2500

ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ καθηγητοῦ τῶν μαθηματικῶν ἐν τῷ Πρακτικῷ Λυκείῳ Ἀθηνῶν

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

Τῶν μαθητῶν τῶν Πρακτικῶν Λυκείων, τῶν σπουδαστῶν τῶν μαθηματικῶν, φυσικῆς, χημείας καὶ τῶν μαθητῶν τῶν στρατιωτικῶν σχολῶν.

Η ΜΟΝΗ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ Α΄.

[«Ἡ διαπραγμάτευσις τῆς ὕλης τοῦ βιβλίου τούτου, ὅπερ εἶναι ἀπηλλαγμένον ἐπιστημονικῶν σφαλμάτων, εἶναι καλὴ ἀπό τε μεθοδικῆς καὶ γλωσσικῆς ἀπόψεως» (Ἐκ τῆς ἐκθέσεως τῶν κ.κ. εἰσηγητῶν)].

Π. Κ. Τ.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΑΙ Ν. ΤΖΑΚΑΣ & ΣΤΕΦ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑΣ
81Α.—Ὁδὸς Πανεπιστημίου.—81Α
1922

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουσι τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τῶν ἐκδοτῶν.

ΕΚΔΟΤΙΚΟΝ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
Ν. ΤΖΑΚΑ & Σ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΤΥΠΟΙΣ: Α. ΦΡΑΝΤΖΕΣΚΑΚΗ & Α. ΚΑΪΤΑΤΖΗ
4.—Ὁδὸς Σατωβριάνδου – 4

σματος ΑΒ καλοῦνται. Ἡ δὲ ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β φορά, καθ' ἣν γίνεται ἡ προρρηθεῖσα κίνησις, καλεῖται *φορὰ* τοῦ ἀνύσματος ΑΒ.

Ὁμοίως, ἂν κινητόν τι σημεῖον ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ Δ καὶ ἐπὶ τῆς χ΄χ κινούμενον καταλήξῃ εἰς τὸ Γ, γράφει τὸ ἄνυσμα ΔΓ, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν τὸ Δ, τέλος τὸ Γ καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Δ πρὸς τὸ Γ. Ὥστε:

Ἄνυσμα καλεῖται τμῆμα εὐθείας, τὸ ὁποῖον νοεῖται διαγραφὲν ὑπὸ σημείου κινουμένου ἐπ' αὐτῆς κατά τινα φοράν.

Ἀρχὴ ἀνύσματος καλεῖται τὸ σημεῖον, ἐξ οὗ ἤρξατο κινούμενον τὸ κινητὸν σημεῖον, ὅπως διαγράψῃ τὸ ἄνυσμα τοῦτο.

Τέλος ἀνύσματος καλεῖται τὸ σημεῖον, εἰς ὃ κατέληξε τὸ κινητόν, ὅπερ διέγραψε τὸ ἄνυσμα τοῦτο.

Ἄκρα ἀνύσματος καλοῦνται ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ τέλος αὐτοῦ.

Φορὰ ἀνύσματος καλεῖται ἡ φορά, καθ' ἣν ἐκινεῖτο τὸ κινητόν, ὅταν διέγραφεν αὐτό.

Κατὰ ταῦτα εἰς ἕκαστον ἄνυσμα διακρίνομεν *ἀρχήν, τέλος* καὶ *φοράν.* Ἕκαστον ἄνυσμα ὀνομάζομεν διὰ τῶν γραμμάτων τῶν ἄκρων αὐτοῦ προτάσσοντες πάντοτε τὸ γράμμα τῆς ἀρχῆς αὐτοῦ. Συνήθως δὲ ὑπεράνω τῶν γραμμάτων τούτων χαράσσομεν ὁριζόντιον εὐθ. τμῆμα. Οὕτω τὸ σύμβολον $\overline{AB}$ δηλοῖ τὸ ἄνυσμα, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν Α, τέλος Β καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β.

§ 4. **Ἄξων.—. Διευθύνον ἄνυσμα ἄξονος.— Θετικὰ καὶ ἀρνητικὰ ἀνύσματα.—.** Ἐπὶ εὐθείας χ΄χ (Σχ. 3) κινητόν τι σημεῖον δύναται νὰ κινηθῇ εἴτε κατὰ τὴν ἐκ τοῦ χ΄ πρὸς τὸ χ, εἴτε κατὰ τὴν ἀντίθετον ταύτης φοράν. Ἵνα διακρίνωμεν ταύτας ἀπ' ἀλλήλων, καλοῦμεν τὴν μὲν μίαν *θετικήν*, τὴν δὲ ἄλλην *ἀρνητικὴν* φοράν. Πρὸς καθορισμὸν τῆς θετικῆς φορᾶς ἐπὶ εὐθείας τινὸς χ΄χ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς κατὰ βούλησιν ἄνυσμά τι ΟΘ, ὅπερ θεωροῦμεν ὡς μονάδα τῶν ἀνυσμάτων, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπ' αὐτῆς ἢ ἄλλης παραλλήλου εὐθείας. Ἡ φορὰ τοῦ ἀνύσματος τούτου ΟΘ καλεῖται *θετικὴ φορὰ* τῆς εὐθείας, ἐφ' ἧς κεῖται τοῦτο καὶ πάσης παραλλήλου ταύτης.

Πᾶσα εὐθεῖα, ἐφ' ἧς εἶναι ὡρισμένη ἡ θετική, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ἡ ἀρνητικὴ φορά, καλεῖται ἄξων.

Τὸ ἄνυσμα ΟΘ ἄξονός τινος χ΄χ, ὅπερ λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν ἀνυσμάτων καὶ δι' οὗ ὁρίζεται ἡ θετικὴ φορὰ ἐπ' αὐτοῦ, καλεῖται *διευθύνον ἄνυσμα* τοῦ ἄξονος τούτου καὶ παντὸς ἄλλου παραλλήλου αὐτῷ.

Ἕκαστον ἄνυσμα ἄξονός τινος καλεῖται *θετικὸν* ἢ *ἀρνητικόν*, καθ' ὅσον ἔχει θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φοράν.

Ἡ ἀρχὴ O τοῦ διευθύνοντος ἀνύσματος ἄξονός τινος διαιρεῖ αὐτὸν εἰς δύο μέρη ἀπέραντα κοινὴν ἔχοντα ἀρχὴν τὸ O. Ἐκ τούτων τὸ μὲν περιέχον τὸ διευθύνον ἄνυσμα OΘ καλεῖται *θετικὸς ἡμιάξων* τὸ δ' ἕτερον *ἀρνητικὸς ἡμιάξων*. Οὕτως Οχ (Σχ. 3) εἶναι ὁ θετικὸς ἡμιάξων καὶ Οχ′ ὁ ἀρνητικὸς ἡμιάξων τοῦ ἄξονος χ′χ.

§ 5. ***Ἀνύσματα ὁμόρροπα, ἀντίρροπα, ὁμορρόπως ἴσα, ἀντιρρόπως ἴσα, ἀντίθετα.***—. Τὰ ἀνύσματα AB καὶ ΓΔ (Σχ. 3), ἅτινα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἐπὶ παραλλήλων ἀξόνων καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν φοράν, καλοῦνται *ὁμόρροπα ἀνύσματα*. Τὰ δὲ AB καὶ ΔΓ ἔχοντα ἀντίθετον φορὰν καλοῦνται *ἀντίρροπα ἀνύσματα*. Ὥστε:

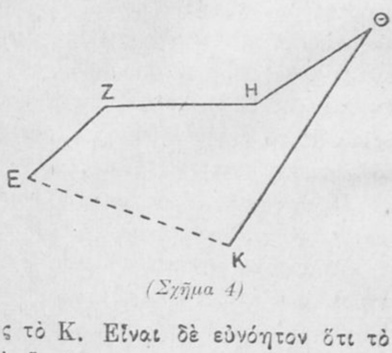
Τὰ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ παραλλήλων ἀξόνων κείμενα ἀνύσματα καλοῦνται ὁμόρροπα μέν, ἂν ἔχωσι τὴν αὐτὴν φοράν, ἀντίρροπα δέ, ἂν ἔχωσιν ἀντίθετον φοράν.

Συνήθως τὰ ἀντίρροπα ἀνύσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ἄκρα, καλοῦνται *ἀντίθετα* ἀνύσματα. Τοιαῦτα π.χ. εἶναι τὰ $\overline{AB}$ καὶ $\overline{BA}$ (Σχ. 3).

Ἐὰν δύο ἀνύσματα εἶναι ὁμόρροπα καὶ ἐφαρμόσιμα, καλοῦνται *ὁμορρόπως ἴσα*· ἐὰν δὲ εἶναι ἀντίρροπα καὶ ἐφαρμόσιμα, καλοῦνται *ἀντιρρόπως ἴσα*.

§ 6. ***Διαδοχικὰ ἀνύσματα***.—. ***Συνισταμένη αὐτῶν***.—. Τὸ ἄνυσμα ΒΓ (Σχ. 3) ἔχει ἀρχὴν τὸ σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον εἶναι τέλος τοῦ $\overline{AB}$. Διὰ τοῦτο τὰ $\overline{AB}$ καὶ $\overline{B\Gamma}$ λέγονται *διαδοχικὰ* ἀνύσματα. Τοιαῦτα εἶναι καὶ τὰ $\overline{AB}$, $\overline{B\Gamma}$, $\overline{\Gamma\Delta}$ (Σχ. 3), ὁμοίως δὲ καὶ τὰ $\overline{EZ}$ $\overline{ZH}$ $\overline{H\Theta}$ $\overline{\Theta K}$ (Σχ. 4).

Γενικῶς: Δύο ἢ πλείονα ἀνύσματα λέγονται διαδοχικά, ἐὰν ἀρχὴ ἑκάστου (πλὴν τοῦ α′.) εἶναι τὸ τέλος τοῦ προηγουμένου.



(Σχῆμα 4)

Κινητὸν διαγράφων κατὰ σειρὰν τὰ $\overline{EZ}$, $\overline{ZH}$, $\overline{H\Theta}$, $\overline{\Theta K}$ (Σχ. 4) μεταβαίνει ἐκ τοῦ E εἰς τὸ K. Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο ἐπέρχεται καὶ ἂν διὰ μιᾶς διαγράψῃ τὸ ἄνυσμα EK, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν μὲν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου, τέλος δὲ τὸ τέλος τοῦ τελευταίου τῶν ῥηθέντων ἀνυσμάτων. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ $\overline{\text{ΕΚ}}$ καλεῖται *συνισταμένη ἢ γεωμετρικὸν ἄθροισμα* τῶν $\overline{\text{ΕΖ}}$, $\overline{\text{ΖΗ}}$, $\overline{\text{ΗΘ}}$, $\overline{\text{ΘΚ}}$. Ὁμοίως τῶν $\overline{\text{ΑΒ}}$, $\overline{\text{ΒΓ}}$, $\overline{\text{ΓΔ}}$, (Σχ. 3) συνισταμένη εἶναι τὸ $\overline{\text{ΑΔ}}$.

Ὥστε: *Συνισταμένη ἢ γεωμ. ἄθροισμα διαδοχικῶν ἀνυσμάτων καλεῖται τὸ ἄνυσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν μὲν τὴν τοῦ πρώτου ἀρχήν, τέλος δὲ τὸ τέλος τοῦ τελευταίου τῶν ἀνυσμάτων τούτων.*

Τὸ γεωμ. ἄθροισμα ἀνυσμάτων σημειοῦμεν θέτοντες μεταξὺ τῶν παριστώντων ταῦτα συμβόλων τὸ σημεῖον $\#$. Οὕτως ἡ παράστασις $\overline{\text{ΕΖ}} \# \overline{\text{ΖΗ}} \# \overline{\text{ΗΘ}} \# \overline{\text{ΘΚ}}$ δηλοῖ τὸ γεωμ. ἄθροισμα τῶν ἐν αὐτῇ ἀνυσμάτων, ἤτοι τὸ $\overline{\text{ΕΚ}}$.

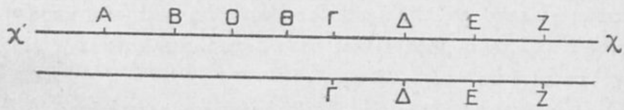
Τοῦτο δὲ δηλοῦμεν συνήθως οὕτω:

$$\overline{\text{ΕΖ}} \# \overline{\text{ΖΗ}} \# \overline{\text{ΗΘ}} \# \overline{\text{ΘΚ}} = \overline{\text{ΕΚ}}.$$

Σημ. Ἐὰν τὸ τέλος τοῦ τελευταίου τῶν προστιθεμένων διαδοχικῶν ἀνυσμάτων συμπίπτῃ μὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου, ἡ συνισταμένη αὐτῶν εἶναι σημεῖον.

§ 7. *Γινόμενον ἀνύσματος ἐπὶ ἀριθμόν.—*

Α'. Ἔστω τυχὸν ἄνυσμα ΑΒ κείμενον ἐπί τινος ἄξονος χ'χ (Σχ. 5), ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ δὲ ἢ ἐπὶ ἑτέρου παραλλήλου ἄξονος Ζ'Ζ



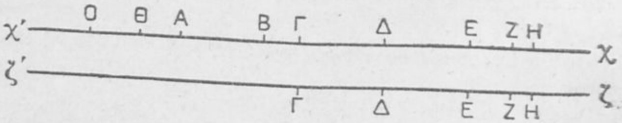
(Σχῆμα 5)

ἔστωσαν τρία ἀνύσματα ΓΔ, ΔΕ καὶ ΕΖ διαδοχικὰ καὶ ὁμορρόπως ἴσα τῷ $\overline{\text{ΑΒ}}$. Ἡ συνισταμένη $\overline{\text{ΓΖ}}$ τούτων καλεῖται *γινόμενον* τοῦ $\overline{\text{ΑΒ}}$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3. Ὁμοίως ἡ συνισταμένη $\overline{\text{ΓΕ}}$ τῶν $\overline{\text{ΓΔ}}$ καὶ $\overline{\text{ΔΕ}}$ καλεῖται γινόμενον τοῦ $\overline{\text{ΑΒ}}$ ἐπὶ 2.

Γενικῶς: *Γινόμενον ἀνύσματος ἐπὶ* **ἀκέραιον** *καὶ θετικὸν ἀριθμὸν μ καλεῖται ἡ συνισταμένη μ ἀνυσμάτων ὁμορρόπως ἴσων αὐτῷ.*

Ἕκαστον τῶν μ τούτων ἀνυσμάτων (ἢ ἄλλο ἄνυσμα ὁμορρόπως ἴσον ἑκάστῳ τούτων) καλεῖται $\frac{1}{\mu}$ τῆς συνισταμένης αὐτῶν. Οὕτω τὸ $\overline{\text{ΑΒ}}$ εἶναι $\frac{1}{3}$ μὲν τοῦ $\overline{\text{ΓΖ}}$, $\frac{1}{2}$ δὲ τοῦ $\overline{\text{ΓΕ}}$.

Β′. Τὸ ἄνυσμα ΓΗ (Σχ. 6) εἶναι συνισταμένη τῶν διαδοχικῶν ἀνυσμάτων ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΗ. Τούτων τὰ μὲν $\overline{\Gamma\Delta}$ καὶ $\overline{\Delta E}$ εἶναι ὁμορρόπως ἴσα τῷ $\overline{AB}$ τὸ $\overline{EZ}$ εἶναι ὁμορρόπως ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ $\overline{AB}$ καὶ τὸ $\overline{ZH}$ εἶναι ὁμορρόπως ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ $\overline{AB}$. Τὸ ἄνυσμα τοῦτο ΓΗ καλεῖται *γινόμενον* τοῦ $\overline{AB}$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$. Ὁμοίως, ἂν ἄνυσμά τι εἶναι συνισταμένη τριῶν ἀνυσμάτων ὁμορρόπως ἴσων τῷ $\overline{AB}$, δύο ἀνυσμάτων ὁμορρόπως ἴσων τῷ $\frac{1}{10}$ τοῦ $\overline{AB}$ καὶ ἑνὸς ἀνύσματος ὁμορρόπως ἴσου πρὸς τὸ



(Σχῆμα 6)

$\frac{1}{100}$ τοῦ $\overline{AB}$, καλεῖται *γινόμενον* τοῦ $\overline{AB}$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν

$$\left(1+1+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}\right).$$

Εἰς ἀμφότερα τὰ παραδείγματα ταῦτα ἡ συνισταμένη τῶν θεωρηθέντων ἀνυσμάτων γίνεται ἐκ τοῦ $\overline{AB}$ καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ, ὡς ὁ πολ/στὴς γίνεται ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο συμβαίνει καὶ ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος ἕπεται ὅτι:

Γινόμενον ἀνύσματος ἐπὶ ἀριθμὸν θετικὸν καλεῖται τὸ ἄνυσμα, ὅπερ γίνεται ἐξ αὐτοῦ καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ, ὡς ὁ ἀριθμὸς γίνεται ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς.

Κατὰ ταῦτα τὸ γινόμενον ἀνύσματος ἐπὶ θετικὸν ἀριθμὸν ἀποτελεῖται ἐξ ἀνυσμάτων διαδοχικῶν καὶ ὁμορρόπων πρὸς αὐτό. Εἶναι ἄρα ἄνυσμα ὁμόρροπον αὐτῷ.

Γ′. Τὸ ἄνυσμα $\overline{E\Gamma}$ (Σχ. 6) εἶνε γινόμενον τοῦ $\overline{BA}$ ἐπὶ τὸν 2. Τὸ ἄνυσμα τοῦτο $\overline{E\Gamma}$ καλοῦμεν καὶ γινόμενον τοῦ $\overline{AB}$ ἐπὶ (—2). Ὁμοίως τὸ ἄνυσμα ΖΓ, ὅπερ εἶναι γινόμενον τοῦ $\overline{BA}$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τὸν $\left(1+1+\frac{1}{2}\right)$, καλεῖται καὶ γινόμενον τοῦ $\overline{AB}$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $-\left(1+1+\frac{1}{2}\right)$.

Ὥστε: *Γινόμενον ἀνύσματος ἐπὶ ἀρνητικὸν ἀριθμὸν καλεῖται τὸ γινόμενον τοῦ ἀντιθέτου ἀνύσματος ἐπὶ τὸν ἀντίθετον τοῦ πολ/στοῦ ἀριθμόν.*

Κατὰ ταῦτα τὸ γινόμενον ἀνύσματος ἐπὶ ἀρνητικὸν ἀριθμὸν ἀποτελεῖται ἐξ ἀνυσμάτων διαδοχικῶν καὶ ἀντιρρόπων πρὸς αὐτό· εἶναι ἄρα ἄνυσμα ἀντίρροπον αὐτῷ.

§ 8 **Λόγος ἀνύσματος πρὸς ἄλλο ἄνυσμα.**—Τὸ ἄνυσμα ΓΕ (Σχ. 6) εἶναι γινόμενον τοῦ $\overline{\text{AB}}$ ἐπὶ 2. Ὁ ἀριθμὸς 2 λέγεται *λόγος* τοῦ ΓΕ πρὸς τὸ $\overline{\text{AB}}$. Ὁμοίως, ἐπειδὴ $\overline{\Gamma\text{H}}=\overline{\text{AB}}\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$, ὁ ἀριθμὸς $\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=2\frac{3}{4}$ καλεῖται *λόγος* τοῦ $\overline{\Gamma\text{H}}$ πρὸς τὸ $\overline{\text{AB}}$. Δι' ὅμοιον λόγον ὁ (—2) καλεῖται *λόγος* τοῦ $\overline{\text{E}\Gamma}$ πρὸς τὸ $\overline{\text{AB}}$ (Σχ. 6).

Ὥστε: *Λόγος ἀνύσματος πρὸς ἄλλο ἄνυσμα κείμενον ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ παραλλήλου ἄξονος καλεῖται ὁ ἀριθμός, ἐφ' ὃν πρέπει νὰ πολ/σθῇ τὸ δεύτερον ἄνυσμα, ἵνα προκύψῃ τὸ πρῶτον.*

Εἶναι εὐνόητον (§ 7) ὅτι ὁ λόγος ἀνύσματος πρὸς ἄλλο ἄνυσμα εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός, καθ' ὅσον τὰ ἀνύσματα ταῦτα εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα.

Ὁ λόγος ἀνύσματός τινος $\overline{\Gamma\text{E}}$ πρὸς ἄλλο $\overline{\text{AB}}$ σημειοῦται οὕτω

$$\overline{\Gamma\text{E}} : \overline{\text{AB}} \text{ ἢ καὶ οὕτω } \frac{\overline{\Gamma\text{E}}}{\overline{\text{AB}}}.$$

§ 9. **Μῆκος ἀνύσματος.**—Ἔστω $\overline{\Gamma\Delta}$ τυχὸν ἄνυσμα κείμενον ἐπί τινος ἄξονος χ'χ (Σχ. 6) καὶ ΟΘ τὸ διευθύνον αὐτοῦ ἄνυσμα. Ὁ λόγος τοῦ $\overline{\Gamma\Delta}$ πρὸς τὸ $\overline{\text{O}\Theta}$ καλεῖται *μῆκος* τοῦ $\overline{\Gamma\Delta}$. Ὁμοίως ὁ λόγος $\overline{\text{EB}} : \overline{\text{O}\Theta}$ καλεῖται *μῆκος* τοῦ $\overline{\text{EB}}$.

Ὥστε: *Μῆκος ἀνύσματός τινος καλεῖται ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὸ διευθύνον ἄνυσμα τοῦ ἄξονος, ἐφ' οὗ κεῖται.*

Τὸ μῆκος ἀνύσματός τινος ΓΔ σημειοῦται συντόμως οὕτω $(\overline{\Gamma\Delta})$· ὥστε

$$\frac{\overline{\Gamma\Delta}}{\overline{\text{O}\Theta}}=(\overline{\Gamma\Delta}).$$

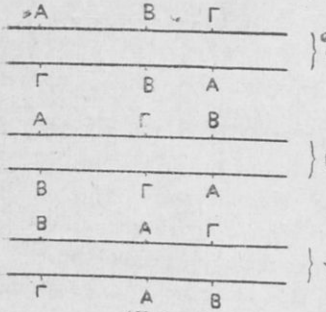
Τὸ μῆκος ἀνύσματος εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός, καθ' ὅσον τοῦτο εἶναι ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον πρὸς τὸ διευθύνον ἄνυσμα, ἤτοι καθ' ὅσον τοῦτο εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἄνυσμα (§ 4).

Τὰ ὁμορρόπως ἴσα ἀνύσματα ἔχουσι ἴσα μήκη, τὰ δὲ ἀντιρρόπως ἴσα ἔχουσιν ἀντίθετα μήκη. Κατὰ ταῦτα τὰ ἀντίθετα ἀνύσματα ΑΒ καὶ ΒΑ ἔχουσιν ἀντίθετα μήκη, ἤτοι

$$(\overline{AB}) + (\overline{BA}) = 0.$$

§ 10. ***Σχέσεις τῶν μηκῶν διαδοχικῶν ἀνυσμάτων τοῦ αὐτοῦ ἄξονος πρὸς τὸ μῆκος τῆς συνισταμένης αὐτῶν.***

Α΄.—Ἔστωσαν πρῶτον δύο διαδοχικὰ ἀνύσματα ΑΒ καὶ ΒΓ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος (Σχ. 7).



(Σχῆμα 7)

Ἐὰν τὸ σημεῖον Β κεῖται μεταξὺ τῶν ἄλλων Α καὶ Γ (Σχ. 7 α΄), τὰ ἀνύσματα ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ εἶναι ὁμόρροπα καὶ κατ' ἀκολουθίαν οἱ ἀριθμοὶ $(\overline{AB})$, $(\overline{B\Gamma})$, $(\overline{A\Gamma})$ εἶναι ὁμόσημοι· ἀληθεύει ἄρα προφανῶς ἡ ἰσότης·

$$(\overline{AB}) + (\overline{B\Gamma}) = (\overline{A\Gamma}). \qquad (1)$$

Ἐὰν τὸ σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ τῶν ἄλλων (Σχ. 7, β΄), ἀληθεύει ἡ ἰσότης $(\overline{A\Gamma}) + (\overline{\Gamma B}) = (\overline{AB})$. Ἐὰν δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς προστεθῇ ὁ ἀριθμὸς $(\overline{B\Gamma})$, προκύπτει ἡ ἰσότης $(\overline{A\Gamma}) + (\overline{\Gamma B}) + (\overline{B\Gamma}) = (\overline{AB}) + (\overline{B\Gamma})$. Ἐπειδὴ δὲ $(\overline{\Gamma B}) + (\overline{B\Gamma}) = 0$ (§ 9), ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $(\overline{A\Gamma}) = (\overline{AB}) + (\overline{B\Gamma})$, ἤτοι ἰσχύει πάλιν ἡ ἰσότης (1)

Ἐὰν τέλος τὸ Α κεῖται μεταξὺ τῶν ἄλλων (Σχ. 7, γ΄), ἀληθεύει ἡ ἰσότης $(\overline{BA}) + (\overline{A\Gamma}) = (\overline{B\Gamma})$, ἐξ ἧς διὰ προσθέσεως εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ ἀριθμοῦ $(\overline{AB})$ προκύπτει πάλιν ἡ ἰσότης (1).

Β΄. Νοήσωμεν ἤδη ὁσαδήποτε σημεῖα Α, Β, Γ,......Ι, Κ, Λ, κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος καθ' οἱανδήποτε τάξιν. Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν προηγουμένως ἀποδειχθεῖσαν ἰσότητα (1) ἐπὶ τῶν ἀνυσμάτων, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ὑπὸ τῶν σημείων α΄) Α, Β, Λ, β΄) Β, Γ, Λ, γ΄) Γ, Δ, Λ..... καὶ τέλος ὑπὸ τῶν Ι, Κ, Λ, προκύπτουσιν αἱ ἀκόλουθοι ἰσότητες

$$\begin{aligned}
(\overline{AB}) + (\overline{B\Lambda}) &= (\overline{A\Lambda}) \\
(\overline{B\Gamma}) + (\overline{\Gamma\Lambda}) &= (\overline{B\Lambda}) \\
(\overline{\Gamma\Delta}) + (\overline{\Delta\Lambda}) &= (\overline{\Gamma\Lambda}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(\overline{IK}) + (\overline{K\Lambda}) &= (\overline{I\Lambda})
\end{aligned}$$

Ἐὰν δὲ προστεθῶσι τὰ ἀντίστοιχα μέλη τῶν ἰσοτήτων τούτων καὶ ἀφαιρεθῶσιν εἶτα οἱ κοινοὶ εἰς ἀμφότερα τὰ προκύπτοντα ἴσα ἀθροίσματα προσθετέοι, προκύπτει ἡ ἰσότης

$$(\overline{AB})+(\overline{B\Gamma})+(\overline{\Gamma\Delta})+\ldots\ldots+(\overline{IK})+(\overline{K\Lambda})=(\overline{A\Lambda}) \qquad (2)$$

Αἱ ἰσότητες (1) καὶ (2) ἐκφράζουσι τὴν ἀκόλουθον ἰδιότητα.

Τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν διαδοχικῶν ἀνυσμάτων τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τῆς συνισταμένης αὐτῶν.

Ἀσκήσεις. 1) Τῶν σημείων Α,Β,Γ,....Λ,Μ ὁπωσδήποτε κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$(\overline{AB})+(\overline{B\Gamma})+\ldots\ldots+(\overline{\Lambda M})+(\overline{MA})=0.$$

2) Τῶν σημείων Α,Β,Γ ὁπωσδήποτε κειμένων ἐπὶ ἄξονος καὶ Μ ὄντος τοῦ μέσου τοῦ $(\overline{AB})$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$(\overline{\Gamma A})+(\overline{\Gamma B})=2(\overline{\Gamma M}).$$

3) Τῶν σημείων Α,Β,Γ ὁπωσδήποτε κειμένων ἐπὶ ἄξονος καὶ Μ ὄντος τοῦ μέσου τοῦ $\overline{B\Gamma}$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $(\overline{AB}).(\overline{A\Gamma})=(\overline{AM})^2-(\overline{BM})^2$

4) Ἐὰν τὰ σημεῖα Ο,Α,Β κεῖνται ὁπωσδήποτε ἐπὶ ἄξονος καὶ ἕτερον σημεῖον Μ ἔχῃ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος τοιαύτην θέσιν ὥστε νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης $\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=-\frac{\mu}{\nu}$, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$(\mu+\nu)(\overline{OM})=\nu(\overline{OA})+\mu(\overline{OB})$$

5) Τῶν σημείων Α,Β,Γ,Δ ὁπωσδήποτε κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$(\overline{B\Gamma})(\overline{A\Delta})+(\overline{\Gamma A})(\overline{B\Delta})+(\overline{AB})(\overline{\Gamma\Delta})=0.$$

§ 11. *Ὀρθὴ προβολὴ σημείου καὶ ἀνύσματος ἐπὶ ἄξονα.* — Ἔστω Α τυχὸν σημεῖον κείμενον ἐκτὸς ἄξονός τινος χ΄χ (Σχ. 8) καὶ α ὁ ποὺς τῆς ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὸν χ΄χ ἀγομένης καθέτου. Ὁ ποὺς α καλεῖται *ὀρθὴ προβολὴ* τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὸν ἄξονα χ΄χ, ἡ δὲ κάθετος Αα καλεῖται *προβάλλουσα* τοῦ σημείου Α. Ὁμοίως ὁ ποὺς β τῆς καθέτου Ββ εἶναι *ὀρθὴ προβολὴ* τοῦ Β ἐπὶ τὸν ἄξονα χ΄χ καὶ ἡ Ββ εἶναι ἡ προβάλλουσα αὐτοῦ.

Ὥστε: *Ὀρθὴ προβολὴ σημείου ἐπὶ ἄξονα καλεῖται ὁ ποὺς τῆς καθέτου, ἥτις ἄγεται ἐξ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦτον.*

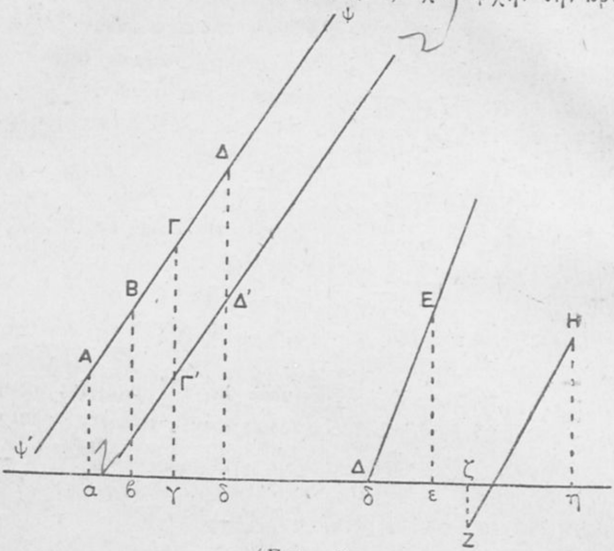
Ὁ ἄξων, ἐφ' οὗ κεῖνται αἱ προβολαί, καλεῖται ἰδιαιτέρως *προβολικὸς ἄξων.*

Προβάλλουσα σημείου καλεῖται ἡ ἐξ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν προβολικὸν ἄξονα ἀγομένη κάθετος.

Εἶναι εὐνόητον ὅτι ἕκαστον σημεῖον τοῦ προβολικοῦ ἄξονος συμπίπτει μετὰ τῆς προβολῆς αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦτον.

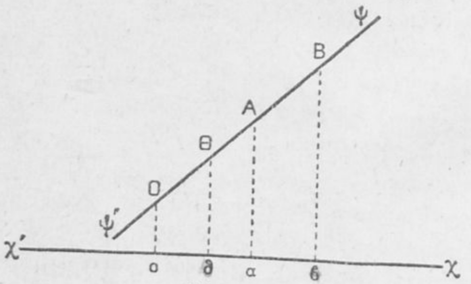
Σημ. Χάριν συντομίας τὴν ὀρθὴν προβολὴν θέλομεν πολλάκις καλῇ καὶ ἁπλῶς προβολήν.

Τὸ ἄνυσμα αβ τοῦ ἄξονος χ΄χ (Σχ. 8) ἔχει ἀρχὴν τὴν προβολὴν



(*Σχῆμα 8*)

τῆς ἀρχῆς καὶ τέλος τὴν προβολὴν τοῦ τέλους τοῦ ἀνύσματος ΑΒ. Τὸ ἄνυσμα αβ καλεῖται ὀρθὴ προβολὴ τοῦ $\overline{\text{ΑΒ}}$ ἐπὶ τὸν ἄξονα χ΄χ. Ὁμοίως τὸ $\overline{\text{δε}}$ εἶναι προβολὴ τοῦ $\overline{\text{ΔΕ}}$ καὶ τὸ $\overline{\text{ζη}}$ προβολὴ τοῦ $\overline{\text{ΖΗ}}$.



(*Σχῆμα 9*)

Γενικῶς: *Ὀρθὴ προβολὴ ἀνύσματος ἐπὶ ἄξονα καλεῖται τὸ ἄνυσμα τοῦ ἄξονος τούτου, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν μὲν τὴν προβολὴν τῆς ἀρχῆς, τέλος δὲ τὴν προβολὴν τοῦ τέλους τοῦ ἀνύσματος.*

Τὸ διευθύνον ἄνυσμα ΟΘ ἄξονός τινος ψ΄ψ (Σχ. 9) ἔχει πρὸς ἕτερον ἄξονα χ΄χ προβολὴν ἄνυσμά τι $\overline{o\vartheta}$. Τούτου τὸ μῆκος, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς $(\overline{o\vartheta})$, καλεῖται *συντελεστὴς προβολῆς* τοῦ ἄξονος ψ′ψ πρὸς τὸν ἄξονα χ′χ [1].

Συντελεστὴς δὲ προβολῆς ἀνύσματος πρὸς ἄξονα καλεῖται ὁ πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα συντελεστὴς προβολῆς τοῦ περιέχοντος τὸ ἄνυσμα ἄξονος. Οὕτω τοῦ ἀνύσματος ΑΒ (Σχ. 9) συντελεστὴς προβολῆς πρὸς τὸν ἄξονα χ′χ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $(\overline{o\vartheta})$, ὅστις εἶναι καὶ συντελεστὴς προβολῆς τοῦ ψ′ψ πρὸς τὸν χ′χ.

§ 12 ***Προβολικαὶ ἰδιότητες ἀνυσμάτων.***—Α′. Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ δύο ἀνύσματα τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ψ′ψ (Σχ. 8) καὶ $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\gamma\delta}$ αἱ προβολαὶ αὐτῶν ἐπὶ τὸν ἄξονα χ′χ. Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ψ′ψ καὶ χ′χ τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν Αα, Ββ, Γγ, Δδ, ἔπεται ὅτι τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα, ἤτοι ἰσχύει μεταξὺ τῶν τμημάτων αὐτῶν ἀπολύτως θεωρουμένων ἡ ἰσότης

$$\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} \tag{1}$$

Ἐπειδὴ δὲ τῶν ἀνυσμάτων ΑΒ καὶ ΓΔ ὄντων ὁμορρόπων ἢ ἀντιρρόπων καὶ αἱ προβολαὶ αὐτῶν εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα ἀνύσματα, ἡ ἰσότης (1) ἀληθεύει καὶ ὅταν εἰς τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΓΔ, αβ, γδ δοθῶσι τὰ προσήκοντα σημεῖα (§ 8), ἤτοι ἀληθεύει αὕτη καὶ διὰ τὰ ἀνύσματα ΑΒ. ΓΔ, αβ, γδ. ὥστε:

$$\frac{\overline{ΑΒ}}{\overline{ΓΔ}} = \frac{\overline{\alpha\beta}}{\overline{\gamma\delta}} \tag{2}$$

Ἔστωσαν ἔτι δύο ἀνύσματα ΑΒ καὶ Γ′Δ′ κείμενα ἐπὶ παραλλήλων ἀξόνων ψ′ψ καὶ z′z (Σχ. 8) καὶ $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\gamma\delta}$ αἱ προβολαὶ αὐτῶν ἐπί τινα ἄξονα χ′χ. Ἔστω δὲ ΓΔ τὸ ἄνυσμα τοῦ ἄξονος ψ′ψ, ὅπερ περιέχεται μεταξὺ τῶν προβαλλουσῶν Γ′γ καὶ Δ′δ· εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ ἀνύσματα ΓΔ καὶ Γ′Δ′ ἔχουσι τὴν αὐτὴν προβολὴν $\overline{\gamma\delta}$ ἐπὶ τοῦ χ′χ καὶ εἶναι ἴσα. Ἐὰν δὲ ἐν τῇ ἰσότητι (2) τεθῇ ἀντὶ τοῦ $\overline{ΓΔ}$ τὸ $\overline{Γ'Δ'}$, προκύπτει ἡ ἰσότης

$$\frac{\overline{ΑΒ}}{\overline{Γ'Δ'}} = \frac{\overline{\alpha\beta}}{\overline{\gamma\delta}} \tag{3}$$

Αἱ ἰσότητες (2) καὶ (3) ἐκφράζουσιν ὅτι:

Ὁ λόγος δύο ἀνυσμάτων κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἐπὶ παραλλή-

---

[1] Ὑπενθυμίζομεν ὅτι $(\overline{o\vartheta})$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ $\overline{o\vartheta}$ πρὸς τὸ διευθύνον ἄνυσμα τοῦ ἄξονος χ′χ, ὅπερ δύναται νὰ εἶναι τυχὸν ἄνυσμα τοῦ ἄξονος χ′χ κατὰ βούλησιν ἡμῶν ὁριζόμενον. (§ 9)

λων ἀξόνων ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα.

Β΄. Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης ἕπεται εὐκόλως ὅτι:

Τῶν ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσων ἀνυσμάτων αἱ προβολαὶ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα εἶναι ἀνύσματα ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσα.

Γ΄.—Ἐφαρμόζοντες τὴν πρώτην τῶν προηγουμένων ἰδιοτήτων εἰς ἄνυσμά τι ΑΒ καὶ τὸ διευθύνον ἄνυσμα ΟΘ τοῦ ἄξονος ψ΄ψ, ἐφ' οὗ κεῖται τὸ $\overline{AB}$ (Σχ. 9), εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα $\frac{\overline{AB}}{\overline{O\Theta}}=\frac{\overline{\alpha\beta}}{\overline{o\theta}}$, ἐξ ἧς προκύπτει εὐκόλως ἡ ἰσότης $(\overline{AB})=\frac{(\overline{\alpha\beta})}{(\overline{o\theta})}$, ὅθεν $(\overline{\alpha\beta})=(\overline{AB})\,(\overline{o\theta})$.

Ἄρα: *Τὸ μῆκος τῆς ἐπὶ ἄξονα προβολῆς ἀνύσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους αὐτοῦ ἐπὶ τὸν συντελεστὴν προβολῆς τοῦ ἀνύσματος τούτου πρὸς τὸν προβολικὸν ἄξονα.*

Ἀσκήσεις 6) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ προβολαὶ ἀνύσματος ἐπὶ ἄξονας παραλλήλους εἶναι ἀνύσματα ὁμορρόπως ἴσα.

7) Δεδομένων τῶν ἐπὶ ἄξονα προβολῶν α καὶ β τῶν ἄκρων ἀνύσματος ΑΒ, νὰ εὑρεθῇ ἡ προβολὴ τοῦ μέσου αὐτοῦ.

8) Δεδομένων τῶν ἐπὶ ἄξονα προβολῶν α καὶ β τῶν ἄκρων ἀνύσματος ΑΒ, νὰ εὑρεθῇ ἡ προβολὴ τοῦ σημείου Μ τοῦ $\overline{AB}$ δι' ὃ εἶναι $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\frac{1}{4}$.

9) Ἄνυσμα μήκους $0{,}12^{\mu}$ ἔχει πρὸς ἄξονα χ΄χ συντελεστὴν προβολῆς $0{,}05^{\mu}$. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς προβολῆς αὐτοῦ ἐπὶ ἄξονα χ΄χ;

10) Ἀνύσματος μήκους $1{,}20^{\mu}$ ἡ προβολὴ ἐπὶ ἄξονά τινα ἔχει μῆκος $0{,}6^{\mu}$. Ποῖος εἶναι ὁ συντελεστὴς προβολῆς τοῦ ἀνύσματος τούτου πρὸς τὸν προβολικὸν ἄξονα;

11) Ποῖος εἶναι ὁ συντελεστὴς προβολῆς ἄξονος πρὸς ἕτερον ἄξονα παράλληλον αὐτῷ;

12) Ποῖος εἶναι ὁ συντελεστὴς προβολῆς ἄξονος πρὸς ἕτερον κάθετον ἐπ' αὐτόν;

13) Δεδομένων τῶν ἐπὶ ἄξονα προβολῶν τῶν κορυφῶν τριγώνου, νὰ εὑρεθῇ ἡ προβολὴ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαμέσων αὐτοῦ.

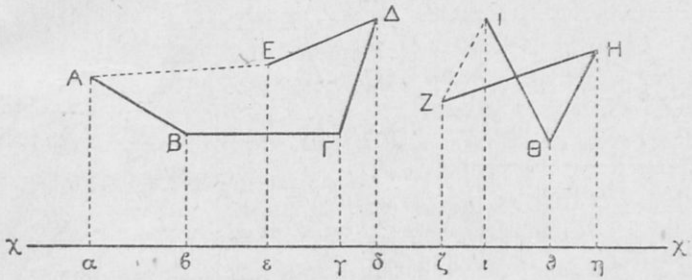
§ 13. ***Προβολὴ τεθλασμένης γραμμῆς ἐπὶ ἄξονα. — Προβολικαὶ ἰδιότητες τῶν τεθλασμένων γραμμῶν.*** — Ἔστω ΑΒΓΔΕ (Σχ. 10) τυχοῦσα τεθλασμένη γραμμὴ καὶ $\overline{AE}$ ἡ συνισταμένη αὐτῆς, ἤτοι ἡ συνισταμένη τῶν πλευρῶν αὐτῆς ὡς ἀνυσμάτων θεωρουμένων.

Ἡ ἐπὶ τυχόντα ἄξονα χ΄χ προβολὴ $\overline{\alpha\varepsilon}$ τῆς συνισταμένης $\overline{\mathrm{AE}}$ καλεῖται προβολὴ τῆς τεθλασμένης ταύτης γραμμῆς ἐπὶ τὸν χ΄χ. Ὁμοίως τὸ ἄνυσμα ζι εἶναι προβολὴ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΖΗΘΙ (Σχ. 10).

Γενικῶς: *Προβολὴ τεθλασμένης γραμμῆς ἐπὶ ἄξονα καλεῖται ἡ προβολὴ τῆς συνισταμένης αὐτῆς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα.*

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπονται εὐκόλως αἱ ἑξῆς ἰδιότητες.

Α΄.—. Δύο τεθλασμέναι γραμμαὶ τὰ αὐτὰ ἔχουσαι ὁμώνυμα ἄκρα



(Σχῆμα 10)

ἔχουσι τὴν αὐτὴν προβολὴν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα.

Β΄.—. Ἡ ἐπὶ ἄξονα προβολὴ κλειστῆς τεθλασμένης γραμμῆς εἶναι σημεῖον.

Γ΄.—. Ἐπειδὴ $\overline{\alpha\varepsilon} \equiv \overline{\alpha\beta} \dotplus \overline{\beta\gamma} \dotplus \overline{\gamma\delta} \dotplus \overline{\delta\varepsilon}$, ἕπεται (§ 10) ὅτι:

$$(\overline{\alpha\varepsilon}) = (\overline{\alpha\beta}) + (\overline{\beta\gamma}) + (\overline{\gamma\delta}) + (\overline{\delta\varepsilon}).\quad \text{Ἄρα}.$$

Τὸ μῆκος τῆς προβολῆς τεθλ. γραμμῆς ἐπὶ ἄξονα ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν προβολῶν τῶν πλευρῶν αὐτῆς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα.

Ἀσκήσεις. 14) Τρία ἀνύσματα ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ συνιστῶσι τὴν περίμετρον τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ ὁρισθῇ ἡ προβολὴ τῆς περιμέτρου ταύτης ἐπὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς Α, ἥτις θεωρεῖται ἀρχὴ τοῦ πρώτου ἀνύσματος.

15) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς προβολῆς τῆς περιμέτρου ὀρθογωνίου τριγώνου ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ.

16) Ἐὰν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ εἶναι κατὰ σειρὰν οἱ συντελεσταὶ προβο-

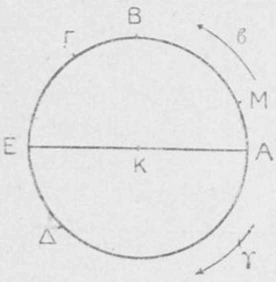
λῆς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ πρός τινα ἄξονα χ'χ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$(\overline{AB})_{\lambda_1} + (\overline{B\Gamma})_{\lambda_2} + (\overline{\Gamma\Delta})_{\lambda_3} + (\overline{\Delta A})_{\lambda_4} = 0.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β^{ον}

Τόξα—Γωνίαι.

§ 14. ***Μέτρησις τόξου.—Μέτρον τόξου.***—Ἔστω ΑΒ τυχὸν τόξον τῆς περιφερείας Κ (Σχ. 11) καὶ ΑΜ ἕτερον τόξον τῆς αὐτῆς (ἢ ἄλλης ἴσης) περιφερείας, ὅπερ λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν τόξων. Ἡ σύγκρισις τοῦ τόξου ΑΒ πρὸς τὸ $\overline{AM}$, ἤτοι ἡ εὕρεσις τοῦ λόγου $\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}}$, καλεῖται *μέτρησις* τοῦ τόξου ΑΒ. Ὁ δὲ λόγος $\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}}$ καλεῖται *μέτρον* τοῦ τόξου ΑΒ καὶ παρίσταται συντόμως οὕτω $(\overline{AB})$. Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς $\frac{\overline{\Gamma\Delta}}{\overline{AM}} = (\overline{\Gamma\Delta})$ εἶναι τὸ μέτρον τοῦ $\overline{\Gamma\Delta}$.



(Σχῆμα 11)

Γενικῶς: *Μέτρον τόξου καλεῖται ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὴν μονάδα τῶν τόξων.*

§ 15. ***Μονάδες τόξων.***—Αἱ συνήθεις μονάδες τῶν τόξων εἶναι αἱ ἀκόλουθοι.

α'. Ἡ *μοῖρα* (°), ἤτοι τὸ $\frac{1}{360}$ τῆς περιφερείας. Ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ (') καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα λεπτὰ (").

β'. Ὁ *βαθμός*, ἤτοι τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς περιφερείας. Ἕκαστος βαθ. διαιρεῖται εἰς 100 πρῶτα λεπτὰ καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 100 δεύτερα λεπτά.

Συνήθως ἄνωθεν καὶ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δηλοῖ βαθμούς, τίθεται τὸ γράμμα γ οὕτω 25^{γ} σημαίνει τόξον 25 βαθμῶν.

γ'. Τὸ *ἀκτίνιον*, ἤτοι τόξον, ὅπερ ἔχει μῆκος ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τῆς περιφερείας, εἰς ἣν τοῦτο ἀνήκει.

Ἐὰν α εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος, τὸ μῆκος τῆς περιφερείας εἶναι, ὡς γνωστόν, 2πα, τὸ δὲ τοῦ ἀκτινίου εἶναι α· τὸ μέτρον ἄρα τῆς περιφερείας εἶναι $\frac{2\pi\alpha}{\alpha}=2\pi$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι μέτρον τῆς ἡμιπεριφείας εἶναι π, τοῦ τεταρτημορίου περιφερείας εἶναι $\frac{\pi}{2}$ τοῦ ὀγδόου αὐτῆς $\frac{\pi}{4}$ κτλ.

Σημ. Ἐὰν ληφθῇ ὡς μονὰς $\overset{\frown}{AM}$ τῶν τόξων ἡ μοῖρα καὶ εἶναι π.χ. $(\overset{\frown}{AB}):(\overset{\frown}{AM})=30$, μέτρον τοῦ τόξου AB εἶναι ὁ ἀριθμὸς 30. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ $\overset{\frown}{AB}$ γίνεται ἐκ τῆς μοίρας $\overset{\frown}{AM}$ τριακοντάκις ληφθείσης, λέγομεν ὅτι τὸ τόξον AB εἶναι τριάκοντα μοιρῶν (30°). Τοῦτο ἰσχύει οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ μονὰς τῶν τόξων, ἤτοι τόξον τι εἶναι π.χ. 25^{γ}, ἂν ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὸν βαθμὸν εἶναι 25· ὁμοίως τόξον τι εἶναι π.χ. 40 ἀκτινίων, ἂν ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὸ ἀκτίνιον τόξον εἶναι 40.

§ 16 ***Σχέσεις τῶν μέτρων τοῦ αὐτοῦ τόξου.***— Ὑποτεθείσθω ὅτι τόξου τινὸς AB (Σχ. 11) μέτρα εἶναι οἱ ἀριθμοὶ μ, 6, α, καθ' ὅσον ὡς μονὰς τῶν τόξων λαμβάνεται ἡ μοῖρα, ὁ βαθμὸς ἢ τὸ ἀκτίνιον τόξον τῆς ἡμιπεριφερείας ABE μέτρα εἶναι, ὡς γνωστόν, 180, 200 καὶ π. Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν παριστώντων αὐτὰ ἀριθμῶν, ὅταν μετρηθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος, ἕπεται ὅτι:

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{ABE}}=\frac{\mu}{180},\quad \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{ABE}}=\frac{6}{200}\ \text{καὶ}\ \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{ABE}}=\frac{\alpha}{\pi}$$

ἐξ ὧν ἕπεται ὅτι: $\frac{\mu}{180}=\frac{6}{200}=\frac{\alpha}{\pi}$.

Αἱ ἰσότητες αὗται συνδέουσι τὰ μέτρα τοῦ αὐτοῦ τόξου καὶ τῇ βοηθείᾳ αὐτῶν εἶναι δυνατὸν δεδομένου τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν μέτρων τόξου νὰ εὕρωμεν τὰ ἄλλα. Οὕτως, ἂν μ=27°, εὑρίσκομεν ὅτι

$$6=27.\frac{200}{180}=30^{\gamma}\ \text{καὶ}\ \alpha=27.\frac{\pi}{180}=\frac{3\pi}{20}.$$

Ἀσκήσεις. 17) Πόσων βαθμῶν εἶναι τόξον 30°;

18) Πόσων μοιρῶν εἶναι τόξον 50^{γ};

19) Πόσων ἀκτινίων εἶναι τόξον 60°;

20) Πόσων μοιρῶν εἶναι τόξον $\frac{5\pi}{3}$ ἀκτινίων;

21) Πόσων ἀκτινίων εἶναι τόξον 30° 15′;

§ 17. *Γέννεσις τόξου.*—. Ἔστωσαν δύο διακεκριμένα ἀπ' ἀλλήλων σημεῖα Α καὶ Β εἰς ἴσην κείμενα ἀπόστασιν ἀπὸ τρίτου σημείου Κ (Σχ. 11). Κινητόν τι σημεῖον ἀπὸ τοῦ Α ἀναχωροῦν καὶ πάντοτε εἰς τὴν αὐτὴν ἀπὸ τοῦ Κ εὑρισκόμενον ἀπόστασιν δύναται νὰ μεταβῇ εἰς τὸ Β εἴτε κινούμενον κατὰ τὴν ὑπὸ τοῦ βέλους β δεικνυομένην φοράν, εἴτε κατὰ τὴν ἀντίθετον ταύτης, ἣν δεικνύει τὸ βέλος γ. Κατὰ τὴν α′. περίπτωσιν διαγράφει τὸ τόξον ΑΜΒ, κατὰ δὲ τὴν β′. τὸ ΑΔΒ. Τὸ σημεῖον Α καλεῖται *ἀρχή*, τὸ Β *τέλος* ἢ *πέρας* καὶ ἀμφότερα *ἄκρα* ἑκατέρου τῶν τόξων τούτων καλοῦνται.

Κατὰ ταῦτα εἰς ἕκαστον τόξον διακρίνομεν *ἀρχήν*, *τέλος* καὶ *φοράν*.

§ 18. *Γενίκευσις τῆς ἐννοίας τοῦ τόξου.*—Τὸ κινητὸν σημεῖον, περὶ οὗ προηγουμένως ἐγένετο λόγος, δύναται ἐκ τοῦ Α ἀναχωροῦν νὰ καταλήξῃ εἰς τὸ Β, ἀφ' οὗ διαγράψῃ ἅπαξ, δίς, τρίς, κτλ. ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν καὶ τὸ μεταξὺ Α καὶ Β μέρος αὐτῆς, ὅπερ ἔχει τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ σημείου. Ἕκαστος ἐκ τῶν δρόμων τούτων καλεῖται πάλιν τόξον.

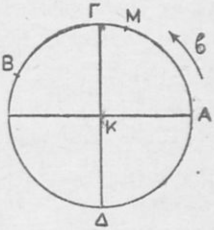
Ὥστε: *Τόξον καλεῖται τυχὸν δρόμος, τὸν ὁποῖον διαγράφει κινητὸν σημεῖον ἐπὶ περιφερείας κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ ἐπὶ πεπερασμένον χρόνον κινούμενον.*

Κατὰ τὸν γενικὸν τοῦτον ὁρισμὸν τὸ τόξον δὲν πρέπει νὰ θεωρῆται πλέον, ὡς ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ, ὡς μέρος περιφερείας, διότι ὑπάρχουσι καὶ τόξα μείζονα περιφερείας· κατ' ἀκολουθίαν τούτου ἡ ἀρχή, τὸ τέλος καὶ ἡ φορὰ δὲν ἀρκοῦσι νὰ ὁρίσωσι τελείως τόξον τι. Ἀπαιτεῖται πλὴν τούτων νὰ ὁρισθῇ καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκεραίων περιφερειῶν, τὰς ὁποίας τοῦτο περιέχει. Οὕτω λέγοντες τόξον ΑΒ, ὅπερ ἔχει τὴν τοῦ βέλους β φοράν, οὐδὲν ὡρισμένον τόξον δηλοῦμεν, διότι ὑπάρχουσιν ἄπειρα τοιαῦτα τόξα. Ἐὰν ὅμως εἴπωμεν, τὸ τόξον ΑΒ, ὅπερ ἔχει τὴν τοῦ βέλους β φορὰν καὶ περιέχει δύο π.χ. ἀκεραίας περιφερείας, δηλοῦμεν τελείως ὡρισμένον τόξον.

§ 19. ***Θετικὴ καὶ ἀρνητικὴ φορὰ ἐπὶ περιφερείας κύκλου. — Θετικὰ καὶ ἀρνητικὰ τόξα.***—. Ὡς προηγουμένως (§ 17) εἴπομεν, κινητόν τι σημεῖον ἀναχωροῦν ἐκ σημείου Α περιφερείας τινὸς (Σχ. 11) δύναται νὰ κινηθῇ ἐπ' αὐτῆς εἴτε κατὰ τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν ὡρολογίου (βέλος γ), εἴτε κατὰ τὴν ἀντίθετον ταύτης φορὰν (βέλος β). Κατὰ συνθήκην ἡ φορά, καθ' ἣν κινοῦνται οἱ δεῖκται ὡρολογίου, καλεῖται *ἀρνητικὴ φορά*, ἡ δὲ ἀντίθετος ταύτης καλεῖται *θετικὴ φορά*.

Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι θετικὴν φορὰν καλοῦνται *θετικὰ* τόξα, τὰ δὲ ἔχοντα ἀρνητικὴν φορὰν καλοῦνται *ἀρνητικὰ* τόξα.

Συνήθως θέλομεν προτάσσει τῶν γραμμάτων, δι᾽ ὧν ὀνομάζεται ἀρνητικὸν τόξον, τὸ σημεῖον —, πρὸ δὲ τῶν γραμμάτων, δι᾽ ὧν ὀνομάζεται θετικόν τι τόξον ἢ οὐδὲν σημεῖον θέτομεν ἢ θέτομεν τὸ +. Οὕτω $+\widehat{AB}$ ἢ καὶ ἁπλῶς $\widehat{AB}$ δηλοῖ τόξον, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν Α, τέλος Β καὶ θετικὴν φοράν, ἤτοι θετικὸν τόξον, ἐν ᾧ $-\widehat{\Gamma\Delta}$ δηλοῖ τόξον, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν Γ, τέλος Δ καὶ ἀρνητικὴν φοράν. Οὕτω διὰ τοῦ σημείου + ἢ — καθορίζεται ἡ φορὰ ἑκάστου τόξου.



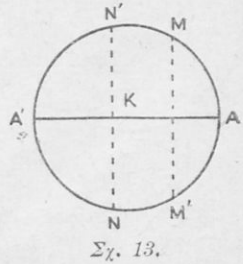
(Σχ. 12)

Ἐπειδὴ ὡς μονὰς τῶν τόξων λαμβάνεται πάντοτε θετικὸν τόξον, τὸ μέτρον παντὸς μὲν θετικοῦ τόξου εἶναι θετικὸς ἀριθμός, παντὸς δὲ ἀρνητικοῦ τόξου εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός. Οὕτω τοῦ μὲν τεταρτημορίου $\widehat{A\Gamma}$ (Σχ. 12) τὸ μέτρον εἶναι $\frac{\pi}{2}$ τοῦ δὲ $\widehat{A\Delta}$ τὸ μέτρον εἶναι $-\frac{\pi}{2}$, ἂν ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν τόξων τὸ ἀκτίνιον τόξον.

§ 20.—. **Ἴσα τόξα.—. Ἀντίθετα τόξα.—.** *Δύο ἢ πλείονα τόξα κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἢ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν λέγονται ἴσα, ἐὰν τὰ μέτρα αὐτῶν, διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος μεμετρημένων, εἶναι ἴσα.*

Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι, ἂν δύο ἴσα τόξα κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας ἔχωσι τὴν αὐτὴν ἀρχήν, ἔχουσι καὶ τὸ αὐτὸ τέλος.

Δύο τόξα κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἢ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν λέγονται ἀντίθετα, ἐὰν τὰ μέτρα αὐτῶν, διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος μεμετρημένων, εἶναι ἀντίθετα. Οὕτω τὰ τεταρτημόρια $\widehat{A\Gamma}$ καὶ $\widehat{A\Delta}$ (Σχ. 12) εἶναι τόξα ἀντίθετα.



Σχ. 13.

Θεωρήσωμεν ἤδη δύο τόξα ἀντίθετα, τὴν αὐτὴν ἔχοντα ἀρχὴν καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς κείμενα περιφερείας· ἂς ἐξετάσωμεν τίς ἡ ἀμοιβαία τῶν περάτων αὐτῶν θέσις.

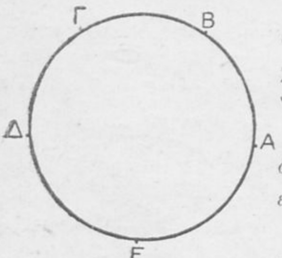
Α′.—Ἔστω πρῶτον τόξον τι $\widehat{AM}$ μικρότερον ἡμιπεριφερείας καὶ $\widehat{AM'}$ τὸ ἀντίθετόν του (Σχ. 13). Ἐπειδὴ τὰ μέτρα αὐτῶν εἶναι ἀπολύτως ἴσα, καὶ τὰ τόξα ταῦτα ἀπολύτως θεωρούμενα εἶναι ἴσα, ἤτοι τὸ σημεῖον Α εἶναι μέσον τοῦ τόξου Μ'ΑΜ· ἡ ἀκτὶς ἄρα ΚΑ τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὴν χορδὴν ΜΜ' καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὰ ἄκρα Μ καὶ Μ' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν διάμετρον Α'ΚΑ.

Β'.—Ἔστω ἤδη τόξον τι ΑΝ μεγαλύτερον μὲν ἀπολύτως ἡμιπεριφερείας, ἀλλὰ μικρότερον περιφερείας, καὶ $\widehat{AN'}$ τὸ ἀντίθετόν του, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α (Σχ. 13). Ἐπειδὴ τὰ μέτρα τῶν τόξων τούτων εἶναι ἀπολύτως ἴσα, καὶ τὰ τόξα ταῦτα ἀπολύτως θεωρούμενα εἶναι ἴσα· ἐὰν δὲ ἀπὸ ἑκατέρου τῶν ἀπολύτως ἴσων τούτων τόξων ἀφαιρεθῇ μία ἡμιπεριφέρεια ἀπολύτως θεωρουμένη, τὰ ὑπολειπόμενα τόξα $\widehat{A'N}$ καὶ $\widehat{A'N'}$ εἶναι ἐπίσης ἀπολύτως ἴσα καὶ ἑκάτερον εἶναι ἀπολύτως μικρότερον ἡμιπεριφερείας· εἶναι ὅθεν τὸ Α' μέσου τοῦ τόξου Ν'ΑΝ καὶ συνεπῶς ἡ χορδὴ ΝΝ' τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς ΑΚΑ'. Τὰ ἄκρα ἄρα Ν καὶ Ν' αὐτῶν εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν διάμετρον ΑΚΑ'.

Γ'.— Ἐὰν τὰ ἀντίθετα τόξα ΑΜ καὶ ΑΜ' (Σχ. 13) εἶναι τυχόντα, ἐπειδὴ τὰ μέτρα αὐτῶν εἶναι ἀπολύτως ἴσα, ἕπεται ὅτι ἀποτελοῦνται ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀκεραίων περιφερειῶν (θετικῶν τὸ μέν, ἀρνητικῶν τὸ δέ), τὰ δὲ μικρότερα ἀπολύτως τῆς περιφερείας μέρη αὐτῶν εἶναι τόξα ἀντίθετα. Ἕνεκα τούτου τὰ ἄκρα αὐτῶν Μ καὶ Μ' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν διάμετρον Α'ΚΑ (§ 20 Α' καὶ Β').

Ἄρα: *Ἐὰν δύο τόξα ἀντίθετα ἐπὶ τῆς αὐτῆς κείμενα περιφερείας ἔχωσι τὴν αὐτὴν ἀρχήν, τὰ πέρατα αὐτῶν εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν διὰ τῆς κοινῆς ἀρχῆς αὐτῶν διερχομένην διάμετρον.*

21.—.Διαδοχικὰ τόξα.—.Ἄθροισμα καὶ διαφορὰ τόξων.— Τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΒΓ (Σχ. 14), ὧν τὸ β' ἔχει ἀρχὴν τὸ τέλος Β τοῦ α', καλοῦνται *διαδοχικὰ τόξα*. Ὁμοίως τὰ $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$, $\widehat{\Delta E}$, εἶναι διαδοχικὰ τόξα.



(Σχ. 14)

Γενικῶς: *Δύο ἢ πλείονα τόξα λέγονται διαδοχικά, ἐὰν ἀρχὴ ἑκάστου (πλὴν τοῦ α') εἶναι τὸ τέλος τοῦ προηγουμένου.*

Ἵνα καθορίσωμεν τὸ ἄθροισμα διαδοχικῶν τόξων ἐπὶ τῆς αὐτῆς κειμένων περιφερείας, διακρίνομεν τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις.

Α'.—. Ἔστωσαν τὰ διαδοχικὰ καὶ ὁμόσημα τόξα $+\widehat{AB}$, $+\widehat{B\Gamma}$, $+\widehat{\Gamma\Delta}$ (Σχ. 14). Κινητόν τι σημεῖον ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ Α καὶ τὸ

$+\widehat{AB}$ διαγράφον καταλήγει εἰς τὸ Β· ἐὰν εἶτα ἐξακολουθήσῃ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν κινούμενον, θέλει, ἀφ' οὗ διαγράψῃ τὸ $+\widehat{B\Gamma}$, καταλήξῃ εἰς τὸ Γ, καὶ τέλος θὰ καταλήξῃ εἰς τὸ Δ, ἐὰν ἐξακολουθήσῃ κινούμενον, μέχρις οὗ διαγράψῃ καὶ τὸ $+\widehat{\Gamma\Delta}$. Ἅπας ὁ δρόμος, ὃν οὕτω τὸ κινητὸν τοῦτο διέγραψεν, εἶναι τόξον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὸ Α, τέλος τὸ Δ, φορὰν θετικὴν καὶ μέτρον ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν προειρημένων τόξων. Τὸ οὕτω τελείως ὡρισμένον τόξον ΑΔ καλοῦμεν *ἄθροισμα* τῶν ὡρισμένων τόξων +ΑΒ, +ΒΓ, +ΓΔ. Ὁμοίως τῶν $-\widehat{AB}$, $-\widehat{B\Gamma}$, $-\widehat{\Gamma\Delta}$, $-\widehat{\Delta E}$ ἄθροισμα εἶναι ἐκεῖνο ἐκ τῶν τόξων —ΑΕ, ὅπερ ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων αὐτῶν.

Β΄.—Ἔστωσαν ἤδη τὰ διαδοχικὰ καὶ ἑτερόσημα τόξα +ΑΓ καὶ —ΓΒ.

Κινητόν τι σημεῖον ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ Α καὶ τὸ $+\widehat{A\Gamma}$ διαγράφον καταλήγει εἰς τὸ Γ· μεθ' ὃ διαγράψαν τὸ $-\widehat{\Gamma B}$ καταλήγει εἰς τὸ Β. Τὸ τόξον ΑΒ, ὅπερ ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν ἑτεροσήμων μέτρων τῶν $+\widehat{A\Gamma}$ καὶ $-\widehat{\Gamma B}$, καλεῖται ἄθροισμα τῶν τόξων τούτων. Κινητὸν σημεῖον ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ Α καὶ τὸ προειρημένον τόξον ΑΒ διαγράφον καταλήγει εἰς τὸ Β. Ὁ δρόμος, ὃν οὕτω διέγραψε θεωρεῖται ὁ αὐτὸς πρὸς ἐκεῖνον, ὃν διανύει, ὅταν διαγράφῃ χωριστὰ ἕκαστον τῶν $+\widehat{A\Gamma}$ καὶ $-\widehat{\Gamma B}$, καθ' ὅσον μέρος τοῦ ἀπολύτως μεγαλυτέρου τόξου θεωρεῖται ἐξουδετερούμενον (ἄρα καὶ ὡς μὴ διαγραφὲν) κατὰ τὴν ἀντιθέτου φορᾶς κίνησιν τοῦ κινητοῦ.

Γ΄.—. Ἔστωσαν τέλος τὰ διαδοχικὰ τόξα +ΑΒ, +ΒΓ, —ΓΔ, +ΔΕ. Τὰ δύο πρῶτα ἔχουσιν ἄθροισμα ἐκ τῶν τόξων +ΑΓ ἐκεῖνο, ὅπερ ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων αὐτῶν· ἐὰν δὲ εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο προστεθῇ τὸ $-\widehat{\Gamma\Delta}$, προκύπτει ὡς ἄθροισμα ἐκεῖνο ἐκ τῶν τόξων ΑΔ, ὅπερ ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τοῦ προρρηθέντος $+\widehat{A\Gamma}$ καὶ τοῦ $-\widehat{\Gamma\Delta}$ ἢ τῶν μέτρων τῶν $+\widehat{AB}$, $+\widehat{B\Gamma}$ καὶ $-\widehat{\Gamma\Delta}$. Τέλος προστιθεμένου εἰς τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα τοῦ $+\widehat{\Delta E}$ προκύπτει τελικὸν ἄθροισμα ἐκεῖνο ἐκ τῶν τόξων ΑΕ, ὅπερ ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν δεδομένων τόξων.

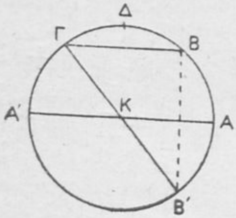
Ὥστε: *Ἄθροισμα διαδοχικῶν τόξων κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας καλεῖται τὸ τόξον, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν μὲν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου, τέλος δὲ τὸ τέλος τοῦ τελευταίου καὶ μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων αὐτῶν.*

Τὸ δὲ ἄθροισμα οἱωνδήποτε τόξων ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἢ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν κειμένων ὁρίζομεν ὡς ἀκολούθως.

Ἄθροισμα οἱωνδήποτε τόξων ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἢ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν κειμένων καλεῖται τό ἄθροισμα τόξων ἐπὶ τῆς αὐτῆς κειμένων περιφερείας, διαδοχικῶν καὶ ἀντιστοίχως ἴσων ἐκείνοις.

Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι καὶ τοῦ τοιούτου ἀθροίσματος τὸ μέτρον εἶναι ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν προσθετέων τόξων.

Διαφορὰ δύο τόξων καλεῖται τό ἄθροισμα τοῦ μειωτέου τόξου καὶ τοῦ ἀντιθέτου τοῦ ἀφαιρετέου τόξου.



(Σχ. 15.)

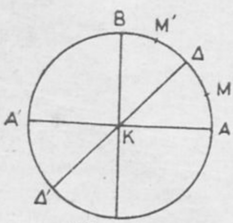
22.—. *Παραπληρωματικὰ τόξα.*—. Τὰ μικρότερα περιφερείας θετικὰ τόξα ΑΒ καὶ ΒΑ΄ (Σχ 15) ἔχουσιν ἄθροισμα τὴν θετικὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΒΑ΄. Τὰ δύο ταῦτα τόξα καλοῦνται *παραπληρωματικὰ* τόξα. Ὁμοίως τὰ τόξα 300^0 καὶ -120^0, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι 180^0 ἤτοι ἥμισυ θετικῆς περιφερείας, εἶναι παραπληρωματικὰ τόξα.

Γενικῶς: *Δύο τόξα λέγονται παραπληρωματικά, ἐὰν ἔχωσιν ἄθροισμα ἴσον μιᾷ θετικῇ ἡμιπεριφερείᾳ.*

Ἐξετάσωμεν ἤδη τίνα θέσιν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὰ πέρατα δύο τόξων παραπληρωματικῶν, ἅτινα ἔχουσι κοινὴν ἀρχὴν καὶ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Ἐὰν τ εἶναι τὸ μέτρον τόξου τινὸς ΑΒ (Σχ. 15), τὸ παραπληρωματικὸν αὐτοῦ ἔχει μέτρον $180 - \tau$. Ἐπειδὴ δὲ $180 - \tau = (-\tau) + 180$, ἕπεται ὅτι τὸ παραπληρωματικὸν τοῦτο τόξον εἶναι ἄθροισμα τόξου τινὸς ΑΒ΄, (§ 20), ὅπερ ἔχει μέτρον $-\tau$ καὶ τῆς θετικῆς ἡμιπεριφερείας Β΄ΑΓ. Ἑπομένως πέρας αὐτοῦ εἶναι τὸ Γ, ὅπερ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Β΄ πρὸς τὸ κέντρον Κ. Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΓΒΒ΄ εἶναι ὀρθή, ἡ χορδὴ ΒΓ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΑ΄. Ἄρα:

Τὰ πέρατα δύο τόξων παραπληρωματικῶν καὶ κοινὴν ἐχόντων ἀρχὴν κεῖνται ἐπὶ χορδῆς παραλλήλου τῇ διαμέτρῳ, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς κοινῆς αὐτῶν ἀρχῆς.



(*Σχ. 16*)

§ 23. ***Συμπληρωματικὰ τόξα.***—. Τῶν θετικῶν καὶ μικροτέρων περιφερείας τόξων ΑΜ καὶ ΜΒ (Σχ. 16) ἄθροισμα εἶναι τὸ θετικὸν τεταρτημόριον $\overline{AB}$ τῆς περιφερείας Κ.

Τὰ δύο ταῦτα τόξα καλοῦνται *συμπληρωματικὰ* τόξα. Ὁμοίως τὰ τόξα 250° καὶ —160°, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι 90°, ἤτοι θετικὸν τεταρτημόριον περιφερείας, εἶναι συμπληρωματικὰ τόξα.

Γενικῶς: *Δύο τόξα λέγονται συμπληρωματικά, ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς θετικὸν τεταρτημόριον περιφερείας.*

Ἐξετάσωμεν ἤδη τίνα θέσιν ἔχουσι τὰ πέρατα δύο τόξων συμπληρωματικῶν, ἅτινα ἔχουσι κοινὴν ἀρχὴν καὶ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Ἐὰν τ° εἶναι τὸ μέτρον τυχόντος τόξου ΑΜ (Σχ. 16), τὸ συμπληματικὸν αὐτοῦ ἔχει μέτρον 90°—τ. Ἐὰν δὲ τὰ τόξα ταῦτα ὑποτεθῶσιν ἄνισα, τὸ μὲν θὰ ἔχῃ μέτρον μικρότερον, τὸ δὲ μεγαλύτερον 45°. Ἔστω λοιπὸν ὅτι τ° =45° —ω°, ὅτε θὰ εἶναι 90° —τ =45° +ω°. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τόξον ΑΔ, ὅπερ εἶναι ἥμισυ τοῦ θετικοῦ τεταρτημορίου $\overset{\frown}{AB}$, ἔχει μέτρον 45°, ἕπεται ὅτι τὸ μὲν τόξον ΑΜ εἶναι ἄθροισμα τοῦ $\overset{\frown}{ΑΔ}$ καὶ ἑτέρου $\overset{\frown}{ΔΜ}$ ἔχοντος μέτρον (—ω°), τὸ δὲ συμπλήρωματικὸν αὐτοῦ $\overset{\frown}{ΑΜ'}$ εἶναι ἄθροισμα τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΔ καὶ ἑτέρου τόξου ΔΜ', ὅπερ ἔχει μέτρον ω°. Τὰ τόξα δὲ ΔΜ καὶ ΔΜ' ἔχοντα ἀντίθετα μέτρα εἶναι ἀντίθετα· ἐπειδὴ δὲ ἔχουσι κοινὴν ἀρχὴν Δ, τὰ πέρατα αὐτῶν Μ καὶ Μ' εἶναι (§ 20) συμμετρικὰ πρὸς τὴν διάμετρον Δ'ΚΔ. Ἄρα:

Τὰ πέρατα δύο τόξων συμπληρωτικῶν, κοινὴν ἐχόντων ἀρχὴν καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς κειμένων περιφερείας εἶναι συμμετρικὰ πρός τὴν διάμετρον, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ θετικοῦ τεταρτημορίου, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν μὲ τὰ τόξα ἀρχήν.

ΣΗΜ. Ἐν τῇ ἀποδείξει ὑπετέθησαν τὰ συμπληρωματικὰ τόξα ἄνισα· ἂν εἶναι ἴσα, ἑκάτερον εἶναι 45°, κατ' ἀκολουθίαν ἔχουσιν ἀμφότερα τὸ αὐτὸ πέρας Δ, ὅπερ εἶναι συμμετρικὸν ἑαυτοῦ πρὸς τὴν Δ'ΚΔ. Ἀληθεύει ἄρα καὶ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ προηγουμένη

Ἀσκήσεις. 22) Δεδομένης κοινῆς τινος ἀρχῆς νὰ εὑρεθῇ τὸ πέρας ἑκάστου τῶν τόξων 45°, 135°, 225°, —45°, —225° καὶ 405°.

23) Δεδομένης κοινῆς τινος ἀρχῆς νὰ εὑρεθῇ τὸ πέρας ἑκάστου τῶν τόξων 30°, 60°, —30°, —60°, 150° καὶ 210°.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΕΤΡΩΝ ΤΟΞΩΝ ΤΙΝΩΝ

§ 24. ***Α'. Τόξα ἔχοντα κοινὰ ὁμώνυμα ἄκρα.***—. Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο τυχόντα σημεῖα περιφερείας τινὸς Κ (Σχ. 15). Ὡς ἐμάθομεν ἤδη (§ 18, 19), ὑπάρχουσιν ἄπειρα τόξα θετικὰ καὶ ἀρνητικὰ ἔχοντα ἀρχὴν τὸ Α καὶ τέλος τὸ Β. Ἂς ἐξετάσωμεν, ἂν ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν μέτρων αὐτῶν σχέσις τις καὶ ποία εἶναι αὕτη.

Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ μέτρον τῆς μὲν θετικῆς περιφερείας εἶναι Γ, τὸ δὲ τοῦ ἐλαχίστου θετικοῦ τόξου ΑΒ (διὰ τῆς αὐτῆς μεμετρημένου μονάδος) εἶναι τ. Τὸ ἀμέσως μεγαλύτερον αὐτοῦ τόξον ΑΒ εἶναι ἄθροισμα μιᾶς θετικῆς περιφερείας καὶ τοῦ προειρημένου ἐλαχίστου θετικοῦ τόξου ΑΒ· ἔχει ἄρα τοῦτο μέτρον $\Gamma+\tau$. Τὸ ἀμέσως τούτου μεγαλύτερον τόξον ΑΒ εἶναι ἄθροισμα αὐτοῦ καὶ μιᾶς ἔτι θετικῆς περιφερείας ἔχει ἄρα μέτρον $\Gamma+\Gamma+\tau=2\Gamma+\tau$. Τὸ μετ' αὐτὸ ἔχει μέτρον $3\Gamma+\tau$ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἂς ζητήσωμεν ἤδη τὰ μέτρα τῶν διαφόρων ἀρνητικῶν τόξων ΑΒ. Τὸ ἀπολύτως ἐλάχιστον τούτων $-\widehat{\text{ΑΑ'Β}}$ εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἐλαχίστου θετικοῦ τόξου ΑΒ καὶ τῆς ἀρνητικῆς περιφερείας ΒΑΑ'Β· ἔχει ἄρα μέτρον $\tau+(-\Gamma)=-\Gamma+\tau$. Τὸ μετ' αὐτὸ ἀμέσως ἀρνητικὸν τόξον ΑΒ εἶναι ἄθροισμα τοῦ προηγουμένου καὶ μιᾶς ἔτι ἀρνητικῆς περιφερείας, δια τοῦτο ἔχει μέτρον $(-\Gamma+\tau)+(-\Gamma)=-2\Gamma+\tau$, τὸ μετ' αὐτὸ ἔχει μέτρον $-3\Gamma+\tau$ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Κατὰ ταῦτα τὸ μέτρον παντὸς τόξου ΑΒ ἔχει τὴν μορφὴν $K.\Gamma+\tau$, ἔνθα Κ δύναται νὰ εἶναι μηδὲν ἢ τυχὸν ἀκέραιος θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός. Ὥστε, ἂν παρασταθῇ διὰ τοῦ χ τὸ μέτρον τυχόντος ἐκ τῶν τόξων ΑΒ, θὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης:

$$\chi=K.\Gamma+\tau \qquad (1),$$

ἐξ ἧς προκύπτει ἡ

$$\chi-\tau=K.\Gamma \qquad (2).$$

Ἀμφότεραι αἱ ἰσότητες αὗται ἀληθεύουσιν οὐ μόνον, ὅταν τ εἶναι μέτρον τοῦ ἐλαχίστου θετικοῦ τόξου ΑΒ, ἀλλὰ καὶ ὅταν εἶναι μέτρον τυχόντος ἐκ τῶν τόξων ΑΒ. Τῷ ὄντι· ἂν ω εἶναι τὸ μέτρον τοῦ ἐλαχίστου θετικοῦ τόξου ΑΒ, θὰ εἶναι $\tau=\lambda\,\Gamma+\omega$, διότι τ εἶναι τὸ μέτρον τυχόντος ἐκ τῶν $\widehat{\text{ΑΒ}}$, καὶ $\chi=\lambda'\,\Gamma+\omega$, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων προκύπτει εὐκόλως ὅτι $\chi-\tau=(\lambda'-\lambda)\,\Gamma$. Ἐὰν δὲ τεθῇ $\lambda'-\lambda=K$, θὰ εἶναι $\chi-\tau=K\,\Gamma$, ὅθεν $\chi=K.\Gamma+\tau$. Ἄρα:

Ἐὰν δύο τόξα ἐπὶ τῆς αὐτῆς κείμενα περιφερείας ἔχωσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἡ διαφορὰ τῶν μέτρων αὐτῶν εἶναι μηδὲν ἢ πολλαπλάσιον (θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν) τοῦ μέτρου θετικῆς περιφερείας.

ΣΗΜ. Ἡ ἰσότης $\chi-\tau=K\Gamma$ λαμβάνει τὰς ἀκολούθους μορφὰς $\chi-\tau=360^\circ.K$, $\chi-\tau=400^\gamma.K$, $\chi-\tau=2K\pi$, καθ' ὅσον ὡς μονὰς τῶν τόξων λαμβάνεται ἡ μοῖρα, ὁ βαθμός, ἢ τὸ ἀκτίνιον.

Β'.—. ***Τόξα ἔχοντα κοινὴν ἀρχὴν καὶ πέρατα συμμετρικὰ πρὸς τὴν διὰ τῆς κοινῆς ἀρχῆς αὐτῶν διερχομένην διάμετρον.*** — Ἔστω τ τὸ μέτρον τυχόντος τόξου ΑΒ (Σχ. 15)· τὸ ἀντίθετον αὐτοῦ τόξον, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α, περατοῦται (§ 20 εἰς τὸ Β' συμμετρικὸν τοῦ Β πρὸς τὴν διάμετρον Α'Α, ἔχει δὲ μέτρον (—τ). Πᾶν δὲ ἄλλο τόξον ΑΒ' ἔχει (§ 24, Α') μέτρον τῆς μορφῆς 2Κπ—τ. Ὥστε, ἂν κληθῇ χ τὸ μέτρον τυχόντος ἐκ τῶν τόξων ΑΒ', θὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης χ=2Κπ—τ, ἐξ ἧς ἕπεται ἡ ἰσότης:

$$\chi+\tau=2K\pi \qquad (2)$$

Ἄρα: *Ἐὰν δύο τόξα ἔχωσι κοινὴν ἀρχὴν καὶ πέρατα συμμετρικὰ πρὸς τὴν διὰ τῆς κοινῆς αὐτῶν ἀρχῆς διερχομένην διάμετρον, τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων αὐτῶν εἶναι μηδὲν ἢ πολλαπλάσιον* (θετ. ἢ ἀρν.) *τοῦ μέτρου θετικῆς περιφερείας.*

Γ'.—. ***Τόξα ἔχοντα κοινὴν ἀρχὴν καὶ τὰ πέρατα ἐπὶ χορδῆς παραλλήλου τῇ διαμέτρῳ, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς κοινῆς αὐτῶν ἀρχῆς.***—. Ἔστω τ τὸ μέτρον τυχόντος τόξου ΑΒ (Σχ. 15). Τὸ παραπληρωματικὸν τούτου τόξον, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α, περατοῦται (§ 22) εἰς τὸ Γ, ὅπερ εἶναι τὸ ἕτερον ἄκρον τῆς χορδῆς, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ Β καὶ εἶναι παράλληλος τῇ διαμέτρῳ Α'Α. Ἐπειδὴ δὲ τὸ μέτρον τούτου εἶναι π—τ, τὸ μέτρον χ παντὸς ἄλλου ἐκ τῶν τόξων ΑΓ εἶναι 2Κπ+π—τ, ἤτοι ἀληθεύει ἡ ἰσότης χ=(2Κ+1) π—τ, ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι:

$$\chi+\tau=(2K+1)\pi \qquad (4)$$

Ἄρα: *Ἐὰν δύο τόξα ἔχωσι κοινὴν ἀρχὴν καὶ τὰ πέρατα αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ χορδῆς παραλλήλου τῇ διαμέτρῳ, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς κοινῆς αὐτῶν ἀρχῆς, τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων αὐτῶν εἶναι περιττὸν πολλαπλάσιον* (θετ. ἢ ἀρνητ.) *τοῦ μέτρου θετικῆς ἡμιπεριφερείας.*

Δ'.—. ***Τόξα ἔχοντα κοινὴν ἀρχὴν καὶ πέρατα συμμετρικὰ πρὸς τὸ κέντρον τῆς περιφερείας.*** — Ἔστω τ τὸ μέτρον τυχόντος τόξου ΒΓ (Σχ. 15). Τὸ ἄθροισμα τούτου καὶ τῆς θετικῆς ἡμιπεριφερείας ΓΑ'Β' ἔχει πέρας τὸ σημεῖον Β' συμμετρικὸν τοῦ Γ πρὸς τὸ κέντρον καὶ μέτρον π+τ. Τὸ μέτρον ἄρα χ παντὸς ἄλλου ἐκ τῶν τόξων ΒΒ' θὰ εἶναι τῆς μορφῆς 2Κπ+π+τ· ἄρα θὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης χ= (2Κ+1) π+τ, ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι:

$$\chi-\tau=(2K+1)\pi \qquad (5).$$

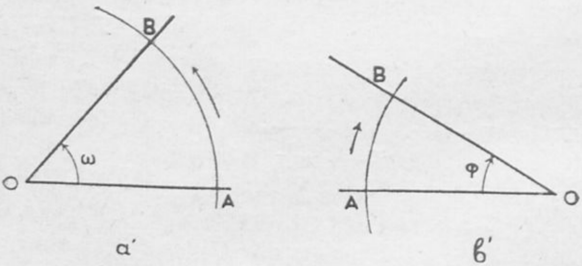
Ἄρα: *Ἐὰν δύο τόξα ἔχωσι κοινὴν ἀρχὴν καὶ πέρατα συμμετρικὰ πρὸς τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, ἡ διάφορα τῶν μέτρων αὐτῶν εἶναι* *περιττὸν πολλαπλάσιον* (θετ. ἢ ἀρν.) *τοῦ μέτρου θετικῆς ἡμιπεριφερείας*.

'Ασκήσεις. 24) 'Εὰν ΑΑ' εἶναι διάμετρος κύκλου τινὸς Κ, νὰ εὑρεθῇ ἡ γενικὴ μορφὴ τῶν μέτρων τῶν τόξων ΑΑ', ἂν ὡς μονὰς ληφθῇ τὸ ἀκτίνιον.

25). 'Εὰν ΑΑ' καὶ ΒΒ' εἶναι δύο κάθετοι διάμετροι κύκλου τινός, νὰ εὑρεθῇ ἡ γενικὴ μορφὴ τῶν μέτρων α'.) τῶν τόξων ΑΒ καὶ β') τῶν τόξων ΑΒ', ἂν ὡς μονὰς τῶν τόξων ληφθῇ τὸ ἀκτίνιον.

26). 'Εὰν ἡ εὐθεῖα ΔΔ' διχοτομῇ τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ΑΚΒ, Α'ΚΒ', ἃς σχηματίζουσιν αἱ κάθετοι διάμετροι ΑΑ' καὶ ΒΒ' κύκλου Κ, νὰ εὑρεθῇ ἡ γενικὴ μορφὴ τῶν μέτρων α') τῶν τόξων ΑΔ καὶ β'.) τῶν τόξων ΑΔ', ἂν ὡς μονὰς τῶν τόξων ληφθῇ τὸ ἀκτίνιον.

27). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι α') Τὰ πέρατα τῶν τόξων $\frac{\overparen{AM}}{4}$ εἶναι κορυφαὶ τετραγώνου, καὶ β') τὰ πέρατα τῶν τόξων $\frac{\overparen{AM}}{3}$ εἶναι κορυφαὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου.



(Σχ. 17).

§ 25.—. *Γέννεσις γωνίας.—. Θετικαὶ καὶ ἀρνητικαὶ γωνίαι.*—. Αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ (Σχ. 17 α'), αἵτινες ἄρχονται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, Ο, ἀποτελοῦσιν, ὡς γνωστόν, τὴν γωνίαν ω. 'Εὰν ἡ πλευρὰ ΟΑ νοηθῇ στρεφομένη περὶ τὸ σημεῖον Ο κατὰ τὴν ὑπὸ τοῦ βέλους δεικνυομένην φοράν, μέχρις οὗ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς ΟΒ, χωρὶς νὰ ἐξέλθῃ τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο τούτων εὐθειῶν, θέλει διαγράψει τὴν ληφθεῖσαν γωνίαν ω. 'Ομοίως ἡ πλευρὰ ΟΑ (Σχ. 17 β') στρεφομένη περὶ τὸ Ο κατὰ τὴν φορὰν τοῦ οἰκείου βέλους, μέχρις οὗ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΟΒ, χωρὶς νὰ ἐξέλθῃ τοῦ ἐπιπέδου τῶν εὐθειῶν ΟΑ καὶ ΟΒ, θέλει διαγράψει τὴν γωνίαν φ.

Ἡ ἀρχικὴ θέσις ΟΑ τῆς στρεφομένης εὐθείας καλεῖται *ἀρχικὴ πλευρά*, ἡ δὲ τελικὴ θέσις αὐτῆς καλεῖται *τελικὴ πλευρὰ* τῆς διαγραφείσης γωνίας.

Ἡ οὕτω γραφομένη γωνία καλεῖται *θετικὴ* (ω) ἢ *ἀρνητικὴ* (φ), καθ' ὅσον ἡ διαγράφουσα ταύτην εὐθεῖα στρέφεται καὶ τὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φοράν (§ 19).

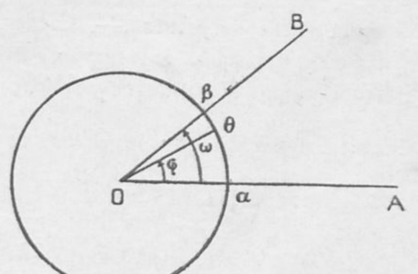
ΣΗΜ. Ἑκατέραν τῶν οὕτω γραφομένων γωνιῶν σημειοῦμεν καὶ οὕτω: $\widehat{ΟΑ,ΟΒ}$ προτασσομένης πάντοτε τῆς ἀρχικῆς πλευρᾶς.

§ 26. ***Γενίκευσις τῆς ἐννοίας τῆς γωνίας.***—. Ἐὰν ἡ καθ' οἱανδήποτε φορὰν στρεφομένη εὐθεῖα ΟΑ (Σχ. 17) δὲν σταματήσῃ κατὰ τὴν πρώτην μετὰ τῆς ΟΒ σύμπτωσιν, ἀλλ' ἐξακολουθήσῃ στρεφομένη κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ ἐκ νέου ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΟΒ, γράφει σχῆμά τι, ὅπερ πάλιν γωνίαν καλοῦμεν. Ὁμοίως γωνίαν καλοῦμεν καὶ τὸ σχῆμα, ὅπερ γράφει ἡ στρεφομένη εὐθεῖα, ἐὰν διέλθῃ δίς, τρὶς κ.τ.λ. διὰ τῆς ΟΒ καὶ σταματήσῃ κατὰ τὴν τρίτην, τετάρτην κ.τ.λ. μετ' αὐτῆς σύμπτωσιν.

Ὥστε: *Γωνία καλεῖται πᾶν σχῆμα, τὸ ὁποῖον διαγράφεται ὑπὸ εὐθείας στρεφομένης ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ περὶ τὸ σημεῖον, ἐξ οὗ αὕτη ἄρχεται, κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ ἐπὶ πεπερασμένον χρόνον.*

Κατὰ ταῦτα ὑπάρχουσιν ἄπειροι γωνίαι θετικαὶ καὶ ἀρνητικαί, ὧν ἑκάστη ἔχει ἀρχικὴν πλευρὰν ΟΑ καὶ τελικὴν τὴν ΟΒ. Ἑκάστην τούτων σημειοῦμεν συνήθως οὕτω: $\widehat{ΟΑ,ΟΒ}$. Ἵνα δὲ ὁρισθῇ τελείως γωνία τις δὲν ἀρκεῖ νὰ ὁρισθῇ ἡ θέσις τῆς ἀρχικῆς καὶ τελικῆς πλευρᾶς καὶ ἡ φορὰ αὐτῆς· ἀπαιτεῖται πλὴν τούτων νὰ εἶναι γνωστὸς καὶ ὁ ἀριθμός, ὅστις δηλοῖ ποσάκις ἡ στρεφομένη εὐθεῖα διῆλθε διὰ τῆς τελικῆς πλευρᾶς.

§ 27. ***Ἀντιστοιχία γωνιῶν πρὸς τὰ τόξα.***—. Ἐὰν μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Ο τῶν διαφόρων γωνιῶν $\widehat{ΟΑ,ΟΒ}$ (Σχ. 18) καὶ ἀκτῖνα οἱανδήποτε γράφωμεν περι-



(Σχ. 18).

φέρειαν κύκλου, αὕτη τέμνει τὴν μὲν ἀρχικὴν πλευρὰν εἴς τι σημεῖον α τὴν δὲ τελικὴν εἰς τὸ β. Στρεφομένης τῆς ΟΑ περὶ τὸ Ο κατά τινα φοράν, π.χ. τὴν θετικήν, τὸ α κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν· ἐὰν δὲ ἡ ΟΑ σταματήσῃ κατὰ τὴν πρώτην μετὰ τῆς ΟΒ σύμπτωσιν, τὸ α θέλει σταματήσει ἐπὶ τοῦ β κατὰ τὴν πρώτην μετ' αὐτοῦ συνάντησιν. Οὕτω δὲ ἡ μὲν ΟΑ γράφει τὴν ἐλαχίστην τῶν θετικῶν γωνιῶν $\widehat{OA,OB}$, τὸ δὲ σημεῖον α τὸ ἐλάχιστον τῶν θετικῶν τόξων αβ. Ἐὰν ἡ ΟΑ ἐξακολουθήσῃ στρεφομένη κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ ἐκ δευτέρου συμπέσῃ μετὰ τῆς ΟΒ, καὶ τὸ α θὰ ἐξακολουθήσῃ κινούμενον, μέχρις οὗ ἐκ νέου συμπέσῃ μετὰ τοῦ β· ὥστε εἰς τὴν νέαν ὑπὸ τῆς ΟΑ διαγραφεῖσαν γωνίαν ἀντιστοιχεῖ ἕτερον τόξον αβ κατὰ μίαν θετικὴν περιφέρειαν μεῖζον τοῦ προηγουμένου. Ἐξακολουθοῦντες οὕτω σκεπτόμενοι κατανοοῦμεν ὅτι: Εἰς ἑκάστην τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν $\widehat{OA,OB}$ ἀντιστοιχεῖ ἓν τόξον. Ὅτι δὲ καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει εὐκόλως κατανοοῦμεν.

§ 28. ***Ἴσαι γωνία.—. Ἀναλογία ἐπικ. γωνιῶν πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τόξα.—.*** Μετὰ τὴν γενίκευσιν τῆς ἐννοίας τῆς γωνίας (§ 26) ὁ ἐκ τῆς γεωμετρίας γνωστὸς ὁρισμὸς τῆς ἰσότητος δύο γωνιῶν δὲν ἐπαρκεῖ. Τοῦτον γενικεύομεν ὡς ἑξῆς:

Δύο γωνίαι λέγονται ἴσαι, ἐὰν τὰ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν κείμενα ἀντίστοιχα τόξα αὐτῶν (§ 27) εἶναι ἴσα. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπεται εὐκόλως ὅτι:

Αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα.

§ 29. ***Μέτρον γωνίας.—.*** Ἔστω $\overparen{\alpha\theta}$ ἡ μονὰς τῶν τόξων καὶ φ ἡ εἰς αὐτὸ βαίνουσα ἐπίκεντρος γωνία (Σχ. 18). Ἐπειδὴ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα, ἕπεται ὅτι μεταξὺ τυχούσης γωνίας $\widehat{OA,OB}$, τοῦ εἰς ταύτην ἀντιστοιχοῦντος τόξου αβ, τῆς $\hat{\varphi}$ καὶ τοῦ $\overparen{\alpha\theta}$ ἀληθεύει ἡ ἰσότης

$$\frac{\widehat{OA,OB}}{\hat{\varphi}} = \frac{\overparen{\alpha\beta}}{\overparen{\alpha\theta}} \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ ἡ γωνία φ ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν, ὁ λόγος $\dfrac{\widehat{OA,OB}}{\hat{\varphi}}$ καλεῖται *μέτρον* τῆς γωνίας $\widehat{OA,OB}$· ἡ δὲ ἰσότης (1) ἐκφράζει ὅτι:

Τὸ μέτρον γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὸ μέτρον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου, ἐὰν ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν ληφθῇ ἡ ἐπὶ τῆς μονάδος τῶν τόξων βαίνουσα ἐπίκεντρος γωνία.

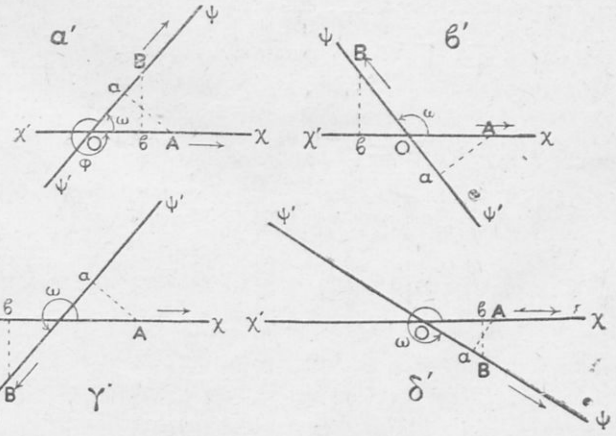
Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἡ εὕρεσις τοῦ μέτρου γωνίας ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μέτρου τοῦ ἀντιστοίχου τόξου, καὶ ὅσα περὶ τῶν μέτρων τῶν τόξων ἐμάθομεν εἰς τὰ προηγούμενα ἀληθεύουσι καὶ περὶ τῶν μέτρων τῶν ἀντιστοίχων ἐπικ. γωνιῶν.

Ἀσκήσεις 28). Ποῖον εἶναι τὸ μέτρον τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἐὰν ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν ληφθῇ ἡ ἐπὶ τοῦ ἀκτινίου βαίνουσα ἐπίκ. γωνία;

29) Ποῖον εἶναι τὸ μέτρον τῆς ἐλαχίστης τῶν θετικῶν γωνιῶν $\widehat{OA,OA'}$, ἂν OA′ εἶναι προέκτασις πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς OA καὶ μονὰς τῶν γωνιῶν εἶναι ἡ ἐπὶ τοῦ ἀκτινίου βαίνουσα ἐπίκ. γωνία;

30) Ποία ἡ γενικὴ μορφὴ τοῦ μέτρου πάσης γωνίας $\widehat{OA,OB}$, ἂν ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν ληφθῇ ἡ ἐπὶ τοῦ ἀκτινίου βαίνουσα ἐπίκ. γωνία;

§ 30. ***Γωνία τῶν θετικῶν διευθύνσεων δύο ἀξόνων.***—. Ἔστωσαν δύο ἄξονες χ′χ, ψ′ψ τεμνόμενοι κατὰ τὸ σημεῖον O (Σχ. 19)



(Σχ. 19)

καὶ $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ τὰ διευθύνοντα αὐτῶν ἀνύσματα. Ἐὰν ὁ θετικὸς ἡμιάξων Οχ τοῦ ἑτέρου τούτων στραφῇ κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, μέχρις οὗ τὸ πρῶτον ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος τοῦ ἄλλου, γράφει γωνίαν τινὰ ω. Τὴν γωνίαν ταύτην καλοῦμεν *γωνίαν τῶν θετικῶν διευθύνσεων τῶν ἀξόνων τούτων.*

Γενικῶς: *Γωνία τῶν θετικῶν διευθύνσεων δύο τεμνομένων ἀξόνων καλεῖται ἡ γωνία, ἣν γράφει ὁ θετικὸς ἡμιάξων τοῦ ἑνὸς στρεφόμενος κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν περὶ τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον, μέχρις οὗ (τὸ πρῶτον) ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος τοῦ ἄλλου.*

ΣΗΜ. α΄. Εἶναι εὐνόητον ὅτι ὁ στρεφόμενος ἡμιάξων δὲν πρέπει νὰ ἐξέρχηται τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο ἀξόνων.

ΣΗΜ. β΄. Ἡ οὕτως ὁρισθεῖσα γωνία τῶν θετικῶν διευθύνσεων δύο ἀξόνων ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἐκλογῆς τῆς ἀρχικῆς πλευρᾶς. Οὕτως ἐν τῷ σχήματι (19α΄) γωνία τῶν θετικῶν διευθύνσεων τῶν ἀξόνων χ΄χ καὶ ψ΄ψ εἶναι ἡ ω μέν, ἂν ληφθῇ ὡς ἀρχικὴ πλευρὰ ἡ Οχ, ἡ φ δέ, ἂν ἀρχικὴ πλευρὰ εἶναι ἡ Οψ. Ἄξιον ἰδιαιτέρας παρατηρήσεως εἶναι ὅτι ὁ συντελεστὴς προβολῆς τῆς τελικῆς πλευρᾶς ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν εἶναι ὁ αὐτός, οἱασδήποτε οὔσης τῆς ἀρχικῆς πλευρᾶς, ἀρκεῖ τὰ διευθύνοντα ἀνύσματα αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσα. Τῷ ὄντι· τῶν ὀρθ. τριγώνων ΟΑα, ΟΒϐ ὄντων ἴσων, τὰ $\overline{Oα}$ καὶ $\overline{Oϐ}$ εἶναι ἀπολύτως ἴσα, ἄρα οἱ λόγοι $\frac{\overline{Oα}}{\overline{OB}}$, $\frac{\overline{Oϐ}}{\overline{OA}}$ εἶναι καὶ αὐτοὶ ἀπολύτως ἴσοι. Ἐπειδὴ δὲ τὰ $\overline{Oα}$, $\overline{Oϐ}$ εἶναι ἢ ἀμφότερα ὁμόρροπα (Σχ. 19α΄, δ΄) ἢ ἀμφότερα ἀντίρροπα (Σχ. 19ϐ΄, γ΄) πρὸς τὰ διευθύνοντα ἀνύσματα τῶν ἀξόνων, ἐφ' ὧν κεῖνται, οἱ προειρημένοι λόγοι εἶναι πάντοτε καὶ ὁμόσημοι· ἄρα $(\overline{Oα}) = (\overline{Oϐ})$.

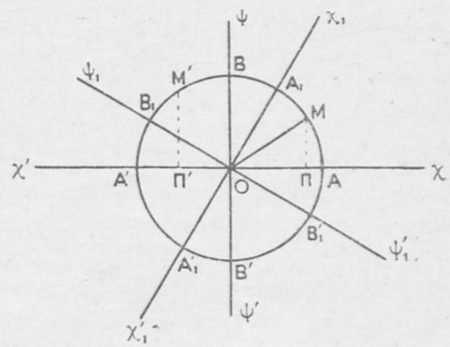
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γον

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τόξου ἢ γωνίας.

§ 31. *Τριγωνομετρικὸς κύκλος.*—. Συνήθως ἐν τῇ τριγωνομετρίᾳ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ὁποίου κεῖνται τὰ θεωρούμενα τόξα, λαμβάνεται ὡς μονὰς τοῦ μήκους. Καλεῖται δὲ ὁ τοιοῦτος κύκλος ἰδιαιτέρως *τριγωνομετρικὸς κύκλος.*

Ἄξιον παρατηρήσεως εἶναι ὅτι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου εἶναι 2π, τὸ τῆς ἡμιπεριφερείας π, τοῦ τετάρτου περιφερείας $\frac{\pi}{2}$ καὶ γενικῶς τὸ μῆκος ἑκάστου τόξου κειμένου ἐπὶ τῆς περιφερείας τριγ. κύκλου ἰσοῦται πρὸς τὸ μέτρον αὐτοῦ, ὅταν ὡς μονὰς τῶν τόξων λαμβάνηται τὸ ἀκτίνιον τόξον.

§ 32. ***Ἀρχικὴ καὶ τελικὴ ἀκτὶς τόξου.—. Πρωτεύοντες ἄξονες τριγ. κύκλου.—.*** Ἔστω ΑΜ τυχὸν τόξον κείμενον ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τριγ. κύκλου Ο (Σχ. 20) καὶ ΟΑ, ΟΜ αἱ εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ καταλήγουσαι ἀκτῖνες. Τούτων ἡ μὲν ΟΑ, ἥτις καταλήγει εἰς τὴν ἀρχὴν Α τοῦ τόξου, καλεῖται *ἀρχικὴ ἀκτίς*, ἡ δὲ εἰς τὸ τέλος Μ αὐτοῦ καταλήγουσα ἀκτὶς ΟΜ καλεῖται *τελικὴ ἀκτὶς* τοῦ τόξου ΑΜ.



(*Σχ. 20*)

Ἡ ἀρχικὴ ἀκτὶς λαμβάνεται πάντοτε ὡς διευθύνον ἄνυσμα τοῦ περιέχοντος αὐτὴν ἄξονος χ′χ. Ἐὰν ἡ ἀρχικὴ αὕτη ἀκτὶς ΟΑ στραφῇ περὶ τὸ κέντρον Ο κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, μέχρις οὗ διαγράψῃ μίαν ὀρθὴν γωνίαν, θέλει καταλάβει τὴν θέσιν ΟΒ· αὕτη λαμβάνεται πάντοτε ὡς διευθύνον ἄνυσμα τοῦ περιέχοντος αὐτὴν ἄξονος ψ′ψ, ὅστις τέμνει κατὰ τὸ Ο καθέτως τὸν χ′χ.

Οἱ δύο οὗτοι ἄξονες χ′χ καὶ ψ′ψ, καλοῦνται *πρωτεύοντες ἄξονες* τοῦ τριγ. κύκλου πρὸς ἀρχὴν τόξων Α. Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι πρὸς ἀρχὴν τόξων ἄλλο σημεῖον A_1 (Σχ. 20) ἀντιστοιχεῖ ἄλλο σύστημα πρωτευούτων ἀξόνων $\chi_1'\chi_1$, $\psi_1'\psi_1$, οἵτινες ἔχουσι διευθύνοντα ἀνύσματα OA_1 καὶ OB_1 ὁμοίως ὁριζόμενα.

Οἱ πρωτεύοντες ἄξονες ἑκάστου συστήματος διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν τοῦ τριγ. κύκλου εἰς τέσσαρα ἴσα τόξα, ἅτινα ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν τόξων καὶ κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν καλοῦμεν κατὰ σειρὰν *πρῶτον*, *δεύτερον*, *τρίτον* καὶ *τέταρτον τεταρτημόριον*. Οὕτω διὰ τὸ σύστημα χ′χ, ψ′ψ τὰ εἰρημένα τεταρτημόρια εἶναι κατὰ σειρὰν $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BA'}$, $\overset{\frown}{A'B'}$ καὶ $\overset{\frown}{B'A}$.

'Ασκήσεις. 31) Χαραχθέντων τῶν εἴς τινα ἀρχὴν Α ἀντιστοιχούντων πρωτευόντων ἀξόνων, νὰ χαραχθῶσιν οἱ πρωτεύοντες ἄξονες, οἵτινες ἀντιστοιχοῦσιν εἰς ἀρχὴν τόξων τὸ μέσον τοῦ α'. τεταρτημορίου ΑΒ

32). Νὰ στραφῇ δεδομένον σύστημα πρωτευόντων ἀξόνων κατὰ 30°.

§ 33. ***Συνημίτονον τόξου***—. Ἔστω ΑΜ (Σχ. 20) τυχὸν τόξον κείμενον ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τριγ. κύκλου Ο. Τῆς τελικῆς αὐτοῦ ἀκτῖνος ΟΜ προβολὴ ἐπὶ τὸν πρωτεύοντα ἄξονα χ'χ εἶναι τὸ ἄνυσμα, ΟΠ, ὅπερ ἔχει μῆκος $\frac{\overline{ΟΠ}}{ΟΑ}=(\overline{ΟΠ})$. Τὸ ἄνυσμα τοῦτο ΟΠ ἢ καὶ τὸ μῆκος αὐτοῦ $(\overline{ΟΠ})$ καλεῖται *συνημίτονον* τοῦ τόξου ΑΜ. Ὁμοίως τοῦ τόξου ΑΜ' συνημίτονον εἶναι τὸ ἄνυσμα ΟΠ' ἢ καὶ τὸ μῆκος αὐτοῦ $\frac{\overline{ΟΠ'}}{ΟΑ}=(\overline{ΟΠ'})$

Γενικῶς: *Συνημίτονον τόξου καλεῖται ἡ προβολὴ τῆς τελικῆς αὐτοῦ ἀκτῖνος ἐπὶ τὸν διὰ τῆς ἀρχῆς αὐτοῦ διερχόμενον πρωτεύοντα ἄξονα ἢ καὶ τὸ μῆκος τῆς προβολῆς ταύτης.*

Ὁ πρωτεύων ἄξων, ἐφ' οὗ κεῖνται τὰ συνημίτονα, καλεῖται διὰ τοῦτο συνήθως ἄξων τῶν συνημιτόνων.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ συνημιτόνου ἕπεται ἀμέσως ὅτι:

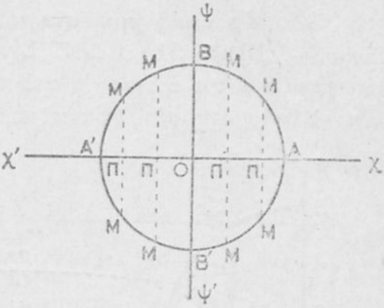
α'. *Πάντα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὸ αὐτὸ συνημίτονον.*

β'. *Τὸ συνημίτονον τόξου εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, καθ' ὅσον τοῦτο εἶναι ἄνυσμα ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον πρὸς τὸ διευθῦνον ἄνυσμα ΟΑ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων.* Ὅθεν παντὸς τόξου περατουμένου εἰς τὸ α'. ἢ δ' τεταρτημόριον τὸ συνημίτονον εἶναι θετικόν, ἐν ᾧ τῶν εἰς τὸ β' καὶ γ' τεταρτημόριον περατουμένων τόξων τὸ συνημίτονον εἶναι ἀρνητικόν.

ΣΗΜ. Τὸ συνημίτονον τόξου ἔχοντος μέτρον τ σημειοῦμεν συντόμως οὕτω: συντ.

§ 34. ***Μεταβολὴ τοῦ συνημιτόνου μετὰ τοῦ τόξου.***—. Ἐὰν τόξου τινὸς τὸ μέτρον εἶναι μηδέν, τελικὴ ἀκτὶς αὐτοῦ εἶναι ἡ ΟΑ, ἥτις συμπίπτει μετὰ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων· συνημίτονον ἄρα τοῦ τόξου τούτου εἶναι τὸ ἄνυσμα ΟΑ, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς $\frac{\overline{ΟΑ}}{ΟΑ}=+1$.

Νοήσωμεν ἤδη ὅτι τὸ πέρας Μ τοῦ τόξου κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ἤτοι ὅτι τὸ τόξον βαίνει ἀπὸ τοῦ μηδενὸς αὐξανόμενον. Ἐφ' ὅσον τὸ Μ διαγράφει τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΒΑ΄, ὁ πούς Π διαγράφει συνεχῶς τὸ ἄνυσμα ΑΑ΄ καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος ΟΠ, ἤτοι τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου, βαίνει συνεχῶς ἐλαττούμενον ἀπὸ $+1$ μέχρι -1, καθιστάμενον ἐν τῷ μεταξὺ μηδέν, ὅταν $\overline{AM}=90^{\circ}$. Ὅταν δὲ τὸ Μ διαγράφῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν Α΄Β΄Α, ὁ πούς Π διαγράφει συνεχῶς τὸ ἄνυσμα Α΄Α



(Σχ. 21)

καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου βαίνει συνεχῶς αὐξανόμενον ἀπὸ -1 ἕως $+1$, καθιστάμενον πάλιν μηδέν, ὅταν $\overline{AM}=270^{\circ}$ (Σχ. 21). Ἐὰν τὸ Μ ἐξακολουθήσῃ κινούμενον κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, ὅτε τὸ τόξον ΑΜ λαμβάνῃ τιμὰς μείζονας θετικῆς περιφερείας, εἶναι εὐνόητον ὅτι θέλει διέλθει διὰ τῶν αὐτῶν πάλιν θέσεων καὶ ἐπομένως (§ 33α΄) τὸ συνημίτονον λαμβάνει τὰς αὐτὰς κατὰ σειρὰν τιμάς.

Τὴν τοιαύτην μετὰ τοῦ τόξου μεταβολὴν τοῦ συνημιτόνου συνοψίζομεν ἐν τῷ ἀκολούθῳ πίνακι, ἐν ᾧ τὸ τόξον περιέχεται μεταξὺ 0° καὶ 360°.

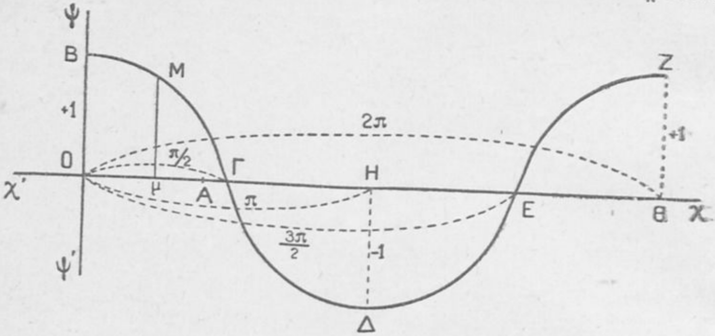
τόξον εἰς μοίρας	0°	↗	90°	↗	180°	↗	270°	↗	360°
τόξον εἰς ἀκτίνια	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↗	$\frac{3\pi}{2}$	↗	2π
συνημίτονον	+1	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	+1

ΣΗΜ. α΄. Τὰ πρὸς τὰ ἄνω βέλη δεικνύουσιν αὔξησιν, τὰ δὲ πρὸς τὰ κάτω ἐλάττωσιν.

Κατὰ ταῦτα ἡ μεγίστη τιμή, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ τὸ συνημίτονον εἶναι $+1$, ἡ δὲ ἐλαχίστη -1.

ΣΗΜ. β΄. Ἐπειδὴ τὸ πέρας τυχόντος ἀρνητικοῦ τόξου οὐδέποτε προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων εἰς σημεῖον αὐτοῦ κείμενον ἐκτὸς τοῦ $\overline{A'A}$, τὸ συνημίτονον οὐδέποτε δύναται νὰ γίνῃ μεῖζον τοῦ $+1$ καὶ ἔλασσον τοῦ -1. Τὸ προηγούμενον λοιπὸν συμπέρασμα εἶναι γενικόν.

§ 35. ***Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τοῦ συνημιτόνου.*** —. Ἡ καμπύλη ΒΓΔΕΖ (Σχ. 22) ἀναφερομένη εἰς τοὺς καθέτως τεμνομένους ἄξονας χ΄χ καὶ ψ΄ψ, ὧν $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ εἶναι τὰ διευθύνοντα ἀνύσματα, αἰσθητοποιεῖ τὴν μεταβολὴν τοῦ συνημιτόνου,



(Σχ. 22)

ὅταν τὸ τόξον βαίνῃ ἀπὸ 0 αὐξανόμενον μέχρι 2π. Πράγματι, εἰς τυχὸν ἄνυσμα $\overline{O\mu}$ τοῦ ἄξονος χ΄χ, ὅπερ ἔχει μῆκος ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τόξου τινὸς τοῦ τριγ. κύκλου, ἀντιστοιχεῖ ἄνυσμά τι μM παράλληλον τῷ ψ΄ψ καὶ ἴσον πρὸς τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου τούτου. Ἡ μεταβολὴ ὅθεν τοῦ μήκους τοῦ ἀνύσματος μM μετὰ τοῦ μήκους τοῦ $\overline{O\mu}$ δεικνύει τὴν μεταβολὴν τοῦ συνημιτόνου μετὰ τοῦ τόξου.

Ἡ καμπύλη αὕτη καλεῖται *συνημιτονοειδὴς καμπύλη*.

Ἀσκήσεις. 33). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ συνημίτονον ἑκάστου τόξου εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως, ἣν τὸ τόξον τοῦτο ἔχει ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τριγ. κύκλου.

34) Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τοῦ συνημιτόνου τόξου, ὅταν τοῦτο βαίνῃ ἀπὸ 0 συνεχῶς ἐλατούμενον μέχρι -2π.

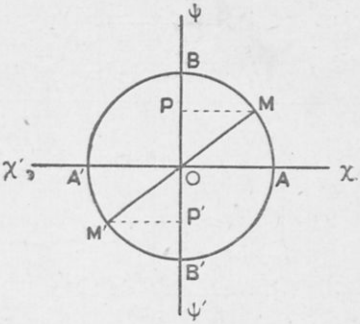
35) Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $1+$συν χ, ὅταν τὸ τόξον χ μεταβάλληται ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$.

36) Νὰ σπουδασθῇ καὶ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως συν ^{2}χ, ὅταν τὸ τόξον χ βαίνῃ συνεχῶς αὐξανόμενον ἀπὸ -2π ἕως $+2\pi$.

37) Νὰ σπουδασθῇ καὶ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τῆς

συναρτήσεως $2\sigma\upsilon\nu\,\chi - 3$, ὅταν τὸ τόξον χ βαίνῃ συνεχῶς αὐξανόμενον ἀπὸ -2π ἕως $+2\pi$.

§ 36. ***Ἡμίτονον τόξου.***—Ἔστω AM (Σχ. 23) τυχὸν τόξον τριγ. κύκλου O καὶ χ΄χ, ψ΄ψ οἱ ἄξονες τοῦ πρὸς ἀρχὴν A ἀντιστοιχοῦντος συστήματος πρωτευόντων ἀξόνων (§ 32), ὧν ὁ χ΄χ εἶναι ὁ τῶν συνημιτόνων ἄξων.



(Σχ. 23)

Ἡ προβολὴ $\overline{OP}$ τῆς τελικῆς τοῦ τόξου τούτου ἀκτῖνος OM ἐπὶ τὸν ἄξονα ψ΄ψ ἢ καὶ τὸ μῆκος $\frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} = (\overline{OP})$ τῆς προβολῆς ταύτης καλεῖται *ἡμίτονον* τοῦ τόξου AM. Ὁμοίως τοῦ τυχόντος τόξου AM΄ ἡμίτονον εἶναι τὸ $\overline{OP'}$ ἢ τὸ μῆκος αὐτοῦ $\frac{\overline{OP'}}{\overline{OB}} = (\overline{OP'})$.

Γενικῶς: *Ἡμίτονον τόξου καλεῖται ἡ προβολὴ τῆς τελικῆς αὐτοῦ ἀκτῖνος ἐπὶ τὸν πρωτεύοντα ἄξονα, ὅστις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ τόξου διερχόμενον πρωτεύοντα ἄξονα ἢ καὶ τὸ μῆκος τῆς προβολῆς ταύτης.*

Ὁ πρωτεύων οὗτος ἄξων ψ΄ψ, ἐφ᾽ οὗ κεῖνται τὰ ἡμίτονα, καλεῖται συνήθως ἄξων τῶν ἡμιτόνων

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἡμιτόνου τόξου ἕπεται ὅτι:

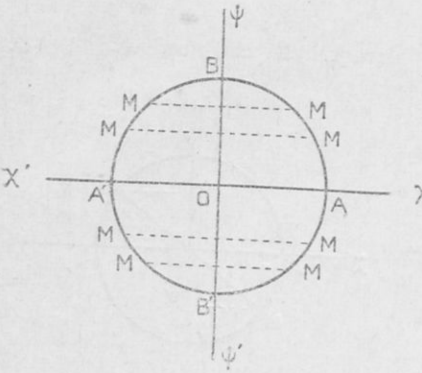
α΄.—. *Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον.*

β΄.—. *Τὸ ἡμίτονον τόξου τινὸς εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, καθ᾽ ὅσον τοῦτο εἶναι ἄνυσμα ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον πρὸς τὸ διευθύνον ἄνυσμα OB τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων.*

Κατὰ ταῦτα τὰ εἰς τό α΄ καὶ β΄ τεταρτημόριον καταλήγοντα τόξα ἔχουσιν ἡμίτονον θετικόν, τὰ δὲ εἰς τὸ γ΄ καὶ δ΄ ἔχουσιν ἡμίτονον ἀρνητικόν.

Σημ Τὸ ἡμίτονον τόξου ἔχοντος μέτρον τ σημειοῦμεν συντόμως οὕτω: ἡμτ.

§ 37. *Μεταβολὴ τοῦ ἡμιτόνου μετὰ τοῦ τόξου.*—. Τοῦ τόξου, ὅπερ ἔχει μέτρον μηδέν, ἡ τελικὴ ἀκτὴ OA ἔχει προβολὴν ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων ψ'ψ τὸ σημεῖον O, κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου τούτου εἶναι μηδέν. Νοήσωμεν ἤδη ὅτι τὸ τέλος M τοῦ τόξου ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ A διαγράφει κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν τὴν περιφέρειαν ἤτοι ὅτι τὸ τόξον AM βαίνει ἀπὸ τοῦ μηδενὸς συνεχῶς αὐξανόμενον.



(Σχ. 24)

Ἐφ' ὅσον τὸ M διαγράφει τὸ α' τεταρτημόριον, ὁ πούς P διαγράφει συνεχῶς τὸ ἄνυσμα OB καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἄνυσμα OP, ἤτοι τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου, βαίνει συνεχῶς αὐξανόμενον ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τοῦ $+1$, ἣν τιμὴν λαμβάνει, ὅταν $\overparen{AM}=90^{0}$. Ὅταν τὸ M διαγράφῃ τὸ β' καὶ γ' τεταρτημόριον, ὁ πούς P διαγράφει τὸ ἄνυσμα BB' καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἡμίτονον βαίνει συνεχῶς ἐλαττούμενον ἀπὸ τοῦ $+1$ μέχρι τοῦ -1, καθιστάμενον ἐν τῷ μεταξὺ 0, ὅταν $\overparen{AM}=180^{0}$. Ὅταν τέλος τὸ M διαγράφῃ τὸ δ' τεταρτημόριον, ὁ πούς P διαγράφει τὸ ἄνυσμα B'O καὶ ἑπομένως τὸ ἡμίτονον βαίνει αὐξανόμενον ἀπὸ -1 μέχρι τοῦ μηδενός, ἣν τιμὴν λαμβάνει ὅταν $\overparen{AM}=360^{0}$.

Ἐὰν τὸ σημεῖον M ἐπανελθὸν ἤδη εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν A δὲν σταματήσῃ, ἀλλ' ἐξακολουθήσῃ κινούμενον κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν (ὅτε τὸ τοξον M λαμβάνει τιμὰς μείζονας περιφερείας), εἶναι φανερὸν ὅτι θέλει διέλθει διὰ τῶν αὐτῶν πάλιν θέσεων καὶ κατ' ἀκολουθίαν (§ 36 α') τὸ ἡμίτονον λαμβάνει πάλιν τὰς αὐτὰς κατὰ σειρὰς τιμάς.

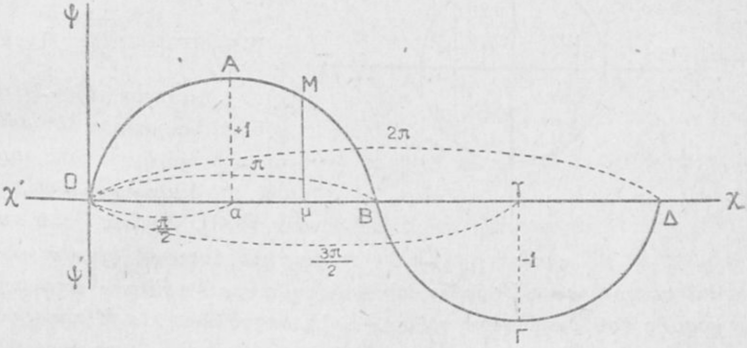
Τὴν τοιαύτην μετὰ τοῦ τόξου μεταβολὴν τοῦ ἡμιτόνου συνοψίζομεν ἐν τῷ ἀκολούθῳ πίνακι, ἐν ᾧ τὸ τόξον περιέχεται μεταξὺ 0° καὶ 360°.

τόξον	εἰς μοίρας	0^{0}		90^{0}		180^{0}		270^{0}		360^{0}
	εἰς ἀκτίνια	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↗	$\frac{3\pi}{2}$	↗	2π
ἡμίτονον		0	↗	$+1$	↘	0	↘	-1	↗	0

Κατὰ ταῦτα ἡ μεγίστη τιμή, ἣν δύναται νὰ λάβῃ τὸ ἡμίτονον εἶναι $+1$, ἡ δὲ ἐλαχίστη -1.

Σημ. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ἀρνητικὰ τόξα διὰ λόγον ἀνάλογον πρὸς τὸν ἐν (§ 34 σημ. 6΄) ἐκτεθέντα.

§ 38. ***Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τοῦ ἡμιτόνου.***— Τὴν μεταβολὴν τοῦ ἡμιτόνου τόξου, ὅταν τοῦτο αὐξάνηται ἀπὸ 0 ἕως 2π, αἰσθητοποιοῦμεν διὰ τῆς καμπύλης ΟΑΒΓΔ (Σχ. 25) ἀναφε-



(*Σχῆμα 25*)

ρομένης πρὸς τοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας χ΄χ καὶ ψ΄ψ. Τὸ μῆκος τυχόντος ἀνύσματος Ομ τοῦ ἄξονος χ΄χ, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν Ο, ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τόξου τινὸς τοῦ τριγ. κύκλου, τὸ δὲ τοῦ $\overline{\mu M}$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ τόξου. Ὥστε ἡ μεταβολὴ τοῦ $(\overline{\mu M})$ μετὰ τοῦ $(\overline{O\mu})$ δεικνύει τὴν μεταβολὴν τοῦ ἡμιτόνου τόξου μετὰ τοῦ τόξου τούτου.

Ἡ καμπύλη αὕτη καλεῖται *ἡμιτονοειδὴς* καμπύλη.

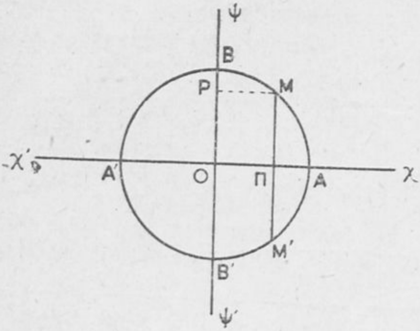
Ἀσκήσεις. 38) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἡμίτονον τόξου εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως, ἣν τὸ τόξον τοῦτο κατέχει ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τριγ. κύκλου.

39) Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $1+$ἡμχ, ὅταν τὸ τόξον χ αὐξάνηται ἀπὸ 0 ἕως 2π.

40) Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τοῦ ἡμχ, ὅταν τὸ τόξον χ βαίνῃ συνεχῶς ἐλαττούμενον ἀπὸ 0 ἕως -2π καὶ νὰ ἐπεκταθῇ ἀντιστοίχως ἡ ἡμιτονοειδὴς καμπύλη.

§ 39. ***Σχέσις τοῦ ἡμιτόνου τόξου θετικοῦ καὶ μικροτέρου 90° πρὸς τὴν χορδὴν τοῦ διπλασίου τόξου.***—. Ἔστω **ΑΜ** (Σχ. 26) τόξον τι θετικὸν καὶ μικρότερον 90°, $(\overline{OP})$ τὸ ἡμίτονον καὶ

$(\overline{O\Pi})$ τὸ συνημίτονον αὐτοῦ. Ἐὰν τὴν προβάλλουσαν ΜΠ προεκτείνωμεν κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν πέραν τοῦ ποδὸς Π, θὰ συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἴς τι σημεῖον Μ′· οὕτω δὲ ὁρίζεται τὸ τόξον Μ′ΑΜ, ὅπερ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΜ καὶ ἔχει χορδὴν Μ′Μ, ἥτις εἶναι διπλασία τοῦ $\overline{\Pi M}$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἀνύσματα ΟΡ καὶ ΠΜ εἶναι ὁμορρόπως ἴσα, ἕπεται ὅτι:



(Σχ. 26)

$$(\overline{OP}) = (\overline{\Pi M}) = \frac{(\overline{M'M})}{2}.$$ Ἄρα:

Τὸ ἡμίτονον τόξου θετικοῦ καὶ μικροτέρου 90⁰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου τόξου.

§ 40. ***Σχέσις τοῦ συνημιτόνου τόξου θετικοῦ καὶ μικροτέρου 90⁰ πρὸς τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου τόξου.***—. Ἀναφερόμενοι εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα (26) παρατηροῦμεν ὅτι τοῦ θετικοῦ καὶ μικροτέρου 90⁰ τόξου ΑΜ τὸ συνημίτονον $\overline{O\Pi}$ παριστᾷ τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου τοῦ τριγ. κύκλου ἀπὸ τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου τόξου. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο συμβαίνει διὰ τὸ συνημίτονον καὶ παντὸς ἄλλου τόξου θετικοῦ καὶ μικροτέρου 90⁰, ἕπεται γενικῶς ὅτι:

Τὸ συνημίτονον τόξου θετικοῦ καὶ μικροτέρου 90⁰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου τοῦ τριγ. κύκλου ἀπὸ τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου τόξου.

Ἐφαρμογή. Κατὰ τὰ προειρημένα (§ 39, 40), ἂν εἶναι $0 < \mu^0 < 90^0$, τὸ μὲν ἡμίτονον τοῦ τόξου μ^0 ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς τοῦ τόξου $2\mu^0$, τὸ δὲ συνημίτονον τοῦ αὐτοῦ τόξου μ^0 ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου τοῦ τριγ. κύκλου ἀπὸ τῆς εἰρημένης χορδῆς τοῦ $2\mu^0$. Ἐὰν δὲ ὁ λόγος $\frac{360^0}{2\mu_0} = \frac{180^0}{\mu^0}$ εἶναι ἀκέραιός τις ἀριθμὸς λ, ἡ χορδὴ τοῦ τόξου $2\mu^0$ εἶναι πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν τριγ. κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, ὅπερ ἔχει λ πλευράς. Κατ᾽ ἀκολουθίαν τὸ μὲν ἡμίτονον τοῦ τόξου μ^0 ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ προειρημένου κανονικοῦ πολυγώνου, τὸ δὲ συνημίτονον πρὸς τὸ ἀπόστημα τοῦ αὐτοῦ πολυγώνου. Οὕτως, ἐπειδὴ εἶναι $\frac{360^0}{2.45^0}=\frac{180^0}{45^0}=4$, τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου 45^0 εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν τριγ. κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραγώνου, ἤτοι ἡμ $45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$, τὸ δὲ συνημίτονον τοῦ τόξου 45^0 ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀπόστημα (¹) τοῦ προειρημένου τετραγώνου, ἤτοι συν $45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι:

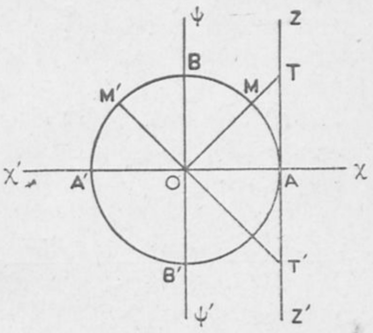
$$\text{ἡμ } 30^0=\frac{1}{2} \qquad \text{ἡμ } 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{συν } 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{συν } 60^0=\frac{1}{2}$$

Ἀσκήσεις. 41) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου 18^0.

42) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου 36^0.

§ 41. ***Ἐφαπτομένη τόξου.*** — Ἔστω Ο (Σχ. 27) τὸ κέντρον τριγ. κύκλου, Α ἡ κοινὴ ἀρχὴ τῶν ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ κειμένων τόξων καὶ Z′Z ἡ εἰς τὴν ἀρχὴν ταύτην ἐφαπτομένη τοῦ τριγ. κύκλου, ἧς διευθύνον ἄνυσμα εἶναι τὸ $\overline{OB}$ (§ 4). Ὑποτεθείσθω ἤδη ὅτι ἡ τελικὴ ἀκτὶς ΟΜ τυχόντος τόξου ΑΜ προεκτεινομένη τέμνει τὴν ἐφαπτομένην Z′Z εἴς τι σημεῖον Τ· οὕτως ὁρίζεται ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης ταύτης ἄνυσμά τι ΑΤ. Τὸ ἄνυσμα τοῦτο ἢ τὸ μῆκος αὐτοῦ $\frac{\overline{AT}}{\overline{OB}}=(\overline{AT})$ καλεῖται *ἐφαπτομένη* τοῦ τόξου ΑΜ. Ὁμοίως τοῦ τόξου ΑΜ′ ἐφαπτομένη εἶναι τὸ ἄνυσμα ΑΤ′ ἢ τὸ μῆκος αὐτοῦ $\frac{\overline{AT'}}{\overline{OB}}=(\overline{AT'})$.



(Σχ. 27)

Γενικῶς: *Ἐφαπτομένη τόξου καλεῖται τὸ ἄνυσμα, ὅπερ ἔχει τὴν*

(¹) Αἱ τιμαὶ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν ἀποστημάτων τῶν ἀναφερομένων κανονικῶν πολυγώνων εἶναι γνωσταὶ ἐκ τῆς Γεωμετρίας.

αὐτὴν μὲ τὸ τόξον ἀρχὴν καὶ πέρας τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς εἰς τὴν ἀρχὴν ταύτην ἐφαπτομένης τοῦ τριγ. κύκλου καὶ τῆς προεκτάσεως τῆς τελικῆς τοῦ τόξου ἀκτῖνος, ἢ καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος τούτου.

Ὁ ἄξων Z′Z, ἐφ' οὗ κεῖνται αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν τόξων, καλεῖται ἄξων τῶν ἐφαπτομένων.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐφαπτομένης τόξου ἕπεται ὅτι:

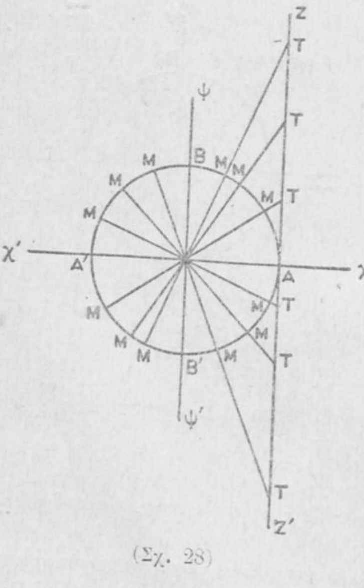
α′. *Πάντα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην.*

β′. *Ἡ ἐφαπτομένη τόξου εἶνε θετικὴ ἢ ἀρνητική, καθ' ὅσον αὕτη εἶναι ἄνυσμα ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον τῷ* $\overline{OB}$.

Ὅθεν τὰ εἰς τὸ α′ καὶ γ′ τεταρτημόριον περατούμενα τόξα ἔχουσι θετικὴν ἐφαπτομένην, τὰ δὲ εἰς τὸ β′ καὶ δ′ ἀρνητικήν.

Σημ. Τὴν ἐφαπτομένην τόξου ἔχοντος μέτρον τ σημειοῦμεν συντόμως οὕτω: ἐφτ.

§ 42. **Μεταβολὴ τῆς ἐφαπτομένης μετὰ τοῦ τόξου.**— Τοῦ τόξου 0° ἡ ἀρχὴ Α καὶ τὸ τέλος Μ συμπίπτουσι καὶ κατ' ἀκολουθίαν τούτου ὁ ἀριθμὸς ($\overline{AT}$) ἤτοι ἡ ἐφαπτομένη εἶναι μηδέν. Νοήσωμεν ἤδη ὅτι τὸ πέρας Μ διαγράφει κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν τὴν περιφέρειαν, ἤτοι ὅτι τὸ τόξον ΑΜ βαίνει συνεχῶς ἀπὸ 0° αὐξανόμενον. Ἐφ' ὅσον τὸ Μ διαγράφει τὸ α′ τεταρτημόριον, τὸ σημεῖον Τ (Σχ. 28) κινεῖται ἐπὶ τοῦ Z′Z κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν συνεχῶς ἀπομακρυνόμενον τοῦ Α· διὰ τοῦτο ὁ ($\overline{AT}$) δηλ. ἡ ἐφαπτομένη βαίνει συνεχῶς ἀπὸ 0 αὐξανομένη ταχύτητα καί, τοῦ Μ πλησιάζοντος πρὸς τὸ Β, ἡ ἐφαπτομένη τείνει νὰ ὑπερβῇ πάντα ἀριθμόν. Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι: Τοῦ τόξου τείνοντος πρὸς τὰς 90° ἐκ τιμῶν ἐλασσόνων ἡ ἐφαπτομένη αὐτοῦ τείνει πρὸς τὸ θετικὸν ἄπειρον ($+\infty$).



(Σχ. 28)

Ὅταν τὸ Μ ἀπομακρυνόμενον τοῦ Β διαγράφῃ τὸ β′ τεταρτημόριον, τὸ Τ ἐμφανίζεται ἐπὶ τοῦ ΑΖ΄, ἤτοι ἡ ἐφαπτομένη καθίσταται ἀρνητικὴ καὶ εἶναι, ἐφ᾽ ὅσον τὸ Μ εὑρίσκεται ἐγγύτατα τοῦ Β, ἀπολύτως πολὺ μεγάλη. Ὥστε, καθ᾽ ἣν στιγμὴν τὸ Μ διέρχεται διὰ τοῦ Β μεταβαῖνον ἐκ τοῦ α΄. εἰς τὸ β΄. τεταρτημόριον, ἡ ἐφαπτομένη τοῦ $\widehat{AM}$ μεταπηδᾷ ἀπὸ τοῦ $+\infty$ εἰς τὸ $-\infty$, διακοπτομένης οὕτω τῆς συνεχείας τῶν τιμῶν αὐτῆς.

Τοῦ Μ ἀπομακρυνομένου τοῦ Β, ἡ ἐφαπτομένη τοῦ $\widehat{AM}$ αὐξάνει ἀπὸ τοῦ $-\infty$ καὶ γίνεται μηδέν, ὅταν $\widehat{AM}$ γίνῃ 180°. Ὅταν τὸ Μ διαγράφῃ τὸ γ΄. τεταρτημόριον, τὸ Τ κινεῖται πάλιν ἐπὶ τοῦ ΑΖ συνεχῶς καὶ ταχύτατα ἀπομακρυνόμενον τοῦ Α, ἡ ἐφαπτομένη ἄρα αὐξάνει ταχύτατα ἀπὸ τοῦ μηδενὸς καὶ τείνει πρὸς τὸ $+\infty$, ἐφ᾽ὅσον τὸ Μ πλησιάζει πρὸς τὸ Β΄, ἤτοι τὸ $\widehat{AM}$ πλησιάζει πρὸς τὰς 270°. Καθ᾽ ἣν δὲ στιγμὴν τὸ Μ διέρχεται διὰ τοῦ Β΄, ἡ ἐφαπτομένη μεταπηδᾷ πάλιν ἀπὸ τοῦ $+\infty$ εἰς τὸ $-\infty$ καὶ βαίνει εἶτα συνεχῶς αὐξανομένη, ἐφ᾽ ὅσον τὸ Μ διαγράφει τὸ δ΄ τεταρτημόριον, καὶ καθίσταται μηδέν, ὅταν τὸ $\widehat{AM}$ γείνῃ 360°.

Ἐὰν ἡ κίνησις τοῦ Μ ἐξακολουθήσῃ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, ἤτοι τὸ τόξον ΑΜ λαμβάνῃ τιμὰς μείζονας περιφερείας, εἶναι εὐνόητον ὅτι τοῦτο διέρχεται διὰ τῶν αὐτῶν κατὰ σειρὰν θέσεων καὶ ἑπομένως (§ 41 α΄) ἡ ἐφαπτομένη λαμβάνει τὰς αὐτὰς καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειρὰν τιμάς.

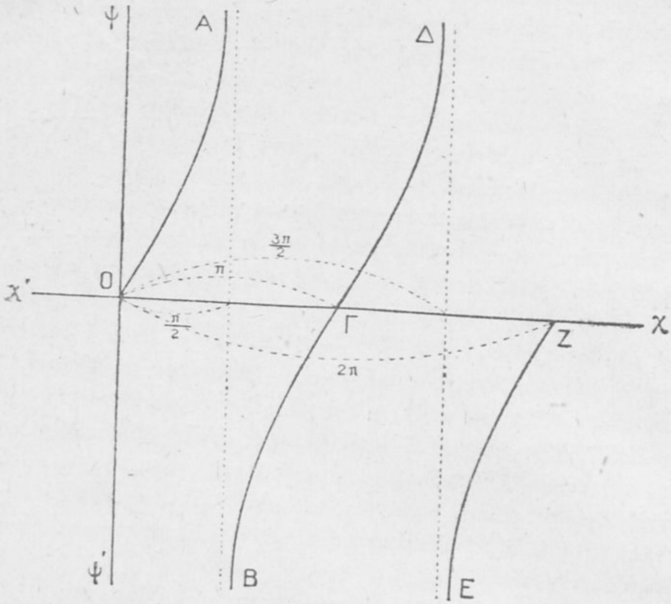
Τὴν τοιαύτην μετὰ τοῦ τόξου μεταβολὴν τῆς ἐφαπτομένης συνοψίζομεν ἐν τῷ ἀκολούθῳ πίνακι, ἐν ᾧ θεωρεῖται τὸ τόξον μεταβαλλόμενον ἀπὸ 0° ἕως 360°.—.

τόξον	εἰς μοίρας	0°	90°	180°	270°	360°
	εἰς ἀκτίνια	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ἐφαπτομένη		0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0

Ἐκ τοῦ πίνακος τούτου καθίσταται φανερὸν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν πραγματικὴν τιμήν.

§ 43. ***Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τῆς ἐφαπτομένης.*** Διὰ τῆς ἀσυνεχοῦς καμπύλης ΟΑΒΓΔΕΖ (Σχ. 29) ἀναφερομένης πρὸς τοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας χ΄χ, ψ΄ψ αἰσθητοποιοῦμεν τὰς μεταβολὰς τῆς ἐφαπτομένης μετὰ τοῦ τόξου, ὅταν τοῦτο μεταβάλληται ἀπὸ 0° ἕως 2π.

Ἀσκήσεις. 43) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐφαπτομένη ἑκάστου τόξου εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως, ἣν τοῦτο κατέχει ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τριγ. κύκλου.



($\Sigma\chi$. 29)

44) Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου 45° καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αὕτη ἰσοῦται πρὸς $+1$.

45) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τόξου ἰσοῦται ἀπολύτως πρὸς τὸ ἄνυσμα, ὅπερ ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου τούτου καὶ τοῦ κοινοῦ σημείου τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων καὶ τῆς εἰς τὸ πέρας τοῦ τόξου ἐφαπτομένης τοῦ τριγ. κύκλου.

46) Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως 1—ἐφχ, ὅταν τὸ τόξον χ βαίνῃ συνεχῶς αὐξανόμενον ἀπὸ 0° ἕως 360°.

47) Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς ἐφχ, ὅταν τὸ τόξον χ ἐλαττοῦται ἀπὸ 0° μέχρι —360°.

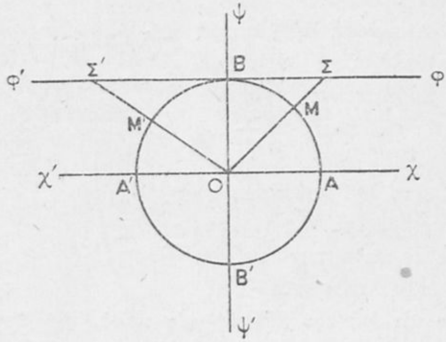
48) Νὰ σπουδασθῇ καὶ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως ἐφ²χ—1, ὅταν τὸ τόξον χ μεταβάλληται ἀπὸ —2π ἕως $+2\pi$.

§ 44. ***Συνεφαπτομένη τόξου.***—. Ἔστωσαν χ΄χ καὶ ψ΄ψ

(Σχ. 30) οἱ πρὸς ἀρχὴν Α τῶν τόξων ἀναφερόμενοι πρωτεύοντες ἄξονες καὶ φ′φ ἡ εἰς τὸ πέρας τοῦ α′ τεταρτημορίου ἐφαπτομένη τοῦ τριγ. κύκλου Ο, ἥτις ἔχει διευθύνον ἄνυσμα τὸ $\overline{ΟΑ}$ (§ 4). Ἐὰν ἡ τελικὴ ἀκτὶς ΟΜ τυχόντος τόξου ΑΜ προεκτεινομένη τέμνῃ τὴν φ′φ εἴς τι σημεῖον Σ, ὑπ' αὐτοῦ καὶ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Β ὁρίζεται τὸ ἄνυσμα ΒΣ, ὅπερ ἔχει μῆκος $\dfrac{\overline{ΒΣ}}{\overline{ΟΑ}} = (\overline{ΒΣ})$.

Τὸ ἄνυσμα τοῦτο ἢ τὸ μῆκος αὐτοῦ καλεῖται *συνεφαπτομένη* τοῦ τόξου ΑΜ. Ὁμοίως τοῦ τυχόντος τόξου ΑΜ′ συνεφαπτομένη εἶναι ἄνυσμα ΒΣ′ ἢ τὸ μῆκος αὐτοῦ $\dfrac{\overline{ΒΣ'}}{\overline{ΟΑ}} = (\overline{ΒΣ'})$.

Γενικῶς: *Συνεφαπτομένη τόξου καλεῖται τὸ ἄνυσμα, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν μὲν τὸ πέρας τοῦ α′ τεταρτημορίου, τέλος δὲ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς εἰς τὸ πέρας τοῦτο ἐφαπτομένης τοῦ τριγ. κύκλου καὶ τῆς προεκτάσεως τῆς τελικῆς τοῦ τόξου ἀκτῖνος, ἢ καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος τούτου.*



(*Σχῆμα 30*)

Ἡ εὐθεῖα φ′φ καλεῖται ἄξων τῶν συνεφαπτομένων.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συνεφαπτομένης τόξου ἕπεται εὐκόλως ὅτι:

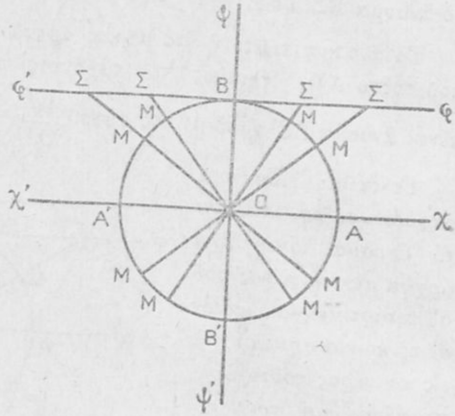
α′. *Πάντα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὴν αὐτὴν συνεφαπτομένην.*

β′. *Ἡ συνεφαπτομένη τόξου εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, καθ' ὅσον αὕτη εἶναι ἄνυσμα ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον πρὸς τὸ διευθύνον ἄνυσμα* $\overline{ΟΑ}$.

Κατὰ ταῦτα, τὰ εἰς τὸ α′ καὶ γ′ τεταρτημόριον περατούμενα τόξα ἔχουσι συνεφαπτομένην θετικήν, τὰ δὲ εἰς τὸ β′ καὶ δ′ ἀρνητικήν.

Σημ. Τὴν συνεφαπτομένην τόξου, ὅπερ ἔχει μέτρον τ σημειοῦμεν συντόμως οὕτω: σφτ.

§ 45. ***Μεταβολὴ τῆς συνεφαπτομένης μετὰ τοῦ τόξου.***— Ἔστω ΑΜ τόξον τι θετικὸν καὶ μικρότερον τεταρτημορίου καὶ $(\overline{ΒΣ})$ ἡ συνεφαπτομένη αὐτοῦ (Σχ. 31). Ἐὰν τὸ πέρας Μ αὐτοῦ κινῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, τὸ σημεῖον Σ ἀπομακρύνεται τοῦ Β κινούμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος φ΄φ κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ἤτοι τοῦ ρηθέντος τόξου ΑΜ ἐλαττουμένου καὶ πρὸς τὸ μηδὲν τείνοντος ἡ συνεφαπτομένη αὐτοῦ ($\overline{\text{ΒΣ}}$) αὐξάνεται ταχύτατα· ὅταν δὲ τὸ $\overline{\text{ΑΜ}}$ γείνῃ 0°, ἡ τελικὴ αὐτοῦ ἀκτὶς καθίσταται παράλληλος τῷ φ΄φ καὶ τὸ Σ ἀφανίζεται εἰς τὸ θετικὸν ἄπειρον. Τοῦτο ἐκφράζομεν οὕτω: τοῦ τόξου τείνοντος ἐκ θετικῶν τιμῶν εἰς τὸ μηδέν, ἡ συνεφαπτομένη αὐτοῦ θετικὴ οὖσα τείνει νὰ ὑπερβῇ πάντα ἀριθμόν, ἤτοι τείνει εἰς τὸ $+\infty$.



(*Σχῆμα 31*)

Ἐὰν ἤδη τὸ πέρας Μ ἀπὸ τοῦ Α ἀρχόμενον κινῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, τὸ σημεῖον Σ κινεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος φ΄φ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, συμπίπτει μετὰ τοῦ Β, ὅταν $\overline{\text{ΑΜ}}$=90° καὶ ἐξακολουθεῖ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν κινούμενον καὶ ἀπείρως ἀπομακρυνόμενον τοῦ Β, ἐφ' ὅσον τὸ Μ πλησιάζει πρὸς τὸ Α΄, ἤτοι ἐφ' ὅσον τὸ τόξον τείνει πρὸς τὰς 180°. Κατὰ ταῦτα τοῦ τόξου αὐξάνοντος ἀπὸ 0° μέχρις 180°, ἡ συνεφαπτομένη αὐτοῦ ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ $-\infty$, καθισταμένη ἐν τῷ μεταξὺ 0 ὅταν ($\overline{\text{ΑΜ}}$)=90°.

Ὅταν τὸ Μ ὑπερβὰν τὸ Α΄ διαγράφῃ τὸ γ΄ τεταρτημόριον, ἡ συνεφαπτομένη καθίσταται θετικὴ καὶ εἶναι ἀπείρως μεγάλη, ἐφ' ὅσον τὸ Μ εἶναι ἀκόμη ἐγγύτατα τοῦ Α΄. Ὥστε, καθ' ἣν στιγμὴν τὸ Μ διέρχεται διὰ τοῦ Α΄ μεταβαῖνον ἐκ τοῦ β΄ εἰς τὸ γ΄ τεταρτημόριον, ἡ συνεφαπτομένη τοῦ $\overline{\text{ΑΜ}}$ μεταπηδᾷ ἐκ τοῦ $-\infty$ εἰς τὸ $+\infty$. Ἀπομακρυνομένου δὲ τοῦ Μ ἀπὸ τοῦ Α΄, ἤτοι τοῦ $\overline{\text{ΑΜ}}$ αὐξάνοντος ἀπὸ 180° ἕως 360°, τὸ Σ κινεῖται κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν ἐπὶ τοῦ ἄξονος φ΄φ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ συνεφαπτομένη ($\overline{\text{ΒΣ}}$) ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ $+\infty$ μέχρι τοῦ $-\infty$, καθισταμένη ἐν τῷ μεταξὺ 0, ὅταν $\overline{\text{ΑΜ}}$=270°.

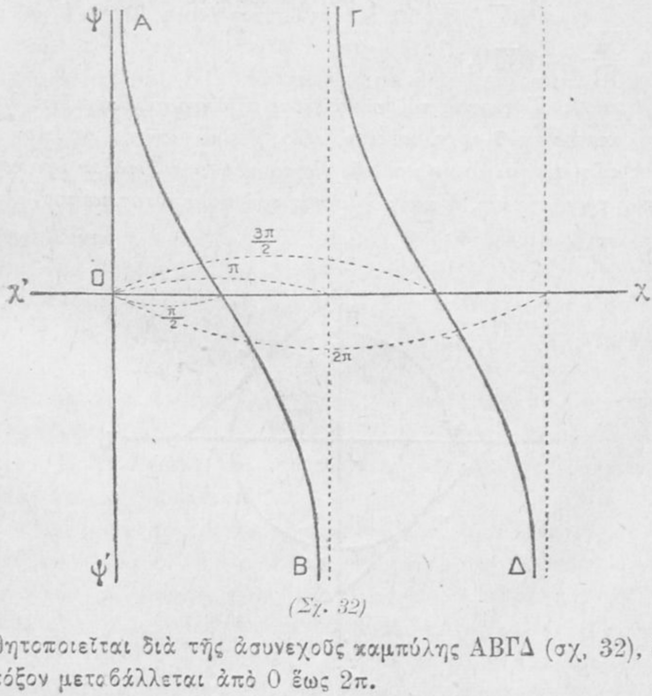
Ἐὰν τὸ Μ ἐπανελθὸν ἤδη εἰς τὴν ἀρχὴν Α ἐξακολουθήσῃ κινούμενον κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, ἤτοι, ἐὰν τὸ τόξον λαμβάνῃ τιμὰς μείζονας περιφερείας, τὸ Σ ἐμφανίζεται πάλιν ἐπὶ τοῦ Βφ καὶ διέρχεται πάλιν διὰ τῶν αὐτῶν θέσεων· ὥστε ἡ συνεφαπτομένη λαμβάνει πάλιν τὰς αὐτὰς κατὰ σειρὰν τιμάς.

Τὴν τοιαύτην μετὰ τοῦ τόξου μεταβολὴν τῆς συνεφαπτομένης συνοψίζομεν ἐν τῷ ἀκολούθῳ πίνακι, ἐν ᾧ τὸ τόξον θεωρεῖται μεταβαλλόμενον ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0.

τόξον	εἰς μοίρας	0°	90°	180°	270°	360°
	εἰς ἀκτίνια	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συνεφαπτομένη		$+\infty$	0	$\mp\infty$	0	$\mp\infty$

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ἡ συνεφαπτομένη δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν πραγματικὴν τιμήν.

§ 46. ***Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τῆς συνεφαπτομένης.*** Ἡ σπουδασθεῖσα μεταβολὴ τῆς συνεφαπτομένης τόξου



(Σχ. 32)

αἰσθητοποιεῖται διὰ τῆς ἀσυνεχοῦς καμπύλης ΑΒΓΔ (σχ. 32), ὅταν τὸ τόξον μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως 2π.

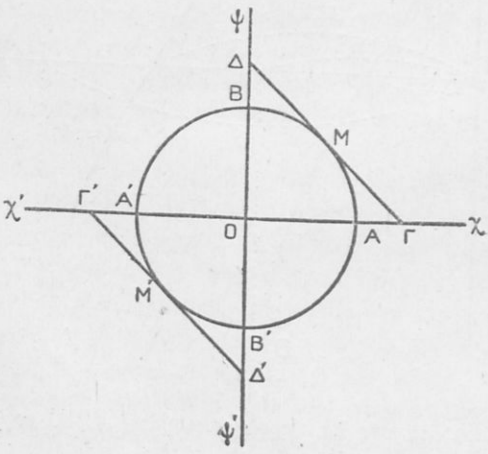
Ἀσκήσεις. 49) Νὰ κατασκευασθῇ ἡ συνεφαπτομένη τοῦ τόξου 45° καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αὕτη ἰσοῦται πρὸς $+1$.

50) Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς σφχ, ὅταν τὸ τόξον χ ἐλαττοῦται ἀπὸ 0° ἕως 360°.

51) Νὰ σπουδασθῇ καὶ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ συνάρτησις σφ²χ, ὅταν χ αὐξάνηται ἀπὸ 0 ἕως 2π.

§ 47. ***Τέμνουσα καὶ συντέμνουσα τόξου.*** Ὑποτεθείσθω ὅτι ἡ εἰς τὸ πέρας Μ τυχόντος τόξου ΑΜ (Σχ. 33) ἐφαπτομένη τοῦ τριγ. κύκλου τέμνει τὸν μὲν ἄξονα τῶν συνημιτόνων εἴς τι σημεῖον Γ, τὸν δὲ τῶν ἡμιτόνων εἰς τὸ Δ. Τὸ κέντρον Ο καὶ τὰ σημεῖα ταῦτα Γ καὶ Δ ὁρίζουσιν ἐπὶ τῶν προειρημένων ἀξόνων τὰ ἀνύσματα ΟΓ καὶ ΟΔ. Τούτων τὸ μὲν πρῶτον ἢ τὸ μῆκος αὐτοῦ καλεῖται *τέμνουσα*, τὸ δὲ δεύτερον ἢ τὸ μῆκος αὐτοῦ καλεῖται *συντέμνουσα* τοῦ τόξου ΑΜ. Ὁμοίως τοῦ τυχόντος τόξου ΑΜ′ τέμνουσα μὲν εἶναι τὸ $\overline{ΟΓ}'$ ἢ τὸ μῆκος αὐτοῦ $\frac{\overline{ΟΓ}'}{\overline{ΟΑ}} = (\overline{ΟΓ}')$, συντέμνουσα δὲ τὸ $\overline{ΟΔ}'$ ἢ τὸ μῆκος αὐτοῦ $\frac{\overline{ΟΔ}'}{\overline{ΟΒ}} = (\overline{ΟΔ}')$.

Γενικῶς: *Τέμνουσα τόξου καλεῖται τὸ ἄνυσμα, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν μὲν τὸ κέντρον τοῦ τριγ. κύκλου, τέλος δὲ τὸ κοινὸν σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων καὶ τῆς εἰς τὸ πέρας τοῦ τόξου ἐφαπτομένης τοῦ τριγ. κύκλου, ἢ καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος τούτου.*



(Σχ. 33)

Συντέμνουσα τόξου καλεῖται τὸ ἄνυσμα, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν μὲν τὸ κέντρον τοῦ τριγ. κύκλου, τέλος δὲ τὸ κοινὸν σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων καὶ τῆς εἰς τὸ πέρας τοῦ τόξου ἐφαπτομένης τοῦ τριγ. κύκλου, ἢ καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος τούτου.

Ἐκ τῶν ὁρισμῶν τούτων ἕπεται ὅτι:

α΄. *Πάντα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὴν αὐτὴν τέμνουσαν, ὁμοίως δὲ καὶ τὴν αὐτὴν συντέμνουσαν.*

β΄. *Ἡ τέμνουσα τόξου εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, καθ' ὅσον αὕτη εἶναι ἄνυσμα ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον τῷ διευθύνοντι ἀνύσματι ΟΑ.*

Κατὰ ταῦτα, τὰ εἰς τὸ α΄ καὶ δ΄ τεταρτημόριον περατούμενα τόξα ἔχουσι τέμνουσαν θετικήν, τὰ δὲ εἰς τὸ β΄ καὶ γ΄ ἀρνητικήν

γ΄. *Ἡ συντέμνουσα τόξου εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, καθ' ὅσον εἶναι ἄνυσμα ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον τῷ διευθύνοντι ἀνύσματι ΟΒ.*

Κατὰ ταῦτα, τὰ εἰς τὸ α΄ καὶ β΄ τεταρτημόριον περατούμενα τόξα ἔχουσα συντέμνουσαν θετικήν, τὰ δὲ εἰς τὸ γ΄ καὶ δ΄ ἀρνητικήν.

Σημ. Τὴν τέμνουσαν τόξου ἔχοντος μέτρον τ σημειοῦμεν συντόμως οὕτω: τεμτ, τὴν δὲ συντέμνουσαν οὕτω: στεμτ.

Ἀσκήσεις. 52). Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς τεμχ, ὅταν τὸ τόξον χ αὐξάνηται ἀπὸ 0^o μέχρι 360^o καὶ νὰ καταρτισθῇ ὁ σχετικὸς πίναξ.

53). Τὰ αὐτὰ διὰ τὴν στεμχ.

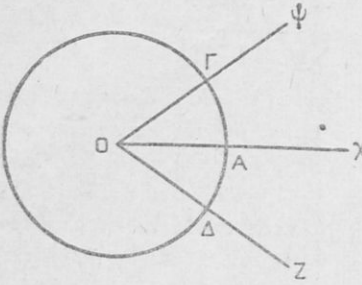
54). Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τῆς τεμχ, ὅταν χ αὐξάνηται ἀπὸ 0 ἕως 2π. Ὁμοίως καὶ ἡ μεταβολὴ τῆς στεμχ.

55). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν ἡ τελικὴ ἀκτὶς ΟΜ τυχόντος τόξου ΑΜ προεκτεινομένη τέμνῃ τὸν ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων εἴς τι σημεῖον Θ, τὸ ἄνυσμα ΟΘ ἰσοῦται ἀπολύτως πρὸς τὴν τέμνουσαν αὐτοῦ.

56). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν ἡ τελικὴ ἀκτὶς ΟΜ τυχόντος τόξου ΑΜ προεκτεινομένη τέμνῃ τὸν ἄξονα τῶν συνεφαπτομένων εἴς τι σημεῖον Ε, τὸ ἄνυσμα ΟΕ ἰσοῦται ἀπολύτως πρὸς τὴν συντέμνουμνουσαν τοῦ αὐτοῦ τόξου.

§ 48. ***Τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ καὶ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τόξου.***—. Τὰ ἀνύσματα, ἅτινα ἐκαλέσαμεν κατὰ σειρὰν *συνημίτονον, ἡμίτονον, ἐφαπτομένην, συνεφαπτομένην, τέμνουσαν* καὶ *συντέμνουσαν* τόξου, καλοῦνται πάντα ὁμοῦ *τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ* τοῦ τόξου. Τὰ δὲ μήκη αὐτῶν, ἅτινα μὲ τὰ αὐτὰ ἐκαλέσαμεν ὀνόματα, καλοῦνται πάντα ὁμοῦ *τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ* τοῦ τόξου.

§ 49. *Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ γωνίας.*—. Ἔστω $\widehat{O\chi, O\psi}$ τυχοῦσα γωνία (Σχ. 34). Ἡ μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν αὐτῆς καὶ ἀκτῖνα τὴν μονάδα τοῦ μήκους γραφομένη περιφέρεια τέμνει τὴν μὲν πλευρὰν Οχ εἴς τι σημεῖον Α, τὴν δὲ τελικὴν εἰς τὸ Γ. Οὕτως

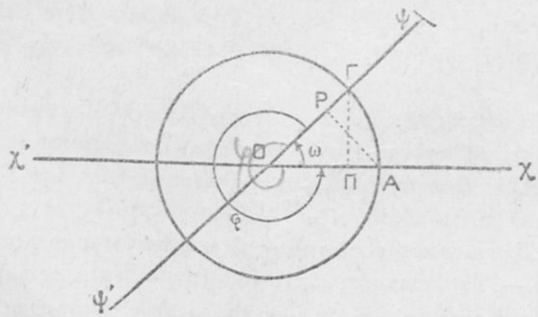


(Σχ. 34)

εἰς τὴν τυχοῦσαν γωνίαν $\widehat{O\chi, O\psi}$ ἀντιστοιχεῖ (§ 27) τόξον τι ΑΓ κείμενον ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τριγ. κύκλου. Τούτων τεθέντων καλοῦμεν ἡμίτονον συνημίτονον, ἐφαπτομένην, συνεφαπτομένην, τέμνουσαν καὶ συντέμνουσαν τῆς γωνίας $\widehat{O\chi, O\psi}$ τὸν ὁμώνυμον τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν ἢ γραμμὴν τοῦ ἀντιστοίχου τόξου ΑΓ. Ὁμοίως ἡμίτονον, συνημίτονον κτλ. γωνίας τινὸς $\widehat{O\chi, OZ}$ καλεῖται τὸ ἡμίτονον, συνημίτονον κτλ. τοῦ εἰς ταύτην ἀντιστοιχοῦντος τόξου ΑΔ.

Γενικῶς: *Ἡμίτονον συνημίτονον κτλ. γωνίας καλεῖται ὁ ὁμώνυμος τριγ. ἀριθμὸς (ἢ γραμμὴ) τοῦ ἀντιστοίχου τόξου, ὅπερ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τριγ. κύκλου.*

§ 50. ***Συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν θετικῶν διευθύνσεων δύο ἀξόνων.*** Ἔστωσαν $\overline{OA}$ καὶ $\overline{O\Gamma}$ (Σχ. 35) τὰ διευθύνοντα ἀνύ-



(Σχ. 35)

σματα δύο ἀξόνων χ′χ καὶ ψ′ψ τεμνομένων εἴς τι σημεῖον Ο, ὅπερ καθιστῶμεν κέντρον τριγ. κύκλου. Ἐμάθομεν ἤδη (§ 30) ὅτι γωνία τῶν θετικῶν διευθύνσεων τῶν ἀξόνων τούτων εἶναι ἡ ω ἢ ἡ φ, καθ' ὅσον ὡς ἀρχικὴ πλευρὰ λαμβάνεται ὁ ἡμιάξων Οχ ἢ ὁ Οψ.

Κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν εἶναι συνω $= (\overline{\text{ΟΠ}})$, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν συνφ $= (\overline{\text{ΟΡ}})$. Ἐπειδὴ δὲ (§ 30 σημ. 6΄) εἶναι $(\overline{\text{ΟΠ}})=(\overline{\text{ΟΡ}})$, Ἕπεται ὅτι: συνω=συνφ, ἤτοι:

Τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν θετικῶν διευθύνσεων δύο ἀξόνων εἶναι τὸ αὐτό, οἱασδήποτε οὔσης τὴς ἀρχικῆς πλευρᾶς αὐτῆς. [1]

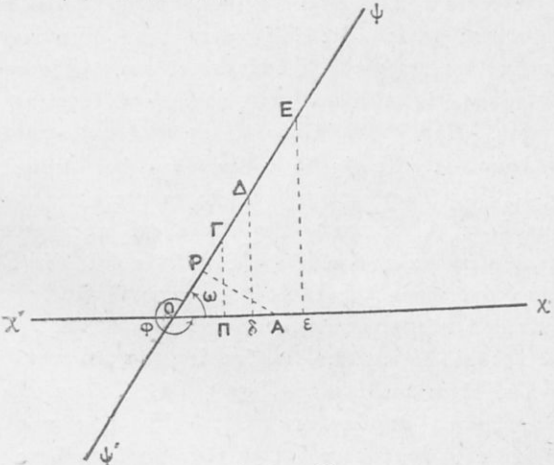
§ 51. ***Ἑτέρα ἔκφρασις τοῦ μήκους τῆς ὀρθῆς προβολῆς ἀνύσματος ἐπὶ ἄξονα.***—. Ἔστω ΔΕ τυχὸν ἄνυσμα κείμενον ἐπὶ ἄξονος ψ΄ψ. ὅστις ἔχει διευθύνον ἄνυσμα ΟΓ καὶ συντελεστὴν προβολῆς $(\overline{\text{ΟΠ}})$ ἐπὶ ἕτερον ἄξονα χ΄χ (Σχ. 36). Ἐμάθομεν ἤδη (§ 12 Γ΄) ὅτι, ἂν $\overline{\delta\varepsilon}$ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ $\overline{\text{ΔΕ}}$ ἐπὶ τὸν ἄξονα χ΄χ ἀληθεύει ἡ ἰσότης

$$(\overline{\delta\varepsilon})=(\overline{\text{ΔΕ}}).\ (\overline{\text{ΟΠ}})$$

Ἐπειδὴ δὲ $(\overline{\text{ΟΠ}})$=συνω=συνφ, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται:

$$(\overline{\delta\varepsilon})=(\overline{\text{ΔΕ}}).\ \text{συνω}=(\overline{\text{ΔΕ}}).\ \text{συνφ}. \qquad (1)$$

Ἄρα: *Τὸ μῆκος τῆς προβολῆς ἀνύσματος ἐπὶ ἄξονα ἰσοῦται πρὸς*



(Σχῆμα 36)

τὸ γινόμενον τοῦ μήκους αὐτοῦ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν θετικῶν διευθύνσεων τοῦ προβ. ἄξονος καὶ τοῦ περιέχοντος τὸ ἄνυσμα τοῦτο ἄξονος.

---

[1]. Τὰ διευθύνοντα ἀνύσματα ΟΑ, ΟΓ εἶναι ἀκτῖνες τριγ. κύκλου, ἄρα ἴσα ἀπολύτως.

Σημ. Ἐὰν τὸ ἄνυσμα κεῖται ἐπὶ ἄξονος παραλλήλου πρὸς τὸν προβ. ἄξονα, τὸ μῆκος τῆς προβολῆς αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος τούτου. Καὶ ἡ ἰσότης (1) εἰς τὸ αὐτὸ ἄγει ἐξαγόμενον, καθ᾽ ὅσον ἡ γωνία τῶν θετικῶν διευθύνσεων τῶν παραλλήλων ἀξόνων εἶναι μηδὲν καὶ τὸ συνημίτονον αὐτῆς $+1$. Ἀληθεύει ἄρα καὶ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ προηγουμένη πρότασις.

Ἀσκήσεις.. 57). Ἄνυσμα μήκους $0{,}15^{\mu}$ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν τῶν θετικῶν διευθύνσεων δύο πρωτευόντων ἀξόνων τριγ. κύκλου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς προβολῆς αὐτοῦ ἐπὶ ἑκάτερον τῶν ἀξόνων τούτων.

58). Ἡ γωνία τῶν θετικῶν διευθύνσεων δύο ἀξόνων εἶναι 30^{0}. Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς προβολῆς ἑκατέρου τούτων ἐπὶ τὸν ἕτερον.

59). Ἄνυσμα μήκους $0{,}40^{\mu}$ κεῖται ἐπὶ ἄξονος, ὅστις τέμνει τὸν προβ. ἄξονα ὑπὸ γωνίαν 60^{0}. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς προβολῆς αὐτοῦ.

§ 52. ***Τόξα, ὧν δίδεται τριγωνομετρικός τις ἀριθμός.***— Ἐξ ὅσων μέχρι τοῦδε περὶ τῶν τριγ. ἀριθμῶν τόξου (ἢ γωνίας) ἐλέχθησαν, καθίσταται φανερὸν ὅτι εἰς ἕκαστον τόξον (ἢ γωνίαν) ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένος τριγ. ἀριθμὸς ἐξ ἑκάστου εἴδους. Ἐξετάσωμεν ἤδη, ἄν, ἀντιστρόφως, εἰς δεδομένον τριγ. ἀριθμὸν ἀντιστοιχῇ ἢ οὔ ὡρισμένον τόξον. Πρὸς τοῦτο θὰ λύσωμεν τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα.

Πρόβλημα.—. *Νὰ εὑρεθῇ τόξον, ὅπερ ἔχει δεδομένον τριγ. ἀριθμόν.*—. Ὁρίζομεν πρῶτον ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τριγ. κύκλου σημεῖόν τι Α ὡς ἀρχὴν τῶν τόξων καὶ κατασκευάζομεν τὸ ἀντίστοιχον σύστημα πρωτευόντων ἀξόνων $\chi'\chi$ καὶ $\psi'\psi$ (Σχ. 37, 38, 39). Εἶτα διακρίνομεν τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις.

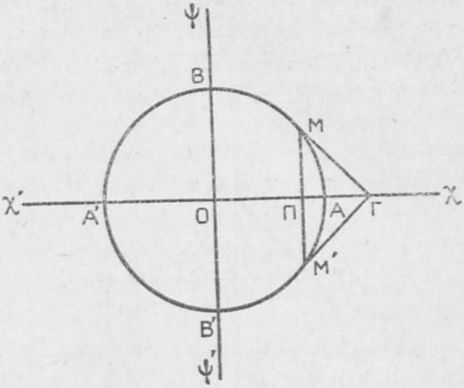
Α'. Ἔστω ὅτι ζητεῖται τόξον ἔχον συνημίτονον α.

Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις ὅτι, ἵνα ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν, πρέπει ὁ α νὰ μὴ εἶναι ἀπολύτως μείζων τοῦ 1. Τοῦ περιορισμοῦ τούτου ἐκπληρουμένου λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀρχόμενον ἄνυσμα ΟΠ τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $(\overline{\text{ΟΠ}})=\alpha$ καὶ ἄγομεν διὰ τοῦ Π χορδὴν κάθετον ἐπὶ τὸν $\chi'\chi$ τὴν Μ'Μ.

Εἶναι ἤδη εὐνόητον ὅτι πᾶν τόξον $\widehat{\text{ΑΜ}}$ ὡς καὶ πᾶν $\widehat{\text{ΑΜ}'}$ ἔχει συνημίτονον $(\overline{\text{ΟΠ}})=\alpha$ καὶ πλὴν τούτων οὐδὲν ἄλλο τόξον ἔχει τὸ δοθὲν συνημίτονον, διότι οὐδὲν ἄλλο σημεῖον (πλὴν τῶν Μ καὶ Μ') τῆς περιφερείας προβάλλεται εἰς τὸ Π (Σχ. 37).

Σημ. Ἐὰν $\alpha=\pm 1$, τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' συμπίπτουσιν εἰς τὸ

Α ἢ τὸ Α′ καὶ τὸ δοθὲν συνημίτονον ἔχουσι πάντα τὰ $\widehat{ΑΑ}$ ἢ πάντα τὰ $\widehat{ΑΑ'}$ καὶ μόνον αὐτά.



(Σχῆμα 37)

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν δύο τόξα τὴν αὐτὴν ἔχοντα ἀρχὴν ἔχωσι τὸ αὐτὸ συνημίτονον (π.χ.α), τὰ πέρατα αὐτῶν ἢ συμπίπτουσιν ἢ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων. Ἄρα (§ 24 Α′,Β′) μεταξὺ τῶν μέτρων αὐτῶν χ καὶ τ ἀληθεύει ἡ ἑτέρα τῶν ἰσοτήτων $χ \pm τ = 2Κπ$, αἵτινες ἐκφράζουσιν ὅτι:

Ἐὰν δύο τόξα ἔχωσι τὸ αὐτὸ συνημίτονον, ἡ διαφορὰ ἢ τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων αὐτῶν εἶναι μηδὲν ἢ πολλαπλάσιον (θετ. ἢ ἀρν.) τοῦ μέτρου θετικῆς περιφερείας.

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες:

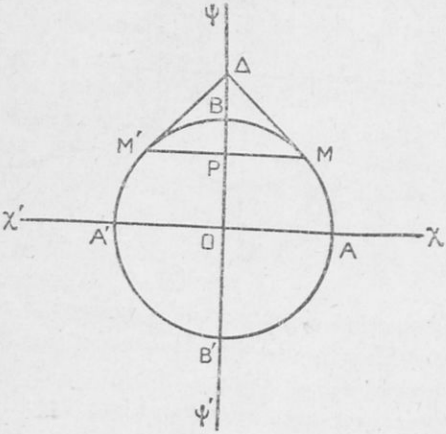
$$χ = 2Κπ \pm τ,$$

δι' ὧν ὁρίζωνται τὰ μέτρα, ὁσωνδήποτε θέλομεν, ἐκ τῶν τόξων, ὧν ἕκαστον ἔχει συνημίτονον ἴσον πρὸς τὸ συνημίτονον τοῦ γνωστοῦ τόξου τ. Ἡ ἰσότης π. χ. $συνχ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ἢ $συνχ = συν\frac{π}{4}$ ἀληθεύει διὰ πάντα τὰ τόξα, ἅτινα παρέχουσιν αἱ ἰσότητες $χ = 2Κπ \pm \frac{π}{4}$.

Β′. Ἂν ζητῆται τόξον ἔχον τέμνουσαν α, (ὅστις α δὲν πρέπει νὰ εἶναι ἀπολύτως μικρότερος τοῦ 1), λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων ἄνυσμα ΟΓ τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $(\overline{ΟΓ}) = α$ καὶ ἄγομεν διὰ τοῦ Γ τὰς τοῦ τριγ. κύκλου ἐφαπτομένας ΓΜ καὶ ΓΜ′ (Σχ. 37). Εἶναι ἤδη φανερὸν (§ 47) ὅτι τὴν δοθεῖσαν τέμνουσαν ἔχουσι πάντα τὰ τόξα ΑΜ καὶ πάντα τὰ $\widehat{ΑΜ'}$. Πλὴν δὲ τούτων οὐδὲν ἄλλο ἔχει τὴν τέμνουσαν ταύτην, διότι οὐδεμία ἄλλη τῆς περιφερείας ἐφαπτομένη διέρχεται διὰ τοῦ Γ.

Σημ. Ἂν εἶναι $α = \pm 1$, τὰ σημεῖα ἐπαφῆς συμπίπτουσιν εἰς τὸ Α ἢ τὸ Α′ καὶ τὴν τέμνουσαν ταύτην ἔχουσαι πάντα τὰ $\widehat{ΑΑ}$ ἢ πάντα τὰ $\widehat{ΑΑ'}$ καὶ μόνον αὐτά.

Γ΄. Ἔστω ὅτι ζητεῖται τόξον ἔχον ἡμίτονον α. Τοῦ α μὴ ὄντος ἀπολύτως μεγαλυτέρου τῆς μονάδος, λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων ἐκ τοῦ κέντρου ἀρχόμενοι ἄνυσμα $\overline{OP}$ τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $(\overline{OP})=\alpha$ καὶ ἄγομεν διὰ τοῦ P χορδὴν ΜΜ΄ παράλληλον τῷ χ΄χ (Σχ. 38). Εἶναι ἤδη φανερὸν ὅτι πάντα τὰ τόξα ΑΜ καὶ πάντα τὰ $\widehat{AM'}$ ἔχουσι τὸ δεδομένον ἡμίτονον. Πλὴν δὲ τούτων οὐδὲν ἄλλο τόξον ἔχει τὸ αὐτὸ ἡμίτονον, διότι οὐδὲν ἄλλο σημεῖον (πλὴν τῶν Μ καὶ Μ΄) τῆς περιφερείας προβάλλεται εἰς τὸ P.



(Σχῆμα 38)

Σημ. Ἂν $\alpha=\pm 1$, τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ΄ συμπίπτουσιν εἰς τὸ Β ἢ τὸ Β΄ καὶ ἑπομένως τὸ ἡμίτονον τοῦτο ἔχουσι πάντα τὰ $\widehat{AB}$ ἢ πάντα τὰ $\widehat{AB'}$ καὶ μόνον αὐτά.

Κατὰ ταῦτα, ἂν δύο τόξα τὴν αὐτὴν ἔχοντα ἀρχὴν ἔχωσι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον, τὰ πέρατα αὐτῶν ἢ συμπίπτουσιν, ἢ κεῖνται ἐπὶ χορδῆς παραλλήλου τῷ ἄξονι τῶν συνημιτόνων. Ἄρα (§ 24 Α΄,Γ΄) μεταξὺ τῶν μέτρων χ καὶ τ αὐτῶν ἀληθεύει ἡ ἑτέρα τῶν ἰσοτήτων

$$\chi-\tau=2K\pi \text{ καὶ } \chi+\tau=(2K+1)\pi.$$

Ὥστε: *Ἐὰν δύο τόξα ἔχωσι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον, ἢ ἡ διαφορὰ τῶν μέτρων αὐτῶν εἶναι μηδὲν ἢ ἄρτιον πολλαπλάσιον (θετ. ἢ ἀρν.) ἢ τὸ ἄθροισμα εἶναι περιττὸν πολλαπλάσιον (θετ ἢ ἀρν.) τοῦ μέτρου θετικῆς ἡμιπεριφερείας*

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες

$$\chi=2K\pi+\tau \text{ καὶ } \chi=(2K+1)\pi-\tau,$$

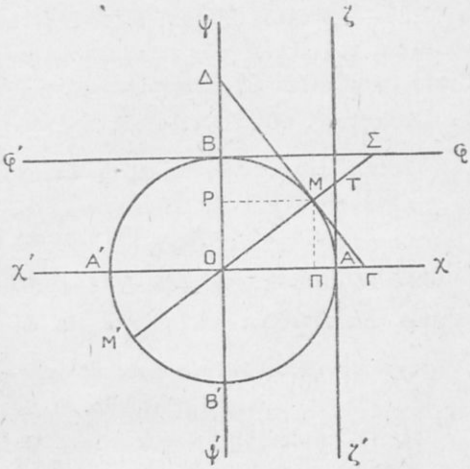
δι' ὧν εὑρίσκομεν, τὰ μέτρα, ὅσων θέλομεν τόξων, ἐκ τῶν ἐχόντων ἡμίτονον ἴσον πρὸς τὸ τοῦ γνωστοῦ τόξου τ. Π.χ. ἡ ἰσότης $\eta\mu\chi=\frac{1}{2}$ ἢ $\eta\mu\chi=\eta\mu\frac{\pi}{6}$ ἀληθεύει δι' ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα παρέχουσιν αἱ ἰσότητες

$$\chi = 2K\pi + \frac{\pi}{6} \text{ καὶ } \chi = (2K+1)\pi - \frac{\pi}{6}.$$

Δ΄. Ἂν ζητῆται τόξον ἔχον συντέμνουσαν α, (ὅστις α δὲν πρέπει νὰ εἶναι ἀπολύτως μικρότερος τοῦ 1), λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων ἄνυσμα ΟΔ (Σχ. 38) ἔχον μῆκος α καὶ ἄγομεν τὰς διὰ τοῦ Δ ἐφαπτομένας ΔΜ καὶ ΔΜ΄ τοῦ τριγ. κύκλου. Οὕτως ὁρίζονται τὰ πέρατα Μ καὶ Μ΄ τῶν τόξων ΑΜ καὶ ΑΜ΄ ἅτινα πάντα καὶ μόνον αὐτὰ ἔχουσι τὴν δεδομένην συντέμνουσαν.

Σημ. Ἂν εἶναι α $= \pm 1$, τὰ σημεῖα ἐπαφῆς συμπίπτουσιν εἰς τὸ Β ἢ τὸ Β΄ καὶ τὰ ζητούμενα τόξα εἶναι πάντα τὰ $\overset{\frown}{AB}$ ἢ τὰ $\overset{\frown}{AB'}$ καὶ ταῦτα μόνον.

Ε΄. Ἔστω ὅτι ζητεῖται τόξον ἔχον ἐφαπτομένην α. Λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἐφαπτομένων Ζ΄Ζ (Σχ. 39) ἀπὸ τοῦ Α ἀρχόμενοι ἄνυσμα ΑΤ ἔχον μῆκος α καὶ ἄγομεν τὴν ΟΤ, ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ΄. Εἶναι ἤδη φανερὸν ὅτι πᾶν τόξον ΑΜ ὡς καὶ πᾶν $\overset{\frown}{AM'}$ ἔχει ἐφαπτομένην α. Πλὴν δὲ τούτων οὐδὲν ἄλλο τόξον ἔχει ἐφαπτομένην α, καθ' ὅσον οὐδεμία ἄλλη διάμετρος (πλὴν τῆς ΜΜ΄) διέρχεται διὰ τοῦ Τ.



(Σχ. 39)

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν δύο τόξα τὴν αὐτὴν ἔχοντα ἀρχὴν ἔχωσι τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην, τὰ πέρατα αὐτῶν ἢ συμπίπτουσιν ἢ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ κέντρον τοῦ τριγ. κύκλου. Ἄρα (§ 24 Α΄, Δ΄) μεταξὺ τῶν μέτρων χ καὶ τ αὐτῶν ἀληθεύει ἡ ἑτέρα τῶν ἰσοτήτων

$$\chi - \tau = 2K\pi \qquad \text{καὶ} \qquad \chi - \tau = (2K+1)\pi,$$

ἃς δυνάμεθα νὰ συγχωνεύσωμεν εἰς τὴν

$$\chi - \tau = \lambda\pi,$$

ἔνθα λ δύναται νὰ εἶναι 0 ἢ τυχὸν ἀκέραιος θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός.

Ὥστε: *Ἐὰν δύο τόξα ἔχωσι τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην, ἡ διαφορὰ τῶν μέτρων αὐτῶν εἶναι μηδὲν ἢ πολλαπλάσιον (θετ. ἢ ἀρν.) τοῦ μέτρου θετικῆς ἡμιπεριφερείας.*

Ἐκ τῆς ἰσότητος $\chi - \tau = \lambda\pi$ προκύπτει ἡ ἰσότης

$$\chi = \lambda\pi + \tau,$$

δι' ἧς εὑρίσκομεν τὰ μέτρα ὅσων θέλομεν ἐκ τῶν τόξων, ὧν ἕκαστον ἔχει ἐφαπτομένην ἴσην πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τοῦ γνωστοῦ τόξου τ.

Οὕτω π. χ. ἡ ἰσότης $\text{εφ}\chi = \text{εφ}\frac{\pi}{4}$ ἀληθεύει δι' ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα παρέχει ἡ ἰσότης $\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}$.

ΣΤ'.—Ἂν τέλος ζητῆται τόξον ἔχον συνεφαπτομένην α, λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνεφαπτομένων ἄνυσμα ΒΣ ἔχον μῆκος α καὶ ἐργαζόμεθα ὡς προηγουμένως.

Ἀσκήσεις. 60). Ὁρισθείσης τῆς κοινῆς ἀρχῆς Α τῶν τόξων νὰ εὑρεθῶσι τὰ πέρατα τῶν τόξων, ὧν ἕκαστον ἔχει συνημίτονον $\frac{1}{2}$.

61). Τὸ αὐτὸ διὰ τὰ τόξα, ὧν ἕκαστον ἔχει ἡμίτονον $-\frac{2}{3}$.

62). Τὸ αὐτὸ διὰ τὰ τόξα, ὧν ἕκαστον ἔχει ἐφαπτομένην 3.

63). Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἰσότητες, δι' ὧν ὁρίζομεν τόξα, ὧν ἕκαστον ἔχει συνημίτονον ἴσον πρὸς τὸ $\text{συν}\frac{\pi}{6}$.

64). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $\text{εφ}\frac{\text{K}\pi}{\sqrt{2}}$ λαμβάνει διαφόρους τιμὰς διὰ τὰς διαφόρους συμμέτρους τιμὰς τοῦ Κ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δον

Τριγωνομετρικοὶ τύποι.

§. 53. ***Σχέσεις τῶν τριγων. ἀριθμῶν τοῦ αὐτοῦ τόξου.***

Α'.—Ἔστω $\overset{\frown}{\text{AM}}$ (Σχ. 39) τυχὸν τόξον ἔχον μέτρον τ καὶ $(\overline{\text{ΟΠ}})$, $(\overline{\text{ΟΡ}})$, $(\overline{\text{ΑΤ}})$, $(\overline{\text{ΒΣ}})$, $(\overline{\text{ΟΓ}})$, $(\overline{\text{ΟΔ}})$ οἱ τριγ. ἀριθμοὶ αὐτοῦ. Τοῦ τριγώνου ΟΠΜ ὄντος ὀρθογωνίου ἀληθεύει, εἰς οἱονδήποτε τεταρτημόριον καὶ ἂν κεῖται τὸ πέρας Μ τοῦ τόξου, ἡ ἰσότης $(\overline{\text{ΟΠ}})^2 + (\overline{\text{ΠΜ}})^2 = (\overline{\text{ΟΜ}})^2$.

Ἐπειδὴ δὲ $(\overline{\text{ΟΠ}}) = \text{συν}\ \tau$, $(\overline{\text{ΠΜ}}) = (\overline{\text{ΟΡ}}) = \text{ἡμ}\ \tau$ καὶ $(\overline{\text{ΟΜ}})^2 = 1$, αὕτη γίνεται :

$$\text{συν}^2\,\tau + \text{ἡμ}^2\,\tau = 1. \qquad (1)$$

Ἄρα : *Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου τοῦ αὐτοῦ τόξου ἰσοῦται τῇ θετικῇ μονάδι.*

Β΄.— Τοῦ τριγώνου ΟΜΓ (Σχ. 39) ὄντος ὀρθογωνίου καὶ τῶν ἀνυσμάτων ΟΠ, ΟΓ ὄντων πάντοτε ὁμορρόπων, ἀληθεύει, ὁπουδήποτε τῆς περιφερείας καὶ ἂν κεῖται τὸ Μ, ἡ ἰσότης $(\overline{\text{ΟΓ}})\cdot(\overline{\text{ΟΠ}}) = (\overline{\text{ΟΜ}})^2$. ἢ τεμ τ. συντ $= 1$, ἐξ ἧς :

$$\text{τεμ}\ \tau = \frac{1}{\text{συν}\ \tau} \qquad (2)$$

Ἄρα : Ἡ τέμνουσα τόξου εἶναι ἀντίστροφος τοῦ συνημιτόνου τοῦ αὐτοῦ τόξου.

Γ΄.—Ὁμοίως ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΜΔ (Σχ. 39) προκύπτει ἡ ἰσότης :

$$\text{στεμ}\ \tau = \frac{1}{\text{ἡμ}\ \tau} \qquad (3)$$

Ἄρα : Ἡ συντέμνουσα τόξου εἶναι ἀντίστροφος τοῦ ἡμιτόνου τοῦ αὐτοῦ τόξου.

Δ΄.—Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΑΤ καὶ ΟΠΜ προκύπτει ἡ ἀναλογία $\frac{\text{ΑΤ}}{\text{ΠΜ}} = \frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΟΠ}}$ ἢ $\frac{\text{ΑΤ}}{\text{ΟΡ}} = \frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΟΠ}}$, ἥτις ἀληθεύει καὶ ὅταν οἱ ὅροι αὐτῆς λάβωσι τὸ προσῆκον ἕκαστος σημεῖον· τῷ ὄντι, ὅταν $\overline{\text{ΑΤ}}$ καὶ $\overline{\text{ΟΡ}}$ εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα καὶ τὰ $\overline{\text{ΟΑ}}$ καὶ $\overline{\text{ΟΠ}}$ εἶναι ὁμοίως ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἀμφότεροι οἱ λόγοι $\frac{\overline{\text{ΑΤ}}}{\overline{\text{ΟΡ}}}$, $\frac{\overline{\text{ΟΑ}}}{\overline{\text{ΟΠ}}}$ εἶναι πάντοτε ὁμόσημοι. Ἀληθεύει ὅθεν πάντοτε ἡ ἀναλογία $\frac{(\overline{\text{ΑΤ}})}{(\overline{\text{ΟΡ}})} = \frac{(\overline{\text{ΟΑ}})}{(\overline{\text{ΟΠ}})}$ ἢ $\frac{\text{ἐφ}\ \tau}{\text{ἡμ}\ \tau} = \frac{1}{\text{συν}\ \tau}$, ὅθεν

$$\text{ἐφ}\ \tau = \frac{\text{ἡμ}\ \tau}{\text{συν}\ \tau} \qquad (4)$$

Ἄρα : Ἡ ἐφαπτομένη τόξου ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ ἡμιτόνου διὰ τοῦ συνημιτόνου τοῦ αὐτοῦ τόξου.

Ε΄. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΒΣ καὶ καὶ ΟΡΜ προκύπτει ἡ ἰσότης

$$\text{σφ}\ \tau = \frac{\text{συν}\ \tau}{\text{ἡμ}\ \tau}. \qquad (5)$$

Ἄρα : Ἡ συνεφαπτομένη τόξου ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ συνημιτόνου διὰ τοῦ ἡμιτόνου τοῦ αὐτοῦ τόξου.

Πλὴν τῶν πέντε προηγουμένων σχέσεων οὐδεμία ἄλλη μὴ ἐξ αὐτῶν ἀπορρέουσα ὑφίσταται μεταξὺ τῶν τριγ. ἀριθμῶν τοῦ αὐτοῦ τόξου. Διότι, ἂν ὑπῆρχε καὶ ἄλλη τις, αὕτη μετὰ τῶν προειρημένων πέντε θὰ ἀπετέλει σύστημα ἓξ ἐξισώσεων μετὰ ἰσαρίθμων ἀγνώστων, ἡ λύσις δὲ αὐτοῦ θὰ παρεῖχεν ὡρισμένας τιμὰς δι' ἕκαστον τριγ. ἀριθμὸν οἱουδήποτε ὄντος τοῦ τόξου, ὅπερ ἄτοπον.

Ἀσκήσεις. 65). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη ἑκάστου τῶν τόξων 45^o, 30^o, 60^o.

66) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη τοῦ αὐτοῦ τόξου εἶναι ἀριθμοὶ ἀντίστροφοι καὶ πάντοτε ὁμόσημοι.

67) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $1 + \text{ἐφ}^2\tau = \dfrac{1}{\text{συν}^2\tau}$

68) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $1 + \text{σφ}^2\tau = \dfrac{1}{\text{ἡμ}^2\tau}$

69) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\text{ἐφ}\alpha + \text{ἐφ}\beta = \text{ἐφ}\,\alpha.\,\text{ἐφ}\,\beta\,(\text{σφ}\alpha + \text{σφ}\beta)$

70) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\text{σφ}^2\tau - \text{συν}^2\tau = \text{σφ}^2\tau.\,\text{συν}^2\tau.$

71) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\dfrac{\text{σφ}\alpha + \text{σφ}\beta}{\text{ἐφ}\alpha + \text{ἐφ}\beta} = \dfrac{1}{\text{ἐφ}\alpha.\,\text{ἐφ}\beta}$

72) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\text{τεμ}^2\tau + \text{στεμ}^2\tau = \text{τεμ}^2\tau.\text{στεμ}^2\tau.$

72) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τέμνουσα καὶ συντέμνουσα ἑκάστου τῶν τόξων $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}$.

74) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ τόξα θετικὰ καὶ μικρότερα τεταρτημορίου περιφερείας ἀληθεύει ἡ ἰσότης :

$$\text{τόξ. ἡμ.}\frac{\mu^2-\nu^2}{\mu^2+\nu^2} = \text{τόξ. συν}\frac{2\mu\nu}{\mu^2+\nu^2}.$$

75) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πέρατα τῶν τόξων χ, δι' ἃ ἀληθεύει ἡ ἰσότης $\dfrac{\text{ἐφ}\chi}{\text{σφ}\chi} = 4$, τῆς ἀρχῆς τῶν τόξων ἐκ τῶν προτέρων ὁρισθείσης.

76) Τὸ αὐτὸ διὰ τὰ τόξα, δι' ἃ εἶναι $\dfrac{\text{ἐφ}\chi}{\text{τεμ}\chi} = \dfrac{1}{3}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

§ 54. ***Πρόβλημα Α'.***—. *Εὑρεῖν συναρτήσει τοῦ συνημιτόνου τόξου τοὺς ἄλλους τριγ. ἀριθμοὺς αὐτοῦ.*

α'. *Εὕρεσις τοῦ ἡμιτόνου.*—. Ἐκ τῆς ἰσότητος (1) (§ 53) λυομένης πρὸς ἡμτ προκύπτει ἡ ἰσότης

$$ἡμτ = \pm\sqrt{1 - συν^2 τ} \qquad (6),$$

ἥτις παρέχει τὸ ἡμτ συναρτήσει τοῦ συντ. Βλέπομεν δὲ ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ὅτι εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ συντ ἀντιστοιχοῦσι δύο τιμαὶ τοῦ ἡμτ. Τὸν λόγον τούτου κατανοοῦμεν, ἂν ἐνθυμηθῶμεν (§ 52 Α') ὅτι δοθὲν συνημίτονον π. χ. ($\overline{ΟΠ}$) (Σχ. 37). ἔχουσιν ὅσα τόξα περατοῦνται εἰς τὸ Μ καὶ ὅσα περατοῦνται εἰς τὸ Μ'· ἐπειδὴ δὲ τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων, τὸ ἡμίτονον τῶν εἰς τὸ Μ καταληγόντων εἶναι ἀντίθετον τοῦ ἡμιτόνου τῶν εἰς τὸ Μ' καταληγόντων τόξων.

Κατὰ ταῦτα ἐκ τοῦ συνημιτόνου τόξου δὲν ὁρίζεται τελείως τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ, διότι μένει ἀμφίβολον τὸ σημεῖον, ὅπερ ἔχει τὸ ἡμίτονον. Ἡ ἀμφιβολία αὕτη αἴρεται, ἂν πλὴν τοῦ συνημιτόνου ὁρισθῇ καὶ τὸ τεταρτημόριον, εἰς ὃ καταλήγει τὸ τόξον.

β' *Εὕρεσις τῆς ἐφαπτομένης.*—. Ἐκ τῶν τύπων (4) καὶ (6) εὑρίσκομεν εὐκόλως τὴν ἰσότητα:

$$ἐφτ = \frac{\pm\sqrt{1 - συν^2 τ}}{συν\,τ} \qquad (7)$$

γ' *Εὕρεσις τῆς συνεφαπτομένης.*—. Ἐκ τῶν τύπων (5) καὶ (6) προκύπτει εὐκόλως ἡ ἰσότης:

$$σφτ = \frac{συν\,τ}{\pm\sqrt{1 - συν^2 τ}} \qquad (8)$$

δ'. *Εὕρεσις τῆς συντεμνούσης.*—Ἐκ τῶν τύπων (3) καὶ (6) προκύπτει ἡ ἰσότης:

$$στεμτ = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - συν^2 τ}} \qquad (9)$$

Σημ. Τὸ διπλοῦν σημεῖον τοῦ β'. μέλους ἑκάστης τῶν ἰσοτήτων (7), (8), (9) ἐξηγεῖται ὡς καὶ τὸ τῆς ἰσότητος (6) καὶ ἡ εἰς τὸ διπλοῦν τοῦτο σημεῖον ὀφειλομένη ἀμφιβολία αἴρεται, ἂν ὁρισθῇ καὶ τὸ τεταρτημόριον, εἰς ὃ περατοῦται τὸ τόξον.

ε'. *Εὕρεσις τῆς τεμνούσης.*—Ταύτην παρέχει ἀμέσως ὁ τύπος (2).

§ 55. ***Πρόβλημα Β'.***— *Εὑρεῖν συναρτήσει τοῦ ἡμιτόνου τόξου τοὺς ἄλλους τριγ. ἀριθμοὺς αὐτοῦ.*

α'. *Εὕρεσις τοῦ συνημιτόνου.*—Ἐκ τῆς ἰσότητος (1) λυομένης πρὸς συν τ προκύπτει ἡ ἰσότης:

$$συν\,τ = \pm\sqrt{1 - ἡμ^2 τ} \qquad (10)$$

β'. *Εὕρεσις τῆς ἐφαπτομένης.*—Ἐκ τῶν τύπων (4) καὶ (10) προκύπτει ὅτι :

$$\text{ἐφτ} = \frac{\text{ἡμτ}}{\pm\sqrt{1-\text{ἡμ}^2\text{τ}}} \qquad (11)$$

γ'. *Εὕρεσις τῆς συνεφαπτομένης.*—Ἐκ τῶν τύπων (5) καὶ (10) προκύπτει ὅτι :

$$\text{σφτ} = \frac{\pm\sqrt{1-\text{ἡμ}^2\text{τ}}}{\text{ἡμτ}} \qquad (12)$$

δ'. *Εὕρεσις τῆς τεμνούσης.*—Ἐκ τῶν τύπων (2) καὶ (10) προκύπτει ὅτι :

$$\text{τεμτ} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{ἡμ}^2\text{τ}}}. \qquad (13)$$

Σημ. Τὸ διπλοῦν σημεῖον τοῦ β' μέλους ἑκάστης τῶν ἰσοτήτων (10), (11), (12) καὶ (13) ἐξηγεῖται κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς ἐκεῖνον, καθ' ὃν ἐξηγήθη τὸ διπλοῦν σημεῖον τοῦ τύπου (6). Ἡ δὲ ἐξ αὐτοῦ προερχομένη ἀμφιβολία αἴρεται ὁμοίως (§ 54 α').

ε'. *Εὕρεσις τῆς συντεμνούσης.*— Ταύτην παρέχει ἀμέσως ἡ ἰσότης (3).

§ 56. ***Πρόβλημα Γ'.***— *Εὑρεῖν συναρτήσει τῆς ἐφαπτομένης τόξου τοὺς ἄλλους τριγ. ἀριθμοὺς αὐτοῦ.*

α'. *Εὕρεσις τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου.* — Ἐκ τῆς ἰσότητος (4) τεθειμένης ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\text{ἡμτ}}{\text{συντ}} = \frac{\text{ἐφτ}}{1}$ προκύπτει δι' ἀλλαγῆς τῶν μέσων ἡ ἰσότης $\frac{\text{ἡμτ}}{\text{ἐφτ}} = \frac{\text{συντ}}{1}$. Ὑψοῦντες δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης εἰς τὸ τετράγωνον, ἐφαρμόζοντες εἶτα γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ἰσότητα (1) εὑρίσκομεν τὰς ἰσότητας : $\frac{\text{ἡμ}^2\text{τ}}{\text{ἐφ}^2\text{τ}} = \frac{\text{συν}^2\text{τ}}{1} = \frac{\text{ἡμ}^2\text{τ}+\text{συν}^2\text{τ}}{1+\text{ἐφ}^2\text{τ}} = \frac{1}{1+\text{ἐφ}^2\text{τ}}$. Ἐκ τούτων δὲ δι' ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες :

$$\frac{\text{ἡμτ}}{\text{ἐφτ}} = \frac{\text{συντ}}{1} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{ἐφ}^2\text{τ}}}, \quad \text{ὅθεν}$$

$$\text{ἡμτ} = \frac{\text{ἐφτ}}{\pm\sqrt{1+\text{ἐφ}^2\text{τ}}} \quad \text{καὶ συντ} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{ἐφ}^2\text{τ}}} \qquad (14)$$

Τὸ διπλοῦν σημεῖον τῶν β'. μελῶν τῶν ἰσοτήτων τούτων ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς·

Δεδομένην ἐφαπτομένην π. χ. $(\overline{AT})$ (Σχ. 39) ἔχουσιν, ὡς γνωστόν, τὰ τόξα ΑΜ καὶ τὰ $\overline{AM}'$. Ἐπειδὴ τὰ πέρατα Μ καὶ Μ΄ αὐτῶν εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ κέντρον, τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ἑκάστου τῶν $\overline{AM}$ εἶναι ἀντιστοίχως ἀντίθετον πρὸς τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ἑκάστου τῶν $\overline{AM}'$.

Ἐκ τῶν εἰρημένων κατανοοῦμεν ἐπίσης ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τόξου δὲν ἀρκεῖ νὰ ὁρίσῃ τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον αὐτοῦ· ἀπαιτεῖται πλὴν ταύτης νὰ εἶναι γνωστὸν καὶ τὸ τεταρτημόριον, εἰς ὃ καταλήγει τὸ τόξον, ὅτε αἴρεται ἡ ἀμφιβολία διὰ τὸ πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ σημεῖον. Οὕτως ἂν ἡ δοθεῖσα ἐφαπτομένη εἶνε θετικὴ καὶ τὸ τόξον λήγει εἰς τὸ α΄. τεταρτημόριον, δέον πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ ἀμφοτέρων τῶν τύπων (14) νὰ προτάξωμεν τὸ +, διότι πᾶν τοιοῦτον τόξον ἔχει ἡμίτονον καὶ συνημίτονον θετικά· ἂν δὲ τὸ τόξον περατοῦται εἰς τὸ γ΄. τεταρτημόριον, τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον αὐτοῦ εἶναι ἀρνητικὰ καὶ δέον πρὸ ἀμφοτέρων τῶν ριζικῶν νὰ τεθῇ τὸ —. Ἂν ὅμως τὸ τόξον περατοῦται εἰς τὸ β΄. τεταρτημόριον, ἔχει ἡμίτονον θετικὸν καὶ συνημίτονον ἀρνητικόν· ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ α΄. τύπου εἶναι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀρνητικός, δέον ὁ παρονομαστὴς νὰ ληφθῇ μὲ τὸ σημεῖον —, τὸ αὐτὸ δὲ σημεῖον ὀφείλει νὰ ἔχῃ καὶ τὸ ῥιζικὸν τοῦ β΄. τύπου· ἂν τέλος τὸ τόξον λήγῃ εἰς τὸ δ΄. τεταρτημόριον, ὁμοίως σκεπτόμενοι κατανοοῦμεν ὅτι πρέπει πρὸ ἀμφοτέρων τῶν ῥιζικῶν νὰ τεθῇ τὸ +.

Ἐκ τῶν λεχθέντων κατέστη φανερὸν ὅτι εἰς ἑκάστην περίπτωσιν τὸ ῥιζικὸν ἑκατέρου τῶν τύπων (14) ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ ῥιζικοῦ τοῦ ἑτέρου.

β΄ Εὕρεσις τῆς συνεφαπτομένης.—. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (4) καὶ (5) διὰ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\grave{\varepsilon}\varphi\tau . \sigma\varphi\tau = 1 \qquad (15)$$

ἄρα

$$\sigma\varphi\tau = \frac{1}{\grave{\varepsilon}\varphi\tau} \qquad (16)$$

γ΄ Εὕρεσις τῆς τεμνούσης καὶ συντεμνούσης.—. Ἐκ τοῦ τύπου (2) καὶ τοῦ β΄. τῶν τύπων (14) εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\tau\varepsilon\mu\tau = \pm\sqrt{1 + \grave{\varepsilon}\varphi^2\tau} \qquad (17)$$

Ἐκ δὲ τοῦ τύπου (3) καὶ τοῦ α΄ τῶν τύπων (14) εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\sigma\tau\varepsilon\mu\tau = \frac{\pm\sqrt{1 + \grave{\varepsilon}\varphi^2\tau}}{\grave{\varepsilon}\varphi\tau} \qquad (18)$$

Ἀσκήσεις. 77) Εὑρεῖν τὸ ἡμίτονον καὶ τὴν ἐφαπτομένην τόξου λήγοντος εἰς τὸ γ΄. τεταρτημόριον καὶ ἔχοντος συνημίτονον $-\frac{3}{5}$.

78) Εὑρεῖν τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τόξου περατουμένου εἰς τὸ α΄. τεταρτημόριον καὶ ἔχοντος ἐφαπτομένην $\frac{3}{4}$.

79) Εὑρεῖν συναρτήσει τῆς συνεφαπτομένης τόξου τοὺς ἄλλους τριγ. ἀριθμοὺς αὐτοῦ.

80) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{\text{συν}^2\alpha-\text{ἡμ}^2\beta}{\text{ἡμ}^2\alpha.\ \text{ἡμ}^2\beta}=\frac{1-\text{ἐφ}^2\alpha.\ \text{ἐφ}^2\beta}{\text{ἐφ}^2\alpha.\ \text{ἐφ}^2\beta}$.

81) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ τόξα θετικὰ καὶ μικρότερα τεταρτημορίου ἀληθεύει ἡ ἰσότης τόξ. ἡμ $\sqrt{\frac{\chi}{\chi+\alpha}}=$ τόξ ἐφ $\sqrt{\frac{\chi}{\alpha}}$

82) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\frac{\text{τεμα}}{\text{στεμα}}=\pm\sqrt{\text{τεμ}^2\alpha-1}$.

§ 57. ***Σχέσεις τῶν τριγ. ἀριθμῶν τόξων ἀντιθέτων.*** — Ἔστω ΑΜ (Σχ. 40) τυχὸν τόξον καὶ $\overset{\frown}{AM'}$ τὸ ἀντίθετόν του, τ δὲ καὶ —τ τὰ μέτρα αὐτῶν. Ἐπειδὴ (§ 20) ἡ χορδὴ ΜΜ΄ τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων, ἔπεται ὅτι ἀμφότεραι αἱ τελικαὶ ἀκτῖνες ΟΜ καὶ ΟΜ΄ ἔχουσι τὴν αὐτὴν προβολὴν $\overline{O\Pi}$ ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων καὶ $(\overline{\Pi M})=-(\overline{\Pi M'})$ ἢ $(\overline{OP})=-(\overline{OP'})$.

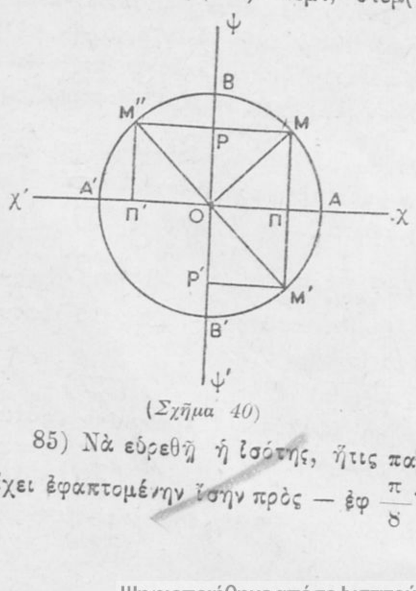
Ἄρα: ***συν(—τ)=συντ καὶ ἡμ(—τ)=—ἡμτ.*** **(19)**

Ἐκ τούτων δὲ προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ ἰσότητες

$$\text{ἐφ}(-\tau)=-\text{ἐφτ},\quad \text{σφ}(-\tau)=-\text{σφτ}. \qquad (20)$$

καὶ

$$\text{τεμ}(-\tau)=\text{τεμτ},\quad \text{στεμ}(-\tau)=-\text{στεμτ}. \qquad (21)$$



(*Σχῆμα 40*)

Ἤτοι: *Δύο τόξα ἀντίθετα ἔχουσι τὸ αὐτὸ συνημίτονον καὶ τὴν αὐτὴν τέμνουσαν, ἀντιθέτους δὲ τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγ. ἀριθμούς.*

Ἀσκήσεις. 83) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων
—45°, —30°, —60°.

84) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἰσότητες, αἵτινες παρέχουσι τὰ τόξα χ, ὧν ἕκαστον ἔχει ἡμίτονον ἴσον πρὸς $-\text{ἡμ}\frac{\pi}{6}$.

85) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσότης, ἥτις παρέχει τὰ τόξα χ, ὧν ἕκαστον ἔχει ἐφαπτομένην ἴσην πρὸς $-\text{ἐφ}\,\frac{\pi}{8}$.

§ 58. ***Σχέσεις τῶν τριγ. ἀριθμῶν τόξων παραπληρωματικῶν.***— Ἔστω $\widehat{AM}$ (Σχ.40) τυχὸν τόξον καὶ ΑΜ'' τὸ παραπληρωματικὸν αὐτοῦ· ἐὰν κληθῇ τ τὸ μέτρον τοῦ α', τὸ τοῦ ἄλλου θὰ εἶναι 180^0—τ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ χορδὴ ΜΜ'' εἶναι (§ 22) κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων, αἱ τελικαὶ ἀκτῖνες ΟΜ καὶ ΟΜ'' ἔχουσι τὴν αὐτὴν προβολὴν $\overline{OP}$ ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦτον,

ἄρα
$$ημ(180^0-τ)=ημτ.$$

Ἐκ δὲ τῶν προφανῶν ἰσοτήτων $(\overline{PM''})=(\overline{OΠ'})$, $(\overline{PM})=(\overline{OΠ})$ καὶ $(\overline{PM''})=-(\overline{PM})$ ἕπεται ὅτι: $(\overline{OΠ'})=-(\overline{OΠ})$, ἤτοι $συν(180^0-τ)=-συντ$

Ὥστε: $$ημ(180^0-τ)=ημτ,\quad συν(180^0-τ)=-συντ \qquad (22)$$

Ἐκ τούτων δὲ προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ ἰσότητες:

$$εφ(180^0-τ)=-εφτ,\quad σφ(180^0-τ)=-σφτ \qquad (23)$$

καὶ $$τεμ(180^0-τ)=-τεμ,\quad στεμ(180^0-τ)=στεμτ., \qquad (24)$$

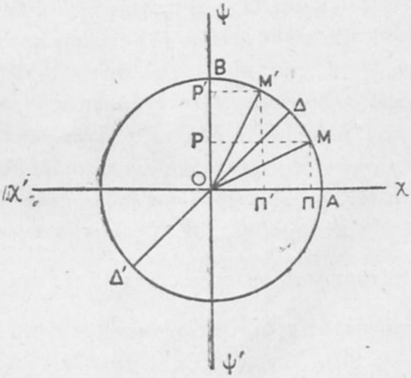
Ἄρα : *Δύο τόξα παραπληρωματικὰ ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον καὶ τὴν αὐτὴν συντέμνουσαν, ἀντιθέτους δὲ τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγ. ἀριθμούς.*

Ἀσκήσεις. 86) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων 135^0, 150^0 καὶ 120^0.

87) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων -135^0, -150^0, -120^0.

88) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἰσότητες, αἵτινες παρέχουσι τὰ τόξα, ὧν ἕκαστον ἔχει συνημίτονον ἴσον πρὸς $-συν\dfrac{\pi}{7}$.

§ 59. ***Σχέσεις τῶν τριγ. ἀριθμῶν τόξων συμπληρωματικῶν.*** Ἔστω $\widehat{AM}$ (Σχ. 41) τυχὸν τόξον καὶ ΑΜ' τὸ συμπληρωματικὸν αὐτοῦ· ἐὰν κληθῇ τ τὸ μέτρον τοῦ ἑνὸς τὸ τοῦ ἄλλου θὰ εἶναι $90^0-τ$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ πέρατα Μ καὶ Μ' αὐτῶν εἶναι (§ 23) συμμετρικὰ πρὸς τὴν διάμετρον Δ'ΟΔ, ἥτις διχοτομεῖ τὴν γωνίαν $\widehat{Oχ,Oψ}$ τῶν θετικῶν διευθύνσεων τῶν



(Σχῆμα 41)

πρωτευόντων ἀξόνων, οἵτινες ἀντιστοιχοῦσι πρὸς ἀρχὴν τόξων τὸ Α, ἕπονται τὰ ἑξῆς συμπεράσματα.

α'. Ἂν τὸ ἓν τῶν περάτων τούτων κεῖται εἰς τὸ α'. ἢ γ'. τεταρτημόριον, καὶ τὸ ἕτερον θὰ κεῖται εἰς τὸ αὐτὸ τεταρτημόριον, ἄρα τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα αὐτῶν εἶναι ὁμόσημα, ἂν δὲ τὸ ἓν τῶν περάτων κεῖται εἰς τὸ β' ἢ δ' τεταρτημόριον, τὸ ἄλλο θὰ κεῖται εἰς τὸ ἕτερον τῶν αὐτῶν τεταρτημορίων, ἄρα τὸ ἡμίτονον ἑκατέρου τῶν προειρημένων τόξων εἶναι ὁμόσημον πρὸς τὸ συνημίτονον τοῦ ἑτέρου. Εἰς πᾶσαν λοιπὸν περίπτωσιν *τὸ ἡμίτονον ἑκατέρου εἶναι ὁμόσημον πρὸς τὸ συνημίτονον τοῦ ἑτέρου.*

β'. Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν θετικῶν καὶ μικροτέρων περιφερείας τόξων $\overparen{A\Delta}$ καὶ $\overparen{\Delta B}$ ἀφ' ἑνός, $\overparen{M\Delta}$ καὶ $\overparen{\Delta M'}$ ἀφ' ἑτέρου προκύπτει ἡ ἰσότης τῶν $\overparen{AM}$ καὶ $\overparen{M'B}$, ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι $A\hat{O}M = B\hat{O}M'$. Τὰ τρίγωνα, ἄρα, ΠΟΜ καὶ Ρ'ΟΜ' εἶναι ἴσα καὶ κατ' ἀκολουθίαν αἱ πλευραὶ ΠΜ καὶ ΟΠ τοῦ ἑνὸς εἶναι ἐφαρμόσιμοι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς Ρ'Μ' καὶ ΟΡ' τοῦ ἄλλου. Ἐκ τούτου δὲ κατανοοῦμεν εὐκόλως ὅτι τὰ ἀνύσματα ΟΡ καὶ ΟΠ' εἶνα ἐφαρμόσιμα· ἐπειδὴ δέ, ὡς προείπομεν, ταῦτα εἶναι καὶ ὁμόσημα πάντοτε, ἕπεται ὅτι: συν $(90^0 - \tau) =$ ἡμτ. Ὁμοίως, ἐπειδὴ τὰ $\overline{OP'}$ καὶ $\overline{O\Pi}$ εἶναι ἐφαρμόσιμα καὶ πάντοτε ὁμόσημα, ἕπεται ὅτι ἡμ $(90^0 - \tau) =$ συν τ.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ ἀλήθεια τῶν δύο προηγουμένων ἰσοτήτων καὶ ὅταν τὸ Μ καταλήγῃ εἰς οἱονδήποτε ἄλλο τεταρτημόριον. Ὥστε γενικῶς εἶναι πάντοτε:

$$\text{ἡμ}\,(90^0 - \tau) = \text{συντ}, \quad \text{συν}\,(90^0 - \tau) = \text{ἡμτ}. \qquad (25)$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων δὲ τούτων προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ ἰσότητες:

$$\text{ἐφ}\,(90^0 - \tau) = \text{σφτ}, \quad \text{σφ}\,(90^0 - \tau) = \text{ἐφτ} \qquad (26)$$

καὶ
$$\text{στεμ}\,(90^0 - \tau) = \text{τεμτ}, \quad \text{τεμ}\,(90^0 - \tau) = \text{στεμτ}. \qquad (27)$$

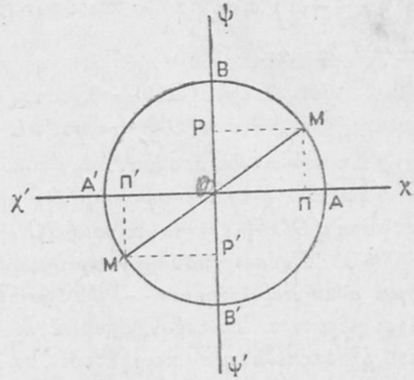
Ἄρα: *Ἐὰν δύο τόξα εἶναι συμπληρωματικά, τὸ ἡμίτονον, ἐφαπτομένη καὶ τέμνουσα ἑκατέρου ἰσοῦται ἀντιστοίχως πρὸς τὸ συνημίτονον, συνεφαπτομένην καὶ συντέμνουσαν τοῦ ἑτέρου.*

Ἀσκήσεις: 89). Νὰ κατασκευασθῇ τὸ θετικὸν καὶ μικρότερον τεταρτημορίου τόξον, ὅπερ ἔχει ἡμίτονον $\frac{2}{5}$ καὶ νὰ ὁρισθῇ εἶτα τὸ πέρας τοῦ συμπληρωματικοῦ του τόξου.

90). Ἂν τὰ τόξα (ἢ γωνίαι) Α, Β, Γ ἔχωσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 180^0, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐφ $\left(\frac{A+B}{2}\right) =$ σφ $\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$.

91). Νὰ ὁρισθῶσι τὰ πέρατα τῶν τόξων, ὧν ἕκαστον ἔχει ἡμίτονον ἴσον πρὸς τὸ συνημίτονον αὐτοῦ.

§ 60. ***Σχέσεις τῶν τριγ. ἀριθμῶν τόξων διαφερόντων κατὰ ἡμιπεριφέρειαν.*** — Ἔστω $\widehat{AM}$ (Σχ. 42) τυχὸν τόξον καὶ τ τὸ μέτρον αὐτοῦ. Τὸ πέρας τοῦ τόξου, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α καὶ μέτρον $\tau+180^0$ (ἢ $\tau+\pi$), εἶναι προφανῶς συμμετρικὸν τοῦ Α πρὸς τὸ κέντρον Ο, ἔστω δὲ Μ′ τοῦτο. Ἐὰν αἱ τελικαὶ ἀκτῖνες ΟΜ καὶ ΟΜ′ τῶν τόξων τούτων προβληθῶσιν ἐπὶ τοὺς ἀντιστοίχους πρὸς τὴν ἀρχὴν Α πρωτεύοντας ἄξονας, θὰ εἶναι:



(Σχ. 42).

$$\left.\begin{array}{l} \eta\mu(\tau+180^0)=(\overline{OP'}),\ \eta\mu\tau=(\overline{OP}) \\ \sigma\upsilon\nu(\tau+180^0)=(\overline{O\Pi'}),\ \sigma\upsilon\nu\tau=(\overline{O\Pi}) \end{array}\right\} \quad (1)$$

Ἀλλ' ἐκ τῶν ὀρθ. τριγώνων ΟΜΠ καὶ ΟΜ′Π′, ἕπεται ὅτι τὰ ἀνύσματα $\overline{\Pi M}$ $(=\overline{OP})$ καὶ $\overline{\Pi' M'}$ $(=\overline{OP'})$ εἶναι ἐφαρμόσιμα, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ $\overline{O\Pi}$ καὶ $\overline{O\Pi'}$· ἐπειδὴ δὲ τὰ ἐφαρμόσιμα ταῦτα ἀνύσματα εἶναι ἀντίρροπα, ἕπεται ὅτι (§ 5) εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα καὶ ἐπομένως $(\overline{OP'})=-(\overline{OP})$ καὶ $(\overline{O\Pi'})=-(\overline{O\Pi})$. Ἐκ τούτων δὲ καὶ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων (1) προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες:

$$\eta\mu(\tau+180^0)=-\eta\mu\tau,\quad \sigma\upsilon\nu(\tau+180^0)=-\sigma\upsilon\nu\tau, \qquad (28)$$

ἐξ ὧν ἕπονται εὐκόλως αἱ ἰσότητες:

$$\varepsilon\varphi(\tau+180^0)=\varepsilon\varphi\tau,\quad \sigma\varphi(\tau+180^0)=\sigma\varphi\tau \qquad (29)$$

$$\text{καὶ}\ \sigma\tau\varepsilon\mu(\tau+180^0)=-\sigma\tau\varepsilon\mu\tau,\quad \tau\varepsilon\mu(\tau+180^0)=-\tau\varepsilon\mu\tau. \qquad (30)$$

Ἄρα: *Ἐὰν δύο τόξα διαφέρωσι κατὰ ἡμιπεριφέρειαν, ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν αὐτὴν συνεφαπτομένην, ἀντιθέτους δὲ τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγ. ἀριθμούς.*

Ἀσκήσεις. 92). Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων 225°, 210° καὶ 240°.

93) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων —225°, —210° καὶ —240°.

§ 61. ***Σχέσεις τῶν τριγ. ἀριθμῶν τόξων διαφερόντων*** *κατὰ τεταρτημόριον περιφερείας.*— Ἔστωσαν τ καὶ $90^0+\tau$ $\left(\text{ἢ } \frac{\pi}{2}+\tau\right)$ τὰ μέτρα δύο τοιούτων τόξων. Ἐπειδὴ $(90^0+\tau)+(-\tau)=90^0$, ἕπεται (§ 59, 57) ὅτι:

$$\begin{aligned} \text{ἡμ}(90^0+\tau)&=\text{συν}(-\tau)=\text{συν}\tau \\ \text{συν}(90^0+\tau)&=\text{ἡμ}(-\tau)=-\text{ἡμ}\tau \end{aligned} \qquad (31)$$

Ἐκ τούτων δὲ προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ ἰσότητες:

$$\text{ἐφ}(90^0+\tau)=-\text{σφ}\tau,\ \text{σφ}(90^0+\tau)=-\text{ἐφ}\tau. \qquad (32)$$

$$\text{καὶ } \text{στεμ}(90^0+\tau)=\text{τεμ}\tau,\ \text{τεμ}(90^0+\tau)=-\text{στεμ}\tau \qquad (33)$$

§ 62. ***Σχέσεις τῶν τριγ. ἀριθμῶν δύο τόξων ἐχόντων ἄθροισμα μίαν περιφέρειαν.***—. Ἔστω $\overset{\frown}{\text{AM}}$ (Σχ. 40) τυχὸν τόξον, ὅπερ ἔχει μέτρον τ. Τὸ τόξον, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν ἀρχὴν A καὶ μετὰ τοῦ $\overset{\frown}{\text{AM}}$ ἀποτελεῖ μίαν περιφέρειαν, θὰ ἔχῃ μέτρον $360^0-\tau$ (ἢ $2\pi-\tau$). Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $360^0-\tau=(-\tau)+360^0$, τὸ τόξον ὅπερ ἔχει μέτρον $360^0-\tau$, περατοῦται εἰς ὃ σημεῖον καὶ τὸ τόξον, ὅπερ ἔχει μέτρον $(-\tau)$, ἤτοι εἰς τὸ M′ συμμετρικὸν τοῦ M πρὸς τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων. Διὰ τοῦτο μεταξὺ τῶν τριγ. ἀριθμῶν τῶν δύο τούτων τόξων ὑφίστανται αἱ μεταξὺ τῶν τριγ. ἀριθμῶν δύο ἀντιθέτων τόξων (§ 57) ὑπάρχουσαι σχέσεις. Ἤτοι:

$$\begin{aligned} \text{ἡμ}(360^0-\tau)&=-\text{ἡμ}\tau\,, & \text{συν}(360^0-\tau)&=\text{συν}\tau \\ \text{ἐφ}(360^0-\tau)&=-\text{ἐφ}\tau\,, & \text{σφ}(360^0-\tau)&=-\text{σφ}\tau \end{aligned} \qquad (34)$$

$$\text{καὶ } \text{τεμ}(360^0-\tau)=\text{τεμ}\tau\,, \quad \text{στεμ}(360^0-\tau)=-\text{στεμ}\tau. \qquad (35)$$

Ἄρα: *Ἐὰν δύο τόξα ἔχωσιν ἄθροισμα μίαν περιφέρειαν, ἔχουσι τὸ αὐτὸ συνημίτονον καὶ τὴν αὐτὴν τέμνουσαν, ἀντιθέτους δὲ τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγ. ἀριθμούς.*

Ἀσκήσεις. 94). Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων 315^0, 330^0 καὶ 300^0.

95) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων -315^0, -330^0 καὶ 300^0.

§ 63. ***Ἀναγωγὴ τόξου εἰς τὸ α′. τεταρτημόριον.***—Οὕτω καλεῖται ἡ ἐργασία, δι᾽ ἧς ἀνάγεται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν τριγ. ἀριθμῶν τυχόντος τόξου εἰς ὑπολογισμὸν τῶν τριγ. ἀριθμῶν τόξου θετικοῦ καὶ μικροτέρου τεταρτημορίου περιφερείας. Ἡ ἀναγωγὴ αὕτη γίνεται ὡς ἀκολούθως.

α′. Ἔστω πρῶτον τόξον θετικόν, μικρότερον περιφερείας καὶ εἰς τὸ β′. τεταρτημόριον περατούμενον, π.χ. 127^0. Τούτου τὸ παραπληρωματικὸν $180^0 - 127^0 = 53^0$ περατοῦται εἰς τὸ α'. τεταρτημόριον. Εἶναι δὲ (§ 58):

ἡμ $127^0 =$ ἡμ 53^0, συν $127^0 = -$ συν 53^0, ἐφ $127^0 = -$ ἐφ 53^0 κτλ.

β'. Ἔστω δεύτερον ἄλλο τόξον θετικόν, μικρότερον περιφερείας καὶ εἰς τὸ γ'. περατούμενον τεταρτημόριον, π.χ. τὸ τόξον 200^0. Ἀφαιροῦντες ἀπ' αὐτοῦ 180^0 εὑρίσκομεν τὸ τόξον 20^0, ὅπερ περατοῦται εἰς τὸ α' τεταρτημόριον. Εἶναι δὲ (§ 60)

ἡμ$200^0 = -$ἡμ20^0, συν$200^0 = -$συν20^0, ἐφ$200^0 =$ ἐφ20^0 κτλ.

γ'. Ἔστω ἔτι τόξον θετικόν, μικρότερον περιφερείας καὶ εἰς τὸ δ' τεταρτημόριον περατούμενον, π.χ. τὸ τόξον 310^0. Ἀφαιροῦντες αὐτὰ ἀπὸ 360^0 εὑρίσκομεν τὸ τόξον 50^0, ὅπερ περατοῦται εἰς τὸ α' τεταρτημόριον.

Εἶναι δὲ (§ 62): ἡμ $310^0 = -$ ἡμ 50^0, συν $310^0 =$ συν 50^0,
ἐφ$310^0 = -$ἐφ50^0 κτλ.

δ'. Ἐὰν τὸ τόξον εἶναι θετικὸν καὶ μεγαλύτερον περιφερείας ἀφαιροῦντες ἀπ' αὐτοῦ πάσας τὰς περιεχομένας ἀκεραίας περιφερείας εὑρίσκομεν τόξον θετικόν, μικρότερον περιφερείας καὶ τὰ αὐτὸ μετ' ἐκείνου ἔχον ὁμώνυμα ἄκρα, ἄρα καὶ τοὺς αὐτοὺς ὁμωνύμους τριγ. ἀριθμούς. Καὶ ἂν μὲν τοῦτο εἶναι μικρότερον τεταρτημορίου, ἡ ἀναγωγὴ συνετελέσθη, ἄλλως ἀναγόμεθα εἰς μίαν τῶν προηγουμένων περιπτώσεων, Οὕτω τοῦ τόξου 1275^0 ἡ ἀναγωγὴ γίνεται οὕτω. Ἐπειδὴ $1275^0 = (360^0 \times 3) + 195^0$, ἀληθεύουσιν αἱ ἰσότητες:

ἡμ$1275^0 =$ ἡμ$195^0 = -$ἡμ15^0, συν$1275^0 =$ συν$195^0 = -$συν15^0,
ἐφ$1275^0 =$ ἐφ$195^0 =$ ἐφ15^0 κτλ.

ε'. Ἐὰν τὸ τόξον εἶναι ἀρνητικὸν καὶ ἔλασσον ἀπολύτως περιφερείας, διὰ τῶν τύπων (19), (20) καὶ (21) ἀναγόμεθα εἰς μίαν τῶν τριῶν πρώτων περιπτώσεων. Οὕτως ἔχομεν ἐπὶ παραδείγματι:

ἡμ$(-132^0) = -$ἡμ$132^0 = -$ἡμ48^0, συν$(-132^0) =$ συν$132^0 = -$συν48^0
ἐφ$(-132) = -$ ἐφ$132^0 =$ ἐφ48^0 κτλ.

Ἐὰν δὲ τὸ ἀρνητικὸν τόξον ἔχῃ ἀπόλυτον τιμὴν μείζονα περιφερείας, ἡ ἐφαρμογὴ τῶν τύπων (19), (20) καὶ (21) ἀνάγει ἡμᾶς εἰς τὴν δ' περίπτωσιν. Οὕτω π.χ. εἶναι:

ἡμ$(-1543^0) = -$ἡμ$1543^0 = -$ἡμ$103^0 = -$ἡμ77^0.
συν$(-1543^0) =$ συν$1543^0 =$ συν$103^0 = -$συν77^0 κτλ.

Σημ. Ἡ τελευταία ἀναγωγὴ γίνεται καὶ ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ τὸ τόξον -1543^0 περιέχει τέσσαρας ἀρνητικὰς περιφερείας, προσθέτοντες εἰς αὐτὸ πέντε ἀκεραίας περιφερείας ἤτοι τόξον $360^0 \times 5 = 1800^0$ εὑρίσκομεν ἄθροισμα 257^0. Ἄρα εἶναι :

$$ημ(-1543^0) = ημ257^0 = -ημ77^0 \quad κτλ.$$

Ἀσκήσεις. 96) Νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸ α′ τεταρτημόριον ἕκαστον τῶν τόξων 113^0, 208^0 καὶ 325^0.

97) Νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸ α′ τεταρτημόριον ἕκαστον τῶν τόξων 1125^0, 1830^0 καὶ 780^0.

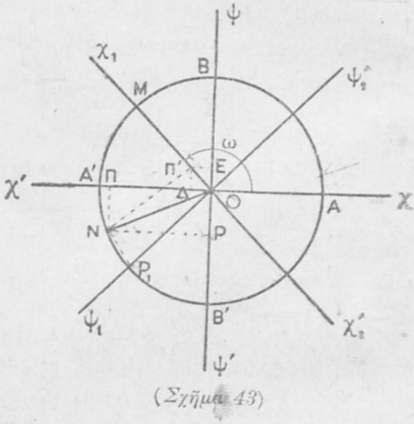
98) Νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸ α′. τεταρτημόριον ἕκαστον τῶν τόξων -111^0, -229^0 καὶ -325^0.

99) Νὰ ἀναχθῶσιν εἰς τὸ α′. τεταρτημόριον τὰ τόξα $\frac{17\pi}{4}$, $\frac{21\pi}{6}$ καὶ 850^γ.

100) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : α′) $ημ(α + 3π) = -ημα$, β′) $συν\left(α + \frac{5π}{2}\right) = -ημα$ καὶ γ′) $εφ\left(χ - \frac{7π}{2}\right) = -σφχ$.

Τριγ. ἀριθμοὶ ἀθροισμάτων τόξων (ἢ γωνιῶν).

§ 64. Α′. *Εὕρεσις τοῦ συν(α+β) καὶ τοῦ ημ(α+β).* Ἔστωσαν $\overline{AM}$ καὶ $\overline{MN}$ (Σχ. 43) δύο διαδοχικὰ τόξα ἔχοντ ἀντιστοίχως μέτρα α καὶ β καὶ ἄθροισμα ἐκ τῶν τόξων ΑΝ ἐκεῖνο, ὅπερ ἔχει μέτρον α+β (§ 21). Ἔστωσαν δὲ ἔτι δύο συστήματα πρωτευόντων ἀξόνων, ἓν μὲν (χ′χ, ψ′ψ) ἀντιστοιχοῦν εἰς ἀρχὴν τόξων τὸ Α καὶ ἕτερον ($χ_1'χ_1$, $ψ_1'ψ_1$) ἀντιστοιχοῦν εἰς ἀρχὴν τόξων τὸ Μ. Τούτων τεθέντων, ἂν Π, Ρ, $Π_1$, $Ρ_1$, εἶναι αἱ προβολαὶ τοῦ Ν ἐπὶ τοὺς εἰρημένους ἄξονας, θὰ ἀληθεύωσιν (§ 33, 36) αἱ ἰσότητες :



(Σχῆμα 43)

$συν(α + β) = (\overline{ΟΠ})$, $ημ(α + β) = (\overline{ΟΡ})$, $συνβ = (\overline{ΟΠ_1})$ καὶ $ημβ = \overline{ΟΡ_1}$).

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄνυσμα ΟΝ εἶναι συνισταμένη τῆς τεθλ. γραμμῆς $ΟΠ_1Ν$, ἕπεται (§ 13 Γ′) ὅτι :

$$(\pi\rho o\beta.\ \overline{ON}) = (\pi\rho o\beta.\ \overline{O\Pi_1}) + (\pi\rho o\beta.\ \overline{\Pi_1 N}) \qquad (\alpha)$$

οἱουδήποτε ὄντος τοῦ προβ. ἄξονος, ἀρκεῖ νὰ εἶναι ὁ αὐτὸς δι' ὅλα τὰ προβαλλόμενα ταῦτα ἀνύσματα.

Ἂν ληφθῇ ἤδη ὡς προβ. ἄξων ὁ $\chi'\chi$ καὶ παρασταθῇ διὰ τοῦ ω ἡ γωνία $\chi o \chi_1$ τῶν θετικῶν διευθύνσεων τῶν ἀξόνων $\chi'\chi$ καὶ $\chi_1'\chi_1$, διὰ τοῦ τ δὲ τὸ εἰς ταύτην ἀντιστοιχοῦν τόξον, εὑρίσκομεν (§ 51, 12 Β', 61, 49) ὅτι:

$(\pi\rho o\beta.\ \overline{ON}) = (\overline{O\Pi}) = \sigma\upsilon\nu\,(\alpha + \beta)$

$(\pi\rho o\beta.\ \overline{O\Pi_1}) = (\overline{O\Pi_1}).\ \sigma\upsilon\nu\ \omega = \sigma\upsilon\nu\ \beta.\ \sigma\upsilon\nu\ \tau$

$(\pi\rho o\beta.\overline{\Pi_1 N}) = (\pi\rho o\beta.\overline{OP_1}) = (\overline{OP_1})\sigma\upsilon\nu(\omega + 90^0) = -\,\eta\mu\beta.\eta\mu\omega = -\,\eta\mu\beta\ \eta\mu\tau$

Ἡ ἰσότης (α) γίνεται λοιπόν:

$$\sigma\upsilon\nu\,(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\beta\ \sigma\upsilon\nu\tau - \eta\mu\beta.\ \eta\mu\tau. \qquad (\beta)$$

Ἂν δὲ ληφθῇ ὡς προβ. ἄξων ὁ $\psi'\psi$ καὶ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ γωνία $\psi o \psi_1$ τῶν θετικῶν διευθύνσεων τῶν ἀξόνων $\psi'\psi$ καὶ $\psi_1'\psi_1$ εἶναι ἴση τῇ ω, εὑρίσκομεν (§ 51, 12Β, 57, 59) ὅτι:

$(\pi\rho o\beta.\ \overline{ON}) = (\overline{OP}) = \eta\mu\,(\alpha + \beta)$

$(\pi\rho o\beta.\ \overline{O\Pi_1}) = (\overline{O\Pi_1})\ \sigma\upsilon\nu\,(\omega - 90^0) = \sigma\upsilon\nu\ \beta\ \eta\mu\ \omega = \sigma\upsilon\nu\,\beta\ \eta\mu\ \tau$

$(\pi\rho o\beta.\ \overline{\Pi_1 N}) = (\pi\rho o\beta.\ OP_1) = (\overline{OP_1})\,\sigma\upsilon\nu\omega = \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\omega = \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\tau.$

Ἕνεκα δὲ τούτων ἡ ἰσότης (α) γίνεται:

$$\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\tau.\ \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\tau.\ \eta\mu\beta. \qquad (\gamma)$$

Ἀλλὰ τὰ τόξα τ καὶ α ἔχοντα τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα ἔχουσι καὶ τοὺς αὐτοὺς ὁμωνύμους τριγ. ἀριθμούς, εἶναι λοιπὸν

$$\eta\mu\tau = \eta\mu\alpha,\quad \sigma\upsilon\nu\tau = \sigma\upsilon\nu\alpha.$$

Αἱ ἰσότητες ἄρα (β) καὶ (γ) γίνονται:

$$\left.\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) &= \sigma\upsilon\nu\alpha.\ \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha.\ \eta\mu\beta \\ \eta\mu(\alpha+\beta) &= \eta\mu\alpha.\ \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\ \eta\mu\beta \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Οἱ τύποι οὗτοι παρέχουσι τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τοῦ ἀθροίσματος δύο τόξων συναρτήσει τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου τῶν τόξων τούτων.

§ 65. *Β'—. Εὕρεσις τοῦ συν(α—β) καὶ ἡμ (α—β).*—. Ἐφαρμόζοντες τοὺς τύπους (36) εἰς τὰ τόξα, ὧν μέτρα α καὶ (—β) καὶ ἔχοντες πρὸ ὀφθαλμῶν τοὺς τύπους (19) εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

$$\left.\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) &= \sigma\upsilon\nu\alpha.\ \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha.\ \eta\mu\beta \\ \eta\mu(\alpha-\beta) &= \eta\mu\alpha.\ \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\ \eta\mu\beta \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Οἱ τύποι οὗτοι παρέχουσι συναρτήσει τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου δύο τόξων, ὧν μέτρα α καὶ β, τὸ συνημίτονον καὶ ἡμίτονον τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

Ἀσκήσεις. 101). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ἑκατέρου τῶν τόξων 75^0 καὶ 15^0.

102) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $συν(α+β).\ συν(α-β)=συν^2α-ἡμ^2β$.

103) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $ἡμ(α+β).\ ἡμ(α-β)=ἡμ^2α-ἡμ^2β$.

104) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\dfrac{2ἡμ(α+β)}{συν(α+β)+συν(α-β)}=ἐφα+ἐφβ$.

105) Ἂν $α+β+γ=180^0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$συν^2α+συν^2β+συν^2γ+2συνα\ συνβ\ συνγ=1$$

106) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἡμίτονον τοῦ ἀθροίσματος δύο τόξων θετικῶν καὶ μικροτέρων 90^0 εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἡμιτόνων αὐτῶν.

107) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις

$$συν^2χ+συν^2(120^0+χ)+συν^2(120^0-χ)$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ τόξου χ.

§ 66. *Γ'*.—. ***Εὕρεσις τῆς*** $ἐφ(α+β)$ ***καὶ*** $ἐφ(α-β)$.—. Διαιροῦντες τὰ μέλη τῆς β' τῶν ἰσοτήτων (36) διὰ τῶν ἀντιστοίχων μελῶν τῆς α' εὑρίσκομεν ὅτι: $ἐφ(α+β)=\dfrac{ἡμασυνβ+συναἡμβ}{συνασυνβ-ἡμαἡμβ}$. Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ β' μέλους ταύτης διὰ συνα. συνβ, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$ἐφ(α+β)=\frac{ἐφα+ἐφβ}{1-ἐφαἐφβ} \qquad (38)$$

Ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τοῦτον εἰς τὰ τόξα α καὶ (—β) καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν (§ 57, ἰσ. 20) ὅτι: $ἐφ(-β)=-ἐφβ$, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$ἐφ(α-β)=\frac{ἐφα-ἐφβ}{1+ἐφαἐφβ} \qquad (39)$$

Ἀσκήσεις. 108) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη ἑκατέρου τῶν τόξων 75^0 καὶ 15^0.

109) Ἂν $α+β+γ=180^0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

α') $ἐφα+ἐφβ+ἐφγ=ἐφα.\ ἐφβ.\ ἐφγ$,

β') $σφα.\ σφβ+σφα.\ σφγ+σφβ.\ σφγ=1$.

110) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $ἐφ(45^0-α)=\dfrac{συνα-ἡμα}{συνα+ἡμα}$.

111) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ τόξα περιεχόμενα μεταξὺ 0^0 καὶ 90^0 ἀληθεύει ἡ ἰσότης: $τόξ.\ ἐφ.\ \dfrac{1}{2}+τόξ\ ἐφ\ \dfrac{1}{3}=45^0$.

112) Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις, ἥτις συνδέει τὰς ἐφαπτομένας τῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου.

113) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\text{εφ}(\alpha-\beta)+\text{εφ}(\beta-\gamma)+\text{εφ}(\gamma-\alpha)=\text{εφ}(\alpha-\beta)\,\text{εφ}(\beta-\gamma)\,\text{εφ}(\gamma-\alpha).$$

114) Ἂν $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

α′) $\text{εφα. εφβ} + \text{εφα. εφγ} + \text{εφβ εφγ} = 1$,

β′) $\text{σφα. σφβ. σφγ} = \text{σφα} + \text{σφβ} + \text{σφγ}$.

§ 67. ***Δ′.— Ἡμίτονον, συνημίτονον καὶ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου*** $(\alpha+\beta+\gamma)$.—Παρατηροῦντες ὅτι $\alpha+\beta+\gamma=(\alpha+\beta)+\gamma$ καὶ ἐφαρμόζοντες τοὺς τύπους (36) εὑρίσκομεν διαδοχικῶς ὅτι :

$$\begin{aligned}\text{συν}(\alpha+\beta+\gamma) &= \text{συν}[(\alpha+\beta)+\gamma] = \text{συν}(\alpha+\beta)\,\text{συνγ}-\text{ημ}(\alpha+\beta)\,\text{ημ.γ}\\ &=(\text{συνα.συνβ}-\text{ημα.ημβ})\,\text{συνγ}-(\text{ημα.συνβ}+\text{συνα.ημβ})\,\text{ημγ}\end{aligned}$$

ἢ

$$\begin{aligned}\text{συν}(\alpha+\beta+\gamma)=\ &\text{συνα συνβ συνγ}-\text{ημα ημβ συνγ}-\text{ημα ημγ συνβ}-\\ &-\text{ημβ ημγ συνα.}\end{aligned}\qquad(40)$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\begin{aligned}\text{ημ}(\alpha+\beta+\gamma)=\ &\text{ημα συνβ συνγ}+\text{ημβ συνα συνγ}+\text{ημγ συνα συνβ}\\ &-\text{ημα ημβ ημγ.}\end{aligned}\qquad(41)$$

Ἐν δὲ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (38) εἰς τὰ τόξα $(\alpha+\beta)$ καὶ γ εὑρίσκομεν ὅτι : $\text{εφ}(\alpha+\beta+\gamma)=\text{εφ}[(\alpha+\beta)+\gamma]=$

$$=\frac{\text{εφ}(\alpha+\beta)+\text{εφγ}}{1-\text{εφ}(\alpha+\beta)\text{εφγ}}=\frac{\dfrac{\text{εφα}+\text{εφβ}}{1-\text{εφα.εφβ}}+\text{εφγ}}{1-\dfrac{\text{εφα}+\text{εφβ}}{1-\text{εφα εφβ}}.\text{εφγ}},\quad \text{ὅθεν}$$

$$\text{εφ}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\text{εφα}+\text{εφβ}+\text{εφγ}-\text{εφα εφβ.εφγ}}{1-\text{εφα.εφβ}-\text{εφα εφγ}-\text{εφβ.εφγ}}\qquad(42)$$

Ἀσκήσεις. 115) Εὑρεῖν τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τοῦ τόξου $(\alpha+\beta-\gamma)$ συναρτήσει τῶν αὐτῶν τριγ. ἀριθμῶν τῶν τόξων α, β, γ.

116) Εὑρεῖν τὴν ἐφαπτομένην τοῦ τόξου $(\alpha-\beta+\gamma)$ συναρτήσει τῶν ἐφαπτομένων τῶν τόξων α, β, γ.

117) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\text{σφ}(\alpha+\beta+\gamma)=$

$$=\frac{\text{σφα. σφβ. σφγ}-\text{σφα}-\text{σφβ}-\text{σφγ}}{\text{σφα. σφβ}+\text{σφα. σφγ}+\text{σφβ. σφγ}-1}.$$

Τριγ. ἀριθμοὶ πολλαπλασίων τόξου.

§ 68. ***Α′.—. Εὕρεσις τοῦ συν2α.***—. Ἐὰν ἐν τῇ α′ τῶν ἰσοτήτων (36) τεθῇ α ἀντὶ β, προκύπτει ἡ ἰσότης

$$\text{συν}2\alpha=\text{συν}^2\alpha-\text{ημ}^2\alpha,\qquad(43)$$

δι' ἧς ὁρίζεται τὸ συνημίτονον τοῦ διπλασίου τοῦ τόξου α συναρτήσει τοῦ συνημιτόνου καὶ ἡμιτόνου τοῦ α.

Ἐὰν δὲ ἐν ταύτῃ ἀντὶ $ημ^2α$ τεθῇ $1-συν^2α$, προκύπτει ἡ ἰσότης

$$συν2α = 2συν^2α - 1, \qquad (44)$$

δι' ἧς ὁρίζεται τὸ συν2α συναρτήσει τοῦ συνα.

§ 69. Β'.—. *Εὕρεσις τοῦ ἡμ2α.*—. Ἐὰν ἐν τῇ β' τῶν ἰσοτήτων (36) τεθῇ α ἀντὶ β, προκύπτει ἡ ἰσότης

$$ἡμ2α = 2\,ἡμα\,συνα, \qquad (45)$$

δι' ἧς ὁρίζεται τὸ ἡμ2α συναρτήσει τοῦ ἡμα καὶ συνα.

Ἐὰν δὲ ἐν αὐτῇ ἀντὶ συνα τεθῇ $\pm\sqrt{1-ἡμ^2α}$, προκύπτει ὅτι:

$$ἡμ2α = \pm 2\,ἡμα\sqrt{1-ἡμ^2α} \qquad (46)$$

ὅθεν ὁρίζεται τὸ ἡμ2α συναρτήσει τοῦ ἡμα, ἂν ἔτι ὁρισθῇ καὶ τὸ τεταρτημόριον, εἰς ὃ περατοῦται τὸ τόξον 2α.

Τὸ διπλοῦν σημεῖον τοῦ β' μέλους τοῦ τύπου (46) ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς. Ἡμίτονον ἴσον πρὸς τὸ τοῦ τόξου α ἔχουσιν ἄπειρα τόξα· ἔστω ἓν τούτων, διάφορον τοῦ α, τὸ τ. Ὡς γνωστὸν (§ 52 Γ') θὰ εἶναι $α = (2Κ+1)π - τ$ ἢ $α = 2Κπ + τ$, ἄρα

$2α = 2(2Κ+1)π - 2τ = 2λπ - 2τ$ ἢ $2α = 2.2Κπ + 2τ = 2λ'π + 2τ$.

Καὶ ἂν μὲν τόξον 2α παρέχηται ὑπὸ τοῦ α' τῶν τύπων τούτων, θὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ πέρας μετὰ τοῦ τόξου $(-2τ)$, ἂν δὲ ὑπὸ τοῦ β', θὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τόξον 2τ πέρας, ὅπερ εἶνε συμμετρικὸν τοῦ προηγουμένου πέρατος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὸ ἡμίτονον τόξου 2α παρεχομένου ὑπὸ τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν τύπων τούτων εἶναι ἀντίθετον τοῦ ἡμιτόνου τόξου 2α παρεχομένου ὑπὸ τοῦ ἑτέρου.

§ 70. Γ'.—. *Εὕρεσις τῆς ἐφ2α.*—. Ἐὰν τῇ ἰσότητι (38) τεθῇ α ἀντὶ β, προκύπτει ἡ ἰσότης:

$$ἐφ2α = \frac{2\,ἐφα}{1-ἐφ^2α} \qquad (47)$$

Παρατήρησις.—. Ἐὰν τεθῇ $2α = ω$, ὅτε καὶ $α = \frac{ω}{2}$, αἱ ἰσότητες (43), (45), (47) γίνονται:

$$\left.\begin{aligned} συνω &= συν^2\left(\frac{ω}{2}\right) - ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right) \\ ἡμω &= 2\,ἡμ\left(\frac{ω}{2}\right)\,συν\left(\frac{ω}{2}\right) \\ ἐφω &= \frac{2\,ἐφ\left(\frac{ω}{2}\right)}{1-ἐφ^2\left(\frac{ω}{2}\right)} \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

αἱ δὲ ἰσότητες (44) καὶ (46) γίνονται:

$$\left.\begin{aligned} συνω &= 2συν^2\frac{ω}{2} - 1 \\ ἡμω &= \pm 2ἡμ\frac{ω}{2}\sqrt{1 - ἡμ^2\frac{ω}{2}} \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

§ 71. Δ΄.— ***Εὕρεσις τοῦ συνω καὶ ἡμω συναρτήσει τῆς ἐφ*** $\frac{ω}{2}$.—

Ἡ α΄ τῶν ἰσοτήτων (48) λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι:

$συν^2\left(\frac{ω}{2}\right) + ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right) = 1$ δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω:

$συνω = \dfrac{συν^2\left(\frac{ω}{2}\right) - ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right)}{συν^2\left(\frac{ω}{2}\right) + ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right)}$. Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους

τοὺς ὅρους τοῦ 6΄ μέλους διὰ $συν^2\left(\frac{ω}{2}\right)$, εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα:

$$συνω = \frac{1 - ἐφ^2\left(\frac{ω}{2}\right)}{1 + ἐφ^2\left(\frac{ω}{2}\right)}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$ἡμω = \frac{2\,ἐφ\left(\frac{ω}{2}\right)}{1 + ἐφ^2\left(\frac{ω}{2}\right)} \quad (50)$$

Οἱ τύποι (50) καὶ ὁ γ΄ τῶν τύπων (48) παρέχουσι τὸ ἡμω, συνω, ἐφω συναρτήσει τῆς ἐφ $\frac{ω}{2}$.

Ἀσκήσεις. 118) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $1 + ἐφα.\,ἐφ2α = \dfrac{1}{συν2α}$.

119) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $ἐφ(45^0 + α) - ἐφ(45^0 - α) = 2ἐφ2α$.

120) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $ἐφ^2\left(\dfrac{π}{4} - α\right) = \dfrac{1 - ἡμ2α}{1 + ἡμ2α}$.

121) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

α΄.) $σφ2α = \dfrac{σφ^2α - 1}{2σφα}$, β΄.) $σφα - ἐφα = 2σφ2α$

122) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $ἡμ2α = \dfrac{2}{ἐφα + σφα}$.

123) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $ἡμ2α = \dfrac{1 - ἐφ^2\left(\frac{π}{4} - α\right)}{1 + ἐφ^2\left(\frac{π}{4} - α\right)}$

124) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $3 - 4\,συν\,2χ + συν\,4χ$.

125) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $τεμ2α = \dfrac{τεμ^2α}{2 - τεμ^2α}$.

§ 72. Ε'.—. ***Εὕρεσις τοῦ συν3α, ἡμ3α καὶ ἐφ3α.***— Ἐὰν εἰς ἑκάστην τῶν ἰσοτήτων (40), (41), (42) τεθῇ α ἀντὶ 6 καὶ γ, προκύπτουσι διὰ καταλλήλων καὶ εὐνοήτων μετασχηματισμῶν αἱ ἰσότητες :

$$συν3α = 4συν^3α - 3συνα,\quad ἡμ3α = 3ἡμα - 4ἡμ^3α,$$
$$ἐφ3α = \frac{3ἐφα - ἐφ^3α}{1 - 3\,ἐφ^2α}, \tag{51}$$

δι' ὧν ὁρίζεται τὸ συνημίτονον, ἡμίτονον καὶ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου 3α συναρτήσει τῶν ὁμωνύμων τριγ. ἀριθμῶν τοῦ τόξου α.

Ἀσκήσεις: 126). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $σφ3α = \dfrac{σφ^3α - 3σφα}{3σφ^2α - 1}$.

127) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\dfrac{ἐφ^2 2α - ἐφ^2α}{1 - ἐφ^2 2α . ἐφ^2α} = ἐφ3α.\ ἐφα$.

128) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι $ἐφα = 2$, εὑρεῖν τὸ ἡμ4α καὶ συν4α.

129) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $τεμ3α = \dfrac{τεμ^3α}{4 - 3τεμ^2α}$.

130) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $στεμ3α = \dfrac{στεμ^3α}{3στεμ^2α - 4}$.

131) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : α') $συν(να) = συνα.συν(ν-1)α - ἡμα ἡμ(ν-1)α$

β') $ἡμ(να) = ἡμα.συν(ν-1)α + συνα.ἡμ(ν-1)α$

γ') $ἐφ(να) = \dfrac{ἐφα + ἐφ(ν-1)α}{1 - ἐφα\ ἐφ(ν-1)α}$

δ') $συν(2να) = συν^2(να) - ἡμ^2(να)$

ε') $ἡμ(2να) = 2ἡμ(να).\ συν(να)$, στ') $ἐφ(2να) = \dfrac{2ἐφ(να)}{1 - ἐφ^2(να)}$, ἂν ν εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

Τριγ. ἀριθμοὶ τοῦ ἡμίσεως τόξου τινός.

§ 73. Α'.—. ***Εὕρεσις τοῦ συν $\frac{ω}{2}$ καὶ ἡμ $\frac{ω}{2}$ συναρτήσει τοῦ συνω.***— Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς γνωστὰς (1,48) ἰσότητας:

$συν^2\left(\dfrac{ω}{2}\right) + ἡμ^2\left(\dfrac{ω}{2}\right) = 1$, $συν^2\left(\dfrac{ω}{2}\right) - ἡμ^2\left(\dfrac{ω}{2}\right) =$ συνω εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα $2συν^2\left(\frac{ω}{2}\right)=1+συνω$, ἐξ ἧς

$$συν^2\left(\frac{ω}{2}\right)=\frac{1+συνω}{2}, \text{ ἄρα}$$

$$συν\left(\frac{ω}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+συνω}{2}} \qquad (52)$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν μελῶν τῆς α΄. τῶν αὐτῶν ἰσοτήτων ἀφαιρέσωμεν τὰ ἀντίστοιχα μέλη τῆς β', εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα

$$2ἡμ^2\frac{ω}{2}=1-συνω, \text{ ἐξ ἧς } ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right)=\frac{1-συνω}{2}, \quad \text{ἄρα}$$

$$ἡμ\left(\frac{ω}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-συνω}{2}} \qquad (53)$$

Ἕνεκα τῆς παρουσίας τοῦ διπλοῦ σημείου οἱ τύποι (52) καὶ (53) δὲν ὁρίζουσι τελείως τὸ συν $\frac{ω}{2}$ καὶ ἡμ $\frac{ω}{2}$ ἐκ μόνου τοῦ συνω· ἀπαιτεῖται πλὴν τούτων νὰ εἶναι γνωστὸν καὶ τὸ τόξον ω, ἢ τοὐλάχιστον τὸ τεταρτημόριον, εἰς ὃ καταλήγει τὸ $\frac{ω}{2}$.

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα τῶν τιμῶν τοῦ συν $\frac{ω}{2}$ εἶναι ἀνεξάρτητα τῶν σημείων τῶν τιμῶν τοῦ ἡμ $\frac{ω}{2}$, ἕπεται ὅτι ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἑνὸς τῶν τριγ. τούτων ἀριθμῶν δύναται νὰ συνδυασθῇ πρὸς ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἄλλου. Οὕτως ἔχομεν τὰς ἀκολούθους 4 λύσεις.

α΄. $συν\frac{ω}{2}=\sqrt{\frac{1+συνω}{2}}$, $ἡμ\frac{ω}{2}=\sqrt{\frac{1-συνω}{2}}$

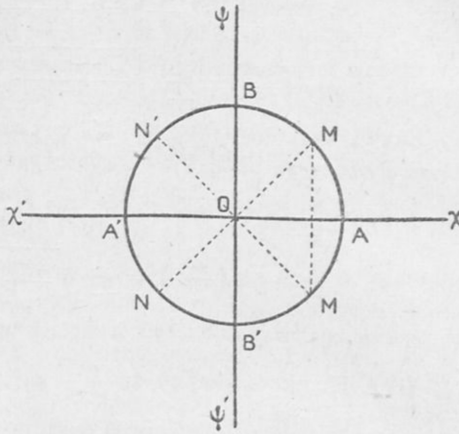
β΄. $συν\frac{ω}{2}=\sqrt{\frac{1+συνω}{2}}$, $ἡμ\frac{ω}{2}=-\sqrt{\frac{1-συνω}{2}}$

γ΄. $συν\frac{ω}{2}=-\sqrt{\frac{1+συνω}{2}}$, $ἡμ\frac{ω}{2}=\sqrt{\frac{1-συνω}{2}}$

δ΄. $συν\frac{ω}{2}=-\sqrt{\frac{1+συνω}{2}}$, $ἡμ\frac{ω}{2}=-\sqrt{\frac{1-συνω}{2}}$

Ἐξηγεῖται δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος τῶν λύσεων ὡς ἑξῆς. Ἐὰν τ εἶναι τὸ μέτρον τυχόντος τόξου, ὅπερ ἔχει συνημίτονον ἴσον πρὸς τὸ δεδομένον συνω, θὰ εἶνε $\omega = 2K\pi \pm \tau$ (§ 52 Α΄), ὅθεν $\frac{\omega}{2} = K\pi \pm \frac{\tau}{2}$.

Ἐὰν τὸ τόξον $\frac{\tau}{2}$ λήγῃ εἴς τι σημεῖον Μ (Σχ. 44) τῆς περιφερείας, τὸ $\frac{\omega}{2} = K\pi + \frac{\tau}{2}$ θὰ λήγῃ ἢ εἰς τὸ Μ ἢ εἰς τὸ Ν ὅπερ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς τὸ κέντρον. Ἐπειδὴ δὲ τὸ $\left(-\frac{\tau}{2}\right)$ λήγει εἰς τὸ Μ΄, ὅπερ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς τὸν ἄξονα χ΄χ, τὸ $\frac{\omega}{2} = K\pi - \frac{\tau}{2}$



(Σχ. 44)

θὰ λήγῃ ἢ εἰς τὸ Μ΄ ἢ εἰς τὸ Ν΄, συμμετρικὸν τοῦ Μ΄ πρὸς τὸ κέντρον. Τὰ εἰς τὸ δεδομένον λοιπὸν συνω ἀντιστοιχοῦντα τόξα $\frac{\omega}{2}$ λήγουσιν ἄλλα μὲν εἰς τὸ Μ, ἄλλα εἰς τὸ Μ΄, ἄλλα εἰς τὸ Ν΄ καὶ ἄλλα εἰς τὸ Ν· ἕκαστον δὲ τούτων ἔχει ἡμίτονον καὶ συνημίτονον, ἅτινα ἀντιστοιχοῦσι κατὰ σειρὰν εἰς τὰς προηγουμένας λύσεις.

§ 74. Β΄—. ***Εὕρεσις τῆς ἐφ $\frac{\omega}{2}$ συναρτήσει τοῦ συνω.***—

Προηγουμένως (§ 73) εὕρωμεν ὅτι : $2\,\text{ἡμ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1 - \text{συν}\omega$ καὶ $2\,\text{συν}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1 + \text{συν}\omega$. Διαιροῦντες ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι :

$$\text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \text{συν}\omega}{1 + \text{συν}\omega}} \qquad (54)$$

Ἡ ἰσότης αὕτη ἕνεκα τῆς παρουσίας τοῦ διπλοῦ σημείου δὲν ὁρίζει τελείως τὴν ἐφ $\left(\frac{\omega}{2}\right)$ ἐκ τοῦ συνω· ἀπαιτεῖται πρὸς τοῦτο νὰ δοθῇ ἔτι καὶ τὸ τόξον ω ἢ τὸ τεταρτημόριον, εἰς ὃ λήγει τὸ $\frac{\omega}{2}$.

Τὴν παρουσίαν τοῦ διπλοῦ σημείου ἐξηγοῦμεν εὐκόλως, ἂν ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅσα προηγουμένως (§ 73) εἴπωμεν περὶ τῶν σημείων εἰς ἃ δύναται νὰ καταλήγῃ τὸ τόξον $\frac{\omega}{2}$.

Ἀσκήσεις. 132) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ τοῦ τόξου 15^0.

133) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ τοῦ τόξου $22^0\ 30'$.

134) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ τοῦ τόξου $7^0\ 30'$.

135) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ τόξου $\frac{\omega}{2}$, ὅπερ λήγει εἰς τὸ α' τεταρτημόριον, ἂν συνω$=\frac{2}{3}$.

136) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\text{τεμ}\,\frac{\omega}{2}=\pm\sqrt{\frac{2\,\text{τεμ}\omega}{1+\text{τεμ}\omega}}$.

§ 75. ***Γ'.—. Εὕρεσις τοῦ ἡμ $\frac{\omega}{2}$ καὶ συν $\frac{\omega}{2}$ συναρτήσει τοῦ ἡμω.—.*** Ἐκ τῶν γνωστῶν ἰσοτήτων $\text{ἡμ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+\text{συν}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)=1$ καὶ $2\,\text{ἡμ}\left(\frac{\omega}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{\omega}{2}\right)=\text{ἡμ}\omega$ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα $\left(\text{ἡμ}\frac{\omega}{2}+\text{συν}\frac{\omega}{2}\right)^2=1+\text{ἡμ}\omega$, ὅθεν δι' ἐξαγωγῆς τῆς τετρ. ῥίζης ἀμφοτέρων τῶν μελῶν προκύπτει ὅτι:

$$\text{ἡμ}\left(\frac{\omega}{2}\right)+\text{συν}\left(\frac{\omega}{2}\right)=\pm\sqrt{1+\text{ἡμ}\omega} \qquad (\alpha)$$

Δι' ἀφαιρέσεως δὲ κατὰ μέλη τῶν αὐτῶν ἰσοτήτων καὶ ἐξαγωγῆς εἶτα τῆς τετρ. ῥίζης εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα

$$\text{ἡμ}\left(\frac{\omega}{2}\right)-\text{συν}\left(\frac{\omega}{2}\right)=\pm\sqrt{1-\text{ἡμ}\omega} \qquad (\beta)$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ πρὸ τῶν ῥιζικῶν τῶν ἰσοτήτων (α) καὶ (β) σημεῖα εἶναι ἀνεξάρτητα ἀλλήλων, δύναται ἑκάτερον σημεῖον τῆς μιᾶς τούτων νὰ συνδυασθῇ πρὸς ἑκάτερον τῆς ἄλλης. Οὕτω προκύπτουσι τὰ ἀκόλουθα τέσσαρα συστήματα.

$$\alpha')\quad \begin{cases} \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{1+\eta\mu\omega} \\ \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{1-\eta\mu\omega} \end{cases}$$

$$\beta')\quad \begin{cases} \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{1+\eta\mu\omega} \\ \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)=-\sqrt{1-\eta\mu\omega} \end{cases}$$

$$\gamma')\quad \begin{cases} \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)=-\sqrt{1+\eta\mu\omega} \\ \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{1-\eta\mu\omega} \end{cases}$$

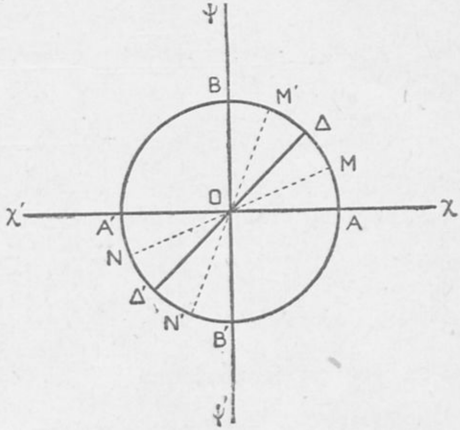
$$\delta')\quad \begin{cases} \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)=-\sqrt{1+\eta\mu\omega} \\ \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)=-\sqrt{1-\eta\mu\omega} \end{cases}$$

Λύοντες τὰ συστήματα ταῦτα εὑρίσκομεν 4 λύσεις, ἃς συνοψίζομεν εἰς τὰς κάτωθι ἰσότητας:

$$\begin{aligned} \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)&=\frac{1}{2}\left[\varepsilon\sqrt{1+\eta\mu\omega}+\varepsilon'\sqrt{1-\eta\mu\omega}\right] \\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)&=\frac{1}{2}\left[\varepsilon\sqrt{1+\eta\mu\omega}-\varepsilon'\sqrt{1-\eta\mu\omega}\right], \end{aligned} \qquad (55)$$

ἐν αἷς οἱ ἀριθμοὶ ε καὶ ε′ ἔχουσιν τὰς ἀκολούθους τιμὰς α′) $\varepsilon=1$, $\varepsilon'=1$, β′) $\varepsilon=1$, $\varepsilon'=-1$, γ′) $\varepsilon=-1$ $\varepsilon'=1$ καὶ δ′) $\varepsilon=-1$, $\varepsilon'=-1$.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν λύσεων ἐξηγεῖται ὡς ἀκολούθως. Ἔστω τ ἕτερον τόξον ἔχον ἡμίτονον ἴσον πρὸς τὸ δεδομένον ἡμω· ὡς γνωστὸν (§ 52, Γ′) θὰ εἶναι $\omega=2K\pi+\tau$ ἢ $\omega=(2K+1)\pi-\tau$, ἄρα $\frac{\omega}{2}=K\pi+\frac{\tau}{2}$ ἢ $\frac{\omega}{2}=K\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\tau}{2}\right)$. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι τὸ τόξον $\frac{\tau}{2}$ περατοῦται εἴς τι σημεῖον Μ τῆς περιφερείας (Σχ. 45), τὸ $\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\tau}{2}\right)$ θὰ περατοῦται εἰς τὸ Μ′ συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς τὴν ΔΟΔ′, ἥτις διχοτομεῖ τὴν γωνίαν $\widehat{AOB}$. Τὸ τόξον ὅθεν, $\frac{\omega}{2}$, ἐὰν μὲν παρέχηται ὑπὸ τοῦ τύπου $\frac{\omega}{2} = K\pi + \frac{\tau}{2}$, θὰ περατοῦται εἰς τὸ Μ ἢ εἰς τὸ Ν συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς τὸ κέντρον· ἐὰν δὲ παρέχηται ὑπὸ τοῦ τύπου $\frac{\omega}{2} = K\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\tau}{2}\right)$, θὰ περατοῦται εἰς τὸ Μ′ ἢ τὸ Ν′ (Σχ. 45). Ὥστε εἰς τὸ δεδομένον ἡμω ἀντιστοιχοῦσι τόξα $\frac{\omega}{2}$ περατούμενα εἰς 4 σημεῖα, εἰς ἕκαστον δὲ τούτων ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένον σύστημα τιμῶν ἡμ $\frac{\omega}{2}$ καὶ συν $\frac{\omega}{2}$.



(Σχ. 45)

Ἐκ τῶν προειρημένων καθίσταται ἔτι φανερὸν ὅτι τὸ ἡμω δὲν ἀρκεῖ νὰ ὁρίσῃ τελείως τὸ ἡμ $\frac{\omega}{2}$ καὶ συν $\frac{\omega}{2}$. Πρὸς τοῦτο ἀπαιτεῖται πλὴν τοῦ ἡμω νὰ ὁρισθῇ καὶ αὐτὸ τὸ τόξον ω. Ἔστω π. χ. ὅτι $\omega = 1110^0$, ὅτε ἡμω $= \frac{1}{2}$ (§ 63). Ἐπειδὴ τὸ τόξον $\frac{\omega}{2} = 555^0 = 360^0 + 195^0$ περατοῦται εἰς τὸ γ′ τεταρτημόριον καὶ μεταξὺ Α′ καὶ Δ′ (Σχ. 45) ἕπεται ὅτι : α′) ἡμ $\frac{\omega}{2}$ καὶ συν $\frac{\omega}{2}$ εἶναι ἀμφότερα ἀρνητικὰ καὶ κατ' ἀκολουθίαν καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἀρνητικόν, β′) τὸ συν $\frac{\omega}{2}$ εἶναι ἀπολύτως μεῖζον τοῦ ἡμ $\frac{\omega}{2}$ καὶ ἑπομένως ἡ διαφορὰ ἡμ 555^0— συν 555^0 εἶναι θετική. Ἁρμόζει λοιπὸν τὸ γ′ σύστημα, ἤτοι :

$$ἡμ\,555^0 + συν\,555^0 = -\sqrt{1+\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$ἡμ\,555^0 - συν\,555^0 = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}},\quad \text{ὅθεν}$$

$$ἡμ\,555^0 = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{2}}{4} \quad \text{καὶ}$$

$$συν\,555^0 = -\frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{4}.$$

Ἀσκήσεις. 137) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡμ 750^0=ἡμ $30^0=\frac{1}{2}$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ 375^0 καὶ τὸ συν 375^0.

138) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡμ 1200^0=ἡμ $120^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ 600^0 καὶ τὸ συν 600^0.

139) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡμ $225^0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου $112^0\ 30'$.

§ 76 *Δ'.—. Εὕρεσις τῆς ἐφ $\frac{\omega}{2}$ συναρτήσει τοῦ ἡμω.—.* Ἐὰν τὰς ἰσότητας (55) διαιρέσωμεν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$ἐφ\,\frac{\omega}{2} = \frac{ε\sqrt{1+ἡμω}+ε'\sqrt{1-ἡμω}}{ε\sqrt{1+ἡμω}-ε'\sqrt{1-ἡμω}}$$

Ἐὰν δὲ ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ β' μέλους πολ/σωμεν ἐπὶ ε καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι $ε^2=+1$, εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα

$$ἐφ\,\frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{1+ἡμω}+εε'\sqrt{1-ἡμω}}{\sqrt{1+ἡμω}-εε'\sqrt{1-ἡμω}} \qquad (56)$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης καθίσταται φανερὸν ὅτι εἰς δεδομένην τινὰ τιμὴν τοῦ ἡμω ἀντιστοιχοῦσαν αἱ ἀκόλουθοι δύο ἀντίστροφοι

τιμαὶ $\frac{\sqrt{1+ἡμω}+\sqrt{1-ἡμω}}{\sqrt{1+ἡμω}-\sqrt{1-ἡμω}}, \frac{\sqrt{1+ἡμω}-\sqrt{1-ἡμω}}{\sqrt{+1ἡμω}+\sqrt{1-ἡμω}}$ τῆς ἐφ $\frac{\omega}{2}$,

καθ' ὅσον ε καὶ ε' εἶναι ὁμόσημοι ἢ ἑτερόσημοι.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅσα προηγουμένως (§ 75) εἴπομεν περὶ τῶν σημείων, εἰς ἃ δύναται νὰ περατοῦται τόξον τι $\frac{\omega}{2}$ ἀντιστοιχοῦν εἰς δεδομένον ἡμω, κατανοοῦμεν εὐκόλως τὴν αἰτίαν τῆς ὑπάρξεως δύο λύσεων. Ἵνα δὲ καθορισθῇ τελείως ἡ τιμὴ τῆς ἐφ $\frac{\omega}{2}$, πρέπει πλὴν τοῦ ἡμω νὰ ὁρισθῇ καὶ τὸ τόξον ω. Οὕτως εἰς ἡμω $=\frac{1}{2}$ καὶ $\omega=1110^0$ ἀντιστοιχεῖ τιμὴ τῆς ἐφ $\frac{\omega}{2}$ θετικὴ καὶ μικροτέρα τῆς μονάδος, καθ' ὅσον τὸ $\frac{\omega}{2}=555^0$ περατοῦται εἰς τὸ γ′ τεταρτημόριον καὶ μεταξὺ Α′ καὶ Δ′ (Σχ. 45). Δέον λοιπὸν νὰ λάβωμεν τὴν πληροῦσαν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τούτους τιμήν, ἤτοι

$$\text{ἐφ } 555^0 = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}} = 2-\sqrt{3}.$$

Ἀσκήσεις. 140). Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡμ $330^0 = -\frac{1}{2}$ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ115^0.

141) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡμ $315^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου $157^0\ 30'$.

§ 77. ***Ε.—. Εὕρεσις τῆς ἐφ $\frac{\omega}{2}$ συναρτήσει τῆς ἐφω.—.***

Ἡ γνωστὴ ἰ- ..ς ἐφω$=\dfrac{2\,\text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{1-\text{ἐφ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ λυομένη πρὸς ἐφ $\frac{\omega}{2}$ παρέχει τὸν τύπον:

$$\text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{-1\pm\sqrt{1+\text{ἐφ}^2\omega}}{\text{ἐφω}} \qquad (57)$$

Ἐκ τούτου καθίσταται φανερὸν ὅτι εἰς πᾶσαν τιμὴν τῆς ἐφω ἀντιστοιχοῦσι δύο πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι τιμαὶ τῆς ἐφ $\left(\frac{\omega}{2}\right)$, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἐφω δὲν ἀρκεῖ νὰ ὁρίσῃ τελείως τὴν ἐφ $\left(\frac{\omega}{2}\right)$· ἀπαιτεῖται πλὴν ταύτης νὰ εἶναι γνωστὸν καὶ τὸ τεταρτημόριον, εἰς ὃ καταλήγει τὸ τόξον $\frac{\omega}{2}$ ἤ, ὅπερ εἰς τὸ αὐτὸ καταντᾷ, νὰ εἶναι γνωστὸν τὸ τόξον ω. Οὕτω π.χ. γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἐφ $45^0=1$, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου (57) δύο τιμὰς τῆς ἐφ $\frac{45^0}{2}$ τὴν $-1+\sqrt{2}$ καὶ τὴν $-1-\sqrt{2}$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τόξον $\frac{45^0}{2}=22^0\ 30'$ λήγει εἰς τὸ α΄ τεταρτημόριον, ἔχει θετικὴν ἐφαπτομένην, ἤτοι ἐκ τῶν δύο προηγουμένων τιμῶν μόνον ἡ $-1+\sqrt{2}$ εἶναι παραδεκτή.

Σημ. Τὴν ἐξήγησιν τῆς ὑπάρξεως δύο τιμῶν τῆς ἐφ $\frac{\omega}{2}$ ἀφίνομεν τοῖς μαθηταῖς ὡς ἄσκησιν.

Ἀσκήσεις. 142) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ 525^0, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἐφ $1050^0=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

143) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ 750^0, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἐφ $1500=\sqrt{3}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Εον

Τριγωνομετρικοὶ πίνακες.

§ 78.—***Εἴδη τριγωνομετρικῶν πινάκων.*** — Συνήθως ἐν ταῖς τριγωνομετρικαῖς ἐφαρμογαῖς ἀγόμεθα εἰς τὴν εὕρεσιν τριγωνομετρικοῦ τινος ἀριθμοῦ δεδομένου τόξου ἢ γωνίας καὶ τἀνάπαλιν εἰς τὴν εὕρεσιν τόξου ἢ γωνίας ἐχούσης δεδομένον τινὰ τριγ. ἀριθμόν.

Ἀναγκαιοῦσιν ὅθεν ἡμῖν πίνακες περιέχοντες τοὺς τριγ. ἀριθμοὺς τῶν μεταξὺ 0^0 καὶ 45^0 περιεχομένων τόξων προχωρούντων κατὰ ὡρισμένον τόξον, διότι οἱ τριγ. ἀριθμοὶ τῶν ἄλλων τόξων εὑρίσκονται εὐκόλως (§ 63, 59) ἐκ τῶν τριγ. ἀριθμῶν ἐκείνων. Καὶ ὑπάρχουσι πράγματι τοιοῦτοι πίνακες οὕτω· ἐν τῇ τοῦ J. Dupuis ἐκδόσει λογαριθμικῶν πινάκων καὶ ἐν σελ. 149—151 περιέχεται ὁ XXIV πίναξ, ἐν ᾧ ἀναγράφονται μὲ τρία δεκαδικὰ ψηφία τὸ ἡμίτονον, συνημίτονον, ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη τῶν ἀπὸ 0^0 μέχρι 90^0 καὶ ἀνὰ 30΄ προχωρούντων τόξων. Ἐπειδὴ ὅμως οἱ ὑπολογισμοὶ γίνονται συνήθως διὰ τῶν λογαρίθμων προτιμῶνται τοῦ ἀνωτέρω πίνακος ἄλλοι περιέχοντες ἀμέσως τοὺς λογαρίθμους τῶν προειρημένων τριγ. ἀριθμῶν. Καὶ ἄλλοι μὲν τῶν τοιούτων πινάκων παρέχουσι τοὺς λογαρίθμους τῶν προειρημένων 4 τριγ. ἀριθμῶν μὲ 5 δεκαδικὰ ψηφία, ἄλλοι δὲ μὲ 7 τοιαῦτα. Ἐν τοῖς ἀκολούθοις θέλομεν περιγράψει συντόμως τοὺς πενταψηφίους, ὡς μᾶλλον εὐχρήστους, πίνακας, ὡς οὗτοι διετάχθησαν ὑπὸ τοῦ J. Dupuis καὶ θέλομεν ἐκθέσει τὸν τρόπον τῆς χρήσεως αὐτῶν [1].

§ 79. ***Περιγραφὴ τῶν λογαριθμικῶν τριγ. πινάκων*** Dupuis.—. Οἱ πίνακες οὗτοι περιέχουσι τοὺς λογαρίθμους τοῦ ἡμιτόνου, ἐφαπτομένης, συνεφαπτομένης καὶ συνημιτόνου τῶν ἀπὸ 0^0 μέχρις 90^0 τόξων προχωρούντων κατὰ $1'$. Ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν εἶναι ἀναγεγραμμένος ἐκτὸς τοῦ πλαισίου καὶ διὰ μὲν τὰ μικρότερα 45^0 τόξα εἰς τὸ ἄνω μέρος ἑκάστης σελίδος, διὰ δὲ τὰ λοιπὰ εἰς τὸ κάτω. Οἱ δὲ ἀριθμοὶ τῶν πρώτων λεπτῶν διὰ μὲν τὰ μικρότερα 45^0 τόξα ἀναγράφονται εἰς τὴν α′ ἐξ ἀριστερῶν στήλην, ἥτις ἔχει ὡς ἐπικεφαλίδα ὀξὺν τόνον (′), διὰ δὲ τὰ λοιπὰ εἰς τὴν α′ ἐκ δεξιῶν στήλην· βαίνουσι δὲ τὰ πρῶτα λεπτὰ τῆς μὲν α′ ἐξ ἀριστερῶν στήλης αὐξανόμενα ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἀντιστρόφως δὲ τὰ τῆς ἄλλης. Ἕνεκα τῆς τοιαύτης διατάξεως οἱ ἀριθμοὶ τῶν πρώτων λεπτῶν δύο τόξων συμπληρωματικῶν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντίου γραμμῆς. Παντὸς τόξου μικροτέρου τῶν 45^0 καὶ μὴ περιέχοντος δεύτερα λεπτὰ οἱ λογάριθμοι ἑκάστου τῶν προειρημένων τριγ. ἀριθμῶν ἀναγράφονται εἰς τὴν ὁριζοντίαν γραμμήν, ἐν ᾗ περιέχεται ὁ ἀριθμὸς τῶν πρώτων λεπτῶν αὐτοῦ καὶ εἰς τὴν στήλην, ἥτις φέρει ἄνω τὴν συγκεκομμένην λέξιν sin (sinus = ἡμίτονον) διὰ τὸ ἡμίτονον, tang (tangente = ἐφαπτομένη) διὰ τὴν ἐφαπτομένην, cotg (cotangente = συνεφαπτομένη) διὰ τὴν συνεφαπτομένην καὶ cos (cosinus = συνημίτονον) διὰ τὸ συνημίτονον. Παντὸς δὲ τόξου περιεχομένου μεταξὺ 45^0 καὶ 90^0 καὶ μὴ περιέχοντος δεύτερα λεπτὰ οἱ λογάριθμοι τῶν προειρημένων 4 τριγ. ἀριθμῶν εὑρίσκονται ὁμοίως εἰς τὴν

[1] Ὡς γνωστόν, οἱ λογάριθμοι τῶν πλείστων ἀριθμῶν (πλὴν τῶν συμμέτρων δυνάμεων τοῦ 10) ἔχουσιν ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία· εἰς τοὺς πίνακας ὅθεν ἀναγράφονται μὲ προσέγγισιν ὡς ἀκολούθως. Τὰ τέσσαρα πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία ἀναγράφονται ὡς ἔχουσι, τὸ δὲ 5ον ἀναγράφεται ἀμεταβλήτως ἢ αὐξάνεται κατὰ 1, καθ' ὅσον τὸ ἕκτον δὲν ὑπερβαίνει ἢ ὑπερβαίνει τὸν 5. Οὕτω δὲ τὸ λάθος δὲν εἶναι μεῖζον ἡμίσεος ἑκατοντάκις χιλιοστοῦ.

ὁριζοντίαν γραμμὴν τῶν πρώτων λεπτῶν αὐτοῦ καὶ εἰς τὴν στήλην, ἥτις φέρει κάτω τὸ ὄνομα τοῦ τριγ. ἀριθμοῦ.

Σημειωτέον δὲ ὅτι, ὅταν πλείονες λογάριθμοι ἔχωσι κοινὰ τὰ δύο πρῶτα ψηφία αὐτῶν, ταῦτα γράφονται μόνον εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ τέλος ἑκάστης στήλης, νοοῦνται δὲ καὶ διὰ τοὺς ἐνδιαμέσους λογαρίθμους, ἑκάστου τῶν ὁποίων εἶναι εἰς τὴν οἰκείαν θέσιν τὰ 4 τελευταῖα ψηφία ἀναγεγραμμένα. Ἐὰν δὲ ἐν τῷ μεταξὺ μεταβληθῇ τὸ ἕτερον τῶν δύο πρώτων ψηφίων, ἀναγράφεται πλήρης ὁ λογάριθμος, ὡς καὶ ὁ προηγούμενος αὐτοῦ.

Μετὰ τὰς στήλας τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων εὑρίσκονται στῆλαι, ὧν ἑκατέρα ἐπιγράφεται διὰ τοῦ D (ἀρχικὸν γράμμα τῆς λέξεως Difference = διαφορά), ἐν αἷς ἀναγράφονται εἰς μονάδας πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως (μ. ε΄. δ. τ) αἱ διαφοραὶ τῶν λογαρίθμων τῶν εἰρημένων τριγ. ἀριθμῶν δύο διαδοχικῶς ἀναγεγραμμένων τόξων. Ὁμοία στήλη ὑπάρχει καὶ μεταξὺ τῶν στηλῶν Tang καὶ Cotg περιέχουσα τὰς κοινὰς διαφορὰς (¹) τῶν λογαρίθμων τῶν ἐφαπτομένων καὶ συνεφαπτομένων δύο διαδοχικῶς ἀναγεγραμμένων τόξων.

Σημ. Ἡ δεξιὰ τῶν συνημιτόνων στήλη διαφορῶν δὲν ὑπάρχει διὰ τὰ μικρότερα 18^0 καὶ καὶ μεγαλύτερα 71^0, καθ᾽ ὅσον αἱ διαφοραὶ αὗται οὖσαι μικρότεραι τοῦ 5 εὑρίσκονται ταχύτατα δι᾽ ἁπλῆς τῶν λογαρίθμων παρατηρήσεως.

Εἰς τὰς σελίδας τῶν ἀπὸ 6^0 ἕως 83^0 τόξων ὑπάρχουσιν ἐκτὸς τοῦ πλαισίου πινακίδια, ὧν ἕκαστον φέρει ὡς ἐπικεφαλίδα μίαν τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σελίδι (μεγαλυτέρων τοῦ 12) διαφορῶν καὶ διαιρεῖται εἰς δύο στήλας. Τούτων ἡ α΄ περιέχει τοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς, οἵτινες δηλοῦσι δεύτερα λεπτά, ἡ δὲ ἄλλη τὰς ἀντιστοίχους τῶν λογαρίθμων τῶν τριγ. ἀριθμῶν μεταβολάς. Οὕτω τὸ ὧδε παρατιθέμενον πινακίδιον δηλοῖ ὅτι, τῆς διαφορᾶς τῶν λογαρίθμων τριγ. ἀριθμοῦ δύο διαδοχικῶς ἀναγεγραμμένων τόξων οὔσης 42 μ. ε΄. δ. τ. εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ 1″, 2″, ... 9″ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις ἡ.

42	
″	
1	0,7
2	1.4
3	2,1
4	2,8
5	3,5
6	4,2
7	4,9
8	5,6
9	6,3

(¹) Ἐπειδὴ $\text{ἐφα} = \dfrac{1}{\text{σφα}}$ καὶ $\text{ἐφβ} = \dfrac{1}{\text{σφβ}}$ ἕπεται ὅτι:

$\text{λογἐφα} = -\,\text{λογσφα}$ καὶ $\text{λογἐφβ} = -\,\text{λογσφβ}$. Ἄρα:

$\text{λογἐφα} - \text{λογἐφβ} = \text{λογσφβ} - \text{λογσφα}$.

ἐλάττωσις τοῦ λογαρίθμου τοῦ αὐτοῦ τριγ. ἀριθμοῦ κατὰ 0,7 , 1,4 .....6,3 μ. ε΄. δ. τ.

§ 80.— **Χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων.**—Τοὺς λογαριθμικοὺς τριγ. πίνακας χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὴν λύσιν τῶν ἀκολούθων δύο προβλημάτων.

Πρόβλημα Αον.—Εὑρεῖν τὸν λογάριθμον ὡρισμένου τριγων. ἀριθμοῦ δεδομένου τόξου.

Λύσις. Ἐὰν τὸ δεδομένον τόξον δὲν ἔχῃ δεύτερα λεπτά, ὁ ζητούμενος λογάριθμος εἶναι ἀναγεγραμμένος εἰς τὴν σελίδα τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου καὶ εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς τῶν πρώτων λεπτῶν καὶ τῆς ὁμωνύμου πρὸς τὸν τριγ. ἀριθμὸν στήλης. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι λογήμ$(15^0\ 42')=\overline{1},43233$, λογἐφ$(28^0\ 49')=\overline{1},74047$, λογσυν$(61^0 20')=\overline{1},68098$, λογσφ$(57^0 45')=\overline{1},80000$ κτλ.

Ἔστω ἤδη ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογήμ$(24^0\ 10'\ 45'')$, ὅστις δὲν εἶναι ἀναγεγραμμένος εἰς τοὺς πίνακας. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι :

$$24^0\ 10' < 24^0\ 10'\ 45'' < 24^0\ 11'.$$

Ἐπειδὴ δὲ τοῦ τόξου αὐξάνοντος ἀπὸ 0^0 μέχρις 90^0 καὶ τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ αὐξάνει (§ 37), ἕπεται ὅτι :

ἡμ$(24^0\ 10') <$ ἡμ$(24^0\ 10'\ 45'') <$ ἡμ$(24^0\ 11')$, ἄρα καὶ

λογήμ$(24^0\ 10') <$λογήμ$(24^0\ 10'\ 45'') <$λογήμ$(24^0\ 11')$,

ἤτοι ὁ ζητούμενος λογάριθμος περιέχεται μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τοῦ ἡμιτόνου τῶν τόξων $(24^0\ 10')$ καὶ $(24^0\ 11')$, οἵτινες λογάριθμοι διαφέρουσιν ἀλλήλων κατὰ 28 μ. ε΄. δ. τ.

Ἀλλ' ἁπλοῦν βλέμμα ἐπὶ τῶν ἀνὰ χεῖρας λογαριθμικῶν πινάκων πείθει ἡμᾶς ὅτι εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ 1΄ ἀντιστοιχεῖ ἡ αὐτὴ αὔξησις τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου αὐτοῦ, ἀρκεῖ τὸ τόξον νὰ μὴ διαφέρῃ πολὺ τοῦ $(24^0\ 10')$· δυνάμεθα, ὅθεν, νὰ θεωρήσωμεν τὴν αὔξησιν τῶν λογαρίθμων ὡς ἔγγιστα ἀνάλογον πρὸς τὴν αὔξησιν τῶν τόξων καὶ κατ' ἀκολουθίαν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν κατὰ πόσον πρέπει νὰ αὐξηθῇ ὁ λογήμ$(24^0\ 10')=\overline{1},61214$ διὰ νὰ προκύψῃ ὁ ζητούμενος λογάριθμος.

Ὁ ὑπολογισμὸς γίνεται οὕτω:

Ἀφ' οὗ εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ

60″ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ λογ κατὰ 28 μ. ε΄. δ. τ.
εἰς 45″ » » » » » χ » »

ἄρα $\chi=28.\frac{45}{60}=21$ μ. ε΄. δ. τ. Ὥστε:

$$\text{λογημ}\,(24^{0}\ 10'\ 45)=\overline{1},61214+0,00021=\overline{1},61235$$

Τὴν προηγουμένως ὑπολογισθεῖσαν αὔξησιν 21 μ.ε΄.δ.τ. δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ταχύτερον τῇ βοηθείᾳ τοῦ πινακιδίου, ὅπερ φέρει ἐπικεφαλίδα τὴν διαφορὰν 28, ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδή, ὡς ἐκ τοῦ πινακιδίου φαίνεται, εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ 4″ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ λογαρίθμου κατὰ 1,87 μ.ε΄.δ.τ, ἕπεται ὅτι εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ 40″ θ' ἀντιστοιχῇ αὔξησις τοῦ λογ κατὰ $1,87\times10=18,7$ μ.ε΄.δ.τ, εἰς αὔξησιν δὲ τοῦ τόξου κατὰ 5″ ἀντιστοιχεῖ ἑτέρα αὔξησις τοῦ λογ κατὰ 2,33. Ὥστε εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ 45″ ἀντιστοιχεῖ ὁλικὴ αὔξησις τοῦ λογ. κατὰ $18,7+2,33=21,03$ ἢ 21 περίπου.

Πᾶσα δὲ ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὧδε:

λογημ (24° 10′)			$=\overline{1},61214$
εἰς αὐξ. τόξ. κατὰ 40″ ἀντιστ. αὐξ. λογ κατὰ	18,7		
» » » » 5″ » » » »	2,33		
» » » » 45″ » » » »	21,03	ἢ	21
ὥστε λογημ (24° 10′ 45″)			$=\overline{1},61235$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ λογαρίθμου τῆς ἐφαπτομένης δεδομένου τόξου.

Ἔστω ἔτι ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογσφ (36° 54′ 38″).

Ἐπειδὴ $36^{0}\ 54' < 36^{0}\ 54'\ 38'' < 36^{0}\ 55'$, ἕπεται (§ 45) ὅτι: σφ$(36^{0}54')>$ σφ$(36^{0}\ 54'\ 38'')>$ σφ$(36^{0}\ 55')$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν λογ σφ $(36^{0}\ 54')>$ λογ σφ $(36^{0}\ 54'\ 38'')>$ λογ σφ $(36^{0}\ 55')$, ἤτοι ὁ ζητούμενος λογάριθμος περιέχεται μεταξὺ δύο λογαρίθμων διαφερόντων κατὰ 26 μ. ε΄ δ. τ. Ἤδη τῇ βοηθείᾳ καὶ τοῦ πινακιδίου 26 ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως.

λογ σφ (36° 54)			=0,12446
εἰς αὐξ. τόξ. κατὰ 30″ ἀντισ. μείωσις λογ. κατὰ	13		
» » » » 8″ » » » »	3,47		
38″ » » » »	16,47	ἢ	16
ὥστε λογσφ(36° 54′ 38″			=0,12430

Ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ ὁ λογ τοῦ συνημιτόνου τόξου, ὅπερ περιέχει καὶ δεύτερα λεπτά.

Ἀσκήσεις. 144) Εὑρεῖν τὸν λογ ἡμ ($48^\circ\ 12'\ 50''$).
145) Εὑρεῖν τὸν λογ συν ($62^\circ\ 6'\ 37''$).
146) Εὑρεῖν τὸν λογ ἐφ ($34^\circ\ 17'\ 46''$).
147) Εὑρεῖν τὸν λογ σφ ($24^\circ\ 14'\ 39''$).
148) Εὑρεῖν τὸν λογ ἡμ ($120^\circ\ 35'$).
149) Εὑρεῖν τὸν λογ ἐφ ($235^\circ\ 40'\ 23''$).
150) Εὑρεῖν τὸν λογ συν ($320^\circ\ 12'\ 20''$).

151) Εὑρεῖν τὸν λογάριθμον τοῦ ἡμ $\frac{7\pi}{11}$, ἐφ $\frac{3\pi}{14}$, σφ $\frac{5\pi}{7}$, συν $\frac{\pi}{17}$.

§ 81.— ***Πρόβλημα Βον.***—. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον θετικὸν τόξον, οὗ ὡρισμένος τριγων. ἀριθμός ἔχει δεδομένον λογάριθμον.*

Α'. Περίπτωσις.—Ὁ δοθεὶς λογάριθμος εἶναι ἀναγεγραμμένος εἰς τοὺς πίνακας.—Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον θετικὸν τόξον χ, δι' ὃ εἶναι λογ ἡμ $\chi = \overline{1},46011$. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι λογ ἡμ 45° = λογσυν $45^\circ = \overline{1},84949$· ἐπειδὴ δὲ ὁ δοθεὶς λογάριθμος τοῦ ἡμ χ εἶναι μικρότερος τοῦ $\overline{1},84949$, ἕπεται ὅτι ἡμ $\chi <$ ἡμ 45° καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\chi < 45^\circ$. Θὰ ἀναζητήσωμεν λοιπὸν τὸν δοθέντα λογάριθμον εἰς τὰς στήλας, αἵτινες ἄνω φέρουσι τὴν λέξιν sin = ἡμίτονον. Καὶ κατὰ πρῶτον ἀνευρίσκομεν τὰ δύο πρῶτα ψηφία $\overline{1},4$ αὐτοῦ, εἶτα δὲ ἀναζητοῦμεν καὶ τὰ ἄλλα ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν ἡμιτόνων αὐξάνουσι, καθ' ἣν φορὰν καὶ οἱ ἀριθμοὶ τῶν πρώτων λεπτῶν τῶν τόξων. Οὕτως ἀνευρίσκομεν τὸν δοθέντα λογάριθμον εἰς τὴν σελίδα τῶν 16°, τὴν στήλην τῶν ἡμιτόνων καὶ τὴν ὁριζοντίαν γραμμήν, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰ $46'$· ὥστε $\chi = 16^\circ\ 46'$.

Ἂν ζητῆται τὸ ἐλ. θετικὸν τόξον χ, δι' ὃ εἶναι λογἡμ$\chi = \overline{1}$ 96267, ἐπειδὴ $\overline{1},96267 > \overline{1},84949$ ἕπεται ὅτι $\chi > 45^\circ$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν θὰ ἀναζητήσωμεν τὸν δοθέντα λογάριθμον εἰς τὰς στήλας, αἵτινες κάτω φέρουσι τὴν λέξιν sin. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $\chi = 66^\circ 35'$.

Ἔστω ἤδη ὅτι λογσυν $\omega = \overline{1},96893$ καὶ ζητεῖται ἡ ἐλαχίστη θετικὴ τιμὴ τοῦ τόξου ω. Ἐπειδὴ $\overline{1},96893 > \overline{1},84949$, ἕπεται ὅτι συν ω > συν 45° καὶ ἐπομένως $\omega < 45^\circ$, διότι τοῦ τόξου αὐξάνοντος ἀπὸ 0° ἕως 90° τὸ συνημίτονον αὐτοῦ ἐλαττοῦται (§ 34). Θὰ ἀναζητήσωμεν λοιπὸν αὐτὸν εἰς τὰς στήλας, αἵτινες φέρουσιν ἄνω τὴν λέξιν cos = συνημίτονον. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $\omega = 21^\circ\ 25'$.

Ἂν δοθῇ λογ. συνημιτόνου μικρότερος τοῦ $\overline{1},84949$, θὰ ἀναζητήσωμεν αὐτὸν εἰς τὰς στήλας, αἵτινες κάτω φέρουσι τὴν λέξιν cos. Οὕτως ἂν λογ συν $\psi = \overline{1},76835$, εὑρίσκομεν ὅτι $\psi = 54^0\ 5'$.

Ἔστω ἔτι ὅτι λογ ἐφ $\tau = \overline{1}.79776$, καὶ ζητεῖται ἡ ἐλαχίστη θετικὴ τιμὴ τοῦ τόξου τ. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ ἐφ 45^0= σφ 45^0= 1, θὰ εἶναι καὶ λογ ἐφ 45^0=λογσφ45^0=0· ἐπειδὴ δὲ τοῦ τόξου αὐξάνοντος ἀπὸ 0^0 μέχρι 90^0 ἡ ἐφαπτομένη, ἄρα καὶ ὁ λογάριθμος αὐτῆς, αὐξάνεται, ἡ δὲ συνεφαπτομένη, ὡς καὶ ὁ λογάριθμος αὐτῆς, ἐλαττοῦται, ἕπεται ὅτι διὰ τὰ μεταξὺ 0^0 καὶ 45^0 τόξα ὁ μὲν λογάριθμος τῆς ἐφαπτομένης εἶναι ἀρνητικός, ὁ δὲ τῆς συνεφαπτομένης θετικός, διὰ δὲ τὰ μεταξὺ 45^0 καὶ 90^0 τόξα ὁ λογάριθμος τῆς ἐφαπτομένης εἶναι θετικὸς καὶ ὁ τῆς συνεφαπτομένης ἀρνητικός.

Κατὰ ταῦτα, τοῦ δοθέντος λογέφτ ὄντος ἀρνητικοῦ, τὸ τόξον τ εἶναι μικρότερον 45^0 καὶ ἑπομένως δέον νὰ ἀναζητήσωμεν αὐτὸν εἰς τὰς στήλας τῶν ἐφαπτομένων ἄνω. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $\tau = 32^0\ 7'$.

Ἔστω τέλος ὅτι λογσφχ $= \overline{1},87317$ καὶ ζητεῖται ἡ ἐλ θετικὴ τιμὴ τοῦ τόξου χ. Κατὰ τὰ προλεχθέντα, τοῦ λογσφχ ὄντος ἀρνητικοῦ, τὸ τόξον χ εἶναι μεγαλύτερον τῶν 45^0 δέον λοιπὸν νὰ ἀναζητήσωμεν αὐτὸν εἰς τὰς στήλας, αἵτινες φέρουσι κάτω τὴν λέξιν cotg. Πρὸς ταχυτέραν δὲ εὕρεσιν αὐτοῦ πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν συνεφαπτομένων αὐξάνουσι κατὰ φορὰν ἀντίθετον ἐκείνης, καθ' ἣν αὐξάνουσι τὰ πρῶτα λεπτὰ τῶν τόξων. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον τόξον $\chi = 53^0\ 15'$.

Β'. περίπτωσις.—, ***Ὁ δοθεὶς λογάριθμος δὲν εἶναι ἀναγεγραμμένος εἰς τοὺς πίνακας.***—. Ἔστω ὅτι λογημ $\chi = \overline{1},77127$ καὶ ζητεῖται ἡ ἐλ. θετικὴ τιμὴ τοῦ τόξου χ. Ἀναζητοῦντες τὸν δοθέντα λογάριθμον εἰς τοὺς πίνακας πειθόμεθα ὅτι:

$$\overline{1},77112 < \overline{1},77127 < \overline{1},77130 \qquad (\alpha)$$

τῶν ἄκρων λογαρίθμων ὄντων ἀναγεγραμμένων εἰς τοὺς πίνακας.

Ἐπειδὴ δὲ $\overline{1},77112$=λογημ ($36^0\ 11'$) καὶ $\overline{1},77130$=λογημ ($36^0\ 12'$), ἕπεται ὅτι: $36^0 11' < \chi < 36^0 12'$.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἄκροι λογάριθμοι τῶν ἰσοτήτων (α) διαφέρουσιν ἀλλήλων κατὰ 18 μ.ε'.δ τ, ὁ δὲ δοθεὶς εἶναι μείζων τοῦ $\overline{1},77112$ κατὰ 15 τοιαύτας μονάδας. Ἐπειδὴ δὲ τοῦ λογ. αὐξάν. κατὰ 18, τὸ τόξον αὐξάνει κατὰ 60″ ἕπεται

ὅτι » » » » 15 » » » » $60'' \times \frac{15}{18} = 50''$.

καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\chi = 36^0\ 11'\ 50''$.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται οὕτω :

Ὅταν ὁ λογ. εἶναι,	$\overline{1},77112$,	τὸ τόξον εἶναι	$36^0\ 11'$
εἰς αὔξ. τοῦ λογ κατὰ	15	» » αὔξ. κατὰ	$50''$
ἄρα, ὅταν ὁ λογ εἶναι	$\overline{1},77127$	τὸ τόξον εἶναι	$36^0\ 11'\ 50''$

Σημ. Ἐκ τοῦ πινακιδίου 18 βλέπομεν ἀμέσως ὅτι εἰς αὔξησιν τοῦ λογ κατὰ 1,5 μ.ε'.δ.τ. ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ τόξου κατὰ 5″, ἄρα εἰς αὔξησιν τοῦ λογ κατὰ $1,5 \times 10 = 15$ μ.ε'.δ.τ, θὰ ἀντιστοιχῇ αὔξησις τοῦ τόξου κατὰ $5'' \times 10 = 50''$. Ὁ κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ὑπολογισμὸς τῆς ἀκριβοῦς, ὅσον ἔνεστι, μεταβολῆς τῶν τόξων δὲν εἶναι πάντοτε εὐχερής.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν εἶναι δεδομένος ὁ λογάριθμος τῆς ἐφαπτομένης.

Ἔστω ἤδη ὅτι λογ συν $\psi = \overline{1},85842$ καὶ ζητεῖται ἡ ἐλ. θετικὴ τιμὴ τοῦ ψ. Ἀναζητοῦντες τὸν λογάριθμον τοῦτον εἰς τοὺς πίνακας βλέπομεν ὅτι οὗτος περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν $\overline{1},85851$ καὶ $\overline{1},85839$, εἰς οὓς ἀντιστοιχοῦσι τὰ τόξα $43^0\ 47'$ καὶ $43^0\ 48'$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\overline{1},85851 > \overline{1},85842 > \overline{1},85839$, ἕπεται ὅτι

$$43^0\ 47' < \psi < 43^0\ 48'.$$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι οἱ μὲν ἄκροι λογάριθμοι διαφέρουσι κατὰ 12 μ. ε' δ. τ, ὁ δὲ δοθεὶς εἶναι μικρότερος τοῦ α' κατὰ 9 τοιαύτας μονάδας.

Ἐπειδὴ δὲ

εἰς ἐλάττ. τοῦ λογ. κατὰ 12 μ. ε'.δ.τ. ἀντιστ. αὔξ. τοῦ τόξου κατὰ 60″, ἕπεται

ὅτι » » » » » 9 » » » » » » $60'' \times \frac{9}{12} = 45''$

ὥστε $\psi = 43^0\ 47'\ 45''$.

Τὴν πρᾶξιν διατάσσομεν συνήθως οὕτω :

Ὅταν ὁ λογ. εἶναι	$\overline{1},85851$	τὸ τόξον εἶναι	$43^0\ 47'$
εἰς μείωσιν τοῦ λογ. κατὰ	9	ἀντισ. αὔξ. τόξ. κατὰ	$45''$
ἄρα, εἰς λογ.	$\overline{1},85842$	» τόξον	$43^0\ 47'\ 45''$.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν δίδηται ὁ λογάριθμος τῆς συνεφαπτομένης τόξου.

Σημ. α΄. Ἔστωσαν α καὶ β δύο τόξα τοιαῦτα ὥστε $α<β$ καὶ $0^0<β<90^0$.

Ἐκ τῶν εὐκόλως ἀποδεικνυομένων ἰσοτήτων

λογ ἐφα=λογ ἡμα—λογσυνα καὶ λογ ἐφβ=λογἡμβ—λογ συνβ ἕπεται ὅτι :

λογ ἐφβ—λογ ἐφα=(λογ ἡμβ—λογ ἡμα)+(λογ συνα—λογ συνβ):

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης κατανοοῦμεν εὐκόλως ὅτι ἡ διαφορὰ Δ μεταξὺ τῶν λογ. τῶν ἐφαπτομένων δύο τόξων διαφερόντων κατὰ 1΄ ὑπερβαίνει ἑκατέραν τῶν διαφορῶν δ καὶ δ΄ τῶν λογ. τοῦ ἡμιτόνου ἢ συνημιτόνου τῶν αὐτῶν τόξων. Ἤδη δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ἐννοήσωμεν ὅτι τόξον τι προσδιορίζεται ἀκριβέστερον ἐκ τοῦ λογ. τῆς ἐφαπτομένης αὐτοῦ ἢ ἐκ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου ἢ συνημιτόνου αὐτοῦ. Τῷ ὄντι· ἐπειδὴ λάθος Δ μ.ε΄.δ.τ. συμβὰν εἰς τὸν λογ. τῆς ἐφαπτομένης προκαλεῖ εἰς τὸ τόξον λάθος 60΄΄, ἕπεται ὅτι λάθος ν μ.ε΄.δ.τ. θέλει προκαλέσει εἰς τὸ τόξον λάθος $\frac{60''\times ν}{Δ}$, ἐν ᾧ τοιοῦτον λάθος εἰς τὸν λογ. τοῦ ἡμιτόνου ἢ συνημιτόνου, προκαλεῖ εἰς τὸ τόξον λάθος $\frac{60''\times ν}{δ}$ ἢ $\frac{60''\times ν}{δ'}$, ὧν ἑκάτερον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\frac{60''\times ν}{Δ}$, διότι $Δ>δ$ καὶ $Δ>δ'$.

Σημ. β΄. Ἐνίοτε ἀντὶ τοῦ λογ. τριγ. ἀριθμοῦ δίδεται ὁ αὐτὸς τριγ. ἀριθμὸς καὶ ζητεῖται τὸ ἀντίστοιχον ἐλ. θετικὸν τόξον. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου (ἐκ τῶν λογ. πινάκων τῶν ἀριθμῶν) καὶ εἶτα ἐργαζόμεθα, ὡς προηγουμένως ἐξετέθη. Δυνατὸν ὅμως ὁ δοθεὶς τριγ. ἀριθμὸς νὰ εἶναι ἀρνητικός, ὅτε δὲν ἔχει λογάριθμον· τότε ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα φαίνεται.

Παράδ. α΄.—. Εὑρεῖν τὸ ἐλ. θετικὸν τόξον χ, ὅπερ ἔχει ἐφαπτομένην—3.—. Τὸ παραπληρωματικὸν τοῦ χ τόξον, ἤτοι τὸ $(180^0—χ)$ ἔχει (§ 58) ἐφαπτομένην 3· ἄρα λογ ἐφ $(180^0—χ)$=λογ3=0,47712 καὶ ἑπομένως $180^0—χ=71^0\ 33'\ 54''$, ὅθεν $χ=108^0\ 26'\ 6''$. **Ὁμοίως** ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν ὁ δεδομένος ἀρνητικὸς τριγ. ἀριθμὸς εἶναι συνημίτονον ἢ συνεφαπτομένη.

Παράδ. β'.—. Εὑρεῖν τὸ ἐλ. θετικὸν χ, ὅπερ ἔχει ἡμίτονον $-\frac{3}{4}$.

Ἐπειδὴ τὸ ἡμχ εἶναι ἀρνητικόν, τὸ χ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 180°· ἐὰν δὲ τεθῇ $\chi-180^0=\psi$, θὰ εἶναι $0^0<\psi<180^0$ καὶ (§ 60) ἡμψ $=-$ ἡμχ $=\frac{3}{4}$, ἄρα λογἡμψ=λογ3—λογ4= $\overline{1},87506$, ὅθεν $\psi=48^0\ 35'\ 25''$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\chi=180^0+\psi=228^0\ 35'\ 25''$.

Ἀσκήσεις. 152) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλ. θετικὸν τόξον, ὅπερ ἔχει ἡμίτονον $\frac{2}{3}$.

153) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλ. θετικὸν τόξον, ὅπερ ἔχει ἐφαπτομένην 3.

154) Ὁμοίως τὸ ἔχον συνεφαπτομένην $\frac{1}{2}$.

155) Ὁμοίως τὸ ἔχον ἡμίτονον $-\frac{5}{6}$.

156) Ὁμοίως τὸ ἔχον συνημίτονον $-\frac{6}{10}$.

157) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσότης, ἥτις παρέχει πάντα τὰ τόξα, ὧν ἕκαστον ἔχει ἐφαπτομένην $\frac{2}{3}$.

158) Τὸ αὐτὸ διὰ τὰ τόξα, ὧν ἕκαστον ἔχει συνεφαπτομένην $3\sqrt{3}$.

159) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἰσότητες, αἵτινες παρέχουσι πάντα τὰ τὰ τόξα ὧν ἕκαστον ἔχει ἡμίτονον $\sqrt{2}$.

160) Τὸ αὐτὸ διὰ τὰ τόξα, ὧν ἕκαστον ἔχει τέμνουσαν $1\frac{2}{5}$.

§ 82.—. ***Εὕρεσις τῶν λογαρίθμων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τόξων καὶ τἀνάπαλιν, διὰ τόξα μικρότερα 2^0 καὶ μεγαλύτερα 88^0.***

Παράδ. 1ον.—. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογ. ἡμ (10' 40'').—. Ἀνατρέχοντες εἰς τὴν σελίδα τῶν 0^0 καὶ τὴν οἰκείαν στήλην εὑρίσκομεν ὅτι λογ ἡμ 10' $=\overline{3},46373$· παρατηροῦντες δὲ εἰς τὴν παρακειμένην στήλην διαφορῶν βλέπομεν ὅτι αὗται μεταβάλλονται ἀπὸ τόξου εἰς τόξον μεῖζον κατὰ 1', ἤτοι δὲν ὑφίσταται πλέον οὔτε κατὰ προσέγγισιν ἀναλογία μεταξὺ τῆς αὐξήσεως τῶν τόξων καὶ τῆς τῶν λογαρίθμων. Τοῦτο συμβαίνει διὰ τοὺς λογαρίθμους τοῦ ἡμιτόνου, ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης τόξων μικροτέρων 2^0 ὡς καὶ διὰ τοὺς λογαρίθμους συνημιτόνου, ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης τόξων μεγαλυτέρων 88^0.

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον δὲν δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας τὴν προηγουμένως ἐφαρμοσθεῖσαν ἀναλογικὴν μέθοδον πρὸς εὕρεσιν τῆς μεταβολῆς τοῦ λογαρίθμου, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς ὡρισμένην μεταβολὴν τοῦ τόξου καὶ τἀνάπαλιν. Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας ἡ λύσις τῶν προβλημάτων Α΄ καὶ Β΄ (§ 80, 81) γίνεται διὰ τῆς ἀκολούθου εἰδικῆς μεθόδου.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τῶν προφανῶν ἰσοτήτων

$ημ\,τ = τ.\,\frac{ημτ}{τ}$ καὶ $εφ\,τ = τ.\,\frac{εφτ}{τ}$ προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ

ἰσότητες:
$$λογ\,ημ\,τ = λογ\,τ + λογ\,\frac{ημτ}{τ} \qquad (α)$$
$$λογ\,εφ\,τ = λογ\,τ + λογ\,\frac{εφτ}{τ} \qquad (β)$$

Ἐὰν δὲ τ παριστᾷ δεύτερα λεπτά, ὁ λογ τ εὑρίσκεται ἐκ πινάκων τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν, ὁ δὲ λογάριθμος τῶν λόγων $\frac{ημτ}{τ}$ καὶ $\frac{εφτ}{τ}$ ἀναγράφεται εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς α΄. σελίδος καὶ εἰς τὸ κάτω ἑκάστης τῶν ἄλλων (καὶ ἐκτὸς τοῦ πλαισίου) σελίδων τῶν λογ. πινάκων τῶν ἀριθμῶν, διακρινόμεναι ἀπ' ἀλλήλων διὰ τῶν γραμμάτων S καὶ T, ὧν τὸ μὲν $S = λογ\,\frac{ημτ}{τ}$, τὸ δὲ $T = λογ\,\frac{εφτ}{τ}$.

Ἐφαρμόζοντες ἤδη τὴν προηγουμένην ἰσότητα (α) εἰς τὸ τόξον $10'\,40'' = 640''$ εὑρίσκομεν ὅτι:

$λογ\,ημ(10'\,40'') = λογ 640 + \overline{6},68557 = 2,80618 + \overline{6},68557 = \overline{3},49175.$

Παράδ. 2ον.—*Εὑρεῖν τὸν λογ εφ(1⁰ 32′ 45″).*—Ἐπειδὴ $1^0\,32'\,45'' = 5565''$, ἡ ἰσότης (β) ἐφαρμοζομένη εἰς τὸ τόξον τοῦτο γίνεται:

$λογ\,εφ\,(1^0\,32'\,45'') = λογ\,5565 + \overline{6},68568 = 3,74547 + \overline{6},68568 = \overline{2},43115.$

Παράδ. 3ον.—. *Εὑρεῖν τὸν λογ σφ (15′ 20″).*—. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι: $λογ\,σφ\,(15'\,20'') = -λογ\,εφ\,(15'\,20'')$. Ἐπειδὴ δὲ $λογ\,εφ\,(15'\,20'') = λογ\,920 + \overline{6},68558 = 2,96379 + \overline{6},68558 = \overline{3},64937$, ἕπεται ὅτι:

$λογ\,σφ\,(15'\,20'') = -(\overline{3},64937) = 3 - 0,64937 = 2,35063.$

Παράδ. 4ον.—. *Εὑρεῖν τὸν λογ ἐφ (88° 45′ 23″).*— Ἐπειδὴ

$$90^0 - (88^0\ 45'\ 23'') = 1^0\ 14'\ 37'',$$ ἕπεται ὅτι

$$\text{ἐφ}\ (88^0\ 45',\ 23'') = \text{σφ}\ (1^0\ 14'\ 39'') = \frac{1}{\text{ἐφ}(1^0 14' 37'')}$$ κατ' ἀκολουθίαν

$$\text{λογ ἐφ}\ (88^0\ 45'\ 23'') = -\ \text{λογ ἐφ}\ (1^0\ 14'\ 37'') = -\ (\overline{2},33663) =$$
$$2 - 0,33663 = 1,66337.$$

Παράδ. 5ον,—. *Εὑρεῖν τὸν λογ σφ (88° 50′ 25″).* Ἐπειδὴ τὸ συμπληρωματικὸν τοῦ δοθέντος τόξου εἶναι 1° 9′ 35″, ἕπεται ὅτι

$$\text{λογ σφ}\ (88^0\ 50'\ 25'') = \text{λογ ἐφ}\ (1^0\ 9'\ 35'') = \overline{2},30629.$$

Παράδ. 6ον.—. *Εὑρεῖν τὸν λογ συν (89°, 17′, 45″).* Ἐπειδὴ τὸ συμπληρωματικὸν τοῦ δοθέντος τόξου εἶναι 42′ 15″, ἕπεται ὅτι :

$$\text{λογ συν}\ (89^0\ 17'\ 45'') = \text{λογ ἡμ}\ (42'\ 15'') = \overline{2},08954.$$

Ἡ λύσις τοῦ Β′ προβλήματος (§ 81) γίνεται ὡς εἰς τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα φαίνεται.

Παράδ. Αον.— *Εὑρεῖν τὸ ἐλ. θετικὸν τόξον τ, δι' ὃ εἶναι λογ ἡμ τ = $\overline{3}$,47964.*—. Ἀναζητοῦντες τὸν δεδομένον λογάριθμον εἰς τὴν οἰκείαν τῶν λογ. πινάκων στήλην βλέπομεν ὅτι

$$\overline{3},46373 < \overline{3},47964 < \overline{3},50512\ ,\quad \text{ἄρα}$$
$$10' < \tau < 11' \quad \text{ἢ}$$
$$600'' < \tau < 660''$$

Ἕνεκα τούτου S = $\overline{6}$,68557. Ἡ ἰσότης ἄρα (α) γίνεται :

$$\overline{3},47964 = \text{λογ}\ \tau + \overline{6},68557,\ \text{ὅθεν λογ}\ \tau = 2,79407.$$

Ἐκ δὲ τῶν πινάκων τῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\tau = 622,4'' = 10'\ 22'',4.$$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν δίδηται ὁ λογ. ἐφαπτομένης τόξου μικροτέρου τῶν 2°.

Παράδ. Βον. — *Εὑρεῖν τὸ ἐλ θετικὸν τόξον τ, δι' ὃ εἶναι λογσφτ = 1,72775.*—.Τῇ βοηθείᾳ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν ὅτι :

$$1^0\ 4' < \tau < 1^0\ 5' \quad \text{ἢ} \quad 3840'' < \tau < 3900'', \quad \text{ἄρα} \quad T = \overline{6},68562.$$

Ἐπειδὴ δὲ λογ ἐφ τ = — λογ σφ τ = — 1,72775 = $\overline{2}$,27225, ἡ ἰσότης (β) γίνεται : $\overline{2}$,27225 = λογ τ + $\overline{6}$,68562, ὅθεν

$$\text{λογ}\ \tau = 3,58663,\quad \text{ὅθεν}\quad \tau = 3860,36'' = 1^0\ 4'\ 20,36''.$$

Παράδ. Γον.—. *Εὑρεῖν τὸ ἐλ. θετικὸν τόξον τ, δι' ὃ εἶναι λογ σφ τ = $\overline{2}$,12775.*—. Τῇ βοηθείᾳ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν ὅτι

$$89^0\ 13' < \tau < 89^0\ 14',\quad \text{ἄρα}\quad 47' > 90^0 - \tau > 46' \quad \text{καὶ}$$

$T = \overline{6},68560$. Ἐπειδὴ δὲ ἐφ $(90^0 - τ) = $ σφ $τ$, ἕπεται ὅτι λογ ἐφ $(90^0 - τ) = $ λογ σφ $τ = \overline{2},12775$. Ἡ ἰσότης (β) ὅθεν γίνεται : $\overline{2},12775 = $ λογ $(90^0 - τ) + \overline{6},68560$, ὅθεν λογ $(90^0 - τ) = 3,44215$ καὶ $90^0 - τ = 2767'',875 = 46'$ $7'',875$ ἄρα $τ = 90^0 - (46' \, 7'',875) = 89^0 \, 13' \, 52'',125$.

Παράδ. Δον. —. *Εὑρεῖν τὸ ἐλ. θετικὸν τ, δι' ὃ εἶναι : λογ ἐφ τ = 2,83949.*—. Τῇ βοηθείᾳ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν ὅτι : $89^0 \, 55' < τ < 89^0 \, 56'$, ἄρα $5' > 90^0 - τ > 4'$ ἢ $300'' > 90^0 - τ > 240''$ καὶ ἑπομένως $T = \overline{6},68558$.

Ἐπειδὴ δὲ ἐφ $(90^0 - τ) = $ σφ $τ = \dfrac{1}{εφτ}$, ἕπεται ὅτι :

λογ ἐφ $(90^0 - τ) = -$ λογ ἐφ $τ = -2,83949 = \overline{3},16051$.

Ἡ δὲ ἰσότης (β) γίνεται ἤδη : $\overline{3},16051 = $ λογ $(90^0 - τ) + \overline{6},68558$, ὅθεν λογ $(90^0 - τ) = 2,47493$ καὶ $90^0 - τ = 298'',5 = 4' \, 58'',5$, ἄρα $τ = 89^0 \, 55' \, 1'',5$.

Παράδ. Εον.—. *Εὑρεῖν τὸ ἐλ. θετικὸν τόξον τ, δι' ὃ εἶναι λογ συν τ = $\overline{2}$,23267.*—. Ὡς προηγουμένως εἴπομεν εὑρίσκομεν ὅτι: $89^0 \, 1' < τ < 89^0 \, 2'$, ἄρα $59 > 90^0 - τ > 58'$ ἢ $3480'' < 90^0 - τ < 3540''$ καὶ ἑπομένως $S = \overline{6},68556$.

Ἐπειδὴ δὲ λογ ἡμ $(90^0 - τ) = $ λογ συν $τ = \overline{2},23267$, ἡ ἰσότης (α) γίνεται $\overline{2},23267 = $ λογ $(90^0 - τ) + \overline{6},68556$, ὅθεν εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν λογ $(90^0 - τ) = 3,54711$, $90^0 - τ = 3524'',6 = 58' 44'',6$ καὶ $τ = 89^0 \, 1' \, 15'',4$.

Ἀσκήσεις. 161) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογ ἡμ $8'',8$.

162) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογ συν $(88^0 \, 40' \, 25'')$.

163) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογ ἐφ $(1^0 \, 5' \, 32'')$.

164) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογ ἐφ $(89^0 \, 3' \, 40'')$.

165) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογ σφ $(15' \, 20'')$.

166) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογ σφ $(88^0 \, 53' \, 56'')$.

167) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλ. θετικὸν τόξον τ, δι' ὃ εἶναι λογημ $τ = \overline{3},72960$

168) Νὰ εὑρεθῇ » » » χ, » » λογσυν $χ = \overline{2},16833$

169) Νὰ εὑρεθῇ » » » χ, » » λογἐφ $χ = \overline{2},45777$

170) Νὰ εὑρεθῇ » » » χ, » » λογἐφ $χ = 1,47613$

171) Νὰ εὑρεθῇ » » » χ, » » λογσφ $χ = \overline{1},75147$

172) Νὰ εὑρεθῇ » » » χ, » » λογσφ $χ = \overline{3},92888$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤον

Χρήσιμοι μετασχηματισμοὶ

§ 83. *Μετασχηματισμὸς τῶν παραστάσεων ἡμ A ± ἡμ B εἰς γινόμενα.*—. Ἐκ τῶν γνωστῶν ἰσοτήτων

$$\text{ἡμ}(\alpha+\beta)=\text{ἡμ}\alpha\,\text{συν}\beta+\text{ἡμ}\beta\,\text{συν}\alpha$$
$$\text{ἡμ}(\alpha-\beta)=\text{ἡμ}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ἡμ}\beta\,\text{συν}\alpha$$

διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα

$$\text{ἡμ}(\alpha+\beta)+\text{ἡμ}(\alpha-\beta)=2\,\text{ἡμ}\alpha\,\text{συν}\beta \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν μελῶν τῆς α′ τῶν προειρημένων ἰσοτήτων ἀφαιρέσωμεν τὰ ἀντίστοιχα μέλη τῆς β′, εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα:

$$\text{ἡμ}(\alpha+\beta)-\text{ἡμ}(\alpha-\beta)=2\,\text{ἡμ}\beta\,\text{συν}\alpha \qquad (2)$$

Ἐὰν δὲ τεθῇ $\alpha+\beta=A$ καὶ $\alpha-\beta=B$, εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι: $\alpha=\frac{A+B}{2}$ καὶ $\beta=\frac{A-B}{2}$, αἱ δὲ ἰσότητες (1) καὶ (2) γίνονται:

$$\left.\begin{aligned}\text{ἡμ}A+\text{ἡμ}B&=2\,\text{ἡμ}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{A-B}{2}\right)\\ \text{ἡμ}A-\text{ἡμ}B&=2\,\text{ἡμ}\left(\frac{A-B}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{A+B}{2}\right)\end{aligned}\right\}\qquad (58)$$

§ 84. *Μετασχηματισμὸς τῶν παραστάσεων συνA ± συνB εἰς γινόμενα.*—. Ἐκ τῶν γνωστῶν ἰσοτήτων:

$$\text{συν}(\alpha+\beta)=\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ἡμ}\alpha\,\text{ἡμ}\beta$$
$$\text{συν}(\alpha-\beta)=\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta+\text{ἡμ}\alpha\,\text{ἡμ}\beta$$

διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα

$$\text{συν}(\alpha+\beta)+\text{συν}(\alpha-\beta)=2\,\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta \qquad (3)$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν μελῶν τῆς α′ τῶν αὐτῶν ἰσοτήτων ἀφαιρέσωμεν τὰ ἀντίστοιχα μέλη τῆς β′, εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα:

$$\text{συν}(\alpha+\beta)-\text{συν}(\alpha-\beta)=-2\,\text{ἡμ}\alpha\,\text{ἡμ}\beta \qquad (4)$$

Ἐὰν δὲ πάλιν τεθῇ $\alpha+\beta=A$ καὶ $\alpha-\beta=B$, αἱ ἰσότητες (3) καὶ (4) γίνονται:

$$\left.\begin{aligned}\text{συν}A+\text{συν}B&=2\,\text{συν}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{A-B}{2}\right)\\ \text{συν}A-\text{συν}B&=2\,\text{ἡμ}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{ἡμ}\left(\frac{B-A}{2}\right)\end{aligned}\right\}\qquad (59)$$

Ἐφαρμογαί.

§ 85 *A′.*—. ***Νὰ μετασχηματισθῇ ἡ παράστασις***

$\dfrac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\eta\mu A+\eta\mu B}$ —. Ἐὰν τὰ μέλη τῆς β′ τῶν ἰσοτήτων (58) διαιρέσωμεν διὰ τῶν ἀντιστοίχων μελῶν τῆς α′, εὑρίσκομεν

$$\frac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\eta\mu A+\eta\mu B}=\frac{\eta\mu\left(\frac{A-B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-B}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\eta\mu\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-B}{2}\right)}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right)},\quad \text{ὅθεν}$$

$$\frac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\eta\mu A+\eta\mu B}=\dot\epsilon\varphi\left(\frac{A-B}{2}\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{A+B}{2}\right)=\frac{\dot\epsilon\varphi\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\dot\epsilon\varphi\left(\frac{A+B}{2}\right)}\qquad (60)$$

Β′.— Νὰ μετασχηματισθῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma-\eta\mu(A+B+\Gamma)$.—. Κατὰ τὸν β′ τῶν τύπων (58) εἶναι $\eta\mu A-\eta\mu(A+B+\Gamma)=$

$$2\eta\mu\left(-\frac{B+\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(A+\frac{B+\Gamma}{2}\right)=-2\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(A+\frac{B+\Gamma}{2}\right)$$

Κατὰ δὲ τὸν α′ τῶν ἰδίων τύπων (58) εἶναι

$$\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=2\,\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right).$$

Ἐκ τῶν δύο τούτων τελευταίων ἰσοτήτων εὑρίσκομεν διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη: $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma-\eta\mu(A+B+\Gamma)=$

$$=2\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(A+\frac{B+\Gamma}{2}\right)\right].$$

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸν β′ τῶν τύπων (59) εἶναι:

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(A+\frac{B+\Gamma}{2}\right)=2\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{A+\Gamma}{2}\right)$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται:

$$\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma-\eta\mu(A+B+\Gamma)=$$

$$=4\,\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{A+\Gamma}{2}\right).\qquad (61)$$

Γ′. —. ***Νὰ μετασχηματισθῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις*** $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma$, ***ἂν*** $A+B+\Gamma=180^0$.—. Ἐπειδὴ καθ' ὑπόθεσιν εἶναι $A+B+\Gamma=180^0$, ἕπεται ὅτι

$$\frac{B+\Gamma}{2}=90^0-\frac{A}{2},\ \frac{A+B}{2}=90^0-\frac{\Gamma}{2}$$

καὶ $\frac{A+\Gamma}{2}=90^0-\frac{B}{2}$, ἑπομένως $\etaμ\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)=συν\frac{A}{2}$,

$$ημ\left(\frac{A+B}{2}\right)=συν\frac{\Gamma}{2},\quad ημ\left(\frac{A+\Gamma}{2}\right)=συν\frac{B}{2}.$$

Ἐὰν δὲ ἐν τῇ ἰσότητι (61) τεθῇ $A+B+\Gamma=180^0$ καὶ οἱ παράγοντες τοῦ β΄. μέλους αὐτῆς ἀντικατασταθῶσι διὰ τῶν προηγουμένων τιμῶν αὐτῶν, προκύπτει ἐξ αὐτοῦ ἡ ἰσότης:

$$ημ\,A+ημ\,B+ημ\,\Gamma=4\,συν\frac{A}{2}\,συν\frac{B}{2}\,συν\frac{\Gamma}{2}. \qquad (62)$$

Ἀσκήσεις. 173.— Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα
$ημ\,(42^0\,5')+(37^0 6'57'')$.

174) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα $ημ(25^0 15'30'')+ημ(40^0 53'12'')$

175) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ $ημ(54^0 6'17'')-ημ(23^0 4'9'')$.

176) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα $συν(21^0 15'20'')+συν(35^0 10'40'')$.

177) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ $συν(12^0 16'30'')-συν(40^0 20'24'')$.

178) Ἂν $A+B+\Gamma=180^0$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$συν\,A+συν\,B+συν\,\Gamma-1=4\,ημ\frac{A}{2}\,ημ\frac{B}{2}\,ημ\frac{\Gamma}{2}.$$

179) Τῇ βοηθείᾳ τῶν ἰσοτήτων (59) νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$1+συν\,A=2\,συν^2\left(\frac{A}{2}\right)$ καὶ $1-συνA=2\,ημ^2\left(\frac{A}{2}\right)$. (§ 73 Α΄)

180) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα $1+συν\,(35^0\,15')$ καὶ ἡ διαφορὰ $1-συν\,(75^0\,20'\,42'')$.

181) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $συνα+2συν2α+συν3α=4συν2ασυν^2\left(\frac{α}{2}\right)$.

182) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $ημα+2ημ2α+ημ3α=4ημ2ασυν^2\left(\frac{α}{2}\right)$.

183) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $\frac{ημ\,α+ημ\,3α+ημ\,5α}{συν\,α+συν\,3α+συν\,5α}$.

184) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $\frac{1-συντ}{1+συντ}$.

§ 86.—. ***Μετασχηματισμὸς τῶν παραστάσεων ημ$A\pm$συνB εἰς γινόμενα.***—. Ἐπειδὴ $συνB=ημ\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$, ἕπεται ὅτι:

$$\left.\begin{aligned}&\eta\mu A+\sigma\upsilon\nu B=\eta\mu A+\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\\&2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\\&\eta\mu A-\sigma\upsilon\nu B=\eta\mu A-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\\&2\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-B}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}\right\}\quad(63)$$

Ἀσκήσεις 185) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{\eta\mu A+\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu A-\sigma\upsilon\nu B}=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\sigma\varphi\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

186) Νὰ μετασχηματισθῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις ἡμτ+συντ

187) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως τεμ.τ+στεμ.τ διὰ τ=50° 17′ 18″.

188) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως τεμ.τ+ἐφ.τ διὰ τ=26° 12′ 38″.

§ 87.—. ***Μετασχηματισμὸς τῶν παραστάσεων ἐφ A ± ἐφ B εἰς πηλίκα.***—. Ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi A=\frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A}$ καὶ $\varepsilon\varphi B=\frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B}$ ἕπεται ὅτι:

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B=\frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A}+\frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B}=\frac{\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu A\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu A\ \sigma\upsilon\nu B}=\frac{\eta\mu(A+B)}{\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B}\\&\varepsilon\varphi A-\varepsilon\varphi B=\frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A}-\frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B}=\frac{\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B-\eta\mu B\sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu A\ \sigma\upsilon\nu B}=\frac{\eta\mu(A-B)}{\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B}\end{aligned}\right\}\quad(64)$$

Ἐφαρμογὴ εἰς τὰς παραστάσεις 1 ± ἐφτ.—. Παρατηροῦντες ὅτι $1=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$ ἀνάγομεν τὰς παραστάσεις ταύτας εἰς παραστάσεις τῶν προηγουμένων μορφῶν καὶ κατὰ τοὺς τύπους (64) εἶναι:

$$\left.\begin{aligned}&1+\varepsilon\varphi\,\tau=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}+\varepsilon\varphi\,\tau=\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+\tau\right)}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\sigma\upsilon\nu\,\tau}=\frac{\sqrt{2}\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+\tau\right)}{\sigma\upsilon\nu\,\tau}\\&1-\varepsilon\varphi\,\tau=\frac{\sqrt{2}\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-\tau\right)}{\sigma\upsilon\nu\,\tau}.\end{aligned}\right\}\quad(65)$$

Ἀσκήσεις. 189) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα

ἐφ (5° 18′) + ἐφ (22° 15′ 20″).

190) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\sigma\varphi A + \sigma\varphi B = \frac{\eta\mu(A+B)}{\eta\mu A\,\eta\mu B}$.

191) Νὰ καταστῇ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρ. ἡ παράστασις $\frac{\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B}{\sigma\varphi A + \sigma\varphi B}$.

192) Νὰ καταστῇ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρ. ἡ παράστασις $1 + \varepsilon\varphi^2 A$.

§ 88.—. ***Μετασχηματισμὸς γινομένου ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων εἰς ἡμιάθροισμα ἢ ἡμιδιαφοράν.***—. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) τῆς (§ 83) καὶ (3), (4) τῆς (§ 84) προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ ἰσότητες:

$$\left.\begin{aligned} \eta\mu\alpha.\,\sigma\upsilon\nu\beta &= \frac{1}{2}\left[\eta\mu(\alpha+\beta)+\eta\mu(\alpha-\beta)\right] \\ \eta\mu\beta.\,\sigma\upsilon\nu\alpha &= \frac{1}{2}\left[\eta\mu(\alpha+\beta)-\eta\mu(\alpha-\beta)\right] \\ \sigma\upsilon\nu\alpha.\,\sigma\upsilon\nu\beta &= \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)\right] \\ \eta\mu\alpha.\,\eta\mu\beta &= \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\right] \end{aligned}\right\} \quad (66)$$

Ἀσκήσεις 193) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\eta\mu 20^\circ.\eta\mu 40^\circ.\eta\mu 60^\circ.\eta\mu 80^\circ = \frac{3}{16}$

194) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\sigma\upsilon\nu 20^\circ.\ \sigma\upsilon\nu 40^\circ.\ \sigma\upsilon\nu 60^\circ.\ \sigma\upsilon\nu 80^\circ = \frac{1}{16}$.

195) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\varepsilon\varphi 20^\circ.\ \varepsilon\varphi 40^\circ.\ \varepsilon\varphi 60^\circ.\ \varepsilon\varphi 80^\circ = 3$.

196) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\varepsilon\varphi 9^\circ - \varepsilon\varphi 27^\circ - \varepsilon\varphi 63^\circ + \varepsilon\varphi 81^\circ = 4$.

197) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\eta\mu 7\chi - 2\eta\mu\chi(\sigma\upsilon\nu 2\chi + \sigma\upsilon\nu 4\chi + \sigma\upsilon\nu 6\chi) = \eta\mu\chi.$$

198) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\eta\mu\alpha\ \eta\mu(\beta-\gamma) + \eta\mu\beta\ \eta\mu(\gamma-\alpha) + \eta\mu\gamma\ \eta\mu(\alpha-\beta) = 0.$$

§ 89. ***Μετασχηματισμὸς διὰ τῆς χρήσεως βοηθητικῆς γωνίας παραστάσεων μὴ λογιστῶν εἰς ἄλλας λογιστὰς διὰ τῶν λογαρίθμων.***—.

Α΄ Μετασχηματισμὸς τῆς $(\alpha+\beta)$.—. Αὕτη μετασχηματίζεται καθ' οἱανδήποτε τῶν ἀκολούθων μεθόδων.

1η μέθοδος.— Εἶναι φανερὸν ὅτι: $\alpha+\beta = \alpha\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)$. Ἐὰν δὲ τεθῇ $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\beta}{\alpha}$ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται:

$$α+β=α(1+εφω)=α\sqrt{2}\,\frac{ημ\left(\frac{π}{4}+ω\right)}{συνω}. \qquad (\S\ 87 \text{ ἰσότης } 65)$$

2α μέθοδος.— Ἐὰν τεθῇ $εφ^2ω=\frac{β}{α}$, ἡ παράστασις γίνεται:

$$α+β=α(1+εφ^2ω)=\frac{α}{συν^2ω}.$$

3η μέθοδος.— Ἐὰν $β<α$ [1], τὸ κλάσμα $\frac{β}{α}$ εἶναι μικρότερον ἀπολύτως τῆς 1 καὶ κατ' ἀκολουθίαν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $συνω=\frac{β}{α}$, ὅτε ἡ παράστασις γίνεται:

$$α+β=α(1+συνω)=2α\,συν^2\frac{ω}{2} \qquad (\S\ 73\ Α')$$

Β'. ***Μετασχηματισμὸς τῆς (α—β), ἔνθα α>β.***—. ***1η μέθοδος.*** Ἐν πρώτοις εἶναι $α-β=α\left(1-\frac{β}{α}\right)$. Ἐὰν δὲ τεθῇ $εφ\,ω=\frac{β}{α}$, ἡ παράστασις γίνεται:

$$α-β=α(1-εφω)=α\sqrt{2}\,\frac{ημ\left(\frac{π}{4}-ω\right)}{συν\,ω} \qquad (\S\ 87, \text{ ἰσότ. } 65)$$

2α μέθοδος.—. Τοῦ β ὄντος μικροτέρου τοῦ α, τὸ κλάσμα $\frac{β}{α}$ εἶναι ἀπολύτως μικρότερον τοῦ 1, ἑπομένως δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $ημ^2ω=\frac{β}{α}$, ὅτε: $α-β=α(1-ημ^2ω)=α\,συν^2ω$.

3η μέθοδος.—. Ἐὰν τεθῇ $συν\,ω=\frac{β}{α}$, ἡ παράστασις γίνεται

$$α-β=α(1-συν\,ω)=2α\,ημ^2\frac{ω}{2} \qquad (\S\ 73\ Α').$$

Ἀσκήσεις.— 199) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι $λογ\,α=3,35892$ καὶ $λογ\,β=2,75964$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $α+β$ χωρὶς νὰ εὑρεθῶσιν προηγουμένως οἱ προσθετέοι αὐτοῦ.

200) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ $α-β$ ὑπὸ τοὺς προηγουμένους ὅρους καὶ περιορισμούς.

---

[1] Τοῦτο ἢ δηλοῦται ἐκ τῶν προτέρων ἢ διακρίνεται ἐκ τοῦ σχετικοῦ μεγέθους τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν α καὶ β, ἂν οἱ λογάριθμοι οὗτοι εἶναι δεδομένοι, οὐχὶ δὲ καὶ οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β.

201) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι $\lambda o\gamma\, \alpha = 1{,}27964$ καὶ $\lambda o\gamma\, \beta = 0{,}93106$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις $\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$ χωρὶς νὰ ὑπολογισθῶσι προηγουμένως οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β οὐδὲ οἱ ὅροι τῆς παραστάσεως ταύτης.

202) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλ. θετικὸν τόξον χ, δι' ὃ εἶναι

$$\text{ἐφ}\, \chi = \sqrt{2} + \text{ἡμ}\, 20^\circ.$$

Γ'.— *Μετασχηματισμὸς τῆς* $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.—. Ἐπειδὴ

$\alpha^2+\beta^2 = \alpha^2\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)$, ἕπεται ὅτι : $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \alpha\sqrt{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}}$.

Ἐὰν δὲ τεθῇ $\text{ἐφ}^2\omega = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$, προκύπτει ὅτι :

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \alpha\sqrt{1+\text{ἐφ}^2\omega} = \frac{\alpha}{\text{συν}\,\omega}. \quad (\S\ 56)$$

Δ'.—. *Μετασχηματισμὸς τῆς* $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$.—. Ἐργαζόμενοι, ὡς προηγουμένως εὑρίσκομεν ὅτι : $\sqrt{\alpha^2-\beta^2} = \alpha\sqrt{1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}}$. Θέτοντες δὲ $\text{συν}^2\omega = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ εὑρίσκομεν ὅτι : $\sqrt{\alpha^2-\beta^2} = \alpha\sqrt{1-\text{συν}^2\omega} = \alpha\,\text{ἡμ}\,\omega$.

Ε'.—. *Μετασχηματισμὸς τῶν παραστάσεων* $\alpha\,\text{ἡμ}\,\chi \pm \beta\,\text{συν}\,\chi$.

Ἐν πρώτοις εἶναι $\alpha\,\text{ημ}\,\chi + \beta\,\text{συν}\,\chi = \alpha\left(\text{ἡμ}\,\chi + \frac{\beta}{\alpha}\,\text{συν}\,\chi\right)$.

Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\text{ἐφ}\,\omega = \frac{\beta}{\alpha}$, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\alpha\,\text{ἡμ}\,\chi + \beta\,\text{συν}\,\chi = \alpha\left(\text{ἡμ}\,\chi + \frac{\text{ἡμ}\,\omega}{\text{συν}\,\omega}\,\text{συν}\,\chi\right) = \frac{\alpha\,\text{ἡμ}\,(\chi+\omega)}{\text{συν}\,\omega}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\alpha\text{ἡμ}\chi - \beta\text{συν}\,\chi = \frac{\alpha\text{ἡμ}\,(\chi-\omega)}{\text{συν}\,\omega}$.

Ἀσκήσεις. 203). Νὰ κατασιῇ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις $\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$, ἂν $\alpha > \beta > 0$.

204) Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν παράστασιν $\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} + \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}$, ἔνθα $\alpha > \beta > 0$.

205) Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν παράστασιν $\sqrt{\alpha+\beta} + \sqrt{\alpha-\beta}$, ἔνθα $\alpha > \beta > 0$.

206) Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν παράστασιν $\text{συν}\,\chi + \sqrt{3}\ \text{ἡμ}\,\chi$.

207) Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν παράστασιν $\text{ἡμ}\tau - \frac{\text{συν}\tau}{\sqrt{3}}$.

208) Τῇ βοηθείᾳ μιᾶς βοηθητικῆς γωνίας νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $\sqrt{\alpha^2+6^2+\gamma^2}$ διὰ $\alpha=895$, $6=1200$ καὶ $\gamma=450$.—

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζον

Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις καὶ συστήματα

§ 90.—. *Τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις*—. Ὑποτεθείσθω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τόξα ἢ γωνίας χ, δι' ἃς ἀληθεύει ἡ ἰσότης ἡμχ $= 0{,}15$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς εὑρίσκομεν λογήμχ $= \overline{1},17609$, ἐκ δὲ τῶν λογ. τριγ. πινάκων εὑρίσκομεν ὅτι: λογήμ $(8^0\ 37'\ 36'',83) = \overline{1},17609$. Ἄρα ἡμχ=ἡμ $(8^0\ 37'\ 36'',83)$, καὶ ἑπομένως (§52 Γ')

$$\left.\begin{aligned} \chi &= 2K.\ 180^0 + (8^0\ 37'\ 36'',83) \text{ ἢ} \\ \chi &= (2K+1)\ 180^0 - (8^0\ 37'\ 36'',83), \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

ἔνθα Κ δύναται νὰ εἶναι μηδὲν ἢ τυχὼν ἀκέραιος (θετ. ἢ ἀρν.) ἀριθμός.

Ὥστε ἡ ἰσότης ἡμχ$=0{,}15$ δὲν ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ, ἀλλὰ διὰ τιμὰς τοῦ χ παρεχομένας ὑπὸ τῶν εὑρεθεισῶν ἰσοτήτων (α) καὶ ὑπὸ τοὺς ῥηθέντας περιορισμούς. Ἡ ἰσότης αὕτη καλεῖται *τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις*. Ὁμοίως αἱ ἰσότητες 2ἡμχ $= 1$, ἐφχ-5σφχ $+ 4 = 0$, ἐφχ+ἐφψ$=2$ εἶναι τριγ. ἐξισώσεις.

Γενικῶς: *Τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις καλεῖται πᾶσα ἰσότης, ἥτις περιέχει ἕνα ἢ πλείονας τριγ. ἀριθμοὺς τόξου ἢ τόξων καὶ δέν ἀληθεύει διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ τόξου ἢ τῶν τόξων τούτων.*

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (α) εὑρίσκομεν ὅσα θέλομεν τόξα ἐκ τῶν ταὐτοποιούντων τὴν τριγ. ἐξίσωσιν ἡμχ$=0{,}15$. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ εὕρεσις τῶν ἰσοτήτων (α) ἀποτελεῖ τὴν λύσιν τῆς τριγ. ἐξισώσεως ἡμχ $= 0{,}15$.

Γενικῶς: *Λύσις τριγ. ἐξισώσεως καλεῖται ἡ εὕρεσις τύπου ἢ τύπων, ἐξ ὧν εὐχερῶς εὑρίσκομεν ὅσα θέλομεν τόξα ἐκ τῶν ταὐτοποιούντων τὴν ἐξίσωσιν ταύτην.*

§ 91. ***Λύσις τριγ. ἐξισώσεως ἐχούσης ἕνα ἄγνωστον.***—. Α'. *(ἁπλαῖ μορφαί)*.—. *α') Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις* ἡμχ=ἡμτ, ἔνθα τ εἶναι γνωστὸν τόξον (ἢ γωνία). Ἐπειδὴ τὰ τόξα χ καὶ τ ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον, ἕπεται (§ 52 Γ') ὅτι

$\chi = 2K\pi + \tau$ καὶ $\chi = (2K+1)\pi - \tau$, ἔνθα Κ δύναται νὰ λάβῃ τὴν τιμὴν 0 ἢ πᾶσαν ἀκεραίαν (θετ. ἢ ἀρν.) τιμήν.

β′.) *Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις συν χ = συν τ.*—. Ἐπειδὴ χ καὶ τ ἔχουσι τὸ αὐτὸ συνημίτονον, ἕπεται (§ 52 Α′) ὅτι $\chi = 2\text{K}\pi \pm \tau$.

γ′.) *Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις ἐφ χ = ἐφ τ.*—. Ἐπειδὴ χ καὶ τ ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην, ἕπεται (§ 52 Ε′) ὅτι $\chi = \lambda\pi + \tau$, ἔνθα λ δύναται νὰ εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος (θετ. ἢ ἀρν.) ἀριθμός.

δ′) *Ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς ἡμ χ = α, συν χ = β, ἐφ χ = γ,* ἔνθα α, β, γ εἶναι δεδομένοι ἀριθμοί, ἀνάγεται εἴς τινα τῶν προηγουμένων μορφῶν τῇ βοηθείᾳ τῶν λογ. πινάκων, ὡς προηγουμένως (§ 90) ἡ ἐξίσωσις ἡμ χ = 0,15 ἀνήχθη εἰς τὴν μορφὴν ἡμ χ = ἡμ (8° 37′ 36″, 83).

Σημ. Αἱ ἐξισώσεις σφχ = σφτ, τεμ χ = τεμ τ, στεμ χ = στεμ τ εἶναι ἀντιστοίχως ἰσοδύναμοι πρὸς τὰς ἐφ χ = ἐφ τ, συν χ = συν τ, ἡμ χ = ἡμ τ.

Β′.—. ***Ἐξισώσεις (μὴ ἁπλῆς μορφῆς) ἕνα μόνον τριγ. ἀριθμὸν τοῦ ἀγνώστου τόξου περιέχουσαι.***—. Ἐν τῇ ἐξισώσει 9 συν χ + 2 = 17 συν χ − 2 περιέχεται μόνον τὸ συνημίτονον τοῦ ἀγνώστου τόξου χ· διὰ τοῦτο αὕτη εἶναι ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις μὲ βοηθητικὸν ἄγνωστον τὸ συν χ. Λύοντες ὅθεν ταύτην πρὸς συν χ εὑρίσκομεν τὴν ἁπλῆς μορφῆς ἐξίσωσιν $\text{συν}\,\chi = \frac{1}{2}$.

Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις $\text{ἐφ}\,\chi + \frac{3\,\text{ἐφ}\,\chi - 9}{5} = 4 - \frac{5\,\text{ἐφ}\,\chi - 12}{3}$ λυομένη πρὸς τὴν ἐφ χ λαμβάνει τὴν ἁπλῆν μορφὴν ἐφ χ = 3, ἥτις λύεται κατὰ τὰ προειρημένα.

Ἡ ἐξίσωσις $\frac{\text{ἡμ}\,\chi - 1}{\text{ἡμ}\,\chi + 1} - \frac{\text{ἡμ}\,\chi + 1}{\text{ἡμ}\,\chi - 1} = \frac{40}{21}$ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ $10\,\text{ἡμ}^2\chi + 21\,\text{ἡμ}\,\chi - 10 = 0$, ἣν λύοντες πρὸς ἡμ χ εὑρίσκομεν τὰς $\text{ἡμ}\,\chi = \frac{2}{5}$ καὶ $\text{ἡμ}\,\chi = -\frac{5}{2}$, ὧν ἡ τελευταία ἀδύνατος. Ὥστε ἡ λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῆς ἁπλῆς μορφῆς ἐξισώσεως $\text{ἡμ}\,\chi = \frac{2}{5}$.

Ἡ ἐξίσωσις $\frac{\text{ἐφ}^2\chi + 3\,\text{ἐφ}\,\chi}{3} - \frac{\text{ἐφ}^2\chi + 1}{2\,\text{ἐφ}\,\chi} = \frac{\text{ἐφ}\,\chi - \frac{6}{\text{ἐφ}\chi}}{12}$ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ $4\,\text{ἐφ}^3\chi + 5\,\text{ἐφ}^2\chi = 0$ ἢ $\text{ἐφ}^2\chi\,(4\,\text{ἐφ}\,\chi + 5) = 0$, ἧς ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἁπλῆς μορφῆς ἐξισώσεων

$$\text{ἐφ}\,\chi = 0 \qquad \text{καὶ} \qquad \text{ἐφ}\,\chi = -\frac{5}{4}.$$

Ὥστε: *Πᾶσα τριγ. ἐξίσωσις ἕνα μόνον τριγ. ἀριθμὸν τοῦ ἀγνώστου τόξου περιέχουσα λαμβάνει ἁπλῆν μορφήν, ἐὰν λυθῇ πρὸς τὸν τριγωνομετρικὸν τοῦτον ἀριθμόν.*

Γ'.—. *Εἰς τὴν κατηγορίαν ταύτην ὑπάγομεν πάσας τὰς λοιπὰς τριγ. ἐξισώσεις μὲ ἕνα ἄγνωστον, ἤτοι τὰς περιεχούσας πλείονας τοῦ ἑνὸς τριγ. ἀριθμοὺς τοῦ ἀγνώστου τόξου ἢ πολλαπλασίων καὶ ὑποπολλαπλασίων αὐτοῦ. Τοιαῦται εἶναι αἱ ἐξισώσεις, ἃς ἐν τοῖς ἀκολούθοις ὡς παραδείγματα ἀναφέρομεν.*

Παράδ. 1ον.—. $3\,\text{ἡμ}^2\chi - \text{συν}^2\chi = 1$.—. Ταύτην λύομεν κατὰ τοὺς ἀκολούθους δύο τρόπους.

1ος τρόπος.—. Θέτοντες ἐν αὐτῇ $1-\text{ἡμ}^2\chi$ ἀντὶ $\text{συν}^2\chi$ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $3\,\text{ἡμ}^2\chi - 1 + \text{ἡμ}^2\chi = 1$ ἢ $4\,\text{ἡμ}^2\chi = 2$, ὅθεν

$\text{ἡμ}\,\chi = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, αἵτινες ἔχουσιν ἀμφότεραι ἁπλῆν μορφήν.

2ος τρόπος.—. Ἐπειδὴ $\text{συν}^2\chi + \text{ἡμ}^2\chi = 1$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω: $\dfrac{3\text{ἡμ}^2\chi - \text{συν}^2\chi}{\text{συν}^2\chi + \text{ἡμ}^2\chi} = 1$. Ἐὰν δὲ ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ α'. μέλους αὐτῆς διαιρεθῶσι διὰ $\text{συν}^2\chi$, προκύπτει ἡ ἰσοδύναμος ἐξίσωσις $\dfrac{3\,\text{ἐφ}^2\chi - 1}{1 + \text{ἐφ}^2\chi} = 1$, ἐξ ἧς προκύπτουσιν αἱ ἁπλαῖ ἐξισώσεις $\text{ἐφ}\chi = \pm 1$.

Παράδ. 2ον.—. $\text{ἐφ}^2\chi + 4\,\text{ἡμ}^2\chi - \dfrac{36}{5} = 0$. — . Πρὸς λύσιν αὐτῆς θέτομεν $\dfrac{\text{ἐφ}^2\chi}{1 + \text{ἐφ}^2\chi}$ ἀντὶ τοῦ $\text{ἡμ}^2\chi$ (§ 56, ἰσ. 14). ὅτε ἡ ἐξίσωσις γίνεται: $\text{ἐφ}^2\chi + \dfrac{4\,\text{ἐφ}^2\chi}{1 + \text{ἐφ}^2\chi} - \dfrac{36}{5} = 0$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος τῇ $5\,\text{ἐφ}^4\chi - 11\,\text{ἐφ}^2\chi - 36 = 0$. Λύοντες ταύτην πρὸς $\text{ἐφ}^2\chi$ εὑρίσκομεν $\text{ἐφ}^2\chi = 4$ καὶ $\text{ἐφ}^2\chi = -\dfrac{9}{5}$, ὧν ἡ β'. ἀδύνατος· τῆς δὲ α'. ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν τῶν ἁπλῶν ἐξισώσεων $\text{ἐφ}\,\chi = \pm 2$.

Παράδ. 3ον.—. $8\,\text{ἡμ}\,\chi\,\text{συν}\,\chi = 3$.— Αὕτη λύεται ὡς ἀκολούθως.

1ος τρόπος.—. Ἐπειδὴ $2\,\text{ἡμ}\chi\,\text{συν}\,\chi = \text{ἡμ}2\chi$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται

4 ἡμ$2\chi = 3$, ὅθεν ἡμ$2\chi = \frac{3}{4}$, ἥτις ἔχει ἁπλῆν μορφήν, ἂν θεωρηθῇ ὡς ἄγνωστον τὸ τόξον 2χ.

2ος τρόπος,—. Ἐπειδὴ συν$^2\chi$ + ἡμ$^2\chi = 1$, ἡ ἐξίσωσις γράφεται καὶ οὕτω: $\frac{8 \text{ ἡμ } \chi \text{ συν } \chi}{\text{συν}^2\chi + \text{ἡμ}^2\chi} = 3$, ὅθεν $\frac{8 \text{ ἐφ } \chi}{1 + \text{ἐφ}^2\chi} = 3$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος τῇ 3 ἐφ$^2\chi - 8$ ἐφ$\chi + 3 = 0$· αὕτη δὲ ἀνάγεται εἰς τὰς τῆς Β'. κατηγορίας καὶ λύεται ὡς ἐμάθομεν ἤδη.

Σημ. Ἀπεφύγαμεν νὰ ὁρίσωμεν τὸ ἡμ χ ἢ τὸ συν χ συναρτήσει τοῦ ἄλλου, διότι οὕτω θὰ προέκυπτον ἐξισώσεις μὲ ῥιζικόν, ἡ δὲ λύσις αὐτῶν θὰ ἀπῄτει ὕψωσιν εἰς τὸ τετράγωνον, συνεπείᾳ τῆς ὁποίας πιθανὸν νὰ εἰσήγοντο καὶ ξέναι ῥίζαι, ὧν ὁ χωρισμὸς θὰ ἦγεν εἰς μακρὰν καὶ ἐπίπονον διερεύνησιν.

Παράδ. 4ον.—. *4συνχ—8συν $\frac{\chi}{2} + 6 = 0$.—.* Ἐπειδὴ κατὰ τὸν τύπον (44) εἶναι συνχ=2 συν$^2 \frac{\chi}{2} - 1$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη γίνεται 8 συν$^2 \frac{\chi}{2} - 4 - 8$συν $\frac{\chi}{2} + 6 = 0$ ἢ 4συν$^2\frac{\chi}{2} - 4$συν $\frac{\chi}{2} + 1 = 0$ ἥτις ὑπάγεται εἰς τὰς τῆς Β' κατηγορίας ὡς ἔχουσα ἕνα μόνον τριγ. ἀριθμὸν τὸν συν $\frac{\chi}{2}$.

Ἐκ τῶν παραδειγμάτων τούτων κατανοοῦμεν ὅτι: *ὅταν τριγ. ἐξίσωσις περιέχῃ πλείονας τοῦ ἑνὸς τριγ. ἀριθμοὺς τοῦ ἀγνώστου τόξου ἢ πολλαπλασίων καὶ ὑποπολλαπλασίων αὐτοῦ, πρέπει νὰ φροντίζωμεν νὰ εὑρίσκωμεν ἄλλην ἰσοδύναμον καὶ ἕνα ἔχουσαν τριγ. ἀριθμὸν τοῦ ἀγνώστου τόξου ἢ πολλαπλασίου καὶ ὑποπολλαπλασίου αὐτοῦ·*

Τοῦτο ἐπιτυγχάνομεν ἐκφράζοντες τοὺς ἐν αὐτῇ ἀγνώστους τριγ. ἀριθμοὺς συναρτήσει ἑνὸς μόνου τριγ. ἀριθμοῦ. Ἡ ἁπλότης δὲ καὶ ταχύτης τῆς λύσεως τριγ. ἐξισώσεως ἐξαρτᾶται τὰ μάλιστα ἐκ τῆς ἐπιτυχοῦς ἐκλογῆς τοῦ (βοηθητικοῦ) τριγ ἀριθμοῦ, ὅστις θὰ ὑπολειφθῇ ἐν τῇ ἐξισώσει.

Εἰς πολλὰς περιπτώσεις (οὐχὶ πάσας) διὰ τὴν ἐκλογὴν ταύτην τοῦ βοηθητικοῦ ἀγνώστου δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς ὁδηγὸς ὁ ἀκόλουθος πρακτικὸς κανὼν τοῦ Bioche.

«*Ἐὰν τριγ. ἐξίσωσις δὲν ἀλλοιοῦται, ὅταν ἐν αὐτῇ ἀντικατα-*

σταθῇ τὸ ἄγνωστον τόξον χ ὑπό τινος τῶν τόξων (π—χ), —χ, (π+χ), δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς βοηθητικὸν ἄγνωστον ἀντιστοίχως τὸ ἡμίτονον, συνημίτονον, ἐφαπτομένην. Ἐὰν δὲ πᾶσαι αἱ εἰρημέναι ἀντικαταστάσεις ἀλλοιῶσι τὴν ἐξίσωσιν, λαμβάνομεν ὡς ἄγνωστον τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἡμίσεος τόξου»

Πρὸς ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος τούτου ἀναγράφομεν τρία ἕτερα παραδείγματα.

Παράδ. 5ον.—. *ἡμχ—συνχ=1.—.* Κατὰ τὸν ῥηθέντα κανόνα πρέπει νὰ λάβωμεν ὡς βοηθητικὸν ἄγνωστον τὴν $\text{ἐφ}\left(\frac{\chi}{2}\right)$. Λαμβάνοντες ὅθεν ὑπ' ὄψιν τοὺς τύπους (50) θέτομεν ταύτην ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{2\text{ἐφ}\left(\frac{\chi}{2}\right)-1+\text{ἐφ}^2\left(\frac{\chi}{2}\right)}{1+\text{ἐφ}^2\left(\frac{\chi}{2}\right)}=1, \text{ ἐξ ἧς ἐφ}\left(\frac{\chi}{2}\right)=1.$$

Παράδ. 6ον.—. *1 + ἡμ 3χ=συν 2χ.—.* Ἐπειδὴ ἡμ 3 (π—χ.) = ἡμ[2π+(π—3χ)]=ἡμ(π—3χ)=ἡμ3χ καὶ συν2(π—χ)=συν(2π—2χ) = συν 2χ, ἡ ἐξίσωσις δὲν ἀλλοιοῦται, ἂν ὁ χ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ (π—χ). Λαμβάνομεν, ὅθεν, ὡς βοηθητικὸν ἄγνωστον τὸ ἡμ χ. Πρὸς τοῦτο ἐνθυμούμεθα (51,43)· ὅτι ἡμ3χ = 3ἡμχ — 4ἡμ^{3}χ καὶ συν2χ = συν^{2}χ — ἡμ^{2}χ = 1—2 ἡμ^{2}χ.

Ἡ ἐξίσωσις ὅθεν γίνεται: 1 + 3 ἡμ χ — 4 ἡμ^{3}χ=1—2 ἡμ^{2}χ, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος τῇ ἡμ χ (4 ἡμ^{2}χ — 2 ἡμχ — 3) = 0· ταύτης δὲ ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων ἡμ χ = 0 καὶ 4 ἡμ^{2}χ — 2 ἡμ χ — 3 = 0.

Παράδ. 7ον.—. *συν 2χ + 3 ἡμ 2χ = 2.—.* Ἐπειδὴ αὕτη δὲν ἀλλοιοῦται, ἐὰν ἀντὶ χ τεθῇ (π + χ), μεταχειριζόμεθα ὡς βοηθητικὸν τὴν ἐφ χ. Πρὸς τοῦτο ἐκφράζομεν τὸ συν 2 χ καὶ ἡμ 2 χ συναρτήσει τῆς ἐφχ κατὰ τοὺς τύπους (50), ὅτε ἡ ἐξίσωσις γίνεται,

$$\frac{1-\text{ἐφ}^2\chi+6\,\text{ἐφ}\,\chi}{1+\text{ἐφ}^2\chi}=2, \text{ ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος τῇ}$$

3 ἐφ^{2}χ— 6 ἐφχ+ 1 = 0, ἥτις ὑπάγεται εἰς τὰς τῆς Β' κατηγορίας.

Σημ. Τὴν ἀποπεράτωσιν τῶν λύσεων τῶν ἐν τοῖς προηγουμένοις παραδείγμασιν ἀναφερομένων ἐξισώσεων ἀπὸ σκοποῦ ἀφήνομεν διὰ τοὺς μαθητάς.

§ 92. ***Ἀξιοσημείωτοι ἐξισώσεις.—*** Πλὴν τῆς γενικῆς μεθόδου, περὶ ἧς ὡμιλήσαμεν ἀνωτέρω, τῆς ἐκφράσεως δηλ. τῶν ἔν τινι ἐξισώσει περιεχομένων τριγ. ἀριθμῶν συναρτήσει ἑνός, ὅστις λαμβάνεται οὕτω ὡς βοηθητικὸς ἄγνωστος, ὑπάρχουσι καὶ εἰδικαὶ μέθοδοι, αἵτινες ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς μορφῆς τῶν ἐξισώσεων καὶ δὲν δύνανται νὰ ὑπαχθῶσιν εἰς γενικὸν κανόνα. Ἵνα λάβωμεν ἰδέαν τῶν τοιούτων μεθόδων ἀναγράφομεν ἐν τοῖς ἀκολούθοις τὴν λύσιν ἐξισώσεών τινων, αἵτινες συχνὰ ἀπαντῶνται.

Παράδ. 1ον.—. $\alpha\, \eta\mu\, \chi + \beta\, \sigma\upsilon\nu\, \chi = \gamma$, ἔνθα α, β, γ εἶναι γνωστοὶ ἀριθμοί.—. Καθιστῶντες τὸ α΄. μέλος αὐτῆς λογιστὸν διὰ τῶν λογαρίθμων (§ 89 Ε΄) θέτομεν τὴν ἐξίσωσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha \dfrac{\eta\mu(\chi+\omega)}{\sigma\upsilon\nu\,\omega} = \gamma$, ὅθεν $\eta\mu\,(\chi+\omega) = \dfrac{\gamma}{\alpha}\,\sigma\upsilon\nu\,\omega$, ἔνθα $\varepsilon\varphi\,\omega = \dfrac{\beta}{\alpha}$.
Ὁριζομένης πρῶτον τῆς τιμῆς τῆς βοηθητικῆς γωνίας ω λύεται εἶτα ἡ ἐξίσωσις πρὸς $(\chi+\omega)$ καὶ εἶτα ἐκ τῶν εὑρεθησομένων τύπων πρὸς $(\chi+\omega)$ εὑρίσκονται οἱ ζητούμενοι ἤτοι οἱ παρέχοντες ὅσας θέλομεν τιμὰς τοῦ χ ἐκ τῶν ταὐτοποιουσῶν τὴν ἐξίσωσιν.

Παράδ. 2ον.—. $\alpha\,\varepsilon\varphi\chi + \beta\sigma\varphi\chi = \gamma$, ἔνθα α, β, γ εἶναι γνωστοὶ ἀριθμοί.

Αὕτη γράφεται καὶ οὕτω $\qquad \alpha\,\dfrac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} + \beta\,\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi} = \gamma$, ὅθεν

$\alpha\,\eta\mu^2\chi + \beta\sigma\upsilon\nu^2\chi = \gamma\,\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi$. Ἐὰν δὲ πολ/σθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ 2 καὶ ληφθῶσιν ὑπ' ὄψιν αἱ ἰσότητες: $2\eta\mu^2\chi = 1 - \sigma\upsilon\nu 2\chi$, $2\sigma\upsilon\nu^2\chi = 1 + \sigma\upsilon\nu 2\chi$, $2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = \eta\mu 2\chi$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται: $\alpha(1-\sigma\upsilon\nu 2\chi) + \beta(1+\sigma\upsilon\nu 2\chi) = \gamma\eta\mu 2\chi$ ἢ $\gamma\eta\mu 2\chi + (\alpha-\beta)\sigma\upsilon\nu 2\chi = \alpha+\beta$, ἥτις ἔχει τὴν μορφὴν τῆς προηγουμένης καὶ λύεται ὡς ἐκείνη.

Παράδ. 3ον.—. $\alpha\eta\mu^2\chi + \beta\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \gamma\sigma\upsilon\nu^2\chi = \delta$.—. Πολ/ζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ 2 καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι ἀναγραφείσας ἰσότητας δίδομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τὴν μορφὴν $\beta\eta\mu 2\chi + (\gamma-\alpha)\,\sigma\upsilon\nu 2\chi = 2\delta - \alpha - \gamma$, ἥτις λύεται πρὸς 2χ ὡς ἡ τοῦ α΄ παραδείγματος.

Παράδ. 4ον.—. $\alpha\,(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi) + \beta\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = \gamma$.—. Ἐπειδὴ

$$\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \eta\mu\chi + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) = 2\,\eta\mu\,\frac{\pi}{4}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) =$$

$\sqrt{2}.\,\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{4} - \chi\right)$ καὶ $\qquad \eta\mu\chi.\,\sigma\upsilon\nu\chi = \dfrac{\eta\mu 2\chi}{2}$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται:

$$\alpha\sqrt{2}.\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) + \frac{\beta}{2}\,\eta\mu 2\chi = \gamma.$$

Ἐὰν ἤδη θέσωμεν $\frac{\pi}{4}-\chi=\omega$, εὑρίσκομεν ὅτι $2\chi=\frac{\pi}{2}-2\omega$ ἄρα $\etaμ2\chi=συν2\omega$ καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἐξίσωσις γίνεται:

$α\sqrt{2}\,συνω+\frac{β}{2}\,συν2ω=γ$. Ἐπειδὴ δὲ $συν2ω=2συν^2ω-1$,

ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις γίνεται: $α\sqrt{2}.\,συνω+\frac{β}{2}(2συν^2ω-1)=γ$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος τῇ

$2βσυν^2ω+2\sqrt{2}\cdot ασυνω-β-2γ=0$, ἐξ ἧς προκύπτει ὅτι:

$συνω=\frac{-α\sqrt{2}\pm\sqrt{2α^2+2β(β+2γ)}}{2β}$. Λύοντες τὰς δύο ταύτας ἁπλᾶς ἐξισώσεις εὑρίσκομεν τοὺς τύπους, οἵτινες παρέχουσι τὰς τιμὰς τοῦ ω· ἐκ τούτων δὲ καὶ τῆς $\frac{\pi}{4}-\chi=\omega$ εὑρίσκομεν τοὺς τὰς τιμὰς τοῦ χ παρέχοντας τύπους.

Σημ. Εἶναι εὐνόητον ὅτι ἵνα ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχῃ λύσιν, πρέπει $2α^2+2β\,(β+2γ)\geqq 0$ καὶ

$$-1\leqq\frac{-α\sqrt{2}\pm\sqrt{2α^2+2β(β+2γ)}}{2β}\leqq 1.$$

Ἀσκήσεις. 209) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημ\frac{\chi}{2}=συν\chi$.

210) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ημ^2\chi-συν^2\chi=0$

211) » » » $2συν^2\chi-3συν\chi+1=0$

212) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{3\,ημ\,\chi-συν\,\chi}{ημ\,\chi+συν\,\chi}=1.$

213) » » » $ημ\left(\frac{3\pi}{2}+\chi\right)+συν\,3\chi=0.$

214) » » » $εφ\left(\chi+\frac{\pi}{3}\right)+σφ\left(\frac{\pi}{2}-3\chi\right)=0.$

215) » » » $εφ\,\chi.\;εφ\,3\chi=1.$

216) » » » $2\,συν\,\chi=τεμ\,\chi.$

217) » » » $\frac{εφ\left(\frac{\pi}{3}-\chi\right)}{συν^2\chi}=\frac{εφ\,\chi}{συν^2\left(\frac{\pi}{3}-\chi\right)}.$

218) » » » $1+συν\,\chi+συν\,2\chi+συν\,3\chi=0.$

219) » » » $ημ\,\chi-συν\,\chi=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

220) » » » $\sqrt{3}.\,ἡμ\,\chi + συν\,\chi - 1 = 0$·

221) » » » $συν\,3\chi + ἡμ\,3\chi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

222) » » » $ἡμ\,\chi + 2\,συν\,\chi = τεμ\,\chi$.

223) » » » $12\,συν^2\chi - ἡμ\,\chi = -11$.

224) » » » $σφ\,\chi - ἐφ\,\chi = ἡμ\,\chi + συν\,\chi$.

225) » » » $ἡμ^4\chi + συν^4\chi = \frac{2}{3}$

226) » » » $ἡμ^6\chi + συν^6\chi = \frac{1}{4}$

227) » » » $\frac{1}{ἡμ\chi} + \frac{1}{συν\chi} = 1$.

228) » » » $2\,συν\,\frac{\chi}{3} - ἡμ\,\frac{\chi}{2} = 2$

229) » » » $ἡμ\,2\,\chi + συν\,2\,\chi = \sqrt{2}\,\,ἡμ\chi$

230) » » » $ἡμ\,\chi + 2συν\chi = τεμ\chi$

231) » » » $ἡμ\,2\,\chi = 3\,συν\,3\,\chi$

232) » » » $3\,ἐφ^2\,\chi - 16\,ἡμ^2\,\chi + 3 = 0$.

233) » » » $2\,ἡμ^2\,\chi + \sqrt{3}.\,ἡμ\,2\,\chi - 3 = 0$

234) » » » $ἡμ^2\,\chi + ἡμ2\chi - 2συν^2\chi = \frac{1}{2}$

235) » » » $\frac{ἡμ\chi + ἡμ3\chi + ἡμ5\chi}{συν\chi + συν3\chi + συν5\chi} = 4ἐφ\chi$

236) » » » $\frac{1}{ἡμ^2\chi.συν^2\chi} - \frac{1}{ἐφ^2\chi} - 3 = 0$.

237) » » » $σφ\chi - ἐφ\chi = 2$.

§ 93. ***Τριγωνομετρικὰ συστήματα.***—. Ἐὰν σύστημα ἐξισώσεων περιέχῃ μίαν ἢ πλείονας τριγ. ἐξισώσεις, καλεῖται *τριγωνομετρικὸν σύστημα.* Τοιαῦτα π.χ. εἶναι τὰ ἀκόλουθα δύο συστήματα:

1ον) $\begin{cases} ἡμ\chi + ἡμ\psi = \alpha \\ συν\chi + συν\psi = \beta \end{cases}$ 2ον) $\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ ἡμ\chi + ἡμ\psi = \beta \end{cases}$

Τὰ τριγ. συστήματα δυνάμεθα νὰ κατατάξωμεν εἰς δύο κατηγορίας. Εἰς τὴν πρώτην τούτων ὑπάγομεν ὅσα μόνον τριγ. ἀριθμοὺς τῶν ἀγνώστων τόξων περιέχουσι· τοιοῦτον π.χ. εἶναι τὸ α΄ τῶν προηγουμένων συστημάτων. Εἰς δὲ τὴν δευτέραν κατηγορίαν ὑπάγομεν ὅσα πλὴν τριγ. ἀριθμῶν τῶν ἀγνώστων τόξων περιέχουσι καὶ αὐτὰ τὰ τόξα. Τοιοῦτον εἶναι τὸ β'. τῶν ἀνωτέρω συστημάτων.

§ 94. ***Λύσις τριγ. συστημάτων Α' κατηγορίας.—.*** Πρὸς λύσιν τοιούτου συστήματος περιέχοντος ἐξισώσεις ἰσαρίθμους πρὸς τὰ ἄγνωστα τόξα δυνάμεθα νὰ ἀκολουθήσωμεν τὴν ἑξῆς γενικὴν μέθοδον. *Ἐκφράζομεν τοὺς ἐν τῷ συστήματι περιεχομένους τριγ. ἀριθμοὺς ἑκάστου ἀγνώστου τόξου συναρτήσει ἑνός μόνου τριγ. ἀριθμοῦ τοῦ αὐτοῦ τόξου καὶ οὕτω λαμβάνομεν ἀλγεβρικὸν σύστημα μὲ ἀγνώστους τοὺς ὑπολειφθέντας τριγ. ἀριθμοὺς τῶν ἀγνώστων τόξων Ἑκάστη δὲ λύσις τοῦ συστήματος τούτου ἄγει εἰς τὴν λύσιν ἰσαρίθμων πρὸς τὰ ἄγνωστα τόξα ἁπλῶν ἐξισώσεων.*

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ σύστημα:

$$\begin{aligned} \text{συν}\, \chi + \text{συν}\, \psi &= 3 \\ \text{τεμ}\, \chi + \text{τεμ}\, \psi &= 2. \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ $\text{τεμ}\, \chi = \frac{1}{\text{συν}\, \chi}$ καὶ $\text{τεμ}\, \psi = \frac{1}{\text{συν}\, \psi}$, τὸ σύστημα ἀνάγεται εἰς τὸ ἀκόλουθον:

$$\text{συν}\, \chi + \text{συν}\, \psi = 3, \quad \frac{1}{\text{συν}\, \chi} + \frac{1}{\text{συν}\, \psi} = 2,$$ ὅπερ λύομεν πρὸς συν χ καὶ συν ψ ὡς ἑξῆς. Ἐξαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς τῆς β'. καὶ εὑρίσκομεν $\text{συν}\, \chi + \text{συν}\, \psi = 2\, \text{συν}\, \chi\, \text{συν}\, \psi$, ὅθεν ἕνεκα τῆς α'. προκύπτει ἡ $\text{συν}\, \chi\, \text{συν}\, \psi = \frac{3}{2}$. Οἱ ἄγνωστοι ὅθεν συν χ καὶ συνψ εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $X^2 - 3X + \frac{3}{2} = 0$, ἤτοι εἶναι

$$\text{συν}\chi = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \text{συν}\, \psi = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$ ἢ καὶ τἀνάπαλιν

$$\text{συν}\, \chi = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \text{συν}\psi = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}.$$ Οὕτως ἤχθημεν εἰς τὴν λύσιν ἁπλῶν τριγ. ἐξισώσεων.

Ἡ γενικὴ αὕτη μέθοδος, εἰ καὶ κατ' ἀρχὴν δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς πᾶν σύστημα τῆς κατηγορίας ταύτης, ἄγει ἐνίοτε εἰς πράξεις λίαν πολυπλόκους· δι' ὃ ἐπιδιώκεται συνήθως δι' ἕκαστον σύστημα τεχνική τις μέθοδος ἐκ τῆς μορφῆς αὐτοῦ ἐξαρτωμένη.

Ὡς παραδείγματα ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα.

Παράδ. 1ον.—.
$$\begin{aligned} \text{συν}\, \chi + \text{συν}\, \psi &= \alpha \\ \text{ἡμ}\, \chi + \text{ἡμ}\, \psi &= \beta \end{aligned} \qquad (1)$$

Μετασχηματίζοντες τὰ α'. μέλη τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν εἰς γινόμενα λαμβάνομεν τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} 2\,\text{συν}\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)&=\alpha \\ 2\,\text{ἡμ}\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)&=6 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Ἐκ τούτου δὲ προκύπτει εὐκόλως ἡ ἐξίσωσις $\text{ἐφ}\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right)=\frac{6}{\alpha}$.

Ἐὰν δὲ τ εἶναι τόξον ἐκ τῶν πινάκων εἰλημμένον καὶ ἔχον ἐφαπτομένην ἴσην πρὸς $\frac{6}{\alpha}$, θὰ ἀληθεύῃ ἡ ἐξίσωσις $\frac{\chi+\psi}{2}=\text{Κ}\pi+\tau$, ἄρα $\text{συν}\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right)=\text{συν}(\text{Κ}\pi+\tau)=\pm\,\text{συν}\,\tau$. Ἡ α'. ὅθεν τῶν ἐξισώσεων (2) γίνεται: $\pm 2\,\text{συν}\,\tau.\,\text{συν}\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)=\alpha$, ἄρα $\text{συν}\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)=\pm\frac{\alpha}{2\,\text{συν}\,\tau}$. Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν ὅτι ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν τόξον τι φ τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $\text{συν}\,\varphi=\frac{\alpha}{2\text{συν}\,\tau}$, τότε καὶ $\text{συν}(\pi-\varphi)=-\,\text{συν}\,\varphi=-\frac{\alpha}{2\,\text{συν}\,\tau}$. Ἄρα θὰ εἶναι $\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)=2\,\text{Κ}\pi\pm\varphi$ καὶ $\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)=2\,\text{Κ}\,\pi\pm(\pi-\varphi)=(2\,\text{Κ}\pi\pm 1)\,\pi\pm\varphi$, οἵτινες τύποι προφανῶς συμπτύσσονται εἰς τὸν $\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)=\lambda\pi\pm\varphi$. Ὥστε εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi+\psi}{2}=\text{Κ}\pi+\tau$ ἀντιστοιχοῦσι δύο ἐξισώσεις παρέχοντες τὸ $\frac{\chi-\psi}{2}$. Ἀγόμεθα ὅθεν εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀκολούθων δύο ἀλγεβρικῶν συστημάτων

$$\begin{aligned} \frac{\chi+\psi}{2}&=\text{Κ}\pi+\tau \\ \frac{\chi-\psi}{2}&=\lambda\pi+\varphi \end{aligned} \qquad \text{καὶ} \qquad \begin{aligned} \frac{\chi+\psi}{2}&=\text{Κ}\pi+\tau \\ \frac{\chi-\psi}{2}&=\lambda\pi-\varphi \end{aligned}$$

Παράδ. 2ον.
$$\begin{aligned} \text{ἡμ}\,\chi+\text{συν}\,\psi&=0 \\ \text{συν}\,\chi.\,\text{ἡμ}\,\psi.&=\alpha. \end{aligned}$$

Ἐκ τῆς α'. λαμβάνομεν $\text{συν}\,\psi=-\,\text{ἡμ}\,\chi=\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}+\chi\right)$, ἄρα

$$\psi=2\,\text{Κ}\,\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}+\chi\right).$$

Ἡ δὲ β'. γίνεται : $συν\,χ.\,ἡμ\,\left[2Κπ \pm \left(\frac{π}{2} + χ\right)\right] = α$ ἢ

$$\pm\, συν\,χ.\,ἡμ\,\left(\frac{π}{2} + χ\right) = α.$$

Ἐπειδὴ δὲ $ἡμ\left(\frac{π}{2} + χ\right) = συν\,(-χ) = συν\,χ$, ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις γίνεται $\pm\, συν^2 χ = α$ ἢ $συν^2 χ = \pm\, α$, ὧν ἡ μία μόνον εἶναι παραδεκτή. Ἔστω δὲ αὕτη ἡ $συν^2 χ = α$, ἐξ ἧς προκύπτουσιν αἱ ἁπλαῖ ἐξισώσεις $συν^2 χ = \pm\sqrt{α}$. Ἂν δὲ εὕρωμεν ἐκ τῶν πινάκων τόξον τι τ τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $συν\,τ = \sqrt{α}$, τότε θὰ εἶναι καὶ $συν\,(π - τ) = -\sqrt{α}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ μὲν $συν\,χ = \sqrt{α}$ ταὐτοποιεῖται, ὅταν $χ = 2\,Κ\,π \pm τ$ ἡ δὲ $συνχ = -\sqrt{α}$ ταὐτοποιεῖται ὅταν $χ = 2Κπ \pm (π - τ) = (2Κ \pm 1)\,π \pm τ$. Οἱ τύποι ὅμως οὗτοι συγχωνεύονται εἰς τοὺς $χ = λπ \pm τ$, ἔνθα λ εἶναι τυχὼν ἀκέραιος (θετ. ἢ ἀρν.) ἀριθμὸς ἢ καὶ μηδέν. Εἰς ἑκάτερον δὲ τούτων ἀντιστοιχοῦσι δύο τύποι παρέχοντες τὸν ψ, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἀρχικῶς εὑρεθεισῶν ἰσοτήτων $ψ = 2Κπ \pm \left(\frac{π}{2} + χ\right)$.

Οὕτως εὑρίσκομεν τὰς ἀκολούθους λύσεις.

$$α')\ \begin{cases} χ = λπ + τ \\ ψ = 2Κπ + \left(\frac{π}{2} + λπ + τ\right) \end{cases} \qquad β')\ \begin{cases} χ = λπ + τ \\ ψ = 2Κπ - \left(\frac{π}{2} + λπ + τ\right) \end{cases}$$

$$γ')\ \begin{cases} χ = λπ - τ \\ ψ = 2Κπ + \left(\frac{π}{2} + λπ - τ\right) \end{cases} \qquad δ')\ \begin{cases} χ = λπ - τ \\ ψ = 2Κπ - \left(\frac{π}{2} + λπ - τ\right) \end{cases}$$

§ 95.—. *Λύσις τριγ. συστημάτων Β' κατηγορίας.*—. Εἰς τὰ συστήματα τῆς κατηγορίας ταύτης οὐδεμία γενικὴ μέθοδος δύναται νὰ ὑποδειχθῇ· ἕκαστον τούτων λύεται κατὰ ἰδίαν μέθοδον ἐξαρτωμένην ἐκ τῆς μορφῆς αὐτοῦ. Εἰς τὰ συνηθέστερον ὅμως ἀπαντώμενα συστήματα δύο ἐξισώσεων μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους παρέχεται τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀγνώστων τόξων, ὅτε προσπαθοῦμεν νὰ εὕρωμεν τύπον ἢ τύπους διδοντας τὸ ἕτερον τῶν ποσῶν τούτων.

Ὡς παραδείγματα τοιούτων συστημάτων ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα.

***Παράδ. 1ον.*—.** $$χ + ψ = α$$
$$ἡμχ + ἡμψ = 6$$

Ἐπειδή, ὡς γνωστόν, $ἡμχ + ἡμψ = 2ἡμ\left(\frac{χ+ψ}{2}\right)συν\left(\frac{χ-ψ}{2}\right)$

ἡ β'. ἐξίσωσις γίνεται: $2\eta\mu\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right).\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)=6$ ἤ, ἕνεκα τῆς α', $2\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)=6$, ὅθεν $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)=\frac{6}{2\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Ἐὰν δὲ ἐκ τῶν πινάκων εὕρωμεν ὅτι $\sigma\upsilon\nu\tau=\frac{6}{2\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$, ἕπεται ὅτι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\tau$ καὶ ἑπομένως $\frac{\chi-\psi}{2}=2\text{K}\pi\pm\tau$, ὅθεν $\chi-\psi=4\text{K}\pi\pm2\tau$. Οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀκολούθων δύο συστημάτων:

$$\alpha'.)\ \begin{cases}\chi+\psi=\alpha\\ \chi-\psi=4\text{K}\pi+2\tau\end{cases}\qquad \beta'.)\ \begin{cases}\chi+\psi=\alpha\\ \chi-\psi=4\text{K}\pi-2\tau.\end{cases}$$

Παράδ. 2ον.—.
$$\chi-\psi=\alpha$$
$$\eta\mu\chi.\ \eta\mu\psi=6$$

Ἐπειδὴ $2\eta\mu\chi.\ \eta\mu\psi=\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)-\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)$ (ἴσ. 66), ἡ β'. ἐξίσωσις γίνεται: $\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)-\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)=26$, ἢ ἕνεκα τῆς α',
$$\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)=26,\ \text{ὅθεν}\ \sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)=\sigma\upsilon\nu\alpha-26.$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν τύπους, οἵτινες παρέχουσι τὸ ἄθροισμα $\chi+\psi$ καὶ εἶτα ἐργαζόμεθα, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα.

Παράδ. 3ον
$$\chi+\psi=\alpha$$
$$\frac{\eta\mu\chi}{\eta\mu\psi}=\frac{6}{\gamma}$$

Ἐκ τῆς β'. ἐξισώσεως κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν προκύπτει ὅτι:
$$\frac{\eta\mu\chi-\eta\mu\psi}{\eta\mu\chi+\eta\mu\psi}=\frac{6-\gamma}{6+\gamma}\ \text{ἢ (ἴσ. 66)}\ \varepsilon\varphi\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)=\frac{6-\gamma}{6+\gamma}.\ \varepsilon\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ἐὰν δὲ τόξον τι τ ἐκ τῶν πινάκων λαμβανόμενον εἶναι τοιοῦτον ὥστε $\varepsilon\varphi\tau=\frac{6-\gamma}{6+\gamma}.\ \varepsilon\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, ἕπεται ὅτι $\varepsilon\varphi\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)=\varepsilon\varphi\tau$ καὶ ἑπομένως $\frac{\chi-\psi}{2}=\text{K}\pi+\tau$, ὅθεν $\chi-\psi=2\text{K}\pi+2\tau$. Λύοντες τὸ ὑπὸ ταύτης καὶ τῆς $\chi+\psi=\alpha$ ἀποτελούμενον σύστημα εὑρίσκομεν
$$\chi=\text{K}\pi+\tau+\frac{\alpha}{2},\ \psi=\frac{\alpha}{2}-\text{K}\pi-\tau.$$

Παράδ. 4ον.—.
$$\chi+\psi=\alpha$$
$$\sigma\upsilon\nu\chi.\ \sigma\upsilon\nu\psi=6$$

Ἐπειδὴ (ἴσ. 66) εἶναι $2 συνχ\, συνψ = συν(χ-ψ) + συν(χ+ψ)$, ἡ β΄. ἐξίσωσις γίνεται $συν(χ-ψ) + συνα = 2β$, ὅθεν $συν(χ-ψ) = 2β - συνα$. Λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν 2 τύπους παρέχοντας τὴν διαφορὰν $χ-ψ$. Ἐκ τούτων δὲ καὶ τῆς $χ+ψ=α$ εὑρίσκομεν τοὺς ζητουμένους τύπους.

Παράδ. 5ον.—. $$χ + ψ = α$$ $$εφχ + εφψ = β.$$

Ἐπειδὴ (ἴσ. 64) εἶναι $εφ\,χ + εφ\,ψ = \dfrac{ημ(χ+ψ)}{συν\,χ.\,συνψ}$, ἡ β΄. ἐξίσωσις γίνεται $\dfrac{ημ\,α}{συν\,χ.\,συν\,ψ} = β$, ὅθεν $συν\,χ.\,συν\,ψ = \dfrac{ημ\,α}{β}$.

Οὕτως ἤχθημεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ συστήματος $χ + ψ = α$

$συν\,χ.\,συν\,ψ = \dfrac{ημ\,α}{β}$, ὅπερ ἔχει τὴν μορφὴν τοῦ προηγουμένου.

Παράδ. 6ον.—. $$χ + ψ = α$$ $$εφ\,χ.\,εφ\,ψ = β$$

Θέτοντες τὴν β΄. ἐξίσωσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\dfrac{ημ\,χ.\,ημ\,ψ}{συν\,χ.\,συν\,ψ} = \dfrac{β}{1}$

λαμβάνομεν $\dfrac{συν\,χ.\,συν\,ψ - ημ\,χ.\,ημ\,ψ}{συν\,χ.\,συν\,ψ} = \dfrac{1-β}{1}$ ἢ $\dfrac{συν(χ+ψ)}{συνχ.\,συνψ} = 1-β$,

ὅθεν $$συν\,χ.\,συν\,ψ = \frac{συν\,α}{1-β}.$$

Οὕτως ἤχθημεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ συστήματος $χ + ψ = α$,

$συν\,χ.\,συν\,ψ = \dfrac{συν\,α}{1-β}$, ὅπερ ἔχει τὴν μορφὴν τοῦ 4ου παραδείγματος.

Παράδ. 7ον.—. $$χ - ψ = α$$ $$\frac{εφ\,χ}{εφ\,ψ} = \frac{β}{γ}.$$

Ἐκ τῆς β΄. προκύπτει ἡ ἰσοδύναμος ἐξίσωσις $\dfrac{εφχ - εφψ}{εφχ + εφψ} = \dfrac{β-γ}{β+γ}$,

ἤ, ἕνεκα τῶν τύπων (64), $\dfrac{ημ(χ-ψ)}{ημ(χ+ψ)} = \dfrac{β-γ}{β+γ}$, ὅθεν λαμβάνοντες

ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν α΄. ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $ημ(χ+ψ) = \dfrac{β+γ}{β-γ}ημ\,α$

καὶ προχωροῦμεν εἶτα κατὰ τὰ γνωστά.

Ἀσκήσεις. —. Νὰ λυθῶσι τὰ ἀκόλουθα συστήματα.

238) $\begin{cases} \text{ἐφ}\,\chi + \text{ἐφ}\,\psi = 0 \\ \text{ἐφ}\left(\frac{\chi}{2}\right) + \text{ἐφ}\left(\frac{\psi}{2}\right) = 1 \end{cases}$, 239) $\begin{cases} \text{ἡμ}\chi + \sqrt{3}\,.\,\text{συν}\chi = 1 \\ \text{ἡμ}\chi + \text{συν}\chi = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

240) $\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \text{ἡμ}\,\chi + \text{ἡμ}\,\psi = \beta \end{cases}$ 241) $\begin{cases} \text{ἡμ}\,\chi + \text{ἡμ}\,\psi = \alpha \\ \text{ἡμ}\,\chi\,.\,\text{ἡμ}\,\psi = \beta \end{cases}$

242) $\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \text{ἡμ}\chi + \text{ἡμ}\psi = \text{ἡμ}\chi.\,\text{ἡμ}\psi \end{cases}$ 243) $\begin{cases} \chi - \psi = 30^0 \\ \text{ἡμ}\,\chi + \text{ἡμ}\,\psi = 1 \end{cases}$

244) $\begin{cases} \chi - \psi = 45^0 \\ \text{ἐφ}\,\chi = 3\,\text{ἐφ}\,\psi \end{cases}$ 245) $\begin{cases} \text{ἐφ}\,\chi + \text{ἐφ}\,\psi = 1 \\ \text{συν}\,\chi\,.\,\text{συν}\,\psi = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

246) $\begin{cases} \chi + y + z = \pi \\ \frac{\text{ἐφ}\,\chi}{\mu} = \frac{\text{ἐφ}\,\psi}{\nu} = \frac{\text{ἐφ}\,z}{\lambda} \end{cases}$ 247) $\begin{cases} \text{ἐφ}\,\chi + \text{ἐφ}\,\psi = \alpha \\ \text{σφ}\,\chi + \text{σφ}\,\psi = \beta \end{cases}$

248) $\begin{cases} \text{ἐφ}\,\chi + \text{ἐφ}\,\psi = \alpha \\ \text{σφ}\,(\chi + \psi) = \beta \end{cases}$ 249) $\begin{cases} \text{ἡμ}\,\chi + \text{ἡμ}\,\psi = 1 \\ \text{συν}\,\chi\,.\,\text{συν}\,\psi = -\frac{3}{4} \end{cases}$

250) $\begin{cases} \chi - \psi = \alpha \\ \text{συν}\,\chi\,.\,\text{συν}\,\psi = \beta \end{cases}$ 251) $\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \frac{\text{συν}\,\chi}{\text{συν}\,\psi} = \beta\,. \end{cases}$

§ 96 —. ***Ἀπαλοιφὴ ἀγνώστων τόξων μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τριγ. συστήματος.*** =. Ἔστωσαν αἱ ἀλγεβρικαὶ ἐξισώσεις

$$\alpha\chi + \beta\psi = \gamma,\quad \alpha'\chi + \beta'\psi = \gamma',\quad \alpha''\chi + \beta''\psi = \gamma'',$$

αἵτινες ἔχουσιν ἀγνώστους ὀλιγωτέρους τοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν. Ἄς ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν ποία συνθήκη πρέπει νὰ ἐκπληροῦται, ὅπως αὗται ἔχωσι τὴν αὐτὴν λύσιν, ἤτοι ταὐτοποιοῦνται ὑπὸ τῶν αὐτῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων.

Πρὸς τοῦτο λύομεν τὸ ὑπὸ τῶν δύο πρώτων ἀποτελούμενον σύστημα $\left(\text{ὑποτίθεται } \frac{\alpha}{\alpha'} \neq \frac{\beta}{\beta'}\right)$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι αὗται ταὐτοποιοῦνται ὑπὸ τῶν ἀκολούθων τιμῶν τῶν ἀγνώστων:

$$\chi = \frac{\beta'\gamma - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta},\ \psi = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}.$$

Ἵνα δὲ αἱ τιμαὶ αὗται ταὐτοποιῶσι καὶ τὴν γ′. δέον προφανῶς νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης $\frac{\alpha''(\beta'\gamma - \beta\gamma')}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} + \frac{\beta''(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} = \gamma''$, ἢ

$$\alpha''(\beta'\gamma - \beta\gamma') + \beta''(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma) - \gamma''(\alpha\beta' - \alpha'\beta) = 0.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῇ σχέσει ταύτῃ οὐδεὶς τῶν ἀγνώστων ὑπάρχει, ἡ εὕρεσις αὐτῆς καλεῖται *ἀπαλοιφὴ* τῶν ἀγνώστων χ καὶ ψ μεταξὺ τῶν προειρημένων ἐξισώσεων.

Γενικῶς: *Ἀπαλοιφὴ ἑνὸς ἢ πλειόνων ἀγνώστων μεταξὺ ἐξισώσεων πλειόνων τῶν ἀγνώστων τούτων καλεῖται ἡ εὕρεσις τῆς συνθήκης, ἥτις πρέπει νὰ ἐκπληροῦται, ὅπως αἱ ἐξισώσεις αὗται ἀληθεύωσι διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἐν αὐταῖς περιεχομένων ἀγνώστων.*

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος ἀληθεύει οἱανδήποτε μορφὴν καὶ ἂν ἔχωσιν αἱ ἐξισώσεις καὶ ἑπομένως καὶ ὅταν τινὲς αὐτῶν ἢ πᾶσαι εἶναι τριγ. ἐξισώσεις.

Ἡ εἰς τὸ ἀνωτέρω ὅμως ἀλγεβρικὸν παράδειγμα ἐφαρμοσθεῖσα μέθοδος πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς ἀπαλοιφῆς, εἰ καὶ κατὰ θεωρίαν εἶναι γενική, δὲν ἐφαρμόζεται εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τινὲς ἢ πᾶσαι αἱ δεδομέναι ἐξισώσεις εἶναι τριγωνομετρικαί. Κατὰ ταύτην ἐπιζητεῖται καὶ ἐφαρμόζεται ἰδία ἑκάστοτε μέθοδος ἐξαρτωμένη ἐκ τῆς μορφῆς τῶν ἐξισώσεων, ὡς ἐκ τῶν ἀκολούθων παραδειγμάτων φαίνεται.

Παράδ. 1ον.—. Νὰ ἀπαλειφθῇ τὸ τόξον χ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων $\alpha.\eta\mu\chi+\beta\sigma\upsilon\nu\chi=\gamma$, $\alpha'\,\eta\mu\chi+\beta'\,\sigma\upsilon\nu\,\chi=\gamma'$, (ἔνθα $\frac{\alpha}{\alpha'}=\mid=\frac{\beta}{\beta'}$).

Λύοντες τὸ ὑπ' αὐτῶν ἀποτελούμενον σύστημα πρὸς ἡμχ καὶ συνχ εὑρίσκομεν ὅτι: $\eta\mu\chi=\frac{\gamma\beta'-\gamma'\beta}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$, $\sigma\upsilon\nu\chi=\frac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$. Ἐὰν δὲ ὑψώσωμεν τὰ μέλη ἑκατέρας εἰς τὸ τετράγωνον καὶ εἶτα προσθέσωμεν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\eta\mu^2\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi=\frac{(\gamma\beta'-\gamma'\beta)^2+(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)^2}{(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2}, \quad \text{ὅθεν}$$

$$1=\frac{(\gamma\beta'-\gamma'\beta)^2+(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)^2}{(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2} \qquad \text{ἢ}$$

$$(\gamma\beta'-\gamma'\beta)^2+(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)^2=(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2,$$ ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη συνθήκη.

Παράδ. 2ον.—. Νὰ ἀπαλειφθῶσι τὰ τόξα χ καὶ ψ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων $\alpha\eta\mu^2\chi+\beta\sigma\upsilon\nu^2\chi=\mu$, $\beta\eta\mu^2\psi+\alpha\sigma\upsilon\nu^2\psi=\nu$, $\alpha\epsilon\varphi\chi-\beta\epsilon\varphi\psi=0$.

Καθιστῶμεν τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις ὁμογενεῖς πρὸς τὰ ἐν ἑκατέρᾳ περιεχόμενα ἡμίτονα καὶ συνημίτονα πολ/ζοντες τὰ δεύτερα μέλη τῆς μὲν α'. ἐπὶ $\sigma\upsilon\nu^2\chi+\eta\mu^2\chi$, τῆς δὲ β'. ἐπὶ $\sigma\upsilon\nu^2\psi+\eta\mu^2\psi$. Διαιροῦντες εἶτα ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς μὲν α'. διὰ $\sigma\upsilon\nu^2\chi$, τῆς δὲ β'. διὰ $\sigma\upsilon\nu^2\psi$ εὑρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις:

$\alpha\, \text{εφ}^2\chi + \beta = \mu(1 + \text{εφ}^2\chi)$, $\beta\, \text{εφ}^2\psi + \alpha = \nu(1 + \text{εφ}^2\psi)$ ἢ $(\alpha - \mu)\,\text{εφ}^2\chi = \mu - \beta$, $(\beta - \nu)\,\text{εφ}^2\psi = \nu - \alpha$, ἐξ ὧν εὐκόλως

εὑρίσκομεν ὅτι : $\dfrac{\text{εφ}^2\chi}{\text{εφ}^2\psi} = \dfrac{\mu - \beta}{\alpha - \mu}\cdot\dfrac{\beta - \nu}{\nu - \alpha}$. (1)

Ἀλλ' ἐκ τῆς γ'. τῶν δεδομένων ἐξισώσεων λαμβάνομεν εὐκόλως ὅτι :

$\dfrac{\text{εφ}\,\chi}{\text{εφ}\,\psi} = \dfrac{\beta}{\alpha}$, ἄρα $\dfrac{\text{εφ}^2\chi}{\text{εφ}^2\psi} = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς (1) προκύπτει ἡ ζητουμένη σχέσις $\dfrac{\mu - \beta}{\alpha - \mu}\cdot\dfrac{\beta - \nu}{\nu - \alpha} = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Ἀσκήσεις. 252) Νὰ ἀπαλειφθῇ τὸ τόξον χ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων $\text{ημ}\,\chi + \text{εφ}\,\chi = \alpha$, $\text{συν}\,\chi = \beta$.

253) Νὰ ἀπαλειφθῇ τὸ χ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$\text{ημ}\,\chi + \text{συν}\,\chi = \alpha$, $\text{ημ}^3\chi + \text{συν}^3\chi = \beta$.

254) Νὰ ἀπαλειφθῇ τὸ τόξον χ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$\text{ημ}\,\chi - \text{στεμ}\,\chi = \alpha$, $\text{συν}\,\chi - \text{τεμ}\,\chi = \beta$.

255) Νὰ ἀπαλειφθῇ τὸ τόξον χ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$\alpha\,\text{ημ}\chi - \beta\,\text{συν}\chi = \frac{1}{2}\gamma\,\text{ημ}2\chi$, $\alpha\,\text{συν}\chi + \beta\,\text{ημ}\chi = \gamma\,\text{συν}\,2\chi$.

256) Νὰ ἀπαλειφθῶσι τὰ τόξα χ καὶ ψ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$\text{ημ}\chi + \text{ημ}\psi = \alpha$, $\text{συν}\chi + \text{συν}\psi = \beta$, $\text{συν}(\chi - \psi) = \gamma$.

257) Νὰ ἀπαλειφθῶσι τὰ τόξα χ καὶ ψ μετάξὺ τῶν ἐξισώσεων

$\chi + \psi = \alpha$, $\text{εφ}\chi + \text{εφ}\psi = \text{εφ}\beta$, $\text{σφ}\chi + \text{σφ}\psi = \text{σφ}\gamma$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ηον

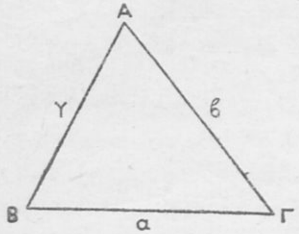
Ἐπίλυσις ὀρθογωνίων τριγώνων.

§ 97.—. ***Κύρια καὶ δευτερεύοντα στοιχεῖα τριγώνου.***—. Αἱ πλευραί, αἱ γωνίαι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου καλοῦνται *κύρια* στοιχεῖα αὐτοῦ. Πᾶν δὲ ἄλλο μέγεθος ὁπωσδήποτε μετὰ τριγώνου συνδεόμενον καλεῖται δευτερεῦον στοιχεῖον αὐτοῦ. Τοιαῦτα π.χ. εἶναι ἡ περίμετρος, αἱ διάμεσοι, τὰ ὕψη, ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ ἑκάστου τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων, κ. ἄ.

Ἐὰν δύο στοιχεῖα τριγώνου συνδέωνται πρὸς ἄλληλα οὕτως ὥστε ὁρισθέντος τοῦ ἑνὸς νὰ ὁρίζηται ἐξ αὐτοῦ καὶ τὸ ἄλλο, ἑκάτερον καλεῖται *συνάρτησις* τοῦ ἄλλου. Π.χ. ἡ ὑποτείνουσα ὀρθ. τριγώνου καὶ ἡ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς καταλήγουσα διάμεσος εἶναι συναρτήσεις ἀλλήλων

Ἐὰν οὐδεμία τοιαύτη σχέσις ὑφίσταται μεταξὺ δύο στοιχείων τριγώνου, ἤτοι, ἂν ταῦτα δύνανται νὰ λαμβάνωσι τιμὰς ἀνεξαρτήτους ἀλλήλων, καλοῦνται *ἀνεξάρτητα* στοιχεῖα. Τοιαῦτα π.χ. εἶναι ἡ ὑποτείνουσα καὶ οἱαδήποτε τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ὀρθ. τριγώνου, ἡ βάσις καὶ ἑκατέρα τῶν προσκειμένων αὐτῇ γωνιῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου κ.τ.λ.

Συνήθως τὰς γωνίας τριγώνου παριστῶμεν καὶ ὀνομάζομεν διὰ τῶν γραμμάτων Α, Β, Γ, ἅτινα τίθενται πλησίον τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, τὰ δὲ μήκη τῶν ἀντικειμένων πλευρῶν διὰ τῶν ἀντιστοίχων μικρῶν α, β, γ, (Σχ. 46). Ἐὰν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, θέτομεν συνήθως τὸ γράμμα Α εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης παρίσταται διὰ τοῦ α.

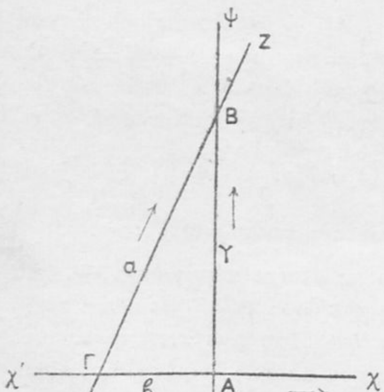


(Σχ. 46)

§ 98.—. ***Τριγωνομετρικαὶ σχέσεις μεταξὺ τῶν κυρίων στοιχείων ὀρθ. τριγώνου.***—. Α΄.—. Ἔστω Α Β Γ ὀρθογώνιόν τι τρίγωνον (Σχ. 47), καὶ χ΄χ, ψ΄ψ, Ζ΄Ζ οἱ ἄξονες, ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ πλευραὶ αὐτοῦ, ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ θετικὴ φορὰ δηλοῦται ὑπὸ τοῦ ἀντιστοίχου βέλους. Τούτων τεθέντων παρατηροῦμεν ὅτι τοῦ ἀνύσματος ΓΒ προβολὴ ἐπὶ μὲν τὸν ἄξονα χ΄χ εἶναι τὸ ἄνυσμα ΓΑ, ἐπὶ δὲ τὸν y΄y τὸ $\overline{AB}$. Ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τῶν προβολῶν τούτων τὴν ἰδιότητα (§ 51) εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\beta = \alpha.\,\text{συν}\Gamma, \quad \gamma = \alpha.\,\text{συν}B. \qquad (67)$$

Ἐπειδὴ δὲ Β+Γ=90°, ἕπεται ὅτι (§ 49, 59) συνΓ=ἡμΒ καὶ συνΒ=ἡμΓ, αἱ δὲ προηγούμεναι ἰσότητες γίνονται:



(Σχ. 47)

$$\beta = \alpha\ \text{ἡμ}B, \quad \gamma = \alpha\ \text{ἡμ}\Gamma \qquad (68)$$

Ἄρα: *Ἑκατέρα τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθ. τριγώνου ἰσοῦται* πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ὑποτεινούσης ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀντικειμένης ἢ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς προσκειμένης ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.

Β΄.—. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\beta = \alpha$ ἡμΒ καὶ $\gamma = \alpha$συν Β διαιρουμένων κατὰ μέλη προκύπτει ἡ ἰσότης $\frac{\beta}{\gamma} =$ ἐφΒ, ὅθεν $\beta = \gamma$ ἐφΒ. Ὁμοίως ἐκ τῶν $\gamma = \alpha$ ἡμΓ καὶ $\beta = \alpha$συνΓ προκύπτει ἡ $\gamma = \beta$ἐφΓ. Ἐπειδὴ δὲ ἐφΒ=σφΓ, καὶ ἐφΓ=σφΒ αἱ ἰσότητες γίνονται:

$$\begin{matrix} \beta = \gamma \text{ ἐφΒ}, & \gamma = \beta \text{ ἐφΓ} \\ \beta = \gamma \text{ σφΓ}, & \gamma = \beta \text{σφΒ} \end{matrix} \qquad (69)$$

Ἄρα: *Ἑκατέρα τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθ. τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἑτέρας ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀντικειμένης ἢ ἐπὶ τὴν συνεφαπτομένην τῆς προσκειμένης ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.*

Ἀσκήσεις. 258) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν ὀρθ. τρίγωνον ἀληθεύει ἡ ἰσότης ἐφ $\frac{B}{2} = \frac{\beta}{\alpha+\gamma}$.

259) Ὁμοίως ὅτι ἐφ2Β $= \frac{2\beta\gamma}{\gamma^2 - \beta^2}$.

260) Ὁμοίως ὅτι συν (Β—Γ) $= \frac{2\beta\gamma}{\alpha^2}$

§ 99.—. ***Ἐπίλυσις ὀρθογωνίου τριγώνου.***—. Ὁ διὰ λ/σμοῦ προσδιορισμὸς τῶν ἀγνώστων στοιχείων τριγώνου, ὅταν ἱκανὰ πρὸς τοῦτο στοιχεῖα αὐτοῦ δοθῶσι, καλεῖται *ἐπίλυσις* τοῦ τριγ. τούτου (§ 2).

Σημ. Κυρίως διὰ τῆς ἐπιλύσεως τριγώνου ἐπιδιώκεται ὁ προσδιορισμὸς τῶν ἀγνώστων κυρίων στοιχείων αὐτοῦ, ἐκτὸς ἂν ῥητῶς ζητῆταί τι ἢ τινὰ καὶ ἐκ τῶν δευτερευόντων.

Προκειμένου περὶ ὀρθ. τριγώνου εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς γεωμετρίας ὅτι εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ καὶ κατ᾿ ἀκολουθίαν εἶναι τελείως ὡρισμένον τοιοῦτον τρίγωνον, ἂν δοθῶσι μία πλευρὰ καὶ μία ὀξεῖα γωνία ἢ δύο πλευραὶ αὐτοῦ. Ὁμοίως εἶναι εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας δυνατὸς ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀγνώστων κυρίων στοιχείων ἤτοι ἡ ἐπίλυσις τοῦ ὀρθ. τριγώνου. Ἑκατέραν τῶν περιπτώσεων τούτων ὑποδιαιροῦμεν εἰς δύο μερικωτέρας, καθ᾿ ὅσον ἐν μὲν τῇ α΄. περιπτώσει γνωστὴ πλευρὰ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ἢ μία τῶν καθέτων ἐν δὲ τῇ β΄. γνωσταὶ πλευραὶ εἶναι αἱ κάθετοι πλευραὶ ἢ μία κάθετος καὶ ἡ ὑποτείνουσα. Διακρίνομεν ὅθεν κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν ὀρθ τριγώνων τέσσαρας περιπτώσεις, ἃς συνοψίζομεν οὕτω:

γνωστὰ στοιχεῖα	1) α, Β	2) β, Β	3) β, γ	4) α, β
ἄγνωστα στοιχεῖα	β,γ,Γ,Ε	β,γ,Γ,Ε	α,Β,Γ,Ε	γ,Β,Γ,Ε.

Ἡ δὲ ἐπίλυσις ἐν ἑκάστῃ περιπτώσει γίνεται ὡς ἀκολούθως.

§ 100. **Α΄. περίπτωσις.—.** *Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ ὑποτείνουσα α καὶ ἡ ὀξεῖα γωνία Β.—.* Αἱ ἰσότητες

$$\Gamma = 90^\circ - B, \quad \beta = \alpha\ \text{ἡμ}B, \quad \gamma = \alpha\ \text{συν}B.$$

ἀρκοῦσι πρὸς ὁρισμὸν τῶν στοιχείων Γ, β, γ δι' ἐκτελέσεως τῶν εἰς τὰ δεύτερα μέλη σεσημειωμένων πράξεων.

Ὅσον ἀφορᾷ τὸ ἐμβαδὸν Ε παρατηροῦμεν ὅτι μετὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν πλευρῶν β καὶ γ εὑρίσκεται τοῦτο ἐκ τοῦ τύπου $E = \frac{1}{2}\beta\gamma$. Ἂν ὅμως θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἀπ' εὐθείας ἐκ τῶν ἀρχικῶς δεδομένων στοιχείων α καὶ Β, μετασχηματίζομεν τὴν προηγουμένην ἰσότητα θέτοντες ἐν αὐτῇ ἀντὶ β καὶ γ τὰς τιμὰς αὐτῶν συναρτήσει τῶν α καὶ Β (67, 68). Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι

$$E = \frac{1}{2}\alpha^2.\ \text{ἡμ}\ B.\ \text{συν}\ B = \frac{1}{4}\alpha^2.\ 2\ \text{ἡμ}\ B\ \text{συν}\ B, \qquad \text{ὅθεν (45)}$$

$$E = \frac{1}{4}\alpha^2\ \text{ἡμ}\ (2B). \tag{70}$$

Παράδειγμα.—. *Ἔστω* $\alpha = 753^\mu$, $B = 30^\circ\ 15'\ 20''$.

Ὑπολογισμὸς τῆς Γ.

$$\Gamma = 90^\circ - B$$

$$\begin{array}{rl} 90^\circ = & 89^\circ\ 59'\ 60'' \\ B = & 30^\circ\ 15'\ 20'' \\ \hline \Gamma = & 59^\circ\ 44'\ 40'' \end{array}$$

Ὑπολογισμὸς τῆς β.

$$\beta = \alpha\ \text{ἡμ}\ B, \qquad \text{ἄρα}$$

$$\text{λογ}\ \beta = \text{λογ}\ \alpha + \text{λογ}\ \text{ἡμ}\ B$$

$$\begin{array}{rl} \text{λογ}\ \alpha = & 2,87679 \\ \text{λογ ἡμ}\ B = & \overline{1},70231 \\ \hline \text{λογ}\ \beta = & 2,57910 \\ \beta = & 379,4^\mu \end{array}$$

Ὑπολογισμὸς τῆς γ.

$$\gamma = \alpha\ \text{συν}\ B, \qquad \text{ἄρα}$$

$$\text{λογ}\ \gamma = \text{λογ}\ \alpha + \text{λογ}\ \text{συν}\ B.$$

$$\begin{array}{rl} \text{λογ}\ \alpha = & 2,87679 \\ \text{λογ συν}\ B = & \overline{1},93641 \\ \hline \text{λογ}\ \gamma = & 2,81320 \\ \gamma = & 650,43^\mu. \end{array}$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε.—. $E = \frac{1}{4}\alpha^2\text{ἡμ}\ (2B)$, ἄρα

$$\text{λογ}\ E = 2\ \text{λογ}\ \alpha + \text{λογ ἡμ}\ (2B) - \text{λογ}\ 4.$$

$$2B = 60^\circ\ 30'\ 40''$$

$$\begin{array}{rl} 2\ \text{λογ}\ \alpha = & 5,75358 \\ \text{λογ ἡμ}\ (2B) = & \overline{1}.93975 \\ \hline \text{ἄθροισμα} = & 5,69333 \\ \text{λογ}\ 4 = & 0,60206 \\ \hline \text{λογ}\ E = & 5,09127 \\ E = & 123386,11^{\tau\mu}. \end{array}$$

Σημ. Ἐπειδὴ οἱ ἐν τοῖς πίναξιν ἀναγεγραμμένοι λογάριθμοι διαφέρουσι τῶν ἀληθῶν, καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν ὑπολογιζόμενοι λογάριθμοι ὡς καὶ οἱ ἀντίστοιχοι ἀριθμοὶ εὑρίσκονται μὲ προσέγγισιν, ἣν δυνάμεθα ἑκάστοτε νὰ ἐκτιμῶμεν. Οὕτω κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς πλευρᾶς β τοῦ προηγουμένου παραδείγματος εὕρομεν ὅτι λογβ=2,57910· ἐπειδὴ ὅμως οὗτος εὑρέθη ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ δύο λογαρίθμων, ὧν ἑκάτερος δύναται (§ 78 ὑποσ.) νὰ ἔχῃ λάθος μικρότερον τοῦ 0,000005, ἕπεται ὅτι καὶ οὗτος δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ἀληθοῦς κατὰ ποσότητα μικροτέραν τοῦ $0,000005 \times 2 = 0,00001$, ἤτοι ὁ ἀληθὴς λογάριθμος τοῦ β θὰ περιέχηται μεταξὺ 2,57909 καὶ 2,57911· ἕνεκα τούτου ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ β περιέχεται μεταξὺ τῶν εἰς τοὺς λογαρίθμους τούτους ἀντιστοιχούντων ἀριθμῶν 379,309 καὶ 379,408.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ β διαφέρει τοῦ μὲν μικροτέρου τῶν ἀριθμῶν τούτων κατὰ $379,4-379,309=0,091$ τοῦ δὲ μεγαλυτέρου κατὰ $379,408-379,4=0,008$, τὸ σφάλμα, ὅπερ δυνατὸν νὰ περιέχῃ ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ β δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν μεγαλυτέραν τῶν ἄνευ διαφορῶν 0,091 ἤτοι ἡ πλευρὰ β ὑπελογίσθη μὲ προσέγγισιν $0,091^{\mu}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τιμὴ τῆς πλευρᾶς γ ὑπελογίσθη μὲ προσέγγισιν $0,015^{\mu}$.

Διὰ δὲ τὸ ἐμβαδὸν παρατηροῦμεν ὅτι ὁ λογάριθμός του εὑρεθεὶς ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν 2λογα, λογημ (2 Β) καὶ λογ4 δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ἀληθοῦς κατὰ $2.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$ ἑκ. χιλιοστά. Ἐργαζόμενοι εἶτα, ὡς προηγουμένως, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τιμὴ αὐτοῦ ὑπελογίσθη μὲ προσέγγισιν 5, 56 τ.μ.

Ἀσκήσεις. 261) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ $\alpha=142^{\mu}$ καὶ $\Gamma=48^{0}\ 48'\ 48''$.

262) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ $\alpha=1845,8^{\mu}$ καὶ $B=\frac{3\pi}{20}$.

263) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ $\alpha=587,88^{\mu}$ καὶ Β=42,5γ.

264) Ὀρθογωνίου ἡ διαγώνιος ἔχει μῆκος $0,75^{\mu}$ καὶ σχηματίζει μετὰ τῆς βάσεως γωνίαν $32^{0}\ 15'$. Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ.

265) Ῥόμβου ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος $7,04^{\mu}$ ἡ δὲ γωνία αὐτῆς μετὰ

τῆς μικροτέρας διαγωνίου εἶναι $\frac{3}{5}$ ὀρθ. Νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ μήκη τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

§ 101.—. *Β΄. Περίπτωσις.—. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ πλευρὰ β καὶ ἡ γωνία Β.—.* Διὰ τῶν ἰσοτήτων $Γ=90^0-Β$, $γ=β σφ Β$ ὑπολογίζονται τὰ στοιχεῖα Γ καὶ γ.

Ἐκ δὲ τῆς $β=α\ ημ\ Β$ λυομένης πρὸς α προκύπτει ἡ $α=\frac{β}{ημ Β}$, δι' ἧς ὁρίζεται ἡ ὑποτείνουσα. Τέλος θέτοντες ἐν τῇ ἰσότητι $Ε=\frac{1}{2}βγ$ ἀντὶ γ τὴν τιμὴν $β σφ Β$ αὐτῆς εὑρίσκομεν ὅτι:

$$Ε = \frac{1}{2} β^2 σφ Β, \qquad (71)$$

δι' ἧς ὁρίζεται τὸ Ε ἐκ τῶν δεδομένων στοιχείων β καὶ Β.

Παράδειγμα.—. *Ἔστω* $β = 2347,50^μ$ *καὶ* $Β = 51^0\ 12'\ 38''$.

Ὑπολογισμὸς τῆς Γ.

$$\begin{aligned} 90^0 &= 89^0\ 59'\ 60'' \\ Β &= 51^0\ 12'\ 38'' \\ \hline Γ &= 38^0\ 47'\ 22'' \end{aligned}$$

Ὑπολογισμὸς τῆς γ.

$γ=β\ σφΒ$, $λογ\ γ=λογ\ β+λογ\ σφΒ$

$$\begin{aligned} λογ\ β &= 3,37060 \\ λογ\ σφΒ &= \bar{1}.90511 \\ \hline λογ\ γ &= 3,27571 \\ γ &= 1886,74^μ \end{aligned}$$

κατὰ προσ. $0,05^μ$

Ὑπολογισμὸς τῆς α.

$α = \frac{β}{ημΒ}$, ἄρα $λογ\ α = λογ\ β - λογ\ ημΒ$.

$$\begin{aligned} λογ\ β &= 3.37060 \\ λογ\ ημΒ &= \bar{1},89179 \\ \hline λογ\ α &= 3,47881 \\ α &= 3011,71^μ \end{aligned}$$

κατὰ προσ. $0,07^μ$

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε.

$Ε = \frac{1}{2} β^2 σφ\ Β$, ἄρα

$λογ\ Ε = 2\ λογ\ β + λογ\ σφ\ Β - λογ\ 2$.

$$\begin{aligned} 2\ λογ\ β &= 6,74120 \\ λογ\ σφ\ Β &= \bar{1},90511 \\ \hline \text{ἄθροισμα} &= 6,64631 \\ λογ\ 2 &= 0,30103 \\ \hline λογ\ Ε &= 6,34528 \end{aligned}$$

$Ε = 2214526,32$ τ. μ. κατὰ προσ. 375,26 τ. μ.

Ἀσκήσεις 266). Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ $β = 47^μ$ καὶ $Β = 47^0$.

267) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθ. τρίγωνον οὗ $β=125^μ$ καὶ $Γ=23^0\ 45'\ 23''$

268) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθ. τρίγωνον οὗ $\beta = 75^{\mu}$ καὶ $\Gamma = 1^{0}\ 25'$.
269) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθ. τρίγωνον οὗ $\gamma = 222^{\mu}$ καὶ $\Gamma = 22{,}2^{\gamma}$.
270) Χορδή τις κύκλου ἔχει μῆκος $1{,}65^{\mu}$ ἡ δὲ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς καταλήγουσα ἀκτὶς σχηματίζει μετ' αὐτῆς γωνίαν $40^{0}\ 18'\ 38''$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τούτου, ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς χορδῆς καὶ τὸ μέτρον ἑκατέρου τῶν εἰς τὴν χορδὴν ταύτην ἀντιστοιχούντων τόξων.

§ 102.—. ***Γ' Περίπτωσις.***—. *Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθ. τρίγωνον οὗ δίδονται αἱ δύο κάθετοι πλευραί.*—. Ἐκ τῆς ἰσότητος $\beta = \gamma$ ἐφB προκύπτει ἡ ἐφB $= \frac{\beta}{\gamma}$, δι' ἧς ὑπολογίζεται ἡ B· εἶτα ἐκ τῆς $\Gamma = 90^{0} - B$ εὑρίσκεται ἡ Γ, ἐκ δὲ τῆς $\alpha = \frac{\beta}{\text{ἡμ}B}$ ὁρίζεται ἡ α. Τέλος τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἰσότητος $E = \frac{1}{2}\beta\gamma$.

Παράδειγμα. *Ἔστω* $\beta = 3456^{\mu}$ *καὶ* $\gamma = 1280^{\mu}$.

Ὑπολογισμὸς τῆς B καὶ Γ.

ἐφB $= \frac{\beta}{\gamma}$, ἄρα

λογ ἐφB = λογ β — λογ γ

$$\begin{array}{r} \text{λογ}\beta = 3{,}53857 \\ \text{λογ}\gamma = 3{,}10721 \\ \hline \text{λογ ἐφ }B = 0{,}43136 \end{array}$$

$B = 69^{0}\ 40'\ 36''$ κατὰ προσ. $2''$.

$$\begin{array}{r} 90^{0} = 89^{0}\ 59'\ 60'' \\ B = 69^{0}\ 40'\ 36'' \\ \hline \Gamma = 20^{0}\ 19'\ 24'' \end{array}$$

Ὑπολογισμὸς τῆς α.

$\alpha = \frac{\beta}{\text{ἡμ}B}$, ἄρα

λογα = λογβ — λογἡμ B

$$\begin{array}{r} \text{λογ}\beta = 3{,}53857 \\ \text{λογ ἡμ }B = \overline{1}{,}97208 \\ \hline \text{λογ}\alpha = 3{,}56649 \end{array}$$

$\alpha = 3685{,}41\ \mu.$ κατὰ προσ. $0{,}09^{\mu}$

Ὑπολογισμὸς τοῦ E.

$E = \frac{1}{2}\beta\gamma$, ἄρα λογE = λογβ + λογγ — λογ2

$$\begin{array}{r} \text{λογ}\beta = 3{,}53857 \\ \text{λογ}\gamma = 3{,}10721 \\ \hline \text{ἄθροισμα} = 6{,}64578 \\ \text{λογ}2 = 0{,}30103 \\ \hline \text{λογ}E = 6{,}34475 \end{array}$$

$E = 2211800$ τμ. κατὰ πρ. 100 τ.μ.

Ἀσκήσεις. 271). Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ $β=256{,}25^{μ}$ καὶ $γ=348^{μ}$.

272) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ $β=48^{μ}$ καὶ $γ=36^{μ}$.

273) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ $β=2γ$.

274) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ καὶ αἱ γωνίαι τοῦ ῥόμβου, ὅστις ἔχει διαγωνίους $3{,}48^{μ}$ καὶ $2{,}20^{μ}$.

275) Τὸ κέντρον κύκλου ἀπέχει $8^{μ}$ ἀπὸ χορδῆς $12^{μ}$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ τὰ μέτρα τῶν εἰς τὴν χορδὴν ταύτην ἀντιστοιχούντων τόξων.

§ 103. ***Δ'. Περίπτωσις.—.*** *Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ ἐπιτείνουσα α καὶ ἡ ἑτέρα τῶν καθέτων πλευρῶν β.—.* Τὴν πλευρὰν γ ὑπολογίζομεν διὰ τῆς γνωστῆς ἰσότητος

$$γ^2 = α^2 - β^2 = (α + β)(α - β).$$

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.
Ἐκ τῆς σχέσεως $β = α \,συν\, Γ$ εὑρίσκομεν $συν\, Γ = \frac{β}{α}$· θέτοντες δὲ τὴν ὑπὸ ταύτης παρεχομένην τιμὴν συν Γ ἐν τῇ γνωστῇ (§ 74) ἰσότητι $εφ \frac{Γ}{2} = \sqrt{\frac{1-συν\,Γ}{1+συν\,Γ}}$ εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα $εφ \frac{Γ}{2} = \sqrt{\frac{α-β}{α+β}}$, δι' ἧς ὑπολογίζεται ἡ Γ καὶ εὐκόλως εἶτα ἡ Β.

Τέλος τὸ ἐμβαδὸν ὑπολογίζομεν ἐκ τῆς ἐκ τῆς ἰσότητος $Ε = \frac{1}{2} β \sqrt{(α+β)(α-β)}$, ἣν εὑρίσκομεν ἐκ τῆς $Ε = \frac{1}{2} βγ$, ἂν ἐν αὐτῇ ἀντὶ γ τεθῇ ἡ τιμὴ αὐτοῦ $\sqrt{(α+β)(α-β)}$. Ἁπλούστερον ὅμως ὑπολογίζεται τοῦτο ἐκ τῆς $Ε = \frac{1}{2} βγ$, ἂν προταχθῇ ὁ ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς γ.

Παράδειγμα.—. *Ἔστω $α = 15964$ καὶ $β = 11465$.*

Βοηθητικὸς πίναξ

$$\begin{aligned} α &= 15964 \\ β &= 11465 \\ \hline α + β &= 27429 \\ α - β &= 4499 \end{aligned}$$

Ὑπολογισμὸς τῆς Γ.

$$εφ \frac{Γ}{2} = \sqrt{\frac{α-β}{α+β}}, \text{ ἄρα}$$

Ὑπολογισμὸς τῆς γ

$$γ^2 = (α + β)(α - β), \text{ ἄρα}$$

$$2λογ\,γ = λογ(α+β) + λογ(α-β)$$

$$\begin{aligned} λογ(α+β) &= 4{,}43821 \\ λογ(α-β) &= 3{,}65312 \\ \hline 2\,λογ\,γ &= 8{,}09133 \\ λογ\,γ &= 4{,}04566 \\ γ &= 11108{,}72^{μ}. \end{aligned}$$

$$\lambda o\gamma \grave{\varepsilon}\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{\lambda o\gamma(\alpha-\beta)-\lambda o\gamma(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\begin{aligned}
\lambda o\gamma\,(\alpha-\beta) &= 3{,}65312\\
\lambda o\gamma\,(\alpha+\beta) &= 4{,}43821\\
\hline
\text{διαφορὰ} &= \bar{1}{,}21491\\
\lambda o\gamma\ \grave{\varepsilon}\varphi\,\frac{\Gamma}{2} &= \bar{1}{,}60745\\
\frac{\Gamma}{2} &= 22^{\circ}\ 2'\ 51'',66\\
\Gamma &= 44^{\circ}\ 5'\ 43'',32
\end{aligned}$$

Ὑπολογισμὸς τῆς Β.

$$\begin{aligned}
90^{\circ} &= 89^{\circ}\ 59'\ 60''\\
\Gamma &= 44^{\circ}\ \ 5'\ 43'',32\\
\hline
B &= 45^{\circ}\ 54'\ 16'',68
\end{aligned}$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε

$$E=\frac{1}{2}\beta\gamma,\ \text{ἄρα}$$

$$\begin{aligned}
\lambda o\gamma\,E &= \lambda o\gamma\,\beta+\lambda o\gamma\,\gamma-\lambda o\gamma\,2.\\
\lambda o\gamma\,\beta &= 4{,}05937\\
\lambda o\gamma\,\gamma &= 4{,}04566\\
\hline
\text{ἄθροισμα} &= 8{,}10503\\
\lambda o\gamma\,2 &= 0{,}30103\\
\hline
\lambda o\gamma\,E &= 7{,}80400\\
E &= 63680000\ \text{τ. μ.}
\end{aligned}$$

Σημ. α'. Ἡ γωνία Γ εἶναι προτιμώτερον νὰ ὑπολογίζηται διὰ τῆς ἰσότητος $\grave{\varepsilon}\varphi\,\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$ ἢ διὰ τῆς $\sigma\upsilon\nu\Gamma=\frac{\beta}{\alpha}$, πρῶτον μὲν διότι ἐκ τῆς ἐφαπτομένης προσδιορίζεται ἀκριβέστερον (§ 81 Β' σημ. α'), δεύτερον δὲ διότι γίνεται χρῆσις μόνον τῶν λογ (α—β) καὶ λογ (α+β), οἵτινες χρησιμοποιοῦνται καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς γ.

Σημ. β'. Τὸ πηλῖκον $\bar{1},21491:2$ εὑρίσκομεν προσθέτοντες εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ διαιρετέου —1 καὶ εἰς τὸ δεκαδικὸν μέρος +1· εἶτα δὲ διαιροῦμεν χωριστὰ τὸ ἀρνητικὸν καὶ χωριστὰ τὸ θετικὸν μέρος καὶ προσθέτομεν τὰ πηλῖκα. Οὕτω:

$$\bar{1},21491:2=(-2+1{,}21491):2=-1+0{,}60745=\bar{1},60745.$$

Ἀσκήσεις. 276) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ α=25^μ καὶ β=15,25^μ

277) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ βάσις εἶναι 5,60^μ, ἑκατέρα δὲ τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ 4^μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος καὶ αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

278) Ῥόμβου ἡ πλευρὰ εἶναι 8^μ καὶ ἡ μικροτέρα διαγώνιος 5,30^μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἄλλης διαγωνίου καὶ αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

279) Ὑπὸ ποίαν γωνίαν φαίνεται κύκλος ἀκτῖνος ρ ἀπὸ σημείου ἀπέχοντος τοῦ κέντρου ἀπόστασιν 2ρ;

280) Ὀρθογωνίου ἑκατέρα διαγώνιος ἔχει μῆκος 88^{μ} καὶ σχηματίζει μετὰ τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς γωνίαν $30^{0}\ 40'$. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ.

281) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ αἱ γωνίαι ῥόμβου, ὅστις ἔχει διαγωνίους 40^{μ} καὶ $12{,}80^{\mu}$.

282) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ βάσις ἔχει μῆκος $80{,}30^{\mu}$, ἡ δὲ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι $20^{0}\ 10'\ 35''$. Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ ἄλλαι γωνίαι καὶ πλευραὶ αὐτοῦ.

283) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου, οὗτινος ἡ βάσις εἶναι τὸ ἥμισυ ἑκατέρας τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ.

284) Εὑρεῖν τὸ ὕψος τοῦ Ἡλίου, καθ' ἣν στιγμὴν ῥάβδος κατακόρυφος μήκους $2{,}15^{\mu}$· ῥίπτει ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους σκιὰν $6{,}45^{\mu}$.

285) Ἀνύσματος ἡ ἐπὶ ἄξονα προβολὴ εἶναι $3{,}4^{\mu}$ ἡ δὲ γωνία αὐτοῦ μετὰ τοῦ προβ. ἄξονος εἶναι $25^{0}\ 18'\ 30''$. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος τούτου;

286) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς τόξου 40^{0} περιφερείας, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα 12^{μ}.

287) Αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἔχουσι λόγον $\frac{2}{3}$. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι ἑκατέρας μετά τινος τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

288) Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 30^{μ} ἄγεται χορδὴ ΑΒ ἔχουσα μῆκος $25{,}30^{\mu}$ καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτοῦ ΑΓ καὶ ΒΓ. Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ γωνίαι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

289) Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ ἀκτῖνες δύο κύκλων, ὧν τὰ κέντρα ἀπέχουσιν ἀλλήλων 714^{μ}, αἱ ἐξωτερικαὶ κοιναὶ αὐτῶν ἐφαπτόμεναι σχηματίζουσι γωνίαν $36^{0}\ 8'$ καὶ αἱ ἐσωτερικαὶ $104^{0}\ 12'$.

290) Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐκτὸς καὶ ἔχουσιν ἀκτῖνα 9^{μ} ὁ μὲν καὶ 4^{μ} ὁ ἕτερος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν.

291) Διὰ τοῦ ἄκρου Β διαμέτρου ΑΒ ἡμιπεριφερείας ἄγομεν ἐφαπτομένην ταύτης καὶ ἐκ τοῦ Α εὐθεῖαν τέμνουσαν τὴν μὲν ἡμιπεριφέρειαν εἴς τι σημεῖον Γ τὴν δὲ ἐφαπτομένην εἰς τὸ Δ. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία ταύτης καὶ τῆς διαμέτρου, ἵνα $ΑΔ=4(ΑΓ)$;

292) Τῆς μέσης ὁριζοντίου ἰσημερινῆς παραλλάξεως τοῦ ἡλίου οὔσης $8''{,}8$ νὰ εὑρεθῇ εἰς γηΐνας ἰσημερινὰς ἀκτῖνας ἡ ἀπόστασις τῆς γῆς ἀπὸ τοῦ ἡλίου.

293) Χορδὴ κύκλου ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέτρου αὐτοῦ.

Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάτερον τῶν εἰς τὴν χορδὴν ταύτην ἀντιστοιχούντων τόξων;

294) Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ ὀξεῖαι γωνίαι ὀρθ. τριγώνου, οὗτινος αἱ κάθετοι πλευραὶ ἔχουσιν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν προβολὰς 3^{μ} ἡ μὲν καὶ 4^{μ} ἡ ἄλλη.

295) Ἡ προβολὴ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθ. τριγώνου καὶ ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ἔχουσα λόγον 7 : 5. Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ γωνίαι τοῦ ὀρθ. τριγώνου.

296) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων κύβου.

297) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδεται τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἡ ὑποτείνουσα. Ἐφαρμογή.—. $E = 45968$ τ. μ. , $\alpha = 22840^{\mu}$.

298) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδεται τὸ ἐμβαδὸν καὶ μία ὀξεῖα γωνία. Ἐφαρμογή.—. $E = 8940$ τ. μ., $B = 48^{0}\ 50'$.

299) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδεται τὸ ἐμβαδὸν καὶ μία τῶν καθέτων πλευρῶν. Ἐφαρμ.—. $E = 940{,}50$ τ.μ. $\beta = 260{,}40^{\mu}$.

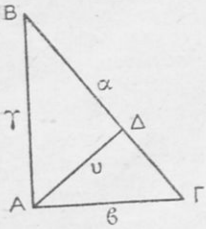
§ 104. ***Ἐπίλυσις ὀρθ. τριγώνου, ὅταν τὰ δεδομένα στοιχεῖα δὲν εἶναι ἀμφότερα ἐκ τῶν κυρίων στοιχείων αὐτοῦ.***—. Ὀρθογώνιόν τι τρίγωνον κατασκευάζεται καὶ ὅταν δοθῶσι δύο τυχόντα στοιχεῖα αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ εἶναι ἀνεξάρτητα ἀλλήλων καὶ τὸ ἓν τοὐλάχιστον νὰ εἶναι μῆκος ἢ ἐπιφάνεια. Εἶναι ὅθεν ἐκ δύο τοιούτων στοιχείων δυνατὴ καὶ ἡ ἐπίλυσις ὀρθ. τριγώνου, ἤτοι ἡ εὕρεσις τῶν ἀγνώστων κυρίων στοιχείων αὐτοῦ.

Πρὸς τοῦτο ἀκολουθοῦμεν γενικῶς τὴν ἀκόλουθον πορείαν.

Ἐκφράζομεν τὸ δεδομένον ἢ τὰ δεδομένα δευτερεύοντα στοιχεῖα συναρτήσει κυρίων στοιχείων τοῦ τριγώνου. Οὕτως εὑρίσκομεν μίαν ἢ δύο σχέσεις, δι' ὧν τῇ βοηθείᾳ καὶ ἄλλων ἐκ τῶν συνδεουσῶν τὰ κύρια στοιχεῖα τοῦ τριγώνου προσπαθοῦμεν νὰ ἐκφράσωμεν πάντα ἢ τινὰ τῶν ἀγνώστων κυρίων στοιχείων συναρτήσει τῶν δεδομένων. Ὑπολογίζομεν εἶτα τὰ οὕτως ἐκφρασθέντα στοιχεῖα καὶ ἐξ αὐτῶν καὶ τὰ τυχὸν ὑπολειπόμενα.

Ὡς παραδείγματα ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα.

§ 105. ***Παράδ. 1ον.***—. *Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον ἐκ τοῦ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψους υ καὶ τῆς ὀξείας γωνίας Β.*—.Τοῦ τριγώνου ΑΒΔ (Σχ. 48) ὄντος ὀρθογωνίου ἕπεται ὅτι $\upsilon = \gamma$ ἡμΒ, ὅθεν $\gamma = \dfrac{\upsilon}{\text{ἡμ}B}$.



(Σχ. 48).

Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῶν $\beta = \gamma\, \text{ἐφ}B$, $\alpha = \dfrac{\gamma}{\text{συν}B}$ προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ ἰσότητες $\beta = \dfrac{\upsilon}{\text{συν}B}$, $\alpha = \dfrac{\upsilon}{\text{ἡμ}B.\ \text{συν}B}$. Ἐὰν τέλος ἐν τῇ ἰσότητι $E = \dfrac{1}{2}\beta\gamma$ τεθῶσιν αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαὶ τῶν β καὶ γ προκύπτει ἡ ἰσότης

$$E = \frac{\upsilon^2}{2\ \text{ἡμ}B.\ \text{συν}B} = \frac{\upsilon^2}{\text{ἡμ}\,(2B)}.$$

Διὰ τῶν οὕτω εὑρεθεισῶν ἰσοτήτων

$\gamma = \dfrac{\upsilon}{\text{ἡμ}B}$, $\beta = \dfrac{\upsilon}{\text{συν}B}$, $\alpha = \dfrac{\upsilon}{\text{ἡμ}B.\ \text{συν}B}$, $E = \dfrac{\upsilon^2}{\text{ἡμ}(2B)}$ καὶ τῆς γνωστῆς $\Gamma = 90^0 - B$ ἐκφράζονται πάντα τὰ ἄγνωστα κύρια στοιχεῖα συναρτήσει τῶν δεδομένων υ καὶ B. Ὁ δὲ τελικὸς ὑπολογισμὸς αὐτῶν γίνεται κατὰ τὰ γνωστά.

§ 106. ***Παράδ. 2ον.***—. *Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον ἐκ τῆς ὑποτεινούσης α καὶ τοῦ ὑπ' αὐτὴν ὕψους υ.*—. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\beta = \alpha\ \text{ἡμ}B$, $\gamma = \alpha\ \text{συν}B$ καὶ $\alpha\upsilon = \beta\gamma$, ἕπεται εὐκόλως ὅτι: $\alpha\upsilon = \alpha^2\ \text{ἡμ}B\ \text{συν}B$, ὅθεν $2\alpha\upsilon = \alpha^2\ \text{ἡμ}\,(2B)$, ἄρα $\text{ἡμ}\,(2B) = \dfrac{2\upsilon}{\alpha}$.

Ὁριζομένης οὕτω τῆς B εὑρίσκονται κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 100) τὰ στοιχεῖα Γ, β, γ αὐτοῦ. Τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἰσότητος

$$E = \frac{1}{2}\ \alpha.\ \upsilon.$$

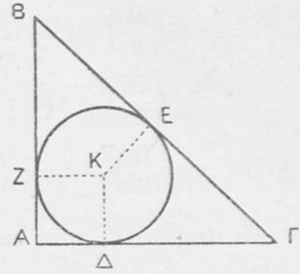
Σημ. Τὰς καθέτους πλευρὰς δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν ἀπ' εὐθείας ἐκ τῶν δεδομένων στοιχείων οὕτω. Ἐπειδὴ $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$ καὶ $2\beta\gamma = 2\alpha\upsilon$, ἕπεται εὐκόλως ὅτι $(\beta + \gamma)^2 = \alpha(\alpha + 2\upsilon)$ καὶ $(\beta - \gamma)^2 = \alpha(\alpha - 2\upsilon)$, ἐξ ὧν ἕπεται ὅτι:

$$\beta + \gamma = \sqrt{\alpha(\alpha + 2\upsilon)}\quad,\quad \beta - \gamma = \sqrt{\alpha(\alpha - 2\upsilon)}.$$

Ὁριζομένων οὕτω τῶν $(\beta + \gamma)$ καὶ $(\beta - \gamma)$ ὁρίζονται εὐκόλως εἶτα καὶ αἱ πλευραὶ β καὶ γ.

§ 107. ***Παράδ. 3ον.***— *Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον ἐκ τῆς ὑποτεινούσης α καὶ τῆς ἀκτῖνος ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.*—. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι (Σχ. 49) $\alpha = (\Gamma E) + (EB) = (\Gamma\Delta) + (BZ)$.

Ἐπειδὴ δὲ $\Gamma\Delta = \beta - (\mathrm{A}\Delta) = \beta - \rho$ καὶ $(\mathrm{BZ}) = \gamma - (\mathrm{AZ}) = \gamma - \rho$, ἕπεται ὅτι:



(Σχ. 49)

$(\Gamma\Delta) + (\mathrm{BZ}) = \beta + \gamma - 2\rho$ καὶ ἑπομένως $\alpha = \beta + \gamma - 2\rho$. Ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\beta = \alpha$ ἡμB, $\gamma = \alpha$ συνB προκύπτει ὅτι $\beta + \gamma = \alpha\,$(ἡμB$+$συνB)· ἡ δὲ προηγουμένη ἰσότης γίνεται: $\alpha = \alpha\,$(ἡμB$+$συνB)$- 2\rho =$

$$\alpha\sqrt{2}\ \text{ἡμ}\left(\frac{\pi}{4} + \mathrm{B}\right) - 2\rho.$$

Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι:

$$\text{ἡμ}\left(\frac{\pi}{4} + \mathrm{B}\right) = \frac{(\alpha + 2\rho)\sqrt{2}}{2\alpha}.$$

Ὑπολογιζομένης ἐκ ταύτης τῆς γωνίας B, τὰ ἄλλα στοιχεῖα ὑπολογίζονται κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 100).

§ 108. ***Παράδ. 4ον.***—. *Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον ἐκ τῆς γωνίας B καὶ τοῦ ἀθροίσματος μ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ ὑπ' αὐτὴν ὕψους.*—. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΔ (Σχ. 48) προκύπτει ὅτι $\upsilon = \gamma$ ἡμB· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\gamma = \alpha$ συνB, ἕπεται ὅτι: $\upsilon = \alpha$ ἡμ B. συνB. Ἄρα $\mu = \alpha + \upsilon = \alpha + \alpha$ ἡμ B συν B $= \alpha\,(1 +$ ἡμ B . συν B)

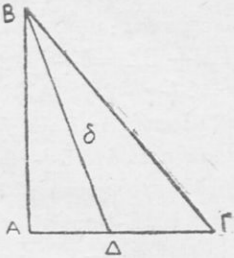
καὶ ἑπομένως $$\alpha = \frac{\mu}{1 + \text{ἡμ B. συν B}}. \qquad (1)$$

Ἀλλὰ προφανῶς εἶναι $1 +$ ἡμB. συνB $= 1 + \frac{1}{2}$ ἡμ(2B) καὶ ἂν τεθῇ $\text{ἐφ}^2\omega = \frac{1}{2}$ ἡμ (2B) (ω βοηθητικὴ γωνία), ἕπεται ὅτι:

$1 +$ ἡμB. συνB $= 1 + \text{ἐφ}^2\omega = \frac{1}{\text{συν}^2\omega}$· ἡ ἰσότης ἄρα (1) γίνεται $\alpha = \mu.\ \text{συν}^2\omega$. Ὑπολογιζομένης ἐκ ταύτης τῆς α, τὰ ἄλλα στοιχεῖα ὑπολογίζονται κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 100).

§ 109. ***Παράδ. 5ον.*** —. *Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, ἐκ τῆς ὑποτεινούσης α καὶ τοῦ μήκους δ τῆς διχοτομούσης τὴν ὀξεῖαν γωνίαν B.*—. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΔ (Σχ. 50) προκύπτει ὅτι: $\gamma = \delta.\ \text{συν}\left(\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$· ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς $\gamma = \alpha$ συνB ἕπεται ὅτι:

$$\delta\ \text{συν}\left(\frac{\mathrm{B}}{2}\right) = \alpha\ \text{συν B}. \qquad (1)$$



(Σχ. 50)

Ἀλλ' ἐπειδὴ (ἴσ. 49) εἶναι

συν$B = 2$συν$^2\left(\frac{B}{2}\right)-1$, ἡ ἰσότης (1) γίνεται:

$$\delta\ \text{συν}\left(\frac{B}{2}\right)=\alpha\left(2\ \text{συν}^2\frac{B}{2}-1\right)\ \text{ἢ}$$

$$2\alpha\ \text{συν}^2\left(\frac{B}{2}\right)-\delta\ \text{συν}\left(\frac{B}{2}\right)-\alpha=0.$$

Λύοντες ταύτην πρὸς συν$\left(\frac{B}{2}\right)$ εὑρίσκομεν ὅτι: συν$\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{\delta\pm\sqrt{\delta^2+8\alpha^2}}{4\alpha}$.

Ἐπειδὴ δὲ προφανῶς εἶναι $\sqrt{\delta^2+8\alpha^2}>\delta$, ἡ ῥίζα $\frac{\delta-\sqrt{\delta^2+8\alpha^2}}{4\,\alpha}$ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ δέον νὰ ἀπορριφθῇ, διότι τῆς γωνίας $\frac{B}{2}$ οὔσης ὀξείας τὸ συν $\left(\frac{B}{2}\right)$ εἶναι θετικόν. Ἡ ἑτέρα ῥίζα $\frac{\delta+\sqrt{\delta^2+8\alpha^2}}{4\,\alpha}$ εἶναι παραδεκτή, ἐφ' ὅσον εἶναι $\delta+\sqrt{\delta^2+8\alpha^2}<4\,\alpha$. Τοῦ περιορισμοῦ τούτου ἐκπληρουμένου δέον πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς B νὰ καταστῇ ἡ παράστασις $\frac{\delta+\sqrt{\delta^2+8\alpha^2}}{4\,\alpha}$ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων. Τοῦτο γίνεται ὡς ἑξῆς. Ἐξάγοντες τὸν δ ἐκτὸς παρενθέσεις θέτομεν ταύτην ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\delta}{4\alpha}\left(1+\sqrt{1+\frac{8\alpha^2}{\delta^2}}\right)$. ἐὰν ἤδη τεθῇ ἐφ$^2\omega=\frac{8\alpha^2}{\delta^2}$, ἡ προηγουμένη παράστασις γίνεται διαδοχικῶς:

$$\frac{\delta}{4\alpha}\left(1+\sqrt{1+\text{ἐφ}^2\omega}\right)=\frac{\delta}{4\alpha}\left(1+\frac{1}{\text{συν}\,\omega}\right)=\frac{\delta\,(1+\text{συν}\,\omega)}{4\alpha\ \text{συν}\,\omega}$$

$$=\frac{2\delta\ \text{συν}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{4\alpha.\ \text{συν}\,\omega}=\frac{\delta\text{συν}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2\alpha\ \text{συν}\,\omega}.\ \text{Ὥστε συν}\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{\delta\text{συν}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2\alpha\ \text{συν}\,\omega}.$$

Ὑπολογιζομένης τῆς B, τὰ ἄλλα στοιχεῖα ὑπολογίζονται κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 100).

Ἀσκήσεις. 300) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ $B=54^0\ 14'$ καὶ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος εἶναι $7{,}70^{\mu}$.

301) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ $\alpha = 12^{\mu}$, ἡ δὲ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἶναι 3^{μ}.

302) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδεται τὸ ἐμβαδὸν Ε καὶ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος Υ. Ἐφαρμογή.—. $E = 450$ τ.μ. $Y = 15^{\mu}$.

303) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδονται αἱ προβολαὶ μ καὶ ν τῶν καθέτων πλευρῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν. Ἐφαρμογή.—. $\mu = 9^{\mu}$, $\nu = 6^{\mu}$.

304) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ ὑποτείνουσα α καὶ τὸ ἄθροισμα μ τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ. Ἐφαρμογή.—. $\alpha = 100^{\mu}$, $\mu = 140^{\mu}$.

305) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ ἡ διάμεσος $(AM) = \Delta$. Ἐφαρμογή. $\rho = 3^{\mu}$, $\Delta = 8^{\mu}$.

306) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδονται τὰ δύο μέρη μ καὶ ν, εἰς ἃ διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν ἡ διχοτομοῦσα τὴν ὀρθὴν γωνίαν. Ἐφαρμογή. $\mu = 4,319^{\mu}$ καὶ $\nu = 5,238^{\mu}$.

307) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ περίμετρος 2τ καὶ ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης.

308) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ ὀξεῖα γωνία Β καὶ ἡ διαφορὰ δ μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ ἐπὶ ταύτην ὕψους.

309) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος εἶναι υ, διαιρεῖ δὲ τὴν ὑποτείνουσαν εἰς δύο μέρη διαφέροντα κατὰ υ. Ἐφαρμογή.—. $\upsilon = 3^{\mu}$.

310) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ γωνία Β καὶ τὸ ἄθροισμα λ τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ. Ἐφαρμογή. $B = 33^{0}\,18'\,52''$ $\lambda = 3180,863^{\mu}$.

311) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ ὑποτείνουσα α καὶ ἡ διαφορὰ λ τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.

312) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ ὑποτείνουσα α καὶ ἡ γωνία Β.

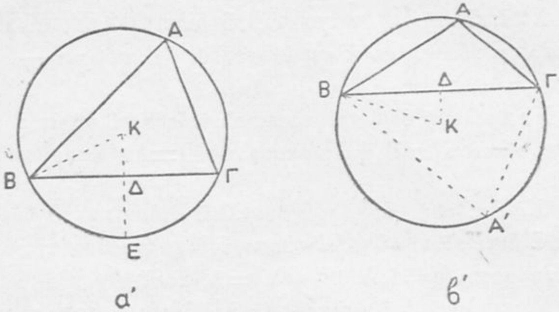
313) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδονται τὰ δύο μέρη μ καὶ ν, εἰς ἃ διαιρεῖ τὴν πλευρὰν β ἡ διχοτομοῦσα τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Β.

314) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ διάμεσος Δ καὶ τὸ ὕψος υ, ἅτινα ἄγονται ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας. Ἐφαρμογή $\Delta = 2$, $\upsilon = \sqrt{3}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ΄.

Ἐπίλυσις τῶν μὴ ὀρθογωνίων τριγώνων.

§ 110. *Τριγωνομετρικαὶ σχέσεις τῶν κυρίων στοιχείων οἱουδήποτε τριγώνου.*—. Α΄.—. Ἔστω ΑΒΓ (Σχ. 51) τυχὸν τρίγωνον, Κ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ Ρ ἡ ἀκτὶς αὐ-



(*Σχ. 51*)

τοῦ. Ἡ ἐκ τοῦ κέντρου Κ ἐπί τινα πλευρὰν π.χ. τὴν ΒΓ κάθετος τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ μέσον Δ· ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΒΚΔ ἕπεται

$$\text{ὅτι: } (\mathrm{B\Delta}) = \frac{\alpha}{2} = \mathrm{P}.\ \text{ἡμ}(\mathrm{B}\widehat{\mathrm{K}}\Delta). \qquad (1).$$

Καί, ἂν μὲν ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα (Σχ. 51 α΄), θὰ εἶναι προφανῶς ἴση πρὸς $\frac{\widehat{\mathrm{BK\Gamma}}}{2} = (\mathrm{B}\widehat{\mathrm{K}}\Delta)$ καὶ ἡ ἰσότης (1) γίνηται:

$$\frac{\alpha}{2} = \mathrm{P}\ \text{ἡμ}\mathrm{A}. \qquad (2).$$

Ἐὰν δὲ ἡ Α εἶναι ἀμβλεῖα (Σχ. 51 β΄) καὶ ληφθῇ ἐπὶ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου τυχὸν σημεῖον Α΄ ἀχθῶσι δὲ καὶ αἱ χορδαὶ Α΄Β, Α΄Γ σχηματίζεται τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον ΑΒΑ΄Γ, οὗ ἕνεκα εἶναι $\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{A}'} = 2$ ὀρθ. καὶ ἑπομένως ἡμ Α = ἡμ Α΄ = ἡμ $(\mathrm{B}\widehat{\mathrm{K}}\Delta)$.

Ὥστε πάλιν ἐκ τῆς (1) προκύπτει ἡ (2), ἐξ ἧς προκύπτει ὅτι:

$$2\,\mathrm{P} = \frac{\alpha}{\text{ἡμ}\mathrm{A}}$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ $2\mathrm{P} = \frac{\beta}{\text{ἡμ}\mathrm{B}}$, $2\mathrm{P} = \frac{\gamma}{\text{ἡμ}\Gamma}$. Ὅθεν

$$\frac{\alpha}{\text{ἡμ}A}=\frac{\beta}{\text{ἡμ}B}=\frac{\gamma}{\text{ἡμ}\Gamma} \qquad (72).$$

Ἄρα: *Αἱ πλευραὶ παντὸς τριγώνου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ.*

Σημ. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\beta=\alpha\,\text{ἡμ}B$, $\gamma=\alpha\,\text{ἡμ}\Gamma$, $\text{ἡμ}A=1$, προκύπτει εὐκόλως ὅτι $\alpha=\frac{\beta}{\text{ἡμ}B}=\frac{\gamma}{\text{ἡμ}\Gamma}$ ἢ $\frac{\alpha}{\text{ἡμ}A}=\frac{\beta}{\text{ἡμ}B}=\frac{\gamma}{\text{ἡμ}\Gamma}$, ἤτοι αἱ ἰσότητες (72) ἀληθεύουσι καὶ διὰ τὰ ὀρθ. τρίγωνα.

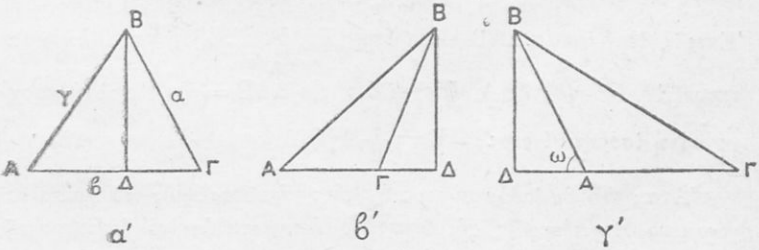
Β'.—. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\alpha=2P\,\text{ἡμ}A$, $\beta=2P\,\text{ἡμ}B$ προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ ἰσότητες: $\alpha-\beta=2P\,(\text{ἡμ}A-\text{ἡμ}B)$ καὶ $\alpha+\beta=2P\,(\text{ἡμ}A+\text{ἡμ}B)$· ἐκ τούτων δὲ προκύπτει ἡ ἰσότης $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\text{ἡμ}A-\text{ἡμ}B}{\text{ἡμ}A+\text{ἡμ}B}$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 85 Α') εἶναι $\frac{\text{ἡμ}A-\text{ἡμ}B}{\text{ἡμ}A+\text{ἡμ}B}=\frac{\text{ἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\text{ἐφ}\left(\frac{A+B}{2}\right)}$ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται:

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\text{ἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\text{ἐφ}\left(\frac{A+B}{2}\right)} \qquad (73)$$

Ἄρα: *Ὁ λόγος τῆς διαφορᾶς δύο πλευρῶν τριγώνου πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν ἀπέναντι γωνιῶν πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἡμιαθροίσματος αὐτῶν.*

Γ'.—.Ἔστω ΑΒΓ (Σχ. 52) τυχὸν τρίγωνον καὶ ΒΔ τυχὸν ὕψος



(Σχ. 52).

αὐτοῦ. Ἕνεκα τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΔ εἶναι $(A\Delta)=\gamma.\,\text{συν}(\Delta\widehat{A}B)$. (1)

Ἐὰν ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα (Σχ. 52 α', β'), ἡ $\Delta\widehat{A}B$ εἶναι αὐτὴ ἡ Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἡ ἰσότης (1) γίνεται: $(Α\Delta)=\gamma.\text{συν} Α$. (2).

Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ὡς ἡ Γεωμετρία διδάσκει, ἀληθεύει ἡ ἰσότης $(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2-2(ΑΓ)(Α\Delta)$, ἕπεται, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν καὶ τῆς ἰσότητος (2), ὅτι: $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\text{συν}Α$ (3)

Ἐὰν δὲ ἡ Α εἶναι ἀμβλεῖα (Σχ. 52 γ′), ἡ γωνία ΔΑΒ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἑπομένως

$\text{συν}\widehat{\Delta Α Β}=-\text{συν}Α$, ἡ δὲ ἰσότης (1) γίνεται: $(Α\Delta)=-\gamma.\text{συν}Α$. (4)

Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀποδεικνυομένης σχέσεως: $(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2+2(ΑΓ)(Α\Delta)$ προκύπτει πάλιν ἡ ἰσότης (3), ἥτις εἶναι οὕτω γενική.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι:

$$\beta^2=\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\ \text{συν}\ Β,\quad \gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\ \text{συν}\ Γ.$$

Ὥστε μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ γωνιῶν παντὸς τριγώνου ὑφίστανται καὶ αἱ σχέσεις:

$$\begin{aligned}\alpha^2&=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\ \text{συν}\ Α\\ \beta^2&=\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\ \text{συν}\ Β\\ \gamma^2&=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\ \text{συν}\ Γ.\end{aligned}\qquad (74)$$

Ἄρα: *Τὸ τετράγωνον ἑκάστης πλευρᾶς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἄλλων πλευρῶν ἠλαττωμένον κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου αὐτῶν πολ)σθέντος καὶ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.*

Δ′.—. Ἔστω ΑΒΓ (Σχ. 52) τυχὸν τρίγωνον καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. Ἐκ τῶν γνωστῶν ἰσοτήτων $Ε=\frac{1}{2}\beta.(Β\Delta)$ καὶ

$(Β\Delta)=\gamma\ \text{ἡμ}\ (\widehat{\Delta Α Β})$ προκύπτει ἡ ἰσότης $Ε=\frac{1}{2}\beta\gamma\ \text{ἡμ}\ (\widehat{\Delta Α Β})$.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΔΑΒ εἶναι ἴση (Σχ. 52 α′, β′) ἢ παραπληρωματικὴ (Σχ. 52 γ′) τῆς Α, ἕπεται ὅτι $\text{ἡμ}\ \widehat{\Delta Α Β}=\text{ἡμ}Α$ καὶ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται: $Ε=\frac{1}{2}\beta\gamma\text{ἡμ}Α$ (75)

Ἄρα: *Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν αὐτοῦ πολ]σθέντος καὶ ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.*

Ἀσκήσεις. 315) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον ἀληθεύουσιν αἱ ἰσότητες $\alpha=\beta\ \text{συν}Γ+\gamma\ \text{συν}Β$, $\beta=\alpha\ \text{συν}Γ+\gamma\text{συν}\ Α$, $\gamma=\alpha\ \text{συν}Β+\beta\ \text{συν}Α$.

316) Ὁμοίως ὅτι: $\frac{\beta+\gamma}{\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)}$.

317) Ὁμοίως ὅτι: $\frac{\eta\mu\,(A-B)}{\eta\mu\,(A+B)}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2}$.

318) Ὁμοίως ὅτι: $\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}=\frac{\varepsilon\varphi\,A}{\varepsilon\varphi\,B}$.

319) Ὁμοίως ὅτι: $E=2P^2\,\eta\mu A.\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma$.

320) Νὰ καταστῇ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις $\eta\mu 2A+\eta\mu 2B+\eta\mu 2\Gamma$, ἂν A, B, Γ εἶναι γωνίαι τοῦ αὐτοῦ τριγώνου.

321) Τριγώνου ΑΒΓ ἡ διάμεσος ΑΜ σχηματίζει μετὰ τῆς ΑΒ γωνίαν ω, μετὰ δὲ τῆς ΑΓ γωνίαν φ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\gamma\,\eta\mu\,\omega-\beta\,\eta\mu\,\varphi=0.$$

322) Ἐὰν μεταξὺ τῶν στοιχείων τριγώνου ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης $\alpha=2\beta\,\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τοῦτο εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον.

323) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Β τριγώνου ΑΒΓ ἀγόμενον ὕψος αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς $2P\,\eta\mu\,A\,\eta\mu\,\Gamma$.

324) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον ἀληθεύει ἡ ἰσότης:

$$\beta\,\sigma\upsilon\nu\,B+\gamma\,\sigma\upsilon\nu\,\Gamma=\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,(B-\Gamma).$$

325) Ὁμοίως ὅτι: $\alpha\,\eta\mu(B-\Gamma)+\beta\,\eta\mu(\Gamma-A)+\gamma\,\eta\mu(A-B)=0$.

326) Ὁμοίως ὅτι: $\alpha\,\sigma\upsilon\nu A+\beta\,\sigma\upsilon\nu B+\gamma\,\sigma\upsilon\nu\Gamma=4P\,\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma$.

327) Ὁμοίως ὅτι: $\frac{\alpha\,\eta\mu\,A+\beta\,\eta\mu\,B+\gamma\,\eta\mu\,\Gamma}{\alpha\,\sigma\upsilon\nu A+\beta\,\sigma\upsilon\nu B+\gamma\,\sigma\upsilon\nu\Gamma}=P.\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}$.

328) Ἐὰν εἶναι $\eta\mu A=2\,\eta\mu B.\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

329) Ἐὰν αἱ πλευραὶ α, β, γ τριγώνου εἶναι, καθ' ἣν ἐγράφησαν τάξιν, ὅροι αὐξούσης ἀριθμητικῆς προόδου, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $3\,\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=1$.

§ 111.—. ***Ἐπίλυσις οἱωνδήποτε τριγώνων, ὧν τὰ δεδομένα στοιχεῖα εἶναι ἐκ τῶν πλευρῶν καὶ γωνιῶν.*** —. Ἐκ τῆς γεωμετρίας γνωρίζομεν ὅτι τρίγωνόν τι δύναται νὰ κατασκευασθῇ, ἂν δοθῶσιν 3 στοιχεῖα ἐκ τῶν πλευρῶν καὶ γωνιῶν αὐτοῦ, ἀρκεῖ ἓν τοὐλάχιστον τούτων νὰ εἶναι πλευρά. Εἶναι, ὅθεν, κατὰ τὰς αὐτὰς περιπτώσεις δυνατὴ καὶ ἡ ἐπίλυσις τοῦ τριγώνου. Ἐντεῦθεν προκύπτουσιν αἱ ἀκόλουθοι τέσσαρες περιπτώσεις ἐπιλύσεως οἱωνδήποτε τριγώνων, αἵτινες καλοῦνται καὶ *κλασικαὶ* περιπτώσεις.

§ 112. Α΄. ***Περίπτωσις.***—. *Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ πλευρὰ α καὶ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ αὐτοῦ.*

Προφανῶς, ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν, πρέπει $B + \Gamma < 180°$. Ἐκ τῆς σχέσεως $A+B+\Gamma=180°$, ἕπεται ὅτι : $A=180°-(B+\Gamma)$ ἐξ ἧς ὁρίζεται ἡ Α. Ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$ προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες $\beta = \frac{\alpha \eta\mu B}{\eta\mu A}$, $\gamma = \frac{\alpha\, \eta\mu \Gamma}{\eta\mu A}$. Ἐπειδὴ δὲ $\eta\mu A = \eta\mu(B+\Gamma)$, αὗται γίνονται $\beta = \frac{\alpha\, \eta\mu B}{\eta\mu(B+\Gamma)}$, $\gamma = \frac{\alpha\, \eta\mu \Gamma}{\eta\mu(B+\Gamma)}$, δι' ὧν ὁρίζονται αἱ πλευραὶ β καὶ γ συναρτήσει τῶν δεδομένων στοιχείων. Τέλος πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ θέτομεν ἐν τῇ ἰσότητι $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\, \eta\mu A$ τὰς προηγουμένως εὑρεθείσας τιμὰς τῶν β, γ, ημΑ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$E = \frac{\alpha^2\, \eta\mu B.\, \eta\mu \Gamma}{2\, \eta\mu\, (B+\Gamma)} \qquad (76)$$

Παράδειγμα.—. Ἔστω $\alpha = 3\,475,\,6^{\mu}$, $B = 27°\,12'\,18''$, $\Gamma = 50°\,40'\,15''$. Ὑπολογισμὸς τῆς Α.

$$\begin{array}{rl} B = & 27°\ 12'\ 18'' \\ \Gamma = & 50°\ 40'\ 15'' \\ \hline B+\Gamma = & 77°\ 52'\ 33'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 180° = & 179°\ 59'\ 60'' \\ B+\Gamma = & 77°\ 52'\ 33'' \\ \hline A = & 102°\ \ 7'\ 27'' \end{array}$$

Ὑπολογισμὸς τῆς $\beta = \frac{\alpha\, \eta\mu B}{\eta\mu(B+\Gamma)}$ καὶ $\gamma = \frac{\alpha\, \eta\mu \Gamma}{\eta\mu(B+\Gamma)}$.

$$\lambda o\gamma\, \beta = \lambda o\gamma\, \alpha + \lambda o\gamma\, \eta\mu\, B - \lambda o\gamma\, \eta\mu\, (B+\Gamma)$$
$$\lambda o\gamma\, \gamma = \lambda o\gamma\, \alpha + \lambda o\gamma\, \eta\mu\, \Gamma - \lambda o\gamma\, \eta\mu\, (B+\Gamma)$$

$$\begin{array}{rl} \lambda o\gamma \alpha = & 3,54103 \\ \lambda o\gamma\, \eta\mu\, B = & \overline{1},66008 \\ \hline \ddot{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha = & 3,20111 \\ \lambda o\gamma\, \eta\mu\, (B+\Gamma) = & \overline{1},99021 \\ \hline \lambda o\gamma\, \beta = & 3,21090 \\ \beta = & 1625,18^{\mu} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \lambda o\gamma \alpha = & 3,54103 \\ \lambda o\gamma\, \eta\mu\, \Gamma = & \overline{1},88847 \\ \hline \ddot{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha = & 3,42950 \\ \lambda o\gamma\, \eta\mu\, (B+\Gamma) = & \overline{1},99021 \\ \hline \lambda o\gamma\, \gamma = & 3,43929 \\ \gamma = & 2749,75^{\mu} \end{array}$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ $E = \frac{\alpha^2 \eta\mu B\ \eta\mu \Gamma}{2\eta\mu\, (B+\Gamma)}$

$$\lambda o\gamma\,(2E) = 2\lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\, ἡμ B + \lambda o\gamma\, ἡμ\Gamma - \lambda o\gamma\, ἡμ\,(B+\Gamma)$$

$2\lambda o\gamma\alpha = 7,08206$

$\lambda o\gamma\, ἡμ\, B = \overline{1},66\ 08$

$\lambda o\gamma\, ἡμ\, \Gamma = \overline{1},88847$

ἄθροισμα $= 6,63061$

ἄθροισμα $= 6,63061$

$\lambda o\gamma\, ἡμ\,(B+\Gamma) = \overline{1},99021$

$\lambda o\gamma\,(2E) = 6,64040$

$2E = 4369200$ τ.μ.

$E = 2184600$ τ.μ·

Ἀσκήσεις. 330) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\alpha = 1250^{\mu}$, $B = 28^{\circ}\,16'$ καὶ $\Gamma = 56^{\circ}\,20'$.

331) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\alpha = 333^{\mu}$, $A = 33^{\circ}\,33'$ καὶ $B = 55^{\circ}\,55'$.

332) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\alpha = 140^{\mu}$, $B = 24^{\circ}\,24'\,24''$ καὶ $\Gamma = 32^{\circ}\,23'$.

333) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ μία πλευρὰ εἶναι 348^{μ}, ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία εἶναι $33{,}3^{\gamma}$ καὶ μία τῶν προσκειμένων γωνιῶν εἶναι $33^{\circ}\,3'$.

334) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\alpha = 240^{\mu}$, $B = 1^{\circ}\,5'\,12''$ καὶ $A = 66^{\circ}\,36''$.

§ 113. *Β' Περίπτωσις.—. Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ δίδονται δύο πλευραὶ καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία.—.*

Ἔστωσαν α, β, Γ τὰ δεδομένα στοιχεῖα καὶ $\alpha > \beta$. Ἐκ τῆς ἰσότητος (73) προκύπτει ὅτι : $ἐφ\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\cdot ἐφ\left(\frac{A+B}{2}\right)$.

Ἐπειδὴ ὅμως $A+B+\Gamma = 180^{\circ}$, ἕπεται ὅτι $\frac{A+B}{2} = 90^{\circ} - \frac{\Gamma}{2}$ καὶ $ἐφ\left(\frac{A+B}{2}\right) = σφ\frac{\Gamma}{2}$ ἡ δὲ προηγουμένη ἰσότης γίνεται :

$$ἐφ\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\,σφ\left(\frac{\Gamma}{2}\right).$$

Διὰ ταύτης ὑπολογίζομεν τὴν διαφορὰν $A-B$ καὶ ἔστω Δ ἡ τιμὴ αὐτῆς. Λύοντες εἶτα τὸ σύστημα $A+B = 180^{\circ}-\Gamma$, $A-B = \Delta$ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν ἑκατέρας τῶν γωνιῶν A καὶ B. Μεθ' ὃ ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\gamma}{ἡμ\Gamma} = \frac{\alpha}{ἡμ A}$ λαμβάνομεν τὴν $\gamma = \frac{\alpha\, ἡμ\Gamma}{ἡμ A}$ δι' ἧς ὑπολογίζεται ἡ πλευρὰ γ. Τὸ ἐμβαδὸν τέλος ὑπολογίζομεν ἐκ τῆς ἰσότητος $E = \frac{1}{2}\,\alpha\beta\, ἡμ\Gamma$.

Σημ. α'. Τὴν πλευρὰν γ δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\frac{\gamma}{ἡμΓ} = \frac{\alpha}{ἡμA} = \frac{6}{ἡμB}$ προκύπτει εὐκόλως ἡ ἰσότης $\frac{\gamma}{ἡμΓ} = \frac{\alpha+6}{ἡμA+ἡμB}$, ὅθεν $\gamma = \frac{(\alpha+6)\,ἡμΓ}{ἡμA+ἡμB}$. Ἐπειδὴ ὅμως

$$ἡμΓ = 2ἡμ\left(\frac{Γ}{2}\right)συν\left(\frac{Γ}{2}\right) \text{ καὶ}$$

$$ἡμA+ἡμB = 2ἡμ\left(\frac{A+B}{2}\right)συν\left(\frac{A-B}{2}\right) = 2\,συν\frac{Γ}{2}\,συν\left(\frac{A-B}{2}\right),$$

ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται :

$$\gamma = \frac{(\alpha+6)\,ἡμ\left(\frac{Γ}{2}\right)}{συν\left(\frac{A-B}{2}\right)}. \qquad (77)$$

Προτιμᾶται ὅμως ταύτης ἡ προηγουμενη $\gamma = \frac{\alpha\,ἡμΓ}{ἡμA}$, διότι δύο ἐκ τῶν χρησιμοποιηθησομένων λογαρίθμων χρησιμοποιοῦνται καὶ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ.

Σημ. β'. Ἂν $\alpha = 6$, θὰ εἶναι καὶ $A = B$ καὶ ἑκατέρα ὑπολογίζεται ἐκ τῆς ἰσότητος $Γ + 2A = 180^\circ$.

Παράδειγμα. *Ἔστω* $\alpha = 3475{,}6^{μ}$, $6 = 1625{,}2$, $Γ = 50^\circ\,40'\,15''$.

Ὑπολογισμὸς τῶν γωνιῶν B καὶ Γ.

$$ἐφ\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{\alpha-6}{\alpha+6}\cdot σφ\left(\frac{Γ}{2}\right)$$

$$λογ\,ἐφ\left(\frac{A-B}{2}\right) = λογ(\alpha-6) + λογ\,σφ\left(\frac{Γ}{2}\right) - λογ\,(\alpha+6)$$

Βοηθητικὸς πίναξ.

$\alpha = 3475{,}6$
$6 = 1625{,}2$

$\alpha + 6 = 5100{,}8$
$\alpha - 6 = 1850{,}4$
$Γ = 50^\circ\,40'\,15''$
$\frac{Γ}{2} = 25^\circ\,20'\,7'',5$

$180^\circ = 179^\circ\,59'\,60''$
$Γ = 50^\circ\,40'\,15''$

$A + B = 129^\circ\,19'\,45''$

$λογ\,(\alpha-6) = 3{,}26727$
$λογ\,σφ\left(\frac{Γ}{2}\right) = 0{,}32480$

ἄθροισμα $= 3{,}59207$
$λογ\,(\alpha+6) = 3{,}70764$

$λογἐφ\left(\frac{A-B}{2}\right) = \overline{1},88443$

$\left(\frac{A-B}{2}\right) = 37^\circ\,27'\,53''$
$A-B = 74^\circ\,55'\,46''$
$A+B = 129^\circ\,19'\,45''$

$2A = 204^\circ\,15'\,31''$

$$180^0 = 179^0\ 59'\ 60''$$
$$A = 102^0\ 7\ 45'',5$$
$$180^0 - A = 77^0\ 52'\ 14'',5$$
$$ἡμA = ἡμ\,(77^0\ 52'\ 14'',5)$$

$$2B = 54^0\ 23'\ 59'$$
$$A = 102^0\ 7'\ 45'',5$$
$$B = 27^0\ 11'\ 59'',5$$

Ὑπολογισμὸς τῆς $\gamma = \frac{\alpha\ ἡμΓ}{ἡμA}$.

$$λογ\,\gamma = λογ\,\alpha + λογ ἡμΓ - λογ ἡμA$$
$$λογ\,\alpha = 3{,}54103$$
$$λογ\,ἡμΓ = \overline{1}{,}88847$$
$$ἄθροισμα = 3{,}42950$$
$$λογ\,ἡμA = \overline{1}{,}99020$$
$$λογ\gamma = 3{,}43930$$
$$\gamma = 2749{,}8^{\mu}.$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ $E = \frac{1}{2}\alpha\beta\ ἡμΓ$

$$λογ(2E) = λογ\,\alpha + λογ\,\beta + λογ\,ἡμΓ$$
$$λογ\,\alpha = 3{,}54103$$
$$λογ\,\beta = 3{,}21090$$
$$λογ\,ἡμΓ = \overline{1}{,}88847$$
$$λογ\,(2E) = 6{,}64040$$
$$2E = 4369200\ \tau.\ \mu.$$
$$E = 2184600\ \tau.\ \mu.$$

Ἀσκήσεις 335) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\alpha = 300^{\mu}$, $\beta = 127^{\mu}$ καὶ $Γ = 68^0\ 40'$.

336) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\alpha = 444{,}44^{\mu}$, $\beta = 127^{\mu}$ καὶ $Γ = 40^0\ 44'\ 44''$.

337) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\beta = \frac{3^{\mu}}{4}$, $\gamma = \frac{5\pi}{12}$ καὶ $A = 40^0$.

338) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\alpha = 100^{\mu}$, $\beta = 75^{\mu}$ καὶ $Γ = \frac{5\pi}{9}$.

§ 114. Γ'. ***Περίπτωσις.***—. *Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ δίδονται δύο πλευραὶ καὶ μία γωνία κειμένη ἀπέναντι τῆς μιᾶς τῶν δεδομένων πλευρῶν.*—. Ἔστωσαν α, β καὶ A τὰ δεδομένα στοιχεῖα. Ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\alpha}{ἡμA} = \frac{\beta}{ἡμB}$ προκύπτει ἡ ἰσότης

$$ἡμB = \frac{\beta ἡμA}{\alpha}. \quad (1)$$

Ὑπολογιζομένης ἐκ ταύτης τῆς B, εὑρίσκεται εἶτα ἡ Γ ἐκ τῆς ἰσότητος:

$$Γ = 180^0 - (A + B) \quad (2)$$

καὶ ἡ πλευρὰ γ ἐκ τῆς

$$\gamma = \frac{\alpha\,ἡμΓ}{ἡμA}. \quad (3)$$

Τέλος τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἰσότητος $E = \frac{1}{2}\alpha\beta\ ἡμΓ$.

Διερεύνησις.—. Τῆς γωνίας A περιλαμβανομένης μεταξὺ 0^0 καὶ 180^0, τὸ ἡμA εἶναι θετικόν· ἐπειδὴ δὲ καὶ οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι θετικοί, τὸ β'. μέλος τῆς ἰσότητος (1) εἶναι θετικόν. Ἵνα δὲ ὑπάρχῃ γωνία B ἔχουσα ἡμίτονον τὸν θετικὸν τοῦτον ἀριθμὸν $\frac{\beta\ ἡμ A}{\alpha}$, πρέπει νὰ εἶναι $\frac{\beta\ ἡμA}{\alpha} \leq +1$, ὅθεν $\beta\ ἡμA \leq \alpha$.

Ἐὰν ἄρα εἶναι $\alpha < \beta$ ἡμ A οὐδεμία γωνία ταὐτοποιεῖ τὴν (1), ἤτοι τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν.

Ἐὰν εἶναι $\alpha=\beta$ἡμA, ἡ ἰσότης (1) γίνεται ἡμB=1, ἣν ἐκ τῶν θετικῶν καὶ μικροτέρων 180^0 γωνιῶν μόνον ἡ $B=90^0$ ταὐτοποιεῖ. Αἱ δὲ ἰσότητες (2) καὶ (3) δίδουσι τότε $\Gamma=90^0-A$ καὶ $\gamma=\beta$ἡμΓ$=\beta$συνA. Ἡ λύσις αὕτη εἶναι παραδεκτή, ἂν εἶναι $\Gamma>0$ καὶ $\gamma>0$, ἤτοι ἂν $A<90^0$.

Ὥστε: Ἐὰν

$$\alpha=\beta\text{ἡμ}A \begin{cases} A<90^0, & \text{ὑπάρχει μία λύσις} \\ A\geqq 90^0, & \text{οὐδεμία ὑπάρχει λύσις} \end{cases}$$

Ἐὰν τέλος εἶναι $\alpha>\beta$ἡμA, τὸ β′ μέλος τῆς (1) εἶναι μικρότερον τοῦ $+1$ καὶ ἐκ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων εὑρίσκομεν ὀξεῖάν τινα γωνίαν Δ τοιαύτην ὥστε ἡμΔ $=$ ἡμB $= \frac{\beta\text{ἡμ}A}{\alpha}$. Ἐπειδὴ ὅμως ἡμ$(180^0-\Delta)=$ἡμΔ, τὴν αὐτὴν ἰσότητα (1) ἐπαληθεύει καὶ ἡ γωνία $180^0-\Delta$. Δι' ἑκατέραν τῶν τιμῶν τούτων τῆς B αἱ ἰσότητες (2) καὶ (3) παρέχουσιν ἰδίαν τιμὴν ἑκατέρου τῶν ἀγνώστων Γ καὶ γ· ἃς καλέσωμεν Γ_1 καὶ γ_1 τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὴν $B=\Delta$ καὶ Γ_2, γ_2 τὰς εἰς τὴν $B=180^0-\Delta$ ἀντιστοιχούσας τιμὰς αὐτῶν.

Οὕτω: διὰ $B=\Delta$ θὰ εἶναι $\Gamma_1=180^0-(A+\Delta)$ καὶ $\gamma_1=\frac{\alpha\text{ἡμ}\Gamma_1}{\text{ἡμ}A}$

διὰ $B=180^0-\Delta$ » » $\Gamma_2 = \Delta - A$ καὶ $\gamma_2=\frac{\alpha\text{ἡμ}\Gamma_2}{\text{ἡμ}A}$

Ἵνα ἡ πρώτη λύσις εἶναι παραδεκτή, πρέπει νὰ εἶναι $A+\Delta<180^0$, δι' ὃ καὶ ἡμ$\Gamma_1>0$, ἄρα καὶ $\gamma_1>0$. Ἵνα δὲ καὶ ἡ β′. λύσις εἶναι παραδεκτή, πρέπει νὰ εἶναι $A<\Delta$.—. Τούτων τεθέντων διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον εἶναι $A<90^0$ ἢ $A>90^0$.

1η Περίπτωσις, $A<90^0$.—. Ἐπειδὴ καὶ $\Delta<90^0$, εἶναι $A+\Delta<180^0$ καὶ ἑπομένως ἡ α′. λύσις εἶναι παραδεκτή. Ὅσον ἀφορᾷ τὴν δευτέραν, θὰ εἶναι παραδεκτή, ἂν εἶναι $A<\Delta$· ἐπειδὴ δὲ ἀμφότεραι αὗται εἶναι ὀξεῖαι τὰ ἡμίτονα αὐτῶν θὰ εἶναι ὁμοίως ἄνισα (§ 37), ἤτοι ἡμ$A<$ἡμ$\Delta = \frac{\beta\text{ἡμ}A}{\alpha}$, ὅθεν $\alpha<\beta$. Ὥστε:

$$\text{ἂν } \alpha>\beta\text{ἡμ}A \text{ καὶ } A<90^0 \begin{cases} \alpha\geqq\beta & \text{ὑπάρχει 1 λύσις} \\ \alpha<\beta & \text{ὑπάρχουσι 2 λύσεις} \end{cases}$$

2α Περίπτωσις, $A>90^0$.—. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ β′. λύσις ἀπορρίπτεται, διότι παρέχει ἀρνητικὴν τιμὴν τῆς Γ. Ἵνα δὲ ἡ α′.

εἶναι παραδεκτή, πρέπει $A+\Delta<180^0$ ἢ $A<180^0-\Delta$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι A καὶ $180^0-\Delta$ εἶναι ἀμφότεραι ἀμβλεῖαι, θετικαὶ καὶ μικρότεραι 180^0, ἡ μικροτέρα θὰ ἔχῃ μεγαλύτερον ἡμίτονον (§ 37), ἤτοι $ἡμA>ἡμ(180^0-\Delta)$ ἢ $ἡμA>ἡμ\Delta=\frac{\beta ἡμA}{\alpha}$, ὅθεν $\alpha>\beta$: ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει καὶ ἡ λύσις αὕτη ἀπορρίπτεται. ὥστε:

ἂν $\alpha>\beta ἡμA$ καὶ $A>90^0$ $\begin{cases} \text{ἐὰν } \alpha\leq\beta, \text{ οὐδεμία ὑπάρχει λύσις} \\ \text{» } \alpha>\beta \text{ μία » »} \end{cases}$

Τὰ πορίσματα τῆς ἀνωτέρω διερευνήσεως συνοψίζομεν ἐν τῷ ἀκολούθῳ πίνακι.

$\alpha<\beta ἡμA$			οὐδεμία λύσις
$\alpha=\beta ἡμA$	$A<90^0$		μία λύσις
	$A\geqq90^0$		οὐδεμία λύσις
$\alpha>\beta ἡμA$	$A<90^0$	$\alpha\geqq\beta$	μία λύσις
		$\alpha<\beta$	δύο λύσεις
	$A>90^0$	$\alpha\leq\beta$	οὐδεμία λύσις
		$\alpha>\beta$	μία λύσις

Σημ. Εἰς τὰ πορίσματα ταῦτα καταλήγομεν καὶ δι' ἄλλης γεωμετρικῆς μεθόδου, περὶ ἧς ὅρα ἡμέτερα Στοιχεῖα Τριγωνομετρίας σελ. 57.—

Παράδειγμα 1ον.—. Ἔστω $\alpha=300^\mu$, $\beta=456,75^\mu$, $A=34^0\ 16'$.

Κατὰ πρῶτον ὑπολογίζομεν τὴν παράστασιν $\beta ἡμA$, ἵνα γνωρίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν λύσεων.

$λογ(\beta ἡμA) = λογ\beta + λογἡμA = 2,41022$, ἄρα $\beta ἡμA = 257,17^\mu$, ἤτοι $\beta ἡμA<\alpha$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $A<90^0$ καὶ $\alpha<\beta$, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

Ἤδη θὰ ὑπολογίσωμεν τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων στοιχείων ἑκατέρου τῶν τριγώνων, ἅτινα ἀποτελοῦσι τὰς λύσεις ταύτας.

Ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τῆς B.—. $ἡμB=\frac{\beta ἡμA}{\alpha}$

ἄρα $λογἡμ B = λογ\beta + λογἡμA - λογ\alpha$

$λογ\ \beta = 2,65968$ ἄθροισμα $= 2,41022$

$λογ\ ἡμ\ A = \overline{1},75054$ $λογ\ \alpha = 2,47712$

ἄθροισμα $= 2,41022$ $λογ\ ἡμ\ B = \overline{1},93310$ ἄρα

$B = 59^0\ 0'\ 25'',7$, $B' = 180^0 - B = 120^0\ 59'\ 34'',3$.

Ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τῆς Γ.

$A = 34^0\ 16'$	$180^0 = 179^0\ 59'\ 60''$
$B = 59^0\ 0\ 25'',7$	$A + B = 93^0\ 16'\ 26'',7$
$B' = 120^0\ 59'\ 34'',3$	$\Gamma_1 = 86^0\ 43'\ 34'',3$
$A + B = 93^0\ 16'\ 25'',7$	$A + B = 155^0\ 15'\ 34'',3$
$A + B' = 155^0\ 15'\ 34'',3$	$\Gamma_2 = 24^0\ 44'\ 25'',7$

Ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τῆς πλευρᾶς γ.

$\gamma_1 = \dfrac{\alpha\ \acute{\eta}\mu\Gamma_1}{\acute{\eta}\mu A}$ ἄρα	$\gamma_2 = \dfrac{\alpha\acute{\eta}\mu\Gamma_2}{\acute{\eta}\mu A}$, ἄρα
$\lambda o\gamma\,\gamma_1 = \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\Gamma_1 - \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu A$,	$\lambda o\gamma\gamma_2 = \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\Gamma_2 - \acute{\eta}\mu A$
$\lambda o\gamma\ \alpha = 2,47712$	$\lambda o\gamma\ \alpha = 2,47712$
$\lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\ \Gamma_1 = \overline{1},99929$	$\lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\ \Gamma_2 = \overline{1},62171$
ἄθροισμα $= 2,47641$	ἄθροισμα $= 2,09883$
$\lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\ A = \overline{1},75054$	$\lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\ A = \overline{1},75054$
$\lambda o\gamma\ \gamma_1 = 2,72587$	$\lambda o\gamma\ \gamma_2 = 2,34829$
$\gamma_1 = 531,95^\mu$.	$\gamma_2 = 222,995^\mu$

Ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τοῦ ἐμβαδοῦ.

$2E_1 = \alpha\beta\acute{\eta}\mu\Gamma_1$, ἄρα	$2E_2 = \alpha\beta\acute{\eta}\mu\Gamma_2$, ἄρα
$\lambda o\gamma(2E_1) = \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\Gamma_1$	$\lambda o\gamma(2E_2) = \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\Gamma_2$
$\lambda o\gamma\ \alpha = 2,47712$	$\lambda o\gamma\ \alpha = 2,47712$
$\lambda o\gamma\ \beta = 2,65968$	$\lambda o\gamma\ \beta = 2,65968$
$\lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\ \Gamma_1 = \overline{1},99929$	$\lambda o\gamma\ \acute{\eta}\mu\Gamma_2 = \overline{1},62171$
$\lambda o\gamma\,(2E_1) = 5,13609$	$\lambda o\gamma\,(2E_2) = 4,75851$
$2E_1 = 136800$ τ. μ.	$2E_2 = 57347,14$ τ. μ.
$E_1 = 68400$ τ. μ.	$E_2 = 28673,57$ τ. μ.

Παράδειγμα 2ον.—. Ἔστω $\alpha = 900^\mu$, $\beta = 1245^\mu$ καὶ $A = 53^0\ 12'\ 20''$.

Ὑπολογίζοντες, ὡς προηγουμένως, τὴν παράστασιν $\beta\acute{\eta}\mu A$ εὑρίσκομεν ὅτι αὕτη ἰσοῦται πρὸς $996,98^\mu$, ἤτοι $\beta\acute{\eta}\mu A > \alpha$, ἄρα τὸ πρόβλημα οὐδεμίαν ἔχει λύσιν.

Σημ. Ἐὰν δὲν ὑπολογίσωμεν ἐκ τῶν προτέρων τὴν παράστασιν $\beta\acute{\eta}\mu A$, ἀλλ' ἐπιχειρήσωμεν ἀμέσως τὸν ὑπολογισμὸν τῆς B, θέλομεν εὕρει $\lambda o\gamma\acute{\eta}\mu B = 0,04445$, ὅθεν $\acute{\eta}\mu B > 1$, ὅπερ ἄτοπον.

Ἀσκήσεις. 339) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\alpha = 560^\mu$, $\beta = 840^\mu$ καὶ $A = 40^0\ 20'\ 10''$.

340) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\alpha=500^{\mu}$, $\beta=415{,}5^{\mu}$ καὶ $A=115^{o}$.

341) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\alpha=40^{\mu}$, $\beta=45^{\mu}$ καὶ $A=50^{o}\,15'$

342) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\alpha=23^{\mu}$, $\beta=38^{\mu}$ καὶ $B=32^{o}$.

§ 115. *Δ' Περίπτωσις.—. Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ δίδονται αἱ τρεῖς πλευραί.* Ἐκ τῆς γνωστῆς (74) σχέσεως $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\text{συν}A$ προκύπτει ἡ ἰσότης $\text{συν}\,A=\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$ (1).

Ἐπειδὴ τὸ β'. μέλος αὐτῆς δὲν εἶναι λογιστὸν διὰ τῶν λογαρίθμων, ἀναζητοῦμεν ἕτερον τύπον κατάλληλον διὰ τὸν λογισμὸν διὰ τῶν λογαρίθμων. Πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον $\text{εφ}\left(\dfrac{\omega}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1-\text{συν}\omega}{1+\text{συν}\omega}}$ εἰς τὴν γωνίαν A θέτοντες πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ τὸ $+$, διότι τῆς γωνίας $\dfrac{A}{2}$ οὔσης ὀξείας, ἡ εφ $\dfrac{A}{2}$ εἶναι θετική. Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα $\text{εφ}\left(\dfrac{A}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1-\text{συν}A}{1+\text{συν}A}}$ (2).

Λαμβάνοντες δὲ ὑπ' ὄψιν τὴν ὑπὸ τῆς (1) παρεχομένην τιμὴν τοῦ συνA εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\frac{1-\text{συν}A}{1+\text{συν}A}=\frac{1-\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}}{1+\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}}=\frac{2\beta\gamma-\beta^2-\gamma^2+\alpha^2}{2\beta\gamma+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}$$

$\dfrac{(\alpha+\beta-\gamma)\,(\alpha-\beta+\gamma)}{(\alpha+\beta+\gamma)\,(\beta+\gamma-\alpha)}$. Ἐὰν δὲ χάριν συντομίας τεθῇ $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ (3) καὶ ἀφαιρεθῇ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$, προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες :

$\beta+\gamma-\alpha=2\,(\tau-\alpha)$, $\alpha-\beta+\gamma=2\,(\tau-\beta)$, $\alpha+\beta-\gamma=2\,(\tau-\gamma)$ (4)

Ἕνεκα τούτων $\dfrac{1-\text{συν}A}{1+\text{συν}A}=\dfrac{(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\tau\,(\tau-\alpha)}$ ἡ δὲ ἰσότης (2) γίνεται

$$\text{εφ}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\tau\,(\tau-\alpha)}}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{εφ}\left(\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\,(\tau-\gamma)}{\tau\,(\tau-\beta)}} \quad (78).$$

$$\text{εφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)}{\tau\,(\tau-\gamma)}}$$

Διὰ τῶν ἰσοτήτων τούτων ὑπολογίζονται αἱ γωνίαι $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ καὶ $\frac{\Gamma}{2}$, εἶτα δὲ ἐξ αὐτῶν καὶ αἱ Α,Β,Γ. Δυνάμεθα ὅμως νὰ δώσωμεν εἰς τὰς ἰσότητας (78) ἑτέραν μορφήν, δι' ἧς τὰ μέγιστα ἐπιταχύνεται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν γωνιῶν. Πρὸς τοῦτο πολ/ζομεν καὶ διαιροῦμεν τὸ β΄ μέλος τῆς α΄. τῶν ἰσοτήτων τούτων διὰ (τ—α) καὶ εὑρίσκομεν $\text{ἐφ}\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{\tau-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$, ἐὰν δὲ χάριν συντομίας τεθῇ $\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}=\lambda$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\text{ἐφ}\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{\lambda}{\tau-\alpha}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$$\text{ἐφ}\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{\lambda}{\tau-\beta},\ \text{ἐφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\frac{\lambda}{\tau-\gamma} \qquad (79)$$

Διὰ τούτων ὑπολογίζονται αἱ γωνίαι $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{\Gamma}{2}$, ἀφ' οὗ προηγουμένως ὑπολογισθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ λ.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ ἐκφράζομεν αὐτὸ συναρτήσει τῶν δεδομένων στοιχείων ὡς ἑξῆς· Ἐν τῇ ἰσότητι $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\,\text{ἡμ}A$ θέτομεν ἀντὶ ἡμΑ τὸ $2\,\text{ἡμ}\,\frac{A}{2}\,\text{συν}\,\frac{A}{2}$ καὶ εὑρίσκομεν $E=\beta\gamma\,\text{ἡμ}\,\frac{A}{2}\,\text{συν}\,\frac{A}{2}$ (5).

Ἤδη θὰ ἐκφράσωμεν τὸ ἡμ $\left(\frac{A}{2}\right)$ καὶ συν $\left(\frac{A}{2}\right)$ συναρτήσει τῶν πλευρῶν α,β,γ. Πρὸς τοῦτο εἰς τὰς ἰσότητας

$$\text{ἡμ}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\text{συν}A}{2}}\ \text{καὶ συν}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\text{συν}\,A}{2}}$$

θέτομεν τὴν ὑπὸ τῆς (1) παρεχομένην τιμὴν τοῦ συνΑ καὶ ἐκτελοῦντες εἰς τὰ ὑπόρριζα μετασχηματισμοὺς ἀναλόγους πρὸς τοὺς εἰς τὸ ὑπόρριζον τῆς (2) ἐκτελεσθέντας καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ἰσότητας (3) καὶ (4) εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{ἡμ}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}},\ \text{συν}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}} \qquad (80).$$

Ἡ προηγουμένη ὅθεν ἰσότης (5) γίνεται:

$$E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \qquad (81)$$

Σημ. α'. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}=\lambda$ καὶ $E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες:

$2\lambda o\gamma\lambda=[\lambda o\gamma(\tau-\alpha)+\lambda o\gamma(\tau-\beta)+\lambda o\gamma(\tau-\gamma)]-\lambda o\gamma\,\tau$

καὶ $2\lambda o\gamma E=[\lambda o\gamma(\tau-\alpha)+\lambda o\gamma(\tau-\beta)+\lambda o\gamma(\tau-\gamma)]+\lambda o\gamma\,\tau.$

Ἐκ τούτων φαίνεται ὅτι ὁ λογΕ εὑρίσκεται, ἂν εἰς τὸ κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ 2λογλ εὑρισκόμενον ἄθροισμα

$$\lambda o\gamma(\tau-\alpha)+\lambda o\gamma(\tau-\beta)+\lambda o\gamma(\tau-\gamma)$$

προστεθῇ ὁ λογ τ.

Σημ. β' Ἵνα αἱ ὑπὸ τῶν (78) παρεχόμεναι τιμαὶ τῶν ἐφαπτομένων ὦσι πραγματικαί, πρέπει πάντα τὰ ὑπόρριζα νὰ εἶναι θετικά. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι ἡ πλευρὰ α δὲν εἶναι μικροτέρα οὐδεμιᾶς τῶν ἄλλων, οἱ παράγοντες $(\tau-\beta)=\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)$, $(\tau-\gamma)=\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$ εἶναι ἀμφότεροι θετικοί, ὡς καὶ ὁ τ. Ὑπολείπεται ὅθεν ὁ $(\tau-\alpha)=\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)$, ὅστις ἐπίσης πρέπει νὰ εἶναι θετικός· ἵνα δὲ τοῦτο συμβαίνῃ, πρέπει νὰ εἶναι $\beta+\gamma>\alpha$, ἐπειδὴ δὲ εἶναι προφανῶς καὶ $\alpha+\beta>\gamma$, $\alpha+\gamma>\beta$, καταλήγομεν εἰς τὸν γνωστὸν ἐκ τῆς γεωμετρίας περιορισμόν.

Παράδειγμα. Ἔστω $\alpha=4562{,}30^{\mu}$, $\beta=3964^{\mu}$, $\gamma=2872{,}50^{\mu}$.

Βοηθητικὸς πίναξ		Ὑπολογισμὸς τοῦ λογ λ καὶ Ε	
α =	4562,30	λογ (τ—α) =	3 05580
β =	3964	λογ (τ—β) =	3,23940
γ =	2872.50	λογ (τ—γ) =	3.45131
2τ =	11398,80	ἄθροισμα =	9,74651
τ =	5699,40	λογ τ =	3,75583
τ—α =	1137,10	2 λογ λ =	5,99068
τ—β =	1735,40	λογ λ =	2,99534
τ—γ =	2826,90	2 λογ Ε =	13,50234
		λογ Ε =	6,75117
		Ε =	5638571,428 τ. μ.

Ὑπολογισμὸς τῆς Α.

$\dot{\epsilon}\varphi\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{\lambda}{\tau-\alpha}$, ἄρα

Ὑπολογισμὸς τῆς Β.

$\dot{\epsilon}\varphi\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{\lambda}{\tau-\beta}$, ἄρα

$$\lambda o\gamma\ \dot{\varepsilon}\varphi\left(\frac{A}{2}\right)=\lambda o\gamma\lambda-\lambda o\gamma(\tau-\alpha) \qquad \lambda o\gamma\ \dot{\varepsilon}\varphi\left(\frac{B}{2}\right)=\lambda o\gamma\lambda-\lambda o\gamma(\tau-\beta)$$

$$\lambda o\gamma\ \lambda = 2{,}99534 \qquad \lambda o\gamma\ \lambda = 2{,}99534$$

$$\lambda o\gamma\ (\tau-\alpha) = 3{,}05580 \qquad \lambda o\gamma\ (\tau-\beta) = 3{,}23940$$

$$\lambda o\gamma\ \dot{\varepsilon}\varphi\left(\frac{A}{2}\right)= \overline{1}{,}93954 \qquad \lambda o\gamma\ \dot{\varepsilon}\varphi\left(\frac{B}{2}\right)= \overline{1}{,}75594$$

$$\frac{A}{2} = 41^{0}\ 1'\ 28'' \qquad \frac{B}{2} = 29^{0}\ 41'\ 12'',4$$

$$A = 82^{0}\ 2'\ 56'' \qquad B = 59^{0}\ 22'\ 24''8,$$

Ὑπολογισμὸς τῆς Γ. $\dot{\varepsilon}\varphi\ \frac{\Gamma}{2} = \frac{\lambda}{\tau-\gamma}$, ἄρα

$$\lambda o\gamma\ \dot{\varepsilon}\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\lambda o\gamma\lambda-\lambda o\gamma\ (\tau-\gamma).$$

$$\lambda o\gamma\lambda = 2{,}99534$$

$$\lambda o\gamma\ (\tau-\gamma) = 3{,}45131$$

$$\lambda o\gamma\ \dot{\varepsilon}\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \overline{1}{,}54403$$

$$\frac{\Gamma}{2} = 19^{0}\ 17'\ 19''$$

$$\Gamma = 38^{0}\ 34'\ 38''$$

Ἀσκήσεις 343) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, ὅπερ ἔχει πλευρὰς 8^{μ}, 9^{μ}, 10^{μ}.

344) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, ὅπερ ἔχει πλευρὰς 147^{μ}, 247^{μ}, 347^{μ}

345) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, ὅπερ ἔχει πλευρὰς $7964,^{\mu}$, $10368{,}6^{\mu}$ καὶ 5872^{μ}.

346) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\beta=47958^{\mu}$, $A=88^{0}\ 17'$ καὶ $B=47^{0}$.

347) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\alpha = 7846{,}2^{\mu}$, $\beta = 4962^{\mu}$, $\Gamma = 12^{0}\ 42'$.

348) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\alpha = 1500^{\mu}$, $\beta = 1462{,}8$, $A = 108^{0}\ 40'$.

349) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\alpha = 15642^{\mu}$, $\beta = 12923^{\mu}$, $\gamma = 8964^{\mu}$.

350) Πόσα τρίγωνα ἔχουσιν $\alpha = 40^{\mu}$, $\beta = 100^{\mu}$ καὶ $A = 30^{0}$;

351) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν μεταξὺ τῶν στοιχείων τριγώνου ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης $E = \tau\ (\tau-\alpha)$, τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἀντιστρόφως.

352) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον εἶναι:

$$2\,E = \sqrt[3]{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \; \text{ἡμ}\,A\; \text{ἡμ}\,B\; \text{ἡμ}\,\Gamma}.$$

353) Ὁμοίως ὅτι: $\text{ἡμ}A + \text{ἡμ}B + \text{ἡμ}\Gamma = \dfrac{\tau}{P}$.

354) Ὁμοίως ὅτι: $(\beta-\gamma)\,\text{συν}\left(\dfrac{A}{2}\right) = \alpha\,\text{ἡμ}\left(\dfrac{B-\Gamma}{2}\right)$.

355) Ὁμοίως ὅτι:

$$\beta\gamma\,\text{συν}^2\left(\frac{A}{2}\right) + \alpha\gamma\,\text{συν}^2\left(\frac{B}{2}\right) + \alpha\beta\,\text{συν}^2\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \tau^2.$$

356) Νὰ ἀπαλειφθῇ ἡ γωνία A μεταξὺ τῶν ἰσοτήτων

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}\,A \quad \text{καὶ} \quad E = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\text{ἡμ}\,A.$$

357) Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ γωνίαι B καὶ Γ τριγώνου, οὗ $A = 60^\circ$ καὶ $\alpha = \sqrt{3}\,(\beta - \gamma)$.

358) Τριγώνου ΑΒΓ τὸ ὕψος ΒΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς β, $\alpha = 184{,}65^{\mu}$ καὶ $\Gamma = 42^\circ\,15'$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

359) Τριγώνου ΑΒΓ ἡ $A = 120^\circ$. Ἀποδεῖξαι ὅτι $\dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2 - \beta^2}$.

360) Ἐπὶ ἀπεράντου εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου Ο κύκλου ἀκτῖνος ρ ἔστωσαν δύο σημεῖα Α καὶ Α′ τοιαῦτα ὥστε εἶναι $(\overline{OA}) = \alpha$ καὶ $(\overline{OA'}) = \beta$. Τίς σχέσις πρέπει νὰ ὑφίσταται μεταξὺ τῶν α καὶ β, ἵνα ὁ λόγος $\dfrac{(\overline{MA})}{(\overline{MA'})}$ εἶναι ὁ αὐτὸς διὰ πᾶν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας;

Σχέσεις οἱωνδήποτε στοιχείων τριγώνου.

§ 116. Α′. ***Σχέσεις κυρίων στοιχείων τριγώνου πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.***—. 1ον. Ἐκ τῶν γνωστῶν (§ 110) ἰσοτήτων $\dfrac{\alpha}{\text{ἡμ}A} = \dfrac{\beta}{\text{ἡμ}B} = \dfrac{\gamma}{\text{ἡμ}\Gamma} = 2P$ προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες $\alpha = 2P\,\text{ἡμ}A,\; \beta = 2P\,\text{ἡμ}B,\; \gamma = 2P\,\text{ἡμ}\Gamma.$ (82)

2ον. Ἐκ τῆς ἰσότητος $E = \dfrac{1}{2}\beta\gamma\,\text{ἡμ}\,A$, λαμβάνομεν διαδοχικῶς

$2E = \beta\gamma\,\text{ἡμ.}\,A$, $2E\,\dfrac{\alpha}{\text{ἡμ}A} = \alpha\,\beta\,\gamma$, ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{\alpha}{\text{ἡμ}A} = 2P$, αὕτη γίνεται: $4EP = \alpha\beta\gamma.$ (83)

3ον. Ἐκ τῆς (83) καὶ (81) προκύπτει ὅτι :

$$\mathrm{P}=\frac{\alpha\beta\gamma}{4\mathrm{E}}=\frac{\alpha\,\beta\,\gamma}{4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}. \qquad (84)$$

4ον. Ἐκ τῶν (83) καὶ (82) προκύπτει ὅτι :

$$4\mathrm{EP}=8\mathrm{P}^3\,\text{ἡμ}\mathrm{A}\,\text{ἡμ}\mathrm{B}\,\text{ἡμ}\Gamma,\ \text{ὅθεν}\ \mathrm{E}=2\mathrm{P}^2\,\text{ἡμ}\mathrm{A}\,\text{ἡμ}\mathrm{B}\,\text{ἡμ}\Gamma. \qquad (85)$$

§ 117. **Β΄.—. *Σχέσεις κυρίων στοιχείων τριγώνου καὶ τῶν ἀκτίνων τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.***

1ον. Αἱ ἐκ τοῦ κέντρου Κ (Σχ. 53) τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀγόμεναι εὐθεῖαι διαιροῦσιν αὐτὸ εἰς τρία τρίγωνα, ὧν τὰ ἐμβαδὰ εἶναι κατὰ σειρὰν $\frac{1}{2}\alpha\rho$, $\frac{1}{2}\beta\rho$, $\frac{1}{2}\gamma\rho$, ἔνθα ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου Κ. Ὅθεν

$$\mathrm{E}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\,\rho\ \ \text{ἢ}\ \ \mathrm{E}=\tau.\,\rho \qquad (86)$$

2ον. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (86) καὶ (81) προκύπτει ἡ ἰσότης

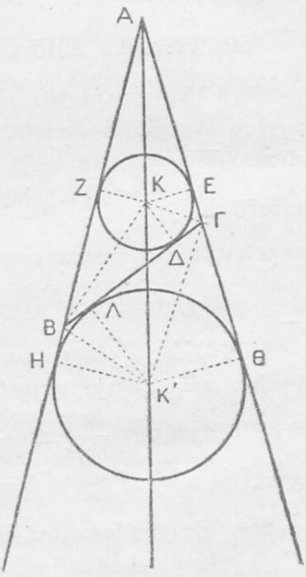
$$\rho=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}} \qquad (87)$$

3ον. Παραβάλλοντες τὴν ἰσότητα (87) πρὸς τὴν ἐν (§ 115 Δ΄) τεθεῖσαν $\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}=\lambda$, βλέπομεν ὅτι $\lambda=\rho$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν αἱ ἰσότητες (79) γίνονται :

$$\text{ἐφ}\left(\frac{\mathrm{A}}{2}\right)=\frac{\rho}{\tau-\alpha},\quad \text{ἐφ}\left(\frac{\mathrm{B}}{2}\right)=\frac{\rho}{\tau-\beta},$$

$$\text{ἐφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\frac{\rho}{\tau-\gamma},\ \text{ὅθεν}$$

$$\rho=(\tau-\alpha)\,\text{ἐφ}\,\frac{\mathrm{A}}{2}=(\tau-\beta)\,\text{ἐφ}\,\frac{\mathrm{B}}{2}=(\tau-\gamma)\,\text{ἐφ}\,\frac{\Gamma}{2} \qquad (88)$$



(Σχ. 53)

4ον. Ἔστω ρ_α ἡ ἀκτὶς καὶ Κ΄ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ὅστις εἶναι παρεγγεγραμμένος εἰς τὸ τρίγωνον

Α Β Γ καὶ ἐγγεγραμμένος εἰς τὴν γωνίαν Α αὐτοῦ. Ἀγομένων τῶν εὐθειῶν Κ΄Α, Κ΄Β, Κ΄Γ σχηματίζοντας τὰ τρίγωνα Κ΄ΑΒ, Κ΄ΑΓ, Κ΄ΒΓ, ὧν τὰ ἐμβαδὰ εἶναι κατὰ σειρὰν $\frac{1}{2}\,\gamma\rho_\alpha$, $\frac{1}{2}\,\beta\rho_\alpha$, $\frac{1}{2}\,\alpha\rho_\alpha$.

Ἐπειδὴ δὲ $(ΑΒΓ)=(Κ'ΑΒ)+(Κ'ΑΓ)-(Κ'ΒΓ)$, ἕπεται ὅτι:

$$Ε=\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2}.\rho_\alpha \quad \text{ἢ} \quad Ε=(\tau-\alpha).\,\rho_\alpha,$$

ὅθεν

$$\rho_\alpha=\frac{Ε}{\tau-\alpha}=\sqrt{\frac{\tau\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\tau-\alpha}}$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι: $$\rho_\beta=\frac{Ε}{\tau-\beta}=\sqrt{\frac{\tau\,(\tau-\alpha)\,(\tau-\gamma)}{\tau-\beta}} \qquad (89)$$

$$\rho_\gamma=\frac{Ε}{\tau-\gamma}=\sqrt{\frac{\tau\,(\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)}{\tau-\gamma}},$$

ἔνθα ρ_β, ρ_γ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων, οἵτινες εἶναι παρεγγεγραμμένοι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐγγεγραμμένοι ὁ μὲν εἰς τὴν γωνίαν Β ὁ δὲ εἰς τὴν Γ αὐτοῦ.

5ον. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $Ε=\tau.\rho$, $Ε=(\tau-\alpha)\rho_\alpha$, $Ε=(\tau-\beta)\rho_\beta$, $Ε=(\tau-\gamma)\,\rho_\gamma$ διὰ πολ]σμοῦ κατὰ μέλη προκύπτει ἡ ἰσότης $Ε^4=\tau\,(\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)\,\rho\,\rho_\alpha\,\rho_\beta\,\rho_\gamma=Ε^2\,\rho\,\rho_\alpha\,\rho_\beta\,\rho_\gamma$, ὅθεν

$$Ε=\sqrt{\rho\,\rho_\alpha\,\rho_\beta\,\rho_\gamma}. \qquad (90)$$

6ον. Ἡ α΄ τῶν ἰσοτήτων (89) διὰ πολ]σμοῦ ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ ὑπορρίζου ἐπὶ τ γίνεται

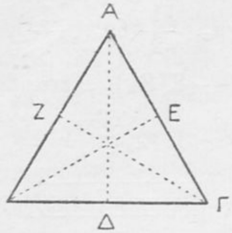
$$\rho_\alpha=\sqrt{\frac{\tau^2\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\tau\,(\tau-\alpha)}}=\tau.\sqrt{\frac{(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\tau.\,(\tau-\alpha)}}.$$

Ἐπειδὴ δὲ (78) ὁ τελευταῖος παράγων ἰσοῦται τῇ ἐφ $\left(\frac{Α}{2}\right)$, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται $$\rho_\alpha=\tau.\,\text{ἐφ}\left(\frac{Α}{2}\right)$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι: $$\rho_\beta=\tau.\,\text{ἐφ}\left(\frac{Β}{2}\right) \qquad (91)$$

$$\rho_\gamma=\tau.\,\text{ἐφ}\left(\frac{Γ}{2}\right)$$

§ 118. Γ'. ***Σχέσεις τῶν ὑψῶν τριγώνου πρὸς ἄλλα στοιχεῖα αὐτοῦ.—.***



(Σχ. 54)

1ον. Ἔστωσαν Υ_α, Υ_β, Υ_γ τὰ ἐκ τῶν κορυφῶν Α,Β,Γ ἀγόμενα ὕψη τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 54). Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $E=\frac{1}{2}\alpha.\Upsilon_\alpha$ καὶ $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$ προκύπτει ἡ ἰσότης $\alpha.\Upsilon_\alpha=\beta\gamma\eta\mu A$. Ἐπειδὴ δὲ (§ 112) $\beta=\frac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu A}$ καὶ $\gamma=\frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\alpha.\Upsilon_\alpha=\frac{\alpha^2\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$, ὅθεν

$$\Upsilon_\alpha=\frac{\alpha\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι
$$\Upsilon_\beta=\frac{\beta\eta\mu A\eta\mu\Gamma}{\eta\mu B} \qquad (92)$$

$$\Upsilon_\gamma=\frac{\gamma\eta\mu A\,\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma}$$

2ον. Ἐκ τῶν ὀρθ. τριγώνων ΑΔΓ, ΑΔΒ, ΒΓΕ, ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΑΓΖ, προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες

$$\Upsilon_\alpha=\beta\eta\mu\Gamma=\gamma\eta\mu B,\quad \Upsilon_\beta=\alpha\eta\mu\Gamma=\gamma\eta\mu A,\quad \Upsilon_\gamma=\alpha\eta\mu B=\beta\eta\mu A. \qquad (93)$$

3ον Ἐπειδὴ $E=\frac{1}{2}\alpha.\Upsilon_\alpha$ καὶ $E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ ἕπεται εὐκόλως ὅτι:

$$\Upsilon_\alpha=\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι
$$\Upsilon_\beta=\frac{2}{\beta}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \qquad (94)$$

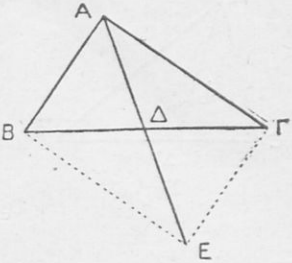
$$\Upsilon_\gamma=\frac{2}{\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

4ον. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (93) καὶ (82) προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες:

$$\Upsilon_\alpha=2P\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma,\quad \Upsilon_\beta=2P\,\eta\mu A\,\eta\mu\Gamma,\quad \Upsilon_\gamma=2P\,\eta\mu A\,\eta\mu B. \qquad (95)$$

§ 119. ***Δ' Σχέσεις τῶν διαμέσων τριγώνου πρὸς ἄλλα στοιχεῖα αὐτοῦ.***

1ον Ἔστωσαν μ_α, μ_β, μ_γ αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν Α,Β,Γ ἀγόμεναι διάμεσοι τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 55). Ἐπὶ τῆς προεκβολῆς μιᾶς τούτων π.χ. τῆς $(A\Delta)=\mu_\alpha$, ἂς ληφθῇ $(\Delta E)=(A\Delta)$ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΒΕ καὶ ΓΕ. Ἐκ τοῦ οὕτω σχηματιζομένου παραλληλογράμμου Α Β Ε Γ προκύπτει ὅτι



(Σχ. 55)

$\widehat{ABE}+\widehat{A}=2$ ὀρθ. καὶ $(BE)=(A\Gamma)=\beta$. Ἐὰν ἤδη ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΕ τὴν ἰδιότητα (§ 110 Γ′) εὑρίσκομεν ὅτι:

$(AE)^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma$ συν $(ABE)=\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma$ συν**Α**, ὅθεν

$$\mu^2_\alpha=\frac{\beta^2+\gamma^2}{4}+\frac{\beta\gamma}{2}\text{ συν }A$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\mu^2_\beta=\frac{\alpha^2+\gamma^2}{4}+\frac{\alpha\gamma}{2}\text{ συν }B \qquad (96)$$

$$\mu^2_\gamma=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}+\frac{\alpha\beta}{2}\text{ συν }\Gamma$$

2ον. Ἐφαρμόζοντες τὴν ἰδιότητα (§ 110 Γ′) εἰς ἑκάτερον τῶν τριγώνων ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\mu^2_\alpha=\gamma^2+\frac{\alpha^2}{4}-\alpha\gamma\text{ συν }B=\beta^2+\frac{\alpha^2}{4}-\alpha\beta\text{ συν}\Gamma.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\mu^2_\beta=\gamma^2+\frac{\beta^2}{4}-\beta\gamma\text{ συν }A=\alpha^2+\frac{\beta^2}{4}-\alpha\beta\text{ συν}\Gamma \qquad (97)$$

$$\mu_\gamma^2=\beta_2+\frac{\gamma^2}{4}-\beta\gamma\text{ συν }A=\alpha^2+\frac{\gamma^2}{4}-\alpha\gamma\text{ συν}B.$$

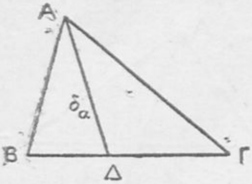
3ον. Ἐκ τῶν ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἀποδεικνυομένων ἰσοτήτων

$$\beta^2+\gamma^2=2\mu^2_\alpha+2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2,\ \alpha^2+\gamma^2=2\mu^2_\beta+2\left(\frac{\beta}{2}\right)^2,$$

$\alpha^2+\beta^2=2\mu^2_\gamma+2\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$ προκύπτουσιν αἱ ἀκόλουθοι ἰσότητες:

$$\mu_\alpha^2=\frac{\beta^2+\gamma^2}{2}-\frac{\alpha^2}{4},\ \mu^2_\beta=\frac{\alpha^2+\gamma^2}{2}-\frac{\beta^2}{4},\ \mu^2_\gamma=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-\frac{\gamma^2}{4} \qquad (98)$$

§ 120. Ε΄. ***Σχέσεις τῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας τριγώνου πρὸς ἄλλα στοιχεῖα αὐτοῦ.*** 1ον. Ἔστωσαν δ_α, δ_β, δ_γ τὰ μήκη τῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας Α, Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ (Σ. 56).



(Σχ. 56)

Ἐπειδὴ (ΑΒΓ)=(ΑΒΔ) + (ΑΔΓ), ἕπεται ὅτι $\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A=\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\delta_\alpha\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)$, ὅθεν:

$$\delta_\alpha=\frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:
$$\delta_\beta=\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B}{2}\right) \qquad (99)$$
$$\delta_\gamma=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$$

2ον. Λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}$ ἡ α΄. τῶν προειρημένων ἰσοτήτων γίνεται: $\delta_\alpha=\frac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)\beta\gamma}$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:
$$\delta_\beta=\frac{2}{\alpha+\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\beta)\alpha\gamma} \qquad (100)$$
$$\delta_\gamma=\frac{2}{\alpha+\beta}\sqrt{\tau(\tau-\gamma)\alpha\beta}$$

3ον. Ἐπειδὴ $\beta=2P\eta\mu B$, $\gamma=2P\eta\mu\Gamma$, ἡ α΄. τῶν ἰσοτήτων (99) γίνεται:
$$\delta_\alpha=\frac{8P^2\eta\mu B\eta\mu\Gamma.\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)}{2P(\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)}=\frac{8P^2\eta\mu B\eta\mu\Gamma.\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)}{4P\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)},$$ ὅθεν
$$\delta_\alpha=\frac{2P\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:
$$\delta_\beta=\frac{2P\eta\mu A\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-\Gamma}{2}\right)} \qquad (101)$$
$$\delta_\gamma=\frac{2P\eta\mu A\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-B}{2}\right)}.$$

4ον. Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ ἰσότητες $\dfrac{(\text{ΒΔ})}{\text{ἡμ}\left(\frac{\text{Α}}{2}\right)}=\dfrac{\delta_\alpha}{\text{ἡμΒ}}$, $\dfrac{(\text{ΔΓ})}{\text{ἡμ}\left(\frac{\text{Α}}{2}\right)}=\dfrac{\delta_\alpha}{\text{ἡμΓ}}$, ἐξ ὧν

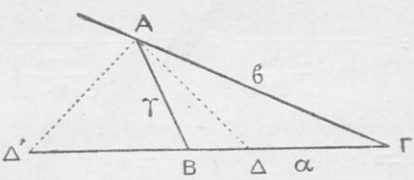
$$(\text{ΒΔ})+(\text{ΔΓ})=\frac{\delta_\alpha\,\text{ἡμ}\left(\frac{\text{Α}}{2}\right)(\text{ἡμΒ}+\text{ἡμΓ})}{\text{ἡμΒ ἡμΓ}},\quad \text{ἄρα}$$

$$\delta_\alpha=\frac{\alpha\,\text{ἡμΒἡμΓ}}{\text{ἡμ}\left(\frac{\text{Α}}{2}\right)(\text{ἡμΒ}+\text{ἡμΓ})}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι: $\delta_\beta=\dfrac{\text{β ἡμΑἡμΓ}}{\text{ἡμ}\left(\frac{\text{Β}}{2}\right)(\text{ἡμΑ}+\text{ἡμΓ})}$ (102)

$$\delta_\gamma=\frac{\gamma\,\text{ἡμΑἡμΒ}}{\text{ἡμ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right)(\text{ἡμΑ}+\text{ἡμΒ})}.$$

§ 121. ***ΣΤ'. Σχέσεις τῶν διχοτομουσῶν τὰς ἐξωτερικὰς γωνίας τριγώνου πρὸς ἄλλα στοιχεῖα αὐτοῦ.*** 1ον. Ἔστωσαν $\Delta_\alpha, \Delta_\beta, \Delta_\gamma$ τὰ μήκη τῶν διχοτομουσῶν τὰς ἐξωτερικὰς γωνίας Α, Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 57). Ἀχθείσης μιᾶς τούτων π.χ. τῆς $(\Delta'\text{Α})=\Delta_\alpha$ σχηματίζονται τὰ τρίγωνα Δ΄ΑΓ καὶ Δ΄ΑΒ ὧν διαφορὰ εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐκφράζοντες δὲ τὴν τοιαύτην μεταξὺ τῶν τριγώνων τούτων σχέσιν καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ μὲν τὴν ἰδιότητα (§ 110 Δ΄), τὸ δὲ ὅτι ἡ ΑΔ΄ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ, ἥτις διχοτομεῖ τὴν ἐσωτερικὴν γωνίαν Α, εὑρίσκομεν



(Σχ. 57)

ὅτι: $\frac{1}{2}\,\beta\gamma\,\text{ἡμΑ}=\frac{1}{2}\,\beta\Delta_\alpha\text{ἡμ}\left(90^0+\frac{\text{Α}}{2}\right)-\frac{1}{2}\gamma\Delta_\alpha\text{ἡμ}\left(90^0-\frac{\text{Α}}{2}\right)$.

Ἐπειδὴ δὲ ἡμ $\text{Α}=2\text{ἡμ}\left(\frac{\text{Α}}{2}\right)$ συν $\left(\frac{\text{Α}}{2}\right)$, ἡμ $\left(90^0+\frac{\text{Α}}{2}\right)$ $=$ συν $\left(\frac{\text{Α}}{2}\right)$ καὶ ἡμ $\left(90-\frac{\text{Α}}{2}\right)=$συν$\left(\frac{\text{Α}}{2}\right)$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\beta\gamma\text{ἡμ}\left(\frac{\text{Α}}{2}\right)$ συν $\left(\frac{\text{Α}}{2}\right)=\frac{1}{2}\,\Delta_\alpha(\beta-\gamma)$ συν $\left(\frac{\text{Α}}{2}\right)$, ὅθεν

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\Delta_\alpha = \frac{2\beta\gamma}{\beta-\gamma}\,\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\Delta_\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha-\gamma}\,\eta\mu\left(\frac{B}{2}\right) \qquad (103)$$

$$\Delta_\gamma = \frac{2\alpha\beta}{\alpha-\beta}\,\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$$

Σημ. Οἱ παρονομασταὶ τῶν ἰσοτήτων τούτων εἶναι θετικοί, ὡς εὐκόλως βεβαιούμεθα. Πρέπει λοιπὸν νὰ προσέχωμεν ὅπως μή ποτε μικροτέρα πλευρὰ τεθῇ μειωτέος καὶ μεγαλυτέρα ἀφαιρετέος.

2ον. Ἐὰν εἰς τὰς ἰσότητας (103) ἀντικατασταθῶσι τὰ ἡμ $\left(\frac{A}{2}\right)$ ἡμ $\left(\frac{B}{2}\right)$, ἡμ $\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$ διὰ τῶν ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων (80) παρεχομένων τιμῶν αὐτοῦ, προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες:

$$\Delta_\alpha = \frac{2}{\beta-\gamma}\sqrt{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)\beta\gamma}, \qquad \Delta_\beta = \frac{2}{\alpha-\gamma}\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)\alpha\gamma},$$

$$\Delta_\gamma = \frac{2}{\alpha-\beta}\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)\alpha\beta}. \qquad (104)$$

3ον. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (82) καὶ (103) προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες:

$$\Delta_\alpha = \frac{2P\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}, \quad \Delta_\beta = \frac{2P\,\eta\mu A\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu\left(\frac{A-\Gamma}{2}\right)}, \quad \Delta_\gamma = \frac{2P\,\eta\mu A\,\eta\mu B}{\eta\mu\left(\frac{A-B}{2}\right)} \qquad (105)$$

Ἀσκήσεις. 361) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $A = 38^\circ\, 25'$, $B = 54^\circ\, 35'\, 28''$ καὶ $P = 0{,}45^\mu$.

362) Εἰς τυχὸν σημεῖον περιφερείας ἀκτῖνος $0{,}25^\mu$ ἄγομεν ἐφαπτομένην καὶ ἐκ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς δύο χορδάς, ὧν ἡ μὲν σχηματίζει μετὰ τοῦ ἑνὸς μέρους τῆς ἐφαπτομένης γωνίαν $47^\circ\, 15'$, ἡ δὲ ἄλλη μετὰ τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ἐφαπτομένης γωνίαν $56^\circ\, 40'$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν μὴ κοινῶν ἄκρων τῶν χορδῶν τούτων.

363) Πόση εἶνε ἡ P τριγώνου, οὗ $\alpha=5^\mu$, $\beta=8^\mu$ καὶ $\gamma=10^\mu$;

6 Πόση εἶνε ἡ P τριγώνου, οὗ $\alpha=2{,}15^\mu$ καὶ $A=34^\circ\, 15'$;

65) Πόση εἶνε ἡ ρ τριγώνου, οὗ $\alpha=3{,}50^\mu$, $\beta=2{,}25^\mu$ καὶ $\gamma=4^\mu$;

) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ρ_α, ρ_β, ρ_γ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων εἰς τρίγωνον, οὗ $\alpha=1^\mu$, $\beta=3^\mu$ καὶ $\gamma=2{,}5^\mu$.

367) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, δι' ὃ εἶναι $\rho=2^\mu$, $\rho_\alpha=6^\mu$, $_\beta=7^\mu$ $_\gamma=7{,}5^\mu$;

368) Τριγώνου εἶναι $\alpha=8^{\mu}$, $\beta=10^{\mu}$ καὶ $\gamma=12^{\mu}$. Εὑρεῖν τὰ ποσὰ ρ, ρ_α, ρ_β, ρ_γ.

369) Εὑρεῖν τὰς γωνίας τριγώνου, οὗ $2\tau=30^{\mu}$, $\rho_\alpha=6^{\mu}$, $\rho_\beta=10^{\mu}$ καὶ $\rho_\gamma=7,5^{\mu}$.

370) Εὑρεῖν τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου, οὗ $\alpha=6^{\mu}$, $\beta=8^{\mu}$ καὶ $\gamma=10^{\mu}$.

371) Εὑρεῖν τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου, οὗ $A=35^{\circ}$, $B=40^{\circ}\ 40'$ καὶ $P=6^{\mu}$.

372) Εὑρεῖν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τριγώνου, οὗ $\alpha=4^{\mu}$, $\beta=5^{\mu}$ καὶ $\gamma=6^{\mu}$.

373) Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ τρίγωνον, οὗ $A=62^{\circ}$, $B=55^{\circ}$ καὶ $P=15^{\mu}$.

374) Εὑρεῖν τὰς διχοτόμους τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τριγώνου, οὗ $\alpha=12^{\mu}$, $\beta=30^{\mu}$ καὶ $\gamma=20^{\mu}$.

375) Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ τρίγωνον, οὗ $A=25^{\circ}$, $B=147^{\circ}\ 12'$ καὶ $P=2^{\mu}$.

376) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον εἶναι

$$\rho_\alpha=(\tau-\beta)\ \sigma\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=(\tau-\gamma)\sigma\varphi\left(\frac{B}{2}\right).$$

377) Ὁμοίως ὅτι: $\rho_\alpha=4P\ \eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$.

378) Ὁμοίως ὅτι: $\rho=4P\ \eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{B}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$.

379) Ὁμοίως ὅτι: $\sigma\varphi\left(\frac{A}{2}\right)+\sigma\varphi\left(\frac{B}{2}\right)+\sigma\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\frac{\tau}{\rho}$.

380) Ὁμοίως ὅτι: $\frac{P}{\rho}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\ \sigma\upsilon\nu A+\beta\ \sigma\upsilon\nu B+\gamma\ \sigma\upsilon\nu\Gamma}$.

381) Ὁμοίως ὅτι: $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma=1+\frac{\tau}{\rho}$.

382) Ὁμοίως ὅτι: $\tau-\alpha=4P\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{B}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$.

383) Ὁμοίως ὅτι: $\Upsilon_\alpha=\dfrac{2\tau\ \eta\mu\left(\frac{B}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)}$.

384) Ὁμοίως ὅτι: $\rho=\tau\ \dot{\epsilon}\varphi\left(\frac{A}{2}\right)\dot{\epsilon}\varphi\left(\frac{B}{2}\right)\dot{\epsilon}\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$.

385) Ὁμοίως ὅτι: $\rho=\dfrac{\Upsilon_\alpha\ \eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)}{2\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}$.

386) Ὁμοίως ὅτι : $\eta\mu A.\ \eta\mu B.\ \eta\mu \Gamma = \frac{\tau\rho^2}{2P^2}$.

387) Ὁμοίως ὅτι : $E = \alpha.\ P\ \eta\mu\ B\ \eta\mu\ \Gamma\ P$.

388) Ὁμοίως ὅτι : $E = P.\ \Upsilon_\alpha.\ \eta\mu\ A$.

389) Ὁμοίως ὅτι : $\tau = \rho_\alpha\ \sigma\varphi\left(\frac{A}{2}\right)$.

390) Ὁμοίως ὅτι : $E = \rho\rho_\alpha\ \sigma\varphi\left(\frac{A}{2}\right)$.

391) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐν ὀξυγωνίῳ τριγώνῳ ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Α ἀπὸ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν ὑψῶν αὐτοῦ εἶναι 2Ρ συν Α.

392) Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $B = 63^0\ 15'$ καὶ $\Gamma = 40^0\ 12'$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία, ἣν σχηματίζει ἡ διάμεσος ΑΜ μετὰ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

393) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον εἶναι :

$$\alpha\beta\gamma\ \Upsilon_\alpha.\Upsilon_\beta.\Upsilon_\gamma.\rho_\alpha.\rho_\beta.\rho_\gamma.\ \sigma\varphi\left(\frac{A}{2}\right)\ \sigma\varphi\left(\frac{B}{2}\right)\ \sigma\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = 8\tau^3 E^3.$$

394) Ὁμοίως ὅτι : $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_\alpha} + \frac{1}{\rho_\beta} + \frac{1}{\rho_\gamma}$.

395) Ὁμοίως ὅτι : $\rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma - \rho = 4P$.

§ 122. ***Ἐπίλυσις οἱωνδήποτε τριγώνων, ὧν τὰ δεδομένα στοιχεῖα εἶναι τυχόντα.***—Ἐκ τῆς Γεωμετρίας εἶνε γνωστὸν ὅτι τρίγωνόν τι κατασκευάζεται, ἂν δοθῶσι τρία ἀνεξάρτητα στοιχεῖα αὐτοῦ, ἀρκεῖ ἓν τοὐλάχιστον νὰ εἶναι μῆκος ἢ τὸ ἐμβαδόν. Οὕτω π. χ. ἐκ τῆς περιμέτρου καὶ δύο γωνιῶν, ἐκ δύο πλευρῶν καὶ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν αὐτῶν, ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ, τῆς βάσεως καὶ τῆς ἀντικειμένης αὐτῇ γωνίας, κτλ. δύναται νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον. Εἶναι ἄρα δυνατὴ ἡ ἐπίλυσις τριγώνου, ὅταν δοθῶσι τρία τοιαῦτα στοιχεῖα αὐτοῦ.

Πρὸς τοῦτο ἀκολουθοῦμεν γενικῶς τὴν ἑξῆς πορείαν.

Προσπαθοῦμεν νὰ ἐκφράσωμεν πάντα ἢ τινὰ τῶν ἀγνώστων κυρίων στοιχείων συναρτήσει τῶν δεδομένων· ὑπολογίζομεν εἶτα τὰ οὕτως ἐκφρασθέντα στοιχεῖα αὐτοῦ καὶ ἐκ τούτων καὶ τὰ τυχὸν ὑπολειφθέντα τοιαῦτα. Ὡς παραδείγματα ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα.

§ 123. ***Παράδ. 1ον.***— *Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς περιμέτρου 2τ καὶ τῶν γωνιῶν Α καὶ Β αὐτοῦ.*—.Ἐκ τῆς ἰσότητος $\Gamma = 180^0 - (A + B)$ προσδιορίζεται ἡ Γ. Εἶτα λαμβάνομεν διαδοχικῶς $\dfrac{\alpha}{ἡμA} = \dfrac{β}{ἡμB} = \dfrac{\gamma}{ἡμΓ} = \dfrac{\alpha + β + \gamma}{ἡμA + ἡμB + ἡμΓ}$

$= \dfrac{2\tau}{4\,συν\dfrac{A}{2}\,συν\dfrac{B}{2}\,συν\dfrac{Γ}{2}}$ (62), ὅθεν: $\alpha = \dfrac{\tau\,ἡμ\left(\dfrac{A}{2}\right)}{συν\left(\dfrac{B}{2}\right)συν\left(\dfrac{Γ}{2}\right)}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$β = \frac{\tau\,ἡμ\left(\frac{B}{2}\right)}{συν\left(\frac{A}{2}\right)συν\left(\frac{Γ}{2}\right)} \quad καὶ \quad \gamma = \frac{\tau\,ἡμ\left(\frac{Γ}{2}\right)}{συν\left(\frac{A}{2}\right)συν\left(\frac{B}{2}\right)}.$$

Τὸ ἐμβαδὸν ὑπολογίζεται διὰ τῆς ἰσότητος

$E = \tau^2\,ἐφ\left(\dfrac{A}{2}\right)ἐφ\left(\dfrac{B}{2}\right)ἐφ\left(\dfrac{Γ}{2}\right)$ (105), ἥτις προκύπτει δι' ἀπαλειφῆς τῶν ρ, $(\tau-\alpha)$, $(\tau-β)$, $(\tau-\gamma)$ μεταξὺ τῶν γνωστῶν ἰσοτήτων $E = \tau\rho$, $ἐφ\dfrac{A}{2} = \dfrac{\rho}{\tau-\alpha}$, $ἐφ\dfrac{B}{2} = \dfrac{\rho}{\tau-β}$, $ἐφ\dfrac{Γ}{2} = \dfrac{\rho}{\tau-\gamma}$ καὶ $\rho^2\tau = (\tau-\alpha)(\tau-β)(\tau-\gamma)$.

§ 124. **Παράδ. 2ον.** — *Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ τῶν γωνιῶν.*

Ἐμάθομεν (85) ὅτι $E = 2P^2 ἡμA\,ἡμB\,ἡμΓ$, ἄρα $P = \sqrt{\dfrac{E}{2\,ἡμA\,ἡμB\,ἡμΓ}}$.

Ἕνεκα ταύτης αἱ ἰσότητες (82) γίνονται:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2E\;ἡμA}{ἡμB\,ἡμΓ}},\quad β = \sqrt{\frac{2E\;ἡμB}{ἡμA\,ἡμΓ}} \quad καὶ \quad \gamma = \sqrt{\frac{2E\;ἡμΓ}{ἡμA\,ἡμB}}.$$

§ 125. **Παράδ. 3ον.** —. *Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς πλευρᾶς α, τοῦ ἀθροίσματος κ τῶν ἄλλων πλευρῶν καὶ τῆς γωνίας A.*—. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\dfrac{\alpha}{ἡμA} = \dfrac{β}{ἡμB} = \dfrac{\gamma}{ἡμΓ}$ ἕπεται εὐκόλως ὅτι:

$$\frac{\alpha}{ἡμA} = \frac{β+\gamma}{ἡμB + ἡμΓ} = \frac{\kappa}{2συν\left(\frac{A}{2}\right)συν\left(\frac{B-Γ}{2}\right)},\quad ὅθεν$$

$\alpha = \dfrac{\kappa\,ἡμ\left(\dfrac{A}{2}\right)}{συν\left(\dfrac{B-Γ}{2}\right)}$, ἄρα $συν\left(\dfrac{B-Γ}{2}\right) = \dfrac{\kappa}{\alpha}\,ἡμ\left(\dfrac{A}{2}\right)$. Ὑπολογιζομένης ἐκ ταύτης τῆς $B-Γ$, εὑρίσκεται εἶτα ἐκ ταύτης καὶ τῆς $B+Γ = 180^0 - A$ ἡ B καὶ ἡ $Γ$, μεθ' ὃ τὰ λοιπὰ στοιχεῖα ὑπολογίζονται κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 112). Δυνάμενα ὅμως νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ καὶ ὡς ἑξῆς. Ἐκ τῶν $\frac{\alpha}{\text{ἡμ} A}=\frac{\beta}{\text{ἡμ}B}=\frac{\gamma}{\text{ἡμ}\Gamma}$

προκύπτει ὅτι $\frac{\alpha}{\text{ἡμ} A}=\frac{\beta-\gamma}{2\text{ἡμ}\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)\text{ἡμ}\left(\frac{A}{2}\right)}$, ὅθεν

$\beta-\gamma=\frac{\alpha\text{ἡμ}\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}{\text{συν}\left(\frac{A}{2}\right)}$: Ὑπολογιζομένης τῆς β—γ καὶ γνωστοῦ ὄντος τοῦ β+γ εὑρίσκοντος εἶτα εὐκόλως αἱ πλευραὶ β καί γ.

§ 126. ***Παράδ. 4ον.*** *Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς γωνίας A, τῆς διχοτόμου ταύτης δ_α καὶ τῆς διχοτόμου Δ_α τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας A.* Ἐκ τῶν γνωστῶν (101, 105) ἰσοτήτων

$$\delta_\alpha=\frac{2P\text{ἡμ}B\text{ἡμ}\Gamma}{\text{συν}\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)},\quad \Delta_\alpha=\frac{2P\text{ἡμ}B\text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}$$

διαιρουμένων κατὰ μέλη προκύπτει ἡ ἰσότης $\frac{\delta_\alpha}{\Delta_\alpha}=\text{ἐφ}\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)$,

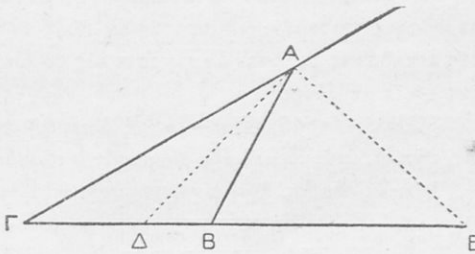
δι' ἧς ὁρίζεται ἡ $B-\Gamma$, μεθ' ὃ ἐκ ταύτης καὶ τοῦ ἀθροίσματος $B+\Gamma=180^0-A$ εὑρίσκονται αἱ B καὶ Γ. Εἶτα ἐκ τῆς α'. τῶν ἰσοτήτων (102) εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\alpha=\delta_\alpha\,\text{ἡμ}\left(\frac{A}{2}\right).\frac{\text{ἡμ}B+\text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}B\text{ἡμ}\Gamma}=\frac{2\,\delta_\alpha\,\text{ἡμ}\left(\frac{A}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{A}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}{\text{ἡμ}B\,\text{ἡμ}\Gamma}.$$

Τὰ λοιπὰ στοιχεῖα ὑπολογίζονται κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 112).

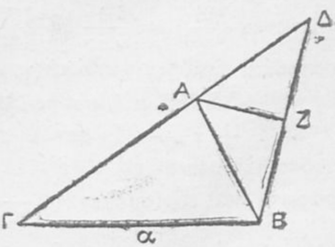
§ 127. ***Εἴδη μεθόδων ἐπιλύσεως τριγώνου.***—. Εἰς ὅσα ἐκ τῶν προηγουμένων παραδειγμάτων ἦτο ἄγνωστος μία ἢ δύο γωνίαι, τὴν ἐπίλυσιν ἠρξάμεθα ἐκ τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν γωνιῶν τούτων. Ἡ τοιαύτη μέθοδος καλεῖται *τριγωνομετρικὴ* καὶ ἔχει τὸ πλεονέκτημα ὅτι ἄγει συνήθως εἰς παραστάσεις λογιστὰς διὰ τῶν λογαρίθμων. Πλὴν ταύτης γίνεται χρῆσις καὶ δύο ἄλλων μεθόδων. Διὰ τῆς μιᾶς τούτων, ἥτις καλεῖται *Ἀλγεβρική*, ὁ ὑπολογισμὸς ἀρχόμενος ἀπὸ τῶν πλευρῶν γίνεται συνήθως (οὐχὶ πάντοτε, ὅρα παράδ. 2ον) δι' ἀλγεβρικῶν λογισμῶν· αὕτη ἔχει τὸ μειονέκτημα ὅτι συνηθέστατα ἄγει εἰς παραστάσεις μὴ λογιστὰς διὰ τῶν λογαρίθμων καὶ εἶναι ἀνάγκη μετασχηματισμοῦ αὐτῶν, ὁσάκις ὁ ὑπολογισμὸς αὐτῶν δὲν δύναται νὰ γείνῃ ἄλλως. Οὕτως εἰς τὸ τελευταῖον παράδειγμα ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὰς πλευρὰς β καὶ γ λύοντες τὸ σύστημα $\delta_\alpha = \frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right)$, $\Delta_\alpha = \frac{2\beta\gamma}{\beta-\gamma}\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)$ (99, 103) πρὸς τοὺς βοηθητικοὺς ἀγνώστους $\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}$ καὶ $\frac{\beta\gamma}{\beta-\gamma}$, ὧν ἔστωσαν λ καὶ μ αἱ τιμαί, καὶ λύοντες εἶτα τὸ σύστημα $\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}=\lambda$, $\frac{\beta\gamma}{\beta-\gamma}=\mu$. Ἡ δὲ ἀποπεράτωσις τῆς ἐπιλύσεως γίνεται εἶτα κατά τὰ γνωστὰ (§ 113 Β′).

Εἴς τινας τέλος περιστάσεις δυνάμεθα κατασκευάζοντες πρῶτον τὸ ζητούμενον τρίγωνον νὰ διευκολυνθῶμεν εἰς τὴν εὕρεσιν καταλλήλων σχέσεων, δι' ὧν προσδιορίζονταί τινα τῶν ἀγνώστων στοιχείων. Ἡ πορεία αὕτη ἀποτελεῖ τὴν τρίτην μέθοδον, ἥτις καλεῖται *γεωμετρική*. Κατ' αὐτὴν ἡ λύσις τοῦ προηγουμένου προβλήματος γίνεται ὡς ἑξῆς. Κατασκευάζομεν γωνίαν ΓΑΒ ἴσην τῇ δεδομένῃ Α· ἐπὶ τῶν διχοτομουσῶν ταύτης καὶ τῆς παραπληρωματικῆς αὐτῆς λαμβάνομεν $(A\Delta) = \delta_\alpha$, $(AE) = \Delta_\alpha$· ἀγομένης εἶτα τῆς ΔΕ σχηματίζεται τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 58).



(Σχ. 58)

Ἤδη ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΔΕ προκύπτει ὅτι $(A\Delta)=(AE)\,\varepsilon\varphi\,E$, ὅθεν $\varepsilon\varphi\,E = \frac{\delta_\alpha}{\Delta_\alpha}$. Ἀλλ' ἕνεκα τοῦ τριγώνου ΑΓΕ εἶναι $E + \Gamma + 90^0 + \frac{A}{2} = 180^0$, ὅθεν $E+\Gamma+\frac{A}{2} = 90^0 = \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}$ ἄρα $E = \frac{B-\Gamma}{2}$ καὶ ἑπομένως ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\varepsilon\varphi\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right) = \frac{\delta_\alpha}{\Delta_\alpha}$, ἣν καὶ διὰ τῆς τριγ. μεθόδου εὕρομεν. Εἶτα ἐργαζόμεθα ὡς καὶ κατὰ τὴν τριγ. μέθοδον.



(Σχ. 59)

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο ἡ γεωμετρικὴ μέθοδος ἄγει εἰς ὃν καὶ ἢ τριγωνομετρικὴ τύπον. Τοῦτο ὅμως δὲν συμβαίνει πάντοτε. Ἡ τριγωνομετρικὴ π.χ. λύσις τοῦ 3ου παράδ. (§ 125) ἄγει εἰς τὸν τύπον $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)=\frac{\varkappa}{\alpha}\,\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)$. Ἐὰν δὲ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 59) [κατασκευαζομένου πρῶτον τοῦ ΓΔΒ, οὗ (ΓΒ) $=\alpha$, $(\Delta\Gamma)=\varkappa$, καὶ $\Delta=\frac{A}{2}$ κ.τ.λ.] καὶ ἐφαρμόσωμεν τὴν ἰδιότητα (§ 110) εἰς τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εὑρίσκομεν $\frac{\alpha}{\eta\mu\Delta}=\frac{\varkappa}{\eta\mu\,(\Gamma B\Delta)}$ ἢ

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\varkappa}{\eta\mu\left(B+\frac{A}{2}\right)},\ \text{ὅθεν}\ \eta\mu\left(B+\frac{A}{2}\right)=\frac{\varkappa}{2}\,\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right),$$

ἥτις διαφέρει τῆς προηγουμένως εὑρεθείσης.

Πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τῆς μεταξὺ τῶν διαφόρων τούτων μεθόδων ὑφισταμένης διαφορᾶς ὡς πρὸς τὴν εὐκολίαν καὶ ταχύτητα τῆς ἐπιλύσεως θέλομεν ἐφαρμόσει εἰς τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα καὶ τὰς τρεῖς μεθόδους.

§ 128. ***Παράδ. 5ον.***—. *Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς γωνίας Α, τῆς πλευρᾶς β καὶ τῆς διαφορᾶς ν τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.*

1ον. ***Μέθοδος τριγωνομετρική.***—. Γνωρίζομεν ὅτι

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau\,(\tau-\gamma)}}\quad \text{καὶ}\quad \varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau\,(\tau-\alpha)}}.$$

διαιροῦντες ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\tau-\alpha}{\tau-\gamma}=\frac{\beta+(\gamma-\alpha)}{\beta+(\alpha-\gamma)}=\frac{\beta+(\gamma-\alpha)}{\beta-(\gamma-\alpha)}=\frac{\beta+\nu}{\beta-\nu},$$

ὅθεν $\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\frac{\beta+\nu}{\beta-\nu}\,\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right)$. Ὁριζομένης οὕτω τῆς Γ ἀποπερατοῦται ἡ λύσις κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 112).

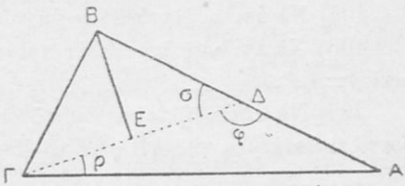
2ον. ***Μέθοδος ἀλγεβρική***..—. Λύομεν τὸ σύστημα $\gamma-\alpha=\nu$, $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu\,A$ πρὸς τοὺς ἀγνώστους α καὶ γ. Πρὸς τοῦτο θέτομεν ἐν τῇ β΄. τὴν ἐκ τῆς α΄. εὑρισκομένην τιμὴν τῆς πλευρᾶς α καὶ εὑρίσκομεν $(\gamma-\nu)^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu\,A$, ὅθεν $2\gamma\,(\beta\,\sigma\upsilon\nu\,A-\nu)=\beta^2-\nu^2$ καὶ $\gamma=\frac{\beta^2-\nu^2}{2\,(\beta\,\sigma\upsilon\nu\,A-\nu)}$, δι' ἧς ὁρίζεται ἡ γ, ἀρκεῖ νὰ καταστῇ τὸ β΄. μέλος λογιστὸν διὰ τῶν λογαρίθμων. Πρὸς ἐπίτευξιν τούτου γράφομεν ταύτην οὕτω

$$\gamma = \frac{(\beta+\nu)(\beta-\nu)}{2\beta\sigma\upsilon\nu A\left(1-\frac{\nu}{\beta\ \sigma\upsilon\nu\ A}\right)}\cdot$$ ἐὰν ἤδη θέσωμεν $\varepsilon\varphi\ \omega = \frac{\nu}{\beta\ \sigma\upsilon\nu\ A}$,

εὑρίσκομεν ὅτι $1 - \frac{\nu}{\beta\ \sigma\upsilon\nu A} = 1 - \varepsilon\varphi\ \omega = \frac{\sqrt{2}\ \eta\mu\,(45^0-\omega)}{\sigma\upsilon\nu\ \omega}$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\gamma = \frac{(\beta+\nu)(\beta-\nu)\sqrt{2}\ \sigma\upsilon\nu\ \omega}{4\beta\ \sigma\upsilon\nu A\ \eta\mu\,(45^0-\omega)}$. Ὁριζομένης οὕτω τῆς γ ἡ ἐπίλυσις περατοῦται κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 113 Β'.).

3ον. ***Μέθοδος γεωμετρική.*** — Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΑΔΓ (Σχ. 60) ἔχον (ΑΓ) = β, (ΑΔ) = ν καὶ γωνίαν αὐτῶν ἴσην τῇ δεδομένῃ Α. Ὑψοῦντες εἶτα τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΔ καὶ προεκτείνοντες τὴν ΑΔ ὁρίζομεν τὴν κορυφὴν Β τοῦ ζητουμένου τριγώνου ΑΒΓ. Ἤδη ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ λαμβάνομεν $\frac{\beta}{\eta\mu\varphi} = \frac{\nu}{\eta\mu\rho}$, ὅθεν



Σχῆμα 60.

$$\frac{\beta}{\nu} = \frac{\eta\mu\varphi}{\eta\mu\rho},\ \text{ἄρα}\ \frac{\beta+\nu}{\beta-\nu} = \frac{\eta\mu\varphi+\eta\mu\rho}{\eta\mu\varphi-\eta\mu\rho} = \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\varphi+\rho}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\varphi-\rho}{2}\right)}.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ $\varphi+\rho+A=180^0$ ἕπεται ὅτι $\frac{\varphi+\rho}{2}=90^0-\frac{A}{2}$ καὶ $\varepsilon\varphi\left(\frac{\varphi+\rho}{2}\right)=\sigma\varphi\left(\frac{A}{2}\right)$, ἡ δὲ προηγουμένη ἰσότης γίνεται:

$\varepsilon\varphi\left(\frac{\varphi-\rho}{2}\right)=\frac{\beta-\nu}{\beta+\nu}\,\sigma\varphi\left(\frac{A}{2}\right)$. Ὁριζομένης ἐκ ταύτης τῆς $\varphi-\rho$ καὶ ὄντος γνωστοῦ τοῦ ἀθροίσματος $\varphi+\rho$ ὑπολογίζονται αἱ γωνίαι φ καὶ ρ, μεθ' ὃ ἡ Β ἐκ τῆς εὐκόλως ἀποδεικνυομένης ἰσότητος $B = 2\varphi - 180^0$. Εἶτα ἡ ἐπίλυσις ἀποπερατοῦται κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 112 Α'.).

Ἀσκήσεις 396). Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\alpha=1468^\mu$, $\beta+\gamma = 2900^\mu$ καὶ $A = 70^0$.

397) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $A = 123^0\ 44'$, $B = 30^0\ 16'$ καὶ $2\tau = 56^\mu$.

398) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $A = 42^0\ 15'$, $B = 85^0\ 55'$ καὶ $E = 1245$ τ. μ.

399) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $A = 67^\circ\ 10'\ 40''$, $\delta_\alpha = 17{,}5$ καὶ $\Delta_\alpha = 40^\mu$.

400) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ δίδονται τὰ ὕψη.— *Ἐφαρμογὴ* $\Upsilon_\alpha = 4^\mu$, $\Upsilon_\beta = 5^\mu$, $\Upsilon_\gamma = 8^\mu$.

401) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, ἐκ τῶν στοιχείων A, δ_α καὶ Υ_α.

402) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\alpha = 142^\mu$, $B = 28^\circ\ 46'$ καὶ $\gamma - \beta = 54{,}6^\mu$.

403) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, β καὶ δ_γ.

404) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν A, B, Γ καὶ P.

405) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, $\beta + \gamma = \mu$ καὶ Υ_α.

406) Νὰ ἐπιλυθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον (A κορυφή), οὗ $\Upsilon_\alpha = 27^\mu$ καὶ $\rho = 12^\mu$.

407) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ διάμεσος μ_α, ἥτις σχηματίζει μετὰ μὲν τῆς AB γωνίαν 45° μετὰ δὲ τῆς $A\Gamma$ γωνίαν 60°.

408) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\gamma = 4^\mu$, $A = 2\Gamma$ καὶ $\text{συν}\Gamma = \frac{3}{4}$.

409) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\Upsilon_\alpha = 15^\mu$, $B = 15^\circ$ καὶ $\Gamma = 65^\circ$.

410) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ρ καὶ P τοῦ προηγουμένου τριγώνου.

411) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ περίμετρος καὶ τὸ γινόμενον $\text{εφ}\left(\frac{B}{2}\right)\text{εφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$.

412) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ α, ἡ A καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἄλλων πλευρῶν.

413) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\alpha = 20^\mu$, $\beta + \gamma = 38^\mu$ καὶ ἡ διχοτόμος τῆς A σχηματίζει μετὰ τῆς ἀντικειμένης πλευρᾶς γωνίαν $\omega = 20^\circ$.

414) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν γωνιῶν καὶ τῆς ρ.

415) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $A = 50^\circ\ 18'$, τὸ δὲ ὕψος $A\Delta$ αὐτοῦ διαιρεῖ τὴν $B\Gamma$ εἰς δύο μέρη, ὧν τὰ μήκη εἶναι 15^μ τὸ μὲν καὶ 20^μ τὸ δέ.

416) Τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι $\alpha = 38{,}40^\mu$, $\beta = 24{,}60^\mu$ καὶ $\gamma = 50^\mu$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς διαμέσου AM καὶ ἡ γωνία αὐτῆς μετὰ τῆς $B\Gamma$.

417) Τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι $A = 60^\circ$ καὶ $\beta : \gamma = 2$. Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ ἄλλαι γωνίαι αὐτοῦ.

418) Εὑρεῖν τὴν δ_α τριγώνου, οὗ $\gamma = 120^\mu$, $A = 48^\circ 12'$ καὶ $B = 24^\circ$.

419) Ἐν τριγώνῳ $AB\Gamma$, οὗ $B = 52^\circ 15'$ καὶ $\Gamma = 35^\circ 5'$, ἄγεται τὸ

ὕψος ΑΔ καὶ ἡ διὰ τοῦ μέσου αὐτοῦ καὶ τοῦ τῆς ΒΓ διερχομένη εὐθεῖα. Εὑρεῖν τὴν γωνίαν ταύτης μετὰ τῆς ΒΓ.

420) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $β=142^μ$, $γ=42^μ$ καὶ $μ_α=\sqrt{142.42}$.

421) Τριγώνου ΑΒΓ ἡ $Α=60^0$, ἡ δὲ διχοτόμος αὐτῆς εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν μερῶν, εἰς ἃ αὕτη διαιρεῖ τὴν ΒΓ. Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ ἄλλαι γωνίαι αὐτοῦ.

422) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $α=30^μ$, $Ε=225$ τ. μ, καὶ αἱ γωνίαι ἀποτελοῦσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

423) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $Γ=2Β$, $α=25^μ$ καὶ $β+γ=40^μ$.

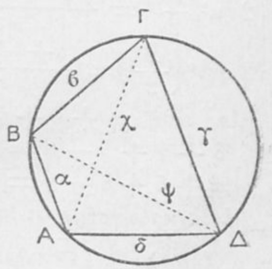
424) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $α=50^μ$, $Α=30^0$ καὶ $μ_α=40^μ$.

425) Νὰ ἐπιλυθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον οὗ ἡ περίμετρος εἶναι $22^μ$ καὶ τὸ ὕψος $\sqrt{11}$.

426) Νὰ ἐπιλυθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐκ τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ $\frac{1}{2}Κ^2$.

427) Νὰ ἐπιλυθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐκ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ $\frac{1}{2}Κ^2$.

§ 129. *Ἐπίλυσις κυρτῶν τετραπλεύρων.*—. Ἐπειδὴ πᾶν κυρτὸν τετράπλευρον διαιρεῖται δι' ἑκατέρας τῶν διαγωνίων αὐτοῦ εἰς τρίγωνα, εἶναι δυνατὸν διὰ τῆς ἐπιλύσεως τῶν τριγώνων τούτων νὰ ἐπιλυθῇ καὶ τὸ κυρτὸν τετράπλευρον. Οὕτω π. χ. ἐκ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ (Σχ. 61) καὶ τῶν γωνιῶν αὐτῶν δύναται νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Τῷ ὄντι ἐπιλυομένου (§ 113) τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὸ ΑΓΔ εἶτα ἐπιλύεται, ἤτοι ὁρίζονται πάντα τὰ κύρια στοιχεῖα αὐτοῦ. Μεθ' ὃ εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν



(Σχ. 61)

(ΑΒΓΔ)=(ΑΒΓ)+(ΑΓΔ) καὶ ἡ $\hat{Α}=Β\hat{Α}Γ+Γ\hat{Α}Δ$, οὕτω δὲ πάντα τὰ κύρια[1] στοιχεῖα τοῦ τετραπλεύρου ὁρίζονται. Γενικῶς, ἵνα εἶναι

[1] Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὸ τρίγωνον καλοῦμεν *κύρια στοιχεῖα* τετραπλεύρου τὰς πλευράς, γωνίας καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

δυνατὴ ἡ ἐπίλυσις τετραπλεύρου ἐκ κυρίων στοιχείων αὐτοῦ, πρέπει νὰ δίδωνται πέντε τοιαῦτα, ὧν δύο τοὐλάχιστον νὰ εἶναι πλευραί. Ἐνίοτε στοιχεῖον ἢ στοιχεῖά τινα ἀντικαθίστανται ὑπὸ ὅρων τινῶν εἰδικῶν, οὓς ἐκπληροῖ τὸ τετράπλευρον, π. χ. νὰ εἶναι περιγράψιμον περὶ κύκλον, νὰ ἔχῃ διαγωνίους καθέτους κ.τ.λ. Ὡς παράδειγμα ἔστω τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα.

§ 130. *Πρόβλημα.—Νὰ ἐπιλυθῇ κυρτὸν τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.*—Ὑποτεθείσθω ὅτι τὸ κ. τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 61) εἶναι ἐγγράψιμον, ἤτοι $A+\Gamma=180^0$ καὶ $B+\Delta=180^0$, ἔστωσαν δὲ

$$(AB)=\alpha,\ (B\Gamma)=\beta,\ (\Gamma\Delta)=\gamma,\ (\Delta A)=\delta,\ (A\Gamma)=\chi \text{ καὶ } (B\Delta)=\psi.$$

Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ προκύπτουσιν αἱ σχέσεις:

$\chi^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\,\text{συν}B$, $\chi^2=\gamma^2+\delta^2-2\gamma\delta\,\text{συν}\Delta$. Ἐπειδὴ ὅμως $\text{συν}\Delta=-\text{συν}B$, ἡ β΄ τούτων γίνεται $\chi^2=\gamma^2+\delta^2+2\gamma\delta\,\text{συν}B$· ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς α΄. προκύπτει ὅτι:

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\,\text{συν}B=\gamma^2+\delta^2+2\gamma\delta\,\text{συν}B, \text{ ὅθεν } \text{συν}B=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}. \quad (1)$$

Θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ συν Β εἰς τὰς γνωστὰς ἰσότητας $2\text{ἡμ}^2\left(\frac{B}{2}\right)=1-\text{συν}B$ καὶ $2\text{συν}^2\left(\frac{B}{2}\right)=1+\text{συν}B$ εὑρίσκομεν μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν καταλλήλων μετασχηματισμῶν ὅτι:

$$2\,\text{ἡμ}^2\,\frac{B}{2}=\frac{(\gamma+\delta+\alpha-\beta)(\gamma+\delta-\alpha+\beta)}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)},$$

$$2\,\text{συν}^2\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\beta-\gamma+\delta)}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}.$$ Ἐὰν δὲ χάριν συντομίας τεθῇ $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\kappa$, εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

$$\beta+\gamma+\delta-\alpha=2(\kappa-\alpha),\quad \alpha+\gamma+\delta-\beta=2(\kappa-\beta),$$
$$\alpha+\beta+\delta-\gamma=2(\kappa-\gamma),\quad \alpha+\beta+\gamma-\delta=2(\kappa-\delta).$$

Αἱ δὲ προηγούμεναι ἰσότητες γίνονται:

$$\text{ἡμ}\left(\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\kappa-\alpha)(\kappa-\beta)}{\alpha\beta+\gamma\delta}},\quad \text{συν}\left(\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\kappa-\gamma)(\kappa-\delta)}{\alpha\beta+\gamma\delta}} \quad (106)$$

Ἐκ τούτων δὲ ἕπεται ὅτι: $\text{ἐφ}\left(\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\kappa-\alpha)(\kappa-\beta)}{(\kappa-\gamma)(\kappa-\delta)}}$

(107)

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι: $\text{ἐφ}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\kappa-\alpha)(\kappa-\delta)}{(\kappa-\gamma)(\kappa-\beta)}}$

Ὑπολογιζομένων ἐκ τούτων τῶν γωνιῶν Α καὶ Β ὑπολογίζονται εἶτα καὶ αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν Γ καὶ Δ.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ ἀναχωροῦμεν ἐκ τῆς προφανοῦς ἰσότητος $E = (ΑΒΓ] + (ΑΔΓ)$ καὶ ἐφαρμόζοντες τὴν ἰδιότητα (§ 110 Δ') εὑρίσκομεν ὅτι $E = \frac{1}{2}αβ\ ημ B + \frac{1}{2}γδ\ ημΔ$. Ἐπειδὴ δὲ $ημ Δ = ημ B = 2\ ημ\left(\frac{B}{2}\right)συν\left(\frac{B}{2}\right)$, αὕτη γίνεται

$E = (αβ + γδ)\ ημ\left(\frac{B}{2}\right)συν\left(\frac{B}{2}\right)$ καὶ ἕνεκα τῶν (106)

$$E = \sqrt{(κ-α)(κ-β)(κ-γ)(κ-δ)}. \qquad (108)$$

Οὕτω περατοῦται ἡ ἐπίλυσις τοῦ τετραπλεύρου τούτου, ἤτοι ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀγνώστων κυρίων στοιχείων αὐτοῦ. Δυνάμεθα ὅμως νὰ ὑπολογίσωμεν συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγραψίμου κ. τετραπλεύρου τὰς διαγωνίους καὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, ὡς ἀκολούθως.

§ 131. ***Ὑπολογισμὸς τῶν διαγωνίων ἐγγραψίμου κ. τετραπλεύρου.***—. Ἀπαλείφοντες τὸ συνB μεταξὺ τῶν προηγουμένως εὑρεθεισῶν ἰσοτήτων $χ^2 = α^2 + β^2 - 2αβ συνB$, $χ^2 = γ^2 + δ^2 + 2γδ συνB$ εὑρίσκομεν ὅτι: $χ^2(αβ + γδ) = (α^2 + β^2)γδ + (γ^2 + δ^2)αβ$, ὅθεν

$$χ = \sqrt{\frac{(αγ + βδ)(αδ + βγ)}{αβ + γδ}}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι: $ψ = \sqrt{\frac{(αγ + βδ)(αβ + γδ)}{(αδ + βγ)}}. \qquad (109)$

Σημ. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ ἰσότητες $χψ = αγ + βδ$ καὶ $\frac{χ}{ψ} = \frac{αδ + βγ}{αβ + γδ}$ (110), αἵτινες ἐκφράζουσι τὰ δύο θεωρήματα τοῦ Πτολεμαίου.

§ 132. ***Ὑπολογισμὸς τῆς ἀκτῖνος P τοῦ περὶ κ. τετράπλευρον περιγεγραμμένου κύκλου.***—. Τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 61) ὄντος ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, ἀληθεύει (§ 110 Α'.) ἡ ἰσότης $\frac{(ΑΓ)}{ημ B} = 2P$, ὅθεν $P = \frac{χ}{2ημB} = \frac{χ}{4\ ημ\left(\frac{B}{2}\right)συν\left(\frac{B}{2}\right)}$. Ἐὰν δὲ ληφθῶσιν ὑπ' ὄψιν ὡς ἰσότητες (106) καὶ (109) προκύπτει ἐξ αὐτῆς ἡ ἰσότης:

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(αβ + γδ)(αγ + βδ)(αδ + βγ)}{(κ-α)(κ-β)(κ-γ)(κ-δ)}} \qquad (111)$$

Ἐὰν δὲ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν καὶ ἡ ἰσότης (108), ἡ προηγουμένη ἰσότης (111) γίνεται $P = \frac{\sqrt{(\alpha\beta+\gamma\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)}}{4E}$ (112)

Ἀσκήσεις 428). Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ κ. τετράπλευρον ΑΒΓΔ, οὗ $(AB) = 8^{\mu}$, $(B\Gamma) = 10^{\mu}$, $(\Gamma\Delta) = 6^{\mu}$, $B = 30^{\circ}$ καὶ $\Gamma = 80^{\circ}$.

429) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ κ. τετράπλευρον, οὗ αἱ πλευραὶ εἶναι κατὰ σειρὰν 2^{μ}, 3^{μ}, 5^{μ}, 4^{μ}, καὶ ἡ γωνία τῶν δύο πρώτων εἶναι 100°.

430) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν κ. τετραπλεύρου ἔχοντος διαγωνίους $6{,}50^{\mu}$ καὶ $5{,}42^{\mu}$ τεμνομένας ὑπὸ γωνίαν $65^{\circ}\ 15'$.

431) Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ γωνίαι τραπεζίου, οὗ αἱ βάσεις εἶναι 5^{μ} ἡ μὲν καὶ 20^{μ} ἡ ἄλλη, αἱ δὲ ἄλλαι πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι 12^{μ} καὶ 9^{μ}.

432) Νὰ ἐπιλυθῇ καὶ ὑπολογισθῇ ἡ διαγώνιος ΑΓ κ. τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, οὗ εἶναι $A = 90^{\circ}$, $\Gamma = 60^{\circ}$, $(A\Delta) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ΑΓ διχοτομεῖ τὴν Γ.

433) Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ γωνίαι Γ καὶ Δ κ. τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, οὗ $(AB) = \alpha$, $(A\Delta) = \frac{\alpha}{4}(1+\sqrt{5})$, $(B\Gamma) = \frac{\alpha}{2}$, $A = 36^{\circ}$ καὶ $B = 108^{\circ}$.

434) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ κ. τετράπλευρον ΑΒΓΔ, οὗ $A = 90^{\circ}$ καὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εἶναι ἀνάλογος πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 4, 7, 8, 3.

435) Νὰ ἐπιλυθῇ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον κ. τετράπλευρον, οὗ δίδεται ἡ Α, αἱ πλευραὶ α καὶ δ καὶ $B = 90^{\circ}$.

436) Νὰ ἐπιλυθῇ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον κ. τετράπλευρον, οὗ δίδονται αἱ πλευραὶ α, β, γ καὶ ἡ γωνία Β τῶν δύο πρώτων πλευρῶν.

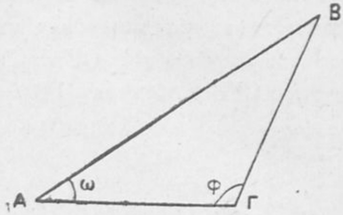
437) Νὰ ἐπιλυθῇ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον τραπέζιον ἐκ μιᾶς τῶν βάσεων, μιᾶς γωνίας καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

438) Ὑπολογίσαι τὰς διαγωνίους τραπεζίου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

Τοπογραφικαὶ ἐφαρμογαί.

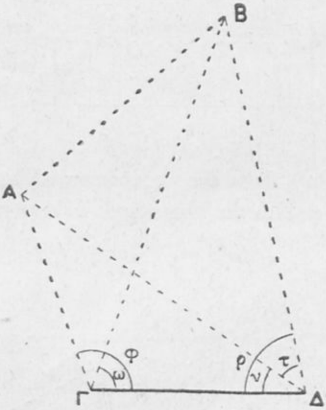
§ 133. *Πρόβλημα 1ον.—Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις προσιτοῦ ἀπὸ ἀπροσίτου καὶ ὁρατοῦ σημείου.*—Ἔστω Α τὸ προσιτὸν καὶ Β τὸ ἀπρόσιτον σημεῖον, ὧν ἡ ἀπόστασις (ΑΒ) ζητεῖται (Σχ. 62). Πρὸς εὕρεσιν ταύτης ἐπὶ ὁμαλοῦ ἐδάφους ἐκλέγομεν σημεῖόν τι Γ τοιοῦτον ὥστε ἐξ αὐτοῦ νὰ φαίνωνται ἀμφότερα τὰ σημεῖα Α, Β καὶ νὰ εἶναι εὔκολος ἡ μετὰ πάσης δυνατῆς ἀκριβείας μέτρησις τῆς ἀποστάσεως (ΑΓ). Μετὰ τὴν μέτρησιν ταύτης διὰ καταλλήλου γωνιομετρικοῦ ὀργάνου μετροῦμεν τὰς γωνίας ω καὶ φ καὶ εἶτα ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκομεν ὅτι



(Σχ. 62)

$\frac{(AB)}{\eta\mu\varphi} = \frac{(A\Gamma)}{\eta\mu B}$, ὅθεν $(AB) = \frac{(A\Gamma)\,\eta\mu\,\varphi}{\eta\mu(\omega + \varphi)}$

§ 134. *Πρόβλημα 2ον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις δύο σημείων ἀπροσίτων καὶ ὁρατῶν.*—. Ἔστωσαν Α καὶ Β (Σχ.63) τὰ δύο σημεῖα, ὧν ζητεῖται ἡ ἀπόστασις (ΑΒ). Πρὸς εὕρεσιν ταύτης ἐργαζόμεθα οὕτως. Ἐπὶ ὁμαλοῦ ἐδάφους ἐκλέγομεν δύο σημεῖα Γ καὶ Δ τοιαῦτα ὥστε ἀπ' ἀμφοτέρων νὰ εἶναι ὁρατὰ τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἑκάτερον νὰ εἶναι ὁρατὸν ἐκ τοῦ ἑτέρου. Μετροῦμεν εἶτα τὴν ἀπόστασιν (ΓΔ) αὐτῶν μετὰ πάσης τῆς δυνατῆς ἀκριβείας, ὡς καὶ τὰς γωνίας ΒΓΔ=ω, ΑΓΔ=φ, ΒΔΓ=ρ, ΑΔΓ=ν καὶ ΒΔΑ=τ. Μεθ' ὃ ἐκ τοῦ τριγώνου

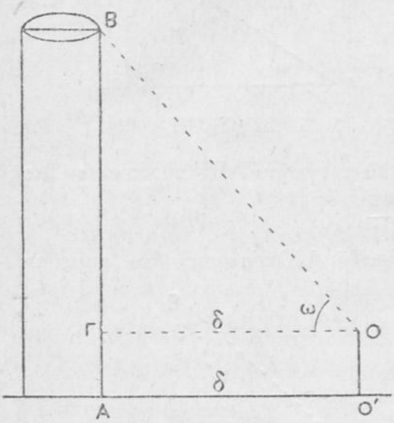


(Σχ. 63)

ΑΔΓ λαμβάνομεν $(A\Delta) = \frac{(\Gamma\Delta)\,\eta\mu\varphi}{\eta\mu(\varphi + \nu)}$, ἐκ δὲ τοῦ ΒΓΔ λαμβάνομεν $(B\Delta) = \frac{(\Gamma\Delta)\,\eta\mu\omega}{\eta\mu(\omega + \rho)}$. Γνωρίζοντες ἤδη τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΔ καὶ τὴν γωνίαν αὐτῶν τ ἐπιλύομεν (§ 113 Β') τὸ τρίγωνον ΑΒΔ καὶ εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν (ΑΒ).

§ 135. *Πρόβλημα 3ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος πύργου, οὗ ἡ βάσις εἶναι προσιτή.*—. Ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ποδὸς Α (Σχ. 64) τοῦ πύργου μετροῦμεν ὁριζόντιόν τινα εὐθεῖαν ΑΟ′ καὶ ἔστω (ΑΟ′)=δ.

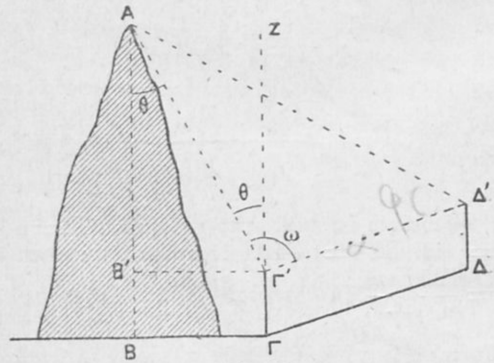
Τοποθετοῦντες τὸ γωνιομετρικὸν ὄργανον εἰς τὸ ἄκρον Ο′ τῆς μετρηθείσης εὐθείας μετροῦμεν τὴν γωνίαν ΓΟΒ = ω (ΟΟ′ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ὀργάνου καὶ ΟΓ ὁριζόντιος εὐθεῖα). Μεθ' ὃ ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΟΓΒ εὑρίσκομεν (ΓΒ)=δ· ἐφω καὶ προσθέτοντες εἰς τὸ δι' αὐτῆς ὑπολογιζόμενον μῆκος (ΓΒ) τὸ τοῦ ὀργάνου ὕψος (ΟΟ′) εὑρίσκομεν τὸ ὕψος (ΑΒ).



(Σχ. 64)

§ 136. *Πρόβλημα 4ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ὄρους.* Ἔστω Α ἡ κορυφὴ τοῦ ὄρους (Σχ. 65) καὶ Γ σημεῖόν τι τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἀφ' οὗ λογίζεται τὸ ὕψος τοῦ ὄρους, καὶ τοιοῦτον ὥστε νὰ φαίνηται ἐξ αὐτοῦ ἡ κορυφὴ Α. Ἔστω δὲ ΑΒ τὸ ἀόρατον ὕψος, ὅπερ πρόκειται νὰ εὕρωμεν. Πρὸς τοῦτο ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Γ μετροῦμεν ἐπὶ ὁμαλοῦ, ὅσον ἔνεστι, ἐδάφους εὐθεῖάν τινα ΓΔ, ἀπὸ τοῦ ἄκρου Δ τῆς ὁποίας φαίνονται ἀμφότερα τὰ σημεῖα Α καὶ Γ, ἔστω δὲ α τὸ μῆκος αὐτῆς. Μετὰ τοῦτο τοποθετοῦμεν εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ τὸ γωνιομετρικὸν ὄργανον, οὗ τὸ ὕψος ἔστω (ΓΓ′)=(ΔΔ′) καὶ μετροῦμεν τὰς γωνίας ΑΓ′Δ′=ω καὶ ΑΔ′Γ′=φ· ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου ΑΓ′Δ′ λαμβάνομεν εἶτα (ΑΓ′)

$$=\frac{\alpha \,\text{ἡμ}\varphi}{\text{ἡμ}\,(\omega+\varphi)},$$ δι' ἧς

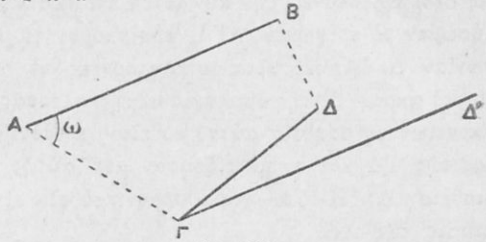


(Σχ. 65)

ὑπολογίζομεν τὴν ΑΓ′. Μετροῦμεν τέλος τὴν γωνίαν ΑΓ′Ζ=θ, ἣν σχηματίζει ἡ ΑΓ′ μετὰ τῆς κατακορύφου ΓΓ′Ζ, ὅτε καὶ $\widehat{ΒΑΓ'}$=θ.

καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒ′Γ′ (Β′Γ′ εἶναι νοητὴ ὁριζόντιος εὐθεῖα) λαμβάνομεν $(AB')=(A\Gamma')\ \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\alpha\, \acute{\eta}\mu\varphi\ \sigma\upsilon\nu\theta}{\acute{\eta}\mu\,(\omega+\varphi)}$ δι᾽ ἧς εὑρίσκομεν τὸ ὕψος (ΑΒ′)· ἐὰν δὲ εἰς αὐτὸ προσθέσωμεν καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀργάνου (ΓΓ′)=(ΒΒ′) εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον ὕψος τοῦ ὄρους.

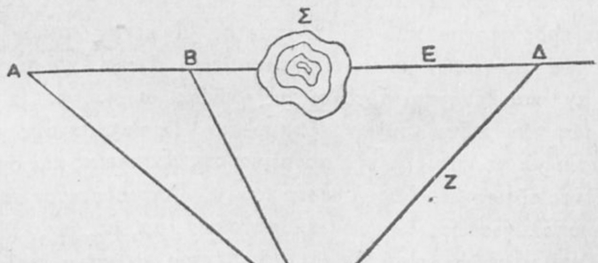
§ 137. ***Πρόβλημα 5ον.—***. *Διὰ προσιτοῦ σημείου Γ κειμένου ἐπὶ ὁμαλοῦ ἐδάφους νὰ χαραχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς ἀπρόσιτον εὐθεῖαν ΑΒ (Σχ. 66).*



(Σχ. 66).

—Ἐργαζόμενοι ὡς ἐν τῷ 2ῳ προβλήματι (§ 134) ὑπολογίζομεν τὴν γωνίαν $\Gamma\hat{A}B=\omega$. Εἶτα τῇ βοηθείᾳ τοῦ γωνιομετρικοῦ ὀργάνου τοποθετουμένου εἰς τὸ Γ χαράσσομεν δι᾽ ἀκοντίων εὐθεῖαν ΓΔ′ τοιαύτην ὥστε νὰ εἶναι $A\hat{\Gamma}\Delta'=180^{0}-\omega$. Ἡ οὕτως ὁριζομένη εὐθεῖα ΓΔ′ εἶναι ἡ ζητουμένη.

§ 138. ***Πρόβλημα 6ον.***—*Ἐπὶ ἐπιπέδου ἐδάφους νὰ χαραχθῇ ἡ προέκτασις εὐθείας ὄπισθεν κωλύματος, ὅπερ ἐμποδίζει νὰ βλέπωμεν τὴν ὄπισθέν του διεύθυνσιν αὐτῆς.*—Ἔστω ΑΒ (Σχ. 67) ἡ δεδομένη εὐθεῖα, Σ τὸ κώλυμα καὶ ΕΔ ἡ ζητουμένη προέκτασις τῆς ΑΒ

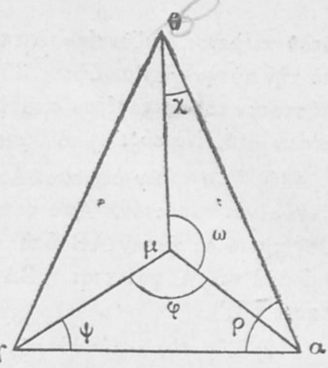


(Σχ. 67).

πέραν τοῦ Σ. Ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας ὁρίζομεν δύο σημεῖα Α καὶ Β, ὧν τὴν ἀπόστασιν μετροῦμεν μετὰ πάσης τῆς δυνατῆς ἀκριδείας. Εἶτα εἴς τι σημεῖον Γ, ἀφ' οὗ φαίνονται τὰ Α καὶ Β καὶ ὁ ὄπισθεν τοῦ Σ χῶρος, τοποθετοῦμεν σῆμά τι καὶ μετροῦμεν τὰς γωνίας ΒΑΓ καὶ ΑΒΓ. Ἐκ τούτων καὶ τῆς ΑΒ εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς ΑΓ· εἶτα δι' ἀκοντίων χαράσσομεν εὐθεῖαν ΓΖ κατευθυνομένην εἰς τὸν ὄπισθεν τοῦ Σ χῶρον καὶ μετροῦμεν τὴν γωνίαν αὐτῆς μετὰ τῆς ΑΓ. Ἐὰν ἤδη ὑποθέσωμεν ὅτι Δ εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς ὃ ἡ ΓΖ τέμνει τὴν ἄγνωστον ἔτι προέκτασιν τῆς ΑΒ καὶ ἐπιλύσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΓΔ, εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς ΓΔ καὶ τὴν γωνίαν Δ. Ἀρκεῖ εἶτα τοποθετοῦντες τὸ γωνιομετρικὸν ὄργανον εἰς τὸ ἄκρον Δ τῆς ὑπολογισθείσης πλευρᾶς ΓΔ νὰ χαράξωμεν δι' ἀκοντίων τῇ βοηθείᾳ αὐτοῦ εὐθεῖαν, κειμένην πρὸς ὃ καὶ τὸ Σ μέρος τῆς ΓΔ καὶ σχηματίζουσαν μετ' αὐτῆς γωνίαν ἴσην τῇ ὑπολογισθείσῃ Δ. Ἡ οὕτω χαρασσομένη εὐθεῖα εἶναι ἡ ζητουμένη προέκτασις τῆς ΑΒ.

§ 139 ***Πρόβλημα (τοῦ χάρτου) 7ον.***—. *Τριῶν ὡρισμένων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων σημείων Α, Β, Γ ὁριζοντίου ἐδάφους ἁρμοδίως τοποθετηθέντων ἐπὶ χάρτου εἰς τὰς θέσεις α, β, γ (Σχ. 68), νὰ τοποθετηθῇ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ χάρτου σημεῖον Μ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἐξ οὗ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ φαίνονται ὑπὸ γνωστὰς γωνίας ω καὶ φ.*—. Ἐπειδὴ πᾶν εὐθύγραμμον σχῆμα ἀπεικονίζεται ἐν τῷ χάρτῃ δι' ὁμοίου σχήματος, αἱ γωνίαι τῶν ἀπεικονιζομένων σχημάτων διατηροῦνται· ἑπομένως ἂν μ εἶναι ἡ ἐπὶ τοῦ χάρτου ζητουμένη θέσις τοῦ Μ, αἱ γωνίαι αμβ, καὶ αμγ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ω καὶ φ. Τὸ σημεῖον μ εἶναι λοιπὸν κοινὸν σημεῖον τῶν τόξων τῶν κυκλικῶν τμημάτων, ἅτινα ἔχουσι χορδὰς αβ καὶ αγ καὶ δέχονται ἀντιστοίχως γωνίας ω καὶ φ. Ἡ κατασκευὴ ὅμως τῶν τόξων τούτων ἐξαρτωμένη ἐκ κατασκευῆς γωνιῶν δὲν δύναται νὰ γείνῃ μετὰ τῆς προσηκούσης ἀκριβείας καὶ συνεπῶς δὲν ὁρίζεται οὕτως ἀκριβῶς ἡ θέσις τοῦ μ. Ἀκριβέστερον ὁρίζεται αὕτη, ἂν ὑπολογισθῶσι δύο τῶν ἀποστάσεων μα, μβ, μγ, π. χ. αἱ μα, μγ καὶ γραφῶσι περιφέρειαι μὲ κέντρα α καὶ γ καὶ ἀκτῖνας ἀντιστοίχως τὰς μα καὶ μγ. Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν εἰρημένων ἀποστάσεων γίνεται ὡς ἑξῆς. Ἔστω πρῶτον χάριν συντομίας $\widehat{\alpha\beta\mu} = \chi$ καὶ $\widehat{\alpha\gamma\mu} = \psi$· ἕνεκα τῶν τριγώνων αμβ καὶ αμγ εἶναι

$\omega + \varphi + \rho + \chi + \psi = 360^\circ$, $\frac{\eta\mu\chi}{\alpha\mu} = \frac{\eta\mu\omega}{\gamma}$, $\frac{\eta\mu\psi}{\alpha\mu} = \frac{\eta\mu\varphi}{\beta}$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἰσοτήτων προκύπτει $\frac{ἡμχ}{ἡμψ}=\frac{βἡμω}{γἡμφ}$, τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τοῦ συστήματος $χ+ψ+ω+φ+ρ=360^0$; $\frac{ἡμχ}{ἡμψ}=\frac{βἡμω}{γἡμφ}$, ἣν ἐκτελοῦμεν ὡς ἀκολούθως. Ἐκ τῆς β΄. αὐτοῦ ἐξισώσεως λαμβάνομεν



(Σχ. 69).

$$\frac{ἡμχ-ἡμψ}{ἡμχ+ἡμψ}=\frac{βἡμω-γἡμφ}{βἡμω+γἡμφ},$$ ὅθεν

$$\frac{ἐφ\,\frac{χ-ψ}{2}}{ἐφ\,\frac{χ+ψ}{2}}=\frac{1-\frac{γἡμφ}{βἡμω}}{1+\frac{γἡμφ}{βἡμω}}$$ Ἐὰν δὲ τεθῇ $\frac{βἡμω}{γἡμφ}=ἐφ\,τ$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $$\frac{ἐφ\,\frac{χ-ψ}{2}}{ἐφ\,\frac{χ+ψ}{2}}=\frac{1-ἐφτ}{1+ἐφτ},$$ ὅθεν

$$ἐφ\left(\frac{χ-ψ}{2}\right)=-ἐφ\,(45^0-τ)\,ἐφ\left(\frac{ω+φ+ρ}{2}\right).$$ Ὑπολογιζομένης ἐκ ταύτης τῆς διαφορᾶς $χ-ψ$ καὶ ἐκ τῆς α΄. τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος τοῦ ἀθροίσματος $χ+ψ$ ὑπολογίζονται εἶτα εὐκόλως ἀμφότεραι αἱ γωνίαι $χ$ καὶ $ψ$. Ἤδη ἐκ τοῦ ἑτέρου τῶν τριγώνων αμβ καὶ αμγ, ἑκατέρου τῶν ὁποίων εἶναι γνωστὴ μία πλευρὰ καὶ δύο γωνίαι, ὑπολογίζονται δύο τῶν ἀποστάσεων μα, μβ, μγ καὶ ὁρίζεται εἶτα, ὡς προείπομεν, ἡ θέσις τοῦ μ.

Σημ. Πρὸς ἐξέλεγξιν τῆς ἀκριβείας τῆς λύσεως ὑπολογίζεται καὶ ἡ τρίτη τῶν προειρημένων ἀποστάσεων καὶ γράφονται τρεῖς περιφέρειαι μὲ κέντρα α, β, γ καὶ ἀκτῖνας ἀντιστοίχως τὰς μα, μβ, μγ. Πᾶσαι αὗται δέον νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου μ, ἂν ἀλανθάστως ἐγένετο ἡ λύσις.

Ἀσκήσεις. 439) Παρατηρητὴς βλέπει πύργον ὑπὸ γωνίαν 60^0. Ἐὰν δὲ ἀπομακρυνθῇ τῆς θέσεως του κατὰ $100^μ$ ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἣν ὁρίζει ἡ ἀρχική του θέσις καὶ ὁ ποὺς τῆς ἐκ τοῦ ὑψηλοτέρου σημείου τοῦ πύργου διερχομένη κατακορύφου, βλέπει αὐτὸν ὑπὸ γωνίαν 30^0 Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ πύργου;

440) Δύο παρατηρηταὶ ἀπέχοντες ἀλλήλων $1000^μ$ καὶ ἐπὶ τοῦ

αὐτοῦ κείμενοι ὁριζοντίου ἐπιπέδου βλέπουσιν ἀπρόσιτον σημεῖον ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὕψους 35^o, ἐν ᾧ ἑκάτερος τούτων βλέπει τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἀπροσίτου σημείου ἀπὸ τοῦ ἄλλου παρατηρητοῦ ὑπὸ γωνίαν 60^o. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἀπροσίτου σημείου.

441) Ἐκ τριῶν σημείων Α,Β,Γ ἐπὶ εὐθείας κειμένων τὸ πρῶτον μόνον εἶναι προσιτόν. Ἀπὸ τετάρτου σημείου Δ ἀπέχοντος τοῦ Α 600^μ φαίνεται ἡ μὲν ΑΒ ὑπὸ γωνίαν 42^o ἡ δὲ ΑΓ ὑπὸ γωνίαν 75^o ἐν ᾧ ἀπὸ τοῦ Α φαίνεται ἡ ΒΔ ὑπὸ γωνίαν 40^o. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις (ΒΓ).

442) Εἰς τὴν κορυφὴν πύργου ὕψους 16^μ εἶναι ἐστερεωμένον κατακορύφως στέλεχός τι. Ἡ πρὸς τὴν κορυφὴν αὐτοῦ ἐκ σημείου τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ ἡ βάσις τοῦ πύργου, διευθυνομένη εὐθεῖα σχηματίζει μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου γωνίαν 60^o, ἡ δὲ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ πύργου διευθυνομένη εὐθεῖα σχηματίζει μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου γωνίαν 30^o· Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ στελέχου.

443) Ἐκ δύο σημείων κειμένων ἐπὶ εὐθείας ἐφαπτομένης κυλινδρικοῦ πύργου καὶ εἰς ἀπόστασιν 100^μ ἀπ' ἀλλήλων φαίνεται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν $6^o\,4'$ ἡ τομὴ τοῦ πύργου ὑπὸ τοῦ διὰ τῶν σημείων τούτων διερχομένου ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ πύργου.

444) Δύο σημεῖα Α καὶ Β κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ἀπέχουσιν ἀλλήλων 800^μ. Τὸ ὑπὲρ τὸ ὁριζόντιον αὐτῶν ἐπίπεδον ὕψος ἀπροσίτου σημείου Γ ὁρωμένου μὲν ἀπὸ τοῦ Α εἶναι 30^o ἀπὸ δὲ τοῦ Β 35^o, ἐν ᾧ $\widehat{ΑΒΓ}=60^o$ καὶ $\widehat{ΓΑΒ}=62^o\,15'$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγεθος τῆς προβολῆς τῆς γωνίας ΑΓΒ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον.

445) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς (ὑποτιθεμένης σφαιρικῆς) δεδομένου τοῦ βάθους τοῦ ὁρίζοντος ω πρὸς παρατηρητὴν κείμενον εἰς δεδομένον ὕψος υ ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης.—Ἐφαρμογὴ $υ=75^\mu$, $ω=15'\,30''$.

Διάφοροι ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν.

446) Πόσας διαφόρους τιμὰς λαμβάνει ἡ παράστασις ἐφ $\frac{Κπ}{3}$, τοῦ Κ λαμβάνοντος πάσας τὰς πραγματικὰς καὶ ἀκεραίας τιμάς;

447) Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν παράστασιν συν $\frac{2K\pi}{5}$.

448) Ἐὰν ἐφ²ι=1+2ἐφ²β, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : συν²β=1+συν2τ.

449) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : συν²(α+β)+συν²(α—β)=1+συν2α.συν2β.

450) Νὰ καταστῇ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις

(ἡμΑ+ἡμΒ)²+(συνΑ+συνΒ)².

451) Εὑρεῖν τὸ θετικὸν καὶ μικρότερον 90^0 τόξον χ, δι' ὃ εἶναι ἡμχ+συνχ=1,15.

452) Εὑρεῖν τὴν ἐφω, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἐφ $\frac{\omega}{2}=-1+\sqrt{2}$.

453) Εὑρεῖν πάσας τὰς μεταξὺ 0^0 καὶ 1000^0 γωνίας, ὧν ἑκάστη ἔχει συνημίτονον 0,548.

454) Νὰ διαιρεθῇ τὸ τόξον 45^0 εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἓν νὰ ἔχῃ ἡμίτονον διπλάσιον τοῦ ἡμιτόνου τοῦ ἄλλου.

455) Νὰ διαιρεθῇ τὸ τόξον 30^0 εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἓν νὰ ἔχῃ ἡμίτονον τριπλάσιον τοῦ ἡμιτόνου τοῦ ἄλλου.

456) Διὰ ποίαν θετικὴν καὶ μικροτέραν 90^0 τιμὴν τοῦ χ ἡ παράστασις ἐφχ+3σφχ γίνεται ἐλαχίστη ;

457) Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία ἀκμῆς τινος κανονικοῦ τετραέδρου μετὰ ἕδρας μὴ περιεχούσης αὐτὴν ἐκ τῆς ἀκμῆς αὐτοῦ.

458) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης, ἥτις περιέχεται μεταξὺ τοῦ γηΐνου ἰσημερινοῦ καὶ τοῦ γηΐνου παραλλήλου πλάτους 45^0.

459) Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία δύο διαγωνίων ὀρθ. παραλληλεπιπέδου, ὅπερ ἔχει ὕψος 2^{μ} καὶ βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 1^{μ}.

460) Ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ εἶναι (ΑΒ)=2μν, ΑΓ=μ²—ν². Νὰ ὁρισθῶσιν αἱ ἐφ $\frac{B}{2}$ καὶ ἐφ $\frac{\Gamma}{2}$ συναρτήσει τῶν ἀριθμῶν μ καὶ ν.

461) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ αἱ πλευραὶ εἶναι ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου ἐχούσης λόγον 1, ἡ δὲ μεγαλυτέρα γωνία εἶναι διπλασία τῆς μικροτέρας.

462) Ἐὰν α, β, γ, Α, Β, Γ εἶναι πλευραὶ καὶ γωνίαι τριγώνου, χ, ψ, z ὀξεῖαι γωνίαι, δι' ἃς εἶναι συν $\chi=\frac{\alpha}{\beta+\gamma}$ συν $\psi=\frac{\beta}{\alpha+\gamma}$, συν $z=\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha'.)\ \text{ἐφ}^2\left(\frac{\chi}{2}\right)+\text{ἐφ}^2\left(\frac{\psi}{2}\right)+\text{ἐφ}^2\left(\frac{z}{2}\right)=1,$$

β'.) $\epsilon\varphi\left(\frac{\chi}{2}\right) . \epsilon\varphi\left(\frac{\psi}{2}\right) \epsilon\varphi\left(\frac{z}{2}\right) = \epsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right) \epsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right) \epsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$.

463) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία Β τριγώνου ΑΒΓ, δι' ὃ εἶναι $\Gamma = 120^0$ καὶ $\frac{\alpha}{6} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

464) Δύο διάφορα τρίγωνα ἔχουσιν ἴσα τὰ στοιχεῖα α, 6, Α ἓν πρὸς ἕν. Νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τῶν στοιχείων τούτων ἡ διαφορὰ τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτῶν.

465) Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ γωνίαι Α καὶ Β τριγώνου, οὗ $\Gamma = 60^0$ καὶ $6 = \frac{\alpha}{2}$.

466) Ἐὰν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου εἶναι κατὰ σειρὰν $(\chi^2 + \chi + 1)$, $(2\chi + 1)$, $(\chi^2 - 1$ καὶ $\chi > 1$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτ ἡ ἀπέναντι τῆς α'. πλευρᾶς κειμένη γωνία εἶναι 120^0.

467) Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ γωνίαι τριγώνου, οὗ αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $2, \sqrt{6}, (1+\sqrt{3})$.

468) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον εἶναι

$$\tau = 4\,P \;\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{B}{2}\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right).$$

469) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\alpha = 180^{\mu}$, $6 = 101{,}0093^{\mu}$ καὶ $A = 2B$.

470) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\alpha = 167^{\mu}$, $6 = 147^{\mu}$ καὶ $A - B = 15^0\ 45'\ 29'', 32$.

471) Ἐκ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τριγώνου ἄγομεν καθέτους ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ. Δεῖξαι ὅτι ὁ λόγος τοῦ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένου τριγώνου πρὸς τὸ ἀρχικὸν εἶναι

$$(\sigma\varphi\, A + \sigma\varphi\, B + \sigma\varphi\, \Gamma)^2.$$

472) Διὰ δεδομένου σημείου Α κειμένου ἐκτὸς δεδομένου κύκλου νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΑΒΓ τοιαύτη ὥστε νὰ εἶναι $B\hat{O}\Gamma = 4(O\hat{A}\Gamma)$.

473) Τεσσάρων σημείων Α, Β, Γ, Δ ἐπ' εὐθείας καθ' ἣν ἐγράφησαν τάξιν κειμένων καὶ οὕτως ὥστε $(AB) = 4^{\mu}$, $(B\Gamma) = 2^{\mu}$ καὶ $(\Gamma\Delta) = 6^{\mu}$, νὰ εὑρεθῶσι σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ ταῦτα κεῖνται, ἐξ ἑκάστου τῶν ὁποίων τὰ προειρημένα εὐθ. τμήματα φαίνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία αὕτη.

474) Νὰ ὁρισθῇ τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου α οὕτως ὥστε αἱ ῥίζαι

τῆς ἐξισώσεως $\chi^4 + \frac{1}{3}$ ἡμα. $\chi^2 + \frac{1}{200}$ συν $\frac{\pi}{3} = 0$ νὰ ἀποτελῶσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

475) Εὑρεῖν τὸν λόγον τοῦ ὄγκου σφαίρας πρὸς τὸν ὄγκον σφαιρικοῦ αὐτῆς τμήματος, οὗ ἡ μία βάσις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, τὸ δὲ ὕψος ἰσοῦται πρὸς τὴν χορδὴν τόξου 20^o τῆς περιφερείας μεγ. κύκλου τῆς σφαίρας ταύτης.

476) Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις

ἡμΑ+ἡμΒ+ἡμΓ+ἡμΔ, γνωστοῦ ὅτι Α+Β+Γ+Δ=2π.

477) Ἐὰν $\alpha = 18928$, $\beta = 20842$, $\omega = 115^o\,45'\,27''$, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ χ, δι' ἣν $\chi^3 = \alpha^3$ἡμω$+\beta^3$συνω.

478) Ἐὰν ἐφα $= \frac{1}{2}$, ἐφβ $= \frac{1}{3}$, ἐφγ$=1+\sqrt{2}$

ἐφδ $= -1 + \sqrt{2}$, νὰ ὁρισθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία χ, δι' ἣν

$$\text{ἡμχ} = \frac{\text{ἡμ}\,(2\alpha+2\beta-\gamma)}{\text{ἡμ}\,(2\alpha+2\beta-\delta)}.$$

479) Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ γωνίαι ὀρθ. τριγώνου γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος διαιρεῖ αὐτὸ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

480) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις συν$(\chi+30^o)-$συν$(\chi+45^o)=$ἡμ15^o.

481) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις ἡμχ + συνχ $= \frac{1}{\sqrt{2}}$.

482) Νὰ εὑρεθῇ τὸ θετικὸν καὶ μικρότερον 90^o τόξον χ, δι' ὃ εἶναι συν $2\chi = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (συνχ − ἡμχ)

483) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις ἐφ2χ = 3ἐφχ.

484) Ὁμοίως ἡ 4ἡμχ + 3συνχ = 2.

485) Ὁμοίως ἡ συνχ + συν $(\chi + 30^o) = \frac{3}{2}$.

486) Νὰ ἀπαλειφθῶσιν οἱ χ καὶ ψ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

ἡμχ =ἡμα. ἡμγ, ἡμψ = ἡμβ ἡμγ, ἐφ $\left(\frac{\chi}{2}\right)$.ἐφ $\left(\frac{\psi}{2}\right)$= ἐφ $\left(\frac{\gamma}{2}\right)$.

487) Δεῖξαι ὅτι, ἂν μεταξὺ τῶν γωνιῶν τριγώνου ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης ἡμ²Α = ἡμ²Β + ἡμ²Γ, τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

488) Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $(AB) = 293{,}90^{\mu}$, $(A\Gamma) = 201{,}30^{\mu}$ καὶ $A = 23^{\circ}\,27'\,32''$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τμήματος τῆς ἐπὶ τὴν ΑΒ καθέτου, ἥτις διαιρεῖ τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

489) Ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς Α, κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ τριγώνου καὶ οὕτως ὥστε οὗτος καὶ τὸ τρίγωνον κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς πλευρᾶς ΑΓ, μεθ' ἧς ὁ ἄξων σχηματίζει δεδομένην γωνίαν ω. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ὑπ' αὐτοῦ γραφομένου στερεοῦ συναρτήσει τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς γωνίας ω.—Ἐφαρμογή. $\alpha = 730^{\mu}$, $\omega = 18^{\circ}$.

490) Ἐκ δύο σημείων Α καὶ Β ἀπεχόντων ἀπόστασιν α ὑψοῦνται αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἐπ' αὐτῶν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ ὁρίζονται τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ οὕτως ὥστε $(A\Gamma) = \gamma$, $(B\Delta) = \delta$. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ σημεῖον Ε τοιοῦτον ὥστε $\Gamma\widehat{E}A = 2(\Delta\widehat{E}B)$.

491) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν Υ_{α}, μ_{α} καὶ $\beta + \gamma = 2\lambda$.

492) Ἐκ τῶν πλευρῶν καὶ γωνιῶν τριγώνου νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ πλευραὶ καὶ γωνίαι τοῦ τριγώνου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν τοῦ πρώτου.

493) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον, δι' ὃ εἶναι

$$1 + \sigma\varphi\,(45^{\circ} - B) = \frac{2}{1 - \sigma\varphi\Gamma}\,,$$ εἶναι ὀρθογώνιον.

494) Τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ γωνία Β, ἡ γωνία τοῦ ὕψους ΒΔ μετὰ τῆς διαμέσου ΒΜ καὶ τὸ μῆκος τοῦ εὐθ. τμήματος ΔΜ. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

495) Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $(AB) = 107^{\mu}$, $A = 44^{\circ}\,20'\,12''$ καὶ $E = 6527$ τ. μ. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

496) Κυκλικὸς τομεὺς ΑΟΓ στρεφόμενος περὶ τὴν διάμετρον ΑΟΒ γράφει σφαιρικὸν τομέα ἴσον πρὸς τὸ τέταρτον τῆς σφαίρας, εἰς ἣν ἀνήκει. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέως.

497) Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ καὶ οὕτως ὥστε τὸ τραπέζιον ΑΒΔΕ νὰ εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ τριγώνου ΓΔΕ.

498) Νὰ ὁρισθῇ συναρτήσει τῶν πλευρῶν ὀρθ. τριγώνου ἡ γωνία τῶν διαμέσων, αἵτινες ἄγονται ἐκ τῶν ἄκρων τῆς ὑποτεινούσης.

499) Διὰ τοῦ μέσου Γ τόξου ΑΓΒ περιφερείας Ο ἄγομεν χορδὴν ΓΕ παράλληλον τῇ ἀκτῖνι ΟΑ. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία ΟΑΒ, ὅπως ἡ ΓΕ διχοτομῆται ὑπὸ τῆς ΑΒ;

500) Νὰ ἐπιλυθῇ τετράπλευρον περιγεγραμμένον περὶ κύκλον ἀκτῖνος ρ, ἔχον ἐμβαδὸν Ε καὶ δύο ἀντικειμένας γωνίας ὀρθάς.

ΤΕΛΟΣ

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Ἐν τῷ πίνακι τῆς σελ. 41 νὰ γραφῇ βέλος φερόμενον πρὸς τὰ ἄνω καὶ μεταξὺ τοῦ $\underline{+}\ \infty$ καὶ .0

Ἐν σελ. 53 καὶ στίχῳ 12 ἀντὶ $Z'Z$ γράφε $\zeta'\zeta$

» » 64 » » 28 » καὶ 300^0 » καὶ -300^0

» » 65 » » 11 » αὐτὰ » αὐτὸ

» » 65 » » 18 » αὐτὸ » αὐτὰ

» » 67 » » 18 » (προβ. $\overline{\Pi N}$) » (προβ. $\overline{\Pi_1 N}$)

» » 69 » » 13 τὸ τελευταῖον — νὰ ἀφαιρεθῇ

» » 77 » » 16 » τιμῶν ἡμ $\frac{\omega}{2}$ γράφε τιμῶν τοῦ ἡμ $\frac{\omega}{2}$

» » 78 » » 19 » $\frac{\sqrt{1+\text{ἡμ}\omega}-\sqrt{1-\text{ἡμ}\omega}}{\sqrt{+1\text{ἡμ}\omega}+\sqrt{1-\text{ἡμ}\omega}}$ γράφε

$$\frac{\sqrt{1+\text{ἡμ}\omega}-\sqrt{1-\text{ἡμ}\omega}}{\sqrt{1+\text{ἡμ}\omega}+\sqrt{1-\text{ἡμ}\omega}}$$

» » 79 » » 15 ἀνάγνωθι: Ἡ γνωστὴ ἰσότης

$$\text{ἐφ}\omega = \frac{2\ \text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{1-\text{ἐφ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

» » 80 » » 24 » τοιοῦτοι πίνακες οὕτω· γράφε: τοιοῦτοι πίνακες· οὕτω

» » 132 » » 28 » γινομένο γράφε γινομένου.

» » 135 » » 3 » λογἡμB=$\overline{1}$,66 08 γράφε λογἡμB=$\overline{1}$,66008.