ΙΩΑΝΝΟΥ ΤΑΜΠΑΚΟΠΟΥΛΟΥ
Πρωτοβαθμίου καθηγ. τῶν μαθηματικῶν τοῦ ἐν Σιατίστη (Μακεδονίας) Γυμνασίου.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

Τῶν μαθητῶν καὶ μαθητριῶν τῆς Α΄, Β΄ καὶ Γ΄ τάξεως τῶν Ἑλληνικῶν Σχολείων τῶν ἀστικῶν καὶ τῶν ἀνωτέρων Παρθεναγωγείων καὶ τῶν ἀντιστοίχων τάξεων τῶν ἄλλων σχολείων.

— ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΕΤΑΡΤΗ —

ΤΙΜΗ ΔΡ. 28.30

Βιβλιόσημον Δρ.	10.50	
Φορόσημον »	2.10	Ὑπουργ. ἀπόφ. 55.649 / 7-10-1926
	12.60	

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
Ἐκδοτικὸς Οἶκος Δ. καὶ Π. Δημητράκου
56. — Ὁδὸς Σταδίου — 56.
1926

ΙΩΑΝΝΟΥ ΤΑΜΠΑΚΟΠΟΥΛΟΥ
Πρωτοβαθμίου καθηγ. τῶν μαθηματικῶν τοῦ ἐν Σιατίστῃ (Μακεδονίας) Γυμνασίου.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

τῶν μαθητῶν καὶ μαθητριῶν τῆς Α', Β' καὶ Γ' τάξεως τῶν Ἑλληνικῶν Σχολείων τῶν ἀστικῶν καὶ τῶν ἀνωτέρων Παρθεναγωγείων καὶ τῶν ἀντιστοίχων τάξεων τῶν ἄλλων σχολείων.

— ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΕΤΑΡΤΗ —

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
Ἐκδοτικὸς Οἶκος Δ. καὶ Π. Δημητράκου
56. — Ὁδὸς Σταδίου — 56.
1926

ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ

ΕΚ ΤΗΣ ΕΙΣΗΓΗΤΙΚΗΣ ΕΚΘΕΣΕΩΣ

Ὁ συγγραφεὺς συμμορφωθεὶς πρὸς τὰς πλείστας τῶν γενομένων ὑποδείξεων διὰ τὸ προηγουμένως ὑποβληθὲν βιβλίον του ***ἐβελτίωσεν ἀρκούντως*** τοῦτο ***ἀπό τε διδακτικῆς*** καὶ ***ἀπὸ ἐπιστημονικῆς ἀπόψεως.***

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ***ἰδιόχειρον*** ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τῶν ἐκδοτῶν θεωρεῖται ὡς ἐκ ***κλεψιτυπίας*** προερχόμενον καὶ ***καταδιώκεται*** κατὰ τὸν νόμον.

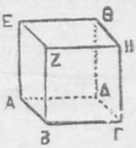
Ἡ παροῦσα πρακτικὴ γεωμετρία εἶναι ***διῃρημένη εἰς τρία βιβλία*** προωρισμένα ἀντιστοίχως ***διὰ τὰς τρεῖς τάξεις τῶν Ἑλληνικῶν*** σχολείων καὶ τῶν ἀστικῶν σχολείων τῶν θηλέων.

Ε ΠΡΩΤΟΝ

ΕΠΟΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΙΣ ΤΩΝ ΑΠΛΟΥΣΤΑΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΚΑΙ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΤΑΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Περὶ κύβου.

1. Τὸ στερεὸν τοῦτο σῶμα [1], ὅπερ ἀπεικονίζεται διὰ τοῦ παραπλεύρως σχήματος, καλεῖται κύβος.



Σχ. 1.

2. Ὄγκος τοῦ κύβου. Ὁ κύβος οὗτος (ὡς καὶ πᾶν σῶμα) κατέχει ὡρισμένον τινὰ χῶρον ἐν τῷ διαστήματι. Ὁ χῶρος οὗτος καλεῖται ὄγκος τοῦ κύβου (ἢ τοῦ σώματος).

3. Ἐπιφάνεια τοῦ κύβου. Πάντα τὰ ἄκρα τοῦ κύβου (ὡς καὶ παντὸς σώματος) ὁμοῦ λαμβανόμενα καλοῦνται ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

4. Ἕδραι τοῦ κύβου. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ διάφορα ταῦτα μέρη [2], τὰ ὁποῖα καλοῦνται ἕδραι τοῦ κύβου. Εἶναι δὲ ἐν ὅλῳ ἕξ.

5. Ἀκμαὶ τοῦ κύβου. Αἱ ἕδραι τοῦ κύβου τέμνονται ἀνὰ δύο. Αἱ τομαὶ δὲ αὗται τῶν ἑδρῶν καλοῦνται ἀκμαὶ [3] τοῦ κύβου.

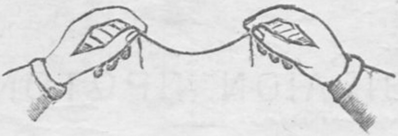
---

1. Ὁ διδάσκων δεικνύει εἰς τοὺς μαθητὰς κύβον.
2. Ταῦτα δεικνύει ὁ διδάσκων. Καὶ ἐν γένει, ὁσάκις ἀπαιτεῖ ἡ διδασκαλία, πρέπει ὁ διδάσκων νὰ δεικνύῃ εἰς τοὺς μαθητὰς τὰ στερεὰ ἢ τὰ μέρη τούτων ἢ τὰ γεωμετρικὰ ὄργανα κλπ.
3. Οἱ μαθηταὶ προκαλούμενοι ἀριθμοῦσι ταύτας εὑρίσκοντες ὅτι εἶναι 12.

Περὶ γραμμῶν καὶ σημείων.

6. Πᾶσαι αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου ἔχουσι τὸ αὐτὸ σχῆμα ἢ μορφήν· ὁμοίως δὲ καὶ λεπτὸν νῆμα ἢ θρὶξ κτλ. τεταμένα (σχ. 2), ἐνῷ μὴ τεταμένα ἔχουσι διάφορον (σχ. 3). Τὰ πρῶτα σχήματα καλοῦνται εὐθεῖαι γραμμαὶ ἢ ἁπλῶς εὐθεῖαι, τὰ δὲ δεύτερα καμπύλαι γραμμαί.

Σχ. 2.



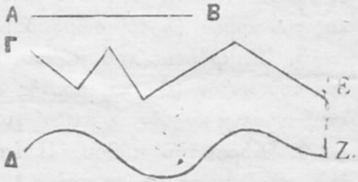
Σχ. 3.

Δύο δὲ ἢ πλείονες διαδοχικαὶ ἀκμαὶ τοῦ κύβου (§ 1) ἀποτελοῦσι σχῆμα συνιστάμενον ἐξ εὐθειῶν χωρὶς τὸ ὅλον νὰ εἶναι εὐθεῖα· οἷον αἱ γραμμαὶ ΑΒΓ ἢ ΑΒΖΗ. Τὰ τοιαῦτα σχήματα καλοῦνται τεθλασμέναι γραμμαί.

7. Τὰ ἄκρα γραμμῆς ἢ μέρους γραμμῆς ἢ τὸ μέρος, ἔνθα τέμνονται δύο γραμμαί, καλοῦνται σημεῖα.

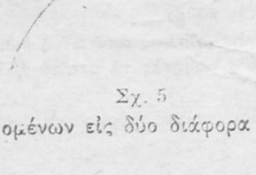
8. Τὰς γραμμὰς καὶ τὰ σημεῖα δυνάμεθα νὰ γράφωμεν ἐπὶ τοῦ πίνακος ἢ τοῦ χάρτου καὶ κεχωρισμένως τῶν σωμάτων, εἰς ἃ εὑρίσκονται. Π. χ.

9. Ἵνα δὲ διακρίνωμεν σημεῖόν τι, γράφομεν πλησίον αὐτοῦ γράμμα τι τοῦ ἀλφαβήτου· οἷον Ε. Ζ.

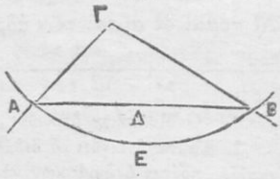


Σχ. 4

Ἡ γραμμὴ δὲ διακρίνεται συνήθως διὰ δύο γραμμάτων, γρα-



Σχ. 5



Σχ. 6

φομένων εἰς δύο διάφορα σημεῖα αὐτῆς· οἷον ἡ γραμμὴ ΑΒ

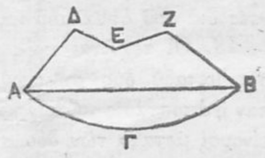
'Αλλ' ἐὰν διὰ τῶν αὐτῶν σημείων διέρχωνται πολλαὶ γραμμαὶ μεταχειριζόμεθα πλείονα γράμματα πρὸς διάκρισιν αὐτῶν· οὕτω, λέγομεν ἡ γραμμὴ ΑΓΒ, ἡ γραμμὴ ΑΔΒ, ἡ γραμμὴ ΑΕΒ.

10. Ἡ εὐθεῖα εἶναι ἡ ἁπλουστάτη τῶν γραμμῶν. Δεχόμεθα δὲ περὶ αὐτῆς τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

1) Ἀπό τινος σημείου εἰς ἄλλο μία μόνη εὐθεῖα ἄγεται. Καλεῖται δὲ αὕτη ἀπόστασις τῶν δύο σημείων.

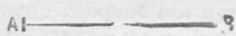
2) Πᾶσα εὐθεῖα (οἷον ἡ ΑΒ) εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης γραμμῆς, ἐχούσης τὰ αὐτὰ πέρατα (οἷον τῆς ΑΔΕΖΒ ἢ τῆς ΑΓΒ).

3) Πᾶσα εὐθεῖα δύναται νὰ αὐξηθῇ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ἄκρων, ὅσον θέλομεν.



Σχ. 7.

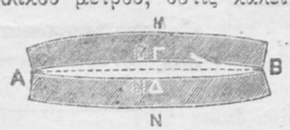
'Εὰν δὲ θεωρήσωμεν ταύτην περιωρισμένην ἐκ τοῦ ἑνὸς μόνου ἄκρου, ἤτοι ἔχουσαν ἀρχήν, ἀλλ' οὐχὶ καὶ τέλος, καλοῦμεν ταύτην ἡμιευθεῖαν (σχ. 8), ἐὰν δὲ καὶ ἐκ τῶν δύο ἄκρων, ἤτοι ἔχουσαν ἀρχὴν καὶ τέλος, καλοῦμεν τότε τμῆμα εὐθείας (σχ. 9).

Σχ. 8. 

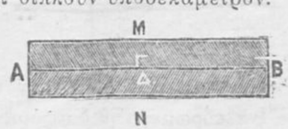
Σχ. 9. 

Σημ. Πολλάκις ὅμως λέγομεν ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἀντὶ τὸ τμῆμα ΑΒ.

11. Ἵνα χαράξωμεν εὐθεῖαν γραμμὴν ἐπὶ τοῦ χάρτου, μεταχειριζόμεθα, ὡς γνωστόν, τὸν κανόνα. Ἐὰν δὲ θέλωμεν ἡ εὐθεῖα νὰ ἔχῃ καὶ ὡρισμένον μῆκος, τότε μεταχειριζόμεθα συνήθως κανόνα μήκους δύο παλαμῶν καὶ ὑποδιῃρημένον κατὰ τὰς ὑποδιαιρέσεις τοῦ γαλλικοῦ μέτρου, ὅστις καλεῖται διπλοῦν ὑποδεκάμετρον.



Σχ. 10.



Σχ. 11

12. **Ἐξέλεγξις κανόνος.** Ἵνα βεβαιωθῶμεν περὶ τῆς εὐθύτητος κανόνος τινὸς Μ, σύρομεν γραμμήν τινα κατὰ μῆκος μιᾶς τῶν ἀκμῶν του, οἷον τῆς ΑΓΒ, διὰ λεπτῆς γραφίδος· εἶτα περιστρέφομεν τὸν κανόνα οὕτως, ὥστε ἡ ἐπὶ τοῦ χάρτου ἐφαρμόζουσα

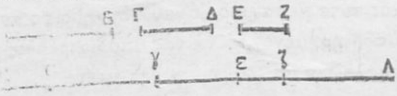
ἐπιφάνειά του νὰ ἐφαρμόσῃ πάλιν ἐπ' αὐτοῦ, ἀλλὰ νὰ ἔλθῃ εἰς τὸ ἕτερον μέρος τῆς χαραχθείσης γραμμῆς, ἤτοι εἰς τὴν θέσιν Ν, καὶ νὰ διέλθῃ ἡ δοκιμαζομένη ἀκμὴ διὰ τῶν ἄκρων τῆς γραμμῆς, ὅτε σύρομεν νέαν γραμμὴν ΑΔΒ κατὰ μῆκος τῆς αὐτῆς ἀκμῆς. Ἐὰν αἱ δύο οὕτω χαραχθεῖσαι γραμμαὶ συμπίπτωσι (σχ.11), ὁ κανὼν εἶναι εὐθύγραμμος, ἄλλως (σχ.10), ὁ κανὼν δὲν εἶναι εὐθύγραμμος.

Τὴν εὐθύτητα δὲ τῶν ἀκμῶν διακρίνομεν εὐκόλως καὶ σκοπεύοντες διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ κατὰ τὴν διεύθυνσιν ἑκάστης ἀκμῆς.

13. Οἱ τεχνῖται πρὸς χάραξιν εὐθείας ἐπὶ σανίδος ἢ δοκοῦ κτλ. μεταξὺ δύο σημείων μεταχειρίζονται μακρὸν κανόνα ἤ, ὅταν ἡ ἀπόστασις τούτων καθιστᾷ ἀδύνατον τὴν χρῆσιν τοῦ κανόνος, τείνουσι μεταξὺ τῶν δύο σημείων νῆμα ἀλειμμένον διὰ κιμωλίας ἢ κόνεως· εἶτα ἀνυψοῦσιν ὀλίγον τοῦτο διὰ τῆς χειρὸς περὶ τὸ μέσον καὶ ἀφίνουσι κατόπιν νὰ καταπέσῃ. Τὸ νῆμα λόγῳ τῆς ἐλαστικότητός του καταπῖπτον ἀποτόμως ἐπὶ τῆς σανίδος ἀφίνει ἐπ' αὐτῆς τὰ ἴχνη εὐθείας γραμμῆς.

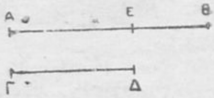
14. Ἰσότης τμημάτων, ἄθροισμα καὶ διαφορὰ αὐτῶν. Ἵνα ἴδωμεν, ἂν δύο τμήματα εὐθείας, οἷον τὰ ΑΒ καὶ ΓΔ, εἶναι ἴσα, ἐπιθέτομεν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε τὸ ἓν ἄκρον τοῦ ἑνὸς νὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τοῦ ἄλλου· π. χ. τὸ Α καὶ τὸ Γ. Ἐὰν τότε συμπέσωσι καὶ τὰ ἕτερα ἄκρα αὐτῶν Β καὶ Δ, λέγομεν ὅτι τὰ τμήματα εἶναι ἴσα.

Ἵνα εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα δύο ἢ πλειόνων τμημάτων, οἷον τῶν ΑΒ, ΓΔ, καὶ ΕΖ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΚΛ τρία διαδοχικὰ τμήματα αγ, γε, εζ ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ δοθέντα. Τὸ τμῆμα αζ, ὅπερ ἀποτελοῦσι τὰ τρία ταῦτα τμήματα, εἶναι ἄθροισμα τῶν δοθέντων τμημάτων.



Σχ. 12.

Ἵνα εὕρωμεν τὴν διαφορὰν δύο ἀνίσων τμημάτων, οἷον τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τοῦ μεγαλυτέρου τμῆμα ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον, ἤτοι τὸ ΑΕ. Τὸ μένον τμῆμα ΕΒ καλεῖται διαφορὰ τῶν δύο δοθέντων τμημάτων.



Σχ. 13.

Περὶ ἐπιφανειῶν.

15. **Ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι.** Ἐὰν ἐπί τινος ἕδρας τοῦ κύβου ἐπιθέσωμεν τὴν ἀκμὴν κανόνος ἢ νῆμα τεταμένον κλπ., παρατηροῦμεν ὅτι ἐφαρμόζει ἐπ' αὐτῆς καθ' οἱανδήποτε διεύθυνσιν καὶ ἂν ἐπιθέσωμεν. Τὸ αὐτὸ δὲ παρατηροῦμεν καὶ ἐπὶ τοῦ πίνακος, τοῦ τοίχου, τῆς τραπέζης, τῆς ἐπιφανείας ἠρεμοῦντος ὕδατος κλπ.

Αἱ ἐπιφάνειαι, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἡ εὐθεῖα ἐφαρμόζει ἀκριβῶς κατὰ πᾶσαν διεύθυνσιν, καλοῦνται ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι ἢ ἁπλῶς ἐπίπεδα.

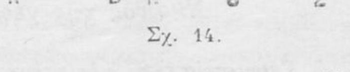
16. **Τεθλασμέναι ἐπιφάνειαι.** Ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τοῦ κύβου σύγκειται ἐξ ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν, αἵτινες τέμνονται· αἱ τοιαῦται ἐπιφάνειαι καλοῦνται τεθλασμέναι ἐπιφάνειαι.

17. **Καμπύλαι** *(κυρταί, κοῖλαι)* **ἐπιφάνειαι.** Ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας ἢ ἐνδύματος κλπ. οὔτε ἐπίπεδος εἶναι οὔτε σύγκειται ἐξ ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν· αἱ τοιαῦται ἐπιφάνειαι καλοῦνται καμπύλαι ἐπιφάνειαι. Διακρίνονται δὲ εἰς κυρτάς, ὡς ἡ τῆς σφαίρας ὁρωμένης ἔξωθεν, καὶ εἰς κοίλας, ὡς ἡ τῆς σφαίρας ὁρωμένης ἔσωθεν.

Περὶ ἰσότητος.

18. Ἐὰν ἐπιθέσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν ΑΒΓ ἐπὶ τῆς ΕΘΗ, παρατηροῦμεν ὅτι ἐφαρμόζουσιν, ἤτοι ἀποτελοῦσι μίαν ἐπιφάνειαν. Τὰ τοιαῦτα σχήματα, ἅτινα ἐπιτιθέμενα ταυτίζονται, καλοῦνται ἴσα (παραβ. § 14).

Ἐὰν δὲ ἐπιθέσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν ΑΒΓΔ ἐπὶ τῆς ΕΖΗ, παρατηροῦμεν ὅτι δὲν ἐφαρμόζουσιν· ἀλλ' ἐὰν κόψωμεν ἑκατέραν εἰς 2 μέρη, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ΑΒΓ ἐφαρμόζει μὲ τὸ ΗΘΕ καὶ τὸ ΑΓΔ μὲ τὸ ΘΖΗ.



Σχ. 14.

Τὸ αὐτὸ παρατηροῦμεν καὶ εἰς τὰς γραμμὰς ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ. Τὰ τοιαῦτα σχήματα, ἅτινα ἀκέραια μὲν δὲν ἐφαρμόζουσι, ἀλλὰ τεμνόμενα εἰς μέρη ἐφαρμόζουσι, καλοῦνται ἰσοδύναμα.

Τὰ δὲ σχήματα ΑΒΓ καὶ ΕΖΗ, ὧν τὸ ἓν ἰσοῦται πρὸς μέρος τι τοῦ ἄλλου, καλοῦνται ἄνισα καὶ τὸ πρῶτον μικρότερον τοῦ δευτέρου.

Ἰσότης καὶ σχῆμα ἑδρῶν τοῦ κύβου.

19. Ἐὰν κόψωμεν τεμάχιον χάρτου, ὥστε νὰ ἔχῃ τὴν ἐπιφάνειαν τυχούσης ἕδρας τοῦ κύβου, καὶ ἐπιθέσωμεν εἶτα τοῦτο ἐπὶ τῶν ἄλλων ἑδρῶν τοῦ κύβου, παρατηροῦμεν ὅτι ἐφαρμόζει *ἀκριβῶς ἐπ᾽ αὐτῶν·* ὅθεν συνάγομεν ὅτι :

Πᾶσαι αἱ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Σχ. 15.

20. Τὸ σχῆμα δὲ ἑκάστης τῶν ἑδρῶν, οἷον τὸ σχῆμα [1] ΑΒΓΔ, καλεῖται τετράγωνον.

21. Αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι, εἰς ἃς περατοῦται ἕκαστον τετράγωνον, ἤτοι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ, καλοῦνται πλευραὶ τοῦ τετραγώνου.

Μετροῦντες δὲ ταύτας διὰ τοῦ ἀνοίγματος τῶν αἰχμῶν διαβήτου (§ 121) ἢ διὰ τοῦ ὑποδεκαμέτρου (§ 11) παρατηροῦμεν ὅτι πᾶσαι εἶναι ἴσαι.

Ἅπασαι δὲ ὁμοῦ λαμβανόμεναι ἀποτελοῦσι τὴν περίμετρον τοῦ τετραγώνου.

22. Ἐπίπεδα καὶ μὴ ἐπίπεδα σχήματα. Τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ ἢ ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἢ ἡ τεθλασμένη ΑΒΓΔΑ ἢ τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Τὰ σχήματα, τὰ παριστῶντα σημεῖα ἢ γραμμὰς ἢ ἐπιφανείας κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καλοῦνται ἐπίπεδα σχήματα.

Τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Θ τοῦ κύβου (§ 1) ἢ ἅπασαι αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου ἢ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἢ ὅλος ὁ κύβος δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Τὰ σχήματα, τὰ παριστῶντα σημεῖα ἢ γραμμὰς ἢ ἐπιφανείας ἢ στερεὰ σώματα μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καλοῦνται μὴ ἐπίπεδα σχήματα.

Σκοπὸς τῆς γεωμετρίας.

23. Γεωμετρία εἶναι ἡ ἐπιστήμη, ἡ ἀσχολουμένη εἰς τὴν σπουδὴν τῶν σημείων, τῶν γραμμῶν, τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ὄγκων

---

1. Τὸ σχῆμα τοῦτο παριστᾷ τετραγωνικὸν δάκτυλον εἰς τὸ πραγματικὸν μέγεθος.

ὡς πρὸς τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν [1], συνάμα δὲ καὶ τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν καὶ σχέσεων πρὸς ἄλληλα.

Διακρίνομεν δὲ πρακτικὴν καὶ θεωρητικὴν γεωμετρίαν. Καὶ ὅταν μὲν ἐξετάζωμεν τὰς γραμμάς, τὰς ἐπιφανείας καὶ τοὺς ὄγκους τῶν σωμάτων ὡς πρὸς τὸ σχῆμα καλοῦμεν ὁμοίως καὶ ταῦτα σχήματα, ὅταν δὲ ὡς πρὸς τὴν ἔκτασιν, λέγομεν ταῦτα ποσὰ γεωμετρικὰ ἢ μεγέθη.

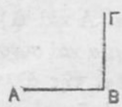
Ἐν τῇ γεωμετρίᾳ δὲ ἐξετάζομεν τὰ σώματα ὡς πρὸς τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν ἀδιαφοροῦντες περὶ τῆς ὕλης, ἐξ ἧς ἀποτελοῦνται, τότε δὲ καλοῦμεν ταῦτα σώματα γεωμετρικὰ ἢ στερεά.

Ἐρωτήσεις.

Τί καλεῖται ὄγκος, ἐπιφάνεια, ἕδραι καὶ ἀκμαὶ τοῦ κύβου; Τί καλεῖται εὐθεῖα, καμπύλη, τεθλασμένη, σημεῖον; Ποίας ἰδιότητας δεχόμεθα περὶ τῆς εὐθείας; Τί καλεῖται ἀπόστασις δύο σημείων; Τί καλεῖται ἡμιευθεῖα καὶ τί τμῆμα εὐθείας; Πῶς χαράσσομεν εὐθεῖαν; Πῶς γίνεται ἡ ἐξέλεγξις τοῦ κανόνος; Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα καὶ πῶς τὴν διαφορὰν τμημάτων; Πόσα καὶ ποῖα εἴδη ἐπιφανειῶν ἔχομεν; Ποίου εἴδους εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δωματίου, τῆς τραπέζης, ἡ ἐσωτερικὴ καὶ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια πίλου ἢ πινακίου; Πότε δύο σχήματα καλοῦνται ἴσα ἢ ἰσοδύναμα ἢ ἄνισα; Ποίαν ἰδιότητα καὶ τί σχῆμα ἔχουσιν αἱ ἕδραι τοῦ κύβου; Τί καλοῦνται πλευραὶ καὶ τί περίμετρος τοῦ τετραγώνου; Ποίαν ἰδιότητα ἔχουσιν αἱ πλευραί; Πότε τὰ σχήματα καλοῦνται ἐπίπεδα καὶ πότε μὴ ἐπίπεδα; Περὶ τί ἀσχολεῖται ἡ Γεωμετρία; Τί καλοῦμεν σχήματα καὶ τί ποσὰ γεωμετρικὰ ἢ μεγέθη; Πότε καλοῦμεν τὰ σώματα γεωμετρικὰ ἢ στερεά;

Περὶ Γωνιῶν.

24. **Ὀρθὴ γωνία.** Ἐὰν ἐκ τῶν 4 πλευρῶν τετραγώνου οἷον τοῦ ΑΒΓΔ (σχ. § 20), θεωρήσωμεν κεχωρισμένως δύο διαδοχικάς, οἷον τὰς ΑΒ καὶ ΒΓ, αὗται ἀποτελοῦσι σχῆμα, ὅπερ καλεῖται ὀρθὴ γωνία. Αἱ πλευραὶ δὲ αὗται καλοῦνται (§ 41) κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.



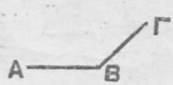
Σχ. 16.

25. **Ὀξεῖα καὶ ἀμβλεῖα γωνία.** Ἐὰν ὀρθῆς γω-

1. Τὸ σημεῖον δὲν ἔχει ἔκτασιν.

νίας π. χ. τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ τῶν σκελῶν διαβήτου, ἐλαττώσωμεν τὸ ἄνοιγμα, τότε λέγομεν ὅτι ἡ οὕτω προκύπτουσα γωνία εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς, καλεῖται δὲ αὕτη ὀξεῖα γωνία (σχ. 17), ἐὰν δὲ αὐξήσωμεν τὸ ἄνοιγμα, τότε λέγομεν ὅτι ἡ προκύπτουσα γωνία εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς, καλεῖται δὲ αὕτη ἀμβλεῖα γωνία (σχ. 18).

Σχ. 17.

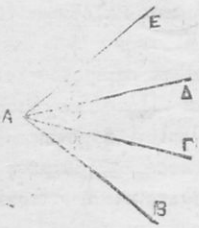


Σχ. 18.

26. Ἐν γένει δὲ **γωνία** καλεῖται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσι δύο εὐθεῖαι ἐξ ἑνὸς σημείου ἀρχόμεναι (χωρὶς νὰ ἀποτελῶσι μίαν μόνην εὐθεῖαν).

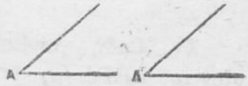
Καλοῦνται δὲ αἱ μὲν εὐθεῖαι, αἱ σχηματίζουσαι τὴν γωνίαν, (ἤτοι αἱ ΑΒ καὶ ΒΓ) πλευραὶ αὐτῆς, τὸ δὲ σημεῖον, ἐξ οὗ ἄρχονται (ἤτοι τὸ Β), κορυφὴ αὐτῆς.

Τὴν γωνίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος τῆς κορυφῆς· οἷον ἡ γωνία Β, ἢ καὶ διὰ τριῶν γραμμάτων γραφομένων τοῦ ἑνὸς εἰς τὴν κορυφὴν καὶ ἑκατέρου τῶν ἄλλων ἐπὶ τῶν πλευρῶν. Γράφεται δὲ καὶ ἀπαγγέλλεται τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς πάντοτε μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων, οἷον ἡ γωνία ΑΒΓ ἢ ΓΒΑ, οὐδέποτε δὲ ΒΑΓ ἢ ΓΑΒ κλπ. Ἡ παράστασις δὲ τῆς γωνίας διὰ τριῶν γραμμάτων γίνεται ἰδίως, ὅταν πολλαὶ γωνίαι ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν (σχ. 19). Ἀλλὰ καὶ ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τὴν γωνίαν δι' ἑνὸς γράμματος ἐντὸς αὐτῆς καὶ πλησίον τῆς κορυφῆς γραφομένου, οἷον ἡ γωνία μ ἢ ν ἢ ρ.



Σχ. 19.

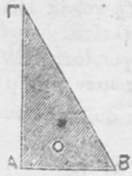
27. **Ἴσαι** λέγονται δύο γωνίαι (ὡς αἱ Α καὶ Δ) ὅταν ἔχωσι τὸ αὐτὸ ἄνοιγμα καὶ συνεπῶς, ἐὰν ἐπιθέσωμεν τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης, ἀποτελοῦσι μίαν γωνίαν, ἀσχέτως ἐὰν αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι ἢ ἄνισοι.



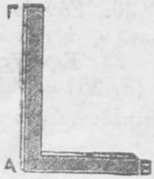
Σχ.

28. **Γνώμων.** Ἵνα ἐξελέγξωμεν, ἐὰν γωνία τις εἶναι ὀρθή, ἢ ἵνα σχηματίσωμεν ὀρθὰς γωνίας, ποιοῦμεν χρῆσιν ὀργάνου ὅπερ καλεῖται γνώμων.

Γνώμων δὲ εἶναι λεπτὴ σανὶς ξυλίνη (ἐν σχήματι ὀρθογωνίου τριγώνου (§ 86,3) φέρουσα περὶ τὸ μέσον ὀπὴν πρὸς ἀνάρτησιν (σχ. 21). Ἄλλοτε ὁ γνώμων ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κανόνας ἐκ ξύλου ἢ σιδήρου συνηνωμένους κατ' ὀρθὴν γωνίαν (σχ. 22).

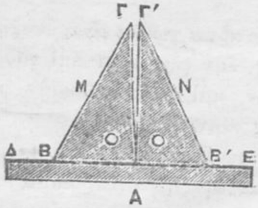


Σχ. 21.

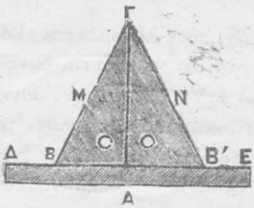


Σχ. 22.

Πρὶν μεταχειρισθῶμεν τὸν γνώμονα, πρέπει νὰ βεβαιωθῶμεν, ἂν εἶναι ἀκριβής, ἤτοι ἂν ἔχῃ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ εὐθυγράμμους τὴν δὲ γωνίαν Α ὀρθήν. Καὶ τὸ μὲν εὐθύγραμμον τῶν πλευρῶν ἐξελέγχεται ὡς καὶ εἰς τὸν κανόνα, ἡ δὲ γωνία αὐτοῦ ἐξελέγχεται ὡς ἑξῆς. Ἐφαρμόζομεν τὴν μίαν τῶν ὑπὸ ἐξέλεγξιν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ γνώμονος, οἷον τὴν ΑΒ, ἐπί τινος κανόνος ΔΕ ἐν



Σχ. 23.



Σχ. 24.

τῇ θέσει Μ καὶ κατὰ μῆκος τῆς ἑτέρας πλευρᾶς ΑΓ σύρομεν εὐθεῖαν. Εἶτα ἀναστρέφοντες τὸν γνώμονα θέτομεν τοῦτον ἐν τῇ θέσει Ν. ὥστε ἡ μὲν κορυφὴ Α νὰ μείνῃ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ κανόνος. ἡ δὲ πλευρὰ ΑΒ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ′, καὶ σύρομεν νέαν εὐθεῖαν κατὰ μῆκος τῆς αὐτῆς πλευρᾶς ΑΓ. Ἐὰν αἱ δύο οὕτω χαραχθεῖσαι εὐθεῖαι συμπίπτωσιν ἐντελῶς (σχ. 24), ἡ γωνία τοῦ γνώμονος εἶναι ὀρθή, ἄλλως (σχ. 23) εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα.

Σχ. 25.

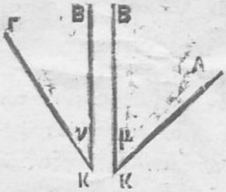
29. Ἐὰν συγκρίνωμεν δι' ἐπιθέσεως δύο ὀρθὰς γωνίας, παρατηροῦμεν ὅτι πάντοτε ἐφαρμόζουσιν· ὅθεν:

Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

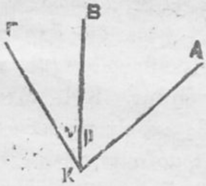
Διὰ τοῦτο ἡ ὀρθὴ γωνία λαμβάνεται ὡς μονὰς μετρήσεως τῶν ἄλλων γωνιῶν.

30. Ἐὰν ἐν τῇ γωνίᾳ ΒΑΓ φέρωμεν τὴν ΑΔ, ὥστε γων.μ= γων. ν, ἡ ΑΔ καλεῖται διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ.

31. **Ἐφεξῆς γωνίαι.** Ἐὰν ἔχωμεν δύο γωνίας, οἷον τὰς μ καὶ ν (σχ.26) καὶ θέσωμεν τὴν μίαν παρὰ τὴν ἄλλην ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὥστε νὰ συμπέσωσιν αἱ κορυφαὶ αὐτῶν Κ καὶ αἱ πλευραὶ



Σχ. 26.

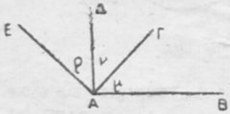


Σχ. 27.

ΚΒ (σχ.26),τότε λέγομεν ὅτι αἱ δύο αὗται γωνίαι εἶναι ἐφεξῆς ἤτοι:

Δύο γωνίαι καλοῦνται ἐφεξῆς, ἐὰν (κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου) ἔχωσι κορυφὴν κοινὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, τὰς δὲ μὴ κοινὰς ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.

32. **Πρόσθεσις γωνιῶν.** Ἵνα προσθέσωμεν δύο γωνίας, ποιοῦμεν ταύτας ἐφεξῆς. Ἄθροισμα δὲ τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι ἡ γωνία, ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν μὴ κοινῶν πλευρῶν.



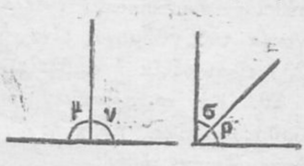
Σχ. 28.

Οἷον ἄθροισμα τῶν γωνιῶν μ καὶ ν εἶναι ἡ ΒΑΔ.

Ἵνα δὲ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα πλειόνων γωνιῶν,προσθέτομεν τὰς δύο τούτων,εἶτα τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα μετὰ μιᾶς τῶν ἄλλων κ.ο.κ.

Οἷον ἄθροισμα τῶν γωνιῶν μ,ν,ρ εἶναι ἡ γωνία ΒΑΕ.

33. Ἐὰν ἐν τῇ προσθέσει δύο γωνιῶν εὕρωμεν ὡς ἄθροισμα τούτων δύο ὀρθάς, καλοῦμεν ταύτας παραπληρωματικὰς (οἷον αἱ γωνίαι μ καὶ ν), ἐὰν δὲ εὕρωμεν μίαν ὀρθήν, καλοῦμεν ταύτας συμπληρωματικὰς (οἷον αἱ γωνίαι ρ καὶ σ).

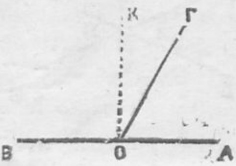


Σχ. 29.

34. **Ἰδιότητες.** 1) Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ. Ἐκ τυχόντος σημείου αὐτῆς, π. χ. τοῦ Ο, φέρομεν τὴν

εὐθεῖαν ΟΓ, ὅτε σχηματίζονται δύο γωνίαι ΑΟΓ καὶ ΒΟΓ. Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ σημείου Ο ὑψώσωμεν τὴν κάθετον ΟΚ, παρατηροῦμεν ὅτι :

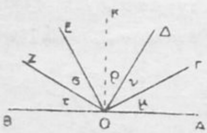
Γων. ΑΟΓ+γων.ΓΟΒ=γων.ΑΟΚ+γων ΚΟΒ=2 ὀρθ.· ὅθεν :



Σχ. 30.

Ἐὰν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου εὐθείας ἀχθῇ ἑτέρα εὐθεῖα σχηματίζονται δύο γωνίαι παραπληρωματικαί.

2) Ἤδη ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Ο τῆς εὐθείας ΑΒ φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου μετ' αὐτῆς, ὅτε σχηματίζονται αἱ γωνίαι μ,ν,ρ,σ,τ. Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ Ο ὑψώσωμεν τὴν κάθετον ΟΚ, παρατηροῦμεν ὅτι

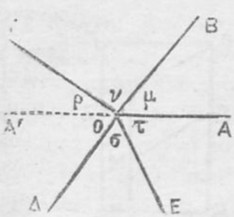


Σχ. 31.

$\mu+\nu+\rho+\sigma+\tau$ = ΑΟΚ + ΚΟΒ = 2 ὀρθ. ὅθεν :

Τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων, ἂν ἔκ τινος σημείου εὐθείας ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς καὶ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου μετ' αὐτῆς, ἰσοῦται πρὸς 2 ὀρθάς.

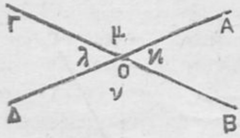
3) Ἔκ τινος σημείου Ο φέρομεν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ, ὅτε σχηματίζονται αἱ γωνίαι μ,ν,ρ,σ,τ. Ἐὰν προεκταθῇ ἡ ΟΑ πέραν τοῦ Ο μέχρι τοῦ Α′, τότε κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα τὸ ἄθροισμα τῶν ἄνωθεν τῆς Α′Α γωνιῶν εἶναι 2 ὀρθαί, ὁμοίως δὲ καὶ τῶν κάτωθεν· ὅθεν $\mu+\nu+\rho+\sigma+\tau$ = 4 ὀρθαί, ἤτοι :



Σχ. 32.

Τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων, ἂν ἔκ τινος σημείου ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἰσοῦται πρὸς τέσσαρας ὀρθάς.

35. Γωνίαι κατὰ κορυφήν. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν γωνίαν κ καὶ προεκβάλωμεν τὰς πλευρὰς αὐτῆς πέραν τῆς κορυφῆς, σχηματίζεται νέα γωνία λ, ἥτις καλεῖται κατὰ κορυφὴν τῆς κ· ὁμοίως δὲ τοιαῦται εἶναι καὶ αἱ μ καὶ ν, ἤτοι:



Σχ. 33.

Δύο γωνίαι καλοῦνται κατὰ κορυφήν, ἐὰν ἔχωσι κορυφὴν κοινὴν καὶ ἑκατέρα ἔχῃ ὡς πλευρὰς τὰς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.

36. Ἐὰν ἐπιθέσωμεν δύο κατὰ κορυφὴν γωνίας, παρατηροῦμεν ὅτι ἐφαρμόζουσιν· ὅθεν:

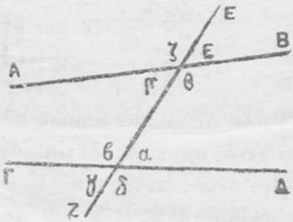
Δύο κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

37. Ὅταν δύο εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι, ὡς αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ, τέμνωνται ὑπὸ τρίτης, οἷον τῆς ΕΖ, σχηματίζονται πέριξ τῶν δύο τομῶν 8 γωνίαι. Ἀνὰ δύο δὲ τούτων ἀναλόγως τῆς θέσεώς των καλοῦνται οὕτω:

1) Ἐντὸς ἐναλλάξ· οἷον αἱ γωνίαι α καὶ η ἢ αἱ β καὶ θ.

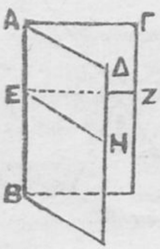
2) Ἐντός, ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτά· οἷον αἱ α καὶ ε ἢ αἱ β καὶ ζ ἢ δ καὶ θ ἢ γ καὶ η.

3) Ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτά· οἷον αἱ α καὶ θ, ἢ αἱ β καὶ η.



Σχ. 34.

38. Δίεδροι γωνίαι. Ὡς εἴδομεν (§ 5), αἱ ἕδραι τοῦ κύβου τέμνονται ἀνὰ δύο. Τὸ σχῆμα τοῦτο, ὅπερ ἀποτελοῦσι δύο ἕδραι συναντώμεναι, καλεῖται δίεδρος γωνία τοῦ κύβου. Ὁμοίως δὲ τὸ σχῆμα, ὅπερ σχηματίζουσι τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ, καλεῖται δίεδρος γωνία, ἤτοι:



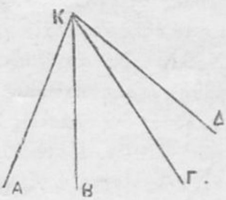
Σχ. 35.

Δίεδρος γωνία καλεῖται τὸ σχῆμα, ὅπερ ἀποτελοῦσι δύο ἐπίπεδα ἀλληλοτεμνόμενα καὶ περατούμενα εἰς τὴν κοινὴν αὐτῶν τομήν.

Τὰ ἐπίπεδα δέ, τὰ σχηματίζοντα τὴν δίεδρον γωνίαν, καλοῦνται ὁμοίως ἕδραι αὐτῆς, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΒ, καθ' ἣν τέμνονται αἱ ἕδραι, καλεῖται ἀκμὴ τῆς διέδρου γωνίας.

Ἐὰν ἐκ τινος σημείου Ε τῆς ἀκμῆς ΑΒ φέρωμεν δύο εὐθείας καθέτους ἐπ' αὐτὴν καὶ κειμένας ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἑδρῶν Γ καὶ Δ, ἤτοι τὰς ΕΖ καὶ ΕΗ, σχηματίζεται ἡ γωνία ΖΕΗ, ἥτις καλεῖται ἀντίστοιχος τῆς διέδρου καὶ χρησιμεύει ὡς μέτρον αὐτῆς. Καθόσον δὲ ἡ ἀντίστοιχος γωνία ΖΕΗ εἶναι ὀξεῖα, ἀμβλεῖα ἢ ὀρθή, καὶ ἡ δίεδρος εἶναι ὁμοίως ὀξεῖα, ἀμβλεῖα ἢ ὀρθή. Ὅταν δὲ ἡ δίεδρος γωνία εἶναι ὀρθή, τὰ σχηματίζοντα ταύτην ἐπίπεδα καλοῦνται κάθετα πρὸς ἄλληλα, ὡς εἶναι δύο διαδοχικαὶ ἕδραι τοῦ κύβου.

39. **Στερεαὶ γωνίαι.** Διὰ τοῦ ἑνὸς τῶν δύο ἄκρων ἀκμῆς κύβου παρατηροῦμεν ὅτι διέρχονται τρεῖς ἕδραι· τὸ σχῆμα τοῦτο, ὅπερ ἀποτελοῦσιν αἱ τρεῖς ἕδραι, καλεῖται στερεὰ γωνία τοῦ κύβου, τὸ δὲ σημεῖον ἐκεῖνο κορυφὴ τοῦ κύβου. Ὁμοίως καὶ τὸ σχῆμα ΚΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον σχηματίζουσι τὰ 4 ἐπίπεδα ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΑ, καλεῖται στερεὰ γωνία, ἤτοι:



Σχ. 36.

Στερεὰ γωνία καλεῖται τὸ σχῆμα, ὅπερ ἀποτελοῦσι τρία ἢ πλείονα ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ περατούμενα ἕκαστον εἰς τὰς δύο εὐθείας, καθ' ἃς τέμνεται ὑπὸ τῶν πλησίον αὐτοῦ δύο ἐπιπέδων.

Τὰ ἐπίπεδα, τὰ σχηματίζοντα τὴν στερεὰν γωνίαν, καλοῦνται ἕδραι αὐτῆς, αἱ δὲ τομαὶ τῶν ἑδρῶν της (οἷον αἱ ΚΑ,ΚΒ,ΚΓ,ΚΔ) καλοῦνται ἀκμαὶ καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον (οἷον τὸ Κ) τῶν ἑδρῶν της καλεῖται κορυφὴ τῆς στερεᾶς γωνίας. Δίεδροι δὲ γωνίαι αὐτῆς καλοῦνται αἱ δίεδροι, ἃς σχηματίζουσιν αἱ δι' ἑκάστης τῶν ἀκμῶν διερχόμεναι ἕδραι της καὶ ἐπίπεδοι γωνίαι καλοῦνται αἱ γωνίαι, ἃς σχηματίζουσιν αἱ ἀκμαὶ ἑκάστης ἕδρας, οἷον αἱ ΑΚΒ,ΒΚΓ κλπ.

Ἵνα σχηματισθῇ στερεὰ γωνία, ἀπαιτοῦνται προφανῶς τρία τοὐλάχιστον ἐπίπεδα. Ἡ τοιαύτη δὲ στερεὰ γωνία, ἡ τρεῖς ἕδρας ἔχουσα, καλεῖται τρίεδρος στερεὰ γωνία (οἷον αἱ στερεαὶ γωνίαι τοῦ κύβου), ἡ ἔχουσα 4 καλεῖται τετράεδρος (οἷον ἡ ΚΑΒΓΔ) κ.ο.κ.[1].

40. **Ἐπίπεδοι γωνίαι.** Ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰς διέδρους καὶ στερεὰς αἱ γωνίαι, αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ δύο εὐθειῶν τεμνομένων

---

1 Τὰ μέρη, ὧν προτάσσεται ἀστερίσκος, δύνανται νὰ παραλείπωνται τοῦ χρόνου μὴ ἐπαρκοῦντος πρὸς διδασκαλίαν αὐτῶν· ὁμοίως δὲ καὶ ἄλλα κατὰ τὴν κρίσιν τοῦ διδάσκοντος.

καλοῦνται ἐπίπεδοι ὡς ἔχουσαι ἅπαντα τὰ σημεῖα αὐτῶν ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου (παραβ. § 22).

(Οἱ μαθηταὶ προκαλούμενοι εὑρίσκουσιν ὅτι ὁ κύβος ἔχει 12 διέδρους γωνίας, 8 στερεὰς καὶ 8 κορυφάς).

Ἐρωτήσεις καὶ ἀσκήσεις.

Τί εἶναι ὀρθή, ὀξεῖα καὶ ἀμβλεῖα γωνία ; Τί καλεῖται ἐν γένει γωνία, τί πλευραὶ καὶ τί κορυφὴ αὐτῆς; Πῶς ἀπαγγέλλεται ἡ γωνία ; Πόσας ὀρθὰς γωνίας ἔχει τὸ τετράγωνον ; Ποῦ παρατηρεῖτε ὀρθάς, ὀξείας καὶ ἀμβλείας γωνίας ; Ποίας γωνίας παρατηρεῖτε εἰς τὰ ἑξῆς κεφαλαῖα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Κ,Λ,Μ, Ν,Σ,Χ ; Νὰ ἀνοιχθῶσι τὰ σκέλη διαβήτου, ὥστε νὰ σχηματισθῇ ὀρθή, ὀξεῖα καὶ ἀμβλεῖα γωνία. Ὁμοίως νὰ κατασκευασθῶσι τοιαῦται διὰ θλάσεως λεπτοῦ σύρματος. Νὰ γραφῶσι τὰ τρία εἴδη τῶν γωνιῶν. Πότε δύο γωνίαι καλοῦνται ἴσαι ; Τί εἶναι γνώμων καὶ πῶς γίνεται ἡ ἐξέλεγξις τούτου ; Ποία γωνία λαμβάνεται ὡς μονὰς μετρήσεως τῶν γωνιῶν καὶ διατί ; Τί καλεῖται διχοτόμος γωνίας; Πότε δύο γωνίαι καλοῦνται ἐφεξῆς ; Πῶς γίνεται ἡ πρόσθεσις δύο ἢ πλειόνων γωνιῶν ; Πότε δύο γωνίαι καλοῦνται παραπληρωματικαὶ καὶ πότε συμπληρωματικαί ; Πότε δύο γωνίαι καλοῦνται κατὰ κορυφὴν καὶ ποίαν σχέσιν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ; Τί καλεῖται δίεδρος γωνία, ἕδραι, ἀκμὴ καὶ ἀντίστοιχος γωνία αὐτῆς ; Ποῦ παρατηρεῖτε διέδρους γωνίας κλπ ; Πότε ἡ δίεδρος καλεῖται ὀξεῖα, ἀμβλεῖα, ὀρθὴ καὶ πότε δύο ἐπίπεδα καλοῦνται κάθετα πρὸς ἄλληλα ; Τί καλεῖται στερεὰ γωνία, ἕδραι, ἀκμαί, κορυφή, δίεδροι καὶ ἐπίπεδοι γωνίαι αὐτῆς; Ποῦ παρατηρεῖτε στερεὰς γωνίας κλπ ; Πότε ἡ στερεὰ γωνία καλεῖται τρίεδρος, τετράεδρος κλπ ; Πόσας διέδρους καὶ πόσας στερεὰς γωνίας ἔχει ὁ κύβος ; Τί καλοῦνται ἐπίπεδοι γωνίαι ;

1*) Ποίου εἴδους γωνίαν σχηματίζουσιν αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν ;

2) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ παραπλήρωμα δοθείσης γωνίας.

3) Πόσον εἶναι ἡ παραπληρωματικὴ γωνία τῶν $^2/_3$ τῆς ὀρθῆς καὶ πόσον ἡ συμπληρωματικὴ αὐτῆς ;

4) Τὸ ἄθροισμα δύο κατὰ κορυφὴν γωνιῶν ἰσοῦται πρὸς

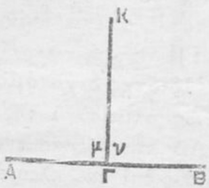
$1^1/_5$ ὀρθάς. Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων κατὰ κορυφὴν γωνιῶν καὶ πόσον εἶναι ἑκάστη τῶν 4 γωνιῶν;

5) Ἐὰν φέρωμεν ἔκ τινος σημείου 8 εὐθείας σχηματιζούσας πρὸς ἀλλήλας γωνίας ἴσας, πρὸς ποῖον κλάσμα ὀρθῆς θὰ ἰσοῦται ἑκάστη τούτων; Κατασκεύασον τὸ σχῆμα τοῦτο δι' ἑνὸς φύλλου χάρτου.

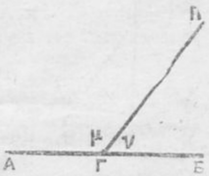
6) Ἔκ τινος σημείου ἐπιπέδου ἄγομεν 4 εὐθείας κειμένας ἐπ' αὐτοῦ. Αἱ 3 τῶν οὕτω σχηματιζομένων γωνιῶν εἶναι ἀντιστοίχως $1^1/_4$, $^1/_3$, $1^1/_6$ ὀρθ. Πόσον εἶναι ἡ τετάρτη; ($1^1/_4$ ὀρθ.).

Περὶ καθέτων καὶ πλαγίων εὐθειῶν.

41. **Εὐθεῖαι κάθετοι καὶ πλάγιαι.** Ἐὰν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Γ εὐθείας τινὸς ΑΒ ἀχθῇ ἑτέρα εὐθεῖα, σχηματίζονται δύο ἐφεξῆς γωνίαι μ καὶ ν, αἵτινες δύνανται νὰ εἶναι ἢ ἴσαι (σχ. 37) ἢ ἄνισοι (σχ. 38). Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει αἱ εὐθεῖαι καλοῦνται κάθετοι πρὸς ἀλλήλας, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ πλάγιαι· ὅθεν:



Σχ. 37.



Σχ. 38.

Δύο εὐθεῖαι καλοῦνται κάθετοι πρὸς ἀλλήλας, ἐὰν συναντώμεναι σχηματίζωσι τὰς δύο ἐφεξῆς γωνίας ἴσας καὶ πλάγιαι ἐὰν σχηματίζωσι τὰς δύο ἐφεξῆς γωνίας ἀνίσους.

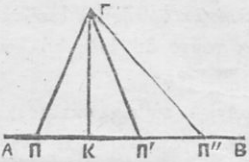
Τὸ σημεῖον δὲ τῆς συναντήσεως Γ καλεῖται ποὺς τῆς καθέτου ἢ τῆς πλαγίας.

42. Μετροῦντες τὰς γωνίας ΑΓΚ καὶ ΒΓΚ διὰ τοῦ γνώμονος παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι ὀρθαί· ὅθεν:

Δύο εὐθεῖαι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας σχηματίζουσιν ὀρθὰς γωνίας.

43. **Ἰδιότητες.** 1) Ἐὰν ἔχωμεν 2 εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΚ καθέτους πρὸς ἀλλήλας καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ φέρωμεν διαφόρους εὐθείας ΓΠ, ΓΠ′, ΓΠ″ ἐπὶ τὴν ΑΒ, παρατηροῦμεν διὰ τοῦ γνώμονος, ὅτι οὐδεμία τούτων σχηματίζει μετὰ τῆς ΑΒ γωνίαν ὀρθήν· ὅθεν:

Ἐκ τινος σημείου μίαν μόνην κάθετον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐπί τινα εὐθεῖαν· συνεπῶς πᾶσαι αἱ ἄλλαι εἶναι πλάγιαι.



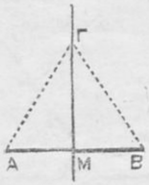
Σχ. 39.

2) Μετροῦντες δὲ τὴν κάθετον καὶ τὰς πλαγίας παρατηροῦμεν ὅτι ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας.

Διὰ τὰς δύο δὲ ταύτας ἰδιότητας ὡς ἀπόστασιν σημείου ἀπὸ εὐθείας λαμβάνομεν τὴν κάθετον ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν.

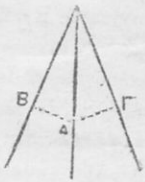
3) Ὁμοίως διὰ μετρήσεως εὑρίσκομεν ὅτι δύο πλάγιαι, ὡς αἱ ΓΠ καὶ ΓΠ′, ὧν οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, εἶναι ἴσαι.

4) Συνεπῶς δέ, ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου εὐθείας, π.χ. τῆς ΑΒ, ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν, πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου, π.χ. τὸ Γ, ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τὰ ἄκρα, ἤτοι ΓΑ=ΓΒ.



Σχ. 40.

44. Ἰδιότης διχοτόμου. Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Δ τῆς διχοτόμου ΑΔ τῆς γωνίας Α φέρωμεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτῆς ἤτοι τὰς ΔΒ καὶ ΔΓ, καὶ μετρήσωμεν ταύτας παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι ἴσαι· ὅθεν



Σχ. 41.

Πᾶν σημεῖον τῆς διχοτόμου γωνίας, ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς.

Ἐρωτήσεις καὶ ἀπαντήσεις.

Πότε δύο εὐθεῖαι καλοῦνται κάθετοι πρὸς ἀλλήλας καὶ πότε πλάγιαι; Δεῖξον ἀκμὰς τοῦ κύβου καθέτους πρὸς ἀλλήλας. Γράψον κεφαλαῖα γράμματα, ἔνθα παρατηροῦνται εὐθεῖαι κάθετο καὶ πλάγιαι πρὸς ἀλλήλας. Τί καλεῖται πούς τῆς καθέτου ἢ τῆς πλαγίας; Ποίας ἰδιότητας γνωρίζομεν περὶ καθέτου καὶ πλαγίων; Τί καλεῖται ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθείας; Ποίαν ἰδιότητα ἔχει ἡ διχοτόμος γωνίας;

1) Δύο πόλεις κεῖνται πλησίον τῆς θαλάσσης. Εἰς ποῖον μέρος πρέπει νὰ κατασκευασθῇ λιμὴν ἀπέχων ἰσάκις ἀπ' αὐτῶν;

2) Ἔκ τινος χωρίου Γ πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ ὁδὸς πρὸς εὐθεῖαν ὁδὸν ΑΒ. Ποίαν διεύθυνσιν πρέπει νὰ ἀκολουθήσῃ, ἵνα ᾖ συντομωτάτη ;

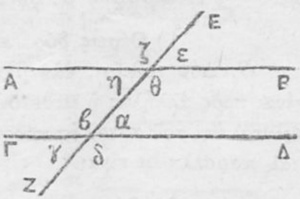
3*) Δύο χωρία Α καὶ Β κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος εὐθυγράμμου ὁδοῦ ΓΔ. Ζητεῖται νὰ χαραχθῇ ἡ συντομωτάτη ὁδὸς μεταξὺ τῶν χωρίων, ἥτις συνάμα νὰ φέρῃ εἰς ἐπικοινωνίαν τὰ χωρία μετὰ τῆς εὐθυγράμμου ὁδοῦ.

Περὶ παραλλήλων.

45. Συγκρίνοντες τὰς ἀκμὰς ΒΓ καὶ ΖΗ ἢ ΒΓ καὶ ΑΕ τοῦ κύβου (σχ. § 1) παρατηροῦμεν, ὅτι αὗται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσι, δὲν συναντῶνται. Ἀλλὰ αἱ μὲν ΒΓ καὶ ΖΗ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, αἱ δὲ ἄλλαι οὐχί. Αἱ δύο πρῶται καλοῦνται παράλληλοι ἤτοι :

Δύο εὐθεῖαι καλοῦνται παράλληλοι, ἐὰν κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν προεκταθῶσιν ἑκατέρωθεν.

46. **Ἰδιότητες.** 1) Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης τῆς ΕΖ. Μετροῦντες τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας α καὶ η (ἢ τὰς β καὶ θ) διὰ τοῦ ἀνοίγματος τῶν σκελῶν διαβήτου παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι ἴσαι. Ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ἐντός, ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι α καὶ ε κλπ. Προσθέτοντες δὲ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας α καὶ θ (ἢ τὰς β καὶ η) παρατηροῦμεν, ὅτι εὑρίσκομεν ἄθροισμα 2 ὀρθάς. ὅθεν :



Σχ. 42.

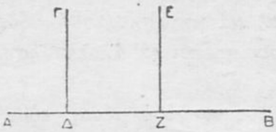
Ἐὰν δύο παράλληλοι τμηθῶσιν ὑπὸ τρίτης σχηματίζουσι

α') Τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας.

β') Τὰς ἐντός, ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας καὶ

γ') Τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη παραπληρωματικάς.

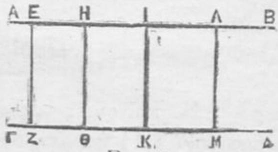
2) Ἔστωσαν δύο κάθετοι ΓΔ καὶ ΕΖ ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· παρατηροῦμεν ὅτι, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσι δὲν συναντῶνται· ὅθεν :



Σχ. 43.

Δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι.

3) Ἔστωσαν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ μεταξὺ αὐτῶν κάθετοι αἱ ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ· Μετροῦντες ταύτας παρατηροῦμεν, ὅτι πᾶσαι εἶναι ἴσαι· ὅθεν·



Σχ. 44.

Αἱ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἀγόμεναι κάθετοι εἶναι πᾶσαι ἴσαι.

Ὁρισμός. Ἀπόστασις δύο παραλλήλων εὐθειῶν καλεῖται μία τῶν κοινῶν καὶ ἴσων καθέτων, τῶν ἀγομένων μεταξὺ αὐτῶν.

Ἐρωτήσεις.

Πότε δύο εὐθεῖαι καλοῦνται παράλληλοι ; Ποῦ παρατηρεῖτε εὐθείας παραλλήλους ; Ποῖαι εἶναι αἱ σπουδαιότεραι ἰδιότητες τῶν παραλλήλων ; Τί καλεῖται ἀπόστασις δύο παραλλήλων ;

Διάφοροι θέσεις εὐθειῶν ἐπιπέδων.

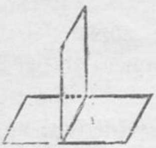
1) **Θέσεις δύο εὐθειῶν πρὸς ἀλλήλας.**

47. Δύο εὐθεῖαι, ἐὰν μὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἢ κάθετοι ἢ πλάγιαι ἢ παράλληλοι, ἐὰν δὲ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, οὔτε τέμνουσιν ἀλλήλας, ἀλλ' οὔτε καὶ παράλληλοι εἶναι.

2) **Θέσεις δύο ἐπιπέδων πρὸς ἄλληλα.**

48. Δύο ἐπίπεδα δύνανται νὰ εἶναι πρὸς ἄλληλα:

α') Κάθετα (σχ. 45), ὡς εἶναι δύο διαδοχικαὶ ἕδραι τοῦ κύβου (παραβ. § 38).

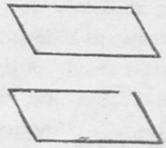


Σχ. 45

β') Παράλληλα (σχ. 46) ὡς εἶναι δύο ἀπέναντι ἕδραι τοῦ κύβου, συνήθως δὲ ἡ ὀροφὴ καὶ τὸ πάτωμα κλπ.

γ') Πλάγια (σχ. 47) ὡς εἶναι ὁ πυθμὴν πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς σκάφης.

49. Ἐὰν μετρήσωμεν πάσας τὰς μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἀγομένας καθέτους, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι πᾶσαι εἶναι ἴσαι.



Σχ. 46.

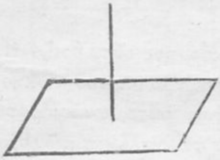
Ὁρισμός. Ἀπόστασις δύο παραλλήλων ἐπιπέδων καλεῖται μία οἱαδήποτε τῶν μεταξὺ αὐτῶν κοινῶν καὶ ἴσων καθέτων.

Σχ. 47.

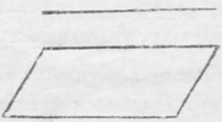
3) **Θέσεις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον.**

50. Ὁμοίως εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον δύναται νὰ εἶναι :

α') Κάθετος (σχ. 48), ὡς εἶναι ἡ ἀκμὴ ΒΖ τοῦ κύβου (σχ. § 1) ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΒΓΔ.



Σχ. 48.

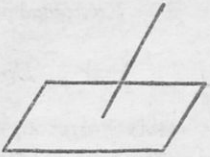


Σχ. 49.

β') Παράλληλος (σχ. 49), ὡς εἶναι ἡ ἀκμὴ ΖΗ πρὸς τὴν ἕδραν ΑΒΓΔ.

γ') Πλαγία (σχ. 50).

51. Ἡ ἔκ τινος σημείου ἐπὶ ἐπίπεδον ἀγομένη κάθετος λαμβάνεται ὡς ἀπόστασις τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου, καλεῖται δὲ ἀπόστημα.



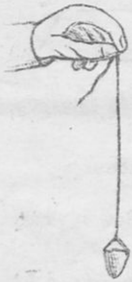
Σχ. 50.

52. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν γνωρίζομεν ὅτι δύο εὐθεῖαι (ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου) ἢ δύο ἐπίπεδα ἢ εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον δύνανται νὰ ἔχωσι πρὸς ἄλληλα θέσιν :

α') **Κάθετον·** β') **Παράλληλον·** γ') **Πλαγίαν.**

4) **Θέσεις μιᾶς εὐθείας ἢ ἑνὸς ἐπιπέδου ἐν τῷ διαστήματι.**

53. **Νῆμα τῆς στάθμης.** Νῆμα τῆς στάθμης καλεῖται τὸ νῆμα, εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου εἶναι προσδεδεμένον βάρος τι, συνήθως δὲ ἐκ μολύβδου ἢ χαλκοῦ.



Σχ. 51.

Ἐὰν κρατήσωμεν τὸ νῆμα ἐκ τοῦ ἑτέρου ἄκρου καὶ ἀφήσωμεν νὰ ἠρεμήσῃ, λαμβάνει πάντοτε διεύθυνσιν πρὸς τὸ κέντρον τῆς γῆς. Τὴν διεύθυνσιν ταύτην καλοῦμεν κατακόρυφον.

54. Πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς κατακορύφου καλεῖται κατακόρυφον· οἷον οἱ τοῖχοι τῶν δωματίων.

55. Πᾶν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τῆς κατακορύφου καλεῖται ὁριζόντιον· οἷον τὸ πάτωμα, ἡ τράπεζα, ἡ ἐπιφάνεια ἠρεμοῦντος ὕδατος κλπ.

56. Πᾶσα δὲ εὐθεῖα κειμένη ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ἢ παράλληλος πρὸς αὐτὸ καλεῖται ὁριζοντία· οἷον ῥάβδος κειμένη ἐπὶ ἐπιφανείας ὕδατος.

57. Ἐὰν δὲ ἡ εὐθεῖα δὲν εἶναι οὔτε κατακόρυφος οὔτε ὁριζοντία, καλεῖται κεκλιμένη· οἷον οἱ πόδες τοῦ ὑποστηρίγματος τοῦ πίνακος·

58. Ὁμοίως καὶ ἐπίπεδον, ἐὰν δὲν εἶναι οὔτε κατακόρυφον οὔτε ὁριζόντιον, καλεῖται κεκλιμένον οἷον τὰ ἀναλόγια τῶν θρανίων, αἱ στέγαι τῶν οἰκοδομῶν κλπ.

59. Ὅθεν μία μόνη εὐθεῖα ἢ ἓν μόνον ἐπίπεδον δύναται νὰ διευθύνηται ἐν τῷ διαστήματι:

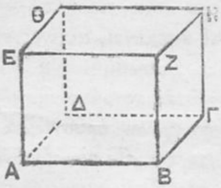
α') **Κατακορύφως**· β') **Ὁριζοντίως**· γ') **Κεκλιμένως.**

Ἐρωτήσεις καὶ ἀσκήσεις.

Ποία ἡ σχετικὴ θέσις δύο εὐθειῶν, δύο ἐπιπέδων, εὐθείας καὶ ἐπιπέδου πρὸς ἄλληλα; Τί δύναται νὰ εἶναι μία μόνη εὐθεῖα ἢ ἓν μόνον ἐπίπεδον ὑπὸ τὴν ἔποψιν τῆς ἐν τῷ διαστήματι διευθύνσεώς των; Νὰ δειχθῶσιν ἕδραι τοῦ κύβου κάθετοι καὶ ἄλλαι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας. Ποῦ ἀλλοῦ παρατηρεῖτε κάθετα καὶ παράλληλα ἐπίπεδα; Νὰ τεθῇ τὸ βιβλίον καθέτως, εἶτα πλαγίως καὶ τέλος παραλλήλως ἐπὶ τοῦ πίνακος ἢ τῆς τραπέζης ἢ τοῦ τοίχου κλπ. Νὰ δειχθῶσιν ἐπὶ τοῦ κύβου ἀκμαὶ κάθετοι ἐπὶ ἕδρας καὶ ἀκμαὶ παράλληλοι πρὸς ἕδρας. Ποῦ ἀλλοῦ παρατηρεῖτε τοιαύτας. Νὰ τεθῇ μολυβδοκόνδυλον καθέτως, εἶτα πλαγίως καὶ τέλος παραλλήλως ἐπὶ τοῦ πίνακος ἢ τῆς τραπέζης ἢ τοῦ βιβλίου. Τί καλεῖται ἀπόστασις δύο ἐπιπέδων καὶ τί σημείου ἀπὸ ἐπιπέδου; Νὰ διατεθῇ ἕδρα τις τοῦ κύβου ὁριζοντίως καὶ νὰ δειχθῶσι ποῖαι καὶ πόσαι ἕδραι καὶ ἀκμαὶ διευθύνονται ὁριζοντίως ἢ κατκορύφως. Νὰ στηριχθῇ ὁ κύβος διὰ μιᾶς ἀκμῆς του ἢ ἐπὶ μιᾶς κορυφῆς του καὶ νὰ ἐξετασθῇ ἡ διεύθυνσις ἑκάστης τῶν ἑδρῶν του καὶ ἀκμῶν του ἐν τῷ διαστήματι. Ποῦ ἀλλοῦ παρατηρεῖτε τοιαύτας εὐθείας καὶ ἐπίπεδα;

Περὶ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

60. Τὸ στερεὸν τοῦτο σῶμα [1], ὅπερ ἀπεικονίζεται διὰ τοῦ παραπλεύρως σχήματος, καλεῖται ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον·



Σχ. 52.

61. Ἐπιφάνεια αὐτοῦ καλεῖται πάντα τὰ ἄκρα αὐτοῦ ὁμοῦ λαμβανόμενα.

62. Ἕδραι δὲ αὐτοῦ τὰ διάφορα μέρη τῆς ἐπιφανείας του.

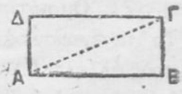
63. Ἀκμαὶ δὲ καλοῦνται αἱ εὐθεῖαι, καθ' ἃς τέμνονται αἱ ἕδραι αὐτοῦ ἀνὰ δύο.

64. Δίεδροι γωνίαι αὐτοῦ καλοῦνται τὰ σχήματα, ἅτινα ἀποτελοῦσι δύο ἕδραι τεμνόμεναι.

65. Στερεαὶ δὲ γωνίαι αὐτοῦ τὰ σχήματα, ἅτινα ἀποτελοῦσι τρεῖς ἕδραι διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

66. Ἐξετάζοντες τὰς ἕδρας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (παραβ. § 19) παρατηροῦμεν, ὅτι ἅπασαι εἶναι ἐπίπεδοι, τὸ δὲ σχῆμα, ὅπερ ἑκάστη ἔχει, καλοῦμεν ὀρθογώνιον· οἷον τὸ ΑΒΓΔ.

Τοιοῦτον σχῆμα ἔχουσιν ὁ πίναξ, ἡ τράπεζα, τὰ βιβλία, τὰ παράθυρα, οἱ ὑαλοπίνακες, οἱ τοῖχοι, τὸ πάτωμα κλπ.



Σχ. 53.

67. Αἱ 4 εὐθεῖαι, ἤτοι αἱ ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ,

---

1 Ὁ διδάσκων δεικνύει τοῖς μαθηταῖς ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καὶ εἶτα κατὰ τὰς ἀπαιτήσεις τῆς διδασκαλίας τὴν ἐπιφάνειαν, τὰς ἕδρας, τὰς ἀκμάς, τὰς γωνίας κτλ. τούτου.

ὑπὸ τῶν ὁποίων περιορίζεται τὸ ὀρθογώνιον, καλοῦνται πλευραὶ αὐτοῦ καὶ τὸ σύνολον αὐτῶν ἀποτελεῖ τὴν περίμετρον τοῦ ὀρθογωνίου.

68. Ἐξετάζοντες τὰς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου διὰ τοῦ γνώμονος παρατηροῦμεν, ὅτι πᾶσαι εἶναι ὀρθαί.

Μετροῦντες δὲ καὶ τὰς πλευρὰς παρατηροῦμεν, ὅτι δὲν εἶναι πᾶσαι ἴσαι, ἀλλὰ μόνον αἱ ἀπέναντι· εἶναι δὲ αὗται συνάμα καὶ παράλληλοι.

69. **Ὁμοιότητες καὶ διαφοραὶ κύβου καὶ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.** Ἀριθμοῦντες εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ κύβος καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχουσιν ἕκαστον 6 ἕδρας, 12 ἀκμάς, 12 διέδρους γωνίας, 8 κορυφὰς καὶ 8 στερεὰς γωνίας.

Ἀλλὰ αἱ ἕδραι καὶ αἱ ἀκμαί, ἐνῷ εἰς τὸν κύβον εἶναι πᾶσαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, εἰς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον οὔτε αἱ ἕδραι οὔτε αἱ ἀκμαὶ εἶναι γενικῶς πᾶσαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· ἴσαι δὲ εἶναι πάντοτε ἐκ μὲν τῶν ἑδρῶν αἱ ἀπέναντι, αἵτινες εἶναι καὶ παράλληλοι, ἐκ δὲ τῶν ἀκμῶν αἱ παράλληλοι.

Αἱ ἕδραι δὲ εἰς μὲν τὸν κύβον εἶναι πᾶσαι τετράγωνα, εἰς δὲ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον εἶναι ἐν γένει ὀρθογώνια μὴ ἀποκλειομένου νὰ εἶναί τινες καὶ τετράγωνα, π.χ. εἰς τὸν κανόνα.

70. **Διαστάσεις.** Ἐὰν τοποθετήσωμεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ὥστε μία ἕδρα του νὰ διευθύνεται ὁριζοντίως, καὶ θεωρήσωμεν τρεῖς ἀκμὰς διερχομένας διὰ τῆς αὐτῆς κορυφῆς, τότε τὴν διευθυνομένην κατακορύφως καλοῦμεν ὕψος, ἐκ δὲ τῶν δύο ἄλλων τὴν μὲν μεγαλυτέραν καλοῦμεν μῆκος, τὴνδὲ μικροτέραν πλάτος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Καὶ τὰς τρεῖς δὲ ὁμοῦ καλοῦμεν διαστάσεις.

Τὰ αὐτὰ δὲ λέγομεν καὶ διὰ τὸν κύβον· ἀλλ' ἐν αὐτῷ αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι ἴσαι.

71. **Ὁμοιότητες καὶ διαφοραὶ τετραγώνου καὶ ὀρθογωνίου.** Ταῦτα ἔχουσιν ἁπάσας τὰς γωνίας των ὀρθὰς καὶ συνεπῶς ἴσας πρὸς ἀλλήλας. Ἀλλ' αἱ πλευραί, ἐνῷ εἰς τὸ τετράγωνον εἶναι πᾶσαι ἴσαι, εἰς τὸ ὀρθογώνιον δὲν εἶναι ἴσαι. Ἴσαι δὲ εἶναι μόνον αἱ ἀπέναντι, αἵτινες εἶναι καὶ παράλληλοι.

72. **Διαστάσεις ὀρθογωνίου καὶ τετραγώνου.** Ἐκ τῶν δύο διαδοχικῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τὴν μὲν μεγαλυτέραν καλοῦμεν

μῆκος, τὴν δὲ μικροτέραν πλάτος, ἀμφοτέρας δὲ διαστάσεις.

Εἰς τὸ τετράγωνον δὲ αἱ δύο διαστάσεις εἶναι ἴσαι.

Σημ. Πολλάκις λόγῳ εὐκολίας καλοῦμεν διαστάσεις καὶ τοὺς ἀριθμούς, τοὺς παριστῶντας τὰς διαστάσεις.

Εὐθύγραμμα σχήματα ἢ πολύγωνα.

73. Τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ὀρθογώνιον, ὡς εἴδομεν, εἶναι ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι περιοριζόμεναι πανταχόθεν ὑπὸ εὐθειῶν. Διὰ τοῦτο τὰ σχήματα ταῦτα, ὡς καὶ πᾶν ἄλλο τοιοῦτο σχῆμα, καλοῦμεν εὐθύγραμμον σχῆμα ἢ πολύγωνον ἤτοι:

Εὐθύγραμμον σχῆμα ἢ πολύγωνον καλεῖται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περιοριζομένη ὑπὸ εὐθειῶν τεμνομένων ἀνὰ δύο.

74. Αἱ εὐθεῖαι, εἰς ἃς περατοῦται τὸ πολύγωνον, καλοῦνται πλευραὶ αὐτοῦ, ἤτοι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ (σχ.§ 20 καὶ 66).

75. Ἡ δὲ τεθλασμένη καὶ κλειστὴ γραμμή, ἣν σχηματίζουσιν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ, ἔτι δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν (§ 14) καλεῖται περίμετρος τοῦ πολυγώνου.

76. Γωνίαι πολυγώνου καλοῦνται αἱ ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ σχηματιζόμεναι γωνίαι, ἤτοι αἱ ΑΒΓ, ΒΓΔ κλπ, κορυφαὶ δὲ αὐτοῦ αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν τούτων, ἤτοι τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ.

77. Διαγώνιος δὲ πολυγώνου καλεῖται πᾶσα εὐθεῖα συνδέουσα δύο κορυφὰς μὴ διαδοχικάς· οἷον ἡ ΑΓ (σχ.§ 66).

Ἐρωτήσεις.

Ποῖαι αἱ ὁμοιότητες καὶ αἱ διαφοραὶ κύβου καὶ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ὁμοίως δὲ τετραγώνου καὶ ὀρθογωνίου; Τί καλοῦμεν ὕψος, μῆκος, πλάτος καὶ διαστάσεις τῶν ἄνω σχημάτων; Τί καλεῖται εὐθύγραμμον σχῆμα ἢ πολύγωνον καὶ τί πλευραί, περίμετρος, γωνίαι, κορυφαὶ καὶ διαγώνιοι αὐτοῦ;

Περὶ πρισμάτων καὶ πολυγώνων.

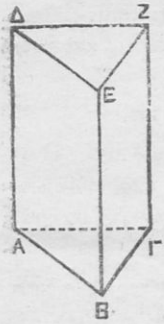
Ὀρθὸν τριγωνικὸν πρίσμα.

78. Τὸ στερεὸν τοῦτο σῶμα καλεῖται ὀρθὸν τριγωνικὸν πρίσμα [1], ὡς καὶ τὸ παράπλευρον σχῆμα.

---

1 Ἐπ' αὐτοῦ ἐπαναλαμβάνεται ἐποπτικὴ διδασκαλία περὶ τῆς ἐπιφανείας, ἑδρῶν, ἀκμῶν, διέδρων καὶ στερεῶν γωνιῶν κλπ., οἷα καὶ ἐπὶ τοῦ κύβου καὶ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Δι' ἁπλῆς δὲ ὄψεως παρατηροῦμεν, ὅτι ἔχει 5 ἕδρας, 9 ἀκμάς, 6 στερεὰς γωνίας καὶ 6 κορυφάς.



Σχ. 54.

79. Τρίγωνα. Ἐκ τῶν 5 ἑδρῶν τοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος αἱ δύο, αἵτινες εἶναι ἀπέναντι ἀλλήλων, εἶναι πολύγωνα ἔχοντα τρεῖς πλευρὰς καὶ τρεῖς γωνίας. Τὰ τοιαῦτα σχήματα καλοῦνται τρίγωνα.

80. Βάσεις καὶ ὕψος. Τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα καὶ καλοῦνται βάσεις τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος.

Ὕψος δὲ καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων.

81. Παράπλευρος ἐπιφάνεια. Αἱ τρεῖς ἄλλαι ἕδραι ἔχουσι σχῆμα ὀρθογωνίων καὶ λέγομεν, ὅτι ἀποτελοῦσι τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν.

82. Αἱ ἀκμαὶ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ, καθ' ἃς τέμνουσιν ἀλλήλας αἱ παράπλευροι ἕδραι, καλοῦνται παράπλευραι ἀκμαί. Εἶναι δὲ αὗται κάθετοι εἰς τὰς βάσεις, δι' ὃ τὸ πρίσμα καλεῖται ὀρθόν. Τότε ἑκάστη τούτων ἰσοῦται προφανῶς πρὸς τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.

Ἐρωτήσεις.

Πόσας ἕδρας, ἀκμὰς καὶ στερεὰς γωνίας ἔχει τὸ ὀρθὸν τριγωνικὸν πρίσμα ; Τί καλοῦνται βάσεις καὶ ὕψος αὐτοῦ ; Τί καλεῖται παράπλευρος ἐπιφάνεια καὶ τί παράπλευροι ἀκμαί ; Πῶς διευθύνονται αἱ παράπλευροι ἕδραι καὶ ἀκμαὶ πρὸς τὰς βάσεις ; Ποίαν σχέσιν ἔχουσιν αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ καὶ τὸ ὕψος ; Ποία ἡ σχετικὴ θέσις τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν πρὸς ἀλλήλας ; Ἐὰν τοποθετήσωμεν μίαν τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν ὁριζοντίως, πῶς θὰ διευθύνωνται αἱ λοιπαὶ καὶ πόσαι καὶ ποῖαι τῶν 9 ἀκμῶν θὰ εἶναι ὁριζόντιοι ἢ κατακόρυφοι ἢ κεκλιμέναι ;

Περὶ τριγώνων.

83. Τρίγωνον καλεῖται (§ 79) τὸ πολύγωνον τὸ ἔχον τρεῖς πλευράς.

Ὡς βάσις τοῦ τριγώνου δύναται νὰ ληφθῇ μία οἱαδήποτε τῶν πλευρῶν αὐτοῦ· τότε δὲ ὕψος αὐτοῦ καλεῖται ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν, ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς.

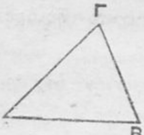
Οἷον ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΙ, ἐὰν ληφθῶσιν ὡς βάσεις ἀντιστοίχως αἱ ΑΒ, ΔΕ, ΗΘ, θὰ ἔχωμεν ἀντίστοιχα εἰς ταύτας ὕψη τὰ ΓΚ, ΖΛ, ΙΘ.

Σχ. 55.

84. Αἱ σπουδαιότεραι ἰδιότητες οἱουδήποτε τριγώνου εἶναι αἱ ἑξῆς :

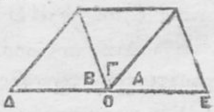
1) Ἐπειδὴ (§ 10,2) $ΑΓ < ΑΒ + ΒΓ$, συνάγομεν ὅτι :

Ἑκάστη πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.



Σχ. 56.

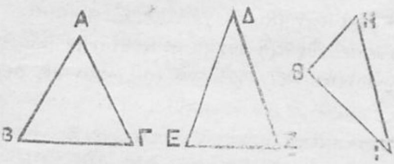
2) Ἐὰν κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ χαρτίου καί, ἀφοῦ ἀποκόψωμεν τὰς τρεῖς γωνίας του, παραθέσωμεν τὴν μίαν κατόπιν τῆς ἄλλης, ὥστε νὰ εἶναι ἐφεξῆς (§ 31), παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ΔΟΕ εἶναι εὐθεῖα· συνεπῶς (§ 34,2) $Α+Β+Γ=2$ ὀρθ. ὅθεν :



Σχ. 57.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς 2 ὀρθάς.

85. Ἐξετάζοντες τὰς τρεῖς πλευρὰς τριγώνου βλέπομεν εὐκόλως, ὅτι εἶναι δυνατόν:



Σχ. 58.

1) Νὰ εἶναι καὶ αἱ τρεῖς ἴσαι ὅτε τὸ τρίγωνον καλεῖται ἰσόπλευρον, οἷον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

2) Νὰ εἶναι δύο μόνον ἴσαι, ἡ δὲ τρίτη νὰ εἶναι ἄνισος πρὸς αὐτάς, ὅτε τὸ τρίγωνον καλεῖται ἰσοσκελές, οἷον τὸ ΔΕΖ.

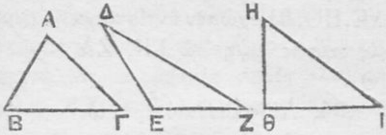
Σημ. Ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ ὡς βάσις λαμβάνεται συνήθως ἡ πλευρὰ ἡ πρὸς τὰς ἄλλας ἄνισος, ἤτοι ἡ ΕΖ.

3) Νὰ εἶναι καὶ αἱ τρεῖς ἄνισοι πρὸς ἀλλήλας, ὅτε τὸ τρίγωνον καλεῖται σκαληνόν· οἷον τὸ ΗΘΙ.

86. Ἐξετάζοντες δὲ τὰς τρεῖς γωνίας τριγώνου, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι 2 ὀρθαὶ (§ 84,2), συνάγομεν εὐκόλως ὅτι εἶναι δυνατόν :

1) Νὰ εἶναι ἅπασαι ὀξεῖαι, ὅτε τὸ τρίγωνον καλεῖται ὀξυγώνιον οἷον τὸ ΑΒΓ.

2) Νὰ εἶναι μία ἀμβλεῖα, αἱ δὲ ἄλλαι δύο ὀξεῖαι, ὅτε τὸ τρίγωνον καλεῖται ἀμβλυγώνιον· οἷον τὸ ΔΕΖ.



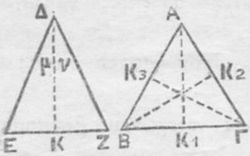
Σχ. 59.

3) Νὰ εἶναι ἡ μία ὀρθὴ καὶ αἱ ἄλλαι δύο ὀξεῖαι (ὧν τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι 1 ὀρθή), ὅτε τὸ τρίγωνον καλεῖται ὀρθογώνιον· οἷον τὸ τρίγωνον ΗΘΙ.

Ἡ πλευρὰ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας (ἤτοι ἡ ΗΙ) καλεῖται ὑποτείνουσα.

87. Διὰ τὸ ἰσοσκελὲς καὶ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἰσχύουσι προσέτι πλὴν τῶν τῆς § 84 καὶ αἱ ἑξῆς ἰδιότητες.

Ἐὰν κατασκευάσωμεν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΕΔΖ ἐκ χάρτου καὶ θλάσαντες αὐτὸ εἰς 2 τρίγωνα κατὰ τὸ ὕψος ΔΚ περιστρέψωμεν τὸ ἓν περὶ τὴν ΔΚ, ἕως ὅτου νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἄλλου, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΕΚΔ πίπτει ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΖΚΔ καὶ συνεπῶς ἡ γωνία Ε ἐπὶ τῆς Ζ, ἡ μ ἐπὶ τῆς ν καὶ ἡ Ε ἐπὶ τῆς ΚΖ· ὅθεν :



Σχ. 60.

1) Παντὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

2) Τὸ ὕψος παντὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου διαιρεῖ τὴν βάσιν, τὴν ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνίαν, ὡς καὶ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἴσα μέρη.

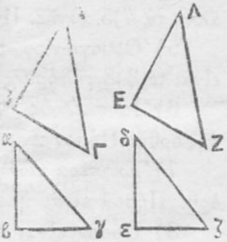
Τὴν αὐτὴν δὲ ἰδιότητα ἔχουσι καὶ τὰ ὕψη τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου (οἷον τοῦ ΑΒΓ) ἐξ οἱασδήποτε κορυφῆς (ἤτοι τὰ AK_1, BK_2, ΓK_3).

3) Ἐὰν ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐκ χάρτου κόψωμεν τὰς γωνίας καὶ ἐπιθέσωμεν ἐπ' ἀλλήλας παρατηροῦμεν, ὅτι ἅπασαι ἐφαρμόζουσιν· ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν ἰσογωνίου τριγώνου μετρήσωμεν τὰς πλευράς, παρατηροῦμεν ὅτι ἅπασαι εἶναι ἴσαι· ἄρα :

Πᾶν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον καὶ ἀντιστρόφως πᾶν ἰσογώνιον εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.

Περὶ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων.

88. Ἐὰν ἔχωμεν τρίγωνα ἐκ χάρτου, οἷον τὰ ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, καὶ μετρήσαντες εὕρωμεν, ὅτι ἔχουσι τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν, ἤτοι ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ, ΒΓ=ΕΖ, ἢ δύο πλευρὰς καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν, οἷον ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ καὶ Α=Δ, ἢ μίαν πλευρὰν καὶ δύο οἱασδήποτε γωνίας, οἷον ΒΓ=ΕΖ, Β=Ε καὶ Α=Δ, καὶ εἶτα ἐπιθέσωμεν τὸ ἓν τρίγωνον ἐπὶ τοῦ ἄλλου, παρατηροῦμεν ὅτι ἐφαρμόζουσιν· ἄρα :



Σχ. 61.

1) Δύο τρίγωνα, ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν εἶναι ἴσα.

2) Δύο τρίγωνα, ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν εἶναι ἴσα.

Ἐὰν ὅμως τὰ τρίγωνα εἶναι ὀρθογώνια (ὡς τὰ αβγ καὶ δεζ) ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὅτι εἶναι ἴσα εἴτε ἡ ὀρθὴ γωνία β καὶ ε εἶναι περιεχομένη εἴτε μή.

3) Δύο τρίγωνα, ἔχοντα μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ δύο οἱασδήποτε γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ἴσα.

Σημ. Οὕτως ἔχομεν γνωρίσματα τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ἄνευ ἐπιθέσεως τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τοῦ ἄλλου (§ 18), ἥτις εἰς πολλὰς περιστάσεις δὲν εἶναι δυνατή· π. χ. ἐὰν πρόκειται περὶ δύο τριγωνικῶν οἰκοπέδων ἢ ἀγρῶν κτλ.

Ἐρωτήσεις καὶ ἀσκήσεις.

Τί καλεῖται τρίγωνον καὶ τί βάσις καὶ ὕψος αὐτοῦ ; Ποῖαι εἶναι αἱ σπουδαιότεραι ἰδιότητες οἱουδήποτε τριγώνου ; Πότε τὸ τρίγωνον καλεῖται ἰσόπλευρον, ἰσοσκελές, σκαληνὸν καὶ πότε ὀξυγώνιον, ἀμβλυγώνιον, ὀρθογώνιον ; Τί καλεῖται ὑποτείνουσα ; Ποίας σπουδαίας ἰδιότητας ἔχει τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον καὶ ποίας τὸ ἰσόπλευρον ; Πότε δύο οἱαδήποτε τρίγωνα εἶναι ἴσα καὶ πότε δύο ὀρθογώνια ;

1) Νὰ γραφῇ ἰσόπλευρον, ἰσοσκελές, σκαληνόν, ὀξυγώνιον, ἀμβλυγώνιον καὶ ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ νὰ ἀχθῶσι τὰ ὕψη ἐξ ἑκάστης αὐτῶν κορυφῆς.

2) Ἡ περίμετρος ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 24,945 μετρ. Πόσον εἶναι ἑκάστη αὐτῶν πλευρά ; (8,315 μ.)

3) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ περίμετρος εἶναι 40 μ., ἡ δὲ βάσις 10 μ. Πόσον εἶναι ἑκατέρα τῶν ἄλλων πλευρῶν ; (15 μ.)

4). Τριγώνου τινὸς ἡ μία γωνία εἶναι τὰ 2)3 τῆς ὀρθῆς, ἡ δὲ ἄλλη τὰ 4)5 αὐτῆς. Πόσον εἶναι ἡ τρίτη γωνία αὐτοῦ ; (8)15 ὀρθ.)

5) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι τὰ 3)8 τῆς ὀρθῆς. Πόσον εἶναι ἡ ἄλλη ὀξεῖα γωνία ; (5)8 ὀρθ.)

6) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι 2)3 τῆς ὀρθῆς. Πόσον εἶναι ἑκατέρα τῶν δύο ἄλλων ἴσων γωνιῶν αὐτοῦ ;

7) Ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 3)5 ὀρθ. Πόσον εἶναι ἡ ἑτέρα γωνία ; (4)5 ὀρθ.)

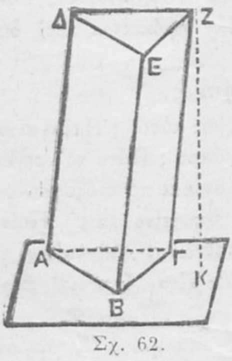
8) Πόσον εἶναι ἑκατέρα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἰσοσκελοῦς καὶ ὀρθογωνίου τριγώνου ; ($^1/_2$ ὀρθ.)

9) Τριγώνου τινὸς ἡ μία γωνία εἶναι ἴση τῷ ἀθροίσματι τῶν δύο ἄλλων. Τί εἶναι ἡ γωνία αὕτη, ὀρθή, ἀμβλεῖα ἢ ὀξεῖα ;

10*) Ζητεῖται ἔκ τινος χωρίου Γ νὰ χαραχθῇ εὐθεῖα ὁδὸς διερχομένη μεταξὺ τῶν χωρίων Α καὶ Β καὶ οὕτως, ὥστε ταῦτα νὰ ἀπέχωσιν ἴσην ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς.

Πλάγιον τριγωνικὸν πρίσμα.

89. Τὸ στερεὸν τοῦτο σῶμα καλεῖται πλάγιον τριγωνικὸν πρίσμα.[1] Ἀλλ' αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ ἐνταῦθα δὲν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις, ἀλλὰ πλάγιαι, δι' ὃ καὶ τὸ πρίσμα καλεῖται πλάγιον, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ ΖΚ εἶναι μικρότερον τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ.



Σχ. 62.

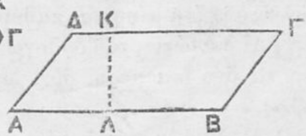
Περὶ παραλληλογράμμων.

90. Αἱ παράπλευροι ἕδραι τοῦ ἀνωτέρω στερεοῦ εἶναι πολύγωνα ἔχοντα 4 πλευράς. Μία τῶν ἑδρῶν δύναται νὰ εἶναι ὀρθογώνιον ἢ τετράγωνον, αἱ δὲ

[1] Ἐπ' αὐτοῦ ἐπαναλαμβάνεται ἐποπτικὴ διδασκαλία, οἵα καὶ ἐπὶ τοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος.

ἄλλαι δύο ἢ πολλάκις καὶ αἱ τρεῖς ἔχουσι τὴν μορφὴν ἢ τοῦ σχήματος 63, ὅπερ καλοῦμεν ῥόμβον, ἢ τοῦ σχήματος 64, ὅπερ καλοῦμεν ῥομβοειδές.

Σχ 63



Σχ. 64.

Ἐξετάζοντες δὲ τὰ σχήματα ταῦτα παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς ἀμφότερα αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι, ἀλλ' εἰς μὲν τὸν ῥόμβον ἅπασαι εἶναι ἴσαι, εἰς δὲ τὸ ῥομβοειδὲς εἶναι ἴσαι μόνον αἱ ἀπέναντι· αἱ γωνίαι δὲ τούτων δὲν εἶναι ἅπασαι ἴσαι, ἀλλὰ μόνον αἱ ἀπέναντι.

Εἰς τὰ δύο ταῦτα σχήματα, ὡς καὶ εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ὀρθογώνιον, παρατηροῦμεν τὴν κοινὴν ἰδιότητα, ὅτι ἔχουσι τὰς ἀπέναντι αὐτῶν πλευρὰς παραλλήλους δι' ὃ καλοῦμεν ταῦτα παραλληλόγραμμα.

91. Ὡς βάσις παραλληλογράμμου δύναται νὰ ληφθῇ μία οἱαδήποτε τῶν πλευρῶν αὐτοῦ· εἰς τὸ ὀρθογώνιον καὶ ῥομβοειδὲς λαμβάνεται συνήθως ἡ μεγαλυτέρα (ἤτοι ἡ ΑΒ σχ. 64 καὶ σχ. §66).

Τότε δὲ ὕψος αὐτοῦ καλεῖται ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ἡ ἀγομένη ἔκ τινος σημείου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς (οἷον ἡ ΚΛ σχ. 63 καὶ 64).

Εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ὀρθογώνιον ὡς βάσις καὶ ὕψος λαμβάνονται δύο προσκείμεναι πλευραί (οἷον ἡ ΑΒ καὶ ΓΔ σχ. § 20 καὶ 66).

92. **Ἰδιότητες.** 1) Εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὸν ῥόμβον εἴδομεν, ὅτι πᾶσαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι· εἰς δὲ τὸ ὀρθογώνιον καὶ ῥομβοειδὲς μόνον αἱ ἀνὰ δύο ἀπέναντι· ὅθεν ἐν γένει:

Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ οἱουδήποτε παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι.

2) Ἅπασαι αἱ γωνίαι τοῦ τετραγώνου καὶ ὀρθογωνίου εἶναι ὀρθαὶ καὶ συνεπῶς ἴσαι· εἰς δὲ τὸν ῥόμβον καὶ ῥομβοειδὲς μόνον αἱ ἀπέναντι· ὅθεν ἐν γένει:

Αἱ ἀπέναντι γωνίαι οἱουδήποτε παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι.

3) Ἐὰν φέρωμεν τὰς διαγωνίους τούτων καὶ μετρήσωμεν αὐτάς, ὡς καὶ τὰ τμήματα, εἰς ἃ τέμνουσιν ἀλλήλας, συνάμα δὲ καὶ τὰς γωνίας, ἃς σχηματίζουσι πρὸς ἀλλήλας, συνάγομεν ὅτι :

α΄) Αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου (σχ. 65) τέμνουσιν ἡ μία τὴν ἄλλην εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ καθέτως καὶ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

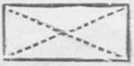
β΄) Αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου (σχ. 67) τέμνουσιν ἡ μία τὴν ἄλλην εἰς δύο ἴσα μέρη, οὐχὶ δὲ καθέτως, καὶ εἶναι ίσαι πρὸς ἀλλήλας.

γ΄) Αἱ διαγώνιοι τοῦ ῥόμβου (σχ. 67) τέμνουσιν ἡ μία τὴν ἄλλην εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ καθέτως ἀλλὰ δὲν εἶναι ἴσαι.

Σχ. 65.

δ΄) Αἱ διαγώνιοι τοῦ ῥομβοειδοῦς (σχ. 68) μόνον τέμνουν ἡ μία τὴν ἄλλην εἰς δύο ἴσα μέρη· ὅθεν ἐν γένει :

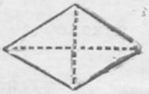
Σχ. 66.



Αἱ διαγώνιοι τῶν παραλληλογράμμων τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Τὸ σημεῖον δὲ τῆς τομῆς καλεῖται κέντρον τοῦ παραλληλογράμμου.

Σχ. 67.



Σχ. 68.

Ἐρωτήσεις.

Πῶς διευθύνονται αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τοῦ πλαγίου τριγωνικοῦ πρίσματος πρὸς τὰς βάσεις καὶ ποία ἡ σχέσις τούτων πρὸς τὸ ὕψος ; Ποῖα σχήματα καλοῦνται παραλληλόγραμμα καὶ διατί; Τί καλεῖται βάσις καὶ ὕψος τούτων ; Ποίας ἰδιότητας ἔχουσιν αἱ πλευραί, αἱ γωνίαι καὶ αἱ διαγώνιοι τῶν παραλληλογράμμων ; Τί καλεῖται κέντρον παραλληλογράμμου ;

Σχ. 69.

Ὀρθὸν τετραγωνικὸν πρίσμα.

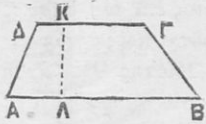
93. Τὸ στερεὸν τοῦτο σῶμα καλεῖται ὀρθὸν τετραγωνικὸν πρίσμα[1].

---

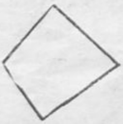
[1] Επ αὐτοῦ ἐπαναλαμβάνεται ἐποπτικὴ διδασκαλία, οἵα καὶ ἐπὶ τοῦ τριγωνικοῦ.

Περὶ τετραπλεύρων.

94. Αἱ βάσεις τοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος εἶναι πολύγωνα ἔχοντα 4 πλευράς. Καὶ ἐὰν μὲν αἱ ἀνὰ δύο ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι, τὸ τοιοῦτο σχῆμα τῆς ἕδρας καλεῖται (§ 90) παραλληλόγραμμον, ἐὰν δὲ μόνον δύο ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι, καλεῖται τραπέζιον (σχ.70), καὶ ἐὰν οὐδεμία πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι παράλληλος ἄλλη, καλεῖται κοινὸν τετράπλευρον (σχ. 71).



Σχ.70



Σχ.71.

Εἰς τὸ τραπέζιον αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ (ΑΒ καὶ ΔΓ) λαμβάνονται ὡς βάσεις, ὡς ὕψος δὲ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν ἀπ' ἀλλήλων (ἤτοι ἡ ΚΛ).

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ τραπέζια καὶ τὰ κοινὰ τετράπλευρα ἐπειδὴ ἅπαντα ἔχουσι 4 πλευράς, καλοῦνται τετράπλευρα.

95. **Ορισμοί.** Πρὸς διάκρισιν δὲ τούτων ἀπ' ἀλλήλων δίδομεν τοὺς ἑπομένους ὁρισμούς :

Τετράγωνον καλεῖται τὸ τετράπλευρον, τὸ ἔχον πάσας τὰς γωνίας ὀρθὰς καὶ πάσας τὰς πλευρὰς ἴσας.

Ὀρθογώνιον καλεῖται τὸ τετράπλευρον, οὗτινος πᾶσαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαί.

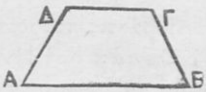
Ρόμβος καλεῖται τὸ τετράπλευρον, οὗτινος πᾶσαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

Ρομβοειδὲς καλεῖται τὸ τετράπλευρον, οὗτινος αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τετράπλευρον τὸ ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους καλεῖται (§ 90) παραλληλόγραμμον, διὰ τοῦτο συνήθως τὸ ρομβοειδὲς καλεῖται παραλληλόγραμμον.

Σημ. Ἀποδεικνύεται δὲ θεωρητικῶς, ὅτι αἱ ἄλλαι γνωσταὶ ἰδιότητες τῶν τετραπλεύρων τούτων πηγάζουσιν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν.

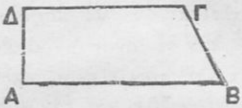
Τραπέζιον καλεῖται τὸ τετράπλευρον, οὗτινος δύο μόνον ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι.

Τὸ τραπέζιον καλεῖται ἰσοσκελὲς (σχ. 72), ὅταν αἱ μὴ παράλληλοι αὐτοῦ πλευραὶ (οἷον αἱ ΑΔ καὶ ΒΓ) εἶναι ἴσαι.



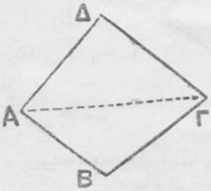
Σχ.72.

Καλεῖται δὲ ὀρθογώνιον (σχ. 73),ὅταν μία τῶν μὴ παραλλήλων αὐτοῦ πλευρῶν (οἷον ἡ ΑΔ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις, ὅτε αὕτη ἰσοῦται πρὸς τὸ ὕψος.



Σχ.73.

96. **Ἰδιότης.** Ἐὰν ἀχθῇ μία τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ(οἷον ἡ ΑΓ), διαιρεῖται τοῦτο εἰς 2 τρίγωνα. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑκατέρου τῶν τριγώνων εἶναι 2 ὀρθαὶ καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων τούτων ἀποτελοῦσι τὰς γωνίας τοῦ τετραπλεύρου, ἕπεται ὅτι :



Σχ. 74.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τετραπλεύρου ἰσοῦται πρὸς 4 ὀρθάς.

Ἐρωτήσεις καὶ ἀσκήσεις.

Τί καλεῖται τραπέζιον καὶ τί κοινὸν τετράπλευρον ; Τί καλεῖται ἰσοσκελὲς καὶ τί ὀρθογώνιον τραπέζιον; Τί καλοῦνται βάσεις καὶ ὕψος τραπεζίου ; Ποῖα σχήματα καλοῦμεν τετράπλευρα καὶ διατί ; Τί καλεῖται τετράγωνον, ὀρθογώνιον, ῥόμβος καὶ ῥομβοειδές ;

1) Ποία εἶναι ἡ περίμετρος τετραγώνου πλευρᾶς 5,25 μετρ., (21 μετρ.)

2) Ἀγρὸς ἔχει σχῆμα τετραγώνου, ἔχοντος περίμετρον 4936 μετρ. Πόσον μῆκος ἔχει ἑκάστη πλευρά ; (1234 μετρ.)

3) Ποία εἶναι ἡ περίμετρος κήπου, ἔχοντος σχῆμα ὀρθογωνίου, οὗτινος αἱ διαστάσεις εἶναι 25 μ. καὶ 45 μ.; (140 μ.)

4) Ἡ περίμετρος ῥόμβου ἰσοῦται τῇ περιμέτρῳ ἰσοπλεύρου τριγώνου, οὗ ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 5,24 μ. Τίς ἡ πλευρὰ τοῦ ῥόμβου ; (3,93 μ.)

5) Ἐὰν πᾶσαι αἱ γωνίαι τετραπλεύρου εἶναι ἴσαι, πρὸς πόσας ὀρθὰς ἰσοῦται ἑκάστη ;

6) Τὸ ἄθροισμα τῶν 3 γωνιῶν τετραπλεύρου ἰσοῦται πρὸς $2\,{}^{3}/_{5}$ ὀρθ. Πόσον εἶναι ἡ τετάρτη ; ($1\,{}^{2}/_{5}$ ὀρθ.)

Περὶ εὐθυγράμμων σχημάτων ἢ πολυγώνων.

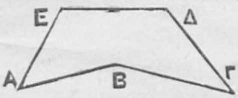
97. Ἐν § 73 εἴπομεν τί καλεῖται εὐθύγραμμον σχῆμα ἢ πολύγωνον.

Ἂν τὸ πολύγωνον ἔχῃ τρεῖς πλευρὰς καλεῖται τρίγωνον, ἐὰν τέσσαρας, καλεῖται τετράπλευρον, ἂν πέντε, πενταγωνον (σχ. § 98) καὶ οὕτω καθεξῆς, ἑξάγωνον (σχ. § 99), ἑπτάγωνον κ.τ.λ.

Λέγομεν δὲ ἐξαιρετικῶς τετράπλευρον καὶ οὐχὶ τετράγωνον διότι τὸ τετράγωνον εἶναι τὸ ἔχον τέσσαρας πλευρὰς ἴσας καὶ τέσσαρας γωνίας ὀρθάς, ἐνῷ εἰς τὸ τετράπλευρον αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι εἶναι οἱαιδήποτε.

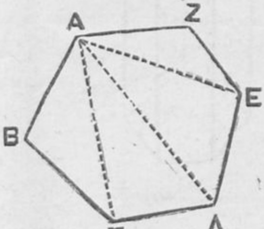
Σημ. Ἔπρεπε λοιπὸν τότε καὶ τὸ πρίσμα, τὸ ἔχον βάσιν τετράπλευρον, νὰ καλῶμεν τετραπλευρικόν, ἀλλ' ἐν τούτοις ἐπεκράτησεν ἡ ὀνομασία τετραγωνικόν, καίτοι ἡ βάσις δὲν εἶναι πάντοτε τετράγωνον, ἀλλὰ τετράπλευρον.

98*. Τὸ πολύγωνον καλεῖται κυρτόν, ἐὰν οὐδεμία τῶν πλευρῶν του προεκτεινομένη εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ πολυγώνου· οἷον πάντα τὰ μέχρι τοῦδε ἐξετασθέντα. Ἐν ἐναντίᾳ δὲ περιπτώσει καλεῖται κοῖλον· οἷον τὸ πεντάγωνον ΑΒΔΓΕ.



Σχ. 75.

99. **Ἰδιότης.** Ἔστω τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ. Ἐὰν ἐκ τῆς τυχούσης κορυφῆς Α φέρωμεν πάσας τὰς δυνατὰς διαγωνίους, σχηματίζονται πάντοτε τόσα τρίγωνα, ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου πλὴν δύο· τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν γωνιῶν τῶν σχηματισθέντων τριγώνων, ὅπερ εἶναι (6—2).2=4.2=8 ὀρθ. ὅθεν :



Σχ. 76.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν οἱουδήποτε πολυγώνου εἶναι τόσαι ὀρθαί, ὅσον εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του ἀφοῦ προηγουμένως ἐλαττωθῇ οὗτος κατὰ δύο.

Ἐρωτήσεις καὶ ἀσκήσεις.

Πῶς καλοῦνται τὰ πολύγωνα τὰ ἔχοντα 3,4,5,6,8,10,12 πλευράς;* Πότε τὸ πολύγωνον καλεῖται κυρτὸν καὶ πότε κοῖλον; Πρὸς πόσας ὀρθὰς ἰσοῦται τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν οἱουδήποτε πολυγώνου;

1*) Νὰ γραφῇ ἓν κυρτὸν καὶ ἓν κοῖλον πολύγωνον.

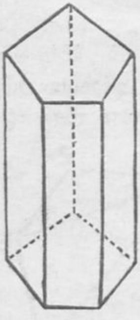
2) Νὰ γραφῇ τρίγωνον, τετράπλευρον, πεντάγωνον κλπ. καὶ νὰ ἀχθῶσι πᾶσαι αἱ δυναταὶ διαγώνιοι ἐκ μιᾶς τῶν κορυφῶν αὐτῶν.

3) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν πενταγώνου, ἑξαγώνου καὶ εἰκοσαγώνου καὶ πρὸς τί ἰσοῦται ἑκάστη τούτων, ἐὰν πᾶσαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις; (6,8,36 ὀρθαί· ἑκάστη δὲ ἰσοῦται πρὸς 6)5. 4)3. 9)5 ὀρθ.)

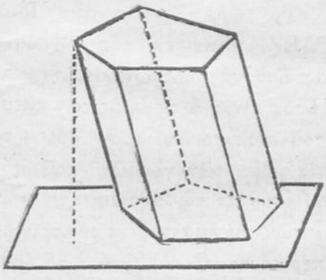
4*) Ποίων πολυγώνων τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἰσοῦται ἀντιστοίχως πρὸς 12,16,20 ὀρθὰς γωνίας; (8γώνου, 10γώνου 12γώνου).

Ὀρθὸν καὶ πλάγιον πενταγωνικὸν πρίσμα.

100. Ὁμοία ἐργασία γίνεται καὶ διὰ τὸ πενταγωνικὸν πρίσμα ὀρθὸν (σχ. 77) ἢ πλάγιον (σχ. 78).



Σχ. 77.



Σχ. 78.

Πρίσματα ἐν γένει.

101. Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν πρίσματα μὲ βάσεις ἑξάγωνα κλπ. Διὰ τῆς συγκρίσεως δὲ τῶν πρισμάτων συνάγομεν ὅτι ἐν γένει:

Πρίσμα καλεῖται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποίου δύο ἀπέναντι ἕδραι εἶναι πολύγωνα ἴσα καὶ παράλληλα (ἅτινα καλοῦνται βάσεις), αἱ δὲ λοιπαὶ εἶναι παραλληλόγραμμα.

Καὶ ἂν μὲν αἱ βάσεις εἶναι τρίγωνα, τὸ πρίσμα καλεῖται τριγωνικόν, ἂν τετράπλευρα, τετραγωνικόν, ἂν πεντάγωνα, πενταγωνικὸν κλπ.

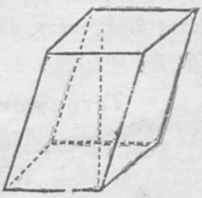
Καλεῖται δὲ ὀρθὸν ἢ πλάγιον, ἐὰν αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἢ πλάγιαι ἐπὶ τὰς βάσεις.

Περὶ παραλληλεπιπέδων.

102. Ἐὰν εἰς τετραγωνικὸν πρίσμα (§ 93) καὶ αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα, καλεῖται τοῦτο παραλληλεπίπεδον (σχ. 79 καὶ σχ. § 1 καὶ 60).

Εἶναι δὲ τοῦτο ὀρθὸν (σχ. § 1 καὶ 60) ἢ πλάγιον (σχ. 79) ὡς καὶ τὸ πρίσμα.

Ἐὰν δὲ ἅπασαι αἱ ἕδραι παραλληλεπιπέδου εἶναι ὀρθογώνια, καλεῖται ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον (§ 60) καὶ ἐὰν τετράγωνα, καλεῖται κύβος (§ 1)·



Σχ. 79.

Ἐρωτήσεις.

Τί καλεῖται ἐν γένει πρίσμα, τί βάσεις καὶ τί ὕψος αὐτοῦ; Πῶς λέγεται τὸ πρίσμα ἐκ τῆς βάσεώς του; Πότε τὸ πρίσμα καλεῖται ὀρθὸν καὶ πότε πλάγιον; Τί καλεῖται παραλληλεπίπεδον, τί ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καὶ τί κύβος;

ΠΕΡΙ ΠΥΡΑΜΙΔΩΝ

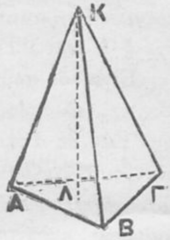
Τριγωνικὴ πυραμίς.

103. Τὸ στερεὸν τοῦτο σῶμα καλεῖται τριγωνικὴ πυραμίς.[1] Ἀμέσως δὲ βλέπομεν ὅτι ἔχει 6 ἀκμάς, 4 στερεὰς γωνίας, 4 κορυφὰς καὶ 4 ἕδρας, δι' ὃ καλεῖται καὶ τετράεδρον.

104. Ἅπασαι δὲ αἱ ἕδραι τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι τρίγωνα. Διὰ τοῦτο δὲ ὡς βάσιν αὐτῆς δυνάμεθα νὰ λάβωμεν οἱανδήποτε τῶν ἑδρῶν της· τότε δὲ λέγομεν ὅτι αἱ τρεῖς ἄλλαι ἕδραι ἀποτελοῦσι τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν αὐτῆς καὶ αἱ ἀκμαὶ ΚΑ,ΚΒ,ΚΓ, καθ' ἃς τέμνονται αὗται, καλοῦνται παράπλευροι ἀκμαί.

Ἡ κορυφὴ δέ, ἥτις εἶναι ἀπέναντι τῆς βάσεως, καλεῖται κυρία κορυφὴ τῆς πυραμίδος.

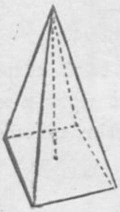
Ὕψος δὲ τῆς πυραμίδος καλεῖται ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κυρίας κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν.



Σχ. 80.

Τετραγωνικὴ πυραμίς.

105. Τὸ στερεὸν τοῦτο σῶμα καλεῖται τετραγωνικὴ πυραμίς [2].


Σχ. 81.

106. Ἐκ τῶν 5 δὲ ἑδρῶν τῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος αἱ μὲν 4 εἶναι τρίγωνα, ἡ δὲ ὑπολειπομένη εἶναι τετράπλευρον. Διὰ τοῦτο λαμβάνομεν ταύτην ὡς βάσιν τῆς πυραμίδος, αἱ δὲ λοιπαὶ 4 τριγωνικαὶ ἕδραι λέγομεν, ὅτι ἀποτελοῦσι τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν αὐτῆς.

Πυραμίδες ἐν γένει.

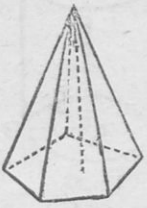
107. Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν πυραμίδας μὲ βάσιν

---

1. Ἐπ' αὐτῆς ἐπαναλαμβάνεται ἐποπτικὴ διδασκαλία περὶ τῆς ἐπιφανείας, ἑδρῶν, ἀκμῶν, διέδρων καὶ στερεῶν γωνιῶν κλπ., οἷα καὶ ἐπὶ τῶν προηγουμένων στερεῶν.

2. Ὁμοίως ἐπαναλαμβάνεται ἐπ' αὐτῆς διδασκαλία, οἷα καὶ ἐπὶ τῆς τριγωνικῆς.

πεντάγωνον (οἷον τὸ παραπλεύρως σχῆμα), ἑξάγωνον κλπ. καὶ πέριξ τριγωνικὰς ἕδρας, ἐφ' ὧν ἐπαναλαμβάνομεν τὴν αὐτὴν ἐποπτικὴν ἐξέτασιν. Διὰ τῆς κρίσεως δὲ τούτων συνάγομεν ὅτι ἐν γένει :



Σχ. 82.

Πυραμὶς καλεῖται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποία μία μὲν ἕδρα εἶναι πολύγωνον οἱονδήποτε (ὅπερ καλεῖται βάσις), αἱ δὲ λοιπαὶ εἶναι τρίγωνα ἔχοντα μίαν κορυφὴν κοινὴν ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου καὶ ὡς ἔναντι ταύτης πλευρὰς τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου.

Καὶ ἂν μὲν ἡ βάσις εἶναι τρίγωνον, καλεῖται τριγωνικὴ πυραμίς, ἂν τετράπλευρον, τετραγωνική, ἂν πεντάγωνον, πενταγωνικὴ κλπ.

Περὶ πολυέδρων.

108. Τὰ παραλληλεπίπεδα, τὰ πρίσματα καὶ αἱ πυραμίδες παρατηροῦμεν ὅτι περιορίζονται πανταχόθεν ὑπὸ ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν, αἵτινες καλοῦνται ἕδραι. Διὰ τοῦτο τὰ στερεὰ ταῦτα, ὡς καὶ πᾶν ἄλλο τοιοῦτο στερεόν, καλοῦμεν πολύεδρα ἤτοι :

Πολύεδρον καλεῖται τὸ στερεόν, τὸ περατούμενον πανταχόθεν ὑπὸ ἐπιπέδων.

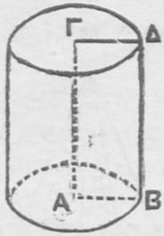
Τὸ ἁπλούστερον τῶν πολυέδρων εἶναι τὸ τετράεδρον ἢ τριγωνικὴ πυραμίς.

Ἐρωτήσεις.

Τί καλεῖται πυραμίς, βάσις, κυρία κορυφή, ὕψος, παράπλευρος ἐπιφάνεια καὶ παράπλευροι ἀκμαὶ αὐτῆς ; Πῶς καλεῖται ἡ πυραμὶς ἐκ τῆς βάσεώς της ; Ποίαν ἕδραν λαμβάνομεν ὡς βάσιν εἰς τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ; Πόσας ἕδρας, ἀκμὰς καὶ κορυφὰς ἔχει ἡ τριγωνική, τετραγωνική, πενταγωνικὴ πυραμίς ; Νὰ τοποθετηθῶσι πυραμίδες διαφοροτρόπως ἐπὶ τῆς τραπέζης καὶ νὰ ἐξετασθῇ πῶς διευθύνονται ἐν τῷ διαστήματι αἱ ἀκμαὶ καὶ αἱ ἕδραι αὐτῶν. Τί καλεῖται πολύεδρον καὶ ποῖον εἶναι τὸ ἁπλούστερον τῶν πολυέδρων ;

Περὶ κυλίνδρου.

109. Τὸ στερεὸν τοῦτο σῶμα καλεῖται κύλινδρος.



Σχ. 83.

Ἐξετάζοντες τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου παρατηροῦμεν, ὅτι ἀποτελεῖται ἐκ τριῶν μερῶν, ὧν τὰ δύο εἶναι ἐπίπεδα σχήματα ἴσα καὶ παράλληλα, ἅτινα λαμβάνονται ὡς βάσεις τοῦ κυλίνδρου, τὸ δὲ ἕτερον εἶναι μὴ ἐπίπεδον καὶ καλεῖται καμπύλη ἢ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου.

Ὕψος τοῦ κυλίνδρου καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων αὐτοῦ βάσεων.

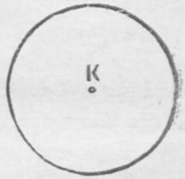
110. Κύλινδρος δὲ δύναται νὰ παραχθῇ, ἐὰν περιστραφῇ ὀρθογώνιον (οἷον τὸ ΑΒΔΓ) περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (οἷον τὴν ΑΓ) κατὰ τὴν αὐτὴν πάντοτε φοράν, ἕως ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν.

Ἡ ἀκίνητος μένουσα πλευρὰ ΑΓ καλεῖται ἄξων, ἡ δὲ ἔναντι αὐτῆς ΒΔ καλεῖται γενέτειρα τῆς καμπύλης ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. Προφανῶς δὲ τὸ ὕψος, ὁ ἄξων καὶ ἡ γενέτειρα εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα.

Ἐρωτήσεις.

Ἀπὸ πόσα μέρη ἀποτελεῖται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου καὶ πῶς καλοῦνται ταῦτα; Τί καλεῖται ὕψος αὐτοῦ; Πῶς δύναται νὰ παραχθῇ ὁ κύλινδρος; Τί καλεῖται ἄξων καὶ τί γενέτειρα τῆς καμπύλης ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου;

Περὶ κύκλου.



Σχ. 84.

111. Ὡς εἴδομεν, αἱ βάσεις τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἐπίπεδα σχήματα, δὲν περιορίζονται ὅμως ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν, ὅπως τὰ μέχρι τοῦδε γνωστὰ εὐθύγραμμα σχήματα, ἀλλὰ περιορίζονται ὑπὸ καμπύλης γραμμῆς. Τὸ νέον τοῦτο σχῆμα, οἷον τὸ παρακείμενον, καλεῖται κύκλος.

Ἡ καμπύλη γραμμή, εἰς ἣν περατοῦται ὁ κύκλος, καλεῖται περιφέρεια [1] αὐτοῦ. Πάντα δὲ τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀπέχου-

1 Ἡ περιφέρεια εἶναι ἡ ἁπλουστάτη τῶν καμπύλων γραμμῶν. Δὲν πρέπει δὲ νὰ συγχέωμεν αὐτὴν πρὸς τὸν κύκλον, ὅστις εἶναι ἐπιφάνεια ἐνῷ αὕτη εἶναι γραμμή.

σιν ἰσάκις ἀπό τινος σημείου Κ, κειμένου ἐντὸς τοῦ κύκλου καὶ καλουμένου κέντρου τοῦ κύκλου· ὅθεν :

Κύκλος καλεῖται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, περικλειομένη ὑπὸ καμπύλης γραμμῆς, ἧς πάντα τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπό τινος σημείου ἐντὸς αὐτῆς κειμένου.

Τοιοῦτο σχῆμα ἔχουσι τὰ νομίσματα, οἱ τροχοὶ τῶν ἁμαξῶν τὰ ἄκρα τῶν πινακίων, ποτηρίων κλπ.

112. Ἀκτὶς τοῦ κύκλου καλεῖται πᾶσα εὐθεῖα, ἀγομένη ἐκ τοῦ κέντρου εἰς τὴν περιφέρειαν· οἷον ἡ ΚΑ.

Πᾶσαι δὲ αἱ ἀκτῖνες εἶναι προφανῶς ἴσαι.

Σχ. 85.

Διάμετρος τοῦ κύκλου καλεῖται πᾶσα εὐθεῖα, διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη ἑκατέρωθεν ὑπὸ τῆς περιφερείας· οἷον ἡ ΒΓ.

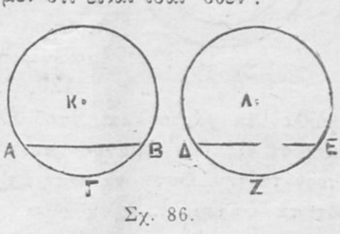
Ὁμοίως πᾶσαι αἱ διάμετροι εἶναι ἴσαι ὡς ἀποτελουμένη ἑκάστη ἐκ δύο ἀκτίνων.

113. Τόξον λέγεται οἱονδήποτε μέρος τῆς περιφερείας· οἷον τὸ ΔΖΕ.

Χορδὴ δὲ τοῦ τόξου λέγεται ἡ τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα· οἷον ἡ ΔΕ.

114. Ἰδιότης. Ἔστωσαν δύο ἴσοι κύκλοι Κ καὶ Λ. Ἐὰν δύο τόξα τούτων ΑΓΒ καὶ ΔΖΕ εἶναι ἴσα καὶ μετρήσωμεν τὰς χορδὰς τούτων ΑΒ καὶ ΔΕ, παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι ἴσαι· ὅθεν :

Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις τὰ ἴσα τόξα ἔχουσιν ἴσας χορδάς· ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως αἱ ἴσαι χορδαὶ ἔχουσιν ἴσα τόξα.



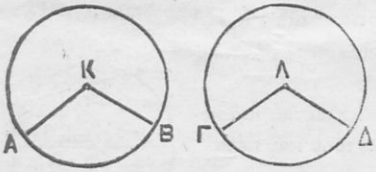
Σχ. 86.

115. Τμῆμα κύκλου λέγεται μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύκλου, περιεχόμενον ὑπό τινος τόξου καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ· οἷον τὸ σχῆμα ΔΖΕΔ (σχ. 85).

116. Κυκλικὸς δὲ τομεὺς λέγεται μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύκλου, περιεχόμενον ὑπὸ τόξου καὶ ὑπὸ τῶν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου ἀγομένων ἀκτίνων· οἷον τὸ σχῆμα ΚΗΘΚ (σχ. 85).

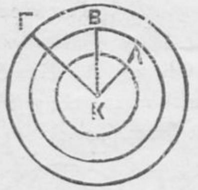
117. Ἐπίκεντρος γωνία καλεῖται ἡ ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· οἷον ἡ γωνία ΑΚΓ. Τὸ δὲ μεταξὺ τῶν πλευρῶν της περιλαμβανόμενον τόξον (ἤτοι τὸ ΑΓ) καλεῖται ἀντίστοιχον αὐτῆς (σχ. 85).

118. Ἰδιότης. Ἔστωσαν δύο ἴσοι κύκλοι Κ καὶ Λ ἐκ χάρτου· Ἐὰν αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΚΒ και ΓΛΔ εἶναι ἴσαι καὶ ἐπιθέσωμεν τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης, ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσι, τότε θὰ ἐφαρμόσωσι καὶ τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΓΔ· ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν ἐπιθέσωμεν τοὺς κύκλους, ὥστε νὰ συμπέσωσι τὰ κέντρα καὶ τὰ ἴσα τόξα ΑΒ καὶ ΓΔ, θὰ ἐφαρμόσωσι καὶ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΓΛΔ· ἄρα :



Σχ. 87.

Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων· καὶ ἀντιστρόφως, αἱ ἐπὶ ἴσων τόξων βαίνουσαι ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.



Σχ. 88.

119*. Δύο ἢ πλείονες κύκλοι καλοῦνται ὁμόκεντροι ἐὰν ἔχωσι τὸ αὐτὸ κέντρον· οἷον οἱ κύκλοι ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ.

* Στεφάνη δὲ καλεῖται ἡ ἐπιφάνεια, ἡ περιεχομένη μεταξὺ τῶν περιφερειῶν δύο ὁμοκέντρων κύκλων, οἷον τῶν ΚΒ καὶ ΚΑ.

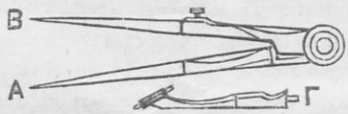
120. Ἰδιότης. Ἐὰν κατασκευάσωμεν κύκλον ἐκ χάρτου καί, ἀφοῦ θλάσωμεν τοῦτον κατὰ μιαν διάμετρον εἰς δύο τεμάχια, περιστρέψωμεν τὸ ἓν περὶ τὴν διάμετρον ταύτην, ὥστε νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἄλλου, τότε παρατηροῦμεν ὅτι τὰ δύο τεμάχια τοῦ κύκλου ἐφαρμόζουσιν ἀκριβῶς ἐπ' ἀλλήλων, συνάμα δὲ καὶ τὰ τόξα τούτων· ὅθεν :

Ἡ διάμετρος διαιρεῖ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη.

Τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου καλεῖται ἡμικύκλιον, τῆς δὲ περιφερείας ἡμιπεριφέρεια.

121. Διαβήτης. Ἡ περιφέρεια χαράσσεται ἐπὶ τοῦ χάρτου τοῦ πίνακος διὰ τοῦ διαβήτου.

Ὁ διαβήτης δὲ (σχ. 89) εἶναι ὄργανον συνήθως μετάλλινον, ἀποτελούμενον ἐκ δύο σκελῶν κατὰ τὸ ἓν μὲν ἄκρον ἀποληγόντων εἰς ὀξείας αἰχμάς, κατὰ δὲ τὸ ἕτερον ἡνωμένων δι' ἄξονος οὕτως, ὥστε τὰ σκέλη νὰ ἀνοίγωσι καὶ νὰ κλείωσι κατὰ θέλησιν.



Σχ.89.
Σχ.90.

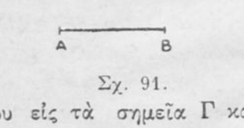
Ὑπάρχουσι δὲ καὶ διαβῆται, τῶν ὁποίων μέρος τι τοῦ ἑνὸς σκέλους αὐτῶν δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ δι' ἄλλου φέροντος γραφίδα (σχ. 90).

Ἵνα γράψωμεν διὰ τοῦ διαβήτου περιφέρειαν, στηρίζομεν μίαν τῶν αἰχμῶν αὐτοῦ ἐπί τινος ἐπιπέδου καὶ περιστρέφομεν τὴν ἑτέραν αἰχμὴν συνεχῶς κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, ἕως ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὸ ἀρχικὸν σημεῖον· ἡ κινητὴ αὕτη αἰχμὴ θὰ γράψῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου περιφέρειαν κύκλου. Ἐὰν δὲ θέλωμεν ἡ περιφέρεια νὰ ἔχῃ ὡρισμένην ἀκτῖνα, ἀνοίγομεν τὸν διαβήτην, ὥστε ἡ ἀπόστασις τῶν αἰχμῶν του νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα.

Οἱ κηπουροί, ἵνα χαράξωσι περιφέρειαν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, προσδένουσι τὸ ἄκρον σχοινίου εἰς πάσσαλον ἐμπεπηγμένον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ εἰς ἕτερον σημεῖον τοῦ σχοινίου ἔχοντες δεμένον αἰχμηρόν τι ὄργανον περιστρέφουσι τοῦτο περὶ τὸν πάσσαλον, τοῦ σχοινίου τηρουμένου διαρκῶς τεταμένου, ὅτε χαράσσουσιν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους περιφέρειαν.

Τὴν αὐτὴν μέθοδον μεταχειρίζονται καὶ οἱ ξυλουργοί, προκειμένου νὰ χαράξωσι περιφέρειαν ἐπὶ σανίδος.

Σημ. Ὁ διαβήτης χρησιμεύει προσέτι εἰς τὸ νὰ μεταφέρωμεν μήκη τμημάτων ἐπὶ εὐθείας, οἷον τοῦ ΑΒ ἐπὶ τῆς ΕΖ Πρὸς τοῦτο ἀνοίγομεν τὰ σκέλη τοῦ διαβήτου, ὥστε αἱ αἰχμαὶ αὐτοῦ νὰ πέσωσιν ἀκριβῶς εἰς τὰ ἄκρα σημεῖα Α καὶ Β, καὶ εἶτα στηρίζομεν τὰς αἰχμὰς τοῦ διαβήτου εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ τῆς εὐθείας ΕΖ.



Σχ. 91.

Ὁμοίως στηρίζοντες τὰς αἰχμὰς τοῦ διαβήτου ἐπὶ τοῦ ὑποδεκαμέτρου δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΑΒ.

Ἐρωτήσεις.

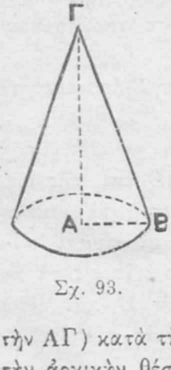
Τί καλεῖται κύκλος καὶ τί περιφέρεια ; Εἶναι ταῦτα γραμμαὶ ἢ ἐπιφάνειαι ; Τί καλεῖται κέντρον, ἀκτίς, διάμετρος, τόξον ἢ χορδή ; Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἴσων χορδῶν καὶ τῶν ἀντιστοίχων αὐταῖς τόξων ; Τί καλεῖται τμῆμα καὶ τί τομεύς ; Τί καλεῖται ἐπίκεντρος γωνία καὶ τί ἀντίστοιχον αὐτῆς τόξον ; Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν καὶ τῶν ἀντιστοίχων αὐταῖς τόξων;*Πότε δύο κύκλοι καλοῦνται ὁμόκεντροι; Τί καλεῖται στεφάνη ; Πῶς διαιρεῖ ἡ διάμετρος τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν ; Πῶς καλεῖται τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου καὶ πῶς τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας ; *Ποία εἶναι ἡ μεγίστη χορδὴ τοῦ κύκλου καὶ διατί ; Ποία εἶναι ἡ ἐλαχίστη καὶ ποία ἡ μεγίστη ἀπόστασις χωρίου τινὸς Α ἀπὸ τῆς περιφερείας τῆς κυκλικῆς λίμνης Κ ;

Σχ. 92.

Περὶ κώνου.

122. Τὸ στερεὸν τοῦτο σῶμα καλεῖται κῶνος.

Ἡ ἐπιφάνεια δὲ τοῦ κώνου ἀποτελεῖται ἐκ δύο διαφόρων μερῶν, ὧν τὸ ἓν εἶναι ἐπίπεδον σχῆμα, ὅπερ ἐκαλέσαμεν κύκλον καὶ ὅστις λαμβάνεται ὡς βάσις τοῦ κώνου, τὸ δὲ ἕτερον εἶναι μὴ ἐπίπεδον καὶ καλεῖται καμπύλη ἢ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ κώνου.



Σχ. 93.

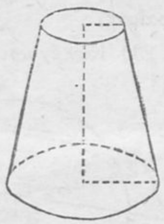
Τὸ σημεῖον Γ καλεῖται κορυφὴ τοῦ κώνου καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τῆς βάσεως καλεῖται ὕψος τοῦ κώνου.

123. Κῶνος δύναται νὰ παραχθῇ, ἐὰν περιστραφῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον (οἷον τὸ ΑΒΓ) περὶ μίαν τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν (οἷον τὴν ΑΓ) κατὰ τὴν αὐτὴν πάντοτε φοράν, ἕως ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν.

Ἡ ἀκίνητος μένουσα πλευρὰ ΑΓ καλεῖται ἄξων τοῦ κώνου.

(ἥτις συμπίπτει μὲ τὸ ὕψος), ἡ δὲ ὑποτείνουσα ΒΓ καλεῖται γενέτειρα τῆς καμπύλης ἐπιφανείας ἢ πλευρὰ τοῦ κώνου.

124. Κόλουρος κῶνος. Τὸ στερεὸν τοῦτο σῶμα (ὅπερ ὁμοιάζει πρὸς ἀντεστραμμένην γάστραν) καλεῖται κόλουρος κῶνος. Προκύπτει δέ, ἐὰν τμήσωμεν κῶνον δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει καὶ λάβωμεν τὸ μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου μέρος.



Σχ. 94.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου ἀποτελεῖται ἐκ 3 μερῶν, ὧν τὰ δύο εἶναι κύκλοι καὶ καλοῦνται βάσεις τοῦ κώνου, τὸ δὲ ἕτερον εἶναι καμπύλη ἐπιφάνεια.

Ἡ ἀπόστασις δὲ τῶν βάσεων καλεῖται ὕψος τοῦ κολούρου κώνου.

Ἐρωτήσεις.

Ἀπὸ πόσα μέρη ἀποτελεῖται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου καὶ πῶς καλοῦνται ταῦτα ; Τί καλεῖται ὕψος τοῦ κώνου ; Πῶς δύναται νὰ παραχθῇ ὁ κῶνος ; Τί καλεῖται ἄξων καὶ τί γενέτειρα τῆς καμπύλης ἐπιφανείας ἢ πλευρὰ τοῦ κώνου; Τί καλεῖται κόλουρος κῶνος, βάσεις καὶ ὕψος αὐτοῦ ;

Περὶ σφαίρας.

125. Τὸ στερεὸν τοῦτο σῶμα, ὅπερ ἀπεικονίζεται ὑπὸ τῶν σχημάτων 95 καὶ 96 καλεῖται σφαῖρα.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἀποτελεῖ ἓν ὅλον, ὅπερ εἶναι καμπύλη ἐπιφάνεια. Πάντα δὲ τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπό τινος σημείου ἐντὸς τῆς σφαίρας κειμένου καὶ ὀνομαζομένου κέντρου.

Ἀκτὶς τῆς σφαίρας καλεῖται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ κέντρου εἴς τι σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας καλεῖται πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη ἑκατέρωθεν ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

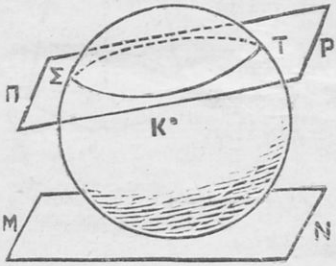
ΣΗΜ. Ἡ σφαῖρα δὲ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς παραγομένη ὑπ' ἡμικυκλίου στρεφομένου περὶ τὴν ἑαυτοῦ διάμετρον (σχ. 98).

126. Αἱ δυναταὶ θέσεις ἐπιπέδου πρὸς σφαῖραν εἶναι αἱ ἑξῆς τρεῖς.

1) Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον καὶ ἡ σφαῖρα οὐδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον.

2) Ἐὰν ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, οἷον τὸ ἐπίπεδον ΜΝ καὶ ἡ σφαῖρα Κ, ὅτε τὸ ἐπίπεδον καλεῖται ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας.

3) Ἐὰν ἔχωσι πλείονα τοῦ ἑνὸς κοινὰ σημεῖα, ὡς τὸ ἐπίπεδον ΠΡ καὶ ἡ σφαῖρα Κ, ὅτε τὸν ἐπίπεδον καλεῖται τέμνον.



Σχ. 95.

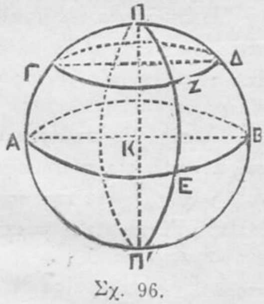
127. Ἡ ἐπιφάνεια δὲ τῆς τομῆς σφαίρας δι' ἐπιπέδου (οἷον ἡ ΣΤ) εἶναι πάντοτε κύκλος. Οὗτος δὲ εἶναι ἐπὶ τοσούτῳ μείζων ὅσῳ τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας· γίνεται δὲ μέγιστος, ὅταν τὸ τέμνον ἐπίπεδον διέλθῃ διὰ τοῦ κέντρου ἔχων κέντρον καὶ ἀκτῖνα τὰ τῆς σφαίρας, δι' ὃ καὶ καλεῖται μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας. Οἱ δὲ σχηματιζόμενοι διὰ τεμνόντων ἐπιπέδων, μὴ διερχομένων διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καλοῦνται μικροὶ κύκλοι τῆς σφαίρας.

Πᾶς δὲ μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαίραν εἰς δύο ἴσα μέρη, ἅτινα καλοῦνται ἡμισφαίρια.

128. Πόλοι κύκλου (μικροῦ ἢ μεγίστου) τῆς σφαίρας καλοῦνται τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου. Οἷον πόλοι τοῦ μικροῦ κύκλου ΓΔ εἶναι τὰ σημεῖα Π καὶ Π'.

Μετροῦντες δὲ τὰς ἀποστάσεις ΠΓ, ΠΖ, ΠΔ παρατηροῦμεν ὅτι πᾶσαι εἶναι ἴσαι· ἄρα:

Ἑκάτερος τῶν πόλων τοῦ τυχόντος κύκλου τῆς σφαίρας ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τούτου.



Σχ. 96.

Δι' ὃ δυνάμεθα νὰ γράφωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τόξα κύκλων σχεδὸν ὁμοίως, ὡς καὶ ἐπὶ ἐπιπέδου (§ 121). Πρὸς τοῦτο μεταχειριζόμεθα διαβήτην, τοῦ ὁποίου ἀμφότερα τὰ σκέλη εἶναι καμπύλα καὶ ὅστις καλεῖται σφαιρικὸς διαβήτης.


Σχ. 97.

129. Παράλληλοι κύκλοι τῆς σφαίρας καλοῦνται οἱ κύκλοι, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, οἷον οἱ ΓΔ καὶ ΑΒ (σχ. § 96).

Σφαιρικὴ ζώνη καλεῖται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, οἷον ἡ ἐπιφάνεια ΑΒΔΓ, ἧς τὸ σχῆμα προσομοιάζει πρὸς κοινὴν ζώνην. Τοιοῦτο δὲ σχῆμα ἔχουσιν ἡ διακεκαυμένη καὶ αἱ δύο εὔκρατοι ζῶναι τῆς γῆς.

*Σφαιρικὸν τμῆμα καλεῖται τὸ μέρος τῆς σφαίρας, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, οἷον τὸ ΑΒΔΓ.

*Βάσεις τῆς ζώνης ἢ τοῦ τμήματος καλοῦνται οἱ δύο κύκλοι εἰς οὓς περατοῦται (ἡ ζώνη ἢ τὸ τμῆμα), ἤτοι οἱ ΑΒ καὶ ΓΔ.

*Ὕψος δὲ τῆς ζώνης ἢ τοῦ τμήματος καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται.

Ἐὰν δὲ τὸ ἓν τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐφάπτηται τῆς σφαίρας, τότε ἡ ζώνη ἢ τὸ τμῆμα ἔχει μίαν βάσιν· οἷον ἡ ζώνη καὶ τὸ τμῆμα ΓΠΔ. Ἡ ζώνη δὲ ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἔχει σχῆμα πιλιδίου (κ. σκούφου), ὡς αἱ 2 κατεψυγμέναι ζῶναι τῆς γῆς.

***130.** Σφαιρικὸς τομεὺς καλεῖται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον παράγει ὁ τυχὼν τομεὺς τοῦ ἡμικυκλίου (οἷον ὁ ΑΚΒ ἢ ὁ ΒΚΓ), ὅταν τοῦτο περιστρεφόμενον περὶ τὴν διάμετρον παράγει τὴν σφαῖραν.

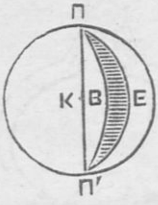
Σχ. 98.

***131.** Σφαιρικὸς ἄτρακτος καλεῖται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἡμικυκλίων μεγίστων κύκλων, ἐχόντων κοινὴν διάμετρον· οἷον τὸ ΠΒΠ'ΕΠ.

*Τὸ δὲ μέρος τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἡμικυκλίων μεγίστων κύκλων, ἐχόντων κοινὴν διάμετρον, καλεῖται σφαιρικὸς ὄνυξ· οἷον τὸ ΠΒΠ'ΕΠΚ.

Ὁ ἄτρακτος τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος λέγεται βάσις αὐτοῦ.

ΣΗΜ. α'. Αἱ φέται τοῦ πορτοκαλλίου δίδουσιν ἰδέαν τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος, ἡ δὲ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια τούτων δίδει ἰδέαν τοῦ ἀτράκτου.



Σχ. 99.

ΣΗΜ. β'. Αἱ ζῶναι καὶ οἱ ἄτρακτοι εἶναι ἐπιφάνειαι, τὰ δὲ σφαιρικὰ τμήματα, οἱ τομεῖς καὶ οἱ ὄνυχες εἶναι στερεά.

132. Ἵνα εὕρωμεν πρακτικῶς τὴν ἀκτῖνα δοθείσης σφαίρας, θέτομεν ταύτην ἐπί τινος τραπέζης καὶ ἄνωθεν θέτομεν σανίδα ἐφαπτομένην τῆς σφαίρας καὶ παράλληλον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς τραπέζης. Τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο τούτων παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.

Ἐρωτήσεις.

Τί καλεῖται σφαῖρα καὶ τί κέντρον, ἀκτίς, διάμετρος αὐτῆς; Πῶς δύναται νὰ θεωρηθῇ παραγομένη ἡ σφαῖρα; Ποῖαι εἶναι αἱ δυναταὶ θέσεις ἐπιπέδου πρὸς σφαῖραν; Τί σχῆμα ἔχει ἡ τομὴ σφαίρας δι' ἐπιπέδου; Τί καλεῖται μικρὸς καὶ τί μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας; Τί καλοῦνται πόλοι κύκλου τῆς σφαίρας καὶ ποίαν ἰδιότητα ἔχουσι; Διὰ τίνος ὀργάνου γράφομεν τόξα κύκλου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας; Τί καλοῦνται παράλληλοι κύκλοι τῆς σφαίρας; Τί καλεῖται σφαιρικὴ ζώνη *(σφαιρικὸν τμῆμα, βάσεις καὶ ὕψος τῆς ζώνης ἢ τοῦ τμήματος, σφαιρικὸς τομεύς, ἄτρακτος καὶ σφαιρικὸς ὄνυξ); Τί σχῆμα ἔχει ἡ ζώνη ἡ μίαν βάσιν ἔχουσα καὶ τί ἡ δύο; Πῶς εὑρίσκομεν τὴν ἀκτῖνα σφαίρας;

Διάφοροι θέσεις εὐθείας πρὸς κύκλον.

133. Αἱ δυναταὶ θέσεις εὐθείας πρὸς κύκλον εἶναι αἱ ἑξῆς τρεῖς.

1) Ἐὰν οὐδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον, ὡς ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ ὁ κύκλος Κ.

2) Ἐὰν ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ὡς ἡ εὐθεῖα ΓΔ καὶ ὁ κύκλος Κ, ὅτε ἡ εὐθεῖα καλεῖται ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Ε καλεῖται σημεῖον ἐπαφῆς.

3) Ἐὰν ἡ περιφέρεια καὶ ἡ εὐθεῖα ἔχωσι δύο κοινὰ σημεῖα, ὡς ἡ εὐθεῖα ΖΗ καὶ ὁ κύκλος Κ, ὅτε ἡ εὐθεῖα καλεῖται τέμνουσα τοῦ κύκλου

134. Ἐὰν μετρήσωμεν τὴν γωνίαν ΚΕΔ διὰ τοῦ γνώμονος, παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι ὀρθή· ὅθεν :

Ἡ ἐφαπτομένη εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος.

Συνεπῶς δὲ (§ 43, 1) εἰς ἕκαστον σημεῖον περιφερείας ἄγεται μία μόνον ἐφαπτομένη.

Σχ. 100.

Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως. Πᾶσα κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου.

Ἐρωτήσεις.

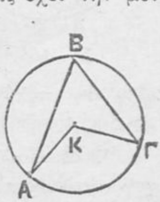
Ποῖαι εἶναι αἱ δυναταὶ θέσεις εὐθείας πρὸς κύκλον ; Πότε εὐθεῖά τις καλεῖται ἐφαπτομένη καὶ πότε τέμνουσα τοῦ κύκλου ; Τί καλεῖται σημεῖον ἐπαφῆς ; Πόσας ἐφαπτομένας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς περιφερείας ;

Περὶ τῶν ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένων γωνιῶν.

135. Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Β τῆς περιφερείας φέρωμεν δύο χορδὰς ΒΑ καὶ ΒΓ, προκύπτει ἡ γωνία Β, ἥτις ἔχει τὴν μὲν κορυφὴν αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου· ἡ γωνία αὕτη καλεῖται ἐγγεγραμμένη ἐν κύκλῳ.

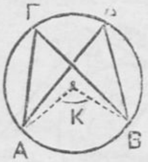
136. Ἐὰν προσθέσωμεν δύο γωνίας ἴσας τῇ Β, παρατηροῦμεν ὅτι προκύπτει ὡς ἄθροισμα γωνία ἴση τῇ Κ. ἄρα :

Πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου γωνίας, ἤτοι τῆς βαινούσης ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου.



Σχ. 101.

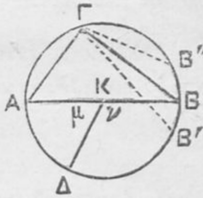
137. Ἑκατέρα τῶν ἐγγεγραμμένων γωνιῶν Γ καὶ Δ, αἵτινες βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ, εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου γωνίας Κ, τῆς βαινούσης ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΒ· ἄρα εἶναι ἴσαι· ὅθεν :



Σχ. 102.

Πᾶσαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι, αἱ βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ἢ ἴσων τόξων εἶναι ἴσαι.

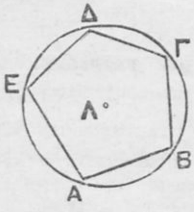
138. Ἔστω ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΓΒ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΔΒ. Τότε ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος καταντᾷ ἡ διάμετρος ΑΚΒ. Ἀλλ' ἐὰν φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΚΔ, σχηματίζονται δύο ἐπίκεντροι αἱ μ καὶ ν βαίνουσαι ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΔΒ, ὧν τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται πρὸς 2 ὀρθάς. Συνεπῶς ἡ ΑΓΒ ὡς ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τούτων ἰσοῦται πρὸς μίαν ὀρθήν· ἤτοι:



Σχ. 103.

Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ἡ βαίνουσα ἐπὶ ἡμιπεριφερείας εἶναι ὀρθή.

Προφανῶς δὲ ἡ ΑΓΒ′, ἡ βαίνουσα ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΔΒ′ τοῦ μικροτέρου ἡμιπεριφερείας εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ ΑΓΒ″ βαίνουσα ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΔΒ″ τοῦ μείζονος ἡμιπεριφερείας εἶναι ἀμβλεῖα.



Σχ. 104.

139. Πολύγωνόν τι καλεῖται ἐγγεγραμμένον ἐν κύκλῳ, ἐὰν πᾶσαι αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου· οἷον τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ ἐν τῷ κύκλῳ Λ.

Σχ. 105.

Ὁ δὲ κύκλος καλεῖται τότε περιγεγραμμένος περὶ τὸ πολύγωνον.

140. Πολύγωνόν τι καλεῖται περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, ἐὰν ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου· οἷον τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ περὶ τὸν κύκλον Μ. Ὁ δὲ κύκλος καλεῖται τότε ἐγγεγραμμένος ἐν τῷ πολυγώνῳ.

Ἐρωτήσεις.

Πότε γωνία τις καλεῖται ἐγγεγραμμένη ἐν κύκλῳ ; Ποίαν σχέσιν ἔχει ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία πρὸς τὴν ἀντίστοιχον ἐπίκεντρον; Τί εἶναι ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία, ἡ βαίνουσα ἐπὶ τόξου ἐλάσσονος ἢ μείζονος ἢ ἴσου πρὸς ἡμιπεριφέρειαν; Πότε πολύγωνόν τι καλεῖται ἐγγεγραμμένον ἐν κύκλῳ καὶ πότε περιγεγραμμένον περὶ κύκλον;

Περὶ κανονικῶν πολυγώνων.

141. Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον (σχ.106.) ἔχει πάσας τὰς πλευράς του καὶ πάσας τὰς γωνίας του, ἴσας οὐχὶ δὲ καὶ τὸ ἰσοσκελὲς (σχ. 107.) ἢ τὸ σκαληνὸν (σχ. 108.). Ὁμοίως τὸ τετράγωνον (σχ.109.) ἔχει πάσας τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας ἴσας, οὐχὶ δὲ καὶ τὸ ὀρθογώνιον (σχ. 110.) ἢ ὁ ρόμβος (σχ. 111.) κλπ.

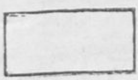

Σχ. 106.


Σχ. 107.


Σχ. 108.

Πᾶν πολύγωνον ἔχον τὰς πλευράς του ἴσας καὶ πάσας τὰς γωνίας του ἴσας καλεῖται κανονικόν· οἷον τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον (σχ.106.) καὶ τὸ τετράγωνον (σχ. 109.).


Σχ. 109.


Σχ. 110.


Σχ. 111.

Σχ. 112.

142. Ἰδιότης. Ἔστω τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ. Ἐὰν διχοτομήσωμεν δύο διαδοχικὰς γωνίας αὐτοῦ, π. χ. τὰς Α καὶ Β, καὶ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως τῶν διχοτόμων Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ φέρωμεν περιφέρειαν, αὕτη θὰ διέλθῃ δι' ὅλων τῶν κορυφῶν. Ὁμοίως, ἐὰν μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Ο καὶ ἀκτῖνα τὸ ὕψος ΟΠ τοῦ τριγώνου ΟΑΒ φέρωμεν περιφέρειαν αὕτη θὰ ἐφάπτηται ὅλων τῶν πλευρῶν· ὅθεν:

Πᾶν κανονικὸν πολύγωνον εἶναι καὶ ἐγγράψιμον ἐν κύκλῳ (§ 139) καὶ περιγράψιμον περὶ κύκλον (§ 140).

Τὸ κοινὸν δὲ κέντρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἐν τῷ κανονικῷ πολυγώνῳ καλεῖται καὶ κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

Ἡ ἀπόστασις δὲ τοῦ κέντρου ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, ἤτοι ἡ ΟΠ, καλεῖται ἀπόστημα τοῦ πολυγώνου.

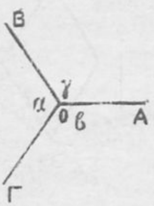
143. Πρίσμα τι καλεῖται κανονικόν, ἐὰν εἶναι ὀρθὸν καὶ ἡ βάσις αὐτοῦ εἶναι κανονικὸν πολύγωνον· οἷον τὰ ἑξαγωνικὰ μολυβδοκόνδυλα.

144. Πυραμὶς καλεῖται κανονική, ἐὰν ἡ μὲν βάσις αὐτῆς εἶναι κανονικὸν πολύγωνον, τὸ δὲ ὕψος πίπτει εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ.

Περὶ ἐπιστρώσεως.

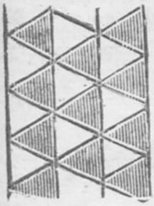
145. Πρὸς ἐπίστρωσιν τοῦ δαπέδου αἰθουσῶν, μαγειρείων, διαδρόμων, αὐλῶν κλπ. γίνεται συχνὴ χρῆσις πλακῶν, αἵτινες ἔχουσι συνήθως τὸ σχῆμα κανονικῶν καὶ ἴσων πολυγώνων.

Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπιστρώνομεν δάπεδόν τι διὰ τοιούτων πλακῶν, ὥστε νὰ ἔχωσι κορυφὰς καὶ πλευρὰς κοινάς, τότε παρατηροῦμεν, ὅτι πέριξ ἑκάστης κορυφῆς, π. χ. τῆς Ο, σχηματίζονται γωνίαι α, β, γ, ὧν τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται πρὸς 4 ὀρθάς. Ἐπειδὴ δὲ πᾶσαι εἶναι ἴσαι ὡς γωνίαι κανονικῶν πολυγώνων, ἕπεται ὅτι ἑκάστη τούτων πρέπει νὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε ἐπαναλαμβανομένη ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν νὰ ἀποτελῇ 4 ὀρθάς. Τοιαῦται δὲ γωνίαι εἶναι τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων, τῶν τετραγώνων καὶ τῶν κανονικῶν ἑξαγώνων, αἵτινες εἶναι ἀντιστοίχως $^{2}/_{3}$, 1, $^{4}/_{3}$ ὀρθ. (§ 99 καὶ 3 ἀσκ. πολυγώνων) καὶ συνεπῶς λαμβανόμεναι ἀντιστοίχως 6, 4, 3 φορὰς δίδουσιν ἄθροισμα 4 ὀρθάς. Ἑπομένως διὰ τοιούτων πλακῶν δύναται νὰ γίνῃ τελεία ἐπίστρωσις, ὡς φαίνεται διὰ τῶν παρατιθεμένων σχεδίων (σχ. 114, 115.116). Τὰς κανονικὰς δὲ ἑξαγώνους πλάκας λόγῳ κομψότητος

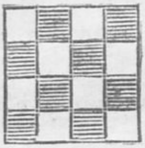


Σχ. 113.

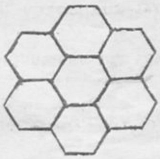
διαιροῦσιν εἰς 3 ἴσους ρόμβους δι' εὐθειῶν, ἀγομένων ἐκ τοῦ κέντρου αὐτῶν εἰς τὰς κορυφὰς ἐναλλάξ, οὓς χρωματίζοντες δίδουσιν εἰς τὸ ἑξάγωνον μορφὴν κύβου (σχ. 117).



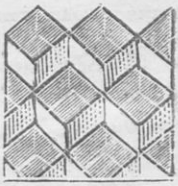
Σχ. 114.



Σχ. 115.



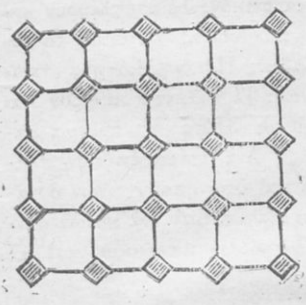
Σχ. 116.



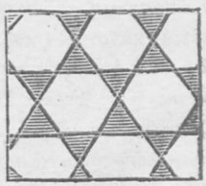
Σχ. 117.

146. Ἀποδεικνύεται δὲ θεωρητικῶς ὅτι δι' οὐδενὸς ἄλλου εἴδους κανονικῶν πλακῶν δύναται νὰ γίνῃ τελεία ἐπίστρωσις· οἷον τῶν κανονικῶν πενταγωνικῶν πλακῶν ἑκάστη γωνία εἶναι $\frac{(5-2).2}{5}=\frac{6}{5}$ ὀρθ. (§ 99 καὶ 3 ἀσκ. πολυγώνων)· ἐπομένως 3 τούτων παρατιθέμεναι περὶ κοινήν τινα κορυφὴν δίδουσιν ἄθροισμα $\frac{6.3}{5}=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}$ ὀρθ., ὅτε μέρος τοῦ ἐδάφους δὲν καλύπτεται, 4 δὲ παρατιθέμεναι δίδουσιν ἄθροισμα $\frac{6.4}{5}=\frac{24}{5}=4\frac{4}{5}$ ὀρθ., ὅτε μέρος τῆς 4ης πλακὸς θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς πρώτης.

147. Δυνάμεθα ὅμως νὰ ἐπιστρώσωμεν τελείως ἐπιφάνειάν



Σχ. 118.

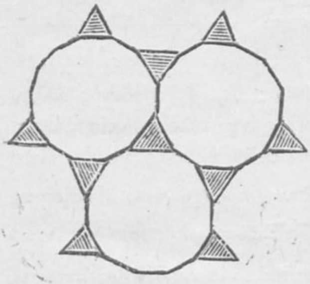


Σχ. 119.

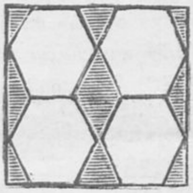
τινα καὶ διὰ τοῦ συνδυασμοῦ πλειόνων εἰδῶν κανονικῶν πολυγώνων, ἤτοι : 1) Ὀκταγώνων καὶ τετραγώνων, καθόσον οὕτω περί τινα κοινὴν κορυφὴν σχηματίζονται 2 γωνίαι τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου, ὧν ἑκάστη ἰσοῦται πρὸς $\frac{(8-2).2}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ καὶ συνεπῶς αἱ 2 ἰσοῦνται πρὸς 3 ὀρθάς, αἵτινες ἑνούμεναι μετὰ τῆς ὀρθῆς τοῦ τετραγώνου ἀποτελοῦσι 4 ὀρθάς. Ἡ τοιαύτη δὲ πλακόστρωσις παρέχει εὐάρεστον θέαν εἰς τὸν παρατηρητήν (σχ. 118).

2) Ἑξαγώνων καὶ τριγώνων (σχ. 119.), δωδεκαγώνων καὶ τριγώνων (σχ. 120.).

Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ συνδυάσωμεν κανονικὰ πολύγωνα μετὰ



Σχ. 120.



Σχ. 121.

μὴ κανονικῶν, οἷον κανονικὰ ἑξάγωνα καὶ ρόμβους (σχ. 121).

Ερωτήσεις.

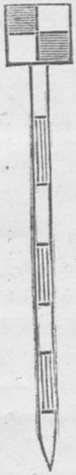
Πότε πολύγωνόν τι καλεῖται κανονικόν; Τὸ ἰσόπλευρον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον εἶναι κανονικὰ πολύγωνα; Ὁμοίως τὸ τετράγωνον, τὸ ὀρθογώνιον καὶ ὁ ρόμβος; Ποίαν ἰδιότητα γνωρίζετε περὶ τῶν κανονικῶν πολυγώνων; Τί καλεῖται κέντρον καὶ τί ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου; Πότε τὸ πρίσμα καλεῖται κανονικὸν καὶ πότε ἡ πυραμίς ; Διὰ ποίων ἐκ τῶν πλακῶν τῶν ἐχουσῶν σχῆμα κανονικῶν καὶ ἴσων πολυγώνων δύναται νὰ γίνῃ τελεία ἐπίστρωσις ; καὶ διατί ; Καὶ διὰ ποίων συνδυασμῶν πλακῶν, ἐχουσῶν σχῆμα διαφόρων κανονικῶν καὶ μὴ κανονικῶν πολυγώνων ;

Πρακτικαὶ ἐφαρμογαί.

148. Εἰς πολλὰς ἐργασίας ἐπὶ τοῦ ἐδάφους παρίσταται ἀνάγκη νὰ προσδιορίσωμεν εὐθεῖαν μεταξὺ δύο δοθέντων σημείων

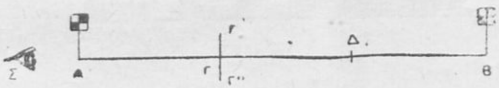
Α καὶ Β. Πρὸς τοῦτο σημειοῦμεν τὴν θέσιν σημείων τινῶν μόνον δι' ἀκοντίων.

Ταῦτα εἶναι ράβδοι συνήθως ἐκ ξύλου φέρουσαι ἐν μὲν τῷ κάτω ἄκρῳ κωνικὸν σιδηροῦν περίβλημα, ἵνα ἐμπήγωνται εὐκόλως εἰς τὸ ἔδαφος, ἐν δὲ τῷ ἄνω μικρὸν πινακίδιον καλούμενον στοχαστῆρα, χρώματος ἐρυθροῦ καὶ λευκοῦ, ἵνα διακρίνηται μακρόθεν.



Σχ. 122.

Πρὸς προσδιορισμὸν δὲ τῆς εὐθείας ἐμπήγομεν εἰς ἑκάτερον τῶν δύο ἄκρων Α καὶ Β, δι' ὧν θέλομεν νὰ διέλθῃ ἡ εὐθεῖα, ἀνὰ ἓν ἀκόντιον κατακορύφως. Εἶτα, ἵνα τοποθετήσωμεν ἕτερόν τι ἀκόντιον εἰς ἐνδιάμεσον θέσιν τῆς εὐθείας ΑΒ, ἱστάμεθα πρὸ τοῦ ἀκοντίου Α εἰς τὴν θέσιν Σ ὄπισθεν τοῦ ἑνὸς τῶν ἀκοντίων τούτων, ἔστω τοῦ Α, εἰς ἀπόστασιν 2—3 μέτρων καὶ σκοπεύομεν κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΑΒ. Εἶτα ὁ βοηθὸς ἐμπήγει κατακορύφως ἕτερον ἀκόντιον εἴς τι σημεῖον Γ, ὥστε νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, ὅπερ θὰ ἐννοήσωμεν, ἐὰν τὸ τρίτον τοῦτο ἀκόντιον Γ ὡς καὶ τὸ Β ἀποκρύπτωνται ὑπὸ τοῦ Α. Ἐὰν δὲ συμβῇ νὰ ἐμπήξῃ τὸ ἀκόντιον εἰς τὸ σημεῖον Γ' ἢ Γ'', ὁδηγοῦμεν τὸν βοηθὸν διὰ νευμάτων τῆς χειρὸς νὰ ἐμπήξῃ τοῦτο δεξιὰ ἢ ἀριστερά, ὥστε νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ Γ. Ὁμοίως τοποθετοῦμεν καὶ ἄλλα ἀκόντια ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ταύτης, οἷον τὸ Δ κλπ., ἅτινα δὲν πρέπει νὰ ἀπέχωσιν ἀπ' ἀλλήλων περισσότερον τῶν 30 ἢ 40 μέτρων.

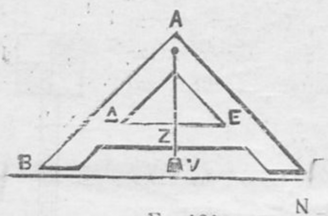


Σχ. 123.

149. Οἱ τεχνῖται, ἵνα ἐμπήξωσι δοκοὺς ἢ ἵνα ἀνεγείρωσι τοίχους κλπ. κατακορύφως, μεταχειρίζονται τὸ νῆμα τῆς στάθμης (§ 53).

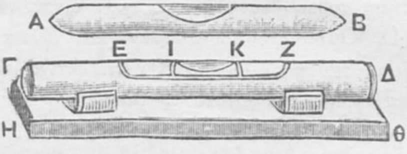
150. Ἵνα δὲ κατασκευάσωμεν ἐπίπεδόν τι ὁριζόντιον (οἷον πατώματα, αὐλὰς κλπ). ἢ ἵνα τοποθετήσωμεν δοκοὺς ὁριζοντίως, μεταχειριζόμεθα τὰ ἑξῆς εἰδικὰ ὄργανα:

1) **᾿Αλφάδιον.** Τὸ ἀλφάδιον ἢ στάθμη τῶν τεκτόνων ἀποτελεῖται ἐκ ξυλίνης γωνίας ΒΑΓ συνήθως ὀρθῆς, ἧς τὰ δύο σκέλη εἶναι ἰσομήκη καὶ συνδεδεμένα περὶ τὸ μέσον διά τινος ἐμπεπηγμένης εἰς αὐτὰ ξυλίνης σανίδος, χρησιμευούσης πρὸς συγκράτησιν αὐτῶν οὕτως, ὥστε τὸ ὄργανον ἔχει σχῆμα κεφαλαίου Α. ᾿Εκ τῆς κορυφῆς δὲ Α τῆς γωνίας εἶναι ἀνηρτημένον τὸ νῆμα τῆς στάθμης Αν καὶ τὸ ὄργανον εἶναι οὕτω κατεσκευασμένον, ὥστε, ἐὰν τεθῇ τοῦτο ὄρθιον ἐπί τινος ὁριζοντίου εὐθείας ΜΝ, τότε τὸ νῆμα διέρχεται ἀκριβῶς διά τινος λεπτῆς ἐντομῆς Ζ κεχαραγμένης εἰς τὸ μέσον τῆς σανίδος ΔΕ.



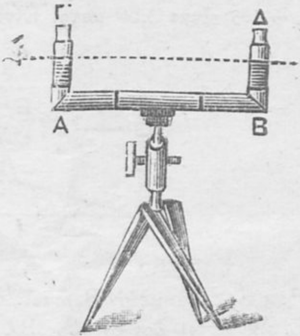
Σχ. 124.

2) **᾿Αεροστάθμη.** ῾Η ἀεροστάθμη ἢ φυσαλλιδωτὸς χωροβάτης ἀποτελεῖται ἐκ κυλινδρικοῦ ὑαλίνου σωλῆνος ΑΒ κεκυρτωμένου ἐλαφρῶς πρὸς τὰ ἄνω καὶ πεπληρωμένου οὐχὶ ἐντελῶς ὑπὸ οἰνοπνεύματος ἢ αἰθέρος (ὑγρῶν εὐκινητοτέρων τοῦ ὕδατος) οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζηται φυσαλλίς, ἥτις ὡς ἐλαφροτέρα καταλαμβάνει ἀεὶ τὸ ὕψιστον τοῦ σωλῆνος μέρος. ῾Ο ὑάλινος σωλὴν ἐγκλείεται πρὸς προφύλαξιν ἐντὸς ἑτέρου κυλινδρικοῦ μεταλλίνου σωλῆνος ΓΔ, φέροντος μικρὸν ἄνοιγμα ΕΖ κατὰ τὸ κυρτὸν μέρος τοῦ ὑαλίνου σωλῆνος, ἐπιτρέποντος οὕτω τὴν θέαν τῆς κινήσεως τῆς φυσαλλίδος καὶ προσηρμοσμένου ἐπὶ ἐπιπέδου μεταλλίνης πλακὸς ΗΘ. Τὸ ὄργανον τοῦτο εἶναι κατεσκευασμένον οὕτως, ὥστε, ὅταν ἡ βάσις αὐτοῦ ΗΘ διατεθῇ ὁριζοντίως ἡ φυσαλλὶς



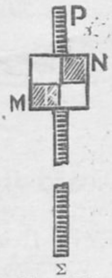
Σχ. 125.

καταλαμβάνει μέρος τι τοῦ ὑαλίνου σωλῆνος περιοριζόμενον ὑπὸ δύο χαραγῶν Ι καὶ Κ κεχαραγμένων προηγουμένως ἐπ' αὐτοῦ.



Σχ. 126.

*151. **Ὑδροστάθμη.** Τὸ ὄργανον τοῦτο ἀποτελεῖται ἐκ μεταλλίνου σωλῆνος καμπτομένου εἰς ὀρθὴν γωνίαν κατ' ἀμφότερα τὰ ἄκρα, ἐφ' ὧν ἐπικάθηνται δύο κυλινδρικοὶ ὑάλινοι σωλῆνες Γ καὶ Δ. Τὸ ὅλον δὲ ὄργανον στηρίζεται κατὰ τὸ μέσον ἐπί τινος τρίποδος. Ἐὰν χύσωμεν κεχρωσμένον ὕδωρ εἰς τὸν σωλῆνα, ὥστε νὰ ἀνέλθῃ εἰς ἑκάτερον τῶν ὑαλίνων σωλήνων, τότε κατὰ τὴν ἀρχὴν τῶν συγκοινωνούντων ἀγγείων αἱ ἐλεύθεραι ἐπιφάνειαι τοῦ ὕδατος εἰς τοὺς ὑαλίνους κυλίνδρους θὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου.

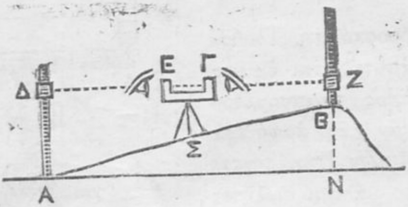


Σχ. 127.

Στοχαστήρ. Ἡ ὑδροστάθμη συνοδεύεται πάντοτε καὶ ὑπό τινος ὀργάνου καλουμένου στοχαστῆρος, ὅστις ἀποτελεῖται ἐκ ξυλίνου συνήθως κανόνος ΡΣ μήκους 2—4 μέτρων ὑποδιῃρημένου εἰς ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου καὶ φέροντος ἐπ' αὐτοῦ ὀρθογώνιον πλάκα ΜΝ ὑποδιῃρημένην εἰς 4 μικρότερα ὀρθογώνια κεχρωσμένα ἐναλλὰξ δι' ἐρυθροῦ καὶ λευκοῦ χρώματος οὕτως, ὥστε νὰ καθίσταται μακρόθεν εὐκρινῶς ὁρατὸν τὸ κέντρον αὐτῆς Κ, καὶ δυναμένην νὰ ὀλισθήσῃ καὶ νὰ στερεωθῇ διὰ κοχλίου εἰς οἱανδήποτε θέσιν τοῦ κανόνος.

Τὰ ὄργανα ταῦτα χρησιμεύουσι πρὸς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς ὕψους δύο σημείων Α. καὶ Β. Πρὸς τοῦτο τοποθετοῦμεν τὴν ὑδροστάθμην μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β εἰς τὴν θέσιν Σ, ὁ δὲ βοηθὸς τοποθετεῖ κατακορύφως τὸ στόχαστρον εἰς τὸ Α. Ρίπτομεν τότε βλέμμα ἐκ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ διὰ νευμάτων ὁδηγοῦμεν τὸν βοηθὸν νὰ ἀναβιβάσῃ ἢ νὰ καταβιβάσῃ τὴν πλάκα κατὰ μῆκος τοῦ κανόνος.

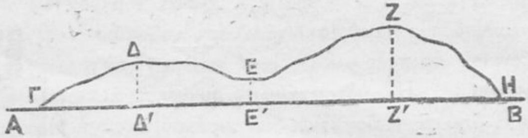
ἕως ὅτου ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς ΓΕ διέλθῃ διὰ τοῦ κέντρου τῆς πλακὸς Δ, ὅτε ὁ βοηθὸς ἀναγινώσκει ἐπὶ τοῦ κανόνος τὸ ὕψος ΑΔ, καὶ ἔστω ὅτι τοῦτο εἶναι 2,50 μετρ. Εἶτα ὁ βοηθὸς μεταφέρει τὸν στοχα-



Σχ. 128.

στῆρα εἰς τὸ σημεῖον Β, ἡμεῖς δὲ σκοπεύομεν κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΕΖ, καὶ ἔστω ὅτι τὸ ὕψος ΒΖ εἶναι 0,40. Ἡ διαφορὰ τῶν ὑψῶν τῶν στοχάστρων 2,50 —0,40=2,10 μ. παριστᾷ τὴν διαφορὰν τῶν ὑψῶν τῶν σημείων Α καὶ Β.

Ἡ ἐργασία αὕτη, ἥτις καλεῖται *χωροστάθμησις*, ἔχει ποικίλας



Σχ. 129.

ἐφαρμογάς. Π. χ. ὑποθέσωμεν ὅτι προτιθέμεθα νὰ χαράξωμεν ὁριζοντίαν τινὰ ὁδὸν ΑΒ διὰ μέσου ἀνωμάλου τινὸς ἐδάφους ΓΔΕΖΗ. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τὰ ὕψη ΔΔ′, ΕΕ′, ΖΖ′ τῶν διαφόρων σημείων Δ,Ε,Ζ ὑπεράνω τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς ΑΒ, ἵνα γνωρίζωμεν πόσον βάθος γῆς εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα πρέπει νὰ ἐκσκάψωμεν.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

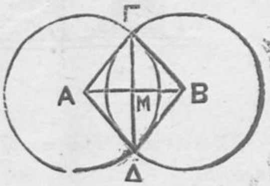
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

152. Πρόβλημα λέγεται ἡ πρότασις, ἐν ᾗ ζητεῖται νὰ γίνῃ τι ἐπὶ τῇ βάσει δεδομένων. Ἡ ἐκτέλεσις δὲ τοῦ ζητουμένου καλεῖται λύσις τοῦ προβλήματος.

Ἡ λύσις τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων γίνεται διὰ γεωμετρικῶν κατασκευῶν, αἵτινες ἐν τοῖς ἑπομένοις προβλήμασι συνίστανται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν ζητουμένων σημείων καὶ γραμμῶν διὰ τῆς χρήσεως μόνον τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου ἢ (καὶ τῶν βοηθητικῶν ὀργάνων τοῦ γνώμονος καὶ μοιρογνωμίου) καὶ τῆς δι' αὐτῶν καταγραφῆς εὐθειῶν καὶ περιφερειῶν χωρὶς νὰ ἐπιχειρῶμεν τὴν λύσιν διὰ δοκιμῶν.

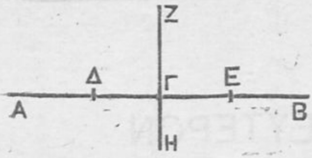
Πρόβλημα 1ον) Δοθέντος τμήματος εὐθείας ΑΒ, νὰ ἀχθῇ κάθετος εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ.

Μὲ κέντρον τὸ ἓν ἄκρον, π. χ. τὸ Α, καὶ ἀκτῖνα μείζονα τοῦ ἡμίσεος τοῦ τμήματος ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου· εἶτα μὲ κέντρον τὸ ἕτερον ἄκρον Β καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν ἑτέραν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν πρώτην εἰς δύο σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἡ εὐθεῖα ΓΔ, ἡ ἑνοῦσα τὰ δύο ταῦτα σημεῖα, εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ· διότι τὸ σχῆμα ΑΓΒΔ εἶναι ἐκ κατασκευῆς ῥόμβος καὶ συνεπῶς αἱ διαγώνιοι τούτου τέμνονται δίχα καὶ καθέτως (§ 92,3 γ).



Σχ. 130.

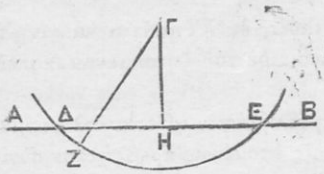
2ον) Ἔκ τινος σημείου Γ κειμένου ἐπὶ δεδομένης εὐθείας νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν.



Σχ. 131.

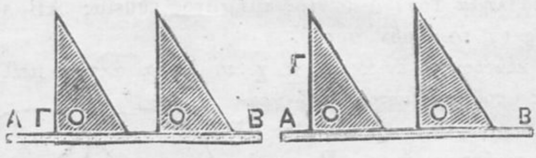
Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν διὰ τοῦ διαβήτου (§ 121 σημ.) ἑκατέρωθεν τοῦ Γ δύο τμήματα ΓΔ καὶ ΓΕ ἴσα. Ἐὰν ἤδη διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ 1ου προβλήματος ἀχθῇ κάθετος εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΔΕ, αὕτη θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.

3ον) Ἔκ τινος σημείου Γ, κειμένου ἐκτὸς δεδομένης εὐθείας ΑΒ νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν.



Σχ. 132.

Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν σημεῖόν τι Ζ, κείμενον εἰς τὸ ἕτερον μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ· εἶτα μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΓΖ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἥτις θὰ τέμνῃ προφανῶς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς δύο σημεῖα Δ καὶ Ε. Ἐὰν ἤδη ἀχθῇ κατὰ τὸ 1ον πρόβλημα ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΔΕ, αὕτη παρατηροῦμεν ὅτι θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ κέντρου Γ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.

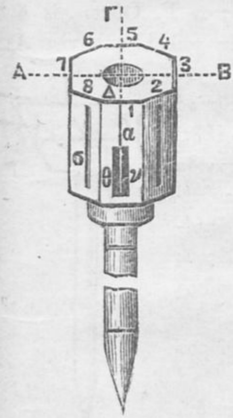


Σχ. 133.

Τὰ ἀνωτέρω δύο προβλήματα λύονται ἁπλούστερον διὰ τοῦ γνώμονος.

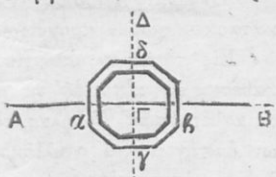
Πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν κατὰ πρῶτον ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ ἕνα κανόνα· εἶτα θέτομεν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ γνώμονος ἐπὶ τοῦ κανόνος καὶ ὠθοῦμεν τὸν γνώμονα κατὰ μῆκος τοῦ κανόνος, ἕως ὅτου ἡ ἑτέρα κάθετος πλευρὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Γ. Τότε δὲ μεταχειριζόμενοι τὴν πλευρὰν ταύτην ὡς κανόνα σύρομεν εὐθεῖαν γραμμήν, ἥτις θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.

***Χωρομετρικὸς γνώμων ἢ ὀρθόγωνον.** Τὸ ὄργανον τοῦτο χρησιμεύει πρὸς προσδιορισμὸν καθέτων ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Ἀποτελεῖται δὲ ἐξ ὀκταγωνικοῦ κανονικοῦ πρίσματος κοίλου ἔσωθεν στηριζομένου ἐπὶ ἀκοντίου, τελευτῶντος εἰς σιδηρᾶν αἰχμήν, ὥστε νὰ δύναται νὰ ἐμπηχθῇ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Κατὰ μῆκος δὲ καὶ κατὰ τὸ μέσον ἑκάστης ἕδρας ὑπάρχει σχισμή. Εἰς τέσσαρας τῶν σχισμῶν τούτων τὸ μὲν ἥμισυ α εἶναι στενὸν καὶ καλεῖται ἀνατομή, τὸ δὲ ἕτερον ἥμισυ θ εἶναι πλατύτερον καὶ καλεῖται θυρίς, κατὰ τὸ μέσον τῆς ὁποίας καὶ κατὰ τὴν προέκτασιν τῆς ἀνατομῆς εἶναι τεταμένον λεπτὸν νῆμα ν. Αἱ σχισμαὶ δὲ αὗται ἐπὶ τῶν ἑδρῶν ἔχουσι χαραχθῇ οὕτως, ὥστε ἡ ἀνατομὴ α ἕδρας τινός, οἷον τῆς 1, νὰ εὑρίσκηται ἀντικρὺ τοῦ νήματος τῆς θυρίδος θ τῆς ἐκ διαμέτρου ἀντικειμένης ἕδρας 5, ὅτε σχηματίζονται διὰ τῆς ὁράσεως δύο σκοπευτικὰ ἐπίπεδα 1—5 καὶ 3—7 κάθετα πρὸς ἄλληλα. Αἱ ἄλλαι 4 σχισμαὶ εἶναι στεναὶ καθ' ὅλον τὸ μῆκος καὶ προσδιορίζουσιν ὁμοίως ἕτερα δύο σκοπευτικὰ ἐπίπεδα 2—6 καὶ 4—8, ἅτινα σπανίως χρησιμοποιοῦνται.



Σχ. 134.

Χρῆσις τοῦ ὀργάνου. Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Γ. Πρὸς τοῦτο ἐμπήγομεν τὸν γνώμονα κατὰ τὸ σημεῖον Γ κατακορύφως. Εἶτα διευθύνομεν τὸ ὄργανον, ὥστε, ὅταν παρατηρῶμεν διὰ τῆς σχισμῆς β τὸ νῆμα τῆς σχισμῆς α, νὰ ἀποκρύπτεται τὸ ἀκόντιον Α, καί, ὅταν παρατηρῶμεν διὰ τῆς σχισμῆς α τὸ νῆμα τῆς σχισμῆς β, νὰ ἀποκρύπτεται τὸ ἀκόντιον Β. Τούτου ἐπιτευχθέντος, τοποθετούμεθα εἰς τὴν σχισμὴν γ καὶ ὁ βοηθὸς διὰ δοκιμῶν καὶ



Σχ. 135.

ὑποδείξεων διὰ τῆς χειρός μας τοποθετεῖ κατὰ τὸ σημεῖον Δ ἀκόντιον οὕτως, ὥστε, ὅταν παρατηρῶμεν διὰ τῆς σχισμῆς γ, νὰ ἀποκρύπτεται τοῦτο ὑπὸ τοῦ νήματος τῆς σχισμῆς δ. Τὸ ἀκόντιον τοῦτο Δ προσδιορίζει μετὰ τοῦ Γ τὴν κάθετον ἐπ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ τοῦ ἐδάφους.

Ἐὰν ὅμως τὸ σημεῖον εἶναι ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ ἐργασία γίνεται ὁμοίως, ἀλλὰ διὰ δοκιμῶν. Ἤτοι τοποθετοῦμεν τὸν γνώμονα, ὡς ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει, ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ εἰς σημεῖόν τι Δ, ὅπερ νομίζομεν ἐξ ἁπλῆς ὄψεως ὅτι εἶναι ὁ πούς τῆς ζητουμένης καθέτου, καὶ παρατηροῦμεν διὰ τοῦ γνώμονος κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ σημείου Γ, ἐφ' οὗ ἔχει στηθῆ ἀκόντιον. Ἐὰν διὰ τῶν θυρίδων φανῇ τὸ ἀκόντιον Γ, τὸ σημεῖον Δ εἶναι ὁ πούς τῆς ζητουμένης καθέτου. Ἄλλως τοποθετοῦμεν τὸν γνώμονα πρὸς τὰ δεξιὰ (π.χ. εἰς τὸ σημεῖον Δ'') ἢ πρὸς τὰ ἀριστερὰ (π. χ. εἰς τὸ Δ'), ἕως ὅτου ἴδωμεν διὰ τῶν σχισμῶν τὸ ἀκόντιον Γ. Οὕτω δὲ διὰ τῶν δοκιμῶν θὰ εὕρωμεν τὸν πόδα τῆς ἐκ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ καθέτου.

Σχ. 136.

Ἐν ἐλλείψει τοῦ ὀργάνου τούτου δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν προχείρως τοιοῦτον ὡς ἑξῆς:

Εἰς τὸ ἄκρον ἀκοντίου προσηλοῦμεν σανίδα καθέτως ἐπ' αὐτό, ἐφ' ἧς χαράσσομεν δύο εὐθείας καθέτους ἐπ' ἀλλήλας, εἰς τὰ ἄκρα τῶν ὁποίων ἐμπήγομεν 4 στυλίσκους α,β,γ,δ καθέτους ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σανίδος, οἵτινες προσδιορίζουσι 2 σκοπευτικὰ ἐπίπεδα αβ καὶ γδ κάθετα ἐπ' ἄλληλα. Ἡ χρῆσις τοῦ ὀργάνου τούτου γίνεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω.

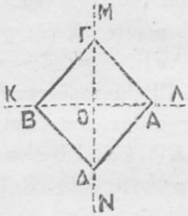
Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν διὰ τὸν αὐτὸν σκοπὸν καὶ κοινὴν τράπεζαν.

Σχ. 137.

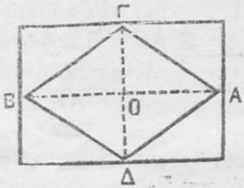
4ον) Νὰ κατασκευασθῇ ῥόμβος.

Πρὸς τοῦτο σύρομεν δύο εὐθείας καθέτους ἐπ' ἀλλήλας τὰς ΚΛ καὶ ΜΝ καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν τὰ τμήματα ΟΑ=ΟΒ καὶ ΟΓ=ΟΔ. Ἑνοῦντες δὲ εἶτα δι' εὐθειῶν τὰ σημεῖα Α,Γ,Β,Δ λαμβάνομεν τὸ τετράπλευρον ΑΓΒΔ, ὅπερ εἶναι ρόμβος. Διατί;

Ρόμβον δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν καὶ δι' ἑνὸς ὀρθογωνίου φύλλου χάρτου. Πρὸς τοῦτο διπλοῦντες τοῦτο καταλλήλως εὑρίσκομεν τὰ μέσα Α, Β, Γ, Δ τῶν 4 αὐτοῦ πλευρῶν,



Σχ. 138.

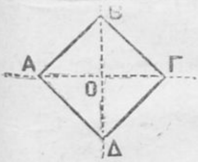


Σχ. 139.

ἅτινα ἑνοῦντες διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ, λαμβάνομεν τὸ τετράπλευρον ΑΓΒΔ, ὅπερ εἶναι ρόμβος.

5ον) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον.

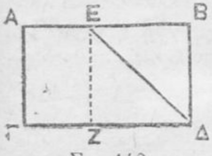
Σύρομεν δύο εὐθείας καθέτους ἐπ' ἀλλήλας καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς τομῆς Ο λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῶν 4 τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ ἴσα πρὸς ἄλληλα. Ἑνοῦντες δὲ τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ δι' εὐθειῶν λαμβάνομεν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ὅπερ εἶναι τετράγωνον. Διατί ;



Σχ. 140.

Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον ἐὰν δοθῇ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ, π. χ. ἡ ΑΒ. Πρὸς τοῦτο ὑψοῦμεν ἐκ τῶν ἄκρων τῆς πλευρᾶς ταύτης ΑΒ καθέτους ἐπ' αὐτὴν καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τούτων δύο τμήματα ΑΓ καὶ ΒΔ ἴσα πρὸς τὸ ΑΒ. Ἑνοῦντες δὲ δι' εὐθειῶν τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ἔχομεν τὸ ζητούμενον τετράγωνον ΑΒΔΓ.

Σχ. 141.



Σχ. 142.

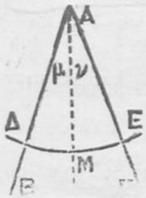
Τετράγωνον δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν καὶ δι' ἑνὸς ὀρθογωνίου φύλλου χάρτου. Πρὸς τοῦτο θλῶμεν τοῦτο κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΕΔ οὕτως, ὥστε ἡ ΒΔ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΔΖ, ὅτε ἡ ΕΒ θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν τῆς ΕΖ. Ἀποκόπτοντες δὲ τὸ τεμάχιον ΑΕΖΓ λαμβάνομεν τὸ τετράγωνον ΒΔΖΕ.

Σχ. 143.

6ον) Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τόξον (π.χ. τὸ ΑΓΒ) εἰς δύο ἴσα μέρη.

Διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ 1ου προβλημ. φέρομεν τὴν κάθετον ΔΓ εἰς τὸ μέσον Μ τῆς χορδῆς ΑΒ τοῦ δοθέντος τόξου ΑΓΒ, ἥτις διαιρεῖ τὸ τόξον εἰς δύο τόξα ΑΓ καὶ ΓΒ· μετροῦντες δὲ τὰς χορδὰς ΑΓ καὶ ΓΒ παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι ἴσαι· ἄρα (§ 114) καὶ τὰ τόξα ΑΓ καὶ ΓΒ εἶναι ἴσα.

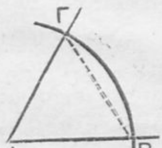
7ον) Νὰ διαιρεθῇ δοθεῖσα γωνία (π.χ. ἡ ΒΑΓ) εἰς δύο ἴσας γωνίας, ἤτοι νὰ ἀχθῇ ἡ διχοτόμος αὐτῆς.



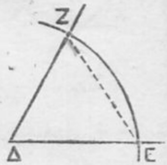
Σχ. 144.

Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας Α καὶ ἀκτῖνα οἱανδήποτε γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἥτις τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς δοθείσης γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Διὰ τῆς κατασκευῆς δὲ τοῦ προηγουμένου προβλήματος εὑρίσκοντες τὸ μέσον Μ τοῦ τόξου ΔΕ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΜ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη διχοτόμος διότι (§ 118) αἱ γωνίαι μ καὶ ν εἶναι ἴσαι.

8ον) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση δοθείσῃ γωνίᾳ (π.χ. τῇ Α) ἔχουσα πλευρὰν δεδομένην εὐθεῖαν ΔΕ καὶ κορυφὴν τὸ ἕτερον ἄκρον αὐτῆς Δ.



Σχ. 145.

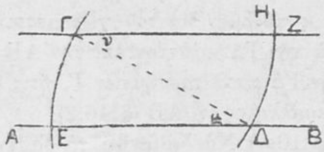


Σχ. 146.

Πρὸς τοῦτο γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἔχουσαν κορυφὴν τὸ σημεῖον Α καὶ ἀκτῖνα οἱανδήποτε, ἥτις τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς δοθείσης γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Εἶτα μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἥτις τέμνει τὴν ΔΕ εἴς τι σημεῖον Ε· ἐπὶ τοῦ κύκλου Δ λαμβανομεν τὴν χορδὴν ΕΖ ἴσην τῇ ΒΓ. Ἐὰν ἤδη ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΔΖ, σχηματίζεται ἡ γωνία Δ, ἥτις εἶναι ἴση τῇ δοθείσῃ Α, διότι τοξ. ΖΕ=τοξ. ΓΒ (§ 114) ἄρα καὶ γων Δ=γων. Α (§ 118).

9ον) Νὰ ἀχθῇ παράλληλος δοθείσῃ εὐθείᾳ ΑΒ ἐκ δεδομένου σημείου Γ, μὴ κειμένου ἐπ' αὐτῆς.

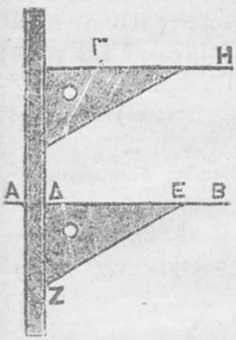
Πρὸς τοῦτο μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον Δ τῆς ΑΒ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΔΓ γράφομεν τὸ τόξον κύκλου ΓΕ· εἶτα μὲ κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν τὸ τόξον ΔΗ, ἐπὶ τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν τὸ τόξον ΔΖ ἴσον τῷ ΓΕ. Ἡ εὐθεῖα, ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα Γ καὶ Ζ, ἀποδεικνύεται θεωρητικῶς ὅτι εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ.



Σχ. 147.

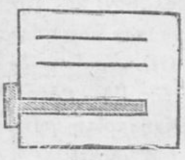
Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται ἁπλούστερον διὰ τοῦ γνώμονος καὶ τοῦ κανόνος ὡς ἑξῆς.

Ἐφαρμόζομεν τὴν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ γνώμονος π. χ. τὴν ΔΕ, ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης ΔΖ προσαρμόζομεν κανόνα. Εἶτα διατηροῦντες ἀκίνητον τὸν κανόνα σύρομεν τὸν γνώμονα κατὰ μῆκος τοῦ κανόνος, ἕως ὅτου ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ τοῦ γνώμονος ΔΕ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Γ, ὁπότε σύρομεν κατὰ μῆκος αὐτῆς τὴν εὐθεῖαν ΓΗ, ἥτις θὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ (§ 46, 2).



Σχ. 148.

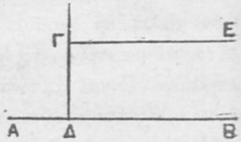
Ὅταν τὸ ἐπίπεδον τῆς σχεδιάσεως εἶναι πίναξ σχήματος ὀρθογωνίου κεκαλυμμένος διὰ χάρτου καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτοῦ γίνεται χρῆσις ἰδίως παρὰ τοῖς τεχνίταις ὀργάνου ἀποτελουμένου ἐκ δύο κανόνων καθέτων ἐν σχήματι τοῦ γράμματος Τ καὶ καλουμένου ἡμισταύρου ἢ ταῦ. Πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὸν μικρότερον κανόνα (ὅστις φέρει καὶ προεξοχὴν) ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ πίνακος καὶ ὠθοῦντες τοῦτον κατὰ μῆκος τῆς



Σχ. 149.

πλευρᾶς ταύτης σύρομεν κατὰ μῆκος τοῦ ἑτέρου κανόνος εὐθείας παραλλήλους τῇ ἄλλῃ πλευρᾷ.

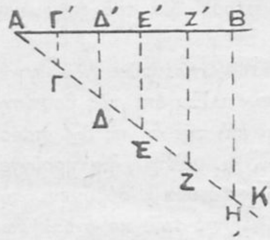
Ὅταν ὅμως τὸ σημεῖον Γ καὶ ἡ εὐθεῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, φέρομεν διὰ τοῦ χωρομετρικοῦ γνώμονος ἐκ τοῦ σημείου Γ διὰ τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ εἶτα τὴν ΓΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ κατὰ τὸ σημειον Γ, ἥτις θὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ (§ 46,2).



Σχ. 150

10ον) Νὰ διαιρεθῇ τὸ δοθὲν τμῆμα ΑΒ εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη, π. χ. εἰς 5.

Πρὸς τοῦτο ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τοῦ ΑΒ σύρομεν τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΚ (§ 10,3), σχηματίζουσαν μετὰ τοῦ ΑΒ γωνίαν. Ἐπὶ τῆς ΑΚ λαμβάνομεν διὰ τοῦ διαβήτου ἀπὸ τοῦ Α πέντε τμήματα ἴσα τὰ ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ. Εἶτα φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΗΒ καὶ ἐκ τῶν σημείων Ζ, Ε, Δ, Γ σύρομεν παραλλήλους τῇ ΗΒ. Αἱ παράλληλοι αὗται ἀποτέμνουσιν ἀπὸ τῆς ΑΒ τὰ τμήματα ΑΓ′, Γ′Δ′, Δ′Ε′, Ε′Ζ′, Ζ′Β, ἅτινα μετροῦντες εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι ἴσα.



Σχ. 151.

11ον) Δοθεισῶν δύο γωνιῶν Α καὶ Β τριγώνου νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη.

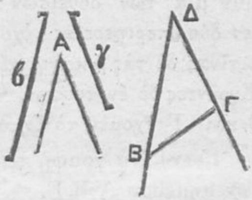
Περιορισμός. Δέον $Α+Β < 2$ ὀρθῶν (§ 84, 2).

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου σύρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΓΔ καὶ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ο ἐπ' αὐτῆς. Εἶτα κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν μ ἴσην τῇ Α ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Ο καὶ πλευρὰν τὴν ΓΔ (προβλ. 8ον) καὶ τὴν γωνίαν ν ἴσην τῇ Β ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Ο καὶ πλευρὰν τὴν ΟΓ, κειμένην δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΓΔ, πρὸς ὃ καὶ ἡ μ. Ἡ ζητουμένη τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ ρ. Διατί;

Σχ. 152.

12ον). Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδονται δύο πλευραὶ β καὶ γ καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία Α.

Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν Δ ἴσην τῇ Α καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς ΔΒ = β καὶ ΔΓ=γ. Ἑνοῦντες δὲ δι' εὐθείας τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἔχομεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΔΒΓ.

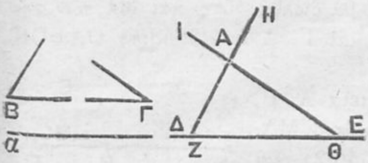


Σχ. 153.

13ον) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδονται μία πλευρὰ α καὶ δύο γωνίαι Β καὶ Γ.

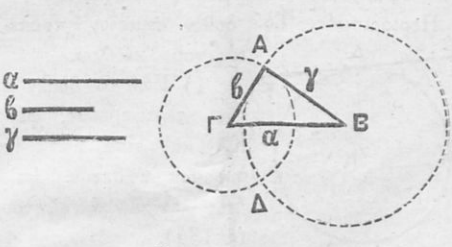
Σημ. Τὰς δύο δοθείσας γωνίας ὑποθέτομεν ἀμφοτέρας προσκειμένας τῇ πλευρᾷ α. Διότι, ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ μὲν εἶναι προσκειμένη, ἡ δὲ ἀντικειμένη, τότε εὑρίσκομεν τὴν τρίτην γωνίαν τοῦ τριγώνου (προβλ.11ον) καὶ οὕτως ἔχομεν γνωστὰς ἀμφοτέρας τὰς προσκειμένας τῇ πλευρᾷ α γωνίας.

Πρὸς λύσιν δὲ τοῦ προβλήματος λαμβάνομεν ἐπί τινος εὐθείας ΔΕ τὸ τμῆμα ΖΘ ἴσον τῇ πλευρᾷ α καὶ εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ κατασκευάζομεν 2 γωνίας Ζ καὶ Θ ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς Β καὶ Γ, ἐχούσας κορυφὰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Θ ἀντιστοίχως, πλευρὰν τὴν ΖΘ καὶ κειμένας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΔΕ (προβλ. 8ον). Προεκτείνοντες δὲ τὰς πλευρὰς ΖΗ καὶ ΘΙ λαμβάνομεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΖΑΘ.



Σχ. 154.

14ον Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδονται αἱ τρεῖς αὐτοῦ πλευραὶ α, β, γ.



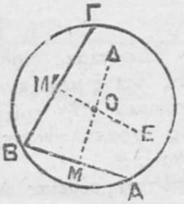
Σχ. 155.

Περιορισμός. Ἡ μείζων πλευρὰ δέον νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων (§ 84,1).

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου λαμβάνομεν τμῆμα εὐθείας ἴσον μιᾷ τῶν δοθεισῶν πλευρῶν, π.χ. τὸ ΓΒ=α. Εἶτα γράφομεν δύο περιφερείας ἐχούσας κέντρα μὲν τὰ σημεῖα Γ καὶ Β, ἀκτῖνας δὲ τὰς β καὶ γ, αἵτινες τέμνονται εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Δ. Ἑνοῦντες δὲ ἓν τούτων, π.χ. τὸ Α, δι' εὐθειῶν μετὰ τῶν σημείων Β καὶ Γ ἔχομεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.

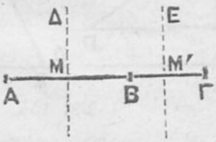
15ον) Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ τριῶν δεδομένων σημείων Α,Β,Γ.

Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΒΓ καὶ εἶτα τὴν ΔΜ κάθετον εἰς τὸ μέσον Μ τῆς ΑΒ (προβλ. 1ον) καὶ τὴν ΕΜ΄ κάθετον εἰς τὸ μέσον Μ΄ τῆς ΒΓ. Αἱ δύο αὗται κάθετοι ἱκανῶς προεκτεινόμεναι θὰ τμηθῶσιν εἴς τι σημεῖον Ο (ἐὰν τὰ 3 σημεῖα Α,Β,Γ, δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας). Ἐὰν ἤδη μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΑ γράψωμεν περιφέρειαν, θὰ διέλθῃ αὕτη καὶ διὰ τῶν σημείων Β καὶ Γ. Διότι (§ 43,4) ΟΑ=ΟΒ ὁμοίως δὲ καὶ ΟΒ=ΟΓ.



Σχ. 156.

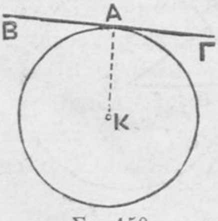
Σημ. Ἐὰν ὅμως τὰ 3 σημεῖα Α, Β, Γ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τότε αἱ κάθετοι ΜΔ, καὶ Μ΄Ε εἶναι παράλληλοι (§ 46,2) καὶ συνεπῶς δὲν ὑπάρχει σημεῖον τομῆς αὐτῶν.



Σχ. 157.

*16ον) Ἐκ δεδομένου σημείου Α νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη δεδομένου κύκλου Κ.

Περιορισμός. Τὸ δοθὲν σημεῖον πρέπει νὰ μὴ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου.

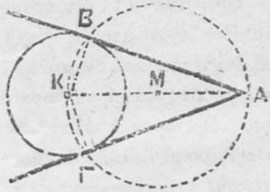


Σχ. 158.

1) Ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΚΑ καὶ εἶτα κατὰ τὸ ἄκρον αὐτῆς Α σύρομεν κάθετον ἐπ' αὐτὴν τὴν ΒΓ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη (§ 134).

2) Ἐὰν δὲ τὸ δοθὲν σημεῖον Α κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΚ καὶ

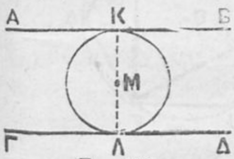
ἐπ' αὐτῆς ὡς διαμέτρου κατασκευάζομεν περιφέρειαν κύκλου (ἤτοι μὲ κέντρον τὸ μέσον αὐτῆς Μ καὶ ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ αὐτῆς ΜΑ), ἥτις τέμνει τὴν δοθεῖσαν Κ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Ἐὰν ἤδη φέρωμεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ μετρήσωμεν διὰ τοῦ γνώμονος τὰς γωνίας ΑΒΚ καὶ ΑΓΚ, παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι ὀρθαί· συνεπῶς (§ 134) αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι αἱ ζητούμεναι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου.



Σχ. 159.

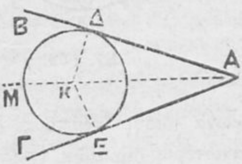
17ον) Νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.

1) Ἐὰν μὲν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ὡς αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ, τότε ἄγοντες κοινὴν αὐτῶν κάθετον, π. χ. τὴν ΚΛ, γράφομεν ἐπ' αὐτῆς ὡς διαμέτρου περιφέρειαν κύκλου, ἥτις θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ (§ 134).



Σχ. 160.

2) Ἐὰν δὲ τέμνωνται, ὡς αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ, τότε σύρομεν τὴν διχοτόμον ΑΜ τῆς γωνίας αὐτῶν Α. Αἱ ἀποστάσεις οἱουδήποτε σημείου τῆς διχοτόμου, π.χ. τοῦ Κ, ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας, ἤτοι αἱ ΚΔ καὶ ΚΕ, εἶναι ἴσαι (§ 44). Ἡ δὲ περιφέρεια, ἡ γραφομένη μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Κ καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ἀποστάσεων τούτων, θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ (§ 134).



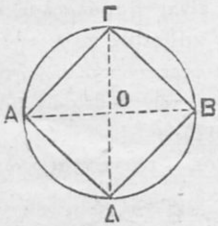
Σχ. 161.

Ἐγγραφὴ κανονικῶν πολυγώνων ἐν κύκλῳ.

153. Ἵνα ἐγγράψωμεν κανονικὸν πολύγωνον εἰς δοθέντα κύκλον, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, ὅπερ πρόκειται νὰ ἐγγραφῇ, καὶ εἶτα νὰ ἑνώσωμεν δι' εὐθειῶν ἀνὰ δύο τὰ ἐφεξῆς σημεῖα τῆς διαιρέσεως. Διότι οὕτως αἱ μὲν πλευραὶ αὐτοῦ θὰ εἶναι ἴσαι ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων (§ 114), αἱ δὲ γωνίαι αὐτοῦ θὰ εἶναι ἴσαι ὡς ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουσαι ἐπὶ ἴσων τόξων (§ 137).

154. Ἵνα δὲ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς ὡρισμένον ἀριθμὸν ἴσων μερῶν, λαμβάνομεν δι' ἁπλῆς ὄψεως ἄνοιγμά τι τοῦ διαβήτου καὶ δι' αὐτοῦ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐφεξῆς ἴσας χορδάς· ἐὰν ἡ τελευταία διαίρεσις δὲν συμπέσῃ μετὰ τῆς πρώτης, αὐξάνομεν ἢ ἐλαττοῦμεν τὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὰς δοκιμάς, ἕως ὅτου ἐπιτύχωμεν τελείαν σύμπτωσιν.

155. Πλὴν τοῦ τρόπου τούτου ἔχομεν διά τινα πολύ-



Σχ. 162.

Σχ. 163.

γωνα ἰδίους τρόπους διὰ γεωμετρικῶν κατασκευῶν ἄνευ τῶν ἀνωτέρω δοκιμῶν (παραβλ. § 152)· οἷον :

1ον) Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.

Πρὸς τοῦτο σύρομεν τυχοῦσαν διάμετρον τὴν ΑΒ καὶ εἶτα διάμετρον κάθετον ἐπ' αὐτὴν τὴν ΓΔ. Αὗται διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν εἰς 4 ἴσα τόξα (§ 29, 118). Ἑνοῦντες δὲ δι' εὐθειῶν τὰ ἄκρα τῶν τόξων τούτων Α, Γ, Β, Δ ἔχομεν τὸ ζητούμενον ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ΑΓΒΔ.

2ον) Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.

Ἀπό τινος σημείου Α τῆς περιφερείας τοῦ δοθέντος κύκλου λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν ἓξ χορδὰς ἴσας τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου, ὁπότε τὸ ἄκρον τῆς 6ης χορδῆς θὰ πέσῃ ἀκριβῶς εἰς τὸ ἀρχικὸν σημεῖον Α. Οὕτω δὲ θὰ διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια εἰς 6 ἴσα τόξα (§ 114), ἀφοῦ αἱ χορδαὶ τῶν τόξων τούτων εἶναι ἴσαι. Ἑπομένως (§ 153) τὸ ἐγγεγραμμένον ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ θὰ εἶναι κανονικόν.

Σημ. Ἐπιζευγνύοντες δὲ τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἐναλλάξ, οἷον τὰς Α,Γ,Ε, διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΓΕ, ΕΑ λαμβάνομεν τὸ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΓΕ.

Παρατήρησις. Ἄν, ἐνῷ ἡ περιφέρεια ἔχει διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη, διαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν ἴσων τόξων εἰς δύο ἴσα τόξα (πρόβλ. 6ον), θὰ εὑρεθῇ οὕτως ἡ περιφέρεια διῃρημένη εἰς διπλάσιον ἀριθμὸν ἴσων μερῶν. Ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν νὰ διαιρῶμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 4 ἴσα μέρη, ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν αὐτὴν εἰς 8, 16, 32....ὁμοίως γνωρίζοντες νὰ διαιρῶμεν εἰς 6, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν αὐτὴν εἰς 12, 24, 48....καὶ νὰ ἐγγράψωμεν τὰ ἀντίστοιχα κανονικὰ πολύγωνα.

Ἐρωτήσεις καὶ ἀσκήσεις.

Τί καλεῖται πρόβλημα καὶ τί λύσις αὐτοῦ ; Πῶς γίνεται ἡ λύσις τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων ; *Τί εἶναι χωρομετρικὸς γνώμων ἢ ὀρθόγωνον καὶ πῶς γίνεται ἡ χρῆσις τούτου ; Τί εἶναι τὸ ταῦ καὶ πῶς γίνεται ἡ χρῆσις αὐτοῦ ; Πῶς ἐγγράφεται κανονικὸν πολύγωνον εἰς δοθέντα κύκλον ; Πῶς διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν διὰ δοκιμῶν εἰς ἴσα μέρη ; Πῶς ἐγγράφεται τετράγωνον καὶ κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον ; Ποῖα ἄλλα κανονικὰ πολύγωνα δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν ;

1) Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἔχουσα ὡς διάμετρον δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

2) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ συμπλήρωμα δοθείσης ὀξείας γωνίας.

3) Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, οὗτινος ἐδόθησαν αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ καὶ τὸ ὕψος.

4) Νὰ κατασκευασθῇ ῥόμβος, οὗ αἱ διαγώνιοι ἔχουσι μήκη 45 καὶ 60 γρ. (ἐπὶ τοῦ χάρτου, ἐπὶ δὲ τοῦ πίνακος δέον νὰ λαμβάνηται συνήθως τὸ δεκαπλάσιον, ἤτοι ἐνταῦθα 45 δακ. καὶ 60 δακτ.).

5) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, ἔχον διαγώνιον 60 γρ.

6) Νὰ διαιρεθῇ δοθεῖσα γωνία εἰς 2, 4, 8 κλπ. ἴσα μέρη.

7) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, ἔχον διαγωνίους 40 γρ. καὶ τεμνομένας ὑπὸ γωνίαν 1)2 τῆς ὀρθῆς.

8) Νὰ κατασκευασθῇ σκαληνὸν τρίγωνον, οὗτινος αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως 25 γρ., 30 γρ. καὶ 35 γρ.

9) Δύναται νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, ἔχον πλευρὰς 23 **γρ.**, 15 γρ. καὶ 40 γρ ;

*10) Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, οὗτινος δίδονται αἱ τέσσαρες πλευραί.

11) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗτινος δίδονται μία ὀξεῖα γωνία καὶ ἡ ὑποτείνουσα.

12) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗτινος δίδονται μία τῶν καθέτων πλευρῶν καὶ ἡ ὑποτείνουσα.

13) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, οὗτινος ἡ μία τῶν πλευρῶν εἶναι 30 γρ. καὶ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ 50 γρ.

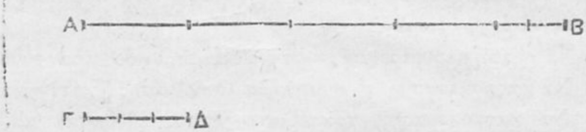
14) Πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν τὸ κέντρον πλατείας κυκλικοῦ σχήματος ;

*15) Ἔν τινι πόλει ὑπάρχουσι δύο μνημεῖα εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ἀπέχοντα ἀπόστασιν α. Προκειμένου δὲ νὰ γίνῃ ρυμοτομία, ζητεῖται νὰ χαραχθῶσι δύο παράλληλοι ὁδοὶ διερχόμεναι ἑκατέρα διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β καὶ ἀπέχουσαι ἀλλήλων ἀπόστασιν δ (ἔνθα $δ < α$ ἢ $δ = α$).

*16) Εἰς δεδομένον τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.

Περὶ λόγου καὶ ποσῶν ἀναλόγων.

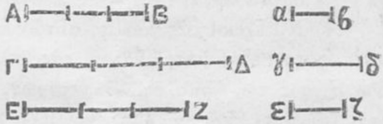
156. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἐὰν λάβωμεν τὴν



εὐθεῖαν ΓΔ ὡς μονάδα καὶ ἐπιθέσωμεν ταύτην διαδοχικῶς, ὅσας φορὰς εἶναι δυνατόν, ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, παρατηροῦμεν ὅτι περιέχεται 4 φορὰς καὶ τὸ 1)3 αὐτῆς 2 φοράς. Ἡ ἐργασία αὕτη καλεῖται μέτρησις καὶ τὸ ἐξαγόμενον $4\,{}^2/_3$ λόγος τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ καὶ σημειοῦται ὡς ἑξῆς $\frac{AB}{ΓΔ} = 4\frac{2}{3}$, ἤτοι :

Μέτρησις καλεῖται ἡ σύγκρισις συνεχοῦς ποσοῦ πρὸς ἕτερον ὁμοειδὲς καὶ ὡρισμένον, ὅπερ καλεῖται μονάς, καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δηλοῦντος ἐκ πόσων μονάδων καὶ πόσων καὶ ποίων μερῶν αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ ποσόν.

157. Λόγος ποσοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς (οἷον γραμμῆς πρὸς γραμμήν, ἐπιφανείας πρὸς ἐπιφάνειαν κλπ). καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὁ παριστῶν τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου, λαμβανομένου ὡς μονάδος.

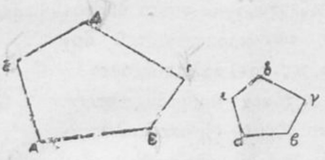


158. Ἔστω, ὅτι ὁ λόγος ἑκάστης τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ πρὸς ἑκάστην ἀντιστοίχως τῶν εὐθειῶν αβ, γδ, εζ εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς 3, ἤτοι $\frac{AB}{\alpha\beta}=\frac{\Gamma\Delta}{\gamma\delta}=\frac{EZ}{\varepsilon\zeta}=3$· ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει λέγομεν τὰ πρῶτα ποσὰ ἀ ν ά λ ο γ α πρὸς τὰ δεύτερα· ἤτοι:

Δύο ἢ πλείονα ποσὰ καλοῦνται ἀνάλογα πρὸς ἄλλα ἰσάριθμα καὶ ἀντιστοίχως ὁμοειδῆ, ἂν ὁ λόγος ἑκάστου ποσοῦ ἐκ τῶν πρώτων πρὸς ἕκαστον ἀντιστοίχως ἐκ τῶν δευτέρων εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Περὶ ὁμοίων εὐθυγράμμων σχημάτων.

159. Ἔστωσαν τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβδγε, ἐν οἷς $A=\alpha$, $B=\beta$, $\Gamma=\gamma$, $\Delta=\delta$, $E=\varepsilon$ καὶ $\frac{AB}{\alpha\beta}=\frac{B\Gamma}{\beta\gamma}=\frac{\Gamma\Delta}{\gamma\delta}=\frac{\Delta E}{\delta\varepsilon}=\frac{EA}{\varepsilon\alpha}$



Σχ. 164.

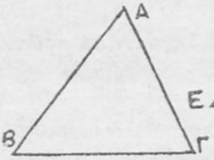
τότε τὰ δύο ταῦτα πολύγωνα καλοῦνται ὅμοια ἤτοι:

Δύο εὐθύγραμμα σχήματα ἢ πολύγωνα καλοῦνται ὅμοια ἐὰν ἔχωσι τὰς μὲν γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν, τὰς δὲ ἀντιστοίχους πλευρὰς αὐτῶν (ἤτοι τὰς ἑνούσας τὰς κορυφὰς τῶν ἴσων γωνιῶν) ἀναλόγους.

Αἱ ἀντιστοιχοῦσαι δὲ πλευραὶ τῶν ὁμοίων σχημάτων καλοῦνται ὁμόλογοι.

160. Προκειμένου ὅμως περὶ τριγώνων (σχ. 165 σχ. 166), ἵνα ὦσιν ὅμοια ἀρκεῖ :

1ον) Νὰ ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας (ἢ τὰς 2 τοὐλάχιστον). Διότι τότε, ἐὰν μετρήσωμεν τὰς πλευρὰς καὶ σχηματίσωμεν τοὺς λόγους τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, παρατηροῦμεν ὅτι ὅλοι εἶναι ἴσοι· συνεπῶς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι.



Σχ. 165.

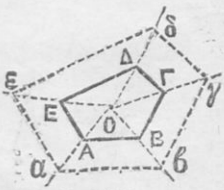
Σχ. 166.

2ον) Νὰ ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους. Διότι τότε καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι, ὡς βεβαιούμεθα, ἐὰν συγκρίνωμεν ταύτας πρὸς ἀλλήλας.

3ον) Νὰ ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην (οἷον $Α=Δ$) καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους (ἤτοι $\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΑΓ}{ΔΖ}$). Διότι τότε αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι μία πρὸς μίαν κλπ., ὡς βεβαιούμεθα διὰ τῆς συγκρίσεως.

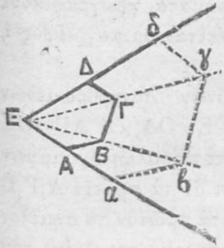
161. Π ρ ό β λ η μ α. Δοθέντος πολυγώνου π.χ. τοῦ ΑΒΓΔΕ, νὰ κατασκευασθῇ ἕτερον ὅμοιον αὐτῷ.

Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ο ἐντὸς τοῦ δοθέντος πολυγώνου καὶ ἐπιζευγνύομεν τοῦτο δι' εὐθειῶν μεθ' ὅλων τῶν κορυφῶν τοῦ δοθέντος πολυγώνου, ἂς πολλαπλασιάζομεν (ἢ διαιροῦμεν) ἐπὶ τυχόντα ἀριθμόν, π. χ. τὸν 2, ἤτοι διπλασιάζομεν (ἢ ὑποδιπλασιάζομεν) καὶ συνδέοντες τὰ ἄκρα των διὰ τῶν εὐθειῶν αβ, βγ, γδ, δε, αε λαμβάνομεν τὸ πολύγωνον αβγδε, ὅπερ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν, διότι μετροῦντες εὑρίσκομεν ὅτι αἱ μὲν γωνίαι τούτου α, β, γ, δ, ε εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς Α, Β, Γ, Δ, Ε, αἱ δὲ πλευραὶ



Σχ. 167.

αβ,βγ,γδ,δε,εα διπλάσιαι ἀντιστοίχως τῶν ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΕ,ΕΑ.



Σχ. 168.

Σημ. Τὸ σημεῖον Ο δύναται νὰ ληφθῇ καὶ ἐπὶ μιᾶς τῶν κορυφῶν, π.χ. ἐπὶ τῆς Ε, ἢ καὶ ἐκτὸς τοῦ πολυγώνου.

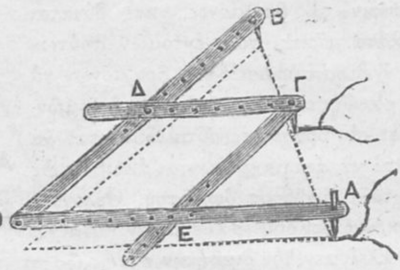
***162. Διαβήτης ἀναγωγῆς.** Τὸ ὄργανον τοῦτο ἀποτελεῖται ἐκ δύο βραχιόνων ἀποληγόντων ἑκατέρωθεν εἰς αἰχμὰς καὶ διασταυρουμένων μεταξὺ δύο κομβίων Ο συνδεδεμένων δι' ἄξονος, ὅστις εἰσάγεται εἰς δύο ἐπιμήκεις ἐντομάς, ἃς φέρουσιν οἱ βραχίονες, καὶ δύναται νὰ ὀλισθήσῃ κατὰ μῆκος τῶν ἐντομῶν τούτων οὕτως, ὥστε ἡ διασταύρωσις τῶν βραχιόνων νὰ γίγνηται εἰς οἱονδήποτε σημεῖον τῶν ἐντομῶν. Ἐπὶ πλέον δὲ οἱ βραχίονες οὗτοι δύνανται νὰ πλησιάζωσι καὶ νὰ ἀπομακρύνωνται ἀκριβῶς ὡς οἱ βραχίονες τοῦ συνήθους διαβήτου. Θέλοντες λοιπὸν νὰ σμικρύνωμεν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ΕΖ π.χ., εἰς τὸ ἥμισυ, κλείομεν τὸν διαβήτην οὕτως, ὥστε ἡ πλὰξ Δ νὰ εἰσέλθῃ εἰς τὴν ἐντομὴν Γ, καὶ εἶτα ὠθοῦμεν τὸν κινητὸν ἄξονα, ἕως ὅτου τὸ μῆκος ΟΑ ἀποβῇ τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους ΟΒ′, ὅπερ ἐπιτυγχάνομεν εὐκόλως τῇ βοηθείᾳ βαθμολογίας κεχαραγμένης ἐπὶ τοῦ βραχίονος. Ἐὰν ἤδη ἀνοίξωμεν τὸν διαβήτην οὕτως, ὥστε αἱ αἰχμαὶ Α′ καὶ Β′ νὰ πέσωσιν εἰς τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας ΕΖ, ἡ ἀπόστασις τῶν ἑτέρων δύο αἰχμῶν Α καὶ Β παριστᾷ τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως ταύτης. Καὶ ἀντιστρόφως· λαμβάνοντες τὴν δοθεῖσαν ἀπόστασιν διὰ τῶν αἰχμῶν τῶν μικρῶν σκελῶν ἔχομεν διὰ τῆς ἀποστάσεως τῶν αἰχμῶν τῶν μεγάλων σκελῶν τὸ διπλάσιον τῆς ἀποστάσεως ταύτης.

Σχ. 169.

Τὸ ὄργανον τοῦτο παρέχει μεγίστην εὐκολίαν, ὅταν πρόκειται νὰ σμικρύνωμεν ἢ νὰ μεγεθύνωμεν μέγαν ἀριθμὸν γραμμῶν κατὰ δοθέντα λόγον, ὡς π.χ. ἐν § 161.

***163. Ὁμοιογράφος ἢ παντόγραφον.** Ἁπλούστερον ὅμως κατασκευάζομεν πολύγωνον ὅμοιον πρὸς δοθὲν εἴτε ὑπὸ μεγέθυνσιν εἴτε ὑπὸ σμίκρυνσιν (καὶ οὐ μόνον πολύγωνα, ἀλλὰ καὶ οἱαδήποτε σχήματα, π.χ. κύκλους, ἰχνογραφήματα, γεωγραφικοὺς χάρτας κλπ.) δι' εἰδικοῦ ὀργάνου, ὅπερ καλεῖται ὁμοιογράφος ἢ παντόγραφον.

Ὁ ὁμοιογράφος συνίσταται ἐκ 4 κανόνων συνηρθρωμένων κατὰ τὰ σημεῖα Ο, Ε, Γ, Δ οὕτως, ὥστε ΓΕ=ΟΔ καὶ ΔΓ=ΟΕ (ὅτε τὸ σχῆμα ΟΕΓΔ θὰ παραμένῃ πάντοτε παραλληλόγραμμον εἰς οἱανδήποτε κίνησιν τοῦ ὀργάνου), προσέτι δὲ τὰ σημεῖα Α,Γ,Β νὰ εὑρίσκωνται ἐπ' εὐθείας. Στερεοῦμεν δὲ κατὰ πρῶτον τὸ σημεῖον Β (ὅπερ εἶναι ἐφωδιασμένον διά τινος ὑποστηρίγματος) ἐπὶ τοῦ χάρτου καὶ εἶτα περιάγομεν ἐλαφρῶς τὸ σημεῖον Γ (ὅπερ φέρει



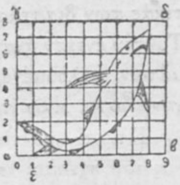
Σχ. 170.

κάτωθεν χάρακτρον) ἐπὶ τοῦ ὑπὸ μεγέθυνσιν σχεδίου. Μολυβδοκόνδυλον δὲ τοποθετημένον εἰς τὸ σημεῖον Α γράφει ταυτοχρόνως σχῆμα μεμεγεθυσμένον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν. Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ λάβωμεν σχέδιον ὑπὸ σμίκρυνσιν, τοποθετοῦμεν ἀντιστρόφως τὸ μολυβδοκόνδυλον εἰς τὸ Γ καὶ τὸ χάρακτρον καὶ τὸ σχέδιον εἰς τὸ Α.

Δυνάμεθα δὲ νὰ ἀλλάξωμεν καὶ τὸν λόγον ὁμοιότητος. Πρὸς τοῦτο οἱ κανόνες φέρουσιν ὀπάς, εἰς οἱασδήποτε τῶν ὁποίων εἶναι δυνατὸν νὰ εἰσαχθῶσιν οἱ ἄξονες, ὥστε νὰ μεταβληθῶσι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ΟΔ καὶ ΔΓ.

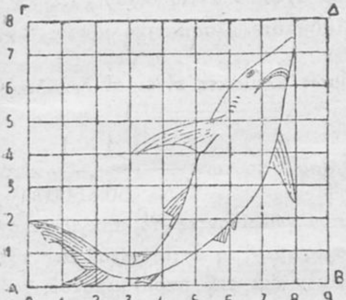
***164. Μέθοδος τῶν τετραγώνων.** Ὅταν πρόκειται νὰ σμικρύνωμεν ἢ νὰ μεγεθύνωμεν σχέδια, παρουσιάζοντα καμπύλας γραμμὰς ἀνωμάλους, οἷον σχέδια γεωγραφικῶν χαρτῶν, τοπείων κλπ., καὶ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ χρῆσις τοῦ ὁμοιογράφου, καταφεύγομεν εἰς τὴν μέθοδον τῶν τετραγώνων, ἧς χρῆσιν ποιοῦνται ἰδίως οἱ ζωγράφοι.

Ἔστω, ὅτι πρόκειται νὰ μεγεθύνωμεν εἰς τὸ διπλάσιον τὸ παρατιθέμενον σχῆμα. Πρὸς τοῦτο σχηματίζομεν πέριξ τοῦ σχήματος ὀρθογώνιον (ἢ ὡς τοιοῦτο δύναται νὰ χρησιμεύσῃ τὸ περιθώριον τοῦ σχήματος) καὶ εἶτα διαιροῦμεν δύο τούτου διαστάσεις εἰς ἴσα κατὰ τὸ μῆκος μέρη, οἷον τὴν αβ εἰς 9 καὶ τὴν αγ εἰς 8, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων διαιρέσεως ἑκατέρας σύρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ἄλλην. Ἄλλοτε δὲ καλύπτομεν τὸ δοθὲν σχέδιον διὰ διαφανοῦς χάρτου διῃρημένου εἰς ἴσα τετράγωνα.



Σχ. 171.

Τούτου γενομένου, σύρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ καθέτους ἐπ' ἀλλήλας καὶ διπλασίας ἀντιστοίχως τῶν εὐθειῶν αβ καὶ αγ, ἂς διαιροῦμεν ὁμοίως εἰς 9 τὴν ΑΒ καὶ εἰς 8 τὴν ΑΓ ἴσα μέρη λαμβάνοντες πρὸς τοῦτο ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου ΑΕ διπλάσιον τοῦ αε. Ἄγοντες δὲ ἀπὸ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας παραλλήλους πρὸς τὴν ἄλλην λαμβάνομεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΔΓ διῃρημένον εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τετραγωνιδίων, εἰς ὃν καὶ τὸ αβδγ.



Σχ. 172.

Τούτων γενομένων, δὲν μένει πλέον ἢ νὰ σχεδιάσωμεν ἐντὸς ἑκάστου τῶν τετραγωνιδίων τοῦ μεγάλου ὀρθογωνίου ΑΒΔΓ τὰς γραμμάς, αἵτινες διέρχονται διὰ τῶν ἀντιστοίχων τετραγώνων τοῦ μικροῦ ὀρθογωνίου αβδγ.

'Απεικόνισις ἐπιπέδου σχήματος ὑπὸ κλίμακα.

165. Ὅταν πρόκειται νὰ παραστήσωμεν ἐπὶ χάρτου σχῆμά τι σχετικῶς μέγα, π.χ. οἰκόπεδόν τι ἢ μίαν πόλιν ἢ κράτος τι κλπ., εἶναι φυσικῶς ἀδύνατον νὰ παραστήσωμεν ταῦτα ὑπὸ τὰς πραγματικάς των διαστάσεις, διότι θὰ ἀπητοῦντο φύλλα χάρτου τεράστια. Τούτου ἕνεκεν ἀναγκαζόμεθα νὰ παριστῶμεν ταῦτα δι' ὁμοίων σχημάτων, καλουμένων σχεδίων, ὑπὸ σμίκρυνσιν καθ' ὡρισμένον λόγον, ὅστις καλεῖται κλῖμαξ ἤτοι :

Κλῖμαξ καλεῖται ὁ σταθερὸς λόγος τοῦ μήκους γραμμῆς τινος τοῦ σχεδίου πρὸς τὸ μῆκος τῆς ἀντιστοίχου γραμμῆς τοῦ πραγματικοῦ σχήματος.

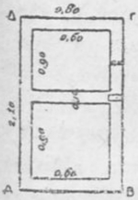
Ὁ λόγος οὗτος παρίσταται ὑπὸ κλασματικῆς μονάδος, ἐχούσης παρονομαστὴν τὸν ἀριθμόν, ὅστις δηλοῖ ποσάκις ἡ πραγματικὴ γραμμὴ εἶναι μείζων τῆς ἐπὶ τοῦ σχεδίου ἀντιστοίχου. Ὡς κλῖμαξ δὲ δύναται νὰ ληφθῇ οἱαδήποτε κλασματικὴ μονάς, π.χ. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.... Αἱ συνήθεις ὅμως κλίμακες εἶναι αἱ δεκαδικαὶ $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$.... καὶ αἱ διπλάσιαι τούτων $\frac{1}{5}, \frac{1}{50}, \frac{1}{500}$ κλπ.

166. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν γνωρίζοντες τὸ πραγματικὸν μῆκος γραμμῆς τινος, ἵνα ὑπολογίσωμεν τὸ ἀντίστοιχον ἐπὶ τῆς σχεδίου, διαιροῦμεν τὸ πραγματικὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλίμακος. Καὶ ἀντιστρόφως· γνωρίζοντες τὸ ἐπὶ τοῦ σχεδίου, ἵνα εὕρωμεν τὸ πραγματικόν, πολλαπλασιάζομεν τὸ πρῶτον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τῆς κλίμακος.

167. Πρὸς κατασκευὴν σχεδίου δύναται εἰς τινας περιστάσεις νὰ γίνῃ χρῆσις τῶν τρόπων τῶν § 161, 163 καὶ 164. Ἀλλ' ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον τὸ τοιοῦτον εἶναι ἀδύνατον καὶ ἡ κατασκευὴ γίνεται κατ' ἄλλους τρόπους· οἷον:

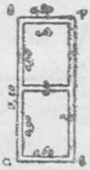
Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν τὸ σχέδιον θύρας τινὸς σχήματος ὀρθογωνίου ὑπὸ κλίμακα 1)100.

Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει κατασκευάζομεν κατὰ πρῶτον ἐκ τοῦ προχείρου σχῆμα ὅμοιον περίπου πρὸς τὸ πραγματικὸν τὸ ΑΒΓΔ, ἐφ' οὗ σημειοῦμεν τὰς διαστάσεις τοῦ πραγματικοῦ σχήματος, ὧν τὸ μῆκος εὑρίσκομεν διὰ τῆς μετρήσεως.



Σχ. 173.
Πρόχειρον σχέδ.

Εἶτα ἐπὶ ἄλλου χάρτου (καλουμένου χάρτου τῆς ἀντιγραφῆς) γράφομεν εὐθεῖαν, π.χ. τὴν αβ, ἀντιστοιχοῦσαν πρὸς τυχοῦσαν πλευράν, π.χ. τὴν ΑΒ, τοῦ προχείρου σχεδίου καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν μῆκος ἴσον πρὸς τὸ 1)100 τοῦ πραγματικοῦ μήκους τοῦ σεσημειωμένου ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ, ἤτοι ἴσον πρὸς 0,80 : 100 = 0,008μετρ. Εἰς τὰ ἄκρα δὲ τοῦ τμήματος αβ ὑψοῦμεν καθέτους, ἐφ' ὧν λαμβάνομεν μήκη ὑπὸ σμίκρυνσιν 1)100, καὶ προχωροῦντες οὕτω λαμβάνομεν τὸ σχέδιον αβγδ, ὅπερ εἶναι τελείως ὅμοιον πρὸς τὴν θύραν καὶ ὑπὸ κλίμακα 1)100. Ἐπὶ τοῦ σχεδίου δὲ τούτου σημειοῦμεν παραπλεύρως τῶν γραμμῶν αὐτοῦ τὰς ἀντιστοίχους αὐτῶν πραγματικὰς διαστάσεις.



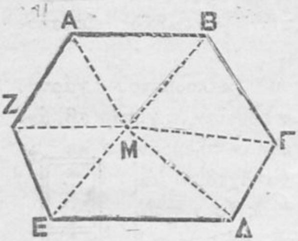
Σχ. 174.
σχέδιον ὑπὸ κλίμακ. $^1/_{100}$

Σχ. 175.

Ὁμοίως δὲ κατασκευάζομεν τὸ σχέδιον τῆς αἰθούσης τῆς διδασκαλίας σχήματος ὀρθογωνίου ὑπὸ κλίμακα $^1/_{200}$.

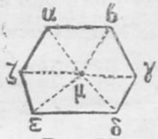
*168. Ἵνα κατασκευάσωμεν τὸ σχέδιον οἱουδήποτε πολυγώνου κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, ποιούμεθα συνήθως χρῆσιν τοῦ γραφομέτρου καὶ τοῦ μοιρογνωμονίου ὧν τὸ πρῶτον χρησιμεύει πρὸς μέτρησιν γωνιῶν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους (§ 179), τὸ δὲ δεύτερον πρὸς μέτρησιν καὶ κατασκευὴν γωνιῶν ἐπὶ τοῦ χάρτου (§ 177).

1ον) **Σχεδιαγράφησις δι' ἀκτινοβολίας.** Τοποθετοῦμεν τὸ γραφόμετρον εἴς τι σημεῖον Μ, ὅθεν εἶναι δυνατὸν νὰ ἴδωμεν ἁπάσας τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐδάφους, οἷον τοῦ ΑΒΓΔΕΖ, καὶ εἶτα μετροῦμεν ἁπάσας τὰς γωνίας ΑΜΒ, ΒΜΓ, καὶ ἁπάσας τὰς εὐθείας ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ,....., τὰ δὲ ἐξαγόμενα τῆς μετρήσεως σημειοῦμεν ἐπὶ προχείρου τινὸς σχεδίου. Ἑκάστου λοιπὸν τριγώνου ΜΑΒ, ΜΒΓ.... γνωρίζομεν δύο πλευρὰς καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν.



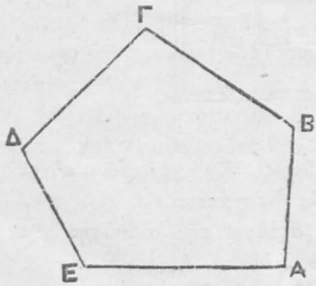
Σχ. 176.

Οὕτω δὲ εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου τὰ τρίγωνα μαβ, μβγ,.... λαμβάνοντες τὰς πλευρὰς μα, μβ,....ὑπὸ ὡρισμένην τινὰ κλίμακα (συνήθως δὲ 1:1000) πρὸς τὰς ΜΑ, ΜΒ,.... ὡς δὲ περιεχομένας γωνίας αμβ, βμγ... ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς ΑΜΒ,ΒΜΓ.... (προβλ. 12ον § 152), ὅτε τὰ τρίγωνα ταῦτα θὰ εἶναι ὅμοια πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐδάφους (§ 160), ὡς καὶ τὸ πολύγωνον αβγδεζ πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕΖ (παραβ. § 161).



Σχ. 177.

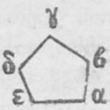
2ον) **Σχεδιαγράφησις δι' ὁδεύσεως.** Μετροῦμεν ἁπάσας τὰς πλευρὰς καὶ ἁπάσας τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐδάφους, οἷον τοῦ ΑΒΓΔΕ, τὰ δὲ ἐξαγόμενα σημειοῦμεν ἐπί τινος προχείρου σχεδίου.



Σχ. 178.

Εἶτα ἐπὶ τοῦ χάρτου τῆς ἀντιγραφῆς γράφομεν τὸ τμῆμα αβ, παριστῶν ὑπό τινα κλίμακα τὴν πλευρὰν ΑΒ, καὶ εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ κατασκευάζομεν τὰς γωνίας α καὶ β ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς Α καὶ Β. Προχωροῦντες δὲ οὕτω, ἤτοι κατασκευάζοντες τὰς μὲν πλευρὰς ὑπὸ τὴν αὐτὴν κλίμακα, τὰς δὲ γωνίας ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐδάφους, λαμβάνομεν τὸ πολύγωνον αβγδε, ὅπερ εἶναι τελείως ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ (§ 159).

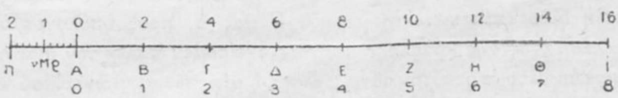
Σημ. Εἰς τὰς ἀνωτέρω ἐργασίας ὑποτίθεται τὸ ἔδαφος ὁριζόντιον.



Σχ. 179.

169. Γραφικὴ κλῖμαξ. Κατὰ τὴν ὡς ἀνωτέρω κατασκευὴν τῶν σχεδίων παρατηροῦμεν, ὅτι καθ' ἑκάστην μεταφορὰν πραγματικοῦ τινος μήκους ἐπὶ τοῦ σχεδίου εἴμεθα ἠναγκασμένοι νὰ διαιρῶμεν τοῦτο διὰ 10 ἢ 200 ἢ 1000 κλπ. Πρὸς ἀποφυγὴν δὲ τῶν συνεχῶν τούτων διαιρέσεων, αἵτινες καθίστανται ἐπίπονοι, ἰδίως ὅταν ἡ κλῖμαξ δὲν εἶναι δεκαδική, π.χ. $^1/_{245}$, ποιούμεθα χρῆσιν τῆς γραφικῆς κλίμακος ἥτις εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ παρέχουσα γραφικὴν παράστασιν τῆς κλίμακος (§ 165), ἣν πρὸς διάκρισιν καλοῦμεν ἀριθμητικήν.

Ἵνα δὲ κατασκευάσωμεν γενικῶς γραφικὴν κλίμακα ἀντιστοιχοῦσαν εἰς ἀριθμητικήν, σύρομεν εὐθεῖάν τινα ΑΙ καὶ ἐπ' αὐτῆς



Σχ. 180.

λαμβάνομεν τμῆμά τι ΑΒ, ὅπερ καλοῦμεν γραφικὴν μονάδα καὶ ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς μῆκός τι ἐπὶ τοῦ σχεδίου· ἄνωθεν δὲ σημειοῦμεν τὸ ἀντίστοιχον πραγματικὸν μῆκος, ὅπερ εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸ μῆκος ΑΒ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τῆς κλίμακος.

Τὸ μῆκος τοῦτο ΑΒ ἐπαναλαμβάνομεν πρὸς τὰ δεξιὰ φοράς τινας σημειοῦντες εἰς τὰ πρὸς τὰ δεξιὰ πέρατα τῶν τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ,.... κάτωθεν μὲν τοὺς ἀριθμοὺς 1,2,3.... τῶν γραφικῶν μονάδων, ἄνωθεν δὲ τὰ ἀντίστοιχα πραγματικὰ μήκη. Ἵνα δὲ παραστήσωμεν καὶ μήκη κλασμάτων τῆς γραφικῆς μονάδος, ἐπεκτείνομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΙ καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ κατὰ μῆκος ΑΠ, ἴσον πρὸς μίαν γραφικὴν μονάδα, καλουμένην πτέρναν, ὅπερ διαιροῦμεν εἰς 10 ἴσα μέρη καὶ ἄνωθεν τῶν διαιρέσεων τούτων γράφομεν τὰ ἀντίστοιχα πραγματικὰ μήκη.

170. Χρῆσις τῆς γραφικῆς κλίμακος. Κατασκευασθείσης τῆς γραφικῆς κλίμακος, δυνάμεθα δι' αὐτῆς, δοθέντος τοῦ πραγματικοῦ μήκους, νὰ εὑρίσκωμεν ἀμέσως τὸ ἀντίστοιχον ἐπὶ τοῦ σχεδίου καὶ ἀντιστρόφως ἄνευ διαιρέσεων καὶ πολλαπλασιασμῶν, ὡς ἐν § 166, ἀλλ' ὡς ἑξῆς :

1) Ἵνα εὕρωμεν εἰς πραγματικὸν μῆκος π.χ. 8 μετρ. ποῖον εἶναι τὸ ἀντίστοιχον μῆκος ἐπὶ τοῦ σχεδίου τῆς § 167 ὑπὸ κλίμακα 1)200, λαμβάνομεν διὰ τοῦ διαβήτου ἐπὶ τῆς γραφικῆς κλίμακος μῆκος ἀπὸ 0 μέχρι τῆς διαιρέσεως τῆς εὑρισκομένης κάτωθεν τοῦ 8, ἤτοι τὸ ΑΕ. Διὰ πραγματικὸν δὲ μῆκος 7,20 μ. λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς κλίμακος τὸ μῆκος νΔ.

2) Ἀντιστρόφως· ἵνα εὕρωμεν εἰς τὸ μῆκος π.χ. βγ τοῦ σχεδίου ποῖον εἶναι τὸ ἀντίστοιχον πραγματικὸν μῆκος, ἀνοίγομεν τὸν διαβήτην, ὥστε αἱ αἰχμαί του νὰ πέσωσιν εἰς τὰ σημεῖα β καὶ γ, καὶ εἶτα ἐπιθέτομεν τοῦτον ἐπὶ τῆς κλίμακος, ὥστε ἡ μία τῶν αἰχμῶν του νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ 0 καὶ ἡ ἑτέρα πρὸς τὰ δεξιά. Ἐὰν δὲ αὕτη ἔπιπτεν ἐπὶ τῆς διαιρέσεως Γ, τὸ πραγματικὸν μῆκος θὰ ἦτο 4 μέτρων. Ἐπειδὴ ὅμως πίπτει αὕτη μεταξὺ Γ καὶ Δ, πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ κλάσματος τῆς γραφικῆς μονάδος ἐγείρομεν πάλιν τὸν διαβήτην καὶ ἐπιθέτομεν τοῦτον οὕτως, ὥστε ἡ μία τῶν αἰχμῶν αὐτοῦ νὰ πέσῃ εἰς τὸ Γ, ἡ δὲ ἑτέρα ἐντὸς τῆς πτέρνης, ὅτε οἱ ὑπὸ τῶν αἰχμῶν τοῦ διαβήτου δεικνυόμενοι ἀριθμοὶ θὰ παριστῶσι τὸ ζητούμενον πραγματικὸν μῆκος, ὅπερ ἐνταῦθα εἶναι ΓΑ+Αρ=4+0,80=4,80 μέτρα.

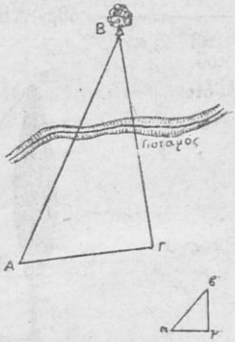
Ὁμοίως θέλοντες νὰ εὕρωμεν τὴν πραγματικὴν ἀπόστασιν μεταξὺ π.χ. Ἀθηνῶν καὶ Θηβῶν λαμβάνομεν διὰ τοῦ διαβήτου τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο τούτων πόλεων ἐπὶ γεωγραφικοῦ τινος χάρτου καὶ ἐπιθέτοντες εἶτα τὰς αἰχμὰς τοῦ διαβήτου ἐπὶ τῶν διαιρέσεων τῆς γραφικῆς κλίμακος τοῦ χάρτου παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πραγματικὴ ἀπόστασις εἶναι περίπου 57 χιλ.

Ἐφαρμογαί.

171. Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν ἀπροσίτου τινὸς σημείου Β ἀπὸ τοῦ σημείου Α, εἰς ὃ εὑρισκόμεθα.

Πρὸς τοῦτο ἀπὸ τοῦ σημείου Α μετροῦμεν ἐπὶ τοῦ προσιτοῦ ἐδάφους εὐθεῖάν τινα ΑΓ, βάσιν καλουμένην, καὶ εἶτα διὰ τοῦ γραφομέτρου (§ 168, 179) μετροῦμεν τὰς γωνίας Α καὶ Γ.

Εἶτα γράφομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου τὸ τμῆμα αγ, ὅπερ παριστᾷ ὑπό τινα κλίμακα (π. χ. 1 : 1000) τὸ τμῆμα ΑΓ, καὶ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ αγ κατασκευάζομεν διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου (§ 168, 177) τὰς γωνίας α καὶ γ ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς Α καὶ Γ καὶ οὕτω σχηματίζεται τὸ τρίγωνον αβγ, ὅπερ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ (§ 160). Ἐὰν ἤδη μετρήσαντες τὴν αβ εὕρωμεν αὐτὴν 0,24 μετρ. ἡ ἀπόστασις ΑΒ θὰ εἶναι 0,24×1000=240 μετρ.

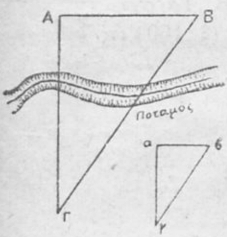


Σ.χ 181.

*172. Εὑρεῖν τὴν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν δύο ἀπροσίτων σημείων Α καὶ Β.

Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Γ τοῦ ἐδάφους καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὑπολογίζομεν τὰς ἀποστάσεις ΓΑ καὶ ΓΒ. Εἶτα δὲ μετροῦμεν διὰ τοῦ γραφομέτρου καὶ τὴν γωνίαν Γ.

Τούτων γενομένων, κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον αβγ, ὥστε ἡ μὲν γωνία αὐτοῦ γ νὰ εἶναι ἴση τῇ Γ, αἱ δὲ πλευραί του γα και γβ νὰ παριστῶσιν ὑπὸ κλίμακα π. χ. 1 : 1000 τὰς πλευρὰς ΓΑ καὶ ΓΒ (προβλ. 12ον), ὅτε τὸ οὕτω σχηματισθὲν τρίγωνον αβγ θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ (§ 160). Ἐὰν δὲ μετρήσαντες τὴν αβ εὕρωμεν αὐτὴν 0,45 μετρ., ἡ ζητουμένη ἀπόστασις ΑΒ θὰ εἶναι 0,45×1000=450 μετρ.



Σχ. 182.

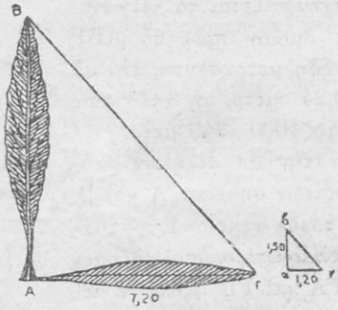
173. Εὑρεῖν **τὸ** ὕψος ὑψηλοῦ τινος ἀντικειμένου, οἷον δένδρου, πύργου, κωδωνοστασίου κλπ.

Ἔστω ΑΒ τὸ δένδρον, οὗ ζητοῦμεν τὸ ὕψος.

1) **Διὰ τῆς σκιᾶς.** Ἐμπήγομεν κατακορύφως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους (ὑποτιθεμένου ὁριζοντίου) ράβδον τινὰ αβ, καὶ ἔστω, ὅτι κατὰ τὴν αὐτὴν χρονικὴν στιγμὴν ἡ μὲν σκιὰ τοῦ δένδρου εἶναι ΑΓ ἴση πρὸς 7,20 μ., ἡ δὲ τῆς ράβδου ἡ αγ ἴση πρὸς 1,20 μετρ.

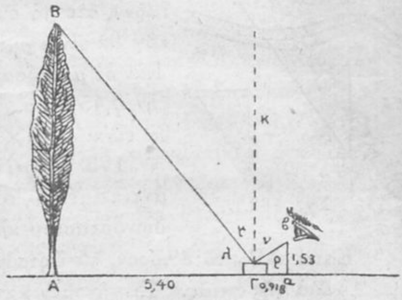
Τὰ δύο νοητὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ εἶναι ὅμοια ὡς ὀρθογώνια κατὰ τὸ Α καὶ α καὶ ἔχοντα τὰς γωνίας Γ καὶ γ ἴσας, ἐπειδὴ αἱ ἡλιακαὶ ἀκτῖνες πίπτουσιν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν. Ἐκ τῶν ὁμοίων δὲ τούτων τριγώνων ἔχομεν :

$$\frac{AB}{\alpha\beta}=\frac{A\Gamma}{\alpha\gamma}\cdot \text{ὅθεν } AB=\frac{A\Gamma\times\alpha\beta}{\alpha\gamma}=\frac{7{,}20\times1{,}50}{1{,}20}=9 \text{ μέτρα.}$$



Σχ. 183.

*2) **Διὰ τοῦ κατόπτρου.** Πρὸς τοῦτο τοποθετοῦμεν ὁριζοντίως κατὰ τὸ Γ κάτοπτρόν τι καὶ μετακινούμεθα, ἕως ὅτου ἴδωμεν ἐν τῷ κατόπτρῳ τὸ εἴδωλον τοῦ σημείου Β. Τὰ σχηματιζόμενα νοητὰ τρίγωνα ΑΓΒ καὶ αΓβ εἶναι ὅμοια (§ 160) ὡς ὀρθογώνια κατὰ τὸ Α καὶ α καὶ ἔχοντα προσέτι καὶ τὰς γωνίας λ καὶ ρ ἴσας ὡς ὑπόλοιπα τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΚΓΑ καὶ ΚΓα, ἀφ' ὧν ἀφῃρέθησαν αἱ γωνίαι μ καὶ ν, αἵτινες εἶναι ἴσαι, καθότι εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς φυσικῆς, ὅτι ἡ γωνία τῆς προσπτώσεως μ ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ τῆς ἀνακλάσεως ν· συνεπῶς θὰ ἔχωμεν (§ 159) :



Σχ. 184.

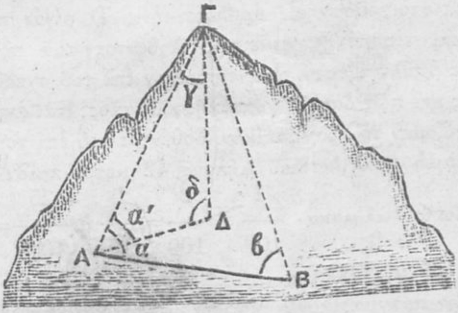
$$\frac{AB}{\alpha\beta}=\frac{A\Gamma}{\alpha\Gamma}\cdot \text{ὅθεν } AB=\frac{A\Gamma\times\alpha\beta}{\alpha\Gamma}.$$

'Εὰν δὲ μετρήσαντες εὕρωμεν ΑΓ'=5,40 μ. αβ=1,53 μ. καὶ αΓ'=0,918 μ., θὰ ἔχωμεν

$$AB=\frac{5{,}40\times 1{,}53}{0{,}918}=9 \text{ μετρ.}$$

174. Εὑρεῖν τὸ ὕψος ὄρους.

Σύρομεν παρὰ τοὺς πρόποδας τοῦ ὄρους τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἣν καὶ μετροῦμεν, καὶ εἶτα διὰ τοῦ γραφομέτρου μετροῦμεν τὰς



Σχ. 185.

γωνίας α καὶ β, ὡς καὶ τὴν α' τοῦ τριγώνου ΑΔΓ, ἐν ᾧ ἡ ΓΔ ὑποτίθεται κατακόρυφος καὶ ἡ ΑΔ ὁριζόντιος. Κατασκευάζοντες δὲ ὑπό τινα κλίμακα τρίγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ πoριζόμεθα τὸ μῆκος τῆς ΑΓ· εἶτα κατασκευάζοντες δεύτερον τρίγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ ΓΑΔ, οὗτινος γνωρίζομεν τὴν ΓΑ, τὴν α' καὶ τὴν γ (διότι α'+γ=1 ὀρθ., ἐπειδὴ δ=1 ὀρθ.), πoριζόμεθα τὸ μῆκος τῆς καθέτου ΓΔ, ἤτοι τὸ ὕψος τοῦ ὄρους ὑπεράνω τοῦ σημείου Α.

'Ερωτήσεις καὶ ἀσκήσεις.

Τί καλεῖται μέτρησις ; Τί καλεῖται λόγος δύο ποσῶν ὁμοειδῶν; Πότε δύο ἢ πλείονα ποσὰ καλοῦνται ἀνάλογα πρὸς ἄλλα ἰσάριθμα καὶ ἀντιστοίχως ὁμοειδῆ; Πότε δύο πολύγωνα καλοῦνται ὅμοια ; Τί εἶναι ἀρκετὸν διὰ τὴν ὁμοιότητα δύο τριγώνων; Εἶναι δυνατὸν τὰ ἑπόμενα σχήματα συγκρινόμενα ἀνὰ δύο νὰ εἶναι ὅμοια ἢ ἴσα ἢ ἰσοδύναμα ; 1) Ἓν ἰσόπλευρον καὶ ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον· 2) ἓν ὀρθογώνιον καὶ ἓν ἀμβλυγώνιον τρίγωνον· 3) ἓν τρίγωνον καὶ ἓν τετράπλευρον· 4) ἓν τετράγωνον καὶ ἓν ὀρθογώνιον· 5) ἓν ὀρθογώνιον καὶ εἷς ρόμβος· 6) ἓν τραπέζιον καὶ ἓν παραλληλόγραμμον· 7) δύο ρόμβοι· 8) δύο τετράγωνα· 9) κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ κανονικὸν πεντάγωνον. Πῶς κατασκευάζεται πολύγωνον ὅμοιον δοθέντι ; Τί καλεῖται σχέδιον ; Τί καλεῖται κλῖμαξ ; Πῶς παρίσταται ἡ κλῖμαξ ; Διὰ ποίων κατὰ σειρὰν ἐργασιῶν κατασκευάζομεν τὸ σχέδιον θύρας, δωματίου κλπ ; Τί εἶναι γραφικὴ κλῖμαξ καὶ διατί ποιούμεθα χρῆσιν ταύτης ; Πῶς καλοῦμεν τὴν ἑτέραν κλίμακα πρὸς διάκρισιν ; Πῶς κατασκευάζομεν ἐν γένει γραφικὴν κλίμακα ἀντιστοιχοῦσαν εἰς ἀριθμητικήν ; Τί εἶναι πτέρνα τῆς κλίμακος καὶ εἰς τί χρησιμεύει ; Δοθέντος τοῦ πραγματικοῦ μήκους, πῶς ὑπολογίζομεν τὸ ἀντίστοιχον ἐπὶ τοῦ σχεδίου διὰ τῆς ἀριθμητικῆς καὶ πῶς διὰ τῆς γραφικῆς κλίμακος; Καὶ ἀντιστρόφως· πῶς ὑπολογίζομεν τὸ πραγματικόν, δοθέντος τοῦ ἐπὶ τοῦ σχεδίου ;

1) Γραμμὴ πραγματικοῦ μήκους 42 μετρ. ποῖον μῆκος θὰ ἔχῃ ἐν σχεδίῳ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{100}$ ἢ $\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$ ἢ $\frac{25}{1000}=\frac{1}{40}$; (0,42 μ. 0, 84 μ. 1,05 μ.).

2) Ποῖον πραγματικὸν μῆκος παριστᾷ γραμμὴ μήκους 0,094 μ. ἐν σχεδίῳ ὑπὸ τὰς ἄνω κλίμακας ; (9,40 μ. 4,70 μ. 3,76 μ.)

3) Μῆκος 35,600 σταδ. μεταφέρεται ἐπὶ τοῦ χάρτου ὑπὸ κλίμακα 0,00003 κατὰ μέτρον. Πόσον θὰ εἶναι τὸ ἐπὶ τοῦ χάρτου μῆκος ; (1,068 μ.)

4) Τὸ κτηματολογικὸν σχέδιον κοινότητός τινος ἔχει κατασκευασθῆ ὑπὸ κλίμακα 1)2500. Ποῖαι εἶναι αἱ πραγματικαὶ διαστάσεις ὀρθογωνίου οἰκοπέδου, οὗ αἱ ἐν σχεδίῳ διαστάσεις εἶναι 12 καὶ 18 δακ ; (300 μ. 450 μ.)

5) Ἡ πλευρὰ τετραγώνου κήπου εἶναι 150 μ. Ὑπὸ ποῖον μῆκος παρίσταται ἡ πλευρὰ αὕτη ἐπὶ τοῦ κτηματολογικοῦ σχεδίου ὑπὸ κλίμακα 1)2500 ; (0,06 μ.)

6) Σχεδίασον ὑπὸ κλίμακα 0,001 τριγωνικὸν γήπεδον ἔχον πλευρὰς 46 μ. 78 μ. καὶ 57 μ.

7) Νὰ ὑπολογισθῇ διὰ γεωγραφικοῦ χάρτου ἡ ἀπόστασις Ἀθηνῶν—Λαυρείου, Ἀθηνῶν—Πατρῶν, Ἀθηνῶν—Λαρίσης, Λαρίσης—Θεσσαλονίκης, Λαρίσσης—Βόλου, Σπάρτης—Γυθείου διὰ τῆς ἀριθμητικῆς καὶ γραφικῆς κλίμακος.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ

175. Εἴπομεν ἐν § 156 τί καλεῖται μέτρησις.

Ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ συνεχῆ ποσὰ πρὸς μέτρησιν παρουσιάζονται γωνίαι, γραμμαί, ἐπιφάνειαι καὶ ὁ χῶρος τῶν στερεῶν.

Ὡς μονάδες δὲ πρὸς μέτρησιν αὐτῶν λαμβάνονται παρὰ τοῖς διαφόροις ἔθνεσι ποικίλαι. Αἱ συνηθέστεραι δὲ εἶναι διὰ μὲν τὰς γωνίας ἡ ὀρθὴ γωνία (§ 29), διὰ τὰς γραμμὰς τὸ μέτρον, διὰ τὰς ἐπιφανείας τὸ τετραγωνικὸν μέτρον καὶ διὰ τὰ στερεὰ τὸ κυβικὸν μέτρον.

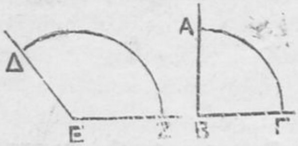
Ὁ ἀριθμός, ὁ προκύπτων ἐκ τῆς μετρήσεως γραμμῆς, καλεῖται μῆκος αὐτῆς, ὁ δὲ ἐκ τῆς καταμετρήσεως ἐπιφανείας καλεῖται ἐμβαδόν, καὶ ὁ ἐκ τῆς καταμετρήσεως τοῦ χώρου τῶν στερεῶν καλεῖται ὄγκος· ἐὰν δὲ πρόκειται περὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ χώρου δοχείου τινός, τὸ ἐξαγόμενον καλεῖται χωρητικότης.

1). *Μέτρησις τῶν γωνιῶν.*

176. Ὡς μονὰς μετρήσεως τῶν γωνιῶν λαμβάνεται ἡ ὀρθὴ γωνία (§ 29).

Ἀλλ' ἡ σύγκρισις γωνιῶν πρὸς ἀλλήλας πρακτικῶς δὲν εἶναι εὔκολος. Ἀνάγεται ὅμως ἡ σύγκρισις αὕτη εἰς τὴν σύγκρισιν τόξων τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἥτις εἶναι εὐκολωτέρα.

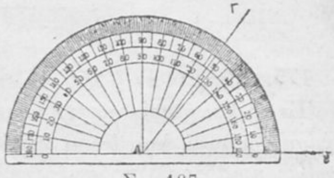
Τῷ ὄντι ἀποδεικνύεται θεωρητικῶς ὅτι, ἵνα μετρήσωμεν γωνίαν τινὰ Ε δι' ἄλλης Β, ληφθείσης ὡς μονάδος, ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν τὸ ἀντίστοιχον τόξον (§ 117) ΔΖ αὐτῆς διὰ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου ΑΓ (λαμβανομένου ὡς μονάδος) τῆς δευτέρας, ὅταν ἀμφότεραι αὗται αἱ γωνίαι εἶναι ἐπίκεντροι ἐν τῷ αὐτῷ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις.



Σχ. 186.

Πρὸς μέτρησιν δὲ τῶν τόξων λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ 1)360 τῆς περιφερείας, ὅπερ καλεῖται μοῖρα. Ἑπομένως ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν θὰ θεωρῆται ἤδη ἡ βαίνουσα ἐπὶ τόξου μιᾶς μοίρας καὶ ἥτις θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ 1)90 τῆς ὀρθῆς.

177. Μοιρογνωμόνιον. Τὸ ὄργανον τοῦτο εἶναι ἡμικύκλιον συνήθως ἐκ μετάλλου, οὗτινος ἡ περιφέρεια εἶναι διῃρημένη δι' εὐθειῶν γραμμῶν εἰς 180 ἴσα μέρη καὶ συνεπῶς ἕκαστον τούτων ἰσοῦται πρὸς 1 μοῖραν. Ἐπὶ τῶν διαιρέσεων δὲ αὐτοῦ ἀνὰ 10 εἶναι ἀναγεγραμμένοι ἀριθμοὶ ἀπὸ 0—180 συνήθως κατὰ δύο ἀντιθέτους διευθύνσεις. Τὸ κέντρον δὲ τοῦ μοιρογνωμονίου σημειοῦται διὰ μικρᾶς ἐντομῆς.



Σχ. 187.

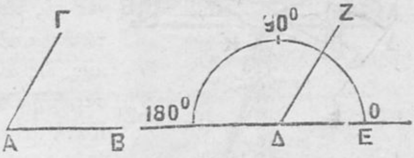
Τὸ ὄργανον τοῦτο καλεῖται καὶ γωνιόμετρον ἢ ἀναγωγεύς· χρησιμεύει δὲ κυρίως πρὸς μέτρησιν τῶν γωνιῶν.

Ἵνα δὲ μετρήσωμεν δι' αὐτοῦ γωνίαν τινὰ ΒΑΓ, θέτομεν τὸ μοιρογνωμόνιον ἐπὶ τῆς γωνίας, ὥστε τὸ μὲν κέντρον αὐτοῦ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Α τῆς γωνίας, ἡ δὲ διάμετρος 0—180 νὰ πέσῃ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας, π.χ. ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἡ δὲ ἄλλη πλευρά, ἤτοι ἡ ΑΓ, φροντίζομεν νὰ πέσῃ ὑπὸ τὸ μοιρογνωμόνιον· τότε δὲ ἀρκεῖ νὰ ἀναγνώσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν τῶν περιεχομένων ἐν τῷ τόξῳ ΒΓ. Οὕτως ἐνταῦθα ἡ γωνία ΓΑΒ εἶναι 53^0.

178. Διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου (ἐκτὸς τῆς μετρήσεως τῶν γωνιῶν) λύονται καὶ γεωμετρικά τινα προβλήματα εὐκολώτερον ἢ διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου (παραβ. § 152). Οὕτω :

1ον) Ἵνα λύσωμεν τὸ 7ον πρόβλημα τῆς § 152, ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν τὴν γωνίαν διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου· ἔστω δὲ ὅτι εὑρέθη 50^0. Εἶτα κατὰ τὴν προέκτασιν τῆς διαιρέσεως 25^0 (ἤτοι τοῦ ἡμίσεος τῶν 50°) σημειοῦμεν σημεῖόν τι καὶ ἑνοῦμεν τοῦτο δι' εὐθείας μετὰ τῆς κορυφῆς.

2ον) Ἵνα λύσωμεν τὸ 8ον πρόβλημα, μετροῦμεν κατὰ πρῶτον τὴν Α. Ἔστω δὲ ὅτι εἶναι 47°. Εἶτα ἐπιθέτομεν τὸ μοιρογνωμόνιον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΕ οὕτως, ὥστε τὸ μὲν κέντρον αὐτοῦ νὰ πέσῃ

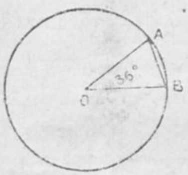


Σχ. 188.

ἐπὶ τοῦ σημείου Δ, ἡ δὲ διάμετρος 0—180 νὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΔΕ καὶ κατὰ τὴν προέκτασιν τῆς διαιρέσεως τοῦ μοιρογνωμονίου 47°, λογιζομένων ἀπὸ τοῦ Ε, σημειοῦμεν τὸ σημεῖον Ζ. Ἀφαιροῦντες εἶτα τὸ μοιρογνωμόνιον καὶ συνδέοντες τὰ σημεῖα Δ καὶ Ζ δι' εὐθείας λαμβάνομεν τὴν γωνίαν ΖΔΕ, ἥτις εἶναι ἴση τῇ ΓΑΒ.

3ον) Ἵνα λύσωμεν τὸ 2ον πρόβλημα, ἀρκεῖ κατὰ τὸ προηγούμενον νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθὴν γωνίαν ἔχουσαν κορυφὴν τὸ σημεῖον Γ καὶ πλευρὰν τὴν ΓΑ ἢ ΓΒ.

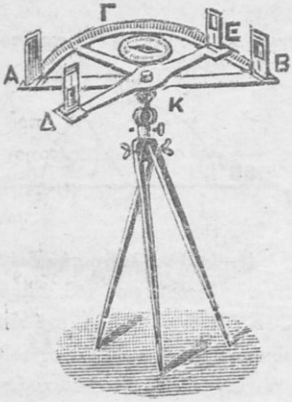
4ον) Ἵνα λύσωμεν τὸ 9ον πρόβλημα, σύρομεν ἐκ τοῦ σημείου Γ τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΓΔ. Εἶτα μετροῦμεν τὴν γωνίαν μ καὶ κατασκευάζομεν εἰς τὸ σημεῖον Γ τὴν γωνίαν ν ἴσην τῇ μ καὶ οὕτως, ὥστε αἱ δύο γωνίαι νὰ εἶναι ἐντὸς ἐναλλάξ. Ἡ εὐθεῖα ΓΖ θὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ.



Σχ. 189.

5ον) Ἵνα ἐγγράψωμεν οἱονδήποτε κανονικὸν πολύγωνον (§ 153), π.χ. ἓν δεκάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον, κατασκευάζομεν ἐπίκεντρον γωνίαν ΑΟΒ 360 : 10 =36°, ἧς τὸ ἀντίστοιχον τόξον ΑΒ εἶναι τὸ $^1/_{10}$ τῆς περιφερείας· συνεπῶς ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγραφησομένου κανονικοῦ δεκαγώνου.

***179. Γραφόμετρον.** Τὸ ὄργανον τοῦτο χρησιμεύει διὰ τὴν μέτρησιν γωνιῶν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Ἀποτελεῖται δὲ ἐκ μεταλλίνου ἡμικυκλίου ΑΓΒ, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ὁποίου εἶναι κεχαραγμέναι διαιρέσεις μοιρῶν κλπ. ἀπὸ 0—180, ὡς εἰς τὸ μοιρογνωμόνιον. Εἰς τὰ πέρατα δὲ τῆς διαμέτρου ΑΒ εἶναι τοποθετημέναι καθέτως δύο μικραὶ μετάλλιναι πλάκες σχήματος ὀρθογωνίου. Εἰς δὲ τὸ κέντρον Κ τοῦ ἡμικυκλίου εἶναι προσηρμοσμένος εἷς κινητὸς κανὼν ΕΔ, φέρων εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ ὁμοίως καθέτους πλάκας, ὡς ἀνωτέρω, καὶ δυνάμενος νὰ στραφῇ ἐλευθέρως περὶ τὸ κέντρον. Κατὰ μῆκος καὶ εἰς τὸ μέσον τῶν πλακῶν ὑπάρχουσιν ἐπιμήκεις ὀπαὶ κατάλληλοι πρὸς σκόπευσιν ἀκριβῶς, ὅπως καὶ εἰς τὸν χωρομετρικὸν γνώμονα.

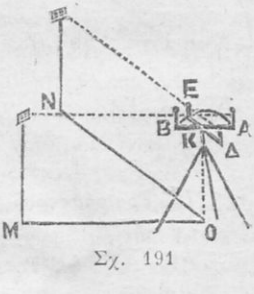


Σχ. 190

Τὸ σκοπευτικὸν δὲ ἐπίπεδον τὸ διὰ τῆς ὀπῆς Α καὶ Β διέρχεται διὰ τῆς διαμέτρου τοῦ ἡμικυκλίου 0—180, ἥτις καλεῖται γραμμὴ τῆς πίστεως. Τὸ ὅλον ὄργανον στηρίζεται ἐπὶ τρίποδος καὶ δύναται νὰ λάβῃ θέσιν ὁριζοντίαν ἢ κατακόρυφον ἢ οἱανδήποτε ἄλλην δι' ἀρθρώσεως καταλλήλου.

Ἵνα δὲ μετρήσωμεν δι' αὐτοῦ τὴν γωνίαν δύο εὐθυγραμμιῶν, π.χ. τὴν ΝΟΜ, τοποθετοῦμεν τὸ γραφόμετρον, ὥστε ἡ κατακόρυφος ἡ ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ Κ νὰ διέρχηται διὰ τῆς κορυφῆς Ο τῆς γωνίας ΝΟΜ, καὶ καθιστῶμεν τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ ὁριζόντιον διὰ τῆς ἀεροστάθμης (§ 150,2).

Τούτων γενομένων, περιστρέφομεν τὸ ἡμικύκλιον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ οὕτως, ὥστε τὸ σκοπευτικὸν ἐπίπεδον, τὸ διερχόμενον διὰ τῶν ὀπῶν Α καὶ Β, νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ ἀκοντίου τοῦ σημείου Μ. Εἶτα στρέφομεν τὸν κινητὸν κανόνα ΔΕ, ἕως ὅτου τὸ σκοπευτικὸν ἐπίπεδον, τὸ διερχόμενον διὰ τῶν ὀπῶν Δ καὶ Ε, διέλθῃ διὰ τοῦ ἀκοντίου Ν. Ἤδη ἀρκεῖ νὰ ἀναγνώσωμεν ἐπὶ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ μέτρον τῆς γωνίας ΕΚΒ, τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ τοῦ κανόνος καὶ τῆς διαμέτρου 0—180.



Σχ. 191

Ἐρωτήσεις καὶ ἀσκήσεις.

Ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ποῖα συνεχῆ ποσὰ παρουσιάζονται πρὸς μέτρησιν ; Ποίων μονάδων γίνεται συνήθως χρῆσις πρὸς μέτρησιν τούτων ; Πῶς καλεῖται ὁ ἐκ τῆς καταμετρήσεως γραμμῆς ἢ ἐπιφανείας ἢ στερεοῦ ἢ τοῦ ἐσωτερικοῦ χώρου δοχείου προκύπτων ἀριθμός; Εἰς τί ἀνάγεται ἡ μέτρησις τῶν γωνιῶν καὶ διατί ; Ποία μονὰς λαμβάνεται συνήθως πρὸς μέτρησιν τῶν τόξων ; Εἰς τί χρησιμεύει τὸ μοιρογνωμόνιον καὶ εἰς τί τὸ γραφόμετρον ;

1) Πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{20}$, καὶ τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{17}{18}$, $\frac{13}{20}$ τῆς περιφερείας;

2) Πόσας μοίρας ἔχουσιν ἀντιστοίχως τὰ $^4/_5$, $^5/_8$, $1^2/_3$ τῆς ὀρθῆς; (72^0, $56^0\ 15'$, 150^0.)

3) Τί μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι ἀντιστοίχως γωνία 20^0, 30^0 45^0, $67^0\ 30'$; ($^2/_9$, $^1/_3$, $^1/_2$, $^3/_4$).

4) Ποῖον εἶναι τὸ συμπλήρωμα τῆς γωνίας $14^0\ 28'\ 56''$ καὶ ποῖον τὸ παραπλήρωμα αὐτῆς ; ($75^0\ 31'\ 4''$, $165^0\ 31'\ 4''$).

5) Ἡ μία ἐκ τῶν 4 σχηματιζομένων γωνιῶν ὑπὸ 2 τεμνομένων εὐθειῶν εἶναι 123^0. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν 3 ἄλλων ; (123^0, 57^0, 57^0).

6) Ἐκ 5 γωνιῶν σχηματιζομένων πέριξ σημείου αἱ 4 εἶναι ἀντιστοίχως $27^0\ 15'$, $78^0\ 4'$, $49^0\ 3'$, $104^0\ 8'\ 5''$. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ πέμπτη ; ($101^0\ 29'\ 55''$).

7) Ἐγγεγραμμένη τις γωνία εἶναι 43^0. Πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ τόξον, ἐφ' οὗ βαίνει ; (86^0).

8) Ἐγγεγραμμένη τις γωνία βαίνει ἐπὶ τόξου 150^0. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία αὕτη ; (75^0).

9) Αἱ δύο γωνίαι τριγώνου τινὸς εἶναι $43^0\ 7'\ 25''$ καὶ 20^0 $45'$. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ τρίτη ; ($116^0\ 7'\ 35''$).

10) Ἐν ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ ἡ γωνία ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως εἶναι 40^0. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκατέρα τῶν δύο ἄλλων ἴσων γωνιῶν (70^0).

11) Αἱ τρεῖς τῶν 4 γωνιῶν τετραπλεύρου εἶναι ἀντιστοίχως

25° 24′, 31° 15′, 84°7′8″ Πόσων μοιρῶν είναι ἡ τετάρτη; (219° 13′ 52″).

12) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη γωνία κανονικοῦ τριγώνου, πενταγώνου, ἑξαγώνου, ὀκταγώνου, δεκαγώνου, δωδεκαγώνου; (60°, 108°, 120°, 135°, 144°, 150°).

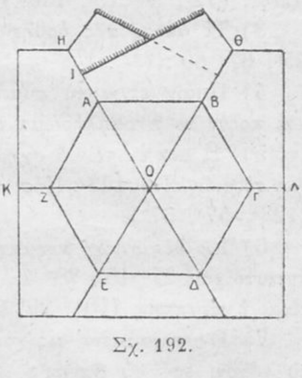
13) Νὰ κατασκευασθῶσι διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου γωνίαι 36°, 45°, 20°, 60°, 72°, 90°, 120°,150° ἁπλῶς ἢ εἰς τὸ ἄκρον εὐθείας.

14) Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ἔχον πλευρὰς 45 καὶ 73 γρ., τὴν δὲ περιεχομένην γωνίαν 47°.

15) Νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀναγωγέως 1) γωνία 70° εἰς 2 ἴσα μέρη· 2) ὀρθὴ γωνία εἰς 3 ἴσα μέρη·3) γωνία 125° εἰς 5 ἴσα μέρη.

16) Ἐν δεδομένῳ κύκλῳ νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ὀκτάγωνον, ἐννεάγωνον, δεκάγωνον, δωδεκάγωνον, δεκαπεντάγωνον, εἰκοσάγωνον (§ 178, 5).

17) Νὰ κατασκευασθῇ οἱονδήποτε κανονικὸν πολύγωνον π. χ. κανονικὸν πεντάγωνον, ἔχον πλευρὰν ἴσην δοθείσῃ εὐθείᾳ.



Σχ. 192.

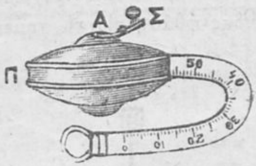
Σημ. Δι' ἑνὸς φύλλου χάρτου οἱουδήποτε σχήματος δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν κανονικὸν ἑξάγωνον, ἔχον πλευρὰς ἴσας δοθείσῃ εὐθείᾳ ὡς ἑξῆς. Θλῶμεν τὸ φύλλον κατά τινα εὐθεῖαν ΚΛ καὶ εἰς τυχὸν σημεῖον Ο αὐτῆς σχηματίζομεν διὰ διπλώσεως τρεῖς γωνίας ΚΟΗ, ΗΟΘ, ΘΟΛ ἴσας. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΗΟΘ λαμβάνομεν τὰς ΟΑ καὶ ΟΒ ἴσας πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν· κόπτοντες δὲ τὸ χαρτίον κατὰ τὴν ΑΒ καὶ ἐκδιπλοῦντες λαμβάνομεν τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ, ὅπερ εἶναι κανονικόν. Διατί;

2) Περὶ μετρήσεως εὐθειῶν γραμμῶν.

180. Πρὸς μέτρησιν εὐθειῶν γραμμῶν ἐπὶ τοῦ χάρτου ποιούμεθα χρῆσιν συνήθως τοῦ διπλοῦ ὑποδεκαμέτρου (§ 11). Πρὸς μέτρησιν δὲ μειζόνων κατά τι ἀποστάσεων, π.χ. τοῦ μήκους τῆς αἰθούσης, τοῦ πίνακος κλπ., γίνεται χρῆσις τοῦ μέτρου.

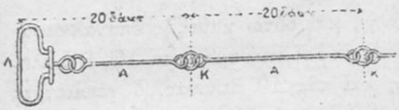
Διὰ δὲ τὴν μέτρησιν μεγάλων ἀποστάσεων ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μεταχειριζόμεθα συνήθως τὴν μετροταινίαν ἢ τὴν χωρομετρικὴν ἅλυσιν.

***181**. Ἡ **μετροταινία** ἀποτελεῖται ἐκ λινῆς ταινίας ἐχούσης πλάτος μὲν περίπου 0,015 μ. καὶ μῆκος 10 ἢ 20 ἢ 50 μέτρων, ἐφ' ἧς σημειοῦνται διαιρέσεις ἀνὰ μέτρον, ὑποδεκάμετρον καὶ ὑφεκατόμετρον. Περιελισσομένη δὲ αὕτη περὶ ἄξονα Α διὰ στροφάλου Σ ἐγκλείεται ἐντὸς κυλινδρικοῦ δερματίνου περιβλήματος Π.



Σχ. 193.

***182**. Ἡ **χωρομετρικὴ ἅλυσις** συνίσταται ἐκ 50 συρματίνων ἀγκυλίων Α συνδεομένων διὰ κρίκων Κ. Τὰ τελευταῖα δὲ ἀγκύλια φέρουσιν εἰς τὰ πέρατα λαβὰς Λ, δι' ὧν τανύεται ἡ ἅλυσις κατὰ τὴν μέτρησιν. Ἡ ἀπόστασις δὲ τῶν κέντρων δύο ἐφεξῆς κρίκων, ὡς καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν ἄκρων τῶν λαβῶν Λ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῶν πρώτων μετ' αὐτὰς κρίκων, εἶναι 0,20 μετρ., συνεπῶς τὸ μῆκος τῆς ἁλύσεως εἶναι $0{,}20 \times 50 = 10$ μέτρα.

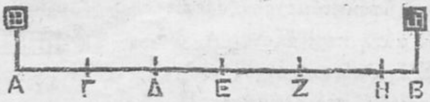


Σχ. 194.

Ἡ ἅλυσις συνοδεύεται καὶ ὑπὸ 11 σιδηρῶν βελονῶν Β μήκους περίπου 0,30 μετρ., αἵτινες κατὰ μὲν τὸ ἓν ἄκρον ἀπολήγουσιν εἰς αἰχμήν, ἵνα εὐκόλως ἐμπήγωνται εἰς τὸ ἔδαφος, κατὰ δὲ τὸ ἕτερον κάμπτονται ἀγκιστροειδῶς.

σχ. 195

***183**. Ἔστω ἤδη ὅτι πρόκειται νὰ μετρήσωμεν τὴν εὐθυγραμμίαν ΑΒ, κειμένην ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους καὶ προσδιορισθεῖσαν προηγουμένως δι' ἀκοντίων. Ἐν τῇ καταμετρήσει ἡ μετροταινία ἢ ἡ ἅλυσις φέρεται πάντοτε ὑπὸ δύο ἀνδρῶν, ὧν ὁ μὲν γεωμέτρης ἕπεται, ὁ δὲ βοηθὸς αὐτοῦ προηγεῖται. Κατὰ πρῶτον ὁ γεωμέτρης εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀφετηρίας Α ἐμπήγει μίαν βελόνην, εἰς ἣν προσεγγίζει τὸ ἄκρον τῆς λαβῆς τῆς ἁλύσεως, ἐνῷ ὁ βοηθὸς αὐτοῦ κρατῶν τὴν ἑτέραν λαβὴν καὶ τὰς 10 ὑπολειπομένας βελόνας βαδίζει πρὸς τὸ σημεῖον Β τῆς εὐθείας καὶ εἰς τὸ σημεῖον Γ ἄκρον τῆς τεταμένης ἁλύσεως ἐμπήγει μίαν σιδηρᾶν βελόνην ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ΑΒ ὁδηγούμενος πρὸς τοῦτο ὑπὸ τοῦ γεωμέτρου καὶ ὑπὸ τῶν ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ΑΒ ἐμπεπηγμένων ἀκοντίων. Τούτου γενομένου, ὁ γεωμέτρης παραλαμβάνει ἐκ τοῦ ἐδάφους τὴν βελόνην Α καὶ προχωροῦσιν ἀμφότεροι, ἕως ὅτου ὁ μὲν γεωμέτρης φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον Γ, ὁ δὲ βοηθὸς εἰς τὸ σημεῖον Δ,



Σχ. 196.

ὅπου ἐμπήγει δευτέραν βελόνην, καὶ οὕτω καθεξῆς ἐπαναλαμβάνουσι τὴν αὐτὴν ἐργασίαν καὶ εἰς τὰ ἑπόμενα τμήματα ΔΕ, ΕΖ κλπ.

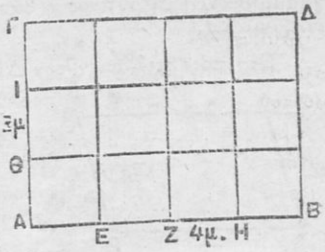
Ὅταν ὁ βοηθὸς ἐμπήξῃ καὶ τὰς 10 βελόνας, ὁ γεωμέτρης ἐπιστρέφει ταύτας εἰς τὸν βοηθὸν καὶ ἐπαναλαμβάνουσι πάλιν τὴν αὐτὴν ἐργασίαν σημειοῦντες ἐπὶ τοῦ βιβλίου των μίαν ἀλλαγήν, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς μῆκος 100 μέτρων.

Ἐὰν λοιπὸν γίνωσι 4 ἀλλαγαὶ καὶ ὁ γεωμέτρης ἔχῃ εἰς χεῖράς του ἐκ τοῦ ἐδάφους 5 βελόνας καὶ ἡ ἀπόστασις τῆς τελευταίας βελόνης Η ἀπὸ τοῦ τελευταίου ἀκοντίου Β εἶναι 9 ἀγκυλίων ἡ ὅλη ἀπόστασις ΑΒ θὰ εἶναι $400+50+0{,}20\times9=451{,}80$ μετρ.

3) *Μέτρησις τῆς ἐπιφανείας τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων.*

184. Ἡ μέτρησις τῶν ἐπιφανειῶν δὲν γίνεται, ὡς ἡ μέτρησις τῶν γραμμῶν, διὰ τῆς ἀμέσου μετρήσεως (§ 156), ἤτοι διὰ τῆς ἐπιθέσεως τῶν μονάδων ἐπιφανειῶν ἐπὶ τῶν πρὸς μέτρησιν ἐπιφανειῶν. Διότι τὸ τοιοῦτον εἶναι ἐπίμονον καὶ δύσκολον εἰς τὰ πλείστας δὲ τῶν περιπτώσεων καὶ ἀνεφάρμοστον. Δι' ὃ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἔχουσιν ἐπινοηθῇ τρόποι, δι' ὧν ἡ μέτρησις τῶν ἐπιφανειῶν ἀνάγεται εἰς μέτρησιν γραμμῶν τινων τῶν ἐπιφανειῶν (ἤτοι εἰς ἐργασίαν εὐκολωτέραν), ἐκ τοῦ μήκους τῶν ὁποίων ποριζόμεθα δι' ὑπολογισμοῦ τὸ ἐμβαδὸν τῶν ἐπιφανειῶν.

135. Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου. Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΔΓ, οὗτινος ἡ βάσις ΑΒ εἶναι 4 μετρ. καὶ τὸ ὕψος ΑΓ εἶναι 3 μετρ.



Σχ. 197.

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν βάσιν ΑΒ εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ τὸ ὕψος ΑΓ εἰς 3 ἴσα μέρη καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως τῆς βάσεως Ε, Ζ, Η ἀχθῶσι κάθετοι ἐπ' αὐτήν, ὁμοίως δὲ καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως τοῦ ὕψους Θ καὶ Ι ἀχθῶσι κάθετοι ἐπ' αὐτό, τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΔΓ θὰ διαιρεθῇ εἰς 4×3=12 τετράγωνα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἰσοῦται προφανῶς πρὸς 1 τετραγ. μετρ., ὅτε τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι 4×3=12 τετραγ. μέτρ., ἤτοι τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ αὐτὸ εὑρίσκομεν, οἱοιδήποτε καὶ ἂν ὦσιν οἱ τὰ μήκη τῶν διαστάσεων παριστῶντες ἀριθμοὶ (ἀκέραιοι, κλασματικοί, δεκαδικοὶ κλπ.), συνάγομεν ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς ὀρθογωνίου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

136. Ἐμβαδὸν τετραγώνου. Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, οὗ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος εἶναι ἴσα, ἕπεται ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τετραγώνου ἰσοῦται τῷ τετραγώνῳ μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

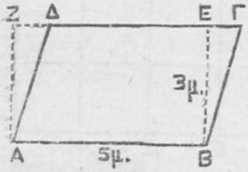
Οἷον τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου ἔχοντος πλευρὰν 5 μ., εἶναι 5×5=25 τετραγ. μετρ., τὸ δὲ ἐμβαδὸν τετραγώνου πλευρᾶς 4,235 μ. εἶναι 4,235×4,235=17,935325 τετρ. μ., ἤτοι 17 τετραγ. μ. 93 τετραγ. παλάμ., 53 τετραγ. δάκτ. καὶ 25 τετραγ. γραμμαί.

Σημ. α'. Ἡ δευτέρα δύναμις ἀριθμοῦ τινος, οἷον 5^2, καλεῖται καὶ τετράγωνον αὐτοῦ· διότι 5^2 (ἢ 5×5) ἐκφράζει τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, ἔχοντος πλευρὰν 5 μονάδας μήκους.

Σημ. β'. Ἀντιστρόφως δὲ γνωρίζοντες τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου τινὸς δυνάμεθα ἐξ αὐτοῦ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἐμβαδοῦ. Π.χ. ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου τινὸς εἶναι 81 τετραγ. μετρ., ἡ πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι $\sqrt{81}=9$ μ.

187. Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου. Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, οὗτινος ἡ βάσις ΑΒ εἶναι 5 μ. καὶ τὸ ὕψος ΒΕ εἶναι 3 μετρ.

Ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν ΔΓ καὶ ὑψώσωμεν τὴν κάθετον ΑΖ, προκύπτει τὸ τρίγωνον ΑΖΔ, ὅπερ εἶναι ἴσον (§ 88) πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΓΒ· διότι ἀμφότερα εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουσι ΑΖ=ΒΕ (§ 46,3) καὶ ΑΔ=ΒΓ (§ 92,1). Ἐὰν δὲ ἀποκόψωμεν τὸ τρίγωνον ΒΕΓ ἀπὸ τοῦ παραλληλογράμμου καὶ μεταφέρωμεν τοῦτο εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἴσου του ΑΖΔ, τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον μετασχηματίζεται εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΕΖ, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΕ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τούτου εἶναι κατὰ τὰ ἀνωτέρω 5×3=15 τετραγ. μ., ἕπεται ὅτι καὶ τὸ ἰσοδύναμον αὐτῷ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ τὸ αὐτὸ ἔχει ἐμβαδόν· ὅθεν :

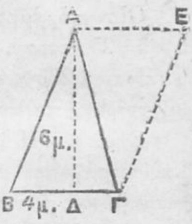


Σχ. 198.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

188. Ἐμβαδὸν τριγώνου. Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐν ᾧ ΒΓ=4 μετρ. καὶ ΑΔ=6 μετρ.

Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Γ ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΒΑ καὶ ἐκ τοῦ Α παράλληλος τῇ ΒΓ, σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΕ, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἶναι 4×6=24 τετραγ. μετρ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΕ εἶναι ἴσα (§ 88,1), ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΕ καὶ συνεπῶς τὸ ἐμβαδόν του εἶναι $\frac{4.6}{2}=12$ τετραγ. μετρ. (ἢ ὅπερ ταὐτὸ 2.6=12 τετραγ. μετρ. ἢ καὶ 4.3=12 τετραγ. μετρ.)· ὅθεν :

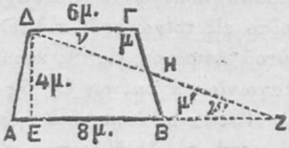


Σχ. 199.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται τῷ ἡμίσει γινομένῳ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

189. Ἐμβαδὸν τραπεζίου. Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ, ἐν ᾧ ΑΒ=8 μετρ., ΔΓ=6 μετρ. καὶ ΔΕ=4 μ.

Ἐὰν προεκταθῇ ἡ ΑΒ πέραν τοῦ Β καὶ ληφθῇ ἡ ΒΖ=ΔΓ, εἶτα δὲ ἀχθῇ ἡ ΔΖ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΖΔ, ὅπερ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν τραπέζιον, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΔΓΗ καὶ ΒΖΗ εἶναι ἴσα (§ 88,3) ὡς ἔχοντα τὴν ΔΓ=ΒΖ καὶ τὰς γωνίας μ καὶ ν ἴσας ἀντιστοίχως ταῖς μ′ καὶ ν′ (§ 46,1 α). Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΖΔ εἶναι $\frac{8+6}{2}.4=28$ τετραγ. μ. [ἢ $(8+6).2$ ἢ καὶ $\frac{(8+6).4}{2}$], ἕπεται ὅτι καὶ τὸ ἰσοδύναμον αὐτῷ τραπέζιον ΑΒΓΔ τὸ αὐτὸ ἔχει ἐμβαδόν· ὅθεν .



Σχ. 200.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπεζίου ἰσοῦται τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος.

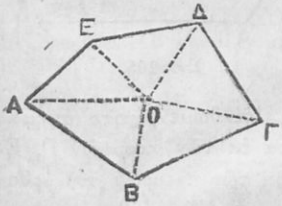
190. Ἐμβαδὸν ρόμβου. Ἐπειδὴ ὁ ρόμβος εἶναι παραλληλόγραμμον τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.

Σχ. 201.

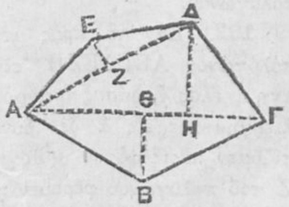
Δύναται ὅμως νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδόν του καὶ ἐκ τῶν διαγωνίων του ὡς ἑξῆς.

Ἔστω ὁ ρόμβος ΑΒΓΔ, ἐν ᾧ ΑΓ= 8 μετρ. καὶ ΒΔ=6 μετρ.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ εἶναι ἴσα (§ 88,1) καὶ ἑκατέρου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $\frac{6.4}{2}$· ἐπομένως τοῦ ρόμβου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $\frac{6.4}{2}.2=\frac{6.8}{2}=24$ τετραγ. μ.· ὅθεν :



Σχ. 202.



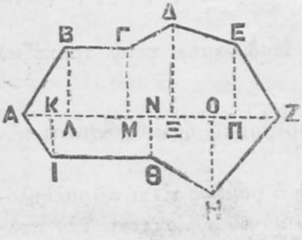
Σχ. 203.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς ρόμβου ἰσοῦται τῷ ἡμίσει γινομένῳ τῶν δύο διαγωνίων του.

191. Ἐμβαδὸν οἱουδήποτε πολυγώνου. Ἵνα εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν πολυγώνου τινός, π.χ. τοῦ ΑΒΓΔΕ, διαιροῦμεν κατὰ πρῶτον τοῦτο εἰς τρίγωνα, δι' εὐθειῶν, ἀγομένων ἔκ τινος σημείου Ο, ἐντὸς αὐτοῦ κειμένου, εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου (σχ. 202) ἢ διὰ διαγωνίων ἀγομένων ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς (σχ. 203).

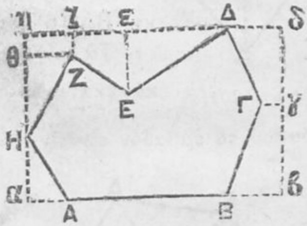
Εἶτα εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν τριγώνων τούτων χωριστά, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν ἀποτελεῖ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου.

Ἑτέρα μέθοδος, ἣν μεταχειρίζονται ἰδίως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, εἶναι ἡ ἑξῆς. Σύρομεν μίαν διαγώνιον τοῦ πολυγώνου, συνήθως δὲ τὴν μεγαλυτέραν ΑΖ, καὶ ἐκ τῶν λοιπῶν κορυφῶν φέρομεν ἐπ' αὐτὴν τὰς καθέτους ΒΛ, ΓΜ, ΔΞ.... Οὕτω δὲ διαιρεῖται ἐν γένει τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα ὀρθογώνια, οἷον τὸ ΑΒΛ, εἰς τραπέζια ὀρθογώνια (§ 95), οἷον τὸ ΓΜΞΔ, καὶ εἰς ὀρθογώνια, οἷον τὸ ΒΛΜΓ, ὧν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ἀποτελεῖ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος πολυγώνου.



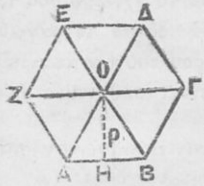
Σχ. 204.

Δεδομένου δὲ ὅτι ΑΚ=5,50 ΚΛ=4,50 ΛΜ=14 ΜΝ=5,50 ΝΞ=5,50 ΞΟ=7,25 ΟΠ=5,25 ΠΖ=12,70 ΒΛ=14 ΓΜ=14 ΔΞ=19,90 ΕΠ=15,50 ΙΚ=10 ΘΝ=10 ΗΟ=18,50, νὰ ὑπολογισθῇ πρὸς ἄσκησιν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου.



Σχ. 205.

192. Ἐὰν τὸ πρὸς μέτρησιν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖΗ εἶναι λίμνη ἢ ἕλος ἢ δάσος ἢ ἀγρὸς καλλιεργημένος, εἰς ἃ δὲν δυνάμεθα νὰ εἰσέλθωμεν, τότε σχηματίζομεν πέριξ αὐτοῦ ὀρθογώνιον. Εἶτα ἐκ τῶν κορυφῶν Γ, Ε, Ζ τοῦ πολυγώνου φέρομεν καθέτους ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου, ὅτε σχηματίζονται ὀρθογώνια, τραπέζια ὀρθογώνια καὶ τρίγωνα ὀρθογώνια. Εὑρίσκοντες δὲ τὰ ἐμβαδὰ τούτων καὶ ἀφαιροῦντες τὸ ἄθροισμα ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου αβδη εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΗ.



Σχ. 206.

193. Ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου. Ἔστω τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ.

Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου Ο τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου φέρωμεν εὐθείας εἰς ὅλας τὰς κορυφὰς αὐτοῦ, χωρίζεται τὸ πολύγωνον εἰς τόσα ἴσα τρίγωνα, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τῶν ἴσων τούτων τριγώνων, οἷον τοῦ ΟΑΒ, εἶναι $\frac{ΑΒ.ΟΗ}{2}$, καὶ τῶν 6 δὲ τριγώνων, ἤτοι τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, θὰ εἶναι $\frac{ΑΒ.ΟΗ.6}{2}$ ἢ $\frac{ΑΒ\,6.ΟΗ}{2}$. Ἀλλὰ ΑΒ.6 παριστᾷ τὴν περίμετρον τοῦ ἑξαγώνου, ἣν καλοῦμεν Π, καὶ τὸ ΟΗ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ (§ 142), ὅπερ καλοῦμεν ρ, ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἰσοῦται πρὸς $\frac{Π.ρ}{2}$.

Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον καταλήγομεν καὶ προκειμένου περὶ οἱουδήποτε κανονικοῦ πολυγώνου συνάγομεν ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου ἰσοῦται τῷ ἡμίσει γινομένῳ τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἀπόστημά του.

Οὕτως ἐὰν ΑΒ=10 μ. καὶ ΟΗ=8,66 μ. (§ 194 καὶ ἀσκ. 50), τότε θὰ ἔχωμεν ἐμβ. καν. ἑξαγ.$=\frac{10.6.8,66}{2}=60.\,4,33=259,80$ τετραγ. μέτρ.

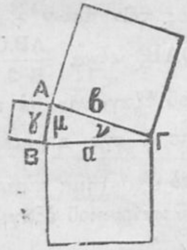
Πυθαγόρειος ἰδιότης.

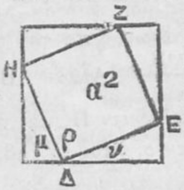
194. Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἔνθα ΒΓ=α, ΑΓ=β καὶ ΑΒ=γ. Ὡς γνωστὸν (§ 84,1), $α<β+γ$.

Ἐξετάσωμεν ἤδη ποίαν σχέσιν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὰ ἐπὶ τῶν πλευρῶν α,β,γ κατασκευαζόμενα τετράγωνα.

Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν δύο τετράγωνα (σχ. 208 καὶ 209) ἔχοντα πλευρὰν β+γ· ἐντὸς δὲ ἑκατέρου τούτων θέτομεν 4 τρίγωνα ἐκ χάρτου ἴσα πρὸς τὸ ΑΒΓ καὶ οὕτως, ὡς φαίνεται εἰς τὰ σχήματα 208 καὶ 209, ἅτινα καλύπτουσι μέρος τι τῶν τετραγώνων καὶ ἀφίνουσιν ἀκάλυπτον εἰς μὲν τὸ σχ. 208 τὸ ΔΕΖΗ, ὅπερ εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς α (διότι ἅπασαι αἱ πλευραί του εἶναι ἴσαι τῇ α, αἱ δὲ γωνίαι του ὀρθαί, π.χ. ἡ ρ, διότι $\mu+\nu=1$ ὀρθ. (§ 86,3) καὶ $\mu+\nu+\rho=2$ ὀρθ (§ 34,2)· ἄρα $\rho=1$ ὀρθ.), εἰς δὲ τὸ σχ. 209 δύο τετράγωνα ἔχοντα πλευρὰς β καὶ γ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τετράγωνα τῶν σχ. 208 καὶ 209 εἶναι ἴσα καὶ ἐξ ἑκατέρου τούτων ἀφαιροῦμεν 4 ἴσα τρίγωνα, ἕπεται ὅτι τὰ ὑπόλοιπα εἶναι ἰσοδύναμα ἤτοι $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$· ὅθεν:

Τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἰσοῦ-





Σχ. 207. Σχ. 208. Σχ. 209.

ται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων καθέτων πλευρῶν.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ὀφείλεται εἰς τὸν μέγαν ἐκ Σάμου μαθηματικὸν Πυθαγόραν (6ος αἰὼν π.Χ.), δι' ὃ ἐκλήθη ἐξ αὐτοῦ πυθαγόρειος. Ἔχει δὲ πλείστας ἐφαρμογάς, καθόσον εἶναι δυνατόν, δοθεισῶν τῶν δύο πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, νὰ εὕρωμεν τὴν τρίτην· οἷον ἐὰν $\alpha=5$ καὶ $\beta=4$, ἔχομεν

$5^2=4^2+\gamma^2$· ὅθεν $\gamma^2=5^2-4^2=25-16=9$, ἑπομένως $\gamma=3$.

Σημ. Παράβαλε καὶ ἑτέρας ἰδιότητας ὀρθογωνίων τριγώνων (§ 86,3 καὶ 88,2).

Ἐρωτήσεις καὶ ἀσκήσεις.

Πῶς γίνεται ἡ μέτρησις τῶν ἐπιφανειῶν δι' ἀμέσου ἢ δι' ἐμμέσου μετρήσεως καὶ διατί; Διατί ἡ δευτέρα δύναμις ἀριθμοῦ καλεῖται καὶ τετράγωνον; Ποίας σπουδαίας ἰδιότητας ἔχουσι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα;

Ὀρθογώνια. 1) Εὑρεῖν τὴν ἐπιφάνειαν ὀρθογωνίου ἀγροῦ, οὗτινος τὸ μῆκος εἶναι 150 μετρ., τὸ δὲ πλάτος ἰσοῦται πρὸς τὰ 2)3 τοῦ μήκους. (1,50 ἑκτάρια).

2) Κήπου ὀρθογωνίου ἡ ἡμιπερίμετρος εἶναι 67,75 μ., τὸ δὲ

πλάτος αὐτοῦ εἶναι τὰ 2)3 τοῦ μήκους του. Ποία εἶναι ἡ ἀξία αὐτοῦ πρὸς 42,50 δρχ. τὸ τετραγ. δεκαμ. (ἄριον); (468,18 δρχ.).

3) Πόσα δένδρα δύναται νὰ φυτεύσῃ τις ἀπέχοντα ἀλλήλων 2 μ. πέριξ ὀρθογωνίου ἀγροῦ 12 τετραγ. δεκαμ. καὶ 60 μ. πλάτους; (80 δένδρα).

Σημ. Δέον νὰ τραπῇ τὸ 12 τετραγ. δεκαμ. εἰς 1200 τετραγ. μ. ἢ τὸ 60 μ. εἰς 6 δεκαμ. Τοιοῦτόν τι δὲ πρέπει νὰ γίνεται καὶ εἰς πᾶν ὅμοιον πρόβλημα.

4) Ὀρθογώνιον δωμάτιον διαστάσεων 12 καὶ 9 μ. πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ τάπητος πλάτους 1,20 μ. Πόσον μῆκος ἀπαιτεῖται; (90 μετρ.).

5) Ὀρθογώνιον δωμάτιον διαστάσεων 10 καὶ 6 μ. πρόκειται νὰ ἐπιστρωθῇ διὰ σανίδων διαστάσεων 2,50 καὶ 0,30. Πόσαι τοιαῦται σανίδες ἀπαιτοῦνται; (80 σανιδ.).

*6) Στέγη τις ἀποτελεῖται ἐκ δύο μερῶν σχήματος ὀρθογωνίου καὶ διαστάσεων ἑκατέρου 28,70 μ. καὶ 14,85 μ. Πόσαι πλάκες διαστάσεων 25 καὶ 19 δακτ. ἀπαιτοῦνται πρὸς στέγασιν, γνωστοῦ ὄντος ὅτι λόγῳ τῆς ἐπικαλύψεως ἀλλήλων κατὰ τὴν ἐπιστέγασιν ἑκάστη πλὰξ ἀπόλλυσιν 1)4 ἐκ τῆς ἐπιφανείας της; (23927 πλακ.).

*7) Ὀρθογώνιος κῆπος μήκους 87 μετρ. ἠγοράσθη ἀντὶ 3845,80 δρχ. πρὸς 7000 δχρ. τὸ τετραγ. ἑκατομ. (ἑκτάριον). Πόσον θὰ στοιχίσῃ τὸ περίφραγμα τούτου πρὸς 5 δρχ. τὸ γραμμικὸν μέτρον; (1501,50 δρχ.).

8) Ὀρθογώνιον γήπεδον διαστάσεων 30 μ. καὶ 16 μ. εἶναι πεφυτευμένον διὰ δένδρων ἀπεχόντων 1 μετρ. ἐκ τῆς περιμέτρου καὶ 2 μετρ. ἀπ' ἀλλήλων. Τίς ὁ ἀριθμὸς τῶν πεφυτευμένων δένδρων; (120).

*9) Ἀγρός τις ὀρθογώνιος ἔχει ἐπιφάνειαν 720 τετραγ. μ. Τὸ πλάτος εἶναι τὸ 1)5 τοῦ μήκους αὐτοῦ. Ποῖαι εἶναι αἱ διαστάσεις τοῦ ἀγροῦ τούτου; (12 καὶ 60 μ.).

Τετράγωνα. 10) Πόσων στρεμμάτων εἶναι ἀγρὸς τετραγωνικοῦ σχήματος καὶ πλευρᾶς 145 μέτρ; (21,025 στρεμμ.).

11) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τετραγωνικοῦ κήπου ἔχοντος περίμετρον 96 μ; (576 τετραγ. μ.).

12) Γεωργός τις ἔχει ἀγρὸν τετραγωνικὸν περιμέτρου 200 μ. Ἄλλος γεωργὸς προσφέρει εἰς τοῦτον πρὸς ἀνταλλαγὴν ἕτερον

ἀγρὸν τῆς αὐτῆς περιμέτρου καὶ τῆς αὐτῆς ποιότητος, ἀλλὰ σχήματος ὀρθογωνίου πλάτους 40 μ. Συμφέρει ἡ ἀνταλλαγὴ αὕτη εἰς τὸν πρῶτον; (Οὐχί· διότι ὁ τετραγωνικὸς ἀγρὸς εἶναι μείζων τοῦ ὀρθογωνίου κατὰ 100 τετραγ. μετρ.).

13) Πόσαι τετραγωνικαὶ πλάκες πλευρᾶς 0,16 χρειάζονται πρὸς πλακόστρωσιν μαγειρείου, ἔχοντος διαστάσεις 3,40 μ. καὶ 3 μ; (398 πλακ.).

14) Πέριξ λειμῶνος τετραγωνικοῦ ἔχουσι φυτευθῇ 40 δένδρα εἰς ἀπόστασιν 2 μετρ. ἀπ' ἀλλήλων. Ὑπάρχει δὲ ἓν δένδρον εἰς ἑκάστην γωνίαν. Ποία εἶναι ἡ ἀξία τοῦ λειμῶνος πρὸς 200 δρχ. τὸ τετραγ. δεκαμ ; (800 δρχ.).

*15) Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τετραγώνου, γνωστοῦ ὅτι, ἐὰν ἡ πλευρὰ αὕτη ἦτο κατὰ 1 μέτρ. μείζων, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου θὰ ἦτο μείζων κατὰ 43 τετραγ. μετρ. (21 μ.).

16) Τετραγωνικὸν γήπεδον 36 τετραγ. δεκαμ. περιβάλλει τις διὰ περιφράγματος στοιχίζοντος 35 δρχ. τὸ γραμμικὸν δεκάμετρον. Ποία εἶναι ἡ δαπάνη; (840 δρχ.).

17) Τετραγωνικὸν γήπεδον ἐπωλήθη πρὸς 87,25 δρχ. τὸ τετραγ. δεκαμ. ἀντὶ 9649, 85 δρχ. Ποῖον εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστομέτρου τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου τούτου ; (105,16 μ.)

18) Νὰ συντεθῇ τετράγωνον ἴσον τῷ ἀθροίσματι 9 ἴσων δοθέντων τετραγώνων, καὶ ἀντιστρόφως, δεδομένον τετράγωνον νὰ χωρισθῇ εἰς 9 ἴσα τετράγωνα.

Παραλληλόγραμμα. 19) Παραλληλόγραμμον βάσεως 16 μ. ἔχει τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν πρὸς τετράγωνον 12 μετρ. πλευρᾶς· Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος ; (9 μ.).

20) Κῆπος σχήματος παραλληλογράμμου ἐκτάσεως 600 τετρ. μ. ἔχει ὕψος 20 μ. καὶ περίμετρον 110 μ. Εὑρεῖν τὸ μῆκος ἑκάστης αὐτοῦ πλευρᾶς. (30 και 25 μ.).

Τρίγωνα. 21) Χωραφίου τριγωνικοῦ σχήματος ἡ βάσις εἶναι 180 μ. καὶ τὸ ὕψος 70 μ. Ἐκ πόσων στρεμμάτων ἀποτελεῖται ; (6,300 στρεμμ.).

22) Ἡ περίμετρος ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 120 μ., τὸ δὲ ἐμβαδὸν αὐτοῦ 692, 80 τετραγ. μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ ; (34,64 μ.).

23) Ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ εἶναι ἡ μὲν 905,4 παλ., ἡ δὲ 27,42 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ; (2482, 6068 τετραγ. μ.).

Σημ. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο (ὡς καὶ εἰς πᾶν ὅμοιον) τὰ δεδομένα δέον νὰ τραπῶσιν εἰς τὴν αὐτὴν ὑποδιαίρεσιν, ἰδίως δὲ εἰς ἐκείνην, ἣν ἀπαιτεῖ ἡ ἀπόκρισις, ἤτοι ἐνταῦθα εἰς μέτρα.

24) Νὰ κατασκευασθῶσι διάφορα τρίγωνα ἰσοδύναμα δοθέντι τριγώνῳ.

25) Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ἰσοδύναμον δοθέντι τριγώνῳ καὶ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν.

26) Κῆπός τις τριγωνικοῦ σχήματος ἠγοράσθη ἀντὶ 750 δρχ. πρὸς 100 δραχ. τὸ τετραγ. δεκαμ. Ποία εἶναι ἡ βάσις του, τοῦ ὕψους αὐτοῦ ὄντος 60 μ.; (25 μ.).

27) Νὰ μοιρασθῇ τριγωνικόν τι οἰκόπεδον ΑΒΓ εἰς δύο κληρονόμους ἐξ ἴσου καὶ ὥστε νὰ ἔχωσι κοινὸν τὸ ἐν τῇ κορυφῇ Γ ὑπάρχον φρέαρ.

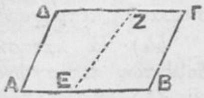
Τραπέζια. 28) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, οὗτινος αἱ μὲν βάσεις εἶναι 42,27 μ. καὶ 202,3 παλ. καὶ τὸ ὕψος 1548 δακτ. (483,75 τετραγ. μ.).

29) Τὰ δύο τρίγωνα, εἰς ἃ χωρίζεται τραπέζιον διὰ μιᾶς διαγωνίου, εἶναι ἰσοδύναμα;

30) Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ἰσοδύναμον δοθέντι τραπεζίῳ καὶ ἔχον τὸ αὐτὸ ὕψος.

31) Νὰ χωρισθῇ χωράφιόν τι σχήματος τραπεζίου εἰς 3 μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν, συνδεουσῶν τὰς δύο βάσεις.

32) Νὰ μερισθῇ προαύλιόν τι ΑΒΓΔ σχήματος παραλληλογράμμου εἰς δύο κληρονόμους ἐξ ἴσου καὶ οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωσι κοινὴν εἴσοδον εἰς τὸ σημεῖον Ε.



Σχ. 210.

33) Αὐλὴ ἐπιφανείας 1500 τετραγ. μ. ἔχει σχῆμα τραπεζίου, οὗτινος ἡ μία τῶν βάσεων εἶναι 4000 δακ. καὶ τὸ ὕψος 300 παλ. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἑτέρας βάσεως; (60 μ.).

34) Γήπεδόν τι σχήματος τραπεζίου ἐξετιμήθη 9702 δρχ·

πρὸς 60 δρχ. τὸ τετραγ. δεκαμ. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου, ἐὰν αἱ δύο βάσεις αὐτοῦ εἶναι 125 καὶ 105 μ ; (140,60 μ.).

Ρόμβοι. 35) Ὑαλωτὸν θυρίδωμα (τζαμλίκι) σχήματος ρόμβου ἔχοντος διαγωνίους 1 μ. καὶ 6 παλ. εἶναι ἐσχηματισμένον ἐκ μικρῶν ρόμβων ἐχόντων διαγωνίους 1 παλ. καὶ 5 δακτ. Πόσοι μικροὶ ρόμβοι ὑπάρχουσιν εἰς τὸ θυρίδωμα ; (120).

36) Ἑνοῖ τις ἀνὰ δύο τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου διαστάσεων 4 παλ. καὶ 25 δακτ. Ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ οὕτω ἐγγεγραμμένου σχήματος ; (5 τετραγ. παλ.).

37) Ἔχει τις κῆπον σχήματος ρόμβου, οὗτινος αἱ διαγώνιοι εἶναι ἀντιστοίχως 25 παλ. καὶ 180 δακτ. Τί ὀφείλει νὰ πληρώσῃ εἰς τὸν κηπουρόν, ὅστις περιποιεῖται τοῦτον πρὸς 1,25 δρχ. τὸ τετραγ. μετρ ; (2,8125 δρχ.).

38) Νὰ διαιρεθῇ τετράγωνον, ὀρθογώνιον, παραλληλόγραμμον καὶ ρόμβος εἰς ἴσα μέρη διὰ παραλλήλων πρὸς τὰς πλευράς.

Πολύγωνα οἱαδήποτε. 39) Ἀγρός τις ἔχει σχῆμα τετραπλεύρου, οὗτινος ἡ μία διαγώνιος εἶναι 480 μ., αἱ δὲ ἀποστάσεις τῶν δύο ἄλλων κορυφῶν ἀπ' αὐτῆς εἶναι 73 μ. καὶ 95 μ. Πόσων στρεμμάτων εἶναι ὁ ἀγρὸς ; (40,320 στρεμ).

40) Νὰ μερισθῇ τυχὸν τετράπλευρον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

Κανονικὰ πολύγωνα. 41) Ὑπολογίσαι τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πενταγώνου, οὗτινος ἡ πλευρὰ εἶναι 102 δακτ. καὶ τὸ ἀπόστημα 9 παλαμ. (2,295 τετραγ. μ.).

42) Ὑπολογίσαι τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ δεκαγώνου, οὗτινος ἡ πλευρὰ εἶναι 2 μ. καὶ τὸ ἀπόστημα 5 παλ. (5 τετραγ. μ.).

Πυθαγόρειος ἰδιότης. 43) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἴσον τῷ ἀθροίσματι δύο δοθέντων τετραγώνων. Ὁμοίως δὲ νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον διπλάσιον ἄλλου.

44) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἴσον τῇ διαφορᾷ δύο δοθέντων τετραγώνων.

45) Ποῖον μῆκος πρέπει νὰ ἔχῃ εὐθεῖα κλῖμαξ, ἵνα φθάσῃ εἰς ὕψος 12 μ. καὶ νὰ ἀπέχῃ ὁ πούς ταύτης 50 παλ. ἀπὸ τοῦ τοίχου, ἔνθα θὰ στηρίζηται ; (13 μ.).

46) Εὑρεῖν τὴν διαγώνιον τετραγώνου, οὗτινος ἡ ἐπιφάνεια εἶναι 783225 τετραγ. δακτ. (12,51....μ.).

*47) Ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 20 μ. Ζητοῦνται αἱ πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδόν. (Ἑκατέρα τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι $10\sqrt{2}$ μ., τὸ δὲ ἐμβαδὸν 100 τετραγ. μ.).

48) Ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἀγροῦ ἔχοντος σχῆμα ἰσοσκελοῦς τριγώνου, οὗτινος ἡ βάσις εἶναι 80 μετρ. καὶ ἑκατέρα τῶν δύο πλευρῶν 50 μετρ. ; (12 τετραγ. δεκ).

49) Ὑπολογίσαι κατὰ προσέγγισιν 1 γρ. τὸ ἀπόστημα καὶ εἶτα κατὰ προσέγγισιν 1 τετραγ. δακτ. τὴν ἐπιφάνειαν κανονικοῦ ἑξαγώνου, οὗτινος ἡ πλευρὰ εἶναι 12 μ. (10,392 μ. 374,112 τετραγ. μ.).

*50) Ἡ διαγώνιος ὀρθογωνίου γηπέδου εἶναι 50 μ. Τὸ πλάτος τοῦ γηπέδου εἶναι 30 μ. Ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ; (12 τετρ. δεκ.).

*51) Οἰκοπέδου σχήματος ἰσοσκελοῦς τραπεζίου αἱ δύο βάσεις εἶναι 40 μ. καὶ 240 παλ., ἑκατέρα δὲ ἐκ τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι 1000 δακτ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ; (192 τετραγ. μ.).

4) Μέτρησις τῆς περιφερείας.

195. Ἐὰν κατασκευάσωμεν κύκλους, π.χ. ἐκ χαρτονίου, διαφόρων ἀκτίνων καὶ μετρήσωμεν μετὰ προσοχῆς τὴν περιφέρειαν καὶ τὴν διάμετρον ἑκάστου τούτων καὶ εἶτα διαιρέσωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου, εὑρίσκομεν, ὅτι ἕκαστον πηλίκον ὀλίγον διαφέρει τοῦ ἀριθμοῦ $3\ ^1/_7$.

Ἀποδεικνύεται δὲ θεωρητικῶς, ὅτι τὸ πηλίκον τοῦτο εἶναι 3,141592653...., παρίσταται δὲ εἰς τὰ συγγράμματα ὅλων τῶν ἐθνῶν διὰ τοῦ ἑλληνικοῦ γράμματος π. Εἰς τὰς συνήθεις ὅμως ἐφαρμογὰς λόγῳ εὐκολίας λαμβάνεται ὁ π ἴσο; πρὸς 3,14 ἢ 3,1416.

196. Καλοῦντες λοιπὸν Μ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, δ τὸ τῆς διαμέτρου καὶ α τὸ τῆς ἀκτῖνος ἔχομεν $\frac{M}{\delta} = \pi$.

$$\text{ὅθεν } M = \delta\pi \ (1) \text{ ἢ } M = 2\alpha\pi \ (2), \text{ ἤτοι :}$$

Ἵνα εὕρωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου ἐπὶ τὸ π=3,14 ἢ τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὸ 2π=6,28.

197. Ἐκ τῶν τύπων δὲ (1) καὶ (2) προκύπτουσιν οἱ τύποι

$$\delta = \frac{M}{\pi} \ (3) \text{ καὶ } \alpha = \frac{M}{2\pi} \ (4), \text{ ἤτοι :}$$

Ἵνα εὕρωμεν τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου ἢ τῆς ἀκτῖνος, διαιροῦμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἀντιστοίχως διὰ $\pi=3,14$ ἢ διὰ $2\pi=6{,}28$.

198. Μῆκος τόξου. Εὑρεῖν τὸ μῆκος τόξου 60^0 περιφερείας ἀκτῖνος 4,20 μετρ.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸ μῆκος τῆς ὅλης περιφερείας εἶναι :

$$M=2\pi\alpha=2\times3{,}14\times4{,}20$$

τὸ μῆκος δὲ τόξου 1^0 εἶναι $\frac{2\pi\alpha}{360}=\frac{2\times3{,}14\times4{,}20}{360}$

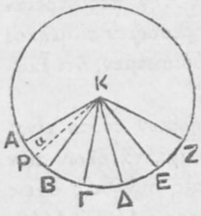
καὶ τόξου 60^0 εἶναι $\frac{2\pi\alpha.60}{360}=\frac{2\times3{,}14\times4{,}20\times60}{360}=4{,}396$ μ.,

ἤτοι :

Ἵνα εὕρωμεν τὸ μῆκος τόξου τινός, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 360.

5) *Μέτρησις τοῦ κύκλου.*

199. Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου Κ. Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ κτλ., αἵτινες διαιροῦσι τὸν κύκλον εἰς τοὺς τομεῖς ΚΑΒ, ΚΒΓ κτλ. Ὅσον δὲ τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ληφθῶσι μικρότερα ἐπὶ τοσοῦτον ἕκαστος τομεὺς (π.χ. ὁ ΚΑΒ) ὁμοιάζει πρὸς τρίγωνον ἔχον βάσιν τὸ τόξον ΑΒ καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνα ΚΡ=α. Διὰ τοῦτο τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τομέως ἰσοῦται (παραβ. § 188) πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἡμίσεος τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὸ τόξον του καὶ συνεπῶς τὸ ἐμβαδὸν ὅλων τῶν τομέων



Σχ. 211.

ἤτοι τοῦ κύκλου, ὅπερ καλοῦμεν Ε, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἡμίσεος τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν τόξων, ἤτοι ἐπὶ τὴν περιφέρειαν· ἑπομένως:

$$E=\frac{M\times\alpha}{2} \quad (1)$$

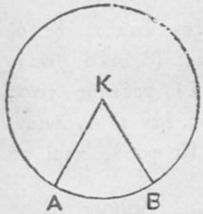
Ἐπειδὴ δὲ (§ 196) $M=2\pi\alpha$

ἔχομεν $E=\frac{M\times\alpha}{2}=\frac{2\pi\alpha.\alpha}{2}=\pi\alpha^2$ (2)· ὅθεν :

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν $\pi = 3,14$ ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος.

200. Ἐμβαδὸν τομέως. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸ ἐμβαδὸν οἱουδήποτε τομέως ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀντιστοίχου αὐτοῦ τόξου· ἤτοι:

ἐμβδ.τομ. $\text{KAB} = \frac{1}{2}$ α.τοξ AB.



Σχ. 212.

Ἐὰν ὅμως δὲν γνωρίζωμεν τὸ μῆκος τοῦ τόξου, ἀλλὰ μόνον τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν αὐτοῦ, π.χ. ὅτι εἶναι 60^0, τότε σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι $\pi\alpha^2$,

τὸ ἐμβαδὸν δὲ τομέως 1^0 εἶναι $\frac{\pi\alpha^2}{360}$

καὶ τὸ ἐμβαδὸν τομέως 60^0 εἶναι $\frac{\pi\alpha^2.60}{360}$· ἤτοι :

Ἵνα εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 360 (παραβ. § 198).

Ὑποθέτοντες δὲ $\alpha = 4,20$ ἔχομεν $\frac{\pi\alpha^2.60}{360} = 9,2316$ τετραγ.μ.

***201. Ἐμβαδὸν στεφάνης.** Ἵνα εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν στεφάνης (§ 119), ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ μείζονος κύκλου αὐτῆς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐλάσσονος.

Οὕτως ὑποθέτοντες τὰς ἀκτῖνας 5 μ. ἔχομεν $\pi.5^2 - \pi.3^2 = \pi.25 - \pi.9 = \pi(25-9) = \pi.16 = 3,14.16 = 50,56$ τετραγ. μ.

Ἐρωτήσεις καὶ ἀσκήσεις.

Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον καὶ πῶς παρίσταται ; Πρὸς τί λαμβάνεται ἴσος ὁ ἀριθμὸς π διὰ τὰς συνήθεις ἐφαρμογάς ; Ποῖος εἶναι ὁ τύπος, ὁ δίδων τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ; Πῶς ὑπολογίζομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἐκ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου ἢ τῆς ἀκτῖνος, καὶ ἀντιστρόφως, πῶς εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου ἢ τῆς ἀκτῖνος ἐκ τοῦ μήκους τῆς περιφερείας ; Πῶς ὑπολογίζομεν τὸ μῆκος τοῦ τόξου, οὗ εἶναι γνωστὸς ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν ; Διὰ ποίου τύπου ὑπολογίζομεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου ; Πῶς ὑπολογίζομεν τὸ ἐμβαδὸν τομέως, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ μῆκος τοῦ τόξου του καὶ πῶς, ὅταν γνωρίζωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν του; * Πῶς ὑπολογίζομεν τὸ ἐμβαδὸν στεφάνης ;

Περιφέρεια. 1) Πόσον μῆκος ὁδοῦ διέτρεξεν ἅμαξα, ἧς οἱ τροχοὶ ἀκτῖνος 5 παλ. ἐξετέλεσαν 1000 στροφάς; (3,1416 χιλ.).

2) Ἡ διάμετρος τοῦ βαρούλκου (μακαρᾶ) φρέατός τινος εἶναι 53 δακ. Πόσον εἶναι τὸ βάθος τοῦ φρέατος, ἐὰν τὸ σχοινίον, ἵνα φθάσῃ μέχρι τοῦ πυθμένος, ἐκτυλίσσεται 15 φορὰς περὶ τὸ βαροῦλκον ; (24,963 μ.).

3) Τὸ μῆκος τοῦ γηΐνου μεσημβρινοῦ εἶναι 40000000 μετρ. Ὑπολογίσαι τὴν ἀκτῖνα τῆς γῆς. (6366362 μ.).

4) 3 περιφέρειαι ἔχουσι μήκη ἀντιστοίχως 10,27 μ. 110,9 παλ. καὶ 1101 δακ. Ποίαν ἀκτῖνα δέον νὰ λάβῃ τις, ἵνα χαράξῃ περιφέρειαν ἴσην τῷ ἀθροίσματι τῶν 3 τούτων περιφερειῶν ; (5,1518 μ.).

5) Ὁ τροχὸς ἁμάξης τινὸς ἐκτελεῖ 10000 περιστροφάς, ἵνα διατρέξῃ ἀπόστασιν 15,708 χιλ. Ποία εἶναι ἡ διάμετρος αὐτοῦ ; (0,50 μ.).

6) Πόσον πρέπει νὰ εἶναι ἡ διάμετρος κατασκευασθησομένης κυκλικῆς τραπέζης δι' 9 ἄτομα, ἐὰν δι' ἕκαστον τούτων ἀπαιτεῖται τόξον 42 δακτ ; (1,20 μ.).

7) Οἱ ἐμπρόσθιοι τροχοὶ ἁμάξης ἔχουσιν ἀκτῖνα 675 γραμ. Ἐκτελοῦσι δὲ 25 περιστροφάς, καθ' ὃν χρόνον οἱ ὀπίσθιοι ἐκτελοῦσι 18. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περιφέρεια ἑνὸς ὀπισθίου τροχοῦ. (5,89 μ.).

Μῆκος τόξου. 8) Ἡ περιφέρεια κύκλου τινὸς εἶναι 274,8 παλ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τόξου 60^0 ; (4,58 μ.).

9) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος 1^0 τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς· (111111,111 μ.).

10) Πόσα μέτρα ἔχει τὸ ναυτικὸν μίλιον, ὅπερ εἶναι τὸ μῆκος 1' τοῦ γηΐνου μεσημβρινοῦ ; (1851,851 μ.).

11) Ζητεῖται τὸ μῆκος τόξου 15^0, εἶτα δὲ $50^0 30'$ ἐν περιφερείᾳ ἀκτῖνος 2 μ. (0,5236 μ. 1,763 μ.).

12) Τόξον $28^0 15' 30''$ ἔχει μῆκος 1125 δακ. Ποία εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας, εἰς ἣν ἀνήκει; (22,81 μ.).

13) Πόσων μοιρῶν εἶναι τόξον μήκους 12 μ. ἀνῆκον εἰς κύκλον ἀκτῖνος 30 παλ; $(229^0\ 17'\ 57' \frac{111}{157})$.

Κύκλος. 14) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια κύκλων ἐχόντων ἀντιστοίχως ἀκτῖνας 1, 2, 3, 10 μ. (3,1416 τετραγ. μ. 12,5664 τετραγ. μ. 28,2744 τετραγ. μ. 314,16 τετραγ. μ.).

15) Τετραγωνικὴ τράπεζα πλευρᾶς 2 μ. εἶναι ἐφωδιασμένη διὰ 2 ἡμικυκλίων ἐπιμηκύνσεων. Ποία εἶναι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τῆς τραπέζης ταύτης; (7,1416 τετρ. μ.).

16) Κύκλου τινὸς ἡ διάμετρος εἶναι 10 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ; (78,50 τετραγ. μ.).

17) Διὰ σχοινίου 54978 γραμ. περιβάλλει τις διαδοχικῶς ἐπιφάνειαν κυκλικήν, τετράγωνον καὶ ὀρθογώνιον, ἧς τὸ μῆκος εἶναι διπλάσιον τοῦ πλάτους. Ποία εἶναι ἡ μείζων τῶν ἐπιφανειῶν τούτων; κυκλικὴ 240,52875 τετραγ. μ., τετράγωνος 188,91 τετραγ. μ., ὀρθογώνιος 167,93 τετραγ. μ.).

*18) Ἐπί τινος ὀρθογωνίου λειμῶνος μήκους 95 μ. κατασκευάζει τις κυκλικὴν δεξαμενὴν ἀκτῖνος 12 μ. Δεδομένου ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς δεξαμενῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ 1)6 τῆς τοῦ λειμῶνος, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πλάτος τοῦ λειμῶνος. (28,572 μ.).

Τομεύς. 19) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως, οὗτινος τὸ τόξον εἶναι 60^0, ἡ δὲ ἀκτὶς 4 μ. (8,3733 τετρ. μ.).

*20) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως, οὗτινος τὸ τόξον γραφὲν δι' ἀκτῖνος 206 δακτ. εἶναι 24, 5 παλ. (2,5235 τετρ. μ.).

21) Ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τομέως $7^0 38'$ ἐν περιφερείᾳ μήκους 583,5 παλ; (5,7445 τετραγ. μ.).

*22) Ἡ ἐπιφάνεια τομέως εἶναι 4800 τετραγ. παλ. ἐν κύκλῳ ἀκτῖνος 25 μ. Πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ τόξον τοῦ τομέως; $(8^0 48'\ 18'')$.

23) Κυκλικὸν γήπεδον διαμέτρου 80 μ. πρόκειται νὰ διαιρεθῇ εἰς 8 ἴσους τομεῖς. Ζητεῖται τὸ μῆκος τοῦ τόξου ἑκάστου τομέως καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. (31,4 μ. 628 τετραγ. μ.).

***Στεφάνη.** 24) Ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς στεφάνης τῆς περιεχομένης μεταξὺ δύο περιφερειῶν, ἐχουσῶν διαμέτρους 9 παλαμ. καὶ 70 δακτ ; (0,2512 τετραγ. μ.).

*25) Πέριξ κυκλικοῦ λειμῶνος διαμέτρου 6 μ. πρόκειται νὰ θέσωμεν πλακόστρωτον στεφάνην πλάτους 75 δακ. Πόσαι πλάκες χρειάζονται ἀναλογοῦσαι 30 πλάκες κατὰ τετραγ. μετρ; (477 πλακ.).

6) Μέτρησις τῆς ἐπιφανείας καὶ τοῦ ὄγκου τῶν ἁπλουστάτων στερεῶν.

202. Θέλοντες νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον π.χ. τοίχου τινὸς δὲν δυνάμεθα βεβαίως νὰ εἰσαγάγωμεν ἐντὸς αὐτοῦ τὸ κυβικὸν μέτρον ἢ τὴν κυβικὴν παλάμην κλπ. καὶ νὰ μετρήσωμεν τοῦτον. Ὥστε ἡ ἄμεσος μέτρησις τοῦ ὄγκου εἶναι φυσικῶς ἀδύνατος.

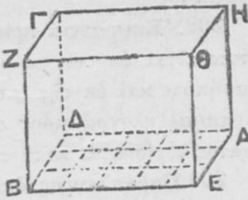
Θέλοντες δὲ νὰ εὕρωμεν τὴν χωρητικότητα δοχείου πληροῦμεν τοῦτο ὑγροῦ τινος καὶ μεταγγίζοντες τὸ ὑγρὸν διὰ τῆς λίτρας ἢ ἄλλης μονάδος χωρητικότητος εἰς ἕτερον δοχεῖον δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν χωρητικότητα τούτου. Ἀλλὰ τὸ τοιοῦτον εἶναι ἐπίπονον. Ὥστε ἡ ἄμεσος μέτρησις τῆς χωρητικότητος εἶναι μὲν δυνατή, ἀλλ' ἐπίπονος.

Διὰ τοῦτο, ὡς θὰ ἴδωμεν, ἡ μέτρησις τοῦ ὄγκου ἢ τῆς χωρητικότητος δὲν γίνεται, ὡς ἡ μέτρησις τῶν γραμμῶν, διὰ τῆς ἀμέσου μετρήσεως. Ἀλλ' ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἔχουσιν ἐπινοηθῆ τρόποι, δι' ὧν ἡ μέτρησις αὕτη ἀνάγεται εἰς μέτρησιν γραμμῶν τινων (§180,195) ἐκ τοῦ μήκους τῶν ὁποίων πορίζόμεθα δι' ὑπολογισμοῦ τὸν ὄγκον ἢ τὴν χωρητικότητα ἀκριβῶς, ὡς ἐγένετο ἐν τῇ μετρήσει τῶν ἐπιφανειῶν (§ 184).

Μέτρησις πρισμάτων.

203 Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον παρελληλεπίπεδον ΔΑΒΓ, οὗτινος αἱ διαστάσεις εἶναι ΔΑ=5 μ. ΔΒ=3 μ. καὶ ΔΓ=4 μ.

Τὸ ὀρθογώνιον ΔΒΕΑ δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς 5×3=15 τετρ. μ. (§ 185), ἐφ' ἑκάστου τῶν ὁποίων εἶναι δυνατὸν νὰ θέσωμεν στήλην ἐκ 4 κ. μ., ἵνα πληρωθῇ ὁλόκληρον τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον· ἑπομένως τοῦτο περιέχει 5×3×4=60 κ. μ.



Σχ. 213.

Ἐπειδὴ δὲ εἰς ὅμοιον ἐξαγόμενον φθάνομεν, οἱοιδήποτε καὶ ἂν ὦσιν οἱ τὰ μήκη τῶν διαστάσεων παριστῶντες ἀριθμοί, συνάγομεν ὅτι:

Ὁ ὄγκος παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν τριῶν αὐτοῦ διαστάσεων.

204. Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον δύο ἐκ τῶν διαστάσεων 5,3,4, οἷον τὸ 5×3, παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὑπ' αὐτοῦ ὁριζομένης ἕδρας ΔΒΕΑ, ἥτις δύναται νὰ ληφθῇ ὡς βάσις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ὁ δὲ τρίτος ἀριθμὸς 4 παριστᾷ τότε τὸ ὕψος, συνάγεται ὅτι ὁ ἀνωτέρω κανὼν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ οὕτως:

Ὁ ὄγκος παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ (τοῦ ἐμβαδοῦ) τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

***205.** Ὁ κανὼν οὗτος ἀληθεύει οὐ μόνον διὰ τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα, ἀλλὰ καὶ δι' οἱονδήποτε παραλληλεπίπεδον ὀρθὸν ἢ πλάγιον (§ 102).

Ἐὰν π.χ. ἡ βάσις ὀρθοῦ ἢ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 6 τετραγ. μ. καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ εἶναι 4 μ., ὁ ὄγκος τούτου θὰ εἶναι 6×4=24 κ. μ. Ἵνα δὲ πεισθῶμεν περὶ τούτου, κατασκευάζομεν δοχεῖον τοιούτου σχήματος καὶ τοιούτων διαστάσεων. Ἐὰν δὲ πληρώσωμεν τοῦτο ὑγροῦ τινος καὶ μεταγγίσωμεν τὸ ὑγρὸν εἰς ἕτερον δοχεῖον διὰ τῶν μονάδων χωρητικότητος, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου εἶναι 24 κ. μ. (παραβ. § 202).

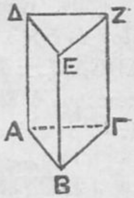
206. Ὄγκος κύβου. Ὁ κύβος εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, οὗ αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι ἴσαι (§70, 102). Ἑπομένως ὁ ὄγκος κύβου, οὗτινος ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος 4 μ., εἶναι 4×4×4 ἢ 4^3 κ. μ. Διὰ τοῦτο δὲ ἡ τρίτη δύναμις ἀριθμοῦ καλεῖται καὶ κύβος αὐτοῦ.

207. Ὄγκος πρίσματος. Ὁμοίως διὰ μεταγγίσεως (§ 202, 502) ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ ὄγκος οἱουδήποτε πρίσματος ὀρθοῦ ἢ πλαγίου (§ 100) ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

208. Ἐπιφάνεια πρίσματος. Ἡ ἐπιφάνεια παντὸς πρίσματος ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων, ἅτινα εἶναι πολύγωνα οἱαδήποτε καὶ ἐκ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας, ἥτις συνίσταται ἐκ παραλληλογράμμων· συνεπῶς τὸ ἐμβαδὸν τῶν ἑδρῶν τοῦ πρίσματος εὑρίσκεται κατὰ τὰ ἐν § 185—193 εἰρημένα.

209. Παράπλευρος ἐπιφάνεια ὀρθοῦ πρίσματος. Ἐὰν ὅμως τὸ πρίσμα εἶναι ὀρθόν, τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου αὐτοῦ ἐπιφανείας εὑρίσκεται εὐκολώτερον ὡς ἑξῆς :

Ἔστω τὸ ὀρθὸν τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ, οὗ αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως εἶναι 5 μ., 6 μ. καὶ 4 μ., τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ (ὡς καὶ αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ § 82) εἶναι 10 μ.

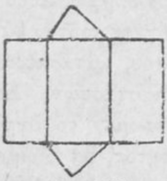


Σχ. 214.

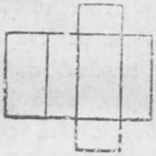
Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ὀρθοῦ πρίσματος ἀποτελεῖται ἐξ ὀρθογωνίων (§ 81), ὧν ἑκάστου τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν δύο αὐτοῦ διαστάσεων, ἤτοι 5.10+6.10+4.10 ἢ (5+6+4).10· ὅθεν

Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ὀρθοῦ πρίσματος εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

210. Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια ὀρθοῦ πρίσματος διακρίνεται σαφῶς


Σχ. 215.

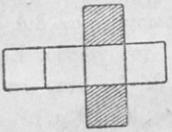

Σχ. 216.


Σχ. 217.

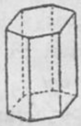
ἐὰν φαντασθῶμεν αὐτὴν ἀναπτυσσομένην ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε τὰ ὀρθογώνια τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας νὰ τεθῶσιν εἰς σειρὰν ἔχοντα ἀνὰ δύο ἐφεξῆς κοινὰ τὰ ὕψη, αἱ δὲ βάσεις νὰ ἀναπτυχθῶσιν ἑκατέρωθεν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας, ὡς φαίνεται εἰς τὰ παρατιθέμενα σχήματα, ὧν τὰ μὲν σχ. 214

216,218,220 παριστῶσιν ἀντιστοίχως ὀρθὸν τριγωνικὸν πρίσμα, ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, κύβον καὶ κανονικὸν ἑξαγωνικὸν πρίσμα (§ 143), τὰ δὲ σχ. 215, 217, 219, 221, τὴν ὁλικὴν τούτων ἐπιφάνειαν ἀνεπτυγμένην ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

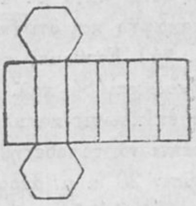
Σχ. 218.



Σχ. 219.



Σχ. 220.



Σχ. 221.

Ἀντιστρόφως δὲ κόπτοντες χαρτόνιον κατὰ τὰ ἀνωτέρω σχήματα καὶ διπλοῦντες τοῦτο καταλλήλως δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὰ ἀντίστοιχα ὀρθὰ πρίσματα.

Σημ. Κατὰ τὰς τοιαύτας δὲ κατασκευὰς δέον νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τὰ ἐν § 152 προβλ. 5ον καὶ 14ον, τὰ ἐν § 179 ἀσκ. 17 σημ. καὶ τὰ ἐν § 155,2.

Ἐρωτήσεις καὶ ἀσκήσεις.

Πῶς γίνεται ἡ μέτρησις τοῦ ὄγκου τῶν στερεῶν ἢ τῆς χωρητικότητος δοχείου δι' ἀμέσου ἢ δι' ἐμμέσου μετρήσεως καὶ διατί ; *Πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος οἱουδήποτε παραλληλεπιπέδου ; Διατί ἡ τρίτη δύναμις ἀριθμοῦ καλεῖται καὶ κύβος ; Πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος οἱουδήποτε πρίσματος ὀρθοῦ ἢ πλαγίου ; Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας οἱουδήποτε πρίσματος ;

Ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα.—1) Πρὸς λιθόστρωσιν ὁδοῦ μήκους 2 χιλ. καὶ πλάτους 6,50 μ. γίνεται χρῆσις τεθραυσμένων λίθων πρὸς 5,50 δρχ. τὸ κυβ. μετρ. Ποία ἔσεται ἡ δαπάνη, ἐὰν τὸ πάχος τῆς λιθοστρώσεως εἶναι 25 δακτ ; (17875 δρχ.).

2) Δεξαμενὴ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. οὗτινος αἱ διαστάσεις εἶναι 8 μ. 6 μ. καὶ 54 παλ. Πόσας ὀκάδας ὕδατος χωρεῖ ἡ δεξαμενὴ καὶ πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται, ἵνα πληρωθῇ ὑπὸ κρουνοῦ δίδοντος 15 ὀκ. εἰς 1' ; (202500 ὀκ., 9 ἡμ. 9 ὥρ.).

3) Πρόκειται νὰ ἀνοιχθῇ τάφρος σχήματος ὀρθογωνίου

παραλληλεπιπέδου καὶ διαστάσεων 1025 δακ., 5 μ. καὶ 4 μ. Πόσα ἁμάξια ἀπαιτοῦνται πρὸς μεταφορὰν τοῦ ἐξαχθησομένου χώματος, δεδομένου ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ἐκ τῆς ἐκσκαφῆς προερχομένου χώματος εἶναι κατὰ τὸ 1)5 μείζων τοῦ ὄγκου, ὃν κατεῖχε πρὸ τῆς ἐκσκαφῆς καὶ ὅτι ἕκαστον ἁμάξιον χωρεῖ 3 κ. μ ; (82 ἁμάξ.)

*4) Ἐπιθυμεῖ τις νὰ κατασκευάσῃ κοιτῶνα ἔχοντα 19 μ. μῆκος καὶ 84 παλ. πλάτος καὶ προωρισμένον διὰ 30 μαθητάς. Ἡ ἐπίπλωσις καταλαμβάνει τὰ 5)60 τοῦ χώρου. Εἰς ποῖον ὕψος πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἡ ὀροφή, ἵνα δι' ἕκαστον μαθητὴν ἀναλογοῦσιν 20 κ. μ. ἀέρος πρὸς ἀναπνοήν ; (4,10 μ.).

*5) Αὐλή τις ἔχει σχῆμα τραπεζίου, οὗτινος αἱ βάσεις εἶναι 22 μ. καὶ 19 μ. καὶ τὸ ὕψος 15 μ. Ἐπ' αὐτῆς διεσκόρπισέ τις 6 κ. μ. ἄμμου. Ποῖον εἶναι τὸ πάχος τοῦ στρώματος τῆς ἄμμου ; (0,0195 μ.).

6) Πόσοι ὀπτόπλινθοι (τοῦβλα) ἀπαιτοῦνται, ἵνα κτίσωμεν τοῖχον διαστάσεων 9μ. 8 παλ. καὶ 6 μ., ἑκάστης ὀπτοπλίνθου ἐχούσης διαστάσεις 2 παλ. 1 παλ. καὶ 3 δακτ. συμπεριλαμβανομένης καὶ τῆς ἀμμοκονίας ; (72000).

*7) Δρυΐνη δοκὸς μήκους 10 μ. καὶ τομῆς τετραγωνικῆς ἐχούσης πλευρὰν 8 παλαμ. κόπτεται εἰς σανίδας 4 δακτ. πάχους. Ποία εἶναι ἡ ἀξία τῶν σανίδων τούτων πρὸς 3 δρχ. τὸ γραμμικὸν μέτρον καὶ ποίαν ἐπιφάνειαν δύναταί τις νὰ καλύψῃ δι' ὅλων τῶν σανίδων τούτων ; (600 δρχ. 160 τετραγ. μ.).

Κύβοι.—8) Κλειστὸν κυβικὸν κυτίον 10 δακτυλ. πλευρᾶς κατεσκευάσθη διὰ ξύλου πάχους 1 δακτ. Πόσοι κυβικοὶ δάκτυλοι εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ξύλου τούτου ; (488 κ. δακ.).

9) Πόσους κύβους παιγνιδίου τῶν 12 γρ. πλευρᾶς δύναταί τις νὰ τοποθετήσῃ εἰς κυβικὸν κυτίον 24 δακτ. ἐσωτερικῆς πλευρᾶς ; (8000).

Ὁλικὴ καὶ παράπλευρος ἐπιφάνεια.—10) Ἐπιθυμεῖ τις νὰ καλύψῃ δι' ἐριούχου 65 δακ. πλάτους, στοιχίζοντος 12,50 δρχ. τὸ γραμμικὸν μέτρον, τὰς ἐσωτερικὰς παρειὰς κιβωτίου μήκους 225 δακ. πλάτους 9 παλ. καὶ ὕψους 9 παλ. Ποία ἔσεται ἡ δαπάνη ; (247,50 δρχ.).

11) Δωμάτιον ἔχει μῆκος 8 μ., πλάτος 6 μ. καὶ ὕψος 54 παλ. Ὑπάρχουσι δὲ ἐν αὐτῷ μία θύρα διαστάσεων 2 μ. καὶ 1,20 μ. καὶ 2

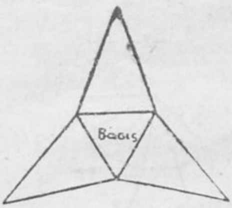
παράθυρα διαστάσεων 14 παλ. καὶ 8 παλ. Πόσον θὰ στοιχίσῃ ὁ χρωματισμὸς τοῦ δωματίου τούτου, ὑπολογιζομένου πρὸς 1.80 δρχ. τὸ τετραγ. μ. τῆς ὀροφῆς καὶ 0,50 δρχ. τὸ τετραγ. μ. τῶν τοίχων ; (159,68 δρχ.).

12) Ποία εἶναι ἡ ὁλικὴ ἀξία λαξευτοῦ λίθου κυβικοῦ σχήματος πλευρᾶς 65 δακτ.,ὑπολογιζομένου πρὸς 7,75 δρχ. τὸ κυβικὸν μέτρον καὶ τῆς λαξεύσεως πρὸς 1,25 δρχ. τὸ τετραγ. μ.; (5,27 δρχ.).

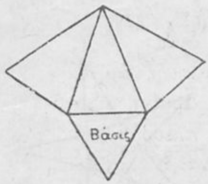
13) Κανονικὸν πρίσμα 1 μ. ὕψους ἔχει βάσιν ἑξάγωνον πλευρᾶς 5 παλ. Ποία εἶναι ἡ παράπλευρος αὐτοῦ ἐπιφάνεια; (3 τετρ. μ.).

Μέτρησις πυραμίδος.

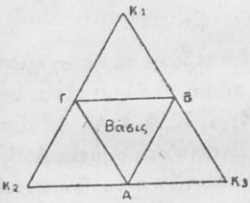
211. Ὄγκος πυραμίδος. Κατασκευάζομεν ἐκ πλαστικῆς ὕλης (κηροῦ, στόκου, γύψου, γεωμήλου κλπ.) πυραμίδα καὶ πρίσμα ἔχοντα βάσεις καὶ ὕψη ἴσα·ἐὰν ζυγίσωμεν αὐτά, θὰ παρατηρήσωμεν



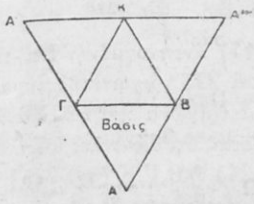
Σχ. 222.



Σχ. 223.



Σχ. 224.



Σχ. 225.

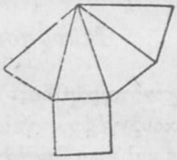
ὅτι ἡ πυραμὶς ἔχει βάρος τὸ τρίτον τοῦ βάρους τοῦ πρίσματος· ἑπομένως καὶ ὁ ὄγκος αὐτῆς εἶναι τὸ 1)3 τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος· ὅθεν :

Ὁ ὄγκος πάσης πυραμίδος εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους της.

212. Ἐπιφάνεια πυραμίδος. Ἡ ἐπιφάνεια πάσης πυραμίδος ἀποτελεῖται ἐκ τῆς βάσεως αὐτῆς, ἥτις εἶναι πολυγωνόν τι καὶ ἐκ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας, ἥτις συνίσταται ἐκ τριγώνων· συνεπῶς τὸ ἐμβαδὸν τῶν ἑδρῶν τῆς πυραμίδος εὑρίσκεται κατὰ τὰ ἐν § 185—193.

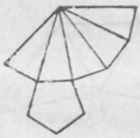
213. Τὰ παρατιθέμενα σχήματα 222 καὶ 223, 226 καὶ 227, 228 καὶ 229 παριστῶσιν ἀντιστοίχως τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν κανονικῆς τριγωνικῆς, τετραγωνικῆς καὶ πενταγων. πυραμίδος

Σχ. 226.



Σχ. 227.

Σχ. 228.



Σχ. 229.

(§ 144) ἀνεπτυγμένην ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὰ δὲ σχήματα 224 καὶ 225 τριγωνικῆς πυραμίδος, ἧς πᾶσαι αἱ ἕδραι εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα καὶ ἧς τὸ ἀνάπτυγμα $K_1 K_2 K_3$ ἢ Α Α′ Α″ ἀποδεικνύεται, ὅτι ἀποτελεῖ ἰσόπλευρον τρίγωνον, οὗ τὰ σημεῖα Α,Β,Γ (σχ. 224) ἢ Β,Γ,Κ (σχ. 225) εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Ἀντιστρόφως δὲ κόπτοντες χαρτόνιον κατὰ τὰ ἀνωτέρω σχήματα καὶ διπλοῦντες τοῦτο καταλλήλως δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὰς ἀντιστοίχους πυραμίδας (παραβ. § 210).

Σημ. Τὸ σχῆμα 224 θὰ κατασκευασθῇ κατὰ τὰ ἐν § 152 προβλ. 14ον, λαμβανομένων καὶ τῶν 3 πλευρῶν ἴσων πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς ζητουμένης ἀκμῆς τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος.

Ἀσκήσεις.

1) Πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον 30 δακτ. πλευρᾶς καὶ ὕψος 9 παλαμ. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτῆς ; (27 κ. παλ.).

2) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος πυραμίδος, ἧς τὸ μὲν ὕψος εἶναι 75 δακτ., ἡ δὲ βάσις εἶναι τρίγωνον ἔχον βάσιν 4 παλαμ. καὶ ὕψος 0,25 μ. (0,0125 κ. μ.).

3) Εὑρεῖν τὸν ὄγκον πυραμίδος, ἧς τὸ μὲν ὕψος εἶναι 6 μ., ἡ δὲ βάσις εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον, οὗτινος ἡ πλευρὰ εἶναι 5 παλ. καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν 433 γρ. (1,299 κ. μ.).

4) Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος πυραμίδος, ἧς τὸ μὲν ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι 4350 τετραγ. παλ., ὁ δὲ ὄγκος 104, 84 κ. μ ; (7,23 μ.)

5) Ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως πυραμίδος, ἧς ὁ ὄγκος εἶναι 35028 κ. δ. καὶ τὸ ὕψος 9 παλ ; (116,76 τετρ. μ.).

6) Ποία εἶναι ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια κανονικῆς πυραμίδος, ἐχούσης βάσιν ἑξάγωνον πλευρᾶς 35 δακτ. καὶ ὕψος τῶν παραπλεύρων τριγώνων 830 γρ ; (0,8715 τετρ. μ.).

7) Στέγη σχήματος κανονικῆς πυραμίδος ἔχει βάσιν τετράγωνον 26 μ. περιμέτρου. Τὸ δὲ ὕψος τῶν παραπλεύρων τριγώνων εἶναι 72 παλ. Τί θὰ στοιχίσῃ ἡ ἐπιστέγασις πρὸς 4 δρχ. τὸ τετρ. μ. 374,4 δρχ.).

Μέτρησις κυλίνδρου.

214. Πᾶς κύλινδρος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὀρθὸν πρίσμα οὗτινος ἡ βάσις εἶναι κανονικὸν πολύγωνον ἔχον ἄπειρον ἀριθμὸν πλευρῶν. Ἑπομένως (§ 207,209) ἔχομεν ὅτι :

1) Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἤτοι, ἐὰν καλέσωμεν α τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως ΑΒ καὶ υ τὸ ὕψος αὐτοῦ ΑΓ, ἔχομεν ὅτι :

$$\text{ὀγκ. κυλινδρ.} = \pi\alpha^2\upsilon.$$

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κυλίνδρου εὑρίσκεται ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ· ἤτοι.

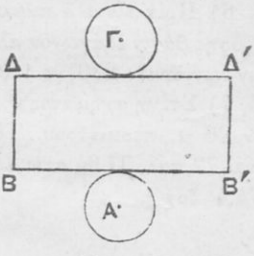
παρ. ἐπιφ. κυλινδρ.$=2\pi\alpha.\upsilon$

Ἐὰν δὲ εἰς ταύτην προσθέσωμεν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τῶν δύο κύκλων, οἵτινες ἀποτελοῦσι τὰς βάσεις αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου $2\pi\alpha\upsilon+2\pi\alpha^2$.

Σχ. 230.

Κατὰ ταῦτα ὑποθέτοντες $\alpha=3$ μ. καὶ $\upsilon=8$ μ. ἔχομεν ὀγκ. κυλινδρ.$=3{,}14.3^2.8=226{,}08$ κ.μ. καὶ ὁλικ. ἐπιφ. $=2.3{,}14.\,3.8+2.3{,}14.\,3^2=150{,}72+56{,}52=207{,}24$ τ. μ.

215. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου δύναται νὰ ἀναπτυχθῇ ἅπασα ἐπὶ ἐπιπέδου. Καὶ ἡ μὲν τῶν βάσεων ἥτις εἶναι ἐπίπεδος ἀναπτύσσεται δι' ἁπλῆς ἐπιθέσεως εἰς δύο ἴσους κύκλους Α καὶ Γ, ἡ δὲ παράπλευρος, ἥτις εἶναι καμπύλη, ἀναπτύσσεται ὡς ἑξῆς. Ὑποθέσωμεν, ὅτι αὕτη εἶναι κεκαλυμμένη διὰ φύλλου χάρτου· σχίζοντες τοῦτο κατὰ μίαν γενέτειραν, π. χ. τὴν ΒΔ (σχ. § 214), καὶ ἀναπτύσσοντες ἐπὶ ἐπιπέδου λαμβάνομεν ὀρθογώνιον ΒΒ'Δ'Δ, οὗτινος αἱ βάσεις εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς περιφερείας τῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου, τὸ δὲ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ κυλίνδρου.



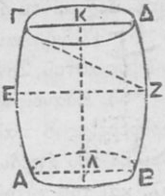
Σχ. 231.

Ἐνταῦθα δὲ φαίνεται σαφέστερον ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἰσοῦται τῇ περιφερείᾳ τῶν βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος (§ 214, 2).

Ἀντιστρόφως δέ, ἵνα κατασκευάσωμεν κύλινδρον διὰ χαρτονίου, χαράσσομεν ἐπ' αὐτοῦ ὀρθογώνιόν τι ΒΒ'Δ'Δ καὶ δύο ἴσους κύκλους ἔχοντας περιφέρειαν ἴσην τῇ βάσει τοῦ ὀρθογωνίου, ὅπερ ἐπιτυγχάνεται, ἐὰν γραφῶσιν οἱ κύκλοι δι' ἀκτῖνος ἴσης τῷ πηλίκῳ τοῦ μήκους τῆς βάσεως διὰ $2\pi=6{,}28$ (§197). Συναρμόζοντες δὲ εἶτα ταῦτα καταλλήλως λαμβάνομεν κύλινδρον.

Ὑπολογισμὸς τῆς χωρητικότητος βυτίου (κ. βαρελίου).

216. Ὑπάρχουσι πολλαὶ μέθοδοι πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς χωρητικότητος βυτίου. Ἡ ἁπλουστέρα συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἐξομοιώσωμεν αὐτὸ πρὸς κύλινδρον ἔχοντα ὕψος τὴν ἐσωτερικὴν ἀπόστασιν ΚΛ τῶν δύο βάσεων τοῦ βυτίου καὶ διάμετρον τὸν μέσον ὅρον τῆς μεγίστης διαμέτρου ΕΖ καὶ τῆς ἐλαχίστης, ἤτοι τῆς τῶν βάσεων ΑΒ ἢ ΓΔ.



Σχ. 232.

Οὕτως ὑποθέτοντες ΚΛ=0,90, ΕΖ=0, 60 μ. καὶ ΑΒ=0,51 μ. ἔχομεν μέσην διάμετρον

$$\frac{0,60+0,51}{2}=\frac{1,11}{2}=0,555 \text{ μ.}$$

καὶ ἀκτῖνα 0,2775 μ.

Ὅθεν ὄγκ. βυτ. $=3,14.0,2775^2.0,9=0,2176196625$ κ. μ.

Σημ. Εἰς τὰ τελωνεῖα μεταχειρίζονται τὸν τύπον $0,525\times\delta^3$, ἔνθα δ παριστᾷ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου ΓΖ. Οἷον ὑποθέτοντες ΓΖ =6 παλ. ἔχομεν ὄγκ. βυτ.$=0,525\times6^3=113,400$ κ. παλ. Εἰς ἑκάστην δὲ τιμὴν τῆς ΓΖ ἀντιστοιχεῖ καὶ μία τιμὴ τοῦ ὄγκου. Διὰ τῶν τιμῶν δὲ τούτων βαθμολογοῦσι μίαν ῥάβδον, ἣν εἰσάγοντες εἰς τὸ βυτίον κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΓΖ ἀναγιγνώσκουσιν ἀμέσως τὴν χωρητικότητα αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις.

Ὄγκος.—1) Δι' ὀρθογωνίου φύλλου χαρτονίου διαστάσεων 12 δακ. καὶ 25 δακτ. πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν κύλινδρον 2,5 παλ. ὕψους. Ποῖος θὰ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου τούτου; (286, 44 κ. μ.).

2) Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος κτιστοῦ κατασκευάσματος φρέατος, οὗτινος ἡ ἐξωτερικὴ διάμετρος εἶναι, 2 μ., τὸ πάχος 3 παλ. καὶ τὸ βάθος 950 δακ. καὶ πόσον στοιχίζει πρὸς 15 δραχ. τὸ κυβικὸν μέτρον; (15,219 κ. μ. 228.28 δρχ.).

3) Πόσα κυβικὰ μέτρα οἰκοδομησίμων λίθων ἀπαιτοῦνται, ἵνα κατασκευάσωμεν τοῖχον 8 μ. μήκους, 4 μ. ὕψους καὶ 5 παλ. πάχους, ἐν τῷ ὁποίῳ ἔχουσι τοποθετηθῆ δύο κυκλικὰ ἀνοίγματα διαμέτρου 1 μετρ. (15,2146 κ. μ.).

* 4) Θέλει τις νὰ κατασκευάση κυλινδρικὴν δεξαμενὴν περιέχουσαν 10 κ. μ. ὕδατος. Πόσον βάθος πρέπει νὰ δώσωμεν αὐτῇ δεδομένου ὅτι ἡ διάμετρος αὐτῆς εἶναι 4 μ.; (0,796 μ.).

5) Τί γίνεται ὁ ὄγκος κυλίνδρου, ἐὰν διπλασιάσωμεν 1ον) τὸ ὕψος αὐτοῦ, 2ον)τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεώς του; (διπλασ. τετραπλ.).

*6) Ἐδανείσθη τις παρ' ἄλλου ἔλαιον εἰς κυλινδρικὸν δοχεῖον περιφερείας 8 παλ. καὶ ὕψους 50 δακτ. Πρὸς ἐξόφλησιν δὲ τῆς ὀφειλῆς του ἀπέδωκε 2 κυλινδρικὰ δοχεῖα ἐλαίου περιφερείας 4 παλ. καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους. Ἀπέδωκε τὴν δανεισθεῖσαν ποσότητα; (ὄχι· μόνον τὸ ἥμισυ).

Ἐπιφάνεια.—7) Κύλινδρος ἔχει ὕψος 2 μ. καὶ βάσιν κύκλον ἀκτῖνος 1 παλ. Ζητεῖται 1ον) ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, 2ον) ἡ ὁλικὴ αὐτοῦ ἐπιφάνεια. (1,256 τ. μ, 1,3188 τ. μ).

8) Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια κυλίνδρου διαμέτρου 869 δακτ. εἶναι 12894 5 τ. παλ. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ; (4,583 μ.).

9) Ποία εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κυλίνδρου, οὗτινος τὸ ὕψος εἶναι 12 παλ. καὶ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια 0,6 τ.μ; (0,0795 μ.).

10) **Βυτίον.**—Ποία ἡ χωρητικότης βυτίου ὕψους 3μ., οὗτινος ἡ μὲν διάμετρος τοῦ μέσου εἶναι 16 παλ., ἡ δὲ τῶν βάσεων 1.2 μ; (4,6158 κ. μ ἢ 3606 ὀκ. 37,5 δραμ).

Μέτρησις κώνου.

217. Ὄγκος κώνου. Πᾶς κῶνος, οἷον ὁ ΚΒΓ, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κανονικὴ πυραμίς, ἧς ἡ βάσις εἶναι κανονικὸν πολύγωνον, ἔχον ἄπειρον ἀριθμὸν πλευρῶν· ὅθεν :

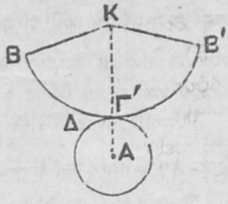
Σχ. 233.

Ὁ ὄγκος τοῦ **κώνου** εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους (παραβλ. § 211).

Ἤτοι καλοῦντες ΑΒ=α καὶ ΑΚ=Υ ἔχομεν

$$\text{ὄγκ. κων.} = \frac{\pi\alpha^2\upsilon}{3}$$

218. Ἐπιφάνεια κώνου. Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι κεκαλυμμένη διὰ φύλλου χάρτου· ἐὰν τμήσωμεν τοῦτον κατὰ μίαν γενέτειραν, π. χ. τὴν ΚΒ (σχ. § 233), καὶ ἀναπτύξωμεν ἐπὶ ἐπιπέδου, προκύπτει τὸ σχῆμα ΚΒΔΒ′, ὅπερ εἶναι τομεύς, καθόσον πᾶσα γενέτειρα, π. χ. ἡ ΚΓ ἀναπτύσσεται κατὰ μίαν εὐθεῖαν ΚΓ′, τοῦ αὐτοῦ μήκους καὶ συνεπῶς πάντα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ΒΓΔ ἀναπτύσσονται εἰς τόξον κύκλου ΒΔΒ′ ἀκτῖνος ΚΒ καὶ μήκους ἴσου πρὸς τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως. Ἀλλὰ



Σχ. 234.

(§ 200) ἐμβδ. τομ. ΚΒΔΒ′ = τοξ. ΒΔΒ′. $\frac{1}{2}$ ἀκτιν. ΚΒ,

συνεπῶς παρ. ἐπιφ. κων. = περιφ. ΒΓΔ. $\frac{1}{2}$ πλευρ. ΚΒ· ὅθεν :

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κώνου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του.

Ἤτοι καλοῦντες ΚΒ=λ ἔχομεν παρ. ἐπιφ. κων.$=2\pi\alpha.\frac{1}{2}\lambda=\pi\alpha\lambda$.

Ἐὰν δὲ εἰς τὴν παράπλευρον προσθέσωμεν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεως, θὰ ἔχωμεν τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου $\pi\alpha\lambda+\pi\alpha^2$

Ἡ βάσις δέ, ἥτις εἶναι ἐπίπεδος, ἀναπτύσσεται δι᾽ ἁπλῆς ἐπιθέσεως εἰς τὸν κύκλον Α.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν ὑποθέτοντες $\alpha=5$ καὶ $\upsilon=12$, ὅτε $\lambda=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13$ (§194), ἔχομεν.

$$\text{ὄγκ. κων.} = \frac{3{,}14.5^2.12}{3}=314 \text{ κ. μ.}$$

καὶ ὁλικ. ἐπιφ. κων.$=3{,}14.5.13+3{,}14.5^2=204{,}10+78{,}5=282{,}60$ τ. μ.

Σημ. Ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν κατασκευάσωμεν ἐκ χαρτονίου τομέα τινὰ ΚΒΒ′ καὶ κύκλον ἔχοντα περιφέρειαν ἴσην πρὸς τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΒΔΒ′ τοῦ τομέως (παραβλ. § 215) καὶ συναρμόσωμεν ταῦτα καταλλήλως, λαμβάνομεν κῶνον.

***219. Ὄγκος κολούρου κώνου.** Ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου ὄγκ. κολ. κων.$=(A^2+\alpha^2+A\alpha)\ \pi.\frac{\upsilon}{3}$ ἔνθα Α καὶ α παριστῶσι τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου καὶ υ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ὑποθέτοντες δὲ Α=3μ. α=2 μ. και υ=6μ. ἔχομεν.

ὄγκ. κολ. κων.$=(3^2+2^2+2.3).3,14\cdot\frac{6}{3}=19.3,14.2=119,320$κ.μ.

Σημ. Δοχεῖα δὲ ἔχοντα σχῆμα κολούρου κώνου, τῶν ὁποίων ὁ ὄγκος εὑρίσκεται κατὰ τὸν ἀνωτέρω τύπον, εἶναι κάδοι ἀρυτῆρες (κουβάδες), λεκάναι, ποτήρια κλπ.

Ἀσκήσεις.

Ὄγκος.— 1) Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος κώνου, οὗτινος τὸ ὕψος εἶναι 9 μ., ἡ δὲ περιφέρεια τῆς βάσεως 8,46 μ;(17,095128 κ.μ.).

2) Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος κώνου, οὗτινος ὁ ὄγκος εἶναι 760 κ. παλ. καὶ ἡ διάμετρος τῆς βάσεως 1,30 μ; (1,695 μ.).

3) Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος κώνου, οὗτινος ἡ πλευρὰ εἶναι 8μ· καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως 20 παλ.; (32. 430 κ. μ.).

4) Τί γίνεται ὁ ὄγκος κώνου, ἐὰν διπλασιάσωμεν 1ον) τὸ ὕψος αὐτοῦ, 2ον) τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεώς του ; (διπλασιαζ. τετραπλασ.).

Ἐπιφάνεια.—5) Πόση εἶναι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια κώνου, οὗτινος ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 4 παλ. καὶ τὸ ὕψος 3 μ; (4,30 τ.μ.)

6) Πύργου κυλινδρικοῦ ἔχοντος διάμετρον 4 μ. ὑπέρκειται στέγη κωνική, ἧς ἡ πλευρὰ εἶναι 38 παλ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀξία τῆς διὰ πλακῶν ἐπιστεγάσεως πρὸς 4,60 δρχ. τὸ τ.μ. (109,83 δρχ).

***Κάδος.**—7) Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος κάδου ἔχοντος σχῆμα κολούρου κώνου, οὗτινος τὸ ὕψος εἶναι 1,53 μ. καὶ αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων 16 δακτ. καὶ 2 παλ; (0,156296640 κ. μ.).

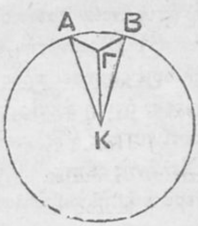
Μέτρησις σφαίρας.

220. Ἐπιφάνεια σφαίρας. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ἀποδεικνύεται θεωρητικῶς ὅτι ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν 4 μεγίστων κύκλων αὐτῆς. Ἤτοι παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\varepsilon=4\pi\alpha^2$ ἔνθα α εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.

Ὑποθέτοντες δὲ $\alpha=5$ ἔχομεν $\varepsilon=4.3{,}14.\ 5^2=314$ τ. μ.

Παρατ. Ἡ ἀπόδειξις τῆς ἄνω προτάσεως δὲν εἶναι εὔκολος, ὅπως διὰ τὸν κύλινδρον (§ 214,215) καὶ κῶνον (218), διότι αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ κυλίνδρου καὶ κώνου εἶναι ἀναπτυκταί, ἤτοι ἐκτυλισσόμεναι ἐφαρμόζουσι καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν αὐτῶν ἐπὶ ἐπιπέδου, ἐνῷ τὸ τοιοῦτο δὲν συμβαίνει διὰ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ἐκτὸς ἐὰν σχίσωμεν ἢ συμπτύξωμεν τὰ μέρη αὐτῆς.

221. **Ὄγκος σφαίρας.** Ἔστω ἡ σφαῖρα Κ. Συνδέοντες δι' εὐθειῶν τὸ κέντρον αὐτῆς Κ μετὰ τριῶν σημείων Α,Β,Γ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς, πολὺ πλησίον ἀλλήλων κειμένων, λαμβάνομεν τὸ στερεὸν ΚΑΒΓ, ὅπερ δύναται νὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς πυραμίδα, ἔχουσαν βάσιν τὴν ἐπιφάνειαν ΑΒΓ καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, ἧς πυραμίδος ὁ ὄγκος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς βάσεώς της ΑΒΓ ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους αὐτῆς, ἤτοι τῆς ἀκτῖνος.



Σχ. 235.

Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν τὴν σφαῖραν διῃρημένην εἰς πολλὰς τοιαύτας πυραμίδας, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεών των, ἤτοι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς. ὅθεν :

Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνός της.

Ἤτοι παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου ὄγκ. σφαιρ. $=4\pi\alpha^2.\frac{1}{3}\alpha=\frac{4}{3}\pi\alpha^3$.

Ὑποθέτοντες δὲ $\alpha=5$ μ. ἔχομεν ὄγκ. σφαίρ. $=\frac{4}{3}.\ 3{,}14.\ 5^3=$ 523,333 . . . κ. μ.

Ἀσκήσεις.

1) Τίς ἡ ἐπιφάνεια καὶ τίς ὁ ὄγκος σφαίρας ἐχούσης ἀκτῖνα 21 παλ; (55,3896 τ. μ. 38,772 72 κ. μ.).

2) Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ καλύμματος ἀεροστάτου ἀκτῖνος 4 μ. πρὸς 25 δρχ. τὸ τ. μ; (5026,56 δρχ).

3) Πύργος κυλινδρικὸς περατούμενος ἄνωθεν εἰς ἡμισφαίριον

ἔχει ἐσωτερικὴν ἀκτῖνα 375 δακτ. καὶ ὕψος 69 παλ. μέχρι τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ σφαιρικοῦ μέρους. Ζητεῖται πόσον θὰ στοιχίσῃ τὸ ἐσωτερικὸν ἐπίχρισμα τοῦ πύργου τούτου πρὸς 1,75 δρχ. τὸ τετραγ. μ.; (439,13 δρχ.).

4) Εὑρεῖν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς. (509295800 τετραγ. χιλ.).

5) Πόσα κυβικὰ μέτρα φωταερίου ἀπαιτοῦνται πρὸς πλήρωσιν ἀεροστάτου ἀκτῖνος 4 μετρ; (267,9466....κ.μ.).

6) Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος σφαίρας, ἧς ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου εἶναι 26,376; (310,18176 κ. μ).

7) Ἐὰν διπλασιασθῇ ἡ ἀκτὶς σφαίρας τινός, ποσαπλασία γίνεται ἡ ἐπιφάνεια καὶ ποσαπλάσιος ὁ ὄγκος αὐτῆς; (τετραπλ. ὀκταπλ.)

8) Εὑρεῖν τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸν ὄγκον τῆς σελήνης καὶ τοῦ ἡλίου ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸν ὄγκον τῆς γῆς, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς σελήνης ἰσοῦται πρὸς τὰ 3)11 περίπου τῆς ἀκτῖνος τῆς γῆς, τοῦ δὲ ἡλίου πρὸς 109 περίπου ἀκτῖνας τῆς γῆς. (Σελήνης ἐπιφ. 0,0744=1)44 περίπου, ὄγκος 0,0203..=1)50 περίπου, ἡλίου ἐπιφ. 11881, ὄγκος 1295020).

*7) Εὕρεσις τοῦ ὄγκου στερεοῦ σώματος ἢ τῆς χωρητικότητος δοχείου ἅτινα δὲν ἔχουσι γνωστὸν γεωμετρικὸν σχῆμα.

222. Α΄. Προκειμένου περὶ δοχείου εὑρίσκομεν τὴν χωρητικότητα τούτου κατὰ τὸν γενικὸν τρόπον, ἤτοι διὰ μεταγγίσεως (§ 202).

223. Β΄. Προκειμένου δὲ περὶ στερεοῦ σώματος ποιούμεθα χρῆσιν τῶν ἑξῆς μεθόδων:

1) Πληροῦμεν δοχεῖόν τι ὕδατος ἄχρι χείλους καὶ θέτομεν ἐντὸς αὐτοῦ τὸ στερεὸν σῶμα, ὅτε τοῦτο θὰ ἐκτοπίσῃ ἀκριβῶς τόσον ὕδωρ, ὅσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ· συλλέγοντες δὲ τὸ ἐκχυθὲν ὕδωρ καὶ μετροῦντες τοῦτο διὰ τῶν μονάδων χωρητικότητος εὑρίσκομεν οὕτω τὸν ὄγκον τοῦ σώματος.

2) Ζυγίζομεν τὸ σῶμα πρῶτον ἐν τῷ ἀέρι καὶ εἶτα ἐν τῷ ὕδατι· ἔστω δέ, ὅτι εὕρομεν ἀντιστοίχως ὡς βάρη τούτου 2300 γρ καὶ 2100 γρ. Ἡ διαφορὰ τῶν βαρῶν τούτων 2300—2100=200

γρ. παριστᾷ κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ Ἀρχιμήδους τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος. ἀλλὰ 200 γρ. ὕδατος ἔχουσιν ὄγκον 200 κ. δ. συνεπῶς 200 κ.δ. εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ σώματος.

3) Ἐὰν ὅμως τὸ σῶμα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἰσαχθῇ ἐν τῷ ὕδατι, καθόσον εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ ἐπέλθῃ βλάβη εἰς αὐτό, τότε εἰσάγομεν τοῦτο ἐντὸς δοχείου γνωστῆς χωρητικότητος καὶ πληροῦμεν τὰ κενὰ δι' ἄμμου μέχρι τοῦ χείλους τοῦ δοχείου. Εἶτα ἐξάγομεν τὸ σῶμα καὶ μετροῦμεν τὴν ἐν τῷ δοχείῳ ἄμμον διά τινος τῶν μονάδων χωρητικότητος· ἀφαιροῦντες δὲ ἐκ τῆς χωρητικότητος τοῦ δοχείου τὸν ὄγκον τῆς ἄμμου εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τοῦ σώματος.

4) Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον σώματός τινος διὰ τοῦ γνωστοῦ ἐκ τῆς φυσικῆς τύπου $\varepsilon = \frac{\beta}{o}$ (ἔνθα ε παριστᾷ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σώματος, β τὸ βάρος τοῦ σώματος καὶ ο τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὕδατος, ὅπερ ἰσοῦται πρὸς τὸν ὄγκον αὐτοῦ, συνεπῶς δὲ καὶ τὸν τοῦ σώματος), ἐξ οὗ ἔχομεν $o = \frac{\beta}{\varepsilon}$. Οἷον ἔστω, ὅτι τεμάχιον μαρμάρου, οὗ τὸ εἰδικὸν βάρος εἶναι 2,7 ἔχει βάρος 386,100 χιλ., τότε ἔχομεν

$$o = \frac{386{,}100}{2.7} = 143 \text{ κ. π.}$$

Ἡ μέθοδος αὕτη δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ εἰς τὰ ὑγρά, οἷον ἔστω, ὅτι ζυγίσαντες ἔλαιον, οὗ τὸ εἰδικὸν βάρος εἶναι 0,912 εὕρομεν τοῦτο 540,816 χιλ., τότε

$$o = \frac{540{,}816}{0{,}912} = 593 \text{ κ. παλ.}$$

Σημειωτέον δὲ ὅτι ἐκ τοῦ τύπου $\varepsilon = \frac{\beta}{o}$ ἔχομεν καὶ $\beta = o\,\varepsilon$, ἤτοι δυνάμεθα να εὕρωμεν τὸ βάρος σώματός τινος δεδομένων τῶν δύο ἄλλων.

Παρατ. Οἱ τρόποι 1 καὶ 3 ἀπαιτοῦσι τὴν χρῆσιν τῶν μονάδων χωρητικότητος, ἐν ᾧ οἱ 2 καὶ 4 μόνον ζύγισιν· εἶναι δὲ αὕτη συνήθως προχειροτέρα.

Ἀσκήσεις.

Εἰδικὸν βάρος.—1) Δοχεῖόν τι κενὸν μὲν ζυγίζει 560 γρ., πλῆρες δὲ ὕδατος ζυγίζει 1,060 χιλ. καὶ πλῆρες ὑδραργύρου 7,36 χιλ. Ποῖον εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου ; (13,6).

2) Σιδηρᾶ ράβδος σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχοντος διαστάσεις 5 μ. 1 παλ. καὶ 2 δακ. ζυγίζει 77 χιλ. Ποῖον εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σιδήρου ; (7,7).

3) Λίθος, ζυγίζων 45 γρ., ριπτόμενος εἰς δοχεῖον πλῆρες ὕδατος ἐπιφέρει ἐκροὴν 0,015 λιτρ. ὕδατος. Ποῖον εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ λίθου τούτου ; (3).

Βάρος.—4) Πόσας ὀκάδας ἐλαίου περιέχει δοχεῖον κυλινδρικὸν διαμέτρου 6 παλ. καὶ ὕψους 0,9 μ., ἐὰν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου εἶναι 0,915 ; (232,7211 χιλιογρ. ἢ 181 ὀκ. 325,34375 δράμ.).

5) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ ἀὴρ εἶναι 773 φορὰς ἐλαφρότερος τοῦ ὕδατος καὶ ὅτι περιέχει 21 ο)ο τοῦ βάρους του ὀξυγόνον, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὀξυγόνον, τὸ περιεχόμενον ἐν αἰθούσῃ 528 κ. μ. (143, 441 χιλ.).

Ὄγκος.—6) Τεμάχιον μολύβδου ζυγίζει 544,8 χιλ. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ, τοῦ εἰδικοῦ βάρους αὐτοῦ ὄντος 11,35 ; (48 κ. π).

*7) Δοχεῖόν τι πλῆρες γάλακτος εἰδικοῦ βάρους 1,03 ζυγίζει 300 γρ. ἐπὶ πλέον ἢ πλῆρες ὕδατος. Ποία εἶναι ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου τούτου ; (10 λιτρ.).

8) Δοχεῖον πλῆρες πετρελαίου, οὗτινος τὸ εἰδικὸν βάρος εἶναι 0,891, ζυγίζει 40 χιλ., κενὸν δὲ ζυγίζει 2 χιλ. Ποία εἶναι ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου ; (42,648 κ. παλ.).

9) Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ λευκοχρύσου εἶναι 21,5 καὶ τοῦ ἀργύρου 10,5. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος τεμαχίου λευκοχρύσου ζυγίζοντος, ὅσον μία κυβικὴ παλάμη ἀργύρου ; (0,488372 κ. παλ.).

10) Εἰς κιβώτιον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ διαστάσεων 1,2 μ. 8 παλ. και 50 δακτ. ἐτέθη στερεόν τι ἀντικείμενον καὶ πρὸς πλήρωσιν τῶν κενῶν ἐρρίφθη ἄμμος, ἥτις μετρη-

θεῖσα εὑρέθη 156 παλ. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ ἀντικειμένου; (324 κ. παλ.).

Ἀγορὰ εἰς λίτρας ἢ χιλιόγραμα.—11) Μία λίτρα ἐλαίου τιμᾶται 2,25 δρχ. καὶ ἓν χιλιόγραμμον 2,40 δρχ. Τοῦ εἰδικοῦ βάρους αὐτοῦ ὄντος 0,9, ποῖον εἶναι προτιμότερον, νὰ ἀγοράζωμεν αὐτὸ εἰς λίτρας ἢ εἰς χιλιόγραμμα; (Εἰς χιλιόγραμμα· τὸ κέρδος εἶναι 0,09 δρχ. διὰ 1 λιτρ.).

12) Παντοπώλης τις ἀγοράζει 46 χιλ. ἐλαίου ἀντὶ 100 δρχ. Μεταπωλεῖ δὲ τοῦτο λιανικῶς πρὸς 2,50 δρχ. τὴν λίτραν. Πόσον κερδίζει, τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ ἐλαίου ὄντος 0,92; (25 δρχ.).

Ἀριθμ. πρωτ. 52281 / Διεκπ.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 22 Ν)βρίου 1920

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ
ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Πρὸς τὸν κ. Ἰωάννην Ταμπακόπουλον
Καθηγητὴν τοῦ ἐν Γρεβενοῖς Γυμνασίου

Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν, ὅτι δι' ἡμετέρας πράξεως τῇ 14η τοῦ λήγοντος μηνὸς ἐκδοθείσης καὶ τῇ 21η τοῦ αὐτοῦ δημοσιευθείσης ἐν τῷ ὑπ' ἀριθ. 72 φύλλῳ τῆς Ἐφημερίδος τῆς Κυβερνήσεως ἐνεκρίθη ἀπὸ τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1921—1922 καὶ ἐφεξῆς τὸ πρὸς κρίσιν ὑποβληθὲν ἐν χειρογράφῳ ὑμέτερον βιβλίον «Πρακτικὴ Γεωμετρία», πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν καὶ μαθητριῶν τῶν ἑλληνικῶν σχολείων, τῶν ἀστικῶν καὶ τῶν ἀνωτέρων παρθεναγωγείων ὑπὸ τὸν ὅρον, ὅπως πρὸ τῆς ἐκτυπώσεως τοῦ βιβλίου συμμορφωθῆτε πρὸς τὰς ὑποδείξεις τοῦ Ἐκπαιδευτ. Συμβουλίου.

Ἐντολῇ τοῦ Ὑπουργοῦ
Ὁ τμηματάρχης τοῦ Γ' τμήματος
Γ. ΔΡΟΣΙΝΗΣ

Π. Ζαγανιάρης