpha^2}}=\frac{\alpha^2(\alpha+1)}{4(\alpha+1)}=\frac{\alpha^2}{4}$, ὅθεν $\alpha=4$

καὶ ἑπομένως $\beta=5$, $\gamma=6$. Ἤδη ἐκ τῆς ἰσότητος $\sigma\upsilon\nu A=\frac{\alpha+2}{2\alpha}$ προκύπτει $\sigma\upsilon\nu A=\frac{3}{4}$, ἐξ ἧς: $A=41^\circ\,24'\,35''$ καὶ ἑπομένως $B=180^\circ-3A=55^\circ\,46'\,15''$ καὶ $\Gamma=2A=82^\circ\,49'\,10''$.

462. α′.). Γνωρίζομεν ὅτι $\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\chi}{2}\right)=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi}$. ἐπειδὴ δὲ καθ' ὑπόθεσιν εἶναι $\sigma\upsilon\nu\chi=\frac{\alpha}{\beta+\gamma}$, ἕπεται ὅτι $\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\chi}{2}\right)$ $=\frac{1-\frac{\alpha}{\beta+\gamma}}{1+\frac{\alpha}{\beta+\gamma}}=\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\psi}{2}\right)$ $=\frac{\alpha+\gamma-\beta}{\alpha+\beta+\gamma}$ καὶ $\varepsilon\varphi^2\left(\frac{Z}{2}\right)=\frac{\alpha+\beta-\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$. ἄρα $\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\chi}{2}\right)$ $+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\psi}{2}\right)+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{Z}{2}\right)=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}=1$.

β′.) Ἐπειδὴ $\beta+\gamma-\alpha=2(\tau-\alpha)$, $\alpha+\gamma-\beta=2(\tau-\beta)$, $\alpha+\beta-\gamma$ $=2(\tau-\gamma)$ καὶ $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$, αἱ προηγουμένως εὑρεθεῖσαι ἰσότητες γίνονται: $εφ\left(\frac{χ}{2}\right)=\sqrt{\frac{τ-α}{τ}}$, $εφ\left(\frac{ψ}{2}\right)=\sqrt{\frac{τ-β}{τ}}$ καὶ $εφ\left(\frac{Z}{2}\right)=\sqrt{\frac{τ-γ}{τ}}$, ἐξ ὧν προκύπτει ἡ ἰσότης $εφ\left(\frac{χ}{2}\right)$ $εφ\left(\frac{ψ}{2}\right)εφ\left(\frac{Z}{2}\right)=\sqrt{\frac{(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}{τ^3}}$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἐκ τῶν ἰσοτήτων (78) προκύπτει $εφ\left(\frac{A}{2}\right)εφ\left(\frac{B}{2}\right)εφ\left(\frac{Γ}{2}\right)$ $=\sqrt{\frac{(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}{τ^3}}$, ἕπεται ὅτι $εφ\left(\frac{χ}{2}\right)εφ\left(\frac{ψ}{2}\right)εφ\left(\frac{Z}{2}\right)$ $=εφ\left(\frac{A}{2}\right)εφ\left(\frac{B}{2}\right)εφ\left(\frac{Γ}{2}\right)$.

463. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\frac{α}{β}=\frac{ημA}{ημB}$ καὶ $\frac{α}{β}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ ἕπεται ὅτι $\frac{ημA}{ημB}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ $ημA=ημ(B+Γ)$ $=ημ(B+120^\circ)$, ἕπεται ἐκ τῆς προηγουμένης ἰσότητος ὅτι $2ημ(B+120^\circ)=(-1+\sqrt{3})ημB$ ἢ $2(ημ120^\circ συνB$ $+συν120^\circ ημB)=(-1+\sqrt{3})ημB$. Ἐκ ταύτης, ἐπειδὴ $ημ120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ $συν120^\circ=-\frac{1}{2}$ προκύπτει ἡ ἰσότης $\sqrt{3}\,συνB-ημB=-ημB+\sqrt{3}\,ημB$, ὅθεν $ημB=συνB$ καὶ $εφB=1$, ἄρα $B=45^\circ$.

464. Κατὰ τὸν ἐν σελ. 139 (εὐθ. τριγ.) πίνακα, ἵνα ὑπάρχωσι δύο διάφορα τοιαῦτα τρίγωνα πρέπει νὰ εἶναι $α>βημA$. Τοῦ ὅρου τούτου πραγματοποιουμένου ἐκ τῆς $α^2=β^2+γ^2$ $-2βγσυνA$ ἕπεται ἡ ἐξίσωσις $γ^2-(2βσυνA)γ+(β^2-α^2)=0$, ἧς αἱ ῥίζαι εἶναι αἱ τιμαὶ τοῦ γ, ὧν ζητεῖται ἡ διαφορά. Ἂν αὗται κληθῶσι $γ'$ καὶ $γ''$, θὰ εἶναι $γ'+γ''=2βσυνA$ καὶ $γ'γ''=β^2-α^2$, ἄρα $γ'^2+γ''^2+2γ'γ''=4β^2συν^2A$ καὶ $4γ'γ''=4(β^2-α^2)$ καὶ ἑπομένως $(γ'-γ'')^2=4α^2-4β^2ημ^2A$, ὅθεν $γ'-γ''=\pm2\sqrt{α^2-β^2ημ^2A}$. Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῆς παραστάσεως $2\sqrt{α^2-β^2ημ^2A}$ καθιστῶμεν αὐτὴν λογιστὴν διὰ τῶν λογαρίθμων οὕτω: $2\sqrt{α^2-β^2ημ^2A}$ $=2α\sqrt{1-\frac{β^2ημ^2A}{α^2}}$. Ἐπειδὴ δέ, ὡς ὑπετέθη, εἶναι $βημA<α$

δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\frac{6ημA}{α}=ημω$, ὅτε $2\sqrt{α^2-6^2ημ^2A}$ $=2ασυνω$. Ὥστε $γ'-γ''=2ασυνω$.

465. Θέτοντες ἐν τῇ γνωστῇ ἰσότητι $εφ\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{α-6}{α+6}\,σφ\left(\frac{Γ}{2}\right)$ ἀντὶ α τὸ ἴσον του 26 λαμβάνομεν $εφ\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{1}{3}\sqrt{3}$, ὅθεν $\left(\frac{A-B}{2}\right)=30^0$ καὶ $A-B=60$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $A+B=120^0$, ἕπεται ὅτι $A=90^0$ καὶ $B=30^0$.

466. Κατὰ τὴν ἰσότητα $α^2=6^2+γ^2-26γσυνA$ εἶναι $(χ^2+χ+1)^2=(2χ+1)^2+(χ^2-1)^2-2(2χ+1)(χ^2-1)\,συνA$, $2χ^3+χ^2-2χ-1=-(4χ^3-4χ+2χ^2-2)\,συνA$, ὅθεν $συνA=-\frac{2χ^3+χ^2-2χ-1}{2(2χ^3+χ^2 2χ-1)}=-\frac{1}{2}$, ἄρα $A=120^0$.

467. Ἔστω ὅτι $α=2λ$, $6=λ\sqrt{6}$, $γ=(1+\sqrt{3})λ$. Ἐκ τῆς ἰσότητος $α^2=6^2-26γσυνA$ προκύπτει ὅτι $συνA=\frac{6^2+γ^2-α^2}{26γ}$ $=\frac{6λ^2+(1+\sqrt{3})^2λ^2-4λ^2}{2(1+\sqrt{3})\sqrt{6}\,λ^2}=\frac{6+2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+6\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ἄρα $A=45^0$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $συνB=\frac{1}{2}$ καὶ ἑπομένως $B=60^0$, κατ' ἀκολουθίαν $Γ=75^0$.

468. Ἐπειδὴ $2P=\frac{α}{ημA}=\frac{6}{ημB}=\frac{γ}{ημΓ}=\frac{2τ}{ημA+ημB+ημΓ}$, καὶ (§ 85 Γ') $ημA+ημB+ημΓ=4συν\left(\frac{A}{2}\right)συν\left(\frac{B}{2}\right)συν\left(\frac{Γ}{2}\right)$, ἕπεται ὅτι $τ=4Pσυν\left(\frac{A}{2}\right)συν\left(\frac{B}{2}\right)συν\left(\frac{Γ}{2}\right)$.

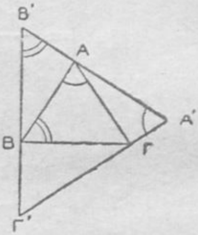
469. Ἐκ τῆς $\frac{α}{ημA}=\frac{6}{ημB}$ προκύπτει ὅτι $αημB=6ημA$ ἢ $αημB=6ημ2B$, ὅθεν $α=26συνB$ καὶ $συνB=\frac{α}{26}=\frac{180}{202{,}0186}$, ἄρα $B=34^0\,14'$. Ἤδη εὑρίσκομεν τὴν $A=2B$ καὶ ἡ ἐπίλυσις περατοῦται εὐκόλως.

470. Ἐκ τῆς $\frac{α-6}{α+6}=\frac{εφ\left(\frac{A-B}{2}\right)}{εφ\left(\frac{A+B}{2}\right)}$, ἕπεται ὅτι $εφ\left(\frac{A+B}{2}\right)$

$=\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\,\varepsilon\varphi\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{314}{20}\,\varepsilon\varphi\,(7^0\,52'\,44'',\,66)$, ἐξ ἧς εὑρίσκεται τὸ ἄθροισμα $A+B$, ἐξ οὗ καὶ τῆς διαφορᾶς $A-B$ εὑρίσκονται αἱ γωνίαι A καὶ B καὶ ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὰ γνωστά.

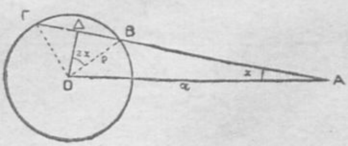
471. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′ Β′ Γ′ εἶναι ὅμοια εἶναι $\frac{(A'B'\Gamma')}{(AB\Gamma)}=\frac{(B'\Gamma')^2}{(B\Gamma)^2}$. (1)

Ἀλλὰ $B'\Gamma'=B'B+B\Gamma'$, ἐκ δὲ τῶν ὀρθ. τριγώνων $AB'B$, $B\Gamma\Gamma'$ ἕπεται ὅτι α′) $(AB)=(BB')\,\eta\mu B'=(BB')\,\eta\mu B$, ὅθεν $(BB')=\frac{(AB)}{\eta\mu B}$ καὶ β′.) $(B\Gamma')=(B\Gamma)\,\sigma\varphi\Gamma$, ἄρα $B'\Gamma'=\frac{(AB)}{\eta\mu B}+(B\Gamma)\sigma\varphi\Gamma$, ἤ, ἐπειδὴ $(AB)=\frac{(B\Gamma)\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$, $B'\Gamma'=\frac{(B\Gamma)\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A\,\eta\mu B}+(B\Gamma)\,\sigma\varphi\Gamma$, ὅθεν $\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}=\frac{\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A\eta\mu B}+\sigma\varphi\Gamma$ $=\frac{\eta\mu(A+B)}{\eta\mu A\eta\mu B}+\sigma\varphi\Gamma=\frac{\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu A\eta\mu B}{\eta\mu A\eta\mu B}+\sigma\varphi\Gamma=\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma$. Ἄρα ἡ ἰσότης (1) γίνεται $\frac{(A'B'\Gamma')}{(AB\Gamma)}=(\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma)^2$.



(Σχ. 32)

472. Ἔστω ΑΒΓ ἡ ζητουμένη τέμνουσα, δι' ἣν δηλ. εἶναι $B\hat{O}\Gamma=4\chi$, ἄρα $B\hat{O}\Delta=2\chi$. Ἐκ τῶν τριγώνων ΟΔΑ καὶ ΟΔΒ εὑρίσκομεν $(O\Delta)=(OA)\,\eta\mu\chi=\alpha\eta\mu\chi$ καὶ $(O\Delta)=\rho\sigma\upsilon\nu 2\chi$, ἄρα $\alpha\eta\mu\chi=\rho\sigma\upsilon\nu 2\chi$ ἢ $\alpha\eta\mu\chi=\rho(1-2\eta\mu^2\chi)$, ὅθεν $2\rho\eta\mu^2\chi+\alpha\eta\mu\chi-\rho=0$, ἐξ ἧς $\eta\mu\chi=\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+8\rho^2}}{4\rho}$. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν δύο ριζῶν ταύτης εἶναι $-\frac{1}{2}$ ἤτοι ἀρνητικόν, αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι ἑτερόσημοι· ἐπειδὴ τὸ τριώνυμον $2\rho\eta\mu^2\chi+\alpha\eta\mu\chi-\rho$ διὰ



(Σχ. 33)

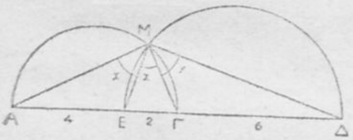
$\eta\mu\chi = -1$ γίνεται $\rho - \alpha$ ήτοι ἀριθμὸς ἀρνητικός, ὁ -1 εἶναι μεταξὺ τῶν ριζῶν, ἤτοι ἡ ἀρνητικὴ ρίζα εἶναι μικροτέρα τοῦ -1 καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἀπαράδεκτος. Τὸ αὐτὸ τριώνυμον διὰ $\eta\mu\chi = \frac{\rho}{\alpha}$ γίνεται $\frac{2\rho^3}{\alpha^2} > 0$, ἄρα ὁ $\frac{\rho}{\alpha}$ κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν, ἤτοι $\eta\mu\chi < \frac{\rho}{\alpha}$, ἤτοι $\eta\mu\chi < 1$ καὶ $\alpha\eta\mu\chi = (\text{Ο}\Delta) < \rho$. Ἡ θετικὴ ἄρα ρίζα εἶναι παραδεκτή. Πρὸς εὕρεσιν ταύτης δέον νὰ καταστήσωμεν τὸ β'. μέλος τῆς ἰσότητος $\eta\mu\chi = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8\rho^2}}{4\rho}$ λογιστὸν διὰ τῶν λογαρίθμων.

Τοῦτο κατορθοῦμεν οὕτω : $\eta\mu\chi = \dfrac{\alpha\left(-1 + \sqrt{1 + \dfrac{8\rho^2}{\alpha^2}}\right)}{4\rho}$.

Θέτοντες δὲ $\frac{8\rho^2}{\alpha^2} = \varepsilon\varphi^2\omega$, εὑρίσκομεν

$$\eta\mu\chi = \frac{\alpha(-1 + \sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\omega})}{4\rho} = \frac{\alpha\left(-1 + \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}\right)}{4\rho} = \frac{\alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\omega)}{4\rho\sigma\upsilon\nu\omega}$$

$$= \frac{2\alpha\eta\mu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{4\rho\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\alpha\eta\mu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2\rho\sigma\upsilon\nu\omega}.$$



(Σχ. 34)

473. Ἐὰν Μ εἶναι ἓν τῶν ζητουμένων σημείων, ἐκ τῶν τριγώνων ΑΜΒ, ΑΜΓ λαμβάνομεν $\frac{\text{ΑΒ}}{\eta\mu\chi} = \frac{\text{ΜΒ}}{\eta\mu\text{Α}}$, $\frac{\text{ΑΓ}}{\eta\mu 2\chi} = \frac{\text{ΜΓ}}{\eta\mu\text{Α}}$, ὅθεν διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη προκύπτει ἡ ἰσότης $\frac{(\text{ΑΒ})\eta\mu(2\chi)}{(\text{ΑΓ})\eta\mu\chi} = \frac{(\text{ΜΒ})}{(\text{ΜΓ})}$ (1)

Ὁμοίως ἐκ τῶν τριγώνων ΓΜΔ, ΜΒΔ εὑρίσκομεν $\frac{\Gamma\Delta}{\eta\mu\chi} = \frac{\text{ΜΓ}}{\eta\mu\Delta}$, $\frac{\text{Β}\Delta}{\eta\mu 2\chi} = \frac{\text{ΜΒ}}{\eta\mu\Delta}$, ὅθεν $\frac{(\Gamma\Delta)\eta\mu 2\chi}{(\text{Β}\Delta)\eta\mu\chi} = \frac{\text{ΜΓ}}{\text{ΜΒ}}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) ἕπεται ὅτι $\frac{(\text{ΑΒ})\eta\mu 2\chi}{(\text{ΑΓ})\eta\mu\chi} = \frac{(\text{Β}\Delta)\eta\mu\chi}{(\Gamma\Delta)\eta\mu 2\chi}$ ἢ $\frac{2(\text{ΑΒ})\sigma\upsilon\nu\chi}{(\text{ΑΓ})} = \frac{(\text{Β}\Delta)}{2(\Gamma\Delta)\sigma\upsilon\nu\chi}$, ἄρα $\sigma\upsilon\nu^2\chi = \frac{(\text{ΑΓ})(\text{Β}\Delta)}{4(\text{ΑΒ})(\Gamma\Delta)} = \frac{6.8}{4.4.6}$

$=\frac{1}{2}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν συνχ $=\frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ $\chi=45^0$.

Ὥστε $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}\Gamma=90^0$ καὶ $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{M}}\Delta=90^0$· τὸ Μ ὅθεν κεῖται ἐπὶ τῶν περιφερειῶν, αἵτινες ἔχουσι διαμέτρους τὰς ΑΓ καὶ ΒΔ.

474. Ἔστωσαν $-\chi''$, $-\chi'$, χ', χ'' αἱ ρίζαι τῆς ἐν λόγῳ διτετραγώνου ἐξισώσεως. Ἵνα αὗται ἀποτελῶσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $-\chi'-(-\chi'')=\chi'-(-\chi')=\chi''-\chi'$ ἢ $\chi''-\chi'=2\chi'=\chi''-\chi'$, ὅθεν $3\chi'=\chi''$. Ἐπειδὴ δὲ χ'^2 καὶ χ''^2 εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\psi^2+\frac{1}{3}$ ημα. $\psi+\frac{1}{200}$ συν $\frac{\pi}{3}=0$, ἕπεται ὅτι $\chi'^2+\chi''^2=-\frac{1}{3}$ ημα καὶ $\chi'^2\,\chi''^2=\frac{1}{200}$ συν $\frac{\pi}{3}=\frac{1}{400}$. Ἐὰν δὲ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι $3\chi'=\chi''$, ἕπεται ὅτι $10\,\chi'^2=-\frac{1}{3}$ ημα καὶ $9\chi'^2.\,\chi'^2=\frac{1}{400}$. Ἐκ τῆς α' τούτων προκύπτει ὅτι $\chi'^2=-\frac{1}{30}$ ημα, ὅτι ἡ β' γίνεται $9.\frac{1}{900}$ ημ^{2}α $=\frac{1}{400}$, ἐξ ἧς: ημ^{2}α $=\frac{1}{4}$, ἄρα ημα $=\pm\frac{1}{2}$.

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς $\chi'^2=-\frac{1}{30}$ ημα προκύπτει ὅτι ημα<0, ἕπεται παραδεκτὴ εἶναι μόνον ἡ τιμὴ ημα $=-\frac{1}{2}$.

475. Ἔστω Ρ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας καὶ υ τὸ ὕψος τοῦ τμήματος, ὅπερ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν χορδὴν τόξον 20^0 τῆς περιφερείας ἀκτῖνος Ρ. Ἂν κληθῇ Σ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας καὶ Τ ὁ τοῦ σφ. τμήματος, θὰ εἶναι $\Sigma=\frac{4}{3}\pi \mathrm{P}^3$ καὶ $\mathrm{T}=\frac{1}{2}\pi\upsilon\,(\mathrm{P}^2+\mathrm{P}^2-\upsilon^2)+\frac{1}{6}\pi\upsilon^3=\pi\upsilon\mathrm{P}^2-\frac{1}{3}\pi\upsilon^3$, ἄρα $\frac{\Sigma}{\mathrm{T}}=\frac{4\mathrm{P}^3}{3\mathrm{P}^2\upsilon-\upsilon^3}$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\upsilon}{2}=\mathrm{P}$ημ$10^0$, ἕπεται ὅτι $\upsilon=2\mathrm{P}$ημ10^0 καὶ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται : $\frac{\Sigma}{\mathrm{T}}=\frac{4\mathrm{P}^3}{3\mathrm{P}^2.2\mathrm{P}\text{ημ}10^0-8\mathrm{P}^3\text{ημ}^3 10^0}=$
$\frac{2}{3\text{ημ}10^0-4\text{ημ}^3 10^0}=\frac{2}{\text{ημ}30^0}=4.$

476. Γνωρίζομεν ὅτι $\eta\mu A+\eta\mu B=2\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-B}{2}\right)$ καὶ $\eta\mu\Gamma+\eta\mu\Delta=2\eta\mu\left(\frac{\Gamma+\Delta}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma-\Delta}{2}\right)$. Ἐπειδὴ δὲ $A+B+\Gamma+\Delta=2\pi$, ἕπεται ὅτι $\frac{A+B}{2}+\frac{\Gamma+\Delta}{2}=\pi$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\eta\mu\left(\frac{A+\Delta}{2}\right)=\eta\mu\left(\frac{\Gamma+\Delta}{2}\right)$. Καλοῦντες ὅθεν π τὴν δοθεῖσαν παράστασιν θέλομεν ἔχει :

$$\Pi=2\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right)\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-B}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma-\Delta}{2}\right)\right].$$

Ἀλλ' ἡ ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν ποσότης εἶναι ἴση πρὸς $2\sigma\upsilon\nu\frac{A+\Gamma-B-\Delta}{4}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A+\Delta-B-\Gamma}{4}$. καὶ ἐπειδὴ $A+\Gamma=2\pi-B-\Delta$ καὶ $A+\Delta=2\pi-B-\Gamma$, ἕπεται $A+\Gamma-B-\Delta=2\pi-2(B+\Delta)$, $A+\Delta-B-\Gamma=2\pi-2(B+\Gamma)$, ὅθεν $\frac{A+\Gamma-B-\Delta}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{B+\Delta}{2}$, $\frac{A+\Delta-B-\Gamma}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{B+\Gamma}{2}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\frac{A+\Gamma-B-\Delta}{4}=\eta\mu\left(\frac{B+\Delta}{2}\right)$, $\sigma\upsilon\nu\frac{A+\Delta-B-\Gamma}{4}=\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)$. Ἄρα

$$\Pi=4\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{B+\Delta}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right).$$

Σημ. Συνδυάζοντες ἄλλως τὰ τόξα A, B, Γ, Δ εὑρίσκομεν τὰς ἀκολούθους ἔτι μορφὰς τῆς εἰρημένης παραστάσεως :

$$4\,\eta\mu\left(\frac{A+\Gamma}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\Delta+\Gamma}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right),\ 4\eta\mu\left(\frac{A+\Delta}{2}\right)\times\eta\mu\left(\frac{B+\Delta}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\Gamma+\Delta}{2}\right),4\eta\mu\left(\frac{\Delta+A}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\Gamma+A}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{B+A}{2}\right).$$

477. Ἐπειδὴ $\chi^3=\varkappa^3\eta\mu\omega+6^3\sigma\upsilon\nu\omega=\alpha^3\left(\eta\mu\omega+\frac{6^3}{\alpha^3}\sigma\upsilon\nu\omega\right)$, ἐὰν θέσωμεν $\frac{6^3}{\alpha^3}=\varepsilon\varphi\varphi$ εὑρίσκομεν ὅτι $\varphi=53^0\,9'57''$ καὶ $\chi^3=\alpha^3\left(\eta\mu\omega+\frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\sigma\upsilon\nu\omega\right)=\frac{\alpha^3\eta\mu(\omega+\varphi)}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$, ὅθεν $\chi=12952,9$.

478. Προφανῶς εἶναι $\eta\mu x = \frac{\eta\mu(2\alpha+2\beta-\gamma)}{\eta\mu(2\alpha+2\beta-\delta)} = \frac{\eta\mu[2(\alpha+\beta)-\gamma]}{\eta\mu[2(\alpha+\beta)-\delta]}$
$= \frac{\eta\mu 2(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\gamma - \sigma\upsilon\nu 2(\alpha+\beta)\eta\mu\gamma}{\eta\mu 2(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\delta - \sigma\upsilon\nu 2(\alpha+\beta)\eta\mu\delta}$. Διαιροῦντες δὲ ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ β΄. μέλους διὰ $\sigma\upsilon\nu 2(\alpha+\beta)$ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\eta\mu x = \frac{\varepsilon\varphi 2(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\gamma - \eta\mu\gamma}{\varepsilon\varphi 2(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\delta - \eta\mu\delta} = \frac{\sigma\upsilon\nu\gamma - \frac{\eta\mu\gamma}{\varepsilon\varphi 2(\alpha+\beta)}}{\sigma\upsilon\nu\delta - \frac{\eta\mu\delta}{\varepsilon\varphi 2(\alpha+\beta)}}. \quad (1).$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = 1$, ἕπεται ὅτι $\alpha+\beta = 45^\circ$, $2(\alpha+\beta) = 90^\circ$ καὶ $\varepsilon\varphi 2(\alpha+\beta) = \infty$, ἡ δὲ ἰσότης (1) γίνεται $\eta\mu x = \frac{\sigma\upsilon\nu\gamma}{\sigma\upsilon\nu\delta}$. Ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\gamma}}$, $\sigma\upsilon\nu\delta = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\delta}}$, ἕπεται ὅτι : $\eta\mu x = \sqrt{\frac{1+\varepsilon\varphi^2\delta}{1+\varepsilon\varphi^2\gamma}} =$

$$\sqrt{\frac{1+1+2-2\sqrt{2}}{1+1+2+2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{4-2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$= \sqrt{2}\,(1-\sigma\upsilon\nu 45^\circ) = 2\sqrt{2}\,\eta\mu^2\left(\frac{45^\circ}{2}\right)$, ἐξ ἧς $x = 24^\circ\, 28'\, 10''$.

479. Ἐὰν ΑΔ εἶναι τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ ὕψος, θὰ εἶναι καθ' ὑπόθεσιν $\frac{(AB\Gamma)}{(AB\Delta)} = \frac{(AB\Delta)}{(A\Delta\Gamma)}$. Ἐπειδὴ δὲ $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \times (B\Gamma)(A\Delta)$, $(AB\Delta) = \frac{1}{2}(B\Delta)(A\Delta)$, $(A\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}(\Delta\Gamma)(A\Delta)$, ἡ προειρημένη ἰσότης γίνεται $\frac{(B\Gamma)}{(B\Delta)} = \frac{(B\Delta)}{(\Delta\Gamma)}$, ὅθεν $(B\Delta)^2 = (B\Gamma)(\Delta\Gamma)$ καὶ ἑπομένως $(B\Delta)^2 = (A\Gamma)^2$, ἄρα $(B\Delta) = (A\Gamma)$. Ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων $(B\Delta) = (AB)\,\sigma\upsilon\nu B$ καὶ $(A\Gamma) = AB\varepsilon\varphi B$, ἕπεται ὅτι $(AB)\sigma\upsilon\nu B = (AB)\varepsilon\varphi B$, ὅθεν $\sigma\upsilon\nu^2 B = \eta\mu B$ ἢ $1-\eta\mu^2 B = \eta\mu B$ ἢ $\eta\mu^2 B + \eta\mu B - 1 = 0$, ἐξ ἧς $\eta\mu B = \frac{-1+\sqrt{1+4}}{2}$.

Ἐὰν δὲ θέσωμεν $εφ^2ω = 4$, αὕτη γίνεται $ημΒ = \dfrac{-1+\dfrac{1}{συνω}}{2}$

$= \dfrac{1-συνω}{2συνω} = \dfrac{ημ^2\left(\dfrac{ω}{2}\right)}{συνω}$. Ὁριζομένης οὕτω τῆς Β ὁρίζεται εἶτα καὶ ἡ Γ.

480. Ἐπειδὴ $συν(χ+30^0)-συν(χ+45^0)=2ημ\left(χ+\dfrac{75^0}{2}\right)ημ\left(\dfrac{15^0}{2}\right)$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $2ημ\left(χ+\dfrac{75^0}{2}\right)ημ\left(\dfrac{15^0}{2}\right)=ημ15^0$ $=2ημ\left(\dfrac{15^0}{2}\right)συν\left(\dfrac{15^0}{2}\right)$, ὅθεν $ημ\left(χ+\dfrac{75^0}{2}\right)=συν\left(\dfrac{15^0}{2}\right)$ $=ημ\left(90^0-\dfrac{15^0}{2}\right)$, ἄρα $χ+\dfrac{75^0}{2}+90^0-\dfrac{15^0}{2}=(2Κ+1)\times$ 180^0 καὶ $χ+\dfrac{75^0}{2}-90^0+\dfrac{15^0}{2}=2Κ.180^0$, ὅθεν $χ=(2Κ+1)\times$ 180^0-120^0 καὶ $χ=2Κ.\,180^0+45^0$.

481. Ἐπειδὴ $εφ45^0 = 1$, ἡ ἐξίσωσις γράφεται καὶ οὕτω: $ημχ+\dfrac{ημ45^0}{συν45^0}συνχ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, ὅθεν $\dfrac{2ημ(χ+45^0)}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, ἄρα $ημ(χ+45^0)=\dfrac{1}{2}=ημ(30^0)$ καὶ ἑπομένως $χ+75^0=$ $(2Κ+1)\,180^0$ καὶ $χ+15^0=2Κ.\,180^0$, ὅθεν $χ=(2Κ+1).$ 180^0-75^0 καὶ $χ=2Κ.\,180^0-15^0$.

482. Ἐπειδὴ $συν2χ=συν^2χ-ημ^2χ=(συνχ+ημχ)(συνχ-ημχ)$, ἡ ἐξίσωσις καταντᾷ $συνχ+ημχ=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. Ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν $ημ2χ+1$ $=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ὅθεν $ημ2χ=ημ60^0$, ἄρα $2χ=60^0$ καὶ $χ=30^0$.

483. Ἐπειδὴ $εφ2χ=\dfrac{2εφχ}{1-εφ^2χ}$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\dfrac{2εφχ}{1-εφ^2χ}$ $=3εφχ$, ὅθεν $εφχ=0$ καὶ $εφχ=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}=εφ(\pm30^0)$, αἵτινες λύονται εὐκόλως.

484. Διαιρουμένων διὰ 4 ἀμφοτέρων τῶν μελῶν προκύπτει ἡ ἐξίσω-

σις $\eta\mu\chi + \frac{3}{4}\,\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1}{2}$. Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{4}$, αὕτη γίνεται $\frac{\eta\mu(\chi+\omega)}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{1}{2}$, ὅθεν $\eta\mu(\chi+\omega) = \frac{1}{2}\,\sigma\upsilon\nu\omega$.

Ἐπειδὴ δὲ $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\omega}} = \frac{4}{5}$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\eta\mu(\chi+\omega) = \frac{2}{5}$, ἐξ ἧς ὁρίζεται τὸ ἄθροισμα $\chi+\omega$· ὁριζομένης δὲ καὶ τῆς ω ἐκ τῆς $\varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{4}$ εὑρίσκεται εἶτα καὶ ὁ χ.

185. Μετασχηματίζοντες τὸ α΄. μέλος εἰς γινόμενον θέτομεν τὴν ἐξίσωσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν $2\sigma\upsilon\nu(\chi+15^0)\,\sigma\upsilon\nu 15^0 = \frac{3}{2}$. (1).

Ἐπειδὴ δὲ $\sigma\upsilon\nu 15^0 = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 30^0}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\sqrt{2+\sqrt{3}}\;\sigma\upsilon\nu(\chi+15^0) = \frac{3}{2}$, ἐξ ἧς

$$\sigma\upsilon\nu\,(\chi+15^0) = \frac{3}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\sqrt{2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sigma\upsilon\nu 30^0$, αὕτη γίνεται $\sigma\upsilon\nu\,(\chi+15^0) = \frac{3}{2}\sqrt{2(1-\sigma\upsilon\nu 30^0)} = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{4\eta\mu^2 15^0} = 3\eta\mu 15^0$, ὅθεν $\sigma\upsilon\nu\,(\chi+15^0) = \sigma\upsilon\nu\,(39^0\;3'\;43'',63)$ καὶ ἑπομένως $\chi = 2K\times 180^0 - 15 \pm (39^0\;3'\;43'',63)$.

186. Προφανῶς εἶναι $\varepsilon\varphi\left(\frac{\chi}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{\eta\mu\left(\frac{\chi}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\psi}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\psi}{2}\right)} =$

$$\frac{2\eta\mu\left(\frac{\chi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi}{2}\right)\cdot 2\eta\mu\left(\frac{\psi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\psi}{2}\right)}{2\,\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\chi}{2}\right)\cdot 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\psi}{2}\right)} = \frac{\eta\mu\chi\;\eta\mu\psi}{(1+\sigma\upsilon\nu\chi)(1+\sigma\upsilon\nu\psi)}$$

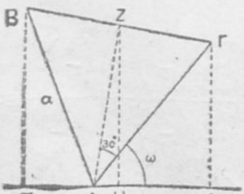
$$= \frac{\eta\mu\alpha\;\eta\mu\beta\;\eta\mu^2\gamma}{(1\pm\sqrt{1-\eta\mu^2\chi})(1\pm\sqrt{1-\eta\mu^2\psi})} =$$

$\dfrac{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\eta\mu^2\gamma}{(1\pm\sqrt{1-\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\gamma})(1\pm\sqrt{1-\eta\mu^2\beta\eta\mu^2\gamma})}$. Ἐπειδὴ δέ, ἐξ ὑποθέσεως εἶναι εφ $\left(\dfrac{\chi}{2}\right)$ εφ $\left(\dfrac{\psi}{2}\right)=$ εφ $\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)$, ἕπεται ὅτι:

$$\text{εφ}\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\eta\mu^2\gamma}{(1\pm\sqrt{1-\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\gamma})\,(1\pm\sqrt{1-\eta\mu^2\beta\eta\mu^2\gamma})}.$$

487. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=2P$ προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες $\eta\mu^2 A=\dfrac{\alpha^2}{4P^2}$, $\eta\mu^2 B=\dfrac{\beta^2}{4P^2}$, καὶ $\eta\mu^2\Gamma=\dfrac{\gamma^2}{4P^2}$, ὧν ἕνεκα ἡ ἰσότης $\eta\mu^2 A=\eta\mu^2 B+\eta\mu^2\Gamma$ γίνεται $\dfrac{\alpha^2}{4P^2}=\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{4P^2}$, ὅθεν $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, ἐξ ἧς δηλοῦται ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

488. Ἔστω ΔΕ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ καὶ διαιροῦσα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα, ἤτοι (ΑΒΓ) $=$ 2(ΑΔΕ). Ἐπειδὴ (ΑΒΓ)$=\dfrac{1}{2}$ (ΑΒ)(ΑΓ)ημΑ καὶ (ΑΕΔ)$=\dfrac{1}{2}\times$ (ΑΔ)(ΔΕ) ἕπεται ὅτι (ΔΕ)$=\dfrac{(AB)(A\Gamma)\eta\mu A}{(A\Delta)}$. Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΔΕ προκύπτει ὅτι (ΑΔ) $=$ (ΔΕ) σφΑ καὶ διὰ τοῦτο ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $(\Delta E)^2=\dfrac{(AB)(A\Gamma)\eta\mu^2 A}{\sigma\upsilon\nu A}$ $=$ (ΑΒ)(ΑΓ) εφ ΑημΑ, δι' ἧς εὐκόλως ὁρίζεται ἡ ΔΕ.



(Σχ. 35)

489. Καλοῦντες χ τὸν ζητούμενον ὄγκον, ἔχομεν, καθ' ἃ ἡ γεωμετρία διδάσκει τὴν ἰσότητα χ $=$ (ἐπιφ. ΒΓ).$\dfrac{1}{3}$ (ΑΖ). (1). Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΒΓ γράφει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κολ. κώνου, ὃν γράφει τὸ τραπέζιον ΒΕΓΔ, ἕπεται ὅτι ἐπιφ. (ΒΓ)$=\dfrac{(B\Gamma)}{2}$ [2π (ΒΕ) $+$ 2π (ΓΔ)] $=$ (ΒΓ) π [(ΒΕ) $+$ (ΓΔ)] $=$ 2π(ΒΓ)(ΖΗ), [διότι τοῦ Ζ ὄντος μέσου τῆς ΒΓ εἶναι 2(ΖΗ)$=$(ΒΕ)$+$(ΓΔ)]. Ἐπειδὴ δὲ (ΒΓ) $=$ α, (ΖΗ) $=$ (ΑΖ) ημ(30° $+$ ω) καὶ (ΑΖ)$=\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{3}$.

ἕπεται ὅτι ἐπιφ $(ΒΓ) = 2πα.\frac{α}{2}\sqrt{3}$ ημ $(30^0+ω) = πα^2\sqrt{3}$ $ημ(30^0+ω)$. Ὥστε ἡ ἰσότης(1) γίνεται $χ = \frac{1}{3}πα^2\sqrt{3} \times ημ(30^0+ω)\frac{α}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}πα^3 ημ(30^0+ω)$. Αὕτη διὰ $α = 730$ καὶ $ω = 18^0$ γίνεται $χ = \frac{1}{2}π730^3\ ημ48^0$, ὅθεν εὐκόλως προσδιορίζεται ὁ χ.

490. Ἂν τεθῇ $(ΕΒ) = χ$, θὰ εἶναι $(ΑΕ) = (α-χ)$ καὶ $εφ(Α\hat{Ε}Γ) = \frac{γ}{α-χ}$, $εφ(Δ\hat{Ε}Β) = \frac{δ}{χ}$. Ἀλλ' ἐκ τῆς $(Α\hat{Ε}Γ) = 2(Δ\hat{Ε}Β)$ προκύπτει ὅτι $εφ(Α\hat{Ε}Γ) = εφ2(Δ\hat{Ε}Β) = \frac{2εφ(Δ\hat{Ε}Β)}{1-εφ^2(Δ\hat{Ε}Β)}$ ἢ

$$\frac{γ}{α-χ} = \frac{2\frac{δ}{χ}}{1-\frac{δ^2}{χ^2}},\ \text{ἐξ ἧς}\ \frac{γ}{α-χ} = \frac{2δχ}{χ^2-δ^2},\ \text{ὅθεν}$$

$(γ+2δ)χ^2 - 2αδχ - γδ^2 = 0$, ἐξ προκύπτει ἡ τιμὴ τοῦ χ. Εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ εἶναι $α > χ > 0$ καὶ ἐπομένως ἐκ τῶν δύο ἑτεροσήμων καὶ πραγματικῶν ριζῶν τῆς εὑρεθείσης ἐξισώσεως δέον νὰ ληφθῇ ἡ θετική, ἂν εἶναι αὕτη μικροτέρα τοῦ α. Ἵνα δὲ ὁ θετικὸς ἀριθμὸς α εἶναι μεγαλύτερος τῆς θετικῆς ρίζης, πρέπει οὗτος νὰ κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν, ἤτοι $(γ+2δ)α^2 - 2α^2δ - γδ^2 > 0$ ἢ $γ(α^2-δ^2) > 0$, ὅθεν $α > δ$.

491. Ἐπειδὴ $Υ_α = βημΓ = γημΒ$ ἕπεται ὅτι $β = \frac{Υ_α}{ημΓ}$, $γ = \frac{Υ_α}{ημΒ}$ (1). Ἕνεκα τούτων εἶναι $2λ = β+γ = Υ_α\left(\frac{1}{ημΓ}+\frac{1}{ημΒ}\right)$, ὅθεν $\frac{2λ}{Υ_α} = \frac{ημΒ+ημΓ}{ημΒημΓ}$ (2). Ἐπειδὴ δὲ $(ΜΔ) = (ΓΔ) - (ΓΜ)$ καὶ $(ΜΔ) = (ΜΒ) - (ΔΒ)$, ἕπεται ὅτι $2(ΜΔ) = (ΓΔ) - (ΔΒ)$ ἢ $2\sqrt{μ^2_α - Υ^2_α} = Υ_α(σφΓ - σφΒ)$, ὅθεν $σφΓ - σφΒ = \frac{2δ}{Υ_α}$, ἂν τεθῇ $\sqrt{μ^2_α - Υ^2_α} = δ$ χάριν συντομίας. Ἐκ ταύτης τῆς (2)

προκύπτει ὅτι $\frac{\lambda}{\delta} = \frac{\eta\mu B + \eta\mu \Gamma}{\eta\mu(B-\Gamma)} = \frac{\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}$,

ὅθεν $\frac{\lambda+\delta}{\lambda-\delta} = \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}$. (3)

Ἐπειδὴ $\eta\mu B = \frac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right)}{1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{B}{2}\right)}$ καὶ $\eta\mu\Gamma = \frac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}{1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}$ ἡ ἰσότης $\frac{2\lambda}{\Upsilon_\alpha} = \frac{1}{\eta\mu\Gamma} + \frac{1}{\eta\mu B}$ γίνεται $\frac{2\lambda}{\Upsilon_\alpha} = \frac{1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}{2\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)} + \frac{1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{B}{2}\right)}{2\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right)}$.
Αὕτη μετὰ τῆς (3) ἀποτελεῖ σύστημα, ἐν ᾧ ἄγνωστοι εἶναι $\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right)$ καὶ $\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$, ὅπερ λύομεν οὕτω. Θέτοντες τὴν (3) ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right)}{\lambda+\delta} = \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}{\lambda-\delta}$ καὶ καλοῦντες ν ἕκαστον τῶν μελῶν αὐτῆς λαμβάναν $\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right) = (\lambda+\delta)\nu$, $\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = (\lambda-\delta)\nu$. (4). Θέτοντες δὲ τὰς τιμὰς ταύτας ἐν τῇ ἑτέρᾳ ἐξισώσει τοῦ συστήματος εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\Upsilon_\alpha(\lambda^2-\delta^2)\nu^2 - 2(\lambda^2-\delta^2)\nu + \Upsilon_\alpha = 0$, ἐξ ἧς εὑρίσκεται ὁ ν, μεθ' ὃ ἐκ τῶν (4) αἱ B καὶ Γ· ἐκ τούτων εὑρίσκεται ἡ A καὶ εἶτα ἐκ τῶν (1) αἱ πλευραὶ β καὶ γ. Εἶτα ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὰ γνωστά.

492. Ἔστωσαν ΑΔ, ΒΕ καὶ ΓΖ τὰ ὕψη τριγώνου ΑΒΓ καὶ Ο τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον. Γνωρίζομεν ὅτι τὰ ὕψη ταῦτα διχοτομοῦσι τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, ἤτοι $Z\widehat{\Delta}O = O\widehat{\Delta}E$, $Z\widehat{E}O = O\widehat{E}\Delta$, $E\widehat{Z}O = O\widehat{Z}\Delta$. Ἐπειδὴ δὲ ἕνεκα τῶν ἐγγραψίμων τετραπλεύρων ΒΖΟΔ, ΓΔΟΕ εἶναι $Z\widehat{B}O = Z\widehat{\Delta}O$, $O\widehat{\Delta}E = O\widehat{\Gamma}E$ ὡς οὖσαι ἀμφότεραι συμπληρωματικαὶ τῆς A, ἕπεται ὅτι $Z\widehat{\Delta}E = 2(Z\widehat{B}O) = 2(90^0 - A) = 180^0 - 2A$. Ὁμοίως

ἀποδεικνύεται ὅτι $\widehat{ZE\Delta}=180^\circ-2B$, $\widehat{EZ\Delta}=180^\circ-2\Gamma$. Αἱ πλευραὶ τοῦ ΔΕΓ ὑπολογίζονται οὕτω: Ἐκ τοῦ ΔΕΓ προκύπτει ὅτι $\frac{\Delta E}{\eta\mu\Gamma}=\frac{\Delta\Gamma}{\eta\mu\Delta\widehat{E}\Gamma}$. Ἐπειδὴ δὲ $\Delta\widehat{E}\Gamma=90^\circ-O\widehat{E}\Delta$ $=90^\circ-(90^\circ-B)=B$ καὶ $(\Delta\Gamma)=(A\Gamma)$ συνΓ, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\frac{(\Delta E)}{\eta\mu\Gamma}=\frac{(A\Gamma)\,\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu B}$, ὅθεν $(\Delta E)=\frac{\eta\mu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu B}$. ἐπειδὴ δὲ $\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$, αὕτη γίνεται $(\Delta E)=\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $(\Delta Z)=\beta\sigma\upsilon\nu B$, $(ZE)=\alpha\sigma\upsilon\nu A$.

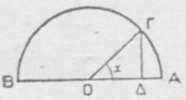
493. Ἐπειδὴ $\sigma\varphi\,(45^\circ-B)=\frac{1}{\varepsilon\varphi(45^\circ-B)}=\frac{1+\varepsilon\varphi B}{1-\varepsilon\varphi B}$ ἡ καθ' ὑπόθεσιν ἀληθεύουσα ἰσότης γίνεται $1+\frac{1+\varepsilon\varphi B}{1-\varepsilon\varphi B}=\frac{2}{1-\sigma\varphi\Gamma}$ ἢ $\frac{2}{1-\varepsilon\varphi B}=\frac{2}{1-\sigma\varphi\Gamma}$, ὅθεν $\varepsilon\varphi B=\sigma\varphi\Gamma$, ἄρα $B+\Gamma=90^\circ$ καὶ ἑπομένως $A=90^\circ$.

494. Ἐπειδὴ $\beta=(A\Delta)+(\Delta\Gamma)$, $(A\Delta)=(B\Delta)\sigma\varphi A$, $(\Delta\Gamma)=(B\Delta)\sigma\varphi\Gamma$, ἕπεται ὅτι $\beta=(B\Delta)(\sigma\varphi A+\sigma\varphi\Gamma)=(B\Delta)\frac{\eta\mu(A+\Gamma)}{\eta\mu A\eta\mu\Gamma}$ (ἄσκ. 190). Ἐὰν δὲ τεθῇ $(\Delta M)=\delta$ καὶ γωνία $\Delta BM=\omega$, θὰ εἶναι $\delta=(B\Delta)\varepsilon\varphi\omega$, ὅθεν $(B\Delta)=\frac{\delta}{\varepsilon\varphi\omega}$. ἡ προηγουμένη ὅθεν ἰσότης γίνεται $\beta=\frac{\delta\eta\mu(A+\Gamma)}{\varepsilon\varphi\omega\eta\mu A\eta\mu\Gamma}=\frac{\delta\eta\mu B}{\varepsilon\varphi\omega\eta\mu A\eta\mu\Gamma}$. Ἐπειδὴ δὲ $(BM)=\frac{\delta}{\eta\mu\omega}$. $\alpha=\frac{\beta\eta\mu A}{\eta\mu B}=\frac{\delta}{\varepsilon\varphi\omega\eta\mu\Gamma}$, $\gamma=\frac{\beta\eta\mu\Gamma}{\eta\mu B}=\frac{\delta}{\varepsilon\varphi\omega\eta\mu A}$ ἡ ἐκ τῆς γεωμετρίας γνωστὴ σχέσις $\alpha^2+\gamma^2=2(BM)^2+\frac{\beta^2}{2}$ γίνεται $\frac{\delta^2\,(\eta\mu^2A+\eta\mu^2\Gamma)}{\varepsilon\varphi^2\omega.\,\eta\mu^2A\eta\mu^2\Gamma}=\frac{2\delta^2}{\eta\mu^2\omega}+\frac{\delta^2\eta\mu^2B}{2\varepsilon\varphi^2\omega\eta\mu^2A\eta\mu^2\Gamma}$, ὅθεν $2\delta^2\,(\eta\mu^2A+\eta\mu^2\Gamma)\eta\mu^2\omega=4\delta^2\eta\mu^2A\eta\mu^2\Gamma\varepsilon\varphi^2\omega+\delta^2\eta\mu^2B\eta\mu^2\omega$ (1). Ἀλλὰ $\eta\mu^2A+\eta\mu^2\Gamma=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2A+1-\sigma\upsilon\nu 2\Gamma}{2}=$ $\frac{2-(\sigma\upsilon\nu 2A+\sigma\upsilon\nu 2\Gamma)}{2}=\frac{2-2\,\sigma\upsilon\nu(A+\Gamma)\sigma\upsilon\nu(A-\Gamma)}{2}=$

$1+\text{συν}B\,\text{συν}(A-\Gamma)$, $2\,\text{ημ}A\,\text{ημ}\Gamma=\text{συν}(A-\Gamma)-\text{συν}(A+\Gamma)$ $=\text{συν}(A-\Gamma)+\text{συν}B$, ἄρα $4\,\text{ημ}^2A\,\text{ημ}^2\Gamma=\text{συν}^2(A-\Gamma)+2\times\text{συν}(A-\Gamma)\text{συν}B+\text{συν}^2B$, ἡ δὲ ἐξίσωσις (1) ἕνεκα τούτων γίνεται: $2\delta^2[1+\text{συν}B\,\text{συν}(A-\Gamma)]\,\text{ημ}^2\omega=\delta^2\,\text{εφ}^2\omega\,[\text{συν}^2(A-\Gamma)+2\,\text{συν}B\,\text{συν}(A-\Gamma)+\text{συν}^2B]+\delta^2\,\text{ημ}^2B\,\text{ημ}^2\omega$ ἢ $\delta^2\,\text{εφ}^2\omega\,\text{συν}^2(A-\Gamma)+2\delta^2\,\text{συν}B\,(\text{εφ}^2\omega-\text{ημ}^2\omega)\,\text{συν}(A-\Gamma)+\delta^2\,\text{εφ}^2\omega\,\text{συν}^2B+\delta^2\,\text{ημ}^2B\,\text{ημ}^2\omega-2\delta^2\,\text{ημ}^2\omega=0$, ἐξ ἧς εὑρίσκεται ἡ διαφορὰ $A-\Gamma$· ἐκ ταύτης καὶ τῆς $A+\Gamma=180^\circ-B$ ὁρίζονται αἱ γωνίαι Α καὶ Γ· εἶτα δὲ ὁρίζονται αἱ πλευραὶ ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὑρεθέντων σχετικῶν τύπων.

495. Ἡ ἰσότης $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\,\text{ημ}A$ γίνεται $6527=\frac{1}{2}\beta.\,107\,\text{ημ}\,(44^\circ\,20'\,12'')$. Ἐκ ταύτης ὁρίζεται ἡ β καὶ εἶτα ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὰ γνωστά (113).

496. Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας Σ εἶναι $\Sigma=\frac{4}{3}\pi\rho^3$, ὁ τοῦ σφ. τομέως



(Σχ. 36)

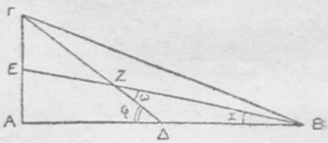
$\sigma=\frac{1}{3}\rho.$ ζώνη $(A\Gamma)=\frac{1}{3}\rho.\,2\pi\rho.\,(\Delta A)=\frac{2}{3}\pi\rho^2\,(\Delta A)$. Ἐπειδὴ δὲ $(\Delta A)=\rho-(OA)$ $=\rho-\rho\,\text{συν}\chi=\rho(1-\text{συν}\chi)=2\rho\,\text{ημ}^2\left(\frac{\chi}{2}\right)$, ἕπεται ὅτι $\sigma=\frac{2}{3}\pi\rho^2.2\rho\,\text{ημ}^2\left(\frac{\chi}{2}\right)=\frac{4}{3}\pi\rho^3\text{ημ}^2\left(\frac{\chi}{2}\right)$.

Ὅθεν $\frac{\sigma}{\Sigma}=\text{ημ}^2\left(\frac{\chi}{2}\right)$, καὶ ἐπειδὴ καθ' ὑπόθεσιν $\frac{\sigma}{\Sigma}=\frac{1}{4}$, ἕπεται ὅτι $\text{ημ}^2\left(\frac{\chi}{2}\right)=\frac{1}{4}$, ὅθεν $\text{ημ}\left(\frac{\chi}{2}\right)=\pm\frac{1}{2}$. Λύοντες ταύτας καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι πρέπει νὰ εἶναι $0<\chi<180^\circ$ εὑρίσκομεν $\chi=60^\circ$.

497. *Δεδομένης τῆς πλευρᾶς ΑΒ=γ καὶ τῶν προσκειμένων αὐτῇ γωνιῶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ΔΕ παράλληλος τῇ ΑΒ καὶ τοιαύτη ὥστε τὸ τραπέζιον ΑΒΕΔ νὰ εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ τριγώνου ΓΔΕ.* Ἐὰν τεθῇ $(\Gamma\Delta)=\chi$, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΓΔΕ καὶ ΓΑΒ προκύπτει ὅτι $\frac{\chi^2}{\beta^2}=$

$\frac{(\Gamma\Delta E)}{(\Gamma AB)}$. 'Αλλ' ἐπειδὴ $(AB E\Delta)=\frac{2}{3}(\Gamma\Delta E)$, ἕπεται ὅτι $(ABE\Delta)+(\Gamma\Delta E)=\frac{2}{3}(\Gamma\Delta E)+(\Gamma\Delta E)$ ἢ $(AB\Gamma)=\frac{5}{3}(\Gamma\Delta E)$ καὶ ἑπομένως $\frac{(\Gamma\Delta E)}{(AB\Gamma)}=\frac{3}{5}$, ἡ δὲ προηγουμένως εὑρεθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $\frac{\chi^2}{\beta^2}=\frac{3}{5}$. 'Επειδὴ δὲ $\beta=\frac{\gamma\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma}=\frac{\gamma\eta\mu B}{\eta\mu(A+B)}$, αὕτη γίνεται $\chi^2=\frac{3}{5}\cdot\frac{\gamma^2\eta\mu^2 B}{\eta\mu^2(A+B)}$, ἐξ ἧς ὑπολογίζεται τὸ $\chi=(\Gamma\Delta)$.

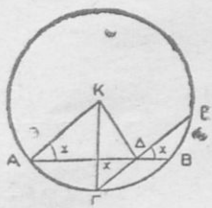
498. 'Εκ τῆς $\varphi=\omega+\chi$, ἕπεται ὅτι $\omega=\varphi-\chi$, ἄρα $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\varepsilon\varphi.\varphi-\varepsilon\varphi\chi}{1+\varepsilon\varphi.\varphi\varepsilon\varphi\chi}$. 'Επειδὴ δὲ ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ προκύπτει $\varepsilon\varphi\varphi=\frac{\beta}{\frac{\gamma}{2}}=\frac{2\beta}{\gamma}$ καὶ ἐκ τοῦ AEB προκύπτει ὅτι



(Σχ. 37)

$\varepsilon\varphi\chi=\frac{\beta}{2\gamma}$, ἕπεται ὅτι $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\frac{2\beta}{\gamma}-\frac{\beta}{2\gamma}}{1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}}=\frac{3\beta\gamma}{2(\beta^2+\gamma^2)}$ ἢ $\varepsilon\varphi\omega=\frac{3\beta\gamma}{2\alpha^2}$, ἐξ ἧς ὁρίζεται ἡ ω.

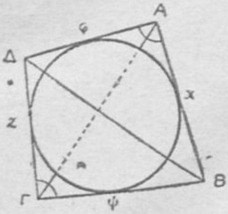
499. Καλοῦντες χ τὴν ζητουμένην γωνίαν καὶ Ζ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς ΑΒ καὶ ΚΓ λαμβάνομεν $(Z\Gamma)=(\Gamma\Delta)\eta\mu\chi$· ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΓΔ ἕπεται ὅτι $(\Gamma\Delta)=\rho\eta\mu\widehat{\Gamma K\Delta}=\rho\eta\mu\chi$,



(Σχ. 38)

ἄρα $(Z\Gamma)=\rho\eta\mu^2\chi$. 'Επειδὴ δὲ καὶ $(Z\Gamma)=\rho-(KZ)=\rho-\rho\eta\mu\chi$, ἕπεται ὅτι $\rho\eta\mu^2\chi=\rho-\rho\eta\mu\chi$, ὅθεν $\eta\mu^2\chi+\eta\mu\chi-1=0$, ἐξ ἧς $\eta\mu\chi=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Πρὸς λύσιν ταύτης ὅρα ἄσκ. 479.

500. Ἀποδεικνύομεν πρῶτον εὐκόλως ὅτι $\chi+Z=\psi+\varphi$. Ἐκ δὲ τῶν



(Σχ. 39)

τῶν ὀρθ. τριγώνων ΑΔΒ, ΔΓΒ λαμβάνομεν $(\Delta B)^2=\chi^2+\varphi^2=Z^2+\psi^2$, ὅθεν $\chi^2-Z^2=\psi^2-\varphi^2$ ἢ $(\chi+Z)(\chi-Z)=(\psi-\varphi)(\psi+\varphi)$, ἄρα $\chi-Z=\psi-\varphi$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς $\chi+Z=\psi+\varphi$ συνάγομεν ὅτι $\chi=\psi$ καὶ $Z=\varphi$. Ἐπειδὴ δὲ $E=\frac{\chi+\psi+Z+\varphi}{2}\cdot\rho$, ἔπεται ὅτι $E=(\chi+Z)\rho$. Ἀφ' ἑτέρου δὲ $E=(A\Delta B)+(\Delta B\Gamma)=2(A\Delta B)=\varphi\chi=\psi Z=\chi Z$. Ἄρα χ καὶ Z εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\omega^2-\frac{E}{\rho}\omega+E=0$, ὅθεν $\omega=\frac{F\pm\sqrt{E^2-4E\rho^2}}{2\rho}$. Τῶν τιμῶν τούτων μία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ χ. καὶ ἡ ἄλλη ἡ τοῦ Z. Ἵνα δὲ ὦσι πραγματικαὶ πρέπει $E^2-4E\rho^2\geq 0$, ἢ $E\geq 4\rho^2$. Πρὸς ὑπολογισμὸν τῶν γωνιῶν Δ καὶ Β παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι $\Delta+B=2$ ὀρθ. ἐκ δὲ τῶν τριγώνων ΑΔΓ, ΑΓΒ λαμβάνομεν $(A\Gamma)^2=Z^2+\varphi^2-2\varphi Z$ συν $\Delta=\chi^2+\psi^2-2\chi\psi$ συν B. Ἐπειδὴ δὲ $\chi=\psi$, $Z=\varphi$ καὶ $\Delta+B=2$ ὀρθ. ἔπεται ὅτι $2Z^2+2Z^2$ συνB $=2\chi^2-2\chi^2$συν²B ἢ $2Z^2(1+$συνB$)=2\chi^2(1-$συνB$)$, ὅθεν Z^2 συν²$\left(\frac{B}{2}\right)=\chi^2$ ημ²$\left(\frac{B}{2}\right)$ καὶ ἑπομένως εφ $\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{Z}{\chi}$. Ἤδη πρὸς λύσιν αὐτῆς διακρίνομεν δύο περιπτώσεις. α′) Ἐὰν $Z=\chi$, ὅπερ συμβαίνει, ἂν $E=4\rho^2$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται εφ$\left(\frac{B}{2}\right)=1=$εφ$45^0$ ὅθεν $B=90^0$, ὅτε καὶ $\Delta=90^0$, ἤτοι τὸ τετράπλευρον εἶναι ὀρθογώνιον. β′.) Ἐὰν Z δὲν εἶναι χ καὶ ἔστω $\chi=\frac{E+\sqrt{E^2-4E\rho^2}}{2\rho}$,

$Z=\frac{E-\sqrt{E^2-4E\rho^2}}{2\rho}$. Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἐξίσωσις εφ $\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{Z}{\chi}$ γίνεται εφ $\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{E-\sqrt{E^2-4E\rho^2}}{E+\sqrt{E^2-4E\rho^2}}=$

$$\frac{E\left(1-\sqrt{1-\frac{4\rho^2}{E}}\right)}{E\left(1+\sqrt{1-\frac{4\rho^2}{E}}\right)}=\frac{1-\sqrt{1-\frac{4\rho^2}{E}}}{1+\sqrt{1-\frac{4P^2}{E}}}.$$

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν εἶναι $4\rho^2<E$, ἔπεται ὅτι εἶναι

$\frac{4\rho^2}{E}<1$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\frac{4\rho^2}{E}=\eta\mu^2\tau$, ὅτε ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\tau}{1+\sigma\upsilon\nu\tau}=\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\tau}{2}\right)$.

Προσδιορίζοντες πρῶτον τὴν τ καὶ λύοντες εἶτα τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν ὁρίζομεν τὴν B, ἐξ ἧς εἶτα καὶ τὴν Δ.

[138]. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $\sigma\upsilon\nu\,30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ἐργαζόμεθα ὡς ἐν τῇ ἀσκ. 59.

[139] α'.) Ἐπειδὴ $90^0+\tau+(-\tau)=90^0$, ἕπεται ὅτι $\varepsilon\varphi\,(90^0+\tau)=\sigma\varphi(-\tau)=-\sigma\varphi\tau$.

β'.) Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον $\sigma\varphi\,(90+\tau)=\varepsilon\varphi(-\tau)=-\varepsilon\varphi\tau$.

[140]. α'.) Παρατηροῦντες ὅτι $\alpha+\beta+\gamma=(\alpha+\beta)+\gamma$ καὶ ἐφαρμόζοντες τοὺς τύπους [21 καὶ 20] εὑρίσκομεν διαδοχικῶς ὅτι: $\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma)=\eta\mu(\alpha+\beta)+\gamma)=\eta\mu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\gamma+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\eta\mu\gamma=(\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\beta)\,\sigma\upsilon\nu\gamma+(\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta)\eta\mu\gamma=\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma+\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\gamma+\eta\mu\gamma\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\eta\mu\gamma$.
β'.) Ὁμοίως $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma)=\sigma\upsilon\nu[(\alpha+\beta)+\gamma]=\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta(\sigma\upsilon\nu\gamma)-\eta\mu(\alpha+\beta)\eta\mu\gamma=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma-\eta\mu\alpha\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\beta\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha$. γ'.) Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον [23] εἰς τὰ τόξα $(\alpha+\beta)$ καὶ γ εὑρίσκομεν $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta+\gamma)=\varepsilon\varphi[(\alpha+\beta)+\gamma]=$

$$\frac{\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)+\varepsilon\varphi\gamma}{1-\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)\varepsilon\varphi\gamma}=\frac{\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}+\varepsilon\varphi\gamma}{1-\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}\cdot\varepsilon\varphi\gamma}=$$

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\gamma-\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma}.$$

[141] α'.) Ἐπειδὴ $3\alpha=2\alpha+\alpha$, ἕπεται ὅτι $\sigma\upsilon\nu\,3\alpha=\sigma\upsilon\nu(2\alpha+\alpha)=\sigma\upsilon\nu2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu2\alpha\eta\mu\alpha$. Ἐπειδὴ δὲ $\sigma\upsilon\nu2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1$ καὶ $\eta\mu2\alpha=2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\sigma\upsilon\nu3\alpha=(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1)\sigma\upsilon\nu\alpha-2\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha=2\sigma\upsilon\nu^3\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha-2(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha=2\sigma\upsilon\nu^3\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha-2\sigma\upsilon\nu\alpha+2\sigma\upsilon\nu^3\alpha=4\sigma\upsilon\nu^3\alpha-3\sigma\upsilon\nu\alpha$. β', Ὁμοίως $\eta\mu3\alpha=\eta\mu(2\alpha+\alpha)=\eta\mu2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu2\alpha\eta\mu\alpha=2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha+2\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha\eta\mu\alpha-\eta\mu\alpha=4\eta\mu\alpha\,(1-\eta\mu^2\alpha)-\eta\mu\alpha=3\eta\mu\alpha-4\eta\mu\alpha^3\alpha$. γ') Ὁμοίως $\varepsilon\varphi3\alpha=\varepsilon\varphi(2\alpha+\alpha)=$

$$\frac{\varepsilon\varphi2\alpha+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi2\alpha\varepsilon\varphi\alpha}=\frac{\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}\cdot\varepsilon\varphi\alpha}=\frac{2\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\alpha(1-\varepsilon\varphi^2\alpha)}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha-2\varepsilon\varphi^2\alpha}$$

$$=\frac{3\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi^3\alpha}{1-3\varepsilon\varphi^2\alpha}.$$

Σημ. Τὰς ἰσότητας ταύτας πορίζόμεθα καὶ ἐκ τῶν ἰσοτήτων τῆς ἀσκ. [140] ἂν ἐν αὐταῖς τὰ β καὶ γ ἀντικατασταθῶσι διὰ τοῦ α. (Ὅρα εὐθ. τριγων. § 67).

[142]. Ἐπειδὴ $45^0=\frac{\pi}{4}$, ἡ ἄσκησις αὕτη συμπίπτει πρὸς τὴν ἄσκ. 123.

[143]. Ἐπειδὴ $1=\varepsilon\varphi 45^0$, ἕπεται ὅτι $1-\varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi 45^0-\varepsilon\varphi\omega$ $=\frac{\eta\mu(45^0-\omega)}{\sigma\upsilon\nu 45^0\sigma\upsilon\nu\omega}$. = (Ὅρα ἄσκ. [65])

Ἐπειδὴ δὲ $\sigma\upsilon\nu 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$, αὕτη γίνεται εὐκόλως $1-\varepsilon\varphi\omega$ $=\frac{\sqrt{2}\,\eta\mu(45^0-\omega)}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

[154]. Γνωρίζομεν ὅτι $E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἀποδεικνύομεν εὐκόλως ὅτι $E=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\rho=\tau\rho$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι $\tau\rho=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, ὅθεν

$$\rho=\frac{\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}{\tau}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}.$$

[155]. Ἀγομένης τῆς διαγωνίου ΔΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ διαιρεῖται τοῦτο εἰς δύο τρίγωνα ἴσα. Ἐπειδὴ δὲ [44] (ΑΒΔ) $=\frac{1}{2}$ (ΑΒ) (ΑΔ) ημΑ, ἕπεται ὅτι (ΑΒΓΔ) = (ΑΒ)(ΑΔ)ημΑ.

ΜΕΡΟΣ Β'.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΟΣΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

1. Γνωρίζομεν ὅτι δι' ἑκάστης εὐθείας διέρχονται ἄπειρα ἐπίπεδα· ἄρα δι' ἑκάστης κατακορύφου εὐθείας διέρχονται ἄπειρα κατακόρυφα ἐπίπεδα καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἄπειροι κατακόρυφοι κύκλοι.
2. Διότι τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν περιέχοντα τὴν κατακόρυφον διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου τῆς οὐρ. σφαίρας.
3. Ἐπειδὴ αἱ πρὸς τὸ Ζενὶθ καὶ τὸ Ναδὶρ ἐκπεμπόμεναι ὀπτικαὶ ἀκτῖνες κεῖνται ἀπ' εὐθείας, ἡ γωνιώδης ἀπόστασις τοῦ ζενὶθ καὶ τοῦ ναδὶρ εἶναι 2 ὀρθ.$=180^{\circ}$.
4. Ἡ κατακόρυφος ἑκάστου τόπου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα (§ 9), τὸ δὲ ἐπίπεδον ἑκάστου κατακορύφου περιέχον τὴν κατακόρυφον ταύτην εἶναι καὶ αὐτὸ κάθετον ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα, διότι ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωρίζομεν ὅτι, ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, πᾶν ἐπίπεδον δι' αὐτῆς διερχόμενον εἶναι κάθετον ἐπ' ἐκεῖνο.
5. Ἡ τομὴ τοῦ ὁρίζοντος καὶ οἱουδήποτε κατακορύφου εἶναι εὐθεῖα τοῦ ὁρίζοντος, ἡ δὲ κατακόρυφος κεῖται ὁλόκληρος ἐν τῷ κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ καὶ τέμνει τὸν ὁρίζοντα εἴς τι σημεῖον τῆς ῥηθείσης τομῆς. Ἐπειδὴ δὲ ἡ κατακόρυφος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ πᾶσα διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς διερχομένην εὐθεῖαν τοῦ ὁρίζοντος, ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν ῥηθεῖσαν τομήν.
6. Τοῦ τυχόντος σημείου α (Σχ. 2 Κοσμ.) τοῦ ὁρίζοντος καὶ τοῦ Ζενὶθ γωνιώδης ἀπόστασις εἶναι προφανῶς ἡ γωνία $Z\hat{O}\alpha$, ἥτις εἶναι ὀρθή, ἤτοι 90°, διότι, ὡς ἀπεδείξαμεν (ἄσκ. 5) ἡ ΟΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν Οα.
7. Διότι περιέχει δύο σημεῖα αὐτῆς, τὸ Ζενὶθ καὶ τὸ κέντρον τῆς οὐρ. σφαίρας.
8. Γωνιώδης ἀπόστασις τῆς ἀνατολῆς καὶ τοῦ βορρᾶ εἶναι προφανῶς ἡ γωνία αΟβ (Σχ. 3 Κοσ.) Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἄξων τοῦ μεσημβρινοῦ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν μεσημβρίαν γραμμήν, ἡ γωνία αὕτη εἶναι ὀρθὴ ἤτοι 90°. Ἐπειδὴ ὁ νότος εἶναι σημεῖον τοῦ ὁρίζοντος, ἡ γωνιώδης ἀπόστασις αὐτοῦ καὶ τοῦ Ζενὶθ εἶναι 90° (ὅρα ἄσκ. 6).

9. Οὗτοι περιέχουσι τὸν ἄξονα τοῦ κόσμου, ὅστις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἰσημερινόν (ὅρα ἄσκ. 4).
10. Ὁ οὐρ. μεσημβρινὸς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἰσημερινὸν ὡς περιέχον τὸν ἄξονα τοῦ κόσμου. Εἶναι δὲ κάθετος καὶ ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα, ὡς περιέχον τὴν κατακόρυφον τοῦ τόπου.
11. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν ὁ ἰσημερινὸς καὶ ὁ ὁρίζων εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸν οὐρ. μεσημβρινόν· ἄρα καὶ ἡ τομὴ αὐτῶν, δηλ. ὁ ἄξων τοῦ μεσημβρινοῦ, θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν οὐρ. μεσημβρινόν.
12. Οὗτοι εἶναι ἀμφότεροι μέγιστοι κύκλοι τῆς οὐρ. σφαίρας, καί, ὡς ἡ γεωμετρία διδάσκει, τέμνουσιν ἀλλήλους δίχα.
13. Ἐπειδὴ ὁ οὐρ. μεσημβρινὸς διχοτομεῖ τὸ ἡμερήσιον τόξον ἑκάστου ἀστέρος, τὸ ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἀνατολῆς αὐτοῦ μέχρι τοῦ οὐρ. μεσημβρινοῦ τόξον τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ μεσημβρινοῦ μέχρι τοῦ σημείου τῆς δύσεως αὐτοῦ. ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀστὴρ κινεῖται ὁμαλῶς, ἕπεται χρειάζεται ἴσους χρόνους, ἵνα διανύσῃ τὰ εἰρημένα ἴσα τόξα τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ.
14. Ἑκάτερον τῶν τόξων τῆς τροχιᾶς ἀστέρος, ἅτινα περιέχονται μεταξὺ τοῦ σημείου, εἰς ὃ οὗτος μεσουρανεῖ ἄνω καὶ ἐκείνου, εἰς ὃ μεσουρανεῖ κάτω, ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἡμερησίου καὶ τοῦ ἡμίσεος τοῦ νυκτερινοῦ τόξου αὐτοῦ, ἤτοι τὰ δύο ταῦτα τόξα εἶναι ἴσα· ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀστὴρ κινεῖται ὁμαλῶς, ἕπεται ὅτι διανύει τοιαῦτα εἰς ἴσους χρόνους.
15. Προφανῶς τὸ ὕψος ἑκάστου τῶν σημείων τούτων εἶναι μηδέν, διότι πάντα εἶναι σημεῖα τοῦ ὁρίζοντος. Τὸ δὲ ἀζιμούθιον τοῦ μὲν νότου εἶναι μηδέν, τῆς δύσεως 90°, τοῦ βορρᾶ 180° καὶ τῆς ἀνατολῆς 270°· διότι τοῦτο μετρεῖται ἀπὸ τοῦ νότου κατὰ τὴν ἀνάδροφον φοράν, ἤτοι ἐκ νότου πρὸς δυσμὰς κ.τ.λ. καὶ ἡ περιφέρεια τοῦ ὁρίζοντος διαιρεῖται ὑπὸ τῶν ῥηθέντων σημείων εἰς 4 ἴσα τόξα.
16. Τοῦ μὲν Ζενὶθ τὸ ὕψος εἶναι 90° τοῦ δὲ Ναδὶρ—90°.
17. Ἵνα σημεῖόν τι τῆς οὐρ. σφαίρας ἔχῃ ἀζιμούθιον 90°, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ κατακόρυφος αὐτοῦ νὰ τέμνῃ τὸν ὁρίζοντα εἰς τὴν δύσιν ; ἀλλὰ τοιοῦτος κατακόρυφος προφανῆς εἶναι μόνον ὁ κατακόρυφος τῆς δύσεως. Ὁ κατακόρυφος λοιπὸν οὗτος εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.
18. Ἐπειδὴ τὸ ἀζιμούθιον εἶναι 270°, τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ κατακορύφου τῆς Ἀνατολῆς· ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος αὐτοῦ εἶναι Ο, ὡς ἔχον Ζενιθίαν ἀπόστασιν 90°, θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ὁρίζοντος, θὰ εἶναι ἄρα τὸ κοινὸν σημεῖον τοῦ ὁρίζοντος καὶ τοῦ ἀζιμουθίου τῆς Ἀνατολῆς, ἤτοι ἡ Ἀνατολή.
19. Ἐπειδὴ $Υ+Ζ=90°$ ἤτοι $Υ+110°=90°$, ἕπεται ὅτι $Υ=90°-110°=-20°$.

20. Προφανῶς τοῦ μὲν β πόλου ἡ ἀπόκλισις εἶναι $+90^0$ τοῦ δὲ ν. πόλου εἶναι -90^0.
21. Ἐπειδὴ ἀμφότερα τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ, ἡ ἀπόκλισις ἑκατέρου εἶναι μηδέν.
22. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον (ἄσκ. 21) ἡ ἀπόκλισις αὕτη εἶναι μηδέν.
23. Προφανῶς τοῦ μὲν νότου ἡ ὡριαία γωνία εἶναι μηδὲν τοῦ δὲ βορρᾶ 180^0.
24. Τῆς μὲν δύσεως 90^0 τῆς δὲ ἀνατολῆς 270^0.
25. Τὸ σημεῖον γ γράφον τὸν ἰσημερινόν, κατέχει τὴν θέσιν τῆς Ἀνατολῆς, καθ' ἣν στιγμὴν ἀνατέλλει, ἄρα ἡ ὡριαία αὐτοῦ γωνία εἶναι τότε ἴση πρὸς τὴν τῆς Ἀνατολῆς, ἤτοι 270^0.
26. Ἐπειδὴ $P+\S=90^0$ καὶ $P+30^0=90^0$, ἕπεται ὅτι $P=60^0$.
27. Ἐπειδὴ $12^0\ 35'+\delta=90^0$, ἕπεται ὅτι $\delta=90^0-12^0\ 35'=77^0\ 25'$.
28. Ἐπειδὴ ἡ Ζενιθία ἀπόστασις τοῦ β. πόλου εἶναι συγχρόνως καὶ πολικὴ ἀπόστασις τοῦ Ζενίθ, αὕτη θὰ εἶναι συμπλήρωμα τῆς ἀποκλίσεως τοῦ Ζενίθ, ἤτοι $90^0-20^0\ 17'=69^0\ 43'$.
29. Ἐπειδὴ τόξον $15^0=$τόξ. 1 ὥρας, ἕπεται ὅτι τόξον $25^0\ 35'\ 21''$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τόσας ὥρας, ὅσας φορὰς χωροῦσιν αἱ 15^0 εἰς τὰς $25^0\ 35'\ 21''$, ἤτοι $\dfrac{25^0\ 35'\ 21''}{150}=\dfrac{92121''}{54000''}=1$ὥρα 42π 21,45.
30. Ἐπειδὴ τόξ. 1 ὥρας$=15^0$, τοξ. 1 π $=15'$ καὶ τόξ. $15=15''$, ἕπεται ὅτι τόξον 2 ὡρ. 21π. $17\delta=15^0\times2+15'\times21+15'\times17=35^0\ 19'\ 15''$.
31. Ὅταν τὸ σημεῖον γ δύῃ, εὑρίσκεται ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς δύσεως καὶ ἑπομένως ἡ ὡριαία αὐτοῦ γωνία εἶναι $90^0=6$ ὡρῶν, ἄρα ἡ ἀστρικὴ ὥρα εἶναι 6 ὧραι. Καθ' ἣν στιγμὴν τοῦτο ἀνατέλλει, ἡ ὡριαία αὐτοῦ γωνία εἶναι $270^0=18$ ὧραι, ἄρα ἡ ὥρα εἶναι 18 ὧραι.
32. Τὸ γ' ἀνατέλλει, ὅταν τὸ γ δύει, ἤτοι τὴν 6ην ὥραν· δύει δὲ τὸ γ', ὅταν τὸ γ ἀνατέλλει, ἤτοι τὴν 18ην ὥραν.
33. Ὅταν τὸ γ μεσουρανῇ κάτω, ἡ ὡριαία αὐτοῦ γωνία εἶναι 12 ὡρῶν καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἀστρ. ὥρα εἶναι 12 ὧραι. Κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην τὸ γ' μεσουρανεῖ ἄνω, ἤτοι κεῖται ἐπὶ τοῦ ὡριαίου τοῦ νότου καὶ ἑπομένως ἡ ὡριαία αὐτοῦ γωνία εἶναι μηδέν.
34. Ὁ ἀστὴρ οὗτος μεσουρανεῖ, ὅταν ἡ ὥρα εἶναι μηδέν, διότι, ὅταν τὸ γ μεσουρανῇ ἄνω ἡ ὥρα εἶναι μηδέν. Ἐπειδὴ δὲ παραμένει ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα 8 ὥρας καὶ 20π., χρειάζεται 4 ὥρας καὶ 10 π., ἵνα διανύσῃ τὸ ἀπὸ τοῦ μεσημβρινοῦ μέχρι τῆς δύσεως τόξον τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ· ἄρα δύει τὴν 4 ὥραν καὶ 10 π.
35. Ἐπειδὴ τὸ ἡμερήσιον τόξον διανύει εἰς 14 ὥρας 20 π., τὸ ἥμισυ αὐτοῦ διανύει εἰς 7 ὥρας καὶ 10 π., ἄρα δύει μετὰ 7 ὥρας

καὶ 10 π., ἀπὸ τῆς ἄνω μεσουρανήσεως αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ νυκτερινὸν τόξον διανύει εἰς 24 ὥρας—14 ὥρ. 20 π.=9 ὥρ. 40 π., τὸ ἥμισυ αὐτοῦ διανύει εἰς 4 ὥρας 40 π., ἄρα ἀνατέλλει μετὰ 4 ὥρας 50 π. ἀπὸ τῆς κάτω μεσουρανήσεως.

36. Ἐπειδὴ τὸ διανυόμενον τόξον εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ, διανύει τοῦτο εἰς 12 ὥρας.

37. Ἐπειδὴ τὸ ἥμισυ τοῦ νυκτερινοῦ τόξου διανύει εἰς 6 ὥρ. 25π 32δ, ὅλον τὸ νυκτερινὸν τόξον διανύει εἰς 6ὥρ. 25π. 32δ × 2 = 12ὥρ. 51π 4δ, κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἡμερήσιον διανύει εἰς 24 ὥρ.—12ὥρ. 51π. 4δ=11ὥρ. 8π. 56δ.

38. Ἐπειδὴ ὁ οὐρ. ἰσημερινὸς διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ ὁρίζοντος (ὅρα ἄσκ. 12) ἕπεται ὅτι τὸ ἡμερήσιον καὶ νυκτερινὸν τόξον παντὸς ἀστέρος γράφοντος τὸν οὐρ. ἰσημερινὸν εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, καὶ κατ' ἀκολουθίαν εὑρίσκεται 12 ὥρας ὑπὲρ καὶ 12 ὥρας ὑπὸ τὸν ὁρίζοντα.

39. Ὁ ἀστὴρ οὗτος διανύει τὸ μεταξὺ τοῦ σημείου, καθ' ὃ ἀνατέλλει καὶ τοῦ μεσημβρινοῦ τόξον τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ εἰς 17 ὥρ. 21 π. 30 δ — 8 ὥρ. 15 π = 9 ὥρ. 6 π 30 δ. Ἐπειδὴ εἰς ἴσον χρόνον θὰ διανύσῃ καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἡμερήσιον αὐτοῦ τόξον, ἕπεται ὅτι δύει τὴν 17 ὥρ.+21 π. 30 δ.+9 ὥρ. 6 π 30 δ.= 26 ὥρ. 28 π., ἤτοι 26 ὥρ. 28 π.—24 ὥρ.=2 ὥρ. 28 π. τῆς ἀκολούθου ἀστρικῆς ἡμέρας. Ἐπειδὴ δὲ δύει τὴν 2 ὥρ. 28 π. καὶ ἀνατέλλει τὴν 8 ὥρ. 15 π., ἕπεται ὅτι διανύει το νυκτερινὸν αὐτοῦ τόξον εἰς 8 ὥρ. 15 π.—2 ὥρ. 28 π.=5 ὥρ. 47 π.

40. Ὁ ἀστὴρ οὗτος διανύει τὸ ἡμερήσιον τόξον αὐτοῦ εἰς 10 ὥρ. 20 π. 21 δ., τὸ δὲ ἥμισυ αὐτοῦ εἰς 5 ὥρ. 10 π. 10,5 δ. καὶ ἑπομένως μεσουρανεῖ τὴν 10 ὥρ.+5 ὥρ. 10 π. 10,5 δ. = 15 ὥρ. 10 π. 10,5 δ.

41. Ἐπειδὴ ἀμφότεροι κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ, ἡ ἀπόκλισις ἑκατέρου εἶναι μηδέν. Ἡ ὀρθὴ ἀναφορὰ τοῦ μὲν γ εἶναι μηδέν, τοῦ δὲ γ' 12 ὧραι, καθ' ὅσον τὸ μὲν γ λαμβάνεται ὡς ἀρχὴ τῆς μετρήσεως τῶν ὀρθῶν ἀναφορῶν, τὸ δὲ τόξον γγ' τοῦ οὐρ. ἰσημερινοῦ εἶναι ἥμισυ περιφερείας, ἤτοι 12 ωρῶν.

42. Τοῦ β. πόλου ἡ μὲν πολικὴ ἀπόστασις εἶναι 0^o ἡ δὲ ἀπόκλισις εἶναι 90^o, διότι $P+δ=90^o$, ἢ $90^o+δ=90^o$, ὅθεν $δ=0^o$. Τοῦ νοτίου πόλου ἡ μὲν πολικὴ ἀπόστασις εἶναι 180^o, ἡ δὲ ἀπόκλισις $δ=90^o-180^o=-90^o$.

43. Ἐπειδὴ $δ+P=90^o$ ἢ $30^o+P=90^o$, ἕπεται ὅτι $P=60^o$.

44. Ἐπειδὴ ἑκάτερον τούτων κεῖται ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ, ἕπεται ὅτι δι' ἑκάτερον τούτων εἶναι $δ=0$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $P=90^o$.

45. Κατὰ τὴν στιγμὴν ἐκείνην ἡ ὡριαία γωνία τοῦ γ, ἤτοι ἡ ἀστρικὴ ὥρα εἶναι 12, ἄρα (§ 22 б') ἡ ὀρθὴ ἀναφορὰ τοῦ εἰρημένου ἀστέρος εἶναι 12 ὧραι.

46. Ἐπειδὴ $P=90^o$, ἕπεται ἐκ τῆς σχέσεως $P+δ=90^o$ ὅτι $δ=0^o$.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀστὴρ μεσουρανῇ ἄνω τὴν 18 ὥραν (ἄσκ. 31), ἔπεται ὅτι α=18 ὧραι.

47. Ἐπειδὴ (§ 22) εἶναι Χ=Η+α, ἔπεται ὅτι Χ=3 ὥρ. 40π+8 ὥρ.=11 ὥρ. 40π.

48. Ἐπειδὴ Χ+24 ὥρ.=Η+α, ἔπεται ὅτι Χ=15 ὥρ.+13 ὥρ. 25 π.—24 ὥρ.=4 ὥρ. 25 π.

49. Κατὰ τὰ ἰσότητα Χ=α (§ 22 β'.) ἐπειδὴ Χ=15 ὥρ. 20 π. 35 δ. θὰ εἶναι καὶ α=15 ὥρ. 20 π. 35 δ.

50. Ἐπειδὴ ὁ ἀστὴρ ἔχει ἀπόκλισιν 0°, γράφει κατὰ τὴν ἡμερησίαν κίνησιν τὸν οὐρ. ἰσημερινὸν καὶ διὰ τοῦτο διανύει εἰς 6 ὥρας τὸ ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς αὐτοῦ μέχρι τοῦ οὐρ. μεσημβρινοῦ τόξον τῆς τροχιᾶς του. Ἐπειδὴ δὲ ἀνατέλλει τὴν 7 ὥρ. 24 π. 30 δ, ἔπεται ὅτι μεσουρανεῖ ἄνω τὴν 7 ὥρ. 24 π. 30 δ.+6 ὥρ. =13 ὥρ. 24 π. 30 δ. Δύει δὲ οὗτος προφανῶς τὴν 7 ὥρ. 24 π. 30 δ.+12 ὥρ.=19 ὥρ 24 π. 30 δ.

51. Κατὰ τὴν ἰσότητα Χ+24 ὥρ.=Η+α εἶναι 2 ὥρ. 40 π.+24 ὥρ.=Η+8 ὥρ. 15 π. ἄρα Η=26 ὥρ. 40 π.—8 ὥρ. 15 π.= 18 ὥρ. 25 π.

52. Ἐπειδὴ μεσουρανεῖ ἄνω τὴν 10 ὥρ. 18 π. 42 δ. ἔπεται (§ 22 β') ὅτι α=10 ὥρ. 18 π. 42 δ. Ἐπειδὴ δὲ Ρ=12° 0′ 40″, ἔπεται ἐκ τῆς ἰσότητος Ρ+δ=90° ὅτι δ=90°—12° 0′ 40″= 77° 59′ 20″.

53. Ἐπειδὴ Ρ=90°, ἔπεται ὅτι δ=0° καὶ κατ' ἀκολουθίαν γράφει τὸν οὐρ. ἰσημερινόν· διὰ τοῦτο δὲ τὸ ἡμερήσιον τόξον διανύει εἰς 12 ὥρας, ἄρα μεσουρανεῖ ἄνω 6 ὥρας μετὰ τὴν ἀνατολήν του, ἤτοι τὴν 3 ὥρ. 20 π.+6 ὥρ.=9 ὥρ. 20 π. Ἄρα (§ 22 β') α=9 ὥρ. 20 π.

54. Ἐπειδὴ α=2 ὥρ. 12 π. 35 δ. ἔπεται ὅτι ὁ ἀστὴρ οὗτος μεσουρανεῖ ἄνω τὴν 2 ὥρ. 12 π. 35 δ. ἐπειδὴ δὲ δύει τὴν 8 ὥρ. 12 π. 35 δ. ἔπεται ὅτι διανύει τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμερησίου τόξου του εἰς (8 ὥρ. 12 π. 35 δ.)—(2 ὥρ. 12 π. 35 δ.)=6 ὥρας, ἄρα διαμένει ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα 12 ὥρας καὶ κατ' ἀκολουθίαν κινεῖται ἐπὶ τοῦ οὐρ. ἰσημερινοῦ. Ἕνεκα τούτου εἶνε δ=0 καὶ Ρ=90°.

55. Ὁ ἀστὴρ οὗτος διανύει τὸ ἡμερήσιον τόξον εἰς 12—2=10 ὥρας· δι' ὃ μεσουρανεῖ ἄνω 5 ὥρας μετὰ τὴν ἀνατολήν του, ἤτοι τὴν 7 ὥραν, ἄρα α=7 ὧραι.

56. Ἐπειδὴ ἀμφότερα τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται ἐπὶ τῆς ἐκλειπτικῆς, ἔπεται τὸ πλάτος ἑκατέρου εἶναι μηδέ. Τοῦ σημείου γ τὸ μῆκος εἶναι μηδέν, διότι ἀπ' αὐτοῦ ἄρχεται ἡ μέτρησις τῶν μηκῶν· τοῦ δὲ γ' τὸ μῆκος εἶναι 12 ὧραι, διότι τὸ μεταξὺ γ καὶ γ' περιεχόμενον τόξον εἶναι ἥμισυ περιφερείας, ἤτοι 12 ὡρῶν.

57. Τοῦ μὲν β. πόλου Λ (Σχ. 15 Κοσμ.) τὸ πλάτος σΛ εἶναι 90°,

διότι τῆς ΔΟΛ′ οὔσης καθέτου ἐπὶ τὴν ἐκλειπτικὴν ἡ γωνία ΛΟσ εἶναι ὀρθή. Τοῦ δὲ νοτίου πόλου Δ′ τὸ πλάτος σΔ′ εἶναι —90°, διότι ἡ γωνία Λ′Οσ εἶναι ἐπίσης ὀρθὴ καὶ τὰ πλάτη μετροῦνται πρὸς τὸν νότιον πόλον τῆς ἐκλειπτικῆς ἀρνητικῶς.

58. Ἵνα ᾖ μ=12 ὧραι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ κύκλος πλάτους τοῦ σημείου νὰ τέμνῃ τὴν ἐκλειπτικὴν εἰς τὸ γ′, διότι μόνον τὸ τόξον γγ′ τῆς ἐκλειπτικῆς εἶναι 12 ὡρῶν. Ἀλλὰ τοιοῦτος κύκλος πλάτους εἶναι μόνον ὁ κύκλος πλάτους τοῦ γ′· αὐτὸς λοιπὸν εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος.

59. Πλάτος 20° ἔχουσι προφανῶς πάντα τὰ σημεῖα τοῦ πρὸς τὴν ἐκλειπτικὴν παραλλήλου μικροῦ κύκλου τῆς οὐρ. σφαίρας, ὅστις κεῖται πρὸς ὃ μέρος αὐτῆς κεῖται ὁ β. πόλος αὐτῆς καὶ εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε τὸ μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τῆς ἐκλειπτικῆς τόξον τυχόντος κύκλου πλάτους νὰ εἶναι 20°.

60. Τοῦ γ. πλάτους ἑκάστου τόπου μετρουμένου ἀπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ, ἕπεται πᾶν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ κείμενον ἔχει γ. πλάτος μηδέν.

61. Ἐπειδὴ κατακόρυφος ἑκατέρου τῶν πόλων εἶναι ὁ ἄξων τῆς Γῆς ππ′ (Σχ. 24 Κοσμ.) ἕπεται ὅτι τοῦ μὲν β. πόλου Π. γεωγρ. πλάτος εἶναι ἡ γωνία $\widehat{AO\Pi}$=90° Β, τοῦ δὲ νοτίου πόλου Π′ ἡ γωνία ΑΟΠ′=90° Ν.

62. Ἀφ᾽ οὗ ὁ πρῶτος μεσημβρινὸς καὶ ὁ μεσημβρινὸς τοῦ τόπου Α κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ χωρὶς νὰ συμπίπτωσιν, ἕπεται ὅτι μεσημβρινὸς τοῦ Α εἶναι τὸ ἕτερον ἥμισυ τοῦ α′. μεσημβρινοῦ, ὅπερ σχηματίζει μετὰ τοῦ α′. μεσημβρινοῦ δίεδρον γωνίαν 180°. Τὸ μῆκος ἄρα τοῦ Α εἶναι 180°.

63. Ὁ ἰσημερινὸς κεῖται νοτιώτερον τοῦ Α κατὰ 25°, ὁ δὲ Β νοτιώτερον τοῦ ἰσημερινοῦ κατὰ 10°. Ἄρα ὁ τόπος Β κεῖται νοτιώτερον τοῦ Α κατὰ 25°+10°=35°.

64. Ἐπειδὴ 17>12, ἕπεται ὅτι ὁ τόπος κεῖται πρὸς ἀνατολὰς τοῦ α′. μεσημβρινοῦ, καὶ 24—17=7 ὥρας ἤτοι 15°×7=105°.

65. α′.) Ἐπειδὴ ὁ μὲν μεσημβρινὸς τῶν Ἀθηνῶν κεῖται ἀνατολικώτερον τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Φέρου κατὰ 2 ὥρ. 46 π. 31 δ, ὁ δὲ τοῦ Greenwich κατὰ 1 ὥρ. 11 π. 36,1 δ, ἕπεται ὅτι ὁ μεσ. τῶν Ἀθηνῶν κεῖται ἀνατολικώτερον τοῦ τοῦ Greenwich κατὰ (2 ὥρ. 46 π. 31 δ)—(1 ὥρ. 11 π. 36, 1 δ)=1 ὥρ. 34 π. 54, 9 δ. Ἄρα τὸ γεωγρ. μῆκος τῶν Ἀθηνῶν ὡς πρὸς τὸν μεσημβρινὸν τοῦ Greenwich εἶναι 1 ὥρ. 34 π. 44,9 δ. Α. β′.) Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ γ. μῆκος τῶν Ἀθηνῶν ὡς πρὸς τὸν μεσημβρινὸν τῶν Παρισίων εἶναι 1 ὥρ. 25 π. 34 δ. Α.

66. Ἐργαζόμενοι, ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εὑρίσκομεν ὅτι τὸ γ. μῆκος τῶν Παρισίων ὡς πρὸς τὸν μεσημβρινὸν τοῦ

Greenwich εἶναι (1 ὥρ. 20 π. 57 δ.)—(1 ὥρ. 11 π. 36,1 δ.) =9 π. 20,9 δ. Α.

67. Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν τῶν δύο εἰρημένων τόπων εἶναι (3 ὥρ. 0 π. 15 δ.)—(2 ὥρ. 46 π. 31 δ.)=13 π. 44 δ, ἕπεται ὅτι, ἵνα ὁ ὡριαῖος τοῦ ἀστέρος συμπέσῃ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μεσημβρινοῦ τῶν Ἀθηνῶν, πρέπει νὰ διαγράψῃ τὴν ὑπὸ τῶν μεσημβρινῶν τῶν δύο τόπων σχηματιζομένην δίεδρον γωνίαν τῶν 13 π. 44 δ., ἄρα θὰ μεσουρανήσῃ ἄνω ἐν Ἀθήναις μετὰ 13 π. 44 δ. ἀπὸ τῆς ἐν Σμύρνῃ ἄνω μεσουρανήσεως αὐτοῦ.

68. Ἀφ' οὗ ὁ ἀστήρ, ὅστις ἔχει ἀπόκλισιν 25° 12', διέρχεται διὰ τοῦ Ζενὶθ τοῦ τόπου, ἕπεται ὅτι καὶ τοῦ Ζενὶθ τούτου ἡ ἀπόκλισις εἶναι 25° 12'. Ἄρα (§ 43 Β'.) τὸ γ. πλάτος τοῦ τόπου εἶναι 25° 12' Β.

69. α'.) Κατὰ τὸν τύπον $(M_1-M_2)+(X_1-X_2)=0$, ἐπειδὴ $X_2=2$ ὧραι, $M_1=21$ ὥρ. 13 π. 29 δ. καὶ $M_2=20$ ὥρ. 59 π, 45 δ, εἶναι 13 π. 44 δ.$+X_1-2$ ὥρ.$=0$, ὅθεν $X_1=1$ ὥρ. 46 π. 16 δ.

β'.) Ἂν X_1, M_1 εἶναι ἡ ὥρα καὶ τὸ γ. μῆκος τῆς Κ)πόλεως, ἤτοι $M_1=20$ ὥρ. 52 π. 28 δ., ὁ ἀνωτέρω τύπος γίνεται (—7 π. 17 δ)$+X_1-2$ ὥρ.$=0$, ὅθεν $X_1=2$ ὥρ. 7 π. 17 δ.

Σημ. Παρατηροῦντες ὅτι ὁ μεσημβρινὸς τῶν Ἀθηνῶν εἶναι δυτικώτερον τοῦ τῆς Σμύρνης κατὰ (3 ὥρ. 0 π 15 δ.)—(2 ὥρ. 46 π. 31 δ.)=13 π. 44 δ. καὶ ὅτι, καθ' ἣν στιγμὴν ἡ ὥρα ἐν Σμύρνῃ εἶναι 2 ὧραι, ὁ κόλουρος τῶν ἰσημεριῶν κεῖται δυτικώτερον τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Σμύρνης κατὰ 2 ὥρας, κατανοοῦμεν ὅτι ὁ κόλ. τῶν ἰσημερινῶν κεῖται δυτικώτερον τοῦ μεσημβρινοῦ τῶν Ἀθηνῶ κατὰ 2 ὥρ.—(13 π. 44 δ.)=1 ὥρ. 46 π. 16 δ, ἤτοι ἐν Ἀθήναις τὴν στιγμὴν ἐκείνην ἡ ὡριαία γωνία τοῦ γ, ἤτοι ἡ ἀστρικὴ ὥρα εἶναι 1 ὥρ. 46 π. 16 δ. Διὰ τὴν Κ)πολιν παρατηροῦμεν ὅτι ὁ μεσημβρινός της κεῖται ἀνατολικώτερον τοῦ τῆς Σμύρνης κατὰ (3 ὥρ, 7 π. 32 δ.)—(3 ὥρ. 0 π. 15)=7 π. 17 δ, ἄρα ἡ ὡριαία γωνία τοῦ γ εἶναι 2 ὥρ. 7 π. 17 δ.

70. Ἂν X_1, M_1 εἶναι ἡ ὥρα καὶ τὸ γ. μῆκος τῶν Παρισίων καὶ X_2, M_2, τὰ τῆς Ν. Ὑόρκης, ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον $(X_1-X_2)+(M_1-M_2)=24$ ὥρας εὑρίσκομεν :
(22 ὥρ.$-X_2$)+(22 ὥρ. 39 π. 3 δ.—3 ὥρ. 44 π. 26 δ.)=24 ὥρ., ὅθεν $X_2=16$ ὥρ. 54 π. 37 δ.

Σημ. Ἐπειδὴ ὁ μεσημβρινὸς τῆς Ν. Ὑόρκης κεῖται δυτικώτερον τοῦ τῶν Παρισίων κατὰ (3 ὥρ. 44 π. 26 δ.)+(1 ὥρ. 20 π. 57 δ.)=5 ὥρ. 5 π. 23 δ, ἕπεται ὅτι ἡ ὥρα ἐν Παρισίοις προηγεῖται κατὰ 5 ὥρ. 5 π. 23 δ. ἄρα θὰ εἶναι ἐν Ν. Ὑόρκῃ 22 ὥρ.—(5 ὥρ. 5 π. 23 δ.)=16 ὥρ. 54 π. 37 δ.

71. Ἂν X_1, M_1 εἶναι ἡ ὥρα καὶ τὸ γ. μῆκος τῶν Ἀθηνῶν, X_2, M_2 τὰ τῆς Πετρουπόλεως, ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον $(X_1-X_2)+(M_1-M_2)=0$ εὑρίσκομεν $X_2=26$ π. 19 δ.

Σημ. Παρατηροῦντες ὅτι ὁ μεσημβρινὸς τῆς Πετρουπόλεως κεῖται ἀνατολικώτερον τοῦ τῶν Ἀθηνῶν κατὰ 26 π. 19 δ. κατανοοῦμεν ὅτι ἐν Πετρουπόλει ἡ ὥρα προηγεῖται τῆς τῶν Ἀθηνῶν κατὰ 26 π. 19 δ. καὶ ἑπομένως ὅταν ἐν Ἀθήναις ἡ ὥρα εἶναι μηδέν, ἐν Πετρουπόλει θὰ εἶναι 26 π. 19 δ.

72. Ἂν X_1 M_1 εἶναι ἡ ὥρα καὶ τὸ γ. μῆκος τῶν Ἀθηνῶν, X_2, M_2 τὰ τῆς Κ)πόλεως, ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον $(X_1-X_2)+(M_1-M_2)=24$ ὧραι, εὑρίσκομεν ὅτι $X_1=23$ ὥρ. 38 π. 59 δ. τῆς προηγουμένης ἀστρικῆς ἡμέρας, διότι τῆς Κ)πόλεως οὔσης ἀνατολικώτερον τῶν Ἀθηνῶν, ἡ νέα ἀστρικὴ ἡμέρα ἄρχεται πρότερον ἐν Κ)πόλει καὶ βραδύτερον ἐν Ἀθήναις.

Σημ. Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν παρατηροῦντες ὅτι ἡ Κ)πολις κεῖται ἀνατολικώτερον τῶν Ἀθηνῶν κατὰ 21 π. 1 δ, ἄρα ἡ ὥρα ἐν Κ)πόλει προηγεῖται τῆς τῶν Ἀθηνῶν κατὰ 21 π. 1 δ. ἑπομένως, ὅταν ἐν Κ)πόλει εἶναι 0 ὧραι, ἢ 24 ὧραι τῆς λήξάσης τὴν στιγμὴν ταύτην ἀστρικῆς ἡμέρας, ἐν Ἀθήναις θὰ εἶναι 24 ὥρ.—(21 π. 1 δ)=23 ὥρ. 38 π. 59 δ.

73. Κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην ἡ ὥρα ἐν Ἀθήναις εἶναι 5 ὥρ. 20 π. Ἐὰν δὲ $X_1=5$ ὥρ. 20 π. καὶ $M_1=21$ ὥρ. 13 π. 29 δ καὶ τὰ τῶν Παρισίων X_2, $M_2=22$ ὥρ. 39 π. 3 δ. Ἐκ τοῦ τύπου $(X_1-X_2)+(M_1-M_2)=0$ εὑρίσκομεν ὅτι $X_2=3$ ὥρ. 54 π. 26 δ.

Σημ. Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν παρατηροῦντες ὅτι ἡ ὥρα ἐν Ἀθήναις προηγεῖται τῆς ἐν Παρισίοις κατὰ 1 ὥρ. 25 π. 34 δ.

74. Θέτοντες ἐν τῷ τύπῳ $(X_1-X_2)+(M_1-M_2)=0$, $X_1=2$ ὥρ. $M_1=21$ ὥρ. 13 π. 29 δ. καὶ $M_2=3$ ὥρ. 44 π. 26 δ, εὑρίσκομεν ὅτι $X_2=19$ ὥρ. 29 π. 3 δ. τῆς προηγουμένης ἀστρικῆς ἡμέρας.

Σημ. Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν παρατηροῦντες ὅτι ἡ ὥρα ἐν Ἀθήναις προηγεῖται τῆς ἐν Ν. Ὑόρκῃ κατὰ 6 ὥρ. 30 π. 57 δ.

75. Καλοῦντες M_2 τὸ ζητούμενον μῆκος καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον $(X_1-X_2)+(M_1-M_2)=0$ ἔχομεν (0 ὥρ.—1 ὥρ. 13 π. 29 δ)+(21 ὥρ. 13 π. 29 δ.—M_2)=0, ὅθεν $M_2=20$ ὥρ.—$15^0.4$ $=60^0$ Α.

Σημ. Παρατηροῦντες ὅτι ἐν τῷ τόπῳ τούτῳ ἡ ὥρα προηγεῖται τῆς τῶν Ἀθηνῶν κατὰ 1 ὥρ. 13 π. 29 δ. συνάγομεν ὅτι ὁ μεσημβρινὸς αὐτοῦ κεῖται ἀνατολικώτερον τοῦ τῶν Ἀθηνῶν κατὰ 1 ὥρ. 13 π. 29 δ καὶ ἑπομένως τὸ γ. μῆκος αὐτοῦ εἶναι Α καὶ 2 ὥρ. 46 π. 31 δ+1 ὥρ. 13 π. 29 δ=4 ὥρ.=60^0.

76. Καλοῦντες M_1 τὸ ζητούμενον μῆκος τῆς Ἱερουσαλὴμ καὶ ἐφαρ-

μόζοντες τὸν τύπον $(X_1-X_2)+(M_1-M_2)=0$ εὑρίσκομεν $M_1=$ 20 ὥρ. 27 π. 39 δ. ἢ Α ἀνατολικὸν 24 ὥρ.—(20 ὥρ. 27 π. 39 δ)=3 ὥρ. 32 π. 21 δ.

Σημ. Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν παρατηροῦντες ὅτι ἡ ὥρα τῆς Ἱερουσαλὴμ προηγεῖται τῆς τῶν Ἀθηνῶν κατὰ 45 π. 50δ, ἄρα ἡ Ἱερουσαλὴμ κεῖται ἀνατολικώτερον τῶν Ἀθηνῶν κατὰ 45 π. 50δ καὶ ἑπομένως ἔχει γ. μῆκος 2 ὥρ. 46 π. 31 δ +45 π. 50 δ.=3 ὥρ. 3 2 π. 21 δ. Α.

77. Καλοῦντες M_1, X_1 τὸ γ. μῆκος καὶ τὴν ὥραν τῶν Ἀθηνῶν καὶ M_2, X_2 τὰ τῆς Ν. Ὑόρκης εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου $(M_1-M_2)+(X_1-X_2)=24$ ὥρ. ὅτι $X_1-X_2=6$ ὥρ. 30 π. 57δ.

Σημ. Τοῦ μεσημβρινοῦ τῶν Ἀθηνῶν ὄντος ἀνατολικώτερον τοῦ τῆς Ν. Ὑόρκης κατὰ 3 ὥρ. 44 π. 26δ+2 ὥρ. 46 π. 31 δ. =6 ὥρ. 30 π. 59 δ, ἕπεται ὅτι τόση εἶναι καθ' ἑκάστην στιγμὴν ἡ ὑπεροχὴ τῆς ὥρας τῶν Ἀθηνῶν ἀπὸ τῆς ὥρας τῆς Ν. Ὑόρκης.

78. Τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐκλειπτικῆς σχηματίζει μετὰ τοῦ οὐρ. ἰσημερινοῦ τὴν δίεδρον γωνίαν Ε γ' γ Γ' (Σχ. 51 Κοσμ.), ἧς μέτρον ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος ΕΟΙ', καὶ ἥτις κατὰ τὰ γνωστὰ εἶναι 23° 27'· ἄρα τὸ ταύτης ἀντίστοιχον τόξον Ι'Ε ἤτοι ἡ ἀπόκλισις τοῦ θερινοῦ ἡλιοστασίου Ε εἶναι 23° 27'. Εὐνόητον δὲ εἶναι ὅτι τοῦ χειμερινοῦ ἡλιοστασίου Ε' ἡ ἀπόκλιση ΙΕ' εἶναι—23° 27'.

79. Ἐπειδὴ ἡ ἐκλειπτικὴ καὶ ὁ ἰσημερινὸς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν οὐρ. μεσημβρινόν, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ τομὴ γγ' αὐτῶν (Σχ. 51. Κ.) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν οὐρ. μεσημβρινὸν καὶ ἑπομένως καὶ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΙΙ'. Τὰ τόξα ὅπου γ Ι', Ι' γ', γ' Ι, Ιγ εἶναι τεταρτημόρια τῆς περιφερείας τοῦ ἰσημερινοῦ Ἡ ἀπόκλισις ὅθεν $\widehat{\gamma I'}$ τοῦ Ε εἶναι 6 ὡρῶν, ἡ δὲ $\widehat{\gamma I' I}$ τοῦ Ε' εἶναι 18 ὡρῶν.

80. Προφανῶς ἡ μὲν ἀπόκλισις τοῦ γ' εἶναι μηδέν, ὀρθὴ δὲ ἀναφορὰ αὐτοῦ εἶναι τὸ τόξον γ Ι' γ', ὅπερ εἶναι 12 ὡρῶν.

81. Ἡ ἀπόκλισις ἑκάστου σημείου τοῦ τροπικοῦ τοῦ Καρκίνου ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀπόκλισιν τοῦ θερινοῦ ἡλιοστασίου Ε, ὅπερ εἶναι σημεῖον τοῦ τροπικοῦ τούτου, ἤτοι 23° 27' (ἄσκ. 78). Ἑκάστου δὲ σημείου τοῦ τροπικοῦ τοῦ Αἰγόκερω ἡ ἀπόκλισις ἰσοῦται πρὸς τὴν τοῦ χειμερινοῦ ἡλιοστασίου Ε', ἤτοι πρὸς —23° 27'.

82. Ἐπειδὴ δι' ἕκαστον σημεῖον εἶναι δ+Ρ=90° καὶ δι' ἕκαστον σημεῖον τοῦ τροπικοῦ τοῦ Καρκίνου εἶναι δ=23° 27' (ἄσκ. 31), ἕπεται ὅτι δι' ἕκαστον τοιοῦτον σημεῖον εἶναι Ρ=90°—23° 27'=66° 33'.

83. Τὸ ὕψος τοῦ ἡλίου κατὰ τὴν μεσημβρίαν ἑκάστης ἡμέρας εἶναι (§ 76, 2ον) ἐν τῷ τοιούτῳ τόπῳ 52°+δ. Ἵνα δὲ τοῦτο ᾖ μέγιστον, πρέπει νὰ εἶναι δ μέγιστον, ἤτοι δ=23° 27' καὶ ἑπο-

μένως τὸ ζητούμενον μέγιστον ὕψος εἶναι $75^\circ\ 27'$. Συμβαίνει δὲ τούτῳ τὴν θερινὴν τροπήν, ἤτοι τὴν 21 Ἰουνίου.

84. Σκεπτόμενοι, ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ ὕψος $52^\circ + \delta$ γίνεται ἐλάχιστον, τὴν χειμερινὴν τροπήν, ἤτοι τὴν 21 Δεκεμβρίου, ὅτε $\delta = -23^\circ\ 27'$ καὶ ἑπομένως τὸ ἐλάχιστον ὕψος εἶναι $52^\circ - (23^\circ\ 27') = 28^\circ\ 33'$.

85. Α'. τρόπος. Ἔστω $\varphi = \widehat{ITZ} = \widehat{IZ}$ τὸ γεωγρ. πλάτος τόπου τινὸς Τ (σχ. 54 Κοσμ.) καὶ δ ἡ ἀπόκλισις τοῦ ἡλίου, καθ' ἣν ἡμέραν γράφει παράλληλόν τινα ΚΚ'. Ἐπειδὴ $I'K' + K'O' = I'O'$, $I'K' = \delta$, $K'O' = -\upsilon$, $I'O' = OI = 90^\circ - \varphi$, ἕπεται ὅτι $\delta - \upsilon = 90^\circ - \varphi$, ὅθεν $\upsilon = \delta + \varphi - 90^\circ$, ἔνθα υ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ἡλίου κατὰ τὴν κάτω αὐτοῦ μεσουράνησιν. Ἐὰν δὲ τὸ κέντρον τοῦ ἡλίου ἅπτηται τοῦ ὁρίζοντος, εἶναι $\upsilon = 0$, ἤτοι $\delta + \varphi - 90^\circ = 0$, ὅθεν $\varphi = 90^\circ - \delta = 66^\circ\ 33'$.

Β'. τρόπος. Καθ' ἣν στιγμὴν συμβαίνει τοῦτο τὸ κέντρον τοῦ ἡλίου κατέχει τὴν θέσιν Ο' (σχ. 54 Κοσμ), ἡ δὲ ἀπόκλισίς του εἶναι $I'O' = IO = 90^\circ - \varphi$· ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου κατὰ τὴν θερινὴν τροπὴν ἡ ἀπόκλισις τοῦ ἡλίου εἶναι $23^\circ\ 27'$ δέον ὅθεν νὰ εἶναι $90^\circ - \varphi = 23^\circ\ 27$, ὅθεν $\varphi = 90^\circ - 23^\circ\ 27' = 66^\circ\ 33'$.

86. Α'. τρόπος. Ἐὰν φ εἶναι τὸ γεωγρ. πλάτος τόπου Τ (σχ. 54 Κοσμ.) καὶ δ ἡ ἀπόκλισις αὐτοῦ, καθ' ἣν στιγμὴν μεσουρανεῖ ἄνω εἴς τινα θέσιν π. χ. Κ, θὰ εἶναι $\widehat{OK} = \widehat{OI} + \widehat{IK}$ ἢ $\upsilon = 90^\circ - \varphi + \delta$. Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον τοῦτον εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν εὑρίσκομεν $23^\circ\ 27' = 90^\circ - \varphi + 20^\circ$, ὅθεν $\varphi = 110^\circ - 23^\circ\ 27' = 86^\circ\ 33'$.

Β', τρόπος. Ἐπειδὴ $\upsilon = 23^\circ\ 27'$ ἕπεται $Z = 90^\circ - 23^\circ\ 27' = 66^\circ\ 33'$· ἐπειδὴ δὲ ὁ ἥλιος μεσουρανεῖ πρὸς νότον τοῦ Ζενίθ, κατὰ τὸν τύπον (1) (§ 42 Β') εἶναι $\varphi = 20^\circ + 66^\circ\ 33' = 86^\circ\ 33'$.

87. Τὸ ὕψος τοῦ ἡλίου ἔχοντος ἀπόκλισιν δ ἐν τόπῳ, οὗ τὸ γεωγρ. πλάτος εἶναι φ, κατὰ τὴν κάτω αὐτοῦ μεσουράνησιν εἶναι (ἄσκ. 85) $\delta + \varphi - 90^\circ$. Ἵνα δὲ διαρκῇ τὸ λυκόφως καθ' ὅλην τὴν νύκτα πρέπει καὶ ἀρκεῖ τοῦτο νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ -18°, ἤτοι $\delta + \varphi - 90^\circ > -18^\circ$, ὅθεν $\delta + \varphi > 90^\circ - 18^\circ$ ἢ $\delta + \varphi > 72^\circ$. Ἵνα δὲ οὐδέποτε συμβαίνῃ τοῦτο ἔν τινι τόπῳ πρέπει καὶ ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ $\delta + \varphi$, νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὰς 72° ἤτοι $23^\circ\ 27' + \varphi \leq 72^\circ$, ἤτοι τοῦτο οὐδέποτε συμβαίνει εἰς οὓς τόπους τὸ γεωγρ. πλάτος φ εἶναι $\leq 48^\circ\ 33'$. Οὕτως ἐν Ἀθήναις, δι' ἃς $\varphi = 37^\circ\ 58'\ 20''$ Β, οὐδέποτε τὸ λυκόφως διαρκεῖ καθ' ὅλην τὴν νύκτα.

88. Εἴδομεν ἀνωτέρω (ἄσκ. 86) ὅτι τὸ ὕψος υ τοῦ ἡλίου κατὰ τὴν ἄνω μεσουράνησιν αὐτοῦ εἶναι $\upsilon = 90^\circ - \varphi + \delta$· ἄρα $Z = 90 - \upsilon = \varphi - \delta$.

89. Ἐφαρμόζοντες τὴν α'. τῶν ἰσοτήτων (3) τῆς § 77 εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν καὶ παρατηροῦντες ὅτι $\lambda=45^\circ$, $\delta=23^\circ$ $27'$ καὶ $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$ ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu \dfrac{\alpha H'\delta}{2} = \varepsilon\varphi(23^\circ\ 27')$, ὅθεν $\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\alpha H'\delta}{2}\right) = \lambda o\gamma\varepsilon\varphi(23^\circ\ 27') = \bar{1},63726$, ἄρα $\dfrac{\alpha H'\delta}{2} = 64^\circ\ 17'\ 34'',6$ καὶ ἑπομένως $\alpha H'\delta = 128^\circ\ 35'\ 9'',2$. Ἤδη ἡ α'. τῶν ἰσοτήτων (1) (§ 77) γίνεται $\nu = \dfrac{128^\circ\ 35'\ 9'',2}{360^\circ}$. $24 = 8$ ὧραι 34π 20, 6δ, ἤτοι ἐν τῷ εἰρημένῳ τόπῳ κατὰ τὴν θερινὴν τροπὴν ἡ νὺξ διαρκεῖ 8 ὥρας 34π. 20,6δ. Πρὸς εὕρεσιν τῆς διαρκείας τῆς ἡμέρας ὑπολογίζομεν τὸ τόξον αΗδ λύοντες τὴν δ'. τῶν ἰσοτήτων (3) ἢ καὶ ἀφαιροῦντες ἀπὸ 360° τὸ εὑρεθὲν ἤδη τόξον αΗ'δ, καὶ εἶτα ἐφαρμόζομεν τὸν δ'. τῶν τύπων (1). Εὐκολώτερον ὅμως εὑρίσκομεν τὴν διάρκειαν η τῆς ἡμέρας ἀφαιροῦντες ἀπὸ τῶν 24 ὡρῶν τὴν διάρκειαν ν=8 ὥρ. 34π 20,65 τῆς νυκτός. Οὕτως εὑρίσκομεν η = 15ὥρ. 25π 39,4δ.

90. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἶναι $\lambda=23^\circ\ 27'$ καὶ $\delta=23^\circ\ 27'$· ὁ α'. ἄρα τῶν τύπων (3) (§ 77) γίνεται $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\alpha H'\delta}{2}\right) = \varepsilon\varphi^2(23^\circ\ 27')$, ὅθεν $\lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\alpha H'\delta}{2}\right) = 2\ \lambda o\gamma\varepsilon\varphi\ (23^\circ\ 27') = \bar{1},27452$, ἄρα $\left(\dfrac{\alpha H'\delta}{2}\right) = 79^\circ\ 9'\ 17'',27$ καὶ $(\alpha H'\delta) = 158^\circ\ 18'\ 34'',54$ Ἤδη ἐκ τῆς α' τῶν ἰσοτήτων (1) εὑρίσκομεν ν= 10 ὥρ. 33 π. 14,29 δ, καὶ εἶτα η=24 ὥρ.—(10 ὥρ. 33 π. 14,29 δ)=13 ὥρ. 46 π. 45, 71 δ.

91 Ἐπειδὴ $\lambda=66^\circ\ 33'$, $\delta=23^\circ\ 27'$ ἡ ἰσότης $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\alpha H\delta}{2}\right) = -\varepsilon\varphi\lambda\varepsilon\varphi\delta$ γίνεται $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\alpha H\delta}{2}\right) = -\varepsilon\varphi\ (66^\circ 33')\varepsilon\varphi(23^\circ 27')$.

Ἐπειδὴ δὲ $66^\circ\ 33' + 23^\circ\ 27' = 90^\circ$, ἕπεται ὅτι $\varepsilon\varphi\ (66^\circ\ 33') = \sigma\varphi\ (23^\circ\ 27') = \dfrac{1}{\varepsilon\varphi(23^\circ\ 27')}$ καὶ ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις γίνεται $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\alpha H\delta}{2}\right) = -1$, ὅθεν $\sigma\upsilon\nu\left(180^\circ - \dfrac{\alpha H\delta}{2}\right) = 1$, ἐξ ἧς $180^\circ -$

$\frac{\alpha H6}{2}=0$ καὶ $\alpha H6=360°$, ἤτοι τὸ ἡμερήσιον τόξον τοῦ Ἡλίου εἶναι ὁλόκληρος περιφέρεια· κατ᾽ ἀκολουθίαν ἡ διάρκεια τῆς ἡμέρας εἶναι 24 ὥρας (ὅρα ἄσκ. 85).

92. α) Διὰ $\lambda=-23°27'$ καὶ $\delta=23°27'$ ἔχομεν συν$\left(\frac{\alpha H6}{2}\right)=\cdot$ εφ $(-23°27)$ εφ $(23°27')=$ εφ^2 $(23°27')$, ὅθεν $\alpha H6=158°18'34'',54$ καὶ ἑπομένως $\eta=10$ ὥρ. 33π. 14,275. καὶ $\nu=13$ ὥρ. 26π. 45,718.

β'.) Διὰ $\lambda=-23°27'$ καὶ $\delta=-23°27'$ ἔχομεν συν $\left(\frac{\alpha H6}{2}\right)=$ εφ^2 $(23°27')$ καὶ ἑπομένως $\nu=10$ ὥρ. 33π. 34, 295 καὶ $\eta=13$ὥρ. 26π. 45.718.

93. Ἔστω ΑΓ γνώμεν τις, $\text{Α}\Sigma=3$μ. τὸ μῆκος τῆς σκιᾶς αὐτοῦ καὶ $Z=30°$ ἡ μεσημβρινὴ ζενιθία ἀπόστασις τοῦ Ἡλίου (Σχ. 62 Κοσμ). Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΓΣ εἶναι ὀρθογώνιον ἕπεται ὅτι (ΑΓ)=(ΑΣ) σφ Z ἢ (ΑΓ)=3 σφ $30°=3\sqrt{3}$.

94. Ἐὰν (ΑΓ)=12 μ. καὶ $\upsilon=52°$, θὰ εἶναι $Z=90°-\upsilon=38°$ (Σχ.62 Κοσμ) καὶ ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΓΣ προκύπτει ὅτι (ΑΣ)= (ΑΓ)εφ Z=12εφ38°, ὅθεν (ΑΓ)=9,3754 μ.

95. Ἔστω (ΑΓ) 6 μ. (Σχ. 63 Κοσμ.) καὶ H_1 ἡ θέσις εἰς ἣν κατὰ τὴν θερινὴν τροπὴν μεσουρανεῖ ἄνω ὁ Ἥλιος ἐν τόπῳ, οὗ τὸ γεωγρ. πλάτος ΙΖ εἶναι 40°, Ἐπειδὴ $IH_1=23°27'$, ἕπεται ὅτι $Z=40°-23°27'=16°33'$ ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΓΘ προκύπτει ὅτι (ΑΘ)=(ΑΓ) εφ ΑΓΘ=6 εφ (16°33'), ὅθεν (ΑΒ)= 2, 6151μ.

96. Ὡς γνωστὸν (§ 42 Β') $\varphi=\delta+Z$, ἤτοι $45°=Z-23°27'$ ὅθεν $Z=68°27'$ καὶ ἑπομένως $\upsilon=21°33'$.

97. Γνωρίζομεν (§91ε') ὅτι $\varphi=\frac{\widehat{\text{ΑΓΘ}}+\widehat{\text{ΑΓΧ}}}{2}$, ἔνθα φ τὸ γεωγρ. πλάτος, $\widehat{\text{ΑΓΘ}}$ καὶ $\widehat{\text{ΑΓΧ}}$ ἡ μεσημβρινὴ ζενιθία ἀπόστασις τοῦ Ἡλίου κατὰ τὴν θερινὴν καὶ χειμερινὴν τροπήν, Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν $\widehat{\text{ΑΓΘ}}=32°15'$ καὶ $\widehat{\text{ΑΓΧ}}=57°45'$, ἄρα $\varphi=\frac{(32°15')+(57°45')}{2}=45°$.

98. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰσότητα εἶναι $50^\circ = \frac{26^\circ 35' + \widehat{A\Gamma X}}{2}$, ὅθεν $\widehat{A\Gamma X} = 73^\circ\ 25'$.

99. Ἐὰν ΑΓ εἶναι ὁ γνώμων, καὶ ΑΣ ἡ σκιὰ αὐτοῦ καὶ ΓΖ ἡ μεσημβρινὴ Ζενιθία ἀπόστασις τοῦ ἡλίου, ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΓΣ προκύπτει ὅτι $\varepsilon\varphi Z = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, ὅθεν $Z = 33^\circ\ 41'\ 24'',4$. Ἐπειδὴ δὲ $\varphi = Z$ ἢ $50^\circ = 33^\circ\ 41'\ 24'',4 + \delta$, ἕπεται ὅτι $\delta = 16^\circ\ 18'\ 35'',6$.

100. Ἐὰν Σ'Σ (Σχ. 74 Κοσμ.) εἶναι ἡ τροχιὰ τῆς Σελήνης, αὕτη ἔχει τὴν μεγίστην μὲν ἀπόκλισιν, ὅταν κατέχῃ τὴν θέσιν Σ, ὅτε $\delta = \widehat{IE\Sigma} = 28^\circ\ 36'$, τὴν δὲ ἐλαχίστην, ὅταν κατέχῃ τὴν θέσιν Σ' ὅτε $\delta = -28^\circ\ 36'$.

101. Ἐπειδὴ (§ 42 Β') εἶναι $\varphi = \delta + Z$, ἕπεται ὅτι $Z = \varphi - \delta = 37^\circ\ 58'\ 20'' - \delta$. Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης φαίνεται ὅτι ἡ μεσημβρινὴ ζενιθία ἀπόστασις Ζ τῆς Σελήνης ἔχει τὴν ἐλαχίστην τιμήν, ὅταν ἡ ἀπόκλισις δ αὐτῆς ἔχῃ τὴν μεγίστην τιμήν της καὶ τὴν μεγίστην, ὅταν δ εἶναι ἐλάχιστον. Ἐπειδὴ δὲ (ἄσκ. 100) ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ δ τῆς Σελήνης εἶναι $28^\circ\ 36'$, ἕπεται ὅτι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς ζενιθίας μεσημβρινῆς ἀποστάσεως εἶναι $37^\circ\ 58'\ 20'' - 28^\circ\ 36' = 9^\circ\ 22'\ 20''$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ δ τῆς Σελήνης εἶναι $-28^\circ\ 36'$, ἕπεται ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ Ζ εἶναι $37^\circ\ 58'\ 20'' + 28^\circ\ 36 = 66^\circ\ 44'\ 20''$. Ὥστε ἡ μεσημβρινὴ ζενιθία ἀπόστασις τῆς Σελήνης κυμαίνεται ἐν Ἀθήναις μεταξὺ $9^\circ\ 22'\ 20''$ καὶ $66^\circ\ 44'\ 20''$.

102 Κατὰ τὴν πανσέληνον ἡ Σελήνη εὑρίσκεται εἰς ἀντίθεσιν, ἤτοι ἡ γωνιώδης ἀπόστασις αὐτῆς καὶ τοῦ Ἡλίου εἶναι 180°. Ἐὰν ἄρα ἡ πανσέληνος μεσουρανεῖ εἰς τὸ Ζενίθ, ὁ ἥλιος θὰ μεσουρανῇ κάτω εἰς τὸ Ναδὶρ τοῦ αὐτοῦ τόπου, ἤτοι εἰς ὕψος -90°. Ἀλλ' ἀπεδείξαμεν (ἄσκ. 85) ὅτι τὸ ὕψος τοῦ Ἡλίου κατὰ τὴν κάτω μεσουράνησίν του εἶναι $\delta + \varphi - 90^\circ$· ὥστε δέον νὰ εἶναι $\delta + \varphi - 90^\circ = -90^\circ$, ἄρα $\delta + \varphi = 0$ καὶ $\varphi = -\delta$. Ἐπειδὴ δὲ φ εἶναι θετικόν, δέον δ νὰ εἶναι ἀρνητικόν. Δύναται λοιπὸν νὰ μεσουρανῇ ὁ Ἥλιος κάτω εἰς τὸ Ναδίρ, εἰς οὗς τόπους τοῦ βορ. ἡμισφαιρίου τὸ γεωγρ. πλάτος δὲν ὑπερβαίνει τὰς $23^\circ\ 27'$ καὶ εἰς ἕκαστον τόπον, ὅταν τὸ γεωγρ. πλάτος αὐτοῦ

εἶναι ἀντίθετον τῆς ἀποκλίσεώς του. Ἐὰν δὲ τότε εἶναι πανσέληνος, αὕτη μεσουρανεῖ ἐν τούτῳ εἰς τὸ Ζενίθ.

103. Κατὰ τὴν ἐαρινὴν ἰσημερίαν ὁ Ἥλιος κεῖται εἰς τὸ γ· ἐὰν δὲ εἶναι τὴν στιγμὴν ἐκείνην πανσέληνος, τὸ κέντρον τῆς Σελήνης κειμένης εἰς ἀντίθεσιν εὑρίσκεται εἰς τὸ γ′ καὶ ἔχει ἑπομένως ὀρθὴν ἀναφορὰν ἴσην πρὸς τὴν τοῦ γ′, ἤτοι 12 ὡρῶν.

104. Εἶναι φανερὸν ὅτι καθ' ἑκάστην νέαν Σελήνην τὸ κέντρον αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὡριαίου μετὰ τοῦ κέντρου τοῦ Ἡλίου· ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν θερινὴν τροπὴν τὸ κέντρον τοῦ Ἡλίου κεῖται ἐπὶ τοῦ ὡριαίου ΠΕΠ′ (Σχ. 51 Κοσμ.), ἕπεται ὅτι ἐπ' αὐτοῦ κεῖται καὶ τὸ κέντρον τῆς νέας Σελήνης· ἡ ὀρθὴ ἀναφορὰ αὐτοῦ εἶναι κατ' ἀκολουθίαν γΙ′=6 ὧραι.

105. Εἶναι γνωστὸν (§ 97) ὅτι, ἵνα τὸ φῶς τοῦ Ἡλίου φθάσῃ εἰς τὴν Γῆν, χρειάζεται 8 π. 20 δ. Ἐπειδὴ δὲ ὁ Ποσειδῶν κεῖται εἰς ἀπόστασιν 30,11 φορὰς μεγαλυτέραν τῆς Γῆς, τὸ φῶς χρειάζεται (8 π. 20 δ)×30,11=4 ὥρας 10 π. 55 δ., ἵνα μεταβῇ ἀπὸ τοῦ Ἡλίου εἰς τὸν Ποσειδῶνα.

106. Ἡ Φυσικὴ διδάσκει ὅτι ἡ ἔντασις, μεθ' ἧς φωτίζεται ἐπιφάνειά τις ὑπὸ φωτεινῆς πηγῆς εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς, ἀπὸ τῆς φωτεινῆς πηγῆς. Κατὰ ταῦτα, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ Ε τὴν ἔντασιν, μεθ' ἧς φωτίζεται ὑπὸ τοῦ Ἡλίου ἡ μονὰς τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς καὶ διὰ τοῦ ε ἡ ἔντασις, μεθ' ἧς φωτίζεται ἡ αὐτὴ ἐπιφάνεια ἐπὶ τοῦ Ἑρμοῦ, θὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης $\frac{\varepsilon}{E}=\frac{1^2}{0{,}39^2}$, ὅθεν εὑρίσκομεν ε=Ε. 6,57, ἤτοι ἡ μονὰς τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ἑρμοῦ θὰ ἐφωτίζετο 6,57 ἐντατικώτερον τῆς μονάδος τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς, ἂν ὑφίσταντο ἐπ' ἀμφοτέρων αἱ αὐταὶ ἀτμοσφαιρικαὶ συνθῆκαι.

107. Ὡς προηγουμένως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{\varepsilon}{E}=\frac{1}{30{,}11^2}$ ὅθεν $\varepsilon=E.\frac{1}{9096}$, ἤτοι ἡ μονὰς τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ποσειδῶνος θὰ ἐφωτίζετο 909, 6 φορὰς ἀσθενέστερον τῆς Γῆς, ἂν κτλ.

108. α′.) Ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\tau}=\frac{1}{\sigma}$ εὑρίσκομεν $\frac{1}{\alpha}=$

$\frac{\tau+\sigma}{\tau\sigma}$ ἄρα $\alpha=\frac{\tau\sigma}{\tau+\sigma}$. Ἐπειδὴ δὲ $\tau=365,256$ καὶ διὰ τὸν Ἑρμῆν $\sigma=116$, ἕπεται ὅτι διὰ τοῦτον εἶναι $\alpha=\frac{365,256,\ 116}{365,256.+116}$ $=$ ἡμ. περίπου.

β'.) Διὰ τὴν Ἀφροδίτην ἐφαρμόζομεν τὸν αὐτὸν τύπον θέτοντες $\sigma=564$. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι διὰ ταύτην $\alpha=225$ ἡμ. περίπου.

109. α'.) Ἐπειδὴ ὁ Ἄρης εἶναι ἐξωτερικὸς πλανήτης ἰσχύει δι' αὐτὸν ἡ ἰσότης (2) (§ 130), ἥτις λυομένη πρὸς α γίνεται $\alpha=\frac{\tau\sigma}{\sigma-\tau}$ θέτοντες ἤδη ἐν αὐτῇ 365,256 ἀντὶ τ καὶ 780 ἀντὶ σ εὑρίσκομεν $\alpha=686,98$ ἡμ. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὸν Δία, οὗ $\sigma=399$ καὶ εὑρίσκομεν $\alpha=11$ ἔτη 315 ἡμ.

110. Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι διὰ μὲν τὸν Κρόνον εἶναι $\sigma=378$ διὰ δὲ τὸν Οὐρανὸν $\sigma=370$ καὶ διὰ τὸν Ποσειδῶνα $\sigma=368$ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀστρικὴ περιφορὰ τοῦ μὲν Κρόνου εἶναι 29ἔτη 167 ἡμ. τοῦ δὲ Οὐρανοῦ 84ἔτη 7ἡμ. καὶ τοῦ Ποσειδῶνος 164ἔτη 280ἡμ.

111. Τοῦ κομήτου τοῦ Halley κινουμένου ἐπὶ ἐλλείψεως ἰσχύουσιν ἐπ' αὐτοῦ οἱ νόμοι τοῦ Κεπλήρου. Ἐὰν κληθῇ α ὁ μέγας ἡμιάξων τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ καὶ ληφθῇ ὡς μονὰς μὲν χρόνου τὸ ἔτος ὡς μονὰς δὲ ἀποστάσεω, ὁ μέγας ἡμιάξων τῆς γηΐνης τροχιᾶς, θέλομεν ἔχει κατὰ τὸν γ' νόμον τοῦ Κεπλέρου $\frac{\alpha^3}{1}=\frac{75,02^2}{1}$ ἢ $\alpha^3=75,02^2$ ὅθεν $\alpha=\sqrt[3]{75,02^2}=17,7876$ καὶ ἑπομένως ὁ ζητούμενος μέγας ἄξων εἶναι 35,5752 φορὰς μείζων τῆς ἀποστάσεως τῆς Γῆς ἀπὸ τοῦ Ἡλίου.

112. Ἔστω Α'Α ὁ μέγας ἄξων τῆς εἰρημένης τροχιᾶς Α'Η ἡ περιήλιος καὶ ΗΑ ἡ ἀφήλιος τοῦ κομήτου ἀπόστασις. Εἶναι φανερὸν ὅτι (Α'Α)=(Α'Η)+(ΗΑ). Ἐπειδὴ δέ, ὡς προηγουμένως εὕρομεν, (Α'Α)=35,5756α', ἔνθα α' εἶναι ὁ μέγας ἡμιάξων τῆς γηΐνης τροχιᾶς, καὶ (Α'Η)=0,587.2α', ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται 35,575 2α'=1,174α'+(ΗΑ), ὅθεν (ΗΑ)=34, 401 2α'=17,2006 (2α'), ἤτοι ἡ ἀφήλιος ἀπόστασις τοῦ κομήτου εἶναι 17,2006 φορὰς μείζων τοῦ μεγάλου ἄξονος τῆς γηΐνης τροχιᾶς.

113. Τὸ ζητούμενον προφανῶς εἶναι 4,0935+0,3383=4,431 8 τοῦ

μήκους τοῦ μεγάλου ἡμιάξονος τῆς γηΐνης τροχιᾶς ἤτοι $23440 \times 4{,}4318\rho$, ἔνθα ρ ἡ ἀκτὴ τῆς Γῆς (§ 97).

Σημ. Ἐν τῷ κειμένῳ τῆς ἀσκήσεως ταύτης ἀντὶ «... μεγάλου ἄξονος τῆς γηΐνης τροχιᾶς...» γραπτέον «... μεγάλου ἡμιάξονος τῆς γηΐνης τροχιᾶς ...».

114. Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον (1) (§ 154) $(\text{ΑΓ}) = \frac{206265}{\delta}(\text{ΗΓ})$ θέτοντες 0,10 ἀντὶ δ καὶ εὑρίσκομεν (ΑΓ)=2 062.650 ἀστρονομικὰς μονάδας. Ἡ ἀπόστασις αὕτη εἶναι $500\text{s} \times 2{,}062.650 = 1{,}031250.000\text{s} = 32{,}7$ ἔτη φωτός.

115. Ἐργαζόμενοι ὡς προηγουμένως εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ἀστὴρ οὗτος ἀπέχει ἀφ' ἡμῶν $\frac{206265}{0{,}29} = 721603{,}45$ ἀστρονομικὰς μονάδας ἢ 11,44 ἔτη φωτὸς περίπου.

ΤΕΛΟΣ

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Σελὶς	32	στίχος	10	ἀντὶ	$\frac{1}{συν^2α}$	γραπτέον	$\frac{1}{συν2α}$
»	51	»	20	»	$\frac{-\frac{β}{α}}{1+\frac{β}{α}}$	»	$\frac{1-\frac{β}{α}}{1+\frac{β}{α}}$
»	52	»	2	»	29″	»	39″.
»	52	»	3	»	$\bar{1},58095$	»	$\bar{1},58102$
»	52	»	3	»	0,381025	»	0 381083
»	52	»	14	»	$\sqrt{\frac{α \quad β}{α+β}}$	»	$\sqrt{\frac{α-β}{α+β}}$
»	73	»	17	»	$X^2-π,X+κ=0$	»	$X^2+πX+κ=0$
»	85	»	23	»	$\frac{(α+20)\sqrt{2}}{2α}$	»	$\frac{(α+2ο)\sqrt{2}}{2α}$
»	95	»	2	»	$\sqrt{\frac{(τ-α)(τ \quad β)(-γ)}{τ}}$	»	$\sqrt{\frac{(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}{τ}}$
»	99	»	28	»	$\sqrt{\frac{(-β)(τ-γ)}{τ-α}}$	»	$\sqrt{\frac{(τ-β)(τ-γ)}{τ-α}}$
»	110	»	4	»	$\sqrt{τ(τ-α)(τ \quad β)(-γ)}$	»	$\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$.
»	110	»	7	»	$\frac{εφΓ \quad εφB}{εφΓ+εφB}$	»	$\frac{εφΓ-εφB}{εφΓ+εφB}$
»	116	»	8	»	συν36^0	»	συν36^0
»	116	»	14	»	36	»	36^0
»	117	»	1	»	(ΔΓ)	»	$(ΔΓ)^2$
»	117	»	3	»	(ΑΔ)3λ	»	(ΑΔ)=3λ
»	121	»	29	»	2ημ$(45^0=χ)$	»	2ημ$(45^0-χ)$
»	126	»	12	»	$α^2=β^2-2βγ$συνΑ	»	$α^2=β^2+γ^2-2βγ$συνΑ
»	144	»	23	»	τοιαῦτα	»	ταῦτα