ΝΙΚΟΛΑΟΥ Ε. ΝΥΣΤΕΡΑΚΗ
Καθηγητοῦ τῶν μαθηματικῶν τοῦ ἐν Ἡρακλείῳ Γυμνασίου.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΗΣ Α΄ ΤΑΞΕΩΣ ΤΩΝ ΤΕΤΡΑΤΑΞΙΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥ ΤΑΞΕΩΣ ΤΩΝ ΛΟΙΠΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

Ἀριθ. ἀδείας κυκλοφορίας $\frac{31-10-23}{637}$
Τιμᾶται μετὰ τοῦ βιβλιοσ. καὶ φόρου Ἀναγκ. Δανείου Δρ. 20.50
Τιμὴ βιβλιοσήμου . . . . » 7.90
Πρόσθετος φόρος Ἀναγκαστικοῦ Δανείου. . . . . . . » 0.80

Ἐπὶ 8 συναπτὰ ἔτη ὑπῆρξεν ἡ ΜΟΝΗ ἐγκεκριμένη.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΕΤΑΡΤΗ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΣΙΔΕΡΗ
46 - ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ - ΜΕΓΑΡΟΝ ΑΡΣΑΚΕΙΟΥ
1923

3400 : 100 100 : 4 = 25

3412 : 4

3412 = 3400 + 12 = 3412

4524 : 4 4526 : 4

100 : 25 = 4 3426 : 4 3400

3425

3450

75

500

Πότε ένας αριθμός είναι διαιρετός

...ι ἀριθμὸν ἀφη-

...ομεν ἀριθμὸν συγ-

18144

ν	Κατοικία	Αἰτία	Χρῆ	Δραχ.	Λ.	Ἀρ.	Δ

...Η ΘΕΩΡΗΤ...

...ΑΓΩΓΗ

...Ι ΕΝΝΟΙΑΙ

1. **Ποσόν.** Τὸ μῆκος ὑφάσματος ἐπιδέχεται αὔξησιν καὶ ἐλάττωσιν· ὁμοίως τὸ πλάτος αὐτοῦ· ἐν γένει·

Πᾶν ὅ,τι ἐπιδέχεται αὔξησιν καὶ ἐλάττωσιν λέγεται ποσόν.

2. **Μέτρησις. Μονάς.**—Τοῦτο τὸ ὕφασμα ἔχει μῆκος δύο πήχεων, ἄλλο τριῶν τετάρτων καὶ ἄλλο δύο καὶ ἡμίσεος πήχεων. Δηλ. τὰ διάφορα μήκη συγκρίνομεν πρὸς ἓν γνωστὸν μῆκος, τὸν πῆχυν, καὶ εὑρίσκομεν ἕκαστον πόσους πήχεις περιέχει ἢ ποῖα καὶ πόσα μέρη τοῦ πήχεως ἢ καὶ ἀπὸ τὰ δύο, ἤτοι πήχεις ὁλοκλήρους καὶ μέρη αὐτοῦ. Ἡ τοιαύτη σύγκρισις λέγεται *μέτρησις ποσοῦ*, *μονὰς* δὲ τὸ ποσὸν πρὸς ὃ γίνεται ἡ σύγκρισις, καὶ ἥτις εἶναι ὁμοειδὴς τῷ συγκρινομένῳ πρὸς αὐτὴν ποσῷ.

3. Ὅταν τὸ ποσὸν εἶναι τὸ πλῆθος πραγμάτων κεχωρισμένων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὄνομα, τότε ἓν τῶν πραγμάτων λαμβάνεται ὡς μονάς· π. χ. τρία μῆλα, δύο πρόβατα.

4. **Ἀριθμός. Ἀριθμητική.** Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως, δύο, τρία τέταρτα κτλ., λέγεται *ἀριθμός*, ἡ δὲ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς ἀσχολουμένη ἐπιστήμη *Ἀριθμητική*.

5. **Ἀριθμοὶ ἀκέραιοι.**—Ὁ ἀριθμὸς δύο πήχεις φανερώνων ὅτι τὸ μῆκος περιέχει ὁλοκλήρους ἢ ἀκεραίας μονάδας λέγεται *ἀκέραιος*.

Ὅταν λέγωμεν ἁπλῶς δύο, τρία κτλ., ἔχομεν ἀριθμὸν *ἀφῃρημένον*· ὅταν δὲ λέγωμεν δύο πήχεις κτλ., ἔχομεν ἀριθμὸν *συγκεκριμένον*.

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ

6. *Ἀρίθμησις* λέγεται κυρίως ἡ μέτρησις πλήθους. Λέγεται δὲ οὕτω καὶ τὸ μέρος τῆς Ἀριθμητικῆς ἐν ᾧ διδάσκεται α΄) ὁ σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν ὀνομάτων αὐτῶν, ἤτοι ἡ *προφορικὴ ἀρίθμησις*, β΄) ἡ διὰ συμβόλων γραφὴ αὐτῶν, ἡ *γραπτὴ ἀρίθμησις*.

Ἀρίθμησις προφορική.

7. Ἐὰν μὲ τὴν μονάδα ἢ μὲ τὸ ἓν ἑνώσωμεν ἄλλην μίαν μονάδα, σχηματίζομεν τὸν ἀριθμὸν *δύο*· ἐὰν ἑνώσωμεν καὶ ἄλλην, σχηματίζομεν τὸν *τρία* καὶ οὕτω καθεξῆς δυνάμεθα ἐπ' ἄπειρον νὰ σχηματίζωμεν νέους ἀριθμούς. Κατορθοῦμεν δὲ μὲ ὀλίγας λέξεις νὰ ὀνομάζωμεν μέγα πλῆθος ἀριθμῶν.

8. Ἐν πρώτοις σχηματίζομεν ὀλίγους ἀριθμοὺς διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς μονάδος, τοὺς ὁποίους ὀνομάζομεν κατὰ σειράν· *ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα*· ἔπειτα προσθέτομεν εἰς τὸν ἐννέα ἓν καὶ σχηματίζομεν νέον ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον θεωροῦμεν μονάδα *δευτέρας τάξεως* ὀνομάζοντες αὐτὴν *δεκάδα* ἢ *δέκα*· πρὸς διάκρισιν δὲ τὸ ἓν ὀνομάζομεν μονάδα *ἁπλῆν* ἢ *πρώτης τάξεως*. Ἔπειτα σχηματίζομεν ἄλλους ἐννέα ἀριθμοὺς διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς δεκάδος, τοὺς ὁποίους ὀνομάζομεν κατὰ σειράν·

Μία	δεκὰς	ἡ *δέκα*
Δύο	δεκάδες	» *εἴκοσι*
Τρεῖς	»	» *τριάκοντα*
Τέσσαρες	»	» *τεσσαράκοντα*
Πέντε	»	» *πεντήκοντα*
Ἕξ	»	» *ἑξήκοντα*
Ἑπτὰ	»	» *ἑβδομήκοντα*
Ὀκτὼ	»	» *ὀγδοήκοντα*
Ἐννέα	»	» *ἐνενήκοντα*

Τοὺς ἐνδιαμέσους ἀριθμοὺς σχηματίζομεν καὶ ὀνομάζομεν ἑνώνοντες μὲ ἕκαστον τῶν προηγουμένων κατὰ σειρὰν τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμοὺς ἓν, δύο κτλ. Οὕτως ἔχομεν π. χ. τεσσαράκοντα δύο. Μόνον ἀντὶ δέκα ἓν λέγομεν ἕνδεκα καὶ ἀντὶ δέκα δύο δώδεκα. Οὕτω δὲ μὲ εἴκοσι λέξεις ὀνομάζομεν τοὺς ἐνενήκοντα ἐννέα πρώτους ἀριθμούς.

9. Εἰς τὸ ἐνενήκοντα ἐννέα προσθέτομεν ἓν καὶ σχηματίζομεν μονάδα τρίτης τάξεως, τὴν *ἑκατοντάδα* ἢ *ἑκατόν*, ἐξ ἧς διὰ τῆς ἐπαναλήψεως σχηματίζομεν ἄλλους ἐννέα ἀριθμούς, εἰς οὓς δίδομεν τὰ ὀνόματα :

Μία	ἑκατοντὰς	ἢ	*ἑκατὸν*
Δύο	ἑκατοντάδες	»	*διακόσια*
Τρεῖς	»	»	*τριακόσια*
Τέσσαρες	»	»	*τετρακόσια*
Πέντε	»	»	*πεντακόσια*
Ἓξ	»	»	*ἑξακόσια*
Ἑπτὰ	»	»	*ἑπτακόσια*
Ὀκτὼ	»	»	*ὀκτακόσια*
Ἐννέα	»	»	*ἐννεακόσια.*

Τοὺς ἐνδιαμέσους ἀριθμοὺς σχηματίζομεν καὶ ὀνομάζομεν ὡς καὶ προηγουμένως εἴπομεν· π. χ. ὀκτακόσια τρία. Οὕτω δὲ μὲ εἰκοσιεννέα λέξεις ὀνομάζομεν ἐννεακοσίους ἐνενήκοντα ἀριθμούς.

10. Ὁμοίως ἑνώνοντες ἓν μὲ τὸ ἐννεακόσια ἐνενήκοντα ἐννέα σχηματίζομεν μονάδα τετάρτης τάξεως, τὴν *χιλιάδα* ἢ *χίλια*, καὶ ἐξ αὐτῆς τοὺς ἀριθμοὺς δύο χιλιάδες κτλ. μέχρι τῶν ἐννέα χιλιάδων καὶ τοὺς ἐνδιαμέσους ἀριθμούς, ὡς προηγουμένως· π. χ. δύο χιλιάδες ὀκτακόσια τρία. Οὕτω δὲ μὲ τριάκοντα μόνον λέξεις ὀνομάζομεν πάντας τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέχρι τοῦ ἐννέα χιλιάδες ἐννεακόσια ἐνενήκοντα ἐννέα συμπεριλαμβανομένου.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐξακολουθοῦμεν σχηματίζοντες μονάδας ἀνωτέρων τάξεων καὶ τοὺς ἐνδιαμέσους ἀριθμοὺς κατορθοῦντες μὲ ὀλίγας λέξεις νὰ ὀνομάζωμεν μέγα πλῆθος ἀριθμῶν.

Μονάδες	*Τάξεις*
Ἁπλῆ μονὰς	*πρώτη*
Δεκὰς	*δευτέρα*
Ἑκατοντὰς	*τρίτη*
Χιλιὰς	*τετάρτη*
Μυριὰς	*πέμπτη*
Ἑκατοντὰς χιλιάδος	*ἕκτη*
Ἑκατομμύριον	*ἑβδόμη*
Δεκὰς ἑκατομμυρίου	*ὀγδόη*
Ἑκατοντὰς ἑκατομμυρίου	*ἐνάτη*
Δισεκατομμύριον	*δεκάτη*
κτλ.	*κτλ.*

11. Δέκα μονάδες ἑκάστης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας.

12. Ἡ ἁπλῆ μονάς, ἡ χιλιάς, τὸ ἑκατομμύριον, τὸ δισεκατομμύριον κτλ. λέγονται πρωτεύουσαι μονάδες. Ἑκάστη δὲ τούτων εἶναι χιλιάκις μεγαλυτέρα τῆς ἀμέσως μικροτέρας.

13. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς περιέχῃ πρωτευούσας μονάδας ἀνωτέρας τῆς ἁπλῆς μονάδος, ἀπαγγέλλομεν αὐτὸν λέγοντες πόσας τοιαύτας μονάδας ἑκάστου εἴδους περιέχει ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς ἀνωτάτης· π. χ. τὸν ἀριθμὸν πέντε δεκάδες ἑκατομμυρίου τρία ἑκατομμύρια δύο ἑκατοντάδες χιλιάδος καὶ πεντήκοντα δύο ἀπαγγέλλομεν ὡς ἑξῆς. «*πεντήκοντα τρία ἑκατομμύρια διακόσιαι χιλιάδες πεντήκοντα δύο μονάδες ἢ ἁπλῶς πεντήκοντα δύο*».

14. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι:

Πᾶς ἀριθμὸς δύναται ν' ἀποτελῆται ἀπὸ μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων, ὀφείλει ὅμως νὰ μὴ περιέχῃ ἐξ ἑκάστης τάξεως περισσοτέρας τῶν ἐννέα.

Ἀσκήσεις.

1) Πόσας χιλιάδας ἢ πόσας ἑκατοντάδας ἢ δεκάδας περιέχει τὸ ἑκατομμύριον;

2) Πόσα χιλιόδραχμα ἀποτελοῦσιν ἓν δισεκατομμύριον δραχμῶν;

3) Ἓν ἑκατομμύριον δραχμῶν πόσα δεκάδραχμα ἢ πόσα ἑκατοντάδραχμα περιέχει;

Ἀρίθμησις γραπτή.

15. Τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμοὺς παριστάνομεν διὰ σημείων ὡς ἑξῆς.

ἕν	*δύο*	*τρία*	*τέσσαρα*	*πέντε*	*ἕξ*	*ἑπτὰ*	*ὀκτὼ*	*ἐννέα*
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*

Τὰ σημεῖα ταῦτα λέγονται *ψηφία*. Πρὸς παράστασιν δὲ τῶν ἀριθμῶν διὰ τῶν σημείων τούτων θέτομεν τὴν ἑξῆς συνθήκην.

Γράφομεν εἰς μίαν σειρὰν τὰ ψηφία τῶν διαφόρων μονάδων οὕτως, ὥστε τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων νὰ κατέχῃ τὴν πρώτην θέσιν ἐκ δεξιῶν, τὸ τῶν δεκάδων τὴν δευτέραν, τὸ τῶν ἑκατοντάδων τὴν τρίτην καὶ οὕτω καθεξῆς· ἐὰν δὲ ἐλλείπωσι μονάδες τάξεως κατωτέρας τῆς μεγαλυτέρας τοῦ ἀριθμοῦ, εἰς τὴν θέσιν αὐτῶν θέτομεν τὸ σημεῖον 0 καλούμενον μηδὲν ἢ μηδενικόν.

Τὰ ἐννέα πρῶτα ψηφία λέγονται *σημαντικά*.

Κατὰ τὴν πρηγουμένην συνθήκην ἕκαστον ψηφίον ἐν γένει γεγραμμένον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου σημαίνει μονάδας δεκάκις μείζονας τῶν τοῦ ἄλλου.

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς 2 χιλ. 3 ἑκατ. 2 δεκ. 4 μον. γράφεται,

2324

ἢ ἀντιστρόφως ὁ ἀριθμὸς

5022002

σημαίνει 5 ἑκατομ. 22 χιλιάδες καὶ 5 μονάδες.

16. Τὰ ὀνόματα τῶν πρωτευουσῶν μονάδων εὑρίσκομεν χωρίζοντες τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα τριψήφια ἐκ δεξιῶν, ὁπότε τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα δύναται νὰ ἔχῃ ἓν ἢ δύο ἢ τρία ψηφία· οὕτω χωρίζομεν πρῶτον τὰς ἁπλᾶς μονάδας, ἔπειτα τὰς χιλιάδας κτλ.

17. Ὅταν θέλωμεν νὰ γράψωμεν διὰ ψηφίων ἀριθμὸν ἀπαγγελλόμενον καὶ ἔχοντα πρωτευούσας μονάδας ἀνωτέρας τῆς ἁπλῆς, γράφομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν μεγαλυτέρων ἐξ αὐτῶν, ὅπως ἀπηγγέλθη, ἔπειτα δὲ κατὰ σειρὰν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν μικροτέρων, ἀλλὰ τούτους μὲ 3 ψηφία ἕκαστον, ἀναπληροῦντες τὰ ἐλλείποντα διὰ μηδενικῶν· π.χ. ὁ ἀριθμός 3 ἑκατομ. 2 χιλ. 25 μον. γράφεται·

3002025

18. Αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων γράφονται ἀπὸ τῆς ἁπλῆς μονάδος κατὰ σειρὰν οὕτως·

1, 10, 100, 1000, 10000 κτλ.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ γραφῇ διὰ ψηφίων ὁ ἀριθμός·
δύο ἑκατομμύρια ὀκτὼ χιλιάδες καὶ τριακόσιαι μονάδες.

2) Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς πέντε ἑκατομ. καὶ πέντε μονάδες.

3) Ν' ἀπαγγελθῶσιν οἱ ἀριθμοί·
125006, 30009, 314159265, 1000000000

4) Ὁ ἀριθμὸς 56783 πόσας δεκάδας ἔχει ἐν ὅλῳ ἀπ' ἀρχῆς μέχρι τέλους, πόσας ἐν ὅλῳ ἑκατοντάδας, πόσας χιλιάδας καὶ πόσας μυριάδας;

Συστήματα ἀριθμήσεως.

19. Εἴδομεν ὅτι ἑκάστη μονὰς εἶναι 10άκις μείζων τῆς ἀμέσως κατωτέρας. Ἠδυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς μὲ μονά-

δας κατ' ἄλλον τρόπον ἀποτελουμένας ἐκ τῆς ἀμέσως μικροτέρας· π.χ.

1, 5, 25, 125 ....

ὧν ἑκάστη εἶναι 5άκις μείζων τῆς ἀμέσως κατωτέρας, ὁπότε οἱ ἀριθμοὶ θ' ἀποτελῶνται ἀπὸ τοιαύτας μονάδας, ἐξ ἑκάστης τῶν ὁποίων δὲν θὰ ἔχωσι πλείονας τῶν τεσσάρων, θὰ ἠδυνάμεθα δὲ νὰ γράφωμεν πάντας τοὺς ἀριθμοὺς διὰ τῶν ἑξῆς μόνον ψηφίων·

1, 2, 3, 4, 0,

Θὰ εἴχομεν οὕτως ἕτερον σύστημα ἀριθμήσεως. Ὁ ἀριθμὸς πέντε λέγεται *βάσις* τοῦ συστήματος, τὸ δὲ σύστημα *πενταδικόν*. Τὸ ἐν χρήσει σύστημα ἔχον βάσιν τὸν 10 καλεῖται *δεκαδικόν*.

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀριθμὸν δοθέντος συστήματος εἰς ἀριθμὸν ἄλλου συστήματος, εὑρίσκομεν τὸ σύνολον τῶν μονάδων τῆς πρώτης τάξεως αὐτοῦ, τρέποντες τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεών του εἰς μονάδας πρώτης τάξεως καὶ εὑρίσκοντες τὸ σύνολον τῶν τοιούτων μονάδων. Κατόπιν εὑρίσκομεν πόσας μονάδας δευτέρας τάξεως τοῦ νέου συστήματος ἀποτελεῖ τὸ εὑρεθὲν σύνολον μονάδων τῆς πρώτης τάξεως καὶ πόσαι μονάδες πρώτης τάξεως ὑπολείπονται. Αἱ ὑπολειφθεῖσαι μονάδες πρώτης τάξεως ἀποτελοῦσι τὰς μονάδας τῆς πρώτης τάξεως τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ, τὸ δὲ εὑρεθὲν σύνολον μονάδων δευτέρας τάξεως, ἐὰν δὲν ὑπερβαίνῃ τὴν νέαν βάσιν ἠλαττωμένην κατὰ μονάδα, θ' ἀποτελῇ τὰς μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως αὐτοῦ. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει εὑρίσκομεν πόσας μονάδας ἐν ὅλῳ τρίτης τάξεως ἀποτελεῖ τὸ εὑρεθὲν σύνολον μονάδων δευτέρας τάξεως καὶ πόσαι μονάδες δευτέρας τάξεως ὑπολείπονται. Καὶ ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν μονάδων τῆς τρίτης τάξεως ἐργαζόμεθα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς σύνολον μονάδων τάξεώς τινος, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν βάσιν ἠλαττωμένην κατὰ μονάδα.

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς 27 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς τὸ πενταδικὸν γράφεται 102· ὁ δὲ ἀριθμὸς 213 τοῦ πενταδικοῦ παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν 58 τοῦ δεκαδικοῦ. Ὁμοίως ἠδυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἕτερα συστήματα ἀριθμήσεως, *δυαδικόν*, *τριαδικὸν* κτλ.

Ἀσκήσεις.

1) Τίνες ἀριθμοὶ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος παριστῶσι τὰς μονάδας τῶν πέντε πρώτων τάξεων τοῦ δυαδικοῦ καὶ τοῦ τριαδικοῦ συστήματος;

2) Αἱ μονάδες τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος 1, 10, 100, 1000 νὰ παρασταθῶσιν εἰς τὸ τετραδικὸν καὶ πενταδικὸν σύστημα.

3) Οἱ ἀριθμοὶ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος 3, 8, 12, 20 νὰ γραφῶσι κατὰ τὸ τριαδικὸν καὶ ὀκταδικὸν σύστημα.

4) Οἱ ἀριθμοὶ τοῦ δυαδικοῦ συστήματος 10, 101, 1001 νὰ γραφῶσι κατὰ τὸ δεκαδικόν.

Ἰσότης καὶ ἀνισότης.

Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμός, ὡς γνωρίζομεν, εἶναι πλῆθος μονάδων. Ἔστωσαν ἤδη τὰ ἑξῆς πλήθη μονάδων·

$$\left.\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right) \qquad \left.\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right) \qquad \begin{matrix}1\\1\end{matrix} \quad \left.\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right)$$

Σχηματίζομεν ζεύγη μονάδων, λαμβάνοντες ἀνὰ μίαν ἐκ τοῦ πρώτου καὶ ἐκ τοῦ δευτέρου, καὶ βλέπομεν ὅτι οὐδεμία περισσεύει οὔτε ἐκ τοῦ πρώτου, οὔτε ἐκ τοῦ δευτέρου πλήθους. Οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι. *Ἴσοι ἄρα λέγονται δύο ἀριθμοί, ὅταν ἔχωσι τὰς μονάδας αὐτῶν ἀντιστοιχούσας.* Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ σημειώσωμεν ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι, γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον $=$, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται *ἴσον* π. χ.

$$(1) \qquad 5=5$$

Ἰσότης δὲ ὀνομάζεται ἡ σχέσις δύο ἀριθμῶν ἴσων, οἵτινες λέγονται μέλη τῆς ἰσότητος, καὶ τὸ μὲν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ σημείου $=$ λέγεται *πρῶτον* μέλος, τὸ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ *δεύτερον.*

Ὅταν δύο ἀκέραιοι εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε, ἐὰν σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν ζεύγη μονάδων, ὡς προηγουμένως, νὰ περισσεύωσι μονάδες ἐκ τοῦ ἑνὸς πλήθους, λέγονται *ἄνισοι.* Διὰ νὰ σημειώσωμεν δ' ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι, γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον $<$, οὕτως, ὥστε ἡ κοιλότης τοῦ σημείου τούτου ν' ἀντικρύζῃ τὸν μεγαλύτερον ἀριθμόν· π. χ. $8 > 3$

Ἐκ τῶν ὁρισμῶν τούτων ἕπονται προφανῶς αἱ ἑξῆς ἰδιότητες.

Τῆς μὲν ἰσότητος·

α´) Οἱ τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ ἴσοι, εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλους ἴσοι· διότι ἀνὰ δύο αἱ μονάδες αὐτῶν ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τὴν αὐτὴν μονάδα τοῦ τρίτου.

β´) Ἐὰν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν ἀνὰ μίαν μονάδα, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι· καὶ γενικῶς· ἐὰν εἰς ἴσους προσθέσωμεν ἴσους, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι, διότι θὰ ἔχωσι πάλιν τὰς μονάδας αὐτῶν ἀντιστοιχούσας.

Ὁμοίως·

Ἐὰν ἀπὸ ἴσους ἀριθμοὺς ἀφαιρέσωμεν (ἀποκόψωμεν) ἴσους, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι.

Ἑπομένως·

γ′) Τὰ διπλάσια καὶ ἐν γένει τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια ἴσων ἀριθμῶν εἶναι ἴσοι ἀριθμοί.

Τῆς δὲ ἀνισότητος·

α′) Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προστεθῶσιν ἴσοι, οἱ ἀριθμοὶ μένουσιν ὁμοίως ἄνισοι.

β′) Τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια ἀνίσων εἶναι ὁμοίως ἄνισοι ἀριθμοί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β′

ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

20. Ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ἐκτελοῦμεν ἐργασίας καλουμένας *πράξεις*, ὧν αἱ θεμελιωδέστεραι εἶναι ἡ *πρόσθεσις*, ἡ *ἀφαίρεσις*, ὁ *πολλαπλασιασμὸς* καὶ ἡ *διαίρεσις*.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

Ὁρισμοί.

21. *Ἡ πρόσθεσις εἶναι πρᾶξις, δι᾽ ἧς ἑνώνομεν τὰς μονάδας δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν καὶ σχηματίζομεν* **ἕνα μόνον** *ἀριθμόν.*

Τὸ ἐξαγόμενον ὀνομάζεται *ἄθροισμα*, οἱ δὲ προστιθέμενοι *προσθετέοι.*

Σημεῖον τῆς προσθέσεως εἶναι + ἀπαγγελλόμενον *σύν*· π. χ. 2 + 3 δηλοῖ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3.

Ἐὰν οἱ προσθετέοι εἶναι συγκεκριμένοι, πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς· π. χ. 5 μῆλα καὶ 3 μῆλα.

Ἰδιότητες.

22. *Καθ᾽ οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ἑνώσωμεν πλῆθος μονάδων, προκύπτει ὁ αὐτὸς ἀριθμός.*

Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἀφ᾽ ἑαυτῆς φανερά. Πᾶσα δὲ τοιαύτη πρότασις καλεῖται *ἀξίωμα.*

Ἐκ τοῦ προηγουμένου ἀξιώματος ἕπεται ἡ ἑπομένη θεμελιώδης ἰδιότης τῆς προσθέσεως·

Καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν δεδομένους ἀριθμούς, εὑρίσκομεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα.

Ἡ ἰδιότης αὕτη καλεῖται ἀδιαφορία ὡς πρὸς τὴν τάξιν τῆς προσθέσεως.

23. Ἐκ τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος προκύπτουσιν αἱ ἑπόμεναι.

α') Ἔστω τὸ ἄθροισμα

$$2+3+4.$$

Τοὺς ἀριθμοὺς τούτους δύναμαι νὰ προσθέσω καθ' οἱανδήποτε τάξιν· π. χ. προσθέτω $2+4$ καὶ εὑρίσκω 6, εἰς τὸν ὁποῖον ἔπειτα θὰ ἔχω νὰ προσθέσω 3· ἤτοι

$$(1) \qquad 2+3+4=6+3, \qquad \text{ἄρα·}$$

Εἰς πᾶν ἄθροισμα δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν προσθετέους τινὰς διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

Ἡ σχέσις (1) γράφεται καὶ οὕτω,

$$2+3+4=(2+4)+3.$$

Ἐπειδὴ δὲ οἱ προσθετέοι δύνανται νὰ εἶναι οἱοιδήποτε ἀριθμοί, παριστῶμεν αὐτοὺς διὰ γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου πρὸς συντομίαν καὶ πρὸς γενίκευσιν τῆς σχέσεως (1) καὶ ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$(2) \qquad \alpha+\beta+\gamma=(\alpha+\gamma)+\beta.$$

β') Ἡ σχέσις (2) δηλοῖ συγχρόνως ὅτι

Δυνάμεθα εἰς πᾶν ἄθροισμα ν' ἀντικαταστήσωμεν προσθετέον δι' ἄλλων ἐχόντων αὐτὸν ἄθροισμα.

Ὁμοίως ἐκ τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος ἐξαρτῶνται καὶ αἱ ἑπόμεναι καταφανεῖς ἄλλως.

γ') *Ἀριθμὸς προστίθεται εἰς ἄθροισμα, ἐὰν προστεθῇ εἰς ἕνα τῶν προσθετέων* ἢ

$$(\alpha+\beta)+\gamma=(\alpha+\gamma)+\beta.$$

δ') *Ἄθροισμα ἀθροισμάτων εὑρίσκεται, ἐὰν προσθέσωμεν πάντας τοὺς προσθετέους αὐτῶν*· ἢ

$$(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)=\alpha+\beta+\gamma+\delta.$$

24. Πᾶσαι αἱ προηγούμεναι σχέσεις παριστῶσιν ὅτι δύο ἴσοι ἀριθμοί, καίπερ διαφόρου μορφῆς ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν αὐτῶν μονάδων.

Ἐκτέλεσις τῆς προσθέσεως.

25, Τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν, ἰδίως λαμβανομένων ἀνὰ δύο.

ὁμοίως τῶν ἐχόντων ἓν μόνον σημαντικὸν ψηφίον ἀπομνημονεύομεν τὰ ἀθροίσματα· ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν ἐν γένει ἐκτελοῦμεν ἰδίας τινὰς πράξεις προφορικῶς ἢ γραπτῶς, δι' ὧν ταχέως εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα.

Περὶ τῆς προφορικῆς προσθέσεως ἴδε Πρακτικήν μου Ἀριθμητικήν. ἐνθάδε θὰ εἴπωμεν περὶ τῆς γραπτῆς.

29. Ζητεῖται τὸ ἄθροισμα :

$$8329+628+1897.$$

Κατὰ τὰς ἰδιότητας τῆς προσθέσεως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα προσθέτοντες χωριστὰ τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τῶν προσθετέων.

Διότι

$$\begin{aligned} 8329+628+1897 &= (8000+300+20+9)+ \\ &+(600+20+8)+(1000+800+90+7)= \\ &=8000+300+20+9+600+20+8+ \\ &+1000+800+90+7= \\ &(8000+1000)+(300+600+800)+ \\ &+(20+20+90)+(9+8+7)= \end{aligned}$$

$$=\underset{\delta' \text{ τάξεως}}{(8+1)}+\underset{\gamma' \text{ τάξεως}}{(3+6+8)}+\underset{\beta' \text{ τάξεως}}{(2+2+9)}+\underset{\alpha' \text{ τάξεως}}{(9+8+7}$$

Διὰ τοῦτο γράφομεν τοὺς προσθετέους ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r} 8329 \\ 628 \\ 1897 \\ \hline 10854 \end{array}$$

Προσθέτομεν ἔπειτα τὰς ἁπλᾶς μονάδας καὶ εὑρίσκομεν 24. γράφομεν 4 ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ εἰς τὴν στήλην τῶν ἁπλῶν μονάδων· ἔπειτα προσθέτομεν τὰς δεκάδας τῶν προσθετέων καὶ τὰς 2 δεκάδας τοῦ 24 καὶ εὑρίσκομεν 15 δεκάδας· γράφομεν 5 ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρι τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως.

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν ἠρχίζομεν τὴν πρόσθεσιν ἐξ ἀριστερῶν, θὰ ἤμεθα πολλάκις ἠναγκασμένοι νὰ μεταβάλλωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων μιᾶς στήλης, ὅταν τοιαύτας μονάδας περιέχῃ τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ἑπομένως νὰ μεταβάλλωμεν ψηφίον τοῦ ἀθροίσματος ἅπαξ εὑρεθέν.

27. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ κανών.

Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀκεραίους, γράφομεν αὐτοὺς οὕτως ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ.

ἄγομεν εἶτα γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν προσθέτομεν τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης, γράφοντες ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ καὶ ὑπὸ τὴν γραμμὴν μόνον τὰς ἁπλᾶς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος, τὰς δὲ δεκάδας προσθέτομεν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρι τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα γράφομεν ὁλόκληρον.

Βάσανος.

28. *Βάσανος πράξεώς τινος λέγεται ἡ δοκιμὴ ἡ γινομένη πρὸς βεβαίωσιν ὅτι δὲν ἐγένετο λάθος.*

Κατὰ τὴν θεμελιώδη δὲ ἰδιότητα τῆς προσθέσεως ἡ βάσανος τῆς πράξεως ταύτης δύναται νὰ γίνῃ, ἐὰν προσθέσωμεν τοὺς προσθετέους κατ' ἄλλην τάξιν· ἐὰν τότε εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, τοῦτο εἶνε ἔνδειξις τοῦ ὀρθοῦ τῆς πράξεως.

Ἀσκήσεις.

1) Εἴδομεν τὸν λόγον, δι' ὃν μετὰ τὴν διάταξιν τῶν προσθετέων κατὰ τὸν κανόνα 27 ἡ πρόσθεσις ἄρχεται ἐκ δεξιῶν. Πότε μᾶς εἶναι ἀδιάφορον, ἀπὸ οἱασδήποτε στήλης καὶ ἂν ἀρχίσωμεν τὴν πρόσθεσιν;

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα·

$$5863+887+156897$$

ἄνευ τῆς διατάξεως τῶν προσθετέων κατὰ τὸν κανόνα 27.

3) Τί ποσὸν ἐν ὅλῳ ἀποτελοῦσιν 26 δραχ. 36 δεκάδραχμα, 37 ἑκατοντάδραχμα καὶ 19 χιλιόδραχμα;

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

Ὁρισμοί.

29. *Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς ἐλαττοῦμεν ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας ὅσας ἔχει ἄλλος δοθείς.*

Ὁ ἐλαττούμενος λέγεται *μειωτέος*, ὁ ἄλλος *ἀφαιρετέος* καὶ τὸ ἐξαγόμενον *διαφορά*. Σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι — ἀπαγγελλόμενον *πλήν*· γράφομεν π.χ. $8-5=3$. Ἡ διαφορὰ δεικνύει πόσας μονάδας ἔχει περισσοτέρας ὁ μειωτέος ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον. Ἂν λοιπὸν προσθέσωμεν τὴν διαφορὰν εἰς τὸν ἀφαιρετέον, θὰ εὕρωμεν τὸν μειωτέον.

Ὁ μειωτέος εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς, ἄρα· *Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις ἐν ᾗ δεδομένων δύο ἀριθμῶν ζητεῖται τρίτος, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν δεύτερον παράγει τὸν πρῶτον.*

ΣΗΜ. Καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι συγκεκριμένοι, πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς.

Ἰδιότητες.

30. α΄) Ἔστω $\alpha-\beta=\delta$· ὅθεν $\alpha=\beta+\delta$· εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς 2ας ἰσότητος προστίθεμεν γ καὶ ἔχομεν·

$$\alpha+\gamma=(\beta+\delta)+\gamma \text{ ἢ (§ 22)}$$
$$\alpha+\gamma=(\beta+\gamma)+\delta \text{· ἄρα (§ 29)}$$
$$(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)=\delta \text{· ὅθεν·}$$

Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ὅταν εἰς ἀμφοτέρους προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

β΄) Παρατηροῦμεν ὅτι

$$(\alpha+\beta)-\gamma=(\alpha-\gamma)+\beta \text{ διότι}$$
$$\text{(§ 22) } [(\alpha-\gamma)+\beta]+\gamma=(\alpha+\beta) \text{· ἄρα·}$$

Ἀριθμὸς ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἀθροίσματος, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἐξ ἑνὸς προσθετέου.

γ΄) Εἶναι φανερὸν ὅτι·

$$\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\beta)-\gamma$$

Διότι, ἂν καὶ εἰς τὸν μειωτέον $\alpha-\beta$ καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον γ προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν β, θὰ ἔχωμεν·

$$(\alpha-\beta)-\gamma=[(\alpha-\beta)+\beta]-(\beta+\gamma)=\alpha-(\beta+\gamma) \text{· ἤτοι·}$$

Ἄθροισμα ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἀριθμοῦ, ἐὰν ἀφαιρεθῶσι κατὰ σειρὰν πάντες οἱ προσθετέοι.

δ΄) Ὁμοίως παρατηροῦμεν εὐκόλως ὅτι·

$$\alpha-(\beta-\gamma)=(\alpha+\gamma)-\beta$$

Διότι $\alpha-(\beta-\gamma)=(\alpha+\gamma)-[(\beta-\gamma)+\gamma]=(\alpha+\gamma)-\beta$ ἤτοι·

Διαφορὰ ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἀριθμοῦ, ἐὰν εἰς αὐτὸν προστεθῇ ὁ ἀφαιρετέος τῆς διαφορᾶς καὶ ἀφαιρεθῇ εἶτα ὁ μειωτέος αὐτῆς.

ΣΗΜ. Ὁσάκις θέλομεν νὰ παραστήσωμεν ὡς ἕνα ἀριθμὸν σημείωσιν πράξεων, κλείομεν αὐτὴν ἐν παρενθέσει.

Παρατ. Ὡς βλέπομεν, αἱ ἰδιότητες αὗται πηγάζουσιν ἐκ τῶν τῆς προσθέσεως.

Ἐκτέλεσις τῆς ἀφαιρέσεως

31. Ὅταν ἀδυνατῶμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν ἀπὸ μνήμης (ἴδε Πρακτικὴν Ἀριθμητικήν μου), καταφεύγομεν εἰς τὴν γραπτὴν πρᾶξιν, τῆς ὁποίας ὁ κανὼν στηρίζεται ἐπὶ τῶν προηγουμένων ἰδιοτήτων. Ζητεῖται π. χ. ἡ διαφορὰ 8974—3843.

$$8974-3843=8974-(3000+800+40+3)=$$
$$=[(8974-3000)-800]-40]-3=$$
$$=[(8000+900+70+4)-3000]-800]-40]-3=$$
$$=[(8000-3000+900+70+4]-800]-40]-3=$$
$$=[(8000-3000)+(900-800)+70+4]-40]-3=$$
$$=[(8000-3000)+(900-800)+(70-40)+4]-3=$$
$$=[(8000-3000)+(900-800)+(70-40)+(4-3)=$$

μον. δ' τάξ. μον. γ' τάξ. μον. β' τάξ. μον. α' τάξ.

$$=(8-3)+(9-8)+(7-4)+(4-3).$$

Ἡ πρᾶξις γίνεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 8974 \\ 3843 \\ \hline 5131 \end{array}$$ Ἤτοι·

Γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ. Ἄγομεν εἶτα γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου τοῦ μειωτέου, ἐὰν δὲ ψηφίον τι τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀντιστοίχου τοῦ μειωτέου, αὐξάνομεν τὸ τοῦ μειωτέου κατὰ 10, τὸ δὲ ψηφίον τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως τοῦ ἀφαιρετέου κατὰ 1 (§ 30 α') καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω, μέχρις οὗ εὕρωμεν πάντα τὰ ψηφία τῆς διαφορᾶς.

ΣΗΜ. Ἡ ἀφαίρεσις ἄρχεται ἐκ δεξιῶν, δι' ὃν λόγον καὶ ἡ πρόσθεσις.

Βάσανος.

32. Προσθέτομεν τὴν διαφορὰν εἰς τὸν ἀφαιρετέον· ἐὰν εὕρωμεν τὸν μειωτέον, τοῦτο εἶναι ἔνδειξις τοῦ ὀρθοῦ τῆς πράξεως.

Ἀσκήσεις.

1) Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι 128, ὁ δὲ μικρότερος 325. Ποῖος ὁ μεγαλύτερος ;

2) Ἵππος ἀγορασθεὶς ἀντὶ 776 δραχ. ἐπωλήθη ἀντὶ 856 δρ.

Πόσον τὸ κέρδος καὶ πόσον ἔπρεπε νὰ πωληθῇ, διὰ νὰ φέρῃ κέρδος 325 δρ. ;

3) Ποῖος εἶναι ὁ μέγιστος ἀριθμός, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν 57 καθιστᾷ αὐτὸν οὐχὶ μείζονα τοῦ 258 ;

4) Τί γίνεται ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, ὅταν ὁ μὲν μειωτέος ἐλαττωθῇ κατὰ 25, ὁ δὲ ἀφαιρετέος αὐξηθῇ κατὰ 37, τῆς ἀφαιρέσεως οὔσης δυνατῆς ;

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ 5

Ὁρισμοί.

33. *Πολλαπλασιασμὸς λέγεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς ἀριθμὸν ἐπαναλαμβάνομεν πολλάκις.*

Ὁ ἐπαναλαμβανόμενος ἀριθμὸς λέγεται *πολλαπλασιαστέος*, ὁ δὲ δεικνύων ποσάκις πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ *πολλαπλασιαστὴς* καὶ τὸ ἐξαγόμενον *γινόμενον*.

Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς ὁμοῦ λέγονται *παράγοντες* τοῦ γινομένου. Σημεῖον δὲ τῆς πράξεως εἶναι × ἢ · ἀπαγγελλόμενον *ἐπί* π. χ.

$$3\times7=21 \quad \text{ἢ} \quad 3 . 7=21.$$

Προβλ. Πόσον τιμῶνται 7 πήχεις ὑφ. πρὸς 3 δραχ. τὸν πῆχυν ; *Λύσις.* Πρέπει τὰς 3 δρχ. νὰ ἐπαναλάβωμεν 7κις· ἄρα τὸ ζητούμενον εἶναι 3×7=21 δραχ.

ΣΗΜ. Ὡς βλέπομεν, ἐπὶ συγκεκριμένων ἀριθμῶν τὸ γινόμενον εἶναι *ὁμοειδὲς* τῷ πολλαπλασιαστέῳ, ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς ἐν τῇ πράξει λαμβάνεται ὡς ἀφῃρημένος.

Πολλαπλασιασμὸς μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

34. Τὰ γινόμενα μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον ἀποστηθίζομεν. Τὰ γινόμενα ταῦτα περιέχονται εἰς τὸν ἑπόμενον πίνακα, *Πυθαγόρειον* καλούμενον, ἐκ τοῦ ἐπινοήσαντος αὐτὸν Πυθαγόρα τὸν 6ον π. Χ. αἰῶνα.

Ἡ α' σειρὰ περιέχει τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμούς, ἡ β' τὰ διπλάσια αὐτῶν, ἡ γ' τὰ τριπλάσια κτλ. Εὑρίσκομεν δὲ τὸ γινόμενον δύο μονοψηφίων π. χ. 7×8 ζητοῦντες τὸν ἀριθμόν, ὅστις εὑρίσκεται εἰς τὴν σειρὰν ἥτις ἄρχεται διὰ τοῦ 7, ἤτοι τοῦ ἑνὸς αὐτῶν, καὶ εἰς τὴν στήλην ἥτις ἄρχεται διὰ τοῦ ἑτέρου 8· ἐκεῖ εὑρίσκομεν 56.

ΣΗΜ. Ἔχομεν 5×1=5 καὶ γενικῶς $\alpha\times1=\alpha$.

Ἀσκήσεις.

1) Πόσοι ἀριθμοὶ περιέχονται εἰς τὸν ἑπόμενον πίνακα ;
2) Ἐὰν εἰς τὸν πίνακα τοῦτον φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, χωρί-

Α

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Β

ζεται εἰς δύο τμήματα. Ποῖον τούτων περιλαμβάνει πάντα τὰ γινόμενα τῶν μονοψηφίων καὶ πῶς τὰ εὑρίσκομεν ἐξ αὐτοῦ ;

Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

35. Ζητεῖται τὸ γινόμενον 967×3. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θὰ ἔχωμεν·

μον. γ' τάξ. μον. β' τάξ.

$$967 \times 3 = 967 + 967 + 967 = (9+9+9) + (6+6+6) +$$

μον α' τάξ. μον. γ' τάξ. μον. β' τάξ. μον. α' τάξ.

$$(7+7+7) = (9 \times 3) + (6 \times 3) + (7 \times 3).$$

Τὴν πρᾶξιν διατάσσομεν ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 967 \\ 3 \\ \hline 2901 \end{array}$$

Ὅθεν ἕπεται ὅτι·

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἐπὶ μονοψήφιον, πολλαπλασιάζομεν ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, γράφοντες μόνον τὰς μονάδας τῶν μερικῶν γινομένων καὶ κρατοῦντες τὰς δεκάδας.

ΣΗΜ. Περὶ τοῦ προφορικοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἰδὲ Πρακτικὴν Ἀριθμητικήν μου.

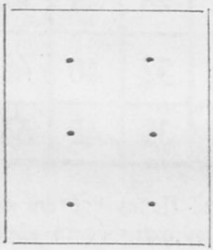
Ἀσκήσεις.

1) Πόσαι ἡμέραι παρῆλθον ἀπὸ τῆς 1ης Φεβρουαρίου 1908 μέχρι 1ης Φεβρουαρίου 1919;

2) Ὁ ἦχος ἐν τῷ ἀέρι διατρέχει 340 μέτρα εἰς 1 δευτερόλεπτον. Πόσον ἀπέχει ἀφ' ἡμῶν πυροβόλον, ἐὰν παρῆλθον 9 δευτερόλεπτα ἀπὸ τῆς λάμψεως μέχρι τοῦ κρότου αὐτοῦ;

Τάξις τῶν παραγόντων.

36. Ἔστω τὸ γινόμενον 2×3, σημαῖνον ὅτι ὁ 2 ἐπαναλαμβάνεται τρίς. Ἐὰν τὰς μονάδας παραστήσωμεν διὰ στιγμῶν, ὁ 2 θὰ παρασταθῇ διὰ τῆς σειρᾶς • • ἣν ἐπαναλαμβάνομεν τρὶς ὡς ἑξῆς·



ἔχομεν δὲ τότε 3 σειρὰς ἐκ δύο στιγμῶν ἑκάστην, ἢ δύο στήλας ἐκ 3 στιγμῶν, ἤτοι 2×3=3×2, καὶ γενικῶς α×β=β×α· ἄρα·

Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος γίνῃ πολλαπλασιαστὴς καὶ τἀνάπαλιν.

Κατὰ ταῦτα 3 γραμματόσημα 2 λεπτῶν ἰσοδυναμοῦσι μὲ 2 γραμματόσημα 3 λεπτῶν.

Πολλαπλασιασμὸς ἀθροισμάτων.

37. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν 33 ἔχομεν·

$$(2+3)\times2=2+3+2+3=2\times2+3\times2$$

καὶ γενικῶς·

$$(\alpha+\beta)\times\gamma=\alpha\times\gamma+\beta\times\gamma \text{ ἤτοι·}$$

Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν οἱ προσθετέοι πολλαπλασιασθῶσι χωριστὰ καὶ προστεθῶσι τὰ μερικὰ γινόμενα. Ἡ ἰδιότης αὕτη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καλεῖται *ἐπιμεριστική*.

38. Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων 36 καὶ 37 ἕπεται ὅτι.

$\alpha\times(\beta+\gamma)=(\beta+\gamma)\times\alpha=\alpha\times\beta+\alpha\times\gamma$· ἤτοι·

Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον προσθετέον καὶ προστεθῶσι τὰ μερικὰ γινόμενα.

39. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι·

$$(\alpha+\beta)\times(\gamma+\delta)=(\alpha+\beta)\times\gamma+(\alpha+\beta)\times\delta=$$
$$\alpha\times\gamma+\beta\times\gamma+\alpha\times\delta+\beta\times\delta\text{· ἤτοι·}$$

Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἕτερον ἄθροισμα, ἐὰν ἕκαστος προσθετέος τοῦ α' πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον προσθετέον τοῦ β' καὶ προστεθῶσι τὰ μερικὰ γινόμενα πάντα.

Παράγοντες ἔχοντες εἰς τὸ τέλος μηδενικά.

40. Τὸ γινόμενον 560×3 δύναται νὰ εὑρεθῇ διὰ τῆς ἐπομένης πράξεως τῆς προσθέσεως.

$$\begin{array}{r} 560 \\ 560 \\ 560 \\ \hline 1680 \end{array}$$

Ἐπειδὴ δὲ 168=56×3, ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν 56×3 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου τούτου θέσωμεν ἓν μηδενικόν.

Τὸ αὐτὸ δυνάμεθα νὰ πράξωμεν καὶ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἴσου γινομένου 3×560.

Ζητήσωμεν ἤδη τὸ γινόμενον 70×500. Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν 70×5 θέτοντες δεξιὰ τοῦ γινομένου 2 μηδενικά, ἀλλὰ πρὸς εὕρεσιν τοῦ 70×5 πολλαπλασιάζομεν 7×5 θέτοντες δεξιὰ τοῦ γινομένου ἓν μηδενικόν· ὥστε πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὅλου γινομένου δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν 7×5 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου 35 νὰ θέσωμεν τρία μηδενικά, ὁπότε εὑρίσκομεν 35000·

ΣΗΜ. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000. . . . , ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν δεξιὰ αὐτοῦ τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής.

Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ πολυψήφιον.

41. Ζητεῖται 5863×268· τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ τὸ

$$5863\times(8+60+200)$$

ἢ μὲ τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἑπομένης προσθέσεως·

$$\begin{array}{r} 46904 \\ 351780 \\ 1172600 \\ \hline 1571284 \end{array}$$

ἐν ᾗ προσθετέοι εἶναι τὰ μερικὰ γινόμενα. Ἐπειδὴ δὲ τὰ μηδενικὰ εἰς ἃ λήγουσι τὸ β´ καὶ γ´ μερικὸν γινόμενον, δύνανται νὰ παραλειφθῶσι διὰ τὴν πρόσθεσιν, ἡ ὅλη πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 5863 \\ 268 \\ \hline 46904 \\ 35178 \\ 11726 \\ \hline 1571284 \end{array}$$

Ὅθεν ἕπεται ὁ κανών.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν οἱονδήποτε ἐπὶ πολυψήφιον, γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐφ᾽ ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν· τὰ δὲ μερικὰ γινόμενα γράφομεν οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ἑκάστου ψηφίον νὰ κεῖται ὑπὸ τὸ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἐφ᾽ ὃ πολλαπλασιάζομεν, καὶ τέλος προσθέτομεν ταῦτα τὰ μερικὰ γινόμενα.

Βάσανος.

42. Ἐκτελοῦμεν ἐκ νέου τὸν πολλαπλασιασμόν, ἀλλὰ κατ᾽ ἄλλην τάξιν, δηλ. θέτοντες τὸν πολλαπλασιαστέον πολλαπλασιαστὴν καὶ τἀνάπαλιν· ἐὰν εὕρωμεν τὸ αὐτὸ γινόμενον, τοῦτο εἶναι ἔνδειξις τοῦ ὀρθοῦ τῆς πράξεως.

Χρῆσις

43. Χρῆσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γίνεται ὁσάκις πρόκειται νὰ γίνῃ ἐπανάληψις ἀριθμοῦ· π.χ. ὅταν, γνωρίζοντες τὴν ἀξίαν τῆς μονάδος ποσοῦ, ζητῶμεν τὴν ἀξίαν πολλῶν μονάδων τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ, ὅπως συμβαίνει εἰς τὸ πρόβλημα·

Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 4 δραχ. πόσον τιμῶνται οἱ 12 πήχεις;

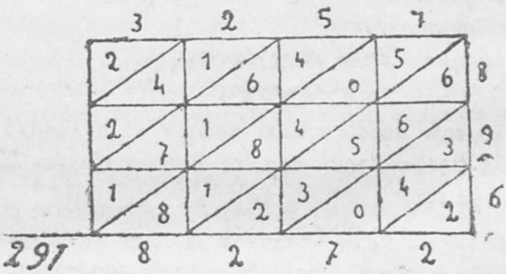
Ἀσκήσεις.

1) Δύο πόλεις Α καὶ Β ἀπέχουσιν ἀλλήλων 222 χιλιόμετρα· ἀναχωροῦσι δὲ ἐξ αὐτῶν συγχρόνως δύο ἁμαξοστοιχίαι διευθυνόμεναι ἡ μὲν ἐκ τῆς Α πρὸς τὴν Β. μὲ ταχύτητα 25 χιλμ. τὴν ὥραν, ἡ δὲ ἐκ τῆς Β πρὸς τὴν Α με ταχύτητα 36 χιλμ. Πόσον θ' ἀπέχωσιν ἀλλήλων αἱ ἁμαξοστοιχίαι μετὰ 4 ὥρας;

2) Ἔμπορος ἠγόρασε 45875 ὀκάδας σίτου πρὸς 42 λεπτὰ τὴν ὀκάν, ἐξ ὧν ἐπώλησε κατ' ἀποκοπὴν 6000 ὀκάδας ἀντὶ 3550 δρ. Ἐὰν ἑκάστην τῶν λοιπῶν ὀκάδων πωλήσῃ πρὸς 40 λεπτά, θὰ κερδίσῃ ἢ θά ζημιωθῇ καὶ πόσον;

3) Ν' ἀποδειχθῇ τὸ ὀρθὸν τῆς ἑπομένης διατάξεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καθ' ἣν εἰς τὰ μερικὰ γινόμενα τῶν ψηφίων δὲν φυλάττομεν κρατούμενα.— Ζητεῖται π.χ. τὸ γινόμενον 3257×896.

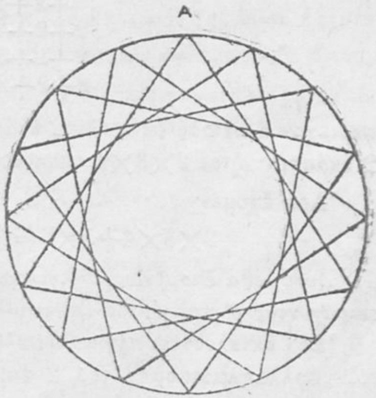
Διάταξις τῆς πράξεως.



Τὸ ὁλικὸν γινόμενον εὑρίσκομεν προσθέτοντες τοὺς ἐν ἑκάστῃ διαγωνίῳ ζώνῃ ἀριθμούς.

Τὴν διάταξιν ταύτην μετεχειρίζοντο οἱ Ἰνδοὶ καὶ οἱ Ἄραβες.

4) Ἐὰν περιφέρειαν κύκλου διαιρέσωμεν εἰς 16 μέρη καὶ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἀνὰ 6 διὰ χορδῶν ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Α. π. χ. καὶ λάβωμεν 16 τοιαύτας χορδάς, θὰ ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ Α.



Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

44. Διὰ νὰ εὕρωμεν μὲ πόσα λεπτὰ ἰσοδυναμοῦσι 3 εἰκοσάδραχμα, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς· εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι 3 εἰκοσάδραχμα ἰσοδυναμοῦσι μὲ $20\times3=60$ δρχ. καὶ ἔπειτα ὅτι 60 δρχ. ἰσοδυναμοῦσι μὲ $60\times100=6000$ λεπτά.

Τὴν πρᾶξιν σημειοῦμεν οὕτως·

$$20\times3\times100$$

καὶ τὸ ἐξαγόμενον καλοῦμεν γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τούτων. Γενικῶς.

Καλοῦμεν γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν τὸ ἐξαγόμενον, ὅπερ εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν δεύτερον, τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον κτλ..., μέχρις οὗ λάβωμεν καὶ τὸν τελευταῖον παράγοντα.

45. *Θεώρημα.* Ἔστω τὸ γινόμενον·

$$2\times3\times4\times5\times6$$

Πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ πρέπει πρῶτον νὰ πολλαπλασιάσωμεν 2×3· ἀλλὰ $2\times3=3\times2$· ἄρα τὸ δοθὲν γινόμενον δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς·

$$3\times2\times4\times5\times6 \qquad (2)$$

Δυνάμεθα λοιπὸν ν' ἀνταλλάξωμεν τοὺς παράγοντας α' καὶ β'.

Τὸ γινόμενον $2\times3\times4$ κατὰ τὸν ὁρισμὸν 44 σημαίνει τὸ ἑξῆς ἄθροισμα·

$$\begin{array}{l} +2+2+ \\ 2+2+2+ \\ 2+2+2+ \\ 2+2+2) \end{array}$$

περιέχον 4 σειρὰς ἐκ τριῶν 2 ἑκάστην ἢ 3 στήλας ἐκ τεσσάρων 2 ἑκάστην· ἤτοι $2\times3\times4=2\times4\times3$.

Ἄρα ἔχομεν·

$$2\times3\times4+5\times6=2\times4\times3\times5\times6$$

Δυνάμεθα ἐπομένως τοῦ γινομένου (1) *ν' ἀνταλλάξωμεν τοὺς παράγοντας β' καὶ γ'.*

Ἐὰν ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμὸν (1) περιορισθῶμεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ 2 ἐπὶ 3, θὰ ἔχωμεν τὸ γινόμενον

$6\times4\times5\times6$, ὅπερ ἰσοῦται, ὡς ἐδείχθη, τῷ $6\times5\times4\times6$· ἤτοι :

$$2\times3\times4\times5\times6=2\times3\times5\times4\times6 \text{· ἄρα·}$$

Δυνάμεθα ν' ἀνταλλάξωμεν καὶ τοὺς παράγοντας γ' καὶ δ' τοῦ δοθέντος γινομένου καὶ ἐν γένει δύο γειτονικοὺς παράγοντας.

Ἀλλ' ὅταν δυνάμεθα ἕνα παράγοντα οἱονδήποτε ν' ἀνταλλάξωμεν μὲ τὸν προηγούμενον ἢ ἑπόμενον, εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς νὰ δυνάμεθα νὰ τῷ δώσωμεν οἱανδήποτε θέλομεν θέσιν· π. χ. θέλομεν εἰς τὸ δοθὲν γινόμενον νὰ μεταθέσωμεν τὸν 5 εἰς τὴν ἀρχήν· πρὸς τοῦτο ἀνταλλάσσομεν αὐτὸν μὲ τὸν 4 καὶ ἔχομεν·

$$2\times3\times5\times4\times6,$$

ἔπειτα μὲ τὸν 3·

$$2\times5\times3\times4\times6$$

καὶ τὸ τέλος μὲ τὸν 2·

$$5\times2\times3\times4\times6 \qquad \text{ἄρα·}$$

Γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμός.

Οὕτως ἀποδεικνύεται γενικῶς ἡ ἀδιαφορία ὡς πρὸς τὴν τάξιν τῶν παραγόντων.

ΣΗΜ. Αἱ προτάσεις, αἵτινες ἔχουσιν ἀνάγκην συλλογισμοῦ ὅπως ἡ ἀνωτέρω, διὰ νὰ φανῇ ἡ ἀλήθεια, καλοῦνται *θεωρήματα*. Τοιαῦται εἶναι π. χ. αἱ προτάσεις 36,37,38. Ὁ δὲ συλλογισμὸς οὗτος λέγεται *ἀπόδειξις*.

46. Ἐκ τῆς ἀδιαφορίας ὡς πρὸς τὴν τάξιν τῶν παραγόντων ἕπονται αἱ ἑξῆς ἰδιότητες·

α') $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta=\alpha\times\varepsilon\times\delta$, ἔνθα $\varepsilon=\beta\times\gamma$, διότι ἔχομεν·

$\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta=\beta\times\gamma\times\alpha\times\delta=\varepsilon\times\alpha\times\delta=\alpha\times\varepsilon\times\delta$· ἤτοι·

Δυνάμεθα ἐν γινομένῳ ν' ἀντικαταστήσωμεν παράγοντάς τινας διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν ἢ παράγοντά τινα ν' ἀντικαταστήσωμεν δι' ἄλλων, ἐχόντων αὐτὸν γινόμενον.

β' $(\alpha\times\beta\times\gamma)\times\delta=\alpha\times(\beta\times\delta)\times\gamma$

Διότι

$(\alpha\times\beta\times\gamma)\times\delta=\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta=\alpha\times(\beta\times\delta)\times\gamma$· ἤτοι·

Ἐὰν εἷς παράγων γινομένου πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμόν, ὅλον τὸ γινόμενον εὑρίσκεται πολλαπλασιασμένον ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

γ') $(\alpha\times\beta)\times(\gamma\times\delta)=\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta$

Διότι

$(\alpha\times\beta)\times(\gamma\times\delta)=\alpha\times\beta\times(\gamma\times\delta)=\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta$· ἤτοι·

Γινόμενον γινομένων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ πάντων τῶν παραγόντων τῶν γινομένων.

Ἀσκήσεις.

1) Πόσα δευτερόλεπτα περιέχει τὸ ἔτος 1919;

2) Τί γίνεται τὸ γινόμενον

$$2\times3\times4\times5$$

ὅταν εἷς παράγων, π. χ. ὁ 3, αὐξηθῇ κατὰ 1, 2, 3 κτλ;

3) Εἰς τὸ προηγούμενον καὶ ἐν γένει εἰς πᾶν γινόμενον ποῖος παράγων πρέπει ν' αὐξηθῇ κατὰ ὡρισμένον ἀριθμόν, π. χ. 3, ὥστε ἡ ἀντιστοιχοῦσα αὔξησις τοῦ γινομένου νὰ εἶναι ἐλαχίστη ἢ μεγίστη;

4) Ποσάκις τὸ γινόμενον

$$2\times3\times40\times5$$

εἶναι μεῖζον τοῦ

$$2\times3\times4\times5\,;$$

Πολλαπλασιασμὸς διαφορᾶς.

47. Ἔχομεν $(\alpha-\beta)\times2=(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)$.

δηλ. λαμβάνομεν δὶς τὸ α καὶ ἀπορρίπτομεν δὶς τὸ β· ἤτοι ἔχομεν·

$$\alpha\times2-\beta\times2$$

καὶ γενικώτερον·

$$(\alpha-\beta)\times\gamma=\alpha\times\gamma-\beta\times\gamma \text{· ἄρα·}$$

Διαφορὰ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν μειωτέος καὶ ἀφαιρετέος τῆς διαφορᾶς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον.

Ἀσκήσεις.

1) Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ φορὰν ἀναχωροῦσιν ἱππεὺς καὶ πεζὸς συγχρόνως, διατρέχοντες ὁ μὲν 11 χιλμ. τὴν ὥραν, ὁ δὲ 4· πόσον θ' ἀπέχωσιν ἀλλήλων μετὰ 5 ὥρας;

2) Τί γίνεται τὸ γινόμενον

$$8\times4\times9\times16,$$

ὅταν ὁ παράγων 9 ἐλαττωθῇ κατὰ 3;

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καθόλου.

1) Ἔστω τὸ γινόμενον

$$528 \times 36.$$

Τοῦτο δὲν δύναται νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ

$$528 \times 10 = 5280 \cdot$$

Ἑπομένως δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ψηφία ὀλιγώτερα τῶν τεσσάρων· εἶναι ὅμως μικρότερον τοῦ

$$528 \times 100 = 52800,$$

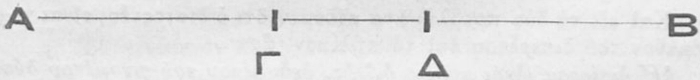
ἑπομένως δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ψηφία περισσότερα τῶν πέντε.

Νὰ διατυπωθῇ ἐντεῦθεν γενικὴ πρότασις ὁρίζουσα τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν ἐκ τοῦ πλήθους τῶν ψηφίων αὐτῶν.

2) Τὸ μέγιστον γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ἐχόντων ἄθροισμα δεδομένον, εὑρίσκεται, ὅταν οὗτοι εἶναι ἴσοι· π.χ. τὸ μέγιστον γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἐχόντων ἄθροισμα 10 εἶναι $5 \times 5 = 25$.

3) Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων, ἅτινα ἔχουσι περίμετρον 40 μέτρα ποῖον ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδόν;

*4) Τὴν εὐθεῖαν ΑΒ διαιροῦμεν εἰς τρία μέρη καὶ μετροῦμεν διὰ



τῆς αὐτῆς μονάδος τὴν ὅλην εὐθεῖαν καὶ τὰ μέρη· νὰ δειχθῇ ὅτι

$$ΑΔ \times ΓΒ = ΑΒ \times ΓΔ + ΑΓ \times ΔΒ.$$

5) Μίαν βασιλόπιτταν ἐμοιράσαμεν εἰς δύο τεμάχια, ἔπειτα ἑκάτερον τούτων εἰς τρία, ἕκαστον τῶν νέων τεμαχίων εἰς 4 καὶ ἕκαστον τούτων εἰς 5. Πόσα εἶναι ὅλα τὰ τεμάχια ἐν τέλει;

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

Ὁρισμοί.

48 *Πρόβλημα α'*. 5 πήχεις ὑφάσματος τιμῶνται 20 δρ: πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;

Λύσις. Πρέπει τὰς 20 δραχμὰς νὰ μοιράσωμεν εἰς 5 ἴσα μέρη· ἓν τούτων εἶναι ἡ ἀξία τοῦ πήχεως, ἤτοι 4 δραχ., διότι

$$4δρ. + 4δρ. + 4δρ. + 4 δρ. 4 = 4 \times 5 = 20 δρ.$$

παρατηροῦμεν δὲ συγχρόνως ὅτι ἕκαστον μερίδιον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μεριδίων δίδει τὸ ὅλον ποσόν.

Πρόβλημα β'. Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 5 δραχ: πόσους πήχεις δυνάμεθα ν' ἀγοράσωμεν μὲ 20 δραχμάς;

Λύσις. Τόσους πήχεις, ὅσας φορὰς αἱ 5 δραχμαὶ χωροῦσιν εἰς τὰς 20 ἤτοι 4 πήχ., διότι

$$5\text{δρ.} \times 4 = 20\text{δρ.}$$

παρατηροῦμεν δ' ὅτι ἐὰν ποσόν τι χωρῇ πολλάκις ἐπ' ἄλλου ἄνευ ὑπολοίπου, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει ποσάκις χωρεῖ, δίδει τὸ ποσὸν ἐφ' οὗ χωρεῖ.

Ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας λύεται τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο πρόβλημα λέγεται *διαίρεσις* Ἄρα.

Διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις δι' ἧς ἢ μοιράζομεν ἕνα ἀριθμὸν εἰς τόσα ἴσα μέρη ὅσας μονάδας περιέχει ἄλλος ἀριθμός, ἢ εὑρίσκομεν ποσάκις ἀριθμός τις χωρεῖ εἰς ἄλλον,

Ὁ ἀριθμός, ὅστις μοιράζεται ἢ εἰς τὸν ὁποῖον θέλομεν νὰ εὕρωμεν ποσάκις χωρεῖ ἄλλος, λέγεται *διαιρετέος* ὁ ἄλλος *διαιρέτης* καὶ τὸ ἐξαγόμενον *πηλίκον*. Σημεῖον τῆς πράξεως εἶναι: ἀπαγγελλόμενον *διὰ* καὶ τιθέμενον μεταξὺ διαιρετέου καὶ διαιρέτου. π.χ.

$$20 : 5 = 4.$$

Καὶ εἰς τὰ δύο προβλήματα εἴδομεν ὅτι ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον· ἄρα·

Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις δι' ἧς, δεδομένου τοῦ γινομένου δύο παραγόντων καὶ τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων τούτων, εὑρίσκεται ὁ ἕτερος παράγων.

Οὕτω δὲ ἀντὶ δύο ὁρισμῶν ἔχομεν ἕνα,

Τελεία καὶ ἀτελὴς διαίρεσις.

49. Ἡ διαίρεσις λέγεται *τελεία*, ὁσάκις ὑπάρχει ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην, δίδει τὸν διαιρετέον· π.χ. ἡ διαίρεσις

$$15 : 5 = 3. \text{ διότι } 3 \times 5 = 15. \qquad (1)$$

Εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν λέγομεν ὅτι ὁ διαιρετέος *διαιρεῖται* διὰ τοῦ διαιρέτου· π. χ. ὁ 15 διαιρεῖται διὰ τοῦ 5· λέγομεν πρὸς τούτοις ὅτι ὁ 15 εἶναι *διαιρετὸς* διὰ 5 ἢ *πολλαπλάσιον* τοῦ 5. Ὁ 5 λέγεται *διαιρέτης* ἢ *παράγων* τοῦ 15.

Ἀτελὴς δὲ λέγεται ἡ διαίρεσις, ὅταν δὲν ὑπάρχῃ ἀκέραιος, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην, νὰ δίδῃ τὸν διαιρετέον. Ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις περισσεύει, ὅταν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεθῇ ὁ διαιρέτης ὅσας φορὰς εἶναι δυνατόν, λέγεται *ὑπόλοιπον*· π. χ. ἡ διαίρεσις 15 : 7, ἥτις ἀφήνει ὑπόλοιπον 1, διότι

$$15=7\times2+1. \qquad (2)$$

ΣΗΜ. α΄. Ἔχομεν $15=15\times1$, $3=1\times3$ κτλ..., ἤτοι πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' ἑαυτοῦ δίδων πηλίκον 1 ἢ διὰ τῆς μονάδος δίδων πηλίκον ἑαυτόν.

ΣΗΜ. β΄. Ἡ ἰσότης (2) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$15=7+7+1,$$

ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι ἡ διαίρεσις δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ δι' ἀλλεπαλλήλων ἀφαιρέσεων τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, μέχρις οὗ ἢ δὲν μείνῃ τίποτε ἢ μείνῃ ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ διαιρέτου· ὁπότε ὁ μὲν ἀριθμὸς τῶν γινομένων ἀφαιρέσεων εἶναι τὸ πηλίκον, ὁ δὲ ὑπολειπόμενος μετὰ πάσας τὰς ἀφαιρέσεις ταύτας εἶναι τὸ ὑπόλοιπον· Ἄρα· *Τὸ ὑπόλοιπον εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου.*

Πότε τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον ἢ πολυψήφιον.

50. Ἔστω τὸ πηλίκον·

$$1899 : 288$$

Τὸ γινόμενον $288\times10=2880$ ὑπερβαίνει τὸν διαιρετέον, ἄρα τὸ πηλίκον εἶναι ἔλασσον τοῦ 10, ἤτοι *μονοψήφιον*. Ἐὰν ὅμως θεωρήσωμεν τὸ πηλίκον 1899 : 28, βλέπομεν ὅτι $28\times10=280$ εἶναι μικρότερον τοῦ 1899· ἄρα ὁ 28 χωρεῖ εἰς τὸ 1899 ἀπὸ 10 καὶ ἄνω φοράς, ἤτοι τὸ πηλίκον εἶναι *πολυψήφιον*.

Γενικῶς·

Ἐάν, πρὶν εὕρωμεν τὸ πηλίκον, θέλωμεν νὰ γνωρίζωμεν ἂν εἶναι μονοψήφιον ἢ πολυψήφιον, γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου 0· ἐὰν προκύπτῃ ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ διαιρετέου, τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον· ἄλλως μονοψήφιον.

Ἐκτέλεσις τῆς διαιρέσεως.

Εἰς πολλὰς περιστάσεις, ἰδίως ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος, ὁ δὲ διαιρετέος μονοψήφιος ἢ διψήφιος, τὸ πηλίκον εὑρίσκεται ἀπὸ μνήμης. Ὅταν δὲ ἀδυνατῶμεν νὰ εὕρωμεν αὐτὸ ἀπὸ μνήμης, τὸ εὑρίσκομεν διὰ πράξεως προφορικῆς ἢ γραπτῆς.

Περὶ τῆς προφορικῆς διαιρέσεως ἰδὲ Πρακτικήν μου Ἀριθμητικήν. Ἐνταῦθα θὰ εἴπωμεν μόνον περὶ τῆς γραπτῆς, ἐν ᾗ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον ἢ πολυψήφιον.

Α' περίπτωσις.

51. Ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν 857 : 90· τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον (§ 50). Ἐνταῦθα ὁ διαιρέτης περιέχει 9 δεκάδας καὶ οὐδεμίαν ἁπλῆν μονάδα· ἐπειδὴ δὲ εἰς τὰς ἁπλᾶς μονάδας 7 τοῦ διαιρετέου οὐδεμία δεκὰς χωρεῖ, ἕπεται ὅτι τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 9 ὁ δεικνύων ποσάκις αἱ 9 δεκάδες τοῦ διαιρέτου χωροῦσιν εἰς τὰς 85 τοῦ διαιρετέου, ἤτοι ποσάκις ὁ 9 χωρεῖ εἰς τὸν 85· τὸ δὲ ὑπόλοιπον θ' ἀποτελῆται ἀπὸ 85—9×9=4 δεκάδας καὶ τὰς 7 ἁπλᾶς μονάδας τοῦ διαιρετέου, ἤτοι θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 47.

Ἤδη ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν 857 : 96. Τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον (§ 50).

Ὁσάκις αἱ 9 δεκάδες τοῦ διαιρέτου χωροῦσιν εἰς τὰς 85 δεκάδας τοῦ διαιρετέου, ἢ εἰς ὁλόκληρον τὸν διαιρετέον, ὅπερ ταὐτό, τοσάκις ἢ ὀλιγωτέρας φορὰς θὰ χωρῇ ὁ διαιρέτης εἰς τὸν διαιρετέον. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 9 χωρεῖ εἰς τὸν 85 ἐννέα φοράς, τὸ πηλίκον εἶναι ἢ 9 ἢ μικρότερον.

Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν τὸ 9, πολλαπλασιάζομεν 9×96 καί, ἂν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ 857, τὸ πηλίκον εἶναι 9, ἄλλως δοκιμάζομεν τὸν ἀμέσως μικρότερον ἀριθμὸν 8 καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν ἀριθμὸν τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ 96 ν' ἀφαιρῆται ἀπὸ 857, ἐκτελοῦντες δὲ τὴν ἀφαίρεσιν ταύτην εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

```
          857 | 96
(96×8 . . . 768 | 8 πηλίκον
(ὑπόλοιπον) 89
```

ἢ συντομώτερον

```
857 | 96
 89 | 8
```

ἤτοι ἐκτελοῦμεν συγχρόνως τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι·

52. *Πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου, ὅταν εἶναι μονοψήφιον, παρατηροῦμεν ὁποίας μονάδας παριστᾷ τὸ α' ψηφίον τοῦ διαιρέτου, καὶ χωρίζομεν πρὸς τἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τὰς ὁμοίας αὐτοῦ μονάδας. Τὸν χωρισθέντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ α' ψηφίου*

τοῦ διαιρέτου, τὸ δὲ προκῦπτον πηλίκον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου πρὸς εὕρεσιν καὶ τοῦ ὑπολοίπου, ἐὰν ὑπάρχῃ. Ἐὰν δὲν ἀφαιρῆται, δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον πηλίκον καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν πηλίκον, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην ν' ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ διαιρετέου.

ΣΗΜ. Τὸ πηλίκον 382:39 εἶναι μονοψήφιον· ἐπειδὴ δὲ ὁ 3 εἰς τὸν 38 εἰσέρχεται 12άκις, ἡμεῖς ὡς πηλίκα θὰ δοκιμάζωμεν τοὺς ἀπὸ 9 καὶ κάτω ἀριθμούς.

Β' περίπτωσις.

53. Ζητεῖται τὸ πολυψήφιον πηλίκον

58856 : 9 (§ 50)

Χωρίζομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τὸν ἀριθμὸν 58, τοῦ ὁποίου τὸ πηλίκον διὰ 9 εἶναι μονοψήφιον. Ἤδη ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς 9 ἀνθρώπους πρόκειται νὰ μοιράσωμεν 58856 δρ. Μοιράζομεν πρῶτον τὰς 85 χιλ., ὁπότε ἕκαστος θὰ λάβῃ 6 χιλ., ὅσον δηλ. εἶνε τὸ πηλίκον 58 : 9, περισσεύουσι δὲ καὶ 4 χιλ, ἢ 40 ἑκατοντ., αἵτινες μὲ τὰς 8 ἐκ τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσι 48 ἑκ. δρ., τὰς ὁποίας μοιράζομεν εἰς τοὺς ἀνθρώπους· ἕκαστος θὰ λάβῃ ἐξ αὐτῶν 5, ὑπολειπομένων 3 ἑκατ. ἢ 30 δεκ. δρ., αἵτινες μετὰ τῶν 5 τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσι 35 δεκ. δρ., τὰς ὁποίας καὶ ταύτας μοιράζομεν· ἐξ αὐτῶν θὰ λάβῃ ἕκαστος 3 δεκ. δρ., ὑπολειπομένων 8 δεκ. ἢ 80 καὶ μετὰ τῶν 6 ἐν ὅλῳ 86 δρ., τὰς ὁποίας θὰ μοιράσωμεν ἀκόμη, διὰ νὰ τελειώσῃ ἡ διανομή· διαιροῦμεν λοιπὸν 86 : 9 καὶ εὑρίσκομεν ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος 9 δρ., ὑπολειπομένων ἐκ τῆς ὅλης διανομῆς 5 δρ. Ἑπομένως τὸ ὁλικὸν πηλίκον εἶνε 6539 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 5.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 58856 & 9 \\ \cline{2-2} 48 & 6539 \\ 35 & \\ 86 & \\ 5 & \end{array}$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι·

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου, ὅταν εἶναι πολυψήφιον, χωρίζομεν πρὸς τἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται διὰ ν' ἀποτελῆται ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ πηλίκον διὰ τοῦ διαιρέτου *νὰ εἶναι μονοψήφιον. Εὑρίσκομεν τὸ μονοψήφιον τοῦτο πηλίκον, ὅπερ εἶναι τὸ α΄ ψηφίον τοῦ ὅλου πηλίκου, καὶ γράφομεν αὐτὸ κάτωθι τοῦ διαιρέτου. Τὸ εὑρεθὲν ψηφίον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἐχωρίσαμεν πρὸς τἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου, καὶ εὑρίσκομεν ἓν ὑπόλοιπον. Δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου εὑρίσκοντες οὕτω τὸ β' ψηφίον τοῦ πηλίκου καὶ β' ὑπόλοιπον, δεξιὰ τοῦ ὁποίου καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω, μέχρις οὗ καταβιβάσωμεν καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, ὁπότε εὑρίσκομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ πηλίκου καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς ὅλης πράξεως, ἐὰν ὑπάρχῃ.*

ΣΗΜ. α'. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος, π.χ. 856 : 7, ἡ πρᾶξις δύναται νὰ διαταχθῇ ἔτι συντομώτερον ὡς ἑξῆς·

586 : 7
83 πηλίκον
5 ὑπόλοιπον

ΣΗΜ. β'. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ α' ψηφίου τοῦ πηλίκου πρέπει νὰ χωρίσωμεν πρὸς τἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης ἢ καὶ ἓν ἐπὶ πλέον.

ΣΗΜ. γ'. Θεωρήσωμεν τὴν διαίρεσιν

29'76	28
176	106
8	

Ἐπειδὴ ὁ 28 δὲν χωρεῖ εἰς τὸ 17, καταβιβάζομεν καὶ τὸ 6, ἀφοῦ ὅμως προηγουμένως θέσωμεν 0 εἰς τὸ πηλίκον, διότι τὸ α' ψηφίον αὐτοῦ 1 παριστᾷ ἑκατοντάδας, τὸ δὲ πηλίκον 176 : 28 πρέπει νὰ παριστᾷ ἁπλᾶς μονάδας.

Συντομίαι

54. Ζητεῖται τὸ πηλίκον 58673 : 5000.

Αἱ 5 χιλ. μόνον εἰς τὰς 58 χιλ. δύνανται νὰ χωρῶσιν· ἑπομένως, ὁσάκις ὁ 5 χωρεῖ εἰς τὸν 57, τοσάκις καὶ ὁ 5000 εἰς τὸν 58673, ἤτοι 11άκις· ἄρα τὸ ὅλον πηλίκον εἶναι 11, τὸ δὲ ὑπόλοιπον θ' ἀποτελῆται ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ 57 χιλ. καὶ ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 673. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

58673	~~5000~~
3	11
3673	

Ἡ διαίρεσις συντομεύεται πολὺ περισσότερον, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι 10, 100, 1000,..... Ἀρκεῖ νὰ χωρίσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ τοῦ διαιρέτου, ὁπότε τὸ μὲν πρὸς τἀριστερὰ τμῆμα εἶναι τὸ πηλίκον, τὸ δὲ ἄλλο τὸ ὑπόλοιπον. Π. χ. τῆς διαιρέσεως 35΄86:100 τὸ πηλίκον εἶναι 35 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 86.

Βάσανος.

55. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον, ἐὰν ὑπάρχῃ· ἐὰν εὕρωμεν τὸν διαιρετέον, τοῦτο εἶναι ἔνδειξις ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο ὀρθῶς

Χρῆσις.

56. Εἰς τὰ προβλήματα μεταχειριζόμεθα τὴν διαίρεσιν.

α΄) Ὅταν ποσόν τι πρόκηται νὰ μοιρασθῇ εἰς ἴσα μέρη ˙π.χ. 25 ἄνθρωποι μοιράζονται ἐξ ἴσου 100 δρχ : πόσας λαμβάνει ἕκαστος ;

β΄) Ὅταν ζητῆται ποσάκις ποσόν τι περιέχεται εἰς ἄλλο ὁμοειδές· π. χ. ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται δραχ. 25· πόσους πήχεις δυνάμεθα ν' ἀγοράσωμεν μὲ 100 δρ. ;

γ΄) Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀξίαν πολλῶν μονάδων καὶ ζητῶμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς· π. χ. 8 πήχεις ὑφάσματος τιμῶνται 56 δρχ : πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς ;

Ἡ γ΄ περίπτωσις ὑπάγεται εἰς τὴν α΄. Εἰς ἀμφοτέρας ταύτας πρόκειται νὰ μοιρασθῇ τὸ ποσὸν τοῦ διαιρέτου καὶ τὸ πηλίκον εἶναι ὁμοειδὲς τῷ διαιρετέῳ· ἡ διαίρεσις τότε λέγεται *μερισμός*. Εἰς τὴν β΄ πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ποσάκις ποσόν τι χωρεῖ εἰς ἄλλο ὁμοειδές· ἡ διαίρεσις τότε λέγεται *μέτρησις*, τὸ δὲ εἶδος τῶν μονάδων τοῦ πηλίκου ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ προβλήματος.

Ὅταν πρόκηται περὶ ἀφῃρημένων ἀριθμῶν, ἡ διαίρεσις *ἀδιαφόρως* θεωρεῖται ὡς μερισμὸς ἢ μέτρησις.

Ἀσκήσεις.

1) Εἰς πόσους ἀνθρώπους πρέπει νὰ μοιρασθῶσι 191949 δρχ., ὥστε ἕκαστος νὰ λάβῃ 327 δραχ. ;

2) Δύο ἅμαξαι ἀναχωροῦσι συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων ἐπὶ τῆς συνδεούσης ταύτας ὁδοῦ μήκους 270 χιλμ. διανύουσαι ἡ μὲν 12. ἡ δὲ 15 χιλμ. τὴν ὥραν. Μετὰ πόσας ὥρας θέλουσι συναντηθῇ ;

3) Τὸ πηλίκον 59967 : 999 εὑρίσκεται συντόμως ὡς ἑξῆς.

Χωρίζομεν δεξιὰ τοῦ διαιρετέου 3 ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης. Γράφομεν κατ' ἰδίαν τὸ ἕτερον τμῆμα 59· εἶτα προσθέτομεν 59 καὶ 967 εὑρίσκοντες 1026. Τοῦ ἀθροίσματος τούτου χωρίζομεν πάλιν 3 ψηφία δεξιά· γράφομεν πάλιν κατ' ἰδίαν τὸ ἕτερον τμῆμα 1, εὑρίσκομεν εἶτα τὸ ἄθροισμα $26+1=27$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 27 εἶναι μικρότερος τοῦ 999, λέγομεν ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι $59+1=60$, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 27.

Ἡ πρᾶξις δύναται νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 59'967 & 999 \\ \hline \underline{967} & 59 \\ 1'026 & \underline{\;\;1} \\ \underline{26} & 60 \\ 27 & \end{array}$$

Τοιαύτη συντομία εἶναι δυνατή, ὁσάκις πάντα τὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου εἶναι 9. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος; (Ἐκ τῆς Θεωρ. Ἀριθμητικῆς Ι. Χατζιδάκι).

4) Ἐν ἔτει 1906 ἡ ἑορτὴ τοῦ Ἁγίου Νικολάου συνέπεσεν ἡμέρᾳ Τετάρτῃ. Ποίᾳ ἡμέρᾳ τῆς ἑβδομάδος συνέπεσεν ἐν ἔτει 1907;

Ἰδιότητες διαιρέσεως.

57. *Θεώρημα α'.* Διαιροῦντες 17 διὰ 7 εὑρίσκομεν πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 3· ἑπομένως ἔχομεν·

$$17=7\times2+3\cdot \qquad (1)$$

τῆς ἰσότητος ταύτης πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη ἐπὶ τὸν αὐτὸν οἱονδήποτε ἀριθμόν, π. χ. τὸν 5, καὶ εὑρίσκομεν·

$$17\times5=(7\times2)\times5+3\times5 \quad (\S)\ 37). \quad \text{ἢ} \qquad (2)$$
$$17\times5=(7\times5)\times2+3\times5 \quad (\S)\ 46\ \text{Β}').$$

Ἡ τελευταία αὕτη ἰσότης δεικνύει ὅτι ὁ 7×5 χωρεῖ 2 φορὰς εἰς τὸν 17×5, διότι $3<7$ καὶ $3\times5<7\times5$.

Ἑπομένως διαιροῦντες 17×5 διὰ 7×5 εὑρίσκομεν πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 3×5.

Κατὰ τὸν αὐτὸν ἐντελῶς τρόπον δύναται νὰ γίνῃ ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ γραμμάτων. Οὕτως, ἐὰν παραστήσωμεν τὸν διαιρετέον διὰ $\varDelta$, τὸν διαιρέτην διὰ δ, τὸ πηλίκον διὰ π καὶ τὸ ὑπόλοιπον δι' υ, θὰ ἔχωμεν·

$$\Delta = \delta\times\pi + \upsilon \quad \text{καὶ} \quad \Delta\times\nu = (\delta\times\nu)\times\pi + \upsilon\times\nu$$

τοῦ ν ὄντος οἱουδήποτε ἀκεραίου. Ἄρα·

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἐν τῇ προτάσει δὲ ταύτῃ περιλαμβάνεται καὶ ἡ ἑπομένη·

Ἐὰν διαιρετέον καὶ διαιρέτην τελείας διαιρέσεως πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ διαίρεσις μένει τελεία καὶ τὸ πηλίκον τὸ αὐτό.

58. *Θεώρημα β'.* — Πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν $(\alpha\times\beta\times\gamma):\delta$, ἔστω δὲ $\beta:\delta=\kappa$ θὰ ἔχωμεν·

$$(\alpha\times\kappa\times\gamma)\times\delta = \alpha\times(\kappa\times\delta)\times\gamma = \alpha\times\beta\times\gamma \qquad \text{ἄρα·}$$

$$(\alpha\times\beta\times\gamma):\delta = \alpha\times(\beta:\delta)\times\gamma \qquad \text{ἤτοι·}$$

Γινόμενον διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν εἷς τῶν παραγόντων διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, τῆς διαιρέσεως γινομένης ἀκριβῶς.

Πόρισμα. — Ἔχομεν·

$$(\alpha\times\beta):\beta = \alpha\times(\beta:\beta) = \alpha\times 1 = \alpha \qquad \text{ἤτοι·}$$

Γινόμενον διαιρεῖται διά τινος τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἐὰν ἀπολειφθῇ ὁ παράγων οὗτος.

ΣΗΜ. Πόρισμα λέγεται ἡ πρότασις, ἥτις εἶναι ἡ ἄμεσος συνέπεια μιᾶς ἢ πολλῶν ὁμοῦ ἀληθῶν προτάσεων.

59 *Θεώρημα γ'.* — Διαιροῦντες 180 : 30 εὑρίσκομεν τέλειον πηλίκον 6· ἄρα 180 = 30×6· ἐπειδὴ δὲ 30=2×3×5 ἔχομεν·

$$180=(2\times3\times5)\times6 \text{ ἢ (§ 46α)· } 180=2\times3\times5\times6.$$

Διαιροῦντες δὲ τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης διὰ τοῦ 2, εἶτα διὰ τοῦ 3, μεθ' ὃ διὰ 5 εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν (§ 58)·

$$180 : 2=3\times5\times6, \quad (180 : 2) : 3=5\times6$$

$$[(180 : 2) : 3] : 5=6 \text{· ἀλλὰ } 6=180 : (2\times3\times5) \text{·} \qquad \text{ἄρα·}$$

$$180 : (2\times3\times5) = [(180 : 2) : 3] : 5$$

Ἐν γένει· $\alpha : (\beta\times\gamma\times\delta) = [(\alpha : \beta) : \gamma] : \delta$ ἤτοι

Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ γινομένου ἐὰν διαιρεθῇ ἀλλεπαλλήλως διὰ πάντων τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου, πασῶν τῶν διαιρέσεων τούτων γινομένων ἀκριβῶς.

60. *Θεώρημα δ'.* — Παρατηροῦμεν ὅτι

$$(\alpha : \gamma+\beta : \gamma)\times\gamma = \alpha+\beta$$

ἄρα $(\alpha+\beta) : \gamma = \alpha : \gamma+\beta : \gamma$

ἤτοι·

Ἄθροισμα διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν ἕκαστος προσθετέος διαιρεθῇ χωριστὰ καὶ προστεθῶσι τὰ μερικὰ πηλίκα, ὅταν πᾶσαι αὗται αἱ διαιρέσεις γίνωνται τελείως.

61. *Θεώρημα ε'.* — Παρατηροῦμεν ὅτι·

$$(\alpha:\gamma-\beta:\gamma)\times\gamma=\alpha-\beta$$

ἄρα

$$(\alpha-\beta):\gamma=\alpha:\gamma-\beta:\gamma$$

ἤτοι·

Διαφορὰ διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν μειωτέος καὶ ἀφαιρετέος διαιρεθῶσι χωριστὰ καὶ ἀπὸ τοῦ α' πηλίκου ἀφαιρεθῇ τὸ β'.

Ἀσκήσεις

1) Ποσάκις τὸ γινόμενον

$$120\times9\times16$$

εἶναι μικρότερον τοῦ

$$120\times45\times16$$

2) Δύο ἀτμόπλοια ἀναχωροῦσι ταυτοχρόνως ἐκ τοῦ αὐτοῦ λιμένος καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν. Διατρέχουσι δὲ τὸ α' 15 μίλλια τὴν ὥραν, τὸ δὲ β' 12. Πόσον θ' ἀπέχωσιν ἀπ' ἀλλήλων μετὰ 4 ὥρας, καὶ πόση θὰ ἐγίνετο ἡ ἀπόστασις αὕτη, ἐὰν ἡ ταχύτης αὐτῶν ἐγίνετο τρὶς μικροτέρα;

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῆς διαιρέσεως καθόλου

1) Ἠγόρασέ τις ὕφασμα πρὸς 12 δρ. τὸν πῆχυν· ἐὰν τὸ ἠγόραζε πρὸς 10 δρ., θὰ ἐλάμβανε ἀντὶ τῶν αὐτῶν χρημάτων 3 πήχ. περιπλέον. — Πόσους πήχεις ἠγόρασεν;

2) Κρήνη προμηθεύει εἰς 7 ὥρας 945 ὀκ. ὕδατος, ἑτέρα εἰς 5 ὥρας 475 ὀκ. ὕδατος καὶ γ' εἰ. 6 ὥρας 936 ὀκάδας. Εἰς πόσας ὥρας αἱ 3 κρῆναι ὁμοῦ ῥέουσαι, θὰ πληρώσωσι δεξαμενὴν χωροῦσαν 4246 ὀκάδας ὕδατος;

3) Τὸ φῶς φθάνει ἐκ τοῦ Ἡλίου εἰς τὴν Γῆν εἰς 8 λ', 13 λ''. Πόσα χιλιόμετρα διατρέχει εἰς 1'', γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ Ἥλιος ἀπέχει ἀπὸ τῆς Γῆς 24000 ἀκτῖνας τῆς Γῆς, ἑκάστη δὲ ἀκτὶς τῆς Γῆς εἶναι 6370 χλμ;

4) Ἐὰν *μόνον* τὸν διαιρετέον πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ἀριθμόν, τὸ νέον πηλίκον θὰ ἰσῶται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ α' πηλίκου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον σὺν τῷ πηλίκῳ, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν δι-

αιροῦντες διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου τὸ γινόμενον τοῦ α' ὑπολοίπου ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ἐφ' ὃν ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν διαιρετέον.

5) Τί γίνεται τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεως, ὅταν *μόνον* τὸν διαιρετέον πολλαπλασιάσωμεν ἐπί τινα ἀριθμόν;

ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Ὁρισμοί

62. Τὸ γινόμενον $5\times5=25$ λέγεται *τετράγωνον ἢ δευτέρα δύναμις* τοῦ 5· παριστάνεται δὲ συμβολικῶς 5^2, ἔνθα ὁ 2 λέγεται *ἐκθέτης*· οὕτω·

$$5^2=5\times5=25.$$

Τὸ γινόμενον $5\times5\times5$ λέγεται *κύβος ἢ τρίτη δύναμις* τοῦ 5 καὶ παριστάνεται διὰ τοῦ συμβόλου 5^3, καὶ ἐνταῦθα ὁ 3 λέγεται *ἐκθέτης* ὥστε $5^3=5\times5\times5=125$.

Ὁμοίως τὸ γινόμενον $5\times5\times5\times5$ λέγεται *τετάρτη δύναμις* τοῦ 5 καὶ παριστάνεται διὰ 5^4, καὶ γενικῶς·

Δύναμις ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον παραγόντων ἴσων τῷ ἀριθμῷ τούτῳ. Λέγεται δὲ δευτέρα δύναμις ἢ τετράγωνον, ὅταν οἱ παράγοντες εἶναι δύο, τρίτη ἢ κύβος, ὅταν εἶναι τρεῖς, τετάρτη, ὅταν εἶναι τέσσαρες, κ.τ.λ.

Παριστάνομεν δὲ συμβολικῶς τὴν νὴν δύναμιν ἀριθμοῦ τινος α διὰ τοῦ α^ν, ἔνθα ὁ μὲν ν λέγεται *ἐκθέτης*, ὁ δὲ α *βάσις* τῆς δυνάμεως.

63. Παρατηροῦμεν ὅτι·

$$10^2=100$$
$$10^3=1000$$
$$10^4=10000 \text{ κ.τ.λ.},$$

ἤτοι μία δύναμις τοῦ 10 εἶναι ἡ μονὰς ἀκολουθουμένη ὑπὸ τόσων μηδενικῶν, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἐκθέτης.

Ἰδιότητες

65. α') Τὸ γινόμενον $2^2\times2^3\times2^4$ ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ

$$(2\times2)\times(2\times2\times2)\times(2\times2\times2\times2)$$

ἰσοῦται (§ 45) τῷ

$$2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=2^9$$

καὶ γενικῶς

$$\alpha^\mu\times\alpha^\nu\times\alpha^\kappa=\alpha^{\mu+\nu+\kappa} \quad \text{ἤτοι·}$$

Γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις αὐτοῦ μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων.

β') Ἐκ τῆς προηγουμένης ἰδιότητος συνάγομεν ὅτι·

$$(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu \times \nu}$$ ἤτοι·

Δύναμις ὑψοῦται εἰς ἄλλην δύναμιν, ἐὰν ἡ ἀρχικὴ βάσις ὑψωθῇ εἰς δύναμιν μὲ ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐκθετῶν.

γ') Θεωρήσωμεν τὸ γινόμενον·

$$(2 \times 3)^2$$

Ἔχομεν

$$(2 \times 2)^2 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) = 2 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^2$$

καὶ γενικῶς·

$$(\alpha \times \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \times \beta^{\nu}$$ ἤτοι

Γινόμενον ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην ὑψωθῇ ἕκαστος τῶν παραγόντων αὐτοῦ.

δ') Ἐκ τῆς ἰσότητος $2^5 \times 2^3 = 2^8$

συνάγομεν ὅτι $2^8 : 2^5 = 2^3$

καὶ γενικῶς· $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu - \nu}$ ἤτοι·

Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις αὐτοῦ μὲ ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ τοῦ διαιρετέου.

65. Διὰ ν' ἀληθεύῃ ἡ ἰδιότης αὕτη, καὶ ὅταν οἱ δύο ἐκθέται εἶναι ἴσοι, δεχόμεθα ὅτι· $\alpha^0 = 1$

τότε δ' ἔχομεν $2^5 : 2^5 = 2^0 = 1$

ὁμοίως δεχόμεθα ὅτι· $\alpha^1 = \alpha.$

διότι $\alpha^1 \times \alpha^2 = \alpha^3$

$$\alpha^3 = (\alpha \times \alpha \times \alpha)$$

ἄρα $$\alpha^1 = \frac{\alpha^3}{\alpha^2} = \frac{(\alpha \times \alpha \times \alpha)}{(\alpha \times \alpha)} = \alpha$$

32 2³

Ἀσκήσεις

1) Τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ οἱουδήποτε λήγει εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον εἰς τὸ ὁποῖον λήγει καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τελευταίου αὐτοῦ ψηφίου.

2) Ἐὰν ἀριθμός τις λήγῃ εἰς 5, τὸ τετράγωνον αὐτοῦ θὰ λήγῃ εἰς 25.

3) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τέταρται δυνάμεις τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν.

4) Ἐὰν λάβωμεν δύο ἀριθμούς, ὧν οὐδέτερος λήγει εἰς 5 ἢ 0, ἡ διαφορὰ τῶν τετάρτων δυνάμεων αὐτῶν λήγει εἰς 5 ἢ 0.

5) $(\alpha + \beta) \times (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2.$

6) Τί γίνεται τὸ πηλίκον τελείας διαιρέσεως, ὅταν διαιρετέος καὶ διαιρέτης ὑψωθῶσιν εἰς τὸ τετράγωνον ἢ ἄλλην δύναμιν;

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ 8

Ὁρισμοί.

66) Ἀριθμὸς λέγεται *διαιρετὸς* δι' ἄλλου, ἐὰν διαιρῆται τελείως δι' αὐτοῦ· π. χ. ὁ 16 εἶναι διαιρετὸς διὰ 4. Ὁ ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖ ἄλλον τελείως λέγεται *διαιρέτης* αὐτοῦ· π. χ. ὁ 4 εἶναι διαιρέτης τοῦ 16.

Ἐπειδὴ εἰς τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρέτης πολλάκις ἐπαναλαμβανόμενος δίδει τὸν διαιρετέον, ὡς γνωρίζομεν, ὁ δι' ἄλλου διαιρετὸς ἀριθμὸς λέγεται καὶ *πολλαπλάσιον* αὐτοῦ· ὁ δὲ διαιρέτης ἀριθμοῦ λέγεται καὶ *παράγων* αὐτοῦ.

Γενικαὶ ἀρχαὶ τῆς διαιρετότητος.

67. Τοιαῦται εἶναι·

α') Οἱ ἀριθμοὶ 10 καὶ 15 ἀποτελοῦνται ἑκάτερος ἀπὸ μέρη ἴσα τῷ 5· τῳόντι·

$$10=5+5$$
$$15=5+5+5$$

ἑπομένως καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 10+15 θ' ἀποτελῆται ἀπὸ μέρη ἴσα τῷ 5· Ἄρα·

Ἀριθμὸς διαιρῶν ἄλλους ἀριθμοὺς διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

β') Ἐκ τῆς προηγουμένης ἀρχῆς συνάγομεν ἀμέσως ὅτι·

Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλον, διαιρεῖ καὶ πᾶν πολλαπλάσιον αὐτοῦ.

Π. χ. ὁ 5, ὅστις διαιρεῖ τὸν 10, διαιρεῖ καὶ τὸ γινόμενον

$$10\times4=10+10+10+10.$$

γ') Θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 35 καὶ 20. Ἑκάτερος τούτων ἀποτελεῖται ἀπὸ μέρη ἴσα τῷ 5, ὡς ἑξῆς·

$$35=5+5+5+5+5+5+5$$
$$20=5+5+5+5.$$

ἑπομένως ν' ἀφαιρέσωμεν 20 ἀπὸ 35 σημαίνει ἀπὸ τὰ 5, τὰ ὁποῖα ἔχει ὁ 35, ν' ἀποκόψωμεν μερικά, ἤτοι ὅσα ἔχει ὁ 20· ἐπομένως ἡ διαφορὰ 35 – 20 ἀναγκαίως θ' ἀποτελῆται ἐκ μερῶν ἴσων τῷ 5· Ἄρα·

Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

Ἡ ἀρχὴ αὕτη δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς·

Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων καὶ τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν, διαιρεῖ καὶ τὸν ἕτερον.

δ') Διαιροῦντες 45 : 7 εὑρίσκομεν πηλίκον 6 καὶ ὑπόλοιπον 3· ἐπομένως $45=(7\times6)+3$. Ἂν προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος οἱονδήποτε πολλαπλάσιον τοῦ 7, ἔστω τὸ 7×4, θὰ ἔχωμεν·

$$45\pm(7\times4)=[(7\times6)+3)]\pm(7\times4)\cdot$$

ἤτοι $$45\pm(7\times4)=[(7\times6)\pm(7\times4]+3$$

$$45\pm(7\times4)=[7\times(6\pm4)]+3\cdot$$

ἐπομένως $[45\pm(7\times4)] : 7=(6\pm4)$ πηλίκον καὶ 3 ὑπόλοιπον.

Ἄρα·

Τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεως δὲν βλάπτεται, ἐὰν εἰς τὸν διαιρετέον προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' αὐτοῦ πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου.

Ἀσκήσεις

1) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαιρούμενοι διὰ τρίτου δίδωσιν ἴσα ὑπόλοιπα, ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι διαιρετὴ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

2) Ἀληθεύει ἆρά γε, ὅτι, ἐὰν ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὴ διὰ τρίτου, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι διαιρούμενοι δι' αὐτοῦ δίδουσιν ἴσα ὑπόλοιπα ;

3) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διὰ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, δίδουσιν ἴσα ὑπόλοιπα.

4) Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν.

Χαρακτῆρες διαιρετότητος.

Ἐνταῦθα θὰ θεωρήσωμεν ὡρισμένους διαιρέτας καὶ θὰ ἐξετάσωμεν πῶς εἶναι δυνατὸν χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν νὰ γνωρίζωμεν ἂν ἀριθμός τις διαιρῆται διὰ τῶν διαιρετῶν τούτων.

α') Διὰ 10, 100,...

68. Εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ 10 διαιρεῖται ἀριθμός τις, ἐὰν

λήγῃ τοὐλάχιστον εἰς ἓν μηδενικόν, δι' 100, ἐὰν λήγῃ τοὐλάχιστον εἰς δύο μηδενικὰ κτλ.

β') Διὰ 2 ἢ 5.

69 Θεωρήσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3528, ὅστις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς· 3520+8· ὁ 2 ἢ 5 διαιροῦντες τὸν 10 θὰ διαιρῶσι καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ 3520· ἂν λοιπὸν διαιρῶσι καὶ τὸν 8, θὰ διαιρῶσι καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν (§77), ἤτοι τὸν ἀριθμὸν 3528· Ἄρα·

Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 2 ἢ 5, ὅταν τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον εἶναι διαιρετὸν διὰ 2 ἢ διὰ 5· ὅταν δὲ τὸ τελευταῖον ψηφίον εἶναι 0, ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 5.

Ἕπεται ἐκ τοῦ κανόνος τούτου ὅτι διὰ 2 διαιροῦνται οἱ ἀριθμοί, οἵτινες λήγουσιν εἰς ἓν τῶν ψηφίων·

0, 2, 4, 6, 8

καὶ οἵτινες λέγονται *ἄρτιοι*· διὰ 5 δὲ οἱ λήγοντες εἰς 0 ἢ 5.

Πάντες οἱ μὴ ἄρτιοι ἀριθμοὶ λέγονται *περιττοί*.

Ἄρτιοι εἶναι οἱ ἀριθμοί·

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18...

Περιττοὶ δὲ οἱ ἀριθμοί· 1, 3, 5, 7.....

Πόρισμα.—Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 2 ἢ διὰ 5 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου.

ΣΗΜ. Τὸ πόρισμα τοῦτο ἠδυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας παρατηροῦντες ὅτι τὸ τελευταῖον ψηφίον ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀπομένει, ὅταν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἀφαιρέσωμεν ὅλας τὰς δεκάδας, αἵτινες ἀποτελοῦσι πολλαπλάσιον τοῦ 2 καὶ 5 (§ 67 δ').

γ') Διὰ 4 ἢ 25.

70. Θεωρήσωμεν τὸν ἀριθμὸν 8482· οὗτος γράφεται καὶ 8400+82 Ὁ 4 ἢ 25 διαιροῦντες τὸν 100=4×25 θὰ διαιρῶσι καὶ τὸ πολλαπλάσιόν του 8400· ἑπομένως, ἐὰν διαιρῶσι καὶ τὸν 82, θὰ διαιρῶσι καὶ τὸ ἄθροισμα 8482. Ἄρα·

Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 4 ἢ 25, ἐὰν τὰ δύο τελευταῖα αὐτοῦ ψηφία, ὡς εἶναι γεγραμμένα, ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4 ἢ 25.

Π χ. ὁ 1968 διαιρεῖται διὰ 4, διότι διαιρεῖται ὁ 68· ὁμοίως ὁ 1975 διαιρεῖται δι' 25, διότι διαιρεῖται ὁ 75.

Πόρισμα.—Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 4 ἢ 25 ἰσοῦται τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἀποτελοῦσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία.

δ') Διὰ 8 ἢ 125.

71. Θεωρήσωμεν τὸν ἀριθμὸν 58482=58000+482. Ἐπειδὴ 1000=8×125, σκεπτόμενοι ὡς προηγουμένως εὑρίσκομεν ὅτι·

Ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' 8 ἢ 125, ὅταν τὰ τρία τελευταῖα αὐτοῦ ψηφία, ὡς εἶναι γεγραμμένα, ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου.

Π. χ. ὁ 54488 διαιρεῖται δι' 8, διότι ὁ 488 διαιρεῖται δι' 8.

Πόρισμα.—Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ δι' 8 ἢ 125 ἰσοῦται τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἀποτελοῦσι τὰ τρία τελευταῖα αὐτοῦ ψηφία.

Ἀσκήσεις.

1) Ἐκ τῶν χρηματικῶν ποσῶν· 5867 δρ., 3867 δρ., 5000 δρ., 6800 δρ., 5675 δρ. ποῖα δύνανται νὰ πληρωθῶσι δι' ἀκεραίων 2δράχμων ἢ 5δράχμων ἢ 20δράχμων ἢ 100δράχμων;

2) Ἐὰν ἀπὸ 5867 δρ. ἀφαιρέσωμεν πάντα τὰ ἐν αὐταῖς περιεχόμενα 5δραχμα ἢ 20δραχμα, πόσαι δρ. ὑπολείπονται;

3) Τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ 2.

4) Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 4, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων διαιρῆται διὰ τοῦ 4.

5) Γινόμενον περιττῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁμοίως περιττὸς ἀριθμός.

ΣΗΜ. Ἀρκεῖ ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον δύο περιττῶν ἀριθμῶν εἶναι περιττὸς ἀριθμός.

ε') Διὰ 3 ἢ 9.

72. Παρατηροῦμεν ὅτι·

$$\begin{aligned} 1\times 9 &= 9 \\ 11\times 9 &= 99 \\ 111\times 9 &= 999 \text{ κτλ.,} \end{aligned}$$

ἤτοι πᾶς ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου πάντα τὰ ψηφία εἶναι 9, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9· ἀλλ' ἔχομεν·

$$\begin{aligned} 10 &= 9+1 \\ 100 &= 99+1 \\ 1000 &= 999+1 \end{aligned}$$

κτλ., ἤτοι, ἐὰν ἀπὸ μονάδα οἱασδήποτε τάξεως ἀφαιρέσωμεν πάντα τὰ 9 ἢ πάντα τὰ 3, τὰ ὁποῖα περιέχει, ἀπομένει ἡ ἁπλῆ μονάς.

Ἔστω ἤδη ὁ ἀριθμὸς 58673.

Ἐὰν ἐξ ἑκάστης τῶν 5 μυριάδων, τῶν 8 χιλιάδων, τῶν 6 ἑκατοντάδων καὶ τῶν 7 δεκάδων ἀφαιρέσωμεν πάντα τὰ 9 ἢ πάντα τὰ 3, θὰ μείνῃ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ·

$$5+8+6+7+3.$$

Ἐπειδὴ δὲ τ' ἀφαιρεθέντα ἀποτελοῦσιν ὅλα ὁμοῦ ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 3 ἢ 9, ἕπεται ὅτι·

Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 3 ἢ 9, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ 3 ἢ 9.

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 2721 διαιρεῖται διὰ 3, διότι τὸ ἄθροισμα $2+7+2+1=12$ διαιρεῖται διὰ 3. Ὁ 2763 διαιρεῖται δι' 9 καὶ 3.

Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι μέγας ἀριθμός, λαμβάνομεν καὶ τούτου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων. Π. χ. ἐὰν πρόκηται περὶ τοῦ ἀριθμοῦ.

$$5867838,$$

τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶναι 45, τούτου δὲ πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 9, ὅπερ ἀμέσως βλέπομεν ὅτι εἶναι διαιρετὸν δι' 9· ἄρα ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' 9.

Πόρισμα.—Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 3 ἢ 9 ἰσοῦται τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων αὐτοῦ.

ϛ') Δι' 6.

73.—Ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὸν 3 δύο φορὰς ἢ τέσσαρας καὶ ἐν γένει ἄρτιον ἀριθμὸν φορῶν, θὰ προκύψῃ ἀριθμὸς ἄρτιος· ἀλλ' ὅταν εἰς ἄρτιον ἀριθμὸν προσθέσωμεν περιττόν, π.χ. τὸν 3, προκύπτει περιττὸς ἀριθμός· ἑπομένως, ἐὰν τὸν λάβωμεν περιττὸν ἀριθμὸν φορῶν, θὰ προκύψῃ περιττὸς ἀριθμός. Ἀλλ' ὅταν ἀριθμός τις ἀποτελῆται ἀπὸ 3 ἀρτίου πλήθους, ἐὰν ἑνώσωμεν αὐτὰ ἀνὰ δύο·

$$(3+3)+(3+3)+(3+3),$$

θὰ ἔχωμεν ἀριθμὸν ἀποτελούμενον ἐκ τῆς ἐπαναλήψεως τοῦ 6 $6+6+6+\ldots$ ἄρα·

Ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' 6, ἐὰν διαιρῆται διὰ 2 καὶ διὰ 3.

ζ') Δι' 11.

74.—Παρατηροῦμεν ὅτι $100=11\times9+1=$(πολλαπλ. τοῦ $11)+1$. Ἄρα· $10000=$(πολλ. $11\times100+100=$πολλ. $11+1$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $1000000=$πολλ. $11+1$· καὶ γενικῶς· Αἱ μονάδες περιττῆς τάξεως 100, 10000 κτλ. εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 11 ηὐξημένα κατὰ 1.

Θεωρήσωμεν ἤδη τὸν ἀριθμὸν 58767. Χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τμήματα διψήφια ἐκ δεξιῶν 5'87'67, ἤτοι οὗτος περιέχει 5 μυριάδας, 87 ἑκατοντάδας καὶ 67 μονάδας. Ἐὰν ἤδη ἐξ ἑκάστης τῶν 87 ἑκατοντάδων ἀφαιρέσωμεν ὅλα τὰ 11. τὰ ὁποῖα περιέχει, θὰ μείνωσι κατὰ τἀνωτέρω 87 μονάδες (ἁπλαῖ). Ὁμοίως, ἐὰν πράξωμεν τὸ αὐτὸ εἰς ἑκάστην τῶν 5 μυριάδων, θὰ μείνωσι 5 μονάδες. Ἤτοι μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ πολλῶν 11, μένει το ἄθροισμα $5+87+67$· ἐπειδὴ δὲ ὁ 11 διαιρεῖ τὸ ἀφαιρεθὲν πλῆθος τῶν 11, ἐὰν διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον $5+87+67$, θὰ διαιρῇ καὶ ὅλον τὸν δοθέντα ἀριθμόν. Ἄρα·

Ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' 11, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ἐκ δεξιῶν, διαιρεῖται δι' 11.

ΣΗΜ. Τὸ τελευταῖον πρὸς τἀριστερὰ τμῆμα δύναται νὰ εἶναι καὶ μονοψήφιον.

Πόρισμα.—Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ δι' 11 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως δι' 11 τοῦ ἀθροίσματος τῶν διψηφίων αὐτοῦ ἐκ δεξιῶν τμημάτων.

75. Τοῦ ἀριθμοῦ 58767 τὸ ἄθροισμα τῶν ῥηθέντων τμημάτων εἶναι 159. Ὅπως ἴδωμεν δὲ ἂν ὁ 159 διαιρῆται δι' 11, ἀθροίζομεν καὶ τούτου τὰ τμήματα καὶ ἔχομεν $1+59=60$ ἐπειδὴ δὲ ὁ 60 δὲν διαιρεῖται δι' 11, δὲν διαιρεῖται οὔτε ὁ 159 οὔτε ὁ δοθεὶς 58767, τοῦ ὁποίου τὸ ὑπόλοιπον τῆς δι' 11 διαιρέσεως εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τοῦ 60, ἤτοι 5.

η') Διὰ 12.

76. Πᾶς ἀριθμὸς ὅστις διαιρεῖται διὰ 4 εἶναι τῆς μορφῆς $4\times\alpha=(3+1)\times\alpha=3\alpha+\alpha$. Ἐὰν δ' ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς διαιρῆται καὶ διὰ 3, ἀνάγκη νὰ ἔχωμεν $\alpha=3\times\pi$, ὁπότε ὁ δοθεὶς θὰ εἶναι· $3\times3\times\pi+3\times\pi=3\times(3+1)\times\pi=3\times4\times\pi=12\times\pi$. Ἄρα·

Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῆται διὰ 3 καὶ 4, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ 12.

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 144 καὶ 240 διαιροῦνται διὰ 12, ὡς διαιρούμενοι διὰ 3 καὶ 4.

θ') Διὰ 15.

77. Πᾶς ἀριθμὸς ὅστις διαιρεῖται διὰ 5 εἶναι τῆς μορφῆς $5\times\alpha=(3+2)\times\alpha=3\times\alpha+2\times\alpha$. Ἐὰν δὲ διαιρῆται καὶ διὰ 3. τότε ἀναγκαίως διαιρεῖται διὰ 3 καὶ ὁ $2\times\alpha$, ἑπομένως καὶ δι' 6 (§ 73), ἤτοι $2\times\alpha=6\times\pi$ ἢ $\alpha=3\times\pi$· ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς γίνεται της μορφῆς· $9\times\pi+6\times\pi=15\times\pi$, ἤτοι πολλαπλ. τοῦ 15. Ἄρα,

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς διαιρῆται διὰ 3 καὶ 5, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ 15.

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 90, 75, 450 διαιροῦνται διὰ 15, ὡς διαιρούμενοι διὰ 3 καὶ 5,

ι′) Δι᾽ 20.

78. Πᾶς ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖται διὰ 4, εἶναι τῆς μορφῆς $3\alpha+x$· σκεπτόμενοι δ᾽ ὡς προηγουμένως εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι·

Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῆται διὰ 4 καὶ 5 θὰ διαιρῆται καὶ δι 20.

Τοῦτο συμβαίνει π. χ. εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 240, 500, 1800 κτλ.

Ἀσκήσεις

1) Ἐκ τῶν ἀριθμῶν 17601, 52803, 105606, 64537, 5867, 58671, 135, 1650, 600 τίνες διαιροῦνται διὰ 3 ἢ 9, ἢ 6 11, ἢ 12 ἢ 15 ἢ 20.

2) Ἐὰν πάντα τὰ ψηφία ἀριθμοῦ εἶναι 1 καὶ ἀρτίου πλήθους, ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται δι᾽ 11.

3) Ἀριθμὸς διαιρεῖται δι᾽ 6, ἐὰν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων προστιθέμενον εἰς τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν ἄλλων, παρέχῃ ἀριθμὸν διαιρετὸν δι᾽ 6.

Βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 9

79. *Θεώρημα α′.*—Θεωρήσωμεν τὸ πηλίκον

$$(18+8):5.$$

Ἐὰν ἕκαστον προσθετέον ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ 5, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος πολλαπλάσιον τοῦ 5· ἐπομένως τὸ προκῦπτον ἄθροισμα $3+3$ θὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον (§ 67 δ′) ὅπερ καὶ τὸ δοθὲν ἄθροισμα· ἄρα

Τὸ ὑπόλοιπον ἀθροίσματος ὡς πρὸς οἱονδήποτε διαιρέτην δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν ἕκαστον προσθετέον ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου.

80. *Θεώρημα β′.*—Θεωρήσωμεν τὸ γινόμενον·

$$63\times 27.$$

Τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ 5, τὸ περιεχόμενον εἰς τὸ 63, εἶναι $5\times 12=60$· ἔχομεν δὲ

$$63\times 27=(60+3)\times 27=60\times 27+3\times 27.$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἀφαιρέσωμεν 60×27, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 5 δὲν ἀλλάσσει. Ἐπομένως ὅ,τι ὑπόλοιπον δίδει τὸ 63×27, τὸ αὐτὸ θὰ δώσῃ καὶ τὸ 3×27, καὶ τοῦτο πάλιν διὰ τὸν αὐτὸν λόγον θὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον ὅπερ καὶ τὸ γινόμενον 3×2, ὅπερ εὑρίσκομεν ἀντικαθιστῶντες τὸν 27 διὰ τοῦ διὰ 5 ὑπολοίπου αὐτοῦ 2· ἄρα·

Τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν, ὡς πρὸς οἱονδήποτε διαιρέτην, δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν ἑκάτερον τῶν παραγόντων διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν διαιρέτην.

81. Κατὰ τὰ προηγούμενα, ἡ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύναται νὰ γίνῃ διὰ τοῦ διαιρέτου 9, ὡς ἑξῆς·

Ἔστω ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

$$\begin{array}{r} 587 \\ 68 \\ \hline 4696 \\ 3522 \\ \hline 39916 \end{array}$$

Προσθέτομεν τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ εὑρίσκομεν 20· ἐπειδὴ δὲ 20 > 9, προσθέτομεν καὶ τούτου τὰ ψηφία καὶ εὑρίσκομεν 2, ὅπερ δὲν ὑπερβαίνει πλέον τὸν 9· τὸ 2 γράφομεν εἰς μίαν τῶν ἄνω γωνιῶν ἑνὸς σταυροῦ.

$$\begin{array}{c|c} 2 & 5 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

Πράττομεν τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιαστὴν καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν 5 γράφομεν εἰς τὴν ἑτέραν τῶν ἄνω γωνιῶν. Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν 2 × 5 καὶ ἐπὶ τοῦ γινομένου τούτου 10 πράττομεν τὸ αὐτό, ὁπότε εὑρίσκομεν 1, ὅπερ γράφομεν εἰς μίαν τῶν κάτω γωνιῶν. Πράττομεν τέλος τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὸ γινόμενον 39916, ὅτε πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ψηφίον 1, ὅπερ εὕρομεν ἐκ τοῦ 2 × 5.

Ἐὰν ἡ ἐπαλήθευσις αὕτη δὲν ἐπιτύχῃ, ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δὲν ἐγένετο ὀρθῶς· ἀλλ' ἐὰν ἐπιτύχῃ, δὲν ἕπεται μετὰ βεβαιότητος ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο ὀρθῶς· διότι, ἐὰν ἐγένετο λάθος πολλαπλάσιον τοῦ 9, ἡ βάσανος αὕτη δὲν τὸ ἐξελέγχει.

ΣΗΜ. Ἀντὶ τοῦ 9 δυνάμεθα καὶ πάντα ἄλλον διαιρέτην νὰ λάβωμεν, προτιμῶμεν ὅμως τὸν 9, διότι·

α΄) τὰ ὑπόλοιπα εὑρίσκονται εὐκόλως·

β΄) εἰς τὴν βάσανον λαμβάνουσι μέρος πάντα τὰ ψηφία τῶν παραγόντων καὶ τοῦ γινομένου.

82. Ὁμοία δοκιμὴ δύναται νὰ γίνῃ καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν, διότι ἐκ τῶν θεωρημάτων α΄ καὶ β΄ ἕπεται ὅτι, ἐὰν λάβωμεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου τῶν ὑπολοίπων διαιρέτου καὶ πηλίκου

ξεῖ τινος ἀριθμοῦ καὶ εἰς αὐτὸ προσθέσωμεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ὑπολοίπου τῆς δοκιμαζομένης διαιρέσεως (ἐὰν ὑπάρχῃ) διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, θὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν δίδοντα τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ καὶ ὁ διαιρετέος. Π. χ. εἰς τὴν διαίρεσιν

$$\begin{array}{r|l} 587 & 22 \\ \hline 147 & 26 \\ 15 & \end{array}$$

ὑπόλοιπον	τοῦ	22	δι' 9	=4
»	»	26	»	=8
»	»	4×8	»	=5
»	»	15	»	=6
»	»	5+6	»	=2
»	»	587	»	=2

Ἐπειδὴ τὰ δύο τελευταῖα ὑπόλοιπα εἶναι ἴσα, συνάγομεν (μετὰ πιθανότητος) ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο ὀρθῶς.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῆς διαιρετότητος καθόλου.

1) Τοῦ ἀριθμοῦ 45627 ν' ἀντικατασταθῇ τὸ τελευταῖον ψηφίον 7 δι' ἄλλου τοιούτου, ὥστε ὁ ἀριθμὸς νὰ γίνῃ διαιρετὸς δι' 9 ἢ 4 ἢ 25 ἢ 6.

2) Ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' 7, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων, τοῦ τριπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν ἑκατοντάδων διαιρῆται δι' 7.

3) Ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' 8, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων, τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων καὶ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων διαιρῆται δι' 8.

4) Τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων διαιρούμενον διὰ 3 οὐδέποτε δίδει ὑπόλοιπον 1.

5) Ἐὰν ἐν τῇ ἐκτελέσει τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ πολυψήφιον λησμονήσαντες γράψωμεν δύο μερικὰ γινόμενα οὕτως ὥστε τὰ τελευταῖα αὐτῶν ψηφία νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ, τὸ προκῦπτον σφάλμα θὰ ἐλέγξῃ ἡ διὰ τοῦ 9 βάσανος; Π. χ. πολλαπλασιάζοντες 58×35 γράφομεν κατὰ λάθος.

$$\begin{array}{r} 58 \\ 35 \\ \hline 290 \\ 174 \\ \hline 464 \end{array}$$

ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ

Ὁρισμοί.

83) Θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμούς·

4, 8, 16, 20·

ὁ ἀριθμὸς 2 ὅστις διαιρεῖ πάντας τούτους καλεῖται *κοινὸς διαιρέτης* αὐτῶν, παριστάνεται δὲ συντόμως διὰ τοῦ συμβόλου κ. δ. Πλὴν τοῦ 2. κ. δ. αὐτῶν εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 4. Ὁ 4, ὅστις εἶναι ὁ μεγαλύτερος τῶν κ. δ., καλεῖται *μέγιστος κοινὸς διαιρέτης*· παριστάνεται δὲ συντόμως διὰ τοῦ συμβόλου μ. κ. δ.

Γενικῶς·

Κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖ πάντας τούτους. Μέγιστος δὲ κοινὸς διαιρέτης, παριστάνεται *ὁ μέγιστος τῶν κοινῶν διαιρετῶν.*

Εὕρεσις τοῦ μ. κ. δ.

84. *Θεώρημα α'.*—Θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμούς·

4, 8, 16, 20,

ὧν ὁ ἐλάχιστος 4 διαιρεῖ πάντας τοὺς λοιπούς· οὗτος ὡς διαιρῶν καὶ ἑαυτὸν εἶναι κ. δ. πάντων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, εἶναι δὲ καὶ μ. κ. δ., διότι ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 4 δὲν διαιρεῖ τὸν 4. Ἄρα·

Ὁ μ. κ. δ. ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἶναι ὁ ἐλάχιστος ἐξ αὐτῶν, ἐὰν οὗτος διαιρῇ πάντας τοὺς λοιπούς.

85. Θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμούς·

8, 12, 20, 44· (1)

ἀντικαθιστῶντες τὸν 44 διὰ τῆς διαφορᾶς 44—20 ἔχομεν τὴν σειράν·

8, 12, 20, 24· (2)

Πᾶς κ. δ. τῶν ἀριθμῶν (1) ὡς διαιρῶν τοὺς ἀριθμοὺς 44 καὶ 20 θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν 24 (§ 67 γ'), ἑπομένως θὰ εἶναι κ. δ. καὶ τῶν ἀριθμῶν (2). Καὶ πᾶς κ. δ. τῶν ἀριθμῶν (2), ὡς διαιρῶν τοὺς ἀριθμοὺς 20 καὶ 24 θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 44 (§ 67) καὶ θὰ εἶναι κ. δ. καὶ τῶν ἀριθμῶν (1). Ὥστε αἱ δύο σειραὶ ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κ. δ., ἄρα καὶ τὸν αὐτὸν μ. κ. δ.

Ἤτοι·

Ὁ μ. κ. δ. δεδομένων ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ὅταν ἀπό τινος αὐτῶν ἀφαιρεθῇ ἕτερος.

Πόρισμα.— Ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεως δύναται νὰ εὑρεθῇ δι' ἀλλεπαλλήλων ἀφαιρέσεων τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, συνάγομεν ὅτι·

Ὁ μ. κ. δ δεδομένων ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ὅταν εἷς αὐτῶν ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ δι' ἄλλου μικροτέρου ἐκ τῶν δεδομένων.

Π. χ. αἱ σειραί· 12, 5, 8 καὶ
2, 5, 8

ἔχουσι τὸν αὐτὸν μ. κ. δ

85. Ἐπὶ τῶν προτάσεων τούτων στηριζόμενοι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ.

Διακρίνομεν δὲ δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ εἶνε δύο ἢ πλείονες.

α') Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοί·

65 καὶ 5·

ἐπειδὴ ὁ 5 διαιρεῖ τὸν 65, κατὰ τὸ α' θεώρημα αὐτὸς εἶναι ὁ μ.κ.δ.

Ἔστωσαν ἤδη οἱ ἀριθμοί·

65 καὶ 25,

ὧν ὁ μικρότερος δὲν διαιρεῖ τὸν μεγαλύτερον. Κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ 6' θεωρήματος ὁ μ. κ δ. δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν τὸν 65 ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως

65 : 25,

ἤτοι ὁ μ. κ. δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 15 καὶ 25. Τούτων δὲ πάλιν ὁ μ. κ. δ. εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 15 καὶ 10, ἐπειδὴ 10 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 25 : 15. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον οἱ ἀριθμοὶ 15 καὶ 10 θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν μ. κ. δ., τὸν ὁποῖον ἔχουσι καὶ οἱ ἀριθμοὶ 5 καὶ 10, ἤτοι τὸν 5.

Ἡ πρᾶξις συντόμως διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

	2	1	1	1	
65	25	15	10	5	
15	10	5	0		

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι·

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν διαιροῦμεν τὸν μεγα-

λύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου· ἐὰν εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν, ὁ μικρότερος εἶναι ὁ μ. κ. δ., ἄλλως διαιροῦμεν τὸν μικρότερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω διαιροῦντες ἕκαστον διαιρέτην διὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος πρὸς αὐτὸ ὑπολοίπου, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0. Ὁ τελευταῖος διαιρέτης εἶναι ὁ μ. κ. δ.

Παρατήρησις. — Ἐν τῇ διατάξει τῆς προηγουμένης πράξεως οἱ ἀριθμοὶ τῆς τρίτης σειρᾶς 10, 5, 0, πλὴν δηλαδὴ τοῦ πρώτου, εἶναι ὑπόλοιπα διαιρέσεων μὲ διαιρέτην τὸν προηγούμενον αὐτῶν ἀριθμόν· π. χ. ὁ 5 εἶναι ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 15 : 10· ἄρα οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι βαίνουσιν ἐλαττούμενοι· καὶ ἑπομένως κατ' ἀνάγκην θὰ φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον 0.

Ὁμοίως ζητοῦντες τὸν *μ. κ. δ.* τῶν ἀριθμῶν 65 καὶ 12 ἔχομεν·

	5	2	2	2
65	12	5	2	1
5	2	1	0	

ἤτοι *μ. κ. δ.* τῶν ἀριθμῶν 65 καὶ 12 εἶναι ἡ 1· οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ λέγονται *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Καὶ οἱ ἀριθμοὶ 2, 5, 9

ἔχοντες προφανῶς *μ. κ. δ.* τὴν μονάδα λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐν γένει·

Ἀριθμοὶ ὁσοιδήποτε λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὅταν δὲν ἔχωσιν ἄλλον κ. δ. πλὴν τῆς μονάδος.

β') Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 5, 15, 25· ἐπειδὴ ὁ μικρότερος αὐτῶν 5 διαιρεῖ πάντας τοὺς λοιπούς, αὐτὸς εἶναι ὁ *μ. κ. δ.* Ἔστωσαν ἤδη οἱ ἀριθμοὶ 12, 66, 28, ὧν ὁ μικρότερος 12 δὲν διαιρεῖ πάντας τοὺς λοιπούς. Ὁ *μ. κ. δ.* δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 12 πάντας τοὺς λοιπούς, ἀντικαθιστῶντες ἅμα αὐτοὺς διὰ τῶν ὑπολοίπων των· οὕτως εὑρίσκομεν τὴν σειράν.

12, 6, 4·

ἐκ ταύτης κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν τὴν σειράν·

0, 2, 4 ἤ

2, 4.

τῆς ὁποίας οἱ ἀριθμοὶ ἔχουσι μ. κ. δ. τὸν 2, ὅστις ἑπομένως θὰ εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν δοθέντων.

66

"Όθεν συνάγομεν ὅτι·

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. πολλῶν ἀριθμῶν διαιροῦμεν διὰ τοῦ μικροτέρου αὐτῶν πάντας τοὺς λοιπούς· ἐὰν πασῶν τῶν διαιρέσεων τούτων τὰ ὑπόλοιπα εἶναι 0, ὁ μικρότερος εἶναι ὁ μ. κ. δ. ἄλλως ἀντικαθιστῶμεν τοὺς διαιρεθέντας ἀριθμοὺς διὰ τῶν ὑπολοίπων τῆς διαιρέσεως αὐτῶν καὶ σχηματίζομεν νέαν σειράν, εἰς τὴν ὁποίαν πράττομεν τὸ αὐτό, μέχρις οὗ εὕρωμεν σειρὰν ἀριθμῶν, ὧν ὁ μικρότερος νὰ διαιρῇ πάντας τοὺς λοιπούς, ὁπότε αὐτὸς θὰ εἶναι ὁ ζητούμενος μ. κ. δ.

Πόρισμα.—Ζητοῦντες τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 60, 36 καὶ 24 ἔχομεν διαδοχικῶς τὰς σειράς·

60, 36, 24
12, 12, 24
12, 0, 0

Πᾶσαι αἱ σειραὶ αὗται ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κ. δ., ἐπειδὴ δὲ ὁ μ. κ. δ. ἀποτελεῖ τὴν τελευταίαν σειράν, ἕπεται ὅτι·

Κοινοὶ διαιρέται ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἶναι μόνον οἱ διαιρέται τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν.

Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν ἄλλους διαιρεῖ καὶ τὸν μ. κ. δ. αὐτῶν καὶ τἀνάπαλιν.

Ἁπλοποίησις ἐν τῇ εὑρέσει τοῦ μ. κ. δ.

87. *Θεώρημα α′.* Ζητοῦμεν τὸν μέγιστον κ. δ. τῶν ἀριθμῶν Α. καὶ Β.

Διατάσσομεν ὡς συνήθως τὴν πρᾶξιν καὶ ἔχομεν καθ' ὑπόθεσιν·

	Π	Π′	Π″	Π‴
Α	Β	Υ	Υ′	Υ″
Υ	Υ′	Υ″	0	—

ὥστε Υ′ εἶναι ὁ *μ. κ. δ.*

Ζητήσωμεν ἤδη τὸν μ. κ. δ. τῶν γινομένων Α×Κ καὶ Β×Κ. Γνωρίζομεν ὅτι πολλαπλασιαζομένου διαιρετέου καὶ διαιρέτου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τὸ μὲν πηλίκον δὲν ἀλλάσσει, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· ἑπομένως διατάσσοντες πάλιν ὁμοίως τὴν πρᾶξιν θὰ ἔχωμεν·

	Π	Π'	Π''	Π'''
$A\times K$	$B\times K$	$\Upsilon\times K$	$\Upsilon'\times K$	$\Upsilon''\times K$
$\Upsilon\times K$	$\Upsilon'\times K$	$\Upsilon''\times K$	0	

ἤτοι ὁ μ. κ. δ. τῶν Α. καὶ Β. ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ Κ.

Καὶ ὅταν πρόκειται περὶ τοῦ μ. κ. δ. πολλῶν ἀριθμῶν, φθάνομεν διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἰς τοιοῦτον ἐξαγόμενον. Ἄρα·

Ἐὰν ἀριθμοί τινες πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἐφ' ὃν οὗτοι ἐπολλαπλασιάσθησαν.

88. *Θεώρημα β'.*—Ἔστω Μ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ καὶ Δ κ. δ. αὐτῶν. Διαιροῦμεν αὐτοὺς διὰ Δ καὶ εὑρίσκομεν τὰ πηλίκα Α', Β', Γ', τῶν ὁποίων μ. κ. δ. ἔστω ὁ Π. Τῶν γινομένων $A'\times\Delta$, $B'\times\Delta$, $\Gamma'\times\Delta$, ἤτοι τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, μ. κ. δ. εἶναι $\Pi\times\Delta$· ἄρα $\Pi\times\Delta=M$ καὶ $\Pi=M:\Delta$. Ἄρα·

Ἐὰν ἀριθμοί τινες διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

89. Ἐκ τῶν προηγουμένων δύο προτάσεων συνάγομεν τὰ ἑξῆς·

Πόρισμα α'.—Ἐὰν ἀριθμοί τινες διαιρεθῶσι διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν, τὰ πηλίκα εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα.

Πόρισμα β'.—Ἐὰν διαιρέσαντες ἀριθμοὺς διά τινος κ. δ. αὐτῶν εὕρωμεν πηλίκα πρῶτα πρὸς ἄλληλα, ὁ ἀριθμός, δι' οὗ διῃρέθησαν, εἶναι ὁ μ. κ. δ αὐτῶν.

ΣΗΜ. Εἰς τὰ δύο προηγούμενα πορίσματα συμβαίνει τὸ ἑξῆς· Εἰς τὸ α' ὑποτίθεται ὅτι οἱ ἀριθμοὶ διαιροῦνται διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν καὶ συμπεραίνεται ὅτι τὰ πηλίκα εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα· εἰς τὸ β' ὑποτίθεται ὅτι τὰ πηλίκα εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα καὶ ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ ἀριθμός, δι' οὗ διῃρέθησαν οἱ δοθέντες ἀριθμοί, εἶναι ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν. Δύο προτάσεις τοιαῦται, ὥστε ἡ ὑπόθεσις τῆς μιᾶς νὰ εἶναι συμπέρασμα τῆς ἄλλης καὶ τἀνάπαλιν, λέγονται *ἀντίστροφοι.*

90. Ἐπὶ τῶν προτάσεων 87 καὶ 88 στηριζόμενοι δυνάμεθα πολλάκις νὰ συντομεύσωμεν τὴν ἀναζήτησιν τοῦ μ. κ. δ. Ζητοῦ-

μεν π. χ. τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 24000, 8000, 5000. Διαιροῦμεν αὐτοὺς διὰ 1000 καὶ εὑρίσκομεν

24, 8, 5,

τῶν ὁποίων *μ. κ. δ.* εἶναι 1· ἄρα *μ. κ. δ.* τῶν δοθέντων εἶναι

$$1 \times 1000 = 1000$$

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὑρεθῶσι πάντες οἱ *κ. δ.* τῶν ἀριθμῶν

52, 64, 12.

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ *μ. κ. δ.* τῶν ἀριθμῶν

1040, 1280, 240.

3) Ἐκ τῶν νομισμάτων τῆς μιᾶς, τῶν δύο, τῶν πέντε, τῶν δέκα καὶ τῶν εἰκοσιπέντε δραχμῶν ποῖα εἶνε ἐκεῖνα ἐξ ἑκάστου των ὁποίων, πολλάκις ἐπαναλαμβανομένου, ἀποτελεῖται ἕκαστον τῶν ἑξῆς ποσῶν:

210 δρ., 250 δρ., 300 δρ.;

4) Ὁ *μ. κ. δ.* ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν τινὲς αὐτῶν ἀντικατασταθῶσι διὰ τοῦ *μ. κ. δ.* αὐτῶν.

5) Πῶς διὰ τῆς προηγουμένης προτάσεως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν *μ. κ. δ*;

6) Τρία τεμάχια ὑφάσματος ἔχουσι μῆκος τὸ α' 200 μέτρων, τὸ β' 320 καὶ τὸ γ' 420. Ποῖος εἶναι ὁ μέγιστος ἀριθμὸς τῶν προσώπων εἰς τὰ ὁποῖα καὶ τὰ τρία ταῦτα τεμάχια μοιράζονται ἀκριβῶς, ἤτοι ἕκαστον πρόσωπον λαμβάνει ἴσον ἀριθμὸν ἀκεραίων μέτρων ἐξ ἑκάστου τεμαχίου ἄνευ ὑπολοίπου;

ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ ΚΟΙΝΟΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΝ

Ὁρισμοί.

91. Εἰς τὸν λιμένα μιᾶς πόλεως καταπλέουσι ταυτοχρόνως τρία ἀτμόπλοια Α, Β, Γ, ἐξ ὧν τὸ μὲν Α ἐπανέρχεται εἰς τὸν αὐτὸν λιμένα ἀνὰ 5 ἡμέρας, τὸ Β ἀνὰ 2 καὶ τὸ Γ ἀνὰ 3 ἡμέρας. Μετὰ πόσας ἡμέρας τὰ ἀτμόπλοια ταῦτα θὰ καταπλεύσωσι ταυτοχρόνως πάλιν εἰς τὸν αὐτὸν λιμένα;

Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἡμερῶν πρέπει νὰ εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τῶν τριῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5· τοιαῦτα δὲ πολλαπλάσια εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 30, 60, 90, 120 κτλ., ὧν ἕκαστος εἶναι *κοινὸν πολλαπλάσιον* τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5. Γενικῶς·

Κοινὸν πολλαπλάσιον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν λέγεται πᾶς ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖται δι' ἑκάστου τούτων.

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $2 \times 3 \times 5$ καὶ πᾶν αὐτοῦ πολλαπλάσιον εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5, ἄρα· Τὰ κοινὰ πολλαπλάσια ἀριθμῶν τινων εἶναι ἄπειρα τὸ πλῆθος καὶ οὐδὲν αὐτῶν εἶναι μέγιστον. Ἐπειδὴ ὅμως οὐδὲν τούτων δύναται νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ μεγίστου τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ἕπεται ὅτι ὑπάρχει ἕν, μικρότερον πάντων, ὅπερ καλεῖται *ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον*. Τῶν ἀριθμῶν π. χ. 2, 3, 5 τοιοῦτον εἶναι ὁ 30.

92. Ἐὰν εἰς τὸ πρόβλημα ἐζητεῖτο μετὰ πόσας ἡμέρας τὸ *ὀλιγώτερον* θὰ γίνῃ ταυτοχρόνως ὁ κατάπλους τῶν πλοίων, ἡ λύσις θὰ ἦτο 30. Πρὸς συντομίαν θὰ παριστῶμεν τὸ μὲν κοινὸν πολλαπλάσιον διὰ τοῦ κ. π., τὸ δὲ ἐλάχιστον διὰ τοῦ ε. κ. π.

Εὕρεσις τοῦ ε. κ. π.

93. *Θεώρημα α'.* — Θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς

5, 10, 20,

ὧν ὁ μεγαλύτερος 20 διαιρεῖται διὰ τῶν λοιπῶν· οὗτος εἶναι κ. π. αὐτῶν, εἶναι δὲ καὶ τὸ ε. κ. π., διότι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 20 δὲν εἶναι πολλαπλάσιον αὐτοῦ. Ἄρα·

Τὸ *ε. κ. π. ἀριθμῶν, ὧν ὁ μεγαλύτερος διαιρεῖται διὰ τῶν λοιπῶν εἶναι αὐτὸς ὁ μεγαλύτερος.*

94. *Θεώρημα β'.* — Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ

2, 3, 10,

ὧν ὁ μεγαλύτερος 10 δὲν διαιρεῖται διὰ πάντων τῶν λοιπῶν. Τὸ μικρότερον πολλαπλάσιον τοῦ 10 τὸ διαιρούμενον δι' ὅλων εἶναι $10 \times 3 = 30$· ἐπειδὴ δὲ ὁ μικρότερος ἀριθμὸς τοῦ 30 δὲν διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ 10 καὶ διὰ τῶν λοιπῶν, ἄρα ὁ 30 εἶναι τὸ ε. κ. π. Ὅθεν ἕπεται ὅτι.

Ἐὰν ἔχωμεν ἀριθμούς, ὧν ὁ μεγαλύτερος δὲν διαιρεῖται διὰ πάντων τῶν λοιπῶν, διπλασιάζομεν τοῦτον, τριπλασιάζομεν κ.τλ., τὸ δὲ πρῶτον πολλαπλάσιον αὐτοῦ, ὅπερ θὰ εὕρωμεν διαιρούμενον διὰ πάντων τῶν λοιπῶν, εἶναι τὸ ζητούμενον ε. κ. π.

Παραδείγματα. — α') Τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 3, 6, 12 εἶναι ὁ 12.

β') Τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 5, 7, 10 εἶναι ὁ 70.

Παρατήρησις.—Ἔστω κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν 5, 7, 10 διάφορον τοῦ 70 ὁ ἀριθμὸς Π ἔνθα $\Pi > 70$. Ὑποθέσωμεν ὅτι $\Pi : 70$ δίδει πηλίκον ρ καὶ ὑπόλοιπον υ, ἔνθα $\upsilon < 70$· τότε θὰ ἔχωμεν·

$$\Pi = (70 \times \rho) + \upsilon.$$

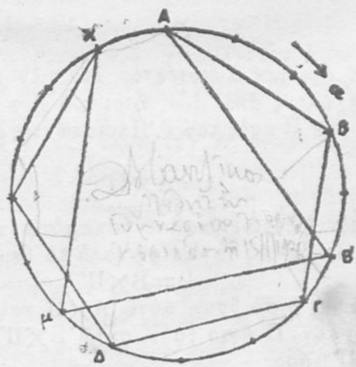
Οἱ ἀριθμοὶ 5, 7, 10 διαιροῦσι τὸν Π, ἐπειδὴ δὲ διαιροῦσι τὸν 70, θὰ διαιρῶσι καὶ τὸν $70 \times \rho$, θὰ διαιρῶσιν ἑπομένως καὶ τὴν διαφορὰν $\Pi - (70 \times \rho)$, ἤτοι τὸν υ. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 70 εἶναι τὸ ε. κ. π. τῶν 5, 7, 10 καὶ $\upsilon < 70$, ὁ $\upsilon = 0$, διότι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ ε. κ. π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν 5, 7, 10 διαιρούμενος δι' αὐτῶν εἶναι μόνος ὁ ἀριθμὸς 0. Ἄρα·

Πᾶν κ. π. ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ε. κ. π. αὐτῶν.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ε. κ. π. ἑκάστης τῶν σειρῶν·
α') 9, 5, β') 3, 5, 10·
γ') 3, 8, 10 δ') 9, 72, 360.

2) Περιφέρεια κύκλου εἶναι διῃρημένη εἰς 16 μέρη. Ἀπὸ τοῦ



σημείου Α κατὰ τὴν φορὰν α ἀναχωροῦσιν ἐγγεγραμμέναι τεθλασμέναι γραμμαὶ ΑΒ...Χ καὶ ΑΒ'....Χ. Ἑκάστη πλευρὰ τῆς α' ὑποτείνεται 3 διαιρέσεις τῆς περιφερείας, ἑκάστη δὲ τῆς β' 5. Εἰς ποῖον σημεῖον τῆς περιφερείας θὰ γίνῃ ἡ πρώτη συνάντησις τῶν κορυφῶν αὐτῶν καὶ διατί;

3) Δύο ὡρολόγια ἄρχονται τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἠχοῦντα τὴν

ὥραν. Μεταξὺ 2 ἤχων τοῦ α' ὡρολογίου παρέρχονται 3δ, μεταξὺ δὲ 2 ἤχων τοῦ β' 4δ. Μετὰ πόσα δευτερόλεπτα ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως θὰ συμπέσωσι πάλιν οἱ ἦχοι αὐτῶν;

ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΡΩΤΟΙ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΟΥΣ

Θεώρημα θεμελιῶδες.

95. Ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ Δ διαιρεῖ τὸ γινόμενον Α×Β καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Α (§ 86). Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ Δ καὶ Α ἔχουσι μ. κ. δ. τὴν μονάδα, τὰ γινόμενα

$$\Delta\times B \text{ καὶ } A\times B$$

θὰ ἔχωσι (§ 88) μ. κ. δ. $1\times B=B$. Ὁ Δ διαιρῶν τὸ Δ×Β ὡς πολλαπλάσιον αὐτοῦ καὶ τὸ Α×Β ἐξ ὑποθέσεως θὰ διαιρῇ καὶ τὸν μ. κ. δ. αὐτῶν (§ 86). Ἄρα·

Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα, θὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου ἕπονται τὰ ἑπόμενα·

Α.

96. Ἔστω ὁ ἀριθμὸς Δ διαιρετὸς διὰ τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, ἤτοι τοῦ Α πρὸς τὸν Β, τοῦ Α πρὸς τὸν Γ καὶ τοῦ Β πρὸς τὸν Γ. Παριστῶντες διὰ Π τὸ πηλίκον Δ : Α ἔχομεν·

$$\Delta=A\times\Pi \qquad (1)$$

Ὁ Β διαιρῶν τὸν Δ διαιρεῖ καὶ τὸ ἴσον αὐτῷ Α×Π καί, ἐπειδὴ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Α, θὰ διαιρῇ κατὰ τὸ θεμελιῶδες θεώρημα τὸν Π· ἄρα·

$$\Pi=B\times\Pi' \qquad (2)$$

Ὁ Γ διαιρῶν τὸν Δ ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ Α×Π καὶ ὢν πρῶτος πρὸς τὸν Α θὰ διαιρῇ τὸν Π ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ Β×Π' καὶ ἑπομένως θὰ διαιρῇ καὶ τὸν Π'· ἄρα·

$$\Pi'=\Gamma\times\Pi'' \qquad (3)$$

Ἐὰν ἤδη τὰς ἰσότητας (1),(2),(3) πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη καὶ ἀπαλείψωμεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας Π καὶ Π', λαμβάνομεν·

$$\Delta = (A\times B\times\Gamma)\times\Pi'',$$

ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι ὁ Δ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ γινομένου Α×Β×Γ.

Ὅθεν ἕπεται ὅτι·

'Αριθμὸς διαιρετὸς δι' ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

'Εφαρμογή. Διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου εὐκολύνεται πολλάκις ἡ εὕρεσις χαρακτήρων διαιρετότητος· π. χ. ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 15, ἐὰν εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 καὶ διὰ 5· διότι 3 καὶ 5 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο καὶ $3 \times 5 = 15$. Ὁμοίως ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ $30 = 2 \times 3 \times 5$, ἐὰν εἶναι διαιρετὸς διὰ 2, διὰ 3 καὶ διὰ 5. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι ὁ 75 εἶναι διαιρετὸς διὰ 15, ὁ 288 διὰ 24 κτλ.

Β.

97. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ Δ διαιρέτης τοῦ Α. Ἐὰν ὁ Δ καὶ ὁ Β εἶχον κ. δ. διάφορον τῆς μονάδος τὸν Κ, οὗτος, διαιρῶν τὸν Δ, θὰ διήρει καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ Α καὶ θὰ ἦτο κ. δ. τῶν ἀριθμῶν Α καὶ Β, ὅπερ ἄτοπον, διότι οὗτοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· Ἄρα·

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, πᾶς διαιρέτης τοῦ ἑνὸς εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἄλλον.

Τούτου οὕτως ἔχοντος, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς Π εἶναι πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου $Α \times Β \times Γ \times Δ$. Κατὰ τἀνωτέρω πᾶς διαιρέτης τοῦ Π εἶναι πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου τούτου ἑπομένως, ἐὰν διήρει τὸ γινόμενον τοῦτο ἢ $(Α \times Β \times Γ) \times Δ$, ὢν πρῶτος πρὸ τὸν Δ θὰ διήρει τὸ $Α \times Β \times Γ$ ἢ $(Α \times Β) \times Γ$, ὢν δὲ πρῶτος πρὸς τὸν Γ θὰ διήρει τὸ $Α \times Β$ καὶ τέλος τὸν Α, ὅπερ ἄτοπον, διότι Π καὶ Α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἐπειδὴ δὲ οὐδεὶς διαιρέτης τοῦ Π διαιρεῖ τὸ γινόμενον, ἕπεται ὅτι ὁ Π εἶναι πρῶτος πρὸς τὸ γινόμενον. Ἄρα·

'Αριθμὸς πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων γινομένου εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς αὐτὸ τὸ γινόμενον.

ΣΗΜ. Διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ συμπέρασμα τοῦτο, ἐγένετο ἀνάγκη νὰ γνωρίσωμεν πρῶτον μίαν πρότασιν βοηθητικήν, ὅτι δηλ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους πᾶς διαιρέτης τοῦ ἑνὸς εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἕτερον.

Μία τοιαύτη πρότασις χρησιμεύουσα εἰς τὴν ἀπόδειξιν θεωρήματος, τοῦ ὁποίου ἐπὶ τούτῳ προτάσσεται, ἂν καὶ ἐξέρχεται κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον τῆς ἀλληλουχίας τῶν προτάσεων, καλεῖται λῆμμα.

Πόρισμα.—'Αριθμὸς πρῶτος πρὸς ἄλλον εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς πᾶσαν αὐτοῦ δύναμιν. Π. χ. ὁ 5, ὅστις εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 9, εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸν 9^4.

Γ.

98. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὁ Α ὤν πρῶτος πρὸς τὸν Β εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸν B^3, ὁ δὲ B^3 ὤν πρῶτος πρὸς τὸν Α εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸν A^3. Ἄρα·

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ αἱ δυνάμεις αὐτῶν θὰ εἶναι ὁμοίως πρῶται πρὸς ἀλλήλας.

Ἀσκήσεις.

1) Ἐὰν ἀριθμός τις Δ διαιρῆται διὰ δύο ἄλλων Α καὶ Β, χωρὶς νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν, οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β δὲν δύνανται νὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

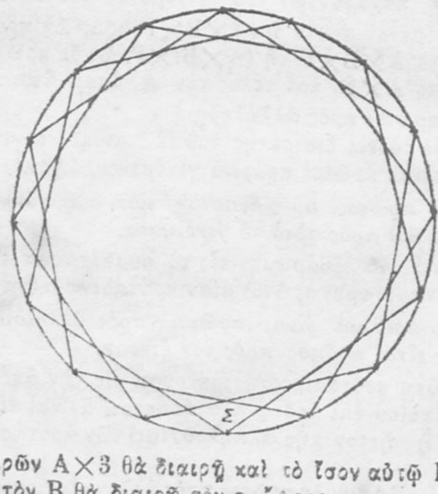
2) Ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' 20, ἐὰν εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 καὶ 5.

3) Νὰ εὑρεθῶσι χαρακτῆρες διαιρετότητος διὰ 35, 18 καὶ 45.

4) Ἐὰν Α εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Β, θὰ εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ ἄθροισμα $A+B$.

5) Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς ἐφ' ὃν πολλαπλασιαζόμενος ὁ Α γίνεται πολλαπλάσιον τοῦ Β εἶναι ὁ Β.

Ἀπόδειξις.—Ἄς ὑποτεθῇ ὅτι $A \times 3 = B \times \rho$, ἔνθα $3 < B$.



Ὁ Α διαιρῶν $A \times 3$ θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἴσον αὐτῷ $B \times \rho$ καὶ ὤν πρῶτος πρὸς τὸν Β θὰ διαιρῇ τὸν ρ. Ἄρα·

$p = A \times \pi$ καὶ $A \times 3 = B \times A \times \pi$ ἢ $3 = B \times \pi$, ὅπερ ἄτοπον, διότι ὑπετέθη $3 < B$,

3) Περιφέρεια κύκλου εἶναι διῃρημένη εἰς 16 ἴσα μέρη. Ἐὰν ἀρχόμενοι ἀπό τινος σημείου τῆς διαιρέσεως Μ ἑνώσωμεν ἀνὰ 3 τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως διὰ χορδῶν, μετὰ πόσας τοιαύτας χορδὰς τὸ ὀλιγώτερον θὰ ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ σημεῖον Μ;

ΠΡΩΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ὁρισμοί.

99. Πᾶς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τῆς μονάδος διαιρεῖται διά τινων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ὁ μικρότερος εἶναι ἡ μονὰς καὶ ὁ μεγαλύτερος αὐτὸς οὗτος ὁ ἀριθμός. Π. χ ὁ 10 διαιρεῖται διὰ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 5, 10 ὁ 7 διαιρεῖται διὰ τῶν ἀριθμῶν μόνον 1 καὶ 7· ὁ 7 λέγεται ἀριθμὸς *πρῶτος*, ὁ δὲ 10 *σύνθετος*. Γενικῶς.

Πρῶτος ἀριθμὸς λέγεται ἐκεῖνος, ὅστις δέν ἔχει ἄλλους διαιρέτας εἰμὴ ἑαυτὸν καὶ τὴν μονάδα. Πᾶς δὲ μὴ πρῶτος λέγεται σύνθετος.

100, Ἐκ τῶν διαιρετῶν ἀριθμοῦ, π. χ, τοῦ 10, ὁ ἀμέσως μεγαλύτερος τῆς μονάδος, 2, λέγεται *δεύτερος διαιρέτης*.

ΣΗΜ. Α΄. Πρέπει νὰ διακρίνωμεν τὰς ἐννοίας· ἀριθμοὶ πρῶτοι (καθ' ἑαυτούς) καὶ ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 9 καὶ 25 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἐνῷ καθ' ἑαυτοὺς εἶναι σύνθετοι.

ΣΗΜ. Β΄, Πᾶς ἀριθμὸς σύνθετος εἶναι γινόμενον τοῦ δευτέρου αὐτοῦ διαιρέτου ἐπὶ ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ συνθέτου τούτου ἀριθμοῦ· π. χ. $10 = 2 \times 5$, ἔνθα 2 εἶναι ὁ δεύτερος διαιρέτης τοῦ 10.

Ἰδιότητες.

101. *Θεώρημα α΄.* — Ἔστω δ ὁ δεύτερος διαιρέτης τοῦ α. Ἐὰν ὁ δ διῃρεῖτο δι' ἀριθμοῦ μικροτέρου αὐτοῦ καὶ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος, ἔστω τοῦ δ΄, τότε ὁ δ΄ θὰ διῄρει καὶ τὸν α, ὁπότε ὁ δ δὲν θὰ ἦτο ὁ δεύτερος διαιρέτης· ἄρα ὁ δ εἶναι πρῶτος. Ὅθεν ἕπεται ὅτι·

Ὁ δεύτερος διαιρέτης παντὸς ἀριθμοῦ εἶναι πρῶτος.

Πόρισμα α΄. Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ.

Πόρισμα β΄. Ἐὰν ἀριθμοί τινες δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ ἔχωσιν ὡς κ. δ. πρῶτον ἀριθμόν. Διότι ὁ δεύτερος διαιρέτης κοινοῦ διαιρέτου θὰ εἶναι καὶ αὐτὸς *κ. δ.*

102. *Θεώρημα β'.*—Ἔστω π τὸ πηλίκον τοῦ Α διὰ τοῦ δευτέρου αὐτοῦ διαιρέτου δ· ἔχομεν $A = \delta \times \pi$.

Ὁ δ, ὡς εἴπομεν, εἶναι πρῶτος, ὁ δὲ π μικρότερος τοῦ Α. Ἐὰν $\pi > 1$, θὰ ἔχωμεν ὁμοίως $\pi = \delta' \times \pi'$, ἔνθα δ' εἶναι πρῶτος καὶ $\pi' < \pi$· ἑπομένως·

$$A = \delta \times \delta' \times \pi'\text{·}$$

ἐὰν πάλιν $\pi' > 1$, τότε $A = \delta \times \delta' \times \delta'' \times \pi''$.

Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ π, π'.... βαίνουσιν ἐλαττούμενοι, ἀναγκαίως εἶναι ὡρισμένοι τὸ πλῆθος καὶ ὁ τελευταῖος εἶναι μονάς. ἄρα $A = \delta \times \delta' \times \delta'' \times \delta''' \times \ldots\ldots$ ἤτοι

Πᾶς ἀριθμὸς εἶνε γινόμενον πρώτων παραγόντων.

Παρατήρ.—Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος, οἱ πρῶτοι παράγοντες αὐτοῦ εἶναι *μόνον* αὐτὸς οὗτος καὶ ἡ μονάς· π. χ. $5 = 5 \times 1$.

103. *Θεώρημα γ'.*—Θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 7 καὶ 25, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ 7 πρῶτος ὢν δὲν διαιρεῖ τὸν 25.

Οἱ μόνοι ἀριθμοὶ οἵτινες διαιροῦσι τὸν 7 εἶναι ἡ μονὰς καὶ ὁ 7, ἐπειδὴ δὲ ὁ 7 δὲν διαιρεῖ τὸν 25, ἀπομένει ἡ μονὰς ὡς *μόνος* κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 7 καὶ 25. Ἄρα·

Πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος πρὸς πάντα ἄλλον, τὸν ὁποῖον δὲν διαιρεῖ.

104. *Θεώρημα δ'.*—Ἔστω Π ἀριθμὸς πρῶτος, ὅστις διαιρεῖ τὸ γινόμενον

$$A \times B \times \Gamma \times \ldots\ldots$$

Ἐὰν ὁ Π δὲν διῄρει τινὰ τῶν παραγόντων, θὰ ἦτο κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα πρῶτος πρὸς πάντας καὶ ἑπομένως (§ 98) καὶ πρὸς αὐτὸ τὸ γινόμενον, ὅπερ ἄτοπον, διότι τὸ διαιρεῖ. Ἄρα·

Πᾶς πρῶτος ἀριθμός, ἐὰν διαιρῇ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν, διαιρεῖ τοὐλάχιστον ἕνα ἐξ αὐτῶν.

Πόρισμα α'—Ἀριθμὸς πρῶτος ἐὰν διαιρῇ τὴν δύναμιν ἑνὸς ἀριθμοῦ, διαιρεῖ καὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

Πόρισμα β'.—Ἀριθμὸς πρῶτος, ἐὰν διαιρῇ γινόμενον πρώτων ἀριθμῶν, εἶναι ἴσος πρὸς ἕνα ἐξ αὐτῶν.

105. *Θεώρημα ε.*—Ἔστωσαν δύο γινόμενα πρώτων παραγόντων ἴσα

$$A \times B \times \Gamma = \alpha \times \beta \times \gamma\text{·}$$

ὁ Α ὡς διαιρῶν τὸ α' γινόμενον διαιρεῖ καὶ τὸ β', ἄρα εἶναι ἴσος πρὸς ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ, π. χ. τὸν α, ἤτοι $A = \alpha$.

Ἤδη ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ Α περιέχεται εἰς τὸ α' γινόμενον περισσοτέρας φορὰς ἢ εἰς τὸ β', π. χ. ὅτι ἔχομεν·

$$A \times A \times A \ldots\ldots\ldots = A \times B \ldots\ldots$$

Διαιροῦντες τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης δι' Α ἔχομεν

$$A \times B \times \ldots\ldots = B \times \ldots\ldots$$

ὅπερ ἄτοπον, διότι ὁ Α περιέχεται *μόνον* εἰς τὸ α' γινόμενον. Ἄρα·

Ἐάν δύο γινόμενα πρώτων παραγόντων εἶναι ἴσα, πᾶς πρῶτος παράγων περιεχόμενος εἰς τὸ ἓν θὰ περιέχηται καὶ εἰς τὸ ἕτερον καὶ τοσάκις εἰς τὸ ἓν ὁσάκις καὶ εἰς τὸ ἕτερον

Πόρισμα. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ παρίστανται ὡς γινόμενα πρώτων παραγόντων, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς παράγοντας καὶ τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι δὲν εἶναι ἴσοι. Π. χ. τὰ γινόμενα

$$5^2 \times 7 \times 11 \quad \text{καὶ} \quad 3^3 \times 5^4 \times 7$$

δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἴσα.

Πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν

106. Θεωρήσωμεν ὁσουσδήποτε πρώτους ἀριθμοὺς Α, Β, Γ, Δ· εἰς τὸ γινόμενον αὐτῶν προσθέτομεν 1 καὶ ἔχομεν

$$A \times B \times \Gamma \times \Delta + 1.$$

Ἔστω Π πρῶτος ἀριθμὸς διαιρῶν τὸ ἄθροισμα τοῦτο· ἐὰν οὗτος, (διάφορος τῆς μονάδος) ἦτο εἷς τῶν δοθέντων, τότε ὡς διαιρῶν τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν μετὰ τῆς μονάδος ἔπρεπε (§ 67 γ') νὰ διαιρῇ καὶ τὴν μονάδα, ὅπερ ἄτοπον· ὥστε ὁ Π εἶναι διάφορος τῶν δοθέντων καὶ ἑπομένως ὁσουσδήποτε πρώτους ἀριθμοὺς καὶ ἂν θεωρήσωμεν, ὑπάρχει πλὴν αὐτῶν καὶ ἕτερος. Ἤτοι·

Τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρον.

Ἀσκήσεις

1) Πᾶς πρῶτος ἀριθμός, πλὴν τοῦ 2 καὶ 3, αὐξανόμενος ἢ ἐλαττούμενος κατὰ μίαν μονάδα γίνεται σύνθετος.

2) Ἐὰν ἀριθμός τις δὲν διαιρῆται δι' οὐδενὸς τῶν πρώτων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα περιέχονται εἰς αὐτόν, εἶναι πρῶτος.

Εὕρεσις τῶν πρώτων ἀριθμῶν

107 Θέλομεν νὰ εὕρωμεν πάντας τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἀπὸ 1 μέχρις 100· γράφομεν κατὰ σειρὰν πάντας τοὺς ἀριθμούς, ἀπὸ 1 μέχρις 100· ἐργαζόμεθα δ' ἔπειτα ὡς ἑξῆς :

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Ὁ 2 εἶναι πρῶτος ἀριθμός, οὐχὶ ὅμως καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, τὰ ὁποῖα διαγράφομεν· πρὸς τοῦτο μετὰ τὸν 2 ἀριθμοῦμεν ἐν τῇ σειρᾷ ταύτῃ ἀνὰ 2 καὶ διαγράφομεν πάντα δεύτερον ἀριθμόν. Μετὰ τὸν 2 ἔρχεται ὁ 3, πρῶτος ἀριθμός, μεθ' ὃν διαγράφομεν πάντα τρίτον ἀριθμόν, διαγράφοντες οὕτω πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3, τινὰ τῶν ὁποίων, π. χ. ὁ 30, εἶναι διαγεγραμμένα ὡς πολλαπλάσια καὶ τοῦ 2, ἀλλ' ἡ ἐκ νέου αὐτῶν διαγραφὴ δὲν βλάπτει. Ὁ 4, ὡς καὶ πάντα τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, εἶναι ἤδη διαγεγραμμένα, ὡς πολλαπλάσια τοῦ 2. Ὁ 5 εἶναι πρῶτος, πρόκειται δὲ νὰ διαγράψωμεν καὶ τούτου τὰ πολλαπλάσια. Τὸ πρῶτον αὐτῶν, ὅπερ δὲν διεγράφη ἤδη, εἶναι τὸ τετράγωνον αὐτοῦ $5 \times 5 = 25$, διότι τὰ μικρότερα αὐτοῦ πολλαπλάσια π. χ. 5×3, εἶναι ἤδη διαγεγραμμένα ὡς πολλαπλάσια ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 5· διὰ τοῦτο ἀρχόμενοι μετὰ τὸν 25 διαγράφομεν πάντα πέμπτον ἀριθμόν. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον διαγράφομεν καὶ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 7, μεθ' ὃ ἡ ἐργασία ἐπερατώθη· διότι ὁ α΄ μὴ διαγεγραμμένος ἀριθμὸς ἐν τῇ σειρᾷ μετὰ τὸν 7 εἶναι ὁ 11, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον 121, ἤτοι τὸ πρῶτον μὴ διαγεγραμμένον πολλαπλάσιον εὑρίσκεται πέραν τοῦ 100 καὶ ἔτι μᾶλλον βεβαίως τὰ τετράγωνα τῶν μεγαλυτέρων τοῦ 11 ἀριθμῶν. Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἀπὸ 1 . . . . . 1000 ἢ οἱουδήποτε ἄλλου ἀριθμοῦ. Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους. Ὁ ἑπόμενος πίναξ περιέχει τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι τοῦ 1000.

1	59	139	233	337	439	557	653	769	883
2	61	149	239	347	443	563	659	773	887
3	67	151	241	349	449	569	661	787	907
5	71	157	251	353	457	571	673	797	911
7	73	163	257	359	461	577	677	809	919
11	79	167	263	367	463	587	683	811	929
13	83	173	269	373	467	593	691	821	937
17	89	179	271	379	479	599	701	823	941
19	97	181	277	383	487	601	709	827	947
23	101	191	281	389	491	607	719	829	953
29	103	193	283	397	499	613	727	839	967
31	107	197	293	401	503	617	733	853	971
37	109	199	307	409	509	619	739	857	977
41	113	211	311	419	521	631	743	859	983
43	127	223	313	421	523	641	751	863	991
47	131	227	317	431	541	643	757	877	997
53	137	229	331	433	547	647	761	881	

Ἀνάλυσις ἀριθμοῦ συνθέτου εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας.

108. Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 120. Θεωροῦμεν τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ 2 καὶ ἐφεξῆς 2, 3, 5... καὶ δοκιμάζομεν αὐτοὺς κατὰ σειράν, μέχρις οὗ εὕρωμεν ἕνα αὐτῶν διαιροῦντα τὸν 120· πα-

ρατηροῦμεν ὅτι ὁ 120 διαιρεῖται διὰ τοῦ 2· τὸν διαιροῦμεν καὶ ἔχομεν πηλίκον 60· ἄρα $120 = 2 \times 60$ (1).

Τὸ πηλίκον 60 διαιρεῖται καὶ αὐτὸ διὰ τοῦ 2· τὸ διαιροῦμεν καὶ ἔχομεν·

$$60 = 2 \times 30\cdot$$

ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) 60 διὰ 2×30 καὶ ἔχομεν·

$$120 = 2 \times 2 \times 30 \qquad (2).$$

Ὁμοίως διαιροῦμεν 30 : 2 καὶ ἔχομεν·

$$30 = 2 \times 15\cdot$$

ἄρα $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 15.$

ὁ 15 δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 2· παρατηροῦμεν τὶς ἐκ τῶν ἑπομένων τῷ 2 πρώτων ἀριθμῶν κατὰ σειρὰν διαιρεῖ τὸν 15 καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὸν διαιρεῖ ὁ 3· διαιροῦμεν 15 : 3 καὶ ἔχομεν·

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

ἢ συντομώτερον $120 = 2^3 \times 3 \times 5$.
καὶ οὕτως ὁ 120 εὑρίσκεται ἀναλελυμένος εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὡς ἑξῆς·

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Ἐντεῦθεν συνάγεται ὁ κανών·

Διὰ νὰ ἀναλύσωμεν ἀριθμὸν σύνθετον εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, γράφομεν δεξιᾷ αὐτοῦ κάθετον γραμμήν, δεξιᾷ δὲ ταύτης καὶ ἐν τῇ σειρᾷ τοῦ ἀναλυτέου ἀριθμοῦ τὸν μικρότερον ἐκ τῶν πρώτων ἀριθμῶν δι' ὧν οὗτος διαιρεῖται καὶ διαιροῦμεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν δι' αὐτοῦ γράφοντες τὸ πηλίκον ὑπὸ τὸν διαιρετέον· μεταχειριζόμενοι ἔπειτα τὸ πηλίκον ὡς νέον διαιρετέον πράττομεν τὸ αὐτὸ καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρις οὗ εὕρωμεν πηλίκον τὴν μονάδα 1. Οἱ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς καθέτου γραμμῆς γεγραμμένοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ ἀναλυτέου ἀριθμοῦ, ὅστις ἰσοῦται τῷ γινομένῳ πάντων τούτων.

Παρατ. α').—Ὅταν πρῶτός τις ἀριθμὸς παύσῃ νὰ εἶναι διαιρέτης, δὲν τὸν δοκιμάζομεν πλέον εἰς τὰ ἑπόμενα πηλίκα. Π. χ. εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα εἶναι περιττὸν νὰ δοκιμάσωμεν ἂν ὁ 2 διαιρῇ τὸν 5, διότι, ἐὰν τὸν διῄρει, ἔπρεπε νὰ διαιρῇ καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ 15, ὅπερ δὲν συμβαίνει.

Παρατ. β'). Ὅταν εἶναι εὔκολον, ἀναλύομεν προχείρως τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς ἄλλους παράγοντας πρώτους ἢ συνθέτους.

Εἶτα ἀναλύομεν τοὺς συνθέτους ἐξ αὐτῶν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας καὶ σχηματίζομεν γινόμενον περιέχον πάντας τοὺς εὑρεθέντας παράγοντας. Π. χ.

$$7000=7\times10\times10\times10.$$

Εὑρίσκομεν ὅτι $10=2\times5$· ἄρα·

$$7000=7\times5\times2\times5\times2\times5\times2=7\times2^3\times5^3.$$

Παρατ. γ').— Κατὰ τὴν ἀνάλυσιν ταύτην εὑρίσκομεν πολλάκις πηλίκα τὰ ὁποῖα δὲν γνωρίζομεν ἂν εἶναι πρῶτοι ἢ σύνθετοι ἀριθμοί· τότε, ἐὰν τὸ πηλίκον εἶναι μικρότερον τοῦ 1000, παρατηροῦμεν ἂν ὑπάρχῃ ἢ ὄχι εἰς τὸν πίνακα τῆς σελίδος 61· ὑπάρχουσι δὲ καὶ πίνακες πρώτων ἀριθμῶν μέχρι τοῦ 10000 ἢ καὶ μεγαλυτέρου ὁρίου. Π. χ. εἰς τὴν ἑπομένην ἀνάλυσιν.

$$\begin{array}{r|l} 3138 & 2 \\ 1569 & 3 \\ 523 & 523 \\ 1 & \end{array}$$

μανθάνομεν ἐκ τοῦ εἰρημένου πίνακος ὅτι ὁ 523 εἶναι πρῶτος. Ἄνευ δὲ πινάκων ἡ δοκιμασία τοῦ 523 γίνεται ὡς ἑξῆς· Ἐξετάζομεν ἂν ὁ 523 διαιρῆται διὰ τοῦ ἑπομένου τῷ 3 πρώτου ἀριθμοῦ 5. Ἐπειδὴ δὲν διαιρεῖται, ἐξετάζομεν ἂν διαιρῆται διὰ τοῦ ἑπομένου πρώτου· ἐξακολουθοῦντες οὕτω βλέπομεν ὅτι δὲν διαιρεῖται οὔτε διὰ τοῦ 29, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ὑπερβαίνει τὸν 523· ἄρα ὁ 523 εἶναι πρῶτος (§ 71, ἄσκ. 2) (§ 107).

Ἀσκήσεις.

1) Ὁ ἀριθμὸς 1829 εἶναι πρῶτος ἢ σύνθετος ;

2) Ν' ἀναλυθῶσιν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας οἱ ἀριθμοὶ 1326, 888, 6865, 56000, 840, 10000.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

Α'. Πολλαπλασιασμός.

109. Ἔστωσαν $A=2^2\times3$ καὶ $B=2^3\times3\times5^2$, ἔχομεν·

$$A\times B=(2^2\times3)\times(2^3\times3\times5^2)=2^5\times3^2\times5^2$$

Ἄρα·

Τὸ γινόμενον ἀριθμῶν εἶναι γινόμενον πάντων τῶν πρώτων αὐτῶν παραγόντων, λαμβανομένου ἑκάστου μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν οὓς ἔχει ἐν τοῖς ἀριθμοῖς.

Π. χ. $160=2^5\times5$ καὶ $35=5\times7$.

Ἄρα· $160\times35=2^5\times5^2\times7$.

Β'. Εὕρεσις δυνάμεως.

110. Ἔστω $A=2^2\times3^3\times5$. Κατὰ τὰ προηγούμενα ἔχομεν

$$A^2=2^4\times3^6\times5^2.$$

Ἐπειδὴ προσέτι $5^1=5$, ἕπεται ὅτι·

Τὸ τετράγωνον παντὸς ἀριθμοῦ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν αὐτῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ, ἀλλὰ μὲ ἐκθέτας διπλασίους.

Γενικῶς·

Ἡ νὴ δύναμις ἀριθμοῦ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν αὐτῶν πρώτων παραγόντων μὲ ἐκθέτας ν φορὰς μείζονας.

Γ'. Χαρακτῆρες τελείας δυνάμεως.

111. Ἔστω $A=2^4\times3^6$. Διαιροῦντες τοὺς ἐκθέτας διὰ 2 ἔχομεν $2^2\times3^3$, ὅπερ παριστῶμεν διὰ α, ὁπότε (§ 110)

$$\alpha^2=(2^2\times3^3)^2=2^4\times3^6=A.$$

Ἔστω ἤδη $B=2^5\times3^6$ καὶ ὅτι $B=\beta^2$. Ἀναλύομεν τὸν β εἰς πρώτους παράγοντας καὶ ἔστω $\beta=\gamma^\nu\times\delta^\kappa$, ὁπότε ἔχομεν·

$$\beta^2=\gamma^{2\nu}\times\delta^{2\kappa} \text{ ἄρα·}$$
$$2^5\times3^6=\gamma^{2\nu}\times\delta^{2\kappa}$$

ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη εἶναι ἄτοπος (§ 105) Ἄρα·

Ἀριθμὸς εἶναι τετράγωνον ἄλλου, ὅταν πάντες οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 2 καὶ τότε μόνον.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν γενικῶς ὅτι·

Ἀριθμὸς εἶνε νὴ δύναμις παντὸς ἄλλου, ὅταν πάντες οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων αὐτοῦ παραγόντων εἶνε πολλαπλάσια τοῦ ν καὶ τότε μόνον.

Ἀσκήσεις.

1) Ἔστωσαν $A=2^2\times3$, $B=2^4\times3\times7$.

Νὰ παρασταθῇ τὸ γινόμενον $A\times B$ ἀναλελυμένον εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας.

2) Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα νὰ παρασταθῶσιν αἱ δυνάμεις A^2, A^3, B^3, B^4 ἀναλελυμέναι εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας.

3) Τί γίνεται τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, ἐὰν ἡ πλευρὰ αὐτοῦ διπλασιασθῇ ἢ τριπλασιασθῇ κτλ. ;

4) Τί γίνεται ὁ ὄγκος κύβου, ἐὰν ἡ πλευρὰ αὐτοῦ διπλασιασθῇ, τριπλασιασθῇ κτλ. ;

5) Τίνες ἐκ τῶν ἀριθμῶν 5822, 563, 867, 1681 εἶναι τετράγωνα ἄλλων ;

6) $2 \times \alpha^2$ οὐδενὸς ἀριθμοῦ εἶναι τετράγωνον.
7) Τίνος ἀριθμοῦ κύβος εἶναι τὸ γινόμενον $5^6 \times 3^3 \times 7^9$;

Δ.

Γενικὸς χαρακτὴρ διαιρετότητος

112. Ἔστω $A = 2^5 \times 3^7 \times 5^4$ καὶ $B = 2^2 \times 3^7$.

Ὡς βλέπομεν, ὁ A περιέχει πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ B μὲ ἐκθέτην ὄχι μικρότερον, ὁπότε χωρίζοντες ἀπὸ τοῦ A τοὺς παράγοντας τοῦ B ἔχομεν

$A = (2^3 \times 5^4 \times (2^2 \times 3^7) = B \times (2^3 \times 5^4)$ ἤτοι·

ὁ A εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ B καὶ διαιρεῖται ἑπομένως δι' αὐτοῦ.

Ἤδη ἂς ὑποτεθῇ $B = 2^3 \times 3^8 \times 7$.

Κατὰ τὸ θεώρημα (§ 105) οὐδὲν πολλαπλάσιον τοῦ B δύναται νὰ εἶναι ἴσον τῷ A. Ἄρα·

Ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' ἄλλου, ἐὰν περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μεγαλύτερον καὶ τότε μόνον.

Ἀσκήσεις

1) Πότε ἀριθμός τις διαιρεῖται δι' 66;
2) Χωρὶς νὰ γίνῃ ἡ πρᾶξις τῆς διαιρέσεως νὰ εὑρεθῇ τίνες τῶν ἑπομένων διαιρέσεων ἐκτελοῦνται τελείως:

$5897 : 38, \quad 3300 : 132, \quad 8672 : 224$

Ε.

Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης

113. Ἡ ἀνάλυσις ἀριθμοῦ εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας παρέχει ἑτέραν μέθοδον πρὸς εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 48, 276, 84· ἀναλύοντες αὐτοὺς εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας ἔχομεν

$48 = 2^4 \times 3, \quad 276 = 2^2 \times 3 \times 23, \quad 84 = 2^2 \times 3 \times 7.$

Λαμβάνομεν τοὺς κοινοὺς αὐτῶν πρώτους παράγοντας 2 καὶ 3 μὲ τοὺς μικροτέρους ἐκθέτας των καὶ σχηματίζομεν τὸ γινόμενον $2^2 \times 3 = 12$. Ὁ 12 εἶναι ὁ κ. δ. τῶν δοθέντων (§ 112), μεγαλύτερος δὲ τούτου κ. δ. δὲν ὑπάρχει, διότι πᾶς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 12 ἢ θὰ περιέχῃ πρώτους παράγοντας διαφόρους τοῦ 2 καὶ 3, ἢ θὰ περιέχῃ τὸν ἕνα τούτων, ἢ καὶ τοὺς δύο μὲ ἐκθέτας μεγαλυτέρους ἢ ἀμφότερα θὰ συμβαίνωσιν, ὁπότε οὗτος δὲν θὰ εἶναι *κ. δ.* Ἄρα·

Ὁ μ. κ. δ. ἀριθμῶν δεδομένων εὑρίσκεται, ἐὰν ἀναλύσωμεν αὐτοὺς εἰς πρώτους παράγοντας καὶ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον πάντων τῶν κοινῶν αὐτοῖς πρώτων παραγόντων, λαμβανομένου ἑκάστου μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην.

Παραδείγματα· α΄)

$84 = 2^2 \times 3 \times 7, \quad 30 = 2 \times 3 \times 5, \quad 3168 = 2^5 \times 3^3 \times 11.$

ἑπομένως ὁ *μ. κ. δ.* τῶν ἀριθμῶν 84, 30, 3168

εἶναι $2 \times 3 = 6.$

β΄) $30 = 2 \times 3 \times 5, \quad 40 = 2^3 \times 5, \quad 147 = 3 \times 7^2$

ἑπομένως *μ. κ. δ.* τῶν ἀριθμῶν 30, 40, 147 εἶναι 1, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ *μ. κ. δ.* τῶν ἀριθμῶν·
α΄) 100, 64, 120·
β΄) 95, 42, 70

2) Τί γίνεται ὁ *μ. κ. δ.* ἀριθμῶν, ὅταν οὗτοι ὑψωθῶσιν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἐν γένει εἰς τὴν δύναμιν *ν*;

3) Διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας νὰ δειχθῇ ὅτι κοινοὶ διαιρέται δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι μόνον οἱ διαιρέται τοῦ *μ. κ. δ.* αὐτῶν.

Β *Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον*

114. Ὁμοίως διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ *ε. κ. π.*

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 48, 276, 84·
ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας καὶ ἔχομεν·

$$48 = 2^4 \times 3$$
$$274 = 2^2 \times 3 \times 23$$
$$84 = 2^2 \times 3 \times 7.$$

Σχηματίζομεν τὸ γινόμενον πάντων τῶν πρώτων αὐτῶν παραγόντων, κοινῶν καὶ μὴ κοινῶν, λαμβανομένου ἑκάστου μὲ τὸν μεγαλύτερον αὐτοῦ ἐκθέτην καὶ ἔχομεν·

$$2^4 \times 3 \times 7 \times 23 = 7728.$$

Κατὰ τὸν γενικὸν χαρακτῆρα τῆς διαιρετότητος (§ 112), ὁ 7728 εἶναι *κ. π.* τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, οὐδεὶς δὲ τῶν πρώτων αὐτοῦ παραγόντων δύναται νὰ λείψῃ ἀπὸ ἓν κ. π. τῶν δοθέντων, οὔτε νὰ ἔχῃ μικρότερον ἐκθέτην. Ἐὰν π. χ. ἀριθμός τις δὲν περιέχῃ τὸν παράγοντα 7, δὲν διαιρεῖται διὰ 84· ἐὰν δὲ περιέχῃ τὸν 2 μὲ ἐκθέτην 3, δὲν διαιρεῖται διὰ 48. Ἄρα πᾶν κ. π. θὰ περιέχῃ τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ 7728 ἢ μόνους ἢ μετ' ἄλλων· ἑπομένως, ὅταν αὐτοὺς μόνον περιέχῃ, εἶναι τὸ ε. κ. π. Ὅθεν·

B) *Τὸ ε. κ. π. ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας εἶναι γινόμενον πάντων τῶν πρώτων αὐτῶν παραγόντων κοινῶν καὶ μὴ κοινῶν, λαμβανομένου ἑκάστου μὲ τὸν μέγιστόν του ἐκθέτην.*

Παράδειγμα.—Τῶν ἀριθμῶν

$$35=5\times7$$
$$125=5^3$$
$$300=2^2\times3\times5^2$$

τὸ ε. κ. π. εἶναι

$$2^2\times3\times5^3\times7=10500.$$

Πόρισμα. — Τὸ ε. κ. π. ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν.

Διότι δὲν ὑπάρχει πρῶτος παράγων κοινὸς οὔτε δύο ἐξ αὐτῶν· ἄρα πρέπει νὰ ληφθῶσι κατὰ σειρὰν πάντες ὡς εὑρίσκονται·

Π. χ. τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν

$$\left.\begin{array}{r}35=5\times7\\ 8=2^3\\ 9=3^2\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{εἶναι}\\ 5\times7\times2^3\times3^2=\\ \quad 2520\end{array}$$

ΣΗΜ.—Ὅταν ἡ μέθοδος τῆς § 93 ἄγῃ μακράν, οὖσα ἐπίπονος, μεταχειριζόμεθα τὴν προηγουμένην πρὸς ταχυτέραν εὕρεσιν τοῦ ε. κ. π.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ε. κ. π. ἑκάστης τῶν σειρῶν·
α') 46, 85, 155· β') 122, 64. 35 γ') 16, 24. 62. 100.

2) Διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας νὰ δειχθῇ ἡ πρότασις τῆς § 94.

3) Τί γίνεται τὸ ε. κ. π. ἀριθμῶν, ὅταν οὗτοι ὑψωθῶσιν εἴς τινα δύναμιν;

4) Ἐὰν $A=2^2\times3^3\times5\times7^4$, τότε A εἶναι ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν $2^2, 3^3, 5, 7^4$.

6) Τρεῖς δρομεῖς A, B Γ πρόκειται νὰ τρέξωσι διαγράφοντες ἕκαστος διάφορον περιφέρειαν κύκλου. Τούτων ὁ A διατρέχει

τὴν περιφέρειαν εἰς 35δ, ὁ Β εἰς 50δ καὶ ὁ Γ εἰς 80δ. Ἕτοιμοι δὲ νὰ τρέξωσι κατέχουσι σημεῖον ἕκαστος ἀπὸ τῆς περιφερείας του. Μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ταυτοχρόνου ἐνάρξεως τῆς κινήσεως θὰ κατέχωσι καὶ οἱ τρεῖς τὸ σημεῖον ὅθεν ἐξεκίνησαν;

Γ/Κ

Ζ.

Σχέσις μεταξὺ μ. κ. δ. καὶ ἐ. κ. π. δύο ἀριθμῶν.

115. Ἐκ τοῦ τρόπου καθ' ὃν διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας εὑρίσκεται ὁ μ. κ. δ. καὶ τὸ ε. κ. π. αὐτῶν ἕπεται ὅτι·

Τὸ γινόμενων δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν ἐπὶ τὸ ε. κ. π.

Οὕτως, ἐὰν ἔχωμεν τοὺς ἀριθμοὺς Α καὶ Β καὶ παραστήσωμεν διὰ Μ τὸν μ. κ. δ. αὐτῶν καὶ διὰ Π τὸ ε. κ. π., θὰ ἔχωμεν·

$$A \times B = M \times \Pi$$

διότι ἔστω $A = 2^2 \times 3 \times 5$

$B = 2 \times 3^2 \times 7.$

τότε θὰ ἔχωμεν $M = 2 \times 3$ καὶ

$\Pi = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7.$

ἤτοι ὁ Π περιλαμβάνει πάντας τοὺς παράγοντας πλὴν μόνον ἐκείνων τοὺς ὁποίους περιλαμβάνει ὁ Μ. Π. χ. τῶν ἀριθμῶν 25 καὶ 35 ὁ μὲν μ. κ. δ. εἶναι 5, τὸ δὲ ε. κ. π. 175.

ἔχομεν δὲ $25 \times 35 = 5 \times 175.$

116. Ἕπεται ἐκ τῶν προηγουμένων ὅτι τὸ ε. κ. π. δύο ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὡς ἑξῆς.

Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν μ. κ. δ. αὐτῶν καὶ ἔπειτα δι' αὐτοῦ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐκ τοῦ ε. κ. π. εὑρίσκομεν τὸν μ. κ. δ.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ὁρισμοί. — Γραφὴ καὶ ἀπαγγελία

117. *Ἐὰν τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον παριστᾷ ἡ ἀκεραία μονὰς θεωρήσωμεν διῃρημένον εἰς ἴσα μέρη, ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν ἓν τῶν μερῶν τούτων λέγεται μονὰς κλασματική.*

Ἰδιαιτέρως δέ, ἐὰν τὸ ποσὸν τοῦτο διαιρέσωμεν εἰς 2 ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων λέγεται *ἓν δεύτερον*, ἐὰν εἰς 3, *ἓν τρίτον* κτλ.

Ὁ ἀριθμὸς ὁ προκύπτων διὰ τῆς ἐπαναλήψεως κλασματικῆς μονάδος λέγεται ἀριθμὸς κλασματικὸς ἢ κλάσμα· π. χ. τρία τέταρτα, πέντε ὄγδοα κτλ.

Καὶ αὐταὶ αἱ κλασματικαὶ μονάδες λέγονται *κλασματικοὶ ἀριθμοὶ ἢ κλάσματα.*

Πᾶν κλάσμα γράφεται διὰ δύο ἀκεραίων, οἵτινες γράφονται ὁ εἷς ὑπὸ τὸν ἄλλον χωριζόμενοι δι' ὁριζοντίας γραμμῆς· ὁ κάτωθεν τῆς γραμμῆς δηλοῖ ἀπὸ ποίαν κλασματικὴν μονάδα γίνεται τὸ κλάσμα ἢ εἰς πόσα μέρη διῃρέθη ἡ μονὰς καὶ λέγεται *παρονομαστής*, ὁ δὲ ἄλλος δηλοῖ πόσα τοιαῦτα μέρη ἐλάβομεν καὶ λέγεται *ἀριθμητής*· π. χ. τὸ κλάσμα πέντε ἕβδομα γράφεται $\frac{5}{7}$.

Αἱ κλασματικαὶ μονάδες κατὰ σειρὰν γράφονται ὡς ἑξῆς·

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4}, \ldots\ldots$$

Ἀπαγγέλλομεν δὲ τὸ κλάσμα ἀπαγγέλλοντες τὸν μὲν ἀριθμητὴν ὡς ἀπόλυτον ἀριθμητικόν, τὸν δὲ παρονομαστὴν ὡς τακτικόν· π. χ. $\frac{5}{8}$ ἀπαγγέλλεται *πέντε ὄγδοα.*

Ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς ὁμοῦ λέγονται *ὅροι* τοῦ κλάσματος.

Μικτὸς ἀριθμὸς λέγεται ὁ συγκείμενος ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος· π. χ. $5 + \frac{3}{4}, \ldots\ldots$

118. *Παρατήρησις.* Εἶναι φανερὸν ὅτι κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι ἴσοι, ἰσοῦται τῇ ἀκεραίᾳ μονάδι· π. χ. $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$,....

Ὁμοίως ὅτι κλάσμα εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ μεγαλύτερος τῆς μονάδος, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς εἶνε μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ· π. χ. $\frac{5}{8}<1$, $\frac{9}{5}>1$.

Τροπὴ ἀκεραίου εἰς κλάσμα.

119. Ἔστω ὁ ἀκέραιος 3. Ἑκάστη ἀκεραία μονὰς περιέχει 5άκις τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτῆς· ἑπομένως οἱ 3 ἀκέραιοι μονάδες θὰ περιέχωσιν αὐτὸ 5×3 ἢ 15 φοράς· ἄρα $3=\frac{15}{5}$.

Ὁμοίως $6=\frac{30}{5}$ κτλ.

Ἐν γένει·

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀκέραιον εἰς κλάσμα ἔχον δοθέντα παρονομαστήν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν καὶ ὑπὸ τὸ γινομένον θέτομεν παρονομαστὴν τὸν δοθέντα.

Τροπὴ μικτοῦ εἰς κλάσμα.

120. Ἔστω ὁ $5+\frac{3}{4}$. κατὰ τὰ προηγούμενα ἔχομεν $5=\frac{20}{4}$.

ἄρα· $5+\frac{3}{4}=\frac{20+3}{4}=\frac{23}{4}$.

Ὅθεν ἕπεται·

Μικτὸς τρέπεται εἰς κλάσμα, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν παρανομαστὴν τοῦ κλάσματος καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέσωμεν τὸν ἀριθμητήν· εἶτα δὲ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα τοῦτο γράψωμεν ὡς παρονομαστὴν τὸν τοῦ κλάσματος.

Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων κλάσματος.

121. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{27}{5}$. Γνωρίζομεν ὅτι $\frac{5}{5}=1$· ἄρα ὅσας φορὰς τὰ $\frac{5}{5}$ χωροῦσιν εἰς τὰ $\frac{27}{5}$, ἤτοι ὅσας φορὰς τὸ 5 χωρεῖ εἰς τὸ 27, τόσας ἀκεραίας μονάδας περιέχει τὸ $\frac{27}{5}$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 5

χωρεῖ 5άκις εἰς τὸν 27 καὶ περισσεύουσι 2 μονάδες, ἕπεται ὅτι $\frac{27}{5}=5+\frac{2}{5}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{127}{5}=25+\frac{2}{5}$, $\frac{25}{5}=5$.

Ἡ τοιαύτη ἐργασία λέγεται *ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων τοῦ κλάσματος*. Ἄρα·

Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας κλάσματος περιέχοντος τοιαύτας, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, ὁπότε τὸ πηλίκον παριστᾷ τὰς ἀκεραίας ταύτας μονάδας. Καί, ἐὰν μὲν ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι τελεία, τὸ δοθὲν κλάσμα τρέπεται εἰς ἀκέραιον, ἐὰν δὲ ἀτελής, εἰς μικτὸν ἀποτελούμενον ἐκ τοῦ πηλίκου καὶ ἐκ κλάσματος ἔχοντος ἀριθμητὴν τὸ ὑπόλοιπον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην.

Συμπλήρωσις τοῦ πηλίκου.

122. Ἐὰν εἰς 5 ἀνθρώπους μοιράσωμεν 1 δραχμήν, θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{1}{5}$ δρ.· ἐὰν μοιράσωμεν 7 δρ., θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{7}{5}$ δραχ. ἐὰν ἑπομένως μοιράσωμεν 27 δραχμάς, θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{27}{5}$ δραχ.

ἄρα $27 : 5 = \frac{27}{5}$.

Ἐν γένει·

Πᾶν κλάσμα παριστᾷ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

Κατὰ τὰ προηγούμενα δ' ἔχομεν·

$$\frac{27}{5}=5+\frac{2}{5}$$

ἤτοι, ὅταν ἐν τοῖς ἀκεραίοις ἡ διαίρεσις εἶναι ἀτελής, εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον πλῆρες, ἐὰν εἰς τὸ εὑρεθὲν ἀκέραιον πηλίκον προσθέσωμεν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν το ὑπόλοιπον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην.

Ἑπομένως μετὰ τὴν γνῶσιν τῶν κλασμάτων δὲν ὑπάρχουσι πλέον ἐν τοῖς ἀκεραίοις ἀτελεῖς διαιρέσεις.

Πόρισμα. Πᾶν κλάσμα πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του.

ΣΗΜ. $\frac{8}{1}=8$, $\frac{3}{1}=3$, ἤτοι, πᾶς ἀκέραιος δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν μὲν τὴν ἀκεραίαν μονάδα, ἀριθμητὴν δὲ αὐτὸν τοῦτον τὸν ἀριθμόν.

Ἀσκήσεις.

1) Ποσάκις τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ εἶναι μικρότερον τοῦ 3;

2) Ποσάκις τὸ $\frac{1}{8}$ περιέχεται εἰς τὸ 5;

3) Εἰς 7 ἀνθρώπους διενεμήθη χρηματικὸν ποσὸν καὶ ἔλαβεν ἕκαστος δρ. $3+\frac{2}{7}$· πόσαι ἦσαν αἱ διανεμηθεῖσαι δραχμαί;

4) 8 πήχεις ὑφάσματος τιμῶνται 67 δραχ· πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;

5) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 15 δρ.· πόσους πήχεις δυνάμεθα ν' ἀγοράσωμεν μὲ 228 δρ.;

6) Τὸ ὁλικὸν ὕψος οἰκίας μετὰ τῶν θεμελίων εἶναι 22 μέτρ., μόνον δὲ τῶν θεμελίων 3 μ. Τί μέρος τοῦ ὅλου ὕψους εἶνε τὸ ὑπὲρ τὸ ἔδαφος;

7) Νὰ ταχθῶσι κατὰ τάξιν μεγέθους τὰ κλάσματα

$$\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}.$$

8) Ἔχων τις 3500 δρ. ἐδαπάνησε τὰ $\frac{3}{7}$ αὐτῶν· πόσαι τῷ ἔμειναν;

Θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν κλασμάτων

123. α') Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$ πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν 5 ἐπὶ 4 καὶ ἔχομεν τὸ κλάσμα $\frac{20}{8}$, τὸ ὁποῖον προφανῶς εἶναι 4άκις μεῖζον τοῦ $\frac{5}{8}$· ἀντιστρόφως τὸ $\frac{5}{8}$ εἶναι 4άκις ἔλαττον τοῦ $\frac{20}{8}$, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει διὰ διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 20 διὰ 4. Ἄρα·

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ διὰ τινος ἀκεραίου, τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου.

ΣΗΜ. Ἐν γένει τὸ κλάσμα αὐξάνει ἢ ἐλαττοῦται, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ αὐξηθῇ ἢ ἐλαττωθῇ.

β') Ἐὰν εἰς 5 ἀνθρώπους μοιράσωμεν 3 δρ., ἕκαστος θὰ λάβῃ $\frac{3}{5}$ δρ. Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν τὸ αὐτὸ ποσὸν μοιράσωμεν εἰς διπλασίους ἀνθρώπους, τὸ μερίδιον ἑκάστου θὰ γίνῃ δὶς μικρότερον, ἀλλά, ὡς γνωρίζομεν, τὸ μερίδιον τότε εἶναι $\frac{3}{10}$· ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{3}{10}$ εἶναι δὶς μικρότερον τοῦ $\frac{3}{5}$ καὶ ἐπομένως τὸ $\frac{3}{5}$ διπλάσιον τοῦ $\frac{3}{10}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{3}{15}$ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ $\frac{3}{5}$. Ἄρα·

Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ διά τινος ἀριθμοῦ, τὸ κλάσμα διαιρεῖται ἢ πολαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

ΣΗΜ. Ἐν γένει τὸ κλάσμα αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται, ὅταν ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ ἐλαττῶται ἢ αὐξάνηται.

γ') Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ 3 καὶ ἔχομεν $\frac{6}{15}$. Κατὰ τὴν αʹ ἰδιότητα τὸ $\frac{6}{15}$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ $\frac{2}{15}$· κατὰ δὲ τὴν βʹ καὶ τὸ $\frac{2}{5}$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ $\frac{2}{15}$· ἄρα $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$. Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἕπεται ὅτι·

Ἡ ἀξία κλάσματος δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Ἀσκήσεις.

1) 15 πήχ. ὑφάσματος τιμῶνται 27 δρ.· πόσον τιμῶνται 8 πήχ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

Λύσις. Ὁ εἷς πῆχ. τιμᾶται $\frac{27}{15}$ καὶ οἱ 8 πήχ. $\frac{27\times8}{15}=14+\frac{6}{15}$ δραχ.

2) Τὰ $\frac{5}{8}$ οἰκίας διεμήθησαν ἐξ ἴσου εἰς 3 ἀνθρώπους· τί μέρος τῆς οἰκίας θ' ἀνήκῃ εἰς ἕκαστον;

3) $\frac{5}{8}$ τῆς δραχμῆς μὲ πόσα ὀγδοηκοστὰ ἰσοδυναμοῦσιν;

4) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἰσοδύναμον τῷ $\frac{7}{8}$ καὶ τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 60.

Ἁπλοποίησις.

124. *Ἁπλοιποιῶ* κλάσμα σημαίνει ὅτι εὑρίσκω ἄλλο κλάσμα ἔχον τὴν αὐτὴν ἀξίαν, ἀλλὰ μικροτέρους ὅρους.

Κατὰ τὰ προηγούμενα, ἐὰν οἱ ὅροι κλάσματος ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην, δυνάμεθα ν' ἁπλοποιήσωμεν τὸ κλάσμα διαιροῦντες τοὺς ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ κ. δ. Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{350}{150}$· ἁπλοποιοῦμεν διὰ 10 καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον κλάσμα $\frac{35}{15}$ καὶ τοῦτο πάλιν ἁπλοποιοῦντες διὰ 5 ἔχομεν $\frac{7}{3}$, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· τὸ τοιοῦτο δὲ κλάσμα λέγεται *ἀνάγωγον*.

125. *Θεώρημα*. Ἔστω τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{2}{3}$ καὶ ἰσοδύναμον αὐτῷ ἕτερον κλάσμα, τὸ $\frac{\alpha}{6}$· ἔχομεν·

$$(1) \qquad \frac{2}{3}=\frac{\alpha}{6}$$

Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἴσους τούτους ἀριθμοὺς ἐπὶ 6 καὶ ἔχομεν·

$$[2] \qquad \frac{2\times 6}{3}=\alpha.$$

Ἄρα ὁ 3 διαιρεῖ τὸ γινόμενον 2×6 καὶ ὢν πρῶτος πρὸς τὸν 2 διαιρεῖ τὸν 6· ἄρα $\beta=3\times\pi$, ἔνθα π εἶναι ἀκέραιος. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ 6 διὰ τοῦ $3\times\pi$ καὶ ἔχομεν·

$$\frac{2\times 3\times\pi}{2}=2\times\pi\cdot=\alpha$$

ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3 καὶ ἑπομένως δὲν δύνανται νὰ εἶναι μικρότεροι ὁ μὲν α τοῦ 2, ὁ δὲ 6 τοῦ 3.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι·

Κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, δὲν ἔχει ἄλλο ἰσοδύναμον αὐτῷ καὶ ἁπλούστερον· διὸ καλεῖται ἀνάγωγον.

Πόρισμα α') Δύο ἀνάγωγα κλάσματα εἶναι ἴσα, μόνον ὅταν ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς καὶ ἀριθμητὰς καὶ παρονομαστάς.

Πόρισμα β') Πάντα τὰ ἴσα πρὸς ἄλληλα κλάσματα προέρχονται ἐξ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀναγώγου κλάσματος διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ὅρων αὐτοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

126 Διὰ τῆς ἁπλοποιήσεως α') λαμβάνομεν σαφεστέραν ἔννοιαν τοῦ κλάσματος· β') εὐκολυνόμεθα εἰς τὰς ἐπ' αὐτῶν πράξεις.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ κατασταθῶσιν ἀνάγωγα τὰ κλάσματα

$$\frac{112}{3600},\quad \frac{252}{693},\quad \frac{1764}{4851}.$$

2) 1800 πήχ. ὑφάσματος τιμῶνται 390 δραχ.· πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;

ΣΗΜ. Ἔστω τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{283}{881}$, τοῦ ὁποίου δυσκολευόμεθα νὰ λάβωμεν σαφῆ ἰδέαν, διότι ἔχει μεγάλους ὅρους.

Διαιροῦμεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ, ὁπότε ὁ μὲν ἀριθμητὴς γίνεται 1, ὁ δὲ παρονομαστὴς $3\frac{32}{283}$. Ἄρα τὸ δοθὲν κλάσμα περιέχεται μεταξὺ τῶν κλασμάτων $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{3}$· οὕτω δὲ κατανοεῖται καλύτερον.

3) Ἡ ὑψηλοτέρα κορυφὴ τῶν Ἱμαλαΐων ἔχει ὕψος ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης 8588 μέτρ. Τί κλάσμα εἶναι τὸ ὕψος τοῦτο τῆς ἀκτῖνος τῆς γῆς, ἴσης πρὸς 6366 χιλμ.;

Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

127. *Ὁμώνυμα* κλάσματα λέγονται τὰ ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν· π. χ.

$$\frac{5}{9},\quad \frac{4}{9},\quad \frac{7}{9}$$

ἑτερώνυμα δὲ τὰ μὴ ὁμώνυμα.

Ἤδη θὰ ἐξετάσωμεν πῶς τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα τρέπονται εἰς ὁμώνυμα. Θεωρήσωμεν δύο ἑτερώνυμα·

$$\frac{\alpha}{\beta},\quad \frac{\gamma}{\delta}$$

Παλλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ δ καὶ τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου ἐπὶ β καὶ ἔχομεν τὰ κλάσματα

$$\frac{\alpha\times\delta}{\beta\times\delta},\ \frac{\gamma\times\beta}{\delta\times\beta}$$

ἰσοδύναμα πρὸς τὰ δοθέντα καὶ ὁμώνυμα· ἄρα·

Διὰ νὰ τρέψωμεν δύο κλάσματα ἑτερώνυμα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ἑκατέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἑτέρου.

Θεωρήσωμεν ἤδη πλείονα τῶν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα·

$$\frac{\alpha}{\beta},\ \frac{\gamma}{\delta},\ \frac{\varepsilon}{\zeta}.$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἰσοδύναμα πρὸς ταῦτα καὶ ὁμώνυμα εἶναι τὰ ἑπόμενα·

$$\frac{\alpha\times\delta\times\zeta}{\beta\times\delta\times\zeta},\ \frac{\gamma\times\beta\times\zeta}{\delta\times\beta\times\zeta},\ \frac{\varepsilon\times\beta\times\delta}{\zeta\times\delta\times\beta}.\qquad \text{ἤτοι·}$$

Διὰ νὰ τρέψωμεν κλάσματα ἑτερώνυμα πλείονα τῶν δύο εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρανομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων.

Κατὰ τοὺς κανόνας τούτους τὰ ἑτερώνυμα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{3}{4}$ τρέπονται εἰς τὰ ὁμώνυμα $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$.

Ὁμοίως τὰ ἑτερώνυμα

$$\frac{2}{3},\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{10}$$

τρέπονται εἰς τὰ ὁμώνυμα

$$\frac{100}{150},\ \frac{120}{150},\ \frac{45}{150}.$$

128. Θεωρήσωμεν τὰ ἑτερώνυμα $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{40}$. Ὁ μεγαλύτερος παρονομαστὴς 40 διαιρεῖται διὰ τῶν ἄλλων. Διαιροῦμεν τὸν 40 δι' ἑκάστου τῶν παρανομαστῶν καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν πηλίκα 10, 5, 1· πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον καὶ εὑρίσκομεν·

$$\frac{30}{40},\ \frac{25}{40},\ \frac{7}{40},$$

τὰ ὁποῖα προφανῶς εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ δοθέντα, εἶναι δὲ καὶ ὁμώνυμα, διότι οἱ παρονομασταὶ τῶν δοθέντων κλασμάτων ὡς διαιρέται πολλαπλασιαζόμενοι ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον δίδουσι τὸν κοινὸν διαιρετέον 40.

Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα γίνεται εὐκολώτερον, εὑρίσκεται δὲ καὶ μικρότερος κοινὸς παρονομαστής.

129. Θεωρήσωμεν ἤδη τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{10}$ ὧν ὁ μεγαλύτερος παρονομαστὴς 10 δὲν εἶναι κ. π. τῶν παρονομαστῶν· ζητοῦμεν τότε ἓν κ. π. καὶ ἰδίως τὸ ε. κ. π. τῶν παρονομαστῶν, διὰ νὰ ἔχωμεν ἔτι μικρότερον κοινὸν παρονομαστήν· εὑρίσκομεν δὲ ὅτι ε. κ. π. εἶναι ὁ 30 (§ 107)· τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τῶν παρονομαστῶν καὶ πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον ἔχομεν·

$$\frac{20}{30}, \quad \frac{24}{30}, \quad \frac{21}{30}.$$

Ἐὰν οἱ παρονομασταὶ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, τὸ ε. κ. π. αὐτῶν εἶναι (§ 108) τὸ γινόμενον αὐτῶν, ὁπότε διὰ τῆς μεθόδου ταύτης εὑρίσκομεν τὸν αὐτὸν κοινὸν παρονομαστὴν τὸν ὁποῖον καὶ διὰ τῆς α΄ μεθόδου.

Π. χ. προκειμένου περὶ τῶν κλασμάτων

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{9}{8}.$$

130. Ἔστωσαν ἤδη ἀνάγωγα κλάσματα·

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{1}{4}.$$

καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι τρέψαντες αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα εὕρομεν·

$$\frac{2}{3}=\frac{\alpha}{\pi}, \quad \frac{4}{5}=\frac{6}{\pi} \text{ καὶ } \frac{1}{4}=\frac{\gamma}{\pi}.$$

Κατὰ τὸ θεώρημα 125 θὰ ἔχωμεν·

$\pi=3.\rho=5\sigma.=4.\tau$· ἤτοι ὁ κοινὸς παρονομαστὴς π θὰ εἶναι κ. π. τῶν παρονομαστῶν τῶν ἀναγώγων κλασμάτων· Ἄρα·

Ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστὴς ὃν δύναται ν' ἀποκτήσωσιν ὁσαδήποτε κλάσματα ἀνάγωγα εἶναι τὸ ε. κ. π. τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν.

Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστὴς εἶναι ὁ 60.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι οἱωνδήποτε κλασμάτων, ἐὰν πρόκειται ἑτερώνυμα ὄντα νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα, θὰ ἔχωμεν τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν, ἐὰν τρέψωμεν ταῦτα πρῶτον εἰς ἀνάγωγα καὶ καταστήσωμεν ἔπειτα κοινὸν παρονομαστὴν τὸ ε. κ. π. τῶν παρονομαστῶν.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ ταχθῶσι κατὰ τάξιν μεγέθους τὰ κλάσματα

$$\frac{8}{5}, \quad \frac{7}{20}, \quad \frac{8}{10}, \quad \frac{13}{12}.$$

2) Τίς ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστὴς ὃν δύνανται ν' ἀποκτήσωσι τὰ κλάσματα τοῦ προηγουμένου προβλήματος;

3) Τὰ κλάσματα $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ νὰ τραπῶσιν εἰς ἕτερα ἰσοδύναμα καὶ ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν.

Ἰσότης καὶ ἀνισότης.

131. Δύο κλάσματα ὁμώνυμα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσιν ἴσους ἀριθμητάς, ἄνισα δέ, ὅταν ἔχωσιν ἀνίσους ἀριθμητὰς καὶ μεγαλύτερον τὸ ἔχον μεγαλύτερον ἀριθμητήν· π. χ.

$$\frac{5}{7}=\frac{5}{7}. \qquad \frac{5}{7}>\frac{3}{7}.$$

Ἐὰν τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ βλέπομεν οὕτως ἂν εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα καί, ἐὰν εἶναι ἄνισα, ποῖον εἶναι τὸ μεγαλύτερον. Ἐπειδὴ ἡ ἰσότης καὶ ἀνισότης τῶν κλασμάτων ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ἀριθμητῶν αὐτῶν, ἅμα γίνωσιν ὁμώνυμα, ἕπεται ὅτι ἐπὶ τῶν κλασμάτων ἰσχύουσιν αἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος τῶν ἀκεραίων.

ΣΗΜ. Ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα χρησιμεύει α') ὡς εἴδομεν, διὰ νὰ εὑρίσκωμεν ἂν δύο κλάσματα εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα καὶ ποῖον εἶναι μεγαλύτερον, β') εἰς τὰς ἐπὶ τῶν κλασμάτων πράξεις, ὡς θὰ ἴδωμεν μετ' ὀλίγον.

Ἀσκήσεις.

1) Ἐκ δύο ἐργατῶν ὁ α' ἔσκαψεν εἰς μίαν ἡμέραν τὰ $\frac{7}{18}$ μιᾶς ἀμπέλου, ὁ β' τὰ $\frac{8}{20}$· ποῖος εἰργάσθη περισσότερον;

2) Ἔμπορος ἠγόρασε 3 τεμάχια ὑφάσματος, τὸ α' ἀντὶ δρ. 8, τὸ β' ἀντὶ δρ. 12 καὶ τὸ γ' ἀντὶ δρ. 9. Ἐπώλησε δὲ τὸ μὲν

α' ἀντὶ 11 δρ., τὸ β' ἀντὶ 17 δρ. καὶ τὸ γ' ἀντὶ 13 δρ. Ποῖον ἐκ τῶν τριῶν τεμαχίων ἔφερε περισσότερον κέρδος ἀναλόγως τῆς ἀγορᾶς του;

3) Δύο ἀτμόπλοια διέτρεξαν τὸ μὲν α' 55 χιλμ. εἰς 8 ὥρας, τὸ δὲ β' 60 χιλμ. εἰς 9 ὥρας· ποῖον εἶναι ταχύτερον;

ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

132. Ἡ πρόσθεσις ὁρίζεται ἐνταῦθα ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους ὑπὸ τὸν ὅρον, ὅταν λέγωμεν μονάδας, νὰ ἐννοῶμεν καὶ τὰς ἀκεραίας καὶ τὰς κλασματικάς.

133. Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς προσθέσεως διακρίνομεν διαφόρους περιπτώσεις.

α') Ζητεῖται τὸ ἄθροισμα

$$\frac{3}{7}+\frac{5}{7}+\frac{4}{7}$$

Φανερὸν ὅτι, ἐὰν ἑνώσωμεν ὅλα τὰ ἕβδομα, θὰ ἔχωμεν $\frac{12}{7}$ Ἄρα

Διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσματα ὁμώνυμα, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θέτομεν παρονομαστὴν τὸν κοινόν.

β') Ἐὰν οἱ προσθετέοι εἶναι κλάσματα ἑτερώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω π. χ.

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{9}{6}=1\,\frac{1}{2}$$

γ') Ζητεῖται τὸ ἄθροισμα·

$$3\,\frac{2}{3}+8\,\frac{4}{5}$$

Δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἀνωτέρω· ἀλλ' εἶναι εὐκολώτερον νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα ἑνώνοντες τὰ μερικὰ ἀθροίσματα ὡς ἑξῆς·

$$3+8=11$$

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{22}{15}$$

Ὁλικὸν ἄθροισμα $= 12\frac{7}{15}$. Ἐν γένει, ὅταν εἴς τι ἄθροισμα οἱ προσθετέοι εἶναι ἀκέραιοι καὶ κλάσματα, προσθέτωμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἑνώνομεν ἔπειτα τὰ μερικὰ ταῦτα ἀθροίσματα.

134 Ἡ πρόσθεσις ἔχει προφανῶς καὶ ἐνταῦθα τὴν ἰδιότητα τῆς ἀδιαφορίας ὡς πρὸς τὴν τάξιν τῶν προσθετέων, ἄρα καὶ πάσας τὰς ἄλλας ἰδιότητας (§ 23) αἵτινες ἐξ αὐτῆς ἀπορρέουσι καὶ αἵτινες, ὡς εἴδομεν, παρίστανται διὰ τῶν τύπων

1) $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma$.

2) $(\alpha+\beta+\gamma)+\delta=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma$.

3) $(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)=\alpha+\beta+\gamma+\delta$.

Ἐνταῦθα ὅμως τὰ γράμματα παριστῶσιν ἀδιακρίτως ἀκεραίους ἢ κλάσματα.

135. Τοὺς ἀκεραίους καὶ κλάσματα ὁμοῦ καλοῦμεν *συμμέτρους ἀριθμούς*.

Ἀσκήσεις

Ἐδαπάνησέ τις διαδοχικῶς τὸ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{5}$ τῆς περιουσίας του. Τί μέρος τοῦ ὅλου ἐδαπάνησεν;

2) Ἐκ δύο ἐργατῶν ὁ α′ τελειώνει ἔργον τι μόνος του εἰς 8 ἡμέρας, ὁ β′ εἰς 15 ἡμέρας. Τί μέρος τοῦ ἔργου τελειώνουσιν ἀμφότεροι εἰς μίαν ἡμέραν;

Πρὸς κατασκευὴν πυρίτιδος ἀνεμίξαμεν $33\frac{1}{3}$ γραμ. νίτρου, $5\frac{1}{9}$ γραμ. ἄνθρακος καὶ $5\frac{5}{9}$ γραμ. θείου. Πόσον ζυγίζει ἡ κατασκευασθεῖσα πυρῖτις;

4) Ἐὰν δύο ἀνάγωγα κλάσματα ἔχωσι παρονομαστὰς πρώτους πρὸς ἀλλήλους, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ὁμοίως κλάσμα ἀνάγωγον.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

163. Ἡ ἀφαίρεσις ὁρίζεται ὅπως καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους.

167. Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἀφαιρέσεως διακρίνομεν διαφόρους περιπτώσεις.

α′) Ζητεῖται ἡ διαφορὰ $\frac{8}{9}-\frac{2}{9}$· αὕτη προφανῶς εἶναι $\frac{6}{9}$. Ἄρα·

Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ κλάσματος ὁμωνύμου, ἀφαι-

ροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μειωτέου καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν θέτομεν παρονομαστὴν τὸν κοινόν.

β') Ἐὰν τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω· π. χ.

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{4}=\frac{7}{8}-\frac{6}{8}=\frac{1}{8}.$$

γ') Ζητεῖται ἡ διαφορὰ

$$8\frac{4}{5}-5\frac{2}{3}.$$

Δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἀνωτέρω· ἀλλ' εἶναι εὐκολώτερον νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν χωριστὰ τῶν ἀκεραίων καὶ χωριστὰ τῶν κλασμάτων καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὰς δύο ταύτας διαφοράς· οὕτως ἔχομεν·

$$8-5=3,\ \frac{4}{5}-\frac{2}{3}=\frac{2}{15}.\ \text{ὅθεν·}$$

$$8\frac{4}{5}-5\frac{2}{3}=3\frac{2}{15}$$

Ζητήσωμεν προσέτι τὴν διαφορὰν $8\frac{3}{7}-3\frac{4}{7}$.

Ἐπειδὴ $\frac{4}{7}$ δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ $\frac{3}{7}$, λαμβάνομεν ἐκ τοῦ 8 μίαν ἀκεραίαν μονάδα, ἣν προσθέτομεν ὡς $\frac{7}{7}$ εἰς τὸ $\frac{3}{7}$, καὶ ἔχομεν·

$$7\frac{10}{7}-3\frac{4}{7}=4\frac{6}{7}.$$

δ') Πλὴν τῶν προηγουμένων διακρίνομεν καὶ ἄλλας δευτερευούσας περιπτώσεις, ὡς φαίνεται εἰς τὰ ἑπόμενα παραδείγματα·

α') Ζητεῖται $8\frac{5}{9}-4$.

Ἀφαιροῦμεν 4 ἀπὸ 8 καὶ ἔχομεν $8\frac{5}{9}-4=4\frac{5}{9}$.

β') Ζητεῖται $8\frac{9}{10}-\frac{5}{10}$.

Ἀφαιροῦμεν $\frac{5}{10}$ ἀπὸ $\frac{9}{10}$ καὶ ἔχομεν $8\frac{9}{10}-\frac{5}{10}=8\frac{4}{10}$.

Ὁμοίως $8\frac{5}{10}-\frac{9}{10}=7\frac{15}{10}-\frac{9}{10}=7\frac{6}{10}$.

γ') Ζητεῖται $12-\frac{4}{5}$.

Ἔχομεν $12-\frac{4}{5}=11\frac{5}{5}-\frac{4}{5}=11\frac{1}{5}$.

δ') Ζητεῖται $15-3\frac{3}{4}$.

Ἔχομεν $15-3\frac{3}{4}=14\frac{4}{4}-3\frac{3}{4}=11\frac{1}{4}$.

138. Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ ἰδιότητες τὰς ὁποίας ἔχει ἡ ἀφαίρεσις ἐν τοῖς ἀκεραίοις ἀληθεύουσιν ἐν γένει ἐπὶ τῶν συμμέτρων ἀριθμῶν. Ἤτοι.

1) $(\alpha+\delta)-(\beta+\delta)=\alpha-\beta$.
2) $(\alpha+\beta+\gamma)-\delta=\alpha+(\beta-\delta)+\gamma$.
3) $\delta-(\alpha+\beta)=\delta-\alpha-\beta$.

Ἀσκήσεις.

1) Ἐκ τριῶν ἐργατῶν ὁ α' τελειώνει ἔργον τι εἰς 5 ἡμέρας, ὁ β' εἰς 4 ἡμ. καὶ ὁ γ' εἰς 9 ἡμ. Πρὸς ἐκτέλεσιν δὲ τοῦ ἔργου τούτου εἰργάσθησαν τὴν πρώτην ἡμέραν ὁμοῦ καὶ οἱ τρεῖς, τὴν δὲ δευτέραν μόνος ὁ β'. Τί μέρος τοῦ ἔργου ὑπολείπεται;

2) Πατὴρ ἀφήνει εἰς τὰ 3 τέκνα του τὴν περιουσίαν του ὡς ἑξῆς· Εἰς τὸ α' τὸ $\frac{1}{3}$, εἰς τὸ β' τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ εἰς τὸ γ' τὰς ὑπολειπομένας 5000 δραχ. Πόση εἶναι ἡ ὅλη περιουσία;

3) Δεξαμενὴ ἔχει 3 κρήνας, ὧν αἱ μὲν 2 ρίπτουσιν εἰς αὐτὴν ὕδωρ, ἡ δὲ ἄλλη χρησιμεύει πρὸς ἐκροὴν τοῦ ἐν αὐτῇ ὕδατος, Ἡ α' κρήνη δύναται νὰ πληρώσῃ αὐτὴν εἰς 4 ὥρας, ἡ β' εἰς 5 ὥρ., ἡ δὲ γ' δύναται νὰ κενώσῃ αὐτὴν εἰς 7 ὥρ. Τῆς δεξαμενῆς οὔσης κενῆς ἀφήνονται καὶ αἱ 3 κρῆναι ἀνοικταί. Εἰς πόσας ὥρας θὰ πληρωθῇ ἡ δεξαμενή;

4) Ἐὰν δύο ἀνάγωγα κλάσματα ἔχωσι παρονομαστὰς πρώτους πρὸς ἀλλήλους ἡ διαφορὰ τῶν κλασμάτων τούτων εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις, καθ' ὅσον ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος, κλασματικὸς ἢ μικτὸς ἀριθμός.

Α'. Περίπτωσις.

139. Κατὰ τὰς ἰδιότητας (§ 123)

Κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον, ἐὰν πολλαπλασιάσω-

μεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἢ διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν δι' αὐτοῦ, ἐὰν διαιρῆται. Π. χ.

$$\frac{5}{8}\times 4=\frac{5\times 4}{8}=\frac{20}{8} \text{ ἢ}$$

$$\frac{5}{8}\times 4=\frac{5}{8:4}=\frac{5}{2}.$$

140. Θεωρήσωμεν ἤδη τὸ γινόμενον

$$\left(5\frac{3}{4}\right)\times 2.$$

Τοῦτο προφανῶς ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι

$$5\times 2+\frac{3}{4}\times 2=10+\frac{6}{4}=11\frac{1}{2}.$$

Ἠδυνάμεθα ὅμως νὰ τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ νὰ ἐργασθῶμεν κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα. Ἄρα·

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον, ἢ τρέπομεν αὐτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἐφαρμόζομεν ἔπειτα τὸν κανόνα τῆς § 139 ἢ πολλαπλασιάζομεν τὰ μέρη αὐτοῦ χωριστὰ προσθέτοντες ἔπειτα τὰ μερικὰ γινόμενα.

Ἐν γένει·

Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν χωριστὰ τὰ μέρη του καὶ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

Β' Περίπτωσις.

141. *Πρόβλημα.* Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 4]δραχ.· πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ πήχεως;

Λύσις. Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ πήχεως τιμᾶται $\frac{4}{5}$ δρ.· ἄρα τὰ $\frac{2}{5}$ πήχεως τιμῶνται $\frac{4}{5}\times 2=\frac{4\times 2}{5}=1\frac{3}{5}$ δρ.

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἐλάβομεν τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν 4 δρ. δίς, ἤτοι τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν 4 δρ.

Ἐὰν ἐζητεῖτο πόσον τιμῶνται 2 πήχ., θὰ ἐλέγομεν ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀξίαν τοῦ πήχεως ἐπὶ 2, διότι ἐμάθομεν ἐν τοῖς ἀκεραίοις ὅτι, *Ὁσάκις δίδεται ἡ ἀξία τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ ζητεῖται ἀξία πολλῶν μονάδων, πολλαπλασιάζομεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πολλῶν.*

Πρὸς γενίκευσιν τοῦ κανόνος τούτου λέγομεν ὅτι, καὶ ὅταν οἱ πήχεις εἶναι $\frac{2}{5}$, πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀξίας αὐτῶν πολλαπλασιάζομεν τὴν ἀξίαν τοῦ πήχεως ἐπὶ $\frac{2}{5}$. ἤτοι νὰ πολλαπλασιασθῇ ἀριθμὸς ἐπὶ $\frac{2}{5}$ σημαίνει νὰ ληφθῶσι τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ ἢ τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ δὶς.

Ὁ συλλογισμὸς μένει ὁ αὐτός, καὶ ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλασματικὸς ἢ μικτὸς ἀριθμός· π. χ. ἐὰν εἴχομεν τὸ πρόβλημα·

Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται $\frac{4}{5}$ δρχ. πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ πήχεως; $\left(\text{τὰ } \frac{2}{5} \text{ τῶν } \frac{4}{5} \text{ ἤτοι } \frac{4}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{25}\right)$

Γενικῶς·

142. Νὰ πολλαπλασιασθῇ ἀριθμὸς ἐπὶ πλῆθός τι δευτέρων ἢ τρίτων ἢ τετάρτων κτλ. τῆς μονάδος σημαίνει νὰ λάβωμεν τὸ ἥμισυ αὐτοῦ ἢ τὸ τρίτον κτλ. τοσάκις, ὅσας τοιαύτας κλασματικὰς μονάδας περιέχει ὁ πολλαπλασιαστής.

143. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν·

$$7\times\frac{3}{4}=\frac{7}{4}\times 3=\frac{7\times 3}{4}=\frac{21}{4}.\ \text{Ἤτοι·}$$

Ἀκέραιος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλάσμα, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

144. Ἔστω τὸ γινόμενον

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}.$$

Τοῦτο σημαίνει νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ $\frac{2}{3}$. Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ $\frac{2}{3}$ εἶναι (§ 142) $\frac{2}{3\times 5}$. τούτου δὲ 4πλάσιον εἶναι $\frac{2\times 4}{3\times 5}$. Ἄρα·

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times 4}{3\times 5}=\frac{8}{15}.\ \text{Ἤτοι·}$$

Τὸ γινόμενον δύο κλασμάτων εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

ΣΗΜ. Τὸ γινόμενον $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ λέγεται κλάσμα τοῦ κλάσματος $\frac{2}{3}$.

Ἐφαρμογή. Ἐὰν ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται $\frac{2}{3}$ δρχ., τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ τιμῶνται $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$ δρ.

Ἔστω τὸ γινόμενον

$$\left(5\ \frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}.$$

Πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἀνωτέρω. Ἀλλὰ πλὴν τούτου εὐκόλως βλέπομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν χωριστὰ τὰ μέρη τοῦ μικτοῦ καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα. Ἤτοι·

$$5\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=5\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}+\frac{4}{9}=\frac{34}{9}=3\ \frac{7}{9}.$$

Τῷόντι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ $5\ \frac{2}{3}$ εἶναι $\frac{5}{3}+\frac{2}{9}$ διότι

$$\left(\frac{5}{3}+\frac{2}{9}\right)\times 3=\frac{5}{3}+\frac{5}{3}+\frac{5}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=5+\frac{2}{3}\ \text{ἄρα}$$

τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $5\ \frac{2}{3}$ θὰ εἶναι $\frac{5}{3}\times 2+\frac{2}{9}\times 2=5\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$.

145. Γενικῶς·

Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλάσμα, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν χωριστὰ τὰ μέρη αὐτοῦ καὶ ἑνώσωμεν ἔπειτα τὰ μερικὰ γινόμενα.

Π. χ. $\left(5+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)\times\frac{3}{10}=5\times\frac{3}{10}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{10}.$

Γ'. Περίπτωσις.

146. Ἐν γένει, ὁσάκις ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μικτός, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν αὐτὸν εἰς κλάσμα, ὁπότε ἡ περίπτωσις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην π. χ.

$$5\times\left(2\ \frac{3}{4}\right)=5\times\frac{11}{4}=\frac{55}{4}.$$

Ἀλλὰ δυνάμεθα καὶ ἄλλως νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον,

Τῷόντι ἔστω τὸ ἑξῆς πρόβλημα

Πρόβλημα.—Ὁ εἷς πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 5 δραχ. πόσον τιμῶνται $2\ \frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως;

Λύσις. Οἱ 2 πήχ. τιμῶνται 5×2 δραχ. καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ πήχ. τιμῶνται $5\times\frac{3}{4}$ δρ. ἑπομένως τὸ ζητούμενον εἶναι·

$$5\times2+5\times\frac{3}{4}\ \text{δρ.}$$

Ἐὰν δὲ πρὸς γενίκευσιν τοῦ κανόνος τοῦ ἀναφερομένου ἐν § 140, τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ὀνομάσωμεν γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ $2\frac{3}{4}$, ἕπεται ὅτι

$$5\times2\frac{3}{4}=5\times2+5\times\frac{3}{4}.$$ Ἤτοι·

Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ μικτόν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ καὶ ἑνώσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

147. Οὕτως ἔχομεν·

$$\frac{5}{8}\times2\frac{3}{4}=\frac{5}{8}\times2+\frac{5}{8}\times\frac{3}{4}$$

$$4\frac{2}{7}\times5\frac{3}{4}=4\frac{2}{7}\times5+4\frac{2}{7}\times\frac{3}{4}$$

$$=4\times5+\frac{2}{7}\times5+4\times\frac{3}{4}+\frac{2}{7}\times\frac{3}{4}.$$

148. Ἐν γένει·

Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν χωριστὰ ἐφ' ἕκαστον μέρος τοῦ ἀθροίσματος καὶ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα· καὶ

Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἕτερον ἄθροισμα, ἐὰν ἕκαστον μέρος τοῦ πρώτου πολλαπλασιάσωμεν ἐφ' ἕκαστον μέρος τοῦ δευτέρου καὶ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

Γενικὸς ὁρισμὸς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

149. Γνωρίζομεν ἤδη ὅτι

α') $5\times3=5+5+5$.

β') $5\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$.

γ') $5\times\frac{2}{3}=\frac{5}{3}+\frac{5}{3}$.

δ') $5\times2\frac{2}{3}=5+5+\frac{5}{3}+\frac{5}{3}$.

Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ ἑξῆς γενικὸς ὁρισμὸς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς δεδομένων δύο ἀριθμῶν σχηματίζομεν ἐκ τοῦ πρώτου τρίτον, ὅπως ὁ δεύτερος σχηματίζεται ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς.

Ὁ πρῶτος λέγεται πάντοτε πολλαπλασιαστέος, ὁ δεύτερος πολλαπλασιαστής, ἀμφότεροι παράγοντες καὶ τὸ ἐξαγόμενον *γινόμενον*.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἢ ὁλόκληρος πολλαπλασιαστέος ἐπαναλαμβάνεται πολλάκις ἢ μέρος αὐτοῦ ἢ ἀμφότερα ταῦτα συμβαίνουσι.

Τάξις τῶν παραγόντων.

150. Ἐκ τοῦ κανόνος τῆς § 144 ἕπεται ὅτι

$$\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} \times \frac{\alpha}{\beta}$$

Διότι $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \times \gamma}{\beta \times \delta} = \frac{\gamma \times \alpha}{\delta \times \beta} = \frac{\gamma}{\delta} \times \frac{\alpha}{\beta}$.

Ἐπειδὴ δὲ πᾶς σύμμετρος ἀριθμὸς δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα, συνάγομεν ὅτι

Τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει μεταβαλλομένης τῆς τάξεως τῶν παραγόντων.

Γινόμενον διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμόν.

151. Κατὰ τὴν § 145 ἔχομεν·

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} \right) \times \frac{\varepsilon}{\zeta} = \left(\frac{(\alpha \times \delta) - (\beta \times \gamma)}{\beta \times \delta} \right) \times \frac{\varepsilon}{\zeta} =$$

$$= \frac{[(\alpha \times \delta) - (\beta \times \gamma)] \times \varepsilon}{\beta \times \delta \times \zeta} = \frac{(\alpha \times \delta \times \varepsilon) - (\beta \times \gamma \times \varepsilon)}{\beta \times \delta \times \zeta} =$$

$$= \frac{\alpha \times \delta \times \varepsilon}{\beta \times \delta \times \zeta} - \frac{\beta \times \gamma \times \varepsilon}{\beta \times \delta \times \zeta} = \frac{\alpha \times \varepsilon}{\beta \times \zeta} - \frac{\gamma \times \varepsilon}{\delta \times \zeta} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\varepsilon}{\zeta} \right) -$$

$$- \left(\frac{\gamma}{\delta} \times \frac{\varepsilon}{\zeta} \right).$$ Ἤτοι

Διαφορὰ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον χωριστὰ καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον.

Γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν.

152. Γινόμενον ἀριθμῶν περισσοτέρων τῶν δύο ὁρίζεται πάντοτε ὡς καὶ ἐν τοῖς ἀκεραίοις.

Ἔστω τὸ γινόμενον

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7}$$

Εὑρίσκομεν πρῶτον

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5},$$

ἔπειτα τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ $\frac{6}{7}$, τὸ ὁποῖον εἶναι

$$\frac{2\times4\times6}{3\times5\times7}=\frac{48}{105}.$$

Ὅθεν ἕπεται ὅτι·

Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε κλασμάτων εἶνε κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρανομαστῶν.

Πρὶν ἐκτελέσωμεν τοὺς σεσημειωμένους πολλαπλασιασμοὺς εἰς τὸ κλάσμα τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὸ γινόμενον, δυνάμεθα πολλάκις ν' ἁπλοποιήσωμεν αὐτό.

Π. χ. Εἰς τὸ προηγούμενον γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 3 τοὺς ὅρους αὐτοῦ καὶ ἔχομεν·

$$\frac{2\times4\times2}{5\times7}=\frac{16}{35}.$$

Κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα εὑρίσκεται καὶ τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν οἱωνδήποτε, ἐὰν τρέψωμεν τοὺς μὲν ἀκεραίους εἰς κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὴν 1 (ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον), τοὺς δὲ μικτοὺς εἰς κλάσματα μὲ παρονομαστὴν τὸν τοῦ κλάσματος αὐτῶν.

Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

153. Εἰς γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων κλασματικῶν, ἐὰν μεταβληθῇ ἡ τάξις αὐτῶν, οἱ ὅροι τοῦ γινομένου, ὡς γνωρίζομεν ἐκ τῶν ἀκεραίων, δὲν μεταβάλλονται· ἐπειδὴ δὲ πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα, ἕπεται ὅτι

Γινόμενον ὁσωνδήποτε συμμέτρων ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμός.

Οὕτως ἀποδεικνύεται γενικῶς ἡ ἀδιαφορία ὡς πρὸς τὴν τάξιν τῶν παραγόντων τοῦ πολλαπλασιαμοῦ.

Καὶ πᾶσαι δὲ αἱ λοιπαὶ ἰδιότητες αἱ ἐκ ταύτης πηγάζουσαι ἰσχύουσι καὶ ἐνταῦθα καὶ ἀποδεικνύονται ὡς καὶ ἐν τοῖς ἀκεραίοις· οὕτως ἔχομεν ἐπὶ οἱωνδήποτε ἀριθμῶν·

1) $\alpha\times\beta\times\gamma=\alpha\times(\beta\times\gamma)$.
2) $(\alpha\times\beta\times\gamma)\times\delta=\alpha\times(\beta\times\delta)\times\gamma$.
3) $(\alpha\times\beta)\times(\gamma\times\delta)=\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta$.

154. Ὡς εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα (§ 145-148), ἰσχύει καὶ ἐ.ταῦθα ἡ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης καὶ αἱ ἐξ αὐτῆς πηγάζουσαι. Οὕτως ἔχομεν·

1) $(\alpha+\beta)\times\gamma=\alpha\times\gamma+\beta\times\gamma$.

2) $(\alpha+\beta)\times(\gamma+\delta)=\alpha\times\gamma+\beta\times\gamma+\alpha\times\delta+\beta\times\delta$.

3) $(\alpha-\beta)\times\gamma=\alpha\times\gamma-\beta\times\gamma$.

Χρῆσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

155. Ἐκ τοῦ γενικοῦ ὁρισμοῦ τῆς § 149 ἕπεται ὅτι θὰ ἐκτελῶμεν πολλαπλασιασμόν, ὁσάκις πρόκειται νὰ ἐπαναλάβωμεν ἢ ὁλόκληρον ἀριθμὸν ἢ ὡρισμένον αὐτοῦ τέλειον μέρος, π.χ. τὸ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ἢ καὶ ἀμφότερα ταῦτα. Τοιαῦται δὲ περιστάσεις εἶναι αἱ ἑπόμεναι·

α') Ὡς εἴδομεν ἤδη, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀξίαν τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ ζητῶμεν τὴν ἀξίαν πολλῶν μονάδων ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν. Π. χ. Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 2 δραχ., πόσον τιμῶνται $5\frac{3}{8}$ πήχ.; Τὸ ζητούμενον εἶνε $2\times5\frac{3}{8}$ δραχ.

β') Ὅταν ζητῆται ὡρισμένον μέρος ποσοῦ τινος. Π. χ. ἡ περιουσία τινὸς εἶναι 500 δρ.· πόσαι δρ. εἶναι τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτῆς; Τὸ ζητούμενον εἶναι $500\times\frac{3}{5}$.

γ') Ὁσάκις ἔχοντες ποσόν τι μεμετρημένον μὲ μίαν μονάδα ζητοῦμεν τὸν παριστῶντα αὐτὸ ἀριθμόν, ὅταν μετρηθῇ μὲ ὑποδιαίρεσιν τῆς μονάδος π. χ. $5\frac{3}{4}$ ὀκάδες πρὸς πόσα δράμια ἰσοδυναμοῦσι; Φανερὸν ὅτι τὸ ζητούμενον εἶναι $400\times5\frac{3}{4}$.

ΣΗΜ. Ἡ γ' περίπτωσις ὑπάγεται εἰς τὴν α'.

Ἀσκήσεις

1) Εἶχέ τις 365 δρ., ἐξ ὧν ἐδαπάνησε α' τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ β' τὰ ... πόσαι δρχ. ὑπολείπονται;

2) Ἔμπορος ἀνταλλάσσει σάκχαρον δι' ἀλεύρου δίδων 9 ὀκ. σακχάρου ἀντὶ 15 ὀκ. ἀλεύρου. Πόσας ὀκ. σακχάρου πρέπει νὰ δώσῃ, διὰ νὰ λάβῃ 567 ὀκ. ἀλεύρου;

3) Ἐδαπάνησέ τις τὰ $\frac{5}{7}$ τῆς περιουσίας του· εἶτα ἀπώλεσε τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ τέλος δωρεῖται εἰς ἓν τέκνον του τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου. Τί μέρος τῆς περιουσίας του ὑπολείπεται;

4) Σφαῖρα ἐλαστικὴ πεσοῦσα ἐξ ὕψους 18 μέτρων ἀναπηδᾷ πεντάκις. Εἰς ἑκάστην δὲ ἀναπήδησιν ἀνέρχεται εἰς τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ὕψους ὅθεν προηγουμένως πίπτει. Εἰς πόσον ὕψος ἀνῆλθε κατὰ τὴν τελευταίαν ἀναπήδησιν;

5) Τὸ ἐξ Εὐρώπης κομιζόμενον οἰνόπνευμα ἔχει συνήθως καθαρότητα $\frac{95}{100}$, ἤτοι εἰς 100 μέρη τὰ 95 εἶναι καθαρὸν οἰνόπνευμα καὶ τὰ 5 ὕδωρ. Πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς 5 $\frac{1}{2}$ ὀκ. τοιούτου οἰνοπνεύματος, ὥστε ἡ καθαρότης αὐτοῦ νὰ κατέλθῃ εἰς $\frac{87}{100}$.

6) Πρὸς πόσα χιλιοστὰ τῆς ἀκεραίας μονάδος ἰσοδυναμοῦσι τὰ $\frac{5}{8}$ αὐτῆς;

7) Νὰ κατασκευασθῇ πρόβλημα τοῦ ὁποίου ἡ λύσις ν' ἀπαιτῇ τὸν πολλαπλασιασμὸν

$$10 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$$

νὰ εἶναι δὲ διάφορον τοῦ 4ου προβλήμ. τοῦ ἀναφερομένου εἰς τὴν ἐλαστικὴν σφαῖραν.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

156. Ἡ διαίρεσις ὁρίζεται καὶ ἐνταῦθα ὡς πρᾶξις, δι' ἧς δεδομένων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον παράγει τὸν πρῶτον.

157. Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν δὲ τῆς πράξεως διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις, καθ' ὅσον ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος, κλασματικὸς μικτός.

Α'. Περίπτωσις.

Ἐκ τῶν θεμελιωδῶν ἰδιοτήτων (§ 123) ἔπεται ὅτι,

Ἵνα διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου, πολαπλασιάζομεν τὸν παρανομαστὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἢ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ, ἐὰν εἶναι διαιρετός· π. χ.

$$\frac{3}{5} : 7 = \frac{3}{35}$$

$$\frac{9}{5} : 3 = \frac{3}{5}.$$

Θεωρήσωμεν ἤδη τὸ πηλίκον $5\frac{6}{7} : 3$· πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔχομεν·

$$5\frac{6}{7} : 3 = \frac{41}{7} : 3 = \frac{41}{21}$$

ἢ διαιροῦμεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα. Ἤτοι·

$$5\frac{6}{7} : 3 = \frac{5}{3} + \frac{2}{7}.\ \text{Διότι}$$

$$\left(\frac{5}{3}+\frac{2}{7}\right)\times 3 = 5\frac{6}{7}.$$

Β'. Περίπτωσις.

158. Ζητεῖται $5 : \frac{3}{4}$. ἐὰν παραστήσωμεν τὸ πηλίκον διὰ π, ἔχομεν·

$$\pi \times \frac{3}{4} = 5.$$

Ἤτοι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πηλίκου εἶναι 5, ἐπομένως τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{5}{3}$ καὶ τὰ $\frac{4}{4}$, ἤτοι ὅλον τὸ πηλίκον, εἶναι $\frac{5\times 4}{3}$. Ἄρα·

$$5 : \frac{3}{4} = \frac{5\times 4}{3} = 5\times\frac{4}{3}$$

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3}\times\frac{5}{4}.$$

Προσέτι

$$5\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = 5\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}.$$

Γενικῶς·

Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν οἱονδήποτε διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.

Γ'. Περίπτωσις

159. Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν οἱονδήποτε διὰ μικτοῦ, τρέπομεν τὸν διαιρέτην εἰς κλάσμα καὶ ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω· π. χ.

$$5 : 2\frac{3}{4} = 5 : \frac{11}{4} = 5\times\frac{4}{11}.$$

Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

160. Παριστῶμεν διὰ π τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta}$, ὁπότε ἔχομεν·

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}\times\pi,$$

Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ $\frac{\mu}{\nu}$ καὶ λαμβάνομεν·

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\mu}{\nu} = \left(\frac{\gamma}{\delta}\times\frac{\mu}{\nu}\right)\times\pi \text{ ἢ}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\mu}{\nu} : \frac{\gamma}{\delta}\times\frac{\mu}{\nu} = \pi.\ \text{Ἄρα}$$

'Εὰν διαιρετέον καὶ διαιρέτην πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν ἀλλάσσει.

Καὶ πᾶσαι δὲ αἱ λοιπαὶ ἰδιότητες, περὶ ὧν εἴπομεν ἐν τοῖς ἀκεραίοις, ἰσχύουσι καὶ ἐνταῦθα ὁμοίως ἀποδεικνυόμεναι. Οὕτως ἔχομεν τοὺς ἑπομένους τύπους, ἔνθα τὰ γράμματα παριστῶσιν ἐν γένει ἀριθμοὺς συμμέτρους·

1) $(\alpha\times\beta\times\gamma):\delta=\alpha\times(\beta:\delta)\times\gamma$.

2) $\alpha:(\beta\times\gamma)=(\alpha:\beta):\gamma$.

3) $(\alpha+\beta):\gamma=(\alpha:\gamma)+(\beta:\gamma)$.

4) $(\alpha-\beta):\gamma=(\alpha:\gamma)-(\beta:\gamma)$.

161. Εἴδομεν ὅτι τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων ἰσοῦται πρὸς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρανομαστὴν τὸν διαιρέτην· π. χ.

$$16:5=\frac{16}{5}.$$

Τὴν τοιαύτην παράστασιν τοῦ πηλίκου γενικεύομεν ἐπὶ πάντων τῶν συμμέτρων ἀριθμῶν· οὕτω γράφομεν·

$$5:\frac{2}{7}=\frac{5}{\frac{2}{7}}.$$

Ὁμοίως ἀντὶ $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}$ γράφομεν $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$.

Αἱ τοιαῦται δὲ κλασματικαὶ παραστάσεις λέγονται κλάσματα *σύνθετα*· πρὸς διάκρισιν δὲ τὰ κλάσματα, περὶ ὧν μέχρι τοῦδε εἴπομεν, λέγονται *ἁπλᾶ*.

Πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῶν ἁπλῶν κλασμάτων καὶ πάντες οἱ κανόνες τῶν ἐπ' αὐτῶν πράξεων ἰσχύουσιν ἐπὶ τῶν συνθέτων, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἑπομένων.

162. *Θεώρημα α'.* Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, οὗ οἱ ὅροι εἶναι οἱοιδήποτε ἀριθμοί· παριστῶντες διὰ π τὸ πηλίκον $\alpha:\beta$ ἔχομεν·

$\alpha:\beta=\alpha\times\nu:\beta\times\nu=\pi$ (§ 160), ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\times\nu}{\alpha\times\nu}$. Ἄρα·

Ἡ ἀξία κλάσματος οἱουδήποτε ἁπλοῦ ἢ συνθέτου δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ πολαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Πόρισμα α'. Τὰ ἑτερώνυμα σύνθετα κλάσματα τρέπονται εἰς ὁμώνυμα ὅπως καὶ τὰ ἁπλᾶ.

Πόρισμα β'. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν συνθέτων κλασμάτων γίνεται ὅπως ἡ τῶν ἁπλῶν.

153. *Θεώρημα β'.* Ἔστω $\alpha : \beta = \pi$ καὶ $\gamma : \delta = \kappa$, ἔνθα τὰ γράμματα παριστῶσιν οἱουσδήποτε ἀριθμούς. Ἔχομεν·

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \beta \times \pi \\ \gamma = \delta \times \kappa\end{array}\right\} \text{ὅθεν}$$

$$(\alpha \times \gamma) = (\beta \times \delta) \times (\pi \times \kappa) \text{ ἢ}$$

$$\pi \times \kappa = \frac{\alpha \times \gamma}{\beta \times \delta}.$$

Ἄρα.
$$\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \times \gamma}{\beta \times \delta}.$$

Ὅθεν ἕπεται ὅτι

Τὸ γινόμενον δύο κλασμάτων ἐχόντων ὅρους οἱουσδήποτε εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

164. *Θεώρημα γ'.* Ζητεῖται $\delta : \frac{\alpha}{\beta}$, ἔνθα πάλιν τὰ γράμματα παριστῶσι οἱουσδήποτε ἀριθμούς.

Τὸ πηλίκον εἶναι $\delta \times \frac{\beta}{\alpha}$. διότι

$$\delta \times \frac{\beta}{\alpha} \times \frac{\alpha}{\beta} = \delta. \text{ Ἄρα·}$$

Ἀριθμὸς οἱοσδήποτε διαιρεῖται διὰ κλάσματος ἔχοντος ὅρους οἱουσδήποτε, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.

Χρῆσις τῆς διαιρέσεως.

165. Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τούς τε ἀκεραίους καὶ τὰ κλάσματα ὁρίζομεν ὡς ἑξῆς τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς γίνεται χρῆσις αὐτῆς.

α') Ὅταν πρόκειται ποσόν τι νὰ μερισθῇ εἰς ἴσα μέρη.

Π. χ. 22 ἄνθρωποι ἐμοιράσθησαν $110\frac{1}{2}$ δρ. πόσας ἔλαβεν ἕκαστος;

Τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶναι $110\frac{1}{2} : 22$.

β') Ὅταν ζητῆται ἡ ἀξία τῆς ἀκεραίας μονάδος, δεδομένης τῆς ἀξίας πολλῶν μονάδων οἱωνδήποτε· π. χ.

$25\frac{3}{4}$ πήχ. τιμῶνται $15\frac{4}{5}$ δρχ.· πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;

Τὸ ζητούμενον εἶναι

$$15\frac{4}{5} : 25\frac{3}{4}.$$

ΣΗΜ. Ἡ περίπτωσις αὕτη ὑπάγεται εἰς τὴν α΄.

γ΄) Ὅταν ζητῆται πῶς ἀποτελεῖται ποσόν τι ἔκ τινος ἄλλου ὁμοειδοῦς· π. χ.

Δύο ἄνθρωποι ἔχουσι περιουσίαν ὁ μὲν 5000 δρ., ὁ δὲ 1500 δρ. πῶς ἀποτελεῖται ἡ περιουσία τοῦ α΄ ἐκ τῆς τοῦ β΄ καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς;

Τὸ ζητούμενον εἶναι

$$5000 : 1500 = 3\frac{1}{3}.$$

Ἤτοι ἡ τοῦ α΄ ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ 3πλασίου τῆς τοῦ β΄ καὶ ἐκ τοῦ τρίτου αὐτῆς.

δ) Ὅταν δίδηται ἡ ἀξία τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ ἡ ἀξία πλήθους μονάδων οἱωνδήποτε ζητῆται δὲ τὸ πλῆθος αὐτῶν· π.χ.

Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται $2\frac{2}{3}$ δρχ.· πόσους πήχεις δυνάμεθα νὰ ἀγοράσωμεν μὲ 100 δραχ.;

Τὸ ζητούμενον εἶναι

$$100 : 2\frac{2}{3} = 37\frac{1}{2} \text{ πήχ.}$$

ΣΗΜ. Ἡ περίπτωσις αὕτη ὑπάγεται εἰς τὴν γ΄.

ε΄) Ὅταν ἐκ τοῦ μέρους ζητῆται τὸ ὅλον· π.χ.

Τὰ $\frac{3}{5}$ ἑνὸς κεφαλαίου εἶναι 1000 δρχ.· πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον;

Τὸ ζητούμενον εἶναι

$$1000 : \frac{3}{5} = \frac{1000 \times 5}{3}$$

Ἀσκήσεις.

1) Ἔμπορος ἠγόρασεν $125\frac{2}{3}$ ὀκ. ἐλαίου ἀντὶ 216 δρ.· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ κερδίσῃ ἐν ὅλῳ $75\frac{1}{2}$ δρ;

2) Νὰ κατασκευασθῇ πρόβλημα λυόμενον διὰ τῆς διαιρέσεως

$$\frac{5}{8} : \frac{3}{4}.$$

3) Σφαῖρα ἐλαστικὴ πεσοῦσα ἔκ τινος ὕψους ἀναπηδᾷ πεντά-

κις. Ἐκ πόσου ὕψους κατέπεσεν, ἐὰν εἰς ἑκάστην μὲν ἀναπήδησιν ἀνέρχηται εἰς τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ὕψους ὅθεν προηγουμένως πίπτει, τὸ δὲ ὕψος τῆς τελευταίας ἀναπηδήσεως εἶναι 2 μέτρα;

4) Εἶχέ τις 25 δρ., ἐξ ὧν ἐδαπάνησε $5\frac{3}{4}$ δρ., τί μέρος τῶν 25 δραχ. ἀποτελεῖ ἡ δαπάνη;

5) Δύο ἁμαξοστοιχίαι ἀναχωροῦσι συγχρόνως ἐκ δύο ἄκρων σιδηροδρομικῆς γραμμῆς. Ἡ α΄ διατρέχει ὅλην τὴν γραμμὴν εἰς 10 ὥρας, ἡ β΄ εἰς 14 ὥρ. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ συναντηθῶσι καὶ τί μέρος τῆς γραμμῆς θὰ διατρέξωσιν ἑκατέρα μέχρι τῆς συναντήσεως;

6) Ἐκ τοῦ μισθοῦ ὑπαλλήλου κρατοῦνται α΄) $1\frac{1}{4}$ τοῖς ἑκατὸν ὑπὲρ τῆς παιδείας, β΄) $7\frac{1}{2}$ τοῖς ἑκατὸν λόγῳ συντάξεως· τί μέρος τοῦ μισθοῦ του ἀποτελοῦσιν αἱ δύο κρατήσεις;

7) Ἔκ τινος πίθου περιέχοντος $120\frac{1}{2}$ όκ. ἐλαίου ἐπωλήθησαν $20\frac{1}{2}$ όκ. τί μέρος τοῦ ἐλαίου ἐπωλήθη καὶ τί ἔμεινεν;

Δυνάμεις.

166. Παρατηροῦμεν ὅτι $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}$. Ἄρα.

Κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην ὑψωθῶσιν οἱ ὅροι αὐτοῦ.

Οὕτως ἔχομεν γενικῶς·

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu=\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}.$$

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι τὰ γράμματα α καὶ β δύνανται νὰ παριστῶσιν οἱουσδήποτε ἀριθμούς.

167. Καὶ πᾶσαι αἱ λοιπαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων περὶ ὧν εἴπομεν ἐν τοῖς ἀκεραίοις ἀληθεύουσι καὶ ἐνταῦθα, στηριζόμεναι ὁμοίως ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· οὕτως ἔχομεν·

$$\alpha^\nu \times \alpha^\kappa \times \alpha^\sigma = \alpha^{\nu+\kappa+\sigma}$$
$$(\alpha \times \beta)^\nu = \alpha^\nu \times \beta^\nu$$
$$(\alpha^\nu)^\kappa = \alpha^{\nu\times\kappa}$$
$$\alpha^\kappa : \alpha^\nu = \alpha^{\kappa-\nu}$$

Ἔνθα τὰ γράμματα α καὶ β παριστῶσιν ἐν γένει ἀριθμοὺς συμμέτρους.

Ἀσκήσεις.

1) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κύβου ἔχοντος πλευρὰν $\frac{3}{10}$ τοῦ μέτρου;

2) Πόσον ζυγίζει σφαῖρα σιδηρᾶ ἔχουσα εἰδικὸν βάρος $7\frac{1}{2}$ καὶ ἀκτῖνα $\frac{1}{10}$ μέτρου;

3) Ἐὰν κλάσμα τι εἶνε ἀνάγωγον, καὶ πᾶσα δύναμις αὐτοῦ εἶναι ὁμοίως κλάσμα ἀνάγωγον;

4) Τί μέρος τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$ εἶναι ἡ τρίτη αὐτοῦ δύναμις;

5) $(\alpha+\beta)\times(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$, ἔνθα α καὶ β σύμμετροι.

6) Ἐὰν $\frac{1}{5}$ ὑψωθῇ εἰς τὴν 4την δύναμιν, ποσάκις γίνεται μικρότερον;

7) Ἔχομεν δύο κύκλους, ἐξ ὧν ὁ α′ ἔχει ἀκτῖνα 1 μέτρ., ὁ δὲ β′ $\frac{2}{3}$ μέτρ. Τί μέρος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ α′ κύκλου εἶναι τὸ τοῦ β′;

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν κλασμάτων καθόλου.

1) Τρεῖς ἐργάται διαφόρου δυνάμεως χρησιμοποιοῦνται πρὸς ἐκτέλεσιν ἔργου. Ἐὰν ἕκαστος αὐτῶν εἰργάζετο μόνος, ὁ μὲν α′ ἐχρειάζετο $1\frac{1}{2}$ ὥρ., ὅπως τὸ τελειώσῃ, ὁ δὲ β′ 2 ὥρ. καὶ ὁ γ′ $2\frac{1}{3}$ ὥρ. Εἰς πόσας ὥρας καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ ἐργαζόμενοι τελειώνουσι τὸ ἔργον;

2) Ἐδαπάνησα τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν χρημάτων μου, ἀπώλεσα ἔπειτα τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ ἐδώρησα τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου, ἔχω δὲ εἰσέτι 10 δρ.· πόσας δραχμὰς εἶχον ἐν ἀρχῇ;

2) $8\frac{3}{8}$ πήχ. ὑφάσματος τιμῶνται $5\frac{3}{4}$ δρχ.· πόσον τιμᾶται $6\frac{1}{8}$ πήχ.;

4) $8\frac{3}{4}$ πήχ. ὑφάσματος τιμῶνται $5\frac{1}{2}$ δρχ. Πόσους πήχεις δυνάμεθα ν' ἀγοράσωμεν μὲ 25 δρχ.;

5) Ἐκ τριῶν ἐργατῶν ὁ α' καὶ ὁ β' ὁμοῦ τελειώνουσιν ἔργον τι εἰς $\frac{30}{11}$ τῆς ἡμέρας, ὁ β' καὶ ὁ γ' εἰς $\frac{20}{9}$ τῆς ἡμέρας, ὁ α' καὶ ὁ γ' εἰς $\frac{12}{5}$ τῆς ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας ἕκαστος ἐργάτης μόνος θὰ ἐτελείωνε τὸ ἔργον;

6) Ἔμεινέ τις μὲ χρέος 200 δρ., ἀφοῦ ἐδαπάνησε τὰ $\frac{2}{3}$, τὸ $\frac{1}{5}$ καὶ τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ ποσοῦ, ὅπερ εἶχε. Πόσας δρ. εἶχεν;

7) Ἁμαξοστοιχία σιδηροδρομικὴ διατρέχουσα 48 χιλιόμ. τὴν ὥραν ἀναχωρεῖ $4\frac{1}{2}$ ὥρας μετὰ μίαν ἄλλην διατρέχουσαν μόνον 25 χιλιόμ. τὴν ὥραν. Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἀναχωρήσεως αἱ δύο ἁμαξοστοιχίαι θέλουσι συναντηθῇ;

8) Ἄθροισμα δύο κλασμάτων ἀναγώγων καὶ ἑτερωνύμων οὐδέποτε ἰσοῦται ἀκεραίῳ ἀριθμῷ.

9) Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}$, τότε ἕκαστον τῶν τριῶν ἴσων τούτων κλασμάτων ἰσοῦται πρὸς τὸ

$$\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon}{\beta+\delta+\zeta}$$

10) Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\gamma}{\delta}<\frac{\varepsilon}{\zeta}$, τότε

$$\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon}{\beta+\delta+\zeta}<\frac{\varepsilon}{\zeta}.$$

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄

ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ὁρισμοί.

168. Αἱ μονάδες $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$...... λέγονται κλασματικαὶ *δεκαδικαὶ* μονάδες. Ἑκάστη τούτων εἶναι δεκάκις μείζων τῆς ἀμέσως κατωτέρας.

Τὸ $\frac{1}{10}$ λέγεται κλασματικὴ δεκαδικὴ μονὰς *πρώτης τάξεως*, τὸ $\frac{1}{100}$ *δευτέρας τάξεως* κτλ.

169. Θεωρήσωμεν τὴν ἀπέραντον σειρὰν τῶν μονάδων

$$.......1000,\ 100,\ 10,\ 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{10000}.............$$

Πάσας ταύτας τὰς μονάδας ἀκεραίας ἢ κλασματικὰς καλοῦμεν *δεκαδικάς.*

Δεκαδικὸς ἀριθμὸς λέγεται ὁ συγκείμενος ἐκ μονάδων δεκαδικῶν· π. χ.

$$5+\frac{3}{10}+\frac{4}{100}\ \text{ἢ}\ \frac{8}{10}+\frac{5}{1000}\ \text{ἢ}\ 65.$$

ΣΗΜ. Εἰς τὸν ὁρισμὸν ἄρα περιλαμβάνονται καὶ οἱ ἀκέραιοι.

Γραφὴ καὶ ἀπαγγελία.

170. Ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν δεκαδικῶν μονάδων εἶναι δεκαπλασία τῆς ἀμέσως κατωτέρας, διὰ τοῦτο γράφομεν τοὺς δεκαδικοὺς ὅπως καὶ τοὺς ἀκεραίους, μὲ *μόνην* τὴν διαφορὰν ὅτι, ἐπειδὴ αἱ κατώταται μονάδες δὲν εἶναι πάντοτε τῆς αὐτῆς τάξεως, εἶναι ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ ποῖον ψηφίον ἄρχονται αἱ κλασματικαὶ δεκαδικαὶ μονάδες. Πρὸς τοῦτο θέτομεν κόμμα μετὰ τὸ τέλος τῶν ἀκεραίων μονάδων, ὁπότε μετὰ τὸ κόμμα τὴν πρώτην θέσιν κατέχει τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων, τὴν δευτέραν τὸ ψηφίον τῶν

ἑκατοστῶν κτλ. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς ὁ περιέχων 25 ἀκεραίας μονάδας, 3 δέκατα, 8 ἑκατοστὰ καὶ 4 χιλιοστὰ γράφεται·

25,384

Ἐὰν δὲ πρὸ τῶν μονάδων τῆς κατωτάτης τάξεως ἐλλείπωσι μονάδες τάξεώς τινος, θέτομεν εἰς τὴν θέσιν αὐτῶν 0, διὰ νὰ τηρηθῇ ἡ ἀξία τῶν ψηφίων· π. χ. ὁ ἀριθμὸς ὁ περιέχων 3 ἀκεραίας μονάδας καὶ 6 χιλιοστὰ γράφεται 3,006. Ὁμοίως ὁ περιέχων 3 δέκατα καὶ 6 χιλιοστὰ γράφεται 0,306.

171. Διὰ νὰ ἀπαγγείλωμεν γεγραμμένον δεκαδικόν, δυνάμεθα ν' ἀπαγγείλωμεν πρῶτον τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος καὶ εἶτα ἕκαστον δεκαδικὸν ψηφίον μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τὰς ὁποίας παριστᾷ· π. χ. ὁ ἀριθμὸς 3,14 ἀπαγγέλλεται·

Τρεῖς ἀκέραιαι μονάδες ἢ τρία ἀκέραιος, ἓν δέκατον καὶ τέσσαρα ἑκατοστά·

Παρατηροῦμεν δ' ὅτι 1 δέκατον=10 ἑκατοστά. Ὥστε ὁ προηγούμενος ἀριθμὸς δύναται ν' ἀπαγγελθῇ, καὶ ὡς ἑξῆς·

3. ἀκέραιος καὶ 14 ἑκατοστά.

Προσέτι καὶ ὡς ἑξῆς·

314 ἑκατοστά.

Διότι ὁ 3=300 ἑκατοστά. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ πολλὰ δεκαδικὰ ψηφία διαιροῦμεν τὸ δεκαδικὸν αὐτοῦ μέρος εἰς τμήματα τριψήφια, ἀπαγγέλλοντες ἕκαστον τμῆμα χωριστά· π. χ. ὁ ἀριθμὸς

3,141΄592΄65

ἀπαγγέλλεται·

3 ἀκέραιος, 141 χιλιοστά, 592 ἑκατομμυριοστὰ καὶ 65 ἑκατοντάκις ἑκατομμυριοστά.

ΣΗΜ. Προτιμῶμεν τὰ τριψήφια τμήματα, διὰ νὰ εὑρίσκωμεν εὐκολώτερον τὰ ὀνόματα τῶν μονάδων ἑκάστου τμήματος.

172. Οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ γράφονται καὶ ὡς κλάσματα.

Τῳόντι, ἔστω ὁ δεκαδικὸς 3,85· οὗτος, ὡς εἴδομεν, ἰσοδυναμεῖ πρὸς 385 ἑκατοστά, ἤτοι $\frac{385}{100}$.

Ἐν γένει·

Πᾶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἰσοδυναμεῖ πρὸς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν ἀκέραιον ὅστις προκύπτει ἀπαλειφομένου τοῦ κόμματος, καὶ παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ.

Διὰ τοῦτο οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται καὶ δεκαδικὰ κλάσματα· τὰ δὲ συνήθη κλάσματα πρὸς διάκρισιν λέγονται *κοινά*.

Ἰδιότητες.

173. α΄) Ἔστω ἀριθμὸς 5,42. Θέτομεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ὁσαδήποτε μηδενικά, π. χ. τρία, καὶ ἔχομεν ἀριθμὸν 5,42000 ἴσον πρὸς τὸν δοθέντα, διότι τὰ σημαντικὰ αὐτοῦ ψηφία ἔμειναν τὰ αὐτὰ καὶ ἀξία ἑκάστου ὡσαύτως ἡ αὐτή. Ἄρα·

Δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν μεταβάλλεται, ὁσαδήποτε μηδενικὰ καὶ ἂν θέσωμεν εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ.

β΄) Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 3,5841. Ἐὰν μεταθέσωμεν τὸ κόμμα μίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιά, ἔχομεν 35,841, ἀλλὰ τότε προφανῶς ἡ ἀξία ἑκάστου ψηφίου δεκαπλασιάζεται, ἑπομένως καὶ ὅλος ὁ ἀριθμός· ὁμοίως, ἐὰν μεταθέσωμεν τὸ κόμμα δύο θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ἡ ἀξία ἑκάστου ψηφίου ἑκατονταπλασιάζεται, ἑπομένως καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς γίνεται 100άκις μείζων.

Ἐν γένει·

Δεκαδικὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, 100 κτλ., ἐὰν μεταθέσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τὸ κόμμα τόσας θέσεις, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής.

Ἐὰν ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἱκανὰ δεκαδικὰ ψηφία διὰ τὴν μετάθεσιν τοῦ κόμματος, θέτομεν μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ· π. χ.

$$5,36 \times 1000 = 5360,0 = 5360.$$

γ΄) Ἕπεται ἐκ τῶν προηγουμένων ὅτι

Ἐὰν τὸ κόμμα μετατεθῇ μίαν ἢ δύο κτλ. θέσεις πρὸς τἀριστερά, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 10, 100 κτλ.·

π. χ. 625,8, : 10=62,58.

Καὶ ἐνταῦθα ἐν ἀνάγκῃ τίθενται μηδενικὰ εἰς τὴν ἀρχήν· π. χ. 3,58 : 1000=0,00358.

Ἀσκήσεις.

1) Ἔστω ὅτι τὸ χρυσοῦν φράγκον ἰσοδυναμεῖ πρὸς 1,085 δραχμὰς χαρτίνας· πρὸς πόσας δραχμὰς ἰσοδυναμοῦσι 10 ἢ 100 ἢ 1000 χρυσᾶ φράγκα;

2) Ἀγρὸς 36,25 βασιλικῶν στρεμμάτων ἐμοιράσθη εἰς 10 ἀνθρώπους· πόσον ἔλαβεν ἕκαστος;

ΣΗΜ. Ἓν βασιλικὸν στρέμμα=1000 τετραγωνικὰ μέτρα.

3) 1000 χρυσᾶ φράγκα ἠγοράσθησαν ἀντὶ 1085,65 δραχμῶν· πόσον ἠγοράσθη τὸ ἕν;

4) Ἓν χιλιόγραμμον ἰσοδυναμεῖ πρὸς 312,5 δράμια. Ὁ δὲ τόννος περιέχει 1000 χιλγρ. Νὰ τραπῇ ὁ τόννος εἰς δράμια.

ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

174. Ἡ πρόσθεσις ἐκτελεῖται ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι εἰς τὸ ἄθροισμα τίθεται κόμμα εἰς τὴν θέσιν ἔνθα ἀντιστοιχεῖ τὸ κόμμα τῶν προσθετέων· π. χ.

35,66	Προσθετέοι
8,687	
0.9	
45,247	Ἄθροισμα

Ὁ κανὼν ἰσχύει προφανῶς, καὶ ὅταν τινὲς τῶν προσθετέων εἶναι ἀκέραιοι.

Ἀσκήσεις

1) 3 ἀγγεῖα ἔχουσι χωρητικότητα τὸ α′ 2,35 λίτρας, τὸ β′ 1,75 λίτρ. καὶ τὸ γ′ 4,125 λίτρ. Ἑκάστη δὲ λίτρα χωρεῖ 1 χιλιόγρ. ὕδατος. Πόσα χιλιόγρ. ὕδατος χωροῦσι καὶ τὰ 3 ὁμοῦ;

2) Ἔμπορος εἰσέπραξε τὰ ἑξῆς ποσά· α′ 356,75 δρ., β′ 18,65 δρ., γ′ 1085,45 δρ.· πόσας δρχ. εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ καὶ πόσον τὸ δέκατον τῶν εἰσπραχθέντων χρημάτων;

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

175. Καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἐκτελεῖται ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους, τιθεμένου ἐν τῇ διαφορᾷ τοῦ κόμματος ἐν ᾗ θέσει ἀντιστοιχεῖ τὸ τοῦ μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου· π. χ.

8,45	μειωτέος
5.2537	ἀφαιρετέος
3,1963	διαφορά.

Ὁμοίως

8	μειωτέος
5.127	ἀφαιρετέος
2,873	διαφορά.

Ἀσκήσεις

1) Ἐξ ὑφάσματος ἔχοντος μῆκος 65,40 μέτρ. ἐκόπησαν α′ 3,60 μ., β′ 12,65 μ., γ′ 22,8 μ. Πόσα μέτρα ὑπολείπονται;

2) Ἐν ἀγγείῳ χωρητικότητος 8,6 λίτρ. περιέχονται 5,25 χιλιόγραμμα ὕδατος· πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ ρίψωμεν εἰς αὐτό, ὅπως πληρωθῇ ἐντελῶς;

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

176. Ζητεῖται τὸ γινόμενον

$$5,86 \times 3,7.$$

Τρέποντες τοὺς παράγοντας εἰς κοινὰ κλάσματα ἔχομεν.

$$\frac{586}{100} \times \frac{37}{10} = \frac{21682}{1000} = 21,682$$

Ὁμοίως·

$$5,86 \times 37 = \frac{586}{100} \times 37 = \frac{21682}{100} = 216,82.$$

Ἄρα·

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν' ὧν ὁ εἷς ἢ καὶ ἀμφότεροι εἶναι δεκαδικοί, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ὡς ἐὰν ἦσαν ἀκέραιοι, εἰς δὲ τὸ γινόμενον χωρίζομεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουσιν ὁμοῦ οἱ παράγοντες.

177. Προφανῶς ὁ προηγούμενος κανὼν ἐφαρμόζεται καὶ πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις.

1) Λόγῳ συντάξεως κρατοῦνται ἐκ τοῦ μισθοῦ τῶν ὑπαλλήλων τὰ 0,09. Ἐὰν ὁ ὑπάλληλος λαμβάνῃ κατὰ μῆνα 325 δρχ., πόση εἶναι ἡ μηνιαία κράτησις;

2) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἔχοντος βάσιν 85,4 μ. καὶ ὕψος 12,25 μ.;

3) Τί γίνεται τὸ γινόμενον

$$2,3 \times 0,64 \times 3,141,$$

ὅταν εἰς πάντας τοὺς παράγοντας μεταθέσωμεν τὸ κόμμα μίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιά;

4) Δύο πόλεις ἀπέχουσιν ἀπ' ἀλλήλων σιδηροδρομικῶς 450,35 χιλμ. Ἐκ τῆς α' ἀναχωρεῖ ἁμαξοστοιχία μὲ ταχύτητα 25,5 χιλμ. τὴν ὥραν, ταυτοχρόνως δὲ ἐκ τῆς β' ἑτέρα μὲ ταχύτητα 29,35 χιλμ. τὴν ὥραν. Πόσον θ' ἀπέχουσιν ἀπ' ἀλλήλων μετὰ 3 ὥρας;

5) Τὸ βάρος σώματος εἰς χιλιόγρ. παρίσταται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$Β = Λ \times δ,$$

ἔνθα Β δηλοῖ τὸ βάρος, Λ τὸν ὄγκον εἰς λίτρας, καὶ δ τὸ εἰδικὸν βάρος.

6) Πόσα χιλιόγρ. ζυγίζουν 3,5 κυδ. μέτρ. μολύβδου ἔχοντος εἰδικὸν βάρος 11,37 γνωστοῦ ὄντος ὅτι 1 κυδ. μ.=1000 λίτρ.;

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

178. Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος ἢ δεκαδικός.

Α' περίπτωσις.

Ζητεῖται τὸ πηλίκον

$$5{,}87 : 4.$$

Σκεπτόμενοι ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r|l} 5{,}87 & 4 \\ 1\;8 & \overline{1{,}46} \\ 27 & \\ 3 & \end{array} \quad \text{ἤτοι}$$

Ἵνα διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου, ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἐὰν ἦτο καὶ ὁ διαιρετέος ἀκέραιος, εἰς δὲ τὸ πηλίκον θέτομεν κόμμα μετὰ τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀκεραίου μέρους.

Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα τὸ ἀκριβὲς πηλίκον εἶναι 1,46 καὶ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἑκατοστοῦ, ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν τρέποντες τὸ ὑπόλοιπον εἰς χιλιοστά, θέτοντες πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ 0, ὁπότε ἔχομεν 30 χιλιοστά, τὰ ὁποῖα διαιροῦμεν διὰ 4 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 7 χιλιοστ. καὶ ὑπόλοιπον 2 χιλιοστ., τὰ ὁποῖα τρέπομεν εἰς 20 δεκάκις χιλιοστ., τὰ ὁποῖα διαιροῦντες διὰ 4 εὑρίσκομεν πηλίκον 5 δεκ. χιλιοστ. καὶ ὑπόλοιπον 0.

Διάταξις τῆς πράξεως:

$$\begin{array}{r|l} 5{,}87 & 4 \\ \cline{2-2} 1\;8 & 1{,}4675 \\ 27 & \\ 30 & \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

Συμβαίνει δμως πολλάκις οὐδέποτε νὰ εὑρίσκωμεν ὑπόλοιπον 0· π. χ. εἰς τὴν ἑπομένην διαίρεσιν·

$$\begin{array}{r|l} 5{,}86 & 9 \\ \cline{2-2} 46 & 0{,}6511 \\ 10 & \\ 10 & \\ 1 & \end{array}$$

Δυνάμεθα ὅμως προχωροῦντες εἰς τὴν διαίρεσιν νὰ ἔχωμεν τὸ πηλίκον κατὰ προσέγγισιν ὅσον θέλομεν μεγάλην, δηλ. μὲ λάθος ὅσον θέλομεν μικρόν· π. χ., ἐὰν σταθῶμεν εἰς τὰ χιλιοστά, θὰ ἔχωμεν πηλίκον 0,651· ὑπολείπεται δὲ πρὸς συμπλήρωσιν $\frac{1}{9}$ τοῦ χιλιοστοῦ, ἤτοι ὀλιγώτερον τοῦ χιλιοστοῦ ἀναγκαίως, διότι τὸ 1 ὡς ὑπόλοιπον εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου 9. Ἑπομένως τὸ λάθος εἶναι μικρότερον τοῦ χιλιοστοῦ. Λέγομεν δὲ τότε ὅτι ἔχομεν τὸ πηλίκον 0,651 *κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ.*

Ὁμοίως, ἐὰν σταθῶμεν εἰς τὰ δεκάκις χιλιοστά, τὸ λάθος θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ δεκάκις χιλιοστοῦ, ἤτοι θὰ ἔχωμεν τὸ πηλίκον κατὰ προσέγγισιν δεκάκις χιλιοστοῦ κτλ.

Ἡ τοιαύτη δ' ἐξακολούθησις τῆς διαιρέσεως δύναται νὰ γίνῃ καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν ἀκεραίου δι' ἀκεραίου.

π. χ. $\begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \cline{2-2} 20 & 3{,}4 \\ 0 & \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \cline{2-2} 10 & 3{,}33... \\ 10 & \\ 1 & \end{array}$

Β' περίπτωσις.

Ζητεῖται τὸ πηλίκον:

$$5,86 : 2,3$$

Πολλαπλασιάζομεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην (§ 166) ἐπὶ 10 καὶ ἔχομεν 58, 6 : 23· οὕτω δὲ ἡ περίπτωσις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην.

Γενικῶς· Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι δεκαδικός, ἀπαλείφομεν τὸ κόμμα αὐτοῦ, εἰς δὲ τὸν διαιρετέον μεταθέτομεν τὸ κόμμα τόσας θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχει ὁ διαιρέτης, ἐπανερχόμενοι οὕτως εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν.

Παραδείγματα:

α') 5,362 : 0.24=536,2 : 24.
β') 5,3 : 4,25=530 : 425.
γ') 8 : 3,2=80 : 32.

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ τρέπονται εἰς κοινὰ κλάσματα, ἕπεται ὅτι πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων περὶ ὧν εἴπομεν ἐν τοῖς ἀκεραίοις καὶ κλάσμασιν ἀληθεύουσι καὶ ἐνταῦθα.

Ἀσκήσεις.

1) 17 πήχ. ὑφάσματος τιμῶνται δρ. 27,35. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς ;

2) Τὸ μέτρον ὑφάσματος τιμᾶται δραχ. 1,35. Πόσα μέτρα θ' ἀγοράσωμεν μὲ δραχμὰς 25,60 ;

3) Περιφέρεια κύκλου ἔχει μῆκος 33 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίς ;

4) Τὸ ἐμβαδὸν σανίδος εἶναι 0,6 τετρ. μέτρ. Πόσας τοιαύτας σανίδας διὰ τὴν κατασκευὴν πίνακος μήκους 2 μέτρων καὶ πλάτους 0,9 μ. χρειαζόμεθα ;

5) Τί γίνεται τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, ὅταν ἑκατέρα τῶν βάσεων αὐτοῦ διαιρεθῇ διὰ 2,5 ;

Τροπὴ κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικόν.

179. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{19}{2}$. τοῦτο σημαίνει (§ 130) τὸ πηλίκον 19 : 2. Ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην

$$\begin{array}{r|l} 19 & 2 \\ \cline{2-2} 10 & 9{,}5 \\ 0 & \end{array}$$

καὶ εὑρίσκομεν $\frac{19}{2}=9{,}5$· οὕτω δὲ τὸ κοινὸν τοῦτο κλάσμα ἐτράπη εἰς δεκαδικόν.

Ἐὰν ἐν τῇ πράξει τῆς διαιρέσεως δὲν εὑρίσκωμεν ὑπόλοιπον 0, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὸ ἰσοδύναμον δεκαδικὸν *κατὰ προσέγγισιν* ὅσον θέλομεν μεγάλην.

Οὕτως ἔχομεν·

$$\frac{10}{7}=1{,}42857$$

κατὰ προσέγγισιν ἑκατοντάκις χιλιοστοῦ.

Ὁμοίως·

$$\frac{10}{3}=3{,}333. \ldots .$$

Ἀσκήσεις.

1) $\frac{15}{2}$ δραχ. ν' ἀναλυθῇ εἰς δραχμὰς καὶ λεπτά.

2) $\frac{9}{8}$ μέτρ. ν' ἀναλυθῇ εἰς ἀκέραια μέτρ. καὶ δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου.

Παρατ. Βλέπομεν ὅτι ἄλλα μὲν κοινὰ κλάσματα τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικά, ἄλλα δὲ περιέχουσι ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία. Θὰ ἐξετάσωμεν ἤδη πότε συμβαίνει τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο.

Θεώρημα.

180. Ἔστω κοινὸν κλάσμα τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς περιέχει μόνον τοὺς πρώτους παράγοντας 2 καὶ 5 μὲ ἴσους ἐκθέτας, τὸ $\frac{75}{2^2\times5^2}$. Ἔχομεν.

$$\frac{75}{2^2\times5^2}=\frac{75}{(2\times5)^2}=\frac{75}{10^2}=\frac{75}{100}=0{,}75.$$

Ἐν γένει τῶν τοιούτων κλασμάτων ὁ παρονομαστὴς εἶναι 10 ἢ 100 ἢ 1000.... καὶ βλέπομεν ὅτι ταῦτα τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικά, ἐὰν λάβωμεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ χωρίσωμεν ἐν αὐτῷ τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστής.

Ἔστω ἤδη τὸ κλάσμα $\frac{123}{2\times5^2}$, οὗτινος ὁ παρονομαστὴς περιέχει μόνον τοὺς πρώτους παράγοντας 2 καὶ 5, ἀλλὰ μὲ διαφόρους ἐκθέτας· διὰ νὰ καταστήσωμεν ἴσους τοὺς ἐκθέτας, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ 2 καὶ ἔχομεν·

$$\frac{123\times2}{2^2\times5^2}=\frac{246}{100}=2{,}46.$$

Ὁμοίως·

$$\frac{3}{5^2}=\frac{3\times2^2}{5^2\times2^2}=\frac{12}{100}=0{,}12.$$

Θεωρήσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{14}{2^2\times5^2\times7}$, οὗτινος ὁ παρονομαστὴς περιέχει τὸν πρῶτον παράγοντα 7 διάφορον τοῦ 2 καὶ 5 καὶ τοῦτο τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, διότι ὁ 7 ἐξαφανίζεται δι' ἁπλοποιήσεως· τῷόντι $\frac{14}{2^2\times5^2\times7}=\frac{2}{2^2\times5^2}=0{,}02$

Ἔστω τέλος τὸ κλάσμα $\frac{3}{5\times7}$, οὗτινος ὁ παρονομαστὴς περιέχει τὸν πρῶτον παράγοντα 7 μὴ ἀπαλειφόμενον δι' ἁπλοποιήσεως καὶ ὅστις ἑπομένως θὰ ὑπάρχῃ, καὶ ὅταν τὸ κλάσμα γίνῃ ἀνάγωγον, ἐὰν δὲν εἶναι τοιοῦτον. Ἄς ὑποτεθῇ λοιπὸν ὅτι τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{3}{5\times7}$ τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν· θὰ ἔχωμεν·

$$\frac{3}{5\times7}=\frac{A}{10^{\nu}}$$

ὁπότε ἔπρεπεν ὁ 5×7 νὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ 10^{ν}, ὅπερ ἄτοπον (§ 104), διότι 10^{ν} δὲν ἔχει ἄλλους πρώτους παράγοντας πλὴν τοῦ 2 καὶ 5. Ἄρα·

Κλάσμα κοινὸν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, ἐὰν ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ δὲν ἔχῃ ἄλλους πρώτους παράγοντας πλὴν τοῦ 2 καὶ 5· καὶ τότε μόνον, ἐὰν τὸ κλάσμα εἶναι ἀνάγωγον.

Ἀσκήσεις.

1) Ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{5}{8}$, $\frac{55}{88}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{24}{75}$, $\frac{1}{3}$, ποῖα τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικά;

2) Ἐκ τῶν ἀριθμῶν 0,62 καὶ $\frac{5}{8}$ τίς ὁ μεγαλύτερος;

ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΔΕΚΑΔΙΚΑ

181. *Θεώρημα.* Ἔστω τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{4}{7}$, ὅπερ δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν· διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ ἔχομεν·

$$\begin{array}{l|l} 40 & 7 \\ \hline \;\,50 & 0,5714285\ldots. \\ \quad 10 & \\ \quad\; 30 & \\ \qquad 20 & \\ \qquad\; 60 & \\ \qquad\;\; 40 & \\ \qquad\;\;\; 5\ldots.. & \end{array}$$

Εἰς τὸ πηλίκον μετὰ τὸ ψηφίον 8 ἐπανευρίσκομεν τὸ 5, ἄρα θὰ ἐπαναληφθῶσι καὶ πάντα τα μετὰ τὸ 5 εὑρεθέντα προηγουμένως ψηφία, οὕτω δὲ ἡ σειρὰ 571428 ὡς εἶναι θὰ ἐπαναλαμβάνηται ἐπ᾽ ἄπειρον. Τὸ τοιοῦτο δὲ θὰ συμβαίνῃ, ὁσάκις τὸ κλάσμα δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν. Διότι, ὡς βλέπομεν εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, πᾶν ὑπόλοιπον εἶναι διάφορον τοῦ 0 καὶ μικρότερον τοῦ διαιρέτου 7, ἑπομένως ὡς ὑπόλοιπα δύνανται νὰ εἶναι μόνον οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 5, 6· ὥστε μετὰ ἓξ τὸ πολὺ διαιρέσεις *ἀναγκαίως* πρέπει νὰ ἐπανευρεθῇ ἓν τῶν προηγουμένων ὑπολοίπων, ὁπότε ἐπαναρχίζομεν τὰς ἤδη γενομένας διαιρέσεις ἀπὸ τοῦ ἐπαναληφθέντος ὑπολοίπου· Ἄρα·

Κλάσμα κοινὸν τρεπόμενον εἰς δεκαδικὸν ἢ παρέχει ὡρισμένα τὸ πλῆθος δεκαδικὰ ψηφία ἢ ἄπειρα ἐπαναλαμβανόμενα ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Ὁρισμοί.

182. Τὸ δεκαδικὸν κλάσμα, οὗτινος τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶναι ἄπειρα ἐπαναλαμβανόμενα ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, λέγεται *περιοδικόν*· τὸ δὲ σύνολον τῶν οὕτως ἐπαναλβανομένων ψηφίων λέγεται *περίοδος*· π. χ. εἰς τὸ 3,14565656.....ἡ περίοδος εἶναι 56.

Ὅταν ἡ περίοδος ἄρχηται ἀμέσως μετὰ τὸ κόμμα, ἔχομεν τὸ *ἁπλοῦν* λεγόμενον περιοδικόν· π. χ.

5,626262.....

Ὅταν δὲ ἡ περίοδος ἄρχηται οὐχὶ ἀμέσως μετὰ τὸ κόμμα, ἔχομεν τὸ *μικτόν*· π. χ.

3,62474747.....

Τροπὴ περιοδικοῦ δεκαδικοῦ εἰς κλάσμα κοινόν.

183. Ἔστω τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν 0,2525.., οὗτινος τὸ ἀκέραιον μέρος εἶναι 0.

Θέτομεν $\alpha=0,252525$· ὅθεν·

$$100\alpha=25,2525.$$

Ἀφαιροῦντες δὲ κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας ἔχομεν·

$$99\alpha=25-0,000025.$$

Ἐὰν ὁ α ἀπετελεῖτο ἐκ τεσσάρων περιόδων, θὰ εἴχομεν·

$$99\alpha=25-0,00000025,$$

δηλ. δι' ἑκάστην νέαν περίοδον προστιθεμένην εἰς τὸ α ὁ ἀφαιρετέος τοῦ β' μέλους γίνεται ἑκατοντάκις μικρότερος· ἄρα, ἐὰν ὁ α ἀπετελεῖτο ἐκ πασῶν τῶν ἀπειροπληθῶν περιόδων, θὰ εἴχομεν ἀκριβῶς.

$$99\alpha = 25 \quad \text{ἢ} \quad \alpha = \frac{25}{99}, \text{ ἤτοι}$$

$$0{,}2525\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{25}{99}, \text{ Ἄρα·}$$

Ἁπλοῦν περιοδικὸν ἔχον ἀκέραιον 0 ἰσοῦται πρὸς κλάσμα ἢ προέρχεται ἐκ κλάσματος ὅπερ ἔχει ἀριθμητὴν μίαν περίοδον καὶ παρονομαστὴν ἀκέραιον ἔχοντα πάντα τὰ ψηφία ἴσα τῷ 9 καὶ τόσα ὅσα ἔχει ἡ περίοδος.

184. Ἐὰν τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν ἔχῃ καὶ ἀκεραίας μονάδας, τρέπεται εἰς μικτὸν ἀριθμόν.

Π. χ. $3{,}2525\ldots = 3\frac{25}{99} = \frac{322}{99}$ κατὰ τὰ προηγούμενα, ὅστις πάλιν τρέπεται εἰς κλάσμα.

185. Ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα (§ 183) ἀποτελούμενος ἀπὸ ψηφία πάντα ἴσα τῷ 9 δὲν διαιρεῖται οὔτε διὰ 2 οὔτε διὰ 5, ἤτοι δὲν περιέχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν 5, καὶ ἐὰν τὸ κλάσμα ἁπλοποιηθῇ, ἔτι μᾶλλον βεβαίως δὲν θὰ τοὺς περιέχῃ, διότι διὰ τῆς ἁπλοποιήσεως δὲν εἰσάγονται νέοι παράγοντες, ἀλλ' ἀφαιροῦνται τινὲς τῶν ὑπαρχόντων. Ἄρα·

Ὁ παρονομαστὴς τοῦ κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος εἰς ὃ τρέπεται ἁπλοῦν περιοδικὸν δὲν ἔχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν 5.

ΣΗΜ. Τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν ἰσοῦται ἀκεραίῳ μόνον ὅταν πάντα τὰ δεκαδικὰ αὐτοῦ ψηφία εἶναι 9· π. χ.

$$0{,}999\ldots = 1$$
$$5{,}999\ldots = 6$$

189. Ἔστω ἤδη τὸ μικτὸν περιοδικὸν

$$5{,}8333\ldots$$

διὰ μεταθέσεως τοῦ κόμματος εὑρίσκομεν τὸ ἁπλοῦν

$$58{,}333\ldots$$

ὅπερ ἰσοῦται τῷ $58\frac{3}{9} = \frac{175}{3}$. Ἔχομεν τῷόντι·

$$\begin{array}{r|l} 175 & 3 \\ \hline 25 & 58{,}33 \\ 10 & \\ 10 & \\ 1\ldots & \end{array}$$

Ἐὰν θέλωμεν εἰς τὸ πηλίκον τὸ κόμμα νὰ εὑρίσκεται ἀμέσως μετὰ τὸ 5, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν 17,5 : 3 ἢ 175 : 30· ἄρα τὸ δοθὲν μικτὸν περιοδικὸν ἰσοῦται τῷ κλάσματι $\frac{175}{30}$. Ἐν γένει·

Διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν περιοδικὸν εἰς κλάσμα κοινόν, τρέπομεν πρῶτον τοῦτο εἰς ἁπλοῦν μεταθέτοντες τὸ κόμμα εἰς τὸ τέλος τῶν μὴ περιοδικῶν ψηφίων· εὑρίσκομεν ἔπειτα τὸ ἀντιστοιχοῦν κοινὸν κλάσμα προσγράφοντες δεξιὰ τοῦ παρονομαστοῦ τόσα μηδενικά, ὅσα εἶναι τὰ μὴ περιοδικὰ ψηφία.

187. Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα τὸ κλάσμα $\frac{175}{30}$ ἰσοῦται τῷ $\frac{58\times9+3}{90}=\frac{58(10-1)+3}{90}=\frac{583-58}{90}$.

Τοῦ μικτοῦ περιοδικοῦ 5,833... τὰ ψηφία 8 καὶ 3 εἶναι διάφορα· ἄρα ἡ διαφορὰ 583—58 δὲν δύναται νὰ λήγῃ εἰς 0, καὶ τὸ προηγούμενον, ἐὰν δὲν εἶναι ἀνάγωγον, δὲν ἁπλοποιεῖται διὰ τοῦ 10, ἤτοι καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 5. Ἑπομένως.

Ὁ παρονομαστὴς τοῦ κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος, εἰς ὃ τρέπεται μικτὸν περιοδικόν, περιέχει τοὐλάχιστον τὸν ἕνα τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 τοσάκις, ὅσα εἶναι τὰ μὴ περιοδικὰ ψηφία.

ΣΗΜ. Θεωρήσωμεν μικτὸν περιοδικὸν τοῦ ὁποίου τὰ δεκαδικὰ ψηφία ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς εἶναι πάντα 9·

π. χ. 5,3999....τοῦτο ἰσοῦται τῷ $\frac{53\times9+9}{90}=\frac{(53+1)9}{10\times9}=5,4$, ἤτοι μὲ συνήθη δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Πορίσματα.

188. α΄) Ἀριθμὸς ἔχων ἄπειρα τὸ πλῆθος δεκαδικὰ ψηφία *περιοδικὰ* ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς ἰσοῦται *πάντοτε* πρὸς *σύμμετρον* ἀριθμόν·

β΄) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος ἀναγώγου δὲν περιέχῃ μήτε τὸν παράγοντα 2 μήτε τὸν 5, τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν.

γ΄) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος ἀναγώγου περιέχῃ μετ' ἄλλων πρώτων παραγόντων καὶ τὸν 2 ἢ 5 ἢ καὶ ἀμφοτέρους, τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς μικτὸν περιοδικόν.

δ΄) Πᾶν περιοδικὸν δεκαδικὸν παράγεται ἔκ τινος κοινοῦ κλάσματος διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· ἐξαιροῦνται *μόνον* ἐκεῖνα, ὧν τὰ δεκαδικὰ ψηφία ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς εἶναι πάντα 9.

'Ασκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κοινὰ κλάσματα, ἐξ ὧν παράγονται τὰ περιοδικά.

0,5858......
45,6262......
0,46333......
6,12352352.....

2) 'Εκ τῶν κλασμάτων $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{20}{35}$, $\frac{7}{21}$ ποῖα τρέπονται εἰς ἁπλᾶ καὶ ποῖα εἰς μικτὰ περιοδικά;

3) Τὸ κοινὸν κλάσμα πρὸς ὃ ἰσοῦται τὸ περιοδικὸν 0,5454.... εἶναι $\frac{54}{99}$, ἀλλ' ἐὰν θεωρήσωμεν ὡς περίοδον 5454 ἢ 545454 κτλ. εὑρίσκομεν τὰ κλάσματα

$$\frac{5454}{9999},\ \frac{545454}{999999},$$

πρὸς ἃ ὁμοίως ἰσοῦται τὸ περιοδικόν. Νὰ δειχθῇ ἐκ τῶν προτέρων ἡ ἰσότης τῶν κλασμάτων.

'Ασύμμετροι ἀριθμοί.

189. Θεωρήσωμεν τὸ δεκαδικὸν

5,121221222....,

τὸ ὁποῖον ἔχει ἄπειρα τὸ πλῆθος δεκαδικὰ ψηφία διαδεχόμενα ἄλληλα καθ' ὡρισμένον νόμον, ἀλλὰ μὴ περιοδικά.

Τὸ ἄπειρον τοῦτο πλῆθος μονάδων δεκαδικῶν, τὸ ὁποῖον προφανῶς δὲν ὑπερβαίνει τὸν 6, λέγεται ἀριθμὸς *ἀσύμμετρος*. Τοιοῦτοι εἶναι καὶ οἱ ἑπόμενοι·

0,404400440004....
1,234234423444....

Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ὅταν πᾶν μέρος τοῦ πρώτου εἶναι μέρος καὶ τοῦ δευτέρου καὶ ἀντιστρόφως.

'Ομοίως ὁ ὁρισμὸς τῆς ἀνισότητος οὕτω·

Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἄνισοι, ὅταν ὁ εἷς ἔχῃ πάσας τὰς μονά -

δας τοῦ ἄλλου καὶ ἄλλας προσέτι. Ὁ πρῶτος λέγεται μεγαλύτερός τοῦ δευτέρου. Π. χ.

$$1 = 0{,}999.....$$
$$0{,}1 = 0{,}0999.....$$
$$0{,}01 = 0{,}00999.....$$
$$5{,}999..... > 5{,}888....$$

191. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ γεγραμμένοι ὑπὸ τὴν δεκαδικὴν μορφὴν ἔχωσιν ἴσα πάντα τὰ ὁμοταγῆ ψηφία, προφανῶς εἶναι ἴσοι.

Ἔστωσαν ἤδη οἱ ἀριθμοὶ

$$5{,}34.....$$
$$5{,}36.....$$

Τὰ πρῶτα ὁμοταγῆ ψηφία καθ' ἃ διαφέρουσι τὰ 4 καὶ 6 ἔχουσι διαφορὰν 2. Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε τὰ λοιπὰ δεκαδικὰ ψηφία αὐτῶν, ἀδύνατον οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι νὰ εἶαι ἴσοι, διότι ὁ πρῶτος δὲν ὑπερβαίνει τὸν 5,35. Ἔτι μᾶλλον οἱ ἀριθμοὶ δὲν θὰ ἦσαν ἴσοι ἐὰν τὰ πρῶτα διάφορα ὁμοταγῆ ψηφία αὐτῶν εἶχον διαφορὰν μείζονα τοῦ 2.

Ἔστωσαν τέλος οἱ ἀριθμοὶ

$$5{,}34999.....$$
$$5{,}35$$

ἐν οἷς τὰ πρῶτα διάφορα ὁμοταγῆ ψηφία 4 καὶ 5 ἔχουσι διαφορὰν 1, τὰ δὲ λοιπὰ τοῦ μὲν πρώτου εἶναι πάντα 9, τοῦ δὲ δευτέρου 0.

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι προφανῶς εἶναι ἴσοι, θὰ ἦσαν δὲ ἄνισοι, ἐὰν τοῦ μὲν α' τὰ λοιπὰ ψηφία δὲν ἦσαν πάντα 9 ἢ τὰ τοῦ 6' 0.

192. Ἔστω ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς

$$5{,}242242224......$$

Οὗτος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 5 καὶ μικρότερος τοῦ

$$5{,}9999..... = 6,$$

ἄρα πρὸς οὐδένα ἀκέραιον ἰσοῦται. Ἂς ἴδωμεν ἂν ἰσοῦται πρὸς κλάσμα Ἔστω $\frac{\alpha}{6} = 5{,}24224.....$

Ἂν τὸ $\frac{\alpha}{6}$ τρέπηται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, θὰ ἔχωμεν δύο ἀριθμοὺς ἴσους γεγραμμένους ὑπὸ τὴν δεκαδικὴν μορμὴν χωρὶς οὔτε πάντα τὰ ὁμοταγῆ ψηφία αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσα, οὔτε τοῦ ἑνὸς τὰ ψηφία ἀπό τινος πάντα 0, τοῦ δὲ ἄλλου πάντα 9.

Ὁμοίως φθάνομεν εἰς ἄτοπον, ἐὰν τὸ $\frac{\alpha}{6}$ τρέπηται εἰς περιοδικόν Ἄρα·

Οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ εἶναι νέοι ἀριθμοὶ διάφοροι τῶν συμμέτρων, οὔτε ἀκέραιοι ὄντες οὔτε κλασματικοί.

193. Ὅταν ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν πράξεις ἐπὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, ἀντικαθιστῶμεν αὐτοὺς διὰ συμμέτρων λαμβάνοντες ἱκανὰ δεκαδικὰ ψηφία αὐτῶν καὶ ἀπορρίπτοντες τὰ λοιπὰ ἄπειρα· οἱ οὕτω προκύπτοντες σύμμετροι θὰ προσεγγίζωσι τοσούτῳ μᾶλλον πρὸς τοὺς ἀσυμμέτρους, ὅσῳ πλείονα δεκαδικὰ ψηφία λάβωμεν.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν καθόλου.

1) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ εἰκοσάφραγκον ἰσοδυναμεῖ πρὸς δραχμὰς 21,70 νὰ τραπῶσι α΄) 155,60 δρ. εἰς φράγκα· β΄) 135,40 φρ. εἰς δραχμάς.

2) Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς διὰ 1, ἑκατέρα τῶν εὐκράτων ζωνῶν εἶναι 0,26, τῶν δὲ κατεψυγμένων 0,04. Πόση εἶναι ἡ διακεκαυμένη ζώνη;

3) Δύο τεμάχια ὑφάσματος διαφόρου ποιότητος ἔχουσι τὸ αὐτὸ μῆκος, ἀλλὰ 3 μέτρα τοῦ α΄ ἀξίζουσιν ὅσον 2 μ. τοῦ β΄, τὰ δὲ 5 μ., ἤτοι 3 τοῦ α΄ καὶ 2 τοῦ β΄, ἀξίζουσι δραχμὰς 10,50. Πόσον εἶναι τὸ κοινὸν αὐτῶν μῆκος, ἐὰν τὸ β΄ ἀξίζῃ 45,20 δρ. περισσότερον τοῦ α΄;

4) Μήτηρ καὶ θυγάτηρ ὑφαίνουσιν εἰς τὸ αὐτὸ ἐργοστάσιον καὶ ἡ μὲν μήτηρ ὑφαίνει καθ' ἑκάστην 5 μέτρα, ἡ δὲ θυγάτηρ 3 μέτρα. Μετὰ 16 ἡμέρας, καθ' ἃς ἡ μήτηρ εἰργάσθη τακτικῶς, ἡ θυγάτηρ, μὴ ἐργασθεῖσα 2 ἡμέρας, ἔλαβε 18,60 δρ. ὀλιγώτερον τῆς μητρός. Πόσον ἐπληρώθη τὸ 1 μ.;

5) Τρέποντες τὰ κλάσματα $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{3}{7}$ εἰς δεκαδικὰ εὑρίσκομεν

$$\frac{5}{7}=0,714285714\ldots\ldots$$

$$\frac{3}{7}=0,428571428\ldots\ldots$$

ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι αἱ περίοδοι αὐτῶν ἔχουσιν ἰσάριθμα δεκαδικὰ ψηφία. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τοῦτο θὰ συμβαίνῃ, ὁσάκις λαμβάνομεν δύο ἢ πλείονα κλάσματα ἀνάγωγα καὶ ὁμώνυμα.

6) Ἐὰν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\varkappa}$ τρέπεται εἰς περιοδικόν, οὗτινος ἡ περίοδος ἔχει $\varkappa—1$ ψηφία, τὰ ψηφία ταῦτα ἀνεξαρτήτως τῆς τάξεως αὐτῶν θὰ εἶναι τὰ αὐτά, ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς α ἀντικατασταθῇ ὑπὸ οἱουδήποτε ἄλλου ἀκεραίου παρέχοντος κλάσμα τρεπόμενον εἰς περιοδικόν.

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄

ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ

Ὁρισμοί.

194. Τὸ τετράγωνον τοῦ 5 εἶναι $5 \times 5 = 25$ (§ 62)· ὁμοίως τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{2}{3}$ εἶναι $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. Ὁ 5 λέγεται *τετραγωνικὴ ῥίζα* τοῦ 25, ὁμοίως ὁ $\frac{2}{3}$ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{4}{9}$.

Γενικῶς· *Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου οὗτος εἶναι τετράγωνον.*

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα σημειοῦται διὰ τοῦ σεμβόλου $\sqrt{}$, ὅπερ καλεῖται *ῥιζικόν*, τιθεμένου ὑπ' αὐτὸ τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ σημειοῦμεν τὴν ῥίζαν. Π. χ.

$$\sqrt{25} = 5, \quad \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

Γνωρίσματα τελείων καὶ μὴ τετραγώνων.

195. *Θεώρημα α΄).*

Ὁ ἀριθμὸς 20 οὐδενὸς ἀκεραίου εἶναι τετράγωνον· ἂς ἴδωμεν ἂν εἶναι τετράγωνον κλάσματος. Ἔστω·

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = 20 \text{ ἢ } \frac{\alpha^2}{\beta^2} = 20 \qquad (1).$$

Τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀνάγωγον, διότι, καὶ ἂν δὲν εἶναι, καθιστῶμεν αὐτὸ τοιοῦτον διὰ τῆς ἁπλοποιήσεως, ὁπότε (§ 97) καὶ τὸ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ θὰ εἶναι ἀνάγωγον, καὶ ἑπομένως δὲν εἶναι δυνατὸν ὁ ἀριθμητής του νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ ἡ ἰσότης (1) εἶναι ἄτοπος. Ἄρα·

Ἐὰν ἀκέραιος δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἀκεραίου, δὲν εἶναι οὐδὲ κλάσματος· ἑπομένως οὐδενὸς ἀριθμοῦ.

Τέλειον τετράγωνον λέγεται πᾶς ἀριθμὸς ὅστις ἔχει ὡς τετραγωνικὴν ῥίζαν ἄλλον ἀριθμόν. Τοιοῦτοι π. χ. εἶναι οἱ ἀριθμοὶ

$$25, \quad 100, \quad \frac{4}{9}, \quad \frac{9}{16} \text{ κ.λ.}$$

Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἕπεται ὅτι, διὰ νὰ διακρίνωμεν ἂν ἀριθμὸς ἀκέραιος εἶναι ἢ ὄχι τέλειον τετράγωνον, ἀρκεῖ νὰ γνωρίσωμεν ἂν εἶναι ἢ ὄχι τετράγωνον ἄλλου ἀκεραίου.

Ἐκ τούτου προκύπτουσι τὰ ἑπόμενα γνωρίσματα·

1) *Ἀριθμὸς ἀκέραιος εἶναι τέλειον τετράγωνον, ὅταν* (§ 110) *πάντες οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων αὐτοῦ παραγόντων εἶναι ἄρτιοι καὶ τότε μόνον.*

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς $144 = 2^4 \times 3^2$ εἶναι τετράγωνον τοῦ $2^2 \times 3 = 12$. Ὁ ἀριθμὸς $72 = 2^3 \times 2^2$ δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Εἰς τὸν κανόνα τοῦτον ὑπάγεται καὶ ὁ ἑξῆς·

Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς διαιρῆται διά τινος πρώτου ἀριθμοῦ, χωρὶς νὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον· π. χ. ὁ 123, ὅστις διαιρεῖται διὰ τοῦ 3, ἀλλ' οὐχὶ καὶ διὰ τοῦ $3^2 = 9$.

2) Ἐὰν ἀριθμὸς ἀκέραιος λήγῃ εἰς μηδενικά, τὸ τετράγωνον αὐτοῦ λήγει εἰς διπλάσιον ἀριθμὸν μηδενικῶν.

Ἄρα·

Ἀριθμὸς ἀκέραιος λήγων εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

3) Τὰ τετράγωνα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν κατὰ σειρὰν εἶναι

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \quad 36, \quad 49, \quad 64, \quad 81\cdot$$

παρατηροῦμεν δ' ὅτι οὐδὲν τούτων λήγει εἰς 2, 3, 7 ἢ 8. Ἐκ δὲ τοῦ κανόνος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων προκύπτει ὅτι τὸ τετράγωνον ἀκεραίου λήγει εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον εἰς τὸ ὁποῖον καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τελευταίου αὐτοῦ ψηφίου.

Ἄρα·

Ἀκέραιος λήγων εἰς ἓν τῶν ψηφίων 2, 3, 7 ἢ 8 δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

196. *Θεώρημα β'.* Ἔστω τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$. Ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα προφανῶς δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθ-

μός. Ἑπομένως, ἐὰν ὑπάρχῃ, θὰ εἶναι κλάσμα καὶ ἔστω αὕτη τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$, ὅπερ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ἀνάγωγον.

Θὰ ἔχωμεν·

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2=\frac{\mu^2}{\nu^2}=\frac{\alpha}{\beta}$$

Ἀλλὰ κατὰ τὴν § 132 πρέπει νὰ ἔχωμεν·

$$\mu^2=\alpha \text{ καὶ } \nu^2=\beta.$$

Ἄρα·

Κλάσμα ἀνάγωγον τότε μόνον εἶναι τέλειον τετράγωνον, ὅταν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ εἶναι τέλεια τετράγωνα. Ἡ δὲ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστὴν τὴν τοῦ παρονομαστοῦ.

Π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον· τὸ κλάσμα ὅμως $\frac{9}{16}$ εἶναι τετράγωνον τοῦ $\frac{3}{4}$.

ΣΗΜ. Κλάσμα μὴ ἀνάγωγον δύναται νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον, χωρὶς οἱ ὅροι αὐτοῦ νὰ εἶναι τοιοῦτοι· π. χ. τὸ $\frac{18}{32}$ εἶναι τετράγωνον τοῦ $\frac{3}{4}$.

Ἀσκήσεις.

1) Ἡ ἀξία τοῦ ἀδάμαντος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ βάρους αὐτοῦ. Π. χ., ἐὰν τὸ βάρος αὐτοῦ γίνῃ τρὶς μεῖζον, ἡ ἀξία αὐτοῦ γίνεται 9άκις μείζων. Πόσον τιμᾶται ἀδάμας βάρους 0,125 γραμμ., ἐὰν 1 γραμμ. τιμᾶται 2457 δρ.;

2) Τίνες ἐκ τῶν ἀριθμῶν 5644, 5625, 1566, 1521, 3600, 18000 εἶναι τέλεια τετράγωνα;

3) Ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{25}{81}$, $\frac{25}{62}$, $\frac{42}{49}$, $\frac{160}{250}$, $\frac{9}{27}$, $\frac{127}{381}$, $\frac{144}{225}$ τίνα εἶναι τέλεια τετράγωνα;

4) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι τέλειον τετράγωνον, καὶ τὸ τέταρτον αὐτοῦ θὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

5) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων, καὶ τὸ τέταρτον αὐτοῦ θὰ εἶναι ὁμοίως ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

Τετραγωνική ῥίζα κατὰ προσέγγισιν.

197. Ὁ ἀριθμὸς 20 δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον· τὸ μεγαλύτερον δὲ ἀκέραιον τετράγωνον τὸ ὁποῖον περιέχεται ἐν αὐτῷ εἶναι $16=4^2$. Ὁ 4 λέγεται τετρ. ῥίζα τοῦ 20 κατὰ προσέγγισιν μονάδος. Γενικῶς· *Τετρ. ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος λέγεται ὁ μέγιστος ἀκέραιος τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον περιέχεται εἰς αὐτόν.* Οὕτως ἔχομεν·

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{24}=4\\ \sqrt{60}=7\end{array}\right\}\text{κατὰ προσέγγ. μονάδος.}$$

Θεωρήσωμεν τὸν ἀριθμὸν 10. Τὸ $\left(\frac{31}{10}\right)^2=9{,}61$ χωρεῖ εἰς αὐτόν, ἀλλὰ τὸ $\left(\frac{32}{10}\right)^2=10{,}24$ δὲν χωρεῖ. Ὁ ἀριθμὸς $\frac{31}{10}$ λέγεται τετρ. ῥίζα τοῦ 10 *κατὰ προσέγγισιν δεκάτου*. Ἐν γένει : *Τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ ἀριθμοῦ λέγεται τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ $\frac{1}{\nu}$, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγ. χωρεῖ εἰς τὸν ἀριθμόν.*

Τετράγωνον ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν.

198. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς τετρ. ῥίζης χρησιμεύει τὸ ἑπόμενον θεώρημα.

Θεώρημα. Ἔχομεν $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha\times\alpha+\alpha\times\beta+\alpha\times\beta+\beta\times\beta=\alpha^2+2\alpha\times\beta+\beta^2$. Ἄρα

Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν καὶ τοῦ διπλασίου γινομένου αὐτῶν.

Π. χ. $(2+3)^2=4+12+9=25$.

Πόρισμα α') Τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ συγκειμένου ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων, τοῦ τετρ. τῶν μονάδων καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας. Π. χ.

$$25^2=(20+5)^2=400+200+25=625$$

Πόρισμα β'). Παρατηροῦμεν ὅτι

$$(\alpha+1)^2-\alpha^2=\alpha^2+2\alpha+1-\alpha^2=2\alpha+1.$$

Ἤτοι· *Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν διαφερόν-*

των κατὰ 1 ἰσοῦται τῷ διπλασίῳ τοῦ μικροτέρου ηὐξημένῳ κατὰ

1. Π. χ. $5^2 - 4^2 = 9 = 4 \times 2 + 1$

Ἀσκήσεις.

1) Διὰ τοῦ προηγουμένου πορίσματος νὰ εὑρεθῶσι τὰ τετράγωνα τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ 10..... 20.

2) Ἡ ἀξία ἀδάμαντος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ βάρους αὐτοῦ. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀξία αὐτοῦ ἐλαττοῦται, ἐὰν χωρισθῇ εἰς 2 τεμάχια.

3) Τὸ καράτιον (4 κόκκοι) ἀδάμαντος τιμᾶται 500 δρ. Πόσον τιμᾶται τοιοῦτος ἀδάμας ζυγίζων 15 καράτια καὶ κατὰ πόσον θὰ ἐλαττωθῇ ἡ ἀξία του, ὅταν χωρισθῇ εἰς 2 τεμάχια ζυγίζοντα τὸ μὲν 10 καράτ., τὸ δὲ 5;

*4) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἔκπτωσις τῆς ἀξίας ἀδάμαντος χωριζομένου εἰς 2 τεμάχια εἶναι μεγίστη, ὅταν ταῦτα ἔχωσι τὸ αὐτὸ βάρος.—Ἡ ἀπόδειξις στηρίζεται εἰς τὸ ὅτι, ἐὰν 2 ἀριθμοὶ ἔχωσι σταθερὸν ἄθροισμα, π.χ. 10, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἔχει τὴν μεγαλυτέραν τιμήν, ὅταν εἶναι ἴσοι, ἤτοι 5 καὶ 5.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετρ. ῥίζης ἀριθμοῦ καλεῖται ἡ εὕρεσις αὐτῆς. Ἤδη θὰ ἐξετάσωμεν πῶς εὑρίσκεται αὕτη.

Α'. Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκεραίων ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

199. Ἐὰν ὁ ἀκέραιος εἶναι μικρότερος τοῦ 100, ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα ἡ ἀκριβὴς (ἐὰν εἶναι τέλειον τετράγωνον) ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος θα εἶναι μικροτέρα τοῦ 10, ἤτοι ἀριθμὸς μονοψήφιος, καὶ δυνάμεθα νὰ τὴν εὕρωμεν ἀπὸ στόματος ἐνθυμούμενοι τὰ τετράγωνα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν π.χ.

$\sqrt{9} = 3$ ἀκριβῶς.

$\sqrt{72} = 8$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς δὲν εἶναι μικρότερος τοῦ 100, ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα δὲν θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ 10 καὶ θὰ περιέχῃ ἑπομένως δεκάδας, πλὴν δὲ ἐξαιρετικῶν τινων περιπτώσεων δὲν δυνάμεθα τότε νὰ τὴν εὕρωμεν ἀπὸ στόματος, ἀλλ' εἶναι ἀνάγκη νὰ γίνῃ πρᾶξις, τὴν ὁποίαν θὰ γνωρίσωμεν ἤδη.

Ὑπόλοιπον τῆς πράξεως λέγομεν τὴν ὑπεροχὴν ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀπὸ τοῦ μεγίστου ἐν αὐτῷ ἀκεραίου τετραγώνου· π. χ. διὰ τὸν ἀριθμὸν 78 ὑπόλοιπον τῆς πράξεως εἶναι 78—64=14.

200. Ζητήσωμεν ἤδη τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 3865. Ἔστω *δ* ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων καὶ *μ* ὁ τῶν μονάδων αὐτῆς, *υ* δὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως· θὰ ἔχωμεν·

$$3865=(\delta\times10+\mu)^2+\upsilon$$

ἢ κατὰ τὸ ἐδάφιον 198

$$3865=\delta^2\times100+2\times\delta\times\mu\times10+\mu^2+\upsilon \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης βλέπομεν ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς περιέχει τὸν ἀριθμὸν $\delta^2\times100$, ἀλλ' οὐχὶ καὶ τὸν $(\delta+1)^2\times100$, διότι τότε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ θὰ περιεῖχε δεκάδας περισσοτέρας τῶν δ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ δ^2 ἑκατοντάδες μόνον εἰς τὰς 38 ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ δύνανται νὰ περιέχωνται, ἕπεται ὅτι δ^2 εἶναι τὸ μέγιστον ἀκέραιον τετράγωνον τὸ περιεχόμενον εἰς τὸν 38, ἤτοι

$$\delta^2=36 \text{ καὶ } \delta=6.$$

Ἤδη θὰ ζητήσωμεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων μ. Πρὸς τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) τὸ $\delta^2\times100=3600$ καὶ ἔχομεν·

$$265=2\times\delta\times\mu\times10+\mu^2+\upsilon \qquad (2)$$

Πᾶσαι αἱ δεκάδες τοῦ β' μέρους εἶναι 26.

Ἄρα·

$$26 \geqq 2\times\delta\times\mu$$

ἢ

$$\frac{26}{2\times\delta}=\frac{26}{12} \geqq \mu.$$

Ἑπομένως τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου $\frac{26}{12}$, ἤτοι 2, θὰ εἶναι ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς ῥίζης.

Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν τὸν 2, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν αὐτὸν δεξιὰ τοῦ 6 καὶ νὰ παρατηρήσωμεν ἂν τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ 62 τὸ τετράγωνον χωρεῖ εἰς τὸν 3865· εὑρίσκομεν τῷόντι ὅτι $62^2=3844$ ἄρα χωρεῖ· ἑπομένως ὁ 2 δὲν ὑπερβαίνει τὸ μ καὶ ἡ ζητουμένη ῥίζα εἶναι 62.

Ἡ δοκιμὴ ὅμως τοῦ 2 δύναται νὰ γίνῃ καὶ ὡς ἑξῆς. Ἔχομεν

$$62^2=(60+2)^2=3600+120\times2+2\times2.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἀφῃρέσαμεν ἤδη 3600 καὶ εὕρομεν ὑπόλοιπον 265. ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἀπὸ τὸ 265 ἀφαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς

$$120\times2+2\times2=122\times2.$$

Ἐὰν τὸ γινόμενον τοῦτο δὲν ἀφῃρεῖτο ἀπὸ τὸ 265, ἠθέλομεν δοκιμάσει τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἡ ὅλη πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

3865	62
36	122
265	2
244	244
21	

21 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Ζητήσωμεν ἤδη τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 386527. Κατὰ τὰ προηγούμενα ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου εἰς τὰς ἑκατοντάδας αὐτοῦ, ἤτοι ὁ 62· πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων γράφομεν δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς προηγουμένης πράξεως τὸν ἀριθμὸν 27 καὶ ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 2127, τοῦ ὁποίου τὰς δεκάδας διαιροῦμεν διὰ τοῦ $62\times2=124$ καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 1, τὸ ὁποῖον δοκιμάζομεν, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον παράδ., καὶ εὑρίσκομεν ὅτι αὐτὸ εἶναι τὸ ζητούμενον· ἄρα ἡ ζητουμένη τετρ. ῥίζα εἶναι 621.

Διάταξις τῆς πράξεως.

38'65'27	621	
38	122	1241
26'5	2	1
244	244	1241
212'7	Ἐντεῦθεν ἕπεται	
1241	ὁ κανών·	
886		

201. ***Πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς τετρ. ῥίζης ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἀριθμοῦ μείζονος τοῦ 100 χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τμήματα διψήφια ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν, ὁπότε τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα δύναται νὰ εἶναι καὶ μονοψήφιον.*** Ἕπεται:

α') Ἐξάγομεν τὴν τετρ. ῥίζαν τοῦ α' πρὸς τἀριστερὰ τμήματος καὶ ἔχομεν οὕτω τὸ α' ψηφίον τῆς ῥίζης.

β') Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ α' πρὸς τἀριστερὰ τμήματος τὸ τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου καὶ καταβιβάζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τὸ β' τμῆμα τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ.

γ') Τοῦ οὕτω προκύψαντος ἀριθμοῦ τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ α' ψηφίου τῆς ρίζης. Τὸ πηλίκον εἶναι ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ β' ψηφίου τῆς ῥίζης.

δ') Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν, τὸ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διπλασίου τοῦ α' ψηφίου τῆς ῥίζης καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον, τὸ δὲ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ὁποίου διῃρέσαμεν τὰς δεκάδας. Ἐὰν ἡ ἀφαίρεσις εἶναι δυνατή, δεχόμεθα τὸ δοκιμαζόμενον ὡς β' ψηφίον τῆς τετρ. ῥίζης, γράφοντες αὐτὸ δεξιὰ τοῦ α' ψηφίου αὐτῆς· ἄλλως δοκιμάζομεν ὁμοίως τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον ἀριθμὸν καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρις οὗ εὕρωμεν ἀριθμὸν δι' οὗ ἡ ἀφαίρεσις αὕτη νὰ εἶναι δυνατή.

ε') Δεξιὰ τῆς διαφορᾶς ταύτης καταβιβάζομεν τὸ γ' τμῆμα τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ καὶ ἐξακολουθοῦμεν ἐργαζόμενοι ὡς προηγουμένως, μέχρις οὗ καταβιβάσωμεν καὶ τὸ τελευταῖον τμῆμα τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, ὁπότε εὑρίσκομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς ῥίζης.

Παρατηρήσεις.

202. 1) Ἡ τετρ. ῥίζα θὰ ἔχῃ τόσα ψηφία, εἰς ὅσα τμήματα χωρίζομεν τὸν ἀριθμόν.

2) Ἐὰν εἴς τινα διαίρεσιν τὸ πηλίκον ὑπερβαίνει τὸν 9, δοκιμάζομεν κατὰ σειρὰν τὰ ψηφία 9, 8, 7 κλπ.

Π. χ.

3'87	19
	29
28'7	9
261	261
26	

3) Ἐὰν εἴς τινα τῶν διαιρέσεων τὸ πηλίκον εἶναι 0, δεχόμεθα ἀμέσως αὐτὸ ὡς ψηφίον τῆς ῥίζης.

Π. χ.

9'32	30
3'2	60

4) Κατὰ τὸ ἐδ. 198 τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ διπλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης· διότι, ἂν θεωρήσωμεν τὸ προηγούμενον παράδειγμα, ἔχομεν $31^2-30^2=2\times30+1=61$· τὸ δὲ ὑπόλοιπον ὂν μικρότερον τοῦ 61 δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ 60.

ΣΗΜ. Τὸ ὑπόλοιπον προστιθέμενον εἰς τὸ τετράγωνον τῆς εὑρεθείσης τετραγωνικῆς ῥίζης πρέπει νὰ δίδῃ τὸν δοθέντα ἀριθμόν· ἡ πρόσθεσις ὅθεν αὕτη δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς βάσανος τῆς πράξεως.

Ἐξαγωγὴ τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν δεκαδικῶν.

203. Ἔστω ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 58,3425. Τὸ μέγιστον ἐν αὐτῷ περιεχόμενον ἀκέραιον τετράγωνον εἶναι προφανῶς τὸ περιεχόμενον εἰς τὸν ἀκέραιον 58, εἶναι δὲ τοῦτο τὸ $49=7^2$.

Ἄρα·

$$\sqrt{58,3425}=7 \text{ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.}$$

Γενικῶς·

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα δεκαδικοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ἡ του ἀκεραίου αὐτοῦ μέρους.

Δυνάμεθα ὅμως κατὰ μείζονα προσέγγισιν ἢ καὶ ἀκριβῶς (ἐὰν εἶναι τέλειον τετράγωνον) νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν δεκαδικοῦ.

Θεωρήσωμεν π. χ. τὸν προηγούμενον ἀριθμὸν 58,3425· ἀπαλείφομεν τὸ κόμμα καὶ εὑρίσκομεν κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα·

$$\sqrt{583425}=763 \text{ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.}$$

Ἤτοι
$$\begin{matrix} 763^2 < \\ 764^2 > \end{matrix} 583425$$

Διαιροῦντες δὲ τὰ μέλη τῶν ἀνισοτήτων διὰ 10000 ἔχομεν·

$$7,63^2 < 58,3425 < 7,64^2.$$

Ἐπομένως·

$$7,63=\sqrt{58,3425} \text{ κατὰ προσέγγισιν } 0,01.$$

Ἡ θεωρία αὕτη ὑποθέτει ὅτι τὸ πλῆθος τῶν δεκαδικῶν ψηφίων εἶναι ἄρτιον, ἐὰν δὲ εἶναι περιττόν, δυνάμεθα διὰ προσθήκης ἑνὸς μηδενικού εἰς τὸ τέλος νὰ καταστήσωμεν αὐτὸ ἄρτιον καὶ εἶτα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἀνωτέρω· π. χ.

$\sqrt{3,4}=\sqrt{3,40}=1,8$ κατὰ προσέγγισιν 0,1.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι·

Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν δεκαδικοῦ κατὰ προσέγγισιν κλασματικῆς δεκαδικῆς μονάδος, παρατηροῦμεν ἂν ἔχει ἄρτιον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων καί, ἐὰν δὲν ἔχῃ, γράφομεν ἓν μηδενικὸν εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ. Ἔπειτα ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν αὐτοῦ, ὡς ἐὰν ἦτο ἀκέραιος, μὴ προσέχοντες δηλ. εἰς τὸ κόμμα, καὶ εἰς ταύτην χωρίζομεν δεκαδικὰ ψηφία δὶς ὀλιγώτερα ἢ ὅσα ἀρτίου πλήθους ἔχει ὁ ἀριθμός. Ἡ οὕτως εὑρισκομένη τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι κατὰ προσέγγισιν μονάδος δεκαδικῆς τῆς κατωτάτης ἐν αὐτῇ τάξεως, ἐκτὸς ἐὰν εὑρίσκωμεν ὑπόλοιπον 0, ὁπότε εἶναι ἀκριβής.

Ὁ κανὼν οὗτος ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους θεωρουμένους ὡς δεκαδικούς· π. χ.

$\sqrt{5}=\sqrt{5,0000}=2,23$ κατὰ προσέγγισιν 0,01.

Ἤτοι θέλοντες νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 5 κατὰ προσέγγισιν 0,01 θέτομεν ὡς δεκαδικὰ ψηφία αὐτοῦ 4 μηδενικά, ἤτοι διπλάσια τῶν ὅσα ἔχει ὁ 0,01, καὶ ἐργαζόμεθα ἔπειτα κατὰ τὸν κανόνα.

Καὶ δεκαδικοῦ δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὴν τετραγ. ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν οἱασδήποτε θέλομεν κλασματικῆς δεκαδικῆς μονάδος. Π. χ., ἐὰν θέλωμεν τὴν τετρ. ῥίζαν 5,4 κατὰ προσέγγισιν 0,01 γράφομεν εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ 3 μηδενικὰ καὶ ἔχομεν.

$\sqrt{5,4}=\sqrt{5,4000}=2,32$ κατὰ προσέγγισιν 0,01.

Ἐὰν ὁ δεκαδικὸς ἔχῃ περισσότερα τῶν ὅσα χρειαζόμεθα δεκαδικὰ ψηφία παραλείπομεν τὰ πλεονάζοντα. Π. χ.

$\sqrt{3,1415926}=\sqrt{3,1415}=1,17$ κατὰ προέγγισιν 0,01.

Καὶ γενικῶς· ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ α, κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, ἤτοι, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ μεγαλύτερον τῶν κλασμάτων τῶν ἐχόντων παρονομαστὴν ν, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον περιέχεται εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμὸν α, εἶναι τὸ $\frac{\chi}{\nu}$, θὰ ἔχωμεν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, $\sqrt{\alpha}=\frac{\chi}{\nu}$, ὅπου χ, ν ἀκέραιοι

$$\text{ἤτοι } \left(\frac{\chi}{\nu}\right)^2 < \alpha < \left(\frac{\chi+1}{\nu}\right)^2$$

$$\text{ἤτοι· } \frac{\chi^2}{\nu^2} \leq \alpha < \frac{(\chi+1)^2}{\nu^2}$$

$$\text{καὶ } \chi^2 \leq \alpha.\ \nu^2 < (\chi+1)^2$$

καὶ $\chi=\sqrt{\alpha\times\nu^2}$ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος (§ 197).

Καὶ ἐπομένως ἡ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$. ρίζα εἶνε:

$$\sqrt{\alpha}=\frac{\sqrt{\alpha\times\nu^2}}{\nu}$$

Ἤτοι· Ἡ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος τετραγωνικὴ ρίζα δοθέντος ἀριθμοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ κλάσμα τοῦ ὁποίου ἀριθμητὴς εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ γινομένου τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ τῆς προσεγγίσεως, παρονομαστὴς δὲ ὁ παρονομαστὴς τῆς προσεγγίσεως.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

204. Θεωρήσωμεν πρῶτον κλάσμα ἀνάγωγον τοῦ ὁποίου ἀμφότεροι οἱ ὅροι εἶναι τέλεια τετράγωνα.

Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{9}{16}$, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς 16 εἶναι 4^2· ἔνθα καὶ ὁ ἀριθμητὴς 9 εἶναι 3^2.

Ἐπομένως·

$$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4} \text{ ἀκριβῶς.}$$

Καὶ τῷόντι $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16}$.

Ἄρα·

Ὅταν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι τέλεια τετράγωνα, εὑρίσκομεν ἀκριβῶς τὴν τετρ. ῥίζαν αὐτοῦ ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν ὅρων.

Ἐὰν τὸ κλάσμα δὲν εἶναι ἀνάγωγον καὶ δὲν ἔχῃ τοὺς ὅρους αὐτοῦ τέλεια τετράγωνα, εἶναι δυνατόν, ἀφοῦ γίνῃ ἀνάγωγον, νὰ ἔχῃ ὅρους τοιούτους· π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{18}{32}$, τὸ ὁποῖον τρέποντες εἰς ἀνάγωγον εὑρίσκομεν $\frac{9}{16}$, τοῦ ὁποίου ἡ τετρ. ῥίζα εἶναι $\frac{3}{4}$.

205. Ἐὰν δὲ τὸ κλάσμα, ἀνάγωγον ὄν, δὲν ἔχῃ τοὺς ὅρους αὐτοῦ τέλεια τετράγωνα, τρέπομεν αὐτὸ εἰς δεκαδικὸν καὶ ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθῶσι

$$\sqrt{64}, \quad \sqrt{1440}, \quad \sqrt{368291}, \quad \sqrt{1889}$$

ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

2) Νὰ εὑρεθῶσι

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{10}, \quad \sqrt{3,25}, \quad \sqrt{0,365}$$

ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν 0,1.

3) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$

$$\sqrt{\frac{9}{100}}, \quad \sqrt{\frac{5}{8}}, \quad \sqrt{12\frac{5}{6}}, \quad \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

4) Νὰ εὑρεθῶσι κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{8}$

$$\sqrt{8}, \quad \sqrt{8\frac{3}{8}}, \quad \sqrt{3,5}, \quad \sqrt{527}$$

5) Τὸ βασιλικὸν στρέμμα ἐν Ἑλλάδι εἶναι 1000 τ. μ. Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου;

6) Ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου τὸ μῆκος εἶναι 12, 5 μ., τὸ δὲ πλάτος 5, 6· πόση εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου;

7) Εἰς πλῆθος ἀνθρώπων διενεμήθησαν 1296 ᾠά, ἔλαβε δὲ ἕκαστος τόσα ᾠά, ὅσοι ἦσαν οἱ ἄνθρωποι. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνθρωποι καὶ πόσα ἔλαβεν ἕκαστος;

8) Μαθητὴς ἐκτελεῖ 20 βήματα, ἵνα διατρέξῃ τὸ μῆκος τῆς αἰθούσης τῆς τάξεώς του, καὶ 14,5 βήματα, ἵνα διατρέξῃ τὸ πλάτος. Πόσα βήματα χρειάζεται, ἵνα διατρέξῃ τὴν διαγώνιον;

Λύσις. Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν ὅτι ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

Ἀσκήσεις ἐν γένει ἐπὶ τοῦ τετραγώνου καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

1) Ποσάκις γίνεται μεῖζον τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, ὅταν ἡ πλευρὰ αὐτοῦ γίνῃ 8ις μείζων;

2) Τετραγώνου ἡ πλευρὰ εἶναι 5 5 μ.· πόση εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ διπλάσιον αὐτοῦ ἔχοντος ἐμβαδὸν τετραγώνου;

3) Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι 29· τίνες οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι;

4) Ἐὰν ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀκεραίων εἶναι ἄρτιος ἀριθμός, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι διαφέρουσι περισσότερον τῆς μονάδος.

5) Τεμάχιον ἀδάμαντος ἀξίζει δρχ. 8672· πόσον εἶνε τὸ βάρος αὐτοῦ, ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ καρατίου (4 κόκκοι ἢ $\frac{1}{5}$ τοῦ γραμ.) εἶναι 500 δραχμαί;

ΒΙΒΛΙΟΝ Ε΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΠΕΡΙ ΜΕΤΡΩΝ, ΣΤΑΘΜΩΝ ΚΑΙ ΝΟΜΙΣΜΑΤΩΝ

Μονάδες μήκους.

206. Ἐν Γαλλίᾳ καὶ ἀλλαχοῦ μεταχειρίζονται ὡς μονάδα μήκους το *γαλλικὸν μέτρον*. Ἡ μονὰς αὕτη ἐλήφθη ἐκ τῆς φύσεως· δηλ. ὁ μεσημβρινὸς τῆς γῆς εἶναι 40 ἑκατομμύρια μέτρα. Ἐν Ἑλλάδι τὸ μέτρον καλεῖται καὶ *βασιλικὸς πῆχυς*.

Τὸ μέτρον διαιρεῖται εἰς *10 παλάμας*, ἡ παλάμη εἰς *10 δακτύλους*, καὶ ὁ δάκτυλος εἰς *10 γραμμάς*· ἄρα ἡ παλάμη εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου, ὁ δάκτυλος τὸ $\frac{1}{100}$ καὶ ἡ γραμμὴ τὸ $\frac{1}{1000}$.

Φανερὸν ὅτι ἐκ τῆς μετρήσεως μήκους διὰ τοῦ μέτρου θὰ προκύψῃ ἐν γένει δεκαδικὸς ἀριθμός.

Π. χ. μῆκος περιέχον 5 μ., 2 παλάμας, 3 δακτύλους καὶ 4 γραμμὰς παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 5,234 μ.

Διὰ τὴν μέτρησιν μεγάλων διαστημάτων, ὅπως ἀποφύγωμεν τοὺς μεγάλους ἀριθμούς, μεταχειριζόμεθα μεγάλας μονάδας.

Τοιαῦται ἐν σχέσει πρὸς τὸ μέτρον εἶναι·

Τὸ δεκάμετρον=10 μ.

Τὸ ἑκατόμμετρον=100 μ.

Τὸ χιλιόμετρον ἢ στάδιον=1000 μ.

Τὸ μυριάμετρον=10000 μ.

207. Τὸ μέτρον, ὅπερ εἶναι ἡ βάσις ὅλων αὐτῶν τῶν γαλλικῶν μονάδων καὶ ἐξ οὗ γίνονται αἱ λοιπαὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διαιρέσεως, λέγεται *μονὰς ἀρχική*.

208. Ἐν Τουρκίᾳ ἀρχικὴ μονὰς τοῦ μήκους εἶναι κυρίως *ὁ μικρὸς πῆχυς* Κωνσταντινουπόλεως, ὅστις ἰσοῦται πρὸς 0,648 μέτρ. Διαιρεῖται δὲ εἰς 8 *ῥούπια*.

209. Ἐν Ἀγγλίᾳ ἀρχικὴ μονὰς τοῦ μήκους εἶναι ἡ *ὑάρδα* ἰσοδυναμοῦσα πρὸς 0,914 μέτρ. Διαιρεῖται δὲ εἰς 3 πόδας (φοῦτ) καὶ ὁ ποὺς εἰς 12 δακτύλους (ἴντσας).

1 πῆχυς=0,71 ὑάρδ. περίπου καὶ 1 ὑάρδα=1,41 πήχ.

Τὸ ἀγγλικὸν μίλλιον ἰσοδυναμεῖ πρὸς 1760 ὑάρδ.=0,9144×1760=1609,33 μέτρ.

210. Ἐν Ῥωσίᾳ ἀρχικὴ μονὰς τοῦ μήκους εἶναι τὸ *ἄρσιν*=0,7112 μέτρ.

Τὸ βέρστ=1500 ἄρσιν=1067 μέτρα.

211. Δι' ὅλα τὰ ἔθνη τὸ *ναυτικὸν μίλλιον* εἶναι 1852 μέτρα.

Τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου διαιροῦμεν εἰς 360 *μοίρας*, τὴν μοῖραν εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ καὶ τὸ πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα.

Τόξον 50 μοιρῶν, 20 πρώτων καὶ 30 δευτέρων λεπτῶν σημειοῦται $50^{o}, 20', 30''$.

Μία μοῖρα τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς εἶναι 60 ναυτικὰ μίλλια, ἄρα τὸ ναυτικὸν μίλλιον εἶναι τὸ 1' τῆς μοίρας τοῦ μεσημβρινοῦ.

*212. Ἡ ἀρχαία γαλλικὴ μονὰς ἡ *ὀργυιὰ* εἶναι 1,95 μέτρ., διαιρεῖται δὲ εἰς 6 πόδας, ὁ ποὺς εἰς 12 δακτύλους καὶ ὁ δάκτυλος εἰς 12 γραμμάς.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ τραπῶσι α') 3,685 μέτρα εἰς παλάμας, β') 5,63 μέτρα εἰς δακτύλους ἢ γραμμάς, γ') 5867,45 μέτρα εἰς δεκάμ. ἢ ἑκατόμ. ἢ χιλιόμετρα.

2) Νὰ τραπῶσι α') 5,25 μέτρα εἰς πήχ., β') $8 \frac{5}{8}$ πήχ. εἰς μέτρ.

3) 1 χιλιόμετρον νὰ τραπῇ α') εἰς πήχεις, β') εἰς ὑάρδας, γ') εἰς ἄρσιν.

4) Νὰ τραπῶσι α') 5,5 μέτρ. εἰς ὑάρδας, β') 15 ὑάρδαι εἰς μέτρα, γ') $8 \frac{1}{2}$ πήχεις εἰς ὑάρδας, δ') 10 ὑάρδαι εἰς πήχεις.

5) Πόσας ὑάρδας ἔχει 1 ναυτικὸν μίλλιον;

6) Πόσοι δάκτυλοι ἀποτελοῦσιν 1 ἀγγλικὸν πόδα;

7) Μὲ πόσα ῥούπια ἰσοδυναμεῖ ὁ ἀγγλικὸς πούς;

Μονάδες ἐπιφανείας.

213. Ἐν Γαλλίᾳ καὶ ἐκεῖ ἔνθα ἀκολουθοῦσι τὸ δεκαδικὸν μετρικὸν σύστημα (ἐν Γερμανίᾳ, Αὐστρίᾳ κ.λ.) ὡς μονάδα ἀρχικὴν ἔχουσι τὸ *τετραγωνικὸν μέτρον*, ἤτοι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 1 μ. Ὑποδιαιρέσεις αὐτοῦ εἶναι ἡ τετραγ. παλάμη καὶ ὁ τετρ. δά-

κτυλος. Τὸ τετρ. μέτρον παριστῶμεν διὰ τ. μ.· ἔχομεν δὲ 1 τ. μ. =100 τ. παλάμας, 1. τ. παλάμ.=100 τ. δακτύλους, 1. τ. μ.= 10000 τ. δακτύλους. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν 5,31625 τ. μ. δύναται ν' ἀπαγγελθῇ : 5 *τετραγ. μέτρα, 35 τετρ. παλάμ., 62 τετρ. δάκτ. καὶ 5 δέκατα τοῦ τετρ. δακτύλου (20 τετρ. γραμμαί).

214. Διὰ τὰς μεγάλας ἐπιφανείας ἔχομεν τὰς μονάδας :

α') Διὰ τὰς κτηματικὰς γαίας :

Τὸ *τετραγωνικὸν δεκάμετρον* ἢ *ἄρ* (are), ἤτοι τετράγωνον πλευρᾶς 10 μ.· ἄρα

1 ἄρ=100 τ. μ.

Τὸ *τετρ. ἑκατόμμετρον* ἢ *ἑκτάριον* (hectare)=10000 τ. μ.

Τὸ *βασιλικὸν στρέμμα* ἐν Ἑλλάδι=1000 τ. μ.

β') Διὰ τὰς γεωγραφικὰς ἐκτάσεις :

Τὸ *τετρ. χιλιόμετρον* καὶ τὸ *τετρ. μυριάμετρον*· 1 τ. μυριάμετρον=100 τ. χιλιόμετρα.

Μονάδες ὄγκου.

215. Ἐν σχέσει πρὸς τὸ γαλλικὸν μέτρον ἀρχικὴ μονὰς εἶναι τὸ *κυβικὸν μέτρον*, ἤτοι κύβος ἔχων πλευρὰν 1 μέτρου. Τὸ κυβ. μέτρον παριστῶμεν διὰ τοῦ *κ. μ.*

Ὑποδιαιρέσεις αὐτοῦ εἶναι ἡ κυβικὴ παλάμη, κύβος ἔχων πλευρὰν μιᾶς παλάμης, καὶ ὁ κυβ. δάκτυλος.

Ἔχομεν δὲ

1 κ. μ.=1000 κ. παλάμας, 1 κ. παλάμ.=1000 κ. δακτύλους. Οὕτω 5,026030 κ. μ. παριστᾷ 5. κ. μ., 26 κ. παλάμ. καὶ 30 κυβ. δακτ. Ἡ κυβ. παλάμη λέγεται καὶ *λίτρα* καὶ χρησιμεύει διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν ὑγρῶν.

216. Ἐν Τουρκίᾳ χρησιμοποιεῖται ὡς μονὰς ὄγκου ὁ κυβικὸς πῆχυς καὶ ὁ κυβ. τεκτονικὸς πῆχυς, ἤτοι κύβος ἔχων πλευρὰν 1 τεκτ. πήχ. = 0,75 τοῦ μέτρου.

Ἐν Ἀγγλίᾳ ἀρχικὴ μονὰς τοῦ ὄγκου εἶναι ἡ *κυβ. ὑάρδα*. 1 κ. ὑάρδα= 27 κυβ. πόδας, 1 κ. ποδ.=1728 κ. δακτύλους.

Τὸ *γαλόνιον* διὰ τὰ ὑγρὰ=4,543 λίτρ.

Ἐν Ῥωσίᾳ ἔχουσι τὸ *κυβ. ἀρσὶν*=0,358 κ. μ.

Ἀσκήσεις.

1) Πόσα ἄρ ἢ πόσα ἑκτάρια ἔχει τὸ τ. χιλιόμετρον ;

2) 5,62356 τ. μ. νὰ τραπῶσι α' εἰς τ. παλάμας, β' εἰς τ. δακτύλους.

3) 56385 τ. δάκτυλοι νὰ τραπῶσιν εἰς τ. μέτρα.

4) 5,67005 κ. μ. νὰ τραπῶσι α' εἰς λίτρας, β' εἰς κ. δακτύλους.

5) Τί μέρος τοῦ κ. μ. εἶναι ἡ κ. ὑάρδα;
6) Πόσας λίτρας χωρεῖ ἡ κυβ. ὑάρδα;

Μονάδες βάρους.

217. Ἐν Γαλλίᾳ καὶ ἀλλαχοῦ ἀρχικὴ μονὰς τοῦ βάρους εἶναι τὸ *γραμμάριον* (gramme)· εἶναι δὲ τοῦτο βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου εἰς θερμοκρ. 4° Κ. χωροῦντος εἰς ἕνα κ. δάκτυλον,

Ὑποδιαιρέσεις εἶναι

Τὸ *δέκατον* τοῦ γραμμαρίου, τὸ *ἑκατοστὸν* καὶ τὸ *χιλιοστόν*·

Πολλαπλάσια δὲ εἶναι

Τὸ *χιλιόγραμμον* (kilograme)=1000 γραμμάρια.

Ὁ *τόννος*=1000 χιλιόγραμμα.

Μία λίτρα χωρεῖ ἓν χιλιόγραμμον ὕδατος· ἓν δὲ κ. μ. ἕνα τόννον ὕδατος.

217. Ἐν Τουρκίᾳ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ *ὀκᾶ* διαιρουμένη εἰς 400 *δράμια*.

44 ὀκάδες ἀποτελοῦσιν ἕνα *στατῆρα* (καντάρι), 1 χιλιόγραμμον= 312 δράμια=0,78 ὀκάδ.

1 ὀκᾶ= 1282 γραμμάρια=1,282 χιλιόγραμμα,

1 δράμιον=3,205 γραμμάρια,

219. Ἐν Ἀγγλίᾳ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ *ἀγγλικὴ λίτρα* ἰσοδυναμοῦσα πρὸς 0,4535 χιλιόγραμμο=141 δράμια.

112 λίτραι=1 *στατῆρα ἀγγλικόν*,

220. Ἐν Ῥωσίᾳ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ *ῥωσικὴ λίτρα* ἰσοδυναμοῦσα πρὸς 409,5 γραμμάρια.

40 λίτραι=1 *πούτιον*.

221. Ἐν Γερμανίᾳ ἔχουσι τὸ *πφούντιον* ἰσοδυναμοῦν πρὸς 500 γραμμάρια.

Ἀσκήσεις.

1) Πόσας ὀκάδας ἔχει ὁ τόννος;

2) Νὰ τραπῶσι α') 28 ὀκάδες εἰς χιλιόγραμμα, β') 15,3 χιλιόγραμμα εἰς ὀκάδας, γ') 141 δράμια εἰς γραμμάρια, δ') 25,3 γραμμάρια εἰς δράμια.

3) Πόσας ὀκάδας ἔχει τὸ πούτιον;

4) Πόσα χιλιόγραμμα ἔχει ὁ στατήρ;

5) Πόσας ὀκάδας ὕδατος χωρεῖ δεξαμενὴ ἔχουσα ὄγκον 4,32 κ. μ.;

6) Νὰ τραπῶσιν εἰς ἀγγλικὰς λίτρας α′ 5,62 χιλιόγραμμα β′ 8 ὀκάδες, γ′ 5 στατῆρες.

Νομισματικαὶ μονάδες

222. Εἶναι εἰς πολλὴν χρῆσιν ὡς ἀρχικὴ μονὰς τὸ *φράγκον* (franc), τὴν ὁποίαν διὰ συμβάσεως (Λατινικὴ νομισματικὴ σύμβασις) παρεδέχθησαν ἡ Γαλλία, ἡ Ἰταλία, ἡ Ἑλλάς, ἡ Ἑλβετία, τὸ Βέλγιον, διὰ νὰ ἔχωσι νομίσματα ἴσης ἀξίας πρὸς εὐκολίαν τῶν συναλλαγῶν. Τὴν μονάδα ταύτην ἐδέχθησαν καὶ ἄλλα κράτη ἡ Ῥουμανία, ἡ Βουλγαρία καὶ ἡ Σερβία.

Ἀξία εἰς φράγκα		Διάμετρος εἰς γραμμάς	Βάρος εἰς γραμμάρια
Χρυσᾶ	100	35	32,258
	50	28	16,129
	20	31	6,4516
	10	19	3,2258
	5	17	1,6129
Ἀργυρᾶ	5	37	25
	2	27	10
	1	23	5
	0,50	18	2,5
	0,20	15	1
Χάλκινα	0,10	30	10
	0,05	25	5
	0,02	20	2
	0,01	15	1

Τὸ φράγκον, ὅπερ παρ' ἡμῖν δραχμὴ καλεῖται, εἶναι νόμισμα ἀργυροῦν ζυγίζον 5 γραμμάρια, διαιρεῖται δὲ εἰς 100 ἑκατοστά, ἅτινα παρ' ἡμῖν καλοῦνται λεπτά.

Ὁ πίναξ οὗτος περιέχει τὰ νομίσματα ὧν ἡ ἀξία εἶναι ὑπο-

Ἀσκήσεις.

1) Τὸ χρυσοῦν εἰκοσάδρ. τιμᾶται δρ. χαρτ. 20,50. Νὰ τραπῶσι α' 165,65 δρ. εἰς φρ. χρ., β' 68,5 φρ. χρ. εἰς δραχμάς.

2) Τὸ χρυσοῦν φράγκον ἰσοδυναμεῖ πρὸς 1,03 δρ. Νὰ τραπῶσι

α' 28 δρ. εἰς σελίνια	γ' 28 δρ. εἰς ρούβλια
β' » » » γρόσια	δ' 5 στερλῖναι εἰς δραχμάς.

3) Νὰ τραπῶσι α' 25 τεκτ. πήχ. εἰς μέτρα β' 45,6 μέτρα εἰς τεκτ. πήχεις.

4) Τί μέρος τοῦ τ. μ. εἶναι ὁ τετραγωνικὸς τεκτον. πῆχυς.

5) Πόσους τετρ. τεκτ. πήχ. ἔχει τὸ βασιλικὸν στρέμμα;

6) Πόσα βασιλικὰ στρέμματα ἔχει τὸ τετρ. χιλιόμετρον καὶ πόσα τὸ τετρ. μυριάμετρον;

Γενικαὶ ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν μέτρων, σταθμῶν καὶ νομισμάτων.

1) Ἔμπορος ἐπρομηθεύθη ἐκ Μασσαλίας 5865 χιλιόγραμμα καφέ, στοιχίσαντα μέχρι τῆς μεταφορᾶς αὐτῶν εἰς τὸ κατάστημά του ἐν Πειραιεῖ φρ. χρ. 12596,5· πόσας δραχμὰς τῷ στοιχίζει ἡ ὀκᾶ, ἐὰν τὸ εἰκοσόφραγκον τιμᾶται δραχμὰς 20,50;

2) Ἔμπορος ἐν Ἀθήναις ἐπρομηθεύθη ἐκ Τεργέστης 3800 χιλιόγραμμα ὀρύζης ἀγοράσας αὐτὰ ἀντὶ 1505 κορωνῶν· ἐδαπάνησε δὲ προσέτι διὰ ναῦλον 105 κορώνας καὶ διὰ λοιπὰ ἔξοδα, ἐκφόρτωσιν, τελωνεῖον, σιδηρόδρομον κτλ., 355 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς τῷ στοιχίζει ἡ ὀκᾶ, ἐὰν τὸ εἰκοσόφραγκον τιμᾶται δρ. 20,65;

3) Ἔμπορος ἐν Πειραιεῖ ἐπρομηθεύθη ἐκ Σμύρνης 4165 ὀκάδας σύκων, ἅτινα ἠγόρασε πρὸς 1 ὀθωμ. λίραν τὸν στατῆρα· τὰ δὲ λοιπὰ ἔξοδά του εἶναι 245,65 δραχ. Ἐὰν 1 φράγκον=δραχ. 1.05, πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ κερδίσῃ 5 δραχμ. εἰς τὰς ἑκατόν;

4) Ἐν Ἑλλάδι εἰδικῶς διὰ τὴν σταφίδα ἔχουσι τὴν ἐνετικὴν

λίτραν ἰσοδυναμοῦσαν πρὸς 150 δράμια καὶ τὴν χιλιάδα τῶν ἐνετικῶν λιτρῶν.

Νὰ τραπῶσι

α') 5 χιλιάδες ἐνετικῶν λιρῶν εἰς στατῆρας,

β') 565 ὀκάδες εἰς ἐνετ. λίτρας,

γ') 120 ἐνετ. λίτραι εἰς χιλιόγραμμα.

ε') Ἔμπορος ἐν Λονδίνῳ ἐπρομηθεύθη ἐκ Πατρῶν 19 χιλιάδας ἐνετικῶν λιτρῶν σταφίδος πρὸς 112 δραχμὰς χρυσᾶς τὴν χιλιάδα πληρώσας προσέτι διὰ ναῦλον καὶ λοιπὰ ἔξοδα 10 λίρας στερλίνας· πόσας πέννας τῷ στοιχίζει ἡ Ἀγγλικὴ λίτρα;

6) Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου ἔστω 0,912· πόσας ὀκάδας ἐλαίου χωρεῖ ἀγγεῖον ἔχον ὄγκον 0,085 κ. μ.;

7) Ἠγοράσθησαν ἐν Ταϊγανίῳ 15000 πούτια σίτου ἀντὶ 8510 ρουβλίων· πόσα φρ. χρ. στοιχίζει τὸ χιλιόγραμμον;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ὁρισμός.

228. Μετροῦμεν βάρος τι μὲ τὴν ὀκᾶν καὶ εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι 3 στατ.+5 ὀκ.+200 δράμ. ἢ συντομώτερον 3 στατ. 5 ὀκ. 200 δράμ.

Ὁ σύνθετος οὗτος ἀριθμὸς λέγεται *συμμιγής*.

Ἐν γένει·

Ὅταν τὰ ἐν χρήσει πολλαπλάσια ἢ μέρη τῆς ἀρχικῆς μονάδος ἔχοντα *ἴδιον* ὄνομα δὲν εἶναι *δεκαδικά*, δύναται διὰ τῆς χρήσεως τῆς μονάδος ταύτης πρὸς καταμέτρησιν ποσοῦ νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς σύνθετος ἐξ ἄλλων, ὧν αἱ μονάδες εἶναι πολλαπλάσια ἢ μέρη τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ἤτοι συμμιγής. Τοιοῦτοι εἶναι.

α') 25 ἡμ. 6 ὧρ.

β') 8 σελ., 3 πέν., 3 φαρδ.

Οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοὶ εἶναι πάντοτε συγκεκριμένοι.

Οἱ συγκεκριμένοι 5 πήχεις ἢ $3\frac{1}{2}$ ὀκάδ. ἢ 5, 5 ῥούπια κτλ. λέγονται ἁπλοῖ.

Χρησιμοτης.

229. Διὰ τῶν συμμιγῶν

α΄) ἀποφεύγομεν τοὺς μεγάλους ἀριθμούς· π. χ. ἀντὶ 445 ὀκ. ἔχομεν·

10 στατ., 5 ὀκ.

β΄) ἀποφεύγομεν τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμούς· π. χ. ἀντὶ $5\frac{3}{8}$ πήχ. ἔχομεν·

5 πήχ., 3 ῥούπ.

ΣΗΜ. Ἐὰν ὑπάρχωσι κλάσματα τῆς κατωτάτης ὑποδιαιρέσεως, συνήθως παραλείπονται.

Παρατήρησις.

Εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ οἱ δεκαδικοὶ συγκεκριμένοι δύνανται νὰ γραφῶσιν ὡς συμμιγεῖς· π. χ. ἀντὶ 5,35μ. δυνάμεθα νὰ γράψωμεν·

5. μ., 3 παλάμ., 5 δάκτ.,

ἀλλὰ προτιμῶμεν τὴν δεκαδικὴν μορφὴν διὰ τὴν εὐκολίαν τῶν πράξεων.

Μονάδες χρόνου.

230. Εἰς τὰ ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν προβλήματα συχνότατα εἰσέρχεται ὁ χρόνος.

Ἀρχικὴ μονὰς τοῦ χρόνου εἶναι τὸ *ἡμερονύκτιον*, ὅπερ λέγεται καὶ ἁπλῶς *ἡμέρα*· διαιρεῖται δὲ εἰς 24 *ὥρας*, ἡ ὥρα εἰς 60 *πρῶτα λεπτὰ* καὶ τὸ πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 *δεύτερα*.

Παριστῶμεν δὲ τὰ μὲν πρῶτα λεπτὰ διὰ π, τὰ δὲ δεύτερα διὰ δ· π. χ.

4 ὡρ. 25^{π} 45^{δ}

Διὰ τὰ μεγάλα χρονικὰ διαστήματα λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ ἔτος, ὅπερ εἶναι ἢ *κοινὸν* ἔχον 365 ἡμ. ἢ *δίσεκτον* ἔχον 366 ἡμέρας. *Δίσεκτα* εἶναι ἐκεῖνα ὧν ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 4· π. χ. τὰ ἔτη 1920, 1924, 1928, 1932, 1936 κλπ.

Τὸ ἔτος διαιρεῖται εἰς 12 μῆνας, ὧν γνωρίζομεν τὰ ὀνόματα. Τούτων ἄλλοι μὲν ἔχουσι 30 ἡμέρας καὶ ἄλλοι 31, πλὴν τοῦ Φεβρουαρίου, ὅστις ἔχει 28 μὲν ἡμέρας, ὅταν τὸ ἔτος εἶναι κοινόν, 29 δέ, ὅταν εἶναι δίσεκτον.

Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας ἡμέρας ἔχει εἷς μήν, γράφομεν τὴν σειρὰν 1, 2, 3, 4, 5.

Ἔπειτα ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Μαρτίου λέγομεν κατὰ σειρὰν τὰ ὀνόματα τῶν μηνῶν θέτοντες συγχρόνως τὴν γραφίδα ἐφ' ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν τῆς προηγουμένης σειρᾶς, τοὺς ὁποίους, ὅταν τυχὸν ἐξαντλήσωμεν, ἀρχόμεθα πάλιν ἀπὸ τοῦ πρώτου.

Ὅσοι μῆνες πίπτουσιν ἐπὶ περιττοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσι 31 ἡμέρας, ὅσοι ἐπὶ ἀρτίου 30, ἐξαιρουμένου τοῦ Φεβρουαρίου. Διὰ πολὺ μεγάλα χρονικὰ διαστήματα ἔχομεν μονάδα τὸν *αἰῶνα* = 100 ἔτη καὶ τὴν *χιλιετηρίδα* 1000 ἔτη.

Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς ἁπλοῦν ἀριθμόν.

231. α') Ζητεῖται τὸ χρηματικὸν ποσόν: 5 λίρ., 8 σελ., 3 πέν., 2 φαρδ. νὰ τραπῇ εἰς σελλίνια.

Πρὸς τοῦτο τρέπομεν εἰς σελλίνια τὸ μέρος αὐτοῦ 5 λίρ., 8 σελ. καὶ ἔχομεν·

5 λίρ. $= 5 \times 20 = 100$ σελ.

Ἄρα 5 λίρ., 8 σελ. $= 108$ σελ.

Ἔπειτα τρέπομεν τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ συμμιγοῦς καθ' ὅμοιον τρόπον εἰς φαρδίνια καὶ ἔχον·

3 πέν., 2 φαρδ. $= 14$ φαρδ.

ἐπειδὴ δὲ 1 σελ. $= 12$ πέν. $= 48$ φαρδ., ἕπεται ὅτι 14 φαρδ. $= \frac{14}{48}$ σελ.· ἄρα τὸ δοθὲν ποσὸν ἰσοδυναμεῖ πρὸς $108\frac{14}{48}$ σελ.

Διάταξις τῆς πράξεως.

5 λίρ. 8 σελ.	3 πέν. 2 φαρδ.	
20	4	
100	12	1 σελ. = 12 πέν.
8	2	4
108	14	48 φαρδ.

β') Ζητεῖται ὁ συμμιγὴς 3 ἡμ., 5 ὥρ. 40π νὰ τραπῇ εἰς πρῶτα λεπτά.

'Εργαζόμενοι, ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, εἰς τὸ πρῶτον μέρος τοῦ συμμιγοῦς 5 λίρ. 8 σελ. ἔχομεν·

3 ἡμ. 5 ὥρ. 40 π.
24
72 ὥρ. καὶ
5
77 ὥρ.
60
4620 π. καὶ
40
4660 π.

ἤτοι ὁ δοθεὶς συμμιγὴς ἐτράπη εἰς 4660 πρῶτα λεπτά.

γ') Ζητεῖται ὁ συμμιγὴς 2 πόδ. 8 δάκτ. νὰ τραπῇ εἰς ὑάρδας.

'Εργαζόμεθα, ὅπως εἰς τὸ α' παράδειγμα, διὰ νὰ τρέψωμεν 3 πέν., 2 φαρδ. εἰς σελλίνια, καὶ ἔχομεν·

2 πόδ. 8 δακτ.
12
24 δακ.
8
32

1 ὑάρδ. = 3 πόδ.
12
= 36 δακτ.

Ὥστε 2 πόδ. 8 δάκτ. $= \frac{32}{36}$ ὑάρδ.

Τροπὴ ἀριθμοῦ ἁπλοῦ εἰς συμμιγῆ.

232. Τρεῖς περιπτώσεις διακρίνομεν, καθ' ὅσον ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι ἀκέραιος, κλασματικὸς ἢ μικτός.

α') Ζητεῖται νὰ τρέψωμεν εἰς συμμιγῆ 4269δ τῆς ὥρας.

Διαιροῦμεν 4269 διὰ 60, διότι 1π = 60δ, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 71 καὶ ὑπόλοιπον 9· ἄρα 4269δ = 71π 9δ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν·

71π = 1 ὥρ. 11π Ἄρα 4269δ = 1 ὥρ. 11π 9δ.

Διάταξις τῆς πράξεως

```
4269 | 60
  69 | 71 π.  | 60
9 δ. 11 π.      1 ὧρ.
```

β΄) Ζητεῖται $\frac{3}{7}$ ὑάρδ. νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ.

Διαιροῦμεν 3 : 7 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 0 ὑάρδ. καὶ ὑπόλοιπον 3 ὑάρδ., τὰς ὁποίας τρέπομεν εἰς 9 πόδας.

Διαιροῦμεν ἔπειτα 9 : 7 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 1 πόδα καὶ ὑπόλοιπον 2 πόδας, οὓς τρέπομεν ἔπειτα εἰς 24 δακτ. Τούτους διαιροῦμεν δι' 7 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 3 δακτ. καὶ ὑπόλ. 3 δακτ., οἵτινες δὲν τρέπονται εἰς μονάδας κατωτέρας· ἄρα

$\frac{3}{7}$ ὑάρδ.$=$1 πόδ. 3 $\frac{3}{7}$ δακτ.

Διάταξις τῆς πράξεως

```
  3 | 7
 ×3   0 ὑάρδ., 1 πόδ., 3 δακτ.
  9 :
  2
×12
 24 : 7
  3
```

γ΄) Ζητεῖται 86 $\frac{5}{7}$ σελ. νὰ τραπῶσιν εἰς συμμιγῆ.

Κατὰ τἀνωτέρω ἔχομεν·

α΄) 86 σελ.$=$4 λίρ. 6 σελ.

β΄) $\frac{5}{7}$ σελ.$=$8 πέν. 2 $\frac{2}{7}$ φαρδ., ἤτοι ἐν ὅλῳ

4 λίρ., 6 σελ., 8 πέν., 2 $\frac{2}{7}$ φάρδ.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ τραπῶσι 5 λίρ., 8 σελ., 7 πέν., 2 φαρδ. εἰς φρ. χρ.

Λύσις. Δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸ δοθὲν ποσὸν εἰς σελλίνια καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 1,25, διότι 1 σελ.=1,25 φρ.

2) 145 γρόσ., 30 παρ. νὰ τραπῶσιν εἰς φράγκα χρ.

3) 2 ὀκ. 100 δράμ. νὰ τραπῶσιν εἰς γραμμάρια.

4) 25,35 χιλιόγρ. νὰ τραπῶσιν εἰς ὀκάδας καὶ δράμια.

5) Ὁ χρόνος 8 ὥρ. 20π 30δ νὰ τραπῇ εἰς ὥρας.

6) Ἁμαξοστοιχία διέτρεξεν 25 χιλιόμ. εἰς 8 ὥρας 20π 30δ. Πόσα χλμ. διέτρεξεν εἰς 1 ὥραν;

7) 20 ὀργδ. 2 πόδ. 6 δάκτ. νὰ τραπῶσιν εἰς μέτρα.

8) Δύο πόλεις κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μεσημβρινοῦ, οὗτινος τὸ μεταξὺ αὐτῶν τόξον εἶναι 2°, 30′ 40″. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ναυτικὰ μίλλια ἢ εἰς χιλιόμετρα ἡ ἐπὶ τοῦ μεσημβρινοῦ ἀπόστασις τῶν πόλεων τούτων ἀπ' ἀλλήλων.

9) Νὰ τραπῶσιν εἰς μέτρα 25 πήχεις 3 ῥούπια.

10) 8 ἄνθρωποι ἐμοιράσθησαν 15 ὀθωμ. λίρας· πόσον τὸ μερίδιον ἑκάστου εἰς λίρας καὶ ὑποδιαιρέσεις αὐτῆς;

11) 25000 φαρδίνια νὰ τραπῶσιν εἰς συμμιγῆ.

Αἱ τέσσαρες πράξεις.

233. Αἱ πράξεις αὗται ἐκτελοῦνται ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους καὶ δεκαδικοὺς μὲ *μόνην* τὴν διαφορὰν ὅτι ἐνταῦθα αἱ μονάδες σχηματίζονται ἐκ τῶν ἀμέσως κατωτέρων κατὰ *ποικίλους* τρόπους καὶ οὐχὶ *μόνον* διὰ 10πλασιασμοῦ.

Παραδείγματα.

α′)	5 στ.	5 ὀκ.	200 δράμ.	προσθετέοι
	8	36	250	
		9	150	
Ἄθροισμα	14 στ.	7 ὀκ.	200 δράμ.	

β′)	11 γρόσ.	35 παρ.	μειωτέος
	5	20	ἀφαιρετέος
	6 γρόσ.	15 παρ.	διαφορὰ

'Ασκήσεις.

1) Πρὸς πόσα φράγκα ἰσοδυναμεῖ τὸ ἄθροισμα

5λίρ.	6σελ.	10πέν.	+
	8	2	+
10	5	1 ;	

2) Τρία τεμάχια ὑφάσματος ἔχουσι μῆκος τὸ α') 10 πήχ. 7 ῥουπ., τὸ β') 8 πήχ., τὸ γ') 26 πήχ. 3 ῥουπ. Πόσον τὸ μῆκος ὅλων ὁμοῦ α') εἰς πήχεις, β') εἰς μέτρα ;

3) 'Εκ τεμαχίου ὑφάσματος μήκους 15 ὑαρδ. 2 ποδ. ἐκόπησαν α') 1 ὑάρδ. 10 δάκ., β') 1 ὑάρδ. 11 δάκ. Πόσον ὑπολείπεται ;

4) Βαρέλιον κενὸν ζυγίζει 25 ὀκ. 250 δρ., πλῆρες δὲ οἴνου 4 στ. 100 δρ. Πόσον ζυγίζει ὁ οἶνος ;

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

Α'. Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον.

234. 'Εργάτις τις ὑφαίνει εἰς 1 ἡμέραν 11 πήχ. 6 ῥούπ. ὑφάσματος. Πόσον ὑφαίνει εἰς 7 ἡμέρας ;

Λύσις. Πρέπει τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 7.

11πήχ.	6ρούπ.
	7
82πήχ.	2ρούπ.

'Ο πολλαπλασιασμὸς γίνεται ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους μὲ μόνην τὴν διαφορὰν περὶ ἧς εἴπομεν εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν.

'Ασκήσεις.

1) Οἰκογένεια χρειάζεται καθ' ἑκάστην 2 ὀκ. 200 δρ. ἄρτον. Πόσας χρειάζεται εἰς 3 ἑβδομάδας ;

2) 'Αμαξοστοιχία διατρέχει εἰς 3π 40δ ἓν χιλιόμετρον. Εἰς πόσον χρόνον θὰ διατρέξῃ 45 χιλιόμετρα ;

Β΄. *Διαίρεσις συμμιγοῦς δι᾽ ἀκεραίου.*

235. *Πρόβλ.* Εἰς 12 ἀνθρώπους ἐμοιράσθησαν 45 πήχ. 5 ρούπ. ὑφάσματος. Πόσον ἔλαβεν ἕκαστος;

Λύσις. Θὰ διαιρέσωμεν τὸ μῆκος διὰ 12. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν χωριστὰ τὰ μέρη τοῦ συμμιγοῦς, ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους, ἑνώνοντες τὰ μερικὰ πηλίκα.

Διάταξις τῆς πράξεως

45πήχ. 5ρούπ.	12
9	3πήχ. 6ρούπ.
×8	
72	
+5	
77 : 12	
5	

ἤτοι ἕκαστον ὑπόλοιπον πλὴν τοῦ τελευταίου τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέτομεν καὶ τὰς ἐν τῷ διαιρετέῳ μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρι τῶν μονάδων τῆς κατωτάτης τάξεως.

Ἐνταῦθα, ὡς γνωρίζομεν, ἡ διαίρεσις εἶναι *μερισμός*.

236. Ἔστω ἤδη τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Μὲ 12 πήχεις ὑφάσματος κατασκευάζομεν μίαν σινδόνα· πόσας σινδόνας δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν μὲ 45 πήχ. καὶ 5 ρούπ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

Λύσις. Θὰ κατασκευάσωμεν τόσας σινδόνας, ὁσάκις αἱ 12 πήχ. χωροῦσιν εἰς τοὺς 45 πήχ. 5 ρούπ. Ἑπομένως ἐνταῦθα ἡ διαίρεσις παρίσταται ὡς *μέτρησις*.

Ἡ δὲ πρᾶξις γίνεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{l|l} 45\text{πήχ.}\ 5\text{ρούπ.} & 12 \\ \hline \begin{array}{r} 9 \\ \times 8 \\ \hline 72 \\ +5 \\ \hline 77 \end{array} & 3\text{σινδ.}\ \frac{77}{96} \end{array}$$

$12\text{πήχ.} = 96\text{ρούπ.}$

Διαιροῦμεν δηλ. 45 διὰ 12 καὶ εὑρίσκομεν 3, ὅπερ παριστᾷ σινδόνας· ὑπολείπονται 9 πήχ.=72 ρούπ. καὶ 5 ρούπια τοῦ διαιρετέου ἐν ὅλῳ 77 ρούπ., ἐπειδὴ δὲ διὰ 1 σινδόνα χρειαζόμεθα 12 πήχ. ἢ 96 ρούπ., ἕπεται ὅτι ὅλον τὸ πηλίκον εἶναι 3 σινδ καὶ $\frac{77}{96}$.

Ἠδυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸν διαιρετέον εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν ὁμοειδῆ τῷ διαιρέτῃ, ἤτοι νὰ διαιρέσωμεν

$$45\frac{5}{8} : 12$$

Ἀσκήσεις.

1) Οἰκογένεια καταναλίσκει τὴν ἑβδομάδα 25 ὀκ. 150 δράμ. ἄρτου. Πόσον καταναλίσκει εἰς μίαν ἡμέραν;

2) 17 πήχ. ὑφάσματος ἐπωλήθησαν 57 γρόσ. 30 παρ. Πόσον ἐπωλήθη ὁ πῆχυς;

Γ'. Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ κλάσμα ἢ μικτόν.

237. *Πρόβλημα.* Ἐργάτης ὑφαίνει εἰς 1 ὥρ. 2 πήχ., 2 ρούπ. ὑφάσματος. Πόσον ὑφαίνει εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας;

Λύσις Πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ συμμιγοῦς, ἤτοι νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ $\frac{3}{4}$. Προφανῶς θὰ εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, ἐὰν λάβωμεν τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ τριπλασίου αὐτοῦ, ἤτοι ἐὰν *πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.*

Οὕτως εὑρίσκομεν

(2 πήχ. 2 ῥούπ.)×3=6 πήχ. 6 ῥούπ.

Ἔπειτα (6 πήχ. 6 ῥούπ.) : 4=1 πῆχ. 5½ ῥρύπ.

Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μικτός, ἢ τρέπομεν αὐτὸν εἰς κλάσμα καὶ πράττομεν ὡς ἀνωτέρω ἢ πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ προσθέτοντες τὰ μερικὰ γινόμενα.

Ἀσκήσεις.

1) Ἡ ὀκᾶ τοῦ ἐλαίου τιμᾶται 5 γρόσ. 25 παρ. Πόσον τιμῶνται $\frac{5}{11}$ τῆς ὀκᾶς;

2) Ἁμαξοστοιχία διατρέχει 1 χιλιόμ. εἰς χρόνον 2π 15δ. Εἰς πόσον χρόνον διατρέχει 5 $\frac{4}{7}$ χιλιόμ.;

3) Ἐξ ὑφάσματος μήκους 30 μέτρ., 4 παλ., 6 δακτ. ἀπεκόπησαν α′ τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ· β′ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὑπολοίπου· πόσα μέτρα ἔμειναν;

Δ′. Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ κλάσματος ἢ μικτοῦ.

238. *Πρόβλημα.* Τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχ. ὑφάσματος τιμῶνται 3 γρ. 20 παρ. πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;

Λύσις. Ἡ τιμὴ τοῦ πήχ. πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ $\frac{3}{8}$ δίδει 3 γρ. 20 παρ. ἄρα εἶναι τὸ πηλίκον

(3 γρόσ. 20 παρ.) : $\frac{3}{8}$ = 9 γροσ., 14 παρ.

ὅπερ εὑρίσκομεν ἀντιστρέφοντες τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος καὶ τρέποντες τὴν διαίρεσιν εἰς πολλαπλασιασμόν.

Διὰ μικτοῦ διαιροῦμεν πάντοτε τρέποντες αὐτὸν εἰς κλάσμα.

ΣΗΜ. Εἰς τὰ προηγούμενα ἀνάγεται ἡ περίπτωσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἢ τῆς διαιρέσεως συμμιγοῦς διὰ δεκαδικοῦ.

Ἀσκήσεις.

1) Ἁμαξοστοιχία διέτρεξεν εἰς 1 ὥρ., 18π, 20δ, τὰ $\frac{5}{8}$ μιᾶς γραμμῆς· εἰς πόσον χρόνον θὰ διατρέξῃ τὸ ὑπόλοιπον μέρος;

2) 5 χιλιόγρ. 160 γραμ. ἐλαίου ἐπωλήθησαν 8 σελ. 10 πέν. Πόσον ἐπωλήθη τὸ 1 χιλιόγρ;

3) Ἠγόρασέ τις 5,5 χιλιόγρ. ἐλαίου ἀντὶ 30 παρ. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ χιλιόγρ, ἵνα κερδίσῃ ἐν ὅλῳ 8 γρ. 10 παρ.;

Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ συμμιγῆ.

239. *Πρόβλημα α'.* Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 5 γρ. 25 παρ. Πόσον τιμῶνται 6 πήχ. 5 ῥούπια;

Λύσις. Πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν

5 γρ. 25 παρ. $\times$ 6 πήχ. 5 ῥούπ.

Ἐπειδὴ ἐδόθη ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως, τρέπομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν εἰς πήχεις καὶ ἔχομεν·

5 γρ. 25 παρ. $\times\ 6\frac{5}{8} =$ 37 γρ. 10 παρ. $\frac{5}{8}$.

Τὸ πρόβλημα ὁδηγεῖ εἰς ποίας μονάδας πρέπει νὰ τρέψωμεν τὸν πολλαπλασιαστήν.

Πρόβλημα β'. Μὲ 1 γρ. ἀγοράζομεν 6 πήχ. 5 ῥούπ. ὑφάσματος. Πόσους πήχ. ἀγοράζομεν μὲ 5 γρ. 25 παρ.;

Λύσις. 6 πήχ. 5 ῥούπ. $\times$ 5 γρ. 25 παρ. $=$ 37 πήχ. $2\frac{1}{2}$ ῥούπ.

ΣΗΜ. Εἰς ἀμφότερα τὰ προβλήματα ταῦτα οἱ παράγοντες εἶναι οἱ αὐτοί. Τὰ γινόμενα ὅμως ἔχουσιν ἰσαρίθμους μόνον τὰς ἀνωτάτας μονάδας, διότι διάφοροι εἶναι αἱ ὑποδιαιρέσεις αὐτῶν.

Μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν.

240. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μέγας ἀριθμός, εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον εὐκολώτερον ὡς ἑξῆς·

Πρόβλημα α'. Ζητεῖται

$$(3\,\text{λίρ.},\ 11\,\text{σελ.},\ 5\,\text{πέν.},\ 2\,\text{φαρ.}) \times 528$$

Εὑρίσκομεν α'. 3 λίρ.×528=1584 λίρ. Ἔπειτα ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ λοιπὰ μέρη τοῦ πολλαπλασιαστέου ὡς ἔχουσιν, ἀναλύομεν αὐτὰ εἰς μέρη τέλεια (ἐὰν δὲν εἶναι τοιαῦτα) τῶν προηγουμένων μονάδων ἢ ἕκαστον τοῦ προηγουμένου καὶ εὑρίσκομεν τὰ γινόμενα τῶν μερῶν τούτων· π. χ. ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 11 σελ. × 528 ἀναλύομεν τὰ 11 σελ. εἰς 10 σελ.= $\frac{1}{2}$ λίρ. καὶ 1 σελ.= $\frac{1}{10}$ τῶν 10 σελ. καὶ ἔχομεν·

10 σελ. × 528= $\frac{1}{2}$ λίρ. × 528=264 λίρ. 1 σελ. × 528= $\frac{1}{10}$ × 264 λίρ. = 26 λίρ. 8 σελ.

Ὁμοίως πράττομεν καὶ διὰ τὰ λοιπὰ μέρη τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὡς φαίνεται ἐν τῇ ἑπομένῃ διατάξει τῆς πράξεως·

		3 λίρ. 11 σελ.,	5 πέν.	2 φαρδ.
		528		
3 λίρ.		1584		
11σελ.	10 σελ. = $\frac{1}{2}$ λίρ.	264		
	+ 1 » $\frac{1}{10}$ τῆς $\frac{1}{2}$ λ.	26	8	
5πέν.	4πέν. = $\frac{1}{3}$ σελ.	8	16	
	+ 1 » $\frac{1}{4}$ τῶν 4 πεν.	2	4	
2φαρδ.	= $\frac{1}{2}$ πεν.	1	2	
		1886λίρ.	10σελ.	

Πρόβλημα β'. Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 5 γρ. 25 παρ. Πόσον τιμῶνται 56 πήχ. 5 ρούπ.;

Λύσις. Τὸ ζητούμενον εἶναι τὸ γινόμενον 5 γρ. 25 παρ. × 56 πήχ. 5 ῥ., τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ὁμοίως διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἁπλῶν μερῶν (ἢ τελείων), ὡς φαίνεται ἐν τῇ ἑπομένῃ διατάξει :

		5γρ.	25παρ.
		56πήχ.	5ρούπ.
Ἀξία 56πήχ. πρὸς 5γρ.		280γρ.	
» » » 25παρ.	20παρ.	28	
	5παρ.	7	
» 5ρούπ.	4	2	$32 \frac{1}{2}$
	1	0	$28 \frac{1}{8}$
Ὁλικὸν γινόμενον		318γρ.	$20 \frac{5}{8}$π.

Ἀσκήσεις.

1) Ἁμαξοστοιχία διατρέχει εἰς 1 ὥρ. 45,5 χιλιόμ. Πόσα χλμ. διατρέχει εἰς 5 ὥρ. 30π., 25δ.;

2) Πόσον τιμῶνται 15 ὀκ. 250 δράμ. ἐλαίου πρὸς δρ. 2,65 τὴν ὀκᾶν;

3) Πόσον τιμῶνται 10 ὑάρδ. 8 δάκτ. ὑφάσματος πρὸς 3 σελ. 2 φαρδ. τὴν ὑάρδαν;

Διαίρεσις διὰ συμμιγοῦς.

241. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον ὁ διαιρετέος, ὅστις πρέπει νὰ εἶναι συγκεκριμένος, εἶναι ὁμοειδὴς ἢ ἑτεροειδὴς τῷ διαιρέτῃ.

Α' Περίπτωσις.

Πρόβλημα. Ἡ ὑάρδα ὑφάσματος τιμᾶται 3 σελ. 5 πέν. 3 φαρδ. Πόσας ὑάρδας δυνάμεθα ν' ἀγοράσωμεν μὲ 2 λίρ. 10 σελ. 8 πέν.;

Λύσις. Ἐπὶ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν πολλαπλασιαζόμενος ὁ α' συμμιγὴς παράγει τὸν β'. Ἄρα ὁ ζητούμενος εἶναι.

(2λίρ., 10σελ., 8πέν.) : (3σελ., 5πέν., 3φαρδ.)

Τρέπομεν ἀμφοτέρους εἰς φαρδ. καὶ ἔχομεν·

ὁ α'=2432φαρδ. ὁ β'=167φαρδ.

Ἄρα ὁ ζητούμενος εἶναι·

$$\frac{2432}{167} \text{ ὑάρδ.} = 14 \text{ ὑάρδ.}, \ 1 \text{ π.}, \ 8\frac{14}{167} \text{ δ.}$$

Β' Περίπτωσις.

242. *Πρόβλημα.* 5 πήχ. 3 ῥούπ. ὑφάσματος τιμῶνται 18,5 δρ. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;

Λύσις. Πρέπει νὰ διαιρέσωμεν (18,5 δρ.): (5 πήχ., 3 ῥούπ.) (§ 165). Ἐπειδὴ δὲ ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως τρέπομεν τὸν διαιρέτην εἰς πήχεις καὶ ἔχομεν·

$$18{,}5 \text{ δρ.} : 5\frac{3}{8} = \text{δρ. } 3{,}44.$$

Ἀσκήσεις.

1) Ἀτμομηχανὴ καίει τὴν ὥραν 5 ὀκ., 100 δρμ. ἀνθράκων. Εἰς πόσας ὥρας θὰ καύσῃ 2 στ. 10 ὀκ.;

2) Μὲ 1 δρ. ἀγοράζομεν 2 πήχ. ὑφάσματος. Μὲ πόσας δρ. ἀγοράζομεν τὰ 5 ῥούπ.;

3) Λυχνία εἰς 2 ὥρ., 20π. ἔκαυσε 1 ὀκ. 240 δράμ. ἐλαίου. πόσον καίει τὴν ὥραν;

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν συμμιγῶν καθόλου.

1) Ἔμπορος ἔφερεν ἐξ Ἀγγλίας 360 ὑάρδ. ὑφάσματος, ὅπερ ἐστοίχισεν 65 λίρ. 15 σελ. Πόσον τῷ ἐστοίχισεν ὁ πῆχυς;

2) Ἔμπορος ἠγόρασε 3 τεμάχια ὑφάσματος τῆς αὐτῆς ποιότητος. Ἐπλήρωσε δὲ διὰ μὲν τὸ α' ἔχον μῆκος 25 πήχ. 4 ῥούπ. τὸ ποσὸν 42,25 δρ., διὰ τὸ β' ἔχον μῆκος 32 πήχ. δρ. 55,30 καὶ διὰ τὸ γ' ἔχον μῆκος 18 πήχεων, 5 ῥούπ. δρ. 30. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὸν πῆχυν τοῦ ὅλου ὑφάσματος διὰ νὰ κερδίσῃ ἐν ὅλῳ 12,65 δρ.;

3) Παραγγελιοδόχος λαμβάνει ἐκ τοῦ ἐμπορικοῦ οἴκου, ὃν ἀντιπροσωπεύει, ἀμοιβὴν 8 σελ. 8 πεν. καθ' ἑκάστην ἡμέραν τῆς περιοδείας του καὶ προσέτι 3 ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν παραγγελιῶν, δαπανᾷ δὲ καθ' ἑκάστην πρὸς συντήρησίν του 7 σελ.

5 πέν. Μετὰ περιοδείαν 75 ἡμερῶν εἶχεν οἰκονομήσει 45 λίρ. 15 σελ. Πόση ἦτο ἡ ἀξία τῶν δι' αὐτοῦ γενομένων παραγγελιῶν;

4) Τόξον κύκλου 35° 45′ ἔχει μῆκος 5,65 μ: πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ὅλης περιφερείας;

5) Ὁ ἥλιος καθ' ἑκάστην εἰς 24 ὥρας γράφει πλήρη περιφέρειαν κύκλου. Ἐὰν ἡμέραν τινὰ εἴς τινα τόπον ἀνέτειλεν 7 ὥρ. 35π. π. μ., πόσον εἶναι τὸ τόξον τῆς περιφερείας ὅπερ κατέγραψεν ὑπεράνω τοῦ ὁρίζοντος μέχρι τῆς μεσημβρίας;

6) Δύο ὑφάσματα τῆς αὐτῆς ποιότητος ἔχουσι πλάτος τὸ α′ 1 πήχ. 2 ῥούπ., τὸ β′ 2 πήχ. Τιμᾶται δὲ τοῦ μὲν α′ ὁ πῆχυς δρ. 5. 10, τοῦ δὲ β′ δρ. 8.20. Ποῖον εἶναι εὐθηνότερον;

ΒΙΒΛΙΟΝ ΣΤ΄

ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΛΟΓΟΙ

243. Ἔστωσαν δύο μεγέθη ὁμοειδῆ, π. χ. δύο εὐθεῖαι Α καὶ Β. Ἂς ὑποθέσωμεν δ' ὅτι ἡ Α γίνεται ἐκ τῆς Β, ἐὰν αὕτη ἐπαναληφθῇ τρίς, ληφθῇ δὲ προσέτι καὶ τὸ $\frac{1}{10}$ αὐτῆς.

Ἡ εὐθεῖα Α λέγεται *γινόμενον* τῆς Β ἐπὶ 3,1· παριστῶμεν δὲ τὴν σχέσιν ταύτην γράφοντες.

$$A = (3{,}1)\,B.$$

Ὁ ἀριθμὸς 3,1 λέγεται *λόγος* τῆς Α πρὸς τὴν Β. Ἐν γένει *Λόγος μεγέθους πρὸς ἕτερον ὁμοειδὲς λέγεται ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων πῶς γίνεται τὸ πρῶτον ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ ἢ ὁ ἀριθμὸς ἐφ' ὃν πολλαπλασιαζόμενον τὸ δεύτερον παράγει τὸ πρῶτον.*

244. Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι Α καὶ Β ἔχουσαι μῆκος ἡ μὲν Α 10 μ., ἡ δὲ Β 2,5 μ. Εἶναι φανερὸν ὅτι, ὅπως ὁ ἀριθμὸς 10 γίνεται ἐκ τοῦ 2.5 λαμβανομένου 4άκις οὕτω καὶ ἡ Α γίνεται ἐκ τῆς Β 4άκις λαμβανομένης. Ἄρα.

Ὁ λόγος μεγέθους πρὸς ἕτερον ὁμοειδὲς εἶναι τὸ πηλίκον τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες παριστῶσι ταῦτα μετρηθέντα διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος.

Ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς το Β σημειοῦται Α: Β. Εἶναι δὲ Α ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ λόγου καὶ Β ὁ δεύτερος.

245. Λόγος δύο ἀριθμῶν λέγεται τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου· π.χ. τὸ πηλίκον $5:2=2\frac{1}{2}$ λέγεται λόγος τοῦ 5 πρὸς τὸν 2. Ἑπομένως καὶ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς ὁ λόγος δηλοῖ πῶς γίνεται ὁ πρῶτος ἀριθμὸς ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ.

236. *Ἀντίστροφοι λόγοι* λέγονται οἱ ἔχοντες τοὺς αὐτοὺς ὅρους, ἀλλὰ κατ' ἀντίστροφον τάξιν· π. π. οἱ λόγοι

$$5:2 \text{ καὶ } 2:5 \text{ ἢ } \frac{5}{2} \text{ καὶ } \frac{2}{5}.$$

Εὐκόλως δὲ παρατηροῦμεν ὅτι· *τὸ γινόμενον δύο λόγων ἀντιστρόφων ἰσοῦται τῇ μονάδι.*

Μεγέθη εὐθέως καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

247. Ὅταν ἔν τινι ὑπολογισμῷ ἓν ποσὸν δύναται νὰ λαμβάνῃ διαφόρους τιμάς, λέγεται *μεταβλητόν*, ὅταν δὲ διατηρῇ τὴν αὐτὴν τιμὴν *σταθερόν*. Π.χ. εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἀξίας ἑνὸς εἴδους ὑφάσματος ἡ ἀξία τοῦ πήχεως εἶναι ποσότης σταθερά, ἐνῷ τὸ μῆκος τεμαχίου αὐτοῦ καὶ ἡ ἀξία αὐτοῦ εἶναι ποσότητες μεταβληταί. Πολλάκις δύο ποσότητες μεταβληταὶ *ἐξαρτῶνται* ἀπ' ἀλλήλων ἤτοι ἐὰν ἡ μία μεταβληθῇ, συμμεταβάλλεται καὶ ἡ ἄλλη καὶ εἰς ὡρισμένην τιμὴν τῆς μιᾶς ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη τιμὴ τῆς ἄλλης· Π. χ. τὸ μῆκος ὑφάσματος καὶ ἡ ἀξία αὐτοῦ, τὸ διάστημα τοῦ καταπίπτοντος σώματος καὶ ὁ χρόνος τῆς πτώσεως. Λέγομεν τότε ὅτι ἑκάτερον τῶν ποσῶν τούτων εἶναι *συνάρτησις* τοῦ ἄλλου.

248. Τὸ μῆκος ὑφάσματος καὶ ἡ ἀξία αὐτοῦ ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων οὕτως ὥστε, ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τότε καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ ἄλλου πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Τὰ τοιαῦτα ποσὰ λέγονται *εὐθέως ἀνάλογα* ἢ ἁπλῶς *ἀνάλογα.*

Τοιαῦτα εἶναι προσέτι :

Τὸ βάρος ἐμπορεύματος καὶ ἡ ἀξία αὐτοῦ. Τὸ διάστημα τῆς ἰσοταχοῦς κινήσεως καὶ ὁ χρόνος αὐτῆς, κτλ.

249. Τὸ μερίδιον ἑκάστου ἀνθρώπου καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἀνθρώπων εἰς τοὺς ὁποίους μοιράζομεν χρηματικὸν ποσὸν ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων οὕτως ὥστε, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν, το μερίδιον ἑκάστου διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Τὰ τοιαῦτα ποσὰ λέγονται *ἀντιστρόφως ἀνάλογα* ἢ ἁπλῶς *ἀντίστροφα*.

Τοιαῦτα εἶναι προσέτι:

Τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν πρὸς ἐκτέλεσιν ἔργου καὶ ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος.

Τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος ὅπερ χρειάζεται διὰ τὴν κατασκευὴν ἐνδύματος καὶ τὸ πλάτος αὐτοῦ.

250. Ὑπάρχουσι ποικίλοι τρόποι ἐξαρτήσεως ἑνὸς ποσοῦ ἐξ ἑτέρου. Π. χ., ἐὰν τὸ βάρος τεμαχίου ἀδάμαντος εἶναι 2, 3, 4, 5 κτλ. φορὰς μεγαλύτερον, ἡ ἀξία αὐτοῦ εἶναι 2^2, 3^2, 5^2 κλπ. φορὰς μεγαλυτέρα.

Ὁ *ἁπλούστερος* δὲ τρόπος ἐξαρτήσεως εἶναι ἐκεῖνος, καθ' ὃν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.

251. Δύναται ποσόν τι νὰ ἐξαρτᾶται ἐκ πολλῶν ἄλλων· π. χ. τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου πατώματος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους καὶ τοῦ πλάτους αὐτοῦ.

Λέγομεν τότε ὅτι τὸ ποσὸν τοῦτο εἶναι ἀνάλογον ἢ ἀντίστροφον πρὸς ἓν ἐξ αὐτῶν, ὅταν συμμεταβάλληται μετ' αὐτοῦ ἀναλόγως ἢ ἀντιστρόφως, πάντων τῶν λοιπῶν τηρουμένων *ἀμεταβλήτων*· ἐνταῦθα π. χ. τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ μῆκος ἢ πρὸς τὸ πλάτος, διότι, ἐὰν ἓν μόνον τούτων μεταβληθῇ, τὸ ἐμβαδὸν συμμεταβάλλεται ἀναλόγως.

Ὁ χρόνος ὁ ἀπαιτούμενος διὰ τὸ σκάψιμον ἀμπέλου ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ πλήθους τῶν ἐργατῶν καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργασίμων ὡρῶν τῆς ἡμέρας.

Εἶναι δὲ ἀντίστροφος πρὸς ἑκάτερον τούτων.

Ἐὰν π. χ. ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργασίμων ὡρῶν μείνῃ ὁ αὐτὸς καὶ μεταβληθῇ μόνον τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν, ὁ χρόνος μεταβάλλεται *ἀντιστρόφως*.

Ἀσκήσεις.

1) Ἔχομεν τρεῖς εὐθείας Α Β Γ τοιαύτας ὥστε

Α : Β=3,14 Β : Γ=2,17

Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος Α : Γ.

2) Δύο ποσὰ ἀνάλογα πρὸς τρίτον εἶναι πρὸς ἄλληλα ἀντίστροφα.

Π. χ. Ὅταν ταχυδρόμος διατρέχῃ διάστημά τι, αἱ ὧραι καθ' ἃς βαδίζει καθ' ἑκάστην εἶναι ὡς πρὸς τὸ πλῆθος αὐτῶν ἀνάλογοι πρὸς τὸ διάστημα ὅπερ πρέπει νὰ διατρέξῃ· ὁμοίως αἱ ἀπαιτούμεναι ἡμέραι. Λοιπὸν αἱ ὧραι καὶ αἱ ἡμέραι εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα.

3) Ἐὰν ποσόν τι εἶναι ἀνάλογον πρὸς ἕτερον καὶ ἀντίστροφον πρὸς τρίτον, τότε τὸ β' καὶ τὸ γ' εἶναι ἀνάλογα. Π χ. εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα αἱ ὧραι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὸ διάστημα καὶ ἀντίστροφοι πρὸς τὰς ἡμέρας. Λοιπὸν τὸ διάστημα καὶ αἱ ἡμέραι εἶναι ποσὰ ἀνάλογα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

Ὁρισμοί.

252. Ἡ ἰσότης δύο λόγων καλεῖται *ἀναλογία*.

Π. χ. 5 : 2=20 : 8

Αὕτη ἔχει 4 ὅρους, ὧν ὁ α' καὶ δ' λέγονται *ἄκροι*, ὁ β' καὶ γ' *μέσοι*, ὁ α' καὶ γ' *ἡγούμενοι*, ὁ β' καὶ δ' *ἑπόμενοι*.

Ὅταν οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας εἶναι μεγέθη, συμβαίνει πολλάκις τὰ μεγέθη τοῦ ἑνὸς λόγου νὰ εἶναι ἑτεροειδῆ πρὸς τὰ τοῦ ἑτέρου· π. χ. ὡς εὐθεῖά τις εἶναι διπλασία ἄλλης, οὕτω βάρος τι δύναται νὰ εἶναι διπλάσιον ἄλλου βάρους.

Ἡ ἀναλογία ἧς οἱ μέσοι εἶναι ἴσοι, λέγεται *συνεχής*, π. χ.

$$8:4=4:2$$

ὁ δὲ κοινὸς μέσος λέγεται *μέσος ἀνάλογος*.

Ἰδιότητες.

253. α΄) Θεωρήσωμεν τὴν ἀναλογίαν

$$8:4=6:3 \quad ἢ \quad \frac{8}{4}=\frac{6}{3}.$$

Τρέποντες τὰ κλάσματα ταῦτα εἰς ὁμώνυμα ἔχομεν·

$$\frac{8\times3}{4\times3}=\frac{6\times4}{3\times4}$$

ἄρα $$8\times3=6\times4$$

ἤτοι·

Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν μέσων.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀληθεύει, καὶ ὅταν οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας εἶναι μεγέθη, ἀλλὰ μεμετρημένα, οἱ ὅροι δ' ἑκάστου λόγου μεμετρημένοι διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος.

Πόρισμα. Ὅταν ὅρος τις τῆς ἀναλογίας εἶναι ἄγνωστος, δυνάμεθα νὰ τὸν εὕρωμεν· π. χ. ἐὰν ζητῆται ὁ δ΄ ὅρος, ὃν παριστῶμεν διὰ χ, τῆς ἀναλογίας $8:4=6:\chi$. ἔχομεν·

$$8\times\chi=4\times6 \text{ Ἄρα·}$$

$$\chi=\frac{4\times6}{8}=3.$$

Ὁμοίως ἐκ τῆς ἀναλογίας $8:\chi=6:3$ ἔχομεν·

$$\chi=\frac{8\times3}{6}=4.$$

Ὁμοίως ἐκ τῆς $16:\chi=\chi:4$ ἔχομεν·

$$\chi^2=16\times4=64$$

Ἐπειδὴ δὲ $8^2=64$, ἄρα $\chi=8$.

β΄) Θεωρήσωμεν τὴν σειρὰν

$$8,\ 4,\ 6,\ 3, \text{ ἔνθα}$$
$$8\times3=4\times6$$

Διαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος διὰ 3×4 καὶ ἔχομεν·

$$\frac{8\times3}{3\times4}=\frac{4\times6}{3\times4} \text{ ἢ}$$
$$8:4=6:3.$$

Ἄρα·

Ὅταν τέσσαρες ἀριθμοὶ γεγραμμένοι κατὰ σειρὰν εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων νὰ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν μέσων, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι καθ' ἣν τάξιν εἶναι γεγραμμένοι συνιστῶσιν ἀναλογίαν.

Πόρισμα. Δυνάμεθα νὰ ἀνταλλάξωμεν τοὺς μέσους μιᾶς ἀναλογίας.

Ἐὰν ἔχωμεν ἀναλογίαν ἐπὶ μεγεθῶν, ἵνα ἀληθεύῃ τὸ πόρισμα, πρέπει προφανῶς πάντες οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας νὰ εἶναι μεγέθη ὁμοειδῆ.

γ΄) Θεωρήσωμεν ὁσασδήποτε ἀναλογίας· π.χ.

$$\alpha:\beta=\gamma:\delta$$
$$\varepsilon:\zeta=\eta:\theta$$
$$\iota:\varkappa=\lambda:\mu$$

Ἐὰν αἱ ἀναλογίαι αὗται ὑπάρχωσιν ἐπὶ μεγεθῶν, ταῦτα θεωροῦνται μεμετρημένα δι' ἀριθμῶν.

Τὰς ἀναλογίας ταύτας γράφομεν ὡς ἑξῆς·

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$$
$$\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\eta}{\theta}$$
$$\frac{\iota}{\varkappa}=\frac{\lambda}{\mu}$$

ὅθεν λαμβάνομεν·

$$\frac{\alpha\varepsilon\iota}{\beta\zeta\varkappa}=\frac{\gamma\eta\lambda}{\delta\theta\mu} \text{ ἢ}$$
$$\alpha\varepsilon\iota:\beta\zeta\varkappa=\gamma\eta\lambda:\delta\theta\mu.$$

Ἄρα·

Τὰ γινόμενα τῶν ὁμοταγῶν ὅρων ὁσωνδήποτε ἀναλογιῶν συνιστῶσιν ἀναλογίαν.

Ἀσκήσεις.

1) Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων ἔχει λόγον πρὸς τὸν δεύτερον οἷον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν τέταρτον.

2) Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων ἔχει λόγον πρὸς τὸν δεύτερον οἷον ἡ διαφορὰ τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν τέταρτον.

3) Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων οἷον εἷς ἡγούμενος πρὸς τὸν ἑπόμενόν του.

4) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος τῶν ἀναλογιῶν

α΄) $8 : 5 = 76 : \chi$

β΄) $\frac{2}{3} : \chi = 6 : 5.$

ΒΙΒΛΙΟΝ Ζ΄

ΜΕΘΟΔΟΙ

254. Μέθοδος ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ λέγεται ὁ τρόπος δι' οὗ λύονται προβλήματα ὡρισμένου εἴδους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

255. *Πρόβλημα α')* 18 πήχεις ὑφάσματος τιμῶνται 5 δρ. πόσον τιμῶνται 7 πήχεις;

Λύσις. Ὁ 1 πῆχυς τιμᾶται $\frac{5}{18}$ δρ., ἄρα οἱ 7 πήχεις τιμῶνται $\frac{5}{18} \times 7$.

Τοὺς ἀγνώστους τῶν προβλημάτων παριστῶμεν συνήθως διὰ τῶν τελευταίων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ χ τὸν ἄγνωστον τοῦ προηγουμένου προβλήματος ἔχομεν·

$$\chi = \frac{5}{18} \times 7 = 1{,}94 \text{ δρ.}$$

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, εὕρομεν α΄ τὴν ἀξίαν τοῦ ἑνὸς πήχεως καὶ ἔπειτα τῶν πολλῶν, ἤτοι τῶν 7. Ἡ τοιαύτη ἐργασία λέγεται *ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα.*

Πρόβλημα β') Χρειάζονται 25 πήχεις ὑφάσματος πλάτους 6 ῥουπ. διὰ τὴν κατασκευὴν φορέματος· πόσους πήχεις θὰ ἐχρειαζόμεθα, ἐὰν τὸ πλάτος ἦτο 5 ῥουπ.;

Λύσις. Καὶ ἐνταῦθα ὁ ἄγνωστος εὑρίσκεται διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ὡς ἑξῆς. Ὅταν τὸ πλάτος εἶναι 6 ῥουπ., χρειαζόμεθα 25 πήχεις. ὅταν εἶναι 1 ῥουπ., χρειαζόμεθα 25×6 πήχεις, διότι τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα· ἄρα, ὅταν τὸ πλάτος εἶναι 5 ῥούπ., χρειαζόμεθα $\frac{25\times6}{5}$, ἤτοι·

$$χ=\frac{25\times6}{5}=30 \text{ πήχεις.}$$

256. Ὁ τρόπος δι' οὗ ἐλύσαμεν τὰ δύο ταῦτα προβλήματα λέγεται *ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν* ἢ συντομώτερον *μέθοδος τῶν τριῶν*. Ἐν γένει·

Κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν λύονται τὰ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ μάθωμεν τί γίνεται ἓν ποσόν, ὅτον μεταβληθῇ ἄλλο ἀνάλογον ἢ ἀντίστροφον αὐτοῦ.

Λέγεται δὲ οὕτως ἡ μέθοδος αὕτη, διότι δίδονται τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται τέταρτος· ἤτοι δύο ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τῶν ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων ποσῶν καὶ μία ἄλλη τοῦ ἑνὸς τούτων.

Κανὼν πρακτικός.

257. Εἰς τὸ α' πρόβλημα διατάσσομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸν ἄγνωστον ὡς ἑξῆς·

18 πήχ.	5 δρ.
7	χ;

ὡς δ' ἐμάθομεν, ἔχομεν·

$$χ=5\times\frac{7}{18}.$$

Εἰς τὸ δεύτερον πρόβλημα διατάσσομεν ὁμοίως

6 ῥούπ. πλάτ.	25 πήχ. μῆκ.
5	χ;

ἔχομεν δὲ $χ=25\times\frac{6}{5}$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὁ κανών·

Γράφομεν εἰς μίαν σειρὰν τὰ ἰσοδύναμα δεδομένα ποσά· ἔπειτα εἰς ἄλλην σειρὰν κάτωθεν τὴν ἄγνωστον καὶ τὸ ἰσοδύναμον αὐτῇ ποσόν, οὕτως ὥστε τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ νὰ εἶναι ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ. Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὸν ἄνωθεν τῆς ἀγνώστου ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ὅπερ ἔχομεν χωρίζοντες δι' ὁριζοντίας γραμ-

μῆς τὰ ὁμοειδῆ δεδομένα καὶ λαμβάνοντες αὐτὸ ἀντεστραμμένον μέν, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα ὡς ἔχει δέ, ὅταν εἶναι ἀντίστροφα.

ΣΗΜ. Ἡ ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα, ἐξ ἧς προέκυψεν ὁ πρακτικὸς κανών, εἶναι γενικωτέρα τις μέθοδος, δι' ἧς λύονται καὶ προβλήματα μὴ ὑπαγόμενα εἰς τὴν μέθοδον τῶν τριῶν.

Λύσις διὰ τῶν ἀναλογιῶν.

258. *Πρόβλημα α')* 15 ὀκάδες σίτου τιμῶνται δρ. 3,60. πόσον τιμῶνται 6 ὀκάδες;

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ βάρος τοῦ σίτου καὶ ἡ ἀξία του εἶναι ποσὰ ἀνάλογα, πρέπει οἱ λόγοι 15 : 6 καὶ 3,60 : χ νὰ εἶναι ἴσοι, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς ἐφ' ὃν πολλαπλασιαζόμενος ὁ 15 δίδει γινόμενον 6, καὶ ὁ ἀριθμὸς ἐφ' ὃν πολλαπλασιαζόμενος ὁ 3,60 δίδει τὸν χ. Ἄρα

$$15 : 6 = 3{,}60 : \chi\cdot$$

ὅθεν· $$\chi = \frac{6 \times 3.60}{15} = \text{δραχ.}\quad 1{,}44.$$

Πρόβλημα β') 18 ἐργάται σκάπτουσιν ἄμπελον εἰς 5 ἡμέρας. εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τὴν σκάψωσιν 7 ἐργάται;

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ χρόνος εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα, θὰ εἶναι ἀντίστροφοι καὶ οἱ λόγοι 18 : 7 καὶ 5 : χ. ἤτοι, ἐὰν ὁ 18 πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ α δίδῃ 7, ὁ 5 διαιρούμενος δι' α δίδει χ. ἄρα.

$$7 : 18 = 5 : \chi\cdot$$

ὅθεν· $$\chi = \frac{5 \times 18}{7} = 13 \text{ ἐργάται.}$$

Παρατήτησις. Ὡς βλέπομεν, καὶ διὰ τῶν ἀναλογιῶν λύονται εὐκόλως τὰ προβλήματα ταῦτα· ἡ προηγουμένως ὅμως ἐκτεθεῖσα μέθοδος στηριζομένη εἰς τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα, εἶναι φυσικωτέρα καὶ μᾶλλον εὔληπτος.

Ἀσκήσεις.

1) Πόσον τιμῶνται 118 ᾠὰ πρὸς δρ. 0.65 τὴν δωδεκάδα;

2) Φρουρὰ ἐξ 65 ἀνδρῶν ἔχει τροφὰς δι' 25 ἡμέρας· ἐὰν

προστεθῶσι 40 ἄνδρες, ἐπὶ πόσας ἡμέρας θὰ διαρκέσωσιν αἱ τροφαί;

3) Ἔν τινι χώρᾳ εἰς διάστημα ἔτους συνέβησαν γεννήσεις 85672 καὶ θάνατοι 62300· πόσοι θάνατοι ἀναλογοῦσιν εἰς 100 γεννήσεις ;

4) Ἀρτοποιὸς ἀνταλλάσσει ἄρτους μὲ δεμάτια φρυγάνων, ἅτινα τιμῶνται 35 δρ. τὰ ἑκατόν· πόσα δεμάτια θὰ λάβῃ, ἐὰν δώσῃ 120 ἄρτους τῶν 2 ὀκάδων, ὧν ἑκάστη τιμᾶται 40 λεπτά ;

5) Δύο ἄνθρωποι ἠγόρασαν ἀπὸ κοινοῦ τεμάχιον ὑφάσματος μήκους 22 μέτρων ἀντὶ δρ. 128,60, ἐξ ὧν τὰς 62 δρ. ἐπλήρωσεν ὁ α΄. Πόσα μέτρα θὰ λάβῃ ὁ α΄ καὶ πόσα ὁ β΄ ;

6) Ἁμαξοστοιχία διατρέχουσα 45 χιλιόμετρα τὴν ὥραν ἐχρειάσθη 7 ὥρ. 45π, ὅπως διατρέξῃ διάστημά τι· πόσα χιλιόμετρα ἔπρεπε νὰ διατρέχῃ τὴν ὥραν, ἵνα διατρέξῃ τὸ αὐτὸ διάστημα εἰς 5 ὥρας ;

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

259. ***Πρόβλημα α΄)*** Μὲ 25 ὀκάδας νήματος κατασκευάζεται ὕφασμα μήκους 22 πήχεων καὶ πλάτους 2 πήχεων. Πόσας ὀκάδας τοῦ αὐτοῦ νήματος χρειαζόμεθα διὰ τὴν κατασκευὴν ὁμοίου ὑφάσματος μήκους 15 πήχεων καὶ πλάτους ἑνὸς πήχεως ;

Λύσις. Τὸ ζητούμενον ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος εἶναι δὲ τὸ ποσὸν τοῦ νήματος ἀνάλογον πρὸς τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος. Ὅταν μόνον τὸ μῆκος μεταβληθῇ καὶ γίνῃ ἀπὸ 22 πήχεων 15 πήχεις, αἱ ὀκάδες κατὰ τὸν κανόνα (§ 258) γίνονται $25 \times \frac{15}{22}$. Ὅταν δ' ἔπειτα καὶ τὸ πλάτος ἀπὸ 2 πήχεων γίνῃ 1 πῆχυς αἱ ὀκάδες, αἵτινες θὰ ἦσαν τότε αἱ ζητούμεναι, θὰ ἐγίνοντο $x = 25 \times \frac{15}{22} \times \frac{1}{2} = 8$ ὀκ. 209 δράμ.

Πρόβλημα β΄) 15 ἐργάται ἐργαζόμενοι 5 ὥρας καθ' ἑκάστην σκάπτουσιν ἄμπελον εἰς 6 ἡμέρας. Πόσοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἑκάστην θὰ σκάψωσιν αὐτὴν εἰς 4 ἡμέρας ;

Λύσις. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν εἶναι ἀντίστροφος πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἐργασίμων ὡρῶν τῆς ἡμέρας καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἡμερῶν.

Ἐὰν αἱ ἐργάσιμοι ὧραι τῆς ἡμέρας ἀπὸ 8 γίνωσιν 9, τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν γίνεται $15\times\frac{8}{9}$. Ἐὰν δ' ἔπειτα καὶ οἱ ἡμέραι ἀπὸ 6 γίνωσι 5, τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν, ὅπερ θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον, θὰ γίνῃ:

$$\chi=15\times\frac{8}{9}\times\frac{6}{5}=16 \text{ ἐργάται.}$$

Τὰ προηγούμενα προβλήματα, ὡς εἴδομεν, ἀναλύονται εἰς ἄλλα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Δι' ὃ ὁ τρόπος καθ' ὃν ἐλύσαμεν ταῦτα λέγεται *σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν*. Ἄρα·

Κατὰ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν λύομεν τὰ προβλήματα εἰς ἃ ζητεῖται τί γίνεται ἓν ποσόν, ὅταν μεταβληθῶσι δύο ἢ πλείονα ἄλλα πρὸς ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι ἀνάλογον ἢ ἀντίστροφον.

260. Εἰς τὸ α' πρόβλημα διατάσσομεν τὰ ποσὰ ὡς ἑξῆς·

25 ὀκ.	22 πήχ. μῆκ.	2 πήχ. πλάτ.
χ	15	1

Εἴδομεν δ' ὅτι

$$\chi=25\times\frac{15}{22}\times\frac{1}{2}.$$

Εἰς τὸ β' διατάσσομεν ὁμοίως·

15 ἐργ.	8 ὧρ.	6 ἡμ.
χ	9	5.

Εἴδομεν δ' ὅτι

$$\chi=12\times\frac{8}{9}\times\frac{6}{5}.$$

Ἄρα·

Πρὸς λύσιν τῶν τοιούτων προβλημάτων γράφομεν εἰς δύο σειρὰς τὰ δεδομένα καὶ τὴν ἄγνωστον οὕτως, ὥστε τὰ μὲν ἰσοδύναμα νὰ εἶναι ἐν τῇ αὐτῇ σειρᾷ, τὰ δὲ ὁμοειδῆ ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ· νὰ εὑρίσκηται δὲ ἡ ἄγνωστος ἐν τῇ β' σειρᾷ. Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὸν ἄνωθεν τῆς ἀγνώστου ἀριθμὸν ἐφ' ἕκαστον τῶν κλασμάτων ἅτινα σχηματίζονται χωριζομένων τῶν ὁμοειδῶν ποσῶν δι' ὁρι-

ζοντίου γραμμῆς, λαμβάνοντες τὸ κλάσμα ὡς ἔχει ἢ ἀντεστραμμένον, καθ' ὅσον τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα ἢ ἀνάλογα.

261. Καὶ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα λύονται τὰ τοιαῦτα προβλήματα, ὡς δεικνύομεν ἀμέσως:

Πρόβλημα γ'. Ταχυδρόμος βαδίζων 6 ὥρ. καθ' ἑκάστην διατρέχει εἰς 16 ἡμέρας 240 χιλιόμ. Ἐὰν βαδίζῃ 8 ὥρ. καθ' ἑκάστην, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ διατρέξῃ 180 χιλιόμετρα;

Λύσις. Ἐὰν βαδίζῃ 1 ὥρ. καθ' ἑκάστην, θὰ χρειασθῇ ἡμέρ. 16×6 διὰ τὰ 240 χιλιόμ.· ἄρα, ἐὰν βαδίζῃ 8 ὥρ., θὰ χρειασθῇ $\frac{16 \times 6}{8}$ ἡμέρ. Ἑπομένως δι' 1 χιλιόμ. θὰ χρειασθῇ ἡμ. $\frac{16 \times 6}{8 \times 240}$ καὶ δι' 180 χιλ. θὰ χρειασθῇ ἡμ. $= \frac{16 \times 6 \times 180}{8 \times 240} = 9$.

Ἀσκήσεις.

1) 25 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἑκάστην ὑφαίνουσιν εἰς 10 ἡμέρας 300 μέτρα ὑφάσματος πλάτους 0,95 μ. Εἰς πόσας ἡμέρας 16 ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 ὥρ. καθ' ἑκάστην θὰ ὑφάνωσι 450 μ. πλάτους 1,4 μ.;

2) Ἐργολάβος ὀφείλει νὰ τερματίσῃ οἰκοδομὴν εἰς 60 ἡμέρ. Πρὸς τοῦτο δὲ χρειάζεται 20 ἐργάτας ἐργαζομένους 8 ὥρ. καθ' ἑκάστην. Ἐὰν θέλῃ νὰ τελειώσῃ τὸ ἔργον εἰς 20 ἡμέρ. ἐνωρίτερον δι' ἐργατῶν ἐργαζομένων 2 ὥρας ἐπὶ πλέον τὴν ἡμέραν, πόσους νέους ἐργάτας πρέπει νὰ προσλάβῃ;

3) Πρόκειται νὰ σκαφῇ τάφρος μήκους 300 μέτρων. Προσλαμβάνονται δὲ 8 ἐργάται οἵτινες ἐργαζόμενοι 9 ὥρ. καθ' ἑκάστην σκάπτουσιν εἰς 12 ἡμέρ. τὰ 200 μ. Εἶτα προστίθενται 4 ἐργάται καὶ 3 ὧραι εἰς τὰς ἐργασίμους ἡμέρας. Πόσαι ἡμέραι ἔτι θὰ χρειασθῶσιν, ὅπως τελειώσῃ τὸ ἔργον;

4) Δεξαμενὴ ὀρθογώνιος ἔχουσα βάθος, μῆκος καὶ πλάτος πάντα 1 μέτρου χωρεῖ 681 ὀκ. ὕδατος. Πόσας ὀκ. ἐλαίου εἰδικοῦ βάρους 0,9 χωρεῖ τοιαύτη δεξαμενὴ ἔχουσα βάθος 2 μ., μῆκος 1,8 μ. καὶ πλάτος 1,5;

5) Εἰς τὸ προηγούμενον νὰ εὑρεθῇ ποῖον βάθος πρέπει νὰ

ἔχῃ τοιαύτη δεξαμενή, διὰ νὰ χωρῇ 10000 ὀκ. τοῦ αὐτοῦ ἐλαίου, ὅταν τὸ μὲν μῆκος αὐτῆς εἶναι 2,5, τὸ δὲ πλάτος 1,6 μ.

6) Δύο τάπητες τῆς αὐτῆς ποιότητος τιμῶνται ὁ μὲν α΄ δρχ. 100, ὁ δὲ β΄ δρχ. 120. Ἔχουσι δὲ ὁ α΄ μῆκος 8 πήχ. 5 ρουπ. καὶ πλάτος 5 πήχ. 6 ρουπ., ὁ δὲ β΄ μῆκος 10 πήχ. καὶ πλάτος 6 πήχ. Τίς τῶν δύο εἶναι εὐθηνότερος καὶ κατὰ πόσον;

ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΝΕΖΕΥΓΜΕΝΗ

262. *Πρόβλημα α΄*. Πρὸς πόσους τόννους ἰσοδυναμοῦσιν 25000 ἑνετ. λίτραι, γνωστοῦ ὄντος ὅτι 1000 ἑνετ. λίτραι ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 375 ὀκ., ἡ ὀκᾶ πρὸς 400 δράμ., τὰ 312 δράμ. πρὸς 1 χιλιόγρ. καὶ 1000 χιλιόγρ. πρὸς 1 τόννον;

Τὸ πρόβλημα συντόμως γράφεται:

χ τόν.	=	25000 ἑνετ. λίτρ.
1000 ἑνετ. λίτρ.	=	975 ὀκ.
1 ὀκ.	=	400 δράμ.
312 δράμ.	=	1 χιλιόγρ,
1000 χιλιόγρ.	=	1 τόν.

Λύσις. Εὑρίσκομεν α΄ πρὸς πόσους τόν. ἰσοδυναμεῖ 1 χιλιόγρ. λύοντες τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν·

1000 χιλιόγρ. ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 1 τόν., πρὸς πόσους τόν. ἰσοδυναμεῖ τὸ 1 χιλιόγραμμον;

Εὑρίσκομεν οὕτως ὅτι

$$1 \text{ χιλιόγρ.} = 1 \times \frac{1}{1000} \text{ τόν.}$$

Ὁμοίως γνωρίζοντες ἤδη ὅτι 1 χιλιόγραμμον ἢ 312 δράμια ἰσοδυναμοῦσι πρὸς $1 \times \frac{1}{1000}$ τόν. εὑρίσκομεν ὅτι

$$400 \text{ δράμ. ἢ } 1 \text{ ὀκ.} = 1 \times \frac{1}{1000} \times \frac{400}{312} \text{ τόν.}$$

Ὁμοίως ὅτι

$$375 \text{ ὀκ. ἢ } 1000 \text{ ἐν. λ.} = 1 \times \frac{1}{1000} \times \frac{400}{312} \times \frac{375}{1} \text{ τόν.}$$

καὶ τέλος ὅτι

$$25000 \text{ ἐν. λ.} = 1 \times \frac{1}{1000} \times \frac{400}{312} \times \frac{375}{1} \times \frac{25000}{1000} \text{ τόν.}$$

ἢ $$\chi = \frac{1 \times 1 \times 400 \times 375 \times 25000}{1000 \times 312 \times 1 \times 1000} = 12{,}019 \text{ τόν.}$$

Πρόβλημα β'. Ἔμπορος ἐν Τεργέστῃ ἐπρομηθεύθη σταφίδα ἐκ Πατρῶν ἀγοράσας αὐτὴν πρὸς 120 δρχ. τὴν χιλιάδα (ἐν. λιτρῶν) καὶ δαπανήσας διὰ ναῦλον καὶ φόρους 30 τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Πόσας κορώνας τῷ στοιχίζει τὸ χιλιόγραμμον ἐν Τεργέστῃ, ἐὰν 19 κορ.=21 δρχ.;

Λύσις. Διατάσσομεν τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς·

χ κορ.	=	1 χιλιόγρ.
1 χιλιόγρ.	=	312 δράμ.
150 δράμ.	=	1 ἐν. λίτρ.
1000 ἐν λίτρ.	=	120 δρχ.
21 δρχ.	=	19 κορ.
πρὸ τῶν ἐξόδων 100 κορ.	=	130 κορ. μετὰ τὰ ἔξοδα.

Εἶτα ἐργαζόμεθα ὡς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα καὶ ἔχομεν·

$$\chi = \frac{130 \times 19 \times 120 \times 1 \times 312}{100 \times 21 \times 1000 \times 150} = 0{,}293 \text{ κορ. ἢ } 29{,}3 \text{ χέλλερ.}$$

263. Καὶ τὰ προβλήματα ταῦτα ἀναλύονται εἰς ἄλλα προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ἡ δὲ μέθοδος, δι' ἧς ταῦτα λύονται δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν, καίτοι ἐνταῦθα ἄλλως γίνεται ἡ διάταξις τῶν δεδομένων καὶ τῆς ἀγνώστου· ἐν τούτοις φέρει ἴδιον ὄνομα, καλουμένη *συνεζευγμένη μέθοδος*. Σκοπὸν δ' ἔχει νὰ τρέψῃ ποσὸν εἴδους τινὸς εἰς ποσὸν διαφόρου εἴδους.

264. Ἐκ τῆς λύσεως τῶν προηγουμένων προβλημάτων ἕπεται ὁ κανών.

Γράφομεν τὸν ἄγνωστον καὶ δεξιὰ αὐτοῦ τὸ ἰσοδύναμον αὐτῷ ποσόν· κάτωθεν δὲ γράφομεν ὑπ' ἄλληλα τὰ ζεύγη τῶν ἰσοδυνάμων ποσῶν οὕτως ὥστε ἑκάστη σειρὰ ν' ἀρχίζῃ μὲ τὸ εἶδος εἰς ὃ τελειώνει ἡ προηγουμένη. Ἐὰν τὰ διδόμενα εἶναι ἐπαρκῆ, τότε τὸ τελευταῖον ποσὸν θὰ εἶναι ὁμοειδὲς τῷ ἀγνώστῳ. Εἶτα σχηματίζομεν τὸ γινόμενον πάντων τῶν πρὸς τὰ δεξιὰ ἀριθμῶν καὶ διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ γινομένου πάντων τῶν πρὸς τἀριστερὰ ὑπὸ τὸν ἄγνωστον ἀριθμῶν, ἔχομεν δὲ τότε τὸ ζητούμενον.

ΣΗΜ. Χρῆσις τῆς μεθόδου ταύτης γίνεται κυρίως εἰς τὰς μετὰ τοῦ Ἐξωτερικοῦ συναλλαγάς.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ τραπῶσι 36,60 δρχ. εἰς γρόσια ἀγοραῖα Σμύρνης δεδομένου ὅτι τὸ χρυσοῦν εἰκοσόφραγκον ἔχει τρέχουσαν ἀξίαν ἐν Ἑλλάδι μὲν δραχμὰς 20,50, ἐν Σμύρνῃ δὲ γρόσ. 157.

2) Νὰ τραπῶσιν 685, δραχ. εἰς ῥούβλια, δεδομένου ὅτι 20,50 δραχ.=20 φρ. χρ. καὶ 130 φρ. χρ.= 33 ῥούβλ.

3) Ἔμπορος ἐν Ἑλλάδι ἐπρομηθεύθη ἐκ Μασσαλίας 1600 μέτρα ὑφάσματος ἀγοράσας αὐτὰ πρὸς 2 φρ. χρ. τὸ μέτρον, ἐδαπάνησε δὲ διὰ ναῦλον καὶ φόρους 25 τοῖς ἑκατόν· ἐὰν ἐν Ἑλλάδι 20 φρ. χρ.=20,50 δρχ. ἀντὶ πόσων δραχμῶν πρέπει νὰ πωλῇ τὸν πῆχυν, διὰ νὰ κερδίσῃ 10 τοῖς ἑκατόν ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

Ὁρισμοί.

265. *Τόκος* λέγεται τὸ κέρδος ὅπερ ἀπολαμβάνει ὁ δανείζων χρήματα.

Τὸ δανειζόμενον ποσὸν λέγεται *κεφάλαιον*.

Ἐπιτόκιον δὲ λέγεται ὁ τόκος τῶν 100 νομισματικῶν μονάδων· π.χ. τῶν 100 δρ. εἰς ἓν ἔτος. Ἐκφράζομεν δ' αὐτὸ συνήθως λέγοντες *πρὸς τόσον τοῖς ἑκατόν*, π. χ. πρὸς 5 τοῖς ἑκατόν, ὅπερ γράφομεν συντόμως 5%.

Ὁ τόκος εἶναι *ἁπλοῦς* ἢ *σύνθετος*. *Ἁπλοῦς* λέγεται, ὅταν καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου τὸ κεφάλαιον μένῃ σταθερόν. *σύνθετος* δέ, ὅταν εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους ἢ ἄλλου χρονικοῦ διαστήματος ὁ τόκος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον, ὅπερ οὕτως ηὐξημένον τοκίζεται διὰ τὸ ἑπόμενον χρονικὸν διάστημα. Π χ., ἐάν τις δανείσῃ 100 δραχ. πρὸς 10% μὲ ἁπλοῦν τόκον, θὰ ἔχῃ νὰ λάβῃ μετὰ 1 ἔτος δρχ. 110 (κεφ. καὶ τόκον), μετὰ 2 ἔτη δρχ. 120, μετὰ 3 ἔτη δρχ. 130 κτλ. Ἐὰν ὅμως ὁ τόκος κατ'ἔτος προστίθηται εἰς τὸ κεφάλαιον, θὰ ἔχῃ νὰ λάβῃ μετὰ ἓν ἔτος πάλιν δραχ. 110, ἀλλὰ τὸ κεφάλαιον τοῦ β' ἔτους εἶναι δραχ. 110 καὶ ὁ τόκος αὐτοῦ δραχ. 11, ἄρα μετὰ 2 ἔτη θὰ ἔχῃ νὰ λάβῃ δραχ. 121· ὁμοίως μετὰ 3 ἔτη δρχ. 133,10 κτλ. Ἐνταῦθα θὰ εἴπωμεν μόνον περὶ ἁπλοῦ τόκου.

Γραμμάτιον λέγεται ἡ γραπτὴ ὑπόσχεσις τοῦ δανειζομένου περὶ πληρωμῆς τοῦ χρέους του ἐντὸς ὡρισμένης προθεσμίας. *Μέλλουσα* δὲ ἀξία τοῦ γραμματίου τὸ ἄθροισμα τοῦ τόκου καὶ τοῦ κεφαλαίου.

Λύσις τῶν προβλημάτων τόκου.

266. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις· α') ὅταν ὁ τόκος θεωρῆται μεμονωμένος· β') ὅταν θεωρῆται ἡνωμένος μετὰ τοῦ κεφαλαίου.

Α' Περίπτωσις.

Εἰς τὰ προβλήματα ταῦτα εἰσέρχονται 4 ποσά, τὸ κεφάλαιον, ὁ τόκος, τὸ ἐπιτόκιον καὶ ὁ χρόνος· παριστῶμεν δ' αὐτὰ συντόμως τὸ α' διὰ *κ.*, τὸ β' διὰ *τ*, τὸ γ' δι' *ε.*, καὶ τὸ δ' διὰ *χ*.

Διακρίνομεν δὲ 4 εἴδη προβλημάτων καθ' ὅσον ζητεῖται ἓν ἐκ τούτων, δεδομένων τῶν λοιπῶν τριῶν. Ὁ *τ.* προφανῶς εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ *κ.*, τὸ *ε* καὶ τὸν *χ*. Τὸ *κ* ὅμως καὶ ὁ *χ* εἶναι ἀντίστροφα. Δι' ὃ τὰ προβλήματα ταῦτα λύονται διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Πρόβλημα α'. Πόσον τ. φέρουσιν 650 δρχ. εἰς 5 ἔτη πρὸς 10 %;

Λύσις. Τὸ πρόβλημα δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν ὡς ἑξῆς·

100 δρχ. εἰς 1 ἔτος φέρουσι τ. 10 δρχ.· αἱ 650 δρχ. εἰς 5 ἔτη πόσον τ. φέρουσι;

Κατὰ τὸν κανόνα (§ 260) ἔχομεν·

$$\tau. = \frac{650\times10\times5}{100} = 325 \text{ δρχ.}$$

Εἰς τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο φθάνομεν καὶ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ὡς ἑξῆς·

Αἱ 100 δρχ. εἰς 1 ἔτος φέρουσι τόκον 10 δρχ., ἄρα ἡ 1 δρχ. εἰς 1 ἔτος φέρει δρχ. $\frac{10}{100}$, καὶ εἰς 5 ἔτη $\frac{10\times5}{100}$.

αἱ δὲ 650 δραχ. φέρουσι τ. $\frac{650\times10\times5}{100}$ δρχ.

Γενικῶς θὰ ἔχωμεν·

$$\tau. = \frac{\kappa.\varepsilon.\chi.}{100},$$

ὅταν ὁ χ. λογίζηται εἰς ἔτη. Ἐὰν εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ὁ χρόνος ἦτο οὐχὶ 5 ἔτη, ἀλλὰ 5 μῆνες, ὁ τ. θὰ ἦτο 12άκις μικρότερος, ἤτοι

$$\frac{650\times10\times5}{1200},$$

ἐὰν δὲ ὁ χ. ἦτο 5 ἡμέραι, ὁ τ. θὰ ἦτο

$$\frac{650\times10\times5}{36000},$$

τοῦ ἔτους ὑπολογιζομένου ἐνταῦθα εἰς 360 ἡμέρας. Ἄρα·

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου πολλαπλασιάζομεν τὰ τρία δεδομένα ποσὰ κ, ε., χ. καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 100 ἢ 1200 ἢ 36000, καθ' ὅσον ὁ χρόνος εἶναι ἔτη, μῆνες ἢ ἡμέραι.

Πρόβλημα β'. Πόσαι δραχμαὶ εἰς 3 ἔτη πρὸς 9% φέρουσι τ. 60 δραχ.;

Λύσις. Ἐκφράζομεν τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς·

100 δρχ. εἰς 1 ἔτος φέρουσι τ. 9 δρχ.· πόσαι δρχ. εἰς 3 ἔτη φέρουσι τ. 60. δρχ.,

Κατὰ τὸν αὐτὸν κανόνα (§ 260) ἔχομεν·

$$\text{κ.} = \frac{60 \times 100}{9 \times 3} = 222\ 22 \text{ δρχ.}$$

Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν καὶ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Γενικῶς ὁσάκις ὁ χρόνος λογίζεται εἰς ἔτη, ἔχομεν.

$$\text{κ.} = \frac{100.\ \text{τ.}}{\text{ε.χ.}}.$$

Ἐὰν ὁ χ. ἦτο 3 μῆνες, τὸ κ. θὰ ἦτο 12άκις μεῖζον, ἤτοι

$$\frac{60 \times 1200}{9 \times 3}.$$

ἐὰν δὲ 3 ἡμέραι, θὰ ἦτο

$$\frac{60 \times 36000}{9 \times 3}$$

Ἄρα·

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ κ. πολλαπλασιάζομεν τὸν τ. ἐπὶ 100 ἢ 1200 ἢ 36000, καθ' ὅσον ὁ χρόνος εἶναι ἔτη, μῆνες, ἢ ἡμέραι, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ χ. ἐπὶ τὸ ε.

Πρόβλημα γ'. Εἰς πόσον χ. 360 δρχ. πρὸς 10% φέρουσι τόκον δρχ. 72;

Λύσις. Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὰ προηγούμενα ἔχομεν·

$$\text{χ.} = \frac{72 \times 100}{360 \times 10} = 2 \text{ ἔτη}$$

καὶ γενικῶς·

$$\text{χ.} = \frac{100.\ \text{τ.}}{\text{κ. ε.}}$$

Ἐὰν ἐζητοῦμεν μῆνας, θὰ εἴχομεν·

$$\frac{72 \times 1200}{360 \times 10}$$

ἐὰν δὲ ἡμέρας

$$\frac{72 \times 36000}{360 \times 10}$$

Ἄρα·

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ χ πολλαπλασιάζομεν τὸν τ. ἐπὶ 100 ἢ 1200 ἢ 36000, καθ' ὅσον ζητοῦμεν ἔτη, μῆνας ἢ ἡμέρας, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κ. ἐπὶ ἐ.

Πρόβλημα δ'. Πρὸς ποῖον ἐ. 650 δραχμαὶ εἰς 5 ἔτη φέρουσι τ. 45 δρχ.;

Λύσις. Διατυποῦμεν αὐτὸ οὕτως·

650 δρχ. εἰς 5 ἔτη φέρουσι τ. 45 δρχ., αἱ 100 δρχ. εἰς 1 ἔτος πόσον;

Καὶ εὑρίσκομεν·

$$\varepsilon. = \frac{45 \times 100}{650 \times 5} = \text{δρχ. } 1{,}38.$$

καὶ γενικῶς

$$\varepsilon = \frac{100.\ \tau.}{\varkappa.\ \chi.}.$$

Ἀντὶ 100 θα ἔχωμεν 1200 ἢ 36000, ἐὰν ὁ χρόνος εἶναι μῆνες ἢ ἡμέραι·

Ἄρα·

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ε. πολλαπλασιάζομεν τὸν τ. ἐπὶ 100 ἢ 1200 ἢ 36000, καθ' ὅσον ὁ χρόνος εἶναι ἔτη, μῆνες ἢ ἡμέραι, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κ. ἐπί τὸν χ.

Β' Περίπτωσις.

267. Καὶ ἐνταῦθα διακρίνομεν 4 εἴδη προβλημάτων, καθ' ὅσον ζητεῖται ἡ μέλλουσα ἀξία ἢ τὸ κ. ἢ ὁ χ. ἢ τὸ ε.

Πρόβλημα α'. Ἐδάνεισέ τις 550 δρχ. δι' 6 ἔτη πρὸς 10%. Πόσα θὰ ἔχῃ νὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ (τ. καὶ κ.) εἰς τὸ τέλος τῶν 6 ἐτῶν;

Λύσις. Εὑρίσκομεν ὅτι τ.=330 δρχ.· ἄρα ἡ μέλλουσα ἀξία εἶναι 550+330=880 δρχ.

Πρόβλημα β'. Εἰς πόσον χ. 640 δραχμαὶ πρὸς 8°/₀ γίνονται δρχ. 1000;

Λύσις. τ.=1000 - 640=360 δρχ. Ἑπομένως τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ ἑξῆς·

Εἰς πόσον χ. 640 δρχ. πρὸς 8°/₀ φέρουσι τόκον δρχ. 360;

Καὶ εὑρίσκομεν χ.=17 ἔτη 11 ἡμ. Καθ' ὅμοιον τρόπον λύομεν καὶ τὸ ἑπόμενον·

Πρόβλημα γ'. Πρὸς ποῖον ε. 3500 δραχμαὶ γίνονται εἰς 5 ἔτη 3860;

Πρόβλημα δ'. Πόσον κ. εἰς 9 μῆνας πρὸς 6°/₀ γίνεται δρχ. 1000;

Λύσις. Αἱ 100 δρχ εἰς 9 μῆνας γίνονται δρχ. 104,50 (προβλ. α'). ζητοῦμεν ἔπειτα πόσαι δρχ. εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον γίνονται 1000.

Τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα καὶ ἔχομεν·

$$κ. = \frac{100 \times 1000}{104{,}50} = δρ.\ 956{,}93.$$

Σταθεροὶ πολλαπλασιασταὶ καὶ διαιρέται.

Τοκάριθμοι

268. Διὰ τὴν μεγάλην χρῆσιν τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου ἐπενοήθησαν σύντομοι μέθοδοι πρὸς λύσιν αὐτῶν δι' ὡρισμένα ἐπιτόκια. Αἱ μέθοδοι αὗται στηρίζονται εἰς τοὺς κανόνας τοὺς ὁποίους ἐγνωρίσαμεν.

Πρόβλημα. Πόσον τόκον φέρουσιν 600 δρ. εἰς 8 ἡμ. πρὸς 9°/₀;

Λύσις. Ὡς γνωρίζομεν·

$$τ. = \frac{600 \times 8 \times 9}{36000} = \frac{600 \times 8}{36000:9} = \frac{600 \times 8}{4000}.$$

Βλέπομεν ἐνταῦθα ὅτι τοῦ χ. λογιζομένου εἰς ἡμέρας, ὁσάκις ε=9, πρὸς εὕρεσιν τοῦ τ. πολλαπλασιάζομεν τὸ κ. ἐπὶ τὰς ἡμέρας καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 4000. Ὁ ἀριθμὸς 4000 λέγεται *σταθερὸς διαιρέτης*. Ἐὰν ε=12, ὁ σταθερὸς διαιρέτης εἶναι 36000 : 12=3000. Τὸ γινόμενον τοῦ κ. ἐπὶ τὰς ἡμέρας λέγεται *τοκάριθμος*. Ἄρα.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τ. διαιροῦμεν τὸν ἀντιστοιχοῦντα τοκάριθμον διὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος σταθεροῦ διαιρέτου.

ΣΗΜ. Ἡ μέθοδος αὕτη χρησιμοποιεῖται, ὅταν ὁ χ. λογίζηται εἰς ἡμέρας.

Οἱ σταθεροὶ διαιρέται χρησιμοποιοῦνται ὡς σταθεροὶ πολλαπλασιασταί, ὅταν ζητῆται ὁ τ. καὶ ζητῆται τὸ κ. ἢ ὁ χ. Διότι παριστῶντες διὰ δ. τὸν ἀντίστοιχον σταθερὸν διαιρέτην ἔχομεν·

$$\text{κ.}=\frac{\text{τ. }36000}{\text{ε. χ.}}=\frac{(36000:\text{ε}).\ \text{τ.}}{\text{κ.}}=\frac{\text{δ. τ.}}{\text{χ.}}.$$

Ὁμοίως ἔχομεν $\text{χ}=\frac{\text{δ. τ}}{\text{κ.}}$.

Πίναξ σταθερῶν διαιρετῶν.

ε.	δ.	ε.	δ.
1	36000	4,5	8000
1,5	24000	5	7200
2	18000	6	6000
3	12000	9	4000
4	9000	12	3000

Ἀσκήσεις.

1) Πόσον τ. φέρουσι 1565 δραχμαὶ πρὸς 12 % εἰς 5 ἔτη, β' εἰς 8 μῆνας, γ' εἰς 8 ἡμ., δ' εἰς 5 ἔτη καὶ 4 μῆνας;

2) Ποῖον κ. εἰς 4 μῆνας πρὸς 4,5 % φέρει τ. 60,5 δρχ.;

3) Πρὸς ποῖον ε. 565 δραχμαὶ εἰς 5 ἔτη καὶ 8 μῆνας φέρουσι τόκον δρχ. 14,5 ;

4) Εἰς πόσον χ. 450 δρχ. πρὸς 8,4 % φέρουσι τ. δρχ. 50,5;

5) Εἰς πόσον χ. διπλασιάζεται ἓν κ. τοκιζόμενον πρὸς 9 % ;

6) Πόσον κ. ἐπὶ 10 ἔτη πρὸς 10 % γίνεται 10000 δρχ.;

7) Εἰς πόσον χ. 250,6 δρχ. πρὸς 12 % γίνονται 1000 ;

8) Πρὸς ποῖον ε. 1000 δραχμαὶ εἰς 8 ἔτη καὶ 6 μῆν. γίνονται 10000.

9) Ἐδάνεισέ τις 500 δραχμὰς πρὸς 8 %, 400 δρχ. πρὸ 6 % καὶ 1000 δρχ. πρὸς 10 %· πρὸς ποῖον ε. ἔπρεπε νὰ δανείσῃ καὶ τὰ τρία ποσὰ ὁμοῦ ὥστε νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν ἐτήσιον τ. ;

Λύσις. Ἐκ τῶν τριῶν δανείων ἔχει ἐτήσιόν τ. δρ. 164· ἄρα τὸ ζητούμενον εἶναι.

$$\frac{164\times100}{1900\times1}, \text{ ἔνθα } 1900=500+400+1000.$$

Ἡ τοιαύτη ἐργασία λέγεται *ἀναγωγὴ πολλῶν ἐπιτοκίων εἰς ἕν*.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

269. *Ὑφαίρεσις* λέγεται ἡ ποσότης καθ' ἣν ἐκπίπτει ἡ ἀξία γραμματίου ἐξαργυρουμένου πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ.

Ἐν Ἑλλάδι ὁ ἐξαργυρώνων τὸ γραμμάτιον ὑπολογίζει τὸν τόκον τῆς μελλούσης ἀξίας τοῦ γραμματίου ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς ἐξαργυρώσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως αὐτοῦ ἐπὶ τῇ βάσει συμφωνηθέντος ε. καὶ τὸν τ. τοῦτον κρατεῖ ὡς ὑφαίρεσιν· τὸ δὲ ὑπόλοιπον, καλούμενον *παροῦσαν* ἀξίαν τοῦ γραμματίου, δίδει εἰς τὸν κάτοχον αὐτοῦ.

Ἄρα τὰ προβλήματα τῆς ὑφαιρέσεως, ὡς αὕτη γίνεται ἐν Ἑλλάδι, εἶναι προβλήματα τόκου· μόνον ἀντὶ τῆς λέξεως *τόκος* θὰ λέγωμεν *ὑφαίρεσιν*.

270. *Πρόβλημα α'.* Γραμμάτιον 580 δραχμῶν ἐξαργυροῦται 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως πρὸς 5%. Πόση ἡ *ὑφαίρεσις*;

Λύσις. Αὕτη εἶναι ὁ τ. τῶν 580 δρχ. εἰς 4 μῆνας, ἤτοι·

$$\frac{580\times4\times5}{1200}=\text{δρχ. } 9{,}66.$$

ἡ δὲ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμ. 580—9.66= δρχ. 570,34.

Ὁμοίως ὡς προβλήματα τόκου λύονται τὰ ἑξῆς·

Πρόβλημα β'. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐγένετο ἡ ἐξαργύρωσις γραμ. 660 δραχμῶν ἐξαργυρωθέντος 12 ἡμ. πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ὑφαίρεσιν 6 δραχμῶν;

Πρόβλημα γ' Γραμμάτιον 550 δραχμῶν ἐξηργυρώθη μὲ ὑφαίρεσιν 28 δραχμῶν πρὸς 5%. Πόσον χ. πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ;

Πρόβλημα δ'. Ἐπὶ γραμματίου ἐξαργυρωθέντος 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6% ἐγένετο κράτησις 40 δρχ· πόσον τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου;

271. Συνήθως ὁ ἐξαργυρώνων τὸ γραμμάτιον κρατεῖ πλὴν τοῦ τ., ὃν εἴπομεν, καὶ ποσόν τι λόγῳ *προμηθείας*, ἥτις ὁρίζεται ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου πρὸς τόσον τοῖς ἑκατὸν ἀνεξαρτήτως τοῦ χρόνου.

Πρόβλημα. Γραμμάτιον 480 δραχμῶν ἐξαργυροῦται 2 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του, μὲ ὑφαίρεσιν 6% καὶ προμήθειαν $0{,}5\%$ Πόση ἡ ὅλη κράτησις;

Λύσις. Ὑφαίρεσις = δρχ. 4,80.

Προμήθεια = » $\frac{480\times0{,}5}{100}=2{,}40$

Ὁλικὴ κράτησις = » 7,20

272. Εὕρεσις τῆς μελλούσης ἀξίας διὰ τῆς παρούσης.

Πρόβλημα. Γραμμάτιον ἐξαργυροῦται ἀντὶ 600 δραχμῶν 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 5%. Ποία ἡ μέλλουσα ἀξία αὐτοῦ;

Λύσις. Μέλλουσα ἀξία 100 δραχμῶν ἔχει παροῦσαν

$$100-\frac{5\times4}{12}=\text{δρ. } 98{,}34\cdot$$

ἄρα παροῦσα ἀξία δρχ. 600 θὰ προέρχηται ἀπὸ μέλλουσαν

$$\frac{100\times600}{98{,}34}=610{,}16 \text{ δρχ.}$$

Ὑφαίρεσις ἐσωτερικὴ καὶ ἐξωτερική.

273. Εἰς τὸ πρῶτον πρόβλημα (270) ὁ ἐξαργυρώνων γραμμάτιον τῶν 580 δραχμῶν μετρεῖ εἰς τὸν φέροντα δρχ. 570,34 κρατεῖ ὅμως τὸν τ. τῶν 580 δρχ. ὅπερ ἄδικον.

Ἐν Εὐρώπῃ ὅμως συνηθίζεται δικαιότερον νὰ κρατῶσι τὸν τ. τῆς παρούσης ἀξίας, λέγεται δὲ ἡ τοιαύτη ὑφαίρεσις *ἐσωτερική*, ἡ δὲ προηγουμένως ἐκτεθεῖσα *ἐξωτερική*.

Πρόβλημα. Γραμμάτιον 580 δραχμῶν ἐξαργυροῦται 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 5%. Πόση ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις;

Λύσις. Αἱ 100 δρχ. εἰς 4 μῆν. φέρουσι τόκον 1,66· ἄρα, ἐὰν ὁ προεξοφλητὴς κρατήσῃ δρχ. 1,66 ἐκ τοῦ ποσοῦ δρχ. 101,66, θὰ μετρήσῃ 100 δρχ.· ἤτοι κρατεῖ τὸν τ. τοῦ πληρωνομένου ποσοῦ. Ἄρα αἱ 101,66 δραχ. δίδουσιν ὑφ. ἐσωτ. δρχ. 1,66 αἱ 580 δρχ. πόσην;

Τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα καὶ ἔχομεν·

$$x = \frac{1,66 \times 580}{101,66} = \text{δρχ. } 9\,50.$$

Ὅθεν ἡ παροῦσα ἀξία=570,50 δρχ.

Ἠδυνάμεθα ὅμως νὰ εὕρωμεν ἀπ' εὐθείας τὴν παροῦσαν ἀξίαν λύοντες τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Γραμμάτιον δραχμῶν 101,66 ἔχει παροῦσαν ἀξίαν δρχ. 100· πόσην ἔχει γραμμάτιον 580 δραχμῶν;

274. Τὰ προβλήματα ἐν οἷς δίδεται ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ ζητεῖται ἡ παροῦσα ἢ ἡ μέλλουσα ἀξία τοῦ γραμματίου ἢ ὁ χρόνος ἢ τὸ ἐπιτόκιον τῆς ἐξαργυρώσεως ἀνάγονται εἰς τὰ προβλήματα τόκου.

Ἀσκήσεις.

1) Γραμμάτιον 560 δραχμῶν ἐξαργυροῦται 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6% ὑφ. ἐξωτ. καὶ προμήθ. 0,5%. Πόση ἡ ὁλικὴ κράτησις;

2) Νὰ λυθῇ τὸ προηγούμενον, ὅταν ἡ ὑφαίρεσις εἶναι ἐσωτερική.

3) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἐξωτερικῆς καὶ ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως τοῦ αὐτοῦ γραμματίου εἶναι ὁ τ. τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως.

4) Ποία ἡ μέλλουσα ἀξία γραμματίου ὅπερ ἐξαργυροῦται 5 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 4 % ἀντὶ 100 δραχμῶν μὲ ὑφαίρεσιν ἐξωτερικήν ;

5) Πόσον χρόνον πρὸ τῆς λήξεώς του ἐξαργυροῦται γραμμάτιον 650 δραχμῶν πρὸς 9 % μὲ ὑφαίρεσιν ἐσωτερικὴν δρχ. 28,60;

6) Γραμμάτιον 360 δραχμῶν ἐξαργυροῦται 6 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ δραχμῶν 345,5 μὲ ὑφαίρεσιν ἐσωτερικήν. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐγένετο ἡ προεξόφλησις ;

7) Ποία ἡ μέλλουσα ἀξία γραμματίου ὅπερ προεξοφλεῖται 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ὑφαίρεσιν ἐσωτερικὴν πρὸς 6 % καὶ παροῦσαν ἀξίαν 1500 δραχμῶν ;

8) Ἔμπορος ἐπρομηθεύθη σῖτον, ἀντὶ δὲ χρημάτων δίδει γραμμάτιον 750 δραχμῶν πληρωτέων μετὰ 7 μῆνας, τὸ ποσὸν δὲ τοῦτο τοῦ γραμματίου περιλαμβάνει τὴν ἀξίαν τοῦ σίτου καὶ τὸν τόκον αὐτῆς ἐπὶ 8 μῆνας πρὸς 8 %. Μετὰ 6 μῆνας ὁ ἔμπορος ἐξοφλεῖ τὸ γραμμάτιον, ὁ δὲ πωλητὴς χαρίζει αὐτῷ τὸν τόκον τῶν δύο ὑπολειπομένων μηνῶν. Πόσας δραχμὰς λαμβάνει ὁ πωλητής ;

Λύσις. Εὑρίσκομεν α′, τὴν παροῦσαν ἀξίαν τοῦ γραμματίου, β′, τὸν τόκον αὐτῆς ἐπὶ 6 μῆνας καὶ προσθέτομεν ταῦτα.

ΠΕΡΙ ΚΟΙΝΗΣ ΛΗΞΕΩΣ

275. *Πρόβλημα α′*. Ἔχει τις 3 γραμμάτια. τὸ α′ 1000 δρχ. πληρωτέων μετὰ 40 ἡμέρας, τὸ β′ 600 δρχ. πληρωτέων μετὰ 60 ἡμέρας καὶ τὸ γ′ 800 δρχ. πληρωτέων μετὰ 80 ἡμέρας. θέλει δὲ νὰ τὰ ἀντικαταστήσῃ δι' ἑνὸς καὶ μόνου γραμματίου πληρωτέου μετὰ 50 ἡμέρας. Ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον τῆς προεξοφλήσεως εἶναι 6 %, ποῖον τὸ ποσὸν τοῦ ἑνιαίου γραμματίου ;

Λύσις. Δύο περιπτώσεις θεωροῦμεν, καθ' ὅσον ἡ προεξόφλησις γίνεται κατὰ τὴν ἐξωτερικὴν ἢ τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν.

Α΄ Περίπτωσις.

Εὑρίσκομεν τὴν παροῦσαν ἀξίαν ἑκάστου γραμματίου, ἥτις εἶναι τοῦ α΄ δρχ. 993,34, τοῦ β΄ δρχ. 594 καὶ τοῦ γ΄ δρχ. 789,34, Ἑπομένως ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ ἑνιαίου γραμματίου εἶναι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν=δρχ. 2376,68.

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὴν μέλλουσαν ἀξίαν, ἤτοι τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου, παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν τὸ ποσὸν γραμματίου λήγοντος μετὰ 50 ἡμέρας εἶναι δρχ. 100, ἡ παροῦσα αὐτοῦ ἀξία εἶναι

$$100-\frac{100\times6\times50}{36000}=\text{δρχ. } 99,17.$$

Ἑπομένως τὸ ζητούμενον εἶναι

$$\frac{100\times2376,68}{99,17}=2396,57 \text{ δρχ.}$$

Β΄ Περίπτωσις.

Κατὰ τοὺς κανόνας τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ α΄ γραμματίου εἶναι δρχ. 993,44, τοῦ β΄, δρχ. 594,05 καὶ τοῦ γ΄ δρχ. 789,50. Ἑπομένως ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ ἑνιαίου γραμματίου εἶναι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν=δρχ. 2377· ἄρα ἡ μέλλουσα εἶναι.

$$2377+\frac{2377\times6\times50}{36000}=\text{δρχ. } 2396,80.$$

276. *Πρόβλημα β΄* Ἔχομεν 2 γραμμάτια, τὸ α΄ 1000 δραχμῶν λῆγον μετὰ 60 ἡμέρας, τὸ β΄ 600 δρχ. λῆγον μετὰ 80 ἡμέρας Ἐὰν θέλωμεν νὰ τὰ ἀντικαταστήσωμεν δι᾽ ἑνὸς μόνου γραμματίου 1600 δρχ., ὁ δὲ τόκος τῆς προεξοφλήσεως εἶναι 6 %, μετὰ πόσον χρόνον θὰ λήγῃ τοῦτο ;

Λύσις α'. Κατὰ τὴν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν παροῦσα ἀξία τοῦ ἐνιαίου γραμματίου=δρχ. 1582, ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις=δρχ. 18· ἄρα·

$$\text{χρόνος}=\frac{18\times36000}{1600\times6}=68\text{ ἡμ.}$$

**β'.* Κατὰ τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν παροῦσα ἀξία τοῦ ἐνιαίου γραμματίου=δρχ. 1582,21, ἐσωτ. ὑφ.=δρχ. 17,79· ἄρα

$$\text{χρόνος}=\frac{17{,}79\times36000}{1582{,}21\times6}=68\text{ ἡμ.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

277. Εἴδομεν ὅτι ὁ τόκος καὶ ἡ ὑφαίρεσις ὑπολογίζονται ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἐπιτοκίου, ἤτοι τοῦ τόσον τοῖς ἑκατόν. Ὑπάρχουσιν ὅμως καὶ πολλαὶ ἄλλαι περιπτώσεις, ἰδίως εἰς τὸ ἐμπόριον, καθ' ἃς τὸ ζητούμενον ὑπολογίζεται ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τόσον τοῖς ἑκατόν. Π.χ. ἔμπορος ἐπρομηθεύθη παρὰ παραγγελιοδόχου καφὲν ἀξίας 2500 δραχ.· πόσα θὰ τῷ πληρώσῃ ὁμοῦ μὲ τὴν προμήθειάν του, ἥτις εἶναι 3%;

Τοιαῦτα εἶναι τὰ προβλήματα τὰ ὁποῖα λύει ἡ μέθοδος τῶν ποσοστῶν. Ἐνίοτε τὸ ζητούμενον ποσὸν ὑπολογίζεται ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τόσον τοῖς χιλίοις· π. χ. 3 τοῖς χιλίοις ὅπερ γράφεται 3‰, ἢ τόσον ἐπὶ οἱουδήποτε ὡρισμένου ποσοῦ· ἐπειδὴ ὅμως συνήθως σχεδὸν πάντοτε ὑπολογίζεται ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τόσον τοῖς ἑκατόν, ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται καὶ *μέθοδος τοῦ* **τόσον τοῖς** *ἑκατόν*.

Προβλήματα.

α') Θεωρήσωμεν τὸ πρόβλημα ὅπερ προηγουμένως παρουσιάσαμεν ὡς παράδειγμα. Δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς :

Διὰ καφὲν 100 δρχ. ὁ ἔμπορος θὰ πληρώσῃ δρχ. 103, διὰ καφὲν 2500 δρχ. πόσας;

Ἔχομεν οὕτω πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν· ἄρα

$$χ=\frac{103\times2500}{100}=\text{δραχ. } 2575$$

ἢ καὶ ἄλλως· $χ=2500+2500\times0{,}03=2575$ δρχ.

Πρόβλημα β'. Ἔμπορος ἐπρομηθεύθη ὕφασμα διὰ παραγγελιοδόχου πληρώσας δρχ. 4550 ὡς ἀξίαν καὶ προμήθειαν 2% ὁμοῦ. Πόση ἡ ἀξία τοῦ ὑφάσματος;

Λύσις. Εἶναι πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

102δρχ.	100δρχ.
4550	χ=δρχ. 4460,78.

278. *Ἀπόβαρον* (ντάρα) λέγεται τὸ ποσὸν τῆς ἐλαττώσεως ἥτις γίνεται ἐπὶ ζυγισθέντος βάρους ἐμπορευμάτων πρὸς εὕρεσιν τοῦ καθαροῦ βάρους· ἐκτιμᾶται δὲ τοῦτο συνήθως μὲ τόσον τοῖς ἑκατόν.

Πρόβλημα γ'. Τὸ ὁλικὸν βάρος φορτίου ἐμπορεύματος εἶναι 3260 ὀκ., τὸ δὲ ἀπόβαρον ὁρίζεται 4 %. Πόσον τὸ καθαρὸν βάρος;

Λύσις. Ὁλικὸν βάρος=3260 ὀκ. Ἀπόβαρον=$3260\times0{,}04=$ ὀκ. 130,4=130 ὀκ. 160 δράμ. καὶ καθαρὸν βάρος=3129 ὀκ. 240 δράμ.

Πρόβλημα δ'. Ἔμπορος ἀποστέλλει 35000 ὀκ. ἐλαίου εἰς βαρέλια, ὧν τὸ ἀπόβαρον λογίζεται 8%. Πόσον τὸ βάρος τοῦ φορτίου;

Λύσις. 92 ὀκ. ἐλαίου ἔχουσιν ὡς φορτίον βάρος 100· ἄρα αἱ 35000 θὰ ἔχωσι·

$$χ=\frac{35000\times100}{92}=38043\text{ὀκ. }\frac{191}{400}$$

Ἀσκήσεις.

1) Ἔμπορος ἀγοράσας ὕφασμα ἀντὶ 2560,5 δρχ. τὸ μετεπώλησεν ἀντὶ δρχ. 3000. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισεν;

2) Ἔμπορος ἀγοράσας σῖτον ἀντὶ 1560,6 δρχ. τὸν μετεπώλησε μὲ ζημίαν 8%. Πόσον τὸν μετεπώλησεν;

3) Ἔμπορος πωλήσας καφὲν ἐξημιώθη 20% ἡ δὲ ὁλικὴ ζημία εἶναι 867 δρχ. Πόσον τῷ ἐστοίχιζεν ὁ καφές;

4) Μὲ τὰ δεδομένα τοῦ προηγουμένου προβλήματος νὰ εὑρεθῇ πόσον ἐπωλήθη ὁ καφές.

5) Ἔμπορος προμηθεύεται ἔκ τινος ἐργοστασίου σόδαν ἀξίας δρχ. 529, ἀλλὰ τῷ γίνεται ἔκπτωσις 4,5%. Πόσον θὰ πληρώσῃ;

6) Ἠσφάλισέ τις τὴν οἰκίαν του ἀντὶ 16500 δρχ. καὶ ἀσφαλίστρων 5% ἐτησίως. Πόσα θὰ πληρώνῃ κατ' ἔτος;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΕΙΣ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

---

279. *Πρόβλημα α΄.* Νὰ μοιρασθῶσι 48 δρχ. εἰς τρεῖς ἀνθρώπους οὕτως, ὥστε ὅσας δραχμὰς λάβῃ ὁ α΄ τόσας δραχμὰς νὰ λάβῃ ὁ β΄ καὶ τόσας δραχμὰς ὁ γ΄.

Λύσις. Ἐὰν τὸ μοιραζόμενον ποσὸν ἀπετελεῖτο ἀπὸ 1 δρχ., 1 δίδραχμον καὶ 1 πεντόδραχμον, ἤτοι 8 δρχ., θὰ ἐλάμβανεν ὁ α΄ 1 δρχ., ὁ β΄ 2 δρχ. καὶ ὁ γ΄ 5 δρχ.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ μερίδια εἶναι προφανῶς ἀνάλογα πρὸς τὸ μοιραζόμενον ποσόν, δυνάμεθα νὰ τὰ εὕρωμεν διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν ὡς ἑξῆς:

Μερίδιον τοῦ α'. Ὅταν τὸ μοιραζόμενον ποσὸν εἶναι 8 δρχ. ὁ α' λαμβάνει 1 δραχ.· ὅταν εἶναι 48 δρχ., θὰ λάβῃ.

$$1\times\frac{48}{8}=6 \text{ δρχ.}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$\text{Μερίδιον τοῦ } \beta'=2\times\frac{48}{8}=12 \text{ δρχ.}$$

$$\text{» » } \gamma'=5\times\frac{48}{8}=30 \text{ δρχ.}$$

Ὁρισμοί.

Τὰ μέρη εἰς ἃ προηγουμένως ἐμοιράσαμεν τὸ ποσὸν 48 δραχμῶν λέγονται *ἀνάλογα* πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 5· βλέπομεν δ' ὅτι σχηματίζονται ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν $\frac{48}{8}$, ἤτοι 6.

Ἐν γένει·

Δύο ἢ πλείονες ἀριθμοὶ λέγονται ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἰσαρίθμους, ὅταν γίνωνται ἐξ αὐτῶν διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Ἄρα·

Νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα δύο ἢ πλειόνων δεδομένων ἀριθμῶν σημαίνει νὰ τὸν μερίσωμεν εἰς τόσα μέρη, ὅσοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, νὰ γίνωνται δ' ἐξ αὐτῶν διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἐκ τῆς λύσεως δὲ τοῦ προηγουμένου προβλήματος ἕπεται ὅτι·

280. *Διὰ νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα ἄλλων ἀριθμῶν, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους καὶ διὰ τοῦ ἀθροίσματος διαιροῦμεν τὰ γινόμενα ἑκάστου τούτων ἐπὶ τὸν μεριστέον ἀριθμόν.*

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Μ τὸν μεριστέον ἀριθμόν, δι' α, β, γ τοὺς ἀριθμοὺς ἀναλόγως τῶν ὁποίων πρόκειται νὰ γίνῃ ὁ μερισμός, τὰ δὲ μέρη κατὰ σειρὰν διὰ χ, ψ, ω, ἔχομεν τοὺς τύπους·

$$\chi = \frac{M\alpha}{\alpha+\beta+\gamma},$$

$$\psi = \frac{M\beta}{\alpha+\beta+\gamma},$$

$$\omega = \frac{M\gamma}{\alpha+\beta+\gamma},$$

Τοὺς τύπους τούτους δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας. Τῳόντι, ἐὰν εἴχομεν

$$M = \alpha + \beta + \gamma,$$

τὸ πρῶτον μέρος θὰ ἦτο προφανῶς α, τὸ δεύτερον β, καὶ τὸ τρίτον γ.

'Εαν εἴχομεν $M=2\,(\alpha+\beta+\gamma)$, τὰ ζητούμενα μέρη θὰ ἦσαν διπλάσια, ἤτοι $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ κτλ. Ἤτοι ὁ Μ καὶ τὰ μέρη αὐτοῦ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα. Ἄρα πρὸς εὕρεσιν τοῦ πρώτου μέρους χ ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν·

Ὅταν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶναι $\alpha+\beta+\gamma$, *τὸ α' μέρος εἶναι α· ὅταν εἶναι Μ ὁ μεριστέος, πόσον;*

Εὑρίσκομεν οὕτω·

$$\chi = \frac{M\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ τὰ λοιπὰ μέρη.

281. Ἐκ τῶν προηγουμένων τύπων ἕπεται ὅτι τὰ ζητούμενα μέρη δὲν μεταβάλλονται, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, ἀναλόγως τῶν ὁποίων γίνεται ὁ μερισμός, πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Τοῦτο δὲ συνεπάγεται πολλάκις *ἁπλοποίησιν* εἰς τὰς πράξεις, ὡς φαίνεται εἰς τὰ ἑπόμενα προβλήματα.

Πρόβλημα β'. Νὰ μερισθῇ ὁ 100 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 80 καὶ 40.

Λύσις. Διαιροῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς 80 καὶ 40 διὰ 40 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκα 2 καὶ 1, ἀναλόγως τῶν ὁποίων μερίζοντες τὸν 100 ἔχομεν·

$$\chi = \frac{100\times 2}{3} = 66{,}66,$$

$$χ = \frac{100 \times 1}{3} = 33,33.$$

ΣΗΜ. Τὰ μέρη προστιθέμενα πρέπει ν' ἀποτελῶσι τὸν μεριστέον ἀριθμόν, τοῦτο δ' ἀποτελεῖ τὴν *βάσανον* τῆς πράξεως.

Πρόβλημα γ'. Νὰ μερισθῇ ὁ 12 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{1}{4}$.

Λύσις. Τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα καὶ εὑρίσκομεν $\frac{4}{12}$ καὶ $\frac{3}{12}$. ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα ἐπὶ 12 καὶ ἔχομεν τοὺς ἀριθμοὺς 4 καὶ 3, ἀναλόγως τῶν ὁποίων μερίζομεν τὸν 12.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ μοιρασθῶσι 1250 δραχμαὶ εἰς τρεῖς ἀνθρώπους οὕτως, ὥστε τὰ μερίδια τοῦ α' καὶ τοῦ β' νὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ 3, τὰ δὲ μερίδια τοῦ β' καὶ τοῦ γ' ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 5 καὶ 6.

Λύσις Ἐὰν παραστήσωμεν τὰ μερίδια κατὰ σειρὰν διὰ χ, ψ, ω, ἔχομεν·

$$\frac{χ}{ψ} = \frac{2}{3}, \quad \text{ὅθεν} \quad χ = ψ\frac{2}{3}$$

$$\frac{ω}{ψ} = \frac{6}{5}, \quad \text{ὅθεν} \quad ω = ψ\frac{6}{5}$$

Ἄρα ἐὰν ψ=1, τότε $χ = \frac{2}{3}$, καὶ $ω = \frac{6}{5}$, καὶ ὁ μερισμὸς θὰ γίνῃ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν

$$\frac{2}{3},\ 1,\ \frac{6}{5}.$$

2) Νὰ μερισθῇ ὁ 1000 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4, ἤτοι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους τούτων ἀριθμοὺς $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.

3) Πατὴρ ἀφήνει κληρονομίαν εἰς τὰ τρία τέκνα του 1500

δραχμάς. Διατάσσει δὲ νὰ λάβῃ ἕκαστον τέκνον του κατ' ἀναλογίαν τόσῳ μεῖζον μερίδιον, ὅσῳ μικροτέρα εἶναι ἡ ἡλικία του. Ἔχουσι δὲ ἡλικίαν τὸ α' 10 ἐτῶν, τὸ β' 14 ἐτῶν καὶ τὸ γ' 25 ἐτῶν. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστον;

4) Νὰ μοιρασθῶσιν 120 δραχμαὶ εἰς τρεῖς ἀνθρώπους οὕτως, ὥστε ὁ β' νὰ λάβῃ τὸ ἥμισυ τοῦ μεριδίου τοῦ α' καὶ ὁ γ' τὸ ἥμισυ τοῦ μεριδίου τοῦ β'.

*5) Νὰ μοιρασθῶσιν 100 δραχμαὶ εἰς 3 ἀνθρώπους οὕτως, ὥστε ὁ β' νὰ λάβῃ τὸ ἥμισυ τοῦ μεριδίου τοῦ α' καὶ 1 δραχμὴν περιπλέον, ὁ δὲ γ' τὸ ἥμισυ τοῦ μεριδίου τοῦ β' καὶ 1 δραχμὴν περιπλέον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

282. *Προβλήματα ἑταιρείας* ὀνομάζομεν τὰ προβλήματα ἐν οἷς πρόκειται νὰ μοιρασθῇ κέρδος ἢ ζημία εἰς ἀνθρώπους οἵτινες ἀπετέλεσαν ἑταιρείαν πρὸς χρηματολογικὴν ἐπιχείρησιν.

Πρόβλημα α'. Τρεῖς ἄνθρωποι συνηταιρίσθησαν διά τινα ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν καὶ κατέβαλον ὁ α' 600 δραχμάς, ὁ β' 300 δραχμάς, καὶ ὁ γ' 200 δραχμάς. Ἐκέρδισαν δ' ἐκ ταύτης 150 δραχμάς. Πόσας δρχ. θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Λύσις. Ἐὰν x εἶναι τὸ κέρδος μιᾶς δραχμῆς, τότε ὁ μὲν α' θὰ λάβῃ δρχ. 600 x, ὁ δὲ β' δρχ. 300 x, καὶ ὁ γ' δρχ. 200 x. Ἄρα τὰ μερίδια εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 600, 300, 200 καὶ ἑπομένως θὰ λάβωσι (§ 287).

$$\text{ὁ α'}\ \frac{150\times6}{11} = \text{δρχ. } 81,\ 81$$

$$\text{ὁ β'}\ \frac{150\times3}{11} = \text{δρχ. } 40,\ 90$$

$$\text{ὁ γ'}\ \frac{150\times2}{11} = \text{δρχ. } 27,\ 27.$$

Πρόβλημα β'. Ἔμπορος ἀνέλαβεν ἐπιχείρησιν μὲ δραχμὰς 4486. Μετὰ 16 μῆνας προσλαμβάνει συνεταῖρον καταβάλλοντα τὸ αὐτὸ ποσόν· 4 μῆνας μετὰ ταῦτα προσλαμβάνει καὶ ἕτερον καταβάλλοντα καὶ τοῦτον τὸ αὐτὸ ποσόν. Τρία δὲ ἔτη ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως εὑρέθη ὅτι ἐκέρδισαν δρχ. 450· πόσον κέρδος ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον;

Λύσις. Αἱ καταβολαὶ εἶναι ἴσαι· διάφοροι ὅμως εἶναι οἱ χρόνοι καθ' οὕς τὰ χρήματα ἑκάστου ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν· οὕτω τοῦ μὲν α' ὁ χρόνος εἶναι 36 μῆνες, τοῦ β' 20, καὶ τοῦ γ' 16 μῆνες.

Ἐὰν κ. εἶναι τὸ κέρδος ἑκάστης καταβολῆς εἰς 1 μῆνα, τὰ μερίδια κατὰ σειρὰν εἶναι

$$36\kappa. \quad 20\kappa. \quad 16\kappa.$$

ἤτοι ἀνάλογα τῶν χρόνων. Ἄρα θὰ λάβωσιν

$$\text{ὁ α'}\ \frac{450\times 9}{18} = \text{δρχ. } 225,$$

$$\text{ὁ β'}\ \frac{450\times 5}{18} = \text{δρχ. } 125,$$

$$\text{ὁ γ'}\ \frac{450\times 4}{18} = \text{δρχ. } 100.$$

Πρόβλημα γ'. Ἔμπορος ἀνέλαβεν ἐπιχείρησιν μὲ 2000 δραχμάς· μετὰ 2 μῆνας προσλαμβάνει συνεταῖρον καταβάλλοντα 4000 δραχμάς. Μετὰ 10 δὲ μῆνας ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπιχειρήσεως εὑρέθη ὅτι ἐκέρδισαν 480 δραχμάς. Πόσας θὰ λάβῃ ἑκάτερος;

Λύσις. Ἐνταῦθα εἶναι διάφοροι καὶ αἱ καταβολαὶ καὶ οἱ χρόνοι· ἤτοι ὁ μὲν α' κατέβαλε δραχμὰς 2000 διὰ 10 μῆνας, ὁ δὲ β' 4000 δραχμὰς δι' 8 μῆνας.

Ἐὰν κ εἶναι τὸ κέρδος μιᾶς δραχμῆς εἰς ἕνα μῆνα, τὰ μερίδια αὐτῶν θὰ εἶναι κατὰ σειρὰν

$$\kappa\times 2000\times 10 \qquad \kappa\times 4000\times 8,$$

ἤτοι ἀνάλογα πρὸς τὰ γινόμενα

$$2000\times 10, \quad 4000\times 8$$

ἢ (δι' ἁπλοποιήσεως) πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 5,8. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι θὰ λάβωσιν

ὁ α' δραχμὰς 184,61
ὁ β' » 295,38.

Ἀσκήσεις.

1) Τρεῖς συνεταῖροι κατέβαλον συγχρόνως χρήματα διά τινα ἐπιχείρησιν. Ἐκ τούτων δὲ ὁ β' κατέβαλε τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν τοῦ α', ὁ δὲ γ' τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν τοῦ β'. Ἐκέρδισαν δὲ 180 δραχμάς. Ἐὰν τὸ κέρδος εἶναι 15% ἐπὶ τοῦ ὅλου κεφαλαίου πόσον κέρδος ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον καὶ ποῖον τὸ κεφάλαιον τῆς ἐπιχειρήσεως;

2) Ἔμπορος ἀρχίζει ἐπιχείρησιν μὲ 8000 δραχμάς, μετὰ 5 μῆνας προσλαμβάνει συνεταῖρον καταβάλλοντα 5000 δραχμάς, 20 ἡμέρας μετὰ ταῦτα προσλαμβάνει καὶ γ' καταβάλλοντα 1500 δραχμάς. Ἡ ἐπιχείρησις διήρκεσε 2 ἔτη καὶ 6 μῆνας καὶ ἔφερε κέρδος 3060 δραχμάς. Ἐὰν ὁ α' λόγῳ πρωτοβουλίας λάβῃ ἀμοιβὴν 3% ἐπὶ τοῦ ὁλικοῦ κέρδους, πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος;

3) Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν τῇ 10ῃ Ἰανουαρίου 1918 μὲ 6800 δραχμάς· τῇ 5ῃ Ἀπριλίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους προσέλαβε συνεταῖρον καταβαλόντα 8800 δραχμάς. Ἡ ἐπιχείρησις ἔληξε τῇ 5ῃ Μαΐου 1919 μὲ ζημίαν 4800 δααχμῶν. Πόση ζημία ἀναλογεῖ εἰς ἑκάτερον;

4) Δύο συνεταῖροι κατέβαλον διά τινα ἐπιχείρησιν ὁ α' 60000 δραχμὰς τῇ 1ῃ Φεβρουαρίου, καὶ ὁ β' 26000 δραχμὰς τῇ 1ῃ Μαΐου τοῦ αὐτοῦ ἔτους. Ἐκ τῶν καταβληθέντων ὅμως χρημάτων ἀπέσυραν ὁ μὲν α' δραχμὰς 2500 τῇ 1ῃ Ἀπριλίου, ὁ δὲ β' δραχμὰς 8000 τῇ 1ῃ Αὐγούστου τοῦ αὐτοῦ ἔτους. Πρόκειται δὲ τῇ 1ῃ Ἰανουαρίου τοῦ ἑπομένου ἔτους νὰ μοιρασθῶσι τὸ κέρδος των 10600 δραχμάς. Πόσας δρχ. θὰ λάβῃ ἑκάτερος;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΙΞΕΩΣ

Διακρίνομεν δύο ειδών προβλήματα.

Α΄ εἶδος.

283. Προβλήματα τοῦ α΄ εἴδους εἶναι ἐκεῖνα ἐν οἷς δίδονται αἱ ποσότητες διαφόρων πραγμάτων καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου, ζητεῖται δέ, ἐὰν ἀναμίξωμεν ταῦτα, ποία θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος.

Πρόβλημα. Ἔμπορος ἀνέμιξεν οἴνους τριῶν εἰδῶν ὡς ἑξῆς. Ἔλαβεν 120 ὀκάδας ἐκ τοῦ α΄, οὗτινος ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 40 λεπτά, 80 ὀκάδας ἐκ τοῦ β΄, οὗτινος ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 30 λεπτά, καὶ 500 ὀκάδας ἐκ τοῦ γ΄, οὗτινος ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 25 λεπτά. Πόσον θ' ἀξίζῃ ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος;

Λύσις. Εὑρίσκομεν α΄) τὴν ἀξίαν τῆς ποσότητος τοῦ α΄ εἴδους, ἥτις εἶναι 40 λεπτὰ $\times$120=4800 λεπτὰ=48 δραχμαί.

β΄) Τὴν ἀξίαν τῆς ποσότητος τοῦ β΄ εἴδους, ἥτις εἶναι 30 λεπτὰ $\times$80=24 δραχμαί.

γ΄) Τὴν ἀξίαν τῆς ποσότητος τοῦ γ΄ εἴδους, ἥτις εἶναι 125 δραχμαί.

Ἔπειτα εὑρίσκομεν διὰ προσθέσεως τούτων τὴν ὅλην ἀξίαν τοῦ μίγματος δραχμὰς 197. Εὑρίσκομεν προσέτι καὶ τὸ βάρος τοῦ ὅλου μίγματος 700 ὀκάδας. Ἑπομένως ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος ἀξίζει 197 : 700=δραχμάς 0,28 ἢ λεπτὰ 28.

Διάταξις τῶν πράξεων.

$$
\begin{array}{rrr|l}
40\times120= & 48 & 00 & \\
30\times\ \ 80= & 24 & 00 & \\
25\times500= & 125 & 00 & \\
\hline
700 & 197' & 00 & 7'00 \\
 & 57 & & \overline{28} \\
 & 1 & & \\
\end{array}
$$

Β' εἶδος.

284. Ἐνταῦθα θεωροῦμεν προβλήματα ἐν οἷς δίδονται αἱ τιμαὶ τῆς μονάδος δύο ἢ πλειόνων πραγμάτων, ζητεῖται δὲ πόσον πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου εἴδους, ἵνα σχηματίσωμεν μῖγμα μὲ ὡρισμένην τιμὴν τῆς μονάδος αὐτοῦ.

Πρόβλημα α'.) Ἔμπορος ἔχει δύο εἰδῶν ἄλευρον· τοῦ α' εἴδους ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 65 λεπτά, τοῦ δὲ β' 40 λεπτά. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ α' καὶ πόσας ἀπὸ τὸ 6' εἶδος, ἵνα σχηματίσῃ μῖγμα 400 ὀκάδων, οὗτινος ἡ ὀκᾶ ν' ἀξίζῃ 50 λεπτά;

Λύσις. Ἑκάστη ὀκᾶ τοῦ α' εἴδους ἀξίζει χωριστὰ μὲν 65 λεπτά, ἐν τῷ μίγματι δὲ 50 λεπτά, ἄρα φέρει ζημίαν 15 λεπτῶν· ἑκάστη δὲ ὀκᾶ τοῦ 6' εἴδους φέρει κέρδος 10 λεπτῶν. Ἐὰν λοιπὸν ὁ ἔμπορος λάβῃ 10 ὀκάδας ἐκ τοῦ α' εἴδους καὶ 15 ἐκ τοῦ 6', θὰ ἔχῃ ἐκ μὲν τοῦ α' ζημίαν 10×15 λεπτά, ἐκ δὲ τοῦ 6' κέρδος 15×10 λεπτά. Ἐπειδὴ δὲ 10×15=15×10, ἕπεται ὅτι ἡ ζημία ἰσοῦται τῷ κέρδει. ἤτοι ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος θὰ εἶναι 50 λεπτά, Ἄρα·

Διὰ μῖγμα 25 ὀκάδων πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ μὲν τοῦ α' εἴδους 10 ὀκάδας, ἐκ δὲ τοῦ 6' 15 ὀκάδας. Ὅθεν διὰ 1 ὀκᾶν μίγματος πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ μὲν τοῦ α' $\frac{10}{25}$, ἐκ δὲ τοῦ 6' $\frac{15}{25}$. Ἑπομένως διὰ μῖγμα 400 ὀκάδων θὰ λάβῃ ἐκ μὲν τοῦ α'

$$\frac{400\times10}{25}=160 \text{ ὀκάδας,}$$

ἐκ δὲ τοῦ β' εἴδους

$$\frac{400\times15}{25}=240 \text{ ὀκάδας.}$$

285. Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα παρατηροῦμεν ὅτι ὁ λόγος 10 : 15 ἢ ὁ ἴσος 2 : 3 εἶναι ὁ λόγος τῶν ἀναμιγνυομένων ποσοτήτων, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ ποσὸν τοῦ μίγματος. Πολλάκις δὲ εἰς τοιαῦτα προβλήματα μένει ἀόριστον τὸ ποσὸν τοῦ μίγματος, ζητεῖται δ' ἁπλῶς ὁ λόγος τῶν μιγνυομένων ποσῶν. Π. χ.

Πρόβλημα β'. Κατὰ ποῖον λόγον πρέπει νὰ ἀναμίξωμεν καφὲν τιμώμενον 2,80 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν μὲ κριθὴν τιμωμένην πρὸς δραχμὰς 0,30, ὥστε ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος ν' ἀξίζῃ 1 δραχμήν;

Λύσις. Ἑκάστη ὀκᾶ καφὲ ἐν τῷ μίγματι χάνει δραχμὰς 1,80, τῆς δὲ κριθῆς κερδίζει 0,70 δρχ. Ἄρα, δι' οὓς λόγους εἴπομεν ἀνωτέρω, ὁ ζητούμενος λόγος εἶναι 0,70 : 1,80=7 : 18.

286. *Πρόβλημα γ'*. Ἔχομεν τέσσαρα εἴδη οἴνου, τῶν 65, 40 30 καὶ 20 λεπτῶν κατ' ὀκᾶν. Πόσον πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου πρὸς σχηματισμὸν μίγματος 100 ὀκάδων τῶν 50 λεπτῶν;

Λύσις. Τὸ πρόβλημα ἀνάγομεν εὐκόλως εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὰ μιγνυόμενα εἶναι δύο. Σχηματίζομεν δύο *μερικὰ* μίγματα λαμβάνοντες ἀνὰ 1 ὀκᾶν ἐξ ἑκάστου εἴδους, τοιαῦτα ὥστε τοῦ ἑνὸς ἡ ὀκᾶ νὰ τιμᾶται περισσότερον τῶν 50 λεπτῶν, τοῦ δὲ ἄλλου ὀλιγώτερον. Οὕτω λαμβάνοντες ἀνὰ 1 ὀκᾶν ἐκ τοῦ α' καὶ β' ἔχομεν μῖγμα ἀξίας λεπτῶν 52,5 κατ' ὀκᾶν· ὡσαύτως λαμβάνοντες ἀνὰ 1 ὀκᾶν ἐκ τοῦ γ' καὶ δ' ἔχομεν μῖγμα ἀξίας 25 λεπτῶν κατ' ὀκᾶν. Εὑρίσκομεν ἔπειτα κατὰ τὰ γνωστὰ ὅτι ἐκ μὲν τοῦ α' μερικοῦ μίγματος πρέπει νὰ λάβωμεν 90,9 ὀκάδας, ἐκ δὲ τοῦ β' 9,09 ὀκ. Ἄρα ἐκ τῶν τεσσάρων εἰδῶν τοῦ οἴνου πρέπει νὰ λάβωμεν ἐκ μὲν τοῦ α' καὶ β' ἀνὰ 45,45 ὀκάδας, ἐκ δὲ τοῦ γ' καὶ δ' ἀνὰ 4,545 ὀκάδας.

ΣΗΜ. Τὰ τοιαῦτα προβλήματα ἐπιδέχονται ποικίλας λύσεις. Π. χ. εἰς τὸ προηγούμενον ἠδυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μερικὸν μῖγμα λαμβάνοντες ἀνὰ 1 ὀκᾶν ἐκ τοῦ β', γ' καὶ δ' εἴδους ἀξίας δὲ 30 λεπτῶν κατ' ὀκᾶν, καὶ νὰ ζητήσωμεν πόσον πρέπει νὰ λάβωμεν ἐκ τοῦ α' εἴδους καὶ ἐκ τοῦ μίγματος.

Ἀσκήσεις.

1) Ἀρτοποιὸς ἠγόρασε 2 στατῆρας ἀλεύρου πρὸς 45 δραχμάς, 5 στατῆρας καὶ 10 ὀκάδας πρὸς 50 δραχμάς, καὶ 10 στατῆρας 15 ὀκάδας καὶ 200 δράμια πρὸς 38 δραχμάς. εἶτα δ' ἀνέμιξε ταῦτα. Ποία ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος;

2) Τρία εἴδη οἴνου πωλοῦνται τὸ α' πρὸς 60 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, τὸ β' πρὸς 45 λεπτά, καὶ τὸ γ' πρὸς 55 λεπτά. Ἐὰν ἀναμιχθῶσιν ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 10, ποία θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος;

3) Ἀναλόγως τίνων ἀριθμῶν πρέπει ν' ἀναμιχθῶσιν οἶνος τῶν 65 λεπτῶν κατ' ὀκᾶν μὲ οἶνον τῶν 50 λεπτῶν πρὸς σχηματισμὸν μίγματος τῶν 58 λεπτῶν;

4) Ἔχομεν τέσσαρας ποιότητας ἐλαίου, τῶν 110 λεπτῶν, τῶν 85 λεπτῶν, τῶν 90 λεπτῶν καὶ τῶν 125 λεπτῶν κατ' ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας ἐξ ἑκάστης πρέπει νὰ λάβωμεν πρὸς σχηματισμὸν μίγματος τῆς 1 δραχμῆς;

5) Μὲ πόσας ὀκάδας ἐλαίου τῶν 1,20 δρχ. κατ' ὀκᾶν πρέπει ν' ἀναμίξωμεν 45 ὀκάδας ἐλαίου τῶν 1,45 δρχ. πρὸς σχηματισμὸν μίγματος τῶν 1,32 δρχ.;

ΚΡΑΜΑΤΑ

287. *Βαθμὸς καθαρότητος* κράματος μεταλλικοῦ λέγεται ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων πόση ἐπὶ τοῖς χιλίοις εἶναι ἡ ποσότης τοῦ ἐν αὐτῷ περιεχομένου εὐγενοῦς μετάλλου.

Εἰς τὰ προβλήματα τῆς μίξεως ὑπάγονται καὶ ἐκεῖνα ἐν οἷς ζητεῖται ὁ βαθμὸς καθαρότητος κράματος μεταλλικοῦ παραγομένου διὰ συγχωνεύσεως μετάλλων ἐχόντων διάφορον βαθμὸν καθαρότητος· ὁμοίως καὶ τὰ προβλήματα ἐν οἷς ζητεῖται πόσα πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου εἴδους μετάλλων ἐχόντων διάφορον βαθμὸν καθαρότητος πρὸς σχηματισμὸν κράματος οὗτινος δίδεται ἡ ποσότης καὶ ὁ βαθμὸς καθαρότητος ἢ μόνον ὁ βαθμὸς καθαρότητος.

Πρόβλημα α'. Συγχωνεύομεν 200 δράμια ἀργύρου βαθμοῦ καθαρότητος 0,850 μὲ 60 δράμια ἀργύρου βαθμοῦ καθαρότητος 0,950. Ποῖος ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος;

Λύσις. Ἓν δράμιον τοῦ α' εἴδους ἔχει καθαρὸν ἄργυρον 0,850 δράμια· ἄρα τὰ 200 δράμια περιέχουσι.

$$0{,}850 \times 200 = 170 \text{ δράμια.}$$

Ὁμοίως 1 δράμιον τοῦ β' εἴδους περιέχει καθαρὸν ἄργυρον 0,950 καὶ τὰ 60 δράμια περιέχουσιν.

$$0{,}950 \times 60 = 57 \text{ δράμια.}$$

Ἑπομένως τὸ ὅλον κρᾶμα ζυγίζον 260 δράμια περιέχει 227 δράμια καθαροῦ ἀργύρου καὶ τὸ 1 δράμιον θὰ περιέχῃ.

$$\frac{227}{260} = 0{,}873 \text{ δράμια.}$$

Ἄρα ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος εἶναι 0,873.

ΣΗΜ. Ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ μεταλλικοῦ κράματος λέγεται καὶ τίτλος αὐτοῦ· παριστῶμεν δ' αὐτὸν συντόμως διὰ τοῦ τ.

Πρόβλημα β'. Ἔχομεν δύο εἴδη ἀργύρου ἔχοντα τὸ α' τ.=0,900, τὸ β' τ.=0,860. Πόσα δράμια πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκατέρου εἴδους πρὸς σχηματισμὸν κράματος 100 δραμίων ἔχοντος τ.=0,890;

Λύσις. Ἕκαστον δράμιον τοῦ α' εἴδους ἀποβάλλει ἐν τῷ κράματι ἐκ τοῦ τ. αὐτοῦ 0,010, ἕκαστον δὲ δράμιον τοῦ β' εἴδους κερδίζει 0,030· ὥστε ἐὰν λάβωμεν ἐκ τοῦ α' εἴδους 0,030 δράμια θὰ ἔχωμεν ἀπώλειαν.

$$0{,}030 \times 0{,}010 \cdot$$

ἐὰν δὲ λάβωμεν ἐκ τοῦ β' 0,010 δράμια, θὰ ἔχωμεν κέρδος.

$$0{,}010 \times 0{,}030,$$

ἤτοι ἴσον τῇ ζημίᾳ. Τὰ γινόμενα δὲ ταῦτα θὰ εἶναι ἴσα, καὶ ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ 0,030 καὶ 0,010 πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 100. Ἤτοι τὸ κρᾶμα θὰ ἔχῃ τίτλον 0,890, ἐὰν λάβωμεν 3 δράμια ἐκ τοῦ α' καὶ 1 δράμιον ἐκ τοῦ β' εἴδους. Ἐπειδὴ δὲ θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν κρᾶμα 100 δραμίων, ἕπεται ὅτι πρέπει νὰ λάβωμεν ἐκ τοῦ α' εἴδους 75 δράμια, ἐκ δὲ τοῦ β' 25.

ΣΗΜ. Ἐὰν ἀφήνετο ἀόριστον τὸ ποσὸν τοῦ κράματος, ἡ λύσις θὰ ἦτο ὅτι ὁ λόγος τῶν μιγνυομένων ποσοτήτων εἶναι 3 : 1.

Ἀσκήσεις.

1) Χρυσοχόος τις συνέτηξεν 5 ἀργυρᾶ πεντόδραχμα μὲ 18 ἀργυρᾶ μονόδραχμα. Ποῖος ὁ τ. τοῦ κράματος;

2) Πρὸς κατασκευὴν τυπογραφικῶν στοιχείων συντήκονται 20 μέρη ἀντιμονίου, 80 μέρη μολύβδου καὶ 5 μέρη χαλκοῦ. Τιμῶνται δὲ κατ' ὀκᾶν τὸ μὲν ἀντιμόνιον δραχμὰς 4,60, ὁ μόλυβδος δραχμὰς 1,15 καὶ ὁ χαλκὸς δραχμὰς 4,55. Τὰ λοιπὰ ἔξοδα διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν στοιχείων τούτων εἶναι δραχμαὶ 0,65 κατ' ὀκᾶν. Πόσον στοιχίζει ἡ κατασκευὴ μιᾶς ὀκᾶς αὐτῶν;

3) Δύο εἴδη χρυσοῦ ἔχουσι τ. τὸ α' 0,900, τὸ β' 0,960. Πόσα γραμμάρια πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκατέρου εἴδους πρὸς σχηματισμὸν κράματος 35 γραμμαρίων ἔχοντος τ.=0,915;

4) Πρόκειται ἐξ ἀργυρῶν μονοδράχμων καὶ πενταδράχμων νὰ κατασκευάσωμεν 12 κοχλιάρια ζυγίζοντα ἕκαστον 15 δράμια καὶ ἔχοντα τ.=0,875. Πόσα κέρματα πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκατέρου εἴδους;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ

288. *Πρόβλημα.* Ἐργάτης ἐργασθεὶς ἐπὶ πέντε ἡμέρας ἔλαβε τὴν α' ἡμέραν δραχμὰς 2,40, τὴν β' ἡμέραν δραχμὰς 1,80, τὴν γ' ἡμέραν δραχμὰς 2, τὴν δ' ἡμέραν δραχμὰς 2,20, καὶ τὴν ε'

δραχμὰς 3. Πόσα ἔλαβεν ἡμέραν παρ' ἡμέραν, ἤτοι πόσον θὰ ἦτο τὸ ἡμερομίσθιόν του, ἐὰν ὅλα ἦσαν ἴσα ;

Λύσις. Ὁ ἐργάτης ἔλαβεν ἐν ὅλῳ δρχ.

$$2{,}40+1{,}80+2+2{,}20+3=11{,}40.$$

Ἑπομένως, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὰς δραχμὰς 11,40 : 5, ὁπότε εὑρίσκομεν δραχμὰς 2,28.

289. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦ προηγουμένου προβλήματος λέγεται *μέσος ὅρος* τῶν ἡμερομισθίων. Γενικῶς :

Καλεῖται μέσος ὅρος ποσῶν ὁμοειδῶν ὁ ἀριθμὸς ὅστις θὰ παρίστα ἕκαστον τούτων, ἐὰν πάντοτε ἐγίνοντο ἴσα, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

290. Βλέπομεν δ' ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ μέσου ὅρου προσθέτομεν τὰ δεδομένα ποσὰ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διαιροῦμεν διὰ τοῦ πλήθους αὐτῶν.

291. *Χρῆσις.* Εἰς πλείστας περιστάσεις χρησιμοποιεῖται ἡ εὕρεσις τοῦ μέσου ὅρου. Π. χ. ὅταν θέλωμεν νὰ μάθωμεν τὴν μέσην ἐτησίαν εἴσπραξιν ἑνὸς τελωνείου· τὴν μέσην θερμοκρασίαν τῆς ἡμέρας, τοῦ μηνὸς ἢ τοῦ ἔτους ἔν τινι τόπῳ κτλ.

Ἀσκήσεις.

1) Τελωνεῖον κατὰ τρία συναπτὰ ἔτη εἰσέπραξε τὸ α' ἔτος δραχμὰς 85672,60, τὸ β' δραχμὰς 67865, καὶ τὸ γ' δραχμὰς 95673,20. Πόση ἡ μέση ἐτησία εἴσπραξις ;

2) Εἰσπράκτωρ ἔχει τακτικὸν μηνιαῖον μισθὸν δραχμὰς 125. Λαμβάνει ὅμως καὶ ποσοστά, τὰ ὁποῖα κατὰ τοὺς 6 μῆνας καθ' οὓς ὑπηρέτησεν ἦσαν κατὰ σειρὰν δραχμαὶ 25, δραχμαὶ 35,60, δραχμαὶ 40, δραχμαὶ 18,50, δραχμαὶ 20 καὶ δραχμαὶ 30,80. Πόση ἐν ὅλῳ ἡ μέση μηνιαία του μισθοδοσία ;

2500/79

Αρ.	Χρονολογία	Δραχ.	Λ.	Ταμίου ή εἰσπράκτορος	Δραχ.	Λ.

Μαντινεία 1925

$$\frac{\alpha^8}{\alpha^3} = \alpha^{8-3} = \alpha^5$$

$$\frac{\alpha^5}{\alpha^5} = \alpha^{5-5} = \alpha^0$$

$$\frac{\alpha^7}{\alpha^2} = \alpha^{7-2}$$

$$\alpha^0 = \frac{\alpha^5}{\alpha^5} = 1$$

$$a^0 = 1$$

$A = 2^2 \cdot 3 \cdot 4$

$\Pi = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 4^5 \quad \Pi = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 4^5$

$$8^0 = \frac{8^5}{8^5}$$

$$8^0 = 1$$

Πᾶς ἀριθ. ὑψούμενος εἰς τὸ μηδὲν ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα

$$6^0 = 1$$

$$\frac{\alpha^3 \cdot \alpha^1}{\alpha^3} = \frac{\alpha^4}{\alpha^3}$$

$$\alpha^1 = \frac{\alpha\alpha\alpha\alpha}{\alpha\alpha\alpha}$$

1925

20:4=5

5+8=13+6=19

1947=21+8=34

Ἀριθ. $\frac{\text{Π ωτ. 33000}}{\text{εισκπ.}}$ Ἐν Ἀθήναις τῇ 17 Ὀκτωβρίου 1917.

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ

ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Πρὸς

τὸν κ. Νικ. Νυστεράκην

Γνωρίζομεν ὑμῖν ὅτι κατ' ἀπόφασιν τοῦ ἐκπαιδευτικοῦ συμβουλίου ἐνεκρίθη ἡ χρῆσις τῆς ὑφ' ὑμῶν ὑποβληθείσης ἐν χειρογράφῳ Θεωρητικῆς Ἀριθμητικῆς (ἔκδ. Α' 1917) διὰ τὴν Α' τάξιν τῶν τετραταξίων γυμνασίων καὶ τὴν ἀντίστοιχον τάξιν τῶν λοιπῶν σχολείων τῆς μέσης ἐκπαιδεύσεως καὶ διὰ τὸ σχολικὸν ἔτος 1917—1918 καὶ ἐφεξῆς κατὰ τὴν ὑπ' ἀριθ. 128 πρᾶξιν αὐτοῦ.

1 . . . .

. . . .

2 . . . .

Ἐντελλόμενοι ὅπως ἐκτυπώσητε τὴν παροῦσαν ἐπὶ τῆς ἐσωτερικῆς ὄψεως τοῦ περικαλύμματος τοῦ βιβλίου, τὸν ἀριθμὸν ταύτης, τὴν τιμὴν τοῦ βιβλίου καὶ τὴν ἀξίαν τοῦ βιβλιοσήμου, κατωφανῶς ἐπί τε τῆς προμετωπίδος καὶ τοῦ τίτλου τοῦ βιβλίου, ὑπομιμνήσκομεν τὰς συνεπείας πάσης παραβάσεως τῶν σχετικῶν πρὸς τὰς ὑμετέρας ὑποχρεώσεις διατάξεων τοῦ νόμου.

Ὁ Ὑπουργὸς

ΔΗΜ. ΔΙΓΚΑΣ

Π. Ζογαντάρης