ΜΑΡΙΑΣ Σ. ΖΕΡΒΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΤΙΜΗΣ ΕΝΕΚΕΝ

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΥ Α. Ε.
ΟΔΟΣ ΑΛΘΑΙΑΣ 4 - ΑΘΗΝΑΙ
1932

ΜΑΡΙΑΣ Σ. ΖΕΡΒΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

Ἐγκριθεῖσα διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 46645)15888 ἀποφάσεως τοῦ Ὑπουργ. τῆς Παιδείας τῆς 9 Σεπτεμβρίου 1932

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΥ Α. Ε.
ΟΔΟΣ ΑΛΘΑΙΑΣ 4 - ΑΘΗΝΑΙ
1932

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ. ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠ ΑΥΤΩΝ.

1. **Ὁρισμὸς τῆς Ἀλγέβρας.** Ἡ Ἄλγεβρα εἶναι γενικὴ ἀριθμητική· σκοπὸν ἔχει νὰ ἁπλοποιῇ καὶ γενικεύῃ τὰ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ζητήματα.

2. **Χρῆσις γραμμάτων καὶ σημείων.** Εἰς τὴν Ἄλγεβραν χρησιμοποιοῦνται συνήθως τὰ γράμματα α, β, γ..., Α, Β, Γ..., διὰ νὰ παριστάνουν δεδομένα ἑνὸς προβλήματος καὶ τὰ γράμματα χ, ψ, ω... διὰ νὰ παριστάνουν ἀγνώστους, ἤτοι ζητουμένους ἀριθμούς.

Τὰ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ σημεῖα πράξεων καὶ σημεῖα ἰσότητος καὶ ἀνισότητος χρησιμεύουν καὶ εἰς τὴν Ἄλγεβραν.

Ἀσκήσεις

Νὰ γενικευθοῦν τὰ ἑξῆς προβλήματα καὶ νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀντίστοιχοι γενικοὶ τύποι λύσεως:

1). 5 πήχεις ὑφάσματος τιμῶνται 19 δρχ. Πόσον τιμῶνται οἱ 7 πήχεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος; (Ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν ἀντὶ τοῦ 5 τὸ α, ἀντὶ τοῦ 19 τὸ β καὶ ἀντὶ τοῦ 7 τὸ γ, ὁπότε θὰ ἔχωμεν: $\chi = \beta \times \frac{\gamma}{\alpha}$).

2). Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 6, 9, 10 καὶ ἔχοντες ἄθροισμα 75. (Θέτομεν ἀντὶ τῶν 6, 9, 10, 75 τὰ α, β, γ, Κ καὶ καλοῦμεν τοὺς ἀγνώστους χ, ψ, ω, ὁπότε θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\chi}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{\chi+\psi+\omega}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{K}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

ὅθεν $$\chi = \frac{K.\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}, \quad \psi = \frac{K.\beta}{\alpha+\beta+\gamma} \quad \omega = \frac{K.\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\Big).$$

3. Κεφάλαιον 24.000 δρχ. ἐτοκίσθη πρὸς 3 %. ἐπὶ 8 ἔτη. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος.

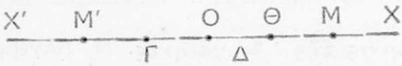
4). Κεφάλαιον 12000 δρχ. ἐτοκίσθη πρὸς 6 $^{0}/_{0}$ διὰ 130 ἡμέρας. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος.

5). Ἀνέμιξέ τις 320 ὀκάδας οἴνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 8 δρχ., μὲ 290 ὀκ. ἄλλου οἴνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 12 δρχ. Ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος.

6). Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 96, 50, 62, 101.

3. Θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.

α΄.) Ἔστω ἀπεριόριστος εὐθεῖα Χ΄Χ. Ἂς θεωρήσωμεν ἐπ' αὐτῆς δύο τμήματα ΟΜ, ΟΜ΄ ἀρχόμενα ἐκ τοῦ σημείου Ο,



ἑκατέρωθεν αὐτοῦ καὶ ἴσα. Ἐὰν μετρήσωμεν τὸ ΟΜ μὲ μονάδα τινὰ ΟΘ, θὰ προκύψῃ ἐκ τῆς μετρήσεως ἀριθμός τις, π.χ. ὁ 2. Ἀλλὰ προφανῶς ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς 2 θὰ προκύψῃ καὶ ἐκ τῆς μετρήσεως τοῦ ΟΜ΄ μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα. Διὰ νὰ διακρίνωμεν, ἐὰν πρόκειται περὶ τοῦ ἐξαγομένου τῆς μετρήσεως τοῦ ΟΜ΄ ἢ τοῦ ΟΜ, συμφωνοῦμεν νὰ παριστάνωμεν διὰ τοῦ +2 τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως τοῦ ΟΜ καὶ διὰ τοῦ –2 τὸ τοῦ ΟΜ΄, ὅπερ εἶνε ἀντιθέτου φορᾶς πρὸς τὸ πρῶτον. Τὴν φορὰν τοῦ ΟΜ, ἡ ὁποία συμπίπτει μὲ τὴν φορὰν τοῦ ΟΘ, καλοῦμεν θετικὴν φορὰν καὶ τὴν τοῦ ΟΜ΄ ἀρνητικήν. Καὶ τότε γενικῶς θετικὴν φορὰν θὰ ἔχῃ πᾶν τμῆμα ΓΔ ἔχον τὴν φορὰν τοῦ ΟΘ· ἤτοι ἐδῶ ἔχομεν θετικὴν φορὰν τὴν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ (τοῦ Χ΄Χ) καὶ ἀρνητικὴν τὴν ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ (τοῦ ΧΧ΄). Π.χ. τὸ ΜΟ ἔχει ἀρνητικὴν φορὰν καὶ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεώς του θὰ εἶνε τὸ –2.

β΄.) Ταμίας τις εἰσέπραξε 356 δρχ., ἐπλήρωσεν 859, εἰσέπραξε 467, ἐπλήρωσε κατόπιν 253,80 καὶ ἔπειτα 165 δρχ. Σημειώνει τοῦτο καὶ ὡς ἑξῆς: +356, –859, +467, –253,80, –165.

γ΄.) Τὸ θερμόμετρον ἐσημείωσε τὰς ἑξῆς θερμοκρασίας· 8^{0} ὑπὲρ τὸ μηδέν, 3^{0} ὑπὸ τὸ μηδέν, $1{,}5^{0}$ ὑπὸ τὸ μηδέν, $5{,}8^{0}$ ὑπὲρ τὸ μηδέν. Αἱ θερμοκρασίαι αὗται σημειώνονται καὶ ὡς ἑξῆς: $+8^{0}$· -3^{0}· $-1{,}5^{0}$· $+5{,}8^{0}$.

Εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα ἐχρησιμοποιήθησαν πρὸς μέτρησιν μεγεθῶν ἐπιδεχομένων ἀντίθεσιν **θετικοὶ** καὶ **ἀρνητικοὶ** ἀριθμοί· ἤτοι ἐὰν εἰς ἕνα ἀριθμὸν ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς (διάφορον τοῦ μηδενὸς) προτάξωμεν τὸ σημεῖον +, λέγομεν ὅτι ἔχομεν **θετικὸν** ἀριθμόν, ἐὰν δὲ προτάξωμεν τὸ σημεῖον –, λέγομεν ὅτι ἔχομεν **ἀρνητικὸν** ἀριθμόν. Τοὺς θετικοὺς ἀριθμούς, τοὺς ἀρνητικοὺς καὶ τὸ μηδὲν καλοῦμεν **ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς**.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σημεῖα + καὶ –,τὰ προτασσόμενα τῶν ἀριθμῶν ὡς ἀνωτέρω, δὲν θεωροῦμεν ὡς σημεῖα προσθέσεως ἢ ἀφαιρέσεως, ἀλλ'ὡς σύμβολα χρησιμεύοντα ἁπλῶς διὰ νὰ δηλώσουν ὅτι πρόκειται περὶ θετικῶν ἢ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.

4. ***Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.*** Ἂς διακρίνωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας X'X, ὅπως καὶ προηγουμένως, τὴν θετικὴν φορὰν καὶ τὴν ἀρνητικήν. Ἂς θεωρήσωμεν ἐπίσης

X' M' O Θ M X

ἓν σημεῖον O ὡς ἀρχὴν τῶν λαμβανομένων τμημάτων,καὶ μίαν μονάδα μήκους, τὴν ΟΘ. Τότε πᾶν τμῆμα OM ἔχον θετικὴν φορὰν θὰ μετρῆται ὑπὸ θετικοῦ ἀριθμοῦ καὶ πᾶν τμῆμα OM' ἔχον ἀρνητικὴν φορὰν θὰ μετρῆται ὑπὸ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ.

Οὕτω, εἰς πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας θὰ ἀντιστοιχῇ ἀριθμός τις θετικὸς ἢ ἀρνητικός· καί, ἀντιστρόφως, εἰς πάντα θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἀριθμὸν θὰ ἀντιστοιχῇ ἓν σημεῖον.

Ὁ ἀλγεβρικὸς αὐτὸς ἀριθμὸς λέγεται τ ε τ μ η μ έ ν η τ ο ῦ σ η μ ε ί ο υ, ἡ δὲ εὐθεῖα X'X λέγεται ἄ ξ ω ν τ ῶ ν τ ε τ μ η μ έ ν ω ν.

5. **Ὁρισμοί.** Ἀ π ό λ υ τ ο ς τ ι μ ὴ ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς τῆς ἀριθμητικῆς· π.χ. τοῦ –7 ἀπόλυτος τιμὴ εἶναι ὁ 7, τοῦ +7 ἀπόλυτος τιμὴ εἶναι ὁ 7. Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ α σημειοῦται $|α|$. Κατὰ ταῦτα $|-3|=3$, $|+5|=5$.

Δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ἴ σ ο ι, ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμὴν καὶ εἶναι ὁμόσημοι. Δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ἀ ν τ ί θ ε τ ο ι, ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμὴν καὶ εἶναι ἑτερόσημοι, π.χ. ὁ +8, καὶ ὁ –8.

Τοῦ μηδενὸς ἀντίθετος λαμβάνεται αὐτὸ τοῦτο τὸ μηδέν.

6. Εἰς τὴν Ἄλγεβραν δίδομεν τοιούτους ὁρισμοὺς πράξεων καὶ τοιούτους κανόνας πρὸς ἐκτέλεσιν αὐτῶν, ὥστε, ὅταν ἐφαρμόζωνται οἱ ὁρισμοὶ καὶ οἱ κανόνες αὐτοὶ εἰς τοὺς θετικοὺς μόνον ἀριθμούς, νὰ δίδουν τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁδηγεῖ καὶ ἡ ἀριθμητική.

7. **Πρόσθεσις.** Ἄ θ ρ ο ι σ μ α δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν α καὶ β, ἐὰν μὲν οὗτοι εἶναι ὁμόσημοι, λέγεται ὁ ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς ὁ ἔχων ἀπόλυτον τιμὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν καὶ σημεῖον τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον· ἐὰν δὲ εἶναι ἑτερόσημοι, ὁ ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς ὁ ἔχων ἀπόλυτον τιμὴν τὴν διαφορὰν τῶν ἀπολύτων τιμῶν καὶ σημεῖον τὸ σημεῖον τοῦ ἔχοντος τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν· δύο δὲ ἀντιθέτων ἀριθμῶν ἄθροισμα εἶναι τὸ 0.

Παραδείγματα: $(+6)+(+9)=+(6+9)=+15$
$(-6)+(-9)=-(6+9)=-15$
$(+6)+(-9)=-(9-6)=-3$
$(-6)+(+9)=+(9-6)=+3.$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πρόσθεσις εἰς τὴν Ἄλγεβραν δὲν ἔχει, ὅπως εἰς τὴν ἀριθμητικὴν, τὴν ἔννοιαν τῆς αὐξήσεως, π.χ. εἰς τὸν $+9$ προσθέτοντες τὸν -6 ἐλαττοῦμεν τὸν 9 κατὰ 6 μονάδας.

Ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ,... λέγεται ὁ ἀριθμὸς ὅστις προκύπτει, ὅταν εἰς τὸν α προσθέσωμεν τὸν β καὶ εἰς τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα τὸν γ καὶ οὕτω καθεξῆς Π.χ.
$(+2)+(-3)+(-6)+(+10)=(-1)+(-6)+(+10)=$
$=(-7)+(+10)=+3.$

Ἀσκήσεις

1). Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα:

α′) $(-2)+(-3)+(+5)+(-8)+(-8)+(-10)$
β′) $(+2)+(-6)+(-4)$
γ′) $(-10)+(+8)+(+5)+(-6)+(+7)$

2). Ὁμοίως νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα:

α′) $(-6)+(-16)+(+10)+(-1)+(-5)$
β′) $(+5)+(+15)+(+20)+(-16)+(-8)+(+15)+$
$+(-20)+(+40)$
γ′) $(-10)+(-5)+(+5)+(-30)+(-40)+(+16)+$
$+(-20)+(-30)+(+45)$

3) Ὁμοίως τὰ κάτωθι:

α′) $(-6)+(+7)+\left(+\frac{5}{8}\right)+\left(+\frac{3}{7}\right)$

β′) $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{8}{3}\right)+(+5)$

γ′) $\left(+2\frac{1}{8}\right)+\left(-4\frac{6}{7}\right)+\left(-2\frac{1}{3}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)$

δ′) $\left(+2\frac{1}{3}\right)+\left(-6\frac{1}{7}\right)+\left(+2\frac{3}{8}\right)+(-5)$

ε′) $\left(+5{,}1\right)+\left(+2{,}3\right)+\left(+8\right)+\left(+2\frac{1}{8}\right)$

στ') $\left(+3{,}3\right)+\left(-1{,}1\right)+\left(-6{,}2\right)+\left(+8\frac{5}{7}\right)+\left(-1\right)$

ζ') $\left(+3{,}1\right)+\left(-5\frac{1}{8}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-6{,}5\right)+\left(+8\frac{1}{9}\right)+$
$+\left(-\frac{6}{9}\right)$.

4). Νὰ λυθοῦν τὰ ἑπόμενα προβλήματα διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν:

α') Ἔμπορός τις εἶχε 54000 δρχ.· ἐκέρδισε 5700 δρχ., ἔπειτα ἔχασε 1000 δρχ. καὶ τέλος ἐκέρδισε 25000 δρχ. Πόσα ἔχει τώρα;

β') Προχωρεῖ τις 7 βήματα δεξιά, κατόπιν 13 ἀριστερά, ἔπειτα 2 δεξιὰ καὶ τέλος 5 ἀριστερά. Πόσα βήματα πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ πόσα πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς ἀρχικῆς θέσεως εὑρίσκεται;

5). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς αἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

α') Καθ'οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν δοθέντας ἀριθμοὺς εὑρίσκομεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ὡς ἄθροισμα. Π.χ. $(+5)+(-2)+(+3)+(-7)=(-2)+(-7)+(+3)+(+5)$.

β') Εἰς πᾶν ἄθροισμα ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ὁσουσδήποτε προσθετέους διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν Π.χ.

$(+6)+(-3)+(+5)+(-6)+(-1)=(+3)+(+5)+(-7)$.

γ') Ἵνα προσθέσωμεν ἄθροισμα εἰς ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος. Π.χ. ἵνα προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν -5 τὸ ἄθροισμα $(+4)+(-1)+(+6)$, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν -5 πρῶτον τὸν $+4$ καὶ εἰς τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα τὸν -1, καὶ τέλος εἰς τὸ οὕτω εὑρεθησόμενον ἄθροισμα τὸν $+6$.

δ') Ἵνα προσθέσωμεν δύο ἢ περισσότερα ἀθροίσματα, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν ἕνα ἄθροισμα ἐξ ὅλων τῶν προσθετέων. Π.χ. διὰ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἀθροίσματα: $(-5)+(+3)$, $(-6)+(+1)+(-3)$, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν τὸ ἄθροισμα $(-5)+(+3)+(-6)+(+1)+(-3)$.

ε') Ἵνα προσθέσωμεν πολλοὺς ἀριθμούς, ἀρκεῖ νὰ ἀθροίσωμεν ὅλους τοὺς θετικοὺς χωριστὰ καὶ ὅλους τοὺς ἀρνητικοὺς χωριστὰ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα μερικὰ ἀθροίσματα. Π.χ. $(-5)+(-2)+(+7)+(-8)+(-3)+(+5)=(+12)+(-18)=$ $=-6$.

8. **Ἀφαίρεσις.** *Ἀφαίρεσις* λέγεται ἡ πρᾶξις, εἰς τὴν ὁποίαν δίδονται δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β καὶ ζητεῖται τρίτος

τις γ, ὅστις, προστιθέμενος εἰς τὸν β νὰ δίδῃ τὸν α ὡς ἄθροισμα.
Ἡ ἀφαίρεσις εἶνε πάντοτε δυνατή. Ἔστω ἡ ἀφαίρεσις $(+9)-(-5)$. Παρατηροῦμεν ὅτι: $(-5)+(+5)=0$· ὅθεν $(-5)+(+5)+(+9)=+9$ ἢ καὶ $(-5)+(+9)+(+5)=+9$· ἤτοι· εἰς τὸ (-5) ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὸ $(+9)+(+5)$, ἵνα εὕρωμεν $+9$, δηλ. τὸ ὑπόλοιπον εἶνε $(+9)+(+5)$.

Ἔστω ἀκόμη ἡ ἀφαίρεσις $(-8)-(+3)$. Ἔχομεν $(+3)+(-3)=0$· ὅθεν $(+3)+(-3)+(-8)=-8$ ἤτοι· $(+3)+(-8)+(-3)=-8$ ἤτοι εἰς τὸ $+3$ ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὸ ἄθροισμα $(-8)+(-3)$, ἵνα ἔχωμεν -8· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $(-8)+(-3)=-11$.

Γενικῶς ἔστω ἡ ἀφαίρεσις $\alpha-\beta$· ἐὰν β' εἶνε ὁ ἀντίθετος τοῦ β, θὰ ἔχωμεν $\beta+\beta'=0$ καὶ ἐπομένως $\alpha+\beta+\beta'=\alpha$ ἢ $\beta+(\alpha+\beta')=\alpha$· ὅθεν τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $\alpha+\beta'$.

9. Κατὰ ταῦτα, ***ἵνα εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον τὸν ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου.***

Ἀσκήσεις

1). Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:
α') $(+12)-(-7)$, β') $(+12)-(+7)$, γ') $(-12)-(-7)$, δ') $(-12)-(+7)$.

2). Ὁμοίως αἱ πράξεις:

α') $\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$, β') $\left(\frac{9}{10}\right)-\left(+\frac{6}{8}\right)$

γ') $\left(+8\frac{3}{5}\right)-\left(-3\frac{1}{6}\right)$, δ') $\left(-3\frac{1}{2}\right)-\left(-9\frac{3}{7}\right)$.

3). Ὁμοίως αἱ πράξεις:

α') $(-6,50)-(+2,75)$, β') $(-5)-(+6,55)$, γ') $(+6)-\left(-\frac{2}{7}\right)$

δ') $(-7,12)-\left(-\frac{1}{6}\right)$, ε') $\left(+6\frac{1}{5}\right)-(-2,25)$.

4). Χθὲς τὸ πρωῒ τὸ θερμόμετρον ἐδείκνυε -7^0, σήμερον τὸ πρωῒ $+10^0$. Κατὰ πόσον ηὐξήθη ἡ θερμοκρασία ἀπὸ τῆς χθεσινῆς πρωΐας μέχρι τῆς σημερινῆς;

5). Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι -7, ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁ $+2$, ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος;

6). Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἵνα προσθέσωμεν διαφορὰν εἰς ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὸν μειωτέον τῆς διαφορᾶς εἰς τὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος ν᾽ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀφαιρετέον. Π.χ. ἵνα προσθέσωμεν τὴν διαφορὰν $(+18)-(-13)$ εἰς τὸν ἀριθμὸν −4, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὸν +18 εἰς τὸν −4 καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος +14 ν'ἀφαιρέσωμεν τὸ −13, ὅτε εὑρίσκομεν +27.

7). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, δοθέντος ἄξονος X'X καὶ ἀρχῆς O ἐπ' αὐτοῦ, τὸ μῆκος τοῦ τμήματος MM' (ἤτοι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμή), ὅπερ παριστῶμεν διὰ τοῦ (MM'), ἰσοῦται μὲ τὴν τετμημένην τοῦ τέλους M' μεῖον τὴν τετμημένην τῆς ἀρχῆς M.

8). Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀνωτέρω σχέσις ἰσχύει ὁπουδήποτε τοῦ ἄξονος X'X καὶ ἐὰν κεῖνται τὰ σημεῖα M καὶ M'.

9). Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τμήματος MM', ὅταν τετμημέναι τῶν M,M' εἶνε

α') 3, 8 β') 2,−7 γ') $4\frac{2}{3}$, $-9\frac{5}{8}$ δ') −15,23 καὶ −8,17.

10. *Ἁπλοποίησις γραφῆς.* Ἔστω τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα (+5)+(−3)+(−4)+(+5)+(−2). Χάριν συντομίας γραφῆς, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν 5−3−4+5−2, ἐννοοῦντες ὅτι εἰς τὸν +5 πρόκειται νὰ προστεθῇ ὁ −3 καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον ὁ −4 κ.ο.κ.

Ἵνα ἀποφύγωμεν τουτέστι τὰς παρενθέσεις, ὅταν ἔχωμεν δύο + ἢ δύο −, τὰ ἀναπληροῦμεν μὲ ἕνα μόνον + καὶ ὅταν ἔχωμεν δύο σημεῖα διάφορα, τ'ἀναπληροῦμεν μὲ τὸ σημεῖον −. Ἐὰν τὸ σημεῖον τοῦ πρώτου προσθετέου εἶναι + παραλείπεται. Π.χ. (−5)−(−3)+(−2)−(+5)+(+18)=−5+3−2−5+18.

Ἀσκήσεις

1). Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

α') (+5)+(−7)−(−3)−(+5)+(−5)+(−9)

β') (−2)+(−5)−(−9)+(−8)−(+3)+(+2)−(+5)

γ') (−5)+(−8)−(−9)+(−6)+(−2)

2). Ὁμοίως αἱ κάτωθι:

α') $(-5)-(-5)-\left(-\frac{1}{4}\right)$, β') $\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{2}{8}\right)-\left(-3\right)$

γ') $(+3,5)-(-6,8)+\left(-2\frac{2}{3}\right)$, δ') $\left(+2\frac{1}{8}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)-(-2,25)$.

3). Νὰ δειχθῇ ὅτι (α+β+γ)−(δ+ε+θ) = α+β+γ−δ−ε−θ.

4). Νὰ δειχθῇ ὅτι:

(α−β+γ−δ)−(+ε−η−λ+ν−ρ) = α−β+γ−δ−ε+η+λ−ν+ρ

5). Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν εἰς τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον προστεθῇ ἢ ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

11. **Πολλαπλασιασμός.** Καλοῦμεν γ ι ν ό μ ε ν ο ν δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν α καὶ β διαφόρων τοῦ μηδενὸς τρίτον ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν γ ἔχοντα ἀπόλυτον τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἀριθμῶν α καὶ β, σημεῖον δὲ τὸ +, ἂν οἱ α καὶ β εἶνε ὁμόσημοι καὶ τὸ —, ἂν εἶνε ἑτερόσημοι· δηλ. διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου δυνάμεθα νὰ ἀκολουθῶμεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῶν σημείων:

+ ἐπὶ + δίδει +	+ ἐπὶ — δίδει —
— ἐπὶ — δίδει +	— ἐπὶ + δίδει —

Τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν α καὶ β σημειοῦται α.β ἢ αβ. Ἐὰν εἷς παράγων τοῦ γινομένου α.β εἶναι μηδέν, θεωροῦμεν ὅτι καὶ τὸ γινόμενον εἶναι μηδέν.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α:

$(+5) \cdot (+3) = +15$ $\qquad \left(+\frac{1}{3}\right) \cdot \left(+\frac{2}{5}\right) = +\frac{2}{15}$

$(+7) \cdot (-2) = -14$ $\qquad \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = +\frac{6}{12}$

$(-5) \cdot (+2) = -10$ $\qquad \left(+\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{15}$

$(-3) \cdot (-4) = +12$ $\qquad \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(+\frac{3}{4}\right) = -\frac{6}{12}$

12. ***Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.*** Ὅπως εἰς τὴν ἀριθμητικήν, οὕτω καὶ εἰς τὴν ἄλγεβραν καλοῦμεν γ ι ν ό μ ε ν ο ν πολλῶν παραγόντων α,β,γ,... λ, καὶ σημειοῦμεν α.β.γ...λ ἢ αβγ...λ, τὸν ἀλγεβρικὸν ἀριθμόν, ὅστις προκύπτει, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ α ἐπὶ τὸ β, τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ γ κ.ο.κ. μέχρις οὗ ληφθῇ καὶ ὁ τελευταῖος παράγων λ. Π.χ. $(-5) \cdot (+3) \cdot (-2) \cdot (+4) = (-15) \cdot (-2) \cdot (+4) = (+30) \cdot (+4) = +120$.

Παρατηροῦμεν ὅτι: τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων θὰ εἶναι +, ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶνε ἄρτιον ἢ μηδέν, καὶ —, ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν εἶναι περιττόν. Π.χ. τὸ γινόμενον $(-2) \cdot (+7) \cdot (+5) \cdot (-1)$ εἶνε θετικόν. Τὸ γινόμενον $(+3) \cdot (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(+2\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-1\frac{5}{4}\right)$ εἶνε ἀρνητικόν.

13. Ἰδιότητες γινομένου.

α') *Ὁπωσδήποτε καὶ ἂν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων, τὸ γινόμενον δὲν ἀλλάσσει.*

Πράγματι· ἔστω τὸ γινόμενον $\alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon$. Λέγομεν ὅτι: $\alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon=\beta.\delta.\varepsilon.\gamma.\alpha$. Διότι $|\alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon|=|\alpha|.|\beta|.|\gamma|.|\delta|.|\varepsilon|$ καὶ $|\beta.\delta.\varepsilon.\gamma.\alpha|=|\beta|.|\delta|.|\varepsilon|.|\gamma|.|\alpha|$. Ἡ ἰσότης τῶν δευτέρων μελῶν τῶν ἰσοτήτων τούτων συνεπάγεται καὶ $|\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon|$ $|\beta\delta\varepsilon\gamma\alpha|$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ δύο γινόμενα ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος ἀρνητικῶν παραγόντων θὰ ἔχουν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον. Π.χ.

$$(-2).\left(+\frac{3}{5}\right).\left(-\frac{2}{7}\right).(+7).\left(-\frac{2}{10}\right)=$$

$$=\left(+\frac{3}{5}\right).\left(-\frac{2}{10}\right).(-2).(+7).\left(-\frac{2}{7}\right).$$

β'). *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμὸν ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον τῶν προσθετέων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα. Π.χ.* $[(-7)+(+5)].(-4)=(-7).(-4)+(+5).(-4)$. Καὶ πράγματι, τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου μέλους δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα καὶ τῶν δύο παραγόντων, ἤτοι τὸ πρῶτον μέλος ἰσοῦται μὲ $(7-5).4=7.4-5.4$, ἀλλὰ καὶ τὸ δεύτερον μέλος (§ **11**) ἰσοῦται πρὸς $7.4-5.4$.

Καὶ γενικῶς ἔχομεν $(\alpha+\beta)\lambda=\alpha\lambda+\beta\lambda$ οἱοιδήποτε ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἂν εἶνε οἱ α,β,λ.

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης ἕπεται ὅτι δυνάμεθα ἀντὶ τοῦ ἀθροίσματος $\alpha\lambda+\beta\lambda$ νὰ λάβωμεν τὸ γινόμενον $(\alpha+\beta)\lambda$, ὁπότε λέγομεν ὅτι ἐθέσαμεν τὸν κοινὸν παράγοντα λ ἐκτὸς παρενθέσεως.

Ἐπίσης ἔχομεν $(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\kappa)\lambda=\alpha\lambda+\beta\lambda+\gamma\lambda+\ldots.+\kappa\lambda$.

Παραδείγματα:

$$(-5+7).3=(-5).3+7.3$$

$$(-7+5).(-3).=(-7).(-3)+5.(-3)$$

$$\left(2-3+5-\frac{1}{2}\right).(-2)=2.(-2)+(-3).(-2)+$$

$$+5.(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right).(-2).$$

Ἀσκήσεις

1). Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

α') $(+2).(-3)$, β') $(-5).(-3)$

γ') $(+7).(-2)$, δ') $(-5).(+2)$

ε') $(+2).(-3).(+6)$, στ') $(+2).(-1).(-3).(+7).(-4)$.

2). Ὁμοίως τῶν:

α') $\left(-\frac{6}{7}\right)\cdot(-5)$, β') $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$, γ') $8\frac{3}{7}\cdot(-2)$

δ') $\left(-3\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)$.

3). Ὁμοίως τῶν:

α') $(-5).(-2{,}2)$, β') $(-3{,}2).(-0{,}03)$, γ') $0{,}004.\left(-\frac{2}{7}\right)$

ε') $(-1)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot(2{,}2)\cdot(-4)\cdot\left(-5\frac{3}{7}\right)$.

4). Ὁμοίως τῶν

α') $(2-3+7).(-7)$, β') $\left(+2-7\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{5}$

γ') $\left(3-5+\frac{2}{7}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$ δ'.) $\frac{2}{7}\cdot\left(8-2\frac{1}{4}-0{,}07\right)\cdot(-3)$

ε') $(6-3).(5-9)-\frac{2}{5}\cdot\left[(2-4)-\frac{2}{9}\cdot(3-9+25)\right]$

στ') $\left(-3\frac{4}{5}+8{,}5+2\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-1\frac{1}{4}\right)\cdot(-0{,}7).\left(3\frac{4}{5}-2\frac{1}{6}+5{,}5\right).2.$

5). Νὰ δειχθῇ, συμφώνως πρὸς τὸν δοθέντα ὁρισμὸν τοῦ γινομένου, ὅτι, ἐὰν α καὶ β εἶναι τυχόντες ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, θὰ ἔχωμεν:

$(+\alpha).(+\beta)=+\alpha.\beta$ $\qquad(-\alpha).(-\beta)=+\alpha.\beta.$
$(-\alpha).(+\beta)=-\alpha.\beta$ $\qquad(+\alpha).(-\beta)=-\alpha.\beta.$

6). Νὰ ἐφαρμοσθοῦν τὰ ἀνωτέρω, ὅταν $\alpha=-3$, $\beta=1$.

7). Πᾶς ἀρνητικὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ γινόμενον τοῦ ἀντιστοίχου θετικοῦ ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα.

8). Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ γινομένου πολλῶν παραγόντων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων. Π.χ. $|(-3).(+2).(-6)|=|-3|.|+2|.|-6|=3.2.6=36$.

9). Εἰς πᾶν γινόμενον δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ὁσουσδήποτε παράγοντας διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν καὶ ἀντιστρόφως.

10). Πολλαπλασιάζεται γινόμενον ἐπὶ ἀριθμὸν καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ εἰς τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον. Π.χ.

$$[(-2).\ (+5).\ (-3)].\ (-4)=(-2).\ (-20).\ (-3).$$

11). Πολλαπλασιάζομεν πολλὰ γινόμενα καὶ ἐὰν σχηματίσωμεν ἓν γινόμενον ἐξ ὅλων τῶν παραγόντων.

12). Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν προσθετέων καὶ προστεθοῦν τὰ μερικὰ γινόμενα. Π.χ. $(-3).\left(5-\frac{2}{7}-0{,}07\right)=(-3).\ 5+$ $+(-3).\left(-\frac{2}{7}\right)+(-3).\ (-0{,}07).$

13). Πολλαπλασιάζεται ἄθροισμα ἐπὶ ἄθροισμα καὶ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ πρώτου ἀθροίσματος ἐφ' ἕκαστον τοῦ δευτέρου καὶ προστεθοῦν τὰ μερικὰ γινόμενα.

14). Νὰ ἐξαχθοῦν οἱ κοινοὶ παράγοντες ἐκτὸς παρενθέσεως εἰς τὰ κάτωθι ἀθροίσματα:

α') $2.7+2.5+2.(-6)$, β'.) $2\frac{1}{5}\cdot\left(-2\frac{1}{5}\right)+(-3)\cdot\left(-2\frac{1}{5}\right)+$ $+1.\left(-2\frac{1}{5}\right)$, γ'.) $3{,}3.(-2).\ \frac{1}{4}+5{,}6.(-2).\ 6\frac{1}{3}$, δ') $\alpha.\beta-\alpha\gamma+$ $+.\alpha.\varepsilon$, ε') $\alpha\beta\gamma-\alpha\beta\delta+\beta\delta\lambda\alpha$, στ') $\alpha\beta\delta-\frac{1}{5}\varepsilon\beta\delta+\frac{1}{6}\beta\gamma\delta.$

15). Κατὰ τί διαφέρει τὸ $(\alpha+\beta).\ \gamma$ ἀπὸ τὸ $\alpha+\beta\gamma$;

16). Πρὸς τί ἰσοῦται ἡ διαφορὰ $(\alpha+\beta)\gamma-(\alpha+\beta\gamma)\delta$;

14. **Διαίρεσις.** Πηλίκον ἀριθμοῦ τινος α δι' ἑτέρου β, διαφόρου τοῦ μηδενός, λέγεται τρίτος ἀριθμὸς γ, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν β δίδει τὸν α *. Π. χ.

---

* Δὲν δυνάμεθα τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν τοῦ πηλίκου νὰ ἐπεκτείνωμεν θεωροῦντες τὸ β ἴσον μὲ τὸ 0 καὶ τὸ $\alpha\neq0$ (διάφορον τοῦ μηδενός). Διότι οὐδεὶς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸ 0 δίδει α.

Ἂν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι μηδέν, παρατηροῦμεν ὅτι δὲν εἶναι ἕνας μόνον ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ β θὰ δίδῃ τὸν α, ἀλλὰ πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ β δηλ. ἐπὶ 0 θὰ ἔδιδε τὸν α, ἤτοι τὸ 0.

$(+28):(-4)=-7$, διότι $(-7).(-4)=+28$. Ὁμοίως
$(-28):(+4)=-7$, $(-28):(-4)=+7$.
Ἔχομεν ἑπομένως καὶ ἐδῶ κανόνα σημείων ἀνάλογον μὲ τὸν κανόνα τῶν σημείων, τὸν ὁποῖον ἔχομεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν. Ἤτοι:

+ διὰ + δίδει +	− διὰ − δίδει +
+ διὰ − δίδει −	− διὰ + δίδει −

Παραδείγματα:

$$(+7):(+4)=+\frac{7}{4} \qquad (+7):(-4)=-\frac{7}{4}$$

$$(-7):(-4)=+\frac{7}{4} \qquad (-7):(+4)=-\frac{7}{4}$$

Ἀσκήσεις

1). Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:

α′) $2\frac{1}{5}:\left(-\frac{1}{3}\right)$, β′) $(-5):\left(8\frac{2}{3}\right)$, γ′) $6{,}2:(-5{,}5)$

δ′) $(-5{,}1):(-0{,}03)$, ε′) $(-5{,}30):\left(-\frac{5}{8}\right)$.

2). Ὁμοίως αἱ κάτωθι:

α′) $7.(-2):(-7)$, β′) $(-1).(-2):(-5).(-5)$

γ′) $15:\frac{3}{4}.(-0{,}05)$, δ′) $\left(-5\frac{3}{4}\right).(-2):(0{,}65).(-2)$.

3). Νὰ εὑρεθῇ ποῖαι τιμαὶ τοῦ χ ἐπαληθεύουν τὰς κάτωθι ἰσότητας.

α′) $2.\chi=14$, β′) $5\frac{2}{5}\chi=-3\frac{4}{8}$, γ′) $0{,}03.\chi=-0{,}002$.

4). Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἵνα διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα μερικὰ πηλίκα. Π.χ. $\left(10-7+\frac{2}{5}\right):(-2)=\left[10:(-2)\right]+$
$+\left[(-7):(-2)\right]+\left[\frac{2}{5}:(-2)\right]$.

5). Νὰ δειχθῇ ὅτι $(\alpha-\beta):\gamma=(\alpha:\gamma)-(\beta:\gamma)$. Πῶς διατυποῦται ἡ πρότασις ἡ ἐκφραζομένη διὰ τῆς ἰσότητος ταύτης;

6). Νὰ διατυπωθῆ καὶ ἀποδειχθῆ ἡ πρότασις ἡ ἐκφραζομένη διὰ τῆς σχέσεως $(\alpha.\beta.\gamma.):\delta = \alpha.\ (\beta:\delta).\gamma$

7). Ὁμοίως νὰ διατυπωθῆ καὶ ἀποδειχθῆ ἡ πρότασις ἡ ἐκφραζομένη διὰ τῆς σχέσεως $\alpha:(\beta.\gamma.\delta) = \Big[(\alpha:\beta):\gamma)\Big]:\delta$

8). Νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ διαιρετέου διὰ τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ διαιρέτου Π.χ. $\left|\frac{-5}{+4}\right| = \frac{|-5|}{|+4|}$

15. Ἀλγεβρικὰ κλάσματα. Τὸ $\alpha:\beta$, ὅπου α καὶ β ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, σημειοῦμεν καὶ $\frac{\alpha}{\rho}$ Τὸ $\frac{\alpha}{\rho}$ λέγεται ἀλγεβρικὸν κλάσμα ἢ καὶ λόγος (τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν).

Π.χ. τὰ $-\frac{1}{9}$, $\frac{\frac{3}{8}}{-5}$, $\frac{-28}{-0{,}5}$ εἶναι ἀλγεβρικὰ κλάσματα.

16. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἕπεται ὅτι: Πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων καὶ οἱ κανόνες διὰ τὴν πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν, πολλαπλασιασμὸν καὶ διαίρεσιν αὐτῶν ἐπεκτείνονται καὶ εἰς τὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα. Οὕτως ἔχομεν: $\frac{\alpha.\rho}{\beta.\rho} = \frac{\alpha}{\rho}$ καὶ $\frac{\alpha:\rho}{\beta:\rho} = \frac{\alpha}{\rho}$ $(\rho \neq o)$. Ὅπως δὲ εἰς τὴν ἀριθμητικήν, ἐφαρμόζομεν καὶ ἐδῶ τὴν πρώτην ἰδιότητα διὰ τὴν τροπὴν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα καὶ τὴν δευτέραν διὰ τὴν ἁπλοποίησιν τῶν κλασμάτων.

Ἔχομεν ἐπίσης α′) $\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\beta}{\rho} + \frac{\gamma}{\rho} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\rho}$

$$\text{Π.χ. } \frac{2}{3} + \frac{-1}{3} + \frac{-2}{3} = \frac{2-1-2}{3} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

$$\beta')\ \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\frac{\alpha''}{\beta''} = \frac{\alpha.\ \alpha'.\ \alpha''}{\beta.\ \beta'.\ \beta''}$$

$$\text{Π.χ. } \frac{-7}{8}\cdot\frac{8}{-5}\cdot\frac{-3}{-7} = \frac{(-7).\ 8.\ (-3)}{8.(-5).(-7)} = \frac{7.\ 8.\ 3}{8.\ 5.\ 7}$$

Ἀσκήσεις

1). Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα:

α′) $\frac{-2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{-5}{6}$. Ταῦτα εἶναι προφανῶς ἰσοδύναμα πρὸς τὰ

$\frac{(-2).4}{3.4}$, $\frac{1.3}{4.3}$, $\frac{-5.2}{6.2}$, β') $\frac{8}{-15}$, $\frac{-6}{-10}$, γ') $\frac{-10}{15}$, $\frac{4}{-6}$. $\frac{-9}{-27}$

δ') $\frac{-1}{5}$, $\frac{-2}{-9}$, $\frac{4}{-20}$, $\frac{3}{10}$.

2). Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ πολλαπλασιασμοί:

α') $(-8).\left(+\frac{1}{2}\right)$, β') $\left(+\frac{1}{-5}\right)\cdot\left(\frac{-10}{3}\right)$, γ') $\left(\frac{3}{-4}\right)\cdot\left(\frac{-4}{3}\right)$

δ') $\left(\frac{2}{-9}\right).7.\left(-\frac{15}{19}\right)$, ') $(-0{,}03).(-5{,}81)$, στ') $8{,}18.(-2{,}06)$.

3). Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις:

α') $3:\left(\frac{-1}{6}\right)$, β') $\left(\frac{-7}{-8}\right):\left(\frac{-8}{-7}\right)$, γ') $(-3{,}1):(+6{,}07)$.

4). Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων.

α') $\frac{2}{3}+\frac{-5}{4}+\frac{2}{-7}$, β') $\frac{-2}{5}-\frac{-3}{-2}$, γ') $\frac{5}{6}+\frac{-1}{3}+\frac{-2}{-6}$

δ') $\frac{2}{7}-\frac{-2}{3}-6$.

5). Ὁμοίως τῶν: α') $\frac{2}{5}-\left(3-\frac{-1}{4}\right)+\left(\frac{2}{-3}+\frac{-7}{8}-5\right)$

β') $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{-2}{5}-3\right)\cdot\frac{2}{-11}$, γ') $\left(-2\frac{1}{5}\right)\cdot(-3).\frac{-5}{11}+1$

δ') $5-\frac{1}{-4}\cdot(-3)-\frac{5}{6}\cdot\left(7-\frac{2}{-3}\right)$, ε') $\left(-7\frac{2}{5}\right):\frac{-2}{3}$

στ') $\left(2-\frac{2}{7}-\frac{-3}{4}+7\right):\frac{-3}{4}$, ζ') $\frac{5}{-8}:\left(2-\frac{1}{4}+\frac{-3}{4}\right)$

η') $\frac{2}{5}:\left(\frac{5}{4}-\frac{-1}{8}\right)$, θ') $\left(2-\frac{8}{-5}\right)\cdot\left(7-\frac{2}{-3}-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$.

6). Ἔστω ἡ ἀναλογία α:β=γ:δ, ὅπου τὰ α,β,γ,δ, εἶναι ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί. Νὰ δειχθῇ ὅτι α. δ=β. γ.

7. Ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}$

Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{\beta+\beta'+\beta''}=\frac{\alpha}{\beta}$, ὑποτιθεμένου ὅτι

$\beta+\beta'+\beta''\neq 0$ π.χ. ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\frac{-4}{10}=\frac{6}{-15}=\frac{-10}{25}$

ἕπεται ὅτι $\frac{-4+6-10}{10-15+25}=\frac{-8}{20}=-\frac{2}{5}$.

17. **Δυνάμεις.**—Ὅταν οἱ παράγοντες γινομένου εἶναι πάντες ἴσοι, ὁ πολλαπλασιασμὸς καλεῖται, ὅπως καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικήν, ὕ ψ ω σ ι ς ε ἰ ς δ ύ ν α μ ι ν. Ἤτοι ὑψοῦμεν ἀλγεβρικόν τινα ἀριθμὸν α εἰς δύναμίν τινα, π.χ. τὴν πέμπτην, ὅταν σχηματίζωμεν γινόμενον πέντε παραγόντων ἴσων πρὸς α. σημειοῦται δὲ διὰ τοῦ α^5. Ὁ α λέγεται β ά σ ι ς, ὁ πέντε (5) ἐ κ θ έ τ η ς, τὸ δὲ γινόμενον δ ύ ν α μ ι ς. Ἡ δευτέρα δύναμις ἀλγεβρικοῦ τινος ἀριθμοῦ λέγεται καὶ τ ε τ ρ ά γ ω ν ο ν αὐτοῦ, ἡ δὲ τρίτη λέγεται καὶ κ ύ β ο ς αὐτοῦ. Καὶ ἐν γένει, ἐὰν ν δηλοῖ θετικὸν ἀκέραιον διάφορον τῆς μονάδος, νυοστὴ δύναμις ἀλγεβρικοῦ τινος ἀριθμοῦ α λέγεται τὸ γινόμενον ν παραγόντων ἴσων πρὸς τὸν α καὶ σημειοῦται α^ν. Ὅπως καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν θέτομεν καὶ ἐνταῦθα $\alpha^1=\alpha$ καὶ $\alpha^0=1$.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α.

$(+2)^3=(+2)\,(+2)\,(+2)=+8$, $(-2)^4=(-2)\,(-2)\,(-2)\,(-2)=$ $=+16$, $(-5)^3=(-5).\,(-5).\,(-5)=-125$.

$(-3)^1=-3$, $(+5)^0=1$, $(-7)^0=1$.

18). ***Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.*** Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων αἱ ἐκφραζόμεναι διὰ τῶν κάτωθι ἰσοτήτων.

α′) $\alpha^\lambda.\,\alpha^\mu=\alpha^{\lambda+\mu}$ ὅθεν καὶ $\alpha^\lambda.\,\alpha^\mu.\,\alpha^\nu=\alpha^{\lambda+\mu+\nu}$ καὶ γενικῶς $\alpha^\lambda.\,\alpha^\mu.\,\alpha^\nu\ldots.\,\alpha^\rho=\alpha^{\lambda+\mu+\nu+\ldots+\rho}$, ὅπου α τυχὼν ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς καὶ λ,μ,ν,....ρ τυχόντες ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί.

β′) $(\alpha^\lambda)^\mu=\alpha^{\lambda\mu}$, ἢ καὶ $\alpha^{\lambda.\mu}=(\alpha^\lambda)^\mu$.

γ′) $(\alpha.\beta.\gamma\ldots.\theta)^\nu=\alpha^\nu.\,\beta^\nu.\,\gamma^\nu\ldots.\theta^\nu$ καὶ ἀντιστρόφως $\alpha^\nu.\,\beta^\nu.\,\gamma^\nu\ldots.\theta^\nu=(\alpha.\beta.\gamma\ldots.\theta)^\nu$.

δ′) $\alpha^\mu:\alpha^\nu=\alpha^{\mu-\nu}$, ἐὰν $\mu\geq\nu$

ε′) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu=\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$.

19. Παρατηροῦμεν ὅτι πᾶσα δύναμις ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἀριθμὸς θετικὸς μὲν, ἐὰν ὁ ἐκθέτης εἶναι ἄρτιος, ἀρνητικὸς δέ, ἐὰν ὁ ἐκθέτης εἶναι περιττὸς ἀριθμὸς π.χ.
$(-3)^2=(-3).\,(-3)=+9$ καὶ $(-4)^3=(-4).\,(-4).\,(-4)=-64$.

Ἀσκήσεις

1). Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:
α′) $(-2)^3$, β′) $(-3)^4$, γ′) $(-6)^5$, δ′) $\left(+\frac{2}{5}\right)^2$, ε′) $(-1)^3$
στ′) $\left(-\frac{7}{9}\right)^1$, ζ′) $(0{,}0003)^0$, η′) $(-0{,}08)^1$.

2). Ὁμοίως τῶν: α′) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$, β′) $(+2{,}7)^3$, γ′) $\left(-2\frac{1}{4}\right)^2$
δ′) $\left(+1\frac{5}{8}\right)^3$, ε′) $(-1{,}002)^4$, στ′) $(-8{,}5)^0$.

3). Ὁμοίως τὰ ἐξαγόμενα τῶν:
α′) $2^3 . 2^2$, β′) $(-3)^2 . (-3)^5$, γ′) $3 . 3^3$, δ′) $(-2)^3 . (-2) . (-2)^1$
ε′) $\left[(-2)^2\right]^2$, στ′) $(-6^2)^2$, ζ′) $\left[(-1{,}1)^2\right]^3$, η′) $\left[(37{,}4)^6\right]^0$.

4). Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:
α′) $\left(\frac{-2}{3}\right)^5$, β′) $\left(\frac{-7}{3}\right)^1$, γ′) $\left(\frac{597}{-1978}\right)^0$, δ′) $\left(\frac{-2}{-3}\right)^3$
ε′) $\left(\frac{-1}{5}\right)^7 . \left(\frac{-2}{5}\right)^3$, στ′) $\left(5 . \frac{-3}{3} . \frac{5}{-7}\right)^3$
ζ′) $\left[\left(\frac{-5}{3}\right)^3\right]^2$, η′) $\left(\frac{-5^2}{2}\right)^3$, θ′) $\left[(-2) . \left(\frac{-3}{4}\right)^2 . \frac{5}{-2}\right]^1$

20. ***Δύναμις μὲ ἀρνητικὸν ἐκθέτην.*** Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}$. ὅπου τὸν εἶναι θετικὸς ἀκέραιος καὶ τὸ μ εἶναι θετικὸς ἀκέραιος μικρότερος τοῦ ν ἢ μηδέν. Συμφωνοῦμεν νὰ ἰσοῦται τοῦτο μὲ $\alpha^{\mu-\nu}$. Ἤτοι θέτομεν ἐξ ὁρισμοῦ $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}=\alpha^{\mu-\nu}$ π.χ. θέτομεν $\frac{\alpha^2}{\alpha^5}=\alpha^{2-5}=\alpha^{-3}$. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν ἔχομεν

$$\alpha^{-1}=\frac{\alpha^0}{\alpha^1}=\frac{1}{\alpha}, \quad \alpha^{-2}=\frac{\alpha^0}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha^2}, \quad \alpha^{-3}=\frac{1}{\alpha^3}. \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Τὰ σύμβολα τῆς μορφῆς $\alpha^{-\rho}$ ὅπου ρ θετικὸς ἀκέραιος, καλοῦμεν δυνάμεις μὲ ἀκέραιον ἀρνητικὸν ἐκθέτην. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ δυνάμεις μὲ ἀκέραιον ἀρνητικὸν ἐκθέτην διατηροῦν τὰς ἰδιότητας τῶν δυνάμεων μὲ ἀκέραιον θετικὸν ἐκθέτην π.χ. $\alpha^{-\mu} . \alpha^{-\nu}=\alpha^{-(\mu+\nu)}$.

Ἀσκήσεις

1). Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

α') 4^{-3}, β') $(-3)^{-2}$, γ') $\left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$, δ') $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-5}$,

ε') $(-0{,}005)^{-2}$, στ') $(2^4)^{-3}$.

2). Ὁμοίως αἱ :

α') $3^{-5} \cdot 3^{-8}$. β') $(-4)^{-2} \cdot (-4)^{-7}$, γ') $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$,

δ') $\left(2\frac{3}{5}\right)^{-2} \cdot \left(2\frac{3}{5}\right)^{-4}$, ε') $(3^{-4})^2 . (3^{-3})^{-5}$, στ') $(-2)^5 . (-2)^{-2}$,

ζ') $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(3\frac{1}{4}\right)^5 \cdot (0{,}015)^{-1}\right]^3$,

η') $\left[\left(\frac{5}{7}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{5}{-7}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^{-4}\right] : \left(\frac{5}{7}\right)^3$.

21. **Ἀνισότητες**. Λέγομεν ὅτι ἀλγεβρικός τις ἀριθμὸς α εἶναι μεγαλύτερος ἄλλου β καὶ σημειοῦμεν $\alpha > \beta$, ὅταν ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Λέγομεν ὅτι ὁ α εἶναι μικρότερος τοῦ β καὶ σημειοῦμεν $\alpha < \beta$, ὅταν ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta$ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός. Οὕτω π.χ. ἔχομεν τὰς ἀνισότητας $5 > 2$, $3 < 5$, $7 < 9$, $-7 > -9$.

22. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ἕπονται αἱ ἰδιότητες :

α') ἐὰν $\alpha > \beta$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$. Διότι, ἀφοῦ $\alpha > \beta$, θὰ ἔχωμεν $\alpha - \beta = \theta$, ὅπου θ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, ὅθεν $\alpha = \beta + \theta$, ἑπομένως $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) = \theta$· ἤτοι $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

β') Ἐὰν $\alpha > \beta$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha . \mu > \beta . \mu$, ἐὰν ὁ μ εἶναι θετικὸς καὶ $\alpha . \mu . < \beta . \mu .$ ἐὰν ὁ μ εἶναι ἀρνητικός,
διότι $\alpha - \beta = \theta$ (θ = θετικὸς) καὶ $\alpha\mu - \beta\mu = \theta\mu$.

Ἀσκήσεις

1). Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μηδενὸς καὶ ἀντιστρόφως πᾶς μεγαλύτερος τοῦ μηδενὸς εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Ὅθεν καί, ἵνα ἐκφράσωμεν ὅτι ἀριθμός τις α εἶναι θετικὸς ἀριθμός, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν $\alpha > 0$.

2). Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ μηδενὸς καὶ ἀντιστρόφως. Ὅθεν καί, ἵνα ἐκφράσωμεν ὅτι ἀριθμός τις α εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν $\alpha < 0$.

3). Ἐκ δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἄνευ σημείου μικρότερος.

4). Ἐὰν $\alpha < \beta$ καὶ $\gamma < \delta$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha + \gamma < \beta + \delta$.

5). Ἐὰν $\alpha < \beta$ καὶ $\gamma > \delta$ εἶναι καὶ $\alpha-\gamma < \beta-\delta$.

6). Νὰ δειχθῇ ὅτι: $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha} < 0$ (ὅπου α κα β τυχόντες ἀριθμοὶ διάφοροι ἀλλήλων).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ.

23. **Ὁρισμοί.** Ἀλγεβρικὴ παράστασις λέγεται πᾶσα ὁμὰς γραμμάτων καὶ ἀριθμῶν, ἢ μόνον γραμμάτων, συνδεομένων πρὸς ἄλληλα μὲ σημεῖα ἀριθμητικῶν πράξεων. Κατὰ ταῦτα δυνατὸν εἰς μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν νὰ παρουσιάζεται πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, πολλαπλασιασμός, διαίρεσις, ὕψωσις εἰς δύναμιν καὶ ἐξαγωγὴ ριζῶν.

Παραδείγματα. $2\alpha, \alpha+\beta,\ \alpha-\beta, \alpha+\beta-\gamma,\ 20-5\alpha\beta,\ \frac{2\beta}{\gamma\delta}$, $-3\alpha^2$, $(\alpha+\beta).\gamma+\beta-\frac{3\alpha\beta}{\gamma}$, $\sqrt{3\lambda}$, $\alpha(\beta+\gamma\delta)$.

Ἐὰν μία παράστασις δὲν ἔχῃ ὡς σημεῖον πράξεως οὔτε τὸ $+$ οὔτε τὸ $-$ καλεῖται μονώνυμον· π.χ. μονώνυμα εἶναι αἱ παραστάσεις $\frac{5\alpha}{\beta}$, $-\sqrt{3}.\alpha\beta^2$, $-\frac{\gamma}{6\delta}$, $\frac{3}{4}\cdot\sqrt{\alpha\beta}$.

Ὁ ἀριθμητικὸς παράγων παντὸς μονωνύμου λέγεται συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου π.χ. τῶν προηγουμένων μονωνύμων συντελεσταὶ εἶναι οἱ $5, -\sqrt{3}, -\frac{1}{6}, \frac{3}{4}$.

Ὅταν μονωνύμου τινὸς δὲν φαίνεται τοιοῦτος συντελεστής, θεωρεῖται ὡς συντελεστὴς αὐτοῦ ἡ μονὰς μὲ σημεῖον $+$, ἐὰν πρὸ τοῦ μονωνύμου ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον $+$, ἢ ὑπονοεῖται τοιοῦτον καὶ μὲ $-$ ἐὰν πρὸ τοῦ μονωνύμου ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον $-$ π.χ. τῶν $\alpha^2\beta, -\beta\gamma^3$ συντελεσταὶ εἶναι οἱ $+1, -1$.

Ἀλγεβρική τις παράστασις λέγεται ρητή, ὅταν δὲν περιέχῃ γράμματα ὑπὸ ριζικόν.

Ἀλγεβρικὴ ρητὴ παράστασις λέγεται ἀκεραία, ὅταν δὲν περιέχῃ παρονομαστὴν μὲ γράμματα· ἄλλως λέγεται κλασματικὴ π.χ. αἱ ρηταὶ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις: $5\alpha^2$, $\alpha^3\beta^5\gamma^2$ εἶναι ἀκέραιαι· αἱ $\frac{2\alpha^2}{3\beta}-\frac{7\alpha}{5\beta}$, $\frac{3\alpha\beta^2}{\gamma}$ εἶναι ρηταὶ κλασματικαὶ παραστάσεις.

Ἄρρητος λέγεται μία ἀλγεβρικὴ παράστασις, ὅταν περιέχῃ γράμματα ὑπὸ ριζικὸν π. χ. αἱ παραστάσεις

$2\sqrt{\alpha}, \frac{5\sqrt{\alpha^2-\beta}}{3\gamma}, \frac{3\sqrt{\beta^3}}{5}+3\beta$ εἶναι ἄρρητοι, ἐνῷ αἱ $2\alpha\beta^2$, $5\alpha^3.\sqrt{2}$ εἶναι ρηταὶ παραστάσεις. Δυνατὸν μία ἀλγεβρικὴ παράστασις νὰ εἶναι ρητὴ ὡς πρὸς ἓν ἢ περισσότερα γράμματα καὶ ἄρρητος ὡς πρὸς ἄλλα. Ἐπίσης δυνατὸν μία ρητὴ ἀλγεβρικὴ παράστασις νὰ εἶναι ἀκεραία ὡς πρὸς γράμματα τινὰ καὶ κλασματικὴ ὡς πρὸς ἄλλα· π.χ. ἡ παράστασις $5\alpha^2\beta+\sqrt{\alpha}$ εἶναι ρητὴ ὡς πρὸς β καὶ ἄρρητος ὡς πρὸς α· ἡ παράστασις $2\sqrt{\beta}+\gamma\delta-\gamma\sqrt[3]{\beta}$ εἶναι ρητὴ ὡς πρὸς γ καὶ δ καὶ ἄρρητος ὡς πρὸς β. Ὁμοίως ἡ παράστασις $\frac{5\alpha^2}{\beta\gamma}-\frac{5\alpha\beta}{3\gamma}+\frac{7\alpha\beta^3}{4\delta^2}$ εἶναι ἀκεραία ὡς πρὸς α καὶ κλασματικὴ ὡς πρὸς β γ καὶ δ. Καὶ τέλος ἡ ρητὴ ἀλγεβρικὴ παράστασις $\frac{2\alpha-5\beta^3\gamma\delta}{3\alpha^2}+\frac{2}{5}\gamma$ εἶναι ἀκεραία ὡς πρὸς β,γ,δ, καὶ κλασματικὴ ὡς πρὸς α.

Ἀλγεβρικὴ παράστασις ἀποτελουμένη ἀπὸ μονώνυμα συνδεόμενα πρὸς ἄλληλα μὲ σημεῖα προσθέσεως ἢ ἀφαιρέσεως λέγεται πολυώνυμον. Ἐὰν τὰ μονώνυμα εἶναι δύο, λέγεται καὶ διώνυμον, ἐὰν τρία λέγεται καὶ τριώνυμον. π.χ. αἱ παραστάσεις -2α, $6\alpha^2\beta$, $4\sqrt{\alpha\gamma}$ εἶναι μονώνυμα, αἱ παραστάσεις $\alpha^3-3\alpha^2\beta-7\delta^2+5\sqrt{\gamma}$ καὶ $5\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2\gamma+9\delta+3$ εἶναι πολυώνυμα.

Ἀκέραιον μονώνυμον λέγεται ἀλγεβρικὴ παράστασις εἰς τὴν ὁποίαν αἱ μόναι τυχὸν παρουσιαζόμεναι πράξεις ἐπὶ τῶν γραμμάτων εἶναι πολλαπλασιασμὸς καὶ ὕψωσις εἰς θετικὴν ἀκεραίαν δύναμιν.

Ἀκέραιον πολυώνυμον λέγεται τὸ πολυώνυμον τὸ ὁποῖον σύγκειται ἀπὸ ἀκέραια μονώνυμα.

Τὰ μονώνυμα ταῦτα λέγονται γενικῶς ὅροι τοῦ πολυωνύμου π.χ. τὰ μονώνυμα $2\alpha^2$, β, $-\frac{1}{5}\alpha^3\beta\gamma$, εἶναι ἀκέραια. Τὰ πολυώνυμα $\frac{2\alpha}{3}-5\alpha^2+\frac{7}{9}\gamma^3\beta\alpha-\alpha\gamma^2+2\beta$ καὶ $2\alpha^3-2\alpha^2\beta+5\beta^2$ εἶναι ἀκέραια.

Εἰς τὰ ἑπόμενα, ὅταν ὁμιλοῦμεν περὶ μονωνύμων ἢ πολυωνύμων, θὰ ἐννοοῦμεν ἀκέραια τοιαῦτα.

Βαθμὸς μονωνύμου ὡς πρὸς ἓν γράμμα λέγεται ὁ ἐκθέτης τοῦ γράμματος τούτου ἐν τῷ μονωνύμῳ.

Βαθμὸς μονωνύμου ὡς πρὸς δύο ἢ περισσότερα γράμματα λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων ἐκθετῶν π.χ. τὸ μονώνυμον $5\alpha^3\beta\gamma^2$ εἶναι τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, πρώτου ὡς πρὸς β καὶ δευτέρου ὡς πρὸς γ, ὡς πρὸς πᾶν δὲ ἐλλεῖπον γράμμα ἐν τῷ μονωνύμῳ εἶναι βαθμοῦ μηδενικοῦ· π.χ. ὡς πρὸς δ εἶναι βαθμοῦ μηδενικοῦ, διότι γράφεται $5\alpha^3\beta\gamma^2\delta^0$, κ.ο.κ.

Τὸ μονώνυμον $-2\alpha^2\beta^3\delta^5$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς β, μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς γ, πέμπτου βαθμοῦ ὡς πρὸς δ, πέμπτου βαθμοῦ ὡς πρὸς α,β, δευτέρου ὡς πρὸς α,γ, ἑβδόμου ὡς πρὸς α, δ καὶ τέλος δεκάτου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, β, γ, δ.

Βαθμὸς πολυωνύμου ὡς πρὸς ἓν γράμμα λέγεται ὁ μεγαλύτερος τῶν βαθμῶν ὡς πρὸς τὸ γράμμα τοῦτο τῶν διαφόρων μονωνύμων τῶν ἀποτελούντων τὸ πολυώνυμον· π.χ. τὸ πολυώνυμον $7\alpha^5+2\alpha^3\beta+4\alpha\beta^4$ εἶναι πέμπτου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς β.

Βαθμὸς πολυωνύμου ὡς πρὸς περισσότερα γράμματα λέγεται ὁ μεγαλύτερος ὡς πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα τῶν βαθμῶν τῶν μονωνύμων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα σύγκειται τοῦτο· π.χ. τὸ πολυώνυμον $7\alpha^3\beta^2\gamma^4+7\gamma^3-2\alpha^5\beta$ εἶναι ἕκτου βαθμοῦ ὡς πρὸς αβ καὶ ἐνάτου βαθμοῦ ὡς πρὸς αβγ.

Πολυώνυμόν τι καλεῖται **ὁμογενὲς** ὡς πρὸς γράμματά τινα, ἐὰν πάντες οἱ ὅροι αὐτοῦ εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα π.χ. τὸ πολυώνυμον

$\alpha^6+3\alpha^5\beta-2\alpha^4\beta^2+\frac{2}{7}\alpha^2\beta^4-\alpha\beta^5+\frac{2}{9}\beta^6$ εἶναι ὁμογενὲς ὡς πρὸς τὰ α,β.

Ἀσκήσεις

1). Τὰ κάτωθι μονώνυμα τίνος βαθμοῦ εἶναι ὡς πρὸς α, τίνος ὡς πρὸς β, τίνος ὡς πρὸς γ, τίνος ὡς πρὸς δ, τίνος ὡς πρὸς αβ, τίνος ὡς πρὸς αγδ;

α') $2\alpha^3\beta^2\gamma^7\delta^5$, β') $-\alpha^2\beta\gamma^5\delta^3$, γ') $-\frac{2}{5}\alpha\beta^7\gamma^2\delta$, δ') $\frac{3}{7}\beta^3\gamma^5$, ε') $\alpha^3\beta^2\delta$.

2). Τὰ κάτωθι πολυώνυμα τίνος βαθμοῦ εἶναι ὡς πρὸς α, τίνος ὡς πρὸς β, τίνος ὡς πρὸς γ, τίνος ὡς πρὸς δ, τίνος ὡς πρὸς α,β, τίνος ὡς πρὸς β,γ, τίνος ὡς πρὸς α,β,γ;

α') $5\alpha^3\beta^2\gamma^4\delta-\alpha\beta^3\gamma^2\delta^5+\frac{2}{5}\alpha^7\beta^2\gamma^2\delta^4$.

β') $2\alpha\beta^5-7\alpha^3\beta^2\varepsilon^4-\frac{2}{3}\alpha^5\beta\varepsilon^2-\varepsilon$.

3). Ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων ποῖαι εἶναι ῥηταί, ποῖαι ἄρρητοι; ἐκ τῶν ῥητῶν ποῖαι ἀκέραιαι, ποῖαι κλασματικαί;

α′) $2\alpha^2\beta$, β′) $\dfrac{5\alpha^2\beta}{\gamma}$, γ′) $\dfrac{2\beta-7\alpha}{\delta+2\beta^2}$, δ′) $-7\alpha^2\sqrt{\beta}$

11

ε′) $\dfrac{2\alpha\beta\sqrt{\beta}}{\delta+\varepsilon^2}+\dfrac{5\alpha^2}{2}$· στ′) $\dfrac{\sqrt{3}\,\alpha^2\beta}{5}$· ζ′) $\dfrac{2\alpha^2}{3}-\dfrac{5\alpha}{2\beta^2}$·

24. **Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως.** ***Ἀριθμητικὴ*** ἢ ***μερικὴ τιμὴ*** ἀλγεβρικῆς παραστάσεως δι' ἓν σύστημα τιμῶν διδομένων εἰς τὰ περιεχόμενα γράμματα λέγεται τὸ ἀριθμητικὸν ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν τὰ γράμματα μὲ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς σημειωμένας πράξεις π.χ. ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως $8\alpha^2\beta$ διὰ $\alpha=3$ καὶ $\beta=-2$ εἶναι -144· τῆς παραστάσεως $5\chi^2+2\chi+7$ διὰ $\chi=5$ εἶναι 142.

25. Δύο ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις λέγονται ἰσοδύναμοι, ἐὰν ἔχουν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: ὅταν ἀντικαταστήσωμεν τὰ γράμματα εἰς ἀμφοτέρας τὰς παραστάσεις μὲ οἱουσδήποτε ἀριθμούς, ἀλλὰ τοὺς αὐτοὺς καὶ εἰς τὰς δύο, λαμβάνομεν πάντοτε ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς πρώτης παραστάσεως τὴν ἰδίαν μὲ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς δευτέρας.

Ἡ ἰσότης δύο ἰσοδυνάμων παραστάσεων λέγεται ταυτότης· π.χ. αἱ παραστάσεις $(\alpha+\beta)\mu$ καὶ $\alpha\mu+\beta\mu$ εἶναι ἰσοδύναμοι, διότι, μὲ οἱουσδήποτε ἀριθμοὺς καὶ ἂν ἀντικαταστήσω τὰ α,β καὶ μ, τοὺς ἰδίους ὅμως εἰς ἀμφοτέρας τὰς παραστάσεις, θὰ εὕρω τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ διὰ τὰς δύο παραστάσεις· ἔχομεν οὕτω τὴν ταὐτότητα $(\alpha+\beta).\mu=\alpha\mu+\beta\mu$.

Δυνάμεθα προφανῶς ν'ἀντικαταστήσωμεν ἀλγεβρικὴν παράστασιν μὲ ἄλλην ἰσοδύναμον. Προκειμένου νὰ ὑπολογίσωμεν ἀριθμητικὴν τιμὴν ἀλγεβρικῆς παραστάσεως, φροντίζομεν νὰ μετασχηματίσωμεν αὐτὴν εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον, εἰς τὴν ὁποίαν οἱ ὑπολογισμοὶ νὰ γίνωνται εὐκολώτερον. Ὁ μετασχηματισμὸς ἀλγεβρικῶν παραστάσεων εἰς ἄλλας ἁπλουστέρας ἀποτελεῖ οὐσιῶδες μέρος τῆς ἀλγέβρας. Οἱ τοιοῦτοι μετασχηματισμοὶ καλοῦνται ἀλγεβρικαὶ πράξεις. Τοιαῦται εἶναι: ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις, ὁ πολλαπλασιασμός, ἡ διαίρεσις, ἡ ὕψωσις εἰς δύναμιν καὶ ἡ ἐξαγωγὴ ῥίζης.

26. ***Ἀλγεβρικὰ κλάσματα.*** Ἔστωσαν δύο ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις Α καὶ Β· ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύμβολον $\dfrac{A}{B}$ καὶ ἔστω ὅτι ἀντικαθιστῶμεν τὰ γράμματα τὰ περιεχόμενα εἰς τὰς παραστάσεις Α καὶ Β, μὲ ἀριθμοὺς τοιούτους ὥστε νὰ μὴ μηδενίζεται ἡ παράστασις Β· τότε θὰ ἔχωμεν ἀλγεβρικὸν

κλάσμα. Κατὰ ταῦτα τὸ σύμβολον $\frac{A}{B}$ θὰ παριστᾷ ἀλγεβρικὸν κλάσμα διὰ πᾶν σύστημα τιμῶν αἱ ὁποῖαι δίδονται εἰς τὰ γράμματα χωρὶς νὰ μηδενίζουν τὸ B.

Ἀσκήσεις.

1). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων διὰ $\chi=2$, $\psi=3$, $\alpha=5$, $\beta=1$.

α') $5\chi+2\psi$, β') $2\alpha\chi+3\beta\psi$, γ') $3\chi^2+\psi^3$, δ') $2\alpha^2\chi-5\psi^2$

ε') $\frac{3\chi^2-5\psi^2}{\chi-\psi}$, στ') $\frac{\alpha^2-7\beta^2}{3\chi-2\psi+1}$, ζ') $\frac{\chi+\alpha}{\psi-\alpha}-\frac{\chi-\beta}{\psi+\beta}$

η') $9\frac{1}{4}-3\alpha^2-\frac{\alpha}{\beta}$.

2). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων διὰ $\chi=2$, $\psi=-1$, $\alpha=0$, $\beta=-2$.

α') $\frac{3\alpha^2\beta}{2\chi}$, β'.) $2\chi\psi-2\alpha\beta^2$, γ'.) $\frac{5\alpha^2-2\chi\psi^2}{5\chi-2\beta+3\alpha}$

δ') $5\chi+3\beta(\chi+\alpha)$, ε') $\frac{4\alpha^3\beta}{\chi\psi^2}-\frac{2\chi\psi}{3,2}-\frac{\sqrt{2\chi}}{3\psi-1}$.

3). Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν παραστάσεων:

α') $\alpha^3\chi^3-\alpha^2\chi^2+3\alpha\chi-1$ διὰ $\chi=2$, $\alpha=-2$

β') $2\chi^3\alpha^4-\frac{4\alpha^3}{\chi^2}+\frac{\alpha^2\chi^2}{6}-\frac{\alpha^3}{8}-\frac{\chi^3}{9}+9$ διὰ $\chi=2$, $\alpha=-2$

γ') $(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha+\beta)^2$ διὰ $\alpha=10$, $\beta=2$, $\gamma=1$

δ') $(\alpha+\chi)\ \chi+(\chi-\alpha)\ \alpha-\alpha\chi$ διὰ $\chi=3$, $\alpha=2$

ε') $\frac{[(\alpha-\beta)\gamma+\alpha]^2}{\gamma[\beta.\ (\alpha+\beta)]^5}$ διὰ $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=3$, $\delta=-6$

4). Νὰ ἐπαληθευθῇ ὅτι: ἡ ἰσότης $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ εἶναι ταὐτότης.

5). Ὁμοίως ὅτι: ἡ ἰσότης $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ εἶναι ταὐτότης.

6). Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ χ, ἵνα πληροῦται σχέσις α') $\chi+3=7$, β') $\chi+5=-1$. γ') $\chi-5=8$, δ') $\chi+3=-10$, ε') $\chi-5=6$.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΠΡΑΞΕΙΣ

27. **Πρόσθεσις.** Ἄθροισμα πολλῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων εἶναι παράστασις τῆς ὁποίας ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν

τῶν δεδομένων παραστάσεων διὰ πᾶν σύστημα τιμῶν τῶν γραμμάτων.

28. ***Πρόσθεσις μονωνύμων.*** ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν μονώνυμα ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν ταῦτα κατὰ σειρὰν ἕκαστον μὲ τὸ σημεῖον του*** π.χ. Τὰ μονώνυμα 5α, -6β, $8\alpha\beta$ ἔχουν ἄθροισμα τὸ $5\alpha-6\beta+8\alpha\beta$.

29. ***Ὅμοιοι ὅροι.*** Οἱ ὅροι πολυωνύμου οἱ διαφέροντες μόνον κατὰ τὸν συντελεστὴν ἢ καὶ οὐδόλως λέγονται ὅ μ ο ι ο ι π.χ. εἰς τὸ πολυώνυμον $\frac{5}{7}\alpha^5\beta^2\chi^3+7\alpha^5\beta^2\chi^3+8\alpha\beta^2\chi^3$ οἱ δύο πρῶτοι ὅροι εἶναι ὅμοιοι.

30. ***Ἀναγωγὴ ὁμοίων ὅρων.*** Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ὅρων πολυωνύμου προκύπτει ἰσοδύναμον πολυώνυμον. Ὅθεν, ἐὰν πολυώνυμόν τι ἔχῃ ὁμοίους ὅρους, δυνάμεθα νὰ ἀθροίσωμεν αὐτοὺς καὶ νὰ τοὺς ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματός των. π.χ. Τὸ πολυώνυμον $3\alpha\beta^2-8\beta\gamma^3+4\alpha\beta^2-9\alpha\beta^2+6\alpha^4\gamma+\beta\gamma^3$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $-2\alpha\beta^2-7\beta\gamma^3+6\alpha^4\gamma$. Λέγομεν τότε ὅτι ἐκάμαμεν ἀ ν α γ ω γ ὴ ν ὁ μ ο ί ω ν ὅ ρ ω ν.

31. ***Πρόσθεσις πολυωνύμων.*** ***Ἵνα προσθέσωμεν πολυώνυμα, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν πάντας τοὺς ὅρους αὐτῶν κατὰ σειράν, ἕκαστον μὲ τὸ σημεῖον του καὶ νὰ κάμωμεν κατόπιν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων.*** Ἵνα γίνεται ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων εὐκολώτερον, γράφομεν τὰ πολυώνυμα τὸ ἓν κάτωθι τοῦ ἄλλου φροντίζοντες ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην· π.χ. Διὰ νὰ προσθέσωμεν τὰ πολυώνυμα

$6\chi^3+5\chi^2-7\chi+7$, $-7\chi^4+3\chi^2-\chi$ καὶ $-\chi^4+3\chi^3+5\chi^2+3\chi-1$,

τὰ γράφομεν :

$$\begin{array}{rrrrr} & +6\chi^3 & +5\chi^2 & -7\chi & +7 \\ -7\chi^4 & & +3\chi^2 & -\chi & \\ -\chi^4 & +3\chi^3 & +5\chi^2 & +3\chi & -1 \\ \hline -8\chi^4 & +9\chi^3 & +13\chi^2 & -5\chi & +6 \end{array}$$

ὁπότε λαμβάνομεν $-8\chi^4+9\chi^3+13\chi^2-5\chi+6$

Ἀσκήσεις

1). Νὰ προστεθοῦν τὰ κάτωθι μονώνυμα καὶ νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων τοῦ ἀθροίσματος:

α') $2\chi^2$, $3\chi^4$, $-5\chi^2$, $-7\chi^2$, $2\chi^4$, $6\chi^3$

β') $\frac{2}{3}\alpha^2\beta$, $-3\alpha^3\beta^2$, $7\alpha^2\beta^2$, $-5\alpha^2\beta^3$, $-\frac{5}{4}\alpha^3\beta^2$, $\frac{2}{3}\alpha^3$, $-\alpha^2\beta$

γ') $2\alpha^2\beta^5\gamma^3$, $-2\alpha^2\beta\gamma^4$, $-6\alpha^2\beta^5\gamma^2$, $-2\alpha^2\beta^5\gamma^3$, $7\alpha^2\beta\gamma^4$, $7\alpha\beta\gamma^3\delta^5$.

2). Νὰ προστεθοῦν τὰ κάτωθι πολυώνυμα:

α') $2\chi^2-3\chi+7$, $2\chi-3\chi^3+5\chi$, $-2\chi^2-7+5\chi^3$.

β') $\frac{2}{3}x^4-5x^2+7x^3-\frac{1}{4}$, $2x-\frac{1}{5}x^3+x^2-\frac{2}{5}x$

γ') $4x^3-3x^2+2x-x+1$, $\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$, $x^3+\ +1$

δ') $5\alpha^3-6\alpha^2\beta+10\alpha\beta^3-\beta^4-2$, $3\alpha^2\beta^2-\alpha^3\beta+3\beta^4-9\alpha\beta^3+10$

ε') $\frac{5\alpha}{7}-\frac{3\beta}{4}+\frac{6\gamma}{9}-10-3\alpha^2$,

$-\frac{3\beta}{9}-\frac{11\alpha}{9}+\frac{2\alpha^2}{5}-\frac{8\gamma}{9}+\frac{9}{7}$

στ') $\frac{3}{4}x^2-2x\psi^2-\frac{2}{5}x^2\psi$, $2x^2\psi-\sqrt{3}\,x\psi^2+x^2\psi+x^2$,

$\frac{1}{5}x^2\psi-0$, $2x\psi^2+3$, $2x^2+x\psi^2$

3). Δίδονται τὰ πολυώνυμα.
$A=5x^4-3x^2+7x-10$, $B=-7x^3+3x^2-6x^4-9$, $\Gamma=2x^3-3x^2+1$
Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παραστάσεις
α') $A+B+\Gamma$. β') $A+(B+\Gamma)$, γ') $(A+B)+\Gamma$.

4). Ἐὰν $A=\alpha+\beta+\gamma$, $B=\alpha-\beta+\gamma$, $\Gamma=\alpha+\beta-\gamma$, $\Delta=\beta+\gamma-\alpha$ νὰ σχηματισθοῦν αἱ παραστάσεις
α') $A+B$, β') $A+\Delta$, γ') $B+\Gamma$, δ') $\Gamma+\Delta$, ε') $A+B+\Gamma$, στ') $B+\Gamma+\Delta$.

32. **Ἀφαίρεσις.** *Ἀφαίρεσις* εἶναι ἡ πρᾶξις, δι' ἧς δοθεισῶν δύο ἀλγεβρικῶν παραστάσεων Α καὶ Β εὑρίσκεται τρίτη Γ, ἥτις προστιθεμένη εἰς τὴν δευτέραν Β δίδει τὴν πρώτην Α.

33. Δύο ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις λέγονται ἀντίθετοι ὅταν ἡ ἀντικατάστασις τῶν γραμμάτων μὲ οἱουσδήποτε ἀριθμούς, ἀλλὰ τοὺς αὐτοὺς καὶ εἰς τὰς δύο παραστάσεις, δίδει πάντοτε ἀριθμητικὰς τιμὰς ἀντιθέτους π.χ. αἱ παραστάσεις $5\alpha\beta$ καὶ $-5\alpha\beta$ εἶναι ἀντίθετοι.

Πᾶν πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα μονωνύμων. Πολυώνυμον μετατρέπεται εἰς τὸ ἀντίθετόν του, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων του.

34. ***Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀλγεβρικήν τινα παράστασιν Β ἀπὸ ἄλλης τινὸς Α, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὴν Α τὴν ἀντίθετον παράστασιν τῆς Β. Τοῦτο σημειοῦται ὡς ἑξῆς:***
$A-B=A+(-B)$.

π.χ. $(x^3-2x^4\psi+2x^2\psi^2-5x^2)-(2x^4-5x^2\psi^3+2x\psi)=$
$=(x^3-2x^4\psi+2x^2\psi^2-5x^2)+(-2x^4+5x^2\psi^3-2x\psi)=$
$=x^3-2x^4\psi+2x^2\psi^2-5x^2-2x^4+5x^2\psi^3-2x\psi$.

35. Κατὰ ταῦτα, ἵνα ἀφαιρέσωμεν πολυώνυμόν τι Β ἀπὸ ἄλλο πολυώνυμον Α, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν ἓν πολυώνυμον

ἀποτελούμενον ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ Α καὶ ἀπὸ τοὺς ἀντιθέτους τῶν ὅρων τοῦ Β.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι ἀφαιρέσεις:

α′) $(+3\chi^3)-(+7\chi^3)$ β′) $(-5\chi^3\psi)-(-2\chi^3\psi)$

γ′) $(5\chi^2\psi^3-2\chi^2\psi^4-5\chi\psi)-(+2\chi^2\psi)$

δ′) $\left(\frac{2}{3}\chi^2\psi^3+1-\frac{3}{7}\chi\psi^4\right)-(-3\chi\psi)$.

2) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

α′) $(-5\chi\psi)+(+3\chi^2\psi^4)-(-5\chi^2\psi^3)$

β′) $\frac{2}{5}\chi^2\psi^4-(-7\chi^4\psi)+\frac{3}{4}\chi\psi^5-(+8\chi^4\psi)$

γ′) $\frac{2}{5}\chi^4\psi-(-5\chi\psi^2)+(-0{,}03\chi^4)-(-\frac{2}{7}\chi^2\psi^4)$

δ′) $(\chi-5\chi^2+7)-(5\chi^2-7+2\chi)$

ε′) $(\chi^2-\frac{2}{3}\chi+5+2\chi^2)-(5\chi-3+\frac{2}{5}\chi^2)$

στ′) $(\chi-\frac{2}{3}\chi^2+0{,}02)-(-2{,}5+3\chi-7\chi^2)$.

3) Δίδονται τὰ πολυώνυμα:

$A=5\chi^3-2\alpha\chi^4+2\chi^2-7\alpha^2$, $B=4\alpha\chi^3-7\alpha^2\chi^2+9\chi^3-10$

$\Gamma=7\alpha\chi^2-5\alpha\chi^3-2\alpha^2-9+6\chi^3$, $\Delta=\chi^3-3\chi^2+9\chi-10\alpha-2$

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παραστάσεις:

α′) $A+B+\Gamma+\Delta$, β′) $A+B+\Gamma-\Delta$, γ′) $-A+B-\Gamma+\Delta$,

δ′) $(A-B)+(\Gamma-\Delta)$, ε′) $(A+B)-(\Gamma+\Delta)$

στ′) $(A+B)-(\Gamma-\Delta)$

4) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

α′) $5\chi^2-\frac{2}{5}\chi+(5\chi-\frac{3}{5}\chi^2+0{,}03)-(3\chi^2+\frac{2}{7}\chi)$

β′) $5\chi^3-\left[2\chi-\left(5-\frac{1}{4}\right)\chi^2\right]-\left(1+\frac{2}{3}\chi^4-5\chi^2\right)$

γ′) $\left[5\chi^2-(-\frac{2}{3}\chi+1)\right]-\left[(\chi-\frac{1}{5}\chi^2+2)-(\chi-1)\right]$

δ′) $\chi^2\psi-\left[2\chi^2\psi-(5\chi-7)\right]-(7\chi-8\chi^2\psi)$

Παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ νὰ ἀπαλείψωμεν τὰς παρενθέσεις καὶ τὰς ἀγκύλας μιᾶς παραστάσεως, ἐκτελοῦμεν τὰς σημειωμένας πράξεις. Καὶ ἐὰν μὲν ὑπάρχουν μόνον παρενθέσεις, παραλείπομεν αὐτάς, ἀφίνοντες τοὺς ἐν αὐταῖς ὅρους ἀμεταβλήτους, ἐὰν πρὸ αὐτῶν ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον +, ἀλλάσσομεν δὲ τὰ σημεῖα τῶν ἐν αὐταῖς ὅρων, ὅταν πρὸ αὐτῶν (τῶν παρενθέσεων) ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον—.

Ἐὰν δὲ εἰς μίαν παράστασιν ὑπάρχουν παρενθέσεις, ἀγκύλαι, μεγάλαι παρενθέσεις κλπ. ἀπαλείφομεν πρῶτον τὰς μικρὰς παρενθέσεις, κατόπιν τὰς ἀγκύλας, ἔπειτα τὰς μεγάλας παρενθέσεις κ.ο.κ.

5) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

α') $\alpha-[\beta-(\gamma-\delta)]-[\alpha-(\beta-\gamma)]+[(\alpha-\delta)-(\delta-\alpha-\beta-\gamma)]$

β') $\alpha+[(\beta-\alpha)-(\beta-\gamma)]-[(\alpha-\gamma)-(\alpha-\beta-\gamma)]$

γ') $\alpha+[\beta-\alpha-(\beta-\gamma)]-\gamma$

36. **Πολλαπλασιασμός**. Λέγεται γινόμενον πολλῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, ἄλλη ἀλγεβρικὴ παράστασις, ἥτις διὰ πᾶν σύστημα τιμῶν τῶν γραμμάτων ἔχει ὡς ἀριθμητικὴν τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν αὐτῶν.

37. ***Πολλαπλασιασμὸς μονωνύμων***. *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο μονώνυμα ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν ἓν μονώνυμον ἔχον συντελεστὴν τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν αὐτῶν καὶ γράμματα πάντα τὰ γράμματα τῶν δοθέντων μονωνύμων καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων ἐκθετῶν* π.χ. $(-2\chi^2\psi)\cdot(4\chi\psi^3)=-8\chi^3\psi^4$.

Ἐὰν γράμμα τι περιεχόμενον εἰς τὸ ἕνα δὲν περιέχεται εἰς τὸ ἄλλο, τὸ θεωροῦμεν εἰς αὐτὸ μὲ ἐκθέτην τὸ μηδέν.

38. ***Πολλαπλασιασμὸς πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον***. *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν πολυώνυμον ἐπὶ μονώνυμον ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον ὅρον τοῦ πολυωνύμου ἐπὶ τὸ μονώνυμον καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα μονώνυμα.*

Παραδείγματα:

α') $(5\chi^4+3\chi^2-2\chi+5)\cdot(-3\chi^3)=5\chi^4\cdot(-3\chi^3)$
$+3\chi^2\cdot(-3\chi^3)+(-2\chi)\cdot(-3\chi^3)+5\cdot(-3\chi^3)$
$=-15\chi^7-9\chi^5+6\chi^4-15\chi^3$.

β') $(-6\chi^2\psi+8\psi^2+9\chi)\cdot(-3\chi\psi\omega)=$
$=18\chi^3\psi^2\omega-24\chi\psi^3\omega-27\chi^2\psi\omega$.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{r} 5\chi^4+3\chi^2-2\chi+5 \\ -3\chi^3 \\ \hline -15\chi^7-9\chi^5+6\chi^4-15\chi^3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -6\chi^2\psi+8\psi^2+9\chi \\ -3\chi\psi\omega \\ \hline 18\chi^3\psi^2\omega-24\chi\psi^3\omega-27\chi^2\psi\omega \end{array}$$

39. *Διάταξις πολυωνύμου κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ κατιούσας*

δυνάμεις ἑνὸς γράμματος. Λέγομεν ὅτι δ ι α τ ά σ σ ο μ ε ν πολυώνυμον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, ὅταν γράφωμεν τοὺς ὅρους του κατὰ τοιαύτην τάξιν, ὥστε ὁ βαθμὸς ἑκάστου ὅρου ὡς πρὸς αὐτὸ τὸ γράμμα νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸν βαθμὸν τοῦ ἀμέσως ἑπομένου ὅρου ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα. π.χ. Τὸ πολυώνυμον $2\alpha^3\chi-4\alpha^2+5\chi^2-6\alpha^5\chi^4+8\alpha^6+8\chi^5$ διατασσόμενον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ α γράφεται : $5\chi^2+8\chi^5-4\alpha^2+2\alpha^3\chi-6\alpha^5\chi^4+8\alpha^6$, κατὰ δὲ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ χ γράφεται :
$-4\alpha^2+8\alpha^6+2\alpha^3\chi+5\chi^2-6\alpha^5\chi^4+8\chi^5$.

40. Λέγομεν ὅτι πολυώνυμόν τι εἶναι δ ι α τ ε τ α γ μ έ ν ο ν κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, ὅταν ὁ βαθμὸς ἑκάστου ὅρου ὡς πρὸς αὐτὸ τὸ γράμμα δὲν εἶναι μικρότερος τοῦ βαθμοῦ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου ὅρου ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα. π.χ. τὸ προηγούμενον πολυώνυμον διατασσόμενον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ α γράφεται:
$8\alpha^6-6\alpha^5\chi^4+2\alpha^3\chi-4\alpha^2+8\chi^5+5\chi^2$, κατὰ δὲ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ γράφεται:
$8\chi^5-6\alpha^5\chi^4+5\chi^2+2\alpha^3\chi+8\alpha^6-4\alpha^2$.

41. ***Πολλαπλασιασμὸς πολυωνύμου ἐπὶ πολυώνυμον.*** ***Πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου δύο πολυωνύμων, πολλαπλασιάζομεν τὸ πρῶτον πολυώνυμον ἐπὶ ἕνα ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα π. χ.***

$(5\alpha^2\beta-3\alpha\beta^3+7\alpha^4).(2\alpha^2-3\alpha\beta)=(5\alpha^2\beta-3\alpha\beta^3+7\alpha^4).2\alpha^2+$
$+(5\alpha^2\beta-3\alpha\beta^3+7\alpha^4).(-3\alpha\beta)=10\alpha^4\beta-6\alpha^3\beta^3+14\alpha^6-15\alpha^3\beta^2+$
$+9\alpha^2\beta^4-21\alpha^5\beta$.

Συμβαίνει ἐνίοτε τὰ δοθέντα πολυώνυμα νὰ περιέχωσι μόνον ἓν γράμμα ἢ καὶ ἓν γράμμα νὰ περιέχεται εἰς πολλοὺς ὅρους τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ τοῦ πολλαπλασιαστέου· τότε συμφέρει νὰ διατάξωμεν ἀμφότερα κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ κατιούσας δυνάμεις αὐτοῦ τοῦ γράμματος καὶ νὰ γράψωμεν τοὺς ὅρους τοῦ γινομένου οὕτως ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ εἶναι εἰς τὴν αὐτὴν στήλην π.χ. διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ
$5\chi-3\chi^2+7+3\chi^3$ καὶ $2\chi^2+1+2\chi$ γράφομεν

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & 3\chi^3 & -3\chi^2 & +5\chi & +7 \\
 & & & 2\chi^2 & +2\chi & +1 \\
\hline
6\chi^5 & -6\chi^4 & +10\chi^3 & +14\chi^2 & & \\
 & 6\chi^4 & -6\chi^3 & +10\chi^2 & +14\chi & \\
 & & +3\chi^3 & -3\chi^2 & +5\chi & +7 \\
\hline
6\chi^5 & & +7\chi^3 & +21\chi^2 & +19\chi & +7
\end{array}
$$

καὶ ἔχομεν (τὸ ἀνωτέρω τελικὸν γινόμενον)

Ὁμοίως διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ
$\chi^2-3\chi^5+2\chi+2\chi^4-5$ καὶ $5\chi^3-1+2\chi$ γράφομεν

$$
\begin{array}{r}
-3\chi^5+2\chi^4 \qquad +\chi^2 \quad +2\chi \quad -5 \\
5\chi^3 \qquad\quad +2\chi \quad -1 \\
\hline
-15\chi^8+10\chi^7 \qquad +5\chi^5+10\chi^4-25\chi^3 \qquad\qquad\qquad \\
-6\chi^6+4\chi^5 \qquad +2\chi^3+4\chi^2-10\chi \quad \\
+3\chi^5-2\chi^4 \qquad\quad -\chi^2-2\chi+5 \\
\hline
\end{array}
$$

καὶ ἔχομεν $-15\chi^8+10\chi^7-6\chi^6+12\chi^5+8\chi^4-23\chi^3+3\chi^2-12\chi+5$

42. Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς.

α') Ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου δύο πολυωνύμων ὡς πρὸς ἓν γράμμα εἶναι ἴσος προφανῶς πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν δύο δοθέντων πολυωνύμων ὡς πρὸς αὐτὸ τὸ γράμμα.

β') Ἐάν δύο πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα ἀμφότερα κατὰ τὰς κατιούσας ἢ ἀνιούσας δυνάμεις γράμματός τινος, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ γινομένου αὐτῶν διατεταγμένου ὁμοίως προκύπτει ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν πρώτων ὅρων αὐτῶν, ὁ δὲ τελευταῖος ὅρος τοῦ γινομένου θὰ προκύψῃ ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν τελευταίων ὅρων τῶν δοθέντων πολυωνύμων· π.χ. τοῦ γινομένου $(7\chi^4-2\chi^3+6\chi^2+2\chi).(5\chi^2-5\chi+3)$ πρῶτος εἶναι ὁ $7\chi^4.5\chi^2=35\chi^6$ καὶ τελευταῖος ὁ $2\chi.3=6\chi$.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

1). Ἐκτελέσατε τοὺς κάτωθι πολλαπλασιασμούς.

α') $2\alpha.\ 5\gamma$, β') $(-2\alpha^3).\ 5\alpha^2\beta$, γ') $\left(\frac{2}{3}\alpha^2\beta\right)\cdot 5\alpha\beta^2$

δ') $0{,}25\alpha^2\beta^3.\ (-3{,}2\beta)$, ε') $0{,}2\chi^2\psi.\frac{2}{3}\chi\psi^3\cdot\left(\frac{5}{7}\chi^3\psi^4\right)\cdot$

2). Ὁμοίως τούς:

α') $5\chi^2-2\alpha^2\chi+7).(-3\alpha\beta)$, β') $\left(2\alpha^2\beta-\frac{5}{7}\alpha\beta\chi+7\right)(-2\chi^2)$

γ') $\left(0{,}2\alpha^3\chi-\frac{2}{3}\alpha^2\chi^2-1\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\alpha^2\chi\right)$

δ') $\left(\frac{2}{5}\alpha\chi^2\right)\cdot\left(-2\chi^2+2{,}5\alpha\chi-1\right)$

ε'.) $3\chi^2\psi.\left(5\chi^3\psi^2-\frac{2}{5}\chi\psi+0{,}2\right)\cdot\left(\frac{-3}{7}\alpha\chi^2\right)\cdot$

3) Ὁμοίως τούς:

α') $(15\alpha\beta^3-3\alpha^2\beta^2-6\alpha^3\beta).\ \frac{1}{3}\alpha^3\beta^3\gamma^4$

β') $(-5\alpha^5\chi^2\psi^3\omega)\cdot\left(\frac{\alpha\chi^2\psi\omega}{15}-\frac{\alpha^3\chi\psi^3\omega^2}{24}\right)$

γ') $\alpha^3\beta^3\gamma^3 \cdot [-(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-\alpha\beta\gamma]$.

4) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

α') $(2\chi^2\psi)^2$, β') $(-5\chi^2\psi^3)^3$

γ') $\left(\frac{2}{3}\alpha\chi^2\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\alpha^2\chi^5\right)\cdot\left(\frac{3}{7}\alpha^2\chi^3\right)^2$,

δ') $\left(-\frac{3}{5}\alpha^3\chi^2\right)\cdot\left[(0{,}2\alpha\chi^4)^3\cdot\left(-\frac{12}{5}\alpha^6\beta^8\right)^0\right]\cdot\alpha\chi^2$.

5). Νὰ διαταχθοῦν τὰ κάτωθι πολυώνυμα τὰ ὁποῖα εἶναι ὁμογενῆ ὡς πρὸς χ,ψ.

α') κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ

β') κατὰ τὰς ἀνιούσας τοῦ ψ

Τί παρατηρεῖτε καὶ διατί;

α') $5\chi^5+2\chi^2\psi^3-\chi^3\psi^2+\frac{7}{3}\chi^4\psi-\psi^5$

β') $2\chi^3\psi^3+3\chi^2\psi^4-\sqrt{2}\,\chi\psi^5+\frac{7}{5}\chi^4\psi^2+\psi^6$

γ') $2\alpha^2\chi\psi^3-2\alpha\chi^2\psi^2-0{,}7\chi^3\psi+\frac{2}{3}\alpha^3\chi^4$

δ') $2\alpha\beta^2\chi^3\psi^5+\chi^5\psi^3-\frac{2}{5}\alpha^2\beta\chi^2\psi^6-\psi^8$

6). Νὰ πολλαπλασιασθοῦν κατόπιν διατάξεως τὰ πολυώνυμα:

α') $2\chi-5\chi^2+7$ β') $7\chi^3-5\chi^2+8\chi+1$
$2\chi+3$ $\quad 2-3\chi$

γ') $7\chi^3+2\chi^4-5\chi+2\chi^2$ δ') $7\chi^3-3\chi+2$
$2\chi-3\chi^2+1$ $\quad 5\chi^2-7$

ε') $2\chi^4-3\chi-\frac{2}{5}\chi^2-\frac{1}{7}$
$2\chi^2-\frac{3}{5}\chi^4$

7). Ὁμοίως τά:

α') $\chi+\alpha+2\chi^3$ β') $\alpha\beta\chi^2+\alpha\psi-\beta^2\chi$
$\chi-\beta+3\chi^2$ $\quad \alpha\beta\psi-\beta^2\chi+\alpha^2\psi$

γ') $\chi^3+2\alpha\chi^2+3\alpha^2\chi-5\alpha^3$ δ') $\chi^2-5\alpha+3\alpha^3$
$3\chi-2\alpha$ $\quad 2\alpha^3\chi-3\alpha^4$

8). Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

α') $(2\chi-3).\ (5\chi-8).\ (4\chi-1)$.

β') $(5\chi-3)\ (\chi-8)+(2\chi-1)\ (\chi-9)$.

γ') $(2\chi-3).\ (5\chi-7).\ (\chi+6)$.

δ') $(\chi+\alpha)\ (\chi+\beta)+(\chi-\alpha)\ (\chi-\beta)$.

9). Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

α') $\left(\frac{2}{5}\alpha^2\beta - \frac{1}{2}\alpha^3+5\alpha\beta^2\right)\cdot\left(-\alpha\beta^2+\frac{1}{3}\beta^3-\frac{1}{2}\alpha^2\beta\right)$

β') $\left(\alpha^2\beta\gamma-\frac{1}{4}\alpha\beta\gamma^2+\frac{1}{3}\alpha^3-\beta^3\right)\cdot\left(\alpha^2\beta^3-\frac{1}{2}\beta^3\gamma-\alpha^2\right)$

γ') $(\alpha^2\chi\psi-\chi\psi^3+2\alpha\chi^4)\cdot(\alpha^3\psi-\chi^2\psi^2)$

δ') $(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)\cdot(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)$

ε') $(\alpha^2-\beta^2)\cdot(\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4)$.

10) Δίδονται τὰ πολυώνυμα :

$A=5\chi^3+2\chi^2-7\chi+6$, $B=2\chi^3-5\chi^2+1$, $\Gamma=9\chi^2-2\chi-3$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παραστάσεις :

α') Α.Β.Γ, β') (Α+Β). Γ, γ') Α+ΒΓ

δ') (Α–Β). Γ, ε) Α–ΒΓ, στ') 3Α (Γ–Β).

11). Τὰ κάτωθι γινόμενα τίνος βαθμοῦ εἶναι ὡς πρὸς χ, τίνος ὡς πρὸς ψ, τίνος ὡς πρὸς χ,ψ;

α') $(5\chi^2-5\chi^2\psi+9).(2\chi^3-5\chi^2\psi+5\psi^2)$

β') $(2\chi^3-2\chi^2\psi^2-2\chi\psi+9\psi^3).(5\chi^2-2\chi^2\psi-8\psi^3)$

γ') $(2\chi^4-\psi^4+2\chi^2\psi^6).(3\chi^2-9\chi^6+5\chi^4\psi^3)$

δ') $(3\alpha\beta\chi^6-2\alpha^2\chi^3\psi^4-9\beta\chi^2\psi).(\chi^2-2)$.

43. ***Ἀξιοσημείωτοι ταυτότητες.*** Ἀναφέρομεν ἐνταῦθα ταὐτότητας τινὰς τῶν ὁποίων γίνεται συχνὴ χρῆσις.

α') $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

β') $(\alpha+\beta)\ (\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

γ') $(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\ (\alpha-\beta)=\alpha^3-\beta^3$

δ') $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$.

Διὰ νὰ ἀποδειχθῇ τὸ ἀληθὲς τούτων ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἐὰν εἰς τὴν α'), γ') καὶ δ') ἀντικαταστήσωμεν τὸ β διὰ τοῦ –β λαμβάνομεν τὰς ταὐτότητας:

ε') $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

στ') $(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\ (\alpha+\beta)=\alpha^3+\beta^3$

ζ') $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ταὐτοτήτων δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν ἄλλας ἀντικαθιστῶντες τὰ α καὶ β μὲ μονώνυμα ἢ μὲ πολυώνυμα ἢ ἐν γένει μὲ οἱασδήποτε ἀλγεβρικὰς παραστάσεις.

Ἀσκήσεις

1). Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

α') $(\chi+3)^2$, β') $(\chi-1)^2$, γ') $(\chi+1)^3$, δ') $(\chi-5)^3$

ε') $(\chi^2+2\chi+4).(\chi-2)$, στ') $(\chi+2)\ (\chi-2)$

ζ') $(2\chi+\psi)^2$, η') $(3\chi-2\psi)^2$, θ') $(7\chi-\frac{1}{2}\psi)^3$.

ι') $(-2\chi+5)\,(-2\chi-5)$.

2) Ὁμοίως τῶν :

α') $(5\alpha\beta-8\gamma)^2$, β') $(5\alpha^2-6\beta^2)^2$, γ') $(2\chi^3+3\psi)^2$

δ') $(2\alpha^2\chi+1)^2$, ε') $\left(5\chi^2\psi+\dfrac{2}{5}\alpha\beta^2\right)\left(5\chi^2\psi-\dfrac{2}{5}\alpha\beta^2\right)$

στ') $(\alpha^4\chi^2-2\alpha^2\chi\psi^3+\psi^6).\,(\alpha^2\chi+\psi^3)$.

3) Ὁμοίως τῶν:

α') $(\alpha+\beta+\gamma)^2$, β') $(\alpha+2\beta+5\gamma)^2$, γ') $(\chi+\psi-\omega)^2$

δ') $(5\chi-3\psi^2+9\chi\psi)^2$

ε') $\left(-2\alpha^3\chi+\dfrac{3}{4}\alpha\beta^2\right)\cdot\left(\dfrac{3}{4}\alpha\beta^2+2\alpha^3\chi\right)$

στ') $(\chi+\psi+2\omega).(\chi-\psi+2\omega)$, ζ') $(5\chi^2-3\psi^2).(10\chi^2+6\psi^2)$

η') $(5\chi-3\psi^2+1)\cdot(-5\chi-3\psi^2+1)$.

4). Ὁμοίως τῶν:

α') $(5\alpha^2\chi-7\beta\psi^2)^2\,(\chi-2\psi)$

β') $(2\alpha^2\beta\chi+3\gamma\psi^2)^2-(5\alpha\beta^2\chi+2\psi)\,(5\alpha\beta^2\chi-2\psi)$

γ') $(1+2\alpha+3\beta+4\gamma).\,(1+2\alpha-3\beta-4\gamma)$

δ') $(\chi+\psi)^3-(\chi-\psi)^3-2\chi^2$

ε') $(1+2\alpha-3\beta)^2-(3\beta-2\alpha-1)^2$.

5). Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταὐτότητες:

α') $(\chi+\psi)^2-(\chi-\psi)^2=4\chi\psi$

β') $(\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)\,(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)^2=4\alpha^2$

γ') $(\chi+\psi^2)^3-3\,(\ +\psi^2)^2.\,(\chi-\psi^2)+3\,(\chi+\psi^2)\,(\chi-\psi^2)^2-$
$-(\chi-\psi^2)^3=8\psi^6$

δ') $(\alpha+\beta-\gamma)\,(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)+$
$+(\beta+\gamma-\alpha)\,(\beta+\gamma)=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

ε') $(\alpha-\beta)\,(\gamma+\delta)=(1+\alpha\gamma)\,(1-\beta\delta)-(1-\alpha\delta)(1+\beta\gamma)$

στ') $(\alpha^2+\beta^2)\,(\gamma^2+\delta^2)=(\alpha\gamma+\beta\delta)^2+(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$

ζ') $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\cdot(\delta^2+\varepsilon^2+\zeta^2)=(\alpha\delta+\beta\varepsilon+\gamma\zeta)^2+(\alpha\varepsilon-\beta\delta)^2+$
$+(\alpha\zeta-\gamma\delta)^2+(\beta\zeta-\gamma\varepsilon)^2$.

Αἱ δύο τελευταῖαι καλοῦνται ταὐτότητες τοῦ Lagrange.

44. **Διαίρεσις.** Π η λ ί κ ο ν (ἢ λ ό γ ο ς) ἀλγεβρικῆς παραστάσεως Α δι' ἄλλης τοιαύτης Β λέγεται τρίτη ἀλγεβρικὴ παράστασις Γ, ἥτις πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὴν Β δίδει τὴν Α. Κατὰ ταῦτα, μὲ οἱουσδήποτε ἀριθμοὺς καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὰ γράμματα, (τοὺς αὐτοὺς ὅμως καὶ εἰς τὰς τρεῖς παραστάσεις) εὑρίσκομεν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς Γ ἴσην μὲ τὸ πηλί-

κον τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τῆς Α διὰ τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τῆς Β.

45. Πᾶσαι αἱ ἰδιότητες αἱ ἀναφερόμεναι εἰς λόγους ἀριθμῶν, ἀναφέρονται καὶ εἰς λόγους ἀλγεβρικῶν παραστάσεων καὶ ἔχομεν οὕτω ἀνάλογον ἐπέκτασιν τῶν κανόνων διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν λόγων τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

46. ***Διαίρεσις μονωνύμου διὰ μονωνύμου.*** Μονώνυμόν τι λέγεται ***διαιρετὸν*** δι'ἄλλου, ἐὰν ὑπάρχῃ ἄλλο μονώνυμον, ὅπερ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ δεύτερον νὰ δίδῃ τὸ πρῶτον.

Τοῦτο συμβαίνει ἂν τὸ πρῶτον μονώνυμον περιέχῃ πάντα τὰ γράμματα τοῦ δευτέρου καὶ μὲ ἐκθέτην οὐχ μικρότερον. π.χ. τὸ μονώνυμον $7\alpha^8\beta^5\gamma^2$ εἶναι διαιρετόν διὰ τοῦ $-2\alpha\beta^2$.

Κατὰ ταῦτα, ὅταν μονώνυμόν τι εἶναι διαιρετὸν δι'ἄλλου, τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου θὰ εἶναι μονώνυμον ἔχον συντελεστὴν τὸ πηλίκον τῶν συντελεστῶν τῶν μονωνύμων καὶ ὡς παράγοντας τὰ γράμματα τοῦ διαιρετέου καὶ ἕκαστον τούτων μὲ ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν τῶν ἀντιστοίχων γραμμάτων π.χ. τὸ πηλίκον τῶν μονωνύμων $-8\alpha^5\beta^3\gamma^2$ διὰ τοῦ $4\alpha^2\beta^2$ εἶναι τὸ $-2\alpha^3\beta\gamma^2$ (προφανῶς θεωροῦμεν ὅτι ὁ διαιρέτης ἔχει τὸ γ ὡς παράγοντα εἰς τὴν μηδενικὴν δύναμιν).

Ἐὰν μονώνυμόν τι δὲν εἶναι διαιρετὸν δι'ἄλλου, ἀρκούμεθα εἰς τὸ νὰ ἐκτελῶμεν τὰς δυνατὰς ἁπλοποιήσεις. π.χ.

$$\left(-\frac{3}{4}\alpha^5\beta^2\gamma^2\right) : (-6\alpha^3\gamma^3) = (\alpha^2\beta^2) : 8\gamma = \frac{\alpha^2\beta^2}{8\gamma}.$$

47. ***Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ μονωνύμου.*** Πολυώνυμον λέγεται ***διαιρετὸν*** διὰ μονωνύμου, ὅταν ὑπάρχῃ ἕτερον πολυώνυμον, ὅπερ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ δοθὲν μονώνυμον νὰ δίδῃ τὸ δοθὲν πολυώνυμον.

Τοῦτο συμβαίνει, ἐὰν ἕκαστος ὅρος τοῦ πολυωνύμου εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ μονωνύμου.

Κατὰ ταῦτα, ἵνα διαιρέσωμεν πολυώνυμον διὰ μονωνύμου, διαιροῦμεν ἕκαστον ὅρον τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ μονωνύμου καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα μερικὰ πηλίκα· π.χ.

$$(5\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^6\beta^4 + 7\alpha^3\beta^2) : 2\alpha^2\beta = (5\alpha^2\beta^2 : 2\alpha^2\beta) + (-2\alpha^6\beta^4 : 2\alpha^2\beta) +$$
$$+ (7\alpha^3\beta^2 : 2\alpha^2\beta).$$

Ἀσκήσεις.

1). Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

α') $15\alpha^7\beta^3 : 3\alpha^4\beta$, β') $(-7\alpha^6\beta^2\gamma) : 5\alpha^3\beta$.

γ') $\left(\frac{-2}{3}\alpha^5\beta^2\chi^3\right) : \left(\frac{-3}{7}\alpha^3\beta^2\right)$.

δ') $(-7\alpha^7\beta^5\gamma^2\delta):\left(-\frac{1}{4}\alpha^3\delta\right)$

ε') $0{,}2\alpha^5\beta^3\gamma^4 : 3{,}2\alpha^2\beta^2\gamma^4$

στ') $\alpha^5\beta^4\gamma^3 : \left(\frac{-2}{5}\alpha^2\beta^2\right)(0{,}2\alpha^2\beta\gamma)$.

2) Ὁμοίως τῶν :

α') $5\alpha^4\beta^2\gamma^3 : 3\alpha^2\beta^5\gamma^7$

β') $\left(-\frac{2}{5}\alpha^3\beta^4\chi^4\right):\left(-\frac{2}{7}\alpha^4\beta^2\right)\cdot 5\alpha^3\beta^5\chi^2$

γ') $\left(-\frac{2}{5}\alpha^2\beta\gamma^3\right)\alpha\beta\gamma^2 : \frac{3}{4}\alpha^3\beta^5\cdot\left(-\frac{2}{9}\alpha\beta^4\right)$

δ') $\left[\alpha^3 : (-0{,}2\alpha^2\beta^5)\cdot\frac{5}{8}\alpha\beta^7\right]\cdot\left(-\frac{1}{4}\alpha\beta^3\right)$.

3) Ὁμοίως τῶν :

α') $(12\alpha^4-6\alpha^5-3\alpha^6) : 3\alpha^3$

β') $\left(\frac{2}{5}\alpha^7-\frac{5}{8}\alpha^3+2\alpha^5-\frac{1}{4}\alpha\right) : (-5\alpha)$

γ') $\left(\frac{5}{7}\alpha^3\beta^2+\frac{2}{5}\alpha^4\beta^5-7\alpha^2\beta^7+5\alpha^7\beta^4\right) : (-5\alpha^2)$

δ') $\left(-\frac{2}{5}\alpha^4\beta^5-20\alpha^6\beta^3+2\alpha^5\beta^5-\alpha^4\beta^2\right) : (-2\alpha^3\beta^2)$

ε') $\left(0{,}3\alpha^3\beta^5\gamma^2-\frac{3}{4}\alpha^4\beta\gamma^4\right) : (0{,}75\alpha^3\gamma)$.

4) Ὁμοίως τῶν:

α') $(\chi^3-5\chi^2\psi+\psi^2):\left(-\frac{2}{3}\chi\right)$

β') $\left(2\alpha\chi^5-\frac{1}{3}\alpha^2\chi^3+\alpha^3\chi^2+\frac{2}{7}\alpha^5\chi\right):\frac{1}{4}\alpha\chi$

γ') $\left(\chi^2\psi^3+\chi^2\psi^3-5\chi\psi^4-\frac{1}{8}\chi^3\psi^2-2\chi^2\psi\right):\frac{1}{2}\chi\psi$

δ') $[5\chi^3(\chi-\psi)^3-2\chi^2(\chi-\psi)^2+3\chi^4(\chi-\psi)]:7\chi^2(\chi-\psi)$

ε') $\left[\left(3\alpha^3-\frac{7}{8}\right)-\left(5\alpha^2-\frac{2}{4}\alpha^3+\frac{6}{7}\alpha^4\beta\right)\right]:\left(-\frac{2}{5}\alpha^2\right)$

στ') $[3\alpha(\alpha+\beta-\gamma)^3-5\alpha^2(\alpha+\beta-\gamma)\chi^2] : [-5\alpha^2(\alpha+\beta-\gamma)]$.

48. ***Διαίρεσις δύο πολυωνύμων.*** Έστωσαν δύο πολυώνυμα διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ. π.χ. τὰ

$$Α=15χ^5-14χ^4-χ^3+37χ^2-34χ+5$$
$$Β=5χ^3+2χ^2-6χ+1$$

Ζητοῦμεν τρίτον πολυώνυμον, ὅπερ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ Β νὰ δίδῃ τὸ Α. Ἂν διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, θὰ ἔχωμεν: $15χ^5:5χ^3=3χ^2$. Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν τὸ οὕτως εὑρεθὲν $3χ^2$ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, θὰ προκύψῃ πολυώνυμον βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ Α (ὅστις ἐδῶ εἶναι 5)· ἄς τὸ καλέσωμεν Α'. Θὰ ἔχωμεν κατὰ ταῦτα:

$$(15χ^5-14χ^4-χ^3+37χ^2-34χ+5)-(5χ^3+2χ^2-6χ+1)3χ^2=$$
$$=-20χ^4+17χ^3+34χ^2-34χ+5 \quad \text{δηλαδὴ}$$
$$Α'=-20χ^4+17χ^3+34χ^2-34χ+5, \quad \text{ὅθεν καὶ}$$
$$Α=Β.3χ^2+Α' \qquad (1)$$

Ὅπως εἰργάσθημεν μὲ τὰ Α καὶ Β ἂς ἐργασθῶμεν καὶ μὲ τὰ Α' καὶ Β. ἤτοι ἂς διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ Α' διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ Β· θὰ ἔχωμεν $-20χ^4:5χ^3=-4χ$. Παρατηροῦμεν πάλιν ὅτι τὸ $Α-Β(-4χ)$ θὰ εἶναι πολυώνυμον Α'' βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ 4 (ὅστις εἶναι βαθμὸς τοῦ Α'). Κατὰ ταῦτα:

$$(-20χ^4+17χ^3+34χ^2-34χ+5)-(5χ^3+2χ^2-6χ+1)(-4χ)$$
$$=25χ^3+10χ^2-30χ+5, \quad \text{δηλαδὴ}$$
$$Α''=25χ^3+10χ^2-30χ+5\cdot \quad \text{ὅθεν θὰ ἔχωμεν}$$
$$Α'=Β(-4χ)+Α'' \qquad (2)$$

Ἂς ἐργασθῶμεν ὁμοίως μὲ τὸ Α'' καὶ Β. ἔχομεν $25χ^3:5χ^3=5$. Ὅθεν

$$(25χ^3+10χ^2-30χ+5)-(5χ^3+2χ^2-6χ+1).\ 5=0 \quad \text{ἢ καὶ}$$
$$Α''=Β.\ 5 \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1), (2), (3) ἐξάγομεν

$$Α=Β.\ 3χ^2+Β(-4χ)+Β.\ 5 \quad \text{ἢ καὶ} \quad Α=Β.\ (3χ^2-4χ+5)$$

Εὑρέθη οὕτω πολυώνυμον, τὸ $3χ^2-4χ+5$, ὅπερ εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως Α:Β

Διάταξις τῆς πράξεως.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
15χ^5 & -14χ^4 & -χ^3 & +37χ^2 & -34χ & +5 & 5χ^3+2χ^2-6χ+1 \\
\hline
-15χ^5 & -6χ^4 & +18χ^3 & -3χ^2 & & & 3χ^2-4χ+5 \\
\hline
 & -20χ^4 & +17χ^3 & +34χ^2 & -34χ & +5 & \\
 & +20χ^4 & +8χ^3 & -24χ^2 & +4χ & & \\
\hline
 & & 25χ^3 & +10χ^2 & -30χ & +5 & \\
 & & -25χ^3 & -10χ^2 & +30χ & -5 & \\
\hline
\end{array}$$

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα εὕρομεν ὑπόλοιπον μηδὲν καὶ ἑπομένως ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία.

49. *Ἂς θεωρήσωμεν* ἤδη τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν προχωροῦντες κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον δὲν φθάνομεν εἰς ὑπόλοιπον μηδέν· π.χ. ἔστω ὅτι

$$A=6\chi^4-7\chi^3+13\chi^2+12\chi+2,\quad B=2\chi^3-5\chi^2+6\chi-1$$

Ἐργαζόμενοι ὡς ἄνω εὑρίσκομεν·

$A=B.(3\chi+4)+15\chi^2-9\chi+6$. Ἤτοι εὑρίσκομεν δύο πολυώνυμα Π καὶ Υ τοιαῦτα ὥστε $A=B\,\Pi+Y$ ὅπου τὸ Υ εἶναι πολυώνυμον βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ Β. Ἀγόμεθα οὕτως εἰς τὸ νὰ δώσωμεν τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως.

50. ***Διαίρεσις πολυωνύμου τινὸς Α δι' ἄλλου τοιούτου Β εἶναι ἡ εὕρεσις δύο ἄλλων πολυωνύμων Π καὶ Υ, ὅπου τὸ Υ νὰ εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ Β, τοιούτων ὥστε νὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα $A\equiv B\Pi+Y$ (τὸ σύμβολον $\equiv$ δηλοῖ ταυτότητα).***

Παραδείγματα:

α')

$$\begin{array}{rrr|l}
5\chi^3-3\chi^2 & & -28 & \chi-2 \\ \cline{4-4}
-5\chi^3+10\chi^2 & & & 5\chi^2+7\chi+14 \\ \cline{1-3}
7\chi^2 & & -28 & \\
-7\chi^2 & +14\chi & & \\ \cline{1-3}
 & +14\chi & -28 & \\
 & -14\chi & +28 & \\ \cline{1-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

β')

$$\begin{array}{r|l}
15\chi^4-19\chi^3\psi+11\chi^2\psi^2-3\chi\psi^3 & 5\chi^2-3\chi\psi \\ \cline{2-2}
-15\chi^4+9\chi^3\psi \qquad\qquad\qquad\qquad & 3\chi^2-2\chi\psi+\psi^2 \\ \cline{1-1}
-10\chi^3\psi+11\chi^2\psi^2-3\chi\psi^3 & \\
+10\chi^3\psi-\;6\chi^2\psi^2 \qquad\quad\; & \\ \cline{1-1}
+\;5\chi^2\psi^2-3\chi\psi^3 & \\
-\;5\chi^2\psi^2+3\chi\psi^3 & \\ \cline{1-1}
0 \qquad &
\end{array}$$

γ')

$$\begin{array}{r|l}
6\chi^4-25\chi^3+46\chi^2-45\chi+39 & 3\chi^3-5\chi^2+6\chi-7 \\ \cline{2-2}
-6\chi^4+10\chi^3-12\chi^2+14\chi \qquad & 2\chi-5 \\ \cline{1-1}
-15\chi^3+34\chi^2-31\chi+39 & \\
+15\chi^3-25\chi^2+30\chi-35 & \\ \cline{1-1}
9\chi^2-\;\chi+\;4 &
\end{array}$$

51. *Παρατηρήσεις.* α') Ἐὰν τὰ πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις καὶ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ πη-

λίκον, ἐκτὸς ἐὰν ἡ διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς (ὡς φαίνεται εἰς τὸ κατωτέρω παράδειγμα).

$$
\begin{array}{r|l}
3\chi-2\chi^2-\chi^3 & \chi-\chi^2 \\ \cline{2-2}
-3\chi+3\chi^2 & 3+\chi \\ \cline{1-1}
\chi^2-\chi^3 & \\
-\chi^2+\chi^3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

β') Ἐὰν ἡ διαίρεσις δὲν γίνεται ἀκριβῶς τότε ἢ δὲν δύναται ἡ πρᾶξις νὰ ἀρχίσῃ ὡς εἰς τὸ παράδειγμα· $(1-3\chi-2\chi^3):(\chi-\chi^2)$ ἢ ἡ πρᾶξις δύναται νὰ ἐξακολουθήσῃ ὅσον θέλομεν (ὡς φαίνεται κατωτέρω)·

$$
\begin{array}{r|l}
\chi-3\chi^2+4\chi^3 & \chi-\chi^2 \\ \cline{2-2}
-\chi+\chi^2 & 1-2\chi+2\chi^2 \\ \cline{1-1}
-2\chi^2+4\chi^3 & \\
+2\chi^2-2\chi^3 & \\ \cline{1-1}
2\chi^3 & \\
-2\chi^3+2\chi^4 & \\ \cline{1-1}
2\chi^4 \quad \text{κλπ.} &
\end{array}
$$

ἐὰν τότε σταματήσωμεν εἰς τὸ $2\chi^4$, ἔχομεν τὴν ταὐτότητα

$\chi-3\chi^2+4\chi^3=(\chi-\chi^2)\,(1-2\chi+2\chi^2)+2\chi^4$,

ἥτις δὲν συμφωνεῖ πρὸς τὸν δοθέντα ἤδη ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως, καθ' ὅσον τὸ $2\chi^4$ εἶναι βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ διαιρέτου.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:

α') $(2\chi^3-5\chi^2+7\chi+3):(\chi-2)$

β') $(6\chi^4-3\chi^3+5\chi-4):(\chi+1)$

γ') $(5\chi^6+2\chi^5-3\chi^4-\chi^3+3\chi^2-9):(\chi^2-8\chi)$

δ') $(6\chi-10\chi^2+2\chi^3-2):(2\chi+5)$

ε') $\left(\frac{2}{5}-\chi^4+\frac{2}{7}\chi^3-\frac{1}{4}\chi\right):(-5\chi^2-3)$.

2) Ὁμοίως:

α') $(5\chi^6-3\chi^5+2\chi^4-\chi^3+2\chi^2-1):(\chi^2-3\chi+2)$

β') $\left(\frac{2}{5}\chi+\frac{3}{4}\chi^3-\frac{2}{7}+\frac{7}{8}\chi^2\right):(7\chi^2-1+2\chi)$

γ') $\left(\frac{7}{8}\alpha^3-\frac{2}{7}\alpha+7\right):\left(2\alpha-\frac{1}{4}\right)$ δ') $(\alpha^5-3):(\alpha+2)$

ε') $(\alpha^7-3\alpha^4+7):(2\alpha^2-3)$.

3). Ὁμοίως:

α') $(5\alpha^4-3\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2-2\alpha\beta^3+\beta^4):(\alpha-2\beta)$

β') $(7\chi^4-3\chi^2\psi^2+3\psi^4-\chi^2\psi^3):(3\chi+5\psi)$

γ') $(2\chi^4\psi^2-5\chi^3\psi^3-7\chi^6):(\chi^2+3\psi^2)$

δ') $(\chi^4+\psi^4+\chi^2\psi^2):(\chi^2+\psi^2-\chi\psi)$

ε') $(\chi^4-\chi^2\psi^2+2\chi\psi-1):(\chi^2-\chi\psi+1)$

στ') $(2\chi^4-13\chi^3\psi+31\chi^2\psi^2-38\chi\psi^3+24\psi^4):(2\chi^2-3\chi\psi+4\psi^2)$

*52. ***Ὑπόλοιπον διαιρέσεως πολυωνύμου διὰ*** $\chi-\alpha$.

Ἔστω ἡ διαίρεσις $(\chi^3-5\chi^2+6\chi-2):(\chi-7)$.

Ἂν καλέσωμεν Π τὸ πηλίκον καὶ Υ τὸ ὑπόλοιπον, θὰ ἔχωμεν:

$$\chi^3-5\chi^2+6\chi-2\equiv \Pi.(\chi-7)+\Upsilon.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἰσότης αὐτὴ εἶναι ταὐτότης καὶ ὅτι τὸ Υ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ χ. Ὅθεν θέτοντες $\chi=7$ ἔχωμεν $7^3-5.7^2+6.7-2=\Upsilon$· ἤτοι *ἵνα εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου διὰ διωνύμου τῆς μορφῆς* $\chi-\rho$ $(\rho\neq 0)$, *ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον ὅπου* χ *τὸ* ρ. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὸ α $(\chi-\rho)$.

Ἀσκήσεις.

1). Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθοῦν αὗται.

α') $(5\chi^2+2\chi-1):(\chi-\alpha)$, β') $(\alpha^2+7):(\alpha-3)$

γ') $(\alpha^5+2^5):(\alpha+2)$

δ') $\left(\chi^4-\frac{3}{4}\chi^3-\frac{1}{5}\chi^2+\frac{2}{7}\chi\right):\left(\chi+\frac{1}{3}\right)$

ε') $\left(\chi^6-\frac{2}{7}\chi^4+0{,}04\chi^3-\chi^2+5\right):\left(\chi+\frac{2}{7}\right)$.

2) Ὁμοίως :

α') $(2\chi^3+3\chi^2-2\chi+5):(2\chi-3)$

β') $\left(\frac{2}{5}\chi^4-\frac{3}{8}\chi^2+\frac{1}{4}\chi+1\right):(3\chi+10)$

γ') $(\chi^4+2\alpha\chi^3-3\alpha^2\chi^2-2\alpha^4):(5\chi+\alpha)$

δ') $(\alpha^6+\beta^6):(\alpha-\beta)$, ε') $(3\alpha^5-2\beta^5):(\alpha+2\beta)$

στ') $(5\chi^3-3\alpha\chi^2+2\alpha^2\chi-5\alpha^3):(\chi+3\alpha)$.

* 53. *Ἀξιοσημείωτα πηλίκα*,

α') Ἡ διαίρεσις $(\chi^{\nu}-\psi^{\nu}):(\chi-\psi)$ δίδει ὑπόλοιπον πάντοτε μηδὲν καὶ πηλίκον

$$\chi^{\nu-1}+\psi\chi^{\nu-2}+\psi^2\chi^{\nu-3}+\ldots\ldots+\psi^{\nu-2}\chi+\psi^{\nu-1}$$

β') ἡ διαίρεσις $(\chi^{\nu}+\psi^{\nu}):(\chi-\psi)$ δίδει ὑπόλοιπον πάντοτε $2\psi^{\nu}$ καὶ πηλίκον.

$$^{\nu-1}+\psi\chi^{\nu-2}+\psi^2\chi^{\nu-3}+\ldots\ldots\ldots+\psi^{\nu-2}\chi+\psi^{\nu-1}$$

γ') ἡ διαίρεσις $(\chi^{\nu}-\psi^{\nu}):(\chi+\psi)$ δίδει ὑπόλοιπον μηδὲ ὅταν τὸ ν εἶναι ἄρτιον· καὶ $-2\psi^{\nu}$, ὅταν τὸ ν εἶναι περιττό. Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις δίδει πηλίκον:

$$\chi^{\nu-1}-\psi\chi^{\nu-2}+\psi^2\chi^{\nu-3}-\psi^3\chi^{\nu-4}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\psi^{\nu-1}$$

δ') Ἡ διαίρεσις $(\chi^{\nu}+\psi^{\nu}):(\chi+\psi)$ δίδει ὑπόλοιπον μηδὲν, ὅταν τὸ ν εἶναι περιττὸς καὶ $2\psi^{\nu}$ ὅταν τὸ ν εἶναι ἄρτιος. Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις δίδει πηλίκον:

$$\chi^{\nu-1}-\psi\chi^{\nu-2}+\psi^2\chi^{\nu-3}-\psi^3\chi^{\nu-4}+\ldots\ldots\ldots\pm\psi^{\nu-1}$$

Ἀσκήσεις

1). Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθοῦν αὗται:

α') $(\chi^3+\psi^3):(\chi-\psi)$, β') $(\chi^5-\psi^5):(\chi-\psi)$
γ') $(\chi^6+\psi^6):(\chi+\psi)$, δ') $(\chi^7-\psi^7):(\chi+\psi)$
ε') $(\chi^4+1):(\chi+1)$, στ') $(\chi^3+8):(\chi-2)$.

2) Ὁμοίως:

α') $(\chi^3-\alpha^3):(\chi-\alpha)$, β') $(\chi^3+\alpha^3):(\chi-\alpha)$
γ') $(\chi^3-\alpha^3):(\chi+\alpha)$, δ') $(\chi^3+\alpha^3):(\chi+\alpha)$
ε') $(\chi^4-\chi^4):(\chi-\alpha)$, στ') $(\alpha^4+\beta^4):(\alpha+\beta)$
ζ') $(\alpha^8+\beta^8):(\alpha-\beta)$, η') $(\alpha^4-1):(\alpha-1)$.

54. **Ἁπλοποίησις κλασμάτων καὶ πράξεις ἐπ' αὐτῶν.** Αἱ ἰδιότητες καὶ οἱ κανόνες τοὺς ὁποίους χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὴν ἁπλοποίησιν καὶ τὰς πράξεις κλασμάτων, τῶν ὁποίων οἱ ὅροι εἶναι ἀριθμοὶ (§15) χρησιμοποιοῦνται καὶ διὰ τὴν ἁπλοποίησιν καὶ τὰς πράξεις, ὅταν ἔχωμεν κλάσματα τῶν ὁποίων οἱ ὅροι εἶναι μονώνυμα ἢ πολυώνυμα π.χ. Ἐὰν Α, Β, Γ εἶναι πολυώνυμα αἱ δύο παραστάσεις $\frac{A}{B}$ καὶ $\frac{A.\Gamma}{B.\Gamma}$ εἶναι ἰσοδύναμοι, τοῦ-

τέστι διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν γραμμάτων λαμβάνουν τὰς αὐτὰς τιμάς· δὲν ἰσχύει ὅμως τοῦτο, ὅταν δώσωμεν εἰς τὰ γράμματα τιμὰς αἱ ὁποῖαι νὰ μηδενίζουν ὁ Β ἢ τὸ Γ. Ἐὰν τὰ γράμματα ἔχουν τιμὰς μηδενιζούσας τὸ Γ καὶ οὐχὶ τὸ Β, τὸ $\frac{A}{B}$ ἔχει ὡρισμένην ἀριθμητικὴν τιμήν, ἐνῷ τὸ $\frac{A.\Gamma}{B.\Gamma}$ δὲν ἔχει ἔννοιαν. Φροντίζομεν ἐννοεῖται τὰ διδόμενα πολυώνυμα νὰ ἀναλύωμεν ὅσῳ τὸ δυνατὸν εἰς γινόμενα παραγόντων

Π.χ. 1) ἵνα ἁπλοποιήσωμεν τὰ κλάσματα:

α') $\frac{8\chi^4-40\chi^3+48\chi^2}{2\chi^3-14\chi^2+24\chi}$ παρατηροῦμεν ὅτι

$8\chi^4-40\chi^3+48\chi^2=8\chi^2(\chi^2-5\chi+6)=8\chi^2(\chi^2-2\chi-3\chi+6)=$
$=8\chi^2[(\chi-2)\chi-(\chi-2)\cdot 3]=8\chi^2(\chi-2)(\chi-3)$ κα τὸ
$2\chi^3-14\chi^2+24\chi=2\chi(\chi^2-7\chi+12)=2\chi(\chi^2-3\chi-4\chi+12)=$
$=2\chi[(\chi-3)\chi-(\chi-3)4]=2\chi(\chi-3)(\chi-4).$

Ὥστε τὸ δοθὲν κλάσμα ἰσοῦται πρὸς τὸ

$$\frac{8\chi^2(\chi-2)(\chi-3)}{2\chi(\chi-3)(\chi-4)}=\frac{4\chi(\chi-2)}{\chi-4}$$

β') Ὁμοίως ἔχομεν

$$\frac{3\alpha^3-3\beta^3}{9\alpha^2-9\beta^2}=\frac{3(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{9(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}=\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3(\alpha+\beta)}$$

γ') $$\frac{\alpha^4-\beta^4}{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha-\beta)^2}=\frac{(\alpha+\ )(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha-\beta}$$

δ') $$\frac{\chi^6-27\psi^6}{\chi^4-6\chi^2\psi^2+9\psi^4}=\frac{(\chi^2)^3-(3\psi^2)^3}{(\chi^2-3\psi^2)^2}=\frac{(\chi^2)^2+\chi^2.3\psi^2+(3\psi^2)^2}{\chi^2-3\psi^2}$$

2). Ἵνα τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα:

α') $\frac{1}{3\alpha^3\beta^5\gamma^2}$, $\frac{2\alpha}{3\beta^4\gamma^3\delta}$, $\frac{3\beta}{2\alpha^4\gamma^4\delta^3}$

λαμβάνομεν τυχὸν κοινὸν πολ. τῶν παρονομαστῶν, τουτέστι μονώνυμον διαιρούμενον ὑπ' αὐτῶν, ἔστω ἐδῶ, τὸ $6\alpha^4\beta^5\gamma^4\delta^3$ *.

* Σημείωσις. Ἐξ ὅλων τῶν κοινῶν πολλαπλασίων τὰ κ. π. τῆς μορφῆς $K\alpha^4\beta^5\gamma^4\delta^3$, ὅπου Κ τυχὼν ὡρισμένος ἀριθμός, ἔχουν τοὺς μικροτέρους ἐκθέτας. Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι ὁ $K\alpha^4\beta^5\gamma^4\delta^3$ εἶναι τὸ ἐλάχιστον κ.π. τῶν δοθέντων μονωνύμων. Ἐὰν ἔχωμεν μονώνυμα μὲ συντελεστὰς ἀκεραίους ὅπως τ' ἀνωτέρω συμφέρει ἐνίοτε ν' ἀντικαθιστῶμεν τὸ Κ μὲ τὸ ἀριθμητικὸν ε. κ. π, τῶν συντελεστῶν· π.χ. ἐνταῦθα ἀντὶ τοῦ Κ λαμβάνομεν 6 καὶ μεταχειριζόμεθα τὸ $6\alpha^4\beta^5\gamma^4\delta^3$ ὡς ε. κ. π. Κοινὸν πολλαπλάσιον πολυωνύμων λέγεται ἕτερον πολυώνυμον διαιρούμενον ὑφ' ὅλων τῶν δοθέντων πολυωνύμων.

Διαιροῦμεν τοῦτο δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν καὶ πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα τὰ ὁποῖα εἶναι $2\alpha\gamma^2\delta^3$, $2\alpha^4\beta\gamma\delta^2$, $3\beta^5$ καὶ εὑρίσκομεν

$$\frac{2\alpha\gamma^2\delta^3}{6\alpha^4\beta^5\gamma^4\delta^3}, \quad \frac{4\alpha^5\ \gamma\delta^2}{6\alpha^4\beta^5\gamma^4\delta^3}, \quad \frac{9\beta^6}{6\alpha^4\beta^5\gamma^4\delta^3}$$

β') $\dfrac{5\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \dfrac{3\alpha^2\beta}{5\alpha-5\beta}, \quad \dfrac{\beta^2}{3\alpha^2-3\beta^2}.$

Τὸ 3.5 (α+β) (α-β) διαιρούμενον δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν δίδει 3.5 (α–β), 3 (α+β), 5. Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους τῶν κλασμάτων ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα λαμβάνομεν ὁμώνυμα κλάσματα.

Ἀσκήσεις

1) Ν' ἁπλοποιηθῶσι τὰ κλάσματα:

α') $\dfrac{16\alpha^4\beta^2\chi^4\psi^2}{12\alpha^3\beta^3\chi^5\psi}$, β') $\dfrac{5\alpha\beta^7\gamma^4\delta}{10\alpha^4\beta^6\gamma^8}$, γ') $\dfrac{-10\chi^5\psi^4}{\chi^2-\chi\psi}$

δ') $\dfrac{\chi^2-2\chi+1}{\chi^2-1}$, ε') $\dfrac{\alpha\chi+3\chi-\alpha\chi^2-\beta\chi^2}{\alpha\chi-\beta\chi-\alpha\chi^2+\beta\chi^2}$

2). Ὁμοίως:

α') $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}$, β') $\dfrac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^3-\beta^3}$, γ') $\dfrac{15\alpha\chi^3-15\alpha\beta\psi}{15\alpha\beta\chi+5\alpha\psi^2}$

δ') $\dfrac{3\alpha^2\beta\chi^2+\alpha^2\beta^3}{\alpha^3\beta^2+3\alpha\beta^2\chi^2}$, ε') $\dfrac{18\alpha^3\chi^4+6\alpha^2\chi^5}{12\alpha^2\chi^7+30\alpha^4\chi^3}$.

3) Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα:

α') $\dfrac{\psi}{\chi}, \dfrac{\psi^2}{\chi^2}, \dfrac{\psi^3}{\chi^3}, \dfrac{\psi^4}{\chi^4}$, β') $\dfrac{\chi}{\psi^2\omega}, \dfrac{\psi}{\chi^2\omega}, \dfrac{\omega}{\chi^2\psi}$

γ') $\dfrac{\alpha}{\alpha^4-\beta^4}, \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2}, \dfrac{1}{\alpha^2-\beta^2}$

δ') $\dfrac{\chi-1}{\chi+1}, \dfrac{\chi+1}{\chi^2+1}, \dfrac{1}{\chi^2-1}$

ε') $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}, \dfrac{2\alpha^3-3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}, \dfrac{1}{\alpha^3-\beta^3}.$

4) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

α') $\dfrac{5\chi^2\omega}{2\alpha}+\dfrac{7\chi\psi^2}{2\alpha}+\dfrac{\chi\psi}{2\alpha}$

β') $\dfrac{2\chi^2}{5\alpha\beta\psi^3}+\dfrac{7\psi^2}{3\alpha^2\beta^5\chi^2}+\dfrac{\chi\psi}{2\alpha\beta}$

γ') $\dfrac{6\alpha}{3\beta-3}-\dfrac{5\beta}{5\beta+5}$, δ') $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha(\alpha-1)}-\dfrac{\alpha-\beta}{\beta(\alpha+1)}$

ε') $\dfrac{\chi-1}{\chi+1}+\dfrac{\chi+1}{\chi-1}+\dfrac{4\chi}{\chi^2-1}$

στ' $\dfrac{1}{\alpha-\beta}+\dfrac{1}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$.

5) Ὁμοίως:

α') $\dfrac{1}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}+\dfrac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{1}{(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}$

β') $\dfrac{1}{(\alpha-\beta)^2}-\dfrac{\delta}{(\beta-\alpha)^2}+\dfrac{\delta-1}{\alpha-\beta}-\dfrac{\varepsilon+1}{\beta-\alpha}$

γ') $\dfrac{\varepsilon+\rho}{(\varepsilon-\sigma)(\rho-\varepsilon)}+\dfrac{\rho+\sigma}{(\sigma-\ )(\sigma-\rho)}+\dfrac{\sigma+\varepsilon}{(\varepsilon-\rho)(\rho-\sigma)}$.

6) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:

α') $\dfrac{5\chi^2\psi}{3\alpha\beta}\cdot\dfrac{7\chi^3\psi}{17\alpha^4\beta^5}$, β') $\dfrac{3\alpha^4\beta^5}{5\chi\psi^3}:\dfrac{2\chi\psi^2}{21\alpha^4\beta^7}$

γ') $\alpha+\dfrac{\beta^2}{\alpha}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$, δ') $\dfrac{\alpha^2\chi^2}{\psi^2}\cdot\dfrac{\chi\psi}{\alpha(\chi+\psi)}\cdot\dfrac{\chi^2-\psi^2}{\alpha\chi\psi}$

ε') $\dfrac{\alpha\chi+\chi^2}{2\beta-\gamma\chi}\cdot\dfrac{2\beta\chi-\gamma\chi^2}{(\alpha+\chi)^2}$

στ') $\left(\chi-\dfrac{\chi-\psi}{1+\chi\psi}\right):\left(1+\dfrac{\chi(\chi-\psi)}{1+\chi\psi}\right)$.

ζ') $$\dfrac{\dfrac{\chi}{\chi-\alpha}+\dfrac{\alpha}{\chi+\alpha}}{\dfrac{\chi}{\chi-\alpha}-\dfrac{\alpha}{\chi+\alpha}}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

55. **Ἀριθμητικαὶ ἐξισώσεις.** *Ἀριθμητικὴ ἐξίσωσις μὲ ἕνα ἄγνωστον* χ λέγεται τὸ σύνολον δύο παραστάσεων χωριζομένων διὰ τοῦ ἴσον, (=), τῶν ὁποίων ἡ μία τοὐλάχιστον περιέχει χ καὶ αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν διὰ τιμάς τινας μόνον τοῦ χ.

Ἀριθμητικὴ ἐξίσωσις μὲ περισσοτέρους ἀγνώστους χ,ψ,ω,.. λέγεται τὸ σύνολον δύο παραστάσεων χωριζομένων διὰ τοῦ ἴσον, ἐὰν πε ιέχωνται οἱ ἄγνωστοι οὗτοι χ,ψ,ω...... καὶ ἐὰν αἱ παραστάσεις αὗται λαμβάνουν τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν διὰ μερικὰς μόνον τιμὰς τῶν ἀγνώστων τούτων.

56. Αἱ δύο παραστάσεις λέγονται *μέλη* τῆς ἐξισώσεως π.χ. ἡ $8χ-4=3χ+6$ εἶναι ἐξίσωσις μὲ ἕνα ἄγνωστον. Τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως, λαμβάνουν τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν διὰ $χ=2$ οὐχὶ ὅμως διὰ $χ=3$· ἡ ἐξίσωσις $χ+6=ψ+10-3χ$. εἶναι ἐξίσωσις μὲ δύο ἀγνώστους χ,ψ. Τὰ μέλη αὐτῆς λαμβάνουν ἴσας ἀριθμητικὰς τιμὰς διὰ $χ=1$, $ψ=0$, ἐπίσης διὰ $χ=2$, $ψ=4$ κλπ. δὲν λαμβάνουν ὅμως ἴσας ἀριθμητικὰς τιμὰς διὰ πᾶν σύστημα τιμῶν τῶν χ,ψ· π.χ. διὰ $χ=0$, $ψ=0$.

Αἱ μερικαὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων αἱ δίδουσαι ἴσας ἀριθμητικὰς τιμὰς εἰς τὰ μέλη ἐξισώσεώς τινος καλοῦνται λ ύ σ ε ι ς ἢ καὶ ρ ί ζ α ι τῆς ἐξισώσεως. Οὕτως εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα λύσις εἶναι ἡ $χ=2$, εἰς τὸ δεύτερον ἡ $χ=1$, $ψ=0$, ἡ $χ=2$, $ψ=4$ κλπ.

57. Ὅταν, ἀντικαθιστῶντες τὰ γράμματα χ,ψ,ω..... τὰ περιεχόμενα εἰς ἐξίσωσιν τινὰ μὲ ἀριθμούς, λαμβάνομεν ἀριθμητικὰς τιμὰς ἴσας λέγομεν ὅτι ἐ π α λ η θ ε ύ ο μ ε ν *τὴν ἐξίσωσιν*. Κατὰ ταῦτα αἱ λύσεις τῶν ἐξισώσεων εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν γραμμάτων αἱ ἐπαληθεύουσαι ταύτας.

58. Δύο ἐξισώσεις λέγονται ἰ σ ο δ ύ ν α μ ο ι, ὅταν ἔχουν τὰς αὐτὰς λύσεις. Κατὰ ταῦτα· ἵνα δύο ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμοι πρέπει, πᾶσα λύσις τῆς πρώτης νὰ εἶναι λύσις καὶ τῆς δευτέρας καὶ ἀντιστρόφως πᾶσα λύσις τῆς δευτέρας νὰ εἶναι λύσις καὶ τῆς πρώτης.

59. ***Ἰδιότητες ἐξισώσεων μὲ ἕνα ἄγνωστον.***

α') ***Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος·*** π.χ. ἡ ἐξίσωσις $5χ+3=2χ-5$

εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $5χ+3+7=2χ-5+7$.

διότι, ἂς ἀντικαταστήσωμεν τὸ χ μὲ τυχόντα ἀριθμὸν ἀλλὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις, τότε ἐὰν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς πρώτης προκύπτουν ἀριθμοὶ ἴσοι καὶ ἀπὸ τὰ μέλη τῆς δευτέρας θὰ προκύψουν ἴσοι ἀριθμοὶ καὶ ἐὰν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς πρώτης προκύψουν ἄνισοι ἀριθμοὶ καὶ ἀπὸ τὰ μέλη τῆς δευτέρας θὰ προκύψουν ὁμοίως ἄνισοι.

β') ***Ἐὰν ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐξισώσεως ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος·***

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἂν προσθέσωμεν (ἢ ἀφαιρέσωμεν) εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως πολυώνυμον ὡς πρὸς χ, π.χ. τὸ $5χ^2+3χ+8$, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ὅρον τινὰ ἐκ τοῦ ἑνὸς μέλους ἐξισώσεως εἰς τὸ ἕτερον, ἀλλάσσοντες τὸ σημεῖον· π.χ. ἡ ἐξίσωσις $7\chi^3-5\chi+7=10\chi^2+5\chi-2$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $7\chi^3-5\chi+7-10\chi^2+2=5\chi$.

γ΄) ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (διάφορον τοῦ μηδενὸς) προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος.*** π.χ. ἡ ἐξίσωσις $3\chi+5=2\chi+6$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $(3\chi+5).\ 4=(2\chi+6).4.$ Διότι ἐὰν διὰ τιμήν τινα τοῦ χ τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως δίδουν ἴσους ἀριθμούς, διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ χ καὶ τὰ μέλη τῆς δευτέρας θὰ δώσουν ἴσους ἀριθμοὺς καὶ ἐὰν τὰ μέλη τῆς πρώτης δίδουν ἀνίσους ἀριθμοὺς καὶ τὰ μέλη τῆς δευτέρας θὰ δώσουν ἀνίσους.

δ΄) ***Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεώς τινος δι᾽ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διαφόρου τοῦ μηδενὸς προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος πρὸς τὴν πρώτην.***

Παραδείγματα:

α΄) Ἡ ἐξίσωσις $\frac{3\chi}{2}-\frac{2\chi^3}{5}+\frac{3}{4}=1-\chi^3$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\frac{3\chi}{2}\cdot 20-\frac{2\chi^3}{5}\cdot 20+\frac{3}{4}\cdot 20=(1-\chi^3).20$ ἢ καὶ $3\chi.10-2\chi^3.4+3.5=(1-\chi^3)20.$

β΄) Ἡ ἐξίσωσις $10\chi-6+14\chi^2=20$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $5\chi-3+7\chi^2=10.$

60. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα ἐσχηματίσαμεν ἐ ίσωσιν ἰσοδύναμον μὲ τὴν δοθεῖσαν, ἀλλὰ ἄνευ παρονομαστῶν. Ἡ πρᾶξις αὐτὴ διὰ τῆς ὁποίας, δοθείσης ἐξισώσεως μὲ παρονομαστὰς εὑρίσκομεν ἄλλην ἰσοδύναμον πρὸς ταύτην ἀλλ᾽ ἄνευ παρονομαστῶν, καλεῖται ἀ π α λ ο ι φ ὴ τ ῶ ν π α ρ ο ν ο μ α σ τ ῶ ν.

Ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος διὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

61. ***Εὑρίσκομεν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν καὶ πολλαπλασιάζομεν ἐπ᾽ αὐτὸ πάντας τοὺς ὅρους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως καὶ ἁπλοποιοῦμεν.*** Συνήθως πρὸς εὐκολίαν τῶν πράξεων διαιροῦμεν προηγουμένως τὸ κ.π. δι᾽ ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν καὶ πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμητὰς ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα.

62. Ὅταν μεταφέρωμεν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ ἑνὸς μέλους ἐξισώσεως εἰς τὸ ἄλλο, τότε τὸ ἓν μέλος θὰ εἶναι μηδέν· ἐὰν τότε τὸ ἕτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως εἶναι πολυώνυμον βαθμοῦ

ν θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ***νυοστοῦ βαθμο***
π.χ. ἡ ἐξίσωσις $2\chi^3-7\chi^2=4-6\chi+2\chi^3$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ.
Παρατηρήσεις.

α') Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $8\chi+4=9\chi-14$. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ $\chi-4$, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $(8\chi+4)(\chi-4)=(9\chi-14)(\chi-4)$. Πᾶσα λύσις τῆς πρώτης εἶναι λύσις καὶ τῆς δευτέρας· οὕτω ὁ 18, ὁ ὁποῖος ἀντικαθιστῶν τὸ χ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς πρώτης δίδει ἀριθμητικὰς τιμὰς 148 καὶ 148, δίδει ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν μελῶν τῆς δευτέρας $148\cdot(18-4)$ καὶ $148\cdot(18-4)$ ἤτοι ὁ 18 εἶναι καὶ λύσις τῆς δευτέρας. Ἀλλὰ τὸ ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει· ἤτοι ὑπάρχει λύσις τῆς δευτέρας, ἡ ὁποία δὲν εἶναι λύσις τῆς πρώτης. Οὕτω διὰ $\chi=4$ ἔχομεν ἀριθμητικὰς τιμὰς ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς δευτέρας τοὺς ἀριθμοὺς 0 καὶ 0, ἐνῶ ἐκ τῶν μελῶν τῆς πρώτης ἔχομεν 36 καὶ 22.

β') Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{2\chi-7}{\chi-1}-\dfrac{6\chi+3}{3\chi-5}=0$

αὕτη γράφεται: $\dfrac{(2\chi-7)(3\chi-5)-(6\chi+3)(\chi-1)}{(\chi-1)(3\chi-5)}=0$

ἢ κα $\dfrac{-28\chi+38}{(\chi-1)(3\chi-5)}=0$

Ἵνα ἀπὸ μίαν τιμὴν τοῦ χ προκύψῃ μερικὴ τιμὴ τοῦ πρώτου μέλους τὸ μηδὲν πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ μερικὴ τιμὴ τοῦ ἀριθμητοῦ νὰ εἶναι μηδέν. (ἀρκεῖ νὰ μὴ γίνεται μηδὲν διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν καὶ ὁ παρονομαστής).

Κατὰ ταῦτα λύσις τῆς δοθείσης θὰ εἶναι ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως $-28\chi+38=0$, δηλαδὴ $\chi=\dfrac{19}{14}$ καὶ μόνον αὕτη. Οὕτω ἀπὸ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἥτις εἶχε παρονομαστὰς ἐφθάσαμεν εἰς τὴν ἄνευ παρονομαστῶν $-28\chi+38=0$. Λέγομεν πάλιν ὅτι ἐκάμαμεν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν.

63. ***Λύσις ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.*** Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{5\chi}{3}+\dfrac{\chi+1}{5}=2-\dfrac{2\chi-3}{4}$· ἀπαλείφοντες τοὺς παρονομαστὰς λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $100\chi+12\chi+12=120-30\chi+45$· αὕτη πάλιν εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $100\chi+12\chi+30\chi=120+45-12$

ἢ $142\chi=153$ καὶ ἑπομένως $\chi=\dfrac{153}{142}$.

64. Ὅπως καὶ εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἵνα λύσωμεν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

α') ***Ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς*** (ἂν ὑπάρχωσι τοιοῦτοι)

β') ***Ἐκτελοῦμεν τὰς σημειωμένας πράξεις***

γ') ***Μεταφέρομεν τοὺς ἀγνώστους εἰς τὸ ἓν μέλος τῆς ἐξισώσεως, συνήθως τὸ πρῶτον καὶ τοὺς γνωστοὺς εἰς τὸ ἄλλο***

δ') ***Κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ***

ε') ***διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου.***

65. ***Ἐπαλήθευσις ἐξισώσεως*** λέγεται ἡ ἐργασία διὰ τῆς ὁποίας δοκιμάζομεν ἐὰν ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ ἀγνώστου ἐπαληθεύῃ τὴν ἐξίσωσιν.

Παραδείγματα

α') $\frac{5x}{3}+\frac{5(x-2)}{3x}=7-\frac{5(x+3)}{5x}+\frac{5(x-1)}{3}$

ε.κ.π. εἶναι τὸ $15x$

$$\overbrace{\frac{5x}{3}}^{5x}+\overbrace{\frac{5(x-2)}{3x}}^{5}=\overbrace{\frac{7}{1}}^{15x}-\overbrace{\frac{5(x+3)}{5x}}^{3}+\overbrace{\frac{5(x-1)}{3}}^{5x} \quad \text{ἢ}$$

$25x^2+25(x-2)=105x-15(x+3)+25x(x-1)$ ἢ

$25x^2+25x-50=105x-15x-45+25x^2-25x$ ἢ

$25x^2+25x-105x+15x-25x^2+5x=-45+50$ ἢ

$-40x=5$ ἢ $40x=-5$ καὶ ἐπομένως $x=-\frac{5}{40}=-\frac{1}{8}$.

β') $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2+x}$ ε.κ.π. εἶναι τὸ x^2+x

$$\overbrace{\frac{1}{x}}^{x+1}-\overbrace{\frac{1}{x+1}}^{x}=\overbrace{\frac{2}{x^2+x}}^{1}$$ ἢ $x+1-x=2$, ἢ $x-x=2-1$,

ἢ $0=1$, ὅπερ ἄτοπον. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις αὕτη δὲν ἔχει λύσιν.

γ') $5x+\frac{3x}{2}=7x-\frac{x}{2}$ Ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν

$10x+3x=14x-x$ ἢ $10x+3x-14x+x=0$ ἢ $0=0$.

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, εἶναι ταυτότης.

Εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα εὑρέθη μία λύσις. Εἰς τὸ δεύτερον δὲν εὑρίσκεται καμμία· διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀ δ ύ ν α τ ο ς. Εἰς τὸ τρίτον εὑρίσκομεν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως, λέγομεν δι' αὐτὸ ὅτι εἶναι ἀ π ρ ο σ δ ι ό ρ ι σ τ ο ς ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου.

Δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ παρουσιασθῇ ἄλλη περίπτωσις, ὅταν ἔχωμεν πρὸς λύσιν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἂς θεωρήσωμεν τὴν γενικὴν μορφὴν ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ, εἰς τὴν ὁποίαν φθάνομεν, ὅταν ἀπαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς σημειωμένας πράξεις.

Αὕτη εἶναι $\alpha\chi+\beta=0$. Παρατηροῦμεν ὅτι,
ἐὰν α διάφορον τοῦ μηδενός, αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\chi=-\frac{\beta}{\alpha}$. ὥστε τότε ὑπάρχει μία λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ μία μόνον,
ἐὰν $\alpha=0$, ἡ $\alpha\chi+\beta=0$ καταντᾷ $0.\chi+\beta=0$ καὶ τότε ἢ β διάφορον τοῦ μηδενός, ὁπότε δὲν ὑπάρχει λύσις, διότι μὲ οἱονδήποτε ἀριθμὸν καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸ χ, θὰ ἔχωμεν $0=-\beta$ ὅπερ ἀδύνατον
ἢ $\beta=0$, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις γίνεται $0\chi+0=0$ ἢ $0=0$ καὶ ἔχομεν ἀπροσδιοριστίαν.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

α') $4\chi+12\chi=\chi+15$, β') $34\chi-5=9\chi+51$
γ') $70-2\chi-3\chi=7\chi-2$, δ') $\chi=9+7-5\chi-10$
ε') $3\chi-(\chi-7)=\chi+15$, στ') $3(\chi+1)-2\chi=93$
ζ') $25-6(\chi-6)=20-(2\chi-13)$
η') $2(9-\chi)+5(2\chi+3)=81$.

2) Ὁμοίως αἱ:

α') $\frac{\chi}{9}-4=10-\chi$, β') $5+\frac{\chi}{2}=\chi-5$

γ') $8-\frac{\chi}{9}=\frac{\chi+4}{3}$

δ') $19-\left(7+\frac{\chi}{8}\right)=\frac{\chi}{2}+7$ ε') $5\chi-5\frac{1}{2}=7\chi-7\frac{1}{2}$

στ') $\left[14\frac{3}{4}+\frac{3\chi+1}{28}-\frac{\chi+5}{15}\right]7=9\chi+19$

ζ') $\frac{1}{2}(5\chi+1)-\frac{1}{3}(4\chi+5)=\frac{1}{4}(3\chi-1)-\frac{1}{20}(6\chi+4)$

η') $\frac{(3\chi+5)}{16}-\frac{4(2\chi+4)}{9}-\left(\frac{9-\chi}{2}+\frac{\chi-7}{12}\right)=\chi-15.$

3). Ὁμοίως αἱ:

α') $(\chi+4)^2-\chi(\chi+6)=22$

β') $\left(\frac{2\chi-3}{3}\right)^2-\frac{5\chi-7}{2}=3+\frac{4(\chi^2-1)}{9}$

γ') $\frac{5\chi-6}{2}\cdot\frac{2\chi-7}{4}-\frac{5\chi^2-3}{4}=\frac{2\chi-5}{7}$

δ') $\left(\chi-\frac{1}{2}\right)\left(\chi+\frac{1}{3}\right)=5\left(\chi+\frac{2}{7}\right)\left(\chi-\frac{1}{4}\right)-4\chi^2$

ε') $\left(4\chi-\frac{1}{2}\right)\left(5\chi+\frac{3}{4}\right)-\left(5\chi+\frac{3}{4}\right)=$

$=\left(2\chi-\frac{1}{2}\right)\left(10\chi-\frac{3}{2}\right).$

4). Ὁμοίως αἱ:

α') $\frac{4}{\chi}=\frac{5}{\chi}-1$ β') $\frac{20}{\chi-1}-\frac{15}{\chi-1}=1$

γ') $\frac{42}{\chi}-\frac{1}{\chi}+\frac{1}{3\chi}=20\frac{2}{3}$

δ') $\frac{1}{9\chi}+\frac{1}{12\chi}+\frac{1}{8\chi}+\frac{1}{24\chi}-\frac{13}{72}=0$

ε') $\frac{1}{\chi+2}+\frac{7}{3(\chi+2)}=\frac{2}{3}$

στ') $\frac{5}{2}-\frac{1}{\chi+3}=\frac{4\chi+5}{\chi+3}$ ζ') $\chi-\frac{1}{\chi+1}=\frac{\chi^2}{\chi+1}$

η') $\frac{3\chi+2}{5\chi-6}=\frac{6\chi-2}{10\chi+1}$

5) Ὁμοίως αἱ:

α') $\frac{5}{2\chi}-\frac{3}{5\chi}=\frac{7}{\chi}$ β') $\frac{7\chi+16}{21}-\frac{\chi+8}{4(\chi+10)}=\frac{23}{70}+\frac{\chi}{3}$

γ') $\frac{3}{\chi+1}-\frac{2}{\chi-1}=\frac{1}{\chi^2-1}$

δ') $\dfrac{5}{2\chi-3}-\dfrac{3}{4\chi-6}-\dfrac{1}{10\chi-15}=\dfrac{1}{2}$

ε') $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{\chi}\right)=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{\chi}\right)$

στ') $\dfrac{\chi-3}{\chi-7}-\dfrac{2-4\chi}{\chi+3}=\dfrac{5\chi-7}{\chi-7}-\dfrac{1}{\chi+3}$

ζ') $\dfrac{5\chi}{\chi^2+2\chi+1}-\dfrac{5}{\chi+1}+\dfrac{7}{3\chi^2+6\chi+3}=0.$

6. Ὁμοίως αἱ

α') $(\chi+1)^3=\chi^3+1+3\chi(\chi+1)$

β') $\dfrac{1}{\chi+2}+\dfrac{1}{\chi}=\dfrac{2.(\chi+1)}{\chi(\chi+2)}$

γ') $2\chi(6\chi-1)=(3\chi+1)(4\chi-2)$

δ') $(\chi+1)^2+(\chi-2)^2=(\chi-1)(\chi+5)+\chi^2$

ε') $(\chi-1)^2+(\chi-3)^2+(\chi-5)^2=3(\chi+15)(\chi-7)$

στ') $\dfrac{\chi}{\chi+1}+\dfrac{2\chi}{2\chi+3}-\dfrac{2\chi}{\chi+2}=\dfrac{3\chi^2+4}{(\chi+1)(2\chi+3).(\chi+2)}.$

66. **Ἐγγράμματοι ἐξισώσεις.** Ἔστωσαν αἱ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις:

$3\alpha\chi^4+5\alpha\beta\chi-\gamma$ καὶ $14\alpha\chi^2-9\beta^3$

καὶ ἔστω ὅτι ζητοῦμεν μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν μὴ περιέχουσαν γράμματα διάφορα τῶν α,β,γ, ἡ ὁποία ἀντικαθιστῶσα τὸ χ εἰς τὰς δοθείσας παραστάσεις νὰ δίδῃ ἰσοδυνάμους ἀλγεβρικὰς παραστάσεις. Λέγομεν τότε ὅτι ζητοῦμεν ***λύσιν τῆς ἐγγραμμάτου ἐξισώσεως*** μὲ ἕνα ἄγνωστον

$$3\alpha\chi^4+5\alpha\beta\chi-\gamma=14\alpha\chi^2-9\beta^3.$$

67. Ἡ λύσις τῶν πρωτοβαθμίων ἐγγραμμάτων ἐξισώσεων γίνεται ὅπως καὶ τῶν ἀριθμητικῶν τοιούτων π.χ. ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi-\gamma=\beta\chi+4\delta$. Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν

$\alpha\chi-\beta\chi=4\delta+\gamma$, ἢ $(\alpha-\beta)\chi=4\delta+\gamma$ ἢ καὶ $\chi=\dfrac{4\delta+\gamma}{\alpha-\beta}.$

Δι' ἕκαστον σύστημα τιμῶν τῶν α,β,γ,δ, ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις καθίσταται ἀριθμητικὴ ἔχουσα λύσιν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως $\dfrac{4\delta+\gamma}{\alpha-\beta}$. Εὐνόητον εἶναι ὅτι τ' ἀνωτέρω ἰσχύουν ἐφ' ὅσον αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ αἱ διδόμεναι εἰς τὰ α καὶ β δὲν καθιστοῦν τὸν παρονομαστὴν ἴσον μὲ τὸ μηδέν.

Ἔστω ἐπίσης ἡ $\frac{3\chi}{2\alpha}-\frac{5(\chi-\beta)}{3\beta^2}=1-\frac{7\chi-3\alpha}{2\alpha\beta}$ θεωροῦντες ὡς ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τὸ $6\alpha\beta^2$ ἔχομεν

$$\overset{3\beta^2}{\frown}\frac{3\chi}{2\alpha}-\overset{2\alpha}{\frown}\frac{5(\chi-\beta)}{3^{\ 2}}=\overset{6\alpha\beta^2}{\frown}\frac{1}{1}-\overset{3\beta}{\frown}\frac{7\chi-3\alpha}{2\alpha\beta}\quad \text{ἤ}$$

$$9\beta^2\chi-10.\alpha(\chi-\beta)=6\alpha\beta^2-3\beta(7\chi-3\alpha)\quad \text{ἤ}$$

$$(9\beta^2-10\alpha+21\beta)\chi=6\alpha\beta^2-\alpha\beta\quad \text{καὶ ἑπομένως,}$$

$$\chi=\frac{6\alpha\beta^2-\alpha\beta}{9\beta^2-10\alpha+21\beta}.$$

Ἀσκήσεις

1) Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

α') $\alpha+\chi=2\chi+\beta$, β') $(\chi-\alpha)(\beta+\alpha)=\beta-\alpha^2$

γ') $\alpha\chi+\beta=\gamma\chi+\delta$, δ') $(\chi+\alpha)^2-(\chi-\alpha)^2=4\alpha\chi$

ε') $(2\chi+\alpha)(3\chi-\beta)=(6\chi+5\alpha)(\chi-\beta)$

στ') $\frac{\chi}{\alpha}-1=3+\frac{\chi}{\beta}$, ζ') $\frac{\alpha+\chi}{\beta}=\frac{+\chi}{\alpha}$

η') $\frac{\chi-\beta}{\chi-\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}$

θ') $\frac{\alpha}{\chi}+\frac{\beta}{\chi-\alpha}+\frac{1}{\chi(\chi-\alpha)}=0$

ι') $\frac{\alpha(\chi-\alpha)}{\beta}+\frac{\beta(\chi-\beta)}{\alpha}=\chi$.

2) Ὁμοίως αἱ:

α') $\frac{\chi+\alpha}{\chi+\beta}=\frac{\chi-2\alpha}{\chi+3\beta}$, β') $\frac{5\chi}{\chi^2-\alpha^2}+\frac{2}{\chi-\alpha}+\frac{3}{\chi+\alpha}=0$

γ') $\frac{\chi-\alpha}{\chi+2\alpha}+\frac{\chi-\beta}{\chi+2\beta}=\frac{2(\chi^2-\alpha\beta)}{(\chi+2\alpha)(\chi+2\beta)}$

δ') $\frac{\alpha}{\beta}\left(1-\frac{\alpha}{\chi}\right)+\frac{\beta}{\alpha}\left(1-\frac{\beta}{\chi}\right)=1$

ε') $(\alpha+\chi)(\beta+\chi)-\alpha(\beta+\gamma)=\frac{\alpha^2\gamma}{\beta}+\chi^2$

στ') $\frac{1+\alpha\chi}{1-\alpha\chi}=\frac{3+\alpha^2\chi^2}{1-\alpha^2\chi^2}$.

ζ') $(\chi-\alpha)^2+(\chi-\beta)^2-2(\chi+\alpha)(\chi+\beta)=0$

η') $[(\alpha^2+\beta^2)\chi+1]^2-[(\alpha^2-\beta^2)\chi-1]^2=(2\alpha\beta\chi-1)^2$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

68. Ἔστωσαν αἱ παραστάσεις $4\chi+\psi$, $5\chi-2\psi+9$. Ἐὰν θέσωμεν $\chi=3$, $\psi=4$, λαμβάνομεν ἴσας ἀριθμητικὰς τιμάς· ἤτοι διὰ $\chi=3$, $\psi=4$ ἔχομεν $4\chi+\psi=5\chi-2\psi+9$.

Ἔστωσαν ὁμοίως αἱ παραστάσεις $7\chi-3\psi+1$, $\chi+5\psi-3$. Ἂς ἀντικαταστήσωμεν τὰ χ καὶ ψ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 3 καὶ 4 εὑρίσκομεν ἀριθμητικὰς τιμὰς τὸ 10 καὶ 20. Ὥστε ἂν ἡ δευτέρα παράστασις ἀντικατασταθῇ διὰ τῆς $\chi+5\psi-3-10$, θὰ προκύψῃ ἐκ ταύτης ἀριθμητικὴ τιμὴ τὸ 10. Κατὰ ταῦτα διὰ $\chi=3$, $\psi=4$ ἔχομεν $7\chi-3\psi+1=\chi+5\psi-13$. Λέγομεν τότε ὅτι αἱ ἐξισώσεις

$$4\chi+\psi=5\chi-2\psi+9$$
$$7\chi-3\psi+1=\chi+5\psi-13$$

ἔχουν κοινὴν λύσιν τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $\chi=3$, $\psi=4$. Ὅταν ζητοῦμεν τὴν κοινὴν λύσιν τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων, δηλαδὴ τὰς τιμὰς τῶν χ καὶ ψ αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν ἀμφοτέρας, λέγομεν ὅτι ζητοῦμεν τὴν λύσιν τοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν αὗται.

69. Γενικῶς λέγομεν ὅτι ἔχομεν σύστημα ἐξισώσεων, ὅταν ἔχωμεν σύνολον ἐξισώσεων καὶ ζητοῦμεν κοινὴν λύσιν αὐτῶν.

Λύσις ἑνὸς συστήματος ἐξισώσεων λέγεται ἡ εὕρεσις πασῶν τῶν κοινῶν λύσεων αὐτῶν. Δύο συστήματα λέγονται ἰσοδύναμα, ὅταν ἔχουν τὰς αὐτὰς κοινὰς λύσεις Δηλαδὴ ὅταν πᾶν σύστημα τιμῶν τῶν ἀγνώστων ἐπαληθεῦον τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν ἐπαληθεύει καὶ τὸ ἄλλο. Διὰ τὴν λύσιν δοθέντος συστήματος ἀρκεῖ προφανῶς νὰ εὕρωμεν τὴν λύσιν οἱουδήποτε συστήματος ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ δοθέν.

70. Θὰ κάμωμεν ἤδη παρατηρήσεις τινὰς σχετικῶς μὲ μίαν ἐξίσωσιν μ δύο ἀγνώστους.

Ἔστω ἐξίσωσις μὲ δύο ἀγνώστους, ἡ

$$\frac{5\chi}{3}+\frac{7\psi}{2}=\frac{2\chi}{5}+\frac{\psi}{3}+10.$$

Ἂς ἀντικαταστήσω τὸ ψ μὲ τυχόντα ἀριθμὸν π.χ. τὸ 11. Λαμβάνω τότε τὴν ἐξίσωσιν μὲ ἕνα ἄγνωστον

$$\frac{5\chi}{3}+\frac{7.11}{2}=\frac{2\chi}{5}+\frac{11}{3}+10.$$

Κατὰ τὰ προηγούμενα αὐτὴ θὰ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν

$(5.2.5-2.3.2)\ \chi+(7.5.3-2.5)11-10.3.2.5=0$ ἢ

$38\chi+95.11\ -300=0$, ἢ πρὸς τὴν ἐξίσωσιν $\chi=\dfrac{300-95.11}{38}$·

Ἡ τιμὴ αὔτη τοῦ χ καὶ ἡ τιμὴ $\psi=11$ ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν Καὶ *γενικῶς*, ἂν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν καὶ εἰς τὰς ἐξισώσεις $38\chi+95\ \psi-300=0$, $\chi=\dfrac{300-95.\psi}{38}$ ἀντικαταστήσωμεν τὸ ψ μὲ τυχόντα ἀριθμὸν β, θὰ ἔχωμεν τρεῖς ἐξισώσεις μὲ ἕνα ἄγνωστον καὶ ἐὰν $\dfrac{300-95\beta}{38}=\alpha$, θὰ ἔχωμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β, οἵτινες ἐπαληθεύουν τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν δηλ. τὴν $38\chi+95\psi-300=0$, ἐπαληθεύουν καὶ τὴν δοθεῖσαν καὶ ἀντιστρόφως, ἂν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν θὰ ἐπαληθεύουν καὶ τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις καὶ ἡ $38\chi+95\psi-300=0$ ἐπαληθεύονται μὲ τὰ αὐτὰ συστήματα τιμῶν διὰ τὰ χ καὶ ψ, δηλ. ἔχουν τὰς αὐτὰς λύσεις, ἤτοι εἶναι ἰσοδύναμοι.

71. Ἔστω ἐξίσωσις μὲ δύο ἀγνώστους $\chi^2+\dfrac{\psi}{5}=2\chi^2-3\chi\psi+7$. Πᾶσα λύσις αὐτῆς (δηλ. πᾶν σύστημα τιμῶν χ καὶ ψ ἐπαληθεῦον αὐτὴν) εἶναι καὶ λύσις τῆς $\chi^2-3\chi\psi-\dfrac{\psi}{5}+7=0$, τὴν ὁποίαν ἐσχηματίσαμεν μεταφέροντες τοὺς ὅρους τοῦ ἑνὸς μέλους εἰς τὸ ἕτερον καὶ ἀντιστρόφως πᾶσα λύσις τῆς δευτέρας εἶναι καὶ λύσις τῆς πρώτης. ***Ἐν γένει αἱ ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων μὲ ἕνα ἄγνωστον, δι᾽ ὧν μετασχηματίζομεν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον, ἐπεκτείνονται εἰς τὰς ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους·***

Ὅταν μία ἐξίσωσις μὲ δύο ἀγνώστους ἀνάγεται εἰς τὴν μορφὴν

$$\alpha\chi+\beta\psi+\gamma=0$$

ὅπου α,β,γ, σταθεροὶ ἀριθμοὶ (ἢ καὶ παραστάσεις περιέχουσαι γράμματα θεωρούμενα ὡς δεδομένα) λέγεται ***ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ***· π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+5\psi=\chi^2-3\chi+7$, ἥτις ἀνάγεται εἰς τὴν $3\chi+5\psi-7=0$ εἶναι πρώτου βαθμοῦ.

72. Θὰ ἀναφέρωμεν ἤδη μεθόδους τινὰς δι᾽ ὧν ἐπιτυγχάνεται ***ἡ λύσις συστημάτων δύο ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους***·

1. ***Μέθοδος ἀντικαταστάσεως***· Ἔστω τὸ σύστημα

$$\begin{aligned}&7\chi-3\psi+1=\chi+5\psi-13\\&4\chi+\psi=5\chi-2\psi+9\end{aligned}\qquad(1)$$

Ἂν λύσωμεν τὴν πρώτην ἐξ αὐτῶν ὡς πρὸς χ θὰ ἔχωμεν

$\chi = \frac{8\psi - 14}{6}$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν πρώτην τοῦ συστήματος (1). Ἑπομένως, τὸ δοθὲν σύστημα ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ σύστημα

$$\left.\begin{aligned} \chi &= \frac{8\psi-14}{6} \\ 4\chi+\psi &= 5\chi-2\psi+9 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

τοῦτο πάλιν εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύστημα

$$\left.\begin{aligned} \chi &= \frac{8\psi-14}{6} \\ 4\cdot\frac{8\psi-14}{6}+\psi &= 5\cdot\frac{8\psi-14}{6}-2\psi+9 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι τοῦ συστήματος (3), τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν, ἡ μία ἐξίσωσις περιέχει μόνον ἕνα ἄγνωστον. Ἄρα, ἂν ὑπάρχουν τιμαὶ τοῦ χ καὶ ψ ἐπαληθεύουσαι ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις αὐτοῦ, ἡ μία ἐξ αὐτῶν ἡ τοῦ ψ εὑρίσκεται ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως

$4\cdot\frac{8\psi-14}{6}+\psi=5\cdot\frac{8\psi-14}{6}-2\psi+9$, ὁπότε εἰσάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ψ εἰς τὴν ἄλλην ἐξίσωσιν, τὴν $\chi=\frac{8\psi-14}{6}$, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ χ. Ἔχομεν οὕτω προφανῶς δύο τιμάς, μίαν διὰ τὸ χ καὶ μίαν διὰ τὸ ψ, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὸ σύστημα (3) ἑπομένως καὶ τὸ δοθέν.

2. ***Μέθοδος συγκρίσεως***. Ἔστω τὸ σύστημα

$$\left.\begin{aligned} 5\chi+3\psi &= 11 \\ 12\chi-2\psi &= 8 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ἂς λύσωμεν ἑκατέραν τούτων ὡς πρὸς χ. Ἤτοι ἂς λάβωμεν τὰς ἐξισώσεις

$$\left.\begin{aligned} \chi &= \frac{11-3\psi}{5} \\ \chi &= \frac{8+2\psi}{12} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ σύστημα (1) εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (2). Καὶ τοῦτο πάλιν εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$\left.\begin{aligned} \chi &= \frac{11-3\psi}{5} \\ \frac{11-3\psi}{5} &= \frac{8+2\psi}{12} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Ὅθεν ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν τὴν δευτέραν τῶν (3) ὡς πρὸς ψ καὶ νὰ εἰσαγάγωμεν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ψ εἰς τὴν πρώτην, ὁπότε θὰ εὕρωμεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ χ. Οὕτω εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς $\chi=1, \psi=2$.

3. ***Μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ προσθέσεως.*** Ἔστω σύστημα δύο ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ·

$$\begin{aligned} 3\chi-5\psi+7&=0 \\ 2\chi+4\psi+5&=0 \end{aligned} \qquad (1)$$

τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} 3\chi-5\psi+7&=0 \\ \lambda\,(3\chi-5\psi+7)+\mu(2\chi+4\psi+5)&=0, \end{aligned} \qquad (2)$$

ὅπου λ καὶ μ τυχόντες ἀριθμοὶ διάφοροι τοῦ μηδενός, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Διότι, ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ρ καὶ σ ἐπαληθεύσουν τὸ σύστημα (1), οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ θὰ ἐπαληθεύσουν κ ι τὸ (2) καὶ ἀντιστρόφως· ἂν δύο ἀριθμοὶ ρ καὶ σ ἐπαληθεύσουν τὸ (2), θὰ ἐπαληθεύσουν καὶ τὸ (1)· ἀλλὰ τὸ (2) γράφεται

$$\begin{aligned} 3\chi-5\psi+7&=0 \\ (\lambda.\,3+\mu.\,2)\,\chi+(-\lambda.\,5+\mu.\,4).\psi+\lambda.\,7+\mu.\,5&=0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Ἀφοῦ ὡς λ καὶ μ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν οἱουσδήποτε ἀριθμοὺς θέλομεν (διαφόρους τοῦ μηδενός), ἐκλέγομεν δι' αὐτὰ τιμὰς τοιαύτας, ὥστε εἷς τῶν συντελεστῶν τῆς δευτέρας ἐξισώσεως νὰ μηδενίζεται π.χ. διὰ νὰ μηδενίζεται ὁ συντελεστὴς τοῦ χ, πρέπει νὰ ἔχωμεν $\lambda.\,3+\mu.\,2=0$· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ λάβωμεν διὰ τὸ λ τὴν τιμὴν 2 καὶ διὰ τὸ μ τὴν τιμὴν -3, ὁπότε ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ συστήματος (3) γίνεται

$$-(2.5+3.4)\ \psi+(2.7-3.5)=0 \text{ ἢ}$$

$-22\psi-1=0$ καὶ ἑπομένως τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$\begin{aligned} 3\chi-5\psi+7&=0 \\ -22\psi-1&=0 \end{aligned}$$

τοῦ ὁποίου ἡ μία ἐξίσωσις περιέχει ἕνα μόνον ἄγνωστον. Ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν $\psi=-\dfrac{1}{22}$

Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ ψ εἰς τὴν ἄλλην ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν

$$\chi=-\frac{159}{66}.$$

73. Ὅταν οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων εἶναι μεγάλοι, συμφέρον εἶναι, διὰ νὰ καταστήσωμεν τοὺς συντελεστὰς ἑνὸς ἐκ τῶν ἀγνώστων ἀντιθέτους, νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς: Νὰ εὕρωμεν τὸ ε.κ.π. αὐτῶν, νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸ διὰ τῶν συντελεστῶν τούτων καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα, ἀλλάσσοντες προηγουμένως τὸ σημεῖον τοῦ ἑνός.

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $900\chi-152\psi=450$
$$675\chi-793\psi=-100$$
ἐ.κ.π. τῶν συντελεστῶν τοῦ χ εἶναι τὸ 2700· πολλαπλασιάζω τὴν πρώτην ἐπὶ $\frac{2700}{900}$ δηλαδὴ ἐπὶ 3 καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ $-\frac{2700}{675}$ δηλ. ἐπὶ -4 ὁπότε λαμβάνομεν
$$2700\chi-456\psi=1350$$
$$-2700\chi+3172\psi=400$$
Ἐξ ὧν $2716\psi=1750$. Ὅθεν $\psi=\frac{1750}{2716}$. Θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ψ εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ χ.

74. Περίπτωσις **ἀδυνάτου**. Ἔστω τὸ σύστημα
$$2\chi+3\psi=7$$
$$4\chi+6\psi=10$$
Πολλαπλασιάζοντες τὴν πρώτην ἐπὶ -2 καὶ προσθέτοντες λαμβάνομεν $0=-4$ ὅπερ ἀδύνατον. Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα οὐδεμίαν ἐπιδέχεται λύσιν.

75. Περίπτωσις **ἀπροσδιορίστου**. Ἔστω τὸ σύστημα
$$2\chi+3\psi=7$$
$$6\chi+9\psi=21$$
Πολλαπλασιάζοντες τὴν πρώτην ἐπὶ 3 εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα $6\chi+9\psi=21$
$$6\chi+9\psi=21,$$
τὸ ὁποῖον προφανῶς ἐπιδέχεται ἀπείρους λύσεις. Δηλαδὴ **οὐσιαστικῶς** ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ μᾶς δίδεται **μία μόνον ἐξίσωσις** μὲ δύο ἀγνώστους, ἥτις προφανῶς ἐπιδέχεται ἀπείρους λύσεις, διότι δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τὸν ἕνα τῶν ἀγνώστων αὐθαιρέτους τιμάς.

Ἀσκήσεις

1) Λύσατε καὶ ἐπαληθεύσατε τὰ κάτωθι συστήματα:

α΄) $\chi+\psi=1$, $\chi-\psi=5$ β΄) $5\chi+\psi=3$, $2\chi-5\psi=2$ γ΄) $17\chi-18\psi=15$, $5\chi+12\psi=39$

δ') $28\chi + \psi = 33$ ε') $7\chi + 2\psi = 74$ στ') $5\chi + 3\psi = 2$
$-21\chi + 11\psi = 34$ $\chi - 13\psi = 3$ $2\chi - \psi = 0$

ζ') $3\chi + \frac{5\psi}{2} = 1$ η') $0{,}5\chi - \psi = \frac{1}{2}$ θ') $3\left(\frac{\chi}{2} - \frac{\psi}{3}\right) = 5$

$\frac{5\chi}{2} - 3\psi = -11$ $0{,}6\chi + \psi = \frac{2}{3}$ $4 - 3\left(\frac{\chi}{4} + \frac{\psi}{6}\right) = 2$

ι') $(6\chi + 2)(2\psi - 7) - 2(3\chi - 7)(2\psi + 2) = 0$
$5\psi - 3\chi = 2.$

2). Ὁμοίως τά:

α') $\frac{5\chi + 2\psi}{5} = 1 - \frac{2\chi + 3\psi}{4}$
$(\chi - 2)^2 - (\psi + 3)(\psi - 3) = \chi^2 - 1 - \psi^2$

β') $3\chi + \frac{5\chi - 6\psi}{12} = 3(1 + 2\psi)$ γ') $\frac{\chi + 1}{\psi - 2} = 1$

$5\chi - 2\psi - 12 = \frac{3\chi - 2\psi}{\psi} + 2\psi$ $\frac{\psi + 1}{\chi - 2} = 4$

δ') $\frac{\chi - 1}{\chi - 2} = \frac{\psi + 1}{\psi + 2}$, ε') $\frac{5\chi - 3}{\chi - 2\psi} - \frac{5\chi}{\chi + 2\psi} + \frac{5 - 20\chi\psi}{\chi^2 - 4\psi^2} = 0$

$\frac{\chi + 1}{\chi + 2} = \frac{\psi - 1}{\psi + 2}$ $\frac{7\chi}{3} - \frac{2\psi}{7} = 1$

στ') $(\chi - 1)(\chi - 3) + 44 = (\chi + 1)(-2\chi + 3) + 3\chi^2 - 5$
$(\chi - 1)(\chi + 2) - (\chi + 1)(\chi - 1) = (\psi + 1)(\psi - 1) - \psi(\psi - 1)$

3). Ὁμοίως νὰ λυθοῦν τά:

α') $\alpha\chi + \psi = \beta$ β') $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$ γ') $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$
$\chi + \beta\psi = \alpha$ $\beta\chi - \alpha\psi = \delta$ $\alpha^2\chi + \beta^2\psi = \gamma^2$

δ') $\chi + \psi = \alpha + \beta,$ ε') $\frac{\chi}{\alpha} + \frac{\psi}{\beta} = \alpha^2$
$(\alpha + \gamma)\chi - \beta\psi = \beta\gamma$ $\frac{\chi}{\beta} - \frac{\psi}{\alpha} = \beta^2$

στ') $\frac{\chi - \alpha}{\beta} + \frac{\psi - \beta}{\alpha} = 0$

$\frac{\chi + \psi - \beta}{\alpha} + \frac{\chi - \psi - \alpha}{\beta} = 0$

4) Διὰ ποίας τιμὰς τῶν μ καὶ ν τὸ σύστημα

$$2\chi-3\mu\psi=5+\mu$$
$$\mu\chi-6\psi=\nu$$

εἶναι α′) ἀδύνατον β′) ἀπροσδιόριστον;

5) Προσδιορίσατε τὰ α καὶ β εἰς τρόπον ὥστε τὸ σύστημα:

$$(\alpha-3)\chi+(\beta-2)\psi-\alpha=0 \qquad \text{νὰ δέχεται τὴν λύσιν}$$
$$(\alpha+3)\chi+(\beta+2)\psi+\beta=0 \qquad \chi=3,\ \psi=-2.$$

Σημ. Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω γενικῶν μεθόδων, ἡ λύσις συστήματος τινὸς πολλάκις ἐπιτυγχάνεται εὐκολώτερον διὰ διαφόρων τεχνασμάτων ἐξαρτωμένων ἀπὸ τὴν φύσιν τοῦ συστήματος. Εἶναι προφανὲς ὅτι γενικὸς κανὼν τοιούτων τεχνασμάτων δὲν ὑπάρχει, καθ'ὅσον δὲν εἶναι ἑνιαία ἡ μορφὴ τοῦ συστήματος. Κατὰ ταῦτα, ἔστω πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς σύστημα:

$$\frac{2}{\chi}+\frac{5}{\psi}=3$$
$$\frac{7}{\chi}-\frac{3}{\psi}=31$$

Ἐὰν θέσωμεν $\frac{1}{\chi}=\chi'$ καὶ $\frac{1}{\psi}=\psi'$, λαμβάνομεν τὸ σύστημα

$$2\chi'+5\psi'=3$$
$$7\chi'-3\psi'=31$$

Ἐξ οὗ $\chi'=4$, $\psi'=-1$ καὶ ἑπομένως $\qquad \chi=\frac{1}{4},\ \psi=-1$

6) Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

α′) $\dfrac{5}{\chi}-\dfrac{3}{\psi}=1,\quad \dfrac{2}{\chi}+\dfrac{1}{\psi}=8$

β′). $\dfrac{1}{\chi}+\dfrac{2}{\psi}=5,\quad \dfrac{2\chi}{5}+\dfrac{3\psi}{7}=2\chi\psi$

γ′) $\dfrac{\alpha}{\chi}+\dfrac{\beta}{\psi}=\dfrac{1}{\gamma},\quad \dfrac{\alpha^3}{\chi}-\dfrac{\beta^2}{\psi}=\dfrac{1}{\gamma^2}$

δ′). $\dfrac{1}{\chi+\psi}+\dfrac{1}{\chi-\psi}=2,\quad \dfrac{5}{\chi+\psi}-\dfrac{7}{8(\chi-\psi)}=1$

Ἐὰν τεθῇ $\chi+\psi=\chi'$ καὶ $\chi-\psi=\psi'$, ἀνάγεται εἰς προηγουμένην μορφὴν

ε′) $$\frac{1}{2\chi+3\psi-1}+\frac{5}{\chi-2\psi+7}=\frac{2}{7}$$
$$\frac{3}{2\chi+3\psi-1}-\frac{2}{\chi-2\psi+7}=\frac{1}{4}$$

$$\text{στ}')\quad \frac{\alpha}{\beta\chi+\gamma\psi}-\frac{\beta}{\alpha\chi+\gamma\psi}=\delta$$

$$\frac{\alpha}{2\alpha\chi+2\gamma\psi}+\frac{\beta}{3\beta\chi+3\gamma\psi}=5\delta$$

$$\zeta')\quad \frac{\chi+\psi}{\chi-\psi}=\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma} \qquad \eta')\quad \frac{\chi\psi}{\alpha\chi+\beta\psi}=\gamma$$

$$\frac{\chi+\gamma}{\psi-\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\gamma} \qquad \frac{\chi\psi}{\lambda\chi-\mu\psi}=\delta$$

Ἀντιστρέφοντες τὰ ἴσα κλάσματα ἔχομεν:

$$\frac{\alpha\chi+\beta\psi}{\chi\psi}=\frac{1}{\gamma} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\psi}+\frac{\beta}{\chi}=\frac{1}{\gamma}$$

$$\frac{\lambda\chi-\mu\psi}{\chi\psi}=\frac{1}{\delta} \qquad \frac{\lambda}{\psi}-\frac{\mu}{\chi}=\frac{1}{\delta}$$

76. ***Λύσις οἱουδήποτε συστήματος πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς ἰσοῦται μὲ τὸ πλῆθος τῶν ἀγνώστων.*** Αἱ μέθοδοι ἀντικαταστάσεως καὶ αἱ λοιπαί, τὰς ὁποίας ἐχρησιμοποιήσαμεν εἰς συστήματα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, ἐφαρμόζονται χωρὶς οὐσιώδεις διαφορὰς εἰς τὴν λύσιν συστήματος τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους κ.ο.κ. Ἔστω π.χ. πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς σύστημα

$$\begin{aligned} 5\chi-2\psi+2\omega&=13\\ 2\chi-\psi+\omega&=5\\ \chi+\psi-3\omega&=2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον τῆς ἀντικαταστάσεως καὶ λύοντες τὴν πρώτην ὡς πρὸς ω ἔχομεν

$$\begin{aligned} \omega&=\frac{13-5\chi+2\psi}{2}\\ 2\chi-\psi+\frac{13-5\chi+2\psi}{2}&=5\\ \chi+\psi-3.\frac{13-5\chi+2\psi}{2}&=2 \end{aligned} \qquad (2)$$

Τοῦ συστήματος (2) δύο ἐξισώσεις περιέχουν δύο μόνον ἀγνώστους. Λύοντες τὸ σύστημα τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν αὗται κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν $\chi=3$, $\psi=2$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν ἄλλην τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (2) εὑρίσκομεν καὶ $\omega=1$.

77. Εὐκόλως φαίνεται ὅτι θὰ ἠδυνάμεθα νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα χρησιμοποιοῦντες τὴν μέθοδον τῆς ἀπαλοιφῆς διὰ προσθέσεως ἢ τὴν τῆς συγκρίσεως.

78. Ὅπως λύομεν ἕνα σύστημα 3 ἐξισώσεων μὲ 3 ἀγνώστους, δυνάμεθα κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον νὰ λύσωμεν σύστημα 4 ἐξισώσεων μὲ 4 `γνώστους, καὶ γενικῶς σύστημα ν ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ ἐπαληθευθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

α᾽) $\chi+\psi-2\omega=6$
$2\chi-3\psi+7\omega=8$
$\chi-\psi+3\omega=5$

β᾽) $2\chi-\psi+3\omega=3$
$5\chi-2\psi-\omega=1$
$7\chi+3\psi=6$

γ᾽) $4\chi-3\psi+5\omega=2$
$3\chi+8\psi-7\omega=5$
$7\chi+5\psi-2\omega=7$

δ᾽) $13(\chi-\psi)+\omega=14$
$6(\chi+2\psi-\omega)=12(\chi+\psi+\omega)$
$\frac{\chi}{7}+\frac{4}{2}+\omega=\psi$

ε᾽) $\chi+\psi+\omega=10$
$$\frac{2\chi-5}{3}+\frac{3\psi-7}{4}=\frac{5\omega+2\chi}{4}-1$$
$$\frac{2\chi+3\psi+2\omega}{5}-\frac{5\omega-1}{3}=\frac{2\chi}{5}$$

στ᾽) $$\frac{2\chi-\psi}{8}+\frac{\chi+2}{6}+\frac{1}{6}=0$$
$$\frac{\chi-\psi}{\chi+\psi}+\frac{3}{2}=0$$
$\chi+\psi+\omega=4$

ζ᾽) $9\chi+2\psi-\omega=6$
$3\chi-2\psi+3\omega+2\varphi=16$
$\psi-2\omega+\varphi=0$
$2\chi-3\omega+\varphi=0$

η᾽) $\chi+\psi+\omega+\varphi=12$
$\chi-\psi-\omega+\varphi=0$
$2\chi+\psi-\omega+\varphi=4$
$\chi+\psi+\omega+3\varphi=20$

θ᾽) $\chi-2\psi-3\omega-4\varphi=-8$
$\psi-2\omega+3\varphi-4\chi=6$
$\varphi-2\chi+3\psi-4\omega=-2$
$\omega-2\varphi+3\chi-4\psi=8$

2) Ὁμοίως (λυόμενα εὐκολώτερον διὰ τεχνασμάτων)

α′) $\chi+\psi=5$

$\psi+\omega=3$

$\omega+\chi=4$

Ἐὰν προσθέσωμεν κατὰ μέλη λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $2\chi+2\psi+2\omega=12$ ἢ $\chi+\psi+\omega=6$. καὶ ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπ' αὐτῆς ἑκάστην τῶν δοθεισῶν εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων.

β′) $\chi+\psi+\omega=10$ γ′) $\dfrac{\chi}{\mu}+\dfrac{\psi}{\nu}=1$

$\psi+\omega+\varphi=4$ $\dfrac{\psi}{\nu}+\dfrac{\omega}{\rho}=1$

$\omega+\varphi+\chi=6$ $\dfrac{\chi}{\mu}+\dfrac{\omega}{\rho}=1$

$\varphi+\chi+\psi=6$

δ′) $\dfrac{1}{\chi}+\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\omega}=\alpha$

$\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\varphi}=\beta$

$\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\varphi}+\dfrac{1}{\chi}=\gamma$

$\dfrac{1}{\varphi}+\dfrac{1}{\chi}+\dfrac{1}{\psi}=\delta$

ε′) $\gamma\chi+\alpha\omega=\beta$

$\alpha\psi+\beta\chi=\gamma$

$\beta\omega+\gamma\psi=\alpha$

πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην ἐπὶ β, τὴν δευτέραν ἐπὶ γ καὶ τὴν τρίτην ἐπὶ α.

στ′) $\dfrac{\chi}{2}=\dfrac{\psi}{3}=\dfrac{\omega}{5}$

$5\chi+7\psi+2\omega=13$

παρατηροῦμεν ὅτι $\dfrac{\chi}{2}=\dfrac{\psi}{3}=\dfrac{\omega}{5}=\dfrac{5\chi+7\psi+2\omega}{10+21+10}=\dfrac{13}{41}$ ἄρα

$\chi=\dfrac{26}{41},\ \psi=\dfrac{39}{41},\ \omega=\dfrac{65}{41}.$

ζ′) $\mu\chi=\nu\psi=\rho\omega$ $\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\omega=\delta$

3) Ὁμοίως :

α') $\chi+2\psi+3\omega-\varphi=3$
$2\chi-3\varphi+2\omega=5$
$5\chi+2\varphi=3$
$2\psi+3\omega=-2$

β') $6\chi-4\psi+7\omega-3\varphi=10$
$\chi+\psi-7\omega+8\varphi=15$
$8\chi-\psi+6\omega+6=0$
$3\chi+4\psi-10\omega+\varphi=18$

γ') $6\chi-\psi+\omega-\varphi=15$
$3\chi+2\psi-2\omega+4\varphi=10$
$8\chi+3\psi-3\omega+6\varphi=18$
$3\chi-3\psi+5\omega+\varphi=9$

δ') $\chi-\psi+\omega-\varphi+z=10$
$2\chi-3\psi+4\varphi-2z=6$
$\chi-6\psi+4\varphi=-1$
$6\chi+3\psi-2\varphi=8$
$\chi-4\varphi=5$

ε') $6\chi-\psi+5\omega+\varphi-3z=18$
$\chi-\psi=4$
$2\varphi+4\omega-2\psi=12$
$-z+4\varphi-\omega=4$
$2z+3\varphi+4\chi+18\psi=16.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΕΝΝΟΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

79. Λέγομεν ὅτι γράμμα τι εἶναι μ ε τ α β λ η τ ή, ὅταν δύναται νὰ λάβῃ διαφόρους τιμάς· π.χ.

α') Ἔστω ὅτι 1 πῆχυς ὑφάσματος στοιχίζει 8 δραχμάς· τότε οἱ χ πήχεις θὰ στοιχίζουν 8χ δραχ. Ἐὰν τὸ 8χ καλέσωμεν ψ θὰ ἔχωμεν ὅτι οἱ χ πήχεις στοιχίζουν ψ δραχμάς. Τὰ χ καὶ ψ εἶναι μ ε τ α β λ η τ α ί· τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ποσοῦ τῶν πήχεων, ἢ καί, ἡ μεταβλητὴ ψ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς μεταβλητῆς χ· ἡ δὲ σχέσις ἡ ἐκφράζουσα τὸν τρόπον τῆς ἐξαρτήσεως εἶναι ἡ:

$$\psi=8\chi.$$

Λέγομεν τότε ὅτι ἡ ψ εἶναι σ υ ν ά ρ τ η σ ι ς τῆς χ.

β') Ἔστω ὅ ι εἰς μίαν ὥραν κινητόν τι διανύει 8 χιλιόμετρα· ἐὰν ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλή, εἰς χ ὥρας θὰ διανύῃ 8χ χιλιόμετρα· ἐὰν τὸ 8χ καλοῦμεν ψ, θὰ ἔχωμεν ὅτι εἰς χ ὥρας θὰ διανύῃ ψ χιλιόμετρα. Τὸ διανυόμενον διάστημα ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ χρόνου εἰς τὸν ὁποῖον διανύεται. Κ ὶ ἐδῶ ἡ μεταβλητὴ ψ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς μεταβλητῆς χ. καὶ ἡ σχέσις ἡ ἐκφράζουσα τὸν τρόπον τῆς ἐξαρτήσεως εἶναι ἡ $\psi=8\chi$·
λέγομεν πάλιν ὅτι ἡ ψ εἶναι συνάρτησις τῆς χ.

γ') Σῶμά τι πῖπτον ἐν τῷ κενῷ διανύει κατὰ τοὺς νόμους τῆς Φυσικῆς εἰς τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον 4,90μ εἰς τὰ δύο πρῶτα δευτερόλεπτα $4 \times 4{,}90\mu$. εἰς 3″ $9 \times 4{,}90\mu$ κ.ο.κ.ἤτοι εἰς τὰς τιμὰς τοῦ χρόνου 1,2,3,ἀντιστοιχοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ διανυομένου διαστήματος 4,90 $4 \times 4{,}90$ $9 \times 4{,}90$......ἢ ἐὰν καλέσωμεν $\chi_1, \chi_2 \ldots \ldots \chi_\nu$ τοὺς ἀφηρημένους ἀριθμοὺς τῶν τιμῶν τοῦ χρόνου καὶ $\psi_1, \psi_2 \ldots \ldots \psi_\nu$ τοὺς τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ διανυομένου διαστήματος παρατηροῦμεν ὅτι ἔχομεν

$$\frac{\psi_1}{(\chi_1)^2} = \frac{\psi_2}{(\chi_2)^2} = \cdot\cdot = \frac{\psi_\nu}{(\chi_\nu)^2} = 4{,}90$$ ἤ, ἐὰν καλέσωμεν ψ καὶ χ τοὺς ἀφηρημένους ἀριθμοὺς δύο τυχουσῶν ἀντιστοίχων τιμῶν διαστήματος καὶ χρόνου ἔχομεν $\frac{\psi}{\chi^2} = 4{,}90$ ἢ

$\psi = 4{,}90\chi^2$ ἢ ἂν θέσωμεν $4{,}90 = \alpha$ ἔχομεν

$$\psi = \alpha\chi^2.$$

Καὶ ἐδῶ ἡ μεταβλητὴ ψ εἶναι συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς χ.

80. Γενικῶς ἔστωσαν δύο μεταβληταὶ χ καὶ ψ λαμβάνουσαι διαφόρους τιμὰς καὶ ἔστω ὅτι ἡ τιμὴ τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ ψ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τιμὴν τὴν ὁποίαν δίδομεν εἰς τὸ χ, ἢ ἀκριβέστερον ἔστω ὅτι εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ χ ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ ψ, ὁριζομένη κατά τινα νόμον. Λέγομεν τότε ὅ τ ι τ ὸ ψ ε ἶ ν α ι σ υ ν ά ρ τ η σ ι ς τ ο ῦ χ.

81. Κατὰ ταῦτα, μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν περιέχουσαν γράμμα τι χ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς συνάρτησιν τοῦ χ. Ἂς ση ειώσωμεν διὰ τοῦ σ (χ) τυχοῦσαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν τοῦ χ· τότε γράφοντες

$$\psi = \sigma\ (\chi)$$

ἐννοοῦμεν ὅτι γράφομεν νόμον κατὰ τὸν ὁποῖον εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ χ ἀν·ιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ σ (χ), τὸ ὁποῖον ἐκαλέσαμεν ψ καὶ λέγομεν ὅτι τὸ ψ εἶναι συνάρτησις τοῦ χ.

Ἁπλουστάτη συνάρτησις τοῦ χ εἶναι ἡ ὁριζομένη ἀπὸ τὴν σχέσιν

$$\psi = \alpha\chi + \beta,$$

ὅπου α καὶ β σταθεροὶ ἀριθμοί· αὕτη λέγεται καὶ γ ρ α μ μ ι κ ὴ συνάρτησις τοῦ χ.

82. ***Μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως*** $\alpha\chi + \beta$, ***ὅταν*** $\alpha > 0$

Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi = 3\chi + \frac{2}{5}$. Ἂς δώσωμεν εἰς τὸ χ δύο διαφόρους τιμὰς χ_1 καὶ χ_2· ἔστωσαν ψ_1, ψ_2 αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ψ. Θὰ ἔχωμεν

$\psi_1=3\chi_1+\frac{2}{5}$, $\psi_2=3\chi_2+\frac{2}{5}$. Ὅθεν $\psi_2-\psi_1=3(\chi_2-\chi_1)$ ἤτοι ἡ διαφορὰ δύο τιμῶν τοῦ ψ εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 3 ἐπὶ τὴν ἀντίστοιχον διαφορὰν τῶν τιμῶν τοῦ χ. Ὥστε ὅταν τὸ χ_2 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ χ_1 καὶ τὸ ψ_2 θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ψ_1. Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι ὅταν τὸ χ αὐξάνῃ καὶ τὸ ψ αὐξάνει καὶ ὅταν τὸ χ ἐλαττοῦται καὶ τὸ ψ ἐλαττοῦται καὶ ἡ συνάρτησις λέγεται αὔξουσα συνάρτησις τοῦ χ.

83. ***Μεταβολὴ τῆς αχ+β, ὅταν α < Ο.***
Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=-9\chi+6$. Ἐὰν χ_1, χ_2 εἶναι δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ χ καὶ ψ_1, ψ_2 αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ψ ἔχομεν

$$\psi_2-\psi_1=-9(\chi_2-\chi_1)$$

ὅθεν διακρίνομεν ὅτι ὅταν $\chi_2>\chi_1$ θὰ εἶναι $\psi_2<\psi_1$· ἤτοι ὅταν τὸ χ αὐξάνῃ τὸ ψ ἐλαττοῦται καὶ ὅταν τὸ χ ἐλαττοῦται τὸ ψ αὐξάνει· διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις ψ εἶναι ἐλαττουμένη συνάρτησις τοῦ χ.

Παρατήρησις. Ὅταν τὸ α εἶναι μηδὲν τὸ ψ ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ.

84. ***Μεταβολὴ τῆς αχ+β ὅταν τὸ χ μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$.*** Ἐννοοῦμεν ἐδῶ ὅτι τὸ χ λαμβάνει κατ' ἀρχὰς τιμὴν ἀρνητικὴν μὲ πολὺ μεγάλην ἀπόλυτον τιμήν· ἔπειτα λαμβάνει διαδοχικῶς τιμὰς ὁλονὲν μεγαλυτέρας, μέχρις οὗ φθάσῃ εἰς τιμὰς θετικὰς πολὺ μεγάλας. Ἔστω π.χ. ἡ συνάρτησις

$$\psi=2\chi-17.$$

Διὰ τιμὰς τοῦ χ θετικὰς πολὺ μεγάλας, τὸ ψ εἶναι θετικὸν πολὺ μέγα καὶ διὰ τιμὰς τοῦ χ ἀρνητικὰς μὲ πολὺ μεγάλην ἀπόλυτον τιμήν, θὰ ἔχωμεν ἀρνητικὰς τιμὰς τοῦ ψ μὲ πολὺ μεγάλην ἀπόλυτον τιμήν· π.χ. Ἔστω ὅτι τὸ χ λαμβάνει τὰς τιμὰς

−10000 −100, −1, 0, 1, 10, 100, 1000......

καὶ τὰς ἐνδιαμέσους τιμάς· θὰ ἔχωμεν διὰ τὸ ψ

−20017......−217, −19, −17. −15,3 183, 1983......

85. Ἐκφράζομεν συμβολικῶς τ' ἀνωτέρω ὡς ἑξῆς.

Διὰ	$\chi=-\infty$	$\psi=-\infty$
	$\chi=+\infty$	$\psi=+\infty$

86. Ἔστω ἤδη ἡ συνάρτησις $\psi=-2\chi-17$,
διὰ τιμὰς τοῦ χ θετικὰς πολὺ μεγάλας, τὸ ψ εἶναι ἀρνητικὸν μὲ πολὺ μεγάλην ἀπόλυτον τιμὴν καὶ διὰ τιμὰς τοῦ χ ἀρνη-

τικὰς μὲ πολὺ μεγάλην ἀπόλυτον τιμὴν τὸ ψ εἶναι θετικὸν πολὺ μέγα. Ἐκφράζομεν τοῦτο συμβολικῶς ὡς ἑξῆς:

Διὰ $\chi=-\infty$ $\quad \psi=+\infty$

$\chi=+\infty$ $\quad \psi=-\infty$

87. Συνοψίζομεν τὰ προηγούμενα εἰς τὸν ἑξῆς πίνακα:

$\alpha>0$	χ	$-\infty$	αὐξάνει	$+\infty$
	$\alpha\chi+\beta$	$-\infty$	αὐξάνει	$+\infty$
$\alpha<0$	χ	$-\infty$	αὐξάνει	$+\infty$
	$\alpha\chi+\beta$	$+\infty$	ἐλαττοῦται	$-\infty$

Γραφικαὶ παραστάσεις.

88. Διὰ νὰ δώσωμεν γεωμετρικὴν παράστασιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν (§ 4) ἐθεωρήσαμεν ἄξονα τῶν τετμημένων Χ'Χ καὶ ἐξηγήσαμεν πῶς εἰς πᾶν σημεῖον αὐτοῦ ἀντιστοιχεῖ ἀλγεβρικός τις ἀριθμὸς καὶ ἀντιστρόφως.

89. Ἄς θεωρήσωμεν ἤδη εὐθεῖαν Υ'Υ κάθετον ἐπὶ τὴν Χ'Χ καὶ διερχομένην διὰ τοῦ σημείου 0 τὸ ὁποῖον ἐλάβομεν ὡς ἀρχήν. Ἄς θεωρήσωμεν δὲ ὁμοίως ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης θετικὴν καὶ ἀρνητικὴν φορὰν π.χ. ἔστω θετικὴ φορὰ ἡ Υ'Υ. (σχῆμα 1).

Ἄν θεωρήσωμεν καὶ ἐδῶ ἀρχὴν τὸ 0 καὶ μονάδα τινὰ μήκους τὴν ΟΗ, τότε πᾶν τμῆμα ΟΝ κείμενον ἐπὶ τῆς Υ'Υ ἐὰν ἔχῃ θετικὴν φορὰν θὰ μετρῆται ὑπὸ θετικοῦ τινος ἀριθμοῦ καὶ ἂν ἔχῃ ἀρνητικὴν φορὰν θὰ μετρῆται ὑπὸ ἀρνητικοῦ· καὶ οὕτω εἰς πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας Υ'Υ ἀντιστοιχεῖ ἀλγεβρικός τις ἀριθμὸς ὅστις λέγεται τεταγμένη τοῦ σημείου· ἡ εὐθεῖα Υ'Υ λέγεται ἄξων τῶν τεταγμένων.

90. Εἴδομεν ἀνωτέρω (§ 79) πότε λέγομεν ὅτι μία μεταβλητὴ ψ εἶναι συνάρτησις ἄλλης μεταβλητῆς χ. ἂς θεωρήσωμεν κατ'ἀρχὰς τὴν $\psi=\alpha\chi$ π.χ.

$$\psi=2\chi. \qquad (1)$$

ἂς δώσωμεν εἰς τὸ χ τιμάς τινας π.χ. ἂς θέσωμεν

$$\chi= \quad 2, \quad -1, \quad 0, \quad \frac{3}{4}, \quad 1, \quad 2,$$

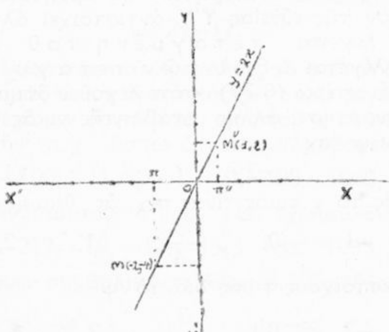
θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχους τιμὰς διὰ τὸ ψ

$$\psi= \quad 4, \quad -2, \quad 0, \quad \frac{3}{2}, \quad 2, \quad 4,$$

Συμφωνοῦμεν διὰ τὴν παράστασιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν διὰ τὸ χ, νὰ λαμβάνωμεν σημεῖα ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων Χ'Χ καὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν διὰ τὸ ψ νὰ λαμβάνωμεν σημεῖα ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων ΥΥ'. Τότε εἰς πᾶν ζεῦγος ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν μεταβλητῶν χ,ψ θὰ ἀντιστοιχοῦν δύο σημεῖα Α,Ρ κείμενα ἐπὶ τῶν δύο ἀξόνων Χ'Χ, Υ'Υ. Ἐὰν ἐξ αὐτῶν φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας Υ' Υ καὶ Χ' Χ αὗται θὰ τέμνωνται εἴς τι σημεῖον, Μ. Τοῦτο λέγομεν ὅτι ἔχει τ ε τ μ η μ έ ν η ν τὴν τετμημένην τοῦ Α καὶ τ ε τ α γ μ έ ν η ν τὴν τεταγμένην τοῦ Ρ. Οὕτω π.χ. εἰς τὸ ζεῦγος (–2,–4) θ' ἀντιστοιχῇ ἓν σημεῖον εὑρισκόμενον ὡς ἑξῆς: Ἐπὶ τοῦ ἄξονος Χ'Χ λαμβάνομεν σημεῖον ἔχον τετμημένην –2, καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὸν Υ' Υ καὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος Υ' Υ λαμβάνομεν σημεῖον ἔχον τεταγμένην –4 καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὸ Χ' Χ αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν προηγουμένην εἴς τι σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον θὰ λέγωμεν ὅτι ἔχει τετμημένην–2 καὶ τεταγμένην –4. Τοῦτο σημειοῦμεν: Μ (–2,–4). Παρατηροῦμεν ὅτι μόνον ἓν σημεῖον ὁρίζεται ἔχον τετμημένην –2 καὶ τεταγμένην –4. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζεται ἓν καὶ μόνον σημεῖον Μ' (–1,–2) δηλ. ἓν σημεῖον ἔχον τετμημένην –1 καὶ τεταγμένην –2, Μ'' (1, 2) κ.ο.κ. Ἡ τετμημένη καὶ τεταγμένη καλοῦνται μὲ ἓν ὄνομα σ υ ν τ ε τ α γ μ έ ν α ι τ ο ῦ σ η μ ε ί ο υ.

Ὡς πρὸς τὸ σημεῖον (0,0) παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο θὰ εἶναι ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων ἡ ὁποία εἶναι σημεῖον τοῦ ἄξονος Χ'Χ ἔχον τετμημένην 0 καὶ σημεῖον τοῦ ἄξονος Υ'Υ ἔχον τεταγμένην 0.

91. Λέγω ὅτι πάντα τὰ σημεῖα Μ,Μ',Μ'', καὶ γενικῶς πάντα τὰ σημεῖα τῶν ὁποίων ἡ τετμημένη καὶ ἡ τεταγμένη εἶναι ζεῦγος τιμῶν διὰ τὰ χ καὶ ψ ἐπαληθευουσῶν τὴν ἐξίσωσιν (1)



(Σχῆμα I).

κ ε ῖ ν τ α ι ἐ π ὶ μ ι ᾶ ς ***εὐθείας διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς***. Καὶ πράγματι ἂς θεωρήσωμεν τὴν εὐθεῖαν τὴν διερχομένην διὰ τῶν σημείων 0 (0,0) καὶ Μ'' (1,2) καὶ ἂς λάβωμεν τὸ σημεῖον Μ (–2,–4). Τοῦτο λέγω ὅτι θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας Ο Μ''.

Διότι ἔστωσαν Π'' καὶ Π αἱ προβολαὶ τῶν σημείων Μ'' καὶ Μ ἐπὶ τοῦ ἄξονος Χ' Χ. Παρατηρῶ ὅτι,

$$\frac{\Pi''M''}{O\Pi''} = \frac{2}{1} = 2 \text{ καὶ } \frac{\Pi M}{O\Pi} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Ἑπομένως τὰ δύο τρίγωνα ΟΠ''Μ'' καὶ ΟΠΜ εἶναι ὅμοια. Ὅθεν ἡ ΟΜ ἐδῶ θὰ εἶναι προέκτασις τῆς Ο''Μ. Καθ'ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ Μ' καὶ πᾶν ἄλλο σημεῖον ἔχον συντεταγμένας ἐπαληθευούσας τὴν ἐξίσωσιν (1) κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΜ''. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καὶ ὁ ἀντίστροφον ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας ΟΜ'' ἔχει συντεταγμένας ἐπαληθευούσας τὴν ἐξίσωσιν (1). Κατὰ ταῦτα ἡ ἐξίσωσις $\psi=2\chi$ παριστᾷ εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ τοῦ σημείου (1,2) καὶ γενικῶς ἡ

$$\psi=\alpha\chi$$

(ὅπου $\alpha \neq 0$) ***παριστᾷ εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ τοῦ σημείου***

(1, α).

92. Ἔστω ἤδη ἡ ἐξίσωσις

$$\psi=2\chi+1$$

Αὕτη θὰ παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν $\psi=2\chi$ (ἐννοοῦμεν τὴν εὐθεῖαν ἣν παριστᾷ ἡ ἐξίσωσις αὕτη) καὶ διερχομένην διὰ τοῦ σημείου (0,1) δηλ. διὰ τοῦ σημείου τοῦ ἄξονος τῶν ψ τοῦ ἔχοντος τεταγμένην 1. (σχῆμα 2)

Καὶ πράγματι ἂς δώσωμεν εἰς τὸ χ τιμὰς ἔστω τὰς –2,–1,0,1,.... αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ψ θὰ εἶναι αἱ εὑρεθεῖσαι προηγουμένως ηὐξημέναι κατὰ μονάδα δηλ. θὰ ἔχωμεν

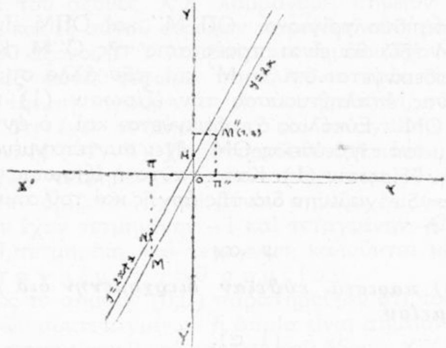
$$\chi= \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad \frac{3}{4}, \quad 1,\ldots\ldots$$

$$\psi= \quad -4+1, \quad -2+1, \quad 0+1, \quad \frac{3}{2}+1, \quad 2+1\ldots\ldots$$

Ὅθεν εἰς τὴν αὐτὴν τετμημένην θ'ἀντιστοιχῇ μία τεταγμένη ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\psi=2\chi$ καὶ μία τεταγμένη ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\psi=2\chi+1$ μεγαλυτέρα τῆς προηγουμένης κατὰ μονάδα. Θὰ ἔχωμεν οὕτω πάντοτε δύο σημεῖα μὲ τὴν αὐτὴν τετμημένην καὶ τεταγμένας διαφερούσας κατὰ μονάδα.

Ὥστε ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος Χ'Χ τὴν προβολὴν Π τοῦ τυχόντος σημείου Μ μὲ θετικὴν τεταγμένην τῆς εὐθείας

ΟΜ'', φέρωμεν τὴν ΠΜ καὶ προεκτείνωμεν ταύτην κατὰ τμῆμα μήκους +1, θὰ ἔχωμεν σημεῖόν τι Ν. Ἐὰν ἡ τεταγμένη τοῦ Μ ἦτο ἀρνητική, ὅπως εἰς τὸ σχῆμα, θὰ ἐλαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΠΜ σημεῖον τι Ν τοιοῦτον ὥστε ΜΝ=+1. Τοῦ σημείου Ν αἱ συντεταγμέναι θὰ ἐπαληθεύουν τὴν ψ=2χ+1. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ οὕτω εὑρισκόμενον Ν θὰ κεῖται πάντοτε ἐπὶ τῆς εὐθείας ΗΝ τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ΟΜ'' καὶ διερχομένης διὰ τοῦ σημείου Η (0,1). Καὶ ἀντιστρόφως



(Σχῆμα 2)

Πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας ταύτης θὰ ἔχῃ συντεταγμένας ἐπαληθευούσας τὴν ψ=2χ+1.

93. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται γενικῶς ὅτι ἡ ἐξίσωσις ψ=αχ+β (ὅπου α≠ο) παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ψ=αχ καὶ τέμνουσαν τὸν ἄξονα τῶν ψ (δηλ. τὸν Υ'Υ) εἰς τὸ σημεῖον (0,β).

Παραδείγματα: α') ἔστω ἡ ἐξίσωσις ψ=2χ–1· αὕτη παριστᾷ τὴν εὐθεῖαν ἥτις εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΜ καὶ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Η' (0,–1).

β') Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ψ= –3χ+5.

Διὰ νὰ γράψωμεν τὴν εὐθεῖαν τὴν ὁποίαν αὕτη παριστᾷ ἀρκεῖ προφανῶς νὰ εὕρωμεν δύο σημεῖα της. Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς: ἀντικαθιστῶμεν τὸ χ μὲ δύο τυχόντας ἀριθμοὺς π.χ. τοὺς 0, καὶ 1 καὶ εὑρίσκομεν δύο ἀντιστοίχους ἀριθμοὺς διὰ τὸ ψ τοὺς 5 καὶ 2· θὰ ἔχωμεν οὕτω δύο ζεύγη τιμῶν ἐπαληθεύοντα τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν τὰ (0, 5) καὶ (1, 2).

94. Μερικαὶ περιπτώσεις.

α') Ἡ ψ=ο παριστᾷ τὸν ἄξονα Χ'Χ διότι πᾶν σημεῖον ἔχον τεταγμένην μηδὲν κεῖται ἐπ' αὐτοῦ καὶ ἀντιστρόφως.

β') Ἡ $\psi=\beta$ παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν Χ΄Χ καὶ διερχομένην διὰ τοῦ σημείου $(0,\beta)$.

γ') Ἡ $\chi=0$ παριστᾷ τὸν ἄξονα Υ΄Υ.

δ') Ἡ $\chi=\alpha$ παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν Υ΄Υ καὶ διερχομένην διὰ τοῦ σημείου $(\alpha,0)$.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

1) Ποίαν εὐθεῖαν παριστᾷ ἡ $\psi=\chi$; καὶ ποίαν ἡ $\psi=-\chi$;

2) Νὰ κατασκευασθῶσιν αἱ εὐθεῖαι α') $2\psi=2-\chi$

β') $\frac{2}{3}\chi+\psi=\frac{1}{2}$, γ') $0{,}22\psi-3\chi=0{,}5$. δ') $2\psi-\chi+4=0$.

3) Νὰ λυθῇ γραφικῶς τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων
$$\psi=2\chi+1$$
$$3\chi-4\psi+5=0.$$

Ἀρκεῖ προφανῶς νὰ γράψωμεν τὰς δύο εὐθεῖα. Αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τομῆς θὰ εἶναι ἀριθμοὶ ἐπαληθεύοντες καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις.

4). Ὁμοίως τὸ σύστημα:
$$3\chi-5=-\psi$$
$$\chi-\psi=2.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V.

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΩΝ ΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ.

95. **Προβλήματα λυόμενα δι' ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.**

Ἔστω ὅτι δίδονται ἀριθμοί τινες καὶ ζητοῦνται ἄλλοι οἱ ὁποῖοι νὰ συνδέωνται μὲ αὐτοὺς διὰ δεδομένων σχέσεων. Ἔχομεν τότε πρόβλημα διὰ τὴν λύσιν τοῦ ὁποίου, εἰς τὴν Ἄλγεβραν, προσπαθοῦμεν νὰ ἐκφράσωμεν τὰς σχέσεις μὲ ἐξισώσεις, δηλαδὴ προσπαθοῦμεν νὰ γράψωμεν συμφώνως πρὸς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος τὰς ἐξισώσεις τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν αἱ ζητούμεναι τιμαί. Ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων τούτων δίδει τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α:

1ον. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον αὐξανόμενον κατὰ 10 μᾶς δίδει τὸ τετραπλάσιον ἐλαττωθὲν κατὰ 40.

Λύσις. Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα δυνατὸν (τὴν αὐτὴν ὑπόθεσιν κάμνομεν εἰς ὅλα τὰ προβλήματα) καὶ ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός· κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν $2\chi+10=4\chi-40$, ἐξ ἧς $\chi=25$.

Ἐπαλήθευσις. Πράγματι τὸ διπλάσιον τοῦ 25 ηὐξημένον κατὰ 10 ἰσοῦται πρὸς τὸ τετραπλάσιον αὐτοῦ μεῖον 40.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς ὅστις διαιρούμενος διὰ 3,4,5 νὰ δίδῃ ὑπόλοιπα ἀντιστοίχως 1,3,2 καὶ πηλίκα ἔχοντα ἄθροισμα 51.

Λύσις. Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Ἂν οὗτος ἐλαττωθῇ κατὰ 1 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 3, ἂν ἐλαττωθῇ κατὰ 3 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4 καὶ ἂν ἐλαττωθῇ κατὰ 2 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 5. Ὅθεν κατὰ τὴν ἐκφώνησιν ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\chi-1}{3}+\frac{\chi-3}{4}+\frac{\chi-2}{5}=51. \quad \text{Ὅθεν} \quad \chi=67.$$

3ον. Ἡ ἡλικία τοῦ Ἰωάννου εἶναι διπλασία τῆς τοῦ Γεωργίου. Πρὸ 6 ἐτῶν τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν των ἦτο ἴσον πρὸς τὴν σημερινὴν ἡλικίαν τοῦ Ἰωάννου. Ποῖαι αἱ ἡλικίαι των;

Λύσις. Ἔστω χ ἡ ἡλικία τοῦ Γεωργίου. Ἡ τοῦ Ἰωάννου εἶναι 2χ. Πρὸ 6 ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ μὲν Γεωργίου ἦτο $\chi-6$ τοῦ δὲ Ἰωάννου $2\chi-6$. Ἐπομένως $(\chi-6)+(2\chi-6)=2\chi$ ἐξ ἧς $\chi=12$. Ὥστε ὁ μὲν Γεώργιος εἶναι 12 ἐτῶν, ὁ δὲ Ἰωάννης 24.

Ἐπαλήθευσις. Πράγματι, τώρα ἡ ἡλικία τοῦ Ἰωάννου εἶναι διπλασία τῆς τοῦ Γεωργίου. Πρὸ 6 ἐτῶν ὁ μὲν Γεώργιος ἦτο 6 ἐτῶν ὁ δὲ Ἰωάννης 18. Τὸ ἄθροισμα ἐπομένως τῶν ἡλικιῶν των ἦτο 24, ἴσον δηλαδὴ πρὸς τὴν σημερινὴν ἡλικίαν τοῦ Ἰωάννου.

4ον. Κρουνός τις πληροῖ δεξαμενήν τινα εἰς 2 ὥρας, ἕτερος κρουνὸς πληροῖ αὐτὴν εἰς 3 ὥρας καὶ τρίτος εἰς 4 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας θὰ τὴν πληρώσουν καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ;

Λύσις. Ἔστω ὅτι θὰ τὴν πληρώσουν εἰς χ ὥρας. Εἰς 1 ὥραν θὰ πληρωθῇ τὸ $\frac{1}{\chi}$ τῆς δεξαμενῆς, ἀφ' ἑτέρου εἰς 1 ὥραν μόνος ὁ πρῶτος πληροῖ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς δεξαμενῆς, μόνος ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ μόνος ὁ τρίτος τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῆς. Συνεπῶς καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ εἰς μίαν ὥραν θὰ πληρώσουν τὸ $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ τῆς δεξ.

Ἐπομένως $\frac{1}{\chi}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$. Ὅθεν $\chi=\frac{12}{13}$.

Ἐπαλήθευσις. Πράγματι εἰς $\frac{12}{13}$ ὥρας ὁ πρῶτος θὰ πληρώσῃ τὰ $\frac{12}{13}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6}{13}$ τῆς δεξαμενῆς, ὁ δεύτερος τὰ

$\frac{12}{13} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{13}$ τῆς δεξαμενῆς καὶ ὁ τρίτος τὰ $\frac{12}{13} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{13}$.

Ἑπομένως καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ θὰ πληρώσουν τὰ

$\frac{6}{13} + \frac{4}{13} + \frac{3}{13} = \frac{13}{13}$ τῆς δεξαμενῆς.

5ον. Ἐμοίρασέ τις ποσὸν χρημάτων εἰς πτωχοὺς δώσας εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν 25 δραχμάς. Ἐὰν οἱ πτωχοὶ ἦσαν κατὰ δύο ὀλιγώτεροι, θὰ ἐλάμβανεν ἕκαστος 28 δραχμάς. Πόσοι ἦσαν οἱ πτωχοί;

Λύσις. Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν πτωχῶν. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν θὰ ἔχωμεν: $25\chi = 28\ (\chi - 2)$. Ὅθεν $\chi = 18\frac{2}{3}$. ἀλλὰ τὸ πλῆθος τῶν πτωχῶν δὲν δύναται νὰ εἶναι κλασματικόν. Ἑπομένως ἡ λύσις ἀπορρίπτεται, ὡς μὴ πληροῦσα τὸν περιορισμὸν τοῦ προβλήματος, τὸν διδόμενον ὑπὸ τῆς φύσεως τοῦ ζητουμένου ποσοῦ.

6ον. Αἱ ἡλικίαι δύο ἀνθρώπων εἶναι τοῦ μὲν 30 τοῦ δὲ 40 ἔτη. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου θὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου οἷον λόγον ἔχει ὁ 20 πρὸς τὸν 21;

Λύσις. Ἔστω ὅτι μετὰ χ ἔτη θὰ συμβῇ τὸ ἀνωτέρω. Τότε ἡ ἡλικία τοῦ μὲν πρώτου θὰ εἶναι $30+\chi$ τοῦ δὲ δευτέρου $40+\chi$, θὰ ἔχω δὲ ὅτι

$$\frac{30+\chi}{40+\chi} = \frac{20}{21} \quad \text{ἢ} \quad 630+21\chi = 800+20\chi \quad \text{καὶ}$$

$\chi = 170$ ἔτη. Ἡ λύσις ὡς ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ζητουμένου ἀπορρίπτεται διότι οὐδεὶς θὰ ὑπάρχῃ μετὰ 170 ἔτη.

7ον. Δύο μαθηταὶ ἔχουν ὁ μὲν 120 δραχμὰς ὁ δὲ 300 δραχμάς. Δαπανοῦν δὲ καθ' ἑκάστην ὁ μὲν πρῶτος 15 δραχμάς, ὁ δὲ δεύτερος 12 δραχμάς. Μετὰ πόσας ἡμέρας θὰ ἔχουν ἴσας δραχμάς;

Λύσις. Ἔστω ὅτι μετὰ χ ἡμέρας θὰ ἔχουν ἴσας δραχμάς, καὶ ἑπομένως ὁ μὲν πρῶτος θὰ ἔχῃ δαπανήσῃ 15χ δραχμάς, ὁ δὲ δεύτερος 12χ καὶ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν

$$120 - 15\chi = 300 - 12\chi \quad \text{ἢ} \quad -3\chi = 180 \quad \text{ἢ} \quad \chi = -\frac{180}{3} = -60$$

ἡ λύσις ὡς ἀρνητικὴ ἀπορρίπτεται.

8ον. Ἀπὸ σταθμοῦ τινος σιδηροδρόμου ἀναχωρεῖ ἀτμάμαξα μὲ ταχύτητα 10 χμ. καθ' ὥραν· ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σταθμοῦ καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς ἀναχωρεῖ μετὰ ἓν τέταρτον ἄλλη ἀτμάμαξα μὲ ταχύτητα 12 χμ. καθ' ὥραν. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σταθμοῦ τῆς ἐκκινήσεως θὰ συναντηθοῦν;

Λύσις. Ἔστω χ ἡ ζητουμένη ἀπόστασις. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν θὰ ἔχωμεν : $\frac{\chi}{10} = \frac{\chi}{12} + \frac{1}{4}$

ὅθεν $\chi = 15$ ἤτοι αἱ δύο ἀτμάμαξαι θὰ συναντηθοῦν εἰς ἀπόστασιν 15 χμ. ἀπὸ τοῦ σταθμοῦ τῆς ἐκκινήσεως.

Ἐπαλήθευσις. Πράγματι, τὴν ἀπόστασιν τῶν 15χμ. ἡ μὲν πρώτη τὴν διήνυσεν εἰς $1\frac{1}{2}$ ὥραν, ἡ δὲ δευτέρα εἰς $1\frac{1}{4}$ ὥρας.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ πρώτη ἀνεχώρησεν $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας ἐνωρίτερον, ἡ συνάντησις ἐγένετο ἐκεῖ.

9ον. Ὀρθογωνίου τινὸς ἡ περίμετρος εἶναι 35 μέτρα καὶ ὁ λόγος τῆς βάσεως πρὸς τὸ ὕψος εἶναι 7,5. Ζητεῖται ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος.

Λύσις. Ἔστω χ τὸ ὕψος, τότε ἡ βάσις εἶναι $\frac{35}{2} - \chi$

ὅθεν κατὰ τὴν ἐκφώνησιν ἔχομεν: $\dfrac{\frac{35}{2} - \chi}{\chi} = 7{,}5$

ὅθεν $\chi = \frac{35}{17}$.

Ἡ ἐπαλήθευσις γίνεται εὐκόλως.

Παρατηροῦμεν ἀπὸ τὴν λύσιν τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων, ὅτι εἰς ἄλλα μὲν ἡ εὑρισκομένη τιμὴ τοῦ χ γίνεται δεκτὴ ὁποιαδήποτε καὶ ἂν εἶναι (ἀρκεῖ νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος) εἰς ἄλλα δὲ γίνεται δεκτὴ μόνον δι᾽ ὡρισμένον εἶδος τιμῶν ἀναλόγως τῆς φύσεως τοῦ ζητουμένου, ὁπότε λέγομεν ὅτι ἔχει περιορισμοὺς τὸ πρόβλημα· ἤτοι

Περιορισμὸς προβλήματος λέγεται ὅρος τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πληροῖ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ὡς ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ποσοῦ τοῦ παριστωμένου ἀπὸ τὸν ζητούμενον ἀριθμόν· π.χ. ἐὰν ζητεῖται ἀριθμὸς ἐργατῶν ἐκτελούντων ἔργον τι ἔχωμεν τὸν ἑξῆς περιορισμόν· ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος θετικός.

Προβλήματα πρὸς λύσιν, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ ἄγνωστος οὐδένα ὑφίσταται περιορισμὸν

1) Ἐὰν ἀριθμός τις πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 15,5 δίδει γινόμενον 9300. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

2) Ἐὰν εἰς ἀριθμόν τινα προσθέσω τὸν 724 λαμβάνω ὡς ἄθροισμα τὸ πενταπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ. Ποῖος ὁ ἀριθμός;

3) Ἐὰν ἀπὸ τοῦ 800 ἀφαιρεθῇ τὸ τριπλάσιον ἀριθμοῦ τινος προκύπτει τὸ πενταπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ηὐξημένον κατὰ 50. Τίς ὁ ἀριθμός;

4) Ἐὰν ἀπὸ ἀριθμοῦ ἀφαιρεθῇ ὁ 4 καὶ τὸ ὑπόλοιπον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 9 εὑρίσκεται ἀριθμὸς πενταπλάσιος αὐτοῦ ηὐξημένος κατὰ 4. Ποῖος ὁ ἀριθμός;

5) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{150}{371}$ ἵνα τοῦτο γίνῃ ἴσον πρὸς τὸ $\frac{144}{365}$;

6) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἴσον πρὸς τὸ $\frac{5}{8}$ καὶ τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι νὰ ἔχουν ἄθροισμα 39.

7) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἴσον πρὸς τὸ $\frac{9}{5}$ καὶ τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι νὰ ἔχουν διαφορὰν 32.

8) Εὑρεῖν ἀναλογίαν τῆς ὁποίας οἱ τέσσαρες ὅροι ὑπερβαίνουν ἐξ ἴσου τοὺς ἀριθμοὺς 1,8,17,38.

9) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τοὺς παρονομαστὰς τῶν κλασμάτων $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{3}{7}$, ἵνα ταῦτα γίνουν ἴσα;

Προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ὁ ἄγνωστος ὑφίσταται περιορισμὸν

10) Αἱ ἡλικίαι τριῶν ἀδελφῶν ἔχουν ἄθροισμα 98. Ἡ διαφορὰ τῆς ἡλικίας τοῦ δευτέρου ἀπὸ τῆς τοῦ πρώτου εἶναι τρία ἔτη, καὶ ἡ διαφορὰ τῆς ἡλικίας τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς τοῦ δευτέρου εἶναι ἕνα ἔτος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἡλικία ἑκάστου.

11) Εἰς ἐκδρομήν τινα ἐξώδευσεν ἕκαστος ἐκδρομεὺς 130 δραχμάς. Ἐπερίσσευσαν δὲ οὕτω ἀπὸ τὸ διαθέσιμον διὰ τὴν ἐκδρομὴν ποσὸν 500 δρχ.

Ἐὰν οἱ ἐκδρομεῖς ἦσαν κατὰ δύο ὀλιγώτεροι καὶ ἐξώδευεν ἕκαστος 160 δραχμὰς θὰ ἐχρειάζετο τὸ διαθέσιμον ποσὸν νὰ αὐξήσῃ κατὰ 680 δραχμάς. Πόσοι ἦσαν οἱ ἐκδρομεῖς;

12) Πατήρ τις εἶναι σήμερον 30 ἐτῶν καὶ ὁ υἱός 8. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρός πρὸς τὴν τοῦ υἱοῦ θὰ ἔχῃ λόγον ἴσον πρὸς $\frac{3}{2}$;

13) Τέσσαρες μαθηταὶ ἔχουν ἐν ὅλῳ 300 δρχ. Ὁ πρῶτος ἔχει διπλασίας τῶν ὅσας ἔχει ὁ δεύτερος πλὴν 60. Ὁ δεύτερος

ἔχει τετραπλασίας τῶν ὅσας ἔχει ὁ τρίτος πλὴν 200 δρχ. Ὁ τρίτος ἔχει πενταπλασίας τῶν ὅσας ἔχει ὁ τέταρτος πλὴν 425. Πόσας ἔχει ἕκαστος;

14) Εἰς αὐλήν τινα εὑρίσκονται ἐν ὅλῳ 42 ὄρνιθες καὶ κόνικλοι. Οἱ πόδες αὐτῶν εἶναι ἐν ὅλῳ 110. Πόσαι αἱ ὄρνιθες καὶ πόσοι οἱ κόνικλοι;

15) Ἡ ἡλικία τινὸς εἶναι διπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ του. Μετὰ 5 ἔτη θὰ εἶναι τριπλασία. Ποῖαι αἱ ἡλικίαι των;

16) Ποσόν τι χρημάτων διενεμήθη μεταξὺ τριῶν προσώπων ὡς ἑξῆς. Ὁ πρῶτος ἔλαβε τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ μεῖον 7500 δραχμάς. Ὁ δεύτερος ἔλαβε τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ποσοῦ σὺν 2200. Ὁ δὲ τρίτος τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ποσοῦ καὶ 11500 δρχ. Ποῖον τὸ διανεμηθὲν ποσόν;

17) Ἔμπορος ἔχει δύο εἴδη τείου. Τοῦ πρώτου τὸ ἓν δράμιον ἀξίζει 60 λεπτά, τοῦ δευτέρου 35· θέλει δὲ νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν μῖγμα 450 δραμίων τοῦ ὁποίου τὸ δράμιον νὰ ἀξίζῃ 40 λεπτά. Πόσον θὰ θέσῃ ἐξ ἑκατέρου;

18) Βυτίον περιέχει 100 ὀκάδας οἴνου καὶ 150 ὀκ. ὕδατος. Δεύτερον βυτίον περιέχει 120 ὀκ. οἴνου καὶ 60 ὀκ. ὕδατος. Πόσον πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου τῶν βυτίων διὰ νὰ σχηματίσωμεν μῖγμα περιέχον 125 ὀκ. οἴνου καὶ 75 ὀκ. ὕδατος;

19) Βοσκὸς πωλεῖ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ποιμνίου του καὶ δύο πρόβατα ἀκόμη. Ἐὰν τὸν ἀριθμὸν τῶν ὑπολειφθέντων πολλαπλασιάσῃ ἐπὶ $\frac{3}{4}$ καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέσῃ τὸ 13, τοῦ ἀθροίσματος δὲ τούτου λάβῃ τὸ $\frac{1}{2}$ εὑρίσκει τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀρχικοῦ ἀριθμοῦ τῶν προβάτων. Ποῖος εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός;

20) Εὑρεῖν διψήφιον ἀριθμὸν ἔχοντα διαφορὰν τῶν ψηφίων του 5, καὶ λόγον πρὸς τὸν προκύπτοντα δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του $\frac{3}{8}$.

21) Ἀξιωματικὸς τοποθετεῖ τοὺς στρατιώτας του εἰς τετράγωνον κατὰ δύο τρόπους. Τὴν πρώτην φορὰν τοῦ περισσεύουν 39. Ἐὰν δὲ θέσῃ ἕνα ἐπὶ πλέον εἰς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου θέλει 50 στρατιώτας ἀκόμη διὰ νὰ σχηματίσῃ τὸ τετράγωνον. Πόσους στρατιώτας ἔχει;

22) Ἐρωτηθείς τις πόσας δραχμὰς ἔχει ἀπεκρίθη· ἂν δώσω

εἰς τινα τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν ὅσας ἔχω καὶ 2 ἀκόμη, εἰς ἄλλον τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ 4, θὰ μείνουν 10 δραχμαί. Ζητεῖται πόσας δραχμὰς εἶχεν;

23) Ἂν μοὶ ἐδιπλασίαζον ὅσας ἔχω δραχμάς, ἔδιδα τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτῶν καὶ 8 ἀκόμη. Ἡ αἴτησίς μου ἐξεπληρώθη τρὶς καὶ ἔχασα ὅλα ὅσα εἶχα. Ζητεῖται πόσας δραχμὰς εἶχα.

24) Ὀρθογωνίου τινὸς αἱ διαστάσεις εἶναι 35 μέτρα καὶ 61 μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ἄλλου ὀρθογωνίου ἔχοντος περίμετρον 288μ. μὲ πλευρὰς ἀναλόγους πρὸς τὰς τοῦ δεδομένου.

25) Ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὴν βάσιν ὀρθογωνίου τετραπλεύρου κατὰ δύο μέτρα καὶ αὐξήσωμεν τὸ ὕψος κατὰ ἕνα μέτρον θὰ ἔχωμεν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ λαμβανόμενον, ἂν αὐξήσωμεν τὴν βάσιν κατὰ 4 μέτρα καὶ ἐλαττώσωμεν τὸ ὕψος κατὰ 2 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθο ν ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ περίμετρος εἶναι 38 μέτρα.

26) Δύο ἀδελφοὶ εἶχον ἐν ὅλῳ κατατεθειμένα εἰς τὴν Τράπεζαν 58000 δρ. Ἵνα ὅμως πληρώσουν κοινόν τι χρέος ἐκ 33000 δραχμῶν ἀπέσυρεν ὁ πρῶτος τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν καταθέσεών του καὶ ὁ δεύτερος τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν ἰδικῶν του. Ἐκ πόσων δραχμῶν ἀπετελοῦντο αἱ καταθέσεις καὶ τί ποσὸν ἐπλήρωσεν ἕκαστος;

27) Κρουνὸς πληροῖ δεξαμενὴν εἰς $3\frac{1}{2}$ ὥρας δεύτερος εἰς $2\frac{1}{2}$ ὥρας καὶ τρίτος εἰς 3 ὥρας· ἕτερος δὲ κρουνὸς δύναται νὰ κενώσῃ τὴν δεξαμενὴν εἰς 2 ὥρας. Ἂν ἀνοιχθοῦν καὶ οἱ τέσσαρες κρουνοὶ συγχρόνως εἰς πόσον χρόνον θὰ πληρωθῇ ἡ δεξαμενή;

28) Ἀπὸ σταθμοῦ σιδηροδρόμου ἀναχωρεῖ ἀτμάμαξα μὲ ταχύτητα 20 χμ. καθ'ὥραν. Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σταθμοῦ καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ μετὰ $\frac{1}{4}$ ὥρας ἀναχωρεῖ ἄλλη ἀτμάμαξα μὲ ταχύτητα 22 χμ. καθ' ὥραν. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σταθμοῦ τῆς ἐκκινήσεως θὰ συναντηθοῦν;

29) Ἐξοδεύει τις τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν ὅσων ἔχει μεῖον 5, ἔπειτα τὸ

$\frac{1}{4}$ τοῦ ὑπολοίπου μεῖον 2 καὶ τέλος τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου μεῖον 1· ἔχει δὲ ἀκόμη 20 δραχμάς. Πόσα χρήματα εἶχε;

Γενικὰ Προβλήματα.

96. Πρόβλημα τοῦ ὁποίου δεδομένα τινὰ ἢ καὶ πάντα τὰ δεδομένα παρίστανται διὰ γραμμάτων λέγεται γενικὸν πρόβλημα. π.χ. τὸ πρόβλημα:

Πατήρ τις εἶναι α ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ β. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι διπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ;

Γενικὸν ἐπίσης εἶναι καὶ τὸ πρόβλημα:

Πατήρ τις εἶναι α ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ β· πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι νυπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ;

Ἐδῶ καὶ τὰ τρία δεδομένα παρίστανται διὰ γραμμάτων. Τὸ δεύτερον πρόβλημα εἶναι προφανῶς γενικώτερον τοῦ πρώτου.

Ἡ λύσις γενικοῦ προβλήματος θὰ εἶναι τῆς μορφῆς χ=Α, ὅπου τὸ Α θὰ εἶναι ἀλγεβρικὴ παράστασις περιέχουσα ἐν γένει γράμματα. Δυνατὸν ὅμως τὸ Α νὰ εἶναι ἀριθμός τις σταθερὸς ἀνεξάρτητος τῶν γραμμάτων ἢ και μηδέν.

97. ***Χρησιμότης τῶν γενικῶν προβλημάτων.*** Ἡ λύσις ἑνὸς γενικοῦ προβλήματος μᾶς δίδει τὴν λύσιν ὅλων τῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν δίδοντες εἰς τὰ γράμματα τοῦ προβλήματος ἀριθμητικὰς τιμὰς π.χ. θεωρήσωμεν τὸ ἑξῆς γενικὸν πρόβλημα:

Πατήρ τις εἶναι α ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς β. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι νυπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ;

Λύσις. Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα δυνατὸν καὶ ἔστω ὅτι τοῦτο θὰ συμβῇ μετὰ χ ἔτη. Τότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εναι α+χ τοῦ δὲ υἱοῦ β+χ. Θὰ ἔχωμεν δὲ $\alpha+\chi=\nu(\beta+\chi)$. ἐξ ἧς

$$\chi=\frac{\alpha-\nu\beta}{\nu-1} \qquad (1)$$

98. ***Διερεύνησις γενικῶν προβλημάτων.*** Ἡ λύσις ἑνὸς προβλήματος δίδεται ὑπὸ τύπου τινός. Ὅταν διὰ τὰ δεδομένα γράμματα κάμνωμεν πάσας τὰς δυνατὰς ὑποθέσεις καὶ ἐξάγωμεν συμπεράσματα διὰ τὰς ἀντιστοίχους λύσεις λέγομεν ὅτι κάμνομεν ***διερεύνησιν*** τοῦ προβλήματος. Κατ' ἀρχὰς διερευνῶμεν πότε ἓν πρόβλημα εἶναι δυνατόν, διότι δυνατὸν ἡ φύσις τοῦ προβλήματος νὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε νὰ μὴ δύναται νὰ εἶναι δεκτὴ ὡς λύσις ὁ τυχὼν ἀριθμός. Ἀφοῦ εὕρωμεν τὰς συνθήκας ὑπὸ τὰς ὁποίας τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν, δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν διερεύνησιν ζητοῦντες διάφορα εἴδη τῶν δυνατῶν λύσεων. Διερεύνησιν ἐπί-

σης κάμνομεν, ὅταν διακρίνωμεν, πότε πρόβλημά τι καθίσταται ἀόριστον κλπ. π.χ. Εἰς τὸ ἀνωτέρω θεωρηθὲν πρόβλημα εὑρήκαμεν ὅτι $\chi=\frac{\alpha-\nu\beta}{\nu-1}$.

Ὑποτίθεται $\nu-1>0$, ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν· ὑποτίθεται δὲ ἐννοεῖται ὅτι α καὶ β εἶναι θετικοί, ὡς ἀριθμοὶ ἡλικίας καὶ ὅτι $\alpha>\beta$. Ἀπαιτεῖται ὅμως προσέτι, ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν, τὸ ν νὰ εἶναι τοιοῦτον ὥστε ἡ εὑρισκομένη λύσις νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τῶν ἀνθρώπων.

Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι, τὸ ν εἶναι τοιοῦτον ὥστε τὸ πρόβλημα νὰ εἶναι δυνατόν. Τότε ἂν $\alpha>\nu\beta$ ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι θετικὴ τούτέστι τὸ προτεινόμενον θὰ γίνῃ εἰς τὸ μέλλον, ἂν δὲ $\alpha<\nu\beta$ ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ τὸ προτεινόμενον συνέβη εἰς τὸ παρελθόν.

Παραδείγματα:

1ον Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσω εἰς τοὺς παρονομαστὰς τῶν κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ ἵνα ταῦτα γίνουν ἴσα;

(ὑποτίθεται, ὅτι οἱ παρονομασταὶ β καὶ δ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός). Ἔχομεν προφανῶς τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\alpha}{\beta+\chi}=\frac{\gamma}{\delta+\chi} \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \chi=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\alpha-\gamma}.$$

Διερεύνησις. Ὑποτίθεται εἰς τὴν ἀνωτέρω λύσιν τὸ $\alpha-\gamma$ διάφορον τοῦ μηδενὸς ($\alpha-\gamma\neq0$). Τότε ἡ λύσις πάντοτε εἶναι παραδεκτὴ θὰ ἔχωμεν δὲ $\chi=0$ ἂν $\beta\gamma-\alpha\delta=0$ τούτέστιν ἐὰν τὰ κλάσματα εἶναι ἴσα· τοῦτο ἄλλως τε εἶναι προφανές. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι $\alpha=\gamma$, τότε ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως λαμβάνομεν $(\alpha-\gamma)\ \chi=(\beta\gamma-\alpha\delta)$ ὅθεν $0=(\beta-\delta)$. α ἐξ οὗ διακρίνομεν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην (καθ' ἣν $\alpha=\gamma$), ἐὰν $\beta\neq\delta$ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, ἐὰν δὲ $\beta=\delta$ τότε ἔχομεν $0=0$ ἤτοι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον καὶ τότε πᾶς ἀριθμὸς ἀντικαθιστῶν τὸ χ λύει τὸ πρόβλημα.

2ον Εὑρεῖν ἀναλογίαν τῆς ὁποίας οἱ τέσσαρες ὅροι ὑπερβαίνουν ἐξ ἴσου τέσσαρας δεδομένους θετικοὺς ἀριθμοὺς α,β,γ,δ. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{\alpha+\chi}{\beta+\chi}=\frac{\gamma+\chi}{\delta+\chi} \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \Big[(\alpha+\delta)-(\beta+\gamma)\Big]\chi=\beta\gamma-\alpha\delta.$$

Διερεύνησις. Ἐὰν $\alpha+\delta>\beta+\gamma$ καὶ $\beta\gamma>\alpha\delta$ εὑρίσκομεν τιμὴν τοῦ χ θετικήν, ἐὰν $\alpha+\delta<\beta+\gamma$ καὶ $\beta\gamma<\alpha\delta$, εὑρίσκομεν ἐπίσης θετικὴν τιμήν.

Ἐὰν $\alpha+\delta\neq\beta+\gamma$ καὶ $\beta\gamma=\alpha\delta$ εὑρίσκομεν $\chi=0$, ὅπερ εἶναι προφανές. Ἐὰν $\alpha+\delta=\beta+\gamma$ καὶ $\beta\gamma=\alpha\delta$ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον. Ἐαν $\alpha+\delta=\beta+\gamma$ καὶ $\beta\gamma\neq\alpha\delta$ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Προβλήματα πρὸς λύσιν

1) Κρουνὸς πληροῖ δεξαμενὴν εἰς α ὥρας, ἕτερος εἰς β ὥρας καὶ τρίτος εἰς γ ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας θὰ τὴν πληρώσουν καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ;

2) Ἡ ἡλικία ἑνὸς ἀνθρώπου εἶναι διπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ του. Μετὰ ν ἔτη θὰ εἶναι τριπλασία. Ποῖαι εἶναι αἱ ἡλικίαι των; (Διερεύνησις).

3) Εὑρεῖν ἀριθμὸν ὅστις ἀφαιρούμενος ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{\gamma}{\delta}$ νὰ καθιστᾷ αὐτὸ ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον αὐτοῦ (Διερεύνησις).

4) Ἁμάξης τῶν ἐμπροσθίων τροχῶν ἡ περιφέρεια εἶναι α ποδῶν, τῶν δὲ ὀπισθίων β. Ἀφοῦ διήνυσεν ἡ ἅμαξα διάστημά τι παρετηρήθη, ὅτι οἱ ἐμπρόσθιοι τροχοὶ ἔκαμαν ν περιστροφὰς περισσοτέρας ἢ οἱ ὀπίσθιοι. Εὑρεῖν τὸ διανύθὲν ὑπὸ τῆς ἁμάξης διάστημα.

5) Εἴς τινα συναναστροφὴν οἱ ἄνδρες ἦσαν τετραπλάσιοι τῶν γυναικῶν· μετ'ὀλίγον ἀνεχώρησαν α ἄνδρες καὶ β γυναῖκες καὶ ἔμειναν ἄνδρες διπλάσιοι τῶν γυναικῶν: Πόσοι ἦσαν ἐξ ἀρχῆς οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες; (Διερεύνησις).

6) Κύριος συνεφώνησεν ὑπηρέτην πρὸς α δραχμὰς κατ'ἔτος, καὶ μίαν ἐνδυμασίαν. Ἀποπέμψας δὲ αὐτὸν μετὰ ν μῆνας, ἔδωκεν εἰς αὐτὸν β δραχμὰς καὶ τὴν ἐνδυμασίαν. Πόσον τιμᾶται ἡ ἐνδυμασία; (Διερεύνησις).

7) Ἡ διαφορὰ δύο κεφαλαίων εἶναι δ. Τὸ πρῶτον τοκίζεται πρὸς ε % τὸ δὲ δεύτερον πρὸς ε' %. Τὸ δεύτερον δίδει τόκον διπλάσιον τοῦ πρώτου. Ποῖα τὰ κεφάλαια; (Διερεύνησις).

99. **Προβλήματα λυόμενα διὰ συστημάτων πρώτου βαθμοῦ.**

1ον. Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 15, ἡ δὲ διαφορά των 3. ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

Λύσις. Ἔστωσαν χ καὶ ψ οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί· θὰ ἔχωμεν

$$\chi+\psi=15$$
$$\chi-\psi=3$$

ἐξ οὗ $\chi=9$, $\psi=6$. Πράγματι τὸ ἄθροισμά των εἶναι 15 καὶ ἡ διαφορά των 3.

2ον. 6 ὀκάδες οἴνου καὶ 4 ὀκάδες ἐλαίου στοιχίζουν 140 δραχμάς, 7 ὀκάδες οἴνου καὶ 2 ὀκάδες ἐλαίου στοιχίζουν 110 δραχμάς. Πόσον στοιχίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ οἴνου καὶ πόσον τοῦ ἐλαίου;

Λύσις. Ἔστω χ ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ οἴνου καὶ ψ ἡ τῆς τοῦ ἐλαίου. Θὰ ἔχωμεν:

$$6\chi+4\psi=140$$
$$7\chi+2\psi=110$$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὑρίσκομεν $\chi=10$, $\psi=20$.

3ον. Ἐὰν εἰς τοὺς ὅρους κλάσματος προστεθῇ τὸ 3 προκύπτει κλάσμα ἴσον μὲ $\frac{1}{2}$. Ἐὰν ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρεθῇ 1 προκύπτει κλάσμα ἴσον μὲ $\frac{1}{6}$. Ποῖον τὸ κλάσμα;

Λύσις. Ἔστωσαν χ καὶ ψ οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\chi+3}{\psi+3}=\frac{1}{2},$$
$$\frac{\chi-1}{\psi-1}=\frac{1}{6}.$$

Ἐξ οὗ προκύπτει $\chi=2$, $\psi=7$.

4ον. Ἐὰν τριγώνου τινὸς ἡ βάσις αὐξηθῇ κατὰ 5μ. τὸ δὲ ὕψος ἐλαττωθῇ κατὰ 3, τὸ ἐμβαδὸν αὐξάνει κατὰ 2 τ.μ. Ἐὰν αὐξηθῇ τὸ ὕψος κατὰ 3 ἡ δὲ βάσις του ἐλαττωθῇ κατὰ 2 τὸ ἐμβαδὸν ἐλαττοῦται κατὰ $\frac{1}{2}$ τ.μ. Ποῖαι αἱ διαστάσεις τοῦ τριγώνου;

Λύσις. Ἔστω χ τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ ψ τὸ τοῦ ὕψους. Τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $\frac{1}{2}\chi\psi$. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$\frac{\chi\psi}{2}=\frac{(\chi+5)(\psi-3)}{2}-2$$
$$\frac{\chi\psi}{2}=\frac{(\chi-2)(\psi+3)}{2}+\frac{1}{2}$$

Ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι $\chi=7\mu$ καὶ $\psi=8\mu$.

5ον. Ὁ Α καὶ ὁ Β ἐργαζόμενοι ὁμοῦ ἐκτελοῦσιν ἕνα ἔργον εἰς 6 ἡμέρας. Ὁ Α καὶ Γ εἰς 4 ἡμέρας. Ὁ Β καὶ Γ εἰς 10 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐκτελέσῃ ἕκαστος τὸ ἔργον τοῦτο ἂν ἐργάζεται μόνος του;

Λύσις Ἔστω ὅτι ὁ Α θὰ τὸ τελειώσῃ εἰς χ ἡμ. ὁ Β εἰς ψ καὶ ὁ Γ εἰς ω ἡμέρας. Εἰς μιαν ἡμέραν ὁ Α θὰ τελειώσῃ τὸ $\frac{1}{\chi}$, ὁ Β τὸ $\frac{1}{\psi}$ καὶ ὁ Γ τὸ $\frac{1}{\omega}$ · Εἰς 6 ἡμέρας ὁ Α τελειώνει τὰ $\frac{6}{\chi}$ τοῦ ἔργου καὶ ὁ Β τὰ $\frac{6}{\psi}$ · Ἑπομένως οἱ δύο ὁμοῦ εἰς 6 ἡμέρας τελειώνουν τὰ $\frac{6}{\chi}+\frac{6}{\psi}$ τοῦ ἔργου. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι εἰς 6 ἡμέρας τελειώνουν ὁλόκληρον τὸ ἔργον. Ὅθεν ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{6}{\chi}+\frac{6}{\psi}=1$ · Καθ'ὅμοιον τρόπον ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις $\frac{4}{\chi}+\frac{4}{\omega}=1$ καὶ $\frac{10}{\psi}+\frac{10}{\omega}=1.$

Ἐξ οὗ προκύπτει τὸ σύστημα

$$\frac{6}{\chi}+\frac{6}{\psi}=1$$
$$\frac{4}{\chi}+\frac{4}{\omega}=1$$
$$\frac{10}{\psi}+\frac{10}{\omega}=1$$ εὔκολον πρὸς λύσιν.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν

1) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ τοιοῦτοι ὥστε ἡ διαφορά των νὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν καὶ νὰ ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{8}{45}$ τοῦ μεγαλυτέρου ἐξ αὐτῶν. Τίνες οἱ ἀριθμοί;

2) Ἀριθμὸς ἀκέραιος ἔχει τρία ψηφία τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τριπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων. Ἐὰν ἀντιστραφῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐλαττοῦται κατὰ 198 τότε δὲ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι διπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

3) Ἐρωτηθεὶς τις περὶ τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ του ἀπεκρίθη· πρὸ 6 ἐτῶν ἡ ἡλικία μου ἦτο τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ μου. Μετὰ 6 ἔτη θὰ εἶναι διπλασία. Ποῖαι αἱ ἡλικίαι των;

4) Καθηγητής τις ἐρωτηθεὶς πόσους μαθητὰς ἔχει ἑκατέρα τῶν τάξεων ἀπεκρίθη. Ἐὰν ἐκ τῆς πρώτης τάξεως μεταφέρω 30 μαθητὰς εἰς τὴν δευτέραν θὰ ἔχω τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ εἰς τὰς δύο. Ἐὰν τοὐναντίον μεταφέρω 30 εἰς τὴν πρώτην αὕτη θὰ ἔχῃ τριπλασίους μαθητὰς τῶν ὅσων ἔμειναν εἰς τὴν δευτέραν. Πόσους εἶχεν εἰς ἑκατέραν τῶν τάξεων μαθητάς;

5) Ἐὰν αὐξηθῇ κατὰ 3 μέτρα ἡ βάσις ὀρθογωνίου τινός, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ ἐλαττωθῇ κατὰ 2 ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐλαττοῦται κατὰ 40 τ.μ. Ἐὰν αὐξηθῇ ἡ βάσις του κατὰ 2 καὶ ἐλαττωθῇ τὸ ὕψος του κατὰ 3, ἡ ἐπιφάνειά του αὐξάνει κατὰ 10 τ.μ. Πόσων μέτρων ἦτο ἡ βάσις καὶ πόσον τὸ ὕψος;

6) Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ τοιοῦτοι ὥστε τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου νὰ εἶναι 18 τὸ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου νὰ εἶναι 15 καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τρίτου 17. Τίνες οἱ ἀριθμοί;

7) Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ ψηφίον τῶν μονάδων ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων. Ἐὰν δὲ ἀντιστραφοῦν τὰ ψηφία αὐτοῦ ἐλαττοῦται ὁ ἀριθμὸς κατὰ 36 μονάδας.

8) Κεφάλαιόν τι 9600 δραχμῶν τοκίζεται μὲ τόκον ἁπλοῦν· ποῖον εἶναι τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἐπὶ πόσον χρόνον ἔμεινεν εἰς τὸν τόκον γνωστοῦ ὄντος ὅτι, ἐὰν ἔμενεν εἰς τὸν τόκον 15 ἡμέρας περισσότερον ὁ ὁλικὸς τόκος θα ηὔξανε κατὰ 24 δραχμάς· καὶ ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον ἠλαττοῦτο κατὰ $\frac{1}{2}$ %ₒ ὁ τόκος θὰ ἠλαττοῦτο κατὰ 32 δραχμάς.

9) Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 18· ὁ διψήφιος ἀριθμὸς ὁ σχηματιζόμενος ἐκ τῶν δύο τελευταίων ψηφίων εἶναι τὸ πενταπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων, ἐὰν δὲ ἐλαττωθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος κατὰ 396 μονάδας δίδει τὸν ἀριθμὸν ἀντεστραμμένον.

10) Τρεῖς παῖκται συμφωνοῦσιν ὅπως ὁ χάνων διπλασιάζει τὰ χρήματα ἑκατέρου τῶν ἄλλων. Ἕκαστος τῶν τριῶν χάνει μίαν φορὰν καὶ εἰς τὸ τέλος εὑρίσκεται ὅτι ἔχουν ὅλοι τὸ αὐτὸ ποσὸν α. Πόσα εἶχεν ἕκαστος ἀρχικῶς;

11) Τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου αὐξάνει κατὰ γ τ.μ. ὅταν ἡ βάσις αὐξηθῇ κατὰ α μέτρα καὶ τὸ ὕψος αὐξηθῇ κατὰ β μέτρα. Αὐξάνει δὲ κατὰ γ′ τ.μ. ὅταν ἡ βάσις αὐξηθῇ κατὰ α′ καὶ τὸ ὕψος κατὰ β′ μέτρα. Ποῖαι αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου; (Διερεύνησις).

12) Ἀναμιγνύει τις α ὀκάδας ἑνὸς εἴδους οἴνου μὲ β ὀκάδας ἄλλου οἴνου καὶ σχηματίζει μῖγμα τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται γ δραχμάς. Ἐὰν ἀναμίξῃ α′ ὀκάδας ἐκ τοῦ πρώτου μὲ β′ ὀκάδας ἐκ τοῦ δευτέρου σχηματίζει μῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται γ′ δραχμάς. Ποία ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς ἑκάστου εἴδους;

13) Ἱέρων ὁ τύραννος τῶν Συρακουσῶν, ἔδωκεν εἰς χρυσοχόον 10 λίτρας χρυσοῦ, ἵνα κατασκευάσῃ στέφανον τοῦ Διός. Ἵνα βεβαιωθῇ ἂν ὁ στέφανος ὁλόκληρος εἶναι ἐκ χρυσοῦ ἢ περιέ-

χη καὶ ἄργυρον ἔδωκε τὸν στέφανον εἰς τὸν Ἀρχιμήδην πρὸς ἔλεγχον. Ὁ Ἀρχιμήδης λαβὼν ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ χρυσὸς ἀποβάλλει ἐν τῷ ὕδατι τὰ 0,052 τοῦ βάρους του ὁ δὲ ἄργυρος τὸ 0,099 ἐζύγισε τὸν στέφανον ἐν τῷ ὕδατι καὶ εὗρεν αὐτὸν 9 λιτρῶν καὶ 6 οὐγγιῶν· οὕτω δὲ ἀνεκάλυψεν ὅτι ὁ χρυσοχόος κατεσκεύασε τὸν στέφανον μὲ χρυσὸν καὶ ἄργυρον. Πόσος χρυσὸς καὶ πόσος ἄργυρος περιείχετο εἰς τὸν στέφανον;

14) Νὰ εὑρεθῇ τετραψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ψηφίον τῶν δεκάδων νὰ ὑπερέχῃ κατὰ 1 τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων, τὰ δὲ ἀθροίσματα τῶν δύο πρώτων καὶ δύο τελευταίων ψηφίων του νὰ ἰσοῦνται ἕκαστον μὲ 8· ἐὰν δὲ γραφοῦν τὰ ψηφία αὐτοῦ κατ' ἀντίστροφον τάξιν νὰ προκύπτῃ ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ ζητουμένου κατὰ 909 μονάδας.

100. **Ἀνισότητες πρώτου βαθμοῦ.** Ἐὰν ἔχωμεν δύο ἀλγεβρικὰς παραστάσεις χωρισμένας μὲ τὸ σύμβολον $>$ ἢ μὲ τὸ σύμβολον $<$ λέγομεν ὅτι ἔχομεν ἀνισότητα (§ 21). Διακρίνομεν ἀνισότητας, αἱ ὁποῖαι ἰσχύουν διὰ πᾶν σύστημα ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν γραμμάτων· ὡς λ.χ. $\alpha^2+\beta^2+3 > 2\alpha\beta$ καὶ ἀνισότητας, αἱ ὁποῖαι δὲν ἰσχύουν διὰ πᾶν σύστημα τιμῶν τῶν γραμμάτων π.χ. ἡ ἀνισότης $\chi+1 > 9$ ἰσχύει μόνον, ὅταν τὸ χ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τοῦ 8· ἡ ἀνισότης $\chi^2 < -1$ δὲν ἰσχύει μὲ οἱονδήποτε ἀριθμὸν καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸν χ.

Ὅπως ἔχομεν ἐξισώσεις μὲ ἕνα ἄγνωστον, ἔχομεν καὶ ἀνισότητας μὲ ἕνα ἄγνωστον ὅπως π.χ. ἡ ἀνισότης

$$4+\frac{7}{\chi} > 2\chi-\frac{3}{1-\chi}.$$

101. ***Λύσις τῆς ἀνισότητος λέγεται ἡ εὕρεσις πασῶν τῶν τιμῶν τοῦ χ δι' ἃς αὕτη ἰσχύει.*** Αἱ τιμαὶ αὗται τοῦ χ λέγονται ***λύσεις*** τῆς ἀνισότητος ἢ ἀκόμη λέγομεν ὅτι αἱ τιμαὶ αὗται ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα. Π.χ. Πάντες οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ 8 ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα $\chi+1 > 9$.

102. ***Ἰσοδύναμοι λέγονται δύο ἀνισότητες, ἐὰν ἔχουν τὰς αὐτὰς λύσεις.*** Ὅπως διὰ τὰς ἐξισώσεις ἔχομεν καὶ ἐνταῦθα ἰδιότητάς τινας, δι' ὧν μεταβαίνομεν ἀπὸ ἀνισότητός τινος εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον καὶ μὲ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ὁποίων λύομεν τὰς ἀνισότητας.

α') ***Ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἀνισότητος προσθέσωμεν (ἢ ἀφαιρέσωμεν) τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν προκύπτει ἀνισότης ἰσοδύναμος.*** π.χ. ἡ ἀνισότης $2\chi-5 > \chi+3$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $2\chi-5+12 > \chi+3+12$ διότι, ἐὰν τιμή τις τοῦ χ ἐπαληθεύῃ τὴν πρώτην ἀνισότητα προφανῶς θὰ ἐπαληθεύῃ καὶ τὴν δευτέραν καὶ ἀντιστρόφως πᾶσα τιμὴ τοῦ χ ἐπαληθεύουσα τὴν δευτέραν θὰ ἐπαληθεύῃ καὶ τὴν πρώτην. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν προσθέσωμεν τὴν αὐτὴν ἀλγεβρικὴν παράστασιν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἀνισότητος, προκύπτει ἀνισότης ἰσοδύναμος πρὸς τὴν δοθεῖσαν· ἀρκεῖ μόνον νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰ γράμματα τῆς προστιθεμένης ἀλγεβρικῆς παραστάσεως μὲ ἀριθμοὺς εὑρίσκομεν ὡς ἀριθμητικὴν τιμὴν αὐτῆς ὡρισμένον ἀριθμὸν π.χ. ἡ ἀνισότης $\alpha\chi+\gamma>\beta\chi-2\gamma$ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν

$$(\alpha\chi+\gamma)+\frac{2}{\alpha-\beta}>(\beta\chi-2\gamma)+\frac{2}{\alpha-\beta}$$

ἐν ὅσῳ ὑποθέτομεν ὅτι τὸ α εἶναι διάφορον τοῦ β.

Ἐφαρμόζοντες τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ὅρους ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέλους τῆς ἀνισότητος εἰς τὸ ἕτερον. Π.χ. ἡ ἀνισότης $5\chi-7<3\chi+2$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $5\chi-3\chi<7+2$ δηλαδὴ πρὸς τὴν $2\chi<9$.

Ἀνισότης τῆς ὁποίας ἀμφότερα τὰ μέλη εἶναι πολυώνυμα ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον χ λέγεται ἀ κ ε ρ α ί α. Ἐὰν μεταφέρωμεν πάντας τοὺς ὅρους τοῦ ἑνὸς μέλους ἀκεραίας ἀνισότητος εἰς τὸ ἕτερον μέλος θὰ ἔχωμεν ἀνισότητα ἰσοδύναμον τῆς μορφῆς $A>0$ ἢ $A<0$ ὅπου τὸ A δηλοῖ πολυώνυμον ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον. Ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου τούτου λέγεται ***βαθμὸς τῆς ἀνισότητος*** π.χ. ἡ ἀνισότης $\chi^2-7\chi+6>2\chi^2-\chi(\chi+3)$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $-4\chi+6>0$. Ἑπομένως εἶναι ἀνισότης τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

β΄) ***Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἀνισότητος (μὲ ἄγνωστον) πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν θετικὸν ἀριθμὸν προκύπτει ἀνισότης ἰσοδύναμος*** π.χ. ἡ ἀνισότης $\chi^2-5\chi>2\chi+3$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $8(\chi^2-5\chi)>8(2\chi+3)$. Διότι ἂν τιμή τις τοῦ χ ἐπαληθεύῃ τὴν πρώτην ἐπαληθεύει καὶ τὴν δευτέραν καὶ ἀντιστρόφως. Παρατηροῦμεν καὶ ἐδῶ ὅτι, ὁ πολλαπλασιαστὴς δύναται νὰ εἶναι καὶ ἐγγράμματος παράστασις, ἀρκεῖ τὰ γράμματα ταύτης νὰ νοῶμεν ὅτι λαμβάνουν τιμὰς διδούσας ὡς ἀριθμητικὴν τιμὴν ταύτης θετικὸν ἀριθμὸν π.χ. ἡ ἀνισότης $8\chi-5>2\chi+7)$ καὶ ἡ ἀνισότης $(\alpha-\beta)(8\chi-5)>(\alpha-\beta)(2\chi+7)$ εἶναι ἰσοδύναμοι ἐφ᾽ὅσον τὰ α καὶ β λαμβάνουν τιμὰς τοιαύτας, ὥστε $\alpha>\beta$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, ***ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἀνισότητος*** (μὲ ἀγνώστους) ***πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀρνητικὸν ἀριθμὸν ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται***· τοὐτέστιν εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν προκύπτουσαν ἐκ τῆς δοθείσης ἂν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον π.χ. ἡ ἀνισότης $\chi^2-5\chi>2\chi+3$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $-8(\chi^2-5\chi)<-8(2\chi+3)$.

Ἐὰν μία ἀνισότης (μὲ ἄγνωστον) περιέχῃ παρονομαστὰς δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτοὺς ἐφαρμόζοντες τὴν προηγουμένην ἰδιότητα καθ'ὃν τρόπον καὶ εἰς τὰς ἐξισώσεις μὲ τὴν παρατήρησιν ὅτι, ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀρνητικὸς ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται. Π.χ.

Ἡ ἀνισότης $\frac{5\chi^3}{3} - \frac{2\chi^2}{7} > 3 - \frac{\chi}{5}$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς

τὴν $\frac{5\chi^3}{3} \cdot 105 - \frac{2\chi^2}{7} \cdot 105. > 3.105 - \frac{\chi}{5}.105$

ἤτοι τὴν $175\chi^3 - 30\chi^2 + 21\chi > 315.$

103. Ἡ λύσις ἀνισότητος πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον γίνεται καθ'ὃν τρόπον καὶ ἡ λύσις ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον. Ἤτοι

α') *ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστάς, ἐὰν ὑπάρχουν*

β') *ἐκτελοῦμεν τὰς σημειωμένας πράξεις*

γ') *χωρίζομεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τοὺς ἔχοντας τὸν ἄγνωστον*

δ') *κάμνομεν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων*

ε') *διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου, ἀλλάσσοντες τὴν στροφὴν τῆς ἀνισότητος, ἂν οὗτος εἶναι ἀρνητικός.*

Ἀσκήσεις

1) Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες

α') $2\chi - 3 > 3\chi - 5$ β') $3\chi - 8 > 5\chi - 4$, γ') $\chi - 3 > 2\chi + \frac{3}{7}$

δ') $-\frac{3}{4}\chi < 5\chi - \frac{5}{7}$, ε') $(2\chi + 3)^2 > 4\chi(\chi - 5)$

στ') $(\chi + 1)^2(\chi - 3) > \chi^2\left(\chi - \frac{1}{2}\right) - \frac{\chi^2}{2} + 5.$

ζ') $2\chi - 3(\chi - 2) - 5\chi < 0.$

2) Ὁμοίως αἱ:

α') $\frac{5\chi - 3}{2} - 1 > \frac{2\chi - 4}{5} + 2$, β') $\frac{5\chi - 3}{4} + \frac{2\chi - 5}{6} < 5\chi - 4,$

γ') $2\chi - 5(\chi - 2) < 1$, δ') $\frac{2\chi - 3}{4} - \frac{5\chi - 6}{2} > 0,$

ε') $(2\chi + 5)^2 > 4\chi(\chi - 7),$

στ') $(\chi + 2)^2(\chi - 5) > \chi^2\left(\chi - \frac{1}{2}\right) - \frac{\chi^2}{2} + 7.$

3) Ὁμοίως αἱ:

α΄) $\dfrac{-2}{2\chi-3} > 5$. Διὰ νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν παρονομαστὴν πρέπει νὰ διακρίνωμεν δύο περιπτώσεις

1ον $2\chi-3 > 0$ δηλαδὴ $\chi > \dfrac{3}{2}$ τότε πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $2\chi-3$ διατηροῦμεν τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος· ἤτοι λαμβάνομεν $-2 > 5\,(2\chi-3)$ ὅθεν θὰ προέκυπτε $\chi < \dfrac{13}{10}$ τοῦτο ὅμως δὲν συμβιβάζεται μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι $\chi > \dfrac{3}{2}$.

2ον $2\chi-3 < 0$ δηλαδὴ $\chi < \dfrac{3}{2}$· πολλαπλασιάζοντες τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα ἐπὶ $2\chi-3$ λαμβάνομεν ἀνισότητα ἰσοδύναμον, τὴν $-2 < 5(2\chi-3)$ ἢ $\chi > \dfrac{13}{10}$. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ $\dfrac{13}{10}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\dfrac{3}{2}$. Ὅθεν ἡ δοθεῖσα ἀνισότης πληροῦται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ περιλαμβανομένην μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 1,3 καὶ 1,5.

β΄) $\dfrac{2\chi}{\chi-1} - \dfrac{3}{4\chi+4} < \dfrac{5\chi+1}{3\chi+3} + \dfrac{1}{3}$.

4) Εὕρετε τὰς τιμὰς τοῦ χ, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν συγχρόνως τὰς δύο ἀνισότητας:

α΄) $2\chi+5 > 8(\chi-3)$, $\quad 5\chi-7 < 5$

β΄) $2\chi+3 > \chi-\dfrac{3}{5}$, $\quad 3\chi-5 > 1-5\chi$

γ΄) $45\chi+27 > 49\chi+105$, $\quad 5\chi+7 > 8$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI.

ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ἀνάγκης εἰσαγωγῆς τῶν ἀσυμμέτρων.

104. Θεωρήσωμεν τυχόντα ἀριθμὸν κλασματικὸν μὴ τρεπόμενον ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν τὸν $7\dfrac{8}{33}$. Γνωρίζομεν ἐκ τῆς ἀρι-

θμητικῆς, ὅτι οὗτος τρέπεται εἰς τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα 7,2424.........ἂς σχηματίσωμεν τὰς σειρὰς

(α) 7,2 7,24, 7,242, 7,2424.....
(β) 7,3, 7,25, 7,243, 7,2425.....

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν λάβωμεν ἀντὶ τοῦ $7\frac{8}{33}$ τὸν 7,2 κάμνωμεν λάθος ἐλιγώτερον τοῦ 0,1 διότι ὁ $7\frac{8}{33}$ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 7,2 καὶ τοῦ 7,3. Ὁμοίως βλέπομεν ὅτι ἐὰν λάβωμεν ἀντὶ τοῦ $7\frac{8}{33}$ τὸν 7,24 κάμνωμεν λάθος ὀλιγώτερον τοῦ 0,01 κ.ο.κ.

Ὥστε δυνάμεθα νὰ προσεγγίσωμεν ὅσον θέλομεν πρὸς τὸν $7\frac{8}{33}$ λαμβάνοντες περισσότερα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ 7,2424.... ἢ ἀκριβέστερον ἂν δοθῇ ἀριθμὸς θετικὸς ὁσονδήποτε μικρὸς π.χ. ὁ $\frac{1}{1560}$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὅρον τῆς σειρᾶς (α) ὁ ὁποῖος νὰ διαφέρῃ ἀπὸ τὸν $7\frac{8}{33}$ ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{1560}$ Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι, ὁ 7,2424...... εἶναι ἀριθμὸς ἴσος πρὸς τὸν $7\frac{8}{33}$.

Ὁ 0, 2424.....προκύπτει ἐκ τῆς διαιρέσεως 8:33, δηλαδὴ προκύπτει ὅταν ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ πηλίκον 8:33 κατὰ προσέγγισιν 0,1 0,01 0,001....

105. Ζητήσωμεν ἤδη τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 2. Παρατηροῦμεν ὅτι, δὲν ὑπάρχει κλάσμα τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ εἶναι ὁ 2 διότι ἔστω ὅτι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=2$ τότε ἐὰν $\frac{\lambda}{\mu}$ καλέσω τὸ ἀνάγωγον τὸ ἴσον πρὸς $\frac{\alpha}{\beta}$ θὰ ἔχω $\frac{\lambda^2}{\mu^2}=2$· ἀλλ' ἀφοῦ τὸ $\frac{\lambda}{\mu}$ εἶναι ἀνάγωγον, καὶ τὸ $\frac{\lambda^2}{\mu^2}$ θὰ εἶναι ἐπίσης ἀνάγωγον. Ὅθεν ἀδύνατον νὰ ἔχωμεν $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2=2$.

106. Ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν 0,1 0,01.... κατ᾿ ἔλλειψιν καὶ καθ᾿ ὑπεροχήν.

Λαμβάνομεν οὕτω τὰς δύο σειρὰς ἀριθμῶν

(Α) 1,4 1,41 1,414.....

(Β) 1,5 1,42 1,415.....

$$
\begin{array}{lccccc}
 & (A) & & & & (B) \\
\text{Ἔχομεν} & (1,4)^2 & < & 2 & < & (1,5)^2 \\
 & (1,41)^2 & < & 2 & < & (1,42)^2 \\
 & (1,414)^2 & < & 2 & < & (1,415)^2 \\
 & \ldots\ldots\ldots & & & &
\end{array}
$$

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ σειραὶ (Α) καὶ (Β) εἶναι ἀπεριόριστοι, δηλαδὴ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων δὲν εἶναι πεπερασμένον. Ἐπίσης ὅτι, ἂν δοθῇ ἀριθμὸς ὁσονδήποτε μικρὸς π.χ. $\frac{1}{1560}$ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὅρον τῆς σειρᾶς (Α) διαφέροντα ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου ὅρου τῆς σειρᾶς (Β) ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{1560}$ καὶ ὅπως, λέγοντες ὅτι, τὸ πηλίκον $\frac{8}{33}$ ἰσοῦται πρὸς 0,2424.... νοοῦμεν ὅτι, ἐὰν δοθῇ ἀριθμὸς ὁσονδήποτε μικρός, δυνάμεθα λαμβάνοντες ἀρκετὸν ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων νὰ ἔχωμεν ἀκριβῆ δεκαδικὸν διαφέροντα τοῦ $\frac{8}{33}$ ὀλιγώτερον τοῦ ε, οὕτω νοοῦμεν ὅτι, ἐὰν δοθῇ ἀριθμὸς θετικὸς ὁσονδήποτε μικρὸς ε, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ 2 καὶ ἄλλον τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 2 ἔχοντας διαφορὰν μικροτέραν τοῦ ε καὶ ὅπως λαμβάνοντες διαδοχικῶς ὅρους τῆς σειρᾶς (α) πλησιάζομεν διαρκῶς πρὸς τὸ $\frac{8}{33}$ καὶ μάλιστα ἐὰν δοθῇ θετικὸς ε ὁσονδήποτε μικρός, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὅρον τῆς σειρᾶς (α) τοιοῦτον, ὥστε αὐτὸς καὶ οἱ ἑπόμενοί του νὰ εἶναι μικρότεροι τοῦ $\frac{8}{33}$ κατὰ ποσότητα μικροτέραν τοῦ ε, οὕτω λαμβάνοντες διαρκῶς τὰ τετράγωνα ὅρων τῆς σειρᾶς (Α) πλησιάζομεν διαρκῶς πρὸς τὸν ἀριθμὸν 2 καὶ μάλιστα, ἐὰν δοθῇ ἀριθμὸς ε θετικὸς ὁσονδήποτε μικρὸς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὅρον τῆς σειρᾶς (Α) τοιοῦτον ὥστε τὸ τετράγωνον αὐτοῦ καὶ πάντων τῶν ἑπομένων του νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ 2 κατὰ ποσότητα μικροτέραν τοῦ ε. Διὰ τοῦτο δεχόμεθα ὅτι ὑπάρχει δεκαδικὸς μὲ ἀπειρίαν δεκαδικῶν ψηφίων, ὅστις ἰσοῦται πρὸς τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 2. Δὲν θὰ εἶναι δὲ οὗτος δεκαδικὸν περιοδικόν, διότι πᾶν περιοδικὸν κλάσμα ἰσοῦται πρὸς κοινόν, δι' ὃ καὶ λέγομεν, ὅτι, ὁ παραγόμενος ὡς ἄνω δεκαδικὸς ἔχει ἀπειρίαν δεκαδικῶν ψηφίων μὴ περιοδικῶν καὶ ἐπειδὴ δὲν ἰσοῦται πρὸς ἀκέραιον οὔτε πρὸς κλάσμα: δηλαδὴ δὲν εἶναι σύμμετρος, εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός.

107. Ἂς γράψωμεν 7,123456789 10 11 12...... νοοῦντες ὅτι, γράφομεν ὡς δεκαδικὰ τοὺς ἀκεραίους κατὰ σειράν· ἐπειδὴ ὁσαδήποτε δεκαδικὰ ψηφία αὐτοῦ καὶ ἂν λάβωμεν δὲν ὑπερβαίνομεν ἀριθμὸν δοθέντα ὅπως π.χ. τὸν ἀριθμὸν 7,999...... λέγομεν ὅτι ἔχομεν ἀριθμὸν καί, ἐπειδὴ οὗτος δὲν εἶναι σύμμετρος, λέγεται ἀσύμμετρος. Ἤτοι τοιοῦτον ἄπειρον πλῆθος, ἐνῷ αἱ μονάδες ἑκάστης τάξεως δὲν εἶναι πλείονες τῶν 9, λαμβάνεται ὡς ἀριθμὸς οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ σειρὰ τῶν ψηφίων, δι' ὧν παρίσταται τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως. Ἐὰν δὲ τὰ ψηφία ταῦτα δὲν ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ἀλλὰ βαίνουσι κατ'ἄλλην τινὰ τάξιν ὅπως π. χ. εἰς τὸν προηγούμενον ἀριθμόν, τότε ὁ ἀριθμὸς λέγεται ἀσύμμετρος.

108. *Γενικῶς λέγομεν ὅτι ἔχομεν ἀσύμμετρον ἀριθμόν, ὅταν δύναται οὗτος νὰ νοηθῇ ὅτι παρίσταται ὡς δεκαδικὸς ἔχων ἀπειρίαν δεκαδικῶν ψηφίων μὴ περιοδικῶν.* Κατὰ τ' ἀνωτέρω ὑπάρχει ἀριθμὸς ἀσύμμετρος τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον δίδει 3 καὶ σημειοῦται $\sqrt{3}$. Ὅμοια δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν διὰ τὸν 5 καὶ ἐν γένει διὰ πάντα θετικὸν ἀριθμὸν ὅστις δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Συνάγομεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι, ἡ ζήτησις τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 2, τοῦ 3 κλπ. μᾶς ἀναγκάζει νὰ εἰσαγάγωμεν τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς.

109. **Ὁρισμοί,** α') Ἀριθμός τις λέγεται ***μεγαλύτερος*** ἄλλου, ἂν περιέχῃ πλὴν τῶν μονάδων ἐκείνου καὶ ἄλλας ὡς π.χ. 7,999........ > 7, 353 353 353......

β') Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ***ἴσοι*** ὅταν πᾶς ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς μικρότερος τοῦ ἑνὸς εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ ἄλλου· οἱ ἀριθμοὶ 7,999...... καὶ 8 εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους. Κατὰ ταῦτα, ἵνα δύο ἀριθμοὶ γεγραμμένοι ὑπὸ τὴν δεκαδικὴν μορφὴν εἶναι ἴσοι πρέπει ἢ τὰ ὁμοταγῆ αὐτῶν ψηφία νὰ εἶναι πάντα τὰ αὐτά, ἢ τὰ πρῶτα ὁμοταγῆ ψηφία καθ' ἃ διαφέρουσι ἀλλήλων νὰ ἔχωσι διαφορὰν 1, τὰ δὲ λοιπὰ τοῦ μὲν ἔχοντος τὸ μικρότερον ψηφίον νὰ εἶναι ἄπειρα 9, τοῦ δὲ ἑτέρου 0. π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 6,483929...... καὶ 6,484 εἶναι ἴσοι.

110. Ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει πάντοτε ἄθροισμα καὶ διαφορὰ καὶ γινόμενον καὶ πηλίκον δύο ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν ἢ ἑνὸς ἀσυμμέτρου καὶ ἑνὸς συμμέτρου καὶ ὅτι διατηροῦνται αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν πράξεων.

111. Ὅπως νοοῦμεν θετικοὺς καὶ ἀρνητικοὺς συμμέτρους νοοῦμεν θετικοὺς καὶ ἀρνητικοὺς ἀσυμμέτρους.

ΡΙΖΑΙ

112. **Ἀριθμητικὰ ριζικά.** Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ παραδεχθῶμεν ὅτι ἰσχύει ἡ ἑξῆς πρότασις: «Δοθέντος θετικοῦ τινος ἀριθμοῦ α καὶ θετικοῦ τινος ἀκεραίου μ. ὑπάρχει εἷς καὶ μόνον θετικὸς ἀριθμὸς β (ἀκέραιος, κλασματικὸς ἢ ἀσύμμετρος) τοιοῦτος ὥστε $\alpha = \beta^\mu$ ».

Καλοῦμεν *μυοστὴν ἀριθμητικὴν ρίζαν* τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ α τὸν θετικὸν ἀριθμὸν β ὅστις ὑψούμενος εἰς τὴν μυοστὴν δύναμιν δίδει τὸν α καὶ σημειοῦμεν: $\beta = \sqrt[\mu]{\alpha}$. Τὸ α τότε λέγεται *ὑπόρριζον*· τὸ $\sqrt{}$ καλεῖται *ριζικόν*, τὸ δὲ μ δείκτης τῆς ρίζης ἢ τοῦ ριζικοῦ).

Ἐκ τοῦ προηγουμένου ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι

$\sqrt[\mu]{\alpha^\mu} = \alpha$ καὶ $\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\mu = \alpha$.

113. ***Γινόμενα καὶ πηλίκα ἀριθμητικῶν ριζῶν.*** Ἔστωσαν δύο θετικοὶ ἀριθμοὶ Α καὶ Β καὶ μ θετικός τις ἀκέραιος· ἔχομεν $\sqrt[\mu]{A}.\sqrt[\mu]{B} = \sqrt[\mu]{A.B}$ καὶ πράγματι τὸ πρῶτον μέλος ὑψούμενον εἰς τὴν μυοστὴν δύναμιν δίδει $\left(\sqrt[\mu]{A}\right)^\mu \left(\sqrt[\mu]{B}\right)^\mu = A.B.$ καὶ τὸ δεύτερον δίδει ἐπίσης $\left(\sqrt[\mu]{A.B.}\right)^\mu = A.B.$ Γενικῶς ἔχομεν ὅτι: ***Τὸ γινόμενον μυοστῶν ριζῶν πολλῶν (θετικῶν) ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὴν μυοστὴν ρίζαν τοῦ γινομένου των.*** Ἔχομεν ἐπίσης $\dfrac{\sqrt[\mu]{A}}{\sqrt[\mu]{B}} = \sqrt[\mu]{\dfrac{A}{B}}$, διότι

$$\left(\frac{\sqrt[\mu]{A}}{\sqrt[\mu]{B}}\right)^\mu = \frac{\left(\sqrt[\mu]{A}\right)^\mu}{\left(\sqrt[\mu]{A}\right)^\mu} = \frac{A}{B} \text{ καὶ } \left(\sqrt[\mu]{\frac{A}{B}}\right)^\mu = \frac{A}{B}.$$

Ἤτοι τὸ ***πηλίκον δύο ῥιζῶν μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην μ ἰσοῦται πρὸς τὴν μυοστὴν ῥίζαν τοῦ πηλίκου τῶν ὑπορρίζων***

114. ***Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου καὶ τὸν δείκτην τῆς ῥίζης ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν***

ἤτοι $\sqrt[\mu]{A^{\nu}} = \sqrt[\mu\rho]{A^{\nu\rho}}$ ὅπου ρ θετικὸς ἀκέραιος.

Ἀπόδειξις. Ὑψοῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος εἰς τὴν μρ δύναμιν καὶ λαμβάνομεν ἐξ ἀμφοτέρων

$A^{\nu\rho}$, διότι $\left(\sqrt[\mu]{A^{\nu}}\right)^{\mu\rho} = \left|\left(\sqrt[\mu]{A^{\nu}}\right)^{\mu}\right|^{\rho} = A^{\nu\rho}$.

115. Ἕπεται ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ὅτι ἂν δείκτης τῆς ῥίζης καὶ ἐκθέτης τοῦ ὑπορρίζου διαιροῦνται διὰ τοῦ αὐτοῦ θετικοῦ ἀκεραίου δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν τὸ δοθὲν ριζικὸν εἰς ἄλλο διαιροῦντες δείκτην τῆς ῥίζης καὶ ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ὁπότε λέγομεν ὅτι ***ἁπλοποιοῦμεν*** τὸ ριζικὸν π.χ.

$$\sqrt[8]{16\alpha^4\beta^{12}\gamma^8} = \sqrt[2.4]{2^4.\alpha^4\beta^{4\cdot 3}\gamma^{4\cdot 2}} = \sqrt{2\alpha\beta^3\gamma^2}$$

116. Ἐφαρμόζοντες τ' ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ μετασχηματίζωμεν ῥίζας μὲ διαφόρους δείκτας εἰς ***ἰσοβαθμίους ῥίζας*** (δηλαδὴ εἰς ῥίζας μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην.) Π.χ. Ἔστωσαν αἱ ῥίζαι

$\sqrt[6]{\alpha}$, $\sqrt[10]{\beta}$, $\sqrt[18]{\gamma}$, παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν π εἶναι κοινόν τι

πολλαπλάσιον τῶν δεικτῶν καὶ ἐὰν $\frac{\pi}{6} = \lambda$, $\frac{\pi}{10} = \mu$, $\frac{\pi}{18} = \nu$

θὰ ἔχωμεν ὅτι, τὰ ριζικὰ $\sqrt[6.\lambda]{\alpha^{\lambda}}$, $\sqrt[10\mu.]{\beta^{\mu}}$, $\sqrt[18.\nu]{\gamma^{\nu}}$, τὰ ὁποῖα

εἶναι ἴσα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα δοθέντα, ἔχουν τὸν αὐτὸν δείκτην διότι 6λ=10μ=18ν=π. Δύναμαι οὕτω νὰ λάβω τὸ ε.κ.π. τῶν δεικτῶν 6, 10,18, δηλαδὴ τὸ 90 καὶ νὰ διαιρέσω τοῦτο δι' ἑκάστου αὐτῶν· τότε εὑρίσκω πηλίκα τὰ 15,9,5 καὶ θὰ ἔχω μετεσχηματισμένα ριζικὰ τὰ ἑξῆς:

$$\sqrt[90]{\alpha^{15}}\ \sqrt[90]{\beta^{9}},\ \sqrt[90]{\gamma^{5}}.$$

117. Ἐφαρμόζοντες τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας μετατρέπομεν παράστασιν μὲ παρονομαστὴν ριζικὸν εἰς ἄλλην ἔχουσαν παρονομαστὴν ρητόν.

Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως εἶναι τῆς μορφῆς $\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$ δυνάμεθα νὰ τὸν καταστήσωμεν ρητὸν πολλαπλασιάζοντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ταῦ κλάσματος ἐπὶ τὴν συζυγῆ παράστασιν τοῦ παρονομαστοῦ δηλαδὴ $\sqrt{\alpha} \mp \sqrt{\beta}$ π.χ.

$$\frac{2\alpha^2\beta}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}=\frac{2\alpha^2\beta(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}=\frac{2\alpha^2\beta(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}{\alpha-\beta}$$

118. Παρατήρησις. Ἔστω ὅτι, Π εἶναι παράστασις περιέχουσα γράμματα. Ἵνα τὸ $\sqrt{\Pi^2}$ δίδει Π, ὅπου Π θετικὸν πρέπει προφανῶς νὰ ἐννοῶμεν ὅτι, τὰ γράμματα λαμβάνουν τιμὰς καθιστώσας τὸ Π θετικόν. Π.χ. θεωρήσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha+1+\sqrt{(\alpha-1)^2}}{2\alpha}$ ὅπου $\alpha \neq 0$. Τοῦτο ἰσοῦται μὲ 1, ἐὰν $\alpha > 1$ καὶ μὲ $\frac{1}{\alpha}$ ἐὰν $\alpha < 1$. Διότι ἂν $\alpha > 1$ τὸ $\alpha-1 > 0$ καὶ ἑπομένως $\sqrt{(\alpha-1)^2}=\alpha-1$. Ἄρα τὸ κλάσμα ἰσοῦται μὲ $\frac{\alpha+1+\alpha-1}{2\alpha}=1$

Ὅταν $\alpha < 1$ τὸ $\alpha-1 < 0$ καὶ ἑπομένως $\sqrt{(\alpha-1)^2}=1-\alpha$ καὶ τὸ κλάσμα ἰσοῦται τότε πρὸς τὸ $\frac{\alpha+1+1-\alpha}{2\alpha}=\frac{1}{\alpha}$.

119. **Πρόβλημα.** Νὰ εὑρεθοῦν ὅλοι οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ δοθέντα ἀριθμὸν α (ἀλγεβρικόν).

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

α') Ἂν $\alpha=0$ τότε μόνον τὸ τετράγωνον τοῦ μηδενὸς ἰσοῦται πρὸς α.

β') Ἂν $\alpha > 0$ κατὰ τὰ προηγούμενα ὑπάρχει θετικὸς ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται πρὸς τὸ α καὶ τὸ ὁποῖον ἐσημειώσαμεν $\sqrt{\alpha}$. Ἀλλὰ καὶ τοῦ $-\sqrt{\alpha}$ τὸ τετράγωνον ἰσοῦται πρὸς τὸ α.

γ') Ἂν $\alpha < 0$ ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον παντὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι θετικὸς ἢ μηδέν, οὐδεὶς ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς ὑπάρχει τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ ἰσοῦται πρὸς α.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι ἂν δύο ***δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ τετράγωνον οὗτοι εἶναι ἴσοι ἢ ἀντίθετοι.***

120. **Ἀλγεβρικαὶ ρίζαι.** ***Μυοστὴ ἀλγεβρικὴ ρίζα*** ἀριθμοῦ τινος α εἶναι ἄλλος ἀριθμὸς β, ὅστις ὑψούμενος εἰς τὴν μυοστὴν δύναμιν δίδει τὸν α· τουτέστι τοιοῦτος ὥστε $\beta^{\mu}=\alpha$.

Ἂς καλέσωμεν Α τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ α· κατὰ τὰ προηγούμενα (§ 112) ὑπάρχει μία καὶ μόνον μυοστὴ ἀριθμητικὴ ρίζα τοῦ A τὴν ὁποίαν σημειοῦμεν $\sqrt[\mu]{A}$. Εἶναι προφανὲς ὅτι πᾶς ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόλυτος τιμὴ διαφέρει τοῦ $\sqrt[\mu]{A}$ ὑψούμενος εἰς τὴν μυοστὴν δύναμιν δὲν δίδει A. Ὥστε ἐὰν ὑπάρχῃ μυοστὴ ἀλγεβρικὴ ρίζα τοῦ A, θὰ εἶναι ἡ $+\sqrt[\mu]{A}$ ἢ ἡ $-\sqrt[\mu]{A}$ (μὲ τὸ $\sqrt[\mu]{\ }$ ἐκφράζομεν ἀριθμητικὴν ρίζαν). π. χ. τετραγωνικὴ (ἀλγεβρικὴ) ρίζα τοῦ 4 εἶναι τὸ $+\sqrt{4}$ καὶ τὸ $-\sqrt{4}$ ἤτοι τὸ 2 καὶ τὸ -2· κυβικὴ ρίζα τοῦ 8 εἶναι μόνον τὸ $+\sqrt{8}$, ἤτοι τὸ 2. κυβικὴ ρίζα τοῦ -8 εἶναι μόνον τὸ $-\sqrt{8}$, ἤτοι τὸ -2. Τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ -4 δὲν ὑπάρχει δηλ. δὲν ὑπάρχει ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, ὅστις νὰ εἶναι τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ -2, καὶ γενικῶς.

α') ***Δὲν ὑπάρχει ρίζα ἀρτίας τάξεως ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ,*** διότι πᾶς ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς (θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς) ὑψούμενος εἰς ἀρτίαν δύναμιν δίδει θετικόν.

β') ***Πᾶς θετικὸς ἔχει δύο ἀλγεβρικὰς ρίζας ἀρτίας τάξεως,*** αἱ ὁποῖαι λαμβάνονται ὅταν προτάξωμεν τὸ + καὶ τὸ − πρὸ τῆς ἀριθμητικῆς ρίζης τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ π.χ. τετάρτη ρίζα τοῦ 81 εἶναι τὸ $+\sqrt[4]{81}=3$ καὶ τὸ $-\sqrt[4]{81}=-3$.

Παρατηροῦμεν ὅτι $\sqrt{\alpha^2}=\alpha$, ἐὰν $\alpha>0$ καὶ $\sqrt{\alpha^2}=-\alpha$, ἐὰν $\alpha<0$.

γ') ***Πᾶς ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς ἔχει μίαν ρίζαν περιττῆς τάξεως***

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις:

α') $\sqrt[6]{\alpha^8}$, β') $\sqrt[8]{\alpha^{12}\beta^8}$, γ') $\sqrt[6]{16\alpha^{12}\beta^{20}\gamma^9}$

δ') $\sqrt[4]{2\alpha^8}$, ε') $\sqrt[5]{3\alpha^5\beta^3}$,

2) Νὰ μετατραποῦν τὰ ριζικὰ εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα ἔχοντα τὸν αὐτὸν δείκτην:

$\sqrt[7]{0,5}$, $\sqrt[14]{\left(\frac{1}{2}\right)^8}$, $\sqrt[21]{42}$.

3) Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοί:

α') $\sqrt{\alpha}.\ \sqrt{3\beta\gamma}$, β') $\sqrt{\alpha^2}.\ \sqrt{5\alpha^2\beta}$

γ') $\sqrt[5]{\alpha^2}\cdot\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2}$, δ') $\sqrt[3]{\alpha^5\beta^3}\cdot\sqrt[12]{2\alpha^2\beta^5}\cdot\sqrt[4]{\alpha^3\beta^4}$

ε') $\sqrt[3]{3\alpha^8\beta^2\gamma}\cdot\sqrt[6]{2\alpha^2\beta\gamma}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{5\alpha^2\beta}{\gamma^2}}$

4) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:

α') $\sqrt[4]{\alpha^8}:\sqrt[4]{\alpha^3}$. β') $\sqrt[5]{7\alpha^7\beta^8\gamma^2}:\sqrt[5]{5\alpha^2\beta^4\gamma}$

γ') $\sqrt[3]{\alpha^5}:\sqrt[4]{2\alpha^3}$, δ') $\sqrt[6]{7\alpha^3\beta^2}:\sqrt[4]{2\alpha^2\beta^3}$.

5) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:

α') $\sqrt{25.8.3}$, β') $\sqrt[3]{54.8.605}$ γ') $\sqrt{22869}$

δ') $3\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}+\dfrac{7}{8}\sqrt{3}$.

ε') $2\sqrt{8}-7\sqrt{18}+5.\sqrt{72}-\sqrt{50}$.

στ') $\sqrt{\dfrac{25\alpha^5\beta^4\gamma^6}{12^2\delta^2\varepsilon^5}}$, ζ') $\sqrt{\dfrac{\chi^3-2\chi^2+\chi}{\chi^2\psi+2\chi\psi+\psi}}$

η') $\sqrt[3]{24\alpha\beta^3}-\sqrt[3]{192\alpha\gamma^3}+\sqrt[3]{375\alpha\beta^3}$,

6) Νὰ ἀπαλειφθοῦν τὰ ριζικὰ ἐκ τῶν παρονομαστῶν τῶν κάτωθι κλασμάτων.

α') $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, β') $\dfrac{5}{\sqrt[3]{7}}$, γ') $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}}$, δ') $\dfrac{5\alpha^2\beta}{\sqrt[4]{\alpha^3}}$

ε') $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$; στ') $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, ζ') $\dfrac{5\gamma}{2+\sqrt{\gamma}}$

η') $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}$, θ') $\dfrac{\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$

7) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:

α') $\sqrt{\dfrac{4\alpha^2(\alpha-\beta)}{9(\chi-\psi)^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{3\alpha^2(\chi-\psi)}{2(\alpha^2-\beta^2)}}$

β') $\sqrt[4]{\alpha^5}\cdot\sqrt[10]{\alpha^8}\cdot(-\sqrt{\alpha})$

γ') $\sqrt[3]{(\chi^2-\psi^2)^2} \cdot \sqrt[5]{\left(\frac{2}{\chi^4-\psi^4}\right)^4} \cdot \sqrt[6]{\left(\frac{\chi^2+\psi^2}{2}\right)^4}$

δ') $\sqrt{\frac{\alpha^2-\beta^2}{4\alpha^4\beta^3}} : \sqrt{\frac{9(\alpha+\beta)}{8\alpha^2\beta}}$

ε') $\frac{2}{1-\sqrt{\chi}} + \frac{2\chi}{1-\chi} - \frac{3\sqrt{\chi-1}}{2+\sqrt{4\chi}}$

121. **Φανταστικοὶ ἀριθμοί.** Ὅπως εἴδομεν, ἐὰν $\alpha < 0$, οὐδεὶς ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς ὑπάρχει τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ ἰσοῦται πρὸς α. Οὕτω δὲν ὑπάρχει οὔτε θετικὸς ἀριθμός, οὔτε ἀρνητικός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ ἰσοῦται πρὸς -1. Δι' αὐτὸ συμφωνοῦμεν νὰ θεωρῶμεν ὅτι ἔχομεν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι οὐδεὶς ἐκ τῶν γνωστῶν, ἔχει δὲ τὴν ἰδιότητα νὰ ἔχῃ τετράγωνον ἴσον πρὸς τὴν ἀρνητικὴν μονάδα. Ἐὰν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον τὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ i, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὴν τεθεῖσαν συμφωνίαν $i^2=-1$, ὅπερ συμβολικῶς γράφομεν $i=\sqrt{-1}$. Τὸ i καλοῦμεν φανταστικὴν μονάδα. Παραδεχόμεθα δὲ ὅτι $i.1=i$, $i.(-1)=-i$.

122. Συμφωνοῦμεν ἐπίσης νὰ θεωρῶμεν ὅτι ἔχομεν καὶ ἀριθμοὺς προκύπτοντας ἀπὸ πολλαπλασιασμὸν τοῦ i ἐπὶ τυχόντα ἀλγεβρικὸν ἀριθμόν. Οὕτως ἐπὶ παραδείγματι ἔχομεν τοὺς ἀριθμούς:

$2i, 3i, \ldots -2i, -3i, \ldots \frac{1}{2}i, \frac{1}{3}i, \ldots\ldots -\frac{1}{2}i, -\frac{1}{3}i, \ldots\ldots$

$\sqrt{2}i, \sqrt{3}i, \sqrt{5}i, \ldots -\sqrt{2}i, -\sqrt{3}i, \ldots$

123. Γενικῶς, ἐὰν α εἶναι τυχὼν θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός, συμφωνοῦμεν νὰ εἶναι

$(\alpha i)^1=\alpha i$, $(\alpha i)^2=-\alpha^2$, $(\alpha i)^3=-\alpha^3 i$, $(\alpha i)^4=\alpha^4 \ldots\ldots$

Κατὰ ταῦτα $i^3=i^2 . i=-i$, $i^4=i^2 . i^2=(-1).(-1)=$
$=+1$, $i^5=i^4 . i=i. \ldots\ldots$

$i^{4\nu+1}=i^{4\nu} . i=(i^4)^\nu . i=1^\nu . i=i$

$i^{4\nu-1}=i^{4\nu} : i=(i^4)^\nu : i=1 : i=i^4 : i=i^3=-i$

124. Τοὺς ἀριθμοὺς Κi ὅπου Κ τυχὼν θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς καλοῦμεν ***φανταστικούς***. Τοὺς θετικοὺς καὶ ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς τοὺς καλοῦμεν πραγματικοὺς πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν φανταστικῶν. Π.χ. τὸ -2 εἶναι πραγματικός, τὸ 2i εἶναι φανταστικός.

125. Ἵνα ὑπάρχῃ ἄθροισμα πραγματικῶν καὶ φανταστικῶν

ἀριθμῶν, θὰ θεωρῶμεν ὅτι ἔχομεν καὶ ἀριθμοὺς τῆς μορφῆς $\alpha+\beta i$ ὅπου α καὶ β εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί. Τούτους καλοῦμεν μ ι γ ά δ α ς. π.χ. μιγάδες εἶναι οἱ ἀριθμοὶ $4+7i$, $2-3i$, $\frac{1}{2}+6i$, $\sqrt{3}+\frac{1}{5}i$ κλπ.

126. Ἵνα διατηρῶνται αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες δηλαδὴ ἡ τῆς ἀντιμεταθέσεως καὶ ἡ ἐπιμεριστική, συμφωνοῦμεν νὰ ἰσχύουν οἱ ἑξῆς κανόνες διὰ τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν ἢ μιγάδων ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους διατυπώνομεν μὲ γράμματα:

α') $(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$

β') $(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$

γ') $(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$

δ') $(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2$

127. Οἱ ἀριθμοὶ $\alpha+\beta i$ καὶ $\alpha-\beta i$ λέγονται συζυγεῖς.

Λέγομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\alpha+\beta i$ καὶ $\alpha'+\beta' i$ εἶναι ἴσοι ὅταν $\alpha=\alpha'$ καὶ $\beta=\beta'$.

Ὁμοίως θεωροῦμεν ὅτι $\alpha+\beta i=0$, ὅταν $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$ καὶ τότε μόνον.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:

α') $(8+3i)+(5-7i)+\left(\frac{1}{2}-6i\right)$

β') $(12+4i)-(11-5i)$, γ') $(2-3i)\cdot(4+5i)$,

δ') $(3+4i)\cdot(3-4i)$, ε') $(11+4i)^2$.

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(10+14i):(2+7i)$, ἤτοι νὰ προσδιορισθοῦν δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ χ καὶ ψ τοιοῦτοι ὥστε $(2+7i)(\chi+\psi i)=10+14i$. (§ 126 γ').

128. **Δύναμις μὲ κλασματικὸν ἐκθέτην.** Διὰ νὰ παριστῶμεν ριζικὰ κάμνομεν χρῆσιν καὶ ἄλλων συμβόλων μὲ τὰ ὁποῖα γίνονται ἀνετώτερον οἱ ἀλγεβρικοὶ ὑπολογισμοί. Οὕτω:

τὸ σύμβολον $\sqrt{A}$ ἀντικαθιστῶμεν μὲ τὸ $A^{\frac{1}{2}}$

τὸ σύμβολον $\sqrt[3]{A}$ μὲ τὸ $A^{\frac{1}{3}}$

τὸ σύμβολον $\sqrt[4]{A}$ μὲ τὸ $A^{\frac{1}{4}}$ Καὶ γενικῶς τὸ σύμβολον $\sqrt[\mu]{A}$ παριστῶμεν μὲ τὸ $A^{\frac{1}{\mu}}$.

Ἐπίσης τὸ σύμβολον $\sqrt[\mu]{A^{\nu}}$, ὅπου μ καὶ ν θετικοὶ ἀκέραιοι, ἀντικαθιστῶμεν μὲ τὸ $A^{\frac{\nu}{\mu}}$. Δηλαδὴ θέτομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν: $A^{\frac{\nu}{\mu}}$ ***εἶναι τὸ*** $\sqrt[\mu]{A^{\nu}}$.

129. Θεωρήσωμεν τὰ σύμβολα $A^2, A^3, \dots A^{\nu}, A^0, A^1$, τὰ ὁποῖα δηλοῦν δυνάμεις. Ἐδείξαμεν ἰδιότητάς τινας, τὰς ὁποίας ἐκαλέσαμεν ἰδιότητας τῶν δυνάμεων.

Τὰ $A^{\frac{1}{2}}, A^{\frac{1}{3}} \dots\dots A^{\frac{1}{\nu}} \dots\dots A^{\frac{\nu}{\mu}}$ ἕνεκα τῆς ὁμοιότητός των πρὸς τ' ἀνωτέρω σύμβολα καλοῦμεν ***δυνάμεις μὲ κλασματικὸν ἐκθέτην*** καὶ ἀποδεικνύεται ὅτι συμβιβάζεται μὲ τὰ πράγματα νὰ θεωρῶμεν ὅτι αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους ἰσχύουν καὶ ἐπὶ τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας κλασματικούς.

Οὕτω θὰ θεωρῶμεν ὅτι,

α') $A^{\frac{1}{2}} \cdot A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = A^1 = A$. Καὶ πράγματι τότε $\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^2 = A$, ὅπερ συμβιβάζεται μὲ τὸ $(\sqrt{A})^2 = A$.

Ὁμοίως θὰ θεωρῶμεν ὅτι

β') $A^{\frac{1}{3}} \cdot A^{\frac{1}{3}} \cdot A^{\frac{1}{3}} = A^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = A^1 = A$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $\left(A^{\frac{1}{3}}\right)^3 = A$ ὅπερ συμβιβάζεται μὲ τὸ $\left(\sqrt[3]{A}\right)^3 = A$.

καὶ γενικῶς $A^{\frac{1}{\mu}} = \sqrt[\mu]{A}$

Ὁμοίως θὰ θεωρῶμεν ὅτι

γ') $\left(A^{\frac{\nu}{\mu}}\right)^{\mu} = A^{\frac{\nu}{\mu}\cdot\mu} = A^{\nu}$, ὅπερ συμβιβάζεται μὲ τὸ $\left(\sqrt[\mu]{A^{\nu}}\right)^{\mu} = A^{\nu}$.

130. **Δυνάμεις μὲ ἀρνητικὸν ἐκθέτην οἱονδήποτε.** Ἔστωσαν μ καὶ ν θετικοὶ καὶ ἀκέραιοι.

Ἔχομεν ὁρίσει (§ 20) ὅτι $\alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^{\mu}}$ · καθ' ὅμοιον τρόπον ὁρίζομεν ὅτι $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \dfrac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}$ καὶ τοῦτο κατὰ τὰ προηγούμενα ἰσοῦται μὲ $\dfrac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$.

Παραδείγματα: $8^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{8^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{1}{2}$,

$$27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{9}.$$

131. ***Διατήρησις τῶν θεμελιωδῶν νόμων τῶν δυνάμεων.*** Μὲ τοὺς δοθέντας ὁρισμοὺς δυνάμεως μὲ κλασματικὸν ἐκθέτην (§ 129), καὶ δυνάμεως μὲ ἀρνητικὸν ἐκθέτην οἱονδήποτε (§ 130) διατηροῦνται αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν δυνάμεων τουτέστιν αἱ:

$$\alpha^{\mu}.\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu},\quad (\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu},\quad (\alpha.\beta)^{\mu} = \alpha^{\mu}\beta^{\mu},\quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = \frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}.$$

Οὕτω ἐὰν μ,ν,ρ,σ, εἶναι θετικοὶ ἀκέραιοι ἔχομεν

α') $A^{\frac{\nu}{\mu}}.\ A^{\frac{\rho}{\sigma}} = A^{\frac{\nu}{\mu}+\frac{\rho}{\sigma}} = A^{\frac{\nu\sigma+\mu\rho}{\mu\sigma}}$, ὅπερ συμβιβάζεται μὲ τὸ $\sqrt[\mu]{A^{\nu}}\ \sqrt[\sigma]{A^{\rho}} = \sqrt[\mu\sigma]{A^{\nu\sigma}}\cdot\sqrt[\mu\sigma]{A^{\mu\rho}} = \sqrt[\mu\sigma]{A^{\nu\sigma+\mu\rho}}$, καθ' ὅσον δυνάμει τοῦ τεθέντος ὁρισμοῦ ἔχομεν $\sqrt[\mu\sigma]{A^{\nu\sigma+\mu\rho}} = A^{\frac{\nu\sigma+\mu\rho}{\mu\sigma}}$.

Ὁμοίως διακρίνομεν ὅτι:

$$\left(A^{\frac{\nu}{\mu}}\right)^{\frac{\rho}{\sigma}} = A^{\frac{\nu}{\mu}\cdot\frac{\rho}{\sigma}} = A^{\frac{\nu\rho}{\mu\sigma}}\ \text{κ.λ.π.}$$

Ὁμοίως $A^{-\frac{\nu}{\mu}}.\ A^{-\frac{\rho}{\sigma}} = A^{-\left(\frac{\nu}{\mu}+\frac{\rho}{\sigma}\right)}$ καὶ πράγματι ἐξ ὁρισμοῦ (§ 130) ἔχομεν $A^{-\frac{\nu}{\mu}} = \dfrac{1}{A^{\frac{\nu}{\mu}}}$ καὶ $A^{-\frac{\rho}{\sigma}} = \dfrac{1}{A^{\frac{\rho}{\sigma}}}$ ὅθεν

$$A^{-\frac{\nu}{\mu}}.A^{-\frac{\rho}{\sigma}} = \frac{1}{A^{\frac{\nu}{\mu}}\cdot A^{\frac{\rho}{\sigma}}} = \frac{1}{A^{\frac{\nu}{\mu}+\frac{\rho}{\sigma}}} = A^{-\left(\frac{\nu}{\mu}+\frac{\rho}{\sigma}\right)}$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύονται καὶ αἱ λοιπαὶ ἰδιότητες.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

α') $5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{2}{4}}$, β') $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{7}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

γ') $(2\alpha^2\beta)^{\frac{2}{5}} \cdot (2\alpha^2\beta)^4 \cdot (2\alpha^2\beta)^{\frac{3}{25}}$.

δ') $\left[\left(\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{4}}\right]^3$, ε') $\left[(0,2)^{-\frac{2}{7}}\right]^{-\frac{1}{4}}$

στ' $\left[\left[(-3)^{-2}\right]^5\right]^{-2}$ ζ') $(1+\psi)^{\frac{1}{8}} \cdot (1+\psi)^{-\frac{5}{8}}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

132. Πᾶσα ἐξίσωσις ἀναγομένη εἰς ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ λέγεται ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωσ ον π.χ. ἡ ἐξίσωσις $4\chi^2-7\chi+11=0$ εἶναι ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

133. ***Εὕρεσις τῶν ῥιζῶν, τῆς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ.*** Ἐξετάσωμεν πρῶτον μερικὰς περιπτώσεις.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\chi^2-\alpha^2=0$. Παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ $\chi^2-\alpha^2$ γράφεται $(\chi-\alpha)(\chi+\alpha)$· ὅθεν ἀμέσως διακρίνομεν ὅτι τοῦτο γίνεται μηδὲν διὰ $\chi=\alpha$ καὶ $\chi=-\alpha$ καὶ τότε μόνον. Ἤτοι ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-\alpha^2=0$ ἔχει δύο ρίζας, τὰς $\chi=\alpha$ καὶ $\chi=-\alpha$. π,χ. ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-1=0$ ἔχει ρίζας, τὰς $\chi=1$, $\chi=-1$ καὶ μόνον αὐτάς.

134. Ἔστω γενικώτερον ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\chi^2-\lambda=0$, ὅπου λ θετικὸς ἀριθμός. Αὕτη γράφεται $\chi^2-(\sqrt{\lambda})^2=0$ ἢ $(\chi-\sqrt{\lambda})\cdot(\chi+\sqrt{\lambda})=0$, ὅθεν $\chi=+\sqrt{\lambda}$ καὶ $\chi=-\sqrt{\lambda}$. π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-3=0$, γράφεται: $\chi^2-(\sqrt{3})^2=0$, ἢ $(\chi-\sqrt{3})(\chi+\sqrt{3})=0$. Ὅθεν $\chi=+\sqrt{3}$ καὶ $\chi=-\sqrt{3}$.

135. Ἔστω ἤδη ὅτι ἔχομεν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $\chi^2+\lambda=0$, ὅπου λ θετικὸς ἀριθμός. Π. χ. ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+1=0$. Παρατηροῦμεν ὅτι οὔτε θετικὸς ἀριθμὸς ὑπάρχει ἐπαληθεύων τὴν ἐξίσωσιν, οὔτε ἀρνητικός. Μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν ὅμως τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν ὑπάρχει λύσις διὰ τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2+1=0$, διότι γράφεται $\chi^2-i^2=0$, ἢ $(\chi-i)(\chi+i)=0$, ὅθεν $\chi=i$ καὶ $\chi=-i$

Ἔστω γενικῶς ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+\alpha^2=0$· ἔχομεν

$$\chi^2+\alpha^2=\chi^2-(-\alpha^2)=\chi^2-[(-1)\alpha^2]=\chi^2-(i^2\alpha^2)=\chi^2-(\alpha i)^2=$$
$$=(\chi-\alpha i)(\chi+\alpha i).$$

Ινα τοῦτο εἶναι μηδέν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ εἷς παράγων νὰ εἶναι μηδέν, δηλαδὴ ἢ $\chi-\alpha i=0$ ἢ $\chi+\alpha i=0$· ἤτοι ἢ $\chi=\alpha i$ ἢ $\chi=-\alpha i$. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+\alpha^2=0$ ἔχει δύο ρίζας τὰς αi καὶ $-\alpha i$. Ἄρα καὶ πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\chi^2+\lambda=0$ ὅπου $\lambda>0$ ἔχει ρίζας τὰς $i\sqrt{\lambda}$ καὶ $-i\sqrt{\lambda}$, διότι $\chi^2+\lambda=\chi^2-(-\lambda)=\chi^2-(i^2\lambda)=$ $=\chi^2-(i\sqrt{\lambda})^2=(\chi-i\sqrt{\lambda})(\chi+i\sqrt{\lambda})$.

Παραδείγματα. Ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-9=0$ ἔχει ρίζας τὰς 3 καὶ -3, διότι γράφεται $(\chi-3)(\chi+3)=0$. Ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+9=0$ ἔχει ρίζας τὰς $3i$ καὶ $-3i$, διότι γράφεται $(\chi-3i)(\chi+3i)=0$. Ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+5=0$ ἔχει ρίζας τὰς $i\sqrt{5}$ καὶ $-i\sqrt{5}$, διότι γράφεται $(\chi-i\sqrt{5})(\chi+i\sqrt{5})=0$.

136. Ὅπως ἐθεωρήσαμεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2-\alpha^2=0$, ἥτις γράφεται $(\chi-\alpha)(\chi+\alpha)=0$, ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2=0$, ἥτις γράφεται $(\chi-\alpha)^2=0$. Βλέπομεν ὅτι μόνον ἡ τιμὴ $\chi=\alpha$ τὴν ἐπαληθεύει, δηλαδὴ ἔχει ρίζαν μόνον τὸ α. Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι δύο οἱ παράγοντες οἱ ὁποῖοι μηδενίζονται διὰ $\chi=\alpha$ λέγομεν ὅτι τὰ α εἶναι ***διπλῆ*** ρίζα τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2=0$. Π.χ. Ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-14\chi+49=0$ γράφεται $(\chi-7)(\chi-7)=0$. Ἑπομένως ἔχει διπλῆν ρίζαν τὸ 7. Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+2\alpha\chi+\alpha^2=0$ γράφεται $(\chi+\alpha)(\chi+\alpha)=0$. Ὅθεν τὸ $-\alpha$ θὰ εἶναι διπλῆ ρίζα τῆς ἐξισώσεως ταύτης. Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+14\chi+49=0$ γράφεται $(\chi+7)(\chi+7)=0$· ἑπομένως ἔχει διπλῆν ρίζαν, τὸ -7.

137. Ἔστω ἤδη ἡ ἐξίσωσις α΄) $\chi^2-14\chi+48=0$. Αὕτη γράφεται $\chi^2-14\chi+49-1=0$. ἢ καὶ $(\chi-7)^2-1=0$, ἢ $(\chi-7)^2-1^2=0$ ἢ $(\chi-7-1)(\chi-7+1)=0$, ἢ $(\chi-8)(\chi-6)=0$. Ὅθεν $\chi=8$, $\chi=6$.
β΄) $\chi^2-14\chi+47=0$. Αὕτη γράφεται $\chi^2-14\chi+49-2=0$ ἢ $(\chi-7)^2-2=0$. ἢ $(\chi-7)^2-(\sqrt{2})^2=0$ ἢ $(\chi-7+\sqrt{2})\cdot(\chi-7-\sqrt{2})=0$. Ὅθεν $\chi=7-\sqrt{2}$, $\chi=7+\sqrt{2}$.
γ΄) $\chi^2-14\chi+53=0$. Αὕτη γράφεται $\chi^2-14\chi+49+4=0$, ἢ $(\chi-7)^2-4i^2=0$ ἢ $(\chi-7+2i)(\chi-7-2i)=0$· Ὅθεν $[\chi-(7-2i)][\chi-(7+2i)]=0$ ἢ $\chi=7-2i$, $\chi=7+2i$
δ΄) $\chi^2+14\chi+54=0$. Αὕτη γράφεται $(\chi+7)^2-(-5)=0$ ἢ $(\chi+7)^2-5i^2=0$. ἢ $(\chi+7)^2-(\sqrt{5}\,i)^2=0$, ἢ $(\chi+7-\sqrt{5}\,i)(\chi+7+\sqrt{5}\,i)=0$. Ὅθεν $\chi=-7+\sqrt{5}\,i$ καὶ $\chi=-7-\sqrt{5}\,i$.

1 8. Ἔστω γενικῶς ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+2\lambda\chi+\lambda^2-\mu^2=0$. Αὕτη γράφεται $(\chi+\lambda)^2-\mu^2=0$ ἢ $(\chi+\lambda-\mu)(\chi+\lambda+\mu)=0$. Ὅθεν

$\chi = -\lambda + \mu$ $\chi = -(\lambda + \mu)$. Τὴν μορφὴν $(\chi+\lambda)^2 - \mu^2$ καλοῦμεν ***κανονικὴν μορφὴν τοῦ τριωνύμου*** τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, διότι καθιστῶμεν προφανεῖς θεμελιώδεις ἰδιότητας τοῦ τριωνύμου, ὅταν τὸ ἀναγάγωμεν εἰς τὴν κανονικὴν μορφήν. Τὴν δὲ $(\chi+\lambda)^2 - \mu^2 = 0$ καλοῦμεν κανονικὴν μορφὴν τῆς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

Παραδείγματα ἀναγωγῆς ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἰς τὴν κανονικὴν μορφήν. Ἔστω ἡ ἐξίωσις

α′) $\chi^2 + 8\chi + 12 = 0$. Αὕτη γράφεται $\chi^2 + 2.4\chi + 16 - 4 = 0$, ἢ $(\chi+4)^2 - 2^2 = 0$· εἶναι τῆς κανονικῆς μορφῆς $(\chi+\lambda)^2 - \mu^2 = 0$, ἐχούσης ρίζας $-\lambda-\mu$, καὶ $-\lambda+\mu$. Ἐνταῦθα $\lambda = 4$, $\mu = 2$· συνεπῶς ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι οἱ ἀριθμοὶ -6 καὶ -2.

β′) $\chi^2 - 3\chi + 1 = 0$. Αὕτη γράφεται $\chi^2 - 2.\frac{3}{2}\chi + \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = 0$

ἢ $\left(\chi - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 0$, ἥτις εἶναι τῆς κανονικῆς μορφῆς

$(\chi+\lambda)^2 - \mu^2 = 0$, ὅπου $\lambda = -\frac{3}{2}$, $\mu = \frac{\sqrt{5}}{2}$. ἤτοι

$\chi = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\chi = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

γ′) $\chi^2 - 6\chi + 10 = 0$. Αὕτη γράφεται

$\chi^2 - 2.\,3\chi + 9 + 1 = 0$ ἢ $(\chi-3)^2 - i^2 = 0$· εἶναι τῆς κανονικῆς μορφῆς μὲ $\lambda = -3$, $\mu = i$· ὅθεν ἡ δοθεῖσα ἔχει ρίζας $\chi = 3 - i$, $\chi = 3 + i$.

δ′) $2\chi^2 - 7\chi + 2 = 0$, γράφεται $\chi^2 - \frac{7}{2}\chi + 1 = 0$, ἢ

$\chi^2 - 2.\frac{7}{4}\chi + \frac{49}{16} - \frac{33}{16} = 0$ ἢ

$\left(\chi - \frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{33}}{4}\right)^2 = 0$· εἶναι τῆς κανονικῆς μορφῆς, ἔχωμεν

δὲ $\lambda = -\frac{7}{4}$ καὶ $\mu = \frac{\sqrt{33}}{4}$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει

ρίζας $\chi = \frac{7}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4}$, $\chi = \frac{7}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}$.

139. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2 + \beta\chi = 0$· γράφεται

$$\alpha\left(\chi^2 + \frac{\beta}{\alpha}\chi\right) = 0 \quad ἢ \quad \chi^2 + \frac{\beta}{\alpha}\chi = 0 \quad ἢ$$

$$\chi^2+2\cdot\frac{\beta}{2\alpha}\chi+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}=0 \text{ ἢ } \left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}=0 \text{ ἢ}$$

$$\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=0.$$

Αὕτη εἶναι τῆς κανονικῆς μορφῆς, ὅπου $\lambda=\frac{\beta}{2\alpha}$, $\mu=\frac{\beta}{2\alpha}$.

Ὅθεν ἐὰν καλέσωμεν χ_1 καὶ χ_2 τὰς δύο ρίζας ἔχομεν

$$\chi_1=-\left(\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-\frac{\beta}{\alpha} \text{ καὶ } \chi_2=-\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\beta}{2\alpha}=0.$$

Σημείωσις. Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις λύεται εὐκόλως καὶ ὡς ἑξῆς: ἐξάγομεν τὸν κοινὸν παράγοντα χ ἐκτὸς παρενθέσεως, ὁπότε λαμβάνομεν $(\alpha\chi+\beta)\chi=0$. Ὅθεν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι $\chi_1=-\frac{\beta}{\alpha}$, $\chi_2=0$.

140. Ἔστω ἤδη ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, ὅπου $\alpha\neq o$. Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\gamma}{\alpha}=0$. Ζητοῦμεν νὰ γράψωμεν τὸ πρῶτον μέλος ὑπὸ τὴν κανονικὴν μορφὴν $\chi^2+2\lambda\chi+\lambda^2-\mu^2$. Παρατηροῦμεν πρὸς τοῦτο ὅτι πρέπει τὸ $\frac{\beta}{\alpha}$ νὰ τὸ θεωρήσωμεν ὡς 2λ. ἤτοι νὰ λάβωμεν $2\lambda=\frac{\beta}{\alpha}$ ἢ $\lambda=\frac{\beta}{2\alpha}$ · τότε τὸ $\chi^2+2\lambda\chi+\lambda^2-\mu^2$ γράφεται $\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\mu^2$. Ἵνα τοῦτο συμπίπτῃ μὲ τὸ $\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\gamma}{\alpha}$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν $\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\mu^2=\frac{\gamma}{\alpha}$, δηλαδὴ $\mu^2=\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$. Ὥστε ἐὰν λάβωμεν $\lambda=\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ $\mu^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$ θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ $\chi^2+2\lambda\chi+\lambda^2-\mu^2$ συμπίπτει πρὸς τὸ $\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\gamma}{\alpha}$ · ἀλλὰ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+2\lambda\chi+\lambda^2-\mu^2=0$ εἶναι αἱ $\chi=-\lambda+\mu$, $\chi=-\lambda-\mu$ · ἑπομένως τῆς δοθείσης ἐξισώσεως λύσεις εἶναι αἱ

$$\chi = -\frac{\beta}{2\alpha} + \sqrt{\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}} \quad \text{καὶ} \quad \chi = -\frac{\beta}{2\alpha} - \sqrt{\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}}$$

ἢ καὶ

$$\boxed{\chi = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}} \qquad (1)$$

Σημείωσις. Ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις εἶναι ὁ γενικὸς τύπος τῆς λύσεως δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.

141. Περιπτώσεις καθ' ἃς ὁ τύπος (1) ἁπλοποιεῖται.

α΄) Ὅταν ὁ συντελεστὴς τοῦ χ εἶναι ἄρτιος. Ἂν συμβῇ ὁ συντελεστὴς νὰ εἶναι διπλάσιον ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ, συμφέρει νὰ θέσωμεν $\beta = 2\beta'$, ὅπου β' εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ β. Τότε ὁ τύπος (1)

γίνεται $\quad \chi = \dfrac{-2\beta' \pm \sqrt{4\beta'^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$. ἀλλὰ

$\sqrt{4\beta'^2 - 4\alpha\gamma} = 2\sqrt{\beta'^2 - \alpha\gamma}$ ἑπομένως

$$\chi = \frac{-2\beta' \pm 2\sqrt{\beta'^2-\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{ἢ} \quad \chi = \frac{-\beta' \pm \sqrt{\beta'^2-\alpha\gamma}}{\alpha}$$

Παράδειγμα. $4\chi^2 - 8\chi + 3 = 0$. Παρατηρῶ ὅτι $\beta'^2 - \alpha\gamma =$ $= 4^2 - 4 . 3 = 4$. Ὅθεν αἱ δύο ρίζαι εἶναι $\chi_1 = \dfrac{4+\sqrt{4}}{4}$, καὶ

$\chi_2 = \dfrac{4-\sqrt{4}}{4}$ ἤτοι $\chi_1 = \dfrac{3}{2}$, $\chi_2 = \dfrac{1}{2}$

β΄) Ὅταν ὁ συντελεστὴς τοῦ χ^2 εἶναι ἡ μονάς. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἔχομεν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς. $\chi^2 + \pi\chi + \kappa = 0$ Θέτομεν τότε εἰς τὸν γενικὸν τύπον (1)

$\alpha = 1$, $\beta = \pi$, $\gamma = \kappa$ καὶ λαμβάνομεν

$\beta^2 - 4\alpha\gamma = \pi^2 - 4\kappa = 4\left(\dfrac{\pi^2}{4} - \kappa\right)$. Ὅθεν $\chi = -\dfrac{\pi}{2} \pm \sqrt{\dfrac{\pi^2}{4} - \kappa}$

π.χ. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2 - 3\chi - 4 = 0$ παρατηροῦμεν ὅτι

$\dfrac{\pi^2}{4} - \kappa = \dfrac{9}{4} + 4$ ὅθεν $\chi = \dfrac{3}{2} \pm \sqrt{\dfrac{9}{4} + 4}$ ἢ καὶ $\chi = 4$, $\chi = -1$.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

α΄) $\chi^2 - 36 = 0$, β΄) $4\chi^2 - 9 = 0$, γ΄) $\chi^2 - 7 = 0$, δ΄) $5\chi^2 - 3 = 0$, ε΄) $\chi^2 + 25 = 0$, στ΄) $2\chi^2 + 3 = 0$, ζ΄) $49 = 9\chi^2$, η΄) $3\chi^2 = 108$.

2) Ὁμοίως αἱ:

α΄) $\chi^2 - 5\chi = 0$, β΄) $\chi^2 + 2\chi = 0$, γ΄) $5\chi^2 - 7\chi = 0$, δ') $5\chi^2+3\chi=\chi-5\chi$, ε') $7\chi^2+3\chi=6\chi^2-7\chi$.

3) Ὁμοίως αἱ:

α') $\frac{2\chi^2}{3}+\frac{3\chi}{2}=0$ β') $7\chi=21\chi^2$

γ') $\frac{5\chi}{8}=\frac{3}{5}\chi^2$, δ') $11\chi=33\chi^2$, ε') $\left(\chi+\frac{1}{9}\right)\left(\chi-\frac{1}{9}\right)=0$.

στ') $\chi(\chi+7)=7(\chi+28)$, ζ') $(2\chi+3)(2\chi-4)=2(26-\chi)$.

4) Ὁμοίως αἱ:

α') $(3\chi+1)^2+(3\chi-1)^2=34$, β') $\frac{\chi}{3}-\frac{1}{\chi}=\frac{5+(\chi-5)}{8}$

γ') $\frac{\chi+2}{\chi-2}+\frac{\chi-2}{\chi+2}=\frac{40}{\chi^2-4}$, δ') $\chi^2+7\chi+10=0$

ε') $\chi^2-15\chi+56=0$, στ') $2\chi^2-7\chi+3=0$,

ζ') $2\chi^2+20\chi+50=0$.

5) Ὁμοίως αἱ :

α') $\chi^2+4\chi=45$, β') $\chi^2-2\chi-63=0$, γ') $\chi^2-42\chi-34=0$

δ') $\chi^2+29\chi-210=0$, ε') $\frac{\chi^2}{2^4}-4\frac{1}{4}\chi+15=0$

στ') $\chi^2+1=5(2\chi-4)$ ζ') $\chi(\chi-3)=2\chi(\chi+3)+6$

η') $(\chi-1)^2+(\chi+1)^2+(2\chi+3)^2=29$.

6) Ὁμοίως αἱ :

α') $(\chi-1)\ (\chi-2)-(\chi-2)\ (\chi+3)+(\chi+4)\ (\chi-4)=7$

β') $(\chi-1)^2+(\chi-5)^2=(\chi+1)^2-2(\chi+5)^2$

γ') $(\chi+1)^2(\chi-7)-(\chi-1)(\chi+7)^2=1$

δ') $\frac{\chi-1}{2}+\frac{\chi^2+1}{3}=\frac{7}{4}$, ε') $\frac{3\chi^2}{2}+\frac{2\chi^2}{3}=200-6\chi$.

στ') $\frac{3\chi}{11}-\frac{11\chi}{3}=\frac{8\chi^2}{5}-\frac{5}{8}$.

7) Ὁμοίως αἱ :

α') $\frac{\chi}{\chi-1}=\frac{6}{\chi+1}$, β') $\frac{2}{5}-\frac{3\chi^2+1}{3}-\frac{2\chi}{7}=1-\frac{\chi}{2}$

γ') $\frac{1}{\chi+1}+\frac{1}{\chi+2}=\frac{2}{5}$, δ') $\frac{1}{\chi-1}+\frac{5}{3\chi+3}=\frac{1}{\chi^2-1}+\frac{1}{3}$

ε') $\frac{4\chi-4}{\chi+5}-\frac{3(\chi+2)}{\chi-4}=24$.

8) Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

α′) $\chi^2-\alpha^2=0$, β′) $16\chi^2-\alpha^4=0$, γ′) $\alpha\chi^2-\beta=0$,

δ′) $\chi^2-2(-2\alpha\beta)^2=\alpha^2\beta^2$, ε′) $16\alpha\chi^2-\beta\chi=0$,

στ′) $\beta\chi^2+\alpha^2\beta=\alpha\chi^2+\alpha\beta^2$, ζ′) $\alpha\chi^2+\beta\chi=\gamma\chi^2+\delta\chi$.

9) Ὁμοίως αἱ:

α′) $\chi^2-(\alpha+1)\chi+\alpha^2=0$, β′) $\chi^2-2(\alpha+\beta)\chi+4\alpha\beta=0$

γ′) $\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2-1=0$, δ′) $\alpha^2\chi^2-2\alpha\chi-3=0$

ε′) $\alpha\chi^2-(\alpha^2+1)\chi+\alpha=0$. στ′) $\chi^2-2(\alpha+\beta)\chi+(\alpha+\beta)^2=0$

ζ′) $(\chi+\beta)(\chi-\beta)-(\alpha\chi-\beta)^2=(\beta\chi+\gamma)(\alpha\chi+\beta)$

η′) $(\chi-3\alpha)(\chi-2\beta)=0$,

10) Ὁμοίως αἱ:

α′) $\dfrac{\alpha\chi^2}{2}+\dfrac{\beta\chi^2-\gamma}{5}=\dfrac{\gamma\chi^2-\beta\chi+\gamma}{3}$,

β′) $\dfrac{\alpha\chi^2-\beta\chi}{\alpha^2\beta}-\dfrac{\beta\chi^2+\alpha\chi}{\alpha\beta^2}=1$,

γ′) $\dfrac{\chi}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\chi}=\dfrac{\chi}{\beta}+\dfrac{\beta}{\chi}$, δ′) $\dfrac{\chi+\beta}{\alpha}=\dfrac{\chi}{\chi-\beta}$,

ε′) $\dfrac{\chi-\alpha}{\chi+\alpha}=\dfrac{\beta-\chi}{\chi+\beta}$,

στ′) $\left(\chi-\dfrac{\alpha}{\beta}\right)\left(\chi+\dfrac{\alpha}{\beta}\right)-\left(\alpha+\dfrac{\chi}{\beta}\right)\left(\alpha-\dfrac{\chi}{\beta}\right)=0$,

ζ′) $\dfrac{\alpha}{\chi-\alpha}+\dfrac{\beta}{\chi-\beta}+\dfrac{\gamma}{\chi-\gamma}=0$.

η′) $\left(\dfrac{\chi+\alpha}{\chi+\beta}\right)^2+(\alpha+\beta)\dfrac{\chi+\alpha}{\chi+\beta}+\alpha\beta=0$ (αὕτη λύεται εὐκολώτερον ἂν θέσωμεν $\dfrac{\chi+\alpha}{\chi+\beta}=\chi'$.

142. *Ἀνάλυσις τριωνύμου δευτέρου βαθμοῦ*. Κατὰ τὰ προηγούμενα ἔχομεν $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha\left(\chi^2+\dfrac{\beta}{\alpha}\chi+\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)=$

$=\alpha(\chi+\lambda+\mu)(\chi+\lambda-\mu)$, ὅπου $\lambda=\dfrac{\beta}{2\alpha}$ καὶ $\mu=\dfrac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

ἀλλὰ $-\lambda-\mu$ καὶ $-\lambda+\mu$ εἶναι αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$. Ἂν καλέσωμεν αὐτὰς ρ' καὶ ρ'' θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ γράφεται: $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha(\chi-\rho')(\chi-\rho'')$

Κατὰ ταῦτα πᾶν **τριώνυμον** δευτέρου βαθμοῦ τῆς μορφῆς $\alpha\chi^2+\chi+\gamma$ ἀναλύεται εἰς γινόμενον τῆς μορφῆς: $\alpha(\chi-\rho')(\chi-\rho'')$, ὅπου ρ' καὶ ρ'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.

Παραδείγματα. α') $5\chi^2-10\chi-15=5\,(\chi^2-2\chi-3)=$
$5\,(\chi-1+2)\,(\chi-1-2)=5\,(\chi+1)\,(\chi-3)$
β') $\chi^2+25=(\chi+0+5i)(\chi+0-5i)=(\chi+5i)(\chi-5i)$
γ') $\chi^2+14\chi+74=(\chi+7+5i)\,(\chi+7-5i)$.
δ') $2\chi^2+28\chi+148=2\,(\chi+7+5i)\,(\chi+7-5i)$

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων τὰ κάτωθι τριώνυμα.

α') $\chi^2-7\chi+10$, β') $5\chi^2+30\chi+10$, γ') $\chi^2-4\chi+5$

δ') $2\chi^2-\frac{5}{4}\chi+\frac{1}{5}$, ε') $2\chi^2-\frac{7}{8}\chi+0{,}3$.

στ') $\alpha\chi^2+2\alpha^2\chi+\alpha^3$, ζ') $\alpha\chi^2+\alpha\beta\chi+\alpha\beta\gamma$,

η') $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\chi}{\alpha}+1$.

2) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα.

α') $\frac{\chi^2-7\chi+12}{\chi^2-8\chi+15}$. πρὸς τοῦτο ἀναλύομεν **ἕκαστον** τριώνυμον εἰς γινόμενον

β') $\frac{\chi^2-\chi-2}{\chi^2+\chi-6}$, γ') $\frac{\chi^2-10\chi+21}{2\chi^2-12\chi+18}$

δ') $\frac{\beta\chi^2-(1+\alpha\beta)\chi+\alpha}{\chi^2-(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta}$, ε') $\frac{\chi^2-(\sqrt{2}-1)\chi-\sqrt{2}}{\chi^2-(\sqrt{2}+1)\chi+\sqrt{2}}$

3) α') Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις βου βαθμοῦ ἔχουσα α') συντελεστὴν τοῦ χ^2 τὴν μονάδα καὶ ρίζας τὰς 3 καὶ 6. Προφανῶς ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι
$(\chi-3)\,(\chi-6)=0$ ἤτοι ἡ $\chi^2-9\chi+18=0$
β') συντελεστὴν τοῦ χ^2 τὸ 3 καὶ ρίζας τὰς 3 καὶ -7
γ') συντελεστὴν τοῦ χ^2 τὸ 5 καὶ ρίζας τὰς -2 καὶ 2.

4) Ὁμοίως συντελεστὴν τοῦ χ^2 τὴν μονάδα καὶ ρίζας
α') 4i καὶ $-4i$ προφανῶς ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι ἡ
$(\chi-4i)\,(\chi+4i)=\chi^2+16=0$

β') $\frac{i}{3}$ καὶ $-\frac{i}{3}$, γ') $\frac{2i}{5}$ καὶ $-\frac{2i}{5}$.
δ') $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$ ε') $5+3i$ καὶ $5-3i$

5) Ὁμοίως :

α') α καὶ βγ. προφανῶς τοιαύτη ἐξίσωσις εἶναι ἡ $(\chi-\alpha)(\chi-\beta\gamma)=0$, ἢ $\chi^2-(\alpha+\beta\gamma)\chi+\alpha\beta\gamma=0$.

β') α καὶ α^2, γ') $\sqrt{\alpha}+\beta$ καὶ $\sqrt{\alpha}-\beta$ $(\alpha>0)$

δ') $\sqrt{\alpha}+i\sqrt{\beta}$ καὶ $\sqrt{\alpha}-i\sqrt{\beta}$. $(\alpha>0)$

143. ***Σχέσεις μεταξὺ συντελεστῶν καὶ ριζῶν ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ.***

Ἐὰν ρ' καὶ ρ'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως.

$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ ἔχομεν $\rho'=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ καὶ

$\rho''=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$. ὅθεν $\rho'+\rho''=-\frac{\beta}{\alpha}$

καὶ $\rho'\rho''=\frac{\gamma}{\alpha}$.

Ἐκάμαμεν οὕτω ἐπαλήθευσιν τοῦ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν ἰσοῦται μὲ τὸ $-\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ τὸ γινόμενον μὲ $\frac{\gamma}{\alpha}$. Ἔχομεν οὕτω τὰς δύο σχέσεις μεταξὺ συντελεστῶν καὶ ριζῶν.

Παρατηρήσεις.

α') Εἰς τὰς σχέσεις αὐτὰς δὲν περιέχονται πλέον ριζικά.

β') αἱ σχέσεις αὗται βοηθοῦν ἡμᾶς εἰς λύσιν προβλημάτων ὅπου δίδεται σχέσις τις μεταξὺ τῶν ριζῶν μιᾶς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεωςκαὶ εὑρίσκεται σχέσις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων χωρὶς νὰ λυθοῦν αὗται.

α') $\chi^2+5\chi+8=0$, β') $2\chi^2-6\chi+1=0$, γ') $2\chi^2+5=0$,
δ') $\chi^2-\chi-2=0$, ε') $6\chi^2-2\chi+2{,}2=0$,

στ') $\chi^2+2\chi-\frac{6}{7}=0$,

ζ') $\alpha\chi^2+\alpha^2\chi+\alpha^3=0$; η') $\delta\chi^2+(\delta+1)\chi-\delta=0$.
θ') $(\alpha+\beta)\chi^2+(\alpha^2-\beta^2)\chi+(\alpha+\beta)^2=0$.

2) Νὰ σχηματισθοῦν δευτεροβάθμιοι ἐξισώσεις μὲ συντελε-

στὴν τοῦ χ^2 τὴν μονάδα καὶ τῶν ὁποίων αἱ ρίζαι ἔχουν
α') ἄθροισμα 8 καὶ γινόμενον 15,
β') ἄθροισμα -6 καὶ γινόμενον 8,
γ') ἄθροισμα $\frac{3}{4}$ καὶ γινόμενον $\frac{1}{8}$.

3) Σχηματίσατε ἐπὶ τῇ βάσει τῶν σχέσεων ριζῶν καὶ συντελεστῶν ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ ἐξισώσεις δεχομένας ὡς ρίζας α') 2 καὶ 3, β') $\sqrt{3}$ καὶ $\sqrt{4}$.

γ') $\sqrt{5}$ καὶ $-\frac{1}{2}$, δ') $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ καὶ $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

ε') α καὶ $\frac{1}{\alpha}$ στ') $\alpha+\beta$ καὶ $\alpha-\beta$

ζ') $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$ καὶ $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$

4) Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+\pi\chi+30=0$. Προσδιορίσατε τὸ π οὕτως ὥστε νὰ ἔχωμεν α') $\rho'=5$, β') $\rho'+\rho''=12$, γ') $\rho''-\rho'=1$.

5) Δίδονται αἱ ἐξισώσεις: $6\chi^2-\chi-\lambda=0$ $2\chi^2+\chi-(\lambda+5)=0$ Προσδιορίσατε τὸ λ, ἵνα μία ρίζα τῆς δευτέρας ἐξισώσεως εἶναι τριπλασία μιᾶς ρίζης τῆς πρώτης.

144. *Διερεύνησις τῆς ἐξισώσεως* $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$. Ζητοῦμεν χωρὶς νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν νὰ διακρίνωμεν
α') ἂν ἔχῃ ρίζας πραγματικὰς καὶ
β') Ἀφοῦ βεβαιωθῶμεν ὅτι ἔχει ρίζας πραγματικάς, νὰ διακρίνωμεν, ἂν ἀμφότεραι εἶναι θετικαὶ ἢ ἀμφότεραι ἀρνητικαὶ ἢ ἂν μία θετικὴ καὶ ἡ ἄλλη ἀρνητικὴ κ.ο.κ.

Ὁ τύπος (1) δεικνύει ἀμέσως ὅτι ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$ αἱ δύο ρίζαι εἶναι φανταστικαί. Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$ αἱ δύο ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἴσαι τουτέστιν ἡ ἐξίσωσις ἔχει διπλῆν ρίζαν ἕνα πραγματικὸν ἀριθμόν. Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$ αἱ δύο ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.

1ον. Ἔστω $\frac{\gamma}{\alpha}<0$, τουτέστιν ἔστω ὅτι α καὶ γ εἶναι ἑτερόσημα, τότε τὸ $4\alpha\gamma$ εἶναι ἀρνητικόν. Καὶ ἑπομένως τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma$ θὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ γενικοῦ τύπου, αἱ δύο ρίζαι ρ' καὶ ρ'' θὰ εἶναι πραγματικαί. Ἐπειδὴ δὲ $\rho'\rho''=\frac{\gamma}{\alpha}$, τὸ $\rho'\rho''$ θὰ εἶναι ἀρνητικόν· ἤτοι αἱ ρίζαι θὰ εἶναι ἑτερόσημοι.
Ἐπειδὴ δὲ $\rho'+\rho''=-\frac{\beta}{\alpha}$, ἐὰν $-\frac{\beta}{\alpha}>0$, ἀπολύτως μεγαλυ-

τέρα θὰ εἶναι ἡ θετικὴ καὶ ἂν $-\frac{\beta}{\alpha}<0$ ἀπολύτως μεγαλυτέρα θὰ εἶναι ἡ ἀρνητική.

2ον. Ἔστω $\frac{\gamma}{\alpha}>0$· τότε διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

α') $\beta^2-4\alpha\gamma>0$· αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι· ἐπειδὴ δὲ $\rho'\rho''=\frac{\gamma}{\alpha}>0$ αὗται ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον· ἀλλὰ $\rho'+\rho''=-\frac{\beta}{\alpha}$. ἑπομένως ἐὰν $-\frac{\beta}{\alpha}>0$ αἱ δύο ρίζαι, ἐπειδὴ ἔχουν ἄθροισμα θετικὸν καὶ εἶναι ὁμόσημοι, θὰ εἶναι ἀμφότεραι θετικαί· ἐὰν δὲ $-\frac{\beta}{\alpha}<0$, καὶ αἱ δύο ρίζαι θὰ εἶναι ἀρνητικαί. Δὲν δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι, $-\frac{\beta}{\alpha}=0$ διότι τότε θὰ εἴχωμεν $\rho'+\rho''=0$, ἤτοι αἱ δύο ρίζαι θὰ ἦσαν ἀντίθετοι ἀριθμοὶ καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενόν των θὰ ἦτο ἀρνητικὸς ἀριθμός. ὅπερ ἀντίκειται πρὸς τὴν ὑπόθεσιν $\frac{\gamma}{\alpha}>0$.

β') $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, ἔχομεν μίαν ρίζαν διπλῆν, τὴν $\chi=-\frac{\beta}{2\alpha}$, ὅπως ὁ γενικὸς τύπος δεικνύει.

γ') $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, αἱ ρίζαι εἶναι μιγάδες, συζυγεῖς.

3ον. Ἔστω $\frac{\gamma}{\alpha}=0$ ἢ $\gamma=0$, τότε ἔχομεν $\alpha\chi^2+\beta\chi=0$ ἢ

$\chi(\alpha\chi+\beta)=0$, ἐξ ἧς αἱ λύσεις $\chi=0$ $\chi=-\frac{\beta}{\alpha}$.

Παράδειγμα. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+\beta\chi-12=0$· οἱοσδήποτε πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ ἂν εἶναι ὁ β ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει πραγματικὰς ρίζας, διότι $\beta^2-4\alpha\gamma=\beta^2+48>0$· ἤτοι, ὅταν ὁ συντελεστὴς τοῦ χ^2 καὶ ὁ σταθερὸς εἶναι ἑτερόσημοι, πάντοτε ἡ ἐξίσωσις ἔχει πραγματικὰς ρίζας.

Ἀσκήσεις.

1) Τῶν κάτωθι ἐξισώσεων νὰ διακρίνετε, ἐὰν αἱ ρίζαι εἶναι φανταστικαὶ ἢ πραγματικαί, ἴσαι ἢ ἄνισοι καὶ τὸ εἶδος τῶν ριζῶν χωρὶς νὰ λυθοῦν αὗται:

α') $χ^2-12χ+27=0$, β') $χ^2-15χ-34=0$,
γ') $5χ^2-4χ+0,8=0$, δ') $χ^2+2χ+15=0$,
ε') $χ^2-0,3χ+0,4=0$, στ') $χ^2+(β^2-α^2)χ-α^2β^2=0$,
ζ') $χ^5-1=3χ^2-2χ+\frac{2}{5}$.

2) Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $χ^2+λχ-μ^2=0$ εἶναι πραγματικαί.

3) Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $(χ+α)(χ+β)=γ^2$ εἶναι πραγματικαί.

4) Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ λ, ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $6χ^2-20χ+λ=0$ νὰ εἶναι φανταστικαί;

145. **Συστήματα ἐξισώσεων β' βαθμοῦ.** Σύστημα ἐξισώσεων μὲ ἀγνώστους περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς λέγεται τοῦ ***δευτέρου βαθμοῦ*** ἐὰν ἡ μία τοὐλάχιστον τῶν ἐξισώσεων εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς ὅλους τοὺς ἀγνώστους ὁμοῦ, καμμία δὲ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος δὲν εἶναι βαθμοῦ μείζονος τοῦ δευτέρου π.χ. τὸ σύστημα

$$8χψ+4χ+5ψ=3$$
$$2χ-ψ=1.$$

εἶναι σύστημα δευτέρου βαθμοῦ. Ὁμοίως καὶ τὸ σύστημα

$$χ+ψ=α$$
$$5χ+4ψ+ω=β$$
$$χ^2+ψ^2+ω^2=γ$$

εἶναι σύστημα δευτέρου βαθμοῦ.

146. Ὅταν ἔχωμεν νὰ λύσωμεν τοιοῦτον σύστημα δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν μεθόδους ὁμοίας πρὸς τὰς ἐφαρμοσθείσας διὰ τὴν λύσιν συστημάτων ἐξισώσεων τοῦ α' βαθμοῦ.

Ἀσκήσεις

1) Ἔστω τὸ σύστημα $χ+ψ=5$
$χψ=6$· τοῦτο ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ σύστημα $χ+ψ=5$
$χ.(5-χ)=6$ (ἐφηρμόσαμεν τὴν μέθοδον τῆς ἀντικαταστάσεως)· ἡ δευτέρα τῶν ἐξισώσεων δίδει $χ=2$, $χ=3$. Διὰ τὴν τιμὴν $χ=2$ ἡ πρώτη δίδει $ψ=3$ καὶ διὰ τὴν τιμὴν $χ=3$ ἡ πρώτη δίδει $ψ=2$ ἤτοι ὅταν εἷς τῶν δύο ἀγνώστων εἶναι 2 ὁ ἄλλος εἶναι 3. Συμβαίνει δὲ οὕτω, διότι τὸ σύστημα εἶναι συμμετρικὸν ὡς πρὸς χ καὶ ψ δηλαδὴ δὲν ἀλλάσσει, ἂν ἀντὶ τοῦ χ γράψωμεν ψ καὶ ἀντὶ τοῦ ψ τὸ χ. Τὰ 2 καὶ 3 ἤτοι αἱ τιμαὶ τοῦ χ καὶ ψ εἶναι καὶ ρίζαι τῆς δευ-

τέρας ἐξισώσεως $\chi(5-\chi)=6$ ἤτοι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-5\chi+6=0$. Τοῦτο ἄλλως τε ἔχομεν ἤδη εὕρη διότι τὸ νὰ λύσωμεν τὸ δοθὲν σύστημα ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ ἑξῆς πρόβλημα. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα 5 καὶ γινόμενον 6.

2) Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $\chi-\psi=\alpha$

$\chi\psi=\beta$ παρατηρῶ

ὅτι τοῦτο γράφεται: $\chi+(-\psi)=\alpha$

$\chi\cdot(-\psi)=-\beta$.

Ζητῶ ἤδη νὰ εὕρω τὰς τιμὰς τοῦ χ καὶ τοῦ $-\psi$. Αὗται θὰ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\omega^2-\alpha\omega-\beta=0$. Ὅθεν διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

α΄) $\alpha^2+4\beta>0$· ἔχομεν τότε δύο ρίζας πραγματικὰς τῆς ἐξισώσεως ταύτης. Ἔστωσαν αὗται ρ' καὶ ρ''. Ἐὰν εἰς τὸ χ δώσωμεν τὴν τιμὴν ρ' τὸ ψ θὰ εἶναι $-\rho''$ ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ $\rho', -\rho''$ δίδουν μίαν λύσιν τοῦ δοθέντος συστήματος. Ἐὰν εἰς τὸ χ δώσωμεν τὴν τιμὴν ρ'' τὸ ψ θὰ εἶναι $-\rho'$ καὶ οἱ ἀριθμοὶ $\rho'', -\rho'$ ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ συστήματος.

β΄) $\alpha^2+4\beta=0$. Ἡ ἐξίσωσις ἔχει ρίζαν διπλὴν τὸ $\frac{\alpha}{2}$ καὶ ἑπομένως τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνον λύσιν τὴν

$$\chi=\frac{\alpha}{2},\quad \psi=-\frac{\alpha}{2}.$$

γ΄) $\alpha^2+4\beta<0$ ἡ ἐξίσωσις ἔχει ρίζας φανταστικὰς καὶ ἑπομένως δὲν ἐπαληθεύεται μὲ πραγματικοὺς ἀριθμοὺς τὸ σύστημα.

3) Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα:

α΄) $\begin{matrix}\chi^2+\psi^2=75\\ -\chi+\psi=5\end{matrix}$ β΄) $\begin{matrix}\chi^2-\psi^2=136\\ \chi-\psi=4\end{matrix}$ γ΄) $\begin{matrix}\chi^2+\psi^2=208\\ \chi\psi=96\end{matrix}$

δ΄) $\begin{matrix}\chi^2-\psi^2=35\\ \chi\psi=14\end{matrix}$ ε΄) $\begin{matrix}\chi^2+\psi^2=10\\ \frac{\chi}{\psi}=2\end{matrix}$

στ΄) $\begin{matrix}\chi^2+\psi^2+\chi+\psi=42\\ \chi^2-\psi^2+\chi-\psi=30\end{matrix}$ ζ΄) $\begin{matrix}2\chi\psi-5\psi-7=0\\ \psi^2-2\chi\psi+10=0\end{matrix}$ (θεωροῦμεν ὡς ἀγνώστους τοὺς $\chi\psi$ καὶ ψ)

η΄) $\begin{matrix}\chi^2+\psi^2+\chi\psi=4\\ \chi+\psi=3\end{matrix}$ θ΄) $\begin{matrix}\chi^2+\chi\psi=10\\ \psi^2+\chi\psi=15\end{matrix}$

ι΄) $\begin{matrix}\chi+\psi+\chi^2+\psi^2=162\\ \chi-\psi+\chi^2-\psi^2=-102\end{matrix}$ ια΄) $\begin{matrix}\chi^2+\psi^2+\chi\psi+\chi+\psi=17\\ \chi^2+\psi^2-3\chi\psi+2\chi+2\psi=9\end{matrix}$

4) Ὁμοίως:

α') $\begin{cases} \chi^3+\psi^3=28 \\ \chi+\psi=1 \end{cases}$ β') $\begin{cases} \chi^3-\psi^3=19 \\ \chi-\psi=1 \end{cases}$

(Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ $\chi^3+\psi^3$ διαιρεῖται διὰ $\chi+\psi$)

γ') $\begin{cases} \chi^3-\psi^3=\alpha \\ \chi-\psi=\beta \end{cases}$ δ') $\begin{cases} \chi+\chi\psi+\psi=5 \\ \chi^2+\chi^2\psi^2+\psi^2=9 \end{cases}$

ε') $\begin{cases} (2\chi-\psi)(3\chi+\psi)=35 \\ (\chi-2\psi)(\chi-5\psi)=0 \end{cases}$ στ') $\begin{cases} \dfrac{1}{\chi}-\dfrac{1}{\psi}=\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{\chi^2}+\dfrac{1}{\psi^2}=\dfrac{1}{12} \end{cases}$

ζ') $\begin{cases} 2\chi^2+3\chi\psi+\psi^2=6 \\ 4\chi^2-2\chi\psi+\psi^2=3 \end{cases}$

(τοῦ ὁποίου τὰ πρῶτα μέλη εἶναι ὁμογενῆ ὡς πρὸς χ καὶ ψ. Πρὸς λύσιν τούτου διαιρῶ κατὰ μέλη καὶ κατόπιν διαιρῶ ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος διὰ ψ^2

ἔχω: $$\frac{2\left(\dfrac{\chi}{\psi}\right)^2+3\left(\dfrac{\chi}{\psi}\right)+1}{4\left(\dfrac{\chi}{\psi}\right)^2-2\left(\dfrac{\chi}{\psi}\right)+1}=\frac{6}{3}=2. \text{ καὶ θέτω } \frac{\chi}{\psi}=\omega$$

5) Ὁμοίως:

α') $\begin{cases} \chi^2+2\psi^2-\omega^2=5 \\ 2\chi+\psi+\omega=6 \\ \chi+4\psi-\omega=5 \end{cases}$ β' $\begin{cases} \chi\psi+\chi\omega+\psi\omega=11 \\ \chi+\psi=2 \\ \psi+\omega=5 \end{cases}$

γ') $\begin{cases} \chi^2+\psi^2=13 \\ \chi^2+\omega^2=25 \\ \omega^2+\psi^2=20 \end{cases}$ δ') $\begin{cases} \chi\psi=12 \\ \omega\chi=15 \\ \psi\omega=20 \end{cases}$ ε') $\begin{cases} \chi+\psi+\omega=19 \\ \chi\omega-\psi^2=0 \\ \chi^2+\psi^2+\omega^2=133 \end{cases}$

στ') $\begin{cases} \chi+\psi=3 \\ \chi+\varphi=4 \\ \chi+\omega=6 \\ \chi\psi+\chi\varphi+\chi\omega+\psi\varphi+\psi\omega+\varphi\omega=4 \end{cases}$ ζ') $\begin{cases} \chi+\psi=11 \\ \varphi+\omega=10 \\ \chi\psi=\varphi\omega \\ \chi^2+\psi^2+\varphi^2+\omega^2=125 \end{cases}$

147. Ἀνισότητες β' βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον

Ἔστωσαν δύο πολυώνυμα $4\chi^3+5\chi^2-2\chi+6$ καὶ $4\chi^3-2\chi^2+7\chi-5$. Ὅταν ζητῶ τιμὴν τοῦ χ διὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πρώτου νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ δευτέρου λέγω ὅτι ζητῶ τιμὴν ἐπαληθεύουσαν τὴν ἀνισότητα

$4\chi^3+5\chi^2-2\chi+6 > 4\chi^3-2\chi^2+7\chi-5$. (§ 100, 101).

148. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι ἰσχύουν καὶ ἐνταῦθα αἱ ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων τοῦ πρώτου βαθμοῦ. Κατὰ ταῦτα ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης ἀνάγεται εἰς τὴν ἀνισότητα

$4\chi^3+5\chi^2-2\chi+6-4\chi^3+2\chi^2-7\chi+5 > 0$ ἢ τὴν

$7\chi^2-9\chi+11 > 0$ ἥτις εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha\chi^2+\beta\gamma+\gamma > 0$.

Ὅταν μία ἀνισότης ἀνάγεται εἰς ἀνισότητα τοιαύτης μορφῆς λέγεται ἀνισότης δευτέρου βαθμοῦ. Νὰ λύσωμεν τὴν ἀνισότητα ταύτην σημαίνει νὰ εὕρωμεν διὰ ποίας τιμὰς τοῦ χ ἐπαληθεύεται.

149. ***Λύσις ἀνισότητος δευτέρου βαθμοῦ.*** Ἵνα, λύσωμεν τὴν ἀνισότητα $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma > 0$ ἀρκεῖ προφανῶς νὰ διακρίνωμεν ποῖον σημεῖον λαμβάνει τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ διὰ τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ χ χωρὶς νὰ ὑπολογίσωμεν ἀπ' εὐθείας τὴν μερικὴν τιμήν. Θεωρήσωμεν πρὸς τοῦτο κανονικὰς μορφὰς τοῦ τριωνύμου.

Γενικὴ κανονικὴ μορφή. Ἔχομεν

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma\equiv\alpha\left[\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\gamma}{\alpha}\right]\equiv\alpha\left[\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right]$$

Μερικαὶ περιπτώσεις.

α') Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma < 0$ ἔχομεν $4\alpha\gamma-\beta^2 > 0$ καί

$\left[\frac{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}\right]^2=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}$. Ἐὰν τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν

$\frac{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}$ καλέσωμεν μ ἔχομεν

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha\left[\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\mu^2\right] \qquad (1)$$

β') Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$ ἔχομεν $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ (2)

γ') Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma > 0$ ἔχομεν $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=$

$$=\alpha\left[\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)^2\right]=\alpha\left[\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\mu^2\right]$$

ὅπου μ εἶναι ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς $\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν διακρίνομεν ἀμέσως ὅτι, διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ λαμβάνει μερικὴν τιμὴν ὁμόσημον πρὸς τὸ α. Ὥστε «ἐὰν $\alpha > 0$, ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ· ἐὰν δὲ $\alpha < 0$ δι' οὐδεμίαν τιμὴν τοῦ χ ἐπαληθεύεται ἡ δοθεῖσα ἀνισότης».

Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν. Εἰς τὴν τρίτην περίπτωσιν ἔχομεν ὅτι

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}+\mu\right)\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}-\mu\right) \text{ καὶ}$$

$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha(\chi-\rho')(\chi-\rho'')$ ὅπου ρ' καὶ ρ'' εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ πολυωνύμου, αἵτινες εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί. Ἔστω $\rho' < \rho''$. τότε ἐὰν $\alpha > 0$ θὰ ἔχωμεν ὅτι διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ μικροτέραν τοῦ ρ' τὸ δοθὲν τριώνυμον εἶναι θετικὸν καὶ ἑπομένως ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἐπαληθεύεται· διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ μεγαλυτέραν τοῦ ρ' καὶ μικροτέραν τοῦ ρ'' τὸ $\alpha(\chi-\rho')(\chi-\rho'')$ εἶναι ἀρνητικόν· ἤτοι διὰ πᾶσαν τοιαύτην τιμὴν τοῦ χ ἡ ἀνισότης δὲν ἐπαληθεύεται· τέλος διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ μεγαλυτέραν τοῦ ρ'' ἡ ἀνισότης ἐπαληθεύεται. Εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν ἀντίστοιχα συμπεράσματα διὰ τὴν περίπτωσιν $\alpha < 0$.

Παράδειγμα. Ἔστω ἡ ἀνισότης $3\chi^2-21\chi+30 > 0$· ἔχομεν $3\chi^2-21\chi+30=3(\chi-2)(\chi-5)$· ὅθεν ἡ ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ μικροτέραν τοῦ 2 καὶ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ μεγαλυτέραν τοῦ 5.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες.

α') $2\chi^2-10\chi+12 > 0$. β') $3\chi^2+12\chi+9 > 0$

γ') $\chi^2+12\chi+36 > 0$, δ') $5\chi^2-3\chi+7 > 0$

ε') $5\chi^2-7\chi > 5-3\chi^2+7\chi$, στ') $\chi^2-33\chi+242 > 0$

ζ') $-\chi^2+21\chi-20 > 0$, η') $\chi(4\chi^2-10\chi+18) > 0$.

2). Ὁμοίως:

α') $\dfrac{5\chi^2}{3}-\dfrac{5\chi}{7}-\dfrac{6\chi-1}{4} > 1$

β') $\dfrac{\chi^2-1}{5}-\dfrac{\chi+\alpha}{7} > \dfrac{\chi-3}{4}-\dfrac{\chi^2-1}{7}$

γ') $5\chi^2-7\chi+3 > 7\chi^2-7\chi+8$

3) Ὁμοίως:

α') $\frac{\chi+3}{(\chi-1)^2} > \frac{\chi+1}{\chi-1}$, β') $\frac{\chi-2}{\chi-3} > 3$. Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν $(\chi-3)^2$, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν $(\chi-2)(\chi-3) > 3(\chi-3)^2$, λυομένην εὐκόλως.

γ') $\frac{2\chi-4}{\chi+2} > 0$, δ') $\frac{3\chi+4}{\chi-3} > 0$

Γραφικὴ παράστασις τῶν ἁπλουστέρων συναρτήσεων β' βαθμοῦ.

150. α') Θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $\psi=\chi^2$ καὶ ἂς ζητήσωμεν πῶς μεταβάλλεται ἡ τιμὴ τοῦ ψ ὅταν τὸ χ διαρκῶς αὐξανόμενον λαμβάνει τὰς τιμὰς τοῦ διαστήματος $-\infty \ldots 0 \ldots +\infty$ ἤτοι ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμάς. Παρατηροῦμεν ὅτι ὅταν τὸ χ αὐξάνῃ ἀπὸ $-\infty$ ἕως 0, τότε τὸ χ^2 (δηλ. τὸ ψ) ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ ἕως μηδέν. Ὅταν τὸ χ αὐξάνῃ ἀπὸ μηδὲν ἕως $+\infty$, τότε τὸ χ^2 αὐξάνει ἀπὸ μηδὲν ἕως $+\infty$ Ἔχομεν οὕτω τὸν ἑξῆς πίνακα μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως $\psi=\chi^2$.

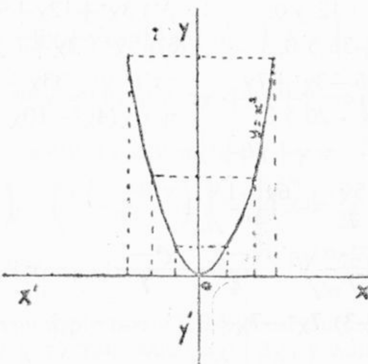
χ	$-\infty$ αὐξάνει .... 0 .... αὐξάνει.. $+\infty$
χ^2	$+\infty$ ἐλαττοῦται .... 0 .... αὐξάνει.. $+\infty$

ἐκ τούτου φαίνεται ἀμέσως ὅτι ἡ συνάρτησις $\psi=\chi^2$ λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην τιμὴν (ἥτις ἐδῶ εἶναι τὸ μηδὲν) διὰ $\chi=0$.

Εἰς ἕκαστον ζεῦγος τιμῶν (χ,ψ) ἐπαληθευουσῶν τὴν ἐξίσωσιν $\psi=\chi^2$ ἀντιστοιχεῖ κατὰ τὰ προηγούμενα ἓν σημεῖον Μ (χ, ψ)

Π.χ. διὰ $\chi=$ 0, 1, 2, 3...... ἔχομεν

$\psi=$ 0, 1, 4, 9......



(Σχῆμα 3)

ὅθεν ἔχομεν τὰ σημεῖα (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9).....

Ὁμοίως διὰ $\chi = -1, \quad -2, \quad -3.....$

ἔχομεν $\psi = 1, \quad 4, \quad 9.....$

Ὁ τόπος τῶν σημείων τούτων εἶναι καμπύλη τις διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς, συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν ψ, διότι δύο σημεῖα μὲ τετμημένας ἀντιθέτους ἔχουν τεταγμένας ἴσας.

β') Θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $\psi = \alpha\chi^2$ ὅπου $\alpha > 0$· παρατηροῦμεν ὅτι τὸ $\alpha\chi^2$ αὐξάνει ὅταν αὐξάνῃ καὶ τὸ χ^2 καὶ ἐλαττοῦται ὅταν ἐλαττοῦται καὶ τὸ χ^2. Οὕτω ἔχομεν τρόπον μεταβολῆς ἀνάλογον μὲ τὸν τῆς $\psi = \chi^2$. Ἔστω π.χ. ἡ καμπύλη $\psi = 3\chi^2$ αὕτη ἔχει σχῆμα ὅμοιον μὲ τὸ τῆς $\psi = \chi^2$. Εἶναι μόνον στενωτέρα.

γ') Ἔστω ἤδη ἡ συνάρτησις $\psi = \chi^2 - 2\chi + 3$· γράφεται ὑπὸ τὴν κανονικὴν μορφὴν $\psi = (\chi - 1)^2 + 2$ ὅθεν διακρίνομεν εὐκόλως ὅτι ὅταν τὸ χ διαρκῶς αὐξάνῃ ἀπὸ $-\infty$ ἕως 1 τὸ ψ διαρκῶς ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ ἕως 2 καὶ ὅταν τὸ χ αὐξάνῃ ἀπὸ 1 ἕως $+\infty$ τὸ ψ αὐξάνει ἀπὸ 2 ἕως $+\infty$ καὶ ἔχομεν τὸν ἑξῆς πίνακα.

χ	$-\infty$ αὐξάνει	1	αὐξάνει	$+\infty$
ψ	$+\infty$ ἐλαττοῦται	2	αὐξάνει	$+\infty$

δ') Ἔστω γενικῶς ἡ συνάρτησις $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, ὅπου $\alpha > 0$· γράφεται ὑπὸ τὴν κανονικὴν μορφὴν

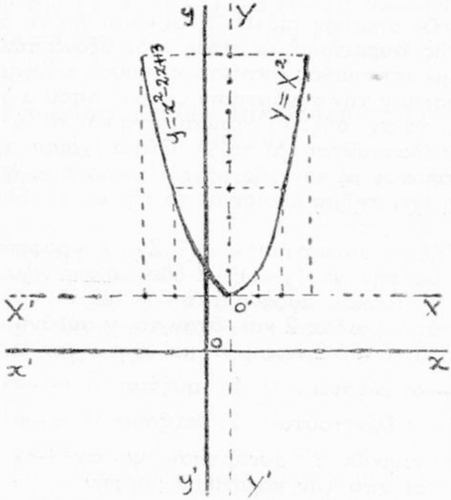
$$\psi = \alpha\left[\left(\chi - \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}\right]$$ ἔχομεν δὲ τότε τὸν ἑξῆς πίνακα:

χ	$-\infty$ αὐξάνει	$\frac{\beta}{2\alpha}$	αὐξάνει	$+\infty$
ψ	$+\infty$ ἐλατοῦτται	$\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}$	αὐξάνει	$+\infty$

ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ ψ εἶναι τὸ $\dfrac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}$

Αἱ καμπύλαι αἱ παριστώμεναι ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ λέγονται π α ρ α β ο λ α ί.

Παράδειγμα. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ καμπύλη $\psi = \chi^2 - 2\chi + 3$ (δηλαδὴ ἡ καμπύλη τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ ἐξίσωσις αὕτη) δεδομένου ὅτι γνωρίζομεν νὰ κατασκευάζωμεν τὴν καμπύλην $\psi = \chi^2$. Παρατηροῦμεν πρὸς τοῦτο ὅτι ἔχομεν $\psi = (\chi - 1)^2 + 2$ ἢ καὶ $\psi - 2 = (\chi - 1)^2$. Ἂν θέσωμεν $\psi - 2 = Y$ καὶ $\chi - 1 = X$ αὕτη γράφεται $Y = X^2$. Τοῦτο δεικνύει ὅτι ἂν ἐκ τοῦ σημείου 0' (1,2) φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας χ'χ, ψ'ψ, τοὺς Χ'Χ, Υ'Υ καὶ θεωρήσωμεν αὐτοὺς ὡς νέους ἄξονας μὲ ἀρχὴν τὸ 0' καὶ θετικὴν φορὰν τὴν ἐκ δεξιῶν πρὸς τ'ἀριστερὰ διὰ τὸ X'X καὶ ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω διὰ τὸ Y'Y (μὲ μονάδα τὴν αὐτὴν) καὶ σχηματίσωμεν τὴν καμπύλην $Y = X^2$ αὕτη θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη



(Σχῆμα 4).

Διακρίνομεν δ' εὐκόλως πῶς μεταβάλλεται ἡ τεταγμένη. Ὅταν ἡ τετμημένη διαρκῶς αὐξάνῃ ἀπὸ $-\infty$ ἕως 1 ἡ τεταγμένη διαρκῶς ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ ἕως 2 καὶ ὅτα ἡ τετμημένη ι ρκῶς αὐξάνῃ ἀπὸ 1 ἕως $+\infty$ ἡ τεταγμένη διαρκῶς αὐξάνει ἀπὸ 2 ἕως $+\infty$. Οὕτω ἔχομεν τὸν ἑξῆς πίνακα.

τετμημένη	$-\infty$	....	1	....	$+\infty$
τεταγμένη	$+\infty$	ἐλαττοῦται	2	αὐξάνει	$+\infty$

Ἀσκήσεις.

1) Ἔστω ὅτι κατεσκευάσαμεν τὴν αμπύλην $\psi = \chi^2$. Ποίαν καμπύλην παριστᾷ ἡ $\psi = -\chi^2$.

2) Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ συνάρτησις

α') $\psi = \chi^2 + 2$ β') $\psi = -\chi^2 + 3$, γ') $\psi = \frac{2}{5}\chi^2$

δ') $\psi = -2\chi^2$.

3) Νὰ κατασκευασθῇ ἡ παραβολὴ $\psi = 3\chi^2 - 4\chi + 2$ μὲ μονάδα

μήκους τὸ $\frac{1}{100}$ μ. καὶ νὰ μετρηθοῦν αἱ τετμημέναι τῶν σημείων τομῆς αὐτῆς μὲ τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων.

4) Μὲ μονάδα μήκους τὸ $\frac{1}{100}$ μ. νὰ κατασκευασθῇ ἡ παραβολὴ $\psi=\chi^2$ καὶ ἡ εὐθεῖα $\psi=5\chi+6$ καὶ νὰ μετρηθοῦν αἱ τετμημέναι τῶν κοινῶν σημείων.

5) Νὰ λυθῇ γραφικῶς ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-5\chi-6=0$ Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ τετμημέναι τῶν κοινῶν σημείων τῆς παραβολῆς $\psi=\chi^2$ καὶ τῆς εὐθείας $\psi=5\chi+6$ θὰ εἶναι αἱ ζητούμεναι ρίζαι.

6) Πῶς λύεται γραφικῶς ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$

151. ***Γραφικαὶ παραστάσεις κινήσεων.***

α') Ἔστω ὅτι κινητόν τι κινεῖται ὁμαλῶς ἐπὶ τοῦ ἄξονος Οψ. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ κίνησις.

Μετροῦμεν τὸν χρόνον ἐπὶ τοῦ ἄξονος Οχ. Δηλαδὴ ἂς λάβωμεν ἐπ' αὐτοῦ μονάδα ΟΘ (ἴσην μὲ τὴν λαμβανομένην ὡς μονάδα ἐπὶ τοῦ Οψ) καὶ ἂς συμφωνήσωμεν ἡ τετμημένη τοῦ Θ ν' ἀντιστοιχῇ εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα, τὸ διπλάσιον τοῦ (ΟΘ) εἰς δύο χρονικὰς μονάδας καὶ ἐν γένει αἱ τετμημέναι νὰ ἀντιστοιχοῦν εἰς χρόνους.

Ἔστω β ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀναχωρεῖ τὸ κινητόν. Ἐὰν ψ καλέσωμεν τὴν τεταγμένην τοῦ σημείου εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται μετὰ χρόνον χ καὶ ἐὰν α εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ θὰ ἔχωμεν προφανῶς $\frac{\psi-\beta}{\chi}=\alpha$ ἢ $\psi=\alpha\chi+\beta$ ὥστε μὲ τὰς τεθείσας συμφωνίας ἡ ὁμαλὴ κίνησις παρίσταται ὑπὸ εὐθείας.

β') Ἔστω σῶμα πῖπτον ἐν τῷ κενῷ· ζητεῖται γραφικὴ παράστασις τῆς κινήσεως. Θεωρήσωμεν πάλιν ὅτι τὸ σῶμα κινεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων καὶ ἂς ἀντιστοιχοῦν ὅπως καὶ προηγουμένως οἱ χρόνοι εἰς τετμημένας. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ στιγμὴ τῆς ἐκκινήσεως ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων. Γνωρίζομεν ἐκ τῆς φυσικῆς ὅτι ἡ ἐξίσωσις εἶναι $\delta=\frac{g}{2}\chi^2$ ὅπου χ εἶναι ὁ χρόνος καθ' ὃν τὸ πῖπτον σῶμα διανύει διάστημα δ, ὅθεν ἂν ὡς δ λαμβάνωμεν τὴν τεταγμένην καὶ ὡς χ τὴν τετμημένην ἔχομεν ὡς δ ι ά γ ρ α μ μ α (δηλ. ὡς καμπύλην τῆς κινήσεως) τὴν καμπύλην ἢ μᾶλλον τόξον τῆς καμπύλης $\psi=\frac{g}{2}\chi^2$.

152. **Προβλήματα β' βαθμοῦ.** ***Προβλήματα δευτέρου βαθμοῦ*** καλοῦμεν τὰ προβλήματα ὧν ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον. Δυνατὸν

πρόβλημά τι νὰ ἔχῃ πλειοτέρους ἀγνώστους καὶ ἡ λύσις αὐτοῦ νὰ ἀνάγεται εἰς σύστημα συγκείμενον ἀπὸ μίαν ἐξίσωσιν δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον καὶ ἐξισώσεις α' βαθμοῦ μὲ περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς ἀγνώστους· ὁπότε πάλιν λέγομεν ὅτι ἔχομεν πρόβλημα δευτέρου βαθμοῦ.

Αἱ γενικαὶ παρατηρήσεις αἱ γενόμεναι διὰ τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἐπεκτείνονται καὶ εἰς τὰ προβλήματα δευτέρου βαθμοῦ.

Πρόβλημα 1ον. Τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι 132, τίνες οἱ ἀριθμοί;

Λύσις. Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸν μικρότερον ἔχωμεν $\chi(\chi+1)=132$ ἢ καὶ $\chi^2+\chi-132=0$ ὅθεν $\chi=11$ καὶ $\chi=-12$. Ἑπομένως οἱ δύο ζητούμενοι διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ὁ 11 καὶ ὁ $11+1=12$, ὅπως ἐπίσης ὁ -12 καὶ ὁ -11.

Πρόβλημα 2ον. Τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι 25, τίνες οἱ ἀριθμοί;

Λύσις. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν $\chi=\dfrac{-1\pm\sqrt{101}}{2}$ ἀμφότεραι αἱ λύσεις ἀπορρίπτονται.

Πρόβλημα 3ον. Ποσὸν ἐκ κληρονομίας ἀνερχόμενον εἰς 549.000 πρόκειται νὰ μοιρασθῇ ἐξ ἴσου εἰς τὰ τέκνα τοῦ διαθέτου. Ἐὰν τὰ τέκνα ἦσαν περισσότερα κατὰ τρία θὰ ἐλάμβανεν ἕκαστον 31500 δρχ. ὀλιγωτέρας. Πόσα ἦσαν τὰ τέκνα; Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι $\dfrac{549000}{\chi}=\dfrac{549000}{\chi+3}+31500$.

Πρόβλημα 4ον. Ὁ παρονομαστὴς κλάσματος μὲ ὅρους θετικοὺς ἀκεραίους ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμητὴν κατὰ τρεῖς μονάδας τὸ δὲ γινόμενον τῶν ὅρων του αὐξανόμενον κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμητοῦ γίνεται ἴσον πρὸς τὸ 374. Τίνες οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος;

Λύσις. Ἔστω $\dfrac{\chi}{\psi}$ τὸ κλάσμα· κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ εἶναι $\psi=\chi+3$ καὶ $\chi\psi+2\chi=374$ καὶ θὰ ἔχωμεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi(\chi+3)+2\chi=374$· ὅθεν $\chi=17$, $\chi=-22$ καὶ τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶναι $\dfrac{17}{20}$. Ἡ ἄλλη λύσις $\dfrac{22}{19}$ ἀπορρίπτεται.

Πρόβλημα 5ον. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ὑποτείνουσα ἔχει μῆκος 50μ. καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο καθέτων πλευρῶν εἶναι 70μ.

Λύσις. Ἔστωσαν χ καὶ ψ αἱ κάθετοι πλευραί. Ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ σύστημα:

$$\chi+\psi=70$$
$$\chi^2+\psi^2=2500$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν ὅτι αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι 30 καὶ 40.

Πρόβλημα 6ον. Ἐπὶ εὐθείας ἀπεριορίστου Χ'Χ δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον τι Μ ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης τοιοῦτον ὥστε

$\frac{(AB)}{(AM)}=\frac{(AM)}{(MB)}$ (ἤτοι νὰ διαιρεθῇ τὸ ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον).

Χ' Α Μ Β Χ'

Λύσις. Ἄς λάβωμεν ἀρχὴν τὸ Α (0,0) καὶ ἔστω χ ἡ τετμημένη τοῦ σημείου. Μ. Τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΑΒ ὑποτίθεται δεδομένον, ἔστω α. Ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{\chi}=\frac{\chi}{\alpha-\chi} \quad \text{ἢ} \quad \chi^2+\alpha\chi-\alpha^2=0.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει προφανῶς ρίζας πραγματικάς· εἶναι δὲ αὗται

$\rho'=\frac{\alpha(-1+\sqrt{5})}{2}$ καὶ $\rho''=-\frac{\alpha(1+\sqrt{5})}{2}$. Ἡ πρώτη λύσις δίδει διὰ τὸ σημεῖον Μ τετμημένην θετικήν, ἤτοι τὸ Μ εὑρίσκεται μεταξὺ Α καὶ Β, ἡ δὲ δευτέρα ὡς ἀρνητικὴ δίδει διὰ τὸ σημεῖον Μ τετμημένην ἀρνητικὴν ἤτοι τὸ Μ εὑρίσκεται πρὸς τ' ἀριστερὰ τοῦ Α.

Προβλήματα πρὸς λύσιν

1) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς ὅστις πενταπλασιάζεται ἂν ὑψωθῇ εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἀφαιρεθοῦν κατόπιν 6 μονάδες.

2) Οἱ κύβοι δύο ἀριθμῶν διαφερόντων κατὰ 5 μονάδας διαφέρουν κατὰ 1385. Τίνες οἱ ἀριθμοί;

Λύσις. Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸν μικρότερον ἔχομεν $(\chi+5)^3-\chi^3=1385$· ὅθεν $\chi=7$.

3) Εἰς διαίρεσίν τινα τὸ πηλίκον ἰσοῦται πρὸς τὸν διαιρέτην, τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 10, τὸ δὲ ἄθροισμα διαιρετέου καὶ διαιρέτου εἶναι 192. Ζητεῖται ἡ διαφορὰ διαιρετέου καὶ διαιρέτου.

4) Τὰ $\frac{4}{7}$ ἀριθμοῦ πολλαπλασιαζόμενα ἐπὶ τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ δίδουν τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ ἠλαττωμένον κατὰ 11. Ποῖος ὁ ἀριθμός;

5) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν τῆς ἡλικίας ἑνὸς ἀτόμου πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐτῶν τῆς ἡλικίας ἄλλου ἀτόμου δίδει 1500· ὁ δὲ λόγος τῶν ἰδίων ἀριθμῶν εἶναι $\frac{3}{5}$. Ποία ἡ ἡλικία ἑκάστου;

6) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 45, τὸ δὲ ἄθροισμα τοῦ λόγου αὐτῶν καὶ τοῦ ἀντιστρόφου των ἰσοῦται πρὸς $\frac{13}{6}$. Τίνες οἱ ἀριθμοί;

7) Ἐὰν ἀπὸ ἀριθμοῦ τινος ἀφαιρέσωμεν τὸν 8 καὶ τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ λαμβάνομεν τὸ τριπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ ἠλαττωμένον κατὰ 21 μονάδας. Τίς ὁ ἀριθμός;

8) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τριῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου γνωστοῦ ὄντος ὅτι ταῦτα παρίστανται μὲ τρεῖς διαδοχικοὺς ἀκεραίους.

9) Ὀρθογωνίου τινὸς τετραπλεύρου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 180 τ.μ. Ἐὰν ἡ βάσις του ἐλαττωθῇ κατὰ 16μ. καὶ τὸ ὕψος του αὐξηθῇ κατὰ 4 μέτρα προκύπτει ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἀρχικόν. Ποία ἡ βάσις του καὶ ποῖον τὸ ὕψος του;.

10) Αἱ πλευραὶ τριγώνου ἔχουν μήκη παριστώμενα διὰ τριῶν διαδοχικῶν ἀρτίων ἀριθμῶν. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν εἶναι 308. Ποῖα τὰ μήκη τῶν πλευρῶν;

11) Ὀρθογωνίου τινὸς τετραπλεύρου ἔχοντος ἐμβαδὸν 375 τ.μ. ἡ βάσις ὑπερβαίνει τὸ ὕψος κατὰ 10 μ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη βάσεως καὶ ὕψους;

12) Τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου εἶναι 960 τ.μ. ἡ διαγώνιος εἶναι 52 μέτρα. Ποῖα τὰ μήκη τῶν πλευρῶν;

13) Δύο ἀριθμοὶ ἔχουν λόγον $\frac{5}{8}$. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ πρώτου ἀφαιρεθῇ ὁ 12 καὶ ἀπὸ τοῦ δευτέρου ὁ 22 τὰ δὲ ὑπόλοιπα πολλαπλασιασθῶσι εὑρίσκεται ὡς γινόμενον ὁ ἀριθμὸς 1650. Τίνες οἱ ἀριθμοί;

14) Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι 5 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των εἶναι 4100. Τίνες οἱ ἀριθμοί;

15) Εὕρετε τρεῖς διαδοχικοὺς ἀριθμοὺς τοιούτους ὥστε τὸ γινόμενόν των νὰ εἶναι δεκαπλάσιον τοῦ ἀθροίσματός των.

16) Δύο κρουνοὶ δύνανται νὰ πληρώσουν δεξαμενήν τινα εἰς 6 ὥρας. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον θὰ χρειασθῇ ἕκαστος ἐξ αὐτῶν ἵνα πληρώσῃ τὴν δεξαμενήν, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ πρῶτος ρέων μόνος θὰ ἐχρειάζετο 5 ὥρας περισσότερον τοῦ δευτέρου.

17) Δύο κεφάλαια ἐτοκίσθησαν πρὸς διάφορα ἐπιτόκια.

Τὸ ἄθροισμα τῶν κεφαλαίων εἶναι 60000. δρχ. τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιτοκίων εἶναι 9,5. Τὸ πρῶτον κεφάλαιον δίδει ἐτησίως τόκον 1800 δρχ. τὸ δεύτερον 1000. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο ταῦτα κεφάλαια καὶ τὰ δύο ἐπιτόκια.

18) Δύο ἔμποροι κατέθεσαν εἰς τράπεζάν τινα ἀπὸ κοινοῦ 20000 δρχ. Ὁ πρῶτος ἀφῆκε τὸ μερίδιόν του ἐπὶ 2 μῆνας καὶ ὁ δεύτερος ἐπὶ 9. Ὁ πρῶτος ἔλαβε 16200 δρχ. διὰ κεφάλαιον καὶ κέρδος, ἐνῷ ὁ δεύτερος ἔλαβε μόνον 4150 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὸ κέρδος ἑκάστου, καὶ ἡ ἀρχικὴ κατάθεσις.

19) Νὰ εὑρεθοῦν 7 διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι ὥστε, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν τελευταίων, ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν πρώτων εὑρίσκομεν τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ μεσαίου.

Λύσις. Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸν μεσαῖον οἱ 7 ἀριθμοὶ θὰ εἶναι $\chi, \chi-1$ $\chi-2$, $\chi-3$, $\chi+1$, $\chi+2$, $\chi+3$.

20) Ἀγοράζει τις αὐγὰ καὶ δίδει 30 δρχ. Ἐὰν ἕκαστον αὐγὸν τοῦ ἐκόστιζε 50 λεπτὰ περισσότερον θὰ ἠγόραζε μὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν 3 αὐγὰ ὀλιγώτερον. Πόσα ἦσαν τὰ ἀγορασθέντα αὐγά;

21) Καθηγηταί τινες παρέθηκαν γεῦμα εἰς συναδέλφους των καὶ ἐπλήρωσαν ἕκαστος ἐξ αὐτῶν 36 δρχ. περισσοτέρας τῶν ὅσων θὰ ἔδιδε, ἐὰν συμμετεῖχον τῆς πληρωμῆς καὶ οἱ δύο ἄλλοι συνάδελφοι· τὸ ὅλον γεῦμα ἐκόστισε 1134 δρχ. Πόσοι ἦσαν οἱ συνδαιτυμόνες;

22) Ὑπολογίσατε τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὰς δύο πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 120μ. γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ἀγνώστων πλευρῶν εἶναι 20μ.

23) Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 40μ. τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύο καθέτων πλευρῶν εἶναι 50μ. Εὑρεῖν τὰς δύο πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας.

24) Ἔμπορός τις πωλήσας 10 πήχ. ὑφάσματος ἔλαβε τόσας δραχμὰς ὅσους πήχεις ἔπρεπε νὰ πωλήσῃ διὰ νὰ λάβῃ 4000 δρχ. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν;

25) Δύο χιλιάδες (2000) δρχ. διενεμήθησαν εἰς τινας πτωχοὺς παρὰ φιλανθρώπου τινὸς κυρίου. Ἐὰν οἱ πτωχοὶ ἦσαν κατὰ 2 ὀλιγώτεροι θὰ ἐλάμβανεν ἕκαστος 50 δραχμὰς περισσοτέρας. Πόσοι ἦσαν οἱ πτωχοί;

26) Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ περίμετρος εἶναι 60μ. καὶ ἡ μικροτέρα πλευρὰ εἶναι κατὰ 16μ. μικροτέρα τῆς ὑποτεινούσης. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τρε ς πλευραί.

27) Δύο ἐργάται ἔλαβον ὁ μὲν 1360 δρχ. ὁ δὲ δεύτερος 360 δραχ. Ὁ πρῶτος εἰργάσθη 4 ἡμέρας περισσότερον τοῦ ἄλλου. Ἐὰν ἕκαστος εἶχεν ἐργασθῇ τόσας ἡμέρας, ὅσας εἰργάσθη ὁ ἄλλος θὰ ἐλάμβανεν ἴσα ποσά. Ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν

ἐργασίας ἑκάστου ἐργάτου καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἡμερομισθίου ἑκάστου.

28) Δύο κεφάλαια ἐτοκίσθησαν μὲ διάφορα ἐπιτόκια· τὸ πρῶτον κεφάλαιον τὸ ὁποῖον δίδει τόκον ἐτησίως 400 δρχ. ὑπερτερεῖ κατὰ 3000 δρχ. τὸ δεύτερον κεφάλαιον τὸ ὁποῖον δίδει ἐτήσιον τόκον 330 δρχ. ἀλλὰ τὸ ἐπιτόκιον τοῦ δευτέρου κεφαλαίου εἶναι κατὰ $\frac{5}{7}$ ἀνώτερον τοῦ ἐπιτοκίου τοῦ πρώτου κεφαλαίου. Ποῖα εἶναι τὰ δύο κεφάλαια;

29) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς διψήφιος γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ψηφίων εἶναι ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν ηὐξημένον κατὰ τὸ γινόμενον τῶν δύο τούτων ψηφίων, καὶ ἂν προσθέσωμεν 36 εἰς τὸν ἀριθμὸν εὑρίσκομεν ἀριθμὸν ἴσον πρὸς τὸν ἀντεστραμμένον τοῦ δοθέντος.

153. **Ἐξισώσεις ὧν ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων. Διτετράγωνοι ἐξισώσεις.** Ἔστω τὸ τριώνυμον $\chi^4-5\chi^2+6$. Τοῦτο γράφεται $(\chi^2)^2-5\chi^2+6$ ἢ καὶ $\psi^2-5\psi+6$, ὅπου $\chi^2=\psi$. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^4-5\chi^2+6=0$ καὶ ἡ ἐξίσωσις $\psi^2-5\psi+6=0$· ἡ δευτέρα ἔχει ρίζας 2 καὶ 3, διότι

$\psi^2-5\psi+6=(\psi-2)(\psi-3)$. Ὅθεν $\chi^4-5\chi^2+6=(\chi^2-2)(\chi^2-3)$ καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις $\chi^4-5\chi^2+6=0$ ἔχει ρίζας τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-2=0$ καὶ τῆς $\chi^2-3=0$ ἤτοι τὰς

$\chi=\pm\sqrt{2}$ καὶ $\chi=\pm\sqrt{3}$.

154. Ἔστω γενικῶς τὸ τριώνυμον,

$$\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma$$

τοῦτο γράφεται $\alpha.(\chi^2)^2+\beta\chi^2+\gamma$ ἢ καὶ $\alpha\psi^2+\beta\psi+\gamma$, ὅπου $\chi^2=\psi$. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=0$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις $\alpha\psi^2+\beta\psi+\gamma=0$· ἡ δευτέρα ἔχει ρίζας τὰς

$$\psi_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{κα} \quad \psi_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \text{ διότι}$$

$$\alpha\psi^2+\beta\psi+\gamma=$$

$$=\alpha\left(\psi+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)\left(\psi+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)$$

ὅθεν $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=$

$$=\alpha\left(\chi^2+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)\left(\chi^2+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)$$

καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=0$ ἔχει ρίζας τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων $\chi^2+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=0$ καὶ

$\chi^2+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=0$ ἤτοι τὰς

$$\chi=\pm\sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}} \text{ καὶ}$$

$$\chi=\pm\sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}.$$

Π. χ. ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^4-8\chi^2-30=0$· ἔχομεν

$\chi^2=4\pm\sqrt{46}$ ἢ $\chi=\pm\sqrt{4\pm\sqrt{46}}$.

Σημ. Αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=0$ λέγονται διτετράγωνοι ἐξισώσεις καὶ τὸ πολυώνυμον τοῦ πρώτου μέλους λέγεται διτετράγωνον.

155. Εἰς τὴν λύσιν τῶν διτετραγώνων ἐξισώσεων παρουσιάζονται συνήθως παραστάσεις τῆς μορφῆς.

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$$

Προκύπτει ἐδῶ τὸ ζήτημα πότε καὶ πῶς δυνάμεθα νὰ ἁπλοποιήσωμεν παραστάσεις τῆς μορφῆς ταύτης, ὅπου A εἶναι ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς ἀριθμὸς θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς καὶ B ἐπίσης.

α΄) Ἔστω ὅτι τὸ B εἶναι τέλειον τετράγωνον· ἤτοι $B=\delta^2$, τότε $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{A\pm\delta}$.

β΄) Ἔστω ὅτι τὸ B δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Τότε θεωροῦμεν τὸ A^2-B. Ἂν τοῦτο εἶναι τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ χρησιμοποιοῦμεν τὸν ἑξῆς μετασχηματισμὸν

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{A+\Delta}{2}}+\sqrt{\frac{A-\Delta}{2}}, \text{ που } \Delta=\sqrt{A^2-B}.$$

Ἐπαληθεύομεν ταύτην ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, ὁπότε λαμβάνομεν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν $A+\sqrt{B}$. Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον ἔχομεν

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\Delta}{2}}-\sqrt{\frac{A-\Delta}{2}}$$

Π. χ. $\sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{9-5}}{2}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{9-5}}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} +$
$+ \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{9\pm\sqrt{32}} = \sqrt{\frac{9+\sqrt{81-32}}{2}} \pm \sqrt{\frac{9-\sqrt{81-32}}{2}} =$
$= \sqrt{8} \pm \sqrt{1} = \sqrt{8} \pm 1$

Ἀσκήσεις

1) Νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς ἁπλᾶ ριζικὰ τὰ ἑξῆς διπλᾶ ριζικά.

α′) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ β′) $\sqrt{3+\sqrt{8}}$ γ′) $\sqrt{7\pm\sqrt{24}}$

δ′) $\sqrt{11\pm2\sqrt{10}}$ ε′) $\sqrt{\frac{19}{20}+\sqrt{\frac{3}{5}}}$,

στ′) $\sqrt{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}$ ζ′) $\sqrt{\alpha^2+2\beta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$

η′) $\sqrt{\chi^2+\sqrt{2\chi^2-1}}$, θ′) $\sqrt{\chi+\chi\psi+2\chi\sqrt{\psi}}$

2) Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

α′) $3\chi^4-10\chi^2+6=0$ β′) $2\chi^4-10\chi^2-20=0$

γ′) $\chi^2+\frac{1}{\chi^2}+\chi+\frac{1}{\chi}=10$ (ἀρκεῖ νὰ τεθῇ $\chi+\frac{1}{\chi}=\psi$)

δ′) $\chi^6-10\chi^3-120=0$ ε′) $\chi^8-10\chi^4+100=0$.

156. **Ἐξισώσεις ἔχουσαι ριζικά.** Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi-3=\sqrt{2\chi-3}$. (α). Ἐὰν ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον λαμβάνομεν $(\chi-3)^2=2\chi-3$. (β). Παρατηροῦμεν ἐδῶ ὅτι ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$\chi-3=-\sqrt{2\chi-3}$ (α′) καὶ ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον λαμβάνομεν τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν (β). Ἐὰν ἀριθμός τις ἐπαληθεύσῃ τὴν (α) θὰ ἐπαληθεύσῃ καὶ τὴν (β)· δὲν ἕπεται ὅμως καὶ τὸ ἀντίστροφον διότι δυνατὸν ἕνας ἀριθμὸς νὰ ἐπαληθεύσῃ τὴν (β) χωρὶς νὰ ἐπαληθεύσῃ τὴν (α), ὁπότε θὰ ἐπαληθεύσῃ τὴν (α′). Ἐδῶ συμβαίνει τοῦτο διότι αἱ ρίζαι τῆς (β) εἶναι 6 καὶ 2· ἐξ αὐτῶν ἡ ρίζα 6 εἶναι ρίζα τῆς (α) καὶ ἡ ρίζα 2 εἶναι ρίζα τῆς (α′).

157. Γενικῶς θεωρήσωμεν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $A=\sqrt{B}$ (1) ὅπου Α καὶ Β πολυώνυμα. Ἐὰν ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον λαμβάνομεν $A^2=B$ (2). Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι γενικωτέρα τῆς δοθείσης διότι ἂν ἀριθμός τις καθιστᾷ ἀριθμοὺς ἴσους τὰ μέλη τῆς (1) θὰ καθιστᾷ ἀριθμοὺς ἴσους καὶ τὰ μέλη τῆς (2). Τὸ ἀντίστροφον ὅμως δὲν ἀληθεύει ἀπαραιτήτως δηλ. δυνατὸν ἀριθμός τις χ νὰ δίδῃ διὰ τὸ A^2 καὶ τὸ Β ἴσους ἀριθμοὺς καὶ ὅμως διὰ τὰ Α καὶ $\sqrt{B}$ νὰ μὴ δίδῃ ἴσους ἀριθμούς, ἐπειδὴ ἐκ τοῦ ὅτι τὰ τετράγωνα δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσα ἕπεται ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι ἴσοι ἢ ἀντίθετοι, ἐπομένως δυνατὸν ὁ ἀριθμὸς χ ὅστις ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν $A^2=B$ νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν ἐξίσωσιν $A=-\sqrt{B}$. Ἵνα εἴμεθα βέβαιοι, ὅτι μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι ρίζα τῆς (1) πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ καθιστᾷ τὸ Α θετικόν.

158. Ἔστω ἤδη ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις περιέχει δύο ριζικὰ καὶ εἶναι τῆς μορφῆς $A=\sqrt{B}+\sqrt{\Gamma}$. Τότε ἀπομονοῦμεν τὸ ἓν ριζικὸν γράφοντες π.χ. $A-\sqrt{B}=\sqrt{\Gamma}$ καὶ ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον ὁπότε λαμβάνομεν $A^2+B-2A\sqrt{B}=\Gamma$. φθάνομεν οὕτω εἰς ἐξίσωσιν μὲ ἓν ριζικὸν π.χ. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{\chi}-\sqrt{\chi-7}=1$. Ἔχομεν $-\sqrt{\chi-7}=1-\sqrt{\chi}$ ὅθεν

$\chi-7=(1-\sqrt{\chi})^2=1+\chi-2\sqrt{\chi}$ ἢ

$-7=-2\sqrt{\chi}+1$ ἢ $-8=-2\sqrt{\chi}$

ὑψώνωμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἔχομεν $\chi=16$. Ἡ τιμὴ αὕτη ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi-7}=1$. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν $\chi=16$· ἡ τιμὴ ὅμως αὕτη ἐδῶ δὲν ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

α΄) $\chi+\sqrt{10\chi+29}=9$ β΄) $\sqrt{\chi^2-2}=\chi^2+1$

γ΄) $\chi-20+\sqrt{\chi}=0$ δ΄) $\chi-5\sqrt{\chi}-55=0$

ε΄) $2\chi^2+3\chi-3=30-\sqrt{2\chi^2+3\chi-3}$

2) Ὁμοίως αἱ:

α΄) $\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi-\alpha}=1$. Παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη γράφεται $\sqrt{\chi-\alpha}=1-\sqrt{\chi}$ ὅθεν $\chi-\alpha=1-2\sqrt{\chi}+\chi$ καὶ $\chi=\dfrac{(1+\alpha)^2}{4}$

β') $\sqrt{8+\chi}-\sqrt{8-\chi}=\sqrt{8}$ γ') $\sqrt{\chi+16}=-1+\sqrt{3\chi+9}$

δ') $\sqrt{\chi+16}=\sqrt{3\chi+9}-1$ ε') $\frac{\sqrt{4\chi+20}}{4-\sqrt{\chi}}=\frac{4-\sqrt{\chi}}{\sqrt{\chi}}$

3) Ὁμοίως τά:

α') $2\chi+\sqrt{\chi(\alpha-\chi)}=\beta$ β') $\sqrt{4\chi-5+\sqrt{2\chi-9}}=4$

γ') $\sqrt{(\chi-2)(\chi-3)}+\sqrt{(\chi-1)(\chi-2)}=\sqrt{2}$

δ') $\sqrt{\alpha+\chi}-\sqrt{\alpha-\chi}=\sqrt{\alpha}$

ε') $\sqrt{\chi-\alpha}+\sqrt{\chi-\beta}=\sqrt{\chi-\gamma}$

στ') $\sqrt{\chi-1}+\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi+1}=0$

4) Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα

α') $\sqrt{3\chi+13}+\sqrt{4\psi+1}=7$
$\chi=\psi-1$

β') $\sqrt{\chi}-\sqrt{\psi}=\frac{1}{5}(\chi-\psi)$ γ') $\chi^2-\psi+\sqrt{\chi^2-\psi}=20$
$\chi\psi=36$ $\chi^4-\psi^2=544$

δ') $\chi+\psi+2\sqrt{\chi+\psi}=8$ ε') $\left(\sqrt{\chi^2+2\psi^2}-\chi\psi\right)\sqrt{\chi^2+2\psi^2}=3$
$\chi^2+\psi^2=10$ $\left(\sqrt{\chi^2+2\psi^2}+\chi\psi\right)\sqrt{\chi^2+2\psi^2}=15$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII.

ΠΕΡΙ ΠΡΟΟΔΩΝ.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

159. ***Ἀριθμητικὴ πρόοδος ἢ πρόοδος κατὰ διαφορὰν*** λέγεται σειρὰ ἀριθμῶν εἰς τὴν ὁποίαν ἕκαστος ὅρος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ προηγουμένου καὶ ἑνὸς σταθεροῦ τὸν ὁποῖον καλοῦμεν λόγον τῆς ἀριθμητικῆς προόδου. Κατὰ ταῦτα ἡ διαφορὰ δύο οἱωνδήποτε διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου εἶναι πάντοτε ἡ αὐτὴ καὶ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον· π.χ. ἡ σειρὰ

$-5, \quad -3, \quad -1, \quad 1, \quad 3, \quad 5, \quad 7$

εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ λόγον τὸν 2. Ὅταν γνωρίζωμεν τὸν πρῶτον ὅρον καὶ τὸν λόγον μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εὐκόλως εὑρίσκομεν τοὺς ἄλλους ὅρους π.χ. Νὰ σχηματισθῇ ἀριθμητικὴ πρόοδος ἐκ 5 ὅρων, τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος εἶναι 4 καὶ ὁ λόγος 7. Ἀφοῦ ὁ πρῶτος εἶναι 4, ὁ δεύτερος θὰ εἶναι $4+7=11$, ὁ τρίτος, $11+7=18$, ὁ τέταρτος

$18+7=25$ κ.ο.κ. Ὥστε ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι

$$4,\ 11,\ 18,\ 25,\ 32$$

160. Γενικῶς ἔστω ἀριθμητική τις πρόοδος

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\ \ldots\ldots\ \rho,\quad \sigma,\quad \tau \qquad (A)$$

ἔχουσα ν ὅρους. Θὰ ἔχωμεν ὅτι

$$\beta=\alpha+\omega,\quad \gamma=\beta+\omega=\alpha+2\omega,\quad \delta=\gamma+\omega=\alpha+3\omega\quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \tau=\sigma+\omega=\alpha+(\nu-1)\omega$$

Δηλαδὴ ἡ πρόοδος γράφεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\underset{1\text{ος ὅρος}}{\alpha},\quad \underset{2\text{ος ὅρος}}{\alpha+\omega},\quad \underset{3\text{ος ὅρος}}{\alpha+2\omega},\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \underset{\nu\text{ὸς ὅρος}}{\alpha+(\nu-1)\omega}$$

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν

$$\boxed{\tau=\alpha+(\nu-1)\,\omega} \qquad (1)$$

π.χ. ἔστω ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος $-7,\ -4,\ -1,\ 2\ldots\ldots$ ἔχουσα προφανῶς λόγον 3. Ὁ 51ος ὅρος ταύτης ἰσοῦται μὲ $-7+(51-1)\,3=143$.

161. Εἰς πᾶσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ πεπερασμένον πλῆθος ὅρων τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων ἰσάκις τῶν ἄκρων ἀπεχόντων εἶναι πάντοτε τὸ αὐτό· π.χ. εἰς τὴν πρόοδον $-7,\ -4,\ -1,\ldots 11$ τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τελευταίου ὅρου εἶναι $-7+11=4$. Τὸ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ προτελευταίου εἶναι $-4+8=4$ κ.ο.κ.

Καὶ γενικῶς ἂς καλέσωμεν α τὸν πρῶτον ὅρον, τ τὸν τελευταῖον καὶ ω τὸν λόγον. Ὁ δεύτερος εἶναι $\alpha+\omega$, ὁ δὲ προτελευταῖος $\tau-\omega$. Τὸ ἄθροισμα συνεπῶς εἶναι $(\alpha+\omega)+(\tau-\omega)=\alpha+\tau$ δηλαδὴ ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων. Ὁ τρίτος ὅρος εἶναι $\alpha+2\omega$, ὁ δὲ τρίτος ἀπὸ τοῦ τέλους $\tau-2\omega$, τὸ ἄθροισμά των συνεπῶς εἶναι $(\alpha+2\omega)+(\tau-2\omega)=\alpha+\tau$ κ.ο.κ.

162. ***Ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου.*** Ἔστω ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ldots\ldots\ \kappa,\ \lambda,\ \tau$. ἂς καλέσωμεν ν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων καὶ Σ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν. Τότε θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma=\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots\ldots\ldots+\kappa+\lambda+\tau$$

ἢ

$$\Sigma=\tau+\lambda+\kappa+\ldots\ldots\ldots\ldots+\gamma+\beta+\alpha \quad \text{καὶ}$$

$$2\Sigma=(\alpha+\tau)+(\beta+\lambda)+\ldots\ldots+(\alpha+\tau) \quad \text{Ἀλλὰ (§161)}$$

$$\alpha+\tau=\beta+\lambda=\gamma+\kappa=\ldots\ldots\ldots \quad \text{Ἑπομένως}$$

$$2\Sigma=(\alpha+\tau)+(\alpha+\tau)+\ldots+(\alpha+\tau). \quad \text{Ὅθεν}$$

$$2\Sigma=(\alpha+\tau)\nu. \quad \text{καὶ}$$

$$\boxed{\Sigma = \frac{\alpha + \tau}{2}\,\nu} \qquad (2)$$

π.χ. τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου $-3,\ 0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15$

εἶναι $\dfrac{-3+15}{2}\cdot 7 = 42$

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τελευταῖος ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῶν κάτωθι ἀριθμητικῶν προόδων.

α΄) $3,\ 9,\ 15$.................... (10 ὅροι)

β΄) $1,\ 8,\ 15$.................... (27 ὅροι)

γ΄) $-17, -15, -13$.................. (23 ὅροι)

δ΄) $\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}$..................... (12 ὅροι)

2) Ὁμοίως:

α΄) $\alpha,\quad \alpha+\omega,\quad \alpha+2\omega$........ ($\nu$ ὅροι)

β΄) $3\alpha,\quad 3\alpha+\beta,\quad 3\alpha+2\beta$... (25 ὅροι)

γ΄) $5\alpha-6\beta,\ 5\alpha-4\beta,\ 5\alpha-2\beta,\ 5\alpha$...... (137 ὅροι)

δ΄) $1-\sqrt{\alpha},\ 5+3\sqrt{\alpha}$.......... (23 ὅροι)

3) Νὰ παρεμβληθοῦν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β ἀριθμοὶ ν τὸ πλῆθος οὕτως ὥστε νὰ ἀποτελεσθῇ ἀριθμητικὴ πρόοδος ἐκ $\nu+2$ ὅρων.

Ἔστω ω ὁ λόγος τῆς ζητουμένης προόδου. Ἐπειδὴ ὁ 2ος ὅρος θὰ εἶναι ὁ $\nu+2$ ὅρος τῆς ζητουμένης προόδου θὰ ἔχωμεν

$\beta = \alpha + (\nu+1)\omega$, ἐξ οὗ $\omega = \dfrac{\beta-\alpha}{\nu+1}$ ἑπομένως ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι

$$\alpha,\ \alpha+\frac{\beta-\alpha}{\nu+1},\ \alpha+2\,\frac{\beta-\alpha}{\nu+1}\ \ldots\ldots\ \alpha+\nu\frac{\beta-\alpha}{\nu+1},\quad \beta.$$

4) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῶν κάτωθι ἀριθμητικῶν προόδων, τῶν ὁποίων δίδεται ὁ πρῶτος ὅρος, ὁ τελευταῖος καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων.

α΄) 3................. 23 (12 ὅροι)

β΄) −15.................130 (23 ὅροι)

γ΄) 9................. 17 (4 ὅροι)

δ΄) $2\alpha-3\beta$, ...$-2\alpha+3\beta$ (6 ὅροι)

5) Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῶν κάτωθι ἀριθμητικῶν προόδων τῶν ὁποίων δίδονται οἱ δύο τελευταῖοι ὅροι καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων.

α') ....25,29 (13 ὅροι)

β') ....$23,25\frac{1}{2}$ (17 ὅροι)

6) Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος ἀρ. προόδου ὅταν δοθῇ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν καὶ ὁ λόγος.
α') $\nu=13$, $\Sigma=173$, $\omega=3$, β') $\nu=7$, $\Sigma=136$, $\omega=-3$

7) Μεταξὺ 3 καὶ 4 πρέπει νὰ παρεμβληθοῦν 9 ὅροι οὕτως ὥστε νὰ παραχθῇ ἀριθμητικὴ πρόοδος ἐξ 11 ὅρων. Πόσον τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ταύτης.

8) Τρεῖς ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου ἔχουν ἄθροισμα 54 καὶ γινόμενον 5000. Εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς.

9) Εἰς ἀριθμητικὴν πρόοδον ἐκ δέκα ὅρων τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων εἶναι 120, ἡ διαφορὰ τῶν ἄκρων 20, ποία εἶναι ἡ πρόοδος;

10) Εὑρεῖν τὰς τρεῖς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ γωνίαι αὗται ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

11) Θέλων τις νὰ ἀνορύξῃ φρέαρ συνεφώνησε μετὰ τῶν ἐργατῶν του ὡς ἑξῆς. Διὰ τὸ πρῶτον μέτρον βάθους νὰ πληρώσῃ 50 δραχμὰς διὰ τὸ δεύτερον 100, διὰ τὸ τρίτον 150 κ.ο.κ. Δι' ἕκαστον ἑπόμενον μέτρον 50 δρ. περισσότερον. Τὸ ὕδωρ εὑρέθη εἰς βάθος 18 μέτρων. Πόσα χρήματα θὰ δώσῃ εἰς τοὺς ἐργάτας;

12) Μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου ὁ 5ος ὅρος εἶναι 7, ὁ 8ος 13. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν δέκα πρώτων ὅρων ταύτης.

13) Μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου περιλαμβανούσης 13 ὅρους ὁ 7ος ὅρος εἶναι 23, τὸ δὲ ἄθροισμα 130. Νὰ σχηματισθῇ αὐτή.

14) Νὰ σχηματισθῇ ἀριθμητικὴ πρόοδος τῆς ὁποίας τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ν εἶναι $\nu^2 + K\nu$. ὅπου Κ δεδομένος ἀριθμός.
Ἐφαρμογαὶ ὅταν $K=o$ καὶ $K=2$.

15) Νὰ εὑρεθῇ

α') τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τὸ 1 ἕως τὸ ν

β') τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ἀρτίων ἀριθμῶν

γ') τὸ ἄθροισμα τῶν περιττῶν ἀριθμῶν 1, 3....κλπ. μέχρι τοῦ κατέχοντος τὴν τάξιν ν.

16) Μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου ἐχούσης ν ὅρους τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι α τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ 17ος ὅρος.

17) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν τὰ α,β,γ, τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+2\beta\chi+\gamma=0$ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν προστιθέμενα δίδουν τὴν ἀρνητικὴν μονάδα.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

163. ***Γεωμετρική πρόοδος*** ἢ ***πρόοδος κατὰ πηλίκον*** λέγεται σειρὰ ἀριθμῶν εἰς τὴν ὁποίαν ἕκαστος ὅρος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ προηγουμένου του ἐπὶ ἕνα σταθερὸν παράγοντα τὸν ὁποῖον καλοῦμεν λ ό γ ο ν τῆς γεωμετρικῆς προόδου.

Κατὰ ταῦτα τὸ πηλίκον τοῦ τυχόντος ὅρου γεωμετρικῆς προόδου διὰ τοῦ προηγουμένου του εἶναι πάντοτε τὸ αὐτὸ καὶ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον. Ὅταν ὁ λόγος μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος ἡ πρόοδος λέγεται ***αὔξουσα***· Ὅταν εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μικρότερος τῆς μονάδος ἡ πρόοδος λέγεται ***ἐλαττουμένη*** π.χ. ἡ σειρὰ 3, 6, 12, 24, 48 εἶναι γεωμετρικὴ πρόοδος αὔξουσα μὲ λόγον τὸν 2· ἡ σειρὰ

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}$, εἶναι γεωμετρικὴ πρόοδος ἐλαττουμένη μὲ λόγον τὸν $-\frac{1}{2}$.

Ὅταν γνωρίζομεν τὸν πρῶτον ὅρον καὶ τὸν λόγον μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου εὑρίσκομεν τοὺς ἄλλους ὅρους.

Πράγματι, ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν γεωμετρικὴν πρόοδον ἐκ πέντε ὅρων, τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 1 καὶ ὁ λόγος -2.

Ὁ πρῶτος εἶναι 1, ὁ δεύτερος $1.(-2)=-2$, ὁ τρίτος $(-2)(-2)=+4$, ὁ τέταρτος $4.(-2)=-8$, ὁ πέμπτος $(-8)(-2)=16$, Ὥστε ἡ ζητουμένη γεωμετρικὴ πρόοδος εἶναι

$$1, \quad -2, \quad 4, \quad -8, \quad 16.$$

164. Γενικῶς ἔστω γεωμετρική τις πρόοδος

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma \ldots\ldots \rho, \quad \sigma, \quad \tau.$$

ἔχουσα ν ὅρους· θὰ ἔχωμεν

$\beta=\alpha\omega, \gamma=\alpha\omega.\omega=\alpha\omega^2, \delta=\alpha\omega^2.\omega=\alpha\omega^3, \ldots\ldots \tau=\lambda\alpha=\alpha.\omega^{\nu-1}$

Δηλαδὴ ἡ πρόοδος γράφεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$\alpha,$	$\alpha\omega,$	$\alpha\omega^2$	$\alpha\omega^3$	$\alpha\omega^{\nu-1}$
1ος	2ος	3ος	4ος	νυοστὸς ὅρ.

Κατὰ ταῦτα ἐὰν τ εἶναι ὁ τελευταῖος ὅρος νυοστὸς τῆς γεωμετρικῆς προόδου, ἔχομεν

$$\boxed{\tau=\alpha.\omega^{\nu-1}} \qquad (1)$$

π.χ. τῆς γεωμετρικῆς προόδου $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3 \ldots\ldots$ ἔχουσης λόγου 2, ἕβδομος ὅρος εἶναι ὁ $\frac{3}{8} \cdot 2^6 = 24$.

165. *Ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου.*

Ἔστω γεωμετρικὴ πρόοδος

$$\alpha, \quad \alpha\omega, \quad \alpha\omega^2 \ldots\ldots\ldots \alpha\omega^{\nu-2}, \ \alpha\omega^{\nu-1}.$$

Ἂν καλέσωμεν Σ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ταύτης θὰ ἔχωμεν

$\Sigma = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \ldots\ldots + \alpha\omega^{\nu-2} + \alpha\omega^{\nu-1}$ καὶ

$\Sigma\omega = \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \alpha\omega^3 + \ldots\ldots + \alpha\omega^{\nu-1} + \alpha\omega^{\nu}$ ὅθεν

$\Sigma\omega - \Sigma = \alpha\omega^{\nu} - \alpha$ ἢ

$\Sigma(\omega - 1) = \alpha.(\omega^{\nu} - 1)$ καὶ ἑπομένως

$\Sigma = \frac{\alpha.(\omega^{\nu}-1)}{\omega-1}$. ἀλλὰ $\alpha\omega^{\nu-1} = \tau$. Ὅθεν

$$\boxed{\Sigma = \frac{\tau\omega - \alpha}{\omega - 1}} \quad (2)$$

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τελευταῖος ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῶν κάτωθι γεωμετρικῶν προόδων.

α') 1, 2, 4 .... (5 ὅροι)

β') $\frac{1}{3}, \ \frac{1}{6}, \ \frac{1}{12}$ .... (6 ὅροι)

γ') $\alpha+\beta, \ \alpha^2+\alpha\beta, \ \alpha^3+\alpha^2\beta$ .. .. (ν ὅροι)

2) Νὰ παρεμβληθοῦν ν ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β οὕτως ὥστε νὰ σχηματισθῇ γεωμετρικὴ πρόοδος ἐκ ν+2 ὅρων. Ἔστω ω ὁ λόγος τῆς ζητουμένης. Ἐπειδὴ ὁ β θὰ εἶναι ὁ ν+2 ὅρος τῆς γεωμετρικῆς αὐτῆς προόδου θὰ ἔχωμεν $\beta = \alpha\omega^{\nu+1}$

ὅθεν $\omega = \sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$. Ἑπομένως, ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι

$$\alpha, \quad \alpha\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}, \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ \alpha\left(\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^{\nu}, \quad \beta.$$

Ἐφαρμογή. Νὰ παρεμβληθοῦν μεταξὺ τῶν 1 καὶ 64 πέντε ἀριθμοὶ ὥστε νὰ σχηματισθῇ γεωμετρικὴ πρόοδος.

3) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον δύο ὅρων γεωμετρικῆς προ-

όδου ἰσάκις ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων.

4. Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν

$$\omega = \frac{1}{8},\ \nu=12,\ \Sigma=5460.$$

5) Ὑπολογίσατε τὸ ἄθροισμα τῶν ἓξ πρώτων ὅρων γεωτετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος α καὶ ὁ λόγος ω ἔχουν τὰς ἀκολούθους τιμὰς

α′) $\alpha=1$, $\omega=2$, β′) $\alpha=\frac{2}{6}$, $\omega=8$,

γ′) $\alpha=\frac{3}{4}$, $\omega=4$, δ′) $\alpha=729$, $\omega=\frac{2}{3}$.

6) Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα Σ τῆς γεωμετρικῆς προόδου, εἰς τὴν ὁποίαν $\alpha=2$, $\tau=3$, $\omega=\sqrt[10]{\frac{2}{3}}$.

7) Νὰ ἐκφρασθοῦν διὰ τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον
α′) τὸ α διὰ τῶν τ,ω,ν. β′) τὸ α διὰ τῶν Σ,ω,ν.
γ′) τὸ τ διὰ τῶν Σ,ω,ν. δ′) τὸ τ διὰ τῶν α,Σ,ω.
ε′) τὸ α διὰ τῶν τ,Σ,ω. στ′) τὸ ω διὰ τῶν Σ,τ,ν.

8) Ποῖος εἶναι ὁ 1ος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου, ἐὰν 7ος ὅρος εἶναι ὁ 9 καὶ 8ος ὁ 10.

9) Ποῖος εἶναι ὁ 6ος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας πρῶτο ρος εἶναι ὁ 3 καὶ λόγος εἶναι ὁ $\frac{2}{3}$;

10) Ποῖος εἶναι ὁ τέταρτος ὅρος τῆς γεωμετρι ῆς π οόδου τῆς ὁποίας οἱ δύο πρῶτοι ὅ οι ε αι 3 καὶ 4;

11) Γεωμετρικῆς τινὸς προόδου ἐκ τριῶν ὅρων τὸ ἄθροισμα εἶναι 248, οἱ δύο ἄκροι ὅροι διαφέρουν κατὰ 192. Ποῖοι εἶναι οἱ τρεῖς οὗτοι ὅροι;

12) Εἰς κύκλον ἀκτῖνος α ἐγγράφομεν τετράγωνον· εἰς τὸ τετράγωνον τοῦτο ἐγγράφομεν κύκλον, εἰς τὸν κύκλον τοῦτον τετράγωνον κ.ο.κ. ἐννέα φοράς.

Ζητοῦνται

α′) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν κύκλων.

β′) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τετραγώνων.

13) Τὸ ἄθροισμα τῶν 4 ὅρων γεωμετρικῆς προόδου εἶναι 12, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων εἶναι 4. Εὑρεῖν τὴν πρόοδον.

14) Γεωμετρική τις πρόοδος ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ὅρους. Ὁ λόγος εἶναι $\frac{1}{2}$ καὶ τὸ ἄθροισμά των 15,75. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν δύο μέσων ὅρων.

15) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἵνα ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ ἔχει μίαν διπλῆν ρίζαν πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ ἀριθμοὶ $\alpha, \frac{\beta}{2}, \gamma$ νὰ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον.

16) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἂν οἱ ἀριθμοὶ α,β,γ, ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, οἱ ἀριθμοὶ $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}, \frac{\alpha+\gamma-\beta}{2\beta}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

17) Τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον· δίδεται δὲ ἡ περίμετρος 2τ καὶ τὸ γινόμενον α τῆς μεγαλυτέρας καὶ τῆς μικροτέρας πλευρᾶς. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἄλλαι πλευραί.

18) Εἰς μίαν γεωμετρικὴν πρόοδον ἐκ 4 ὅρων τὸ ἄθροισμα τῶν μέσων εἶναι 18 τῶν δὲ ἄκρων 2· νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος ταύτης.

166. **Φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος.** Γεωμετρικὴ πρόοδος ἐλαττουμένη μὲ ἀπείρους ὅρους λέγεται ***φθίνουσα*** γεωμετρικὴ πρόοδος.

Μία φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος γράφεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\alpha \qquad \alpha\omega, \qquad \alpha\omega^2, \qquad \alpha\omega^3,\ldots\ldots \qquad (\Phi)$$
$$\text{ὅπου} \quad |\omega| < 1$$

Λῆμμα· Ἔστω $0<\omega<1$ καὶ ἔστω ἡ φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος

$$\frac{\alpha\omega}{1-\omega}, \quad \frac{\alpha\omega^2}{1-\omega}, \quad \frac{\alpha\omega^3}{1-\omega}, \quad \frac{\alpha\omega^4}{1-\omega}, \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{A})$$

ἀληθεύει ἡ ἑξῆς πρότασις:

«Ἐὰν δοθῇ θετικὸς ἀριθμὸς η ὁσονδήποτε μικρὸς εὑρίσκεται ὅρος τῆς προόδου (Α) μικρότερος τοῦ η, ὁπότε καὶ πάντες οἱ κατόπιν αὐτοῦ θὰ εἶναι μικρότεροι τοῦ η».

* 166α. Ἡ ἀπόδειξις τούτου στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἑξῆς προτάσεων. Δίδεται ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος

$$1+\theta, \qquad (1+\theta)^2, \qquad (1+\theta)^3\ldots\ldots\ldots \quad (\Gamma)$$

ὅπου θ θετικός τις ἀριθμὸς ὁσονδήποτε μικρός. Ἔστω θετικός τις Μ. ὁσονδήποτε μέγας. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὅρον τῆς (Γ) μεγαλήτερον τοῦ Μ ὁπότε καὶ πάντες οἱ κατόπιν αὐτοῦ θὰ εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ Μ. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου θεωρήσωμεν τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον

$$1+\theta, \quad 1+2\theta, \quad 1+3\theta, \ldots\ldots \quad (E)$$

οἱ ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς ταύτης προόδου εἶναι ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ πέραν μικρότεροι τῶν ἀντιστοίχων τῆς γεωμετρικῆς π.χ.

$1+2\theta < (1+\theta)^2$ διότι $(1+\theta)^2 = 1+2\theta+\theta^2$.

$1+3\theta < (1+\theta)^3$ διότι $(1+\theta)^2\,(1+\theta) > (1+2\theta)\,(1+\theta)$

κ.ο.κ.

Εὑρίσκεται ὅμως ὅρος τῆς (Ε) μεγαλύτερος τοῦ Μ· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ εὑρεθῇ θετικὸς καὶ ἀκέραιος ν ἐπαληθεύων τὴν ἀνισότητα $1+\nu\theta > M$.

Δηλαδὴ ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ $\nu > \dfrac{M-1}{\theta}$.

Ἑπομένως διὰ τοιαύτην τιμὴν τοῦ ν καὶ ὁ ἀντίστοιχος ὅρος τῆς (Γ) θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ Μ, καὶ πάντες οἱ κατόπιν του θὰ εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ Μ.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ἤδη τὴν ἀρχικὴν πρότασιν (§ 166) ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν τὴν αὔξουσαν πρόοδον μὲ ἀπείρους ὅρους

$$\frac{1-\omega}{\alpha\omega}, \quad \frac{1-\omega}{\alpha\omega^2}, \quad \frac{1-\omega}{\alpha\omega^3}, \quad \ldots\ldots \quad (A')$$

καὶ ν' ἀποδείξωμεν ὅτι εὑρίσκεται ὅρος τῆς (Α')

$$\frac{1-\omega}{\alpha\omega^\nu} \text{ τοιοῦτος ὥστε } \frac{1-\omega}{\alpha\omega^\nu} > \frac{1}{\eta}. \quad (K)$$

πρὸς οὗτο ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν $\dfrac{1}{\omega^\nu} > \dfrac{\alpha}{(1-\omega).\eta} \ldots$ ἤτοι ἐὰν θέσωμεν $\dfrac{\alpha}{(1-\omega).\eta} = M$ ἀρκεῖ ν' ἀποδείξωμεν ὅτι εὑρίσκεται ὅρος τῆς αὐξούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$\frac{1}{\omega}, \quad \frac{1}{\omega^2}, \quad \frac{1}{\omega^3} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\Lambda)$$

μεγαλύτερος τοῦ Μ. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι $\dfrac{1}{\omega} > 1$ καὶ ἑπομένως ὁ $\dfrac{1}{\omega}$ γράφεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $1+\theta$, ὅπου θ θετικός· ὅθεν ἡ (Λ) γράφεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (Γ) ἑπομένως κατὰ τὴν προαποδειχθεῖσαν πρότασιν εὑρίσκεται ὅρος τῆς (Λ) μεγαλύτερος τοῦ Μ ὅθεν ἰσχύει ἡ ἀρχικὴ πρότασις.

167. ***Ἄθροισμα τῶν ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου.*** Ἔστω ἡ φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος (Φ) καὶ ἔστω ὅτι ὁ λόγος ω εἶναι θετικός.

Ἐὰν σημειώσωμεν μὲ τὸ Σ_ν τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς προόδου ἔχομεν

$\Sigma_\nu = \frac{\alpha\omega^\nu - \alpha}{\omega - 1} = \frac{\alpha - \alpha\omega^\nu}{1-\omega} = \frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\alpha\omega^\nu}{1-\omega}$. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ μειωτέος $\frac{\alpha}{1-\omega}$ δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ν δηλαδὴ ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν ἀθροιζομένων ὅρων, ὁ δὲ ἀφαιρετέος $\frac{\alpha\omega^\nu}{1-\omega}$ διαρκῶς ἐλαττοῦται διότι ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος

$$\frac{\alpha.\omega}{1-\omega}, \frac{\alpha\omega^2}{1-\omega}, \frac{\alpha\omega^3}{1-\omega}, \frac{\alpha\omega^4}{1-\omega}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

εἶναι φθίνουσα καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ὁσουσδήποτε ὅρους τῆς δοθείσης προόδου (Φ) καὶ ἐὰν προσθέσωμεν ἔχομεν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\alpha}{1-\omega}$· προσθέτοντες δὲ περισσοτέρους ὅρους δυνάμεθα νὰ πλησιάσωμεν ὅσον θέλομεν πρὸς τὸ $\frac{\alpha}{1-\omega}$ ἢ καί, ἀκριβέστερον, προκύπτει ἀπὸ τὸ προηγούμενον λῆμμα (§ 166) ὅτι δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ η ὁσονδήποτε μικροῦ δυνάμεθα προσθέτοντες ἱκανὸν ἀριθμὸν ὅρων, ἤτοι λαμβάνοντες τὸ ν ἀρκετὰ μέγα, νὰ ἔχωμεν $\frac{\alpha}{1-\omega} - \Sigma_\nu < \eta$. Δι' αὐτὸ λέγομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς (Φ) εἶναι $\frac{\alpha}{1-\omega}$ καὶ σημειοῦμεν:

$$\boxed{\Sigma = \frac{\alpha}{1=\omega}}$$

Τὰ ἀνωτέρω περὶ φθινουσῶν γεωμετρικων προόδων ἐπικτείνονται καὶ ὅταν $\omega < 0$, $\omega < 1$.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῶν φθινουσῶν προόδων.

α') $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots\ldots\ldots$ β') $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27} \ldots$

γ') $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}$....... δ') $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}$..... ὅπου $0 < \alpha < 1$.

2) Ὁμοίως τῶν:

α') $\frac{9}{10}, \frac{81}{100}, \frac{729}{1000}$,.......

β') 0,2, 0,02, 0,002...............

γ') $\frac{35}{100}, \frac{35}{10000}, \frac{35}{1000000}$....δηλ. $\frac{35}{10^2}, \frac{35}{10^4}, \frac{35}{10^6}$

δ') 27, $\frac{27}{10}, \frac{27}{100}, \frac{27}{1000}$, ...

3) Δείξατε (διὰ τῶν φθινουσῶν γεωμετρικῶν προόδων) ὅτι $0{,}252525.......=\frac{25}{99}$.

4) Δείξατε ὅτι· εἰς πᾶσαν γεωμετρικὴν πρόοδον φθίνουσαν, τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων ἰσάκις ἀπεχόντων τῶν ἄκρων (ὅταν ληφθῇ πεπερασμένον πλῆθος ὅρων) εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄκρων.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ ΩΣ ΠΡΟΣ ΒΑΣΙΝ 10

168. Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ ἀπεριόριστον πλῆθος ὅρων

(Γ)....10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10^1, 10^2, 10^3,.....

καὶ ἀντίστοιχος ἀριθμητική.

(Α)....—3, —2, —1, 0, 1, 2, 3,......

Ἐὰν λάβωμεν δύο ὅρους τῆς ἀριθμητικῆς καὶ τοὺς ἀντιστοίχους τῆς γεωμετρικῆς παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸν μεγαλύτερον τῆς γεωμετρικῆς ἀντιστοιχεῖ μεγαλύτερος τῆς ἀριθμητικῆς· ἐπίσης, ἐὰν πολλαπλασιάσω δύο ὅρους τῆς (Γ) π. χ. τὸν 10^2 καὶ 10^4 εὑρίσκω ἕνα ὅρον τῆς ἰδίας, τὸν 10^6· ἂς θεωρήσω εἰς τὴν (Α) τοὺς ἀντιστοίχους ὅρους τῶν 10^2 καὶ 10^4 δηλαδὴ τοὺς 2 καὶ 4· τὸ ἄθροισμα αὐτῶν δηλ. ὁ 6 θὰ εἶναι ὅρος τῆς (Α) ἀντιστοιχῶν εἰς τὸν 10^6 τῆς (Γ). Τοὐτέστιν ὁ ὅρος τῆς (Γ) ὁ ὁποῖος εἶναι γινόμενον δύο ὅρων αὐτῆς, ἔχει ἀντίστοιχον εἰς τὴν (Α) τὸν ὅρον, ὅστις εἶναι ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων. Καὶ ἀντιστρόφως· ἂς προσθέσω δύο ὅρους τῆς (Α) π.χ. τοὺς 3 καὶ 5· εὑρίσκω ἕνα ὅρον τῆς ἰδίας, τὸν 8, τοῦ ὁποίου ἀντίστοιχος εἰς τὴν (Γ) εἶναι ὁ 10^8, ὁ ὁποῖος εἶναι γινόμενον τοῦ 10^3 καὶ 10^5

οἵτινες εἶναι οἱ ὅροι τῆς (Γ) οἱ ἀντίστοιχοι πρὸς τοὺς 3 καὶ 5.

Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι εἰς τὸ γινόμενον δύο ὅρων τῆς (Γ) ἀντιστοιχεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τῆς (Α), καὶ ἀντιστρόφως.

169. Καλοῦμεν λογάριθμον ἀριθμοῦ ἀνήκοντος εἰς τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον (Γ) τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμὸν τῆς ἀριθμητικῆς προόδου (Α) π.χ. λογάριθμος τοῦ $\frac{1}{100}$ εἶναι ὁ -2.

Ἀντιστρόφως· καλοῦμεν ἀντιλογάριθμον ἀριθμοῦ τινὸς τῆς (Α) τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμὸν τῆς (Γ) π.χ. ἀντιλογάριθμος τοῦ -2 εἶναι ὁ $\frac{1}{100}$.

Λέγομεν ὅτι βάσις τοῦ ὡς ἄνω λογαριθμικοῦ συστήματος εἶναι ὁ 10 διότι ***ἡ μονὰς εἶναι λογάριθμος τοῦ 10.***

170. Ἔστω ἤδη ὅτι παρεμβάλλονται 9 ὅροι εἰς ἕκαστον διάστημα μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς οὕτως, ὥστε νὰ προκύπτῃ νέα γεωμετρικὴ πρόοδος (Γ΄) καὶ 9 ὅροι εἰς ἕκαστον διάστημα μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς οὕτως ὥστε νὰ προκύπτῃ νέα ἀριθμητικὴ πρόοδος. (Α΄). Οἱ ἴροι τῆς (Γ) θα περιέχωνται εἰς τοὺς ὅρους τῆς (Γ΄) καὶ οἱ ὅροι τῆς (Α) εἰς τοὺς ὅρους τῆς (Α΄).

Καλοῦμεν πάλιν λογάριθμον ἀριθμοῦ ἀνήκοντος εἰς τὴν (Γ΄) τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμὸν τῆς (Α΄). Ὁρίζεται οὕτω σύστημα λογαρίθμων πληρέστερον ἀπὸ τὸ προηγουμένως ὁρισθὲν μὲ τὰς (Γ) καὶ (Α) καὶ μὲ βάσιν πάλιν τὸ 10.

Ἐὰν πάλιν καθ᾽ὅμοιον τρόπον διὰ παρεμβολῆς 9 ὅρων μεταξὺ δύο διαδοχικῶν σχηματισθοῦν ἐκ τῶν (Γ΄) καὶ (Α΄) μία γεωμετρικὴ πρόοδος (Γ΄΄) καὶ μία ἀριθμητικὴ (Α΄΄) θὰ καλέσωμεν λογάριθμον ἀριθμοῦ ἀνήκοντος εἰς τὴν (Γ΄΄) τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμὸν τῆς (Α΄΄)· ὁρίζεται οὕτω σύστημα λογαρίθμων πληρέστερον καὶ μὲ βάσιν πάλιν τὸ 10. κ.ο.κ.

171. Ἀποδεικνύεται δὲ ὅτι γενικῶς δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν ὅτι εἰς πάντα θετικὸν ἀριθμὸν ἀντιστοιχεῖ ἄλλος τις ἀριθμὸς θετικός, μηδὲν ἢ ἀρνητικὸς καὶ ***μόνον εἷς*** καλούμενος λογάριθμος τοῦ πρώτου καὶ ἀντιστρόφως εἰς πάντα ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν ἀντιστοιχεῖ εἰς μόνον θετικὸς ἔχων αὐτὸν λογάριθμον οὕτως ὥστε ἡ ἀντιστοιχία νὰ ἔχῃ τὰς ἑξῆς ἰδιότητας:

α΄) ***ὁ λογάριθμος τοῦ 10 νὰ εἶναι τὸ 1.***

β΄) ***ἐὰν θετικός τις ἀριθμὸς β εἶναι μεγαλύτερος ἄλλου θετικοῦ ἀριθμοῦ α ὁ λογάριθμος τοῦ β εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λογαρίθμου τοῦ α.***

γ΄) ***Ὁ λογάριθμος γινομένου δύο παραγόντων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων.***

Ὁ λογάριθμος θετικοῦ ἀριθμοῦ α σημειοῦται λογ α

Οἱ λογάριθμοι τοὺς ὁποίους ὡρίσαμεν λέγονται καὶ ***δεκαδικοὶ λογάριθμοι*** ἢ ***κοινοὶ λογάριθμοι.***

1. Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω γ' ἰδιότητα ἕπεται ὅτι,

$$\lambda o\gamma 1 = 0$$

διότι $\lambda o\gamma\,(\alpha \times 1) = \lambda o\gamma\,\alpha + \lambda o\gamma\,1$ ὅθεν $\lambda o\gamma\,\alpha = \lambda o\gamma\,\alpha + \lambda o\gamma 1$

καὶ ἑπομένως $\lambda o\gamma 1 = 0$

2. Ἀπὸ τὴν β' ἰδιότητα ἕπεται ὅτι

ἐὰν $\alpha > 1$ θὰ ἔχωμεν $\lambda o\gamma\,\alpha > 0$

καὶ ἐὰν $\alpha < 1$ θὰ ἔχωμεν $\lambda o\gamma\,\alpha < 0$.

3. Ἀπὸ τὴν γ' ἰδιότητα ἕπεται

ὅτι $\lambda o\gamma\,\alpha\beta\gamma = \lambda o\gamma\,\alpha + \lambda o\gamma\,\beta + \lambda o\gamma\,\gamma$

διότι $\lambda o\gamma\,(\alpha\beta\gamma) = \lambda o\gamma\,\alpha\beta + \lambda o\gamma\,\gamma =$ $= \lambda o\gamma\,\alpha + \lambda o\gamma\,\beta + \lambda o\gamma\,\gamma$ καὶ γενικῶς

«λογάριθμος γινομένου πολλῶν παραγόντων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων».

4. ***Ὁ λογάριθμος πηλίκου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν λογαρίθμων τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου.***

Καὶ πράγματι· ἂν καλέσωμεν γ τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{\beta}$ θὰ ἔχωμεν $\alpha = \beta . \gamma$ ὅθεν $\lambda o\gamma\,\alpha = \lambda o\gamma\,\beta + \lambda o\gamma\,\gamma$ ἐξ οὗ $\lambda o\gamma\,\gamma = \lambda o\gamma\,\alpha - \lambda o\gamma\,\beta$

ἢ καὶ $\lambda o\gamma \frac{\alpha}{\beta} = \lambda o\gamma\,\alpha - \lambda o\gamma\,\beta$.

5. ***Ὁ λογάριθμος δυνάμεως ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐκθέτου ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως***

ἤτοι $\lambda o\gamma\,\alpha^{\mu} = \mu \lambda o\gamma\,\alpha$. Καὶ πράγματι

α') ἐὰν μ εἶναι θετικὸς καὶ ἀκέραιος θὰ ἔχωμεν

$$\alpha^{\mu} = \underbrace{\alpha . \alpha \ldots\ldots \alpha}_{\mu \text{ φορὰς}}$$ Ἑπομένως

$\lambda o\gamma\,\alpha^{\mu} = \lambda o\gamma\,\alpha + \lambda o\gamma\,\alpha + \ldots\ldots + \lambda o\gamma\,\alpha = \mu\,\lambda o\gamma\,\alpha$.

β') Ἐὰν $\mu > o$ καὶ $\mu = \frac{\kappa}{\lambda}$, ὅπου κ καὶ λ ἀκέραιοι θετικοί, θέτοντες $\chi = \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}$ καὶ ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὴν λ δύναμιν λαμβάνομεν $\chi^{\lambda} = \alpha^{\kappa}$. Ὅθεν $\lambda . \lambda o\gamma\,\chi = \kappa . \lambda o\gamma\,\alpha$. ἢ

$$\lambda o\gamma\,\chi = \frac{\kappa}{\lambda} \lambda o\gamma\,\alpha = \mu\,\lambda o\gamma\alpha.$$

γ') Ἐὰν $\mu < 0$ π.χ. ἐὰν $\mu = -\nu$, ὅπου ν θετικὸς θὰ ἔχωμεν

$\alpha^{\mu} = \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$ ὅθεν $\lambda o\gamma\, \alpha^{\mu} = \lambda o\gamma\, 1 - \lambda o\gamma\, \alpha^{\nu} =$

$= 0 - \nu\, \lambda o\gamma\, \alpha = -\nu\, \lambda o\gamma\, \alpha = \mu\, \lambda o\gamma \alpha.$

δ. ***Ὁ λογάριθμος ῥίζης ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ λογαρίθμου τοῦ ὑπορρίζου διὰ τοῦ δείκτου*** ἤτοι:

$$\lambda o\gamma \sqrt[\mu]{\alpha} = \frac{\lambda o\gamma\, \alpha}{\mu} \text{ διότι } \lambda o\gamma \sqrt[\mu]{\alpha} = \lambda o\gamma\, \alpha^{\frac{1}{\mu}} = \frac{1}{\mu} \lambda o\gamma\, \alpha.$$

Ἐφαρμογαὶ λογαρίθμων.

Πίνακες λογαρίθμων. Χρῆσις αὐτῶν.

173. Ἔστω

α') ὁ λογάριθμος 5,27935· οὗτος εὑρίσκεται εἰς τὸ διάστημα 5 ἕως 6, Τὸ 5 καλεῖται χαρακτηριστικὸν ἢ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου τούτου.

β') Ὁ λογάριθμος 0,81369. Οὗτος εὑρίσκεται εἰς τὸ διάστημα 0 ἕως 1. Τὸ μηδὲν καλεῖται χαρακτηριστικὸν ἢ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμ. τούτου.

γ') Ὁ λογάριθμος –3,94639. Οὗτος εὑρίσκεται εἰς τὸ διάστημα–4.......–3. τὸ –4 καλεῖται χαρακτηριστικὸν ἢ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου τούτου.

δ') Ὁ λογάριθμος –0,73964 οὗτος εὑρίσκεται εἰς τὸ διάστημα–1....0. Τὸ –1 καλεῖται χαρακτηριστικὸν ἢ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου τούτου.

Γενικῶς χαρακτηριστικὸν ἢ ἀκέραιον μέρος ἑνὸς λογαρίθμου καλοῦμεν τὸν μεγαλύτερον ἐκ τῶν ἀκεραίων ὅστις εἶναι μικρότερος ἢ ἴσος πρὸς αὐτόν.

174. Ἔστω

α') Ὁ λογάριθμος 7,63954, χαρακτηριστικὸν τοῦ ὁποίου εἶναι τὸ 7· ἡ διαφορὰ 7,63954–7=0,63954 καλεῖται δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου

β') Ὁ λογάριθμος –6,94156, τοῦ ὁποίου χαρακτηριστικὸν εἶναι τὸ –7· ἡ διαφορὰ –6,94156–(–7)=7–6, 94156=0, 05844 καλεῖται δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου

γ') Ὁ λογάριθμος –0,25156, τοῦ ὁποίου χαρακτηριστικὸν εἶναι τὸ –1· ἡ διαφορὰ –0,25156–(–1)–1–0, 0,25156=0, 74844 καλεῖται δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου.

Γενικῶς δεκαδικὸν μέρος ἑνὸς λογαρίθμου καλεῖται ὁ ἀριθμὸς ὅστις εὑρίσκεται ἂν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρέσωμεν τὸ χαρακτηριστικόν του. Ἑπομένως ὁ λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ χαρακτηριστικοῦ καὶ τοῦ δεκαδικοῦ του μέρους.

175. Οὕτως ὁ λογάριθμος ὅστις ἔχει χαρακτηριστικὸν 5 καὶ δεκαδικὸν 0, 25153, ἰσοῦται μὲ 5+0, 25153=5,25153.

Ὁ λογάριθμος, ὅστις ἔχει χαρακτηριστικὸν 0 καὶ δεκαδικὸν 0,25163 ἰσοῦται μὲ 0+0, 25163=0 25163. Ὁ λογάριθμος ὅστις ἔχει χαρακτ.–2 καὶ δεκαδικὸν 0,73154 ἰσοῦται μὲ –2+0,73154. Σημειοῦται δὲ $\overline{2}$,73154.

Ὁ λογάριθμος ὅστις ἔχει χαρακτηριστικὸν –1 καὶ δεκαδικὸν 0,13164 ἰσοῦται μὲ –1+0, 13164 σημειοῦται δὲ $\overline{1}$,13164.

Καὶ ἀντιστρόφως γράφοντες $\overline{3}$,17691 ἐννοοῦμεν τὸν λογάριθμον, ὅστις ἔχει χαρακτηριστικὸν –3 καὶ δεκαδικὸν 0,17691 δηλαδὴ τὸν λογάριθμον –3+0, 17691= –2,82309.

176. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ κάμνομεν χρῆσιν τῶν τριῶν κάτωθι προτάσεων.

α′) Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10^{ν} ὅπου ν τυχὼν ἀκέραιος. Διότι ἔχομεν

λογ (α.10^{ν})=λογα×λογ10^{ν}=λογα+ν. Ἀλλὰ ὅταν εἰς τὸν λογ. α προστεθῇ ἀκέραιός τις προφανῶς τὸ δεκαδικὸν μέρος δὲν μεταβάλλεται. Ὥστε ὁ λογ(α×10^{ν}) καὶ ὁ λογ α ἔχουν τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος.

β′) Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογ. ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος ἰσοῦται μὲ τὸ πλ θος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους αὐτοῦ ἠλαττωμένον κατὰ 1. Καὶ πράγματι, ἔστω ἀριθμός τις μεγαλύτερος τῆς μονάδος π.χ. 297,7. Οὗτος περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 100 καὶ τοῦ 1000 συνεπῶς ὁ λογάριθμος αὐτοῦ περιλαμβάνεται μεταξὺ 2 καὶ 3. Ὥστε τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ 2, δηλ. μὲ τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ μεῖον ἕν· π.χ. ὁ λογ. 3 ἔχει χαρακτηριστικὸν τὸ 0, διότι ὁ 3 εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος καὶ μονοψήφιος. Ὁ λογ. 1753,4 ἔχει χαρακτηριστικὸν 3.

γ′) Τὸ χαρακτηριστικὸν λογαρίθμου ἀριθμοῦ θετικοῦ μικροτέρου τῆς μονάδος γραφέντος ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν ἰσοῦται μὲ τόσας ἀρνητικὰς μονάδας ὅσα μηδενικὰ ψηφία προηγοῦνται τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου αὐτοῦ ἢ καὶ ἰσοῦται μὲ τόσας ἀρνητικὰς μονάδας ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων τὴν τάξιν τὴν ὁποίαν κατέχει μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τὸ πρῶτον σημαντικὸν ψηφίον. Ἔστω τυχὼν θετικὸς ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος π.χ. ὁ 0,0036. Οὗτος περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 0,001 ἔχοντος λογάριθμον –3 καὶ τοῦ 0,01 ἔχοντος λογάτιθμον –2. Συνεπῶς ὁ λογάριθμος αὐτοῦ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ –3 καὶ τοῦ –2. Ἑπομένως τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ −3 δηλ. μὲ τόσας ἀρνητικὰς μονάδας ὅσα μηδενικὰ προηγοῦνται τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου τοῦ ἀριθμοῦ δηλ. τοῦ 3.

Ἀσκήσεις

Νὰ εὑρεθῇ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τῶν κάτωθι ἀριθμῶν.

α΄) 1537, β΄) 7,08 γ΄) 153, 7, δ΄) 2,00001

ε΄) 0,3, στ΄) 0,057, ζ΄) 0,00002, η΄) 0,030002.

177. ***Εὕρεσις τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου.*** Πρὸς εὕρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τῶν λογαρίθμων κατὰ προσέγγισιν 0,0001 ἢ κατὰ προσέγγισιν 0,00001 ἢ κατὰ προσέγγισιν 0,0000001 ὑπάρχουν πίνακες· ἐξ αὐτῶν θὰ θεωρήσωμεν τοὺς πίνακας τοῦ Dupuis, οἵτινες δίδουν τὰ 5 πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ λογαρίθμου ἤτοι δίδουν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου κατὰ προσέγγισιν 0,00001. Κατὰ τὰ προηγούμενα πρὸς εὕρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν τὴν ὑποδιαστολὴν δεδομένου δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ λογάριθμος ὡς μὴ ὑπάρχουσαν.

Παραδείγματα.

α΄) Ὁ λογάριθμος τοῦ 43,3 ἔχει δεκαδικὸν μέρος τὸ αὐτὸ μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ 433. Προκειμένου ἑπομένως νὰ ζητήσωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ 43,3 ζητοῦμεν εἰς τὴν πρώτην στήλην τὴν φέρουσαν εἰς τὴν κορυφὴν τὸ γράμμα N τὸν ἀριθμὸν 433. Εἰς τὴν δευτέραν στήλην καὶ εἰς τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν εἰς ἣν εὑρίσκεται τὸ 433, θὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν 649 καὶ εἰς τὴν ἰδίαν στήλην ἐὰν προχωρήσωμεν πρὸς τὰ ἐπάνω θὰ συναντήσωμεν μεμονωμένον τὸ 63. Θὰ ἔχωμεν οὕτω δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ 43,3 τὸ 63649 ἤτοι λογ 43,3=1, 63649.

β΄) Ζητήσωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 0,4337 Τὸ χαρακτηριστικόν του εἶναι τὸ −1· τὸ δεκαδικὸν εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς: Δὲν λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν τὴν ὑποδιαστολήν· ζητοῦμεν εἰς τὴν στήλην N τὸ 433 καὶ προχωροῦμεν εἰς τὴν ὁριζοντίαν αὐτὴν γραμμὴν μέχρις οὗ φθάσιμεν εἰς τὴν στήλην εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ὁποίας εὑρίσκεται τὸ 7. Εὑρίσκομεν οὕτω 719. Προτάσσομεν πάλιν τὸ 63, διότι τοῦτο εὑρίσκεται εἰς τὴν στήλην 0 καὶ θεωροῦμεν ὅτι προτάσσεται ὅλων τῶν τριψηφίων τῶν εὑρισκομένων εἰς τὰς ὁριζοντίας γραμμὰς εἰς τὰς ὁποίας ὑπὸ τὸ N εὑρίσκονται οἱ 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436 ἐξαιρέσει τῶν ἐχόντων ἀστερίσκον τῶν ὁποίων θὰ προτάσσεται τὸ ἀμέσως κατωτέρω διψήφιον τμῆμα 64. Κατὰ ταῦτα λογ 0,4337=1,63719.

γ') Ἔστω ἤδη 4,3375. Παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τ ῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ συμπίπτει μὲ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογ τοῦ 4337,5. Κατὰ τὰ προηγούμενα

λογ 4337=3, 63719 καὶ λογ 4338=3, 63729.

Ἐὰν παραδεχθῶμεν κατὰ προσέγγισιν ὅτι ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν τὰ ἑξῆς: ἐπειδὴ
ὅταν ἡ αὔξησις τῶν ἀριθμῶν εἶναι μία μονὰς ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι 0,00010 θὰ ἔχωμεν ὅτι,
ὅταν ἡ αὔξησις εἶναι 0,5 ὁ λογάριθμος θὰ αὐξηθῇ κατὰ 0,5Χ, 0,00010=0, 00005. Κατὰ ταῦτα θὰ θεωρῶμεν ὅτι:

λογ 4337, 5=3, 63724. Ἑπομένως

λογ 4,3375 =0, 63724.

178. Ἔστω ἤδη ὅτι ἐδόθη ὁ λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος (ἐννοοῦμεν ἐδῶ ὅτι, ἐκ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου ἐδόθησαν τὰ 5 πρῶτα δεκαδικὰ) καὶ ὅτι ζητεῖται ὁ ἀριθμός. Π.χ.

α') Ἔστω ὅτι ἐδόθη ὡς λογάριθμος ἀριθμοῦ ὁ 2,63719. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου δηλ. τὸ 2 δηλοῖ ἁπλῶς ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ 3 ἀκέραια ψηφία. Ἔπειτα ζητοῦμεν τὸ 63 εἰς τὴν στήλην 0 καὶ τὸ 719 εἰς μίαν τῶν ὁριζοντίων γραμμῶν τῶν περιεχουσῶν τὰ τριψήφια τμήματα τῶν ὁποίων προτάσσεται, κατὰ τὰ προηγούμενα, τὸ 63. Εὑρίσκομεν πράγματι ἐδῶ τὸ 719 εἰς τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν εἰς ἣν εὑρίσκεται ὑπὸ τὸ Ν ὁ 433. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ στήλη εἰς ἣν ἀνήκει εἶναι ὁ 7. Ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς 4337 ἔχει δεκαδικὸν μέρος λογαρίθμου τὸ 63719. Ὅθεν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ εἶναι 433,7 ἤτοι ἐὰν

λογ χ=2,63719

χ=433,7.

β') Ἔστω ἤδη λογ χ=2,63724. Ζητοῦμεν πάλιν τὸ 63 εἰς τὴν στήλην 0 καὶ τὸ 724 εἰς ὁριζοντίαν τινὰ γραμμὴν ἐκ τῶν προηγουμένως ρηθεισῶν. Ἐπειδὴ δὲν εὑρίσκεται εἰς οὐδεμίαν ἐξ αὐτῶν ζητοῦμεν μεταξὺ τίνων ἐκ τῶν περὶ οὗ ὁ λόγος τριψηφίων τμημάτων εὑρίσκεται. Παρατηροῦμεν ὅτι εὑρίσκεται μεταξὺ τοῦ 719 καὶ τοῦ 729, σκεπτόμεθα δὲ ὡς ἑξῆς:

Εἰς τὸ 719 ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 4337

Εἰς τὸ 729 ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 4338

Εἰς ποῖον ἀριθμὸν θὰ ἀντιστοιχῇ τὸ 724; Τουτέστιν ὅταν ὁ λογάριθμος ἐδῶ τοῦ 4337 αὐξηθῇ κατὰ 0,00010, ὁ ἀριθμὸς αὐξάνει κατὰ μονάδα, πόσον θὰ αὐξήσῃ ὁ ἀριθμός, ὅταν ὁ λογάριθμος αὐξήσῃ κατὰ 0,00005; Θὰ αὐξήσῃ κατὰ

$\dfrac{0,00005}{0,00010}=0,5$. Ἤτοι ὁ ἀριθμὸς ὁ ἔχων λογάριθμον τὸν 63724 θὰ εἶναι ὁ 4337,5. Ἑπομένως $x=433,75$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

179. Παρουσιάζονται συνήθως εἰς τὰ ζητήματα εἰς τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦμεν λογαρίθμους προσθέσεις, ἀφαιρέσεις, πολλαπλασιασμοὶ καὶ διαιρέσεις ἀριθμῶν γραφέντων ὑπὸ τὴν μορφὴν ἡ μ ι α ρ ν η τ ι κ ῶ ν ἀριθμῶν, τοὐτέστιν ἀριθμῶν ἐχόντων τὸ ἀκέραιο μέρος δεκαδικὸν καὶ τὸ δεκαδικὸν θετικόν.

α') Ἔστω ἐπὶ παραδείγματι ἡ πρόσθεσις $\bar{3},45782+\bar{1},08976+9,34721$ προσθέτομεν τότε αὐτοὺς ὡς νὰ ἦσαν δεκαδικοὶ καὶ τὰ ἀκέραια μέρη ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί.

Ἔχομεν
$$\begin{array}{r} \bar{3},45782 \\ \bar{1},08976 \\ 9,34721 \\ \hline 5,89479 \end{array}$$

β') Ἔστω ἤδη ἡ ἀφαίρεσις $\bar{8},77173-2,85169$. Τὴν πρᾶξιν ἐκτελοῦμεν ὡς ἑξῆς:
$$\begin{array}{r} \bar{8},77173 \\ 2,85169 \\ \hline \overline{11},92004 \end{array}$$

γ') Ἔστω ὁ πολλαπλασιασμὸς $\bar{2},23513.7$ τὴν πρᾶξιν ἐκτελοῦμεν ὡς ἑξῆς:
$$\begin{array}{r} \bar{2},23513 \\ 7 \\ \hline \overline{13},64591 \end{array}$$

δ') Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν λογάριθμον δι' ἀριθμοῦ: $\bar{6},24136:2$. Προφανῶς τὸ πηλίκον θὰ ἔχῃ χαρακτηριστικὸν $-\dfrac{6}{2}=-3$ καὶ δεκαδικὸν τὸ $\dfrac{0,24136}{2}=0,12068$. Ὅθεν

$$\bar{6},24136:2=\bar{3},12068.$$

Ἔστω ὁμοίως ἡ διαίρεσις:

$\bar{7},93315:3$. Τὸ πηλίκον γράφομεν:

$$\frac{-7+0,93315}{3}=\frac{-9+2,93315}{3}=\bar{3},97771.$$

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν κάτωθι ἀριθμῶν.

α') 19, β') 15000, γ') 0,73, δ') 0,0005, ε') 7,3 στ') 29,35, ζ')1,006, η') 0,002537, θ')59576, ι') 537653, ια') 25,01137.

2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς χ ἐκ τῶν κάτωθι λογαρίθμων.

α' λογ χ=3,23304, β') λογ χ=7,50163
γ') λογ χ=0,32156, δ') λογ χ=1,15173
ε') λογ χ=3,75156.

3) Δοθέντος ὅτι λογ 2=0, 30103 καὶ λογ5=0,69897. εὕρετε ἄνευ τῆς χρήσεως τῶν πινάκων.

α') τὸν λογ 4, β') τὸν λογ 8, γ') τὸν λογ 25,
δ') τὸν λογ 20, ε') τὸν λογ 50, στ') τὸν λογ 40.

4. Εὕρετε τοὺς ἀριθμοὺς οἱ ὁποῖοι ἔχουν ὡς λογαρίθμους τούς

α') 3,60089, β') $\overline{2}$,63600, γ') 4,00913,
δ') $\overline{3}$,41390 ε') 0,062125, στ') $\overline{1}$,33208,

5) Ἐκ τῶν λογαρίθμων τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ ἀριθμοῦ, 360, εὕρετε τὸν λογ. 360.

6) Δείξατε ὅτι δύο ἀριθμοὶ ἀντίστροφοι ἔχουν λογαρίθμους ἀντ.θέτους.

7) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων.

α') 3,75164+5,73158, β') $\overline{7}$,13563+$\overline{6}$, 138753
γ') $\overline{3}$,23163+0, 13167+5, 27136, δ') $\overline{3}$,13168–2, 23197,
ε') $\overline{3}$,15798–$\overline{5}$,29197 στ') $\overline{3}$,26137+3,54170–0,94138.
ζ') $\overline{7}$,94156–6,75153–$\overline{6}$,35147.

8) Ὁμοίως:

α') $\overline{3}$,13165.5, β') $\overline{7}$,63194.6,
γ') $\overline{3}$,15137.7, δ') $\overline{9}$,87165.3
ε') $\overline{17}$,93156:5, στ') $\overline{7}$,53465+2,75137).5

180. Ἐφαρμογαί:

1) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον 2,713. 0,8611. Καλοῦντες χ τὸ γινόμενον θὰ ἔχωμεν:

χ=2,713. 0,8611. Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμ υς ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἔχομεν:

λογ χ= λογ 2,713+λογ 0,8611 ἀλλὰ

$$\lambda o\gamma\ 2{,}713 = 0{,}43345$$

$$\lambda o\gamma\ 0{,}8611 = \bar{1}{,}93505$$

ἐξ οὗ $\lambda o\gamma\ \chi = 0{,}43345 + \bar{1}{,}93505 = 0{,}36850$ ὅθεν εὑρίσκοντες τὸν ἀντιλογάριθμον αὐτοῦ ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν $\chi = 2{,}\ 3365$.

2. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον:

$$0{,}6793 : 355{,}45$$

ἐὰν καλέσωμεν χ τὸ πηλίκον, ἔχομεν $\chi = \dfrac{0{,}6793}{355{,}45}$

ἐξ οὗ $\lambda o\gamma\ \chi = \lambda o\gamma\ 0{,}6793 - \lambda o\gamma\ 355{,}45$ ἀλλὰ

$\lambda o\gamma\ 0{,}6793 = \bar{1}{,}83206$ καὶ

$\lambda o\gamma\ 355{,}45 = 2{,}\ 55078$ ἐπομένως

$\lambda o\gamma\ \chi = \bar{3}{,}28128$ καὶ $\chi = 0{,}001911$.

3. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον $\chi = \dfrac{532{,}5 . 457{,}6}{1{,}003 . 0{,}9301}$ ἔχομεν

$$\lambda o\gamma\ \chi = (\lambda o\gamma\ 532{,}\ 5 + \lambda o\gamma\ 457{,}6) - (\lambda o\gamma\ 1{,}003 + \lambda o\gamma\ 0{,}9301).$$

ἀλλὰ $\lambda o\gamma\ 532{,}5 = 2{,}72632$

$\lambda o\gamma\ 457{,}6 = 2{,}66049$

$\lambda o\gamma\ 1{,}003 = 0{,}00130$

$\lambda o\gamma\ 0{,}9301 = \bar{1}{,}96853$

Ἐπομένως

$\lambda o\gamma\ 532{,}5 + \lambda o\gamma\ 457{,}6 = 5{,}38681$

$\lambda o\gamma\ 1{,}003 + \lambda o\gamma\ 0{,}9301 = \bar{1}{,}96983$

Ὅθεν $\lambda o\gamma\ \chi = 5{,}41698$ καὶ $\chi = 261205{,}8$

4. Νὰ εὑρεθῇ ἡ 5η δύναμις τοῦ 153, 6. Θέτοντες $\chi = (153{,}6)^5$ καὶ λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἔχομεν

$$\lambda o\gamma\ \chi = 5\ \lambda o\gamma\ 153{,}6$$

ἀλλὰ $\lambda o\gamma\ 153{,}\ 6 = 2{,}18639$ ἐπομένως

$\lambda o\gamma\ \chi = 10{,}\ 93195$ καὶ

$\chi = 85496000000$

5. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 0,07854

Ἐὰν θέσωμεν $\chi = \sqrt[3]{0{,}07854}$ ἔχομεν

$$\lambda o\gamma\ \chi = \frac{\lambda o\gamma\ 0{,}07854}{3} = \frac{\bar{2}{,}89509}{3} = \frac{\bar{3} + 1{,}89509}{3} =$$

$= \bar{1}{,}63169$ ὅθεν $\chi = 0{,}42825$.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων τῇ βοηθείᾳ τῶν λογαρίθμων.

α′) $\chi = 720 . 130$, β′) $\chi = 3200 : 133$

γ′) $\chi = 64 . 0{,}29 . 0{,}00236$, δ′) $\dfrac{12045 . 128}{1455} . 0{,}003$

ε′) $5377 . 25{,}36 . 6{,}124$, στ′) $0{,}0248 . 0{,}345 . 374$

ζ′) $8{,}3765 . (-436, 257)$.

2) Ὁμοίως:

α′) $(37{,}1)^2$, β′) $(1{,}62)^4$, γ′) $(0{,}185)^5$

δ′) $(0{,}0013)^5$, ε′) $(0{,}0003545)^4$.

3) Ὁμοίως :

α′) $\sqrt{21{,}7}$, β′) $\sqrt[3]{0{,}239}$, γ′) $\sqrt[5]{71200}$

δ′) $\sqrt[6]{0{,}0038}$.

4) Ὁμοίως :

α′) $\dfrac{8{,}92(4{,}61)^2}{3{,}94}$ β′) $\dfrac{(6{,}29)^3 . (28{,}7)^2}{0{,}191}$

γ′) $\dfrac{237(0{,}0189)^3}{(1{,}55)^2}$ δ′) $\dfrac{\sqrt[4]{15.4} . \sqrt{630}}{0{,}017}$

ε′) $\dfrac{(-6{,}9343)^5 . (5{,}673)^{-3}}{(2{,}634) . \dfrac{2}{5}}$

5) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι λογ $2 = 0{,}30103$ νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ

$$\frac{(3, 2)^{-3} . 0{,}64}{0{,}1024 . \sqrt[4]{80^3}}$$ ἄνευ χρήσεως λογαρίθμων.

6) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας καὶ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτῖνος 6,75394.

7. Τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου εἶναι 0,073653 τμ. Πόση εἶναι ἡ διαγώνιός του;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ.

181. Ἔστω ὅτι κεφάλαιόν τι α τοκίζεται μὲ τὴν ἑξῆς συμφωνίαν: Εἰς τὸ τέλος ἑκάστης χρονικῆς περιόδου π.χ. ἑνὸς ἔτους, ὁ τόκος νὰ προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον, οὕτως ὥστε νὰ ἀποτελῇ νέον κεφάλαιον, δηλαδὴ νὰ γίνεται κεφαλαιοποίησις τοῦ τόκου μετὰ πάροδον ἑκάστης ὡρισμένης χρονικῆς περιόδου. Τότε λέγομεν ὅτι γίνεται ἀ ν α τ ο κ ι σ μ ὸ ς π.χ. ὅταν λέγωμεν ὅτι κεφάλαιον 100000 δρχ. ἀνατοκίζεται κατ' ἔτος πρὸς 5 $^0/_0$ ἐννοοῦμεν ὅτι μετὰ τὴν πάροδον τοῦ πρώτου ἔτους, ἤτοι εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου, τὸ κεφάλ. εἶναι 105000 μετὰ τὴν πάροδον τοῦ δευτέρου ἔτους δηλ. εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τρίτου τὸ κεφάλαιον εἶναι $105000+\frac{10500\cdot 5}{100}$ κ.ο.κ.

182. Γενικῶς ἔστω κεφάλαιον α δρχ. ἀνατοκιζόμενον πρὸς ε $^0/_0$ κατ'ἔτος· ἐὰν θέσωμεν $\frac{\varepsilon}{100}=\tau$ θὰ ἔχωμεν ὅτι ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος εἶναι τ, ἑπομένως τῶν α δρχ. θὰ εἶναι ατ. Ὥστε τὸ κεφάλαιον εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους γίνεται $\alpha+\alpha\tau=\alpha\,(1+\tau)$. Κατὰ ταῦτα, ἵνα εὕρωμεν πόσον γίνεται κεφάλαιόν τι α εἰς τὸ τέλος ἑνὸς ἔτους ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $1+\tau$ ὅπου τ εἶναι ὁ τόκος τῆς μιᾶς δρχ. εἰς ἓν ἔτος. Τὸν κανόνα τοῦτον δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν, ἵνα εὕρωμεν πόσον γίνεται τὸ κεφάλαιον $\alpha\,(1+\tau)$ μετὰ τὴν πάροδον ἑνὸς ἔτους. Δηλ. εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)(1+\tau)=\alpha(1+\tau)^2$ κ. ο.κ. Ἐὰν καλέσωμεν Κ τὸ τελικὸν κεφάλαιον, μετὰ πάροδον ν ἐτῶν θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ προηγούμενα

$$\boxed{K=\alpha(1+\tau)^\nu} \qquad (1)$$

Αὐτὸς εἶναι ὁ τύπος τοῦ ἀνατοκισμοῦ. Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους ἔχωμεν:

$$\lambda o\gamma\, K=\lambda o\gamma\, \alpha+\nu\, \lambda o\gamma\, (1+\tau) \qquad (2)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀνωτέρω τύπος τοῦ ἀνατοκισμοῦ συνδέει τέσσαρα ποσὰ α, Κ, ν, τ. Ὅταν δοθοῦν τὰ τρία εὑ ίσκομεν τὸ τέταρτον.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α.

1) Τοκίζει τις ἐπ'ἀνατοκισμῷ 300 δρχ. ἐπὶ 5 ἔτη πρὸς 4°/. πόσα θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τῶν 5 ἐτῶν;

Λύσις. Ἔχομεν $\alpha=3000$, $\tau=0,04$, $\nu=5$. Ἑπομένως ἔχομεν $\quad λογ\, K = λογ 3000 + 5\, λογ\, 1{,}04$ ἢ

$λογ K = 3{,}56227$ ἢ $K = 3649{,}48$

2. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ ἀνατοκισθοῦν 20000 δρχ. ἐπὶ τέσσαρα ἔτη, ἵνα γίνουν 24310;

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου (2) ἔχομεν

$$λογ\ (1+τ) = \frac{λογ\, K - λογ\, α}{ν} \quad \text{ἐπομένως}$$

$$λογ\ (1+τ) = \frac{λογ\, 24310 - λογ\, 20000}{4} \quad \text{ἢ}$$

$$λογ\ (1+τ) = \frac{4{,}38578 - 4{,}30103}{4} \quad \text{ἢ}$$

$$λογ\ (1+τ) = 0{,}02118 \ \text{ἢ}\ 1 + \frac{ε}{100} = 1{,}0497$$

ὅθεν $ε = 4{,}97$.

3. Ποῖον ποσὸν πρέπει νὰ ἀνατοκισθῇ πρὸς 3% ἐπὶ 7 ἔτη διὰ νὰ μᾶς δώσῃ 15000 δρχ;

Λύσις. Ἔχομεν $K = 15000 \quad 1+τ = 1{,}03 \quad ν = 7$ ὅθεν

$λογ\, 15000 - 7 λογ\, 1{,}03 = λογ\, α$ ἢ

$4{,}17609 - 7 . 0{,}01284 = λογ\, α$ ἢ $4{,}08621 = λογ\, α$· ὅθεν $α = 12195{,}8$.

4. Ἐπὶ πόσα ἔτη πρέπει ν'ἀνατοκισθοῦν 1000 δρχ. μὲ ἐπιτόκιον 1% διὰ νὰ γίνουν 1500;

Λύσις. 1000 δρχ. ἐπὶ $ν$ ἔτη ἀνατοκιζόμεναι γίνονται $1000\,(1{,}01)^ν$ θὰ ἔχωμεν ἐπομένως $K = 1000\,(1{,}01)^ν$ ὅθεν ἐὰν τὸ πρόβλημα εἶχε λύσιν ἔπρεπε νὰ εὑρίσκεται ἀκέραιος $ν$ τοιοῦτος ὥστε $1500 = 1000\,(1{,}01)^ν$ ἢ καὶ

$$λογ\, 1500 = λογ\, 1000 + ν\, λογ\, 1{,}01 \quad \text{ἢ}$$

$$ν = \frac{λογ\, 1500 - λογ\, 1000}{λογ\, 1{,}01} = \frac{3{,}17609 - 3}{0{,}00432} = 40 + \frac{329}{432}$$

ἀλλὰ τοῦτο δὲν εἶναι ἀκέραιον· ὥστε τὸ πρόβλημα μὲ $K = 1500$ δὲν ἔχει λύσιν. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι διὰ $ν = 40$ δηλ. μετὰ 40 ἔτη τὸ κεφάλαιον τῶν 1000 δρχ. ἀνατοκιζόμενον γίνεται κατά τι ὀλιγώτερον τῶν 1500, μετὰ 41 ἔτη γίνεται κατά τι περισσότερον. Ἂς νοήσωμεν ὅτι τὸ K δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $1000\,(1{,}01)^ν$ ἢ καὶ ὅτι ὁ λογ K δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $λογ\, 1000 + ν\, λογ\, (1{,}01)$ καὶ ὅταν τὸ $ν$ δὲν εἶναι ἀκέραιον. Τότε ὅταν τὸ $ν$ μεταβάλλεται αὐξανόμενον ἀπὸ τοῦ 40 εἰς τὸ 41 αὐξάνεται καὶ ὁ λογ K· ἃς συμφωνήσωμεν νὰ δεχθῶμεν ὡς λύσιν τοῦ προβλήματος τὴν ἀντίστοιχον κλασματικὴν τιμὴν τοῦ $ν$· δηλ. ὅτι ὁ τύπος

$$λογ\, K = λογ\, 1000 + ν\, λογ\, (1{,}01) \ \text{δίδει,}$$

τὴν τιμὴν τοῦ ν καὶ ὅταν τὸ ν δὲν εἶναι ἀκέραιον. Κατὰ ταῦτα εἰς τὸ παράδειγμα θὰ ἔχωμεν $\nu = \frac{0,17609}{0,00432}$.

Δυνατὸν ὅμως ὅταν δὲν εὑρίσκωμεν διὰ τὸ ν ἀκεραίαν τιμὴν νὰ κάμωμεν καὶ ἄλλην συμφωνίαν, ἤτοι νὰ θέσωμεν καὶ ἄλλως τὸ πρόβλημα, ὡς ἑξῆς:

Νὰ εὕρωμεν πόσον γίνεται τὸ κεφάλαιον ἀνατοκιζόμενον ἐπὶ ν' ἔτη, ὅπου ~~ν' εἶναι~~ τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ν· ἐδῶ δηλ. ἐπὶ 40 ἔτη, ἤτοι νὰ λάβωμεν τὸ $1000\,(1{,}01)^{40}$ καὶ νὰ ζητήσωμεν εἰς πόσας ἡμέρας τοῦτο τοκιζόμενον μὲ τόκον ἁπλοῦν γίνεται Κ δηλ. ἐδῶ 1500. Ἐὰν καλέσωμεν χ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν θὰ ἔχωμεν

$$1000\,(1{,}01)^{40} + 1000\,(1{,}01)^{40}\,\frac{\chi.0{,}01}{365.100} = 1500$$

ἢ καὶ $1000\,(1{,}01)^{40}\left[1 + \frac{\chi.\,0{,}01}{365.100}\right] = 1500$

Προβλήματα ἀνατοκισμοῦ.

1. Πόσον γίνεται κεφάλαιον 10500 δρχ. ἀνατοκιζόμενον πρὸς 6% ἐπὶ 10 ἔτη;

2. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς τὸ 4ον πρόβλημα (§ 182) ὁ λογ. $\left(1 + \frac{\chi.\,0{,}1}{365.100}\right)$ ἰσοῦται μὲ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ἡ ὁποία δίδει τὸ ν μὲ τὴν πρώτην συμφωνίαν.

3. Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι ἀνατοκιζόμενον πρὸς 4% τετραπλασιάζεται;

4. Ἐργάτης τις καταθέτει 12000 δρχ. ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 6%. Πόσα θὰ λάβῃ μετὰ 10 ἔτη, ἐὰν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται α') κατ' ἔτος β') καθ' ἑξαμηνίαν γ') κατὰ τριμηνίαν;

5. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον κεφάλαιον 5400 δρχ. ἐπ' ἀνατοκισμῷ γίνεται μετὰ 10 ἔτη 12450 δρχ.;

6. Ποῖον κεφάλαιον ἀνατοκιζόμενον πρὸς 5% γίνεται μετὰ 8 ἔτη 120000 δρχ.;

7. Ἐπὶ πόσον χρόνον δέον ν' ἀνατοκίσωμεν
   α') 6530 δραχ. πρὸς 4% διὰ νὰ λάβωμεν 10000 ;
   β') 25600 » » 5% » » » 30000 ;
   γ') 35000 » » 6% » » » 30000 ;

8. Πῶς συμφέρει νὰ τοποθετήσῃ τις τὰ χρήματά του· ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 5% ἐπὶ 10 ἔτη ἢ κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον πρὸς 7% μὲ ἁπλοῦν τόκον;
Ἐὰν δὲ τὸ κεφάλαιον εἶναι 60000 δρχ., ποία εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο τούτων τοποθετήσεων;

9. Κατέθεσέ τις ὅταν ἐγεννήθη τὸ πρῶτον τέκνον του εἰς τὴν τράπεζαν ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 5% κεφάλαιον 3000 δραχμῶν.

Ὅταν αὐτὸ τὸ τέκνον ἔγινεν 21 ἔτους ἀπέσυρε τὸ ὁλικὸν ποσὸν ἀπὸ τὴν τράπεζαν. Ποῖον ἦτο τὸ ὁλικὸν ποσόν;

10. Ἐπὶ πόσον χρόνον κεφάλαιον ἀνατοκιζόμενον πρὸς 5 % αὐξάνει κατὰ τὸ ἥμισυ;

ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ.

183. ***Χρεωλυσία*** λέγεται ἡ ἐξόφλησις χρέους δι'ἴσων δόσεων εἰς ἴσους χρόνους. Σχετικῶς θὰ ἐξετάσωμεν πῶς γίνεται εἴτε ἡ ἐντὸς ὡρισμένου χρόνου συγκρότησις κεφαλαίου τινὸς δι' ἴσων δόσεων αἱ ὁποῖαι πληρώνονται κατ'ἴσα χρονικὰ διαστήματα, εἴτε ἡ ἐντὸς ὡρισμένου χρόνου ἀπόσβεσις χρέους δι' ἴσων δόσεων αἱ ὁποῖαι πληρώνονται κατ'ἴσα χρονικὰ διαστήματα. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν λέγομεν ὅτι πρόκειται περὶ ἴσων καταθέσεων, εἰς δὲ τὴν δευτέραν περὶ ἀποσβέσεως χρέους· τότε ἑκάστη τῶν ἴσων δόσεων λέγεται χρεωλύσιον.

Α'.—***Προβλήματα ἴσων καταθέσεων.*** Καταθέτει τις εἰς τράπεζαν α δραχμὰς ἐπ'ἀνατοκισμῷ μὲ ἐπιτόκιον ε %. Μετὰ τὴν πάροδον ἑνὸς ἔτους καταθέτει καὶ ἑτέρας α δραχμὰς ἐπ'ἀνατοκισμῷ. Μετὰ τὴν πάροδον τοῦ δευτέρου ἔτους καταθέτει ἐκ νέου α δραχμὰς ἐπ'ἀνατοκισμῷ κ.ο.κ. Κάμνει ἐν ὅλῳ $\nu-1$ τοιαύτας καταθέσεις. Πόσα θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ κεφάλαια καὶ τόκους εἰς τὸ τέλος τοῦ νυοστοῦ ἔτους;

Λύσις Αἱ α δραχμαὶ αἱ κατατεθεῖσαι εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου ἔτους ἀνατοκιζόμεναι ἐπὶ ν ἔτη γίνονται $\alpha\,(1+\tau)^{\nu}$, ὅπου $\tau = \frac{\varepsilon}{100}$. Ὁμοίως αἱ α δραχμαὶ αἱ κατατεθεῖσαι εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου ἔτους ἀνατοκιζόμεναι μόνον ἐπὶ $\nu-1$ ἔτη γίνονται εἰς τὸ τέλος τοῦ νυοστοῦ ἔτους $\alpha\,(1+\tau)^{\nu-1}$ κ.ο.κ. Ἡ προτελευταία κατάθεσις μένει δύο ἔτη· γίνεται ἑπομένως εἰς τὸ τέλος τοῦ νυοστοῦ ἔτους $\alpha\,(1+\tau)^2$. ἡ δὲ τελευταία μένει ἓν ἔτος καὶ γίνεται $\alpha\,(1+\tau)$. Ὥστε, ἂν καλέσωμεν Κ τὸ ὁλικὸν ποσὸν κεφαλαίων καὶ τόκων, μετὰ τὴν πάροδον τῶν ν ἐτῶν θὰ ἔχωμεν

$$K=\alpha(1+\tau)^{\nu}+\alpha(1+\tau)^{\nu-1}+\dots\dots+\alpha(1+\tau)^2+\alpha(1+\tau)=$$
$$=\alpha(1+\tau)\left[1+(1+\tau)+(1+\tau)^2+\dots\dots+(1+\tau)^{\nu-1}\right] \quad \text{ἢ}$$

$$\boxed{K=\alpha(1+\tau)\,\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}}$$

Αὐτός εἶναι ὁ τύπος τῶν ἴσων καταθέσεων.

Ἀσκήσεις

1) Καταθέτει τις ἐξ εἰσπράξεων ἐνοικίων κ τ'έτος εἰς τράπεζαν ἐπ'ἀνατοκισμῷ πρὸς 6 %, 12000 δραχμάς. Ζητεῖται ποῖον ποσὸν θὰ λάβῃ μετὰ 12 ἔτη.

Λύσις. Ἔχομεν ἐδῶ $\alpha=12000$, $1+\tau=1,06$, $\nu=12$. Ἐκ τοῦ προηγουμένου τύπου τῶν ἴσων καταθέσεων εὑρίσκομεν

$\lambda o \gamma\, K=\lambda o \gamma\, \alpha+\lambda o \gamma\, (1+\tau)+\lambda o \gamma\left[(1+\tau)^{\nu}-1\right]-\lambda o \gamma.\, \tau$. Ὅθεν

$\lambda o \gamma\, K=\lambda o \gamma\, 12000+\lambda o \gamma\, 1,06+\lambda o \gamma\left[(1,06)^{12}-1\right]-\lambda o \gamma\, 0,06$

Ὑπολογίζομεν προηγουμένως τὸ $(1,06)^{12}$. Ἔχομεν $12 \lambda o \gamma\, 1,06=12.\ (0,02531)=0,30372$. Ἑπομένως $(1,06)^{12}=2,012196$. Ὅθεν $K=214585$.

2) Καταθέτει τις καθ'ἑξαμηνίαν ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 4% 16000 δραχμάς. Πόσα θὰ λάβῃ μετὰ 4 ἔτη;

3) Πτωχὸς οἰκογενειάρχης ἐτόκιζε κατ'ἔτος 2000 δραχμὰς ἐπ'ἀνατοκισμῷ πρὸς 4 %. Πόσον κεφάλαιον θὰ ἔχῃ ἀποτελεσθῆ ἓν ἔτος μετὰ τὴν 13ην κατάθεσιν προκειμένου νὰ ἐξοφλήσῃ παλαιόν τι χρέος;

4) Καταστηματάρχης τις ζητεῖ νὰ μάθῃ πόσον πρέπει νὰ καταθέτῃ ἀπὸ τοῦ 29 ἔτους τῆς ἡλικίας του μέχρι τοῦ 40 (ἐτησίως) πρὸς 5 % ἐπ'ἀνατοκισμῷ, ἵνα κατὰ τὸ 40ὸν ἔτος ἔχῃ 220000 δρχ.

5) Κύριος ἡλικίας 30 ἐτῶν ἐπιθυμεῖ νὰ ἔχῃ εἰς τὸ 50ὸν ἔτος τῆς ἡλικίας του 500.000 δρχ. Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ καταθέτῃ ἐτησίως ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 5%, ἵνα πραγματοποιήσῃ τὴν ἐπιθυμίαν του ταύτην;

Β') ***Προβλήματα ἀποσβέσεως χρέους.*** Χρεωστεῖ τις σήμερον α δραχμὰς καὶ θέλει νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του δίδων ν ἴσας δόσεις εἰς ν ἴσα χρονικὰ διαστήματα π.χ. θέλει νὰ τὸ ἐξοφλήσῃ δίδων τὴν πρώτην δόσιν μετὰ ἓν ἔτος ἀπὸ σήμερον, τὴν δευτέραν δόσιν μετὰ δύο ἔτη ἀπὸ σήμερον· κ.ο.κ. Ἐὰν ἐξοφλῆ τοιουτοτρόπως τὸ χρέος του λέγομεν ὅτι τὸ ἐξοφλῆ χρεωλυτικῶς. Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἂν αἱ α δραχμαὶ φέρουν τόκον τ εἰς ἓν ἔτος τὸ χρεωλύσιον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τ, διότι ἂν ἔδιδε εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους τ δραχμὰς θὰ ἔμενε πάλιν χρεώστης τοῦ α κεφαλαίου εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους· ἐπειδὴ δὲ ἡ δευτέρα δόσις πρέπει νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν πρώτην θὰ ἔμενε πάλιν εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους χρεώστης α δραχμῶν κ.ο.κ. Ἕπεται ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι μὲ τὸ χρεωλύσιον ποὺ πληρώνει εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους, πληρώνει ὄχι μόνον τὸν τόκον, ἀλλὰ καὶ μέρος τοῦ κεφαλαίου· διὸ καὶ λέγομεν ὅτι γίνεται ἀπόσβεσις τοῦ χρέους.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ χρεωλύσιον θὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς. Ἐὰν δὲν ἐπληρώνετο μὲ ἴσας δόσεις τὸ χρέος, ἀλλ'ἐπληρώνετο διὰ μιᾶς, θὰ ἐδίδοντο μετὰ ν ἔτη διὰ τὴν ἐξόφλησιν τοῦ χρέους (ἀνατοκισθέντος) $\alpha\ (1+\tau)^{\nu}$ δρχ., ὅπου τὸ τ εἶναι ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος. Τὸ χρέος ὅμως ἐξοφλεῖται μὲ ν ἴσας δόσεις. Ἔστω ὅτι ἑκάστη δόσις ἀποτελεῖται ἀπὸ χ δραχμάς. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι δὲν ἔδιδε τὴν πρώτην δόσιν ἀλλὰ συνεφώνει μὲ τὸν πιστωτὴν νὰ τὴν πληρώσῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ νυοστοῦ ἔτους ἀνατοκισθεῖσαν μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον. Τότε ἀντὶ νὰ τοῦ δώσῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους χ δραχμὰς θὰ ἔδιδεν εἰς τὸ τέλος τοῦ νυοστοῦ $\chi\ (1+\tau)^{\nu-1}$ δραχμάς. Ὁμοίως ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι δὲν ἔδιδε τὴν δευτέραν δόσιν εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους, ἀλλὰ ἐπλήρωνεν αὐτὴν ἀνατοκισθεῖσαν εἰς τὸ τέλος τοῦ νυοστοῦ, θὰ ἔδιδε $\chi\ (1+\tau)^{\nu-2}$ κ.ο.κ. Οὕτω ἐὰν δὲν ἔδιδε καμμίαν δόσιν προηγουμένως, ἀλλὰ ἄφινε νὰ πληρώσῃ ὅλας ἀνατοκισθείσας εἰς τὸ τέλος τοῦ νυοστοῦ ἔτους, θὰ ἔδιδε

$$\chi\ (1+\tau)^{\nu-1}+\chi(1+\tau)^{\nu-2}+\ldots\ldots+\chi\ (1+\tau)+\chi,$$

Ἀλλ' ἡμεῖς γνωρίζομεν ἀφ' ἑτέρου ὅτι ἐὰν δὲν ἐπλήρωνε καμμίαν δόσιν πρὸ τοῦ νυοστοῦ ἔτους ἔπρεπε εἰς τὸ τέλος τοῦ νυοστοῦ ἔτους νὰ δώσῃ $\alpha\ (1+\tau)^{\nu}$. ὅθεν

$$\chi+\chi\ (1+\tau)+\ldots\ldots+\chi(1+\tau)^{\nu-2}+\chi(1+\tau)^{\nu-1}=\alpha(1+\tau)^{\nu} \text{ ἢ}$$

$$\text{καὶ } \chi\left|1+(1+\tau)+\ldots\ldots+(1+\tau)^{\nu-1}\right|=\alpha(1+\tau)^{\nu} \text{ ἢ}$$

$$\boxed{\chi\ \frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}=\alpha(1+\tau)^{\nu}}$$

Οὕτως ἔχομεν τὸν ***τύπον τῆς ἀποσβέσεως.***

Ἀσκήσεις

1) Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου τῆς ἀποσβέσεως νὰ ἐξαχθῇ ὁ ἀντίστοιχος λογαριθμικός.

2) Ἐδανείσθη τις 25000 δρχ. πρὸς 5% ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος. Προτιθέμενος νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του διὰ 14 ἴσων δόσεων ζητεῖ νὰ εὕρῃ τί χρεωλύσιον θὰ δίδῃ.

Λύσις. Ἔχομεν $\alpha=25000$, $\nu=14$, $1+\tau=1{,}05$. ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον τῆς ἀποσβέσεως ἔχομεν

$$\chi\cdot\frac{(1{,}05)^{14}-1}{0{,}05}=25000\ (1{,}05)^{14}. \text{ Ἀλλὰ}$$

14 λογ $1{,}05=0{,}\ 29666$. Ἐξ οὗ $(1{,}05)^{14}=1{,}9799$. Ὅθεν

$$\chi\cdot\frac{97{,}99}{5}=25.1979{,}9.$$ Λαμβάνοντες ἤδη τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἔχομεν:

$$\lambda o\gamma x + \lambda o\gamma .97{,}99 - \lambda o\gamma 5 = \lambda o\gamma 25 + \lambda o\gamma 1979{,}9 \quad \text{ἀλλὰ}$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma 97{,}99 &= 1{,}99118 \\ \lambda o\gamma\ 5 &= 0{,}69897 \\ \lambda o\gamma 25 &= 1{,}39794 \\ \lambda o\gamma 1979{,}9 &= 3{,}29665 \quad \text{ὅθεν} \\ \lambda o\gamma x &= 3{,}40238 \quad \text{καὶ} \\ x &= 2525{,}7 \end{aligned}$$

3) Πόσον εἶναι τὸ χρέος, ὅπερ ἐξοφλεῖται εἰς 22 ἔτη διὰ χρεωλυσίου 7974 τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος $4^0/_0$;

Λύσις. Ἐνταῦθα εἶναι $x=7974$, $1+\tau=1{,}04$, $\nu=22$. Ἑπομένως ὁ τύπος τῆς χρεωλυσίας δίδει

$$7974 \cdot \frac{(1{,}04)^{22}-1}{0{,}04} = \alpha(1{,}04)^{22}$$

$$\text{ἀλλὰ } (1{,}04)^{22} = 2{,}3699. \quad \text{Ὅθεν}$$

$$\alpha = 115234.$$

4) Ζητεῖται ὁ χρόνος ὁ ἀπαιτούμενος ἵνα ἐξοφληθῇ δάνειον 172000 διὰ χρεωλυσίου 18000 δρχ. τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος $3^0/_0$.

Λύσις. Ἔχομεν $x=18000$, $1+\tau=1{,}03$, $\alpha=172000$. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ τύπου λαμβάνομεν

$$\nu\ \lambda o\gamma(1{,}03) = \lambda o\gamma 18000 - \lambda o\gamma|18000 - 0{,}03.172000|$$

$$\text{ἢ } \nu = \frac{4{,}25527-4{,}10857}{0{,}01284} \cdot \text{ ὅθεν } \quad \nu = \frac{0{,}14670}{0{,}01284} =$$

$$= 11\frac{1}{2} \text{ ἔτη περίπου.}$$

5) Ἐδανείσθη τις 100000 δραχμὰς πρὸς $4{,}5\ ^0/_0$ ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος καὶ πρόκειται νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος εἰς 10 ἔτη χρεωλυτικῶς· ποῖον τὸ χρεωλύσιον;

6) Ἐδανείσθη τις διὰ νὰ κτίσῃ οἰκίαν μὲ τὴν ὑποχρέωσιν νὰ πληρώνῃ κατ' ἔτος 25000 δρχ. ἐπὶ 15 ἔτη, ἵνα ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του μὲ ἐπιτόκιον $5\ ^0/_0$. Ἐπιτρέπεται ὅμως εἰς αὐτὸν ἀντὶ το νὰ ἐξοφλήσῃ χρεωλυτικῶς τὸ χρέος του νὰ τὸ ἐξοφλήσῃ μετὰ 4 ἔτη διὰ μιᾶς μόνον δόσεως. Ποία θὰ εἶναι αὕτη;

7) Θέλει τις νὰ ἐξοφλήσῃ χρεωλυτικῶς χρέος 240000 δραχμῶν δίδων κατ' ἔτος 25000 δραχμάς· τὸ ἐπιτόκιον εἶναι $5^0/_0$. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἐξοφληθῇ τὸ χρέος;

8) Ἐὰν δὲν εὑρίσκεται ἀκέραιος ἀριθμὸς διὰ τὰ ἔτη, ἀλλὰ

ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ ἀκέραιον μέρος εἶναι ἀκέραιός τις μ, ζητεῖται ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ χρεωλύσιον, ἵνα ἐξοφληθῇ τὸ χρέος εἰς μ ἔτη ;

ΕΚΘΕΤΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

184. Πᾶσα ἐξίσωσις ὅπου ὁ ἄγνωστος χ εἰσέρχεται εἰς τὸν ἐκθέτην δυνάμεως τῆς ὁποίας βάσις εἶναι ὡρισμένος ἀριθμὸς καλεῖται ἐκθετικὴ ἐξίσωσις. π.χ. ἡ $2^χ=16$ εἶναι ἐκθετικὴ ἐξίσωσις· λύσις αὐτῆς εἶναι ἡ $χ=4$. Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις
$8^{4χ+3}+7^{9χ+16}=5^χ$ εἶναι ἐκθετική.

185. Ἡ λύσις τοιούτων ἐξισώσεων δὲν εἶναι πάντοτε εὔκολος. Εἰς ὡρισμένας ὅμως περιπτώσεις ἀνάγεται αὕτη εἰς τὴν λύσιν ἀλγεβρικῶν τοιούτων· ὅπως π.χ. ἐὰν τῆς ἐκθετικῆς ἐξισώσεως τὸ πρῶτον μέλος εἶναι πηλίκον ἢ γινόμενον δυνάμεων ἐχουσῶν ἐκθέτην πολυώνυμόν τι τοῦ ἀγνώστου χ, τὸ δὲ δεύτερον ὡρισμένος ἀριθμός, ἡ λύσις τῆς ἐκθετικῆς ἐξισώσεως ἀνάγεται τότε εἰς τὴν λύσιν ἀλγεβρικῆς τοιαύτης. Π.χ. ἔστω ἡ ἐξίσωσις $6^χ . 7^{χ+1}=4$. Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἔχομεν $χ λογ\, 6+(χ+1)\, λογ.\, 7=λογ.\, 4$

Ὅθεν $χ=\dfrac{λογ\, 4-λογ\, 7}{λογ\, 6+λογ\, 7}$

Ἀσκήσεις

1) Να λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις.

α΄) $10^χ=2$ β΄) $α^{βχ+γ}=1$. Παρατηροῦμεν ὅτι $1=α^0$.

γ΄) $5^{\frac{2}{3}χ}=5^{\frac{1}{4}}$ δ΄) $8^{χ+3}=3^{χ+3}$ αὕτη γράφεται

$2^{3χ}.2^9=3^χ.3^3$ ἢ $\dfrac{2^9}{3^3}=\dfrac{2^{-3χ}}{3^{-χ}}$ ὅθεν $χ=-3$

ἢ καὶ ἄλλως· αὕτη γράφεται: $\left(\dfrac{8}{3}\right)^{χ+3}=1$, ἐξ ἧς $χ+3=0$ καὶ $χ=-3$.

2) Ὁμοίως αἱ:

α΄) $8^{7χ}=473$ β΄) $(17,23)^{0,4.χ}=1000$ γ΄) $3^{χ^2-2χ}=100$

δ΄) $4^χ+16^χ=544$ θέτομεν $4^χ=ψ$, ὁπότε $16^χ=ψ^2$

ε΄) $3^{11}=3^{2χ(2+5χ)-1}$ στ΄) $4^χ=2^{χ^3}$

ζ΄) $7^{χ^3-3χ^2+χ}=7^{χ^2-3χ}$.

3) Ὁμοίως αἱ:

α′) $\sqrt[4]{19^{13-\chi}} = \sqrt[6]{19^{2\chi+2}}$, β′) $\alpha^{(2\chi-\beta)\chi} = \alpha^{\chi^2}$

γ′) $1 : 3^{5\chi} = 243^{\chi+2}$, δ′) $(0{,}5)^{-10+\chi} = \sqrt{32^{3\chi+4}}$

4. Νὰ λυθοῦν αἱ λογαριθμικαὶ ἐξισώσεις

α′) $\lambda o\gamma\ (3\chi^2+7\chi+2) - \lambda o\gamma\ (2\chi-5) = \lambda o\gamma\ 7$ αὕτη γράφεται $\lambda o\gamma \dfrac{3\chi^2+7\chi+2}{2\chi-5} = \lambda o\gamma\ 7$

β′) $\lambda o\gamma\ (6\chi+5) + \lambda o\gamma\ (7\chi-2) = \lambda o\gamma\ 17$

γ′) $\lambda o\gamma\ (3\chi-12) + \lambda o\gamma\ (6\chi+2) = \lambda o\gamma\ 96$.

5) Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα

α′) $18^{\chi} : 18^{\psi} = 324.18$ β′) $3^{2\chi+1} = 9^{\psi+1}$

$7^{\chi}\, 7^{\psi} = 343.49$ $2^{4\chi+1} = 32^{\psi+1}$

γ′) $\lambda o\gamma\ \chi - \lambda o\gamma\ \psi = -1$ δ′) $\chi+\psi = 254$

$\chi - \psi = 3$ $\lambda o\gamma\ \chi^2 + \lambda o\gamma . \psi^2 = 3$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα ἐφ᾽ ὅλης τῆς ὕλης.

1) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἀθροίσματος εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων ἢ ἴση πρὸς αὐτό.

2) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπολύτων τιμῶν τοῦ μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου καὶ μεγαλυτέρα ἢ ἴση τῆς διαφορᾶς τῶν ἀπολύτων τιμῶν δηλ.

$$|\alpha| + |\beta| \geq |\alpha - \beta| \geq |\alpha| - |\beta|.$$

3) Ποῖος ἀριθμὸς ὑπερβαίνει τὸν $2\alpha-\beta+2$ κατὰ $\alpha+\beta-2$;

4) Νὰ ἀποδειχθοῦν καὶ ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν αἱ κάτωθι ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν:

α′) ἂν $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}$ θὰ εἶναι καὶ $\dfrac{\alpha}{\gamma} = \dfrac{\beta}{\delta}$ καθὼς καὶ $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\delta}{\gamma}$

β′) ἂν $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}$ θὰ εἶναι καὶ $\dfrac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma} = \dfrac{\beta+\delta}{\beta-\delta}$

γ′) ἂν $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}$ θὰ εἶναι καὶ $\dfrac{\dfrac{\alpha-\beta}{\nu}}{\dfrac{\alpha+\beta}{\mu}} = \dfrac{\dfrac{\gamma-\delta}{\nu}}{\dfrac{\gamma+\delta}{\mu}}$

(ὅπου ν καὶ μ τυχόντες ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ διάφοροι τοῦ μηδενός).

5) Ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}$. νὰ δειχθῇ ὅτι

$\frac{\lambda\alpha+\mu\alpha'+\nu\alpha''}{\lambda\beta+\mu\beta'+\nu\beta''}=\frac{\alpha}{\beta}$ (ὑποτιθεμένου ὅτι $\lambda\beta+\mu\beta'+\nu\beta''\neq 0$)

6) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

α') $\chi^{-3}\cdot(-\chi)^4\cdot(-\chi)^{-2}$, β') $(-\mu)^{2\alpha+1}:(-\mu)^{2\alpha}$

γ') $|(-3^2)\cdot(-3)^5|^{-2}:|3^2\cdot(-3^2)^{-3}|$

δ') $\frac{1}{(2\alpha\beta^{-2}\gamma^{-3\nu-7})^{-0}}$

ε') $\frac{3^{-3}\gamma^{-2}}{5\alpha^{-1}\beta^2\gamma^{-3}}$ στ') $(\alpha-1)^{-4}\cdot(1-\alpha)^4$

7) Ἐὰν $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ θὰ εἶναι. καὶ $\beta-\gamma>\alpha-\delta$

8) Ἐὰν $\alpha<\beta$ καὶ $\gamma<\delta$ θὰ εἶναι $\alpha\gamma<\beta\delta$ ἐὰν οἱ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ εἶναι θετικοί, καὶ $\alpha\gamma>\beta\delta$, ἐὰν οἱ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ εἶναι ἀρνητικοί.

9) Ἡ ἀνισότης $\alpha>\beta$ (ὅπου α καὶ β διάφοροι τοῦ μηδενὸς) συνεπάγεται τὴν ἀνισότητα $\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}$ ἐὰν οἱ α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι καὶ τὴν $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$ ἐὰν οἱ α καὶ β εἶναι ἑτερόσημοι.

10) Νὰ δειχθῇ ὅτι α') ἐὰν $\alpha>0$ καὶ $\beta>0$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha\beta>0$.

β') ἐὰν $\alpha>0$ καὶ $\beta<0$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha\beta<0$.

γ') ἂν $\alpha<0$ καὶ $\beta<0$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha\beta>0$

11) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐὰν $\alpha>0$ θὰ εἶναι $\alpha^{2\mu}>0$

12) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν $\alpha<0$ θὰ εἶναι $\alpha^{2\mu}>0$ καὶ $\alpha^{2\mu+1}<0$ (ὅπου μ τυχὼν ἀκέραιος θετικὸς ἀριθμός).

13) Νὰ δειχθῇ ὅτι α') ἐὰν $\alpha>1$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha^\mu>1$, β') ἐὰν $\alpha>0$ καὶ $\alpha<1$ θὰ εἶναι καὶ $0<\alpha^\mu<1$ (ὅπου μ τυχὼν ἀκέραιος θετικός).

14) Ἐὰν οἱ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, εἶναι πάντες θετικοί, αἱ ἀνισότητες $\alpha>\beta$, $\gamma>\delta$ συνεπάγονται τὴν ἀνισότητα $\frac{\alpha}{\delta}>\frac{\beta}{\gamma}$.

15) Ἐὰν οἱ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, εἶναι πάντες ἀρνητικοὶ ἐκ τῶν ἀνισοτήτων $\alpha<\beta$ καὶ $\gamma>\delta$ ἕπεται ἡ ἀνισότης $\frac{\alpha}{\gamma}>\frac{\beta}{\delta}$

16) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν $\alpha<\beta<\gamma$ καὶ $\alpha<\delta<\gamma$ θὰ εἶναι καὶ $|\beta-\delta|<\gamma-\alpha$.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν $\beta=\delta$ ἡ πρότασις εἶναι προφανής. Ἐὰν $\beta<\delta$ θὰ ἔχωμεν $\alpha<\beta<\delta<\gamma$, ἑπομένως $\delta-\beta<\gamma-\alpha$ ὅθεν καὶ $|\beta-\delta|<\gamma-\alpha$.

Ὁμοίως δεικνύεται ἡ πρότασις καὶ ὅταν $\beta>\delta$.

17) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν παραστάσεων:

α') $\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha^2\beta^{-3}+\dfrac{9}{8}\alpha\beta^2\right]\left(\alpha^2-\beta^2\right)^{-2}$

διὰ $\alpha=7$, $\beta=-2$.

β') $\dfrac{\alpha(\beta+\gamma)+\gamma(\alpha-\beta)}{\alpha[\beta(\alpha+\gamma)+\gamma(\alpha-2\beta)]+\gamma}$ διὰ $\alpha=6$, $\beta=3$, $\gamma=-2$

γ') $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^{-2}}+\dfrac{1}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\alpha^{-4}}+\dfrac{1}{\alpha^5}$ διὰ $\alpha=0{,}2$·

18) Νὰ δειχθῇ ὅτι:

Ἂν εἰς τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν προστεθῇ ἡ διαφορά των, προκύπτει ὡς ἄθροισμα τὸ διπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου· ἂν δὲ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος ἀφαιρεθῇ ἡ διαφορά των, προκύπτει ὡς ὑπόλοιπον τὸ διπλάσιον τοῦ μικροτέρου.

19) Ποσόν τι διανέμεται εἰς τρεῖς ἀνθρώπους. Ὁ πρῶτος λαμβάνει $\alpha+\beta-\gamma-\delta$, ὁ δεύτερος $\alpha-\gamma$ ὀλιγώτερον τοῦ πρώτου καὶ ὁ τρίτος $\beta+\delta$ περισσότερον τοῦ δευτέρου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ διανεμηθὲν ποσόν.

20) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ἐξαγόμενα:

α') $\left(\dfrac{2}{3}\alpha^2\chi-\chi^3+\alpha\chi^2\right)\cdot\left(2\chi-\alpha\right)-\left(\chi^2-\dfrac{1}{5}\alpha^2\right)\cdot\left(\alpha^2-\chi^2\right)$

β') $\left(\alpha^2\beta\gamma-\dfrac{2}{7}\alpha\beta^3+3\alpha^4\right)\cdot\left(\dfrac{3}{8}\alpha^3\beta-\beta^4-\alpha^2\beta^2\right)-$

$-\left(-\dfrac{1}{2}\alpha\beta\gamma^2+3\alpha^3\gamma\right)\cdot\left(2\alpha\gamma^3-\dfrac{1}{7}\alpha\beta^2\gamma\right)$·

γ') $(\chi^2\psi-6\chi\psi\omega+\omega^3)\,.\,(\chi^4-\psi^4)+(\alpha\psi^2-\omega^3)\cdot(\chi^4+\psi^4)$.

21) Ὁμοίως τά:

α') $(3\chi^2+5\chi^{-4}-7\chi^3-2)\,.\,(2-\chi^{-3})$

β') $(4\chi^3-3\chi^{-2}+4\chi^4-7)\cdot(3\chi^{-2}-2\chi^4-5\chi+2)$

γ') $\left(\dfrac{2}{3}\chi^3-4\chi^2+3\chi-5\right)\cdot\left(\dfrac{2}{5}-3\chi\right)^{-3}$

δ') $\left(5\chi^3-\dfrac{2}{3}\chi^{-4}-0{,}07\,\chi\right)\cdot\left(\dfrac{3}{4}\chi-0{,}6\chi^{-4}\right)$

ε') $(\alpha\chi^2-3\alpha^2\chi^{-3}-5\alpha^{-3})\,.\,(5\alpha^2\chi^{-2}-6\alpha^{-2}\chi^{-2})$

22) Ὁμοίως τά:

α΄) $(\chi-1)\cdot(\chi+1)\cdot(\chi^2+1)\cdot(\chi^4+1)\cdot(\chi^8+1)$

β΄) $[(\alpha+\beta)^2+(\gamma-\delta)]\cdot[(\alpha+\beta)^2-(\gamma-\delta)]$

γ΄) $[\chi^2+\chi(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\beta^2)]\cdot[\chi^2-\chi(\alpha-\beta)+(\alpha^2-\beta^2)]$

23) Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ ταὐτότητες :

α΄) $\chi^3+\psi^3+\omega^3-3\chi\psi\omega=(\chi+\psi+\omega)(\chi^2+\psi^2+\omega^2-\psi\omega-\omega\chi-\chi\psi)$

β΄) $\alpha^2(\gamma-\beta)+\beta^2(\alpha-\gamma)+\gamma^2(\beta-\alpha)=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\gamma-\beta)$.

γ΄) $(\alpha^2+\beta^4)^2=(\alpha^2-\beta^4)^2+(2\alpha\beta^2)^2$.

δ΄) $(\chi+\psi+\omega)^3-3(\chi+\psi)(\psi+\omega)(\omega+\chi)=\chi^3+\psi^3+\omega^3$.

ε΄) $(\alpha+\beta+\gamma)^3-(\beta+\gamma-\alpha)^3-(\gamma+\alpha-\beta)^3-(\alpha+\beta-\gamma)^3=24\alpha\beta\gamma$

στ΄) $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2+(\alpha-\beta-\gamma+\delta)^2+(\alpha-\beta+\gamma-\delta)^2+(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2=4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$.

24) Δίδονται τὰ πολυώνυμα:

$$A=(\chi-\psi)^2$$
$$B=-(\chi+\psi)^2$$
$$\Gamma=4\chi\psi$$

Ἐπαληθεύσατε τὰς ταὐτότητας

$$A^2-B\Gamma=B^2-\Gamma A=\Gamma^2-AB$$

25) Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ ἐπαληθεύσατε τὰς ταὐτότητας

α΄) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\tau^2+(\tau-\alpha)^2+(\tau-\beta)^2+(\tau-\gamma)^2$

β΄) $4\alpha^2\beta^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2=16\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$

26) Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ ἐπαληθεύσατε τὴν ταὐτότητα

$$1+\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}=\frac{2\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}$$

27) Δείξατε ὅτι : ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=0$, εἶναι

$$2(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2.$$

28) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον τεσσάρων διαδοχικῶν ἀκεραίων ηὐξημένον κατὰ μονάδα εἶναι τέλειον τετράγωνον. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ἡ ταὐτότης

$$\chi(\chi+1)(\chi+2)(\chi+3)+1=(\chi^2+3\chi+1)^2$$

29) Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν θετικῶν ἀριθμῶν α,β καὶ γ ἰσχύουν αἱ ἀνισότητες:

α') $\alpha^2+\beta^2 \geqq 2\alpha\beta$, β') $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} \geqq 2$,

γ') $\frac{\alpha+\beta}{2} \geqq \sqrt{\alpha\beta}$ δ') $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geqq 8\alpha\beta\gamma$.

ε') $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geqq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$. στ') $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 \geqq 3\alpha\beta\gamma$.

30) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

α') $5\alpha^{\mu}\beta^{\mu+1}\gamma^{\nu} : 7\alpha^3\beta^2\gamma^4$.

β') $\frac{2}{5}\alpha^{3\mu-2}\cdot\beta^{2\nu-5} : \left(-1\frac{2}{3}\alpha^{2\mu-1}\cdot\beta^{\nu-3}\right)$

γ') $0{,}3\chi^{\mu+\nu+1}\cdot\psi^{2\mu+\nu-1} : 0{,}07\chi^{\mu-\nu+3}\cdot\psi^{2\mu-\nu+5}$

δ') $5\chi^3\cdot(\alpha+\beta)^3(\alpha^2-\beta)^2 : \left[-\frac{2}{5}\chi\cdot(\alpha^2-\beta)^2\right]$

ε') $\left[3\alpha^5(\beta+\gamma)^5(\alpha-\gamma)^2-\frac{2}{7}\alpha^{-3}(\beta+\gamma)^{-4}-\frac{5}{6}\alpha^4(\beta+\gamma)^3\cdot\right.$

$\left.(\alpha^2-\beta)^3\right] : \left[-\frac{5}{8}\alpha^2(\beta+\gamma)^{-3}\right]$

στ') $\left(\alpha\chi^{2\mu}-5\alpha\chi^{2\mu-1}-\frac{2}{5}\alpha^5\chi^{2\mu-8}+\alpha\chi^{2\mu+5}\right) : 3\alpha\chi^{\mu+5}$.

31) Ὁμοίως τῶν πράξεων:

α') $(\chi^{4\alpha}+\chi^{3\alpha}\omega^{\beta}-5\chi^{2\beta}+8\chi^{\alpha}\omega^{3\beta}-2\omega^{4\beta}) : (\chi^{\alpha}-\omega^{\beta})$

β') $[(\alpha+\beta)^4-(\gamma-\delta)^4] : [(\alpha+\beta)-(\gamma-\delta)]$

γ') $[8\chi^{3(\alpha-\beta)}-27\omega^{3(\gamma+\delta)}] : [2\chi^{\alpha-\beta}-3\omega^{\gamma+\delta}]$

δ') $[(\chi^5+\alpha^{10}) : (\chi+\alpha^2)] : (2\chi^2-2\alpha^4)$

ε') $[\alpha^3\chi^{3(\mu+\nu)}-\beta^3\psi^{3(\mu-\nu)}] : [\alpha\chi^{\mu+\nu}-\beta\psi^{\mu-\nu}]$

32) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ διώνυμον $\chi^{\kappa\lambda}-\psi^{\kappa\lambda}$ εἶνε διαιρετὸν πάντοτε διὰ τοῦ $\chi^{\kappa}-\psi^{\kappa}$, ὅπου κ καὶ λ εἶνε τυχόντες ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί.

33) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ διώνυμον $8\lambda^{3(\nu-\rho)}-27\mu^{3(\delta+\varepsilon)}$ εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ $2\lambda^{\nu-\rho}-3\mu^{\delta+\varepsilon}$ ὅπου ν,ρ,δ, καὶ ε εἶνε τυχόντες ἀκέραιοι.

34) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^{2\rho+1}-\alpha^{2\rho+1}-\beta^{2\rho+1}-\gamma^{2\rho+1}$$

εἶνε διαιρετὸν δι' ἑκάστου τῶν ἀθροισμάτων $(\alpha+\beta)$, $(\gamma+\alpha)$, $(\beta+\gamma)$ ὅπου ρ τυχὼν ἀκέραιος θετικὸς ἢ μηδέν.

35) Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς $13^{\nu}-1$ διαιρεῖται πάντοτε διὰ τοῦ 12.

36) Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς $2^{35}-1$ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 31· (ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι $31=2^5-1$).

37) Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις:

α') $2\alpha^3\beta^2\gamma^5-7\alpha^2\beta^3\gamma^5+3\alpha^5\beta^2\gamma^3-5\alpha^5\beta^2\gamma^4$

β') $5\alpha^2\beta\chi\psi^4-10\alpha^2\gamma\chi^2\psi^3-15\alpha^3\beta^2\chi^4\psi^2$

γ') $2\alpha^\mu-3\alpha^{\mu-1}\beta-7\alpha^{\mu+2}\beta^5+5\alpha^{2\mu}\beta^6$

ὅπου μ τυχὼν ἀκέραιος μεγαλύτερος τῆς μονάδος.

δ') $3\alpha^5\beta^7\chi^{3\mu+2}\psi^{2\nu+1}-2\alpha^3\beta^5\chi^{2\mu+1}\psi^{3\nu+1}+\alpha\beta\chi^{5\mu+3}\psi^{2\mu+7}$

ὅπου μ καὶ ν τυχόντες θετικοὶ καὶ ἀκέραιοι ἢ μηδέν.

ε') $(\chi+\psi)^3-2\alpha\beta^2(\chi+\psi)^2+(\chi+\psi)\alpha^2\beta^4$

στ') $(\chi-1)(\chi-2)(\chi-3)+(\chi-1)(\chi-2)-(\chi-1)(\chi-2)(\chi-5)$

38) Ὁμοίως αἱ:

α') $\chi^2\omega+\chi\omega^2+\chi^2\psi-\chi\psi^2-\psi^2\omega-\psi\omega^2$

Παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη ἰσοῦται μὲ

$$(\chi^2\omega+\chi^2\psi)-(\chi\psi^2-\chi\omega^2)-(\psi^2\omega+\psi\omega^2)=\chi^2(\omega+\psi)-$$

$$-\chi(\psi^2-\omega^2)-\psi\omega((\psi+\omega)=(\omega+\psi)\left[\chi^2-\chi(\psi-\omega)-\psi\omega\right]=$$

$$=(\omega+\psi)(\chi^2-\chi\psi+\chi\omega-\psi\omega)=(\omega+\psi)(\chi+\omega)(\chi-\psi).$$

β') $\alpha^2-\alpha\beta-\beta-1$· αὕτη ἰσοῦται πρός:

$(\alpha^2-1)-\beta(\alpha+1)=(\alpha+1)(\alpha-1-\beta)$.

γ') $\chi^3-\alpha\chi^2+2\chi-2\alpha$. δ') $2\chi^5-5\chi^4+4\chi^3+2\chi^2-5\chi+4$.

ε') $\chi^2+(2\alpha+\beta)\chi+2\alpha\beta$.

39) Ὁμοίως:

α') $4\chi^2-\frac{1}{9}\alpha^2\psi^2$, β') $4\chi^2-32\alpha^2\chi+64\alpha^4$.

γ') $2\alpha^2\psi^4+12\alpha\beta^2\psi^2\chi^3+18\beta^4\chi^6$

δ') $\chi^3\psi-\psi^3\chi$, ε') $\chi^8-\psi^8$.

στ') $(\mu-\nu)(\mu^2-\omega^2)-(\mu-\omega)(\mu^2-\nu^2)$. ζ') $\chi^5-\psi^5$.

40) Ὁμοίως:

α') $(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha+\beta-\gamma)^2$,

β') $(\chi+\psi+\omega)^4-(\chi+\psi+\omega)^2$

γ') $\chi^4-2\chi^2\psi+\psi^2-\alpha^2\chi^2+2\alpha\chi\psi^3-\psi^6$

δ') $\chi^4+\psi^4$. αὕτη γράφεται $\chi^4+\psi^4+2\chi^2\psi^2-2\chi^2\psi^2$· ἐπομένως ἰσοῦται μέ:

$$(\chi^2+\psi^2)^2-2\chi^2\psi^2=(\chi^2+\psi^2+\sqrt{2}\chi\psi)\,(\chi^2+\psi^2-\sqrt{2}\chi\psi)$$

ε') $\chi^8+\psi^8+\chi^4\psi^4$.

στ') $\alpha^2\beta^2\,(\alpha-\beta)-\alpha^2\gamma^2\,(\alpha-\gamma)+\beta^2\gamma^2\,(\beta-\gamma)$

41) Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

α') $\dfrac{1}{\chi+\psi+\omega}-\dfrac{1}{\chi}-\dfrac{1}{\psi}-\dfrac{1}{\omega}$

β') $\dfrac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\chi+\alpha)}-\dfrac{1}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\chi+\beta)}+$

$+\dfrac{1}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\chi+\gamma)}$

γ') $\dfrac{2}{-\rho}+\dfrac{2}{\rho-\sigma}+\dfrac{2}{\sigma-\varepsilon}+\dfrac{(\varepsilon-\rho)^2+(\rho-\sigma)^2+(\sigma-\varepsilon)^2}{(\varepsilon-\rho)\,(\rho-\sigma)\,(\sigma-\varepsilon)}$

δ') $\dfrac{\mu+1}{2\mu-2}-\dfrac{\mu-1}{2\mu+2}-\dfrac{4\mu}{2\mu^2-2}+\dfrac{3\mu^2+2}{5\mu^2-5}$

ε') $\dfrac{2}{\chi^3-\psi^3}+\dfrac{1}{\chi-\psi}-\dfrac{3}{\chi^2-\psi^2}+\dfrac{7}{5\chi+5\psi}$

42) Νά δειχθοῦν αἱ ταυτότητες:

α') $\dfrac{\alpha^3}{(\alpha-\beta)(\ -\gamma)}+\dfrac{\beta^3}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\dfrac{\gamma^3}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=\alpha+\beta+\gamma$

β') $\dfrac{\alpha+\beta}{(\beta-\gamma)\,(\gamma-\alpha)}+\dfrac{\beta+\gamma}{(\gamma-\alpha)\,(\alpha-\beta)}+\dfrac{\gamma+\alpha}{(\alpha-\ )\,(\beta-\gamma)}=0$

γ') $\dfrac{\beta\gamma}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\ )}+\dfrac{\alpha\gamma}{(\beta-\gamma)\,(\beta-\alpha)}+\dfrac{\alpha^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=1$

43) Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

α') $\dfrac{\alpha^2\beta^2}{\gamma}\cdot\dfrac{\alpha^{-2}\gamma^2}{\beta}:\dfrac{\beta^2\gamma^2}{\alpha}\cdot\dfrac{\alpha\gamma}{\beta^2}:\left(\dfrac{\alpha\beta}{\gamma^2}:\dfrac{\beta\gamma}{\alpha^2}\right)$

β') $\dfrac{\dfrac{\chi^2+\psi^2}{\psi}-\chi}{\dfrac{1}{\psi}-\dfrac{1}{\chi}}:\dfrac{\chi^3+\psi^3}{\chi^2+\psi^2}$

γ') $$\frac{\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+1}{3}}{\dfrac{x-2}{x+3}-\dfrac{x-2}{4}}:\frac{\dfrac{x-3}{x-4}+\dfrac{y-3}{7}}{\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{x+2}{x+1}}$$

δ') $$\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1}{x}}}+\frac{x^2-2}{1-\dfrac{1}{x^2-\dfrac{1}{x}}}$$

44) Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

α') $(x-3)(x-2)+(x-1)(x-7)=2x^2-1.$

β') $(6x-2)(x+1)-(3x+7)(2x-5)=0$

γ') $$\frac{3x}{5}-\frac{2(x+1)}{3}+\frac{7(x-2)}{4}=\frac{5}{7}.$$

δ') $$\frac{(x-1)}{x-2}-\frac{x-3}{x-4}=\frac{x-5}{x-6}-\frac{x-7}{x-8}$$

ε') $$\frac{x+\dfrac{1}{7}}{x-\dfrac{1}{7}}+\frac{x-\dfrac{1}{7}}{x+\dfrac{1}{7}}=\frac{2x^2}{x^2-\dfrac{1}{49}}$$

45) Ὁμοίως αἱ::

α') $$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}=0$$

β') $$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2).(x+3)}=\frac{3}{x(x+3)}$$

γ') $$\frac{3-x}{8-x}+\frac{8-x}{6-x}+\frac{2-x}{4-x}=\frac{10-x}{8-x}+\frac{x+2}{x-6}+\frac{5-x}{4-x}$$

δ') $$\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}=(x+2)\left(1-\frac{x-1}{x+1}\right)$$

ε') $$\frac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}+\frac{1+\dfrac{1}{x+2}}{1-\dfrac{\;}{x+2}}=2$$

στ') $$\frac{\dfrac{1+\chi}{1-\chi}-\dfrac{1-\chi}{1+\chi}}{\dfrac{2\chi}{1-\chi}}=\frac{}{4+\dfrac{2-\chi}{3}}$$

46) Ὁμοίως αἱ:

α') $(\chi+2\alpha)\ (\chi-2\alpha)-\chi^2=(1-4\alpha)\chi$

β') $(\chi+\alpha)\ (\chi+\beta)-(\chi-2\alpha)\ (\chi+2\beta)=0$

γ') $\dfrac{\chi+\alpha-\beta}{\alpha}-\dfrac{\chi+\beta-\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha\beta}$

δ') $\dfrac{\chi-\alpha}{\alpha+\beta}+\dfrac{\chi+\alpha}{\alpha-\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-2\beta\chi}{\alpha^2-\beta^2}$

ε') $\dfrac{\alpha(\chi-\beta)}{\beta(\chi-\gamma)}-\dfrac{\beta(\chi-\gamma)}{\alpha(\chi-\alpha)}=\dfrac{(\alpha^2-\beta^2)\chi}{\alpha\beta(\chi-\alpha)(\chi-\gamma)}$

στ') $(\alpha^2+\psi)\ (\beta^2+\psi)-(\alpha^2-\psi).(\beta^2-\psi)=2\alpha^2+4\alpha\beta\psi$

ζ') $(\psi-2\alpha)^2+(\psi-2\beta)^2=2(\psi-2\gamma)^2$

47) Ὁμοίως αἱ:

α') $\dfrac{2\chi+\alpha}{\beta}-\dfrac{\chi-\beta}{\alpha}=\dfrac{3\alpha\chi+(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta}$

β') $\dfrac{\chi+\alpha}{\alpha-\beta}+\dfrac{\chi-\alpha}{\alpha+\beta}=\dfrac{\chi+\beta}{\alpha+\beta}-\dfrac{2(\chi-\beta)}{\beta-\alpha}$

γ') $\dfrac{\chi}{\alpha}+\dfrac{\chi}{\beta}+\dfrac{\chi}{\gamma}+\dfrac{\chi}{\delta}=\dfrac{\chi}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}-1$

δ') $\dfrac{(\alpha\chi-5)\ (\beta\chi-3)}{5\alpha-3\beta}=\dfrac{(5\alpha-3\beta)\ (\alpha\beta\chi^2-2)-1}{(5\alpha-4\beta)^2}$

ε') $\dfrac{\beta}{5\chi-2\alpha}-\dfrac{\alpha}{2\alpha-5\chi}+\dfrac{2\alpha\beta}{25\chi^2-20\alpha\chi+4\alpha^2}=0$

στ') $\dfrac{5\alpha\chi}{\alpha-2\beta}-\dfrac{3\beta}{4\beta-2\alpha}=\dfrac{3(\alpha\beta+\alpha\chi-2\beta^2)}{5\alpha+10\beta}+2\alpha$

48) Ὁμοίως αἱ:

α') $(\chi-\alpha)^2+(\chi-\beta)^2+(\chi-\gamma)^2=$
$(\chi+\beta)(\chi+\gamma)+(\chi+\gamma)(\chi+\alpha)+(\chi+\alpha)(\chi+\beta)$.

β') $(\chi-\alpha)^2\ (\beta-\gamma)+(\chi-\beta)^2\ (\gamma-\alpha)+(\chi-\gamma)^2\ (\alpha-\beta)+$
$+(\alpha-\beta)\ (\beta-\gamma)\ (\gamma-\alpha)\chi=0.$

γ') $\dfrac{(\alpha+\beta)^2(\chi+1)-(\alpha+\beta)(\chi+1)+(\chi+1)}{\alpha+\beta+1}=(\alpha+\beta)^2-$
$-(\alpha+\beta)+1$

δ') $\dfrac{\beta\chi+\alpha^2}{\alpha\chi-\beta^2}-\dfrac{\beta\chi-\alpha^2}{\alpha\beta+\beta^2}=\dfrac{2\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)}{\alpha^2\chi^2-\beta^4}$

ε') $\dfrac{\dfrac{\chi+\beta}{\chi-\beta}}{1-\dfrac{\chi-2\beta}{\chi-\beta}}=\dfrac{3\chi-5\beta}{\beta}$

στ') $\dfrac{1}{\chi+\dfrac{1}{\alpha-\dfrac{\alpha}{\chi}}}=\dfrac{1}{\chi-\dfrac{1}{\beta-\dfrac{\beta}{\chi}}}$

49) Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

α') $3(4\chi-\psi)=20+\psi$
$9(\chi-\psi)-17=0$

β') $\dfrac{4(\chi+\psi-3,8}{9}-\dfrac{5(\chi+2\psi-6)}{18}=\dfrac{\chi}{3}+\dfrac{\psi-10}{6}$

$\dfrac{\chi}{3}+\dfrac{5\chi-4}{21}-\dfrac{\chi+2}{7}=\dfrac{\chi-5\psi}{14}$

γ') $\dfrac{\chi-1}{\psi-1}=\dfrac{4}{3}$
$\dfrac{\chi+1}{\chi-2}=\dfrac{\psi-2}{\psi+3}$

δ') $\dfrac{4\chi-13}{5}-\dfrac{7(\chi+2\psi)}{3(\chi+\psi)}=\dfrac{12\chi^2-1}{15(\chi+\psi)}$
$\dfrac{3\chi-2\psi}{5}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{3(2\psi+10)}{4}-\dfrac{3\psi+4}{2}$

50) Ὁμοίως τά:

α') $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$
$\alpha\chi-\beta\psi=\delta$

β') $\alpha^2\chi+\alpha\psi=1$
$\beta^2\chi+\beta\psi=1$

γ') $\dfrac{(\alpha+\beta)\chi}{2}+\dfrac{(\alpha-\beta)\psi}{2}=\alpha^2-\beta^2$
$\dfrac{(\alpha-\beta)\chi}{4}-\dfrac{(\alpha+\beta)\psi}{4}=\alpha\beta$

δ') $$\frac{\chi}{\alpha+\beta}+\frac{\psi}{\alpha-\beta}=\alpha^2-\beta^2$$
$$\frac{\chi}{\alpha-\beta}-\frac{\psi}{\alpha+\beta}=\alpha^2+\beta^2$$

ε') $$\frac{\chi}{\alpha+\beta}-\frac{\psi}{\alpha-\beta}=\frac{4\alpha\beta}{\beta^2-\alpha^2}$$
$$\frac{\chi+\psi}{\alpha+\beta}-\frac{\chi-\psi}{\alpha-\beta}=\frac{2\alpha^2+2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$$

51) Ὁμοίως τά:

α') $$\frac{2}{\chi}-\frac{3}{\psi}=\frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{3\chi}-\frac{2}{5\psi}=7$$

β') $$\frac{\alpha^3}{\chi}-\frac{\beta^3}{\psi}=\gamma^3$$
$$\frac{\alpha}{\chi}-\frac{\beta}{\psi}=\frac{1}{\gamma}$$

γ') $$\frac{2}{5\chi-3\psi}-\frac{1}{5\chi+7\psi}=1$$
$$\frac{1}{3(5\chi+7\psi)}+\frac{2}{5(5\chi-3\psi)}=\frac{2}{7}$$

δ') $$\frac{\alpha-\beta}{\beta}\chi+\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\psi=\frac{\alpha^2}{\beta^2}-\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}$$
$$\beta\chi-\alpha\psi=\alpha-\beta$$

ε') $$3\chi+5\psi=\frac{(8\beta-2\delta)\beta\delta}{\beta^2-\delta^2}$$
$$\beta^2\chi-\frac{\beta\gamma\delta^2}{\beta+\delta}+(\beta+\gamma+\delta)\,\delta\psi=\delta^2\chi+(\beta+2\delta)\,\beta\delta$$

52) Ὁμοίως τά:

α') $$2\chi-3\psi+5\omega=24$$
$$3\chi+3\psi-2\omega=4$$
$$\chi-\psi+\omega=9$$

β') $$\frac{3\chi-2+3\omega+2}{8}-\frac{2\chi-\psi+4\omega-1}{6}=\frac{3\chi-2\psi+\omega-2}{9}$$
$$\frac{2\chi+\psi+\omega-1}{7}+\frac{2\chi-3\psi-\omega-2}{9}=\frac{\chi-\psi+2\omega-7}{10}$$
$$\frac{\chi-\psi}{4}-\frac{\omega+1}{3}+\frac{1}{2}(\chi-\psi+2)+\frac{1-\omega}{2}=\frac{2\chi-\psi+\omega-1}{12}$$

γ') $$2\chi-2\psi+3\omega+3\varphi=13$$
$$6\chi-2\psi+4\omega+5\varphi=28$$
$$4\chi-3\psi+2\omega-3\varphi=15$$
$$2\chi+3\psi-\omega-3\varphi=3$$

δ') $$2\chi-3\psi+4\omega+2\varphi=15$$
$$-\chi+3\varphi-2\omega=12$$
$$-\omega+2\chi-2\psi=8$$
$$\omega+\chi+\psi+\varphi=10$$

53) Ὁμοίως τά:

α') $\begin{cases} \chi+\psi+\omega=\alpha \\ \psi+\omega+\varphi=\beta \\ \omega+\varphi+\chi=\gamma \\ \varphi+\chi+\psi=\delta \end{cases}$

β') $\begin{cases} (\beta+\gamma)\chi+(\alpha+\gamma)\psi+(\alpha+\beta)\omega=\alpha \\ \beta\gamma\chi+\alpha\gamma\psi+\alpha\beta\omega=1 \\ \chi+\psi+\omega=0 \end{cases}$

γ') $\begin{cases} \alpha\chi+\beta\psi-\gamma\omega=\beta^2 \\ \beta\chi-\gamma\psi+\alpha\omega=\alpha^2 \\ -\gamma\chi+\alpha\psi+\beta\omega=\gamma^2 \end{cases}$

δ') $\dfrac{\chi}{\alpha}=\dfrac{\psi}{\beta}=\dfrac{2}{\gamma}=\dfrac{\omega}{\delta}$

ε') $\dfrac{\chi}{\alpha}=\dfrac{\psi}{\beta}=\dfrac{\omega}{\gamma}=\dfrac{\varphi}{\delta}$

$\alpha^2\chi+\beta^2\psi+\gamma^2\omega+\delta^2\varphi=1$

στ') $\begin{cases} \dfrac{\chi\psi}{\alpha\psi+\beta\chi}=\gamma \\ \dfrac{\chi\omega}{\alpha\omega+\gamma\chi}=\beta \\ \dfrac{\psi\omega}{\beta\omega+\gamma\psi}=\alpha \end{cases}$

ζ') $\begin{cases} \dfrac{\chi}{\mu}+\dfrac{\psi}{\nu}=1 \\ \dfrac{\psi}{\nu}+\dfrac{\omega}{\rho}=1 \\ \dfrac{\chi}{\mu}+\dfrac{\omega}{\rho}=1 \end{cases}$

η') $\dfrac{\chi-\mu}{\nu+\rho}=\dfrac{\psi-\nu}{\mu+\rho}=\dfrac{\omega-\rho}{\mu+\nu}$

$\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\omega=\delta$

θ') $\begin{cases} \chi-\psi+\varphi-6\omega=0 \\ -2\chi+7\psi+\varphi=10 \\ 3\chi+\psi+\omega+2\varphi=6 \\ -2\chi+\psi=2 \end{cases}$

ι') $\begin{cases} \chi+\psi+z+\varphi-\omega=16 \\ -\chi+3\psi-2\varphi-\omega=12 \\ -2\chi+4\psi-6z+\varphi+\omega=\beta \\ -3\chi+\psi+z-7\varphi-\omega=0 \\ 2\chi-4\psi-z+\varphi+\omega=7 \end{cases}$

ια') $\begin{cases} \dfrac{1}{5\chi-3\psi+2\omega}+\dfrac{5}{3\chi-5\psi+1}-\dfrac{1}{2\psi-3\omega+2}=1 \\ \dfrac{5}{5\chi-3\psi+2\omega}+\dfrac{5}{3\chi-5\psi+1}+\dfrac{7}{2\psi-3\omega+2}=7 \\ \dfrac{1}{5\chi-3\psi+2\omega}+\dfrac{2}{2\psi-3\omega+2}=5 \end{cases}$

54) Ὁμοίως τά;

α') $\chi+\psi+\omega=1$

$\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\omega=\lambda$

$\alpha^2\chi+\beta^2\psi+\gamma^2\omega=\lambda^2$

β') $\chi+\psi+\omega+\alpha(\chi+\psi)+\alpha^2\chi=\alpha^3$

$\chi+\psi+\omega+\beta(\chi+\psi)+\beta^2\chi=\beta^3$

$\chi+\psi+\omega+\gamma(\chi+\psi)+\gamma^2\chi=\gamma^3$

γ') $\chi+\psi+\omega=\alpha+\beta+\gamma$

$\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\omega=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

$\beta\chi+\gamma\psi+\alpha\omega=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

δ') $\dfrac{5\chi-7\psi+8z-7}{25}-\dfrac{8\chi-3z+44}{35}=\dfrac{13\psi-7z+1}{15}+\dfrac{4\chi+5\psi-23}{21}$

$\dfrac{4\chi+3z-1}{33}-\dfrac{3\psi-5\chi+60}{22}=\dfrac{9z-7\psi+2}{4}+\dfrac{7\chi-6\psi-5z-2}{6}$

$2\chi+\psi-z=2$

55) Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις.

α') $\chi-3=0$, β') $\psi-3\chi=0$, γ') $4\chi-3\psi=0$

δ') $4\chi+5\psi=0$, ε') $2\chi-5\psi-7=0$, στ') $\dfrac{\chi}{3}-\dfrac{\psi}{2}=2$

ζ') $\dfrac{\chi-3}{5}-\dfrac{\psi+2}{4}=1$

56) Νὰ λυθοῦν γραφικῶς τὰ κάτωθι συστήματα:

α') $5\chi+7\psi=31$ β') $3\chi-5\psi=8$ γ') $\dfrac{\chi}{2}-\dfrac{\psi}{3}=2$

$7\chi-2\psi=8$ $5\chi-8\psi=0$ $\dfrac{\chi}{7}-\dfrac{\psi}{4}=3$

δ') $\dfrac{\chi-1}{5}+\dfrac{\psi-3}{4}=2$

$\dfrac{\chi+2}{3}-\dfrac{\psi-2}{7}=9$

57) Ἡ ἡλικία τοῦ Ἰωάννου εἶναι διπλασία τῆς τοῦ Φιλίππου. Πρὸ 6 ἐτῶν τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν των ἦτο ἴσον

πρὸς τὴν σημερινὴν ἡλικίαν τοῦ Ἰωάννου. Ποῖαι αἱ ἡλικίαι των;

58) Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως αὐξάνει ἕκαστον ἔτος κατὰ $\frac{1}{20}$ τοῦ πληθυσμοῦ τοῦ προηγουμένου. Ἐὰν ἡ πόλις σήμερον ἔχῃ 194.481 κατοίκους, ποῖος ἦτο ὁ πληθυσμός της πρὸ 5 ἐτῶν.

59) Πατήρ τις ἐμοίρασε μῆλα εἰς τοὺς 5 υἱούς του ὡς ἑξῆς: εἰς τὸν πρῶτον ἔδωκε τρία ὀλιγώτερα τοῦ ἡμίσεως τῶν ὅσων εἶχεν· εἰς τὸν δεύτερον ἔδωκεν ὁμοίως τρία ὀλιγώτερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὑπολοίπου, εἰς τὸν τρίτον πάλιν 3 ὀλιγώτερα τοῦ ἡμίσεως τοῦ νέου ὑπολοίπου, εἰς τὸν τέταρτον ὁμοίως τρία ὀλιγώτερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ νέου ὑπολοίπου, εἰς τὸ πέμπτον τέλος τὰ περισσεύσαντα 8. Πόσα μῆλα ἐμοίρασεν ὁ πατήρ;

60) Καθηγητής τις προτείνει 10 προβλήματα εἰς μαθητήν, ζητοῦντα αὔξησιν τοῦ βαθμοῦ του μὲ τὴν συμφωνίαν ὅπως δίδῃ εἰς αὐτὸν τρεῖς βαθμοὺς δι'ἕκαστον πρόβλημα ὅπερ ἤθελε λύσῃ, ν'ἀφαιρῇ δὲ δύο βαθμοὺς δι'ἕκαστον ἐξ ἐκείνων τὰ ὁποῖα δὲν ἤθελε λύσει. Ὁ καθηγητὴς οὔτε ἐπρόσθεσεν οὔτε ἀφήρεσε βαθμόν τινα. Πόσα προβλήματα ἔλυσεν ὁ μαθητής;

61) Ἐτόκισέ τις μέρος τοῦ κεφαλαίου του πρὸς 10% ἐπὶ 2 ἔτη καὶ 8 μῆνας, ἕτερον μέρος τοῦ αὐτοῦ κεφαλαίου διπλάσιον τοῦ πρώτου πρὸς 9% ἐπὶ 3 ἔτη καὶ 6 μῆνας, καὶ τέλος τὸ ὑπόλοιπον μέρος τοῦ κεφαλαίου του, ὅπερ ἦτο τριπλάσιον τοῦ δευτέρου πρὸς 8% ἐπὶ 3 ἔτη καὶ 9 μῆνας· εἰσέπραξε ἐν ὅλῳ διὰ τόκους 161.800 δρχ. Ποῖον τὸ κεφάλαιον;

62) Ἐκ τεσσάρων κρουνῶν δεξαμενῆς αἱ δύο πρῶται δύνανται νὰ πληρώσουν τὴν δεξαμενὴν ἡ μὲν εἰς 15 ὥρας, ἡ δὲ εἰς 24 ὥρας· αἱ δύο ἄλλαι, δύνανται νὰ κενώσουν τὴν δεξαμενὴν ἡ μὲν εἰς 20 ὥρας, ἡ δὲ εἰς 48 ὥρας. Ἐνῷ ἡ δεξαμενὴ εἶνε κενὴ ἀφήνονται καὶ αἱ τέσσαρες ἀνοικταί. Μετὰ 3 ὥρας τί μέρος τῆς δεξαμενῆ θὰ ἔχῃ πληρωθῆ;

63) Δεξαμενὴ πλήρης ὕδατος κενοῦται διὰ δύο ἀνίσων κρουνῶν. Ἀνοίγεται κατ'ἀρχὰς ὁ πρῶτος καὶ ἐκρέουν τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ περιεχομένου ὕδατος ἔπειτα ἀνοίγεται καὶ ὁ δεύτερος καὶ ἐκρέουν ἐξ ἀμφοτέρων τὰ λοιπὰ $\frac{3}{5}$ εἰς 3 ὥρας ὀλιγώτερον τῶν ὅσων ἐχρειάσθη ὁ πρῶτος ἵνα κενώσῃ τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς δεξαμενῆς, ἐνῷ ἐὰν εἶχον ἀνοιχθῆ ἀμφότεραι ἐξ ἀρχῆς ἡ δεξαμενὴ ἤθελε κενωθῆ 4 ὥρας ταχύτερον. Ζητεῖται εἰς πόσας ὥρας μόνος ὁ πρῶτος κρουνὸς θὰ ἐκένωνε τὴν δεξαμενήν.

64) Πεζὸς καταδιώκεται ὑπὸ ἑτέρου πεζοῦ ἀπέχοντος τοῦ πρώτου 60 βήματα. Ὁ πρῶτος κάμνει 6 βήματα ἐν ᾧ χρόνῳ ὁ δεύτερος κάμνει 9. Ἀλλὰ 7 βήματα τοῦ δευτέρου ἰσοδυναμοῦν μὲ 3 τοῦ πρώτου. Ζητεῖται πόσα βήματα θὰ κάμῃ ὁ δεύτερος ἵνα φθάσῃ τὸν πρῶτον;

65) Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ βάρη δύο κραμάτων ἐχόντων τίτλους 0,840 καὶ 0,729, διὰ νὰ κάμωμεν κρᾶμα 195 γραμμαρίων τίτλου 0,784;

66) Ὀπωροπώλης πωλεῖ εἴς τινα τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν πορτοκαλίων του καὶ $\frac{1}{2}$ τοῦ πορτοκαλίου ἀκόμη, εἰς ἄλλον τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ $\frac{1}{2}$ πορτοκαλίου ἀκόμη, εἰς τρίτον τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ $\frac{1}{2}$ πορτοκαλίου τοῦ ἔμειναν δὲ τότε 3 πορτοκάλια. Πόσα πορτοκάλια εἶχε καὶ πόσα ἐπώλησεν εἰς ἕκαστον ;

67) Ἔχει τις δύο εἰδῶν οἶνον· τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ τιμᾶται α δραχμάς, ἡ δὲ δευτέρα β. Πόσας ὀκάδας τοῦ πρώτου εἴδους πρέπει ν'ἀναμίξῃ μὲ μ ὀκάδας τοῦ δευτέρου εἴδους καὶ ν ὀκάδας ὕδατος ἵνα σχηματίσῃ κρᾶμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ στοιχίζῃ ρ δραχμάς; (διερεύνησις).

68) Δύο κινητὰ κινοῦνται ἐπὶ περιφερείας κύκλου ὁμαλῶς, μὲ ταχύτητας τ καὶ τ'. Πόσος χρόνος μεσολαβεῖ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν συναντήσεων αὐτῶν; α') ἂν κινοῦνται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν β') ἂν κινοῦνται κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν; (διερεύνησις).

69) Ὡρολόγιόν τι ἔχει τρεῖς δείκτας, οἱ ὁποῖοι δεικνύουν τὰς ὥρας, τὰ πρῶτα λεπτὰ καὶ τὰ δεύτερα. Τὸ ὡρολόγιον δεικνύει μεσονύκτιον· κατὰ ποίαν ὥραν ὁ δείκτης τῶν δευτέρων λεπτῶν διαιρεῖ διὰ νυοστὴν φορὰν κατὰ ἕνα λόγον λ τὴν γωνίαν τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων δεικτῶν;

70) Ἀπὸ σταθμοῦ τινος σιδηροδρόμου, ἀναχωρεῖ ἁτμάμαξα μὲ ταχύτητα τ χλμ. καθ'ὥραν· μετὰ α ὥρας ἀναχωρεῖ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σταθμοῦ καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ ἄλλη ἁτμάμαξα μὲ ταχύτητα τ' χλμ. καθ'ὥραν. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σταθμοῦ θὰ συναντηθῶσιν; (διερεύνησις).

71) Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμὸς γνωστοῦ ὄντος ὅτι, τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτοῦ καὶ ὅτι ἐὰν ἀντιστραφῇ ἐλαττοῦται κατὰ 45 μονάδας.

72) Νὰ εὑρεθῇ τετραψήφιος ἀριθμὸς μὲ ἄθροισμα ψηφίων 20· τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῶν δεκάδων αὐτοῦ καὶ ἑκατοντάδων νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, ἐὰν δὲ τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφοῦν κατ'ἀντίστροφον τάξιν νὰ προκύπτῃ ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ ζητουμένου κατὰ 909 καὶ μὲ ψηφίον μονάδων διπλάσιον τοῦ τῶν ἑκατοντάδων.

73) Τρεῖς φίλοι, ὁ Γεώργιος,ὁΚωνσταντῖνος καὶ ὁ Δημήτριος συζητοῦν περὶ τῆς ἡλικίας των. Ὁ Γεώργιος λέγει πρὸς τὸν Δημήτριον· ὅταν εἶχον τὴν ἡλικίαν σου ὁ φίλος μας Κωνσταντῖνος ἦτο 10 ἐτῶν· ὁ Δημήτριος λέγει πρὸς τὸν Γεώργιον· ὅταν θὰ ἔχω ἐγὼ τὴν ἰδικήν σου ὁ Κωνσταντῖνος θὰ εἶναι 26 ἐτῶν» ἀλλὰ τότε λέγει ὁ Κωνσταντῖνος· ὅταν ἐγὼ ἐγεννήθην τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν σας ἦτο τὸ διπλάσιον τῆς τωρινῆς μου ἡλικίας) Ποία ἡ τωρινὴ ἡλικία ἑκάστου;

74) Μῖγμα χρυσοῦ καὶ ἀργύρου 30 ὀκάδων ἀποβάλλει ἐν τῷ ὕδατι ζυγιζόμενον βάρος 2 ὀκάδων. Ἐκ πόσων ὀκάδων χρυσοῦ καὶ ἐκ πόσων ἀργύρου ἀποτελεῖται;

75) Δύο ἀγγεῖα περιέχουν 10 ὀκάδας ὕδατος. Λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ πρώτῳ καὶ χύνομεν αὐτὸ εἰς τὸ δεύτερον, ἔπειτα τὸ τρίτον τοῦ περιεχομένου τότε εἰς τὸ δεύτερον καὶ χύνομεν αὐτὸ εἰς τὸ πρῶτον, ἀκολούθως τὸ τέταρτον τοῦ περιεχομένου τότε ἐν τῷ πρώτῳ καὶ χύνομεν αὐτὸ εἰς τὸ δεύτερον καὶ τέλος λαμβάνομεν τὸ πέμπτον τοῦ περιεχομένου τότε ἐν τῷ δευτέρῳ καὶ χύνομεν αὐτὸ εἰς τὸ πρῶτον. Ἐὰν τὸ δεύτερον περιεῖχε τότε δύο ὀκάδας περισσότερον τοῦ πρώτου, πόσας ὀκάδας περιεῖχεν ἑκάτερον τῶν ἀγγείων κατ'ἀρχάς;

76) Ἀπὸ σταθμοῦ τινος σιδηροδρόμου ἀναχωρεῖ ἀτμάμαξα μὲ ταχύτητα τ χιλμ. ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σταθμοῦ καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ ἀναχωρεῖ μετά τινα χρόνον ἄλλη ἀτμάμαξα μὲ ταχύτητα τ' χιλμ. ὑπελογίσθη δὲ ὁ μεταξὺ τῶν δύο ἀναχωρήσεων χρόνος ὥστε νὰ φθάσουν ἀμφότεραι συγχρόνως εἰς τινα τόπον. Ἀλλ'ἡ πρώτη ἀτμάμαξα ἀφοῦ διέτρεξε τὰ δύο τρίτα τῆς ὁδοῦ, ἠναγκάσθη νὰ ἐλαττώσῃ τὴν ταχύτητα αὐτῆς εἰς τὸ ἥμισυ τῆς προτέρας καὶ οὕτω συμβαίνει συνάντησις τῶν ἀτμαμαξῶν α χιλμ. πρὸ τοῦ τόπου, εἰς ὃν ἐπρόκειτο νὰ συναντηθοῦν. Ζητεῖται ἡ ἀπὸ τοῦ σταθμοῦ τῆς ἀναχωρήσεως ἀπόστασις τοῦ τόπου.

77) Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες

α') $(5\chi-4)+2(3\chi-5) > 3\chi+4$, β') $\frac{3\chi-1}{7} < \frac{2\chi+4}{7}$

γ') $\frac{6\chi-3}{2}+\frac{3\chi-2}{5} > 1+\frac{\chi-1}{10}$

δ') $\frac{\chi-\alpha}{\beta^2}+\frac{\chi+\beta}{\alpha^2} > \frac{1}{\alpha\beta}$

ε') $\frac{\chi(\chi^2+\chi+2)}{\chi^2+1}-2 < \chi-1$

78) Εὕρετε τὰς τιμὰς τοῦ χ, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν συγχρόνως τὰς δύο ἀνισότητας.

α') $5\chi-3 > 3\chi+2$

$2\chi+9 > 6\left(\chi-\frac{1}{2}\right)$,

β') $\frac{5\chi+3}{7}-1 > \frac{7\chi-3}{9}+2$

$\frac{5\chi+7}{8} < 1$

γ') $\frac{3\chi-2}{5}-\frac{4\chi+3}{7} < 1$

$\frac{8\chi-5}{4}-(2\chi+1) < 0$

79) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι τιμαὶ τοῦ χ, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν συγχρόνως τὰς δύο ἀνισότητας:

α') $4\chi-3 > 5$

$2\chi-3 > 7\chi-8$

β') $4\chi-5 < 7\chi-2$

$3\chi+\frac{1}{2} < 5\chi-6$

γ') $\frac{3\chi}{5}-\frac{4}{7} > \frac{2\chi}{3}+1$

$5\chi-8 > 3\chi+3$

δ') $\frac{2\chi-5}{4}-7\cdot\frac{3\chi+2}{5} > 0$

$3\chi+5 < 1$

80) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων.

α') $\sqrt{\frac{40\mu^2\beta^2\lambda^2}{20\chi^4\psi^8\omega^{10}}}$, β') $\sqrt{2\alpha^2\beta^5\gamma} : \sqrt{2\alpha^5\beta^8\gamma}$

γ') $5\sqrt{\frac{3}{4}}-2\sqrt{27}+8\sqrt{\frac{3}{16}}+2\sqrt{\frac{12}{25}}$

δ') $\sqrt{\frac{(\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4)\chi}{\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4}}$

ε') $\sqrt{\dfrac{\chi^3\alpha^2-3\chi^2\psi\alpha^2+3\chi\psi^2\alpha^2-\psi^3\alpha^2}{(2\chi^3+5\chi^2\psi+6\chi\psi^2+2\psi^3)\alpha}}$

στ') $\sqrt{\dfrac{\alpha^2\chi}{\omega(\chi-\psi)^2}}-\sqrt{\dfrac{\beta^2\chi}{(\chi+\psi)^2\omega}}-\sqrt{\dfrac{(\alpha+\beta)^2\psi^2\chi}{(\chi^2-\psi^2)^2\omega}}$

81) Νὰ ἀπαλειφθοῦν τὰ ριζικὰ ἐκ τῶν παρονομαστῶν τῶν κάτωθι κλασμάτων:

α') $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, β') $\dfrac{2\alpha\sqrt{2\gamma}+3\beta}{\sqrt{2\beta}\sqrt{3\alpha^2\gamma^3}}$

α') $\dfrac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, δ') $\dfrac{3+4\sqrt{3}}{5(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$ ε') $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

στ' $\dfrac{2\alpha}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}$, ζ') $\dfrac{1}{3\sqrt{\mu}+3\sqrt{\nu}}$.

Παρατηρῶ ὅτι $(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3+\beta^3$. Ἑπομένως

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\mu}+\sqrt[3]{\nu}}=\frac{\sqrt[3]{\mu^2}-\sqrt[3]{\mu\nu}+\sqrt[3]{\nu^2}}{(\sqrt[3]{\mu}+\sqrt[3]{\nu})(\sqrt[3]{\mu^2}-\sqrt[3]{\mu\nu}+\sqrt[3]{\nu^2})}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{\mu^2}-\sqrt[3]{\mu\nu}+\sqrt[3]{\nu^2}}{\mu+\nu}$$

η') $\dfrac{\chi}{\sqrt[4]{\psi}-\sqrt[4]{\omega}}$

82) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

α') $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})$,

β') $\sqrt{\dfrac{2\alpha(\alpha^2-\beta^2)}{9(\rho-\lambda)^2}}:\sqrt{\dfrac{8\alpha^3(\alpha+\beta)}{\mu^2(\alpha-\beta)}}$

γ') $\dfrac{\sqrt{\chi}+\sqrt{\psi+1}}{\chi+\sqrt{\psi+1}}\cdot(\sqrt{\chi}-\sqrt{\psi+1})(-\sqrt{\chi}+\sqrt{\psi+1})\cdot$

$\cdot(-\sqrt{\chi}-\sqrt{\psi+1})$

δ') $\dfrac{\chi+\sqrt{\chi^2-1}}{\chi-\sqrt{\chi^2-1}}-\dfrac{\chi-\sqrt{\chi^2-1}}{\chi+\sqrt{\chi^2-1}}$

83) Ὁμοίως αἱ:

α') $(5-3i)+(7-2i)-(-4i)+(8i-3)-(2i+7)+i$

β') $\left(\frac{2}{3}i-5\right)+\left(7-\frac{2}{5}i\right)+\left(\frac{1}{2}i-\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{3i+2}{5}-7\right)$

γ') $(-2i)^7$, $(-2i)^3 . (-3i)^5$.

δ') $(\sqrt{2}\,i)^4 . (-i)^8$, $(\sqrt{2}\,i) . \left(-\sqrt[3]{3}\right)\left(-\sqrt[3]{5}\,i\right)^4$.

ε') $\sqrt{-9\alpha^2\beta^2}$. $3\sqrt{-8\alpha^3\beta^3}$. $\sqrt{-\frac{9}{25}\alpha^{10}}$

84) Ὁμοίως αἱ:

α') $(3+5i) . (5-7i)+(4+2i)(3i-4)$

β') $(2+5i)^2-(3i+2)(2i-7)$

γ') $\left(3i+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}-3i\right)$, δ') $2:(-3i)$

ε') $(2+5i):(-2i)$ στ') $(3+4i):(5-8i)$

ζ') $\mid x-(\alpha+\sqrt{-\beta^2})\mid . \mid x-(\alpha-\sqrt{-\beta^2})\mid$

85) Ὁμοίως:

α') $\left(\frac{2}{13}\right)^{\frac{2}{3}} . \left(\frac{2}{13}\right)^{\frac{3}{4}} . \left(\frac{2}{13}\right)^{2}$

β') $\left(1\frac{2}{3}\right)^{3,2} . \left(1\frac{2}{3}\right)^{0,005} . \left(1\frac{2}{3}\right)^{4}$

γ') $2^{\frac{5}{8}}:2^{\frac{3}{7}}$ δ') $\left(1\frac{1}{4}\right)^{4}:\left(1\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{5}}$

ε') $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{7}{4}}:\left(\frac{3}{4}\right)^{0,03}$ στ') $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{3}{4}}$,

ζ') $\left[\left(2^{0,03}\right)^{3}\right]^{0,05}$ η') $\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3}\right]^{0,2}$

86) Ὁμοίως αἱ:

α') $\left(\alpha^{\frac{4}{3}}+\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{4}{3}}\right) . \left(\alpha^{\frac{2}{3}}-\beta^{\frac{2}{3}}\right)$

β') $\left(\alpha^{\frac{7}{2}}-\alpha^3+\alpha^{\frac{5}{2}}-\alpha^2+\alpha^{\frac{3}{2}}-\alpha+\alpha^{\frac{1}{2}}-1\right):\left(\alpha^{\frac{1}{2}}+1\right)$

γ') $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\alpha^2}} . \sqrt[6]{\sqrt[3]{\alpha^2}} . \sqrt[3]{\sqrt[5]{\alpha^8}}$

δ') $\sqrt{\sqrt[3]{\alpha+\beta}}$ ε') $\sqrt[\kappa]{\sqrt[\lambda]{\sqrt[\mu]{\alpha^{\kappa\lambda\mu}}}}$, στ') $\sqrt[\nu-1]{\frac{\chi}{\sqrt[\nu]{\chi}}}$

87) Νὰ δειχθοῦν αἱ ταυτότητες:

α') $\left(\chi^2+\chi^{\frac{4}{3}}\psi^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\psi^2+\chi^{\frac{2}{3}}\psi^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\chi^{\frac{2}{3}}+\psi^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι,

$$\left(\chi^2+\chi^{\frac{4}{3}}\psi^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\chi^{\frac{2}{3}}\left(\chi^{\frac{2}{3}}+\psi^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

καὶ $\left(\psi^2+\chi^{\frac{2}{3}}\psi^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\psi^{\frac{2}{3}}\left(\psi^{\frac{2}{3}}+\chi^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

β') $\left[\frac{\alpha+(\alpha^2-\beta)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{\alpha-(\alpha^2-\beta)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

88) Ἐπαληθεύσατε τὴν ἐξίσωσιν

$$\chi^2-\frac{2}{\sqrt[3]{\alpha^4}}\chi+\frac{\alpha^{-\frac{4}{3}}-\beta^{\frac{4}{3}}}{\alpha^4}=0 \text{ διὰ } \chi=\frac{\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{-\frac{2}{3}}}{\alpha^2}$$

89) Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

α') $\left(\frac{\chi}{2}+1\right)^2-\frac{3}{2}\chi=3$, β') $\frac{3\chi-1}{\chi+2}+\frac{2\chi-2}{\chi-2}=\frac{8}{\chi^2-4}$

γ') $\frac{\chi+4}{\chi-1}+\frac{\chi-2}{\chi-3}=\frac{14}{7^2-4\chi+3}$

δ') $\chi(\chi+1)(\chi+3)-\left(\chi+\frac{1}{5}\right)\left(\chi+\frac{6}{7}\right)\left(\chi+\frac{1}{3}\right)=0$

ε') $(3-2\chi)(1-3\chi)+(2-\chi)(2-\chi)-\chi(1-6\chi)(\chi-2)=0$

στ') $\frac{3\chi+7}{2\chi-1}+\frac{2\chi-1}{4\chi+2}-\frac{7\chi^2-5}{12\chi^2-3}=1$

ζ') $\frac{1}{(5\chi-7)^2}-\frac{2}{5\chi-7}-3=0$

η') $\left(\chi-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\chi+\frac{2}{3}\right)\left(\chi-\frac{2}{3}\right)=5.$

θ΄) $\dfrac{7-\dfrac{5-3\chi}{\chi+1}}{6}=\dfrac{4\chi+5}{7\chi+2}$

90) Ὁμοίως αἱ:

α΄) $\chi(\chi+\alpha)=\alpha(\chi+1)+\alpha(\alpha-1)$

β΄) $\alpha\chi^2-\alpha^2(\alpha+4\beta)+4\alpha\beta^2=0$

γ΄) $(\chi^2+\chi)-\beta(\gamma\chi^2+\delta\chi)=0$

δ΄) $(\chi-\alpha)(\chi+\beta)+\alpha(\chi+\alpha)-(\chi+\beta)(\chi-\beta)=0$

91) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων τὰ κάτωθι τριώνυμα:

α΄) $\chi^2+17\chi+70$, β΄) $2\chi^2-7\chi+3$, γ΄) $5\chi^2-7\chi+8$

δ΄) $\chi^2-(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta$, ε΄) $\alpha\beta\chi^2-(\alpha^2+\beta^2)\chi+\alpha\beta$.

92) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα:

α΄) $\dfrac{\chi^2-2\chi-3}{\chi^2-\chi-2}$, β΄) $\dfrac{2\chi^2-2\chi-12}{\chi^2+\chi-12}$

γ΄) $\dfrac{\chi^2-(\alpha+1)\chi+\alpha}{\chi^2-(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta}$

93) Νὰ σχηματισθοῦν δευτεροβάθμιοι ἐξισώσεις ἔχουσαι ρίζας

α΄) $\dfrac{3}{11}$ καὶ $\dfrac{2}{9}$, β΄) 0,01 καὶ —3,1. γ΄) 3 καὶ $\sqrt{2}$

δ΄) $\sqrt{2}$ καὶ $\sqrt{3}$, ε΄) $2+\sqrt{3}$ καὶ $2-\sqrt{3}$.

στ΄) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ καὶ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

ζ΄) $3+5i$ καὶ $3-5i$, η΄) $\sqrt{\alpha}+\dfrac{\beta i}{7}$ καὶ $\sqrt{\alpha}-\dfrac{\beta i}{7}$

θ΄) $\dfrac{1}{\alpha+\beta}$ καὶ $\dfrac{1}{\alpha-\beta}$, ι΄) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{5}i$ καὶ $\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{5}i$

94) Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι προτάσεις. α΄) ἵνα δύο ρίζαι μιᾶς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως εἶναι ἴσαι κατ᾽ἀπόλυτον τιμήν, ἀλλὰ ἑτερόσημοι πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ ἐξίσωσις νὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha\chi^2+\gamma=0$ (ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσω εν ὅτι τότε καὶ μόνον $\rho'+\rho''=0$.

β΄) Ἵνα μία τῶν ριζῶν δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως εἶναι ἴση μὲ τὸ μηδὲν πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ ἐξίσωσις νὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi=0$

95) Ἵνα δύο ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ $\alpha'\chi^2+\beta'\chi+\gamma'=0$ ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας, πρέπει νὰ ἔχωμεν;

$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$, καὶ ἀντιστρόφως ἐὰν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$ αἱ ἐξισώσεις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ καὶ $\alpha'\chi^2+\beta'\chi+\gamma'=0$ ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας.

96) Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$. Εὕρετε σχέσιν μεταξὺ τῶν π, κ, ἵνα ἔχωμεν

α′) $\rho'=4\rho''$. β′) $\frac{\rho'}{\rho''}=\frac{2}{3}$, γ′) $\rho'^2+\rho''^2=5$,

δ′) $\rho'^2-\rho''=2$ ε′) $\rho'=\rho''$.

97) Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$. Νὰ εὑρεθοῦν συναρτήσει τῶν π καὶ κ αἱ ἀκόλουθοι ἐκφράσεις

α′) $\rho'^2+\rho''^2$, β′) $\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho''}$, γ′) $\frac{1}{\rho'^2}+\frac{1}{\rho''^2}$

98) Προσδιορίσατε τὸ λ εἰς τρόπον ὥστε αἱ δύο ἐξισώσεις $3\chi^2-(\lambda-1)\chi-2=0$ $6\chi^2+(2\lambda+3)\ \chi+\chi^2=0$ νὰ ἔχουν κοινὴν ρίζαν.

99) Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-4\chi+\alpha-2=0$· προσδιορίσατε τὸ α εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἐξίσωσις αὕτη νὰ ἔχῃ δύο ρίζας τῶν ὁποίων ἡ μία νὰ εἶναι τριπλασία τῆς ἄλλης καὶ λύσατε τὴν οὕτω ληφθεῖσαν ἐξίσωσιν.

100) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\frac{\chi}{\chi+\alpha}+\frac{\chi+\alpha}{\chi}=-2$ ἔχει μίαν ρίζαν διπλῆν, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ α.

101) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ χ', χ'' εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ δείξατε τὴν ταὐτότητα.

$$\frac{2\alpha\chi+\beta}{\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma}=\frac{1}{\chi-\chi'}+\frac{1}{\chi-\chi''}$$

102) Ἂν α, β, γ, εἶναι τρεῖς διακεκριμένοι ἀριθμοὶ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\frac{\chi+\alpha}{\chi-}+\frac{\chi+\beta}{\chi-\beta}+\frac{\chi+\gamma}{\chi-\gamma}=3$ ἔχει πάντοτε τὰς ρίζας της πραγματικάς.

103) Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

α′) $\chi^2+\chi\psi-5\psi^2+10\chi+12=0$ β′) $\chi^2-3\psi^2=7$

$3\chi-\psi=5$ $7\chi^2-5\chi\psi=18$

γ′) $3\chi^2-5\chi\psi+\psi^2=0$ δ′ $\frac{3}{\chi}-\frac{5}{\psi}=\frac{2}{7}$

$7\chi^2-2\chi\psi+3\psi^2+5\chi-2\psi=4$ $\frac{5}{\chi^2}-\frac{1}{\chi\psi}+\frac{2}{\psi^2}=3$

ε') $\chi^3-\psi^3=124$
$\chi-\psi=4$

στ') $\chi^4+\psi^4=82$
$\chi-\psi=2$

ζ') $(3\chi+2\psi-5)^2-7\,(3\chi+2\psi-5)+12=0$
$5\chi^2-4\chi-7\psi^2=2$

η') $(5\chi+3\psi)^2+5\,(5\chi+3\psi)+6=0$
$(2\chi-3\psi+1)^2+6\,(2\chi-3\psi+1)+15=0$

θ') $(\chi^2+\psi)^2-5\chi^2-5\psi=4$
$3\chi-2\psi=4$

104) 'Ομοίως τά:

α') $1+\dfrac{\psi^2}{\chi^2}=\dfrac{13}{3}\left(1+\dfrac{\psi}{\chi}\right)$
$4\chi+4\psi=3\chi\psi+9$

β') $(\chi^2+\psi^2)^2+3\,(\chi^2+\psi^2)\,(\chi+\psi)=70$
$(\chi+\psi)^2-(\chi+\psi)=2\chi\psi+2$

γ') $\dfrac{\chi}{\psi}+\dfrac{\psi}{\chi}=\dfrac{3}{\chi\psi}+1$
$\chi^4+\psi^4=17$

δ') $\chi^4+\chi^2\psi^2+\psi^4=481$
$\chi^2+\chi\psi+\psi^2=37$

ε') $\chi+\psi=7$
$(\chi^3+\psi^3)\,(\chi^2+\psi^2)=2275$

στ') $\chi^2+2\chi\psi+\psi^2=(\chi+\psi)\,(3\chi+1)$
$\chi^2-\psi^2+2\chi\psi+1=0$

ζ') $\chi^4+\chi^2\psi^2+\psi^4=21\,(\chi^2+\chi\psi+\psi^2)$
$\chi+\psi=3$

105) 'Ομοίως τά:

α') $\dfrac{\chi^2+\psi^2}{\chi\psi}=\alpha$
$\dfrac{\chi^4-\psi^4}{\chi^2\psi^2}=\beta$

β') $\dfrac{1}{\chi^2}-\dfrac{1}{\psi^2}=5$
$\dfrac{1}{\chi^4}+\dfrac{1}{\psi^4}=97$

γ') $\dfrac{1}{\chi^3}-\dfrac{1}{\psi^3}=\alpha$
$\dfrac{2}{\chi^6}+\dfrac{7}{\psi^6}=\beta$

δ') $\dfrac{1}{\chi^2+\psi+5}+\dfrac{7}{\chi^2+\psi+7}=3$
$5\chi^2-3\psi+4=2$

ε') $\dfrac{3}{4\chi^2+4\psi^2-\chi\psi+2}-\dfrac{5}{5\chi^2-2\psi^2+3}=4$
$\dfrac{8}{4\chi^2+4\psi^2-\chi\psi+2}+\dfrac{1}{5\chi^2-2\psi^2+3}=5$

στ') $\begin{cases} \chi(\psi+\omega)=8 \\ \psi(\omega+\chi)=18 \\ \omega(\chi+\psi)=20 \end{cases}$ ζ') $\begin{cases} \chi+\psi=\frac{1}{15}\chi\psi\omega \\ \psi+\omega=\frac{13}{120}\chi\psi\omega \\ \omega+\chi=\frac{11}{120}\chi\psi\omega \end{cases}$

η') $\begin{cases} (\chi+\psi)(\chi+\omega)=56 \\ (\psi+\omega)(\psi+\chi)=49 \\ (\omega+\chi)(\omega+\psi)=56 \end{cases}$ θ') $\begin{cases} \chi+\psi+\omega=\alpha \\ \chi^2+\psi^2+\omega^2=\beta \\ \chi\psi=\omega \end{cases}$

ι') $\begin{cases} \chi^2+\psi^2+\omega^2=21 \\ \chi\psi+\psi\omega+\omega\chi=14 \\ \chi+\psi=\omega-1 \end{cases}$ ια') $\begin{cases} \chi^2+\chi\psi-\varphi^2+\omega^2=10 \\ \chi+\psi+\varphi+\omega=10 \\ 2\chi+3\psi-\varphi-\omega=1 \\ \chi+\psi+5\varphi-4\omega=2 \\ \chi\psi+\chi\omega+\chi\varphi=10 \end{cases}$

ιβ') $\begin{cases} \chi\psi+\omega\varphi=\alpha \\ \chi\omega+\psi\varphi=\beta \\ \chi\varphi+\psi\omega=\gamma \\ \chi+\psi+\omega+\varphi=\delta \end{cases}$ ιγ') $\begin{cases} \chi(\psi\omega+\omega\varphi+\varphi\psi)=\alpha \\ \psi(\omega\varphi+\varphi\chi+\chi\omega)=\beta \\ \omega(\varphi\chi+\chi\psi+\psi\varphi)=\gamma \\ \varphi(\chi\psi+\psi\omega+\omega\chi)=\delta \end{cases}$

106. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες:

α') $5\chi^2-7\chi-6>0$, β') $6\chi^2-17\chi<9$

γ') $\frac{6\chi^2-5}{4}-\chi^2>5\chi-\frac{7\chi^2-1}{2}$

δ') $(\chi-5)^2-1<(\chi-3)(2\chi-5)$

ε') $\left(\chi-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\chi+\frac{1}{5}\right)\left(\chi-\frac{1}{5}\right)>0$

στ') $\frac{5\chi^2-3}{\chi^2-4\chi+4}>\frac{7}{\chi-2}-1$

ζ') $\frac{\chi^2-5\chi+6}{\chi^2-6+8}<0$

107. Ὁμοίως αἱ:

α') $\frac{\chi-4}{\chi-9}>7$ β') $\frac{\chi^2-3\chi+6}{\chi-5}<9$

γ') $\dfrac{\chi^2-3\chi+6}{\chi^2-7\chi+2} > 10$ δ) $(\chi-5)(\chi-7)(\chi-8) > 0$

ε') $\dfrac{\alpha\chi+\beta}{\gamma\chi+\delta} < 0$ στ') $\dfrac{\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma}{\lambda\chi^2+\mu\chi+\nu} > 0$

108) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἰσοδυνάμου πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς α ἔχοντος περίμετρον 4λ.

109) Λίθος τις ἀφίνεται ἐλεύθερος νὰ πέσῃ ἐκ τοῦ στομίου κενοῦ φρέατος, ἀκούεται δὲ ὁ κρότος, τὸν ὁποῖον παράγει κτυπῶν τὸν πυθμένα μετὰ 3'. Ζητεῖται τὸ βάθος τοῦ φρέατος. (ταχύτης ἤχου 340 μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον· ἐπιτάχυνσις σώματος πίπτοντος 9,81 μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον).

110) Λίθος τις ρίπτεται κατακορύφως ἐν τῷ κενῷ πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 35 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον. Ζητεῖται α') ἐπὶ πόσον χρόνον θὰ ἀνέρχεται καὶ β') εἰς ποῖον ὕψος θὰ φθάσῃ.

111) Νὰ εὑρεθοῦν πέντε διαδοχικοὶ ἀκέραιοι τοιοῦτοι ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν πρώτων νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἄλλων δύο.

112) Τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν ἀναλογίαν. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων εἶναι 41, τῶν μέσων 29, ὁ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων καὶ τῶν τεσσάρων εἶναι 1682. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

113) Τὰ ἄκρα τῶν δεικτῶν ἑνὸς ὡρολογίου πόλεως εἰς τὰς 3 ω. ἀπέχουν 50 ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου καὶ εἰς τὰς 6 ωρ. ἀπέχουν 70 ἑκ. τοῦ μέτρου. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν δεικτῶν.

114) Νὰ τραποῦν εἰς ἁπλᾶ τὰ κάτωθι διπλᾶ ριζικά:

α') $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$ β') $\sqrt{5-\sqrt{3}}$

γ') $\sqrt{2\alpha+2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, δ') $\sqrt{\alpha^2+\beta+2\alpha\sqrt{\beta}}$

ε') $\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{4}+\dfrac{\gamma}{2}.\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}$

στ') $\sqrt{2\alpha+2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$ ζ') $\sqrt{\dfrac{\chi^2\psi}{\varphi^2}+\psi\omega+\dfrac{\chi\psi\sqrt{4\omega}}{\varphi}}$

115) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἐξίσωσις $2\chi^3-3\chi^2+13\chi-12$ ἔχει τὴν ρίζαν $\chi=1$, νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἄλλαι δύο.

116) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τρεῖς ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^3-8=0$.

117) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

α') $\chi^3-5\chi^2+6\chi=0$, β') $(\chi-3)(\chi+2)(\chi-7)\left(\chi-\frac{1}{2}\right)=0$

γ') $(\chi^2-1)(3\chi+3)(-\chi+1)^2(\chi-2)=0$

δ') $\frac{5}{3\chi^2-2}+\frac{7}{5\chi^2+4}=\frac{2}{3}$

ε') $\left(\frac{1}{\chi-1}+\frac{1}{\chi-2}\right)-\left(\frac{1}{\chi+1}+\frac{1}{\chi+2}\right)=1$

118) Ὁμοίως αἱ:

α') $\chi^4-(\alpha^2+\beta^2)\chi^2+\alpha^2\beta^2=0$

β') $\alpha^2\beta^2\chi^4-(\alpha^4+\beta^4)\chi^2+1=0$

γ') $\chi^4-\alpha^2\chi^2=\alpha^2\beta^2-\beta^2\chi^2$, δ') $(\chi-\alpha)^4-\beta^4=0$.

119) Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

α') $\chi+\sqrt{\chi-20}=0$, β') $\chi^2-6\chi+9=4\sqrt{\chi^2-6\chi+6}$

γ') $\sqrt{2}\sqrt{\chi-1}+\sqrt{34-\chi}=9$

δ') $\sqrt{\chi+11+\sqrt{\chi^2+5\chi+50}}=9$

ε') $\sqrt{4\chi+13}-\sqrt{15-2\chi}=\sqrt{2(3\chi-7)}$

στ') $\sqrt{\frac{\chi}{2}-8}+\sqrt{\frac{5\chi}{3}+9}=\sqrt{\frac{10\chi}{3}+1}$

ζ') $\sqrt{\frac{7-2\chi}{7+2\chi}}+\sqrt{\frac{7+2\chi}{7-2\chi}}=\frac{3}{2}+\sqrt{2}$

120) Ὁμοίως αἱ:

α') $\sqrt{\lambda^2-\chi}+\sqrt{\mu^2+\chi}=\lambda+\mu$

β') $\sqrt{\frac{\chi}{\chi+\lambda}}-\sqrt{-\frac{\chi+\lambda}{\chi}}=4$

γ') $\sqrt{\alpha\chi+2}+\sqrt{\beta\chi+2}=\sqrt{\gamma\chi+2}$

δ') $\sqrt{\frac{1-\alpha\chi}{1+\alpha\chi}}-\sqrt{\frac{1+\alpha\chi}{1-\alpha\chi}}=1$

ε') $\sqrt{\alpha+\sqrt{\chi}}+\sqrt{\alpha-\sqrt{\chi}}=\sqrt{\chi}$

121) Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα:

α') $\chi^2-\psi\sqrt{\chi\psi}=14$

$\chi^2-\chi\sqrt{\chi\psi}=-7$

β') $3\chi+2\psi-5+3\sqrt{3\chi+2\psi-5}+1=0$

$5\chi-3\psi+7=0$

γ') $\sqrt[3]{\chi}-\sqrt[3]{\psi}=1$

$\chi-\psi=217$

δ') $\sqrt{\chi+\psi}+\sqrt{\chi-\psi}=\alpha$

$\chi+\psi=\beta$

122. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τελευταῖος ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῶν κάτωθι ἀριθμητικῶν προόδων.

α') $\frac{1}{3}$, $5\frac{1}{3}$, $10\frac{1}{3}$................ (37 ὅροι)

β') $12\alpha-7\beta$, $11\alpha-8\beta$, $10\alpha-9\beta$,.......... (15 ὅροι)

γ') $\frac{\alpha+3\beta}{2\gamma}$, $\frac{3\alpha-7\beta}{9\gamma}$, ... (α ὅροι)

δ') 1, $\frac{\nu+1}{\nu}$ $\frac{\nu+2}{\nu}$ .... (μ ὅροι)

ε') $\frac{\alpha^2-1}{\alpha}$, α, $\frac{\alpha^2+1}{\alpha}$ .... (ν ὅροι)

123. Τὸ ἄθροισμα τοῦ 3ου καὶ τοῦ 5ου ὅρου μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι 32, τὸ δὲ ἄθροισμα τοῦ 4ου καὶ τοῦ 10ου 50. Νὰ εὑρεθῇ ὁ 20ὸς ὅρος ταύτης.

124. Εὕρετε 4 ὅρους ἀποτελοῦντας ἀριθμητικὴν πρόοδον τοιούτους, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν μὲν ἄκρων νὰ εἶναι 600, τῶν δὲ μέσων 8000.

125. Πόσοι ἀριθμοὶ πενταψήφιοι εἶναι διαιρετοὶ διὰ 8;

126. Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν τριψηφίων ἀριθμῶν οἵτινες διαιρούμενοι διὰ 4 δίδουν ὑπόλοιπον τὴν μονάδα;

127. Τὸ ἄθροισμα τριῶν διαδοχικῶν ὅρων ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ εἶναι 10, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των 52. Ποῖοι οἱ τρεῖς αὐτοὶ ὅροι;

128. Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἐὰν τὸ ἄθροισμα των εἶναι 20 καὶ τὸ τῶν ἀντιστρόφων των $\frac{1}{24}$.

129. Δίδεται ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος $\frac{\nu+1}{\nu}$, $\frac{\nu-1}{\nu}$, ...

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀπὸ τοῦ 13ου μέχρι τοῦ 25ου συμπεριλαμβανομένου.

130. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον καὶ οἱ

$$\alpha\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right), \quad \beta\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right), \quad \gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right),$$

ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον καθὼς καὶ οἱ

$\alpha^2(\beta+\gamma)$, $\beta^2(\gamma+\alpha)$, $\gamma^2(\alpha+\beta)$.

131. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τελευταῖος ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῶν κάτωθι γεωμετρικῶν προόδων:

α΄) $5, \quad 0{,}5 \quad 0{,}05, \quad 0{,}005, \ldots$ (8 ὅρ.)

β΄) $\frac{1}{12}, \quad \frac{1}{3} \quad 1\frac{1}{3}, \ldots\ldots$ (7 ὅρ.)

γ΄) $3, \quad -4, \quad 5\frac{1}{3}, \ldots\ldots$ (5 ὅρ.)

δ΄) $\frac{\alpha^\mu}{\beta^\rho}, \quad \frac{\alpha^{\mu+1}}{\beta^{\rho+1}} \quad \frac{\alpha^{\mu+2}}{\beta^{\rho+2}}, \ldots\ldots$ (6 ὅρ.)

ε΄) $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}, \quad \sqrt[\nu]{\alpha^{2\mu}}, \quad \sqrt[\nu]{\alpha^{3\mu}}, \ldots\ldots$ (ν ὅρ.)

132) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῶν κάτωθι γεωμετρικῶν προόδων:

α΄) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16} \ldots\ldots$

β) $2^3, \quad 2^2, \quad 2 \quad 1, \ldots\ldots$

γ΄) $128, \quad 64\sqrt{2}, \quad 64, \quad 32\sqrt{2}, \ldots\ldots$

δ΄) $\frac{\alpha^\mu}{\beta^\rho}, \frac{\alpha^{\mu+1}}{\beta^{\rho-1}}, \frac{\alpha^{\mu+2}}{\beta^{\rho-2}}, \ldots\ldots$ ὅπου $|\alpha.\beta| < 1$

133) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τελευταῖος ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν κάτωθι σειρῶν:

α΄) $0{,}5, \quad 1{,}05, \quad 2{,}005, \quad 3{,}0005 \ldots\ldots$ (10 ὅροι)

β΄) $1+\alpha, \quad 2+\alpha^2, \quad 3+\alpha^3, \quad 4+\alpha^4 \ldots\ldots$ (α ὅροι)

γ΄) $\alpha-\frac{\beta}{\gamma}, \; 2\alpha-\frac{\beta^2}{\gamma^2}, \; 3\alpha-\frac{\beta^3}{\gamma^3}, \; 4\alpha-\frac{\beta^4}{\gamma^4} \ldots\ldots$ (ν ὅροι)

134) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῶν κάτωθι σειρῶν:

α΄) $\chi, \; 2\chi^2, \; 3\chi^3, \; 4\chi^4 \ldots\ldots$ ($|\chi| < 1$)

τοῦτο γράφεται $(\chi+\chi^2+\chi^3+\chi^4+\ldots)+(\chi^2+\chi^3+\chi^4+\ldots)+$
$+(\chi^3+\chi^4 \ldots\ldots) + \ldots\ldots$

β') $\alpha, (\alpha+\beta)x, (\alpha+2\beta)x^2, (\alpha+3\beta)x^3 \ldots\ldots\ldots (|x|<1)$

γ') $1, \frac{1+\alpha}{\beta}, \frac{1+2\alpha}{\beta^2}, \frac{1+3\alpha}{\beta^3}, \ldots\ldots\ldots\ldots (|\beta|<1)$

135) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\ldots\ldots\frac{1}{2^\nu+1}+\ldots\ldots\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{(2^\nu+1)^2}+\ldots\ldots\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{(2^\nu+1)^3}+\ldots\ldots\right)+\ldots\ldots\ldots$$

136) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου:

$\alpha, \quad \alpha\omega, \quad \alpha\omega^2 \ldots\ldots\ldots$

Ἐφαρμογή. $\alpha=5, \quad \omega=2, \quad \nu=7.$

137) Τρεῖς ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων εἶναι 18, τῶν δὲ δύο τελευταίων 225. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τρεῖς οὗτοι ἀριθμοί.

138) Εὕρετε γεωμετρικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας ὁ τρίτος καὶ ὁ τέταρτος ὅρος ἔχουν ἄθροισμο 36, ὁ δὲ πρῶτος καὶ ὁ πέμπτος γινόμενον 146.

139) Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνο πλευ ρᾶ α. Ἑνοῦντες τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, λαμβάνομεν νέον ἰσόπλευρον τρίγωνον. Ἑνοῦντες καὶ τούτου τὰ μέσα τῶν πλευρῶν, λαμβάνομεν νέον ἰσόπλευρον τρίγωνον κ.ο.κ. ἐπ'ἄπειρον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὅλων αὐτῶν τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων.

140. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

α')	$\overline{3},52845.7,$	β')	$\overline{20},84175.6$
γ')	$\overline{3},45853.(-2),$	δ')	$\overline{4},92156.15$
ε')	$\overline{9},00329:5,$	στ')	$\overline{7},82943:10$
ζ')	$\overline{8},4295:(-4)$	η')	$\overline{19},14892:(-20)$

141. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων τῇ βοηθείᾳ τῶν λογαρίθμων:

α') $\frac{135,20.120,30}{125,15}$ β') $\frac{(0,64325)^3}{1420,25}$

γ') $\dfrac{(-\bar{1}0,1842)}{\sqrt[4]{54,825}}$ δ' $\dfrac{\sqrt[5]{(120,3)^2}\cdot\sqrt[4]{(129}}{\sqrt[10]{0,00342}}$

ε') $\left(\sqrt[7]{2,47}\right).\sqrt[4]{23,2\,.\sqrt{0,0425}}$

ζ') $\dfrac{(0,0040)^8\,.\,3,245\,.\sqrt[4]{\pi}}{(0,002245)^{-4}.9,93.\sqrt[3]{52\pi^2}}$ (ὅπου π εἶναι ὁ γνωστὸς λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον).

142) Νὰ παρεμβληθοῦν μεταξὺ τῶν –84,25 καὶ 192,82 8 ἀριθμοὶ ὥστε ν'ἀποτελεσθῇ γεωμετρικὴ πρόοδος.

143) Τοποθετοῦμεν ἐπὶ 6 ἔτη ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 4%₀ ἓν κεφάλαιον 28400 δρχ. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ ἔπρεπε νὰ τοποθετήσωμεν αὐτὸ τὸ κεφάλαιον καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον (μὲ ἁπλοῦν τόκον) διὰ νὰ λάβωμεν τὸ αὐτὸ ποσόν;

144) Τοποθετοῦμεν 18500 δρχ. ἐπ'ἀνατοκισμῷ πρὸς 6% ἐπὶ 8 ἔτη. Ποῖον ποσὸν θὰ ἔπρεπε νὰ τοποθετήσωμεν κατὰ τὴν αὐτὴν χρονικὴν διάρκειαν (τῶν 8 ἐτῶν) ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 5o)o ἵνα λάβωμεν τὸ αὐτὸ ποσόν;

145) Πατὴρ τις ἀφήνει εἰς τοὺς δύο υἱούς του τῶν ὁποίων αἱ ἡλικίαι διαφέρουν κατὰ 5 ἔτη ἓν ποσὸν 60000 δρχ. Τὸ μερίδιον ἑκάστου υἱοῦ θὰ ἀνατοκισθῇ πρὸς 6% καὶ θὰ ληφθῇ, ὅταν ἐνηλικιωθῶσι. Πῶς πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν διανομὴν ἵνα ἀμφότεροι λάβουν τὸ αὐτὸ ποσόν;

146) Καπνιστής τις ἐξοδεύει ἀπὸ τοῦ 15 ἔτους τῆς ἡλικίας του 6,25 δρχ. καθ'ἑκάστην. Πόσον κεφάλαιον θὰ εἶχεν εἰς τὸ, 50ον ἔτος τῆς ἡλικίας του, ἐὰν κατέθετε εἰς τὴν Τράπεζαν ἐπ'ἀνατοκισμῷ πρὸς 6% εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους τὰς δραχμάς, τὰς ὁποίας ἐξοδεύει;

147) Πρόκειται νὰ δανεισθῇ τις μετὰ 5 ἔτη 60000 δρχ. μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 5%, ὑποχρεούμενος νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του δι' 20 ἴσων ἐτησίων δόσεων ἀπὸ σήμερον. Ζητεῖται τὸ χρεωλύσιον.

148) Δανείζεταί τις σήμερον 100000 δρχ. πρὸς 4%. Μετὰ τριετίαν θὰ ἀρχίσῃ νὰ πληρώνῃ κατ'ἔτος 10000 δρχ. Εἰς πόσον χρόνον θὰ ἐξοφλήσῃ οὕτω τὸ χρέος του;

149) Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις ἄνευ τῆς χρήσεως λογαριθμικῶν πινάκων.

α′) $4^{x} = 2^{x+3}$, β′) $x^{x^2-5x+6} = 1$.

γ′) $4 . 2^{x-1} = 8^{x} : 2$, δ′) $2^{x} . 8^{x} = 16$

ε′) $\sqrt[x]{13} = 13^{x}$, στ′) $10^{\sqrt{x}} = 100$

ζ′) $\left(\alpha^{2x}\right)^{(6x+2)} = \left[(\sqrt{\alpha})^{x+13}\right]^{-2}$ ὅπου $\alpha > 0$ καὶ $\neq 1$.

150) Ὁμοίως αἱ:

α′) $\lambda o\gamma . \frac{x}{3} + \lambda o\gamma . \frac{x}{5} = \lambda o\gamma . 2$

β′) $\lambda o\gamma . \frac{2}{4} + 2 . \lambda o\gamma . \frac{x}{4} = 3 \lambda o\gamma . x - \lambda o\gamma . \frac{x}{3}$

γ′) $\lambda o\gamma . \left(\frac{x}{4}\right) - 2 \lambda o\gamma . \left(\frac{x}{6}\right) = 3 \lambda o\gamma . x - 4 \lambda o\gamma . 4$

δ′) $\lambda o\gamma . (x-1) = \lambda o\gamma . (x+1) - 1$

ε′) $\lambda o\gamma . (9x^2 - 13x - 2) = 2 \lambda o\gamma . (x-1) + 1$.

151) Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

α′) $2^{x} + 3^{\psi} = 11$
$2^{x} - 3^{\psi} = 5$

β′) $18^{x} . 7^{\psi} = 324.18$
$7^{x} . 7^{\psi} = 343.49$

γ′) $\alpha^{x+2\psi} . \alpha^{x-\psi} = \alpha^{15}$
$\alpha^{x-2\psi} . \alpha^{2x+3\psi} = \alpha^{22}$ ὅπου $\alpha > 0$ καὶ $\alpha \neq 1$

δ′) $3^{2x+1} = 9^{\psi+1}$
$2^{4x+1} = 32^{\psi^2+1}$

152) Ὁμοίως αἱ:

α′) $x - \psi = 29$
$\lambda o\gamma\, x + \lambda o\gamma\, \psi = 2$,

β′) $x - \psi = 3$
$\lambda o\gamma\, x + \lambda o\gamma\, \psi = 1$,

γ′) $x^2 + \psi^2 = \alpha$
$\lambda o\gamma\, x + \lambda o\gamma\, \psi = 3$

δ′) $\lambda o\gamma \sqrt{x} - \lambda o\gamma \sqrt{\psi} = \beta$,
$\lambda o\gamma \sqrt{x+\psi} = \alpha$

ε′) $x^{\psi} = \psi^{x}$
$3x = \psi$

στ′) $2^{x} - 2^{\psi} = 207$
$x = \psi - 1$

ΤΕΛΟΣ