Ψηφιοποιη... από το ...ούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

25^{00}

17906

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΙΩΑΝ. Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ | ΧΡ. Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν τοῦ Πειραματικοῦ Σχολείου Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΠΡΩΤΗ
ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ
ΔΙΑ ΤΗΝ ΠΕΝΤΑΕΤΙΑΝ
19

1931-1936

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΑΙ: Ι. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΣ & ΣΙΑ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ„
8α—Ὁδὸς Πεσμαζόγλου—8α
1931

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πᾶν ἀντίτυπον, μὴ φέρον τὴν ὑπογραφὴν τοῦ κ. Χρ. Μπαρμπαστάθη καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ Βιβλιοπωλείου τῆς «Ἑστίας», θεωρεῖται ἐκ τυποκλοπίας προερχόμενον.

Μπαρμπαστάθης

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΕΣΤΙΑΣ
Ι. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & Σ^ΑΣ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

Τύποις Χριστ. Π. Χαλκιοπούλου, Γερανίου 11 β

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Ἀντώνιος Γ. Τσιγάντας

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΠΡΩΤΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Εἰς τὰ πράγματα, ἅτινα βλέπομεν ἢ ἐγγίζομεν καὶ τὰ ὁποῖα καλοῦμεν ὑλικὰ σώματα, διακρίνομεν (πλὴν τῆς ὕλης, ἐξ ἧς ἀποτελοῦνται) σχῆμα καὶ ἔκτασιν ἢ μέγεθος.

2. ***Γεωμετρία*** λέγεται ἡ ἐπιστήμη, ἥτις ἐξετάζει τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν.

3. Ὅταν ἐξετάζωμεν μόνον τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν τῶν σωμάτων ἀδιαφοροῦντες περὶ τῆς ὕλης, ἐξ ἧς ἀποτελοῦνται, καλοῦμεν αὐτὰ ***σώματα γεωμετρικὰ ἢ στερεά.***

4. Πᾶν τὸ ἔχον ἔκτασιν δύναται νὰ νοηθῇ διῃρημένον εἰς μέρη.

5. Τὰ ἄκρα ἑκάστου σώματος ἀποτελοῦσιν ὅλα ὁμοῦ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ. Καὶ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν διακρίνομεν σχῆμα καὶ ἔκτασιν· ἀλλ' ἡ ἔκτασις τῆς ἐπιφανείας εἶναι ἄλλου εἴδους ἢ ἡ ἔκτασις τῶν σωμάτων.

6. Τὰ ἄκρα τῆς ἐπιφανείας ἢ μέρους τῆς ἐπιφανείας ἀποτελοῦσιν ὅλα ὁμοῦ ***γραμμήν.*** Καὶ εἰς τὴν γραμμὴν διακρίνομεν σχῆμα καὶ ἔκτασιν· διαφέρει ὅμως ἡ ἔκτασις τῆς γραμμῆς ἀπὸ τῶν δύο προηγουμένων.

7. Τὰ ἄκρα γραμμῆς ἢ μέρους γραμμῆς λέγονται ***σημεῖα.*** Τὸ δὲ σημεῖον δὲν ἔχει ἔκτασιν οὔτε μέρη.

8. Τὸ μέρος εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς πρὸς τὸ ὅλον, ἤτοι τὰ μέρη τοῦ σώματος εἶναι σώματα, τὰ μέρη τῆς ἐπιφανείας εἶναι ἐπιφάνειαι καὶ τὰ μέρη τῆς γραμμῆς γραμμαί.

Τὰ σημεῖα καὶ αἱ γραμμαὶ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι ἐξετάζονται ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ καὶ καθ' ἓν χωριστά, ἤτοι ***ἄνευ τῶν σωμάτων εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται,*** καθὼς εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ἐξετάζονται οἱ ἀριθμοὶ καὶ ἄνευ τῶν πραγμάτων, τῶν ὁποίων τιμαὶ εἶναι.

9. Ὅταν ἐξετάζωμεν τὰ στερεά, τὰς ἐπιφανείας καὶ τὰς γραμ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μάς ὡς πρὸς τὸ σχῆμα, λέγομεν καὶ αὐτὰ ἑνὶ ὀνόματι **σχήματα**, ὅταν δὲ ὡς πρὸς τὴν ἔκτασιν, τὰ λέγομεν **ποσὰ γεωμετρικὰ** ἢ **μεγέθη**.

Σημείωσις. Τὰ σημεῖα, αἱ γραμμαί, αἱ ἐπιφάνειαι καὶ τὰ στερεὰ παρίστανται δι' εἰκόνων, αἵτινες καὶ αὗται λέγονται **σχήματα**.

10 Ἡ Γεωμετρία θεμελιοῦται ἐπί τινων προτάσεων, διὰ τῶν ὁποίων σκεπτόμενοι διακρίνομεν τὸ ἀληθὲς ἀπὸ τοῦ ψευδοῦς· διότι, ὅσα μὲν πρὸς αὐτὰς ἀντιβαίνουσι, λέγομεν ψευδῆ, ὅσα δὲ συμφωνοῦσι, λέγομεν ἀληθῆ· περὶ τῶν προτάσεων ὅμως τούτων οὐδεμίαν δεχόμεθα ἀντίρρησιν θεωροῦντες αὐτὰς **ὡς ἀφ' ἑαυτῶν φανεράς**. Αἱ προτάσεις αὗται λέγονται **ἀξιώματα** ἢ **αἰτήματα**. Π. χ.

Πᾶν σχῆμα δύναται νὰ ἀλλάξῃ θέσιν χωρὶς αὐτὸ νὰ μεταβληθῇ τὸ παράπαν.

11. ***Ἀπόδειξις*** λέγεται συλλογισμὸς (ἢ πολλοὶ συλλογισμοί), δι' οὗ πειθόμεθα, ὅτι πρότασίς τις εἶναι ἀληθής.

12. ***Θεώρημα*** δὲ λέγεται ἡ πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερὰ διὰ τῆς ἀποδείξεως.

13. ***Πόρισμα*** λέγεται πρότασις στηριζομένη ἀμέσως ἐπὶ μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἀληθῶν προτάσεων.

14. ***Πρόβλημα*** λέγεται πρότασις, ἐν ᾗ ζητεῖται νὰ γίνῃ τι.

15. ***Λύσις*** τοῦ προβλήματος λέγεται ἡ ἐκτέλεσις τοῦ ζητουμένου.

16. Πᾶσα πρότασις ἀποτελεῖται ἐκ τῆς ὑποθέσεως ἢ τοῦ δεδομένου καὶ ἐκ τοῦ συμπεράσματος ἢ τοῦ ζητουμένου.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ

17. ***Ἴσα*** λέγονται δύο σχήματα, ὅταν δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσι, τουτέστι νὰ καταλάβωσι τὸν αὐτὸν τόπον, ὥστε πᾶν σημεῖον τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι σημεῖον καὶ τοῦ ἄλλου

18. ***Ἰσοδύναμα ἢ ἴσα κατὰ μέρη*** λέγονται δύο σχήματα τὰ ὁποῖα, ἐνῷ δὲν ἐφαρμόζωσιν ἀκέραια, ἐφαρμόζωσιν ἀφοῦ διαιρεθῶσιν εἰς μέρη.

Μικρότερον ἄλλου λέγεται σχῆμά τι, ἐὰν εἶναι ἴσον πρός τι μέρος αὐτοῦ, τὸ δὲ ἄλλο λέγεται ***μεγαλύτερον***.

Ἄνισα λέγονται δύο σχήματα, ἐὰν τὸ ἓν εἶναι ἴσον μὲ μέρος τι τοῦ ἄλλου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ

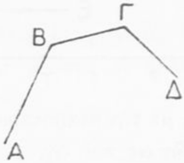
19. ***Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα εἶναι καὶ ἀλλήλοις ἴσα.***

20. ***Δύο σχήματα δὲν δύνανται νὰ εἶναι καὶ ἴσα καὶ ἄνισα.*** Τουτέστι κατά τινα μὲν τρόπον διαιρέσεως καὶ ἐπιθέσεως νὰ ἐφαρμόζωσι, κατ' ἄλλον δὲ νὰ εἶναι τὸ ἓν μέρος τοῦ ἄλλου.

Σημείωσις. Πρὸς παράστασιν τῆς ἰσότητός ἢ τῆς ἀνισότητος δύο γεωμετρικῶν μεγεθῶν μεταχειριζόμεθα τὰ ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς γνωστὰ σύμβολα ($=<,>$) διὰ τῶν ὁποίων σημειοῦται ἡ ἰσότης ἢ ἡ ἀνισότης τῶν ἀριθμῶν.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΓΡΑΜΜΗΣ

21. Ἡ ἁπλουστάτη τῶν γραμμῶν εἶναι ἡ ***εὐθεῖα γραμμή***, ἧς ἰδέαν ἔχομεν πάντες· σχηματίζομεν δ' αὐτὴν βλέποντες κλωστὴν ἢ τρίχα λεπτοτάτην τεταμένην, ἥτις ὅσῳ λεπτοτέρα εἶναι τόσῳ περισσότερον προσεγγίζει πρὸς τὴν εὐθεῖαν γραμμήν.



22. ***Τεθλασμένη γραμμὴ*** λέγεται ἡ ἐξ εὐθειῶν μὲν συγκειμένη, μὴ οὖσα δὲ εὐθεῖα· τοιαύτη εἶναι ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔ.

23. ***Καμπύλη*** λέγεται ἐκείνη, τῆς ὁποίας οὐδὲν μέρος εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

24. ***Μικτὴ*** δὲ λέγεται ἡ γραμμή, ἥτις ἀποτελεῖται ἐξ εὐθειῶν καὶ καμπύλων γραμμῶν.

Ὅτι δὲ ὑπάρχουσι καὶ τοιαῦται γραμμαί, θὰ δειχθῇ ἐν τοῖς ἑπομένοις.

25. Περὶ τῆς εὐθείας γραμμῆς δεχόμεθα τὰ ἑπόμενα ἀξιώματα, ἅτινα ἐκφράζουσι τὰς θεμελιώδεις ἰδιότητας αὐτῆς.

1) ***Πᾶν μέρος εὐθείας γραμμῆς εἶναι καὶ αὐτὸ εὐθεῖα γραμμή.***

2) ***Ἐκ παντὸς σημείου εἰς πᾶν ἄλλο σημεῖον ἄγεται μία εὐθεῖα γραμμὴ καὶ μόνον μία.***

3) ***Πᾶσα εὐθεῖα δύναται νὰ αὐξηθῇ ἑκατέρωθεν ἑαυτῆς καὶ προχωρεῖ, ἐφ' ὅσον θέλομεν, χωρὶς νὰ διχασθῇ.***

4) ***Πᾶσα εὐθεῖα δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ πάσης ἄλλης οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσωσι δύο οἱαδήποτε πέρατα αὐτῶν.***

Ἐὰν τότε καὶ τὰ ἕτερα δύο πέρατα συμπίπτωσιν, αἱ εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι· εἰ δὲ μή, ἡ μία εἶναι μικροτέρα τῆς ἄλλης

5) ***Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης γραμμῆς, ἐχούσης τὰ αὐτὰ πέρατα.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

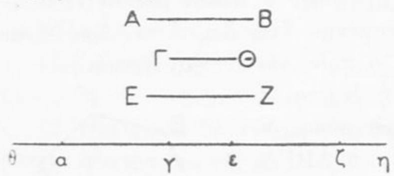
6) ***Ἐκ δύο εὐθειῶν δύναται πάντοτε ἡ μικροτέρα πολλαπλασιαζομένη νὰ ὑπερβῇ τὴν μεγαλυτέραν.***

Σημ. Διὰ νὰ χαράξωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ τοῦ πίνακος εὐθείας γραμμὰς χρησιμοποιοῦμεν τὸν κανόνα.

26. **Ὁρισμοί.** ***Ἀπόστασις*** ἢ ***ἀπόστημα*** δύο σημείων λέγεται ἡ εὐθεῖα ἡ ταῦτα συνδέουσα.

27. ***Ἄθροισμα*** δύο ἢ περισσοτέρων εὐθειῶν λέγεται ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσιν αὗται, ὅταν τεθῶσι κατὰ σειρὰν ἐπὶ ἄλλης εὐθείας.

Π. χ. τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΘ, ΕΖ, ἄθροισμα εἶναι ἡ εὐθεῖα αζ, ἣν εὑρίσκομεν λαμβάνοντες (συνήθως διὰ τοῦ διαβήτου) ἐπὶ τῆς εὐθείας θη τὰ τρία συνεχῆ μέρη αγ, γε, εζ ἴσα πρὸς τὰς δοθείσας εὐθείας.



Διαφορὰ δὲ δύο ἀνίσων εὐθειῶν λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἥτις μένει, ὅταν ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας, ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτῆς, ἀποκοπῇ μέρος ἴσον μὲ τὴν μικροτέραν. Π. χ. ἡ εὐθεῖα γε εἶναι διαφορὰ τῶν εὐθειῶν αε καὶ αγ.

Σημείωσις. Αἱ πράξεις σημαίνονται καὶ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ διὰ τῶν αὐτῶν σημείων, δι᾽ ὧν καὶ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ. Οὕτω π. χ., $\alpha+\beta$ δηλοῖ τὸ ἄθροισμα τῶν γραμμῶν α καὶ β, $\alpha-\beta$ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, 2α τὸ διπλάσιον τῆς α, ἤτοι $\alpha+\alpha$ καὶ $\frac{\alpha}{2}$ τὸ ἥμισυ αὐτῆς.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

Ἐκ τοῦ 4ου ἀξιώματος τῶν εὐθειῶν ἕπεται ἀμέσως ὅτι

Δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι ἢ ἐφαρμόζουσιν ἐπ᾽ ἀλλήλων ἢ ἡ μία ἐξ αὐτῶν ἐφαρμόζει ἐπί τινος μέρους τῆς ἄλλης· τοὐτέστι δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι εἶναι ἢ ἴσαι ἢ ἄνισοι.

Ἐκ τούτου πηγάζουσιν αἱ ἑξῆς ἰδιότητες τῆς ἰσότητος τῶν εὐθειῶν, ἀποδεικνυόμεναι εὐκόλως (ἰδ. 19. 20).

28. ***Ἐὰν εὐθεῖα τιθεμένη ἐπὶ τῆς ἄλλης ἐφαρμόζῃ ἐπ᾽ αὐτῆς, θὰ ἐφαρμόζῃ καὶ ὅταν τεθῇ ἀντιστρόφως.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

29. ***Αἱ κατὰ μέρη ἴσαι εὐθεῖαι εἶναι καὶ ἀκέραιαι ἴσαι.***

30. ***Ἐν τῇ προσθέσει τῶν εὐθειῶν (ὡς καὶ τῶν ἀριθμῶν) ἡ τάξις, καθ' ἣν λαμβάνονται αἱ γραμμαί, εἶναι ἀδιάφορος.***

Σημείωσις. Καὶ πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως τῶν ἀριθμῶν ἀληθεύουσι καὶ περὶ τῶν εὐθειῶν γραμμῶν.

Παρατ. Ἡ ἰσότης καὶ ἡ ἀνισότης τῶν εὐθειῶν ἔχει καὶ τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος καὶ τῆς ἀνισότητος τῶν ἀριθμῶν.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

31. ***Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια*** ἢ ἁπλῶς ***ἐπίπεδον*** λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζει πανταχοῦ, ἤτοι ***ἡ διὰ δύο οἱωνδήποτε σημείων αὐτῆς ἀγομένη εὐθεῖα κεῖται ὅλη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.***

Δεχόμεθα δὲ ὡς ἀξίωμα τὴν ὕπαρξιν τοιαύτης ἐπιφανείας ἧς εἰκόνα παρέχει ἡμῖν ἡ ἐπιφάνεια ἠρεμοῦντος ὕδατος ἢ ἄλλαι ὅμοιαι ἐπιφάνειαι.

Περὶ τοῦ ἐπιπέδου δεχόμεθα τὰ ἀξιώματα.

1) ***Πᾶν ἐπίπεδον δύναται νὰ αὐξηθῇ, ἐφ' ὅσον θέλομεν, πέριξ ἑαυτοῦ.***

2) ***Πᾶν ἐπίπεδον δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ παντὸς ἐπιπέδου οὕτως ὥστε νὰ ἀποτελέσωσιν ἓν μόνον ἐπίπεδον· γίνεται δὲ ἡ ἐπίθεσις αὕτη, καὶ ὅταν ἓν τῶν ἐπιπέδων ἀντιστραφῇ.***

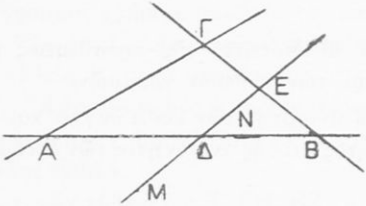
3) ***Ἂν εἰς ἐπίπεδον ὑπάρχῃ γραμμή τις, ἡ εὐθεῖα ἥτις συνδέει δύο σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἑκατέρωθεν τῆς γραμμῆς, τέμνει αὐτήν.***

32. **Ὁρισμός.** ***Ἐπίπεδον σχῆμα*** λέγεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια πανταχόθεν περατουμένη. Ἡ δὲ γραμμὴ εἰς ἣν περατοῦται τὸ σχῆμα λέγεται γενικῶς ***περίμετρος.***

33. **Ἀξίωμα.** ***Ἐὰν μέρος εὐθείας κεῖται ἐντὸς ἐπιπέδου σχήματος, ἡ εὐθεῖα αὕτη ἐκβαλλομένη ἑκατέρωθεν ἑαυτῆς, ἐξέρχεται ἐκ τοῦ σχήματος.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

34. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ἔχουσι κοινὰ τρία σημεῖα, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ἐφαρμόζουσι καὶ ἀποτελοῦσιν ἓν ἐπίπεδον.***



Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, ἔχοντα κοινὰ τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ μὴ κείμενα ἐπὶ μιᾶς εὐθείας· λέγω, ὅτι καὶ πάντα τὰ ἄλλα σημεῖα αὐτῶν ἔχουσι κοινά.

Ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ θὰ κεῖται ὅλη καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ (§ 31). Ἔστω νῦν Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π· ἐὰν ληφθῇ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου σημεῖόν τι Ν ἐντὸς τοῦ σχήματος ΑΒΓ καὶ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Ν ἡ εὐθεῖα ΝΜ, αὕτη θὰ ἐξέλθῃ ἐκ τοῦ σχήματος ΑΒΓ καὶ θὰ τέμνῃ τὴν περατοῦσαν αὐτὸ τεθλασμένην γραμμὴν ΑΒΓ εἰς δύο τοὐλάχιστον σημεῖα, τὰ Δ καὶ Ε. Τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι καὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ σημεῖα· ἄρα καὶ ἡ ὅλη εὐθεῖα ΔΕ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ· ἄρα καὶ τὸ Μ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π εἶναι σημεῖον καὶ τοῦ Ρ· ὁμοίως δὲ δεικνύεται, ὅτι καὶ ἀντιστρόφως πᾶν σημεῖον τοῦ Ρ εἶναι σημεῖον καὶ τοῦ Π, τουτέστι τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ἔχουσι πάντα τὰ σημεῖα αὐτῶν κοινά.

35. Πόρισμα. ***Ἐὰν αἱ περίμετροι δύο ἐπιπέδων σχημάτων ἐφαρμόζωσι καὶ τὰ σχήματα ἐφαρμόζουσι.***

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

36. Ἡ Γεωμετρία διαιρεῖται εἰς δύο μέρη. Καὶ ἐν μὲν τῷ πρώτῳ ἐξετάζονται σχήματα, τῶν ὁποίων πάντα τὰ σημεῖα κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου· ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ σχήματα οἱαδήποτε. Καλεῖται δὲ τὸ μὲν πρῶτον μέρος ***Ἐπίπεδος Γεωμετρία*** ἢ ***Ἐπιπεδομετρία***, τὸ δὲ δεύτερον ***Στερεὰ Γεωμετρία*** ἢ ***Στερεομετρία***.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

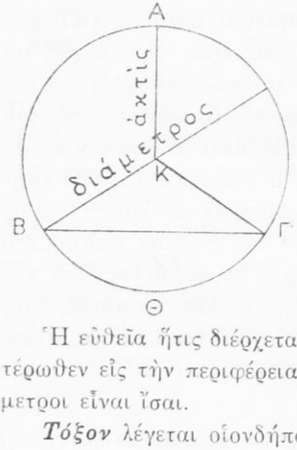
ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

37. **Ὁρισμοί.** Ὅταν πάντα τὰ σημεῖα τὰ κοινήν τινα ἰδιότητα ἔχοντα, εὑρίσκονται ἐπί τινος γραμμῆς, πάντα δὲ τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς ταύτης ἔχωσι τὴν κοινὴν ἐκείνην ἰδιότητα, ἡ γραμμὴ λέγεται ***γεωμετρικὸς τόπος*** ἢ ἁπλῶς ***τόπος*** [1]) τῶν σημείων, τῶν τὴν ἰδιότητα ἐκείνην ἐχόντων.

38. ***Περιφέρεια κύκλου*** λέγεται ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἐπιπέδου ἀπεχόντων ἴσον ἀπὸ ἓν σημεῖον αὐτοῦ, καλούμενον ***κέντρον*** τῆς περιφερείας.



Τὸ τμῆμα τοῦ ἐπιπέδου τὸ περατούμενον εἰς τὴν περιφέρειαν λέγεται ***κύκλος.***

Ἡ εὐθεῖα ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ κέντρου εἰς τὴν περιφέρειαν λέγεται ***ἀκτίς.*** Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι.

Ἡ εὐθεῖα ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατοῦται ἑκατέρωθεν εἰς τὴν περιφέρειαν λέγεται ***διάμετρος.*** Ὅλαι αἱ διάμετροι εἶναι ἴσαι.

Τόξον λέγεται οἱονδήποτε μέρος τῆς περιφερείας· ἡ δὲ τὰ ἄκρα τοῦ τόξου συνδέουσα εὐθεῖα λέγεται ***χορδὴ*** αὐτοῦ.

---

[1]) Τοὺς γεωμετρικοὺς τόπους τοὺς ἐπενόησεν ὁ φιλόσοφος Πλάτων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἕκαστον τόξον ἔχει μίαν χορδὴν, ἀλλ' ἑκάστη χορδὴ ἔχει δύο τόξα· π. χ. τὸ τόξον ΒΘΓ ἔχει τὴν χορδὴν ΒΓ, ἀλλ' ἡ χορδὴ ΒΓ ἔχει τὰ δύο τόξα ΒΘΓ καὶ ΒΑΓ.

Τμῆμα κύκλου λέγεται μέρος αὐτοῦ περιεχόμενον ὑπὸ τόξου καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ, οἷον τὸ σχῆμα ΒΘΓΒ

Τομεὺς λέγεται μέρος τοῦ κύκλου περιεχόμενον ὑπὸ τόξου καὶ ὑπὸ τῶν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου τούτου ἠγμένων ἀκτίνων, οἷον τὸ σχῆμα ΚΓΘΒΚ.

39. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι :

1) Πᾶν σημεῖον τοῦ κύκλου, μὴ ἐπὶ τῆς περιφερείας κείμενον, ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστασιν μικροτέραν τῆς ἀκτῖνος.

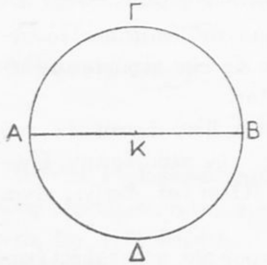
2) Πᾶν σημεῖον ἐκτὸς τοῦ κύκλου κείμενον (ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ) ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστασιν μεγαλυτέραν τῆς ἀκτῖνος.

3) Δύο κύκλοι ἔχοντες ἴσας ἀκτῖνας εἶναι ἴσοι.

Σημ. Γράφομεν περιφέρειαν κύκλου διὰ τοῦ διαβήτου.

40. Θεώρημα. ***Πᾶσα διάμετρος τέμνει εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ.***

Ἔστω ὁ κύκλος Κ καὶ τυχοῦσα διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΑΚΒ· ἐὰν περιστραφῇ τὸ τμῆμα ΑΓΒ περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ μέχρις οὗ



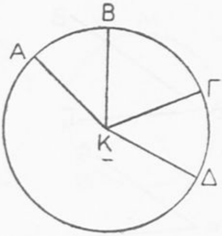
πέσῃ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΔΒ, τὸ τόξον ΑΓΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΔΒ· διότι ἂν σημεῖόν τι τοῦ τόξου ΑΓΒ ἔπιπτεν ἐντὸς τοῦ τμήματος ΑΔΒ ἢ ἐκτὸς αὐτοῦ, τὸ ἀπόστημα τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τοῦ κέντρου θὰ ἦτο μικρότερον τῆς ἀκτῖνος ἢ μεγαλύτερον αὐτῆς, ὅπερ ἄτοπον· διότι ἡ γενομένη περιστροφὴ οὐδόλως μετέβαλε τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων τοῦ τόξου ΑΓΒ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ.

Παρατήρησις. Πλὴν τῶν διαμέτρων οὐδεμία ἄλλη εὐθεῖα δύναται νὰ διαιρέσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη.

41. **Θεώρημα.** ***Πᾶν τόξον δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ πανταχοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἧς τινος εἶναι μέρος.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω ἡ περιφέρεια Κ καὶ τυχὸν τόξον αὐτῆς τὸ ΑΒ· ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΒ, καὶ τὸν σχηματισθέντα τομέα μεταφέρωμεν ἐπὶ τοῦ κύκλου, ὥστε ἡ ἀκτὶς ΚΑ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς τυχούσης ΚΓ, ἡ ΚΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπί τινος ἄλλης ΚΔ καὶ τὸ τόξον ΑΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΔ. διότι, ἂν σημεῖόν τι τοῦ τόξου ΑΒ ἔπιπτεν ἐντὸς τοῦ τομέως ΓΚΔ ἢ ἐκτὸς αὐτοῦ, ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ θὰ ἦτο μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος ἢ μεγαλυτέρα αὐτῆς, ὅπερ ἄτοπον.



42. Πόρισμα. ***Δύο τυχόντα τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἀλλήλων ἢ τὸ ἓν ἐφαρμόζει ἐπί τινος μέρους τοῦ ἄλλου.***

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΟΞΩΝ ΤΗΣ ΑΥΤΗΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ

43. Ὁρισμοί. ***Ἄθροισμα*** δύο ἢ περισσοτέρων τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας λέγεται τὸ τόξον, ὅπερ ἀποτελοῦσιν, ὅταν τεθῶσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας (ἢ ἐπὶ ἄλλης ἴσης) κατὰ σειράν· οἷον, ἄθροισμα τῶν τόξων ΑΒ καὶ ΒΓ εἶναι τὸ τόξον ΑΓ.

Σημ. Θέτομεν δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας κατὰ σειράν, ἐὰν πρῶτον φέρωμεν τὰς ἀκτίνας εἰς τὰ ἄκρα τῶν τόξων καὶ κατόπιν τὸν ἕνα ἐκ τῶν σχηματισθέντων τομέων μεταφέρωμεν ἐπὶ τοῦ κύκλου ὥστε ἡ μία ἀκτὶς τοῦ ἑνὸς νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς μιᾶς ἀκτῖνος τοῦ ἄλλου, αἱ δὲ δύο ἄλλαι ἀκτῖνες νὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.

Διαφορὰ δὲ δύο τόξων (τῆς αὐτῆς περιφερείας) λέγεται τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον μένει, ὅταν ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου, ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτοῦ, ἀποτμηθῇ μέρος ἴσον τῷ μικροτέρῳ.

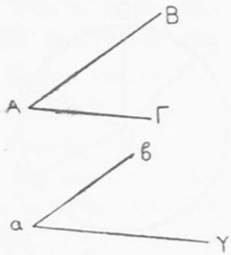
Σημ. Καὶ περὶ τῆς ἰσότητος τῶν τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας ἰσχύουσιν αἱ αὐταὶ προτάσεις αἱ περὶ τῶν εὐθειῶν ἀληθεύουσαι.

ΠΕΡΙ ΓΩΝΙΩΝ

44. Ὁρισμοί. ***Γωνία*** λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουσι δύο εὐθεῖαι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀρχόμεναι καὶ μὴ ἀποτελοῦσαι μίαν μόνην εὐθεῖαν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ σχῆμα ΒΑΓ εἶναι γωνία.



Κορυφὴ τῆς γωνίας λέγεται τὸ σημεῖον, ἐξ οὗ ἄρχονται αἱ τὴν γωνίαν σχηματίζουσαι εὐθεῖαι.

Πλευραὶ δὲ τῆς γωνίας λέγονται αἱ σχηματίζουσαι αὐτὴν εὐθεῖαι.

Τῆς γωνίας ΒΑΓ κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Α, πλευραὶ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ.

Ἴσαι λέγονται δύο γωνίαι, ἐὰν δύναται νὰ τεθῶσιν οὕτως ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, ὥστε ν' ἀποτελέσωσι μίαν μόνην γωνίαν.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν δὲν ἐξαρτᾶται ποσῶς ἐκ τοῦ μεγέθους τῶν πλευρῶν αὐτῶν. Οὕτως, αἱ δύο γωνίαι ΒΑΓ καὶ βαγ θὰ εἶνε ἴσαι, ἐάν, τεθείσης τῆς αγ ἐπὶ τῆς ΑΓ, οὕτως, ὥστε νὰ πέσῃ τὸ α εἰς τὸ Α, πέσῃ καὶ ἡ αβ ἐπὶ τῆς ΑΒ.

Ἐπίκεντρος γωνία λέγεται ἡ ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. Τὸ δὲ τόξον, τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας περιεχόμενον, λέγεται ***ἀντίστοιχον*** αὐτῆς.

Σημείωσις. Τὴν γωνίαν ὁρίζομεν διὰ τοῦ σημείου τῆς κορυφῆς ἢ καὶ διὰ τριῶν σημείων λαμβανομένων ἐπὶ τῆς κορυφῆς καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν (ἐφ' ἑκατέρας ἓν) γράφεται δὲ καὶ ἀναγινώσκεται τὸ σημεῖον τῆς κορυφῆς πάντοτε μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων. Οὕτω λέγομεν: ἡ γωνία Α ἢ ἡ γωνία ΒΑΓ ἢ ἡ γωνία ΓΑΒ. Ἐνίοτε σημαίνομεν τὴν γωνίαν καὶ δι' ἑνὸς γράμματος, ἐντὸς αὐτῆς καὶ πλησίον τῆς κορυφῆς γραφομένου.

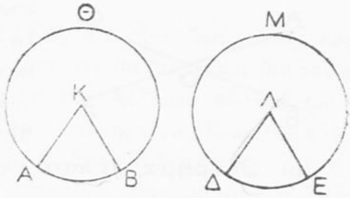
45. **Θεώρημα** ***Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι βαίνουσιν ἐπὶ τόξων ἴσων καὶ ἀντιστρόφως, αἱ ἐπὶ ἴσων τόξων βαίνουσαι ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.***

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ Κ καὶ Λ καὶ εἰς αὐτοὺς ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι αἱ ΑΚΒ καὶ ΔΛΕ.

Ὅταν αὗται ἐφαρμόσωσι, θὰ συμπέσωσι τὰ κέντρα τῶν κύκλων, οἵτινες ὡς ἴσοι θὰ ἐφαρμόσωσιν· ἄρα καὶ τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΔΕ (ὧν τὰ ἄκρα συνέπεσαν) θὰ ἐφαρμόσωσιν· ὥστε εἶναι ἴσα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀντιστρόφως δέ· ἐὰν ὑποτεθῇ τόξ. ΑΒ = τόξ. ΔΕ καὶ ἐφαρμόσωσιν οἱ δύο ἴσοι κύκλοι οὕτως, ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσι τὰ δύο ἴσα τόξα ΑΒ καὶ ΔΕ, θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ ἀκτὶς ΚΑ ἐπὶ τῆς ΛΔ, καὶ ἡ ΚΒ ἐπὶ τῆς ΛΕ, τουτέστι θὰ ἐφαρμόσωσι καὶ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΔΛΕ· ἄρα εἶναι ἴσαι.

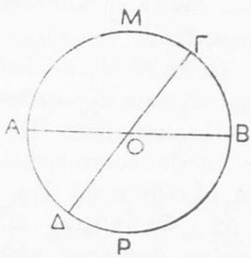


Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἀντιστρόφων θεωρημάτων· λέγονται δὲ ***ἀντίστροφα*** δύο θεωρήματα, ὅταν ἡ ὑπόθεσις τοῦ πρώτου εἶνε συμπέρασμα εἰς τὸ δεύτερον, καὶ τ' ἀνάπαλιν ἡ ὑπόθεσις τοῦ δευτέρου εἶνε συμπέρασμα εἰς τὸ πρῶτον.

46. **Πρόβλημα.** ***Νὰ σχηματισθῇ γωνία ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν.***

47. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ἑκατέρα ἐξ αὐτῶν διαπερᾷ τὴν ἄλλην.***

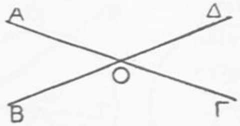
Μὲ κέντρον τὸ κοινὸν σημεῖον Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε ἂς γραφῇ περιφέρεια καὶ ἂς τέμνῃ τὴν μίαν εὐθεῖαν εἰς τὰ σημεῖα Α, Β τὴν δὲ ἄλλην εἰς τὰ Γ, Δ· ἀμφότεραι αἱ εὐθεῖαι ΑΟΒ, ΓΟΔ εἶναι διάμετροι τοῦ κύκλου καὶ ἑπομένως ἑκατέρα ἐξ αὐτῶν διαιρεῖ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη. Ἔστωσαν τὰ δύο ἡμίση, εἰς ἃ διαιρεῖ αὐτὴν ἡ ΑΟΒ, τὰ **ΑΜΒ** καὶ ΑΡΒ· τὰ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ δὲν δύνανται νὰ εὑρίσκωνται ἀμφότερα ἐφ' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἡμίσεως· διότι τότε τὸ μεταξὺ αὐτῶν τόξον ΓΔ θὰ ἦτο μέρος τοῦ ἡμίσεως, ἄρα μικρότερον αὐτοῦ· ἂν λοιπὸν τὸ σημεῖον Γ εὑρίσκηται ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως ΑΜΒ, τὸ Δ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἑτέρου ἡμίσεως ΑΡΒ, ἤτοι (§ 31, 3) ἡ εὐθεῖα ΓΟΔ διαπερᾷ τὴν ΑΟΒ.



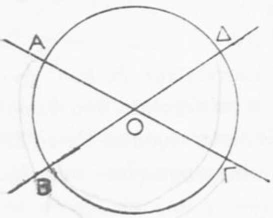
48. **Ὁρισμός.** Ὅταν δύο εὐθεῖαι διασταυρῶνται, ὡς αἱ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΓ καὶ ΒΔ, σχηματίζουσι τέσσαρας γωνίας. Ἐκ τούτων αἱ τὴν κορυφὴν μόνον ἔχουσαι κοινήν, ἀλλὰ πλευρὰς διαφόρους, λέγονται ***κατὰ κορυφήν***· τοιαῦται εἶναι αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ· ὁμοίως καὶ αἱ γωνίαι ΑΟΔ καὶ ΒΟΓ.



49. **Θεώρημα.** ***Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.***



Μὲ κέντρον τὴν κοινὴν κορυφὴν τῶν γωνιῶν καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε ἂς γραφῇ κύκλος· τοῦ κύκλου τούτου ἀμφότεραι αἱ εὐθεῖαι ΑΟΓ καὶ ΒΟΔ εἶναι διάμετροι· ἑπομένως τὰ τόξα ΑΒΓ καὶ ΒΓΔ εἶναι ἴσα, ἐὰν δὲ ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν μέρος ΒΓ, μένουσιν ἴσα τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΓΔ· ἄρα καὶ αἱ γωνίαι, αἱ ἐπ' αὐτῶν βαίνουσαι, εἶναι ἴσαι.

50. Ἀξίωμα. ***Παντὸς τόξου καὶ πάσης εὐθείας ὑπάρχει μέσον.***

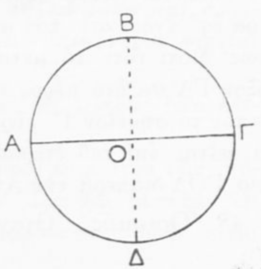
Σημ. Καὶ πάσης γωνίας ὑπάρχει διχοτόμος, ἤτοι εὐθεῖα, ἥτις, ἀρχομένη ἀπὸ τῆς κορυφῆς, διαιρεῖ τὴν γωνίαν εἰς δύο ἴσας γωνίας.

51. **Ὁρισμοί.** ***Κάθετοι πρὸς ἀλλήλας*** λέγονται δύο εὐθεῖαι, ἐὰν ἐν τῇ διασταυρώσει αὐτῶν σχηματίζωσι τὰς τέσσαρας γωνίας ἴσας.

Ὀρθὴ δὲ λέγεται ἑκάστη τῶν τεσσάρων ἴσων γωνιῶν, ἃς σχηματίζουσιν αἱ κάθετοι πρὸς ἀλλήλας εὐθεῖαι.

Παρατήρησις. Ὅταν ἐκ τῶν τεσσάρων γωνιῶν, τὰς ὁποίας δύο εὐθεῖαι διασταυρούμεναι σχηματίζουσι, δύο ἐφεξῆς εἶναι ἴσαι, αἱ εὐθεῖαι θὰ εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

52. **Θεώρημα.** ***Δι' ἑκάστου σημείου δοθείσης εὐθείας διέρχεται μία κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ μία μόνη.***



Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΓ καὶ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς τὸ Ο.

Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε ἂς γραφῇ κύκλος οὗ τὴν περιφέρειαν διαιρεῖ ἡ εὐθεῖα

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

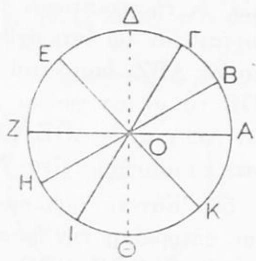
ΑΟΓ εἰς δύο ἴσα μέρη ΑΒΓ, ΑΔΓ, τῶν ὁποίων τὰ μέσα ἔστωσαν Β καὶ Δ.

Τὰ τέσσαρα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εἶνε ἴσα· ἐπομένως ἡ εὐθεῖα ΒΔ θὰ εἶναι διάμετρος· τουτέστι θὰ διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου Ο. Θὰ εἶναι δὲ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, διότι αἱ τέσσαρες γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζει μετ' αὐτῆς εἶναι ἴσαι (ἐδ. 45).

Ἐὰν στραφῇ ἡ ΒΔ περὶ τὸ Ο, δὲν θὰ διέρχηται πλέον διὰ τοῦ μέσου Β τοῦ τόξου ΑΒΓ· ἐπομένως θὰ σχηματίζῃ ἀνίσους τὰς ἐφεξῆς γωνίας· ὥστε μία μόνη ὑπάρχει κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ο.

53. Πόρισμα. ***Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.***

54. **Ὁρισμοί.** Ἐὰν ἐν κύκλῳ μία τῶν ἀκτίνων, ὡς ἡ ΟΑ, στρέφηται περὶ τὸ κέντρον καὶ προχωρῇ πάντοτε στρεφομένη, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην αὐτῆς θέσιν, αἱ διάφοροι θέσεις, ἃς λαμβάνει, ὡς αἱ ΟΒ, ΟΓ.... σχηματίζουσι μετὰ τῆς ἀρχικῆς θέσεως ΟΑ διαφόρους γωνίας, ὡς τὰς ΑΟΒ, ΑΟΓ.... Καθὼς δὲ τὸ τόξον ΑΒ ἐφ' οὗ βαίνει ἡ γωνία ΑΟΒ. εἶναι μέρος τοῦ τόξου ΑΓ, ἐφ' οὗ βαίνει ἡ ΑΟΓ, οὕτω λέγεται καὶ ἡ γωνία ΑΟΒ ***μέρος*** τῆς γωνίας ΑΟΓ (ἂν καί, ἵνα εἴπωμεν σχῆμά τι μέρος ἄλλου, πρέπει νὰ εἶναι ἀμφότερα ἐντελῶς ὡρισμένα κατὰ τὴν ἔκτασιν, ὅπερ δὲν συμβαίνει εἰς τὰς γωνίας). Ἐκ τούτου ὁδηγούμενοι δίδομεν τοὺς ἑπομένους ὁρισμούς.



Μικροτέρα λέγεται γωνία ἄλλης, ἐὰν βαίνῃ ἐπὶ μικροτέρου τόξου, ὅταν ἀμφοτέρων αἱ κορυφαὶ τεθῶσιν εἰς τὸ κέντρον τοῦ αὐτοῦ κύκλου (ἢ ἴσων κύκλων).

Ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων γωνιῶν λέγεται γωνία τις, ἐὰν τὸ τόξον αὐτῆς εἶναι ἄθροισμα τῶν τόξων τῶν γωνιῶν τούτων, ὅταν τεθῶσιν αἱ κορυφαὶ αὐτῶν εἰς τὸ κέντρον τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Οὕτως ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΕ εἶναι ἡ ΑΟΕ. Ἐὰν δὲ τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ ὑποτεθῶσιν ἴσα, ἡ γωνία ΑΟΔ εἶναι τριπλασία τῆς ΑΟΒ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διαφορὰ δὲ δύο ἀνίσων γωνιῶν λέγεται γωνία τις, ἐὰν τὸ τόξον της εἶναι διαφορὰ τῶν τόξων τῶν γωνιῶν τούτων, ὅταν τεθῶσιν αἱ κορυφαὶ αὐτῶν εἰς τὸ κέντρον τοῦ αὐτοῦ κύκλου· οὕτω διαφορὰ τῶν γωνιῶν ΑΟΓ καὶ ΑΟΒ εἶναι ἡ γωνία ΒΟΓ.

Σημείωσις. Καὶ περὶ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν ἀληθεύουσιν αἱ αὐταὶ προτάσεις αἱ περὶ τῶν εὐθειῶν καὶ τόξων (τοῦ αὐτοῦ κύκλου) ἀληθεύουσαι.

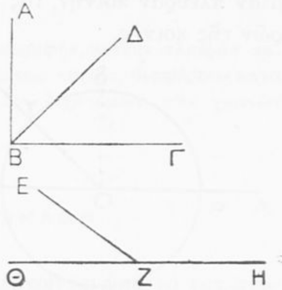
55. **Παρατηρήσεις περὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν.** Ἐὰν τὰ τόξα, ἐφ' ὧν βαίνουσιν αἱ γωνίαι, ἔχωσιν ἄθροισμα τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας, ***τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτων δὲν εἶναι μία γωνία·*** διότι ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς περιφερείας οὐδεμία βαίνει γωνία, ἐπειδὴ αἱ εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἠγμέναι ἀκτῖνες κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ δὲν σχηματίζουσι γωνίαν· τοῦτο συμβαίνει, π.χ. εἰς τὰς γωνίας ΑΟΒ, ΒΟΓ ΓΟΕ, ΕΟΖ. Ἀλλ' ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ***τὸ ἄθροισμα εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι·*** ἐὰν τῷ ὄντι ἀχθῇ ἀκτὶς εἰς τὸ μέσον Δ τῆς ἡμιπεριφέρείας ΑΒΖ, διαιρεῖται ἡ γωνία ΓΟΕ εἰς δύο ἄλλας ΓΟΔ, ΔΟΕ, καὶ αἱ μὲν γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ ἀποτελοῦσι τὴν ὀρθὴν ΑΟΔ, αἱ δὲ ΔΟΕ, ΕΟΖ ἀποτελοῦσι τὴν ἄλλην ὀρθὴν ΔΟΖ· ὥστε τὸ ἄθροισμα εἶναι δύο ὀρθαί.

56. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων, ἐφ' ὧν βαίνουσιν αἱ γωνίαι, ὑπερβαίνῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν, ὡς συμβαίνει εἰς τὰς γωνίας ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΕ, ΕΟΖ, ΖΟΗ, ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτων δὲν εἶναι ἡ γωνία ΑΟΗ· διότι αὕτη βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΚΘΙΗ καὶ οὐχὶ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΕΖΗ. Διὰ νὰ ἔχωσι δὲ αἱ γωνίαι αὗται ἄθροισμα μίαν γωνίαν, ἀνάγκη νὰ δεχθῶμεν, ὅτι αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΗ σχηματίζουσι δύο γωνίας, τὴν ΑΟΗ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΚΘΙΗ, τοῦ μικροτέρου τῆς ἡμιπεριφερείας καὶ ἥτις λέγεται ***κυρτὴ*** γωνία, καὶ τὴν ΑΟΗ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ μεγαλυτέρου τῆς ἡμιπεριφερείας τόξου ΑΒΓΕΖΗ καὶ ἥτις λέγεται ***κοίλη*** γωνία, καὶ ταύτην ἔχουσιν ἄθροισμα αἱ ἀνωτέρω δοθεῖσαι γωνίαι. Αἱ κοῖλαι γωνίαι ὑπερβαίνουσι τὰς δύο ὀρθάς· παρατηρητέον ὅμως ὅτι, ὅταν λέγωμεν ἁπλῶς γωνίαν δύο εὐθειῶν, ἐννοοῦμεν πάντοτε τὴν κυρτὴν γωνίαν αὐτῶν.

57. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων, ἐφ' ὧν βαίνουσιν αἱ γωνίαι εἶναι ὅλη ἡ περιφέρεια, δεικνύεται ὁμοίως, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι τέσσαρες ὀρθαί.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

58. Ὁρισμοί. ***Ὀξεῖα*** γωνία λέγεται ἡ μικροτέρα ὀρθῆς. ***Ἀμβλεῖα*** δὲ ἡ μεγαλυτέρα ὀρθῆς.



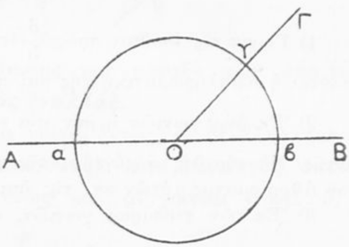
Π.χ. Ὀξεῖα γωνία εἶναι ἡ ΓΒΔ, ἐνῷ ἡ ΕΖΗ εἶναι ἀμβλεῖα.

Συμπληρωματικαὶ λέγονται δύο γωνίαι, ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι μία ὀρθὴ γωνία π.χ. αἱ γωνίαι ΑΒΔ καὶ ΔΒΓ, αἵτινες ἔχουσιν ἄθροισμα τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΑΒΓ, εἶναι συμπληρωματικαί.

Παραπληρωματικαὶ λέγονται δύο γωνίαι, ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι δύο **ὀρθαί**.

59. **Θεώρημα**. ***Αἱ δύο γωνίαι, αἵτινες σχηματίζονται, ὅταν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου εὐθείας ἀχθῇ ἄλλη εὐθεῖα, εἶναι παραπληρωματικαί.***

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, Ο σημεῖόν τι αὐτῆς (πλὴν τῶν ἄκρων) καὶ ἡ τυχοῦσα εὐθεῖα ΟΓ· λέγω, ὅτι αἱ δύο γωνίαι ΑΟΓ, ΓΟΒ εἶναι παραπληρωματικαί.



Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε, ἂς γραφῇ περιφέρεια· ἂς τέμνῃ δὲ τὰς εὐθείας εἰς τὰ σημεῖα **α, β,** γ· τὰ τόξα αγ καὶ βγ, τὰ ἀντίστοιχα τῶν δύο γωνιῶν, ἔχουσιν ἄθροισμα τὴν ἡμιπεριφέρειαν αγβ· ἄρα (55) τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι.

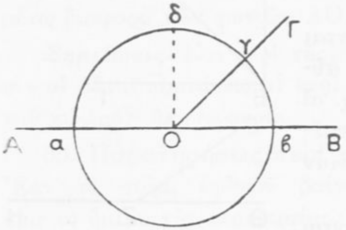
60. Πόρισμα 1ον. ***Πᾶσαι αἱ γωνίαι, αἵτινες σχηματίζονται, ὅταν ἐξ ἑνὸς σημείου εὐθείας ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς κείμεναι, ἔχουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθὰς γωνίας.***

61. Πόρισμα 2ον. ***Πᾶσαι αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι, ὅταν ἐξ ἑνὸς σημείου ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι, ἔχουσιν ἄθροισμα τέσσαρας ὀρθάς.***

62. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων κεῖνται ἐπ' εὐθείας.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐφεξῆς λέγονται δύο γωνίαι, ὅταν ἔχωσι τὴν κορυφὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, τὰς δὲ μὴ κοινὰς πλευρὰς ἐκ διαφόρων μερῶν τῆς κοινῆς.



Ἔστω τὸ ἄθροισμα τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν ΑΟΓ καὶ ΒΟΓ δύο ὀρθαί· λέγω, ὅτι ἡ ΑΟΒ εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Ἐὰν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα οἱανδήποτε γραφῇ περιφέρεια καὶ τέμνῃ τὰς εὐθείας εἰς τὰ σημεῖα α,β,γ, τὸ τόξον αγβ θὰ εἶναι ἥμισυ τῆς περιφερείας· καὶ διὰ τοῦτο ἡ χορδὴ αὐτοῦ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου (40 παρατ.), ἡ δὲ διάμετρος αὕτη ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο ἀκτίνων αΟ καὶ Οβ· ὥστε ἡ γραμμὴ ΑΟΒ εἶναι εὐθεῖα.

Ἀσκήσεις

1) Γωνία τις ἰσοῦται πρὸς $\frac{3}{5}$ τῆς ὀρθῆς. Πρὸς πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἰσοῦται ἡ συμπληρωματική της καὶ πρὸς πόσα ἡ παραπληρωματική της.

2) Ἐκ δύο γωνιῶν ἡ μὲν μία εἶναι $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς, ἡ δὲ ἄλλη $\frac{1}{3}$ αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγεθος τῆς γωνίας, ἥτις εἶναι συμπληρωματικὴ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν καὶ τῆς διαφορᾶς των.

3) Ἐκ τῶν τεσσάρων γωνιῶν, αἵτινες σχηματίζονται ὑπὸ δύο εὐθειῶν τεμνομένων, ἡ μία εἶναι $\frac{5}{6}$ τῆς ὀρθῆς. Πρὸς πόσα μέρη αὐτῆς ἰσοῦται ἑκάστη τῶν τριῶν ἄλλων;

4) Ἐκ τῆς κορυφῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ ἐκτὸς αὐτῆς ἄγονται τέσσαρες εὐθεῖαι, αἵτινες μετὰ τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης σχηματίζουσι πέντε γωνίας ἴσας. Πρὸς πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς, ἰσοῦται ἑκάστη τούτων;

5) Ἐκ τοῦ σημείου Ο τῆς εὐθείας ΑΒ ἄγονται ἑκατέρωθεν αὐτῆς δύο εὐθεῖαι ΟΓ καὶ ΟΔ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζωσι τὰς ἴσας γωνίας ΑΟΓ καὶ ΒΟΔ. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ΟΓ καὶ ΟΔ, κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

6) Αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας ΑΒΓ τέμνονται ὑπὸ εὐθείας εἰς τὰ σημεῖα Δ (σημεῖον τῆς ΑΒ) καὶ Ε οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζωνται αἱ ἴσαι γωνίαι ΒΔΕ, ΒΕΔ. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΔΕ καὶ ΓΕΔ εἶναι ἴσαι.

7) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτομοῦσαι δύο ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικὰς γωνίας, εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

8) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ κάθετος ἐπὶ τῆς διχοτόμου μιᾶς ἐκ δύο ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικῶν γωνιῶν, εἰς τὸ σημεῖον τῆς κοινῆς κο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

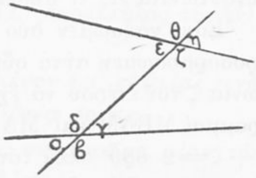
ρυφῆς εἶναι διχοτόμος τῆς ἄλλης γωνίας.

9) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτομοῦσαι δύο κατὰ κορυφὴν γωνίας κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.

10) Δύο γωνίαι, αἵτινες ἔχουσι κοινὴν κορυφήν, κοινὴν πλευρὰν καὶ τὰς ἄλλας δύο πλευρὰς πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κοινῆς, διαφέρουν κατὰ μίαν ὀρθήν. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τούτων ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ

63. **Ὁρισμοί.** Ὅταν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ τρίτης, σχηματίζονται 8 γωνίαι. Ἐκ τούτων αἱ μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης κείμεναι καλοῦνται ***ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη*** ὡς εἶναι αἱ γωνίαι γ καὶ ζ, καὶ αἱ δ καὶ ε.



Αἱ γωνίαι δ καὶ ζ ὡς καὶ αἱ γ καὶ ε, (αἱ ἑκατέρωθεν τῆς τεμνούσης καὶ μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν κείμεναι) καλοῦνται ***ἐντὸς ἐναλλάξ.***

Αἱ γωνίαι γ καὶ η (ὧν ἡ μία κεῖται ἐντός, ἡ δὲ ἄλλη ἐκτὸς καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης) λέγονται ***ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.*** Ὡσαύτως καὶ αἱ γωνίαι δ καὶ θ, β καὶ ζ, α καὶ ε.

64. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι, δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν ἑκατέρωθεν, αἱ τοιαῦται εὐθεῖαι λέγονται ***παράλληλοι.***

Ὅτι δὲ ὑπάρχουσι τοιαῦται εὐθεῖαι, φαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος.

65. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζωσιν,***

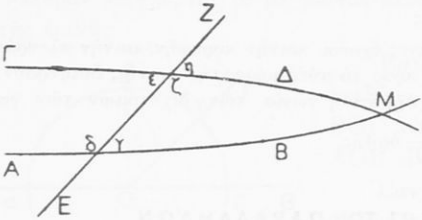
1) τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς,

ἢ 2) τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ ἴσας,

ἢ 3) τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας, αἱ εὐθεῖαι αὗται δὲν δύνανται νὰ συναντηθῶσιν ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν ἑκατέρωθεν, ἤτοι εἶναι παράλληλοι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1) Ἔστω, ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, τέμνονται ὑπὸ τῆς ΕΖ, καὶ ἔστω ὅτι



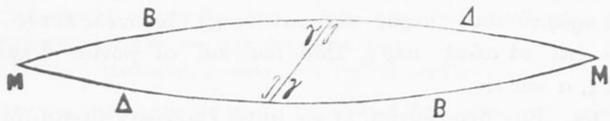
$\gamma + \zeta = 2$ ὀρθ.
καὶ $\delta + \varepsilon = 2$ ὀρθ.

λέγω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται, εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι δὲν εἶναι παράλληλοι τοὐτέστιν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ αὐξανόμεναι ἐφ' ἱκανὸν συναντῶνται εἴς τι σημεῖον Μ.

Ἐὰν νοήσωμεν δύο σχήματα ἴσα πρὸς τὸ ΜΔζγΒΜ καὶ προσαρμόσωμεν αὐτὰ οὕτως, ὥστε ἡ γωνία γ τοῦ ἑνὸς καὶ ἡ γωνία ζ τοῦ ἑτέρου νὰ ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφήν, ἀμφότεραι αἱ γραμμαί ΜΒΔΜ καὶ ΜΔΒΜ θὰ εἶναι (62) εὐθεῖαι, διότι εἶναι $\gamma + \zeta = 2$ ὀρθ· ἀλλὰ τότε θὰ εἴχομεν ἐκ τοῦ ἑνὸς σημείου Μ εἰς τὸ ἄλλο δύο εὐθείας γραμμάς, ὅπερ ἄτοπον (ἐδ. 25,2)· ἄρα αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι.

2) Ἔστω δεύτερον, ὅτι $\gamma = \varepsilon$· λέγω, ὅτι καὶ πάλιν αἱ εὐ-



θεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

Διότι εἶναι $\varepsilon + \zeta = 2$ ὀρθ. (59) καὶ $\gamma = \varepsilon$· ἄρα εἶναι

$$\gamma + \zeta = 2 \text{ ὀρθ.}$$

καὶ κατὰ τὰ προαποδειχθέντα αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

3) Ἔστω τέλος ὅτι $\gamma = \eta$· λέγω, ὅτι καὶ τότε αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

Διότι εἶναι $\eta + \zeta = 2$ ὀρθ. (59)

καὶ $\eta = \gamma$

ὥστε εἶναι καὶ πάλιν $\gamma + \zeta = 2$ ὀρθ.

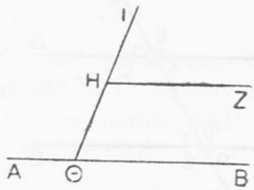
καὶ ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

66. **Πόρισμα 1ον.** ***Δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

67. Πόρισμα 2ον. ***Ἐκ παντὸς σημείου ἄγεται παράλληλός τις πρὸς πᾶσαν εὐθεῖαν μὴ διερχομένην δι' αὐτοῦ.***

Ἔστω σημεῖον τὸ Η καὶ εὐθεῖα ἡ ΑΒ. Ἂν ἐκ τοῦ Η ἀχθῇ εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Θ τῆς ΑΒ ἡ εὐθεῖα ΗΘ, γίνεται γωνία ἡ ΗΘΒ· ἂν δὲ τὴν γωνίαν ταύτην θέσωμεν εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε ἡ πλευρὰ αὐτῆς ΘΗ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΗΙ (καὶ ἡ κορυφὴ Θ εἰς τὸ Η), ἡ ἄλλη πλευρὰ αὐτῆς ΘΒ θὰ λάβῃ θέσιν τινὰ ΗΖ καὶ θὰ εἶναι ἡ ΗΖ παράλληλος τῇ ΑΘΒ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα.



68. Αἴτημα. ***Ἐκ σημείου μὴ κειμένου ἐπ' εὐθείας τινὸς μία μόνη διέρχεται παράλληλος τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ.***

69. Πόρισμα 1ον. ***Πᾶσα εὐθεῖα, συναντῶσα μίαν τῶν παραλλήλων, θὰ συναντᾷ καὶ τὴν ἄλλην.***

70. Πόρισμα 2ον. ***Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.***

Διότι, ἂν συνηντῶντο εἴς τι σημεῖον θὰ εἴχομεν ἐξ αὐτοῦ δύο παραλλήλους πρὸς τὴν τρίτην εὐθεῖαν.

71. Πρόβλημα. ***Νὰ ἀχθῇ παράλληλος τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ δοθέντος σημείου μὴ κειμένου ἐπ' αὐτῆς.***

72. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τμηθῶσιν ὑπὸ τρίτης οἱασδήποτε, θὰ σχηματίσωσι***

1) ***τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς,***

2) ***τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας,***

3) ***τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας.***

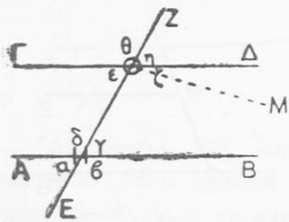
Ἔστωσαν παράλληλοι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΕΖ λέγω, ὅτι θὰ εἶναι

$$\begin{array}{lll} \gamma+\zeta=2\ \text{ὀρθ.} & \gamma=\varepsilon=\eta, & \beta=\zeta \\ \delta+\varepsilon=2\ \text{ὀρθ.} & \delta=\zeta=\vartheta, & \alpha=\varepsilon \end{array} \quad (\iota)$$

Ἂς τεθῇ ἡ γωνία γ ἐπὶ τῆς η οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσωσιν αἱ κορυφαὶ αὐτῶν, νὰ πέσῃ δὲ ἡ πλευρὰ ΗΘ τῆς γ ἐπὶ τῆς πλευ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρᾶς ΘΖ τῆς η, τότε καὶ ἡ πλευρὰ ΗΒ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΘΔ· διότι, ἂν ἐλάμβανεν ἄλλην θέσιν, ἔστω τὴν ΘΜ, θὰ ἦτο ἡ γωνία γ ἴση τῇ γωνίᾳ ΖΘΜ· ἄρα (65) θὰ ἦτο ἡ ΘΜ παράλληλος τῇ



ΑΒ· ἀλλὰ τότε θὰ εἴχομεν ἐκ τοῦ σημείου Θ δύο παραλλήλους τῇ ΑΒ, τουτέστι τὰς ΓΘΔ καὶ ΘΜ, ὅπερ ἄτοπον (68)· ὥστε ἀνάγκη νὰ πέσῃ καὶ ἡ πλευρὰ ΗΒ ἐπὶ τῆς ΘΔ· ἑπομένως εἶναι $\gamma = \eta$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι (49) καὶ $\varepsilon = \eta$ ἕπεται $\gamma = \varepsilon$. Ἔχομεν πρὸς τούτοις (59) $\eta + \zeta = 2$ ὀρθ. ὅθεν καὶ $\gamma + \zeta = 2$ ὀρθ. (διότι $\gamma = \eta$).

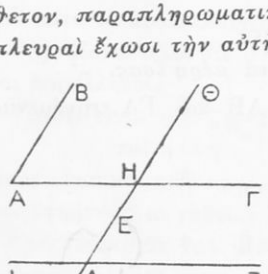
Ὁμοίως ἀποδεικνύονται καὶ αἱ ἄλλαι ἰσότητες (ι).

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου.

73. Πόρισμα 1ον. ***Πᾶσα κάθετος ἐπὶ μίαν τῶν παραλλήλων εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.***

74. Πόρισμα 2ον. ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης, σχηματίζωσι δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν*** (ὡς αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΘΜ τοῦ προηγουμένου σχήματος), ***αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνουσιν ἀλλήλας, ὅταν ἐφ' ἱκανὸν αὐξηθῶσι πρὸς τὸ μέρος τῶν γωνιῶν τούτων.***

75. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν αἱ πλευραὶ δύο γωνιῶν εἶναι παράλληλοι, αἱ γωνίαι, εἶναι ἴσαι μέν, ἂν αἱ παράλληλοι πλευραὶ ἔχουσιν ἀμφότεραι τὴν αὐτὴν φορὰν ἢ ἀμφότεραι ἀντίθετον, παραπληρωματικαὶ δέ, ἂν δύο μὲν παράλληλοι πλευραὶ ἔχωσι τὴν αὐτὴν φοράν, αἱ δὲ δύο ἄλλαι ἀντίθετον.***



Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ, ἔχουσαι τὴν πλευρὰν ΔΖ παράλληλον τῇ ΑΓ καὶ τὴν ΔΕ παράλληλον τῇ ΑΒ. Ἐὰν αὐξηθῇ ἡ ΔΕ, θὰ συναντήσῃ τὴν ΑΓ (69) εἴς τι σημεῖον Η, θὰ εἶναι δὲ γων. ΒΑΓ = γων. ΘΗΓ (65,3), ἐπίσης εἶναι γων. ΕΔΖ = γων. ΘΗΓ (65,3). Ἄρα εἶναι γων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΑΓ = γων. ΕΔΖ. Καὶ αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΙΔΚ εἶναι ἴσαι· διότι ἡ ΙΔΚ εἶναι ἴση τῇ ΕΔΖ.

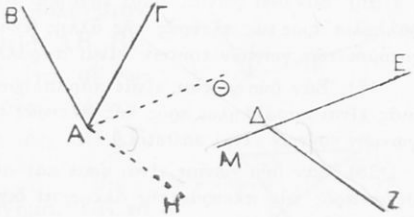
Ἔχουσι δὲ τῶν μὲν γωνιῶν ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ, αἱ παράλληλοι πλευραὶ ἀμφότεραι τὴν αὐτὴν φοράν· τῶν δὲ γωνιῶν ΙΔΚ καὶ ΒΑΓ ἀμφότεραι τὴν ἀντίθετον.

Τέλος αἱ γωνίαι ΙΔΕ καὶ ΚΔΖ, ὡς παραπληρωματικαὶ τῆς ΕΔΖ εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ τῆς ΒΑΓ· ἔχουσιν ὅμως αἱ μὲν παράλληλοι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΔΕ (τῶν γωνιῶν ΒΑΓ καὶ ΙΔΕ) τὴν αὐτὴν φοράν, αἱ δὲ ΑΓ καὶ ΔΙ ἐναντίαν.

76. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν αἱ πλευραὶ γωνίας εἶναι κάθετοι πρὸς τὰς πλευρὰς ἄλλης*** (ἑκατέρα πρὸς ἑκατέραν), ***αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.***

(Ἴσαι μὲν εἶναι ἂν ἀμφότεραι εἶναι ὀξεῖαι ἢ ἀμφότεραι ἀμβλεῖαι, παραπληρωματικαὶ δέ, ἂν ἡ μία εἶναι ὀξεῖα, ἡ δὲ ἄλλη ἀμβλεῖα).

Ἔστωσαν δύο γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ, ἔχουσαι τὴν ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΔΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἔστωσαν δὲ ἀμφότεραι ὀξεῖαι.



Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Α παράλληλος τῇ ΔΕ καὶ τὴν αὐτὴν ἔχουσα φορὰν ἡ ΑΘ ἔτι δὲ παράλληλος τῇ ΔΖ καὶ τὴν αὐτὴν ἔχουσα φορὰν ἡ ΑΗ· τότε θὰ εἶναι γων. ΘΑΗ = γων. ΕΔΖ (75) θὰ εἶναι δὲ ἡ μὲν ΑΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἡ δὲ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΑΒ (73)· ὥστε γων. ΘΑΒ = γων. ΗΑΓ (53)· ἐὰν δὲ ἀπ' ἀμφοτέρων ἀφαιρεθῇ ἡ κοινὴ ΘΑΓ, ἔχομεν γων. ΒΑΓ = γων. ΘΑΗ καὶ ἐπειδὴ γων. ΘΑΗ = γων. ΕΔΖ, ἕπεται ὅτι ΒΑΓ = ΕΔΖ· ὅ. ἔ. δ.

Καὶ ἡ γων. ΜΔΖ ἔχει τὰς πλευρὰς αὐτῆς καθέτους πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γων. ΒΑΓ· δὲν εἶναι ὅμως αἱ γωνίαι αὗται ἴσαι (διότι αἱ μὲν ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ εἶναι ὀξεῖαι, ἡ δὲ ΜΔΖ εἶναι ἀμβλεῖα), ἀλλ' εἶναι παραπληρωματικαί· διότι ἡ ΜΔΖ, παραπληρωματικὴ οὖσα τῆς ΕΔΖ, εἶναι παραπληρωματικὴ καὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΒΑΓ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀσκήσεις

11) Ἐκ τῶν ὀκτὼ γωνιῶν, αἵτινες σχηματίζονται ὑπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν καὶ τῆς τεμνούσης αὐτάς, ἡ μία εἶναι $\frac{2}{7}$ τῆς ὀρθῆς. Πρὸς πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς εἶναι ἑκάστη τῶν ἄλλων γωνιῶν;

12) Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ΑΒ καὶ ΓΔ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης αὐτὰς ΑΓ, τὸ δὲ σημεῖον Ε κεῖται ἐντὸς τοῦ σχήματος ΒΑΓΔ. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΑΕΓ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΒΑΕ καὶ ΕΓΔ.

13) Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ΑΒ καὶ ΓΔ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης αὐτὰς ΑΓ, ὡς καὶ τὸ σημεῖον Ε, ἀλλ' ἐκτὸς τῶν παραλλήλων τούτων. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ γωνία ΑΕΓ, ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν ΒΑΕ καὶ ΕΓΔ.

14) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν τεμνομένων ὑπὸ τρίτης, εἶναι παράλληλοι.

15) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν, τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν τεμνομένων ὑπὸ τρίτης, εἶναι κάθετοι.

Ἀπορρίπτ.

16) Ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς ἄλλης (ἑκατέρα πρὸς ἑκατέραν) αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι παράλληλοι.

17) Ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς ἄλλης, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι κάθετοι.

18) Ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι κάθετοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς ἄλλης, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι κάθετοι.

19) Ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι κάθετοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς ἄλλης, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι παράλληλοι.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

77. Ὁρισμοί. ***Εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περατουμένη εἰς εὐθείας γραμμάς.***

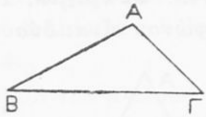
Πλευραὶ τοῦ σχήματος λέγονται αἱ ὁρίζουσαι αὐτὸ εὐθεῖαι.

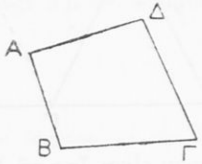
Γωνίαι δ' αὐτοῦ αἱ ὑπὸ τῶν πλευρῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κορυφαὶ δ' αὐτοῦ αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν τούτων.

Τρίπλευρον μὲν ἢ ***τρίγωνον*** λέγεται τὸ ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν περιεχόμενον σχῆμα, ὡς τὸ ΑΒΓ· ***τετράπλευρον*** δὲ τὸ ὑπὸ τεσσάρων, ὡς τὸ ΑΒΓΔ· πολύπλευρον δὲ ἢ ***πολύγωνον*** τὸ ὑπὸ περισσοτέρων.

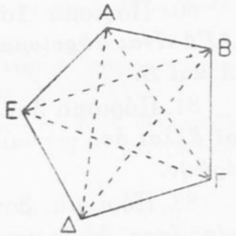




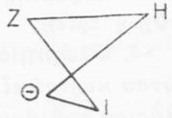
Ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ σχήματος λέγεται ἡ σχηματιζομένη ὑπό τινος πλευρᾶς αὐτοῦ καὶ τῆς προεκτάσεως μιᾶς ἐκ τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὴν πλευρῶν.

Περίμετρος τοῦ σχήματος λέγεται ὄχι μόνον ἡ τεθλασμένη καὶ κλειστὴ γραμμή, ἣν σχηματίζουσιν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ, ἀλλὰ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Διαγώνιος τοῦ σχήματος λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις συνδέει δύο κορυφάς, χωρὶς νὰ εἶναι πλευρά.



Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔΕ εἶναι πολύγωνον· πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ. ΕΑ· γωνίαι αὐτοῦ εἶναι αἱ γωνίαι Α,Β,Γ,Δ,Ε· κορυφαὶ αὐτοῦ τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,Ε· διαγώνιοι δέ, αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΒΔ, ΒΕ, ΓΕ.



Ἁπλοῦν λέγεται τὸ σχῆμα, ἐὰν τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἀποτελῶσι μίαν γραμμὴν κλειστὴν μὴ ἔχουσαν μέρη κλειστά· οἷον, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἁπλοῦν σχῆμα καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐπίσης· ἀλλὰ τὸ τετράπλευρον ΖΗΙΘ δὲν εἶναι ἁπλοῦν σχῆμα.

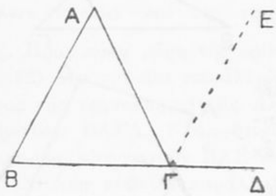
Τὰ σχήματα, περὶ ὧν ἐνταῦθα γίνεται λόγος, εἶναι πάντα ἁπλᾶ σχήματα.

78. ***Κυρτὸν*** λέγεται τὸ σχῆμα, ἐὰν ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ προσεκβαλλομένη ἀφίνῃ τὸ σχῆμα ὁλόκληρον πρὸς τὸ ἓν μέρος αὐτῆς, ὅπως π.χ. εἶναι τὸ τρίγωνον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

79. **Θεώρημα.** ***Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι δύο ὀρθαί.***



Ἔστω τυχὸν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, οὗ αὐξάνομεν μίαν τῶν πλευρῶν ἔστω τὴν ΒΓ, μέχρι σημείου τινὸς Δ καὶ ἄγομεν τὴν ΓΕ παράλληλον τῇ ΑΒ.

Ἡ γων. Α εἶναι ἴση τῇ ΑΓΕ (65,2)· ἐπίσης ἡ γωνία Β τοῦ τριγώνου εἶναι ἴση τῇ ΕΓΔ, (65,3)· ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου Α + Β + Γ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΒΓΑ, ἤτοι (60) δύο ὀρθαί.

80. Πόρισμα 1ον. ***Ἡ ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου γωνία ΑΓΔ εἶναι ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν Α καὶ Β.***

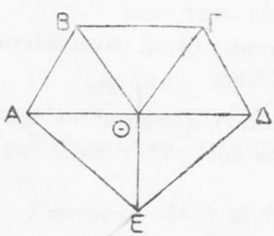
81. Πόρισμα 2ον. ***Ἐὰν τρίγωνον ἔχει μίαν ὀρθὴν γωνίαν, αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι αὐτοῦ*** (ὀξεῖαι οὖσαι) ***θὰ ἀποτελῶσι μίαν ὀρθήν.***

82. Πόρισμα 3ον. ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς δύο γωνίας ἴσας, θὰ ἔχωσι καὶ τὴν τρίτην ἴσην.***

83. Πρόβλημα. ***Ἐκ τῶν δύο γωνιῶν τριγώνου νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη.***

84. **Θεώρημα.** ***Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς πολυγώνου κυρτοῦ εἶναι τόσαι ὀρθαὶ γωνίαι, ὅσον εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του ἠλαττωμένον κατὰ τέσσαρα.***

Ἔστω κυρτὸν πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ τυχὸν σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ τὸ Θ· αἱ εὐθεῖαι ΘΑ, ΘΒ, ΘΓ, ΘΔ, ΘΕ, διαιροῦσι τὸ



πολύγωνον εἰς τόσα τρίγωνα, ὅσα εἶναι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ· τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων τούτων, ἐξαιρουμένων τῶν, περὶ τὸ Θ γωνιῶν (4 ὀρθῶν), ἰσοῦται προφανῶς μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου· ἀλλ' αἱ γωνίαι πάντων τῶν τριγώνων θὰ ἀποτε-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λέσωσι τόσας ὀρθάς, ὅσον εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου. Ἄρα πᾶσαι αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου, θὰ ἀποτελέσωσι τόσας ὀρθάς, ὅσον εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του ἠλαττωμένον κατὰ 4.

Ἐὰν διὰ τοῦ μ παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν θὰ εἶναι 2 μ — 4 ὀρθαί.

Ἀσκήσεις

20) Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν τρίτην, τὸ τρίγωνον ἔχει μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

21) Ἐὰν ἡ μία ἐκ τῶν γωνιῶν τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, τὸ τρίγωνον ἔχει μίαν ἀμβλεῖαν γωνίαν.

22) Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ δωδεκαγώνου;

23) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν κυρτοῦ πολυγώνου τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εἶναι 8 ὀρθαί ;

24) Ἐὰν αἱ πλευραὶ κυρτοῦ πολυγώνου προεκταθῶσι διαδοχικῶς ἅπασαι κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων ἐξωτερικῶν γωνιῶν εἶναι 4 ὀρθαί.

25) Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν (ὡς εἰς τὴν ἀνωτέρω ἄσκησιν σχηματίζονται) κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν αὐτοῦ, ἐκ πόσων πλευρῶν ἀποτελεῖται τὸ πολύγωνον τοῦτο ;

26) Τὸ ἄθροισμα δύο ἐξωτερικῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι μεγαλύτερον τῶν δύο ὀρθῶν.

27) Πόσαι ἐκ τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τριγώνου δύνανται νὰ εἶναι ἀμβλεῖαι ;

\+ 28) Ἡ γωνία τῆς διχοτόμου τῆς ἐσωτερικῆς γωνίας Β τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τῆς διχοτόμου τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Γ ἰσοῦται πρὸς $\frac{A}{2}$

29) Ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται πρὸς 1 ὀρ. $+ \frac{A}{2}$.

30) Ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται μὲ 1 ὀρ. $- \frac{A}{2}$.

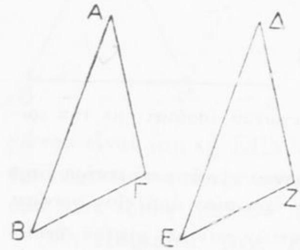
31) Ν' ἀποδειχθῇ τὸ θεώρημα 84, ἐὰν ἀπὸ μιᾶς τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου ἀχθῶσιν αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

85. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν μὲ ἑκατέραν, καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.***

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἔχοντα ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ καὶ Α = Δ· λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.



Διότι, ἂν τεθῇ ἡ Δ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ Α οὕτως, ὥστε νὰ πέσῃ ἡ πλευρὰ ΔΕ ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἡ δὲ ΔΖ ἐπὶ τῆς ΑΓ, τὸ μὲν σημεῖον Ε θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β διότι εἶναι ΔΕ = ΑΒ, ὁμοίως δὲ τὸ Ζ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΖ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ, διότι τὰ ἄκρα αὐτῶν συνέπεσαν· ὥστε τὰ δύο τρίγωνα ἐφαρμόζουσιν, ἄρα εἶναι ἴσα· θὰ ἔχωσι λοιπὸν καὶ τὰς γωνίας Β καὶ Ε ἴσας καὶ τὰς γωνίας Γ καὶ Ζ ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ ΕΖ ἴσας.

86. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.***

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχῆμα τὸ ἀνωτέρω) ἔχοντα ΒΓ = ΕΖ, Β = Ε καὶ Γ = Ζ.

Ἂς τεθῇ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ ΕΖ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΒΓ (νὰ πέσῃ δὲ τὸ Ε εἰς τὸ Β καὶ τὸ Ζ εἰς τὸ Γ)· τότε ἡ μὲν ΕΔ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΒΑ, διότι Ε = Β, ἡ δὲ ΖΔ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΓΑ, διότι Ζ = Γ· ἐπομένως τὸ σημεῖον Δ, ὅπερ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν ΕΔ καὶ ΖΔ, θὰ γίνῃ κοινὸν σημεῖον τῶν ΒΑ καὶ ΓΑ, αἵτινες δὲν δύνανται νὰ ἔχωσιν ἄλλο κοινὸν σημεῖον πλὴν τοῦ Α. Ὥστε τὸ Δ θὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ Α· ἐπομένως ἡ ΕΔ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΑ καὶ ἡ ΖΔ ἐπὶ τῆς ΓΑ· ὥστε καὶ τὰ τρίγωνα θὰ ἐφαρμόσωσιν· ἄρα εἶναι ἴσα.

87. Πρόβλημα. ***Ἐκ τῶν δύο πλευρῶν τριγώνου καὶ ἐκ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.***

88. Πρόβλημα. ***Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ δύο γωνιῶν νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

89. Ὁρισμοί. Ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ λέγεται τὸ τρίγωνον: ***Ἰσόπλευρον,*** ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς αὐτοῦ πλευρὰς ἴσας.

Ἰσοσκελὲς δέ, ἐὰν ἔχῃ δύο μόνον πλευρὰς ἴσας.

Σκαληνὸν δέ, ἐὰν δὲν ἔχῃ πλευρὰς ἴσας.

90. Ἐκ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ λέγεται τὸ τρίγωνον:

Ὀρθογώνιον, ἐὰν ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθήν.

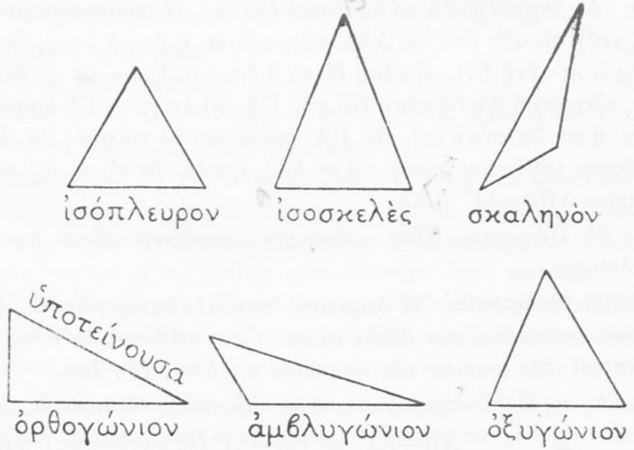
Ἀμβλυγώνιον δέ, ἐὰν ἔχῃ μίαν γωνίαν ἀμβλεῖαν (αἱ λοιπαὶ δύο θὰ εἶναι ὀξεῖαι.

Ἰσογώνιον δέ, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς αὐτοῦ γωνίας ἴσας.

Ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου λέγεται ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρά.

Βάσις τριγώνου λέγεται μία τις τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, τοῦ δὲ ἰσοσκελοῦς τριγώνου λαμβάνεται συνήθως ὡς βάσις ἡ πρὸς τὰς ἄλλας ἄνισος.

Διάμεσος τριγώνου λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἄγεται ἐκ μιᾶς κορυφῆς αὐτοῦ μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.



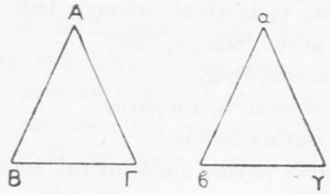
91. **Θεώρημα.** ***Παντὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι*** (αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν) ***εἶναι ἴσαι.***

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἔχον ΑΒ = ΑΓ· λέγω, ὅτι γων. Γ = γων. Β.

Ἂς ἐπαναληφθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἂς ἐφαρμοσθῶσιν αἱ ἴσαι γωνίαι Α καὶ α, ἀλλ' οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ αβ νὰ πέσῃ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπὶ τῆς ΑΓ καὶ ἡ αγ ἐπὶ τῆς ΑΒ. τότε καὶ τὸ σημεῖον β θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ καὶ τὸ γ ἐπὶ τοῦ Β καὶ ἡ εὐθεῖα βγ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΓΒ· ὥστε αἱ γωνίαι γ καὶ Β θὰ ἐφαρμόσωσιν· ἄρα εἶναι ἴσαι· καὶ ἐπειδὴ εἶναι γ = Γ, ἕπεται Β = Γ. ὅ. ἔ. δ.



Σημ. Αἱ παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου δύο ἴσαι γωνίαι εἶναι πάντοτε ὀξεῖαι.

92. Πόρισμα. ***Πᾶν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.***

93. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ δύο γωνίας ἴσας, ἔχει καὶ τὰς ἀπέναντι αὐτῶν πλευρὰς ἴσας.***

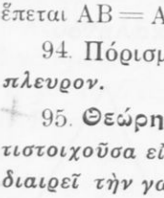
Ἔστω τοιοῦτον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἔχον Β = Γ· λέγω, ὅτι καὶ ΑΓ = ΑΒ.

Ἂς ἐπαναληφθῇ τὸ τρίγωνον (σχῆμα τὸ προηγούμενον) καὶ ἂς τεθῇ τὸ αβγ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως,ὥστε ἡ βγ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΓΒ, νὰ πέσῃ δὲ τὸ β ἐπὶ τοῦ Γ καὶ τὸ γ ἐπὶ τοῦ Β, τότε καὶ ἡ βα θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΓΑ (διότι β = Γ)· ὁμοίως δὲ καὶ ἡ γα θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΒΑ· ἑπομένως τὰ τρίγωνα θὰ ἐφαρμόσωσι (86)· ἄρα εἶναι αβ = ΑΓ· ἐπειδὴ δὲ εἶναι αβ = ΑΒ, ἕπεται ΑΒ = ΑΓ· ὅ.ἔ.δ.

94. Πόρισμα. ***Πᾶν τρίγωνον ἰσογώνιον εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.***

95. **Θεώρημα.** ***Ἡ διάμεσος ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν βάσιν αὐτοῦ,εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ διαιρεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο μέρη ἴσα.***

Διότι τὰ δύο τρίγωνα εἰς ἃ τὸ ἰσοσκελὲς διαιρεῖται, ἔχουσι ΑΒ=ΑΓ καὶ ΒΔ=ΔΓ (ἐξ ὑποθέσεως) καὶ Β=Γ (91)· ἄρα εἶναι ἴσα (85) καὶ διὰ τοῦτο εἶναι γων. ΑΔΓ=γων.ΑΔΒ,ἤτοι ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ.



Ὡσαύτως ἕπεται καὶ γων. ΒΑΔ = γων. ΓΑΔ.

96. Ἀξιοπαρατήρητον εἶναι, ὅτι ἐν τῷ ἰσο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σκελεῖ τριγώνῳ μία καὶ ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ἐκτελεῖ τὰ ἑξῆς τέσσαρα.

1) διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς.

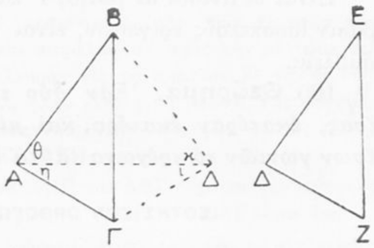
2) δ έρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς βάσεως.

3) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν.

4) διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς· δεικνύεται δὲ εὐκολώτατα, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ ἄλλη εὐθεῖα ἐκτελοῦσα δύο ἐκ τούτων.

97. **Θεώρημα.** ***Δύο τρίγωνα, ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας, κατὰ μίαν, εἶναι ἴσα.***

Ἔστω ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ καὶ ΒΓ = ΕΖ.



Ἂς τεθῇ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ οὕτως, ὥστε νὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΒΓΔ· ἂς ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΔ· τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές, ὅθεν ἕπεται (91) θ = κ.

Ἀλλὰ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ εἶναι ἰσοσκελές· ὅθεν εἶναι η = ι. Ὥστε εἶναι η + θ = ι + κ, ἤτοι Α = Δ· καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα (85).

Σημείωσις. Ἐν τῇ ἀποδείξει ὑπετέθη, ὅτι ἡ ΑΔ κεῖται ἐντὸς τῶν τριγώνων, ὥστε διαιρεῖ τὰς γωνίας Α καὶ Δ εἰς μέρη, ἀλλὰ καὶ ἐκτὸς αὐτῶν ἂν κεῖται ἡ ΑΔ, πάλιν ἡ ἀπόδειξις μένει ἡ αὐτὴ μόνον αἱ γωνίαι Α καὶ Δ εἶναι τότε διαφοραὶ ἴσων γωνιῶν.

98. **Παρατήρησις.** Εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα αἱ ἴσαι πλευραὶ εὑρίσκονται ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν καὶ αἱ ἴσαι γωνίαι ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν.

Κ 99. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν γωνίαν ἴσην ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν, ἢ εἶναι τὰ τρίγωνα ταῦτα ἴσα ἢ αἱ δύο γωνίαι, αἱ ἀπέναντι τῶν δύο ἄλλων ἴσων πλευρῶν, εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ ἄνισοι.***

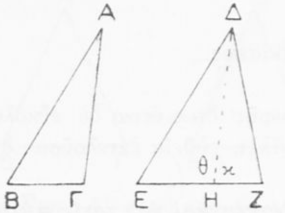
Ἔστω ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ καὶ Β = Ε.

Ἂν μὲν εἶναι ΕΖ = ΒΓ, τὰ τρίγωνα θὰ εἶναι ἴσα (85).

Ἂν δὲ εἶναι ἄνισοι, καὶ εἶναι ΕΖ > ΒΓ καὶ ἐφαρμοσθῇ ἡ Β

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ Ε· τότε ἡ μὲν πλευρὰ ΒΑ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΕΔ, ἡ δὲ ΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπί τινος μέρους τῆς ΕΖ, ἔστω ἐπὶ τῆς ΕΗ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΔΕΗ· ὥστε θὰ εἶναι Γ = ϑ καὶ ΑΓ = ΔΗ· ἐπειδὴ δὲ ὑ ετέθη καὶ ΑΓ = ΔΖ, συνάγεται ὅτι ΔΗ = ΔΖ, καὶ τὸ τρίγωνον ΔΗΖ θὰ εἶναι ἰσοσκελές· ὥστε εἶναι κ = Ζ, ἐπειδὴ δὲ ϑ + κ = 2 ὀρ. ἕπεται ὅτι καὶ (Γ = ϑ καὶ Ζ = κ) Γ + Ζ = 2 ὀρ. ὅ. ἔ. δ.



Εἶναι δὲ ἄνισοι αἱ γωνίαι Γ καὶ Ζ· διότι ἡ Ζ, οὖσα παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, εἶναι ὀξεῖα· ἑπομένως ἡ Γ θὰ εἶναι ἀμβλεῖα.

100. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα*** (82,86).

ΙΣΟΤΗΣ ΤΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

101. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν, ὅτι δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχωσι,

1) Τὰς δύο πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ (85).

2) Τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσην (99).

3) Μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην καὶ τὰς ὑποτεινούσας ἴσας (100).

4) Μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην καὶ τὰς ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰς ἴσας (100).

5) Μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην καὶ τὴν προσκειμένην κάθετον πλευρὰν ἴσην (86).

Ἀσκήσεις

32) Αἱ ἀποστάσεις σημείου τῆς διχοτόμου γωνίας ἀπὸ δύο σημείων τῶν πλευρῶν αὐτῆς, ἅτινα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας, εἶναι ἴσαι.

33) Δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ διχοτομοῦσιν ἀλλήλας εἰς τὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σημεῖον Ε. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΕΓ καὶ ΒΕΔ εἶναι ἴσα.

34) Δίδονται δύο σημεῖα μιᾶς εὐθείας Α καὶ Β καὶ δύο ἄλλα σημεῖα ἐκτὸς αὐτῆς Γ καὶ Δ κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας. Ἐὰν ΑΓ = ΒΔ καὶ γων. ΓΑΒ = γων. ΔΒΑ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων Γ καὶ Δ ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι ἴσαι.

35) Ἐὰν Δ καὶ Ε εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ καὶ Ζ σημεῖόν τι τῆς ΒΓ καὶ Η καὶ Θ τὰ σημεῖα εἰς ἃ αἱ προεκτάσεις τῶν εὐθειῶν ΖΔ καὶ ΖΕ τέμνουσι τὴν διὰ τοῦ Α παράλληλον τῇ ΒΓ, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ΒΓ = ΗΘ.

36) Εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχομεν ΑΒ = ΑΔ καὶ ΓΒ = ΓΔ. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι γων. ΑΔΓ = γων. ΑΒΓ.

37) Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Γ τῆς εὐθείας ΑΒ φέρωμεν τὴν ΓΔ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ΔΑ = ΔΒ, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

38) Ἐκ τινος σημείου Δ κειμένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΒΑΓ φέρομεν τὴν ΔΑ καὶ παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ τὴν ΔΕ, ἥτις τέμνει τὴν ἄλλην πλευρὰν εἰς τὸ σημεῖον Ε· τὴν δὲ εὐθεῖαν, ἥτις συνδέει τὸ Ε μετὰ τοῦ Ζ, ὅπερ εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΔΑ προεκτείνομεν μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Η. Ν' ἀποδειχθῇ τότε, ὅτι ΕΖ = ΖΗ.

39) Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι ἴσα.

40) Τὸ τρίγωνον, οὗ αἱ κορυφαὶ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἰσοσκελές.

41) Ἐὰν Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἡ ΑΔ προεκταθῇ οὕτως, ὥστε ΑΔ = ΔΕ, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΕ.

42) Ἐὰν τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα, αἱ διχοτόμοι ΑΗ καὶ ΔΘ τῶν ἴσων γωνιῶν Α καὶ Δ, αἵτινες τέμνουσι τὰς ἀπέναντι πλευρὰς εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Θ, εἶναι ἴσαι.

43) Αἱ διάμεσοι ἰσοσκελοῦς τριγώνου, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς αὐτοῦ εἶναι ἴσαι.

44) Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.

45) Ἐὰν ἡ διάμεσος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθή.

46) Τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ αἱ διχοτόμοι τῶν ἴσων γωνιῶν Α καὶ Γ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Δ. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΒΔ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Β.

47) Ἐὰν ἑκατέρα τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι διπλασία τῆς Α καὶ ἐὰν ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Β τέμνῃ τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι ΑΔ = ΔΒ = ΒΓ.

48) Ἐὰν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἔχωσι τὴν αὐτὴν βάσιν, ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὰς ἀπέναντι κορυφάς, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν..

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

49) Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα εἶναι ἴσα ἐὰν ἔχωσι βάσεις ἴσας καὶ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς ἴσην.

50) Δύο τετράπλευρα ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἔχοντα ΑΒ = ΕΖ, ΒΓ = ΖΗ, ΓΔ = ΗΘ, γων. Β = γων. Ζ καὶ γων. Γ = γων. Η, εἶναι ἴσα.

51) Δύο τετράπλευρα ἔχοντα τὰς 4 πλευρὰς αὐτῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ μίαν γωνίαν, σχηματιζομένην ὑπὸ ἴσων πλευρῶν ἴσην, εἶναι ἴσα.

52) Ἐὰν ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ εἶναι διάμετροι τοῦ αὐτοῦ κύκλου, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἴσα.

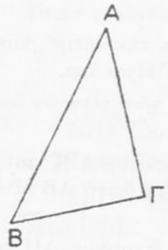
53) Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὸ ἰσοσκελὲς ΔΒΓ ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς. Ἐὰν γων. ΒΔΓ $= \frac{1}{2}$ γων. ΒΑΓ ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΔ = ΒΓ.

54) Διὰ τοῦ μέσου Δ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ ἄγεται ἡ ΔΕ παράλληλος τῇ ΒΓ τέμνουσα τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ΑΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΕ.

55) Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ = ΑΔ καὶ γων. ΑΒΓ = γων. ΑΔΓ. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ΒΓ = ΓΔ.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΟΣ

102. **Θεώρημα.** ***Παντὸς τριγώνου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.***



Τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως ταύτης εἶναι φανερὸν ἐκ τοῦ 5ου ἀξιώματος τῆς εὐθείας, τὸ δὲ δεύτερον ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

Ἵνα δείξωμεν, ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων, προσθέτομεν εἰς αὐτὴν τὴν μικροτέραν ἐξ αὐτῶν, ὅτε ἔχομεν

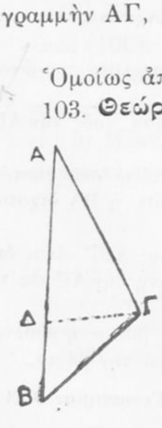
$$ΒΓ + ΑΓ > ΑΒ.$$

Ἐὰν δὲ ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν ἀνίσων ἀφαιρέσωσωμεν τὴν αὐτὴν γραμμὴν ΑΓ, λαμβάνομεν

$$ΒΓ > ΑΒ - ΑΓ.$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ περὶ τῶν ἄλλων πλευρῶν.

103. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἄνισοι, καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἄνισοι· ἡ μεγαλυτέρα γωνία ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρ῀ς.***



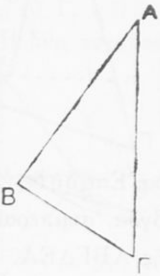
Ἤτοι, ἐὰν ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι ΑΒ > ΑΓ, θὰ εἶναι καὶ Γ > Β.

Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ μέρος ΑΔ ἴσον τῇ ΑΓ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΔ. Ἡ γωνία ΑΔΓ, (ἐκτὸς γωνία τοῦ τριγώνου ΓΔΒ), εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Β (80) καὶ ἴση τῇ ΑΓΔ, (ΑΔ=ΑΓ),

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὥστε ἡ γωνία ΑΓΔ, ἥτις εἶναι μέρος τῆς Γ, ὑπερβαίνει τὴν Β· πολὺ δὲ περισσότερον ἡ γωνία Γ θὰ ὑπερβαίνῃ τὴν Β.

104. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἄνισοι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἄνισοι· ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας.***



Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, εἰς ὃ ἔχομεν Β>Γ λέγω, ὅτι εἶναι καὶ ΑΓ>ΑΒ.

Ἂν δὲν ἦτο ΑΓ>ΑΒ θὰ ἦτο ἢ ΑΓ = ΑΒ ἢ ΑΓ<ΑΒ· ἀλλ' ἂν ἦτο ΑΓ = ΑΒ θὰ ἦτο καὶ Β = Γ, ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει· ἂν δὲ ἦτο ΑΓ<ΑΒ θὰ ἦτο καὶ Β<Γ (103) ὅπερ καὶ τοῦτο ἐναντίον τῇ ὑποθέσει· ὥστε θὰ εἶναι ΑΓ>ΑΒ.

Σημείωσις. Ἀντὶ νὰ ἀποδείξωμεν εὐθύς, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΓ, ἀπεδείξαμεν πρῶτον, ὅτι δὲν δύναται νὰ εἶναι μήτε ἴση μήτε μικροτέρα· διότι ἀμφότεραι αἱ ὑποθέσεις ΑΒ = ΑΓ ἢ ΑΒ>ΑΓ φέρουσιν εἰς ἄτοπα. Ἡ τοιαύτη μέθοδος τῆς ἀποδείξεως λέγεται ***ἀπαγωγὴ εἰς ἄτοπον*** καὶ κατ' αὐτὴν ἐγένοντο αἱ ἀποδείξεις τῶν πρώτων θεωρημάτων (ἐδάφ. 40, 41, κτλ.). Συνίσταται δὲ ἡ μέθοδος αὕτη γενικῶς εἰς τοῦτο, ὅτι ἀποδεικνύομεν τὰς ὑποθέσεις, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ κάμωμεν περί τινος πράγματος, πάσας ψευδεῖς πλὴν μιᾶς μόνης, τῆς ὁποίας τότε συμπεραίνομεν τὴν ἀλήθειαν.

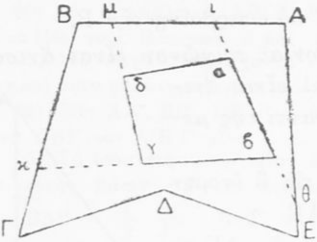
105. **Θεώρημα.** ***Ἡ περίμετρος κυρτοῦ σχήματος εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης γραμμῆς ἐξ εὐθειῶν συγκειμένης καὶ περικλειούσης αὐτό.***

Ἔστω κυρτὸν σχῆμα τὸ αβγδ καὶ περικλείουσα αὐτὸ γραμμὴ ἡ ΑΒΓΔΕΑ· λέγω, ὅτι ἡ περίμετρος αβ + βγ + γδ + δα εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΕΑ.

Ἂς προσεκβληθῇ ἡ αβ μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν περικλείουσαν γραμμὴν εἰς τὰ σημεῖα ι καὶ θ· ἐὰν ἐν τῇ περικλειούσῃ ἀντικαταστήσωμεν τὴν τεθλασμένην γραμμὴν ιΑθ διὰ τῆς εὐ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θείας ιθ, λαμβάνομεν γραμμὴν μικροτέραν (25,5) τὴν ιθΕΔΓΒι.



ἐὰν δὲ καὶ ἐν ταύτῃ ἀντικαταστήσωμεν τὴν τεθλασμένην βθΕΔΓκ διὰ τῆς εὐθείας βκ, λαμβάνομεν μικροτέραν γραμμήν, τὴν ιβκΒι. Ὁμοίως ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν μικροτέραν τὴν ιβγμι καὶ τέλος ταύτης μικροτέραν τὴν αβγδα. Ἐπειδὴ δέ, ἐλαττοῦντες τὴν γραμμὴν ΑΒΓΔΕΑ, εὕρομεν τὴν αβγδα, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ γραμμὴ αβγδα εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΒΓΔΕΑ.

106. Πόρισμα. ***Ἐὰν ἐντὸς τριγώνου ληφθῇ σημεῖόν τι Δ καὶ ἀχθῶσιν ἐξ αὐτοῦ εὐθεῖαι εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς πλευρᾶς, αἱ ΔΒ, ΔΓ, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.***

Ἀσκήσεις

56) Αἱ γωνίαι αἱ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν πλευρὰν τριγώνου εἶναι ὀξεῖαι.

57) Ἐὰν ἡ βάσις ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ προεκταθῇ μέχρι σημείου τινὸς Δ, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΔ > ΑΓ.

58) Ἐὰν ΒΓ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ καὶ Δ σημεῖόν τι τῆς ΑΓ, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἑκατέρα τῶν ΒΔ καὶ ΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΑ καὶ ὅτι ἡ ΒΓ > ΒΔ.

59) Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Κ. Ἐὰν ΑΒ > ΑΓ, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ΚΒ > ΚΓ.

60) Ἐὰν ΒΓ εἶναι ἡ βάσις ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ καὶ Δ σημεῖόν τι αὐτῆς, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι μεγαλυτέρα μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν αὐτοῦ.

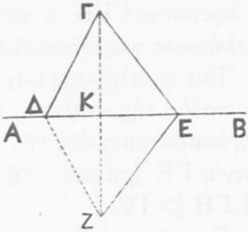
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΕΡΙ ΚΑΘΕΤΟΥ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΩΝ

107. **Θεώρημα.** ***Ἐκ σημείου ὑπάρχοντος ἐκτὸς εὐθείας δύναται νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ᾽ αὐτήν, μία δὲ καὶ μόνη.***

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς τὸ Γ.

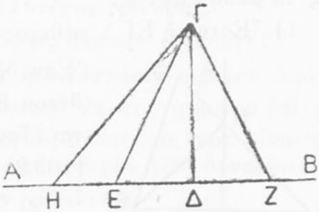
Ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ Γ εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι, αἱ ΓΔ, ΓΕ, καὶ ἂς περιστραφῇ τὸ τρίγωνον ΓΔΕ περὶ τὴν βάσιν του ΔΕ, μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ, ἂς λάβῃ δὲ τότε τὴν θέσιν ΔΕΖ· ἂς ἀχθῇ δὲ ἡ εὐθεῖα ΓΖ, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Κ (33)· ἐὰν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν του, περιστρεφόμενον περὶ τὴν ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΖΚ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΓΚ καὶ ἡ γωνία ΖΚΔ ἐπὶ τῆς ΓΚΔ· ὥστε αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι· ἑπομένως καὶ αἱ 4 περὶ τὸ Κ γωνίαι εἶναι ἴσαι (51, παρ.) καὶ αἱ εὐθεῖαι ΓΖ καὶ ΑΒ εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.



Ὑπάρχει λοιπὸν ἡ ΓΖ ἐκ τοῦ Γ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· ἀλλ᾽οὐδεμία ἄλλη· διότι δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι (66).

108. **Ὁρισμός.** Ἐὰν ἐκ σημείου, ἐκτὸς εὐθείας κειμένου, ἀχθῇ ἐπ᾽ αὐτὴν ἡ κάθετος ΓΔ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι ΓΕ, ΓΗ, ΓΖ...., αὗται λέγονται *πλάγιαι.*

109. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν ἐκ σημείου, ἐκτὸς εὐθείας κειμένου, ἀχθῶσιν ἐπ᾽ αὐτὴν ἡ κάθετος καὶ ὁσαιδήποτε πλάγιαι.***



1) ***ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας,***

2) ***δύο πλάγιαι, ὧν οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου εἶναι ἴσαι,***

3) ***ἐκ δύο πλαγίων ἐκείνη τῆς ὁποίας ὁ ποῦς ἀπέχει περισσσότερον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου εἶναι μεγαλυτέρα.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1) Ἡ κάθετος ΓΔ εἶναι μικροτέρα τῆς τυχούσης πλαγίας ΓΕ, διότι ἐν τῷ τριγώνῳ ΓΔΕ εἶναι γων. ΓΔΕ $>$ γων. ΓΕΔ· ὅθεν (104) ΓΕ$>$ ΓΔ.

2) Ἐὰν εἶναι ΔΕ $=$ ΔΖ τὰ τρίγωνα ΓΔΕ καὶ ΓΔΖ εἶναι ἴσα (101,1)· ὅθεν εἶναι ΓΕ $=$ΓΖ.

3) Ἐὰν εἶναι ΔΗ$>$ΔΕ θὰ εἶναι καὶ ΓΗ $>$ ΓΕ· διότι ἐν τῷ τριγώνῳ ΓΕΗ ἡ γωνία ΓΕΗ, ἥτις εἶναι ἀμβλεῖα (ὡς παραπλήρωμα τῆς ὀξείας ΓΕΔ), εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΓΗΕ (79).

Ἐὰν αἱ πλάγιαι, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἄνισον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου κεῖνται ἑκατέρωθεν αὐτῆς ὡς αἱ ΓΗ, ΓΖ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΔΗ τὸ μέρος ΔΕ ἴσον τῇ ΔΖ. τότε ἡ πλαγία ΓΕ ἰσοῦται τῇ ΓΖ· ἐπειδὴ δὲ ΓΗ $>$ ΓΕ· ἕπεται ὅτι καὶ ΓΗ $>$ ΓΖ.

Σημείωσις. Καὶ τὰ ἀντίστροφα τῶν τριῶν τούτων προτάσεων ἀληθεύουσι καὶ ἀποδεικνύονται εὐκολώτατα διὰ τῆς εἰς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

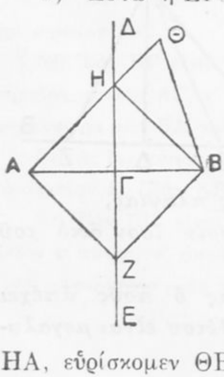
110. Πόρισμα 1ον. ***Ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου, εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀχθῶσιν εἰς αὐτὴν τρεῖς εὐθεῖαι ἴσαι.***

111. Πόρισμα 2ον. ***Περιφέρεια κύκλου καὶ εὐθεῖα γραμμὴ δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.***

112. Πόρισμα 3ον. ***Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι γραμμὴ καμπύλη.***

113. **Θεώρημα.** ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσων ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων εὐθείας, εἶναι ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.***

1) Ἔστω ἡ ΕΓΔ κάθετος εἰς τὸ μέσον Γ τῆς εὐθείας ΑΒ.



Ἐὰν δὲ Ζ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς καθέτου ΕΓΔ, αἱ πλάγιαι ΖΑ καὶ ΖΒ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι καὶ ΓΑ $=$ ΓΒ (109,2)

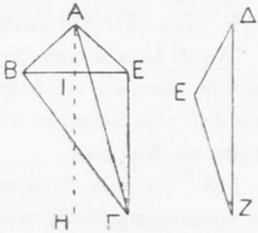
2) Ἔστω Θ σημεῖόν τι ἐκτὸς τῆς καθέτου ΕΓΔ κείμενον· ἂν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΘΑ, ΘΒ ἡ ΘΑ τέμνει (33) τὴν κάθετον ταύτην εἴς τι σημεῖον Η καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου ΘΗΒ λαμβάνομεν ΘΒ$<$ΒΗ $+$ ΗΘ καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΒΗ$=$ ΗΑ, εὑρίσκομεν ΘΒ$<$ΑΗ $+$ ΗΘ ἤτοι ΘΒ$<$ΑΘ· ὥστε ἀπε-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δείχθη, ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον εὐθείας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας ταύτης καὶ πᾶν σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου ταύτης κείμενον, ἀπέχει ἄνισον ἀπὸ τῶν ἄκρων αὐτῆς· ἤτοι ἀπεδείχθη τὸ θεώρημα.

114. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὰς δὲ περιεχομένας ὑπ' αὐτῶν γωνίας ἀνίσους, αἱ λοιπαὶ πλευραὶ θὰ εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα θὰ εἶναι ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας.***

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἔχοντα ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ καὶ Α>Δ· λέγω, ὅτι θὰ εἶναι ΒΓ>ΕΖ.



Διότι, ἐὰν τεθῇ ἡ κορυφὴ Δ ἐπὶ τῆς Α καὶ ἡ πλευρὰ ΔΖ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῆς ΑΓ, τὸ δὲ τρίγωνον ΔΕΖ ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ, ἡ διχοτομοῦσα τὴν γωνίαν ΒΑΕ, θὰ κεῖται ἐντὸς τῆς μεγαλυτέρας γωνίας ΓΑΒ, θὰ εἶναι δὲ καὶ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΕ· διότι τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἰσοσκελές, (ΑΒ=ΔΕ)· ἀλλὰ τὸ Γ κεῖται ἐκτὸς τῆς καθέτου ταύτης· ἄρα εἶναι ΒΓ>ΕΓ (113), ἤτοι ΒΓ>ΕΖ.

Ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τούτου εἶναι τὸ ἑξῆς:

115. ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὰς δὲ λοιπὰς πλευρὰς ἀνίσους, αἱ ἀπέναντι τῶν ἀνίσων πλευρῶν γωνίαι εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα θὰ εἶναι ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς.***

Δεικνύεται δὲ εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

116. **Ὁρισμός.** ***Ἀπόστημα*** ἢ ***ἀπόστασις*** σημείου ἀπὸ εὐθείας λέγεται ἡ κάθετος, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν· λαμβάνεται δὲ ἡ κάθετος ὡς ἀπόστημα, διότι εἶναι μία· εἶναι δὲ καὶ ἡ ἐλαχίστη πασῶν τῶν εὐθειῶν τῶν δυναμένων νὰ ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ σημείου εἰς τὴν εὐθεῖαν.

Σημ. Τὸ ἀπόστημα τῆς κορυφῆς τριγώνου ἀπὸ τῆς ἀπέναντι βάσεως λέγεται ***ὕψος*** τοῦ τριγώνου.

117. **Θεώρημα.** ***Ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν δύο πλευρῶν δοθείσης γωνίας, εἶναι ἡ διχοτομοῦσα τὴν γωνίαν ταύτην εὐθεῖα.***

1) Ἔστω ΑΔ ἡ διχοτομοῦσα τὴν γων. ΒΑΓ καὶ Ε τυ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

χὸν σημεῖον τῆς ΑΔ καὶ ΕΗ,ΕΖ αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ· τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΗ, ΑΕΖ εἶναι ἴσα (101, 3) καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ΕΖ = ΕΗ.

2) Ὑποθέτομεν ἤδη, ὅτι τὸ σημεῖον Ε ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γων. ΒΑΓ ἤτοι εἶναι ΕΖ = ΕΗ· ἂν ἀχθῇ ἡ ΑΕ τὰ ὀρθογ. τρίγωνα ΑΕΗ, ΑΕΖ εἶναι ἴσα (101,2)· ὥστε θὰ εἶναι καὶ γων. ΖΑΕ = γων. ΗΑΕ· ἤτοι ἡ ΑΕ εἶναι ἡ διχοτομοῦσα τὴν γωνίαν ΒΑΓ.

Ἀφοῦ λοιπὸν πᾶν σημεῖον τῆς διχοτόμου ΑΕ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας καὶ πᾶν σημεῖον ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΑΕ, ἀπεδείχθη τὸ θεώρημα.

118. Ἐπὶ τῶν θεωρημάτων 113 καὶ 117 παρατηροῦμεν ὅτι· ἵνα γραμμή τις εἶναι γεωμετρικὸς τόπος σημείων ἐχόντων κοινήν τινα ἰδιότητα, πρέπει ν' ἀποδειχθῇ 1ον), ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς γραμμῆς ἔχει τὴν ἰδιότητα ἐκείνην καὶ 2ον) ὅτι πᾶν σημεῖον μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς γραμμῆς δὲν ἔχει τὴν δεδομένην ἰδιότητα (113) ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, ὅτι πᾶν σημεῖον ἔχον τὴν δεδομένην ἰδιότητα κεῖται ἐπὶ τῆς γραμμῆς (117).

Ἀσκήσεις.

61) Ἐν κυρτῷ τετραπλεύρῳ ΑΒΓΔ εἶναι ΑΔ = ΒΓ καὶ γωνία ΑΔΓ > γωνίας ΒΓΔ. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΓ > ΒΔ.

62) Ἐὰν διάμεσος τριγώνου περιέχεται μεταξὺ ἀνίσων πλευρῶν, αἱ εὐθεῖαι αἵτινες ἄγονται ἔκ τινος σημείου αὐτῆς μέχρι τῶν ἄκρων τῆς τρίτης πλευρᾶς εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι, ἡ πρὸς τὸ μέρος τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς.

63) Ἡ διάμεσος τριγώνου, ἥτις περιέχηται μεταξὺ ἀνίσων πλευρῶν σχηματίζει μετὰ τοῦ ἡμίσεως τῆς τρίτης πλευρᾶς, τοῦ προσκειμένου εἰς τὴν μεγαλυτέραν πλευράν, γωνίαν ἀμβλεῖαν.

64) Τὰ ἄκρα εὐθείας ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ πάσης εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ μέσου αὐτῆς.

65) Οἱ πόδες τῶν καθέτων, αἵτινες ἄγονται ἔκ τινος σημείου τῆς διχοτόμου γωνίας ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτῆς, ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας.

66) Αἱ εὐθεῖαι αἵτινες ἄγονται ἐκ τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νου εἰς δύο σημεῖα τῆς βάσεως αὐτοῦ, ἀπέχοντα ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων αὐτῆς σχηματίζουσιν ἰσοσκελὲς τρίγωνον.

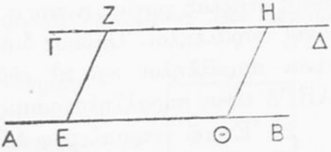
67) Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τριγώνου τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον, ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

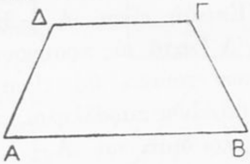
68) Αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα πλευρῶν τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἀπέχον ἰσάκις ἀπὸ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ.

ΠΕΡΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

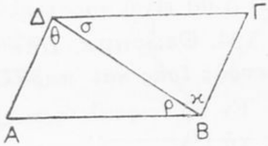
119 **Ὁρισμοί.** ***Παραλληλόγραμμον*** λέγεται τὸ τετράπλευρον, οὗτινος αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι.

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι καὶ ἐπιζευχθῶσι δύο σημεῖα αὐτῶν τὰ τυχόντα, οἷον τὰ Ε, Ζ διὰ τῆς εὐθείας ΕΖ, ἀχθῇ δὲ ἔπειτα ἔκ τινος σημείου τῆς ΑΒ, ἔστω ἐκ τοῦ Θ, παράλληλος τῇ ΕΖ, αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν ΓΔ κατά τι σημεῖον Η καὶ τὸ σχῆμα ΕΖΗΘ θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον.





Τραπέζιον λέγεται τὸ τετράπλευρον, οὗτινος δύο μόνον ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι, τοιοῦτον εἶναι τὸ ΑΒΓΔ.



120. **Θεώρημα.** ***Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἴσαι.***

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ.

Ἡ διαγώνιος ΒΔ, διαιρεῖ τὸ παραλληλόγραμμον εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΒΓ ἴσα (86)· ἐντεῦθεν ἕπεται ΑΔ = ΒΓ καὶ ΑΒ = ΓΔ, ἔτι δὲ καὶ Α = Γ. Καὶ αἱ γωνίαι Β καὶ Δ εἶναι ἴσαι· διότι σύγκειται ἐκ μερῶν ἴσων ($\rho = \sigma$ καὶ $\vartheta = \varkappa$).

121 Πόρισμα. ***Αἱ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἀγόμεναι κάθεται εἶναι πᾶσαι ἴσαι.***

122. **Ὁρισμός.** ***Ἀπόστασις*** δύο παραλλήλων λέγεται μία τις τῶν καθέτων, αἵτινες ἄγονται μεταξὺ αὐτῶν.

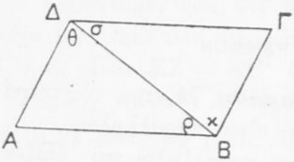
123. **Θεώρημα.** ***Πᾶν τετράπλευρον, ἔχον τὰς ἀπέναντι***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πλευρὰς ἴσας ἢ τὰς ἀπέναντι γωνίας ἴσας, εἶναι παραλληλόγραμμον.

1) Ἐν τῷ τετραπλεύρῳ ΑΒΓΔ ἂς ὑποτεθῇ ΑΒ = ΔΓ καὶ ΑΔ = ΒΓ.

Ἡ διαγώνιος ΒΔ χωρίζει τὸ τετράπλευρον εἰς δύο τρίγωνα ἴσα



(97)· ἑπομένως αἱ γωνίαι θ καὶ κ, ὡς ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν κείμεναι, εἶναι ἴσαι· ὁμοίως καὶ αἱ γωνίαι ρ καὶ σ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΔΓ καὶ ΑΒ, τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΔΒ, σχηματίζουσι τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ρ καὶ σ ἴσας, ἕπεται, ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι. Ὁμοίως διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν κ καὶ θ εἶναι παράλληλοι καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ· ἄρα τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

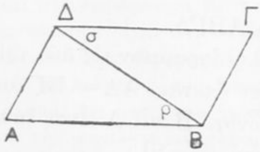
2) Ἐν τῷ τετραπλεύρῳ ΑΒΓΔ ἂς ὑποτεθῇ Α = Γ καὶ Β = Δ.

Ἐπειδὴ εἶναι Α + Β + Γ + Δ = 4 ὀρθαὶ καὶ Α + Β = Γ + Δ (κατὰ τὰς προηγουμένας ἰσότητας), ἑκάτερον τῶν ἀθροισμάτων τούτων θὰ εἶναι δύο ὀρθαί· ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΓΒ θὰ εἶναι παράλληλοι. Ὡσαύτως αἱ ΑΒ καὶ ΔΓ θὰ εἶναι παράλληλοι διότι καὶ Α + Δ = Β + Γ = 2 ὀρθ. ὥστε τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον.

124. **Θεώρημα.** ***Πᾶν τετράπλευρον, ἔχον δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους, εἶναι παραλληλόγραμμον.***

Ἐν τῷ τετραπλεύρῳ ΑΒΓΔ ἔστω ἡ ΑΒ ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΓΔ.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ, εἰς ἃ ἡ διαγώνιος ΒΔ διαιρεῖ



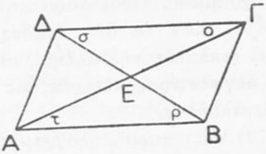
τὸ τετράπλευρον, εἶναι ἴσα (85). Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν τριγώνων συνάγεται, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι ἴση τῇ ΒΓ, ἔτι δὲ καὶ παράλληλος αὐτῇ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν ΑΔΒ καὶ ΔΒΓ.

125. **Θεώρημα.** ***Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ διαγώνιοι τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.***

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ καὶ Ε τὸ σημεῖον, εἰς ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΓ καὶ ΒΔ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΔΕΓ εἶναι ἴσα (ΑΒ = ΔΓ, ρ = σ καὶ τ = ο). Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι εἶναι ΑΕ = ΕΓ καὶ ΔΕ = ΕΒ, τουτέστιν, ὅτι τὸ Ε εἶναι τὸ μέσον ἀμφοτέρων τῶν διαγωνίων.



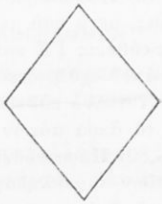
Σημείωσις. Καὶ τὸ ἀντίστροφον θεώρημα: ***πᾶν τετράπλευρον, οὗτινος αἱ διαγώνιοι τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα, εἶναι παραλληλόγραμμον,*** ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως τῇ βοηθείᾳ τῶν τριγώνων.

126. **Ὁρισμοί.** Ἐκ τῶν παραλληλογράμμων διακρίνομεν ἰδιαζόντως τὰ ἑπόμενα εἴδη:

Ὀρθογώνιον λέγεται τὸ παραλληλόγραμμον, ἐὰν ἔχῃ ὀρθὰς πάσας τὰς γωνίας του.

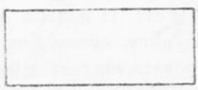
Ρόμβος λέγεται τὸ παραλληλόγραμμον, ἐὰν ἔχῃ πάσας τὰς πλευράς του ἴσας.

Τετράγωνον δὲ λέγεται τὸ παραλληλόγραμμον, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς πλευρὰς πάσας ἴσας καὶ τὰς γωνίας πάσας ὀρθάς. Τὸ τετράγωνον εἶναι ὀρθογώνιον ἰσόπλευρον, ἤτοι ὀρθογώνιον ἔχον ἴσας πάσας τὰς πλευράς, εἶναι δὲ καὶ ρόμβος ἔχων ἴσας τὰς γωνίας.



Κ 127. Αἱ ἑπόμεναι προτάσεις ἀποδεικνύονται εὐκόλως τῇ βοηθείᾳ τῶν τριγώνων.

Κ ***Τοῦ ὀρθογωνίου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι*** καὶ ἀντιστρόφως: ***πᾶν παραλληλόγραμμον, ὅπερ ἔχει διαγωνίους ἴσας, εἶναι ὀρθογώνιον.***



Τοῦ ρόμβου αἱ διαγώνιοι τέμνονται πρὸς ὀρθὰς γωνίας καὶ ἀντιστρόφως: ***πᾶν παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας, εἶναι ρόμβος.***

Ἀσκήσεις

69) Αἱ διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι γωνιῶν παραλληλογράμμου εἶναι παράλληλοι.

70) Αἱ διχοτόμοι δύο γωνιῶν παραλληλογράμμου προσκειμένων εἰς τὴν αὐτὴν πλευρὰν εἶναι κάθετοι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

71) Ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν παραλληλογράμμου, εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς ἄλλας δύο πλευρὰς αὐτοῦ.

72) Ἐὰν ἐκ δύο διαδοχικῶν πλευρῶν παραλληλογράμμου ἡ μία εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, αἱ εὐθεῖαι αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ μέσου τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς, εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀπέναντι, εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

73) Ἐὰν παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΕΖ ἔχουσι τὴν ΑΒ κοινὴν πλευράν, τὸ τετράπλευρον ΓΔΖΕ εἶναι παραλληλόγραμμον.

74) Ἐὰν ἐκ τῶν ἀπέναντι κορυφῶν Α, Γ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΒΔ, αἱ ΑΕ καὶ ΓΖ, νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΖΓΕ εἶναι παραλληλόγραμμον.

75) Ἐὰν ἐφ' ἑκάστης τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ λάβωμεν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, οὕτως ὥστε ΑΘ = ΖΓ, ΑΕ = ΗΓ ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον.

76) Ἐὰν παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ ΑΒ, ΓΔ, εἶναι ἀντιστοίχως τὰ Ε καὶ Ζ νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΒΖΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

77) Δύο παραλληλόγραμμα ἔχοντα δύο διαδοχικὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην εἶναι ἴσα.

78) Παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ συνδέομεν τὴν κορυφὴν Γ δι' εὐθείας, μετὰ τοῦ μέσου Ε τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ ἔπειτα προεκτείνομεν τὰς εὐθείας ΓΕ καὶ ΔΑ μέχρις ὅτου συναντηθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι ΔΑ = ΑΖ.

79) Δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ διχοτομοῦσιν ἀλλήλας. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ ἄκρα αὐτῶν εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

80) Πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμου καὶ περατουμένη εἰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς αὐτοῦ, διχοτομεῖται εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

81) Ἡ πλευρὰ ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ προεκτείνεται ἑκατέρωθεν, οὕτως ὥστε ΒΕ = ΑΖ = ΒΓ. Νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ ΕΓ καὶ ΖΔ προεκτεινόμεναι τέμνονται πρὸς ὀρθὰς γωνίας.

82) Παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αἱ πλευραὶ ΔΑ καὶ ΔΓ προεκτείνονται μέχρι τῶν σημείων Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως καὶ οὕτως, ὥστε ΑΕ= ΔΑ καὶ ΔΓ = ΓΖ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Ε, Β καὶ Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

83) Εὐθεῖα γραμμή, παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τέμνουσα τὰς ἄλλας πλευράς, διαιρεῖ τοῦτο εἰς ἓν τρίγωνον ἰσοσκελὲς καὶ εἰς ἓν τραπέζιον ἰσοσκελές, (ἤτοι ἔχον τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς ἴσας).

84) Αἱ γωνίαι αἱ προσκείμεναι πρός τινα τῶν παραλλήλων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι.

85) Ἡ εὐθεῖα ἥτις συνδέει τὰ μέσα τῶν παραλλήλων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς πλευρὰς ταύτας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

86) Ἐὰν ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὰ μέσα δύο μὴ διαδοχικῶν πλευρῶν τετραπλεύρου, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς πλευρὰς ταύτας, τὸ τετράπλευρον εἶναι τραπέζιον ἰσοσκελές.

87) Ἐὰν τετραπλεύρου δύο μὴ διαδοχικαὶ πλευραὶ εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ δύο γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζουσιν αὗται μετὰ μιᾶς τῶν ἄλλων πλευρῶν εἶναι ἐπίσης ἴσαι, τὸ τετράπλευρον εἶναι τραπέζιον ἰσοσκελές.

88) Αἱ διαγώνιοι ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι ἴσαι.

89) Ἐὰν τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ γωνίαι Α καὶ Β εἶναι ἴσαι ὡς καὶ αἱ γωνίαι Γ καὶ Δ, τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τραπέζιον ἰσοσκελές.

90) Ἐὰν ἐκ σημείου διαγωνίου τετραγώνου ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἰς τὰς ἄλλας κορυφάς, διαιρεῖται τὸ τετράγωνον εἰς δύο ζεύγη ἐξ ἴσων τριγώνων ἕκαστον.

91) Τὰ ἄκρα δύο διαμέτρων κύκλου εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

92) Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν παραλληλογράμμου, σχηματίζουσιν ὀρθογώνιον.

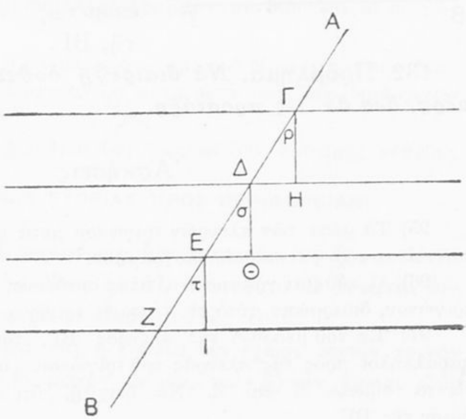
93) Δύο σημεῖα ἐπὶ μιᾶς τῶν διαγωνίων ῥόμβου, ἀπέχοντα ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων αὐτῆς, μετὰ τῶν ἄκρων τῆς ἄλλης διαγωνίου, εἶναι κορυφαὶ ἄλλου ῥόμβου.

94) ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνον καὶ ΑΔΕ, ΒΖΓ δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα μὲ βάσεις τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ΑΔ, ΒΓ, καὶ κείμενα ἐντὸς τοῦ τετραγώνου. Αἱ ΓΖ καὶ ΔΕ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Η, αἱ δὲ ΒΖ καὶ ΑΕ εἰς τὸ Θ. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σχῆμα ΕΗΖΘ εἶναι ῥόμβος.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

128. **Θεώρημα.** ***Τὰ τμήματα εὐθείας, τὰ περιεχόμενα μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν, αἵτινες ἀπέχουσιν ἴσων ἀπ' ἀλλήλων, εἶναι ἴσα καὶ ἀντιστρόφως.***

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἥτις τέμνει τοιαύτας παραλλήλους εἰς τὰ σημεῖα Γ, Δ, Ε κ.τ.λ. Ἐκ τῶν σημείων τούτων, ἐὰν φέρωμεν τὰς καθέτους ΓΗ, ΔΘ, ΕΙ σχηματίζονται τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΗΔ, ΔΘΕ, ΕΙΖ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα. (ΓΗ = ΔΘ = ΕΙ ἐξ ὑποθέσεως καὶ ρ = σ = τ), (72)· ὅθεν εἶναι καὶ ΓΔ = ΔΕ = ΕΖ.



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀντιστρόφως δέ· ἂν εἶναι ΓΔ = ΔΕ = ΕΖ, θὰ εἶναι καὶ ΓΗ = ΔΘ = ΕΙ· διότι τὰ τρίγωνα ΓΗΔ, ΔΘΕ, ΕΙΖ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα (101,5).

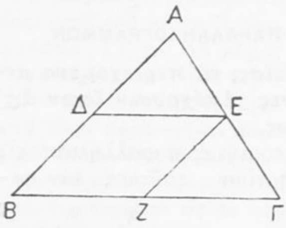
129. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνουσι παραλλήλους καὶ τὰ τμήματα μιᾶς τούτων τὰ περιεχόμενα μεταξὺ τῶν παραλλήλων αὐτῶν εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης εὐθείας.***

Διότι ἀφοῦ τὰ τμήματα τῆς μιᾶς εἶναι ἴσα, αἱ δοθεῖσαι παράλληλοι θὰ ἀπέχουσιν ἴσον ἀπ' ἀλλήλων (ἀντίστροφον τοῦ προηγ.) ἄρα καὶ τὰ τμήματα τῆς ἄλλης θὰ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα (προηγ. θεώρημα).

130. **Πόρισμα 1ον.** ***Ἡ εὐθεῖα γραμμή, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ μέσου πλευρᾶς τριγώνου παράλληλος πρὸς ἄλλην πλευρὰν αὐτοῦ, διχοτομεῖ τὴν τρίτην πλευράν.***

131. **Πόρισμα 2ον.** ***Ἡ τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου συνδέουσα εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν αὐτοῦ καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς.***

Διότι ἂν Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ τριγώνου



ΑΒΓ, ἡ ἐξ αὐτοῦ παράλληλος τῇ ΒΓ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ε τῆς ΑΓ· ἐὰν δὲ Ζ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ, ἡ ΕΖ κατὰ ταῦτα εἶναι παράλληλος τῆς ΑΒ· ὥστε τὸ ΔΕΖΒ εἶνε παραλληλόγραμμον καὶ ἑπομένως εἶναι ἡ ΔΕ τὸ 1)2 τῆς ΒΓ.

132. **Πρόβλημα.** ***Νὰ διαιρεθῇ δοθεῖσα εὐθεῖα εἰς ἴσα μέρη, ὅσα ἂν τις προστάξῃ.***

Ἀσκήσεις

95) Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου μετὰ μιᾶς τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

96) Αἱ εὐθεῖαι γραμμαί, αἵτινες συνδέουσι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου, διαιροῦσιν αὐτὸ εἰς τέσσαρα τρίγωνα ἴσα πρὸς ἄλληλα.

97) Ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, τριγώνου ΑΒΓ, ἄγονται παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, αἵτινες τέμνουσιν αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ΕΖ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

98) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τριγώνου, ΑΒΓ λαμβάνονται δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως, οὕτως, ὥστε $ΑΕ = \frac{1}{4}$ ΑΒ, $ΑΖ = \frac{1}{4}$ ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ καὶ ἴση πρὸς τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῆς.

99) Διάμεσος τριγώνου διχοτομεῖ τὴν εὐθεῖαν, ἥτις συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.

100) Ἐὰν Ε καὶ Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΔΕ καὶ ΒΖ, διαιροῦσιν εἰς τρία ἴσα μέρη τὴν διαγώνιον ΑΓ.

101) Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

102) Αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες συνδέουσι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου, διχοτομοῦνται.

103) Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ρόμβου εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

104) Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου εἶναι κορυφαὶ ρόμβου.

Κ+ 105) Ἡ διάμεσος ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης.

Κ+ 106) Ἡ διάμεσος τραπεζίου (ἤτοι ἡ εὐθεῖα ἥτις συνδέει τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ) εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴση πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο βάσεων.

107) Αἱ τρεῖς διάμεσοι τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ ἑκάστης κορυφῆς ἴσην πρὸς τὰ 2)3 τῆς διαμέσου, ἥτις διέρχεται δι' αὐτῆς.

108) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, ὅταν δίδωνται τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Κ+ 109) Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον, οὗ δίδονται αἱ διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία αὐτῶν.

110) Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον, οὗ δίδεται μία τῶν διαγωνίων καὶ αἱ γωνίαι ἃς σχηματίζει αὕτη μετὰ τῶν δύο διαδοχικῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

111) Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ἴση πρὸς τὰ 5)3 δοθείσης εὐθείας.

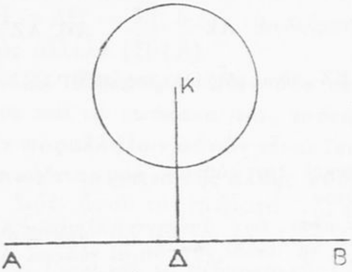
ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΡΟΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΝ

Κ Ἐπειδὴ εὐθεῖα καὶ περιφέρεια δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο (111), διὰ τοῦτο αἱ δυναταὶ θέσεις εὐθείας πρὸς περιφέρειαν εἶναι αἱ ἑξῆς τρεῖς:

1) Ἐὰν ἡ περιφέρεια καὶ ἡ εὐθεῖα δὲν ἔχωσι κανὲν κοινὸν σημεῖον· 2) ἐὰν ἔχωσιν ἓν μόνον κοινόν, καὶ 3) ἐὰν ἔχωσι δύο σημεῖα κοινά.

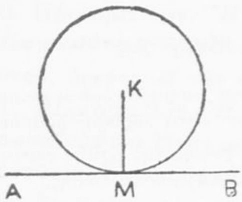
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

133. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν εὐθεῖα καὶ περιφέρεια δὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον, τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς εὐθείας ὑπερβαίνει τὴν ἀκτῖνα.***



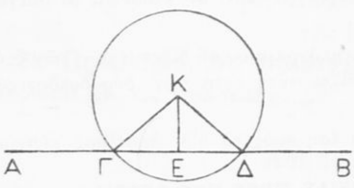
Διότι ὁ πούς Δ τοῦ ἀποστήματος τούτου θὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας.

134. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν εὐθεῖα καὶ περιφέρεια ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς εὐθείας εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα.***



Διότι, ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἐγγίζει τὴν περιφέρειαν μόνον εἰ. τὸ σημεῖον Μ, τὰ λοιπὰ σημεῖα αὐτῆς εὑρίσκονται ἐκτὸς τῆς περιφερείας καὶ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ περισσότερον τῆς ἀκτῖνος· ἑπομένως ἡ ἀκτὶς ΚΜ εἶναι ἡ ἐλαχίστη πασῶν τῶν εὐθειῶν, αἵτινες δύνανται νὰ ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ Κ εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ· ἄρα ἡ ΚΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον Μ καὶ τὸ ἀπόστημα τοῦ Κ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι ἡ ἀκτὶς ΚΜ.

135. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν εὐθεῖα καὶ περιφέρεια ἔχωσι δύο κοινὰ σημεῖα, τὸ μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχον μέρος τῆς εὐθείας κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας καὶ τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς εὐθείας εἶναι μικρότερον τῆς ἀκτῖνος.***

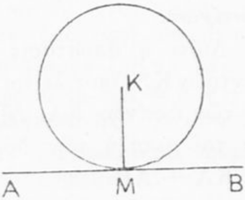


Διότι αἱ ἀκτῖνες ΚΓ, ΚΔ, αἱ εἰς τὰ κοινὰ σημεῖα ἀγόμεναι, δὲν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, ὡς ἴσαι· εἶναι λοιπὸν πλάγιαι καὶ ἡ κάθετος ΚΕ εἶναι μικροτέρα αὐτῶν, ὥστε ὁ πούς αὐτῆς Ε κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας καὶ εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΔ, (ΚΓ=ΚΔ)· ὥστε ἡ ΓΔ κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Παρατ. Καὶ τὰ ἀντίστροφα τῶν θεωρημάτων τούτων ἀληθεύουσι καὶ ἀποδεικνύονται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Διὰ τοῦτο ἀρκούμεθα εἰς τὸ ἑπόμενον, ὅπερ ἀποδεικνύομεν ἀμέσως.

Ἐὰν τὸ ἀπόστημα εὐθείας ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εἶναι ἴσον τῇ ἀκτῖνι, ἤτοι, ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον ἀκτῖνος, ἡ εὐθεῖα αὕτη ἔχει μετὰ τῆς περιφερείας ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον (τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος).



Διότι ὁ ποὺς Μ τοῦ ἀποστήματος ΚΜ, ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ὤν, θὰ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας· τὰ δὲ λοιπὰ σημεῖα τῆς εὐθείας θὰ κεῖνται ἐκτὸς τῆς περιφερείας, διότι αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου εἶναι μεγαλύτεραι τῆς καθέτου ΚΜ, ἤτοι τῆς ἀκτῖνος.

136. **Ὁρισμός.** Ἐὰν εὐθεῖα καὶ κύκλος ἓν μόνον ἔχωσι κοινὸν σημεῖον, ἡ εὐθεῖα λέγεται ***ἐφαπτομένη*** τοῦ κύκλου.

137. **Πόρισμα.** ***Εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς περιφερείας ὑπάρχει μία ἐφαπτομένη καὶ μόνον μία.***

Ἀσκήσεις

112) Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα διαμέτρου κύκλου εἶναι παράλληλοι.

113) Αἱ ἐφαπτόμεναι περιφερείας αἱ ἀγόμεναι ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς, εἶναι ἴσαι, σχηματίζουσι δὲ ἴσας γωνίας μετὰ τῆς εὐθείας, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου εἰς τὸ κέντρον.

114) Ἐὰν αἱ ἐφαπτόμεναι περιφερείας, αἵτινες ἄγονται ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς, εἶναι ἴσαι μὲ τὴν χορδὴν τοῦ τόξου τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν σημείων ἐπαφῆς, νὰ εὑρεθῇ πρὸς πόσα μέρη ὀρθῆς ἰσοῦται ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου αὐτοῦ.

115) Δύο παράλληλοι ἐφαπτόμεναι περιφερείας, κέντρου Κ, τέμνονται ὑπὸ τρίτης ἐφαπτομένης τῆς αὐτῆς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ γωνία ΓΚΔ εἶναι ὀρθή.

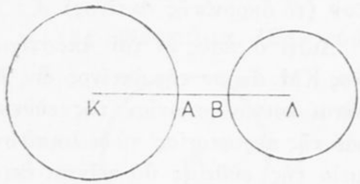
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΔΥΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑΣ ΘΕΣΕΙΣ

α) Περιφέρειαι οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουσαι.

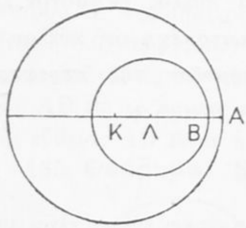
Αἱ τοιαῦται περιφέρειαι ἢ εἶναι ὅλως ἐκτὸς ἀλλήλων ἢ εἶναι ἡ μία ὅλη ἐντὸς τῆς ἄλλης.

138. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο περιφέρειαι κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων μηδὲν ἔχουσαι κοινὸν σημεῖον, τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων αὐτῶν ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀκτίνων.***



Διότι ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων ΚΛ ἀποτελεῖται τότε ἐκ τῶν ἀκτίνων ΚΑ, ΛΒ καὶ ἐκ τοῦ μεταξὺ τῶν δύο κύκλων μέρους αὐτῆς ΑΒ. Ὥστε $ΚΛ > ΚΑ + ΛΒ$.

139. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν ἐκ δύο περιφερειῶν ἡ μία κεῖται ὅλη ἐντὸς τῆς ἄλλης, μηδὲν ἔχουσα μετ' αὐτῆς κοινὸν σημεῖον, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων.***



Ἔστω Κ τὸ κέντρον τῆς μεγαλυτέρας καὶ Λ τὸ τῆς μικροτέρας· ἐὰν ἡ ΚΛ ἐκβληθῇ πέραν τοῦ Λ (ὅπερ κεῖται ἐντὸς ἀμφοτέρων τῶν περιφερειῶν), θὰ συναντήσῃ πρῶτον τὴν μικροτέραν περιφέρειαν κατά τι σημεῖον Β καὶ ἔπειτα τὴν μεγαλυτέραν κατά τι σημεῖον Α· ἀλλὰ τότε, εἶναι $ΚΑ - ΛΒ = ΚΛ + ΒΑ$· ὅθεν $ΚΑ - ΛΒ > ΚΛ$.

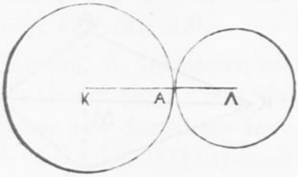
Σημείωσις. Ἐὰν τὰ κέντρα Κ καὶ Λ συμπίπτωσιν, αἱ περιφέρειαι λέγονται ***ὁμόκεντροι.***

β) Περιφέρειαι ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχουσαι

Αἱ τοιαῦται περιφέρειαι λέγεται, ὅτι ἐφάπτονται ἀλλήλων εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον, δύνανται δὲ ἢ νὰ εἶναι ἐκτὸς ἀλλήλων (ὅτε ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐκτὸς) ἢ νὰ κεῖται ἡ μία ἐντὸς τῆς ἄλλης (ὅτε ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

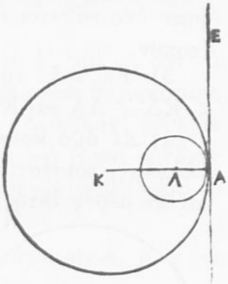
140. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐκτός, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων.***



Ἔστω Α τὸ μόνον κοινὸν σημεῖον τῶν περιφερειῶν· αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΛΑ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, διότι, ἂν ἡ ΚΑΛ ὑποτεθῇ τεθλασμένη, ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ τὰ σημεῖα Κ, Λ συνδέουσα, ὡς μὴ διερχομένη διὰ τοῦ Α θὰ τέμνῃ τὰς περιφερείας εἰς ἄλλα σημεῖα καὶ διὰ τοῦτο θὰ σύγκειται ἐκ δύο ἀκτίνων καὶ ἔκ τινος μέρους, κειμένου ἐκτὸς ἀμφοτέρων τῶν περιφερειῶν· ἑπομένως θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τεθλασμένης ΚΑΛ, ὅπερ ἄτοπον (25,5)· ὥστε ἡ ΚΑΛ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ καὶ ἑπομένως εἶναι ΚΛ = ΚΑ + ΛΑ.

Σημείωσις. Ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἱψουμένη κάθετος εἰς τὴν εὐθεῖαν ΚΛ ἐφάπτεται ἀμφοτέρων τῶν περιφερειῶν εἰς τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον Α.

141. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων.***



Διότι, ἂν εἰς τὸ μόνον κοινὸν σημεῖον Α ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΑΕ τῆς μεγαλυτέρας, θὰ ἐφάπτηται αὕτη καὶ τῆς μικροτέρας (ἥτις κεῖται ἐντὸς τῆς ἄλλης), ἑπομένως αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΛΑ θὰ εἶναι ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην ΑΕ, εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Α καὶ διὰ τοῦτο θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ὁπότε προδήλως εἶναι ΚΑ — ΛΑ = ΚΛ.

γ) Περιφέρειαι δύο κοινὰ σημεῖα ἔχουσαι.

142. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἔχωσι κοινὰ δύο σημεῖα***

1) ***Ἡ ταῦτα συνδέουσα εὐθεῖα τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς εὐθείας τῶν κέντρων.***

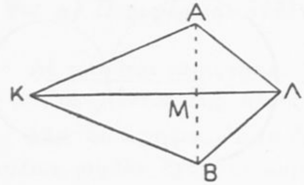
2) ***Αἱ τοιαῦται περιφέρειαι δὲν δύνανται νὰ ἔχωσιν ἄλλο σημεῖον κοινόν.***

3) ***Ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι μικροτέρα μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, μεγαλυτέρα δὲ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

4) ***Αἱ τοιαῦται περιφέρειαι τέμνουσιν ἀλλήλας.***

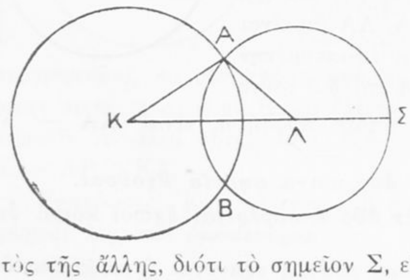
1) Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο κοινὰ σημεῖα δύο περιφερειῶν ἐχουσῶν κέντρα τὰ Κ καὶ Λ· ἐπειδὴ ΚΑ = ΚΒ, ἕπεται (113), ὅτι τὸ Κ θὰ εἶναι σημεῖον τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ· ἀλλὰ καὶ τὸ Λ θὰ εἶναι σημεῖον τῆς αὐτῆς καθέτου, διότι εἶναι καὶ ΛΑ = ΛΒ· διὰ δὲ τῶν δύο σημείων Κ καὶ Λ δὲν διέρχεται ἄλλη εὐθεῖα πλὴν τῆς ΚΛ· ὥστε ἡ εὐθεῖα ΚΛ εἶναι ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.



2) Ἄλλο κοινὸν σημεῖον τῶν αὐτῶν περιφερειῶν δὲν ὑπάρχει· διότι ἂν ὑπῆρχε καὶ ἄλλο, ἔστω τὸ Γ, τοῦτο θὰ ἔκειτο ἢ ἐπὶ τῆς ΑΒ ὁπότε θὰ ἔτεμνεν ἡ εὐθεῖα ΑΒ τὰς περιφερείας εἰς τρία σημεῖα Α, Β, Γ, ὅπερ ἄτοπον (111)· ἢ ἐκτὸς αὐτῆς ὁπότε ἡ ΚΛ θὰ ἦτο κατὰ τὰ προαποδειχθέντα κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΓ, εἶναι δὲ κάθετος καὶ εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Ὥστε ἐκ τοῦ Α θὰ ἦσαν δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΚΛ, ὅπερ καὶ τοῦτο ἄτοπον.

3) Ἐκ τοῦ τριγώνου ΚΑΛ, ἀμέσως συνάγεται ὅτι ΚΛ $<$ ΚΑ + ΛΑ καὶ ΚΛ $>$ ΚΑ — ΛΑ,

4) ***Αἱ δύο κοινὰ σημεῖα ἔχουσαι περιφέρειαι τέμνουσιν ἀλλήλας***, τουτέστιν ἓν μέρος ἑκατέρας κεῖται ἐντὸς τῆς ἄλλης καὶ ἓν μέρος ἐκτός, ὡς δεικνύει τὸ ἑπόμενον σχῆμα.



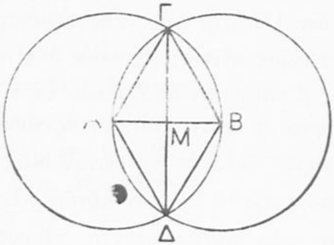
Διότι ἡ περιφέρεια Λ δὲν δύναται νὰ κεῖται ὅλη ἐκτὸς τῆς ἄλλης, ἀφοῦ ἡ ΑΒ ὡς κοινὴ χορδὴ κεῖται ἐντὸς ἀμφοτέρων τῶν περιφερειῶν· ἀλλ' οὐδὲ ὅλη ἡ Λ δύναται νὰ εἶναι ἐντὸς τῆς ἄλλης, διότι τὸ σημεῖον Σ, εἰς ὃ τέμνεται ὑπὸ τῆς ΚΛ, ἐκβληθείσης πέραν τοῦ Λ, κεῖται ἐκτὸς τῆς ἄλλης ὡς ἀπέχον ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἀπόστασιν ΚΛ + ΛΣ μεγαλυτέραν τῆς ἀκτῖνος ΚΑ, μέρος ἄρα τῆς περιφερείας Λ κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας Κ καὶ μέρος ἐκτός.

Παρατ. Καὶ τὰ ἀντίστροφα τῶν θεωρημάτων τούτων ἀλη-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

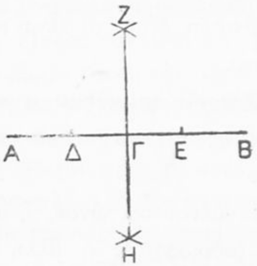
θεύουσι καὶ ἀποδεικνύονται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

143. Πρόβλημα. ***Νὰ ἀχθῇ ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον δοθείσης εὐθείας ΑΒ.***



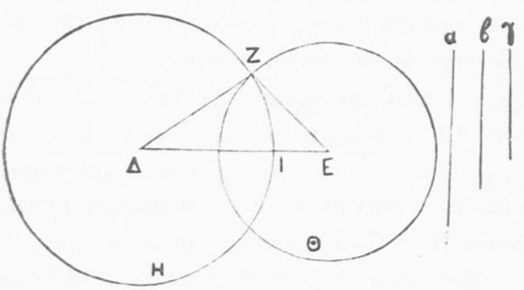
Ἐπειδὴ ἡ ζητουμένη κάθετος εἶναι ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων ἴσον ἀπὸ τῶν Α καὶ Β (113) ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν δύο τοιαῦτα σημεῖα. Καὶ πρὸς τοῦτο γράφομεν δύο κύκλους ἴσους μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ μὲ ἀκτῖνα μεγαλυτέραν τοῦ ἡμίσεως τῆς ΑΒ, ἵνα οἱ κύκλοι οὗτοι τέμνονται· ἡ ζητουμένη κάθετος εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ σημεῖα εἰς ἃ τέμνονται οἱ κύκλοι οὗτοι.

144. Πρόβλημα. ***Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Γ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν.***



Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν τυχοῦσαν γράφομεν περιφέρειαν, τέμνουσαν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς δύο σημεῖα Δ καὶ Ε καὶ κατόπιν φέρομεν τὴν κάθετον (143) εἰς τὸ μέσον Γ τῆς ΔΕ.

145. Πρόβλημα. ***Ἐκ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν α, β, γ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον.***



Ἐὰν Δ καὶ Ε εἶναι αἱ δύο κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου τριγώνου, ὧν ἡ ἀπόστασις ἰσοῦται πρὸς μίαν τῶν δεδομένων εὐθειῶν π. χ. πρὸς τὴν α, ἡ τρίτη ἄγνωστος κορυφὴ θὰ ἔχῃ τόπον τὰς δύο περιφερείας, αἵτι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νες γράφονται μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε καὶ ἀκτῖνας ἴσας πρὸς τὰς δύο ἄλλας δεδομένας εὐθείας, δηλαδὴ ἡ ἄγνωστος κορυφὴ θὰ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν περιφερειῶν τούτων.

Λαμβάνομεν λοιπὸν τὴν εὐθεῖαν ΔΕ ἴσην τῇ α καὶ μὲ κέντρα τὰ Δ καὶ Ε γράφομεν δύο περιφερείας αἵτινες ἔχουσιν ἀκτῖνας ἀντιστοίχως ἴσας μὲ τὰς εὐθείας β καὶ γ· ἂν δὲ Ζ εἶναι ἓν τῶν σημείων εἰς ἃ αἱ γραφεῖσαι περιφέρειαι τέμνονται, τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον· ἄλλο δὲ τρίγωνον διάφορον τούτου δὲν δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἐκ τῶν αὐτῶν πλευρῶν α, β, γ· διότι δύο τρίγωνα τὰς αὐτὰς ἔχοντα πλευράς, εἶναι ἴσα.

Διερεύνησις. Ἵνα αἱ ἀνωτέρω περιφέρειαι τέμνονται, δέον ἵνα ἑκάστη τῶν δοθεισῶν πλευρῶν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς των ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ ἡ μεγαλυτέρα ἐκ τῶν δοθεισῶν δέον νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων δύο.

146. Πρόβλημα. ***Ἐκ τῶν δύο πλευρῶν τριγώνου α καὶ β καὶ ἐκ τῆς γωνίας Α τῆς ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς α νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.***

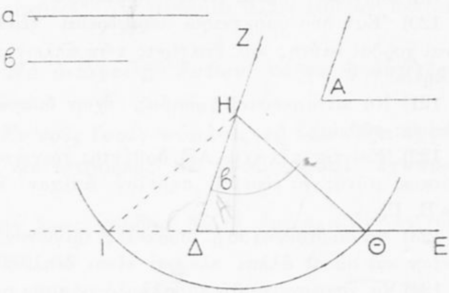
Ἐκ τῶν τριῶν κορυφῶν τοῦ ζητουμένου τριγώνου, ἡ μὲν μία θὰ εἶναι κορυφὴ γωνίας ἴσης τῇ δεδομένῃ Α, ἡ ἄλλη θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς τῆς γωνίας καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς πρώτης κορυφῆς ἴσην τῇ β, ἡ δὲ τρίτη θὰ ἔχῃ τόπον τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς γωνίας καὶ τὴν περιφέρειαν, ἥτις θὰ ἔχῃ κέντρον τὴν δευτέραν κορυφὴν καὶ ἀκτῖνα ἴσην τῇ α.

Κατασκευάζομεν λοιπὸν τὴν γωνίαν ΖΔΕ ἴσην τῇ Α καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς ΔΖ λαμβάνομεν τὴν ΔΗ ἴσην τῇ β καὶ κατόπιν μὲ κέντρον τὸ Η καὶ ἀκτῖνα ἴσην τῇ α γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία ἂς τέμνῃ τὴν ΔΕ εἴς τι σημεῖον, ἔστω τὸ Θ. Τότε τὸ τρίγωνον ΗΔΘ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.

Διερεύνησις. Ἐὰν εἶναι $α > β$ ἡ περιφέρεια θὰ τέμνῃ τὴν ΔΕ εἰς δύο σημεῖα Θ, Ι ἑκατέρωθεν τοῦ Δ (διότι τὸ Δ εἶναι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

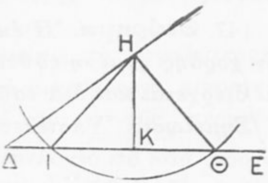
ἐντὸς τῆς περιφερείας) ἐκ δὲ τῶν τριγώνων ΔΗΘ καὶ ΔΗΙ μόνον τὸ πρῶτον λύει τὸ πρόβλημα, διότι ἔχει τὰς πλευρὰς α (= ΗΘ) καὶ β (=ΔΗ), ἔναντι δὲ τῆς α ἔχει τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Α· τὸ δὲ δεύτερον ΔΗΙ ἔχει μὲν



τὰς δοθείσας πλευρὰς α (= ΔΙ) καὶ β (=ΔΗ), ἀλλ' ἀπέναντι τῆς α ἔχει τὴν ΗΔΙ, παραπληρωματικὴν τῆς δοθείσης. Ἄρα, ὅταν εἶναι α>β, τὸ πρόβλημα μίαν μόνον λύσιν ἐπιδέχεται.

Ἐὰν εἶναι α = β (ὁπότε ἡ γωνία Α πρέπει νὰ εἶναι ὀξεῖα) τὸ Ι συμπίπτει μετὰ τοῦ Δ· ὥστε πάλιν μία μόνη λύσις ὑπάρχει.

Τέλος, ἐὰν εἶναι α < β (ὁπότε ἡ γωνία Α θὰ εἶναι ὀξεῖα), ἡ περιφέρεια τέμνει τὴν ΔΕ, ***ὅταν ἡ ἐκ τοῦ Η καταβιβαζομένη κάθετος ἐπ' αὐτήν, ἤτοι ἡ ΗΚ, εἶναι μικροτέρα τῆς α·*** τότε αἱ δύο τομαὶ Ι, Θ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κορυφῆς Δ (διότι τὸ Δ κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας), ἑπομένως ἀμφότερα τὰ τρίγωνα ΔΙΗ, ΔΗΘ λύουσι τὸ πρόβλημα καὶ ἔχομεν δύο λύσεις.



Ἐὰν ἡ κάθετος ΗΚ εἶναι ἴση τῇ α, ἡ περιφέρεια ἐφάπτεται τῆς ΔΕ κατὰ τὸ Κ (ἔνθα συμπίπτουσιν ἀμφότεραι αἱ τομαὶ Ι, Θ) καὶ ἑπομένως ὑπάρχει μία μόνη λύσις, τὸ τρίγωνον ΔΗΚ. Ἐὰν δὲ ἡ ΗΚ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς α, ἡ περιφέρεια δὲν τέμνει (133) τὴν ΔΕ καὶ ἑπομένως οὐδεμία λύσις ὑπάρχει.

Ἀσκήσεις

116) Αἱ κοιναὶ ἐφαπτόμεναι δύο περιφερειῶν (ἐξωτερικαὶ ἢ ἐσωτερικαὶ) εἶναι ἴσαι.

117) Ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη δύο περιφερειῶν εἶναι μικροτέρα τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων.

118) Αἱ ἀκτῖνες δύο περιφερειῶν ἐφαπτομένων ἀλλήλων ἐκτός, αἵτινες ἄγονται εἰς τὰ σημεῖα εἰς ἃ τέμνει αὐτὰς εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς εἶναι παράλληλοι.

119) Αἱ ἀκτῖνες δύο περιφερειῶν ἐφαπτομένων ἀλλήλων ἐντός, αἵ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τινες ἄγονται εἰς τὰ σημεῖα, εἰς ἃ τέμνει αὐτὰς εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς, εἶναι παράλληλοι.

120) Ἐὰν δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι τέμνωνται ὑπὸ τρίτης, αἱ κοιναὶ χορδαὶ ταύτης καὶ ἑκατέρας τῶν ἄλλων περιφερειῶν εἶναι παράλληλοι.

121) Νὰ κατασκευασθῇ ῥόμβος, ἔχων διαγωνίους ἴσας πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας.

122) Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ ἢ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν κορυφῶν Β, Γ.

K 123) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχον βάσιν δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ οὗ αἱ ἄλλαι πλευραὶ εἶναι διπλάσιαι τῆς βάσεως.

124) Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον, οὗ δίδονται δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ καὶ ἡ διαγώνιος ἥτις δὲν διέρχεται διὰ τῆς κοινῆς κορυφῆς αὐτῶν.

124) Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον, οὗ δίδεται μία τῶν πλευρῶν καὶ αἱ διαγώνιοι.

126) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ ὑποτείνουσα καὶ μία τῶν ἄλλων πλευρῶν.

127) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗ δίδεται μία τῶν ἴσων πλευρῶν καὶ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΧΟΡΔΩΝ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

147. **Θεώρημα.** ***Ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εἰς τὸ μέσον χορδῆς ἠγμένη εὐθεῖα, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν καὶ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τοῦ τόξου.***

Σημείωσις. Ὑποτίθεται, ὅτι ἡ χορδὴ δὲν διέρχεται τοῦ κέντρου, ἤτοι ὅτι δὲν εἶναι διάμετρος.

Διότι, ἂν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς ΑΒ, γίνεται τρίγωνον ἰσοσκελές, τὸ ΑΟΒ· ἡ δὲ ΟΓ εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως ἀγομένη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΟΒ (95).

Καὶ τὰ δύο τόξα ΑΔ, ΔΒ εἰς τὰ ὁποῖα προσεκβαλλομένη ἡ ΟΓ διαιρεῖ τὸ τόξον ΑΒ εἶναι ἴσα, διότι γων. ΑΟΔ. = γων. ΔΟΒ (45).

Παρατήρησις. Ἡ εὐθεῖα ΟΔ ἐκτελεῖ τὰ ἑξῆς τέσσαρα :
1) διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου·
2) διὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς.
3) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδήν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

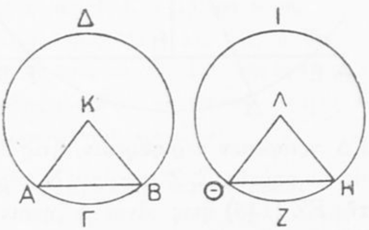
4) διαιρεῖ τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἀποδεικνύεται δὲ εὐκόλως, ὅτι οὐδεμία ἄλλη εὐθεῖα ἐκτελεῖ δύο ἐκ τούτων.

148. **Πρόβλημα.** ***Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τόξον ἢ δοθεῖσα γωνία εἰς δύο μέρη ἴσα.***

149. **Θεώρημα.** ***Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις τὰ ἴσα τόξα ἔχουσιν ἴσας χορδάς,*** καὶ ἀντιστρόφως· ***αἱ ἴσαι χορδαὶ ἔχουσιν ἴσα τόξα.***

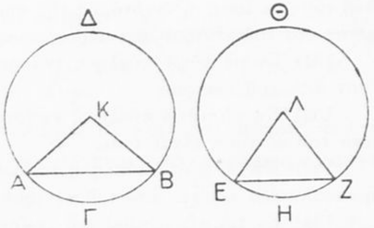
Τὰ ἴσα τόξα ἔχουσιν ἴσας χορδάς· διότι, ἐφαρμοζόντων τῶν ἴσων τόξων, ἐφαρμόζουσι καὶ τὰ ἄκρα αὐτῶν, ἑπομένως ἐφαρμόζουσι καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν.



Καὶ ἀντιστρόφως· αἱ ἴσαι χορδαὶ ἔστω αἱ ΑΒ καὶ ΘΗ ἔχουσιν ἴσα τόξα, διότι τὰ τρίγωνα, ΚΑΒ, ΛΘΗ εἶναι ἴσα· ἑπομένως ἐφαρμόζουσιν· ὅταν δὲ τὰ τρίγωνα ἐφαρμόσωσιν, ἐφαρμόζουσι καὶ οἱ κύκλοι (διότι συμπίπτουσι τὰ κέντρα αὐτῶν)· καὶ τὸ μὲν τόξον ΘΖΗ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ ΑΓΒ, τὸ δὲ ΘΙΗ ἐπὶ τοῦ ΑΔΒ.

150. **Θεώρημα.** ***Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις τὸ μεγαλύτερον τόξον ἔχει μεγαλυτέραν χορδὴν καὶ τὸ μικρότερον μικροτέραν, ἐὰν τὰ τόξα δὲν ὑπερβαίνωσι τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας.***

Ἔστω ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις Κ καὶ Λ τόξ. ΑΓΒ $>$ τόξ. ΕΗΖ· λέγω ὅτι καὶ χορ. ΑΒ $>$ χορ. ΕΖ.



Διότι τὰ δύο τρίγωνα ΚΑΒ, ΛΕΖ ἔχουσι ΚΑ $=$ ΛΕ καὶ ΚΒ $=$ ΛΖ (ὡς ἀκτῖνας ἴσων κύκλων) καὶ γων. Κ $>$ γων. Λ, διότι ἡ Κ βαίνει ἐπὶ μεγαλυτέρου τόξου· ἄρα (114) ἡ ΑΒ $>$ ΕΖ.

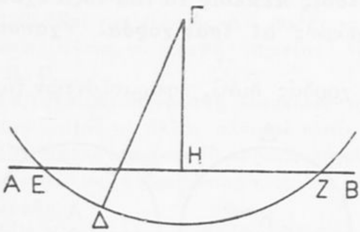
Ἡ ἀντίστροφος πρότασις, ὅτι δηλαδὴ ***ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις ἡ μεγαλυτέρα χορδὴ ἔχει μεγαλύτερον τόξον, ἐὰν***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λαμβάνωνται τὰ μὴ ὑπερβαίνοντα τὴν ἡμιπεριφέρειαν τόξα, ἀποδεικνύεται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Σημείωσις. Ὅτι ἐκ τῶν χορδῶν μεγίστη εἶναι ἡ διάμετρος ἀποδεικνύεται ἀμέσως ἁπλούστατα.

151. Πρόβλημα. ***Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ νὰ ἀχθῇ κάθετος ἀπὸ σημείου Γ ὅπερ δὲν κεῖται ἐπ' αὐτῆς.***



Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τὸ Δ κείμενον πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς εὐθείας ἢ τὸ Γ καὶ μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΓΔ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ· κατόπιν δὲ φέρομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΕΖ (143) ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη, διότι διέρχεται διὰ τοῦ Γ (147).

Ἀσκήσεις

128) Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τέμνῃ δύο ὁμοκέντρους περιφερείας, τὰ μέρη αὐτῆς μεταξὺ τῶν περιφερειῶν τούτων περιεχόμενα, εἶναι ἴσα.

129) Ἐὰν δύο περιφέρειαι τέμνωνται, ἡ εὐθεῖα γραμμή, ἥτις ἄγεται διά τινος σημείου τῆς τομῆς των παράλληλος τῆς εὐθείας τῶν κέντρων καὶ ἥτις περατοῦται εἰς τὰς περιφερείας, εἶναι διπλασία τῆς εὐθείας τῶν κέντρων.

130) Ἐὰν ἐκ σημείου τινος, ἐκτὸς περιφερείας, ἀχθῶσι μέχρι αὐτῆς δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῶν εὐθειῶν τούτων, διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας.

131) Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις, ἴσαι χορδαὶ ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου.

132) Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις χορδαὶ ἀπέχουσαι ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου εἶναι ἴσαι.

133) Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἔν ἴσοις κύκλοις ἐκ δύο χορδῶν ἀνίσων ἡ μεγαλυτέρα ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου ὀλιγώτερον.

134) Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις ἐκ δύο χορδῶν, αἵτινες ἀπέχουσιν ἄνισον ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἡ ἀπέχουσα ὀλιγώτερον ἀπ' αὐτοῦ εἶναι μεγαλυτέρα.

135) Εἰς δύο ὁμοκέντρους κύκλους αἱ χορδαὶ τοῦ μεγαλυτέρου, αἵτινες ἐφάπτονται τοῦ μικροτέρου, εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι καὶ διχοτομοῦνται εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς αὐτῶν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

136) Ἐὰν δύο κύκλοι εἶναι ἴσοι καὶ ἀχθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ μέσου τῆς εὐθείας τῶν κέντρων τέμνουσα αὐτούς, τὰ μέρη τῆς ἀγομένης εὐθείας, ἅτινα εἶναι χορδαὶ τῶν δύο κύκλων, εἶναι ἴσα.

137) Ἐὰν ἐφαπτομένη περιφερείας καὶ χορδὴ τόξου αὐτῆς εἶναι παράλληλοι, τὰ τόξα τὰ περιεχόμενα μεταξὺ αὐτῶν εἶναι ἴσα, ὅπως ἐπίσης εἶναι ἴσα καὶ τὰ τόξα τὰ περιεχόμενα μεταξὺ δύο χορδῶν παραλλήλων.

138) Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα ἀκτῖνα ἴσην πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων.

139) Νὰ διαιρεθῇ τόξον περιφερείας εἰς 4, 8, 16 ἴσα μέρη.

140) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς 1)2, 1 1)2 τῆς ὀρθῆς.

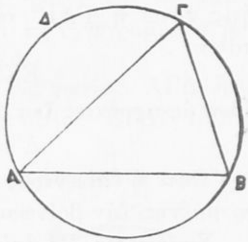
141) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς τὰ 2)3, 1)3 τῆς ὀρθῆς.

142) Ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς δοθέντος τριγώνου νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΙΣ ΚΥΚΛΟΝ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

152. **Ὁρισμοί.** Γωνία λέγεται ***ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον,*** ἐὰν ἡ μὲν κορυφὴ αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου.

Εἰς τμῆμα δὲ ἐγγεγραμμένη λέγεται ἡ γωνία, ἐὰν ἡ μὲν κορυφὴ αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ τμήματος, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς διέρχωνται διὰ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας, ἥτις εἶναι βάσις τοῦ τμήματος. Π. χ. ἡ γων. ΑΓΒ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον, ἡ αὐτὴ δὲ γων. εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ εἰς τὸ τμῆμα ΑΒΓΔΑ.



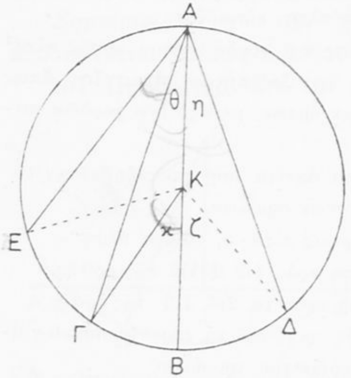
Εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται ***ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον,*** ἐὰν πᾶσαι αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας. Ὁ δὲ κύκλος λέγεται τότε ***περιγεγραμμένος*** περὶ τὸ σχῆμα.

153. **Θεώρημα.** ***Ἐν κύκλῳ ἡ ἐπίκεντρος γωνία εἶναι διπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης, ὅταν ἔχωσιν ἀμφότεραι βάσιν τὸ αὐτὸ τόξον.***

Ἐπειδὴ τὸ κέντρον δύναται νὰ εἶναι ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρῶν τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ἢ ἐντὸς αὐτῆς ἢ ἐκτὸς αὐτῆς, διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.



Ἔστω, πρῶτον, τὸ κέντρον ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ΑΒ τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΒΑΓ· ἐὰν ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΚΓ σχηματίζεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΚΓ, εἰς ὃ εἶναι $Α=Γ$· εἶναι δὲ ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΒΚΓ ἐκτὸς γωνία τοῦ τριγώνου αὐτοῦ καὶ ἑπομένως ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα $Α+Γ$ ἢ $Α+Α$ ἤτοι εἶναι διπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης Α.

Ἔστω δεύτερον τὸ κέντρον ἐντὸς τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας, ἥτις ἔστω ἡ ΓΑΔ· ἐὰν ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΑΚΒ διαιρεῖ τὴν ἐγγεγραμένην εἰς δύο ἄλλας, θ καὶ η, καὶ τὴν ἐπίκεντρον ΓΚΔ ὁμοίως εἰς δύο, κ καὶ ζ· εἶναι δὲ κατὰ τὰ προηγούμενα

$$\varkappa = 2\vartheta,\ \zeta = 2\eta\text{· ὅθεν } \varkappa + \zeta = 2\vartheta + 2\eta = 2\ (\vartheta + \eta).$$

τουτέστι $ΓΚΔ = 2\cdot ΓΑΔ$.

Ἔστω τέλος τὸ κέντρον ἐκτὸς τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας, ἥτις ἔστω ἡ ΓΑΕ· τῶν αὐτῶν κατασκευασθέντων, εἶναι καὶ πάλιν

$$ΕΚΒ = 2ΕΑΒ,\ \varkappa = 2\vartheta\text{·}$$

ὅθεν ἀφαιροῦντες ἴσα ἀπὸ ἴσων εὑρίσκομεν

$$ΕΚΓ = 2ΕΑΓ.$$

Ὥστε ἡ ἐπίκεντρος γωνία εἶναι πάντοτε διπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης, ἐὰν βαίνωσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου.

Σημείωσις. Ἡ ἐπίκεντρος γωνία θὰ εἶναι κοίλη, ἐὰν τὸ τόξον, ἐφ' οὗ βαίνει ὑπερβαίνῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν· ἀλλ' ἡ ἀπόδειξις κατ' οὐδὲν μεταβάλλεται.

154. Πόρισμα 1ον. ***Πᾶσαι αἱ εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.***

155. Πόρισμα 2ον. ***Πᾶσα γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς τμῆμα κύκλου μεγαλύτερον ἡμικυκλίου, εἶναι ὀξεῖα.***

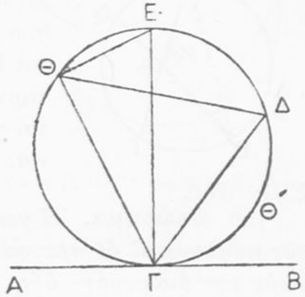
Πᾶσα γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς τμῆμα κύκλου μικρότερον ἡμικυκλίου, εἶναι ἀμβλεῖα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πᾶσα δὲ εἰς ἡμικύκλιον ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι ὀρθή (1)

156. **Θεώρημα.** ***Ἐν κύκλῳ ἡ ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης σχηματιζομένη γωνία εἶναι ἴση μὲ ἐγγεγραμμένην, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου.***

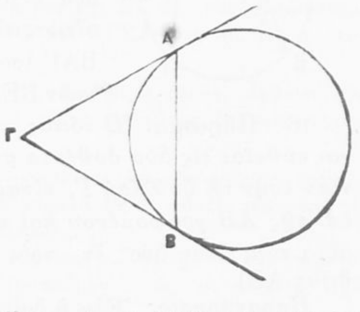
Ἔστω ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΓΔΕ κατὰ τὸ σημεῖον Γ ἡ ΑΓΒ καὶ χορδή, διὰ τῆς ἐπαφῆς ἠγμένη, ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν γωνία ΔΓΒ ἰσοῦται ἐγγεγραμμένῃ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΘ'Δ, ἡ δὲ γωνία ΔΓΑ ἰσοῦται ἐγγεγραμμένῃ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΘΓ.



Ἐὰν ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΓΕ, ἡ γωνία ΔΓΒ εἶναι διαφορὰ τῆς ὀρθῆς ΕΓΒ καὶ τῆς ὀξείας ΕΓΔ· καὶ ἡ μὲν ὀρθὴ ΕΓΒ ἰσοῦται μὲ ἐγγεγραμμένην βαίνουσαν ἐπὶ ἡμικυκλίου, ἔστω τὴν ΕΘΓ (ἔνθα Θ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου ΓΘΕ), ἡ δὲ γωνία ΕΓΔ ἰσοῦται μὲ ἐγγεγραμμένην, βαίνουσαν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΔΕ, οἵα εἶναι ἡ ΕΘΔ (διότι ἀμφότεραι εἶναι ἡμίση τῆς ἐπικέντρου, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΕ)· ἄρα ἡ διαφορὰ αὐτῶν ΔΓΒ ἰσοῦται τῇ ἐγγεγραμμένῃ γωνίᾳ ΔΘΓ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΘ'Δ.

Ὁμοίως δεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ περὶ τῆς γωνίας ΑΓΔ, ἥτις εἶναι ἄθροισμα τῆς ὀρθῆς ΑΓΕ καὶ τῆς ὀξείας ΕΓΔ· τὸ σημεῖον Θ λαμβάνεται τότε ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΘ'Δ.

157. Πόρισμα. ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται τοῦ κύκλου, ἡ τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς συνδέουσα εὐθεῖα σχηματίζει μετὰ τῶν δύο ἐφαπτομένων ἴσας γωνίας.***



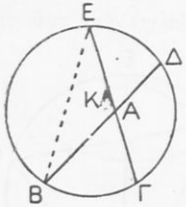
Καὶ τὰ τμήματα τῶν ἐφαπτομένων, τὰ ἀπὸ τῆς τομῆς αὐτῶν μέχρι τῶν ἐπαφῶν, θὰ εἶναι ἴσα (93).

(1) Ἡ πρότασις αὕτη ἀποδίδεται εἰς τὸν Θαλῆν, ἕνα τῶν ἑπτὰ σοφῶν τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος (460 π. Χ.).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

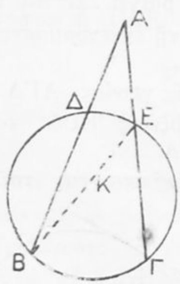
158. **Θεώρημα.** ***Ἡ γωνία, ἧς ἡ μὲν κορυφὴ κεῖται ἐντὸς κύκλου, αἱ δὲ πλευραὶ εἶναι τέμνουσαι αὐτοῦ, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο ἐγγεγραμμένων γωνιῶν, ὧν ἡ μὲν βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ταύτης, ἡ δὲ ἐπὶ τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτῆς.***

Ἔστω ἡ γωνία ΒΑΓ, ἧς ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου Κ, ἡ δὲ κατὰ κορυφὴν αὐτῆς ΕΑΔ· λέγω, ὅτι αὕτη ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐγγεγραμμένων γωνιῶν ΒΕΓ καὶ ΕΒΔ. Διότι ἡ γωνία ΒΑΓ, ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΕ, ἰσοῦται πρὸς τὰς δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνίας αὐτοῦ, αἵτινες εἶναι αἱ ΒΕΓ καὶ ΕΒΔ· ὅ.ἔ.δ.



159. **Θεώρημα.** ***Ἡ γωνία, ἧς ἡ μὲν κορυφὴ κεῖται ἐκτὸς κύκλου, αἱ δὲ πλευραὶ εἶναι τέμνουσαι αὐτοῦ, ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν δύο ἐγγεγραμμένων γωνιῶν, αἵτινες βαίνουσιν ἐπὶ τῶν τόξων τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς.***

Ἔστω ἡ γωνία ΒΑΓ, ἧς ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς εἶναι τέμνουσαι αὐτοῦ· λέγω, ὅτι αὕτη ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἐγγεγραμμένων γωνιῶν ΒΕΓ καὶ ΕΒΔ. Διότι ἡ γωνία ΒΕΓ ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΕ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ, αἵτινες εἶναι αἱ ΒΑΓ καὶ ΕΒΑ. Ἄρα ἡ ΒΑΓ ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν ΒΕΓ καὶ ΕΒΔ· ὅ.ἔ.δ.



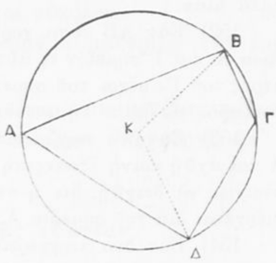
160. **Πόρισμα.** ***Ὁ τόπος τῶν σημείων ἐξ ὧν αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἰς δύο δοθέντα σημεῖα Α, Β, σχηματίζουσι γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ Γ, εἶναι τὸ τόξον τοῦ τμήματος τοῦ ἐπὶ τῆς ΑΒ γραφομένου καὶ τὴν γωνίαν Γ δεχομένου·*** (τοιαῦτα τόξα εἶναι δύο· ἓν πρὸς ἑκάτερον τῶν μερῶν τῆς εὐθείας ΑΒ).

Παρατήρησις. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα γωνία Γ εἶναι ὀρθὴ ὁ τόπος εἶναι περιφέρεια κύκλου ἧς διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

161. **Θεώρημα.** ***Παντὸς εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαί.***

Ἔστω τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον τὸ ΑΒΓΔ. Ἂν ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ κέντρου αἱ ΚΒ, ΚΔ, ἡ μὲν γωνία Α εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου ΒΚΔ, ἡ δὲ γωνία Γ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου κοίλης γωνίας ΒΚΔ, ἄρα τὸ ἄθροισμα Α + Γ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο περὶ τὸ Κ γωνιῶν, αἵτινες ἀποτελοῦσι τέσσαρας ὀρθάς· ἑπομένως εἶναι Α + Γ = 2 ὀρθ. Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι καὶ Β + Δ = 2 ὀρθ.



Ἀσκήσεις.

143) Ἐὰν δύο χορδαὶ κύκλου ΑΒ, ΓΔ τέμνωνται ἐντὸς αὐτοῦ εἰς τὸ σημεῖον Ε, νὰ δειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΕΔ καὶ ΓΕΒ ἔχουσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν.

144) Ἐὰν ἐκ σημείου Α ἐκτὸς κύκλου ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ τέμνουσαι τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Β, Γ, Ε, Δ, νὰ δειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΑΒΕ ἔχουσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν.

145) Ἐὰν δύο ἐκ τῶν πλευρῶν τριγώνου εἶναι διάμετροι δύο κύκλων, τότε οἱ κύκλοι οὗτοι ἔχουσι τὸ ἕτερον σημεῖον τῆς τομῆς των ἐπὶ τῆς τρίτης πλευρᾶς.

146) ΑΒΓ εἶναι τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἐκ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ Α ἄγεται ἡ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΓ ὡς καὶ ἡ διάμετρος ΑΕ. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΓΕ ἔχουσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν.

147) Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου ἐπαφῆς δύο περιφερειῶν ἀχθῶσι δύο τέμνουσαι, αἱ ὑπὸ τῶν σημείων εἰς ἃ τέμνουσιν αὐτάς, ὁριζόμεναι χορδαί, εἶναι παράλληλοι.

148) Ἐὰν δύο περιφέρειαι τέμνωνται καὶ διὰ τῶν σημείων τῆς τομῆς των ἀχθῶσι δύο τέμνουσαι, τὰ σημεῖα εἰς ἃ αὗται τέμνουσι τὰς περιφερείας ὁρίζουσι χορδὰς παραλλήλους.

149) Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται καὶ ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς αὐτῶν τέμνουσα, αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα, εἰς ἃ αὕτη τέμνει τὰς περιφερείας, εἶναι παράλληλοι.

150) Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Α καὶ ἀχθῇ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἀντιστοίχως, νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή.

151) Ἐὰν ἐκ σημείου Α ἐκτὸς κύκλου ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ τέμνουσαι τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Β, Γ, Ε, Δ, νὰ δειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΓΕ ἔχουσι τὰς γωνίας των ἴσας κατὰ μίαν.

152) Ἐὰν ΑΒ εἶναι χορδὴ τόξου μικροτέρου ἡμιπεριφερείας κέντρου Κ καὶ Γ σημεῖόν τι αὐτοῦ, προεκταθῇ δὲ ἡ χορδὴ ΒΓ (πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ) μέχρι τοῦ σημείου Δ, νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΔΓΑ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ΑΚΒ.

153) Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ἀχθῇ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἀντιστοίχως, νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ περιφέρεια, ἥτις ἔχει ὡς διάμετρον τὴν ΒΓ, διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Α.

154) Ἐὰν δύο περιφέρειαι μὲ κέντρα Κ καὶ Λ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α ἀχθῇ δὲ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἀντιστοίχως, ὡς καὶ ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον Α, ἥτις τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ γωνία ΚΔΛ εἶναι ὀρθή.

155) Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὴν μὲν μεγαλυτέραν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ τὴν δὲ μικροτέραν εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ γωνίαι ΒΑΔ καὶ ΓΑΕ εἶναι ἴσαι.

156) Δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη ἐφάπτεται αὐτῶν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἀντιστοίχως. Ἐὰν διὰ τοῦ σημείου Α ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως, καὶ προεκταθῶσιν αἱ ΔΒ καὶ ΕΓ μέχρις ὅτου συναντηθῶσι εἰς τὸ σημεῖον Ζ, νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΔΖΕ εἶναι ὀρθή.

ΠΕΡΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

α) *Συμμετρία πρὸς σημεῖον.*

Δύο σημεῖα λέγονται ***συμμετρικὰ πρὸς ἄλλο,*** ἐὰν ἡ ἑνοῦσα αὐτὰ εὐθεῖα διέρχηται διὰ τοῦ ἄλλου καὶ διαιρεῖται ὑπ' αὐτοῦ εἰς δύο μέρη ἴσα.

Δύο δὲ σχήματα λέγονται ***συμμετρικὰ ἀλλήλων*** πρὸς σημεῖον, ἐὰν τὰ σημεῖα ἑκατέρου ἐξ αὐτῶν ἔχωσι συμμετρικὰ τὰ σημεῖα τοῦ ἄλλου.

Τὸ σημεῖον, πρὸς ὃ εἶναι συμμετρικὰ δύο σχήματα, λέγεται ***κέντρον*** τῆς συμμετρίας.

Δύο σχήματα ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου κείμενα καὶ συμμετρικὰ ἀλ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λήλων ἐφαρμόζουσιν, ἐὰν τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν στραφῇ περὶ τὸ κέντρον καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου των κατὰ τὸ ἥμισυ μιᾶς ὁλοκλήρου περιστροφῆς, διότι τότε ἕκαστον σημεῖον πίπτει ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ του.

Αἱ ἑξῆς προτάσεις ἀποδεικνύονται εὐκόλως.

Τὸ παραλληλόγραμμον ἔχει κέντρον συμμετρίας τὴν τομὴν τῶν διαγωνίων του.

Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ἔχουσι κέντρα συμμετρίας πάντα τὰ σημεῖα τῆς παραλλήλου πρὸς αὐτὰς καὶ ἴσον ἀπεχούσης ἀπ᾽ ἀμφοτέρων.

β) Συμμετρία πρὸς εὐθεῖαν.

Δύο σημεῖα λέγονται ***συμμετρικὰ πρὸς εὐθεῖαν,*** ὅταν ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ἑνούσης αὐτὰ εὐθείας.

Δύο σχήματα λέγονται ***συμμετρικὰ ἀλλήλων*** πρός τινα εὐθεῖαν, ὅταν τὰ σημεῖα ἑκατέρου ἔχωσι συμμετρικὰ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην τὰ σημεῖα τοῦ ἄλλου.

Ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν ὁποίαν εἶναι συμμετρικὰ δύο σχήματα, λέγεται ***ἄξων συμμετρίας*** αὐτῶν ἢ καὶ τοῦ ὑπ᾽ αὐτῶν ἀποτελουμένου σχήματος.

Δύο συμμετρικὰ σχήματα ἐφαρμόζουσιν, ἐὰν περιστραφῇ τὸ ἓν περὶ τὸν ἄξονα τῆς συμμετρίας, μέχρις οὗ τὸ ἐπίπεδόν του πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἄλλου· διότι ἕκαστον σημεῖον τοῦ περιστρεφομένου σχήματος θὰ πέσῃ τότε ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ του.

Ἀσκήσεις

157) Τὸ ὀρθογώνιον ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας· καὶ ὁ ρόμβος ἐπίσης, τὸ δὲ τετράγωνον τέσσαρας.

158) Ἡ ἐκ τοῦ μέσου εὐθείας ἀγομένη κάθετος εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτῆς.

159) Ἡ διχοτομοῦσα γωνίαν εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτῆς.

160) Ὁ κύκλος ἔχει ἄξονας συμμετρίας πάσας τὰς διαμέτρους αὐτοῦ, ὁ δὲ τομεὺς τὴν διχοτομοῦσαν τὴν γωνίαν του.

161) Δύο παραλλήλων εὐθειῶν ἄξων συμμετρίας εἶναι ἡ πρὸς αὐτὰς παράλληλος, ἡ ἴσον ἀπέχουσα ἀπ᾽ ἀμφοτέρων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Αου Βιβλίου.

162) Ἐὰν ἡ ὑποτείνουσα ΑΒ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ προεκταθῇ μέχρι τοῦ σημείου Δ οὕτως, ὥστε ΒΔ = ΒΓ καὶ ἡ διχοτομοῦσα τὴν γωνίαν Α τέμνει τὴν ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Ε, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΑΕΓ ἰσοῦται μὲ ἥμισυ τῆς ὀρθῆς.

163) Ἐὰν τριγώνου ΑΒΓ ἡ γωνία Α εἶναι τριπλασία τῆς γωνίας Β, ἡ δὲ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΒ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ. ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΓ + ΑΔ = ΒΓ.

164) Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου τέμνουσι τὰς ἀπέναντι πλευράς, εἰς σημεῖα κείμενα ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν.

165) Ἐὰν ἡ διχοτομοῦσα γωνίαν τριγώνου διχοτομῇ καὶ τὴν ἀπέναντι πλευράν, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

166) Ἐὰν μία γωνία τριγώνου εἶναι τριπλασία ἄλλης τὸ τρίγωνον χωρίζεται εἰς δύο τρίγωνα ἰσοσκελῆ.

167) Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀχθῶσιν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἡ διάμεσος καὶ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ ἡ γωνία τῶν δύο τούτων εὐθειῶν ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

168) Ἡ γωνία τῶν διχοτόμων δύο γωνιῶν τετραπλεύρου προσκειμένων εἰς μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου.

169) Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι ἴση τῷ ἡμίσει τῆς ὑποτεινούσης, ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία θὰ εἶναι 1)2 τῆς ὀρθῆς.

170) Ἐὰν ἐν τριγώνῳ ἀχθῶσιν ἐκ μιᾶς κορυφῆς ἡ διχοτομοῦσα τὴν γωνίαν καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, ἡ γωνία τῶν δύο τούτων εὐθειῶν θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο γωνιῶν τῆς βάσεως.

171) Ἐὰν ἡ διχοτομοῦσα τῆς ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνίας εἶναι παράλληλος τῇ βάσει, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές· καὶ ἀντιστρόφως.

172) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 84 ἀληθεύει καὶ περὶ παντὸς ἁπλοῦ πολυγώνου.

173) Ἰσοσκελές τι τρίγωνον δύναται νὰ διαιρεθῇ διὰ μιᾶς εὐθείας εἰς δύο ἐπίσης ἰσοσκελῆ· νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

174) Πᾶν ὀξυγώνιον τρίγωνον δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία ἰσοσκελῆ, ἐκ δὲ τούτων δύο τοὐλάχιστον εἶναι ἀμβλυγώνια.

175) Ἡ διχοτομοῦσα τὴν γωνίαν Α τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο, αἱ δὲ ΟΔ καὶ ΟΕ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ΒΔ=ΓΕ.

176) Ἐὰν Δ εἶναι σημεῖόν τι τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ καὶ Ε σημεῖον ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοιοῦτον ὥστε ἡ ΔΕ νὰ διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς βάσεως ΒΓ, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΔ+ΑΕ=ΑΒ+ΑΓ.

177) Ἐν τῷ ῥόμβῳ ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πλευρῶν εἶναι εἰς ἀμφότερα τὰ ζεύγη ἡ αὐτή· (καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει).

178) Δοθείσης γωνίας, ὡς τῆς ΒΑΓ, ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς δύο τυχόντα τμήματα ΑΔ, ΑΕ καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης δύο ἄλλα ΑΔ', ΑΕ' ἴσα πρὸς τὰ ΑΔ, ΑΕ, αἱ εὐθεῖαι ΔΕ' καὶ Δ'Ε τέμνονται ἐντὸς τῆς γωνίας καὶ ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι σημεῖον τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν (ἐφαρμογὴ εἰς τὴν διχοτομίαν τῶν γωνιῶν).

179) Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου, εἰς ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου, ἀχθῇ παράλληλος πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν, ἡ παράλληλος αὕτη θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μερῶν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ἅτινα περιέχονται μεταξὺ τῶν παραλλήλων.

180) Αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν τριγώνου ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευρὰς σχηματίζουσι νέον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι διπλάσιαι τῶν πρὸς αὐτὰς παραλλήλων πλευρῶν τοῦ πρώτου καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι τετραπλάσιον τοῦ πρώτου.

181) Τὰ τρία ὕψη παντὸς τριγώνου τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον.

182) Ἐὰν εἰς τὸ τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ ἐφ' ἑκάστης πλευρᾶς κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον, $ΑΒΓ_1$, $ΒΓΑ_1$, $ΑΓΒ_1$, ἐκτὸς τούτου, καὶ ἀχθῶσιν αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι ἑκάστην κορυφὴν τοῦ τριγώνου μετὰ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι καὶ τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς ἓν σημεῖον Ο, σχηματίζουσι δὲ εἰς τὴν τομὴν αὐτῶν ἓξ γωνίας ἴσας· προσέτι δὲ εἶναι $ΟΑ+ΟΒ=ΟΓ_1$ κλπ.

183) Ἐὰν τριγώνου δύο ὕψη εἶναι ἴσα, καὶ αἱ πλευραί, ἐφ' ὧν ἵστανται κάθετα, εἶναι ἴσαι· καὶ ἀντιστρόφως.

184) Αἱ 4 διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας παντὸς παραλληλογράμμου σχηματίζουσιν ὀρθογώνιον· αἱ 4 δὲ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας παντὸς ὀρθογωνίου σχηματίζουσι τετράγωνον, ἡ δὲ διαγώνιος τοῦ τετραγώνου τούτου εἶναι ἴση τῇ διαφορᾷ τῶν προσκειμένων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου.

185) Ἐκ τῶν χορδῶν κύκλου μόνον αἱ διάμετροι διχοτομοῦσιν ἀλλήλας.

186) Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ἀγόμεναι ἐκ τῶν σημείων τῆς τομῆς δύο τεμνομένων περιφερειῶν καὶ περατούμεναι εἰς αὐτάς, εἶναι ἴσαι.

187) Ἐὰν δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ ΑΒ, ΓΔ τέμνωνται εἰς τὸ σημεῖον Ο καὶ τὰ σχήματα ΑΟΓΕ καὶ ΒΟΔΖ ἔχουσι πάσας τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν, ἡ εὐθεῖα ΕΖ διέρχεται διὰ τοῦ Ο.

188) Αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου, οὗ δύο μὲν διαδοχικαὶ πλευραὶ εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ ἀπέναντι γωνίαι αἱ προσκείμεναι εἰς ἑκατέραν τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι ἴσαι, τέμνονται καθέτως.

189) Ἐὰν ἐκ κέντρου κύκλου Κ ἀχθῶσιν κατὰ σειρὰν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ καὶ οὕτως, ὥστε αἱ γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΓΚΔ νὰ εἶναι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἴσαι, πᾶν σημεῖον ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων Α,Δ, ἀπέχει ἴσον καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Β.

190) Ἐὰν Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ εἶναι διαδοχικὰ σημεῖα τῆς αὐτῆς περιφερείας, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΓΔΕ, ΕΖΑ εἶναι τέσσαρες ὀρθαὶ γωνίαι.

191) Αἱ διχοτόμοι, γωνίας ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τετραπλεύρου καὶ τῆς ἀπέναντι ἐξωτερικῆς γωνίας αὐτοῦ, τέμνονται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τούτου.

192) Πᾶν εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένον παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον καὶ πᾶν εἰς κύκλον περιγεγραμμένον εἶναι ῥόμβος.

193) Ἐὰν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ ἡ περιφέρεια ἡ ἔχουσα κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ, τέμνει τὴν ἄλλην περιφέρειαν εἰς τὸ Ε, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ΓΕ=ΑΔ καὶ ΔΕ παράλληλος τῇ ΑΓ.

194) Ἐὰν παραλληλογράμμου τινὸς ἡ διαγώνιος διχοτομῇ τὴν γωνίαν αὐτοῦ, τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο εἶναι ῥόμβος.

195) Ἐὰν ἐκ τριῶν κύκλων ἕκαστος ἐφάπτηται τῶν δύο ἄλλων, αἱ εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἁφῆς ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι τῶν κύκλων τούτων, τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον.

196) Παντὸς πολυγώνου περιγεγραμμένου περὶ κύκλον, οὗ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶναι ἄρτιος, τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν περιττῆς τάξεως εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ἀρτίας τάξεως· ὡς πρώτη δὲ πλευρὰ δύναται νὰ ληφθῇ οἱαδήποτε πλευρὰ αὐτοῦ.

197) Παντὸς πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶναι ἄρτιος, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν περιττῆς τάξεως εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἀρτίας τάξεως· ὡς πρώτη δὲ γωνία δύναται νὰ ληφθῇ μία οἱαδήποτε γωνία αὐτοῦ.

198) Ἐὰν εἰς δύο περιφερείας ὑπάρχωσι δύο ἐγγεγραμμένα τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις, αἱ δύο περιφέρειαι εἶναι ἴσαι.

199) Ἐὰν τετραπλεύρου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαί, τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

200) Ἐὰν ἰσόπλευρον σχῆμα εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, θὰ εἶναι καὶ ἰσογώνιον.

201) Ἐὰν ἐκ σημείου τινὸς ἄγωνται εἰς περιφέρειαν τρεῖς εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ σημεῖόν τοῦτο εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας.

202) Ἐὰν σημεῖόν τι κείμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν διχοτομῇ μίαν τῶν δι' αὐτοῦ διερχομένων καὶ μεταξὺ τῶν παραλλήλων κειμένων εὐθειῶν, θὰ διχοτομῇ καὶ πάσας τὰς ἄλλας.

203) Ἐὰν εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐκ τῶν περάτων τῆς βάσεως ὑψωθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰς δύο πλευράς, αἱ κάθετοι αὗται σχηματίζουσι μετὰ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, ἕτερον ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗ αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς τοῦ πρώτου τριγώνου.

204) Ἐὰν ἐκ δύο κορυφῶν τριγώνου ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ἐξ ἑκατέρας

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευράν, νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι ἀδύνατον νὰ διχοτομῶσιν ἀλλήλας.

205) Ἐὰν ἑξαγώνου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ τρεῖς διαγώνιοι, αἱ ἑνοῦσαι τὰς ἀπέναντι κορυφάς, θὰ διέρχωνται δι' ἑνὸς σημείου.

206) Ἡ περίμετρος κυρτοῦ σχήματος τέμνεται ὑπ' εὐθείας τὸ πολὺ εἰς δύο σημεῖα. Καὶ πᾶσα εὐθεῖα, ἧς τὰ ἄκρα εἶναι σημεῖα κυρτοῦ σχήματος, κεῖται ὅλη ἐντὸς τοῦ σχήματος.

207) Πᾶσα πλευρὰ τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας, ἥτις συνδέει τοὺς πόδας τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἔκ τινος σημείου αὐτῆς, ἐπὶ τὰς ἄλλας δύο πλευρὰς τοῦ τριγώνου.

208) Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εὐθειῶν, τῶν ἀγομένων ἔκ τινος σημείου ἐντὸς τριγώνου μέχρι τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου του καὶ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεως αὐτῆς.

209) Ἐὰν ἐν τῷ τριγώνῳ ἐξ ἑκάστης κορυφῆς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα μέχρι τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τούτων εὐθειῶν θὰ εἶναι μικρότερον μὲν τῶν 3)2 τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου, μεγαλύτερον δὲ τοῦ ἡμίσεως τῆς περιμέτρου.

210) Ἐν παντὶ κυρτῷ τετραπλεύρῳ τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου, ἀλλὰ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεως αὐτῆς.

211) Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου κυρτοῦ πολυγώνου ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἰς τὰς κορυφάς του, τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν τούτων θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεως τῆς περιμέτρου.

212) Ἐν παντὶ τριγώνῳ ἑκάστη διάμετρος εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν εἰς αὐτὴν προσκειμένων πλευρῶν.

213) Ἐκ τῶν δύο διαγωνίων παντὸς παραλληλογράμμου μεγαλυτέρα εἶναι ἡ τὰς κορυφὰς τῶν μικροτέρων γωνιῶν αὐτοῦ ἐπιζευγνύουσα.

214) Ἐὰν γωνία τις τριγώνου εἶναι ὀξεῖα, ἡ ἐξ αὐτοῦ ἀρχομένη διάμεσος ὑπερβαίνει τὸ ἥμισυ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς· ἐὰν δὲ ἡ γωνία εἶναι ἀμβλεῖα, ἡ ἐξ αὐτοῦ διάμεσος εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

215) Νὰ γραφῇ κύκλος, ἔχων κέντρον δοθὲν σημεῖον καὶ τέμνων τὸν δοθέντα κύκλον οὕτως, ὥστε ἡ κοινὴ αὐτῶν χορδὴ νὰ εἶναι ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

216) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τοιαύτη, ὥστε τὸ μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ἀπολαμβανόμενον μέρος αὐτῆς νὰ εἶναι ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

217) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα, τέμνουσα δύο δοθείσας οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζηται τρίγωνον ἰσοσκελές.

218) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τοιαύτη, ὥστε τὸ ἐντὸς το δοθέντος κύκλου κείμενον τμῆμα αὐτῆς νὰ εἶναι ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

219) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗτινος ἡ γωνία τῆς κορυφῆς νὰ εἶναι τετραπλασία ἑκατέρας τῶν δύο γωνιῶν τῆς βάσεως.

220) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα, περατουμένη ὑπὸ δύο δεδομένων εὐθειῶν καὶ ἔχουσα μέσον τὸ δοθὲν σημεῖον.

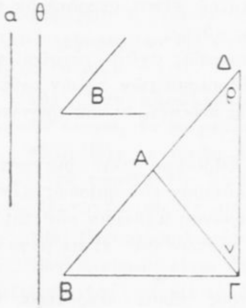
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΥΟ ΠΡΩΤΕΥΟΥΣΩΝ ΕΝ ΤΗι ΓΕΩΜΕΤΡΙΑι ΜΕΘΟΔΩΝ

162. Πρόβλημα. ***Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ μιᾶς τῶν παρ' αὐτὴν γωνιῶν καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.***

Ἔστω δοθεῖσα πλευρὰ ἡ α καὶ ἡ παρ' αὐτὴν γωνία ἡ Β, τὸ δὲ δοθὲν ἄθροισμα τῶν ἄλλων πλευρῶν ἡ θ.



Περιορισμός. Ἡ εὐθεῖα θ πρέπει νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς α.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ζητούμενον τρίγωνον εὑρέθη καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΒΓ καὶ ἡ γωνία Β καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ΑΒ + ΑΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα.

Ἐὰν προσεκβληθῇ ἡ ΑΒ καὶ ληφθῇ ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΑΓ, ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ ΓΔ, γίνεται τὸ τρίγωνον ΒΔΓ, οὗτινος αἱ δύο πλευραὶ ΒΓ (=α), ΒΔ (=θ) εἶναι γνωσταὶ ὡς καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη Β, ἑπομένως τὸ τρίγωνον τοῦτο ΒΔΓ δύναται νὰ κατασκευασθῇ· ὅπως δὲ ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκεται τὸ ΒΔΓ, οὕτω καὶ ἐκ τοῦ ΒΔΓ δύναται νὰ εὑρεθῇ τὸ ΑΒΓ, διότι πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ (κατασκευασθέντος τοῦ ΒΔΓ), νὰ ἀχθῇ ἡ ΓΑ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίσῃ τὴν γωνίαν ν ἴσην τῇ ρ, ὅτε θὰ εἶναι καὶ ΑΓ = ΑΔ.

Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι εὑρίσκομεν τὴν ἑπομένην λύσιν τοῦ προταθέντος προβλήματος.

Κατασκευή. Κατασκευάζομεν τρίγωνον, ἔχον δύο πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς δοθείσας εὐθείας καὶ περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν τὴν δοθεῖσαν, ἔστω δὲ τοῦτο τὸ ΒΓΔ, ἔχον τὴν ΒΓ ἴσην τῇ α καὶ τὴν ΒΔ ἴσην τῇ θ· ἔπειτα σχηματίζομεν τὴν γωνίαν ΑΓΔ ἴσην τῇ Δ. Τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ.

Ἀπόδειξις. Διότι, τῆς πλευρᾶς θ οὔσης μεγαλυτέρας τῆς α,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἡ γωνία Γ εἶνα. μεγαλυτέρα τῆς Δ· ὥστε ἡ ΓΑ, σχηματίζουσα τὴν γωνίαν ΑΓΔ ἴσην τῇ Δ, θὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΒΓΔ καὶ θὰ τέμνῃ ἑπομένως τὴν ΒΔ κατά τι σημεῖον Α· ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΔΓ αἱ παρὰ τὴν ΓΔ γωνίαι ἴσαι, θὰ εἶναι καὶ ΑΔ = ΑΓ· ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ΒΓ = α, ΒΑ + ΑΓ = ΒΑ + ΑΔ = ΒΔ = θ καὶ τὴν γωνίαν Β ἴσην τῇ δοθείσῃ· εἶναι λοιπὸν τὸ ζητούμενον.

163. ***Παρατ.*** Ἵνα λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, ὑπεθέσαμεν εὑρεθὲν τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ ἐφαρμόσαντες ἐπ' αὐτοῦ γνωστὰς προτάσεις, ἐσχηματίσαμεν ἐξ αὐτοῦ ἄλλο συνδεόμενον πρὸς τὸ πρῶτον οὕτως, ὥστε ἑκάτερον ἐξ αὐτῶν δύναται νὰ κατασκευασθῇ, δοθέντος τοῦ ἑτέρου· ἐπειδὴ δὲ ἠξεύρομεν νὰ κατασκευάσωμεν τὸ δεύτερον, ἐξ αὐτοῦ κατεσκευάσαμεν καὶ τὸ πρῶτον καὶ ἐλύσαμεν τὸ πρόβλημα.

Ἀνάλυσις καὶ σύνθεσις,

164. Ὅταν ἀγνοοῦντες τὴν λύσιν προβλήματος ἢ τὴν ἀπόδειξιν θεωρήματος, σκεπτώμεθα, ἵνα εὕρωμεν αὐτήν, ἡ ἁρμοδιωτάτη πρὸς τοῦτο μέθοδος εἶναι ἡ ἑξῆς. Ὑποθέτομεν εὑρεθὲν τὸ ζητούμενον τοῦ προβλήματος ἢ ἀληθὲς τὸ ἀποδεικτέον θεώρημα καὶ συνδυάζομεν αὐτὸ μετ' ἄλλων γνωστῶν προτάσεων προσπαθοῦντες νὰ φθάσωμεν εἰς γνωστόν τι ἐξαγόμενον, ἐξ οὗ ὁδηγούμεθα εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἢ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, ἐὰν τὸ ἐξαγόμενον εἶναι ἀληθές· ἢ καὶ συμπεραίνομεν τὸ ἀδύνατον τοῦ προβλήματος ἢ τὸ ψευδὲς τοῦ θεωρήματος, ἐὰν τὸ ἐξαγόμενον, εἰς ὃ ἐφθάσαμεν εἶναι ψευδές.

Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται ***ἀναλυτική.*** Ὁ δὲ τοιοῦτος τρόπος τοῦ σκέπτεσθαι λέγεται ***ἀνάλυσις.***

Ἀλλ' ὅταν εὑρόντες τὴν λύσιν ἢ τὴν ἀπόδειξιν θέλωμεν νὰ ἐκθέσωμεν αὐτὴν εἰς ἄλλους τότε ἀκολουθοῦμεν ἄλλην μέθοδον· Ἀρχόμενοι τότε ἀπὸ γνωστῶν προτάσεων συνδυάζομεν αὐτὰς ἁρμοδίως προχωροῦντες, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὴν λύσιν ἢ εἰς τὴν ἀπόδειξιν.

Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται ***συνθετικὴ*** καὶ ἡ διανοητικὴ ἐργασία, ἡ ἐν αὐτῇ γινομένη, ἐναντία τῆς προηγουμένης οὖσα, λέγεται ***σύνθεσις.***

Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην ἐλύθησαν τὰ πλεῖστα τῶν προη-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γουμένων προβλημάτων κατ᾽ αὐτὴν ἀπεδείχθησαν καὶ πάντα τὰ θεωρή ματα πλὴν τῶν ἀποδειχθέντων διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Ἡ συνθετικὴ μέθοδος ἔχει τὸ μειονέκτημα, ὅτι πείθει μὲν περὶ τῆς ἀληθείας τοῦ θεωρήματος ἢ περὶ τῆς ἀληθοῦς λύσεως τοῦ προβλήματος, δὲν εὐχαριστεῖ ὅμως τὸν νοῦν, ὅστις ζητεῖ νὰ ἐννοήσῃ πῶς εὑρέθη ἡ λύσις ἢ ἡ ἀπόδειξις, οὐδὲ ὁδηγεῖ τὸ παράπαν εἰς τὴν λύσιν ἄλλων ὁμοίων προβλημάτων ἢ εἰς τὴν ἀπόδειξιν ἄλλων θεωρημάτων

Ἡ ἀναλυτικὴ πάλιν μέθοδος δεικνύει μὲν τὴν πορείαν, ἣν ἠκολούθησεν ὁ νοῦς εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς ἀληθείας, δὲν παρέχει ὅμως βεβαιότητα. ἐκτὸς ὅταν συμπεραίνῃ τὸ ἀδύνατον τοῦ προβλήματος ἢ τὸ ψευδὲς τοῦ θεωρήματος (ὡς συμβαίνει ἐπὶ τῶν θεωρημάτων, τῶν διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ἀποδεικνυομένων, ἔνθα ὑποτίθεται ἀληθὲς τὸ ἐναντίον τοῦ ἀποδειχθησομένου καὶ συνδυάζεται μετ᾽ ἄλλων γνωστῶν εἰς τρόπον, ὥστε νὰ προκύψῃ ψευδὲς ἐξαγόμενον)· διότι, ὅταν δι᾽ αὐτῆς, ὑποθέσαντές τι ὡς ἀληθές, φθάσωμεν εἰς ἐξαγόμενον ἀληθές, δὲν ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι ἡ γενομένη ὑπόθεσις εἶναι ἀληθής.

Ἡ ἐν τοιαύτῃ ὅμως περιπτώσει γενομένη ὑπόθεσις εἶναι πράγματι ἀληθὴς, ἐὰν κατὰ τὴν ἀνάλυσιν χρησιμοποιῶμεν προτάσεις συνδεομένας πρὸς ἀλλήλας ἀντιστρεπτῶς· δηλαδὴ τοιαύτας ὥστε, διὰ δύο οἱασδήποτε διαδοχικὰς προτάσεις ἐξ αὐτῶν, ἡ ἀλήθεια τῆς μιᾶς νὰ προκύπτῃ ἐκ τῆς ἀληθείας τῆς ἄλλης καὶ τἀνάπαλιν. Ἀντιστρεπταὶ προτάσεις εἶναι π. χ. αἱ δύο ἀντίστροφοι πρωτάσεις τοῦ Θεωρ. 45.

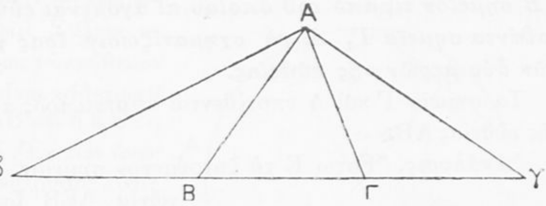
Πρὸς ἄσκησιν περὶ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον λύομεν κατ᾽ αὐτὴν καὶ τὰ ἑπόμενα προβλήματα.

165. **Πρόβλημα.** ***Ἐκ τῶν γωνιῶν καὶ ἐκ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.***

Περιορισμός. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν δοθεισῶν γωνιῶν πρέπει νὰ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀνάλυσις. Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον· ἐὰν μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ προσεκβληθῇ ἑκατέρωθεν ἑαυτῆς καὶ ληφθῇ Γγ=ΓΑ καὶ Ββ=ΒΑ καὶ ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι Αγ, Αβ, γίνεται νέον τρίγωνον τὸ Αβγ, οὗτινος ἡ πλευρὰ βγ ἰσοῦται τῇ δοθείσῃ περιμέτρῳ (ἐκ κατασκευῆς), αἱ δὲ παρ' αὐτῇ γωνίαι β καὶ γ εἶναι τὰ ἡμίση τῶν δοθεισῶν γωνιῶν Β καὶ Γ, ὡς συνάγεται ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΒβ καὶ ΑΓγ (80). Ἑπομένως τὸ τρίγωνον Αβγ δύναται νὰ κατασκευασθῇ, ἐξ αὐτοῦ δὲ κατασκευάζεται καὶ τὸ ζητούμενον.



Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τρίγωνον, τὸ Αβγ, ἔχον τὴν πλευρὰν βγ ἴσην τῇ δοθείσῃ περιμέτρῳ καὶ παρ' αὐτὴν γωνίας τὰς $\frac{1}{2}$Β, $\frac{1}{2}$Γ· ἐκ τῆς κορυφῆς Α τοῦ τριγώνου τούτου ἄγομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ οὕτως, ὥστε νὰ γίνῃ ἡ γωνία ΒΑβ ἴση τῇ ΒβΑ καὶ ἡ γωνία ΓΑγ ἴση τῇ ΓγΑ· αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι τέμνουσιν τὴν βγ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ καὶ τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ.

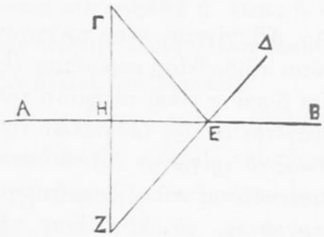
Διότι ἡ γωνία βΑγ ἰσοῦται μὲ 2 ὀρθ. $-\frac{1}{2}$Β $-\frac{1}{2}$Γ καὶ ἐπειδὴ εἶναι Α+Β+Γ=2 ὀρθ., ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία βΑγ ἰσοῦται (Α+Β+Γ) $-\frac{1}{2}$Β $-\frac{1}{2}$Γ, ἤτοι $\frac{1}{2}$Β $+\frac{1}{2}$Γ+Α· δύνανται λοιπὸν νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἐπ' αὐτῆς δύο μέρη, βΑΒ καὶ γΑΓ, ἴσα τοῖς $\frac{1}{2}$ Β καὶ $\frac{1}{2}$ Γ, τουτέστι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κατασκευάζεται· ἀλλὰ τότε τὰ τρίγωνα ΑγΓ καὶ ΑβΒ εἶναι ἰσοσκελῆ (93)· ἄρα ΑΓ = Γγ καὶ ΑΒ =Ββ· ἑπομένως ἡ περίμετρος ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ ἰσοῦται τῇ Ββ+ΒΓ+Γγ, ἤτοι τῇ εὐθείᾳ βγ, ἥτις ἐλήφθη ἴση τῇ δοθείσῃ περιμέτρῳ· καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι διπλασία τῆς β (ὡς ἐκτὸς γωνία τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑβΒ), ἤτοι ἰσοῦται τῇ δοθείσῃ Β· δι' ὅμοιον λόγον καὶ ἡ ΑΓΒ ἰσοῦται τῇ δοθείσῃ Γ, καὶ ἡ ΒΑΓ τῇ δοθείσῃ Α· ὥστε κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

166. Πρόβλημα. ***Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ σημεῖόν τι, ἀπὸ τοῦ ὁποίου αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἰς δύο δοθέντα σημεῖα Γ, Δ, νὰ σχηματίζωσιν ἴσας γωνίας μετὰ τῶν δύο μερῶν τῆς εὐθείας.***

Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ὑποτίθενται κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ.

Ἀνάλυσις. Ἔστω Ε τὸ ζητούμενον σημεῖον, ἤτοι ἔστω ἡ γωνία ΔΕΒ ἴση τῇ ΓΕΑ.



Ἐὰν ἐκβληθῇ ἡ ΔΕ πέραν τοῦ Ε, ἡ γωνία ΑΕΖ ὡς ἴση τῇ ΔΕΒ θὰ εἶναι ἴση καὶ τῇ ΓΕΑ. Ἐὰν ἄρα ληφθῇ ΕΖ ἴση τῇ ΕΓ καὶ ἀχθῇ ἡ ΓΖ' τὰ δύο τρίγωνα ΓΕΗ καὶ, ΗΕΖ θὰ εἶναι ἴσα (85) καὶ θὰ εἶναι ἡ ΓΗ ἴση τῇ ΗΖ καὶ αἱ περὶ τὸ Η γωνίαι ἴσαι ἤτοι ἡ ΓΖ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ θὰ διαιρῆται ὑπ αὐτῆς εἰς δύο μέρη ἴσα. Δύναται λοιπὸν νὰ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα, ΓΖ καὶ νὰ προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον Ζ, τὸ ***συμμετρικὸν*** τοῦ Γ, πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, τὸ δὲ Ε θὰ εὑρεθῇ τότε ὡς τομὴ τῆς ΖΔ καὶ τῆς ΑΒ.

Σύνθεσις. Τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν δοθέντων σημείων, ἔστω τοῦ Γ, ἂς εὑρεθῇ τὸ συμμετρικὸν σημεῖον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. ἔστω δὲ τοῦτο τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἔπειτα ἡ ΖΔ· τὸ σημεῖον Ε, εἰς ὃ ἡ ΖΔ τέμνει τὴν ΑΒ, εἶναι τὸ ζητούμενον.

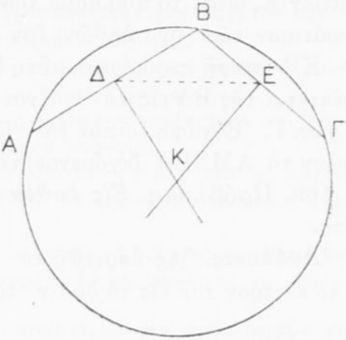
Διότι τὰ τρίγωνα ΓΕΗ, ΖΕΗ εἶναι ἴσα· ἑπομένως αἱ γωνίαι ΓΕΗ καὶ ΗΕΖ εἶναι ἴσαι· ἀλλ' ἡ γωνία ΔΕΒ εἶναι ἴση τῇ ΗΕΖ ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα ἡ γωνία ΓΕΗ εἶναι ἴση τῇ ΔΕΒ, ὅ. ἑ. π.

Σημείωσις. Ἐὰν τὰ σημεῖα Γ, Δ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ΑΒ καὶ ζητῆται αἱ ἴσαι γωνίαι νὰ σχηματίζωνται μετὰ τοῦ ἑνὸς μέρους αὐτῆς ἡ λύσις μένει ἡ αὐτή· ἀλλ' ἐὰν τὰ σημεῖα κεῖνται εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς εὐθείας, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον μέν, ἂν δὲν εὑρίσκωνται καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου, ἀόριστον δέ, ἂν τοὐναντίον.

167. Πρόβλημα. ***Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ τριῶν δοθέντων σημείων Α,Β,Γ, μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀνάλυσις. Ἔστω K τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας· τότε θὰ εἶναι KA = KB = KΓ· ἐὰν δὲ Δ καὶ E εἶναι τὰ μέσα ἀντιστοίχως τῶν εὐθειῶν AB, BΓ ἡ KΔ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς AB καὶ ἡ KE εἰς τὸ μέσον τῆς BΓ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ἡ ἀκόλουθος λύσις.

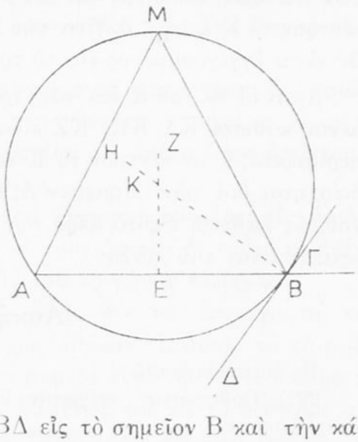


Σύνθεσις. Φέρομεν τὰς καθέτους εἰς τὰ μέσα Δ καὶ E τῶν εὐθειῶν AB, BΓ ἀντιστοίχως· αἱ κάθετοι αὗται τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον K, διότι σχηματίζουσι μετὰ τῆς ΔE γωνίας, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν· ἡ δὲ μὲ κέντρον τὸ K καὶ ἀκτῖνα τὴν KA γραφομένη περιφέρεια εἶναι ἡ ζητουμένη, διότι εἶναι KA = KB = KΓ (113).

Παρατ. Ἄλλη περιφέρεια εἶναι ἀδύνατον νὰ διέλθῃ διὰ τῶν αὐτῶν τριῶν σημείων, διότι δύο διάφοροι περιφέρειαι οὐδέποτε ἔχουσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.

168. **Πρόβλημα.** ***Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας AB νὰ γραφῇ τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ Γ.***

Ἀνάλυσις. Ἔστω τοιοῦτον τμῆμα τὸ AMB, ἐὰν δὲ φέρωμεν τὴν BΔ ἐφαπτομένην εἰς τὸ B παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γωνία ABΔ ἰσοῦται τῇ δοθείσῃ Γ (155) καὶ ὅτι τὸ κέντρον K εἶναι τομὴ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον E τῆς AB καὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τῆς BΔ εἰς τὸ B. Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑπομένη κατασκευή.



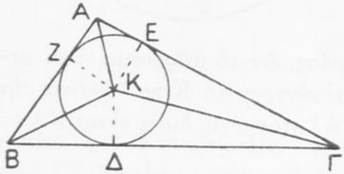
Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν γωνίαν τὴν ΔBA ἴσην τῇ Γ ἔχουσαν κορυφὴν τὸ B καὶ πλευρὰν τὴν BA· κατόπιν φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν BΔ εἰς τὸ σημεῖον B καὶ τὴν κά-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Αἱ κάθετοι αὗται τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Κ, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΖΕΒ καὶ ΗΒΕ εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν· ἐὰν δὲ μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΒ γραφῇ περιφέρεια, αὕτη θὰ διέρχεται διὰ τοῦ Α καὶ θὰ ἐφάπτεται τῆς ΒΔ εἰς τὸ Β· εἶναι ἄρα γων. ΑΒΔ = γων. ΑΜΒ = γων. Γ. Ἐγγάφη λοιπὸν ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ τμῆμα κύκλου τὸ ΑΜΒΕΑ δεχόμενον τὴν δοθεῖσαν γωνίαν.

169. Πρόβλημα. ***Εἰς δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.***

Ἀνάλυσις. Ἂς ὑποτεθῇ τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστω Κ τὸ κέντρον τοῦ εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου



κύκλου. Ἐὰν ἀχθῶσιν ἀκτῖνες εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ, ἔνθα ὁ κύκλος ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου αἱ ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ θὰ εἶναι κάθετοι ἐπ᾽ αὐτάς, ὡς ἐφαπτομένας· ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι τὸ σημεῖον Κ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν ἑκάστης τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν θὰ κεῖται ἐπὶ τῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας ταύτας (117).

Σύνθεσις. Ἂς διχοτομηθῶσι δύο ἐκ τῶν γωνιῶν τοῦ δοθέντος τριγώνου, ἔστωσαν αἱ Β, Γ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Κ, εἰς ὃ αἱ διχοτομοῦσαι αὐτὰς τέμνονται, ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν, ἔστω ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ΚΔ, ἂς γραφῇ δὲ κύκλος μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΚΔ· λέγω ὅτι ὁ κύκλος οὗτος θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τρίγωνον.

Διότι αἱ ἐκ τοῦ Κ ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ἀγόμεναι κάθετοι ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ εἶναι ἴσαι (117) καὶ διὰ τοῦτο ἡ περιφέρεια, ἡ μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΔ γραφεῖσα, θὰ διέρχηται διὰ τῶν σημείων Δ, Ε, Ζ· αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, ὡς κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ θὰ εἶναι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου.

Ἀσκήσεις

Νὰ κατασκευασθῇ:

221) Ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον δοθεῖσαν περίμετρον καὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

222) Ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχον δοθεῖσαν τὴν κάθετον τὴν ἀγομένην ἐπί τινος πλευρᾶς ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς.

223) Ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἔχον δοθεῖσαν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς καὶ τὴν γωνίαν αὐτῆς.

224) Ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχον δοθεῖσαν περίμετρον καὶ τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς.

225) Ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ βάσις καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐπ' αὐτὴν ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς μετὰ μιᾶς τῶν ἴσων πλευρῶν.

226) Τρίγωνον, οὗ δίδεται μία γωνία, ἡ διχοτόμος αὐτῆς καὶ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευράν, ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς δοθείσης γωνίας.

227) Τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ περίμετρος, μία τῶν γωνιῶν καὶ ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς δοθείσης ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευράν.

228) Ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ ἐκ μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

229) Τετράγωνον ἐκ τῆς ἀποστάσεως τοῦ μέσου μιᾶς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐκ μιᾶς τῶν διαγωνίων.

230) Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος ἐφαπτόμενος μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ τῶν προσεκβολῶν τῶν δύο ἄλλων (κύκλοι παρεγγεγραμμένοι).

Λύσις προβλημάτων διὰ τῶν γεωμετρικῶν τόπων.

170. Ὅταν ἐν προβλήματι τὸ ζητούμενον εἶναι σημεῖόν τι (τοιαῦτα δὲ εἶναι τὰ πλεῖστα ἢ εἰς τοιαῦτα ἀνάγονται), τὸ σημεῖον τοῦτο ὀφείλει νὰ πληροῖ ἐπιτάγματά τινα, ἵνα λύῃ τὸ πρόβλημα.

Ἐν τῷ προβλήματι, π. χ. «***νὰ γραφῇ περιφέρεια διὰ τριῶν σημείων δοθέντων διερχομένη***» ἄγνωστον κυρίως εἶναι τὸ κέντρον· τὸ δὲ σημεῖον τοῦτο ὀφείλει νὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῶν τριῶν δοθέντων σημείων.

Ἐν τῷ προβλήματι π. χ. «***νὰ ἐγγραφῇ κύκλος εἰς δοθὲν τρίγωνον***» ἄγνωστον εἶναι τὸ κέντρον ὀφείλει δὲ τοῦτο νὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῶν τριῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν.

Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἐὰν εἶναι δύο τὰ ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος (ἢ δύνανται νὰ χωρισθῶσιν εἰς δύο), τὰ τὸ πρῶτον μόνον ἐπίταγμα πληροῦντα σημεῖα εἶναι ἐν γένει ἄπειρα τὸ πλῆθος καὶ ἔχουσι τόπον τινά, ὡσαύτως καὶ τὰ τὸ δεύτερον μόνον πληροῦντα, ἐπειδὴ δὲ τὸ ζητούμενον σημεῖον ὀφείλει νὰ πληροῖ ἀμφότερα τὰ ἐπιτάγματα, θὰ εὑρίσκηται κατ' ἀνάγκην

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ εἰς τὸν ἕνα τόπον καὶ εἰς τὸν ἄλλον, ἑπομένως θὰ εἶναι κοινὸν σημεῖον αὐτῶν (145)· ἂν λοιπὸν ἠξεύρωμεν τοὺς δύο εἰρημένους τόπους, ἔχομεν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Οὕτω, π. χ. ἵνα εὕρωμεν τὸ κέντρον τῆς περιφερείας τῆς ὁποίας ἔχομεν τρία σημεῖα Α, Β, Γ, παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ζητούμενον κέντρον Κ πρέπει νὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῶν τριῶν δοθέντων σημείων, ἤτοι νὰ πληροῖ τὰ δύο ἐπιτάγματα.

$$KA = KB \text{ καὶ } KA = K\Gamma\cdot$$

καὶ τὰ μὲν σημεῖα, τὰ τὸ πρῶτον μόνον ἐπίταγμα πληροῦντα (ἤτοι τὰ ἀπέχοντα ἴσον ἀπὸ τῶν δύο σημείων Α καὶ Β), ἔχουσι τόπον τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ, τὰ δὲ τὸ δεύτερον μόνον πληροῦντα ἔχουσι τόπον τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΓ· ἐπειδὴ δὲ τὸ Κ θὰ πληροῖ ἀμφότερα τὰ ἐπιτάγματα, ἀναγκαίως θὰ εὑρίσκηται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν καθέτων τούτων· ὥστε θὰ εἶναι ἡ τομὴ αὐτῶν.

Ὁμοίως, ἵνα εὕρωμεν τὸ κέντρον τῆς περιφερείας τῆς εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγραφησομένης, παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ζητούμενον κέντρον πρέπει νὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος τριγώνου, ἤτοι νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα· 1) ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ νὰ εἶναι ἴση τῇ ἀποστάσει αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ καὶ 2) ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ νὰ εἶναι ἴση τῇ ἀποστάσει αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ. Καὶ τὰ μὲν σημεῖα, ἅτινα πληροῦσι τὸ πρῶτον μόνον, ἔχουσι τόπον τὴν διχοτομοῦσαν τὴν γωνίαν Α, τὰ δὲ πληροῦντα τὸ δεύτερον μόνον, ἔχουσι τόπον τὴν διχοτομοῦσαν τὴν γωνίαν Β· ἐπειδὴ δὲ τὸ κέντρον θὰ πληροῖ ἀμφότερα, θὰ κεῖται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν διχοτομουσῶν τούτων· ὥστε θὰ εἶναι ἡ τομὴ αὐτῶν.

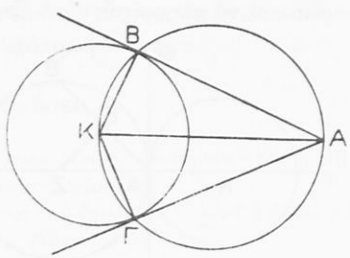
Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν, ὅτι ἡ γνῶσις τῶν γεωμετρικῶν τόπων εἶναι χρησιμωτάτη εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν προβλημάτων, ἑπομένως καὶ εἰς τὴν λύσιν αὐτῶν. Τοῦτο γίνεται φανερὸν καὶ ἐκ τῶν ἑπομένων προβλημάτων (παρατηρητέον δέ, ὅτι οἱ γεωμετρικοὶ τόποι, τοὺς ὁποίους θεωροῦμεν ἐνταῦθα, εἶναι ἡ εὐθεῖα καὶ ὁ κύκλος).

171. Πρόβλημα. ***Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ δοθέντος κύκλου Κ ἐκ δοθέντος σημείου Α ἐκτὸς τοῦ κύκλου.***

Ἄγνωστον εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς, ὅπερ πρέπει νὰ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πληροῖ τὸ ἐπίταγμα τοῦτο· αἱ ἐξ αὐτοῦ ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ Α νὰ σχηματίζωσιν ὀρθὴν γωνίαν· ἀλλὰ τὰ τὸ ἐπίταγμα τοῦτο πληροῦντα σημεῖα, ἔχουσι τόπον τὴν ἐπὶ τῆς ΑΚ ὡς διαμέτρου γραφομένην περιφέρειαν (160 παρ.)· ἐπ' αὐτῆς ἄρα θὰ κεῖται τὸ ζητούμενον σημεῖον πρέπει δὲ νὰ εὑρίσκηται καὶ ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας· ἄρα εἶναι τομὴ αὐτῶν· ἐπειδὴ δὲ δύο τομαὶ ὑπάρχουσιν, ἐπιδέχεται τὸ πρόβλημα δύο λύσεις.



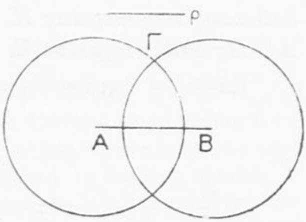
172. Πρόβλημα. ***Ἐκ δύο σημείων αὐτῆς καὶ ἐκ τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς νὰ γραφῇ ἡ περιφέρεια.***

Ἄγνωστον εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας, ἥτις πρέπει νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα.

1) Νὰ διέρχηται διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Α καὶ νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ρ.

2) Νὰ διέρχηται διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Β καὶ νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα ἴσην τῇ ρ.

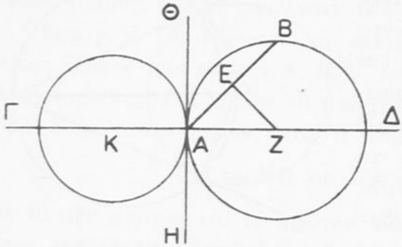
Ἀλλ' ἂν μόνον τὸ πρῶτον πληροῖ, τὸ κέντρον αὐτῆς ἔχει τόπον τὴν μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ρ γραφομένην περιφέρειαν· ἂν δὲ μόνον τὸ δεύτερον πληροῖ, τὸ κέντρον αὐτῆς ἔχει τόπον τὴν μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ρ γραφομένην περιφέρειαν· ἑπομένως τὸ ζητούμενον κέντρον εἶναι τομὴ τῶν δύο τούτων περιφερειῶν καὶ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχῃ δύο μὲν λύσεις, ἂν τέμνωνται αἱ ρηθεῖσαι περιφέρειαι, μίαν δέ, ἐὰν ἐφάπτωνται ἀλλήλων ($AB = 2\rho$), καὶ οὐδεμίαν, ἐὰν μηδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον ($AB > 2\rho$).



173. Πρόβλημα. ***Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς δοθείσης περιφερείας Κ εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ διερχομένη διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Β.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἄγνωστον εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας· πρέπει δὲ νὰ πληροῖ αὕτη τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα.



1) Νὰ διέρχηται διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β.

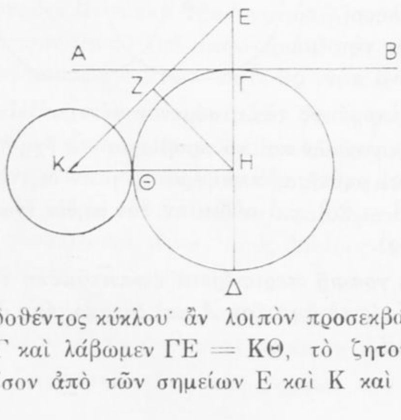
2) Νὰ ἐφάπτηται τοῦ κύκλου Κ εἰς τὸ σημεῖον Α.

Ἀλλὰ τῶν περιφερειῶν, αἵτινες πληροῦσι μόνον τὸ πρῶτον ἐπίταγμα, τὰ κέντρα ἔχουσι τόπον τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ, τῶν δὲ περιφερειῶν, αἵτινες πληροῦσι μόνον τὸ δεύτερον, τὰ κέντρα ἔχουσι τόπον τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν σημείων Κ καὶ Α· ἄρα ἡ ζητουμένη περιφέρεια θὰ ἔχῃ τὸ κέντρον της καὶ ἐπὶ τῆς ΕΖ καὶ ἐπὶ τῆς ΓΔ· ὥστε ἡ τομὴ Ζ τῶν εὐθειῶν τούτων εἶναι τὸ ζητούμενον κέντρον· τούτου δὲ εὑρεθέντος, ἐλύθη τὸ πρόβλημα.

Διερεύνησις. Τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, ἂν αἱ δύο εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΕΖ εἶναι παράλληλοι, ἤτοι ἂν ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ. Εἰς πᾶσαν δ' ἄλλην περίπτωσιν εἶναι δυνατόν.

174. **Πρόβλημα.** ***Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς δοθείσης περιφερείας Κ ἐκτὸς καὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ εἰς δοθὲν σημεῖον Γ.***

Ἐπειδὴ ἡ ζητουμένη περιφέρεια θὰ ἐφάπτηται τῆς ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Γ, τὸ κέντρον αὐτῆς θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΓΔ, καθέτου



ἐπὶ τὴν ΑΒ· ἐπειδὴ δὲ θὰ ἐφάπτηται καὶ τοῦ κύκλου Κ ἐκτός, τὸ κέντρον αὐτῆς θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ Κ περισσότερον ἢ ἀπὸ τοῦ Γ καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων τούτων θὰ εἶναι ἴση τῇ ἀκτῖνι ΚΘ τοῦ δοθέντος κύκλου· ἂν λοιπὸν προσεκβάλωμεν τὴν ΓΔ πέραν τοῦ Γ καὶ λάβωμεν ΓΕ = ΚΘ, τὸ ζητούμενον κέντρον θὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων Ε καὶ Κ καὶ διὰ τοῦτο θὰ εὑρίσκηται

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπὶ τῆς ΖΗ, καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΚΕ. Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας εἶναι τὸ σημεῖον Η, εἰς ὃ αἱ δύο αὗται κάθετοι τέμνονται.

Ἀσκήσεις

231) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον οὗτινος ἐδόθησαν ἡ βάσις ΑΒ, τὸ ὕψος υ καὶ ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνία Γ.

232) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον οὗτινος ἐδόθησαν ἡ βάσις ΑΒ, ἡ ἀπέναντι γωνία Γ καὶ ἡ ἐξ αὐτῆς διάμεσος Δ.

233) Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν περιφερειῶν ἐκτὸς, καὶ ἔχουσα ἀκτῖνα ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ α.

234) Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν περιφερειῶν ἐντὸς καὶ ἔχουσα ἀκτῖνα ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ α.

235) Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν περιφερειῶν, τῆς μὲν ἐντός, τῆς δὲ ἐκτὸς καὶ ἔχουσα ἀκτῖνα ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ α.

236) Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν περιφερειῶν, μιᾶς δὲ τούτων εἰς δοθὲν σημεῖον.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Βου Βιβλίου.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος:

237) Τῶν μέσων τῶν χορδῶν τοῦ δοθέντος κύκλου, αἵτινες εἶναι ἴσαι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

238) Τῶν μέσων τῶν χορδῶν τοῦ δοθέντος κύκλου, αἵτινες διέρχονται διὰ τοῦ δοθέντος σημείου.

239) Τοῦ μέσου εὐθείας, ἥτις κινεῖται οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα αὐτῆς νὰ μένωσιν ἐπὶ δύο εὐθειῶν, τεμνομένων πρὸς ὀρθάς.

240) Τῶν ἄκρων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἐκ τῶν σημείων δοθείσης περιφερείας ἴσαι καὶ παράλληλοι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

241) Τῶν σημείων, ἐξ ὧν αἱ ἀγόμεναι δύο ἐφαπτόμεναι τοῦ δοθέντος κύκλου εἶναι ἴσαι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἢ σχηματίζουσι δοθεῖσαν γωνίαν.

242) Τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου εἰς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

243) Τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἵτινες ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας.

244) Τῶν κέντρων τῶν ἴσων κύκλων, οἵτινες ἐφάπτονται δοθείσης περιφερείας.

245) Τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἑνοῦσι τὰ σημεῖα δύο παραλλήλων εὐθειῶν.

Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν ἑξῆς στοιχείων αὐτοῦ:

246) Ἐκ δύο πλευρῶν καὶ ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν ἀπέναντι γωνιῶν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

247) Ἐκ δύο πλευρῶν καὶ ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

248) Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ τῆς ἀπέναντι γωνίας καὶ ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

249) Ἐκ τῶν γωνιῶν καὶ ἐκ μιᾶς τῶν εἰρημένων ἀκτίνων.

250) Ἐκ τῆς βάσεως, ἐκ τῆς ἀπέναντι γωνίας καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν (περίπτωσις, καθ' ἣν ἡ γωνία εἶναι ὀρθή).

251) Ἐκ τῶν γωνιῶν καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος δύο πλευρῶν.

252) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, οὗ ἡ διαγώνιος καὶ ἡ πλευρὰ νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

253) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, οὗτινος ἡ διαγώνιος καὶ ἡ πλευρὰ νὰ ἔχωσι διαφορὰν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

254) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ καὶ ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο πλευρῶν αὐτοῦ.

255) Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη κοινὴ δύο δοθέντων κύκλων.

256) Νὰ γραφῇ κύκλος μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ ἐφαπτόμενος δύο δοθεισῶν εὐθειῶν·

ἢ δοθείσης περιφερείας καὶ δοθείσης εὐθείας, ἢ διερχόμενος διὰ τοῦ δοθέντος σημείου καὶ ἐφαπτόμενος τῆς δοθείσης εὐθείας.

257) Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο δοθέντας κύκλους οὕτως, ὥστε τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ἀπολαμβανόμενα τμήματα αὐτῆς νὰ εἶναι ἴσα πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας Α καὶ Β.

258) Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

259) Νὰ γραφῇ περιφέρεια, διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ τέμνουσα δεδομένην περιφέρειαν οὕτως, ὥστε ἡ κοινὴ αὐτῶν χορδὴ νὰ εἶναι παράλληλος δεδομένῃ εὐθείᾳ.

260) Περὶ τὸ δοθὲν τετράπλευρον νὰ περιγραφῇ τετράγωνον.

261) Ἐπὶ δεδομένης εὐθείας νὰ εὑρεθῇ σημεῖον, ἀπέχον ἐξ ἴσου ἀπὸ δύο δεδομένων εὐθειῶν ἢ ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων.

262) Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν, εὑρεῖν σημεῖον, οὗτινος αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων νὰ εἶναι ἴσαι πρὸς δεδομένας εὐθείας. Πόσα τοιαῦτα σημεῖα ὑπάρχουσιν;

263) Νὰ κατασκευασθῇ ῥόμβος ἐκ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ καὶ ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν γωνιῶν του ἢ ἐκ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαγωνίων του.

264) Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ἐκ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ καὶ ἐκ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ. (Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ἀόριστον· ἐκ τῶν αὐτῶν δεδομένων δύνανται νὰ κατασκευασθῶσιν ἄπειρα παραλληλόγραμμα).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

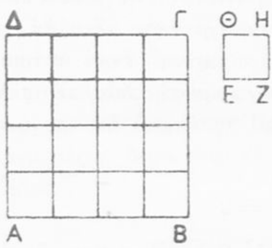
ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

175. **Ὁρισμοί.** ***Κοινὸν μέτρον*** δύο εὐθειῶν λέγεται εὐθεῖα, ἐξ ἧς ἐπαναλαμβανομένης ἀποτελοῦνται ἀμφότεραι.

Αἱ κοινὸν μέτρον ἔχουσαι εὐθεῖαι λέγονται ***σύμμετροι*** πρὸς ἀλλήλας, αἱ δὲ μὴ ἔχουσαι, ***ἀσύμμετροι***· ὅτι δὲ ὑπάρχουσι τοιαῦται εὐθεῖαι, θὰ δειχθῇ ἐν τοῖς ἑπομένοις.

Σημείωσις. Ὁμοίως ὁρίζεται τὸ κοινὸν μέτρον δύο οἱωνδήποτε ποσῶν ὁμοειδῶν.

176. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν εὐθεῖα σύγκειται ἐξ ἄλλης, ρ φορὰς λαμβανομένης, τὸ τετράγωνον αὐτῆς σύγκειται ἐκ τοῦ τετραγώνου τῆς ἄλλης, λαμβανομένου ρ. ρ φοράς.***

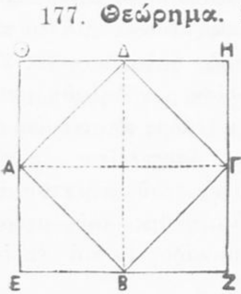


Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ τετραπλασία τῆς ΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον αὐτῆς, τὸ ΑΒΓΔ, εἶναι 4. 4, ἤτοι 16πλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΖ.

Διότι ἂν διαιρεθῇ ἑκατέρα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΔ εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ἄλλῃ, αὗται θὰ διαιρέσωσι τὸ τετράγωνον εἰς 4. 4, ἤτοι 16 μέρη, ἅτινα εἶναι τετράγωνα, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ὀρθὰς καὶ τὰς πλευρὰς πάσας ἴσας τῇ ΕΖ. Σύγκειται ἄρα τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ ἐκ 16 τετραγώνων ἴσων τῷ ΕΖΗΘ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ πάντα ἀκέραιον ἀριθμόν.

177. **Θεώρημα.** ***Τὸ ἐπὶ τῆς διαγωνίου τετραγώνου κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι διπλάσιον αὐτοῦ.***

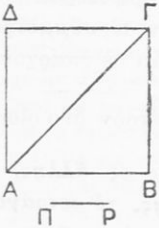


Ἔστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ καὶ διαγώνιοι αὐτοῦ αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ· ἐὰν ἀπὸ τῶν ἄκρων ἑκατέρας τῶν διαγωνίων ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ἄλλῃ γίνεται τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ, ὅπερ εἶναι τετράγωνον (75, 120).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ δὲ τετράγωνον τοῦτο ἀποτελεῖται ἐξ 8 ὀρθογωνίων τριγώνων ἴσων ἀλλήλοις (97), καὶ ἐκ τῶν ὁποίων τέσσαρα ἀποτελοῦσι τὸ ΑΒΓΔ. Ἄρα τὸ τετράγωνον ΕΖΗΘ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΒΓΔ.

178. **Θεώρημα.** ***Ἡ διαγώνιος παντὸς τετραγώνου εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.***



Ἔστω ὅτι τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ ἡ διαγώνιος ΑΓ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ ἔχουσι κοινόν τι μέτρον τὴν εὐθεῖαν ΠΡ, ἃς ἀποτελῇ δὲ ἡ ΠΡ τὴν μὲν διαγώνιον ὅταν ληφθῇ μ φοράς, τὴν δὲ πλευράν, ὅταν ν φοράς· τότε τὸ μὲν τετράγωνον τῆς διαγωνίου θὰ σύγκειται ἐκ μ. μ ἴσων τετραγώνων, ἐχόντων πλευρὰν τὴν ΠΡ, τὸ δὲ τετράγωνον ΑΒΓΔ θὰ σύγκειται ἐκ ν. ν τοιούτων τετραγώνων. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαγωνίου ΑΓ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ, ἕπεται ὅτι $\mu.\,\mu = 2.\,\nu.\,\nu$ ἢ $\mu^2 = 2\nu^2$.

Ἐντεῦθεν ἕπεται $\frac{\mu^2}{\nu^2} = 2$, ἢ $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 = 2$

Θὰ ἦτο λοιπὸν ὁ 2 τετράγωνον ἀριθμοῦ ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ (διότι οἱ ἀριθμοὶ μ καὶ ν εἶναι ἀκέραιοι)· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον (Θ. Ἀρ. σελ. 20)· ὥστε συμπεραίνομεν, ὅτι ***κοινὸν μέτρον τῆς πλευρᾶς τετραγώνου καὶ τῆς διαγωνίου αὐτοῦ δὲν ὑπάρχει.***

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

179. **Ὁρισμοί.** Μέτρησις μεγέθους ἢ ποσοῦ λέγεται ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις παριστᾷ τὸ μέγεθος αὐτοῦ. Διὰ νὰ μετρήσωμεν ἓν ποσὸν συγκρίνομεν αὐτὸ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς καὶ ὡρισμένον, τὸ ὁποῖον λέγεται μονάς· εὑρίσκομεν δηλαδὴ πόσαι μονάδες καὶ πόσα καὶ ὁποῖα μέρη τῆς μονάδος ἀποτελοῦσι τὸ ποσόν· ἂν δὲ ὑποτεθῇ, ὅτι εὕρωμεν, ὅτι ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τοῦ ἡμίσεως αὐτῆς καὶ ἐκ τοῦ πέμπτου αὐτῆς, ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος θὰ παριστᾷ τὸ μέγεθος τοῦ μετρηθέντος ποσοῦ θ' ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τοῦ $\frac{1}{2}$ αὐτῆς καὶ ἐκ τοῦ $\frac{1}{5}$ αὐτῆς, ἤτοι θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 1 +

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{17}{10}$. Ὥστε ὁ ἀριθμὸς ὅστις παριστᾷ τὸ μέγεθος ποσοῦ ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς, καθ' ὃν τρόπον τὸ ποσὸν αὐτὸ ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ποσοῦ, ὅπερ λαμβάνεται ὡς μονὰς καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ.

180. Ὁ ἐκ τῆς μετρήσεως γραμμῆς προκύπτων ἀριθμός, ὁ παριστῶν τὸ μέγεθος αὐτῆς, λέγεται ***μῆκος*** αὐτῆς· ὁ δὲ ἐκ τῆς καταμετρήσεως ἐπιφανείας προκύπτων, ὁ καὶ παριστῶν τὸ μέγεθος αὐτῆς, λέγεται ***ἐμβαδὸν*** αὐτῆς.

Ἀντὶ νὰ μετρήσωμεν μέγεθός τι, δυνάμεθα προδήλως νὰ μετρήσωμεν τὰ μέρη του καὶ νὰ ἀθροίσωμεν ἔπειτα τοὺς ἐκ τῶν μετρήσεων τούτων προκύπτοντας ἀριθμούς.

181. Τὰ μεγέθη ἴσων ἢ ἰσοδυνάμων σχημάτων παρίστανται ὑπὸ ἴσων ἀριθμῶν· διότι σύγκεινται ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν. Καὶ ἀντιστρόφως· τὰ σχήματα τῶν ὁποίων τὰ μεγέθη παρίστανται ὑπὸ ἴσων ἀριθμῶν εἶναι ἴσα εἴτε ἀκέραια εἴτε κατὰ μέρη· διότι ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν τῆς μονάδος.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ

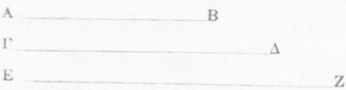
182. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν εὐθεῖα οἱαδήποτε ληφθῇ ὡς μονὰς καὶ παρασταθῇ διὰ τοῦ 1, αἱ μὲν σύμμετροι πρὸς τὴν μονάδα εὐθεῖαι παρίστανται διὰ τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν*** (οἵτινες διὰ τοῦτο λέγονται σύμμετροι), ***αἱ δὲ ἀσύμμετροι πρὸς τὴν μονάδα, παρίστανται δι' ἀριθμῶν, οἵτινες οὔτε ἀκέραιοι εἶναι οὔτε κλάσματα, ἀλλ' ἔχουσιν ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικὰ*** (οἵτινες διὰ τοῦτο λέγονται ***ἀσύμμετροι).***

Ἔστω μονὰς τῶν εὐθειῶν ἡ ΑΒ καὶ τυχοῦσα εὐθεῖα, σύμμετρος πρὸς αὐτήν, ἡ ΓΔ· ἐὰν τὸ κοινὸν αὐτῶν μέτρον περιέχεται ἐν τῇ ΑΒ τρίς, ἐν δὲ τῇ ΓΔ τετράκις τὸ κοινὸν τοῦτο μέτρον θὰ εἶναι τὸ τρίτον τῆς μονάδος ΑΒ καὶ θὰ ἀποτελῆται ἡ ΓΔ ἐκ τοῦ τρίτου τῆς ΑΒ, ληφθέντος τετράκις· ἐπομένως θὰ παριστᾶται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, \text{ ἤτοι } \frac{4}{3}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν εὐθεῖά τις παριστᾶται ὑπὸ ἀκεραίου ἢ ὑπὸ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν μονάδα.



Διότι, ἂν τις, παραδείγματος χάριν, παριστᾶται ὑπὸ τοῦ 4, ἡ εὐθεῖα αὕτη ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος τετράκις ληφθείσης· εἶναι λοιπὸν σύμμετρος πρός τὴν μονάδα καὶ κοινὸν μέτρον αὐτῶν εἶναι αὐτὴ ἡ μονάς. Ἂν δέ τις παριστᾶται ὑπὸ τοῦ $\frac{3}{5}$, ἤτοι $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$, ἡ εὐθεῖα αὕτη ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ πέμπτου τῆς μονάδος τρὶς ληφθέντος, τὸ αὐτὸ δὲ πέμπτον τῆς μονάδος ἀποτελεῖ καὶ τὴν μονάδα, πεντάκις ληφθέν· ὥστε εἶναι κοινὸν μέτρον τῆς μονάδος καὶ τῆς εὐθείας, ἥτις διὰ τοῦτο εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν μονάδα.

Ἔστω νῦν εὐθεῖα ἀσύμμετρος πρὸς τὴν μονάδα ἡ ΕΖ· ἵνα μετρήσωμεν αὐτήν, παραβάλλομεν αὐτὴν πρῶτον πρὸς τὴν μονάδα ΑΒ, ὅτε θὰ εὕρωμεν (κατὰ τὸ 6ον ἀξίωμα τῆς εὐθείας), ὅτι σύγκειται ἔκ τινος πολλαπλασίου αὐτῆς (ἔστω τοῦ ρ) καὶ ἔκ τινος ὑπολοίπου Μ, μικροτέρου τῆς ΑΒ· ἔπειτα συγκρίνομεν τὸ Μ πρὸς τὸ δέκατον τῆς ΑΒ, ὅτε θὰ εὕρωμεν, ὅτι σύγκειται ἔκ τινος πολλαπλασίου τοῦ δεκάτου τούτου (μὴ ὑπερβαίνοντος τὸ 9), ἔστω τοῦ ϱ_1 καὶ ἔκ τινος ὑπολοίπου Σ μικροτέρου τοῦ δεκάτου. Ὡσαύτως τὸ ὑπόλοιπον Σ θὰ σύγκειται ἔκ τινος πολλαπλασίου τοῦ ἑκατοστοῦ τῆς ΑΒ (τοῦ ϱ_2) καὶ ἔκ τινος ὑπολοίπου καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε θὰ σύγκειται ἡ δοθεῖσα γραμμὴ ἐκ τῆς μονάδος ΑΒ ληφθείσης ρ φορὰς καὶ ἐκ τοῦ δεκάτου αὐτῆς ληφθέντος ϱ_1 φορὰς καὶ ἐκ τοῦ ἑκατοστοῦ αὐτῆς ληφθέντος ϱ_2 φορὰς καὶ οὕτω καθεξῆς εἰς ἄπειρον· ἑπομένως θὰ παριστᾶται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ

$$\varrho+\frac{\varrho_1}{10}+\frac{\varrho_2}{100}+\ldots$$

Τὰ δεκαδικὰ ψηφία ϱ_1, ϱ_2... τοῦ ἀριθμοῦ τούτου εἶναι ἄπειρα τὸ πλῆθος (τουτέστιν ὅλαι αἱ μετρήσεις ἀφίνουσιν ὑπόλοιπα) οὐδὲ ἔχουσι περίοδον· ἄλλως θὰ ἦτο ὁ ἀριθμὸς σύμμετρος· ἑπομένως καὶ ἡ ΕΖ σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ, ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει.

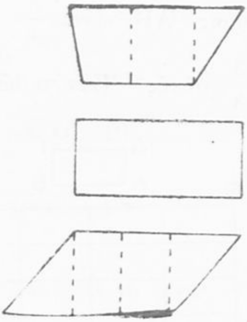
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Σημείωσις α΄. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀληθεύει καὶ περὶ τῶν τόξων τοῦ αὐτοῦ κύκλου, διότι καὶ ταῦτα συγκρίνονται πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ (41), ἔτι δὲ καὶ περὶ τῶν γωνιῶν· ἀποδεικνύεται δὲ ὁμοίως..

Σημείωσις β΄. Ἀντὶ νὰ μετρήσωμεν τὸ ὑπόλοιπον Μ διὰ τοῦ δεκάτου τῆς μονάδος ΑΒ, δυνάμεθα νὰ **δεκαπλασιάσωμεν** πρῶτον αὐτὸ καὶ ἔπειτα νὰ μετρήσωμεν διὰ τῆς μονάδος ΑΒ· ὁμοίως καὶ τὰ ἄλλα ὑπόλοιπα.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

183. **Ὁρισμοί.** Ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνεται τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν μονάδα τῶν εὐθειῶν.

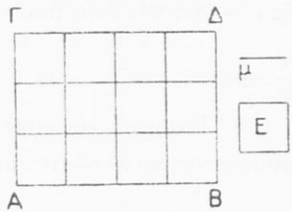


Βάσις παραλληλογράμμου λέγεται ἑκατέρα τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν, ***ὕψος*** δὲ τὸ ἀπόστημα τῶν πλευρῶν τούτων ἀπ' ἀλλήλων. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι, πᾶσαι αἱ μεταξὺ αὐτῶν κάθετοι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις καὶ δύναται οἱαδήποτε ἐξ αὐτῶν, νὰ ληφθῇ ὡς ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου.

Ἐὰν τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον, βάσις καὶ ὕψος αὐτοῦ εἶναι (κατὰ τὸν ὁρισμὸν) δύο προσκείμεναι πλευραὶ αὐτοῦ.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΟΥ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ

184. **Θεώρημα.** ***Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ*** (τουτέστι τῶν παριστώντων ταῦτα ἀριθμῶν).



1) Ἔστωσαν πρῶτον οἱ τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος παριστῶντες ἀριθμοὶ ἀμφότεροι ἀκέραιοι.

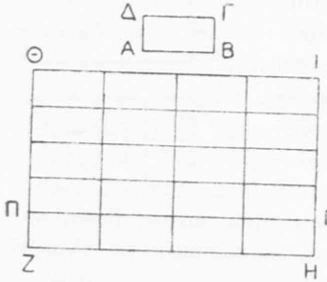
Ἔστω δηλ. ὅτι ἡ μὲν βάσις ΑΒ περιέχει τὴν μονάδα μ τῶν εὐθειῶν τετράκις, τὸ δὲ ὕψος ΑΓ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

περιέχει αὐτὴν τρίς· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ θὰ περιέχῃ τὴν μονάδα Ε τῶν ἐπιφανειῶν 12άκις (3×4) καὶ ἐπομένως ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ 12.

Διότι, ἂν διαιρεθῇ ἡ μὲν βάσις ΑΒ εἰς 4 μέρη, ἴσα τῇ μονάδι μ, ἡ δὲ ΑΓ εἰς 3, καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ἄλλῃ, διαιρεῖται τὸ ὀρθογώνιον εἰς 3. 4, ἤτοι 12 μέρη, ἅτινα εἶναι τετράγωνα ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ὀρθὰς καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας τῇ μονάδι μ. Σύγκειται ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ἐκ τῆς μονάδος Ε τῶν ἐπιφανειῶν δωδεκάκις ληφθείσης· τουτέστι τὸ ἐμβοδὸν αὐτοῦ εἶναι 12.

2) Ἔστωσαν δεύτερον οἱ τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος παριστῶντες ἀριθμοὶ ἀμφότεροι σύμμετροι. Ἤτοι ἔστω, ὅτι ἡ μὲν βάσις ΑΒ εἶναι $\frac{5}{4}$ τῆς μονάδος μ, τὸ δὲ ὕψος ΑΔ εἶναι $\frac{3}{5}$ αὐτῆς. Ἐὰν τεθῶσι κατὰ σειρὰν 4 ὀρθογώνια, ἴσα τῷ ΑΒΓΔ, ἀποτελοῦσι τὸ ὀρθογώνιον ΖΗΡΠ, ὅπερ ἔχει βάσιν 5 καὶ ὕψος $\frac{3}{5}$. ἐὰν δὲ τεθῶσιν ἐπ' ἄλληλα 5 ὀρθογώνια ἴσα τῷ ΖΗΡΠ, ἀποτελοῦσι τὸ ὀρθογώνιον ΖΗΙΘ, ὅπερ ἔχει βάσιν 5 καὶ ὕψος 3· ἐπομένως ἔχει ἐμβαδὸν 15 μονάδας Ε.

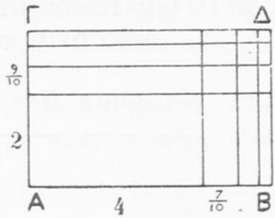


Ἐπειδὴ δὲ 20 ὀρθογώνια ἴσα τῷ ΑΒΓΔ ἀποτελοῦσι τὸ ὀρθογώνιον ΖΗΙΘ, ὅπερ περιέχει 15 μονάδας Ε, ἕπεται, ὅτι ἕκαστον ἐξ αὐτῶν εἶναι $\frac{15}{20}$ τῆς μονάδος τῶν ἐπιφανειῶν, τουτέστιν ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{15}{20}$, ἤτοι $\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{5}$.

3) Ἔστωσαν νῦν οἱοιδήποτε οἱ τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παριστῶντες ἀριθμοί. Ἐπειδὴ πᾶς ἀριθμὸς εἶναι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἄθροισμα δεκαδικῶν μονάδων, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ μὲν βάσις ΑΒ εἶναι 4,7841. . . . τὸ δὲ ὕψος ΑΓ εἶναι 2,9189. . . . Ἐὰν χωρίσωμεν ἐπὶ τῆς ΑΒ τὰ μέρη τῆς μονάδος μ, ἐξ ὧν σύγκειται ἡ ΑΒ (τουτέστι τὰς 4 μονάδας μ, τὰ 7 δέκατα αὐτῆς, τὰ 8 ἑκατοστὰ κλπ.) καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ ὡσαύτως καὶ φέρωμεν ἔπειτα ἐκ τῶν ἄκρων τῶν



μερῶν τούτων παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, διαιρεῖται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ εἰς πλῆθος ὀρθογωνίων, ἐχόντων πλευρὰς συμμέτρους τῇ μονάδι καὶ τῶν ὁποίων τὰ ἐμβαδὰ εἶναι κατὰ σειράν :

$$4.2+\frac{7}{10}.2+\frac{8}{100}.2+\frac{4}{1000}.2+\frac{1}{10000}.2+\ldots$$

$$4.\frac{9}{10}+\frac{7}{10}.\frac{9}{10}+\frac{8}{100}.\frac{9}{10}+\frac{4}{1000}.\frac{9}{10}+\frac{1}{10000}.\frac{9}{10}+\ldots$$

$$4.\frac{1}{100}+\frac{7}{10}.\frac{1}{100}+\frac{8}{100}.\frac{1}{100}+\frac{4}{1000}.\frac{1}{100}+\frac{1}{10000}.\frac{1}{100}+\ldots$$

. . . .

Ἀλλὰ τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν τούτων ἀποτελεῖ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν 4,7841 . . . καὶ 2,9189 . . . , ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι καὶ πάλιν ἶσον τῷ γινομένῳ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

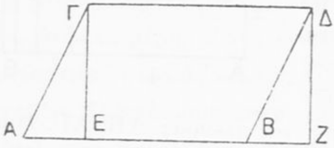
Ἐὰν δύο προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου παριστῶνται ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β, ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ παρίσταται ὑπὸ τοῦ γινομένου $\alpha\beta$.

Σημείωσις. Ἐὰν ἡ πλευρὰ τετραγώνου παριστᾶται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ α, ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ παρίσταται ὑπὸ τοῦ $\alpha.\,\alpha$, ἤτοι α^2· διὰ τοῦτο ἡ δευτέρα δύναμις ἀριθμοῦ λέγεται καὶ ***τετράγωνον*** αὐτοῦ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΚΑΙ ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΙΣ ΑΥΤΩΝ

185. **Θεώρημα**. ***Πᾶν παραλληλόγραμμον εἶναι ἰσοδύναμον ὀρθογωνίῳ, ἔχοντι τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.***



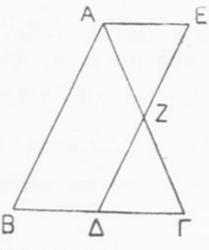
Ἐὰν ἐκ τῶν ἄκρων τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς καταβιβασθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒ, σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον ΕΓΔΖ, ὅπερ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ παραλληλογράμμῳ ΑΒΓΔ, διότι τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΕ καὶ ΒΔΖ εἶναι ἴσα (100). Ἂν δὲ τὸ τρίγωνον ΑΓΕ ἀποτμηθῇ ἀπὸ τοῦ παραλληλογράμμου καὶ τεθῇ εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἴσου του ΒΔΖ, τὸ παραλληλόγραμμον μετασχηματίζεται εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΕΓΔΖ, ἐπομένως τὸ ὀρθογώνιον ΕΓΔΖ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἴσα τὴν ἐπιφάνειαν· ἔχει δὲ τὸ ὀρθογώνιον ΕΓΔΖ βάσιν μὲν τὴν ΕΖ ἴσην τῇ ΓΔ, ἴσην τῇ ΑΒ, ὕψος δὲ, τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ΓΕ.

186. **Πόρισμα 1ον.** ***Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.***

187. **Πόρισμα 2ον.** ***Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἰσοδύναμα.***

188. **Θεώρημα**. ***Πᾶν τρίγωνον εἶναι ἰσοδύναμον παραλληλογράμμῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, ὕψος δὲ, τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου.***

Ἔστω βάσις τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ ΒΓ· ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Δ



τῆς ΒΓ ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ Α παράλληλος τῇ ΒΓ, σχηματίζεται παραλληλόγραμμον, τὸ ΑΒΔΕ, ἔχον βάσιν μὲν τὴν ΒΔ, ἤτοι τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, ὕψος δὲ, τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου. Εἶναιδὲ, τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο ἰσοδύναμον τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ, διότι τὰ δύο τρίγωνα ΔΖΓ καὶ ΑΖΕ εἶναι ἴσα (86)· ἐὰν δὲ τὸ τρίγωνον ΔΖΓ ἀποτμηθῇ ἀπὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τεθῇ εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἴσου του ΖΕΑ, μετασχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΔΕ· εἶναι λοιπὸν ἰσοδύναμα.

189. **Πόρισμα 1ον.** ***Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ ἡμίσεως τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ*** $\left(\frac{1}{2}\,\beta.\upsilon\right)$ ***ἢ τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους*** $\left(\beta.\frac{1}{2}\,\upsilon\right)$ ***ἢ τῷ ἡμίσει τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος*** $\left(\frac{1}{2}\,\beta.\upsilon.\right)$.

190. **Πόρισμα 2ον.** ***Πᾶν τρίγωνον εἶναι ἰσοδύναμον ὀρθογωνίῳ, ἔχοντι βάσιν μὲν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, ὕψος δὲ, τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου.***

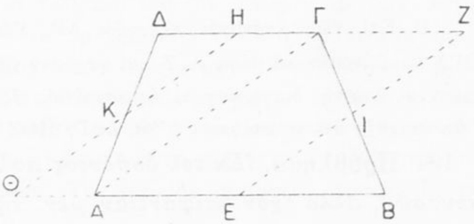
191. **Πόρισμα 3ον.** ***Τὰ ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη ἔχοντα τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα.***

Σημείωσις. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν παντὸς εὐθυγράμμου σχήματος ἀναλύοντες αὐτὸ εἰς τρίγωνα.

192. **Θεώρημα.** ***Πᾶν τραπέζιον εἶναι ἰσοδύναμον παραλληλογράμμῳ, ὅπερ ἔχει ὕψος μὲν τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου, βάσιν δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο βάσεων τοῦ τραπεζίου.***

Ἔστω τραπέζιον τὸ ΑΒΓΔ, ἔχον βάσεις μὲν τὰς παραλλήλους ΑΒ, ΓΔ, ὕψος δὲ τὸ ἀπόστημα αὐτῶν.

Ἡ διαγώνιος ΑΓ διαιρεῖ τὸ τραπέζιον εἰς δύο τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ, ἔχοντα βάσεις τὰς τοῦ τραπεζίου καὶ ὕψος τὸ αὐτό. Καὶ τὸ μὲν ΑΒΓ μετασχηματίζεται (187) εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΕΖΓ, τὸ δὲ ΑΓΔ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΗΘ· ἐπομένως τὸ τραπέζιον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ παραλληλογράμμῳ ΘΕΖΗ, ἔχει δὲ τοῦτο ὕψος μὲν τὸ τοῦ τραπεζίου, βάσιν δὲ τὴν



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΘΕ, εἶναι δὲ $ΘΕ = ΑΕ + ΑΘ = \frac{1}{2}ΑΒ + \frac{1}{2}ΓΔ = \frac{1}{2}(ΑΒ + ΓΔ)$.

193. **Πόρισμα.** ***Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπεζίου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ ὕψους αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ*** ἤτοι $\frac{(β + β')}{2} \cdot υ$.

Σημείωσις. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ἀμέσως ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται διὰ τῆς διαγωνίου ΑΓ.

Ἀσκήσεις

265) Δύο τρίγωνα ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν, τὰς δὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας παραπληρωματικάς, εἶναι ἰσοδύναμα.

266) Ἑκάστη διάμεσος τριγώνου διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο τρίγωνα ἰσοδύναμα.

267) Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν ἰσοδυνάμων τριγώνων, ἐχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν;

268) Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων ἰσοδυνάμων παραλληλογράμμων ἐχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν;

269) Ἐὰν ἐκ σημείου Ε τῆς διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ ἀχθῶσιν αἱ ΕΒ, ΕΓ, τὰ τρίγωνα ΑΕΒ, ΑΕΓ εἶναι ἰσοδύναμα.

270) Ἡ παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε ἀντιστοίχως. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΓΔ εἶναι ἰσοδύναμα.

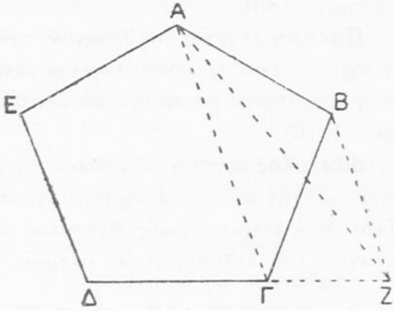
271) Ἐπὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΑΒ, ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ λαμβάνομεν τὰ μέσα Α, Ζ καὶ φέρομεν τὰς ΔΕ καὶ ΒΖ, αἵτινες τέμνονται ὑπὸ τῆς διαγωνίου ΑΓ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Θ. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΔΖΘ, ΖΘΓ, ΗΘΖ εἶναι ἰσοδύναμα.

194. **Πρόβλημα.** ***Ἐκ τοῦ δοθέντος πολυγώνου, νὰ κατασκευασθῇ, ἄλλο ἔχον ἐπιφάνειαν μὲν τὴν αὐτήν, μίαν δὲ πλευρὰν ὀλιγώτερον.***

Ἔστω, ὅτι ἐκ τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ κατεσκευάσθη τὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ τετράπλευρον ΑΖΔΕ. Ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΑΓ, παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν εἰς ἕκαστον τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΖΓ προστεθῇ τὸ αὐτὸ σχῆμα ΑΓΔΕ προκύπτουσιν τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΖΔΕ· ἐπομένως τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα· ἐπειδὴ δὲ ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΓ, ἔχουσιν ἴσα ὕψη· ἄρα ἡ ΒΖ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΓ.



Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω κατασκευάζομεν τὸ ζητούμενον πολύγωνον ὡς ἑξῆς· φέρομεν πρῶτον τὴν διαγώνιον ΑΓ, χωρίζουσαν ἀπὸ τοῦ δοθέντος πολυγώνου ΑΒΓΔΕ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, δεύτερον τὴν ΒΖ παράλληλον τῇ ΑΓ τέμνουσαν τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ κατὰ τὸ Ζ καὶ τέλος ἄγομεν τὴν ΑΖ.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΖΓ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΓ καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμα· ἄρα καὶ τὰ σχήματα ΑΒΓΔΕ καὶ ΑΖΔΕ, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦνται ἐξ ἰσοδυνάμων σχημάτων, εἶναι ἰσοδύναμα· ἔχει δὲ τὸ ΑΖΔΕ μίαν πλευρὰν ὀλιγώτερον ἢ τὸ δοθέν· ὥστε κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον.

195. **Πόρισμα.** ***Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον*** (ἐπομένως καὶ ὀρθογώνιον) ***ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι πολυγώνῳ.***

196. **Παρατήρησις.** Ἐκ τῶν προηγουμένων πάντων συνάγεται, ὅτι αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων καταμετροῦνται καὶ παρίστανται δι' ἀριθμῶν· κατ' ἀκολουθίαν πᾶσα ἰσότης μεταξὺ εὐθειῶν γραμμῶν ἢ μεταξὺ ἐπιφανειῶν εὐθυγράμμων σχημάτων τρέπεται εἰς ἰσότητα ἀριθμῶν· διὰ τοῦτο ἡ ἰσότης τῶν σχημάτων (εἴτε ἀκεραίων εἴτε διῃρημένων) ἔχει πάσας τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος τῶν ἀριθμῶν. Τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει προφανῶς καὶ ἐπὶ τῶν ἀνισοτήτων.

197. **Ὁρισμοί.** Ὡς μονάδα τῶν εὐθειῶν λαμβάνομεν ἐν τοῖς ἑπομένοις τὸ γαλλικὸν μέτρον, ὅπερ εἶναι περίπου τὸ $\frac{1}{40000000}$ τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ τετράγωνον ὅπερ ἔχει πλευρὰν ἕνα μέτρον λέγεται τετραγωνικὸν μέτρον, τοῦτο δὲ λαμβάνομεν ὡς μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν (183).

Παλάμη λέγεται τὸ δέκατον τοῦ μέτρου· τὸ δὲ τετράγωνον τὸ ἔχον αὐτὴν πλευράν, λέγεται ***τετραγωνικὴ παλάμη***· εἶναι δὲ ἡ τετραγωνικὴ παλάμη τὸ ἑκατοστὸν τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου (176).

Δάκτυλος λέγεται τὸ ἑκατοστὸν τοῦ μέτρου· τὸ δὲ τετράγωνον, τὸ ἔχον αὐτὸν πλευράν, λέγεται ***τετραγωνικὸς δάκτυλος***· εἶναι δὲ ὁ τετραγωνικός δάκτυλος τὸ δεκάκις χιλιοστὸν ἢ μυριοστὸν τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου.

Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαί.

272) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶναι 14 μ. τὸ δὲ ὕψος 7,3 μ.

273) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 2.85 μ.

274) Ὀρθογωνίου ἡ μὲν βάσις εἶναι 10 μ, τὸ δὲ ὕψος 4 μ. τετραγώνου δὲ ἡ περίμετρος εἶναι ἴση μὲ τὴν τοῦ ὀρθογωνίου. Κατὰ πόσον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τοῦ ὀρθογωνίου;

275) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ὀρθογωνίου, οὗ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 7, 28 τ. μ. καὶ ἡ βάσις 3,5 μ.

276) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ὅπερ εἶναι τὸ δέκατον τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου.

277) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, ὅπερ ἔχει βάσιν 12, 5 καὶ ὕψος 4,7 μ.

278) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο παραλλήλων πλευρῶν ρόμβου πλευρᾶς 21, 25 μ. ἵνα τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι 264, 35 τ. μ.

279) Παραλληλογράμμου δύο προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι 9 μ. καὶ 4 μ, ἡ δὲ κάθετος μεταξὺ τῶν μεγαλυτέρων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 2,5 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς καθέτου μεταξὺ τῶν μικροτέρων πλευρῶν αὐτοῦ.

280) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶναι 13,8 μ. τὸ δὲ ὕψος 5, 17 μ.

281) Παραλληλογράμμου ἡ βάσις εἶναι 1, 2 μ. καὶ τὸ ὕψος 0,5 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν τριγώνων εἰς ἃ διαιρεῖται ὑπὸ τῶν διαγωνίων του.

282) Ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι 9 μ, 12 μ. 15 μ. νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

283) Ὀρθογωνίου ἡ μὲν βάσις εἶναι 9, 42 μ. τὸ δὲ ὕψος 4,35 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν τοῦ ὀρθογωνίου, τὴν δὲ ἀπέναντι κορυφὴν ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

284) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, ὅπερ ἔχει ὕψος 8 μ., αἱ δὲ βάσεις αὐτοῦ εἶναι ἡ μὲν 24, 2 μ. ἡ δὲ 9,15 μ.

285) Παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἡ μὲν βάσις ΑΓ εἶναι 10,24 μ. τὸ δὲ ὕψος 6, 5 μ. ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου Ε τῆς βάσεως ἀπέχοντος ἀπὸ τοῦ Α 3 μέτρα, ἄγεται εὐθεῖα μέχρι τοῦ Ζ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ἀπέχοντος ἀπὸ τοῦ Γ 2, 18 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν σχημάτων ΑΕΔΖ καὶ ΕΒΓΖ.

286) Τραπεζίου ἡ μία τῶν βάσεων εἶναι κατὰ 14 μέτρα μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης, τὸ δὲ ὕψος 7 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς μικροτέρας βάσεως, ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι 119 τ. μ.

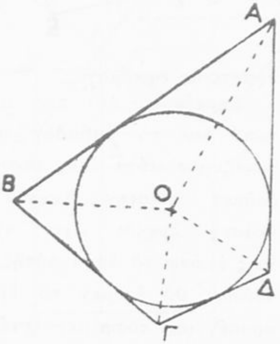
287) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου ἐκ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

288) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ρόμβου, αἱ διαγώνιαι τοῦ ὁποίου εἶναι ἡ μὲν μία 8,15 μ., ἡ δὲ ἄλλη 6,12 μ.

289) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραπλεύρου οὗ αἱ διαγώνιοι, αἵτινες τέμνονται καθέτως, εἶναι ἡ μὲν 12,08 μ., ἡ δὲ 9 μ.

290) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν πολυγώνου περιγεγραμμένου εἰς κύκλον ὡς τοῦ ΑΒΓΔ.

Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, ἀναλύεται τὸ πολύγωνον (190 σημ.) εἰς τρίγωνα, ἔχοντα ὕψος τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου (134), ἑπομένως τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν εἶναι (ἐὰν διὰ ϱ παρασταθῇ ἡ ἀκτὶς)



$\frac{1}{2}$ ΑΒ.ϱ, $\frac{1}{2}$ ΒΓ.ϱ, $\frac{1}{2}$ ΓΔ.ϱ, $\frac{1}{2}$ ΔΑ.ϱ

καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου εἶναι ἑπομένως $\frac{1}{2}$ ΑΒ.ϱ $+ \frac{1}{2}$ ΒΓ.ϱ $+ \frac{1}{2}$ ΓΔ.ϱ $+ \frac{1}{2}$ ΔΑ.ϱ, ἤτοι $\frac{1}{2}$ϱ (ΑΒ + ΒΓ ΓΔ + ΔΑ).

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, τὸ ***ἐμβαδὸν παντὸς πολυγώνου περιγεγραμμένου εἰς κύκλον εἶναι τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου***

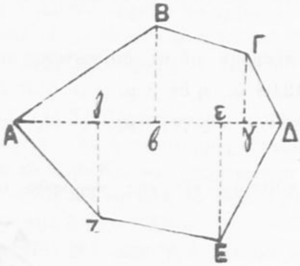
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτινος τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Καὶ ἐπειδὴ εἰς πᾶν τρίγωνον ἐγγράφεται κύκλος (169), συνάγεται ὅτι τὸ ***ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου εἶναι γινόμενον τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου κύκλου.***

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ.. ὅτι πολύγωνόν τι εἶναι περιγεγραμμένον εἰς κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι 3π. καὶ ὅτι ἔχει περίμετρον 37 π, 8· τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶναι 37,8.3.1)2 ἤτοι 59τ.π, 7.

291) Εἰς τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ ἤχθη ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος ΑΔ καὶ ἔπειτα κάθετοι ἐπ' αὐτὴν ἐκ τῶν κορυφῶν αἱ Ββ, Γγ, Εε, Ζζ, εὑρέθη δὲ ἐκ τῆς μετρήσεως ὅτι εἶναι :



ΑΖ = 2,3 ζβ = 1,8, βε = 1, 9
εγ = 0,91 γΔ = 1,52
Ββ = 3,75 Γγ = 2,91
Εε = 4, Ζζ = 3,65

Ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου. (Ἀπ. 42 τπ. 4664).

Ὁ τρόπος οὗτος τῆς ἀναλύσεως τῶν πολυγώνων καὶ τῆς καταμετρήσεως αὐτῶν εἶναι συνήθης εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογάς.

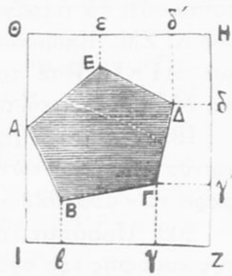
Σημείωσις. Διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου εὑρίσκομεν κατὰ προσέγγισιν καὶ τὸ ἐμβαδὸν καμπυλογράμμων σχημάτων· πρὸς τοῦτο χωρίζομεν αὐτὰ διὰ παραλλήλων εὐθειῶν εἰς λωρίδας καὶ θεωροῦμεν ἑκάστην λωρίδα ὡς τραπέζιον, ἀντικαθιστῶντες ἐν ἑκάστῃ λωρίδι ἀντὶ τῆς καμπύλης τὴν εὐθεῖαν γραμμήν, ἥτις ἑνώνει τὰ ἄκρα αὐτῆς. Ἀθροίζοντες τὰ ἐμβαδὰ τῶν τραπεζίων τούτων θὰ ἔχομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου σχήματος μὲ προσέγγισιν τόσῳ μεγαλυτέραν, ὅσῳ στενώτεραι εἶναι αἱ λωρίδες.

292) Ἐν πενταγώνῳ ΑΒΓΔΕ αἱ κάθετοι ἐκ τῶν κορυφῶν Β, Δ, Ε, μέχρι τῆς διαγωνίου ΑΓ εἶναι αἱ ΒΖ, ΔΗ, ΕΘ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, ἐὰν τὰ μήκη εἶναι τῆς μὲν ΑΓ 21 μ. τῶνδὲ ΒΖ, ΕΘ ἀνὰ 5,2 μ. τῆς ΔΗ 4 μ. καὶ ἕκαστον τῶν ΑΘ, ΘΗ ἀνὰ 4,5 μ.

293) Νὰ μετρηθῇ ἡ ἀπροσπέλαστος ἐπιφάνεια ΑΒΓΔΕ,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

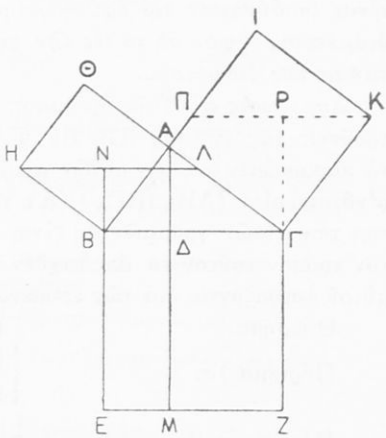
Σχηματίζομεν πέριξ αὐτῆς εὐθύγραμμόν τι σχῆμα περιέχον αὐτήν· ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΖΗΘΙ· ἔπειτα ἐκ τῶν κορυφῶν Α, Β., ἄγομεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου καὶ μετροῦντες τὰς καθέτους ταύτας, ὡς καὶ τὰ τμήματα, τὰ ὁποῖα τέμνουσιν ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου εὑρίσκομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τραπεζίων ΑΒβΙ, ΒΓγβ.. ἀφαιροῦντες τότε τὰ ἐμβαδὰ ταῦτα ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ΖΗΘΙ θὰ εὕρωμεν προφανῶς τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ΑΒΓΔΕ.



ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΝ ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΑΙ ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ ΑΥΤΟΥ

198. **Θεώρημα.** ***Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.***

Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ (Α γωνία ὀρθὴ) ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ὁποίου κατασκευάζομεν τετράγωνα τὰ ΒΓΖΕ,ΑΓΚΙ,ΑΒΗΘ· κατόπιν δὲ ἄγομεν τὴν ΑΔΜ παράλληλον τῇ ΒΕ, τὴν ΗΛ παράλληλον τῇ ΒΓ καὶ τὴν ΒΝ κάθετον ἐπὶ τὴν ΗΛ. Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΗΒΝ καὶ ΑΒΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι ΗΒ = ΒΑ καὶ γων. ΗΒΝ = γων. ΑΒΔ (ὡς ὑπόλοιπα τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΗΒΑ καὶ ΝΒΔ, ἀφ' ὧν ἀφῃρέθη ἡ ΝΒΑ)· ἄρα εἶναι ΒΝ = ΒΔ. Ὥστε τὸ τετράγωνον ΗΒΑΘ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΗΒΓΛ εἶναι ἰσοδύναμα (185)· ἀλλὰ πάλιν τὸ παραλληλόγραμμον ΗΒΓΛ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΔΜΕ εἶναι ἰσοδύναμα (ΒΓ = ΒΕ, ΒΝ = ΒΔ) ἄρα τὸ τετράγωνον ΗΒΑΘ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΕΜΔ εἶναι ἰσοδύναμα.



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὁμοίως, ἀγομένης τῆς ΚΠ παραλλήλου τῇ ΒΓ καὶ τῆς ΓΡ καθέτου ἐπ' αὐτήν, ἀποδεικνύεται ἡ ΓΡ ἴση τῇ ΓΔ, μετὰ δὲ ταῦτα, ὅτι τὸ τετράγωνον ΑΓΚΙ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ ΔΓΖΜ. Ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τετραγώνων ΗΒΑΘ καὶ ΑΓΚΙ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀρθογωνίων ΒΕΜΔ καὶ ΔΜΖΓ, ἤτοι τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης· ὅ. ἔ. δ.

199. Πόρισμα 1ον. ***Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας, εἶναι διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων τετραγώνων.***

200. Πόρισμα 2ον. ***Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν ὅλην τὴν ὑποτείνουσαν, ὕψος δὲ τὸ εἰς τὴν πλευρὰν ταύτην προσκείμενον μέρος τῆς ὑποτεινούσης.***

201. Πόρισμα 3ον. ***Ἐὰν ἐκ σημείου περιφερείας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ διάμετρον αὐτῆς καὶ χορδαὶ εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου, τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν χορδῶν τούτων εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν τὴν διάμετρον, ὕψος δὲ τὸ εἰς τὴν χορδὴν ταύτην προσκείμενον τμῆμα τῆς διαμέτρου.***

Σημείωσις α΄. Τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν μετροῦντες τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ διὰ τῆς μονάδος δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν διὰ τῶν αὐτῶν γραμμάτων, ἐγκλειομένων εἰς παρένθεσιν, οἷον (ΑΒ), (ΒΓ), (ΓΑ)· τότε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τετραγώνων τῶν αὐτῶν γραμμῶν θὰ εἶναι $(ΑΒ)^2$, $(ΒΓ)^2$, $(ΓΑ)^2$. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα καὶ τὰ πορίσματα αὐτοῦ ἐκφράζονται διὰ τῶν ἑπομένων ἰσοτήτων.

Θεώρημα $\quad (ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$

Πόρισμα 1ον $\quad \begin{cases} (ΑΒ)^2 = (ΒΓ)^2 - (ΑΓ)^2 \\ (ΑΓ)^2 = (ΒΓ)^2 - (ΑΒ)^2 \end{cases}$

Πορίσματα 2ον καὶ 3ον $\quad \begin{cases} (ΑΒ)^2 = (ΒΓ).\ (ΒΔ) \\ (ΑΓ)^2 = (ΒΓ).\ (ΓΔ). \end{cases}$

Παρατηρητέον δέ, ὅτι ἐκ τῆς ἰσότητος $(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$, ἥτις συνδέει τὰς τρεῖς πλευρὰς παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, δυνάμεθα, δοθεισῶν δύο ἐξ αὐτῶν (ἤτοι τῶν μετρούντων αὐτὰς ἀριθμῶν), νὰ εὕρωμεν τὴν τρίτην· ἄν, π. χ. δοθῇ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

(ΑΓ) = 3, (ΑΒ) = 4, εὑρίσκομεν $(ΒΓ)^2 = 3^2 + 4^2 = 25$· ὅθεν (ΒΓ) = 5. Ἐὰν δὲ δοθῇ (ΒΓ)=29, (ΑΓ) = 20, εὑρίσκομεν $(ΑΒ)^2 = 29^2 - 20^2 = 441$· ὅθεν (ΑΒ) = 21.

Σημείωσις β'. Τὸ θεώρημα τοῦτο λέγουσιν, ὅτι εὗρεν ὁ Πυθαγόρας, (540 π. Χ.)· ἐκφράζει δὲ τοῦτο τὴν μόνην σχέσιν δι' ἧς συνδέονται πρὸς ἀλλήλας αἱ τρεῖς πλευραὶ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν θεωροῦνται ὡς μεγέθη. Ἐπειδὴ δὲ καὶ πᾶν ἄλλο τρίγωνον ἀναλύεται εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα, ἔτι δὲ πᾶν πολύγωνον εἰς τρίγωνα, εὐκόλως ἐννοεῖ τις τὴν μεγάλην σημασίαν τοῦ θεωρήματος τούτου ἐν ὅλῃ τῇ Γεωμετρίᾳ.

202. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἴσον τῷ ἀθροίσματι δύο δοθέντων τετραγώνων.***

203. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἴσον τῇ διαφορᾷ δύο δοθέντων τετραγώνων.***

204. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι ὀρθογωνίῳ.***

205. Πόρισμα. ***Παντὸς εὐθυγράμμου σχήματος δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἰσοδύναμον τετράγωνον.***

Ἀσκήσεις

294) Ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ εἶναι 5 μ. καὶ 12 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὑποτείνουσα.

295) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 12 μ. καὶ ἡ μία τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι 3 μ., ζητεῖται ἡ ἄλλη πλευρὰ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

296) Ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 40 μ. ζητοῦνται αἱ πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

297) Παραλληλογράμμου τινὸς αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι ἡ μὲν 8 μ. ἡ δὲ 3 μ., ἡ δὲ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία εἶναι $\frac{1}{2}$ τῆς ὀρθῆς· ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

298) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι 7 μ., 7 μ. καὶ 9 μ. ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

299) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, οὗ αἱ δύο βάσεις εἶναι ἡ μὲν μία 100 ἡ δὲ ἄλλη 40 μ. καὶ ἑκατέρα τῶν ἄλλων πλευρῶν 50 μ.

300) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου, οὗ ἑκάστη πλευρὰ εἶναι α μ.

301) Ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ εἶναι ἡ μὲν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μία 15 μ. ἡ δὲ ἄλλη 36 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκατέρου τῶν τμημάτων εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ ὑποτείνουσα ὑπὸ τοῦ ὕψους.

302) Ἡ μία τῶν γωνιῶν τριγώνου εἶναι $\frac{1}{2}$ τῆς ὀρθῆς, αἱ δὲ περιέχουσαι αὐτὴν πλευραὶ εἶναι 24 μ. καὶ 10 μ. Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

303) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου, ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν δύο τμημάτων, εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ τρίτη πλευρά, ὑπὸ τοῦ ὕψους.

304) Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνωνται κατ' ὀρθὰς γωνίας, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $(ΑΓ)^2 + (ΒΔ)^2 = (ΑΔ)^2 + (ΒΓ)^2$.

305) Ἐν τριγώνῳ ΑΒΓ ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθὴ καὶ Δ εἶναι σημεῖόν τι τῆς ΑΓ. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $(ΑΓ)^2 + (ΒΔ)^2 = (ΑΔ)^2 + (ΒΓ)^2$.

306) Ἐὰν ἐκ σημείου Ε κειμένου ἐντὸς ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $(ΕΑ)^2 + (ΕΓ)^2 = (ΕΒ)^2 + (ΕΔ)^2$,

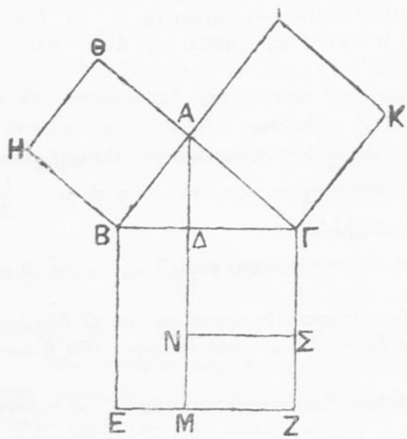
307) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τριῶν δοθέντων τετραγώνων.

308) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τρίγωνον.

309) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν πολύγωνον.

310) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο δοθέντων ὀρθογωνίων.

206. **Θεώρημα.** ***Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, τὸ ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὰ δύο τμήματα τῆς ὑποτεινούσης.***



Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας Α κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι εἶναι $(ΑΔ)^2 = (ΒΔ).(ΔΓ)$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διότι ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ λαμβάνομεν $(ΑΔ)^2 = (ΑΓ)^2 - (ΔΓ)^2$· ἀλλὰ τὸ μὲν τετράγωνον τῆς ΑΓ μετασχηματίζεται εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΓΔΜΖ, τὸ δὲ τῆς ΔΓ κατασκευάζομεν, λαμβάνοντες τὴν ΓΣ ἴσην τῇ ΓΔ καὶ ἄγοντες τὴν ΣΝ παράλληλον τῇ ΓΔ· ἑπομένως εἶναι $(ΑΔ)^2 = (ΓΔΜΖ) - (ΔΓΣΝ) = (ΝΣΖΜ)$· τὸ ὀρθογώνιον ὅμως τοῦτο ΝΣΖΜ ἔχει βάσιν μὲν τὴν ΜΖ = ΔΓ, ὕψος δὲ τὴν ΖΣ = ΔΒ· διότι ἀμφότεραι εἶναι ὑπόλοιπα τῶν ἴσων εὐθειῶν ΓΒ καὶ ΓΖ ἀφ' ὧν ἀφῃρέθησαν ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΓΔ καὶ ΓΣ· εἶναι ἄρα $(ΑΔ)^2 = (ΒΔ).(ΓΔ)$.

207. Πόρισμα. ***Ἐὰν ἐκ σημείου περιφερείας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ διάμετρον, τὸ τετράγωνον τῆς καθέτου ταύτης θὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὰ δύο τμήματα τῆς διαμέτρου.***

Ἀσκήσεις

311) Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον τὰ δύο τμήματα τῆς ὑποτεινούσης εἰς ἃ αὕτη διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι, τὸ μὲν 8 μ. τὸ δὲ ἄλλο 2 μ. Ζητοῦνται τὸ ὕψος, αἱ ἄλλαι πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

312) Ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι ἡ μία 8 μ. καὶ ἡ ἄλλη 15 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

313) Ἐὰν εὐθεῖα σύγκειται ἐκ δύο ἄλλων, τὸ τετράγωνον αὐτῆς σύγκειται ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων καὶ ἐκ δύο ὀρθογωνίων βάσιν μὲν ἐχόντων τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, ὕψος δὲ τὴν ἄλλην.

314) Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι διαφορὰ δύο ἄλλων, τὸ τετράγωνον αὐτῆς ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων, ἀφοῦ ἀφαιρεθῶσιν ἀπ' αὐτῶν δύο ὀρθογώνια, βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν μίαν τῶν εὐθειῶν, ὕψος δὲ τὴν ἄλλην.

315) Ἐὰν ὀρθογώνιον ἔχει βάσιν μὲν τὸ ἄθροισμα δύο εὐθειῶν, ὕψος δὲ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον τῇ διαφορᾷ τῶν τετραγώνων τῶν αὐτῶν εὐθειῶν.

316) Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι ἰσοδύναμον ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν τὸ ἄθροισμα τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς τρίτης πλευρᾶς, ὕψος δὲ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

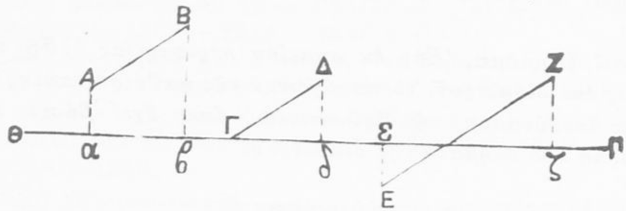
317) Τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας, τῆς ἀγομένης ἐκ τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου μέχρι σημείου τινὸς τῆς βάσεως αὐτοῦ, ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν δύο τμημάτων τῆς βάσεως, εἰς ἃ διῃρέθη ὑπὸ τῆς εὐθείας ταύτης, ἀπὸ τοῦ τετραγώνου μιᾶς τῶν ἴσων πλευρῶν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

318) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ καὶ ἔχον περίμετρον ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

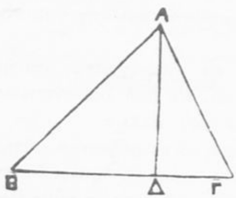
319) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ καὶ τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ νὰ ἔχωσι διαφορὰν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

208. **Ὁρισμός.** ***Προβολὴ*** εὐθείας ἐπὶ ἄλλην λέγεται, ἐὰν ἀπὸ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἄλλην, τὸ μεταξὺ τῶν ποδῶν τῶν καθέτων τούτων περιεχόμενον τμῆμα.



Οἷον προβολὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΘΠ εἶναι ἡ αβ· τῆς ΓΔ ἡ Γδ καὶ τῆς ΕΖ ἡ εζ.

209. **Θεώρημα.** ***Ἐν παντὶ τριγώνῳ τὸ τετράγωνον πλευρᾶς, ἐχούσης ἀπέναντι ὀξεῖαν γωνίαν, εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν κατὰ δύο ὀρθογώνια, ἔχοντα βάσιν μὲν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, ὕψος δὲ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ ταύτην.***



Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ πλευρὰ ἀπέναντι ὀξείας γωνίας ἡ ΑΒ, προβολὴ δὲ τῆς ΑΓ ἐπὶ τὴν ΒΓ ἡ ΔΓ· λέγω, ὅτι θὰ εἶναι

$$(AB)^2 = (A\Gamma)^2 + (B\Gamma)^2 - 2\,(B\Gamma).\,(\Delta\Gamma).$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ εὑρίσκομεν $(AB)^2 = (A\Delta)^2 + (B\Delta)^2$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $B\Delta = B\Gamma - \Delta\Gamma$, ἕπεται

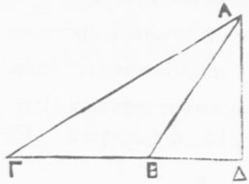
$$(B\Delta)^2 = (B\Gamma)^2 + (\Delta\Gamma)^2 - 2\,(B\Gamma).\,(\Delta\Gamma)$$

ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ $(B\Delta)^2$ εἰς τὴν πρώτην ἰσότητα εὑρίσκομεν

$$(AB)^2 = (A\Delta)^2 + (B\Gamma)^2 + (\Gamma\Delta)^2 - 2\,(B\Gamma).\,(\Gamma\Delta).$$

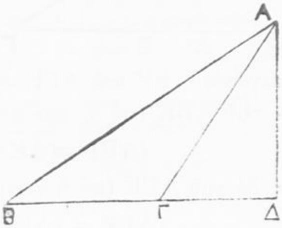
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ ἐπειδὴ $(ΑΔ)^2 + (ΔΓ)^2$ ἰσοῦται τῷ $(ΑΓ)^2$ (διὰ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΓ) συμπεραίνομεν τὴν ἰσότητα $(ΑΒ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΒΓ)^2 - 2\,(ΒΓ).\,(ΔΓ)$.



Ἐὰν ἡ κάθετος ΑΔ πίπτει ἐκτὸς τοῦ τριγώνου (ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἀμβλεῖα), θὰ εἶναι $ΒΔ = ΓΔ - ΒΓ$, κατὰ δὲ τὰ ἄλλα ἡ ἀπόδειξις μένει ἡ αὐτή.

210. **Θεώρημα.** ***Ἐν ἀμβλυγωνίῳ τριγώνῳ τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς, ἥτις ἔχει ἀπέναντι τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν κατὰ δύο ὀρθογώνια, ἔχοντα βάσιν μὲν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, ὕψος δὲ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ ταύτην.***



Ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον τὸ ΑΒΓ, ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν γωνίαν Γ, καὶ ΓΔ ἡ προβολὴ τῆς ΑΓ ἐπὶ τὴν ΒΓ· λέγω, ὅτι εἶναι

$$(ΑΒ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΒΓ)^2 + 2\,(ΒΓ).\,(ΔΓ).$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ εὑρίσκομεν

$$(ΑΒ)^2 = (ΑΔ)^2 + (ΒΔ)^2.$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΒΔ = ΒΓ + ΓΔ$.

ἕπεται $(ΒΔ)^2 = (ΒΓ)^2 + (ΓΔ)^2 + 2\,(ΒΓ).\,(ΓΔ)$.

ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ $(ΒΔ)^2$ εἰς τὴν πρώτην ἰσότητα, εὑρίσκομεν

$$(ΑΒ)^2 = (ΑΔ)^2 + (ΒΓ)^2 + (ΓΔ)^2 + 2\,(ΒΓ).\,(ΓΔ).$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $(ΑΔ)^2 + (ΓΔ)^2 = (ΑΓ)^2$, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται $(ΑΒ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΒΓ)^2 + 2\,(ΒΓ).\,(ΔΓ)$· ὅ. ἔ. δ.

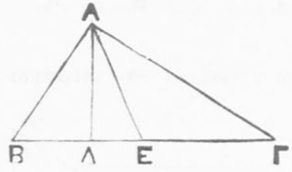
211. Πόρισμα. ***Ἐὰν εἰς τρίγωνον μία πλευρὰ ἔχῃ τετράγωνον ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων, ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία εἶναι ὀρθή.***

Σημείωσις. Ἡ τὰς πλευρὰς παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου συνδέουσα ἰσότης $(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$ ἐπαληθεύεται, ἐὰν λάβωμεν $(ΒΓ) = α^2 + β^2$, $(ΑΒ) = α^2 - β^2$, $(ΑΓ) = 2αβ$,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἔνθα α καὶ β εἶναι τυχόντες ἀκέραιοι ἀριθμοί· ἑπομένως μεταχειριζόμενοι τοὺς τύπους τούτους, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὅσα θέλομεν ὀρθογώνια τρίγωνα, ἔχοντα πλευρὰς δι' ἀκεραίων ἀριθμῶν παριστωμένας· ἑπομένως συμμέτρους πρὸς ἀλλήλας. Τὸ ἁπλούστατον πάντων εἶναι τὸ ἔχον πλευρὰς 3, 4, 5 (ἰδὲ Στ. Ἀλγ.).

213. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν εἰς τρίγωνον, ὡς τὸ ΑΒΓ, ἀχθῇ ἐκ τῆς κορυφῆς Α εἰς τὸ μέσον Ε τῆς βάσεως ἡ διάμεσος ΑΕ, θὰ εἶναι***



$$(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = 2\,(AE)^2 + 2\,(BE)^2.$$

Διότι ἄγοντες τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ εὑρίσκομεν ἐκ τῶν δύο τριγώνων ΑΒΕ καὶ ΑΓΕ κατὰ τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα: ἐκ τοῦ ΑΒΕ (οὗ ἡ γωνία Ε εἶναι ὀξεῖα)

$$(AB)^2 = (AE)^2 + (BE)^2 - 2\,(BE).\,(\Delta E).$$

ἐκ δὲ τοῦ ΑΓΕ (οὗ ἡ γωνία Ε εἶναι ἀμβλεῖα)

$$(A\Gamma)^2 = (AE)^2 + (\Gamma E)^2 + 2(\Gamma E).(\Delta E)\cdot$$

προσθέτοντες δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη καὶ ἐνθυμούμενοι, ὅτι εἶναι $BE = \Gamma E$, εὑρίσκομεν

$$(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = 2\,(AE)^2 + 2(BE)^2.$$

Ἀσκήσεις

320) Αἱ προβολαὶ ἴσων καὶ παραλλήλων εὐθειῶν ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι ἴσαι.

321) Ἐὰν ἐκ δύο πλευρῶν τριγώνου ἡ μία προβληθῇ ἐπὶ τῆς ἄλλης, τὰ ὀρθογώνια τὰ ὁριζόμενα ὑφ' ἑκατέρας τούτων καὶ τῆς προβολῆς τῆς ἄλλης, εἶναι ἰσοδύναμα.

322) Ἐν ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ ΑΒΓ ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ἐκ τοῦ Β κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΑ τέμνει αὐτὴν προεκτεινομένην εἰς τὸ σημεῖον Δ. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι $(\Gamma B)^2 = 2\,(\Gamma A)\cdot(\Gamma\Delta)$.

323) Ἐὰν ἡ βάσις ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου προεκταθῇ μέχρι τοῦ Δ οὕτως, ὥστε $B\Gamma = \Gamma\Delta$, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $(A\Delta)^2 = (A\Gamma)^2 + 2\,(B\Gamma)^2$.

324) Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἄθροισμα δύο ὀρθογωνίων, ὧν ἕκαστον ἔχει βάσιν μὲν τὴν τρίτην πλευράν, ὕψος δὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ μέσου αὐτῆς, ἀπὸ τῆς καθέτου ἐπ' αὐτήν, ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς.

325) Ἐκ δύο τριγώνων τὸ μὲν ἔχει πλευρὰς 20 μ. 21 μ. 29 μ. τὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δὲ ἄλλο 12 μ. 35 μ. 37 μ. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὀρθογώνια καὶ νὰ εὑρεθῇ ἔπειτα τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τούτων.

326) Τριγώνου αἱ πλευραὶ εἶναι 0,6 μ. 0,8 μ. 0,12 μ. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ἀμβλυγώνιον.

327) Τριγώνου αἱ πλευραὶ εἶναι 1,3 μ. 0,9 μ. 1,2 μ. Νὰ δειχθῇ, ὅτι εἶναι ὀξυγώνιον.

328) Ἐὰν ἐν τριγώνῳ ΑΒΓ ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, εἶναι δὲ καὶ $(ΑΔ)^2 = (ΒΔ).(ΔΓ)$ ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθή.

329) Τριγώνου τινὸς αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι ἡ μὲν 12 πήχεις, ἡ δὲ 8, ἡ δὲ 16· ζητοῦνται αἱ διάμεσοι τοῦ τριγώνου.

330) Ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ περίμετρος εἶναι 50 μέτρα· ζητοῦνται αἱ πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

331) Ἐν παντὶ τετραπλεύρῳ, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο διαγωνίων πλέον, τετράκις τὸ τετράγωνον τῆς τὰ μέσα τῶν διαγωνίων συνδεούσης εὐθείας.

332) Ἐν παντὶ παραλληλογράμμῳ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο διαγωνίων καὶ ἀντιστρόφως.

ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΕΠΙ ΑΡΙΘΜΟΝ

213. ***Γινόμενον*** μεγέθους τινὸς Α ἐπὶ ἀριθμὸν οἱονδήποτε λέγεται τὸ μέγεθος, τὸ συγκείμενον ἐκ τοῦ Α καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ, καθὼς σύγκειται ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς.

Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον Α. 3 εἶναι $Α+Α+Α$, τὸ δὲ γινόμενον $Α.\frac{3}{5}$ εἶναι $\frac{Α}{5}+\frac{Α}{5}+\frac{Α}{5}$ (διότι $\frac{3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$) καὶ γινόμενον Α. (2,31 . . .) εἶναι,

$$Α+Α+\frac{Α}{10}+\frac{Α}{10}+\frac{Α}{10}+\frac{Α}{100}+\ldots \text{ ἢ } Α.2+\frac{Α}{10}.3+\frac{Α}{100}+\ldots$$

Παρατήρησις. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς μεγέθους ἐπὶ ἀριθμὸν ἔχει τὰς ἑξῆς γενικὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀριθμῶν.

$$Μ(α+β)=(Μ.α)+(Μ.β).$$
$$(Μ+Μ')\,α=(Μ.α)+(Μ'.α).$$
$$(Μ.\,α)\,β=Μ\,(α.\,β).$$

Σημείωσις. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς εἶναι πολλαπλασιαστής,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἔπρεπε νὰ γράφωμεν Α.3, Α.5. κτλ., ἀλλ' ἐπεκράτησεν ἡ γραφὴ 3. Α, 5. Α, διότι ἐν τοῖς ἀλγεβρικοῖς λογισμοῖς προτάσσομεν τοὺς ἀριθμητικοὺς παράγοντας.

ΛΟΓΟΣ ΔΥΟ ΜΕΓΕΘΩΝ

214. Λόγος μεγέθους πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς (οἷον γραμμῆς πρὸς γραμμήν, ἐπιφανείας πρὸς ἐπιφάνειαν κ.τ.λ.), λέγεται ***ὁ ἀριθμός, ὅστις δεικνύει, πῶς ἀποτελεῖται τὸ μέγεθος τοῦτο ἐκ τοῦ ἄλλου καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ, τουτέστιν ὁ ἀριθμός, ὅστις σύγκειται ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς, καθὼς σύγκειται τὸ πρῶτον μέγεθος ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ.***

Ἐὰν π.χ. εἶναι $A=3.B+\frac{B}{10}+8.\frac{B}{100}+2.\frac{B}{1000}+\dots$ ἤτοι $A=(3,182\dots)\,B$, ὁ ἀριθμὸς 3,182... λέγεται λόγος τοῦ μεγέθους Α πρὸς τὸ μέγεθος Β.

Ὁ ἐκ τῆς μετρήσεως τοῦ μεγέθους Α διὰ τῆς μονάδος του Μ προκύπτων ἀριθμός, ὁ παριστῶν αὐτό, εἶναι ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὴν μονάδα του.

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν προηγουμένων γίνεται φανερόν, ὅτι ὁ λόγος τοῦ μεγέθους Α πρὸς τὸ μέγεθος Β εἶναι ***ὁ ἀριθμός, ἐφ' ὃν πολλαπλασιαζόμενον τὸ Β δίδει τὸ Α.***

215. **Θεώρημα.** ***Ὁ λόγος δύο μεγεθῶν ὁμοειδῶν ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν παριστώντων αὐτὰ ἀριθμῶν*** (ὅταν μετρηθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος).

Διότι, ἔστω λόγος τοῦ μεγέθους Α πρὸς τὸ μέγεθος Β ὁ ἀριθμὸς 2,152... τότε θὰ εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ λόγου

$$A=2B+\frac{B}{10}+\frac{5B}{100}+\frac{2B}{1000}+\dots$$

καὶ ἂν μετρήσωμεν τὰ δύο ἴσα μεγέθη (τὰ ἀποτελοῦντα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης) διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος Μ, θὰ εὕρωμεν ἴσους ἀριθμούς· ἔστω λοιπὸν α ὁ ἀριθμός, ὃν εὑρίσκομεν μετροῦντες τὸ μέγεθος Α, καὶ β ὁ ἀριθμός, ὃν εὑρίσκομεν μετροῦντες τὸ Β· τὸ δέκατον τοῦ Β, ἤτοι τὸ $\frac{B}{10}$ μετρηθὲν θὰ δώσῃ τὸν ἀριθμὸν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$\frac{\beta}{10}$ (διότι τὸ $\frac{B}{10}$ δεκάκις ληφθὲν γίνεται B· ἄρα καὶ ὁ ἀριθμός, ὅστις παριστᾷ αὐτό, δεκάκις ληφθεὶς πρέπει νὰ γίνηται β, ἑπομένως εἶναι ὁ $\frac{\beta}{10}$)· ὁμοίως τὸ $\frac{B}{100}$ μετρηθὲν δίδει τὸν ἀριθμὸν $\frac{\beta}{100}$ κτλ.· ὅθεν ἕπεται

$$\alpha = 2\beta + \frac{\beta}{10} + \frac{5\beta}{100} + \frac{2\beta}{1000} + \ldots = \beta.(2{,}152\ldots)\cdot$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ὁ λόγος τοῦ μεγέθους Α πρὸς τὸ μέγεθος Β ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν παριστώντων αὐτὰ ἀριθμῶν α καὶ β, ὅταν μετρηθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος.

Σημείωσις. Τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν μετροῦντες τὰ μεγέθη Α καὶ Β, δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν διὰ τῶν αὐτῶν γραμμάτων, ἐγκλειομένων εἰς παρένθεσιν οἷον (Α), (Β)· τότε ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Β παρίσταται διὰ τοῦ πηλίκου $\frac{(A)}{(B)}$ ἢ καὶ ἁπλῶς διὰ τοῦ $\frac{A}{B}$. Ὅταν δὲ δὲν θέλωμεν νὰ ὑποθέσωμεν τὰ μεγέθη μεμετρημένα, θὰ παριστῶμεν τὸν λόγον αὐτῶν ὡς ἑξῆς Α : Β.

ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

216. ***Ἀναλογία λέγεται ἡ ἰσότης δύο λόγων.***

Οἷον $A:B=\Gamma:\Delta$ ἢ $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$ εἶναι ἀναλογία.

Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν οἱ δύο ὅροι ἑκάστου λόγου πρέπει νὰ εἶναι ἢ ἀριθμοὶ ἢ μεγέθη ὁμοειδῆ (ἵνα ἔχωσι λόγον), δύνανται ὅμως οἱ δύο πρῶτοι ὅροι νὰ εἶναι ἑτεροειδεῖς πρὸς τοὺς δύο τελευταίους.

Ἐὰν τὰ τέσσαρα μεγέθη Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὁμοειδῆ, ἡ ἀναλογία $A:B=\Gamma:\Delta$ δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς $A:\Gamma=B:\Delta$.

Ἐὰν τῷ ὄντι μετρηθῶσι τὰ μεγέθη ταῦτα διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος (οἱασδήποτε), θὰ εἶναι

$$\frac{(A)}{(B)} = \frac{(\Gamma)}{(\Delta)}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν δὲ ἀπαλλάξωμεν τὴν ἰσότητα ταύτην ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν, εὑρίσκομεν τὴν ἑξῆς :

$$(Α).(Δ)=(Β).(Γ).$$

καὶ ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ γινομένου (5) (Δ) εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα $\frac{(Α)}{(Γ)}=\frac{(Β)}{(Δ)}$, ἐξ ἧς γίνεται φανερὸν ὅτι ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Γ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ Β πρὸς τὸ Δ, τουτέστιν $Α:Γ=Β:Δ$.

Σημείωσις. Πᾶσα ἀναλογία μεταξὺ μεγεθῶν τρέπεται εἰς ἀναλογίαν ἀριθμῶν, ἐὰν τὰ μεγέθη αὐτῆς μετρηθῶσι καὶ παρασταθῶσι δι' ἀριθμῶν (ἡ μονάς, δι' ἧς μετροῦμεν τοὺς ὅρους ἑκάστου λόγου, πρέπει (ἐδ. 215) νὰ εἶναι ἡ αὐτή)· διὰ τοῦτο πᾶσα ἀναλογία ὑπάγεται εἰς τὴν ἰσότητα τῶν ἀριθμῶν καὶ ἔχει τὰς γενικὰς ἰδιότητας αὐτῆς.

Ἐὰν οἱ δύο μέσοι τῆς ἀναλογίας εἶναι ἴσοι, ἡ ἀναλογία λέγεται ***συνεχὴς*** καὶ ὁ μέσος λέγεται ***μέσος ἀνάλογος*** τῶν δύο ἄκρων· οἷον ἐν τῇ ἀναλογίᾳ $Α:Β=Β:Γ$ ὁ Β λέγεται μέσος ἀνάλογος τῶν Α καὶ Γ.

217. Δύο ἢ περισσότερα μεγέθη λέγοντα ***ἀνάλογα*** πρὸς ἄλλα ἰσάριθμα, ἐὰν προκύπτωσιν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων κατὰ σειρὰν ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τοὐτέστιν, ἂν ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ πρῶτον, τοῦ δευτέρου πρὸς τὸ δεύτερον κτλ. εἶναι εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Ἂν δηλαδὴ εἶναι $Α=Βρ$, $Α'=Β'ρ$, $Α''=Β''ρ$.

$$\text{ἢ} \quad \frac{Α}{Β}=\frac{Α'}{Β'}=\frac{Α''}{Β''}$$

τότε τὰ μεγέθη, Α, Α', Α'' λέγονται ἀνάλογα πρὸς τὰ Β, Β', Β''.

Ἐὰν τὰ μεγέθη Α, Α', Α'' εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ Β, Β', Β'' καὶ ἀντιστρόφως τὰ Β, Β', Β'' θὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ Α, Α' Α''· διότι ἐκ τῶν ἰσοτήτων

$$\frac{Α}{Β}=\frac{Α'}{Β'}=\frac{Α''}{Β''} \text{ ἕπεται } \frac{Β}{Α}=\frac{Β'}{Α'}=\frac{Β''}{Α''}$$

Τὰ δύο μεγέθη ἅτινα προκύπτουσιν ἐξ ἀλλήλων διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, λέγονται ***ἀντίστοιχα ἢ ὁμόλογα.***

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀναλόγων μεγεθῶν εἰς πᾶσαν ἀναλο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γίαν $A : B = \Gamma : \Delta$ ἢ $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, οἱ δύο ἡγούμενοι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς δύο ἑπομένους (ἢ οἱ ἀριθμηταὶ πρὸς τοὺς παρονομαστάς)· ἐὰν δὲ καὶ οἱ τέσσαρες ὅροι εἶναι ὁμοειδεῖς, οἱ δύο πρῶτοι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς δύο δευτέρους.

Σημείωσις. Καὶ ὅταν οἱ τέσσαρες ὅροι τῆς ἀναλογίας $A : B = \Gamma : \Delta$ δὲν εἶναι πάντες ὁμοειδεῖς, δυνάμεθα καὶ πάλιν νὰ λέγωμεν, ὅτι οἱ δύο πρῶτοι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς δύο τελευταίους· διότι οἱ ἀριθμοί, οἱ παριστῶντες τοὺς δύο πρώτους (μετρηθέντας διὰ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μονάδος) εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμούς, οἵτινες παριστῶσι τοὺς δύο τελευταίους μετρηθέντας καὶ τούτους διὰ μιᾶς μονάδος). Τῷ ὄντι θὰ εἶναι $(A) : (B) = (\Gamma) : (\Delta)$, ἐξ ἧς καὶ $(A) : (\Gamma) = (B) : (\Delta)$.

Ἀσκήσεις

333) Ἐὰν δύο ὀρθογώνια (ἢ παραλληλόγραμμα ἢ τρίγωνα) ἔχωσιν ἴσας βάσεις, ὁ λόγος αὐτῶν ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν ὑψῶν των, ἐὰν δὲ ἔχωσιν ἴσα ὕψη, ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν βάσεών των.

334) Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι A, B, Γ, Δ συνιστῶσιν ἀναλογίαν τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἄκρων εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν μέσων καὶ ἀντιστρόφως.

335) Νὰ εὑρεθῇ ἡ μέση ἀνάλογος δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.

ΠΕΡΙ ΠΟΣΩΝ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΣ

218. **Ὁρισμοί.** ***Μεταβλητὸν ποσὸν*** λέγεται τὸ διαφόρους τιμὰς ἢ καταστάσεις λαμβάνον.

Δύο ποσὰ λέγεται, ὅτι ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων, ὅταν ἡ μεταβολὴ τοῦ ἑτέρου ἐξ αὐτῶν προξενῇ μεταβολὴν καὶ τοῦ ἄλλου· οἷον τόξον τι κύκλου καὶ ἡ χορδὴ αὐτοῦ ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων· ὁμοίως ἡ ἐπίκεντρος γωνία ἐν κύκλῳ καὶ τὸ τόξον ἐφ' οὗ βαίνει, ὁμοίως ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ κτλ.

Δύο ποσὰ λέγεται, ὅτι μεταβάλλονται ἀναλόγως, ἐὰν πολλαπλασιαζομένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ἐπί τινα ἀριθμόν, πολλαπλασιάζεται καὶ ἡ πρὸς αὐτὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τουτέστιν, ἐὰν πάντοτε αἱ νέαι τιμαὶ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς παλαιάς.

Ἐὰν δηλαδὴ A καὶ B εἶναι δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν δύο ποσῶν καὶ μεταβληθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου ἀπὸ A εἰς A. ρ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ ἡ τιμὴ τοῦ δευτέρου πρέπει νὰ μεταβληθῇ ἀπὸ Β εἰς Β. ρ. ὥστε αἱ νέαι τιμαὶ Αρ, Βρ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς παλαιὰς Α, Β.

Σημείωσις. Ὑποτίθεται, ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν δύο ποσῶν ἀντιστοιχοῦσι πρὸς ἀλλήλας, μία πρὸς μίαν.

Ποσόν τι δὲ λέγεται, ὅτι μεταβάλλεται ***ἀναλόγως πρὸς πολλὰ ἄλλα,*** ἐὰν μεταβάλληται ἀναλόγως πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν, ὅταν τὰ λοιπὰ δὲν μεταβάλλωνται. Π. χ. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου μεταβάλλεται ἀναλόγως καὶ πρὸς τὴν βάσιν καὶ πρὸς τὸ ὕψος αὐτοῦ. Διότι, ὅταν ἡ βάσις μένῃ ἀμετάβλητος, τὸ ἐμβαδὸν μεταβάλλεται ἀναλόγως τοῦ ὕψους· καὶ πάλιν, ὅταν τὸ ὕψος μένῃ ἀμετάβλητον, τὸ ἐμβαδὸν μεταβάλλεται ἀναλόγως τῆς βάσεως.

219. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως, δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ πρώτου ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ δευτέρου.***

Ἔστωσαν Α καὶ Α′ δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ πρώτου ποσοῦ καὶ Β, Β′ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ δευτέρου· λέγω, ὅτι θὰ εἶναι $\frac{(\text{Α}')}{(\text{Α})} = \frac{(\text{Β}')}{(\text{Β})}$.

Ἀπόδειξις. Διότι, ἵνα ἡ τιμὴ Α μεταβληθῇ εἰς τὴν τιμὴν Α′, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὴν ἐπὶ τὸν λόγον Α′ : Α, ὅντινα παριστῶ διὰ β (ἐδ. 214 παρ.)· ἀλλὰ τότε ἡ τιμὴ Β θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ρ καὶ θὰ γίνῃ Β′, τουτέστιν εἶναι : $\text{Α}' = \text{Α}.\rho$ καὶ $\text{Β}' = \text{Β}.\ \rho$.

ἐξ ὧν συνάγεται $\frac{(\text{Α}')}{(\text{Α})} = \frac{(\text{Β}')}{(\text{Β})}$.

Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

220. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο ὁμοειδῆ ποσὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως, ὁ λόγος αὐτῶν μένει πάντοτε ὁ αὐτός.***

Ἀπόδειξις. Διότι κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ εἶναι :

$$\frac{\text{Α}'}{\text{Α}} = \frac{\text{Β}'}{\text{Β}}, \quad \frac{\text{Α}''}{\text{Α}} = \frac{\text{Β}''}{\text{Β}}, \quad \frac{\text{Α}'''}{\text{Α}} = \frac{\text{Β}'''}{\text{Β}}$$

ἐπειδὴ δὲ τὰ μεγέθη ταῦτα εἶναι ὁμοειδῆ, αἱ ἀναλογίαι αὗται γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς (ἐδ. 217).

$$\frac{\text{Α}'}{\text{Β}'} = \frac{\text{Α}}{\text{Β}}, \quad \frac{\text{Α}''}{\text{Β}''} = \frac{\text{Α}}{\text{Β}}, \quad \frac{\text{Α}'''}{\text{Β}'''} = \frac{\text{Α}}{\text{Β}} \quad \text{τουτέστιν}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}=\frac{A''}{B''}=\frac{A'''}{B'''}$$

ἢ καὶ $A=B.\varrho$, $A'=B'.\varrho$, $A''=B''.\varrho$, $A'''=B'''.\varrho$.

ϱ ὄντος τοῦ λόγου $A:B$.

Ὅτι δὲ καὶ τἀνάπαλιν ἀληθεύει, εἶναι πρόδηλον.

221. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο ποσὰ εἶναι τοιαῦτα, ὥστε πολλαπλασιαζομένης τιμῆς τινος τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀκέραιον ἀριθμόν, πολλαπλασιάζεται καὶ ἡ πρὸς αὐτὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον ἀριθμόν, τότε τὰ ποσὰ ταῦτα εἶναι ἀνάλογα ἤτοι πολλαπλασιαζομένης τιμῆς τινος τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ἡ πρὸς αὐτὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου.***

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν δύο ποσῶν, τὰ ὁποῖα εἶναι τοιαῦτα, ὥστε ἐὰν τιμή τις τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν π. χ. ἡ Α τοῦ πρώτου πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ ἡ πρὸς αὐτὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου δηλαδὴ ἡ Β θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· λέγω ὅτι καὶ ἐὰν ἡ Α πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, οἷον τὸν 5,2741 . . . καὶ ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς, ἡ Β, θὰπολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ἑπομένως τὰ δύο ποσὰ θὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως, ἤτοι εἶναι ἀνάλογα.

Ἀπόδειξις. Εἰς τὴν τιμὴν Α τοῦ πρώτου ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ Β τοῦ δευτέρου· ἄρα εἰς τὴν τιμὴν 5Α τοῦ πρώτου θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ 5Β.

Εἰς τὴν τιμὴν $\frac{A}{10}$ τοῦ πρώτου ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $\frac{B}{10}$ τοῦ δευτέρου (διότι, ὅταν δεκαπλασιασθῇ τὸ $\frac{A}{10}$ καὶ γίνῃ Α, πρέπει νὰ δεκαπλασιασθῇ καὶ ἡ πρὸς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ καὶ νὰ γίνῃ Β· ἡ δὲ τιμή, ἥτις δεκαπλασιαζομένη γίνεται Β, εἶναι ἡ $\frac{B}{10}$)· ἄρα εἰς τὴν τιμὴν $(5{,}2).A$, ἤτοι $52.\frac{A}{10}$, θὰ θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ $(5{,}2).B$.

Ὡσαύτως εἰς τὴν τιμὴν $\frac{A}{100}$, τοῦ πρώτου θὰ ἀντι-

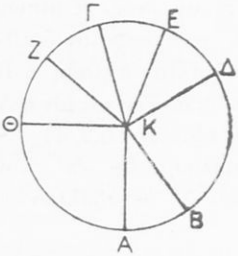
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

στοιχῇ ἡ τιμὴ $\frac{B}{100}$ τοῦ δευτέρου, ἄρα εἰς τὴν τιμὴν (5,27). Α θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ (5,27). Β.

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως ἀποδεικνύομεν, ὅτι εἰς τὴν τιμὴν (5,2741...). Α θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ τιμὴ (5,2741...) Β, ἐξ οὗ γίνεται φανερόν, ὅτι τὰ δύο ποσὰ μεταβάλλονται ἀναλόγως.

Σημείωσις. Διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου εὐκολύνεται μεγάλως τὸ ζήτημα: «***νὰ διακρίνωμεν, ἂν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως ἢ ὄχι***», διότι ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι πᾶς ἀκέραιος πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἑνὸς προξενεῖ τὸν αὐτὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τοῦ ἄλλου, ἵνα ἐκ τούτου καὶ μόνου συμπεράνωμεν, ὅτι καὶ διὰ πάντα πολλαπλασιασμὸν συμβαίνει τὸ αὐτὸ καὶ ἐπομένως τὰ δύο ποσὰ μεταβάλλονται ἀναλόγως. Ἡ εὐκολία αὕτη γίνεται φανερὰ ἐκ τῶν ἑπομένων δύο θεωρημάτων.

222. **Θεώρημα.** ***Ἐν κύκλῳ ἡ ἐπίκεντρος γωνία μεταβάλλεται ἀναλόγως τοῦ τόξου, ἐφ' οὗ βαίνει.***



Διότι, ἐὰν τὸ τόξον ΓΔ εἶναι διπλάσιον τοῦ τόξου ΑΒ, ἤτοι σύγκειται ἐκ δύο μερῶν ΓΕ, ΕΔ ἴσων τῷ ΑΒ, καὶ ἡ γωνία ΓΚΔ θὰ εἶναι διπλασία τῆς ΑΚΒ, ἤτοι σύγκειται ἐκ δύο γωνιῶν, ΓΚΕ, ΕΚΔ, ἴσων πρὸς τὴν ΑΚΒ.

Ἐὰν δὲ τὸ τόξον ΔΖ εἶναι τριπλάσιον τοῦ ΑΒ, καὶ ἡ γωνία ΔΚΖ εἶναι τριπλασία τῆς ΑΚΒ κ.ο.κ. Τούτου δὲ συμβαίνοντος (221) ἡ ἐπίκεντρος γωνία καὶ τὸ τόξον αὐτῆς μεταβάλλονται ἀναλόγως· ἐπομένως δύο τυχοῦσαι ἐπίκεντροι γωνίαι, ἔστωσαν αἱ ΑΚΒ καὶ ΒΚΔ, ἔχουσι λόγον τὸν αὐτόν, ὃν ἔχουσι καὶ τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΒΔ, ἐφ' ὧν βαίνουσι.

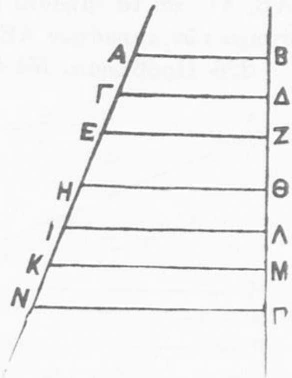
223. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν, τὰ ἀντίστοιχα τμήματα αὐτῶν μεταβάλλονται ἀναλόγως.***

Λέγω δὲ ***ἀντίστοιχα*** τμήματα τὰ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων περιεχόμενα.

Ἔστω ΑΓ τυχὸν τμῆμα τῆς πρώτης καὶ ΔΒ τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ ἐν τῇ δευτέρᾳ· ἐὰν τὸ τμῆμα ΗΚ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΓ, καὶ τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ, τὸ ΘΜ, θὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΒΔ· διότι ἀχθείσης τῆς ΙΛ (Ι μέσον τῆς ΗΚ) παραλλήλου ταῖς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΒ, ΓΔ... διαιρεῖται τὸ ΘΜ εἰς δύο μέρη, ΘΛ, ΛΜ, ἅτινα εἶναι ἴσα τῷ ΒΔ (129).



Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἂν τὸ τμῆμα ΗΝ εἶναι τριπλάσιον τοῦ ΑΓ καὶ τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ, τὸ ΘΠ, θὰ εἶναι τριπλάσιον τοῦ ΒΔ· καὶ οὕτω καθεξῆς διὰ πάντα ἀκέραιον ἀριθμόν.

Ἄρα τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῶν δύο εὐθειῶν μεταβάλλονται ἀναλόγως καὶ διὰ τοῦτο δύο οἱαδήποτε τμήματα τῆς πρώτης ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι καὶ τὰ ἀντιστοιχοῦντα τμήματα τῆς δευτέρας.

Παραδείγματος χάριν, εἶναι $ΑΓ : ΑΕ = ΒΔ : ΒΖ$

$$ΑΓ : ΓΕ = ΒΔ : ΔΖ$$

$$ΓΕ : ΑΕ = ΔΖ : ΒΖ$$

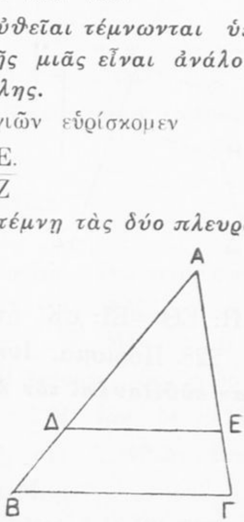
κ λ. κτλ. κτλ.

224. Πόρισμα 1ον. ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων, ὁσαδήποτε τμήματα τῆς μιᾶς εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης.***

Διότι ἐκ τῶν προηγουμένων ἀναλογιῶν εὑρίσκομεν

$$\frac{ΑΓ}{ΒΔ} = \frac{ΑΕ}{ΒΖ} = \frac{ΓΕ}{ΔΖ}.$$

225. Πόρισμα 2ον. ***Ἐὰν εὐθεῖα τέμνῃ τὰς δύο πλευρὰς τριγώνου, παράλληλος οὖσα τῇ τρίτῃ, τέμνει αὐτὰς εἰς μέρη ἀνάλογα.***



Ἐὰν δηλονότι ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ, θὰ εἶναι·

$$\frac{ΑΔ}{ΒΔ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ} \ (1) \quad καὶ \quad \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} \quad (2)$$

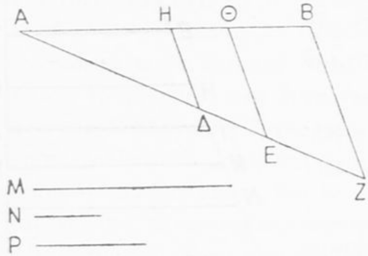
καὶ $\frac{ΑΒ}{ΔΒ} = \frac{ΑΓ}{ΕΓ}$ (3).

Διότι ἡ ΒΓ καὶ ἡ ΔΕ καὶ ἡ παράλληλος αὐτῶν, ἡ ἐκ τοῦ Α ἀγομένη, τέμνουσι τὰς δύο εὐθείας

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

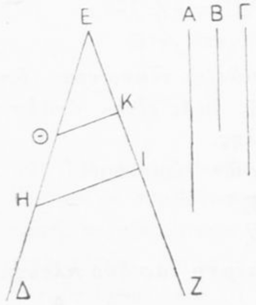
ΑΒ, ΑΓ, καὶ τὰ τμήματα ΑΔ, ΔΒ, ΑΒ τῆς πρώτης εἶναι ἀντιστοιχα τῶν τμημάτων ΑΕ ΕΓ, ΑΓ τῆς δευτέρας.

226. Πρόβλημα. ***Νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν M,N,P.***



Ἐκ τοῦ σημείου Α ἂς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα σχηματίζουσα γωνίαν μετὰ τῆς ΑΒ καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐπ' αὐτῆς ἡ ΑΔ ἴση τῇ Μ, ἡ ΔΕ ἴση τῇ Ν καὶ ἡ ΕΖ ἴση τῇ Ρ· ἂς ἀχθῇ δὲ ἐκ τοῦ Ζ ἡ ΒΖ καὶ ἐκ τῶν σημείων Δ,Ε παράλληλοι αὐτῆς, αἱ ΔΗ, ΕΘ. Αὗται διαιροῦσι τὴν ΑΒ εἰς τὰ μέρη ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, ἅτινα, κατὰ τὸ πόρισμα 224 εἶναι ἀνάλογα τῶν ΑΔ, ΔΕ, ΕΖ, ἤτοι τῶν εὐθειῶν Μ, Ν, Ρ.

227. Πρόβλημα. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν Α, Β, Γ.*** τουτέστιν εὐθεῖά τις Δ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι Α: Β = Γ: Δ.



Ἂς σχηματισθῇ τυχοῦσα γωνία ἡ ΔΕΖ καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς ἡ ΕΗ ἴση τῇ Α καὶ ἡ ΕΘ ἴση τῇ Β, ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης ἡ ΕΙ ἴση τῇ Γ· ἂς ἐπιζευχθῇ ἔπειτα ἡ ΗΙ καὶ ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Θ ἡ ΚΘ παράλληλος τῇ ΗΙ· λέγω, ὅτι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα Δ εἶναι ἡ ΕΚ.

Διότι κατὰ τὸ θεώρημα 223 εἶναι ΕΗ: ΕΘ = ΕΙ: ΕΚ· ἤτοι Α:Β = Γ: ΕΚ.

228. Πόρισμα. ***Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἐπὶ τὸν λόγον δύο ἄλλων.***

Ἀσκήσεις

336) Ἐὰν ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΒΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ληφθῇ σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος τῶν δύο τμημάτων αὐτῆς νὰ εἶναι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἴσος πρὸς 2:5, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος τῶν τριγώνων ΑΒΕ, ΑΒΓ εἶναι 2:7.

337) Ἐκ τοῦ μέσου σημείου πλευρᾶς τριγώνου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα πρὸς σημεῖόν τι μιᾶς τῶν ἄλλων πλευρῶν οὕτως, ὥστε τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον νὰ εἶναι τὸ 1)5 τοῦ ἀρχικοῦ.

338) Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν καὶ δύο τμήματα τῆς μιᾶς ἔχουσι λόγον 3:4, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον.

339) Κινουμένη εὐθεῖα, διερχομένη διὰ σημείου τινὸς Ο, τέμνει δύο δοθείσας εὐθείας παραλλήλους εἰς τὰ σημεῖα Α,Β. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ λόγος ΟΑ: ΟΒ εἶναι σταθερός.

340) Ἐκ σημείου Δ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ ἄγεται παράλληλος τῇ ΒΓ τέμνουσα τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ε· ἐκ τοῦ Γ ἄγεται παράλληλος τῇ ΕΒ, τέμνουσα τὴν ΑΒ προεκτεινομένην εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΔ : ΑΒ = ΑΒ: ΑΖ.

341) Ἐν τριγώνῳ ΑΒΓ ἡ παράλληλος τῇ ΒΓ τέμνει τὰς ἄλλας πλευρὰς εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, ἡ δὲ ἐκ τοῦ Ε παράλληλος τῇ ΑΒ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{ΑΔ}{ΒΔ} = \frac{ΒΖ}{ΓΖ}$.

342) Ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη διὰ τῆς κορυφῆς Β τριγώνου ΑΒΓ καὶ τοῦ μέσου τῆς διαμέσου ΑΔ, διαιρεῖ τὴν ΑΓ εἰς δύο τμήματα ἔχοντα λόγον 1:2.

343) Ζοθεισῶν τριῶν εὐθειῶν Α,Β,Γ, νὰ εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι Χ,Ψ τοιαῦται, ὥστε νὰ εἶναι Α:Β = Γ:Χ καὶ Α:Ψ = Γ:Β.

344) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἐπὶ δοθείσης βάσεως ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον.

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

229. Εὐθεῖά τις ΑΒ λέγομεν, ὅτι διαιρεῖται ὑπό τινος σημείου Μ κατὰ λόγον δοθέντα $\frac{α}{β}$, ὅταν εἶναι $\frac{ΑΜ}{ΜΒ} = \frac{α}{β}$.
Καὶ ἐὰν μὲν τὸ Μ κεῖται μεταξὺ Α καὶ Β λέγομεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα διαιρεῖται ἐσωτερικῶς ὑπὸ τοῦ Μ· ἐὰν δὲ τὸ Μ κεῖται ἐπὶ μιᾶς τῶν προεκτάσεων τῆς ΑΒ, τότε ἡ εὐθεῖα αὕτη λέγομεν, ὅτι διαιρεῖται ἐξωτερικῶς ὑπὸ τοῦ Μ.

230. **Θεώρημα**. ***Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας ὑπάρχει πάν-***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοτε ἕν σημεῖον καὶ ἕν μόνον ὅπερ διαιρεῖ ἐσωτερικῶς αὐτὴν κατὰ δοθέντα λόγον.

Ἔστω δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB καὶ $\frac{\alpha}{\beta}$ ὁ δοθεὶς λόγος καὶ

M τὸ ζητούμενον σημεῖον· τότε θὰ εἶναι $\frac{AM}{BM} = \frac{\alpha}{\beta}$ ἢ (Θ. Α.)

$\frac{AM}{AM+MB} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ ἐξ ἧς λαμβάνομεν $AM = AB.\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$· ἡ ἰσότης αὕτη ὁρίζει ἕν καὶ μόνον σημεῖον M (πέρας τοῦ τμήματος AM) κείμενον μεταξὺ A καὶ B ($AM < AB$).

231. **Θεώρημα.** ***Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας ὑπάρχει πάντοτε ἕν σημεῖον καὶ ἕν μόνον ὅπερ διαιρεῖ αὐτὴν ἐξωτερικῶς κατὰ δοθέντα λόγον*** (διάφορον τῆς 1). Ἔστω AB ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ $\frac{\alpha}{\beta}$ ὁ δοθεὶς λόγος μεγαλύτερος

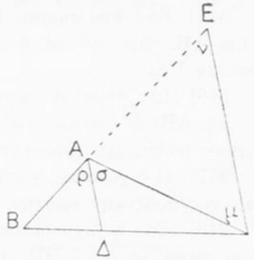
τῆς 1· τότε τὸ ζητούμενον σημεῖον M′ θὰ κεῖται πέραν τοῦ B καὶ θὰ εἶναι $\frac{AM'}{BM'} = \frac{\alpha}{\beta}$ ἢ $\frac{AM'}{AM'-M'B} = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}$· ἐξ ἧς λαμβάνομεν $AM' = AB.\frac{\alpha}{\alpha-\beta}$· ἡ ἰσότης αὕτη προσδιορίζει τὴν AM′ (μεγαλυτέραν τ ς AB) καὶ συνεπῶς τὸ σημεῖον M′, ὅπερ εἶναι ἓν καὶ μόνον.

Παρατήρησις. Ἐὰν ὁ δοθεὶς λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ ἦτο μικρότερος τῆς 1, τὸ **M′** θὰ ἦτο πέραν τοῦ A καὶ τὸ M′ θὰ ἐπροσδιορίζετο ὑπὸ τῆς ἰσότητος $AM' = AB \cdot \frac{\alpha}{\beta-\alpha}$.

232. ***Ὁρισμός.*** Ἐὰν δύο σημεῖα M, M′ διαιροῦσι τὸ μὲν ἐσωτερικῶς, τὸ δὲ ἐξωτερικῶς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν AB ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἤτοι ἂν εἶναι $\frac{AM}{BM} = \frac{AM'}{BM'}$, τότε λέγομεν, ὅτι διαιροῦσι τὴν εὐθεῖαν AB ἁρμονικῶς· τὰ σημεῖα M, M′ λέγονται συζυγῆ ἁρμονικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν AB.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

233. **Θεώρημα.** ***Ἡ διχοτομοῦσα γωνίαν τριγώνου διαιρεῖ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰν εἰς δύο τμήματα ἀνάλογα τῶν εἰς αὐτὰ προσκειμένων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.***

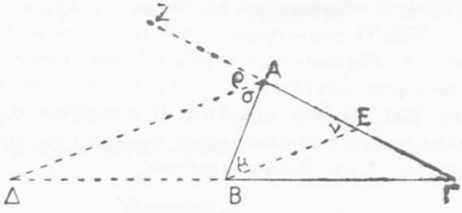


Ἐὰν δηλ. ἡ ΑΔ διχοτομῇ τὴν γωνίαν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ λέγω, ὅτι θὰ εἶναι $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}$.

Διότι ἂν φέρωμεν τὴν ΓΕ παράλληλον τῇ ΑΔ τέμνουσαν τὴν προέκτασιν τῆς ΒΑ εἰς τὸ Ε, θὰ ἔχωμεν (223) $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{AB}{AE}$. ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΓΕ εἶναι ἰσοσκελές, διότι εἶναι $\rho=\sigma$ ἐξ ὑποθέσεως καὶ $\rho=\nu$ καὶ $\sigma=\mu$ (72) ἤτοι εἶναι $\mu=\nu$ (19)· ὥστε ἡ προηγουμένη ἀναλογία γίνεται $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}$. Καὶ τὸ ἀντίστροφον θεώρημα ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

234. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν ἡ διχοτομοῦσα ἐξωτερικὴν γωνίαν τριγώνου τέμνῃ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν προσεκβαλλομένην, αἱ ἀποστάσεις τῆς τομῆς ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς πλευρᾶς ταύτης εἶναι ἀνάλογοι τῶν εἰς αὐτὰς προσκειμένων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.***

Ἐὰν δηλ. ἡ ΑΔ διχοτομῇ τὴν ἐξωτ. γωνίαν ΒΑΖ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ λέγω, ὅτι θὰ εἶναι $\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}$. διότι ἂν φέρωμεν τὴν ΒΕ παράλληλον τῇ ΑΔ θὰ ἔχωμεν (223) $\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}=\frac{AE}{A\Gamma}$· ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἰσοσκελὲς (ΑΒ=ΑΕ) διότι εἶναι $\rho=\sigma$ καὶ $\rho=\nu$ (72), $\sigma=\mu$ (19), ἡ ἀναλογία αὕτη γίνεται $\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}$.



Καὶ τὸ ἀντίστροφον θεώρημα ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀσκήσεις

345) Ἐὰν δύο σημεῖα Γ,Δ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, τότε καὶ τὰ Α καὶ Β εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΔ.

346) Πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ μεταξὺ Α καὶ Β (ἐκτὸς τοῦ μέσου τῆς ΑΒ) ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν προεκτάσεων αὐτῆς ἔχει τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν ΑΒ.

347) Αἱ διχοτόμοι, γωνίας τριγώνου καὶ τῆς ἐξωτερικῆς τῆς προσκειμένης πρὸς τὴν πρώτην, διαιροῦσιν ἁρμονικῶς τὴν ἀπέναντι πλευράν.

348) Ἐὰν ἡ διχοτομοῦσα τὴν ἐξωτ. γωνίαν ΒΑΖ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ, τὸ τρίγωνον τοῦτο θὰ εἶναι ἰσοσκελές.

349) Αἱ πλευραὶ τριγώνου τινὸς εἶναι 10,15, 18 μ. Ζητοῦνται τὰ τμήματα εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ πλευρὰ 18 ὑπὸ τῆς διχοτομούσης τὴν ἀπέναντι γωνίαν.

350) Αἱ πλευραὶ τριγώνου τινὸς εἶναι 3, 3,5, 4 μ. Ζητοῦνται αἱ ἀποστάσεις τῶν ἄκρων τῆς πλευρᾶς 3, 5 μ, ἀπὸ τοῦ σημείου, εἰς ὃ τέμνεται αὕτη προσεκβαλλομένη ὑπὸ τῆς διχοτομούσης τὴν ἀπέναντι ἐξωτερικὴν γωνίαν.

351) Αἱ πλευραὶ τριγώνου τινὸς εἶναι 5,8 μ. 6,9 μ. 11,4 μ. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων εἰς ἃ τέμνεται ἡ πλευρὰ 5,8 μ. ὑπὸ τῶν διχοτομουσῶν τὰς ἀπέναντι γωνίας (ἐσωτερικὴν καὶ ἐξωτερικήν).

352 Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τετραγώνου ΑΒΓΔ λαμβάνεται σημεῖόν τι Ε, τοιοῦτον ὥστε $\frac{(ΕΒ)}{(ΕΑ)} = \frac{3}{4}$ καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΔ σημεῖον Ζ τοιοῦτον, ὥστε $\frac{(ΖΑ)}{(ΖΔ)} = \frac{2}{5}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν τμημάτων τῆς ΕΖ, εἰς ἃ τέμνεται ὑπὸ τῆς διαγωνίου ΑΓ.

353) Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων ἔχουσι λόγον δοθέντα ἀριθμόν, εἶναι περιφέρεια κύκλου.

354) Ἐὰν δύο σημεῖα Α, Β, διαιροῦσιν ἁρμονικῶς διάμετρον κύκλου ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων σημείου τινὸς τοῦ κύκλου ἀπὸ τῶν δύο σημείων Α καὶ Β εἶναι σταθερός.

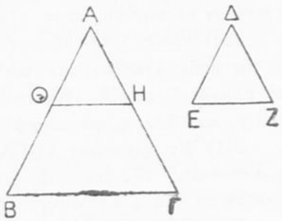
ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

235. **Ὁρισμοί.** Ὅμοια λέγονται δύο εὐθύγραμμα σχήματα, ἐὰν αἱ μὲν γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν, αἱ δὲ ἀντιστοιχοῦσαι πλευραὶ αὐτῶν (ἤτοι αἱ τὰς κορυφὰς ἴσων γωνιῶν ἐπιζευγνύουσαι) εἶναι ἀνάλογοι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πλευραὶ τῶν ὁμοίων σχημάτων λέγονται καὶ ***ὁμόλογοι.***

236. **Θεώρημα** ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν, εἶναι ὅμοια.***



Ἔστωσαν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἐν οἷς ὑποτίθεται $Α = Δ$, $Β = Ε$, $Γ = Ζ$.

Ἂς ἐφαρμοσθῇ ἡ γωνία Δ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ Α οὕτως, ὥστε νὰ τεθῶσιν αἱ πλευραὶ αὐτῆς ἐπὶ τῶν ὁμολόγων των. Τότε τὸ τρίγωνον ΔΕΖ θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν ΑΘΗ καὶ θὰ εἶναι ἡ ΘΗ παράλληλος τῇ ΒΓ· διότι $Β = Ε = ΑΘΗ$. Ἐκ τούτου ἕπεται (225) ἡ ἰσότης $\frac{(ΑΒ)}{(ΑΘ)} = \frac{(ΑΓ)}{(ΑΗ)}$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $ΑΘ = ΔΕ$ καὶ $ΑΗ = ΔΖ$, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται $\frac{(ΑΒ)}{(ΔΕ)} = \frac{(ΑΓ)}{(ΔΖ)}$

Ὁμοίως εὑρίσκεται ἂν ἐφαρμοσθῇ ἡ γωνία Ε ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ Β, $\frac{(ΑΒ)}{(ΔΕ)} = \frac{(ΒΓ)}{(ΕΖ)}$.

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι

$$\frac{(ΑΒ)}{(ΔΕ)} = \frac{(ΑΓ)}{(ΔΖ)} = \frac{(ΒΓ)}{(ΕΖ)}$$

εἶναι δὲ καὶ $Α = Δ$, $Β = Ε$, $Γ = Ζ$.
ἑπομένως τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

237. **Πόρισμα.** ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, εἶναι ὅμοια.***

Ἀσκήσεις.

355) Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην, εἶναι ὅμοια.

356) Ἐὰν ἐν ὀξυγωνίῳ τριγώνῳ ἀχθῶσι δύο ὕψη αὐτοῦ, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν τομὴν τῶν ὕψων κοινὴν κορυφήν, εἶναι ὅμοια.

357) Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἔχοντα τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς ἴσην, εἶναι ὅμοια.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

358) Ἐὰν ἐκ σημείου Δ μιᾶς τῶν πλευρῶν γωνίας ΑΒΓ ἀχθῇ ἡ ΔΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ἄλλην πλευράν, ὁ λόγος ΔΕ:ΒΔ εἶναι ὁ αὐτὸς δι' οἱανδήποτε θέσιν τοῦ Δ.

359) Ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ διαγώνιοι τραπεζίου, τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα βάσεις τὰς παραλλήλους πλευρὰς τοῦ τραπεζίου καὶ τὴν τομὴν τῶν διαγωνίων κοινὴν κορυφήν, εἶναι ὅμοια.

360) Δύο εὐθεῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Β. Ἐκ τῶν ἄκρων Δ καὶ Ε τῆς μιᾶς ἄγονται κάθετοι ἐπὶ τὴν ἄλλην αἵτινες τὴν τέμνουσιν εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Α. Ἐὰν αἱ ΔΓ, ΒΓ καὶ ΒΑ εἶναι ἀντιστοίχως 100 μ. 150 μ. καὶ 300 μ., νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ΑΕ.

361) Ἐν τραπεζίῳ ΑΒΓΔ αἱ βάσεις ΑΒ,ΔΓ εἶναι 105 μ., 63 μ. καὶ ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Δ ἀπὸ τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων 42 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου ΒΔ.

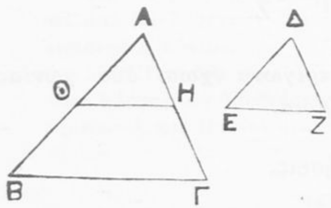
362) Ἐὰν αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ τέμνωνται εἰς τὸ σημεῖον Ε, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (ΑΒ): (ΔΓ) = (ΕΑ): (ΕΔ).

363) Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ε. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι (ΑΒ): (ΑΕ) = (ΑΔ): (ΑΓ).

364) Ἐὰν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ Α ἀχθῶσιν ἡ διάμετρος ΑΔ καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΕ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (ΑΒ): (ΑΔ) = (ΑΕ): (ΑΓ).

238. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.***

Ἔστωσαν ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, $\frac{ΑΒ}{ΔΕ} = \frac{ΑΓ}{ΔΖ} = \frac{ΒΓ}{ΕΖ}$ (1)



Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡ ΑΘ ἴση τῇ ΔΕ καὶ ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Θ παράλληλος τῇ ΒΓ, ἡ ΘΗ· τὰ δύο τρίγωνα ΑΘΗ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια (236)· ἑπομένως εἶναι $\frac{ΑΒ}{ΑΘ} = \frac{ΑΓ}{ΑΗ} = \frac{ΒΓ}{ΘΗ}$ (2)· ἐπειδὴ δὲ ἐλήφθη ΑΘ = ΔΕ, θὰ εἶναι καὶ $\frac{ΑΒ}{ΑΘ} = \frac{ΑΒ}{ΔΕ}$ ἄρα καὶ οἱ ἓξ λόγοι (1) καὶ (2) εἶναι ἴσοι· καὶ οἱ ἔχοντες ἀριθμητὰς ἴσους θὰ ἔχωσι καὶ τοὺς παρανομαστὰς ἴσους· ὅθεν ἕπεται ΘΗ = ΕΖ καὶ ΔΖ = ΑΗ.

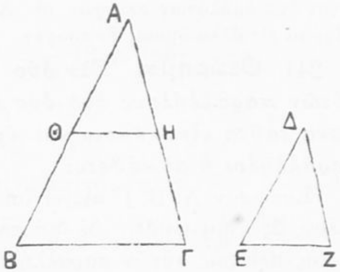
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀλλὰ τότε τὰ δύο τρίγωνα ΔΕΖ καὶ ΑΘΗ ὡς ἔχοντα τὰς πλευράς των ἴσας κατὰ μίαν εἶναι ἴσα· ὅθεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια.

Σημείωσις. Ἐκ τῶν δύο προηγουμένων θεωρημάτων βλέπομεν, ὅτι ἐν τοῖς τριγώνοις ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν συνεπάγεται τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν· καὶ ἀντιστρόφως, ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν συμβαίνει καὶ εἰς τὰ ἔχοντα περισσοτέρας πλευρὰς σχήματα. Διότι π. χ. ὀρθογώνιον καὶ τετράγωνον ἔχουσιν ἴσας τὰς γωνίας αὐτῶν, οὐχὶ δὲ καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους. Ὁμοίως ῥόμβος καὶ τετράγωνον ἔχουσι τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, ἀλλὰ τὰς γωνίας ἀνίσους.

239. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.***

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχοντα $A = \Delta$ καὶ $\frac{\Delta E}{AB} = \frac{\Delta Z}{A\Gamma}$ (1)



Ἄς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡ ΑΘ ἴση τῇ ΔΕ καὶ ἄς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Θ ἡ ΘΗ παράλληλος τῇ ΒΓ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΘΗ εἶναι ὅμοια καὶ διὰ τοῦτο εἶναι $\frac{A\Theta}{AB} = \frac{AH}{A\Gamma}$ (2)

καὶ ἐπειδὴ ἐλήφθη $A\Theta = \Delta E$, εἶναι καὶ $\frac{A\Theta}{AB} = \frac{E\Delta}{AB}$· ἄρα ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) προκύπτει

$$\frac{\Delta Z}{A\Gamma} = \frac{AH}{A\Gamma}\cdot \text{ ὅθεν } \Delta Z = AH$$

Ἀλλὰ τότε τὰ δύο τρίγωνα ΑΘΗ καὶ ΔΕΖ, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην ($A = \Delta$) καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἴσας, εἶναι ἴσα· ὅθεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια.

240. **Πόρισμα.** ***Ἐὰν εὐθεῖα, ὡς ἡ ΘΗ, τέμνῃ τὰς πλευρὰς τριγώνου εἰς μέρη ἀνάλογα, ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ εἶναι παράλληλος τῇ βάσει τοῦ τριγώνου.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀσκήσεις

364) Δύο τετράπλευρα εἶναι ὅμοια, ἐὰν αἱ πλευραὶ καὶ μία διαγώνιος τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ ἄλλου.

365) Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα τὰς καθέτους πλευρὰς ἀναλόγους εἶναι ὅμοια.

366) Ἐὰν ὕψος τι τριγώνου εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο τμημάτων εἰς ἃ διαιρεῖ τὴν βάσιν, ἡ ἀπέναντι ταύτης γωνία εἶναι ὀρθή.

367) Ἐὰν ἐν τριγώνῳ ΑΒΓ ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι διπλασία τῆς ΒΓ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ ληφθῇ σημεῖόν τι Ε τοιοῦτον, ὥστε ΒΕ = 1)2 ΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ γωνίαι ΒΓΕ, ΓΑΒ εἶναι ἴσαι.

368) Αἱ ὁμόλογοι διάμεσοι δύο ὁμοίων τριγώνων σχηματίζουσι μετὰ τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν γωνίας ἴσας καὶ ἔχουσι λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον δύο ὁμολόγων πλευρῶν.

369) Ἐὰν ἐπὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΒΓ, ΕΘ δύο ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΘ ληφθῶσι δύο τμήματα ΒΗ καὶ ΕΖ, ἔχοντα λόγον, τὸν λόγον δύο ὁμολόγων πλευρῶν, αἱ ΑΗ καὶ ΔΖ διαιροῦσι τὰ δοθέντα τρίγωνα εἰς ἄλλα ὅμοια, ἓν πρὸς ἕν.

241. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἀνὰ δύο ἢ καθέτους ἀνὰ δύο, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια καὶ ὁμόλογοι πλευραὶ θὰ εἶναι αἱ παράλληλοι ἢ αἱ κάθετοι.***

Ἔστωσαν Α, Β, Γ αἱ γωνίαι τοῦ ἑνὸς καὶ Α′, Β′, Γ′, αἱ τοῦ ἄλλου, ἃς σημειωθῶσι δὲ διὰ τοῦ αὐτοῦ γράμματος αἱ γωνίαι, αἱ τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἔχουσαι ἢ καθέτους.

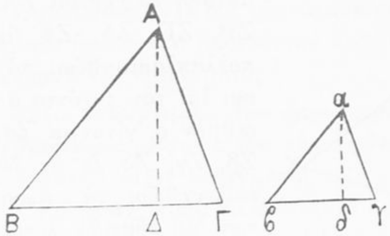
Ἐπειδὴ δύο γωνίαι, ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἢ καθέτους, εἶναι ἢ ἴσαι ἢ αραπληρωματικαὶ (75 καὶ 76), διὰ τοῦτο δύνανται νὰ γίνωσι περὶ τῶν γωνιῶν τῶν δύο τριγώνων μόνον αἱ ἑξῆς τρεῖς ὑποθέσεις :

ἢ 1) $Α + Α' = 2$ ὀρθ. $Β + Β' = 2$ ὀρθ. $Γ + Γ' = 2$ ὀρθ.
ἢ 2) $Α = Α'$ $Β + Β' = 2$ ὀρθ. $Γ + Γ' = 2$ ὀρθ.
ἢ 3) $Α = Α'$ $Β = Β'$ ἄρα (82) καὶ $Γ = Γ'$.

Ἀλλ᾽ ἂν τὸ πρῶτον συνέβαινε, τὸ ἄθροισμα τῶν ἓξ γωνιῶν τῶν δύο τριγώνων θὰ ἦτο ἓξ ὀρθαί, ὅπερ ἀδύνατον· ἂν δὲ τὸ δεύτερον συνέβαινε, τὸ αὐτὸ ἄθροισμα θὰ ἦτο μεγαλύτερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν, ὅπερ καὶ τοῦτο ἀδύνατον. Ἄρα μόνη ἡ τρίτη ὑπόθεσις ἀληθεύει, ἤτοι τὰ τρίγωνα ἔχουσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν· ἄρα εἶναι ὅμοια.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

242. **Θεώρημα.** *Τὰ ὅμοια τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν.*



Ἔστωσαν ὅμοια τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ· ἤτοι ἔστω Α = α, Β = β, Γ = γ καὶ $\frac{\alpha\beta}{\mathrm{AB}} = \frac{\beta\gamma}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\gamma\alpha}{\mathrm{\Gamma A}} = \varrho$.

Ἐκ τῶν κορυφῶν δύο ἴσων γωνιῶν, Α καὶ α, ἂς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀπέναντι πλευράς, αἱ ΑΔ καὶ αδ· τότε εἶναι

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\,(\mathrm{B\Gamma}).\,(\mathrm{A\Delta})$$

$$\text{καὶ } (\alpha\beta\gamma) = \frac{1}{2}\,(\beta\gamma).\,(\alpha\delta)\cdot$$

$$\text{ὅθεν}\quad \frac{(\alpha\beta\gamma)}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{(\beta\gamma)}{(\mathrm{B\Gamma})}\cdot\frac{(\alpha\delta)}{(\mathrm{A\Delta})}. \qquad (1)$$

ἀλλὰ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ αβδ εἶναι ὅμοια (Β = β καὶ Δ = δ).

ἑπομένως εἶναι $\frac{(\alpha\delta)}{(\mathrm{A\Delta})} = \frac{(\alpha\beta)}{(\mathrm{AB})}$, ἄρα ἴσον καὶ τῷ $\frac{(\beta\gamma)}{(\mathrm{B\Gamma})}$·

Ἐὰν δὲ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸν λόγον $\frac{(\alpha\delta)}{(\mathrm{A\Delta})}$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ $\frac{(\beta\gamma)}{(\mathrm{B\Gamma})}$, εὑρίσκομεν $\frac{(\alpha\beta\gamma)}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{(\beta\gamma)^2}{(\mathrm{B\Gamma})^2}$

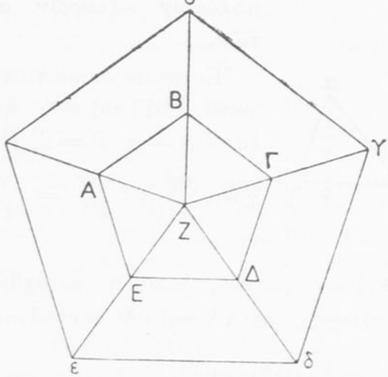
$$\text{ἢ} = \left(\frac{\beta\gamma}{\mathrm{B\Gamma}}\right)^2 \text{ἢ } (\alpha\beta\gamma) = \varrho^2.\,(\mathrm{AB\Gamma}).$$

243. **Πόρισμα.** *Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ϱ, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ ϱ, ἤτοι ἐπὶ* ϱ^2.

244. **Πρόβλημα.** *Δοθέντος πολυγώνου, νὰ κατασκευασθῇ ὅμοιον.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω δοθὲν πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ Ζ τυχὸν σημεῖον αὐτοῦ. Αἱ εὐθεῖαι ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ ἂν πολλαπλασιασθῶσι πᾶσαι ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν ρ, γίνονται Ζα, Ζβ, Ζγ, Ζδ, Ζε· ἂν δὲ ἐπιζευχθῶσι τὰ ἄκρα των διὰ εὐθειῶν, λέγω, ὅτι τὸ πολύγωνον αβγδε εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν.



Ἐπειδὴ ἐλήφθη $Ζα = ρ.ΖΑ$, $Ζβ = ρ.ΖΒ$, οἱ λόγοι $\frac{Ζα}{ΖΑ}$, $\frac{Ζβ}{ΖΒ}$ εἶναι ἴσοι τῷ ρ καὶ τὰ τρίγωνα ΖΑΒ, Ζαβ εἶναι ὅμοια (239) ὅθεν ἕπεται,ὅτι $\frac{αβ}{ΑΒ} = ρ$ καὶ ὅτι ἡ αβ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ.

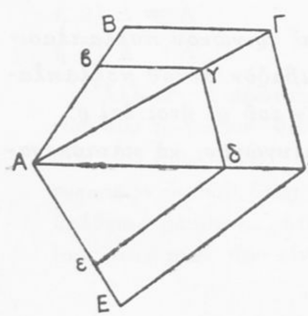
Ὁμοίως ἀποδεικνύονται ὅμοια τὰ τρίγωνα ΖΒΓ καὶ Ζβγ, ΖΓΔ καὶ Ζγδ, ΖΔΕ καὶ Ζδε, ΖΕΑ καὶ Ζεα· ἑπομένως εἶναι

$$\frac{αβ}{ΑΒ} = \frac{βγ}{ΒΓ} = \frac{γδ}{ΓΔ} = \frac{δε}{ΔΕ} = \frac{εα}{ΕΑ} = ρ$$

Καὶ ἡ γωνία Α τοῦ δοθέντος πολυγώνου ἰσοῦται τῇ α, διότι αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι παράλληλοι καὶ φέρονται πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι ἡ Β ἴση τῇ β καὶ καθεξῆς.

Ὥστε τὰ δύο πολύγωνα ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειρὰν καὶ τὰς ἀντιστοιχούσας πλευρὰς ἀναλόγους· ἄρα εἶναι ὅμοια.

Σημείωσις α΄. Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς ρ εἶναι ὅλως ἀόριστος, δύνανται νὰ κατασκευασθῶσιν ἄπειρα πολύγωνα ὅμοια τῷ δοθέντι. Ἀποβαίνει δὲ τὸ πρόβλημα ὡρισμένον, ὅταν δοθῇ μία πλευρὰ τοῦ ζητουμένου πολυγώνου καὶ ὁρισθῇ πρὸς ποίαν τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος θὰ ἀντιστοιχῇ, ὡς π. χ. ἡ αβ· τότε λαμβάνομεν τὸ Ζ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Α, ὅτε ἡ αβ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

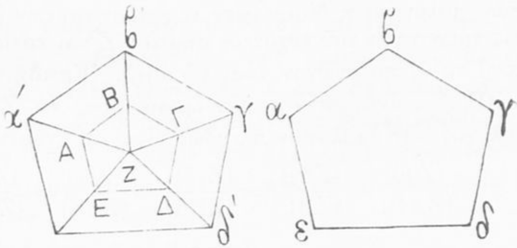
ΑΒ, αἱ δὲ πλευραὶ βγ, γδ, δε θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ.

Σημείωσις β'. Τὸ διὰ τῆς κατασκευῆς ταύτης προκῦπτον σχῆμα λέγεται ὅμοιον καὶ ὁμοιόθετον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ τὸ Ζ λέγεται ***κέντρον*** τῆς ὁμοιοθεσίας.

245. **Θεώρημα.** ***Δύο ὅμοια πολύγωνα δύνανται νὰ διαιρεθῶσιν εἰς τρίγωνα ἴσα τὸ πλῆθος, ὅμοια καθ' ἓν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένα.***

Ἔστωσαν ὅμοια τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε, ἤτοι ἔστωσαν $\frac{\alpha\beta}{AB}=\frac{\beta\gamma}{B\Gamma}=\frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta}=\frac{\delta\varepsilon}{\Delta E}=\frac{\varepsilon\alpha}{EA}=\varrho.$ καὶ

$$A=\alpha,\ B=\beta,\ \Gamma=\gamma,\ \Delta=\delta,\ E=\varepsilon.$$



Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Ζ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ καὶ ἂς πολλαπλασιασθῶσι πᾶσαι ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ρ, ὅτε γίνονται Ζα', Ζβ',..., Ζε'. Τὸ πολύγωνον α' β' γ' δ' ε' εἶναι ὅμοιον (244) τῷ ΑΒΓΔΕ, καὶ ἴσον τῷ αβγδε· διότι εἶναι $\alpha'=\alpha$, $\beta'=\beta$, $\gamma'=\gamma$, $\delta'=\delta$, $\varepsilon'=\varepsilon$, (ἐπειδὴ αἱ γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τοῦ ΑΒΓΔΕ) καὶ $\alpha\beta=\alpha'\beta'$, $\beta\gamma=\beta'\gamma'$, $\gamma\delta=\gamma'\delta'$, $\delta\varepsilon=\delta'\varepsilon'$, $\varepsilon\alpha=\varepsilon'\alpha'$, ἐπειδὴ εἶναι $\frac{\alpha\beta}{AB}=\frac{\beta\gamma}{B\Gamma}=\ldots=\frac{\varepsilon\alpha}{EA}=\frac{\alpha'\beta'}{AB}=\frac{\beta'\gamma'}{B\Gamma}=\ldots=\frac{\varepsilon'\alpha'}{EA}=\varrho.$

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι τὰ δύο πολύγωνα αβγδε καὶ α' β' γ' δ' ε' ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἄλληλα, ἐὰν ἐφαρμόσῃ ἡ γωνία βαε ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ β' α' ε', διότι τότε θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ αβ ἐπὶ τῆς α'β' καὶ ἡ γωνία αβγ ἐπὶ τῆς α'β'γ' καὶ καθεξῆς· τούτου δὲ γενομένου, θὰ εὑρεθῇ τὸ αβγδε διῃρημένον εἰς τὰ τρίγωνα Ζα'β', Ζβ'γ',..., Ζε'α', ἅτινα εἶναι τόσα, ὅσα εἶναι καὶ τὰ ΖΑΒ, ΖΒΓ, ..., ΖΕΑ, καὶ ὅμοια πρὸς αὐτὰ καθ' ἓν καὶ ὁμοίως κείμενα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

246. Πόρισμα. ***Ἐὰν πολύγωνον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, καὶ πᾶν ὅμοιον αὐτῷ εἶναι ἐπίσης ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.***

247. **Θεώρημα.** ***Τῶν ὁμοίων πολυγώνων αἱ μὲν περίμετροι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.***

α΄) Ἔστωσαν ὅμοια τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε ὁπότε ἔχομεν $\frac{αβ}{ΑΒ}=\frac{βγ}{ΒΓ}=\frac{γδ}{ΓΔ}=\frac{δε}{ΔΕ}=\frac{εα}{ΕΑ}=ρ$. ἄρα εἶναι (Θ Α.)

$$\frac{αβ+βγ+γδ+δε+εα}{ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ+ΕΑ}=ρ=\frac{αβ}{ΑΒ}$$

β΄) Πρὸς εὕρεσιν ἤδη τοῦ λόγου, ὃν ἔχουσιν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν πολυγώνων, διαιροῦμεν τὸ ἕτερον τούτων, ἔστω τὸ ΑΒΓΔΕ, εἰς τρίγωνα ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Ζ καὶ κατασκευάζομεν (239) περὶ τὸ Ζ πολύγωνον ἴσον τῷ αβγδε. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΖΑΒ, ΖΒΓ, . . ., εἶναι κατὰ σειρὰν ὅμοια πρὸς τὰ Ζαβ, Ζβγ, . . ., καὶ ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν εἶναι ρ, ἔχομεν (242).

$$\frac{(Ζαβ)}{(ΖΑΒ)}=\frac{(Ζβγ)}{(ΖΒΓ)}=\frac{(Ζγδ)}{(ΖΓΔ)}=\frac{(Ζδε)}{(ΖΔΕ)}=\frac{(Ζεα)}{(ΖΕΑ)}=ρ^2$$

$$\text{ὅθεν καὶ}\quad \frac{(αβγδε)}{(ΑΒΓΔΕ)}=ρ^2=\frac{(αβ)^2}{(ΑΒ)^2}$$

248. Πόρισμα 1ον. ***Ἐὰν αἱ πλευραὶ πολυγώνου πολλαπλασιασθῶσι πᾶσαι ἐπί τινα ἀριθμὸν ρ, αἱ δὲ γωνίαι αὐτοῦ μείνωσιν ἀμετάβλητοι, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ ρ, ἤτοι ἐπὶ $ρ^2$.***

249. Πόρισμα 2ον. ***Ἐὰν δύο ὅμοια πολύγωνα εἶναι ἐγγράψιμα εἰς κύκλον, αἱ μὲν περίμετροι αὐτῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι αὐτῶν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων.***

Ἀσκήσεις

370) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγώνων, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι τοῦ μὲν ἑνὸς 3 μ. τοῦ δὲ ἄλλου 4 μ.

371) Τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου οὗ ἡ βάσις εἶναι 12 μ. εἶναι 60 τ. μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου οὗ ἡ βάσις εἶναι 9 μ., καὶ ὅπερ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ πρῶτον.

372) Τριγώνου τινὸς αἱ πλευραὶ εἶναι 5, 6, 7, μέτρα. Ποῖαι εἶναι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

αἱ πλευραὶ τοῦ πρὸς αὐτὸ ὁμοίου καὶ διπλασίαν ἔχοντος ἐπιφάνειαν ;

373) Τριγώνου τινὸς αἱ πλευραὶ εἶναι 9, 10, 12 μέτρα· ἐπὶ τῆς πλευρᾶς 10 νὰ εὑρεθῇ σημεῖόν τι τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἐξ αὐτοῦ ἀγομένη παράλληλος τῇ πλευρᾷ 12 νὰ διαιρῇ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἴσα μέρη.

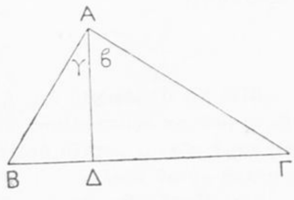
374) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου, διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο σχήματα, ὧν τὸ ἓν εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄλλου.

375) Δοθέντος πολυγώνου, κατασκευάζομεν ἄλλο ὅμοιον καὶ ἔχον περίμετρον διπλασίαν. Ποσαπλασία θὰ εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του ;

376) Τετράγωνόν τι ἔχει πλευρὰν 3. μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ὅπερ ἔχει πρὸς τοῦτο λόγον ἴσον τῷ ἀριθμῷ $\frac{2}{5}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

250. **Θεώρημα.** ***Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, διαιρεῖ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ὅμοια πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς τὸ ὅλον· εἶναι δὲ ἡ μὲν ἀχθεῖσα κάθετος μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης, ἑκατέρα δὲ τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὅλου τριγώνου μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ εἰς αὐτὴν προσκειμένου τμήματος.***



Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας Α κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, ἡ ΑΔ.

Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ὡς ἔχοντα τὴν γωνίαν Β κοινὴν εἶναι ὅμοια.

Ὁμοίως καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὴν γωνίαν Γ κοινήν.

Τὰ δὲ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια, ὡς ἀμφότερα ὅμοια πρὸς τὸ ΑΒΓ.

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ εὑρίσκομεν νῦν

$$\frac{Β Δ}{Α Δ} = \frac{Α Δ}{Δ Γ} \text{ ἢ } ΒΔ : ΑΔ = ΑΔ : ΔΓ.$$

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ εὑρίσκομεν

$$\frac{ΒΓ}{ΑΒ} = \frac{ΑΒ}{ΒΔ} \text{ ἢ } ΒΓ : ΑΒ = ΑΒ : ΒΔ.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ, $\frac{ΒΓ}{ΑΓ}=\frac{ΑΓ}{ΔΓ}$ ἢ ΒΓ : ΑΓ = ΑΓ : ΔΓ. ὅ.ἔ.δ.

Πορίσματα. 1) Ἐκ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων, ἐὰν ἀπαλλάξωμεν αὐτὰς ἀπὸ τῶν παρανομαστῶν, εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned}(ΑΔ)^2&=(ΒΔ).(ΔΓ)\\(ΑΒ)^2&=(ΒΓ).(ΒΔ)\\(ΑΓ)^2&=(ΒΓ).(ΔΓ)\end{aligned}\qquad(1)$$

καὶ προσθέτοντες τὰς δύο τελευταίας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2=(ΒΓ).\ [(ΒΔ)+(ΔΓ)]$$

$$\text{ἤτοι } (ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2=(ΒΓ).\ (ΒΓ)=(ΒΓ)^2.$$

Ἡ ἰσότης αὕτη ἐκφράζει τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρου, αἱ δὲ προηγούμεναι τρεῖς ἐκφράζουσι τὰ θεωρήματα τῶν ἐδαφίων 206 καὶ 200.

2) Ἐκ τῆς δευτέρας καὶ τῆς τρίτης τῶν ἐξισώσεων (1) εὑρίσκομεν προσέτι

$$\frac{(ΑΒ)^2}{(ΑΓ)^2}=\frac{(ΒΔ)}{(ΔΓ)}\ \text{ἢ}\ (ΑΒ)^2:(ΑΓ)^2=ΒΔ:ΔΓ.$$

ἤτοι τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ εἰς αὐτὰς προσκείμενα τμήματα τῆς ὑποτεινούσης.

Ἀσκήσεις.

377) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἡ ἀκτὶς κύκλου, εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων ἐφαπτομένης, εἰς ἃ διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς καὶ περιεχομένης μεταξὺ δύο ἄλλων ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα διαμέτρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

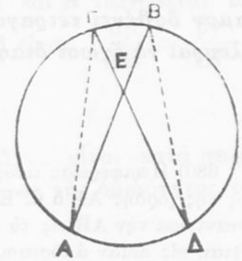
378) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἡ μία τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, εἶναι μέση ἀνάλογος τοῦ ὕψους αὐτοῦ καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ εἰς αὐτὸ περιγεγραμμένου κύκλου.

379) Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 10 μ. καὶ 7 μ. εἶναι ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τῶν δύο τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης εἰς ἃ διαιρεῖται ὑπὸ τῆς καθέτου ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας.

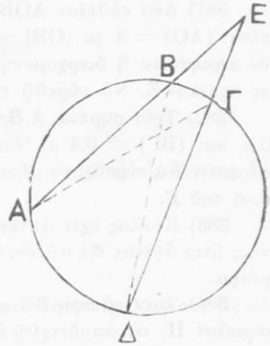
251. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν ἐκ σημείου τοῦ ἐπιπέδου κύκλου ἀχθῶσι τέμνουσαι αὐτοῦ, τὰ ὀρθογώνια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν δύο τμημάτων ἑκάστης τούτων, τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου καὶ τῶν σημείων τῆς τομῆς τῆς τεμνούσης μετὰ τῆς περιφερείας, εἶναι ἰσοδύναμα·***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

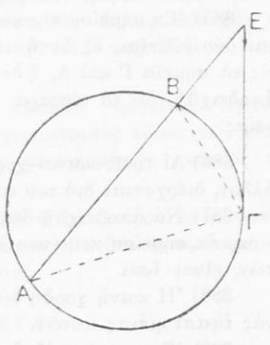
ἕκαστον δὲ τῶν ὀρθογωνίων τούτων εἶναι ἰσοδύναμον καὶ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις τυχὸν ἄγεται ἀπὸ τοῦ σημείου, μέχρι τῆς περιφερείας.



α΄) Ἔστωσαν δύο τέμνουσαι ΕΒΑ καὶ ΕΓΔ, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου Ε, κειμένου ἐντὸς τοῦ κύκλου· ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΑΓ καὶ ΒΔ σχηματίζονται τὰ ὅμοια τρίγωνα ΕΑΓ καὶ ΕΒΔ (236)· ἔχομεν ἐπομένως $\frac{ΕΑ}{ΕΔ}=\frac{ΕΓ}{ΕΒ}$ · ὅθεν καὶ (ΕΑ)· (ΕΒ) = (ΕΓ). (ΕΔ).



β΄) Ἔστωσαν ἤδη δύο τέμνουσαι ΕΒΑ καὶ ΕΓΔ, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ Ε κειμένου ἐκτὸς τοῦ κύκλου· ἐὰν φέρωμεν πάλιν τὰς χορδὰς ΑΓ καὶ ΒΔ τὰ τρίγωνα ΕΑΓ καὶ ΕΒΔ εἶναι ὅμοια (236)· ἐπομένως ἔχομεν $\frac{ΕΑ}{ΕΔ}=\frac{ΕΓ}{ΕΒ}$· ὅθεν καὶ (ΕΑ). (ΕΒ)= (ΕΓ). (ΕΔ).



γ΄) Ἐὰν ἐκ τοῦ Ε τοῦ κειμένου ἐκτὸς τοῦ κύκλου ἀχθῇ ἡ τέμνουσα ΕΒΑ καὶ ἡ ἐφαπτομένη ΕΓ κατόπιν δὲ ἀχθῶσιν καὶ αἱ χορδαὶ ΑΓ καὶ ΒΓ τὰ τρίγωνα ΑΕΓ καὶ ΒΕΓ εἶναι ὅμοια διότι ἔχουσι τὴν Ε κοινὴν καὶ τὴν γωνίαν Α ἴσην τῇ ΒΓΕ (156). ἐπομένως ἔχομεν $\frac{ΕΑ}{ΕΓ}=\frac{ΕΓ}{ΕΒ}$. ὅθεν καὶ $(ΕΓ)^2$ = (ΕΑ)· (ΕΒ).

252. **Θεώρημα** (ἀντίστροφον). ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνωνται κατά τι σημεῖον Ε οὕτως ὥστε νὰ εἶναι (ΕΑ). (ΕΒ) = (ΕΓ). (ΕΔ) τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας· εἰς ἣν δὲ περίπτωσιν τὰ Α καὶ Β κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Ε καὶ εἶναι (ΕΑ).***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

(ΕΒ)=(ΕΓ)² ἡ διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ διερχομένη περιφέρεια ἐφάπτεται τῆς ΕΓ κατὰ τὸ Γ.

253. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον δοθέντι τετραγώνῳ καὶ τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ νὰ ἔχωσι διαφορὰν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.***

Ἀσκήσεις

380) Περιφερείας τινὸς ἔχομεν τρία σημεῖα Α,Β,Γ· καὶ εἶναι τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΑΒ 5 μ. Ἐκ τοῦ Γ ἄγεται, ὡς ἔτυχεν, εὐθεῖά τις ΓΔ, συναντῶσα τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ· εἶναι δὲ (ΓΔ) = 3 μ. (ΑΔ) = 1,5 μ. Ζητεῖται, εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἡ ΓΔ, προσεκβαλλομένη ἀπὸ τοῦ Δ, θὰ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν.

381) Δύο εὐθεῖαι ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο καὶ εἶναι (ΑΟ) = 4 μ. (ΟΒ) = 5 μ. (ΟΓ) = 1,5 μ. καὶ (ΟΔ) = 20 μ. Ἡ δὲ περιφέρεια ἡ διερχομένη διὰ τῶν σημείων Α,Γ,Β, τέμνει τὴν ΟΔ εἴς τι σημεῖον Ε. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ΟΕ.

382) Τρία σημεῖα Α,Β,Γ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ εἶναι (ΑΒ) = 0,5, καὶ (ΒΓ) = 0,4 μ. Ἐπὶ δὲ τῆς ΑΒ ὡς διαμέτρου γράφομεν περιφέρειαν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις ἄγεται εἰς αὐτὴν ἀπὸ τοῦ Γ.

383) Κύκλος ἔχει ἀκτῖνα 10 μ. Ζητεῖται τὸ μῆκος τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις ἄγεται εἰς αὐτόν, ἀπὸ σημείου ἀπέχοντος ἐκ τοῦ κέντρου 18 μέτρα.

384) Ἐὰν τὰ ὕψη ΒΕ καὶ ΓΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τέμνωνται εἰς τὸ σημεῖον Η, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: 1) (ΒΗ). (ΗΕ) = (ΓΗ). (ΗΔ), 2) (ΑΒ). (ΑΔ) = (ΑΓ). (ΑΕ) καὶ 3) (ΒΗ). (ΒΕ) = (ΒΔ). (ΒΑ).

385) Ἐκ σημείου τῆς κοινῆς χορδῆς δύο τεμνομένων κύκλων, ἄγονται δύο εὐθεῖαι, ἐξ ὧν ἡ μὲν τέμνει τὴν περιφέρειαν τοῦ ἑνὸς κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ, ἡ δὲ τέμνει τὴν τοῦ ἄλλου εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Γ,Δ,Ε,Ζ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας.

386) Αἱ τρεῖς κοιναὶ χορδαὶ τριῶν κύκλων ἐξ ὧν ὁ εἷς τέμνει τὸν ἄλλον, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

387) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς δύο κύκλους τεμνομένους, ἐκ σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς κοινῆς χορδῆς αὐτῶν, εἶναι ἴσαι.

388) Ἡ κοινὴ χορδὴ δύο τεμνομένων κύκλων διχοτομεῖ τὰς κοινὰς ἐφαπτομένας αὐτῶν.

389) Ἐκ σημείου Μ ἄγονται δύο ἐφαπτόμεναι ΜΑ καὶ ΜΒ, εἰς κύκλον κέντρου Κ. Ἡ ΜΚ, προεκτεινομένη, τέμνει τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου αὐτοῦ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε καὶ τὴν χορδὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (ΜΔ). (ΜΕ) = (ΜΚ). (ΜΓ).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

254. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο παράλληλοι τέμνωνται ὑπὸ εὐθειῶν, ἐξ ἑνὸς σημείου ἀρχομένων τέμνονται, εἰς μέρη ἀνάλογα.***

Ἔστωσαν παράλληλοι αἱ εὐθεῖαι Μ καὶ Ν τεμνόμεναι ὑπὸ τῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, . . . λέγω ὅτι θὰ εἶναι $\frac{\alpha\beta}{\mathrm{AB}} = \frac{\beta\gamma}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta}$ . . . . (1)

Διότι τὰ τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ, . . . εἶναι κατὰ σειρὰν ὅμοια πρὸς τὰ Οαβ, Οβγ, Ογδ, . . . καὶ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων τούτων ἕπονται αἱ ἰσότητες.

$\frac{\mathrm{O}\alpha}{\mathrm{OA}} = \frac{\alpha\beta}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{O}\beta}{\mathrm{OB}}$, ἐκ τῶν ὁμοίων ΟΑΒ, Οαβ·

$\frac{\mathrm{O}\beta}{\mathrm{OB}} = \frac{\beta\gamma}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\mathrm{O}\gamma}{\mathrm{O\Gamma}}$, ἐκ τῶν ΟΒΓ, Οβγ·

$\frac{\mathrm{O}\gamma}{\mathrm{O\Gamma}} = \frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta} = \frac{\mathrm{O}\delta}{\mathrm{O\Delta}}$, ἐκ τῶν ΟΓΔ, Ογδ.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων δὲ τούτων συνάγονται αἱ ἰσότητες (1).

Ἀσκήσεις.

390) Μὴ παράλληλοι εὐθεῖαι, τέμνουσαι δύο παραλλήλους εἰς μέρη ἀνάλογα διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

391) Ἐὰν Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ, τριγώνου ΑΒΓ, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ τέμνουσι τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἰς δύο σημεῖα κείμενα ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ΒΓ.

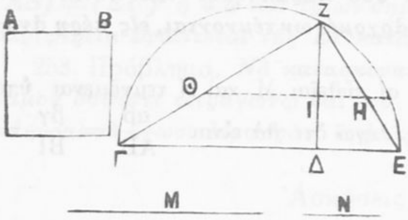
392) Παράλληλοι εὐθεῖαι πρός τινα πλευρὰν τριγώνου τέμνουσι τὰς ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν τμημάτων τῶν παραλλήλων, τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν πλευρῶν.

393) Παντὸς εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν (Θεώρ. τοῦ Πτολεμαίου).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

255. Πρόβλημα 1ον. ***Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἔχον πρὸς δοθὲν τετράγωνον λόγον ἴσον τῷ λόγῳ δύο εὐθειῶν.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Ἔστω πλευρὰ τοῦ δοθέντος τετραγώνου ἡ ΑΒ, αἱ δὲ δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ Μ, Ν.

Ἄς ληφθῇ ἐπί τινος εὐθείας ἡ ΓΔ, ἴση τῇ Μ καὶ ἡ ΔΕ, ἴση τῇ Ν, καὶ ἐπὶ τῆς ΓΕ ὡς διαμέτρου ἂς γραφῇ ἡμικύκλιον. Ἐκ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΕ, ἡ ΔΖ, καὶ ἐκ τοῦ Ζ, ἔνθα τέμνει τὴν περιφέρειαν, ἂς ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΖΓ, ΖΕ. Ἐπὶ τῆς ΖΕ (προσεκβαλλομένης, ἐὰν εἶναι ἀνάγκη) ἂς ληφθῇ ἡ ΖΗ, ἴση τῇ πλευρᾷ ΑΒ τοῦ δοθέντος τετραγώνου, καὶ ἐκ τοῦ Η ἂς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΕΓ, ἡ ΗΘ, τέμνουσα τὴν ΔΖ εἰς τὸ Ι· λέγω, ὅτι ἡ ΖΘ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Διότι ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΖΘΗ ἔχομεν (250, πόρ. 2ον)

$$\frac{(\mathrm{Z\Theta})^2}{(\mathrm{ZH})^2}=\frac{\Theta \mathrm{I}}{\mathrm{IH}}.$$

ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\dfrac{\Theta \mathrm{I}}{\mathrm{IH}}=\dfrac{\Gamma\Delta}{\Delta \mathrm{E}}$ (θεώρημα 254).

ἔπεται $\dfrac{(\mathrm{Z\Theta})^2}{(\mathrm{ZH})^2}=\dfrac{\Gamma\Delta}{\Delta \mathrm{E}}$

καὶ ἐπειδὴ ἐλήφθη $\mathrm{ZH}=\mathrm{AB}$ καὶ $\Gamma\Delta=\mathrm{M}$, $\Delta\mathrm{E}=\mathrm{N}$,

ἔπεται $\dfrac{(\mathrm{Z\Theta})^2}{(\mathrm{AB})^2}=$ ἢ $(\mathrm{Z\Theta})^2:(\mathrm{AB})^2=\mathrm{M}:\mathrm{N}$.

ἄρα ἡ ΖΘ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

256. **Πρόβλημα 2ον.** ***Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον δοθέντι πολυγώνῳ καὶ ἔχον πρὸς αὐτὸ λόγον ἴσον τῷ λόγῳ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν Μ καὶ Ν.***

Ἔστω Ε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δοθέντος πολυγώνου, Α μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, Ε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ζητουμένου πολυγώνου καὶ χ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ἡ ὁμόλογος τῆς Α. Τὸ πρόβλημα θὰ λυθῇ, ἂν εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ αὕτη χ· διότι τοιαύτην ἔχοντες δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ πολύγωνον (244 σημ.).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐν πρώτοις ζητεῖται νὰ εἶναι $\frac{(E')}{(E)}=\frac{(M)}{(N)}$. ἐπειδὴ δὲ τὰ πολύγωνα θὰ εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι καὶ $\frac{(E')}{(E)}=\frac{(\chi)^2}{(A)^2}$. ὅθεν ἕπεται $\frac{(\chi)^2}{(A)^2}=\frac{(M)}{(N)}$ ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ἀγνώστου ταύτης πλευρᾶς χ ἔχει λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δοθείσης πλευρᾶς Α ἴσον τῷ λόγῳ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν Μ, Ν. ἄρα τὸ πρόβλημα ἀνήχθη εἰς τὸ ***προηγούμενον.***

257. Πρόβλημα 3ον. ***Νὰ κατασκευασθῇ σχῆμα ὅμοιον τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ σχήματι Π καὶ ἰσοδύναμον ἄλλῳ εὐθυγράμμῳ σχήματι Κ.***

Ἔστω Α μία πλευρὰ τοῦ δοθέντος σχήματος Π καὶ χ ἡ ὁμόλογος αὐτῆς πλευρὰ τοῦ ζητουμένου, οὗτινος τὴν ἐπιφάνειαν παριστῶ διὰ τοῦ Σ.

Ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον σχῆμα Σ θὰ εἶναι ὅμοιον τῷ Π, θὰ εἶναι $\frac{(\Pi)}{(\Sigma)}=\frac{(A)^2}{(\chi)^2}$ καὶ ἐπειδὴ $\Sigma = K$, ἕπεται $\frac{(\Pi)}{(K)}=\frac{(A)^2}{(X)^2}$.

Ἂς τραπῶσιν νῦν ἀμφότερα τὰ σχήματα Π καὶ Κ εἰς τετράγωνα καὶ ἔστωσαν Μ καὶ Ν αἱ πλευραὶ τῶν ἰσοδυνάμων αὐτοῖς τετραγώνων, ἤτοι ἔστω $(\Pi) = (M)^2$ καὶ $(K)=(N)^2$· τότε ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\frac{(M)^2}{(N)^2}=\frac{(A)^2}{(\chi)^2}$.

ὅθεν ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν ἴσων εὑρίσκομεν

$\frac{(M)}{(N)}=\frac{(A)}{(\chi)}$ ἢ $M : N = A : \chi$,

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἡ πλευρὰ χ τοῦ ζητουμένου σχήματος εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν γνωστῶν εὐθειῶν Μ, Ν, Α.

258. Πρόβλημα 4ον. ***Να τμηθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ἤτοι εἰς δύο μέρη, ἐξ ὧν τὸ ἓν νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ ἄλλου μέρους.***

Ἔστω Γ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ

Α Γ Β τέμνεται μέσον καὶ ἄκρον λόγον·

ἤτοι ἔστω $AB : A\Gamma = A\Gamma : \Gamma B$.

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν ΓΒ διὰ τῆς διαφορᾶς $AB - A\Gamma$, εὑρίσκομεν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\mathrm{AB} : \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A\Gamma} : (\mathrm{AB} - \mathrm{A\Gamma})^{\cdot}$$
ὅθεν $$(\mathrm{AB}).(\mathrm{AB} - \mathrm{A\Gamma}) = (\mathrm{A\Gamma})^2$$
ἤ $$(\mathrm{AB})^2 - (\mathrm{AB}).(\mathrm{A\Gamma}) = (\mathrm{A\Gamma})^2,$$
τουτέστιν $$(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{A\Gamma}).(\mathrm{AB} + \mathrm{A\Gamma})^{\cdot}$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ προκείμενον πρόβλημα ἀνήχθη εἰς τὸ πρόβλημα (253).

Ἀσκήσεις

394) Ἐκ δύο ὁμοίων τριγώνων, τοῦ μὲν ἑνὸς αἱ πλευραὶ εἶναι 8, 10, 12 μέτρα, τοῦ δὲ ἄλλου ἡ περίμετρος εἶναι 56 $\frac{1}{4}$ μέτρα. Ποῖαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου τούτου;

395) Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον, οὗτινος αἱ πλευραὶ εἶναι 6, 9, 12 μέτρα διὰ τριῶν παραλλήλων τῇ πλευρᾷ 6, εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη.

396) Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον ἰσοσκελές, οὗ ἡ βάσις εἶναι 25 μέτρα καὶ τὸ ἐμβαδὸν 200 τετρ. μέτρα, δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν εἰς δύο μέρη, ἔχοντα λόγον $\frac{3}{4}$.

397) Τετραπλεύρου τινὸς αἱ πλευραὶ εἶναι κατὰ σειρὰν 12 μ., 3 μ. 8 μ. καὶ 7 μ. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ πλευραὶ τοῦ πρὸς αὐτὰ ὁμοίου τετραπλεύρου, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ μεγίστη καὶ ἡ ἐλαχίστη πλευρὰ συναποτελοῦσι 18 μέτρα.

398) Ἐκ τινος σημείου Ο ἄγονται εὐθεῖαι μέχρι τῆς εὐθείας ΑΒ. Ἐὰν εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΑΒ, διαιρῇ μίαν τῶν ἐκ τοῦ Ο εὐθειῶν εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, θὰ διαιρῇ ὁμοίως καὶ τὰς ἄλλας εὐθείας τὰς ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο ἀχθείσας.

399) Ἂν μία τῶν διαγωνίων τετραπλεύρου διαιρῇ αὐτὸ εἰς μέρη ἰσοδύναμα, θὰ διαιρῇ καὶ τὴν ἄλλην διαγώνιον εἰς μέρη ἴσα.

400) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον τριπλάσιον τοῦ δοθέντος τετραγώνου.

401) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ὅμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον καὶ διπλάσιον αὐτοῦ.

402) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ὅμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον καὶ τριπλάσιον αὐτοῦ.

403) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἰσοδύναμον πρὸς ἄλλο δοθὲν τρίγωνον.

404) Δοθέντων δύο ὁμοίων πολυγώνων νὰ κατασκευασθῇ ἄλλο ὅμοιον αὐτοῖς καὶ ἴσον τῷ ἀθροίσματι ἢ τῇ διαφορᾷ αὐτῶν.

405) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐὰν ἡ πλευρὰ τετραγώνου αὐξηθῇ κατὰ τὴν τὴν διαγώνιόν του, ἡ διαγώνιος αὐξάνεται κατὰ τὸ διπλάσιον τῆς πλευρᾶς του.

406) Ἐκ τῆς χορδῆς κυκλικοῦ τόξου καὶ ἐκ τοῦ βέλους αὐτοῦ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτίς του,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Βέλος τόξου λέγεται ἡ ἐκ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς αὐτοῦ ἀγομένη κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ περατουμένη εἰς τὸ τόξον.

407. Εὑρεῖν ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗ αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι τρεῖς ἐφεξῆς ἀκέραιοι.

408) Ἐὰν προσεκβάλωμεν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ οὕτως, ὥστε νὰ γίνῃ ἡ εὐθεῖα $ΑΒΓ_1 = λ. ΑΒ$, ἡ $ΒΓΑ_1 = μ. ΒΓ$ καὶ ἡ $ΓΑΒ_1 = ν. ΓΑ$, νὰ δειχθῇ. ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $Α_1Β_1Γ_1$ εἶναι $(Α_1Β_1Γ_1) = (ΑΒΓ)\,(1 - λ - μ - ν + λμ + μν + νλ)$.

409) Ἐὰν ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ ἀχθῇ ἡ $Β_1Γ_1$ παράλληλος τῇ ΒΓ, ἔπειτα δὲ ἡ $ΒΓ_1$ καὶ ἡ $Β_1Γ$, ἑκάτερον τῶν τριγώνων $ΑΒΓ_1$ καὶ $ΑΒ_1Γ$ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΑΒΓ καὶ $Α_1Β_1Γ_1$.

410) Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα· α) δι' εὐθείας ἀγομένης ἐξ ἑνὸς σημείου τῆς περιμέτρου· β) δι' εὐθείας καθέτου ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν.

411) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν καὶ ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτοῦ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ

259. Ἡ λύσις ἑνὸς γεωμετρικοῦ προβλήματος συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν ἀγνώστων γεωμετρικῶν μεγεθῶν, τὰ ὁποῖα ὅμως δὲν εἶναι πάντοτε δυνατὸν νὰ κατασκευασθῶσι γεωμετρικῶς δηλαδὴ νὰ κατασκευασθῶσι ***δι' εὐθειῶν καὶ περιφερειῶν μόνον.*** Ἀλλ' ἐν τῇ ἀναζητήσει τῆς γεωμετρικῆς λύσεως ἑνὸς τοιούτου προβλήματος ἡ Γεωμετρία δὲν παρέχει πάντοτε εὐχερὲς μέσον, ὅπως καταλήξωμεν εἰς ὡρισμένον συμπέρασμα περὶ τοῦ δυνατοῦ ἢ μὴ αὐτῆς. Διὰ τοῦτο καταφεύγομεν εἰς τὴν Ἄλγεβραν, προκειμένου περὶ τοιούτων περιπτώσεων, διότι αὕτη ἀπαντᾷ ἱκανοποιητικῶς περὶ τοῦ δυνατοῦ ἢ μὴ τῆς γεωμετρικῆς λύσεως δεδομένου προβλήματος.

Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς Ἀλγέβρας εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἤτοι ἡ χρησιμοποίησις τῶν ἀλγεβρικῶν μεθόδων εἰς τὴν λύσιν γεωμετρικῶν προβλημάτων εἶνε δυνατή, διότι τὰ ἄγνωστα γεωμετρικὰ μεγέθη ἑ ὸς προβλήματος συνδέονται μετὰ τῶν δεδομένων αὐτοῦ δι' ὡρισμένων σχέσεων. Ἀλλὰ πᾶσα σχέσις μεταξὺ γεωμετρικῶν μεγεθῶν τρέπεται εἰς σχέσιν ἀριθμῶν ὅταν τὰ μεγέθη μετρηθῶσι μέ τινα μονάδα.

Οἱ ἐκ τῆς καταμετρήσεως τῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν προκύπτοντες ἀριθμοὶ ἐξαρτῶνται προδήλως ἐκ τῆς μονάδος, μὲ τὴν ὁποίαν μετροῦμεν· ἐπειδὴ δὲ ἀφίνομεν συνήθως τὴν μονάδα ἀόριστον παρι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

στῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους διὰ τῶν γραμμάτω τοῦ ἀλφαβήτου. Καὶ ἑκάστη μὲν εὐθεῖα γραμμὴ παρίσταται τότε δι᾽ ἑνὸς γράμματος· ἑκάστη δὲ ἐπιφάνεια παρίσταται διὰ τοῦ γινομένου δύο γραμμάτων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτὴν ὀρθογωνίου ἢ καὶ διὰ τῆς δευτέρας δυνάμεως ἑνὸς γράμματος, ὅπερ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ πρὸς αὐτὴν ἰσοδυνάμου τετραγώνου.

Ἀφοῦ ἤδη παραστήσωμεν τοιουτοτρόπως τὰ γεωμετρικὰ μεγέθη διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου, σχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν (ἢ τὰς ἐξισώσεις) τοῦ προβλήματος, τὴν ὁποίαν λύομεν ὡς πρὸς τὴν ἄγνωστον γραμμήν, ἐκφράζοντες οὕτω αὐτὴν διὰ τῶν γνωστῶν. Καὶ ἐὰν ἡ ἐξίσωσις δι᾽ ἧς ὁρίζεται ἡ ἄγνωστος γραμμή, εἶναι τοῦ πρώτου ἢ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὴν ἄγνωστον (ὅταν ἡ ἐξίσωσις γίνῃ ἀκεραία πρὸς πάντα τὰ ἐν αὐτῇ γράμματα) ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ αὐτῆς εἶνε πάντοτε δυνατή, τὴν ὁποίαν ἐπιτυγχάνομεν, ἄνευ τῆς παρεμβάσεως πλέον τῆς Ἀλγέβρας καὶ χωρὶς νὰ ὑποθέσωμεν τὰς γραμμὰς μεμετρημένας, ὁδηγούμενοι ἐκ τῆς λύσεως καὶ ἐκ γνωστῶν τῆς Γεωμετρίας θεωρημάτων· ἐὰν ὅμως ἡ ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις δι᾽ ἧς ὁρίζονται αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων τοῦ προβλήματος εἶναι βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου, ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ αὐτῶν δὲν εἶναι πάντοτε δυνατή. Τοῦτο π.χ. συμβαίνει εἰς τὸ πρόβλημα «νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα γωνία (μὴ ὀρθὴ) εἰς τρία ἴσα μέρη».

Ἐκτὸς ὅμως τῶν προβλημάτων κατασκευῆς λύομεν διὰ τῆς Ἀλγέβρας καὶ πολλὰ ἄλλα προβλήματα τῆς Γεωμετρίας, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν κατωτέρω παραδειγμάτων.

260. **Πρόβλημα.** ***Νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.***

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν διὰ τοῦ α, τὸ δὲ μέρος αὐτῆς τὸ ὁποῖον εἶναι μέσον ἀνάλογον τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ λοιποῦ μέρους διὰ τοῦ χ, θὰ εἶναι $\alpha : \chi = \chi : (\alpha - \chi)$ ὅθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις $\chi^2 + \alpha\chi - \alpha^2 = 0$. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι $0 < \chi < \alpha$.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν.

$\chi = -\dfrac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 + \alpha^2}$ (ἡ δευτέρα λύσις ὡς ἀρνητικὴ ἀπορρίπτεται).

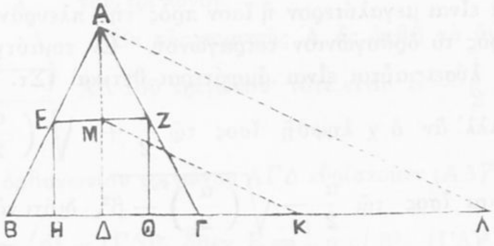
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἤδη εὑρίσκομεν τὸ μέρος χ διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς ὡς ἑξῆς :

Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον καθέτους πλευρὰς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν (α) καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ $\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\alpha^2}$ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης εὐθείας· τὸ ὑπόλοιπον θὰ παριστᾶται ὑπὸ τοῦ χ καὶ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ζητούμενον μέρος.

361. Πρόβλημα. ***Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον.***

Ἔστω ΑΒΓ τὸ δοθὲν τρίγωνον· ἂς ὑποτεθῇ δὲ τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΕΖΗΘ τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις κεῖται ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ τοῦ



τριγώνου. Τὴν βάσιν ταύτην ΒΓ παριστῶμεν διὰ τοῦ α, τὸ δὲ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου διὰ τοῦ υ καὶ τὴν πλευρὰν ΕΖ τοῦ τετραγώνου διὰ τοῦ χ.

Ἐπειδὴ ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ, τὰ τρίγωνα ΑΕΖ, ΑΒΓ εἶναι ὅμοια· ὡσαύτως καὶ τὰ ΑΕΜ. ΑΒΔ· ὅθεν εἶναι

$$\frac{EZ}{B\Gamma}=\frac{AE}{AB} \text{ καὶ } \frac{AE}{AB}=\frac{AM}{A\Delta}. \text{ ὅθεν καὶ } \frac{EZ}{B\Gamma}=\frac{AM}{A\Delta},$$

τουτέστι $\frac{\chi}{\alpha}=\frac{\upsilon-\chi}{\upsilon}$, διότι $AM=A\Delta-M\Delta=\upsilon-\chi$·

λύοντες δὲ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν $\chi=\frac{\alpha.\upsilon}{\alpha+\upsilon}$·

Ἡ ἰσότης αὐτὴ δεικνύει ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου εἶναι τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν γνωστῶν εὐθειῶν $\alpha+\upsilon$, α,υ. Τὴν κατασκευὴν δεικνύει τὸ σχῆμα, ἔνθα ἐλήφθη $\Delta K=\alpha$ καὶ $K\Lambda=\upsilon$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

262. ***Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἐκ τῆς περιμέτρου καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ του.***

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν δοθεῖσαν περίμετρον διὰ τοῦ 2α, τὸ ἐμβαδὸν διὰ τοῦ β^2, τὴν βάσιν διὰ τοῦ χ καὶ τὸ ὕψος διὰ τοῦ ψ, θά ἔχωμεν:

$\chi+\psi=\alpha$ καὶ $\chi\psi=\beta^2$. Ἐὰν δὲ ἡ τιμὴ τοῦ ψ ληφθῇ ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως καὶ τεθῇ εἰς τὴν δευτέραν εὑρίσκομεν $\chi(\alpha-\chi)=\beta^2$ ἢ $\chi^2-\alpha\chi+\beta^2=0$

ὅθεν $\chi=\dfrac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2-\beta^2}$

Ἵνα αἱ εὑρεθεῖσαι ῥίζαι εἶναι πραγματικαὶ πρέπει νὰ εἶναι $\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\geq\beta^2$ ἢ $\dfrac{\alpha}{2}\geq\beta$ δηλαδὴ τὸ τέταρτον τῆς περιμέτρου νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἢ ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τετραγώνου. Ἐν τοιαύτῃ δὲ περιπτώσει αἱ λύσεις αὗται εἶναι ἀμφότεραι θετικαὶ (Στ. Ἄλ. σελ. 187).

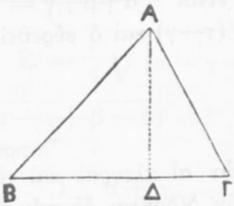
Ἀλλ' ἂν ὁ χ ληφθῇ ἴσος τῷ $\dfrac{\alpha}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2-\beta^2}$, ὁ ψθὰ εἶναι ἴσος τῷ $\dfrac{\alpha}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2-\beta^2}$, διότι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι α· ἂν δὲ πάλι ὁ χ ληφθῇ ἴσος τῷ $\dfrac{\alpha}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2-\beta^2}$, ὁ ψ θὰ εἶναι ἴσος τῷ $\dfrac{\alpha}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2-\beta^2}$.

Ἤδη εὑρίσκομεν τὰ χ διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς ὡς ἑξῆς· ἂν εἶναι $\dfrac{\alpha}{2}>\beta$ λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς περιμέτρου καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ εἰς τὸ Α ὑψοῦμεν κάθετον τὴν ΑΓ ἴσην τῇ β μὲ κέντρον δὲ τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ' ἀπὸ τοῦ Δ δέ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῇ ΔΒ τὸ ΔΜ ἴσον τῷ $\dfrac{AB}{2}$. τότε ὁ μὲν ΑΜ εἶναι ἡ ζητουμένη βάσις (ὕψος), ἡ δὲ ΜΒ εἶναι τὸ ζητούμενον ὕψος (βάσις): διότι $AM=A\Delta+\Delta M=\sqrt{\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2-\beta^2}$

$+\frac{\alpha}{2}$ καὶ $MB = AB - AM = \alpha - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta^2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$
$- \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta^2}$. ἂν εἶναι $\frac{\alpha}{2} = \beta$, τότε θὰ εἶναι $\chi = \frac{\alpha}{2}$, $\psi = \frac{\alpha}{2}$ καὶ τὸ ζητούμενον θὰ εἶναι τετράγωνον.

263. Πρόβλημα. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.***

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἂς παριστῶνται διὰ τῶν ἀριθμῶν α (ἢ ΒΓ), β (ἢ ΑΓ) καὶ γ (ἢ ΑΒ). Ζητεῖται ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τριγώνου.



Ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἂς ἀχθῇ τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου· τότε εἶναι $E = \frac{1}{2}\alpha.(A\Delta)$.

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ εὑρίσκομεν $(A\Delta)^2 = \beta^2 - (\Gamma\Delta)^2$ ἢ $A\Delta = \sqrt{\beta^2 - (\Gamma\Delta)^2}$. ὅθεν $E = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{\beta^2 - (\Gamma\Delta)^2}$. (ι)

Ἐκ δὲ τοῦ θεωρήματος τοῦ ἐδαφίου 209 ἔχομεν τὴν ἰσότητα $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\,(\Delta\Gamma)$,

ἐξ ἧς $\quad \Delta\Gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha}$.

καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (ι) τὴν ΓΔ διὰ τῆς τιμῆς αὐτῆς, εὑρίσκομεν

$$E = \frac{1}{2}\alpha.\sqrt{\beta^2 - \frac{(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2}{4\alpha^2}} = \frac{1}{4}.\sqrt{4\alpha^2 - \beta^2(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2}.$$

Τὸ ὑπόρριζον ὡς διαφορὰ δύο τετραγώνων ἀναλύεται εἰς τοὺς παράγοντας.

$$2\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 \text{ καὶ } 2\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τούτων δὲ ὁ μὲν πρῶτος γράφεται ὡς ἑξῆς:
$(\alpha+\beta)^2 - \gamma^2$ καὶ ἀναλύεται ἑπομένως εἰς τοὺς δύο παράγοντας

$$(\alpha+\beta+\gamma) \quad \text{καὶ} \quad (\alpha+\beta-\gamma),$$

ὁ δὲ δεύτερος γράφεται ὡς ἑξῆς $\gamma^2-(\alpha-\beta)^2$ καὶ ἀναλύεται εἰς τοὺς ἑξῆς δύο

$$\gamma-(\alpha-\beta) \quad \text{καὶ} \quad \gamma+(\alpha-\beta)$$

ἑπομένως τὸ ὑπόρριζον ἀναλύεται εἰς γινόμενον τεσσάρων παραγόντων καὶ εἶναι

$$E = \frac{1}{4}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}. \quad (^1)$$

Ἀλλ᾽ ἐὰν τεθῇ $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ θὰ εἶναι $-\alpha+\beta+\gamma=2(\tau-\alpha)$, $\alpha-\beta+\gamma=2(\tau-\beta)$, $\alpha+\beta-\gamma=2(\tau-\gamma)$ καὶ ὁ εὑρεθεὶς τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ γράφεται

$$E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}.$$

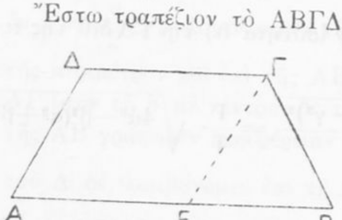
Σημ. Ὑπάρχουσιν ἄπειρα τρίγωνα, ὧν αἱ πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἐκφράζονται δι᾽ ἀκεραίων ἀριθμῶν· δίδονται δὲ πάντα ταῦτα ὑπὸ τῶν ἑξῆς τύπων (ἐὰν εἰς ἕκαστον τῶν τριγώνων τούτων προσαρτήσωμεν καὶ τὰ πρὸς αὐτὸ ὅμοια).

$$\alpha=\lambda\mu\,(\rho^2+\sigma^2),$$
$$\beta=\rho\sigma\,(\lambda^2+\mu^2),$$
$$\gamma=\lambda\mu\,(\rho^2-\sigma^2)+\rho\sigma\,(\lambda^2-\mu^2),\ E=\lambda\mu\rho\sigma\gamma\cdot$$

ἐν οἷς λ,μ,ρ,σ εἶναι τυχόντες ἀκέραιοι ἀριθμοί. Τοιαῦτα τρίγωνα εἶναι τὰ ἑξῆς
(4, 13, 15, ἐμβ. 24), (7, 15, 20, ἐμβ. 42), (13, 14, 15, ἐμβ. 84) κτλ

264. Πρόβλημα. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.***

Ἔστω τραπέζιον τὸ ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἃς παριστῶνται κατὰ σειρὰν διὰ τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ.



Ἐκ τοῦ Γ ἃς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΔΑ ἡ ΓΕ· τότε εἶναι ΑΕ = ΔΓ = γ· ἄρα ΕΒ=

(1) Ὁ τύπος οὗτος εὑρίσκεται ἐν τῷ περὶ διόπτρας συγγράμματι τοῦ Ἥρωνος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$\alpha - \gamma$ καὶ ΓΕ = ΔΑ = δ, καὶ ἂν παραστήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου διὰ τοῦ Ε, τοῦ δὲ τριγώνου ΓΕΒ διὰ τοῦ Ε',

$$\text{θὰ εἶναι } E = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)\cdot \upsilon,$$

$$E' = \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)\cdot \upsilon,$$

ἔνθα υ δηλοῖ τὸ κοινὸν ὕψος αὐτῶν.

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων ἔπεται

$$\frac{E}{E'} = \frac{\alpha + \gamma}{\alpha - \gamma}, \text{ ὅθεν } E = \frac{\alpha + \gamma}{\alpha - \gamma}\cdot E'.$$

καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα εἶναι

$$E' = \frac{1}{4}\sqrt{(\alpha - \gamma + \beta + \delta)(-\alpha + \gamma + \beta + \delta)(\alpha - \gamma - \beta + \delta)(\alpha - \gamma + \beta - \delta)}$$

ἔπεται

$$E = \frac{1}{4}\cdot\frac{\alpha + \gamma}{\alpha - \gamma}\sqrt{(\alpha - \gamma + \beta + \delta)(-\alpha + \gamma + \beta + \delta)(\alpha - \gamma - \beta + \delta)(\alpha - \gamma + \beta - \delta)}.$$

Ἀσκήσεις

412) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου οὗ αἱ πλευραὶ εἶναι 7,5 μ. 9,45 μ. 15,05 μ.

413) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου ΑΒΓΔ, οὗ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εἶναι ἀντιστοίχως 48 μ. 16 μ. 30 μ. καὶ 18 μ.

414) Τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, οὗ ὑποτείνουσα εἶναι ἡ ΒΓ, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\frac{1}{4}[\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2]$.

415) Ἐὰν εὐθεῖα γραμμή, διαιρεθῇ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ μέσου ἀναλόγου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ τετραγώνου τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄλλου μέρους.

316) Μία τῶν πλευρῶν τριγώνου διαιρεῖται εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἄγονται εὐθεῖαι πρὸς τὴν ἀπέναντι κορυφήν. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τῶν εὐθειῶν τούτων συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

417) Νὰ ἀποδειχθῇ διὰ τῶν ἐμβαδῶν τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Γου Βιβλίου.

418) Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπεζίου εἶναι γινόμενον τῆς μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν αὐτῆς ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ἄλλης.

419) Ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων πλευρῶν ὑπερβαίνει τὴν ὑποτείνουσαν κατὰ τὴν διάμετρον τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον ἐγγεγγραμμένου κύκλου.

420) Ἐὰν ἐντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ληφθῇ τυχὸν σημεῖον, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἶναι πάντοτε τὸ αὐτό.

421) Ἐὰν περιφέρεια ἔχῃ κέντρον τὴν τομὴν τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμου, τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων παντὸς σημείου αὐτῆς ἀπὸ τῶν τεσσάρων κορυφῶν τοῦ παραλληλογράμμου ἔχουσιν ἄθροισμα τὸ αὐτὸ πάντοτε.

422) Ἐὰν διὰ δύο δοθέντων σημείων Α,Β διέρχωνται περιφέρεια τέμνουσαι δοθέντα κύκλον, αἱ κοιναὶ χορδαὶ τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ τῶν τεμνόντων αὐτὸν διέρχονται πᾶσαι δι' ἑνὸς σημείου τῆς ΑΒ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ δὲ σημείου διέρχεται καὶ ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ τοῦ διὰ τῶν σημείων Α,Β διερχομένου καὶ ἐφαπτομένου τοῦ δοθέντος.

423) Δοθέντων δύο κύκλων αἱ τὰ δύο ἄκρα παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων ἀκτίνων ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι τέμνουσι τὴν διὰ τῶν κέντρων διερχομένην εὐθεῖαν πᾶσαι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ὡσαύτως καὶ αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰ ἄκρα δύο παραλλήλων καὶ ἀντιρρόπων ἀκτίνων. Λέγονται δὲ τὰ σημεῖα ταῦτα ***κέντρα ὁμοιότητος*** τῶν δύο κύκλων· καὶ τὸ μὲν πρῶτον λέγεται ***ἐκτός***, τὸ δὲ δεύτερον ***ἐντός***. δι' αὐτῶν δὲ διέρχονται καὶ αἱ κοιναὶ ἐφαπτόμεναι τῶν δύο κύκλων.

424) Εἰς πᾶν τρίγωνον τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων καὶ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ πρώτου ἀπὸ τοῦ δευτέρου εἶναι διπλασία τῆς ἀποστάσεως τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ τρίτου.

425) Ἐὰν τρίγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, οἱ τρεῖς πόδες τῶν καθέτων, αἵτινες ἄγονται ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς περιφερείας ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.

426) Ἐκ τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένων τριγώνων μέγιστον κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν εἶναι τὸ ἰσόπλευρον· καὶ ἐκ τῶν περιγεγραμμένων ἐλάχιστον εἶναι πάλιν τὸ ἰσόπλευρον.

427) Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς τέσσαρας γωνίας παντὸς τετραπλεύρου σχηματίζουσι τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

428) Εἰς πᾶν τετράπλευρον, οἱ τέσσαρες κύκλοι, οἵτινες ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν λαμβανομένων ἀνὰ τρεῖς, ἔχουσι τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπὶ μιᾶς περιφερείας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

429) Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τετραπλεύρου εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

430) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν πλευρῶν παντὸς τριγώνου ἔχει πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν διαμέσων αὐτοῦ, ὃν λόγον ἔχει ὁ 4 πρὸς τὸν 3.

431) Τὸ τετράγωνον τῆς διχοτομούσης γωνίαν τριγώνου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν δύο πλευρῶν τῆς γωνίας πλὴν τοῦ γινομένου τῶν δύο τμημάτων τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

432) Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν τριῶν αὐτοῦ πλευρῶν, διαιρεθέντι διὰ τοῦ διπλασίου τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

433) Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην μιᾷ γωνίᾳ, τὰς δὲ πλευρὰς τὰς περιεχούσας δύο ἄλλας γωνίας ἀναλόγου; ἢ τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια ἢ αἱ λοιπαὶ δύο γωνίαι αὐτῶν εἶναι παραπληρωματικαί.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος:

434) τῶν σημείων, ὧν τὰ ἀποστήματα ἀπὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἔχουσι λόγον δοθέντα μ:ν,

435) τῶν σημείων, ἀφ' ὧν δύο δοθέντες κύκλοι φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας (τουτέστιν αἱ ἐξ αὐτῶν ἀγόμεναι δύο ἐφαπτόμεναι ἑκατέρου τῶν κύκλων νὰ σχηματίζωσιν ἴσας γωνίας).

436) τῶν σημείων, ὧν τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων ἔχουσιν ἄθροισμα ἢ διαφορὰν ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ.

437) τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἵτινες ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων φαίνονται ὑπὸ γωνίας δοθείσας.

438) τῶν σημείων, ἀπὸ τῶν ὁποίων αἱ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι εἰς δύο δεδομένας περιφερείας εἶναι ἴσαι.

439) Νὰ γραφῇ κύκλος, διερχόμενος διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ἐφαπτόμενος τῆς δοθείσης εὐθείας ἢ τῆς δοθείσης περιφερείας.

440) Νὰ γραφῇ κύκλος, διερχόμενος διὰ τοῦ δοθέντος σημείου καὶ ἐφαπτόμενος δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἢ μιᾶς εὐθείας καὶ ἑνὸς κύκλου ἢ δύο κύκλων.

441) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδονται ἡ βάσις, ἡ ἀπέναντι γωνία καὶ ὁ λόγος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

442) Νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἢ ἐφαπτόμενος τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ τῶν δύο δοθεισῶν περιφερειῶν.

443) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ τρεῖς διάμεσοι.

444) Ἐν τῷ δοθέντι τριγώνῳ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον, ἀφ' οὗ αἱ εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἀγόμεναι εὐθεῖαι νὰ διαιρῶσιν αὐτὸ εἰς τρία τρίγωνα ἰσοδύναμα, ἢ σημεῖον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν πλευρῶν νὰ ἔχωσι λόγους δοθέντας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

445) Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον τῷ δοθέντι πολυγώνῳ καὶ ἔχον περίμετρον ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

446) Δοθέντων δύο ὁμοίων πολυγώνων, νὰ κατασκευασθῇ ἄλλο ὅμοιον αὐτοῖς καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο δοθέντων.

447) Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ.

448) Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ βάσεις καὶ αἱ διαγώνιοι.

449) Ἐκ τῆς τομῆς δύο περιφερειῶν νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα οὕτως, ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν ἀπολαμβανόμενον μέρος αὐτῆς νὰ εἶναι ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

450) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἴσον τῷ δοθέντι τριγώνῳ καὶ ἐγγεγραμμένον εἰς δοθὲν τρίγωνον ἢ περιγεγραμμένον περὶ δοθὲν τρίγωνον (***ἐγγεγραμμένον*** λέγεται τρίγωνον εἰς ἄλλο, ὅταν αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ἄλλου, ἑκάστη ἐφ' ἑκάστης· τοῦτο δὲ λέγεται ***περιγεγραμμένον*** περὶ τὸ πρῶτον).

451) Ἐκ τῶν εἰς τὸ αὐτὸ τρίγωνον περιγεγραμμένων τριγώνων, ἅτινα εἶναι ὅμοια πρὸς δοθὲν τρίγωνον, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον.

452) Εἰς τὸ δοθὲν ἰσόπλευρον τρίγωνον νὰ ἐγγραφῶσι τρεῖς κύκλοι, ὧν ἕκαστος νὰ ἐφάπτηται δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ τῶν δύο ἄλλων κύκλων. Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ τρεῖς οὗτοι κύκλοι θὰ εἶναι ἴσοι.

453) Νὰ ἐγγραφῇ κύκλος εἰς τὸν δοθέντα τομέα.

454) Ἐὰν ἐπὶ τῶν ἀκτίνων, ἐξ ὧν σύγκειται ἡ διάμετρος ἡμικυκλίου τινός, γραφῶσιν ἡμικύκλια ἐντὸς τοῦ ἄλλου, ζητεῖται νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τῶν τριῶν τούτων ἡμικυκλίων.

455) Νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἰς τρία μέρη τοιαῦτα, ὥστε ἐξ αὐτῶν νὰ συνιστᾶται τρίγωνον ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές.

456) Ἐὰν μία τῶν κορυφῶν τριγώνου κινῆται ἐπ' εὐθείας δοθείσης, αἱ δὲ δύο ἄλλαι μένωσιν ἀκίνητοι, εἰς ποίαν θέσιν γίνεται μεγίστη ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ταύτης;

457) Νὰ διαιρεθῇ τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς ἴσα μέρη δι' εὐθειῶν παραλλήλων μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

458) Ἐκ μιᾶς τῶν κορυφῶν τετραπλεύρου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα διαιροῦσα τοῦτο εἰς δύο μέρη ἴσα.

459) Δοθέντος τριγώνου, νὰ τμηθῇ δι' εὐθείας ἀπ' αὐτοῦ τραπέζιον, ἔχον ἐμβαδὸν δοθὲν ἢ περίμετρον δοθεῖσαν.

460) Δοθεῖσα εὐθεῖα νὰ τμηθῇ οὕτως, ὥστε τὸ ἄθροισμα (ἢ ἡ διαφορὰ) τῶν τετραγώνων τῶν δύο μερῶν νὰ εἶναι ἴσον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ.

461) Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ἐντὸς κύκλου νὰ ἀχθῇ χορδή, ἥτις νὰ διαιρῆται εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον δοθέντα.

462) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ μιᾶς τῶν καθέ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

των αὐτοῦ πλευρῶν καὶ ἐκ τῆς προβολῆς τῆς ἄλλης ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

463) Νὰ διαιρεθῇ τὸ δοθὲν τρίγωνον δι' εὐθείας παραλλήλου τῇ βάσει αὐτοῦ εἰς δύο μέρη ἔχοντα δοθέντα λόγον μ:ν.

464) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ μία τῶν ἴσων πλευρῶν καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους.

465) Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, ἔχον δοθὲν ἐμβαδὸν (ποῖον ἐκ τῶν ἐγγεγραμμένων ὀρθογωνίων εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον εἶναι τὸ μέγιστον;).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

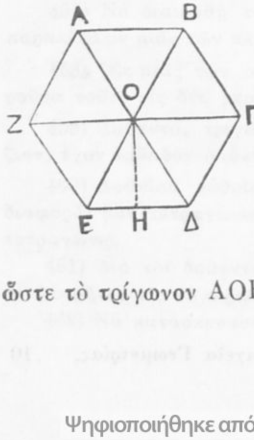
265. Ὁρισμοί. ***Κανονικὸν πολύγωνον*** λέγεται τὸ ἔχον πάσας τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας καὶ πάσας τὰς γωνίας αὐτοῦ ἴσας, τουτέστι τὸ ἰσογώνιον καὶ τὸ ἰσόπλευρον· οἷον τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ τὸ τετράγωνον εἶναι κανονικὰ σχήματα.

Κανονικὴ τεθλασμένη γραμμὴ λέγεται ἡ ἔχουσα πάσας τὰς πλευρὰς ἴσας καὶ πάσας τὰς γωνίας ἴσας.

266. **Θεώρημα.** ***Πᾶν κανονικὸν πολύγωνον εἶναι καὶ ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον.***

Ἔστω κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕΖ.

Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας Α καὶ Β τοῦ πολυγώνου τούτου θὰ τέμνωνται εἴς τι σημεῖον Ο (διότι $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} < 2$ ὀρ.), ὅπερ λέγω, ὅτι ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου.



Διότι, ἂν τὸ τρίγωνον ΑΟΒ περιστραφῇ περὶ τὴν ΟΒ προφανῶς ἡ μὲν ΒΑ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ τὸ δὲ σημεῖον Α θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ· ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΟΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΒΟΓ καὶ ἐπομέ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νως ἡ ΓΟ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Γ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΟΓ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ ΓΟΔ καὶ τοῦτο πάλιν ἐπὶ τοῦ ΔΟΕ κ.ο.κ· εἶναι δὲ τὰ ἴσα ταῦτα τρίγωνα ἰσοσκελῆ, διότι αἱ γωνίαι αὐτῶν, αἱ περὶ τὸ πολύγωνον, εἶναι πᾶσαι ἴσαι, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων γωνιῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου· ὥστε εἶναι

$$ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ = ΟΕ = ΟΖ.$$

Ἐὰν ἄρα μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΟΑ γραφῇ περιφέρεια, αὕτη θὰ εἶναι περιγεγραμμένη περὶ τὸ κανονικὸν πολύγωνον.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ κτλ. εἶναι ἴσα, καὶ αἱ κάθετοι, αἱ ἀπὸ τοῦ Ο ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ,... ἀγόμεναι θὰ εἶναι ἴσαι.

Ἐὰν δὲ μὲ κέντρον πάλιν τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα μίαν τῶν καθέτων τούτων, τὴν ΟΗ, γραφῇ περιφέρεια, αὕτη θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς αὐτό.

Τὸ κοινὸν κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς κανονικὸν πολύγωνον λέγεται καὶ ***κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου***· αἱ δὲ εὐθεῖαι, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ κέντρου κανονικοῦ πολυγώνου μέχρι τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, λέγονται ***ἀκτῖνες*** τοῦ πολυγώνου τούτου.

Ἀπόστημα δὲ αὐτοῦ λέγεται ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου του ἀπὸ ἑκάστης πλευρᾶς του.

Ἡ γωνία ἥτις σχηματίζεται ὑπὸ δύο ἀκτίνων κανονικοῦ πολυγώνου, αἵτινες ἄγονται εἰς τὰ ἄκρα πλευρᾶς τινος αὐτοῦ, καλεῖται ***κεντρικὴ*** γωνία τοῦ κανονικοῦ αὐτοῦ πολυγώνου. Οὕτω ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι κεντρικὴ γωνία. Ἐπειδὴ δὲ πᾶσαι αἱ κεντρικαὶ γωνίαι κανονικοῦ τινος πολυγώνου εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις, ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ $\frac{4}{\mu}$ τῆς ὀρθῆς, ἐὰν διὰ μ παραστήσωμεν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου.

Σημείωσις. Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις ἐφαρμόζεται ἀπαραλλάκτως ἐπὶ πάσης κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς, ὥστε καὶ εἰς πᾶσαν τοιαύτην γραμμὴν ἐγγράφεται κύκλος καὶ περιγράφεται κύκλος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀσκήσεις

466) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγεθος ἑκάστης τῶν γωνιῶν κανονικοῦ πενταγώνου, ἑξαγώνου, ὀκταγώνου.

467) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγεθος ἑκάστης τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν κανονικοῦ ὀκταγώνου, δεκαγώνου, δωδεκαγώνου.

468) Τίνος κανονικοῦ πολυγώνου ἑκάστη γωνία εἶναι $\frac{5}{3}$ τῆς ὀρθῆς;

469) Τίνος κανονικοῦ πολυγώνου ἑκάστη τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν εἶναι $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{15}$ τῆς ὀρθῆς;

470) Νὰ εὑρεθῇ ἡ κεντρικὴ γωνία κανονικοῦ ἑξαγώνου, πενταγώνου.

471) Ποίου κανονικοῦ πολυγώνου ἡ κεντρικὴ γωνία εἶναι 1 ὀρ., $\frac{1}{2}$ ὀρ., $\frac{1}{4}$ ὀρ.

472) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΒΕ κανονικοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

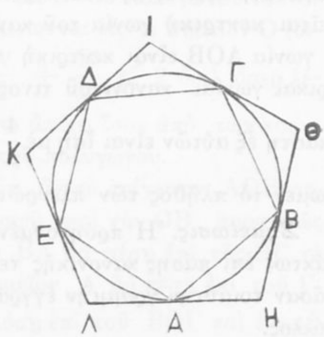
473) Εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν κανονικὰ πολύγωνα, τῶν ὁποίων αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι νὰ εἶναι ἀμβλεῖαι;

267. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν περιφέρειαι διαιρεθῶσιν εἰς ἴσα τόξα*** (περισσότερα τῶν δύο).

1) ***αἱ χορδαὶ αὐτῶν σχηματίζουσι ἐγγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον,***

2) ***αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως σχηματίζουσι περιγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον.***

α) Ἔστω ἡ περιφέρεια Ο, ἥτις διηρέθη εἰς ἴσα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ, τῶν ὁποίων ἄγονται αἱ χορδαί. Αἱ πλευραὶ τοῦ οὕτω σχηματισθέντος πολυγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων. Ἀλλὰ καὶ αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὴν περιφέρειαν καὶ βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων, ἐπειδὴ ἕκαστον τούτων εἶναι ὅλη ἡ περιφέρεια ἠλαττωμένη κατὰ δύο μέρη αὐτῆς· ἄρα τὸ πολύγωνον τοῦτο εἶναι κανονικόν.



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

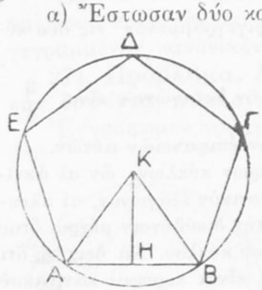
β) Ἔστω, ὅτι εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε τῆς διαιρέσεως τῆς ἄνω περιφερείας ἤχθησαν ἐφαπτόμεναι, αἵτινες σχηματίζουσι τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον ΗΘΙΚΛ. Τὰ τρίγωνα ΗΑΒ, ΘΒΓ, ΙΓΔ,... εἶναι ἴσα ἀλλήλοις καὶ ἰσοσκελῆ, διότι π.χ. τὰ ΗΑΒ καὶ ΙΓΔ, ἔχουσιν ΑΒ = ΓΔ καὶ τὰς γωνίας Α καὶ Β ἴσας μὲ τὰς Γ καὶ Δ, διότι καὶ αἱ τέσσαρες εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις, ὡς σχηματιζόμεναι ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης (156) καὶ διὰ τοῦτο ἴσαι τῷ ἡμίσει τῆς ἐπικέντρου, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ ἑτέρου τῶν ἴσων τόξων ΑΒ ἢ ΓΔ· ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΗΒ, ΓΙΔ εἶναι ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ· τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει καὶ περὶ τῶν ἄλλων τριγώνων ΘΒΓ, ΚΔΕ κτλ.

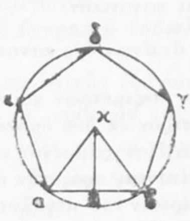
Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΗΑΒ, ΘΒΓ, ΙΓΔ... συνάγεται ὅτι αἱ γωνίαι Η, Θ, Ι,... τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις καὶ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΗ, ΗΒ, ΒΘ, ΘΓ,... εἶναι πᾶσαι ἴσαι· ἄρα καὶ αἱ πλευραὶ ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ, ΚΛ, ΛΗ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Ἄρα τὸ πολύγωνον ΗΘΙΚΛ εἶναι κανονικόν

Σημείωσις. Δύο πολύγωνα, τὰ ὁποῖα ἐγγίζουσι τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ αὐτὰ σημεῖα καὶ εἶναι τὸ μὲν ἓν ἐγγεγραμμένον, τὸ δὲ περιγεγραμμένον, λέγονται ἀντιστοιχοῦντα. Ὁμοίως ἀντιστοχοῦσαι λέγονται δύο τεθλασμέναι γραμμαί, ἐὰν εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ἡ μὲν ἐγγεγραμμένη, ἡ δὲ περιγεγραμμένη, ἐγγίζουσι δὲ ἀμφότεραι τὸ τόξον εἰς τὰ αὐτὰ σημεῖα.

268. **Θεώρημα.** ***Δύο κανονικὰ πολύγωνα, ἔχοντα ἴσον πλῆθος πλευρῶν εἶναι ὅμοια καὶ ὁ λόγος τῶν περιμέτρων αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων αὐτῶν ἢ τῶν ἀποστημάτων των.***

α) Ἔστωσαν δύο κανονικὰ πολύγωνα ΑΒΓΔ,... αβγδ,... ἑκάτερον τῶν ὁποίων ἔχει μ πλευράς. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου ἔχοντος μ πλευρὰς εἶναι 2μ-4, ἑκάστη γωνία ἑκατέρου





τῶν κανονικῶν πολυγώνων θὰ εἶναι $\frac{2\mu-4}{\mu}$ ἢ $2-\frac{4}{\mu}$ ὀρθαί· ἄρα τὰ πολύγωνα ταῦτα ἔχουσι τὰς γωνίας των ἴσας, ἔχουσι δὲ καὶ τὰς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους· διότι ὁ λόγος μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἑνὸς πρὸς μίαν τοῦ ἄλλου εἶναι πάντοτε ὁ αὐτός· ἄρα τὰ δύο ταῦτα πολύγωνα εἶναι ὅμοια.

β) Ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων $\frac{\kappa\alpha}{\mathrm{K A}}$ τῶν πολυγώνων τούτων, αἵτινες εἶναι καὶ ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων εἰς αὐτὰ κύκλων, ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν περιμέτρων αὐτῶν (249)· οὗτος δὲ πάλιν ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν ἀποστημάτων $\frac{\kappa\eta}{\mathrm{K H}}$, ἐπειδὴ $\frac{\kappa\alpha}{\mathrm{K A}}=\frac{\kappa\eta}{\mathrm{K H}}$ ὡς συνάγεται ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ακη καὶ ΑΚΗ.

Ἀσκήσεις

474) Αἱ ἐφαπτόμεναι κύκλου εἰς τὰς κορυφὰς ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν κανονικοῦ πολυγώνου, σχηματίζουσι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον κανονικὸν πολύγωνον, ἔχον ἴσον πλῆθος πλευρῶν.

475) Αἱ ἐφαπτόμεναι κύκλου εἰς τὰ μέσα τῶν τόξων τῶν ἀντιστοίχων εἰς τὰς πλευρὰς ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, σχηματίζουσι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον κανονικὸν πολύγωνον, ἔχον ἴσον πλῆθος πλευρῶν.

476) Ἐὰν τὰ ἀποστήματα κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον προεκταθῶσι μέχρι τῆς περιφερείας, τὰ σημεῖα εἰς ἃ τέμνουσι ταύτην, εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἴσου μὲ τὸ πρῶτον, αἱ δὲ κορυφαὶ ἀμφοτέρων τῶν πολυγώνων τούτων εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ πολυγώνου ἔχοντος διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

477) Πολύγωνον ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον εἰς δύο κύκλους ὁμοκέντρους εἶναι κανονικόν.

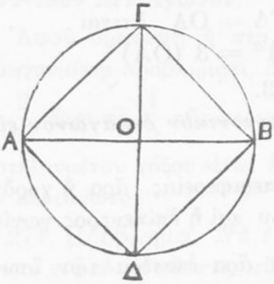
478) Ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων δύο κανονικῶν ὀκταγώνων εἶναι $\frac{3}{4}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν περιμέτρων καὶ τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν.

479) Εἰς τὸν μικρότερον ἐκ δύο ὁμοκέντρων κύκλων, ὧν αἱ ἀκτῖνες ἔχουσι λόγον 2, εἶναι ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον, αἱ πλευραὶ τοῦ ὁποίου προεκτείνονται πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν μέχρις ὅτου συναντήσωσι τὴν περιφέρειαν τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα εἰς ἃ τέμνεται ἡ περιφέρεια αὕτη, εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ νὰ εὑρεθῇ ἔπειτα ὁ λόγος τῶν περιμέτρων καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο ἑξαγώνων.

269. Πρόβλημα. ***Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

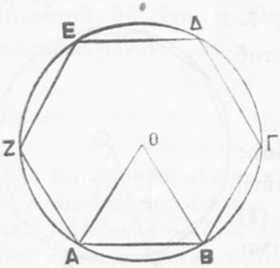
Ἄγομεν τυχοῦσαν διάμετρον, τὴν ΑΒ, καὶ ἔπειτα κάθετον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς τὴν διάμετρον ΓΔ (143)· αὗται διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν σχηματίζουσι τετράγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον.



Σημείωσις. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΟΓ πορίζόμεθα $(\mathrm{A\Gamma})^2 = 2\,(\mathrm{OA})^2$, ὅθεν καὶ $(\mathrm{A\Gamma}) = (\mathrm{AO})\sqrt{2}$,

270. Πρόβλημα. ***Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.***

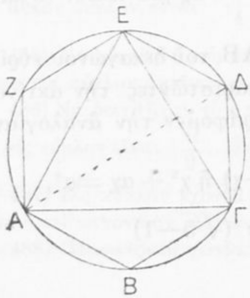
Ἐὰν ΑΒ εἶναι τὸ ἕκτον τῆς περιφερείας Ο ἡ χορδὴ ΑΒ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου ἑξαγώνου, ἡ δὲ γωνία ΑΟΒ θὰ εἶναι τὰ $\frac{4}{6}$ ἢ $\frac{2}{3}$ μιᾶς ὀρθῆς· ἑπομένως ἑκατέρα τῶν δύο ἄλλων ἴσων γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΟΒ θὰ εἶναι $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΟΒ θὰ εἶναι ἰσογώνιον· ὥστε θὰ εἶναι καὶ ΑΒ=ΟΑ=ΟΒ.



Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν ἐπὶ τῆς περιφερείας χορδὰς συνεχεῖς καὶ ἴσας πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς, αὗται θὰ σχηματίσωσι τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον.

271. Πρόβλημα. ***Νὰ ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.***

Ἐγγράφομεν πρῶτον κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ἔπειτα ἑνοῦμεν δι᾽ εὐθειῶν τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἐναλλάξ· τὸ τρίγωνον ΑΓΕ (ἢ τὸ ΒΔΖ) εὐκόλως νοεῖται, ὅτι θὰ εἶναι ἰσόπλευρον.



Σημείωσις. Τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΓ εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἀκτῖνος ΟΑ ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΔ (διάμετρος τοῦ κύκλου) σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΔ καὶ ἐκ τούτου εὐ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρίσκομεν :

$$(\text{ΑΓ})^2 = (\text{ΑΔ})^2 - (\text{ΓΔ})^2.$$

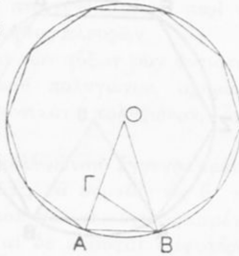
ἐπειδὴ δὲ $\text{ΑΔ} = 2.\,\text{ΟΑ}$ καὶ $\text{ΓΔ} = \text{ΟΑ}$, ἔπεται

$$(\text{ΑΓ})^2 = 4.\,(\text{ΟΑ})^2 - (\text{ΟΑ})^2 = 3\,(\text{ΟΑ})^2.$$

ὅθεν $\text{ΑΓ} = \text{ΟΑ}.\sqrt{3}.$

272. Πρόβλημα. ***Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκάγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.***

Ἔστω τὸ τόξον ΑΒ τὸ 1)10 τῆς περιφερείας, ἄρα ἡ χορδὴ ΑΒ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου δεκαγώνου καὶ ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΒ, θὰ εἶναι τὰ $\frac{4}{10}$ ἢ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς· ἄρα ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν Ακαὶ Β τοῦ τριγώνου ΑΟΒ εἶναι $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς. Ἐὰν δὲ διχοτομηθῇ ἡ γωνία Β διὰ τῆς ΒΓ, ἀμφότερα τὰ τρίγωνα ΟΓΒ, ΓΑΒ θὰ εἶναι ἰσοσκελῆ ($\text{Ο} = \text{ΟΒΓ}$ καὶ $\text{Α} = \text{ΑΓΒ}$). Διὰ ταῦτα εἶναι $\text{ΟΓ} = \text{ΓΒ} = \text{ΒΑ}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ΒΓ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Β τοῦ τριγώνου ΑΟΒ ἔχομεν (233).



$$\text{ΒΟ} : \text{ΒΑ} = \text{ΟΓ} : \text{ΓΑ}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν ΒΟ διὰ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΟ καὶ τὴν ΒΑ διὰ τῆς ἴσης αὐτῇ ΟΓ λαμβάνομεν, $\text{ΟΑ} : \text{ΟΓ} = \text{ΟΓ} : \text{ΓΑ}$ (1) ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἡ ἀκτὶς ΟΑ διαιρεῖται κατὰ τὸ Γ μέσον καὶ ἄκρον λόγον· ***ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς ἀκτῖνος, διαιρεθείσης μέσον καὶ ἄκρον λόγον.***

Ἐὰν λοιπὸν διαιρέσωμεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ μέσον καὶ ἄκρον λόγον καὶ λάβωμεν χορδὰς τοῦ κύκλου συνεχεῖς καὶ ἴσας πρὸς τὸ μεγαλύτερον τμῆμα ΟΓ, αἱ χορδαὶ αὗται θὰ σχηματίσωσι τὸ κανονικὸν ἐγγεγραμμένον δεκάγωνον.

Σημείωσις. Τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ δεκαγώνου εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἀναλογίας (1) ὡς ἑξῆς· παριστῶντες τὴν ἀκτῖνα ΟΑ διὰ τοῦ α καὶ τὴν ΑΒ διὰ τοῦ χ γράφομεν τὴν ἀναλογίαν ὡς ἔπεται

$$\alpha : \chi = \chi : (\alpha - \chi) \text{ ἐξ ἧς } \chi^2 = \alpha\,(\alpha - \chi) \text{ ἢ } \chi^2 + \alpha\chi = \alpha^2,$$

$$\text{ὅθεν (Στοιχ. Ἄλγ.) } \chi = \frac{1}{2}\,\alpha\,(\sqrt{5} - 1)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

273. Πρόβλημα. ***Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον κανονικὸν πεντάγωνον.***

Ἀφοῦ διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια εἰς δέκα ἴσα μέρη ὡς ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι, δύο τοιαῦτα μέρη συνεχῆ ἀποτελοῦσι τὰ $\frac{2}{10}$, ἤτοι τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς περιφερείας ἄρα ἡ χορδὴ τοῦ ὑπ' αὐτῶν ἀποτελουμένου τόξου εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου.

274. Πρόβλημα. ***Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν πεντεκαιδεκάγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.***

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ $\frac{1}{6}$ τῆς περιφερείας ἀφαιρεθῇ τὸ $\frac{1}{10}$ αὐτῆς, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$ ἢ $\frac{4}{60}$ ἤτοι $\frac{1}{15}$ τῆς περιφερείας καὶ ἡ χορδὴ αὐτοῦ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πεντεκαιδεκαγώνου.

Ἀσκήσεις

480) Νὰ ὁρισθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ περὶ κύκλον περιγεγραμμένου τετραγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος.

481) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο τετραγώνων ἐξ ὧν τὸ ἓν εἶναι περιγεγραμμένον, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.

482) Ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τετραγώνου νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου. Ἐφαρμογὴ ὅταν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι 12,25 τ. μ.

483) Δύο ἴσα κανονικὰ ἑξάγωνα ἔχουσι μίαν πλευρὰν κοινὴν μήκους λ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν.

484) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο κανονικῶν ἑξαγώνων, ὧν τὸ ἓν εἶναι ἐγγεγραμμένον τὸ δὲ περιγεγραμμένον περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον, εἶναι $\frac{3}{4}$.

485) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ δωδεκαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος α.

486) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἀπόστημα ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον εἶναι $\frac{\alpha}{2}$, ἂν α εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου.

487) Εἰς κύκλον ἔχοντα ἀκτῖνα 3 μ. ἐγγράφονται ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ κανονικὸν ἑξάγωνον· νὰ εὑρεθῶσιν τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν.

488) Ἡ κεντρικὴ γωνία ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, ἀκτῖνος α, κα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νονικοῦ πολυγώνου εἶναι $\frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου τούτου.

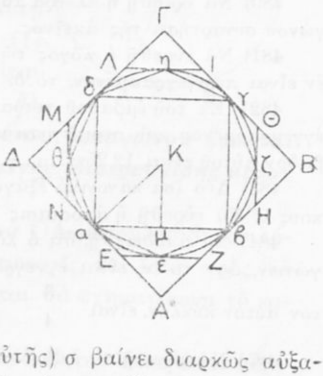
489) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀπόστημα κανονικοῦ δεκαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

490) Εἰς κύκλον ἔχοντα ἀκτῖνα 5 μ. ἐγγράφεται κανονικὸν δεκάγωνον· νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ

275. **Θεώρημα.** ***Αἱ περίμετροι δύο κανονικῶν πολυγώνων ἐχόντων ἴσον πλῆθος πλευρῶν, ἐξ ὧν τὸ μὲν εἶναι ἐγγεγραμμένον περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον, ἔχουσι μήκη τείνοντα πρὸς κοινὸν ὅριον, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῶν, ἀεὶ διπλασιάζηται.***

Ἔστω τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κύκλῳ Κ κανονικὸν πολύγωνον αβγδ καὶ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτὸ περιγεγραμμένον ΑΒΓΔ. Ἕκαστον τῶν τόξων αβ, βγ, γδ... διαιροῦμεν εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ σχηματίζομεν τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον αεβζγηδθ καὶ τὸ ἀντίστοιχον περιγεγραμμένον ΕΖΗΘ..., ἑκατέρου τῶν ὁποίων, ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἔχει διπλασιασθῇ. Ἐπὶ τῶν νέων πολυγώνων ἐργαζόμεθα καθ' ὃν τρόπον εἰργάσθημεν καὶ ἐπὶ τῶν πρώτων καὶ καθ' ἑξῆς οὕτω ἀδιαλείπτως· λέγω τότε, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου τῆς ὁποίας τὸ μῆκος παριστῶ διὰ τοῦ σ καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου τῆς ὁποίας τὸ μῆκος παριστῶ διὰ τοῦ Σ, τείνουσι πρὸς κοινὸν ὅριον. Διότι



1ον) Ἡ περίμετρος (τὸ μῆκος αὐτῆς) σ βαίνει διαρκῶς αὐξανομένη. Π. χ. ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου αεβζ. . . εἶναι μεγαλυτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ αβγδ, διότι τὸ πρῶτον περικλείει τὸ δεύτερον (105). Ἀλλὰ ἡ περίμετρος σ, ἥτις βαίνει διαρκῶς αὐξανομένη, ἐφ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου διαρκῶς διπλασιάζηται, μένει πάντοτε μικροτέρα τῆς περιμέτρου (τοῦ τυχόντος περιγεγραμμένου πολυγώνου), διότι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πᾶν περιγεγραμμένον πολύγωνον περικλείει πᾶν ἐγγεγραμμένον. Ἑπομένως ἡ περίμετρος σ, ἥτις ἀεὶ μὲν αὐξάνεται μένει δὲ πάντοτε μικροτέρα τῆς σταθερᾶς περιμέτρου (τοῦ τυχόντος περιγεγραμμένου πολυγώνου), ἔχει ὅριον (Στ. Ἄλγ.).

2ον) Ἡ περίμετρος Σ βαίνει διαρκῶς ἐλαττουμένη· π. χ. ἡ περίμετρος τοῦ ΕΖΗΘ.... εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου ΑΒΓΔ, ἐπειδὴ τὸ πρῶτον πολύγωνον περικλείεται ὑπὸ τοῦ δευτέρου· ἀλλ' ἂν καὶ ἡ περίμετρος Σ βαίνει διαρκῶς ἐλαττουμένη, μένει ὅμως πάντοτε μεγαλυτέρα τῆς σταθερᾶς περιμέτρου, τοῦ τυχόντος ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, ἤτοι καὶ ἡ περίμετρος Σ ἔχει ὅριον.

3ον) Νῦν θὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ δύο ταῦτα ὅρια εἶναι ἴσα. Διότι τὰ κανονικὰ πολύγωνα αβγδ καὶ ΑΒΓΔ ὡς ἔχοντα ἴσον πλῆθος πλευρῶν εἶναι ὅμοια. Ἑπομένως ὁ λόγος τῶν περιμέτρων αὐτῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστημάτων αὐτῶν (268) ἤτοι εἶναι $\frac{\sigma}{\Sigma}=\frac{K\mu}{K\alpha}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ἰσότης αὕτη ἀληθεύει, οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν κανονικῶν πολυγώνων θὰ ἔχομεν $\text{ὅρ.}\frac{\sigma}{\Sigma}=\text{ὅρ.}\frac{K\mu}{K\alpha}$ ἢ (Στ. Ἄλγ.) $\frac{\text{ὅρ.}\,\sigma}{\text{ὅρ.}\,\Sigma}=\frac{\text{ὅρ}\,K\mu}{\text{ὅρ}\,K\alpha}$. Ἀλλὰ τὸ ἀπόστημα Κμ, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἀεὶ διπλασιάζεται, τείνει πρὸς τὴν ἀκτῖνα Κα τοῦ κύκλου Κ ἤτοι ὅρ. Κμ = Κα, τὸ δὲ Κα εἶναι σταθερόν. Κατὰ ταῦτα λοιπὸν ἔχομεν $\frac{\text{ὅρ.}\,\sigma}{\text{ὅρ.}\,\Sigma}=\frac{K\alpha}{K\mu}=1$ ἤτοι ὅρ. σ = ὅρ. Σ, ὅ, ἔ. δ

276. **Ὁρισμοί.** ***Μῆκος περιφερείας κύκλου, καλεῖται τὸ κοινὸν ὅριον πρὸς ὃ τείνουσι τὰ μήκη τῶν περιμέτρων τῶν ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων καὶ τῶν ἀντιστοίχων περιγεγραμμένων, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἀεὶ διπλασιάζηται.***

Ἡ εὐθεῖα δέ, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, καλεῖται ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας.

Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας εἶναι εὐθεῖα μεγαλυτέρα μὲν τῆς περιμέτρου παντὸς ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, μικροτέρα δὲ τῆς περιμέτρου παντὸς περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν κανονικοῦ πολυγώνου καὶ μία μόνη.

277. **Θεώρημα.** (Ἱπποκράτους τοῦ Χίου) ***Αἱ περιφέρειαι δύο κύκλων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστωσαν δύο κύκλοι κ καὶ Κ ὧν αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἀντιστοίχως α καὶ Α. Εἰς αὐτοὺς ἐγγράφομεν δύο κανονικὰ πολύγωνα ἔχοντα ἴσον πλῆθος πλευρῶν. Τὰ πολύγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια ἑπομένως αἱ περίμετροι αὐτῶν, τὰς ὁποίας παριστῶ διὰ σ καὶ Σ εἶναι ὡς τὰ ἀποστήματα αὐτῶν (268) τὰ ὁποῖα παριστῶ διὰ η καὶ Η· ἤτοι ἔχομεν $\frac{\sigma}{\Sigma}=\frac{\eta}{H}$. Ἀλλ' ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἀεὶ διπλασιάζηται, ὁ μὲν λόγος $\frac{\sigma}{\Sigma}$ θὰ ἔχει ὅριον τὸν λόγον τῶν δύο περιφερειῶν, ὧν τὰ μήκη παριστῶ διὰ γ καὶ Γ, ὁ δὲ λόγος $\frac{\eta}{H}$ θὰ ἔχῃ ὅριον τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων ἤτοι θὰ ἔχωμεν ὅρ $\frac{\sigma}{\Sigma}=$ ὅρ $\frac{\eta}{H}$ ἢ $\frac{\text{ὅρ}\sigma}{\text{ὅρ}\Sigma}=\frac{\text{ὅρ}\eta}{\text{ὅρ}H}$ ἢ $\frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{\alpha}{A}$ ὅ. ἐ. δ.

278. Πόρισμα. 1ον. ***Ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι σταθερὸς ἤτοι εἶναι ὁ αὐτὸς εἰς πάντας τοὺς κύκλους.***

Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{\alpha}{A}$ εὑρίσκομεν $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\Gamma}{A}$ ἐξ ἧς καὶ $\frac{\gamma}{2\alpha}=\frac{\Gamma}{2A}$, τουτέστιν αἱ περιφέρειαι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀκτῖνας αὐτῶν ἢ καὶ πρὸς τὰς διαμέτρους.

Ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρόν της παρίσταται ἐν τοῖς συγγράμμασι πάντων τῶν ἐθνῶν διὰ τοῦ ἑλληνικοῦ γράμματος π. Ἀποδεικνύεται δέ, ὅτι εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος (ἤτοι ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά).

Κατωτέρω θὰ δείξωμεν πῶς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὅσα θέλομεν ψηφία αὐτοῦ, εὑρίσκεται δὲ ὅτι $\pi=3{,}141592653589 7932\ldots\ldots$

Διὰ τὰς ἐφαρμογὰς κάμνουσι συνήθως χρῆσιν τῆς τιμῆς $\pi=3{,}1416$ ἥτις εἶναι κατὰ προσέγγισιν καὶ καθ' ὑπεροχήν.

279. Πόρισμα 2ον. ***Ἐὰν ἡ ἀκτὶς κύκλου παρασταθῇ διὰ τοῦ α, τὸ μῆκος τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἶναι 2πα.***

Σημ. Ἡ περιφέρεια κύκλου, οὗ εἶναι $\alpha=1$, ἔχει μῆκος 2π.

Ἀσκήσεις.

491) Ἡ ἀκτὶς κύκλου εἶναι 8 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρεια αὐτοῦ ;

492) Ἡ περιφέρεια κύκλου τινὸς εἶναι 15μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίς του;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

493) Ἡ διάμετρος τροχοῦ ποδηλάτου εἶναι 0,75 μ. Πόσας στροφὰς θὰ κάμῃ ἐπὶ διαδρομῆς 1 χιλιομέτρου;

494) Ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχει πλευρὰν 3 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρεια ἡ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον τοῦτο;

495) Αἱ περίμετροι δύο ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων εἶναι 2,4 μ. καὶ 1,8 μ. Ἡ περιφέρεια ἡ περιγεγραμμένη περὶ τὸ πρῶτον πολύγωνον εἶναι 4 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρεια ἡ περιγεγραμμένη περὶ τὸ ἄλλο πολύγωνον;

ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

280. Ὁρισμοί. ***Μῆκος τόξου κύκλου τινὸς καλεῖται τὸ κοινὸν ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνουσι, τὰ μήκη τῶν περιμέτρων κανονικῶν τεθλασμένων γραμμῶν ἐγγεγραμμένων εἰς αὐτὰ καὶ περατουμένων εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου καὶ τῶν ἀντιστοίχων περιγεγραμμένων, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἀεὶ διπλασιάζηται.***

Ἀποδεικνύεται δὲ ἡ ὕπαρξις τοῦ κοινοῦ τούτου ὁρίου, διὰ τῶν αὐτῶν συλλογισμῶν, δι᾽ ὧν ἀπεδείχθη καὶ ἡ ὕπαρξις τοῦ ὁρίου τῶν περιμέτρων τῶν ἀντιστοίχων κανονικῶν πολυγώνων τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγρ μμένων περὶ ὁλόκληρον περιφέρειαν.

Ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ μῆκος ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τόξου τινὸς καλεῖται ἀνάπτυγμα τοῦ τόξου τούτου. Εἶναι δὲ αὕτη μεγαλυτέρα μὲν πάσης ἐν τῷ τόξῳ ἐγγεγραμμένης κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς, μικροτέρα δὲ πάσης περὶ αὐτὸ κανονικῆς περιγεγραμμένης καὶ μία μόνη.

Σημ. α΄. Τὰ εἰς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας ἀντιστοιχοῦντα τόξα δύο κύκλων λέγονται ***ὅμοια*** (ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς οἱ ἴσας γωνίας ἔχοντες, λέγονται ***ὅμοιοι***). Ἀποδεικνύεται δέ, καθ᾽ ὃν τρόπον ἀπεδείχθη διὰ τὰς περιφερείας (277), ὅτι καὶ τὰ ὅμοια τόξα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν.

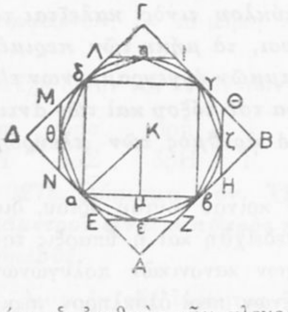
Σημ. β΄. Ὅπως ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς εἶναι ὁ αὐτὸς εἰς πάντας τοὺς κύκλους (278), οὕτω καὶ ὁ λόγος ἑκάστου τόξου πρὸς τὴν ἀκτῖνα του εἶναι ὁ αὐτὸς εἰς πάντα τὰ ὅμοια τόξα· διότι ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{(\text{τόξ. } \alpha\beta)}{(\text{τοξ. } AB)} = \frac{\alpha}{A}$ (α καὶ Α ἀκτῖνες τῶν τόξων τούτων) συνάγεται $\frac{(\text{τόξ. } \alpha\beta)}{\alpha} = \frac{(\text{τόξ. } AB)}{A}$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΚΥΚΛΟΥ

281. **Θεώρημα.** ***Τὰ ἐμβαδὰ δύο κανονικῶν πολυγώνων ἐχόντων ἴσον πλῆθος πλευρῶν, ἐξ ὧν τὸ μὲν εἶναι ἐγγεγραμμένον, τὸ δὲ περιγεγραμμένον περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον ἔχουσι κοινὸν ὅριον, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἀεὶ διπλασιάζηται.***

Ἔστω τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κύκλῳ Κ κανονικὸν πολύγωνον αβγδ καὶ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτὸ περιγεγραμμένον ΑΒΓΔ. Διαιροῦντες ἕκαστον τῶν τόξων αβ, βγ, γδ... εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ οὕτω καθ᾽ ἑξῆς ἀδιαλείπτως, καὶ ἄγοντες τὰς χορδὰς καὶ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῶν τόξων λαμβάνομεν σειρὰν ἀντιστοίχων κανονικῶν πολυγώνων ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἀεὶ διπλασιάζεται. Λέγω, ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν πολυγώνων τούτων τείνουσι πρὸς κοινὸν ὅριον· διότι



1ον) Τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἐγγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων βαίνουσι ἀεὶ αὐξανόμενα, διότι ἕκαστον τούτων περιέχει τὸ προηγούμενον αὐτοῦ· μένουσιν ὅμως πάντοτε μικρότερα τοῦ ἐμβαδοῦ παντὸς περιγεγραμμένου πολυγώνου. Ἄρα τὰ ἐμβαδὰ ταῦτα τείνουσι πρὸς ὅριον.

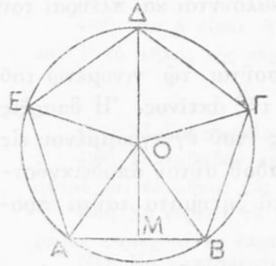
2ον) Τὰ ἐμβαδὰ τῶν περιγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων βαίνουσιν ἀεὶ ἐλαττούμενα, διότι ἕκαστον τούτων περιέχεται ὑπὸ τοῦ προηγουμένου του· μένουσιν ὅμως πάντοτε μικρότερα τοῦ ἐμβαδοῦ παντὸς ἐγγεγραμμένου πολυγώνου· ἄρα καὶ ταῦτα τὰ ἐμβαδὰ τείνουσι πρὸς ὅριον.

3ον) Τὰ δύο ταῦτα ὅρια εἶναι ἴσα· διότι ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ παντὸς ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀντιστοίχου του περιγεγραμμένου ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῶν ἀκτίνων αὐτῶν (247), ὅστις λόγος τῶν ἀκτίνων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστημάτων αὐτῶν (268)· ὁ δὲ τελευταῖος οὗτος λόγος τείνει ὡς εἴδομεν (275) πρὸς τὴν 1.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

282. Ὁρισμός. ***Ἐμβαδὸν κύκλου καλεῖται τὸ ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον κανονικοῦ πολυγώνου ἢ περιγεγραμμένου τοιούτου, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἀεὶ διπλασιάζηται.***

283. **Θεώρημα.** ***Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς περιφερείας αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.***



Ἔστω κύκλος τις Ο, οὗ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ Κ.

Πρὸς τοῦτο ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύκλον τοῦτον κανονικὸν πολύγωνον, τὸ ΑΒΓΔΕ εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ ὁποίου ἄγομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ κτλ. Τὸ πολύγωνον τοῦτο διαιρεῖται οὕτω εἰς τρίγωνα ἔχοντα βάσεις τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου καὶ ὕψος τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ΟΜ· Τὸ ἐμβαδὸν τότε αὐτοῦ εἶναι

$$\frac{1}{2}(\mathrm{AB}).\ (\mathrm{OM}) + \frac{1}{2}(\mathrm{B\Gamma}).\ (\mathrm{OM}) + \frac{1}{2}(\Gamma\Delta).\ (\mathrm{OM}) +$$

$$\frac{1}{2}(\Delta\mathrm{E}).\ (\mathrm{OM}) + \frac{1}{2}(\mathrm{EA}).\ (\mathrm{OM}) \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{1}{2}(\mathrm{OM})\left[(\mathrm{AB}) + (\mathrm{B\Gamma}) + (\Gamma\Delta) + (\Delta\mathrm{E}) + (\mathrm{EA})\right]$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἐμ. Κ = ὅρ. ἐμ. ΑΒΓΔΕ. ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἀεὶ διπλασιάζηται, ἕπεται ὅτι

$$\text{ἐμ}\ \mathrm{K} = \frac{1}{2}\ \text{ὅρ.}\ (\mathrm{OM})\ \text{ὅρ.}\left[(\mathrm{AB}) + (\mathrm{B\Gamma}) + (\Gamma\Delta) + (\Delta\mathrm{E}) + (\mathrm{EA})\right]$$

Ἀλλ' ἡ μὲν περίμετρος ἔχει ὅριον τὸ μῆκος τῆς περιφερείας Γ, τὸ δὲ ἀπόστημα ἔχει ὅριον τὴν ἀκτῖνα α. Ἐντεῦθεν συνάγεται

$$\text{ἐμ.}\ \mathrm{K}. = \frac{1}{2}\alpha.\ \Gamma = \Gamma.\ \frac{\alpha}{2}.$$

Σημ. α'. Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον θὰ εἴχομεν καταλήξει καὶ ἂν ἐλαμβάνομεν περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον κανονικὸν πολύγωνον· διότι καὶ ἡ περίμετρος τοιούτου πολυγώνου ἔχει ὅριον τὸ Γ.

Σημ. β'. Καὶ τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως ὁρίζεται ὡς τὸ ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ κανονικοῦ πολυγωνικοῦ τομέως ἐγγεγραμμέ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νου εἰς τὸν κυκλικὸν τομέα, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἀεὶ διπλασιάζηται.

Καλεῖται δὲ πολυγωνικὸς κανονικὸς τομεὺς ἐγγεγραμμένος εἰς τὸν κυκλικὸν τομέα, τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν ἀκτίνων τοῦ κυκλικοῦ τομέως καὶ τῆς κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τομέως. Αἱ πλευραὶ δὲ ταύτης καλοῦνται καὶ πλευραὶ τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ μήκους τοῦ τόξου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος. Ἡ ὕπαρξις δὲ τοῦ ὁρίου τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κυκλικὸν τομέα, καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτοῦ ἀποδεικνύονται καθ᾿ ὃν τρόπον ἀπεδείχθησαν καὶ τὰ ζητήματα ταῦτα προκειμένου περὶ ὁλοκλήρου κύκλου.

284. **Πόρισμα 1ον.** ***Ὁ κύκλος εἶναι ἰσοδύναμος τριγώνῳ ἔχοντι βάσιν μὲν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας αὐτοῦ, ὕψος δὲ τὴν ἀκτῖνα· ἢ ὀρθογωνίῳ ἔχοντι βάσιν μὲν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας, ὕψος δὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.***

285. **Πόρισμα 2ον.** ***Τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ π ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.***

$$\text{διότι εἶναι } K = \Gamma . \frac{\alpha}{2} \quad \text{καὶ } \Gamma = 2\pi\alpha$$

$$\text{ἄρα } K = 2\pi\alpha . \frac{\alpha}{2} = \pi\alpha^2$$

286. **Πόρισμα 3ον.** ***Δύο κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.***

Σημ. Τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου συνίσταται εἰς τὴν κατασκευὴν τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς τὸν δοθέντα κύκλον. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται διὰ τῶν προηγουμένων εἰς τὴν κατασκευὴν εὐθείας ἴσης τῷ ἀναπτύγματι τῆς περιφερείας. Διότι ἂν ἠδυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν ταύτην, τὸ ἐπ᾿ αὐτῆς ὡς βάσεως κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον, τὸ ἔχον ὕψος τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸν κύκλον· τρέποντες δὲ τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἰς τετράγωνον, θὰ εἴχομεν τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ κύκλῳ· ἀλλ᾿ ἡ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γεωμετρικὴ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου, ἤτοι ἡ κατασκευὴ τοῦ ἀναπτύγματος τῆς περιφερείας διὰ τῆς βοηθείας τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου ἀπεδείχθη ἀδύνατος ὑπὸ τοῦ γερμανοῦ μαθηματικοῦ Lindemann.

Ἀσκήσεις.

496) Ἂν Δ εἶναι ἡ διάμετρος κύκλου τινός, Κ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ καὶ Γ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας νὰ δειχθῇ ὅτι

$$K = \pi \frac{\Delta^2}{4} \text{ καὶ } K = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\Gamma^2}{4}$$

497) Ἡ ἀκτὶς κύκλου τινὸς εἶναι 5 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

498) Τὸ ἐμβαδὸν κύκλου τινὸς εἶναι 40 τ. μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του.

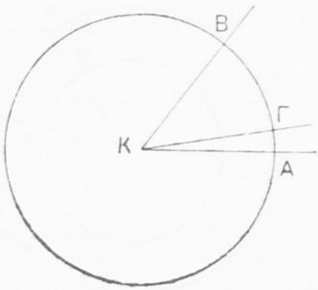
499) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεταξὺ δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν περιεχομένης ἐπιπέδου ἐπιφανείας.

500) Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος ἔχων ἐπιφάνειαν ἴσην τῇ διαφορᾷ ἢ τῷ ἀθροίσματι δύο ἄλλων δοθέντων κύκλων.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΓΩΝΙΩΝ

287. Μέτρησις γωνίας λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτῆς πρὸς ἄλλην, ἥτις λαμβάνεται ὡς μονάς. Ἀλλ' ἐπειδὴ γνωρίζομεν, ὅτι ἐν κύκλῳ ἡ ἐπίκεντρος γωνία μεταβάλλεται ἀναλόγως τοῦ τόξου ἐφ' οὗ βαίνει, δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὴν μέτρησιν γωνιῶν εἰς τὴν μέτρησιν τόξων.

Καὶ πράγματι· ἐὰν τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας ΑΚΒ τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ μετρήσωμεν θέσωμεν εἰς τὸ κέντρον τοῦ τυχόντος κύκλου, λάβωμεν δὲ ὡς μονάδα γωνιῶν τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν ΑΚΓ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τόξου,ὅπερ λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν τόξων τοῦ κύκλου Κ, θὰ ἔχομεν



$$\frac{\text{γων } AKB}{\text{γων } AK\Gamma} = \frac{\text{τοξ } AB}{\text{τοξ } A\Gamma}$$

ἢ $$\frac{\text{γων } AKB}{1} = \frac{\text{τοξ } AB}{1}$$ ἤτοι

(γων. ΑΚΒ)=(τοξ. ΑΒ)· τὸ τόξον ἑπομένως ΑΒ καὶ ἡ γωνία ΑΚΒ παρίστανται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

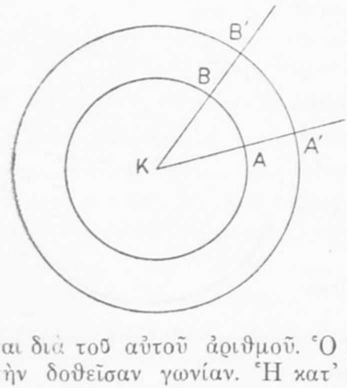
Ὡς μονὰς μετρήσεως τόξων λαμβάνεται συνήθως ἡ μοῖρα

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἥτις εἶναι τὸ $\frac{1}{360}$ τῆς περιφερείας· ἑκάστην μοῖραν διαιροῦμεν εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **λεπτὰ πρῶτα** καὶ ἕκαστον λεπτὸν πρῶτον εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **λεπτὰ δεύτερα.** Ἵνα λοιπὸν μετρήσωμεν δοθεῖσαν γωνίαν, θέτομεν τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ κέντρον τῆς ὡς εἴρηται διῃρημένης περιφερείας καὶ βλέπομεν πόσων μοιρῶν καὶ λεπτῶν πρώτων καὶ δευτέρων εἶναι τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας περιεχόμενον τόξον. Ἐὰν π.χ. τὸ τόξον εἶναι 36^0 καὶ ἡ γωνία εἶναι 36^0· ἐὰν δὲ τὸ τόξον εἶναι $32^0\ 25'$ καὶ $40''$ καὶ ἡ γωνία εἶναι $32^0\ 25'\ 40''$. Ἡ ὀρθὴ γωνία ἐπειδὴ βαίνει ἐπὶ τοῦ τετάρτου τῆς περιφερείας εἶναι 90^0. Ἡ γωνία λοιπὸν 1^0, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν οὕτω ὡς μονάδα μετρήσεως γωνιῶν εἶναι τὸ $\frac{1}{90}$ τῆς ὀρθῆς. Εἶναι ἄρα ὁ ἀριθμὸς ὅστις παριστᾷ μίαν γωνίαν, μετρηθεῖσαν ὡς ἄνω ἐλέχθη, ὁ αὐτός, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ μετρήσωμεν τόξον τι καὶ διὰ μονάδος μήκους οἱασδήποτε. Ἀλλ᾽ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ λαμβάνομεν ὡς μονάδα μήκους τὴν ἀκτῖνα τοῦ τόξου.

Ἐὰν ἤδη δοθεῖσαν γωνίαν καταστήσωμεν ἐπίκεντρον, λάβωμεν δὲ ὡς μονάδα γωνιῶν τὴν ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἐπίκεντρον γωνίαν, ἥτις βαίνει ἐπὶ τόξου ἔχοντος μῆκος ἴσον τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου καὶ ἡ δοθεῖσα γωνία καὶ τὸ τόξον ἐφ᾽ οὗ βαίνει παρίστανται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Ὁ ἀριθμὸς δὲ δι᾽ οὗ παρίσταται οὕτω ἡ γωνία εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου. Διότι



τὰ τόξα τῶν διαφόρων κύκλων ἐφ᾽ οὗ βαίνει αὕτη εἶναι ὅμοια· γνωρίζομεν δέ, ὅτι ὁ λόγος ἑκάστου τόξου πρὸς τὴν ἀκτῖνα του εἶναι ὁ αὐτὸς εἰς πάντα τὰ ὅμοια τόξα (280β)· ἐπειδὴ δὲ ἕκαστον τῶν τόξων τούτων μετρεῖται διὰ τῆς ἀκτῖνος του, ἕπεται ὅτι τὰ ὅμοια ταῦτα τόξα παρίστανται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Ὁ αὐτὸς δὲ ἀριθμὸς παριστᾷ καὶ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν. Ἡ κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον μετρουμένη γωνία λέγομεν, ὅτι μετρεῖται εἰς ἀκτίνια.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπειδὴ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἀκτῖνος α εἶναι 2πα τὸ τεταρτημόριον ἔχει μῆκος $\frac{\pi\alpha}{2}$ ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς ὅστις παριστᾷ τὴν ὀρθὴν γωνίαν εἰς ἀκτίνια εἶναι ὁ $\frac{\pi\alpha}{2}$: α ἤτοι ὁ $\frac{\pi}{2}$, ὁ δὲ παριστῶν τὴν γωνίαν 1^0 εἰς ἀκτίνια εἶναι ὁ $\frac{\pi}{180}$ καὶ ὁ τὴν γωνίαν μ^0 εἶναι ὁ $\frac{\pi\mu}{180}$.

Ὁ τρόπος οὗτος τῆς μετρήσεως τῶν **γωνιῶν** εἶναι **συνήθης** ἐν τῇ ἀνωτέρᾳ μαθηματικῇ.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΤΟΞΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΩΣ

1) Ἂν παρασταθῇ διὰ τοῦ α ἡ ἀκτίς, ἡ περιφέρεια ἔχει μῆκος 2πα καὶ τὸ τόξον μιᾶς μοίρας εἶναι $\frac{2\pi\alpha}{360} = \frac{\pi\alpha}{180}$ καὶ τόξον μ μοιρῶν εἶναι $\frac{\pi\alpha\mu}{180}$. Οὕτω τὸ μῆκος τοῦ τόξου 75^0 κύκλου ἀκτῖνος 12 μ. εἶναι

$$\frac{\pi.\,12.\,75}{180} = 15{,}7080 \text{ μ.}$$

2) Τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως, οὗ ἡ γωνία εἶναι μ μοιρῶν, δίδεται (283 σημ. β') ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\frac{\pi\alpha\mu}{180}.\ \frac{\alpha}{2} \text{ ἤτοι } \frac{\pi\alpha^2\mu}{360}.$$

Οὕτω τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως οὗ ἡ γωνία εἶναι 15^0 καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου 20 μ.

$$\text{εἶναι } \frac{\pi.\,20^2.\,15}{360} = 52{,}36 \text{ τ. μ.}$$

Ἀσκήσεις

501) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τόξου 47^0, κύκλου ἀκτῖνος 9 μ. ;

502) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τόξου $21^0\ 40'\ 20''$ κύκλου ἀκτῖνος 5μ. ;

503) Τὸ μῆκος τόξου $22^0\ 30'$ εἶναι 3,927 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας εἰς ἣν ἀνήκει τοῦτο.

504) Τόξον τι περιφερείας ἀκτῖνος 3,20 μ. ἔχει μῆκος 5,60 μ. Πόσων μοιρῶν εἶναι τοῦτο;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

505) Γωνία $28^0\ 30'$ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον ἀκτῖνος 7,5 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ τόξου τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας.

506) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία, ἥτις παρίσταται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 1;

507) Εἰς κύκλον ἔχοντα ἀκτῖνα 12 μ. πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως οὗ ἡ γωνία εἶναι 5^0;

508) Κυκλικοῦ τομέως 50^0 τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 15,7080 τ. μ. Εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου εἰς ὃν ἀνήκει.

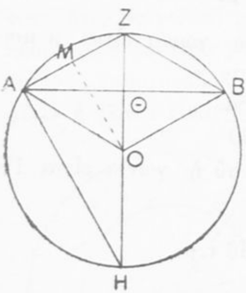
509) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τμήματος κύκλου ἀκτῖνος 3μ. ὅταν τὸ τόξον τοῦ τμήματος εἶναι 60^0.

510) Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἑνὸς εἶναι τριπλασία τῆς τοῦ ἄλλου. Εὑρεῖν τὰς ἀκτῖνας τῶν κύκλων τούτων γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς περιεχομένης μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν εἶναι 28,80 τ. μ.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ Π ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΙΝ

288. Πρόβλημα. ***Ἐκ τοῦ ἀποστήματος κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον καὶ ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου, εὑρεῖν τὸ ἀπόστημα τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, ὅπερ ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.***

Ἔστω ΑΒ μία τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου καὶ ΟΘ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ· ἐὰν ἡ ΟΘ προεκβληθῇ μέχρι τῆς περιφερείας, θὰ διαιρέσῃ τὸ τόξον ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη, ΑΖ καὶ ΖΒ, καὶ αἱ χορδαὶ ΑΖ, ΖΒ θὰ εἶναι πλευραὶ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, ὅπερ ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν· ὥστε ἡ ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἐπὶ τὴν ΑΖ ἠγμένη κάθετος ΟΜ θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον ἀπόστημα.



Τὴν μὲν ἀκτῖνα ΟΑ παριστῶμεν διὰ τοῦ α τὸ δοθὲν ἀπόστημα ΟΘ διὰ τοῦ ρ, τὸ δὲ ζητούμενον ΟΜ διὰ τοῦ ρ′.

Ἐὰν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ ΖΑΗ ἀχθῇ ἡ χορδὴ ΑΗ θὰ εἶναι (201).

$$(\mathrm{AH})^2 = 2\alpha.\ (\alpha+\rho)\cdot$$

ἀλλ' εἶναι καὶ ΑΗ $= 2\rho'$ (διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΖΜΟ καὶ ΖΑΗ)· ὅθεν $4\rho'^2 = 2\alpha.\ (\alpha+\rho)\cdot$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

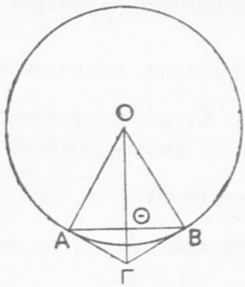
$$\text{ὅθεν } \varrho' = \sqrt{\frac{\alpha(\alpha+\varrho)}{2}}.$$

Ἐὰν ἡ ἀκτὶς α εἶναι ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους, ἔχομεν

$$\varrho' = \sqrt{\frac{1+\varrho}{2}}. \qquad (1)$$

289. Πρόβλημα. ***Ἐκ τοῦ ἀποστήματος ϱ κανονικοῦ τινὸς ἐγγεγραμμένου πολυγώνου εὑρεῖν τὴν περίμετρον αὐτοῦ Σ καὶ τὴν τοῦ ἀντιστοιχοῦντος περιγεγραμμένου Σ'.***

Ἔστω ΑΒ μία τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου· ἐὰν εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓ, ΒΓ, ἑκατέρα τούτων θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἀντιστοιχοῦντος περιγεγραμμένου.



Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΘ ἔχομεν ἐν πρώτοις

$$(\text{ΑΘ})^2 = (\text{ΟΑ})^2 - (\text{ΟΘ})^2 = \alpha^2 - \varrho^2$$

$$\text{ὅθεν } \text{ΑΘ} = \sqrt{\alpha^2 - \varrho^2}$$

$$\text{καὶ } \text{ΑΒ} = 2\sqrt{\alpha^2 - \varrho^2}.$$

καὶ ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἡ περίμετρος αὐτοῦ Σ θὰ δοθῇ ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\Sigma = 2\nu.\sqrt{\alpha^2 - \varrho^2}. \qquad (2)$$

Πρὸς εὕρεσιν τῆς περιμέτρου Σ' παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΟΘ καὶ ΟΑΓ εἶναι ὅμοια· διότι, πλὴν τῆς ὀρθῆς, ἔχουσι καὶ μίαν γωνίαν ἴσην, τὴν εἰς τὸ Ο. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος δ' αὐτῶν συνάγεται

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΘ}} = \frac{\alpha}{\varrho},$$

$$\text{ὅθεν καὶ } \text{ΑΓ} = \frac{\alpha}{\varrho}.\text{ΑΘ}\cdot$$

πολλαπλασιάζοντες δὲ τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ 2ν καὶ ἐνθυμούμενοι, ὅτι 2ν. ΑΘ ἰσοῦται τῇ περιμέτρῳ Σ καὶ 2ν. ΑΓ ἰσοῦται τῇ Σ', εὑρίσκομεν τὸν τύπον

$$\Sigma' = \frac{\alpha}{\varrho}.\Sigma. \qquad (3)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

290. Πρόβλημα. *Εὑρεῖν τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον κατὰ δοθεῖσαν προσέγγισιν.*

Ἐὰν ἡ ἀκτὶς κύκλου εἶναι ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους, ἡ περιφέρεια αὐτοῦ ἔχει μῆκος 2π˙ εἶναι δὲ ἡ περιφέρεια μεγαλυτέρα μὲν τῆς περιμέτρου παντὸς ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, μικροτέρα δὲ τῆς περιμέτρου παντὸς περιγεγραμμένου (276). Ἐὰν λοιπὸν εὕρωμεν δύο ἀντιστοιχοῦντα κανονικὰ πολύγωνα, τῶν ὁποίων αἱ περίμετροι νὰ διαφέρωσιν ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{\mu}$, ὁ ἀριθμὸς 2π θὰ διαφέρῃ ἀφ' ἑκατέρας τῶν περιμέτρων τούτων ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{\mu}$˙ ἑπομένως λαμβάνοντες τὸ 2π ἴσον τῇ μιᾷ τῶν περιμέτρων, κάμνομεν λάθος μικρότερον τοῦ $\frac{1}{\mu}$.

Ἐγγράφοντες τετράγωνον εἰς κύκλον, εὑρίσκομεν εὐκόλως, ὅτι τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του, ἤτοι (259) $\frac{1}{2}\alpha.\sqrt{2}$˙ καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς ὑπετέθη ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους, τὸ ἀπόστημα τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$.

Ἔχοντες τὸ ἀπόστημα τοῦτο εὑρίσκομεν διὰ τοῦ τύπου (1) τὸ ἀπόστημα τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ὀκταγώνου, ὅπερ εἶναι

$$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

ἐκ τοῦ ἀποστήματος τούτου εὑρίσκομεν πάλιν διὰ τοῦ αὐτοῦ τύπου (1) τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου δεκαεξαγώνου, ὅπερ εἶναι

$$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

καὶ ἐκ τούτου εὑρίσκομεν ὁμοίως τὸ ἀπόστημα τοῦ 32γώνου, ὅπερ εἶναι

$$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

καὶ οὕτω καθεξῆς˙ ὁ δὲ νόμος, καθ' ὃν προχωροῦσιν αἱ παραστάσεις αὗται τῶν ἀποστημάτων, εἶναι προφανής˙ ὥστε δυνάμεθα

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀμέσως νὰ γράψωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀποστήματος τοῦ δοθέντος ἐγγεγραμμένου πολυγώνου (ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι δύναμίς τις τοῦ 2).

Ἐκ τοῦ ἀποστήματος ἑκάστου ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου εὑρίσκεται ἡ περίμετρος αὐτοῦ διὰ τοῦ τύπου (2) καὶ ἡ περίμετρος τοῦ ἀντιστοιχοῦντος περιγεγραμμένου διὰ τοῦ τύπου (3).

Ἐὰν κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ὑπολογίσωμεν τὰ ἀποστήματα καὶ τὰς περιμέτρους τῶν κανονικῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων, ἅτινα ἔχουσι 4, 8, 16, 32, 64, 128 . ., πλευράς, καὶ τὰς περιμέτρους τῶν πρὸς αὐτὰ ἀντιστοιχούντων περιγεγραμμένων, σχηματίζομεν τὸν ἑξῆς πίνακα.

ἀρ. πλ.	ἀπόστημα	περίμ. ἐγγεγρ.	περίμ. περιγεγ.
4	0,707106	5,656854	8,
8	0,923887	6,122934	6.627145
16	0,980785	6,242888	6,365194
32	0,995185	6,273095	6,308448
64	0,998795	6,280662	6,288236
128	0,999699	6,282553	5,284446
256	0,999925	6,283027	6,283500
512	0.999981	6,283145	5,283264
1024	0,999995	6,283175	6,283205
2048	0,999999	6,283182	6,283190

Ἐν τῷ πίνακι τούτῳ βλέπομεν ὅτι ἡ περιφέρεια ἡ ἔχουσα ἀκτῖνα 1 εἶναι μικροτέρα μὲν τοῦ 6,283190. . . (ὅπερ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ εἰς αὐτὴν περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, ὅπερ ἔχει 2048 πλευράς), μεγαλυτέρα δὲ τοῦ 6,283182. . . (ὅπερ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ ἴσον πλῆθος πλευρῶν ἔχοντος ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου)· καὶ ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια αὕτη ἔχει διάμετρον 2, ὁ λόγος αὐτῆς πρὸς τὴν διάμετρόν της εἶναι μικρότερος μὲν τοῦ 3,141595, μεγαλύτερος δὲ τοῦ 3,141591. . ., ἄρα λαμβάνοντες $\pi = 3,14159\ldots$ ποιοῦμεν λάθος μικρότερον τοῦ $\frac{1}{100000}$ (*).

(*) Ὁ Ἀρχιμήδης πρῶτος ἀνεκάλυψε τὴν ἰσότητα τοῦ κύκλου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀσκήσεις.

511) Ἐκ τοῦ ἀποστήματος ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς δοθέντα κύκλον, εὑρεῖν τὸ ἀπόστημα τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ ἔπειτα τοῦ δωδεκαγώνου.

512) Ἐκ τοῦ ἀποστήματος κανονικοῦ πενταγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς δοθέντα κύκλον εὑρεῖν τὸ ἀπόστημα τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου καὶ τοῦ εἰκοσαγώνου.

513) Ἐκ τοῦ ἀποστήματος κανονικοῦ πενταγώνου ἐγγεγραμμένου εὑρεῖν τὴν πλευρὰν αὐτοῦ καὶ τὴν τοῦ ἀντιστοιχοῦντος περιγεγραμμένου.

514) Νὰ εὑρεθῇ μία κατὰ προσέγγισιν τιμὴ τοῦ π ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον.

515) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων δύο κύκλων, ὅταν ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸν ἕνα κύκλον ἰσοῦται μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν ἄλλον.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Δ΄ Βιβλίου.

516) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν κανονικοῦ πολυγώνου, οὗ ἑκάστη τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν εἶναι 10°, 1°, $2\frac{1^\circ}{2}$.

517) Ὑπάρχουσι κανονικὰ πολύγωνα ἑκάστη γωνία τῶν ὁποίων νὰ εἶναι 108°, 120°, 130°, 144°, 60° καὶ ποῖα εἶναι ταῦτα ;

518) Ἐὰν ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 120° νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον τοῦτο περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι ἴση πρὸς μίαν τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ.

519. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἑκάστη τῶν γωνιῶν κανονικοῦ πενταγώνου τριχοτομεῖται ὑπὸ τῶν διαγωνίων, αἵτινες ἄγονται ἐκ τῆς ἀντιστοίχου κορυφῆς.

520) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐν κανονικῷ πενταγώνῳ ἑκάστη πλευρὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διαγώνιον, ἥτις συνδέει τὰ ἄκρα τῶν πλευρῶν τῶν προσκειμένων εἰς τὴν πρώτην.

πρὸς τὸ τρίγωνον οὗ βάσις ἡ περιφέρεια καὶ ὕψος ἡ ἀκτίς, καὶ εὗρε τὸν εἰς τὸν προσεγγίζοντα ἀριθμὸν $\frac{22}{7}$ (ὅστις εἶναι μεγαλύτερος τοῦ π)· ἔδειξε δὲ ἐν τῷ συγγράμματι αὐτοῦ «Κύκλου μέτρησις», ὅτι περιλαμβάνεται ὁ π μεταξὺ $3+\frac{10}{71}$ καὶ $3+\frac{1}{7}$. Μετὰ τοῦτον εὗρεν ὁ Μέτιος τὸν μᾶλλον προσεγγίζοντα ἀριθμὸν $\frac{355}{113}$. Ἄλλοι δὲ μαθηματικοὶ ὑπελόγισαν ἔπειτα τὸν π μὲ πολὺ μεγαλυτέραν προσέγγισιν καὶ σήμερον εἶναι γνωστὸς μὲ 500 καὶ πλέον δεκαδικὰ ψηφία.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

521) Ἐν κανονικῷ πενταγώνῳ ΑΒΓΔΕ αἱ διαγώνιοι ΒΔ καὶ ΓΕ σχηματίζουσιν μετὰ τῶν πλευρῶν ΑΕ καὶ ΑΒ, ρόμβον.

522) Αἱ διαγώνιοι κανονικοῦ πενταγώνου σχηματίζουσιν ἕτερον κανονικὸν πεντάγωνον.

523) Δύο διαγώνιοι κανονικοῦ πενταγώνου, αἵτινες δὲν ἄγονται ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς τέμνονται εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

524) Ἐὰν μὲ κέντρον ἑκάστην τῶν κορυφῶν δοθέντος τετραγώνου καὶ μὲ ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου αὐτοῦ γραφῶσι τόξα, τέμνοντα τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα τῶν τομῶν εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ ὀκταγώνου.

525) Ἐὰν πρόκειται νὰ στρώσωμεν τὸ ἔδαφος ἑνὸς δωματίου διὰ πλακῶν, ἐχουσῶν σχῆμα κανονικοῦ πολυγώνου, ποῖα κανονικὰ πολύγωνα εἶναι κατάλληλα πρὸς τοῦτο;

526) Τὸ ἔδαφος δωματίου ἐστρώθη διὰ πλακῶν ἐχουσῶν σχήματα κανονικῶν πολυγώνων καὶ ὧν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶναι κ, λ, ρ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}$$

527) Μὲ κέντρον ἑκάστην τῶν κορυφῶν δοθέντος ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ ἀκτῖνα τὴν πλευρὰν αὐτοῦ γράφομεν τρία τόξα περατούμενα ἕκαστον εἰς τὰς δύο ἄλλας κορυφάς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῶν τόξων τούτων.

528) Δίδεται τεταρτοκύκλιον ΟΑΒ καὶ ἐπὶ τῶν ἀκτίνων ΟΑ καὶ ΟΒ ὡς διαμέτρων γράφομεν δύο ἡμιπεριφερείας τεμνομένας εἰς τὸ σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῶν τόξων ΑΜ καὶ ΒΜ.

529) Ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΑ περιφερείας τινὸς γράφομεν ἑτέραν περιφέρειαν, ἄλλη δέ τις ἀκτὶς τῆς πρώτης περιφερείας τέμνει ταύτην εἰς τὸ σημεῖον Β καὶ τὴν δευτέραν εἰς τὸ Γ. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΑΓ ἔχουσι μήκη ἴσα.

530) Ἐκ δύο ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων τὸ ἓν εἶναι ἐγγεγραμμένον τὸ δὲ περιγεγραμμένον εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περιφέρεια αὕτη εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς περιφερείας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον καὶ τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ περιγεγραμμένον.

531) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τετράγωνον εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ αὐτὸ τετράγωνον.

532) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἔχοντος διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο κύκλων, οἵτινες ἔχουσι διαμέτρους ἀντιστοίχους τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς τοῦ τριγώνου.

533) Μὲ κέντρον τὸ ἓν ἄκρον διαμέτρου τινὸς δοθέντος κύκλου καὶ ἀκτῖνα τὴν πλευρὰν τοῦ εἰς τὸν κύκλον τοῦτον ἐγγεγραμμένου τετραγώνου γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κοινῆς ἐπιφανείας τῶν κύκλων τούτων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

534) Ἡ δεδομένη κοινὴ χορδὴ δύο τεμνομένων κύκλων εἶναι πλευρὰ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν ἕνα κύκλον καὶ πλευρὰ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἰς τὸν ἄλλον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κοινῆς ἐπιφανείας τῶν κύκλων τούτων.

535) Ἐκ δύο χορδῶν δοθέντος κύκλου παραλλήλων καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου κειμένων, ἡ μὲν εἶναι πλευρὰ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον, ἡ δὲ πλευρὰ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς περιεχομένης μεταξὺ τῶν παραλλήλων τούτων χορδῶν.

536) ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι κάθετοι διάμετροι δοθέντος κύκλου. Μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἀκτῖνας τὰς ΑΓ καὶ ΒΓ γράφομεν δύο τόξα κείμενα ἐντὸς τοῦ κύκλου καὶ περατούμενα εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου ΓΔ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς περιεχομένης μεταξὺ τῶν τόξων τούτων.

537) Ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης 2λ ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου καὶ μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν, τέταρτον περιφερείας περατούμενον εἰς τὰ ἄκρα τῆς ὑποτεινούσης. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματισθέντος μηνίσκου.

538) Μὲ κέντρον μίαν τῶν κορυφῶν τετραγώνου περιγεγραμμένου εἰς κύκλον καὶ ἀκτῖνα τὴν διαγώνιον αὐτοῦ γράφομεν ἕτερον κύκλον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο κύκλων.

539) Ἂν διάμετρος κύκλου διαιρεθῇ ὁπωσδήποτε εἰς δύο μέρη καὶ ἐπὶ τῶν μερῶν τούτων γραφῶσιν ἡμιπεριφέρειαι ἑκατέρωθεν τῆς διαμέτρου κείμεναι, ἡ ὑπὸ τῶν ἡμιπεριφερειῶν τούτων σχηματιζομένη γραμμή, διαιρεῖ τὸν κύκλον εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον, τὸν λόγον τῶν δύο τμημάτων εἰς ἃ διῃρέθη ἡ διάμετρος.

540) Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα τῆς διαγωνίου ΑΓ τετραγώνου ΑΒΓΔ γράφομεν τόξα ἀρχόμενα ἀπὸ τῆς κορυφῆς Β καὶ περατούμενα εἰς τὴν διαγώνιον ταύτην. Ἔπειτα ἐπὶ διαμέτρου τοῦ τμήματος τῆς διαγωνίου ΑΓ τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν ἄκρων τῶν τόξων γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Δ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς περιφερείας, ἥτις περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο τόξων καὶ τῆς ἡμιπεριφερείας.

541) Τρεῖς ἴσοι κύκλοι, ὧν ὁ εἷς ἐφάπτεται τοῦ ἄλλου, ἔχουσι τὰ κέντρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας γραμμῆς, τέταρτος δὲ κύκλος ὁμόκεντρος τοῦ δευτέρου κύκλου ἐφάπτεται ἐξωτερικῶς τῶν δύο ἄλλων. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν ἴσων κύκλων πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετάρτου κύκλου ἐξ οὗ ἀφῃρέθη τὸ ἄθροισμα τοῦτο.

542) Ἐν τετραγώνῳ ἐγγεγραμμένῳ εἰς κύκλον, γράφονται τέσσαρες ἴσοι κύκλοι ἐφαπτόμενοι καὶ πρὸς ἀλλήλους ἐξωτερικῶς καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τεσσάρων κύκλων πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ περὶ τὸ τετράγωνον περιγεγραμμένου κύκλου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

543) Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ μὲ ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης (2λ) γράφομεν δύο τόξα μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Μὲ κέντρον δὲ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ ἑνὸς τῶν σημείων, εἰς ἃ τέμνουσι τὰ γραφέντα τόξα τὰς καθέτους πλευράς, γράφομεν ἕτερον τόξον ἐξωτερικῶς πρὸς τὸ τρίγωνον καὶ περατούμενον εἰς τὰς καθέτους πλευράς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἥτις περιέχεται μεταξὺ τῶν τριῶν γραφέντων τόξων.

544) Μὲ κέντρα τὰς ἀρτίας (ἢ τὰς περιττὰς) κορυφὰς κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος α, γράφομεν τρία τόξα ἐντὸς τοῦ κύκλου κείμενα καὶ περατούμενα εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῶν οὕτω σχηματιζομένων τριῶν φύλλων.

545) Ἐφ' ἑκάστης τῶν πλευρῶν τετραγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος α ὡς διαμέτρου γράφομεν ἡμιπεριφερείας ἐντὸς τοῦ τετραγώνου κειμένας. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν 4 σχηματισθέντων φύλλων ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἰσοῦται μὲ $2\alpha^2$.

546) Τρεῖς ἴσοι κύκλοι ἀκτῖνος α ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἀνὰ δύο. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἥτις περιέχεται μεταξὺ τῶν περιφερειῶν τῶν κύκλων.

547) Διάμετρος περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος α διαιρεῖται εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον $\frac{1}{3}$. Ἐφ' ἑκάστου τούτων ὡς διαμέτρου γράφονται περιφέρειαι. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἥτις περιέχεται μεταξὺ τῶν τριῶν τούτων περιφερειῶν.

548) Δύο κύκλοι ἀκτίνων α καὶ 3α ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς καὶ εὐθεῖά τις εἶναι κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἥτις περιέχεται μεταξὺ τῶν περιφερειῶν τῶν κύκλων τούτων καὶ τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης.

549) Ἡ ἐπιφάνεια, ἡ μεταξὺ δύο ὁμοκέντρων κύκλων περιλαμβανομένη, εἶναι ἰσοδύναμος κύκλῳ, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα τὴν ἐφαπτομένην τῆς μικροτέρας περιφερείας, τὴν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς ἄλλης ἠγμένην.

550) Ἐὰν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ὡς ἐπὶ διαμέτρου γραφῇ ἡμικύκλιον, περιέχον αὐτό, καὶ ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ἡμικύκλια ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, τὰ μέρη τῶν ἡμικυκλίων τούτων τὰ ἐκτὸς τοῦ πρώτου κείμενα (ἅτινα λέγονται μηνίσκοι τοῦ Ἱπποκράτους), ἔχουσιν ἄθροισμα τὸ τρίγωνον.

551) Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον περιγραφῇ κύκλος καὶ ἔπειτα μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν γραφῇ ἕτερος κύκλος, τὸ ἐκτὸς τούτου κείμενον μέρος τοῦ πρώτου εἶναι ἰσοδύναμον τῷ τριγώνῳ.

552) Ἐὰν ἡ βάσις ἡμικυκλίου διαιρεθῇ ὁπωσδήποτε εἰς δύο μέρη καὶ ἐπὶ τῶν μερῶν τούτων γραφῶσιν ἡμικύκλια, ἐντὸς τοῦ πρώτου κείμενα, τὸ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν αὐτῶν ὑπολειπόμενον μέρος τοῦ ἡμι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κυκλίου ἰσοῦται κύκλῳ, ἔχοντι διάμετρον τὴν ἐκ τοῦ σημείου τῆς διαιρέσεως ὑψουμένην κάθετον μέχρι τῆς περιφερείας.

553) Νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τοῦ δοθέντος κύκλου ἐντὸς καὶ διαιρῶν τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον δοθέντα μ : ν.

554) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα διαιροῦσα τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν εἰς δύο μέρη, ἔχοντα τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν 13 καὶ 17.

555) Νὰ διαιρεθῇ ὁ δοθεὶς κύκλος διὰ χορδῆς εἰς δύο τμήματα τοιαῦτα, ὥστε ἡ γωνία ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι διπλασία τῆς ἐπὶ τοῦ ἑτέρου βαινούσης.

556) Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ τρίγωνον, οὗ αἱ γωνίαι νὰ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 2, 5, 8.

557) Δοθέντος ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἐὰν μὲ κέντρον ἑκάστην κορυφὴν γραφῇ τόξον ἑνοῦν τὰς δύο ἄλλας κορυφάς, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου καμπυλογράμμου τριγώνου.

558) Πόσους κύκλους ἴσους πρὸς ἀλλήλους δυνάμεθα νὰ θέσωμεν οὕτως, ὥστε νὰ ἐφάπτωνται ἑνὸς κύκλου ἴσου πρὸς αὐτοὺς (χωρὶς νὰ τέμνουσιν ἀλλήλους ;)

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΧΩΡΟΜΕΤΡΙΑΣ

Ἡ χωρομετρία σκοπὸν ἔχει τὴν μέτρησιν γαιῶν μικρᾶς ἐκτάσεως καὶ τὴν ἐπὶ χάρτου ἀπεικόνισιν αὐτῶν δι' ὁμοίων σχημάτων.

Πρὸς τοῦτο εἶναι ἀνάγκη νὰ μετρηθῶσιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς εὐθεῖαι γραμμαὶ καὶ γωνίαι.

Χάραξις καὶ μέτρησις εὐθείας γραμμῆς ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.

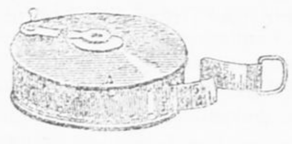
Χάραξις εὐθείας. Πρὸ πάσης μετρήσεως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εὐθείας γραμμῆς δεδομένης διὰ δύο σημείων, ἔστω τῶν Α καὶ Β εἶναι ἀνάγκη νὰ χαράξωμεν αὐτήν. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν ἀκόντια, ἤτοι ράβδους ξυλίνους αἵτινες φέρουσι ἐν μὲν τῷ κάτῳ ἄκρῳ κωνικὸν σιδηροῦν περίβλημα, ἵνα ἐμπηγνύωνται εὐκόλως εἰς τὸ ἔδαφος, ἐν δὲ τῷ ἄνω ἄκρῳ μικρὰν πινακίδα ἐρυθρόλευκον. Τοιαῦτα δὲ ἀκόντια ἐμπηγνύομεν κατὰ πρῶτον κατακορύφως ἐπὶ τῶν σημείων Α καὶ Β, κατόπιν δὲ σημειοῦμεν ἄλλα σημεῖα τῆς δοθείσης εὐθείας δι' ἀκοντίων τὰ ὁποῖα, τοποθετοῦμεν μεταξὺ Α καὶ Β καὶ κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε νὰ καλύπτωνται ταῦτα ὑπὸ τῶν σκοπευτικῶν γραμμῶν αἵτινες ἐφάπτονται εἰς τὰ Α καὶ Β. Ἡ ἐργασία αὕτη ἐκτελεῖται ὑπὸ τοῦ μετρητοῦ καὶ τοῦ βοηθοῦ του· καὶ ὁ μὲν μετρητὴς (ἀφοῦ τοποθετηθῶσι ἐπὶ τῶν Α καὶ Β τὰ ἀκόντια κατακορύφως) ἀπομακρύνεται πέραν τοῦ σημείου Α, δύο περίπου μέτρα καὶ

σκοπεύει ἐφαπτομένως πρὸς τὰ ἀκόντια Α καὶ Β, ὁ δὲ βοηθὸς τοποθετεῖ τὸ ἀκόντιον ἐπὶ σημείου τῆς εὐθείας ΑΒ μετα-

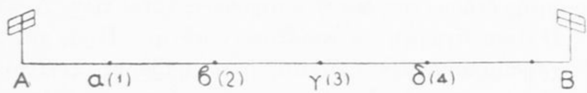
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ξὺ τῶν Α καὶ Β· ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ὁ βοηθὸς συνήθως τοποθετεῖ τὸ ἀκόντιον ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ ὁδηγεῖται ὑπὸ τοῦ μετρητοῦ καταλλήλως, ὥστε νὰ τοποθετήσῃ τὸ ἀκόντιον ἐπὶ σημείου τῆς εὐθείας ΑΒ, διότι τότε ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς ἡ διερχομένη διὰ τῶν Α καὶ Β καλύπτει ἀκριβῶς τὸ τρίτον σημεῖον.

Μέτρησις εὐθείας. Μετὰ τὴν χάραξιν τῆς εὐθείας, προβαίνομεν εἰς τὴν μέτρησιν αὐτῆς. Πρὸς τοῦτο κάμνομεν χρῆσιν



τῆς μετροταινίας, ἥτις ἀποτελεῖται ἐκ λινῆς ταινίας πλάτους 0,015 μ. περίπου καὶ μήκους 10, 20 ἢ 25 μ. καὶ ἐφ᾽ ἧς σημειοῦνται διαιρέσεις ἀνὰ μέτρον, ὑποδεκάμετρον καὶ ὑφεκατόμετρον· ἐλίσσεται δὲ περὶ ἄξονα διὰ στροφάλου καὶ ἐγκλείεται ἐντὸς περιβλήματος. Κατὰ τὴν μέτρησιν δὲ π. χ. τῆς εὐθείας ΑΒ ὁ μὲν μετρητὴς τοποθετεῖ τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τῆς μετροταινίας ἐπὶ τοῦ σημείου Α,

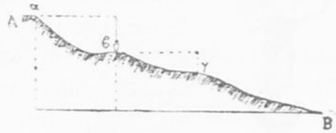


ὁ δὲ βοηθὸς προχωρῶν ἐπὶ τῆς χαραχθείσης εὐθείας ἀναπτύσσει τὴν μετροταινίαν καὶ τείνων αὐτὴν σημειοῖ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους διὰ σιδηρᾶς βελόνης τὸ σημεῖον εἰς ὃ ἀντιστοιχεῖ τὸ ἕτερον ἄκρον τῆς ταινίας, καὶ ἐκφωνεῖ τὸν ἀριθμὸν ἕν. Μετὰταῦτα ἀμφότεροι προχωροῦσι πρὸς τὸ Β μετὰ τῆς ταινίας τεταμένης μέχρις οὗ ὁ μετρητὴς φθάσῃ εἰς τὴν ἐμπηχθεῖσαν βελόνην, εἰς ἣν τοποθετεῖ τὸ ἄκρον τῆς ταινίας, ἐνῷ ὁ βοηθὸς κατὰ τὸν προηγούμενον τρόπον ὁρίζει δεύτερον σημεῖον καὶ ἡ ἐργασία αὕτη ἐξακολουθεῖ μέχρις ὅτου ὁ βοηθὸς φθάσει εἰς τὸ σημεῖον Β· σημειωτέον δὲ ὅτι ὁ μετρητής, ὅταν προχωρῇ ἀπὸ τμῆμά τι τῆς μετρουμένης εὐθείας εἰς τὸ ἑπόμενον, ἀφαιρεῖ τὴν βελόνην ἐφ᾽ ἧς ἐτέθη τὸ ἄκρον τῆς ταινίας. Ἂν τὸ τελευταῖον τμῆμα τῆς μετρουμένης εὐθείας ΑΒ εἶναι μικρότερον τοῦ μήκους τῆς μετροταινίας ὁ βοηθὸς τείνων τὴν μετροταινίαν πρὸς τὸ Β σημειοῖ τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἀντιστοιχεῖ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἰς τὸ Β. Οὕτω ἂν τὸ μῆκος τῆς ταινίας εἶναι 10 μ., αἱ συλλεγεῖσαι βελόναι εἶναι 5, τὸ δὲ μῆκος τοῦ τελευταίου τμήματος εἶναι 3,60 μ., τὸ μῆκος τῆς ΑΒ εἶναι $5.10 + 3,60 = 53,60$ μ.

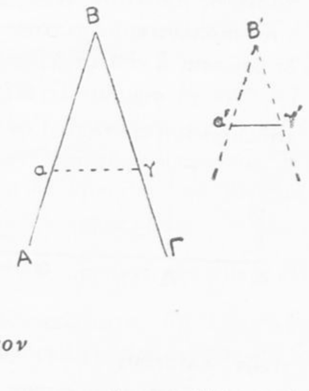
Μέτρησις ἐπὶ κεκλιμένου ἐδάφους. Ἡ μέτρησις τῆς ὁριζοντίου ἀποστάσεως δύο σημείων Α καὶ Β κειμένων ἐπὶ κεκλιμένου ἐδάφους γίνεται κατὰ ὁριζόντια τμήματα. Οὕτω ὁ μετρητὴς προχωρῶν ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, θέτει τὸ ἄκρον τῆς ταινίας εἰς τὸ



Α, ὁ δὲ βοηθὸς τείνων αὐτὴν ὁριζοντίως κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΒ, ἀφίνει ἀπὸ τὸ ἕτερον ἄκρον αὐτῆς μικρὸν λίθον νὰ καταπέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ εὑρίσκει οὕτω τὴν κατακόρυφον προβολὴν τοῦ πέρατος τῆς ταινίας καὶ σημειοῖ αὐτὴν διὰ βελόνης. Κατόπιν ἡ μέτρησις ἐξακολουθεῖ οὕτω διαδοχικῶς μέχρι πέρατος.

Σημ. Ἂν ἡ κλίσις τοῦ ἐδάφους εἶναι μεγάλη, ὥστε ὁ βοηθὸς νὰ μὴ δύναται νὰ ἐκτείνῃ τὴν ταινίαν ὁριζοντίως ὁλόκληρον, τότε τείνει μέρος αὐτῆς.

Μέτρησις γωνίας. Ἵνα ὁρίσωμεν τὸ μέγεθος τῆς γωνίας ἥτις σχηματίζεται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ΑΒ καὶ ΒΓ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Λαμβάνομεν ἐφ' ἑκάστης τῶν εὐθειῶν ΒΑ καὶ ΒΓ ἀνὰ ἓν σημεῖον ἔστω τὸ α καὶ γ, συνήθως εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τῆς κορυφῆς Β καὶ μετροῦμεν ἔπειτα διὰ τῆς ταινίας τὰς ἀποστάσεις Βα, Βγ, καὶ αγ· κατόπιν δὲ κατασκευάζομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου τρίγωνον Β΄ α΄ γ΄ ὅμοιον πρὸς τὸ Βαγ, ὁπότε ἡ γωνία Β΄ ἰσοῦται τῇ Β.



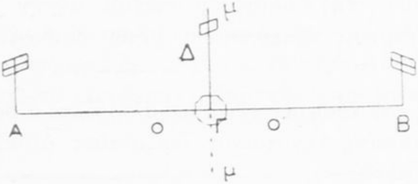
Ὀρθόγωνον

Πρὸς ἐπίτευξιν τοῦ σκοποῦ τῆς χωρομετρίας, πολλάκις εἶ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

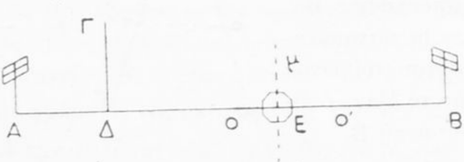
ναι ἀνάγκη νὰ ὑψώσωμεν ἢ νὰ καταβιβάσωμεν εὐθείας καθέτους, ἐπὶ εὐθείας τινὸς ἐκ δεδομένων σημείων. Πρὸς τοῦτο γίνεται χρῆσις τοῦ ὀρθογώνου. Τοῦτο ἀποτελεῖται ἐκ μεταλλικοῦ κοίλου πρίσματος μετὰ ὀκτὼ ἑδρῶν, προσαρμοζομένου ἐπὶ ῥάβδου ἀπολήγούσης εἰς αἰχμήν. Ἐπὶ ἑκάστης ἕδρας τοῦ πρίσματος ὑπάρχει σχισμὴ καὶ θυρίς, κατὰ τὸν ἄξονα τῆς ὁποίας τείνεται λεπτὸν νῆμα· διατάσσονται δὲ αὗται οὕτως ὥστε ὁ ἄξων τῆς σχισμῆς ἕδρας τινος μετὰ τοῦ νήματος τῆς ἐκ διαμέτρου ἀπέναντι θυρίδος, νὰ ὁρίζωσιν ἓν ἐπίπεδον ὅπερ καλεῖται σκοπευτικὸν ἐπίπεδον. Ἡ διάταξις αὕτη ἐπιτρέπει νὰ λαμβάνῃ τις ἐπίπεδα κατὰ γωνίας 90^{0} καὶ 45^{0}.

Χρῆσις τοῦ ὀργάνου. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπί τινος εὐθείας ΑΒ διὰ τοῦ σημείου αὐτῆς Γ.



Πρὸς τοῦτο τοποθετοῦμεν τὸ ὀρθόγωνον κατακορύφως ἐπὶ τοῦ σημείου Γ καὶ στρέφομεν τοῦτο μέχρι οὗ ἓν τῶν σκοπευτικῶν ἐπιπέδων π.χ. τὸ Ο—Ο′ διέλθῃ διὰ τοῦ Β. Κατόπιν τοποθετοῦμεν κατακορύφως ἀκόντιον Δ ἐπὶ τῆς διευθύνσεως, ἥτις ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ σκοπευτικοῦ ἐπιπέδου μ—μ καθέτου ἐπὶ τὸ Ο—Ο′· οὕτω δὲ ὁρίζεται ἡ εὐθεῖα ΔΓ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ἂν τὸ σημεῖον Γ κεῖται ἐκτὸς τῆς ΑΒ καὶ θέλομεν διὰ τοῦ σημείου τούτου νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, διὰ διαδοχικῶν μετακινήσεων τοποθετοῦμεν τὸ ὄργανον ἐπὶ σημείου τινὸς τῆς εὐθείας ΑΒ



ὁπότε τὸ σκοπευτικὸν ἐπίπεδον Ο—Ο′ διέρχεται διὰ τῶν Α καὶ Β· κατόπιν δὲ μετακινοῦμεν τὸ ὄργανον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ σκοπεύομεν ἑκάστοτε διὰ τοῦ σκοπευτικοῦ ἐπιπέδου μ—μ καθέτου ἐπὶ τοῦ

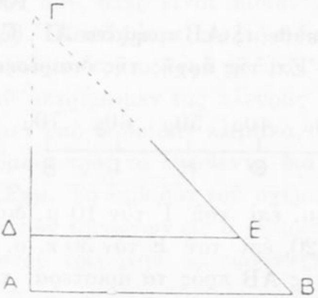
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ο—Ο΄ ὅταν δὲ τοῦτο διέλθῃ διὰ τοῦ Γ, τὸ σημεῖον Δ τῆς ΑΒ, ἐφ' οὗ ἐτοποθετήθη τὸ ὄργανον εἶναι ὁ ποὺς τῆς καθέτου, ἥτις ἄγεται διὰ τοῦ Γ ἐπὶ τῆς ΑΒ.

Πρόβλημα. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις σημείου προσιτοῦ, ἀπό τινος ἀπροσίτου ἀλλ' ὁρατοῦ.***

Ἔστω Α τὸ προσιτὸν σημεῖον, Γ τὸ ἀπρόσιτον καὶ ΑΓ ἡ ζητουμένη ἀπόστασις.

Χαράσσομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μέρος τι τῆς εὐθείας ΑΓ,



ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ μέρος τι τῆς εὐθείας ΒΓ ἔπειτα φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ τὴν ΔΕ τέμνουσαν τὴν ΒΓ εἴς τι σημεῖον Ε.

Ἐὰν μετὰ ταῦτα μετρήσωμεν τὰ τμήματα τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΔ καὶ ΔΕ, εὑρίσκομεν εὐκόλως τὸ ζητούμενον. Διότι ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΓΔΕ καὶ ΑΒΓ

ἔχομεν $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}$ ἢ $\frac{AB-\Delta E}{\Delta E} = \frac{A\Gamma-\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta}$ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὴν ΓΔ· ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν καὶ τὴν ΑΔ ἔχομεν τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν.

Περὶ κλιμάκων

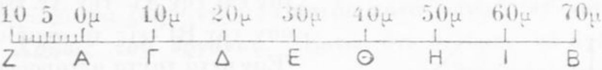
α) Ἀριθμητικὴ κλῖμαξ. Ἡ ἐπὶ χάρτου δι' ὁμοίων σχημάτων ἀπεικόνισις ἐπιπέδων σχημάτων, λέγεται σχέδιον ἢ διάγραμμα, ὁ δὲ λόγος τῶν πλευρῶν τοῦ διαγράμματος πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς τοῦ πραγματικοῦ ἐπιπέδου σχήματος, λέγεται ἀριθμητικὴ κλῖμαξ· ἐκφράζεται δὲ συνήθως διὰ κλασματικῆς μονάδος, ἥτις ἔχει παρονομαστὴν πολλαπλάσιόν τι τοῦ 10· ὡς π. χ. $\frac{1}{2000}$, φανερώνει δὲ ὅτι ἂν τὸ πραγματικὸν μῆκος εἶναι 2000 μ. τὸ ἀντίστοιχον ἐπὶ τοῦ διαγράμματος θὰ ἔχῃ μῆκος 1 μ., ἂν δὲ ἔχῃ μῆκος 200 μ. τὸ ἐπὶ τοῦ διαγράμματος θὰ ἔχῃ 200: 2000 ἢ 0,1 μ.

Ἀντιστρόφως δὲ ἂν τὸ ἐπὶ τοῦ διαγράμματος μῆκος γραμμῆς τινος εἶναι 1 μ., τὸ ἀντίστοιχον πραγματικὸν μῆκος αὐτῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἶναι 2000 μ., ἂν δὲ εἶναι 0,1 μ. τὸ πραγματικὸν θὰ εἶναι 0,1.2000=200 μ.

β) Γραφικὴ κλῖμαξ. Ἐπειδὴ ἡ χρῆσις τῆς ἀριθμητικῆς κλίμακος ἀπαιτεῖ ὑπολογισμούς, πρὸς ἀποφυγὴν αὐτῶν γίνεται χρῆσις τῆς γραφικῆς λεγομένης κλίμακος, δι᾽ ἧς εὑρίσκομεν τὰ πραγματικὰ μήκη ἢ τὰ ἀντίστοιχα ἐπὶ τοῦ διαγράμματος, δι᾽ ἁπλοῦ ἀνοίγματος τοῦ διαβήτου. Ἡ κατασκευὴ γραφικῆς κλίμακος, ἀντιστοιχούσης εἰς δεδομένην ἀριθμητικὴν π.χ. $\frac{1}{1000}$ γίνεται ὡς ἑξῆς· λαμβάνομεν ἐπὶ εὐθείας ΑΒ τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ... ἴσα ἕκαστον πρὸς 0,01 μ. Ἐπὶ τῆς ἀρχῆς τῆς διαιρέσεως



Α σημειοῦμεν τὸν ἀριθμὸν 0 μ. ἐπὶ τοῦ Γ τὸν 10 μ. διότι 0,011000=10, ἐπὶ τοῦ Δ τὸν 20, ἐπὶ τοῦ Ε τὸν 30 κ. ο. κ. Κατόπιν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Α, λαμβάνομεν μῆκος ΑΖ ἴσον πρὸς 0,01 μ., ὅπερ διαιροῦμεν εἰς 10 ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀντιστοιχεῖ πρὸς 0,001. 1000=1 μ. σημειοῦμεν δὲ ἐπὶ τῶν διαιρέσεων τοῦ τμήματος τούτου χωροῦντες πρὸς τὰ ἀριστερὰ κατὰ σειρὰν τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3,... 10 μ.

Ἤδη, ἂν μετὰ τὴν κατασκευὴν τῆς γραφικῆς κλίμακος θελήσωμεν νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπὶ τοῦ διαγράμματος μῆκος, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς πραγματικὸν μῆκος 63 π. χ. μέτρων, θέτομεν τὸ ἓν σκέλος τοῦ διαβήτου ἐπὶ τῆς διαιρέσεως 60, τὸ δὲ ἕτερον ἐπὶ τῆς τρίτης διαιρέσεως τοῦ τμήματος τοῦ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 0. Οὕτω δὲ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο σκελῶν τοῦ διαβήτου δίδει τὸ ζητούμενον μῆκος.

Ἂν ὅμως ἔχοντες τὸ ἐπὶ τοῦ διαγράμματος μῆκος (ὑπὸ κλίμακα ἐννοεῖται 0,001), θελήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἀντίστοιχον πραγματικὸν μῆκος, θέτομεν τὸ ἓν σκέλος τοῦ διαβήτου ἐπὶ διαιρέσεως τῆς κλίμακος τοιαύτης, ὥστε τὸ ἕτερον σκέλος νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 0 τμήματος· ἂν δὲ π. χ. τὸ ἓν σκέλος πέσῃ ἐπὶ τῆς διαιρέσεως 80 τὸ δὲ ἄλλο ἐπὶ τῆς τετάρτης διαιρέσεως τοῦ πρὸς τ᾽ ἀριστερὰ τοῦ 0 τμήματος, τὸ πραγματικὸν μῆκος θὰ εἶναι 84 μέτρων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κατασκευὴ διαγραμμάτων

α) Τριγώνου. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν τὸ διάγραμμα τριγωνικῆς ἐδαφικῆς ἐπιπέδου ἐκτάσεως ὑπὸ δοθεῖσαν κλίμακα π. χ. 1: 100. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τμήματα ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὸ $\frac{1}{100}$ τῶν πλευρῶν τῆς τριγωνικῆς ἐκτάσεως καὶ μὲ πλευρὰς τὰ τμήματα ταῦτα κατασκευάζομεν τρίγωνον αβγ, ὅπερ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον.

β) Οἱουδήποτε πολυγωνικοῦ εὐθυγράμμου σχήματος. Διαιροῦμεν τοῦτο κατὰ πρῶτον διὰ διαγωνίων, εἰς τρίγωνα καὶ ἀφοῦ μετρήσωμεν τὰς πλευρὰς καὶ τὰς διαγωνίους κατασκευάζομεν ὑπὸ δοθεῖσαν κλίμακα, κατὰ σειρὰν συνεχόμενα τρίγωνα ὅμοια πρὸς τὰ ληφθέντα διὰ τῆς διαιρέσεως.

Σημ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος εἶναι ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων εἰς ἃ διαιρεῖται· εὑρίσκεται δὲ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου $E=\sqrt{\tau\,(\tau\text{-}\alpha)\,(\tau\text{-}\beta)\,(\tau\text{-}\gamma)}$ (263).

Χωροστάθμησις

Ἀπόλυτον ὕψος ἢ ἁπλῶς ὕψος σημείου τινὸς τοῦ ἐδάφους καλεῖται ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, τὴν ὁποίαν φανταζόμεθα προεκτεινομένην ὑπὸ τὰς ἠπείρους. Ὁ ἀριθμὸς ὅστις μετρεῖ τὴν ἀπόστασιν ταύτην καλεῖται ὑψοδείκτης ἢ ὑψόμετρον.

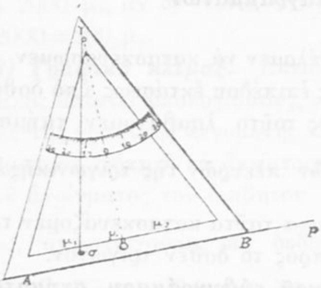
Σχετικὸν ὕψος σημείου τινὸς τοῦ ἐδάφους καλεῖται ἡ ὑψομετρικὴ διαφορὰ τούτου καὶ ἄλλου σημείου τοῦ ἐδάφους.

Ὁ προσδιορισμὸς τοῦ ὕψους σημείου τινὸς τοῦ ἐδάφους ἀπὸ χωροσταθμικῆς τινὸς ἐπιφανείας (δηλ. ἐπιφανείας καθέτου ἐπὶ τὸ νῆμα τῆς στάθμης) εἶναι ὁ σκοπὸς τῆς **χωροσταθμίσεως**. Ὡς ἐπιφάνεια δὲ χωροσταθμικὴ λαμβάνεται κυρίως ἡ ἐπιφάνεια τῆς θαλάσσης.

Χωροσταθμικὰ ὄργανα. Πρὸς ἐπιτέλεσιν τοῦ σκοποῦ τῆς χωροσταθμίσεως γίνεται χρῆσις διαφόρων ὀργάνων, ὧν τὰ ἁπλούστερα εἶναι τὰ ἑξῆς:

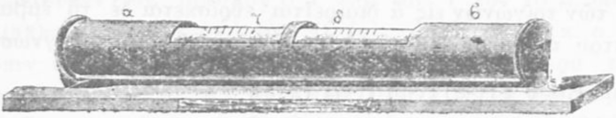
α΄) Τὸ ἀλφάδιον (ἢ ἡ στάθμη τῶν τεκτόνων) ὅπερ ἀποτελεῖ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



ται συνήθως ἐξ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς ξυλίνου τριγώνου ἐκ τῆς κορυφῆς τοῦ ὁποίου κρέμαται νῆμα φέρον εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον βαρύ τι σῶμα· εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου ὑπάρχει λεπτὴ χαραγή· ὅταν δὲ τὸ νῆμα εὑρίσκεται εἰς τὴν χαραγὴν ἡ βάσις κεῖται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους.

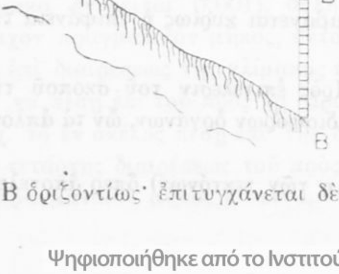
β΄) Ἡ ἀεροστάθμη (ἢ χωροβάτης) ἥτις ἀποτελεῖται ἐκ μικροῦ ὑαλίνου σωλῆνος ἐλαφρῶς καμπυλωμένου καὶ πλήρους οἰνοπνεύματος ἢ αἰθέρος (ἢ μίγματος αἰθέρος καὶ οἰνοπνεύματος) καὶ περιέχοντος μικρὰν φυσαλίδα ἀέρος, ἥτις λαμβάνει πάντοτε τὴν ἀνωτέραν ἐν τῷ σωλῆνι θέσιν. Ὁ σωλὴν οὗτος στερεοῦται ἐντὸς κυ-



λινδρικοῦ μεταλλίνου σωλῆνος αβ ἔχοντος ἐκτομὴν πρὸς τὰ ἄνω, ἵνα καθίσταται ὁρατὴ ἡ φυσαλὶς γδ καὶ μέρος τοῦ σωλῆνος· ὁ μεταλλικὸς σωλὴν συνδέεται σταθερῶς ἐπὶ πλακός· ὅταν ἡ φυσαλὶς καταλάβῃ τὸ μέρος τοῦ ὑαλίνου σωλῆνος, τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ δύο χαραγῶν αὐτοῦ (εἰς τὰ σημεῖα γ, δ) τότε ἡ ἀεροστάθμη κεῖται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους.

Προσδιορισμὸς τῆς διαφορᾶς τοῦ ὕψους δύο σημείων.

α΄) Ἔστωσαν δύο σημεῖα τοῦ ἐδάφους Α καὶ Β ἀπέχοντα ἀπ' ἀλλήλων ὀλίγον π. χ. 6 μ. καὶ τῶν ὁποίων θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ὑψομετρικὴν διαφοράν. Πρὸς τοῦτο ἐπὶ τοῦ σημείου Β ὑψοῦμεν κανόνα Δ διῃρημένον εἰς μέτρα καὶ ὑποδιαιρέσεις αὐτοῦ, ἐπὶ δὲ τοῦ Α θέτομεν τὸ ἄκρον ἑτέρου κανόνος Ε, τὸν ὁποῖον διευθύνομεν κατὰ τὴν διεύθυνσιν

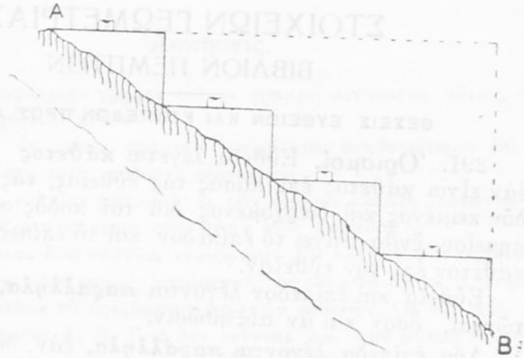


ΑΒ ὁριζοντίως· ἐπιτυγχάνεται δὲ τοῦτο διὰ τοῦ ἀλφαδίου ἢ τῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀεροστάθμης τὴν ὁποίαν θέτομεν ἐπὶ τοῦ κανόνος Ε· ἐὰν ὁ κανὼν Ε συναντήσῃ τὸν κανόνα Δ εἰς τὸ α, ἡ μέτρησις τῆς ἀποστάσεως Βα θὰ μᾶς δώσῃ τὴν ζητουμένην διαφορὰν τοῦ ὕψους.

β΄) Ἐὰν ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β εἶναι σχετικῶς μεγάλη (μεγαλυτέρα τοῦ μήκους τοῦ κανόνος Δ), ἐκλέγομεν μεταξὺ τῶν Α καὶ Β σημεῖα ἀπέχοντα ἀπ᾽ ἀλλήλων ὀλιγώτερον τοῦ μήκους τοῦ κανόνος Δ καὶ εὑρίσκομεν κατὰ



τὸν αὐτὸν ὡς ἄνω τρόπον τὰς διαφορὰς τοῦ ὕψους τῶν διαδοχικῶν αὐτῶν σημείων, αἵτινες δύνανται νὰ εἶναι καὶ ἀρνητικαί. Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν εὑρεθεισῶν μερικῶν διαφορῶν δίδει τὴν ζητουμένην ὑψομετρικὴν διαφορὰν τῶν σημείων Α καὶ Β.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑ

291. **Ὁρισμοί.** Εὐθεῖα λέγεται ***κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον,*** ἐὰν εἶναι κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας, τὰς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κειμένας καὶ διερχομένας διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς, ἤτοι τοῦ σημείου, ἔνθα τέμνει τὸ ἐπίπεδον· καὶ τὸ ἐπίπεδον λέγεται τότε κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν.

Εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον λέγονται ***παράλληλα,*** ἐὰν δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν.

Δύο ἐπίπεδα λέγονται ***παράλληλα,*** ἐὰν δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν.

292. **Ἀξίωμα.** ***Πᾶν ἐπίπεδον στρεφόμενον περὶ οἱανδήποτε εὐθεῖαν, κειμένην ἐπ' αὐτοῦ, δύναται νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ τυχόντος σημείου.***

293. **Θεώρημα.** ***Διὰ τριῶν σημείων, μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, διέρχεται ἓν ἐπίπεδον καὶ ἓν μόνον.***

Ἔστωσαν τρία σημεῖα Α, Β, Γ, μὴ κείμενα ἐπὶ μιᾶς εὐθείας· λέγω, ὅτι δι' αὐτῶν διέρχεται ἓν ἐπίπεδον καὶ ἓν μόνον.

Ἐπὶ τοῦ τυχόντος ἐπιπέδου γράφομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν καὶ ἐφαρμόζομεν αὐτὴν ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ μεταφέροντες τὸ ἐπίπεδον, ὅπερ θὰ διέρχηται τότε διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β· ἔπειτα στρέφομεν τὸ ἐπίπεδον περὶ τὴν ΑΒ, μέχρις οὗ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ τρίτου σημείου Γ· τότε θὰ ἔχωμεν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῶν τριῶν δοθέντων σημείων. Ἄλλο δέ, πλὴν τούτου, δὲν δύναται νὰ διέλθῃ διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ· διότι δύο ἐπίπεδα, ἔχοντα τρία κοινὰ σημεῖα, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ἐφαρμόζουσιν (34).

294. **Πόρισμα 1ον.** ***Δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι, ὡς αἱ ΑΒ, ΑΓ, ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ κεῖνται.***

295. **Πόρισμα 2ον.** ***Δύο παράλληλοι ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

296. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνωσιν ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εἶναι εὐθεῖα γραμμή.***

Διότι, ἂν ἡ τομὴ εἶχε τρία σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας, τὰ δύο ἐπίπεδα, ὡς διερχόμενα διὰ τῶν τριῶν τούτων σημείων θὰ ἐφήρμοζον καὶ θὰ ἀπετέλουν ἓν μόνον ἐπίπεδον, ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει· ἄρα πάντα τὰ σημεῖα τῆς τομῆς κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.

Ἀσκήσεις.

559) Τί ἐπιφάνειαν γράφει εὐθεῖα γραμμὴ κινουμένη οὕτως, ὥστε νὰ τέμνῃ περιφέρειαν κύκλου;

560) Πότε ἐν γένει τράπεζα στηρίζεται σταθερώτερον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους· ὅταν ἔχῃ τρεῖς πόδας ἢ τέσσαρας;

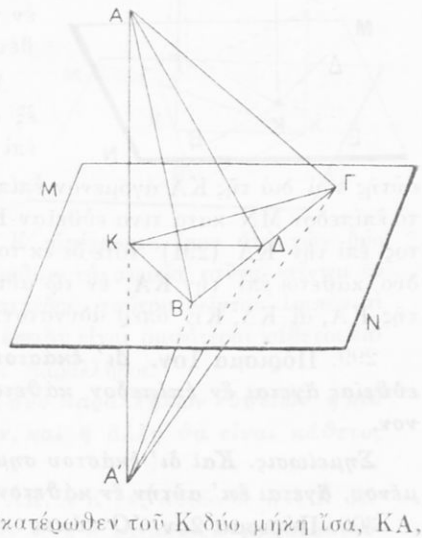
561) Τρεῖς εὐθεῖαι γραμμαί, ἐκ τῶν ὁποίων ἑκάστη συναντᾷ τὰς ἄλλας δύο, ορίζουσι πάντοτε τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου;

562) Δίδονται δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ σημεῖόν τι Δ ἐκτὸς τούτων. Διὰ ποίας κατασκευῆς θὰ δειχθῇ ἂν τὸ Δ ἀνήκῃ ἢ ὄχι εἰς τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ.

563) Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ ὁρισθῇ ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ.

564) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῆς τομῆς δοθέντος ἐπιπέδου καὶ εὐθείας, ἥτις διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου καὶ τέμνει δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

297. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν εὐθεῖά τις ΑΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας τεμνομένας ΚΒ, ΚΓ*** (κατὰ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν), ***θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΜΝ.***



Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Κ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ τυχοῦσα εὐθεῖα, ἡ ΚΔ, ἂς τμηθῶσι δὲ αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας ταύτης ὑπὸ τῆς τυχούσης εὐθείας ΒΓ, ἥτις θὰ τέμνῃ καὶ τὴν ΚΔ εἴς τι σημεῖον Δ· ἔπειτα ἂς προσεκβληθῇ ἡ ΑΚ καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐπ' αὐτῆς ἑκατέρωθεν τοῦ Κ δύο μήκη ἴσα, ΚΑ,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

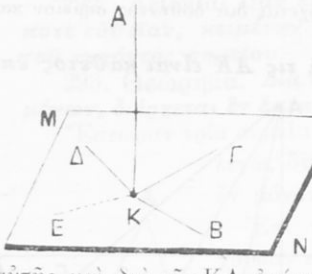
ΚΑ΄, ἂς ἀχθῶσι δὲ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ καὶ αἱ Α΄Β, Α΄Γ, Α΄Δ.

Ἐπειδὴ ἡ ΚΓ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΑ΄, εἶναι ΓΑ=ΓΑ΄· δι᾽ ὅμοιον λόγον εἶναι καὶ ΒΑ=ΒΑ΄, ἐπομένως τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄ΒΓ εἶναι ἴσα (97). Ὅταν δὲ ἐφαρμόσωσι, θὰ πέσῃ τὸ Α΄ ἐπὶ τοῦ Α καὶ τὸ Δ θὰ μείνῃ εἰς τὴν θέσιν του, ὥστε ἡ Α΄Δ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΔ· εἶναι λοιπὸν ΔΑ=ΔΑ΄, καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν (113) ἡ ΔΚ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΑ΄· ἄρα καὶ ἡ ΑΑ΄ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΔ.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ πᾶσαν εὐθεῖαν, διὰ τοῦ Κ διερχομένην καὶ κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο. ὅ.ἔ.δ.

298. **Θεώρημα**. ***Πᾶσαι αἱ ἐξ ἑνὸς σημείου εὐθείας ἀγόμεναι ἐπ᾽ αὐτὴν κάθετοι κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ καθέτῳ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν.***

Ἔστωσαν ἐκ τοῦ σημείου Κ τῆς εὐθείας ΚΑ κάθετοι ἐπ᾽ αὐτὴν αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ κτλ. (ἡ μὲν ΚΒ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΚΒ, ἡ δὲ ΚΓ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΚΓ κτλ.)· λέγω ὅτι πᾶσαι αὗται κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ π. χ. ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ τῶν καθέτων ΚΒ, ΚΓ.



Διότι, ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι μία ἐξ αὐτῶν, ἡ ΚΔ, δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, τὸ δι᾽ αὐτῆς καὶ διὰ τῆς ΚΑ ἀγόμενον ἐπίπεδον, τὸ ΑΚΔ, θὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ κατά τινα εὐθεῖαν ΚΕ, ἥτις θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΑ (291)· τότε δὲ ἐκ τοῦ σημείου Κ θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν ΚΑ, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι μετὰ τῆς ΚΑ, αἱ ΚΔ, ΚΕ· ὅπερ ἀδύνατον.

299. **Πόρισμα 1ον.** ***Δι᾽ ἑκάστου σημείου τῆς δοθείσης εὐθείας ἄγεται ἓν ἐπίπεδον κάθετον ἐπ᾽ αὐτήν, καὶ ἓν μόνον.***

Σημείωσις. Καὶ δι᾽ ἑκάστου σημείου, ἐκτὸς εὐθείας κειμένου, ἄγεται ἐπ᾽ αὐτὴν ἓν κάθετον ἐπίπεδον καὶ ἓν μόνον.

300. **Πόρισμα 2ον**. ***Ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ἴσον***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀπεχόντων ἀπὸ δύο σημείων, εἶναι ἐπίπεδον διαιροῦν τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο σημείων εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ κάθετον ἐπ' αὐτήν.

Ἀσκήσεις

565) Ἐὰν ὀρθὴ γωνία περιστραφῇ περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτῆς, τί θὰ γράψῃ ἡ ἄλλη πλευρά;

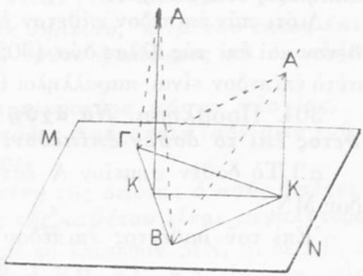
566) Πᾶσα εὐθεῖα πλαγία πρὸς ἐπίπεδον εἶναι κάθετος ἐπί τινα εὐθεῖαν, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κειμένην καὶ διερχομένην διὰ τοῦ ποδός της, μία δὲ καὶ μόνη τοιαύτη εὐθεῖα ὑπάρχει.

567) Τρεῖς εὐθεῖαι ἔχουσαι ἓν κοινὸν σημεῖον καὶ κάθετοι ἀνὰ δύο, δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ἑκάστη δὲ τούτων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων.

568) Νὰ ὁρισθῇ εὐθεῖα, ἥτις νὰ διέρχηται διὰ δοθέντος σημείου καὶ ἐφ' ἧς αἱ κάθετοι, αἱ ἀγόμεναι διὰ τριῶν ἄλλων δοθέντων σημείων, νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῆς ζητουμένης εὐθείας.

301. **Θεώρημα.** ***Δύο εὐθεῖαι ΑΚ, Α΄Κ΄ κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΜΝ εἶναι παράλληλοι.***

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΚ΄ καὶ ἐκ τοῦ Κ κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ ἡ ΒΓ· ἂς ληφθῇ δὲ ΚΒ = ΚΓ.



Αἱ δύο πλάγιαι εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ εἶναι ἴσαι (109)· ὡς καὶ αἱ Κ΄Β, Κ΄Γ· ἑπομένως τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα Α΄Κ΄Β καὶ Α΄Κ΄Γ εἶναι ἴσα (101,1) ἄρα εἶναι καὶ Α΄Β = Α΄Γ· ὥστε τὰ τέσσαρα σημεῖα, Α,Κ,Α΄, Κ΄ ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τῶν δύο σημείων Β καὶ Γ· κατ' ἀκολουθίαν τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ (300)· ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου κεῖνται λοιπὸν αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΚ, Α΄Κ΄ καί, ἐπειδὴ εἶναι ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΚΚ΄, συνάγεται ὅτι εἶναι παράλληλοι.

302. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ἡ μία εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ ἡ ἄλλη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.***

Ἔστωσαν παράλληλοι αἱ ΑΚ, Α΄Κ΄, ἐξ αὐτῶν δὲ ἡ Α΄Κ΄ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· ἐὰν γίνῃ ἡ κατασκευὴ τοῦ προηγου-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μένου θεωρήματος, τὰ τρία σημεῖα Κ, Κ΄, Α΄ ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων Β καὶ Γ (διότι τὰ τρίγωνα Α΄Κ΄Β καὶ Α΄Κ΄Γ εἶναι πάλιν ἴσα)· ἄρα τὸ δι᾽ αὐτῶν διερχόμενον ἐπίπεδον εἶναι κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ· ἀλλ᾽ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κεῖται καὶ ἡ ΑΚ ὡς παράλληλος τῇ Α΄ Κ΄· ἄρα ἡ ΚΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΚ· ἀλλὰ καὶ ἡ ΚΚ΄ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΑ ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ Κ΄Α΄ ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς δύο εὐθείας ΚΚ΄ καὶ ΚΒ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΜΝ.

Σημείωσις. Ἐν τῇ ἀποδείξει τοῦ θεωρήματος τούτου ὑποτίθεται ὅτι, ***ὅταν ἐκ δύο παραλλήλων ἡ μία τέμνῃ ἐπίπεδόν τι ΜΝ, καὶ ἡ ἄλλη θὰ τέμνῃ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον·*** ἀληθεύει δὲ τοῦτο, διότι τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο ἄλλων παραλλήλων τέμνει τὸ ΜΝ κατά τινα εὐθεῖαν ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Κ΄, ἔνθα ἡ μία παράλληλος τέμνει τὸ ἐπίπεδον, τὴν δὲ εὐθεῖαν ταύτην πρέπει νὰ τέμνῃ καὶ ἡ ἄλλη παράλλ λος (69). ἄρα τέμνει καὶ τὸ ἐπίπεδον.

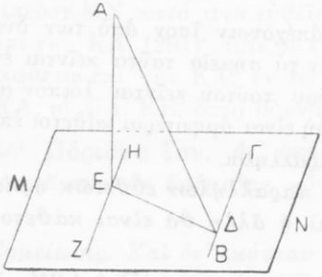
303. **Θεώρημα.** ***Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι εἶναι καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι.***

Διότι πᾶν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν τρίτην εὐθεῖαν εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὰς ἄλλας δύο (302)· αὗται δὲ ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι (301).

304. Πρόβλημα. ***Νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.***

α΄) Τὸ δοθὲν σημεῖον Α ἔστω ἐκτὸς τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ΜΝ.

Ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ΜΝ γράφομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, τὴν ΒΓ, καὶ ἄγομεν ἐπ᾽ αὐτὴν ἐκ τοῦ σημείου Α κάθετον τὴν ΑΔ. Ἐκ τοῦ Δ ἄγομεν τὴν ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ, καὶ τέλος ἐκ τοῦ Α τὴν ΑΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΕ· αὕτη ἡ ΑΕ θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.

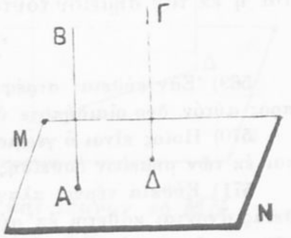


Διότι ἡ ΒΓ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν ΔΑ καὶ ἐπὶ τὴν ΔΕ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΑΔΕ· ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ Ε ἀχθῇ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

παράλληλος τῇ ΒΓ, ἡ ΖΗ (ἥτις θὰ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ), θὰ εἶναι καὶ αὐτὴ κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΑΔΕ· ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν ΑΕ. Ἡ ΑΕ λοιπὸν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΗ, εἶναι δὲ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΕΔ ἐκ κατασκευῆς· ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ.

β΄) Τὸ δοθὲν σημεῖον Α ἔστω ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ΜΝ.



Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Γ, ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου κειμένου, ἄγομεν κάθετον ἐπ᾽ αὐτό, τὴν ΓΔ, ἐκ δὲ τοῦ Α παράλληλον τῇ ΓΔ, τὴν ΑΒ· αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (302).

305. **Πόρισμα 1ον.** ***Ἐξ ἑκάστου σημείου μία μόνη κάθετος ἄγεται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον*** (301).

306. **Πόρισμα 2ον.** ***Ἐὰν ὀρθογωνίου τριγώνου*** (ὡς τοῦ ΑΔΕ) ***ἡ μὲν μία πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας*** (ὡς ἡ ΑΕ) ***εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἡ δὲ ἄλλη ἐπὶ εὐθεῖάν τινα τοῦ ἐπιπέδου*** (ὡς τὴν ΒΓ) ***καὶ ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (ἐὰν τέμνῃ αὐτήν).***

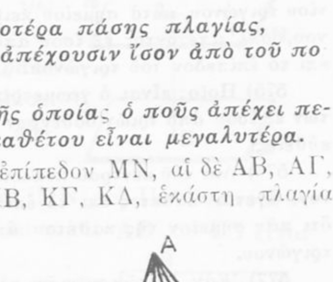
307. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν ἐκ σημείου, κειμένου ἐκτὸς ἐπιπέδου, ἀχθῇ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἡ κάθετος καὶ ὁσαιδήποτε πλάγιαι,***

1) ***ἡ κάθετος θὰ εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας,***

2) ***αἱ πλάγιαι, ὧν οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, εἶναι ἴσαι,***

3) ***ἐκ δύο πλαγίων, ἐκείνη τῆς ὁποίας ὁ ποῦς ἀπέχει περισσότερον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου εἶναι μεγαλυτέρα.***

Ἔστω ἡ ΑΚ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, αἱ δὲ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ πλάγιαι. Ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ἑκάστη πλαγία



γίνεται ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι ἡ ΑΚ· ὥστε ἡ ΑΚ εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας.

Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ΚΒ=ΚΓ, θὰ εἶναι καὶ ΑΒ=ΑΓ, διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΚΒ καὶ ΑΚΓ εἶναι ἴσα· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ΚΔ>ΚΒ, θὰ εἶναι καὶ ΑΔ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$>$ΑΒ, διότι λαμβάνοντες ΚΕ=ΚΒ καὶ ἄγοντες τὴν ΑΕ, ἔχομεν ΑΕ=ΑΒ καὶ ΑΔ$>$ΑΕ· ἄρα καὶ ΑΔ$>$ΑΒ.

Καὶ τὰ ἀντίστροφα τῶν προτάσεων τούτων ἀποδεικνύονται εὐκόλως.

308. **Ὁρισμός.** ***Ἀπόστημα*** σημείου ἀπὸ ἐπιπέδου λέγεται ἡ ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἠγμένη κάθετος.

Ἀσκήσεις.

569) Ἐὰν εὐθεῖα στρέφεται περὶ ἄξονα, μένουσα παράλληλος πρὸς αὐτόν, δύο οἱαιδήποτε θέσεις τῆς εὐθείας εἶναι παράλληλοι.

570) Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν καθέτων αἵτινες ἄγονται ἐκ τῶν σημείων δοθείσης εὐθείας ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον;

571) Εὐθεῖα τέμνει πλαγίως ἐπίπεδον, ἐκ τῶν σημείων δὲ τῆς εὐθείας ἄγονται κάθετοι ἐπ' αὐτήν. Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κοινῶν σημείων τῶν καθέτων τούτων καὶ τοῦ ἐπιπέδου;

572) Ἐὰν ἐκ σημείου Α κειμένου ἐκτὸς ἐπιπέδου ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτό, ἔστω ἡ ΑΕ καὶ ἐκ τοῦ ποδὸς Ε ἀχθῇ κάθετος ἐπί τινα εὐθεῖαν ΒΓ τοῦ ἐπιπέδου τέμνουσα αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον Δ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

573) Ἐὰν ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι 45^0 καὶ διὰ τοῦ σημείου Β, ἀπέχοντος τοῦ Α 10 μέτρα, ὑψωθῇ ἡ κάθετος ΒΔ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, μήκους 2,5 μ., νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς καθέτου, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου Δ ἐπὶ τὴν ΑΓ.

574) Ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου, μετὰ σημείου κειμένου ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου, ἀλλ' ἀπέχοντος ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου.

575) Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων ἐξ ἴσου ἀπὸ τριῶν δοθέντων σημείων μὴ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας;

576) Διὰ τοῦ κέντρου κύκλου περιγεγραμμένου περὶ δοθὲν τρίγωνον, ἄγεται κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου.

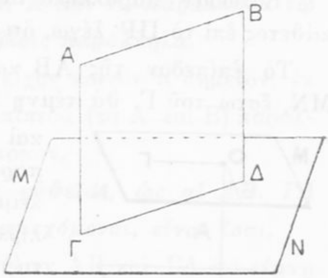
577) Ἐὰν ἐκ τῶν γωνιῶν τὰς ὁποίας εὐθεῖα, τέμνουσα ἐπίπεδον, σχηματίζει πρὸς τὰς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κειμένας εὐθείας, εἶναι τρεῖς ἴσαι, ἡ εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

578) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων δύο σημείων ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, εἶναι διπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ μέσου τῆς εὐθείας, τῆς ἑνούσης τὰ δύο ταῦτα σημεῖα, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

309. **Θεώρημα.** ***Πᾶσα εὐθεῖα ΑΒ παράλληλος, εὐθείᾳ τινι ΓΔ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ θὰ εἶναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διότι ἡ ΑΒ κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΓΔ δὲν δύναται νὰ συναντήσῃ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἢ κατὰ τὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων τούτων ΓΔ· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, διότι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

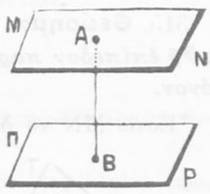


310. **Πόρισμα 1ον.** ***Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ, πᾶν ἐπίπεδον ΑΒΓΔ, δι' αὐτῆς διερχόμενον καὶ τέμνον τὸ ΜΝ, τέμνει αὐτὸ κατὰ παράλληλον τῇ εὐθείᾳ ΑΒ.***

311. Πόρισμα 2ον. ***Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι παράλληλος ἐπιπέδῳ, αἱ ἐκ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἀγόμεναι παράλληλοι τῇ εὐθείᾳ κεῖνται πᾶσαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.***

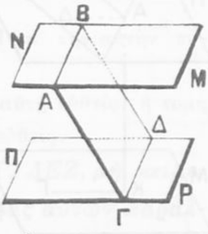
312. **Θεώρημα.** ***Δύο ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΡ κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἶναι παράλληλα.***

Διότι, ἂν εἶχον κοινόν τι σημεῖον, τὸ Γ, αἱ εὐθεῖαι ΓΑ, ΓΒ καὶ ἡ ΑΒ θὰ ἐσχημάτιζον τρίγωνον, τὸ ΑΒΓ, ἔχον δύο ὀρθὰς γωνίας, τὰς Α καὶ Β, ὅπερ ἄτοπον.



313. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνωνται ὑπὸ ἄλλου ἐπιπέδου, αἱ τομαὶ αὐτῶν εἶναι παράλληλοι.***

Ἔστωσαν παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΜΝ καὶ ΠΡ, τεμνόμενα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ· λέγω, ὅτι αἱ τομαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.



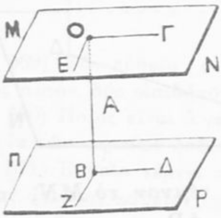
Διότι ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, αἵτινες κεῖνται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΓΔ, ἐτέμνοντο εἴς τι σημεῖον, τοῦτο θὰ ἦτο κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων ΜΝ καὶ ΠΡ, ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

314. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἕν, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἄλλο.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστωσαν παράλληλα τὰ ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΡ καὶ ἡ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὸ ΠΡ· λέγω, ὅτι θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ΜΝ.

Τὸ ἐπίπεδον τῆς ΑΒ καὶ ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου τοῦ ΜΝ, ἔστω τοῦ Γ, θὰ τέμνῃ τὸ ΠΡ κατά τινα εὐθεῖαν ΒΔ,



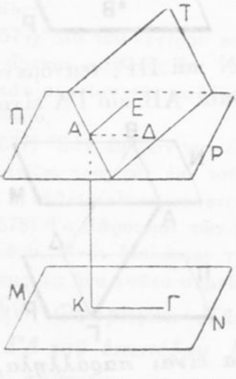
καὶ τὸ ΜΝ κατά τινα εὐθεῖαν ΟΓ παράλληλον τῇ ΒΔ· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒ, κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν παραλλήλων τούτων εὐθειῶν, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΟΓ· ἄρα θὰ τέμνῃ αὐτὴν (καὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, ἐφ' οὗ αὕτη κεῖται) κατά τι σημεῖον Ο. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ διὰ τῆς ΑΒ καὶ ἄλλο ἐπίπεδον, ἀποδεικνύεται ὁμοίως, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν ΟΕ· ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ.

Σημείωσις. Δι' ὁμοίου τρόπου ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα, τέμνουσα τὸ ἕν, θὰ τέμνῃ καὶ τὸ ἄλλο.

315. **Θεώρημα.** ***Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου δύναται νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ καὶ ἓν μόνον.***

Ἔστω ΜΝ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ Α τὸ δοθὲν σημεῖον ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου.



Ἐκ τοῦ Α ἄγομεν τὴν ΑΚ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ καὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΚ· τὰ δύο ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΡ εἶναι παράλληλα (312).

Ἄλλο ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τοῦ Α καὶ παράλληλον τῷ ΜΝ, δὲν ὑπάρχει· διότι, ἂς ὑποτεθῇ τοιοῦτο τὸ ΑΤ· ἐὰν διὰ τῆς ΑΚ ἀχθῇ τυχὸν ἐπίπεδον, θὰ τέμνῃ τὸ μὲν ΜΝ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΚΓ, τὰ δὲ παράλληλα αὐτῷ κατὰ τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΑΕ, αἵτινες θὰ ἦσαν παράλληλοι τῇ ΚΓ, ὅπερ ἄτοπον.

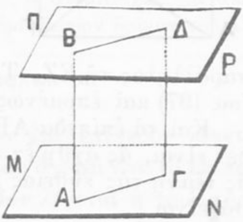
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

316. **Θεώρημα.** ***Δύο ἐπίπεδα, Α καὶ Β, παράλληλα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ Γ, εἶναι καὶ ἀλλήλοις παράλληλα.***

Διότι, ἂν τὰ ἐπίπεδα Α καὶ Β εἶχον κοινόν τι σημεῖον, ἐκ τοῦ σημείου ἐκείνου θὰ ἦσαν δύο ἐπίπεδα (τὰ Α καὶ Β) παράλληλα ἑνὶ ἐπιπέδῳ (τῷ Γ), ὅπερ ἄτοπον.

317. **Θεώρημα.** ***Παράλληλοι εὐθεῖαι, ὡς αἱ ΑΒ, ΓΔ μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμεναι, εἶναι ἴσαι.***

Διότι τὸ ἐπίπεδον τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ θὰ τέμνῃ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΡ κατὰ παραλλήλους εὐθείας, τὰς ΑΓ καὶ ΒΔ· ἄρα τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἑπομένως εἶναι ΑΒ=ΓΔ.



318. **Πόρισμα.** ***Αἱ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἀγόμεναι κάθετοι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.***

319. **Ὁρισμός.** ***Ἀπόστασις*** δύο παραλλήλων ἐπιπέδων λέγεται μία οἱαδήποτε τῶν μεταξὺ αὐτῶν καθέτων.

Ἀσκήσεις.

579) Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

580) Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας, αἵτινες οὔτε τέμνονται οὔτε εἶναι παράλληλοι.

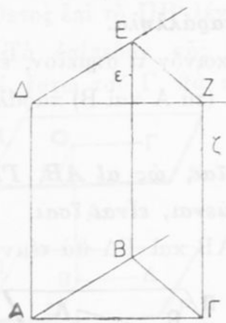
581) Δι' ἑκάστης ἐκ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην.

582) Ἐὰν εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, εἶναι παράλληλα πρὸς ἄλληλα.

583) Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ, ἡ τομὴ αὐτῶν, ἐὰν τέμνωνται, θὰ εἶναι παράλληλος τῇ εὐθείᾳ.

320. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο γωνίαι, ΒΑΓ, ΔΕΖ, μὴ κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη φερομένας, αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν παράλληλα.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Ἂς ληφθῇ ΑΓ = ΔΖ καὶ ΑΒ = ΔΕ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ καὶ αἱ ΒΓ, ΕΖ·

Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΔΕ, ἕπεται ὅτι (124) ἡ ΒΕ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΑΔ· δι' ὅμοιον λόγον καὶ ἡ ΓΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΑΔ. ὥστε αἱ δύο εὐθεῖαι ΒΕ καὶ ΓΖ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΑΔ· ἄρα εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας ἴσαι καὶ παράλληλοι· ὥστε εἶναι καὶ ἡ ΒΓ ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΕΖ. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα (97) καὶ ἐπομένως ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση τῇ ΕΔΖ.

Καὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι παράλληλα, διότι, ἂν δὲν εἶναι, ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Δ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ΑΒΓ καὶ ἂς τέμνῃ τὰς εὐθείας ΒΕ καὶ ΓΖ εἰς τὰ σημεῖα ε καὶ ζ· τότε θὰ εἶναι

$$\varepsilon\mathrm{B} = \mathrm{A\Delta} \text{ καὶ } \zeta\Gamma = \mathrm{A\Delta} \quad (317)$$

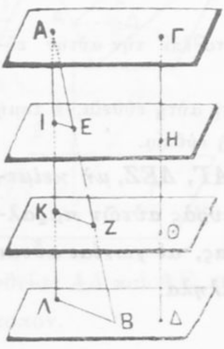
Ἀλλ' ἀπεδείχθη, ὅτι εἶναι ΕΒ = ΑΔ καὶ ΖΓ = ΑΔ·

ἄρα ΕΒ = εΒ, ΖΓ = ζΓ, ὅπερ ἄτοπον.

Σημείωσις. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις. ***Ἐὰν ἐκ σημείων, ἐπὶ ἐπιπέδου κειμένων, ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι ἴσαι καὶ παράλληλοι καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν τούτων κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου τῷ δοθέντι.***

321. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.***

Ἔστωσαν τυχοῦσαι εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΓΔ, τεμνόμεναι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων εἰς τὰ σημεῖα Α, Ε, Ζ, Β καὶ Γ, Η, Θ, Δ· λέγω ὅτι θὰ εἶναι



$$\frac{\mathrm{AE}}{\Gamma\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{H\Theta}} = \frac{\mathrm{ZB}}{\Theta\Delta}.$$

Διότι ἂν ἀχθῇ ἐκ τοῦ Α ἡ ΑΛ παράλληλος τῇ ΓΔ, τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΛ θὰ τέμνῃ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα κατ' εὐθείας παραλλήλους, τὰς ΕΙ, ΖΚ, ΒΛ καὶ ἐπομένως εἶναι

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AI}} = \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{IK}} = \frac{\mathrm{ZB}}{\mathrm{K\Lambda}}$$

ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι ΙΑ = ΓΗ, ΙΚ = ΗΘ καὶ ΚΛ = ΘΔ (317)·

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἕπεται ὅτι $\frac{ΑΕ}{ΓΗ} = \frac{ΕΖ}{ΗΘ} = \frac{ΖΒ}{ΘΔ}$.

Ἀσκήσεις

584) Ἐὰν Μ εἶναι σημεῖόν τι δοθείσης περιφερείας, Ο εἶναι σημεῖον ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ τὸ Ν διαιρεῖ τὴν εὐθεῖαν ΟΜ κατὰ δοθέντα λόγον, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ τὰς διαφόρους θέσεις τοῦ Μ ὁ τόπος τοῦ Ν εἶναι περιφέρεια κύκλου.

585) Ἐὰν Α,Β,Γ,Δ εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ Ο εἶναι σημεῖον ἐκτὸς αὐτοῦ, διαιρεθῶσι δὲ αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ εἰς δοθέντα λόγον διὰ τῶν σημείων Α', Β', Γ', Δ' ἀντιστοίχως, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ἐπίπεδον τετράπλευρον ὅμοιον τοῦ ΑΒΓΔ.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΟΒΟΛΩΝ

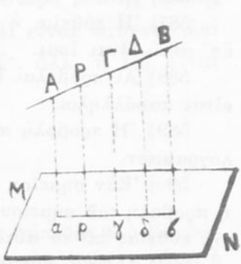
322. **Ὁρισμός.** ***Προβολὴ*** σημείου ἐπὶ ἐπίπεδον λέγεται ὁ πούς τῆς καθέτου, ἥτις ἐκ τοῦ σημείου ἄγεται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Προβολὴ δὲ γραμμῆς ἐπὶ ἐπίπεδον λέγεται ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσιν αἱ προβολαὶ τῶν σημείων αὐτῆς.

Καὶ προβολὴ οἱουδήποτε σχήματος ἐπὶ ἐπίπεδον λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσιν αἱ προβολαὶ ἁπάντων τῶν σημείων αὐτοῦ.

323. **Θεώρημα.** ***Ἡ προβολὴ εὐθείας ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι εὐθεῖα.***

Διότι αἱ ἐκ τῶν σημείων τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, οἷον αἱ Αα, Ββ, Γγ, Δδ εἶναι παράλληλοι, τέμνουσι δὲ καὶ τὴν ΑΒ· ἄρα κεῖνται πᾶσαι ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, τῷ αΑΒ καὶ διὰ τοῦτο οἱ πόδες αὐτῶν εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ἤτοι ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς τῆς αγδβ.



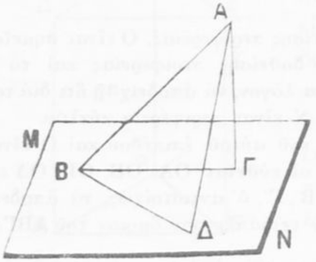
Ἀντιστρόφως δὲ πᾶν σημεῖον τῆς αβ, οἷον τὸ ρ εἶναι προβολὴ σημείου τινὸς τῆς ΑΒ· διότι ἐὰν ἐξ αὐτοῦ ἀχθῇ παράλληλος τῇ αΑ ἡ ρΡ, αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Ρ, θὰ εἶναι δὲ καὶ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ (300)· ἄρα τὸ ληφθὲν σημεῖον ρ εἶναι προβολὴ τοῦ Ρ.

324. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν εὐθεῖα τέμνῃ ἐπίπεδον, ἡ γωνία,***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἣν σχηματίζει μετὰ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἐκ τῶν γωνιῶν, ἃς σχηματίζει μετὰ τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον ΜΝ εἰς τὸ σημεῖον Β, καὶ ΒΓ ἡ προβολὴ αὐτῆς· λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἐκ τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ ΑΒ μεθ' οἱασδήποτε εὐθείας, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κειμένης, ὡς τῆς ΒΔ.



Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἡ ΑΓ καὶ ἂς ληφθῇ ΒΔ=ΒΓ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ἔχουσι τὴν ΑΒ κοινήν, τὴν ΒΔ ἴσην τῇ ΒΓ, ἀλλὰ τὴν πλευρὰν ΑΓ μικροτέραν τῆς ΑΔ (διότι ἡ μὲν ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἡ δὲ ΑΔ πλαγία)· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΒΔ· ὃ.ἔ.δ.

Σημείωσις. Ἡ ὀξεῖα γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει εὐθεῖά τις μετὰ τῆς προβολῆς της ἐπὶ ἐπίπεδον, λέγεται ***κλίσις τῆς εὐθείας πρὸς τὸ ἐπίπεδον.***

Ἀσκήσεις.

586) Πότε ἡ προβολὴ ἐπὶ ἐπίπεδον δὲν εἶναι εὐθεῖα;

587) Ἡ εὐθεῖα, ἡ παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον καὶ ἡ προβολή της ἐπ' αὐτὸ εἶναι ἴσαι.

588) Αἱ προβολαὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι.

589) Ἡ προβολὴ παραλληλογράμμου ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι παραλληλόγραμμον.

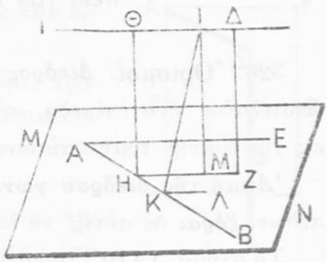
590) Ἐὰν σημεῖον εὐθείας διαιρῇ αὐτὴν κατὰ δοθέντα λόγον καὶ ἡ προβολὴ τοῦ σημείου αὐτοῦ ἐπὶ ἐπίπεδον θὰ διαιρῇ τὴν προβολὴν τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

591) Αἱ ἴσαι εὐθεῖαι, αἵτινες ἄγονται ἔκ τινος σημείου ἐκτὸς ἐπιπέδου, ἐπ' αὐτό, ἔχουσι τὴν αὐτὴν κλίσιν πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

325. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ὑπάρχει κοινὴ αὐτῶν κάθετος καὶ μία μόνη· εἶναι δὲ αὕτη ἡ ἐλαχίστη τῶν δύο εὐθειῶν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ τινος σημείου Α τῆς ΑΒ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΕ παράλληλος τῇ ΓΔ· αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΕ ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἐπιπέδου τινὸς ΜΝ, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι (309) παράλληλον τῇ ΓΔ· ἂς ἀχθῇ ἔπειτα ἔκ τινος σημείου τῆς ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, ἡ ΔΖ, καὶ ἐκ τοῦ Ζ παράλληλος τῇ ΕΑ, ἡ ΖΗ καὶ ἐκ τοῦ Η ἡ ΗΘ παράλληλος τῇ ΔΖ, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν ΓΔ εἴς τι σημεῖον Θ (διότι ἡ ΗΘ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΗΖΓΔ τῶν δύο παραλλήλων ΗΖ καὶ ΓΔ)· λέγω, ὅτι ἡ ΗΘ εἶναι ἡ κοινὴ κάθετος τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.



Καὶ ὄντως ἡ ΗΘ, ὡς παράλληλος τῇ ΔΖ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· ἄρα κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· εἶναι δὲ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΗΖ· ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ ΓΔ.

Ἄλλη κοινὴ κάθετος τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ δὲν ὑπάρχει· διότι, ἔστω τοιαύτη ἡ ΙΚ· αὕτη κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν ΓΔ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ ΚΛ, τὴν ἀγομένην ἐκ τοῦ Κ· οὖσα δὲ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· ἀλλ' ἂν ἐκ τοῦ Ι (ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΘΔΖΗ) ἀχθῇ ἡ ΙΜ παράλληλος τῇ ΖΔ, αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· θὰ ἦσαν λοιπὸν ἐκ τοῦ Ι δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΜΝ, ὅπερ ἀδύνατον.

Τέλος ἡ κοινὴ κάθετος ΗΘ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ, οἷον τῆς ΙΚ· διότι ἡ ΙΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἡ δὲ ΙΚ πλαγία· ἄρα ΙΜ$<$ΙΚ· ἀλλ' ἡ ΙΜ εἶναι ἴση τῇ ΗΘ· ἄρα ΘΗ$<$ΙΚ· ὅ.ἔ.δ.

Ἀσκήσεις.

592) Ἡ ἀπόστασις εὐθείας παραλλήλου πρὸς ἐπίπεδον ἀπὸ οἱασδήποτε εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου, μὴ παραλλήλου πρὸς τὴν πρώτην, εἶναι ἡ αὐτὴ πάντοτε.

593) Δύο εὐθεῖαι μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, προβάλλονται ἐπὶ ἐπίπεδον, ὅπερ εἶναι κάθετον ἐπὶ μίαν ἐξ αὐτῶν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κοινὴ κάθετος τῶν προβολῶν τῶν εὐθειῶν τούτων.

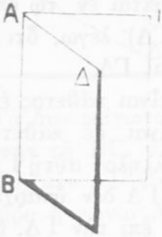
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΙΕΔΡΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

326. Ὁρισμοί. ***Δίεδρος γωνία*** λέγεται τὸ σχῆμα, ὅπερ ἀποτελοῦσι δύο ἐπίπεδα, τέμνοντα ἄλληλα καὶ περατούμενα εἰς τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν.

Ἀκμὴ τῆς διέδρου γωνίας λέγεται ἡ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων, ***ἕδραι*** δὲ αὐτῆς τὰ ἐπίπεδα.

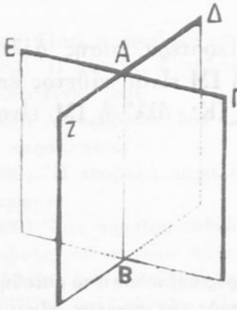
Τὸ σχῆμα ΔΑΒΓ παριστᾷ δίεδρον γωνίαν, σχηματιζομένην ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων ΔΑΒ καὶ ΓΑΒ, περατουμένων εἰς τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν ΑΒ· ἡ ΑΒ εἶναι ἡ ἀκμὴ τῆς διέδρου γωνίας, τὰ δὲ ἐπίπεδα ΔΑΒ καὶ ΓΑΒ εἶναι αἱ ἕδραι αὐτῆς.



Σημείωσις. Τὴν δίεδρον γωνίαν ὁρίζομεν διὰ δύο σημείων τῆς ἀκμῆς ἢ διὰ δύο τῆς ἀκμῆς καὶ ἑνὸς ἐξ ἑκάστης ἕδρας· οἷον, ἡ δίεδρος γωνία τοῦ παρακειμένου σχήματος σημειοῦται ΑΒ ἢ ΔΑΒΓ.

Ἴσαι λέγονται αἱ δίεδροι γωνίαι, ἐὰν δύνανται νὰ τεθῶσιν οὕτως, ὥστε νὰ ἀποτελέσωσι μίαν μόνην.

Ἐφεξῆς λέγονται δύο δίεδροι γωνίαι, ἐὰν ἔχωσι τὴν ἀκμὴν καὶ μίαν ἕδραν κοινά, τὰς δὲ ἄλλας ἕδρας ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς· τοιαῦται εἶναι αἱ δίεδροι γωνίαι ΕΑΒΖ καὶ ΖΑΒΓ.

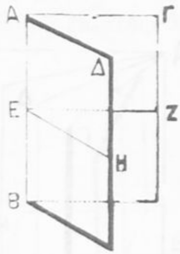


Κατὰ κορυφὴν δὲ λέγονται δύο δίεδροι γωνίαι, ὅταν γίνωνται ὑπὸ δύο ἐπιπέδων, διατεμνόντων ἄλληλα, καὶ ἔχωσι μόνον τὴν ἀκμὴν κοινήν, ἀλλ' ἕδρας διαφόρους· τοιαῦται εἶναι αἱ δίεδροι γωνίαι ΔΑΒΓ καὶ ΕΑΒΖ.

Κάθετα λέγονται δύο ἐπίπεδα πρὸς ἄλληλα, ἐὰν διατέμνοντα ἄλληλα, σχηματίζωσι τέσσαρας διέδρους γωνίας ἴσας· αἱ δὲ γωνίαι αὗται λέγονται ***ὀρθαὶ*** δίεδροι γωνίαι.

Ὅταν δίεδρος γωνία τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



τὴν ἀκμὴν αὐτῆς ἡ προκύπτουσα ἐπίπεδος γωνία λέγεται ***ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν δίεδρον***.

Οὕτως ἡ ἐπίπεδος γωνία ΗΕΖ, ἥτις προκύπτει, ὅταν τμηθῇ ἡ δίεδρος δι᾽ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὴν ἀκμὴν ΑΒ, εἶναι ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν δίεδρον ΑΒ.

Εἶναι δὲ ἀδιάφορον ἐκ τίνος σημείου τῆς ἀκμῆς θὰ ἀχθῇ τὸ κάθετον ἐπ᾽ αὐτὴν ἐπίπεδον· διότι πᾶσαι αἱ οὕτω προκύπτουσαι ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. Ἔστωσαν τῷ ὄντι δύο τοιαῦται γωνίαι, αἱ ΖΕΗ καὶ ΓΑΔ· τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν ὡς κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἶναι παράλληλα καὶ διὰ τοῦτο αἱ τομαὶ αὐτῶν ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ἑδρῶν θὰ εἶναι παράλληλοι· ἄρα αἱ ΑΓ καὶ ΕΖ εἶναι παράλληλοι καὶ αἱ ΑΔ καὶ ΕΗ ὡσαύτως· ἐπομένως αἱ γωνίαι ΖΕΗ καὶ ΓΑΔ εἶναι ἴσαι.

327. **Θεώρημα.** ***Δύο δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἐὰν αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι.***

Διότι ὅταν ἐφαρμόσωσιν αἱ δύο ἴσαι ἐπίπεδοι γωνίαι, αἱ ἀκμαὶ τῶν διέδρων γωνιῶν, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν καὶ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον θὰ ἐφαρμόσωσιν· ἄρα θὰ ἐφαρμόσωσι καὶ αἱ ἕδραι.

Σημείωσις. Ἡ ἀντίστροφος πρότασις, τουτέστιν ***ὅταν αἱ δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι εἶναι ἴσαι,*** εἶναι ἀφ᾽ ἑαυτῆς φανερά.

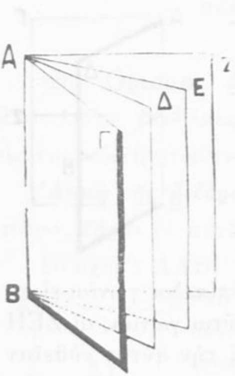
328. **Πόρισμα 1ον.** ***Τῶν ὀρθῶν διέδρων γωνιῶν αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι εἶναι ὀρθαὶ καὶ ἀντιστρόφως.***

329. **Πόρισμα 2ον.** ***Αἱ κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.***

330. **Θεώρημα.** ***Δύο δίεδροι γωνίαι ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι καὶ αἱ πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχοῦσι ἐπίπεδοι γωνίαι.***

Ἔστω τυχοῦσα δίεδρος γωνία, ἡ ΓΑΒΔ, καὶ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς αὐτὴν ἐπίπεδος ἡ ΓΑΔ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Ἂς ἐπαναληφθῇ τρὶς ἡ γωνία ΓΑΔ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς, ἤτοι ἂς γίνωσιν αἱ γωνίαι ΔΑΕ, ΕΑΖ ἴσαι τῇ ΓΑΔ· (327) εἶναι λοιπὸν ἡ μὲν δίεδρος γωνία ΓΑΒΕ διπλασία τῆς ΓΑΒΔ καὶ ἀντιστοιχεῖ πρὸς αὐτὴν διπλασία ἐπίπεδος, ἡ ΓΑΕ, ἡ δὲ δίεδρος γωνία ΓΑΒΖ τριπλασία τῆς ΓΑΒΔ καὶ ἀντιστοιχεῖ πρὸς αὐτὴν τριπλασία ἐπίπεδος, ἡ ΖΑΓ. Ὥστε δύο τυχοῦσαι δίεδροι γωνίαι ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι γωνίαι.

Σημείωσις. Ὡς μέτρον τῆς διέδρου γωνίας λαμβάνεται ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίπεδος γωνία, ἤτοι παρίστανται ἀμφότεραι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Διότι, ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν διέδρων γωνιῶν τὴν δίεδρον γωνίαν ἧς ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς ὅστις μετρεῖ μίαν δίεδρον γωνίαν εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ἀριθμόν, ὅστις μετρεῖ τὴν ἀντίστοιχον αὐτῆς ἐπίπεδον.

Ἀσκήσεις

594) Τὸ ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς διέδρων γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουσι δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα, εἶναι δύο ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι.

595) Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς διέδρων γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι, αἱ μὴ κοιναὶ ἕδραι αὐτῶν κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

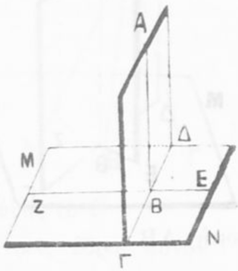
596) Ἐὰν δι' εὐθείας ἐπὶ ἐπιπέδου φέρωμεν ἐπίπεδα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ πρώτου ἐπιπέδου, τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων διέδρων γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι.

331. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος πρὸς ἐπίπεδον, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς διερχόμενα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.***

Ἔστω ἐπίπεδον τὸ ΜΝ καὶ κάθετος πρὸς αὐτὸ ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τυχὸν ἐπίπεδον, δι' αὐτῆς διερχόμενον, τὸ ΓΔΑ· λέγω, ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι κάθετον πρὸς τὸ ΜΝ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ τοῦ σημείου Β τῆς κοινῆς τομῆς ΓΔ τῶν δύο ἐπιπέδων ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΒΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ. Τὸ ἐπίπεδον ΑΒΕ εἶναι τότε κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ (297), ἐπειδὴ δὲ ἡ ΒΓ εἶναι ἡ κοινὴ ἀκμὴ τῶν διέδρων γωνιῶν ΑΓΔΕ καὶ ΑΓΔΖ, ἕπεται ὅτι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΕΒΑ καὶ ΖΒΑ ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τὰς διέδρους ταύτας, ἀλλ' αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΕΒΑ καὶ ΖΒΑ εἶναι ὀρθαὶ (διότι ἡ ΒΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ), ἄρα καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι ΑΓΔΕ, ΑΓΔΖ εἶναι ὀρθαί, τουτέστι τὰ ἐπίπεδα ΑΓΔ καὶ ΜΝ εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα.



332. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα, πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἐν τῷ ἑτέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἄγεται κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἄλλο.***

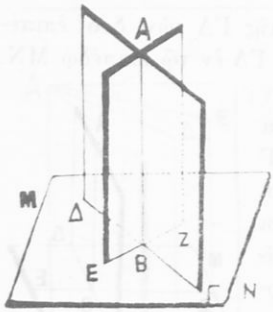
Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδα κάθετα πρὸς ἄλληλα, τὰ ΑΓΔ καὶ ΜΝ καὶ ἐν τῷ πρώτῳ ἡ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν αὐτῶν τομὴν ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ.

Διότι αἱ δύο δίεδροι γωνίαι ΑΓΔΜ καὶ ΑΓΔΝ εἶναι ἴσαι· ἐὰν δὲ διὰ τοῦ σημείου Β τῆς κοινῆς αὐτῶν ἀκμῆς ΓΔ ἀχθῇ ἡ ΕΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ, αἱ δύο ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΒΕ καὶ ΑΒΖ ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τὰς διέδρους (διότι τὸ ἐπίπεδον ΑΒΕ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ)· ἄρα εἶναι ἴσαι καὶ διὰ τοῦτο ὀρθαί· ὥστε ἡ ΒΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς δύο εὐθείας ΒΔ καὶ ΕΖ· ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΜΝ.

333. Πόρισμα. ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ΜΝ καὶ ΑΓΔ, καὶ ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Α τοῦ ἑνὸς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἄλλο, αὕτη θὰ κεῖται ὅλη ἐν τῷ πρώτῳ ἐπιπέδῳ.***

334. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα, τέμνοντα ἄλληλα, εἶναι ἀμφότερα κάθετα ἐπὶ ἄλλο, καὶ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Ἔστωσαν τὰ δύο ἐπίπεδα ΑΓΔ καὶ ΑΕΖ ἀμφότερα κάθετα ἐπὶ τὸ ΜΝ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ τομὴ αὐτῶν ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΜΝ.

Διότι, ἂν ἐκ τοῦ σημείου Α τῆς κοινῆς τομῆς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, αὕτη θὰ κεῖται καὶ ἐν τῷ πρώτῳ ἐπιπέδῳ καὶ ἐν τῷ δευτέρῳ· ἄρα θὰ εἶναι ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ΑΒ.

Ἀσκήσεις.

597) Δι' ἑκάστης εὐθείας κειμένης ἐν ἐπιπέδῳ ἄγεται ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτὸ καὶ ἓν μόνον.

598) Διὰ δοθέντος σημείου ἄγεται ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ κάθετον ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ ἓν μόνον.

599) Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων ἴσον ἀπὸ τῶν ἑδρῶν διέδρου γωνίας;

600) Ἐὰν ἐπίπεδον διχοτομῇ δίεδρον γωνίαν, πᾶσα εὐθεῖα καθετος ἐπ' αὐτὸ καὶ περατουμένη εἰς τὰς ἕδρας τῆς διέδρου, διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

601) Δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα, ἐὰν τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν εἶναι κάθετον ἐπὶ εὐθεῖάν τινα, ἥτις εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἄλλο.

602) Ἐὰν εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον εἶναι κάθετα πρὸς ἄλλο ἐπίπεδον, εἶναι πρὸς ἄλληλα παράλληλα.

ΣΤΕΡΕΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

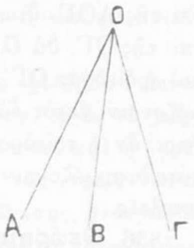
335. **Ὁρισμοί.** ***Στερεὰ γωνία*** λέγεται τὸ σχῆμα, ὅπερ ἀποτελοῦσι τρία ἢ περισσότερα ἐπίπεδα, διερχόμενα διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ περατούμενα ἕκαστον εἰς τὰς δύο εὐθείας, καθ' ἃς τέμνεται ὑπὸ τῶν πλησίον αὐτοῦ δύο ἐπιπέδων.

Τὰ ἐπίπεδα, τὰ τὴν στερεὰν γωνίαν σχηματίζοντα, λέγονται ἕδραι αὐτῆς, αἱ δὲ τομαὶ αὐτῶν (ἑκάστου ὑπὸ τῶν δύο πλησίον αὐτοῦ) λέγονται ***ἀκμαὶ*** τῆς στερεᾶς γωνίας καὶ τὸ σημεῖον, εἰς ὃ αἱ ἀκμαὶ πᾶσαι συνέρχονται, λέγεται ***κορυφὴ*** τῆς στερεᾶς γωνίας.

Αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας ἀποτελοῦσιν αἱ ἀκμαὶ ἑκάστης τῶν ἑδρῶν, λέγονται καὶ αὗται ***ἕδραι*** ἢ ***ἐπίπεδοι γωνίαι*** τῆς στερεᾶς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γωνίας· αἱ δὲ γωνίαι, τὰς ὁποίας ἀποτελοῦσιν αἱ δι᾽ ἑκάστης τῶν ἀκμῶν διερχόμεναι ἕδραι, λέγονται ***δίεδροι γωνίαι*** τῆς στερεᾶς γωνίας.



Τὸ σχῆμα ΟΑΒΓ παριστᾷ στερεὰν γωνίαν.

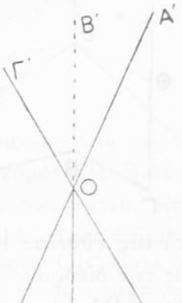
Ἕδραι αὐτῆς εἶναι τὰ τρία ἐπίπεδα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ, ὑφ᾽ ὧν σχηματίζεται· ἀκμαὶ αὐτῆς εἶναι αἱ εὐθεῖαι, ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ καθ᾽ ἃς τέμνονται τὰ ἐπίπεδα καὶ κορυφὴ αὐτῆς τὸ Ο.

Τρίεδρος λέγεται ἡ στερεὰ γωνία, ἡ τρεῖς ἕδρας μόνον ἔχουσα.

Κυρτὴ λέγεται ἡ στερεὰ γωνία ἐὰν ἑκάστη ἕδρα αὐτῆς ἐκβαλλομένη ἀφίνῃ τὴν στερεὰν γωνίαν ὁλόκληρον πρὸς ἓν μέρος αὐτῆς.

Ἐν τοῖς ἑξῆς ὁ λόγος γίνεται μόνον περὶ κυρτῶν γωνιῶν.

Ἐὰν αἱ ἀκμαὶ στερεᾶς γωνίας προσεκβληθῶσι πᾶσαι πέραν τῆς κορυφῆς, σχηματίζεται νέα στερεὰ γωνία, ἥτις λέγεται ***κατὰ κορυφὴν*** ἢ ***συμμετρικὴ*** τῆς πρώτης.



Τοιαῦται εἶναι αἱ στερεαὶ γωνίαι ΟΑΒΓ καὶ ΟΑ΄ Β΄ Γ΄.

Δύο κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι ἔχουσι προδήλως καὶ τὰς ἐπιπέδους αὐτῶν γωνίας ἴσας κατὰ μίαν καὶ τὰς διέδρους ἐπίσης ἴσας (διότι, παραδείγματος χάριν, αἱ δίεδροι γωνίαι ΟΒ καὶ ΟΒ΄ γίνονται ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων), τουτέστιν ἔχουσι τὰ αὐτὰ **στοιχεῖα.** Ἀλλ᾽ ὅμως δὲν δύνανται ἐν γένει νὰ ἐφαρμόσωσιν. Ἐὰν τῷ ὄντι ὑποτεθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΟΑ΄ καὶ ΓΟΓ΄ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ χάρτου καὶ ἡ ΟΒ ἔμπροσθεν τοῦ ἐπιπέδου τούτου, ἡ ΟΒ΄ θὰ εἶναι ὄπισθεν τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ἑπομένως, ὅταν περιστρέψωμεν τὴν γωνίαν ΓΟΑ΄ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς, μέχρις οὗ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΓΟΑ, θὰ πέσῃ ἡ ΟΑ΄ ἐπὶ τῆς ΟΑ καὶ ἡ ΟΓ΄ ἐπὶ τῆς ΟΓ, ἀλλ᾽ ἡ ΟΒ΄ θὰ εὑρίσκηται ὄπισθεν τοῦ ἐπιπέδου ΑΟΓ, ἐνῷ ἡ ΟΒ εἶναι ἔμπροσθεν αὐτοῦ. Ἐὰν δὲ πάλιν ἐφαρμόσωμεν τὴν γωνίαν ΓΟΑ΄

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπὶ τῆς ΑΟΓ οὕτως, ὥστε νὰ πέσῃ ἡ ΟΓ′ ἐπὶ τῆς ΟΑ καὶ ἡ ΟΑ′ ἐπὶ τῆς ΟΓ, θὰ ἔλθῃ ἡ δίεδρος γωνία ΟΑ′ εἰς τὴν δίεδρον ΟΓ καὶ ἡ δίεδρος ΟΓ′ εἰς τὴν δίεδρον ΟΑ, ὥστε καὶ πάλιν δὲν ἐφαρμόζουσιν, ἐκτὸς ἐὰν αἱ δίεδροι γωνίαι ΟΑ καὶ ΟΓ εἶναι ἴσαι, ἤτοι, ἂν ἡ τρίεδρος στερεὰ γωνία ἔχῃ δύο διέδρους ἴσας διότι τότε ἐφαρμόζουσιν. Αἱ τοιαῦται στερεαὶ γωνίαι ἃς λέγωνται *ἰσοσκελεῖς.*

336. **Θεώρημα**. ***Ἐὰν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς ἀκμῆς διέδρου γωνίας ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας αὐτῆς, ἑκατέρα δὲ τῶν καθέτων τούτων ἀχθῇ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου της, πρὸς ὃ εὑρίσκεται καὶ ἡ ἄλλη ἕδρα ἡ γωνία τῶν δύο τούτων καθέτων θὰ εἶναι παραπλήρωμα τῆς ἐπιπέδου γωνίας, ἥτις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν δίεδρον.***

Ἔστω δίεδρος γωνία ἡ ΑΒ καὶ τυχὸν σημεῖον τῆς ἀκμῆς τὸ Ε καὶ ἐξ αὐτοῦ ἡ ΕΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΒΔ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς, πρὸς ὃ εὑρίσκεται καὶ ἡ ἕδρα ΑΒΓ, καὶ ἡ ΕΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΒΓ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς, πρὸς ὃ εὑρίσκεται καὶ ἡ ΑΒΔ.

Τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο καθέτων, τὸ ΖΕΗ, εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΑΒ καὶ τέμνει τὰς ἕδρας κατὰ τὰς εὐθείας ΕΘ καὶ ΕΙ, ὧν ἡ γωνία, ἡ ΘΕΙ, ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν δίεδρον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΔ, ἡ γωνία ΖΕΙ εἶναι ὀρθή· δι' ὅμοιον λόγον καὶ ἡ γωνία ΗΕΘ εἶναι ὀρθή· ἄρα εἶναι

$$\text{ΗΕΘ} + \text{ΖΕΙ} = 2 \text{ ὀρθ.}$$

καὶ ἐπειδὴ $\text{ΗΕΘ} = \text{ΗΕΖ} + \text{ΖΕΘ}$, ἕπεται

$$\text{ΗΕΖ} + \text{ΖΕΘ} + \text{ΖΕΙ} = 2 \text{ ὀρθ.}$$

ἀλλ' εἶναι $\text{ΖΕΘ} + \text{ΖΕΙ} = \text{ΘΕΙ}$·

ὅθεν συνάγεται

$$\text{ΘΕΙ} + \text{ΖΕΗ} = 2 \text{ ὀρθ. ὅ. ἔ. δ.}$$

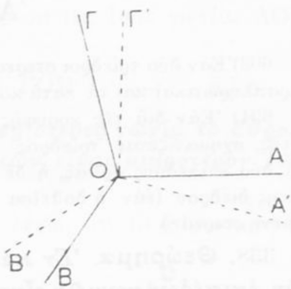
Σημείωσις. Αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΕΗ κεῖνται ἐντὸς τῆς διέδρου γωνίας, ἐὰν ἡ δίεδρος γωνία (ἤτοι ἡ ἀντίστοιχος αὐτῇ ἐπίπεδος ΘΕΙ) εἶναι ἀμβλεῖα· ἐκτὸς δ' αὐτῆς, ἐὰν ἡ δίεδρος γωνία εἶ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ναι ὀξεῖα, συμπίπτουσι δὲ ταῖς ΕΘ, ΕΙ, ἐὰν ἡ δίεδρος γωνία εἶναι ὀρθή.

337. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τριέδρου γωνίας ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰς τρεῖς ἕδρας, ἑκάστη πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου της, πρὸς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται καὶ ἡ τρίτη ἀκμή, ἡ τρίεδρος γωνία, ἡ ἔχουσα ἀκμὰς τὰς τρεῖς ταύτας καθέτους, εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς δοθείσης, ἤτοι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς μιᾶς εἶναι παραπληρώματα τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς ἄλλης.***

Ἔστω τρίεδρος στερεὰ γωνία ἡ ΟΑΒΓ, καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ μὲν ΟΑ΄ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΟΒΓ πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς, ἔνθα εὑρίσκεται καὶ ἡ ἀκμὴ ΟΑ (τουτέστιν ἡ γωνία ΑΟΑ΄ νὰ εἶναι ὀξεῖα), ἡ δὲ ΟΒ΄ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΟΑΓ πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς, ἔνθα εὑρίσκεται καὶ ἡ ΟΒ καὶ τέλος ἡ ΟΓ΄ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΟΑΒ πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς, ἔνθα εὑρίσκεται καὶ ἡ ΟΓ.



Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἡ μὲν γωνία Α΄ΟΒ΄ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας, ἥτις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν δίεδρον ΟΓ ἡ δὲ γωνία Β΄ΟΓ΄ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας ἥτις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν δίεδρον ΟΑ καὶ ἡ Γ΄ΟΑ΄ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἀντιστοιχούσης πρὸς τὴν δίεδρον ΟΒ· ὥστε αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς στερεᾶς γωνίας ΟΑ΄Β΄Γ΄ εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς ΟΑΒΓ.

Ἀλλὰ καὶ τὸ ἀντίστροφον συμβαίνει· τουτέστιν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΟΑΒΓ εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων τῆς ΟΑ΄ Β΄ Γ΄.

Τῷ ὄντι ἡ ΟΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ΄ (διότι ἡ ΟΑ΄ ἤχθη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΟΓ), εἶναι δὲ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΟΒ΄ (διότι ἡ ΟΒ΄ ἤχθη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΟΑ)· ἄρα ἡ ΟΓ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΟΑ΄, ΟΒ΄, ἤτοι ἐπὶ τὴν ἕδραν Α΄ΟΒ΄. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ἡ ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν Β΄ΟΓ΄ καὶ ἡ ΟΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν Γ΄ΟΑ΄· εὑρίσκεται δὲ ἡ ΟΑ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἕδρας Β΄ΟΓ΄ (ἐφ' ἣν εἶναι κάθετος), πρὸς ὃ καὶ ἡ ἀκμὴ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΟΑ΄· διότι ἡ γωνία ΑΟΑ΄ εἶναι ὀξεῖα· ὅμοιον δὲ ἀληθεύει καὶ περὶ τῶν δύο ἄλλων ΟΒ, ΟΓ. Ἑπομένως ἡ στερεὰ γωνία ΟΑ ΒΓ προκύπτει ἐκ τῆς ΟΑ΄Β΄Γ΄ καθ' ὃν τρόπον προέκυψεν ἡ ΟΑ΄Β΄Γ΄ ἐκ τῆς ΟΑΒΓ. Ἄρα αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς ΟΑΒΓ εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς ΟΑ΄ Β΄ Γ΄.

Σημείωσις. Ἡ νέα στερεὰ γωνία συμπίπτει τῇ δοθείσῃ, ὅταν ἡ δοθεῖσα ἔχῃ τὰς ἀκμὰς αὐτῆς καθέτους πρὸς ἀλλήλας ἀνὰ δύο. Ἡ τρίεδρος γωνία, ἥτις ἔχει τὰς τρεῖς αὐτῆς ἀκμὰς καθέτους πρὸς ἀλλήλας ἀνὰ δύο, ἔχει ὀρθὰς τὰς διέδρους αὐτῆς γωνίας (ὡς καὶ τὰς ἐπιπέδους) καὶ λέγεται ***τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία.***

Ἀσκήσεις.

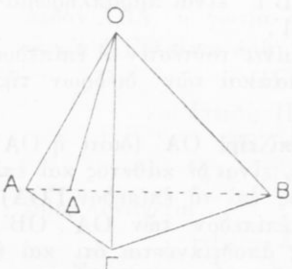
603) Ἐὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, εἶναι παραπληρωτικαὶ καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐτῶν.

604) Ἐὰν διὰ τῆς κορυφῆς γωνίας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς, σχηματίζεται τρίεδρος στερεὰ γωνία, ἥτις ἔχει δύο διέδρους καὶ δύο ἐπιπέδους ὀρθάς, ἡ δὲ τρίτη ἐπίπεδος εἶναι ἀντίστοιχος τῆς τρίτης διέδρου· (ἐὰν ἡ δοθεῖσα γωνία εἶναι ὀρθὴ τί εἶναι ἡ σχηματιζομένη στερεά;)

338. **Θεώρημα.** ***Ἐν πάσῃ τριέδρῳ στερεᾷ γωνίᾳ ἑκάστη τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.***

Τὸ θεώρημα χρῄζει ἀποδείξεως, μόνον ὅταν ἡ ἐπίπεδος γωνία, τὴν ὁποίαν συγκρίνομεν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, ὑπερβαίνει ἑκατέραν ἐξ αὐτῶν.

Ἔστω λοιπὸν τρίεδρος στερεὰ γωνία ἡ ΟΑΒΓ, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἡ γωνία ΑΟΒ ὑποτίθεται μεγαλυτέρα καὶ τῆς ΒΟΓ καὶ τῆς ΓΟΑ· λέγω, ὅτι εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.



Ἂς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΑΟΒ καὶ ἂς σχηματισθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΟΒ ἡ γωνία ΒΟΔ ἴση τῇ ΒΟΓ. Ἡ πλευρὰ ΟΔ θὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Δ· ἂς ληφθῇ ἔπειτα ἡ ΟΓ ἴση τῇ ΟΔ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΓ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὰ τρίγωνα ΟΒΓ καὶ ΟΒΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην (τὴν ΓΟΒ ἴσην τῇ ΔΟΒ) καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἴσας (ΟΔ = ΟΓ καὶ ΟΒ = ΟΒ)· ἐπομένως εἶναι ΒΓ = ΒΔ.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκομεν

$$ΑΒ < ΑΓ + ΒΓ,$$

ἀφαιροῦντες δ' ἀπ' ἀμφοτέρους τῶν ἀνίσων τὰς ἴσας ΒΓ καὶ ΒΔ λαμβάνομεν ΑΔ < ΑΓ.

Συγκρίνοντες νῦν τὰ δύο τρίγωνα ΑΟΔ καὶ ΑΟΓ, βλέπομεν ὅτι ἔχουσι δύο πλευρὰς ἴσας (ΑΟ = ΑΟ καὶ ΟΔ = ΟΓ), τὴν δὲ τρίτην ἄνισον (ΑΔ < ΑΓ)· ἄρα εἶναι καὶ ΑΟΔ < ΑΟΓ· προσθέτοντες δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ ἄνισα τὰς ἴσας γωνίας ΔΟΒ καὶ ΓΟΒ εὑρίσκομεν

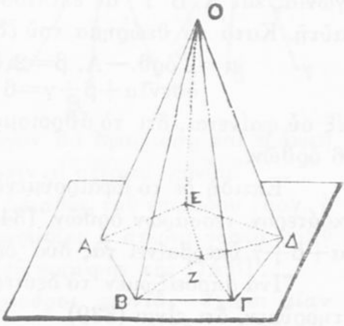
$$ΑΟΒ < ΑΟΓ + ΓΟΒ\cdot \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

339. **Θεώρημα.** ***Ἐν πάσῃ κυρτῇ στερεᾷ γωνίᾳ τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν.***

Ἔστω κυρτὴ στερεὰ γωνία ἡ Ο· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων αὐτῆς γωνιῶν

$$ΑΟΒ + ΒΟΓ + ΓΟΔ + ΔΟΕ + ΕΟΑ$$

εἶναι μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν.



Ἂς ἀχθῇ τυχὸν ἐπίπεδον, τέμνον πάσας τὰς ἀκμὰς τῆς στερεᾶς γωνίας (γίνεται δὲ τοῦτο, ἐὰν ἀχθῇ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ ἐγγίζῃ τὴν στερεὰν γωνίαν μόνον εἰς τὸ σημεῖον Ο καὶ ἔπειτα ἄλλο ἐπίπεδον, παράλληλον τούτου καὶ πρὸς τὸ μέρος τῶν ἀκμῶν), ἂς τέμνῃ δὲ αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,Ε. Ἂς ληφθῇ ἔπειτα ἐντὸς τοῦ σχηματιζομένου πολυγώνου ΑΒΓΔΕ σημεῖον οἱονδήποτε, τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐξ αὐτοῦ εὐθεῖαι εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, αἱ ΖΑ,ΖΒ, ΖΓ,ΖΔ,ΖΕ. Τὰ τρίγωνα, τὰ ἔχοντα κορυφὴν τὸ Ο εἶναι τόσα, ὅσα εἶναι καὶ τὰ ἔχοντα κορυφὴν τὸ Ζ· διὰ τοῦτο καὶ τὰ πρῶτα

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ τὰ δεύτερα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν. Ἀλλ᾽ εἰς τὸ σημεῖον Β κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι

$$\text{ΑΒΟ} + \text{ΟΒΓ} > \text{ΑΒΓ}$$

ἢ

$$\text{ΑΒΟ} + \text{ΟΒΓ} > \text{ΑΒΖ} + \text{ΖΒΓ}\cdot$$

τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ εἰς τὰς ἄλλας κορυφὰς τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ.

Ἄρα αἱ πρὸς τὰς βάσεις γωνίαι τῶν τὴν στερεὰν γωνίαν Ο ἀποτελούντων τριγώνων ἔχουσιν ἄθροισμα μεγαλύτερον ἢ αἱ πρὸς τὰς βάσεις γωνίαι τῶν τὸ πολύγωνον ἀποτελούτων· ἑπομένως πρὸς ἐξίσωσιν τὸ ἄθροισμα τῶν περὶ τὸ Ο γωνιῶν (τῶν πρώτων τριγώνων) θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν περὶ τὸ Ζ· ἀλλ᾽ αἱ περὶ τὸ Ζ γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα τέσσαρας ὀρθάς· ἄρα αἱ περὶ τὸ Ο γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν· ὅ.ἔ.δ.

340. **Θεώρημα.** ***Ἐν πάσῃ τριέδρῳ στερεᾷ γωνίᾳ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν διέδρων γωνιῶν εἶναι μεγαλύτερον μὲν δύο, μικρότερον δὲ ἓξ ὀρθῶν καὶ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν αὐξηθεῖσα κατὰ δύο ὀρθὰς ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.***

Ἔστωσαν α, β, γ αἱ δίεδροι γωνίαι τῆς τυχούσης τριέδρου γωνίας καὶ Α, Β Γ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς παραπληρωματικῆς αὐτῇ. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 338 εἶναι

$$\alpha = 2 \text{ ὀρθ.} - \text{Α},\ \beta = 2 \text{ ὀρθ.} - \text{Β},\ \gamma = 2 \text{ ὀρθ.} - \text{Γ},$$

$$\text{ὅθεν } \alpha + \beta + \gamma = 6 \text{ ὀρθ.} - (\text{Α} + \text{Β} + \text{Γ}),$$

ἐξ οὗ φαίνεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma$ εἶναι μικρότερον τῶν 6 ὀρθῶν.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἀφαιρούμενον ἄθροισμα Α+Β+Γ εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν (340), συνάγεται, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον $\alpha+\beta+\gamma$ ὑπερβαίνει τὰς δύο ὀρθάς.

Ἵνα ἀποδείξωμεν τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως, παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι (339).

$$\text{Α} < \text{Β} + \text{Γ}\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ Α=2 ὀρθ.—α, Β=2 ὀρθ.—β, Γ=2 ὀρθ.—γ, ἡ ἀνισότης γίνεται $2-\alpha < 2-\beta+2-\gamma\cdot$

καὶ ἂν προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ ἄνισα τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma$ καὶ ἔπειτα ἀφαιρέσωμεν ἀπ᾽ ἀμφοτέρων 2 ὀρθάς, εὑρίσκομεν

$$\beta + \gamma < \alpha + 2.$$

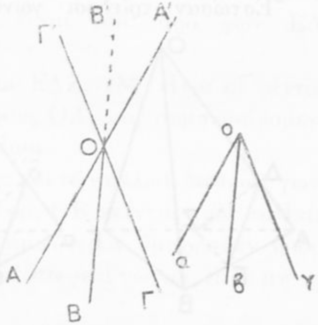
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ Ε΄ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΕΔΡΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

341. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχωσι μίαν δίεδρον γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν ἕδρας ἴσας, θὰ ἔχωσι καὶ τὰ λοιπὰ αὐτῶν στοιχεῖα ἴσα καὶ θὰ εἶναι ἢ ἴσαι ἢ κατὰ κορυφήν.***

Ἔστω ἡ δίεδρος γωνία ΟΒ ἴση τῇ διέδρῳ οβ καὶ ἡ ἐπίπεδος γωνία ΑΟΒ ἴση τῇ αοβ, ἔτι δὲ καὶ ἡ ΒΟΓ ἴση τῇ βογ.



Ἔστω ἡ ἀκμὴ οβ ἔμπροσθεν τοῦ ἐπιπέδου αογ, ὡς καὶ ἡ ΟΒ ἔμπροσθεν τοῦ ἐπιπέδου ΑΟΓ.

Ἐὰν τότε ἐφαρμοσθῇ ἡ δίεδρος γωνία οβ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΟΒ, θὰ ἐφαρμόσῃ τὸ ἐπίπεδον αοβ ἐπὶ τοῦ ΑΟΒ καὶ τὸ ἐπίπεδον βογ ἐπὶ τοῦ ΒΟΓ· ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι αοβ καὶ ΑΟΒ εἶναι ἴσαι, θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ ἀκμὴ οα ἐπὶ τῆς ΟΑ· δι' ὅμοιον λόγον θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ ἀκμὴ ογ ἐπὶ τῆς ΟΓ· ὥστε θὰ ἐφαρμόσωσιν αἱ στερεαὶ γωνίαι.

Ἐὰν δὲ ἡ μὲν ἀκμὴ οβ κεῖται ὄπισθεν τοῦ ἐπιπέδου αογ, ἡ δὲ ΟΒ ἔμπροσθεν τοῦ ΑΟΓ, ἐφαρμόζει ἡ στερεὰ γωνία οαβγ ἐπὶ τῆς ΟΑ′ Β′ Γ′, ἥτις εἶναι κατὰ κορυφὴν τῆς ΟΑΒΓ.

342. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο τρίεδροι γωνίαι ἔχωσι μίαν ἕδραν ἴσην καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας διέδρους γωνίας ἴσας, θὰ ἔχωσι καὶ τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα καὶ θὰ εἶναι ἴσαι ἢ κατὰ κορυφήν.***

Ἔστω ἡ ἕδρα ΑΟΓ ἴση τῇ αογ καὶ ἡ δίεδρος γωνία ΟΑ ἴση τῇ οα καὶ ἡ δίεδρος ΟΓ ἴση τῇ ογ.

Ἔστω ἡ ἀκμὴ οβ ἔμπροσθεν τοῦ ἐπιπέδου αογ, ὡς καὶ ἡ ΟΒ ἔμπροσθεν τοῦ ΑΟΓ.

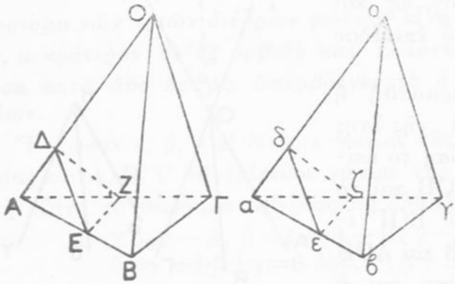
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν ἡ ἕδρα αογ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΟΓ, τὸ μὲν ἐπίπεδον αοβ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΑΟΓ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν διέδρων γωνιῶν οα καὶ ΟΑ, τὸ δὲ ἐπίπεδον ογβ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΟΓΒ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν διέδρων γωνιῶν ογ καὶ ΟΓ· ἑπομένως ἡ οβ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΟΒ· ἄρα ἡ στερεὰ γωνία οαβγ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΟΑΒΓ.

Ἐὰν δὲ ἡ ἀκμὴ οβ κεῖται ὄπισθεν τοῦ ἐπιπέδου αογ (ἡ δὲ ΟΒ ἔμπροσθεν τοῦ ΑΟΓ), ἐφαρμόζει ἡ στερεὰ γωνία οαβγ ἐπὶ τῆς ΟΑ′ Β′ Γ′, ἥτις εἶναι κατὰ κορυφὴν τῆς ΟΑΒΓ.

343. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι, ἔχωσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν, θὰ ἔχωσιν ἴσας καὶ τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας κατὰ μίαν, θὰ εἶναι δὲ ἴσαι αἱ ὑπὸ ἴσων ἑδρῶν περιεχόμεναι.***

Ἔστωσαν τρίεδροι γωνίαι αἱ ΟΑΒΓ καὶ οαβγ ἔχουσαι ΑΟΒ=αοβ, ΒΟΓ=βογ, ΓΟΑ=γοα.



Ἄς ληφθῶσιν ἐπὶ τῶν ἓξ ἀκμῶν ἓξ ἴσα μέρη, τὰ ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ, καὶ οα, οβ, ογ, καὶ ἄς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, καὶ αἱ αβ, βγ, γα.

Τὰ τρία ἰσοσκελῆ τρίγωνα τὰ περὶ τὸ Ο, εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τρία ἰσοσκελῆ τρίγωνα τὰ περὶ τὸ ο.

ἤτοι τρίγ. ΑΟΒ= τρίγ. αοβ
τρίγ. ΒΟΓ= τρίγ. βογ
τρίγ. ΓΟΑ= τρίγ. γοα

διότι ἔχουσιν ἕκαστα μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην ὑπὸ πλευρῶν ἴσων.

Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων τούτων ἕπεται :

ΑΒ=αβ, ΒΓ=βγ, ΑΓ=αγ·

ἄρα καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ εἶναι ἴσα.

Ἄς ληφθῇ νῦν ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΟΑ τυχὸν σημεῖον, τὸ Δ καὶ ἄς ἀχθῶσιν ἐξ αὐτοῦ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΟΑ κείμεναι ἡ μὲν ΔΕ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΟΑΒ, ἡ δὲ ΔΖ ἐν τῷ ΑΟΓ. Αἱ κάθετοι αὗται θὰ συναντήσωσι τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ, διότι αἱ γωνίαι ΟΑΒ,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΟΑΓ εἶναι ὀξεῖαι ὡς γωνίαι εἰς τὰς βάσεις τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΟΒ, ΑΟΓ.. Ἂς ἀχθῇ λοιπὸν καὶ ἡ ΖΕ. Μετὰ δὲ ταῦτα ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ἀκμῆς οα ἡ οδ ἴση τῇ ΟΔ, καὶ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή.

Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ καὶ αδε εἶναι ἴσα· διότι ἔχουσι τὴν ΑΔ ἴσην τῇ αδ καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ΔΑΒ ἴσην τῇ δαβ· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῶν ἕπεται ΑΕ=αε. Ὁμοίως ἀποδεικνύονται καὶ τὰ ὀρθόγωνια τρίγωνα ΔΑΖ, δαζ ἴσα καὶ ἐπομένως ΑΖ=αζ.

Καὶ τὰ τρίγωνα ΑΕΖ, αεζ εἶναι ἴσα· διότι ἔχουσιν ΑΕ=αε, ΑΖ=αζ καὶ τὰς γωνίας ΒΑΓ, βαγ ἴσας. Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν τριγώνων τούτων συνάγεται ΕΖ=εζ.

Τέλος τὰ δύο τρίγωνα ΔΕΖ, δεζ, ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας κατὰ μίαν, εἶναι ἴσα· ἄρα γων. ΕΔΖ= γων. εδζ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι αὗται ΕΔΖ, εδζ εἶναι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίπεδοι πρὸς τὰς διέδρους ΟΑ, οα, συμπεραίνομεν, ὅτι αἱ δίεδροι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ὁμοίως δεικνύεται ἡ ἰσότης καὶ τῶν ἄλλων διέδρων γωνιῶν.

Σημείωσις. Ἂν αἱ ἀκμαὶ οβ, ΟΒ κεῖνται πρὸς τὰ ἐπίπεδα αογ, ΑΟΓ ὁμοίως (τουτέστιν ἀμφότεραι ἔμπροσθεν ἢ ἀμφότεραι ὄπισθεν) ἐφαρμόζουσιν αἱ στερεαὶ γωνίαι, εἰ δὲ μή, εἶναι κατὰ κορυφήν.

Ἀσκήσεις

605) Ἐὰν στερεᾶς τριέδρου γωνίας δύο ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν δίεδροι γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι.

606) Ἐὰν στερεᾶς τριέδρου γωνίας δύο δίεδροι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν ἕδραι εἶναι ἴσαι.

607) Τὰ ἐπίπεδα τὰ διχοτομοῦντα τὰς τρεῖς διέδρους γωνίας πάσης τριέδρου στερεᾶς γωνίας διέρχονται διὰ μιᾶς εὐθείας.

608) Τὰ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα δι' ἑκάστης τῶν ἀκμῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας καὶ διὰ τῆς διχοτομούσης τὴν ἀπέναντι αὐτῆς ἕδραν διέρχονται διὰ μιᾶς εὐθείας.

609) Ἐκ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, ὧν ἑκάστη εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν δύναται νὰ σχηματισθῇ στερεὰ γωνία.

610) Ἐκ τριῶν δοθεισῶν διέδρων γωνιῶν, αἵτινες πληροῦσι τοὺς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

περιορισμοὺς τοῦ θεωρήματος 343, δύναται νὰ κατασκευασθῇ τρίεδρος στερεὰ γωνία.

611) Ἐὰν δύο τρίεδροι γωνίαι ἔχωσι τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας ἴσας κατὰ μίαν, θὰ ἔχωσι καὶ τὰς ἐπιπέδους ἴσας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ Ε΄. ΒΙΒΛΙΟΥ

Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος:

612) Τῶν σημείων ἅτινα ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ δύο εὐθειῶν τεμνομένων.

613) Τῶν σημείων ἅτινα ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ δύο δοθέντων ἐπιπέδων.

614) Τῶν σημείων, ἅτινα ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ τεσσάρων σημείων μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

615) Τῶν σημείων, ἅτινα ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν τριῶν ἑδρῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας.

616) Τῶν σημείων, ἅτινα ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν τριῶν ἀκμῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας.

617) Τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, αἵτινες ἄγονται ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, ἐπὶ τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τούτου, τὰς δι' ἑνὸς σημείου διερχομένας.

618) Τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, αἵτινες ἄγονται ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς.

619) Τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων ἔχουσι διαφορὰν πάντοτε τὴν αὐτήν.

620) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο δοθείσας εὐθείας μὴ κειμένας ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.

621) Νὰ ἀχθῇ παράλληλος τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, τέμνουσα δύο δοθείσας εὐθείας, μὴ κειμένας ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.

622) Ποία εἶναι ἡ σχετικὴ θέσις τριῶν ἐπιπέδων, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι παράλληλον δοθείσῃ εὐθείᾳ;

623) Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ, ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων, μὴ ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου κειμένων, ἀλλὰ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

624) Ἐὰν εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ τυχὸν ἐπίπεδον θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων.

625) Ἐὰν ἐκ τῶν σημείων Α,Β,Γ,Δ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, κειμένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἐπιπέδου, ἀχθῶσιν εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας τέμνουσαι τὸ ἀνωτέρω ἐπίπεδον ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα α,β,γ,δ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΒ:ΓΔ=αβ:γδ.

626) Ἡ προβολὴ ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι ὀρθὴ γωνία,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὅταν μία τῶν πλευρῶν αὐτῆς εἶναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ· καὶ τότε μόνον.

627) Τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων γωνιῶν στρεβλοῦ τετραπλεύρου εἶναι μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν. (Ἕν τετράπλευρον λέγεται στρεβλόν, ὅταν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου).

628) Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς Ο τῆς τριέδρου στερεᾶς γωνίας ΟΑΒΓ, ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΟΔ ἐντὸς τῆς γωνίας, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΟΔ, ΒΟΔ καὶ ΓΟΔ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν ΑΟΒ ΒΟΓ καὶ ΓΟΑ.

629) Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς Ο τῆς τριέδρου στερεᾶς γωνίας ΟΑΒΓ ἀχθῇ ἡ ΟΔ ἐντὸς αὐτῆς, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΟΔ καὶ ΓΟΔ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ.

630) Ἐὰν τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία τμηθῇ ὑπὸ τοῦ τυχόντος ἐπιπέδου, τὸ σημεῖον, ἔνθα τέμνονται τὰ ὕψη τοῦ προκύπτοντος τριγώνου, εἶναι ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου.

631) Ἐὰν αἱ ἀκμαὶ τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας τμηθῶσιν ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἰς σημεῖα, ὧν αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτῆς εἶναι ἀντιστοίχως α,β,γ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα τῶν τομῶν εἰς ἃ τέμνονται αἱ ἀκμαὶ τῆς στερεᾶς ταύτης γωνίας εἶναι

$$\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2}.$$

632) Ἐὰν διὰ τῶν διχοτομουσῶν τὰς ἕδρας τριέδρου στερεᾶς γωνίας ἀχθῶσιν ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὰς ἕδρας, τὰ ἐπίπεδα ταῦτα διέρχονται διὰ μιᾶς εὐθείας.

633) Τὰ ἐκ τῶν ἀκμῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας ἀγόμενα ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὰς ἀπέναντι ἕδρας διέρχονται διὰ μιᾶς εὐθείας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

ΠΟΛΥΕΔΡΑ ΕΝ ΓΕΝΕΙ

344. Ὁρισμοί. ***Πολύεδρον*** λέγεται στερεόν, πανταχόθεν ὑπὸ ἐπιπέδων περατούμενον.

Ἕδραι τοῦ πολυέδρου λέγονται τὰ ἐπίπεδα σχήματα, ὑφ' ὧν περατοῦται.

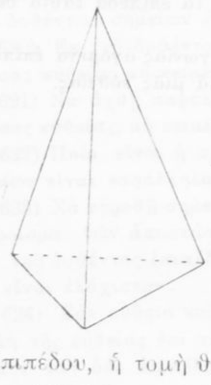
Γωνίαι τοῦ πολυέδρου λέγονται αἱ στερεαὶ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουσιν αἱ ἕδραι αὐτοῦ.

Κορυφαὶ δὲ αὐτοῦ αἱ κορυφαὶ τῶν στερεῶν τούτων γωνιῶν.

Πλευραὶ ἢ ἀκμαὶ τοῦ πολυέδρου λέγονται αἱ πλευραὶ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ.

Διαγώνιοι δὲ αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι δύο κορυφάς, μὴ κειμένας ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας.

Τὸ πολύεδρον ὀνομάζεται ἐκ τοῦ πλήθους τῶν ἑδρῶν του



τετράεδρον, ἐὰν ἔχῃ τέσσαρας ἕδρας· ***πεντάεδρον*** ἐὰν ἔχῃ πέντε· ***ἑξάεδρον,*** ἐὰν ἔχῃ ἕξ· καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Τὸ ἁπλούστατον πάντων τῶν πολυέδρων εἶναι τὸ τετράεδρον.

Κυρτὸν λέγεται τὸ πολύεδρον, ἐὰν ἑκάστη ἕδρα αὐτοῦ ἐκβαλλομένη ἀφίνῃ τὸ πολύεδρον ὁλόκληρον πρὸς τὸ ἓν μέρος αὐτῆς. Ἐν τοῖς ἑξῆς ὁ λόγος γίνεται μόνον περὶ τῶν κυρτῶν πολυέδρων.

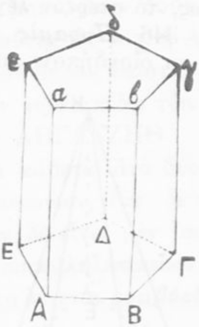
Ἐὰν πολύεδρον κυρτὸν τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου, ἡ τομὴ θὰ εἶναι πολύγωνον κυρτόν.

345. ***Πρίσμα*** λέγεται τὸ στερεόν, οὗτινος δύο ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ λοιπαὶ παραλληλόγραμμα.

Ἵνα κατασκευάσωμεν πρίσμα, λαμβάνομεν τυχὸν πολύγω-

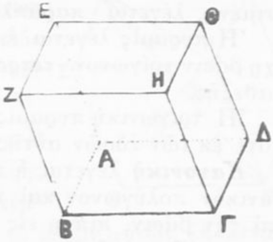
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νον, ὡς τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ ἄγομεν ἐκ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ εὐθείας ἴσας καὶ παραλλήλους, τὰς Αα, Ββ, Γγ, Δδ, Εε, κειμένας ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ. Τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν τούτων θὰ κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, παραλλήλου τῷ ΑΒΓΔΕ (320 σημ.), καὶ τὸ στερεόν, ὅπερ, περατοῦται ὑπὸ τῶν δύο ἐπιπέδων σχημάτων ΑΒΓΔΕ αβγδε καὶ ὑπὸ τῶν τετραπλεύρων ΑΒαβ, ΒΓβγ, ΓΔγδ, ΔΕδε, ΕΑεα, θὰ εἶναι πρίσμα, ὡς εὐκόλως δεικνύεται.



Βάσεις τοῦ πρίσματος λέγονται αἱ δύο ἴσαι παράλληλοι ἕδραι αὐτοῦ, ***ὕψος*** δὲ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ.

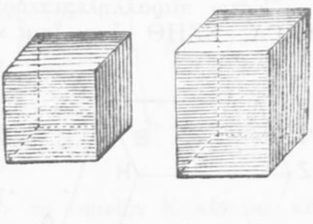
Τὸ πρίσμα λέγεται ἐκ τῆς βάσεως αὐτοῦ ***τριγωνικὸν*** ἐὰν ἔχῃ βάσιν τρίγωνον, ***τετραγωνικόν,*** ἐὰν τετράπλευρον καὶ οὕτω καθεξῆς.



Τὸ πρίσμα λέγεται ***ὀρθόν,*** ὅταν αἱ εὐθεῖαι, αἱ τὰς ἀντιστοιχούσας κορυφὰς τῶν βάσεων αὐτοῦ ἐπιζευγνύουσαι (αἵτινες καὶ πλευραὶ ἰδίως καλοῦνται), εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις, εἰ δὲ μή, τὸ πρίσμα λέγεται ***πλάγιον.***

Τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος ἑκάστη πλευρὰ ἰσοῦται προφανῶς πρὸς τὸ ὕψος αὐτοῦ, αἱ δὲ παράπλευραι ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια.

Τὸ πρίσμα, τὸ ἔχον βάσεις παραλληλόγραμμα, ἔχει ***πάσας*** τὰς ἕδρας παρραλληλόγραμμα καὶ λέγεται ***παραλληλεπίπεδον·*** τοιοῦτον εἶναι τὸ στερεὸν ΑΗ.



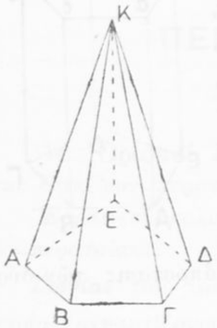
Τὸ παραλληλεπίπεδον ἔχει ἓξ ἕδρας.

Ἐὰν τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθόν, ἔχει δὲ καὶ βάσεις ὀρθογώνια λέγεται ***ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν δὲ αἱ βάσεις εἶναι τετράγωνα καὶ αἱ λοιπαὶ ἕδραι ὡσαύτως, τὸ στερεὸν λέγεται ***κύβος ἢ κανονικὸν ἑξάεδρον.***

346. ***Πυραμὶς*** λέγεται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποίου μία ἕδρα εἶναι οἱονδήποτε πολύγωνον, αἱ δὲ λοιπαὶ εἶναι τρίγωνα, βάσεις μὲν ἔχοντα τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, κορυφὴν δὲ κοινὴν σημεῖόν τι, ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου κείμενον. Τοιοῦτον εἶναι τὸ στερεὸν ΚΑΒΓΔΕ.



Βάσις τῆς πυραμίδος λέγεται τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, ***κορυφὴ*** δὲ τὸ σημεῖον Κ ὕψος δὲ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἠγμένη κάθετος. Αἱ εἰς τὴν κορυφὴν συντρέχουσαι ἀκμαὶ λέγονται ἰδίως ***πλευραί***, ἡ δὲ πέριξ αὐτῶν ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος ἡ ἐκ τῶν ἑδρῶν ΑΚΒ, ΒΚΓ ....ΕΑΚ συγκειμένη, λέγεται παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος.

Ἡ πυραμὶς λέγεται ἐκ τῆς βάσεως αὐτῆς ***τριγωνικὴ*** ἐὰν ἔχῃ βάσιν τρίγωνον· ***τετραγωνική***, ἐὰν τετράπλευρον καὶ οὕτω καθεξῆς.

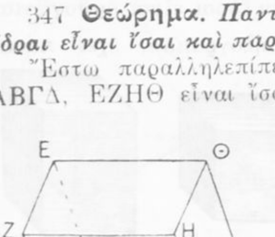
Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τετράεδρον, δύναται δὲ οἱαδήποτε ἐκ τῶν ἑδρῶν αὐτῆς νὰ ληφθῇ ὡς βάσις τῆς πυραμίδος.

Κανονικὴ λέγεται ἡ πυραμὶς ἐὰν ἡ βάσις αὐτῆς εἶναι κανονικὸν πολύγωνον καὶ ἡ κάθετος, ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν, πίπτῃ εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς. Ἡ κάθετος αὕτη λέγεται ἄξων τῆς κανονικῆς πυραμίδος.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ

347 **Θεώρημα.** ***Παντὸς παραλληλεπιπέδου αἱ ἀπέναντι ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.***

Ἔστω παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ. Αἱ μὲν βάσεις αὐτοῦ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν πρισμάτων. Δύο δὲ ἄλλαι ἀπέναντι ἕδραι ὡς αἱ ΑΒΖΕ καὶ ΓΔΘΗ, εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, διότι ἔχουσι καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας καὶ παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς γωνίας τὰς ὑπὸ ἴσων πλευρῶν περιεχομένας ἴσας (75)· ἄρα (320) ἀπεδείχθη τὸ θεώρημα.



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

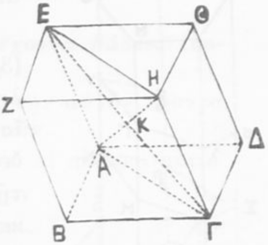
348. Πόρισμα. *Ὡς βάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου δύνανται νὰ ληφθῶσι δύο οἱαιδήποτε ἀπέναντι ἕδραι αὐτοῦ.*

Σημείωσις. Τὸ παραλληλεπίπεδον ὁρίζεται, ὅταν δοθῇ μία τῶν στερεῶν γωνιῶν αὐτοῦ καὶ αἱ ἀκμαὶ αὐτῆς ὡς π.χ. ἡ Α καὶ αἱ ἀκμαὶ ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ. Ἐὰν τῷ ὄντι ἐκ τοῦ ἄκρου ἑκάστης τῶν εὐθειῶν τούτων ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ τῶν δύο ἄλλων σχηματίζεται τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΕΖΗΘ.

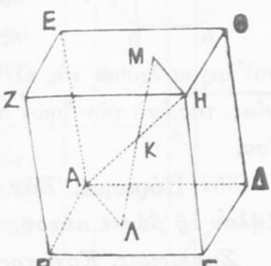
Ἐὰν αἱ τρεῖς δοθεῖσαι ἀκμαὶ εἶναι κάθετοι ἀνὰ δύο, τὸ προκῦπτον παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθογώνιον, ἐὰν δὲ εἶναι καὶ ἴσαι τὸ προκῦπτον εἶναι κύβος. Ἐὰν δὲ εἶναι μὲν ἴσαι αἱ ἀκμαί, ἀλλ' οὐχὶ κάθετοι, προκύπτει παραλληλεπίπεδον ὑπὸ ῥόμβων περατούμενον, τὸ ὁποῖον διὰ τοῦτο λέγεται *ῥομβόεδρον.*

349. **Θεώρημα.** *Τοῦ παραλληλεπιπέδου αἱ διαγώνιοι τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.*

Ἔστω παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ καὶ δύο διαγώνιοι αὐτοῦ αἱ ΑΗ καὶ ΕΓ· ἀλλ' αἱ ΑΕ καὶ ΗΓ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι· ἑπομένως τὸ σχῆμα ΑΓΗΕ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΗ καὶ ΕΓ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.



Σημείωσις α΄. Διαγώνιοι τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ εἶναι αἱ ἑξῆς τέσσαρες, ΑΗ, ΒΘ, ΓΕ, ΔΖ, καὶ τέμνονται ἀνὰ δύο, ὡς ἀπεδείχθη, εἰς τὸ μέσον αὐτῶν, ἑπομένως καὶ αἱ τέσσαρες διέρχονται διὰ τοῦ μέσου Κ τῆς ΑΗ· τοῦτο δὲ εἶναι τὸ μέσον καὶ τῶν ἄλλων.



Σημείωσις β΄. Πᾶσα εὐθεῖα διὰ τοῦ σημείου Κ ἠγμένη καὶ περατουμένη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ παραλληλεπιπέδου ὡς ἡ ΚΛΜ τέμνεται δίχα εἰς τὸ σημεῖον Κ, ὡς δεικνύεται ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΚΛΑ καὶ ΚΗΜ.

Διὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην τὸ σημεῖον Κ λέγεται *κέντρον* τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀσκήσεις.

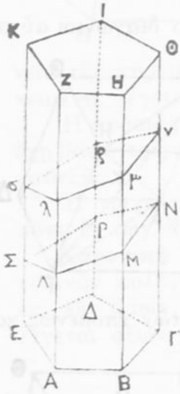
634) Αἱ διαγώνιοι παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι τὸ δὲ τετράγωνον μιᾶς τούτων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν ἀκμῶν μιᾶς τῶν στερεῶν αὐτοῦ γωνιῶν.

635) Ἡ διαγώνιος κύβου ἀκμῆς α εἶναι $\alpha\sqrt{3}$

636) Ἐὰν αἱ διαγώνιοι παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι, τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθογώνιον.

350. **Θεώρημα.** ***Αἱ τομαὶ πρίσματος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι πολύγωνα ἴσα.***

Ἔστω τυχὸν πρίσμα τὸ ΑΙ καὶ τομαὶ αὐτοῦ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων (μὴ τεμνόντων τὰς βάσεις) αἱ ΛΜΝΡΣ καὶ λμνρσ.



Αἱ εὐθεῖαι Λλ, Μμ,... εἶναι ἴσαι (317)· ἄρα τὸ σχῆμα ΛΜλμ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΛΜ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ λμ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ΜΝ ἴση καὶ παράλληλος τῇ μν, καὶ ἡ ΝΡ τῇ νρ, καὶ ἡ ΡΣ τῇ ρσ, καὶ ἡ ΣΛ τῇ σλ. Καὶ ἡ γωνία ΛΜΝ εἶναι ἴση τῇ λμν (320), ὁμοίως ἡ ΜΝΡ εἶναι ἴση τῇ μνρ καὶ ἡ ΡΣΛ τῇ ρσλ καὶ καθεξῆς. Τὰ δύο πολύγωνα λοιπὸν ΛΜΝΡΣ καὶ λμνρσ ἔχουσι τὰς πλευράς των ἴσας κατὰ μίαν καὶ τὰς γωνίας, τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας, ἴσας· ἄρα εἶναι ἴσα.

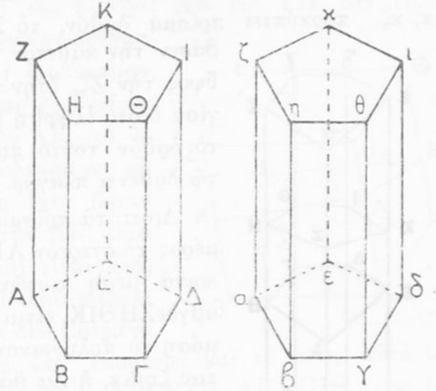
351. Πόρισμα. ***Ἐὰν πρίσμα τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτοῦ,*** ἡ ***τομὴ εἶναι ἴση τῇ βάσει.***

Σημείωσις. Κάθετος λέγεται ἡ τομὴ τοῦ πρίσματος, ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ.

352. **Θεώρημα.** ***Δύο ὀρθὰ πρίσματα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχωσιν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστωσαν ὀρθὰ πρίσματα τὰ ΑΙ καὶ αι· καὶ ἂς ὑποτεθῶσιν αἱ βάσεις αὐτῶν ΑΒΓΔΕ, αβγδε ἴσαι καὶ τὰ ὕψη ΑΖ, αζ ἴσα. Ἐὰν ἡ βάσις αβγδε ἐφαρμόση ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῆ ΑΒΓΔΕ, ἡ αζ θὰ πέση ἐπὶ τῆς ΑΖ, διότι ἀμφότεραι θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔΕ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Α· ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ ἴσαι, θὰ πέση τὸ σημεῖον ζ εἰς τὸ σημεῖον Ζ· ὁμοίως θὰ πέση



καὶ τὸ η εἰς τὸ Η καὶ τὸ θ εἰς τὸ Θ καὶ καθεξῆς· ὥστε τὰ δύο πρίσματα θὰ ἐφαρμόσωσι.

353. **Πόρισμα.** ***Δύο ὀρθὰ πρίσματα, ἔχοντα βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἰσοδύναμα***

354. **Θεώρημα.** ***Δύο ὀρθὰ πρίσματα, τὴν αὐτὴν ἔχοντα βάσιν, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.***

Ἔστω πρίσμα ὀρθὸν τὸ ΑΒΓΔαβγδ· ἐὰν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ Αα, Ββ, Γγ, Δδ, διπλασιασθῶσι καὶ γίνωσιν Αα′, Ββ′, Γγ′, Δδ′, τὸ πρίσμα διπλασιάζεται, διότι τὰ δύο πρίσματα, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται, τὰ ΑΒΓΔαβγδ καὶ αβγδ α′β′γ′δ′, εἶναι ἴσα (352) Ἐὰν δὲ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ τριπλασιασθῶσι καὶ γίνωσιν Αα″. Ββ″, Γγ″, Δδ″, καὶ τὸ πρίσμα τριπλασιάζεται, διότι τὰ τρία πρίσματα, ἐξ ὧν σύγκειται, εἶναι ἴσα (352). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ πάντα ἄλλον ἀκέραιον ἀριθμόν.

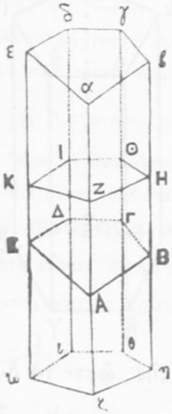
Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν, ὅτι τὰ ἴσας βάσεις ἔχοντα ὀρθὰ πρίσματα εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

355. **Θεώρημα.** ***Πᾶν πλάγιον πρίσμα εἶναι ἰσοδύναμον ὀρθῷ πρίσματι, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν τὴν κάθετον τομὴν τοῦ πλαγίου, ὕψος δὲ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.***

Ἔστω πλάγιον πρίσμα τὸ ΑΒΓΔΕαβγδε καὶ κάθετος τομὴ αὐτοῦ ἡ ΖΗΘΙΚ. Ἐὰν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

προσεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ καὶ ληφθῇ Αζ=αΖ, Βη=βΗ, Γθ=γΘ, Δι=δΙ, Εκ=εΚ, ἀχθῶσι δὲ καὶ αἱ εὐθεῖαι ζη, ηθ, θι, ικ, κζ, προκύπτει πρίσμα ὀρθόν, τὸ ΖΗΘΙΚζηθικ, ὅπερ ἔχει



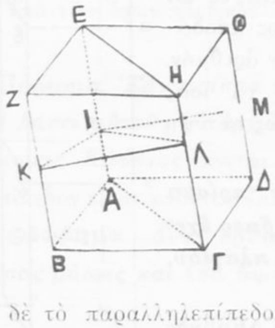
βάσιν τὴν κάθετον τομὴν τοῦ πλαγίου καὶ ὕψος τὴν Ζζ, ἴσην τῇ πλευρᾷ Αα τοῦ πλαγίου διότι ἐλήφθη (ζΑ=ΖΑ). Λέγω δέ, ὅτι τὸ ὀρθὸν τοῦτο πρίσμα εἶναι ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι πλαγίῳ.

Διότι τὰ πρίσματα ταῦτα ἔχουσι κοινὸν μέρος τὸ στερεὸν ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ, τὰ δὲ μὴ κοινὰ μέρη αὐτῶν, τὰ ΑΒΓΔΕζηθικ καὶ αβγδεΖΗΘΙΚ, εἶναι ἴσα. Ἐὰν τῷ ὄντι ἐφαρμόσῃ τὸ πολύγωνον ΖΗΘΙΚ ἐπὶ τοῦ ἴσου του ζηθικ, ἡ Ζα θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ζΑ (διότι θὰ εἶναι ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ζηθικ καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου) καὶ ἐπειδὴ ἐλήφθη ζΑ=Ζα, θὰ πέσῃ τὸ α εἰς τὸ Α· ὁμοίως θὰ πέσῃ καὶ τὸ β εἰς τὸ Β καὶ τὸ γ εἰς τὸ Γ καὶ καθεξῆς. Ὥστε τὰ δύο στερεὰ ΑΒΓΔΕζηθικ καὶ αβγδεΖΗΘΙΚ θὰ ἐφαρμόσωσι.

Ἄρα τὸ ὀρθὸν πρίσμα καὶ τὸ δοθὲν πλάγιον ἐφαρμόζουσιν, ὅταν διαιρεθῶσιν εἰς μέρη, ἤτοι εἶναι ἰσοδύναμα.

356. **Θεώρημα.** ***Τὸ διὰ δύο ἀπέναντι πλευρῶν παραλληλεπιπέδου ἀγόμενον ἐπίπεδον διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο τριγωνικὰ πρίσματα ἴσα ἢ ἰσοδύναμα.***

Ἔστω παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ· διὰ τῶν δύο ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρῶν ΑΕ καὶ ΗΓ ἃς ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ΑΕΗΓ, ὅπερ

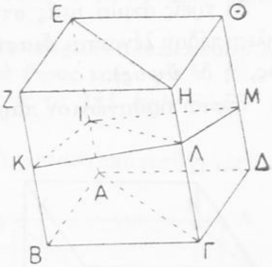


διαιρεῖ τὸ παραλληλεπίπεδον εἰς τὰ δύο στερεὰ ΑΒΓΕΖΗ καὶ ΑΓΔΕΗΘ τὰ ὁποῖα εἶναι πρίσματα, διότι αἱ εὐθεῖαι ΒΖ, ΑΕ, ΓΗ, ΔΘ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Καὶ ἂν μὲν τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθὸν τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα, εἰς ἃ διῃρέθη, εἶναι ἴσα, διότι εἶναι ὀρθὰ καὶ ἔχουσι βάσεις ἴσας, καὶ ὕψη ἴσα· ἂν δὲ τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι πλάγιον, καὶ τὰ πρίσματα

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἶναι ἐπίσης πλάγια· εἶναι δὲ καὶ ἰσοδύναμα, διότι, ἐὰν ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ, ὡς τὸ ΙΚΛΜ, τὸ μὲν τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΕΖΗ εἶναι (354) ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ πρίσματι, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν ΙΚΛ καὶ ὕψος τὴν ΑΕ, τὸ δὲ ΑΓΔΕΗΘ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ πρίσματι, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν ΙΛΜ. καὶ ὕψος τὴν ΑΕ· ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΙΚΛ, ΙΛΜ εἶναι ἴσα, διότι τὸ σχῆμα ΙΚΛΜ εἶναι παραλληλόγραμμον, ὥστε τὰ δύο εἰρημένα



ὀρθὰ πρίσματα εἶναι ἴσα· ἑπομένως καὶ τὰ πρὸς αὐτὰ ἰσοδύναμα τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΓΕΖΗ, ΑΓΔΕΗΘ εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἀμφότερα προκύπτουσιν ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὀρθοῦ πρίσματος, διαιρεθέντος εἰς δύο μέρη.

357. Πόρισμα. ***Πᾶν τριγωνικὸν πρίσμα ὡς τὸ ΒΑΓΕΖΗ, εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου, ὅπερ κατασκευάζεται*** (348, σημ.) ***ἐκ τῶν τριῶν ἀκμῶν ΒΑ, ΒΓ, ΒΖ μιᾶς τῶν στερεῶν αὐτοῦ γωνιῶν Β.***

Ἀσκήσεις.

637) Ποῖα εἶναι τὰ σχήματα τῶν οἱωνδήποτε τομῶν παραλληλεπιπέδου ὑπὸ ἐπιπέδου;

638) Ποῖον εἶναι τὸ σχῆμα τῆς τομῆς κύβου ἀκμῆς α, ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ δύο ἀπέναντι ἀκμῶν αὐτοῦ μὴ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας καὶ ποῖον τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς;

639) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος (δηλαδὴ τῆς ἐπιφανείας ἄνευ τῶν βάσεων αὐτοῦ) ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

640) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πλαγίου πρίσματος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς περιμέτρου τῆς καθέτου τομῆς αὐτοῦ, ἐπὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ

358. Ὡς μονὰς τῶν στερεῶν λαμβάνεται ὁ κύβος ὁ ἔχων πλευρὰν τὴν μονάδα τοῦ μήκους.

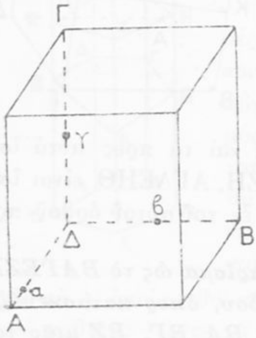
Ὁ ἐκ τῆς καταμετρήσεως στερεοῦ προκύπτων ἀριθμός, ὁ τὴν ἔκτασιν αὐτοῦ ἐκφράζων, ἤτοι ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὸν ῥηθέντα κύβον, λέγεται ***ὄγκος*** αὐτοῦ (180).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

359. **Θεώρημα.** ***Ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἀριθμῶν, οἵτινες μετροῦσι τὰς τρεῖς ἀκμὰς μιᾶς τῶν στερεῶν αὐτοῦ γωνιῶν.***

Αἱ τρεῖς ἀκμαὶ μιᾶς στερεᾶς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου λέγονται ***διαστάσεις*** αὐτοῦ (ἡ μὲν ***μῆκος***, ἡ δὲ ***πλάτος***, ἡ δὲ ***ὕψος***).

Ἔστω ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒΓΔ καὶ αἱ διαστάσεις αὐτοῦ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, μετρηθεῖσαι μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους, ἃς ἔχωσι τὰ μήκη α, β, γ. Ἐὰν ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΔΓ (ἢ ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς αὐτῆς) ἡ Δγ ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους καὶ κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΔΑ, ΔΒ, Δγ, θὰ ἔχῃ καὶ αὐτὸ τὴν βάσιν ΑΔΒ τοῦ δοθέντος. Ἐντεῦθεν ἕπεται κατὰ τὸ ἐδάφιον 354



$$\frac{(\text{ΑΒΓΔ})}{(\text{ΑΒγΔ})} = \frac{\gamma}{1}$$

Ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ΔΒ ληφθῇ ἡ Δβ ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους καὶ κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΔΑ, Δβ, Δγ, τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΔΑΒγ καὶ ΔΑβγ θὰ ἔχωσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΔΑγ, ἄρα θὰ εἶναι ὡς τὰ ὕψη των ΔΒ καὶ Δβ, τουτέστιν

$$\frac{(\text{ΑΒγΔ})}{(\text{Αβγ}\Delta)} = \frac{\beta}{1}.$$

Ἐὰν δὲ τέλος ληφθῇ καὶ ἐπὶ τῆς ΔΑ ἡ Δα ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους καὶ κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον ἐπὶ τῶν ἀκμῶν Δα, Δβ, Δγ, τοῦτο θὰ εἶναι ἡ μονὰς τῶν στερεῶν καὶ θὰ ἔχῃ μὲ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑβγΔ τὴν αὐτὴν βάσιν Δβγ· ἄρα θὰ εἶναι

$$\frac{(\text{Αβγ}\Delta)}{(\alpha\beta\gamma\Delta)} = \frac{\alpha}{1}.$$

πολλαπλασιάζοντες δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη καὶ ἐξαλείφοντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας εὑρίσκομεν

$$\text{ὄγκος ΑΒΓΔ} = \alpha.\beta.\gamma.$$

360. Πόρισμα. ***Ὁ ὄγκος παντὸς ὀρθογωνίου παραλλη-***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

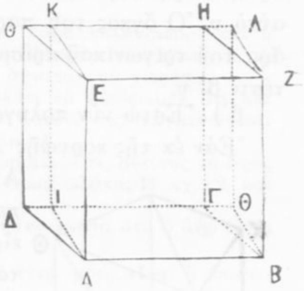
λεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Σημείωσις. Ὁ ὄγκος τοῦ κύβου, οὗτινος ἡ πλευρὰ ἔχει τὸ μῆκος α, εἶναι α.α.α, ἤτοι α^3 διὰ τοῦτο ἡ τρίτη δύναμις ἀριθμοῦ λέγεται ***κύβος*** αὐτοῦ.

361. **Θεώρημα.** ***Ὁ ὄγκος παντὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

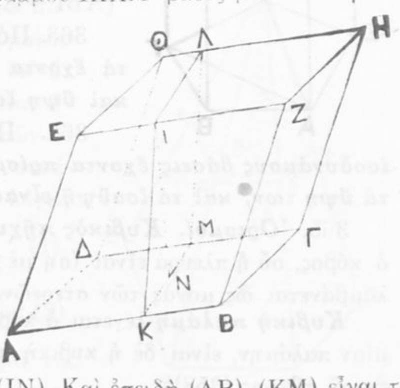
α') Ἔστω ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ, ἔχον βάσιν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ.

Ἐὰν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ μετασχηματισθῇ εἰς ὀρθογώνιον, τὸ ΑΙΘΒ, τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ παραλληλεπιπέδῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΘΙ καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ (353)· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον· ἄρα ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι (ΑΒΘΙ). (ΑΕ) ἢ καὶ (ΑΒΓΔ) (ΑΕ), οὗτος δὲ εἶναι καὶ ὁ ὄγκος τοῦ δοθέντος παραλληλεπιπέδου ΑΗ.



β'). Ἔστω νῦν πλάγιον παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ καὶ κάθετος τομὴ αὐτοῦ ἡ ΙΚΛΜ, ἥτις θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον (313) Τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ παραλληλεπιπέδῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν ΙΚΛΜ καὶ ὕψος τὴν ΑΒ· τὸ ὀρθὸν δὲ τοῦτο παραλληλεπίπεδον ἔχει ὄγκον (ΙΚΛΜ). (ΑΒ)· ἄρα καὶ τὸ δοθὲν τὸν αὐτὸν ἔχει ὄγκον.

Ἀλλὰ τοῦ παραλληλογράμμου ΙΚΛΜ βάσις μὲν εἶναι ἡ ΚΜ (κάθετος ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΓΔ), ὕψος δὲ ἡ ἐκ τοῦ Ι ἐπὶ τὴν ΚΜ ἀγομένη κάθετος ΙΝ, ἥτις θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ· ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ γράφεται



καὶ ὡς ἑξῆς· (ΑΒ). (ΚΜ). (ΙΝ). Καὶ ἐπειδὴ (ΑΒ). (ΚΜ) εἶναι τὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΒΓΔ, ἕπεται ὅτι ὁ ὄγκος εἶναι (ΑΒΓΔ). (ΙΝ).

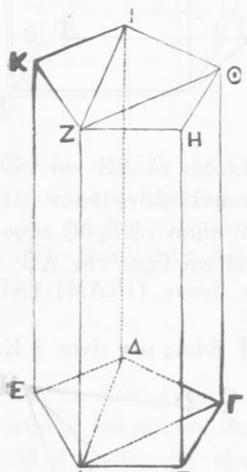
Ἤτοι πάλιν τὸ *γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.*

362. **Θεώρημα.** ***Ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος εἶναι γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

α΄) Ἔστω τριγωνικὸν πρίσμα, ἔχον βάσιν β καὶ ὕψος υ. Ἐὰν ἐκ τῶν ἀκμῶν μιᾶς ἐκ τῶν στερεῶν γωνιῶν του κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον, τοῦτο θὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος (356) καὶ θὰ ἔχῃ βάσιν διπλασίαν 2β καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ υ. Ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου τούτου θὰ εἶναι 2β. υ· ἄρα τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ὁ ὄγκος θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ, τουτέστι β. υ.

β΄). Ἔστω νῦν πολυγωνικὸν πρίσμα τὸ ΑΙ.

Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς Α διαιρεθῇ ἡ βάσις αὐτοῦ εἰς τρίγωνα,



ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ, καὶ ἀχθῶσι τὰ ἐπίπεδα ΖΑΓ, ΖΑΔ, διαιροῦσι τὸ πρίσμα εἰς τριγωνικὰ πρίσματα, ἔχοντα βάσεις τὰ τρίγωνα, εἰς ἃ διῃρέθη ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ τοῦ πρίσματος καὶ ὕψος τὸ τοῦ πρίσματος, ὅπερ ὕψος ἔστω υ.

Ὁ ὄγκος τῶν πρισμάτων τούτων εἶναι (ΑΒΓ).υ, (ΑΓΔ).υ, (ΑΔΕ).υ.

ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ δοθέντος πολυγωνικοῦ πρίσματος εἶναι

(ΑΒΓ). υ + (ΑΓΔ). υ + (ΑΔΕ). υ ἢ

(ΑΒΓ+ΑΓΔ+ΑΔΕ).υ ἢ (ΑΒΓΔΕ). υ.

363. **Πόρισμα 1ον.** ***Τὰ πρίσματα τὰ ἔχοντα βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα εἶναι ἰσοδύναμα.***

364. **Πόρισμα 2ον.** ***Τὰ ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους βάσεις ἔχοντα πρίσματα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη των, καὶ τὰ ἰσοϋψῆ εἶναι ὡς αἱ βάσεις των.***

365. ***Ὁρισμοί. Κυβικὸς πῆχυς ἢ κυβικὸν μέτρον*** λέγεται ὁ κύβος, οὗ ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ ἕνα πῆχυν. Ὁ κύβος δὲ οὗτος λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν στερεῶν (358).

Κυβικὴ παλάμη λέγεται ὁ κύβος, οὗ ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ μίαν παλάμην, εἶναι δὲ ἡ κυβικὴ παλάμη τὸ χιλιοστὸν τοῦ κυβικοῦ πήχεως (358).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κυβικὸς δάκτυλος λέγεται ὁ κύβος ὁ ἔχων πλευρὰν ἕνα δάκτυλον, εἶναι δὲ ὁ κυβικὸς δάκτυλος τὸ ἑκατομμυριοστὸν τοῦ κυβικοῦ πήχεως (359).

Ἀσκήσεις

641) Αἱ τρεῖς διαστάσεις ὀρθογωνίου τινὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ἡ μὲν 4πχ, 3, ἡ δὲ 8πχ, 91, ἡ δὲ 2πχ, 17. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

642) Κύβος τις ἔχει πλευρὰν 5 πήχ. Ποία εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ διπλασίου κύβου (κατὰ τὸν ὄγκον);

643) Ἡ βάσις πρίσματός τινος ὀρθοῦ εἶναι τρίγωνον ἰσόπλευρον, ἔχον περίμετρον 6πχ., τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶναι 5 πχ. Ζητεῖται ὁ ὄγκος καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

644) Δεξαμενὴ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ ἡ μὲν ἄνω βάσις αὐτῆς εἶναι τετράγωνον οὗ ἡ πλευρὰ εἶναι 10 πχ. 2, τὸ δὲ βάθος αὐτῆς εἶναι 1 πχ, 8. Πόσον ὕδωρ δύναται νὰ χωρέσῃ;

(Ἐὰν ζητῆται τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι μία κυβικὴ παλάμη ὕδατος, τουτέστι μία λίτρα αὐτοῦ, ἀπεσταγμένου καὶ εἰς θερμοκρασίαν 4^0, ἔχει βάρος 312 1)2 δράμια)

645) Πόσα κυβικὰ μέτρα ἀέρος χωρεῖ δωμάτιόν τι, οὗτινος τὸ ὕψος εἶναι 6 πχ. τὸ δὲ πάτωμα ἔχει μῆκος 5 πχ, 8 καὶ πλάτος 3 πχ, 2, καὶ πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἀέρος τούτου;

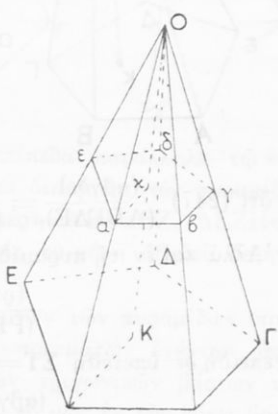
(Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ βάρος, πρέπει νὰ ἐνθυμώμεθα ὅτι, ὁ ἀὴρ εἶναι 770 φορὰς ἐλαφρότερος τοῦ ὕδατος.

646) Κύβος τις ἔχει ὄγκον 80 κ.μ. Πόσα τετρ. μέτρ. εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙ ΠΥΡΑΜΙΔΩΝ

366. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς, αἱ πλευραὶ τῆς πυραμίδος καὶ τὸ ὕψος τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα καὶ ἡ τομὴ εἶναι ὁμοία τῇ βάσει.***

Ἔστω πυραμὶς ἡ ΟΑΒΓΔΕ καὶ τομὴ αὐτῆς παράλληλος τῇ βάσει ἡ αβγδε, ὕψος δὲ ἡ ΟΚ.



Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ αβ εἶναι παράλληλοι ἑπομένως τὸ τρίγωνον Οαβ εἶναι ὅμοιον τῷ ΟΑΒ· δι' ὅμοιον λόγον καὶ τὸ Οβγ εἶναι ὅμοιον τῷ ΟΒΓ κ.ο.κ. Ἐκ τῶν ὁμοίων δὲ τούτων τριγώνων συνάγεται ἡ ἰσότης πάντων τῶν λόγων

$$\frac{Οα}{ΟΑ}, \frac{Οβ}{ΟΒ}, \frac{Ογ}{ΟΓ}, \frac{Οδ}{ΟΔ}, \frac{Οε}{ΟΕ} \quad (1)$$

$$\frac{αβ}{ΑΒ}, \frac{βγ}{ΒΓ}, \frac{γδ}{ΓΔ}, \frac{δε}{ΔΕ}, \frac{εα}{ΕΑ}. \quad (2)$$

ὅθεν βλέπομεν, ὅτι αἱ πλευραὶ τῆς πυραμίδος διηρέθησαν εἰς μέρη

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀνάλογα (1). Καὶ τὰ πολύγωνα αβγδε καὶ ΑΒΓΔΕ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν (75) καὶ τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους (2) ὅ. ἔ. δ.

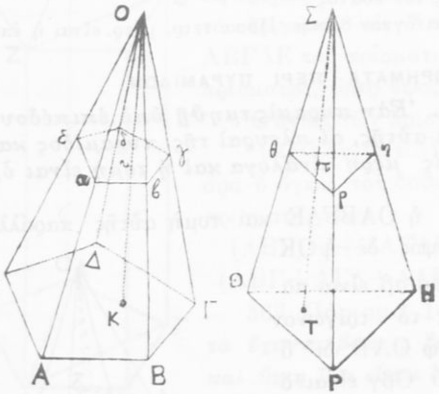
Καὶ τὸ ὕψος ΟΚ τῆς πυραμίδος τέμνεται εἰς τὸν αὐτὸν λόγο ', εἰς ὃν καὶ αἱ πλευραί· διότι ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΑΚ, Οακ, συνάγεται

$$\frac{Οα}{ΟΑ} = \frac{Οκ}{ΟΚ} = \frac{ακ}{ΑΚ}$$

Σημείωσις. Καὶ πᾶσα εὐθεῖα ἐκ τῆς κορυφῆς εἰς τὴν βάσιν ἠγμένη τέμνεται εἰς τὸν αὐτὸν λόγον

367. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο πυραμίδες ἰσοϋψεῖς τμηθῶσιν ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν καὶ ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν κορυφῶν, αἱ τομαὶ θὰ εἶναι ἀνάλογοι τῶν βάσεων.***

Ἔστωσαν πυραμίδες ἰσοϋψεῖς αἱ ΟΑΒΓΔΕ καὶ ΣΡΗΘ, ἔχουσαι ὕψη τὰ ΟΚ καὶ ΣΤ καὶ τομαὶ αὐτῶν παράλληλοι πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τῶν κορυφῶν, αἱ αβγδε καὶ ρηθ. Ἐπειδὴ ἡ τομὴ αβγδε εἶναι ὁμοία τῇ βάσει ΑΒΓΔΕ καὶ $\frac{αβ}{ΑΒ} = \frac{Οκ}{ΟΚ}$ ἔπεται



ὅτι (247) $\frac{(αβγδε)}{(ΑΒΓΔΕ)} = \frac{(αβ)^2}{(ΑΒ)^2} = \frac{(Οκ)^2}{(ΟΚ)^2}$.

Ἀλλὰ καὶ ἐν τῇ πυραμίδι ΣΡΗΘ εἶναι δι' ὅμοιον λόγον

$$\frac{(ρηθ)}{(ΡΗΘ)} = \frac{(Στ)^2}{(ΣΤ)^2},$$

ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη ΣΤ=ΟΚ καὶ Στ=Οκ, ἔπεται ἡ ἰσότης

$$\frac{(αβγδε)}{(ΑΒΓΔΕ)} = \frac{(ρηθ)}{(ΡΗΘ)}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

368. Πόρισμα. ***Ἐὰν δύο πυραμίδες ἔχωσιν ἴσα ὕψη καὶ βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους αἱ τομαὶ αὐτῶν, αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τῶν κορυφῶν, θὰ εἶναι ἐπίσης ἴσαι ἢ ἰσοδύναμοι.***

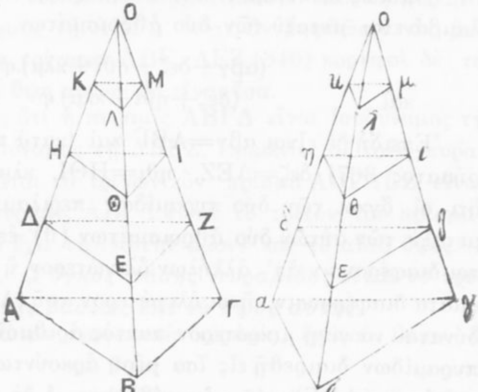
Ἀσκήσεις

647) Δύο ὅμοια πολύγωνα, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ὧν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι, εἶναι τομαὶ πυραμίδος.

648) Ἐπὶ πλευρᾶς τινος δοθείσης πυραμίδος νὰ εὑρεθῇ σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε τὸ δι' αὐτοῦ διερχόμενον παράλληλον τῇ βάσει ἐπίπεδον, νὰ δίδῃ τομὴν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως.

369. **Θεώρημα.** ***Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες, ἔχουσαι βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἰσοδύναμοι.***

Ἔστωσαν δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ΟΑΒΓ, οαβγ, ἔχουσαι τὰς βάσεις αὐτῶν ΑΒΓ, αβγ ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα· λέγω, ὅτι αἱ πυραμίδες αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι.



Ἂς τεθῶσιν αἱ βάσεις τῶν δύο πυραμίδων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καί, ἀφοῦ διαιρεθῇ τὸ ὕψος τῆς μιᾶς εἰς ἴσα μέρη, ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἐπίπεδα παράλληλα τῷ ἐπιπέδῳ τῶν βάσεων. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα διαιροῦσι τὰς πυραμίδας εἰς μέρη, τὴν μὲν ΟΑΒΓ εἰς τὰ μέρη ΑΒΓΔΕΖ, ΔΕΖΗΘΙ, ΗΘΙΚΛΜ, ΚΛΜΟ, τὴν δὲ οαβγ εἰς τὰ μέρη αβγδεζ, δεζηθι, ηθικλμ, κλμο.

Ἀλλ' ἕκαστον τῶν τμημάτων τούτων τῶν πυραμίδων προφανῶς περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο πρισμάτων ἐχόντων ὕψος τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο παραλλήλων τριγωνικῶν βάσεων τοῦ θεωρουμένου τμήματος καὶ βάσεις τὸ μὲν ἓν τὴν κάτω βάσιν τοῦ τμήματος τὸ δὲ ἕτερον τὴν κάτω.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἑπομένως ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ φ τὴν ἀπόστασιν τῶν παραλλήλων βάσεων ἑκάστου τῶν τμημάτων τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓ εὑρίσκομεν τὰς ἀνισότητας.

τμ. ΑΒΓΔΕΖ $<$ (ΑΒΓ).φ))τμ. ΑΒΓΔΕΖ $>$ (ΔΕΖ).φ
τμ. ΔΕΖΗΘΙ $<$ (ΔΕΖ).φ) ἀλλὰ καὶ)τμ. ΔΕΖΗΘΙ $>$ (ΗΘΙ).φ
τμ. ΗΘΙΚΛΜ $<$ (ΗΘΙ).φ))τμ. ΗΘΙΚΛΜ $>$ (ΚΛΜ).φ
τμ. ΚΛΜΟ $<$ (ΚΛΜ).φ)τμ. ΚΛΜΟ $>$ Ο,

ἐξ ὧν προστιθεμένων κατὰ μέλη, προκύπτει, ὅτι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο ἀθροισμάτων

(ΑΒΓ+ΔΕΖ+ΗΘΙ+ΚΛΜ).φ
καὶ (ΔΕΖ+ΗΘΙ+ΚΛΜ).φ (ϑ)

Ὁμοίως δεικνύομεν, ὅτι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος οαβγ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο ἀθροισμάτων

(αβγ+δεζ+ηϑι+κλμ).φ
καὶ (δεζ+ηϑι+κλμ).φ

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι αβγ=ΑΒΓ καὶ (κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ θεωρήματος 367) δεζ=ΔΕΖ, ηϑι=ΗΘΙ, κλμ=ΚΛΜ, συνάγεται, ὅτι οἱ ὄγκοι τῶν δύο πυραμίδων περιλαμβάνονται ἀμφότεροι μεταξὺ τῶν αὐτῶν δύο ἀθροισμάτων (ϑ)· ἑπομένως οἱ ὄγκοι οὗτοι διαφέρουσιν ἀπ᾽ ἀλλήλων ὀλιγώτερον ἢ ὅσον τὰ δύο ἀθροίσματα διαφέρουσιν, ἤτοι ὀλιγώτερον τοῦ (ΑΒΓ).φ. Ἀλλὰ τοῦτο δύναται νὰ γίνῃ μικρότερον παντὸς ἀριθμοῦ, ὅταν τὸ ὕψος τῶν πυραμίδων διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη ἀρκούντως πολλά· διότι ὁ μὲν παράγων (ΑΒΓ) μένει ἀμετάβλητος, ὁ δὲ φ καταντᾷ ὅσον θέλομεν μικρός. Ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν, ὅτι οἱ ὄγκοι τῶν δύο πυραμίδων οαβγ, ΟΑΒΓ οὐδεμίαν δύνανται νὰ ἔχωσι διαφοράν, ἤτοι εἶναι ἴσοι, ἄρα αἱ πυραμίδες αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἀσκήσεις

649) Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν κορυφῶν ἰσοδυνάμων πυραμίδων ἐχουσῶν τὴν αὐτὴν βάσιν;

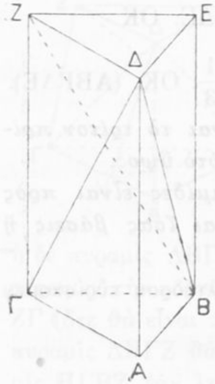
650) Νὰ διαιρεθῇ τετράεδρον εἰς τρία τετράεδρα ἰσοδύναμα δι᾽ ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς.

370. **Θεώρημα.** ***Πᾶσα τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τὸ τρί-***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τον πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Ἔστω τριγωνικὴ πυραμὶς ἡ ΑΒΓΔ.

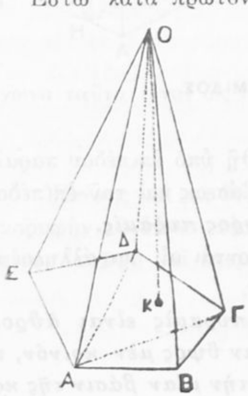


Ἐκ τῶν κορυφῶν Β,Γ ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ἴσαι καὶ παράλληλοι τῇ ΑΔ, αἱ ΓΖ, ΒΕ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ· τὸ προκῦπτον σχῆμα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι πρίσμα τριγωνικὸν καὶ ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὰ τῆς πυραμίδος. Ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ ἀπὸ τοῦ πρίσματος μένει ἡ πυραμὶς ΔΒΓΖΕ, βάσιν ἔχουσα τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓΖΕ καὶ κορυφὴν τὸ Δ, ἥτις διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΔΒΖ διαιρεῖται εἰς δύο τριγωνικὰς πυραμίδας ΔΒΓΖ, ΔΒΖΕ. αἵτινες εἶναι ἰσοδύναμοι (369). Ἀλλ' ἡ πυραμὶς ΔΒΖΕ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ ΑΒΓΔ· διότι, ἂν ληφθῶσιν ὡς βάσεις αὐτῶν τὰ ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ (346) κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Δ, Β, καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ ΔΒΕΖ, αὕτη δὲ ἰσοδύναμος τῇ ΔΒΓΖ, ἑπομένως αἱ τρεῖς πυραμίδες ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ, εἶναι ἰσοδύναμοι· ἄρα ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΖ, ὅπερ ἔχει τὴ αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

371. **Θεώρημα.** ***Ὁ ὄγκος πάσης πυραμίδος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.***

Ἔστω κατὰ πρῶτον τριγωνικὴ πυραμίς, ἔχουσα βάσιν β καὶ ὕψος υ.



Ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος, ὅπερ ἔχει βάσιν β καὶ ὕψος υ, εἶναι β.υ· ἐπειδὴ δὲ ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος τούτου, ὁ ὄγκος αὐτῆς εἶναι

$\frac{1}{3}$ β. υ.

Ἔστω νῦν ἡ τυχοῦσα πολυγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓΔΕ· ἐὰν διαιρεθῇ αὕτη εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας, ἐχούσας κοινὴν κορυφὴν τὸ Ο καὶ βάσεις τὰ τρίγωνα, εἰς ἃ διαιρεῖται τὸ πολύγω-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νον ΑΒΓΔΕ, διὰ τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΑΔ, τότε ὁ ὄγκος τῆς δοθείσης πυραμίδος ΟΑΒΓΔΕ εἶναι τὸ ἄθροισμα

$$\frac{1}{3}\text{ΑΒΓ. ΟΚ}+\frac{1}{3}\text{ΑΓΔ. ΟΚ}+\frac{1}{3}\text{ΑΔΕ. ΟΚ}$$

ἢ $\frac{1}{3}$. ΟΚ. (ΑΒΓ+ΑΓΔ+ΑΔΕ), ἤτοι $\frac{1}{3}$. ΟΚ. (ΑΒΓΔΕ).

372. **Πόρισμα 1ον.** ***Πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος, ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.***

373. **Πόρισμα 2ον.** ***Αἱ ἰσοϋψεῖς πυραμίδες εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν, αἱ δὲ ἔχουσαι ἴσας βάσεις ἢ ἰσοδυνάμους εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.***

Σημείωσις. Τὸν ὄγκον οἱουδήποτε πολυέδρου εὑρίσκομεν ἀναλύοντες αὐτὸ εἰς πυραμίδας.

Ἀσκήσεις.

651) Πυραμίς τις ἔχει βάσιν τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ εἶναι 5 π. 2, τὸ δὲ ὕψος της εἶναι 12 π. Ζητεῖται ὁ ὄγκος αὐτῆς.

652) Κανονική τις πυραμὶς ἔχει βάσιν ἑξάγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ εἶναι 3 πχ. 2, ἑκάστη δὲ τῶν εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς συντρεχουσῶν ἀκμῶν εἶναι 8 πχ. Ζητεῖται ὁ ὄγκος αὐτῆς.

653) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος πυραμίδος, ἥτις περικλείεται ὑπὸ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγώνων.

654) Τῆς ἀνωτέρω πυραμίδος νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας.

655) Εἰς πόσας πυραμίδας διαιρεῖται δοθὲν παραλληλεπίπεδον ὑπὸ τῶν διαγωνίων των; Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ὄγκου μιᾶς τούτων πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ παραλληλεπιπέδου.

ΠΕΡΙ ΚΟΛΟΥΡΟΥ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

374. **Ὁρισμός.** Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς, τὸ μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἐπιπέδου περιεχόμενον μέρος αὐτῆς λέγεται ***κόλουρος πυραμίς.***

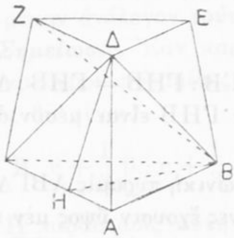
Βάσεις τῆς κολούρου πυραμίδος λέγονται αἱ παράλληλοι ἕδραι αὐτῆς, ὕψος δὲ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν.

375. **Θεώρημα.** ***Πᾶσα κόλουρος πυραμὶς εἶναι ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, αἵτινες ἔχουσιν ὕψος μὲν κοινόν, τὸ ὕψος τῆς κολούρου, βάσεις δέ, ἡ μὲν τὴν μίαν βάσιν τῆς κο-***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

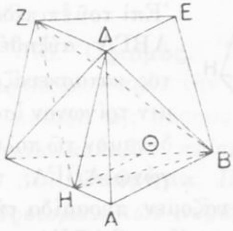
λούρου, ἡ δὲ τὴν ἄλλην, ἡ δὲ τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο τούτων βάσεων.

α) Ἔστω κόλουρος πυραμὶς τριγωνική, ἡ ΑΒΓΔΕΖ. Ἐὰν ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ΔΓΒ, ἀποκόπτεται ἡ πυραμὶς ΔΑΒΓ, ἥτις



ἔχει βάσιν τὴν ΑΒΓ, καὶ ὕψος τὸ τῆς κολούρου πυραμίδος· μένει δὲ ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΔΒΓΖΕ, ἥτις διαιρεῖται διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΔΖΒ εἰς δύο τριγωνικάς, ΔΒΕΖ, ΔΒΓΖ. Ἐκ τούτων ἡ ΔΒΕΖ ἔχει βάσιν μὲν τὴν ΔΕΖ, ὕψος δέ, καὶ αὐτή, τὸ τῆς κολούρου πυραμίδος. ἡ δὲ πυραμὶς ΔΒΓΖ δὲν βλάπτεται κατὰ τὸν ὄγκον, ἐὰν μεταφέρωμεν τὴν κορυφὴν αὐτῆς Δ ἐπὶ εὐθείας ΔΗ παραλλήλου τῇ ΖΓ (ὅτε θὰ εἶναι παράλληλος (309) καὶ τῇ βάσει ΖΓΒ)· ὥστε ἡ πυραμὶς ΔΒΓΖ θὰ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ ΗΓΒΖ. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς ΗΓΒΖ, ἐὰν ληφθῇ ὡς βάσις τὸ τρίγωνον ΓΗΒ, ἔχει ὕψος τὸ τῆς κολούρου πυραμίδος· μένει λοιπὸν ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ βάσις αὐτῆς, ἡ ΓΗΒ, εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο ἄλλων ΑΒΓ, ΔΕΖ

Πρὸς τοῦτο ἄγομεν ἐκ τοῦ Η τὴν ΗΘ παράλληλον τῇ ΑΒ



(ἐπομένως καὶ τῇ ΔΕ) καὶ σχηματίζομεν τὸ τρίγωνον ΓΗΘ, ὅπερ εἶναι ἴσον τῷ ΔΕΖ· διότι αἱ γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι κατὰ μίαν (320) εἶναι δὲ καὶ ΖΔ=ΓΗ (120). Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΓΗΒ ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν τὸ Β καὶ τὰς βάσεις αὐτῶν ΑΓ, ΓΗ ἐπ' εὐθείας· ἐπομένως ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὡς αἱ βάσεις των· τουτέστιν εἶναι

$$\frac{ΑΒΓ}{ΓΗΒ}=\frac{ΑΓ}{ΓΗ} \qquad (1)$$

Ἐπίσης καὶ τὰ δύο τρίγωνα ΓΗΒ καὶ ΓΗΘ ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν τὸ Η καὶ τὰς βάσεις αὐτῶν ΓΒ, ΓΘ ἐπ' εὐθείας· ἄρα εἶναι ἰσοϋψῆ καὶ ἐπομένως εἶναι ὡς αἱ βάσεις των, ἤτοι εἶναι

$$\frac{ΓΗΒ}{ΓΗΘ}=\frac{ΓΒ}{ΓΘ} \qquad (2)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ΗΘ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ, ἔχομεν

(225) $$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΗ}}=\frac{\text{ΓΒ}}{\text{ΓΘ}}$$

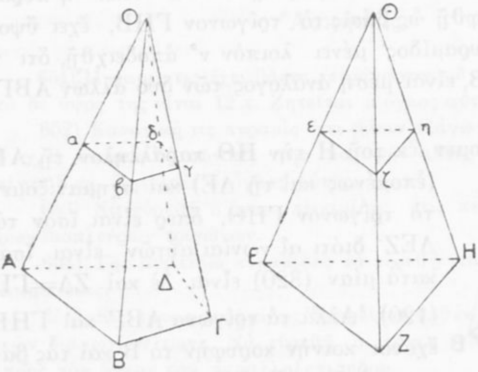
διὰ δὲ τὴν ἰσότητα ταύτην αἱ ἰσότητες (1) καὶ (2) δίδουσιν

$$\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΓΗΒ}}=\frac{\text{ΓΗΒ}}{\text{ΓΗΘ}}$$

ἢ ΑΒΓ : ΓΗΒ = ΓΗΒ : ΓΗΘ ἢ καὶ ΑΓΒ : ΓΗΒ = ΓΗΒ : ΔΕΖ (διότι ΓΗΘ = ΔΕΖ), ἤτοι τὸ τρίγωνον ΓΗΒ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο ἄλλων ΑΓΒ, ΔΕΖ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι ἡ κόλουρος τριγωνικὴ πυραμὶς ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, αἵτινες ἔχουσιν ὕψος μὲν κοινόν, τὸ ὕψος της, βάσεις δὲ ἡ μὲν τὴν μίαν βάσιν ΑΒΓ τῆς κολούρου, ἡ δὲ τὴν ἄλλην ΔΕΖ, ἡ δὲ τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο ἄλλων, τὴν ΒΗΓ.

β) Ἔστω νῦν κόλουρος πυραμὶς πολυγωνικὴ ἡ ΑΒΓΔαβγδ,



ἥτις προέκυψε τμηθείσης τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓΔ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς, τοῦ αβγδ. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ αὐξηθέντος κατασκευάζομεν τρίγωνον ἰσοδύναμον τῷ πολυγώνῳ ΑΒΓΔ, τὸ ΕΖΗ, καὶ ἐπ' αὐτοῦ ὡς βάσεως κατασκευάζομεν πυραμίδα τὴν ΘΕΖΗ ἰσοϋψῆ τῇ δοθείσῃ. Αἱ δύο πυραμίδες ΟΑΒΓΔ καὶ ΘΕΖΗ θὰ εἶναι ἰσοδύναμοι, τὸ δὲ ἐπίπεδον αβγδ ἐκβαλλόμενον θὰ τέμνῃ τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα κατὰ τὸ τρίγωνον εζη, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ πολυγώνῳ αβγδ (368)· διὰ τοῦτο καὶ ἡ πυραμὶς Οαβγδ θὰ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ Θεζη. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν ἰσοδυνάμων ΟΑΒΓΔ καὶ ΘΕΖΗ ἀφαιρεθῶσιν ἰσοδύναμα, τὰ Οαβγδ καὶ Θεζη, τὰ μένοντα στερεά, ἤτοι αἱ κόλουροι πυραμίδες, θὰ εἶναι ἰσοδύναμα. Ἄρα ἡ κόλουρος πυραμὶς θὰ εἶναι ἰσοδύναμος τῷ ἀθροίσματι τριῶν πυ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ραμίδων, ἐχουσῶν ὕψος ὅσον καὶ αὐτή, βάσεις δέ, ἡ μὲν τὴν ΕΖΗ, ἡ δὲ τὴν εζη, ἡ δὲ τὴν μέσην ἀνάλογον αὐτῶν· ἀλλ' αἱ τρεῖς εἰρημέναι πυραμίδες εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς τὰς πυραμίδας, αἵτινες ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, βάσεις δὲ τὰς ΑΒΓΔ, αβγδ καὶ τὴν μέσην ἀνάλογον τούτων. Ἄρα κτλ.

Σημείωσις. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Β καὶ β τὰς δύο βάσεις κολούρου πυραμίδος καὶ διὰ τοῦ υ τὸ ὕψος αὐτῆς, ὁ ὄγκος αὐτῆς θὰ εἶναι

$$\frac{1}{3}\text{Β}.\ \upsilon+\frac{1}{3}\beta.\ \upsilon+\frac{1}{3}\sqrt{\text{Β}.\beta.\upsilon}\ \text{ἢ}\ \frac{1}{3}\ \upsilon.\left(\text{Β}+\beta+\sqrt{\text{Β}\beta}\right).$$

Ἡ παράστασις αὕτη τοῦ ὄγκου δύναται νὰ λάβῃ καὶ ἄλλην ἁπλουστέραν μορφήν· διότι, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ρ τὸν λόγον δύο ὁμολόγων πλευρῶν τῶν βάσεων Β καὶ β θὰ εἶναι $\beta = \text{Β}\rho^2$.

$$\text{ἄρα}\quad \sqrt{\text{Β}.\ \beta} = \sqrt{\text{Β}.\text{Β}\rho^2} = \text{Β}\rho\cdot$$

$$\text{ὅθεν ὁ ὄγκος γίνεται}\ \frac{1}{3}.\ \upsilon\,(\text{Β}+\text{Β}\rho^2+\text{Β}\rho),\ \text{ἤτοι}$$

$$\frac{1}{3}\ \text{Β}.\ \upsilon\,(1+\rho+\rho^2).$$

ΠΕΡΙ ΚΟΛΟΒΟΥ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ

376. **Ὁρισμός.** Ἐὰν πρίσμα τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου μὴ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ μηδὲ τέμνοντος τὴν βάσιν, τὸ μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἐπιπέδου περιεχόμενον μέρος λέγεται ***κολοβὸν πρίσμα.***

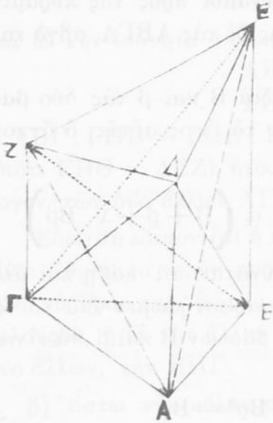
377. **Θεώρημα.** ***Πᾶν κολοβὸν τριγωνικὸν πρίσμα εἶναι ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, αἵτινες ἔχουσι βάσιν μὲν κοινήν, τὴν βάσιν τοῦ πρίσματος, κορυφὰς δὲ τὰς τρεῖς κορυφὰς τῆς τομῆς.***

Ἔστω κολοβὸν τριγωνικὸν πρίσμα τὸ ΑΒΓΔΕΖ, ἔχον βάσιν τὴν ΑΒΓ καὶ τομήν, μὴ παράλληλον τῇ βάσει, τὴν ΔΕΖ.

Τὸ ἐπίπεδον ΔΒΓ, ἐὰν ἀχθῇ, τέμνει ἀπὸ τοῦ στερεοῦ τὴν πυραμίδα ΔΑΒΓ, ἥτις ἔχει βάσιν τὴν ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ Δ. Ἡ δὲ ἀπομένουσα τετραγωνικὴ πυραμὶς ΔΒΓΖΕ, ἂν ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ΔΒΖ, διαιρεῖται εἰς δύο τριγωνικὰς ΔΒΓΖ, ΔΒΖΕ. Τὴν κορυφὴν Δ τῆς πυραμίδος ΔΒΓΖ δυνάμεθα νὰ μεταφέ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρωμεν εἰς τὸ Α· (ἡ ΔΑ εἶναι παράλληλος τῇ βάσει ΒΓΖ)· εἶναι λοιπὸν ἡ πυραμὶς ΔΒΓΖ ἰσοδύναμος τῇ ΑΒΓΖ τῆς ὁποίας βάσιν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ Ζ. Ἀλλ' ὁμοίως καὶ τῆς πυραμίδος ΔΒΖΕ δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν τὴν κορυφὴν Δ εἰς τὸ Α, ὅτε εὑρίσκομεν ἰσοδύναμον αὐτῆς τὴν πυραμίδα ΑΒΖΕ· ἀλλὰ καὶ ταύτης τὴν κορυφὴν Ζ δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν εἰς τὸ Γ (ἡ ΖΓ εἶναι παράλληλος τῇ βάσει αὐτῆς ΑΒΕ), ὅτε εὑρίσκομεν ἰσοδύναμον αὐτῆς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΕ, τῆς ὁποίας βάσιν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὴν ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ Ε.



Ἐδείχθη ἄρα, ὅτι τὸ τριγωνικὸν κολοβὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, ἐχουσῶν βάσιν κοινήν, τὴν βάσιν ΑΒΓ τοῦ πρίσματος, κορυφὰς δὲ τὰς τρεῖς κορυφὰς Δ, Ε, Ζ τῆς τομῆς.

Σημείωσις α΄. Ἐὰν τὸ κολοβὸν πρίσμα εἶναι ὀρθόν, τουτέστιν ἂν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒΓ, ὁ ὄγκος αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{1}{3}\cdot(\text{ΑΒΓ}).(\text{ΑΔ}+\text{ΒΕ}+\text{ΓΖ})$.

Ἐὰν δὲ εἶναι πλάγιον, διαιρεῖται διὰ τῆς καθέτου τομῆς εἰς δύο ὀρθὰ καὶ εὑρίσκεται ὁ ὄγκος αὐτοῦ ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς καθέτου τομῆς του ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν παραλλήλων πλευρῶν του.

Σημείωσις β΄. Τὰ κολοβὰ πολυγωνικὰ πρίσματα διαιροῦνται εἰς τριγωνικά, καθ' ὃν τρόπον καὶ τὰ τέλεια (362 β).

Ἐφαρμογαὶ ἀριθμητικαὶ

656) Κόλουρός τις πυραμὶς ἔχει βάσεις ὀρθογώνια τρίγωνα· τοῦ ἑνὸς αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι 5 πχ.8 3 πχ, 2 τοῦ δὲ ἄλλου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 2 πχ. Τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι 4πχ.25 Ζητεῖται ὁ ὄγκος αὐτῆς.

657) Πρίσμα τι ὀρθὸν ἔχει βάσιν τρίγωνον, οὗ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 20τπ. ἐτμήθη δὲ δι' ἐπιπέδου πλαγίως πρὸς τὴν βάσιν του, ὥστε αἱ τρεῖς παράλληλοι αὐτοῦ ἀκμαὶ ἔγιναν, ἡ μὲν 8 πήχεις, ἡ δὲ 2, ἡ δὲ 7. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ κολουβοῦ τούτου πρίσματος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

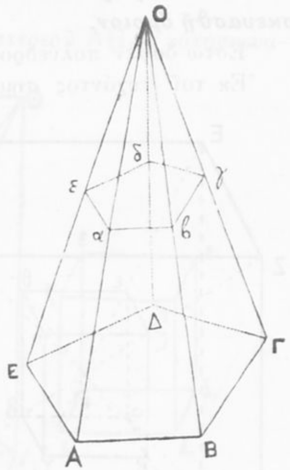
378. **Ὁρισμοί.** ***Ὅμοια*** λέγονται δύο πολύεδρα, ἐὰν ἔχωσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ἰσαρίθμους καὶ ὁμοίας κατὰ μίαν καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζομένας στερεὰς γωνίας ἴσας.

Αἱ ὅμοιαι ἕδραι λέγονται ***ὁμόλογοι*** ἕδραι. Καὶ αἱ κορυφαὶ τῶν ἴσων στερεῶν γωνιῶν λέγονται ***ὁμόλογοι*** κορυφαί.

Καὶ αἱ ὁμολόγους κορυφὰς συνδέουσαι εὐθεῖαι λέγονται καὶ αὐταὶ ***ὁμόλογοι.***

379. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν αἱ πλευραὶ πυραμίδος (αἱ εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς συντρέχουσαι) πολλαπλασιασθῶσι πᾶσαι ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, ἡ προκύπτουσα νέα πυραμὶς εἶναι ὁμοία τῇ πρώτῃ.***

Ἔστω πυραμὶς ἡ ΟΑΒΓΔΕ· ἂς πολλαπλασιασθῶσι δὲ αἱ πλευραὶ αὐτῆς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ πᾶσαι ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν ρ (ἐν τῷ σχήματι ἐλήφθη $\rho=\frac{1}{2}$), ὅτε γίνονται Οα, Οβ, Ογ, Οδ, Οε, λέγω, ὅτι τὸ σχῆμα αβγδε, εἶναι ἐπίπεδον καὶ ὅτι ἡ πυραμὶς Οαβγδε εἶναι ὁμοία τῇ δοθείσῃ ΟΑΒΓΔΕ.



Τὰ τρίγωνα ΟΑΒ, Οαβ εἶναι ὅμοια (239) καὶ ἡ αβ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ. Ὁμοίως τὰ τρίγωνα ΟΒΓ, Οβγ εἶναι ὅμοια καὶ ἡ βγ παράλληλος τῇ ΒΓ κ.ο.κ. Τὸ δὲ σχῆμα αβγδε εἶναι ἐπίπεδον παράλληλον τῇ βάσει ΑΒΓΔΕ· διότι ἂν ἐκ τοῦ α ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ΑΒΓΔΕ θὰ τέμνῃ τὰς παραπλεύρως ἕδρας τῆς πυραμίδος κατὰ τὰς εὐθείας αβ, βγ κτλ. ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ κτλ.

Ἐπειδὴ ἤδη τὰ δύο σχήματα ΑΒΓΔΕ, αβγδε εἶναι ὅμοια ἔχομεν $\frac{\alpha\beta}{\mathrm{AB}}=\frac{\beta\gamma}{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta}\ldots=\rho$. Ὥστε αἱ πυραμίδες ΟΑΒΓΔΕ, Οαβγδε ἔχουσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ὁμοίας κατὰ μίαν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι αὐτῶν, αἱ ὑπὸ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζόμεναι εἶναι ἴσαι, ὅπως π.χ. αἱ Α καὶ α (343)· καὶ ἐὰν νοήσωμεν τὴν στερεὰν γωνίαν α κινουμένην οὕτως, ὥστε ἡ δίεδρος γωνία αΟ νὰ ἐφαρμόζῃ πάντοτε ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΟ, βλέπομεν, ὅτι, ὅταν τὸ α πέσῃ εἰς τὸ Α, θὰ πέσῃ καὶ ἡ αε ἐπὶ τῆς ΑΕ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν Οαε καὶ ΟΑΕ· ἐπίσης καὶ ἡ αβ ἐπὶ τῆς ΑΒ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν Οαβ καὶ ΟΑΒ, ἐπομένως ἡ στερεὰ γωνία α θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς Α· ἄρα εἶναι ἴσαι.

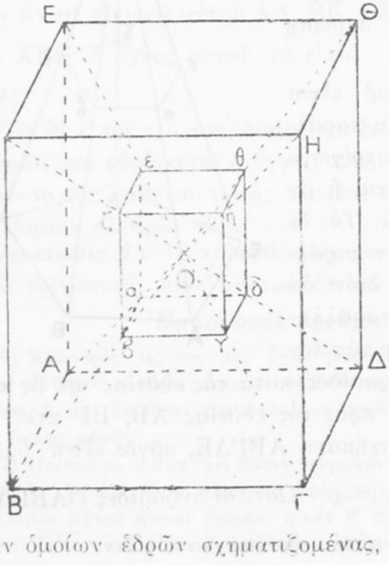
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι αἱ δύο πυραμίδες ΟΑΒΓΔΕ, οαβγδε ἔχουσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ἰσαρίθμους καὶ ὁμοίας κατὰ μίαν καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζομένας στερεὰς γωνίας ἴσας· ἄρα εἶναι ὅμοιαι.

380. **Πόρισμα.** ***Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς, ἡ ἀποτεμνομένη πυραμὶς εἶναι ὁμοία τῇ ὅλῃ.***

381. **Θεώρημα.** *Δοθέντος πολυέδρου δύναται νὰ κατασκευασθῇ ὅμοιον.*

Ἔστω δοθὲν πολύεδρον τὸ ΑΒΓΔΕΖΗΘ.

Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Ο τοῦ στερεοῦ ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἰς τὰς κορυφάς του καὶ ἂς πολλαπλασιασθῶσιν αὗται πᾶσαι ἐπὶ ρ, ὅτε γίνονται Οα, Οβ... λέγω ὅτι τὸ στερεὸν αβγδεζηθ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν.



Διότι τὰ δύο στερεὰ σύγκεινται ἐξ ἰσαρίθμων πυραμίδων ὁμοίων (379) καὶ ὁμοίως κειμένων· ἐπομένως ἔχουσι ταῦτα τὰς ἕδρας των ἰσαρίθμους καὶ ὁμοίας κατὰ μίαν· ἐπίσης ἔχουσι καὶ τὰς στερεὰς γωνίας αὐτῶν, τὰς ὑπὸ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζομένας, ἴσας, ὅπως εἶναι π.χ. αἱ Α

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

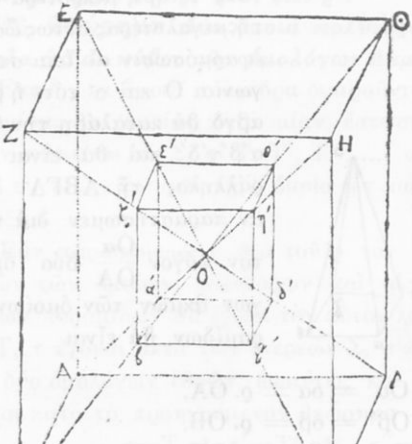
καὶ α· ἐὰν λοιπὸν νοήσωμεν τὴν στερεὰν γωνίαν α οὕτω κινουμένην, ὥστε ἡ κορυφὴ αὐτῆς νὰ διατρέχῃ τὴν εὐθεῖαν αΑ, αἱ δὲ ἕδραι αὐτῆς νὰ μένωσι παράλληλοι ἑαυταῖς, βλέπομεν ἀμέσως ὅτι, ὅταν τὸ α φθάσῃ εἰς τὸ Α, ἡ μὲν ἕδρα αβζε θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒΖΕ, παραλλήλου αὐτῇ, ἡ αβγδ ἐπὶ τῆς ΑΒΓΔ καὶ ἡ αεδθ ἐπὶ τῆς ΑΕΔΘ, ἤτοι αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι Α καὶ α ἐφαρμόζουσιν.

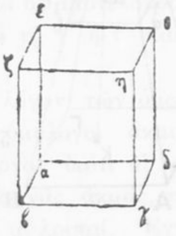
Ταῦτα λοιπὸν τὰ δύο στερεά, ἔχοντα τὰς ἕδρας των ὁμοίας κατὰ μίαν καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζομένας στερεὰς γωνίας ἴσας εἶναι ὅμοια· ὅ.ἔ.δ.

382. **Θεώρημα.** ***Δύο ὅμοια πολύεδρα δύνανται νὰ διαιρεθῶσιν εἰς ἰσαρίθμους πυραμίδας ὁμοίας κατὰ μίαν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένας.***

Ἔστωσαν ὅμοια πολύεδρα τὰ ΑΒΓΔΕΖΗΘ καὶ αβγδεζηθ καὶ δύο ὁμόλογοι ἀκμαὶ αὐτῶν αἱ αβ, ΑΒ, ἔχουσαι λόγον $\frac{αβ}{ΑΒ}$ ἴσον τῷ ἀριθμῷ ρ.

Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Ο τοῦ στερεοῦ ΑΗ ἂς κατασκευα-





σθῇ, (κατὰ τὸν προειρημένον τρόπον) πολύεδρον ὅμοιον τῷ ΑΗ, πολλαπλασιαζομένων τῶν εὐθειῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, . . . , ΟΘ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ρ· τὸ πολύεδρον τοῦτο α΄β΄γ΄δ΄ε΄ζ΄η΄θ΄ εἶναι ἴσον τῷ αβδεζηθ.

Διότι αἱ στερεαὶ γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι κατὰ μίαν ὡς ἴσαι πρὸς τὰς στερεὰς γωνίας τοῦ πολυέδρου ΑΗ καὶ αἱ ἕδραι αὐτῶν εἶναι ἴσαι κατὰ μίαν, ὅπως εἶναι π. χ. αἱ ἕδραι αβγδ, α΄β΄γ΄δ΄ ἐπειδὴ ἔχουσιν αβ=α΄β΄ ὡς συνάγεται ἐκ τῶν λόγων

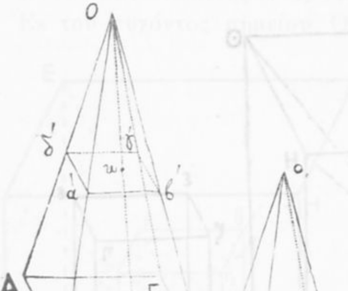
$$\frac{αβ}{ΑΒ}=ρ \text{ καὶ } \frac{α'β'}{ΑΒ}=ρ.$$

Τὰ δύο στερεὰ αη, α΄η΄ ἐφαρμόζουσιν, ἐὰν ἡ στερεὰ γωνία α ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ α΄· τούτου δὲ γενομένου, θὰ εὑρεθῇ τὸ στερεὸν αη διῃρημένον εἰς πυραμίδας, αἵτινες εἶναι τόσαι, ὅσαι εἶναι αἱ πυραμίδες τοῦ στερεοῦ ΑΗ καὶ ὅμοιαι πρὸς αὐτὰς καὶ ὁμοίως κείμεναι.

383. Πόρισμα. ***Δύο ὁμοίων στερεῶν αἱ ὁμόλογοι ἀκμαὶ ἔχουσι πᾶσαι τὸν αὐτὸν λόγον.***

384. **Θεώρημα.** ***Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν.***

Ἔστωσαν ὅμοιαι αἱ πυραμίδες ΟΑΒΓΔ, οαβγδ.



Ἂς τεθῇ ἡ μικροτέρα ἐντὸς τῆς μεγαλυτέρας, οὕτως ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσιν αἱ ἴσαι στερεαὶ γωνίαι Ο καὶ ο· τότε ἡ βάσις αβγδ θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν α΄β΄γ΄δ΄ καὶ θὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒΓΔ· διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ρ τὸν λόγον $\frac{Οα}{ΟΑ}$ δύο ὁμολόγων ἀκμῶν τῶν ὁμοίων πυραμίδων, θὰ εἶναι

$$Οα' = οα = ρ.ΟΑ,$$
$$Οβ' = οβ = ρ.ΟΒ,$$
$$Ογ' = ογ = ρ.ΟΓ,$$
$$Οδ' = οδ = ρ.ΟΔ·$$

προκύπτει λοιπὸν ἡ πυραμὶς Οα΄β΄γ΄δ΄ ἐκ τῆς ΟΑΒΓΔ, ἐὰν ταύτης αἱ πλευραὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ρ, ἑπομένως (379) ἡ ἕδρα α΄β΄γ΄δ΄ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒΓΔ· διὰ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦτο δὲ διαιρεῖ τὸ ὕψος ΟΚ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον ϱ (366).

Τούτου τεθέντος, εἶναι

$$ΟΑΒΓΔ = \frac{1}{3}(ΑΒΓΔ).(ΟΚ), \quad οαβγδ = \frac{1}{3}(αβγδ).Οκ,$$

ἐξ ὧν ἕπεται.

$$\frac{(οαβγδ)}{(ΟΑΒΓΔ)} = \frac{(αβγδ).(Οκ)}{(ΑΒΓΔ).(ΟΚ)} = \frac{(αβγδ)}{(ΑΒΓΔ)} \cdot \frac{Οκ}{(ΟΚ)}$$

Ἀλλ' αἱ ἕδραι αβγδ, ΑΒΓΔ εἶναι ὅμοιαι· ὅθεν

$$\frac{(αβγδ)}{(ΑΒΓΔ)} = \frac{(αβ)^2}{(ΑΒ)^2} = ϱ^2.$$

ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $\frac{(οκ)}{(ΟΚ)} = ϱ$, συνάγεται

$$\frac{(οαβγδ)}{(ΟΑΒΓΔ)} = ϱ^3 = \frac{(αβ)^3}{(ΑΒ)^3}$$

385. **Πόρισμα.** ***Ἐὰν αἱ πλευραὶ πυραμίδος πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν ϱ*** (διατηρηθῶσι δὲ αἱ γωνίαι), ***ὁ ὄγκος αὐτῆς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ ϱ, ἤτοι ἐπὶ*** $ϱ^3$.

386. **Θεώρημα.** ***Δύο ὅμοια πολύεδρα Σ καὶ σ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν.***

Ἐπειδὴ τὰ ὅμοια πολύεδρα διαιροῦνται εἰς ἴσας τὸ πλῆθος πυραμίδας καὶ ὁμοίας κατὰ μίαν, ἔστωσαν αἱ μὲν πυραμίδες, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ Σ, αἱ Τ, Τ', Τ'',..., αἱ δὲ ἀποτελοῦσαι τὸ σ αἱ τ, τ', τ'',..., ἔστω δὲ τῇ Τ ὁμοία ἡ τ καὶ τῇ Τ' ἡ τ' καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ϱ τὸν λόγον τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν τῶν ὁμοίων πολυέδρων καὶ αἱ ὁμόλογοι ἀκμαὶ τῶν ὁμοίων πυραμίδων θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον· διότι αἱ πυραμίδες Τ, τ ἔχουσι μετὰ τῶν στερεῶν Σ, σ κοινὰς ἀκμάς, τὰς ἀκμὰς δύο ὁμολόγων ἑδρῶν· ὡσαύτως καὶ αἱ λοιπαί. Ἐντεῦθεν ἕπεται κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα

$$τ = Τ.ϱ^3, \quad τ' = Τ'.ϱ^3, \quad τ'' = Τ''.ϱ^3, \ldots,$$

ἐξ ὧν προκύπτει $τ + τ' + τ'' + \ldots = (Τ + Τ' + Τ'' + \ldots)\,ϱ^3$,

τουτέστι $σ = Σ.ϱ^3$

καὶ $\frac{σ}{Σ} = ϱ^3 = \frac{α^3}{Α^3}$.

ἔνθα Α καὶ α παριστῶσι δύο ὁμολόγους ἀκμὰς τῶν ὁμοίων πολυέδρων Σ, σ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

387. **Πόρισμα.** ***Ἐὰν αἱ ἀκμαὶ στερεοῦ πολλαπλασιασθῶσι πᾶσαι ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν ρ (διατηρηθῶσι δὲ αἱ στερεαὶ γωνίαι αὐτοῦ ἀμετάβλητοι), ὁ ὄγκος αὐτοῦ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ρ, ἤτοι ἐπὶ $ρ^3$.***

Σημείωσις. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἡ πρότασις :

Αἱ ἐπιφάνειαι δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὰ τετράγωνα δύο ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν.

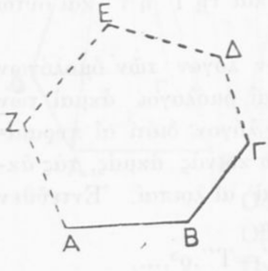
ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ ΕΝ ΓΕΝΕΙ

368. **Θεώρημα.** ***Ἐν παντὶ πολυέδρῳ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκμῶν κατὰ δύο αὐξηθεὶς γίνεται ἴσος τῷ ἀθροίσματι τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κορυφῶν καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν.***

Ἐὰν δηλονότι παραστήσωμεν διὰ τοῦ Α τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν τοῦ πολυέδρου καὶ διὰ τοῦ Κ τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, διὰ δὲ τοῦ Ε τὸ πλῆθος τῶν ἑδρῶν, θὰ εἶναι

$$Κ + Ε = Α + 2.$$

Νοήσωμεν τὰς ἕδρας, ἐξ ὧν σύγκειται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυέδρου, ἀφαιρουμένας ἀπ᾿ αὐτοῦ μίαν μετ᾿ ἄλλην, ἀλλ᾿ οὕτως, ὥστε ἡ ἑκάστοτε ἀφαιρουμένη νὰ εἶναι ἐξ ἐκείνων, μεθ᾿ ὧν συνείχετο ἡ προηγουμένως ἀφαιρεθεῖσα, καὶ τὸ μένον μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ πολυέδρου νὰ εἶναι ἓν συνεχές. Ὅταν ἀφαιρεθῇ ἡ πρώτη ἕδρα, φανερὸν ὅτι οὔτε ἀκμὴ ἀφαιρεῖται ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας οὔτε κορυφή· ὅταν δὲ ἡ τελευταία, ἀφαιροῦνται προδήλως τόσαι ἀκμαί, ὅσαι καὶ κορυφαί. Ὅταν δέ τις ἄλλη ἐν τῷ μεταξὺ ἀφαιρῆται, ἀποβάλλει ἡ ἐπιφάνεια ἀκμὰς περισσοτέρας τῶν κορυφῶν



κατὰ μίαν. Διότι, ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι πρόκειται νὰ ἀφαιρεθῇ ἡ ἕδρα ΑΒΓΔΕΖ καὶ ὅτι αὐτὴ συνέχεται μετὰ τῆς μενούσης ἐπιφανείας μόνον διὰ τῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΒΓ, φανερὸν εἶναι ὅτι, ἀφαιρουμένης αὐτῆς, θὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας αἱ τέσσαρες ἀκμαὶ ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ, ἐνῷ κορυφαὶ θὰ ἀφαιρεθῶσι τρεῖς, αἱ Δ,Ε,Ζ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ α τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκμῶν διὰ $\varkappa_\nu$ τὸν ἀριθμὸν τῶν κορυφῶν, αἵτινες ἀφαιροῦνται ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας, ὅταν ἀφαιρεθῇ ἡ γνωστὴ ἕδρα, θὰ εἶναι

$$\begin{aligned} &\alpha_1-\varkappa_1=0,\\ &\alpha_2-\varkappa_2=1,\\ &\alpha_3-\varkappa_3=1,\\ &\dots\dots\dots\\ &\alpha_{\tau-1}-\varkappa_{\tau-1}=1,\\ &\alpha_\tau-\varkappa_\tau=0. \end{aligned}$$

προσθέτοντες δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη καὶ ἐνθυμούμενοι ὅτι εἶναι τόσαι, ὅσαι εἶναι αἱ ἕδραι τουτέστιν Ε, εὑρίσκομεν

$$(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\tau)-(\varkappa+\varkappa_1+\dots+\varkappa_\tau)=\mathrm{E}-2$$

ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\tau$ ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν πασῶν τῶν ἀκμῶν· καὶ τὸ ἄθροισμα $\varkappa_1+\varkappa_2+\dots+\varkappa_\tau$, τὸν ἀριθμὸν πασῶν τῶν κορυφῶν· ὅθεν εἶναι

$$\mathrm{A}-\mathrm{K}=\mathrm{E}-2$$
$$\text{ἢ } \mathrm{K}+\mathrm{E}=\mathrm{A}+2 \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

389. ***Ἐφαρμογή.*** Ἐὰν πολυέδρου τινὸς αἱ ἕδραι πᾶσαι ἔχωσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν (ἔστω ν) καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι πᾶσαι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἑδρῶν (ἔστω ρ), τὸ τοιοῦτον πολύεδρον ἂς λέγεται **ὁμοιομερὲς** πολύεδρον

Ἐὰν τὸ ὁμοιομερὲς πολύεδρον ἔχῃ Ε ἕδρας καὶ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἔχει ν πλευράς, ἔχουσι πᾶσαι αἱ ἕδραι ν. Ε πλευράς, ἀλλ' αἱ πλευραὶ αὗται ἐφαρμόζουσιν ἀνὰ δύο καὶ ἀποτελοῦσι μίαν ἀκμὴν τοῦ πολυέδρου·

$$\text{ὥστε αἱ ἀκμαὶ εἶναι } \frac{\nu\mathrm{E}}{2}, \text{ ἤτοι } \mathrm{A}=\frac{\nu\mathrm{E}}{2}. \qquad (1)$$

Αἱ γωνίαι πασῶν τῶν ἑδρῶν εἶναι νΕ, καὶ ρ ἐξ αὐτῶν συνέρχονται εἰς ἑκάστην κορυφὴν τοῦ πολυέδρου· ὅθεν ἕπεται $\mathrm{K}=\dfrac{\nu\mathrm{E}}{\varrho}$.
(2)

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας τῶν Α καὶ Κ εἰς τὴν ἰσότητα $\mathrm{K}+\mathrm{E}=\mathrm{A}+2$ εὑρίσκομεν

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\nu}-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\nu}. \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης βλέπομεν, ὅτι ἡ παράστασις

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\nu}-\frac{1}{2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀνάγκη νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, ἤτοι $\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\nu}>\frac{1}{2}$.

Ἡ ἐλαχίστη τιμή, τὴν ὁποίαν δύνανται νὰ ἔχωσιν οἱ ἀριθμοὶ ν καὶ ϱ, εἶναι 3. Ἂν ὑποτεθῇ $\nu=3$, ἡ ἀνισότης γίνεται $\frac{1}{\varrho}>\frac{1}{6}$. ἄρα $\varrho<6$· ἔχομεν λοιπὸν (ἐκ τριγώνων) τὰς ἑξῆς λύσεις

$$\nu=3, \quad \varrho=3, \quad E=4, \quad K=4, \quad A=6,$$
$$\nu=3, \quad \varrho=4, \quad E=8, \quad K=6, \quad A=12,$$
$$\nu=3, \quad \varrho=5, \quad E=20, \quad K=12, \quad A=30.$$

Ἂν ὑποτεθῇ $\nu=4$, ἡ ἀνισότης γίνεται $\frac{1}{\varrho}>\frac{1}{4}$ ὅθεν $\varrho<4$ ἐπομένως ἔχομεν μίαν μόνην λύσιν

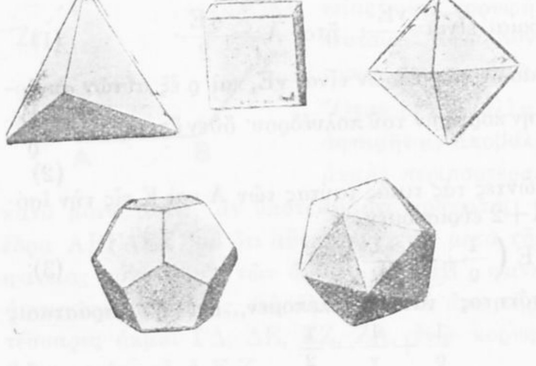
$$\nu=4, \quad \varrho=3, \quad E=6, \quad K=8, \quad A=13.$$

Ἂν ὑποτεθῇ $\nu=5$, ἡ ἀνισότης γίνετα $\frac{1}{\varrho}>\frac{3}{10}$ ὅθεν $\varrho<\frac{10}{3}$· ὥστε πάλιν ἔχομεν μίαν μόνην λύσιν

$$\nu=5, \quad \varrho=3, \quad E=12, \quad K=20, \quad A=30$$

Ἂν τέλος ὑποτεθῇ $\nu=6$, ἢ >6, οὐδεμία τιμὴ τοῦ ϱ εὑρίσκεται πληροῦσα τὴν ἀνισότητα.

Ὥστε ὁμοιομερῆ πολύεδρα μόνον πέντε δύνανται νὰ ὑπάρξωσι, τὰ ἑξῆς· τετράεδρ ν, ὀκτάεδρον, εἰκοσάεδρον, ἐκ τριγώνων.
ἑξάεδρον ἐκ τετραπλεύρων
δωδεκάεδρον ἐκ πενταγώνων.



Σημείωσις. Τὰ ὁμοιομερῆ ταῦτα πολύεδρα λέγονται ***κανονικά***, ὅταν αἱ ἕδραι αὐτῶν εἶναι κανονικὰ πολύγωνα καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι αὐτῶν ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀσκήσεις

658) Αἱ ἐπιφάνειαι δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς ὁ 2 πρὸς τὸν 3. Τίνα λόγον ἔχουσιν οἱ ὄγκοι αὐτῶν καὶ τίνα αἱ ὁμόλογοι ἀκμαὶ αὐτῶν;

659) Δοθέντος πολυέδρου κατασκευάζομεν ἄλλο ὅμοιον πολλαπλασιάζοντες πάσας τὰς ἀκμὰς αὐτοῦ. Ποσαπλασία θὰ εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ νέου καὶ ποσαπλάσιος ὁ ὄγκοςαὐτοῦ;

660) Δοθέντος πολυέδρου, θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἄλλο ὅμοιον καὶ διπλάσιον κατὰ τὸν ὄγκον. Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἀκμάς του;

661) Νὰ δειχθῇ, ὅτι πολύεδρον ἔχον 7 ἀκμὰς εἶναι ἀδύνατον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ ΣΤ΄ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΠΕΡΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

390. **Ὁρισμοί.** Δύο σημεῖα λέγονται ***συμμετρικὰ*** πρός τι ἐπίπεδον, ἐὰν ἡ εὐθεῖα, ἡ τὰ σημεῖα ταῦτα συνδέουσα, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον καὶ τέμνεται ὑπ᾽ αὐτοῦ δίχα.

Δύο γραμμαὶ ἢ δύο ἐπιφάνειαι λέγονται ***συμμετρικαὶ*** πρός τι ἐπίπεδον, ἐὰν πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἑτέρας ἔχωσι τὰ συμμετρικά των ἐπὶ τῆς ἄλλης.

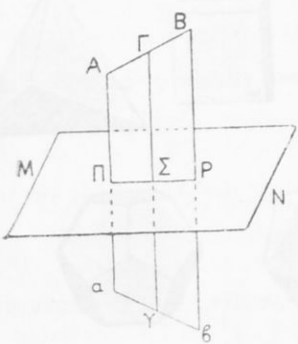
Δύο δὲ στερεὰ λέγονται ***συμμετρικὰ*** πρός τι ἐπίπεδον, ἐὰν αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

Σημείωσις. Τὸ συμμετρικὸν οἱουδήποτε ἀντικειμένου βλέπομεν, ὅταν παρουσιάσωμεν αὐτὸ ἐνώπιον κατόπτρου ἐπιπέδου (ἢ εἰς ἐπιφάνειαν ἠρεμοῦντος ὑγροῦ)˙ διότι κατὰ τοὺς νόμους τῆς ὀπτικῆς ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἀντικειμένου ἔχει τὸ εἴδωλον αὐτοῦ ὄπισθεν τοῦ κατόπτρου καὶ ἐπὶ εὐθείας, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου τούτου κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κατόπτρου καὶ εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπ᾽ αὐτοῦ˙ ὥστε ἕκαστον σημεῖον καὶ τὸ εἴδωλον αὐτοῦ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ κάτοπτρον.

391. **Θεώρημα.** ***Τὸ συμμετρικὸν εὐθείας εἶναι εὐθεῖα ἴση.***

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ˙ λέγω, ὅτι πάντα τὰ σημεῖα αὐτῆς ἔχουσι τὰ συμμετρικά των (πρὸς τυχὸν ἐπίπεδον ΜΝ) ἐπί τινος εὐθείας ἴσης αὐτῇ.

Ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ αἱ ΑΠ, ΒΡ καὶ ἂς προσεκβληθῶσιν, ὥστε νὰ γίνῃ ἡ Πα ἴση τῇ ΠΑ καὶ ἡ Ρβ ἴση τῇ ΡΒ˙ τὸ σημεῖον α εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Α καὶ τὸ β τοῦ Β, τὰ δὲ σημεῖα τῆς αβ θὰ εἶναι συμμετρικὰ τῶν σημείων τῆς ΑΒ.



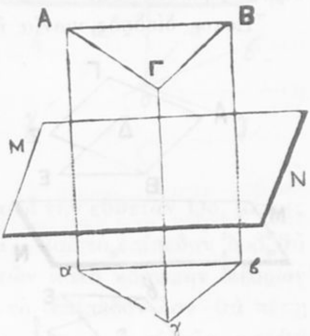
Διότι ἂν τὸ ἐπίπεδον ΑΠΡΒ τῶν δύο παραλλήλων (301) ΑΠ, ΒΡ στραφῇ περὶ τὴν εὐθεῖαν ΠΡ, καθ᾽ ἣν τέμνει τὸ ΜΝ, μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡαβ, ἡ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΑ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Πα διὰ τὴν ἰσότητα τῶν ὀρθῶν γωνιῶν Π καὶ τὸ Α εἰς τὸ α διὰ τὴν ἰσότητα τῶν εὐθειῶν ΠΑ, Πα· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον θὰ πέσῃ καὶ ἡ ΡΒ ἐπὶ τῆς Ρβ καὶ τὸ Β εἰς τὸ β· ἄρα καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς αβ· καὶ τὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς, οἷον τὸ Γ, θὰ πέσῃ ἐπί τινος σημείου γ τῆς αβ (αγ = ΑΓ), τοῦτο δὲ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Γ, διότι τῆς εὐθείας Γγ, τὸ μέρος ΓΣ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ Σγ· εἶναι λοιπὸν ΓΣ = Σγ καὶ ἡ Γγ κάθετος ἐπὶ τὴν ΠΡ· ἄρα (332) κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ.

392. **Θεώρημα.** ***Τὸ συμμετρικὸν γωνίας εἶναι γωνία ἴση.***

Ἔστω γωνία ἡ Α καὶ δύο σημεῖα τῶν πλευρῶν αὐτῆς τὰ τυχόντα, Β καὶ Γ· συμμετρικὰ δὲ τῶν σημείων Α, Β, Γ τὰ α, β, γ.



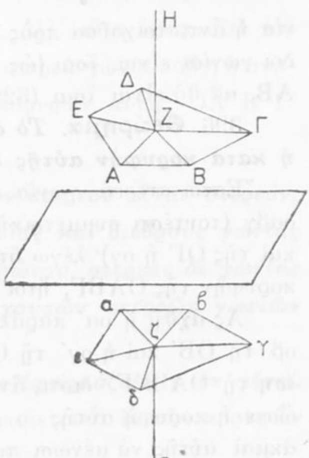
Τῆς εὐθείας ΑΒ συμμετρικὴ εἶναι ἡ αβ καὶ τῆς ΑΓ ἡ αγ καὶ τῆς ΒΓ ἡ βγ· ἄρα εἶναι

ΑΒ=αβ, ΑΓ=αγ, ΒΓ=βγ·

ἑπομένως τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ εἶναι ἴσα· ἄρα ἡ γωνία Α εἶναι ἴση τῇ συμμετρικῇ αὐτῆς α.

393. **Θεώρημα.** ***Τὸ συμμετρικὸν ἐπιπέδου σχήματος εἶναι ἐπίπεδον σχῆμα ἴσον.***

Ἔστω σχῆμα ἐπίπεδον τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ ἡ ΖΗ· συμμετρικὰ δὲ τῶν σημείων Α,Β,Γ..., Ζ,Η, τὰ σημεῖα α,β,γ,...ζ,.



Τῆς ΑΒ συμμετρικὴ εἶναι ἡ αβ καὶ τῆς ΒΓ ἡ βγ καὶ καθεξῆς· καὶ τῆς ΖΗ ἡ ζη. Τὸ δὲ σχῆμα αβγδε εἶναι ἐπίπεδον σχῆμα· διότι, τῶν γωνιῶν ΗΖΑ, ΗΖΒ, ΗΖΓ,...ΗΖΕ οὐσῶν ὀρθῶν, καὶ αἱ συμμετρικαὶ αὐτῶν ηζα... ηζε εἶναι ὀρθαί· ἄρα ἡ ζη εἶναι κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας ζα, ζβ, ζγ... ζε, ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

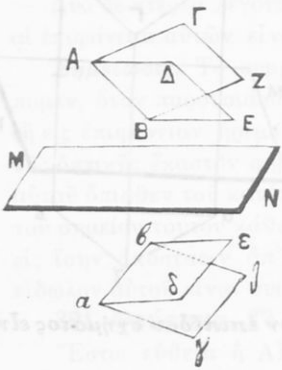
αὗται κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ ἄγεται ἐκ τοῦ ζ κάθετον ἐπὶ τὴν ζη· ἐπ' αὐτοῦ δὲ κεῖται καὶ τὸ σχῆμα αβγδε.

Εἶναι δὲ ἴσα τὰ δύο ἐπίπεδα σχήματα ΑΒΓΔΕ, αβγδε, διότι ἔχουσι τὰς πλευράς των ἴσας κατὰ μίαν καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας.

394. **Πόρισμα.** ***Ἐὰν εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα.***

395. **Θεώρημα.** ***Τὸ συμμετρικὸν διέδρου γωνίας εἶναι δίεδρος γωνία ἴση.***

Ἔστω δίεδρος γωνία ἡ ΑΒ καὶ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς αὐτὴν ἐπίπεδος ἡ ΓΑΔ, συμμετρικὰ δὲ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, τὰ α, β, γ, δ, ε, ζ.



Τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΖ συμμετρικὸν θὰ εἶναι τὸ ἐπίπεδον αβγζ καὶ τοῦ ΑΒΕΔ τὸ αβεδ· ὥστε τῆς διέδρου γωνίας ΑΒ συμμετρικὴ θὰ εἶναι ἡ δίεδρος αβ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι ΒΑΔ, ΒΑΓ εἶναι ὀρθαί, καὶ αἱ συμμετρικαὶ αὐτῶν βαδ, βαγ εἶναι ὀρθαί, ἄρα ἡ γωνία γαδ εἶναι ἡ ἐπίπεδος γωνία ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν δίεδρον αβ· καὶ ἐπειδὴ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι (ὡς συμμετρικαὶ) καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι ΑΒ, αβ θὰ εἶναι ἴσαι (328).

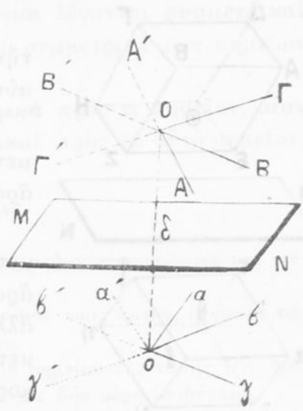
396. **Θεώρημα.** ***Τὸ συμμετρικὸν στερεᾶς γωνίας εἶναι ἡ κατὰ κορυφὴν αὐτῆς στερεὰ γωνία εἰς ἄλλην θέσιν.***

Ἔστω στερεὰ γωνία ἡ ΟΑΒΓ, συμμετρικὴ δὲ αὐτῆς ἡ οαβγ (τουτέστι συμμετρικὴ τῆς εὐθείας ΟΑ ἡ οα, τῆς ΟΒ ἡ οβ καὶ τῆς ΟΓ ἡ ογ)· λέγω ὅτι ἡ στερεὰ γωνία οαβγ εἶναι ἡ κατὰ κορυφὴν τῆς ΟΑΒΓ, ἤτοι ἡ ΟΑ′ Β′ Γ′ εἰς ἄλλην θέσιν.

Ἂς ἀχθῇ ἡ οα′ παράλληλος καὶ ὁμόρροπος τῇ ΟΑ′ καὶ ἡ οβ′ τῇ ΟΒ′ καὶ ἡ ογ′ τῇ ΟΓ′. Ἡ στερεὰ γωνία οα′β′γ′ εἶναι ἴση τῇ ΟΑ′Β′Γ′· διότι, ἂν ἡ στερεὰ γωνία οαβγ κινηθῇ οὕτως ὥστε ἡ κορυφὴ αὐτῆς ο νὰ διανύσῃ τὴν εὐθεῖαν οΟ, αἱ δὲ ἀκμαὶ αὐτῆς νὰ μένωσι παράλληλοι ἑαυταῖς, ὅταν τὸ ο φθάσῃ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἰς τὸ Ο, θὰ ἐφαρμόσῃ ἡ οα΄ ἐπὶ τῆς ΟΑ΄ καὶ ἡ οβ΄ ἐπὶ τῆς ΟΒ΄ καὶ ἡ ογ΄ ἐπὶ τῆς ΟΓ΄, ἤτοι αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι οα΄β΄γ΄, ΟΑ΄Β΄Γ΄ εἶναι ἴσαι. Τούτου δειχθέντος, παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ οα΄ θὰ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αοΟΑ (διότι αἱ συμμετρικαὶ εὐθεῖαι οα, ΟΑ κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ) καὶ ἡ οβ΄ἐν τῷ ἐπιπέδῳ βοΟΒ καὶ ἡ ογ΄ ἐν τῷ γοΟΓ.



Αἱ δὲ γωνίαι α΄οδ καὶ αοδ θὰ εἶναι ἴσαι ὡς ἴσαι ἀμφότεραι τῇ δοΑ (392)· ὁμοίως αἱ γωνίαι β΄οδ, βοδ θὰ εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ γωνίαι γ΄οδ, γοδ ὡσαύτως ἴσαι.

Ἂν νῦν τὸ σχῆμα οαβγ στραφῇ περὶ τὴν εὐθεῖαν Οο, μέχρις οὗ τὸ ἐπίπεδον δοα πέσῃ ἐπὶ τοῦ δοα΄, καὶ τὸ ἐπίπεδον δοβ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ δοβ΄, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν κατὰ κορυφὴν διέδρων γωνιῶν βδοα, β΄δοα΄· ὡσαύτως καὶ τὸ ἐπίπεδον δογ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ δογ΄ δι᾽ ὅμοιον λόγον· τότε δὲ καὶ ἡ εὐθεῖα οα θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς οα΄ (διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν δοα, δοα΄) καὶ ἡ οβ ἐπὶ τῆς οβ΄ καὶ ἡ ογ ἐπὶ τῆς ογ΄· ὥστε ἡ στερεὰ γωνία οαβγ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς οα΄β΄γ΄· ἀλλ᾽ αὕτη ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς ΟΑ΄Β΄Γ΄· ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι ἡ στερεὰ γωνία οαβγ, ἡ συμμετρικὴ τῆς ΟΑΒΓ, εἶναι ἡ κατὰ κορυφὴν αὐτῆς ΟΑ΄Β΄Γ΄ εἰς ἄλλην θέσιν.

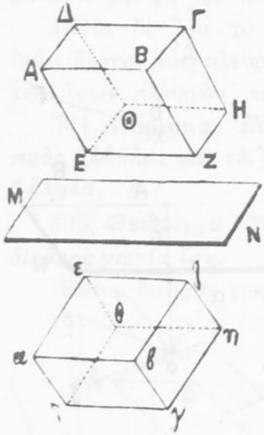
397. **Θεώρημα.** ***Τὸ συμμετρικὸν στερεοῦ εἶναι στερεόν, ἔχον ἀκμάς, ἕδρας, ἐπιπέδους γωνίας καὶ διέδρους γωνίας ἴσα πρὸς τὰ ἀντιστοιχοῦντα τοῦ πρώτου, στερεὰς δὲ γωνίας τὰς κατὰ κορυφὴν τῶν ἀντιστοιχουσῶν στερεῶν γωνιῶν*** (εἰς ἄλλην θέσιν).

Δύο δὲ συμμετρικὰ στερεὰ δὲν ἐφαρμόζουσιν ἐν γένει.

Ἔστω στερεὸν τὸ ΑΒΓΔΕΖ, συμμετρικὰ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ τὰ σημεῖα α, β, γ, δ, ε, ζ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ ἀκμὴ ΑΒ θὰ ἔχῃ συμμετρικὴν τὴν ἀκμὴν αβ, ἄρα εἶναι ΑΒ=αβ. Ὁμοίως ΑΔ=αδ κτλ.



Ἡ ἕδρα ΑΒΓΔ ἔχει συμμετρικὴν τὴν ἕδραν αβγδ· ἄρα εἶναι ἴσαι· τὸ αὐτὸ δὲ ἰσχύει καὶ περὶ τῶν λοιπῶν.

Ἡ ἐπίπεδος γωνία ΑΒΓ ἔχει συμμετρικὴν τὴν ἐπίπεδον γωνίαν αβγ· ἄρα εἶναι ἴσαι· ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ἄλλαι.

Ἡ δίεδρος γωνία ΑΒ ἔχει συμμετρικὴν τὴν δίεδρον γωνίαν αβ· ἄρα εἶναι ἴσαι· ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ἄλλαι. Ἡ δὲ στερεὰ γωνία Α ἔχει συμμετρικὴν τὴν α· ἄρα εἶναι κατὰ κορυφήν. Ὁμοίως καὶ αἱ ἄλλαι.

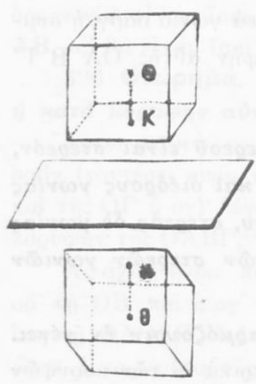
Ἐπειδὴ δὲ αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι δὲν ἐφαρμόζουσιν ἐν γένει, ἕπεται, ὅτι ***καὶ τὰ συμμετρικὰ στερεὰ δὲν ἐφαρμόζουσιν ἐν γένει.***

398. **Πόρισμα.** ***Τὰ συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ στερεοῦ πρὸς διάφορα ἐπίπεδα εἶναι στερεὰ ἴσα πρὸς ἄλληλα.***

399. ***Θεώρημα. Δύο συμμετρικὰ στερεὰ εἶναι ἴσα τὸν ὄγκον.***

Ἔστω Θ σημεῖόν τι ἐντὸς τοῦ πρώτου στερεοῦ καὶ θ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ἐν τῷ δευτέρῳ.

Αἱ ἐκ τοῦ Θ ἐπὶ τῆς ἕδρας τοῦ πρώτου ἀγόμεναι κάθετοι ΘΚ, ΘΚ′... θὰ ἔχωσι συμμετρικὰς (ἄρα καὶ ἴσας) τὰς ἐκ τοῦ θ ἐπὶ τὰς ἕδρας τοῦ δευτέρου ἀγομένας καθέτους (394).



Ἂν λοιπὸν τὰ δύο στερεὰ διαιρεθῶσιν εἰς πυραμίδας ἐκ τῶν σημείων Θ καὶ θ, αἱ βάσεις τῶν πυραμίδων θὰ εἶναι ἴσαι κατὰ μίαν καὶ τὰ ὕψη τῶν ἴσας βάσεις ἐχουσῶν θὰ εἶναι ἴσα· ἄρα αἱ πυραμίδες θὰ εἶναι ἴσαι, μία πρὸς μίαν (κατὰ τὸν ὄγκον), καὶ τὰ στερεά, ὡς ἀθροίσματα ἰσοδυνάμων στερεῶν θὰ εἶναι ἰσοδύναμα, ἤτοι ἴσα τὸν ὄγκον.

400. Ὁρισμοί. Δύο σημεῖα λέγονται ***συμμετρικὰ*** πρός τι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σημεῖον, ὅταν τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ μέσον τῆς τὰ δύο σημεῖα ἐπιζευγνυούσης εὐθείας.

Δύο δὲ γραμμαὶ ἢ δύο ἐπιφάνειαι λέγονται ***συμμετρικαὶ*** πρός τι σημεῖον, ὅταν τὰ πρὸς αὐτὸ συμμετρικὰ τῶν σημείων τῆς ἑτέρας κεῖνται ἐπὶ τῆς ἄλλης.

Δύο δὲ στερεὰ λέγονται ***συμμετρικὰ*** πρός τι σημεῖον, ὅταν αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν εἶναι ***συμμετρικαὶ*** πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἀσκήσεις.

662) Δύο εὐθεῖαι συμμετρικαὶ πρὸς ἐπίπεδον σχηματίζουσι μετ' αὐτοῦ γωνίας ἴσας.

663) Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τρίτον, ἡ γωνία τῶν δύο πρώτων διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ τρίτου.

664) Πᾶν ἐπίπεδον ἀγόμενον διὰ τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων παραλληλεπιπέδου, διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΣΤ΄ ΒΙΒΛΙΟΥ

665) Αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες συνδέουσι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ διχοτομοῦσιν ἀλλήλας.

666) Αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες συνδέουσι τὰς κορυφὰς τετραέδρου μὲ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν διαμέσων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ διαιροῦνται ὑπ' αὐτοῦ εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἓν εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄλλου.

667) Ἐὰν ΑΒ εἶναι μία τῶν διαγωνίων κύβου καὶ ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι αἵτινες συνδέουσι τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν αὐτοῦ, αἵτινες δὲν διέρχονται διὰ τῶν Α καὶ Β, σχηματίζεται κανονικὸν ἑξάγωνον.

668) Τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν κύβου εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ ὀκταέδρου.

669) Ἐκ τῆς πλευρᾶς α τοῦ κύβου τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ καὶ ἡ διαγώνιος τοῦ κανονικοῦ ὀκταέδρου.

670) Τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ ὀκταέδρου.

671) Τὰ ἐπίπεδα, τὰ διχοτομοῦντα τὰς ἓξ διέδρους γωνίας τετραέδρου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπέχοντος ἴσον ἀπὸ τῶν τεσσάρων ἑδρῶν.

672) Ἡ δίεδρος γωνία, ἥτις σχηματίζεται ὑπὸ τῆς βάσεως κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος μετὰ μιᾶς τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν αὐτῆς εἶναι 45°. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ταύτης, συναρτήσει τῆς πλευρᾶς τῆς βάσεως.

673) Τὸ διχοτομοῦν δίεδρον γωνίαν τετραέδρου ἐπίπεδον, διαιρεῖ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὴν ἀπέναντι ἀκμὴν εἰς δύο μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰς προσκειμένας ἕδρας αὐτῆς.

674) Ὁ ὄγκος παντὸς τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ παραπλεύρου ἕδρας, ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς ἀπὸ τῆς παραπλεύρου ταύτης ἕδρας.

675) ΑΒΓΔ εἶναι ἡ βάσις παραλληλεπιπέδου, οὗ μία τῶν ἀκμῶν εἶναι ἡ ΑΑ′. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ὄγκου τοῦ παραλληλεπιπέδου τούτου πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ τετραέδρου Α′ΑΒΓ.

676) Πυραμὶς τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, τέμνοντος μίαν τῶν πλευρῶν αὐτῆς εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἀρχόμενον ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος, εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄλλου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο στερεῶν εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ πυραμίς.

677) Τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν πυραμίδων, αἵτινες ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν σημεῖόν τι ο ἐντὸς πρίσματος καὶ βάσεις τὰς παραπλεύρους ἕδρας αὐτοῦ εἶναι τὸ αὐτό, δι' οἱανδήποτε θέσιν τοῦ ο.

678) Αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι α, β, γ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ ὀκταέδρου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου.

679) Τὸ ὕψος κολούρου πυραμίδος εἶναι 3,6 μ. τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεγαλυτέρας βάσεως εἶναι 24 τ. μ. καὶ μία τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτῆς εἶναι 3,85 μ. ἡ δὲ πρὸς αὐτὴν ὁμόλογος πλευρὰ τῆς ἄλλης βάσεως εἶναι 2,2 μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς κολούρου ταύτης πυραμίδος.

680) Ἡ βάσις κανονικῆς πυραμίδος εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς α, ἡ δὲ παράπλευρος ἀκμὴ εἶναι λ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος καὶ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος.

681) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος καὶ ὁ ὄγκος κανονικῆς πυραμίδος μὲ βάσιν κανονικὸν ὀκτάγωνον πλευρᾶς α καὶ παραπλεύρου ἀκμῆς λ.

682) Αἱ τρεῖς ἀκμαὶ τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας κύβου α, διχοτομοῦνται ὑπὸ ἐπιπέδου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ οὕτω σχηματιζομένου τετραέδρου.

683) Αἱ βάσεις κολούρου πυραμίδος εἶναι κανονικὰ ἑξάγωνα μὲ πλευρὰς 1 μ. καὶ 2 μ. ἀντιστοίχως, ὁ δὲ ὄγκος αὐτῆς εἶναι 12 κ. μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τῆς κολούρου ταύτης πυραμίδος καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια.

684) Αἱ βάσεις κολούρου πυραμίδος εἶναι Β καὶ β· νὰ εὑρεθῇ ἐξ αὐτῶν τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς, ἥτις εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτὰς καὶ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπ' αὐτῶν.

685) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κολοβοῦ πρίσματος ὀρθοῦ, οὗ ἡ βάσις εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 2 μ., αἱ δὲ πλευραὶ αὐτοῦ παρίστανται ὑπὸ τριῶν ἀκεραίων διαδοχικῶν ἀριθμῶν (εἰς μέτρα) μετὰ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον.

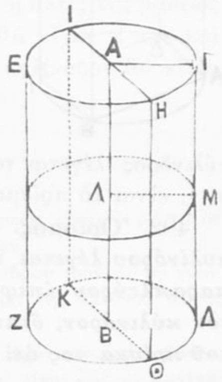
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

ΠΕΡΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ, ΚΩΝΟΥ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΑΣ

Α΄ ΠΕΡΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

401. **Ὁρισμοί.** ***Κύλινδρος*** λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον γεννᾶται, ἐὰν περιστραφῇ ὀρθογώνιον περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (ἥτις μένει ἀκίνητος) πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ἤρχισε νὰ στρέφηται.



Ἔστω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του. Ἐν τῇ περιστροφῇ ταύτῃ αἱ πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΔ γράφουσι κύκλους, ὧν τὰ ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν ΑΒ, τὰ δὲ σημεῖα Γ καί Δ γράφουσι τὰς περιφερείας τῶν κύκλων τούτων, ἡ δὲ πλευρὰ ΓΔ γράφει ἐπιφάνειαν, ἥτις λέγεται ***κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου.***

Βάσεις τοῦ κυλίνδρου λέγονται οἱ δύο κύκλοι, τοὺς ὁποίους γράφουσιν αἱ πλευραὶ ΑΓ, ΒΔ τοῦ ὀρθογωνίου.

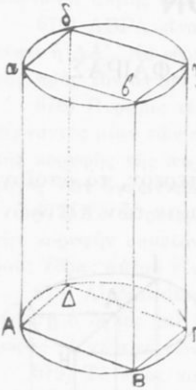
Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἢ ***ὕψος*** αὐτοῦ, λέγεται ἡ ἀκίνητος μένουσα πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου.

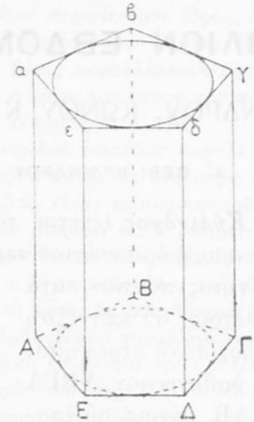
Πᾶσα τομὴ κυλίνδρου κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ εἶναι κύκλος ἴσος μὲ τὰς βάσεις· διότι, ἂν ἐκ τοῦ σημείου Λ, εἰς ὃ τέμνει τὸ ἐπίπεδον τὸν ἄξονα, ἀχθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ ὀρθογωνίου ἡ ΛΜ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἡ κάθετος αὕτη ἐν τῇ περιστροφῇ θὰ γράψῃ κύκλον, οὗ τὸ ἐπίπεδον θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ διὰ τοῦτο θὰ εἶναι αὐτὴ ἡ τομή. Πᾶσα δὲ τομὴ τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ ἐπιπέδου, διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, οἷον ἡ ΙΚΘΗ εὐκόλως φαίνεται ὅτι εἶναι ὀρθογώνιον διπλάσιον τοῦ ΑΒΓΔ.

Ὀρθὸν πρίσμα λέγεται ***ἐγγεγραμμένον*** εἰς κύλινδρον, ἐὰν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

αἱ βάσεις τοῦ πρίσματος εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Ὁ δὲ κύλινδρος λέγεται τότε ***περιγεγραμμένος*** περὶ τὸ πρίσμα. Τοιοῦτον εἶναι π. χ. τὸ πρίσμα ΑΒΓΔαβγδ.

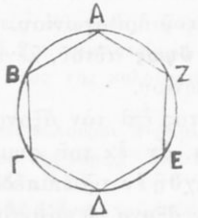


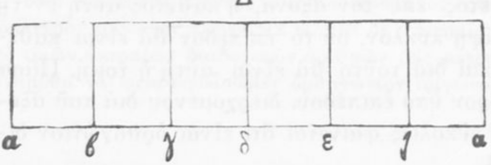


Περιγεγραμμένον δὲ λέγεται τὸ ὀρθὸν πρίσμα περὶ τὸν κύλινδρον, ἐὰν αἱ βάσεις τοῦ πρίσματος εἶναι περιγεγραμμέναι περὶ τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου· ὁ δὲ κύλινδρος λέγεται τότε ***ἐγγεγραμμένος*** εἰς τὸ πρίσμα. ὅπως π. χ. εἶναι τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕαβγδε.

402. **Ὁρισμός.** ***Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου λέγεται τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος ἀεὶ διπλασιάζηται.***

403. **Θεώρημα.** ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου εἶναι γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως του ἐπὶ τὸ ὕψος του.***





Διότι ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια εἰς κύλινδρον ἐγγεγραμμένου πρίσματος μὲ βάσιν κανονικὸν πολύγωνον, σύγκειται ἐξ ὀρ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θογωνίων, ἐχόντων ὕψος τὸ τοῦ κυλίνδρου, βάσεις δὲ τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, ὅπερ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου, ἑπομένως ἀναπτυσσομένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου γίνεται ὀρθογώνιον, ἔχον ὕψος τὸ τοῦ κυλίνδρου, βάσιν δὲ τὴν περίμετρον τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὅριον τῆς περιμέτρου ταύτης (ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῆς ἀεὶ διπλασιάζηται) εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως, ἣν παριστῶ διὰ τοῦ Γ, συνάγεται, ὅτι τὸ ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ἀναπτύγματος αθηα εἶναι υ.Γ τοῦτο ἄρα εἶναι (κατὰ τὸν ὁρισμὸν) τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Σημείωσις. Ἐὰν παρασταθῇ διὰ τοῦ Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, τὸ μῆκος τῆς περιφερείας θὰ εἶναι 2 π.Α καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου θὰ εἶναι 2π Α.υ.

Ἀσκήσεις.

686) Κυλίνδρου τινος ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 5 μ. τὸ δὲ ὕψος 0,18 μ. Πόση εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ;

687) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς καὶ τοῦ ὕψους τοῦ κυλίνδρου.

688) Αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι δύο κυλίνδρων ἐχόντων ἴσας βάσεις εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν, ἐὰν δὲ ἔχωσιν ἴσα ὕψη, εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων.

689) Ποῖον εἶναι τὸ σχῆμα τῆς τομῆς κυλίνδρου δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ;

690) Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, πρὸς τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ βάσιν τετράγωνον, ὅταν τὰ ὕψη τῶν δύο τούτων στερεῶν εἶναι τὰ αὐτὰ καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεων ἴσα;

404. **Ὁρισμοί.** ***Ὄγκος τοῦ κυλίνδρου λέγεται τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ὁ ὄγκος πρίσματος ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος ἀεὶ διπλασιάζηται.***

405. **Θεώρημα.** ***Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.***

Διότι ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος, μὲ βάσιν κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον, εἶναι γινό-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Ἀλλ' ἐπειδή, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως ἀεὶ διπλασιάζηται, τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος ἔχει ὅριον τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου (282), ἐνῷ τὸ ὕψος μένει τὸ αὐτό, ἔπεται, ὅτι τὸ ὅριον τοῦ ὄγκου τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν τῷ κυλίνδρῳ πρίσματος, ἤτοι ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου, εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Σημείωσις. Ἐὰν παρασταθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου διὰ τοῦ Α, τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως θὰ εἶναι πA^2· ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ τύπου $\pi A^2 . \upsilon$· ἔνθα υ σημαίνει τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις.

691) Κυλίνδρου τινὸς ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 4,8 μ. τὸ δὲ ὕψος 1,5 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ.

692) Πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ κυλινδρικὸν ἀγγεῖον ἐκ λευκοσιδήρου, τὸ ὁποῖον νὰ χωρῇ μίαν ὀκᾶν ὕδατος καὶ νὰ ἔχῃ ὕψος διπλάσιον τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως. Ποῖαι θὰ εἶναι αἱ διαστάσεις αὐτοῦ;

693) Κύλινδρός τις ἐκ χυτοῦ σιδήρου ἔχει μῆκος μὲν 4.12 μ. περιφέρειαν δὲ βάσεως 0,6 μ. Ζητεῖται τὸ βάρος αὐτοῦ. (Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χυτοῦ σιδήρου εἶναι 7,2 περίπου).

694) Δύο κύλινδροι ἔχοντες ἴσας βάσεις, εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν, ἂν ὅμως ἔχουσιν ἴσα ὕψη, εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεών των.

695) Ὁ ὄγκος κυλίνδρου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεώς του.

696) Ἐὰν α καὶ β εἶναι αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου, περιστραφῇ δὲ τοῦτο διαδοχικῶς περὶ δύο προσκειμένας πλευρὰς αὐτοῦ, γεννῶνται δύο κύλινδροι. Εὑρεῖν τὸν λόγον τῶν ὄγκων αὐτῶν.

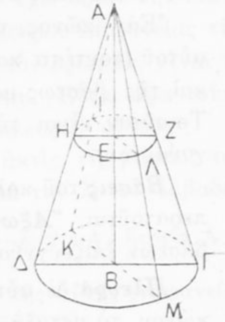
697) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια κυλίνδρου ἐκ τοῦ ὄγκου καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ.

Β΄. ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΥ

404. Ὁρισμοί. ***Κῶνος*** λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον γεννᾶται, ὅταν ὀρθογώνιον τρίγωνον περιστραφῇ περὶ μίαν τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ἤρχισε νὰ στρέφηται.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν του. Ἐν τῇ περιστροφῇ ταύτῃ ἡ μὲν πλευρὰ ΒΓ θὰ γράψῃ κύκλον, οὗ τὸ ἐπίπεδον θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ὅστις λέγεται ***βάσις*** τοῦ κώνου, ἡ δὲ πλευρὰ ΑΓ θὰ γράψῃ ἐπιφάνειαν, ἥτις λέγεται ***κυρτὴ ἐπιφάνεια*** τοῦ κώνου.



Ἄξων τοῦ κώνου ἢ ***ὕψος*** αὐτοῦ λέγεται ἡ ἀκίνητος μένουσα πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου. Κορυφὴ δὲ τοῦ κώνου τὸ σημεῖον Α.

Πλευρὰ δὲ ἢ ***ἀπόστημα*** τοῦ κώνου λέγεται ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐξ οὗ γεννᾶται.

Ἀποδεικνύεται δέ, ὡς ἀπεδείχθη καὶ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, ὅτι πᾶσα κώνου τομὴ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ εἶναι κύκλος, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

Πᾶσα δὲ τομὴ κώνου ὑπὸ ἐπιπέδου, διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος οἷον ἡ ΑΜΚ, εἶνε ἰσοσκελὲς τρίγωνον διπλάσιον τοῦ ΑΒΓ, ὅπως εὐκόλως φαίνεται.

Ἐγγεγραμμένη λέγεται πυραμὶς εἰς κῶνον, ἐὰν ἔχωσιν ἀμφότερα τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου.

Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς εἰς κῶνον ἐγγεγραμμένης πυραμίδος κεῖνται προδήλως ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, ἡ δὲ πυραμὶς κεῖται ἐντὸς τοῦ κώνου.

Περιγεγραμμένη δὲ λέγεται ἡ πυραμὶς περὶ κῶνον, ἐὰν ἀμφότερα ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι περιγεγραμμένη περὶ τὴν βάσιν τοῦ κώνου.

Ἑκάστη τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τῆς περὶ κῶνον περιγεγραμμένης πυραμίδος ἐγγίζει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου κατὰ μίαν εὐθεῖαν· διότι, ἂν ἐκ τοῦ σημείου, εἰς ὃ ἡ βάσις τῆς ἕδρας ἐγγίζει τὴν βάσιν τοῦ κώνου ἀχθῇ εὐθεῖα εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου, ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἕδρας καὶ ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. Αἱ δύο δὲ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

αὗται ἐπιφάνειαι οὐδὲν ἄλλο ἔχουσι κοινὸν σημεῖον καὶ ὁ κῶνος κεῖται ὅλος ἐντὸς τῆς πυραμίδος.

Ἐὰν κῶνος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτοῦ (τουτέστι καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα), τὸ μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς βάσεως μέρος τοῦ κώνου λέγεται ***κόλουρος κῶνος***. Τοιοῦτον εἶναι τὸ στερεὸν ΔΜΓΚΗΛΖΙ (σχῆμα τὸ προηγούμενον).

Βάσεις τοῦ κολούρου κώνου λέγονται οἱ δύο κύκλοι ὑφ' ὧν περατοῦται. ***Ἄξων*** δὲ αὐτοῦ ἢ ***ὕψος*** λέγεται ἡ τὰ κέντρα τῶν βάσεων ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα.

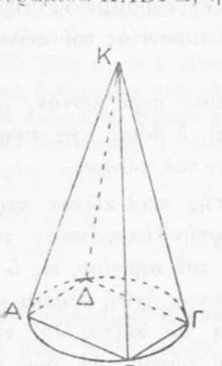
Πλευρὰ δὲ αὐτοῦ λέγεται τὸ μέρος τῆς πλευρᾶς τοῦ ὅλου κώνου, τὸ μεταξὺ τῶν δύο βάσεων περιεχόμενον.

Ἐν τῷ στερεῷ ΔΜΓΚΗΛΖΙ βάσεις μὲν εἶναι οἱ κύκλοι ΔΜΓΚ καὶ ΗΛΖΙ, ἄξων δὲ ἡ εὐθεῖα ΕΒ, πλευρὰ δὲ ἡ ΓΖ.

405. **Ὁρισμός.** ***Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου λέγεται τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτῆς ἀεὶ διπλασιάζηται.***

406. **Θεώρημα.** ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου εἶναι γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.***

Ἐγγράφομεν εἰς τὸν δοθέντα κῶνον Κ τὴν κανονικὴν πυραμίδα ΚΑΒΓΔ, ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς ὁποίας σύγκειται ἐκ τῶν τριγώνων ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΑ, ἅτινα εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα ὡς ἔχοντα τὰς βάσεις αὐτῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ ΔΑ ἴσας πρὸς ἀλλήλας ὡς καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ ἐπειδὴ εἶναι πλευραὶ τοῦ αὐτοῦ κώνου, ἔχουσιν ἑπομένως καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν ἴσα. Τὸ ἐμβαδὸν ἄρα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος ταύτης εἶναι γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως αὐτῆς ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ, ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ἑνὸς τῶν τριγώνων



τούτων· ἀλλ' ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως ἀεὶ δι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πλασιάζηται, ἡ περίμετρος $AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A$, ἔχει ὅριον τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τὸ δὲ ὕψος ἔχει ὅριον τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου, τὸ δὲ ὅριον τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς ἐγγεγραμμένης ταύτης πυραμίδος, κατὰ τὸν ὁρισμόν, εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. Εἶναι ἄρα τοῦτο γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

Σημείωσις. Ἐὰν παρασταθῇ ἡ μὲν ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου διὰ τοῦ Α ἡ δὲ πλευρὰ αὐτοῦ διὰ τοῦ λ, τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{1}{2}\lambda . 2\pi A$, ἤτοι $\pi . A . \lambda$. καὶ ἐπειδὴ $\lambda = \sqrt{A^2 + \upsilon^2}$, τὸ ἐμβαδὸν τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας παρίσταται καὶ ὑπὸ τοῦ τύπου $\pi . A . \sqrt{A^2 + \upsilon^2}$.

Ἀσκήσεις.

698) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κώνου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ καὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως.

699) Κώνου τινὸς ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 0.5μ. τὸ δὲ ὕψος 2μ. Πόση εἶναι ἡ κυρτὴ αὐτοῦ ἐπιφάνεια;

700) Κώνου τινὸς ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 4μ. ἡ δὲ πλευρὰ 12.4μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

701) Τετράγωνον πλευρᾶς α στρέφεται περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς γραφομένης ὑπὸ μιᾶς τῶν διαγωνίων του.

407. **Ὁρισμός.** ***Ὄγκος τοῦ κώνου καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ὁ ὄγκος κανονικῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον πυραμίδος, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτῆς ἀεὶ διπλασιάζηται.***

408. **Θεώρημα.** ***Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους του.***

Διότι ὁ ὄγκος τῆς κανονικῆς πυραμίδος ΚΑΒΓΔ, τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον κορυφῆς Κ, (σχῆμα προηγούμενον) γνωρίζομεν, ὅτι εἶναι τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους της· ἀλλ' ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτῆς ἀεὶ διπλασιάζηται, τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ταύτης ἔχει ὅριον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, ἐνῷ τὸ ὕψος μένει τὸ αὐτό, ὁ δὲ ὄγκος τῆς πυραμίδος ἔχει ὅριον, κατὰ τὸν ὁρισμόν, τὸν ὄγκον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ κώνου. Εἶναι ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ κώνου γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους του.

Σημείωσις. Ἐὰν παρασταθῇ διὰ τοῦ Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου καὶ διὰ τοῦ υ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ὁ ὄγκος αὐτοῦ

παρίσταται ὑπὸ τοῦ τύπου $\frac{1}{3}\pi A^2.\upsilon$.

Ἀσκήσεις

702) Κώνου τινὸς ἡ μὲν διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 1,8μ. ἡ δὲ πλευρὰ 2,64μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτο ;

703) Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κώνου εἶναι 2,50μ. ὁ δὲ ὄγκος αὐτοῦ 80κ.μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου.

704) Ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗ αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι 3μ. καὶ 4μ. στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς δύο ταύτας καθέτους πλευράς. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν σχηματιζομένων στερεῶν.

705) Εἰς κανονικὸν τετράεδρον ἀκμῆς α εἶναι ἐγγεγραμμένος κῶνος. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο τούτων στερεῶν.

409. **Θεώρημα.** ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου εἶναι γινόμενον τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων αὐτοῦ.***

Ἔστω κόλουρος κῶνος ὁ ΑΒΓΔ, οὗτινος αἱ μὲν ἀκτῖνες τῶν βάσεων ἂς παρασταθῶσι διὰ τῶν Α καὶ α, ἡ δὲ πλευρὰ ΔΒ διὰ τοῦ λ.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ εἶναι διαφορὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο κώνων ΚΑΒ καὶ ΚΓΔ, ὅθεν εἶναι κυρτὴ ἐπιφάνεια ΑΒΓΔ=π (Α.ΚΑ—α. ΚΔ).

Ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΕΒ καὶ ΚΖΔ εὑρίσκομεν $\frac{KB}{A}=\frac{K\Delta}{\alpha}$

καὶ παριστῶντες διὰ τοῦ ρ ἕνα ἐκ τῶν ἴσων τούτων λόγων θὰ ἔχωμεν $KB=\rho.A$, $K\Delta=\rho.\alpha$, (1) ὅθεν ἕπεται κυρτ. ἐπιφ. $AB\Gamma\Delta=\pi\,(A^2-\alpha^2)\,\rho$· ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) προκύπτει

$$KB-K\Delta=\rho\,(A-\alpha),$$

ἤτοι $\lambda=\rho\,(A-\alpha)$ καὶ $\rho=\frac{\lambda}{A-\alpha}$,

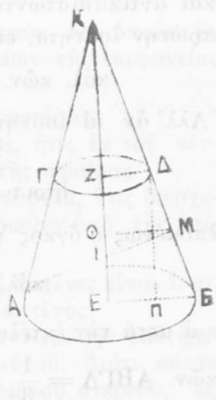
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἡ τιμὴ τῆς ἐπιφανείας γίνεται κυρτ. ἐπιφ. ΑΒΓΔ = $\pi.\lambda. \frac{A^2-\alpha^2}{A-\alpha}$ ἢ κυρτ. ἐπιφ. ΑΒΓΔ = $\pi.\lambda.(A+\alpha)$.

Ἡ ἰσότης δὲ αὕτη δεικνύει τὴν ἀλήθειαν τοῦ θεωρήματος, διότι εἶναι $\pi.\lambda.(A+\alpha)=(2\pi A+2\pi\alpha).\frac{1}{2}\lambda$.

Σημείωσις α'. Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς πλευρᾶς ΒΔ ἀχθῇ ἡ ΜΘ παράλληλος τῇ ΒΕ ἐν τῷ τραπεζίῳ ΒΕΖΔ, θὰ εἶναι (ἄσκ. 106) $M\Theta=\frac{1}{2}(A+\alpha)$, ἡ δὲ περιφέρεια, μὲ ἀκτῖνα τὴν ΜΘ, θὰ εἶναι $2\pi.M\Theta$, ἢ $2\pi.\frac{1}{2}(A+\alpha)=\pi(A+\alpha)$ ὅθεν ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου δύναται νὰ παρασταθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: $2\pi.M\Theta.\lambda$· ὅθεν συνάγεται ὅτι ***τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου εἶναι γινόμενον τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅστις ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ.***

Σημείωσις β'. Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς ΒΔ ἀχθῇ ἡ ΜΘ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ ἡ ΜΙ κάθετος ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου, ἐκ δὲ τοῦ Δ παράλληλος τῷ ἄξονι ἡ ΔΠ. τὰ δύο τρίγωνα ΜΘΙ καὶ ΔΠΒ εἶναι ὅμοια (241) ὥστε ἔχομεν $\frac{\Delta\Pi}{M\Theta}=\frac{\Delta B}{MI}$, ἤτοι $\Delta\Pi.MI=\Delta B.M\Theta$, τουτέστιν $EZ.MI=\Delta B.M\Theta$, διότι $EZ=\Delta\Pi$, ἐπομένως, τὸ $2\pi.M\Theta.\lambda$, γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς $2\pi.MI.EZ$, ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ***τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου εἶναι γινόμενον τοῦ ὕψους του ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα τὴν ἐκ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς του ὑψουμένην κάθετον ἐπ' αὐτὴν μέχρι τοῦ ἄξονος.***



Ἀσκήσεις

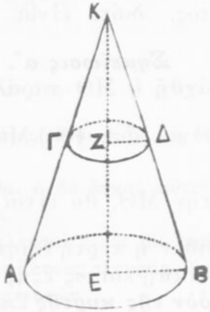
706) Κολούρου τινὸς κώνου τὸ ὕψος εἶναι 0,74μ. αἱ δὲ ἀκτῖνες τῶν βάσεων αὐτοῦ εἶναι 0,5μ. καὶ 0,3μ. Πόση εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ;

707) Κώνου τινὸς ἡ πλευρὰ εἶναι 10μ, καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως 6μ. Ἐπίπεδον δὲ ἀγόμενον παραλλήλως πρὸς τὴν βάσιν καὶ διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς τέμνει τὸν κῶνον. Πόση εἶναι ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ ἀποκοπέντος κολούρου κώνου;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

410. **Θεώρημα.** ***Ὁ κόλουρος κῶνος εἶναι ἄθροισμα τριῶν κώνων, οἵτινες ἔχουσιν ὕψος μὲν κοινόν, τὸ τοῦ κολούρου κώνου, βάσεις δέ, ὁ μὲν τὴν ἄνω τούτου βάσιν, ὁ δὲ τὴν κάτω, ὁ δὲ τὴν μέσην ἀνάλογον τούτων.***

Ἔστω κόλουρος κῶνος ἔχων βάσεις τοὺς κύκλους ΑΒΑ καὶ ΓΔΓ, ὧν τὰς ἀκτῖνας ΕΒ καὶ ΖΔ παριστῶμεν διὰ τοῦ Α καὶ α, ὕψος δέ τὴν ΕΖ, ἣν παριστῶμεν διὰ τοῦ υ.



Ὁ κόλουρος κῶνος ΑΒΓΔ εἶναι διαφορὰ τῶν δύο κώνων ΚΑΒ καὶ ΚΓΔ, ἄρα ἔχομεν κολ. κῶν.ΑΒΓΔ $= \frac{1}{3}$ π. ($Α^2$.ΚΕ—$α^2$.ΚΖ).

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΚΖΔ, ΚΕΒ εἶναι ὅμοια, εἶναι

$$\frac{ΚΕ}{Α} = \frac{ΚΖ}{α}$$

καὶ ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ρ τὸν ἕνα ἐκ τῶν λόγων τούτων, θὰ εἶναι

$$ΚΕ = ρ.\ Α, \quad ΚΖ = ρ.\ α \qquad (1)$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας τῶν ΚΕ, ΚΖ εἰς τὴν πρώτην ἰσότητα, εὑρίσκομεν

$$\text{κόλ. κῶν. ΑΒΓΔ} = \frac{1}{3}\,π.\,(Α^3 - α^3)\,ρ.$$

Ἀλλ᾽ ἂν αἱ ἰσότητες (1) ἀφαιρεθῶσι κατὰ μέλη, προκύπτει

$$ΚΕ - ΚΖ = ρ\,(Α - α),$$

$$\text{ἤτοι } υ = ρ\,(Α - α), \text{ ὅθεν } ρ = \frac{υ}{Α - α}$$

ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου γίνεται

$$\text{κόλ. κῶν. ΑΒΓΔ} = \frac{1}{3}\,πυ\,\frac{Α^3 - α^3}{Α - α}$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως (Στ. Ἀλγ. σελ. 60) κόλ. κῶν. ΑΒΓΔ $= \frac{1}{3}$ πυ ($Α^2 + Αα + α^2$).

Ἡ ἰσότης αὕτη δεικνύει τὴν ἀλήθειαν τοῦ θεωρήματος· διότι $\frac{1}{3}$ π$Α^2$. υ εἶναι ὁ ὄγκος κώνου, ἔχοντος ὕψος υ καὶ βάσιν τὸν κύκλον ΑΒΑ· $\frac{1}{3}$ π$α^2$. υ εἶναι ὁ ὄγκος κώνου ἔχοντος ὕψος

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

υ καὶ βάσιν τὸν κύκλον ΓΔΒ καὶ $\frac{1}{3}$ πυ. Αα εἶναι ὁ ὄγκος κώνου, ἔχοντος ὕψος υ καὶ βάσιν τὸν κύκλον πΑα, ὅστις εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν δύο ἄλλων, διότι εἶναι

$$\pi.A\alpha = \sqrt{\pi\alpha^2.\pi\alpha^2}.$$

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ διὰ τῆς μεθόδου τοῦ ἐδαφίου 375 θεωρουμένων τῶν κώνων ΚΑΒ, ΚΓΔ ὡς ὁρίων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τούτους πυραμίδων.

Ἀσκήσεις.

708) Κολούρου τινὸς κώνου τὸ ὕψος εἶναι 1,18μ, αἱ δὲ ἀκτῖνες τῶν βάσεων εἶναι 0,14μ. καὶ 0.06μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

709) Εἰς κόλουρόν τινα κῶνον ἄγονται ἐκ τῆς περιφερείας τῆς μικροτέρας βάσεως παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ καὶ σχηματίζουσι τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν κυλίνδρου τινός. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ μένοντος στερεοῦ, ὅταν ἀπὸ τοῦ ολούρου κώνου ἀφαιρεθῇ ὁ κύλινδρος.

710) Κῶνος τις ἔχει ὕψος 10μ. Ἐὰν θέλωμεν νὰ τμήσωμεν αὐτὸν εἰς δύο ἴσα τὸν ὄγκον μέρη δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει, ἐκ ποίου σημείου τοῦ ὕψους πρέπει νὰ ἀχθῇ τὸ τέμνον ἐπίπεδον;

ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ

411. **Ὁρισμοί.** ***Σφαῖρα*** λέγεται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

Τὸ σημεῖον τοῦτο λέγεται ***κέντρον*** τῆς σφαίρας.

Ἀκτὶς τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἐκ τοῦ κέντρου ἄγεται εἴς τι σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατοῦται ἑκατέρωθεν ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς σφαίρας πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι, ὡσαύτως καὶ αἱ διάμετροι ὡς διπλάσιαι τῆς ἀκτῖνος.

Δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν τὴν σφαῖραν γεννωμένην ὑπὸ ἡμικυκλίου, στρεφομένου περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ. Διότι πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τοῦ οὕτω γεννωμένου στερεοῦ, ὡς σημεῖα τῆς περιφερείας, θὰ ἀπέχωσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτῆς.

Ἐπίπεδον λέγεται ***ἐφαπτόμενον*** σφαίρας, ἐὰν ἔχῃ ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.

Δύο σφαῖραι λέγεται ὅτι ***ἐφάπτονται ἀλλήλων,*** ἐὰν αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν ἓν μόνον ἔχωσι κοινὸν σημεῖον.

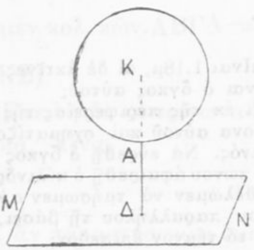
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διάφοροι θέσεις ἐπιπέδου πρὸς σφαῖραν

412. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν ἐπίπεδον καὶ σφαῖρα μηδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον, τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ὑπερβαίνει τὴν ἀκτῖνα.***

Καὶ ἀντιστρόφως, ***ἐὰν τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου σφαίρας ἀπὸ ἐπιπέδου ὑπερβαίνῃ τὴν ἀκτῖνα, ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον.***

Διότι ὁ πούς Δ τοῦ ἀποστήματος τούτου κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας (ἄλλως τὸ ἐπίπεδον, ὡς διερχόμενον διὰ τοῦ Δ θὰ ἐξήρχετο ἐκ τῆς σφαίρας καὶ θὰ ἔτεμνεν αὐτήν) ἐπομένως τὸ ἀπόστημα ὑπερβαίνει τὴν ἀκτῖνα.

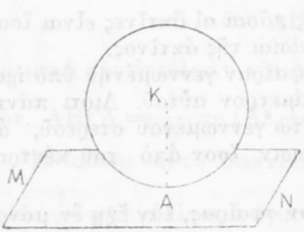


Καὶ ἀντιτρόφως ἂν ὑποτεθῇ τὸ ἀπόστημα ΚΔ τοῦ κέντρου Κ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ μεγαλύτερον τῆς ἀκτῖνος ΚΑ τῆς σφαίρας, τὸ Δ θὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας καὶ πάντα δὲ τὰ λοιπὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου θὰ κεῖνται ἐκτὸς τῆς σφαίρας, διότι αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὡς πλάγιαι, ὑπερβαίνουσι τὴν κάθετον ΚΔ, ἐπομένως ὑπερβαίνουσι καὶ τὴν ἀκτῖνα.

413. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν σφαῖρα καὶ ἐπίπεδον ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἴσον τῇ ἀκτῖνι.***

Καὶ ἀντιστρόφως ***ἐὰν τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἴσον τῇ ἀκτῖνι, ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, τουτέστι τὸ ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς σφαίρας.***

Διότι, ἂν ἡ σφαῖρα Κ καὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἔχωσι μόνον τὸ σημεῖον Α κοινόν, τὰ λοιπὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου κεῖνται ἐκτὸς τῆς σφαίρας καὶ διὰ τοῦτο ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου περισσότερον τῆς ἀκτῖνος· ἐπομένως ἡ ΚΑ εἶναι ἐλαχίστη τῶν ἐκ τοῦ Κ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἀγομένων εὐθειῶν· εἶναι λοιπὸν κάθετος ἐπ' αὐτό, καὶ τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἡ ἀκτὶς ΚΑ.



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

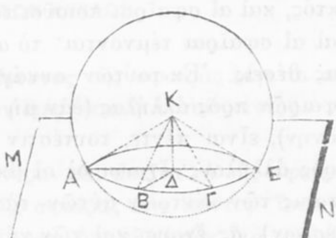
Ἀντιστρόφως· ἂν τὸ ἀπόστημα ΚΑ τοῦ κέντρου Κ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ εἶναι ἴσον τῇ ἀκτῖνι, ὁ πούς αὐτοῦ ὡς ἄκρον τῆς ἀκτῖνος θὰ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου. Ἀλλὰ τὰ λοιπὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου περισσότερον τῆς ἀκτῖνος (διότι αἱ ἐκ τοῦ κέντρου εἰς αὐτὰ ἀγόμεναι εἶναι πλάγιαι καὶ διὰ τοῦτο μεγαλύτεραι τῆς καθέτου ΚΑ)· ἄρα κεῖνται ἐκτὸς τῆς σφαίρας· ὥστε ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχουσι, τὸ Α.

414. Πόρισμα. ***Εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὑπάρχει ἓν ἐπίπεδον, ἐφαπτόμενον αὐτῆς, καὶ ἓν μόνον.***

415. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν ἐπίπεδον καὶ σφαῖρα ἔχουσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τοῦ ἑνός, τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι μικρότερον τῆς ἀκτῖνος καὶ τὸ ἐπίπεδον τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ κύκλον.***

Τὸ ἀπόστημα δὲν δύναται νὰ εἶναι οὔτε μεγαλύτερον τῆς ἀκτῖνος (412) οὔτε ἴσον μὲ αὐτὴν (413)· ἄρα εἶναι μικρότερον τῆς ἀκτῖνος καὶ ἐπομένως ὁ πούς αὐτοῦ Δ κεῖται ἐντὸς τῆς σφαίρας καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ δι' αὐτοῦ διερχόμενον ἐπίπεδον ΜΝ τέμνει τὴν σφαῖραν· λέγω δὲ ὅτι ἡ τομὴ εἶναι κύκλος.

Διότι αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ,.... αἵτινες ἄγονται εἰς διάφορα σημεῖα τῆς γραμμῆς, ἐφ' ἧς περατοῦται ἡ τομή, εἶναι πλάγιαι ὡς πρὸς τὴν κάθετον ΚΔ· ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἴσαι, οἱ πόδες αὐτῶν ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ ποδὸς Δ τῆς καθέτου (307)· ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ,... εἶναι πᾶσαι ἴσαι· ἄρα ἡ γραμμὴ ΑΒΓΕ, ἧς πάντα τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ Δ, εἶναι περιφέρεια κύκλου καὶ τὸ Δ εἶναι κέντρον αὐτῆς.



Σημείωσις. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΔΑ εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν

$$(\text{ΚΑ})^2 = (\text{ΚΔ})^2 + (\text{ΔΑ})^2,$$

δι' ἧς συνδέονται (ἐν ἑκάστῃ σφαίρᾳ) τὸ ἀπόστημα ΚΔ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τῆς τομῆς.

Ἀσκήσεις

711) Ἐὰν ἐπίπεδον ἐφάπτηται σφαίρας, ἡ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς ἀγομένη ἀκτίς, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον.

712) Ἐὰν ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπί τινα ἀκτῖνα σφαίρας εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς εἶναι καὶ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς σφαίρας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

713) Ποῖαι εἶναι αἱ θέσεις εὐθείας πρὸς σφαῖραν, ὅταν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπὸ τῆς θεωρουμένης εὐθείας εἶναι 1ον) μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας, 2ον) ἴση καὶ 3ον) μικροτέρα αὐτῆς;

714) Ἡ εὐθεῖα, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπί τινα ἀκτῖνα τῆς σφαίρας εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς, ἐφάπτεται τῆς σφαίρας.

715) Αἱ ἐφαπτόμεναι σφαίρας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον αὐτῆς κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ εἶναι ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

716) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, οὗ τὸ ἐπίπεδον ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου σφαίρας ἀκτῖνος 0,4μ, ἀπόστασιν ἴσην μὲ 0,25μ,

Δύο σφαιρῶν διάφοροι πρὸς ἀλλήλας θέσεις

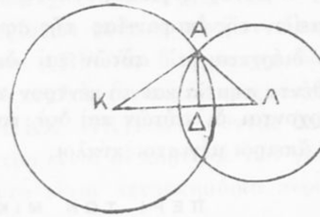
416. Ἐὰν διὰ τῶν δύο κέντρων τῶν δύο σφαιρῶν νοήσωμεν ἀχθὲν τυχὸν ἐπίπεδον, τοῦτο θὰ τέμνῃ τὰς σφαίρας κατὰ δύο κύκλους. Οἱ δὲ κύκλοι οὗτοι, περιστραφέντες περὶ τὴν διὰ τῶν κέντρων διερχομένην εὐθεῖαν, θὰ γράψωσι τὰς δύο σφαίρας, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ διόλου ἡ πρὸς ἀλλήλους θέσις των. Ἂν λοιπὸν οἱ δύο κύκλοι κεῖνται ἐντὸς ἀλλήλων, καὶ αἱ σφαῖραι κεῖνται ἐντὸς ἀλλήλων· ἂν οἱ κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, καὶ αἱ σφαῖραι ποιοῦσι τὸ αὐτό· ἂν οἱ κύκλοι τέμνωνται, καὶ αἱ σφαῖραι τέμνονται· τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ περὶ τὰς ἄλλας θέσεις. Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι αἱ διάφοροι θέσεις δύο σφαιρῶν πρὸς ἀλλήλας (ἐὰν μὴ ἐφαρμόζωσι καὶ ἀποτελῶσι μίαν μόνην), εἶναι πέντε, τουτέστιν αἱ διάφοροι θέσεις δύο κύκλων πρὸς ἀλλήλους· ἔχουσι δὲ αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν τὰς αὐτὰς σχέσεις (ἐν ἑκάστῃ τῶν θέσεων), ἃς ἔχουσι καὶ τῶν κύκλων.

417. **Θεώρημα**. ***Ἐὰν δύο σφαῖραι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἡ τομὴ τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν εἶναι περιφέρεια κύκλου, ἔχουσα τὸ κέντρον αὐτῆς ἐπὶ τῆς τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν ἐπιζευγνυούσης εὐθείας, τὸ δὲ ἐπίπεδον αὐτῆς κάθετον ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.***

Ἔστωσαν Κ καὶ Λ τὰ κέντρα δύο σφαιρῶν, τεμνουσῶν ἀλλήλας, καὶ Α σημεῖόν τι κοινὸν τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν. Τὸ ἐπίπεδον ΚΑΛ θὰ τέμνῃ τὰς δύο σφαίρας κατὰ δύο κύκλους τεμνομένους. Ἐὰν δὲ περιστραφῶσιν οὗτοι περὶ τὴν ΚΛ, θὰ γράψωσι τὰς δύο σφαίρας, τὸ δὲ σημεῖον Α θὰ γράψῃ κύκλου περιφέρειαν, κειμένην ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν σφαιρικῶν ἐπιφα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νειῶν. Αὕτη δὲ θὰ ἔχῃ ἀκτῖνα τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΛ καὶ ἐπίπεδον, τὸ ὑπὸ τῆς ΑΔ γραφόμενον, κάθετον ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΚΛ.



Πλὴν τῶν σημείων τῆς περιφερείας ταύτης αἱ δύο σφαιρικαὶ ἐπιφάνειαι οὐδὲν ἄλλο ἔχουσι κοινὸν σημεῖον· διότι πᾶν τοιοῦτο σημεῖον συνδεόμενον πρὸς τὰ Κ καὶ Λ δι' εὐθειῶν, παρέχει τρίγωνον ἴσον ΑΚΛ, τὸ δὲ τρίγωνον τοῦτο ἔλαβε περὶ τὴν ΚΛ πάσας τὰς δυνατὰς θέσεις.

Ἀσκήσεις.

717) Τὰ κέντρα δύο σφαιρῶν ἀπέχουσι 0,1μ. αἱ δὲ ἀκτῖνες αὐτῶν εἶναι 0,06μ. τῆς μιᾶς καὶ 0,08μ. τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κοινῆς τομῆς αὐτῶν.

ΠΕΡΙ ΜΕΓΙΣΤΩΝ ΚΥΚΛΩΝ

418. Ὁρισμοί. ***Κύκλος μέγιστος*** τῆς σφαίρας λέγεται πᾶς κύκλος, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Πᾶς μέγιστος κύκλος ἔχει κέντρον καὶ ἀκτῖνα τὰ τῆς σφαίρας.

Οἱ μέγιστοι κύκλοι τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶνε πάντες ἴσοι καὶ διχοτομοῦσιν ἀλλήλους· διότι ἡ τομὴ δύο ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη, εἶναι κοινὴ διάμετρος αὐτῶν.

Πᾶς μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἴσα μέρη, ἅτινα λέγονται ***ἡμισφαίρια***.

Διότι ἐάν, ἀφοῦ χωρίσωμεν τὰ δύο μέρη, ἐφαρμόσωμεν αὐτὰ οὕτως, ὥστε νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τῆς κοινῆς αὐτῶν βάσεως, αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν θὰ ἐφαρμόσωσι, διότι τὰ σημεῖα ἑκατέρας αὐτῶν ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς κοινῆς αὐτῶν βάσεως.

Διὰ δύο τυχόντων σημείων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας διέρχεται τόξον μεγίστου κύκλου· διότι τὸ δι' αὐτῶν καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχόμενον ἐπίπεδον τέμνει τὴν σφαῖραν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κατὰ μέγιστον κύκλον, ὅστις διέρχεται διὰ τῶν δύο σημείων. Εἷς δὲ μόνος μέγιστος κύκλος διέρχεται διὰ τῶν δοθέντων δύο σημείων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, διότι ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον διέρχεται δι᾽ αὐτῶν καὶ διὰ τοῦ κέντρου, πλὴν ὅταν τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ τὸ κέντρον κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας, διότι τότε διέρχονται δι᾽ αὐτῶν καὶ διὰ τοῦ κέντρου ἄπειρα ἐπίπεδα· ἄρα καὶ ἄπειροι μέγιστοι κύκλοι.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΜΙΚΡΩΝ ΚΥΚΛΩΝ

419. ***Μικρὸς κύκλος*** τῆς σφαίρας λέγεται πᾶς κύκλος τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας εἰς τὸ κέντρον τοῦ μικροῦ κύκλου ἀγομένη εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μικροῦ κύκλου (415).

Οἱ μικροὶ κύκλοι εἶναι τόσῳ μικρότεροι, ὅσῳ περισσότερον ἀπέχουσι τὰ κέντρα αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὡς τοῦτο φαίνεται ἐκ τῆς σχέσεως $(\text{Κ}\Delta)^2 + (\Delta\text{Α})^2 = (\text{ΚΑ})^2$ (415).

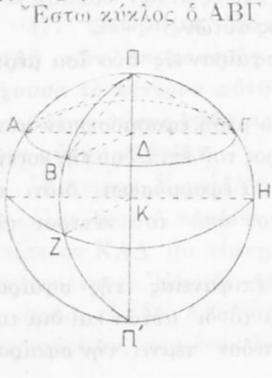
Ἡ θέσις μικροῦ κύκλου εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη, ὅταν δοθῶσι τρία σημεῖα τῆς περιφερείας αὐτοῦ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Παράλληλοι κύκλοι τῆς σφαίρας λέγονται οἱ κύκλοι τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα.

Πόλοι κύκλου τῆς σφαίρας λέγονται τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου.

420. **Θεώρημα.** ***Ἑκάτερος τῶν πόλων τοῦ τυχόντος κύκλου τῆς σφαίρας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς περιφερείας αὐτοῦ.***

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ τῆς σφαίρας Κ· καὶ Π, Π′ οἱ πόλοι αὐτοῦ. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΠΔ ἡ συνδέουσα τὸν πόλον Π καὶ τὸ κέντρον Δ τοῦ κύκλου ΑΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, αἱ εὐθεῖαι ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ . . . εἶναι πλάγιαι ὧν οἱ πόδες ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ ποδὸς Δ τῆς καθέτου ΠΔ· εἶναι ἄρα ἴσαι· ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ περὶ τοῦ Π′.



Καὶ τὰ τόξα τῶν μεγίστων κύ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κλων, τὰ ἐκ τοῦ πόλου εἰς τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀγόμενα, οἷον τὰ ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ, εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα ἴσας χορδάς.

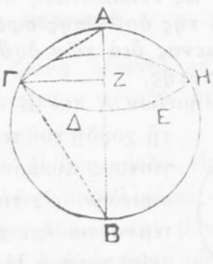
Ἔτι δὲ καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν μεγίστων τούτων κύκλων εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΑΒΓ ὡς διερχόμενα διὰ τῆς ἐπ᾽ αὐτὸ καθέτου ΠΔ. Ἐὰν ὁ κύκλος εἶναι μέγιστος, ὡς ὁ ΕΖΗ, αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ΠΚΕ, ΠΚΖ, ΠΚΗ μετροῦνται ὑπὸ τῶν τόξων ΠΕ, ΠΖ, ΠΗ (ὧν κέντρα εἶναι αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν) καὶ διὰ τοῦτο τὰ τόξα ταῦτα εἶναι τεταρτημόρια περιφερείας.

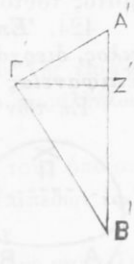
421. Πόρισμα. ***Ἐὰν τὰ ἔκ τινος σημείου Π τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἀγόμενα τόξα μεγίστου κύκλου (ΠΕ, ΠΖ) εἰς δύο σημεῖα τῆς περιφερείας ἄλλου μεγίστου κύκλου (ΕΖΗ) εἶναι τεταρτημόρια, τὸ σημεῖον Π εἶναι πόλος τοῦ μεγίστου τούτου κύκλου ΕΖΗ.***

Σημείωσις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ γράφωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας περιφερείας, τόσον εὐκόλως ὅσον καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Πρὸς τοῦτο μεταχειριζόμεθα διαβήτην μὲ σκέλη καμπύλα (σφαιρικὸς διαβήτης), οὗ τὸ ἄκρον τοῦ ἑνὸς σκέλους στηρίζομεν εἴς τι σημεῖον τῆς σφαίρας, ὅπερ εἶναι εἷς τῶν πόλων τῆς περιφερείας, ἥτις γράφεται ὑπὸ τοῦ ἄκρου τοῦ ἄλλου σκέλους.

Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ γράψωμεν τόξον μεγίστου κύκλου, πρέπει νὰ λάβωμεν τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο ἄκρων τοῦ διαβήτου ἴσην μὲ τὴν χορδὴν ΠΕ τοῦ τεταρτημορίου ΠΚΕ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου· πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει νὰ εἶναι γνωστὴ ἡ περιφέρεια αὕτη, τουτέστιν ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.

422. Πρόβλημα. ***Εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα δοθείσης σφαίρας.***





Μὲ πόλον τὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς ἐπιφανείας καὶ μὲ ἀκτῖνα (ἤτοι ἀπόστασιν τῶν ἄκρων τοῦ διαβήτου) οἱανδήποτε ΑΓ, γράφομεν ἐπὶ τῆς σφαίρας περιφέρειαν κύκλου ἐφ᾽ ἧς λαμβάνομεν τρία σημεῖα, ἔστω τὰ Γ,Δ,Ε· κατόπιν κατασκευάζομεν ἐπὶ ἐπιπέδου τρίγωνον, ἔχον πλευρὰς τὰς ἀποστάσεις ΓΔ, ΓΕ, ΔΕ (ἃς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

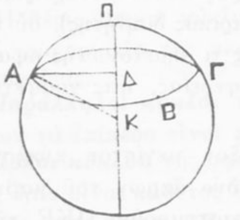
ὁρίζομεν διὰ τοῦ διαβήτου) καὶ περὶ τὸ τρίγωνον τοῦτο περιγράφομεν κύκλον. Ὁ κύκλος οὗτος θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἐπὶ τῆς σφαίρας ΓΔΕ, ἡ δὲ ἀκτὶς αὐτοῦ, θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ΓΔΕ ἤτοι μὲ τὴν ΓΖ.

Ἀλλ' ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ΓΖ καὶ τὴν ἀπόστασιν ΑΓ, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας· διότι τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΖ, γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΑΓ καὶ τὴν πλευρὰν ΓΖ· δύναται λοιπὸν νὰ κατασκευασθῇ ἐπὶ ἐπιπέδου τὸ τρίγωνον Α΄Γ΄Ζ΄ ἴσον τῷ ΑΓΖ· ἐὰν δὲ κατόπιν ἀχθῇ ἡ Γ΄Β΄ κάθετος ἐπὶ τὴν Γ΄Α΄ καὶ προσεκβληθῇ ἡ Α΄Ζ΄, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον Α΄Γ΄Β΄ οὗ ἡ πλευρὰ Α΄Β΄ εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον ΑΒ τῆς σφαίρας.

423. **Πρόβλημα.** ***Ἐπὶ τῆς δοθείσης σφαίρας νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου, ἔχουσα ἀκτῖνα ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.***

Περιορισμός. Ἡ δοθεῖσα ἀκτὶς δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

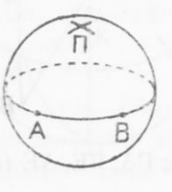
Ἀνάλυσις. Ἔστω ΑΒΓΑ ἡ ζητουμένη περιφέρεια. Ἡ ἀκτὶς αὐτῆς ΔΑ (ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Ε) εἶναι γνωστή, ὡς καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας ΑΚ· τὸ ὀρθογώνιον λοιπὸν τρίγωνον ΑΚΔ δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, κατασκευασθέντος δὲ τούτου, εὑρίσκεται καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΠ, ἂν προσεβληθῇ ἡ ΚΔ καὶ γίνῃ ἴση τῇ ἀκτῖνι ΚΑ.



Τέλος εὑρίσκεται ἐκ τούτων καὶ ἡ ΠΑ, ἥτις εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν ἄκρων τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου, μὲ τὴν ὁποίαν γράφεται ἡ περιφέρεια ἐκ τοῦ πόλου Π. Ἡ σύνθεσις τοῦ προβλήματος τούτου ὡς εὐκολωτάτη παραλείπεται.

424. ***Ἐπὶ τῆς δοθείσης σφαίρας νὰ γραφῇ μέγιστος κύκλος, διερχόμενος διὰ τῶν δοθέντων σημείων Α καὶ Β τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.***

Ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β ὡς πόλων καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ χορδῇ τοῦ τεταρτημορίου γράφομεν δύο μεγίστους κύκλους, ἔστω δὲ Π τὸ ἕτερον τῶν σημείων, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ περιφέρειαι αὐτῶν τέμνονται ἐπὶ τῆς σφαίρας (418) Ἐκ τοῦ σημείου τούτου Π ὡς πόλου καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν κύκλον, ὅστις θὰ διέλθῃ διὰ



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

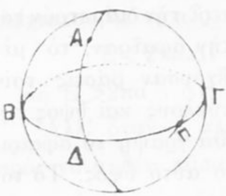
τῶν δοθέντων σημείων Α καὶ Β, διότι αἱ εὐθεῖαι ΠΑ, ΠΒ εἶναι χορδαὶ τεταρτημορίου.

Σημείωσις. Ἐὰν τὰ δοθέντα σημεῖα Α,Β εἶναι ἄκρα μιᾶς διαμέτρου, οἱ ἐξ αὐτῶν ὡς πόλων γραφόμενοι μέγιστοι κύκλοι ἐφαρμόζουσιν ἐπ᾽ ἀλλήλους, τότε δὲ ἄγονται διὰ τῶν Α, Β, ἄπειροι μέγιστοι κύκλοι, τῶν ὁποίων πόλοι εἶναι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν δύο γεγραμμένων περιφερειῶν.

425. Πρόβλημα. ***Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Α τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας νὰ ἀχθῇ μέγιστος κύκλος κάθετος ἐπὶ τὸν δοθέντα μέγιστον κύκλον ΒΓΔ.***

Κάθετοι λέγονται δύο μέγιστοι κύκλοι, ἐὰν τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα.

Ἐκ τοῦ σημείου Α ὡς πόλου γράφομεν μέγιστον κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια θὰ τέμνῃ τὴν δοθεῖσαν (ἐὰν μὴ ἐφαρμόσῃ ἐπ᾽ αὐτῆς) εἰς δύο σημεῖα· ἐκ τούτων ἔστω ἕν, τὸ Π.



Ἐὰν ἐκ τοῦ Π ὡς πόλου γράψωμεν μέγιστον κύκλον, οὗτος θὰ διέρχηται διὰ τοῦ Α καὶ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ΒΓΔ. Θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Α, διότι ἡ ΑΠ εἶναι ἴση τῇ χορδῇ τοῦ τεταρτημορίου, θὰ εἶναι δὲ καὶ κάθετος ἐπὶ τὸν ΒΓΔ, διότι ἔχει πόλον τὸ Π καὶ πᾶς μέγιστος κύκλος, διερχόμενος διὰ τοῦ Π, θὰ εἶναι κάθετος ἀπ᾽ αὐτὸν (420) ἄρα καὶ ὁ ΒΓΔ.

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ σημεῖον Α εἶναι πόλος τοῦ δοθέντος κύκλου ΒΓΔ, ὁ γραφόμενος κύκλος ἐφαρμόζει ἐπὶ τὸν δοθέντα καὶ πᾶς μέγιστος κύκλος, διὰ τοῦ Α διερχόμενος, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ΒΓΔ.

ΣΦΑΙΡΑΣ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

426. Ὁρισμοί. ***Σφαιρικὴ ζώνη*** λέγεται μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, περιλαμβανόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων.

Βάσεις τῆς ζώνης λέγονται οἱ δύο κύκλοι, εἰς τοὺς ὁποίους περατοῦται. Ἐὰν δὲ τὸ ἓν ἐκ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐφάπτηται τῆς σφαίρας, ἡ ζώνη ἔχει μόνον μίαν βάσιν.

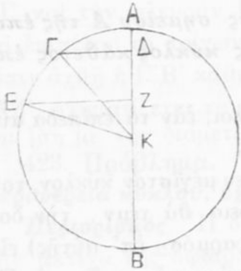
Ὕψος δὲ τῆς ζώνης λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τμῆμα σφαίρας λέγεται μέρος τῆς σφαίρας, περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἐπιπέδων παραλλήλων.

Βάσεις τοῦ τμήματος λέγονται οἱ δύο κύκλοι, εἰς οὓς περατοῦται. Τὸ τμῆμα ἔχει μόνον μίαν βάσιν, ἐὰν τὸ ἓν ἐκ τῶν ἐπιπέδων ὑφ᾽ ὧν περιέχεται, ἐφάπτηται τῆς σφαίρας.

Ὕψος δὲ τοῦ τμήματος λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων.



Σφαιρικὸς τομεὺς λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον γράφει ὁ τυχὼν τομεὺς τοῦ ἡμικυκλίου, ὅταν τοῦτο στρεφόμενον περὶ τὴν διάμετρόν του γράφῃ τὴν σφαῖραν.

Ἐὰν νοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον ΑΓΕΒΑ περιστρεφόμενον περὶ τὴν διάμετρόν του ΑΒ καὶ γράφον τὴν σφαῖραν, τὸ μὲν τόξον ΓΕ θὰ γράψῃ σφαιρικὴν ζώνην, ἔχουσαν βάσεις τοὺς ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΓΔ, ΕΖ γραφομένους κύκλους καὶ ὕψος τὴν ΔΖ, τὸ δὲ μέρος ΓΕΖΔ τοῦ ἡμικυκλίου θὰ γράψῃ τὸ σφαιρικὸν τμῆμα, ἔχον τὰς αὐτὰς βάσεις καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Τὸ τόξον ΑΓ θὰ γράψῃ ζώνην, ἔχουσαν μίαν μόνον βάσιν, καὶ τὸ μέρος ΑΓΔ τοῦ ἡμικυκλίου θὰ γράψῃ τμῆμα ἔχον μίαν βάσιν.

Ὁ δὲ κυκλικὸς τομεὺς ΓΚΕ θὰ γράψῃ σφαιρικὸν τομέα ὡσαύτως καὶ ὁ τομεὺς ΑΚΓ.

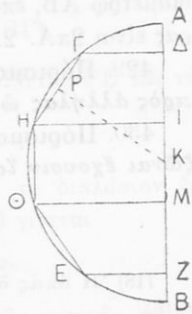
Ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης λέγεται τὸ ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει τεθλασμένη γραμμὴ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τόξον τὸ γράφον τὴν ζώνην.

427. **Θεώρημα.** ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης εἶναι γινόμενον τοῦ ὕψους αὐτῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας.***

Ἔστω ἡ σφαιρικὴ ζώνη, ἡ ὑπὸ τοῦ τόξου ΓΕ γραφομένη. Ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸ τόξον τοῦτο ἡ τυχοῦσα τεθλασμένη γραμμὴ ΓΗΘΕ. Ἡ χορδὴ ΓΗ ἐν τῇ περιστροφῇ τοῦ ἡμικυκλίου περὶ τὴν ΑΒ θὰ γράψῃ ἐπιφάνειαν κολούρου κώνου, τῆς ὁποίας τὸ ἐμβαδὸν (409, σημ. β΄) εἶναι γινόμενον τῆς ΔΙ, ἐπὶ τὴν περι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

φέρειαν, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα τὴν ΡΚ ἤτοι τὴν ἀπόστασιν τῆς χορδῆς ΓΗ ἀπὸ τοῦ κέντρου· τὸ αὐτὸ δὲ ἰσχύει καὶ περὶ τῶν ἄλλων χορδῶν ΗΘ, ΘΕ· ἐπομένως, ἂν παραστήσωμεν τὰς ἀποστάσεις τοῦ κέντρου Κ ἀπὸ τῶν χορδῶν ΓΗ, ΗΘ, ΘΕ, ... διὰ τῶν $\alpha, \alpha', \alpha''$, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἣν γράφει ἡ τεθλασμένη γραμμή, διὰ τοῦ Ε, θὰ εἶναι



$$E = 2\pi\alpha.\ \Delta I + 2\pi\alpha'.\ IM + 2\pi\alpha''.MZ.$$

Ἐκ τῶν ἀποστημάτων $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots,$ ἔστω μέγιστον μὲν τὸ α, ἐλάχιστον δὲ τὸ α''· τότε εἶναι

$$E < 2\pi\alpha.\Delta I + 2\pi\alpha.IM + 2\pi\alpha.MZ \text{ ἢ } E < 2\pi\alpha.\Delta Z$$

$$\text{καὶ } E > 2\pi\alpha''.\ \Delta I + 2\pi\alpha''.\ IM + 2\pi\alpha''.\ MZ \text{ ἢ } E > 2\pi\alpha''.\ \Delta Z.$$

Ἀλλ' ὅταν αἱ πλευραὶ τῆς ἐγγεγραμμένης γραμμῆς τείνωσι πρὸς τὸ μηδέν, πᾶσαι αἱ ἀποστάσεις $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$ αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου τείνουσι πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, τὴν ὁποίαν παριστῶ διὰ τοῦ Α· ὥστε ἀμφότερα τὰ ἐμβαδὰ $2\pi\alpha.\Delta Z$ καὶ $2\pi\alpha''.\Delta Z$ τείνουσι πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον $2\pi A.\Delta Z$. Ἄρα καὶ τὸ Ε, ὅπερ περιέχεται μεταξὺ αὐτῶν, τείνει πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον $2\pi A.\Delta Z$. Ἀλλὰ τὸ ὅριον τοῦ Ε λέγεται ἐμβαδὸν τῆς ζώνης. Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης εἶναι $2\pi A.\Delta Z$, τουτέστι γινόμενον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου $2\pi A$ τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ὕψος της ΔΖ· ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι ***τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, ἔχοντος βάσιν μὲν μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὸ τῆς ζώνης.***

428. Πόρισμα 1ον. ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τεσσάρων μεγίστων κύκλων αὐτῆς.***

Διότι, ὅταν τὸ τόξον ΓΕ αὐξανόμενον καταντήσῃ ἴσον τῇ ἡμιπεριφερείᾳ ΑΓΕΒ, ἡ σφαιρικὴ ζώνη καταντᾷ ὁλόκληρος ἡ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, τὸ δὲ ὕψος τῆς ζώνης καταντᾷ ἴσον τῇ διαμέτρῳ ΑΒ, ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι $2\pi A. 2A$ ἢ $4\pi A^2$.

429. Πόρισμα 2ον. ***Αἱ ἐπιφάνειαι δύο σφαιρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.***

430. Πόρισμα 3ον. ***Εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν αἱ ἰσοϋψεῖς ζῶναι ἔχουσιν ἴσα ἐμβαδά.***

Ἀσκήσεις

718) Ἡ ἀκτὶς σφαίρας τινὸς εἶναι 2,6μ. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς;

719) Σφαῖρα τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι 1,8μ. τέμνεται ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἀπεχόντων ἀπ' ἀλλήλων κατὰ 0,2μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἥτις περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων;

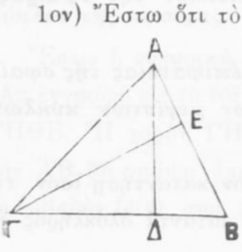
720) Σφαῖρα τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι 5μ. τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου ἀπέχοντος ἀπὸ τοῦ κέντρου 3μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο ζωνῶν, εἰς τὰς ὁποίας διαιρεῖται ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια.

721) Νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς θεωροῦντες αὐτὴν ὡς σφαῖραν (περιφέρεια μεγ. κύκλου τῆς γῆς 40000000μ.).

722) Ἐὰν διπλασιασθῇ ἡ ἀκτὶς σφαίρας τινός, ποσαπλασία γίνεται ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς;

431. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν τρίγωνον περιστραφῇ περὶ ἄξονα, κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ, διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς του καὶ μὴ τέμνοντα αὐτό, τὸ γραφόμενον ὑπὸ τοῦ τριγώνου στερεὸν ἔχει ὄγκον ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς ἐπιφανείας, ἣν γράφει ἡ βάσις τοῦ τριγώνου, ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους του.***

1ον) Ἔστω ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΑΒ στρέφεται περὶ μίαν τῶν



πλευρῶν αὐτοῦ, ἔστω περὶ τὴν ΓΒ. Τὸ ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΓΑΒ γραφόμενον στερεόν, σύγκειται ἐκ δύο κώνων, οὓς γράφουσι τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΔΑΒ, ἑπομένως ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\text{ὄγκος } ΑΒΓ = \frac{1}{3}\pi(ΑΔ)^2.(ΔΓ) + \frac{1}{3}\pi(ΑΔ)^2.(ΔΒ).$$

$$\text{ἤτοι ὄγκ. } ΑΒΓ = \frac{1}{3}\pi(ΑΔ)^2.(ΒΓ). \qquad (1)$$

Ἀλλ' ἂν ἐκ τῆς κορυφῆς Γ ἀχθῇ ἡ κάθετος ΓΕ ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΑΒ, θὰ ἔχωμεν

$$ΒΓ.ΑΔ = ΓΕ.ΑΒ\cdot$$

διότι ἑκάτερον τῶν γινομένων τούτων δηλοῖ τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ὥστε ἡ ἰσότης (1) γίνεται

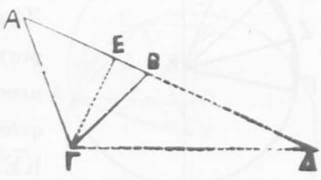
$$\text{ὄγκ. } ΑΒΓ = \frac{1}{3}\pi.ΑΔ.ΑΒ.ΓΕ\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ π.ΑΒ.ΑΔ παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, ἣν γράφει ἡ ΑΒ συνάγεται, ὅτι εἶναι:

$$\text{ὄγκ. } ΑΒΓ = (\text{ἐπιφ. } ΑΒ).\left(\frac{1}{3}ΓΕ\right).$$

Σημείωσις. Ἂν ἡ κάθετος ΑΔ πίπτῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὁ ὄγκος ΑΒΓ εἶναι διαφορὰ τῶν δύο προηγουμένων κώνων· κατὰ τὰ ἄλλα ἡ ἀπόδειξις μένει ἡ αὐτή.

2ον) Ἔστω ἤδη ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται περὶ τὸν ἄξονα ΓΔ, ὅστις κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ τριγώνου καὶ ὅστις τέμνεται ὑπὸ τῆς ΑΒ κατὰ τὸ Δ· τότε τὸ στερεόν, τὸ γραφόμενον ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι διαφορὰ τῶν στερεῶν, τὰ ὁποῖα γράφουσι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ.



$$\text{ὅθεν εἶναι ὄγκ. } ΑΒΓ = (\text{ἐπιφ. } ΑΔ).\frac{1}{3}ΓΕ - (\text{ἐπιφ.} ΒΔ)\frac{1}{3}ΓΕ =$$

$$\frac{1}{3}ΓΕ(\text{ἐπιφ. } ΑΔ - \text{ἐπιφ. } ΒΔ) = \frac{1}{3}ΓΕ(\text{ἐπιφ. } ΑΒ).$$

3ον) Ἔστω τέλος ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι ΓΔ.

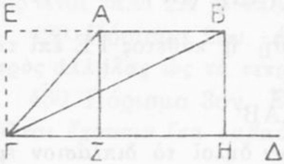
Ἐκ τῶν ἄκρων τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἂς ἀχθῶσιν ἐπὶ τὸν ἄξονα κάθετοι, αἱ ΑΖ, ΒΗ· τότε εἶναι προφανῶς

$$\text{ὄγκ. } ΑΒΓ = \text{ὄγκ. } ΑΓΖ + \text{ὄγκ. } ΑΖΗΒ - \text{ὄγκ. } ΓΒΗ\cdot \text{ ἤτοι}$$

$$\text{ὄγκ. } ΑΒΓ = \frac{1}{3}\pi(ΑΖ)^2.ΓΖ + \pi(ΑΖ)^2.ΖΗ - \frac{1}{3}\pi(ΑΖ)^2.ΓΗ$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἢ ὄγκ. $\mathrm{AB\Gamma} = \frac{1}{3}\pi(\mathrm{AZ})^2(\Gamma\mathrm{Z}+3\mathrm{ZH}-\Gamma\mathrm{H})$.



καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\Gamma\mathrm{H}=\Gamma\mathrm{Z}+\mathrm{ZH}$, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται

$$\text{ὄγκ. } \mathrm{AB\Gamma} = \frac{1}{3}\pi(\mathrm{AZ})^2 \cdot 2\mathrm{ZH}.$$

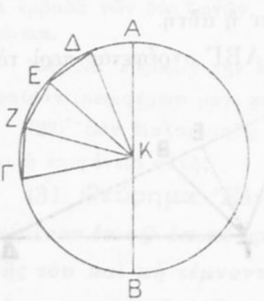
ἀλλὰ $2\pi.\ \mathrm{AZ}.\ \mathrm{ZH}$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ ΑΒ· ὅθεν ἔπεται

$$\text{ὄγκ. } \mathrm{AB\Gamma} = (\text{ἐπιφ. } \mathrm{AB}).\ \frac{1}{3}\mathrm{AZ} = (\text{ἐπιφ. } \mathrm{AB}).\ \frac{1}{3}\Gamma\mathrm{E}.$$

432. **Θεώρημα.** ***Ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως εἶναι γινόμενον τῆς ζώνης, ἥτις εἶναι βάσις αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος.***

Ἔστω ΚΓΔ ὁ κυκλικὸς τομεύς, ὅστις περιστρεφόμενος περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ γράφει τὸν σφαιρικὸν τομέα.

Ἐὰν διαιρεθῇ τὸ τόξον ΓΔ εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη καὶ ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ αὐτῶν, προκύπτει πολυγωνικὸς τομεύς, ὡς ὁ ΚΔΕΖΓΚ, ἐγγεγραμμένος εἰς τὸν κυκλικὸν τομέα.



Ὁ πολυγωνικὸς οὗτος τομεὺς ἐν τῇ περιστροφῇ θὰ γράψῃ στερεόν, συγκείμενον ἐκ τῶν στερεῶν, τὰ ὁποῖα γράφουσι τὰ ἴσα τρίγωνα ΚΓΖ, ΚΖΕ, ΚΕΔ, εἰς ἃ διαιρεῖται· ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τούτου θὰ εἶναι (431)

$$\frac{1}{3}\alpha.\ (\text{ἐπιφ. } \Gamma\mathrm{Z} + \text{ἐπιφ. } \mathrm{ZE} + \text{ἐπιφ. } \Delta\mathrm{E})$$

$$\text{ἢ } \frac{1}{3}\alpha.\ (\text{ἐπιφ. } \Gamma\mathrm{ZE}\Delta).$$

τουτέστιν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ ἣν γράφει ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΓΖΕΔ ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀποστάσεως α τῶν χορδῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ πολυγωνικὸς τομεὺς ἔχει ὅριον τὸν κυκλικὸν τομέα, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ ὑπ' αὐτοῦ γραφόμενον στερεὸν ἔχει ὅριον τὸ ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τομέως γραφόμενον, τουτέστι τὸν σφαιρικὸν τομέα· ὥστε εἶναι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\text{ὄγκ. σφαιρ. τομέως} = \text{ὅρ.} \left| \frac{1}{3} \alpha \ (\text{ἐπιφ. ΓΖΕΔ}) \right| =$$

$$= \text{ὅρ.} \left(\frac{1}{3} \alpha \right) \text{ὅρ.} \ (\text{ἐπιφ ΓΖΕΔ})$$

Ἀλλ' ὅριον τοῦ ἀποστήματος α εἶναι ἡ ἀκτὶς Α τῆς σφαίρας, ὅριον δὲ τῆς ἐπιφανείας ΓΖΕΔ εἶναι ἡ σφαιρικὴ ζώνη, ἡ γραφομένη ὑπὸ τοῦ τόξου ΓΔ· ἄρα

$$\text{ὄγκ. σφαιρ. τομέως} = \frac{1}{3} \text{Α (ζών.ΓΔ)}.$$

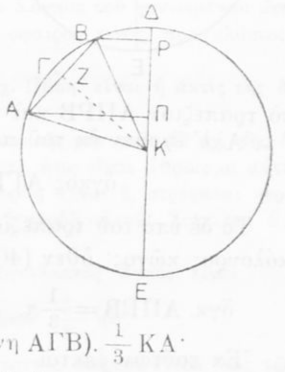
433. Πόρισμα 1ον. ***Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι γινόμενον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς.***

Σημείωσις. Ἐὰν παρασταθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας διὰ τοῦ Α, ἡ μὲν ἐπιφάνεια αὐτῆς εἶναι $4\pi A^2$,

ὁ δὲ ὄγκος αὐτῆς θὰ εἶναι $4\pi A^2 \cdot \frac{1}{3} A$ ἢ $\frac{4}{3} \pi A^3$.

434. Πόρισμα 2ον. ***Οἱ ὄγκοι δύο σφαιρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων των.***

435. Θεώρημα. ***Ἐὰν κυκλικὸν τμῆμα στραφῇ περὶ διάμετρον, μὴ τέμνουσαν αὐτό, γράφει στερεόν, ὅπερ εἶναι ἥμισυ τοῦ κώνου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα βάσεως τὴν χορδὴν τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν προβολὴν τῆς χορδῆς ταύτης ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς.***



Ἔστω κυκλικὸν τμῆμα τὸ ΑΓΒΖΑ· ἄς περιστραφῇ δὲ περὶ τὴν διάμετρον ΔΕ· τὸ στερεόν, ὅπερ γράφει, εἶναι προφανῶς διαφορὰ τῶν στερεῶν, τὰ ὁποῖα γράφουσιν ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΚΑΓΒ καὶ τὸ τρίγωνον ΚΑΒ· ἀλλ' εἶναι

$$\text{σφαιρ. τομεὺς ΚΑΓΒ} = (\text{ζώνη ΑΓΒ}) \cdot \frac{1}{3} \text{ΚΑ}\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ ζώνη ΑΓΒ $= 2\pi$. ΚΑ. ΠΡ, ἔπεται

$$\text{σφαιρικὸς τομεὺς ΚΑΓΒ} = \frac{2}{3} \pi (\text{ΚΑ})^2 . \text{ΠΡ}\cdot$$

$$\text{ἐπίσης εἶναι ὄγκος ΑΒΚ} = (\text{ἐπιφ. ΑΒ}) \ \frac{1}{3} \text{ΚΖ}\cdot$$

ἤ, ἐπειδὴ ἐπιφ. ΑΒ $= 2\pi$. ΚΖ. ΠΡ, (409, σημ. β')

$$\text{ὄγκος ΑΒΚ} = \frac{2}{3} \pi \, (\text{ΚΖ})^2 . \text{ΠΡ}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὅθεν ὄγκος $ΑΓΒΖΑ = \frac{2}{3}\pi\,(ΚΑ)^2.\,ΠΡ - \frac{2}{3}\pi\,(ΚΖ)^2.\,ΠΡ$

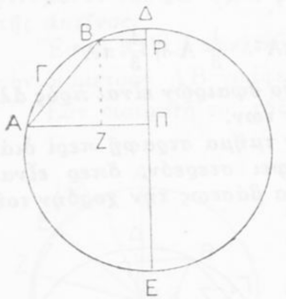
$$\text{ἢ ὄγκος } ΑΓΒΖΑ = \frac{2}{3}\pi.ΠΡ\left|(ΚΑ)^2.-(ΚΖ)^2\right|.$$

Ἀλλ᾽ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΑΖ εὑρίσκομεν

$$(ΚΑ)^2-(ΚΖ)^2=\left(\frac{ΑΒ}{2}\right)^2=\frac{(ΑΒ)^2}{4}$$

ὅθεν ὄγκος $ΑΓΒΖΑ = \frac{1}{6}\pi.\,(ΑΒ)^2.ΠΡ = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\pi(ΑΒ)^2.ΠΡ.$

436. **Θεώρημα**. ***Τὸ σφαιρικὸν τμῆμα εἶναι ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο κυλίνδρων, οἵτινες ἔχουσι βάσεις τὰς βάσεις αὐτοῦ καὶ ὕψος, τὸ ὕψος αὐτοῦ αὐξηθὲν κατὰ τὴν σφαῖραν, ἥτις ἔχει διάμετρον τὸ ὕψος αὐτοῦ.***



Ἔστωσαν ΑΠ καὶ ΒΡ αἱ ἀκτῖνες δύο παραλλήλων κύκλων καθέτων ἐπὶ τὴν διάμετρον ΔΕ.

Τὸ σφαιρικὸν τμῆμα, τὸ ἔχον βάσεις τοὺς κύκλους τούτους, γράφεται ὑπὸ τοῦ μέρους ΑΓΒΡΠΑ τοῦ ἡμικυκλίου ΔΑΕ, ὅταν τοῦτο περιστραφῇ περὶ τὴν διάμετρόν του ΔΕ· εἶναι δὲ προφανῶς ἄθροισμα τῶν στερεῶν τὰ ὁποῖα γράφουσι τὸ τραπέζιον ΑΠΡΒ καὶ τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΓΒ.

Ἀλλ᾽ ἔχομεν ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος

$$\text{ὄγκος } ΑΓΒΑ = \frac{1}{6}\pi\,(ΑΒ)^2.ΠΡ.$$

Τὸ δὲ ὑπὸ τοῦ τραπεζίου ΑΒΡΠ γραφόμενον στερεὸν εἶναι κόλουρος κῶνος· ὅθεν (407)

$$\text{ὄγκ. } ΑΠΡΒ = \frac{1}{3}\pi.\left|(ΑΠ)^2+(ΒΡ)^2+(ΑΠ).(ΒΡ)\right|ΠΡ.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται

$$\text{ὄγκ. } ΑΓΒΡΠ = \frac{1}{6}\pi\left|(ΑΒ)^2+2(ΑΠ)^2+2(ΒΡ)^2+2(ΑΠ).(ΒΡ)\right|ΠΡ.$$

ἀλλ᾽ ἂν ἐκ τοῦ Β ἀχθῇ ἡ ΒΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΠ, γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΖ, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν:

$$(ΑΒ)^2=(ΒΖ)^2+(ΑΖ)^2=(ΠΡ)^2+(ΑΠ-ΒΡ)^2$$

$$\text{ἢ } (ΑΒ)^2=(ΠΡ)^2+(ΑΠ)^2+(ΒΡ)^2-2(ΑΠ).\,(ΒΡ).$$

Ἐὰν δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ $(ΑΒ)^2$ ἀντικαταστήσωμεν ἐν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῇ εὑρεθείσῃ ἐκφράσει τοῦ ὄγκου τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΑΓΒΡΠ, εὑρίσκομεν μετὰ τὰς ἀναγωγὰς

$$\text{ὄγκ. ΑΓΒΡΠ} = \frac{1}{6}\left[\pi(\text{ΠΡ})^2 + 3(\text{ΑΠ})^2 + 3(\text{ΒΡ})^2\right]\cdot\text{ΠΡ}$$

$$\text{ἢ ὄγκος ΑΓΒΡΠ} = \frac{1}{6}\pi(\text{ΠΡ})^3 + \frac{1}{2}\left[\pi(\text{ΑΠ})^2 + (\text{ΒΡ})^2\right]\text{ΠΡ}.$$

Ἀλλὰ $\frac{1}{6}\pi(\text{ΠΡ})^3$ παριστᾷ τὸν ὄγκον σφαίρας, ἐχούσης διάμετρον τὸ ὕψος ΠΡ τοῦ τμήματος, τὰ δὲ γινόμενα $\pi(\text{ΑΠ})^2$. ΠΡ καὶ $\pi(\text{ΒΡ})^2$. ΠΡ παριστῶσι τοὺς ὄγκους δύο κυλίνδρων, ἐχόντων βάσεις τὰς τοῦ τμήματος καὶ ὕψος τὸ τοῦ τμήματος, ἐξ ὧν συνάγεται τὸ θεώρημα.

Ἀσκήσεις

723) Ἡ ἀκτὶς σφαίρας τινὸς εἶναι 2 πχ., 6. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτῆς;

724) Σφαίρας τινὸς ὁ ὄγκος εἶναι 15 κπ, 85. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτῆς;

725) Τρίγωνόν τι ἰσόπλευρον στρέφεται περὶ μίαν τῶν πλευρῶν του ὁλόκληρον περιστροφήν. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ γεννωμένου στερεοῦ;

726) Ἐὰν διπλασιασθῇ ἡ ἀκτὶς σφαίρας τινός, ποσαπλάσιος γίνεται ὁ ὄγκος αὐτῆς;

727) Σφαῖρά τις ἔχει ἀκτῖνα 8 πχ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς διπλασίας σφαίρας (κατὰ τὸν ὄγκον);

728) Αἱ ἀκτῖνες δύο σφαιρῶν εἶναι τῆς μὲν μιᾶς 12 πχ. τῆς δὲ ἄλλης 9 πχ. Ζητεῖται ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, ἥτις εἶναι ἄθροισμα αὐτῶν.

729) Κυκλικόν τι τμῆμα, οὗ ἡ χορδὴ εἶναι δ, στρέφεται περὶ μίαν διάμετρον τοῦ κύκλου παράλληλον τῇ χορδῇ αὐτοῦ. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ προκύπτοντος στερεοῦ.

(Ἀπ. Κατὰ τὸ θεώρημα 435 ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι

$$\frac{1}{6}\pi\delta^2.\ \delta,\ \text{ἤτοι}\ \frac{1}{6}\pi\delta^3.$$

τουτέστιν ὁ ὄγκος τοῦ οὕτω προκύπτοντος στερεοῦ εἶναι ἴσος τῷ ὄγκῳ τῆς σφαίρας, ἥτις ἔχει διάμετρον τὴν χορδὴν δ.

Ἄξιον παρατηρήσεως εἶναι, ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου δὲν ὑπάρχει ἐν τῇ παραστάσει τοῦ ὄγκου ὥστε πάντα τὰ ἴσας χορδὰς ἔχοντα κυκλικὰ τμήματα οἱωνδήποτε κύκλων ὅταν στρέφωνται περὶ διάμετρον παράλληλον τῇ χορδῇ αὐτῶν, γράφουσιν ἰσοδύναμα στερεά).

730) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κοινοῦ μέρους δύο σφαιρῶν ἐκ τῶν δύο ἀκτίνων καὶ ἐκ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων αὐτῶν.

(Ὁ ζητούμενος ὄγκος σύγκειται ἐκ δύο σφαιρικῶν τμημάτων, ἐχόν-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

των κοινὴν βάσιν τὸν κύκλον, οὗτινος ἡ περιφέρεια εἶναι κοινὴ τομὴ τῶν σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν. Ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν κέντρων καὶ αἱ δύο ἀκτῖνες συνιστῶσι τρίγωνον, ἐξ οὗ κατὰ τὸ θεώρημα 209 εὑρίσκομεν εὐκόλως τὰ ὕψη τῶν δύο σφαιρικῶν τμημάτων καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς κοινῆς βάσεως αὐτῶν. Τούτων δὲ εὑρεθέντων, εὑρίσκομεν διὰ τοῦ θεωρήματος 436 τὸν ζητούμενον ὄγκον.

731) Σφαῖρά τις ἐκ χυτοῦ σιδήρου ἔχει βάρος 120 χιλιογράμμων. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς.

(Ἡ ἀκτὶς θὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ ὄγκου· τὸν δὲ ὄγκον εὑρίσκομεν παρατηροῦντες, ὅτι ἴσος ὄγκος ὕδατος θὰ εἶχε βάρος $\frac{120}{7,2}$ χιλ. (διότι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χυτοῦ σιδήρου εἶναι 7,2) καὶ ὅτι 1 χιλιόγρ. ὕδατος ἔχει ὄγκον μιᾶς κυβικῆς παλάμης.

Σημείωσις. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον οἱουδήποτε σώματος ἐκ τοῦ βάρους αὐτοῦ ἂν ἠξεύρωμεν καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ.

732) Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι πρὸς τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν κυλίνδρου (ἤτοι συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν βάσεων αὐτοῦ) ὡς ὁ 2 πρὸς τὸν 3. Τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἔχουσι καὶ οἱ ὄγκοι τῶν δύο τούτων στερεῶν.

733) Οἱ ὄγκοι σφαίρας καὶ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν πολυέδρου (δηλαδὴ πολυέδρου οὗ αἱ ἕδραι ἐφάπτονται πᾶσαι τῆς σφαίρας) ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι καὶ αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

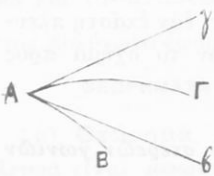
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ Ζ΄ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Ὁ ρ ι σ μ ο ί.

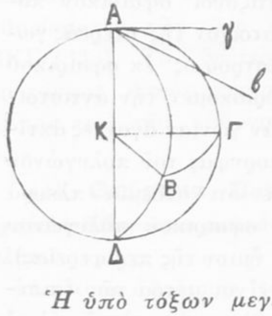
Περὶ τῆς γωνίας δύο τόξων.

437. Ἐὰν δύο τόξα τῆς σφαίρας τέμνωνται εἴς τι σημεῖον Α, λέγεται, ὅτι σχηματίζουσι ***γωνίαν.*** Τὸ σημεῖον Α λέγεται ***κορυφὴ*** τῆς γωνίας, τὰ δὲ τόξα ***πλευραὶ*** αὐτῆς.



Μέτρον τῆς γωνίας τῶν δύο τόξων λέγεται ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουσιν αἱ εἰς τὴν κορυφὴν ἐφαπτόμεναι αὐτῶν, λαμβανόμεναι κατὰ τὴν φορὰν τῶν τόξων· ἀντικαθιστᾷ δ' αὐτήν, θεωρουμένην ὡς μέγεθος.

Ἐὰν τὰ τόξα εἶναι μεγίστων κύκλων, ἡ γωνία αὐτῶν καὶ ἡ δίεδρος γωνία τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν ἔχουσι τὸ αὐτὸ μέτρον.



Διότι αἱ ἐφαπτόμεναι Αβ, Αγ τῶν τόξων ΑΒ, ΑΓ εἰς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας Α κεῖνται ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων τῶν κύκλων καὶ εἶναι ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τὴν κοινὴν διάμετρον ΑΔ τῶν κύκλων τούτων, καθ' ἣν τέμνονται τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν.

Ἡ ὑπὸ τόξων μεγίστων κύκλων σχηματιζομένη γωνία Α ἔχει μέτρον καὶ τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιλαμβανόμενον τόξον μεγίστου κύκλου ΒΓ, τὸ γραφόμενον μὲ πόλον τὴν κορυφὴν αὐτῆς. Διότι τὸ τόξον τοῦτο ΒΓ μετρεῖ τὴν γωνίαν ΒΚΓ, ἥτις ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ βΑγ τῶν ἐφαπτομένων, διότι τὰ τόξα ΑΒ, ΑΓ εἶναι τεταρτημόρια καὶ ἑπομένως αἱ γωνίαι ΑΚΒ, ΑΚΓ εἶναι ὀρθαί· ἄρα ἡ ΚΒ εἶναι παράλληλος τῇ Αβ καὶ ἡ Κγ τῇ Αγ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Περὶ τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων

438. ***Σφαιρικὸν πολύγωνον*** λέγεται μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, περατούμενον εἰς τόξα μεγίστων κύκλων.

Πλευραὶ τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου λέγονται τὰ τόξα, εἰς ἃ περατοῦται· ***γωνίαι*** δ' αὐτοῦ αἱ γωνίαι τῶν αὐτῶν τόξων καὶ κορυφαί αὐτοῦ αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν.

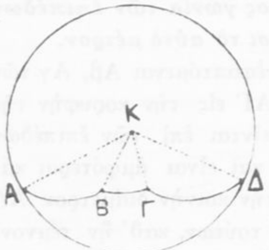
Τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον, τὸ ἔχον τρεῖς πλευράς, λέγεται ***σφαιρικὸν τρίγωνον***.

Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον λέγεται ***ἰσοσκελές, ἰσόπλευρον, σκαληνὸν*** κατὰ τὰς αὐτάς, ὡς καὶ τὸ εὐθύγραμμον περιπτώσεις.

Κυρτὸν λέγεται τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον, ἐὰν ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ προσεκβαλλομένη ἀφίνῃ ὁλόκληρον τὸ σχῆμα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς.

Ἀντιστοιχία σφαιρικῶν πολυγώνων καὶ στερεῶν γωνιῶν

Ἐὰν ἡ κορυφὴ στερεᾶς γωνίας τεθῇ εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, αἱ ἕδραι αὐτῆς θὰ τέμνωσιν ἐπὶ τῆς ἐπαφανείας τῆς σφαίρας τόξα μεγίστων κύκλων, οἷον τὰ ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ, τὰ ὁποῖα σχηματίζουσι σφαιρικὸν πολύγωνον ἀντίστοιχον τῆς στερεᾶς γωνίας. Καὶ ἀντιστρόφως· ἐκ σφαιρικοῦ πολυγώνου εὑρίσκομεν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν στερεὰν γωνίαν ἄγοντες ἀκτῖνας εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου (ὑποτίθεται δὲ ὅτι οὐδεμία πλευρὰ τοῦ δοθέντος σφαιρικοῦ πολυγώνου ὑπερβαίνει τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας).



Αἱ πλευραὶ τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου εἶναι μέτρα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῆς στερεᾶς γωνίας, αἱ δὲ γωνίαι αὐτοῦ καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι τῆς στερεᾶς γωνίας ἔχουσι τὰ αὐτὰ μέτρα.

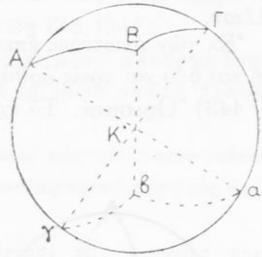
Συμμετρικὰ πολύγωνα

439. ***Συμμετρικὰ*** λέγονται δύο σφαιρικὰ πολύγωνα, ἐὰν αἱ κορυφαὶ αὐτῶν εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαί-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρας (400)· τουτέστιν ἂν κεῖνται ἀνὰ δύο εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου.

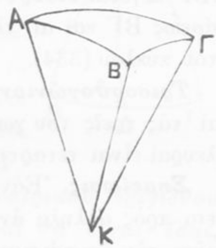
Τοιαῦτα εἶναι τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ. Τῶν συμμετρικῶν πολυγώνων αἱ ἀντίστοιχοι στερεαὶ γωνίαι εἶναι κατὰ κορυφήν. Ἐπειδὴ δὲ αἱ κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι δὲν ἐφαρμόζουσιν ἐν γένει ἕπεται ὅτι τὰ συμμετρικὰ σφαιρικὰ πολύγωνα δὲν ἐφαρμόζουσιν, ἐν γένει (διότι ὅταν δύο στερεαὶ γωνίαι ἐφαρμόζωσι καὶ τὰ ἀντιστοιχοῦντα πρὸς αὐτὰς πολύγωνα ἐφαρμόζουσι καὶ τἀνάπαλιν).



ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

440. **Θεώρημα.** ***Παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.***

Εἶναι δηλ. $ΑΓ < ΑΒ + ΒΓ$· διότι ἡ γωνία ΑΚΓ τῆς ἀντιστοίχου τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων $ΑΚΒ + ΒΚΓ$ (338). Τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως ἀποδεικνύεται, ὡς καὶ τὸ ὅμοιον περὶ τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων.



441. **Θεώρημα.** ***Παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ πλευραὶ ἔχουσιν ἄθροισμα μικρότερον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου.***

Διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῆς ἀντιστοίχου στερεᾶς γωνίας εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν (339).

442. **Παρατήρησις.** Ἐκ τῶν δύο προηγουμένων θεωρημάτων γίνεται φανερόν, ὅτι πᾶσα σχέσις μεταξὺ τῶν ἑδρῶν ἢ τῶν διέδρων γωνιῶν στερεᾶς γωνίας ὑπάρχει καὶ μεταξὺ τῶν πλευρῶν ἢ τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ πολυγώνου. Ἐντεῦθεν συνάγεται ὅτι :

1) ***Παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι ἔχουσιν***

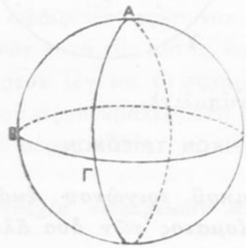
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

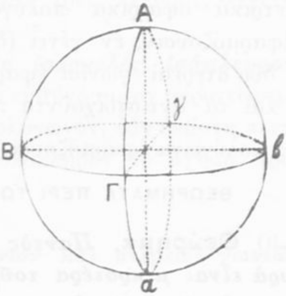
ἄθροισμα μεγαλύτερον μὲν τῶν δύο ὀρθῶν, μικρότερον δὲ τῶν ἕξ (340).

2) ***Ἑκάστη τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ τριγώνου προσλαβοῦσα δύο ὀρθὰς γίνεται μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.***

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ἕπεται ὅτι δύναται σφαιρικὸν τρίγωνον νὰ ἔχῃ καὶ δύο καὶ τρεῖς ὀρθὰς γωνίας ἢ καὶ δύο ἢ καὶ τρεῖς ἀμβλείας.

443) **Ὁρισμοί.** Τὸ ἔχον δύο ὀρθὰς γωνίας τρίγωνον, ὡς τὸ





ΑΒΓ λέγεται ***δισορθογώνιον***. Ἡ κορυφὴ Α εἶναι πόλος τῆς βάσεως ΒΓ καὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ εἶναι τεταρτημόρια μεγίστου κύκλου (334).

Τρισορθογώνιον λέγεται τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς του γωνίας ὀρθάς. Τοῦ τοιούτου τριγώνου αἱ πλευραὶ εἶναι τεταρτημόρια τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου.

Σημείωσις. Ἐὰν διὰ τοῦ κέντρου ἀχθῶσι τρία ἐπίπεδα κάθετα πρὸς ἄλληλα ἀνὰ δύο, ὡς τὰ ΑΓαγ, ΒΑβα, ΓΒγβ, διαιροῦσι τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς 8 τρισορθογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΤΗΣ ΑΥΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

444. Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, καὶ αἱ πρὸς αὐτὰ ἀντιστοιχοῦσαι στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν δύο στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι, καὶ τὰ ἀντιστοιχοῦντα σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι ἡ ἰσότης τῶν σφαιρικῶν τριγώνων τῆς αὐτῆς σφαίρας ἀνάγεται εἰς τὴν ἰσότητα στερεῶν τριέδρων γωνιῶν καὶ πρὸς ἕκαστον τῶν θεωρημάτων, τῶν περὶ τῆς ἰσότητος τῶν στερεῶν γωνιῶν ἀποδει-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

χθέντων, ἀντιστοιχεῖ ἓν θεώρημα περὶ τῆς ἰσότητος τῶν σφαιρικῶν τριγώνων. Τοιαῦτα εἶναι τὰ ἑπόμενα·

1) ***Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουσι πάντα τὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα*** (341).

2) ***Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας ἴσας, τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουσι πάντα τὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα.***

3) ***Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχωσι τὰς τρεῖς των πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν, ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας των ἴσας*** (τὰς ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν).

4) ***Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχωσι τὰς γωνίας των ἴσας κατὰ μίαν, ἔχουσι καὶ τὰς πλευράς των ἴσας*** (τὰς ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν).

445. **Θεώρημα.** ***Παντὸς ἰσοσκελοῦς σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι.***

Ἔστω ἐν τῷ σφαιρικῷ τριγώνῳ ΑΒΓ, ΑΒ = ΑΓ· λέγω ὅτι εἶναι καὶ Β=Γ.

Ἂς ἀχθῇ ἐκ τῆς κορυφῆς Α εἰς τὸ μέσον Δ τῆς βάσεως τόξον μεγίστου κύκλου τὸ ΑΔ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ ἔχουσι τὰς πλευρὰς των ἴσας κατὰ μίαν· ἄρα ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας των ἴσας· ὅθεν ἕπεται Β=Γ.

446. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο γωνίαι σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ θὰ εἶναι ἴσαι, τουτέστι τὸ τρίγωνον θὰ εἶναι ἰσοσκελές.***

Διότι, ἂν ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ ὑποτεθῇ Β=Γ, ἡ ἀντιστοιχοῦσα στερεὰ γωνία ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς συμμετρικῆς αὐτῇ, ὡς ἔχουσα δύο διέδρους γωνίας ἴσας· ἄρα καὶ τὸ συμμετρικὸν τρίγωνον αβγ τοῦ ΑΒΓ ἐφαρμόζει ἐπ' αὐτοῦ, τότε δὲ ἡ ΑΒ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς αγ, ἥτις εἶναι ἴση τῇ ΑΓ· ἄρα εἶναι ΑΒ=ΑΓ.

Ἀσκήσεις.

734) Ἐκ τριῶν τόξων μεγίστων κύκλων, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τῆς περιφερείας καὶ ὧν ἕκαστον εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, δύναται νὰ κατασκευασθῇ σφαιρικὸν τρίγωνον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

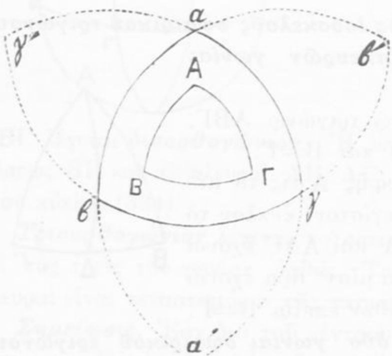
735) Δοθεισῶν τριῶν γωνιῶν, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι μεγαλύτερον μὲν τῶν δύο ὀρθῶν, μικρότερον δὲ τῶν ἓξ καὶ ὧν ἑκάστη προσλαβοῦσα δύο ὀρθὰς ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, δύναται νὰ κατασκευασθῇ σφαιρικὸν τρίγωνον ἔχον τὰς γωνίας ταύτας.

736) Τὸ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως αὐτοῦ ἀγόμενον τόξον μεγίστου κύκλου εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν καὶ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς.

737) Τὸ συμμετρικὸν τρίγωνον ἰσοσκελοῦς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ἴσον αὐτῷ.

738). Ἐὰν σφαιρικοῦ τριγώνου δύο γωνίαι εἶναι ἄνισοι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἄνισοι· ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας· καὶ ἀντιστρόφως.

ΠΕΡΙ ΠΟΛΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ



447. Ἐὰν ἐκ τῶν κορυφῶν σφαιρικοῦ τριγώνου ὡς πόλων γράφωσι τόξα μεγίστων κύκλων, τὸ ὑπὸ τῶν τόξων τούτων σχηματιζόμενον τρίγωνον λέγεται ***πολικὸν*** τοῦ πρώτου.

Τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πολικὸν εἶναι τὸ αβγ· ἡ κορυφὴ Α εἶναι πόλος τοῦ τόξου βγ, ἡ Β τοῦ αγ καὶ ἡ Γ τοῦ αβ.

Τῆς κορυφῆς Α ἡ ὁμόλογος κορυφὴ α ἐν τῷ πολικῷ τριγώνῳ προσδιορίζεται ὡς τομὴ τῶν δύο τόξων, τὰ ὁποῖα γράφονται ἐκ τῶν ἄλλων δύο κορυφῶν ὡς πόλων· τὰ τόξα ταῦτα τέμνονται μὲν εἰς δύο σημεῖα α καὶ α', ἀλλ' ἐκ τούτων λαμβάνομεν μόνον τὸ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΒΓ κείμενον, πρὸς ὃ κεῖται καὶ ἡ κορυφὴ Α· ὁμοίως προσδιορίζομεν καὶ τῶν ἄλλων κορυφῶν Β, Γ τὰς ὁμολόγους β, γ.

448. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχῃ πολικὸν τὸ αβγ, καὶ τἀνάπαλιν, τὸ τρίγωνον αβγ θὰ ἔχῃ πολικὸν τὸ ΑΒΓ.***

Ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι πόλος τοῦ τόξου βγ, τὸ τόξον μεγίστου κύκλου Αβ εἶναι τεταρτημόριον· ἐπειδὴ δὲ προσέτι τὸ Γ εἶναι πόλος τοῦ τόξου αβ, τὸ τόξον μεγίστου κύκλου Γβ εἶναι τε-

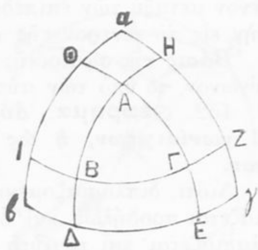
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ταρτημόριον· ὥστε τὰ ἀπὸ τοῦ β ἀγόμενα τόξα μεγίστου κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Γ εἶναι τεταρτημόρια· ἄρα (421) τὸ β εἶναι πόλος τοῦ τόξου ΑΓ· ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι τὸ γ εἶναι πόλος τοῦ τόξου ΑΒ καὶ τὸ α πόλος τοῦ ΒΓ.

Κεῖνται δὲ αἱ ὁμόλογοι κορυφαὶ β,Β πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς πλευρᾶς ΑΓ· ὁμοίως καὶ αἱ ἄλλαι· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ πολικὸν τοῦ αβγ.

449. **Θεώρημα**. ***Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι πολικὰ ἀλλήλων, ἑκάστη γωνία τοῦ ἑτέρου ἐξ αὐτῶν καὶ ἡ πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευρὰν τοῦ ἄλλου ἀντιστοιχοῦσα ἐπίκεντρος γωνία ἀποτελοῦσι δύο ὀρθάς, ἤτοι εἶναι παραπληρωματικαί.***

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ πολικὰ ἀλλήλων· λέγω ὅτι ἡ γωνία Α καὶ ἡ πρὸς τὸ τόξον βγ ἀντιστοιχοῦσα ἐπίκεντρος γωνία εἶναι παραπληρωματικαί. Ἂς προσεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ, μέχρις οὗ συναντήσωσι τὴν βγ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Ἡ γωνία Α ἔχει μέτρον (437) τὸ τόξον ΔΕ ἀλλὰ τὸ τόξον βΕ εἶναι τεταρτημόριον, διότι τὸ β εἶναι πόλος τοῦ τόξου ΑΓ· ὁμοίως τὸ γΔ εἶναι τεταρτημόριον· διότι τὸ γ εἶναι πόλος τοῦ ΑΒ·



$$\text{ἄρα εἶναι } \beta\mathrm{E} + \gamma\Delta = \text{ἡμιπεριφέρεια·}$$
$$\text{ἀλλὰ } \beta\mathrm{E} + \gamma\Delta = \beta\mathrm{E} + \Delta\mathrm{E} + \mathrm{E}\gamma = \beta\gamma + \Delta\mathrm{E}\text{·}$$
$$\text{ὥστε } \beta\gamma + \Delta\mathrm{E} = \text{ἡμιπεριφέρεια.}$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ τόξον ΔΕ μετρεῖ τὴν γωνίαν Α, τὸ δὲ τόξον βγ τὴν πρὸς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦσαν ἐπίκεντρον, ἕπεται ὅτι αἱ δύο εἰρημέναι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ περὶ τῶν ἄλλων γωνιῶν.

450. ***Παρατήρησις***. Αἱ εἰς δύο πολικὰ τρίγωνα ἀντιστοιχοῦσαι τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαὶ (337).

Καὶ τῷ ὄντι, τὸ α εἶναι πόλος τοῦ τόξου ΒΓ· ἄρα ἡ ἀκτὶς Κα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓ, κεῖται δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ, πρὸ ὃ κεῖται καὶ ἡ ΚΑ. Ὁμοίως ἡ Κβ εἶναι κάθετος, ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΑΓ, καὶ ἡ Κγ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ΑΒ· ὥστε αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι Καβγ καὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΑΒΓ εἶναι παραπληρωματικαί· καὶ τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα εὑρίσκονται ἀμέσως ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ ἐδαφίου 337.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΤΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

451. **Ὁρισμοί.** ***Ἄτρακτος*** λέγεται μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, περιλαμβανόμενον μεταξὺ δύο ἡμικυκλίων μεγίστων κύκλων.

Σφαιρικὸς δὲ ὄνυξ λέγεται τὸ μεταξὺ τῶν αὐτῶν ἡμικυκλίων περιεχόμενον μέρος τῆς σφαίρας.

Βάσις τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος λέγεται ὁ ἄτρακτος, τὸν ὁποῖον περιλαμβάνουσι τὰ αὐτὰ ἡμικύκλια.

Ὁ σφαιρικὸς ἄτρακτος καὶ ὁ σφαιρικὸς ὄνυξ λέγονται ἐκ τῆς γωνίας τῶν ἡμικυκλίων ὑφ' ὧν περιέχονται, ***ὀρθογώνιοι*** ἢ ***ὀξυγώνιοι*** ἢ ***ἀμβλυγώνιοι.***

Σφαιρικὴ δὲ πυραμὶς λέγεται μέρος τῆς σφαίρας, περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων στερεᾶς γωνίας, ἐχούσης τὴν κορυφὴν εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

Βάσις τῆς σφαιρικῆς πυραμίδος λέγεται τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον, τὸ ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων ὁριζόμενον.

452. **Θεώρημα.** ***Δύο ἄτρακτοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ γωνίαι των, ἢ ὡς τὰ τόξα, τὰ μετροῦντα τὰς γωνίας των.***

Διότι, διπλασιαζομένης τῆς γωνίας τῶν ἡμικυκλίων, διπλασιάζεται προδήλως καὶ ὁ ἄτρακτος καί, τριπλασιαζομένης τριπλασιάζεται· καὶ τὸ αὐτὸ συμβαίνει διὰ πάντα ἀκέραιον ἀριθμόν. Ἐξ οὗ συνάγεται (221) ἡ πρότασις.

Ἔστω Α ὁ τυχὼν ἄτρακτος καὶ Γ ἡ γωνία αὐτοῦ, Α΄ ὁ ἄτρακτος τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ὀρθή· τότε θὰ εἶναι $A : A' = \Gamma : 1$.

Ἐὰν λοιπὸν ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν ὁ ὀρθογώνιος ἄτρακτος Α΄, θὰ εἶναι

$$A : 1 = \Gamma : 1, \text{ ἤτοι } A = \Gamma,$$

δηλαδὴ θὰ ἔχῃ μέτρον ὁ τυχὼν ἄτρακτος τὴν γωνίαν αὐτοῦ Γ (τουτέστι τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἐκφράζει, ἐκ πόσων ὀρθῶν καὶ ἐκ πόσων μερῶν τῆς ὀρθῆς σύγκειται ἡ Γ).

Ἀλλ' ἂν ληφθῇ ὡς μονὰς τὸ ἥμισυ τοῦ εἰρημένου ἀτράκτου Α΄, τουτέστι τὸ τρισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον, ὁ ἄτρακτος Α΄ θὰ παριστᾶται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 2, καὶ ἐκ τῆς προηγουμένης ἀναλογίας προκύπτει τότε $A = 2\Gamma$· μέτρον παντὸς ἀτράκτου εἶναι τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας του.

Σημείωσις. Τὰ περὶ τῶν ἀτράκτων εἰρημένα ἐφαρμόζονται ἀπαράλλακτα καὶ ἐπὶ τῶν σφαιρικῶν ὀνύχων καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως· ὥστε παντὸς σφαιρικοῦ ὄνυχος μέτρον εἶναι τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας του, ἐὰν ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν ὄγκων ἡ σφαι-

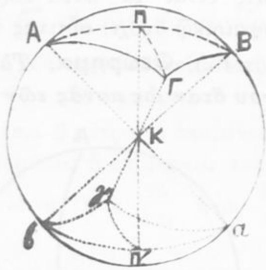
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρική πυραμίς, ἡ ἔχουσα βάσιν τὸ τρισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον.

453. **Θεώρημα.** ***Δύο συμμετρικὰ σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα.***

Ἔστωσαν συμμετρικὰ τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ. Διὰ τῶν τριῶν σημείων Α,Β,Γ, διέρχεται μικρός τις κύκλος τῆς σφαίρας, τοῦ ὁποίου πόλοι ἔστωσαν τὰ σημεῖα Π καὶ Π.' Ἐὰν ἐκ τοῦ Π ἀχθῶσι τόξα μεγίστων κύκλων εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τὰ ΠΑ,ΠΒ,ΠΓ, τὰ τόξα ταῦτα θὰ εἶναι ἴσα (420) ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ Π' ἀχθῶσι τὰ τόξα μεγίστων κύκλων Π'α, Π'β,Π'γ, καὶ ταῦτα θὰ εἶναι ἴσα· διότι τὰ ΠΑ καὶ Π'α μετροῦσι τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ΠΚΑ καὶ Π'Κα· ἄρα εἶναι ἴσα· ὁμοίως εἶναι ΠΒ=Π'β καὶ ΠΓ=Π'γ· ὅθεν συνάγεται

Π'α=Π'β=Π'γ.



Τούτων τεθέντων, τὰ τρίγωνα ΑΠΓ καὶ αΠ' γ ἔχουσι τὰς πλευράς των ἴσας κατὰ μίαν, εἶναι δὲ καὶ ἰσοσκελῆ· ἄρα ἐφαρμόζουσιν (445). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ τρίγωνον ΠΒΓ ἴσον τῷ Π'βγ· καὶ τὸ τρίγωνον ΠΑΒ ἴσον τῷ Π'αβ. Τὰ δύο λοιπὸν συμμετρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ ἐφαρμόζουσιν, ὅταν διαιρεθῶσιν εἰς μέρη· ἄρα εἶναι ἰσοδύναμα.

Σημείωσις. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἡ πρότασις :

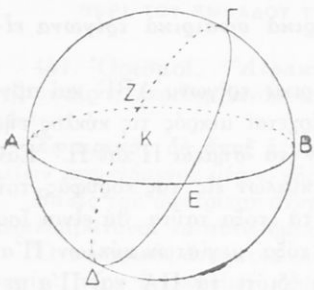
Δύο τριγωνικαὶ σφαιρικαὶ πυραμίδες, ἐὰν ἔχωσι βάσεις συμμετρικάς, εἶναι ἰσοδύναμοι.

454. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν τρεῖς μέγιστοι κύκλοι τέμνωνται ὁπωσδήποτε ἐν τῇ σφαίρᾳ διαιροῦντες τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς εἰς τρίγωνα, τὸ ἄθροισμα δύο τριγώνων κατὰ κορυφὴν*** (ἤτοι μόνον μίαν κορυφὴν ἐχόντων κοινὴν) ***ἰσοῦται τῷ ἀτράκτῳ, ὅστις ἔχει τὴν γωνίαν τῆς κοινῆς κορυφῆς.***

Ἔστωσαν τρεῖς τυχόντες μέγιστοι κύκλοι, οἱ ΑΒΓΔ, ΑΕΒΖ, ΓΕΔΖ, τέμνοντες τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς τὰ ὀκτὼ τρίγωνα ΑΔΕ,ΕΒΓ, κτλ. λέγω ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο ἐκ τούτων κατὰ κορυφὴν κειμένων ὡς τῶν ΑΔΕ,ΕΒΓ, εἶναι ἴσον τῷ ἀτράκτῳ, ὅστις ἔχει τὴν γωνίαν Ε.

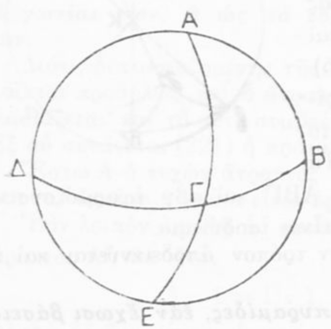
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διότι τὰ τρία ἐπίπεδα τῶν τριῶν μεγίστων κύκλων τέμνονται ἀνὰ δύο κατὰ τὰς διαμέτρους ΑΚΒ,ΓΚΔ,ΕΚΖ, ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΕΒΓ καὶ ΖΑΔ εἶναι συμμετρικὰ καὶ διὰ τοῦτο ἰσοδύναμα· ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν δύο κατὰ κορυφὴν τριγώνων ΑΕΔ+ΕΒΓ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ΑΕΔ+ΖΑΔ, ὅπερ εἶναι ὁ ἄτρακτος ΕΑΖΕΔ ὁ ἔχων τὴν γωνίαν Ε.



Σημείωσις. Καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγωνικῶν σφαιρικῶν πυραμίδων, τῶν ὁποίων βάσεις εἶναι τὰ κατὰ κορυφὴν τρίγωνα ΕΑΔ,ΕΒΓ, ἰσοῦται τῷ σφαιρικῷ ὄνυχι, οὗτινος γωνία εἶναι ἡ Ε.

455. **Θεώρημα.** ***Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ὅταν ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν ληφθῇ τὸ τρισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον, εἶναι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν του ὑπὲρ τὰς δύο ὀρθάς.***



Ἔστω τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ· ἐὰν συμπληρωθῇ ὁ μέγιστος κύκλος ΑΒΕΔΑ καὶ προσεκβληθῶσι τὰ τόξα ΑΓ καὶ ΒΓ πέραν τοῦ Γ, μέχρις οὗ συναντήσωσιν αὐτὸν κατὰ τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, θὰ εἶναι

ΑΒΓ+ΓΒΕ=ἀτράκτῳ Α,

ΑΒΓ+ΑΓΔ=ἀτράκτῳ Β

καὶ ΑΒΓ+ΓΔΕ=ἀτράκτῳ Γ

κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα.

Προσθέτοντες δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη καὶ παρατηροῦντες ὅτι τὰ ἓξ τρίγωνα, ἐξ ὧν σύγκεινται τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἰσοτήτων, ἀποτελοῦσι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἡμισφαιρίου καὶ δὶς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εὑρίσκομεν

2. ΑΒΓ+ἐπιφανείᾳ ἡμισφαιρίου=ἀτρ. Α+ἀτρ. Β+ἀτρ. Γ. καὶ ἐπειδὴ μέτρον τοῦ ἀτράκτου Α εἶναι τὸ 2Α, τοῦ δὲ Β

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸ 2Β καὶ τοῦ Γ τὸ 2Γ, τοῦ δὲ ἡμισφαιρίου τὸ 4 (διότι ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἀποτελεῖται ἐξ ὀκτὼ τρισορθογωνίων τριγώνων) ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται

$$2.(\text{ΑΒΓ}) + 4 = 2(\text{Α}) + 2(\text{Β}) + 2(\text{Γ}),$$

$$\text{ἐξ ἧς } (\text{ΑΒΓ}) = (\text{Α}) + (\text{Β}) + (\text{Γ}) - 2. \qquad (\iota)$$

Ἂν, παραδείγματος χάριν, ὑποτεθῇ

$$(\text{Α}) = \frac{3}{4} \text{ τῆς ὀρθῆς}, (\text{Β}) = \frac{4}{5} \text{ ὀρθῆς καὶ } (\text{Γ}) = \frac{5}{6} \text{ ὀρθῆς},$$

$$\text{θὰ εἶναι } (\text{Α}) + (\text{Β}) + (\text{Γ}) - 2 = \frac{23}{60}$$

ἐπομένως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τὰς γωνίας ταύτας ἔχοντος σφαιρικοῦ τριγώνου θὰ εἶναι τὰ $\frac{23}{60}$ τῆς ἐπιφανείας τοῦ τρισορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου, ἤτοι τὰ $\frac{23}{480}$ τῆς ὅλης ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Θὰ εὑρεθῇ δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου εἰς τετραγωνικὰ μέτρα, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.

Ἂν π.χ., ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἶναι 2 μέτρα, ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς θὰ εἶναι τετρ. μέτρα 16 π., ἐπομένως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος σφαιρικοῦ τριγώνου θὰ εἶναι 16 π. $\frac{23}{480}$ ἤτοι $\frac{23\pi}{30}$, ἤτοι 2τπ,4085.

Οἱ ἀριθμοὶ Α,Β,Γ οἱ τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου ἐκφράζοντες, ἐν τῇ ἰσότητι (ι) πρέπει νὰ ἔχωσι μονάδα τὴν ὀρθὴν γωνίαν. Ἂν λοιπὸν δοθῶσιν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου εἰς μοίρας καὶ πρῶτα λεπτὰ κτλ., ἀνάγομεν αὐτὰς εἰς τὴν ὀρθὴν παρατηροῦντες, ὅτι 1^{0} εἶναι $\frac{1}{90}$ τῆς ὀρθῆς καὶ $1'$ εἶναι $\frac{1}{60}$ τῆς μοίρας ἢ $\frac{1}{5400}$ τῆς ὀρθῆς καὶ $1''$ εἶναι $\frac{1}{60}$ τοῦ $1'$, ἤτοι $\frac{1}{324000}$ τῆς ὀρθῆς. Ἐάν, λόγου χάριν, δοθῇ

$$(\text{Α}) = 69^{0}, (\text{Β}) = 94^{0}, (\text{Γ}) = 83^{0}, 15',$$

$$\text{θὰ εἶναι} (\text{Α}) = \frac{69}{90}, (\text{Β}) = \frac{94}{90}, (\text{Γ}) = \frac{83}{90} + \frac{15}{5400}.$$

456. **Πόρισμα.** ***Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του μεῖον τοσάκις δύο ὀρθαί, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραί του πλὴν δύο ἢ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν του ὑπὲρ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ ὁμωνύμου ἐπιπέδου πολυγώνου.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τοῦτο δεικνύομεν διαιροῦντες τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα, ὡς εἰς τὴν πρότασιν (84).

Σημείωσις. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ ὄγκος τῆς τριγωνικῆς σφαιρικῆς πυραμίδος, ***ὅταν ὡς μονὰς τῶν ὄγκων ληφθῇ ἡ τρισορθογώνιος σφαιρικὴ πυραμίς, τουτέστι τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς σφαίρας,*** εἶναι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τῆς βάσεώς της ὑπὲρ τὰς δύο ὀρθάς.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Ζ΄ βιβλίου

739) Ὀρθογώνιον οὗ αἱ διαγώνιοι εἶναι 0,5 μ. αἱ δὲ διαστάσεις αὐτοῦ ἔχουσι λόγον 3 : 4, στρέφεται περὶ τὴν μικροτέραν αὐτοῦ πλευράν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφανεια, ἡ ὁλικὴ καὶ ὁ ὄγκος τοῦ σχηματιζομένου στερεοῦ.

740) Τραπέζιον ἰσοσκελὲς οὗ γνωρίζομεν τὰς δύο βάσεις καὶ τὸ ὕψος, στρέφεται περὶ τὴν μεγαλυτέραν βάσιν· νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ σχηματιζομένου στερεοῦ.

741) Ἐὰν συνδέσωμεν τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου δι' εὐθείας καὶ περιστρέψωμεν τὸ τρίγωνον περὶ τὴν τρίτην πλευρὰν αὐτοῦ, ὁ ὄγκος τοῦ σχηματιζομένου στερεοῦ εἶναι διπλάσιος τοῦ ὄγκου τοῦ κατὰ τὴν αὐτὴν περιστροφὴν σχηματιζομένου στερεοῦ, ὑπὸ τοῦ τραπεζίου τοῦ ἔχοντος βάσεις τὴν τρίτην πλευρὰν καὶ τὴν συνδέουσαν τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

743) Κανονικὸν ἡμιεξάγωνον στρέφεται περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ σχηματιζομένου στερεοῦ.

742) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου οὗ τὸ ὕψος εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δεδομένων ἀκτίνων τῶν δύο βάσεων.

744) Ὀρθογώνιον τρίγωνον οὗ δίδεται ἡ ὑποτείνουσα καὶ μία τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ, στρέφεται περὶ τὴν ἄγνωστον πλευράν, ὁ δὲ οὕτω σχηματιζόμενος κῶνος τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ, ἀπέχοντος αὐτῆς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὕψους τοῦ κώνου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ μικροῦ κώνου καὶ τοῦ κολούρου κώνου εἰς οὓς διῃρέθη ὁ ἀρχικὸς κῶνος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

745) Ὀρθογώνιον τρίγωνον στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτοῦ. Οἱ σχηματιζόμενοι ὄγκοι εἶναι Ο ὅταν στρέφηται περὶ τὴν ὑποτείνουσαν καὶ Ο΄ καὶ Ο΄΄ ὅταν στρέφηται περὶ τὰς ἄλλας πλευράς. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις

$$\frac{1}{O'^2}+\frac{1}{O''^2}-\frac{1}{O^2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

746) Ὀρθογώνιον τρίγωνον οὗ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν εἶναι 30^{0} στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων καὶ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν σχηματιζομένων στερεῶν.

747) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ κύβου ἐγγεγραμμένου εἰς σφαῖραν δοθείσης ἀκτῖνος.

748) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος σφαίρας ἐγγεγραμμένης εἰς κανονικὸν τετράεδρον δοθείσης ἀκμῆς.

749) Ἐὰν τόξον κυκλικὸν στραφῇ περὶ διάμετρον, διερχομένην δι' ἑνὸς τῶν ἄκρων του, γράφει ζώνην, τῆς ὁποίας ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν χορδὴν τοῦ τόξου.

750) Νὰ γραφῇ σφαῖρα, ἧς ἡ ἐπιφάνεια νὰ διέρχηται διὰ τεσσάρων δοθέντων σημείων, μὴ κειμένων ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.

751) Νὰ ἐγγραφῇ σφαῖρα εἰς τὸ δοθὲν τετράεδρον.

752) Νὰ ἐγγραφῇ σφαῖρα μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ ἐφαπτομένη τριῶν δοθεισῶν σφαιρῶν.

753) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον δύο δοθεισῶν σφαιρῶν.

754) Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον τριῶν δοθεισῶν σφαιρῶν.

755) Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας στερεᾶς γωνίας νὰ εὑρεθῇ ὁ συντομώτερος δρόμος ἀπὸ σημείου εἰς ἄλλο.

Τὰ ἑπόμενα προβλήματα ἂς λυθῶσιν ἀλγεβρικῶς.

756) Εἰς τὸν δοθέντα κῶνον νὰ ἐγγραφῇ κύλινδρος ἔχων κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἴσην τῷ δοθέντι τετραγώνῳ.

757) Τίς ἐκ τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κῶνον ἐγγεγραμμένων κυλίνδρων ἔχει τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν;

758) Νὰ τμηθῇ ἡ δοθεῖσα σφαῖρα δι' ἐπιπέδου οὕτως ὥστε τὸ ἀποτεμνόμενον μικρότερον ἡμισφαιρίου τμῆμα νὰ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸν κῶνον, ὅστις ἔχει βάσιν τὴν τομὴν καὶ κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

759) Εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν νὰ περιγραφῇ κῶνος ἔχων δοθέντα ὄγκον. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ ἐλάχιστος τῶν περὶ τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν περιγεγραμμένων κώνων ἔχει ὕψος διπλάσιον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας.

760) Νὰ τμηθῇ ὁ δοθεὶς κύλινδρος δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου.

761) Ἐκ τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων κυλίνδρων εὑρεῖν τὸν μέγιστον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΠΕΡΙ ΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

457. **Ὁρισμοί.** Τμῆμα εὐθείας τὸ ὁποῖον θεωρεῖται γραφὲν ὑπὸ σημείου κινηθέντος ἐπ᾽ αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τοῦ τμήματος πρὸς τὸ ἄλλο λέγεται ***ἄνυσμα.*** Ἐπὶ παντὸς ἀνύσματος διακρίνομεν τὴν ἀρχήν, (τὸ σημεῖον ἀφ᾽ οὗ ἐξεκίνησε τὸ κινητὸν) τὸ τέλος, (τὸ σημεῖον εἰς ὃ κατέληξε τὸ κινητὸν) καὶ τὴν φοράν, ἥτις εἶναι ἡ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς πρὸς τὸ τέλος. Ἀπαγγέλλεται δὲ πρῶτον τὸ γράμμα τῆς ἀρχῆς.

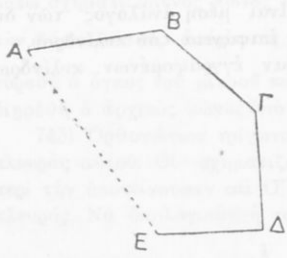
Κατὰ ταῦτα τὸ ἄνυσμα ΑΒ ἔχει ἀρχὴν τὸ Α τέλος τὸ Β καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, τὸ δὲ ἄνυσμα ΒΑ ἔχει ἀρχὴν τὸ Β τέλος τὸ Α καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α.

Δύο ἀνύσματα ὧν ἡ ἀρχὴ τοῦ ἑνὸς εἶναι πέρας τοῦ ἄλλου λέγονται ἀντίθετα· τοιαῦτα εἶναι τὰ ΑΒ καὶ ΒΑ.

Δύο ἀνύσματα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἢ ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν κείμενα, ἂν μὲν ἔχωσι τὴν αὐτὴν φορὰν λέγονται ***ὁμόρροπα,*** ἂν δὲ ἀντίθετον λέγονται ***ἀντίρροπα.***

Δύο ἀνύσματα παράλληλα (δηλ. κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἢ ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν) τὰ ὁποῖα ἐφαρμόζουσι, λέγονται ***ὁμορρόπως ἴσα,*** ἂν εἶναι ὁμόρροπα· ἂν ὅμως εἶναι ἀντίρροπα λέγονται ***ἀντιρρόπως ἴσα.***

Δύο ἢ περισσότερα ἀνύσματα λέγονται ***διαδοχικὰ*** ὅταν τὸ τέλος τοῦ πρώτου εἶναι ἀρχὴ τοῦ δευτέρου, τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἀρχὴ τοῦ τρίτου κ.ο.κ. Τοιαῦτα εἶναι τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ.

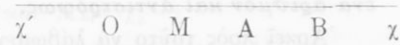


Γεωμετρικὸν ἄθροισμα δοθέντων διαδοχικῶν ἀνυσμάτων λέγεται τὸ ἄνυσμα ὅπερ, ἔχει ἀρχὴν, τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου καὶ τέλος, τὸ τέλος τοῦ τελευταίου ἀνύσματος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Οὕτω τὸ ΑΕ εἶναι τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀνυσμάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ (σχ. προηγούμενον).

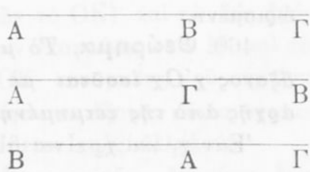
Μῆκος ἀνύσματος. Ἔστω ἄνυσμα ΑΒ κείμενον ἐπὶ εὐθείας χ΄χ, ἐὰν ἐπὶ ταύτης (ἢ ἐπὶ ἄλλης εὐθείας παραλλήλου τῆς χ΄χ) λάβωμεν αὐθαιρέτως ἄνυσμά τι ΟΜ καὶ θεωρήσωμεν τοῦτο ὡς μονάδα, ὁ λόγος $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΟΜ}}$ λέγεται μῆκος τοῦ ἀνύσματος ΑΒ καὶ παρίσταται συμβολικῶς οὕτω (ΑΒ)· εἶναι δηλαδὴ $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΟΜ}}$ =(ΑΒ). Ἂν τὸ ἄνυσμα ΑΒ εἶναι ὁμόρροπον τῷ ΟΜ, τὸ μῆκος (ΑΒ) εἶναι ἀριθμὸς θετικός· εἶναι δὲ ἀρνητικὸς ἂν εἶναι ἀντίρροπον.



Κατὰ ταῦτα τὰ ὁμορρόπως ἴσα ἀνύσματα παρίστανται ὑπὸ ἀριθμῶν ἴσων τὰ δὲ ἀντιρρόπως ἴσα ὑπὸ ἀριθμῶν ἀντιθέτων. Ἤτοι εἶναι (ΑΒ)=−(ΒΑ) καὶ (ΑΒ)+(ΒΑ)=Ο. Ἐπίσης ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι πᾶν ἄνυσμα τῆς εὐθείας χ΄χ (ἢ παραλλήλου πρὸς αὐτὴν) παρίσταται δι᾽ ἀριθμοῦ ἐντελῶς ὡρισμένου καὶ ἀντιστρόφως πᾶς πραγματικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ παριστᾷ ἄνυσμα ὡρισμένον κατὰ μέγεθος καὶ φοράν.

458. **Θεώρημα.** ***Τὸ μῆκος τοῦ γεωμετρικοῦ ἀθροίσματος δύο διαδοχικῶν ἀνυσμάτων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ΑΒ καὶ ΒΓ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν δύο ἀνυσμάτων·*** ἤτοι εἶναι (ΑΓ)=(ΑΒ)+(ΒΓ) οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχωσι τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ, ἐπὶ τῆς εὐθείας.

Διότι ἐκ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ ἓν πάντως εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων· καὶ ἂν μὲν τὸ Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ, τὰ ἀνύσματα ΑΒ, ΒΓ εἶναι ὁμόρροπα καὶ ἡ ἰσότης (ΑΒ)+(ΒΓ)=(ΑΓ) εἶναι προφανής· ἂν δὲ τὸ σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ Α καὶ Β θὰ εἶναι πάλιν (ΑΓ)+(ΓΒ)=(ΑΒ) ἢ (ΑΓ)+(ΓΒ)+(ΒΓ)=(ΑΒ)+(ΒΓ) ἤτοι (ΑΓ)=(ΑΒ)+(ΒΓ)· ἂν δὲ τέλος τὸ Α κεῖται μεταξὺ Β καὶ Γ θὰ εἶναι (ΒΑ)+(ΑΓ)=(ΒΓ) ἢ (ΑΒ)+(ΒΑ)+(ΑΓ)=(ΑΒ)+(ΒΓ) ἤτοι (ΑΓ)=(ΑΒ)+(ΒΓ). Ὥστε εἰς πᾶσαν περίπτωσιν εἶναι (ΑΓ)=(ΑΒ)+(ΒΓ).



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Προσδιορισμὸς θέσεως σημείου ἐπὶ εὐθείας.

459. ***Τὰ σημεῖα ἑκάστης εὐθείας δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν πρὸς τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς ἓν σημεῖον πρὸς ἕνα ἀριθμὸν καὶ ἀντιστρόφως.***

Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ λάβωμεν αὐθαιρέτως δύο σημεῖα τῆς εὐθείας χ΄χ, Ο καὶ Α καὶ ν᾽ ἀντιστοιχίσωμεν αὐτὰ πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 0 καὶ +1· τότε πᾶν ἄλλο σημεῖον τῆς εὐθείας, οἷον τὸ Μ, θὰ παριστᾶται ὑπὸ τοῦ λόγου $\frac{OM}{OA}$, ἤτοι τοῦ μήκους τοῦ ἀνύσματος ΟΜ, μετρηθέντος διὰ τοῦ ΟΑ ὡς μονάδος.

o +1

χ΄ O A M χ

Καλεῖται δὲ τὸ μὲν ἄνυσμα ΟΜ (ὡς καὶ τὸ μῆκος [ΟΜ]) τετμημένη τοῦ σημείου Μ, τὸ σταθερὸν σημεῖον Ο ἀρχὴ τῶν τετμημένων ἡ δὲ εὐθεῖα χ΄χ ἄξων τῶν τετμημένων· λαμβάνεται δὲ ἡ τετμημένη τοῦ Μ θετικῶς μὲν ἂν τὰ ἀνύσματα ΟΜ καὶ ΟΑ ἔχωσι κοινόν τι μέρος, ἀρνητικῶς δὲ ἂν τοὐναντίον· εἰς ἕκαστον σημεῖον εὐθείας ἀντιστοιχεῖ ἑπομένως εἷς ἀριθμὸς παριστῶν τὸ μῆκος τῆς τετμημένης τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς εὐθείας, τὸ ὁποῖον ἐλήφθη ὡς ἀρχὴ τῶν τετμημένων.

Ἀντιστρόφως δὲ εἰς δοθέντα ἀριθμὸν ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον τῆς εὐθείας, τοῦ ὁποίου τετμημένη εἶναι ὁ δοθεὶς ἀριθμός. Θετικὸν μέρος τῆς εὐθείας λέγεται ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου αἱ τετμημέναι τῶν σημείων εἶναι θετικαὶ ἤτοι ἐνταῦθα τὸ Οχ (ἡ δὲ φορὰ ἀπὸ τοῦ Ο πρὸς τὸ χ λέγεται θετικὴ φορὰ τῆς εὐθείας χ΄χ)· ἀρνητικὸν δὲ ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου αἱ τετμημέναι τῶν σημείων εἶναι ἀρνητικαὶ ἤτοι τὸ Οχ΄ (ἡ δὲ φορὰ ἀπὸ τὸ Ο πρὸς τὸ χ΄ λέγεται ἀρνητικὴ φορὰ τῆς εὐθείας χ΄χ).

Ἄξων λέγεται πᾶσα εὐθεῖα ἐφ᾽ ἧς ἡ θετικὴ φορὰ εἶναι ὡρισμένη.

460. **Θεώρημα.** ***Τὸ μῆκος ἀνύσματος ΑΒ κειμένου ἐπὶ ἄξονος χ΄Οχ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῆς τετμημένης τῆς ἀρχῆς ἀπὸ τῆς τετμημένης τοῦ πέρατος.***

Ἐὰν χ_1 καὶ χ_2 εἶναι αἱ τετμημέναι ἀντιστοίχως τῶν ἄκρων

χ΄ O A B χ

Α καὶ Β τοῦ ἀνύσματος ΑΒ θὰ εἶναι (ΟΑ)+(ΑΒ)=(ΟΒ) ἤτοι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$(AB)=(OB)-(OA)$ ἢ $(AB)=\chi_2-\chi_1$.

Ἐφαρμογή. Ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ἀνύσματος ΑΒ ἡ τετμημένη αὐτοῦ χ θὰ εἶναι $\chi=\frac{\chi_1+\chi_2}{2}$ (1) διότι εἶναι

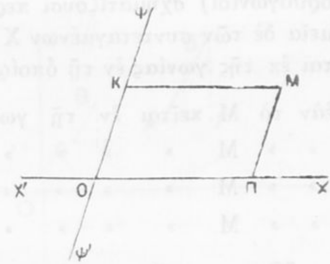
$$AM=\chi-\chi_1 \text{ καὶ } MB=\chi_2-\chi.$$

ἄρα ἔχομεν $\chi-\chi_1=\chi_2-\chi$ ἐξ ἧς λαμβάνομεν τὴν (1).

Εὐθύγραμμοι συντεταγμέναι σημείων ἐπιπέδου.

461. ***Τὰ σημεῖα ἑκάστου ἐπιπέδου δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν πρὸς τὰ ζεύγη τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀνὰ δύο λαμβανομένων· ἓν σημεῖον πρὸς ἓν ζεῦγος καὶ τἀνάπαλιν.***

Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ λάβωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο τυχόντας ἄξονας τεμνομένους κατά τι σημεῖον Ο, ἔστω τοὺς Χ΄ΟΧ καὶ Ψ΄ΟΨ (ἔστω θετικὴ φορὰ τοῦ μὲν Χ΄ΟΧ ἡ ἀπὸ τοῦ Ο πρὸς τὸ Χ, τοῦ δὲ Ψ΄ΟΨ ἡ ἀπὸ τοῦ Ο πρὸς τὸ Ψ καὶ νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Μ τὴν παράλληλον τῷ Χ΄ΟΧ καὶ τὴν παράλληλον τῷ Ψ΄ΟΨ, ὧν ἡ μὲν πρώτη τέμνει τὸν Ψ΄ΟΨ κατά τι σημεῖον Κ, ἡ δὲ δευτέρα τέμνει τὸν Χ΄ΟΧ κατά τι σημεῖον Π καὶ νὰ ἀντιστοιχίσωμεν τὸ σημεῖον Μ πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες παριστῶσι τὰ σημεῖα Π καὶ Κ (ἢ καὶ τὰ ἀνύσματα ΟΠ, ΟΚ) ἐπὶ τῶν δύο ἀξόνων (ἡ μονὰς τοῦ μήκους λαμβάνεται ἡ αὐτὴ ἐπ᾿ ἀμφοτέρων τῶν ἀξόνων).



Οἱ δύο ἀριθμοὶ (ΟΠ), (ΟΚ) λέγονται ***συντεταγμέναι*** εὐθύγραμμοι τοῦ σημείου Μ καὶ γράφονται διὰ τῶν γραμμάτων χ (ὁ παριστῶν τὸ ΟΠ) καὶ ψ (ὁ παριστῶν τὸ ΟΚ)· καὶ τὰ δύο ἀνύσματα ΟΠ, ΟΚ λέγονται ἐπίσης συντεταγμέναι τοῦ Μ· καὶ τὸ μὲν ΟΠ λέγεται ***τετμημένη***, τὸ δὲ ΟΚ ***τεταγμένη*** τοῦ σημείου Μ· οἱ δὲ ἄξονες Χ΄ΟΧ καὶ Ψ΄ΟΨ λέγονται ἄξονες τῶν συντεταγμένων· λαμβάνονται δὲ συνήθως κάθετοι πρὸς ἀλλήλους.

Εἰς ἕκαστον σημεῖον ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦσι ἑπομένως δύο ἀριθμοὶ παριστῶντες τὰ μήκη τῶν συντεταγμένων τοῦ σημείου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὡς πρὸς δεδομένους ἄξονας. 'Αντιστρόφως δὲ εἰς δοθέντας δύο ἀριθμοὺς ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁποίου συντεταγμέναι εἶναι οἱ δοθέντες ἀριθμοί.

Ὅταν ἀπαγγέλλωμεν τὰς συντεταγμένας χ, ψ, σημείου τινὸς Μ, ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὴν τετμημένην χ καὶ ἔπειτα τὴν τεταμένην ψ, γράφομεν δὲ συμβολικῶς Μ(χ,ψ)

Ὅσα σημεῖα ἔχουσι τὴν αὐτὴν τετμημένην ΟΠ, κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῇ Ψ΄ΟΨ· ὅσα δὲ ἔχουσι τὴν αὐτὴν τεταγμένην ΟΚ, κεῖνται ἐπὶ παραλλήλου τῇ Χ΄ΟΧ. Τὰ κείμενα ἐπὶ τῆς Χ΄ΟΧ ἔχουσι τεταγμένην 0, τὰ δὲ κείμενα ἐπὶ τῆς Ψ΄ΟΨ ἔχουσι τετμημένην 0· τὸ δὲ σημεῖον Ο (ἡ ἀρχὴ) ἔχει συντεταγμένας (0,0).

Οἱ δύο ἄξονες Χ΄Χ καὶ Ψ΄Ψ (οἵτινες θὰ ὑποτίθενται ἐφεξῆς ὀρθογώνιοι) σχηματίζουσι περὶ τὸ Ο τέσσαρας γωνίας· τὰ σημεῖα δὲ τῶν συντεταγμένων Χ καὶ Ψ σημείου τινος Μ ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς γωνίας ἐν τῇ ὁποίᾳ κεῖται τὸ Μ· εἶναι δὲ

ἐὰν	τὸ	Μ	κεῖται	ἐν	τῇ	γωνίᾳ ΧΟΨ	χ θετικὸν	ψ θετ.
»	»	Μ	»	»	»	» ΨΟΧ΄	χ ἀρνητικ.	ψ θετ.
»	»	Μ	»	»	»	» Χ΄ΟΨ΄	χ »	ψ ἀρν.
»	»	Μ	»	»	»	» Ψ΄ΟΧ	χ θετικὸν	ψ »

Ὥστε γνωρίζοντες τὴν γωνίαν ἐντὸς τῆς ὁποίας κεῖται τὸ Μ γνωρίζομεν καὶ τὰ σημεῖα τῶν συντεταγμένων αὐτοῦ, ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰ σημεῖα τῶν συντεταγμένων σημείου τινος Μ, γνωρίζομεν καὶ τὴν γωνίαν, ἐντὸς τῆς ὁποίας κεῖται· οὕτω σημεῖόν τι οὗ ἀμφότεραι αἱ συντεταγμέναι εἶναι ἀρνητικαὶ κεῖται ἐν τῇ τρίτῃ γωνίᾳ Χ΄ΟΨ΄ κ.ο.κ.

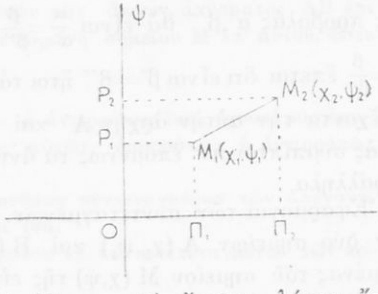
Συντεταγμέναι προβολαὶ ἀνύσματος

462. Ἔστωσαν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ οἱ ἄξονες ΟΧ καὶ ΟΨ καὶ ἄνυσμά τι $Μ_1Μ_2$ καὶ προβολαὶ τῶν ἄκρων αὐτοῦ ἐπὶ μὲν τοῦ ἄξονος ΟΧ τὰ σημεῖα $Π_1, Π_2$ ἐπὶ δὲ τοῦ ΟΨ τὰ $Ρ_1, Ρ_2$· τὰ ἀνύσματα $Π_1Π_2$ καὶ $Ρ_1Ρ_2$ καλοῦνται συντεταγμέναι προβολαὶ τοῦ ἀνύσματος $Μ_1Μ_2$ καὶ τὸ μὲν $Π_1Π_2$ λέγεται τετμημένη προβολὴ τοῦ ἀνύσματος $Μ_1Μ_2$, τὸ δὲ $Ρ_1Ρ_2$ τεταγμένη προβολὴ αὐτοῦ.

Ἔστω δὲ ἤδη $Μ_1(χ_1, ψ_1), Μ_2(χ_2, ψ_2)$ καὶ α καὶ β τὰ μήκη

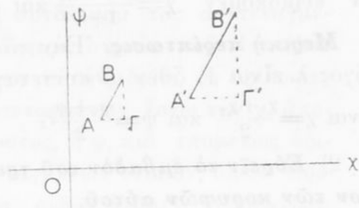
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$(\Pi_1\Pi_2)$ καὶ (P_1P_2), ὁπότε ἔχομεν $\alpha=\chi_2-\chi_1$ καὶ $\beta=\psi_2-\psi_1$· ἤτοι ***αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ ἀνύσματος ἰσοῦνται μὲ τὰς διαφορὰς τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων τῶν ἄκρων αὐτοῦ.***



463. **Θεώρημα.** ***Αἱ ὁμώνυμοι συντεταγμέναι προβολαὶ δύο ἀνυσμάτων παραλλήλων εἶναι ἀνάλογοι καὶ ἔχουσι λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν παραλλήλων ἀνυσμάτων.***

Διότι ἂν τοιαῦτα ἀνύσματα εἶναι τὰ ΑΒ καὶ Α′Β′ καὶ φέρωμεν τὰς ΑΓ καὶ Α′Γ′ παραλλήλους τῷ ἄξονι Οχ καὶ τὰς ΒΓ καὶ Β′Γ′ παραλλήλους τῷ ἄξονι Οψ σχηματίζονται τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ μὲν συντεταγμέναι προβολαὶ τοῦ ἀνύσματος ΑΒ εἶναι ὁμορρόπως ἴσαι πρὸς τὰ ἀνύσματα ΑΓ,ΓΒ καὶ αἱ τοῦ ἀνύσματος Α′Β′ εἶναι ὁμορρόπως ἴσαι πρὸς τὰ Α′Γ′, Γ′Β′· τὰ δὲ τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ εἶναι ὅμοια· ὥστε ἂν αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ Α′Β′ εἶναι ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι, θὰ εἶναι καὶ αἱ ΑΓ,Α′Γ′ ὡς καὶ αἱ ΓΒ,Γ′Β′ ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι· ἐπομένως αἱ ἀναλογίαι $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}=\frac{\Gamma'B'}{\Gamma B}$ ἀληθεύουσι καὶ κατὰ τὰς ἀπολύτους τιμὰς καὶ κατὰ τὰ σημεῖα.



464. Ἀντιστρόφως δέ· ***ἂν δύο ἀνυσμάτων, αἱ ὁμώνυμοι συντεταγμέναι προβολαὶ εἶναι ἀνάλογοι, τὰ ἀνύσματα εἶναι παράλληλα.***

Ἔστωσαν τὰ ἀνύσματα ΑΒ καὶ Α′Β′ ὧν αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ α,β καὶ α′,β′ δι᾽ ἃς ἔχομεν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$· λέγω ὅτι τὰ ἀνύσματα ταῦτα εἶναι παράλληλα. Διότι ἂν τὸ Α′Β′ δὲν ἦτο παράλληλον πρὸς τὸ ΑΒ καὶ φέρομεν ἐκ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ Α΄ τὸ ἄνυσμα Α΄Β΄΄ παράλληλον τῷ ΑΒ ἔχον συντεταγμένας προβολὰς α΄,β΄΄ θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta''}$. ἐπειδὴ δὲ ἐδόθη καὶ $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$ ἔπεται ὅτι εἶναι $\beta'=\beta''$ ἤτοι τὰ ἀνύσματα Α΄Β΄ καὶ Α΄Β΄΄ ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α΄ καὶ ἴσας συντεταγμένας προβολὰς συμπίπτουσιν· ἑπομένως τὰ ἀνύσματα ΑΒ καὶ Α΄Β΄ εἶναι παράλληλα.

Ἐφαρμογαὶ τῶν συντεταγμένων. 1) Ἐκ τῶν συντεταγμένων δύο σημείων Α (χ_1,ψ_1) καὶ Β (χ_2,ψ_2) εὑρεῖν τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου Μ (χ,ψ) τῆς εὐθείας ΑΒ, εἰς ὃ ὁ λόγος ΑΜ : ΜΒ νὰ εἶναι ἴσος τῷ δοθέντι ἀριθμῷ λ.

Διότι γνωρίζομεν (462) ὅτι εἶναι $\frac{\chi-\chi_1}{\chi_2-\chi}=\lambda$ καὶ $\frac{\psi-\psi_1}{\psi_2-\psi}=\lambda$ ἐξ ὧν εὑρίσκομεν $\chi=\frac{\chi_1+\lambda\cdot\chi_2}{1+\lambda}$ καὶ $\psi=\frac{\psi_1+\lambda\psi_2}{1+\lambda}$.

Μερικὴ περίπτωσις. Ἐὰν τὸ Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ, ὁ λόγος λ εἶναι 1, ὅθεν αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου Μ τῆς ΑΒ εἶναι $\chi=\frac{\chi_1+\chi_2}{2}$ καὶ $\psi=\frac{\psi_1+\psi_2}{2}$.

2) ***Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἐκ τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν αὐτοῦ.***

Αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν ἀγόμεναι τεταγμέναι σχηματίζουσι μετὰ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ ἄξονος Οχ τρία τραπέζια, ὧν τὰ ἐμβαδὰ εὑρίσκονται ἀμέσως ἐκ τῶν συντεταγμένων, ἐκ δὲ τῶν τραπεζίων τούτων συντίθεται καὶ τὸ τρίγωνον· παριστῶντες δὲ διὰ (χ_1,ψ_1), (χ_2,ψ_2), (χ_3,ψ_3) τὰς συντεταγμένας τῶν κορυφῶν εὑρίσκομεν διὰ τοῦ ῥηθέντος τρόπου τὸν ἑξῆς τύπον διὰ τὸ ἐμβαδὸν Ε.

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\left|(\chi_1\psi_2-\chi_2\psi_1)+(\chi_2\psi_3-\chi_3\psi_2)+(\chi_3\psi_1-\chi_1\psi_3)\right|$$

Σημείωσις. Ἡ τάξις τῶν κορυφῶν πρέπει νὰ λαμβάνηται τοιαύτη ὥστε νὰ προκύπτῃ θετικὸν τὸ Ε.

Ἀσκήσεις.

762) Ἐκ τῆς ἀποδειχθείσης ἰσότητος (ΑΒ)+(ΒΓ)=(ΑΓ) (458) νὰ ἀποδειχθῶσιν αἱ

(ΑΒ)+(ΒΓ)+(ΒΔ)=(ΑΔ)

(ΑΒ)+(ΒΓ)+(ΓΔ)+(ΔΕ)=(ΑΕ)

. . . .

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπωσδήποτε καὶ ἂν κεῖνται τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,Ε.. ἐπὶ τῆς εὐθείας.

763) Δεδομένων τῶν τετμημένων τῶν ἄκρων ἀνύσματος ΑΒ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΧ, νὰ εὑρεθῇ ἡ τετμημένη σημείου Μ ἐπ' αὐτοῦ, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{(AM)}{(MB)}=\lambda$.

764) Δύο ἀνύσματα ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσα, ἔχουσι τὰς ὁμονύμους συντεταγμένας προβολὰς αὐτῶν, ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσας.

765) Τὰ ἀθροίσματα τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων τῶν ἀπέναντι κορυφῶν παραλληλογράμμου εἶναι ἴσα.

766) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν πολυγώνου ἐκ τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν αὐτοῦ.

Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν ἐξισώσεων.

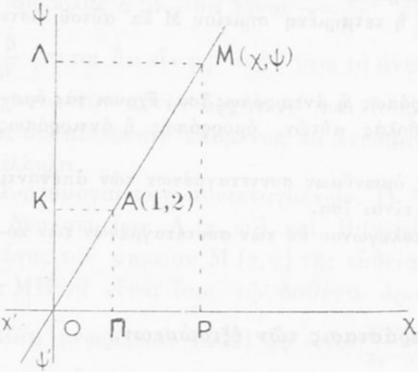
465. Ἐὰν δοθῇ μία ἐξίσωσις, συνδέουσα τὰς συντεταγμένας χ, ψ, ὑπάρχουσιν ἐν γένει ἄπειρα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ὧν αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουσιν αὐτήν, διότι, ἂν ὁρίσωμεν αὐτοβούλως τὴν μίαν ἐκ τῶν συντεταγμένων, ἔστω τὴν χ, ἀπομένει εἰς τὴν ἐξίσωσιν μία ἄγνωστος, ἡ ψ, καὶ ἑπομένως ὁρίζεται καὶ αὐτή· ἐκ δὲ τῶν συντεταγμένων τούτων, ἀφοῦ ὡρίσθησαν, ὁρίζεται καὶ τὸ σημεῖον· οὕτως ἔχομεν ἓν σημεῖον, οὗτινος αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουσι τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν· ἐὰν δὲ εἰς τὴν χ δώσωμεν σειράν τινα τιμῶν, λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως σειρὰν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς ψ (ἐάν, λόγου χάριν, ἡ ἐξίσωσις εἶναι $\psi=3\chi$ καὶ ὑποθέσωμεν $\chi=0$, 1,2,3...., εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως $\psi=0$, 3,6,9...)· τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν ἐν γένει σειρὰν σημείων, ὧν αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν· ἐπειδὴ δέ, ἂν αἱ τιμαὶ τῆς χ προβαίνωσιν αὐξανόμεναι μικρὸν κατὰ μικρόν, καὶ αἱ τιμαὶ τῆς ψ μεταβάλλονται μικρὸν κατὰ μικρόν, ἐννοοῦμεν, ὅτι ὁ τόπος τῶν σημείων, ὧν αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν, εἶναι ἐν γένει γραμμή τις· τὴν γραμμὴν δὲ ταύτην λέγομεν, ὅτι παριστᾷ ἡ ἐξίσωσις.

Γενικῶς δὲ γραμμήν τινα λέγομεν, ὅτι παριστᾷ ἐξίσωσίς τις $\sigma(\chi,\psi)=0$, τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων, ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουσαι τὴν ἐξίσωσιν.

Ὡς παράδειγμα ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\psi=2\chi$ τῆς ὁποίας θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν γραμμὴν ἣν παριστᾷ. Διὰ $\chi=0$ εὑρίσκομεν $\psi=0$·

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἑπομένως ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων Ο ἀνήκει εἰς τὴν ζητουμένην γραμμήν· διὰ $\chi=1$ εὑρίσκομεν $\psi=2$· τὸ σημεῖον λοιπὸν Α (1,2) ἀνήκει ὡσαύτως εἰς τὴν ζητουμένην γραμμήν, ἥτις λέγω ἤδη ὅτι εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς Ο καὶ τοῦ Α(1,2).



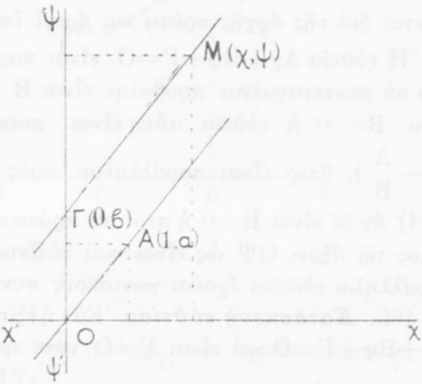
Καὶ πράγματι πᾶν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου τῶν θεωρουμένων ἀξόνων οὗ αἱ συντεταγμέναι χ καὶ ψ ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν $\psi=2\chi$ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΑ, διότι τοῦ μὲν ἀνύσματος ΟΑ συντεταγμέναι προβολαὶ εἶναι αἱ 1,2 τοῦ δὲ ΟΜ συντεταγμέναι προβολαὶ εἶναι αἱ χ,ψ· ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις $\psi=2\chi$ γράφεται $\frac{\chi}{1}=\frac{\psi}{2}$, ἕπεται ὅτι τὰ ἀνύσματα ΟΜ καὶ ΟΑ ὧναί συντεταγμέναι προβολαὶ εἶναι ἀνάλογοι, εἶναι παράλληλα (464), ἑπομένως τὰ Ο,Α καὶ Μ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Ἀντιστρόφως δὲ πᾶν σημεῖον Μ τῆς εὐθείας ΟΑ ἔχει συντεταγμένας χ καὶ ψ, αἵτινες ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν $\psi=2\chi$· διότι τὰ ἀνύσματα ΟΜ καὶ ΟΑ ὄντα παράλληλα ἔχουσι τὰς συντεταγμένας αὐτῶν προβολὰς ἀναλόγους (463)· ἔχομεν ἄρα $\frac{\chi}{1}=\frac{\psi}{2}$ ἤτοι $\psi=2\chi$. Ὁμοίως δεικνύεται καὶ γενικῶς ὅτι ***πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\psi=\alpha\chi$ ἔνθα α εἶναι ἀριθμός τις ὡρισμένος, παριστᾷ τὴν εὐθεῖαν, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς Ο καὶ τοῦ σημείου (1, α). Ἀντιστρόφως δὲ πᾶσα εὐθεῖα ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς Ο καὶ τοῦ σημείου (1,α) παρίσταται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi=\alpha\chi$.***

Ἔστω ἤδη ἡ ἐξίσωσις $\psi=\alpha\chi+\beta$ (2)· αὕτη παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον τῇ εὐθείᾳ $\psi=\alpha\chi$ τέμνουσα τὸν ἄξονα τῶν ψ κατὰ τὸ σημεῖον (0,β). Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τοῦτο ἂς λάβωμεν σημεῖόν τι Μ (χ,ψ) τοῦ ἐπιπέδου, οὗ αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν $\psi=\alpha\chi+\beta$ ἥτις γράφεται $\frac{\psi-\beta}{\alpha}=\frac{\chi}{1}$. ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

χ καὶ ψ−β εἶναι συντεταγμέναι προβολαὶ τοῦ ἀνύσματος ΓΜ ἐνῷ τὰ 1, α εἶναι συντεταγμέναι προβολαὶ τοῦ ἀνύσματος ΟΑ· ἐπειδὴ δὲ ὡς φαίνεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\frac{\psi-\beta}{\alpha}=\frac{\chi}{1}$ αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τῶν ἀνυσμάτων ΓΜ καὶ ΟΑ εἶναι ἀνάλογοι, ἕπεται ὅτι τὰ ἀνύσματα ταῦτα εἶναι παράλληλα. Ἀντιστρόφως δὲ παντὸς σημείου Μ τοῦ ΓΜ, αἱ συντεταγμέναι χ,ψ ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν $\psi=\alpha\chi+\beta$· διότι αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ χ, ψ−β τοῦ ΓΜ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς συντεταγμένας προβολὰς 1, α τοῦ ΟΑ ἤτοι εἶναι $\frac{\psi-\beta}{\alpha}=\frac{\chi}{1}$ ἤτοι εἶναι $\psi=\alpha\chi+\beta$.



Παρατηρήσεις. Πᾶσα ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ συνδέουσα τὰς συντεταγμένας χ,ψ, ἤτοι πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $A\chi+B\psi+\Gamma=0$ (1) (ἔνθα Α,Β,Γ εἶναι σταθερὰ) παριστᾷ εὐθεῖαν γραμμήν· διότι ἂν μὲν εἶναι Β διάφορον τοῦ 0 λύεται πρὸς ψ καὶ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\psi=-\frac{A}{B}\chi-\frac{\Gamma}{B}$ ἢ θέτοντες $\alpha=-\frac{A}{B}$ καὶ $\beta=-\frac{\Gamma}{B}$, $\psi=\alpha\chi+\beta$· ἂν δὲ εἶναι $B=0$, λύεται πρὸς τὴν χ καὶ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\chi=-\frac{\Gamma}{A}$ ἢ θέτοντες $\gamma=-\frac{\Gamma}{A}$, $\chi=\gamma$· παριστᾷ δὲ τότε εὐθεῖαν παράλληλον τῇ ΟΨ, ἂν δὲ εἶναι $A=0$ ἡ ἐξίσωσις τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\psi=\beta$ καὶ παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον τῇ ΟΧ. Εὐκόλως δὲ δεικνύεται ὅτι καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει· ***ἤτοι πᾶσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἔχει ἐξίσωσιν πρωτοβάθμιον*** τουτέστιν αἱ δύο συντεταγμέναι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

χ,ψ παντὸς σημείου αὐτῆς συνδέονται διὰ μιᾶς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς (1).

Ὁ ἀριθμὸς $\alpha=-\frac{A}{B}$ καλεῖται ***γωνιακὸς συντελεστὴς*** τῆς εὐθείας $A\chi+B\psi+\Gamma=0$.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν ἵνα ἡ εὐθεῖα $A\chi+B\psi+\Gamma=0$ διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἵνα εἶναι $\Gamma=0$.

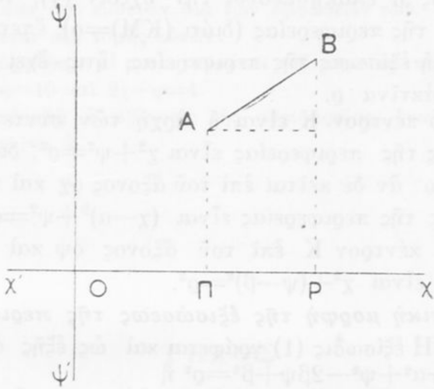
Ἡ εὐθεῖα $A\chi+B\psi+\Gamma=O$. εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἄνυσμα οὗ συντεταγμέναι προβολαὶ εἶναι B καὶ —A διότι ἐὰν μὲν εἶναι $B\neq 0$ ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι παράλληλος τῷ ἀνύσματι $(1,-\frac{A}{B})$, ὅπερ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἄνυσμα $(B,-A)$ (464)· ἂν δὲ εἶναι $B=0$ ἡ περὶ οὗ πρόκειται εὐθεῖα εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι ΟΨ ὡς εἶναι καὶ τὸ ἄνυσμα $(B,-A)$. Ὥστε αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ἔχουσι γωνιακοὺς συντελεστὰς ἴσους.

465. ***Κατασκευὴ εὐθείας***. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας εἶναι. $A\chi+B\psi+\Gamma=O$ καὶ εἶναι $\Gamma=O$, τότε ἡ εὐθεῖα αὕτη διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ διὰ τοῦ σημείου $(1,-\frac{B}{A})$ ἂν δὲ εἶναι $\Gamma\neq O$ τότε κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν, εὑρίσκοντες δύο σημεῖα π. χ. τὰ σημεῖα εἰς ἃ αὕτη συναντᾷ τοὺς ἄξονας συντεταγμένων. ἀλλὰ τὸ σημεῖον εἰς ὃ αὕτη συναντᾷ τὸν ἄξονα Χ΄Χ ἔχει τεταγμένην 0 ἤτοι εἶναι $\psi=0$ καὶ ἡ τετμημένη αὐτοῦ εὑρίσκεται ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $A\chi+\Gamma=O$ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\chi=-\frac{\Gamma}{A}$ ἐπίσης τὸ σημεῖον εἰς ὃ αὕτη συναντᾷ τὸν ἄξονα Ψ΄Ψ ἔχει τετμημένην 0 ἤτοι εἶναι $\chi=0$· ἡ τεταγμένη του ἄρα εὑρίσκεται ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $B\psi+\Gamma=O$, ἥτις δίδει $\psi=-\frac{\Gamma}{B}$ ὥστε ἡ εὐθεῖα ἡ ζητουμένη διέρχεται διὰ τῶν σημείων $(-\frac{\Gamma}{A},0)$, $(0,-\frac{\Gamma}{B})$.

467. **Μῆκος ἀνύσματος**. Τὸ μῆκος ἀνύσματος AB οὗ δίδονται αἱ συντεταγμέναι τῶν ἄκρων αὐτοῦ εὑρίσκεται εὐκόλως ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΙΒ τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἐὰν φέρωμεν τὰς τεταγμένας ΑΠ καὶ ΒΡ ὡς καὶ τὴν παράλλη-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

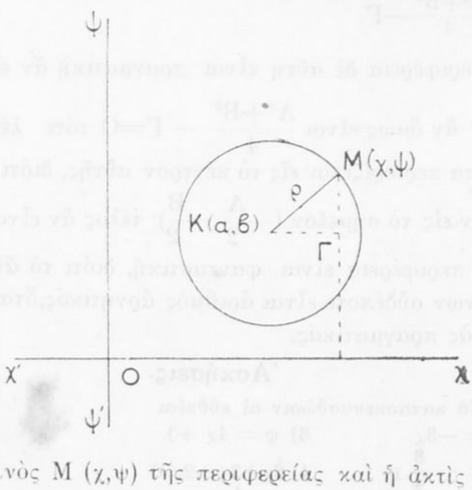
λον τῷ ἄξονι Οχ, ΑΙ. Οὕτω ἂν εἶναι Α (χ_1,ψ_1), Β $(\chi_2\psi_2)$, θὰ ἔχωμεν $(AB)^2=(AI)^2+(IB)^2$ ἢ $(AB)^2=(\chi_2-\chi_1)^2+(\psi_2-$



$\psi_1)^2$ (462) ἂν δὲ τὸ Α εἶναι ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων τότε ἔχομεν $(OB)^2=\chi_2{}^2+\psi_2{}^2$.

'Εξίσωσις περιφερείας

468. Ἔστω περιφέρεια κύκλου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν ἀξόνων οχ, οψ ἔχουσα κέντρον Κ (α,β) καὶ ἀκτῖνα ϱ· αἱ συντεταγμέναι



σημείου τινὸς Μ (χ,ψ) τῆς περιφερείας καὶ ἡ ἀκτὶς ϱ σχημα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τίζουσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐξ οὗ προκύπτει ἀμέσως ἡ σχέσις $(\chi-\alpha)^2+(\psi-\beta)^2=\varrho^2$ (1)· ἐπειδὴ δὲ ὅταν αἱ συντεταγμέναι σημείου τινος Μ ἐπαληθεύουσι τὴν σχέσιν (1), τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας (διότι (ΚΜ)=ϱ), ἕπεται ὅτι ἡ σχέσις (1) εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον τι Κ (α,β) καὶ ἀκτῖνα ϱ.

Ἂν τὸ κέντρον Κ εἶναι ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων τότε ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας εἶναι $\chi^2+\psi^2=\varrho^2$, διότι εἶναι τότε $\alpha=0$, $\beta=0$· ἂν δὲ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος οχ καὶ εἶναι Κ $(\alpha,0)$ ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας εἶναι $(\chi-\alpha)^2+\psi^2=\varrho^2$· ὁμοίως ἂν κεῖται τὸ κέντρον Κ ἐπὶ τοῦ ἄξονος οψ καὶ εἶναι Κ $(0,\beta)$ τότε αὕτη εἶναι $\chi^2+(\psi-\beta)^2=\varrho^2$.

Γενικὴ μορφὴ τῆς ἐξισώσεως τῆς περιφερείας.

469. Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς ἀναπτυσσομένη $\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2+\psi^2-2\beta\psi+\beta^2=\varrho^2$ ἢ
$\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$ (2) ἂν θέσωμεν $-2\alpha=A$, $-2\beta=B$ καὶ $\alpha^2+\beta^2-\varrho^2=\Gamma$.

Γενικῶς ἡ ἐξίσωσις (2) παριστᾷ περιφέρειαν κύκλου· διότι δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $(\chi+\frac{A}{2})^2+(\psi+\frac{B}{2})^2=\frac{A^2+B^2}{4}-\Gamma$ (3) ἡ τελευταία δὲ αὕτη ἐξίσωσις παριστᾷ ἐξίσωσιν περιφερείας κύκλου, ἥτις ἔχει κέντρον $K(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})$ καὶ ἀκτῖνα $\frac{A^2+B^2}{4}-\Gamma$.

Ἡ περιφέρεια δὲ αὕτη εἶναι πραγματικὴ ἂν εἶναι $\frac{A^2+B^2}{4}-\Gamma>0$· ἂν ὅμως εἶναι $\frac{A^2+B^2}{4}-\Gamma=0$ τότε λέγομεν, ὅτι ἡ περιφέρεια περιορίζεται εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς, διότι ἐπαληθεύεται μόνον εἰς τὸ σημεῖον $(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})$· τέλος ἂν εἶναι $\frac{A^2+B^2}{4}-\Gamma<0$ ἡ περιφέρεια εἶναι φανταστική, διότι τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων οὐδέποτε εἶναι ἀριθμὸς ἀρνητικός, ὅταν τὰ χ,ψ λάβωσι τιμὰς πραγματικάς.

Ἀσκήσεις.

767) Νὰ κατασκευασθῶσιν αἱ εὐθεῖαι

1) $\psi=-3\chi$ 3) $\psi=4\chi+1$

2) $\psi=-\frac{3}{4}\chi$ 4) $2\chi+3\psi+2=0$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

768) Ἵνα δύο ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ παριστῶσι τὴν αὐτὴν εὐθείαν πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἵνα οἱ ἀντίστοιχοι συντελεσταὶ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι.

769) Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν διὰ τῶν ἐξισώσεών των, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ συντεταγμέναι τῆς τομῆς αὐτῶν.

770) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν $4\chi-\psi=10$ καὶ $2\chi-\psi=4$.

771) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας ἐχούσης κέντρον $(-3,4)$ καὶ ἀκτῖνα 2.

ΤΕΛΟΣ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

168. Ἵνα δύο ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ παριστάνουν τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἵνα οἱ ἀντίστοιχοι συντελεσταὶ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι.

169. Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν διὰ τῶν ἐξισώσεών των, νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῆς τομῆς αὐτῶν.

170. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν $4x-y=10$ καὶ $2x-y=4$.

171. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας ἐχούσης κέντρον $(-3,4)$ καὶ ἀκτῖνα 8.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

024000020130

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής