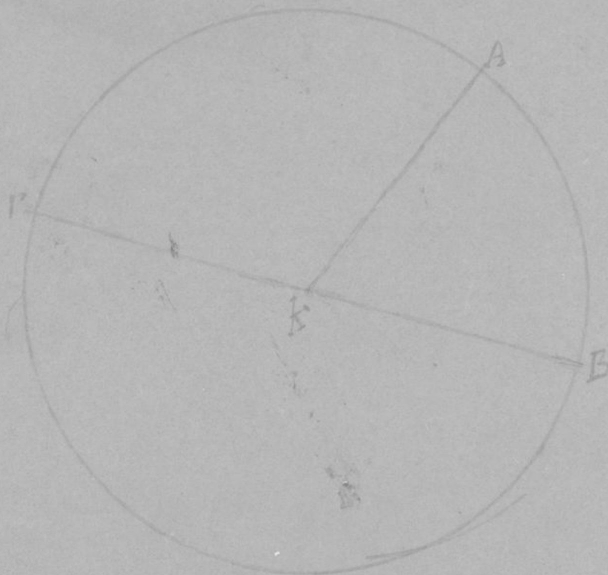

Α
Γ
Κ
Β

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΛΕΓΕΝΔΡΟΥ

ΜΕΤΑ

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΘΗΚΩΝ

ΥΠΟ

ΑΝΤΩΝΙΟΥ Β. ΔΑΜΑΣΚΗΝΟΥ

ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΡΙΤΗ

Ἐπὶ τὸ εὐληπτότερον διασκευασθεῖσα.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ,

ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ ΙΩ. ΑΓΓΕΛΟΠΟΥΛΟΥ.

Κατὰ τὴν ὁδὸν Βοῤῥέως.

187[illegible]

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει κάτωθεν τὴν ὑπογραφὴν τοῦ κ. Ἰω. Ἀγγελοπούλου.

Ιω. Αγγελόπουλος

ΤΗι ΑΥΤΟΥ ΕΞΟΧΟΤΗΤΙ

ΤΩι ΚΥΡΙΩι

ΣΙΜΩΝΙ ΣΙΝΑι

ΒΑΡΩΝΙ

κτλ. κτλ. κτλ.

ΕΙΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ ΔΕΙΓΜΑ ΙΣΟΒΙΟΥ ΕΥΓΝΩΜΟΣΥΝΗΣ

ΤΟ ΠΑΡΟΝ ΠΟΝΗΜΑ

Ο ΑΔΡΑΙΣ ΑΥΤΟΥ ΔΑΠΑΝΑΙΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΘΕΙΣ

ΑΝΑΤΙΘΗΣΙ.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.

Εἶναι, νομίζομεν, περιττὸν νὰ ἐκθέσωμεν ἐν τῷ παρόντι προλόγῳ λεπτομερῶς τὰς μεταξὺ τῶν δύο προηγουμένων ἐκδόσεων καὶ τῆς παρούσης ὑπαρχούσας διαφοράς· ἁπλῆ παραβολὴ τῶν κειμένων δύναται νὰ ἀναπληρώσῃ εὐκόλως τὴν παράλειψιν ταύτην. Τούτου ἕνεκα θέλομεν περιορισθῆ νὰ εἴπωμεν ὀλίγα μόνον περὶ τῆς οὐσιωδεστέρας κατὰ τὴν γνώμην ἡμῶν διαφορᾶς, ἥτις ἐνυπάρχει ἐν τῇ παρούσῃ ἐκδόσει, συνισταμένη εἰς τοῦτο, ὅτι αἱ ἀποδείξεις ὅλων σχεδὸν τῶν προτάσεων ἐξετέθησαν ἐπὶ τὸ εὐληπτότερον κατ' ἰδιαίτερον ὅλως τρόπον.

Διδάξαντες ἐπὶ τετραετίαν τὴν Γεωμετρίαν παρετηρήσαμεν ὅτι οἱ πλεῖστοι τῶν μαθητῶν, μηδ' αὐτῶν τῶν νοημονεστέρων ἐξαιρουμένων, δυσκόλως δύνανται ν' ἀναπληρώσωσιν ἀφ' ἑαυτῶν τὰς παραλείψεις, αἵτινες συνήθως γίνονται εἰς τὰς τῶν προτάσεων ἀποδείξεις χάριν συντομίας, ὡς εὐκόλως δῆθεν ἐννοούμεναι, καὶ ὅτι, ὁσάκις ἐπεχείρουν νὰ πράξωσι τοῦτο, σπανίως ἐπετύγχανον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐκ τῆς μὴ εὐκόλου κατανοήσεως τοῦ κειμένου προσγινομένη εἰς αὐτοὺς βλάβη μᾶς ἐφάνη λίαν σπουδαία, οὐδόλως ἐδιστάσαμεν νὰ καταβάλωμεν νέους πάλιν κόπους εἰς τὴν ἐκ νέου σχεδὸν σύνταξιν ὁλοκλήρου τοῦ ἔργου.

Κυριωτέρα, ὡς γνωστὸν, ἀρετὴ παντὸς διδακτικοῦ συγγράμματος, καὶ μάλιστα τῶν μαθηματικῶν, εἶναι ἡ περὶ τὰς ἐκφράσεις σαφήνεια καὶ τὸ ἀκριβὲς καὶ πλῆρες τῶν ἐν αὐτῷ περιεχομένων ἀποδείξεων. Ὅταν, θέλοντες ἴσως νὰ ἐπιδείξωμεν πολυμάθειαν, μεταχειριζώμεθα γλῶσσαν ἄλλης ἐποχῆς, ὅταν, ἐπειδὴ ἡμεῖς οἱ συγγράφοντες δυνάμεθα νὰ συμπληρώσωμεν εὐκόλως τὰ κενὰ τῶν ἀποδείξεων, νομίζωμεν ὅτι δύνανται καὶ οἱ μαθηταὶ νὰ πράξωσι τοῦτο μετὰ τῆς αὐτῆς εὐκολίας, τότε οὗτοι, ἀφ' ἑνὸς μὲν δυσκολευόμενοι εἰς τὴν κατανόησιν τῆς γλώσσης, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἀποτυγχάνοντες συνήθως εἰς τὴν συμπλήρωσιν τῶν παραλειπομένων, οὐ μόνον δὲν μανθάνουσι τὰ διδασκόμενα, ἀλλὰ καὶ συλλαμβάνουσι δυστυχῶς τὴν ἰδέαν, ὅτι δὲν ἔχουσι δῆθεν τὴν ἀπαιτουμένην διανοητικὴν ἱκανότητα εἰς τὸ νὰ ἐννοήσωσι θεωρίας τόσῳ ὑψηλὰς καὶ νὰ μάθωσιν ἀληθείας τόσῳ δυσκόλους. Ἀπειράκις ἠκούσαμεν μαθητὰς λέγοντας στερεοτύπως «δὲν δυνάμεθα νὰ μάθωμεν μαθηματικά, δὲν ἐγεννήθημεν διὰ νὰ ἐννοῶμεν τὰ τοιαῦτα», καὶ ἡ ἰδέα αὕτη κατέστη δυστυχῶς τόσῳ κοινὴ καὶ νομίζεται τόσῳ ἀλάνθαστος, ὥστε θεωρεῖται ὡς δικαιολόγησις ἀποχρῶσα. Ἀλλ' ἔχει ἆρά γε τὸ πρᾶγμα οὕτω; βεβαίως ὄχι· καὶ λέγομεν τοῦτο ἐν πεποιθήσει καὶ ἐκ πείρας. Ἂν δὲν ἐφοβούμεθα μήπως νομισθῶμεν ὅτι θέλομεν νὰ περιαυτολογήσωμεν, ἠθέλομεν ἀναφέρει πλεῖστα ὅσα ὀνόματα μαθητῶν, οἵτινες οὐ μόνον ἐξέμαθον ἐν βραχεῖ διαστήματι χρόνου καὶ μετὰ μεγάλης μάλιστα εὐκολίας ὅλην σχεδὸν τὴν ἐν τοῖς Γυμνασίοις διδασκομένην σειρὰν τῶν μαθηματικῶν, ἀλλὰ καί, ἐνῷ πρῶτον ἐφαίνοντο ἀποστρεφόμενοι ταῦτα καὶ ἐξ ἀνάγκης μόνον καταγινόμενοι, ἔλαβον κατόπιν τοσαύτην κλίσιν εἰς αὐτά, ὥστε οἱ μὲν τούτων ἐπεδόθησαν ἀκολούθως εἰς τὴν σπουδὴν τῶν Φυσικομαθηματικῶν ἐπιστημῶν, οἱ δέ, ὑποστάντες εὐδοκίμως τὰς ἐν τῇ Στρατιωτικῇ τῶν Εὐελπίδων Σχολῇ ἐξετάσεις, ἐγένοντο δεκτοὶ μεταξὺ τῶν πρώτων.

Οὐδόλως λοιπὸν παράδοξον ἂν βλέπωμεν τοὺς μαθητάς, ἐκτὸς σπανιωτάτων ἐξαιρέσεων, ἀποστρεφομένους τὰ μαθηματικά, διὰ τὰ ὁποῖα θυσιάζουσιν ἀνωφελῶς τόσας ὥρας καὶ τόσους κόπους, ὅταν γίνηται χρῆσις βιβλίων γεγραμμένων εἰς γλῶσσαν ἀσαφῆ καὶ στρυφνήν, ὅταν αἱ ἐν αὐτοῖς ἀποδείξεις ἐκτίθηνται συντετμημένως, καὶ ὅταν ἐπιβαρύνηται ὁ νοῦς αὐτῶν διὰ θεωριῶν καὶ θεωρημάτων, ὧν οὐδέποτε θέλουσιν αἰσθανθῇ τὴν ἀνάγκην καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῶν γυμνασιακῶν αὐτῶν σπουδῶν.

Τούτου ἕνεκα κατεβάλομεν πᾶσαν δυνατὴν προσπάθειαν, ἵνα καὶ ἐν τῇ παρούσῃ ἐκδόσει, ὡς καὶ εἰς πᾶν ὅ,τι μέχρι τοῦδε ἐγράψαμεν, πρῶτον μὲν γείνωμεν ὅσον ἔνεστιν ἡμῖν σαφεῖς καὶ εὔληπτοι, δεύτερον δὲ ἐκθέσωμεν τὰς ἀποδείξεις ἄνευ δυσνοήτων συντομιῶν, καὶ τρίτον ἀποφύγωμεν πᾶν ὅ,τι ἢ δὲν ἦτο ἀπολύτως ἀναγκαῖον πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ ὅλου ἢ ἠδύνατο νὰ παραλειφθῇ χωρὶς οἱ ἐν Γυμνασίοις σπουδάζοντες νὰ λάβωσιν οὐδεμίαν ἀνάγκην τούτου· ἔχοντες δὲ ὑπ' ὄψιν τὰς ἐπὶ τῶν προηγουμένων ἐκδόσεων καὶ τῶν ἄλλων ἡμῶν ἔργων ἐπιδοκιμασίας τοσούτων σπουδαίων συναδέλφων, νομίζομεν ὅτι μᾶς εἶναι ἐπιτετραμμένον νὰ φρονῶμεν ὅτι καὶ ἡ παροῦσα θέλει τύχει τῆς αὐτῆς ὑποδοχῆς.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 1 Ὀκτωβρίου 1870.

Α. ΔΑΜΑΣΚΗΝΟΣ.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

1. Ὁ τόπος, ὁ ἐν τῷ ἀπροσδιορίστῳ διαστήματι ὑπὸ σώματός τινος κατεχόμενος, καλεῖται *ὄγκος* τοῦ σώματος.

2. Τὸ ὅριον, ὅπερ χωρίζει σῶμά τι ἀπὸ τοῦ περικυκλοῦντος αὐτὸ διαστήματος, καλεῖται *ἐπιφάνεια* τοῦ σώματος.

3. *Γραμμὴ* καλεῖται ὁ τόπος, ἔνθα αἱ ἐπιφάνειαι δύο σωμάτων συναπαντῶνται.

4. *Σημεῖον* καλεῖται ὁ τόπος, ἔνθα δύο γραμμαὶ τέμνονται.

5. Οἱ ὄγκοι, αἱ ἐπιφάνειαι καὶ αἱ γραμμαὶ ἐννοοῦνται ἀνεξαρτήτως τῶν εἰς ἃ ἀνήκουσι σωμάτων. *δηλ. πρέπει νὰ ἐννοοῦμεν αὐτὰ καθ' ἀφαίρεσιν ἀνεξαρτήτως τῶν [illegible] τῶν [illegible]*

6. Ὀνομάζουσιν ἀδιαφόρως *σχήματα* τοὺς ὄγκους, τὰς ἐπιφανείας *ἢ γραμμὰς [illegible]* καὶ τὰς γραμμάς.

7. Ἀντικείμενον τῆς Γεωμετρίας εἶναι ἡ καταμέτρησις τῆς ἐκτάσεως τῶν σχημάτων καὶ ἡ σπουδὴ τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν.

8. *Εὐθεῖα* γραμμὴ καλεῖται ἀπροσδιόριστός τις γραμμὴ, ἥτις εἶναι συντομωτέρα πάσης ἄλλης γραμμῆς, ἑνονούσης δύο ὁποιαδήποτε τῶν σημείων αὐτῆς.

9. Πᾶσα γραμμὴ μὴ εὐθεῖα, ἀλλὰ συντεθειμένη ἐξ εὐθειῶν γραμμῶν, καλεῖται *τεθλασμένη* ἢ *πολύγωνος* γραμμή.

10. Πᾶσα γραμμὴ, ἥτις δὲν εἶναι εὐθεῖα οὔτε σύγκειται ἐξ εὐθειῶν γραμμῶν, καλεῖται *καμπύλη* γραμμή.

11. Ἐπιφάνειά τις καλεῖται *ἐπίπεδον*, ὅταν ἦναι τοιαύτη ὥστε, ἐὰν ληφθῶσιν ἐπ' αὐτῆς δύο κατ' *ἀρέσκειαν* σημεῖα καὶ ἑνωθῶσι ταῦ-

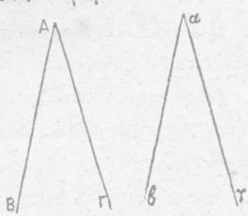
τα δι' εὐθείας γραμμῆς, ἡ ἑνόνουσα τὰ σημεῖα ταῦτα εὐθεῖα νὰ κῆται *ὁλόκληρος* ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

12. Πᾶσα μὴ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, μήτε ἐξ ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν συντεθειμένη, καλεῖται *καμπύλη* ἐπιφάνεια.

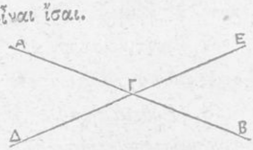
13. *Γωνία* καλεῖται τὸ σχηματιζόμενον σχῆμα ΒΑΓ ὑπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν ΒΑ, ΓΑ, περατουμένων εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν Α.

Τὸ μὲν κοινὸν σημεῖον τῆς τομῆς Α καλεῖται *κορυφὴ* τῆς γωνίας, αἱ δ' εἰς αὐτὸ περατούμεναι εὐθεῖαι ΒΑ, ΓΑ *πλευραὶ* τῆς γωνίας.

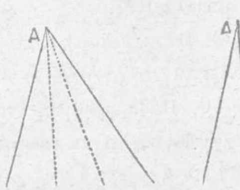
Ἡ γωνία σημειοῦται ἄλλοτε μὲν διὰ μόνου τοῦ γράμματος τῆς κορυφῆς αὐτῆς Α, ἄλλοτε δὲ διὰ τῶν τριῶν γραμμάτων ΒΑΓ ἢ ΓΑΒ, ἀλλὰ τότε τίθεται πάντοτε ἐν τῷ μέσῳ τῶν δύο ἄλλων τὸ γράμμα Α τῆς κορυφῆς αὐτῆς. Μεταχειριζόμεθα τὰ τρία γράμματα, ὅταν πολλαὶ γωνίαι ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφήν.



14. Ὅταν δύο γωνίαι Α καὶ α ἐπιθέμεναι ταὐτίζωνται, τότε λέγονται *ἴσαι*. Ἵνα ἴδωμεν ἂν δύο γωνίαι Α καὶ α ἐπιτιθέμεναι ταὐτίζωνται, φέρομεν τὴν πλευρὰν αβ τῆς μιᾶς ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τῆς ἑτέρας οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ α τῆς πρώτης νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Α τῆς δευτέρας, καὶ παρατηροῦμεν ἂν καὶ ἡ ἄλλη πλευρὰ αγ τῆς πρώτης λάβῃ τὴν διεύθυνσιν ΑΓ τῆς δευτέρας. Ὅταν τοῦτο συμβῇ, τότε αἱ δύο γωνίαι Α καὶ α ταὐτίζονται, καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσαι.

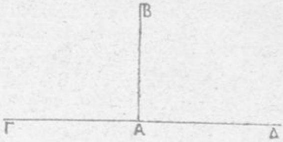


15. Δύο γωνίαι ΑΓΔ, ΒΓΕ λέγονται *κατὰ κορυφήν*, ὅταν ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν Γ καὶ αἱ πλευραὶ ΑΓ, ΓΔ τῆς μιᾶς ἦναι αἱ προεκβολαὶ τῶν πλευρῶν ΓΒ, ΓΕ τῆς ἄλλης.



16. Γωνία τις Α λέγεται διπλασία, τριπλασία, τετραπλασία .... ἑτέρας τινὸς γωνίας Δ, ὅταν ἐμπεριέχῃ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς δύο, τρεῖς, τέσσαρας .... γωνίας ἴσας τῇ Δ. Αἱ γωνίαι λοιπὸν συγκρίνονται πρὸς ἀλλήλας ὡς καὶ τὰ λοιπὰ μεγέθη.

17. Ὅταν εὐθεῖά τις ΑΒ συναπαντᾷ ἄλλην τινὰ εὐθεῖαν ΓΔ οὕτως, ὥστε αἱ δύο *προσκείμεναι* γωνίαι ΓΑΒ, ΒΑΔ νὰ ἦναι ἴσαι, τότε ἡ μὲν εὐθεῖα ΑΒ λέγεται *κάθετος* ἐπὶ τῆς ΓΔ, αἱ δὲ προσκείμεναι ἴσαι γωνίαι ΓΑΒ, ΒΑΔ καλοῦνται *ὀρθαὶ* γωνίαι.



Θέλομεν ἀποδείξει μετ' ὀλίγον ὅτι ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας (πρότ. 1, πόρ.).

18. Πᾶσα γωνία μικροτέρα τῆς ὀρθῆς καλεῖται *ὀξεῖα* γωνία, πᾶσα δὲ γωνία μεγαλειτέρα τῆς ὀρθῆς καλεῖται *ἀμβλεῖα*.

19. Δύο γωνίαι λέγονται *συμπληρωματικαί*, ὅταν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἦναι ἴσον μὲ μίαν ὀρθήν, καὶ *παραπληρωματικαί*, ὅταν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΟΡΩΝ ΤΙΝΩΝ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΩΝ.

Ἀξίωμα καλεῖται πᾶσα πρότασις ἀφ' ἑαυτῆς φανερά.

Θεώρημα λέγεται ἀλήθεια, καθισταμένη φανερὰ διά τινος συλλογισμοῦ, ὅστις καλεῖται *ἀπόδειξις* τοῦ θεωρήματος.

Πρόβλημα ὀνομάζεται πᾶσα πρότασις, δι' ἧς μᾶς ζητεῖταί τι ἢ τινά, ἐξαρτώμενα ἐκ τῶν ἐν αὐτῇ δεδομένων. Ἡ εὕρεσις τῶν ζητουμένων καλεῖται *λύσις* τοῦ προβλήματος.

Λῆμμα λέγεται πᾶσα δευτερεύουσα πρότασις, ἐπιβοηθητικῶς λαμβανομένη πρὸς ἀπόδειξιν θεωρήματός τινος ἢ πρὸς λύσιν προβλήματός τινος.

Πρότασις εἶναι κοινὴ λέξις, ἀποδιδομένη ἀδιαφόρως εἰς τὰ θεωρήματα, προβλήματα καὶ λήμματα.

Πόρισμα καλεῖται ἡ ἐκ μιᾶς ἢ καὶ ἐκ πλειοτέρων προτάσεων ἀποῤῥέουσα συνέπεια.

Σχόλιον λέγεται ἡ ἐπὶ μιᾶς ἢ καὶ ἐπὶ πλειοτέρων προτάσεων γενομένη παρατήρησις, πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦ νὰ καταδειχθῇ ὁ μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχων σύνδεσμος, ἢ ἡ ὠφέλεια, ἢ ὁ περιορισμός, ἢ ἡ ἔκτασις αὐτῶν.

Ὑπόθεσις ὀνομάζεται τὸ σύνολον τῶν δεδομένων, ἐφ' ὧν στηρίζεται ἡ ἀπόδειξις, ἢ ἡ ψευδὴς καὶ ἄτοπος θέσις, ἣν πρὸς καιρὸν παραδεχόμεθα πρὸς ἔμμεσον προτάσεώς τινος ἀπόδειξιν.

Τὸ σημεῖον $=$ ἀπαγγέλλεται *ἴσον*, καὶ σημαίνει ὅτι τὰ δι' αὐτοῦ συνδεόμενα μέρη εἶναι ἴσα. Παραδείγματος χάριν, ἡ παράστασις $A = B$

σημαίνει ὅτι τὸ Α εἶναι *ἴσον* τῷ Β. Τὰ μέρη Α καὶ Β, τὰ διὰ τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος συνδεόμενα, καλοῦνται *μέλη* τῆς ἰσότητος.

Ὅταν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν ὅτι ποσότης τις Α εἶναι μεγαλειτέρα ἢ μικροτέρα τῆς Β, γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον $>$ ἢ τὸ $<$ οὕτως, ὥστε ἡ μεγαλειτέρα ποσότης νὰ εὑρίσκηται εἰς τὸ ἄνοιγμα τῆς ὑπὸ τοῦ σημείου παριστωμένης γωνίας. Παραδείγματος χάριν, ἡ μὲν παράστασις $Α>Β$ σημαίνει ὅτι τὸ Α εἶναι *μεγαλείτερον* τοῦ Β, ἡ δὲ παράστασις $Α<Β$, ὅτι τὸ Α εἶναι *μικρότερον* τοῦ Β. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται διὰ τοῦτο σημεῖον *ἀνισότητος*.

Τὸ σημεῖον $+$ ἀπαγγέλλεται *σὺν* ἢ *πλέον* καὶ σημαίνει πρόσθεσιν. Π. χ. ἡ παράστασις $Α+Β$ ἀπαγγέλλεται Α *σὺν* Β ἢ Α *πλέον* Β, καὶ σημαίνει ὅτι ἡ ποσότης Β προστίθεται εἰς τὴν Α.

Τὸ σημεῖον — ἀπαγγέλλεται *πλὴν* ἢ *μεῖον* καὶ σημαίνει ἀφαίρεσιν. Π. χ. ἡ παράστασις $Α—Β$ ἀπαγγέλλεται Α *πλὴν* Β ἢ Α *μεῖον* Β, και σημαίνει ὅτι ἀπὸ τῆς ποσότητος Α *ἀφαιρεῖται* ἡ ποσότης Β. Ἡ παράστασις $Α+Β—Γ$ ἀπαγγέλλεται Α *πλέον* Β *πλὴν* Γ, καὶ σημαίνει ὅτι ἡ ποσότης Γ ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ποσοτήτων Α καὶ Β.

Τὸ σημεῖον $\times$ ἀπαγγέλλεται *ἐπὶ* καὶ σημαίνει πολλαπλασιασμόν Π. χ. ἡ παράστασις $Α\times Β$ ἀπαγγέλλεται Α *ἐπὶ* Β, καὶ παριστᾷ τὸ γινόμενον τῆς ποσότητος Α ἐπὶ τὴν ποσότητα Β. Ἀντὶ τοῦ σημείου $\times$ μεταχειριζόμεθα πολλάκις μίαν μόνην στιγμήν. Π. χ. αἱ παραστάσεις $Α\times Β$ καὶ $Α\,.\,Β$ σημαίνουσιν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πρᾶγμα.

Ἡ παράστασις $Α\times(Β+Γ—Δ)$ σημαίνει τὸ γινόμενον τῆς ποσότητος Α ἐπὶ τὴν $Β+Γ—Δ$. Μεταχειριζόμεθα τὴν παρένθεσιν ( ) ἵνα δείξωμεν ὅτι ἡ ἐντὸς αὐτῆς ποσότης $Β+Γ—Δ$ θεωρεῖται ὡς μία καὶ μόνη, τουτέστιν ὡς ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου. Ὡσαύτως $(Α+Β)\times(Γ—Δ+Ε)$ παριστᾷ τὸ γινόμενον τῆς ποσότητος $Α+Β$, ἐπὶ τὴν ποσότητα $Γ—Δ+Ε$, τῶν ἐντὸς τῶν παρενθέσεων ποσοτήτων θεωρουμένων ὡς ἀποτελουσῶν μίαν καὶ μόνην ποσότητα.

Ὁ πρό τινος γραμμῆς ἢ ποσότητος γραφόμενος ἀριθμὸς καλεῖται *συντελεστὴς*, καὶ δεικνύει ποσάκις ἡ γραμμὴ αὕτη ἢ ἡ ποσότης πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ. Παραδείγματος χάριν, ἡ παράστασις $4ΑΒ$ σημαίνει ὅτι ἡ γραμμὴ ΑΒ ἐπαναλαμβάνεται τετράκις ἢ ὅτι πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 4· ἡ παράστασις $\frac{2}{3}ΑΒ$ σημαίνει ὅτι λαμβάνονται τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς γραμμῆς ΑΒ· ἡ παράστασις 3Α ὅτι ἡ ποσότης Α λαμβάνεται τρίς. Οἱ ἀριθμοὶ 4, $\frac{2}{3}$, 3 εἶναι οἱ συντελεσταί.

Τὸ τετράγωνον τῆς γραμμῆς ΑΒ παρίσταται οὕτως $\overline{AB}^2$, ὁ δὲ κύβος οὕτως $\overline{AB}^3$. Ἐν οἰκείῳ τόπῳ θέλομεν ἐξηγήσει τί σημαίνει τὸ τετράγωνον ἢ ὁ κύβος γραμμῆς τινος.

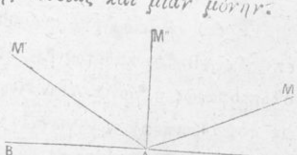
Τὸ σημεῖον $\sqrt{\ }$ καλεῖται *ῥιζικὸν* καὶ παριστᾷ ἐξαγωγὴν ῥίζης τινὸς τῆς ὑπ' αὐτὸ γεγραμμένης ποσότητος, ἥτις καλεῖται διὰ τοῦτο *ὑπόῤῥιζος*. Ἵνα δείξωσι ποία ῥίζα πρέπει νὰ ἐξαχθῇ, γράφουσιν εἰς τὸ ἄνοιγμα τοῦ ῥιζικοῦ τὸν δεικνύοντα τὸν βαθμὸν τῆς ῥίζης ἀριθμὸν, ὅστις καλεῖται *δείκτης* τῆς ῥίζης· οὕτως ἡ παράστασις $\sqrt[2]{A}$ ἢ ἁπλῶς $\sqrt{A}$ σημαίνει ὅτι πρόκειται νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῆς ποσότητος Α· ἡ παράστασις $\sqrt[3]{A \times B}$ σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ γινομένου $A \times B$. Οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 3 εἶναι οἱ δεῖκται τῶν ἐξαχθησομένων ῥιζῶν.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ.

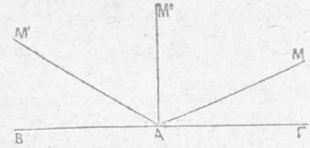
1. *Δύο ποσότητες ἴσαι μὲ τρίτην τινὰ εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας ἴσαι.*
2. *Τὸ ὅλον εἶναι μεγαλείτερον μέρους τινὸς αὐτοῦ.*
3. *Τὸ ὅλον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν αὐτοῦ.*
4. *Ἐξ ἑνὸς σημείου εἰς ἄλλο μία μόνη εὐθεῖα γραμμὴ ἄγεται.*
5. *Δύο ὁποιαδήποτε μεγέθη, γραμμαὶ, ἐπιφάνειαι, στερεὰ, εἶναι ἴσα, ὅταν ἐπιτιθέμενα ἐφαρμόζωνται καθ' ὅλην αὐτῶν τὴν ἔκτασιν.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐξ ἑνὸς σημείου Α, κειμένου ἐπί τινος εὐθείας ΒΓ, δυνάμεθα νὰ ὑψώσωμεν κάθετον ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας καὶ μίαν μόνην.



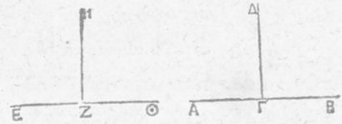
Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἂς ἄξωμεν ἐκ τοῦ σημείου Α πρὸς τὸ μέρος ΑΓ εὐθεῖάν τινα ΑΜ. Αὕτη σχηματίζει δύο προσκειμένας γωνίας ΜΑΓ, ΜΑΒ, ἐξ ὧν ἡ πρώτη εἶναι προφανῶς μικροτέρα τῆς δευτέρας. Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΜ στρέφεται περὶ τὸ σημεῖον Α πρὸς τὸ μέρος ΑΒ. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ μὲν μικροτέρα γωνία ΜΑΓ θέλει βαίνει συνεχῶς αὐξανομένη, ἡ δὲ μεγαλειτέρα ΜΑΒ θέλει *συνεχῶς* ἐλαττοῦσθαι. Ὅταν διαρκούσης τῆς περιστροφῆς ἡ εὐθεῖα ΑΜ λάβῃ τὴν θέσιν ΑΜ′, ἡ μὲν γωνία ΜΑΓ θέλει γείνει Μ′ΑΓ, ἡ δὲ ΜΑΒ θέλει γείνει Μ′ΑΒ, καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ Μ′ΑΓ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς Μ′ΑΒ. Ἐπειδὴ ἡ



πρότερον μικροτέρα γωνία, συνεχῶς αὐξανομένη, κατεστάθη μεγαλειτέρα τῆς πρότερον μεγαλειτέρας, συνεχῶς ἐλαττουμένης, ἕπεται ὅτι ὑπῆρξε θέσις τις ΑΜ″, μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων ΑΜ, ΑΜ′ κειμένη, καὶ *μία μόνη*, ἐν ᾗ αἱ δύο προσκείμεναι γωνίαι Μ″ΑΓ, Μ″ΑΒ ἦσαν ἴσαι. Ἀλλὰ τότε κατὰ τὸν ὁρισμὸν 17 ἡ εὐθεῖα ΑΜ″ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΓ. Λοιπὸν ἐξ ἑνὸς σημείου Α, κειμένου ἐπί τινος εὐθείας ΒΓ κτλ.

Πόρισμα. Ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἔστω ΔΓ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ΗΖ κάθετος ἐπὶ τῆς ΕΘ· λέγω ὅτι ἡ ὀρθὴ γωνία ΑΓΔ εἶναι ἴση τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ ΕΖΗ. Διότι,



ἐὰν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΕΘ ἐπὶ τῆς ΑΒ οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον Ζ νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ, ἡ εὐθεῖα ΖΗ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΓΔ, διότι, ἂν ἐλάμβανε διάφορον διεύθυνσιν, ἠθέλαμεν ἔχει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Γ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ δύο καθέτους, τὴν εὐθεῖαν ΓΔ καὶ τὴν εὐθεῖαν, ἐφ᾽ ἧς ἤθελε καθ᾽ ὑπόθεσιν πέσει ἡ ΖΗ, τοῦθ᾽ ὅπερ ἀδύνατον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶσα εὐθεῖα ΓΔ, συναπαντῶσα ἄλλην τινὰ ΑΒ, σχηματίζει μετ᾽ αὐτῆς δύο προσκειμένας γωνίας ΑΓΔ, ΔΓΒ, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

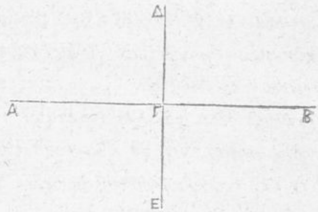
Ἐκ τοῦ σημείου Γ ἂς ὑψώσωμεν ἐπὶ τῆς ΑΒ τὴν κάθετον ΓΕ. Ἐπειδὴ προφανῶς ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΓΕ καὶ ΕΓΔ, θέλομεν ἔχει

$$ΑΓΔ+ΔΓΒ=ΑΓΕ+ΕΓΔ+ΔΓΒ.$$

Ἀλλ᾽ ἡ μὲν γωνία ΑΓΕ εἶναι ὀρθή, τὸ δὲ ἄθροισμα ΑΓΔ+ΔΓΒ εἶναι ἴσον τῇ γωνίᾳ ΕΓΒ, ἥτις εἶναι ὡσαύτως γωνία ὀρθή. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΔΓΒ καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν προσκειμένων γωνιῶν ΑΓΔ, ΔΓΒ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα δύο προσκειμένων κτλ.

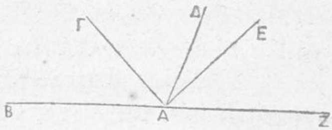
Πόρισμα 1. Ἂν ἡ μία τῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΔΓΒ ἦτο ὀρθή, καὶ ἡ ἑτέρα ἤθελεν εἶναι ὡσαύτως γωνία ὀρθή.

Πόρισμα 2. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΔΕ ἦναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἀντιστρόφως, ἡ ΑΒ θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΔΕ.



Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ὀρθή. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΓΔ, εἶναι ὀρθή, ἡ προσκειμένη ταύτῃ ΑΓΕ θέλει εἶναι ὡσαύτως ὀρθή, ἐπομένως ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΔΕ.

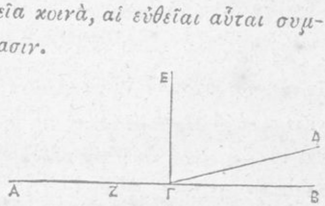
Πόρισμα 3. Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΕ, ΕΑΖ, τῶν σχηματιζομένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΖ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Διότι τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ἄθροισμα εἶναι προφανῶς ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν ΒΑΓ, ΓΑΖ, ὅπερ ἰσοῦται μὲ δύο γωνίας ὀρθάς.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἔχωσι δύο σημεῖα κοινά, αἱ εὐθεῖαι αὗται συμπίπτουσι καθ' ὅλην αὐτῶν τὴν ἔκτασιν.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι Α καὶ Ζ εἶναι τὰ κοινὰ εἰς τὰς περὶ ὧν ὁ λόγος εὐθείας σημεῖα. Ἐν πρώτοις κατὰ τὸ 4 ἀξίωμα τὰ μεταξὺ τούτων μέρη τῶν εὐθειῶν ταυτίζονται.



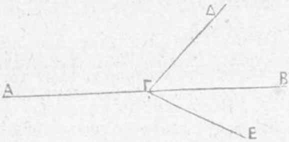
Ἂς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται ἀποχωρίζονται ἀπό τινος σημείου Γ, καὶ ἡ μὲν λαμβάνει τὴν διεύθυνσιν ΓΒ, ἡ δὲ τὴν ΓΔ. Ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ ΑΓΒ εἶναι εὐθεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν ΑΓΕ, ΕΓΒ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς (πρότ. 2), καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓΔ ὑποτίθεται εὐθεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν ΑΓΕ, ΕΓΔ θέλει εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\text{ΑΓΕ}+\text{ΕΓΒ}=\text{ΑΓΕ}+\text{ΕΓΔ},$$

ἐξ ἧς, ἀφαιροῦντες ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὴν αὐτὴν γωνίαν ΑΓΕ, πορίζόμεθα ΕΓΒ=ΕΓΔ, τουτέστι τὸ ὅλον ἴσον μὲ τὸ μέρος αὐτοῦ, ὅπερ ἀδύνατον (ἀξ. 2). Λοιπὸν ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἔχωσι κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΔΓΒ ἦναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς, αἱ ἐξωτερικαὶ αὐτῶν πλευραὶ ΑΓ, ΓΒ θέλουσι κεῖσθαι ἐπ' εὐθείας.



Διότι, ἐὰν ἡ πλευραὶ ΓΒ δὲν ἦναι ἡ προεκβολὴ τῆς ΑΓ, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ΓΕ εἶναι ἡ προεκβολὴ αὐτῆς. Ἐπειδὴ τότε ἡ γραμμὴ ΑΓΕ εἶναι εὐθεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν ΑΓΔ, ΔΓΕ θέλει εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς (προτ. 2). Ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΔΓΒ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἰσότητα

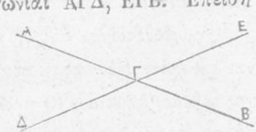
$$ΑΓΔ+ΔΓΕ=ΑΓΔ+ΔΓΒ.$$

Ἀφαιροῦντες ἐξ ἑκατέρου μέλους τῆς ἰσότητος τὴν αὐτὴν γωνίαν ΑΓΔ, θέλομεν ἔχει ΔΓΕ=ΔΓΒ, τουτέστι τὸ ὅλον ἴσον μὲ τὸ μέρος, ὅπερ ἄτοπον (ἀξ. 2). Λοιπὸν ΓΒ θέλει εἶναι ἡ προεκβολὴ τῆς ΑΓ, ἑπομένως αἱ ἐξωτερικαὶ πλευραὶ ΑΓ, ΓΒ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ὅλαι αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἔστωσαν π. χ. αἱ δύο κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΑΓΔ, ΕΓΒ. Ἐπειδὴ



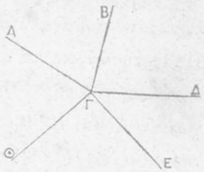
κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν (ὅρ. 15) αἱ γραμμαὶ ΑΓΒ, ΔΓΕ εἶναι εὐθεῖαι, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν ΑΓΕ, ΕΓΒ, καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δυο ἄλλων προσκειμένων ΑΓΕ, ΑΓΔ, θέλει εἶναι ἑκάτερον ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$ΑΓΕ+ΕΓΒ=ΑΓΕ+ΑΓΔ,$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα ἀμέσως ΕΓΒ=ΑΓΔ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΑΓΕ, ΔΓΒ εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν ὅλαι αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

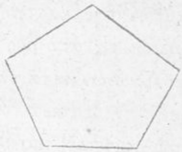
Σχόλιον. Τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων γωνιῶν ΑΓΔ, ΔΓΒ, ΒΓΕ, ΕΓΑ, τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν ΑΒ, ΔΕ, ἰσοῦται μὲ τέσσαρας ὀρθάς. Διότι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων, καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων, ἰσοῦται ἑκάτερον μὲ δύο ὀρθάς.

Καὶ ἐν γένει, τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν ΛΓΒ, ΒΓΔ, ΔΓΕ, ΕΓΘ, ΘΓΛ, τῶν σχηματιζομένων ἐξ ὁσωνδήποτε εὐθειῶν ΛΓ, ΒΓ, ΔΓ, κτλ. εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ περατουμένων, ἰσοῦται μὲ τέσσαρας ὀρθάς. Διότι, ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον Γ σχηματίσωμεν τέσσαρας γωνίας ὀρθὰς ἄγοντες δύο καθέτους πρὸς ἀλλήλας εὐθείας, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν.



ΟΡΙΣΜΟΙ.

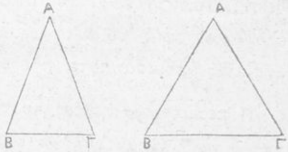
1. *Σχῆμα ἐπίπεδον* καλεῖται μέρος ἐπιπέδου ὑπὸ γραμμῶν πανταχόθεν περατούμενον. Ἐὰν αἱ περατοῦσαι τὸ ἐπίπεδον γραμμαὶ ἦναι εὐθεῖαι, τὸ μὲν σχῆμα καλεῖται *εὐθύγραμμον* ἢ *πολύγωνον*, αἱ δ' εὐθεῖαι γραμμαὶ *πλευραὶ* τοῦ πολυγώνου.



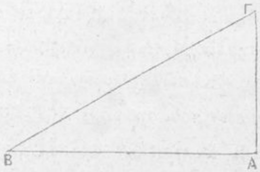
2. *Περίμετρος* τοῦ πολυγώνου καλεῖται τὸ ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἀποτελούμενον μέγεθος, ἢ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

3. Τὸ ἐκ τριῶν πλευρῶν συνιστάμενον πολύγωνον καλεῖται *τρίγωνον*, καὶ εἶναι τὸ ἁπλούστερον πάντων τῶν πολυγώνων. *Τετράπλευρον* καλεῖται τὸ ἐκ τεσσάρων πλευρῶν ἀποτελούμενον, *πεντάπλευρον* ἢ *πεντάγωνον* τὸ ἔχον πέντε πλευράς, καὶ οὕτω καθεξῆς.

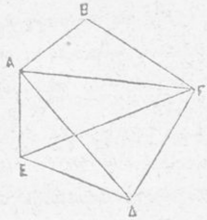
4. Τὸ ἔχον καὶ τὰς τρεῖς αὐτοῦ πλευρὰς ἴσας τρίγωνον καλεῖται *ἰσόπλευρον*. Τὸ ἔχον τὰς δύο μόνον πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ ἴσας καὶ τὴν τρίτην ἄνισον καλεῖται *ἰσοσκελές*. Τὸ ἔχον καὶ τὰς τρεῖς αὐτοῦ πλευρὰς ἀνίσους καλεῖται τρίγωνον *σκαληνόν*.



5. Τὸ ἔχον μίαν γωνίαν Α ὀρθὴν τρίγωνον καλεῖται *ὀρθογώνιον*. Ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας Α πλευρὰ ΒΓ καλεῖται *ὑποτείνουσα* τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.



6. *Διαγώνιος* πολυγώνου τινὸς ΑΒΓΔΕ καλεῖται πᾶσα εὐθεῖα ΑΓ, ΑΔ, ΓΕ κτλ., ἑνόνουσα τὰς κορυφὰς δύο μὴ προσκειμένων γωνιῶν. Εἰς τὰ πολύγωνα προσκείμεναι γωνίαι καλοῦνται αἱ ἔχουσαι τὰς κορυφὰς αὐτῶν εἰς τὰ ἄκρα τῆς αὐτῆς τοῦ πολυγώνου πλευρᾶς. Παραδείγματος χάριν, αἱ γωνίαι Α καὶ Β, Β καὶ Γ, Ε καὶ Δ, εἶναι προσκείμεναι, διότι αἱ κορυφαὶ αὐτῶν Α καὶ Β, Β καὶ Γ, Ε καὶ Δ κεῖνται ἀνὰ δύο ἐπὶ τῶν ἄκρων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΕΔ τοῦ πολυγώνου.

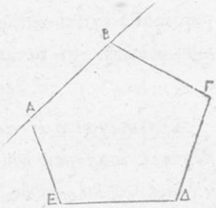


7. *Ἰσόπλευρον* πολύγωνον καλεῖται τὸ ἔχον ὅλας αὐτοῦ τὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας, καὶ *ἰσογώνιον* τὸ ἔχον ὅλας αὐτοῦ τὰς γωνίας ἴσας.

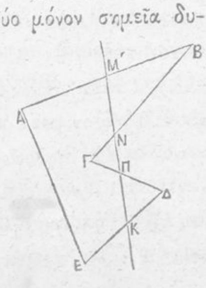
8. Δύο πολύγωνα λέγονται *ἰσόπλευρα*, ὅταν ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ καὶ ὁμοίως κειμένας, τουτέστιν, ὅταν ἀναχωρῶν τις ἀπὸ δύο ἴσας πλευράς, καὶ διατρέχων τὰς περιμέτρους τῶν πολυγώνων κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, εὕρῃ τὴν δευτέραν πλευρὰν τοῦ ἑνὸς ἴσην τῇ δευτέρᾳ τοῦ ἑτέρου, τὴν τρίτην τοῦ πρώτου ἴσην τῇ τρίτῃ τοῦ δευτέρου, καὶ οὕτω καθεξῆς. *Ἰσογώνια* λέγοντα τὰ πολύγωνα, ὅταν ἀντὶ τῶν πλευρῶν ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ καὶ ὁμοίως κειμένας.

Αἱ ἴσαι πλευραὶ ἢ αἱ ἴσαι γωνίαι καλοῦνται *ὁμόλογοι*.

9. Πολύγωνόν τι καλεῖται *κυρτόν*, ὅταν κῆται ὁλόκληρον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος μιᾶς ὁποιασδήποτε τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, προεκβληθείσης. Τοιοῦτον εἶναι τὸ ΑΒΓΔΕ, ὅπερ κεῖται ὁλόκληρον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς προεκβολῆς μιᾶς ὁποιασδήποτε πλευρᾶς αὐτοῦ ΑΒ.



Ἡ περίμετρος παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου εἰς δύο μόνον σημεῖα δυνατὸν νὰ συναπαντηθῇ ὑπ' εὐθείας τινός. Διότι, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΚ συναπαντᾷ τὴν περίμετρόν του ΑΒΓΔΕ εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα Μ, Ν, Π, Κ, τότε, ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Μ καὶ Κ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΔΕ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Ν, δι' οὗ διέρχεται ἡ εὐθεῖα ΓΒ, ἂν προεκβληθῇ αὕτη, θὰ ὑπάρχωσι προφα-

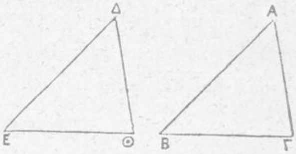


νῶς μέρη τοῦ σχήματος ΑΒΓΔΕ κείμενα ἑκατέρωθεν τῆς προεκβολῆς αὐτῆς, ἑπομένως τὸ πολύγωνον δὲν θέλει εἶναι κυρτόν.

Εἰς τὰ τέσσαρα πρῶτα βιβλία τῆς Γεωμετρίας, ὅπου περὶ ἐπιπέδων μόνον σχημάτων γίνεται λόγος, δὲν θέλομεν κάμει λόγον εἰμὴ περὶ τῶν κυρτῶν μόνον πολυγώνων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ.



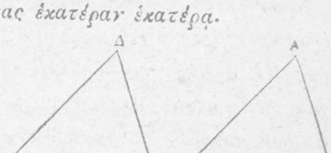
Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΘ, ἡ γωνία Α εἶναι ἴση τῇ Δ, ἡ πλευρὰ ΑΒ=ΔΕ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ=ΔΘ. Λέγω ὅτι τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος τρίγωνα εἶναι ἴσα.

Διότι, ἐὰν ἐπιθέσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ ΔΕΘ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ ΑΒ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΔΕ, ἐπειδὴ ἡ γωνία Α εἶναι ἴση τῇ Δ, ἡ πλευρὰ ΑΓ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΔΘ, καὶ ἐπειδὴ ΑΓ=ΔΘ, τὸ σημεῖον Γ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Θ. Λοιπὸν τότε καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΓ τοῦ ἑνὸς θέλει πέσει ἐπὶ τῆς τρίτης πλευρᾶς ΔΘ τοῦ ἑτέρου (ἀξ. 4), καὶ τὰ τρίγωνα θέλουσι ταυτισθῆ. Ἄρα εἶναι ἴσα (ἀξ. 5). Λοιπὸν κτλ.

Πόρισμα. Ὅταν δύο τρίγωνα ἔχωσι τρία τῶν μερῶν αὐτῶν ἴσα, τουτέστι τὴν γωνίαν Α=Δ, τὴν πλευρὰν ΑΒ=ΔΕ, καὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ=ΔΘ, ἔχωσι καὶ τὰ λοιπά των τρία ἄλλα μέρη ἴσα, ἤτοι τὴν γωνίαν Β=Ε, τὴν Γ=Θ καὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ=ΕΘ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7. ΘΕΩΡΗΜΑ.

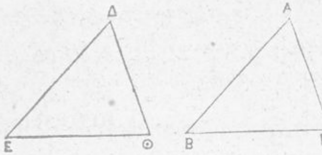
Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς δύο προσκειμένας αὐτῇ γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ.



Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΘ ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι ἴση τῇ ΕΘ, ἡ γωνία Β=Ε καὶ ἡ Γ=Θ. Λέγω ὅτι τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος τρίγωνα εἶναι ἴσα.

Διότι, ἐὰν ἐπιθέσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ ΔΕΘ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ ΒΓ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΕΘ, ἐπειδὴ ἡ γωνία Β εἶναι ἴση τῇ Ε, ἡ πλευρὰ ΒΑ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΕΔ, καὶ τὸ σημεῖον Α θέλει πέσει εἴς τι σημεῖον αὐτῆς. Ἐπειδὴ ἀφ' ἑτέρου ἡ γωνία

Γ εἶναι ἴση τῇ Θ, ἡ πλευρὰ Γ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΔΘ, τὸ δὲ σημεῖον Α θέλει πέσει εἴς τι σημεῖον αὐτῆς. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ σημεῖον Α πρέπει νὰ κῆται καὶ ἐπὶ τῆς ΕΔ καὶ ἐπὶ τῆς ΘΔ, θέλει ἀναγκαίως πέσει ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς αὐτῶν Δ. Ἀλλὰ τότε τὰ δύο τρίγωνα ταυτίζονται. Ἄρα εἶναι ἴσα. Λοιπὸν κτλ.

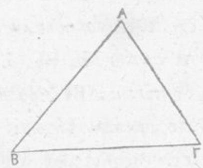


Πόρισμα. Ὅταν δύο τρίγωνα ἔχωσι τρία τῶν μερῶν αὐτῶν ἴσα, τουτέστι τὴν πλευρὰν $ΒΓ=ΕΘ$, τὴν γωνίαν $Β=Ε$, καὶ τὴν $Γ=Θ$, ἔχουσι καὶ τὰ λοιπά των μέρη ἴσα, ἤτοι $ΑΒ=ΔΕ$, $ΑΓ=ΔΘ$, καὶ $Α=Δ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶσα πλευρὰ τριγώνου τινὸς εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλειτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν 8 ἡ εὐθεῖα γραμμὴ, ἡ ΑΒ π. χ., εἶναι ὁ συντομώτερος δρόμος μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β. Λοιπὸν ἡ ΑΒ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων ΑΓ καὶ ΒΓ, τουτέστιν ἔχομεν $ΑΒ<ΑΓ+ΒΓ$.



Ἀφαιροῦντες ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἀνωτέρω ἀνισότητος ΑΓ ἢ ΓΒ, θέλομεν ἔχει τὰς ἑξῆς νέας ἀνισότητας

$$ΑΒ-ΑΓ<ΒΓ, \qquad ΑΒ-ΒΓ<ΑΓ,$$

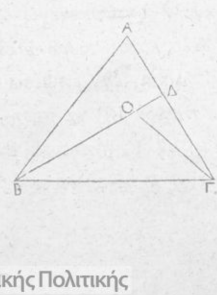
δι' ὧν ἀποδεικνύεται ὅτι πᾶσα πλευρὰ ΒΓ, ΑΓ ὁποιουδήποτε τριγώνου εἶναι μεγαλειτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἐντὸς τριγώνου τινὸς ΑΒΓ λάβωμεν σημεῖόν τι Ο, καὶ ἑνώσωμεν αὐτὸ μὲ τὰ ἄκρα μιᾶς ὁποιασδήποτε τοῦ τριγώνου πλευρᾶς ΒΓ διὰ τῶν εὐθειῶν ΟΒ καὶ ΟΓ, τὸ ἄθροισμα $ΟΒ+ΟΓ$ αὐτῶν θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος $ΑΒ+ΑΓ$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου προεκβάλλομεν τὴν ΒΟ μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΟΓ θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ προαποδειχθέντα

$$ΟΓ<ΓΔ+ΟΔ.$$



Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνωτέρω ἀνισότητος ΟΒ, θέλομεν ἔχει

$$\mathrm{O\Gamma}+\mathrm{OB}<\Gamma\Delta+\mathrm{O}\Delta+\mathrm{OB}, \text{ ἢ } \mathrm{O\Gamma}+\mathrm{OB}<\Gamma\Delta+\mathrm{B}\Delta. \qquad (1)$$

Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἔχομεν τὴν ἀνισότητα

$$\mathrm{B}\Delta<\mathrm{AB}+\mathrm{A}\Delta,$$

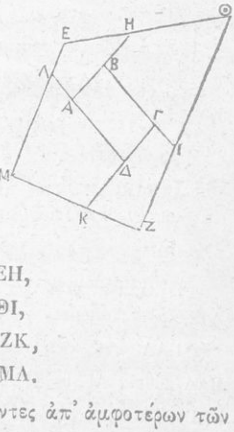
ἥτις γίνεται, προστιθεμένης εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς τῆς εὐθείας ΔΓ,

$$\mathrm{B}\Delta+\Delta\Gamma<\mathrm{AB}+\mathrm{A}\Delta+\Delta\Gamma, \text{ ἢ } \mathrm{B}\Delta+\Delta\Gamma<\mathrm{AB}+\mathrm{A}\Gamma. \qquad (2)$$

Ἀπεδείχθη λοιπὸν διὰ τῶν ἀνισοτήτων (1) καὶ (2) ὅτι ΟΓ+ΟΒ εἶναι μικρότερον τοῦ ΓΔ+ΒΔ, ὅπερ εἶναι μικρότερον τοῦ ΑΒ+ΑΓ. Λοιπὸν κατ' ἰσχυρότερον λόγον ΟΓ+ΟΒ θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ ΑΒ+ΑΓ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ περίμετρος παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης ΜΕΘΖ, περικυκλούσης αὐτὴν πανταχόθεν.



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου προεκβάλλομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ τοῦ ἐσωτερικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ συναπαντήσωσιν ἑκάστη τὴν περικυκλοῦσαν περίμετρον ΜΕΘΖ εἰς τὰ σημεῖα Η, Ι, Κ, Λ. Ἐκ τῶν σχηματισθέντων οὕτω σχημάτων ΑΗΕΛ, ΒΙΘΗ, ΓΚΖΙ, ΔΛΜΚ πορίζόμεθα τὰς ἑξῆς ἀνισότητας

$$\mathrm{AB}+\mathrm{BH}<\mathrm{A}\Lambda+\Lambda\mathrm{E}+\mathrm{EH},$$
$$\mathrm{B}\Gamma+\Gamma\mathrm{I}<\mathrm{BH}+\mathrm{H}\Theta+\Theta\mathrm{I},$$
$$\Gamma\Delta+\Delta\mathrm{K}<\Gamma\mathrm{I}+\mathrm{IZ}+\mathrm{ZK},$$
$$\Delta\mathrm{A}+\mathrm{A}\Lambda<\Delta\mathrm{K}+\mathrm{KM}+\mathrm{M}\Lambda.$$

Προσθέτοντες ταύτας κατὰ μέλη, ἐξαλείφοντες ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὰ κοινὰ μέρη ΒΗ, ΓΙ, ΔΚ, ΑΛ, καὶ παριστῶντες διὰ μιᾶς γραμμῆς τὰ ἀθροίσματα τῶν ἐπ' εὐθείας κειμένων μερῶν, θέλομεν ἔχει τὴν ἀνισότητα

$$\mathrm{AB}+\mathrm{B}\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta\mathrm{A}<\mathrm{E}\Theta+\Theta\mathrm{Z}+\mathrm{ZM}+\mathrm{ME},$$

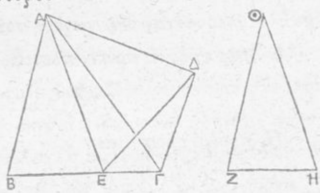
ἥτις ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι ἡ περίμετρος παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης, περικυκλούσης αὐτὴν καὶ ἐχούσης τὰ αὐτὰ ἄκρα.

Παρατήρησις. Εὐκόλως παρατηρεῖ τις ὅτι τὸ ἐν τῇ προηγουμένῃ προτάσει ἀποδειχθὲν θεώρημα εἶναι μερικωτάτη περίπτωσις τοῦ προαποδειχθέντος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ ἡ ὑπὸ τῶν δύο πλευρῶν τοῦ ἑνὸς περιεχομένη γωνία ἦναι μεγαλειτέρα τῆς ὑπὸ τῶν δύο πλευρῶν τοῦ ἑτέρου περιεχομένης, λέγω ὅτι ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ πρώτου τριγώνου θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ δευτέρου.



Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΘΖΗ ἔχομεν ΑΒ=ΘΖ, ΑΓ=ΘΗ καὶ τὴν γωνίαν ΒΑΓ μεγαλειτέραν τῆς ΖΘΗ. Λέγω ὅτι ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΓ τοῦ πρώτου θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς τρίτης πλευρᾶς ΖΗ τοῦ δευτέρου.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου σχηματίζομεν τὴν γωνίαν ΓΑΔ ἴσην τῇ Θ, λαμβάνομεν ΑΔ=ΘΖ καὶ ἄγομεν τὴν ΓΔ. Τὰ δύο τρίγωνα ΓΑΔ, ΘΖΗ, θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας ΓΑΔ, ΖΘΗ ἴσας ἐκ κατασκευῆς, καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὰς πλευρὰς ὡσαύτως ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ (προτ. 6), ἐπομένως ἡ ΓΔ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΖΗ. Τὸ θεώρημα λοιπὸν ἀποδεικνύεται ἂν ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΓΔ.

Ἄς διαιρέσωμεν τὴν γωνίαν ΒΑΔ εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τῆς εὐθείας ΑΕ, καὶ ἂς ἄξωμεν τὴν ΕΔ. Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΓΑΔ, ἥτις κατεσκευάσθη ἴση τῇ Θ, ἡ διχοτομοῦσα τὴν ὅλην γωνίαν ΒΑΔ εὐθεῖα ΑΕ θέλει ἀναγκαίως πέσει ἐκτὸς τῆς μεγαλειτέρας γωνίας ΒΑΓ. Τὰ δύο τρίγωνα ΒΑΕ, ΕΑΔ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΑΕ κοινὴν, τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΔ ἴσας, καὶ τὰς περιεχομένας ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίας ΒΑΕ, ΕΑΔ ἴσας ἐκ κατασκευῆς. Λοιπὸν ΒΕ=ΕΔ. Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΕΔΓ ἔχομεν

$$\Gamma\Delta < \Gamma E + E\Delta, \text{ ἢ } \Gamma\Delta < \Gamma E + BE, \text{ ἢ } \Gamma\Delta < B\Gamma.$$

Λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΒΓ τοῦ πρώτου τριγώνου εἶναι μεγαλειτέρα τῆς πλευρᾶς ΖΗ τοῦ δευτέρου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12. ΘΕΩΡΗΜΑ.

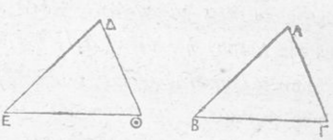
Ἀντιστρόφως, ἐὰν δύο πλευραὶ τριγώνου τινὸς ἦναι ἴσαι μὲ τὰς *δύο πλευρὰς ἑτέρου τριγώνου ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ πρώτου ἦναι μεγαλειτέρα τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ δευτέρου, ἡ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου περιεχομένη γωνία, θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν τοῦ δευτέρου.*

Διότι, ἂν ἡ γωνία τοῦ πρώτου ἦτο ἴση μὲ τὴν γωνίαν τοῦ δευτέρου, τὰ τρίγωνα ἤθελον εἶναι ἴσα (πρότ. 6), ἑπομένως καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ πρώτου ἤθελεν εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην πλευρὰν τοῦ δευτέρου, τοῦθ' ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Ἂν δὲ ἡ γωνία τοῦ πρώτου ἦτο μικροτέρα τῆς γωνίας τοῦ δευτέρου, τότε, κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα, ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ πρώτου ἔπρεπε νὰ ἦναι μικροτέρα τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ δευτέρου, ὅπερ ἐπίσης ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Λοιπὸν ἀναγκαίως ἡ ὑπὸ τῶν δύο πλευρῶν περιεχομένη γωνία τοῦ πρώτου τριγώνου εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ὑπὸ τῶν ἴσων αὐταῖς πλευρῶν περιεχομένης γωνίας τοῦ δευτέρου, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΘ ἡ πλευρὰ ΑΒ=ΔΕ, ἡ ΑΓ=ΔΘ καὶ ἡ ΒΓ=ΕΘ. Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν Α=Δ, τὴν Β=Ε καὶ τὴν Γ=Θ.

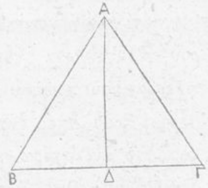


Διότι, ἐὰν ἡ γωνία Α ὑποτεθῇ μεγαλειτέρα τῆς Δ, ἐπειδὴ αἱ περιέχουσαι τὰς γωνίας ταύτας πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, ΔΕ, ΔΘ εἶναι ἴσαι, ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΓ τοῦ πρώτου ἔπρεπε νὰ ἦναι μεγαλειτέρα τῆς τρίτης πλευρᾶς ΕΘ τοῦ δευτέρου (πρότ. 11)· ἐὰν δὲ ἡ γωνία Α ὑποτεθῇ μικροτέρα τῆς Δ, τότε, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἔπρεπεν ἡ πλευρὰ ΒΓ νὰ ἦναι μικροτέρα τῆς ΕΘ. Ἀλλ' αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ ΕΘ ὑπετέθησαν ἴσαι. Ἄρα καὶ αἱ γωνίαι Α καὶ Δ θέλουσιν εἶναι ἴσαι, ἑπομένως καὶ τὰ δύο τρίγωνα θέλουσιν εἶναι ἴσα (πρότ. 6). Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλαμεν ἀπ' εὐθείας ἀποδείξει, ὅτι ἡ γωνία Β=Ε καὶ ἡ Γ=Θ.

Σχόλιον. Ἐκ τοῦ ἀποδειχθέντος θεωρήματος βλέπομεν ὅτι εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα αἱ ἴσαι γωνίαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν, καὶ ἀντιστρόφως, αἱ ἴσαι πλευραὶ κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν. Οὕτω, π. χ. αἱ ἴσαι γωνίαι Α καὶ Δ κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ΒΓ, ΕΘ, κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς πᾶν ἰσοσκελὲς τρίγωνον αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι.



Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἴση τῇ ΑΓ, λέγω ὅτι ἡ ἀπέναντι τῆς ΑΒ γωνία Γ θέλει εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ Β, τῇ ἀπέναντι τῆς ἴσης τῇ ΑΒ πλευρᾶς ΑΓ.

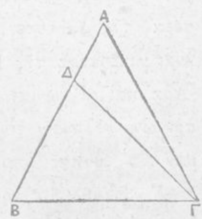
Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἑνόνομεν τὴν κορυφὴν Α μὲ τὸ μέσον Δ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ. Τὰ δύο σχηματισθέντα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ θέλουσιν εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΑΔ κοινὴν, τὰς πλευρὰς ΒΔ, ΔΓ ἴσας ἐκ κατασκευῆς, καὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως (προτ. 13). Λοιπὸν αἱ ἀπέναντι τῆς αὐτῆς πλευρᾶς ΑΔ γωνίαι Β καὶ Γ θέλουσιν εἶναι ἴσαι, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα. Τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ὡς κείμεναι ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν τοῦ αὐτοῦ τριγώνου.

Σχόλιον. Ἐπειδὴ τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ ἀπεδείχθησαν ἴσα, θέλομεν ἔχει γωνία ΒΑΔ=ΔΑΓ καὶ ΑΔΒ=ΑΔΓ = μιᾷ ὀρθῇ (ὁρισμ. 15). Λοιπὸν ἡ εὐθεῖα *ΑΔ*, *ἡ ἑνόνουσα τὴν κορυφὴν τῆς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ ἰσοσκελοῦς τινος τριγώνου σχηματιζομένης γωνίας Α μὲ τὸ μέσον Δ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ, εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτῆς, καὶ διαιρεῖ τὴν γωνίαν Α εἰς δύο ἴσα μέρη.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν δύο γωνίαι τριγώνου τινὸς ἦναι ἴσαι, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευραὶ θέλουσιν εἶναι ἴσαι, καὶ τὸ τρίγωνον θέλει εἶναι ἰσοσκελές.

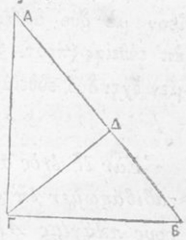


Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία Β εἶναι ἴση τῇ Γ, λέγω ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΓ, θέλει εἶναι ἴση τῇ ΑΒ, καὶ ἑπομένως ὅτι τὸ τρίγωνον θέλει εἶναι ἰσοσκελές.

Διότι, ἂν αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ δὲν ἦσαν ἴσαι, ἡ μία τούτων, ἡ ΑΒ π. χ., θέλει εἶναι μεγαλειτέρα. Ἂς λάβωμεν ἐπ' αὐτῆς ΒΔ=ΑΓ καὶ ἂς ἄξωμεν τὴν ΔΓ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΔΓ θέλουσιν ἔχει τὴν πλευρὰν ΒΓ κοινὴν, τὰς πλευρὰς ΒΔ, ΑΓ ἴσας ἐκ κατασκευῆς, καὶ τὰς περιεχομένας ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίας Β καὶ ΑΓΒ ἴσας, ἐξ ὑποθέσεως. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα θέλουσιν εἶναι ἴσα (πρότ. 6), ὅπερ ἄτοπον· διότι τὸ μέρος ΒΓΔ δὲν δύναται νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ ὅλον ΑΒΓ (ἀξ. 2). Λοιπὸν αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι ἴσαι, καὶ ἐπομένως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐκ δύο πλευρῶν τριγώνου τινὸς μεγαλειτέρα εἶναι ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλειτέρας γωνίας, καὶ ἀντιστρόφως, ἐκ δύο γωνιῶν μεγαλειτέρα εἶναι ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλειτέρας πλευρᾶς.



Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΑΒΓ· λέγω ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ, ἡ ἀπέναντι τῆς γωνίας ΑΓΒ, θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΑΓ, τῆς ἀπέναντι τῆς μικροτέρας γωνίας ΑΒΓ.

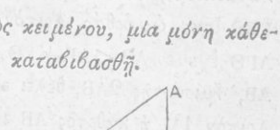
Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄς κατασκευάσωμεν τὴν γωνίαν ΒΓΔ $=$ τῇ Β. Ἐπειδὴ κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα τὸ τρίγωνον ΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελὲς, θέλομεν ἔχει ΓΔ$=$ΔΒ. Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ἔχομεν ΑΓ $<$ ΑΔ $+$ ΔΓ, ἢ, ἐπειδὴ ΔΓ εἶναι ἴση τῇ ΔΒ, ΑΓ $<$ ΑΔ $+$ ΒΔ, ἢ, ὅπερ ταὐτὸ, ΑΓ $<$ ΑΒ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Ἄς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΑΓ· λέγω ὅτι ἡ γωνία Γ, ἡ ἀπέναντι τῆς ΑΒ, θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς γωνίας Β, τῆς ἀπέναντι τῆς ΑΓ.

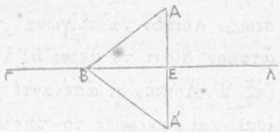
Διότι, ἂν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ ἦσαν ἴσαι, ἠθέλαμεν ἔχει ΑΓ$=$ΑΒ, ἂν δὲ ἡ γωνία Β ἦτο μεγαλειτέρα τῇ Γ, τότε κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἡ πλευρὰ ΑΓ ἔπρεπε νὰ ἦναι μεγαλειτέρα τῆς ΑΒ. Ἀλλὰ κατὰ τὰ ὑποτεθέντα ἡ ΑΒ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΑΓ. Λοιπὸν καὶ ἡ γωνία Γ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς Β.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐξ ἑνὸς σημείου, ἐκτὸς εὐθείας τινὸς κειμένου, μία μόνη κάθετος ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας δυνατὸν νὰ καταβιβασθῇ.



Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Α δυνάμεθα νὰ καταβιβάσωμεν δύο καθέτους ΑΕ, ΑΒ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΛ. Ἄς προεκβάλωμεν τὴν μίαν τούτων, τὴν ΑΕ π. χ., καὶ, ἀφοῦ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς αὐτῆς λάβωμεν ΕΑ′= ΑΕ, ἂς ἄξωμεν τὴν εὐθεῖαν ΒΑ′.



Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΕ, Α′ΒΕ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΒΕ κοινὴν, τὰς πλευρὰς ΑΕ, Α′Ε ἴσας ἐκ κατασκευῆς, καὶ τὰς περιεχομένας γωνίας ΑΕΒ, Α′ΕΒ ἴσας ὡς ὀρθάς. Ἡ γωνία λοιπὸν ΑΒΕ θέλει εἶναι ἴση τῇ Α′ΒΕ. Ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν ἡ ΑΒΕ εἶναι ὀρθή. Λοιπὸν καὶ ἡ Α′ΒΕ θέλει εἶναι ὀρθή. Ἀλλὰ τότε, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα ΑΒΕ+ΕΒΑ′ τῶν δύο διαδοχικῶν γωνιῶν ΑΒΕ,Α′ΒΕ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς, αἱ ἐξωτερικαὶ αὐτῶν πλευραὶ ΑΒ, Α′Β κεῖνται ἐπ' εὐθείας (πρότ. 4). Ἐξ ἑνὸς λοιπὸν σημείου Α εἰς ἄλλο Α′ ἠθέλαμεν ἔχει δύο εὐθείας ΑΑ′, ΑΒΑ′, ὅπερ ἀδύνατον (ἀξ. 4). Λοιπὸν κτλ.

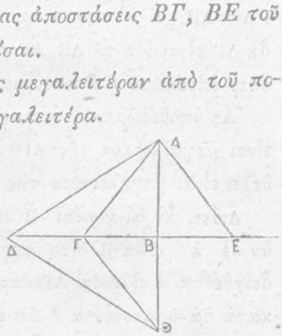
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Α, ἐκτὸς εὐθείας τινὸς ΔΕ κειμένου, καταβιβάσωμεν ἐπ' αὐτῆς τὴν κάθετον ΑΒ, καὶ ἄξωμεν καὶ διαφόρους πλαγίας ΑΕ, ΑΓ, ΑΔ, λέγω ὅτι

1ον. Ἡ κάθετος ΑΒ εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας.

2ον. Αἱ πλάγιαι ΑΓ, ΑΕ, αἱ εἰς ἴσας ἀποστάσεις ΒΓ, ΒΕ τοῦ ποδὸς Β τῆς καθέτου ἀγόμεναι, εἶναι ἴσαι.

3ον. Ἐκ δύο πλαγίων ΑΓ, ΑΔ, ἡ εἰς μεγαλειτέραν ἀπὸ τοῦ ποδὸς Β ἀπόστασιν ΒΔ ἠγμένη εἶναι μεγαλειτέρα.



Πρὸς ἀπόδειξιν τῶν ἀνωτέρω λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς καθέτου ΑΒ τὴν ἀπόστασιν ΒΘ=ΑΒ, καὶ ἄγομεν τὰς εὐθείας ΘΓ, ΘΔ.

1ον. Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΓΒΘ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΒΓ κοινὴν, τὰς ΑΒ καὶ ΒΘ ἴσας ἐκ κατασκευῆς, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας ΑΒΓ, ΓΒΘ ἴσας ὡς ὀρθάς. Λοιπὸν ἔχομεν ΑΓ=ΓΘ. Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΘ ἔχομεν ΑΘ<ΑΓ+ΓΘ, ἢ, ὅπερ ταὐτὸ, 2ΑΒ<2ΑΓ. Ἄρα καὶ ἡ ΑΒ, ἥμισυ τῆς 2ΑΒ, θέλει εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΓ, ἡμίσεως τῆς 2ΑΓ. Λοιπὸν 1ον, ἡ κάθετος ΑΒ εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας ΑΓ.

2ον. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ΒΕ=ΒΓ. Τότε τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΕ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΑΒ κοινὴν, τὰς ΒΓ καὶ ΒΕ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως, καὶ τὰς περιεχομένας ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίας ΑΒΓ, ΑΒΕ ἴσας, ἑπομένως θέλομεν ἔχει ΑΓ=ΑΕ. Λοιπὸν 2ον, αἱ πλάγιαι ΑΓ, ΑΕ, αἱ εἰς ἴσας ἀποστάσεις τοῦ ποδὸς Β τῆς καθέτου ἀγόμεναι, εἶναι ἴσαι.

3ον. Ἔστω ΒΔ > ΒΓ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΘ, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 9 προτάσει, ἔχομεν τὴν ἀνισότητα ΑΓ + ΓΘ < ΑΔ + ΔΘ. Ἐπειδὴ δ' ἀπεδείχθη προηγουμένως ὅτι ΑΓ=ΓΘ, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι ΑΔ=ΔΘ, ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω 2ΑΓ < 2ΑΔ, ἐξ ἧς θέλομεν πορισθῇ, διαιροῦντες διὰ 2 τὰ δύο μέλη αὐτῆς, ΑΓ < ΑΔ. Λοιπὸν 3ον, ἐκ δύο πλαγίων ΑΓ, ΑΔ ἡ εἰς μεγαλειτέραν ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ἀπόστασιν ἠγμένη ΑΔ εἶναι μεγαλειτέρα.

Πόρισμα 1. Ἐπειδὴ ἡ ἔκ τινος σημείου Α ἐπί τινος εὐθείας ΔΕ καταβιβαζομένη κάθετος ΑΒ εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας, τὸ μέγεθος αὐτῆς λαμβάνεται ὡς τὸ ἀληθὲς μέτρον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου Α ἀπὸ τῆς εὐθείας ΔΕ.

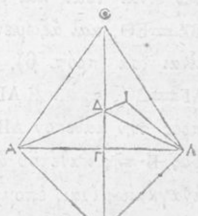
Πόρισμα 2. Ἐξ ἑνὸς σημείου, ἐκτὸς εὐθείας τινὸς κειμένου, δύο μόνον ἴσαι πρὸς ἀλλήλας πλάγιαι δυνατὸν νὰ ἀχθῶσι. Διότι, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἦτο δυνατὸν νὰ ἀχθῶσι τρεῖς ἴσαι, τότε ἀναγκαίως αἱ δύο τούτων ἤθελον εὑρίσκεσθαι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τῆς εὐθείας καταβιβαζομένης καθέτου καὶ εἰς ἀνίσους ἀπὸ τοῦ ποδὸς αὐτῆς ἀποστάσεις, ὅπερ ἀδύνατον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Γ, κειμένου εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΑΛ, ὑψώσωμεν κάθετον ἐπὶ ταύτης, λέγω ὅτι

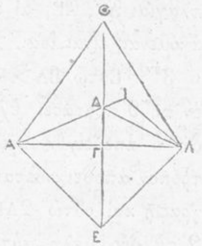
1ον. Πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου ΕΘ θέλει ἀπέχει ἰσάκις τῶν ἄκρων Α καὶ Λ τῆς εὐθείας ΑΛ.

2ον. Πᾶν σημεῖον, ἐκτὸς τῆς καθέτου κείμενον, θέλει ἀπέχει ἀνισάκις τῶν αὐτῶν ἄκρων.



Διότι, ἂν ἑνώσωμεν σημεῖόν τι Θ τῆς καθέτου μὲ τὰ ἄκρα Α καὶ Λ τῆς εὐθείας ΑΛ, αἱ εὐθεῖαι ΘΑ, ΘΛ θέλουσιν εἶναι πλάγιαι, ἰσάκις ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς Γ τῆς καθέτου, καὶ ἑπομένως κατὰ τὰ προαποδειχθέντα θέλουσιν εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν 1ον, πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου ἀπέχει ἰσάκις τῶν ἄκρων Α καὶ Λ.

2ον. Ἔστω σημεῖόν τι Ι, ἐκτὸς τῆς καθέτου ΕΘ κείμενον. Ἐὰν ἄξωμεν τὰς εὐθείας ΑΙ, ΙΛ, ἡ μία τούτων ἀναγκαίως θέλει συναπαντήσει τὴν κάθετον εἴς τι σημεῖον Δ, ὅπερ θέλει ἀπέχει ἰσάκις τῶν ἄκρων Α καὶ Λ. Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΛΔΙ ἔχομεν ΙΛ < ΙΔ + ΔΛ, ἤ, ἐπειδὴ ΔΛ = ΑΔ, ΙΛ < ΙΔ + ΔΑ. Ἀλλὰ ΙΔ + ΔΑ = ΙΑ. Λοιπὸν ΙΛ < ΙΑ. Λοιπὸν 2ον, πᾶν σημεῖον Ι, ἐκτὸς τῆς καθέτου κείμενον, ἀπέχει ἀνισάκις τῶν ἄκρων Α καὶ Λ.



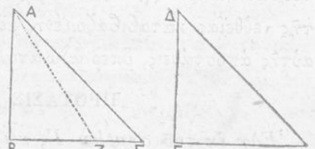
Παρατήρησις. Οἱ Μαθηματικοὶ καλοῦσι *γεωμετρικὸν τόπον* πᾶσαν εὐθεῖαν ἢ πᾶσαν ἐπιφάνειαν, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἔχουσι κοινήν τινα ἰδιότητα, ἣν οὐδὲν τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ ἐφ' οὗ κεῖται ἡ εὐθεῖα ἐπιπέδου, ἢ τοῦ διαστήματος δύναται νὰ ἔχῃ.

Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΕΘ, κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ἐχόντων τὴν κοινὴν ἰδιότητα τοῦ ν' ἀπέχωσιν ἰσάκις ἀπὸ τῶν ἄκρων Α καὶ Λ τῆς εὐθείας ΑΛ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 20. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ μίαν ἄλλην πλευρὰν ἴσην.

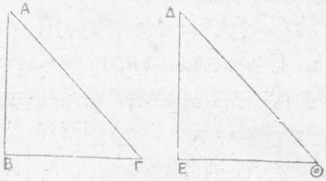
Ἔστωσαν τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΘ, ἅτινα καθ' ὑπόθεσιν ἔχουσι τὰς ὑποτεινούσας των ΑΓ, ΔΘ ἴσας, καὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΔΕ ἴσας. Λέγω ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα.



Ἡ ἰσότης τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος τριγώνων ἤθελεν εἶναι καταφανής, ἂν καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΓ τοῦ ἑνὸς ἦτο ἴση τῇ τρίτῃ πλευρᾷ ΕΘ τοῦ ἑτέρου (πρότ. 13). Ἂς ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι αἱ πλευραὶ ΒΓ, ΕΘ δὲν εἶναι ἴσαι, καὶ ἔστω ΒΓ ἡ μαγαλειτέρα τούτων. Ἂν λάβωμεν ΒΖ = ΕΘ, καὶ ἄξωμεν τὴν ΑΖ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΖ, ΔΕΘ θέλουσιν εἶναι ἴσα (πρότ. 6), καὶ θέλομεν ἔχει ΑΖ = ΔΘ. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ΑΓ = ΔΘ, ἄρα καὶ ΑΓ = ΑΖ, ὅπερ ἄτοπον, διότι αἱ εὐθεῖαι ΑΖ, ΑΓ ὡς πρὸς τὴν κάθετον ΑΒ εἶναι πλάγιαι ἠγμέναι εἰς ἀνίσους ἀπὸ τοῦ ποδὸς Β τῆς καθέτου ἀποστάσεις. Λοιπὸν αἱ δύο πλευραὶ ΒΓ, ΕΘ εἶναι ἀναγκαίως ἴσαι, ἑπομένως καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΘ εἶναι ἴσα. Λοιπὸν κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 21. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ μίαν τῶν ἄλλων γωνιῶν ἴσην.



Ἔστωσαν τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΘ, ἅτινα καθ' ὑπόθεσιν ἔχουσι τὰς ὑποτεινούσας των ΑΓ, ΔΘ ἴσας, καὶ τὰς γωνίας Α καὶ Δ ἴσας. Λέγω ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα.

Διότι, ἂν ἐπιθέσωμεν τὸ τρίγωνον ΔΕΘ, ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα ΔΘ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΓ, ἐπειδὴ ἡ γωνία Δ εἶναι ἴση τῇ Α, ἡ πλευρὰ ΔΕ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ΑΒ, τὸ δὲ σημεῖον Ε θέλει ἀναγκαίως πέσει ἐπὶ τοῦ Β. Διότι, ἂν τοῦτο ἔπιπτεν εἴς τι σημεῖον τῆς ΑΒ, διάφορον τοῦ Β, ἐπειδὴ τὸ ἐπιτιθέμενον τρίγωνον ΔΕΘ εἶναι ὀρθογώνιον, ἡ θέσις, ἣν τότε ἤθελε λάβει ἐπὶ τοῦ σχήματος ΑΒΓ ἡ εὐθεῖα ΕΘ, ἤθελεν εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ διάφορος τῆς καθέτου ΓΒ. Ἠθέλαμεν λοιπὸν ἔχει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Γ δύο καθέτους ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ, ὅπερ ἀδύνατον (πρότ. 17).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 22. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν διά τινος εὐθείας ΑΟ διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη γωνίαν τινὰ Α, πᾶν σημεῖον Μ τῆς διχοτομούσης ΑΟ θέλει ἀπέχει ἰσάκις τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΕ τῆς γωνίας, καὶ ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον, ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΑΕ κείμενον καὶ ἰσάκις ἀπέχον τῶν πλευρῶν αὐτῆς, κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτομούσης ΑΟ.

Ἐκ τοῦ σημείου Μ ἂς καταβιβάσωμεν τὰς καθέτους ΜΓ, ΜΔ. Τὰ οὕτω σχηματισθέντα δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΑΓ, ΜΑΔ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν ΑΜ κοινὴν καὶ τὰς γωνίας ΜΑΓ, ΜΑΔ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως (πρότ. 21). Λοιπὸν ΜΓ$=$ΜΔ.

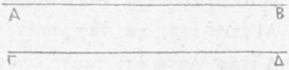
Ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ κάθετοι ΜΓ καὶ ΜΔ ὑποτεθῶσιν ἴσαι, καὶ ἄξωμεν τὴν ΑΜ, τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΑΓ, ΜΑΔ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν ΑΜ κοινὴν καὶ τὰς πλευρὰς ΜΓ, ΜΔ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως (πρότ. 20). Λοιπὸν καὶ ἡ γωνία ΜΑΓ$=$ΜΑΔ. Τὸ σημεῖον λοιπὸν Μ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν Α.

Πόρισμα. Πᾶν σημεῖον, κείμενον ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΑΕ καὶ ἐκτὸς τῆς διχοτομούσης αὐτὴν ΑΟ, ἀπέχει ἀνισάκις τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας.

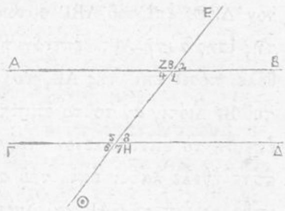
Ἡ διχοτομοῦσα λοιπὸν γωνίαν τινὰ εὐθεῖα εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ἰσάκις ἀπεχόντων τῶν πλευρῶν αὐτῆς σημείων.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

1. Δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ λέγονται *παράλληλοι*, ὅταν κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου δὲν συναπαντῶνται ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῶσιν ἑκατέρωθεν.



2. Ὅταν δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ τέμνωνται ὑπὸ τρίτης τινὸς ΕΘ, εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η τῆς κοινῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν τούτων σχηματίζονται ὀκτὼ γωνίαι, ἃς παριστῶμεν πρὸς συντομίαν διὰ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.



Αἱ μὲν τέσσαρες γωνίαι 1, 4, 5, 8, αἱ μεταξὺ τῶν τεμνομένων εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ περιλαμβανόμεναι καλοῦνται *ἐσωτερικαί*, αἱ δὲ λοιπαὶ 2, 3, 6, 7 *ἐξωτερικαί*.

Αἱ ἐσωτερικαὶ καὶ μὴ προσκείμεναι γωνίαι 1 καὶ 5 ἢ 4 καὶ 8, αἱ ἑκατέρωθεν τῆς διατεμνούσης ΕΘ κείμεναι, καλοῦνται *ἐντὸς ἐναλλάξ*.

Αἱ ἐξωτερικαὶ καὶ μὴ προσκείμεναι 2 καὶ 6, ἢ 3 καὶ 7, αἱ ἑκατέρωθεν τῆς διατεμνούσης ΕΘ κείμεναι, καλοῦνται *ἐκτὸς ἐναλλάξ*.

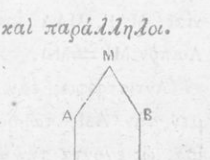
Αἱ μὴ προσκείμεναι γωνίαι 8 καὶ 2, ἢ 3 καὶ 5, ἢ 1 καὶ 7, ἢ 4 καὶ 6, αἱ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διατεμνούσης κείμεναι, ἐξ ὧν ἡ μὲν μία εἶναι ἐσωτερική, ἡ δὲ ἄλλη ἐξωτερική, καλοῦνται *ἀντιστοιχοῦσαι*.

Αἱ ἐσωτερικαὶ γωνίαι 1 καὶ 8, ἢ 4 καὶ 5, αἱ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διατεμνούσης κείμεναι, καλοῦνται *παρακείμεναι*.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 23. ΘΕΩΡΗΜΑ.

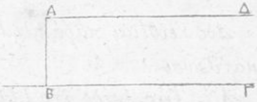
Δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τρίτης τινὸς εἶναι καὶ παράλληλοι.

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΔ κάθετοι ἐπὶ τῆς ΓΔ· λέγω ὅτι αὗται εἶναι καὶ παράλληλοι. Διότι, ἂν προεκβαλλόμεναι συνηντῶντο εἴς τι σημεῖον Μ, ἠθέλαμεν ἔχει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ δύο εὐθείας ΜΑΓ, ΜΒΔ καθέτους ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΓΔ, ὅπερ ἀπεδείχθη ἀδύνατον (πρότ. 17).



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 24. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐξ ἑνὸς σημείου Α, ἐκτὸς εὐθείας τινὸς ΒΓ κειμένου, δυνάμεθα νὰ ἄξωμεν πάντοτε εὐθεῖαν παράλληλον τῇ δεδομένῃ εὐθείᾳ.

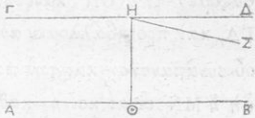


Πρὸς τοῦτο ἐκ τοῦ σημείου Α καταβιβάζομεν τὴν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τῆς ΒΓ, καὶ εἰς τὸ σημεῖον Α ὑψοῦμεν τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ. Ἡ εὐθεῖα ΑΔ θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ, διότι ἀμφότεραι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ. (πρότ. 23). Λοιπὸν ἐξ ἑνὸς σημείου Α κτλ.

Θέλομεν πρὸς τούτοις παραδεχθῇ ὡς πρότασιν φανεράν, ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Α *μία μόνη* παράλληλος τῇ δεδομένῃ εὐθείᾳ ΒΓ ἄγεται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 25. ΘΕΩΡΗΜΑ.

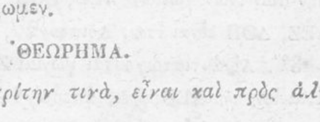
Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ ἦναι παράλληλοι, πᾶσα εὐθεῖα ΗΘ κάθετος ἐπὶ τῆς μιᾶς τούτων ΑΒ θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ἑτέρας ΓΔ.



Ἐν πρώτοις εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἐπὶ τῆς ΑΒ κάθετος ΘΗ συναπαντᾷ τὴν παράλληλόν της ΓΔ, διότι ἄλλως ἤθελεν εἶναι καὶ αὐτὴ παράλληλος τῇ ΓΔ, καὶ τότε ἠθέλαμεν ἔχει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Θ δύο παραλλήλους τῇ ΓΔ, τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΘΗ, ὅπερ κατὰ τὰ προλεχθέντα ἀδύνατον. Λέγω δεύτερον ὅτι εἶναι καὶ κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΔ· διότι, ἂν ἡ ΓΔ δὲν ἦτο κάθετος ἐπὶ τῆς ΗΘ, δυνάμεθα νὰ ἄξωμεν τὴν ΗΖ τοιαύτην. Ἀλλὰ τότε ἡ ΗΖ ἤθελεν εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ (πρότ. 23), καὶ ἠθέλαμεν πάλιν ἔχει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Η δύο εὐθείας ΗΔ, ΗΖ παραλλήλους τῇ ΑΒ, ὅπερ ἄτοπον. Λοιπὸν ἡ ΗΘ εἶναι κοινὴ κάθετος ἐπὶ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 26. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο εὐθεῖαι, παράλληλοι πρὸς τρίτην τινά, εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.



Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ εἶναι παράλληλοι τῇ ΕΘ· λέγω ὅτι αὗται θέλουσιν εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι. Διότι, ἂν δὲν ἦσαν παράλληλοι, προεκβαλλόμεναι ἤθελον συναπαντηθῆ εἴς τι σημεῖον Μ, ἐξ οὗ τότε ἠθέλαμεν ἔχει δύο εὐθείας ΜΒΑ, ΜΔΓ παραλλήλους τῇ ΕΘ, ὅπερ ἀδύνατον. Λοιπὸν κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 27. ΘΕΩΡΗΜΑ

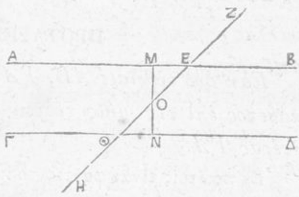
Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης τινὸς, σχηματίζουσι

1ον. Τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας.

2ον. Τὰς ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας.

3ον. Τὰς ἀντιστοιχούσας γωνίας ἴσας. =τὰς ἐντὸς ἐκτὸς γωνίας

4ον. Ἐσωτερικὰς παρακειμένας γωνίας, ἀποτελούσας ἄθροισμα δύο ὀρθῶν γωνιῶν.



Ἔστωσαν ΑΒ, ΓΔ δύο παράλληλοι τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς διατεμνούσης ΗΖ. Πρὸς ἀπόδειξιν τῶν ἀνωτέρω ἐκ τοῦ σημείου Ο, μέσου τῆς ΕΘ, καταβιβάζομεν τὴν ΟΝ κάθετον ἐπὶ τῆς ΓΔ, καὶ προεκβάλλομεν αὐτὴν μέχρις οὗ συναπαντήσῃ καὶ τὴν παράλληλόν της ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Μ. Ἐπειδὴ ἡ ΜΝ εἶναι κοινὴ κάθετος ἐπὶ τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ (πρότ. 25), τὰ δύο τρίγωνα ΟΜΕ, ΟΝΘ εἶναι ὀρθογώνια, εἶναι δὲ καὶ ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας ΟΘ, ΟΕ ἴσας ἐκ κατασκευῆς, καὶ τὰς γωνίας ΜΟΕ, ΝΟΘ ἴσας ὡς κατὰ κορυφὴν (πρότ. 5). Αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ λοιπὸν γωνίαι ΟΕΜ, ΟΘΝ εἶναι ἴσαι, ἑπομένως καὶ αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΒΕΘ, ΕΘΓ εἶναι ἴσαι, ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν ΟΕΜ, ΟΘΝ. Λοιπὸν 1ον, αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

2ον. Αἱ ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΖΕΒ, ΓΘΗ εἶναι ἴσαι ὡς κατὰ κορυφὴν τῶν ἴσων γωνιῶν ΑΕΘ, ΕΘΔ Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ αἱ γωνίαι ΑΕΖ, ΔΘΗ εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν 2ον, αἱ ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

3ον. Αἱ ἀντιστοιχοῦσαι γωνίαι ΖΕΒ, ΕΘΔ εἶναι ἴσαι, διότι ἡ ΖΕΒ εἶναι ἴση τῇ ΑΕΘ, ἥτις ἀπεδείχθη ἴση τῇ ΕΘΔ. Λοιπὸν 3ον, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

4ον. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν ΑΕΘ, ΒΕΘ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Ἀλλὰ ΑΕΘ=ΕΘΔ, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν παρακειμένων γωνιῶν ΕΘΔ, ΒΕΘ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Λοιπὸν 4ον, τὸ ἄθροισμα τῶν παρακειμένων γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 28. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν δύο εὐθεῖαι, τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης τινὸς, σχηματίζωσιν·

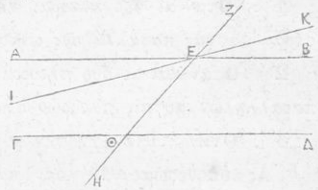
Ἢ τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας,

Ἢ τὰς ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας,

Ἢ τὰς ἀντιστοιχούσας γωνίας ἴσας,

Ἢ τὸ ἄθροισμα τῶν παρακειμένων γωνιῶν ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

Αἱ εὐθεῖαι αὗται θέλουσιν εἶναι παράλληλοι.



Ἔστωσαν ΑΒ, ΓΔ αἱ ὑπὸ τῆς διατεμνούσης ΗΖ τεμνόμεναι εὐθεῖαι, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν 1ον ὅτι αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΕΘ, ΕΘΔ εἶναι ἴσαι. Λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ θέλουσιν εἶναι παράλληλοι.

Διότι, ἂν ἡ ΑΒ δὲν ἦτο παράλληλος τῇ ΓΔ, ἐκ τοῦ σημείου Ε δυνάμεθα νὰ ἄξωμεν τὴν ΙΚ τοιαύτην, καὶ τότε, κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΙΕΘ, ΕΘΔ θέλουσιν εἶναι ἴσαι. Ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν ΑΕΘ=ΕΘΔ. Λοιπὸν θέλομεν ἔχει ΙΕΘ=ΑΕΘ, τουτέστι τὸ μέρος ἴσον μὲ τὸ ὅλον, ὅπερ ἀδύνατον. Λοιπὸν 1ον, ὅταν αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ἦναι ἴσαι, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

2ον. Ἂς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι αἱ ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΖΕΒ, ΓΘΗ εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐτῶν γωνίαι ΑΕΘ, ΕΘΔ θέλουσιν εἶναι ὡσαύτως ἴσαι, καὶ αὗται ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ΑΒ, ΓΔ εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι, ἕπεται κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ εἶναι παράλληλοι. Λοιπὸν 2ον, ὅταν αἱ ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ἦναι ἴσαι, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

3ον. Ἂς ὑποθέσωμεν τρίτον ὅτι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι γωνίαι ΖΕΒ, ΕΘΔ εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ ἔχομεν ΖΕΒ=ΑΕΘ, θέλομεν ἔχει ΑΕΘ=ΕΘΔ, καὶ ἐπειδὴ αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΕΘ, ΕΘΔ εἶναι ἴσαι, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ εἶναι παράλληλοι. Λοιπὸν 3ον, ὅταν αἱ ἀντιστοιχοῦσαι γωνίαι ἦναι ἴσαι κτλ.

4ον. Ἂς ὑποθέσωμεν τελευταῖον ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν παρακειμένων γωνιῶν ΒΕΘ, ΕΘΔ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Ἐπειδὴ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν προσκειμένων γωνιῶν ΒΕΘ, ΘΕΑ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς, θέλομεν ἔχει ΕΘΔ=ΑΕΘ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΕΘ, ΕΘΔ εἶναι ἴσαι, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ εἶναι παράλληλοι. Λοιπὸν 4^{ον}, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν παρακειμένων γωνιῶν ἦναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς, αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 29. ΘΕΩΡΗΜΑ.

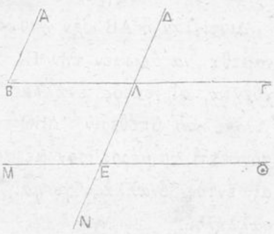
Δύο γωνίαι, ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.

Τρεῖς περιπτώσεις δυνατὸν νὰ συμβῶσι·

1^{ον}. Ὅταν αἱ δύο πλευραὶ τῆς μιᾶς διευθύνωνται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μὲ τὰς παραλλήλους αὐταῖς πλευρὰς τῆς ἑτέρας.

2^{ον} Ὅταν καὶ αἱ δύο πλευραὶ τῆς μιᾶς ἔχωσιν ἀντίθετον φορὰν τῶν παραλλήλων αὐταῖς πλευρῶν τῆς ἑτέρας.

3^{ον}. Ὅταν ἡ μία ἔχῃ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ ἡ ἑτέρα ἀντίθετον.



Ἂς ὑποθέσωμεν 1^{ον} ὅτι πρόκειται περὶ τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΔΕΘ, ὧν αἱ παράλληλοι πλευραὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν φοράν. Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΕΔ εἶναι παράλληλαι, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι γωνίαι ΑΒΓ, ΔΛΓ εἶναι ἴσαι. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ΒΓ, ΕΘ εἶναι παράλληλοι, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι γωνίαι ΔΛΓ, ΔΕΘ εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΔΕΘ, αἱ ἀποδειχθεῖσαι ἴσαι τῇ ΔΛΓ, θέλουσιν εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν 1^{ον}, ὅταν αἱ δύο πλευραὶ τῆς μιᾶς διευθύνωνται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μὲ τὰς παραλλήλους αὐταῖς πλευρὰς τῆς ἑτέρας, αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

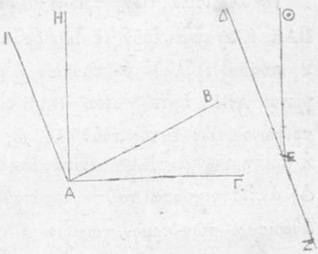
Ἂς ὑποθέσωμεν 2^{ον} ὅτι πρόκειται περὶ τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΜΕΝ, ὧν αἱ παράλληλοι πλευραὶ ἔχουσιν ἀντίθετον φοράν. Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΜΕΝ εἶναι ἴση τῇ ΔΕΘ, ἧς αἱ πλευραὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν φορὰν μὲ τὰς παραλλήλους αὐταῖς πλευρὰς τῆς ΑΒΓ, αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΜΕΝ θέλουσιν εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν 2^{ον}, ὅταν καὶ αἱ δύο πλευραὶ τῆς μιᾶς ἔχωσιν ἀντίθετον φορὰν τῶν παραλλήλων αὐταῖς πλευρῶν τῆς ἑτέρας, αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἂς ὑποθέσωμεν 3^{ον} ὅτι πρόκειται περὶ τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΜΕΔ, ὧν αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ ΒΑ, ΕΔ ἔχουσι τὴν αὐτὴν φοράν, αἱ δὲ ἄλλαι δύο ΒΓ, ΕΜ ἀντίθετον. Ἐπειδὴ ἡ ΜΕΔ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς προσκειμένης αὐτῇ ΔΕΘ, ἧς αἱ πλευραὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν φορὰν μὲ τὰς παραλλήλους αὐταῖς πλευρὰς τῆς ΑΒΓ, αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΜΕΔ θέλουσιν εἶναι παραπληρωματικαί. Λοιπὸν 3^{ον}, ὅταν ἡ μία ἔχῃ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ ἡ ἑτέρα ἀντίθετον, αἱ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 30. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο γωνίαι, ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθέτους ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.

Ἔστω ΔΕ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ΘΕ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΓ, λέγω ὅτι ἡ γωνία ΔΕΘ θέλει εἶναι ἢ ἴση ἢ παραπληρωματικὴ τῆς ΒΑΓ.



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν εἰς τὸ σημεῖον Α τὴν ΑΗ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΓ, καὶ τὴν ΑΙ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΗΑΓ, ΙΑΒ εἶναι ὀρθαί, θέλουσιν εἶναι ἴσαι, καὶ θέλομεν ἔχει

$$\text{ΗΑΓ}=\text{ΙΑΒ}.$$

Ἀλλὰ ΗΑΓ=ΗΑΒ+ΒΑΓ καὶ ΙΑΒ=ΙΑΗ+ΗΑΒ. Ἄρα θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

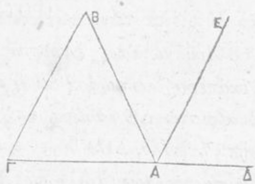
$$\text{ΗΑΒ}+\text{ΒΑΓ}=\text{ΙΑΗ}+\text{ΗΑΒ},$$

ἐξ ἧς, ἀφαιροῦντες ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὴν γωνίαν ΗΑΒ, λαμβάνομεν ΒΑΓ=ΙΑΗ. Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ΔΕ καὶ ΑΙ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ, θέλουσιν εἶναι καὶ παράλληλοι (πρότ. 23). Ὡσαύτως, ἐπειδὴ ΘΕ καὶ ΑΗ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΓ, θέλουσιν εἶναι καὶ παράλληλοι. Λοιπὸν αἱ δύο γωνίαι ΙΑΗ, ΔΕΘ ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους, καὶ ἑπομένως, κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα, εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί. Ἄρα, ἐπειδὴ ΙΑΗ =ΒΑΓ, καὶ αἱ ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθέτους γωνίαι ΒΑΓ, ΔΕΘ θέλουσιν εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. Ἐὰν αἱ ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθέτους ἑκατέραν ἑκατέρᾳ γωνίαι ἦναι ἢ καὶ αἱ δύο ὀξεῖαι ἢ καὶ αἱ δύο ἀμβλεῖαι, ἐπειδὴ τότε δὲν δύνανται νὰ ἦναι παραπληρωματικαί, ὡς ἀποτελοῦσαι ἄθροισμα μικρότερον ἢ μεγαλείτερον δύο ὀρθῶν, θέλουσιν εἶναι ἀναγκαίως ἴσαι. Ἐὰν δὲ ἡ μία τούτων εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ ἑτέρα ἀμβλεῖα, ἐπειδὴ δὲν δύνανται νὰ ἦναι ἴσαι, θέλουσιν ἀναγκαίως εἶναι παραπληρωματικαί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 31. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.



Ἔστω ΑΒΓ τρίγωνόν τι ὁποιονδήποτε. Προεκβάλλομεν μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ΓΑ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Α ἄγομεν τὴν ΑΕ παράλληλον τῇ ΓΒ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ΓΑΒ, ΒΑΕ, ΕΑΔ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς (πρότ. 2, πόρ. 3). Ἀλλ' ἐκ τούτων ἡ μὲν γωνία ΓΑΒ εἶναι γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἡ δὲ γωνία ΒΑΕ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ ΑΒΓ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ ὡς πρὸς τὰς παραλλήλους ΑΕ, ΓΒ, καὶ ἡ τρίτη γωνία ΕΑΔ εἶναι ἴση τῇ τρίτῃ γωνίᾳ ΑΓΒ τοῦ τριγώνου, ὡς ἀντιστοιχοῦσα ταύτῃ ὡς πρὸς τὰς αὐτὰς παραλλήλους. Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΑΓΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν διαδοχικῶν γωνιῶν ΓΑΒ, ΒΑΕ, ΕΑΔ, ὅπερ εἶναι ἴσον μὲ δύο γωνίας ὀρθάς. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

Πόρισμα 1. Πᾶν τρίγωνον μίαν γωνίαν ὀρθὴν δύναται νὰ ἔχῃ καὶ κατ' ἰσχυρότερον λόγον μίαν ἀμβλεῖαν. Διότι, ἂν εἶχε δύο ὀρθάς, ἡ τρίτη αὐτοῦ γωνία ἤθελεν εἶναι μηδέν, ἐπομένως δὲν θὰ ὑπῆρχε τρίγωνον, ἂν δ' εἶχε δύο ἀμβλείας, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν αὐτοῦ γωνιῶν ἤθελεν εἶναι μεγαλείτερον δύο ὀρθῶν, ὅπερ ἀδύνατον.

Πόρισμα 2. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀξειῶν γωνιῶν παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ μίαν ὀρθήν.

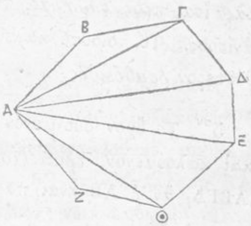
Πόρισμα 3. Ὅταν γνωρίζωμεν τὰς δύο γωνίας τριγώνου τινὸς ἢ μόνον τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, εὑρίσκομεν τὴν τρίτην ἀφαιροῦντες ἀπὸ δύο ὀρθὰς τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων γωνιῶν ἢ τὸ γνωστὸν ἄθροισμα.

Πόρισμα 4. Ἡ γωνία ΒΑΔ, ἡ σχηματιζομένη ὑπό τινος πλευρᾶς ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τῆς προεκβολῆς ΑΔ τῆς ἑτέρας ΓΑ, καλεῖται *ἐξωτερικὴ* γωνία τοῦ τριγώνου, καὶ εἶναι κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐσωτερικῶν καὶ ἀπέναντι γωνιῶν ΑΒΓ, ΑΓΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 32. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου *ἰσοῦται μὲ τοσάκις δύο γωνίας ὀρθὰς, ὅσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον μεῖον δύο.*

Ἔστω ΑΒΓΔΕΖΘ ὁποιονδήποτε κυρτὸν πολύγωνον, ἑπτὰ π.χ. πλευρῶν. Λέγω ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν του γωνιῶν ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ, ΔΕΘ, κτλ. ἰσοῦται μὲ *πεντάκις* δύο γωνίας ὀρθὰς, ἤτοι μὲ *δέκα* ὀρθάς. Διότι, ἂν ἑνώσωμεν μίαν ὁποιανδήποτε τῶν γωνιῶν του Α μὲ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς διὰ τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΘ, τὸ πολύγωνον θέλει ἀποσυντεθῇ εἰς τόσα τρίγωνα, ὅσας πλευρὰς ἔχει μεῖον δύο. Διότι τὰ διάφορα ταῦτα τρίγωνα περιέχουσιν ἕκαστον μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἐκτὸς τῶν δύο ἐξωτερικῶν, οὕτως εἰπεῖν, τριγώνων ΑΒΓ, ΑΖΘ, ὧν ἑκάτερον περιέχει δύο. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου εἶναι προφανῶς ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν εἰς ἃ ἀπεσυνετέθη τριγώνων. Λοιπὸν ἰσοῦται μὲ τοσάκις δύο ὀρθὰς, ὅσα εἶναι τὰ τρίγωνα, τουτέστιν ὅσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον μεῖον δύο.

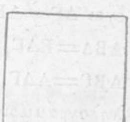


Ἂν παραστήσωμεν διὰ a τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν αὐτοῦ θέλει περιέχει τόσας ὀρθὰς, ὁσάκις ἡ μονὰς περιέχεται ἐν τῷ γινομένῳ $2\times(a-2)$, ἤτοι $2a-4$ γωνίας ὀρθάς.

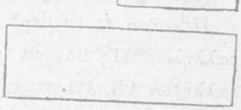
ΟΡΙΣΜΟΙ.

Ὠνομάσαμεν τετράπλευρον τὸ ἔχον τέσσαρας πλευρὰς πολύγωνον. Μεταξὺ τῶν διαφόρων τετραπλεύρων διακρίνονται μερικώτερον τὰ ἑξῆς πέντε εἴδη·

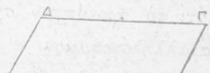
1ον. Τὸ τετράπλευρον, τὸ ἔχον τὰς πλευράς του ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὅλας αὐτοῦ τὰς γωνίας ὀρθάς. Τὸ τοιοῦτο καλεῖται *τετράγωνον*.



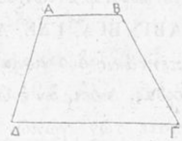
2ον. Τὸ ἔχον ὅλας αὐτοῦ τὰς γωνίας ὀρθὰς τὰς δὲ πλευρὰς ἀνίσους. Τὸ τοιοῦτο καλεῖται *ὀρθογώνιον*.



3ον. Τὸ ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς αὐτοῦ παραλλήλους καὶ καλούμενον *παραλληλόγραμμον*. Τοιοῦτον εἶναι τὸ ΑΒΓΔ, ἂν ἡ ΑΒ ἦναι παράλληλος τῇ ΓΔ καὶ ἡ ΑΓ παράλληλος τῇ ΒΔ.



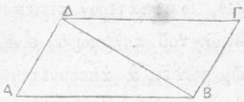
4ον. Τὸ ἔχον καὶ τὰς τέσσαρας αὐτοῦ πλευρὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας, τὰς δὲ γωνίας αὐτοῦ ἀνίσους. Τὸ τοιοῦτο καλεῖται *ῥόμβος* ἢ συνηθέστερον *ῥομβοειδές*.



5ον. Τὸ ἔχον δύο μόνον πλευρὰς παραλλήλους καὶ καλούμενον *τραπέζιον*. Τοιοῦτον εἶναι τὸ ΑΒΓΔ, ἂν ἡ ΑΒ ἦναι παράλληλος τῇ ΓΔ.

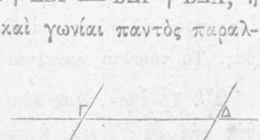
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 33. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι.



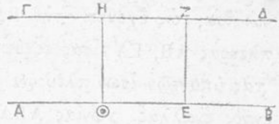
Ἔστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμόν τι. Λέγω ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἴση τῇ ἀπέναντι αὐτῆς ΔΓ, ἡ πλευρὰ ΑΔ ἴση τῇ ΒΓ, ἡ γωνία Α ἴση τῇ ἀπέναντι αὐτῆς Γ καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ ἴση τῇ ΑΔΓ.

Πρὸς ἀπόδειξιν τῶν ἀνωτέρω ἄγομεν τὴν διαγώνιον ΒΔ. Τὰ οὕτω σχηματισθέντα δύο τρίγωνα ΑΔΒ, ΒΔΓ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΒΔ κοινὴν, τὰς γωνίας ΑΔΒ, ΔΒΓ ἴσας, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας τῶν παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ, καὶ τὰς γωνίας ΑΒΔ, ΒΔΓ ἴσας, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΔΓ (πρότ. 27). Ἀλλ' εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευραὶ εἶναι ἴσαι καθὼς καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαι (πρότ. 13, σχόλ.). Λοιπὸν θέλομεν ἔχει ΔΓ=ΑΒ, ΑΔ=ΒΓ, γωνία Α=Γ καὶ γωνία ΑΒΓ=ΑΔΓ· διότι ΑΒΔ=ΒΔΓ, ΔΒΓ=ΒΔΑ, ἄρα καὶ ΑΒΔ+ΔΒΓ = ΒΔΓ+ΒΔΑ, ἢ ΑΒΓ=ΑΔΓ. Λοιπὸν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ γωνίαι παντὸς παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι.



Πόρισμα 1. Τὰ μέρη ΑΓ, ΒΔ δύο παραλλήλων ΑΓ, ΒΔ, τὰ μεταξὺ δύο παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ περιεχόμενα, εἶναι ἴσα, διότι τὸ προκύπτον σχῆμα ΑΒΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμον.

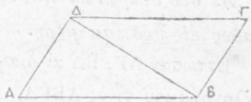
Πόρισμα. 2. Δύο παράλληλοι ΑΒ,ΓΔ ἰσάκις ἀπέχουσι καθ' ὅλην αὐτῶν τὴν ἔκτασιν, τουτέστιν, ἐὰν ἐξ ἑνὸς ὁποιουδήποτε σημείου Η τῆς μιᾶς καταβιβάσωμεν κάθετον ΗΘ ἐπὶ τῆς ἑτέρας, τὸ μέγεθος ταύτης τῆς καθέτου θέλει εἶναι τὸ αὐτὸ, ὁποιονδήποτε καὶ ἂν ἦναι τὸ σημεῖον Η τῆς ΓΔ. Διότι, ἐὰν ἄξωμεν καὶ ἐξ ἑτέρου τινὸς σημείου Ζ κάθετον ΖΕ ἐπὶ τῆς ΑΒ, αἱ δύο κάθετοι ΗΘ, ΖΕ θέλουσιν εἶναι ἴσαι, ὡς παράλληλοι (πρότ. 23) μεταξὺ παραλλήλων περιεχόμεναι (πρότ. 33, πόρ. 1).



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 34. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τετραπλεύρου τινὸς ἦναι ἴσαι, αἱ ἴσαι πλευραὶ θέλουσιν εἶναι καὶ παράλληλοι, καὶ ἐπομένως τὸ τετράπλευρον θέλει εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχομεν ΑΒ=ΓΔ καὶ ΑΔ=ΒΓ· λέγω ὅτι τὸ τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον.

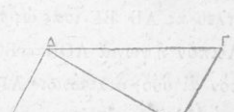


Διότι, ἂν ἄξωμεν τὴν διαγώνιον ΒΔ, τὰ δύο σχηματισθησόμενα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΔΓ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΒΔ κοινὴν, τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΔΓ, ΑΔ καὶ ΒΓ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως. Λοιπὸν αἱ γωνίαι ΑΒΔ, ΒΔΓ, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΔ, ΒΓ, εἶναι ἴσαι, ὡσαύτως καὶ αἱ γωνίαι ΑΔΒ, ΔΒΓ, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ, ΓΔ. Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΒΔ, ΒΔΓ εἶναι ἴσαι, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΔΓ εἶναι παράλληλοι. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΔΒ, ΔΒΓ εἶναι ἴσαι, αἱ πλευραὶ ΑΔ, ΒΓ εἶναι παράλληλοι. Τὸ σχῆμα λοιπὸν ΑΒΓΔ, ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους, εἶναι παραλληλόγραμμον, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

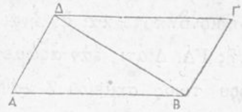
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 35. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο ἀπέναντι πλευραὶ τετραπλεύρου τινὸς ἦναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, καὶ αἱ ἄλλαι δύο πλευραὶ αὐτοῦ θέλουσιν εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ἐπομένως τὸ τετράπλευρον θέλει εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΑΔ θέλει εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΒΓ, καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ θέλει εἶναι παραλληλόγραμμον.



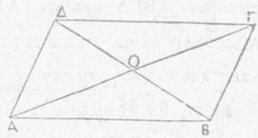
Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν τὴν διαγώνιον ΒΔ. Τὰ δύο σχηματισθέντα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΔΓ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΒΔ κοινήν, τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΓΔ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ΑΒΔ, ΒΔΓ ἴσας, διότι ΑΒ ὑπετέθη παράλληλος τῇ ΓΔ. Λοιπὸν θέλομεν ἔχει ΑΔ=ΒΓ, καὶ τὴν γωνίαν ΑΔΒ=ΔΒΓ. Ἀλλ' αἱ ἴσαι γωνίαι ΑΔΒ, ΔΒΓ ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ΑΔ, ΒΓ εἶναι ἐντὸς ἐναλλάξ. Ἄρα αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ εἶναι καὶ παράλληλοι, καὶ τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 36. ΘΕΩΡΗΜΑ.

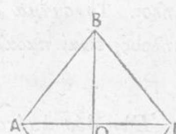
Αἱ δύο διαγώνιοι παντὸς παραλληλογράμμου τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἔστωσαν ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου τινὸς ΑΒΓΔ. Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει ΑΟ=ΟΓ καὶ ΔΟ=ΟΒ.



Διότι τὰ δύο κατὰ κορυφὴν τρίγωνα ΑΟΔ, ΒΟΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὰς πλευρὰς ΑΔ, ΒΓ ἴσας, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου, τὰς γωνίας ΑΔΟ, ΟΒΓ ἴσας, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ ὡς πρὸς τὰς παραλλήλους ΑΔ, ΒΓ, καὶ τὰς γωνίας ΔΑΟ, ΟΓΒ ἴσας διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Λοιπὸν καὶ ἡ πλευρὰ ΑΟ, ἀπέναντι τῆς γωνίας ΑΔΟ, εἶναι ἴση τῇ ΟΓ, ἀπέναντι τῆς γωνίας ΟΒΓ, ἴσης τῇ ΑΔΟ, καὶ ἡ πλευρὰ ΔΟ εἶναι ἴση τῇ ΟΒ δι' ὅμοιόν τινα λόγον. Λοιπὸν αἱ διαγώνιοι κτλ.

Σχόλιον. Ἂν ἀντὶ παραλληλογράμμου εἴχομεν τὸ ῥομβοειδὲς ΑΒΓΔ, εἰς τοῦτο τὰ παρακείμενα τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, τουτέστι τὴν ΒΟ κοινήν, τὰς ΑΟ, ΟΓ ἴσας, ὡς τὰ ἡμίση τῆς διαγωνίου ΑΓ, καὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ ἴσας ὡς πλευρὰς τοῦ ῥομβοειδοῦς. Λοιπὸν ἡ γωνία ΑΟΒ=ΒΟΓ=1$^{\text{όρ}}$ (όρ. 17). Λοιπὸν αἱ δύο διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ τοῦ ῥομβοειδοῦς ΑΒΓΔ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλων ἤ, ὡς συνήθως λέγουσι, τέμνονται κατ' ὀρθὰς γωνίας.

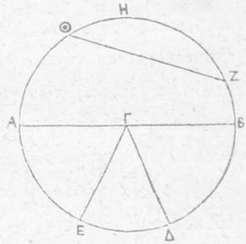


ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΠΕΡΙ ΚΥΚΛΟΥ ΚΑΙ ΠΕΡΙ ΜΕΤΡΟΥ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

1. Καλεῖται *περιφέρεια κύκλου* καμπύλη τις γραμμὴ ΑΗΒΔ, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπό τινος ἐντὸς αὐτῆς σημείου Γ, ὅπερ καλεῖται *κέντρον* τῆς περιφερείας.



2. *Κύκλος* καλεῖται τὸ χωρίον ἢ τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὑπὸ τῆς περιφερείας πανταχόθεν περιοριζόμενον.

3. *Ἀκτὶς* τοῦ κύκλου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα ἀγομένη ἐκ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη εἰς τὴν περιφέρειαν. Τοιαῦται εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΓΑ, ΓΕ, ΓΔ, κτλ.

4. *Διάμετρος* καλεῖται πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη ἑκατέρωθεν εἰς τὴν περιφέρειαν. Τοιαύτη εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Γ καὶ περατοῦται ἑκατέρωθεν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β τῆς περιφερείας.

Ἐκ τοῦ δοθέντος ὁρισμοῦ τοῦ κύκλου, ἕπεται 1ον ὅτι ὅλαι αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι, καὶ 2ον ὅτι ὅλαι αἱ διάμετροι εἶναι ἴσαι καὶ διπλάσιαι τῶν ἀκτίνων.

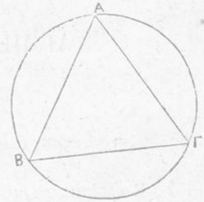
5. *Τόξον* ὀνομάζεται μέρος τι ΖΗΘ τῆς περιφερείας.

6. *Χορδὴ* καλεῖται πᾶσα εὐθεῖα ΖΘ, ἑνόνουσα τὰ ἄκρα τόξου τινὸς ΖΗΘ.

7. *Τμῆμα* καλεῖται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύκλου, τὸ μεταξὺ τόξου τινὸς καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ περιεχόμενον. Τοιοῦτον εἶναι τὸ μέρος ΘΗΖ τοῦ κύκλου, τὸ μεταξὺ τοῦ τόξου ΘΗΖ καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ ΘΖ περιεχόμενον.

Ἡ αὐτὴ χορδὴ ΘΖ ὑποτείνει δύο τόξα ΘΗΖ, ΘΕΖ, καὶ ἑπομένως καὶ δύο τμήματα. Ἐν τοῖς ἑπομένοις θέλομεν ἐννοεῖ ὅτι πρόκειται πάντοτε περὶ τοῦ μικροτέρου τόξου ἢ τμήματος ἐκτὸς ὅταν ἐκφράζωμεν ῥητῶς τὸ ἐναντίον.

8. *Τομεὺς* καλεῖται τὸ μέρος ΕΓΔ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύκλου, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τόξου τινὸς ΕΔ καὶ τῶν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἠγμένων ἀκτίνων ΓΕ, ΓΔ.



9. *Γωνία ἐγγεγραμμένη* εἰς κύκλον, καλεῖται πᾶσα γωνία ΒΑΓ, ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς Α ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ σχηματιζομένη ὑπὸ δύο χορδῶν ΑΒ, ΑΓ.

10. Καλεῖται *τρίγωνον ἐγγεγραμμένον* εἰς κύκλον πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ, ἔχον τὰς κορυφὰς τῶν τριῶν αὐτῶν γωνιῶν Α, Β, Γ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

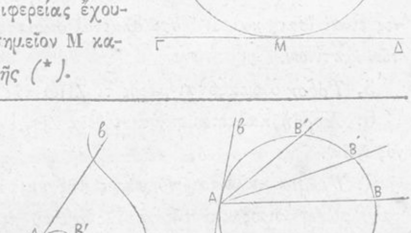
Καλεῖται ἐν γένει *σχῆμα ἐγγεγραμμένον* εἰς κύκλον πᾶν σχῆμα, ἔχον τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν αὐτοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου. Ὁ κύκλος, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ὁποίου κεῖνται αἱ κορυφαὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, καλεῖται *περιγεγραμμένος* εἰς τὸ σχῆμα.

11. Πᾶσα γωνία ΕΓΔ, ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, καλεῖται *κεντρικὴ* γωνία (ὅρα τὸ ἐν σελίδι 33 σχῆμα).

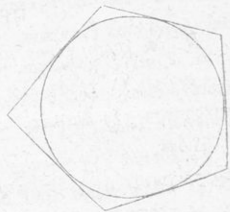
12. *Τέμνουσα* κύκλου τινὸς καλεῖται πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ δύο ὁποιωνδήποτε σημείων τῆς περιφερείας αὐτοῦ. Τοιαύτη εἶναι ἡ ΑΒ.

13. Καλεῖται *ἐφαπτομένη* εἰς τὸν κύκλον πᾶσα εὐθεῖα ΓΔ ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον Μ μετὰ τῆς περιφερείας ἔχουσα. Τὸ κοινὸν δὲ τοῦτο σημεῖον Μ καλεῖται *σημεῖον τῆς ἐπαφῆς* (*).

(*) Καλοῦσιν ἐν γένει ἐφαπτομένην εἴς τι σημεῖον Α καμπύλης τινὸς τὸ ὅριον Αϐ τῶν θέσεων, ἃς λαμβάνει τέμνουσά τις ΑΒ, στρεφομένη περὶ τὸ σημεῖον



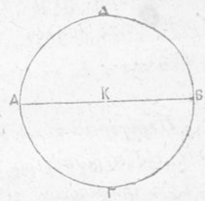
14. Δύο περιφέρειαι λέγονται *ἐφαπτόμεναι*, ὅταν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχωσι. Τοιαῦται εἶναι αἱ ὑπὸ τῶν σχημάτων τῆς 14 καὶ 15 προτάσεως παριστώμεναι.



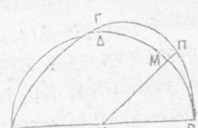
15. Πολύγωνόν τι καλεῖται *περιγεγραμμένον* εἴς τινα κύκλον, ὅταν ὅλαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ἦναι ἐφαπτόμεναι εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Τότε ὁ κύκλος καλεῖται *ἐγγεγραμμένος* εἰς τὸ πολύγωνον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶσα διάμετρος διαιρεῖ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειάν του εἰς δύο ἴσα μέρη.



Ἔστω ΑΒ διάμετρός τις τοῦ κύκλου. Λέγω ὅτι τὰ δύο μέρη ΑΓΒ, ΑΔΒ τῆς περιφερείας εἶναι ἴσα, ὡσαύτως καὶ τὰ δύο μέρη ΑΔΒΑ, ΑΓΒΑ τοῦ κύκλου.



Διότι, ἐὰν στρέψωμεν τὸ σχῆμα ΑΓΒ περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ μέχρις οὗ τὸ ἐπίπεδόν του πέσῃ ἐπὶ τοῦ σχήματος ΑΔΒ, ἡ καμπύλη γραμμὴ ΑΓΒ θέλει πέσει ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς ΑΔΒ, ἄλλως ἤθελον ὑπάρχει ἐπὶ τῆς περιφερείας ΑΔΒΓ σημεῖα ἀνισάκις ἀπέχοντα τοῦ κέντρου Κ, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὸν ὁρισμὸν τοῦ κύκλου. Ἂν π. χ. ἐλάμβανε τὴν θέσιν, ἣν παριστᾷ τὸ δεύτερον σχῆμα, τότε τὰ σημεῖα Π καὶ Μ τῆς περιφερείας,

---

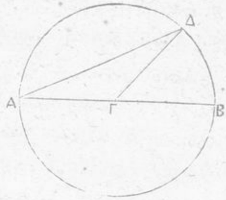
Α μέχρις οὗ δεύτερόν τι σημεῖον Β τῆς τομῆς ταὐτισθῇ μὲ τὸ πρῶτον.

Ὅταν ἡ καμπύλη ἦναι γραμμὴ κεκλεισμένη καὶ δὲν ἦναι δυνατὸν νὰ τμηθῇ ὑπ' εὐθείας τινὸς εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα, ὡς π. χ. ὁ κύκλος, εἶναι φανερὸν ὅτι, ὅταν τὸ δεύτερον σημεῖον τῆς τομῆς ταὐτισθῇ μὲ τὸ πρῶτον, ἡ εὐθεῖα δὲν θέλει ἔχει τότε παρ' ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς καμπύλης. Δυνάμεθα λοιπόν, ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, νὰ ὀνομάσωμεν ἐφαπτομένην πᾶσαν εὐθεῖαν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς καμπύλης ἔχουσαν. Ἀλλὰ μόνον ὁ ἀνωτέρω δοθεὶς γενικὸς ὁρισμὸς ἐφαρμόζεται εἰς ὅλας τὰς καμπύλας γραμμάς, καὶ ἔχει τὸ πλεονέκτημα νὰ καθιστᾷ ἐπαισθητάς, καὶ ἐπὶ τοῦ κύκλου αὐτοῦ ἐφαρμοζόμενος, ἀξιοπαρατηρήτους ἀναλογίας ὑπαρχούσας μεταξὺ πολλῶν διαφόρων φαινομένων θεωρημάτων.

τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος ΚΠ κείμενα, ἤθελον προφανῶς ἀπέχει ἀνισάκις τοῦ κέντρου Κ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶσα χορδὴ εἶναι μικροτέρα τῆς διαμέτρου.



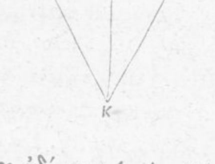
Ἔστω ΑΔ χορδή τις. Λέγω ὅτι εἶναι μικροτέρα τῆς διαμέτρου ΑΒ.

Διότι, ἂν ἄξωμεν τὴν ἀκτῖνα ΓΔ, εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ θέλομεν ἔχει, κατὰ τὰ ἐν τῇ προτάσει 8 τοῦ Α΄ βιβλίου ἀποδειχθέντα, ΑΔ < ΑΓ + ΓΔ. Ἀλλὰ ΓΔ = ΓΒ, ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Ἄρα ΑΔ < ΑΒ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα. Ἡ μεγαλειτέρα λοιπὸν εὐθεῖα, ἡ μεταξὺ δύο σημείων τῆς περιφερείας κύκλου τινὸς ἀγομένη, εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Περιφέρεια κύκλου δὲν δύναται νὰ συναπαντηθῇ ὑπ' εὐθείας τινὸς εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα.

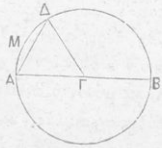


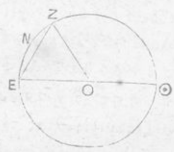
Ἂς ὑποθέσωμεν, εἰ δυνατὸν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΓ συναπαντᾷ τὴν ἔχουσαν Κ κέντρον περιφέρειαν εἰς τρία τινὰ σημεῖα Δ, Β, Γ. Τότε αἱ εὐθεῖαι ΚΔ, ΚΒ, ΚΓ, ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου, θέλουσιν εἶναι ἴσαι, καὶ ἠθέλαμεν ἔχει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΔΓ τρεῖς ἴσας πλαγίας ΚΔ, ΚΒ, ΚΓ, ὅπερ ἀδύνατον (πρότ. 18, πόρ. 2, Α΄).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους τὰ ἴσα τόξα ὑποτείσιν ἴσας χορδὰς, καὶ ἀντιστρόφως, αἱ ἴσαι χορδαὶ ὑποτείνουσιν ἴσα τόξα.

Ἔστω ἡ ἀκτὶς ΑΓ ἴση τῇ ἀκτῖνι ΕΟ, καὶ τὸ τόξον ΑΜΔ ἴσον τῷ τόξῳ ΕΝΖ, λέγω ὅτι ἡ χορδὴ ΑΔ θέλει εἶναι ἴση τῇ χορδῇ ΕΖ.





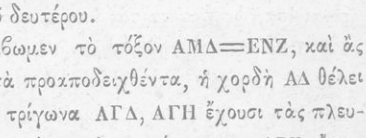
Διότι, ἐπειδὴ ἡ διάμετρος ΑΒ εἶναι ἴση τῇ ΕΘ, ἂν τὸ ἡμικύκλιον ΕΖΘ ἐπιτεθῇ ἐπὶ τοῦ ΑΔΒ, αἱ ἡμιπεριφέρειαι ΑΔΒ, ΕΖΘ θέλουσι ταυτισθῇ (πρότ. 1), καὶ ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΜΔ εἶναι ἴσον τῷ ΕΝΖ, τὸ σημεῖον Ζ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Δ, ἑπομένως ἡ χορδὴ ΕΖ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ΑΔ, διότι κατὰ τὸ 4ον ἀξίωμα ἐξ ἑνὸς σημείου Α εἰς ἄλλο Δ μία μόνη εὐθεῖα ἄγεται. Λοιπὸν 1ον, τὰ ἴσα τόξα ὑποτείνουσιν ἴσας χορδάς.

Ἀντιστρόφως, ἂν ἡ χορδὴ ΑΔ ὑποτεθῇ ἴση τῇ ΕΖ, καὶ τὰ ὑποτεινόμενα ὑπ᾽ αὐτῶν τόξα ΑΜΔ, ΕΝΖ θέλουσιν εἶναι ἴσα.

Διότι, ἂν ἄξωμεν τὰς ἀκτῖνας ΓΔ, ΟΖ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΔ, ΕΟΖ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τουτέστιν ΑΔ=ΕΖ, ΑΓ=ΕΟ καὶ ΓΔ=ΟΖ. Λοιπὸν ἡ γωνία ΕΟΖ=ΑΓΔ. Τούτου τεθέντος, ἂν ἐπιτεθῇ τὸ ἡμικύκλιον ΕΖΘ ἐπὶ τοῦ ἴσου αὐτῷ ΑΔΒ, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΓΔ, ΕΟΖ εἶναι ἴσαι, ἡ πλευρὰ ΟΖ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ΓΔ, καὶ ἐπειδὴ ΟΖ=ΓΔ, τὸ σημεῖον Ζ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Δ, καὶ ἑπομένως τὰ δύο τόξα ΑΜΔ, ΕΝΖ θέλουσι ταυτισθῇ. Ἄρα εἶναι ἴσα. Λοιπὸν 2ον, αἱ ἴσαι χορδαὶ ΑΔ, ΕΖ ὑποτείνουσιν ἴσα τόξα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. ΘΕΩΡΗΜΑ.

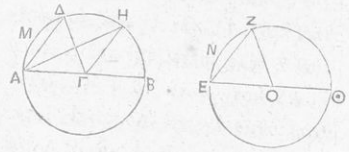
Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους τὸ μεγαλείτερον τόξον ὑποτείνει μεγαλειτέραν χορδήν, καὶ ἀντιστρόφως, ἡ μεγαλειτέρα χορδὴ ὑποτείνει μεγαλείτερον τόξον, ἐὰν τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος τόξα ἦναι μικρότερα ἡμιπεριφερείας.



Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀκτὶς ΑΓ εἶναι ἴση τῇ ΕΟ καὶ τὸ τόξον ΑΜΗ μεγαλείτερον τοῦ ΕΝΖ. Λέγω ὅτι ἡ χορδὴ ΑΗ τοῦ πρώτου τόξου θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς χορδῆς ΕΖ τοῦ δευτέρου.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἂς λάβωμεν τὸ τόξον ΑΜΔ=ΕΝΖ, καὶ ἂς ἄξωμεν τὴν χορδὴν ΑΔ. Κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, ἡ χορδὴ ΑΔ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΕΖ. Ἀλλὰ τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΔ, ΑΓΗ ἔχουσι τὰς πλευρὰς ΑΓ, ΓΔ, ΑΓ, ΓΗ, τὰς περιεχούσας τὰς γωνίας ΑΓΔ, ΑΓΗ, ἴσας, καὶ ἐπειδὴ προφανῶς ἡ γωνία ΑΓΗ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΑΓΔ, ἡ τρίτη πλευρὰ ΑΗ τοῦ τριγώνου ΑΓΗ θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς τρίτης πλευρᾶς ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ (πρότ. 11, Α΄). Ἀλλ᾽ ΑΔ=ΕΖ. Ἄρα ΑΗ>ΑΖ, τοῦθ᾽ ὅπερ ἐπρόκειτο ν᾽ ἀποδείξωμεν.

Ἄς ὑποθέσωμεν 2ον ὅτι ἡ χορδὴ ΑΗ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΕΖ. Λέγω ὅτι καὶ τὸ τόξον ΑΜΗ θέλει εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ΕΝΖ.



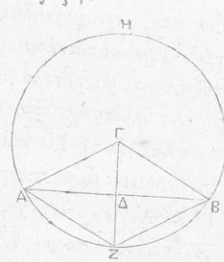
Διότι, ἂν τὰ τόξα ΑΜΗ, ΕΝΖ ἦσαν ἴσα, αἱ χορδαὶ ΑΗ, ΕΖ ἤθελον εἶναι ἴσαι, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως· ἂν δὲ τὸ τόξον ΑΜΗ ἦτο μικρότερον τοῦ ΕΝΖ, τότε καὶ ἡ χορδὴ ΑΗ ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς ΕΖ, ὅπερ εἶναι ὡσαύτως ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Λοιπὸν τὸ τόξον ΑΜΗ εἶναι ἀναγκαίως μεγαλείτερον τοῦ ΕΝΖ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. Ὑπεθέσαμεν ῥητῶς ὅτι πρόκειται περὶ τόξων μικροτέρων ἡμιπεριφερείας. Ἂν ἐπρόκειτο περὶ τόξων μεγαλειτέρων ἡμιπεριφερείας, τότε ἡ μεγαλειτέρα χορδὴ ἤθελεν ὑποτείνει μικρότερον τόξον, καὶ ἀντιστρόφως, τὸ μικρότερον τόξον ἤθελεν ὑποτείνει μεγαλειτέραν χορδήν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶσα ἀκτὶς, κάθετος ἐπί τινος χορδῆς, διαιρεῖ τὴν χορδὴν καὶ τὸ ὑπ' αὐτῆς ὑποτεινόμενον τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀκτὶς ΓΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΒ. Λέγω ὅτι διαιρεῖ ταύτην καὶ τὸ ὑποτεινόμενον τόξον ΑΖΒ εἰς δύο ἴσα μέρη, τουτέστιν ὅτι θέλομεν ἔχει ΑΔ=ΔΒ καὶ τόξον ΑΖ = τόξῳ ΖΒ.



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν τὰς ἀκτῖνας ΓΑ, ΓΒ καὶ τὰς χορδὰς ΑΖ, ΖΒ. Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ, ΓΔΒ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας των ΓΑ, ΓΒ ἴσας καὶ τὴν πλευρὰν ΓΔ κοινὴν (πρότ. 20, Α'). Λοιπὸν καὶ ἡ πλευρὰ ΑΔ=ΔΒ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον Δ τῆς ΑΒ, πᾶν σημεῖον Ζ τῆς καθέτου ἰσάκις ἀπέχει τῶν ἄκρων Α καὶ Β (πρότ. 19, Α'). Λοιπὸν ἡ χορδὴ ΑΖ = τῇ χορδῇ ΖΒ. Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ ΑΖ, ΖΒ εἶναι ἴσαι, τὰ ὑπ' αὐτῶν ὑποτεινόμενα τόξα ΑΖ, ΖΒ θέλουσιν εἶναι ἴσα (πρότ. 4). Λοιπὸν πᾶσα ἀκτὶς, κάθετος ἐπί τινος χορδῆς, διαιρεῖ ταύτην καὶ τὸ ὑποτεινόμενον ὑπ' αὐτῆς τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη.

Σχόλιον. Ἡ εὐθεῖα ΓΖ ἐκπληροῖ τὰς ἑξῆς τέσσαρας συνθήκας·

1ον. Διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Γ.

2ον. Εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΒ.

3ον. Διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Δ τῆς χορδῆς ΑΒ.

4ον. Διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ζ τοῦ ὑποτεινομένου τόξου ΑΖΒ. (α)

Ἀλλ', ἐπειδὴ ἐξ ἑνὸς σημείου εἰς ἄλλο μία μόνη εὐθεῖα ἄγεται, δύο μόνον συνθῆκαι εἶναι ἐπαρκεῖς διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς θέσεως εὐθείας τινός. Ἕπεται λοιπὸν ὅτι πᾶσα εὐθεῖα, ἐκπληροῦσα δύο τῶν ἀνωτέρω τεσσάρων συνθηκῶν, ἐκπληροῖ ἀναγκαίως καὶ τὰς ἄλλας δύο. Παραδείγματος χάριν, ἂν μᾶς δοθῇ ὅτι εὐθεῖά τις διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Δ τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ τοῦ μέσου Ζ τοῦ ὑπ' αὐτῆς ὑποτεινομένου τόξου ΑΖΒ, θέλομεν ἀμέσως συμπεράνει ὅτι εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς χορδῆς καὶ ὅτι διέρχεται καὶ διὰ τοῦ κέντρου Γ τοῦ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Διὰ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων σημείων διέρχεται πάντοτε περιφέρεια κύκλου καὶ μία μόνη.

Ἔστωσαν Α, Β, Γ τρία μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα σημεῖα. Ἂς ἄξωμεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, καὶ εἰς τὰ μέσα Δ καὶ Θ αὐτῶν ἂς ὑψώσωμεν τὰς καθέτους ΔΕ, ΘΖ. Λέγω 1ον ὅτι αἱ κάθετοι αὗται τέμνονται εἴς τι σημεῖον Ο, ὅπερ θέλει εἶναι τὸ κέντρον τῆς διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ διερχομένης περιφερείας.

Ἐν πρώτοις αἱ κάθετοι ΔΕ, ΘΖ συναπαντῶνται. Διότι, ἂν δὲν συνηντῶντο, ἤθελον εἶσθαι παράλληλοι. Ἀλλὰ τότε ἡ ΒΑ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τῆς ΔΕ, θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου αὐτῇ ΖΘ (πρότ. 25, Α'). Ἀλλὰ καὶ ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΘΖ. Λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι ΒΑ, ΒΓ ἤθελον ἀποτελεῖ μίαν μόνην εὐθεῖαν (πρότ. 17, Α'). Ἀλλὰ τότε τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ ἤθελον κεῖσθαι ἐπ' εὐθείας, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Λοιπὸν αἱ κάθετοι ΔΕ, ΘΖ τέμνονται εἴς τι σημεῖον Ο.

Δεύτερον, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ο κεῖται ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς εὐθείας ΑΒ ὑψωθείσης καθέτου ΔΕ, ἀπέχει ἰσάκις τῶν ἄκρων Α καὶ Β αὐτῆς (πρότ. 19, Α'), καὶ ἐπειδὴ κεῖται ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ μέσου Θ τῆς ΒΓ ὑψωθείσης καθέτου ΘΖ, ἀπέχει ἰσάκις τῶν ἄκρων Β καὶ Γ αὐτῆς. Αἱ τρεῖς λοιπὸν ἀποστάσεις ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ κεῖται ἐπὶ τῆς μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ, ἢ ΟΒ, ἢ ΟΓ γραφομένης περιφερείας. Λοιπὸν 1ον διὰ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας κτλ.

Λέγω 2ον ὅτι μία μόνη περιφέρεια διὰ τῶν αὐτῶν σημείων διέρχεται. Διότι, ἂν διήρχετο καὶ ἑτέρα τις, τὸ κέντρον αὐτῆς ἔπρεπεν ἀναγκαίως νὰ εὑρίσκηται καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου ΔΕ[α] καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου ΘΖ (πρότ. 19, Α). Ἀλλ' αἱ εὐθεῖαι αὗται εἰς ἓν μόνον
διότι ἂν εἶχον δύο σημεῖα κοινὰ ἤθελον ταυτίζεσθαι
σημεῖον τέμνονται (πρότ. 3, Α'). Λοιπὸν μία μόνη περιφέρεια κτλ.

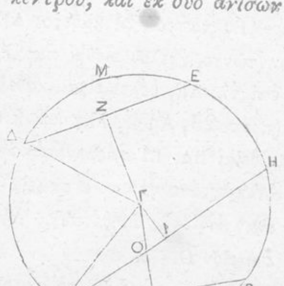
Πόρισμα 1. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ο ἀπέχει ἰσάκις τῶν ἄκρων Α καὶ Γ τῆς εὐθείας ΑΓ, ἡ ἐπ' αὐτῆς κάθετος ΟΗ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου αὐτῆς Η. Λοιπὸν *αἱ εἰς τὰ μέσα Δ, Θ, Η τῶν τριῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου τινὸς ΑΒΓ ὑψούμεναι κάθετοι ΔΕ, ΘΖ, ΗΚ, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο.*

Πόρισμα 2. Δύο περιφέρειαι δύο τὸ πολὺ κοινὰ σημεῖα δύνανται νὰ ἔχωσι. Διότι, ἂν εἶχον τρία, ἐπειδὴ ταῦτα δὲν δύνανται νὰ κῆνται ἐπ' εὐθείας (πρότ. 3), καὶ διὰ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων σημείων μία μόνη περιφέρεια διέρχεται, αὗται ἤθελον ταυτίζεσθαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ ἴσαι χορδαὶ ἰσάκις ἀπέχουσι τοῦ κέντρου, καὶ ἐκ δύο ἀνίσων ἡ μικροτέρα ἀπέχει περισσότερον.

Ἔστω 1ον ἡ χορδὴ ΑΒ = τῇ ΔΕ. Λέγω ὅτι αἱ ἐπ' αὐτῶν κάθετοι ΓΖ, ΓΘ, αἱ μετροῦσαι τὰς ἀπ' αὐτῶν ἀποστάσεις τοῦ κέντρου Γ, θέλουσιν εἶναι ἴσαι.



Διότι, ἂν ἄξωμεν τὰς ἀκτῖνας ΓΔ, ΓΑ, τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΖΔ, ΓΘΑ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας των ΓΔ, ΓΑ ἴσας, καὶ τὰς πλευρὰς ΔΖ, ΑΘ ἴσας, ὡς τὰ ἡμίση ἴσων χορδῶν ΔΕ, ΑΒ (προτ.

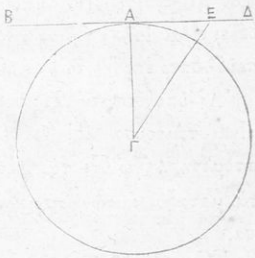
6). Λοιπὸν καὶ ἡ ΓΖ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΓΘ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Ἂς ὑποθέσωμεν 2ον ὅτι ἡ χορδὴ ΑΗ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΔΕ. Λέγω ὅτι ἡ κάθετος ΓΖ θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς καθέτου ΓΙ.

Διότι, ἂν λάβωμεν τὸ τόξον ΑΚΒ ἴσον τῷ ΔΜΕ καὶ ἄξωμεν τὴν χορδὴν ΑΒ, ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ ΔΕ, ΑΒ εἶναι ἴσαι, ἡ κάθετος ΓΖ θέλει εἶναι ἴση τῇ καθέτῳ ΓΘ. Ἀλλὰ ΓΘ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΓΟ, ἥτις ὡς πλαγία εἶναι μεγαλειτέρα τῆς καθέτου ΓΙ. Λοιπὸν κατ' ἰσχυρότερον λόγον ἡ ΓΘ, ἢ ἡ ἴση ταύτῃ ΓΖ, θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΓΙ. Λοιπὸν 2ον, ἐκ δύο ἀνίσων χορδῶν ἡ μικροτέρα ἀπέχει περισσότερον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9 ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶσα εὐθεῖα, κάθετος εἰς τὸ ἄκρον ἀκτῖνός τινος, εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν, καὶ ἀντιστρόφως, πᾶσα ἐφαπτομένη εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς ἀγομένης ἀκτῖνος.



Ἂς ὑποθέσωμεν 1ον ὅτι ἡ ΒΔ ἤχθη κάθετος εἰς τὸ ἄκρον Α τῆς ἀκτῖνος ΓΑ. Ἐπειδὴ πᾶσα πλαγία ΓΕ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς καθέτου ΓΑ, ἕπεται ὅτι πᾶν σημεῖον Ε τῆς εὐθείας ΒΔ, ἐκτὸς τοῦ σημείου Α, θέλει κεῖσθαι ἐκτὸς τῆς περιφερείας. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΒΔ ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον Α μετὰ τῆς περιφερείας ἔχει. Ἄρα εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν (ὁρ 13). Λοιπὸν 1ον κτλ.

Ἂς ὑποθέσωμεν 2ον ὅτι ἡ ΒΔ εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον Α τῆς περιφερείας. Λέγω ὅτι θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς ἀγομένης ἀκτῖνος ΓΑ.

Διότι, ἐπειδὴ πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας ΒΔ ἐκτὸς τοῦ Α κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας, ἡ ἀκτὶς ΓΑ εἶναι μικροτέρα πάσης εὐθείας, ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου Γ εἴς τι ὁποιονδήποτε σημεῖον τῆς ΒΔ. Λοιπὸν ΓΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΔ (πρότ. 18, πόρ. 1, Α'), τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὰ μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν περιεχόμενα τόξα περιφερείας τινὸς εἶναι ἴσα.

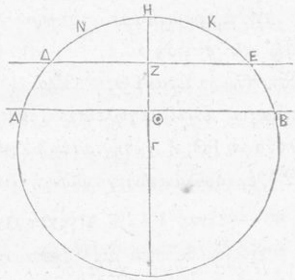
Ἡ ἀνωτέρω πρότασις περιλαμβάνει τὰς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις·

Ἢ καὶ δύο παράλληλοι θέλουσιν εἶναι τέμνουσαι,

Ἢ ἡ μία τέμνουσα καὶ ἡ ἄλλη ἐφαπτομένη,

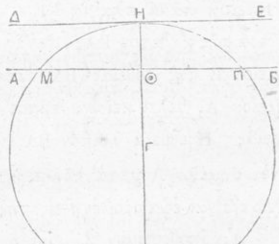
Ἢ καὶ αἱ δύο ἐφαπτόμεναι.

Ἂς ὑποθέσωμεν 1ον ὅτι καὶ αἱ δύο εἶναι τέμνουσαι, καὶ ἔστωσαν ΑΒ, ΔΕ αὗται. Λέγω ὅτι τὰ τόξα ΑΔ, ΒΕ, τὰ μεταξὺ αὐτῶν περιεχόμενα, εἶναι ἴσα.



Διότι, ἂν ἐκ τοῦ κέντρου Γ καταβιβάσωμεν τὴν ΓΘ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ, αὕτη θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου αὐτῇ ΔΕ (πρότ. 25, Α΄), καὶ θέλει διαιρεῖ τὰ τόξα ΑΗΒ, ΔΗΕ εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὸ σημεῖον Η (πρότ. 6). Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τόξον ΑΗ = τῷ ΗΒ καὶ τόξον ΔΗ = τῷ ΗΕ. Ἑπομένως ἡ διαφορὰ ΑΔ τῶν τόξων ΑΗ καὶ ΔΗ θέλει εἶναι ἴση τῇ διαφορᾷ ΒΕ τῶν ἴσων αὐτοῖς τόξων ΗΒ καὶ ΗΕ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Ἂς ὑποθέσωμεν 2ον ὅτι ἡ μία ΑΒ εἶναι τέμνουσα καὶ ἡ ἑτέρα ΔΕ ἐφαπτομένη. Λέγω ὅτι τὰ τόξα ΜΗ, ΗΠ, τὰ μεταξὺ αὐτῶν περιεχόμενα, εἶναι ἴσα.



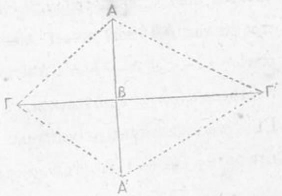
Διότι, ἂν ἄξωμεν τὴν ἀκτῖνα ΓΗ εἰς τὸ σημεῖον Η τῆς ἐπαφῆς, αὕτη θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης ΔΕ (πρότ. 9), ἐπομένως κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου αὐτῇ ΑΒ. Ἀλλὰ τότε, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 6 προτάσει, διαιρεῖ τὸ τόξον ΜΗΠ εἰς δύο ἴσα μέρη. Λοιπὸν τὸ τόξον ΜΗ = τῷ ΗΠ.

Ἂς ὑποθέσωμεν 3ον ὅτι καὶ αἱ δύο ΙΛ, ΔΕ εἶναι ἐφαπτόμεναι. Λέγω ὅτι τὰ τόξα ΗΜΚ, ΗΠΚ εἶναι ἴσα.

Διότι, ἂν ἄξωμεν τὰς ἀκτῖνας ΓΗ, ΓΘ, αὗται θέλουσιν κεῖσθαι ἐπ' εὐθείας, ὡς κάθετοι ἀμφότεραι ἐπὶ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΔΕ καὶ ΙΛ (πρότ. 25, Α΄). Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΗΚ εἶναι διάμετρος, ἐπομένως τὰ τόξα ΗΜΚ, ΗΠΚ εἶναι ἴσα, ὡς ἡμιπεριφέρειαι. Λοιπὸν 3ον κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἔχωσιν ἓν κοινὸν σημεῖον Α, κείμενον ἐκτὸς τῆς ἑνονούσης τὰ κέντρα αὐτῶν Γ καὶ Γ' εὐθείας ΓΓ', αὗται θέλουσιν ἔχει καὶ δεύτερόν τι κοινὸν σημεῖον Α', κείμενον ἐπὶ τῆς ΑΒ, καθέτου ἐπὶ τῆς ΓΓ', καὶ ἀπέχον τῆς ΓΓ' ὅσον καὶ τὸ σημεῖον Α.



Διότι, ἐπειδὴ καθ' ὑπόθεσιν Α'Β=ΑΒ, αἱ πλάγιαι ΓΑ, ΓΑ' καθὼς καὶ αἱ Γ'Α, Γ'Α' εἶναι ἴσαι, (πρότ. 18, 2ον, Α'). Λοιπὸν αἱ μὲ κέντρα Γ καὶ Γ' καὶ ἀκτῖνας ΓΑ, Γ'Α γραφόμεναι περιφέρειαι θέλουσι διέλθει καὶ διὰ τοῦ σημείου Α', ὅπερ κεῖται ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς καθέτου ΑΒ καὶ ἀπέχει τῆς ΓΓ', ὅσον καὶ τὸ σημεῖον Α. Λοιπὸν κτλ.

Πόρισμα 1. Ἡ εὐθεῖα ΓΓ', ἡ ἑνόνουσα τὰ κέντρα Γ καὶ Γ' δύο τεμνομένων περιφερειῶν, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς κοινῆς αὐτῶν χορδῆς ΑΑ', καὶ διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη.

Πόρισμα 2. Ὅταν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, τὸ κοινὸν τῆς ἐπαφῆς αὐτῶν σημεῖον κεῖται ἀναγκαίως ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν κέντρων. Διότι, ἂν ἔκειτο ἐκτὸς, αἱ περιφέρειαι ἤθελον ἔχει, κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα, καὶ δεύτερον σημεῖον κοινὸν, ἑπομένως ἤθελον τέμνεσθαι.

Σχόλιον. Αἱ πρὸς ἀλλήλας διάφοροι θέσεις δύο περιφερειῶν εἶναι αἱ ἑξῆς πέντε·

Ἐσωτερικαὶ, ὅταν ἡ μία κῆται ἐντὸς τῆς ἄλλης.

Ἐξωτερικαὶ, ὅταν ἡ μία κῆται ἐκτὸς τῆς ἄλλης.

Ἐφαπτόμεναι ἐσωτερικῶς, ὅταν συνεφάπτωνται ἀλλήλων καὶ ἦναι ἐσωτερικαί.

Ἐφαπτόμεναι ἐξωτερικῶς, ὅταν συνεφάπτωνται ἀλλήλων καὶ ἦναι ἐξωτερικαί.

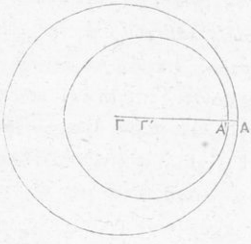
Τεμνόμεναι, ὅταν τέμνωνται.

Δι' ἑκάστην δὲ τῶν ἀνωτέρω πέντε διαφόρων πρὸς ἀλλήλας τῶν περιφερειῶν θέσεων ὑπάρχει ἰδιαιτέρα τις σχέσις μεταξὺ των ἀκτίνων καὶ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων αὐτῶν, ἃς ἀποδεικνύομεν διὰ τῶν ἀκολούθων θεωρημάτων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Όταν δύο περιφέρειαι ἦναι ἐσωτερικαὶ, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων.

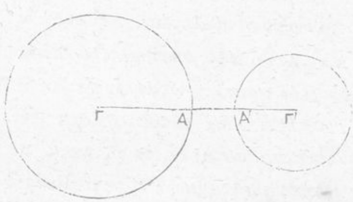
Ἔστωσαν Γ καὶ Γ′ τὰ κέντρα καὶ ΓΑ, Γ′Α′ αἱ ἀκτῖνες τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος δύο ἐσωτερικῶν περιφερειῶν. Θέλομεν ἔχει προφανῶς ΓΓ′=ΓΑ−Γ′Α′−Α′Α, ἑπομένως ΓΓ′<ΓΑ−Γ′Α′. Λοιπὸν, ὅταν δύο περιφέρειαι ἦναι ἐσωτερικαὶ, ἡ ἀπόστασις ΓΓ′ τῶν κέντρων εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς ΓΑ−Γ′Α′ τῶν ἀκτίνων.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Όταν δύο περιφέρειαι ἦναι ἐξωτερικαὶ, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων.

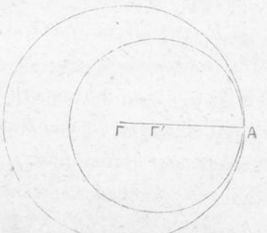
Ἔστωσαν Γ καὶ Γ′ τὰ κέντρα τῶν δύο ἐξωτερικῶν περιφερειῶν καὶ ΓΑ, Γ′Α′ αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν. Θέλομεν ἔχει προφανῶς ΓΓ′=ΓΑ+ΑΑ′+Α′Γ′, ἑπομένως ΓΓ′>ΓΑ+Γ′Α′. Λοιπὸν, ὅταν αἱ περιφέρειαι ἦναι ἐξωτερικαὶ, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων ΓΓ′ εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ ἀθροίσματος ΓΑ+Γ′Α′ τῶν ἀκτίνων.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14. ΘΕΩΡΗΜΑ.

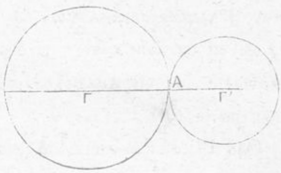
Όταν δύο περιφέρειαι ἦναι ἐφαπτόμεναι ἐσωτερικῶς, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων.

Ἔστωσαν Γ καὶ Γ′ τὰ κέντρα τῶν δύο ἐσωτερικῶς ἐφαπτομένων περιφερειῶν. Ἐπειδὴ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Α κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΓ′ τῶν κέντρων (πρότ. 11, πόρ. 2), θέλομεν ἔχει προφανῶς ΓΓ′=ΓΑ−Γ′Α, τοῦθ᾽ ὅπερ ἐπρόκειτο ν᾽ ἀποδείξωμεν.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15. ΘΕΩΡΗΜΑ.

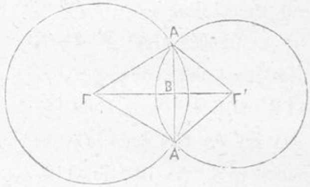
Ὅταν δύο περιφέρειαι ἦναι ἐφαπτόμεναι ἐξωτερικῶς, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων.



Ἔστωσαν Γ καὶ Γ' τὰ κέντρα τῶν δύο ἐξωτερικῶς ἐφαπτομένων περιφερειῶν. Ἐπειδὴ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Α κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΓ' τῶν κέντρων, θέλομεν ἔχει προφανῶς ΓΓ'=ΓΑ+Γ'Α, τοῦθ'ὅπερ ἐπρόκειτο ν'ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ὅταν δύο περιφέρειαι ἦναι τεμνόμεναι, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων καὶ μεγαλειτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.



Ἔστωσαν Γ καὶ Γ' τὰ κέντρα τῶν δύο τεμνομένων περιφερειῶν καὶ Α ἓν τῶν σημείων τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς. Ἂν ἄξωμεν τὰς ἀκτῖνας ΓΑ, Γ'Α, θέλομεν σχηματίσει τὸ τρίγωνον ΑΓΓ', ἐν ᾧ, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 8 προτάσει τοῦ Α' βιβλίου, θέλομεν ἔχει τὰς ἀνισότητας ΓΓ'<ΓΑ+Γ'Α καὶ ΓΓ'>ΓΑ—Γ'Α. Λοιπὸν, ὅταν δύο περιφέρειαι τέμνωνται, ἡ ἀπόστασις κτλ.

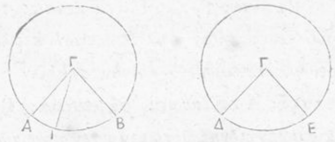
Σχόλιον. Αἱ ἀντίστροφοι τῶν ἀνωτέρω ἀποδειχθεισῶν πέντε προτάσεων εἶναι ἀληθεῖς καὶ ἀποδεικνύονται ὅλαι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὡς ἐξῆς· Ἂν ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἡ τῶν κέντρων ἀπόστασις εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων καὶ μεγαλειτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, αἱ περιφέρειαι θέλουσιν εἶναι τεμνόμεναι. Διότι, ἂν ἦσαν ἐσωτερικαὶ ἢ ἐξωτερικαὶ, ἡ τῶν κέντρων ἀπόστασις ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς ἢ μεγαλειτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, ἂν δ' ἦσαν ἐφαπτόμεναι ἐσωτερικῶς ἢ ἐξωτερικῶς, ἡ τῶν κέντρων ἀπόστασις ἤθελεν εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν ἢ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους αἱ ἴσαι κεντρικαὶ γω-

νίαι χωρίζουσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἴσα τόξα, καὶ ἀντιστρόφως, εἰς ἴσα τόξα ἀντιστοιχοῦσιν ἴσαι κεντρικαὶ γωνίαι.

Ἂς ὑποθέσωμεν 1ον ὅτι αἱ κεντρικαὶ γωνίαι ΑΓΒ, ΔΓΕ εἶναι ἴσαι εἰς τοὺς ἔχοντας ἴσας ἀκτῖνας ΓΑ, ΓΔ κύκλους. Λέγω ὅτι τὰ χωριζόμενα ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῶν τόξα ΑΒ, ΔΕ θέλουσιν εἶναι ἴσα.



Διότι, ἂν ἐπιθέσωμεν τὰς ἴσας γωνίας ΑΓΒ, ΔΓΕ, ἐπειδὴ ΓΑ=ΓΔ καὶ ΓΒ=ΓΕ, τὸ σημεῖον Α θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Δ καὶ τὸ σημεῖον Β ἐπὶ τοῦ Ε. Ἀλλὰ τότε καὶ τὸ τόξον ΑΒ θέλει ταὐτισθῇ μὲ τὸ τόξον ΔΕ, διότι ἄλλως θὰ ὑπῆρχον εἰς τοὺς ἴσους κύκλους σημεῖα ἀνισάκις ἀπέχοντα τοῦ κέντρου, ὅπερ ἀδύνατον. Λοιπὸν τὸ τόξον ΑΒ = τῷ ΔΕ. Λοιπὸν 1ον, εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους αἱ ἴσαι κεντρικαὶ γωνίαι χωρίζουσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἴσα τόξα.

Ἂς ὑποθέσωμεν 2ον ὅτι εἰς τοὺς ἴσους κύκλους τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ εἶναι ἴσα. Λέγω ὅτι καὶ αἱ εἰς ταῦτα ἀντιστοιχοῦσαι κεντρικαὶ γωνίαι ΑΓΒ, ΔΓΕ θέλουσιν εἶναι ἴσαι.

Διότι, ἂν δὲν ἦσαν ἴσαι, ἔστω ΑΓΒ ἡ μεγαλειτέρα. Ἂς κατασκευάσωμεν τότε τὴν ΒΓΙ ἴσην τῇ ΔΓΕ. Ἐπειδὴ αἱ κεντρικαὶ γωνίαι ΔΓΕ, ΒΓΙ εἶναι ἴσαι, τὰ τόξα ΔΕ, ΒΙ, κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, θέλουσιν εἶναι ἴσα. Ἀλλὰ τὸ τόξον ΔΕ = τῷ ΑΒ. Ἄρα καὶ τὸ ΒΙ = τῷ ΑΒ, τουτέστι τὸ μέρος ἴσον τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἄτοπον. Λοιπὸν αἱ κεντρικαὶ γωνίαι ΑΓΒ, ΔΓΕ εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν 2ον, εἰς τὰ ἴσα τόξα ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους ἴσαι κεντρικαὶ γωνίαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18. ΘΕΩΡΗΜΑ.

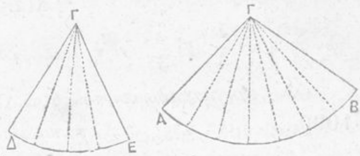
Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους δύο ὁποιαιδήποτε κεντρικαὶ γωνίαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ τὰ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῶν περιεχόμενα τόξα.

Ἔστωσαν ΑΓΒ, ΔΓΕ αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος δύο κεντρικαὶ γωνίαι, λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει

$$\text{γων. ΑΓΒ} : \text{γων. ΔΓΕ} = \text{τόξ. ΑΒ} : \text{τόξ. ΔΕ} \qquad (\alpha)$$

Δύο τινὰ δυνατὸν νὰ ὑποτεθῶσιν· ἢ ὅτι τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ ἔχουσί τι κοινὸν μέτρον, ἢ ὅτι εἶναι μεγέθη ἀσύμμετρα.

Ἄς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι ταῦτα ἔχουσί τι κοινὸν μέτρον ἐμπεριεχόμενον π. χ. ἑπτάκις εἰς τὸ τόξον ΑΒ καὶ τετράκις εἰς τὸ τόξον ΔΕ. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἀναλογίαν



τόξ. ΑΒ : τόξ. ΔΕ$=$7 : 4. (1).

Ἀλλ' ἐὰν ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα τῶν ἴσων διαιρέσεων τῶν τόξων ΑΒ, ΔΕ μὲ τὰ κέντρα τῶν ἀντιστοιχουσῶν περιφερειῶν, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ μὲν γωνία ΑΓΒ θέλει διαιρεθῆ εἰς 7 γωνίας, ἡ δὲ ΔΓΕ εἰς τέσσαρας, αἵτινες θέλουσιν εἶναι ἅπασαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ὡς χωρίζουσαι ἐπὶ τῶν ἴσων περιφερειῶν τόξα ἴσα (πρότ. 17). Θέλομεν λοιπὸν ἔχει καὶ τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν·

γων. ΑΓΒ : γων. ΔΓΕ $=$ 7 : 4. (2).

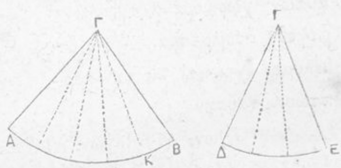
Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ ἀναλογίαι (1) καὶ (2) ἔχουσι τὸν λόγον 7 : 4 κοινόν, οἱ ἄλλοι λόγοι ἀποτελοῦσι τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν·

γων. ΑΓΒ : γων. ΔΓΕ$=$ τόξ. ΑΒ : τόξ. ΔΕ.

Λοιπὸν τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη ὅταν τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ ἔχωσι κοινόν τι μέτρον.

Ἄς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ εἶναι ἀσύμμετρα. Λέγω ὅτι καὶ ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ ἀναλογία (α) εἶναι ἀληθής.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἂς διαιρέσωμεν εἰς ἀριθμόν τινα ἴσων μερῶν, εἰς τρία π. χ., τὸ τόξον ΔΕ, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ τόξον ΑΒ περιέχει τέσσαρα τοιαῦτα μετά τινος ὑπολοίπου ΚΒ, μικροτέρου ἑνὸς τούτων. Ὁ λόγος τῶν τόξων ΑΒ, ΔΕ θέλει εἶναι κατὰ τὰ προϋτεθέντα μεγαλείτερος τοῦ $\frac{4}{3}$ καὶ μικρότερος τοῦ $\frac{5}{3}$.



Ἀλλ', ἐὰν ἑνώσωμεν τὰ κέντρα Γ καὶ Γ μὲ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῶν τόξων, εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ μὲν γωνία ΔΓΕ θέλει διαιρεθῆ εἰς τρία ἴσα μέρη, ἡ δὲ γωνία ΑΓΒ θέλει περιέχει τέσσαρα τοιαῦτα μετά τινος ὑπολοίπου ΚΓΒ, μικροτέρου ἑνὸς τούτων. Ὁ λόγος λοιπὸν τῶν γωνιῶν ΑΓΒ, ΔΓΕ, θέλει περιέχεσθαι ὡσαύτως μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν

$\frac{4}{3}$ καὶ $\frac{5}{3}$. Οἱ δύο λοιπὸν λόγοι $\frac{\text{ΑΓΒ}}{\text{ΔΓΕ}}$, $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΕ}}$ περιέχονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν $\frac{4}{3}$ καὶ $\frac{5}{3}$, ὧν ἡ διαφορὰ εἶναι $\frac{1}{3}$.

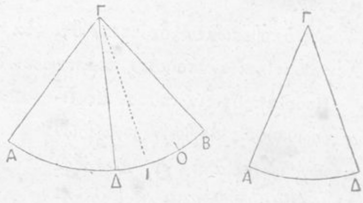
Ἀλλ', ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ τόξον ΔΕ τῆς γωνίας ΔΓΕ εἰς 10, 100, 1000,.... ἴσα μέρη, καὶ ἐπαναλάβωμεν τὸν αὐτὸν τρόπον τοῦ σκέπτεσθαι, θέλομεν ἀποδείξει ὅτι οἱ αὐτοὶ λόγοι $\frac{\text{ΑΓΒ}}{\text{ΔΓΕ}}$, $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΕ}}$ περιέχονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, ὧν αἱ διαφοραὶ εἶναι $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$,... Λοιπὸν οἱ λόγοι οὗτοι θέλουσιν εἶναι ἀναγκαίως ἴσοι, ὡς περιεχόμενοι μεταξὺ τῶν αὐτῶν πάντοτε ἀριθμῶν, ὧν ἡ διαφορὰ δύναται νὰ κατασταθῇ μικροτέρα παντὸς δεδομένου ἀριθμοῦ. Λοιπὸν θέλομεν ἔχει καὶ καθ' ἣν περίπτωσιν τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ εἶναι μεγέθη ἀσύμμετρα

$$\text{γων. ΑΓΒ : γων. ΔΓΕ} = \text{τόξ. ΑΒ : τόξ. ΔΕ} \qquad (\alpha).$$

τουθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Ἡ δευτέρα αὕτη περίπτωσις τοῦ παρόντος θεωρήματος ἀποδεικνύεται καὶ διὰ ἰδιαιτέρου τινὸς τρόπου, καλουμένου *ἀπόδειξις διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς*, ὡς ἑξῆς.

Ἔστωσαν ΑΓΒ, ΑΓΔ, αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος γωνίαι, τῶν ὁποίων τὰ ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῶν χωριζόμενα τόξα εἶναι μεγέθη ἀσύμμετρα. Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην



$$\text{γων. ΑΓΒ : γων. ΑΓΔ} = \text{τόξ. ΑΒ : τόξ. ΑΔ}. \qquad (\alpha).$$

Διότι, ἂν ἡ ἀναλογία αὕτη δὲν ἦναι ἀληθής, τῶν τριῶν πρώτων αὐτῆς ὅρων μενόντων τῶν αὐτῶν, ὁ τέταρτος θέλει εἶναι ἢ μεγαλείτερος ἢ μικρότερος τοῦ τόξ. ΑΔ. Ἂς ὑποθέσωμεν τὸ πρῶτον, καὶ ἔστω ΑΟ τὸ μεγαλείτερον τοῦ ΑΔ τόξον, ὅπερ μετὰ τῶν τριῶν πρώτων ὅρων σχηματίζει ἀληθῆ ἀναλογίαν. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει

$$\text{γων. ΑΓΒ : γων. ΑΓΔ} = \text{τόξ. ΑΒ : τόξ. ΑΟ}. \qquad (1)$$

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς γωνίας ΑΓΒ τὴν ΑΓΔ ἴσην τῇ ΑΓΔ καὶ διαιροῦμεν τὸ τόξον ΑΒ εἰς μέρη ἴσα, μέχρις οὗ ἓν τοὐλάχιστον σημεῖον διαιρέσεως Ι πέσῃ μεταξὺ τοῦ Δ καὶ Ο. Ἂν ἄξωμεν τὴν ΓΙ, ἐπειδὴ τὰ τόξα ΑΒ, ΑΙ ἔχουσί τι κοινὸν μέτρον ἐκ κατασκευῆς, θέλομεν ἔχει

γων. ΑΓΒ : γων ΑΓΙ = τόξ. ΑΒ : τόξ. ΑΙ. (2).

Ἐπειδὴ αἱ ἀναλογίαι (1) καὶ (2) ἔχουσι τοὺς ἡγουμένους αὐτῶν ἴσους, οἱ ἑπόμενοι αὐτῶν σχηματίζουσι τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν

γων. ΑΓΔ : γων. ΑΓΙ = τόξ. ΑΟ : τόξ. ΑΙ, (3)

ἥτις προφανῶς εἶναι ἄτοπος, διότι ἐνῷ τὸ τόξον ΑΙ εἶναι μικρότερον τοῦ τόξου ΑΟ, ἡ γωνία ΑΓΙ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς γωνίας ΑΓΔ. Ἀλλ' ἐκ τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) ἡ ἀναλογία (2) ἀπεδείχθη ἀληθής. Ἄρα ἡ ἀναλογία (1) εἶναι ἐσφαλμένη, τουτέστιν, ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας (α) δὲν δύναται νὰ ἦναι μεγαλείτερος τοῦ τόξου ΑΔ.

Δι' ὁμοίων συλλογισμῶν ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι ὁ τέταρτος ὅρος τῆς (α) δὲν δύναται νὰ ἦναι οὔτε μικρότερος τοῦ τόξου ΑΔ. Λοιπὸν οὗτος εἶναι ἀκριβῶς ἴσος τῷ τόξῳ ΑΔ. Λοιπὸν ἡ ἀναλογία (α) εἶναι ἀληθής, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΕΡΙ ΜΕΤΡΟΥ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ.

Γνωρίζομεν ὅτι *μέτρον* ὁποιουδήποτε μεγέθους καλεῖται ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς ὡρισμένον τι ὁμοειδὲς μέγεθος, ληφθὲν ὡς μονάς. Τὸ μέτρον λοιπὸν γωνίας τινὸς θέλει εἶναι ὁ λόγος αὐτῆς πρὸς τὴν ὀρθήν, λαμβανομένην ὡς μονάδα. Ἀλλ' ἀπεδείξαμεν προηγουμένως ὅτι ὁ λόγος δύο γωνιῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῶν χωριζομένων ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τόξων. Λοιπὸν δυνάμεθα, ἀντὶ νὰ συγκρίνωμεν γωνίαν πρὸς γωνίαν, νὰ παραβάλλωμεν τόξον πρὸς τόξον, τουτέστι μεγέθη *ἁπλούστερα*.

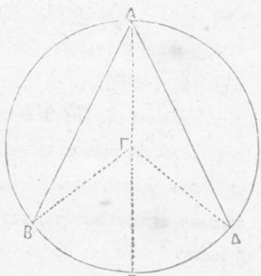
Ὅταν λαμβάνωμεν τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὡς μονάδα τῶν γωνιῶν, τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχόμενον τόξον εἶναι τὸ τέταρτον περιφερείας κύκλου, διότι, ἂν διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἄξωμεν δύο καθέτους ἐπ' ἀλλήλων διαμέτρους, θέλομεν σχηματίσει τέσσαρας κεντρικὰς ὀρθὰς γωνίας, καὶ ἡ περιφέρεια θέλει διαιρεθῇ οὕτως εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη (πρότ. 17), ἅτινα καλοῦνται *τεταρτημόρια*. Λοιπὸν μέτρον γωνίας τινὸς εἶναι ὁ λόγος τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου τόξου πρὸς τὸ τεταρτημόριον τῆς εἰς ἣν τὸ τόξον τοῦτο ἀνήκει περιφερείας

Ἵνα εὐκολύνωσι περισσότερον τὴν τοιαύτην σύγκρισιν, διήρεσαν τὴν περιφέρειαν εἰς 360 ἴσα μέρη, ἅτινα ἐκάλεσαν *μοίρας*, ἑκάστην μοιραν εἰς 60 ἴσα μέρη, ἅτινα ὠνόμασαν *λεπτὰ πρῶτα* τῆς μοίρας, καὶ ἕκαστον λεπτὸν πρῶτον εἰς 60 ἴσα μέρη, ἅτινα ἐκάλεσαν *δεύτερα λεπτὰ* τῆς μοίρας. Ὅταν τώρα μᾶς δοθῇ εἰς μοίρας, λεπτὰ πρῶτα, λεπτὰ δεύτερα τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν γωνίας τινὸς περιεχόμενον τόξον, τὸ μέτρον τῆς γωνίας θέλει εἶναι ὁ λόγος τοῦ μέτρου τοῦ τόξου πρὸς 90 μοίρας. Ἂν π. χ. τὸ τόξον γωνίας τινὸς εἶναι 25 μοιρῶν, τὸ μέτρον αὐτῆς θέλει εἶναι $\frac{25}{90}$ ἢ $\frac{5}{16}$ τῆς ὀρθῆς.

Πρὸς συντομίαν, ἀντὶ νὰ λέγωσιν ὅτι *μέτρον κεντρικῆς τινος γωνίας εἶναι ὁ λόγος τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου τόξου πρὸς τὸ τεταρτημόριον τῆς εἰς ἣν τὸ τόξον ἀνήκει περιφερείας*, λέγουσιν ὅτι *πᾶσα κεντρικὴ γωνία ἔχει διὰ μέτρον τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχόμενον τόξον.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου τόξου.

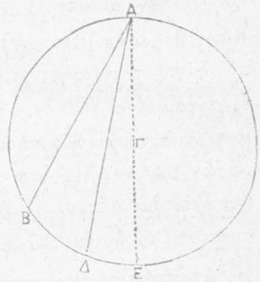


Ἂς ὑποθέσωμεν 1ον ὅτι τὸ κέντρον Γ τοῦ κύκλου κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας, καὶ ἔστω ἡ ΒΑΔ ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος. Λέγω ὅτι αὕτη ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου τόξου ΒΔ.

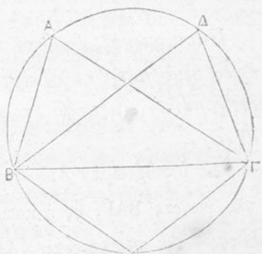
Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν τὴν διάμετρον ΑΕ καὶ τὰς ἀκτῖνας ΓΒ, ΓΔ. Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΓΕ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν ΑΒΓ, ΒΑΓ (πρότ. 31, πόρ. 4, Α΄). Ἀλλ᾿ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς, ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση τῇ ΓΑΒ. Λοιπὸν ἡ γωνία ΒΓΕ εἶναι διπλασία τῆς ΒΑΓ ἢ τῆς ΒΑΕ. Ἀλλ᾿ ἡ γωνία ΒΓΕ, ὡς κεντρικὴ, ἔχει διὰ μέτρον τὸ τόξον ΒΕ. Λοιπὸν ἡ γωνία ΒΑΕ, ἥμισυ τῆς ΒΓΕ, θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΒΕ.

Ἐπαναλαμβάνοντες κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τοὺς ἀνωτέρω συλλογισμοὺς, θέλομεν ἀποδείξει ὅτι ἡ γωνία ΕΑΔ, εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΕΓΔ, καὶ ἔχει ἐπομένως διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΔΕ. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΒΑΕ, ΕΑΔ, ἤτοι ἡ γωνία ΒΑΔ, θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο τόξων ΒΕ, ΕΔ, ἤτοι τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΔ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Ἂς ὑποθέσωμεν 2ον ὅτι τὸ κέντρον Γ κεῖται ἐκτὸς τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος γωνίας ΒΑΔ. Ἐὰν ἄξωμεν τὴν διάμετρον ΑΕ, ἡ γωνία ΒΑΕ θέλει ἔχει κατὰ τὰ προαποδειχθέντα διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΕ, καὶ ἡ γωνία ΔΑΕ τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΔΒ. Ἀλλ' ἡ δεδομένη ΒΑΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν ΒΑΕ, ΔΑΕ. Ἄρα θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν τόξων ΒΕ, ΔΕ, τουτέστι τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΔ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν. Λοιπὸν πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου τόξου.



Πόρισμα 1. Ὅλαι αἱ εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα ΒΑΔΓ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ΒΑΓ, ΒΔΓ εἶναι ἴσαι, διότι ἑκάστη ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΒΟΓ.



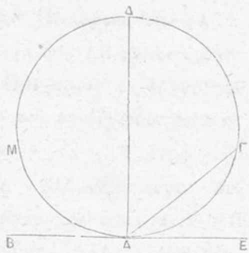
Πόρισμα 2. Πᾶσα ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον γωνία εἶναι ὀρθή, διότι ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς ἡμιπεριφερείας, ἤτοι τὸ τέταρτον τῆς ὅλης περιφερείας.

Πόρισμα 3. Πᾶσα γωνία ΒΑΓ, ἐγγεγραμμένη εἰς τμῆμα μεγαλείτερον ἡμικυκλίου εἶναι γωνία ὀξεῖα, διότι ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τόξου ΒΟΓ μικροτέρου ἡμιπεριφερείας. Πᾶσα δὲ γωνία ΒΟΓ, ἐγγεγραμμένη εἰς τμῆμα μικρότερον ἡμικυκλίου, εἶναι γωνία ἀμβλεῖα, διότι ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τόξου ΒΑΔΓ μεγαλειτέρου ἡμιπεριφερείας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 20. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶσα γωνία, ἔχουσα τὴν κορυφήν της ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ σχηματιζομένη ἀπὸ μίαν ἐφαπτομένην καὶ μίαν χορδήν, ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου τόξου.

Ἔστω ΒΑΓ ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος γωνία. Λέγω ὅτι ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου τόξου ΑΜΔΓ.



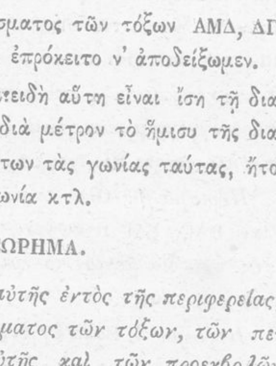
Διότι, ἂν ἄξωμεν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς τὴν διάμετρον ΑΔ, ἡ μὲν γωνία ΒΑΔ, ὡς ὀρθὴ (πρότ. 9), ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΜΔ, ἡ δὲ ἐγγεγραμμένη ΔΑΓ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΔΓ. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ΒΑΔ$+$ΔΑΓ, ἤτοι ἡ γωνία ΒΑΓ, θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τόξων ΑΜΔ, ΔΓ, τουτέστι τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΔΓ, τοῦθ᾽ ὅπερ ἐπρόκειτο ν᾽ ἀποδείξωμεν.

Ἂν ἐπρόκειτο περὶ τῆς γωνίας ΕΑΓ, ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ἴση τῇ διαφορᾷ τῶν γωνιῶν ΔΑΕ, ΔΑΓ, θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν τόξων ΑΓΔ, ΔΓ, τῶν μετρούντων τὰς γωνίας ταύτας, ἤτοι τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΓ. Λοιπὸν πᾶσα γωνία κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 21. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶσα γωνία, ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς ἐντὸς τῆς περιφερείας, ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τόξων, τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς καὶ τῶν προεκβολῶν αὐτῶν.

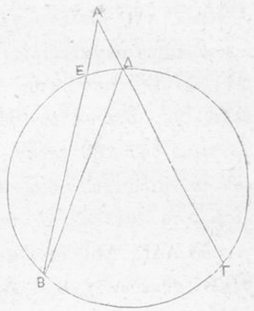
Ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται περὶ τῆς γωνίας ΒΑΓ, ἧς ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας. Λέγω ὅτι ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τόξων ΒΓ, ΔΕ, τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τῆς γωνίας καὶ τῶν προεκβολῶν αὐτῶν ΑΕ, ΑΔ.



Διότι, ἂν ἄξωμεν τὴν χορδὴν ΓΕ, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΓΕ, θέλομεν ἔχει γωνία ΒΑΓ$=$ΑΕΓ$+$ΑΓΕ. Ἀλλ᾽ ἡ ΑΕΓ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΓ, ἡ δὲ ΑΓΕ τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΔΕ. Λοιπὸν ἡ ΒΑΓ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τόξων ΒΓ καὶ ΔΕ, τοῦθ᾽ ὅπερ ἐπρόκειτο ν᾽ ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 22. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶσα γωνία ΒΑΓ, ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς ἐκτὸς τῆς περιφερείας καὶ σχηματιζομένη ὑπὸ δύο τεμνουσῶν ΑΒ, ΑΓ, ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς ΒΓ—ΕΔ τῶν μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένων τόξων ΒΓ καὶ ΕΔ.

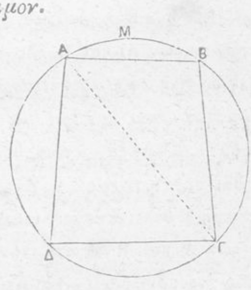


Διότι, ἂν ἄξωμεν τὴν χορδὴν ΒΔ, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΔΓ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΔΑΒ, ΑΒΔ, ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος ΒΑΓ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν ΒΔΓ, ΑΒΔ. Ἀλλ' ἡ ΒΔΓ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΓ, καὶ ἡ ΑΒΔ τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΕΔ. Λοιπὸν ἡ ΒΑΓ θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένων τόξων ΒΓ καὶ ΕΔ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις εἶναι ἀληθὴς καὶ ὅταν ἡ μία τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ἢ καὶ αἱ δύο ἦναι ἐφαπτόμεναι εἰς τὴν περιφέρειαν, ἡ δὲ ἀπόδειξις τούτου γίνεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 23. ΘΕΩΡΗΜΑ.

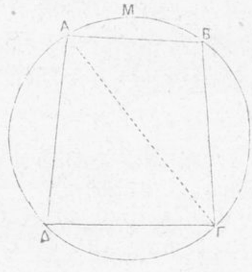
Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν παντὸς ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς, καὶ ἀντιστρόφως, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν τετραπλεύρου τινὸς ἦναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς, τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον.



Ἔστω ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον τι τετράπλευρον. Ἡ γωνία ΑΒΓ, ὡς ἐγγεγραμμένη ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΔΓ, καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία ΑΔΓ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΒΓ. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν ἀπέναντι γωνιῶν ΑΒΓ, ΑΔΓ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τόξων ΑΔΓ, ΑΒΓ, τουτέστι τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης περιφερείας. Λοιπὸν εἶναι ἴσον μὲ δύο γωνίας ὀρθάς.

Ἀντιστρόφως, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν $ΑΒΓ + ΑΔΓ = 2^{όρ}$, λέγω ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον.

Διότι, ἂν διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ ἄξωμεν περιφέρειαν, αὕτη θέλει ἀναγκαίως διέλθει καὶ διὰ τοῦ τετάρτου Δ. Διότι, ἂν δὲν διήρχετο καὶ διὰ τούτου, τὸ σημεῖον Δ θὰ ἔκειτο ἢ ἐντὸς τῆς περιφερείας ἢ ἐκτός. Ἂν ἔκειτο ἐντὸς, ἡ γωνία ΑΔΓ ἤθελεν ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τόξου μεγαλειτέρου τοῦ ΑΒΓ (πρότ. 21), ἂν δ' ἔκειτο ἐκτὸς, ἡ γωνία ΑΔΓ ἤθελεν ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τόξου μικροτέρου τοῦ ΑΒΓ (πρότ. 22). Ἀλλὰ μόνον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΒΓ μετὰ τοῦ ἡμίσεως τοῦ μετροῦντος τὴν γωνίαν ΑΒΓ τόξου ΑΔΓ μετρεῖ ἄθροισμα γωνιῶν ΑΔΓ, ΑΒΓ ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Λοιπὸν ἀναγκαίως ἡ διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ διερχομένη περιφέρεια διέρχεται καὶ διὰ τοῦ τετάρτου Δ, ἑπομένως τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον.

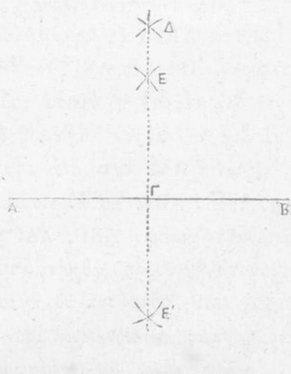


ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΑ ΕΙΣ ΤΑ ΔΥΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΒΙΒΛΙΑ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.

Νὰ διαιρεθῇ δεδομένη εὐθεῖα εἰς δύο ἴσα μέρη.

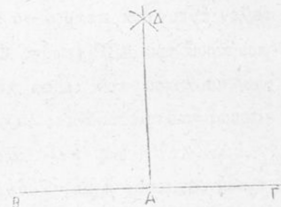
Ἔστω ΑΒ ἡ δεδομένη εὐθεῖα. Ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β, ὡς κέντρων, καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν, ἀλλὰ μεγαλειτέραν τοῦ ἡμίσεως τῆς ΑΒ, διαγράφομεν δύο τόξα, ἅτινα θέλουσι τέμνεσθαι εἴς τι σημεῖον Δ, ὅπερ, ἐκ κατασκευῆς, θέλει ἀπέχει ἰσάκις τῶν κέντρων Α καὶ Β. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον προσδιορίζομεν καὶ δεύτερόν τι σημεῖον Ε, ἀπέχον ἰσάκις ἀπὸ τῶν ἄκρων Α καὶ Β τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ, καὶ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΕ, ἥτις λέγω ὅτι θέλει διαιρεῖ τὴν δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη ΑΓ, ΓΒ.



Διότι, ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β, εὑρίσκονται κατὰ τὸ 19 θεώρημα τοῦ Α' βιβλίου ἐπὶ τῆς εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ ὑψουμένης καθέτου. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΔΕ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ, τουτέστι διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη ΑΓ, ΓΒ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδειχθῇ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.

Ἔκ τινος δεδομένου σημείου εὐθείας τινὸς νὰ ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας.



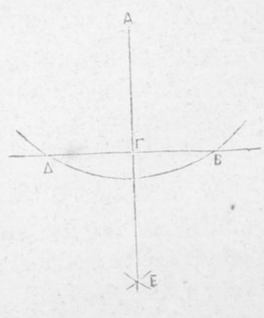
Ἔστω Α σημεῖόν τι τῆς δεδομένης εὐθείας. Λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν αὐτοῦ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ οὕτως, ὥστε ΑΒ=ΑΓ, καὶ ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Γ, ὡς κέντρων, καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτήν, ἀλλὰ μεγαλειτέραν τῆς ΑΒ, διαγράφομεν δύο τόξα ἅτινα θέλουσι τέμνεσθαι εἴς τι σημεῖον Δ Ἄγομεν τὴν ΑΔ, καὶ λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι ἡ ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας ζητουμένη κάθετος.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Δ ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τῶν ἄκρων Β καὶ Γ τῆς εὐθείας ΒΓ, εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Α ὑψουμένης καθέτου (πρότ. 19, Α'). Λοιπὸν ΑΔ εἶναι ἡ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ ζητουμένη κάθετος.

Σχόλιον. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλαμεν κατασκευάσει ὀρθήν τινα γωνίαν ΒΑΔ εἴς τι σημεῖον Α δεδομένης τινὸς εὐθείας ΒΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.

Ἐξ ἑνὸς σημείου Α, ἐκτὸς εὐθείας τινὸς ΒΔ κειμένου, νὰ καταβιβασθῇ κάθετος ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας.

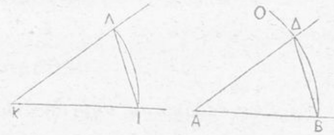


Ἐκ τοῦ σημείου Α, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἀρκούντως μεγάλην, διαγράφομεν τόξον, τέμνον τὴν δεδομένην εὐθεῖαν εἰς δύο σημεῖα Δ καὶ Β, καὶ προσδιορίζομεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω ἐκτεθέντα τρόπον σημεῖόν τι Ε ἀπέχον ἰσάκις τῶν σημείων Β καὶ Δ. Λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΕ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Α καὶ Ε ἀπέχουσιν, ἐκ κατασκευῆς, ἰσάκις ἀπὸ τῶν σημείων Β καὶ Δ τῆς δεδομένης εὐθείας, ἡ εὐθεῖα ΑΕ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΔ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.

Εἴς τι σημεῖον Α εὐθείας τινὸς ΑΒ νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση μὲ δεδομένην τινὰ γωνίαν Κ.



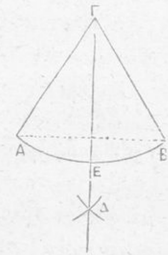
Ἐκ τῆς κορυφῆς Κ τῆς δεδομένης γωνίας, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν γράφομεν τὸ μετροῦν τὴν δεδομένην γωνίαν τόξον ΙΛ, καὶ ἐκ τοῦ δεδομένου σημείου Α, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ΑΒ=ΚΙ γράφομεν ἀπροσδιόριστόν τι τόξον ΒΟ. Μὲ κέντρον ἀκολούθως Β καὶ μὲ ἀκτῖνα ΒΔ ἴσην τῇ χορδῇ ΙΛ γράφομεν ἕτερον τόξον, τέμνον τὸ ΒΟ εἰς τὸ σημεῖον Δ, καὶ ἄγομεν τὴν ΑΔ. Λέγω ὅτι ἡ οὕτω κατασκευαζομένη γωνία ΒΑΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν δεδομένην Κ.

Διότι, ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ ΙΛ, ΒΔ εἶναι ἴσαι, τὰ τόξα ΙΛ, ΒΔ θέλουσιν εἶναι ἴσα, καὶ ἐπειδὴ ταῦτα ἀνήκουσιν εἰς ἴσους κύκλους, αἱ κεντρικαὶ γωνίαι Κ καὶ Α εἶναι ἴσαι (πρότ. 17).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5.

Νὰ διαιρεθῇ δεδομένον τόξον ἢ δεδομένη γωνία εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἔστω 1ον ΑΒ τὸ πρὸς διαίρεσιν τόξον καὶ Γ τὸ κέντρον τοῦ εἰς ὃν ἀνήκει κύκλου. Ἐκ τῶν ἄκρων αὐτοῦ Α καὶ Β, ὡς ἐκ κέντρων, καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα γράφομεν δύο τεμνόμενα εἴς τι σημεῖον Δ τόξα, καὶ ἄγομεν τὴν ΓΔ, ἥτις, λέγω, θέλει τέμνει τὸ τόξον ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη ΑΕ, ΕΒ.



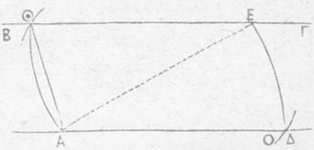
Διότι, ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπὸ τῶν ἄκρων Α καὶ Β τῆς χορδῆς ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΓΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ ταύτης, ἐπομένως διαιρεῖ ταύτην καὶ τὸ ὑποτεινόμενον τόξον ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη ΑΕ, ΕΒ (πρότ. 6).

Ἂς ὑποθέσωμεν 2ον ὅτι προτιθέμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὴν γωνίαν ΑΓΒ εἰς δύο ἴσα μέρη. Πρὸς τοῦτο ἐκ τῆς κορυφῆς Γ, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν γράφομεν τὸ μετροῦν τὴν γωνίαν Γ τόξον ΑΒ, ὅπερ διαιροῦμεν, ὡς ἀνωτέρω ἐξετέθη, εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τῆς εὐθείας ΓΔ. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ εὐθεῖα αὕτη θέλει διαιρεῖ καὶ τὴν γωνίαν ΑΓΒ εἰς δύο ἴσα μέρη ΑΓΕ, ΕΓΒ (πρότ. 17).

Σχόλιον. Δυνάμεθα διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου νὰ διαιρέσωμεν ἑκάτερον τῶν ἴσων τόξων ΑΕ, ΕΒ, ἢ ἑκατέραν τῶν ἴσων γωνιῶν ΑΓΕ, ΕΓΒ, ἐκ δευτέρου εἰς δύο ἴσα μέρη, καὶ ἑκάτερον πάλιν τούτων εἰς ἕτερα δύο, καὶ οὕτω καθεξῆς. Λοιπὸν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν δεδομένον τόξον ἢ δεδομένην γωνίαν εἰς 2, 4, 8, 16, κτλ. ἴσα μέρη

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6.

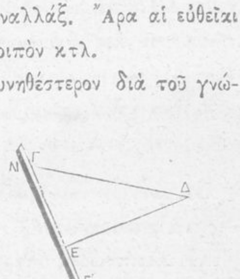
Ἐξ ἑνὸς δεδομένου σημείου Α, ἐκτὸς εὐθείας τινὸς ΒΓ κειμένου, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ΑΔ παράλληλος τῇ δεδομένῃ ΒΓ.



Πρὸς τοῦτο ἐκ τοῦ σημείου Α, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ᾽ ἀρέσκειαν γράφομεν ἀπροσδιόριστόν τι τόξον ΕΟ, τέμνον τὴν δεδομένην εὐθεῖαν ΒΓ εἴς τι σημεῖον Ε, ἐξ οὗ ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα ΑΕ γράφομεν τὸ τόξον ΑΘ, καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ τόξου ΕΟ τὸ τόξον ΕΔ ἴσον τῷ ΑΘ. Λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΔ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ τόξα ΑΘ, ΕΔ εἶναι ἴσα καὶ ἀνήκουσιν εἰς ἴσους κύκλους, αἱ κεντρικαὶ γωνίαι ΑΕΘ, ΕΑΔ θέλουσιν εἶναι ἴσαι. Ἀλλ᾽ αὗται ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ΒΓ, ΑΔ εἶναι ἐντὸς ἐναλλάξ. Ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΒΓ, ΑΔ εἶναι παράλληλοι (πρότ. 28, Α΄) Λοιπὸν κτλ.

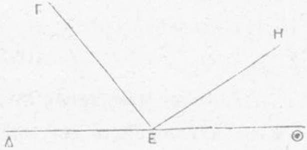
Σχόλιον. Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα λύουσι συνηθέστερον διὰ τοῦ γνώμονος ὡς ἑξῆς.



Στηρίζουσι τὴν μίαν τῶν πλευρῶν ΓΕ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΓΕΔ τοῦ γνώμονος ἐπί τινος κανόνος ΝΜ οὕτως, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ ΓΔ νὰ ταὐτίζηται μετὰ τῆς εὐθείας, ἧς παράλληλον ἐκ τοῦ δεδομένου σημείου Α προτίθενται νὰ ἄξωσιν. Τούτου δὲ γενομένου, διατηροῦσι τὸν κανόνα ΝΜ ἀκίνητον, καὶ σύρουσιν ἐπ᾽ αὐτοῦ τὸν γνώμονα ΓΕΔ μέχρις οὗ ἡ ὑποτείνουσά του ΓΔ διέλθῃ διὰ τοῦ δεδομένου σημείου Α. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ νέα αὕτη θέσις Γ΄Δ΄ τῆς ὑποτεινούσης ΓΔ θέλει παριστᾷ τὴν ἐκ τοῦ σημείου Α ζητουμένην παράλληλον τῇ ΓΔ, διότι τότε αἱ ἀντιστοιχοῦσαι γωνίαι ΔΓΕ, Δ′Γ′Ε′ εἶναι ἴσαι. (πρότ. 28, Α′).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7.

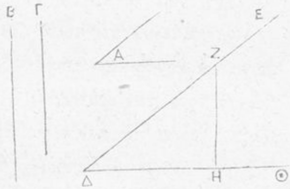
Δεδομένων τῶν δύο γωνιῶν Α καὶ Β τριγώνου τινὸς ΑΒΓ νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη Γ.



Ἄγομεν τὴν ἀπροσδιόριστον εὐθεῖαν ΔΘ καὶ εἴς τι σημεῖον αὐτῆς Ε κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ΔΕΓ =Α, καὶ τὴν γωνίαν ΓΕΒ=Β. Λέγω ὅτι ἡ μένουσα γωνία ΗΕΘ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη Γ. Διότι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ΔΕΓ, ΓΕΗ, ΗΕΘ καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς, καὶ ἐπειδὴ ΔΕΓ=Α, ΓΕΗ=Β, ἕπεται ἀναγκαίως ΗΕΘ=Γ. Λοιπὸν κτλ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8.

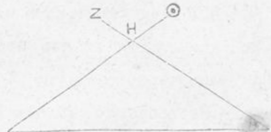
Δεδομένων τῶν δύο πλευρῶν Β καὶ Γ τριγώνου τινὸς καὶ τῆς ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένης γωνίας Α νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.



Εἴς τι σημεῖον Δ τῆς ἀπροσδιορίστου εὐθείας ΔΘ κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ΕΔΘ ἴσην τῇ δεδομένῃ Α, λαμβάνομεν ΔΗ =τῇ πλευρᾷ Γ καὶ ΔΖ= τῇ πλευρᾷ Β, καὶ ἄγομεν τὴν ΖΗ. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ οὕτω σχηματισθὲν τρίγωνον ΖΔΗ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9.

Δεδομένων τῶν δύο γωνιῶν καὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τριγώνου τινὸς νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.

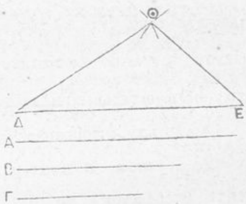


Δύο περιπτώσεις ὑπάρχουσι· ἢ καὶ αἱ δύο δεδομέναι γωνίαι εἶναι προσκείμεναι εἰς τὴν δεδομένην πλευρὰν, ἢ ἡ μία τούτων εἶναι προσκειμένη καὶ ἡ ἑτέρα ἀπέναντι. Ἡ δευτέρα αὕτη περίπτωσις ἀνάγεται εἰς τὴν πρώτην ἂν ζητήσωμεν διὰ τῶν δύο δεδομένων γωνιῶν τὴν τρίτην γωνίαν τοῦ τριγώνου (πρόβλ. 7), ἥτις τότε θέλει εἶναι προσκειμένη εἰς τὴν δεδομένην πλευράν.

Τούτου τεθέντος, ἐπί τινος ἀπροσδιορίστου εὐθείας λαμβάνομεν ΔΕ ἴσην τῇ δεδομένῃ πλευρᾷ, καὶ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε κατασκευάζομεν διὰ τῶν εὐθειῶν ΔΘ, ΖΕ τὰς γωνίας ΘΔΕ, ΖΕΔ ἀμοιβαίως ἴσας μὲ τὰς δύο δεδομένας, ἢ ἀμοιβαίως ἴσας μὲ τὴν μίαν τῶν δεδομένων καὶ μὲ τὴν εὑρεθεῖσαν τρίτην. Αἱ δύο εὐθεῖαι ΔΘ, ΖΕ θέλουσι τμηθῇ εἴς τι σημεῖον Η, τὸ δὲ οὕτω προκύπτον τρίγωνον ΗΔΕ θέλει εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 10.

Δεδομένων τῶν τριῶν πλευρῶν Α, Β, Γ τριγώνου τινὸς ΑΒΓ νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.



Ἐπί τινος ἀπροσδιορίστου εὐθείας λαμβάνομεν ΔΕ = τῇ πλευρᾷ Α, ἐκ τοῦ σημείου Δ, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα = τῇ πλευρᾷ Β γράφομεν τόξον, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ε, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα = τῇ τρίτῃ πλευρᾷ Γ γράφομεν ἕτερον τόξον, ὅπερ θέλει τμήσει τὸ πρῶτον εἴς τι σημεῖον Θ. Ἄγομεν τὰς εὐθείας ΔΘ, ΘΕ καὶ τὸ οὕτω σχηματιζόμενον τρίγωνον ΘΔΕ θέλει εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.

Σχόλιον. Διὰ νὰ ἦναι τὸ πρόβλημα δυνατὸν πρέπει αἱ ἐκ τῶν σημείων Δ καὶ Ε, ὡς ἐκ κέντρων, καὶ μὲ ἀκτῖνας ἴσας ἀμοιβαίως μὲ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς γραφόμεναι περιφέρειαι νὰ τέμνωνται, καὶ πρὸς τοῦτο ἀπαιτεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων ΔΕ, τουτέστιν ἡ μία τῶν δεδομένων πλευρῶν, νὰ ἦναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλειτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν (πρότ. 16).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 11.

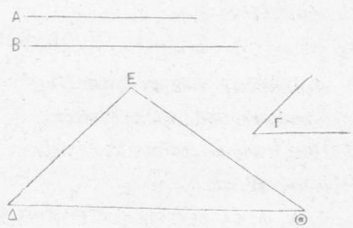
Δεδομένων τῶν δύο πλευρῶν Α καὶ **Β** *τριγώνου τινὸς καὶ τῆς γωνίας Γ, τῆς ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς* **Β**, **νὰ κατασκευασθῇ** *τὸ τρίγωνον.*

Δύο περιπτώσεις ὑπάρχουσιν,

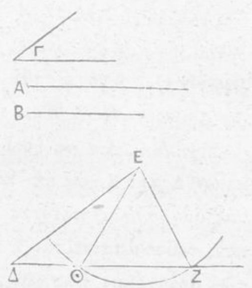
1ον. Ὅταν ἡ δεδομένη γωνία Γ ἦναι ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα.

2ον. Ὅταν ἡ δεδομένη γωνία Γ ἦναι ὀξεῖα.

Ἂς ὑποθέσωμεν 1ον ὅτι ἡ δεδομένη γωνία Γ εἶναι ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα, καὶ ἂς κατασκευάσωμεν τὴν γωνίαν ΕΔΘ $=$ τῇ Γ. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτῆς ΔΕ ἴσην μὲ τὴν μικροτέραν τῶν δύο δεδομένων πλευρῶν Α καὶ Β, καὶ μὲ κέντρον Ε καὶ ἀκτῖνα ἴσην τῇ μεγαλειτέρᾳ Β (πρότ. 16, Α΄) γράφομεν τόξον, ὅπερ θέλει τμήσει τὴν πλευρὰν ΔΘ εἴς τι σημεῖον Θ. Ἄγομεν τὴν ΕΘ, καὶ τὸ οὕτω σχηματιζόμενον τρίγωνον ΕΔΘ θέλει εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.



Ἄς ὑποθέσωμεν 2ον ὅτι ἡ γωνία Γ εἶναι ὀξεῖα. Ἂν ὑποτεθῇ πρὸς τούτοις ὅτι ἡ ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰ Β εἶναι μεγαλειτέρα τῆς Α, τὸ ζητούμενον τρίγωνον κατασκευάζεται ὡς ἀνωτέρω ἐδείξαμεν.

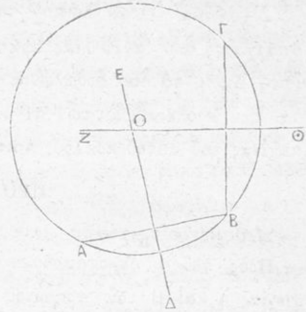


Ἀλλ᾽ ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι, τῆς γωνίας Γ οὔσης ὀξείας, ἡ ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰ Β εἶναι μικροτέρα τῆς Α, τότε προφανῶς τὸ μὲ κέντρον Ε καὶ ἀκτῖνα Β γραφόμενον τόξον θέλει συναπαντήσει τὴν πλευρὰν ΔΘ εἰς δύο σημεῖα Θ καὶ Ζ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κορυφῆς Δ τῆς κατασκευασθείσης γωνίας κείμενα, ἑπομένως θέλομεν ἔχει δύο τρίγωνα ΔΕΘ, ΔΕΖ, ἅτινα θέλουσιν ἐκπληροῖ τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος, θέλουσι δηλαδὴ σύγκεισθαι ἐκ τῆς δεδομένης γωνίας καὶ τῶν δεδομένων πλευρῶν, ὅπως ἀπαιτεῖ ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται δύο λύσεις, καὶ δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν ὁποιανδήποτε ἐκ τῶν δύο θέλομεν.

Σχόλιον. Τὸ πρόβλημα ἤθελεν εἶναι ἀδύνατον καθ᾽ ὅλας τὰς περιπτώσεις ἂν ἡ πλευρὰ Β ἦτο μικροτέρα τῆς ἐκ τοῦ σημείου Ε ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΘ καταβιβαζομένης καθέτου, διότι τότε τὸ μὲ κέντρον Ε καὶ ἀκτῖνα ἴσην τῇ Β γραφόμενον τόξον δὲν ἠδύνατο νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΔΘ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12.

Δεδομένου κύκλου ἢ τόξου τινὸς νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον αὐτοῦ.

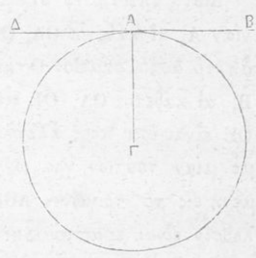


Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ δεδομένου κύκλου ἢ ἐπὶ τοῦ δεδομένου τόξου τρία κατ' ἀρέσκειαν σημεῖα Α, Β, Γ, ἄγομεν τὰς χορδὰς ΑΒ, ΒΓ καὶ διαιροῦμεν αὐτὰς εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τῶν καθέτων ΔΕ, ΘΖ. Τὸ σημεῖον Ο, ἔνθα αἱ κάθετοι ΔΕ, ΘΖ τέμνονται θέλει εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον κέντρον (πρότ. 7).

Σχόλιον. Τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ἠθέλαμεν κάμει χρῆσιν ἂν ἐπρόκειτο νὰ περιγράψωμεν κύκλον εἰς δεδομένον τρίγωνον.

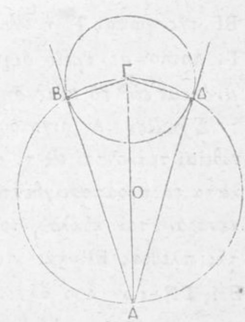
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 13.

Ἐξ ἑνὸς δεδομένου σημείου Α νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς δεδομένον κύκλον.



Τὸ δεδομένον σημεῖον Α δυνατὸν νὰ κῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ ἐκτὸς αὐτῆς. Ὅταν κῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἄγομεν τὴν ἀκτῖνα ΓΑ, καὶ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς Α ὑψοῦμεν τὴν ΔΒ κάθετον ἐπ' αὐτῆς (πρόβλ. 2). Ἡ κάθετος αὕτη θέλει προφανῶς εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη (πρότ. 9).

Ἂν τὸ δεδομένον σημεῖον Α κῆται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἑνόνομεν αὐτὸ μὲ τὸ κέντρον αὐτοῦ Γ, καὶ ἐπὶ τῆς ΓΑ, ὡς διαμέτρου, γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἥτις θέλει τμήσει τὴν περιφέρειαν τοῦ δεδομένου εἰς δύο σημεῖα Β καὶ Δ. Ἄγομεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΔ, αἵτινες θέλουσιν εἶναι ἐφαπτόμεναι εἰς τὸν κύκλον Γ.

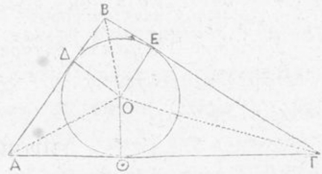


Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΓΑ εἶναι διάμετρος, αἱ γωνίαι ΓΒΑ, ΓΔΑ εἶναι ὀρθαί, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς ἡμικύκλια. Λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΔ εἶναι κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα Β καὶ Δ τῶν ἀκτίνων ΓΒ, ΓΔ, ἐπομένως εἶναι ἐφαπτόμεναι εἰς τὸν κύκλον Γ.

Σχόλιον. Ὅταν λοιπὸν τὸ σημεῖον Α κῆται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ὑπάρχουσι δύο ἀντὶ μιᾶς ἐφαπτόμεναι, αἵτινες πρὸς τούτοις εἶναι καὶ ἴσαι. Διότι τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσάν των ΑΓ κοινὴν καὶ τὰς πλευρὰς ΓΒ, ΓΔ ἴσας, ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Λοιπὸν ΑΒ=ΑΔ, καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ=ΔΑΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 14.

Δεδομένου τριγώνου τινὸς ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸ κύκλος.

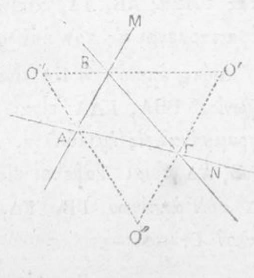


Πρὸς τοῦτο διχοτομοῦμεν τὰς γωνίας Α καὶ Β τοῦ τριγώνου διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΟ, ΒΟ, καὶ λέγω ὅτι τὸ σημεῖον Ο τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς θέλει εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κύκλου.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ο κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν Α, αἱ κάθετοι ΟΔ, ΟΘ εἶναι ἴσαι (πρότ. 22, Α΄). Ὡσαύτως, ἐπειδὴ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν Β, αἱ κάθετοι ΟΔ, ΟΕ εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν αἱ τρεῖς κάθετοι ΟΔ, ΟΘ, ΟΕ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Λοιπὸν ἂν μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ μίαν τούτων γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη θέλει εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, διότι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ θέλουσιν εἶναι ἐφαπτόμεναι εἰς ταύτην, ὡς κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα Δ, Ε, Θ τῶν ἀκτίνων.

Πόρισμα. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ο ἀπέχει ἰσάκις τῶν πλευρῶν ΑΓ, ΒΓ τῆς γωνίας Γ, ἡ εὐθεῖα ΟΓ διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν Γ. Λοιπὸν *αἱ τρεῖς διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας τριγώνου τινὸς τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.*

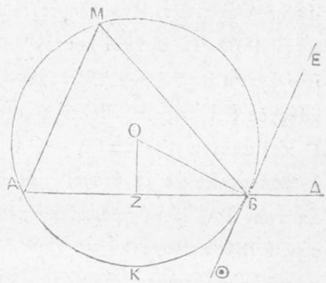
Σχόλιον. Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς δύο ἐξωτερικὰς γωνίας ΜΒΓ, ΒΓΝ εὐθεῖαι τέμνονται εἴς τι σημεῖον Ο΄, ὅπερ κατὰ τὰ προαποδειχθέντα θέλει εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τοῦ ἐφαπτομένου τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ τῶν προεκβολῶν ΒΜ, ΓΝ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.



Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου εὑρίσκονται τὰ κέντρα Ο″, Ο‴ τῶν κύκλων, τῶν ἐφαπτομένων μιᾶς τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν καὶ τῶν προεκβολῶν τῶν ἄλλων. Λοιπὸν ὑπάρχουσιν ἐν γένει τέσσαρες κύκλοι Ο, Ο', Ο'', Ο''' ἐφαπτόμενοι τριῶν δεδομένων εὐθειῶν, ἐξ ὧν μόνον ὁ ἔχων κέντρον Ο εἶναι ὁ ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων σχηματιζόμενον τρίγωνον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 15.

Ἐπὶ δεδομένης τινὸς εὐθείας ΑΒ νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα κύκλου τοιοῦτον, ὥστε πᾶσα εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένη γωνία νὰ ἦναι ἴση μὲ δεδομένην τινὰ γωνίαν Γ.



Πρὸς τοῦτο προεκβάλλομεν τὴν ΑΒ, καὶ εἰς τὸ σημεῖον Β κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ΔΒΕ ἴσην μὲ τὴν δεδομένην γωνίαν Γ. Ἄγομεν τὴν ΒΟ κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΘΕ, καὶ τὴν ΖΟ κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Αἱ κάθετοι αὗται θέλουσι συναπαντηθῆ εἴς τι σημεῖον Ο, τὸ δὲ τμῆμα ΑΜΒ τοῦ μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΒ γραφομένου κύκλου θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον.

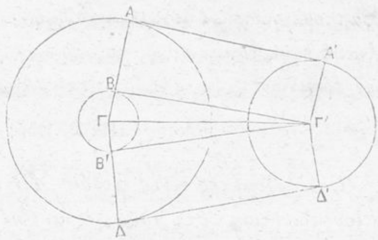
Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΘΕ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΟΒ, εἶναι καὶ ἐφαπτομένη εἰς τὴν γραφομένην μὲ ἀκτῖνα ΟΒ περιφέρειαν, ἑπομένως ἡ γωνία ΑΒΘ ἢ ἡ ἴση αὐτῇ ΔΒΕ θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΚΒ (πρότ. 20). Ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΜΒ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΚΒ. Ἄρα καὶ αἱ γωνίαι ΑΜΒ, ΔΒΕ εἶναι ἴσαι. Ἀλλ' ἡ ΔΒΕ κατεσκευάσθη ἴση τῇ δεδομένῃ Γ. Λοιπὸν πᾶσα γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τμῆμα ΑΜΒ θέλει εἶναι ἴση τῇ Γ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. Ἐὰν ἡ δεδομένη γωνία Γ ἦτο ὀρθή, τὸ ζητούμενον τμῆμα ἤθελεν εἶναι τὸ ἡμικύκλιον, τὸ ἔχον διάμετρον τὴν δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 16.

Δεδομένων δύο περιφερειῶν νὰ κατασκευασθῇ κοινή τις ἐφαπτομένη εἰς ταύτας.

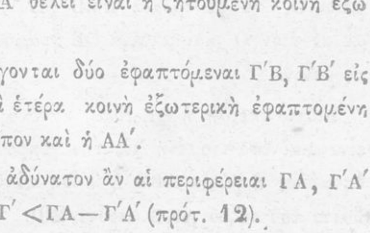
Ἂς ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον, καὶ ἔστω 1ον ΑΑ΄ κοινή τις ἐξωτερικὴ εἰς τὰς δύο δεδομένας περιφερείας ἐφαπτομένη. Ἄγομεν τὰς ἀκτῖνας ΓΑ, Γ΄Α΄, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου Γ΄ τῆς μικροτέρας περιφερείας ἄγομεν τὴν Γ΄Β παράλληλον τῇ ΑΑ΄. Ἐπειδὴ αἱ ἀκτῖνες ΓΑ, Γ΄Α΄ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης ΑΑ΄ (πρότ. 9), θέλουσιν εἶναι κάθετοι καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου αὐτῇ Γ΄Β. Τὸ σχῆμα λοιπὸν ΑΒΓ΄Α΄ θέλει εἶναι ὀρθογώνιον, καὶ θέλομεν ἔχει ΓΒ=ΓΑ—ΑΒ=ΓΑ—Γ΄Α΄. Ἀφ᾽ ἑτέρου, ἐπειδὴ ἡ Γ΄Β εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΒ, θέλει εἶναι καὶ ἐφαπτομένη εἰς τὴν μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα ΓΒ (=ΓΑ—Γ΄Α΄) γραφομένην περιφέρειαν. Ἂν λοιπόν, ἀντιστρόφως, μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα ΓΒ, ἴσην μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων ΓΑ, Γ΄Α΄, γράψωμεν περιφέρειαν, ἐκ τοῦ κέντρου Γ΄ φέρωμεν τὴν Γ΄Β ἐφαπτομένην εἰς ταύτην, καὶ ἄξωμεν τὴν ΓΒΑ καὶ τὴν Γ΄Α΄ παράλληλον ταύτῃ, ἡ εὐθεῖα ΑΑ΄ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη.



Ἐπειδὴ ἐκ τοῦ σημείου Γ΄ ἄγονται δύο ἐφαπτόμεναι Γ΄Β, Γ΄Β΄ εἰς τὴν περιφέρειαν ΓΒ, ὑπάρχει καὶ ἑτέρα κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη ΔΔ΄ προσδιοριζομένη καθ᾽ ὃν τρόπον καὶ ἡ ΑΑ΄.

Τὸ πρόβλημα εἶναι προφανῶς ἀδύνατον ἂν αἱ περιφέρειαι ΓΑ, Γ΄Α΄ ἦναι ἐσωτερικαί, τουτέστιν ἂν ΓΓ΄ <ΓΑ—Γ΄Α΄ (πρότ. 12).

Ἂς ὑποθέσωμεν 2ον ὅτι προτιθέμεθα νὰ ἄξωμεν κοινὴν ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην, καὶ ἔστω ΑΜ΄ αὐτη. Ἄγομεν πάλιν τὰς ἀκτῖνας ΓΑ, Γ΄Μ΄ καὶ ἐκ τοῦ κέντρου Γ΄ ἄγομεν Γ΄Β παράλληλον τῇ κοινῇ ἐσωτερικῇ ἐφαπτομένῃ ΑΜ΄. Τὸ σχῆμα ΑΒΓ΄Μ΄ θέλει εἶναι δι᾽ οὓς λόγους ἐξεθέσαμεν ἀνωτέρω ὀρθογώνιον, καὶ θέλομεν ἔχει ΓΒ=ΓΑ+ΑΒ=ΓΑ+Γ΄Μ΄. Ἀφ᾽ ἑτέρου, ἐπειδὴ ἡ Γ΄Β εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΒ εἰς τὸ σημεῖον Β, θέλει εἶναι καὶ ἐφαπτομένη εἰς τὴν μὲ κέντρον Γ καὶ



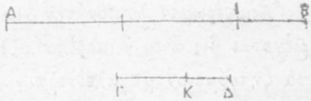
ἀκτῖνα ΓΒ (=ΓΑ+Γ'Μ') γραφομένην περιφέρειαν. Ἂν λοιπόν, ἀντιστρόφως, μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα ΓΒ, ἴσην μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων ΓΑ, Γ'Μ', γράψωμεν περιφέρειαν, ἐκ τοῦ κέντρου Γ' φέρωμεν τὴν Γ'Β ἐφαπτομένην εἰς ταύτην, καὶ ἄξωμεν τὴν ΓΑΒ καὶ τὴν Γ'Μ' παράλληλον ταύτῃ, ἡ εὐθεῖα ΑΜ' θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη.

Ἐπειδὴ ἐκ τοῦ σημείου Γ' ἄγονται δύο ἐφαπτόμεναι Γ'Β, Γ'Β' εἰς τὴν μὲ ἀκτῖνα ΓΒ γραφομένην περιφέρειαν, ὑπάρχει καὶ ἑτέρα κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη Α'Μ προσδιοριζομένη ὅπως καὶ ἡ ΑΜ'.

Τὸ πρόβλημα εἶναι προφανῶς ἀδύνατον ὅταν τὸ κέντρον Γ κῆται ἐντὸς τῆς μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα ΓΒ γραφομένης περιφερείας, τουτέστιν ὅταν ΓΒ > ΓΓ', διότι τότε αἱ δεδομέναι περιφέρειαι εἶναι τεμνόμεναι (πρότ. 16, Β'). Ὅταν ΓΒ = ΓΓ', τότε ὑπάρχει μία μόνη κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη, διότι κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 15 προτάσει τοῦ Β' βιβλίου αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 17.

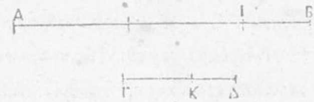
Δεδομένων δύο εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ νὰ εὑρεθῇ τὸ μεγαλείτερον κοινὸν αὐτῶν μέτρον καὶ ὁ ἀριθμητικὸς αὐτῶν λόγος.



Ἐπειδὴ τὸ μεγαλείτερον κοινὸν μέτρον τῶν δύο δεδομένων εὐθειῶν δὲν δύναται προφανῶς νὰ ἦναι μεγαλείτερον τῆς μικροτέρας ΓΔ, ἂν αὕτη ἐμπεριείχετο ἀκριβῶς ἀριθμόν τινα φορῶν εἰς τὴν μεγαλειτέραν ΑΒ, εἶναι φανερὸν ὅτι ἤθελε παριστᾷ τὸ ζητούμενον μέγιστον κοινὸν μέτρον.

Ἂς φέρωμεν λοιπὸν τὴν ΓΔ ἐπὶ τῆς ΑΒ ὁσάκις τοῦτο εἶναι δυνατόν, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐμπεριέχεται δὶς μετά τινος ὑπολοίπου ΙΒ. Θέλομεν τότε ἔχει ΑΒ=2ΓΔ+ΙΒ. Λέγω ὅτι τὸ μεγαλείτερον κοινὸν μέτρον τῶν δεδομένων εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ μεγαλείτερον κοινὸν μέτρον τῆς μικροτέρας ΓΔ καὶ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου ΙΒ.

Διότι 1ον, πᾶν κοινὸν μέτρον τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, ἐπειδὴ διαιρεῖ τὴν ΓΔ, θέλει διαιρεῖ καὶ τὸ διπλάσιον αὐτῆς 2ΓΔ ἢ ΑΙ. Ἀλλ' ἐπειδὴ διαιρεῖ τὴν ὅλην εὐθεῖαν ΑΒ καὶ τὸ μέρος αὐτῆς ΑΙ, ἀναγκαίως πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν ΑΒ—ΑΙ, ἤτοι ΙΒ. Λοιπὸν θέλει εἶναι κοινὸν μέτρον καὶ τῶν εὐθειῶν ΓΔ καὶ ΙΒ.



2^{ον}. Πᾶν κοινὸν μέτρον τῶν εὐθειῶν ΓΔ καὶ ΙΒ εἶναι καὶ κοινὸν μέτρον τῶν δεδομένων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Διότι, ἐπειδὴ τοῦτο διαιρεῖ τὴν ΓΔ, θέλει διαιρεῖ καὶ τὸ διπλάσιον αὐτῆς 2ΓΔ ἢ ΑΙ. Ἀλλὰ διαιρεῖ καθ' ὑπόθεσιν καὶ τὴν ΙΒ. Ἄρα θέλει διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ΑΙ+ΙΒ, ἤτοι ΑΒ. Λοιπὸν θέλει εἶναι κοινὸν μέτρον καὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.

Ἐπειδὴ τώρα ἀπεδείχθη ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ ἔχουσι τὰ αὐτὰ κοινὰ μέτρα μὲ τὰς εὐθείας ΓΔ καὶ ΙΒ, καὶ ἀντιστρόφως, αἱ ΓΔ καὶ ΙΒ ἔχουσι τὰ αὐτὰ κοινὰ μέτρα μὲ τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ, ἕπεται ὅτι τὸ μεγαλείτερον κοινὸν μέτρον τῶν πρώτων ΑΒ, ΓΔ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ μεγαλείτερον κοινὸν μέτρον τῶν δευτέρων ΓΔ, ΙΒ. Ἂν λοιπὸν ἡ ΙΒ, φερομένη ἐπὶ τῆς ΓΔ, περιέχεται ἀριθμόν τινα φορῶν, αὕτη θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον μεγαλείτερον κοινὸν μέτρον, ἂν δὲ ὑποθέσωμεν ὅτι περιέχεται ἅπαξ μετά τινος ὑπολοίπου ΚΔ, τότε δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν, σκεπτόμενοι ὡς προηγουμένως, ὅτι τὸ μεγαλείτερον κοινὸν μέτρον τῶν εὐθειῶν ΓΔ, ΙΒ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ μεγαλείτερον κοινὸν μέτρον τῶν εὐθειῶν ΙΒ, ΔΚ.

Ἂς φέρωμεν λοιπὸν τὴν ΔΚ ἐπὶ τῆς ΙΒ, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι περιέχεται δὶς ἄνευ ὑπολοίπου. Κατὰ τὰ προλεχθέντα ΔΚ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον μεγαλείτερον κοινὸν μέτρον τῶν δεδομένων εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ ἀριθμητικοῦ αὐτῶν λόγου, ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς εὑρεθείσας προηγουμένως ἰσότητας

$$\text{ΑΒ}=2\text{ΓΔ}+\text{ΙΒ}, \quad \text{ΓΔ}=\text{ΙΒ}+\text{ΚΔ},$$

ἀντὶ τῆς ΙΒ τὸ ἴσον αὐτῇ 2ΚΔ, καὶ ἀντὶ τῆς ΓΔ τὸ ἴσον αὐτῇ 3ΚΔ, καὶ θέλομεν ἔχει

$$\text{ΑΒ}=8\text{ΚΔ}, \quad \text{ΓΔ}=3\text{ΚΔ}.$$

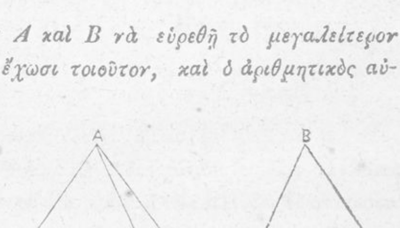
Ἐπομένως ὁ λόγος τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν ἴσων αὐταῖς 8ΚΔ, 3ΚΔ, ὅστις εἶναι προφανῶς $\frac{8}{3}$.

Παρατήρησις 1. Εὐκόλως παρατηρεῖ τις ὅτι ὁ τρόπος, δι' οὗ εὑρίσκομεν τὸ μεγαλείτερον κοινὸν μέτρον δύο δεδομένων εὐθειῶν, εἶναι ἀπαραλλάκτως ὁ αὐτὸς μὲ τὸν τρόπον, ὃν μεταχειριζόμεθα πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο δεδομένων ἀριθμῶν, καὶ ὅτι στηρίζεται ἐπὶ ὁμοίων θεωρημάτων, ὁμοιοτρόπως ἀποδεικνυομένων.

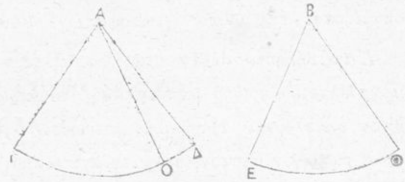
Παρατήρησις 2. Τὰ θεωρήματα, ἐφ' ὧν στηρίζεται ἡ εὕρεσις τοῦ μεγαλειτέρου κοινοῦ μέτρου δύο δεδομένων εὐθειῶν, καὶ ὁ τρόπος καθ' ὃν ἐκτελεῖται αὕτη, μᾶς πείθουσιν ὅτι, ἂν αἱ δεδομέναι εὐθεῖαι ἔχωσί τι κοινὸν μέτρον, θέλομεν ἀναγκαίως μετά τινα ἀριθμῶν διαδοχικῶν ἐπιθέσεων εὕρει ὑπόλοιπον μηδὲν, καὶ ὅτι ἂν αὗται ἦναι μεγέθη ἀσύμμετρα, ἐπειδὴ τὰ μένοντα ἑκάστοτε ὑπόλοιπα βαίνουσιν ἐλαττούμενα, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μετὰ ἐπαρκῆ παράτασιν τῶν διαδοχικῶν ἐπιθέσεων ὑπόλοιπα μικρότερα παντὸς δεδομένου ποσοῦ. Ἑπομένως, ἂν παραλείψωμεν τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον ἐπιθέσεώς τινος, τὸ προηγούμενον ὑπόλοιπον θέλει εἶναι τὸ μεγαλείτερον κοινὸν μέτρον μιᾶς τῶν δεδομένων εὐθειῶν καὶ τῆς ἑτέρας, ἐλαττωθείσης κατὰ τὸ παραλειφθὲν ὑπόλοιπον. Ὁ ἀριθμητικὸς λοιπὸν λόγος τούτων θέλει εἶναι ἴσος τῷ ζητουμένῳ κατά τινα προσέγγισιν, ἥτις ἐξαρτᾶται προφανῶς ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προγενομένων διαδοχικῶν ἐπιθέσεων μέχρις ἐκείνης, καθ' ἣν ἐγένετο ἡ παράλειψις τοῦ τελευταίου ὑπολοίπου. Ὅταν λοιπὸν δύο δεδομέναι εὐθεῖαι ἦναι μεγέθη ἀσύμμετρα, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμητικὸν αὐτῶν λόγον μεθ' ὅσης θέλομεν προσεγγίσεως, ἀρκεῖ νὰ παρατείνωμεν ἐπαρκῶς τὰς διαδοχικὰς αὐτῶν ἐπιθέσεις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 18.

Δεδομένων δύο γωνιῶν Α καὶ Β νὰ εὑρεθῇ τὸ μεγαλείτερον κοινὸν αὐτῶν μέτρον, ἂν ἔχωσι τοιοῦτον, καὶ ὁ ἀριθμητικὸς αὐτῶν λόγος.



Ἐὰν ἐκ τῶν κορυφῶν Α καὶ Β, ὡς ἐκ κέντρων, καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα γράψωμεν τὰ τόξα ΓΔ καὶ ΕΘ, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Α καὶ Β εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τόξα ΓΔ καὶ ΕΘ, τὰ δὲ τόξα ταῦτα ἐπιτίθενται τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου μετὰ τῆς αὐτῆς εὐκολίας, μεθ' ἧς καὶ εὐθεῖά τις φέρεται ἐπὶ ἄλλης εὐθείας, ἀρκεῖ προφανῶς πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγαλειτέρου κοινοῦ μέτρου τῶν γωνιῶν Α καὶ Β, νὰ ζητήσωμεν, ὡς προεξεθέσαμεν, τὸ μεγαλείτερον κοινὸν μέτρον τῶν τόξων ΓΔ καὶ ΕΘ. Λοιπὸν, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ τόξον ΟΔ παριστᾷ τὸ μεγαλείτερον κοινὸν μέτρον τῶν τόξων ΓΔ καὶ ΕΘ, ἡ ἀντιστοιχοῦσα κεντρικὴ γωνία ΟΑΔ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον μεγαλείτερον κοινὸν μέτρον τῶν δεδομένων γωνιῶν Α καὶ Β, καὶ ὁ ἀριθμητικὸς λόγος τῶν τόξων ΓΔ καὶ ΕΘ θέλει εἶναι ἴσος μὲ τὸν ζητούμενον ἀριθμητικὸν λόγον τῶν γωνιῶν Α καὶ Β.



Ἂν τὰ τόξα ΓΔ, ΕΘ ἦσαν μεγέθη ἀσύμμετρα, καὶ αἱ δεδομέναι γωνίαι Α, Β ἤθελον εἶναι ἀσύμμετροι, ὁ δ' ἀριθμητικὸς αὐτῶν λόγος δὲν ἠδύνατο νὰ εὑρεθῇ εἰμὴ κατὰ προσέγγισιν, ἥτις δύναται νὰ κατασταθῇ ὅσον θέλομεν μικρά.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

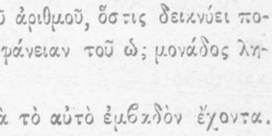
ΠΕΡΙ ΜΕΤΡΟΥ ΤΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

1. *Ἐμβαδὸν* σχήματός τινος καλεῖται ὁ λόγος τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ἑτέρου σχήματος, λαμβανομένην ὡς μονάδα. Ἂν π. χ. ληφθῇ ὡς μονὰς ἡ ἐπιφάνεια τετραγώνου τινὸς, τὸ ἐμβαδὸν ἑτέρου τινὸς σχήματος παρίσταται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει ποσάκις ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ περιέχει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὡς μονάδος ληφθέντος τετραγώνου.

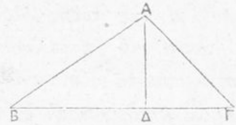
2. *Ἰσοδύναμα* σχήματα ὀνομάζονται τὰ τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν ἔχοντα. Π. χ. ἂν κύκλος τις ἔχῃ τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν μέ τι τρίγωνον, ἢ τετράγωνον, ἢ παραλληλόγραμμον κτλ, ὁ κύκλος λέγεται ἰσοδύναμος μὲ τὸ τρίγωνον, ἢ μὲ τὸ τετράγωνον, ἢ μὲ τὸ παραλληλόγραμμον κτλ. Λοιπὸν δύο σχήματα δύνανται νὰ ἦναι ἰσοδύναμα ἂν καὶ κατὰ πολλὰ ἀνόμοια.

3. *Ἴσα* σχήματα ὀνομάζονται ἐκεῖνα, ἅτινα ἐπιτιθέμενα ταὐτίζονται καθ' ὅλην αὐτῶν τὴν ἔκτασιν, π. χ. δύο κύκλοι ἔχοντες τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, δύο τρίγωνα ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, κτλ.



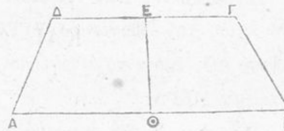
4. *Ὕψος* παραλληλογράμμου τινὸς ΑΒΓΔ ὀνομάζεται ἡ κάθετος ΕΘ, ἡ ἀγομένη ἐπὶ τῶν δύο ἀπέναντι παραλλήλων πλευρῶν ΑΒ, ΔΓ, λαμβανομένων ὡς *βάσεων* τοῦ παραλληλογράμμου. Ἡ κάθετος αὕτη ΕΘ μετρεῖ τὴν πραγματικὴν αὐτῶν ἀπόστασιν (πρότ. 18, πόρ. 1, Α').

5. *Ὕψος* τριγώνου τινὸς ΑΒΓ καλεῖται ἡ κάθετος ΑΔ, ἡ καταβιβαζομένη ἔκ τινος κορυφῆς Α ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ, λαμβανομένης ὡς βάσεως τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος τριγώνου.



Εἰς πᾶν τρίγωνον λαμβάνεται ὡς βάσις κατ' ἀρέσκειαν μία ὁποιαδήποτε τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, εἰς δὲ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον λαμβάνεται κατὰ προτίμησιν πάντοτε ὡς βάσις ἡ ἄνισος αὐτοῦ πλευρά.

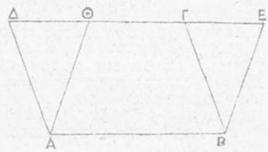
6. *Ὕψος* τραπεζίου τινὸς ΑΒΓΔ ὀνομάζεται ἡ κάθετος ΕΘ, ἡ μετροῦσα τὴν ἀπόστασιν τῶν παραλλήλων αὐτοῦ πλευρῶν ΑΒ, ΔΓ, λαμβανομένων πάντοτε ὡς βάσεων τοῦ τραπεζίου.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. ΘΕΩΡΗΜΑ.

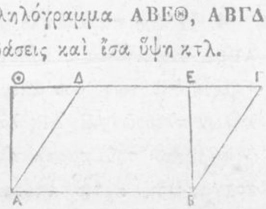
Τὰ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους παραλληλόγραμμα εἶναι σχήματα ἰσοδύναμα.

Ἔστωσαν ΑΒΓΔ, ΑΒΕΘ δύο παραλληλόγραμμα ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἐπειδὴ τὰ παραλληλόγραμμα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, αἱ ἄνω αὐτῶν βάσεις ΓΔ, ΕΘ θέλουσι κεῖσθαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΔΕ, παραλλήλου τῇ ΑΒ (πρότ. 33, πόρ. 2, Α΄).



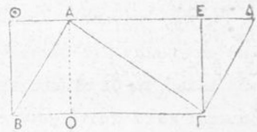
Τούτου τεθέντος, τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΘ, ΒΓΕ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὰς πλευρὰς ΑΔ, ΒΓ ἴσας, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (πρότ. 33, Α΄), τὰς πλευρὰς ΑΘ, ΑΕ ἴσας διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας ΔΑΘ, ΓΒΕ ἴσας, ὡς ἐχούσας τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ διευθυνομένας κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν (πρότ. 29, Α΄). Ἂν λοιπὸν ἀπὸ τοῦ ὅλου σχήματος ΑΒΕΔ ἀφαιρέσωμεν διαδοχικῶς ἑκάτερον τῶν ἴσων τριγώνων ΑΔΘ, ΒΓΕ, τὰ μένοντα παραλληλόγραμμα ΑΒΕΘ, ΑΒΓΔ θέλουσιν εἶναι ἰσοδύναμα. Λοιπὸν τὰ ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη κτλ.

Πόρισμα. Πᾶν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΕΘ, τὸ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΕ.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τῆς αὐτῆς βάσεως ΒΓ καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους ΑΟ.



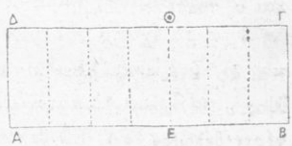
Διότι τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓΔΑ σύγκειται ἐκ δύο τριγώνων ΑΒΓ, ΑΓΔ, ἅτινα ἀπεδείχθησαν ἐν τῇ 33 προτάσει τοῦ Α' βιβλίου ἴσα. Λοιπὸν τὸ ἓν τούτων ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλου ΑΒΓΔ.

Πόρισμα 1. Πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΒΓΕΘ τῆς αὐτῆς βάσεως ΒΓ καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους ΑΟ. Διότι τὸ ὀρθογώνιον ΒΓΕΘ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ παραλληλογράμμῳ ΑΒΓΔ.

Πόρισμα 2. Τὰ τρίγωνα, τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, ἂν δὲν ἦναι ἴσα, εἶναι ἰσοδύναμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ἰσοϋψῆ ὀρθογώνια εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.



Ἔστωσαν ΑΒΓΔ, ΑΕΘΔ δύο ὀρθογώνια τοῦ αὐτοῦ ὕψους ΑΔ, λέγω ὅτι θέλουσιν εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν ΑΒ, ΑΕ, τουτέστιν ὅτι θέλομεν ἔχει

$$ΑΒΓΔ : ΑΕΘΔ = ΑΒ : ΑΕ \quad (α).$$

Ἄς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι αἱ βάσεις αὐτῶν ΑΒ, ΑΕ ἔχουσι κοινόν τι μέτρον, περιεχόμενον, παραδείγματος χάριν, 7κις εἰς τὴν ΑΒ καὶ 4κις εἰς ΑΕ. Θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$ΑΒ : ΑΕ = 7 : 4 \quad (1).$$

Ἄν διαιρέσωμεν τὴν ΑΒ εἰς 7 ἴσα μέρη, ἡ ΑΕ θέλει περιέχει τέσσαρα τοιαῦτα, καὶ ἂν ἀπὸ τῶν σημείων τῶν διαιρέσεων ὑψώσωμεν καθέτους ἐπὶ τῆς ΑΒ, τὸ μὲν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ θέλει διαιρεθῇ εἰς 7 μερικὰ ὀρθογώνια ἴσα πρὸς ἄλληλα, ὡς ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, τὸ δὲ ΑΕΘΔ θέλει περιέχει τέσσαρα τούτων. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει ὡσαύτως

$$ΑΒΓΔ : ΑΕΘΔ = 7 : 4 \quad (2).$$

Ἐκ τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2), ἕνεκα τοῦ κοινοῦ αὐτῶν λόγου 7 : 4, πορίζόμεθα τὴν ἑξῆς·

$$ΑΒΓΔ : ΑΕΘΔ = ΑΒ : ΑΕ,$$

ἧς τὸ ἀληθὲς ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Ἂν αἱ βάσεις ΑΒ, ΑΕ ὑποτεθῶσι μεγέθη ἀσύμμετρα, ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία (α) εἶναι ἀληθὴς μεταχειριζόμενοι τοὺς αὐτοὺς ἀπαραλλάκτως συλλογισμούς, οὓς καὶ ἐν τῇ 18 προτάσει τοῦ Β' βιβλίου. Λοιπὸν δύο ἰσοϋψῆ ὀρθογώνια εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς βάσεις αὐτῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὁποιαδήποτε ὀρθογώνια εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ γινόμενα τῶν βάσεών των ἐπὶ τὰ ὕψη αὐτῶν.

Τουτέστιν, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι Ο εἶναι τὸ ἓν ὀρθογώνιον, Β ἡ βάσις αὐτοῦ καὶ Υ τὸ ὕψος, καὶ ο τὸ ἕτερον ὀρθογώνιον, ἔχον βάσιν ϐ καὶ ὕψος υ, λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$Ο : ο = Β \times Υ : ϐ \times υ \qquad (α).$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου φανταζόμεθα τρίτον ὀρθογώνιον Ο', ἔχον βάσιν Β καὶ ὕψος υ. Ἐπειδὴ ἀφ' ἑνὸς τὰ δύο ὀρθογώνια Ο καὶ Ο' ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν Β, θέλουσιν εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν Υ καὶ υ, τουτέστι θέλομεν ἔχει

$$Ο : Ο' = Υ : υ \qquad (1).$$

Καὶ ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ τὰ δύο ὀρθογώνια Ο' καὶ ο ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος υ, θέλουσιν εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν Β καὶ ϐ, τουτέστι θέλομεν ἔχει

$$Ο' : ο = Β : ϐ \qquad (2).$$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὁμοταγεῖς ὅρους τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2), καὶ ἐξαλείφοντες ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου λόγου τῆς προκυπτούσης ἀναλογίας τὸν κοινὸν παράγοντα Ο', θέλομεν ἔχει

$$Ο : ο = Β \times Υ : ϐ \times υ,$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΕΡΙ ΜΕΤΡΟΥ ΤΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ.

Ἡ καταμέτρησις ὀρθογωνίου τινὸς Ο συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ λόγου τῆς ἐκτάσεως αὐτοῦ πρὸς τὴν ἔκτασιν ἑτέρου τινὸς ὀρθογωνίου ο, ληφθέντος ὡς μονάδος. Ἀλλ' ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀποδειχθείσης ἀναλογίας (α) βλέπομεν ὅτι ὁ ζητούμενος λόγος $\frac{Ο}{ο}$ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τοῦ γινομένου $Β \times Υ$ πρὸς τὸ γινόμενον $ϐ \times υ$, τουτέστι μὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου τῶν ἐν ταῖς γραμμαῖς Β καὶ Υ περιεχομένων γραμμικῶν μονάδων διὰ τοῦ γινομένου τῶν γραμμικῶν μονάδων, τῶν ἐμπεριεχομένων εἰς τὰς γραμμὰς β καὶ υ. Ἂν ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι Β=6 μέτρα, Υ=4 μέτρα, β=3 μέτρα καὶ υ=2 μέτρα, θέλομεν ἔχει

$$\mathrm{O} : \mathrm{o} = 6 \times 4 : 3 \times 2,$$

ἐπομένως $\frac{\mathrm{O}}{\mathrm{o}} = \frac{6\times 4}{3\times 2} = 4$, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου Ο περιέχει τετράκις τὴν τοῦ ὀρθογωνίου ο, ληφθεῖσαν ὡς μονάδα.

Συνήθως λαμβάνουσιν ὡς μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τετραγώνου, οὗτινος ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν γραμμικὴν μονάδα. Τότε οἱ παριστῶντες τὰ μεγέθη τῶν γραμμῶν β καὶ υ ἀριθμοὶ θέλουσιν εἶναι ἴσοι μὲ τὴν μονάδα, ἐπομένως καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν, ἡ δὲ ἀναλογία (α) μεταβάλλεται εἰς τὴν ἑξῆς

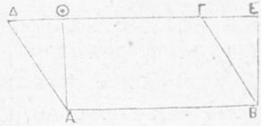
$$\mathrm{O} : \mathrm{o} = \mathrm{B} \times \Upsilon : 1$$

ἐξ ἧς $\frac{\mathrm{O}}{\mathrm{o}} = \mathrm{B} \times \Upsilon$. Λοιπὸν ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τινὸς Ο ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν γραμμικῶν μονάδων τῶν περιεχομένων εἰς τὴν βάσιν αὐτοῦ Β καὶ εἰς τὸ ὕψος Υ. Ὅταν λοιπὸν λέγωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις ὅτι τὸ ἐμβαδὸν σχήματός τινος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον δύο τινων γραμμῶν, ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ περιέχει τοσάκις τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἔχοντος πλευρὰν ἴσην μὲ τὴν γραμμικὴν μονάδα, ὁσάκις ἡ μονὰς περιέχεται ἐν τῷ γινομένῳ τῶν γραμμικῶν μονάδων, τῶν περιεχομένων εἰς τὰς περὶ ὧν ὁ λόγος γραμμάς. Ἂν ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι τὸ μέτρον λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν μηκῶν καὶ ὅτι ἡ βάσις Β ὀρθογωνίου τινὸς εἶναι ἴση μὲ 3,53 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ Υ ἴσον μὲ 2,25 μέτρα, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον 3,53×2,25, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ θέλει περιέχει 7,9425 τετραγωνικὰ μέτρα, ἤτοι 7 τετραγωνικὰ μέτρα 94 τετραγωνικὰ δεκάμετρα καὶ 25 τετραγωνικὰ ἑκατοστόμετρα· διότι τὸ τετραγωνικὸν δεκάμετρον εἶναι εἶναι τὸ ἑκατοστὸν τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου, τὸ δὲ τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον εἶναι τὸ χιλιοστὸν τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου τινὸς ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Διότι τὸ παραλλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΕΘ, τὸ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΘ (πρότ. 1, πόρ 1). Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΕΘ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον ΑΒ$\times$ΑΘ. Λοιπὸν καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραλληλογράμμου θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ αὐτὸ γινόμενον ΑΒ$\times$ΑΘ, τοῦθ᾽ ὅπερ ἐπρόκειτο ν᾽ ἀποδείξωμεν.



Πόρισμα. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν τῆς αὐτῆς βάσεως παραλληλογράμμων εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν, καὶ ἀντιστρόφως, τὰ ἐμβαδὰ τῶν τοῦ αὐτοῦ ὕψους παραλληλογράμμων εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν. Διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ Α τὴν κοινὴν βάσιν τῶν παραλληλογράμμων καὶ διὰ Β καὶ Γ τὰ ὕψη αὐτῶν, τὰ γινόμενα Α$\times$Β, Α$\times$Γ θέλουσι παριστᾷ τὰ ἐμβαδὰ τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος παραλληλογράμμων, καὶ θέλομεν ἔχει προφανῶς τὴν ἀναλογίαν

$$Α\times Β : Α\times Γ = Β : Γ.$$

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν ἠθέλαμεν ἔχει ἂν Α παρίστᾳ τὸ κοινὸν τῶν παραλληλογράμμων ὕψος καὶ Β καὶ Γ τὰς βάσεις αὐτῶν. Λοιπὸν κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6. ΘΕΩΡΗΜΑ.

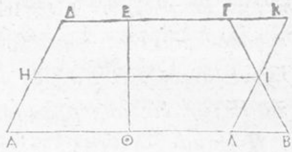
Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους αὐτοῦ.

Διότι πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογραμμου ΑΒΓΕ τῆς αὐτῆς βάσεως ΒΓ καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους ΑΔ. Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΕ ἰσοῦται κατὰ τὰ προαποδειχθέντα μὲ τὸ γινόμενον ΒΓ$\times$ΑΔ. Ἄρα τὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀνωτέρω γινομένου, τουτέστι μὲ $\frac{1}{2}$ ΒΓ$\times$ΑΔ, ἤ, ὅπερ ταὐτό, μὲ ΒΓ$\times\frac{1}{2}$ ΑΔ. Λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν κτλ.

Πόρισμα. Τὰ τῆς αὐτῆς βάσεως τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν, καὶ ἀντιστρόφως, τὰ τοῦ αὐτοῦ ὕψους τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο παραλλήλων βάσεών του.



Ἔστω ΑΒΓΔ τραπέζιόν τι, ἔχον βάσεις τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΓΔ καὶ ὕψος τὴν ἐπ' αὐτῶν κάθετον ΕΘ. Λέγω ὅτι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ΕΘ $\left(\frac{ΑΒ+ΓΔ}{2}\right)$.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἐκ τοῦ σημείου Ι, μέσου τῆς πλευρᾶς ΒΓ, ἄγομεν τὴν ΚΛ παράλληλον τῇ ἀπέναντι πλευρᾷ ΑΔ, καὶ προεκβάλλομεν τὴν ΔΓ μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὴν ΛΚ. Οὕτω σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΛΚΔ, ὅπερ λέγω ὅτι εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ δύο τρίγωνα ΙΒΛ, ΙΓΚ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς ΙΒ, ΙΓ ἴσας ἐκ κατασκευῆς, τὰς γωνίας ΛΙΒ, ΓΙΚ ἴσας ὡς κατὰ κορυφὴν, καὶ τὰς γωνίας ΙΒΛ, ΙΓΚ ἴσας ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ ὡς πρὸς τὰς παραλλήλους ΑΒ, ΔΓ, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ὅλου σχήματος ΑΒΙΚΔ ἀφαιρέσωμεν τὸ τρίγωνον ΙΛΒ, μένει τὸ παραλληλόγραμμον ΑΛΚΔ, ἐὰν δ' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σχήματος τὸ τρίγωνον ΓΙΚ, μένει τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ. Λοιπὸν τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΛΚΔ.

Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΛΚΔ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον ΕΘ$\times$ΑΛ, ὅπερ δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτως $\frac{ΕΘ\times 2ΑΛ}{2}$, ἢ ὅπερ ταὐτὸ, $\frac{ΕΘ\,(ΑΛ+ΔΚ)}{2}$, ἢ $\frac{ΕΘ\,(ΑΛ+ΓΚ+ΔΓ)}{2}$, ἢ $\frac{ΕΘ\,(ΑΛ+ΛΒ+ΔΓ)}{2}$ ἢ $\frac{ΕΘ\,(ΑΒ+ΔΓ)}{2}$. Λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ $\frac{ΕΘ\,(ΑΒ+ΔΓ)}{2}$, ἢ τῷ ΕΘ $\left(\frac{ΑΒ+ΔΓ}{2}\right)$, τουθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Ι τῆς ΒΓ ἄξωμεν τὴν ΙΗ παράλληλον τῇ ΑΒ, τὰ σχήματα ΑΛΙΗ, ΙΗΔΚ θέλουσιν εἶναι παραλληλόγραμμα, ὡς ἔχοντα τὰς ἀπέναντι αὐτῶν πλευρὰς παραλλήλους. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει ΙΛ=ΑΗ καὶ ΙΚ=ΗΔ. Ἀλλὰ ΙΛ=ΙΚ. Ἄρα καὶ

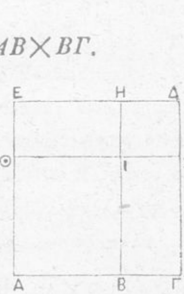
ΑΗ=ΗΔ. Τὸ σημεῖον λοιπὸν Η εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΔ τοῦ τραπεζίου.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ΙΗ=ΑΛ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ, ὅπερ εὑρέθη ἀνωτέρω ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ΕΘ×ΑΛ, θέλει εἶναι ὡσαύτως ἴσον καὶ μὲ τὸ γινόμενον ΕΘ×ΙΗ. Λοιπὸν δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι *τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους αὐτοῦ ΕΘ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΙΗ, τὴν ἑνόνουσαν τὰ μέσα Ι καὶ Η τῶν δύο μὴ παραλλήλων αὐτοῦ πλευρῶν ΒΓ, ΑΔ.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν εὐθεῖά τις ΑΓ διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη ΑΒ, ΒΓ, λέγω ὅτι τὸ ἐπὶ τῆς ὅλης εὐθείας ΑΓ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ΑΓΔΕ θέλει περιέχει τὰ ἐπὶ τῶν μερῶν ΑΒ, ΒΓ κατασκευαζόμενα τετράγωνα, πλέον δύο ὀρθογώνια ἔχοντα βάσιν τὴν ΑΒ καὶ ὕψος τὴν ΒΓ, τοῦθ' ὅπερ παρίσταται διὰ τῶν γνωστῶν σημείων ὡς ἑξῆς·

$$\overline{A\Gamma}^2=(AB+B\Gamma)^2=\overline{AB}^2+\overline{B\Gamma}^2+2AB\times B\Gamma.$$



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἀφοῦ κατασκευάσωμεν τὸ τετράγωνον ΑΓΔΕ, λαμβάνομεν ΑΘ=ΑΒ, καὶ ἄγομεν τὴν μὲν ΘΖ παράλληλον τῇ ΑΓ, τὴν δὲ ΒΗ παράλληλον τῇ ΑΕ.

Διὰ τῶν εὐθειῶν ΘΖ, ΒΗ τὸ τετράγωνον ΑΓΔΕ διαιρεῖται εἰς τὰ μέρη ΑΒΙΘ, ΙΖΔΗ, ΒΓΖΙ, ΙΗΕΘ. Τὸ πρῶτον μέρος ΑΒΙΘ εἶναι προφανῶς τὸ ἐπὶ τῆς ΑΒ κατασκευαζόμενον τετράγωνον, διότι ἐλάβομεν ΑΘ=ΑΒ καὶ ἠγάγομεν τὴν ΘΖ παράλληλον τῇ ΑΓ καὶ τὴν ΒΗ παράλληλον τῇ ΑΕ. Τὸ δεύτερον μέρος ΙΖΔΗ εἶναι τὸ ἐπὶ τῆς ΒΓ κατασκευαζόμενον τετράγωνον, διότι ἡ μὲν ΙΖ εἶναι προφανῶς ἴση μὲ τὴν ΒΓ, ἡ δὲ ΙΗ εἶναι ἴση τῇ ΘΕ, ἥτις εἶναι ὡσαύτως ἴση μὲ τὴν ΒΓ, διότι ΑΕ=ΑΓ, ΑΘ=ΑΒ, ἑπομένως ΑΕ—ΑΘ=ΑΓ—ΑΒ, ἤτοι ΘΕ=ΒΓ. Τὰ λοιπὰ δύο μέρη ΒΓΖΙ, ΙΗΕΘ εἶναι προφανῶς ὀρθογώνια, ἔχοντα βάσεις ΙΒ, ΙΘ ἴσας τῇ ΑΒ, καὶ ὕψη ΒΓ, ΕΘ ἴσα τῇ ΒΓ. Λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν ἑκατέρου τούτων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον ΑΒ×ΒΓ. Λοιπὸν ἔχομεν

$$\text{ΑΓΔΕ}=\text{ΑΒΙΘ}+\text{ΙΖΔΗ}+\text{ΒΓΖΙ}+\text{ΙΗΕΘ},$$

ἢ $$(\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma})^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2+2\mathrm{AB}\times\mathrm{B\Gamma},$$
τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. Ἐὰν παραστήσωμεν α καὶ β τοὺς ἀριθμοὺς, τοὺς μετροῦντας τὰ μέρη ΑΒ καὶ ΒΓ τῆς εὐθείας ΑΓ, θέλομεν ἔχει κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνας τοῦ ἀλγεβρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὴν ἰσότητα

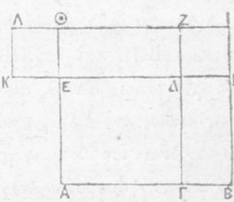
$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta,$$

δι' ἧς ἀποδεικνύεται ἐπίσης τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, ἂν ὑποτεθῇ γνωστὸν ὅτι τὸ μέτρον τοῦ ὀρθογωνίου παρίσταται διὰ τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἦναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν ΑΒ—ΒΓ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ, λέγω ὅτι τὸ ἐπὶ τῆς ΑΓ κατασκευαζόμενον τετράγωνον θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ, μεῖον δύο ὀρθογώνια ἔχοντα βάσιν τὴν ΑΒ καὶ ὕψος τὴν ΒΓ, τοῦθ' ὅπερ παρίσταται διὰ τῶν γνωστῶν σημείων ὡς ἑξῆς·

$$(AB-B\Gamma)^2=\overline{AB}^2+\overline{B\Gamma}^2-2AB\times B\Gamma.$$



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἀφοῦ κατασκευάσωμεν τὸ τετράγωνον ΑΒΙΘ, λαμβάνομεν ΑΕ=ΑΓ, ἄγομεν τὴν ΕΗ παράλληλον τῇ ΑΒ, καὶ τὴν ΓΖ παράλληλον τῇ ΑΘ, καὶ ἐπὶ τῆς ΕΘ κατασκευάζομεν τὸ τετράγωνον ΕΘΛΚ, ὅπερ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐπὶ τῆς ΒΓ κατασκευαζόμενον, διότι ἀπεδείχθη ἀνωτέρω ὅτι ΕΘ=ΒΓ. Οὕτω τὸ μὲν ὅλον σχῆμα ΑΒΙΛΚΕ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τετραγώνων ΑΒΙΘ, ΘΛΚΕ, ἐὰν δ' ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρέσωμεν τὰ δύο ὀρθογώνια ΓΒΙΖ, ΖΛΚΔ, ἅτινα ἔχουσι βάσεις ΙΒ, ΔΚ προφανῶς ἴσας τῇ ΑΒ, καὶ ὕψη ΒΓ, ΔΖ ἴσα τῇ ΒΓ, θέλει μείνει τὸ τετράγωνον ΑΓΔΕ τῆς εὐθείας ΑΓ. Λοιπὸν ἔχομεν

$$\mathrm{A\Gamma\Delta E}=\mathrm{ABI\Theta}+\mathrm{\Theta\Lambda KE}-\mathrm{\Gamma BIZ}-\mathrm{Z\Lambda K\Delta},$$

ἢ $$(\mathrm{AB}-\mathrm{B\Gamma})^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2-2\mathrm{AB}\times\mathrm{B\Gamma},$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὡς ἀνωτέρω, ὅτι α καὶ β παριστῶσι τὰ μέτρα τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, θέλομεν ἔχει κατὰ τοὺς γνωστοὺς ἀλγεβρικοὺς κανόνας τὴν ἰσότητα

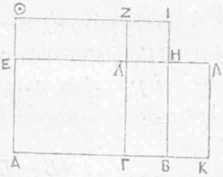
$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta,$$

ἥτις δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς δευτέρα ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ἔχον βάσιν τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΒΓ δύο εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ ὕψος τὴν διαφορὰν αὐτῶν ΑΒ—ΒΓ, ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τούτων κατασκευαζομένων τετραγώνων, τουθ' ὅπερ παρίσταται διὰ τῶν γνωστῶν σημείων ὡς ἑξῆς·

$$(AB+B\Gamma)\times(AB-B\Gamma)=\overline{AB}^2-\overline{B\Gamma}^2.$$



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου κατασκευάζομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ τῆς διαφορᾶς ΑΒ—ΒΓ, ἤτοι ΑΓ, τὰ τετράγωνα ΑΒΙΘ, ΑΓΔΕ, προεκβάλλομεν τὴν ΑΒ εἴς τινα ἀπόστασιν ΒΚ=ΒΓ καὶ κατασκευάζομεν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ὀρθογώνιον ΑΚΛΕ, ὅπερ λέγω ὅτι εἶναι ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν τετραγώνων ΑΒΙΘ, ΔΗΙΖ, ἤτοι τῇ διαφορᾷ $\overline{AB}^2-\overline{B\Gamma}^2$.

Διότι τὸ ὀρθογώνιον ΑΚΛΕ σύγκειται ἐκ δύο μερῶν· ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΗΕ καὶ τοῦ ΗΒΚΛ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΗΒΚΛ εἶναι ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ ΕΔΖΘ, διότι αἱ βάσεις αὐτῶν ΗΒ, ΕΔ εἶναι προφανῶς ἴσαι, καθὼς καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν ΒΚ, ΕΘ. Ἄρα τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ὀρθογώνιον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σχῆμα ΑΒΗΔΖΘ, ὅπερ προφανῶς εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων ΑΒΙΘ, ΙΖΔΗ. Λοιπὸν θέλομεν ἔχει $AK\times AE=\overline{AB}^2-\overline{B\Gamma}^2$. Ἀλλ' ΑΚ=ΑΒ+ΒΓ, καὶ ΑΕ=ΑΒ—ΒΓ. Λοιπὸν

$$(AB+B\Gamma)\times(AB-B\Gamma)=\overline{AB}^2-\overline{B\Gamma}^2,$$

τουθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

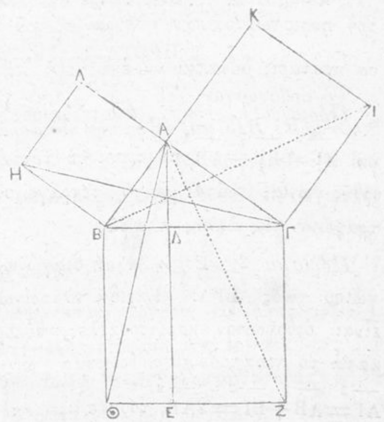
Σχόλιον. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τοῦ ἀλγεβρικοῦ τύπου

$$(\alpha+\beta)\ (\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2,$$

ἐν ᾧ α καὶ β παριστῶσι τὰ μέτρα τῶν γραμμῶν ΑΒ καὶ ΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἐπὶ ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων αὐτοῦ πλευρῶν.



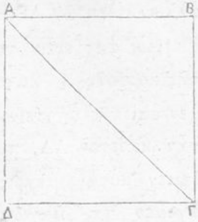
Ἔστω Α ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου ΑΒΓ. Λέγω ὅτι τὸ τετράγωνον ΒΓΖΘ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ΑΒΗΚ, ΑΓΙΚ, τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἐκ τῆς κορυφῆς Α καταβιβάζομεν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ τὴν κάθετον ΑΔ, προεκβάλλομεν αὐτὴν μέχρις Ε καὶ ἄγομεν τὰς διαγωνίους ΑΘ, ΗΓ. Τὰ δύο σχηματισθέντα τρίγωνα ΑΒΘ, ΗΒΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ΒΘ, ΒΓ ἴσας, ὡς πλευρὰς τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου ΒΓΖΘ, τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΗ ἴσας, ὡς πλευρὰς τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου ΑΒΗΛ, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας ΑΒΘ, ΗΒΓ ἴσας, διότι ἡ γωνία ΑΒΘ σύγκειται ἀπὸ μίαν ὀρθὴν ΓΒΘ καὶ ἀπὸ τὴν γωνίαν ΑΒΓ, καὶ ἡ ΗΒΓ σύγκειται ὡσαύτως ἀπὸ μίαν ὀρθὴν ΑΒΗ καὶ ἀπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν ΑΒΓ. Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΘ, ΗΒΓ εἶναι ἴσα. Ἀλλὰ τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΘ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΒΔΕΘ, διότι ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΘ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΔ, τὸ δὲ τρίγωνον ΗΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου ΑΒΗΛ, διότι ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΗΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΒ (πρότ. 2, πόρ. 1). Λοιπὸν, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΘ, ΗΒΓ εἶναι ἴσα, τὸ τετράγωνον ΑΒΗΛ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΔΕΘ εἶναι ἰσοδύναμα.

Ὁμοιοτρόπως σκεπτόμενοι ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ΑΓΖ, ΒΓΙ εἶναι ἴσα, καὶ ἐπομένως ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΓΔΕΖ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον ΑΓΙΚ. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων ΒΔΕΘ, ΓΔΕΖ, Ἄρα θέλει εἶναι ἴσον καὶ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ΑΒΗΛ, ΑΓΙΚ. Λοιπὸν τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων αὐτοῦ πλευρῶν.

Σχόλιον. Ἐπειδὴ τετράγωνόν τι ἔχει διὰ μέτρον τὸ τετράγωνον τοῦ παριστῶντος τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ἀνωτέρω ἀποδειχθεῖσα πρότασις δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τῆς ἰσότητος $\overline{ΒΓ}^2=\overline{ΑΒ}^2+\overline{ΑΓ}^2$.

Πόρισμα 1. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος πορίζόμεθα $\overline{ΑΒ}^2=\overline{ΒΓ}^2-\overline{ΑΓ}^2$, καὶ $\overline{ΑΓ}^2=\overline{ΒΓ}^2-\overline{ΑΒ}^2$, τουτέστι τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης πλὴν τοῦ τραγώνου τῆς ἄλλης πλευρᾶς.



Πόρισμα 2. Ἔστω ΑΓ ἡ διαγώνιος τετραγώνου τινὸς ΑΒΓΔ. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς, θέλομεν ἔχει κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα τὴν ἰσότητα $\overline{ΑΓ}^2=\overline{ΑΒ}^2+\overline{ΒΓ}^2=2\overline{ΑΒ}^2$, τουτέστι, *τὸ ἐπὶ τῆς διαγωνίου τετραγώνου τινὸς κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι διπλάσιον αὐτοῦ.*

Πόρισμα 3. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος $\overline{ΑΓ}^2=2\overline{ΑΒ}^2$ πορίζόμεθα τὴν ἀναλογίαν $\overline{ΑΓ}^2 : \overline{ΑΒ}^2=2:1$, ἐξ ἧς διὰ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἑκάστου αὐτῆς ὅρου πορίζόμεθα $ΑΓ : ΑΒ=\sqrt{2}:1$. Λοιπὸν *ἡ διαγώνιος ΑΓ τετραγώνου τινὸς ΑΒΓΔ ἔχει λόγον πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΑΒ, ὃν λόγον ἔχει ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 πρὸς τὴν μονάδα.* Ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος, συμπεραίνομεν ὅτι *ἡ διαγώνιος τετραγώνου τινὸς καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι μεγέθη ἀσύμμετρα.*

Πόρισμα 4. Τὰ δύο ὀρθογώνια ΒΔΕΘ, ΔΓΖΕ καὶ τὸ τετράγωνον ΒΓΖΘ ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος ΔΕ. Ἄρα, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 3 προτάσει, θέλουσιν εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν, καὶ θέλομεν ἔχει τὰς ἀναλογίας

$$ΒΓΖΘ : ΒΔΕΘ = ΒΓ : ΒΔ \quad (1)$$
$$ΒΓΖΘ : ΔΓΖΕ = ΒΓ : ΔΓ \quad (2)$$
$$ΒΔΕΘ : ΔΓΖΕ = ΒΔ : ΔΓ \quad (3).$$

Ἀλλ' ἀπεδείξαμεν προηγουμένως ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΒΔΕΘ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον ΑΒΗΛ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΔΓΖΕ ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον ΑΓΙΚ. Λοιπὸν, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς ἀνωτέρω ἀναλογίας ἀντὶ τῶν ὀρθογωνίων τὰ ἰσοδύναμα αὐτοῖς τετράγωνα, θέλομεν ἔχει

$$\overline{\text{ΒΓ}}^2 : \overline{\text{ΑΒ}}^2 = \text{ΒΓ} : \text{ΒΔ} \qquad (1)$$

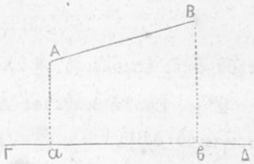
$$\overline{\text{ΒΓ}}^2 : \overline{\text{ΑΓ}}^2 = \text{ΒΓ} : \text{ΔΓ} \qquad (2)$$

$$\overline{\text{ΑΒ}}^2 : \overline{\text{ΑΓ}}^2 = \text{ΒΔ} : \text{ΔΓ} \qquad (3).$$

Εἰς πᾶν λοιπὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον *τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας, ὡς ἡ ὑποτείνουσα πρὸς τὸ προσκείμενον τῇ πλευρᾷ τμῆμα* (*), *καὶ τὰ τετράγωνα τῶν δύο πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ προσκείμενα εἰς ταύτας τμήματα τῆς ὑποτεινούσης.*

ΟΡΙΣΜΟΣ.

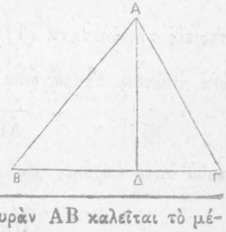
Προβολὴ εὐθείας τινὸς ΑΒ ἐπὶ ἑτέρας ΓΔ καλεῖται τὸ μέρος *αϐ* τῆς δευτέρας, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ποδῶν *α* καὶ *ϐ* τῶν ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β τῆς εὐθείας ἐπὶ τῆς ΓΔ καταβιβαζομένων καθέτων Α*α*, Β*ϐ*.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12. ΘΕΩΡΗΜΑ.

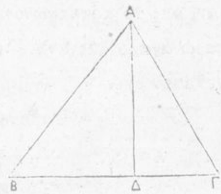
Εἰς πᾶν τρίγωνον τὸ τετράγωνον τῆς ἀπέναντι ὀξείας τινὸς γωνίας πλευρᾶς ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων αὐτοῦ πλευρῶν, μεῖον δὶς τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ἔχον βάσιν τὴν μίαν τούτων καὶ ὕψος τὴν προβολὴν τῆς ἑτέρας ἐπὶ τῆς πρώτης.

Ἔστω ΑΒ ἡ ἀπέναντι τῆς ὀξείας γωνίας Γ πλευρὰ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἂν καταβιβάσωμεν τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τῆς ΒΓ, κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν ΓΔ θέλει εἶναι ἡ προβολὴ τῆς ΑΓ ἐπὶ τῆς ΒΓ, καὶ λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα



(*) Προσκείμενον τμῆμα εἴς τινα πλευρὰν ΑΒ καλεῖται τὸ μέρος ΒΔ τῆς ὑποτεινούσης, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῆς πλευρᾶς ταύτης καὶ τῆς καθέτου ΑΔ, τῆς καταβιβαζομένης ἐκ τῆς κορυφῆς Α τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ.

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{B}\Gamma}^2 + \overline{\mathrm{A}\Gamma}^2 - 2\mathrm{B}\Gamma \times \Gamma\Delta.$$



Δύο περιπτώσεις ὑπάρχουσι· 1ον. Ἐὰν ἡ κάθετος ΑΔ πίπτῃ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θέλομεν ἔχει ΒΔ$=$ΒΓ$-$ΓΔ, καὶ ἑπομένως κατὰ τὸ θεώρημα τῆς ἐννάτης προτάσεως

$\overline{\mathrm{B}\Delta}^2 = (\mathrm{B}\Gamma - \Gamma\Delta)^2 = \overline{\mathrm{B}\Gamma}^2 + \overline{\Gamma\Delta}^2 - 2\mathrm{B}\Gamma \times \Gamma\Delta.$

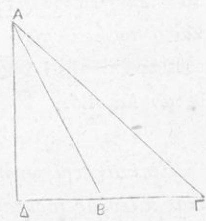
Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος $\overline{\mathrm{A}\Delta}^2$, αὕτη γίνεται

$$\overline{\mathrm{A}\Delta}^2 + \overline{\mathrm{B}\Delta}^2 = \overline{\mathrm{B}\Gamma}^2 + \overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{\mathrm{A}\Delta}^2 - 2\mathrm{B}\Gamma \times \Gamma\Delta. \qquad (1)$$

Ἀλλ', ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ εἶναι ὀρθογώνια, ἔχομεν $\overline{\mathrm{A}\Delta}^2 + \overline{\mathrm{B}\Delta}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2$ καὶ $\overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{\mathrm{A}\Delta}^2 = \overline{\mathrm{A}\Gamma}^2$. Ἀντικαθιστῶντες λοιπὸν εἰς τὴν ἰσότητα (1) ἀντὶ τῶν ἀθροισμάτων $\overline{\mathrm{A}\Delta}^2 + \overline{\mathrm{B}\Delta}^2$, $\overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{\mathrm{A}\Delta}^2$ τὰ ἴσα τούτοις τετράγωνα $\overline{\mathrm{AB}}^2$, $\overline{\mathrm{A}\Gamma}^2$ θέλομεν ἔχει

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{B}\Gamma}^2 + \overline{\mathrm{A}\Gamma}^2 - 2\mathrm{B}\Gamma \times \Gamma\Delta,$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.



2ον. Ἐὰν ἡ κάθετος ΑΔ πίπτῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θέλομεν ἔχει ΒΔ$=$ΓΔ$-$ΒΓ, καὶ ἑπομένως $\overline{\mathrm{B}\Delta}^2 = \overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{\mathrm{B}\Gamma}^2 - 2\mathrm{B}\Gamma \times \Gamma\Delta$ (πρότ. 9). Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος $\overline{\mathrm{A}\Delta}^2$, αὕτη γίνεται

$$\overline{\mathrm{A}\Delta}^2 + \overline{\mathrm{B}\Delta}^2 = \overline{\mathrm{A}\Delta}^2 + \overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{\mathrm{B}\Gamma}^2 - 2\mathrm{B}\Gamma \times \Gamma\Delta. \quad (1)$$

Ἀλλ' ἔχομεν $\overline{\mathrm{A}\Delta}^2 + \overline{\mathrm{B}\Delta}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2$ καὶ $\overline{\mathrm{A}\Delta}^2 + \overline{\Gamma\Delta}^2 = \overline{\mathrm{A}\Gamma}^2$. Ἄρα ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἰσότητα (1) ἀντὶ τῶν ἀθροισμάτων $\overline{\mathrm{A}\Delta}^2 + \overline{\mathrm{B}\Delta}^2$, $\overline{\mathrm{A}\Delta}^2 + \overline{\mathrm{B}\Delta}^2$ τὰ ἴσα τούτοις τετράγωνα $\overline{\mathrm{AB}}^2$, $\overline{\mathrm{A}\Gamma}^2$, θέλομεν ἔχει

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{A}\Gamma}^2 + \overline{\mathrm{B}\Gamma}^2 - 2\mathrm{B}\Gamma \times \Gamma\Delta,$$

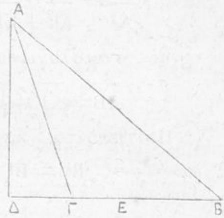
τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν. Λοιπὸν εἰς πᾶν τρίγωνον κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς πᾶν ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ τετράγωνον τῆς ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας πλευρᾶς ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετρα-

γώνων τῶν δύο ἄλλων αὐτοῦ πλευρῶν, πλέον δὶς τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ἔχον βάσιν τὴν μίαν τούτων καὶ ὕψος τὴν προβολὴν τῆς ἑτέρας ἐπὶ τῆς πρώτης.

Ἔστω ΑΒ ἡ ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας Γ πλευρὰ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐὰν καταβιβάσωμεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἡ προβολὴ τῆς ΑΓ ἐπὶ τῆς ΒΓ θέλει εἶναι ΓΔ, καὶ λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει



$$\overline{AB}^2 = \overline{A\Gamma}^2 + \overline{B\Gamma}^2 + 2B\Gamma \times \Gamma\Delta.$$

Ἡ κάθετος ΑΔ δὲν δύναται νὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ ἀμβλυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ, διότι ἂν ἔπιπτε λόγου χάριν εἰς Ε, τὸ σχηματισθησόμενον τρίγωνον ΑΓΕ ἤθελεν ἔχει μίαν ὀρθὴν γωνίαν Ε καὶ μίαν ἀμβλεῖαν Γ, ὅπερ ἀδύνατον (πρότ. 31, Α'). Λοιπὸν πίπτει πάντοτε ἐκτός, καὶ ἐπομένως ἔχομεν ΒΔ=ΒΓ+ΓΔ. Ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος εἰς τὸ τετράγωνον, θέλομεν ἔχει κατὰ τὸ θεώρημα τῆς 8 προτάσεως τὴν ἰσότητα

$$\overline{B\Delta}^2 = \overline{B\Gamma}^2 + \overline{\Gamma\Delta}^2 + 2B\Gamma \times \Gamma\Delta. \qquad (1)$$

Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (1) $\overline{A\Delta}^2$ καὶ ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τῶν ἀθροισμάτων $\overline{A\Delta}^2+\overline{B\Delta}^2$, $\overline{\Gamma\Delta}^2+\overline{A\Delta}^2$ τὰ ἴσα τούτοις τετράγωνα $\overline{AB}^2$, $\overline{A\Gamma}^2$, αὕτη γίνεται

$$\overline{AB}^2 = \overline{A\Gamma}^2 + \overline{B\Gamma}^2 + 2B\Gamma \times \Gamma\Delta$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν. Λοιπὸν εἰς πᾶν ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ τετράγωνον τῆς ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας πλευρᾶς ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων αὐτοῦ πλευρῶν κτλ.

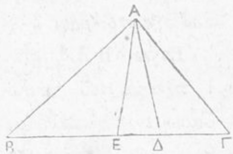
Σχόλιον. Ἐκ τῶν προαποδειχθέντων δύο θεωρημάτων βλέπομεν ὅτι εἰς μόνον τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν ἑνώσωμεν τὴν κορυφὴν αὐτοῦ Α μὲ τὸ μέσον τῆς βάσεώς του ΒΓ διὰ τῆς εὐθείας ΑΕ, λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει

$$\overline{AB}^2 + \overline{A\Gamma}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2.$$

Διότι, ἐὰν καταβιβάσωμεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ, θέλομεν ἔχει εἰς μὲν τὸ ὀξυγώνιον τρίγωνον ΑΕΓ (πρότ. 12)



$$\overline{\mathrm{AΓ}}^2=\overline{\mathrm{AE}}^2+\overline{\mathrm{EΓ}}^2-2\mathrm{EΓ}\times\mathrm{EΔ} \qquad (1)$$

εἰς δὲ τὸ ἀμβλυγώνιον ΑΒΕ (πρότ. 13)

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AE}}^2+\overline{\mathrm{BE}}^2+2\mathrm{BE}\times\mathrm{EΔ}. \qquad (2)$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2), καὶ παρατηροῦντες ὅτι ΒΕ=ΕΓ ἐκ κατασκευῆς, θέλομεν ἔχει

$$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AΓ}}^2=2\overline{\mathrm{AE}}^2+2\overline{\mathrm{BE}}^2,$$

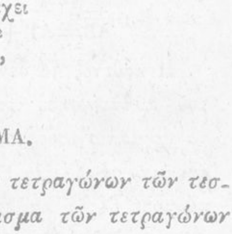
τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς πᾶν τετράπλευρον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων αὐτοῦ πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων, πλέον τετράκις, τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας, τῆς ἑνονούσης τὰ μέσα αὐτῶν.

Ἔστωσαν ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου τινὸς ΑΒΓΔ καὶ Ο καὶ Ζ τὰ μέσα αὐτῶν. Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει

$$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BΓ}}^2+\overline{\mathrm{ΓΔ}}^2+\overline{\mathrm{AΔ}}^2=\overline{\mathrm{AΓ}}^2+\overline{\mathrm{BΔ}}^2+4\overline{\mathrm{OZ}}^2. \qquad (\alpha)$$



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν τὰς εὐθείας ΒΟ, ΟΔ καὶ ΟΖ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐπειδὴ ἡ ΒΟ ἑνόνει τὴν κορυφὴν Β μὲ τὸ μέσον Ο τῆς βάσεως ΑΓ, θέλομεν ἔχει κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα

$$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BΓ}}^2=2\overline{\mathrm{BO}}^2+2\overline{\mathrm{AO}}^2 \qquad (1)$$

Ὡσαύτως εἰς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ, ἐπειδὴ ἡ ΔΟ ἑνόνει τὴν κορυφὴν Δ μὲ τὸ μέσον Ο τῆς βάσεως ΑΓ, θέλομεν ἔχει

$$\overline{\mathrm{ΓΔ}}^2+\overline{\mathrm{AΔ}}^2=2\overline{\mathrm{ΔO}}^2+2\overline{\mathrm{AO}}^2. \qquad (2)$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) θέλομεν ἔχει

$$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BΓ}}^2+\overline{\mathrm{ΓΔ}}^2+\overline{\mathrm{AΔ}}^2=4\overline{\mathrm{AO}}^2+2\overline{\mathrm{BO}}^2+2\overline{\mathrm{ΔO}}^2. \qquad (3)$$

Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΒΟΔ, ἐπειδὴ ἡ ΟΖ ἑνόνει τὴν κορυφὴν Ο μὲ τὸ μέσον Ζ τῆς βάσεως ΒΔ, ἔχομεν

$$\overline{\mathrm{BO}}^2+\overline{\mathrm{OΔ}}^2=2\overline{\mathrm{BZ}}^2+2\overline{\mathrm{OZ}}^2, \text{ ἑπομένως } 2\overline{\mathrm{BO}}^2+2\overline{\mathrm{OΔ}}^2=4\overline{\mathrm{BZ}}^2+4\overline{\mathrm{OZ}}^2.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἰσότητα (3) ἀντὶ τοῦ ἀθροίσματος $2\overline{\text{ΒΟ}}^2+2\overline{\text{ΟΔ}}^2$ τὸ ἴσον αὐτῷ $4\overline{\text{ΒΖ}}^2+4\overline{\text{ΟΖ}}^2$, ἔχομεν

$$\overline{\text{ΑΒ}}^2+\overline{\text{ΒΓ}}^2+\overline{\text{ΓΔ}}^2+\overline{\text{ΑΔ}}^2=4\overline{\text{ΑΟ}}^2+4\overline{\text{ΒΖ}}^2+4\overline{\text{ΟΖ}}^2$$

ἤ, ὅπερ ταὐτό,

$$\overline{\text{ΑΒ}}^2+\overline{\text{ΒΓ}}^2+\overline{\text{ΓΔ}}^2+\overline{\text{ΑΔ}}^2=\overline{\text{ΑΓ}}^2+\overline{\text{ΒΔ}}^2+4\overline{\text{ΟΖ}}^2,$$

διότι, ἐπειδὴ ἐκ κατασκευῆς ἔχομεν 2ΑΟ=ΑΓ καὶ 2ΒΖ=ΒΔ, πορίζόμεθα $4\overline{\text{ΑΟ}}^2=\overline{\text{ΑΓ}}^2$ καὶ $4\overline{\text{ΒΖ}}^2=\overline{\text{ΒΔ}}^2$.

Λοιπὸν ἡ ἰσότης (α) εἶναι ἀληθής, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

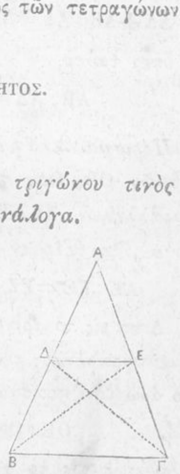
Πόρισμα. Ἂν τὸ τετράπλευρον ἦτο παραλληλόγραμμον, ἡ εὐθεῖα ΟΖ ἤθελεν εἶναι μηδὲν (πρότ. 36, Α'). Λοιπόν, *εἰς πᾶν παραλληλόγραμμον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων αὐτοῦ πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων.* Καὶ ἀντιστρόφως, *ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν τετραπλεύρου τινὸς ἦναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων, τὸ τετράπλευρον θέλει εἶναι παραλληλόγραμμον.* Διότι, ἂν δὲν ἦτο παραλληλόγραμμον, κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων αὐτοῦ πλευρῶν ἤθελεν εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος μιᾷ τῶν πλευρῶν τριγώνου τινὸς διαιρεῖ τὰς δύο ἄλλας αὐτοῦ πλευρὰς εἰς μέρη ἀνάλογα.

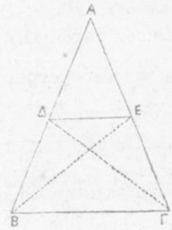
Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ. Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει



$$\text{ΑΔ} : \text{ΔΒ}=\text{ΑΕ} : \text{ΕΓ}. \qquad (\alpha)$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν τὰς εὐθείας ΒΕ, ΔΓ. Τὰ οὕτω σχηματισθέντα δύο τρίγωνα ΒΔΕ, ΓΔΕ θέλουσιν εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΔΕ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, διότι αἱ κορυφαὶ αὐτῶν Β καὶ Γ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ παραλλήλου τῇ ΔΕ (πρότ. 33, πόρ. 2, Α').

Τούτου τεθέντος, τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΕ, ΕΔΒ, ἐπειδὴ ἔχουσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν Ε καὶ τὰς βάσεις αὐτῶν ΑΔ, ΔΒ ἐπ' εὐθείας, ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, ἐπομένως εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν (πρότ. 6, πόρ.), ἤτοι θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν



$$ΑΔΕ : ΕΔΒ = ΑΔ : ΔΒ. \qquad (1)$$

Ὡσαύτως, τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΕ, ΔΕΓ, ἐπειδὴ ἔχουσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν Δ καὶ τὰς βάσεις αὐτῶν ΑΕ, ΕΓ ἐπ' εὐθείας, ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, ἐπομένως εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν, ἤτοι θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$ΑΔΕ : ΕΔΓ = ΑΕ : ΕΓ. \qquad (2)$$

Ἀλλ' ἀπεδείχθη ὅτι τὰ τρίγωνα ΕΔΒ, ΕΔΓ εἶναι ἰσοδύναμα. Ἄρα οἱ πρῶτοι λόγοι τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) εἶναι ἴσοι, ἐπομένως καὶ οἱ δεύτεροι θέλουσιν εἶναι ἴσοι, καὶ θέλομεν ἔχει

$$ΑΔ : ΔΒ = ΑΕ : ΕΓ,$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

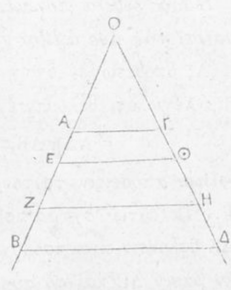
Πόρισμα 1. Ἐκ τῆς ἀποδειχθείσης ἀναλογίας (α) πορίζόμεθα κατὰ γνωστὰ Ἀριθμητικὰ θεωρήματα τὰς ἑξῆς

$$ΑΔ + ΔΒ : ΑΔ = ΑΕ + ΕΓ : ΑΕ, \quad ΑΔ + ΔΒ : ΔΒ = ΑΕ + ΕΓ : ΕΓ$$

ἢ, ὅπερ ταὐτὸ,

$$ΑΒ : ΑΔ = ΑΓ : ΑΕ \quad , \quad ΑΒ : ΔΒ = ΑΓ : ΕΓ.$$

Πόρισμα 2. Τὰ μέρη ΑΕ, ΓΘ, ΕΖ, ΘΗ, ΖΒ, ΗΔ δύο τεμνομένων εὐθειῶν ΟΒ, ΟΔ, τὰ χωριζόμενα ὑπὸ τῶν παραλλήλων ΑΓ, ΕΘ, ΖΗ, ΒΔ εἶναι ἀνάλογα, ἤτοι θέλομεν ἔχει



$$ΑΕ : ΓΘ = ΕΖ : ΘΗ = ΖΒ : ΗΔ. \qquad (α)$$

Διότι εἰς τὸ τρίγωνον ΟΕΘ, ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος τῇ ΕΘ, θέλομεν ἔχει κατὰ τὸ ἀνωτέρω πόρισμα

$$ΟΕ : ΟΘ = ΑΕ : ΓΘ. \qquad (1)$$

Ὡσαύτως, εἰς τὸ τρίγωνον ΟΖΗ, ἐπειδὴ ἡ ΕΘ εἶναι παράλληλος τῇ ΖΗ θέλομεν ἔχει κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα

$$ΟΕ : ΟΘ = ΕΖ : ΘΗ \qquad (2)$$

καὶ ἐπειδὴ αἱ ἀναλογίαι (1) καὶ (2) ἔχουσι τὸν λόγον ΟΕ : ΟΘ κοινόν, θέλομεν ἔχει

ΑΕ : ΓΘ=ΕΖ : ΘΗ. (3)

Δι' ὁμοίου τρόπου ἀποδεικνύεται ὅτι

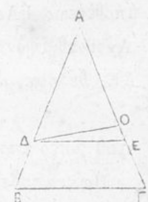
ΕΖ : ΘΗ=ΖΒ : ΗΔ. (4)

καὶ ἐκ τῶν ἀναλογιῶν (3) καὶ (4) συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω σειρὰ τῶν ἴσων λόγων (α) εἶναι ἀληθής.

Ἂν αἱ ὑπὸ τῶν παραλλήλων τεμνόμεναι εὐθεῖαι ἦσαν παράλληλοι, τὰ μέρη ΑΕ, ΕΘ, ΕΖ ΘΗ, ΖΒ, ΗΔ ἤθελον εἶναι ἀνὰ δύο ἴσα (πρότ. 33, πόρ. 1, Α'), ἐπομένως ἡ ἀνωτέρω σειρὰ τῶν ἴσων λόγων (α) ἤθελεν εἶναι αὐταπόδεικτος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τέμνωνται ἀναλόγως ὑπὸ τῆς εὐθείας ΔΕ, τουτέστιν οὕτως, ὥστε ΑΔ : ΔΒ=ΑΕ : ΕΓ, λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΕ θέλει εἶναι παράλληλος τῇ βάσει ΒΓ τοῦ τριγώνου.



Διότι, ἐὰν ἡ ΔΕ δὲν ἦναι παράλληλος τῇ ΒΓ, ἔστω ΔΟ αὕτη. Τότε κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα, ἐπειδὴ ΔΟ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ, θέλομεν ἔχει

ΑΔ : ΔΒ=ΑΟ : ΟΓ. (1)

Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ΑΔ : ΔΒ=ΑΕ : ΕΓ.

Ἄρα, ἕνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου ΑΔ : ΔΒ, θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

ΑΟ : ΟΓ=ΑΕ : ΕΓ,

ἥτις εἶναι ἀδύνατος, διότι ἐνῷ ὁ πρῶτος ἡγούμενος ΑΟ εἶναι μικρότερος τοῦ δευτέρου ἡγουμένου ΑΕ, ὁ πρῶτος ἑπόμενος ΟΓ εἶναι μεγαλείτερος τοῦ δευτέρου ἑπομένου ΕΓ. Λοιπὸν ἡ ἐκ τοῦ σημείου Δ ἀγομένη παράλληλος τῇ ΒΓ δὲν δύναται νὰ διαφέρῃ τῆς ΔΕ. Λοιπόν, ἐὰν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ τοῦ τριγώνου κτλ.

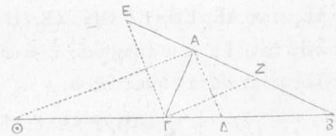
Σχόλιον. Ἂν ἀντὶ τῆς δοθείσης ἀναλογίας ΑΔ : ΔΒ=ΑΕ : ΕΓ μᾶς ἐδίδετο ἡ ἑξῆς ΑΔ : ΑΒ=ΑΕ : ΑΓ, ἐκ ταύτης ἠθέλαμεν πορισθῇ τὴν πρώτην, διότι γνωρίζομεν ὅτι ΑΔ : ΑΒ—ΑΔ=ΑΕ : ΑΓ—ΑΕ, καὶ ἠθέλαμεν συμπεράνει καὶ πάλιν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18. ΘΕΩΡΗΜΑ.

1ον. *Ἡ εὐθεῖα ΑΔ, ἡ διχοτομοῦσα τὴν γωνίαν Α τοῦ τριγώ-*

νου ΑΒΓ, διαιρεῖ τὴν βάσιν αὐτοῦ ΒΓ εἰς δύο τμήματα ΒΔ, ΔΓ ἀνάλογα πρὸς τὰς προσκειμένας εἰς ταῦτα πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, τουτέστιν οὕτως, ὥστε ΒΔ : ΔΓ=ΑΒ : ΑΓ.

2ον. *Ἡ εὐθεῖα ΑΘ, ἡ διχοτομοῦσα τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ΓΑΕ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, συναπαντᾷ τὴν προεκβολὴν τῆς βάσεως ΒΓ εἴς τι σημεῖον Θ τοιοῦτον, ὥστε τὰ τμήματα ΒΘ, ΓΘ εἶναι ὡσαύτως ἀνάλογα πρὸς τὰς προσκειμένας εἰς ταῦτα πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ.*



Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ 1ου ἐκ τοῦ σημείου Γ ἄγομεν τὴν ΓΕ παράλληλον τῇ διχοτομούσῃ ΑΔ, καὶ ἔχομεν εἰς τὸ τρίγωνον ΒΓΕ, ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος τῇ ΓΕ,

$$ΒΔ : ΔΓ = ΑΒ : ΑΕ. \qquad (1)$$

Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΓΑΕ εἶναι ἰσοσκελές· διότι, ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΓΕ, ἡ γωνία ΑΓΕ=ΓΑΔ καὶ ἡ γωνία ΑΕΓ=ΒΑΔ Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ΓΑΔ=ΒΑΔ. Ἄρα καὶ ΑΓΕ=ΑΕΓ, ἑπομένως ΑΕ=ΑΓ. Ἀντικαθιστῶντες λοιπὸν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν (1) ΑΒ ἀντὶ τῆς ΑΕ, θέλομεν ἔχει

$$ΒΔ : ΔΓ = ΑΒ : ΑΓ$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο κατὰ πρῶτον ν' ἀποδείξωμεν.

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ 2ου ἄγομεν τὴν ΓΖ παράλληλον τῇ διχοτομούσῃ ΑΘ, καὶ ἔχομεν εἰς τὸ τρίγωνον ΒΑΘ, ἐπειδὴ ἡ ΓΖ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΘ,

$$ΒΘ : ΓΘ = ΑΒ : ΑΖ. \qquad (2)$$

Ἀλλ' ΑΖ=ΑΓ, διότι τὸ τρίγωνον ΑΓΖ εἶναι ἰσοσκελὲς, ὡς ἔχον τὰς γωνίας αὐτοῦ ΑΓΖ, ΑΖΓ ἴσας· διότι ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΑΘ, ΓΖ ἡ μὲν ΑΓΖ εἶναι ἴση τῇ ΓΑΘ, ἡ δὲ ΑΖΓ εἶναι ἴση τῇ ΘΑΕ, καὶ αἱ γωνίαι ΓΑΘ, ΘΑΕ ὑπετέθησαν ἴσαι, ἑπομένως καὶ αἱ ἴσαι ταύταις ΑΓΖ, ΑΖΓ θέλουσιν εἶναι ἴσαι. Ἀντικαθιστῶντες λοιπὸν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν (2) ΑΓ ἀντὶ τῆς ΑΖ, θέλομεν ἔχει

$$ΒΘ : ΓΘ = ΑΒ : ΑΓ$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο κατὰ δεύτερον λόγον ν' ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα. Ἐὰν αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου Α ἀπὸ τῶν σημείων Β καὶ Γ μεταβάλλωνται οὕτως, ὥστε ὁ λόγος αὐτῶν $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$ νὰ μένῃ σταθερὸς καὶ ἴσος δεδομένῳ τινὶ λόγῳ $\frac{\mu}{\nu}$, αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας ΒΑΓ, ΓΑΕ θέλουσιν ἀναγκαίως διέρχεσθαι διὰ τῶν αὐτῶν πάντοτε σημείων Δ καὶ Θ τῆς βάσεως ΒΓ, διότι οἱ λόγοι $\frac{ΒΔ}{ΔΓ}$, $\frac{ΒΘ}{ΓΘ}$ πρέπει νὰ ἦναι ἴσοι τῷ λόγῳ $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$, ὅστις ὑποτίθεται σταθερὸς καὶ ἴσος τῷ $\frac{\mu}{\nu}$. Ἀφ' ἑτέρου, αἱ διχοτομοῦσαι ΑΔ, ΑΘ δύο προσκειμένας γωνίας ΒΑΓ, ΓΑΕ εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΔΑΓ, ΓΑΘ εἶναι ἴσον μὲ μίαν ὀρθήν. Λοιπὸν τὸ σημεῖον Α θέλει εἶναι πάντοτε ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου ΔΑΘ ἔχοντος σταθερὰν ὑποτείνουσαν ΔΘ. Λοιπὸν θέλει κεῖσθαι πάντοτε ἐπὶ τῆς περιφερείας, τῆς ἐχούσας διάμετρον ΔΘ, ἐν ἄλλαις λέξεσιν, *ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Α, ὧν αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων Β καὶ Γ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας δεδομένον τινὰ λόγον $\frac{\mu}{\nu}$, εἶναι περιφέρεια κύκλου ὁριζομένη ὡς προελέχθη.*

ΟΡΙΣΜΟΣ.

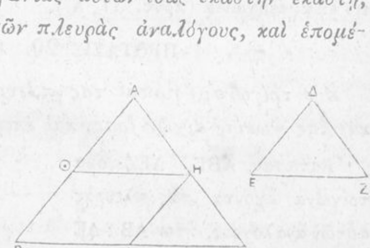
Δύο τρίγωνα λέγονται *ὅμοια*, ὅταν ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους. *Ὁμόλογοι* πλευραὶ λέγονται αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν.

Καὶ ἐν γένει δύο πολύγωνα λέγονται *ὅμοια*, ὅταν ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους. Εἰς τὰ ὅμοια πολύγωνα ὁμόλογοι πλευραὶ καλοῦνται αἱ εἰς ἴσας γωνίας προσκείμεναι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19. ΘΕΩΡΗΜΑ.

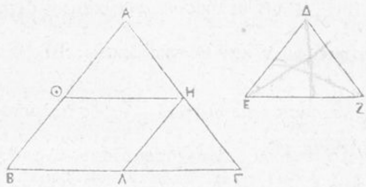
Δύο τρίγωνα, ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, ἔχουσι καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους, καὶ ἑπομένως εἶναι ὅμοια.

Ἔστωσαν ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος τρίγωνα, ἐν οἷς ἡ γωνία Α=Δ, ἡ γωνία Β=Ε καὶ ἡ γωνία Γ=Ζ. Λέγω ὅτι αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ θέλουσιν εἶναι ἀνάλογοι, τουτέστιν ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων



$$ΑΒ : ΔΕ = ΑΓ : ΔΖ = ΒΓ : ΕΖ.$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου λαμβάνομεν ΑΘ=ΔΕ, ΑΗ=ΔΖ, καὶ ἄγομεν τὴν ΘΗ. Τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΑΘΗ θέλει εἶναι ἴσον τῷ ΔΕΖ, διότι ταῦτα ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην (Α=Δ) περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων ἐκ κατασκευῆς. Λοιπὸν ΘΗ=ΕΖ καὶ ἡ γωνία ΑΘΗ ἴση τῇ Ε. Ἀλλὰ Ε=Β. Ἄρα καὶ ΑΘΗ=Β. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι γωνίαι ΑΘΗ, ΑΒΓ εἶναι ἴσαι, ἡ ΘΗ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ (πρότ. 28, Α'). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΘΗ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ, θέλομεν ἔχει κατὰ τὸ πρῶτον πόρισμα τῆς 16 προτάσεως,



$$\text{ΑΒ : ΑΘ}=\text{ΑΓ : ΑΗ}. \qquad (1)$$

Ἄγομεν τελευταῖον τὴν ΗΛ παράλληλον τῇ ΑΒ, καὶ ἔχομεν

$$\text{ΑΓ : ΑΗ}=\text{ΒΓ : ΒΛ ἢ ΘΗ}, \qquad (2)$$

διότι αἱ εὐθεῖαι ΒΛ καὶ ΘΗ εἶναι ἴσαι, ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων περιεχόμεναι.

Ἐπειδὴ αἱ ἀναλογίαι (1) καὶ (2) ἔχουσι ἕνα λόγον ΑΓ : ΑΗ κοινόν, θέλομεν ἔχει τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων

$$\text{ΑΒ : ΑΘ}=\text{ΑΓ : ΑΗ}=\text{ΒΓ : ΘΗ}$$

ἤ, ὅπερ ταὐτό, $\quad \text{ΑΒ : ΔΕ}=\text{ΑΓ : ΔΖ}=\text{ΒΓ : ΕΖ},$

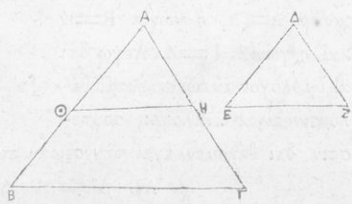
τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα. Διὰ νὰ ἦναι δύο τρίγωνα ὅμοια ἀρκεῖ νὰ ἔχωσι δύο μόνον γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, διότι τότε ἀναγκαίως καὶ ἡ τρίτη τοῦ ἑνὸς θέλει εἶναι ἴση τῇ τρίτῃ τοῦ ἑτέρου, καὶ τὰ τρίγωνα θέλουσιν εἶναι ἰσογώνια (πρότ. 31, Α').

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 20. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο τρίγωνα, ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους, ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας, καὶ ἑπομένως εἶναι ὅμοια.

Ἔστωσαν ΑΒΓ, ΔΕΖ δύο τρίγωνα ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους, ἤτοι ΑΒ : ΔΕ =ΑΓ : ΔΖ= ΒΓ: ΕΖ. Λέγω ὅτι θέλουσιν ἔχει τὰς ἀπέναντι τῶν ἀναλόγων πλευρῶν γωνίας



ἴσας, ἤτοι Α=Δ, Β=Ε, Γ=Ζ, καὶ ἑπομένως θέλουσιν εἶναι ὅμοια.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου λαμβάνομεν ΑΘ=ΔΕ, ΑΗ=ΔΖ, καὶ ἄγομεν τὴν ΘΗ, ἥτις, λέγω, θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ. Διότι ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$ΑΒ : ΔΕ = ΑΓ : ΔΖ$$

ἢ, ὅπερ ταὐτὸ, $$ΑΒ : ΑΘ = ΑΓ : ΑΗ.$$

Ἄρα ἡ ΘΗ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ (πρότ. 17, πόρ. 1), καὶ ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΑΘΗ εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΒΓ, καὶ θέλομεν ἔχει κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα τὴν ἀναλογίαν

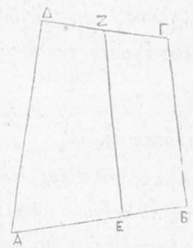
$$ΑΒ : ΑΘ = ΒΓ : ΘΗ.$$

Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως $$ΑΒ : ΔΕ = ΒΓ : ΕΖ.$$

Ἄρα, ἐπειδὴ ΑΘ=ΔΕ, ἵνα ἡ δεδομένη ἀναλογία ᾖ ἀληθὴς, πρέπει καὶ ΘΗ=ΕΖ. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ΑΘΗ, ΔΕΖ ἔχουσι τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, ἑπομένως εἶναι ἴσα. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΘΗ εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΒΓ. Ἄρα καὶ τὸ ΔΕΖ θέλει εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΒΓ. Λοιπὸν ἡ γωνία Α=Δ, Β=Ε καὶ ἡ Γ=Ζ.

Σχόλιον 1. Ἐκ τῶν ἀποδειχθεισῶν δύο προηγουμένων προτάσεων ἐξάγομεν ὅτι εἰς τὰ τρίγωνα ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν συνεπάγει τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν, καὶ ἀντιστρόφως, ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν συνεπάγει τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν· ἑπομένως μία τῶν ἀνωτέρω δύο συνθηκῶν ἦτο ἐπαρκὴς πρὸς βεβαίωσιν τῆς ὁμοιότητος δύο τριγώνων. Ἔπρεπε λοιπὸν νὰ ὁρίσωμεν ἀνωτέρω ὅτι ὅμοια τρίγωνα καλοῦνται ἢ τὰ ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας, ἢ τὰ ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους. Ἀλλ' ἐπειδὴ τοῦτο μόνον εἰς τὰ τρίγωνα συμβαίνει· διότι ἂν ἐπρόκειτο π. χ. περὶ τετραπλεύρων, ὧν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶναι κατὰ μονάδα μεγαλείτερος τοῦ τῶν τριγώνων, ἠδυνάμεθα νὰ μεταβάλωμεν τὰς γωνίας αὐτῶν χωρὶς νὰ ἀλλάξωμεν ποσῶς τὸ μέγεθος τῶν πλευρῶν των, καὶ ἀντιστρόφως, νὰ μεταβάλωμεν τὸ μέγεθος τῶν πλευρῶν αὐτῶν χωρὶς ποσῶς νὰ ἀλλάξωμεν τὰς γωνίας αὐτῶν, ἑπομένως, ἵνα δύο τετράπλευρα ὦσιν ὅμοια, πρέπει νὰ ἔχωσι *καὶ* τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ *καὶ* τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους. Ὁ πλεονάζων λοιπὸν ὁρισμὸς τῶν ὁμοίων τριγώνων ἐδόθη ἵνα συμπαραλαμβάνηται εἰς τὸν γενικὸν καὶ πλήρη ὁρισμὸν τῶν ὁμοίων πολυγώνων εἰς τὴν τάξιν τῶν ὁποίων καὶ τὰ τρίγωνα ἀνήκουσι.

Εὐκόλως δὲ δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν ὅ,τι ἀνωτέρω περὶ τετραπλεύρου εἴπωμεν. Ἔστω, π. χ. τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Ἂν ἄξωμεν τὴν ΕΖ παράλληλον τῇ ΒΓ, τὰ δύο τετράπλευρα ΑΒΓΔ, ΑΕΖΔ θέλουσιν εἶναι προφανῶς ἰσογώνια, ἀλλὰ δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους. Διότι ἂν παραστήσωμεν διὰ Α'Δ' τὴν πλευρὰν ΑΔ τοῦ τετραπλεύρου ΑΕΖΔ, τὴν ὁμόλογον τῇ ΑΔ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ἔπρεπε νὰ ἔχωμεν τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων



$$ΑΔ : Α'Δ' = ΑΒ : ΑΕ = ΒΓ : ΕΖ = ΓΔ : ΔΖ.$$

Ἀλλὰ ΑΔ=Α'Δ'. Ἄρα καὶ ΑΒ=ΑΕ, ΒΓ=ΕΖ, κτλ, ἰσότητες προφανῶς ἄτοποι.

Ἀφ' ἑτέρου δυνάμεθα, χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΑΔ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, νὰ μεταβάλωμεν τὰς γωνίας αὐτοῦ Α, Β, Γ, Δ πλησιάζοντες ἢ ἀπομακρύνοντες τὰς κορυφὰς δύο ἀντιθέτων γωνιῶν Β καὶ Δ ἢ Α καὶ Γ· ἑπομένως, ἂν αἱ πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἦσαν ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς ἑτέρου τινὸς ὁμοίου τῷ ΑΒΓΔ, μεταβαλλομένων τῶν γωνιῶν ἤθελον εἶναι καὶ πάλιν ἀνάλογοι μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ αὐτοῦ τετραπλεύρου, πρὸς ὃ δὲν ἠδύνατο προφανῶς νὰ ἦναι ὅμοιον. Λοιπὸν διὰ τὰ πολύγωνα εἶναι ἀναγκαῖαι καὶ αἱ δύο συνθῆκαι, ὅπως ἀποφανθῶμεν ὅτι ταῦτα εἶναι ὅμοια.

Σχόλιον 2. Αἱ προηγούμεναι δύο προτάσεις, αἵτινες κυρίως ἀποτελοῦσι μίαν, καὶ ἡ περὶ τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης εἶναι αἱ σημαντικώτεραι καὶ γονιμώτεραι προτάσεις τῆς Γεωμετρίας, διότι σχεδὸν μόναι ἀρκοῦσιν εἰς ὅλας τὰς ἐφαρμογὰς καὶ εἰς τὴν λύσιν ὅλων σχεδὸν τῶν προβλημάτων, καὶ ὁ λόγος τούτου εἶναι πρόχειρος. Διότι πᾶν πολύγωνον ἀποσυντίθεται διὰ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ εἰς τρίγωνα, καὶ πᾶν τρίγωνον δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ὀρθογώνια διά τινος καθέτου, ἀγομένης ἔκ τινος αὐτοῦ κορυφῆς ἐπὶ τῆς βάσεως. Αἱ γενικαὶ λοιπὸν τῶν τριγώνων ἰδιότητες περιλαμβάνουσιν ἀῤῥήτως πως τὰς τῶν λοιπῶν εὐθυγράμμων σχημάτων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 21. ΘΕΩΡΗΜΑ.

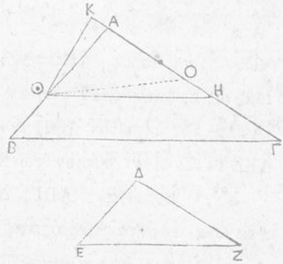
Δύο τρίγωνα, ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην καὶ δύο ὁποιασδήποτε πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια

1ον. *Ἐὰν αἱ ἴσαι γωνίαι ἦναι ὀρθαὶ ἢ ἀμβλεῖαι·*

2ον. *Ἐὰν αἱ ἀνάλογοι πλευραὶ περιέχωσι τὰς ἴσας γωνίας·*

3ον. *Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν, τῶν μὴ περιεχομένων ὑπὸ τῶν ἀναλόγων πλευρῶν, ἦναι μικρότερον ἢ μεγαλείτερον δύο ὀρθῶν.*

1ον. Ἔστωσαν ΑΒΓ, ΔΕΖ δύο τρίγωνα, ἔχοντα τὰς ὀρθὰς ἢ ἀμβλείας γωνίας Α καὶ Δ ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ ἀναλόγους, ἤτοι ΑΒ : ΔΕ = ΒΓ : ΕΖ. Λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ὅμοια.



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου λαμβάνομεν ΑΘ = ΔΕ, ΑΗ = ΔΖ, καὶ ἄγομεν τὴν ΘΗ. Λέγω ὅτι ἡ ΘΗ, ἥτις εἶναι ἴση τῇ ΕΖ (πρότ. 6, Α'), θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ.

Διότι, ἐὰν ἡ ΘΗ δὲν ἦναι παράλληλος τῇ ΒΓ, ἔστω ΘΟ ἡ ταύτῃ παράλληλος. Τότε τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΘΟ θέλουσιν εἶναι ὅμοια, ὡς ἰσογώνια, καὶ θέλομεν ἔχει

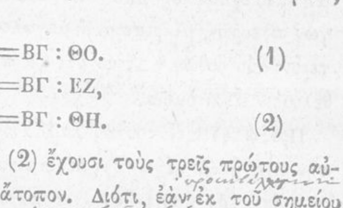
$$ΑΒ : ΑΘ = ΒΓ : ΘΟ. \qquad (1)$$

Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως $\quad ΑΒ : ΔΕ = ΒΓ : ΕΖ,$

ἤ, ὅπερ ταὐτό, $\quad ΑΒ : ΑΘ = ΒΓ : ΘΗ. \qquad (2)$

Ἄρα, ἐπειδὴ αἱ ἀναλογίαι (1) καὶ (2) ἔχουσι τοὺς τρεῖς πρώτους αὐτῶν ὅρους ἴσους, ΘΟ = ΘΗ, ὅπερ ἄτοπον. Διότι, ἐὰν [illegible] ΑΓ καί· ἐκ τοῦ σημείου Θ καταβιβάσωμεν τὴν ΘΚ κάθετον ἐπὶ [illegible] τῆς ΑΓ, ἐπειδὴ ἡ γωνία Α ὑπετέθη ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα, ἡ κάθετος ΘΚ θέλει κεῖσθαι πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς ΘΑ, καὶ ἠθέλαμεν τότε ἔχει πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου ΘΚ δύο ἴσας πλαγίας ΘΟ, ΘΗ (πρότ. 18, Α'). Λοιπὸν ἡ ΘΗ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΘΗ, ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ ΔΕΖ, εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΒΓ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

2ον. Ἔστω ἡ γωνία Α = Δ καὶ αἱ περιλαμβάνουσαι τὰς ἴσας ταύτας γωνίας πλευραὶ ἀνάλογοι, ἤτοι ΑΒ : ΔΕ = ΑΓ : ΔΖ. Λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ὅμοια.



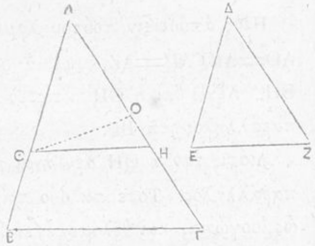
Διότι, ἐὰν λάβωμεν ΑΘ = ΔΕ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Θ ἄξωμεν τὴν ΘΗ παράλληλον τῇ ΒΓ, τὸ προκύπτον τρίγωνον ΑΘΗ θέλει εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΒΓ καὶ θέλομεν ἔχει

$$ΑΒ : ΑΘ = ΑΓ : ΑΗ. \qquad (1)$$

Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως $ΑΒ : ΔΕ = ΑΓ : ΔΖ$

ἢ, ὅπερ ταὐτό, $ΑΒ : ΑΘ = ΑΓ : ΔΖ. \qquad (2)$

Ἄρα, ἐπειδὴ αἱ ἀναλογίαι (1) καὶ (2) ἔχουσι τοὺς τρεῖς πρώτους αὐτῶν ὅρους ἴσους, ΑΗ=ΔΖ. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ΑΘΗ, ΔΕΖ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΘΗ εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΒΓ. Λοιπὸν τὸ ἴσον αὐτῷ ΔΕΖ θέλει εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΒΓ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.



3ον. Ἔστωσαν ΑΒΓ, ΔΕΖ δύο τρίγωνα ἔχοντα τὰς ὀξείας γωνίας Α καὶ Δ ἴσας, τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ ἀναλόγους, ἤτοι ΑΒ : ΔΕ =ΒΓ : ΕΖ, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν Γ καὶ Ζ, τῶν μὴ περιεχομένων ὑπὸ τῶν ἀναλόγων πλευρῶν, μικρότερον ἢ μεγαλείτερον δύο ὀρθῶν. Λέγω ὅτι τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ θέλουσιν εἶναι ὅμοια.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου λαμβάνομεν ΑΘ=ΔΕ, ΑΗ=ΔΖ καὶ ἄγομεν τὴν ΘΗ, ἥτις, λέγω, ὅτι θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ.

Διότι, ἐὰν ἡ ΘΗ δὲν ἦναι παράλληλος τῇ ΒΓ, ἔστω ΘΟ ἡ ταύτῃ παράλληλος. Τότε τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΘΟ θέλουσιν εἶναι ὅμοια, καὶ θέλομεν ἔχει

$$ΑΒ : ΑΘ = ΒΓ : ΘΟ. \qquad (1)$$

Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως $ΑΒ : ΔΕ = ΒΓ : ΕΖ,$

ἢ, ὅπερ ταὐτό, $ΑΒ : ΑΘ = ΒΓ : ΘΗ. \qquad (2)$

Ἄρα, ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν τριῶν πρώτων ὅρων τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2), ΘΟ=ΘΗ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΘΗΟ θέλει εἶναι ἰσοσκελές, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν ΘΗΟ ἴσην τῇ ΘΟΗ. Ἀλλ', ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΘΟ, ΑΒΓ, ἡ γωνία ΑΟΘ εἶναι ἴση τῇ ΑΓΒ. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΑΓΒ, ΘΟΗ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων αὐταῖς προσκειμένων γωνιῶν ΑΟΘ, ΘΟΗ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Ἀλλ' ἡ γωνία ΘΟΗ, οὖσα ἴση τῇ ΘΗΟ, εἶναι ἴση καὶ τῇ ΔΖΕ. Ἄρα $ΑΓΒ + ΔΖΕ = 2^{ορ}$, τοῦθ' ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Λοιπὸν ἡ ΘΗ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ, καὶ ἐπομένως τὸ τρίγωνον ΑΘΗ, ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ ΔΖΕ, εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΒΓ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 22. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο τρίγωνα, ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἢ καθέτους, εἶναι ὅμοια.

Διότι, ἂν παραστήσωμεν δι' Α, Β, Γ τὰς γωνίας τοῦ ἑνὸς καὶ δι' Α', Β', Γ' τὰς ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἢ καθέτων πλευρῶν σχηματιζομένας γωνίας τοῦ ἑτέρου, ἐπειδὴ δύο γωνίαι ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἢ καθέτους εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί, τέσσαρά τινα δυνατὸν νὰ ὑποτεθῶσι.

1ον. Ἢ ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ πρώτου εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν ἀντιστοίχων γωνιῶν τοῦ δευτέρου, ἤτοι

$$Α+Α'=2^{ορ},\ Β+Β'=2^{ορ},\ Γ+Γ'=2^{ορ}.$$

2ον. Ἢ ὅτι αἱ δύο γωνίαι τοῦ πρώτου εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν δύο ἀντιστοίχων γωνιῶν τοῦ δευτέρου καὶ ἡ τρίτη τοῦ πρώτου ἴση τῇ τρίτῃ τοῦ δευτέρου, ἤτοι

$$Α+Α'=2^{ορ},\ Β+Β'=2^{ορ},\ Γ=Γ'.$$

3ον. Ἢ ὅτι ἡ μία γωνία τοῦ πρώτου εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἀντιστοίχου γωνίας τοῦ δευτέρου καὶ αἱ δύο ἄλλαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἤτοι

$$Α+Α'=2^{ορ},\ Β=Β',\ Γ=Γ'.$$

4ον. Ἢ τελευταῖον ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ πρώτου εἶναι ἴσαι μὲ τὰς ἀντιστοίχους τρεῖς γωνίας τοῦ δευτέρου, ἤτοι

$$Α=Α',\ Β=Β',\ Γ=Γ'.$$

Ἀλλ' ἡ πρώτη τῶν ὑποθέσεων εἶναι ἄτοπος, διότι κατ' αὐτὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ἓξ γωνιῶν Α, Α', Β, Β', Γ, Γ' τῶν δύο τριγώνων εἶναι ἴσον μὲ ἓξ ὀρθάς, ὅπερ ἀδύνατον.

Ἡ δευτέρα εἶναι ὡσαύτως ἄτοπος, διότι κατ' αὐτὴν τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων γωνιῶν Α, Α', Β, Β' εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθάς, καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ἓξ θέλει εἶναι μεγαλείτερον τεσσάρων ὀρθῶν, ὅπερ πάλιν ἀδύνατον.

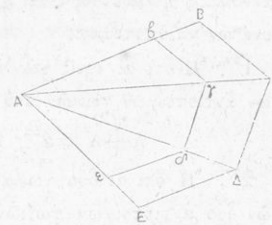
Ἡ τρίτη ὑπόθεσις εἶναι ἀσυμβίβαστος, διότι ὅταν δύο γωνίαι τοῦ ἑνὸς ἦναι ἴσαι μὲ τὰς δύο τοῦ ἑτέρου, ἀναγκαίως καὶ ἡ τρίτη τοῦ πρώτου θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην τοῦ δευτέρου:

Μᾶς μένει λοιπὸν ἡ τετάρτη ὑπόθεσις ὡς δυνατή. Λοιπὸν τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος τρίγωνα, ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, εἶναι ὅμοια.

Παρατήρησις. Ἐὰν κατασκευάσωμεν δύο τρίγωνα ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἢ καθέτους, θέλομεν εὐκόλως παρατηρήσει ὅτι ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι αἱ παράλληλοι ἢ αἱ κάθετοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 23. ΘΕΩΡΗΜΑ.

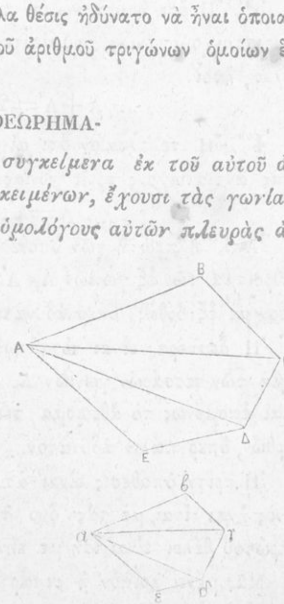
Δεδομένου πολυγώνου τινὸς δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν πάντοτε δεύτερον πολύγωνον οὕτως, ὥστε τὰ δύο πολύγωνα νὰ σύγκηνται ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων.



Ἔστω πολύγωνόν τι ΑΒΓΔΕ. Ἂν ἀπό τινος αὐτοῦ κορυφῆς Α ἄξωμεν τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ, καὶ ἐξ ἑνὸς σημείου β, κατ' ἀρέσκειαν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ληφθέντος, ἄξωμεν τὴν βγ παράλληλον τῇ ΒΓ, ἔπειτα τὴν γδ παράλληλον τῇ ΓΔ, καὶ τελευταῖον τὴν δε παράλληλον τῇ ΔΕ. Τὰ τρίγωνα Αβγ, Αγδ, Αδε θέλουσιν εἶναι ἀμοιβαίως ὅμοια μὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ, καὶ τὰ δύο πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, Αβγδε, ὧν ἡ πρὸς ἄλληλα θέσις ἠδύνατο νὰ ἦναι ὁποιαδήποτε, θέλουσι σύγκεισθαι ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων ὁμοίων ἕκαστον ἑκάστῳ καὶ ὁμοίως κειμένων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 24. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, αβγδε, συγκείμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων, ἔχουσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους, καὶ ἑπομένως εἶναι ὅμοια.



Διότι ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΒΓ, αβγ ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ=αβγ καὶ ἡ γωνία ΒΓΑ=βγα. Ὡσαύτως, ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΓΔ, αγδ ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΑΓΔ=αγδ. Λοιπὸν ΒΓΑ+ΑΓΔ =βγα+αγδ, ἢ ΒΓΔ=βγδ.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλομεν ἀποδείξει ὅτι ἡ γωνία ΓΔΕ=γδε κτλ. Λοιπὸν τὰ δύο πολύγωνα ΑΒΓΔΕ,

αβγδε ἔχουσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ. Προσέτι ἔχουσι καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους· διότι, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, κτλ. εἶναι ἀμοιβαίως ὅμοια μὲ τὰ τρίγωνα αβγ, αγδ, κτλ. ἔχομεν τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων

ΑΒ : αβ=ΒΓ : βγ=ΑΓ : αγ=ΓΔ : γδ=ΑΔ : αδ=ΔΕ : δε=ΑΕ : αε

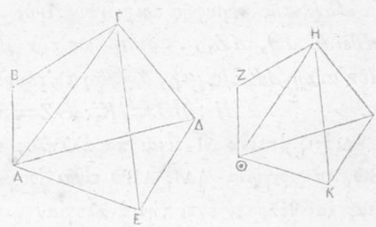
ἐξ ἧς ΑΒ : αβ=ΒΓ : βγ=ΓΔ : γδ=ΔΕ : δε=ΑΕ : αε.

Λοιπὸν δύο πολύγωνα, συγκείμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 25. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἀντιστρόφως, δύο ὅμοια πολύγωνα ἀποσυντίθενται εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα ὅμοια ἕκαστον ἑκάστῳ καὶ ὁμοίως κείμενα.

Ἔστωσαν ΑΒΓΔΕ, ΘΖΗΙΚ τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος ὅμοια πολύγωνα. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἄγομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ, καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς Θ, ὁμολόγου τῇ Α, τὰς διαγωνίους ΘΗ, ΘΙ.



Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα εἶναι ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι γωνίαι ΑΒΓ, ΘΖΗ εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ περιέχουσαι αὐτὰς πλευραὶ ἀνάλογοι, τουτέστιν ἔχομεν

ΑΒ : ΘΖ=ΒΓ : ΖΗ.

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΘΖΗ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων. Λοιπὸν καὶ ἡ γωνία ΒΓΑ=ΖΗΘ. Ἀλλὰ ΒΓΔ=ΖΗΙ. Ἄρα ΒΓΔ—ΒΓΑ= ΖΗΙ—ΖΗΘ, ἤτοι ΑΓΔ=ΘΗΙ.

Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΘΖΗ εἶναι ὅμοια, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

ΑΓ : ΘΗ=ΒΓ : ΖΗ.

Ἀλλὰ ΒΓ : ΖΗ=ΓΔ : ΗΙ.

Ἄρα ΑΓ : ΘΗ=ΓΔ : ΗΙ.

Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΔ, ΘΗΙ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων.

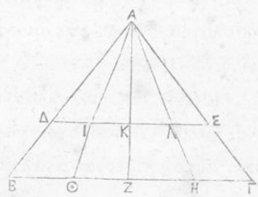
Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΓΔ, ΘΗΙ ἠθέλαμεν ἀποδείξει τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΔΕ, ΘΙΚ, ὡς ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΘΖΗ ἀποδείξαμεν τὴν τῶν τριγώνων ΑΓΔ, ΘΗΙ, καὶ οὕτω καθεξῆς ὁσαιδήποτε καὶ ἂν ἦναι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου. Λοιπὸν δύο ὅμοια πολύγωνα ἀποσυντίθενται εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα, ὅμοια ἕκαστον ἑκάστῳ καὶ ὁμοίως κείμενα.

Παρατήρησις. Δύο ὅμοια πολύγωνα δύνανται ν' ἀποσυντεθῶσι κατὰ πολλοὺς τρόπους εἰς τρίγωνα, ἀγομένων τῶν διαγωνίων ἐκ δύο ὁποιωνδήποτε ὁμολόγων κορυφῶν. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι εἰς δύο ὅμοια πολύγωνα δύο ὁμόλογοι διαγώνιοι ΓΕ, ΗΚ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς δύο ὁμόλογοι πλευραί· διότι αἱ διαγώνιοι ΓΕ, ΗΚ θέλουσιν εἶναι αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΓΔΕ, ΙΗΚ, ἅτινα ἀποτελοῦσι μέρος τῶν δύο πολυγώνων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 26. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ ἐκ τῆς κορυφῆς τριγώνου τινὸς ΑΒΓ ἀγόμεναι κατ' ἀρέσκειαν εὐθεῖαι ΑΘ, ΑΖ,... διαιροῦσι τὴν βάσιν ΒΓ καὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ ΔΕ εἰς μέρη ἀνάλογα· τουτέστιν οὕτως ὥστε

$$ΔΙ : ΒΘ = ΙΚ : ΘΖ = ΚΛ : ΖΗ = \ldots$$



Διότι, ἐπειδὴ ΔΙ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΘ, τὰ τρίγωνα ΑΔΙ, ΑΒΘ εἶναι ἰσογώνια, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$ΔΙ : ΒΘ = ΑΙ : ΑΘ. \quad (1)$$

Ὡσαύτως, ἐπειδὴ ΙΚ εἶναι παράλληλος τῇ ΘΖ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΙΚ, ΑΘΖ εἶναι ὅμοια, καὶ θέλομεν ἔχει

$$ΑΙ : ΑΘ = ΙΚ : ΘΖ. \quad (2)$$

Ἐκ τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2), ἕνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου ΑΙ : ΑΘ, πορίζόμεθα

$$ΔΙ : ΒΘ = ΙΚ : ΘΖ.$$

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται ὅτι ΙΚ : ΘΖ = ΚΛ : ΖΗ, κτλ. Λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΔΕ διῃρέθη εἰς τὰ σημεῖα Ι, Κ, Λ, κτλ. ὡς ἡ βάσις ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Θ, Ζ, Η, κτλ.

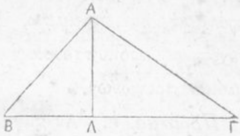
Πόρισμα. Λοιπὸν, ἂν ἡ βάσις ΒΓ ἦτο διῃρημένη εἰς ἴσα μέρη εἰς τὰ σημεῖα Θ, Ζ, Η, κτλ, ἡ παράλληλος αὐτῇ ΔΕ ἤθελε διαιρεθῇ ὡσαύτως εἰς ἴσα μέρη εἰς τὰ σημεῖα Ι, Κ, Λ, κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 27. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς Α τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ καταβιβασθῇ ἡ κάθετος ΑΔ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ, 1ον. *Τὰ δύο μερικὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ θέλουσιν εἶναι ὅμοια πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς τὸ ὅλον τρίγωνον ΑΒΓ*

2ον. *Ἑκάστη πλευρὰ ΑΒ ἢ ΑΓ θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ καὶ τοῦ προσκειμένου τῇ πλευρᾷ τμήματος ΒΔ ἢ ΔΓ*

3ον. *Ἡ κάθετος ΑΔ θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων ΒΔ, ΔΓ.*



1ον. Διότι τὰ δύο τρίγωνα ΒΑΔ, ΒΑΓ ἔχουσι τὴν γωνίαν Β κοινὴν καὶ τὰς γωνίας ΑΔΒ, ΒΑΓ ἴσας, ὡς ὀρθάς. Λοιπὸν καὶ ἡ τρίτη γωνία ΒΑΔ τοῦ πρώτου εἶναι ἴση τῇ τρίτῃ γωνίᾳ ΒΓΑ τοῦ δευτέρου. Ἄρα τὰ τρίγωνα ΒΑΔ, ΒΑΓ εἶναι ὅμοια, ὡς ἰσογώνια. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΑΓ εἶναι ὅμοιον τῷ ΒΑΓ. Λοιπὸν τὰ τρία τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΓΔ εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια πρὸς ἄλληλα.

2ον. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΒΑΔ εἶναι ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΒΑΓ, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι· τουτέστι ΒΔ (πλευρὰ τοῦ πρώτου τριγώνου ἀπέναντι τῆς γωνίας ΒΑΔ) εἶναι πρὸς ΑΒ (πλευρὰ τοῦ δετέρου τριγώνου ἀπέναντι τῆς γωνίας ΒΓΑ=ΒΑΔ) ὡς ΑΒ (ὑποτείνουσα τοῦ πρώτου τριγώνου) πρὸς ΒΓ (ὑποτείνουσαν τοῦ δευτέρου), ἤτοι

$$ΒΔ : ΑΒ = ΑΒ : ΒΓ. \qquad (1)$$

Ὡσαύτως, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΔΓ, ΒΑΓ εἶναι ὅμοια, θέλομεν ἔχει

$$ΔΓ : ΑΓ = ΑΓ : ΒΓ. \qquad (2)$$

Λοιπὸν ἑκάστη τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ προσκειμένου αὐτῇ τμήματος.

3ον. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΔΓ εἶναι ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι, τουτέστι

$$ΒΔ : ΑΔ = ΑΔ : ΔΓ. \qquad (3)$$

Λοιπὸν ἡ κάθετος ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων ΒΔ, ΔΓ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ.

Σχόλιον. Ἐπειδὴ εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν μέσων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων, ἐκ τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) πορίζόμεθα τὰς ἰσότητας

$$\overline{ΑΒ}^2 = ΒΔ \times ΒΓ, \qquad \overline{ΑΓ}^2 = ΔΓ \times ΒΓ,$$

ἃς προσθέτοντες κατὰ μέλη θέλομεν ἔχει

$$\overline{AB}^2+\overline{A\Gamma}^2=B\Delta\times B\Gamma+\Delta\Gamma\times B\Gamma=B\Gamma\times(B\Delta+\Delta\Gamma)=\overline{B\Gamma}^2,$$

τουτέστι τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων αὐτοῦ πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ. Οὕτως εὑρέθη ἀπροσδοκήτως πως καὶ δι' ὅλως διαφορετικοῦ τρόπου ἡ περὶ τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης ἀποδειχθεῖσα προηγουμένως πρότασις, καὶ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ πρότασις αὕτη εἶναι κυρίως συνέπεια, προκύπτουσα ἐκ τῆς ἀναλογίας τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν ὁμοίων τριγώνων.

Πόρισμα 1. Ἂν συγκρίνωμεν ἑκατέραν τῶν ἀνωτέρω δύο ἰσοτήτων μὲ τὴν ταὐτότητα $\overline{B\Gamma}^2=\overline{B\Gamma}^2$ καὶ πρὸς ἀλλήλας, πορίζόμεθα τὰς ἑξῆς τρεῖς ἀναλογίας

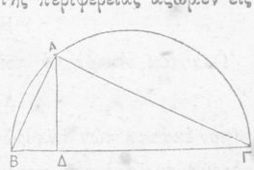
$$\overline{B\Gamma}^2:\overline{AB}^2=\overline{B\Gamma}^2:B\Delta\times B\Gamma,\quad \text{ἢ}\quad \overline{B\Gamma}:\overline{AB}=B\Gamma:B\Delta,$$

$$\overline{B\Gamma}^2:\overline{A\Gamma}^2=\overline{B\Gamma}^2:\Gamma\Delta\times B\Gamma,\quad \text{ἢ}\quad \overline{B\Gamma}^2:\overline{A\Gamma}^2=B\Gamma:\Gamma\Delta,$$

$$\overline{AB}^2:\overline{A\Gamma}^2=B\Delta\times B\Gamma:\Gamma\Delta\times B\Gamma,\quad \text{ἢ}\quad \overline{AB}^2:\overline{A\Gamma}^2=B\Delta:\Gamma\Delta,$$

δι' ὧν ἀποδεικνύονται ἐκ νέου τὰ ἐν τῷ τετάρτῳ πορίσματι τῆς 11 προτάσεως ἀποδειχθέντα.

Πόρισμα 2. Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Α τῆς περιφερείας ἄξωμεν εἰς τὰ ἄκρα Β καὶ Γ διαμέτρου τινὸς ΒΓ τὰς χορδὰς ΑΒ, ΑΓ καὶ τὴν κάθετον ΑΔ, ἐπειδὴ τὸ προκύπτον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς Α, κατὰ τὰ προαποδειχθέντα 1ον *ἡ κάθετος ΑΔ θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων ΒΔ καὶ ΔΓ τῆς διαμέτρου,* ἐν ἄλλαις λέξεσι, *τὸ τετράγωνον* $\overline{A\Delta}^2$ *θέλει εἶναι ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ ΓΔ×ΔΓ·* 2ον *ἑκατέρα τῶν χορδῶν ΑΒ, ΑΓ θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ καὶ τοῦπροσκειμένου αὐτῇ τμήματος ΒΔ, ΔΓ.*

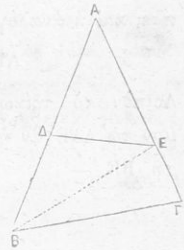


ΠΡΟΤΑΣΙΣ 28. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο τρίγωνα, ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας ἢ παραπληρωματικάς, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὀρθογώνια τῶν πλευρῶν, τῶν περιεχουσῶν τὰς ἴσας ἢ τὰς παραπληρωματικὰς γωνίας.

1^{ov}. Ἔστωσαν ΑΒΓ, ΑΔΕ δύο τρίγωνα, ἔχοντα τὴν γωνίαν Α κοινήν, λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει

$$\text{τρίγ. ΑΒΓ : τρίγ. ΑΔΕ} = \text{ΑΒ} \times \text{ΑΓ : ΑΔ} \times \text{ΑΕ} \qquad (\alpha)$$



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν τὴν ΒΕ. Ἐπειδὴ τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΕ ἔχουσι τὴν αὐτὴν κρυφὴν Β καὶ τὰς βάσεις αὐτῶν ΑΓ, ΑΕ ἐπ' εὐθείας, εἶναι ἰσοϋψῆ, ἑπομένως εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν (πρότ. 6, πόρ.), ἤτοι

$$\text{τρίγ. ΑΒΓ : τρίγ. ΑΒΕ} = \text{ΑΓ : ΑΕ}. \qquad (1)$$

Ὡσαύτως, ἐπειδὴ τὰ δυο τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΔΕ ἔχουσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν Ε καὶ τὰς βάσεις αὐτῶν ἐπ' εὐθείας, θέλομεν ἔχει

$$\text{τρίγ. ΑΒΕ : τρίγ. ΑΔΕ} = \text{ΑΒ : ΑΔ} \qquad (2).$$

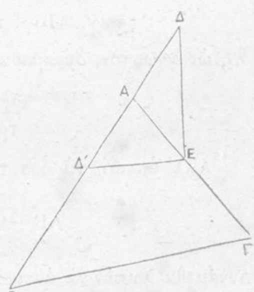
Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὁμοταγεῖς ὅρους τῶν δύο ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) καὶ ἐξαλείφοντες ἐκ τῶν δύο ὅρων τοῦ πρώτου λόγου τὸν κοινὸν παράγοντα τρίγ. ΑΒΕ, θέλομεν ἔχει

$$\text{τρίγ. ΑΒΓ : τρίγ ΑΔΕ} = \text{ΑΒ} \times \text{ΑΓ : ΑΔ} \times \text{ΑΕ}$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

2^{ov}. Ἔστωσαν ΑΒΓ, ΑΔΕ δύο τρίγωνα, ἔχοντα τὰς γωνίας ΒΑΓ, ΕΑΔ παραπληρωματικάς, λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει καὶ πάλιν

$$\text{τρίγ. ΑΒΓ : τρίγ. ΑΔΕ} = \text{ΑΒ} \times \text{ΑΓ : ΑΔ} \times \text{ΑΕ}.$$



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου λαμβάνομεν ΑΔ'=ΑΔ, καὶ ἄγομεν τὴν Δ'Ε. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΔ'Ε θέλουσιν εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν κορυφὴν Ε καὶ βάσεις ΑΔ, ΑΔ' ἴσας καὶ ἐπ' εὐθείας κειμένας (πρότ. 4, Α'). Ἀλλὰ κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, ἐπειδὴ τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔ'Ε ἔχουσι μίαν γωνίαν Α κοινήν, θέλομεν ἔχει

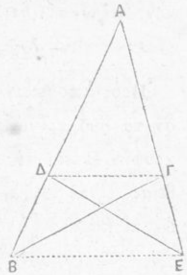
$$\text{τρίγ. ΑΒΓ : τρίγ. ΑΔ'Ε} = \text{ΑΒ} \times \text{ΑΓ : ΑΔ'} \times \text{ΑΕ}$$

ἢ ὅπερ ταὐτὸ

$$\text{τρίγ. ΑΒΓ : τρίγ. ΑΔΕ} = \text{ΑΒ} \times \text{ΑΓ : ΑΔ} \times \text{ΑΕ},$$

τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

Πόρισμα. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι $AB \times A\Gamma = A\Delta \times AE$, θέλομεν πορισθῆ ἐκ τῆς ἀναλογίας (α) ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ τριγώνῳ ΑΔΕ. Ἀλλ' ἐκ τῆς ἰσότητος $AB \times A\Gamma = A\Delta \times AE$ προκύπτει καὶ ἡ ἀναλογία



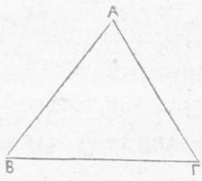
$$AB : A\Delta = AE : A\Gamma.$$

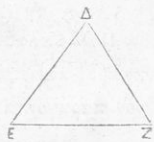
Λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θέλει εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ΑΔΕ ἂν ἡ εὐθεῖα ΔΓ ἦναι παράλληλος τῇ ΒΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 29. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὅμοια τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα δύο ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν.

Ἔστωσαν ΑΒΓ, ΔΕΖ δύο ὅμοια τρίγωνα, ἐν οἷς ἡ γωνία Α=Δ καὶ ἡ Β=Ε. Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει





$$\text{τρίγ. } AB\Gamma : \text{τρίγ. } \Delta EZ = \overline{AB}^2 : \overline{\Delta E}^2.$$

Διότι, ἐπειδὴ τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχουσι τὰς γωνίας Α καὶ Δ ἴσας, θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ προαποδειχθέντα τὴν ἀναλογίαν

$$\text{τρίγ. } AB\Gamma : \text{τρίγ. } \Delta EZ = AB \times A\Gamma : \Delta E \times \Delta Z$$

ἣν, ὡς γνωστὸν, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ οὕτω

$$\frac{\text{τρίγ. } AB\Gamma}{\text{τρίγ. } \Delta EZ} = \frac{AB}{\Delta E} \times \frac{A\Gamma}{\Delta Z}. \qquad (1)$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ὅμοια, ἔχομεν

$$AB : \Delta E = A\Gamma : \Delta Z \text{ ἢ } \frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}.$$

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν (1) τὸν λόγον $\frac{A\Gamma}{\Delta Z}$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ $\frac{AB}{\Delta E}$, καὶ θέλομεν ἔχει

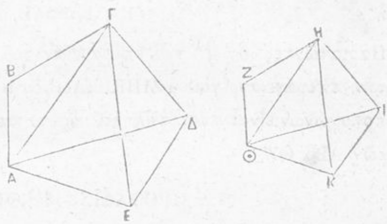
$$\text{τρίγ. } AB\Gamma : \text{τρίγ. } \Delta EZ = \overline{AB}^2 : \overline{\Delta Z}^2,$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 30. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ μὲν περίμετροι τῶν ὁμοίων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς δύο ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραί, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι αὐτῶν ὡς τὰ τετράγωνα δύο ὁμολόγων πλευρῶν.

1^{ον}. Ἔστωσαν ΑΒΓΔΕ, ΘΖΗΙΚ δύο τινὰ ὅμοια πολύγωνα, Π ἡ περίμετρος τοῦ πρώτου καὶ Π΄ ἡ περίμετρος τοῦ δευτέρου καὶ ΑΒ, ΘΖ δύο ὁποιαιδήποτε ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραί. Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει



$$\Pi : \Pi' = AB : \Theta Z.$$

Διότι, ἐπειδὴ τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος πολύγωνα εἶναι ὅμοια, ἔχομεν τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων

$$AB : \Theta Z = B\Gamma : ZH = \Gamma\Delta : HI = \Delta E : IK = AE : \Theta K,$$

ἐξ ἧς κατὰ γνωστὸν ἀριθμητικὸν θεώρημα πορίζόμεθα τὴν ἀναλογίαν

$$AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E + AE : \Theta Z + ZH + HI + IK + \Theta K = AB : \Theta Z$$

ἢ

$$\Pi : \Pi' = AB : \Theta Z,$$

τοῦθ᾽ ὅπερ ἐπρόκειτο κατὰ πρῶτον ν᾽ ἀποδείξωμεν.

2^{ον}. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΘΖΗ εἶναι ὅμοια, θέλομεν ἔχει (πρότ. 29).

$$\text{τρίγ. } AB\Gamma : \text{τρίγ. } \Theta ZH = \overline{A\Gamma}^2 : \overline{\Theta H}^2. \qquad (1)$$

Ὡσαύτως, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΓΔ, ΘΗΙ εἶναι ὅμοια, θέλομεν ἔχει

$$\text{τρίγ. } A\Gamma\Delta : \text{τρίγ. } \Theta HI = \overline{A\Gamma}^2 : \overline{\Theta H}^2. \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2), ἕνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου $\overline{A\Gamma}^2 : \overline{\Theta H}^2$, πορίζόμεθα τὴν ἀναλογίαν

$$\text{τρίγ. } AB\Gamma : \text{τρίγ. } \Theta ZH = \text{τρίγ. } A\Gamma\Delta : \text{τρίγ. } \Theta HI. \qquad (3)$$

Δι᾽ ὁμοίων συλλογισμῶν ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι

$$\text{τρίγ. } A\Gamma\Delta : \text{τρίγ. } \Theta HI = \text{τρίγ. } A\Delta E : \text{τρίγ. } \Theta IK, \qquad (4)$$

καὶ ἐκ τῶν ἀναλογιῶν (3) καὶ (4) ἠθέλαμεν πορισθῇ τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων

$$\text{τρίγ. } AB\Gamma : \text{τρίγ. } \Theta ZH = \text{τρίγ. } A\Gamma\Delta : \text{τρίγ. } \Theta HI = \text{τρίγ. } A\Delta E : \text{τρίγ. } \Theta IK,$$

ἐξ ἧς θέλομεν πορισθῇ τὴν ἀναλογίαν

$$ΑΒΓ+ΑΓΔ+ΑΔΕ : ΘΖΗ+ΘΗΙ+ΘΙΚ=ΑΒΓ : ΘΖΗ.$$

Ἀλλ' $$ΑΒΓ : ΘΖΗ=\overline{ΑΒ}^2 : \overline{ΘΖ}^2.$$

Ἄρα $$ΑΒΓ+ΑΓΔ+ΑΔΕ : ΘΖΗ+ΘΗΙ+ΘΙΚ=\overline{ΑΒ}^2 : \overline{ΘΖ}^2,$$

ἢ $$Ε : Ε'=\overline{ΑΒ}^2 : \overline{ΘΖ}^2.$$

Παριστῶντες δι' Ε τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ καὶ δι' Ε' τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΘΖΗΙΚ. Λοιπὸν αἱ ἐπιφάνειαι Ε, Ε' τῶν ὁμοίων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα δύο ὁμολόγων πλευρῶν ΑΒ, ΘΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 31. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὰ μέρη δύο χορδῶν, τεμνομένων ἐντὸς κύκλου τινός, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Ἔστωσαν ΑΒ, ΓΔ δύο χορδαὶ, τεμνόμεναι εἴς τι σημεῖον Ο, ἐντὸς τοῦ κύκλου κείμενον, λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει

$$ΑΟ : ΟΔ=ΟΓ : ΟΒ.$$

Διότι, ἂν ἄξωμεν τὰς χορδὰς ΑΓ, ΒΔ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΟ, ΒΟΔ θέλουσιν εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ΑΟΓ, ΒΟΔ ἴσας, τὰς γωνίας ΑΓΟ, ΟΒΔ ὡσαύτως ἴσας, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα ΑΓΒΔ, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$ΑΟ : ΟΔ=ΓΟ : ΟΒ,$$

ἥτις ἀποδεικνύει τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος θεώρημα.

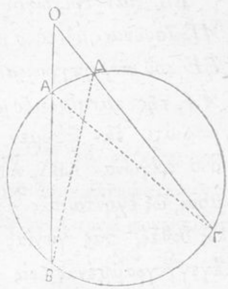
Πόρισμα. Ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης προκύπτει ἡ ἰσότης $ΑΟ\times ΟΒ =ΔΟ\times ΓΟ$· τουτέστι το ὀρθογώνιον τῶν δύο μερῶν τῆς μιᾶς τῶν χορδῶν ἰσοῦται τῷ ὀρθογωνίῳ τῶν δύο μερῶν τῆς ἑτέρας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 32. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Ο, ἐκτὸς τοῦ κύκλου ληφθέντος, ἀχθῶσιν αἱ τέμνουσαι ΟΒ, ΟΓ, περατούμεναι εἰς τὸ κοῖλον τόξον ΒΓ, λέγω ὅτι αἱ ὁλικαὶ τέμνουσαι θέλουσιν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἐξωτερικὰ αὐτῶν μέρη, ἤτοι ὅτι θέλομεν ἔχει

$$ΟΒ : ΟΓ=ΟΔ : ΟΑ.$$

Διότι, ἐὰν ἄξωμεν τὰς χορδὰς ΑΓ, ΒΔ, τὰ δύο τρίγωνα ΟΒΔ, ΟΑΓ θέλουσιν εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὴν γωνίαν Ο κοινήν, τὰς γωνίας ΑΓΟ, ΟΒΔ ἴσας, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα ΑΒΓΔ, καὶ θέλομεν ἔχει



ΟΒ : ΟΓ = ΟΔ : ΟΑ.

Πόρισμα. Λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΟΑ × ΟΒ ἰσοῦται τῷ ὀρθογωνίῳ ΟΓ × ΟΔ.

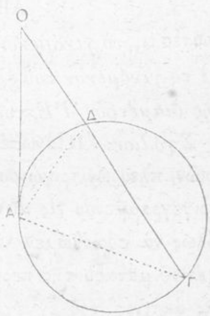
Σχόλιον. Εὐκόλως δύναταί τις νὰ παρατηρήσῃ τὴν μεταξὺ τῆς προτάσεως ταύτης καὶ τῆς προηγουμένης σχέσιν, καὶ ὅτι δὲν διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων εἰμὴ καθόσον εἰς τὴν προηγουμένην πρότασιν τὸ σημεῖον τῆς κοινῆς τομῆς τῶν δύο εὐθειῶν ἔκειτο ἐντὸς τοῦ κύκλου, ἐνῷ εἰς τὴν παροῦσαν κεῖται ἐκτός.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 33. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Ο, ἐκτὸς τοῦ κύκλου ληφθέντος, ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΟΑ καὶ τέμνουσά τις ΟΓ, ἡ ἐφαπτομένη θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς τεμνούσης ΟΓ καὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ αὐτῆς μέρους ΟΔ· τουτέστι θέλομεν ἔχει

ΟΓ : ΟΑ = ΟΑ : ΟΔ.

Διότι, ἐὰν ἄξωμεν τὰς χορδὰς ΑΔ, ΑΓ, τὰ δύο τρίγωνα ΟΑΔ, ΟΑΓ θέλουσιν εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὴν γωνίαν Ο κοινήν, τὰς γωνίας ΑΓΟ, ΟΑΔ ἴσας, ὡς ἐχούσας διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΔ (πρότ. 20, Β'), καὶ θέλομεν ἔχει



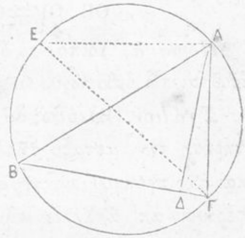
ΟΓ : ΟΑ = ΟΑ : ΘΔ.

Πόρισμα. Λοιπὸν τὸ τετράγωνον $\overline{\text{ΟΑ}}^2$ ἰσοῦται τῷ ὀρθογωνίῳ ΟΓ × ΟΔ.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῆς προηγουμένης· διότι ἡ ἐφαπτομένη ΟΑ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ ὅριον τῶν θέσεων, ἃς ἤθελε λάβει τέμνουσά τις ΟΓ στρεφομένη πέριξ τοῦ σημείου Ο, μέχρις οὗ τὰ δύο σημεῖα Δ καὶ Γ τῆς τομῆς ταὐτισθῶσιν εἰς Α (ὅρα βιβλ. Β', ορισμ. 13, σημ.).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 34. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ ἰσοῦται μὲ τὸ σχηματιζόμενον ὀρθογώνιον ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΓΕ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον κύκλου καὶ τῆς καθέτου ΑΔ, τῆς καταβιβαζομένης ἐπὶ τῆς τρίτης αὐτοῦ πλευρᾶς ΒΓ.



Διότι, ἐὰν ἄξωμεν τὴν χορδὴν ΑΕ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΕΓ θέλουσιν εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας ΑΔΒ, ΕΑΓ ἴσας, ὡς ὀρθὰς, τὰς γωνίας ΑΒΔ, ΑΕΓ ἴσας, ὡς ἐγεγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα ΑΕΒΓ, καὶ θέλομεν ἔχει

$$AB : \Gamma E = A\Delta : A\Gamma$$

ἐξ ἧς

$$AB \times A\Gamma = \Gamma E \times A\Delta.$$

Λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ ἰσοῦται κτλ.

Πόρισμα. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος ἐπὶ ΒΓ, θέλομεν ἔχει

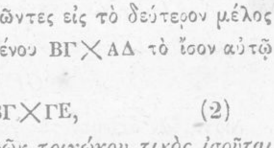
$$AB \times A\Gamma \times B\Gamma = B\Gamma \times A\Delta \times \Gamma E. \qquad (1)$$

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον ΒΓ×ΑΔ παριστᾷ τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (πρότ. 6). Ἄρα ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος (1) ἀντὶ τοῦ γινομένου ΒΓ×ΑΔ τὸ ἴσον αὐτῷ 2ΑΒΓ, θέλομεν ἔχει

$$AB \times A\Gamma \times B\Gamma = 2AB\Gamma \times \Gamma E, \qquad (2)$$

τουτέστι, *τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου τινὸς ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ ἐπὶ τὸ διπλάσιον τῆς διαμέτρου ΓΕ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον κύκλου.*

Σχόλιον. Ἡ ἀνωτέρω ἰσότης (2) μᾶς παρέχει τὴν μεταξὺ τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου τινὸς, τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτοῦ καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου ὑπάρχουσαν σχέσιν, καὶ δυνάμεθα εὐκόλως νὰ πορισθῶμεν ἑτέραν ἰσότητα, παριστῶσαν τὴν ὑπάρχουσαν σχέσιν μεταξὺ τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου, τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτοῦ καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου.



Διότι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐν ᾧ Ο εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου, θέλομεν προφανῶς ἔχει

$$AB\Gamma = AO\Gamma + BO\Gamma + AOB.$$

Ἀλλ' $ΑΟΓ = ΑΓ \times \frac{1}{2} ΟΖ$, $ΒΟΓ = ΒΓ \times \frac{1}{2} ΟΕ$ καὶ $ΑΟΒ = ΑΒ \times \frac{1}{2} ΟΔ$.

Ἄρα $$ΑΒΓ = ΑΓ \times \frac{1}{2} ΟΖ + ΒΓ \times \frac{1}{2} ΟΕ + ΑΒ \times \frac{1}{2} ΟΔ,$$

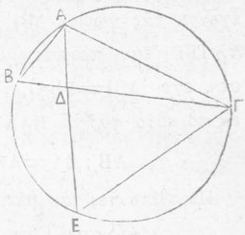
ἢ, ἐπειδὴ $ΟΖ = ΟΕ = ΟΔ$

$$ΑΒΓ = (ΑΓ + ΒΓ + ΑΒ) \times \frac{1}{2} ΟΖ,$$

τουτέστι, τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου,

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 35. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἡ γωνία Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ διαιρεθῇ εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τῆς εὐθείας ΑΔ, τὸ ὀρθογώνιον τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τῶν τμημάτων ΒΔ, ΓΔ, πλέον τὸ τετράγωνον τῆς διχοτομούσης ΑΔ.



Διότι, ἐὰν περιγράψωμεν κύκλον εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, προεκτείνωμεν τὴν διχοτομοῦσαν ΑΔ μέχρι τῆς περιφερείας καὶ ἄξωμεν τὴν ΓΕ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΕΓ θέλουσιν εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας ΒΑΔ, ΕΑΓ ἴσας, ἐκ κατασκευῆς, τὰς γωνίας ΑΒΔ, ΑΕΓ ἴσας, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα ΑΒΕΓ, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$ΒΑ : ΑΕ = ΑΔ : ΑΓ,$$

ἐξ ἧς $$ΒΑ \times ΑΓ = ΑΕ \times ΑΔ.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν τελευταίαν ἰσότητα ἀντὶ τοῦ ΑΕ τὸ ἴσον αὐτῷ ἄθροισμα ΑΔ+ΔΕ, θέλομεν ἔχει

$$ΑΒ \times ΑΓ = (ΑΔ + ΔΕ) \times ΑΔ = \overline{ΑΔ}^2 + ΑΔ \times ΔΕ,$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ $ΑΔ \times ΔΕ = ΒΔ \times ΔΓ$ (πρότ. 31), θέλομεν ἔχει

$$ΑΒ \times ΑΓ = \overline{ΑΔ}^2 + ΒΔ \times ΔΓ,$$

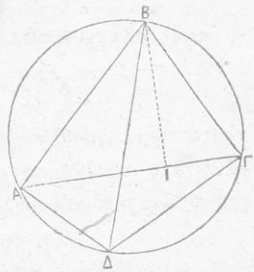
τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 36. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς πᾶν ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον τὸ ὀρθογώνιον τῶν δια-

γωνίων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρῶν· τουτέστιν

$$ΑΓ \times ΒΔ = ΑΒ \times ΔΓ + ΑΔ \times ΒΓ.$$



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν τὴν ΒΙ οὕτως, ὥστε ἡ γωνία ΓΒΙ νὰ ἦναι ἴση τῇ ΑΒΔ, καὶ προεκβάλλομεν αὐτὴν μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ι.

Τὰ δύο τρίγωνα ΒΙΓ, ΑΒΔ θέλουσιν εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας ΓΒΙ, ΑΒΔ ἴσας, ἐκ κατασκευῆς, τὰς γωνίας ΙΓΒ, ΑΔΒ ἴσας, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα ΑΔΓΒ, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν μεταξὺ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ἀναλογίαν

$$ΑΔ : ΓΙ = ΒΔ : ΒΓ, \text{ ἐξ ἧς } ΑΔ \times ΒΓ = ΓΙ \times ΒΔ \qquad (1)$$

Ὡσαύτως, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΙ, ΒΔΓ θέλουσιν εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας ΑΒΙ, ΓΒΔ ἴσας (διότι, τῆς γωνίας ΑΒΔ οὔσης ἴσης τῇ ΙΒΓ, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς ἑκατέραν τὴν αὐτὴν γωνίαν ΔΒΙ, θέλομεν ἔχει ΑΒΙ=ΓΒΔ), τὰς γωνίας ΒΑΙ, ΒΔΓ ἴσας, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα ΒΑΔΓ, καὶ θέλομεν ἔχει

$$ΑΒ : ΒΔ = ΑΙ : ΓΔ, \text{ ἐξ ἧς } ΑΒ \times ΔΓ = ΒΔ \times ΑΙ. \qquad (2)$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) καὶ παρατηροῦντες ὅτι

$$ΑΙ \times ΒΔ + ΓΙ \times ΒΔ = ΒΔ \times (ΑΙ + ΙΓ) = ΒΔ \times ΑΓ,$$

θέλομεν ἔχει

$$ΑΓ \times ΒΔ = ΒΑ \times ΓΔ + ΑΔ \times ΒΓ.$$

Λοιπὸν εἰς πᾶν ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον τὸ ὀρθογώνιον τῶν διαγωνίων κτλ.

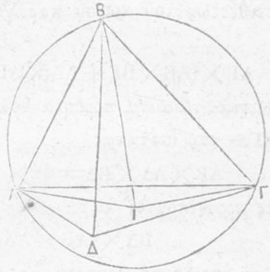
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 37. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς πᾶν μὴ ἐγγράψιμον τετράπλευρον τὸ ὀρθογώνιον τῶν διαγωνίων εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρῶν.

Διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν Α, Β, Γ ἂς διέλθῃ περιφέρεια κύκλου, ἥτις, καθ' ὑπόθεσιν, δὲν θέλει διέρχεσθαι διὰ τῆς τετάρτης Δ. Ἂς κατασκευασθῇ ἡ γωνία ΑΒΙ=ΔΒΓ καὶ ἡ γωνία ΒΑΙ=ΒΔΓ. Ἡ εὐθεῖα ΑΙ δὲν δύναται νὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ΑΓ· διότι, τοῦ σημείου Δ μὴ κειμένου ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ γωνία ΒΔΓ εἶναι διάφορος τῆς ΒΑΓ (πρότ. 21, 22, Β'). Τελευταῖον ἂς ἀχθῇ ἡ ΙΓ.

Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΙ, ΒΔΓ, ἰσογώνια ἐκ κατασκευῆς, εἶναι ὅμοια καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AI} = \mathrm{B\Delta} : \Delta\Gamma, \text{ ἐξ ἧς } \mathrm{AI} \times \mathrm{B\Delta} = \mathrm{AB} \times \Delta\Gamma. \quad (1)$$



Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΙΒΓ εἶναι ὡσαύτως ὅμοια. Διότι, ἐὰν ἀπὸ τῶν ἴσων γωνιῶν ΑΒΙ, ΔΒΓ ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν μέρος ΔΒΙ, αἱ μένουσαι γωνίαι ΑΒΔ, ΙΒΓ θέλουσιν εἶναι ἴσαι, καὶ ἀφ' ἑτέρου αἱ ἴσαι αὗται γωνίαι περιέχονται μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΒΙ, ΒΔΓ, ἐξ ὧν πορίζόμεθα τὴν ἀναλογίαν ΑΒ : ΒΔ =ΒΙ : ΒΓ. Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΙΒΓ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$\mathrm{A\Delta} : \mathrm{I\Gamma} = \mathrm{B\Delta} : \mathrm{B\Gamma}, \text{ ἐξ ἧς } \mathrm{I\Gamma} \times \mathrm{B\Delta} = \mathrm{A\Delta} \times \mathrm{B\Gamma}. \quad (2)$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) θέλομεν ἔχει

$$\mathrm{B\Delta} \times (\mathrm{AI} + \mathrm{I\Gamma}) = \mathrm{AB} \times \Gamma\Delta + \mathrm{A\Delta} \times \mathrm{B\Gamma}.$$

Ἀλλὰ $\mathrm{AI} + \mathrm{I\Gamma} > \mathrm{A\Gamma}$.

Ἄρα $$\mathrm{B\Delta} \times \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{AB} \times \Gamma\Delta + \mathrm{A\Delta} \times \mathrm{B\Gamma}.$$

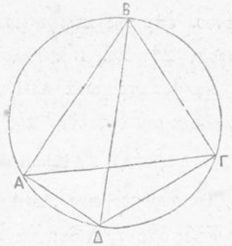
Σχόλιον. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι, ἐὰν εἰς τετράπλευρόν τι τὸ ὀρθογώνιον τῶν διαγωνίων ἦναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 38. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ διαγώνιοι ἐγγεγραμμένου τινὸς τετραπλεύρου εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ ἀθροίσματα τῶν ὀρθογωνίων τῶν πλευρῶν, τῶν περατουμένων εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν· τουτέστιν

$$A\Gamma : B\Delta = AB \times A\Delta + B\Gamma \times \Gamma\Delta : AB \times B\Gamma + A\Delta \times \Delta\Gamma.$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἂς παραστήσωμεν δι' a τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος τετράπλευρον κύκλου. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῷ πορίσματι τῆς 34 προτάσεως τοῦ παρόντος βιβλίου θέλομεν ἔχει εἰς μὲν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὴν ἰσότητα



$$AB\times B\Gamma\times A\Gamma = 4\alpha\times AB\Gamma, \quad (1)$$

εἰς δὲ τὸ τρίγωνον ΑΔΓ

$$A\Delta\times\Delta\Gamma\times A\Gamma = 4\alpha\times A\Delta\Gamma. \quad (2)$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν, ἐξαγομένου ἐκτὸς παρενθέσεως τοῦ κοινοῦ παράγοντος ΑΓ,

$$A\Gamma\times(AB\times B\Gamma + A\Delta\times\Delta\Gamma) = 4\alpha\times(AB\Gamma + A\Delta\Gamma) = 4\alpha\times AB\Gamma\Delta \quad (3)$$

Κατὰ τὸ αὐτὸ πόρισμα θέλομεν ὡσαύτως ἔχει εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ τὰς ἰσότητας

$$AB\times A\Delta\times B\Delta = 4\alpha\times AB\Delta, \quad B\Gamma\times\Gamma\Delta\times B\Delta = 4\alpha\times B\Gamma\Delta,$$

ἃς προσθέτοντες κατὰ μέληποριζόμεθα τὴν ἑξῆς

$$B\Delta\times(AB\times A\Delta + B\Gamma\times\Gamma\Delta) = 4\alpha\times AB\Gamma\Delta \quad (4)$$

Καὶ ἐπειδὴ τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων (3) καὶ (4) εἶναι ἴσα, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$A\Gamma\times(AB\times B\Gamma + A\Delta\times\Delta\Gamma) = B\Delta\times(AB\times A\Delta + B\Gamma\times\Gamma\Delta)$$

ἐξ ἧς κατὰ γνωστὸν Ἀριθμητικὸν θεώρημα ποριζόμεθα τὴν ἀναλογίαν

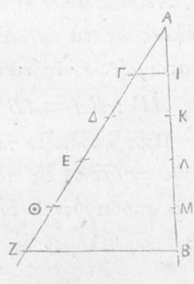
$$A\Gamma : B\Delta = AB\times A\Delta + B\Gamma\times\Gamma\Delta : AB\times B\Gamma + A\Delta\times\Delta\Gamma,$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΑ ΕΙΣ ΤΟ Γ'. ΒΙΒΛΙΟΝ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.

Νὰ διαιρεθῇ δεδομένη εὐθεῖα εἰς ἀριθμόν τινα ἴσων μερῶν ἢ εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων εὐθειῶν.



Ἂς ὑποθέσωμεν 1ον ὅτι προτιθέμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὴν δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ εἰς πέντε ἴσα μέρη.

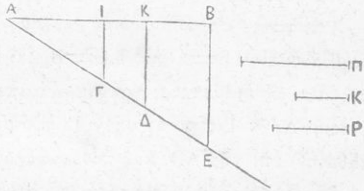
Πρὸς τοῦτο ἐκ τοῦ ἄκρου αὐτῆς Α ἄγομεν τὴν ἀπροσδιόριστον εὐθεῖαν ΑΖ, λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς ΑΓ κατ' ἀρέσκειαν καὶ φέρομεν τὴν ΑΓ πεντάκις ἐπὶ τῆς ΑΖ. Ἑνόνομεν ἀκολούθως τὸ τελευταῖον σημεῖον τῆς διαιρέσεως Ζ μὲ τὸ ἄκρον Β τῆς δεδομένης εὐθείας διὰ τῆς ΖΒ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ ἄγομεν τὴν ΓΙ παράλληλον τῇ ΖΒ. Λέγω ὅτι ΑΙ θέλει εἶναι τὸ πέμπτον μέρος τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ, καὶ ἑπομένως, ἐὰν ἡ ΑΙ φερθῇ πεντάκις ἐπὶ τῆς ΑΒ, διαιρεῖται αὕτη εἰς πέντε ἴσα μέρη.

Διότι, ἐπειδὴ ΓΙ εἶναι παράλληλος τῇ ΖΒ, αἱ πλευραὶ ΑΖ, ΑΒ τῆς γωνίας ΖΑΒ τέμνονται ἀναλόγως εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Ι (πρότ. 16), τουτέστι θέλομεν ἔχει

$$ΑΖ : ΑΒ = ΑΓ : ΑΙ.$$

Ἀλλὰ ΑΓ εἶναι τὸ πέμπτον μέρος τῆς ΑΖ. Λοιπὸν καὶ ΑΙ εἶναι τὸ πέμπτον μέρος τῆς ΑΒ.

2ον. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ἡ δεδομένη εὐθεῖα ΑΒ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν δεδομένων εὐθειῶν Μ, Κ, Ρ.



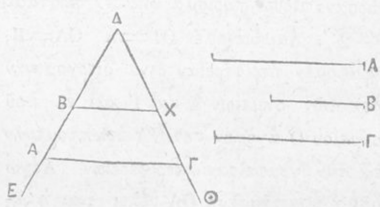
Ἐκ τοῦ ἄκρου Α ἄγομεν κατ' ἀρέσκειαν τὴν ἀπροσδιόριστον εὐθεῖαν ΑΖ, καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς ΑΓ=Π, ΓΔ=Κ, ΔΕ=Ρ, ἑνόνομεν τὰ ἄκρα Β καὶ Ε διὰ τῆς εὐθείας ΒΕ, καὶ ἐκ τῶν σημείων Γ, Δ ἄγομεν τὰς εὐθείας ΓΙ, ΔΚ παραλλήλους τῇ ΕΒ. Λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ θέλει διαιρεθῇ οὕτως εἰς μέρη ΑΙ, ΙΚ, ΚΒ ἀνάλογα τῶν εὐθειῶν Π, Κ, Ρ.

Διότι, ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΓΙ, ΔΚ, ΕΒ, τὰ μέρη ΑΙ, ΙΚ, ΚΒ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ μέρη ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ (πρότ. 16). Ἀλλ', ἐκ κατασκευῆς, ΑΓ=Π, ΓΔ=Κ, ΔΕ=Ρ. Λοιπὸν κτλ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.

Νὰ εὑρεθῇ τετάρτη ἀνάλογος τριῶν δεδομένων εὐθειῶν Α, Β, Γ, τουτέστιν εὐθεῖά τις Χ, ἥτις νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῶν τριῶν δεδομένων τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν Α : Β=Γ : Χ.

Ἐξ ἑνὸς σημείου Δ ἄγομεν κατ' ἀρέσκειαν δύο ἀπροσδιορίστους εὐθείας ΔΕ, ΔΘ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς πρώτης ΔΑ=Α, ΔΒ=Β, καὶ ἐπὶ τῆς δευτέρας ΔΓ=Γ, ἑνόνομεν τὰ σημεῖα Α καὶ Γ διὰ τῆς ΑΓ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Β ἄγομεν τὴν ΒΧ παράλληλον τῇ ΑΓ. Λέγω



ὅτι ΔΧ θέλει παριστᾷ τὴν ζητουμένην τετάρτην ἀνάλογον Χ.

Διότι, ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΒΧ καὶ ΑΓ, ἔχομεν

$$ΔΑ : ΔΒ = ΔΓ : ΔΧ,$$

ἢ, ὅπερ ταὐτὸ,

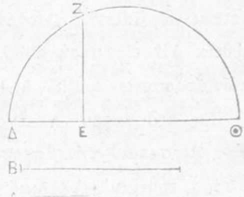
$$Α : Β = Γ : ΔΧ.$$

Ἄρα ΔΧ=Χ.

Πόρισμα. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου εὑρίσκομεν τρίτην ἀνάλογον δύο δεδομένων εὐθειῶν Α καὶ Β, διότι ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ ζητήσωμεν ὡς προεξεθέσαμεν τετάρτην ἀνάλογον τῶν τριῶν εὐθειῶν Α, Β, Β.

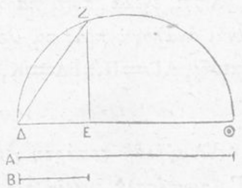
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.

Νὰ εὑρεθῇ μέση ἀνάλογος δύο δεδομένων εὐθειῶν Α καὶ Β.

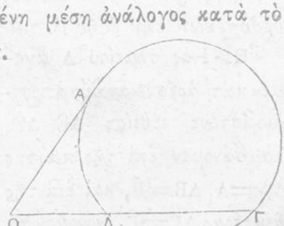


Ἐπί τινος ἀπροσδιορίστου εὐθείας ΔΘ λαμβάνομεν ΔΕ=Α καὶ ΕΘ=Β καὶ ἐπὶ τῆς ΔΘ, ὡς διαμέτρου, γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν ΔΖΘ. Εἰς τὸ σημεῖον Ε ὑψόνομεν κάθετον ἐπὶ τῆς ΔΘ, καὶ προεκβάλλομεν αὐτὴν μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Κατὰ τὸ πόρισμα 1 τῆς 27 προτάσεως, ΕΖ θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων ΔΕ καὶ ΕΘ τῆς διαμέτρου. Ἀλλὰ ΔΕ=Α καὶ ΕΘ=Β. Ἄρα ΕΖ εἶναι ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος.

Τὸ αὐτὸ πρόβλημα λύεται καὶ κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους.



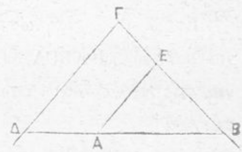
1ον. Ἐπί τινος ἀπροσδιορίστου εὐθείας λαμβάνομεν ΔΘ=Α, ΔΕ=Β, καὶ ἐπὶ τῆς ΔΘ, ὡς διαμέτρου, γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν. Εἰς τὸ σημεῖον Ε ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τῆς ΔΘ, προεκβάλλομεν αὐτὴν μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν, καὶ ἄγομεν τὴν ΔΖ, ἥτις θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος κατὰ τὸ προαναφερθὲν πόρισμα τῆς 27 προτάσεως.



2ον. Λαμβάνομεν ΟΓ=Α, ΟΔ=Β, γράφομεν περιφέρειάν τινα διερχομένην διὰ τῶν σημείων Δ καὶ Γ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ο ἄγομεν τὴν ΟΑ ἐφαπτομένην εἰς τὴν γραφεῖσαν περιφέρειαν. Λέγω ὅτι ἡ ἐφαπτομένη ΟΑ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος τῶν δεδομένων εὐθειῶν Α καὶ Β. Διότι αὕτη κατὰ τὴν 33 πρότασιν τοῦ παρόντος βιβλίου εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν ΟΓ καὶ ΟΔ, καὶ ἐλήφθη ΟΓ=Α καὶ ΟΔ=Β.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.

Ἐξ ἑνὸς σημείου Α, ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΓΔ κειμένου, ν' ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΔ οὕτως, ὥστε τὰ μέρη αὐτῆς ΑΒ, ΑΔ, τὰ μεταξὺ τοῦ σημείου Α καὶ τῶν δύο τῆς γωνίας πλευρῶν περιεχόμενα, νὰ ἦναι ἴσα.



Ἐκ τοῦ δεδομένου σημείου Α ἄγομεν τὴν ΑΕ παράλληλον τῇ ΓΔ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΓΒ τὴν ἀπόστασιν ΕΒ=ΓΕ, καὶ διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β ἄγομεν τὴν ΒΑΔ, ἥτις θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

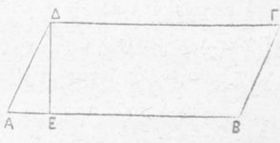
Διότι, ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΑΕ καὶ ΓΔ, ἔχομεν

$$ΒΕ : ΕΓ = ΒΑ : ΑΔ.$$

Ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς ΒΕ=ΕΓ. Ἄρα καὶ ΒΑ=ΑΔ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5.

Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ δεδεμένον παραλληλόγραμμον ἢ μὲ δεδομένον τρίγωνον.



1ον. Ἔστω ΑΒ ἡ βάσις τοῦ δεδομένου παραλληλογράμμου, ΔΕ τὸ ὕψος αὐτοῦ καὶ Χ ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου. Διὰ νὰ ἦναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον παραλληλόγραμμον, πρέπει τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν νὰ ἦναι ἴσα, τουτέστι πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν δεδομένων ΑΒ, ΔΕ καὶ τῆς ζητουμένης πλευρᾶς Χ τοῦ τετραγώνου ἡ ἑξῆς ἰσότης

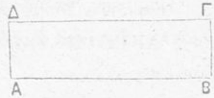
$Χ^2 = ΑΒ \times ΔΕ$, ἐξ ἧς πορίζόμεθα τὴν ἀναλογίαν $ΑΒ : Χ = Χ : ΔΕ$. Λοιπὸν ἡ πλευρὰ Χ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς βάσεως ΑΒ καὶ τοῦ ὕψους ΔΕ τοῦ δεδομένου παραλληλογράμμου, καὶ εὑρίσκεται ὡς προεξετέθη ἐν τῷ 3 προβλήματι.

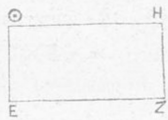
2ον. Ἂν παραστήσωμεν διὰ Β τὴν βάσιν τοῦ δεδομένου τριγώνου διὰ Υ τὸ ὕψος αὐτοῦ καὶ διὰ Χ τὴν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, θέλομεν ἔχει, διὰ νὰ ἦναι τὸ τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον τρίγωνον, τὴν ἰσότητα

$X^2 = B \times \frac{1}{2}\Upsilon$, ἐξ ἧς πορίζόμεθα τὴν ἀναλογίαν $B : X = X : \frac{1}{2}\Upsilon$, τουτέστιν ἡ πλευρὰ X τοῦ ζητουμένου τετραγώνου εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς βάσεως B καὶ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ὕψους Υ τοῦ δεδομένου τριγώνου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6.

Νὰ κατασκευασθῇ ἐπὶ δεδομένης εὐθείας AB ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ δεδομένον ὀρθογώνιον ΕΖΗΘ.





Ἔστω ΑΛ τὸ ἄγνωστον ὕψος τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ. Ἐπειδὴ τὰ δύο ὀρθογώνια πρέπει νὰ ἦναι ἰσοδύναμα, ἔχομεν τὴν ἰσότητα

$AB \times A\Delta = EZ \times E\Theta$, ἐξ ἧς $AB : EZ = E\Theta : A\Delta$.

Ἡ ζητουμένη λοιπὸν εὐθεῖα ΑΔ εἶναι τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΕΖ, ΕΘ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι, ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ αἱ ἐπιφάνειαι δύο δεδομένων ὀρθογωνίων.

Ἔστωσαν Α καὶ Β ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων, Γ καὶ Δ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ἑτέρου. Ἐπειδὴ ἡ μία τῶν ζητουμένων εὐθειῶν δύναται νὰ ἦναι ὁποιαδήποτε, λαμβάνομεν αὐτὴν ἴσην μὲ τὴν βάσιν Α τοῦ πρώτου ὀρθογωνίου, καὶ καλοῦμεν Χ τὴν δευτέραν. Θέλομεν ἔχει κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν

$$A \times B : \Gamma \times \Delta = A : X, \text{ ἐξ ἧς } X = \frac{\Gamma \times \Delta \times A}{A \times B} = \frac{\Gamma \times \Delta}{B},$$

τουτέστιν ἡ ζητουμένη δευτέρα εὐθεῖα Χ μετὰ τῶν τριῶν δεδομένων εὐθειῶν Γ, Δ, Β πρέπει νὰ ἀποτελῇ τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν

$$B : \Gamma = \Delta : X,$$

ἤτοι νὰ ἦναι τετάρτη ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν Β, Γ καὶ Δ, ἐπομένως εὑρίσκεται κατὰ τὸν ἐν τῷ δευτέρῳ προβλήματι ἐκτεθέντα τρόπον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι, ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ τὰ δύο δεδομένα γινόμενα $A \times B \times \Gamma$, $\Pi \times K \times P$.

Ἔστω Χ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν εὐθειῶν Π, Α, Β καὶ Υ ἡ τῶν τριῶν εὐθειῶν Γ, Κ, Ρ. Λέγω ὅτι τὰ δύο δεδομένα γινόμενα $A\times B\times \Gamma$ καὶ $\Pi\times K\times P$, θέλουσιν εἶσθαι πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ εὐθεῖαι Χ καὶ Υ.

Διότι, ἐπειδὴ $\Pi : A = B : X$, ἔχομεν $A\times B = \Pi\times X$· καί, πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ Γ, θέλομεν ἔχει

$$A\times B\times \Gamma = \Gamma\times \Pi\times X. \qquad (1)$$

Ὡσαύτως, ἐπειδὴ $\Gamma : K = P : \Upsilon$, ἔχομεν $K\times P = \Gamma\times \Upsilon$· καὶ πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ Π, θέλομεν ἔχει

$$\Pi\times K\times P = \Gamma\times \Pi\times \Upsilon. \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) πορίζόμεθα τὴν ἀναλογίαν

$$A\times B\times \Gamma : \Pi\times K\times P = \Gamma\times \Pi\times X : \Gamma\times \Pi\times \Upsilon$$

ἥτις, διαιρουμένου τοῦ τελευταίου αὐτῆς λόγου διὰ $\Gamma\times \Pi$, καθίσταται

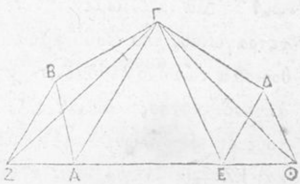
$$A\times B\times \Gamma : \Pi\times K\times P = X : \Upsilon,$$

τοῦθ' ὅπερ προὐτιθέμεθα νὰ ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9.

Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἰσοδύναμον μὲ δεδομένον πολύγωνον.

Ἔστω ΑΒΓΔΕ τὸ δεδομένον πολύγωνον. Ἄγομεν ἐν πρώτοις τὴν διαγώνιον ΓΕ, ἐκ τοῦ σημείου Δ τὴν ΔΘ παράλληλον τῇ ΓΕ, μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὴν προεκβολὴν τῆς ΑΕ εἰς τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἑνόνομεν ΓΘ. Λέγω ὅτι τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ΑΒΓΘ, ὅπερ ἔχει μίαν πλευρὰν ὀλιγώτερον.



Διότι τὰ δύο τρίγωνα ΓΔΕ, ΓΘΕ εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΓΕ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, (διότι αἱ κορυφαὶ αὐτῶν Δ καὶ Θ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΘ παραλλήλου τῇ ΓΕ) ἤτοι ΓΔΕ∽ΓΘΕ (*) ἐὰν δὲ προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης τὸ αὐτὸ σχῆμα ΑΒΓΕ, θέλομεν ἔχει ἀφ' ἑνὸς τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ ἀφ' ἑτέρου τὸ πολύγωνον ΑΒΓΘ. Λοιπὸν τὰ δύο πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΑΒΓΘ εἶναι ἰσοδύναμα.

(*) Τὸ σημεῖον ∽ σημαίνει, ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΔΕ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ΓΘΕ, Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δυνάμεθα ν' ἀφανίσωμεν καὶ τὴν γωνίαν Β, ἀντεισάγοντες ἀντὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὸ ἰσοδύναμον αὐτῷ ΑΖΓ, καὶ οὕτω τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ θέλει τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον.

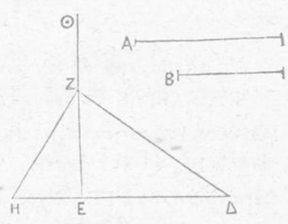
Ὁ αὐτὸς τρόπος ἐφαρμόζεται εἰς πᾶν σχῆμα· διότι, ἐλαττοῦντες διαδοχικῶς κατὰ μονάδα τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, θέλομεν καταντήσει εἰς τὸ τρίγωνον τὸ ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον πολύγωνον.

Σχόλιον. Εἴδομεν προηγουμένως, ὅτι πᾶν τρίγωνον δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον τετράγωνον, ἐπειδὴ δὲ πᾶν πολύγωνον δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον, ἄρα πᾶν πολύγωνον δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον τετράγωνον. Τοῦτο δὲ καλεῖται *τετραγωνισμὸς* τοῦ πολυγώνου.

Τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν τετραγώνου ἰσοδυνάμου μὲ δεδομένον κύκλον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 10.

Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν δύο δεδομένων τετραγώνων.



Ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ πλευραὶ τῶν δύο δεδομένων τετραγώνων.

1ον. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἰσοδυνάμου μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δεδομένων, ἄγομεν δύο ἀπροσδιορίστους εὐθείας ΕΔ, ΕΘ καθέτους ἐπ' ἀλλήλων, λαμβάνομεν ΕΔ=Α καὶ ΕΖ=Β. Λέγω ὅτι ἡ ὑποτείνουσα ΖΔ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΖΕΔ θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Διότι κατὰ τὸ σχόλιον τοῦ 11 θεωρήματος τοῦ παρόντος βιβλίου ἔχομεν τὴν ἰσότητα $\overline{\text{ΖΔ}}^2=\overline{\text{ΕΔ}}^2+\overline{\text{ΕΖ}}^2$, ἢ $\overline{\text{ΖΔ}}^2=\text{Α}^2+\text{Β}^2$.

2ον. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἰσοδυνάμου μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο δεδομένων τετραγώνων, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΕΘ τὴν ἀπόστασιν ΕΖ ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν Β τοῦ μικροτέρου τετραγώνου, καὶ μὲ κέντρον Ζ καὶ ἀκτῖνα ἴσην τῇ πλευρᾷ Α γράφομεν τόξον, ὅπερ θέλει τμήσει τὴν πλευρὰν ΕΗ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΖΕΗ εἴς τι σημεῖον Η. Λέγω δὲ ὅτι ΗΕ θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Διότι ἔχομεν προφανῶς κατὰ τὸ 1 πόρισμα τῆς 11 προτάσεως

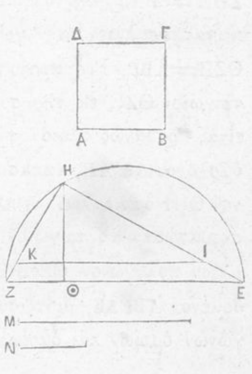
$\overline{HE}^2 = \overline{HZ}^2 - \overline{ZE}^2 = A^2 - B^2$.

Σχόλιον. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ ὁσαδήποτε τετράγωνα. Διότι διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς, δι' ἧς ἀνάγονται τὰ δύο τετράγωνα εἰς ἕν, ἀνάγονται τὰ τρία εἰς δύο, καὶ ταῦτα πάλιν εἰς ἕν. Οὕτω τὰ τέσσαρα ἀνάγονται εἰς τρία, τὰ τρία εἰς δύο, καὶ τὰ δύο εἰς ἕν, καὶ οὕτω καθεξῆς, ἐὰν ὑπάρχωσι τετράγωνα περισσότερα τῶν τεσσάρων.

Ἂν τινα τῶν τετραγώνων ἔπρεπε νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ἠθέλαμεν κατασκευάσει τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν προσθετέων τετραγώνων, καὶ ἕτερον ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀφαιρετέων, καὶ τελευταῖον τρίτον ἰσοδύναμον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο εὑρεθέντων. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ τρίτον τοῦτο τετράγωνον θέλει εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δεδομένων τετραγώνων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 11.

Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, ἔχον λόγον πρὸς δεδομένον, ὃν δεδομένη τις εὐθεῖα M πρὸς δεδομένην εὐθεῖαν N.



Ἔστω AB ἡ πλευρὰ τοῦ δεδομένου τετραγώνου. Πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς τοῦ ζητουμένου λαμβάνομεν ἐπί τινος ἀπροσδιορίστου εὐθείας $E\Theta = M$, $\Theta Z = N$ καὶ ἐπὶ τῆς $ZE (= E\Theta + \Theta Z)$, ὡς διαμέτρου, γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν. Εἰς τὸ σημεῖον Θ ὑψοῦμεν τὴν ΘΗ κάθετον ἐπὶ τῆς ΖΕ, ἄγομεν τὰς χορδὰς ΖΗ, ΗΕ καὶ ἐπὶ τῆς ΖΗ λαμβάνομεν ΗΚ ἴσην τῇ πλευρᾷ ΑΒ τοῦ δεδομένου τετραγώνου. Ἂν ἐκ τοῦ σημείου Κ ἄξωμεν τὴν ΚΙ παράλληλον τῇ ΖΕ, λέγω ὅτι ΗΙ θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Διότι, ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΚΙ, ΖΕ, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$HI : HK = HE : HZ$$

ἐξ ἧς, ὑψοῦντες τοὺς ὅρους αὐτῆς εἰς τετράγωνον, πορίζόμεθα

$$\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 = \overline{HE}^2 : \overline{HZ}^2. \qquad (1)$$

Ἀλλ' εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΖΗΕ, κατὰ τὴν ἀναλογίαν (3) τοῦ 4 πορίσματος τῆς 11 προτάσεως, ἔχομεν

$$\overline{\text{ΗΕ}}^2 : \overline{\text{ΗΖ}}^2 = \text{ΘΕ} : \text{ΘΖ} \text{ ἢ } = \text{Μ} : \text{Ν}. \qquad (2)$$

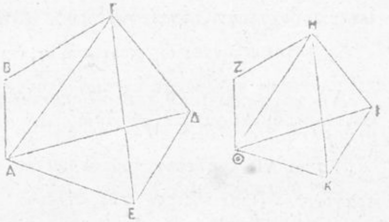
Ἄρα, ἐπειδὴ αἱ ἀναλογίαι (1) καὶ (2) ἔχουσι τὸν λόγον $\overline{\text{ΗΕ}}^3 : \overline{\text{ΗΖ}}^3$ κοινόν, θέλομεν ἔχει

$$\overline{\text{ΗΙ}}^2 : \overline{\text{ΗΚ}}^2 = \text{Μ} : \text{Ν}.$$

Ἀλλὰ ΗΚ=ΑΒ. Ἄρα τὸ ἐπὶ τῆς ΗΙ κατασκευαζόμενον τετράγωνον θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι εἶναι πρὸς τὸ δεδομένον ὡς ἡ εὐθεῖα Μ πρὸς τὴν εὐθεῖαν Ν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12.

Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΘΖ, λαμβανομένης ὡς ὁμολόγου τῇ ΑΒ, νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον μὲ τὸ δεδομένον ΑΒΓΔΕ.



Ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἄγομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ, καὶ εἰς μὲν τὸ σημεῖον Θ κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ΖΘΗ = ΒΑΓ, εἰς δὲ τὸ Ζ κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ΘΖΗ=ΑΒΓ. Τὸ προκύπτον τρίγωνον ΘΖΗ ἐκ τῆς συναπαντήσεως τῶν εὐθειῶν ΘΗ καὶ ΖΗ θέλει εἶναι προφανῶς ὅμοιον τῷ ΑΒΓ (πρότ. 19, πόρ.). Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῆς ΘΗ, ὁμολόγου τῇ ΑΓ, κατασκευάσωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ τρίγωνον ΘΗΙ ὅμοιον τῷ ΑΓΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ΘΙ, ὁμολόγου τῇ ΑΔ, κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον ΘΙΚ, ὅμοιον τῇ ΑΔΕ, τὸ οὕτω σχηματιζόμενον πολύγωνον ΘΖΗΙΚ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον ὅμοιον μὲ τὸ δεδομένον ΑΒΓΔΕ, διότι σύγκειται, ἐκ κατασκευῆς, ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων (πρότ. 24).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 13.

Δεδομένων δύο ὁμοίων σχημάτων νὰ κατασκευασθῇ σχῆμα ὅμοιον καὶ ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ μὲ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

Ἄς παραστήσωμεν διὰ Π καὶ Κ τὰς ἐπιφανείας τῶν δύο δεδομένων ὁμοίων σχημάτων, δι' Α πλευράν τινα τοῦ πρώτου καὶ διὰ Β τὴν ὁμόλογον ταύτῃ πλευρὰν τοῦ δευτέρου. Ἔστω πρὸς τούτοις Χ ἡ ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἐπιφάνεια τοῦ ζητουμένου πολυγώνου καὶ χ ἡ ζητουμένη ὁμόλογος τῇ Α ἢ τῇ Β πλευρὰ αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δεδομένων ὁμοίων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα δύο ὁμολόγων πλευρῶν, θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$\Pi : K = A^2 : B^2$$

ἐξ ἧς, κατὰ γνωστὸν Ἀριθμητικὸν θεώρημα, πορίζόμεθα

$$\Pi : \Pi + K = A^2 : A^2 + B^2. \qquad (1)$$

Ἀλλὰ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον

$$\Pi : X = A^2 : \chi^2. \qquad (2)$$

Ἄρα, ἐπειδὴ $X = \Pi + K$, οἱ τέταρτοι ὅροι τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) θέλουσιν εἶναι ἴσοι, τουτέστι θέλομεν ἔχει $\chi^2 = A^2 + B^2$. Ἕπεται ἐντεῦθεν ὅτι ἡ ζητουμένη ὁμόλογος τῇ Α ἢ τῇ Β πλευρὰ τοῦ πολυγώνου Χ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου, τοῦ ὁποίου Α και Β εἶναι αἱ σχηματίζουσαι τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ γωνίαν πλευραί.

Κατασκευάζοντες ὡς προεξετέθη ἐπὶ τῆς οὕτως εὑρεθείσης πλευρᾶς χ πολύγωνον ὅμοιον μὲ ἓν τῶν δεδομένων, θέλομεν σχηματίσει πολύγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δεδομένων ὁμοίων πολυγώνων.

Ἐὰν δ' ὑποθέσωμεν Χ ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν $\Pi - K$ τῶν δύο δεδομένων πολυγώνων, ἐκ τῆς αὐτῆς ἀναλογίας (1) πορίζόμεθα τὴν ἑξῆς

$$\Pi : \Pi - K = A^2 : A^2 - B^2. \qquad (3)$$

Ἀλλ' ἔχομεν ὡσαύτως

$$\Pi : X = A^2 : \chi^2. \qquad (4)$$

Ἄρα, ἐπειδὴ $X = \Pi - K$, οἱ τέταρτοι ὅροι τῶν ἀναλογιῶν (3) καὶ (4) θέλουσιν εἶναι ἴσοι, τουτέστι θέλομεν ἔχει $\chi^2 = A^2 - B^2$. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν πλευρὰ χ εἶναι ἡ μία τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗτινος ἡ ὑποτείνουσα εἶναι ἴση μὲ τὴν Α καὶ ἡ ἄλλη αὐτοῦ πλευρὰ ἴση μὲ τὴν Β.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 14.

Νὰ κατασκευασθῇ σχῆμα ὅμοιον μὲ δεδομένον καὶ ἔχον πρὸς αὐτὸ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν δεδομένη τις εὐθεῖα μ πρὸς δεδομένην τινὰ εὐθεῖαν ν.

Ἔστω Π ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δεδομένου σχήματος καὶ Α μία ὁποιατῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Ἃς παραστήσωμεν διὰ X τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ζητουμένου σχήματος καὶ διὰ χ τὴν ὁμόλογον τῇ A πλευρὰν αὐτοῦ.

Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θέλομεν ἔχει

$$X : \Pi = \mu : \nu \qquad (1)$$

Ἀλλ᾽, ἐπειδὴ τὰ σχήματα X καὶ Π εἶναι ὅμοια, θέλομεν ἔχει

$$X : \Pi = \chi^2 : A^2. \qquad (2)$$

Ἄρα, ἐπειδὴ αἱ ἀναλογίαι (1) καὶ (2) ἔχουσι τὸν λόγον X : Π κοινόν, θέλομεν ἔχει

$$\chi^2 : A^2 = \mu : \nu.$$

Ἡ πλευρὰ λοιπὸν χ τοῦ ζητουμένου σχήματος, ἡ ὁμόλογος τῇ A, εὑρίσκεται διὰ τοῦ 11 προβλήματος, τὸ δὲ ζητούμενον πολύγωνον κατασκευάζεται διὰ τοῦ 12.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 15.

Νὰ κατασκευασθῇ σχῆμα ὅμοιον μὲ δεδομένον καὶ ἰσοδύναμον μὲ ἕτερον, ἐπίσης δεδομένον.

Ἔστω Π ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δεδομένου σχήματος, πρὸς ὃ τὸ ζητούμενον πρόκειται νὰ ἦναι ὅμοιον, καὶ A πλευρά τις αὐτοῦ. Ἃς παραστήσωμεν διὰ K τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἑτέρου δεδομένου σχήματος καὶ διὰ χ τὴν ὁμόλογον τῇ A πλευρὰν τοῦ ζητουμένου.

Ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν πολυγώνων, αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν Π καὶ K θέλουσιν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν A καὶ χ, τουτέστι θέλομεν ἔχει

$$\Pi : K = A^2 : \chi^2. \qquad (1)$$

Ἂν παραστήσωμεν διὰ M τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἔχοντος ἐπιφάνειαν Π, καὶ διὰ N τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἔχοντος ἐπιφάνειαν K (πρόβλ. 9, σχόλ.), θέλομεν ἔχει $M^2 = \Pi$ καὶ $N^2 = K$. Ἀντικαθιστῶντες δὲ εἰς τὴν ἀναλογίαν (1) ἀντὶ τοῦ Π καὶ K τὰ ἴσα αὐτοῖς M^2 καὶ N^2, αὕτη γίνεται

$$M^2 : N^2 = A^2 : \chi^2,$$

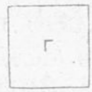
ἐξ ἧς πορίζόμεθα κατὰ γνωστὸν Ἀριθμητικὸν θεώρημα

$$M : N = A : \chi.$$

Ἡ ζητουμένη λοιπὸν πλευρὰ χ, ἡ ὁμόλογος τῇ A, εἶναι τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν εὐθειῶν M, N, A, καὶ τὸ ἐπ᾽ αὐτῆς κατασκευαζόμενον ὅμοιον μὲ τὸ Π σχῆμα θέλει εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἔχον ἐπιφάνειαν K.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 16.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ δεδομένον τετράγωνον Γ καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν νὰ ἰσοῦται μὲ δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ.



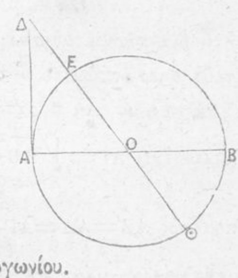
Πρὸς τοῦτο ἐπὶ τῆς ΑΒ, ὡς διαμέτρου, γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν, εἰς τὸ σημεῖον Α ἄγομεν τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ λαμβάνομεν ΑΔ ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ δεδομένου τετραγώνου Γ. Ἐκ τοῦ ἄκρου Δ τῆς ΑΔ ἄγομεν τὴν ΔΕ παράλληλον τῇ ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ε, ἔνθα ἡ ἀγομένη παράλληλος τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν, καταβιβάζομεν τὴν ΕΘ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ. Λέγω ὅτι ΑΘ καὶ ΘΒ θέλουσιν εἶναι αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.

Διότι ἔχομεν ἀφ' ἑνὸς ΑΘ + ΘΒ = ΑΒ, καὶ ἀφ' ἑτέρου, κατὰ τὸ πόρισμα 2 τῆς 27 προτάσεως, $\mathrm{A\Theta} \times \mathrm{\Theta B} = \overline{\mathrm{E\Theta}}^2 = \overline{\mathrm{A\Delta}}^2 = \Gamma$.

Σχόλιον. Διὰ νὰ ἦναι τὸ πρόβλημα δυνατὸν πρέπει ἡ ἀγομένη τῇ ΑΒ παράλληλος ΔΕ νὰ συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν, ἢ τοὐλάχιστον νὰ ἐφάπτηται αὐτῆς, τουτέστιν ἡ πλευρὰ τοῦ δεδομένου τετραγώνου Γ δὲν πρέπει νὰ ἦναι μεγαλειτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς ΑΒ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 17.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ δεδομένον τετράγωνον καὶ τοῦ ὁποίου ἡ διαφορὰ τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν νὰ ἰσοῦται μὲ δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ.



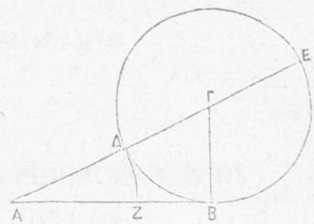
Ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ ὡς διαμέτρου, γράφομεν περιφέρειαν, εἰς τὸ ἄκρον Α αὐτῆς ἄγομεν τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ, λαμβάνομεν ΑΔ ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ δεδομένου τετραγώνου Γ, καὶ ἑνόνομεν τὸ Δ μὲ τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου διὰ τῆς τεμνούσης ΔΘ. Λέγω ὅτι ΔΘ καὶ ΔΕ θέλουσιν εἶναι αἱ προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.

Διότι ἔχομεν ἀφ' ἑνὸς ἐκ κατασκευῆς ΔΘ — ΔΕ = ΕΘ = ΑΒ, καὶ ἀφ' ἑτέρου κατὰ τὴν 33 πρότασιν $\mathrm{\Delta\Theta} \times \mathrm{\Delta E} = \overline{\mathrm{A\Delta}}^2 = \Gamma$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 18.

Νὰ διαιρεθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον· τουτέστιν εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ μεγαλείτερον τούτων νὰ ἦναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὅλης εὐθείας ΑΒ καὶ τοῦ ἑτέρου μέρους.

Εἰς τὸ ἄκρον Β τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ ὑψόνομεν ΒΓ κάθετον ἐπ' αὐτῆς, λαμβάνομεν $\text{ΒΓ}=\frac{1}{2}\text{ΑΒ}$, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ΓΒ γράφομεν περιφέρειαν. Ἄγομεν τὴν ΑΓ, ἥτις τέμνει



τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Δ, καὶ λαμβάνομεν ΑΖ=ΑΔ. Λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ διαιρεῖται εἰς τὸ σημεῖον Ζ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, τουτέστιν ὅτι θέλομεν ἔχει ΑΒ : ΑΖ=ΑΖ : ΖΒ.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου προεκβάλλομεν τὴν ΑΓ μέχρις οὗ συναπαντήσῃ ἐκ δευτέρου τὴν περιφέρειαν. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον Β τῆς ἀκτῖνος ΒΓ, εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν (πρότ. 33)

$$\text{ΑΕ} : \text{ΑΒ} = \text{ΑΒ} : \text{ΑΔ}$$

ἐξ ἧς κατὰ γνωστὸν Ἀριθμητικὸν θεώρημα πορίζόμεθα

$$\text{ΑΕ}-\text{ΑΒ} : \text{ΑΒ} = \text{ΑΒ}-\text{ΑΔ} : \text{ΑΔ}. \qquad (1)$$

Ἀλλ' ἔχομεν ἐκ κατασκευῆς ΔΕ=2ΒΓ=ΑΒ. Ἄρα ΑΕ—ΑΒ=ΑΕ—ΔΕ=ΑΔ=ΑΖ. Ὡσαύτως ΑΒ—ΑΔ=ΑΒ—ΑΖ=ΖΒ. Ἀντεισάγοντες λοιπὸν εἰς τὴν ἀναλογίαν (1) ἀντὶ τῶν ΑΕ—ΑΒ καὶ ΑΒ—ΑΔ τὰ ἴσα τούτοις ΑΖ καὶ ΖΒ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$\text{ΑΖ} : \text{ΑΒ} = \text{ΖΒ} : \text{ΑΖ}$$

ἥτις διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν ὅρων αὐτῆς γίνεται ΑΒ : ΑΖ=ΑΖ : ΖΒ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. Ἂν παραστήσωμεν τὴν δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ δι' α, θέλομεν ἔχει $\text{ΑΓ}=\sqrt{\overline{\text{ΑΒ}}^2+\overline{\text{ΒΓ}}^2}=\sqrt{\alpha^2+\frac{\alpha^2}{4}}=\sqrt{\frac{5\alpha^2}{4}}=\frac{\alpha}{2}\sqrt{5}$, καὶ ἑπομένως $\text{ΑΖ}=\text{ΑΔ}=\text{ΑΓ}-\text{ΓΔ}=\frac{\alpha}{2}\sqrt{5}-\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}-1)$. Λοιπὸν τὸ μεγαλείτερον μέρος ΑΖ τῆς εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον διαιρεθείσης εὐθείας α παρίσταται διὰ τοῦ τύπου $\frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}-1)$.

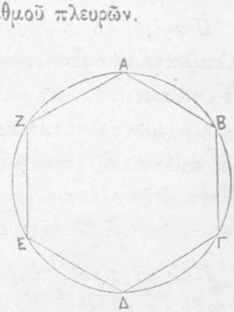
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

ΠΕΡΙ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΚΑΙ ΠΕΡΙ ΜΕΤΡΟΥ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Πᾶν πολύγωνον ἰσογώνιον καὶ ἰσόπλευρον καλεῖται *κανονικὸν πολύγωνον*.

Ὑπάρχουσι κανονικὰ πολύγωνα παντὸς ἀριθμοῦ πλευρῶν.



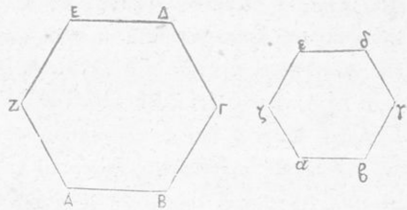
Διότι, ἐὰν φαντασθῶμεν περιφέρειάν τινα διῃρημένην εἰς μ ἴσα μέρη, καὶ ἑνώσωμεν δι' εὐθειῶν τὰ διαδοχικὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως Α, Β, Γ, κτλ θέλομεν σχηματίσει τὸ μ ἔχον πλευρὰς κανονικὸν πολύγωνον. Τὸ πολύγωνον θέλει ἔχει μ πλευρὰς, διότι μ σημεῖα ἐλήφθησαν ἐπὶ τῆς περιφερείας· θέλει εἶναι κανονικὸν, διότι ἔχει τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ κτλ. ἴσας, ὡς ὑποτεινούσας τόξα ἴσα, καὶ τὰς γωνίας αὐτοῦ Α, Β, Γ, κτλ. ἴσας, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς ἴσα τμήματα.

Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι τὸ ἐκ τριῶν πλευρῶν συνιστάμενον κανονικὸν πολύγωνον, τὸ τετράγωνον, τὸ ἐκ τεσσάρων, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν κανονικὰ πολύγωνα εἶναι σχήματα ὅμοια.

Ἔστωσαν, παραδείγματος χάριν, τὰ δύο κανονικὰ ἑξάγωνα ΑΒΓΔΕΖ, αϐγδεζ. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑκατέρου εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ ἴσον μὲ ὀκτὼ ὀρθὰς (πρότ 30 Α΄). Ἡ γωνία λοιπὸν Α εἶναι τὸ ἕκτον μέρος ὀκτὼ ὀρθῶν γωνιῶν, ὡσαύτως καὶ ἡ γωνία α. Λοιπὸν αἱ δύο γωνίαι Α, α εἶναι ἴσαι, ἑπομένως καὶ ἡ γωνία Β=ϐ, ἡ Γ=γ, ἡ Δ=δ, κτλ



Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα ὑπετέθησαν κανονικά, αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, κτλ. εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ὡς καὶ αἱ πλευραὶ αϐ, ϐγ, γδ, δε, κτλ., ἑπομένως θέλομεν ἔχει τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων

ΑΒ : αϐ=ΒΓ : ϐγ=ΓΔ : γδ=ΔΕ : δε κτλ.

Τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος λοιπὸν σχήματα ἔχουσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους Λοιπὸν εἶναι ὅμοια.

Πόρισμα. Αἱ περίμετροι δύο κανονικῶν πολυγώνων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραί, αἱ δὲ ἐπιφάνειαί των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν αὐτῶν πλευρῶν (*).

Σχόλιον. Ἡ γωνία κανονικοῦ τινὸς πολυγώνου προσδιορίζεται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ὡς καὶ ἡ τοῦ ἰσογωνίου πολυγώνου (πρότ. 32, Α΄).

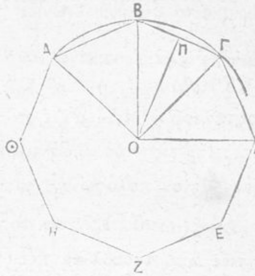
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶν κανονικὸν πολύγωνον δύναται νὰ ἐγγραφῇ καὶ νὰ περιγραφῇ εἰς κύκλον.

Ἔστω ΑΒΓΔΕ κτλ. τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος κανονικὸν πολύγωνον. Ἄς φαντασθῶμεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ. Ἔστω Ο τὸ κέντρον αὐτῆς, καὶ ΟΠ ἡ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ καταϐιβαζομένη κάθετος. Ἄγομεν καὶ τὰς εὐθείας ΑΟ, ΟΔ

(*) Εἰς τὰ ὅμοια κανονικὰ πολύγωνα δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι αἱ περίμετροι αὐτῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς δύο ὁποιαιδήποτε πλευραὶ αὐτῶν, καὶ αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν αὐτῶν πλευρῶν, διότι μία ὁποιαδήποτε πλευρὰ τοῦ ἑνὸς πολυγώνου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ ὁμόλογος πλευρὰ μιᾶς ὁποιασδήποτε πλευρᾶς τοῦ ἑτέρου.

Τὰ δύο τετράπλευρα ΟΠΓΔ, ΟΠΒΑ εἶναι ἐπιθέσιμα. Διότι, ἐὰν στραφῇ τὸ τετράπλευρον ΟΠΓΔ περὶ τὴν ΟΠ μέχρις οὗ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ ΟΠΓΔ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΟΠΒ, ἡ πλευρὰ ΠΓ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΠΒ, διότι αἱ γωνίαι ΟΠΓ, ΟΠΒ εἶναι ἴσαι, ὡς ὀρθαί Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον ὑπετέθη κανονικὸν, ἡ γωνία ΠΓΔ =ΠΒΑ. Ἡ πλευρὰ λοιπὸν ΓΔ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΒΑ, καὶ ἐπειδὴ ΓΔ=ΒΑ, τὸ σημεῖον Δ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ σημείου Α, καὶ τὰ δύο τετράπλευρα θέλουσι ταὐτισθῇ. Ἡ ἀπόστασις λοιπὸν ΟΔ εἶναι ἴση τῇ ΑΟ, καὶ ἑπομένως ἡ διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ διερχομένη περιφέρεια θέλει διέλθει καὶ διὰ τοῦ σημείου Δ. Δι' ὁμοίου δὲ συλλογισμοῦ ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι ἡ διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν Β, Γ, Δ διερχομένη περιφέρεια, διέρχεται καὶ διὰ τῆς ἑπομένης Ε, καὶ οὕτω καθεξῆς. Λοιπὸν ἡ διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν Α, Β, Γ διερχομένη περιφέρεια διέρχεται δι' ὅλων τῶν κορυφῶν τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου, καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ πολύγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν ταύτην.



Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ περιγράφεται τὸ κανονικὸν πολύγωνον εἰς κύκλον. Διότι αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κτλ., ὡς πρὸς τὴν περιγεγραμμένην εἰς τὸ πολύγωνον περιφέρειαν, εἶναι χορδαὶ ἴσαι, ἑπομένως ἰσάκις ἀπέχουσι τοῦ κέντρου Ο (πρότ. 8, Β'). Λοιπὸν, ἐὰν μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΠ γράψωμεν περιφέρειαν, ἡ περιφέρεια αὕτη θέλει ἅπτεσθαι τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ ὅλων τῶν ἄλλων πλευρῶν τοῦ πολυγώνου εἰς τὸ μέσον, καὶ ἑπομένως θέλει εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ πολύγωνον, ἢ τὸ πολύγωνον περιγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν.

Σχόλιον 1. Τὸ σημεῖον Ο, κοινὸν κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡσαύτως ὡς τὸ κέντρον τοῦ πολυγώνου. Τούτου ἕνεκα ὀνομάζουσι *κεντρικὴν γωνίαν* τὴν γωνίαν ΑΟΒ, τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ δύο ἀκτίνων ἠγμένων εἰς τὰ ἄκρα τῆς αὐτῆς πλευρᾶς ΑΒ.

Ἐπειδὴ ὅλαι αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΒΓ, κτλ. εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι καὶ τὰ ὑποτεινόμενα ὑπ' αὐτῶν τόξα εἶναι ἴσα, ἑπομένως καὶ οἱ κεντρικαὶ γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ κτλ., αἱ τὰ τόξα ταῦτα διὰ μέτρον ἔχουσαι, εἶναι ἴσαι.

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἴσον μὲ 4ορ. Ἄρα ἡ τιμὴ ἑκάστης εὑρίσκεται διαιρουμένων 4ορ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου.

Σχόλιον **2**. Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν πολύγωνον ἀριθμοῦ τινος πλευρῶν εἰς δεδομένην περιφέρειαν, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας πλευρὰς πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ ἐγγραφθησόμενον πολύγωνον (ὅρα βιβλ Δ', ὁρ.).

Σχόλιον **3**. Ἐὰν εἰς τόξον τι ἐγγράψωμεν σειρὰν ἴσων χορδῶν, τὸ οὕτως ἀποτελούμενον σχῆμα καλεῖται *μέρος κανονικοῦ πολυγώνου*, ἢ προτιμότερον *κανονικῶς τεθλασμένη εὐθεῖα*, διότι ἔχει τὰς κυρίας τῶν κανονικῶν πολυγώνων ἰδιότητας, τουτέστιν ἔχει τὰς γωνίας αὐτοῦ ἴσας, εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον, ἀλλὰ δὲν ἀποτελεῖ μέρος κανονικοῦ πολυγώνου, παρ' ὅταν τὸ ὑπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ὑποτεινόμενον τόξον ἦναι πολλοστόν τι μέρος τῆς περιφερείας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δεδομένην περιφέρειαν τετράγωνον.

Ἄγομεν τὰς διαμέτρους ΑΓ, ΒΔ καθέτους ἐπ' ἀλλήλων, καὶ ἑνόνομεν τὰ ἄκρα αὐτῶν Α, Β, Γ, Δ. Λέγω ὅτι τὸ οὕτω σχηματιζόμενον σχῆμα ΑΒΓΔ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον ἐγγεγραμμένον τετράγωνον.

Διότι, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ, κτλ. εἶναι ἴσαι, αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΒΓ, κτλ. εἶναι ἴσαι· πρὸς τούτοις αἱ γωνίαι Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὀρθαί, διότι ἑκάστη τούτων εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμιπεριφέρειαν. Λοιπὸν τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον τετράγωνον.

Σχόλιον. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΒΟΓ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα $\overline{ΒΓ}^2 = 2\overline{ΟΓ}^2$, ἐξ ἧς πορίζόμεθα τὴν ἀναλογίαν

$$\overline{ΒΓ}^2 : \overline{ΟΓ}^2 = 2 : 1,$$

ἐξ ἧς

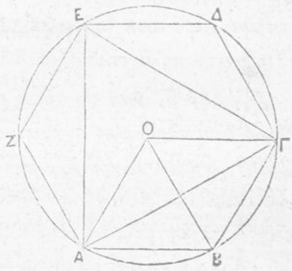
$$ΒΓ : ΟΓ = \sqrt{2} : 1.$$

Λοιπὸν ἡ *πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι πρὸς τὴν ἀκτῖνα ὡς ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ* **2** *πρὸς τὴν Ι*· τουτέστι μεγέθη ἀσύμμετρα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δεδομένην περιφέρειαν κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ τρίγωνον ἰσόπλευρον.

Ἂς ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον, καὶ ἔστω ΑΒ μία τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου. Ἐὰν ἄξωμεν τὰς ἀκτῖνας ΑΟ, ΟΒ, λέγω ὅτι τὸ προκύπτον τρίγωνον ΑΟΒ θέλει εἶναι ἰσόπλευρον.



Διότι ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι τὸ ἕκτον μέρος τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν, ἤτοι ἔχομεν ΑΟΒ$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς, ἐπομένως αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι ΑΒΟ, ΒΑΟ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου, ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἰσοῦνται μὲ $2^{ορ}-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς, καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι, ἑκατέρα τούτων $=\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΒΟ εἶναι ἰσογώνιον καὶ ἐπομένως ἰσόπλευρον. Λοιπὸν ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι διὰ νὰ ἐγράψωμεν κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς δεδομένην περιφέρειαν, πρέπει νὰ φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ἑξάκις ἐπὶ τῆς περιφερείας, οὕτω δὲ θέλομεν ἐπανέλθει εἰς τὸ ἐξ οὗ ἀνεχωρήσαμεν σημεῖον.

Ἐὰν ἑνώσωμεν ἐναλλὰξ τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ, θέλομεν σχηματίσει τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΓΕ.

Σχόλιον. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΟ εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ μάλιστα ῥομβοειδὲς, διότι ΑΒ$=$ΒΓ$=$ΓΟ$=$ΑΟ. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΟΒ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν (πρότ. 15, πόρ. Γ')· τουτέστιν ἔχομεν

$$\overline{\text{ΑΓ}}^2+\overline{\text{ΒΟ}}^2=\overline{\text{ΑΒ}}^2+\overline{\text{ΒΓ}}^2+\overline{\text{ΓΟ}}^2+\overline{\text{ΑΟ}}^2=4\overline{\text{ΑΒ}}^2=4\overline{\text{ΒΟ}}^2.$$

Ἀφαιροῦντες ἑκατέρωθεν $\overline{\text{ΒΟ}}^2$ θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

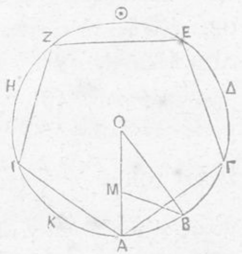
$$\overline{\text{ΑΓ}}^2=3\overline{\text{ΒΟ}}^2,$$

ἐξ ἧς $\overline{ΑΓ}^2 : \overline{ΒΟ}^2 = 3 : 1$, ἑπομένως $ΑΓ : ΒΟ = \sqrt{3} : 1$.

Λοιπὸν ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον κύκλου, ὡς ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 3 πρὸς τὴν 1.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δεδομένον κύκλον κανονικὸν δεκάγωνον.



Ἂς ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον, καὶ ἔστω ΑΒ μία τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου. Ἡ κεντρικὴ αὐτοῦ γωνία ΑΟΒ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὰ $\frac{4}{10}$ ἢ τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς (πρότ. 2, σχόλ. 1), ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΟΑΒ θέλει εἶναι ἴσον μὲ $2^{ορ} - \frac{2}{5}$, ἢ μὲ $\frac{8}{5}$ τῆς ὀρθῆς, καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι ἰσοσκελές, ἑκατέρα τῶν πρὸς τὴν βάσιν γωνιῶν ΟΑΒ, ΟΒΑ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς, τουτέστι διπλασία τῆς κεντρικῆς ΑΟΒ.

Ἂν τώρα διὰ τῆς εὐθείας ΒΜ διαιρέσωμεν τὴν γωνίαν ΟΒΑ εἰς δύο ἴσα μέρη, τὰ προκύπτοντα δύο τρίγωνα ΟΜΒ, ΒΜΑ θέλουσιν εἶναι ἰσοσκελῆ, τὸ μὲν ΟΜΒ, διότι ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΜΟΒ, ΟΒΜ εἶναι ἴση μὲ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς, τὸ δὲ ΒΜΑ, διότι ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΒΜΑ, ΜΑΒ εἶναι ἴση μὲ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς. Λοιπὸν θέλομεν ἔχει ΟΜ=ΜΒ=ΑΒ.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ΒΜ διαιρεῖ τὴν γωνίαν ΟΒΑ εἰς δύο ἴσα μέρη, θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 18 προτάσει τοῦ Γ' βιβλίου

$$ΟΒ : ΑΒ = ΟΜ : ΜΑ$$

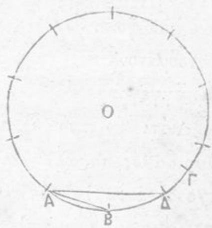
ἤ, ὅπερ ταὐτό, $$ΟΑ : ΟΜ = ΟΜ : ΜΑ,$$

τουτέστιν ἡ ζητουμένη πλευρὰ ΑΒ ἢ ΟΜ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ μεγαλείτερον μέρος ΟΜ τῆς ἀκτῖνος ΟΑ διαιρεθείσης εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Παρατήρησις. Ἂν παραστήσωμεν δι' $α$ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου κατὰ τὰ ἐν τῷ σχολίῳ τοῦ 18 προβλήματος τοῦ Γ΄ βιβλίου εὑρεθέντα θέλει εἶναι ἴση μὲ

$$\frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Πόρισμα 1. Ἐὰν ἑνώσωμεν ἐναλλὰξ τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου, θέλομεν σχηματίσει τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν πεντάγωνον ΑΓΕΖΙ.



Πόρισμα 2. Ἔστω ΑΒ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου, καὶ ΑΔ ἡ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου. Τὸ τόξον ΑΒ θέλει εἶναι τὸ δέκατον τῆς ὅλης περιφερείας, τὸ δὲ τόξον ΑΔ τὸ ἕκτον, ἑπομένως τὸ τόξον $\mathrm{B\Delta}=\mathrm{A\Delta}-\mathrm{AB}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$ μέρος τῆς περιφερείας. Ἡ χορδὴ λοιπὸν ΒΔ θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαπενταγώνου.

Σχόλιον. Ἐὰν διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη τὰ ὑπὸ τῶν πλευρῶν ἐγγεγραμμένου τινὸς κανονικοῦ πολυγώνου ὑποτεινόμενα τόξα, καὶ ἄξωμεν τὰς χορδὰς τῶν ἡμιτόξων, θέλομεν σχηματίσει νέον κανονικὸν πολύγωνον διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν. Τὸ τετράγωνον λοιπὸν δύναται νὰ χρησιμεύσῃ πρὸς ἐγγραφὴν τῶν κανονικῶν πολυγώνων τῶν 8, 16, 32, κτλ. πλευρῶν. Ὡσαύτως διὰ τοῦ ἑξαγώνου δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν τὰ 12, 24, 48, κτλ. πλευρὰς ἔχοντα κανονικὰ πολύγωνα· διὰ τοῦ δεκαγώνου τὰ 20, 40, 80, κτλ. πλευρῶν, διὰ τοῦ δεκαπενταγώνου τὰ 30, 60, 120, κτλ. πλευρῶν (*).

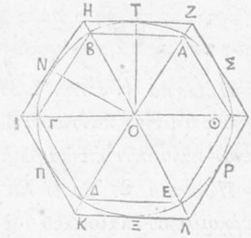
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Δεδομένου κανονικοῦ τινος ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ΑΒΓΔΕΘ νὰ περιγράψωμεν εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν πολύγωνον ὅμοιον.

(*) Ἀρκετὸν καιρὸν ἐνόμιζον, ὅτι τὰ πολύγωνα ταῦτα εἶναι τὰ μόνα πολύγωνα, ἅτινα δύναταί τις νὰ ἐγγράψῃ διὰ τῶν τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας μέσων(*), ἢ, ὅπερ ταὐτό, διὰ τῆς λύσεως τῶν πρωτοβαθμίων καὶ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων· ἀλλ᾽ ὁ Κ. Γάους (Gausse) ἀπέδειξεν, ὅτι δύναταί τις νὰ ἐγγράψῃ δι᾽ ὁμοίων μέσων τὸ ἐκ δεκαεπτὰ πλευρῶν συντιθέμενον κανονικὸν πολύγωνον, καὶ ἐν γένει τὸ ἐκ $2^{\nu}+1$ πλευρῶν, ἀρκεῖ μόνον ὁ ἀριθμὸς $2^{\nu}+1$ νὰ ἦναι ἀριθμὸς πρῶτος.

(*) δηλ. διὰ τοῦ κανόν[ος] καὶ τοῦ διαβήτου.

Εἰς τὰ σημεῖα Π, Ν, Τ, Σ, κτλ, μέσα τῶν τόξων ΔΓ, ΓΒ, ΒΑ, ΑΘ, κτλ, ἄγομεν τὰς ἐφαπτομένας ΙΚ, ΙΗ, ΗΖ, ΖΜ, κτλ. Αὗται θέλουσιν εἶναι κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 10 προτάσει τοῦ Β′ βιβλίου, ἀμοιβαίως παράλληλοι ταῖς χορδαῖς ΓΔ, ΓΒ, ΒΑ, ΑΘ, κτλ., τὸ δὲ ἐκ τῆς συναπαντήσεως αὐτῶν σχηματιζόμενον πολύγωνον ΖΗΙΚΛΜ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον περιγεγραμμένον, τὸ ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ ΑΒΓΔΕΘ.



Διότι ἐν πρώτοις, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ΙΚ, ΙΗ, ΗΖ, ΖΚ, κτλ. εἶναι ἀμοιβαίως παράλληλοι μὲ τὰς πλευρὰς ΓΔ, ΓΒ, ΒΑ, ΑΘ, κτλ. καὶ ἔχουσι καὶ τὴν αὐτὴν φοράν, αἱ γωνίαι ΚΗΙ, ΙΗΖ, ΗΖΜ, κτλ. τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου ΚΙΗΖΜΛ, εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ὡς ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας γωνίας τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ΑΒΓΔΕΘ.

Δεύτερον, ἐὰν ἄξωμεν τὴν ΟΗ, τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΗΝ, ΟΗΤ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν ΟΗ κοινὴν καὶ τὰ πλευρὰς ΗΝ, ΗΤ ἴσας, ὡς ἐφαπτομένας ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐξωτερικοῦ σημείου Η ἀχθείσας (πρόβλ. 13, σχόλιον, Β′). Λοιπὸν ἡ γωνία ΗΟΝ εἶναι ἴση τῇ ΗΟΤ. Ἀλλὰ καὶ ἡ ΝΟΒ γωνία εἶναι ἴση τῇ ΒΟΤ, διότι τὰ τόξα ΝΒ, ΒΤ εἶναι ἴσα, ὡς τὰ ἡμίση ἴσων τόξων ΓΒ, ΒΑ. Ἄρα αἱ δύο εὐθεῖαι ΟΒ, ΟΗ ταὐτίζονται, ἤτοι τὸ σημεῖον Β κεῖται ἐπὶ τῆς ΟΗ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ σημεῖα Γ, Α, Θ, κτλ. κεῖται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΟΙ, ΟΖ, ΟΜ, κτλ. Τούτου δὲ τεθέντος, εἰς τὰ τρίγωνα ΟΙΗ, ΟΗΖ, ΟΖΜ, κτλ. ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΓΒ, ΒΑ, ΑΘ, κτλ. θέλομεν ἔχει τὰς ἀναλογίας

$$\text{ΙΗ} : \text{ΒΓ} = \text{ΟΗ} : \text{ΟΒ}, \quad \text{ΟΗ} : \text{ΟΒ} = \text{ΗΖ} : \text{ΒΑ}, \text{ κτλ.}$$

ἐξ ὧν ποριζόμεθα, ἕνεκα τῶν κοινῶν λόγων ΟΗ : ΟΒ, ΟΖ : ΟΑ,

$$\text{ΙΗ} : \text{ΒΓ} = \text{ΗΖ} : \text{ΒΑ} = \text{ΖΜ} : \text{ΑΘ} = \text{κτλ.}$$

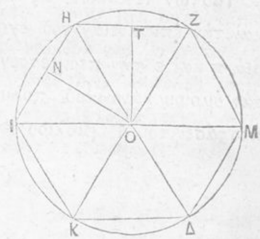
Ἀλλὰ ΒΓ=ΒΑ=ΑΘ=κτλ. Ἄρα καὶ ΙΗ=ΗΖ=ΖΜ=κτλ. Λοιπὸν τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον ἔχει καὶ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας πρὸς ἀλλήλας. Λοιπὸν εἶναι κανονικὸν καὶ ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ.

Πόρισμα 1. Ἀντιστρόφως, ἐὰν μᾶς ἐδίδετο τὸ περιγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον ΖΗΙΚ, κτλ, καὶ μᾶς ἐζητεῖτο νὰ ἐγγράψωμεν δι' αὐτοῦ τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ΑΒΓΔ κτλ., ἠθέλαμεν πρὸς τοῦτο ἑνώσει τὸ κέντρον Ο μὲ τὰς κορυφὰς Ζ, Η, Ι, κτλ. τοῦ δεδομένου πολυγώνου διὰ τῶν εὐθειῶν ΟΖ, ΟΗ, ΟΙ, κτλ, αἵτινες συναπαντῶσι τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, κτλ, καὶ ἀκολούθως ἑνώσει τὰ σημεῖα ταῦτα διὰ τῶν χορδῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κτλ. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ οὕτω σχηματιζόμενον πολύγωνον ΑΒΓΔ κτλ. θέλει εἶναι κανονικὸν καὶ ὅμοιον τῷ περιγεγραμμένῳ ΖΗΙΚ κτλ. Ἠδυνάμεθα ὡσαύτως νὰ ἐγγράψωμεν τὸ ζητούμενον πολύγωνον ἑνόνοντες τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς Τ, Ν, Π, κτλ. διὰ τῶν χορδῶν ΤΝ, ΝΠ, κτλ.

Πόρισμα 2. Λοιπὸν δύναταί τις νὰ περιγράψῃ εἰς δεδομένον κύκλον τόσα κανονικὰ πολύγωνα, ὅσα καὶ νὰ ἐγγράψῃ, καὶ ἀντιστρόφως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου.



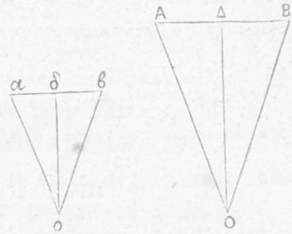
Ἔστω, π. χ, τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΖΗΙΚ κτλ, καὶ Ο τὸ κέντρον αὐτοῦ. Ἐὰν ἑνώσωμεν τὸ κέντρον Ο μὲ τὰς κορυφὰς Ζ, Η, Ι, κτλ. τοῦ δεδομένου πολυγώνου, θέλουσι σχηματισθῆ τόσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΖΗΟ, ΗΟΙ, κτλ, ὅσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον. Ἕκαστον δὲ τῶν τριγώνων τούτων ΖΟΗ, ΗΟΙ, κτλ, θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὴν βάσιν αὐτοῦ ΖΗ, ΗΙ, κτλ. ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους του ΤΟ, ΟΝ, κτλ. Ἀλλὰ ΤΟ=ΟΝ=κτλ. Ἄρα τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν τριγώνων, ἤτοι ὁλόκληρον τὸ κανονικὸν πολύγωνον, ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων ΖΗ, ΗΙ, κτλ, ἤτοι τὴν περίμετρον αὐτοῦ, πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ $\frac{1}{2}$ ΟΤ, τουτέστιν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ πολύγωνον κύκλου, ἤτοι

$$\text{ἐμβ. πολυγ. ΖΗΙΚ κτλ.}=(\text{ΖΗ}+\text{ΒΙ}+\text{κτλ.})\times\frac{1}{2}\,\text{ΟΤ}.$$

Σχόλιον. Ἡ ἀκτὶς ΟΤ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου δὲν εἶναι ἄλλο τι, εἰμὴ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καταβιβαζομένη κάθετος. Ἡ ἀκτὶς αὕτη καλεῖται ἐνίοτε καὶ *ἀπόστημα* τοῦ πολυγώνου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ μὲν περίμετροι τῶν κανονικῶν ὁμοίων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων ἢ τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς αὐτὰ κύκλων, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι αὐτῶν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν αὐτῶν ἀκτίνων.



Ἔστωσαν ΑΒ, αβ δύο ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος κανονικῶν ὁμοίων πολυγώνων, καὶ Ο, ο τὰ κέντρα αὐτῶν. Ἂν ἄξωμεν τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, οα, οβ καὶ τὰς καθέτους ΟΔ, οδ, αἱ μὲν ΟΑ, οα θέλουσιν εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων εἰς τὰ πολύγωνα κύκλων, αἱ δὲ κάθετοι ΟΔ, οδ αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων.

Τούτων τεθέντων, ἂς παραστήσωμεν διὰ Π καὶ Ε τὴν περίμετρον καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἔχοντος ΑΒ πλευρὰν κανονικοῦ πολυγώνου, καὶ διὰ π καὶ ε τὴν περίμετρον καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἔχοντος αβ πλευρὰν ὁμοίου κανονικοῦ πολυγώνου. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 30 προτάσει τοῦ Γ′ βιβλίου θέλομεν ἔχει τὰς ἀναλογίας

$$\Pi : \pi = AB : \alpha\beta \qquad (1)$$

$$E : \varepsilon = \overline{AB}^2 : \overline{\alpha\beta}^2. \qquad (2)$$

Ἀλλ', ἐπειδὴ τὰ δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΟΒ, αοβ, ὡς καὶ τὰ δύο ὀρθογώνια ΟΔΑ, οδα εἶναι ὅμοια, διότι αἱ κεντρικαὶ αὐτῶν γωνίαι ΑΟΒ, αοβ εἶναι ἴσαι (πρότ. 2, σχόλ. 1), θέλομεν ἔχει τὰς ἀναλογίας

$$AB : \alpha\beta = OA : o\alpha \qquad (3)$$

$$AB : \alpha\beta = O\Delta : o\delta \qquad (4)$$

ἐξ ὧν πορίζόμεθα

$$\overline{AB}^2 : \overline{\alpha\beta}^2 = \overline{OA}^2 : \overline{o\alpha}^2 \qquad (5)$$

$$\overline{AB}^2 : \overline{\alpha\beta}^2 = \overline{O\Delta}^2 : \overline{o\delta}^2. \qquad (6)$$

Ἂν παραβάλλωμεν τὰς ἀναλογίας (1), (3) καὶ (4), ἕνεκα τοῦ κοινοῦ αὐτῶν λόγου ΑΒ : :αβ, θέλομεν ἔχει

$$\Pi : \pi = OA : o\alpha = O\Delta : o\delta$$

τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως.

Ἂν δὲ παραβάλλωμεν τὰς ἀναλογίας (2), (5) καὶ (6), ἕνεκα τοῦ κοινοῦ αὐτῶν λόγου ΑΒ : αβ, θέλομεν ἔχει

$$E : \varepsilon = \overline{OA}^2 : \overline{o\alpha}^2 = \overline{O\Delta}^2 : \overline{o\delta}^2$$

τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως. Λοιπὸν κτλ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

1. Καλεῖται *μεταβλητὴ* ποσότης πᾶσα ποσότης, ἥτις λαμβάνει θεωρουμένη κατά τινα τρόπον διαφόρους καταστάσεις μεγέθους.

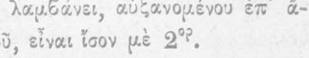
2. *Ὅριον* μεταβλητῆς τινος ποσότητος καλεῖται ποσότης τις σταθερὰ, ἀμετάβλητος, ἧς ἡ μεταβλητὴ δύναται νὰ προσεγγίσῃ ὅσον τις θέλῃ, χωρίς ποτε νὰ δυνηθῇ νὰ τὴν φθάσῃ ἢ νὰ κατασταθῇ ἴση μὲ αὐτήν.

Εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν καὶ Γεωμετρίαν ἀπαντῶμεν πολυάριθμα παραδείγματα μεταβλητῶν ποσοτήτων, τῶν ὁποίων δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εὕρωμεν τὰ ὅρια, πρὸς ἃ αὗται τείνουσι.

Γνωρίζομεν, π. χ., ὅτι ἡ τιμὴ μιᾶς τῶν γωνιῶν κανονικοῦ τινος πολυγώνου μ πλευρῶν εὑρίσκεται διαιρουμένου τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐσωτερικῶν αὐτοῦ γωνιῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν τοῦ μ πλευρὰς ἔχοντος πολυγώνου εἶναι, κατὰ τὴν 32 πρότασιν τοῦ Α' βιβλίου, $2\,(\mu-2)$, ἑπομένως ἡ τιμὴ μιᾶς τούτων Α θέλει εἶναι

$$\frac{2\,(\mu-2)}{\mu},\ \text{ἢ}\ \frac{2\mu}{\mu}-\frac{4}{\mu},\ \text{ἢ}\ 2^{\text{ορ}}-\frac{4}{\mu}.$$

Ἀλλ', ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς μ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου αὐξάνει, βλέπομεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{4}{\mu}$ ἐλαττοῦται, καὶ ἑπομένως ἡ τιμὴ $2^{\text{ορ}}-\frac{4}{\mu}$ τῆς γωνίας τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου αὐξάνει. Ἐπειδὴ δὲ δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν μ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἀρκούντως μέγαν, ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{4}{\mu}$ νὰ κατασταθῇ μικρότερον παντὸς δεδομένου ποσοῦ, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ὅριον τῶν διαδοχικῶν τιμῶν, ἃς ἡ γωνία κανονικοῦ τινος πολυγώνου λαμβάνει, αὐξανομένου ἐπ' ἄπειρον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, εἶναι ἴσον μὲ $2^{\text{ορ}}$.



Ὡσαύτως, ἐὰν λάβωμεν τὸ μέσον γ εὐθείας τινὸς ΑΒ, ἔπειτα τὸ μέσον γ' τῆς γΒ, ἀκολούθως τὸ μέσον γ'' τῆς γ'Β, καὶ οὕτω καθεξῆς, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ΑΒ θέλει εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ μεταβλητὴ ποσότης Αγ, Αγ′, Αγ″ κτλ, διότι ἡ μεταξὺ αὐτῆς καὶ τῆς ΑΒ διαφορὰ δύναται νὰ κατασταθῇ μικροτέρα παντὸς δεδομένου μεγέθους, ὅσον μικρὸν καὶ ἂν ὑποτεθῇ, ἀλλ᾽ οὐδέποτε μηδέν· διότι, ἂν τὸ ἥμισυ ὑπολοίπου τινὸς ἦτο μηδέν, καὶ τὸ ἄλλο ἥμισυ αὐτοῦ θὰ ἦτο μηδέν, ἑπομένως διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὅλον τὸ πρὸ αὐτοῦ ὑπόλοιπον, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τῆς ὅλης εὐθείας ΑΒ, ἥτις ἔπρεπε νὰ νὰ ἦναι μηδέν, ὅπερ προφανῶς ἄτοπον.

Ἠδυνάμεθα νὰ ἀναφέρωμεν καὶ ἄλλα οὐκ ὀλίγα παραδείγματα πρὸς ἀκριβῆ κατάληψιν τῆς ἐννοίας τοῦ ὁρίου μεταβλητῆς τινος ποσότητος, ἀλλὰ νομίζομεν ὅτι θέλομεν ἀπαντήσει μετ᾽ ὀλίγον ἐπαρκῆ πρὸς τοῦτο.

3. Ἐὰν ἡ ποσότης α ἔχῃ δι᾽ ὅριον τὴν Α, ἡ β τὴν Β, ἡ γ τὴν Γ, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ γινόμενον $\alpha\times\beta\times\gamma$ θέλει ἔχει δι᾽ ὅριον αὐτοῦ τὸ γινόμενον $\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\Gamma$, τοῦθ᾽ ὅπερ γράφεται ὡς ἑξῆς

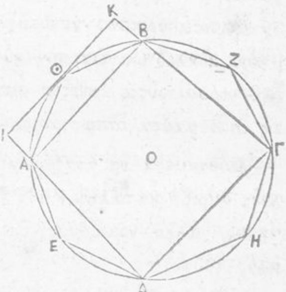
$$\text{ὅρ. } \alpha\times\beta\times\gamma=\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\Gamma.$$

Διότι, ἂν τὸ γινόμενον $\alpha\times\beta\times\gamma$ εἶχε δι᾽ ὅριον γινόμενόν τι Π μικρότερον τοῦ γινομένου $\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\Gamma$, δυνάμεθα ν᾽ ἀποσυνθέσωμεν τὸ γινόμενον Π εἰς τρεῖς παράγοντας A', B', Γ' οὕτως, ὥστε $\mathrm{A}'<\mathrm{A}$, $\mathrm{B}'<\mathrm{B}$, $\Gamma'<\Gamma$. Τώρα, ἐπειδὴ ἡ ποσότης α ἔχει δι᾽ ὅριον τὴν Α, αὕτη τείνουσα πρὸς τὸ ὅριον αὐτῆς θέλει κατασταθῇ ἀναγκαίως μεγαλειτέρα τῆς A', ὡσαύτως καὶ ἡ β, τείνουσα πρὸς τὸ ὅριον αὐτῆς Β, θέλει κατασταθῇ ἀναγκαίως μεγαλειτέρα τῆς B', καὶ ἡ γ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον μεγαλειτέρα τῆς Γ', ἑπομένως καὶ τὸ γινόμενον $\alpha\times\beta\times\gamma$, τεῖνον πρὸς τὸ ὅριον αὐτοῦ, θέλει γείνει μεγαλείτερον τοῦ $\mathrm{A}'\times\mathrm{B}'\times\Gamma'$. Ἀδύνατον λοιπὸν τὸ ὅριον τοῦ γινομένου $\alpha\times\beta\times\gamma$ τῶν ποσοτήτων α, β, γ νὰ ἦναι μικρότερον τοῦ γινομένου $\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\Gamma$ τῶν ὁρίων αὐτῶν Α, Β, Γ. Ἀλλὰ δὲν δύναται νὰ ἦναι οὔτε μεγαλείτερον, διότι τότε ἠθέλαμεν ἔχει $\mathrm{A}'>\mathrm{A}$, $\mathrm{B}'>\mathrm{B}$, $\Gamma'>\Gamma$, καὶ ἐπειδὴ αἱ ποσότητες α, β, γ, ἔχουσιν ἀμοιβαίως δι᾽ ὅρια Α, Β, Γ, αὗται, τείνουσαι πρὸς τὰ ὅρια αὐτῶν, θέλουσιν ἀναγκαίως κατασταθῇ μικρότεραι τῶν A', B', Γ', ἑπομένως καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν, τεῖνον πρὸς τὸ ὅριον αὐτοῦ, θέλει γείνει μικρότερον τοῦ γινομένου $\mathrm{A}'\times\mathrm{B}'\times\Gamma'$. Ἕπεται λοιπὸν ἐκ τῶν προαποδειχθέντων ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\text{ὅρ. } \alpha\times\beta\times\gamma=\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\Gamma.$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9. ΛΗΜΜΑ.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἐμβαδὸν ἐγγεγραμμένου τινὸς πολυγώνου, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον.



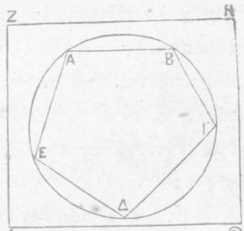
Ἔστω ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον τι πολύγωνον. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι μικρότερον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, ἡ δὲ διαφορὰ αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν κυκλικῶν τμημάτων ΑΘΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΕΑ. Ἐὰν δ' ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ διαφορὰ αὕτη δύναται νὰ κατασταθῇ μικροτέρα παντὸς δεδομένου ποσοῦ, αὐξανομένου ἀρκούντως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, θέλομεν συμπεράνει, ὅτι ὁ κύκλος, ἢ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἐμβαδὸν ἐγγεγραμμένου τινὸς πολυγώνου, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Θ, Ζ, Η, Ε, μέσα τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, καὶ ἄγομεν τὰς χορδὰς ΑΘ, ΘΒ, ΓΖ, κτλ. Λέγω ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν οὕτως εἰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔ προσθετομένων τριγώνων εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀθροίσματος τῶν κυκλικῶν τμημάτων ΑΘΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΕΑ, τοῦ παριστῶντος τὴν μεταξὺ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔ διαφοράν, ἤ, ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἡ νέα διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν τοῦ κύκλου τοῦ δευτέρου ἐγγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς πρώτης.

Διότι, ἐὰν ἄξωμεν εἰς τὸ σημεῖον Θ τὴν ἐφαπτομένην ΙΚ, καὶ εἰς τὰ σημεῖα Α, Β ὑψώσωμεν τὰς καθέτους ΑΙ, ΒΚ ἐπὶ τῆς ΑΒ, τὸ τρίγωνον ΑΘΒ θέλει εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΚΙ, τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΒ καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους ΙΑ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΚΙ εἶναι μεγαλείτερον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΑΘΒ. Λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΘΒ, ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΚΙ, εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΑΘΒ. Δι' ὁμοίου τρόπου ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι ἕκαστον τῶν τριγώνων ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΕΑ εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοιχοῦντος κυκλικοῦ τμήματος. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν προστεθέντων εἰς τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔ τριγώνων εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τὴν πρώτην διαφορὰν παριστώντων κυκλικῶν τμημάτων.

Ἐὰν ἐκ δευτέρου ἑνώσωμεν τὰ μέσα τῶν ὑπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ δευτέρου ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ὑποτεινομένων τόξων, θέλομεν σχηματίσει τρίτον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, διαφέρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ὀλιγώτερον τοῦ ἡμίσεος τῆς διαφορᾶς τοῦ προηγουμένου. Ἐκ τοῦ τρίτου τούτου ἐγγεγραμμένου πολυγώνου θέλομεν μεταβῆ εἰς τὸ τέταρτον, ὅπως ἐκ τοῦ δευτέρου εἰς τὸ τρίτον, καὶ οὕτω καθεξῆς, ἡ δὲ διαφορὰ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ πολύγωνον κύκλου καὶ τοῦ πολυγώνου θέλει μηδενισθῆ, ἐὰν ἐπ' ἄπειρον παραταθῇ ἡ μετάβασις αὕτη. Διότι, ἐὰν ἀπὸ μέγεθός τι ἢ ποσόν τι, ὅσον μέγα καὶ ἂν ὑποτεθῇ, ἀλλ' ὡρισμένον, ἀφαιρέσωμεν πρῶτον πλέον τοῦ ἡμίσεος αὐτοῦ, ἔπειτα πλέον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ὑπολοίπου, καὶ οὕτω καθεξῆς, τὰ διαδοχικὰ ταῦτα ὑπόλοιπα βαίνουσιν ἐλαττούμενα ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον, καὶ τείνουσι πρὸς τὸ μηδὲν (ὁρισμ. 2). Λοιπὸν τὸ τοῦ κύκλου ἐμβαδὸν εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἐμβαδὸν ἐγγεγραμμένου τινὸς πολυγώνου, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον.

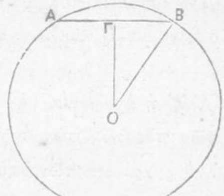
Πόρισμα 1. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ περίμετρος ἐγγεγραμμένου τινὸς πολυγώνου, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον.



Πόρισμα 2. Πᾶσα ἰδιότης τῆς περιμέτρου ἢ τῆς ἐπιφανείας ἐγγεγραμμένου τινὸς πολυγώνου, ὑπάρχουσα ὅσον μέγας καὶ ἂν ὑποτεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, ἐφαρμόζεται καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ ἐπιφανείας τοῦ κύκλου. Οὕτω, π. χ. τῆς περιμέτρου παντὸς ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ΑΒΓΔΕ οὔσης μικροτέρας τῆς περιμέτρου πολυγώνου τινὸς ΖΗΘΙ, περικυκλοῦντος τὴν περιφέρειαν, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου παντὸς περικυκλοῦντος αὐτὴν πολυγώνου.

Πόρισμα 3. Ὅταν ἐγγράφωμεν εἰς δεδομένον κύκλον κανονικὰ πολύγωνα, ὧν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν βαίνει αὐξάνων, τὰ ἀποστήματα αὐξάνουσι, διότι αἱ πλευραὶ τῶν πολυγώνων καθιστάμεναι μικρότεραι, ἀπέχουσι περισσότερον τοῦ κέντρου. Πρὸς τούτοις τὰ ἀποστήματα ταῦτα ἔχουσι δι' ὅριον τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

Διότι, ἔστω ΑΒ ἡ πλευρὰ ἐγγεγραμμένου τινὸς πολυγώνου, ΟΓ τὸ ἀπόστημα, καὶ ΟΒ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου. Θέ-



ἔχει εἰς τὸ τρίγωνον ΟΒΓ, τὴν ἀνισότητα ΟΒ—ΟΓ$<$ΓΒ· Ἀλλ' ἡ ΓΒ, ἥμισυ τῆς ΑΒ, δύναται νὰ κατασταθῇ μικροτέρα παντὸς δεδομένου ποσοῦ αὐξανομένου ἀρκούντως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου. Ἄρα, κατ' ἰσχυρότερον λό-

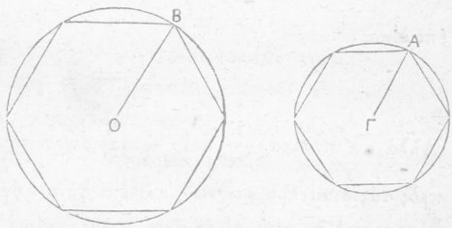
δύναται νὰ κατασταθῇ μικροτέρα παντὸς δεδομένου:

γον, ἡ μικροτέρα τῆς ΓΒ διαφορὰ ΟΒ—ΟΓ, καὶ ἐπειδὴ ἡ ΟΒ μένει ἀμετάβλητος, ἕπεται ὅτι ἡ ΟΓ ἔχει δι' ὅριον τὴν ΟΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ τῶν κύκλων περιφέρειαι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι τῶν κύκλων ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

1ον. Ἂς ἐγγράψωμεν εἰς τοὺς κύκλους, τοὺς ἔχοντας ἀκτῖνας ΟΒ, ΓΑ, δύο ὁποιαδήποτε ὅμοια κανονικὰ πολύγωνα, καὶ παραστήσωμεν διὰ Π καὶ



π καὶ περιμέτρους αὐτῶν, διὰ Ρ τὴν ἀκτῖνα ΟΒ καὶ διὰ ρ τὴν ἀκτῖνα ΓΑ. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 8 προτάσει τοῦ παρόντος βιβλίου θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$\Pi : \pi = P : \rho. \qquad (1)$$

Ἀλλ' ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία (1) εἶναι ἀληθὴς ὅσον μέγας καὶ ἂν ὑποτεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν ἐγγεγραμμένων ὁμοίων πολυγώνων. Ἄρα ὑπάρχει καὶ ἐπὶ τῶν ὁρίων αὐτῶν, τουτέστι θέλομεν ἔχει

$$\text{ὅρ. } \Pi : \text{ὅρ. } \pi = P : \rho. \qquad (2)$$

Ἀλλὰ γνωρίζομεν (πρότ. 9, πόρ. 1) ὅτι ὅρ. Π = περιφέρεια ΟΒ, καὶ ὅρ. π = περιφέρεια ΓΑ. Ἄρα, παριστῶντες διὰ Γ τὴν περιφέρειαν ΟΒ καὶ διὰ γ τὴν περιφέρειαν ΓΑ, καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀναλογίαν (2) ἀντὶ τῶν ὅρ. Π, ὅρ. π τὰ ἴσα αὐτοῖς Γ, γ, θέλομεν ἔχει

$$\Gamma : \gamma = P : \rho \qquad (3)$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο κατὰ πρῶτον νὰ ἀποδείξωμεν.

2ον. Ἂν παραστήσωμεν δι' Ε καὶ ε τὰς ἐπιφανείας τῶν ἐγγεγραμμένων ὁμοίων πολυγώνων, καὶ διὰ Κ καὶ κ τὰς ἐπιφανείας τῶν ἀντιστοιχούντων κύκλων, θέλομεν ἔχει κατὰ τὴν αὐτὴν πρότασιν 8,

$$\mathrm{E} : \varepsilon = \mathrm{P}^2 : \rho^2. \qquad (4)$$

Ἀλλ' ἡ ἀναλογία (4) ὑπάρχει ὅσον μέγας καὶ ἂν ὑποτεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν ἐγγεγραμμένων ὁμοίων πολυγώνων. Ἄρα εἶναι ἀληθὴς καὶ ἐπὶ τῶν ὁρίων αὐτῶν, τουτέστι θέλομεν ἔχει

$$\text{ὅρ. } \mathrm{E} : \text{ὅρ. } \varepsilon = \mathrm{P}^2 : \rho^2. \qquad (5)$$

Ἀλλ' ἀπεδείξαμεν ἀνωτέρω (πρότ. 9) ὅτι ὅρ. Ε=Κ, καὶ ὅρ. ε=κ. Ἄρα θέλομεν ἔχει

$$\mathrm{K} : \kappa = \mathrm{P}^2 : \rho^2 \qquad (6)$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο κατὰ δεύτερον λόγον νὰ ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον 1. Ἡ ἀναλογία (3) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς

$$\Gamma : \mathrm{P} = \gamma : \rho, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Gamma}{\mathrm{P}} = \frac{\gamma}{\rho},$$

ἑπομένως

$$\frac{\Gamma}{2\mathrm{P}} = \frac{\gamma}{2\rho}. \qquad (\alpha)$$

Ἀλλὰ τὰ πηλίκα $\frac{\Gamma}{2\mathrm{P}}$ καὶ $\frac{\gamma}{2\rho}$. παριστῶσι τοὺς λόγους τῶν περιφερειῶν πρὸς τὰς διαμέτρους αὐτῶν, καὶ ἐπειδὴ οἱ λόγοι οὗτοι εἶναι ἴσοι ὁποιαιδήποτε καὶ ἂν ἦναι αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων, ἕπεται ὅτι ὁ λόγος περιφερείας τινὸς πρὸς τὴν διάμετρον αὐτῆς εἶναι ἀριθμὸς *σταθερός*.

Ὁ σταθερὸς οὗτος ἀριθμὸς παρίσταται συνήθως διὰ τοῦ γράμματος π, καὶ ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος, ἑπομένως δὲν δύναται νὰ ὑπολογισθῇ εἰμὴ κατὰ προσέγγισιν. Ἡ δεκαδικὴ αὐτοῦ τιμὴ εἶναι μέχρι τοῦ 16ου δεκαδικοῦ ψηφίου

$$\pi = 3,\ 1415926535897932\ldots$$

Μετ' ὀλίγον θέλομεν δώσει στοιχειώδη τινὰ μέθοδον διὰ τὸν κατὰ προσέγγισιν ὑπολογισμὸν τῆς τιμῆς τοῦ π.

Σχόλιον 2. Διὰ τῆς τιμῆς τοῦ π εὑρίσκομεν εὐκόλως τὸ μῆκος τῆς περιφερείας δεδομένης ἀκτῖνος. Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος

$$\frac{\Gamma}{2\mathrm{P}} = \pi \text{ ποριζόμεθα } \Gamma = 2\pi\mathrm{P}.$$

Ἂν π. χ. ὑποθέσωμεν Ρ=18μ, 35 καὶ λάβωμεν π=3, 14 θέλομεν ἔχει

$$\text{περιφ } P = 2\pi P = 2 \times 3,14 \times 18^{\mu},35 = 115^{\mu},2380.$$

Λοιπὸν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, τῆς ἐχούσης ἀκτῖνα 18^{μ}, 35, εἶναι 115^{μ}, 2380 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ τῆς διαμέτρου τῆς περιφερείας.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Τὰ εἰς ἴσας κεντρικὰς γωνίας ἀντιστοιχοῦντα τόξα, τομεῖς οποιωνδήποτε κύκλων καλοῦνται *τόξα ὅμοια, τομεῖς ὅμοιοι.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11. ΘΕΩΡΗΜΑ.

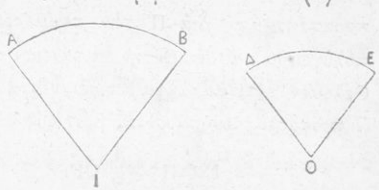
1ον Τὰ ὅμοια τόξα ΑΒ, ΔΕ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν ΑΙ, ΔΟ.

2ον. Οἱ ὅμοιοι τομεῖς ΑΙΒ, ΔΟΕ εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν εἰς οὓς ἀνήκουσι κύκλων.

1ον. Κατὰ τὰ περὶ μέτρου τῶν κεντρικῶν γωνιῶν ἐν τῷ Β' βιβλίῳ λεχθέντα θέλομεν ἔχει τὰς ἑξῆς ἀναλογίας

$$\text{γων. } I : 4^{\text{ορ}} = \text{τόξ. } AB : \text{περιφ. } IA \qquad (1)$$

$$\text{γων. } O : 4^{\text{ορ}} = \text{τόξ } \Delta E : \text{περιφ. } O\Delta. \qquad (2)$$



Ἀλλ', ἐπειδὴ τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ ὑπετέθησαν ὅμοια, ἡ γωνία Ι εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ Ο. Αἱ ἀναλογίαι λοιπὸν (1) καὶ (2) ἔχουσι τοὺς πρώτους αὐτῶν λόγους ἴσους, ἑπομένως οἱ δεύτεροι σχηματίζουσιν ἀναλογίαν, τουτέστι θέλομεν ἔχει

$$\text{τόξ. } AB : \text{περιφ. } IA = \text{τόξ. } \Delta E : \text{περιφ. } O\Delta$$

ἤ, μετατιθεμένων τῶν μέσων,

$$\text{τόξ. } AB : \text{τόξ. } \Delta E = \text{περιφ. } IA : \text{περιφ. } O\Delta. \qquad (3)$$

Ἀλλ' ἀπεδείχθη προηγουμένως ὅτι

$$\text{περιφ. } IA : \text{περιφ. } O\Delta = IA : O\Delta. \qquad (4)$$

Ἄρα, ἕνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου περιφ. ΙΑ : περιφ. ΟΔ τῶν ἀναλογιῶν (3) καὶ (4), θέλομεν ἔχει

$$\text{τόξ. } AB : \text{τόξ } \Delta E = IA : O\Delta,$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο κατὰ πρῶτον ν' ἀποδείξωμεν.

2ον. Ἐπειδὴ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους οἱ τομεῖς εἶναι ἴσοι, ὅταν τὰ τόξα αὐτῶν ἦναι ἴσα, θέλομεν ἔχει προφανῶς

$$\text{τομ. } AIB : \text{κύκλ. } IA = \text{γων. } I : 4^{\text{ορ}} \qquad (1)$$

$$\text{τομ. ΔΟΕ : κύκλ. ΔΟ} = \text{γων. Ο} : 4^{ορ}. \qquad (2)$$

Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως γων. Ι = γων. Ο. Ἄρα θέλομεν ἔχει

$$\text{τομ. ΑΙΒ : κύκλ. ΙΑ} = \text{τομ. ΔΟΕ : κύκλ. ΔΟ}$$

ἢ

$$\text{τομ. ΑΙΒ : τομ. ΔΟΕ} = \text{κύκλ. ΙΑ : κύκλ. ΔΟ}. \qquad (3)$$

Ἀλλ' ἀπεδείχθη προηγουμένως ὅτι

$$\text{κύκλ. ΙΑ : κύκλ. ΔΟ} = \overline{\text{ΙΑ}}^2 : \overline{\text{ΔΟ}}^2. \qquad (4)$$

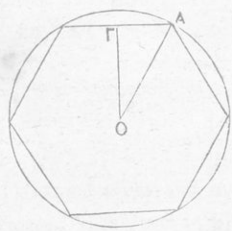
Ἄρα, ἕνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου τῶν ἀναλογιῶν (3) καὶ (4), θέλομεν ἔχει

$$\text{τόμ. ΑΙΒ : τομ. ΔΟΕ} = \overline{\text{ΙΑ}}^2 : \overline{\text{ΔΟ}}^2,$$

τοῦθ' ὅπερ κατὰ δεύτερον λόγον προὐτιθέμεθα ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.



Ἂς ἐγγράψωμεν κανονικόν τι πολύγωνον εἰς τὸν ἔχοντα ΟΑ ἀκτῖνα κύκλον, καὶ ἂς παραστήσωμεν διὰ Π τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου καὶ διὰ Ε τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ. Θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 7 προτάσει τοῦ παρόντος βιβλίου

$$\text{Ε} = \text{Π} \times \frac{1}{2}\,\text{ΟΓ}.$$

Ἀλλ', ἐπειδὴ ἡ ἀνωτέρω ἰσότης εἶναι ἀληθὴς ὅσον μέγας καὶ ἂν ὑποτεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, θέλομεν ἔχει ὡσαύτως καὶ τὴν ἰσότητα

$$\text{ὅρ. Ε} = \text{ὅρ} \left(\text{Π} \times \frac{1}{2}\,\text{ΟΓ}\right).$$

Ἀλλ' ἀπεδείχθη ὅτι ὅρ. Ε = κύκλος ΟΑ, καὶ πρὸς τούτοις ὅτι τὸ ὅριον γινομένου τινὸς $\text{Π} \times \frac{1}{2}$ ΟΓ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων τῶν παραγόντων αὐτοῦ Π καὶ $\frac{1}{2}$ ΟΓ (πρότ. 9 καὶ ὁρισμ. 3). Ἄρα, ἐπειδὴ ὅρ Π = περιφ. ΟΑ καὶ ὅρ. $\frac{1}{2}$ ΟΓ $= \frac{1}{2}$ ΟΑ, θέλομεν ἔχει

$$\text{κύκλ. ΟΑ} = \text{περιφ. ΟΑ} \times \frac{1}{2}\,\text{ΟΑ}. \qquad (1)$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Παρατήρησις. Ἂν παραστήσωμεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ διὰ Ρ, θέλομεν ἔχει, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῷ σχολίῳ 2 τῆς 10 προτάσεως, περιφ. ΟΑ$=2\pi$Ρ καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα (1) ἀντὶ τῶν παραγόντων περιφ. ΟΑ καὶ $\frac{1}{2}$ ΟΑ τὰ ἴσα τούτοις 2πΡ καὶ $\frac{1}{2}$ Ρ, θέλομεν ἔχει

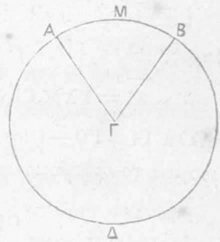
$$\text{κύκλος ΟΑ} = 2\pi Ρ \times \frac{1}{2} Ρ = \pi Ρ^2,$$

τουτέστι, *τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἰσοῦται πρὸς τούτοις μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ Ρ ἐπὶ τὸν λόγον π τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.*

Ἐφαρμογή. Ἂς ὑποθέσωμεν Ρ$=3$ μέτρα. Ἂν λάβωμεν $\pi=3,1415$, θέλομεν ἔχει

$$\text{κύκλ. Ρ}=3,\ 1415\times 3^2=28,2735 \text{ τετρ. μέτρ.}$$

Πόρισμα. Τὸ ἐμβαδὸν τομέως τινὸς εἶναι ἴσον μὲ τὸ τόξον τοῦ τομέως τούτου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.



Διότι ὁ τομεὺς ΑΓΒ εἶναι πρὸς ὁλόκληρον τὸν κύκλον ὡς τὸ τόξον ΑΜΒ πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν ΑΒΔ (πρότ. 18, Β'), ἤτοι

$$\text{τομ. ΑΓΒ : κύκλ ΑΓ} = \text{τόξ. ΑΜΒ : περιφ. ΑΓ},$$

ἤ, πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο ὅρων τοῦ δευτέρου λόγου ἐπὶ $\frac{1}{2}$ΑΓ,

$$\text{τομ. ΑΓΒ : κύκλ. ΑΓ} = \text{τόξ. ΑΜΒ}\times\frac{1}{2}\text{ΑΓ : περιφ. ΑΓ}\times\frac{1}{2}\text{ΑΓ}.$$

Ἀλλ' ἀπεδείχθη ἀνωτέρω ὅτι περιφ. ΑΓ$\times\frac{1}{2}$ ΑΓ $=$ κύκλ. ΑΓ. Ἄρα καὶ τόξ. ΑΜΒ $\times\frac{1}{2}$ ΑΓ$=$ τομ. ΑΓΒ.

Ἐφαρμογή. Ἔστω ΑΓ$=12^{μ}$, τόξ. ΑΜΒ$=60^\circ$. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μήκους τοῦ τόξου τούτου σχηματίζομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\text{τόξ. ΑΜΒ} : 2\pi Ρ = 60^\circ : 360^\circ$$

ἐξ ἧς $\quad$ $\text{τόξ. ΑΜΒ}=\frac{2\pi Ρ\times 60^\circ}{360^\circ}=\frac{\pi Ρ}{3}=\frac{\pi\times 12}{3}=4\pi.$

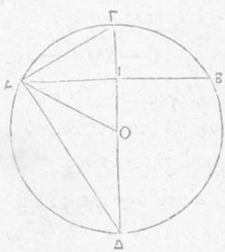
Λοιπὸν τομ. ~~ΑΜΒ~~ ΑΓΒ $=4\pi\times 6=24\pi=75,3960$ τετρ. μέτρα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ.

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ ΤΗΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΔΙΑΜΕΤΡΟΝ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Γνωστῆς οὔσης τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἐγγεγραμμένου τινὸς κανονικοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΓ τοῦ κύκλου, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ΑΓ τοῦ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν ἔχοντος κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου.



Ἔστωσαν ΑΒ$=\alpha$, ΟΓ$=$Ρ καὶ ΑΓ$=\gamma$.

Ἄγομεν τὰς εὐθείας ΑΔ, ΑΟ.

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΑΔ ἔχομεν (πρότ. 27, σχόλιον, Γ')

$$\overline{\text{ΑΓ}}^2=\text{ΓΔ}\times\text{ΓΙ},\ \text{ἢ}\ \gamma^2=2\text{Ρ}\times\text{ΓΙ}$$

Ἀλλὰ ΓΙ$=$ΓΟ$-$ΟΙ$=$Ρ$-$ΟΙ, καὶ ἀφ' ἑτέρου, εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΟΙ, ἔχομεν

$$\text{ΟΙ}=\sqrt{\text{Ρ}^2-\overline{\text{ΑΙ}}^2}=\sqrt{\text{Ρ}^2-\frac{\alpha^2}{4}}.$$

Ἄρα $\text{ΓΙ}=\text{Ρ}-\sqrt{\text{Ρ}^2-\frac{\alpha^2}{4}}$, καὶ ἑπομένως

$$\gamma^2=2\text{Ρ}\times\left(\text{Ρ}-\sqrt{\text{Ρ}^2-\frac{\alpha^2}{4}}\right). \qquad (1)$$

Ἀντιστρόφως, ἐὰν μᾶς ἐζητεῖτο ἡ πλευρὰ α τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνος, γνωστῆς οὔσης τῆς πλευρᾶς γ τοῦ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν ἔχοντος κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου καὶ τῆς ἀκτῖνος Ρ τοῦ κύκλου, ἠθέλαμεν διὰ τῶν αὐτῶν συλλογισμῶν εὕρει τὴν ἐξίσωσιν (1), ἐξ ἧς ἠθέλαμεν πορισθῆ τὴν τιμὴν του

$$\alpha=\sqrt{\frac{\gamma^2.(4\text{Ρ}^2-\gamma^2)}{\text{Ρ}^2}}=\frac{\gamma}{\text{Ρ}}\sqrt{4\text{Ρ}^2-\gamma^2}. \qquad (2)$$

Πρὸς ἐφαρμογὴν τοῦ τύπου (1) ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι α παριστᾷ τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου, ἤτοι $\alpha=$Ρ. Θέλομεν εὕρει τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου δωδεκαγώνου ἀντεισάγοντες εἰς τὸν τύπον (1) ἀντὶ α τὴν ἀκτῖνα Ρ· οὕτω δὲ θέλομεν ἔχει

$$\gamma=\sqrt{2P\left(P-\sqrt{P^2-\frac{P^2}{4}}\right)}=\sqrt{2P^2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=P\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Πρὸς ἐφαρμογὴν τοῦ τύπου (2) ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι γ παριστᾷ τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου, ἤτοι $\gamma=\frac{P(\sqrt{5}-1)}{2}$ (πρότ. 5). Ἀντεισάγοντες εἰς τὸν τύπον (2) ἀντὶ γ τὴν τιμὴν αὐτῆς, θέλομεν ἔχει

$$\alpha=\frac{\sqrt{\frac{P^2(6-2\sqrt{5})}{4}\left[4P^2-\frac{P^2(6-2\sqrt{5})}{4}\right]}}{P}=\sqrt{\frac{P^2}{4}(10-2\sqrt{5})}$$

$=\frac{P}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=$ μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου.

Παρατήρησις. Προσθέτοντες εἰς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος Ρ τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου θέλομεν ἔχει δι' ἄθροισμα

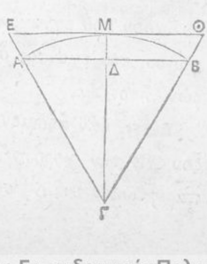
$$P^2+\frac{P^2(6-2\sqrt{5})}{4}=\frac{P^2}{4}(10-2\sqrt{5}),$$

ἤτοι τὸ τετράγωνον τῆς ἀνωτέρω εὑρεθείσης πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου. Λοιπόν.

Ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗτινος πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι ἡ ἀκτὶς καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Γνωστῆς οὔσης τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ τινος πολυγώνου καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου ὁμοίου πολυγώνου.



Ἔστωσαν ΑΒ=α, ΓΑ=Ρ καὶ ΕΘ=χ.

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΕΓΘ, ΑΓΒ προκύπτει ἡ ἀναλογία

ΕΘ : ΑΒ=ΓΕ : ΓΑ.

Ἀλλ' ἔχομεν ὡσαύτως ΓΕ : ΓΑ=ΓΜ : ΓΔ.

Ἄρα, ἕνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου ΓΕ : ΓΑ,

$$\text{ΕΘ} : \text{ΑΒ} = \text{ΓΜ} : \text{ΓΔ},$$

ἤτοι
$$\chi : \alpha = \text{Ρ} : \text{ΓΔ}. \qquad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου, εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΔ, ἔχομεν

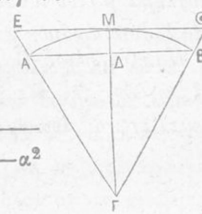
$$\text{ΓΔ} = \sqrt{\overline{\text{ΓΑ}}^2 - \overline{\text{ΑΔ}}^2} = \sqrt{\text{Ρ}^2 - \frac{\alpha^2}{4}}.$$

Λοιπὸν
$$\chi : \alpha = \text{Ρ} : \sqrt{\text{Ρ}^2 - \frac{\alpha^2}{4}}$$

ἐξ ἧς
$$\chi = \frac{2\alpha\text{Ρ}}{\sqrt{4\text{Ρ}^2 - \alpha^2}}.$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Γνωστῆς οὔσης τῆς πλευρᾶς ΑΒ κανονικοῦ τινὸς πολυγώνου μ πλευρῶν καὶ τῆς ἀκτῖνος ΓΑ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ πολύγωνον κύκλου, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου τούτου.



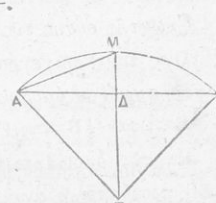
Ἔστωσαν ΑΒ$=\alpha$, ΓΑ$=$Ρ καὶ Ε ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 7 προτάσει, ἔχομεν

$$\text{Ε} = \mu\alpha \times \frac{\text{ΓΔ}}{2}. \text{ Ἀλλὰ ΓΔ} = \sqrt{\text{Ρ}^2 - \frac{\alpha^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4\text{Ρ}^2 - \alpha^2}$$

Ἄρα
$$\text{Ε} = \frac{\mu\alpha\sqrt{4\text{Ρ}^2 - \alpha^2}}{4}. \qquad (1)$$

Ἐφαρμογή. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ζητεῖται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου. Πρὸς τοῦτο εἰς τὸν τύπον (1) πρέπει νὰ θέσωμεν ἀντὶ τοῦ μ τὴν τιμὴν αὐτοῦ 6 καὶ ἀντὶ τοῦ α τὴν τιμὴν αὐτοῦ Ρ, καὶ θέλομεν ἔχει

$$\text{Ε} = \frac{6\text{Ρ}\sqrt{4\text{Ρ}^2 - \text{Ρ}^2}}{4} = \frac{3\text{Ρ}^2\sqrt{3}}{2}.$$



Παρατήρησις. Ἠδυνάμεθα ὡσαύτως, διὰ τῶν αὐτῶν δεδομένων, νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἔχοντος διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν, ἤτοι 2μ.

Διότι, ἐὰν ἄξωμεν εἰς τὸ μέσον Μ τοῦ τόξου ΑΒ τὴν χορδὴν ΑΜ, ἡ ζητουμένη τοῦ πολυγώνου ἐπιφάνεια (ἣν παριστῶμεν δι' Ε') συντίθεται ἐκ 2μ. τριγώνων ἴσων τῷ ΑΓΜ.

Ἀλλ', $$\text{ΑΓΜ}=\text{ΓΜ}\times\frac{\text{ΑΔ}}{2}=\frac{\text{Ρ}\times\alpha}{4}.$$

Ἄρα $$\text{Ε}'=2\mu\times\frac{\text{Ρ}\times\alpha}{4}=\frac{\mu\alpha\text{Ρ}}{2}. \qquad (2)$$

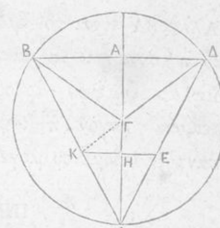
Ἄς ζητήσωμεν πρὸς ἐφαρμογὴν τοῦ τύπου (2) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου δωδεκαγώνου. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ θέσωμεν εἰς τὸν τύπον (2) Ρ ἀντὶ α, καὶ 6 ἀντὶ μ, καὶ θέλομεν ἔχει

$$\text{Ε}'=\frac{6.\text{Ρ}.\text{Ρ}}{2}=3\text{Ρ}^2.$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Δεδομένης τῆς ἀκτῖνος ΓΔ=Ρ καὶ τοῦ ἀποστήματος ΓΑ=ρ κανονικοῦ τινος πολυγώνου, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς Ρ' καὶ τὸ ἀπόστημα ρ' τοῦ ἰσοπεριμέτρου κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἔχοντος διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

Ἔστω ΒΔ ἡ πλευρὰ τοῦ δεδομένου κανονικοῦ πολυγώνου καὶ Γ τὸ κέντρον αὐτοῦ. Προεκτείνομεν τὸ ἀπόστημα ΓΑ μέχρις οὗ συναπαντήσῃ εἰς τὸ σημεῖον Ι τὴν περιγεγραμμένην εἰς τὸ πολύγωνον περιφέρειαν, καὶ ἄγομεν τὰς χορδὰς ΒΙ καὶ ΔΙ.



Ἡ γωνία ΒΙΔ, ἥμισυ τῆς ΒΓΔ, θέλει εἶναι ἡ κεντρικὴ γωνία τοῦ ζητουμένου πολυγώνου. Ἐὰν πρὸς τούτοις καταβιβάσωμεν τὴν ΓΚ κάθετον ἐπὶ τῆς ΒΙ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Κ ἄξωμεν τὴν ΚΕ παράλληλον τῇ ΓΔ, ἡ ΚΕ, ἥμισυ τῆς ΒΔ, θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου ἰσοπεριμέτρου πολυγώνου. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΚΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΔ, θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$\text{ΚΙ}:\text{ΒΙ}=\text{ΚΕ}:\text{ΒΔ},$$

ἐν ᾗ, ἐπειδὴ ὁ πρῶτος ἡγούμενος ΚΙ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἑπομένου ΒΙ (πρότ. 6, Β'), καὶ ὁ δεύτερος ἡγούμενος ΚΕ θέλει εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἑπομένου ΒΔ. Λοιπὸν ΙΚ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη ἀκτὶς Ρ' καὶ ΗΙ τὸ ζητούμενον ἀπόστημα ρ'.

Ἀλλὰ $$\text{ΙΗ}=\frac{\text{ΙΑ}}{2}=\frac{\text{ΓΙ}+\text{ΓΑ}}{2}, \text{ ἢ } \rho'=\frac{\text{Ρ}+\rho}{2}. \qquad (1)$$

Τελευταῖον, εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΚΙ, ἔχομεν $\overline{\text{ΙΚ}}^2=\text{ΙΓ}\times\text{ΙΗ}$, ἢ $$P'^2 = P \times \rho', \text{ ὅθεν } P' = \sqrt{P \times \rho'} = \sqrt{P \times \frac{(P+\rho)}{2}}. \qquad (2)$$

Σχόλιον. Εὐκόλως παρατηρεῖ τις, εἴτε ἐκ τοῦ σχήματος εἴτε ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2), ὅτι ρ′ εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ρ, καὶ ὅτι τοὐναντίον P′ εἶναι μικρότερον τοῦ P. Λοιπὸν, εἰς τὸ νέον πολύγωνον, ἡ μεταξὺ τῆς ἀκτῖνος καὶ τοῦ ἀποστήματος διαφορὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ἀντιστοίχου διαφορᾶς εἰς τὸ πρῶτον.

Ἐὰν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου μετετρέψωμεν τὸ δεύτερον τοῦτο πολύγωνον εἰς τρίτον, ἔπειτα τὸ τρίτον εἰς τέταρτον, καὶ οὕτω καθεξῆς, θέλομεν καταντήσει εἰς πολύγωνόν τι, ἐν ᾧ ἡ μεταξὺ τῆς ἀκτῖνος καὶ τοῦ ἀποστήματος διαφορὰ θέλει εἶναι μικροτέρα παντὸς δεδομένου μεγέθους.

Διότι, εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἔχομεν

$$ΒΓ - ΓΑ < ΒΑ, \quad \text{ἢ} \quad P - \rho < AB.$$

Ἀλλὰ ΒΑ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, ἡ δὲ πλευρὰ αὕτη δύναται νὰ κατασταθῇ μικροτέρα παντὸς δεδομένου μεγέθους, διπλασιαζομένου ἀρκούντως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν. Ἄρα κατὰ μείζονα λόγον ἡ διαφορὰ P—ρ δύναται νὰ κατασταθῇ μικροτέρα παντὸς δεδομένου μεγέθους.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Νὰ εὑρεθῇ προσεγγίζουσά τις τιμὴ τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, ἤτοι τοῦ π.

Ἔχομεν (πρότ. 10, σχόλιον) $$\pi = \frac{\text{περιφ. } P}{2P}, \qquad (1)$$

καὶ ἀπεδείχθη προσέτι (πρότ. 12) ὅτι $$\pi = \frac{\text{κύκλ. } P}{P^2}. \qquad (2)$$

Ἐντεῦθεν πηγάζουσι τέσσαρες μέθοδοι πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ π.

Διότι, ἐὰν λάβωμεν ὑπ᾽ ὄψιν τὸν τύπον (1), δυνάμεθα, γνωστοῦ ὄντος τοῦ μήκους τῆς περιφερείας, νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀκτῖνα, καὶ ἀντιστρόφως, γνωστῆς οὔσης τῆς ἀκτῖνος, νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας· ἐὰν δὲ μεταχειρισθῶμεν τὸν τύπον (2), δυνάμεθα, γνωστῆς οὔσης τῆς ἀκτῖνος, νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου, ἢ, γνωστοῦ ὄντος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου, νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀκτῖνα.

Θέλομεν ἐκθέσει ἐνταῦθα τὰς δύο πρώτας μεθόδους, καὶ θέλομεν ἐν πρώτοις ὑπολογίσει τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας, τῆς ἐχούσης μῆκος 4.

Ἄς κατασκευάσωμεν πρὸς τοῦτο τετράγωνόν τι, καὶ ἄς λάβωμεν τὴν τοῦ τετραγώνου τούτου πλευρὰν ὡς μονάδα. Ἡ περίμετρος τοῦ τετραγώνου θέλει εἶναι ἴση μὲ 4.

Ἔστωσαν P καὶ ρ ἡ ἀκτὶς καὶ τὸ ἀπόστημα τοῦ τετραγώνου τούτου. Θέλομεν ἔχει (πρότ. 3)

$$P=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ καὶ } \rho=\frac{1}{2}.$$

Τώρα τὸ τετράγωνον τοῦτο δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς κανονικὸν ὀκτάγωνον τῆς αὐτῆς περιμέτρου, οὗτινος θέλομεν εὕρει τὴν ἀκτῖνα P_1 καὶ τὸ ἀπόστημα ρ_1 διὰ τῶν τύπων (2) καὶ (1) τοῦ προηγουμένου προβλήματος καὶ θέλομεν ἔχει, ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς προηγουμένους τύπους (1) καὶ (2) ἀντὶ τοῦ P τὸ ἴσον αὐτῷ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ ἀντὶ τοῦ ρ τὸ ἴσον αὐτῷ $\frac{1}{2}$ καὶ ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις,

$$P_1=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{8}}, \quad \rho_1=\frac{1+\sqrt{2}}{4}.$$

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλαμεν ὑπολογίσει τὰς ἀκτῖνας P_2 καὶ ρ_2 τοῦ ἰσοπεριμέτρου κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος 16 πλευράς, καὶ ἐξακολουθοῦντες οὕτως, ἠθέλαμεν φθάσει εἰς κανονικόν τι πολύγωνον, οὗτινος ἡ μὲν περίμετρος ἤθελεν εἶναι πάντοτε 4, ἡ δὲ διαφορὰ $P_\nu - \rho_\nu$ τῶν ἀκτίνων αὐτοῦ ὅσον θέλομεν μικρά.

Ἀλλὰ τὸ μῆκος τῆς ἐχούσης P_ν ἀκτῖνα περιφερείας εἶναι μεγαλείτερον τοῦ 4, τὸ δὲ μῆκος τῆς περιφερείας, τῆς ἐχούσης ρ_ν ἀκτῖνα εἶναι μικρότερον τοῦ 4. Ἡ ἀκτὶς λοιπὸν τῆς ἐχούσης μῆκος 4 περιφερείας περιλαμβάνεται μεταξὺ P_ν καὶ ρ_ν, καὶ δύναται νὰ ὑπολογισθῇ μ᾽ ὅσην θέλομεν προσέγγισιν· διότι ἀπεδείχθη ὅτι ἡ διαφορὰ $P_\nu - \rho_\nu$ δύναται νὰ κατασταθῇ ὅσον θέλομεν μικρὰ αὐξανομένου ἀρκούντως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ ἰσοπεριμέτρου πολυγώνου.

Ἐὰν αἱ τιμαὶ τῶν ἀκτίνων P_ν, ρ_ν ὑπελογίσθησαν εἰς δεκαδικά, εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ κοινὰ εἰς ταύτας δεκαδικὰ ψηφία θέλουσιν ἀνήκει εἰς τὴν τιμὴν τῆς ζητουμένης ἀκτῖνος.

Ἰδοὺ πίναξ τῶν διαδοχικῶν τιμῶν τῶν ἀκτίνων καὶ τῶν αποστημάτων τῶν κανονικῶν πολυγώνων, τῶν ἐχόντων 4, 8, 16, 32. . . 8192 πλευράς.

ΑΡΙΘΜΟΣ τῶν πλευρῶν.	ΑΠΟΣΤΗΜΑΤΑ, ἢ ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων.	ΑΚΤΙΝΕΣ, τῶν περιγεγραμμένων κύκλων.
4	$\rho_1 = 0,5000000$	$P_1 = 0,7071068$
8	$\rho_2 = 0,6035534$	$P_2 = 0,6532815$
16	$\rho_3 = 0,6284174$	$P_3 = 0,6407289$
32	$\rho_4 = 0,6345731$	$P_4 = 0,6376435$
64	$\rho_5 = 0,6361083$	$P_5 = 0,6368754$
128	$\rho_6 = 0,6364919$	$P_6 = 0,6366836$
256	$\rho_7 = 0,6365878$	$P_7 = 0,6366357$
512	$\rho_8 = 0,6366117$	$P_8 = 0,6366237$
1024	$\rho_9 = 0,6366177$	$P_9 = 0,6366207$
2048	$\rho_{10} = 0,6366192$	$P_{10} = 0,6366199$
4096	$\rho_{11} = 0,6366195$	$P_{11} = 0,6366197$
8192	$\rho_{12} = 0,6366196$	$P_{12} = 0,6366196$

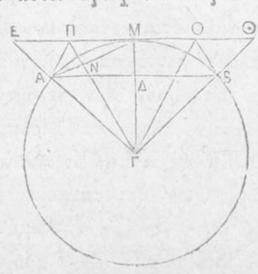
Λοιπὸν ἡ ἀκτὶς τῆς ἐχούσης μῆκος 4 περιφερείας$=0,6366196\ldots$, ἑπομένως ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον ἰσοῦται μὲ

$$\frac{40000000}{12732392}=3,1415926\ldots\ldots$$

Ὁ Ἀρχιμήδης εὗρεν $\frac{22}{7}$ ὡς προσεγγίζουσαν τιμὴν τοῦ π, ὁ δὲ Μέτιος ἔτι, διὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τὴν μᾶλλον προσεγγίζουσαν $\frac{355}{113}$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Δεδομένης τῆς περιμέτρου μ ἐγγεγραμμένου τινὸς κανονικοῦ πολυγώνου καὶ τῆς περιμέτρου M τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου, νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ περίμετροι μ' καὶ M' τοῦ τε ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου πολυγώνου, τῶν ἐχόντων διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.



Ἔστωσαν ΑΒ, ΕΘ αἱ πλευραὶ τῶν ἐχόντων μ καὶ Μ περιμέτρους πολυγώνων, καὶ ν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῶν.

Ἄγομεν τὴν χορδὴν ΑΜ, καὶ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β τὰς ἐφαπτομένας ΑΠ, ΒΟ, καὶ ἑνόνομεν ΓΠ, ΓΟ. Ἡ χορδὴ ΑΜ θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἔχοντος 2ν πλευρὰς καὶ μ' περίμετρον, καὶ ἡ ΠΟ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἔχοντος 2ν πλευρὰς καὶ M' περίμετρον. Τούτων τεθέντων, ἔχομεν (πρότ. 8),

$$M : \mu = \Gamma E : \Gamma A \text{ ἢ } \Gamma M \cdot \qquad (1)$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΠ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΕΓΜ τοῦ τριγώνου ΕΓΜ, ἔχομεν κατὰ τὴν 18 πρότασιν τοῦ Γ' βιβλίου

$$\Pi E : \Pi M = \Gamma E : \Gamma M \cdot \qquad (2)$$

Ἄρα, ἕνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου ΓΕ : ΓΜ τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2), θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$M : \mu = \Pi E : \Pi M \cdot \qquad (3)$$

ἐξ ἧς προκύπτει $\quad M+\mu : 2\mu = EM : 2\Pi M$ ἢ ΠΟ.

Ἀλλ' αἱ εὐθεῖαι ΕΜ, ΠΟ περιέχονται 2ν φορὰς εἰς τὰς περιμέτρους Μ, Μ'. Ἄρα

$$M+\mu : 2\mu = M : M', \text{ ἐξ ἧς } M' = \frac{2\mu M}{M+\mu} \qquad (4)$$

Πρὸς εὕρεσιν τῆς περιμέτρου μ' παρατηροῦμεν ὅτι τὰ δύο τρίγωνα ΠΝΜ, ΜΑΔ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας ΠΝΜ, ΑΔΜ ἴσας, ὡς ὀρθάς, καὶ τὰς γωνίας ΠΜΝ, ΔΑΜ ἴσας, ὡς ἐχούσας διὰ μέτρον ἡ μὲν τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΜΒ, ἡ δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΜ=ΜΒ. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$AM : A\Delta = \Pi M : MN \text{ ἢ } = 2\Pi M : 2MN \text{ ἢ } = \Pi O : AM.$$

Ἀλλ' αἱ εὐθεῖαι ΑΜ καὶ ΑΔ περιέχονται 2ν φορὰς εἰς τὰς περιμέτρους μ' καὶ μ, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΠΟ, ΑΜ ὡσαύτως 2ν φορὰς εἰς τὰς περιμέτρους Μ' καὶ μ'. Ἄρα θέλομεν ἔχει

$$\mu' : \mu = M' : \mu', \text{ ἐξ ἧς } \mu' = \sqrt{M' . \mu},$$

ἢ

$$\mu' = \sqrt{\frac{2\mu M}{M+\mu} . \mu} = \sqrt{\frac{2\mu^2 M}{M+\mu}} . \qquad (5)$$

Πόρισμα. Διὰ τῶν τύπων (4) καὶ (5) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ π μεθ' ὅσης θέλομεν προσεγγίσεως. Διότι, ἐὰν εἰς τὸν ἔχοντα ἀκτῖνα τὴν γραμμικὴν μονάδα κύκλον ἐγγράψωμεν καὶ περιγράψωμεν τετράγωνον, ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου περίμετρος $=4\sqrt{2}$, ἡ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου $=8$, διὰ δὲ τῶν τύπων (4) καὶ (5) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς περιμέτρους τοῦ τε ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κανονικοῦ ὀκταγώνου. Διὰ τῶν περιμέτρων τῶν ὀ κταγώνων θέλομεν εὕρει, μεταχειριζόμενοι τοὺς αὐτοὺς τύπους, τὰς περιμέτρους τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου δεκαεξαγώνου, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι, αὐξανομένου ἀρκούντως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον πολυγώνου, ἡ μεταξὺ τῆς περιφερείας καὶ τῆς περιμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου ἢ περιγεγραμμένου πολυγώνου διαφορὰ δύναται νὰ καταστιθῇ ὅσον θέλομεν μικρά. Λοιπὸν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας μεθ' ὅσης θέλομεν προσεγγίσεως, καὶ διαιροῦντες αὐτὸ διὰ 2, θέλομεν εὕρει τὸν ἀριθμὸν π. Διαιροῦμεν διὰ 2, διότι π παριστᾷ τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, καὶ οὐχὶ τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ἐν ᾧ ὁ διὰ τῆς ἀνωτέρω μεθόδου εὑρεθησόμενος ἀριθμὸς θέλει παριστᾷ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, ἧς ἡ **ἀκτὶς=1** καὶ ἑπομένως ἡ διάμετρος=2.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

ΠΕΡΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΑΙ ΕΥΘΕΙΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ ΕΝ ΤΩ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΙ ΘΕΩΡΟΥΜΕΝΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

1. Εὐθεῖά τις λέγεται *κάθετος ἐπὶ ἐπιπέδου τινὸς*, ὅταν ἦναι κάθετος ἐφ᾽ ὅλων τῶν εὐθειῶν, τῶν κειμένων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ διερχομένων διὰ τοῦ *ποδὸς* αὐτῆς. Ἀντιστρόφως τὸ ἐπίπεδον λέγεται κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας.

Ποῦς τῆς καθέτου καλεῖται τὸ σημεῖον, ἔνθα ἡ κάθετος συναπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον.

2. Εὐθεῖά τις λέγεται *παράλληλος ἐπιπέδῳ τινί*, ὅταν δὲν δύναται νὰ συναπαντήσῃ αὐτὸ, ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῶσιν ἥ τε εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον. Ἀντιστρόφως τὸ ἐπίπεδον λέγεται παράλληλον τῇ εὐθείᾳ.

3. Δύο ἐπίπεδα εἶναι *παράλληλα*, ὅταν δὲν συναπαντῶνται ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῶσι.

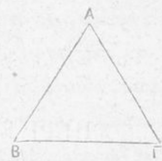
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Διὰ δύο τεμνομένων εὐθειῶν διέρχεται πάντοτε ἐπίπεδόν τι καὶ ἓν μόνον.

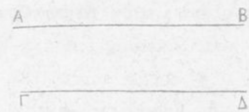
Ἔστωσαν ΑΒ, ΑΓ δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι. Ἂς φαντασθῶμεν ἐπίπεδόν τι διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ. Ἐὰν στρέψωμεν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο περὶ τὴν ΑΒ μέχρις οὗ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ σημείου Γ, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΓ θέλει κεῖσθαι ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, ὡς ἔχουσα δύο τῶν σημείων αὐτῆς Α καὶ Γ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἡ δὲ θέσις τοῦ ἐπιπέδου θέλει εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη ἐν τῷ διαστήματι.

Ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν τὴν περὶ τὴν ΑΒ στροφὴν τοῦ ἐπιπέδου, εἶναι φανερὸν ὅτι δὲν θέλει περιλαμβάνει πλέον τὸ σημεῖον Γ, ἐπομένως μήτε τὴν εὐθεῖαν ΑΓ. Λοιπὸν διὰ δύο τεμνομένων εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ ἓν μόνον ἐπίπεδον διέρχεται.

Πόρισμα 1. Ἐκ τοῦ ἀποδειχθέντος θεωρήματος ἕπεται ὅτι πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ, ἢ τρία σημεῖα Α, Β, Γ, μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα, προσδιορίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ ἑνὸς μόνου.



Πόρισμα 2. Δύο παράλληλοι ΑΒ, ΓΔ προσδιορίζουσιν ὡσαύτως τὴν θέσιν ἑνὸς μόνου ἐπιπέδου. Διότι κατὰ τὸν ἐν τῷ Α' βιβλίῳ δοθέντα περὶ παραλλήλων εὐθειῶν ὁρισμὸν, αὗται κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, δεύτερον δὲ ἐπίπεδον, διάφορον τοῦ ἐφ' οὗ κεῖνται, δὲν δύναται νὰ διέλθῃ δι' αὐτῶν, διότι δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα τῆς ΑΒ καὶ ἓν τῆς ΓΔ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ κῆνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.



τρία σημεῖα μὴ ἐπ' εὐ-
θείας κείμενα

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ κοινὴ δύο ἐπιπέδων τομὴ εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

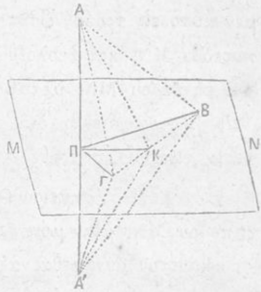
Διότι, ἂν τρία σημεῖα τῆς κοινῆς τῶν ἐπιπέδων τομῆς δὲν ἔκειντο ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος ἐπίπεδα ἤθελον διέρχεσθαι τότε διὰ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων σημείων, καὶ ἑπομένως, κατὰ τὰ ἐν τῇ προηγουμένῃ προτάσει ἀποδειχθέντα, ἤθελον ταὐτίζεσθαι, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν εὐθεῖά τις ΑΠ ἦναι κάθετος ἐπὶ δύο ἄλλων ΠΒ, ΠΓ, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ κειμένων καὶ διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς Π διερχομένων, λέγω ὅτι θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ πάσης ἄλλης ΠΚ, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένης καὶ διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς διερχομένης, ἑπομένως κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ εὐθεῖάν τινα ΒΓ συναπαντῶσαν τὰς τρεῖς εὐθείας ΠΒ, ΠΚ, ΠΓ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΑΠ τὴν ἀπόστασιν ΠΑ' ἴσην τῇ ΠΑ, καὶ ἑνόνομεν τὰ σημεῖα Α καὶ Α' μὲ τὰ σημεῖα Β, Κ, Γ.

Ἐπειδὴ καθ' ὑπόθεσιν ἡ ΠΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΠ καὶ εἰς τὰ μέσον Π τῆς εὐθείας ΑΑ΄, αἱ πλάγιαι ΓΑ, ΓΑ΄ εἶναι ἴσαι (πρότ. 19, Α΄). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον αἱ πλάγιαι ΒΑ, ΒΑ΄ εἶναι ἴσαι. Ἕπεται λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι τὰ δύο τρίγωνα ΒΓΑ, ΒΓΑ΄ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΒΓ κοινὴν καὶ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς αὐτῶν ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. Ἐὰν λοιπὸν στραφῇ τὸ τρίγωνον ΒΓΑ΄ περὶ τὴν ΒΓ μέχρις οὗ ἐπιτεθῇ ἐπὶ τοῦ ἴσου αὐτῷ ΑΒΓ, τὸ σημεῖον Α΄ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Α, καὶ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Κ δὲν μεταβάλλει θέσιν, ἡ εὐθεῖα ΚΑ΄ θέλει πέσει ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς ΚΑ.

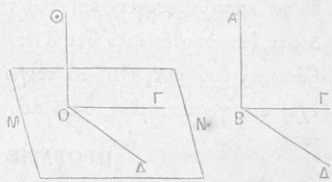


Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΠΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΑ΄, διότι δύο τῶν σημείων αὐτῆς Π καὶ Κ ἀπέχουσιν ἰσάκις τῶν ἄκρων Α καὶ Α΄ αὐτῆς. Λοιπὸν ἡ ΑΠ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. ΘΕΩΡΗΜΑ·

Ἐξ ἑνὸς δεδομένου σημείου δυνάμεθα πάντοτε νὰ ἄξωμεν εὐθεῖαν κάθετον ἐπί τινος ἐπιπέδου καὶ μίαν μόνην.

1ον. Ἃς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις, ὅτι τὸ δεδομένον σημεῖον Ο κεῖται ἐπὶ τοῦ δεδομένου ἐπιπέδου ΜΝ.

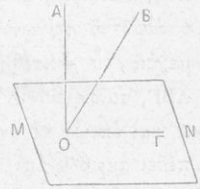


Λαμβάνομεν εὐθεῖάν τινα ΑΒ, κοινὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΒΔ, ΑΒΓ, καὶ εἴς τι σημεῖον Β τῆς ΑΒ ὑψόνομεν τὰς καθέτους ΒΓ, ΒΔ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ οὕτως, ὥστε ΒΓ νὰ κῆται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ καὶ ΒΔ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔ. Κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, ἡ εὐθεῖα ΑΒ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΒΔ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν ΓΒΔ.

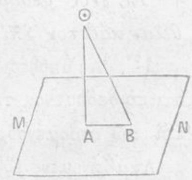
Τούτου γενομένου, μεταφέρομεν τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον Β νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ σημείου Ο, καὶ στρέφομεν ἀκολούθως τὸ ἐπίπεδον ΓΒΔ εἰς τρόπον ὥστε νὰ ταὐτισθῇ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ. Αἱ εὐθεῖαι ΒΓ, ΒΔ θέλουσι λάβει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ τὰς θέσεις ΟΓ, ΟΔ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΒ τὴν θέσιν τινὰ ΟΘ, ἥτις θέλει εἶναι προφανῶς κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ (πρότ. 3).

Ἃς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι τὸ δεδομένον σημεῖον Θ κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ.

Κατασκευάζομεν ὡς προηγουμένως τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ, μεταφέρομεν αὐτὸ εἰς τρόπον ὥστε τὸ ἐπίπεδον ΒΓΔ νὰ ταὐτισθῇ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, καὶ ἀκολούθως, τοῦ ἐπιπέδου ΒΓΔ κειμένου πάντοτε ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, μεταβάλλομεν τὴν θέσιν αὐτοῦ οὕτως, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΒΑ νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Θ. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ θέλει λάβει θέσιν τινὰ ΟΘ, ἥτις θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ.



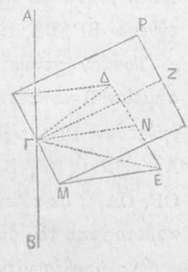
2ον. Ἐξ ἑνὸς σημείου Ο, κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, μίαν μόνην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου κάθετον δυνάμεθα νὰ ὑψώσωμεν. Διότι, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ ὑψώσωμεν δύο ΟΑ, ΟΒ, αἱ εὐθεῖαι αὗται, κάθετοι οὖσαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, θέλουσιν εἶναι κάθετοι ἐπὶ πάσης εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ ποδός των Ο, καὶ ἐπομένως κάθετοι καὶ ἐπὶ τῆς ΟΓ, κοινῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων ΜΝ, ΑΟΒ, εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο, καὶ θέλουσιν προσέτι κεῖσθαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΑΒΟ, ὅπερ ἀδύνατον (πρότ. 1, Α').



Ὡσαύτως, ἐξ ἑνὸς σημείου Θ, ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ κειμένου, μίαν μόνην κάθετον δυνάμεθα νὰ καταβιβάσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Διότι, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ καταβιβάσωμεν δύο ΘΑ, ΘΒ, τὸ τρίγωνον ΘΑΒ ἤθελεν ἔχει δύο γωνίας ὀρθάς, ὅπερ ἀδύνατον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. ΘΕΩΡΗΜΑ.

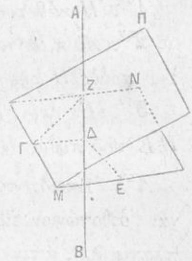
Ἐκ τινος δεδομένου σημείου Γ δυνάμεθα νὰ ἄξωμεν πάντοτε ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δεδομένης εὐθείας ΑΒ, καὶ ἓν μόνον.



1ον. Ἂς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι τὸ δεδομένον σημεῖον Γ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ.

Διὰ τῆς ΑΒ ἄγομεν δύο ὁποιαδήποτε ἐπίπεδα ΑΓΔ, ΑΓΕ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Γ ὑψοῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓΔ τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΓ, καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓΕ τὴν ΓΕ κάθετον ὡσαύτως ἐπὶ τῆς ΑΓ. Τὸ ἐπίπεδον ΔΓΕ τῶν καθέτων ΓΔ καὶ ΓΕ θέλει εἶναι προφανῶς κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ (πρότ. 3).

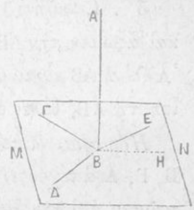
Εὐκόλως δὲ δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι οὐδὲν ἄλλο ἐπίπεδον ΜΡ διὰ τοῦ σημείου Γ διερχόμενον δύναται νὰ ἦναι κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ. Διότι, ἂν τοῦτο ἦτο δυνατὸν, αἱ κοιναὶ τομαὶ ΓΝ, ΓΖ τῶν ἐπιπέδων ΓΔΕ, ΜΡ μεθ' ἑνὸς τρίτου ΑΓΝ, διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ διερχομένου, ἤθελον εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς ΑΒ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ καὶ ἤθελον κεῖσθαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΑΓΝ, ὅπερ ἀδύνατον (πρότ. 1, Α').



2^{ον}. Ἂς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι τὸ δεδομένον σημεῖον Γ κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ.

Διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τοῦ σημείου Γ ἄγομεν τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, καὶ δεύτερόν τι ἐπίπεδον ΑΔΕ διὰ μόνης τῆς εὐθείας ΑΒ διερχόμενον. Ἐκ τοῦ σημείου Γ καταβιβάζομεν τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΔΕ ὑψοῦμεν εἰς τὸ σημεῖον Δ τὴν ΔΕ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΜΝ τῶν εὐθειῶν ΓΔ καὶ ΔΕ θέλει εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ (πρότ. 3).

Τελευταῖον, πᾶν ἐπίπεδον ΜΠ, διὰ τοῦ σημείου Γ διερχόμενον καὶ διάφορον τοῦ ΜΝ, δὲν δύναται νὰ ἦναι κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ. Διότι, ἐὰν τοῦτο ἦτο δυνατὸν, αἱ κοιναὶ τομαὶ ΓΔ, ΓΖ (*) τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ μετὰ τῶν ἐπιπέδων ΜΝ καὶ ΜΠ ἤθελον εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς ΑΒ, ὅπερ ἀδύνατον (πρότ. 17, Α').



Πόρισμα. Ὅλαι αἱ κάθετοι ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, κτλ, αἱ εἰς σημεῖόν τι Β τῆς εὐθείας ΑΒ ὑψούμεναι, κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὸ δ' ἐπίπεδον αὐτὸ εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ.

Διότι, ἐπειδὴ κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, τὸ ἐπίπεδον ΜΝ τῶν δύο εὐθειῶν ΒΓ, ΒΔ εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ. πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ πορίσματος ἀρκεῖ ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΜΝ περιέχει καὶ ὅλας τὰς ἄλλας καθέτους. Ἀλλ', ἐὰν ἡ ΒΕ κῆται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΕ θέλει τμήσει τὸ ἐπίπεδον ΜΝ κατά τινα
διερχομένην τῆς ΒΕ:
εὐθεῖαν ΒΗ,: ἥτις θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ ἠθέλαμεν ἔχει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΑΒΕ δύο καθέτους ΒΗ καὶ ΒΕ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου Β, ὅπερ ἀδύνατον.

(*) Ἡ εὐθεῖα ΓΖ θέλει εἶναι διάφορος τῆς ΓΔ, διότι ἀπεδείχθη προηγουμένως ὅτι ἐξ ἑνὸς σημείου Δ, ἐπ' εὐθείας τινὸς ΑΒ κειμένου, ἓν μόνον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης δυνάμεθα νὰ ἄξωμεν.

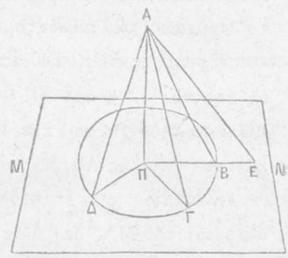
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Α, ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ κειμένου, καταβιβάσωμεν ἐπ' αὐτοῦ τὴν κάθετον ΑΠ, καὶ ἄξωμεν καὶ διαφόρους πλαγίας ΑΔ, ΑΓ, ΑΕ.

1ον. Ἡ κάθετος ΑΠ θέλει εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας.

2ον. Αἱ πλάγιαι ΑΓ, ΑΔ, αἱ εἰς ἴσας ἀποστάσεις ΠΓ, ΠΔ, τοῦ ποδὸς Π τῆς καθέτου ἀγόμεναι, θέλουσιν εἶναι ἴσαι.

3ον. Ἐκ δύο πλαγίων ΑΓ, ΑΕ, ἡ εἰς μεγαλειτέραν ἀπόστασιν ΠΕ τοῦ ποδὸς Π ἠγμένη εἶναι μεγαλειτέρα.



1ον. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΠΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ σημεῖον Π, ἡ πλαγία ΑΓ, ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας ΑΠΓ, εἶναι μεγαλειτέρα τῆς καθέτου ΑΠ, ἀπέναντι τῆς ὀξείας γωνίας ΑΓΠ, μικροτέρας τῆς ὀρθῆς ΑΠΓ.

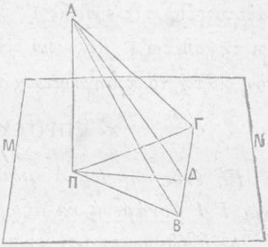
2ον. Ἐπειδὴ ἡ ΠΓ ὑποτίθεται ἴση τῇ ΠΔ, τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΠΓ, ΑΠΔ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Λοιπὸν ΑΓ=ΑΔ.

3ον. Ἐπειδὴ ἡ ΠΕ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΠΓ, ἂν λάβωμεν ΠΒ=ΠΓ καὶ ἄξωμεν τὴν ΑΒ, θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ΑΒ=ΑΔ. Ἀλλ' ἡ ΑΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΕ (πρότ. 18. Α'). Ἄρα καὶ ἡ ΑΔ, ἴση τῇ ΑΒ, θέλει εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΕ.

Πόρισμα. Ἐπειδὴ αἱ πλάγιαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ εἶναι ἴσαι, τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπὸ τοῦ ποδὸς Π τῆς καθέτου, ἐπομένως κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΒΓΔ, τῆς ἐχούσης κέντρον τὸν πόδα Π τῆς καθέτου ΑΠ. Λοιπόν, ἂν μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα ἀρκούντως μεγάλην προσδιορίσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ τρία διάφορα σημεῖα Β, Γ, Δ, καὶ εὕρωμεν τὸ κέντρον Π τῆς διὰ τῶν τριῶν τούτων σημείων Β, Γ, Δ διερχομένης περιφερείας, τὸ εὑρεθὲν σημεῖον Π θέλει εἶναι ὁ ποῦς τῆς ἐκ τοῦ σημείου Α ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ καταβιβαζομένης καθέτου ΑΠ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἔστω ΑΠ κάθετός τις ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, καὶ ΒΓ εὐθεῖά τις κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Ἐὰν ἐκ τοῦ ποδὸς Π τῆς καθέτου *καταβιβάσωμεν τὴν ΠΔ κάθετον ἐπὶ τῆς ΒΓ, καὶ ἑνώσωμεν ΑΔ, λέγω ὅτι ἡ ΑΔ θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΓ.*



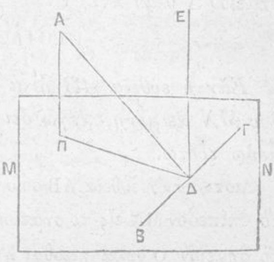
Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου λαμβάνομεν ΒΔ=ΔΓ καὶ ἄγομεν τὰς εὐθείας ΠΒ, ΠΓ, ΑΒ, ΑΓ. Ἐπειδὴ ἡ ΒΔ εἶναι ἴση τῇ ΔΓ, ἡ πλαγία ΠΒ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΠΓ (πρότ. 18, Α')· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΠΒ εἶναι ἴση τῇ ΠΓ, ἡ πλαγία ΑΒ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΑΓ (πρότ. 6). Τὰ δύο λοιπὸν σημεῖα Α καὶ Δ τῆς εὐθείας ΑΔ ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπὸ τῶν ἄκρων Β καὶ Γ τῆς εὐθείας ΒΓ. Ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΓ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα. Ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΠΔ καὶ ΑΔ, θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν ΑΠΔ (πρότ. 3).

Σχόλ. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ὀνομάζεται θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων ΠΓ, ΠΔ, ΑΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8. ΘΕΩΡΗΜΑ.

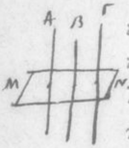
Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΠ ἦναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, πᾶσα εὐθεῖα ΔΕ, παράλληλος τῇ ΑΠ, θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.



Ἔστω ΠΔ ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῶν παραλλήλων ΑΠ καὶ ΔΕ. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ ἄγομεν τὴν ΒΓ κάθετον ἐπὶ τῆς ΠΔ, καὶ ἑνόνομεν ΑΔ.

Κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΠΔΕ. Ἡ γωνία λοιπὸν ΕΔΒ εἶναι ὀρθή. Ἀλλὰ καὶ ἡ γωνία ΕΔΠ εἶναι ὀρθὴ, διότι ΑΠ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΠΔ, καὶ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΠ (πρότ. 25, Α'). Λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΔΕ κάθετος οὖσα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΠΔ καὶ ΒΓ, θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν ΜΝ.

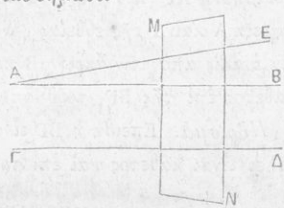
Πόρισμα 1. Ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΠ, ΕΔ ἦναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, αἱ εὐθεῖαι αὗται θέλουσιν εἶναι καὶ παράλληλοι. Διότι ἄλλως ἡ ἐκ τοῦ σημείου Δ ἀγομένη παράλληλος τῇ ΑΠ ἤθελεν εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, καὶ ἠθέλαμεν ἔχει εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Δ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ δύο καθέτους, ὅπερ ἀδύνατον (πρότ. 4).



Πόρισμα 2. Δύο εὐθεῖαι Α καὶ Β παράλληλοι τρίτῃ τινὶ Γ εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι. Διότι, ἐὰν φαντασθῶμεν ἐπίπεδόν τι κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας Γ, ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι Α καὶ Β εἶναι παράλληλοι τῇ καθέτῳ Γ, θέλουσιν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Λοιπὸν, κατὰ τὸ προηγούμενον πόρισμα, εἶναι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐξ ἑνὸς σημείου Α μίαν μόνον παράλληλον δεδομένῃ τινὶ εὐθείᾳ ΓΔ δυνάμεθα νὰ ἄξωμεν ἐν τῷ διαστήματι.

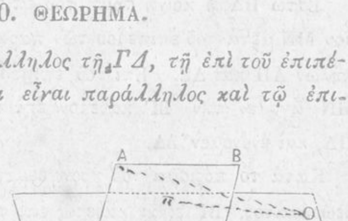


Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῶσιν δύο εὐθεῖαι ΑΕ, ΑΒ, παράλληλοι τῇ ΓΔ, καὶ ἂς ἄξωμεν ἐπίπεδόν τι ΜΝ κάθετον ἐπὶ τῆς ΓΔ.

Τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, ὡς κάθετον ἐπὶ τῆς ΓΔ, θέλει εἶναι κατὰ τὰ προαποδειχθέντα κάθετον καὶ ἐπὶ τῆς ΑΕ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΖ, παραλλήλων τῇ ΓΔ, καὶ ἑπομένως ἠθέλαμεν ἔχει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α δύο καθέτους ΑΕ, ΑΒ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ὅπερ ἀδύνατον. Λοιπὸν ἐξ ἑνὸς σημείου Α μίαν κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἦναι παράλληλος τῇ ΓΔ, τῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ κειμένῃ, λέγω ὅτι θέλει εἶναι παράλληλος καὶ τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ.

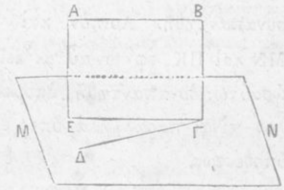


Διότι, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ συνήντα τὸ ἐπίπεδον ΜΝ εἴς τι σημεῖον Ο, τὸ σημεῖον Ο θέλει κεῖσθαι ἢ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ ἢ ἐκτὸς αὐτῆς. Ἀλλὰ δὲν δύναται νὰ κῆται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ, διότι ΑΒ καὶ ΓΔ ὑπετέθησαν παράλληλοι· μήτε ἐκτὸς, διότι τότε ἠδυνάμεθα ἐκ τοῦ σημείου τούτου νὰ ἄξωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ ἑτέραν εὐθεῖαν ΟΠ παράλληλον τῇ ΓΔ, καὶ ἠθέλαμεν ἔχει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο δύο εὐθείας ΟΑ, ΟΠ παραλλήλους τῇ ΓΔ, ὅπερ ἀδύνατον (πρότ. 9).

Πόρισμα 1. Ἐὰν εὐθεῖά τις ΑΒ ἦναι παράλληλος ἐπιπέδῳ τινὶ ΜΝ, ἡ κοινὴ τομὴ ΓΔ τοῦ ἐπιπέδου τούτου μετά τινος ἐπιπέδου, διὰ τῆς ΑΒ διερχομένου, θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ.

Διότι, ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ συνήντα τὴν ΓΔ, ἤθελε συναπαντήσει καὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

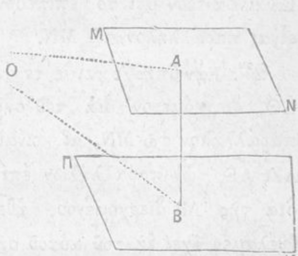
Πόρισμα 2. Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Γ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, παραλλήλου τῇ εὐθείᾳ ΑΒ, ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΕ παράλληλος τῇ ΑΒ, ἡ εὐθεῖα αὕτη θέλει κεῖσθαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ.



Διότι ἄλλως τὸ διὰ τῆς ΑΒ καὶ τοῦ σημείου Γ διερχόμενον ἐπίπεδον ἤθελε τμήσει τὸ ἐπίπεδον ΜΝ κατά τινα εὐθεῖαν ΓΔ, ἥτις θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ, καὶ ἠθέλαμεν ἔχει ἐξ ἑνὸς σημείου Γ δύο εὐθείας ΓΕ καὶ ΓΔ, παραλλήλους τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΑΒ, ὅπερ ἀδύνατον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11. ΘΕΩΡΗΜΑ.

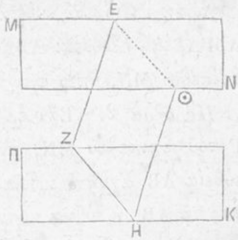
Δύο ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ, κάθετα ἐπ' εὐθείας τινὸς ΑΒ, εἶναι παράλληλα πρὸς ἄλληλα.



Διότι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι συναπαντῶνται, καὶ ἔστω Ο ἓν τῶν σημείων τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς Ἐὰν ἄξωμεν τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΑ, ἥτις κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ διέρχεται διὰ τοῦ ποδὸς Α τῆς καθέτου ΒΑ. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΚ, θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΒ, ἥτις κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐτιπέδου τούτου καὶ διέρχεται διὰ τοῦ ποδὸς Β τῆς καθέτου ΑΒ. Λοιπὸν ΟΑ καὶ ΟΒ θέλουσιν εἶναι δύο κάθετοι, καταβιβαζόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ, ὅπερ ἀδύνατον (πρότ. 17, Α'). Τὰ ἐπίπεδα λοιπὸν ΜΝ καὶ ΠΚ δὲν δύνανται νὰ συναπαντηθῶσιν. Λοιπὸν εἶναι παράλληλα, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12. ΘΕΩΡΗΜΑ.

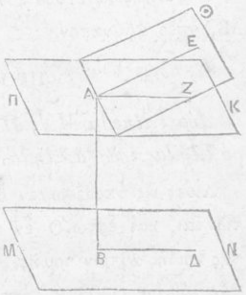
Αἱ κοιναὶ τομαὶ ΕΘ, ΖΗ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΜΝ, ΠΚ μεθ' ἑνὸς τρίτου ΖΘ εἶναι παράλληλοι.



Διότι, ἂν αἱ εὐθεῖαι ΕΘ καὶ ΖΗ, αἱ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΖΘ κείμεναι, δὲν ἦσαν παράλληλοι, προεκτεινόμεναι ἤθελον συναπαντηθῆ. Λοιπὸν καὶ τὰ ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΚ, ἐφ᾽ ὧν αὗται κεῖνται, ἤθελον ὡσαύτως συναπαντηθῆ, ἑπομένως δὲν ἤθελον εἶναι παράλληλα, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐξ ἑνὸς σημείου Α δυνάμεθα πάντοτε νὰ ἄξωμεν ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ, καὶ ἓν μόνον.

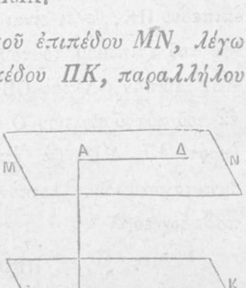


1^{ον}. Ἐκ τοῦ σημείου Α καταβιβάζομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ τὴν κάθετον ΑΒ καὶ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Α ἄγομεν τὸ ἐπίπεδον ΠΚ κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΠΚ θέλει εἶναι παράλληλον τῷ ΜΝ.

2^{ον}. Ἐὰν ὑπῆρχε καὶ δεύτερόν τι ἐπίπεδον ΑΘ, διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου Α καὶ παράλληλον τῷ ΜΝ, αἱ κοιναὶ τομαὶ ΒΔ, ΑΖ, ΑΕ, τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΜΝ, ΠΚ, ΑΘ μεθ᾽ ἑνὸς τρίτου, διὰ τῆς ΑΒ διερχομένου, ἤθελον εἶναι παράλληλοι (πρότ. 12), καὶ ἠθέλαμεν ἔχει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α δύο εὐθείας ΑΖ, ΑΕ παραλλήλους τῇ ΒΔ, ὅπερ ἄτοπον (πρότ. 9).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14. ΘΕΩΡΗΜΑ.

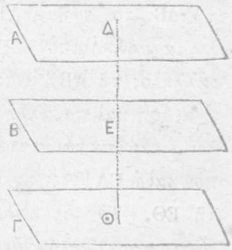
Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἦναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, λέγω ὅτι θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΚ, παραλλήλου τῷ ΜΝ.



Διότι, ἂν ἡ ΑΒ δὲν ἦτο κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΚ, τὸ διὰ τοῦ σημείου Β ἀγόμενον κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον ἤθελεν εἶναι παράλληλον τῷ ΜΝ (πρότ. 13) καὶ τότε ἠθέλαμεν ἔχει ἐξ ἑνὸς σημείου Β δύο ἐπίπεδα παράλληλα τῷ ΜΝ, ὅπερ προαπεδείχθη ἀδύνατον. Λοιπὸν κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15. ΘΕΩΡΗΜΑ.

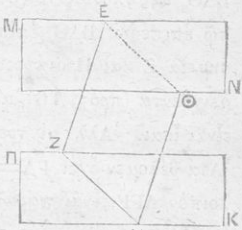
Δύο ἐπίπεδα Α καὶ Β, παράλληλα τρίτῳ τινὶ Γ, εἶναι καὶ πρὸς ἄλληλα παράλληλα.



Διότι, ἐὰν ἄξωμεν τὴν ΔΘ κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Γ, αὕτη θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῶν παραλλήλων αὐτῷ ἐπιπέδων Α καὶ Β, καὶ ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα Α καὶ Β εἶναι κάθετα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΔΘ, θέλουσιν εἶναι παράλληλα (πρότ. 11). Λοιπὸν δύο ἐπίπεδα Α καὶ Β παράλληλα τρίτῳ τινὶ Γ εἶναι καὶ πρὸς ἄλληλα παράλληλα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΜΝ, ΠΚ περιεχόμεναι παράλληλοι ΕΖ, ΘΗ εἶναι ἴσαι.



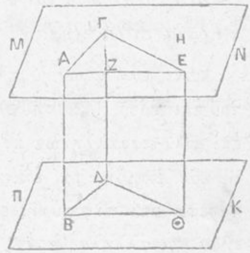
Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν διὰ τῶν παραλλήλων ΕΖ, ΘΗ τὸ ἐπίπεδον ΕΖΗΘ. Αἱ κοιναὶ τομαὶ ΕΘ, ΖΗ τοῦ ἐπιπέδου τούτου μετὰ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΜΝ, ΠΚ θέλουσιν εἶναι παράλληλοι (πρότ. 12). Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΖΗΘΕ εἶναι παραλληλόγραμμον, ὡς ἔχον τὰς ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρὰς παραλλήλους. Λοιπὸν κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 33 προτάσει τοῦ Α' βιβλίου θέλομεν ἔχει ΕΖ=ΗΘ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι *ἡ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἀπόστασις εἶναι καθ' ὅλην αὐτῶν τὴν ἔκτασιν ἡ αὐτή.* Διότι, ἂν αἱ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΘΗ ἦσαν κάθετοι ἐπὶ τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΜΝ καὶ ΠΚ, ἤθελον εἶναι καὶ παράλληλοι, καὶ ἑπομένως κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο γωνίαι ΓΑΕ, ΔΒΘ, μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κείμεναι, ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ διευθυνομένας κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν, αἱ γωνίαι αὗται θέλουσιν εἶναι ἴσαι, τὰ δ' ἐπίπεδα αὐτῶν παράλληλα.

Ἂς λάβωμεν ΑΓ=ΒΔ, ΑΕ=ΒΘ, καὶ ἄξωμεν τὰς εὐθείας ΓΕ, ΔΘ, ΑΒ, ΓΔ, ΕΘ.



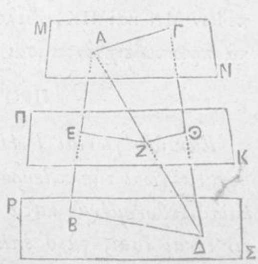
Ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΔΒ, τὸ σχῆμα ΑΒΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμον. Λοιπὸν ἡ ΓΔ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΑΒ. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΒΘ, ἡ ΕΘ θέλει εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΑΒ. Λοιπὸν καὶ ἡ ΓΔ θέλει εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΕΘ. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΓΕΘΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἑπομένως ἡ ΓΕ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΔΘ. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ΓΑΕ, ΒΔΘ εἶναι ἰσόπλευρα, ἑπομένως καὶ ἰσογώνια. Ἡ γωνία ἄρα ΓΑΕ=ΔΒΘ.

Λέγω πρὸς τούτοις, ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΑΓΕ εἶναι παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΒΔΘ. Διότι, ἂν τὸ ἐπίπεδον ΑΓΕ δὲν ἦτο παράλληλον τῷ ΒΔΘ, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἐκ τοῦ σημείου Α ἀγόμενον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΒΔΘ ἐπίπεδον συναπαντᾷ τὰς εὐθείας ΓΔ, ΕΘ εἰς δύο σημεῖα Ζ καὶ Η διάφορα τῶν σημείων Γ καὶ Ε. Τότε, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα (πρότ. 16), αἱ τρεῖς παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ, ΖΔ, ΘΗ θέλουσιν εἶναι ἴσαι. Ἀλλ' αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, ΕΘ ἀπεδείχθησαν ἴσαι. Ἄρα θέλομεν ἔχει ΓΔ=ΖΔ καὶ ΘΗ=ΕΘ, ὅπερ ἄτοπον. Τὸ ἐπίπεδον λοιπὸν ΑΓΕ εἶναι παράλληλον τῷ ΔΒΘ.

Πόρισμα. Ἐὰν δύο παράλληλα ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ συναπαντηθῶσιν ὑπὸ δύο ἄλλων ἐπιπέδων ΓΑΒΔ, ΕΑΒΘ, αἱ ὑπὸ τῶν κοινῶν τομῶν τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΜΝ καὶ ΠΚ σχηματιζόμεναι γωνίαι ΓΑΕ, ΒΔΘ θέλουσιν εἶναι ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὰ μεταξὺ τριῶν παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμενα μέρη δύο εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι ἀνάλογα.



Ἔστωσαν Α, Ε, Β τὰ σημεῖα, ἔνθα ἡ εὐθεῖα ΑΒ συναπαντᾷ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ, ΡΣ, καὶ Γ, Θ, Δ τὰ σημεῖα, ἔνθα ἡ εὐθεῖα ΓΔ συναπαντᾷ τὰ αὐτὰ ἐπίπεδα. Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει

ΑΕ : ΓΘ=ΕΒ : ΘΔ.

Διότι, ἐὰν ἄξωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔ, ἥτις

συναπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον ΠΚ εἴς τι σημεῖον Ζ, καὶ ἑνώσωμεν ΑΓ, ΕΖ, ΘΖ, ΒΔ, ἐπειδὴ αἱ κοιναὶ τομαὶ ΕΖ, ΒΔ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΠΚ, ΡΣ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔ εἶναι παράλληλοι, θέλομεν ἔχει

$$ΑΕ : ΕΒ = ΑΖ : ΖΔ. \qquad (1)$$

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἐπειδὴ αἱ τομαὶ ΑΓ, ΖΘ εἶναι παράλληλοι, θέλομεν ἔχει

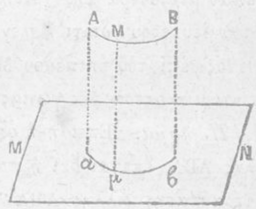
$$ΑΖ : ΖΔ = ΓΘ : ΘΔ. \qquad (2)$$

Ἄρα, ἕνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου ΑΖ : ΖΔ τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2), θέλομεν ἔχει

$$ΑΕ : ΕΒ = ΓΘ : ΘΔ, \quad ἢ \quad ΑΕ : ΓΘ = ΕΒ : ΘΔ.$$

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Ὁ πούς τῆς ἔκ τινος σημείου ἐπὶ ἐπιπέδου τινὸς καταβιβαζομένης καθέτου καλεῖται *προβολὴ* τοῦ σημείου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου· π. χ. τὸ σημεῖον α, πούς τῆς ἐκ τοῦ σημείου Α ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ καταβιβαζομένης καθέτου Αα, καλεῖται προβολὴ τοῦ σημείου Α ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ.

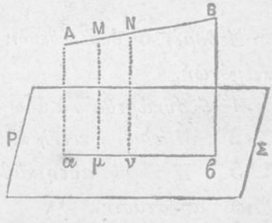


Ἡ προβολὴ γραμμῆς τινος ΑΜΒ ἐπί τινος ἐπιπέδου ΜΝ, εἶναι ἡ γραμμὴ αμβ, ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν προβολῶν τῶν σημείων τῆς γραμμῆς ΑΜΒ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ προβολὴ εὐθείας γραμμῆς ἐπί τινος ἐπιπέδου εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Ἔκ τινος σημείου Α τῆς εὐθείας ΑΒ καταβιβάζομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΡΣ τὴν κάθετον Αα, καὶ ἄγομεν διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ Αα ἐπίπεδον, ὅπερ θέλει τμήσει τὸ ἐπίπεδον ΡΣ κατὰ τὴν εὐθεῖαν αβ. Λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα *αβ* θέλει εἶναι ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΡΣ προβολὴ τῆς ΑΒ.

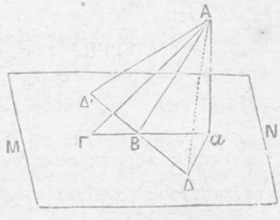


Διότι, ἐὰν ἐκ τῶν σημείων Μ, Ν, ... τῆς εὐθείας ΑΒ καταβιβάσωμεν καθέτους ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΡΣ, αἱ κάθετοι αὗται θέλουσιν εἶναι παράλληλοι τῇ Αα, καὶ θέλουσι κεῖσθαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΑα (πρότ.

1, πόρ. 2), ἐπομένως δὲν δύνανται νὰ συναπαντήσωσι τὸ ἐπίπεδον ΡΣ εἰμὴ εἰς σημεῖα ἐπὶ τῆς εὐθείας αϐ κείμενα. Λοιπὸν κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 20. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ ὀξεῖα γωνία ΑΒα, ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ προϐολῆς αὐτῆς Βα, εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης ΑΒΔ, σχηματιζομένης ὑπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ καὶ ἑτέρας τινὸς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ κειμένης καὶ διὰ τοῦ σημείου τῆς συναπαντήσεως Β διερχομένης.



Διότι, ἐὰν λάϐωμεν ΒΔ=Βα καὶ ἑνώσωμεν ΑΔ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒα, ΑΒΔ θέλουσιν ἔχει τὴν πλευρὰν ΑΒ κοινὴν, τὰς πλευρὰς Βα, ΒΔ ἴσας ἐκ κατασκευῆς, καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ Αα τοῦ πρώτου θέλει εἶναι μικροτέρα τῆς τρίτης πλευρᾶς ΑΔ τοῦ δευτέρου· διότι ἡ μὲν Αα εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ἡ δὲ ΑΔ πλαγία. Λοιπὸν ἡ γωνία ΑΒα εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας ΑΒΔ (πρότ. 12, Α').

Πόρισμα. Ἐπειδὴ ἡ ὀξεῖα γωνία ΑΒα εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης ΑΒΔ, ἕπεται ὅτι ἡ παραπληρωματικὴ αὐτῆς ΑΒΓ εἶναι μεγαλειτέρα πάσης ἄλλης ΑΒΔ'· διότι θέλομεν ἔχει πάντοτε τὴν ἰσότητα ΑΒα+ΑΒΓ=ΑΒΔ+ΑΒΔ'=2^ορ, καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒα<ΑΒΔ, ἕπεται ὅτι ἡ ΑΒΓ>ΑΒΔ'.

Σχόλιον. Ἐπειδὴ ἡ ὀξεῖα γωνία ΑΒα, ἡ ὡς ἀνωτέρω ἐῤῥέθη σχηματιζομένη, εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης, ὠνομάσθη *γωνία τῆς εὐθείας μετὰ τοῦ ἐπιπέδου.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 21. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δεδομένων δύο εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ, μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένων,

1^ον. Δυνάμεθα νὰ ἄξωμεν ἐπ' αὐτῶν κοινήν τινα κάθετον.

2^ον. Μία μόνη κοινὴ κάθετος δυνατὸν νὰ ἀχθῇ.

3^ον. Ἡ κοινὴ αὕτη κάθετος μετρεῖ τὴν ἐλαχίστην τῶν δύο εὐθειῶν ἀπόστασιν.

1^ον. Ἐξ ἑνὸς σημείου Α τῆς εὐθείας ΑΒ ἄγομεν τὴν ΑΛ παράλληλον τῇ ΓΔ. Τὸ ἐπίπεδον ΜΝ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΛ θέλει εἶναι παράλληλον τῇ εὐθείᾳ ΓΔ (πρότ. 10).

Ἐκ τοῦ σημείου Δ, ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ κατ' ἀρέσκειαν ληφθέντος, καταβιβάζομεν τὴν ΔΗ κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Η, ποδὸς τῆς καθέτου ΔΗ, ἄγομεν τὴν ΗΘ παράλληλον τῇ ΓΔ, καὶ τελευταῖον, ἐκ τοῦ σημείου Θ ἄγομεν τὴν ΘΓ παράλληλον τῇ ΗΔ. Λέγω ὅτι ΘΓ θέλει εἶναι κοινὴ κάθετος ἐπὶ τῶν δύο δεδομένων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΘΓ εἶναι παράλληλος τῇ ΔΗ, θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ (πρότ. 8), ἑπομένως εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ΘΗ. Ἀλλ' οὖσα κάθετος ἐπὶ τῆς ΘΗ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΓΔ, παραλλήλου τῇ ΘΗ. Ἀπεδείχθη λοιπὸν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΘΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Λοιπὸν 1ον δυνάμεθα κτλ.

2ον. Μία μόνη κοινὴ κάθετος δυνατὸν ν' ἀχθῇ. Διότι, ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι εὐθεῖά τις ΙΚ, διάφορος τῆς ΓΘ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, αὕτη, (δηλ. ἡ ΙΚ), θέλει εἶναι ὡσαύτως κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΚΠ, παραλλήλου τῇ ΓΔ, ἑπομένως ἤθελεν εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ. Ἀφ' ἑτέρου, ΙΖ, παράλληλος τῇ ΔΗ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΜΝ. Ἠθέλαμεν λοιπὸν ἔχει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ι δύο καθέτους ΙΚ, ΙΖ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ὅπερ ἄτοπον.

3ον. Ἡ ΓΘ μετρεῖ τὴν ἐλαχίστην τῶν δύο τούτων εὐθειῶν ἀπόστασιν. Διότι, ἂν ΓΘ δὲν ἦτο ἡ ἐλαχίστη, ἔστω ΙΚ τοιαύτη. Ἄγομεν τὴν ΙΖ παράλληλον τῇ ΓΘ. Ἡ ΙΖ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΓΘ καὶ μικροτέρα τῆς ΙΚ, διότι ἡ μὲν ΙΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ἡ δὲ ΙΚ πλαγία. Ἄρα $ΓΘ < ΙΚ$. Λοιπὸν 3ον κτλ.

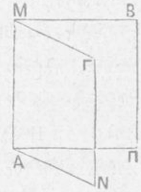
ΓΩΝΙΑΙ ΥΠΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΙΖΟΜΕΝΑΙ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

1. Ὅταν δύο ἐπίπεδα τέμνωνται, τὸ σχηματιζόμενον σχῆμα ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τούτων, περατουμένων εἰς τὴν κοινὴν αὐτῶν τομήν, καλεῖται *δίεδρος γωνία.*

Ἡ κοινὴ τῶν δύο ἐπιπέδων τομὴ καλεῖται *κόψις* τῆς διέδρου γωνίας, τὰ δὲ σχηματίζοντα τὴν δίεδρον γωνίαν ἐπίπεδα καλοῦνται *ἕδραι* αὐτῆς.

Ἡ δίεδρος γωνία παρίσταται διὰ τεσσάρων γραμμάτων· τὰ δύο τούτων, τιθέμενα εἰς τὸ μέσον, παριστῶσι τὴν κόψιν, ἑκάτερον δὲ τῶν δύο ἄλλων μετὰ τῶν τὴν κόψιν παριστώντων παριστῶσι τὰς δύο αὐτῆς ἕδρας. Οὕτω π. χ. ΓΑΜΒ παριστᾷ τὴν δίεδρον γωνίαν, τὴν ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων ΜΝ καὶ ΜΠ σχηματιζομένην καὶ ΓΑΜ, ΑΜΒ τὰς ἕδρας αὐτῆς. Ἐνίοτε παριστῶσι τὴν δίεδρον γωνίαν ΓΑΜΒ μόνον διὰ τῶν τὴν κόψιν παριστώντων γραμμάτων Α καὶ Μ, οὕτως ΑΜ, ἀλλὰ τότε μόνον, ὅταν οὐδεμία ἄλλη δίεδρος γωνία ἔχῃ τὴν αὐτὴν κόψιν ΑΜ.

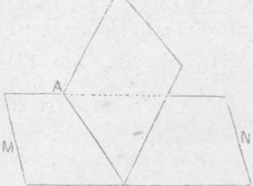


2. Δύο δίεδροι γωνίαι λέγονται ἴσαι, ὅταν αἱ ἕδραι αὐτῶν ἐπιτιθέμεναι ταὐτίζωνται.

3. Ἐὰν εἴς τι σημεῖον Α τῆς κόψεως ΑΜ ἄξωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας ΑΜΓ τὴν ΑΝ κάθετον ἐπὶ τῆς κόψεως ΑΜ, καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας ΑΜΒ τὴν ΑΠ κάθετον ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΜ, ἡ οὕτω σχηματιζομένη γωνία ΠΑΝ καλεῖται ἡ τῇ διέδρῳ γωνίᾳ ΑΜ ἀντιστοιχοῦσα *ἐπίπεδος γωνία*. ἢ ἡ κλίσις τῶν δύο ἑδρῶν τῆς διέδρου γ

Ἡ οὕτω σχηματιζομένη ἐπίπεδος γωνία ΠΑΝ εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς ὁποιονδήποτε σημεῖον τῆς κόψεως ΑΜ καὶ ἂν ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι· διότι, ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον Μ σχηματισθῇ ὁμοιοτρόπως ἡ ἐπίπεδος γωνία ΓΜΒ, αἱ εὐθεῖαι ΜΓ, ΑΝ θέλουσιν εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΜ καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΜΝ κείμεναι· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΜΒ θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΑΠ. Λοιπὸν ἡ γωνία ΓΜΒ=ΝΑΠ (πρότ. 17).

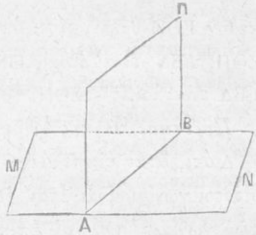
4. Ἐὰν προεκβληθῇ μία τῶν ἑδρῶν διέδρου τινὸς γωνίας ΠΑΒΝ, π. χ. ἡ ΝΑΒ, θέλει σχηματισθῇ δευτέρα τις δίεδρος γωνία ΠΑΒΜ προσκειμένη τῇ πρώτῃ. Ἐὰν αἱ προσκείμεναι αὗται δίεδροι γωνίαι ΠΑΒΝ, ΠΑΒΜ ἦναι ἴσαι, τὸ ἐπίπεδον ΠΒ λέγεται *κάθετον* ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, αἱ δὲ ἴσαι δίεδροι γωνίαι καλοῦνται *ὀρθαὶ* δίεδροι γωνίαι



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 22. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δι' εὐθείας τινὸς ΑΒ, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ κειμένης, εἶναι πάντοτε δυνατὸν νὰ διέλθῃ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, καὶ ἓν μόνον.

Πόρισμα. Ὅλαι αἱ ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.



Ἐπειδὴ ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου, ὡς καὶ ἡ τοῦ πορίσματος, εἶναι κατὰ πάντα ὁμοία τῇ δοθείσῃ ἐν τῇ 1 προτάσει τοῦ Α΄ βιβλίου, ἐνομίσαμεν περιττὸν νὰ ἐπαναλάβωμεν αὐτὴν ἐκ δευτέρου, πεπεισμένοι ὅτι ὁ ἀναγνώστης εἶναι ἤδη εἰς κατάστασιν νὰ τὴν ἐφαρμόσῃ ἀφ᾽ ἑαυτοῦ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 23. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶν ἐπίπεδον συναπαντῶν δεύτερόν τι σχηματίζει μετ᾽ αὐτοῦ δύο προσκειμένας διέδρους γωνίας, ὧν τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς διέδρους γωνίας.

Πόρισμα. Ἐὰν ἐπίπεδόν τι ἦναι κάθετον ἐπὶ ἑτέρου, τὸ δεύτερον τοῦτο ἐπίπεδον θέλει εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ πρώτου (ὅρα πρότ. 2, Α΄).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 24. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο προσκειμένων διέδρων γωνιῶν ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς διέδρους γωνίας, αἱ ἐξωτερικαὶ αὐτῶν ἕδραι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (ὅρα πρότ. 4, Α΄).

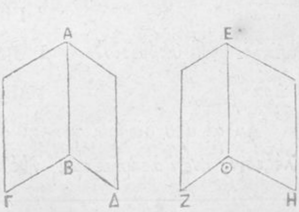
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 25. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ὅταν δύο ἐπίπεδα τέμνωνται, αἱ κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Σχόλιον. Τὸ ἄθροισμα κτλ. (ὅρα πρότ. 5, Α΄).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 26. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο δίεδροι γωνίαι ΓΑΒΔ, ΖΕΘΗ ἦναι ἴσαι, αἱ ἐπίπεδοι αὐτῶν γωνίαι ΓΒΔ, ΖΘΗ θέλουσιν εἶναι ὡσαύτως ἴσαι.



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου φέρομεν τὴν δευτέραν δίεδρον γωνίαν ἐπὶ τῆς πρώτης οὕτως, ὥστε ΕΘ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ, τὸ σημεῖον Θ ἐπὶ τοῦ Β καὶ τὸ ἐπίπεδον ΕΘΖ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΕΘΖ, ΑΒΓ εἶναι ὀρθαί, ΘΖ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ΒΓ. Ἀφ᾽ ἑτέρου, ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν διέδρων γωνιῶν, τὸ ἐπίπεδον ΕΘΗ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔ, καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΕΘΗ, ΑΒΔ εἶναι ὀρθαὶ, ΘΗ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ΒΔ. Λοιπὸν ἡ γωνία ΓΒΔ εἶναι ἴση τῇ ΖΘΗ.

Πόρισμα. Ἡ τῆς ὀρθῆς διέδρου γωνίας ἐπίπεδος γωνία εἶναι ὀρθή.

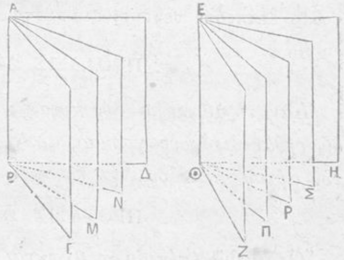
Διότι, ὅταν ἐπίπεδόν τι ἦναι κάθετον ἐπὶ ἑτέρου, αἱ προσκείμεναι δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἑπομένως καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίπεδοι αὐτῶν γωνίαι. Ἀλλ' αἱ ἐπίπεδοι αὗται γωνίαι εἶναι προσκείμεναι. Ἄρα εἶναι ὀρθαί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 27. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο δίεδροι γωνίαι ΓΑΒΔ, ΖΕΘΗ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἐπίπεδοι αὐτῶν γωνίαι ΓΒΔ, ΖΘΗ, τουτέστι

$$ΓΑΒΔ : ΖΕΘΗ = ΓΒΔ : ΖΘΗ.$$

Ἄς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι αἱ δίεδροι αὗται γωνίαι ἔχουσι κοινόν τι μέτρον, ἐμπεριεχόμενον π. χ. τρὶς εἰς τὴν δίεδρον γωνίαν ΓΑΒΔ καὶ τετράκις εἰς τὴν ΖΕΘΗ, θέλομεν ἔχει



$$ΓΑΒΔ : ΖΕΘΗ = 3 : 4.$$

Αἱ κοιναὶ τομαὶ ΒΜ, ΒΝ, . . . ΘΠ, ΘΡ, ΘΣ . . . τῶν ἐπιπέδων ΓΒΔ, ΖΘΗ μετὰ τῶν ἑδρῶν τῶν ἐπιπέδων τῆς διαιρέσεως (*) θέλουσιν εἶναι ἀμοιβαίως κάθετοι ἐπὶ τῶν κόψεων ΑΒ, ΕΘ, διότι αἱ κόψεις ΑΒ, ΕΘ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων ΓΒΔ, ΖΘΗ (ὁρισμὸς 3). Ἐπειδὴ δ' ἀφ' ἑνὸς αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΓΒΜ, ΜΒΝ,.... ΖΘΠ, ΠΘΡ,.... εἶναι ἴσαι, ὡς ἀντιστοιχοῦσαι εἰς ἴσας διέδρους γωνίας, καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ μὲν ΓΒΔ περιέχει 3 τοιαύτας, ἡ δὲ ΖΘΗ τέσσαρας, θέλομεν ἔχει

$$ΓΒΔ : ΖΘΗ = 3 : 4.$$

Ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν $\quad ΓΑΒΔ : ΖΕΘΗ = 3 : 4.$

Ἄρα $\quad ΓΑΒΔ : ΖΕΘΗ = ΓΒΔ : ΖΘΗ.$

Ἂν αἱ δύο δίεδροι γωνίαι δὲν εἶχον κοινόν τι μέτρον, ἤ, ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἦσαν ἀσύμμετροι, ἠθέλαμεν ἀποδείξει διὰ τῆς μιᾶς ἢ διὰ τῆς

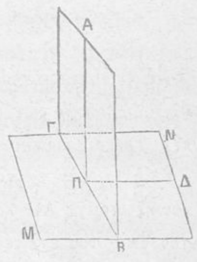
(*) Τὰ χωρίζοντα τὰς διέδρους γωνίας ΓΑΒΔ, ΖΕΘΗ εἰς ἴσα μέρη ἐπίπεδα ἐκάλεσα, πρὸς συντομίαν, ἐπίπεδα διαιρέσεως.

ἑτέρας τῶν ἐν τῇ προτάσει 18 τοῦ Β' βιβλίου ἀποδείξεων ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία εἶναι ἀληθὴς καὶ κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην.

Σχόλιον. Ἐκ τοῦ ἀποδειχθέντος θεωρήματος ἕπεται ὅτι πρὸς καταμέτρησιν διέδρου τινὸς γωνίας Δ, τουτέστι πρὸς εὕρεσιν τοῦ λόγου τῆς διέδρου γωνίας Δ πρὸς δίεδρόν τινα γωνίαν, ληφθεῖσαν ὡς μονάδα, π. χ. πρὸς τὴν ὀρθὴν δίεδρον γωνίαν, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον τῆς ἐπιπέδου γωνίας τῆς Δ πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ἥτις μετρεῖ τὴν ὀρθὴν δίεδρον γωνίαν (πρότ. 26, πόρ.).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 28. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΠ ἦναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, πᾶν ἐπίπεδον διὰ τῆς ΑΠ διερχόμενον θέλει εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.



Ἔστω ΒΓ ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΑΒ καὶ ΜΝ. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ ἄξωμεν τὴν ΠΔ κάθετον ἐπὶ τῆς ΠΒ, ἡ εὐθεῖα ΑΠ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, θέλει εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκατέρας τῶν εὐθειῶν ΒΓ καὶ ΠΔ. Ἀλλ' ἡ γωνία ΑΠΔ, ὑπὸ δύο καθέτων ΑΠ καὶ ΠΔ ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΒΓ σχηματιζομένη, μετρεῖ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΒ καὶ ΜΝ. Λοιπὸν, ἐπειδὴ ἡ γωνία αὕτη εἶναι ὀρθὴ, τὰ δύο ἐπίπεδα ΑΒ καὶ ΜΝ εἶναι κάθετα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

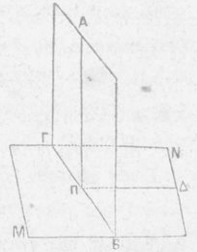
Σχόλιον. Ὅταν τρεῖς εὐθεῖαι, οἷαι αἱ ΑΠ, ΒΠ καὶ ΔΠ, ἦναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλων, ἑκάστη τῶν εὐθειῶν τούτων εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο ἄλλων, τὰ δὲ σχηματιζόμενα τρία ἐπίπεδα ΑΠΒ, ΑΠΔ, ΔΠΒ εἶναι κάθετα ἕκαστον ἐφ' ἑνὸς ἑκάστου τῶν δύο ἄλλων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 29. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ἦναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΠ κάθετος ἐπὶ τῆς κοινῆς τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΒ καὶ ΜΝ τομῆς ΒΓ, λέγω ὅτι ΑΠ θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ (ὅρα τὸ προηγούμενον σχῆμα).

Διότι, ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ ἀχθῇ ἡ ΠΔ κάθετος ἐπὶ τῆς ΠΒ, ἡ γωνία ΑΠΔ θέλει εἶναι ὀρθὴ, διότι τὰ ἐπίπεδα ΑΒ καὶ ΜΝ ὑπετέθησαν κάθετα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΠ εἶναι κάθεπος ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΠΒ καὶ ΠΔ, ἑπομένως εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν ΜΝ.

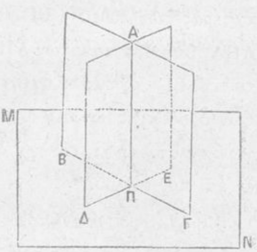
Πόρισμα. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ἦναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, καὶ ἐξ ἑνὸς σημείου Α τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ καταβιβασθῇ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, λέγω ὅτι ἡ κάθετος αὕτη θέλει κεῖσθαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ. Διότι, ἐὰν ἔκειτο ἐκτὸς, ἠδυνάμεθα νὰ ἄξωμεν ἐκ τοῦ σημείου Α τὴν ΑΠ κάθετον ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΠΒ, καὶ ἡ κάθετος αὕτη κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἤθελεν εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ. Λοιπὸν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α ἠθέλαμεν ἔχει δύο καθέτους ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ὅπερ ἀδύνατον.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 30. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ΑΒ καὶ ΑΔ ἦναι κάθετα ἐπὶ τρίτου τινὸς ΜΝ, ἡ κοινὴ τῶν δύο πρώτων τομὴ ΑΠ θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ τρίτου τούτου ἐπιπέδου.

Διότι, ἐὰν ἔκ τινος σημείου Α τῆς κοινῆς τομῆς ΑΠ καταβιβάσωμεν κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ἡ κάθετος αὕτη πρέπει νὰ κῆται συγχρόνως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΔ. Λοιπὸν ἡ κοινὴ τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΒ καὶ ΑΔ τομὴ ΑΠ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ.



ΟΡΙΣΜΟΙ.

1. *Στερεὰ* ἢ *πολύεδρος γωνία* καλεῖται τὸ γωνιῶδες χωρίον, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ πολλῶν ἐπιπέδων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου διερχομένων.

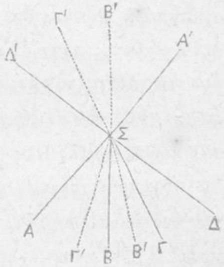
2. Αἱ μὲν κοιναὶ τῶν ἐπιπέδων τομαὶ ὀνομάζονται *κόψεις* τῆς στερεᾶς γωνίας, τὸ δὲ σημεῖον, δι' οὗ αἱ κόψεις διέρχονται, καλεῖται *κορυφὴ* τῆς στερεᾶς γωνίας.

Τὸ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν κόψεων περιεχόμενον ἐπίπεδον καλεῖται *ἕδρα* ἢ *ἐπίπεδος γωνία* τῆς στερεᾶς γωνίας.

3. *Γωνία τρίεδρος* καλεῖται ἡ τρεῖς ἕδρας ἔχουσα.

4. Εἰς τὰ ἑπόμενα δὲν θέλει γείνει λόγος εἰμὴ περὶ τῶν *κυρτῶν* στερεῶν γωνιῶν. Κυρταὶ δὲ στερεαὶ γωνίαι καλοῦνται αἱ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος μιᾶς ὁποιασδήποτε τῶν ἑδρῶν των, προεκβαλλομένης, κείμεναι.

5. Δεδομένης στερεᾶς τινος γωνίας ΣΑΒΓΔ, ἐὰν προεκβάλωμεν τὰς κόψεις ΑΣ, ΒΣ, ΓΣ, κτλ, θέλομεν σχηματίσει νέαν στερεὰν γωνίαν ΣΑ΄Β΄Γ΄Δ΄, ἥτις καλεῖται *συμμετρικὴ* τῆς πρώτης.



Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ ἐπίπεδοι καὶ δίεδροι γωνίαι τῆς νέας στερεᾶς γωνίας ΣΑ΄Β΄Γ΄Δ΄ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς ἐπιπέδους καὶ διέδρους γωνίας τῆς ΣΑΒΓΔ, ἀλλ' αὗται, ἐπιτιθέμεναι δὲν ταὐτίζονται. Διότι, ἐὰν ἡ ἕδρα Δ΄ΣΑ΄ τεθῇ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΔΣΑ οὕτως, ὥστε αἱ κόψεις τῶν δύο στερεῶν γωνιῶν νὰ κῆνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κοινῆς ἕδρας ΔΣΑ, βλέπομεν ὅτι ἡ στερεὰ γωνία ΣΑ΄Β΄Γ΄Δ΄ θέλει λάβει τὴν θέσιν ΣΔΒ΄Γ΄Α, τῆς δὲ τελευταίας ταύτης στερεᾶς γωνίας αἱ ἐπίπεδοι καὶ δίεδροι γωνίαι κατέχουσι τάξιν ἀντίστροφον ὡς πρὸς τὰς ἴσας αὐταῖς ἐπιπέδους καὶ διέδρους γωνίας τῆς ΣΑΒΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 31. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο τρίεδροι γωνίαι ἔχωσι μίαν δίεδρον γωνίαν ἴσην, καὶ τὰς περιεχούσας τὴν δίεδρον ταύτην γωνίαν ἕδρας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ τρίεδροι αὗται γωνίαι θέλουσιν εἶναι ἴσαι καθ' ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη.

Ἔστω ΑΣΒ ═ ΔΤΕ, ΒΣΓ ═ ΕΤΘ, καὶ ἡ δίεδρος γωνία ΣΒ ἴση τῇ διέδρῳ γωνίᾳ ΤΕ.

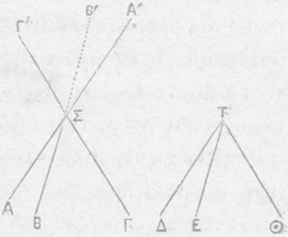
Ἐπιθέτομεν τὴν ἕδραν ΔΤΕ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΣΒ. Ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν διέδρων γωνιῶν ΣΒ καὶ ΤΕ, τὸ ἐπίπεδον ΕΤΘ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΣΓ, καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΒΣΓ, ΕΤΘ εἶναι ἴσαι, ἡ κόψις ΤΘ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ΣΓ. Ἀλλὰ τότε αἱ δύο τρίεδροι γωνίαι ταὐτίζονται. Ἄρα ἔχουσι καὶ τὰ λοιπὰ αὐτῶν μέρη ἴσα. Λοιπὸν δύο τρίεδροι γωνίαι, ἔχουσαι μίαν δίεδρον γωνίαν ἴσην περιεχομένην κτλ.

Ἂν αἱ ἴσαι ἕδραι τῶν δύο τριέδρων γωνιῶν ἦσαν ἀντιστρόφως διατεταγμέναι ὡς πρὸς τὰς ἴσας διέδρους γωνίας, ἠθέλαμεν ἐπιθέσει τὴν τρίεδρον γωνίαν Τ ἐπὶ τῆς ΣΑ′Β′Γ′, συμμετρικῆς τῆς ΣΑΒΓ, καὶ ἠθέλαμεν καταντήσει εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 32. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο τρίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι καθ᾽ ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη, ὅταν ἔχωσι μίαν ἕδραν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας αὐτῇ διέδρους γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ.

Ἔστω ΑΣΓ=ΔΤΘ, ἡ δίεδρος γωνία ΣΑ ἴση τῇ ΤΔ καὶ ἡ δίεδρος γωνία ΣΓ ἴση τῇ ΤΘ.



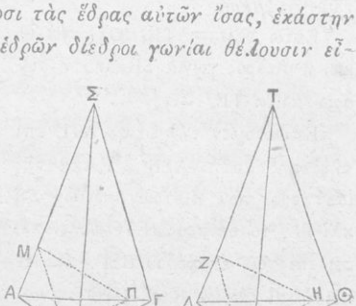
Ἐπιθέτομεν τὴν ἕδραν ΤΔΘ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΣΓ. Ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν διέδρων γωνιῶν ΣΑ καὶ ΔΤ, ΣΓ καὶ ΤΘ, τὰ ἐπίπεδα ΔΤΕ, ΘΤΕ θέλουσι πέσει ἀμοιβαίως ἐπὶ τῶν ΑΣΒ, ΓΣΒ. Λοιπὸν ἡ κόψις ΤΕ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς κόψεως ΣΒ, καὶ αἱ δύο τρίεδροι γωνίαι θέλουσι ταὐτισθῇ. Λοιπὸν κτλ.

Ἂν αἱ ἴσαι δίεδροι γωνίαι ἦσαν ἀντιστρόφως διατεταγμέναι ὡς πρὸς τὰς ἴσας ἕδρας, ἠθέλαμεν ἐπιθέσει τὴν τρίεδρον γωνίαν Τ ἐπὶ τῆς ΣΓ′Β′Α′, συμμετρικῆς τῆς ΣΑΒΓ, καὶ ἠθέλαμεν καταντήσει εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 33. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο τρίεδροι γωνίαι ἔχωσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ἴσας, ἑκάστην ἑκάστῃ, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων ἑδρῶν δίεδροι γωνίαι θέλουσιν εἶναι ἴσαι.

Ἔστω ΑΣΒ=ΔΤΕ, ΑΣΓ=ΔΤΘ, ΒΣΓ=ΕΤΘ.



Λαμβάνομεν ΣΑ κατ᾽ ἀρέσκειαν, καὶ ΣΒ, ΣΓ, ΤΔ, ΤΕ, ΤΘ ἴσας τῇ ΣΑ, καὶ ἄγομεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ, ΕΔ, ΕΘ, ΔΘ.

Τὰ δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΣΑΒ, ΤΔΕ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΣΒΓ, ΤΕΘ εἶναι ἴσα, ὡσαύτως καὶ τὰ ἰσοσκελῆ ΣΑΓ, ΤΔΘ. Ἐκ τῆς ἀνὰ δύο ἰσότητος τῶν ἓξ τούτων ἰσοσκελῶν τριγώνων ἕπεται ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΘ εἶναι ἴσα, διότι ΑΒ=ΔΕ, ΒΓ=ΕΘ, ΑΓ=ΔΘ.

Τούτου τεθέντος, ἔκ τινος σημείου Μ τῆς κόψεως ΣΑ ἄγομεν ἐπὶ τῶν ἑδρῶν ΣΑΒ, ΣΑΓ τὰς εὐθείας ΜΝ, ΜΠ καθέτους ἐπὶ τῆς ΣΑ. Αἱ κάθετοι αὗται θέλουσι συναπαντήσει τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, διότι αἱ πρὸς τὴν βάσιν γωνίαι ΣΑΒ, ΣΑΓ εἶναι ὀξεῖαι.(*) Τελευταῖον ἑνόνομεν τὰ σημεῖα Ν καὶ Π διὰ τῆς εὐθείας ΝΠ.

(*) διότι αἱ γων. ΣΑΒ, ΣΑΓ εἶναι [illegible]

Λαμβάνομεν ἀκολούθως ΔΖ=ΑΜ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Ζ ἄγομεν τὰς καθέτους κτλ, ὡς προηγουμένως.

Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΜΝ, ΔΖΚ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς ΑΜ, ΔΖ καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ΜΑΝ, ΖΔΚ ἴσας. Ἄρα ΑΝ=ΔΚ καὶ ΜΝ=ΖΚ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΜΠ, ΔΖΗ εἶναι ἴσα, ἑπομένως ΑΠ=ΔΗ καὶ ΜΠ=ΖΗ.

Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ΝΑΠ, ΚΔΗ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην (τὴν ΝΑΠ=ΚΔΗ), περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Ἄρα ΝΠ=ΚΗ. Τελευταῖον τὰ δύο τρίγωνα ΝΜΠ, ΚΖΗ εἶναι ἴσα ὡς ἰσόπλευρα. Λοιπὸν ἡ γωνία ΝΜΠ, ἡ τὴν δίεδρον γωνίαν ΣΑ μετροῦσα, εἶναι ἴση τῇ ΚΖΗ, ἥτις μετρεῖ τὴν δίεδρον γωνίαν ΤΔ. Λοιπὸν αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων ἑδρῶν ΣΒΓ, ΕΤΘ δίεδροι γωνίαι ΣΑ, ΤΔ εἶναι ἴσαι.

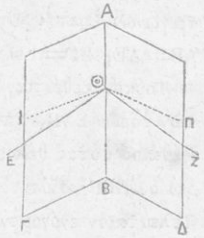
Σχόλιον. Ἂν πρὸς τούτοις αἱ ἕδραι τῶν δύο τριέδρων γωνιῶν ἦσαν ὁμοίως διατεταγμέναι, αἱ δύο τρίεδροι γωνίαι ἤθελον εἶναι ἴσαι (*), εἰ δὲ μή, συμμετρικαί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 34. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Θ, ἐπὶ τῆς κόψεως ΑΒ τῆς διέδρου γωνίας ΔΑΒΓ ληφθέντος, καὶ ὀξείας τῆς γωνίας ταύτης; ὑψώσωμεν ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΓ τὴν κάθετον ΘΖ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, πρὸς ὃ καὶ ἡ ἕδρα ΑΒΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΔ τὴν κάθετον ΘΕ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔ, πρὸς ὃ καὶ ἡ ἕδρα ΑΒΓ, λέγω ὅτι ἡ γωνία ΕΘΖ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας, τῆς μετρούσης τὴν δίεδρον γωνίαν ΓΑΒΔ.

(*) Δύο ὁποιαιδήποτε στερεαὶ γωνίαι λέγονται ἴσαι, ὅταν ἐπιτιθέμεναι ταὐτίζωνται.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἐκ κατασκευῆς κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΕΘΖ (πρότ. 3), αἱ κοιναὶ τομαὶ ΙΘ, ΘΠ τοῦ ἐπιπέδου τούτου μετὰ τῶν ἐπιπέδων ΑΒΓ, ΑΒΔ θέλουσιν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς ΑΒ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Θ, καὶ ἑπομένως κατὰ τὸν ὁρισμὸν 3 ἡ γωνία ΙΘΠ μετρεῖ τὴν δίεδρον γωνίαν ΓΑΒΔ. Ἀλλ', ἐπειδὴ ἡ ΘΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, ἡ γωνία $ΙΘΖ=1^{\text{ορ}}$. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ ἡ ΘΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔ, ἡ γωνία $ΕΘΠ=1^{\text{ορ}}$. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει



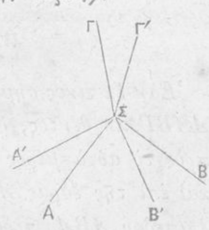
$$ΙΘΖ+ΕΘΠ=2^{\text{ορ}}.$$

Ἀλλ' $ΙΘΖ+ΕΘΠ=ΙΘΕ+ΕΘΖ+ΕΘΖ+ΖΘΗ=ΕΘΖ+ΙΘΠ$. Ἄρα $ΕΘΖ+ΙΘΠ=2^{\text{ορ}}$. Λοιπὸν ἡ γωνία ΕΘΖ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ΙΘΠ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 35. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς Σ τριέδρου τινὸς γωνίας ΣΑΒΓ ὑψώσωμεν ἐφ' ἑκάστης ἕδρας κάθετον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας ταύτης, πρὸς ὃ καὶ ἡ τρίτη κόψις, ἡ τρίεδρος γωνία ΣΑ'Β'Γ', ἡ ἔχουσα διὰ κόψεις τὰς τρεῖς ταύτας καθέτους, εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς δεδομένης τριέδρου γωνίας ΣΑΒΓ, καὶ ἀντιστρόφως. (Δύο τρίεδροι γωνίαι λέγονται παραπληρωματικαί(*) ὅταν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς μιᾶς ἦναι παραπληρωματικαὶ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν μετρουσῶν τὰς διέδρους γωνίας τῆς ἑτέρας).

Ἔστω ΣΓ' κάθετος ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΣΒ, καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΒ, πρὸς ὃ καὶ ἡ κόψις ΣΓ· ΣΒ' κάθετος ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΣΓ, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΓ, πρὸς ὃ καὶ ἡ κόψις ΣΒ, καὶ ΣΑ' κάθετος ἐπὶ τῆς ἕδρας ΣΒΓ, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΒΣΓ, πρὸς ὃ καὶ ἡ κόψις ΣΑ.



$1^{\text{ον}}$. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΣΓ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΒ, κειμένη πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τούτου, πρὸς ὃ καὶ ἡ ἕδρα ΓΣΒ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΣΑ' κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΣΒ, κειμένη πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τούτου, πρὸς ὃ καὶ ἡ ἕδρα ΑΣΒ, ἡ γωνία Γ'ΣΑ', κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἐπι-

(*) Δύο τρίεδροι γωνίαι λέγονται παραπληρωματικαὶ ὅταν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς μιᾶς ... τῆς ἑτέρας καὶ ἀντιστρόφως.

πέδου γωνίας, τῆς μετρούσης τὴν δίεδρον γωνίαν ΑΣΒΓ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ γωνία Γ'ΣΒ' εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας, τῆς μετρούσης τὴν δίεδρον γωνίαν ΓΣΑΒ, καὶ ἡ γωνία Α'ΣΒ' παραπληρωματικὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας, τῆς μετρούσης τὴν δίεδρον γωνίαν ΑΣΓΒ. Λοιπὸν 1ον αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς τριέδρου γωνίας ΣΑ'Β'Γ' εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν μετρουσῶν τὰς διέδρους γωνίας τῆς τριέδρου ΣΑΒΓ.

2ον. Ἡ εὐθεῖα ΣΑ', ἐπειδὴ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΣΓ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΣΓ, ὡσαύτως ἡ εὐθεῖα ΣΒ', ἐπειδὴ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΓ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΣΓ. Λοιπὸν ἡ ΣΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Α'ΣΒ', ὡς κάθετος ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΣΑ' καὶ ΣΒ'. Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ ΣΓ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΒ καὶ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τούτου, πρὸς ὃ καὶ ἡ κόψις ΣΓ, ἡ γωνία ΓΣΓ' εἶναι ὀξεῖα. Καὶ ἐπειδὴ ΣΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Α'ΣΒ' καὶ σχηματίζει μετὰ τῆς ΣΓ' ὀξεῖαν γωνίαν, συμπεραίνομεν ὅτι ΣΓ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου Α'ΣΒ', πρὸς ὃ καὶ ἡ κόψις ΣΓ'.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλαμεν ἀποδείξει, ὅτι ΣΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Α'ΣΓ' καὶ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τούτου, πρὸς ὃ καὶ ἡ κόψις ΣΒ', καὶ ὅτι ΣΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Γ'ΣΒ' καὶ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τούτου, πρὸς ὃ καὶ ἡ κόψις ΣΑ'. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἡ τρίεδρος γωνία ΣΑΒΓ εὑρίσκεται κατεσκευασμένη διὰ τῆς ΣΑ'Β'Γ', ὅπως ἡ τρίεδρος αὕτη γωνία κατεσκευάσθη διὰ τῆς ΣΑΒΓ. Λοιπὸν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς ΣΑΒΓ εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς ΣΑ'Β'Γ'. Λοιπὸν κτλ.

Πόρισμα. Ἂν αἱ δίεδροι γωνίαι τῆς τριέδρου γωνίας ΣΑΒΓ ἦσαν ἴσαι, αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς ΣΑ'Β'Γ', παραπληρωματικῆς τῆς ΣΑΒΓ, ἤθελον εἶναι ἴσαι, καὶ ἀντιστρόφως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 36. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο τρίεδροι γωνίαι ἔχωσι τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας ἴσας, ἑκάστην ἑκάστῃ, αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ἢ αἱ ἕδραι τῶν δύο τούτων τριέδρων γωνιῶν θέλουσιν εἶναι ἴσαι.

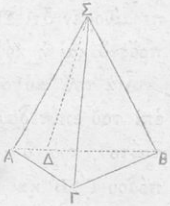
Ἔστωσαν Σ, Σ' αἱ δύο δεδομέναι τρίεδροι γωνίαι καὶ Τ, Τ' αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν.

Ἐπειδὴ αἱ δίεδροι γωνίαι τῶν τριέδρων στερεῶν γωνιῶν Σ καὶ Σ', εἶναι ἴσαι, αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῶν παραπληρωματικῶν Τ καὶ Τ′ θέλουσιν εἶναι ἴσαι (πρότ. 35). Ἀλλ', ἐπειδὴ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῶν τριέδρων γωνιῶν Τ καὶ Τ′ εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ δίεδροι αὐτῶν γωνίαι, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 33 προτάσει, θέλουσιν εἶναι ἴσαι. Τελευταῖον, ἐπειδὴ ἀπεδείχθη ὅτι αἱ δίεδροι γωνίαι τῶν στερεῶν γωνιῶν Τ καὶ Τ′ εἶναι ἴσαι, ἕπεται κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, ὅτι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῶν παραπληρωματικῶν αὐτοῖς Σ καὶ Σ′ θέλουσιν εἶναι ἴσαι, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. Ἐὰν αἱ ἴσαι ἕδραι τῶν δύο τριέδρων γωνιῶν Σ καὶ Σ′ ἦναι ὁμοίως διατεταγμέναι, αἱ τρίεδροι αὗται γωνίαι θέλουσιν εἶναι ἴσαι, εἰ δὲ μή, συμμετρικαί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 37. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἄθροισμα δύο ὁποιωνδήποτε ἐπιπέδων γωνιῶν τριέδρου τινὸς γωνίας εἶναι μεγαλείτερον τῆς τρίτης.



Ἡ μόνη περίπτωσις, καθ' ἣν τὸ θεώρημα χρήζει ἀποδείξεως, εἶναι, ὅταν ἡ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων συγκρινομένη γωνία ἦναι μεγαλειτέρα ἑκατέρας αὐτῶν. Ἔστω λοιπὸν ἡ στερεὰ γωνία Σ, ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΣΒ, ΑΣΓ, ΒΣΓ, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γωνία ΑΣΒ εἶναι ἡ μεγαλειτέρα. Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει ΑΣΒ < ΑΣΓ + ΓΣΒ.

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΒ σχηματίζομεν τὴν γωνίαν ΒΣΔ = ΒΣΓ, ἄγομεν κατ' ἀρέσκειαν τὴν εὐθεῖαν ΑΔΒ, λαμβάνομεν ΣΓ = ΣΔ, καὶ ἑνόνομεν ΑΓ καὶ ΒΓ.

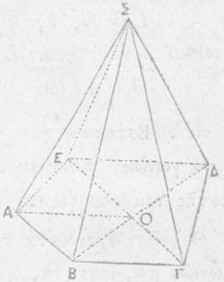
Τὰ δύο τρίγωνα ΒΣΔ, ΒΣΓ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην, ἐκ κατασκευῆς, περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν, ἑπομένως ΒΔ = ΒΓ. Ἀλλ' ἔχομεν ΑΒ < ΑΓ + ΒΓ, ἀφαιροῦντες δὲ ἀφ' ἑνὸς μέρους ΒΔ καὶ ἀφ' ἑτέρου ΒΓ, ἥτις εἶναι ἴση τῇ ΒΔ, θέλομεν ἔχει ΑΔ < ΑΓ. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ΑΣΔ, ΑΣΓ ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΑΣ κοινήν, τὰς πλευρὰς ΣΔ, ΣΓ ἴσας ἐκ κατασκευῆς, καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ ΑΔ τοῦ πρώτου εἶναι μικροτέρα τῆς τρίτης πλευρᾶς ΑΓ τοῦ δευτέρου. Ἄρα ἡ γωνία ΑΣΔ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΣΓ (πρότ. 12, Α′), ἤτοι ΑΣΔ < ΑΣΓ, ἑπομένως καὶ

ΑΣΔ + ΔΣΒ ἤτοι ΑΣΒ < ΑΣΓ + ΓΣΒ,

διότι ἀπεδείχθη ὅτι ΔΣΒ = ΓΣΒ. Λοιπὸν κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 38. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν σχηματιζουσῶν στερεάν τινα γωνίαν, εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν.



Ἄς τμήσωμεν τὴν στερεὰν γωνίαν Σ διά τινος ἐπιπέδου ΑΒΓΔΕ, συναπαντῶντος ὅλας τὰς κόψεις ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, ΣΔ, κτλ, καὶ ἐξ ἑνὸς ὁποιουδήποτε σημείου Ο, ἐντὸς τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ ληφθέντος, ἄξωμεν εἰς ὅλας τῶν γωνιῶν τὰς κορυφὰς τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ.

Τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ θέλει οὕτω διαιρεθῆ εἰς τόσα μερικὰ τρίγωνα, ἐξ ὅσων ἀποτελεῖται καὶ ἡ στερεὰ γωνία Σ. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΓ, κτλ, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων ΑΣΒ, ΒΣΓ, κτλ.

Ἔστω Α τὸ ἄθροισμα τῶν πρὸς τὴν βάσιν γωνιῶν τῶν ἐχόντων κορυφὴν τὸ σημεῖον Ο τριγώνων, καὶ Β τὸ ἄθροισμα τῶν περὶ τὸ σημεῖον Ο γωνιῶν τῶν αὐτῶν τριγώνων. Ἔστωσαν πρὸς τούτοις Α' καὶ Β' τὰ ἀνάλογα ἀθροίσματα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων, τῶν ἐχόντων κορυφὴν τὸ σημεῖον Σ. Κατὰ τὰ προλεχθέντα θέλομεν ἔχει

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{A}'+\mathrm{B}'. \qquad (1)$$

Ἀλλ' $\mathrm{A}<\mathrm{A}'$. Διότι ἡ γωνία ΑΒΓ τῆς τριέδρου γωνίας, τῆς ἐχούσης κορυφὴν τὸ σημεῖον Β, εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος ΑΒΣ+ΣΒΓ τῶν δύο ἄλλων, τουτέστιν

$$\mathrm{AB\Gamma}<\mathrm{AB\Sigma}+\Sigma\mathrm{B\Gamma}.$$

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον $\quad \mathrm{B\Gamma\Delta}<\mathrm{B\Gamma\Sigma}+\Sigma\Gamma\Delta,$

$$\Gamma\Delta\mathrm{E}<\Gamma\Delta\Sigma+\mathrm{E}\Delta\Sigma, \text{ κτλ.}$$

Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν ΑΒΓ+ΒΓΔ+ΓΔΕ+ κτλ. τῶν πρὸς τὴν βάσιν γωνιῶν τῶν τριγώνων, τῶν ἐχόντων κορυφὴν τὸ σημεῖον Ο, ἤτοι Α, εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος ΑΒΣ+ΣΒΓ+ΒΓΣ+ κτλ, τῶν πρὸς τὴν βάσιν γωνιῶν τῶν τριγώνων, τῶν ἐχόντων κορυφὴν τὸ σημεῖον Σ, ἤτοι μικρότερον τοῦ Α'. Ἄρα $\mathrm{B}>\mathrm{B}'$. Ἀλλὰ $\mathrm{B}=4^{\text{ορ}}$. Ἄρα $\mathrm{B}'<4^{\text{ορ}}$. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΣΒ, ΒΣΓ, ΓΣΔ, ΔΣΕ κτλ, τῶν σχηματιζουσῶν κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 39. ΘΕΩΡΗΜΑ.

1ον. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν διέδρων γωνιῶν τριέδρου τινὸς γωνίας περιέχεται μεταξὺ 2 καὶ 6 ὀρθῶν.

2ον. Ἐὰν εἰς τὴν μικροτέραν δίεδρον γωνίαν προσθέσωμεν δύο γωνίας ὀρθὰς, ἀποτελεῖται ἄθροισμα μεγαλείτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων διέδρων γωνιῶν.

1ον. Ἔστωσαν α, β, γ αἱ τρεῖς δίεδροι γωνίαι τῆς δεδομένης τριέδρου γωνίας, καὶ Α, Β, Γ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς παραπληρωματικῆς αὐτῆς τριέδρου γωνίας.

Θέλομεν ἔχει κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν παραπληρωματικῶν τριέδρων γωνιῶν τὰς ἰσότητας

$$\alpha=2^{\text{ορ}}-\mathrm{A},\ \beta=2^{\text{ορ}}-\mathrm{B},\ \gamma=2^{\text{ορ}}-\Gamma,$$

ἃς προσθέτοντες κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\alpha+\beta+\gamma=6^{\text{ορ}}-(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma).$$

Ἀλλ' ἀπεδείχθη προηγουμένως ὅτι τὸ ἄθροισμα $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma$ εἶναι μεγαλείτερον τοῦ μηδενὸς καὶ μικρότερον 4 ὀρθῶν (πρότ. 38). Λοιπὸν ἡ διαφορὰ $6^{\text{ορ}}-(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma)$, ἤτοι τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma$, εἶναι μικρότερον 6 καὶ μεγαλείτερον 2 ὀρθῶν.

2ον. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι α παριστᾷ τὴν μικροτέραν δίεδρον γωνίαν τῆς δεδομένης τριέδρου γωνίας. Αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς παραπληρωματικῆς αὐτῆς τριέδρου θέλουσιν εἶναι $2^{\text{ορ}}-\alpha$, $2^{\text{ορ}}-\beta$, $2^{\text{ορ}}-\gamma$, καὶ ἐκ τούτων μεγαλειτέρα θέλει εἶναι προφανῶς ἡ $2^{\text{ορ}}-\alpha$. Ἀλλὰ κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 37 προτάσει ἔχομεν τὴν ἀνισότητα

$$2^{\text{ορ}}-\alpha<2^{\text{ορ}}-\beta+2^{\text{ορ}}-\gamma$$

ἐξ ἧς, προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα αὐτῆς τὰ μέλη $\alpha+\beta+\gamma$, πορίζόμεθα

$$2^{\text{ορ}}-\alpha+\alpha+\beta+\gamma<2^{\text{ορ}}-\beta+2^{\text{ορ}}-\gamma+\alpha+\beta+\gamma$$

ἢ

$$2^{\text{ορ}}+\beta+\gamma<4^{\text{ορ}}+\alpha,$$

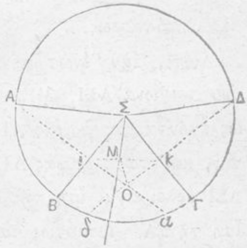
καὶ ἀφαιροῦντες ἐκ τῶν δύο μελῶν τῆς τελευταίας $2^{\text{ορ}}$, θέλομεν ἔχει

$$\beta+\gamma<2^{\text{ορ}}+\alpha.$$

Λοιπὸν, ἐὰν εἰς τὴν μικροτέραν δίεδρον γωνίαν α προσθέσωμεν $2^{\text{ορ}}$, προκύπτει ἄθροισμα $2^{\text{ορ}}+\alpha$ μεγαλείτερον τοῦ ἀθροίσματος $\beta+\gamma$ τῶν δύο ἄλλων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 40. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πρὸς σχηματισμὸν τριέδρου στερεᾶς γωνίας μὲ τρεῖς δεδομένας ἐπιπέδους γωνίας, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν νὰ ἦναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν, καὶ ἡ μεγαλειτέρα τούτων νὰ ἦναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.



Γνωρίζομεν ἐκ τῶν προηγουμένων ὅτι αἱ συνθῆκαι αὗται εἶναι ἀναγκαῖαι· μᾶς μένει λοιπὸν ν' ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι καὶ ἐπαρκεῖς.

Ἔστωσαν ΒΣΓ, ΑΣΒ, ΔΣΓ, αἱ τρεῖς δεδομέναι ἐπίπεδοι γωνίαι, ἃς ὑποθέτομεν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένας, καὶ ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ΒΣΓ εἶναι ἡ μεγαλειτέρα.

Ἐκ τοῦ σημείου Σ ὡς ἐκ κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα ΣΑ, κατ' ἀρέσκειαν, γράφομεν περιφέρειαν, καὶ ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Δ καταβιβάζομεν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΣΒ καὶ ΣΓ τὰς καθέτους Αα, Δδ.

Τὸ σημεῖον α κεῖται μεταξὺ τῶν σημείων Β καὶ Γ, διότι τὸ τόξον Βα εἶναι ἴσον τῷ τόξῳ ΑΒ, καὶ τὸ τόξον ΒΓ, μέτρον τῆς γωνίας ΒΣΓ, εἶναι μεγαλείτερον τοῦ τόξου ΑΒ, μέτρου τῆς γωνίας ΑΣΒ, ἥτις ὑπετέθη μικροτέρα τῆς ΒΣΓ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ σημεῖον δ κεῖται μεταξὺ τῶν σημείων Β καὶ Γ.

Πρὸς τούτοις τὸ σημεῖον α κεῖται μεταξὺ τῶν σημείων Γ καὶ δ, διότι, ἐξ ὑποθέσεως

$$\text{ΒΣΓ} < \text{ΑΣΒ} + \text{ΓΣΔ},$$

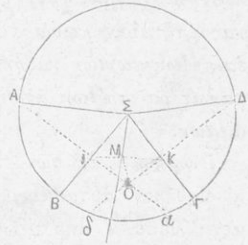
καὶ ἑπομένως $\quad$ τόξ. $\text{ΒΓ} <$ τόξ. $\text{ΑΒ} +$ τόξ. ΓΔ,

ἢ
$$\text{Β}\alpha + \alpha\text{Γ} < \text{ΑΒ} + \text{ΓΔ}.$$

Ἀλλὰ $\text{Β}\alpha = \text{ΑΒ}$ καὶ $\text{ΓΔ} = \text{Γ}\delta$. Ἄρα $\alpha\text{Γ} < \delta\text{Γ}$. Τὸ σημεῖον λοιπὸν α κεῖται μεταξὺ τῶν σημείων δ καὶ Γ, ἑπομένως, κατὰ μείζονα λόγον, μεταξὺ τῶν σημείων δ καὶ Δ.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ σημεῖον δ κεῖται μεταξὺ τῶν σημείων α καὶ Β, ἑπομένως, κατὰ μείζονα λόγον, μεταξὺ τῶν σημείων α καὶ Α. Αἱ χορδαὶ λοιπὸν Αα καὶ Δδ τέμνονται ἐντὸς τῆς περιφερείας εἴς τι σημεῖον Ο.

Τούτου τεθέντος, ἃς ὑψώσωμεν εἰς τὸ σημεῖον Ο τὴν ΟΜ κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΣΓ, καὶ μὲ κέντρον Ι καὶ ἀκτῖνα $=$ ΙΑ γράψωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΙΟΜ περιφέρειαν, ἥτις θέλει τμήσει τὴν κάθετον ΟΜ εἴς τι σημεῖον Μ, καὶ ἑνώσωμεν ΜΣ. Λέγω ὅτι ἡ τρίεδρος γωνία ΣΒΜΓ ἔχει δι' ἐπιπέδους γωνίας τὰς τρεῖς δεδομένας ἐπιπέδους γωνίας, τὰς ἐκπληρούσας τὰς συνθήκας τῆς ἀνωτέρω προτάσεως.



Διότι, ἐὰν ἑνώσωμεν ΜΙ καὶ ΜΚ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΣΙ, ΜΙΣ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας ΑΙΣ, ΣΙΜ ἴσας, ὡς ὀρθὰς (πρότ. 7), τὴν ΙΣ κοινήν, καὶ τὰς πλευρὰς ΑΙ, ΙΜ ἴσας ἐκ κατασκευῆς, ἑπομένως ἡ γωνία ΑΣΙ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΙΣΜ, καὶ ἡ πλευρὰ ΣΜ ἴση τῇ ΣΑ, ἥτις εἶναι ἴση τῇ ΣΔ. Ὡσαύτως τὰ δύο τρίγωνα ΣΜΚ, ΣΚΔ θέλουσιν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΣΚ κοινήν, τὰς πλευρὰς ΣΜ, ΣΔ ἴσας, καὶ τὰς γωνίας ΣΚΔ, ΣΚΜ ἴσας, ὡς ὀρθὰς (πρότ. 7), ἑπομένως ἡ γωνία ΚΣΔ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΚΣΜ. Λοιπὸν ἡ τρίεδρος στερεὰ γωνία ΣΒΜΓ ἔχει δι' ἐπιπέδους γωνίας τὰς τρεῖς δεδομένας, τὰς ἐκπληρούσας τὰς συνθήκας τῆς προτάσεως. Λοιπὸν κτλ.

Σχόλιον. Πρὸς σχηματισμὸν τριέδρου γωνίας μὲ τρεῖς δεδομένας διέδρους γωνίας α, β, γ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ περιέχηται μεταξὺ 2 καὶ 6 ὀρθῶν γωνιῶν, καὶ ἡ μικροτέρα τούτων, αὐξηθεῖσα κατὰ δύο ὀρθάς, ν' ἀποτελῇ ἄθροισμα μεγαλείτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

Γνωρίζομεν ἤδη ὅτι αἱ συνθῆκαι αὗται εἶναι ἀναγκαῖαι (πρότ. 39), καὶ μᾶς μένει ν' ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι καὶ ἐπαρκεῖς.

Καὶ τῷ ὄντι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma$ περιέχεται μεταξὺ 2 καὶ 6 ὀρθῶν, τὸ ἄθροισμα $2^{o\rho}-\alpha+2^{o\rho}-\beta+2^{o\rho}-\gamma$ θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ 0 καὶ 4 ὀρθῶν, ἤτοι

$$2^{o\rho}-\alpha+2^{o\rho}-\beta+2^{o\rho}-\gamma \begin{matrix} >0^{o\rho} \\ <4 \end{matrix} \qquad (1)$$

καὶ ἐπειδὴ $\qquad 2^{o\rho}+\alpha>\beta+\gamma,$

θέλομεν ἔχει, ἀφαιροῦντες ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἀνισότητος ταύτης $\alpha+\beta+\gamma-2^{o\rho}$,

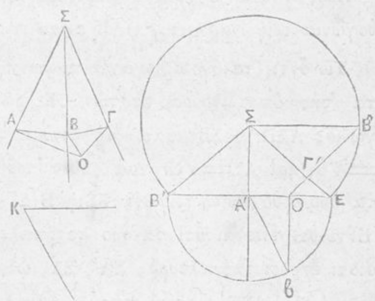
$$2^{o\rho}-\alpha<2^{o\rho}-\beta+2^{o\rho}-\gamma. \qquad (2)$$

Λοιπὸν ἐὰν κατασκευάσωμεν στερεὰν τρίεδρον γωνίαν μὲ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας 2°ᵖ—α, 2°ᵖ—β, 2°ᵖ—γ, τὰς ἐκπληρούσας τὰς ἀνισότητας (1) καὶ (2), ἤτοι τὰς συνθήκας τοῦ ἀποδειχθέντος θεωρήματος, ἡ παραπληρωματικὴ τῆς τριέδρου ταύτης στερεᾶς γωνίας τρίεδρος γωνία θέλει ἔχει διὰ διέδρους γωνίας τὰς δεδομένας α, β, γ. Λοιπὸν μὲ τρεῖς δεδομένας διέδρους γωνίας α, β, γ, ἐκπληρούσας τὰς ἀνωτέρω συνθήκας, δυνάμεθα πάντοτε νὰ κατασκευάσωμεν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 41. ΘΕΩΡΗΜΑ.

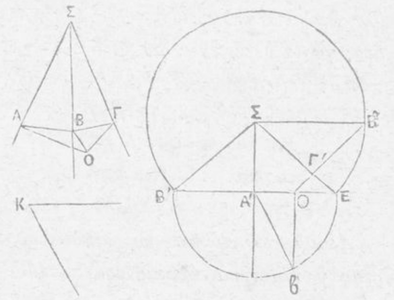
Δεδομένων τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τριέδρου τινὸς στερεᾶς γωνίας, νὰ εὑρεθῇ δι' ἐπιπέδου κατασκευῆς ἡ ἀμοιβαία δύο ὁποιωνδήποτε ἑδρῶν αὐτῆς κλίσις, ἤ, ὅπερ ταὐτό, ἡ ἐπίπεδος γωνία μιᾶς ὁποιασδήποτε διέδρου γωνίας.

Ἔστωσαν ΑΣΒ, ΑΣΓ, ΒΣΓ αἱ τρεῖς δεδομέναι ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς τριέδρου γωνίας Σ, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται ἡ ἀμοιβαία κλίσις τῶν δύο ἑδρῶν ΑΣΒ, ΑΣΓ, ἢ ἡ ἐπίπεδος γωνία, ἡ μετροῦσα τὴν δίεδρον γωνίαν ΣΑ.



Ἐκ τινος σημείου Β τῆς κόψεως ΣΒ ἂς καταβιβάσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΓ τὴν κάθετον ΒΟ, ἐκ τοῦ ποδὸς αὐτῆς Ο ἄξωμεν τὴν ΟΑ κάθετον ἐπὶ τῆς κόψεως ΣΑ, καὶ ἑνώσωμεν ΑΒ. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 7 προτάσει, ΑΒ θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΣΑ, ἐπομένως ἡ γωνία ΟΑΒ, ἡ σχηματιζομένη ἐκ δύο καθέτων ἐπὶ τῆς κόψεως ΣΑ καὶ κειμένων ἐφ' ἑκατέρας τῶν ἑδρῶν αὐτῆς, θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη ἐπίπεδος γωνία. Πρόκειται τώρα νὰ εὑρεθῇ ἡ αὐτὴ γωνία δι' ἐπιπέδου κατασκευῆς, τουτέστι διὰ κατασκευῆς ἐπὶ ἐπιπέδου ἐκτελουμένης.

Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν ἐπί τινος ἐπιπέδου τὰς γωνίας Β′ΣΑ′, Α′ΣΓ′, Γ′ΣΒ″ ἴσας ἀμοιβαίως μὲ τὰς δεδομένας ΑΣΒ, ΑΣΓ, ΒΣΓ, καὶ μὲ κέντρον Σ καὶ ἀκτῖνα ΣΒ′=ΣΒ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὰς εὐθείας ΣΒ′, ΣΒ″ εἰς τὰ σημεῖα Β′, Β″. Ἐκ τῶν σημείων Β′ καὶ Β″ καταβιβάζομεν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΣΑ′ καὶ ΣΓ′ τὰς καθέτους Β′Α′, Β″Γ′, αἵτινες συναπαντῶνται εἴς τι σημεῖον Ο. Ἐκ τοῦ σημείου Α′ ὡς ἐκ κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα Α′Β′ γράφομεν ἡμιπεριφέριαν Β′ϐΕ, καὶ εἰς τὸ σημεῖον Ο ὑψόνομεν ἐπὶ τῆς Β′Ε τὴν κάθετον Οϐ, ἥτις συναπαντᾷ εἰς τὸ σημεῖον ϐ τὴν ἡμιπεριφέριαν Β′ϐΕ, καὶ ἄγομεν τὴν Αϐ. Λέγω ὅτι ἡ γωνία ΕΑ′ϐ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη ἀμοιβαία κλίσις τῶν ἑδρῶν ΑΣΓ, ΑΣΒ τῆς τριέδρου γωνίας Σ, τουτέστιν ὅτι θέλομεν ἔχει ΕΑ′ϐ=ΟΑΒ.



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἀρκεῖ βεβαίως ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα Α′Οϐ, ΟΑΒ εἶναι ἴσα.

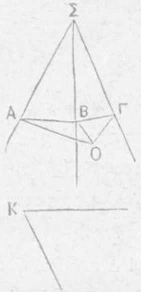
Τῷ ὄντι, τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΣΑΒ, ΣΑ′Β′ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας αὐτῶν ΣΒ, ΣΒ′ ἴσας, ἐκ κατασκευῆς, καὶ τὰς γωνίας ΑΣΒ, Α′ΣΒ′ ἴσας, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον· ἑπομένως ΑΒ=Α′Β′=Α′ϐ, καὶ ΑΣ=Α′Σ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΣΓ, Β″ΣΓ′ εἶναι ἴσα, καὶ ὅτι ΣΓ=ΣΓ′. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι τὰ δύο τετράπλευρα ΟΑΣΓ, ΟΑ′ΣΓ′ εἶναι ἴσα· διότι ἔχουσι τὰς πλευρὰς ΣΑ′, ΣΑ, ὡς καὶ τὰς ΣΓ, ΣΓ′, ἴσας, τὰς γωνίας Α′ΣΓ′, ΑΣΓ, ὡς καὶ τὰς Α′ καὶ Α, Γ καὶ Γ′, ἴσας. Λοιπὸν Α′Ο=ΑΟ. Ἀλλ᾽ ἀπεδείχθη προηγουμένως ὅτι Α′ϐ=ΑΒ. Ἄρα τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΑ′ϐ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας αὐτῶν καὶ μίαν τῶν πλευρῶν ἴσας, ἑπομένως ἡ γωνία ΟΑΒ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΟΑ′ϐ ἢ τῇ ΕΑϐ.

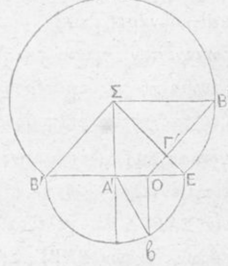
Ὅταν τὸ σημεῖον Ο πίπτῃ μεταξὺ τῶν σημείων Α′ καὶ Β′ τοῦ ἐπιπέδου σχήματος, ἡ γωνία ΕΑ′ϐ γίνεται ἀμβλεῖα, καὶ μετρεῖ πάντοτε τὴν ἀληθῆ ἀμοιβαίαν τῶν ἑδρῶν κλίσιν. Τούτου δ᾽ ἕνεκα ἐσημειώσαμεν δι᾽ ΕΑ′ϐ καὶ οὐχὶ δι᾽ ΟΑ′ϐ τὴν ζητουμένην κλίσιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 42. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δεδομένων δύο τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τριέδρου τινὸς στερεᾶς γωνίας καὶ τῆς ἀμοιβαίας αὐτῶν κλίσεως, νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη ἐπίπεδος γωνία.

Ἔστωσαν Α′ΣΒ′, Α′ΣΓ′ αἱ δύο δεδομέναι ἐπίπεδοι γωνίαι, καὶ Κ ἡ ἀμοιβαία αὐτῶν κλίσις.

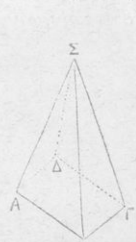




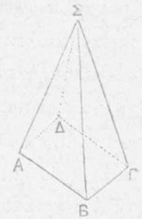
Λαμβάνομεν ΣΒ′ κατ᾽ ἀρέσκειαν, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Β′ καταβιβάζομεν ἐπὶ τῆς ΣΑ′ τὴν ἀπροσδιόριστον κάθετον Β′Α′. Ἐκ τοῦ σημείου Α′ ὡς ἐκ κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ Α′Β′ γράφομεν τὴν ἡμιπεριφέρειαν Β′ϐΕ, καὶ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Α′ κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ΕΑ′ϐ = Κ. Ἐκ τοῦ σημείου ϐ καταβιβάζομεν ἐπὶ τῆς Β′Ε τὴν κάθετον ϐΟ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ο τὴν ΟΓ′ κάθετον ἐπὶ τῆς ΣΓ′. Προεκβάλλομεν ἀκολούθως τὴν κάθετον ΟΓ′ μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὴν μὲ κέντρον Σ καὶ ἀκτῖνα ΣΒ′ γραφομένην περιφέρειαν εἴς τι σημεῖον Β″, καὶ ἑνόνομεν ΣΒ″. Λέγω ὅτι ἡ γωνία Γ′ΣΒ″ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη τρίτη ἐπίπεδος γωνία.

Διότι, ἐὰν σχηματίσωμεν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν μὲ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας Β′ΣΑ′, Α′ΣΓ′, Γ′ΣΒ″, ἡ ἀμοιβαία τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν Β′ΣΑ′, Α′ΣΓ′ τῆς τριέδρου ταύτης στερεᾶς γωνίας κλίσις, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ προηγουμένῃ προτάσει, θέλει εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ ΕΑ′ϐ, ἥτις κατεσκευάσθη ἴση τῇ Κ.

Σχόλιον. Ἡ γνῶσις τῶν τεσσάρων ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΣΒ, ΒΣΓ, ΓΣΔ, ΔΣΑ, ἐξ ὧν ἡ τετραπλῆ στερεὰ γωνία ΣΑΒΓΔ σχηματίζεται, δὲν ἀρκεῖ πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀμοιβαίας δύο ὁποιωνδήποτε τῶν ἑδρῶν αὐτῆς κλίσεως· διότι δυνάμεθα, αὐξάνοντες ἢ ἐλαττοῦντες τὴν γωνίαν δύο ἀντικειμένων κόψεων, π. χ. τὴν γωνίαν ΑΣΓ, νὰ μεταβάλλωμεν τὴν ἀμοιβαίαν τῶν ἑδρῶν αὐτῆς κλίσιν, χωρὶς αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς στερεᾶς τετραπλῆς γωνίας νὰ μεταβληθῶσιν. Ἀλλ᾽ ἂν προσετίθετο καὶ ἑτέρα τις συνθήκη, παραδείγματος χάριν, ἂν μᾶς ἐδίδετο καὶ ἡ κλίσις τῶν δύο ἑδρῶν ΑΣΒ, ΒΣΓ, τότε ἡ τετραπλῆ στερεὰ γωνία ἤθελεν εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη, καὶ ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν κλίσιν δύο ὁποιωνδήποτε τῶν ἑδρῶν αὐτῆς. Διότι, ἐὰν φαντασθῶμεν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν, σχηματιζομένην ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΣΒ, ΒΣΓ, ΑΣΓ,



τῆς τριέδρου ταύτης γωνίας ἠθέλαμεν γνωρίζει τὰ δύο ἐπιπέδους γωνίας ΑΣΒ, ΒΣΓ, καὶ τὴν ἀμοιβαίαν αὐτῶν κλίσιν, καὶ ἠδυνάμεθα διὰ τοῦ λυθέντος προβλήματος νὰ εὕρωμεν τὴν τρίτην ἐπίπεδον γωνίαν ΑΣΓ. Γνωστῆς δὲ γενομένης τῆς ἐπιπέδου γωνίας ΑΣΓ, ἠθέλαμεν γνωρίζει τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας τῆς ἑτέρας τριέδρου γωνίας ΣΑΓΔ, ἑπομένως ἡ στερεὰ γωνία ΣΑΓΔ ἤθελεν εἶναι ἐντελῶς γνωστή. Ἀλλὰ ἡ τετραπλῆ στερεὰ γωνία ΣΑΒΓΔ ἀποτελεῖται ἐκ τῆς ἑνώσεως τῶν δύο τριέδρων γωνιῶν ΣΑΒΓ, ΣΑΓΔ. Λοιπὸν, ἐπειδὴ αἱ μερικαὶ αὗται τρίεδροι γωνίαι εἶναι γνωσταὶ καὶ ὡρισμέναι, ἡ ὁλικὴ γωνία ΣΑΒΓΔ θέλει εἶναι ὡσαύτως γνωστὴ καὶ ὡρισμένη.



Ἡ κλίσις τῶν δύο ἑδρῶν ΑΣΔ, ΔΣΓ εὑρίσκεται ἀμέσως διὰ τῆς δευτέρας μερικῆς τριέδρου γωνίας. Πρὸς εὕρεσιν δὲ τῆς κλίσεως τῶν δύο ἑδρῶν ΒΣΓ, ΓΣΔ, πρέπει νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὴν κλίσιν τῶν δύο ἑδρῶν ΒΣΓ, ΑΣΓ τῆς μερικῆς τριέδρου γωνίας ΣΑΒΓ, ἔπειτα τὴν κλίσιν τῶν δύο ἑδρῶν ΑΣΓ, ΓΣΔ τῆς μερικῆς τριέδρου γωνίας ΣΑΓΔ. Τὸ ἄθροισμα τῶν οὕτω εὑρεθησομένων κλίσεων γωνιῶν, θέλει εἶναι ἡ κλίσις τῶν ἑδρῶν ΒΣΓ, ΓΣΔ τῆς τετραπλῆς στερεᾶς γωνίας ΣΑΒΓΔ.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου συλλογιζόμενοι ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι πενταπλῆ τις στερεὰ γωνία εἶναι ἐντελῶς γνωστὴ, ὅταν ἐκτὸς τῶν πέντε ἐπιπέδων αὐτῆς γωνιῶν, ἐξ ὧν συντίθεται, μᾶς δίδωνται καὶ δύο αὐτῶν ἀμοιβαῖαι κλίσεις. Τρεῖς κλίσεις ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ἑξαπλῆν στερεὰν γωνίαν, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

ΠΕΡΙ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

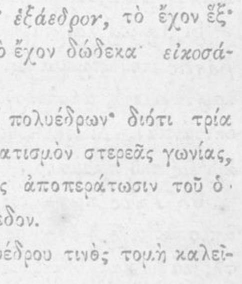
1. *Στερεὸν πολύεδρον* ἢ ἁπλῶς *πολύεδρον* καλεῖται πᾶν στερεὸν ὑπὸ ἐπιπέδων ἑδρῶν ἀποπερατούμενον. (Ἀναγκαίως τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ἢ αἱ ἕδραι περατοῦνται ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν) Ἰδίως δὲ καλεῖται *τετράεδρον*, τὸ ἔχον τέσσαρας ἕδρας στερεόν· *ἑξάεδρον*, τὸ ἔχον ἕξ· *ὀκτάεδρον*, τὸ ἔχον ὀκτώ· *δωδεκάεδρον*, τὸ ἔχον δώδεκα· *εἰκοσάεδρον*, τὸ ἔχον εἴκοσι, κτλ.

Τὸ τετράεδρον εἶναι τὸ ἁπλούστερον τῶν πολυέδρων· διότι τρία τοὐλάχιστον ἐπίπεδα ἀπαιτοῦνται πρὸς σχηματισμὸν στερεᾶς γωνίας, τὰ δ' ἐπίπεδα ταῦτα ἀφίνουσι χάσμα τι, πρὸς ἀποπεράτωσιν τοῦ ὁποίου ἀπαιτεῖται τοὐλάχιστον τέταρτον ἐπίπεδον.

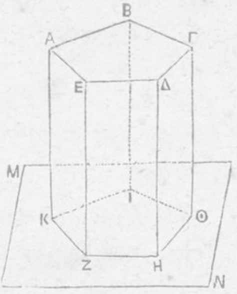
2. Ἡ κοινὴ δύο προσκειμένων ἑδρῶν πολυέδρου τινὸς τομὴ καλεῖται *πλευρὰ* ἢ *κόψις* τοῦ πολυέδρου.

3. *Κανονικὸν πολύεδρον* καλεῖται ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι κανονικὰ ἴσα πολύγωνα, καὶ ὅλαι αἱ στερεαὶ γωνίαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Τὰ πολύεδρα ταῦτα εἶναι πέντε τὸν ἀριθμόν. (Ὅρα παράρτημα τῶν βιβλίων Δ΄ καὶ Ζ΄).

4. *Πρίσμα* καλεῖται τὸ περιεχόμενον στερεὸν μεταξὺ πολλῶν παραλληλογράμμων ἐπιπέδων, περατουμένων ἀμφοτέρωθεν ὑπὸ δύο ἴσων καὶ παραλλήλων πολυγώνων.



Πρὸς κατασκευὴν τοῦ στερεοῦ τούτου λαμβάνομεν πολύγωνόν τι ΑΒΓΔΕ καὶ ἐπίπεδόν τι ΜΝ παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΓΔΕ. Ἐκ τοῦ σημείου Α ἄγομεν κατ' ἀρέσκειαν εὐθεῖάν τινα ΑΚ, συναπαντῶσαν τὸ ἐπίπεδον ΜΝ εἴς τι σημεῖον Κ, καὶ ἐκ τῶν σημείων Β, Γ, Δ, Ε εὐθείας παραλλήλους τῇ ΑΚ, αἵτινες θέλουσι συναπαντήσει τὸ ἐπίπεδον ΜΝ εἰς τὰ σημεῖα Ι, Θ, Η, Ζ. Τελευταῖον ἑνόνομεν ΚΙ, ΙΘ, ΘΗ, κτλ. Λέγω ὅτι τὸ μεταξὺ τῶν πολυγώνων ΑΒΓΔΕ, ΚΙΘΗΖ, καὶ τῶν παραλληλογράμμων ἐπιπέδων ΑΖ, ΕΗ, ΔΘ, κτλ. περιεχόμενον στερεὸν εἶναι πρίσμα.



Διότι, ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΚ, ΕΖ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (πρότ. 16, Ε΄), τὸ σχῆμα ΑΕΖΚ εἶναι παραλληλόγραμμον. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ὅλαι αἱ λοιπαὶ παράπλευροι ἕδραι εἶναι παραλληλόγραμμα. Καθόσον δ' ἀφορᾷ τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΚΙΘΗΖ, εὐκόλως παρατηρεῖ τις ὅτι ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας καὶ παραλλήλους. Λοιπὸν εἶναι ἴσα.

5. Τὰ ἴσα καὶ παράλληλα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΚΙΘΗΖ καλοῦνται *βάσεις* τοῦ πρίσματος. Τὰ λοιπὰ παραλληλόγραμμα ἐπίπεδα, ὁμοῦ λαμβανόμενα, ἀποτελοῦσι τὴν *παράπλευρον* ἢ *κυρτὴν* τοῦ πρίσματος ἐπιφάνειαν. Αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ΑΚ, ΒΙ, ΓΘ, κτλ. λέγονται *πλευραί* ἢ *κόψεις* τοῦ πρίσματος.

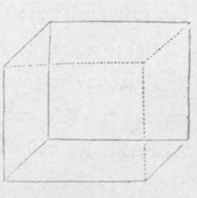
6. *Ὕψος* πρίσματός τινος ὀνομάζεται ἡ τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων ἀπόστασις, ἢ ἡ ἔκ τινος σημείου τῆς ἄνω βάσεως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς κάτω καταβιβαζομένη κάθετος.

7. *Ὀρθὸν* πρίσμα καλεῖται τὸ ἔχον τὰς πλευρὰς ΑΚ, ΒΙ, κτλ. καθέτους ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων τῶν βάσεων αὐτοῦ. Λοιπὸν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος παριστᾷ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

8. Πᾶν μὴ ὀρθὸν πρίσμα ὀνομάζεται *πλάγιον*. Εἶναι δὲ προφανὲς ὅτι τὸ ὕψος παντὸς πλαγίου πρίσματος εἶναι μικρότερον μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

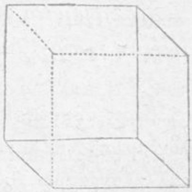
9. Πρίσμα τι λέγεται *τριγωνικόν*, *τετραγωνικόν*, κτλ, ὅταν ἡ βάσις αὐτοῦ ἦναι τρίγωνον, τετράγωνον, κτλ.

10. Τὸ πρίσμα, τὸ ἔχον βάσεις παραλληλόγραμμα, ἔχει ὅλας αὐτοῦ τὰς ἕδρας παραλληλογράμμους καὶ καλεῖται *παραλληλεπίπεδον*.



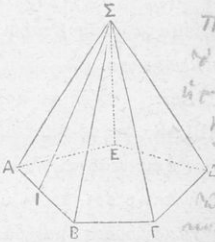
Τὸ παραλληλεπίπεδον λέγεται *ὀρθόν*, ὅταν αἱ κόψεις αὐτοῦ ἦναι κάθετοι ἐπὶ τῆς βάσεως.

Ἐὰν δὲ πρὸς τούτοις αἱ βάσεις αὐτοῦ ἦναι ὀρθογώνια, τὸ παραλληλεπίπεδον ὀνομάζεται τότε *ὀρθογώνιον*, ὡς ἔχον ὅλας αὐτοῦ τὰς ἕδρας ὀρθογωνίους.



11. Μεταξὺ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων διακρίνεται ὁ *κύβος*, ἢ τὸ *κανονικὸν ἑξάεδρον*, ὡς περιεχόμενον μεταξὺ ἓξ ἴσων τετραγώνων.

12. *Πυραμὶς* ὀνομάζεται τὸ σχηματιζόμενον στερεὸν ΣΑΒΓΔΕ ἐκ τῆς ἑνώσεως σημείου τινὸς Σ, ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου πολυγώνου τινὸς ΑΒΓΔΕ κειμένου, μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου τούτου.



Τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καλεῖται *βάσις* τῆς πυραμίδος, τὸ σημεῖον Σ *κορυφὴ* αὐτῆς, τὸ δὲ σύνολον τῶν τριγώνων ΑΣΒ, ΒΣΓ, κτλ, ἀποτελεῖ τὴν *παράπλευρον* ἢ *κυρτὴν* ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος.

13 *Ὕψος* τῆς πυραμίδος λέγεται ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως καταβιβαζομένη κάθετος.

14. Ἡ πυραμὶς ὀνομάζεται *τριγωνική*, *τετραγωνική*, κτλ, ὅταν ἡ βάσις αὐτῆς ἦναι τρίγωνον, τετράγωνον, κτλ.

15. Ἡ πυραμὶς ὀνομάζεται *κανονική*, ὅταν ἡ μὲν βάσις αὐτῆς ἦναι κανονικὸν πολύγωνον, ἡ δὲ ἐκ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως αὐτῆς καταβιβαζομένη κάθετος διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Ἡ κάθετος αὕτη καλεῖται τότε *ἄξων* τῆς πυραμίδος.

16. Ἡ κάθετος ΣΙ, ἡ καταβιβαζομένη ἐκ τῆς κορυφῆς ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ΑΒ τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ, ὀνομάζεται *ἀπόστημα* τῆς κανονικῆς πυραμίδος.

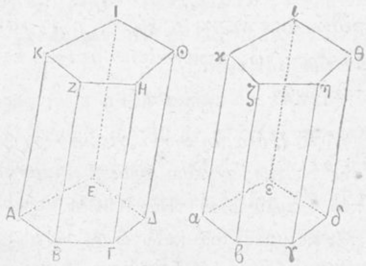
17. *Διαγώνιος* πολυέδρου τινὸς ὀνομάζεται ἡ ἑνόνουσα τὰς κορυφὰς δύο μὴ προσκειμένων στερεῶν γωνιῶν εὐθεῖα.

18. Ἐν τοῖς ἑπομένοις δὲν θέλει γείνει λόγος, εἰμὴ περὶ τῶν *κυρτῶν* πολυέδρων. *Κυρτὸν* δὲ πολύεδρον καλεῖται τὸ κείμενον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος μιᾶς ὁποιασδήποτε ἕδρας αὐτοῦ, προεκβληθείσης. Αἱ τῶν κυρτῶν πολυέδρων ἐπιφάνειαι καλοῦνται ὡσαύτως *κυρταὶ ἐπιφάνειαι*.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο πρίσματα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι τρεῖς ἕδρας, ἀποτελούσας στερεὰν γωνίαν, ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ καὶ ὁμοίως κειμένας.

Ἔστω ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ ἴση τῇ βάσει αϐγδε, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΖΚ ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ αϐζκ, καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓΗΖ ἴσον τῷ ϐγηζ. Λέγω ὅτι τὰ δύο πρίσματα ΑΒΘΙ, αϐθι θέλουσιν εἶναι ἴσα.



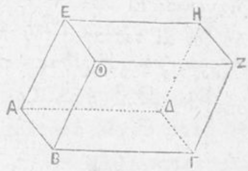
Διότι, ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, αϐγδε ὑπετέθησαν ἴσα, αἱ βάσεις τῶν δύο τούτων πρισμάτων ἐπιτιθέμεναι ταὐτίζονται· καὶ ἐπειδὴ αἱ τὴν στερεὰν γωνίαν Β σχηματίζουσαι ἕδραι ὑπετέθησαν ἴσαι μὲ τὰς τὴν στερεὰν γωνίαν ϐ σχηματιζούσας καὶ ὁμοίως κείμεναι, αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΒΓ, ΑΒΖ, ΖΒΓ, αἱ τὴν στερεὰν γωνίαν Β σχηματίζουσαι, εἶναι ἀμοιϐαίως ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας αϐγ, αϐζ, ζϐγ, τὰς τὴν στερεὰν γωνίαν ϐ σχηματιζούσας, καὶ ὁμοίως διατεταγμέναι. Λοιπὸν αἱ στερεαὶ γωνίαι Β, ϐ εἶναι ἴσαι (πρότ. 33, σχόλ. Ε′), ἑπομένως ἡ πλευρὰ ΒΖ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ϐζ. Ὡσαύτως, ἕνεκα τῶν ἴσων παραλληλογράμμων ΑΒΖΚ, αϐζκ, ἡ πλευρὰ ΖΚ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ζκ, καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ πλευρὰ ΖΗ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ζη. Ἡ ἄνω λοιπὸν βάσις ΚΖΗΘΙ θέλει ταὐτισθῇ μετὰ τῆς ἴσης αὐτῇ κζηθι, καὶ τὰ δύο στερεὰ ΑΒΘΙ, αϐθι θέλουσιν ἀποτελέσει ἓν μόνον.

Πόρισμα. Δύο ὀρθὰ πρίσματα, ἔχοντα βάσεις ἴσας καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἴσα. Διότι, ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἴση τῇ αϐ καὶ τὸ ὕψος ΒΖ=ϐζ, τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΖΚ εἶναι ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ αϐζκ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ ὀρθογώνια ΒΖΗΓ, ϐζηγ εἶναι ἴσα. Λοιπὸν αἱ τρεῖς ἕδραι, αἱ τὴν στερεὰν γωνίαν Β σχηματίζουσαι, εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς ἕδρας, τὰς τὴν στερεὰν γωνίαν ϐ ἀποτελούσας, κτλ. Λοιπὸν τὰ δύο πρίσματα εἶναι ἴσα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ ἀπέναντι ἕδραι παντὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Κατὰ τὸν τοῦ παραλληλεπιπέδου ὁρισμὸν αἱ βάσεις ΑΒΓΔ, ΕΘΖΗ εἶναι παραλληλόγραμμα ἴσα, καὶ ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους. Μᾶς μένει λοιπὸν ν' ἀποδείξωμεν ὅτι δύο ὁποιαιδήποτε ἀντικείμεναι ἕδραι, π. χ. αἱ ΑΕΗΔ καὶ ΒΘΖΓ ἔχουσι τὰς αὐτὰς τῶν βάσεων ἰδιότητας.



Ἐπειδὴ τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἡ ΑΔ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΒΓ· δι' ὅμοιον δέ τινα λόγον ἡ ΑΕ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΒΘ. Λοιπὸν ἡ γωνία ΔΑΕ εἶναι ἴση τῇ ΓΒΘ (πρότ. 17, Ε'), καὶ τὸ ἐπίπεδον ΔΑΕ παράλληλον τῷ ΓΒΘ. Τὸ παραλληλόγραμμον λοιπὸν ΔΑΕΗ εἶναι ἴσον καὶ παράλληλον τῷ παραλληλογράμμῳ ΓΒΘΖ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὰ ἀντικείμενα παραλληλόγραμμα ΑΒΘΕ, ΔΓΖΗ εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα.

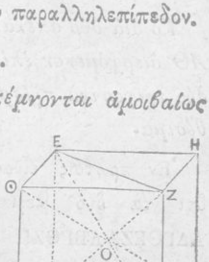
Πόρισμα. Ἐπειδὴ τὸ παραλληλεπίπεδον περιέχεται μεταξὺ ἓξ ἑδρῶν, ἐξ ὧν αἱ ἀπέναντι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ἕπεται ὅτι δύο ὁποιαιδήποτε ἀντικείμεναι ἕδραι δύνανται νὰ ληφθῶσιν ὡς βάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Σχόλιον. Ἐπὶ τριῶν δεδομένων εὐθειῶν ΑΒ, ΑΕ, ΑΔ, μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένων, ἀλλὰ διὰ τοῦ αὐτοῦ διερχομένων σημείου Α καὶ δεδομένας πρὸς ἀλλήλας ἀποτελουσῶν γωνίας, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν παραλληλεπίπεδον, ἄγοντες ἐκ τοῦ ἄκρου ἑκάστης τῶν δεδομένων εὐθειῶν ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ τῶν δύο ἄλλων· δηλ. ἐκ τοῦ σημείου Β ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΔΑΕ, ἐκ τοῦ σημείου Δ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ΒΑΕ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ε ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ΒΑΔ. Εἶναι προφανὲς ὅτι αἱ ἀμοιβαῖαι τῶν ἐπιπέδων τούτων τομαὶ θέλουσι σχηματίσει τὸ ζητούμενον παραλληλεπίπεδον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ διαγώνιοι παντὸς παραλληλεπιπέδου τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη.

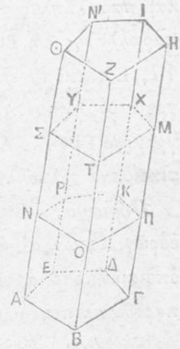
Ἂς φαντασθῶμεν τὰς διαγωνίους ΕΓ καὶ ΑΖ, ὧν ἑκατέρα διέρχεται διὰ δύο ἀντικειμένων στερεῶν γωνιῶν. Ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΓΖ, τὸ σχῆμα ΑΓΖΕ εἶναι παραλληλόγραμμον. Λοιπὸν αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΕΓ, ΑΖ τέμνονται ἀμοι-



βαίως εἰς δύο ἴσα μέρη. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ διαγώνιος ΕΓ καὶ ἑτέρα τις ΔΘ τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη. Λοιπὸν αἱ τέσσαρες τοῦ παραλληλεπιπέδου διαγώνιοι τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη, ἑπομένως διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, ὅπερ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς πᾶν πρίσμα αἱ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων γενόμεναι τομαὶ ΝΟΠΚΡ, ΣΤΜΧΥ εἶναι πολύγωνα ἴσα.

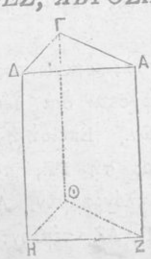


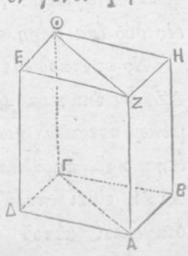
Διότι αἱ πλευραὶ ΝΟ, ΣΤ, κοιναὶ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων μεθ' ἑνὸς τρίτου ΑΒΖΘ, εἶναι παράλληλοι. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΤΜ εἶναι παράλληλος τῇ ΟΠ, καὶ οὕτω καθεξῆς. Αἱ πλευραὶ λοιπὸν ΝΟ, ΟΠ, κτλ. τῆς τομῆς ΝΟΠΚΡ εἶναι παράλληλοι τῶν πλευρῶν ΣΤ, ΤΜ, κτλ. τῆς τομῆς ΣΤΜΧΥ. Λοιπὸν αἱ γωνίαι ΝΟΠ, ΟΠΚ, κτλ. τοῦ πολυγώνου ΝΟΠΚΡ εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς γωνίας ΣΤΜ, ΤΜΧ, κτλ. τοῦ πολυγώνου ΣΤΜΧΥ. Ἀλλὰ πρὸς τούτοις ΝΟ=ΣΤ, διότι τὸ σχῆμα ΣΝΟΤ εἶναι παραλληλόγραμμμον, καὶ ΟΠ =ΤΜ, κτλ, διότι τὰ σχήματα ΟΠΤΜ, κτλ. εἶναι παραλληλόγραμμα. Λοιπὸν τὰ δύο πολύγωνα ΝΟΠΚΡ, ΣΤΜΧΥ ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας, ἑκάστην ἑκάστῃ, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας. Ἄρα τὰ πολύγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Πόρισμα. Αἱ παραλλήλως τῇ βάσει πρίσματός τινος γενόμεναι τομαὶ εἶναι ἴσαι μὲ τὴν βάσιν τοῦ πρίσματος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ διὰ δύο ἀπέναντι κόψεων ΑΖ, ΘΓ παραλληλεπιπέδου τινὸς ΑΘ διερχόμενον ἐπίπεδον διαιρεῖ τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦτο εἰς δύο τριγωνικὰ πρίσματα ΑΔΓΘΕΖ, ΑΒΓΘΖΗ ἐν γένει μὴ ἐπιθέσιμα.





Ἐν πρώτοις εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ δύο μερικὰ στερεὰ ΑΔΓΘΕΖ, ΑΒΓΘΖΗ εἶναι πρίσματα· διότι ἔχουσι βάσεις ΑΔΓ, ΕΘΖ, ΑΒΓ, ΘΖΗ ἴσας, ὡς τὰ ἡμίση ἴσων παραλληλογράμμων

ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, καὶ αἱ παράπλευροι αὐτῶν ἕδραι ΑΔΕΖ, ΔΓΕΘ, κτλ, ΑΒΗΖ, ΒΓΘΗ, κτλ. εἶναι παραλληλόγραμμα.

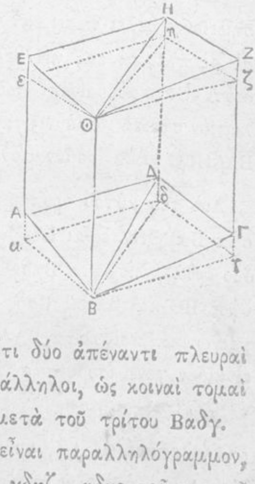
Λέγω δεύτερον ὅτι τὰ τριγωνικὰ ταῦτα πρίσματα δὲν δύνανται ἐν γένει νὰ ταὐτισθῶσιν ἐπιτιθέμενα. Διότι αἱ τρεῖς ἕδραι ΑΔΓ, ΑΔΕΖ, ΓΔΕΘ, αἱ τὴν στερεὰν γωνίαν Δ ἀποτελοῦσαι εἶναι μὲν ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς ἕδρας ΖΗΘ, ΒΓΘΗ, ΑΒΗΖ, τὰς τὴν στερεὰν γωνίαν Η ἀποτελούσας, ἀλλ' εἶναι καὶ ἀντιστρόφως διατεταγμέναι ὡς εὐκόλως παρατηρεῖ τις τοῦτο ἐπὶ τοῦ παρακειμένου σχήματος, ὅπερ παριστᾷ τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΘΖΗ διατεθειμένον οὕτως, ὥστε ἡ στερεὰ αὐτοῦ γωνία Η νὰ κῆται ὁμοιοτρόπως μὲ τὴν ὑπὸ ἴσων ἐπιπέδων γωνιῶν ἀποτελουμένην στερεὰν γωνίαν Δ.

Ἐξαιρεῖται ἡ περίπτωσις, καθ' ἣν αἱ βάσεις ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἤθελον εἶναι ῥομβοειδῆ, καὶ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΔΕ, ΓΔΕ, ἴσαι. Διότι τότε αἱ τὴν στερεὰν γωνίαν Δ περιέχουσαι τρεῖς ἕδραι, ἤθελον εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τὴν στερεὰν γωνίαν Η περιεχούσας καὶ ὁμοίως κείμεναι. Λοιπὸν κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ διὰ δύο ἀπέναντι κόψεων ΒΘ, ΔΗ παραλληλεπιπέδου τινὸς ΑΖ διερχόμενον ἐπίπεδον διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο τριγωνικὰ πρίσματα ἰσοδύναμα.

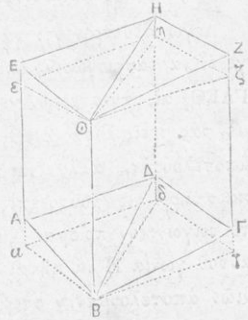
Διὰ τῶν κορυφῶν Β καὶ Θ ἄγομεν καθέτως ἐπὶ τῆς κόψεως ΘΒ τὰ ἐπίπεδα Βαδγ, Θεηζ, ἅτινα συναπαντῶσι τὰς τρεῖς ἄλλας κόψεις ΑΕ, ΔΗ, ΓΖ εἰς τὰ σημεῖα α, δ, γ, ε, η, ζ.



Αἱ τομαὶ Βαδγ, Θεηζ θέλουσι εἶναι πολύγωνα ἴσα, ὡς τομαὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΖ, γενόμεναι ὑπὸ δύο ἐπιπέδων, καθέτων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΒΘ, καὶ ἑπομένως παραλλήλων (πρότ. 4). Εἶναι δὲ πρὸς τούτοις καὶ παραλληλόγραμμα· διότι δύο ἀπέναντι πλευραὶ αΒ, δγ τῆς αὐτῆς τομῆς Βαδγ εἶναι παράλληλοι, ὡς κοιναὶ τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΘΕ, ΔΓΖΗ μετὰ τοῦ τρίτου Βαδγ.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ σχῆμα ΒαεΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, ὡς καὶ αἱ λοιπαὶ παράπλευροι ἕδραι ΒΘζγ, γδηζ, αδηε τοῦ στερεοῦ

ΒαδγΘεηζ. Λοιπὸν τὸ στερεὸν τοῦτο εἶναι πρίσμα (ὁρισμ. 4). Τὸ πρίσμα δὲ τοῦτο εἶναι προσέτι καὶ ὀρθὸν, διότι ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ΒΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως Βαδγ.



Τούτων τεθέντων, ἐὰν διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΒΘΗΔ διαιρέσωμεν τὸ ὀρθὸν πρίσμα Βη εἰς δύο ὀρθὰ τριγωνικὰ πρίσματα αΒδηΘε, ΒδγζηΘ, λέγω ὅτι τὸ πλάγιον τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΔΗΕΘ θέλει εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ τριγωνικῷ πρίσματι αΒδηεΘ.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος πρίσματα ἔχουσι τὸ μέρος ΑΒΔηεΘ κοινὸν, ἀρκεῖ πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ ζητουμένου ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ μένοντα μέρη ΒαΑΔδ, ΘεΕΗη εἶναι ἴσα.

Ἀλλ', ἐπειδὴ αἱ ἕδραι ΑΒΘΕ, αΒΘε εἶναι παραλληλόγραμμα, αἱ πλευραὶ ΑΕ, αε, ἴσαι τῇ παραλλήλῳ αὐταῖς ΒΘ, εἶναι ἴσαι, ἤτοι θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα ΑΕ $=$ αε, ἐξ ἧς πορίζόμεθα, ἀφαιροῦντες ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς τὸ κοινὸν μέρος Αε, τὴν ἑξῆς Αα $=$ Εε. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι καὶ Δδ $=$ Ηη.

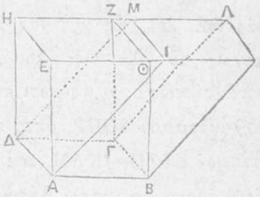
Ἐὰν λοιπὸν ἐπιθέσωμεν τὴν βάσιν Θεη ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ Βαδ, τὸ σημεῖον ε θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ σημείου α καὶ τὸ σημεῖον η ἐπὶ τοῦ δ, αἱ δὲ πλευραὶ εΕ, ηΗ θέλουσι πέσει ἐπὶ τῶν ἴσων αὐταῖς αΑ, Δδ, διότι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου Βαδ. Τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος λοιπὸν στερεὰ θέλουσι ταὐτισθῇ ἐντελῶς. Λοιπὸν τὸ πλάγιον πρίσμα ΒΑΔΗΕΘ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ πρίσματι ΑαδηεΘ.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι καὶ τὸ πλάγιον πρίσμα ΒΔΓΘΗΖ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ πρίσματι ΒδγΘηζ. Ἀλλὰ τὰ δύο ὀρθὰ πρίσματα ΒαδΘεη, ΒδγΘηζ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΘ καὶ βάσεις Βαδ, Βδγ ἴσας (πρότ. 1, πόρ.). Λοιπὸν τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα ΒΑΔΘΕΗ, ΒΔΓΘΗΖ, ἰσοδύναμα ἴσοις πρίσμασιν, εἶναι ἐν γένει ἰσοδύναμα πρὸς ἄλληλα (πρότ. 5).

Πόρισμα. Πᾶν τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΔΗΕΘ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΖ, τοῦ κατασκευαζομένου ἐπὶ τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας Α καὶ ἐπὶ τῶν αὐτῶν κόψεων ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΖ, ΑΛ, τὰ ἔχοντα μίαν τῶν βάσεων αὐτῶν ΑΒΓΔ κοινήν, καὶ τὰς ἄνω αὐτῶν βάσεις ΕΘΖΗ, ΙΚΛΜ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένας καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΗΛ, ΕΚ περιεχομένας, εἶναι ἰσοδύναμα.



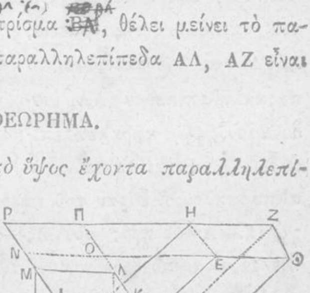
Ἐν πρώτοις λέγω ὅτι τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΕΙΜΗΔ εἶναι ἴσον τῷ τριγωνικῷ πρίσματι ΒΘΚΛΖΓ.

Διότι ΑΕ καὶ ΒΘ εἶναι ἴσαι, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΕΘΒ· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΑΙ=ΒΚ. Τελευταῖον αἱ γωνίαι ΕΑΙ, ΘΒΚ εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν διευθυνομένας φοράν. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΕΑΙ, ΘΒΚ εἶναι ἴσα· Ἀφ' ἑτέρου τὰ παραλληλογραμμα ΑΗ, ΒΖ εἶναι ὡσαύτως ἴσα, ὡς ἀπέναντι ἕδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΖ, τὰ δὲ παραλληλόγραμμα ΙΗ, ΚΖ εἶναι ἴσα, διότι ΕΗ=ΘΖ, ΕΙ=ΘΚ καὶ ἡ γωνία ΗΕΙ=ΖΘΚ. Αἱ τρεῖς λοιπὸν ἕδραι ΑΕΙ, ΑΕΗΔ, ΙΕΗΜ, αἱ τὴν στερεὰν γωνίαν Ε σχηματίζουσαι, εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς ἕδρας ΒΘΚ, ΒΓΖΘ, ΖΘΚΛ, τὰς τὴν στερὰν γωνίαν Θ σχηματιζούσας, καὶ ὁμοίως κείμεναι. Λοιπὸν τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα ΑΕΙΜΗΔ, ΒΘΚΛΖΓ εἶναι ἴσα (πρότ. 1).

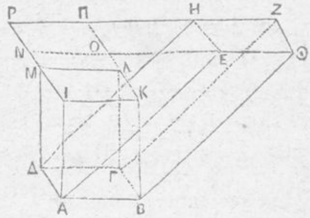
Ἀλλ' ἐὰν ἀπὸ τοῦ ὅλου στερεοῦ ΑΛ ἀφαιρεθῇ τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΕΜ ΛΜ, θέλει μείνει τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΛ, ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ αὐτοῦ στερεοῦ ἀφαιρεθῇ τὸ τριγωνικὸν ΒΘΛ (-) πρίσμα ~~ΒΛ~~, θέλει μείνει τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΖ. Λοιπὸν τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΛ, ΑΖ εἶναι ἰσοδύναμα. (-)ΒΘΛ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὰ τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντα παραλληλεπίπεδα εἶναι ἰσοδύναμα.



Ἔστω ΑΒΓΔ ἡ κοινὴ τῶν δύο παραλληλεπιπέδων ΑΖ καὶ ΑΛ βάσις. Ἐπειδὴ τὰ παραλληλεπίπεδα ταῦτα ὑπετέθησαν ἰσοϋψῆ, αἱ ἄνω αὐτῶν βάσεις ΕΘΖΗ, ΙΚΛΜ θέλουσι κεῖσθαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ ΕΘ καὶ ΙΚ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι τῇ ΑΒ, ἕπεται ὅτι ΕΘ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΙΚ. Δι' ὅμοιον δέ τινα λόγον καὶ ἡ ΖΘ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΛΚ.

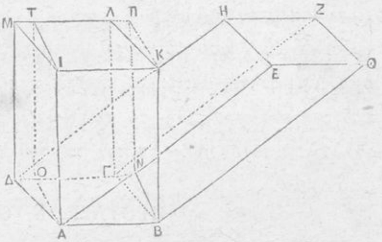


Ἂς προεκβάλωμεν τώρα τὰς πλευρὰς ΘΕ, ΖΗ, ὡς καὶ τὰς ΚΛ, ΙΜ, μέχρις οὗ διὰ τῆς κοινῆς αὐτῶν συναντήσεως σχηματίσωσι τὸ παραλληλόγραμμον ΝΟΠΡ, ὅπερ προφανῶς θέλει εἶναι ἴσον μὲ ἑκατέραν τῶν βάσεων ΕΘΖΗ, ΙΚΛΜ, καὶ ἂς φαντασθῶμεν τρίτον τι παραλληλεπίπεδον, ἔχον διὰ κάτω βάσιν τὸ παραλληλόγραμον ΑΒΓΔ καὶ δι' ἄνω βάσιν τὸ παραλληλόγραμμον ΝΟΠΡ. Κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα, τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦτο θέλει εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὰ παραλληλεπίπεδα ΑΖ καὶ ΑΛ. Λοιπὸν τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΖ, ΑΛ, τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι ἰσοδύναμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶν παραλληλεπίπεδον ΑΖ δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τοῦ αὐτοῦ ὕψους καὶ βάσεως ἰσοδυνάμου.

Εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ὑψόνομεν τὰς εὐθείας ΑΙ, ΒΚ, ΓΛ, ΔΜ καθέτους ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως ΑΒΓΔ, καὶ σχηματίζομεν τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΛ, ἰσοδύναμον τῷ παραλληλεπιπέδῳ ΑΖ. Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ παράπλευροι ἕδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΛ θέλουσιν εἶναι ὀρθογώνια. Ἂν δὲ πρὸς τούτοις καὶ ἡ βάσις ΑΒΓΔ ἦτο ὀρθογώνιον, ΑΛ ἤθελεν εἶναι τὸ ἰσοδύναμον τῷ παραλληλεπιπέδῳ ΑΖ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

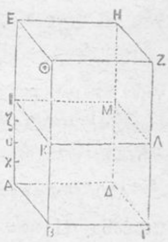


Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ΑΒΓΔ δὲν εἶναι ὀρθογώνιον. Ἄγομεν ΑΟ καὶ ΒΝ καθέτους ἐπὶ τῆς ΓΔ, καὶ ἐκ τῶν σημείων Ο καὶ Ν τὰς εὐθείας ΟΤ, ΝΠ καθέτους ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΓΔ. Τὸ οὕτω σχηματιζόμενον στερεὸν ΑΒΝΟΤΠΚΙ θέλει εἶναι τὸ ἰσοδύναμον τῷ παραλληλεπιπέδῳ ΑΖ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

Διότι ἐκ κατασκευῆς ἡ βάσις ΑΒΝΟ καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς ΙΚΠΤ εἶναι ὀρθογώνια ὡς καὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι ΑΟΙΤ, κτλ, διότι αἱ κόψεις ΑΙ, ΟΤ, κτλ. εἶναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως. Λοιπὸν τὸ στερεὸν ΑΠ εἶναι παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον. Ἀλλὰ τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΠ καὶ ΑΛ εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒΚΙ, καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΟ, τὸ δὲ παραλληλεπίπεδον ΑΛ κατεσκευάσθη ἰσοδύναμον τῷ ΑΖ. Λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΠ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ΑΖ, καὶ ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΙ καὶ βάσιν τὴν ΑΒΝΟ, ἰσοδύναμον τῇ βάσει ΑΒΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὰ τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΒΓΔ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ΑΖ, ΑΛ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν ΑΕ, ΑΙ.



Ἂς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις, ὅτι τὰ ὕψη ΑΕ, ΑΙ ἔχουσί τι κοινὸν μέτρον, π. χ. εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς 15 πρὸς 4. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ὕψος ΑΕ εἰς 15 ἴσα μέρη, καὶ ἐκ τῶν σημείων χ, υ, ζ, κτλ. τῆς διαιρέσεως ἄξωμεν ἐπίπεδα παράλληλα τῇ κοινῇ βάσει ΑΒΓΔ, τὰ ἐπίπεδα ταῦτα θέλουσι διαιρέσει τὸ μὲν στερεὸν ΑΖ εἰς 15 μερικὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ἴσα πρὸς ἄλληλα, ὡς ἔχοντα βάσεις ἴσας (πρότ. 4) καὶ ὕψη ἴσα, τὸ δὲ ΑΛ εἰς 4 τοιαῦτα. Λοιπὸν θέλομεν ἔχει

$$\text{ὀρθ. παραλ. ΑΖ} : \text{ὀρθ. παραλ. ΑΛ} = 15 : 4.$$

Ἀλλὰ $$\text{ΑΕ} : \text{ΑΙ} = 15 : 4.$$

Ἄρα $$\text{ὀρθ. παραλ. ΑΖ} : \text{ὀρθ. παραλ. ΑΛ} = \text{ὕψ. ΑΕ} : \text{ὕψ. ΑΙ}$$

Ἂν τὰ ὕψη ΑΕ, ΑΙ ἦσαν ἀσύμμετρα, εὐκόλως ἠθέλαμεν ἀποδείξει τὸ ἀληθὲς τῆς προτάσεως ταύτης μεταχειριζόμενοι τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην τῶν δύο γνωστῶν ἀποδείξεων (πρότ. 18, Β').

Παρατήρησις. Ἐὰν παραστήσωμεν δι' α, ϐ, γ τὰς τρεῖς συνεχεῖς κόψεις ὀρθογωνίου τινὸς παραλληλεπιπέδου, καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι μία τούτων, ἡ α παραδείγματος χάριν, παριστᾷ τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ, αἱ μένουσαι δύο ἄλλαι ϐ, γ θέλουσι παριστᾷ τὰς δύο τῆς βάσεως αὐτοῦ διαστάσεις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα Π καὶ Π′, ἔχοντα μίαν τῶν τριῶν αὐτῶν διαστάσεων κοινήν, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ γινόμενα τῶν δύο ἄλλων, ἢ, ἐν ἄλλαις λέξεσι, δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.

Ἔστωσαν α, ϐ, γ αἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου Π, καὶ α, ϐ′, γ′ αἱ τοῦ Π′.

Ἂς φαντασθῶμεν τρίτον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον Π″ κατεσκευασμένον ἐπὶ τῶν τριῶν συνεχῶν κόψεων α, ϐ, γ′.

Τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα Π καὶ Π″, ἔχοντα δύο τῶν διαστάσεων αὐτῶν α καὶ ϐ κοινάς, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν γ καὶ γ′, τουτέστι θέλομεν ἔχει

$$Π : Π'' = γ : γ'.$$

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχομεν

$$Π'' : Π' = ϐ : ϐ'.$$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὁμοταγεῖς ὅρους τῶν ἀνωτέρω δύο ἀναλογιῶν καὶ διαιροῦντες διὰ Π″ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου λόγου τῆς νέας ἀναλογίας, θέλομεν ἔχει

$$Π : Π' = ϐ \times γ : ϐ' \times γ'. \qquad (1)$$

Ἀλλ᾽, ἂν παραστήσωμεν διὰ Β τὴν βάσιν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου Π καὶ διὰ Β′ τὴν τοῦ Π′, θέλομεν ἔχει $Β = ϐ \times γ$, καὶ $Β' = ϐ' \times γ'$. Ἄρα, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν (1) ἀντὶ τῶν γινομένων $ϐ \times γ$, $ϐ' \times γ'$ τὰς βάσεις Β καὶ Β′, θέλομεν ἔχει

$$Π : Π' = Β : Β'. \qquad (2)$$

τοῦθ᾽ ὅπερ ἐπρόκειτο ν᾽ ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὁποιαδήποτε ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα Π καὶ Π′ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ γινόμενα τῶν βάσεών των ἐπὶ τὰ ὕψη αὐτῶν, ἢ ὡς τὰ γινόμενα τῶν τριῶν αὐτῶν διαστάσεων.

Ἔστω Η τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ Π καὶ α, ϐ αἱ δύο τῆς βάσεως αὐτοῦ Β διαστάσεις. Ἔστω ὡσαύτως Η′ τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ Π′ καὶ α′, ϐ′ αἱ δύο τῆς βάσεως αὐτοῦ Β′ διαστάσεις.

Ἔστω Π″ τρίτον τι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχον ὕψος Η καὶ βάσιν Β′.

Τὰ στερεὰ Π καὶ Π'', ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος Η, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν Β καὶ Β', τουτέστι θέλομεν ἔχει

$$\Pi : \Pi'' = B : B'.$$

Τὰ στερεὰ Π'' καὶ Π', ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν Β', εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν Η καὶ Η', τουτέστι θέλομεν ἔχει

$$\Pi'' : \Pi' = H : H'.$$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὁμοταγεῖς ὅρους τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν καὶ διαιροῦντες διὰ Π'' τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου λόγου τῆς προκυπτούσης ἀναλογίας, θέλομεν ἔχει

$$\Pi : \Pi' = B \times H : B' \times H'. \qquad (1)$$

Ἀλλὰ $B = \alpha \times \beta$, καὶ $B' = \alpha' \times \beta'$.

Ἄρα

$$\Pi : \Pi' = \alpha \times \beta \times H : \alpha' \times \beta' \times H'. \qquad (2)$$

ΜΕΤΡΟΝ ΤΟΥ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΥ.

Γνωρίζομεν ὅτι πρὸς καταμέτρησιν ποσοῦ τινος ἢ μεγέθους λαμβάνομεν ὡρισμένον τι ποσὸν ἢ μέγεθος ὡς μονάδα, καὶ ζητοῦμεν ἔπειτα ποσάκις ἡ μονὰς αὕτη ἐμπεριέχεται εἰς τὸ πρὸς καταμέτρησιν δοθὲν ποσὸν ἢ μέγεθος, ἢ, ἐν ἄλλαις λέξεσι, ζητοῦμεν τὸν λόγον τοῦ δεδομένου ποσοῦ ἢ μεγέθους πρὸς τὸ ὡς μονάδα ληφθὲν ποσὸν ἢ μέγεθος. Πρὸς καταμέτρησιν λοιπὸν ὀρθογωνίου τινὸς παραλληλεπιπέδου Π ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον αὐτοῦ πρός τι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον Π', ληφθὲν ὡς μονάς

Ἀλλ' ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας (2), ἥτις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\alpha \times \beta \times H}{\alpha' \times \beta' \times H'},$$

πορίζόμεθα ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ λόγου τούτου πρέπει νὰ ἐκτιμήσωμεν α, β, H, α', β', H' διά τινος γραμμικῆς μονάδος, καὶ νὰ διαιρέσωμεν ἀκολούθως τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πρώτων ἀριθμῶν διὰ τοῦ γινομένου τῶν τριῶν ἄλλων.

Ὁ ὑπολογισμὸς ἁπλοποιεῖται ἐπαισθητῶς, ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα τῶν ὄγκων τὸν κύβον, οὗτινος ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση τῇ γραμμικῇ μονάδι· διότι τότε οἱ παριστῶντες τὰς διαστάσεις α', β', H' ἀριθμοὶ θέλουσιν εἶναι ἴσοι τῇ μονάδι, ἑπομένως καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν, ἡ δὲ ἀναλογία (2) ἁπλοποιουμένη γίνεται

$$\Pi : \Pi' = \alpha \times \beta \times H : 1,$$

ἐπομένως
$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\alpha \times \beta \times H}{1} = \alpha \times \beta \times H,$$

ἤτοι τὸ μέτρον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν παριστώντων τὰς τρεῖς αὐτοῦ διαστάσεις ἀριθμῶν. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $\alpha \times \beta$ εἶναι τὸ μέτρον τῆς βάσεως Β τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου Π, ἤτοι ἐκφράζει ποσάκις ἡ βάσις Β ἐμπεριέχει τὸ ἐπὶ τῆς γραμμικῆς μονάδος κατασκευασθὲν τετράγωνον. Ἄρα τὸ μέτρον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ὡσαύτως ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ (λαμβανομένου ὡς μονάδος ἐπιφανείας τοῦ ἐπὶ τῆς γραμμικῆς μονάδος κατασκευαζομένου τετραγώνου, καὶ ὡς μονάδος τῶν ὄγκων τοῦ ἐπὶ τῆς αὐτῆς μονάδος κατασκευαζομένου κύβου).

Ἐφαρμογαί. Ἔστωσαν $\alpha = 2^{\mu}, 51$, $\beta = 3^{\mu}, 25$, $H = 2^{\mu}, 45$. Τὸ μέτρον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου θέλει εἶναι

$$2{,}51 \times 3{,}25 \times 2{,}45 \quad \text{ἢ} \quad 19{,}985875.$$

Ὁ ὄγκος λοιπὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου θέλει περιέχει 19 κυβικὰ μέτρα, καὶ 985875 ἑκατομμυριοστὰ τοῦ κυβικοῦ μέτρου, ἤ, ὅπερ ταὐτό, 19 κυβικὰ μέτρα, 985 κυβικὰ δέκατα τοῦ μέτρου, καὶ 875 κυβικὰ ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου. Διότι τὸ κυβικὸν δέκατον τοῦ μέτρου εἶναι τὸ χιλιοστὸν μέρος τοῦ κυβικοῦ μέτρου, καὶ τὸ κυβικὸν ἑκατοστὸν εἶναι τὸ ἑκατομμυριοστὸν μέρος αὐτοῦ.

Ἔστω πρὸς τούτοις $B = 25^{\text{τετρ. μέτρ.}}, 51$ καὶ $H = 12^{\text{μέτρ.}}, 5$. Τὸ μέτρον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου θέλει εἶναι

$$25{,}51 \times 12{,}5 \quad \text{ἢ} \quad 318^{\text{κυβ. μέτρ.}}, 875.$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ μέτρον παντὸς παραλληλεπιπέδου, καὶ ἐν γένει τὸ μέτρον παντὸς πρίσματος, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Διότι 1ον πᾶν παραλληλεπίπεδον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τοῦ αὐτοῦ ὕψους καὶ βάσεως ἰσοδυνάμου (πρότ. 9). Ἀλλὰ τὸ μέτρον τούτου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Ἄρα τὸ μέτρον τοῦ πρώτου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος του.

2ον. Πᾶν τριγωνικὸν πρίσμα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου τοῦ ἔχοντος τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν διπλασίαν (πρότ. 6). Ἀλλὰ τὸ μέτρον τούτου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Ἄρα τὸ τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος μέτρον εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως αὐτοῦ, ἡμισείας τῆς τοῦ παραλληλεπιπέδου, ἐπὶ τὸ ὕψος του.

3ον. Πᾶν πρίσμα ἀποσυντίθεται εἰς τόσα τριγωνικὰ πρίσματα, εἰς ὅσα τρίγωνα ἀποσυντίθεται καὶ τὸ πολύγωνον τῆς βάσεως αὐτοῦ· Ἀλλὰ τὸ μέτρον ἑκάστου τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος του, καὶ ἐπειδὴ τὸ ὕψος εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ὅλα τὰ τριγωνικὰ πρίσματα, ἕπεται ὅτι τὸ μέτρον τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν μερικῶν τριγωνικῶν πρισμάτων θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν τριγώνων, τῶν ἀποτελούντων τὰς βάσεις τῶν τριγωνικῶν τούτων πρισμάτων, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ κοινὸν ὕψος. Λοιπὸν τὸ μέτρον πολυγωνικοῦ τινος πρίσματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

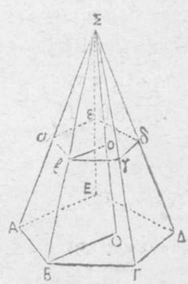
Πόρισμα. Τὰ τῆς αὐτῆς βάσεως πρίσματα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν, καὶ ἀντιστρόφως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν πυραμίς τις ΣΑΒΓΔΕ τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς αβγ παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς, συμβαίνουσι τὰ ἑξῆς.

1ον. Αἱ πλευραὶ ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, κτλ. καὶ τὸ ὕψος ΣΟ θέλουσι διαιρεθῇ ἀναλόγως εἰς τὰ σημεῖα α, β, γ, κτλ καὶ ο.

2ον. Ἡ τομὴ αβγδε θέλει εἶναι πολύγωνον ὅμοιον τῇ βάσει ΑΒΓΔΕ

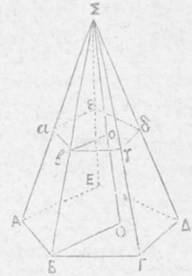


1ον. Διότι, ἐπειδὴ αἱ κοιναὶ τομαὶ ΑΒ, αβ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓ, αβγ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΣΑΒ εἶναι παράλληλοι (πρότ 12, Ε'), τὰ τρίγωνα ΣΑΒ, Σαβ εἶναι ὅμοια, καὶ ἔχομεν

$$ΣΑ : Σα = ΣΒ : Σβ.$$

Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον $ΣΒ : Σβ = ΣΓ : Σγ$ καὶ οὕτω καθεξῆς. Λοιπὸν ὅλαι αἱ κόψεις ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, κτλ. τέμνονται ἀναλόγως εἰς τὰ σημεῖα α, β, γ, ... Πρὸς τούτοις τὸ ὕψος ΣΟ τέμνεται κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν εἰς τὸ σημεῖον ο· διότι, ἐπειδὴ ΒΟ καὶ βο εἶναι παράλληλοι, θέλομεν ἔχει

$$\Sigma O : \Sigma o = \Sigma B : \Sigma \beta.$$



2ον. Ἐπειδὴ ἡ αβ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ, ἡ βγ τῇ ΒΓ, ἡ γδ τῇ ΓΔ, κτλ, ἡ γωνία αβγ εἶναι ἴση τῇ ΑΒΓ, ἡ γωνία βγδ εἶναι ἴση τῇ ΒΓΔ, κτλ. (πρότ. 17, Ε΄). Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΣΑΒ, Σαβ εἶναι ὅμοια, ἔχομεν

$$AB : \alpha\beta = \Sigma B : \Sigma\beta. \qquad (1)$$

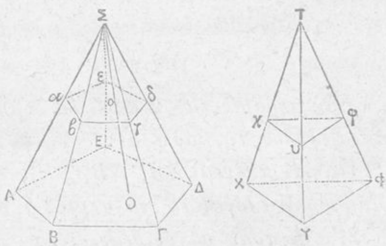
Ὡσαύτως, ἕνεκα τῶν ὁμοίων τριγώνων ΣΒΓ, Σβγ,

$$\Sigma B : \Sigma\beta = B\Gamma : \beta\gamma. \qquad (2)$$

Ἄρα, ἕνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου ΣΒ : Σβ τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) θέλομεν ἔχει

$$AB : \alpha\beta = B\Gamma : \beta\gamma.$$

Ὁμοιοτρόπως ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι καὶ ΒΓ : βγ = ΓΔ : γδ = ΔΕ : δε = κτλ. Λοιπὸν τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, αβγδε ἔχουσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας, ἑκάστην ἑκάστῃ, καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους. Λοιπὸν εἶναι ὅμοια.



Πόρισμα. Ἔστωσαν ΣΑΒΓΔΕ, ΤΧΥΦ δύο πυραμίδες, ἔχουσαι τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ τὰς βάσεις αὐτῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένας. Λέγω ὅτι αἱ γενόμεναι τομαὶ αβγδε, χυφ, ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς αβχ, παραλλήλου τῷ ἐπιπέδῳ τῶν βάσεων αὐτῶν, θέλουσιν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, ΧΥΦ.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, αβγδε, εἶναι ὅμοια ἔχομεν (πρότ. 30, Γ΄)

$$AB\Gamma\Delta E : \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = \overline{AB}^2 : \overline{\alpha\beta}^2.$$

Ἀλλ' $\quad AB : \alpha\beta = \Sigma B : \Sigma\beta = \Sigma O : \Sigma o,$

ἑπομένως καὶ $\quad \overline{AB}^2 : \overline{\alpha\beta}^2 = \overline{\Sigma O}^2 : \overline{\Sigma o}^2.$

Ἄρα $\quad AB\Gamma\Delta E : \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = \overline{\Sigma O}^2 : \overline{\Sigma o}^2. \qquad (3)$

Δι' ὁμοίου τρόπου ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι

$$X\Upsilon\Phi : \chi\upsilon\varphi = \overline{\Sigma O}^2 : \overline{\Sigma o}^2. \qquad (4)$$

Ἄρα, ἕνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου $\overline{ΣΟ}^2 : \overline{σο}^2$ τῶν ἀναλογιῶν (3) καὶ (4),

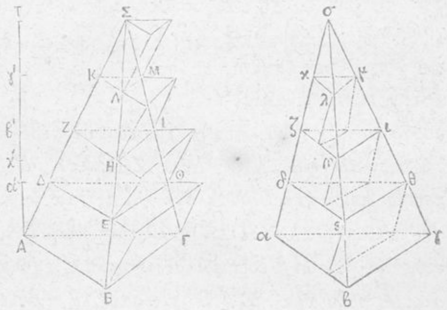
$$ΑΒΓΔΕ : αβγδε = ΧΥΦ : χυφ,$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα. Ἐὰν αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, ΧΥΦ ἦναι ἰσοδύναμοι, αἱ γενόμενα ὡς προεῤῥέθη τομαὶ αβγδε, χυφ θέλουσιν εἶναι ἰσοδύναμοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες, βάσεις ἔχουσαι ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἰσοδύναμοι.

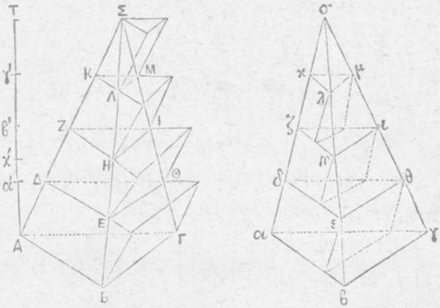


Ἔστωσαν ΣΑΒΓ, σαβγ αἱ δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες, αἱ ἔχουσαι βάσεις ΑΒΓ, αβγ (τὰς ὁποίας ὑποθέτομεν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένας) ἰσοδυνάμους καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΤ. Λέγω ὅτι εἶναι ἰσοδύναμοι.

Διότι, ἂν αἱ πυραμίδες αὗται δὲν ἦσαν ἰσοδύναμοι, ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ σαβγ εἶναι ἡ μικροτέρα, καὶ ἔστω Αχ τὸ ὕψος τοῦ ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΓ κατασκευασθέντος καὶ τὴν διαφορὰν τῶν δύο τριγωνικῶν πυραμίδων παριστῶντος πρίσματος (*).

(*) Τοῦτο εἶναι πάντοτε δυνατόν· διότι, ἐν γένει, ὅταν οἱ ὄγκοι δύο στερεῶν σωμάτων ἦναι ἄνισοι, ἢ, ὅπερ ταὐτὸ, ὅταν οἱ λόγοι αὐτῶν πρὸς ὄγκον τινὰ, ληφθέντα ὡς μονάδα, ἦναι διάφοροι, ἡ διαφορὰ τῶν ὄγκων τῶν δύο τούτων στερεῶν θέλει περιέχει τοσάκις τὸν ὡς μονάδα ληφθέντα ὄγκον, καθ' ὅσας μονάδας ὁ λόγος τοῦ ὄγκου τοῦ μεγαλειτέρου σώματος ὑπερέχει τὸν τοῦ μικροτέρου. Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν λόγων ἰσοῦται μὲ τρεῖς μονάδας, ἡ διαφορὰ τῶν δύο στερεῶν θέλει εἶναι ἴση μὲ τρεῖς φορὰς τὸν ὡς μονάδα ληφθέντα ὄγκον Μ. Ἔστω τώρα ΑΒΓ ἡ βάσις πρίσματός τινος καὶ χ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Τὸ μέτρον τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος τούτου θέλει εἶναι ἴσον μὲ $ΑΒΓ \times χ$, ἵνα δὲ ὁ ὄγκος τοῦ τριγωνικοῦ τούτου πρίσματος ᾖ ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ὄγκων τῶν δύο παραμίδων, ἀνάγκη νὰ προσδιορισθῇ τὸ ὕψος χ οὕτως, ὥστε $ΑΒΓ \times χ$ νὰ ἦναι ἴσον μὲ 3Μ, ἤτοι νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἑξῆς ἰσότης $ΑΒΓ \times χ = 3Μ$, ἐξ ἧς ποριζόμεθα $χ = \frac{3Μ}{ΑΒΓ}$. Ἀλλ' ἡ μονὰς Μ εἶναι γνωστὴ, ὡς καὶ ἡ βάσις ΑΒΓ τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ. Λοιπὸν ἡ τιμὴ τοῦ χ θέλει γείνει γνωστή.

Ἂς διαιρέσωμεν τὸ ὕψος ΑΤ εἰς μέρη ἴσα μικρότερα τοῦ Αχ, καὶ ἔστω ν ἓν τῶν μερῶν τούτων. Διὰ τῶν σημείων ά, ϐ', γ', κτλ. τῆς διαιρέσεως ἃς ἄξωμεν ἐπίπεδα παράλληλα τοῦ ἐπιπέδου τῶν βάσεων ΑΒΓ, αϐγ. Αἱ ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τούτων γενόμεναι τομαὶ ΔΕΘ καὶ δεθ, ΖΗη καὶ ζηι, κτλ. θέλουσιν εἶναι ἰσοδύναμοι (πρότ. 14, πόρ.). Τούτων δὲ τεθέντων, ἐὰν κατασκευάσωμεν ἐπὶ τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΘ, ΖΗΙ, κτλ., ὡς βάσεων ληφθέντων, ἐξωτερικὰ πρίσματα ἔχοντα διὰ κόψεις τὰ τμήματα ΑΔ, ΔΖ, ΖΚ, κτλ. τῆς πλευρᾶς ΣΑ, καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων δεθ, ζηι, κλμ κτλ, ὡς βάσεων ληφθέντων, ἐσωτερικὰ πρίσματα, ἔχοντα διὰ κόψεις τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς πλευρᾶς σα, ὅλα τὰ μερικὰ ταῦτα πρίσματα, ἐσωτερικά τε καὶ ἐξωτερικὰ, θέλουσιν ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος ν.



Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν πρισμάτων εἶναι μεγαλείτερον τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν πρισμάτων εἶναι μικρότερον τῆς πυραμίδος σαϐγ. Ἄρα, διὰ τοὺς δύο τούτους λόγους, ἡ διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐσωτερικῶν πρισμάτων ἀπὸ τοῦ τῶν ἐξωτερικῶν πρέπει νὰ ἦναι μεγαλειτέρα τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, τοῦ παριστῶντος τὴν διαφορὰν τῶν δύο τριγωνικῶν πυραμίδων ΣΑΒΓ, σαϐγ.

Ἀλλὰ τὸ δεύτερον ἐξωτερικὸν πρίσμα ΔΕΘΖ καὶ τὸ πρῶτον ἐσωτερικὸν δεθα εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα βάσεις ΔΕΘ, δεθ ἰσοδυνάμους καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ν. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ τρίτον ἐξωτερικὸν πρίσμα ΖΗΙΚ καὶ τὸ δεύτερον ἐσωτερικὸν ζηιδ εἶναι ἰσοδύναμα, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου ἐξωτερικοῦ τε καὶ ἐσωτερικοῦ. Λοιπὸν ὅλα τὰ ἐξωτερικὰ πρίσματα τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ, ἐξαιρουμένου τοῦ πρώτου ΑΒΓΔ, ἔχουσι τὰ ἰσοδύναμά των μεταξὺ τῶν ἐσωτερικῶν τῆς πυραμίδος σαϐγ. Ἄρα τὸ πρίσμα ΑΒΓΔ παριστᾷ τὴν διαφορὰν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐσωτερικῶν πρισμάτων τῆς πυραμίδος σαϐγ ἀπὸ τοῦ τῶν ἐξωτερικῶν τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ. Ἀλλ' ἡ διαφορὰ τῶν δύο τούτων ἀθροισμάτων πρέπει πρέπει νὰ ἦναι μεγαλειτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο πυραμίδων. Τὸ πρίσμα λοιπὸν ΑΒΓΔ πρέπει νὰ ἦναι μεγαλείτερον τοῦ πρίσματος ΑΒΓχ (ἤτοι τοῦ ἔχοντος βάσιν ΑΒΓ καὶ ὕψος Αχ), ὅπερ ἄτοπον. Διότι τὰ δύο πρίσματα ΑΒΓΔ, ΑΒΓχ ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒΓ καὶ τὸ ὕψος ν τοῦ πρώτου ἐλήφθη, ἐκ κατασκευῆς, μικρότερον τοῦ ὕψους Αχ τοῦ δευτέρου. Λοιπὸν ἡ ὑπόθεσις, ἐξ ἧς ἀνεχωρήσαμεν, εἶναι ἄτοπος, ὡς ἄγουσα εἰς ἄτοπον ἐξαγόμενον. Λοιπὸν αἱ δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ΣΑΒΓ, σαβγ, αἱ βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα ἔχουσαι, εἶναι ἰσοδύναμοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16. ΘΕΩΡΗΜΑ

Πᾶσα τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον τοῦ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους τριγωνικοῦ πρίσματος.

Ἔστω ΣΑΒΓ τριγωνική τις πυραμὶς, καὶ ΑΒΓΔΕΣ τὸ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους τριγωνικὸν πρίσμα. Λέγω ὅτι ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΣ.

Διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ πρίσματος ἀφαιρεθῇ ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓ, θέλει μείνει τὸ στερεὸν ΣΑΓΔΕ, ὅπερ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τετραγωνική τις πυραμὶς ἔχουσα βάσιν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΔΕ καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον Σ. Λέγω τώρα ὅτι ἡ τετραγωνικὴ αὕτη πυραμὶς εἶναι διπλασία τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ.

Διότι, ἐὰν ἀχθῇ ἡ διαγώνιος ΕΓ, τὸ ἐπίπεδον ΣΕΓ θέλει διαιρέσει τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα εἰς δύο τριγωνικὰς πυραμίδας ΣΑΓΕ, ΣΕΓΔ ἰσοδυνάμους, διότι ἔχουσι βάσεις ΑΓΕ, ΕΓΔ ἴσας, ὡς τὰ ἡμίση τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου, καὶ ὕψος τὴν ἐκ τοῦ σημείου Σ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓΔΕ καταβιβαζομένην κάθετον. Λοιπὸν πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος ἀρκεῖ ν' ἀποδειχθῇ ὅτι μία τούτων, ἡ ΣΕΔΓ π. χ., εἶναι ἰσοδύναμος τῇ ΣΑΒΓ.

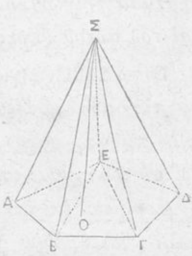
Καὶ τῷ ὄντι, ἡ πυραμὶς ΣΕΓΔ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα βάσιν τὸ τρίγωνον ΕΣΔ (= τῷ ΑΒΓ) καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον Γ, ἐπομένως ὕψος τὴν ἐκ τοῦ σημείου Γ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΕΣΔ καταβιβαζομένην κάθετον. Ἀλλ' ἡ κάθετος αὕτη μετρεῖ τὴν τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΣΕΔ, ΑΒΓ ἀπόστασιν. Ἄρα εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐκ τοῦ σημείου Σ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ καταβιβαζομένην (πρότ. 16, πόρ. Ε'). Λοιπὸν αἱ δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΣΕΔΓ ἔχουσι βάσεις ΑΒΓ, ΣΕΔ ἴσας καὶ ὕψη ἴσα ἑπομένως εἶναι ἰσοδύναμοι.

Αἱ τρεῖς λοιπὸν τριγωνικαὶ πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΣΑΓΕ, ΣΕΔΓ, αἱ τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΣ ἀποτελοῦσαι, εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς ἀλλήλας. Ἡ μία λοιπὸν τούτων, ἡ ΣΑΒΓ π. χ., εἶναι τὸ τρίτον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΣ, τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους.

Πόρισμα. Τὸ μέτρον τριγωνικῆς τινος πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶσα πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ ἔχει διὰ μέτρον τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως αὐτῆς ἐπὶ τὸ ὕψος της.



Διότι τὰ ἐπίπεδα ΣΕΒ, ΣΕΓ, τὰ διὰ τῆς κορυφῆς Σ καὶ τῶν διαγωνίων ΕΒ, ΕΓ διερχόμενα, διαιροῦσι τὴν πολυγωνικὴν πυραμίδα ΣΑΒΓΔΕ εἰς τόσας τριγωνικὰς πυραμίδας τοῦ αὐτοῦ ὕψους ΣΟ, εἰς ὅσα τρίγωνα ἀποσυντίθεται τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ τῆς βάσεως αὐτῆς. Ἀλλὰ, κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα, ἑκάστη τῶν τριγωνικῶν τούτων πυραμίδων ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς της ΑΒΕ, ΒΓΕ, ΕΓΔ, ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους αὐτῆς ΣΟ. Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν τριγωνικῶν τούτων πυραμίδων, ἢ ἡ πολυγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ, θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, ἢ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους ΣΟ. Λοιπὸν κτλ.

Πόρισμα 1. Πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον τοῦ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους πρίσματος.

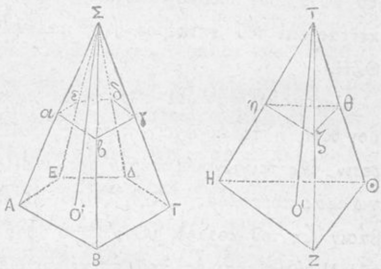
Πόρισμα 2. Αἱ τοῦ αὐτοῦ ὕψους πυραμίδες εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν, καὶ ἀντιστρόφως, αἱ τῆς αὐτῆς βάσεως πυραμίδες εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

Σχόλιον. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ μέτρον τοῦ ὄγκου παντὸς πολυεδρικοῦ σώματος ἀποσυνθέτοντες αὐτὸ εἰς πυραμίδας, ἡ δ' ἀποσύνθεσις αὕτη δύναται νὰ γείνῃ κατὰ πολλοὺς τρόπους. Ὁ ἁπλούστερος τούτων συνίσταται εἰς τὸ ν' ἀχθῶσι τὰ τῆς διαιρέσεως ἐπίπεδα ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας. Οὕτω θέλουσι σχηματισθῇ τόσαι μερικαὶ πυραμίδες, ὅσας ἕδρας ἔχει τὸ πολύεδρον, ἐξαιρουμένων τῶν ἑδρῶν, τῶν σχηματιζουσῶν τὴν στερεὰν γωνίαν, ἐξ ἧς ἄγονται τὰ τῆς διαιρέσεως ἐπίπεδα, καὶ ἑκάστης τούτων τὸ μέτρον εὐκόλως εὑρίσκεται.

Αἱ μερικαὶ αὗται πυραμίδες δύνανται ν' ἀποσυντεθῶσιν εἰς τετραέδρους διὰ τῆς ἀποσυνθέσεως τῶν βάσεων αὐτῶν εἰς τρίγωνα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν πυραμίς τις τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς, ὁ μένων κορμὸς μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῆς μικρᾶς πυραμίδος, εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, ἐχουσῶν κοινὸν μὲν ὕψος τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, βάσεις δὲ, ἡ μὲν τὴν κάτω βάσιν τοῦ κορμοῦ, ἡ δὲ τὴν ἄνω βάσιν τοῦ κορμοῦ, καὶ ἡ τρίτη τὴν μεταξὺ τῶν δύο τούτων βάσεων μέσην ἀνάλογον.

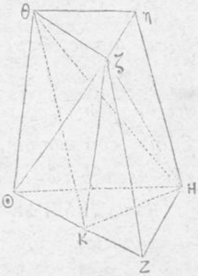


Ἔστω ΣΑΒΓΔΕ πυραμίς τις τμηθεῖσα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου αβγ, παραλλήλου τῷ ἐπιπέδῳ τῆς βάσεως αὐτῆς ΑΒΓΔΕ. Λέγω ὅτι ὁ κορμὸς ΑΒΓΔΕαβγδε θέλει εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, ἐχουσῶν κοινὸν μὲν ὕψος τὴν τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓ, αβγ ἀπόστασιν, ἤτοι τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, βάσεις δὲ, ἡ μὲν τὴν κάτω αὐτοῦ βάσιν ΑΒΓΔΕ, ἡ δὲ τὴν ἄνω αβγδε, καὶ ἡ τρίτη βάσιν τινὰ, μέσην ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο βάσεων ΑΒΓΔΕ, αβγδε.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου λαμβάνομεν τριγωνικήν τινα πυραμίδα ΤΗΖΘ, ἔχουσαν βάσιν τὸ τρίγωνον ΗΖΘ, ἰσοδύναμον μὲ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ ὕψος ΤΟ$=$ΣΟ. Ἐὰν ὑποθέσωμεν πρὸς τούτοις ὅτι αἱ βάσεις τῶν δύο τούτων πυραμίδων κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ἐπίπεδον αβγ, προεκβληθὲν, θέλει τμήσει τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΤΗΖΘ, ἡ δ' οὕτω γενομένη τομὴ ηθζ θέλει εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ πολύγωνον αβγδε (πρότ. 14, πόρ.).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω κατασκευῶν ἕπεται ὅτι ὁ κορμὸς ΑΒΓΔΕαβγδε εἶναι ἰσοδύναμος τῷ κορμῷ ΗΖΘηζθ. Διότι αἱ πυραμίδες ΣΑΒΓΔΕ, ΤΗΖΘ εἶναι ἰσοδύναμοι, ὡς ἔχουσαι βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ αἱ πυραμίδες Σαβγδε, Τηζθ εἶναι ἰσοδύναμοι. Λοιπὸν ὁ κορμὸς ΑΒΓδε, ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο πυραμίδων ΣΑΒΓΔΕ, Σαβγδε, θέλει εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν κορμὸν ΗΖΘηζθ, ὅστις εἶναι ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο πυραμίδων ΤΗΖΘ, Τηζθ, αἵτινες εἶναι ἀμοιβαίως ἰσοδύναμοι μὲ τὰς πρώτας. Ἀρκεῖ λοιπὸν ν' ἀποδειχθῇ ἡ ἐκφωνηθεῖσα πρότασις διὰ μόνην τὴν περίπτωσιν τοῦ κορμοῦ τριγωνικῆς πυραμίδος.



Ἔστω λοιπὸν ΖΗΘθηζ κορμός τις τριγωνικῆς πυραμίδος. Ἐὰν διὰ τῶν τριῶν σημείων Θ, Η, ζ ἄξωμεν τὸ ἐπίπεδον ΘζΗ, καὶ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ κορμοῦ τὴν προκύπτουσαν τριγωνικὴν πυραμίδα ζΘΖΗ, ἡ πυραμὶς αὕτη ἔχει βάσιν τὴν κάτω βάσιν ΘΖΗ τοῦ κορμοῦ, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ· διότι ἡ κορυφὴ αὐτῆς ζ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου θζη, παραλλήλου τῷ ΘΖΗ.

Παρομοίως, ἐὰν διὰ τῶν τριῶν σημείων θ, ζ, Η ἄξωμεν τὸ ἐπίπεδον θζΗ, ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ζΘΗηθ, ἡ μένουσα μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ζΘΖΗ, θέλει ἀποσυντεθῇ εἰς δύο τριγωνικὰς πυραμίδας ζΗηθ, ζΘΗθ, ἐξ ὧν ἡ πρώτη ἔχει βάσιν τὴν ἄνω βάσιν θζη τοῦ κορμοῦ, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, διότι ἡ κορυφὴ αὐτῆς Η εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΘΖΗ παραλλήλου τῷ θζη. Οὕτω λοιπὸν εὕρομεν δύο τῶν τριῶν πυραμίδων, ἐξ ὧν εἴπομεν ὅτι ὁ κορμὸς συντίθεται.

Μένει πρὸς ἐξέτασιν ἡ τρίτη πυραμὶς ζΘΗθ. Ἀλλ' ἐὰν ἀχθῇ ἡ ζΚ παράλληλος τῇ Θθ, καὶ λάβωμεν τὸ σημεῖον Κ ὡς κορυφὴν πυραμίδος, ἐχούσης βάσιν τὸ τρίγωνον ΘΗθ, ἡ πυραμὶς αὕτη, ἤτοι ἡ ΚΘΗθ καὶ ἡ ζΘΗθ θέλουσιν εἶναι ἰσοδύναμοι, ὡς ἔχουσαι τὴν αὐτὴν βάσιν ΘΗθ τὰς δὲ κορυφὰς αὐτῶν Κ, ζ ἐπὶ τῆς εὐθείας Κζ, παραλλήλου τῇ Θθ, καὶ ἑπομένως παραλλήλου τῷ ἐπιπέδῳ ΘΗθ (πρότ. 10, Ε'). Ἀλλ' ἡ πυραμὶς θΘΗΚ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα κορυφὴν τὸ σημεῖον θ καὶ βάσιν τὸ τρίγωνον ΘΗΚ, ἑπομένως ὡς ἔχουσα ὕψος τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ. Καθ' ὅσον δ' ἀφορᾷ τὴν βάσιν ΘΗΚ, λέγω ὅτι αὕτη εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν βάσεων ΘΖΗ, θζη.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΘΗΚ, θηζ ἔχουσι τὰς γωνίας Θ καὶ θ καὶ τὰς πλευρὰς ΘΚ, θζ ἴσας, θέλομεν ἔχει (πρότ. 28, Γ')

$$\text{τρίγ. } ΘΗΚ : \text{τρίγ. } θζη = ΘΗ : θη.$$

Ἔχομεν ὡσαύτως $\text{τρίγ. } ΘΗΖ : \text{τρίγ. } ΘΗΚ = ΘΖ : ΘΚ$ ἢ $θζ$.

Ἀλλ', ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΘΖΗ καὶ θζη,

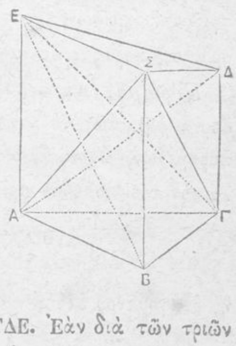
$$ΘΖ : θζ = ΘΗ : θη.$$

Ἄρα καὶ $ΘΗΖ : ΘΗΚ = ΘΗΚ : θζη.$

Λοιπὸν ἀπεδείχθη ὅτι ἡ βάσις ΘΗΚ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν βάσεων ΘΗΖ, θηζ. Λοιπὸν πᾶς κορμὸς τριγωνικῆς πυραμίδος, βάσεις ἔχων παραλλήλους, ἀποσυντίθεται εἰς τρεῖς πυραμίδας, ἐχούσας ὕψος μὲν τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, βάσεις δὲ, ἡ μὲν τὴν κάτω βάσιν τοῦ κορμοῦ, ἡ δὲ τὴν ἄνω βάσιν τοῦ κορμοῦ, καὶ ἡ τρίτη μέσην τινὰ ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο τούτων βάσεων. Λοιπὸν ὡσαύτως πᾶς κορμὸς ὁποιασδήποτε πυραμίδος κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19. ΘΕΩΡΗΜΑ.

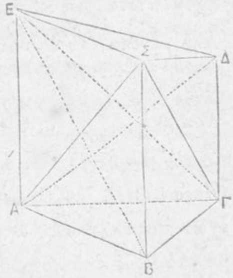
Ἐὰν τριγωνικόν τι πρίσμα τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς ΔΕΣ, κεκλιμένου πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ ΑΒΓ, τὸ ἐκ ταύτης τῆς τομῆς προκῦπτον στερεὸν ΑΒΓΔΕΣ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, ἐχουσῶν κοινὴν βάσιν τὴν βάσιν ΑΒΓ τοῦ πρίσματος καὶ κορυφὰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, Σ.



Διὰ τῶν τριῶν σημείων Σ, Α, Γ ἄγομεν τὸ ἐπίπεδον ΣΑΓ, δι' οὗ ἀποκόπτεται ἀπὸ τοῦ κολοβοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΣ ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓ. Ἡ πυραμὶς αὕτη ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον Σ.

Μετὰ τὴν ἀπὸ τοῦ κολοβοῦ πρίσματος ἀφαίρεσιν τῆς πυραμίδος ταύτης, μένει ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΓΔΕ, ἔχουσα κορυφὴν τὸ σημεῖον Σ καὶ βάσιν τὸ τραπέζιον ΑΓΔΕ. Ἐὰν διὰ τῶν τριῶν σημείων Σ, Ε, Γ ἄξωμεν προσέτι τὸ ἐπίπεδον ΣΕΓ, ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΓΔΕ θέλει διαιρεθῇ εἰς δύο τριγωνικὰς πυραμίδας ΣΑΓΕ, ΣΓΔΕ.

Ἡ πυραμὶς ΣΑΕΓ, ἧς βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Σ, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν πυραμίδα ΒΑΕΓ, ἥτις ἔχει βάσιν τὸ αὐτὸ τρίγωνον ΑΕΓ καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον Β. Διότι αἱ δύο αὗται πυραμίδες ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΕΓ, τὰς δὲ κορυφὰς αὐτῶν Σ καὶ Β κειμένας ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΣ παραλλήλου τῷ ἐπιπέδῳ ΑΓΕ (πρότ. 10, Ε'). Λοιπὸν ἡ πυραμὶς ΣΑΕΓ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ ΒΑΕΓ, ἥτις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον Ε.



Ἡ τρίτη πυραμὶς ΣΕΔΓ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΔΑΒΓ. Διότι ἡ πυραμὶς ΣΕΔΓ, ἔχουσα κορυφὴν τὸ σημεῖον Ε καὶ βάσιν τὸ τρίγωνον ΣΔΓ, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ΑΣΓΔ, ἥτις ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΣΔΓ, τὴν δὲ κορυφὴν αὐτῆς Α κειμένην ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΣ, παραλλήλου τῷ ἐπιπέδῳ ΣΔΓ. Ἀφ' ἑτέρου δὲ ἡ πυραμὶς ΑΣΓΔ, ἔχουσα κορυφὴν τὸ σημεῖον Σ καὶ βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΔΓ, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ΒΑΔΓ, ἥτις ἔχει βάσιν τὸ αὐτὸ τρίγωνον ΑΔΓ καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον Β, κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΣ, παραλλήλου τῷ ἐπιπέδῳ ΑΔΓ. Λοιπὸν ἡ πυραμὶς ΣΕΔΓ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ΔΑΒΓ, ἥτις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον Δ.

Λοιπὸν τὸ κολοβὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΣ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, ἐχουσῶν κοινὴν μὲν βάσιν τὴν βάσιν ΑΒΓ τοῦ πρίσματος, κορυφὰς δὲ τὰ τρία σημεῖα Δ, Ε, Σ.

Πόρισμα. Ἂν αἱ κόψεις ΑΕ, ΒΣ, ΓΔ ἦσαν κάθετοι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, ἤθελον παριστᾷ συγχρόνως τὰ ὕψη τῶν τριῶν μερικῶν πυραμίδων, ὧν τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ τὸ κολοβὸν πρίσμα. Τὸ μέτρον λοιπὸν τοῦ κολοβοῦ πρίσματος ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ θέλει εἶναι

$$\frac{1}{3}\ \text{ΑΒΓ}\times\text{ΑΕ}+\frac{1}{3}\ \text{ΑΒΓ}\times\text{ΒΣ}+\frac{1}{3}\ \text{ΑΒΓ}\times\text{ΓΔ}$$

ἤ, ἐξαγομένου ἐκτὸς παρενθέσεως τοῦ κοινοῦ παράγοντος $\frac{1}{3}$ ΑΒΓ,

$$\frac{1}{3}\ \text{ΑΒΓ}\times(\text{ΑΕ}+\text{ΒΣ}+\text{ΓΔ}).$$

ΠΕΡΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ.

Δύο σημεῖα λέγονται *συμμετρικὰ* ὡς πρὸς ἐπίπεδόν τι, ὅταν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἦναι κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ἑνονούσης τὰ δύο ταῦτα σημεῖα εὐθείας.

Ἰωάννης Νικ. Βόρδος

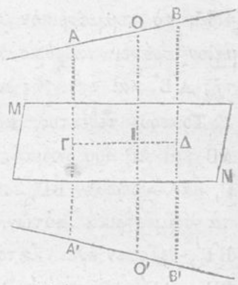
Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καλεῖται *ἐπίπεδον τῆς συμμετρίας*.

Δύο ὁποιαδήποτε σχήματα λέγονται *συμμετρικὰ* ὡς πρὸς ἐπίπεδόν τι, ὅταν (α) τὸ συμμετρικὸν σημεῖον ἑκάστου σημείου τοῦ ἑνὸς κῆται ἐπὶ τοῦ ἑτέρου σχήματος. (α) ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἑνὸς σχήματος ἔχει τὸ συμμετρικόν του ἐπὶ τοῦ ἑτέρου σχήματος.

Εἰς δύο συμμετρικὰ πολύεδρα αἱ συμμετρικαὶ ἕδραι, καθὼς καὶ αἱ συμμετρικὰ σημεῖα διὰ κορυφὰς ἔχουσαι στερεαὶ γωνίαι, καλοῦνται *ὁμόλογοι*.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 20. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ συμμετρικὴ γραμμὴ εὐθείας τινὸς ΑΒ εἶναι εὐθεῖα γραμμή.



Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα Α καὶ Β, καὶ ἂς προσδιορίσωμεν τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν Α' καὶ Β' λαμβάνοντες ἐπὶ τῶν προεκβολῶν τῶν καθέτων, τῶν καταβιβαζομένων ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, μήκη ἀμοιβαίως ἴσα τοῖς τῶν καθέτων, τουτέστι ΓΑ'=ΓΑ, ΔΒ'=ΔΒ. Ἐὰν ἄξωμεν τὰς εὐθείας Α'Β' καὶ ΓΔ, λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα Α'Β' θέλει εἶναι ἡ συμμετρικὴ γραμμὴ τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἀρκεῖ βεβαίως ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ συμμετρικὸν σημεῖον ἑνὸς ὁποιουδήποτε σημείου Ο τῆς εὐθείας ΑΒ κεῖται ἐπὶ τῆς Α'Β'.

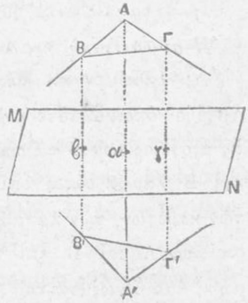
Ἂς καταβιβάσωμεν τὴν ΟΙ κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς συμμετρίας ΜΝ καὶ προεκβάλωμεν αὐτὴν μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὴν ΑΒ, στρέψωμεν ἀκολούθως τὸ τραπέζιον ΑΓΔΒ περὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, μέχρις οὗ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΑ'Β'Δ. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΓΔ, Α'ΓΔ εἶναι ὀρθαί, ΓΑ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν ΓΑ', καὶ ἐπειδὴ ΓΑ=ΓΑ', τὸ σημεῖον Α θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Α'. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΒΔ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν Β'Δ, καὶ τὸ σημεῖον Β θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Β'. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΑΒ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς Α'Β'. Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΟΙΓ, Ο'ΙΓ εἶναι ὀρθαί, ΟΙ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν Ο'Ι, καὶ τὸ σημεῖον Ο: θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ σημείου τῆς κοινῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν Α'Β', ΙΟ', ἤτοι ἐπὶ τοῦ σημείου Ο'. Λοιπὸν ΙΟ=ΙΟ'. Ἄρα Ο' εἶναι τὸ συμμετρικὸν σημεῖον τοῦ σημείου Ο. Λοιπὸν ἡ συμμετρικὴ γραμμὴ εὐθείας τινὸς ΑΒ εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

(τὸ ὁποῖον ὀφείλει νὰ πέσῃ συγχρόνως ἐπὶ τῆς ΙΟ' ἢ ἐπὶ τῆς Α'Β':)

Πόρισμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι ΑΒ=Α'Β', τουτέστιν ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἡ ἑνόνουσα δύο σημεῖα Α καὶ Β, εἶναι ἴση μὲ τὴν εὐθεῖαν Α'Β', τὴν ἑνόνουσαν τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν Α' καὶ Β'.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 21. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ γωνία ΒΑΓ τῶν δύο εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν Β'Α'Γ', τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῶν συμμετρικῶν αὐτῶν Α'Β', Α'Γ'.

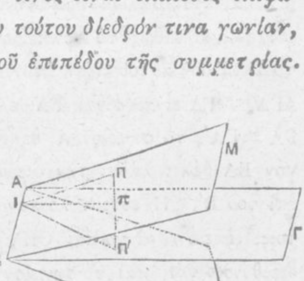


Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις ὅτι τὸ σημεῖον Α τῆς κοινῆς τομῆς τῶν δύο εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ ἔχει διὰ συμμετρικὸν τὸ σημεῖον Α', διότι τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου Α σημεῖον πρέπει νὰ εὑρίσκηται συγχρόνως ἐπὶ τῆς Α'Β' καὶ ἐπὶ τῆς Α'Γ'.

Τούτου τεθέντος, ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ΑΓ δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα Β καὶ Γ, καὶ ἑνώσωμεν ΒΓ, ἔστωσαν δὲ Β' καὶ Γ' τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν. Ἐὰν ἄξωμεν τὴν Β'Γ', θέλομεν ἔχει κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ΒΓ=Β'Γ', ΑΒ=Α'Β', ΑΓ=Α'Γ'. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' θέλουσιν εἶναι ἴσα, καὶ ἐπομένως ἡ γωνία ΒΑΓ=Β'Α'Γ', τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 22. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ συμμετρικὴ ἐπιφάνεια ἐπιπέδου τινὸς εἶναι ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, σχηματίζουσα μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τούτου διεδρόν τινα γωνίαν, διαιρουμένην εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῆς συμμετρίας.



Ἔστω ΑΒ ἡ κοινὴ τοῦ ἐπιπέδου ΜΑΒ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς συμμετρίας ΑΒΓ τομή, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδόν τι ΑΒΜ', σχηματίζον μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς συμμετρίας ΑΒΓ τὴν αὐτὴν γωνίαν, ἣν καὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΑΒ. Λέγω ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΑΒΜ' θέλει εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΜ.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἀρκεῖ βεβαίως ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ συμμετρικὸν σημεῖον ἑνὸς ὁποιουδήποτε σημείου Π τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΜ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΜ'.

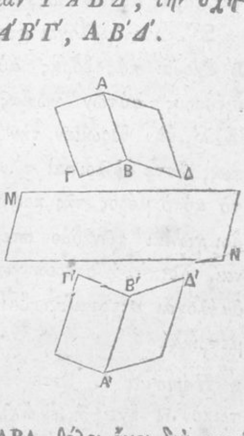
Πρὸς τοῦτο καταβιβάζομεν τὴν Ππ κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ καὶ προεκβάλλομεν αὐτὴν μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΜ' εἰς τὸ σημεῖον Π'. Ἐκ τοῦ ποδὸς π τῆς καθέτου ἄγομεν τὴν πΙ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ τελευταῖον ἄγομεν τὰς εὐθείας ΠΙ, Π'Ι, αἵτινες θέλουσιν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς ΑΒ (πρότ. 7, Ε').

Τὰ σχηματισθέντα δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΠπΙ, Π'πΙ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν Ιπ κοινήν, καὶ τὰς γωνίας ΠΙπ, Π'Ιπ, τὰς μετρούσας τὰς ἴσας διέδρους γωνίας ΜΑΒΓ, Μ'ΑΒΓ, ἴσας. Ἄρα Ππ=Π'π. Λοιπὸν Π' εἶναι τὸ συμμετρικὸν σημεῖον τοῦ σημείου Π. Λοιπὸν ἡ συμμετρικὴ ἐπιφάνεια ἐπιπέδου τινὸς ΑΒΜ εἶναι ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ΑΒΜ', σχηματίζουσα μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς συμετρίας ΑΒΓ δίεδρον γωνίαν Μ'ΑΒΓ ἴσην μὲ τὴν δίεδρον γωνίαν ΜΑΒΓ, ἣν κτλ.

Παρατήρησις. Ἂν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ἐπίπεδον ἦτο παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ τῆς συμμετρίας ΑΒΓ, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ἤθελεν εἶναι ἕτερον ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ΑΒΓ καὶ ἀπέχον τούτου, ὅσον καὶ τὸ πρῶτον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 23. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ ὑπὸ δύο ἐπιπέδων ΑΒΓ, ΑΒΔ σχηματιζομένη δίεδρος γωνία ΓΑΒΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν δίεδρον γωνίαν Γ'Α'Β'Δ', τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῶν συμετρικῶν αὐτῶν Α'Β'Γ', Α'Β'Δ'.



Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ, κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΑΒΓ, ΑΒΔ, ἔχει διὰ συμμετρικὴν τὴν εὐθεῖαν Α'Β', κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων Α'Β'Γ', Α'Β'Δ'.

Τούτου τεθέντος, εἰς τὸ σημεῖον Β ἂς σχηματίσωμεν τὴν μετροῦσαν τὴν δίεδρον γωνίαν ΓΑΒΔ ἐπίπεδον γωνίαν ΓΒΔ. Παρομοίως εἰς τὸ σημεῖον Β', συμμετρικὸν τοῦ Β, ἂς σχηματίσωμεν τὴν μετροῦσαν τὴν δίετρον γωνίαν Γ'Α'Β'Δ' ἐπίπεδον γωνίαν Γ'Β'Δ'.

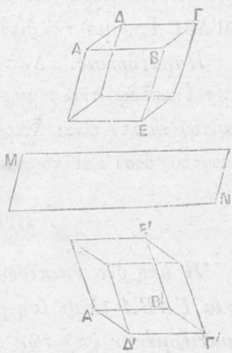
Ἡ εὐθεῖα ΒΔ, κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔ, θέλει ἔχει διὰ συμμετρικὴν εὐθεῖάν τινα, διερχομένην διὰ τοῦ σημείου Β' καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Α'Β'Δ' κειμένην. Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ ἡ ΒΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἡ συμμετρικὴ αὐτῆς θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς Α'Β' (πρότ. 21). Ἀλλὰ Β'Δ' κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Α'Β'Δ' καὶ ἤχθη κάθετος ἐπὶ τῆς Α'Β'. Ἄρα Β'Δ' εἶναι ἡ συμμετρικὴ τῆς ΒΔ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι Β'Γ' εἶναι ἡ συμμετρικὴ τῆς ΒΓ. Λοιπὸν ἡ γωνία ΓΒΔ=Γ'Β'Δ' (πρότ. 21). Λοιπὸν ἡ ὑπὸ τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΒΓ, ΑΒΔ σχηματιζομένη δίεδρος γωνία ΓΑΒΔ εἶναι ἴση κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 24. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἐπίπεδόν τι πολύεδρα ἔχουσι

1ον. Τὰς ἕδρας αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ·

2ον. Τὰς ὁμολόγους αὐτῶν στερεὰς γωνίας συμμετρικάς.



1ον. Ἔστωσαν Α, Β, Γ, Δ αἱ κορυφαὶ μιᾶς τῶν ἑδρῶν τοῦ ἑνὸς πολυέδρου. Γνωρίζομεν ἤδη ὅτι αἱ συμμετρικαὶ αὐτῶν Α', Β', Γ', Δ' εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (πρότ. 22). Πρὸς τούτοις τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔ, Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας καὶ τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας, ἑκάστην ἑκάστῃ (πρότ. 20, 21). Λοιπὸν 1ον δύο συμμετρικὰ πολύεδρα ἔχουσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ἴσας, ἑκάστην ἑκάστῃ.

2ον. Δύο ὁμόλογοι στερεαὶ γωνίαι Β καὶ Β' ἔχουσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ἴσας καὶ τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας ἴσας, ἑκάστην ἑκάστῃ (πρότ. 21, 23). Ἀλλ', ἐὰν θέσωμεν τὴν ἕδραν Α'Β'Ε' ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΒΕ οὕτως, ὥστε αἱ λοιπαὶ τῶν δύο στερεῶν γωνιῶν κόψεις νὰ κῆνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κοινῆς ἕδρας, εὐκόλως παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῶν δύο στερεῶν γωνιῶν εἶναι ἀντιστρόφως διατεταγμέναι. Λοιπὸν ἡ στερεὰ γωνία Β' εἶναι συμμετρικὴ τῆς Β. Λοιπὸν 2ον αἱ ὁμόλογαι στερεαὶ γωνίαι τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων εἶναι συμμετρικαί.

Πόρισμα 1. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι πολύεδρόν τι Π ἓν μόνον συμμετρικὸν Π' ἔχει, ἤ, ἐν ἄλλαις λέξεσι, δύο πολύεδρα Π', Π'', συμμετρικὰ τρίτου τινὸς Π, εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα. Διότι αἱ μὲν ἕδραι τῶν δύο τούτων πολυέδρων εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ὡς οὖσαι ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς ἕδρας τοῦ πολυέδρου Π, αἱ δὲ στερεαὶ αὐτῶν γωνίαι, οὖσαι συμμετρικαὶ τῶν στερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου Π, εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, διότι μία στερεὰ γωνία μίαν μόνην συμμετρικὴν δύναται νὰ ἔχῃ. Λοιπὸν τὰ πολύεδρα Π′, Π″ θέλουσιν εἶναι ἐπιθέσιμα, καὶ ἐπομένως ἴσα.

Πόρισμα 2. Ἐὰν πολύεδρόν τι Π ἀποσυντεθῇ εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας, ἐχούσας κοινὴν κορυφὴν μίαν τῶν κορυφῶν τοῦ πολυέδρου, ἑκάστη τῶν τριγωνικῶν τούτων πυραμίδων θέλει ἔχει τὴν συμμετρικὴν αὐτῆς ἐντὸς τοῦ πολυέδρου Π′, συμμετρικοῦ τοῦ Π.

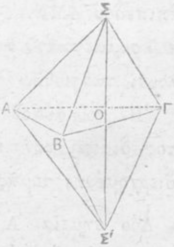
Δύο λοιπὸν συμμετρικὰ πολύεδρα ἀποσυντίθενται εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τετραέδρων, συμμετρικῶν ἕκαστον ἑκάστῳ.

Σχόλιον. Δύο πολύεδρα, ἔχοντα τὰς ἕδρας αὐτῶν ἴσας, ἑκάστην ἑκάστῃ, καὶ τὰς στερεὰς αὐτῶν γωνίας συμμετρικάς, λέγονται πάντοτε συμμετρικά, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ἦναι ἡ ἀμοιβαία αὐτῶν θέσις. Ἀλλὰ παρατηρητέον ὅτι ἡ συμμετρία δὲν ὑπάρχει πλέον εἰμὴ καθ᾽ ὅσον ἀφορᾷ τὴν μορφὴν τῶν στερεῶν καὶ οὐχὶ τὴν ὡς πρὸς ἐπίπεδόν τι συμμετρίας θέσιν αὐτῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 25. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο συμμετρικὰ πολύεδρα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐπειδὴ κατὰ τὰ λεχθέντα ἐν τῷ πορίσματι 2 τῆς προαποδειχθείσης προτάσεως, δύο συμμετρικὰ πολύεδρα ἀποσυντίθενται εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν συμμετρικῶν τετραέδρων, ἀρκεῖ πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι δύο ὁποιαδήποτε συμμετρικὰ τετράεδρα εἶναι ἰσοδύναμα.

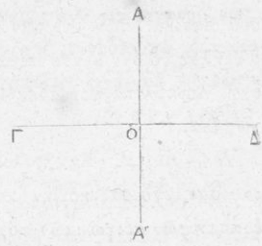


Ἔστω λοιπὸν ΣΑΒΓ τετράεδρόν τι, καὶ ἂς κατασκευάσωμεν ἐπὶ μιᾶς ὁποιασδήποτε τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ ΑΒΓ, ὡς ἐπιπέδου τῆς συμμετρίας ληφθείσης, τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ Σ′ΑΒΓ. Τὰ δύο τετράεδρα ΣΑΒΓ, Σ′ΑΒΓ θέλουσιν εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒΓ καὶ ὕψη ΣΟ, Σ′Ο ἴσα. Λοιπὸν δύο συμμετρικὰ πολύεδρα εἶναι ἰσοδύναμα.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

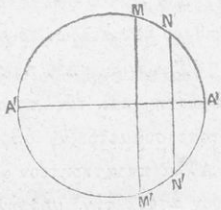
Δύο σημεῖα Α καὶ Α′ λέγονται συμμετρικὰ ὡς πρὸς εὐθεῖάν τινα

ΓΔ, ὅταν ἡ εὐθεῖα αὕτη ἦναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΑΑ', τῆς ἑνονούσης τὰ δύο ταῦτα σημεῖα. Ἡ εὐθεῖα ΓΔ καλεῖται *εὐθεῖα τῆς συμμετρίας*.

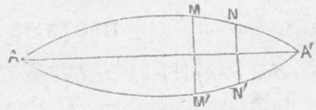


Δύο σχήματα ὀνομάζονται συμμετρικὰ ὡς πρὸς εὐθεῖάν τινα, ὅταν τὸ συμμετρικὸν σημεῖον ἑκάστου σημείου τοῦ ἑνὸς κῆται ἐπὶ τοῦ ἑτέρου σχήματος.

Ὅταν τὰ μέρη σχήματός τινος ἦναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς εὐθεῖάν τινα, ἡ εὐθεῖα αὕτη καλεῖται τότε *ἄξων τοῦ σχήματος*, ἢ ἁπλῶς *ἄξων*. Οὕτω, π. χ. ἡ τοῦ κύκλου διάμετρος ΑΑ', διαιροῦσα τὰς καθέτως ἐπ' αὐτῆς ἀγομένας χορδὰς ΜΜ', ΝΝ', κτλ. εἰς δύο ἴσα μέρη, καλεῖται *ἄξων* τοῦ κύκλου.

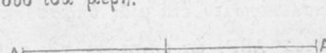


Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπεται ὅτι πᾶς ἄξων ΑΑ' ἐπιπέδου τινὸς σχήματος ΑΜΑ'Μ' διαιρεῖ τὴν περίμετρον τοῦ σχήματος τούτου καὶ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ εἰς δύο ἴσα μέρη. Διότι, ἐὰν στραφῆ τὸ σχῆμα ΑΜ'Ν'Α' περὶ τὴν ΑΑ' μέχρις οὗ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΜΝΑ', ἕκαστον σημεῖον Μ' τοῦ πρώτου θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ αὐτοῦ Μ τοῦ δευτέρου, καὶ οὕτω τὰ δύο σχήματα θέλουσι ταὐτισθῆ.



Ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι ὁ ἄξων στερεοῦ τινος σχήματος διαιρεῖ τὴν περίμετρον καὶ τὴν ἐπιφάνειαν πάσης δι' αὐτοῦ διερχομένης τομῆς τοῦ στερεοῦ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Δύο σημεῖα Α καὶ Α' λέγονται συμμετρικὰ ὡς πρὸς σημεῖόν τι Ο, *κέντρον τῆς συμμετρίας* καλούμενον, ὅταν ἡ ἑνόνουσα τὰ δύο ταῦτα σημεῖα εὐθεῖα διαιρῆται εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὸ σημεῖον Ο.



Δύο ὁποιαδήποτε σχήματα λέγονται συμμετρικὰ ὡς πρὸς σημεῖόν τι Ο, ὅταν τὸ συμμετρικὸν σημεῖον ἑκάστου σημείου τοῦ ἑνὸς κῆται ἐπὶ τοῦ ἑτέρου σχήματος.

Περὶ τῶν ὡς πρὸς εὐθεῖάν τινα καὶ σημεῖόν τι συμμετρικῶν σχημάτων δύναταί τις ν' ἀποδείξῃ εὐκόλως θεωρήματα περίπου ὅμοια μὲ τὰ ὡς πρὸς ἐπίπεδόν τι προαποδειχθέντα, ἀλλ' ἀφίνομεν εἰς τὸν ἀναγνώστην, ἐὰν ἔχῃ καιρὸν, τὴν φροντίδα τοῦ νὰ ζητήσῃ τὰς ἀποδείξεις τούτων.

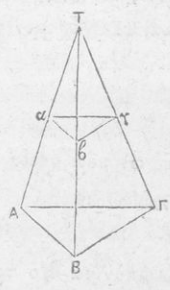
ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ.

Δύο πολύεδρα λέγονται *ὅμοια*, ὅταν ἔχωσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ὁμοίας, ἑκάστην ἑκάστῃ, καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν στερεὰς γωνίας ἴσας. Ὁμόλογοι δὲ στερεαὶ γωνίαι λέγονται αἱ ἐξ ὁμοίων ἑδρῶν ἀποτελούμεναι.

Αἱ ἑνόνουσαι τὰς ὁμολόγους κορυφὰς δύο ὁμοίων πολυέδρων εὐθεῖαι λέγονται *ὁμόλογοι εὐθεῖαι*.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 26. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἐπὶ τῶν κόψεων ΤΑ, ΤΒ, ΤΓ τοῦ τετραέδρου ΤΑΒΓ λάβωμεν τὰ σημεῖα α, β, γ οὕτως, ὥστε οἱ λόγοι $\frac{T\alpha}{TA}, \frac{T\beta}{TB}, \frac{T\gamma}{T\Gamma}$ *νὰ ἦναι ἴσοι, τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τῆς ἑνώσεως τῶν σημείων α, β, γ τετράεδρον Ταβγ θέλει εἶναι ὅμοιον τῷ τετραέδρῳ ΤΑΒΓ.*



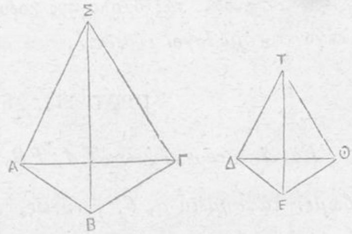
Διότι τὰ τρίγωνα Ταβ, ΤΑΒ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ τρίγωνον Τβγ εἶναι ὅμοιον τῷ ΤΒΓ, καὶ τὸ Ταγ ὅμοιον τῷ ΤΑΓ. Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ αβ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ καὶ βγ τῇ ΒΓ, τὸ ἐπίπεδον αβγ εἶναι παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΓ, ἑπομένως τὸ τρίγωνον αβγ εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΒΓ (πρότ. 14). Τελευταῖον, δυο ὁποιαιδήποτε ὁμόλογοι στερεαὶ γωνίαι Β, β εἶναι ἴσαι. Διότι αὗται, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν ἑδρῶν, ἔχουσι τὰς ἐπιπέδους αὐτῶν γωνίας ἴσας, ἑκάστην ἑκάστῃ, καὶ ὁμοίως διατεταγμένας. Λοιπὸν τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος τετράεδρα ἔχουσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ὁμοίας, ἑκάστην ἑκάστῃ, κα τὰς ὁμολόγους αὐτῶν στερεὰς γωνίας ἴσας. Λοιπὸν εἶναι ὅμοια.

Σχόλιον. Παρατηρητέον ὅτι δύο ὅμοια τετράεδρα ἔχουσι τὰς ὁμολόγους αὐτῶν κόψεις ἀναλόγους.

Ἀντιστρόφως, δύο τετράεδρα, ἔχοντα τὰς κόψεις αὐτῶν ἀναλόγους καὶ ὁμοίως διατεταγμένας εἶναι ὅμοια. Διότι ἐκ τῆς ἀναλογίας τῶν κόψεων ἕπεται ἀμέσως ἡ ὁμοιότης τῶν ἑδρῶν, καὶ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ἑδρῶν καὶ τῆς ὁμοίας αὐτῶν διατάξεως ἡ ἰσότης τῶν ὁμομολόγων στερεῶν γωνιῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 27. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο τετράεδρα ΣΑΒΓ, ΤΔΕΘ, ἔχοντα μίαν δίεδρον γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ δύο ἑδρῶν ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων, εἶναι ὅμοια.



Ἔστω ἡ δίεδρος γωνία ΣΒ ἴση μὲ τὴν δίεδρον γωνίαν ΤΕ, τὸ τρίγωνον ΣΑΒ ὅμοιον τῷ ΤΔΕ, καὶ τὸ τρίγωνον ΣΒΓ ὅμοιον τῷ ΤΕΘ.

Αἱ στερεαὶ γωνίαι Σ καὶ Τ εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχουσαι μίαν δίεδρον γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ δύο ἑδρῶν ἴσων καὶ ὁμοίως κειμένων (πρότ. 31, Ε΄). Λοιπὸν ἡ γωνία ΑΣΓ εἶναι ἴση τῇ ΔΤΘ. Πρὸς τούτοις, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΣΒ καὶ ΔΤΕ, ΣΒΓ καὶ ΤΕΘ, ἔχομεν τὰς ἀναλογίας

$$ΣΒ : ΤΕ = ΑΣ : ΔΤ,$$

$$ΣΒ : ΤΕ = ΣΓ : ΤΘ,$$

ἐξ ὧν πορίζόμεθα, ἕνεκα τοῦ κοινοῦ αὐτῶν λόγου ΣΒ : ΤΕ, τὴν ἀκόλουθον

$$ΑΣ : ΔΤ = ΣΓ : ΤΘ.$$

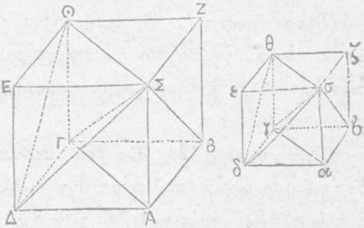
Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΣΒ, ΔΤΘ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι αἱ στερεαὶ γωνίαι Β καὶ Ε εἶναι ἴσαι, καὶ ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον τῷ ΔΕΘ. Τελευταῖον, αἱ στερεαὶ γωνίαι Α καὶ Γ εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς στερεὰς γωνίας Δ καὶ Θ, ὡς ἔχουσαι τὰς ἐπιπέδους αὐτῶν γωνίας ἴσας, ἑκάστην ἑκάστῃ, καὶ ὁμοίως διατεταγμένας. Τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος λοιπὸν τετράεδρα εἶναι ὅμοια.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 28. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὅμοια πολύεδρα ἀποσυντίθενται εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τετραέδρων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων.

Ἂς ἀποσυνθέσωμεν εἰς τρίγωνα τὰς μὴ προσκειμένας τῇ κορυφῇ Σ ἕδρας τοῦ πολυέδρου ΣΕΘΖΒΑΔΓ. Τὰ τρίγωνα ταῦτα θέλουσιν εἶναι αἱ βάσεις τῶν τετραέδρων, τῶν ἐχόντων κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον Σ, καὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα θέλει ἀποτελεῖ τὸ πρῶτον πολύεδρον.



Παρομοίως, ἐὰν ἀποσυνθέσωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς τρίγωνα τὰς μὴ προσκειμένας τῇ κορυφῇ σ, ὁμολόγῳ τῇ Σ, ἕδρας τοῦ πολυέδρου σεθζβαδγ, καὶ ἑνώσωμεν τὸ σημεῖον σ μὲ τὰς κορυφὰς τῶν τριγώνων τούτων, τὸ δεύτερον τοῦτο πολύεδρον θέλει ἀποσυντεθῆ οὕτως εἰς τετράεδρα, ἅτινα πρόκειται ν' ἀποδειχθῶσιν ἀμοιβαίως ὅμοια μὲ τὰ ἀποτελοῦντα τὸ πρῶτον πολύεδρον.

Διότι, ἐὰν συγκρίνωμεν τὰ τετράεδρα ΣΔΓΑ, σδγα, βλέπομεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΣΔΑ, ΓΔΑ εἶναι ἀμοιβαίως ὅμοια μὲ τὰ τρίγωνα σδα, γδα, ἀφ' ἑνὸς ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν ἑδρῶν ΕΔΑΣ, εδασ, καὶ ἀφ' ἑτέρου ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν ἑδρῶν ΓΔΑΒ, γδαβ. Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ αἱ στερεαὶ γωνίαι Δ καὶ δ εἶναι ἴσαι, αἱ δίεδροι γωνίαι ΔΑ καὶ δα εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν τὰ δύο τετράεδρα ΣΔΓΑ, σδγα εἶναι ὅμοια ὡς ἔχοντα μίαν δίεδρον γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ δύο ἑδρῶν ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων (πρότ. 27).

Ἐὰν τώρα μεταβῶμεν εἰς τὰ τετράεδρα ΣΔΓΘ, σδγθ, βλέπομεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΣΔΓ, σδγ εἶναι ὅμοια, ὡς ὁμόλογοι ἕδραι τῶν ὁμοίων τετραέδρων ΣΔΓΑ, σδγα, καὶ ὅτι τὸ τρίγωνον ΘΔΓ εἶναι ὅμοιον τῷ θδγ, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν πολυγώνων ΔΓΕΘ, δγεθ. Ἀφ' ἑτέρου δὲ αἱ δίεδροι γωνίαι ΘΔΓΣ, θδγσ, αἱ μεταξὺ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν ΣΔΓ, ΔΓΘ, σδγ, δγθ περιεχόμεναι, εἶναι ἴσαι· διότι, ἐπειδὴ αἱ δύο δίεδροι γωνίαι ΘΔΓΑ, θδγα εἶναι ἴσαι ἐξ ὑποθέσεως, καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι ΣΔΓΑ, σδγα εἶναι ἴσαι, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν τετραέδρων ΣΔΓΑ, σδγα, αἱ δίεδροι γωνίαι ΘΔΓΣ (=ΘΔΓΑ—ΣΔΓΑ), θδγσ (=θδγα—σδγα) θέλουσιν εἶναι ἴσαι, ὡς διαφοραὶ ἴσων διέδρων γωνιῶν. Λοιπὸν τὰ τετράεδρα ΣΔΓΘ, σδγθ εἶναι ὅμοια, καὶ οὕτω καθεξῆς περὶ τῶν λοιπῶν. Ἀπεδείχθη λοιπὸν ὅτι δύο ὅμοια πολύεδρα ἀποσυντίθενται εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τετραέδρων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων.

Παρατήρησις 1. Παρατηρητέον ὅτι ἠδυνάμεθα ν' ἀποσυνθέσωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὰ πολύεδρα λαμβάνοντες ὡς κοινὰς κορυφὰς τῶν ὁμοίων τετραέδρων δύο ὁποιασδήποτε ὁμολόγους κορυφὰς τῶν ὁμοίων πολυέδρων.

Παρατήρησις 2. Ἐκ τοῦ προαποδειχθέντος θεωρήματος ἕπεται ὅτι εἰς δύο ὅμοια πολύεδρα δύο ὁμόλογοι εὐθεῖαι Α, α εἶναι ἀνάλογοι δύο ὁμολόγων κόψεων Β, β τῶν δυο πολυέδρων.

Διότι αἱ εὐθεῖαι Α, α θέλουσιν εἶναι αἱ ὁμόλογοι κόψεις δύο ὁμοίων τετραέδρων, ἀποτελούντων μέρος τῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων, καὶ τὰ τετράεδρα ταῦτα θέλουσι περιέχει ἀναγκαίως δύο ὁμολόγους κόψεις Γ, γ τῶν δύο πολυέδρων. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει

$$Α : α = Γ : γ.$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ εἰς τὰ ὅμοια πολύεδρα αἱ ἕδραι εἶναι ὅμοιαι, αἱ ὁμόλογοι κόψεις εἶναι ἀνάλογοι, καὶ θέλομεν ἔχει

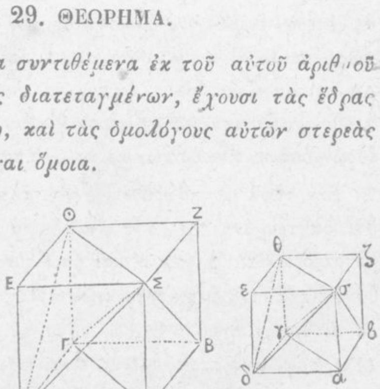
$$Γ : γ = Β : β.$$

Λοιπὸν, ἕνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου Γ : γ,

$$Α : α = Β : β.$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 29. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἀντιστρόφως, δύο πολύεδρα συντιθέμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τετραέδρων ὁμοίων καὶ ὁμοίως διατεταγμένων, ἔχουσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ὁμοίας, ἑκάστην ἑκάστῃ, καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν στερεὰς γωνίας ἴσας, καὶ ἑπομένως εἶναι ὅμοια.



Ἔστωσαν ΣΑΒΓ, ΣΑΔΓ, ΣΓΑΘ, . . . αἱ τὸ πρῶτον πολύεδρον ἀποτελοῦσαι τριγωνικαὶ πυραμίδες, καὶ σαβγ, σαδγ, σγδθ, . . . αἱ ὅμοιαι τούτοις, αἱ τὸ δεύτερον πολύεδρον ἀποτελοῦσαι.

1ον. Ἐπειδὴ τὰ τετράεδρα ΣΑΔΓ, ΣΓΑΒ εἶναι ἀμοιβαίως ὅμοια μὲ τὰ τετράεδρα σαδγ, σγαϐ, τὰ τρίγωνα ΑΔΓ, ΓΑΒ, τὰ ἀποτελοῦντα μίαν ἕδραν τοῦ πρώτου πολυέδρου, εἶναι ἀμοιϐαίως ὅμοια μὲ τὰ τρίγωνα δγα, γαϐ, τὰ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ δευτέρου πολυέδρου κείμενα. Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΔΓΑ, ΓΑΒ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, λέγω ὅτι καὶ τὰ ἀμοιϐαίως ὅμοια αὐτοῖς δγα, γαϐ θέλουσιν ὡσαύτως κεῖσθαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

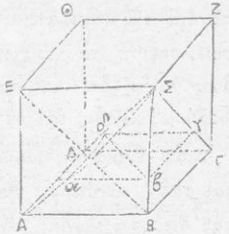
Διότι, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν τετραέδρων ΣΓΑΔ καὶ σγαδ, ΣΑΒΓ καὶ σαϐγ, αἱ δίεδροι γωνίαι ΣΓΑΔ, ΣΓΑΒ εἶναι ἀμοιϐαίως ἴσαι μὲ τὰς διέδρους γωνίας σγαδ, σγαϐ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ΣΓΑΔ, ΣΓΑΒ ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων αὐτοῖς σγαδ, σγαϐ θέλει εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, ἐπομένως αἱ ἕδραι γαδ, γαϐ τῶν τετραέδρων σγαδ, σγαϐ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἄρα τὰ πολύγωνα ΔΓΒΑ, δγϐα εἶναι ὅμοια, ὡς συντιθέμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ ἕδραι, ληφθεῖσαι ἀνὰ δύο, εἶναι πολύγωνα ὅμοια. Λοιπὸν τὰ πολύεδρα, τὰ ἀποτελούμενα ἐκ τῶν ὁμοίων καὶ ὁμοίως διατεταγμένων τετραέδρων, ἔχουσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ὁμοίας, ἑκάστην ἑκάστῃ.

2ον. Βλέπομεν πρὸς τούτοις ὅτι ἡ δίεδρος γωνία ΣΑ, ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν **ΓΣΑΔ, ΓΣΑΒ**, εἶναι ἴση μὲ τὴν δίεδρον γωνίαν σα, ἥτις ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν διέδρων γωνιῶν γσαδ, γσαϐ, τῶν ἀμοιϐαίως ἴσων μὲ τὰς ΓΣΑΔ, ΓΣΑΒ. Καὶ ἐν γένει δύο ὁμόλογοι δίεδροι γωνίαι τῶν δύο πολυέδρων εἶναι ἴσαι, ὡς οὖσαι ἀθροίσματα ὁμολόγων διέδρων γωνιῶν ὁμοίων τετραέδρων. Ἕπεται λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι δύο ὁμόλογοι στερεαὶ γωνίαι Α καὶ α εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουσι τὰς ἐπιπέδους αὐτῶν γωνίας ἴσας, ἑκάστην ἑκάστῃ, ὁμοίως κειμένας, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων ἐπιπέδων γωνιῶν σχηματιζομένας διέδρους γωνίας ἴσας. Λοιπὸν δύο πολύεδρα συντεθέμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τετραέδρων ὁμοίων καὶ ὁμοίως διατεταγμένων ἔχουσι καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν στερεὰς γωνίας ἴσας. Λοιπὸν εἶναι ὅμοια.

Σχόλιον. Ἐπὶ τοῦ προαποδειχθέντος θεωρήματος στηριζόμενοι δυνάμεθα εὐκόλως νὰ κατασκευάσωμεν πολύεδρον ὅμοιον μὲ δεδομένον.

Ἔστω π. χ. ΑΒΓΔΘΕΣΖ δεδομένον τι πολύεδρον. Ἐὰν ἀποσυνθέσωμεν αὐτὸ εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας ΣΑΒΔ, ΣΒΔΓ, ΣΑΔΕ, ...

ἐχούσας κοινὴν κορυφὴν μίαν τῶν κορυφῶν Σ τοῦ πολυέδρου, καὶ λάβωμεν ἐπὶ τῶν κόψεων ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, ΣΔ,.... τῶν διερχομένων διὰ τοῦ σημείου Σ, τὰ σημεῖα α, β, γ, δ, ... οὕτως, ὥστε ὁ λόγος τῶνδύο μερῶν, εἰς ἃ ἑκάστη κόψις διαιρεῖται, νὰ ἦναι ὁ αὐτὸς δι' ὅλας τὰς κόψεις, ἤτοι $\frac{\Sigma\alpha}{\alpha A}=\frac{\Sigma\beta}{\beta B}=\frac{\Sigma\gamma}{\gamma\Gamma}=\dots$, τὰ ἐκ τῆς ἑνώσεως τῶν σημείων α, β, γ, δ, ... προκύπτοντα τετράεδρα Σβδγ, Σαδβ, ... θέλουσιν εἶναι ἀμοιβαίως ὅμοια μὲ τὰ τετράεδρα ΣΒΔΓ, ΣΑΔΒ, ... (πρότ. 26) καὶ ὁμοίως κείμενα. Τὸ ἄθροισμά των λοιπὸν θέλει ἀποτελέσει δεύτερόν τι πολύεδρον, ὅπερ κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα, θέλει εἶναι ὅμοιον τῷ πρώτῳ.

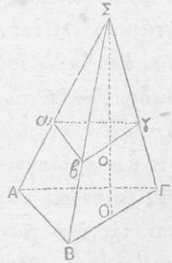


Δυνάμεθα μετὰ ταῦτα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν σχετικὴν ὡς πρὸς τὸ πρῶτον θέσιν τοῦ δευτέρου τούτου πολυέδρου χωρὶς ἡ πρὸς ἄλληλα ὁμοιότης αὐτῶν νὰ μεταβληθῇ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 30. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὅμοια τετράεδρα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς οἱ κύβοι δύο ὁμολόγων κόψεων.

Ἐπειδὴ τὰ τετράεδρα εἶναι ὅμοια, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν τὸ μικρότερον ἐντὸς τοῦ μεγαλειτέρου οὕτως, ὥστε αἱ ἴσαι στερεαὶ γωνίαι Σ, σ νὰ ταὐτισθῶσι, καὶ τότε αἱ βάσεις αὐτῶν ΑΒΓ, αβγ θέλουσιν εἶναι παράλληλοι· διότι αἱ κόψεις ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ διαιροῦνται εἰς τὰ σημεῖα α, β, γ, εἰς δύο μέρη, ἔχοντα πρὸς ἄλληλα σταθερόν τινα λόγον.



Ἔστω πρὸς τούτοις ΣΟ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως ΑΒΓ.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ εἶναι ὅμοια, θέλομεν ἔχει

$$AB\Gamma : \alpha\beta\gamma = \overline{AB}^2 : \overline{\alpha\beta}^2. \qquad (1)$$

Ἀλλ'
$$AB : \alpha\beta = \Sigma A : \Sigma\alpha,$$
καὶ
$$\Sigma A : \Sigma\alpha = \Sigma O : \Sigma o.$$

Ἄρα, ἕνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου ΣΑ : Σα,

$$\Sigma O : \Sigma o = AB : \alpha\beta, \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὁμοταγεῖς ὅρους τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) καὶ διαιροῦντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου λόγου διὰ 3, θέλομεν ἔχει τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν

$$\mathrm{AB\Gamma}\times\frac{\Sigma\mathrm{O}}{3} : \alpha\beta\gamma\times\frac{\Sigma o}{3} = \overline{\mathrm{AB}}^3 : \overline{\alpha\beta}^3.$$

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $\mathrm{AB\Gamma}\times\frac{\Sigma\mathrm{O}}{3}$ μετρεῖ τὸν ὄγκον τοῦ τετραέδρου ΣΑΒΓ, καὶ τὸ $\alpha\beta\gamma\times\frac{\Sigma o}{3}$ τὸν τοῦ ὁμοίου αὐτῷ Σαβγ. Λοιπὸν τὰ ὅμοια τετράεδρα ΣΑΒΓ, Σαβγ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς οἱ κύβοι δύο ὁμολόγων κόψεων ΑΒ καὶ αβ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 31. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὅμοια πολύεδρα Π καὶ π εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς οἱ κύβοι δύο ὁμολόγων κόψεων.

Γνωρίζομεν ὅτι δύο ὅμοια πολύεδρα ἀποσυντίθενται εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ὁμοίων τετραέδρων.

Ἔστωσαν λοιπὸν $T, T', T'', \ldots$ τὰ τὸ πολύεδρον Π ἀποτελοῦντα τετράεδρα, καὶ $\tau, \tau', \tau'', \ldots$ τὰ τὸ ὅμοιον αὐτῷ π σχηματίζοντα.

Ἔστωσαν πρὸς τούτοις $A, A', A'' \ldots$ αἱ κόψεις τῶν τετραέδρων $T, T', T'', \ldots$, καὶ $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν εἰς τὰ τετράεδρα $\tau, \tau', \tau'', \ldots$. Κατὰ τὰ προαποδειχθέντα θέλομεν ἔχει τὰς ἀναλογίας

$$T : \tau = A^3 : \alpha^3, \qquad (1)$$

$$T' : \tau' = A'^3 : \alpha'^3, \qquad (2)$$

$$T'' : \tau'' = A''^3 : \alpha''^3, \qquad (3)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad (.)$$

καὶ ἐπειδὴ αἱ ὁμόλογοι τῶν ὁμοίων πολυέδρων εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, ἔχομεν τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων

$$A : \alpha = A' : \alpha' : A'' : \alpha'' = \ldots.$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα κατὰ γνωστὸν ἀριθμητικὸν θεώρημα τὴν ἑξῆς

$$A^3 : \alpha^3 = A'^3 : \alpha'^3 = A''^3 : \alpha''^3 = \ldots.$$

Οἱ δεύτεροι λοιπὸν λόγοι τῶν ἀναλογιῶν (1), (2), (3), ... εἶναι ἴσοι, Ἄρα καὶ οἱ πρῶτοι θέλουσιν εἶναι ἴσοι, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἑξῆς σειρὰν τῶν ἴσων λόγων

$$T : \tau = T' : \tau' = T'' : \tau'' = \ldots.$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα τὴν ἀναλογίαν

$$T + T' + T'' + \ldots = \tau + \tau' + \tau'' + \ldots = T : \tau = A^3 : \alpha^3.$$

Ἀλλὰ $T + T' + T'' + \ldots =$ πολύεδρον Π, καὶ $\tau + \tau' + \tau'' + \ldots =$ πολύεδρον π.

Ἄρα $$\Pi : \pi = A^3 : \alpha^3.$$

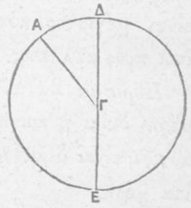
Λοιπὸν δύο ὅμοια πολύεδρα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς οἱ κύβοι δύο ὁμολόγων κόψεων Α καὶ α.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

1. *Σφαῖρα* ὀνομάζεται τὸ στερεὸν, τὸ περατούμενον ὑπὸ κυρτῆς τινος ἐπιφανείας, ἧς ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπό τινος ἐσωτερικοῦ σημείου, καλουμένου *κέντρου*.



Δύναταί τις νὰ φαντασθῇ ὅτι ἡ σφαῖρα παράγεται ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ ἡμικυκλίου ΔΑΕ περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ΔΕ. Διότι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς παραγομένης ἐπιφανείας ἐκ τῆς περιστροφικῆς ταύτης κινήσεως τῆς ἡμιπεριφερείας ΔΑΕ ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ.

Ὁ ἔχων διάμετρον τὴν ΔΕ κύκλος καλεῖται *μέγιστος*.

2. *Ἀκτὶς τῆς σφαίρας* λέγεται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου εἴς τι σημεῖον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἀγομένη εὐθεῖα. *Διάμετρος* δὲ ἢ *ἄξων* τῆς σφαίρας λέγεται ἡ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη καὶ ἑκατέρωθεν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς περατουμένη εὐθεῖα.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς σφαίρας ὅλαι αἱ ἀκτῖνες αὐτῆς εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ διάμετροι ἴσαι καὶ διπλάσιαι τῶν ἀκτίνων.

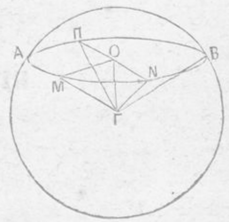
3. Ἐπίπεδόν τι λέγεται *ἐφαπτόμενον* σφαίρας τινὸς, ὅταν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἔχῃ.

4. Δύο σφαῖραι λέγονται *ἐφαπτόμεναι*, ὅταν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν ἔχωσι.

Τὸ κοινὸν τοῦτο σημεῖον καλεῖται σημεῖον τῆς *ἐπαφῆς*.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶσα τομὴ σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς γενομένη εἶναι κύκλος.



Ἔστω Γ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ ΑΜΒ ἡ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου γενομένη τομή. Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Γ καταβιβάσωμεν τὴν ΓΟ κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΜΒ, καὶ ἄξωμεν καὶ τὰς εὐθείας ΓΜ, ΓΝ, ΓΒ εἰς διάφορα σημεῖα τῆς περατούσης τὴν τομὴν καμπύλης ΑΜΒ, αἱ εὐθεῖαι αὗται, ὡς ἀκτῖνες τῆς σφαίρας, θέλουσιν εἶναι ὡς πρὸς τὴν κάθετον ΓΟ ἴσαι πλάγιαι. Θέλουσι λοιπὸν ἀπέχει ἰσάκις τοῦ ποδὸς Ο τῆς καθέτου ΓΟ (πρότ. 6, Ε΄). Αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν ΟΜ, ΟΝ, ΟΒ εἶναι ἴσαι. Πᾶν λοιπὸν σημεῖον Μ, Ν, Β, . . τῆς καμπύλης ΑΜΒ ἀπέχει ἰσάκις τοῦ σημείου Ο. Λοιπὸν ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι κύκλος ἔχων κέντρον τὸν πόδα Ο τῆς καθέτου ΓΟ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα 1. Ἐὰν τὸ τὴν τομὴν παράγον ἐπίπεδον διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἡ ἀκτὶς τῆς παραγομένης κυκλικῆς τομῆς θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν τῆς σφαίρας. Ἡ τομὴ λοιπὸν θέλει εἶναι μέγιστος κύκλος (ὁρ. 1). Λοιπὸν ὅλοι οἱ μέγιστοι κύκλοι εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους.

Πόρισμα 2. Δύο μέγιστοι κύκλοι τέμνονται πάντοτε εἰς δύο ἴσα μέρη· διότι ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ, ἐπειδὴ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῶν, εἶναι διάμετρος, καὶ πᾶσα διάμετρος διαιρεῖ τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη.

Πόρισμα 3. Πᾶς μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς εἰς δύο ἴσα μέρη. Διότι ἐάν, ἀφοῦ πρῶτον χωρίσωμεν τὰ δύο μέρη, ἐπιθέσωμεν αὐτὰ οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωσι τὴν αὐτὴν κοινὴν βάσιν καὶ τὴν κυρτότητα αὐτῶν ἐστραμμένην πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν θέλουσι ταὐτισθῆ, διότι ἄλλως ἤθελον ὑπάρχει ἐπὶ τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν σημεῖα ἀνισάκις ἀπέχοντα τοῦ κέντρου, ὅπερ ἀδύνατον.

Πόρισμα 4. Ἡ τὸ κέντρον μικροῦ τινος κύκλου καὶ τὸ τῆς σφαίρας περιέχουσα εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μικροῦ τούτου κύκλου.

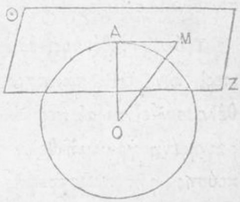
Πόρισμα 5. Ἐκ τῶν μικρῶν κύκλων οἱ μᾶλλον ἀπέχοντες τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας εἶναι μικρότεροι. Διότι ἡ πλευρὰ ΟΠ τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΟΠ, οὗτινος ἡ ὑποτείνουσα ΓΠ εἶναι σταθερά, ἐλαττοῦται αὐξανομένης τῆς ἑτέρας ΓΟ, καὶ ἀντιστρόφως.

Πόρισμα 6. Διὰ δύο ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας τινὸς δεδομένων σημείων διέρχεται πάντοτε τόξον μεγίστου κύκλου καὶ ἑνὸς μόνου. Διότι, ἐὰν διὰ τῶν δύο δεδομένων σημείων καὶ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρα διέλθῃ ἐπίπεδον, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ἑνόνον τὰ δύο ταῦτα σημεῖα τόξον θέλει εἶναι τόξον μεγίστου κύκλου. Ἀλλὰ διὰ τριῶν σημείων μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων ἓν μόνον ἐπίπεδον διέρχεται. Ἄρα ἑνὸς μόνου μεγίστου κύκλου τόξον διὰ τῶν δύο δεδομένων σημείων διέρχεται. Ἐξαιρεῖται ἡ περίπτωσις, καθ' ἣν τὰ δύο δοθέντα σημεῖα εἶναι τὰ ἄκρα διαμέτρου τινός· διότι τότε τὰ δύο ταῦτα σημεῖα καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἤθελον κεῖσθαι ἐπ' εὐθείας, καὶ διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἄπειρα ἐπίπεδα διέρχονται.

Πόρισμα 7. Τρία σημεῖα, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας τινὸς κείμενα, προσδιορίζουσι τὴν θέσιν κύκλου τινὸς τῆς σφαίρας ταύτης.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶν ἐπίπεδον, κάθετον εἰς τὸ ἄκρον ἀκτῖνός τινος τῆς σφαίρας, εἶναι ἐφαπτόμενον εἰς ταύτην.



Ἔστω ΘΑΖ ἐπίπεδόν τι κάθετον εἰς τὸ ἄκρον Α τῆς ἀκτῖνος ΟΑ. Λέγω ὅτι μόνον τὸ σημεῖον Α ἔχει κοινὸν μετὰ τῆς σφαίρας, ἤ, ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὅτι ἐφάπτεται αὐτῆς εἰς μόνον τὸ σημεῖον Α.

Διότι, ἐὰν ἑνώσωμεν ἓν ὁποιονδήποτε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου τούτου μετὰ τῶν σημείων Ο καὶ Α διὰ τῶν εὐθειῶν ΟΜ, ΑΜ, ἡ γωνία ΟΑΜ τοῦ προκύπτοντος τριγώνου ΜΟΑ θέλει εἶναι ὀρθὴ (πρότ. 3, Ε'), ἐπομένως ΟΜ $>$ ΟΑ. Τὸ σημεῖον λοιπὸν Μ, ληφθὲν κατ' ἀρέσκειαν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΘΑΖ, κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας. Ἄρα ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον Α τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἔχει κοινὸν μετὰ τῆς σφαίρας. Λοιπὸν ἐφάπτεται ταύτης εἰς τὸ σημεῖον Α.

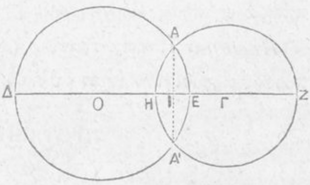
Ἀντιστρόφως, πᾶν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ΘΑΜ εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος, τῆς εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς ἀγομένης.

Διότι, ἐὰν ΟΑ δὲν ἦναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΘΑΖ, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου καταβιβαζομένη κάθετος θέλει εἶναι μικροτέρα τῆς πλαγίας ΟΑ, ἑπομένως ὁ ποὺς τῆς καθέτου ταύτης θέλει κεῖσθαι ἐντὸς τῆς σφαίρας. Τὸ ἐπίπεδον λοιπὸν ΘΑΖ, διὰ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ταύτης διερχόμενον, τέμνει ἀναγκαίως τὴν σφαῖραν, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

Πόρισμα. Ἐξ ἑνὸς σημείου, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας τινὸς κειμένου, ἓν μόνον ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ἄγεται (πρότ. 5, Ε′).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η ἀμοιβαία δύο σφαιρῶν τομὴ εἶναι κύκλος, οὗτινος τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τῆς ἑνούσης τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν εὐθείας, τὸ δ' ἐπίπεδον αὐτοῦ εἶναι κάθετον ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας.



Ἔστωσαν Ο καὶ Γ τὰ κέντρα τῶν δύο τεμνομένων σφαιρῶν, καὶ διὰ τῆς εὐθείας ΟΓ ἂς φαντασθῶμεν ἐπίπεδόν τι. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο θέλει τμήσει τὰς δύο σφαίρας κατὰ δύο μεγίστους κύκλους ΑΔΑ′, ΑΖΑ′ (ὅρ. 1), ὧν τὰ σημεῖα Α καὶ Α′ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς θέλουσιν εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΟΓ (πρότ. 11, Β′).

Τούτου τεθέντος, ἐὰν περιστραφῶσι τὰ δύο ἡμικύκλια ΔΑΕ, ΖΑΗ περὶ τὴν ΟΓ, τὰ παραγόμενα ἐκ τῆς περιστροφῆς ταύτης στερεὰ θέλουσιν εἶναι αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος σφαῖραι, ἡ δὲ ὑπὸ τοῦ σημείου Α παραγομένη γραμμὴ θέλει εἶναι ἡ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς. Ἀλλὰ διαρκούσης τῆς περιστροφῆς ἡ εὐθεῖα ΑΙ δὲν μεταβάλλει μέγεθος, καὶ εἶναι πάντοτε κάθετος ἐπὶ τῆς ΟΓ. Λοιπὸν ἡ κοινὴ τῶν δύο σφαιρῶν τομὴ εἶναι κύκλος, ἔχων κέντρον τὸ σημεῖον Ι, ἀκτῖνα τὴν ΑΙ, καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς ΟΓ (πρότ. 5, πόρ. Ε′).

Παρατήρησις. Ἐὰν οἱ δύο κύκλοι ΔΑΑ′, ΖΑΑ′ ἦναι ἐξωτερικοὶ ἢ ἐσωτερικοί, ἐφαπτόμενοι ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς, ἢ τέμνωνται, αἱ ἐκ τῆς περιστροφῆς αὐτῶν περὶ τὴν εὐθεῖαν τῶν κέντρων ΟΓ παραγόμεναι σφαῖραι θέλουσιν εἶναι ἐξωτερικαὶ ἢ ἐσωτερικαί, ἐφαπτόμεναι ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς, ἢ θέλουσι τέμνεσθαι.

Αἱ σχέσεις λοιπόν, αἱ ὑπάρχουσαι μεταξὺ τῶν ἀκτίνων τῶν σφαιρῶν καὶ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων αὐτῶν δι' ἑκάστην τῶν θέσεων τούτων, εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ τὰς σχέσεις, τὰς ὑπαρχούσας μεταξὺ τῶν ἀκτίνων καὶ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων τῶν παραγόντων αὐτὰς κύκλων.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

1. *Τρίγωνον σφαιρικὸν* καλεῖται τὸ μεταξὺ τριῶν τόξων μεγίστων κύκλων περιεχόμενον μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Τὰ τόξα ταῦτα, ἅτινα *πλευραὶ* τοῦ τριγώνου καλοῦνται, ὑποτίθενται πάντοτε μικρότερα ἡμιπεριφερείας. ΑΓ, ΑΒ, ΒΓ εἶναι πλευραί.

Γωνίαι τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι αἱ δίεδροι γωνίαι, αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων, ἐφ' ὧν τὰ τόξα κεῖνται. Γωνίαι εἶναι ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ.

2. Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον λέγεται ὀρθογώνιον, ἰσοσκελὲς, ἰσόπλευρον εἰς τὰς αὐτὰς περιστάσεις, εἰς ἃς καὶ τὸ εὐθύγραμμον.

3. *Σφαιρικὸν πολύγωνον* καλεῖται τὸ μεταξὺ πολλῶν τόξων μεγίστων κύκλων περιεχόμενον μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Ἐν τοῖς ἐπομένοις δὲν θέλει γείνει λόγος εἰμὴ μόνον περὶ τῶν κυρτῶν σφαιρικῶν πολυγώνων. *Κυρτὸν* δὲ σφαιρικὸν πολύγωνον ὀνομάζεται τὸ κείμενον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος μιᾶς ὁποιασδήποτε πλευρᾶς αὐτοῦ, προεκβαλλομένης.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Μία ὁποιαδήποτε πλευρὰ σφαιρικοῦ τινος τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

Ἔστω Ο τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Ἐὰν ἄξωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, τὰ ἐπίπεδα ΑΟΒ, ΑΟΓ, ΓΟΒ τῶν εὐθειῶν ΑΟ καὶ ΟΒ, ΑΟ καὶ ΟΓ, ΟΒ καὶ ΟΓ θέλουσι σχηματίσει εἰς τὸ σημεῖον Ο στερεάν τινα γωνίαν, ἧς αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΟΒ, ΑΟΓ, ΒΟΓ θέλουσιν ἔχει διὰ μέτρον τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἀλλ' ἀπεδείχθη ὅτι ἑκάστη τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν σχηματιζουσῶν στερεάν τινα τρίεδρον γωνίαν, εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων (πρότ. 37, Ε'). Ἄρα μία ὁποιαδήποτε πλευρὰ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πλευρῶν παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικρότερον περιφερείας μεγίστου κύκλου.

Ἂς προκβάλωμεν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ μέχρις οὗ συναπαντηθῶσιν ἐκ νέου εἰς τὸ σημεῖον Δ. Τὰ τόξα ΑΒΔ, ΑΓΔ θέλουσιν εἶναι ἡμιπεριφέρειαι (πρότ. 1, πόρ. 2). Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, ἤτοι

$$ΒΓ < ΒΔ + ΓΔ.$$

Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης ΑΒ+ΑΓ, θέλομεν ἔχει

$$ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ < ΑΒΔ + ΑΓΔ.$$

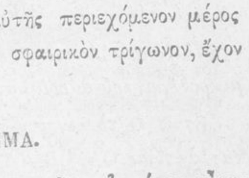
Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου κτλ.

Παρατήρησις. Πρὸς σχηματισμὸν σφαιρικοῦ τριγώνου μὲ τρεῖς δεδομένας πλευρὰς πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ ἦναι μικρότερον περιφερείας, καὶ ἡ μεγαλειτέρα αὐτῶν νὰ ἦναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Διότι αὗται εἶναι αἱ ἀναγκαῖαι καὶ ἐπαρκεῖς συνθῆκαι πρὸς σχηματισμὸν στερεᾶς τριέδρου γωνίας μὲ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας, ἐχούσας διὰ μέτρον τὰς τρεῖς δεδομένας πλευράς, καὶ ἐὰν τεθῇ ἡ κορυφὴ τῆς στερεᾶς ταύτης γωνίας εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, τὸ μεταξὺ τῶν ἑδρῶν αὐτῆς περιεχόμενον μέρος τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς θέλει εἶναι προφανῶς σφαιρικὸν τρίγωνον, ἔχον πλευρὰς τὰς τρεῖς δεδομένας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν παντὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερον περιφερείας μεγίστου κύκλου.

Ἔστω ΑΒΓΔΕ σφαιρικόν τι πολύγωνον καὶ Ο τὸ κέντρον τῆς εἰς ἣν ἀνήκει σφαίρας. Ἐὰν ἄξωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ θέλομεν σχηματίσει οὕτω κυρτήν τινα στερεὰν γωνίαν, ἧς αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ, ... θέλουσιν ἔχει διὰ μέτρον τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ... Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν σχηματιζουσῶν κυρτήν τινα στερεὰν γωνίαν, εἶναι πάντοτε μικρότερον 4 ὀρθῶν. Λοιπὸν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, ..., τῶν μετρούντων τὰς ἐπιπέδους γωνίας τῆς στερεᾶς γωνίας, θέλει εἶναι μικρότερον περιφερείας μεγίστου κύκλου.



Σχόλιον. Τὴν πρότασιν ταύτην ἠδύνατό τις ν' ἀποδείξῃ τρέπων τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον εἰς σφαιρικὸν τρίγωνον. Τῷ ὄντι, ἐὰν προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΔΓ μέχρις οὗ συναπαντηθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Θ, καὶ αἱ πλευραὶ ΑΕ, ΓΔ μέχρις οὗ συναπαντηθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Ζ, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ οὕτω προκύπτοντος σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΖΘ εἶναι μικρότερον περιφερείας μεγίστου κύκλου καὶ μεγαλείτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ· διότι ΒΓ $<$ ΓΘ $+$ ΒΘ καὶ ΕΔ $<$ ΕΖ $+$ ΖΔ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

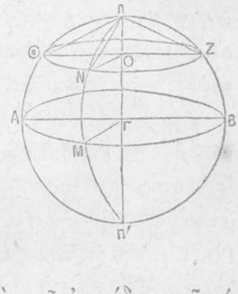
1. *Πόλος* κύκλου τινὸς τῆς σφαίρας καλεῖται τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου, τῆς ἀγομένης καθέτως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου τούτου.

2. Πᾶς κύκλος τῆς σφαίρας ἔχει δύο πόλους.

3. Ὅλοι οἱ κύκλοι, ὧν τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς πόλους (πρότ. 14, Ε').

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ΘΝΖ κύκλου τινὸς τῆς σφαίρας ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπὸ τοῦ πόλου Π τοῦ κύκλου τούτου.



Διότι αἱ εὐθεῖαι ΠΘ, ΠΝ, ΠΖ, . . . εἶναι ἴσαι, ὡς πλάγιαι ἰσάκις ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς Ο τῆς καθέτου ΓΠ (πρότ. 1, Ζ', καὶ πρότ. 6, Ε').

Πόρισμα 1. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι τὰ τόξα ΠΘ, ΠΝ, ΠΖ, . . . τῶν μεγίστων κύκλων εἶναι ἴσα, ὡς ὑπὸ ἴσων χορδῶν ΠΘ, ΠΝ, ΠΖ, . . . ὑποτεινόμενα. Πρὸς τούτοις τὰ ἐπίπεδα τῶν τόξων ΠΘ, ΠΝ, ΠΖ, . . ., ἐπειδὴ διέρχονται διὰ τῆς καθέτου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου ΘΝΖ εὐθείας ΠΟ, εἶναι κάθετα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

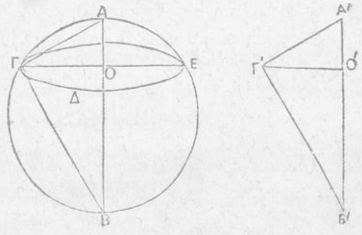
Πόρισμα 2. Ἐὰν διὰ τοῦ κέντρου Γ τῆς σφαίρας διέλθῃ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΘΝΖ, ὁ ἐκ τῆς τομῆς ταύτης παραγόμενος μέγιστος κύκλος ΑΜΒ θέλει ἔχει τὸν αὐτὸν πόλον Π, καὶ τὰ τόξα ΠΜ, ΠΑ, ΠΒ θέλουσιν εἶναι *τέταρτα* περιφερείας, ἢ *τεταρτημόρια*, ὡς μετροῦντα τὰς κεντρικὰς ὀρθὰς γωνίας ΠΓΜ, ΠΓΑ, ΠΓΒ.

Σχόλιον. Διὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν πόλων δύναταί τις νὰ χαράξῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τόξα κύκλων μετὰ τῆς αὐτῆς εὐκολίας, μεθ' ἧς καὶ ἐπὶ ἐπιπέδου τινὸς ἐπιφανείας. Πρὸς τοῦτο μεταχειριζόμεθα διαβήτην τινὰ, σφαιρικὸν καλούμενον, ὡς ἔχοντα τὰ σκέλη αὐτοῦ κυρτὰ εἰς τρόπον ὥστε τὰ ἄκρα αὐτοῦ νὰ δύνανται νὰ τεθῶσι συγχρόνως ἐπὶ δύο ὁποιωνδήποτε σημείων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν θέσωμεν τὸ ἓν τῶν ἄκρων τοῦ διαβήτου τούτου ἐπὶ τοῦ σημείου Π καὶ τὸ ἕτερον ἐπὶ τοῦ σημείου Θ, καὶ στρέψωμεν αὐτὸν περὶ τὸ σημεῖον Π, τὸ ἄκρον αὐτοῦ Θ θέλει διαγράψει τὴν περιφέρειαν ΘΝΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Νὰ εὑρεθῇ δι' ἐπιπέδου κατασκευῆς ἡ ἀκτὶς δεδομένης σφαίρας.



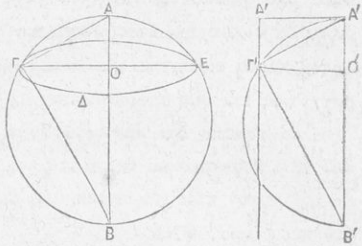
Ἐκ τινος σημείου Α τῆς σφαίρας, ὡς πόλου, καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν ΑΓ γράφομεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς δεδομένης σφαίρας περιφέρειαν κύκλου ΓΔΕ, λαμβάνομεν ἀκολούθως ἐπὶ τῆς περιφερείας ταύτης τρία κατ' ἀρέσκειαν σημεῖα Γ, Δ, Ε, ὧν μετροῦμεν διὰ τοῦ διαβήτου τὰς εὐθυγράμμους ἀποστάσεις ΓΔ, ΓΕ, ΔΕ, καὶ κατασκευάζομεν ἐπί τινος ἐπιπέδου τρίγωνον, ἔχον τὰς τρεῖς ταύτας ἀποστάσεις ὡς πλευράς. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον τοῦτο κύκλου θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν τοῦ κύκλου ΓΔΕ τῆς δεδομένης σφαίρας.

Τούτου τεθέντος, ἂς φαντασθῶμεν μέγιστον κύκλον ΑΓΒΕ διερχόμενον διὰ τῆς διαμέτρου ΑΒ τῆς σφαίρας, καὶ τὰς εὐθείας ΓΑ, ΓΒ καὶ ΓΟ. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΑΟ γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΓΑ καὶ τὴν πλευρὰν ΓΟ. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ κατασκευάσωμεν ἐπί τινος ἐπιπέδου τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον Γ'Α'Ο' ἴσον μὲ τὸ ΑΓΟ. Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΓΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΑ, ἐὰν ἄξωμεν τὴν Γ'Β' κάθετον ἐπὶ τῆς Α'Γ', ἡ εὐθεῖα Α'Β' θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒ καὶ θέλει παριστᾷ τὴν ζητουμένην διάμετρον τῆς δεδομένης σφαίρας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Νὰ γραφῇ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δεδομένης σφαίρας περιφέρεια κύκλου δεδομένης ἀκτῖνος.

Εὑρίσκομεν ἐν πρώτοις διὰ τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος τὴν διάμετρον Α΄Β΄ τῆς δεδομένης σφαίρας, ἐπὶ τῆς Α΄Β΄ γράφομεν τὴν ἡμιπεριφέρειαν Α΄Γ΄Β΄, καὶ ἄγομεν εἰς τὸ σημεῖον Α΄ τὴν κάθετον Α΄Δ΄, ἐφ᾽ ἧς λαμβάνομεν Α΄Δ΄=μὲ τὴν δεδομένην ἀκτῖνα. Ἐκ τοῦ σημείου Δ΄ ἄγομεν τὴν Δ΄Γ΄ παράλληλον τῇ Α΄Β΄, καὶ

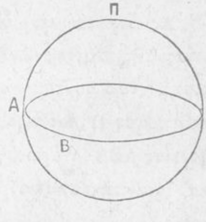


ἑνόνομεν Α΄Γ΄, Γ΄Β΄. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς δεδομένης σφαίρας γραφομένη ἔκ τινος σημείου Α, ὡς πόλου, καὶ μὲ ἀκτῖνα Α΄Γ΄ ἢ Β΄Γ΄ περιφέρεια θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη (*).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Νὰ γραφῇ ἐπὶ δεδομένης σφαίρας μέγιστος κύκλος διερχόμενος διὰ δύο δεδομένων σημείων Α καὶ Β.

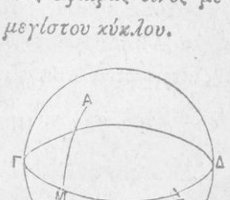
Ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β, ὡς πόλων, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν χορδὴν τοῦ τεταρτημορίου γράφομεν δύο τόξα μεγίστων κύκλων τεμνόμενα εἴς τι σημεῖον Π. Τὸ σημεῖον Π θέλει εἶναι ὁ πόλος τοῦ διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β διερχομένου μεγίστου κύκλου (πρότ. 7, πόρ.), ἑπομένως ἡ ἐκ τοῦ σημείου Π, ὡς πόλου, καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα γραφομένη περιφέρεια θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Νὰ διέλθῃ ἔκ τινος σημείου Α τῆς ἐπιφανείας σφαίρας τινὸς μέγιστος κύκλος, κάθετος ἐπὶ ἑτέρου δεδομένου μεγίστου κύκλου.

Ἐκ τοῦ σημείου Α, ὡς πόλου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν χορδὴν τοῦ τεταρτημορίου γράφομεν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου, ἥτις θέλει τμήσει εἴς τι σημεῖον Σ τὸν δεδομένον μέγιστον κύκλον ΓΜΔ. Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Σ, ὡς πόλου, καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα γράψωμεν τὸν μέγιστον κύκλον ΑΜ, οὗτος θέλει



(*) Διὰ τῆς λέξεως ἀκτῖνος ἐννοοῦμεν ἐνταῦθα τὴν τῶν δύο ἄκρων τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου ἀπόστασιν, καὶ τοῦτο συντομίας ἕνεκα.

εἶναι προφανῶς κάθετος ἐπὶ τοῦ δεδομένου ΔΜΓ. Διότι, τοῦ σημείου Σ ὄντος πόλου τοῦ μεγίστου κύκλου ΑΜ, πᾶς μέγιστος κύκλος ΓΜΣ, διερχόμενος διὰ τοῦ πόλου Σ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ μεγίστου κύκλου ΑΜ, καὶ ἀντιστρόφως (πρότ. 7, πόρ. 1).

Σχόλιον. Ἂν ἐπρόκειτο ν' ἀχθῇ ἔκ τινος δεδομένου σημείου Α τόξον μεγίστου κύκλου, κάθετον ἐπί τινος δεδομένου μικροῦ κύκλου, ἠθέλαμεν πρῶτον εὕρει διὰ τοῦ ὀγδόου προβλήματος τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας, καὶ διὰ τοῦ ἐννάτου τὸν πόλον Π τοῦ μικροῦ τούτου κύκλου. Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ διὰ τῶν σημείων Α καὶ Π διερχόμενος μέγιστος κύκλος θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος (πρότ. 7, πόρ. 1).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12. ΛΗΜΜΑ 1.

Ὁ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας συντομώτερος δρόμος μεταξὺ τοῦ πόλου Π κύκλου τινὸς ΑΒΔ καὶ τῶν διαφόρων σημείων τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἶναι ὁ αὐτὸς δι' ὅλα αὐτοῦ τὰ σημεῖα.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κειμένη γραμμὴ ΠΙΒ παριστᾷ τὸν συντομώτερον δρόμον μεταξὺ τοῦ πόλου Π καί τινος σημείου Β τῆς περιφερείας ΑΒΔ. Λέγω ὅτι οὗτος εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ διὰ πᾶν σημεῖον Ζ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Διότι, ἐὰν τὸ σχῆμα ΠΙΒΟ ὑποτεθῇ ἀμετάβλητον καὶ περιστραφῇ περὶ τὴν διάμετρον ΠΕ, πᾶν σημεῖον Ι τῆς γραμμῆς ΠΙΒ θέλει κεῖσθαι, διαρκούσης τῆς περιστροφῆς, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ δὲ σημεῖον Β θέλει προφανῶς διαγράψει τὸν κύκλον ΑΒΖΔ. Λοιπὸν ὁ συντομώτερος δρόμος ΠΙΒ διὰ πᾶν σημεῖον Ζ τῆς περιφερείας ΑΒΔ εἶναι ὁ αὐτός.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13. ΛΗΜΜΑ 2.

Ἔστωσαν ΑΒ, ΑΓ δύο τόξα μεγίστων κύκλων μικρότερα ἡμιπεριφερείας, καὶ ἔστω πρὸς τούτοις ΑΓ < ΑΒ. Λέγω ὅτι ὁ συντομώτερος δρόμος μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Γ εἶναι μικρότερος τοῦ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β συντομωτέρου δρόμου.

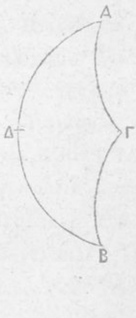
Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἐκ τοῦ σημείου Α, ὡς πόλου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ΑΓ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Αὕτη θέλει συναπαντήσει τὸ τόξον

ΑΒ εἴς τι σημεῖον Ι, ὅπερ θέλει προφανῶς κεῖσθαι μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β. Ἐὰν δ' ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γραμμὴ ΑΜΒ παριστᾷ τὴν μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β συντομωτέραν ἀπόστασιν, αὕτη θέλει συναπαντήσει τὴν περιφέρειαν ΓΙ εἴς τι σημεῖον Μ, καὶ τὸ μέρος αὐτῆς ΑΜ θέλει παριστᾷ τὸν συντομώτερον μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Μ δρόμον. Διότι, ἐὰν ὑπῆρχε βραχυτέρα τις γραμμὴ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Μ, ἡ γραμμὴ ΑΜΒ δὲν ἤθελεν εἶναι ὁ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β συντομώτερος δρόμος, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως, ἀφ' ἑτέρου δὲ, κατὰ τὸ προηγούμενον λῆμμα ὁ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Μ, Α καὶ Γ συντομώτερος δρόμος εἶναι ὁ αὐτός. Λοιπὸν ὁ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Γ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας συντομώτερος δρόμος εἶναι βραχύτερος τοῦ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ὁ μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Β, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας τινὸς κειμένων, συντομώτερος δρόμος εἶναι τὸ ἑνόνον τὰ δύο ταῦτα σημεῖα τόξον μεγίστου κύκλου ΑΒ, μικρότερον ἡμιπεριφερείας.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β συντομώτερος δρόμος διέρχηται διά τινος σημείου Γ ἐκτὸς τοῦ τόξου ΑΒ κειμένου. Ἐὰν ἄξωμεν τὰ τῶν μεγίστων κύκλων τόξα ΑΓ, ΒΓ, καὶ λάβωμεν ΑΔ=ΑΓ, θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 4 προτάσει



$$\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma B}$$

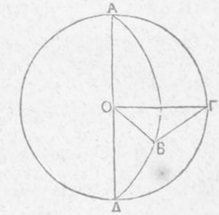
Ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἀνωτέρω ἀνισότητος ΑΔ καὶ ἀπὸ τοῦ δευτέρου ΑΓ, ὅπερ ὑπετέθη ἴσον μὲ τὸ τόξον ΑΔ, θέλομεν ἔχει τὴν ἑξῆς

$$\mathrm{B\Delta} < \mathrm{B\Gamma}.$$

Ἀλλὰ, κατὰ τὸ λῆμμα 1, οἱ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Δ, Α καὶ Γ συντομώτεροι δρόμοι εἶναι οἱ αὐτοί. Λοιπὸν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Γ ἀνήκει εἰς τὴν μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β συντομωτέραν γραμμὴν, ἔπρεπεν ἡ μεταξὺ τῶν σημείων Β καὶ Γ συντομωτέρα γραμμὴ νὰ ἦναι βραχυτέρα τῆς μεταξὺ τῶν σημείων Β καὶ Δ, ὅπερ κατὰ τὸ λῆμμα 2 εἶναι ἄτοπον, διότι τὸ τόξον ΒΓ εἶναι μεγαλείτερον τοῦ τόξου ΒΔ. Λοιπὸν οὐδὲν σημεῖον τῆς μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β βραχυτέρας ἀποστάσεως δύναται νὰ κῆται ἐκτὸς τοῦ τόξου ΑΒ. Ἄρα τὸ τόξον ΑΒ εἶναι ἡ βραχυτέρα τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα Α καὶ Β ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐχουσῶν γραμμῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ γωνία ΒΑΓ, ἡ ὑπὸ δύο τόξων μεγίστων κύκλων σχηματιζομένη, ἔχει διὰ μέτρον τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχόμενον τόξον ΒΓ τοῦ ἐκ τοῦ σημείου Α, ὡς πόλου, γραφομένου μεγίστου κύκλου



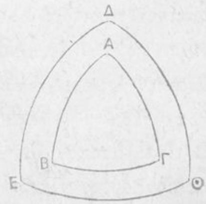
Διότι, ἐὰν ἄξωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΒ, ΟΓ, τὰ τόξα ΑΓ, ΑΒ θέλουσιν εἶναι τεταρτημόρια, ἑπομένως αἱ γωνίαι ΑΟΒ, ΑΟΓ θέλουσιν εἶναι ὀρθαί. Λοιπὸν ΒΟΓ εἶναι ἡ μετροῦσα τὴν δίεδρον γωνίαν ΒΟΑΓ ἐπίπεδος γωνία. Ἀλλ᾽ ἡ κεντρικὴ γωνία ΒΟΓ ἔχει διὰ μέτρον τὸ τόξον ΒΓ. Λοιπὸν τὸ τόξον τοῦτο μετρεῖ τὴν δίεδρον γωνίαν ΒΟΑΓ, ἥτις εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν **1** ἡ γωνία ΒΑΓ τῶν δύο τόξων ΑΒ, ΑΓ τῶν μεγίστων κύκλων.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι σφαιρικοῦ τινος τριγώνου εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τόξα τῶν μεγίστων κύκλων, τὰ ἐκ τῶν κορυφῶν αὐτῶν, ὡς πόλων, γραφόμενα καὶ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῶν περιεχόμενα. Εὐκόλως ἄρα δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας γωνίαν ἴσην μὲ δεδομένην.

Σχόλιον. Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΑΓΟ, ΒΓΝ εἶναι ἴσαι· διότι αἱ κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι τῶν ἐπιπέδων ΑΒΓ, ΟΓΝ εἶναι ἴσαι.

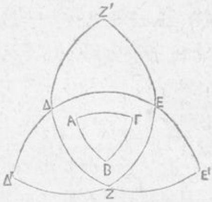
Βλέπομεν ὡσαύτως ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν ΟΓΒ, ΒΓΝ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

ΟΡΙΣΜΟΙ.



Δεδομένου σφαιρικοῦ τινος τριγώνου ΑΒΓ, ἐὰν ἐκ τῶν σημείων Α, Β, Γ, ὡς πόλων, γράψωμεν τὰ τῶν μεγίστων κύκλων τόξα ΕΘ, ΘΔ, ΔΕ, τὸ ἐκ τῶν τόξων τούτων σχηματιζόμενον σφαιρικὸν τρίγωνον ΔΕΘ καλεῖται *πολικὸν* τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ.

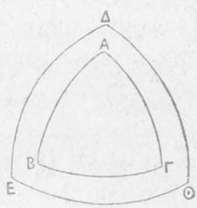
Ἡ ὁμόλογος κορυφὴ τοῦ σημείου Α προσδιορίζεται ἐκ τῆς συναντήσεως τῶν ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Γ, ὡς πόλων, γραφομένων τόξων. Τὰ τόξα ταῦτα, εἶναι ἀληθὲς, τέμνονται εἰς δύο σημεῖα Δ καὶ Ε' ἀλλὰ δὲν πρέπει νὰ λαμβάνηται εἰμὴ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς Δ, τὸ κείμενον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΒΓ, πρὸς ὃ καὶ τὸ σημεῖον Α. Ὁμοιοτρόπως προσδιορίζονται καὶ αἱ λοιπαὶ κορυφαὶ Ε καὶ Ζ.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16. ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΔΕΘ ἦναι τὸ πολικὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἀντιστρόφως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θέλει εἶναι τὸ πολικὸν τοῦ ΔΕΘ.

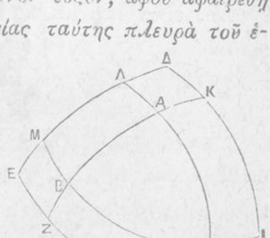
Διότι, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Α εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΕΘ, ἡ ἀπόστασις ΑΕ εἶναι τεταρτημόριον. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Γ εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΔΕ, ἡ ἀπόστασις ΓΕ εἶναι τεταρτημόριον. Ἄρα αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου Ε ἀφ᾽ ἑκατέρου τῶν σημείων Α καὶ Γ εἶναι τεταρτημόρια. Λοιπὸν τὸ σημεῖον Ε εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΑΓ, καὶ πρὸς τούτοις κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς πλευρᾶς ΑΓ, πρὸς ὃ καὶ ἡ κορυφὴ Β. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ σημεῖον Δ εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΒΓ, καὶ Θ ὁ τοῦ τόξου ΑΒ, καὶ κεῖνται ὡς πρὸς τὰ τόξα ΒΓ, ΑΒ ὅπως καὶ τὸ σημεῖον Ε ὡς πρὸς τὸ τόξον ΑΓ. Λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ πολικὸν τοῦ τριγώνου ΔΕΘ.



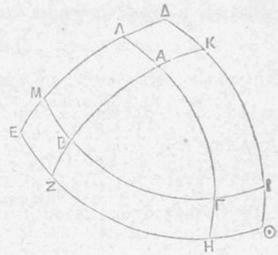
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δεδομένων δύο πολικῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΘ, ἑκάστη γωνία τοῦ ἑνὸς τούτων ἔχει διὰ μέτρον τὸ μένον τόξον, ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἡμιπεριφέρειαν ἡ ἀπέναντι τῆς γωνίας ταύτης πλευρὰ τοῦ ἑτέρου τριγώνου.

Ἄς προεκβάλωμεν, ἐὰν ἦναι ἀνάγκη τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ μέχρις οὗ συναπαντήσωσι τὴν ΕΘ εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Α εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξον ΖΗ, ἡ γωνία Α ἔχει διὰ μέτρον τὸ τόξον ΖΗ (πρότ. 15). Ἀλ-



λὰ τὰ τόξα ΕΗ, ΖΘ εἶναι τεταρτημόρια· διότι τὸ σημεῖον Ε εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΛΗ, καὶ τὸ σημεῖον Θ ὁ πόλος τοῦ τόξου ΚΖ. Ἄρα τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ΕΗ + ΘΖ εἶναι ἴσον μὲ μίαν ἡμιπεριφέρειαν. Ἀλλ' ΕΗ + ΘΖ = ΕΗ + ΗΘ + ΗΖ = ΕΘ + ΖΗ. Ἄρα



$$ΖΗ = ΕΗ + ΘΖ - ΕΘ = \frac{1}{2}\,περιφ. - ΕΘ,$$

ἤτοι τὸ τόξον ΖΗ, τὸ τὴν γωνίαν Α μετροῦν, εἶναι ἴσον μὲ μίαν ἡμιπεριφέρειαν, ἠλαττωμένην κατὰ τὴν πλευρὰν ΕΘ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι ἡ γωνία Β ἔχει μέτρον $\frac{1}{2}$ *περιφ.* — ΔΘ, καὶ ἡ γωνία Γ $\frac{1}{2}$ *περιφ.* — ΔΕ.

Ἐφαρμόζοντες κατὰ γράμμα τὴν προηγηθεῖσαν ἀπόδειξιν καὶ ἐπ τῶν γωνιῶν Δ, Ε, Θ τοῦ τριγώνου ΔΕΘ, θέλομεν εὕρει ὅτι αἱ γωνίαι αὗται ἔχουσιν ἀμοιβαίως διὰ μέτρα τὰ τόξα $\frac{1}{2}$ *περιφ.* — ΒΓ, $\frac{1}{2}$ *περιφ.* — ΑΓ, $\frac{1}{2}$ *περιφ.* — ΑΒ. Εὐκόλως δὲ ἠδύνατό τις νὰ προΐδῃ ὅτι ἡ ἰδιότης αὕτη ἔπρεπε νὰ ἦναι ἀντίστροφος, διότι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ γράφεται διὰ τοῦ τριγώνου ΔΒΘ, ὅπως τὸ τρίγωνον ΔΕΘ διὰ τοῦ πρώτου.

Σχόλιον. Ἐὰν ἑνώσωμεν τὸ κέντρον Ο τῆς σφαίρας μὲ τὰς κορυφὰς τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΘ, θέλομεν σχηματίσει δύο τριέδρους γωνίας ΟΑΒΓ, ΟΔΕΘ, ὧν αἱ μὲν ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΟΒ, ΑΟΓ . . . ΔΟΕ κτλ. θέλουσιν ἔχει διὰ μέτρα τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, . . . ΔΕ κτλ. τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΘ, αἱ δὲ δίεδροι γωνίαι ΒΟΑΓ, ΑΟΒΓ, . . . ΔΟΕΘ κτλ. θέλουσιν εἶναι ἴσαι μὲ τὰς γωνίας Α, Β, . . . Ε κτλ. τῶν αὐτῶν τριγώνων.

Ἀλλά, κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα, ἡ γωνία Α, ἢ ἡ δίεδρος ΒΟΑΓ, ἔχει διὰ μέτρον $\frac{1}{2}$ *περιφ.* — ΕΘ = $2^{ορ}$ — γωνία ΕΟΘ. Λοιπὸν ἡ δίεδρος γωνία ΒΟΑΓ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας ΕΟΘ, τῆς ἐχούσης μέτρον τὸ τόξον ΕΘ, καὶ οὕτω καθεξῆς περὶ τῶν λοιπῶν γωνιῶν Β καὶ Γ. Λοιπὸν αἱ δίεδροι γωνίαι τῆς μιᾶς τῶν τριέδρων γωνιῶν ΟΑΒΓ, ΟΔΕΘ, εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῆς ἑτέρας, καὶ ἀντιστρόφως. Λοιπὸν αἱ τρίεδροι αὗται γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί·

ΟΡΙΣΜΟΙ.

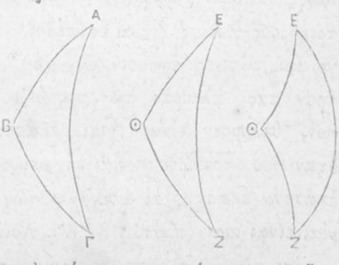
Ἔστω ΑΒΓΔ σφαιρικόν τι πολύγωνον. Ἐὰν ἑνώσωμεν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας Ο μὲ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ, Δ, τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔ διὰ τῶν ἀκτίνων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, προεκβάλωμεν αὐτὰς μέχρις οὗ συναπαντήσωσιν ἐκ δευτέρου τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν εἰς τὰ σημεῖα Α', Β', Γ', Δ', καὶ ἄξωμεν τὰ τόξα Α'Β', Β'Γ', Γ'Δ', Δ'Α', αἱ εἰς τὸ σημεῖον Ο σχηματισθεῖσαι στερεαὶ γωνίαι θέλουσιν εἶναι συμμετρικαί, ἑπομένως θέλουσιν ἔχει τὰς ἐπιπέδους καὶ τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας ἴσας. Λοιπὸν ὡσαύτως τὰ σφαιρικὰ πολύγωνα ΑΒΓΔ, Α'Β'Γ'Δ' θέλουσιν ἔχει ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη ἴσα, ἤτοι ΑΒ=Α'Β', ΒΓ=Β'Γ', ΓΔ=Γ'Δ', ΔΑ=Δ'Α', γωνία Α=Α', Β=Β', Γ=Γ', Δ=Δ'. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα ταῦτα δὲν δύνανται νὰ ἐπιτεθῶσι, διότι, ἐὰν φερθῇ ἡ πλευρὰ Γ'Δ' ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΓΔ οὕτως, ὥστε ὅλαι αἱ λοιπαὶ πλευραὶ τῶν πολυγώνων νὰ κῆνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΓΔ, τὸ σημεῖον Δ' θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Γ καὶ τὸ σημεῖον Γ' ἐπὶ τοῦ Δ, αἱ δὲ λοιπαὶ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι αὐτῶν θέλουσι κατέχει τάξιν ἀντίστροφον.

Τὰ σφαιρικὰ ταῦτα πολύγωνα, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ἦναι ἡ πρὸς ἄλληλα αὐτῶν θέσις, καλοῦνται *συμμετρικά*.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο τρίγωνα, ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα, εἶναι ἴσα καθ' ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη, ὅταν ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν.

Ἔστω ἡ πλευρὰ ΑΒ=ΕΘ, ἡ πλευρὰ ΑΓ=ΕΖ, καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ=ΘΕΖ. Τὸ τρίγωνον ΕΘΖ δύναται νὰ ἐπιτεθῇ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὅπως ἐπιτίθενται δύο εὐθύγραμμα τρίγωνα, ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Λοιπὸν ὅλα τὰ μέρη τοῦ τριγώνου ΕΘΖ εἶναι



ἴσα μὲ τὰ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, δηλ. ἐκτὸς τῶν τριῶν μερῶν, ἅτινα ὑπετέθησαν ἴσα, θέλομεν ἔχει προσέτι τὴν πλευρὰν ΒΓ=ΘΖ, τὴν γωνίαν ΑΒΓ=ΕΘΖ, καὶ τὴν γωνίαν ΑΓΒ=ΕΖΘ.

Ἂν αἱ ἴσαι πλευραὶ τῶν δύο τριγώνων ἦσαν ἀντιστρόφως διατεταγμέναι ὡς πρὸς τὰς ἴσας γωνίας, ἠθέλαμεν ἐπιθέσει τὸ τρίγωνον ΕΘΖ ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ ἠθέλαμεν φθάσει, κατὰ τὰ ἐν τῷ προηγουμένῳ ὁρισμῷ λεχθέντα, εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα.

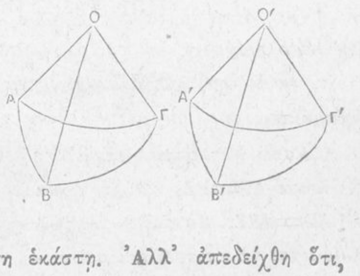
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο τρίγωνα, ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα, εἶναι ἴσα καθ' ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη, ὅταν ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας αὐτῇ γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ.

Διότι ἓν τῶν τριγώνων τούτων δύναται νὰ ἐπιτεθῇ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου ἢ ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ αὐτοῦ, ὅπως εἰς τὴν αὐτὴν περίπτωσιν ἐπιτίθενται δύο εὐθύγραμμα τρίγωνα (ὅρα πρότ. 7, Α′).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 20. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα, ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα, ἦναι ἰσόπλευρα πρὸς ἄλληλα, θέλουσιν εἶναι καὶ ἰσογώνια, αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι θέλουσι κεῖσθαι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν.

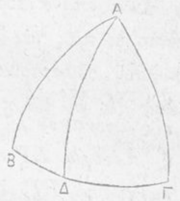


Διότι, ἐὰν ἑνώσωμεν τὰ κέντρα Ο καὶ Ο′ τῶν δύο σφαιρῶν μὲ τὰς κορυφὰς τῶν δύο τριγώνων, θέλομεν σχηματίσει δύο τριέδρους γωνίας, ὧν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι, αἵτινες ἔχουσιν ὡς μέτρον τὰς πλευρὰς τῶν τριγώνων, θέλουσιν εἶναι ἴσαι, ἑκάστη ἑκάστῃ. Ἀλλ' ἀπεδείχθη ὅτι, ὅταν δύο τρίεδροι γωνίαι ἔχωσι τὰς ἐπιπέδους αὐτῶν γωνίας ἴσας, ἑκάστην ἑκάστῃ, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων ἐπιπέδων γωνιῶν δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι (πρότ. 33, Ε′). Λοιπὸν αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαι τῶν ἰσοπλεύρων σφαιρικῶν τριγώνων εἶναι ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 21. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τινος σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ἴσαι.

Ἔστω ἡ πλευρὰ ΑΒ=ΑΓ. Λέγω ὅτι ἡ γωνία Γ=Β.



Διότι, ἐὰν ἑνώσωμεν τὴν κορυφὴν Α μὲ τὸ μέσον Δ τῆς βάσεως ΒΓ διὰ τοῦ τόξου ΑΔ, τὰ δύο προκύπτοντα σφαιρικὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ θέλουσιν ἔχει τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας, ἑκάστην ἑκάστῃ, δηλ. τὴν ΑΔ κοινὴν, τὴν ΒΔ=ΔΓ, ἐκ κατασκευῆς, καὶ τὴν ΑΒ=ΑΓ, ἐξ ὑποθέσεως. Λοιπὸν κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα, τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουσι τὰς ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίας ἴσας, ἤτοι τὴν Β=Γ, τὴν ΒΑΔ=ΔΑΓ καὶ τὴν ΑΔΒ=ΑΔΓ.

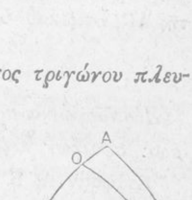
Σχόλιον 1. Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν ΒΑΔ καὶ ΔΑΓ, ΒΔΑ καὶ ΑΔΓ ἕπεται ὅτι *τὸ τόξον ΑΔ, τὸ ἑνόνον τὴν κορυφὴν Α μὲ τὸ μέσον Δ τῆς βάσεως ΒΓ σφαιρικοῦ τινος ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς βάσεως ταύτης καὶ διαιρεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο ἴσα μέρη.*

Σχόλιον 2. Ἐκ τοῦ ἀποδειχθέντος θεωρήματος ἕπεται προσέτι ὅτι δύο σφαιρικὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα, ἐὰν ἦναι συμμετρικὰ, εἶναι καὶ ἴσα ἐξ ἐπιθέσεως, ἢ ἐπιθέσιμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 22. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν σφαιρικοῦ τινος τριγώνου πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

Ἔστω ἡ γωνία Β = Γ. Λέγω ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΓ=ΑΒ.

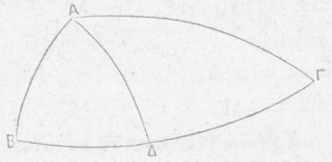


Διότι, ἂν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ ἦσαν ἄνισοι, ἔστω ΑΒ ἡ μεγαλειτέρα, καὶ ἂς λάβωμεν ΒΟ=ΑΓ, καὶ ἄξωμεν τὸ τόξον ΓΟ. Τὰ δύο τρίγωνα ΒΟΓ, ΒΑΓ θέλουσιν ἔχει ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΒΓ κοινὴν, τὰς πλευρὰς ΒΟ, ΑΓ ἴσας ἐκ κατασκευῆς, καὶ τὰς γωνίας ΟΒΓ, ΑΓΒ ἴσας, ἐξ ὑποθέσεως. Λοιπὸν αἱ γωνίαι ΒΓΟ, ΑΒΓ θέλουσιν εἶναι ἴσαι, ὡς ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν ΒΟ, ΑΓ. Ἀλλ' ἡ γωνία ΑΒΓ ὑπετέθη ἴση τῇ ΑΓΒ. Ἄρα

ΑΓΒ=ΒΓΟ, ὅπερ ἀδύνατον. Λοιπὸν ΑΒ δὲν δύναται νὰ ὑποτεθῇ μεγαλειτέρα τῆς ΑΓ. Λοιπὸν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν Γ καὶ Β, εἶναι ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 23. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἡ γωνία Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἦναι μεγαλειτέρα τῆς Β, ἡ ἀπέναντι τῆς γωνίας Α πλευρὰ ΒΓ θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ἀπέναντι τῆς γωνίας Β πλευρᾶς ΑΓ, καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ἡ πλευρὰ ΒΓ ἦναι μεγαλειτέρα τῆς ΑΓ, ἡ γωνία Α ἀπέναντι τῆς ΒΓ, θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς γωνίας Β, τῆς ἀπέναντι τῆς ΑΓ.



1ον. Ἔστω ἡ γωνία Α > Β. Ἐὰν κατασκευάσωμεν τὴν γωνίαν ΒΑΔ=Β, θέλομεν ἔχει ΑΔ=ΔΒ (πρότ. 22). Ἀλλ' ΑΔ+ΔΓ > ΑΓ. Ἄρα καὶ ΒΔ+ΔΓ ἢ ΒΓ > ΑΓ, διότι ΑΔ=ΔΒ.

2ον. Ἔστω ἡ πλευρὰ ΒΓ > ΑΓ. Λέγω ὅτι ἡ γωνία Α θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τῆς Β. Διότι, ἂν ἡ γωνία Α ἦτο ἴση μὲ τὴν Β, ἔπρεπε καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ νὰ ἦναι ἴση μὲ τὴν ΑΓ, ἂν δὲ ἦτο μικροτέρα τῆς Β, ἔπρεπεν ἡ πλευρὰ ΒΓ νὰ ἦναι μικροτέρα τῆς ΑΓ. Ἀλλ' ἀμφότερα ταῦτα τὰ ἐξαγόμενα εἶναι ἐναντία τῆς ὑποθέσεως. Λοιπὸν ἡ γωνία Α, ἡ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ΒΓ, εἶναι μεγαλειτέρα τῆς Β, τῆς ἀπέναντι τῆς ΑΓ, ἥτις καθ' ὑπόθεσιν εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 24. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ἰσογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα, ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα, εἶναι καὶ ἰσόπλευρα.

Ἔστωσαν Α, Β τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος σφαιρικὰ τρίγωνα καὶ Π, Κ τὰ πολικὰ αὐτῶν. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων Α καὶ Β εἶναι ἴσαι, αἱ πλευραὶ τῶν πολικῶν αὐτῶν Π καὶ Κ θέλουσιν εἶναι ἴσαι (πρότ. 17). Ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα Π καὶ Κ εἶναι ἰσόπλευρα, εἶναι καὶ ἰσογώνια (πρότ. 20). Λοιπὸν τὰ πολικὰ αὐτῶν Α καὶ Β θέλουσιν εἶναι ἰσόπλευρα. Λοιπὸν κτλ.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη δὲν ἐφαρμόζεται εἰς τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα, ἐν οἷς ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν ἕπεται μόνον ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν. Ἀλλ' εὐκόλως ἐξηγεῖται ἡ διαφορὰ αὕτη, ἡ μεταξὺ τῶν εὐθυγράμμων καὶ σφαιρικῶν τριγώνων ὑπάρχουσα. Εἰς τὴν παροῦσαν πρότασιν, ὡς καὶ εἰς τὰς προτάσεις 18, 19, 20, ἐν αἷς γίνεται λόγος περὶ παραβολῆς τριγώνων, ἐλέχθη ῥητῶς ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν, καὶ, ἐπειδὴ τὰ ὅμοια τόξα εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς ἀκτῖνας τῶν εἰς οὓς ἀνήκουσι κύκλων, ἕπεται ὅτι δύο σφαιρικὰ τρίγωνα, ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν ἢ ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας κείμενα, δὲν δύνανται νὰ ἦναι ὅμοια χωρὶς νὰ ἦναι ἴσα. Οὐδόλως λοιπὸν παράδοξον, ἐὰν ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν συνεπάγῃ τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν.

Ἤθελεν ἔχει ἄλλως τὸ πρᾶγμα, ἂν τὰ τρίγωνα ἔκειντο ἐπὶ ἀνίσων σφαιρῶν. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὰ ἰσογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα ἤθελον εἶναι ὅμοια, αἱ δὲ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἤθελον εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν εἰς ἃς ἀνήκουσι σφαιρῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 25. ΘΕΩΡΗΜΑ.

1ον. *Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικρότερον ἓξ καὶ μεγαλείτερον δύο ὀρθῶν γωνιῶν.*

2ον. *Ἡ μικροτέρα γωνία, αὐξηθεῖσα κατὰ δύο ὀρθὰς, ἀποτελεῖ ἄθροισμα μεγαλείτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.*

1ον. Ἔστωσαν Α, Β, Γ αἱ γωνίαι σφαιρικοῦ τινος τριγώνου καὶ Α΄, Β΄, Γ΄ αἱ πλευραὶ τοῦ πολικοῦ αὐτοῦ.

Κατὰ τὰ ἐν τῇ 17 προτάσει ἀποδειχθέντα θέλομεν ἔχει

$$\text{Α}+\text{Β}+\text{Γ}=\frac{1}{2}\,\text{περιφ.}-\text{Α}'+\frac{1}{2}\,\text{περιφ.}-\text{Β}'+\frac{1}{2}\,\text{περιφ.}-\text{Γ}',$$

ἢ

$$\text{Α}+\text{Β}+\text{Γ}=\frac{3}{2}\,\text{περιφ.}-(\text{Α}'+\text{Β}'+\text{Γ}').$$

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα Α΄+Β΄+Γ΄ τῶν τριῶν πλευρῶν παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μεγαλείτερον τοῦ μηδενὸς καὶ μικρότερον περιφερείας. Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν Α, Β, Γ εἶναι μικρότερον ἓξ ὀρθῶν (διότι ἑκάστη $\frac{1}{2}$ περιφ. $=2^{\text{ορ}}$) καὶ μεγαλείτερον δύο ὀρθῶν.

2ον. Ἂς παραστήσωμεν δι᾽ Α, Β, Γ τὰς γωνίας σφαιρικοῦ τινος τριγώνου, καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι ἡ μικροτέρα. Κατὰ τὰ ἐν τῇ 17 προτάσει ἀποδειχθέντα αἱ πλευραὶ τοῦ πολικοῦ αὐτοῦ θέλουσιν εἶναι $180^\circ-\text{Α}$, $180^\circ-\text{Β}$, $180^\circ-\text{Γ}$.

Ἀλλὰ κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ 4 προτάσει ἔχομεν

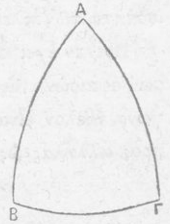
$$180^\circ-\text{Α}<180^\circ-\text{Β}+180^\circ-\text{Γ}.$$

Προσθέτοντες δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης Α+Β+Γ καὶ ἀφαιροῦντες ἑκατέρωθεν 180°, θέλομεν ἔχει

$$Β+Γ<180°+Α.$$

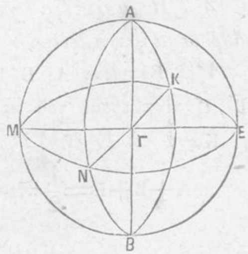
Λοιπὸν ἡ μικροτέρα γωνία Α, αὐξηθεῖσα κτλ. (*).

Πόρισμα. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ τινος τριγώνου περιέχεται μεταξὺ ἓξ καὶ δύο ὀρθῶν, ἕπεται ὅτι τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον δύναται νὰ ἔχῃ δύο ἢ τρεῖς γωνίας ὀρθάς, δύο ἢ τρεῖς ἀμβλείας.



Τὸ ἔχον δύο γωνίας ὀρθὰς τρίγωνον ΑΒΓ καλεῖται *δισορθογώνιον*. Κατὰ δὲ τὰ λεχθέντα ἐν τῷ 2 πορίσματι τῆς 7 προτάσεως ἡ κορυφὴ Α θέλει εἶναι ὁ πόλος τῆς βάσεως ΒΓ, καὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ ἴσαι μὲ τεταρτημόρια.

Ἐὰν πρὸς τούτοις ἡ γωνία Α ἦναι ὀρθή, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καλεῖται *τρισορθογώνιον*. Τοῦ τρισορθογωνίου λοιπὸν σφαιρικοῦ τριγώνου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαὶ καὶ αἱ τρεῖς αὐτοῦ πλευραὶ ἴσαι μὲ τεταρτημόρια.



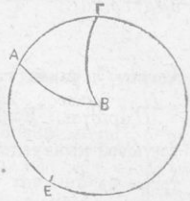
Τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον περιέχεται ὀκτάκις ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τοῦτο δὲ γίνεται δῆλον ἐκ τοῦ παρακειμένου σχήματος, ἐν ᾧ τὸ τόξον ΜΝ ὑποτίθεται ἴσον μὲ τεταρτημόριον.

Σχόλιον 1. Μὲ τρεῖς δεδομένας γωνίας Α, Β, Γ, ἐκπληρούσας τὰς συνθήκας τοῦ ἀποδειχθέντος θεωρήματος, δυνάμεθα πάντοτε νὰ σχηματίσωμεν σφαιρικὸν τρίγωνον· διότι αὗται εἶναι αἱ ἀναγκαῖαι καὶ ἐπαρκεῖς συνθῆκαι πρὸς σχηματισμὸν τριέδρου στερεᾶς γωνίας, ἐχούσας διὰ διέδρους τὰς δεδομένας Α, Β, Γ.

(*) Ἡ πρότασις αὕτη ἠδύνατο νὰ ἀποδειχθῇ συντομώτατα ὡς ἑξῆς.

Αἱ γωνίαι σφαιρικοῦ τινος τριγώνου δὲν εἶναι ἄλλο τι εἰμὴ αἱ δίεδροι γωνίαι τῆς τριέδρου γωνίας, τῆς ἐχούσης βάσιν τὸ σφαιρικὸν τοῦτο τρίγωνον. Ἀλλ' ἀπεδείχθη ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν διέδρων γωνιῶν τριέδρου τινὸς στερεᾶς γωνίας εἶναι μικρότερον 6ºρ καὶ μεγαλείτερον 2ºρ, καὶ ὅτι ἡ μικροτέρα τούτων, αὐξηθεῖσα κατὰ δύο ὀρθάς, ἀποτελεῖ ἄθροισμα μεγαλείτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Ἄρα κτλ.

Σχόλιον 2. Ὑποθέσαμεν ἐν τοῖς προηγουμένοις ὅτι αἱ πλευραὶ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων εἶναι μικρότεραι ἡμιπεριφερείας. Παρατηροῦμεν ἐν τούτοις ὅτι ὑπάρχουσι καὶ σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχοντά τινας τῶν πλευρῶν αὐτῶν μεγαλειτέρας ἡμιπεριφερείας καί τινας τῶν γωνιῶν αὐτῶν μεγαλειτέρας δύο ὀρθῶν. Διότι, ἐὰν προεκβάλωμεν τὴν πλευρὰν ΑΓ μέχρις οὗ συμπληρωθῇ ὁλόκληρος ἡ περιφέρεια ΑΓΕ, τὸ μένον μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἡμισφαιρίου, ἀφοῦ ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, εἶναι νέον τρίγωνον, ὅπερ δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν ὡσαύτως διὰ ΑΒΓ, καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει διὰ πλευρὰς τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΑΕΓ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΕΓ εἶναι μεγαλειτέρα ἡμιπεριφερείας, καὶ ἡ ἀντικειμένη εἰς τὴν πλευρὰν ταύτην γωνία Β εἶναι μεγαλειτέρα δύο ὀρθῶν γωνιῶν.



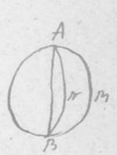
Ἀλλ' εὐκόλως παρατηρεῖ τις ὅτι ὅλα τὰ μέρη τοῦ νέου τούτου τριγώνου γίνονται γνωστὰ, ὅταν ἦναι γνωστὰ τὰ μέρη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἡ γωνία Β, παραδείγματος χάριν, τοῦ νέου τριγώνου εὑρίσκεται ἀφοῦ ἀπὸ 4 ὀρθὰς ἀφαιρεθῇ ἡ γωνία Β τοῦ πρώτου τριγώνου, ἡ πλευρὰ ΑΕΓ, ἀφοῦ ἀπὸ περιφέρειαν ἀφαιρεθῇ ἡ πλευρὰ ΑΓ τοῦ πρώτου, κτλ. Τούτου ἕνεκα ἐξῃρέθησαν τοῦ ὁρισμοῦ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων τὰ τρίγωνα, ὧν αἱ πλευραὶ εἶναι μεγαλείτεραι ἡμιπεριφερείας, καὶ αἱ γωνίαι μεγαλείτεραι δύο ὀρθῶν.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

(fuseau) AMBNA:

1. Καλεῖται ἄτρακτος τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἡμιπεριφερειῶν μεγίστων κύκλων, ἐχόντων τὰ αὐτὰ ἄκρα.

AMB — ANB:



2. Τὸ μέρος τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἡμιμεγίστων κύκλων ἐχόντων τὴν αὐτὴν διάμετρον, καλεῖται *σφὴν* ἢ *ὄνυξ σφαιρικός*.

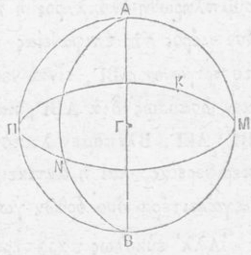
3. *Σφαιρικὴ πυραμὶς* ὀνομάζεται τὸ μέρος τοῦ στερεοῦ τῆς σφαίρας, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἑδρῶν στερεᾶς τινος γωνίας, ἐχούσης τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Τὸ ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τούτων χωριζόμενον σφαιρικὸν τρίγωνον καλεῖται *βάσις* τῆς πυραμίδος.

Ὅταν δύο σφαιρικὰ πολύγωνα ταὐτίζωνται, αἱ ἔχουσαι βάσεις τὰ πολύγωνα ταῦτα πυραμίδες ταὐτίζονται ὡσαύτως.

4. Αἱ συμμετρικὰς ἔχουσαι βάσεις σφαιρικαὶ πυραμίδες ὀνομάζονται *συμμετρικαί*.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 26. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ ἄτρακτος ΑΜΒΝΑ εἶναι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ὡς ἡ γωνία αὐτοῦ ΜΑΝ πρὸς 4 ὀρθὰς, ἢ ὡς τὸ τόξον ΜΝ, τὸ μετροῦν τὴν γωνίαν ταύτην, πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν.



Ἃς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι τὸ τόξον ΜΝ καὶ ἡ περιφέρεια ΜΝΠΚ ἔχουσι κοινόν τι μέτρον, καὶ ὅτι τὸ κοινὸν τοῦτο μέτρον περιέχεται 48κις, παραδείγματος χάριν, εἰς τὴν περιφέρειαν ΜΝΠΚ καὶ 25κις εἰς τὸ τόξον ΜΝ, ἤ, ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὅτι ὁ λόγος τοῦ τόξου ΜΝ πρὸς τὴν περιφέρειαν εἶναι ὡς 25 πρὸς 48.

Ἐὰν διὰ τῆς διαμέτρου ΑΒ καὶ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἄξωμεν ἐπίπεδα, τὰ ἐπίπεδα ταῦτα θέλουσι διαιρέσει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς 48 ἴσας πρὸς ἀλλήλας ἀτράκτους, καὶ 25 τούτων θέλουσι περιέχεσθαι ἐν τῇ ἀτράκτῳ ΑΜΒΝΑ. Ὁ λόγος λοιπὸν τῆς ἀτράκτου ΑΜΒΝ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας θέλει εἶναι ὡς 25 πρὸς 48. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως

$$\text{τόξ. ΜΝ} : \text{περιφ} = 25 : 48.$$

Ἄρα, ἕνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου 25 : 48, θέλομεν ἔχει

$$\text{ἄτρ. ΑΜΒΝΑ} : \text{ἐπιφ. σφαίρ.} = \text{τόξ. ΜΝ} : \text{περιφ.}$$

ἤ, ὅπερ ταὐτὸ,

$$\text{ἄτρ. ΑΜΒΝΑ} : \text{ἐπιφ. σφαίρ.} = \text{γων. ΝΑΜ} : 4^{\text{ορ}}.$$

Ἂν τὸ τόξον ΜΝ καὶ ἡ περιφέρεια ΜΝΠΚ δὲν εἶχον κοινόν τι μέτρον, εὐκόλως ἠδυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν διὰ τῶν γνωστῶν συλλογισμῶν, ὅτι ἡ ἄτρακτος εἶναι πάντοτε πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ὡς τὸ τόξον ΜΝ πρὸς τὴν περιφέρειαν, ἢ ὡς ἡ γωνία ΝΑΜ πρὸς 4 ὀρθάς.

Μέτρον τῆς ἀτράκτου. Ἔστωσαν Θ καὶ Θ′ αἱ γωνίαι δύο τινῶν ἀτράκτων Α καὶ Α′. Κατὰ τὰ προαποδειχθέντα θέλομεν ἔχει

$$\text{Α} : \text{ἐπιφ. σφαίρ.} = \Theta : 4^{\text{ορ}}. \qquad (1)$$

καὶ

$$\text{Α}' : \text{ἐπιφ. σφαίρ.} = \Theta' : 4^{\text{ορ}}. \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἀναλογίαι (1) κα (2) ἔχουσι τοὺς ἑπομένους αὐτῶν ἴσους, θέλομεν ἔχει

$$A : A' = \Theta : \Theta', \qquad (3)$$

τουτέστιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν δύο ὁποιαιδήποτε ἄτρακτοι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ γωνίαι αὐτῶν. Ἐπομένως ἡ ἄτρακτος A θέλει περιέχει τοσάκις τὴν ἄτρακτον A', ληφθεῖσαν ὡς μονάδα, ὁσάκις ἡ γωνία Θ περιέχει τὴν Θ', ἤτοι ὁ λόγος $\frac{\Theta}{\Theta'}$ θέλει παριστᾷ τὸ μέτρον τῆς ἀτράκτου A, τῆς A' ληφθείσης ὡς μονάδος.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γωνία Θ' τῆς ὡς μονάδος ληφθείσης ἀτράκτου A' εἶναι ὀρθή, ἡ ἀναλογία (3) μετατρέπεται εἰς τὴν ἑξῆς

$$A : A' = \Theta : 1^{\text{ορ}},$$

ἤ, ὅπερ ταὐτό,

$$\frac{A}{A'} = \frac{\Theta}{1^{\text{ορ}}}. \qquad (4)$$

Ὁ λόγος λοιπὸν ἀτράκτου τινὸς πρὸς τὴν ὀρθὴν ἄτρακτον ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς γωνίας αὐτοῦ πρὸς τὴν ὀρθήν, καὶ τοῦτο ἐννοοῦσιν, ὅταν συντομίας χάριν λέγωσιν ὅτι ἡ ἄτρακτος ἔχει διὰ μέτρον τὴν γωνίαν αὐτῆς.

Ἐὰν ἐλαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον T, ὅπερ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὀρθῆς ἀτράκτου A', ἠθέλομεν ἔχει, ἀντεισάγοντες εἰς τὴν ἰσότητα (4) 2T ἀντὶ τοῦ A',

$$\frac{A}{2T} = \frac{\Theta}{1^{\text{ορ}}}, \text{ ἤ, ὅπερ ταὐτό, } \frac{A}{T} = \frac{2\Theta}{1^{\text{ορ}}}.$$

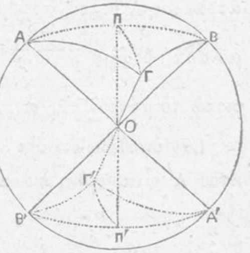
Λοιπὸν ὁ λόγος ἀτράκτου τινὸς πρὸς τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τοῦ διπλασίου τῆς γωνίας αὐτῆς πρὸς τὴν ὀρθήν, ἤ, ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἡ ἄτρακτος ἔχει διὰ μέτρον τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας αὐτῆς.

Σχόλιον. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ σφαιρικὸς ὄνυξ εἶναι πρὸς τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας ὡς ἡ γωνία αὐτοῦ πρὸς τέσσαρας ὀρθάς, καὶ ὅτι ὁ σφαιρικὸς ὄνυξ ἔχει διὰ μέτρον τὴν γωνίαν αὐτοῦ, ἢ τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας αὐτοῦ, ὅταν ὁ ὀρθὸς ὄνυξ ἢ ἡ τρισορθογώνιος πυραμίς, ἥτις εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθοῦ ὄνυχος, λαμβάνηται ὡς μονὰς τῶν ὄγκων καὶ ἡ ὀρθὴ γωνία ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 27. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο σφαιρικὰ συμμετρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἔστω ΑΒΓ σφαιρικόν τι τρίγωνον, καὶ Α′Β′Γ′ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ. Ἔστω πρὸς τούτοις Π ὁ πόλος τοῦ μικροῦ κύκλου, τοῦ διερχομένου διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ (*). Τὰ τόξα τῶν μεγίστων κύκλων ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ θέλουσιν εἶναι ἴσα (πρότ. 7), Ἂς ἄξωμεν τελευταῖον τὴν διάμετρον ΠΟΠ′ καὶ τὰ τῶν μεγίστων κύκλων τόξα Π′Α′, Π′Β′ Π′Γ′.



Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΠΟΑ, Π′ΟΑ′ εἶναι ἴσαι, ὡς κατὰ κορυφὴν, τὸ τόξον ΠΑ εἶναι ἴσον τῷ Π′Α′. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΠΒ=Π′Β′, καὶ ΠΓ=Π′Γ′. Ἀλλὰ ΠΑ=ΠΒ=ΠΓ. Ἄρα καὶ Π′Α′=Π′Β′=Π′Γ′.

Τούτου τεθέντος, τὰ δύο τρίγωνα ΑΠΓ, Α′Π′Γ′ ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, καὶ εἶναι πρὸς τούτοις ἰσοσκελῆ. Λοιπὸν εἶναι ἐπιθέσιμα. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ τρίγωνα ΓΠΒ, Γ′Π′Β′, ὡς καὶ τὰ ΑΠΒ, Α′Π′Β′, εἶναι ἐπιθέσιμα Λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπερ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΑΠΓ, ΓΠΒ, ΑΠΒ, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τρίγωνον Α′Β′Γ′, ὅπερ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ἴσων ἀμοιβαίως αὐτοῖς Α′Π′Γ′, Β′Π′Γ′, Α′Π′Β′.

Παρατήρησις 1. Ἂν ὁ πόλος Π ἔκειτο ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τότε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἤθελεν εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ ἑνὸς τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ τὸ αὐτὸ ἤθελε συμβῇ καὶ διὰ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ Α′Β′Γ′, τὸ συμπέρασμα ἤθελεν εἶναι τὸ αὐτό.

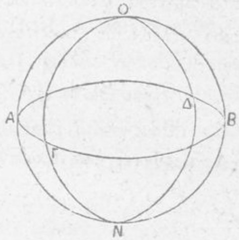
Παρατήρησις 2. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ δύο

(*) Ὁ διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ διερχόμενος κύκλος, ἢ ὁ περιγεγραμμένος εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, δὲν δύναται νὰ ἦναι εἰμὴ μικρός τις τῆς σφαίρας κύκλος. Διότι, ἂν ἦτο μέγιστος κύκλος, αἱ τρεῖς πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἤθελον κεῖσθαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἤθελεν ἀποτελεῖσθαι ἐκ μιᾶς μόνον πλευρᾶς.

τριγωνικαὶ σφαιρικαὶ πυραμίδες, βάσεις ἔχουσαι συμμετρικάς, εἶναι ἰσοδύναμοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 28. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο μέγιστοι κύκλοι ΑΟΒ, ΓΟΔ τέμνωνται κατ' ἀρέσκειαν ἐν τῷ ἡμισφαιρίῳ ΟΑΓΒΔ, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο κατὰ κορυφὴν τριγώνων ΑΟΓ, ΒΟΔ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἄτρακτον, τὴν ἔχουσαν γωνίαν τὴν ΒΟΔ.

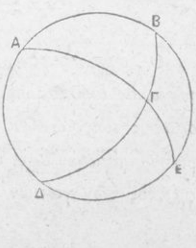


Διότι, ἐὰν προεκβάλωμεν τὰ τόξα ΟΒ, ΟΔ μέχρις οὗ συναπαντηθῶσιν ἐκ νέου εἰς τὸ σημεῖον Ν, τὸ τόξον ΟΒΝ θέλει εἶναι ἡμιπεριφέρεια, ὡς καὶ τὸ ΑΟΒ. Ἄρα ΑΟΒ $=$ΟΒΝ. Ἀφαιροῦντες δὲ ἑκατέρωθεν ΟΒ, θέλομεν ἔχει ΝΒ$=$ΑΟ. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ τὰ τόξα ΓΟΔ, ΟΔΝ εἶναι ἴσα ὡς ἡμιπεριφέρειαι, αἱ διαφοραὶ ΓΟΔ—ΟΔ, ΟΔΝ—ΟΔ, ἤτοι τὰ τόξα ΓΟ, ΔΝ θέλουσιν εἶναι ἴσα. Δι' ὅμοιον δέ τινα λόγον καὶ ΒΔ$=$ΑΓ. Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΟΓ, ΒΔΝ ἔχουσι τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας, ἑκάστην ἑκάστῃ. Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΓΔ, ΑΒ, ΟΝ εἶναι διάμετροι, τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος τρίγωνα ΑΟΓ, ΒΔΝ εἶναι συμμετρικά (πρότ. 17 ορισμ.). Ἄρα εἶναι καὶ ἰσοδύναμα. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν κατὰ κορυφὴν τριγώνων ΑΟΓ, ΔΟΒ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΟΔΒ, ΝΔΒ, τουτέστι μὲ τὴν ἄτρακτον, τὴν ἔχουσαν γωνίαν τὴν ΔΟΒ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Σχόλιον. Εἶναι ὡσαύτως φανερὸν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο σφαιρικῶν πυραμίδων, τῶν ἐχουσῶν βάσεις τὰ τρίγωνα ΑΟΓ, ΒΟΔ, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸν σφαιρικὸν ὄνυχα, τὸν ἔχοντα γωνίαν τὴν ΒΟΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 29. ΘΕΩΡΗΜΑ.

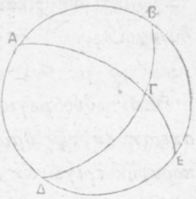
Ἡ ἐπιφάνεια σφαιρικοῦ τινος τριγώνου ἔχει διὰ μέτρον τὴν γωνίαν, τὴν παριστῶσαν τὴν μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν αὐτοῦ γωνιῶν καὶ δύο ὀρθῶν διαφοράν.



Ἔστω ΑΒΓ τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος σφαιρικὸν τρίγωνον. Ἂς συμπληρώσωμεν τὸν μέγιστον κύκλον ΑΒ, καὶ προεκβάλωμεν τὰ τόξα ΒΓ, ΑΓ μέχρις οὗ συναπαντήσωσι τὸν μέγιστον τοῦτον κύκλον. Θέλομεν ἔχει προφανῶς τὰς ἰσότητας

ΑΒΓ$+$ΒΓΕ$=$ἀτράκτῳ Α,

$$ΑΒΓ + ΑΓΔ = \text{ἀτράκτῳ } Β,$$



καί, κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα τὴν ἑξῆς,

$$ΑΒΓ + ΔΓΕ = \text{ἀτράκτῳ } Γ.$$

Προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη, καὶ παρατηροῦντες ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἓξ τριγώνων τοῦ πρώτου μέλους ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμισφαίριον πλέον δὶς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$2\,ΑΒΓ + \frac{1}{2}\,\textit{σφαίριον} = \text{ἄτρ. } Α + \text{ἄτρ. } Β + \text{ἄτρ. } Γ.$$

Ἀφαιροῦντες ἑκατέρωθεν $\frac{1}{2}$ *σφαίριον* καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς διὰ 2, θέλομεν ἔχει

$$ΑΒΓ = \frac{\text{ἄτρ. } Α + \text{ἄτρ. } Β + \text{ἄτρ. } Γ - \frac{1}{2}\,\text{σφαίριον.}}{2} \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος (1) διὰ τῆς ἐπιφανείας Τ τοῦ τρισορθογωνίου τριγώνου, θέλομεν ἔχει

$$\frac{ΑΒΓ}{Τ} = \frac{\text{ἄτρ. } Α}{2Τ} + \frac{\text{ἄτρ. } Β}{2Τ} + \frac{\text{ἄτρ. } Γ}{2Τ} - \frac{\frac{1}{2}\,\text{σφαίριον.}}{2Τ}$$

Ἀλλὰ κατὰ τὰ ἐν τῇ 26 προτάσει περὶ μέτρου τῶν ἀτράκτων λεχθέντα,

$$\frac{\text{ἄτρ. } Α}{2Τ} = \frac{Α}{1^{\text{ορ}}},\quad \frac{\text{ἄτρ. } Β}{2Τ} = \frac{Β}{1^{\text{ορ}}},\quad \frac{\text{ἄτρ. } Γ}{2Τ} = \frac{Γ}{1^{\text{ορ}}}.$$

καὶ

$$\frac{\frac{1}{2}\,\text{σφαίριον}}{2Τ} = 2.$$

Ἄρα

$$\frac{ΑΒΓ}{Τ} = \frac{Α+Β+Γ}{1^{\text{ορ}}} - 2 = \frac{Α+Β+Γ-2^{\text{ορ}}}{1^{\text{ορ}}}.$$

Ὁ λόγος λοιπὸν σφαιρικοῦ τινος τριγώνου πρὸς τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς ὑπεροχῆς ἀπὸ δύο ὀρθὰς τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν αὐτοῦ πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν. Λοιπὸν πᾶν σφαιρικὸν τρίγωνον ἔχει διὰ μέτρον τὴν ἀπὸ δύο ὀρθὰς ὑπεροχὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

Σχόλιον 1. Ἐὰν αἱ γωνίαι τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ἦναι δεδομέναι διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μοιρῶν τῶν μετρούντων αὐτὰς τόξων, πρὸς εὕρεσιν τοῦ μέτρου αὐτοῦ ἀφαιροῦμεν 180° ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μοιρῶν τῶν τόξων, καὶ διαιροῦμεν τὴν διαφορὰν διὰ 90°. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης θέλει παριστᾷ τὸ μέτρον τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου.

Ἐφαρμογή. Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἡ γωνία $A=70^{\circ}, 10'$, ἡ $B=60^{\circ}, 20'$, καὶ ἡ $\Gamma=79^{\circ}, 30'$, καὶ ἂς παραστήσωμεν δι' Ε τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δεδομένου σφαιρικοῦ τριγώνου. Θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἀποδειχθέντα

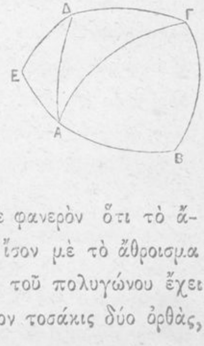
$$\frac{E}{T}=\frac{A+B+\Gamma-2^{o\rho}}{1^{o\rho}}=\frac{70^{\circ},10'+60^{\circ},20'+79^{\circ},30'-180^{\circ}}{90^{\circ}}=\frac{1}{3},$$

τουτέστιν ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια Ε εἶναι τὸ τρίτον τοῦ τρισορθογωνίου τριγώνου Τ.

Σχόλιον 2. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται ὅτι σφαιρική τις τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει διὰ μέτρον τὴν ἀπὸ δύο ὀρθὰς ὑπεροχὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως αὐτῆς, (τῆς τρισορθογωνίου πυραμίδος λαμβανομένης ὡς μονάδος τῶν ὄγκων καὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας ὡς μονάδος τῶν γωνιῶν)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 30. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ ἐπιφάνεια σφαιρικοῦ τινος πολυγώνου ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ, μεῖον τοσάκις δύο ὀρθὰς, ὅσας πλευρὰς ἔχει μεῖον δύο



Διότι, ἐὰν ἑνώσωμεν τὴν αὐτὴν κορυφὴν Α μὲ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς Δ, Γ, διὰ τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΑΔ, τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ θέλει διαιρεθῆ οὕτως εἰς τόσα σφαιρικὰ τρίγωνα, ὅσας πλευρὰς ἔχει μεῖον δύο. Ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστου τριγώνου ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ μεῖον δύο ὀρθὰς, εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου. Λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ μεῖον τοσάκις δύο ὀρθὰς, ὅσας πλευρὰς ἔχει μεῖον δύο.

Σχόλιον. Ἔστω σ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ τινος πολυγώνου καὶ ν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου, τῆς ὀρθῆς γωνίας ὑποτεθείσης ἴσης μὲ τὴν μονάδα, θέλει ἔχει διὰ μέτρον

$$\sigma-2\,(\nu-2),\quad \text{ἢ}\quad \sigma-2\nu+4,$$

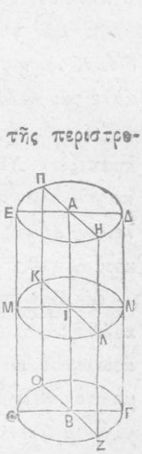
τουτέστι θέλει περιέχει τοσάκις τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον, ὁσάκις ἡ παράστασις $\sigma-2\nu+4$ περιέχει τὴν μονάδα.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΣΤΡΟΓΓΥΛΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

1. *Κύλινδρος* καλεῖται τὸ παραγόμενον στερεὸν ἐκ τῆς περιστροφῆς ὀρθογωνίου τινὸς ΑΒΓΔ περί τινα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ΑΒ. Ἡ πλευρὰ ΑΒ μένει ἀμετάβλητος τὴν θέσιν καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς περιστροφῆς.



Ἐν τῇ περιστροφικῇ ταύτῃ κινήσει αἱ ἴσαι πλευραὶ ΑΔ, ΒΓ, οὖσαι πάντοτε κάθετοι ἐπὶ τῆς ΑΒ, παράγουσιν ἴσα κυκλικὰ ἐπίπεδα ΔΠΗ, ΓΟΖ, ἅτινα *βάσεις τοῦ κυλίνδρου* καλοῦνται. Ἡ πλευρὰ ΓΔ καλεῖται *γεννήτρια* καὶ παράγει *τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου*.

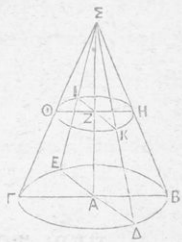
Ἡ ἀκίνητος εὐθεῖα ΑΒ καλεῖται *ἄξων* τοῦ κυλίνδρου.

Πᾶσα κυλινδρικὴ τομὴ ΚΜΛ, ὑπὸ καθέτου ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδου γενομένη, εἶναι κύκλος ἴσος μὲ ἑκατέραν τῶν βάσεων Διότι ἐνῷ τὸ ὀρθογώνιον στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΙΝ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ἴση μὲ τὴν ΒΓ, παράγει κυκλικὸν ἐπίπεδον ἴσον μὲ τὴν βάσιν, τὸ δὲ κυκλικὸν τοῦτο ἐπίπεδον δὲν εἶναι ἄλλο τι εἰμὴ ἡ καθέτως ἐπὶ τοῦ ἄξονος εἰς τὸ σημεῖον Ι γενομένη τομή

Πᾶσα κυλινδρικὴ τομὴ ΟΖΗΠ, διὰ τοῦ ἄξονος ΑΒ διερχομένη, εἶναι ὀρθογώνιον διπλάσιον τοῦ γεννήτορος ΑΒΓΔ.

2. *Κῶνος* ὀνομάζεται τὸ παραγόμενον στερεὸν ἐκ τῆς περιστροφῆς ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου ΣΑΒ περί τινα τῶν πλευρῶν ΣΑ τῆς ὀρθῆς αὐτοῦ γωνίας Α.

Ἐν τῇ περιστροφικῇ ταύτῃ κινήσει ἡ μὲν πλευρὰ ΑΒ παράγει κυκλικὸν ἐπίπεδον ΒΓΔΕ, ὅπερ *βάσις* τοῦ κώνου καλεῖται, ἡ δ᾽ ὑποτείνουσα ΣΒ παράγει τὴν *παράπλευρον* ἢ *κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου.*

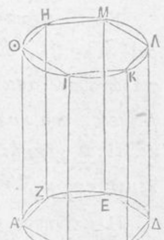


Τὸ σημεῖον Σ καλεῖται *κορυφὴ* τοῦ κώνου, ἡ εὐθεῖα ΣΑ *ἄξων* ἢ *ὕψος* τοῦ κώνου, καὶ ἡ ὑποτείνουσα ΣΒ *πλευρὰ* ἢ *ἀπόστημα* τοῦ κώνου.

Πᾶσα κωνικὴ τομὴ ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τοῦ ἄξονος γενομένη, εἶναι κύκλος καὶ πᾶσα κωνικὴ τομὴ ΣΓΒ διὰ τοῦ ἄξονος διερχομένη εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον διπλάσιον τοῦ γεννήτορος ΣΑΒ.

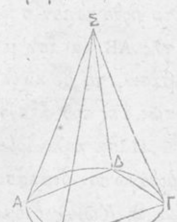
3. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ κώνου ΣΓΔΒ ἀφαιρεθῇ ὁ προκύπτων κῶνος ΣΘΚΗ διά τινος παραλλήλου τῇ βάσει ΒΔΓΕ τομῆς, τὸ μένον στερεὸν ΓΒΗΘ καλεῖται *κολοβὸς* κῶνος ἢ *κορμὸς* κώνου.

Ὁ τοῦ κώνου κορμὸς ΓΒΗΘ παράγεται ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τραπεζίου ΑΒΗΖ περὶ τὴν πλευρὰν ΑΖ, τὴν κάθετον ἐπὶ τῶν δύο παραλλήλων αὐτοῦ βάσεων ΑΒ καὶ ΖΗ. Ἡ ἀκίνητος εὐθεῖα ΑΖ καλεῖται *ἄξων* ἢ *ὕψος* τοῦ κορμοῦ, οἱ κύκλοι ΒΔΓ, ΗΘΚ *βάσεις* τοῦ κορμοῦ καὶ ἡ ΒΗ *πλευρὰ* τοῦ κορμοῦ.



4. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν βάσιν κυλίνδρου τινὸς πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ κατασκευάσωμεν ὀρθὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΖΗΜΛΚΙΘ ἰσοϋψὲς μὲ τὸν κύλινδρον, τὸ πρίσμα τοῦτο λέγεται *ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον*, ὁ δὲ κύλινδρος *περιγεγραμμένος εἰς τὸ πρίσμα.*

Ἐὰν δὲ ἐπὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν βάσιν κώνου τινὸς πολυγώνου ΑΒΓΔ κατασκευάσωμεν πυραμίδα ΣΑΒΓΔ, ἔχουσαν κορυφὴν τὴν τοῦ κώνου κορυφὴν Σ, ἡ πυραμὶς αὕτη καλεῖται *ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κῶνον*, ὁ δὲ κῶνος *περιγεγραμμένος εἰς τὴν πυραμίδα.*



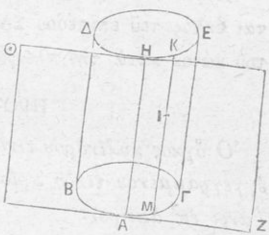
Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ κόψεις ΑΘ, ΒΙ ΓΚ, κτλ. τοῦ πρίσματος, οὖσαι κάθετοι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, περιέχονται ἐν τῇ κυρτῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. Τὸ πρίσμα λοιπὸν καὶ ὁ κύλινδρος ἅπτονται ἀλλήλων κατὰ τὰς κόψεις ΑΘ, ΒΙ, ΓΚ, κτλ.

Εἶναι ὡσαύτως φανερὸν ὅτι αἱ κόψεις ΣΑ, ΣΒ, κτλ. τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔ, αἱ ἑνόνουσαι τὴν κορυφὴν Σ μὲ τὰ σημεῖα Α, Β, κτλ. τῆς βάσεως, περιέχονται ἐν τῇ κυρτῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ. Ἡ πυραμὶς λοιπὸν καὶ ὁ κῶνος ἅπτονται ἀλλήλων κατὰ τὰς κόψεις ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, κτλ.

5. Δύο κύλινδροι ἢ δύο κῶνοι λέγονται *ὅμοιοι*, ὅταν οἱ ἄξονες αὐτῶν ἦναι ἀνάλογοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων αὐτῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. ΛΗΜΜΑ.

Τὸ ἐπίπεδον ΖΑΗ, τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου ΑΖ καὶ τῆς γεννητρίας ΑΗ, ἐφάπτεται τοῦ κυλίνδρου κατὰ τὴν γεννήτριαν ταύτην.



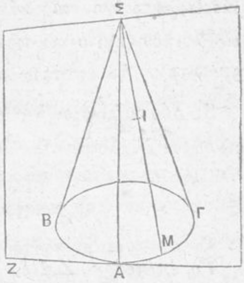
Διότι, ἂν τὸ ἐπίπεδον ΑΗΖ εἶχε καὶ ἕτερόν τι σημεῖον Ι, ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΗ κείμενον, κοινὸν μετὰ τοῦ κυλίνδρου, ἡ ἐκ τοῦ σημείου Ι ἀγομένη παράλληλος τῇ ΑΗ ἤθελε περιέχεσθαι ἐν τῇ κυρτῇ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ. Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ι κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΗΖ καὶ ἡ εὐθεῖα ΙΜ ἤχθη παράλληλος τῇ ΑΗ, ἡ εὐθεῖα αὕτη ΙΜ ἤθελε κεῖσθαι καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΗΖ (πρότ. 1, πόρ. 2, Ε'). Τὸ σημεῖον λοιπὸν Μ, ἔνθα ἡ εὐθεῖα ΙΜ συναπαντᾷ τὴν βάσιν ΒΑΓ τοῦ κυλίνδρου, ἔπρεπε νὰ κῆται ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΑΖ τοῦ ἐπιπέδου ΑΗΖ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως ΑΒΓ, ὅπερ ἄτοπον, διότι ἡ ΑΖ ὡς ἐφαπτομένη ἓν μόνον σημεῖον Α ἔχει κοινὸν μετὰ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ΑΒΓ τοῦ κυλίνδρου.

Λοιπὸν πᾶν σημεῖον τοῦ κυλίνδρου, ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΗ κείμενον, κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ΑΗΖ. Λοιπὸν τὸ ἐπίπεδον ΑΗΖ ἐφάπτεται τοῦ κυλίνδρου κατὰ τὴν γεννήτριαν ΑΗ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. ΛΗΜΜΑ.

Τὸ ἐπίπεδον ΣΑΖ, τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου ΑΖ καὶ τῆς πλευρᾶς ΣΑ αὐτοῦ, ἐφάπτεται τοῦ κώνου καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν τῆς πλευρᾶς ταύτης.

Διότι, ἂν τὸ ἐπίπεδον ΣΑΖ εἶχε καὶ ἕτερόν τι σημεῖον Ι, ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΣ κείμενον, κοινὸν μετὰ τοῦ κώνου, ἡ τὰ σημεῖα Ι καὶ Σ ἑνόνουσα εὐθεῖα ΣΙ ἤθελε κεῖσθαι ἐν τῇ κυρτῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΣΑΖ. Τὸ σημεῖον λοιπὸν Μ, ἔνθα ἡ πλευρὰ ΣΙ συναπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον ΒΑΓ τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἔπρεπε νὰ κῆται ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΑΖ τοῦ ἐπιπέδου ΣΑΖ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως ΒΑΓ, ὅπερ ἄτοπον, διότι ἡ ΑΖ ὡς ἐφαπτομένη ἓν μόνον σημεῖον Α ἔχει κοινὸν μετὰ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ΑΒΓ τοῦ κώνου.

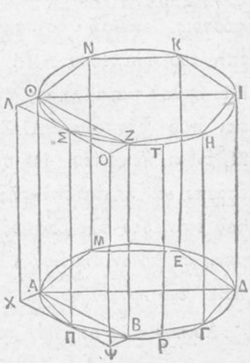


Λοιπὸν πᾶν σημεῖον τοῦ κώνου, ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΣ κείμενον, κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ΣΑΖ. Τὸ ἐπίπεδον λοιπὸν ΑΣΖ ἐφάπτεται τοῦ κώνου κατὰ τὴν πλευρὰν ΣΑ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΛΗΜΜΑ.

Ὁ ὄγκος κυλίνδρου τινὸς εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ὁ ὄγκος ἐγγεγραμμένου τινὸς πρίσματος, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον.

Ἂς ἐγγράψωμεν εἰς τὸν κύκλον ΑΓΔ, τὸν τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου ἀποτελοῦντα, πολύγωνόν τι ΑΒΓΔΕΜ, καὶ ἐπ' αὐτοῦ ἂς κατασκευάσωμεν ὀρθὸν πρίσμα ΑΒΓΙΚΝ ἰσοϋψὲς μὲ τὸν κύλινδρον. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ μεταξὺ τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου πρίσματος διαφορὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων ΓΒΗΖ, ΓΔΗΙ, κτλ. τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν ἑδρῶν τοῦ πρίσματος, τῶν κυκλικῶν τμημάτων καὶ τῆς κυρτῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας. Ἐὰν λοιπὸν ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ διαφορὰ αὕτη δύναται νὰ κατασταθῇ μικροτέρα παντὸς δεδομένου ποσοῦ, αὐξανομένου ἀρκούντως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν τοῦ πρίσματος, ἢ, ὅπερ ταὐτὸ, τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν βάσιν αὐτοῦ πολυγώνου, ἡ πρότασις προφανῶς ἀποδεικνύεται.



Πρὸς τοῦτο ἐκ τῶν σημείων Π, Ρ, κτλ. μέσων τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, κτλ. ὑψόνομεν τὰς καθέτους ΠΣ, ΡΤ, κτλ. ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου. Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ κάθετοι αὗται θέλουσιν εἶναι παράλληλοι τῶν κόψεων ΑΘ, ΒΖ, κτλ. τοῦ πρίσματος, καὶ θέλουσι περιέχεσθαι ἐν τῇ κυρτῇ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ. Ἐὰν ἄξωμεν τελευταῖον τὰ ἐπίπεδα ΑΠΣΘ, ΒΠΣΖ, κτλ. θέλομεν σχηματίσει νέον ὀρθὸν πρίσμα ΑΠΒΡΘΣΖΤ ἐγγεγραμμένον καὶ μεγαλείτερον τοῦ πρώτου. Λέγω τώρα ὅτι ἡ μεταξὺ τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ νέου τούτου πρίσματος διαφορὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς μεταξὺ τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ πρώτου πρίσματος διαφορᾶς.

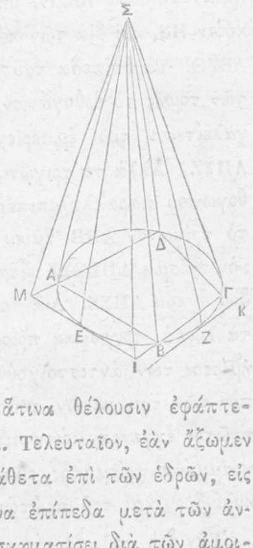
Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν διὰ τῆς κόψεως ΠΣ ἐπίπεδον παράλληλον τῇ ἕδρᾳ ΑΒΖΘ, ὅπερ θέλει ἐφάπτεσθαι τοῦ κυλίνδρου κατὰ τὴν κόψιν ΠΣ, καὶ διὰ τῶν κόψεων ΑΘ, ΒΖ ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΒΖΘ. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα θέλουσι σχηματίσει διὰ τῆς ἀμοιβαίας αὐτῶν τομῆς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΟ, ὅπερ θέλει εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἐμπεριεχομένου κυρτεπιπέδου, οὕτως εἰπεῖν, ὄγκου ΑΠΣΖ. Ἀλλὰ τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΠΒΖΣΘ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΑΟ, ὡς ἔχον τὸ αὐτὸ ὕψος ΠΣ καὶ βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΠΒ, ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΧΨΒ. Λοιπὸν τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΠΒΘΣΖ εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κυρτεπιπέδου ὄγκου ΑΠΣΖ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι καὶ τὰ λοιπὰ τριγωνικὰ πρίσματα ΒΡΓΖΤΗ, κτλ. εἶναι μεγαλείτερα τοῦ ἡμίσεος τῶν ἀντιστοιχούντων κυρτεπιπέδων ὄγκων. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν τριγωνικῶν τούτων πρισμάτων, τῶν προστιθεμένων εἰς τὸ πρῶτον ἐγγεγραμμένον πρίσμα πρὸς σχηματισμὸν τοῦ δευτέρου ἐγγεγραμμένου πρίσματος, εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἡμίσεος τῆς διαφορᾶς τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ πρώτου ἐγγεγραμμένου πρίσματος.

Ἐὰν διὰ τοῦ δευτέρου ἐγγεγραμμένου πρίσματος κατασκευάσωμεν τρίτον, ὅπως κατασκευάσωμεν διὰ τοῦ πρώτου τὸ δεύτερον καὶ οὕτω καθεξῆς, ἠθέλαμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδείξει ὅτι ἡ μεταξὺ τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ τρίτου ἐγγεγραγμένου πρίσματος διαφορὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς μεταξὺ τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ δευτέρου ἐγγεγραμμένου πρίσματος διαφορᾶς, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἀλλ', ἐὰν ἀπὸ ὡρισμένον τι ποσὸν, ὅσον μέγα καὶ ἂν ὑποτεθῇ, ἀφαιρεθῇ πλέον τοῦ ἡμίσεος αὐτοῦ, ἐκ τοῦ ὑπολοίπου πλέον τοῦ ἡμίσεος αὐτοῦ καὶ οὕτω καθεξῆς, εἶναι φανερὸν ὅτι μετ' ἀρκετὰς τοιαύτας ἀφαιρέσεις τὸ μένον ὑπόλοιπον δύναται νὰ κατασταθῇ μικρότερον παντὸς δεδομένου ποσοῦ. Λοιπὸν ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ὁ ὄγκος κτλ.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ἡ κυρτὴ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια εἶναι ὅτι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ἐγγεγραμμένου τινὸς πρίσματος, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. ΛΗΜΜΑ.

Ὁ ὄγκος κώνου τινὸς εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ὁ ὄγκος ἐγγεγραμμένης τινὸς πυραμίδος, ἧς ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον.



Ἔστω ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον τι εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου πολύγωνον. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ μεταξὺ τοῦ ὄγκου τοῦ κώνου καὶ τοῦ τῆς ἐγγεγραμμένης πυραμίδος ΣΑΒΓΔ διαφορὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν κυρτεπιπέδων ὄγκων ΣΑΒ, ΣΒΓ, κτλ.

Ἄγομεν εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, κτλ. μέσα τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, κτλ. τὰς ἐφαπτομένας ΕΙ, ΚΖ, κτλ, ἑνόνομεν ΣΕ, ΣΖ, κτλ., καὶ διὰ τῶν κόψεων ΣΕ, κτλ. καὶ τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς ἑκάστην κόψιν ἐφαπτομένων ΕΙ, κτλ. ἄγομεν τὰ ἐπίπεδα ΣΕΙ κτλ., ἅτινα θέλουσιν ἐφάπτεσθαι τοῦ κώνου κατὰ τὰς κόψεις ΣΕ, κτλ. Τελευταῖον, ἐὰν ἄξωμεν διὰ τῶν κόψεων ΣΑ καὶ ΣΒ, κτλ. ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τῶν ἑδρῶν, εἰς ἃς αἱ κόψεις αὗται ἀνήκουσι, τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα μετὰ τῶν ἀντιστοιχούντων καθέτων ἐπιπέδων θέλουσι σχηματίσει διὰ τῶν ἀμοιβαίων αὐτῶν τομῶν τὰς τετραγωνικὰς πυραμίδας ΣΑΜΙΒ, κτλ., αἵτινες προφανῶς θέλουσιν εἶναι μεγαλείτεραι τῶν ἐμπεριεχομένων κυρτεπιπέδων ὄγκων ΣΑΕΒ, κτλ.

Ἀλλ' αἱ τριγωνικαὶ πυραμίδες ΣΑΕΒ, κτλ. εἶναι τὰ ἡμίση τῶν τετραγωνικῶν πυραμίδων ΣΑΜΙΒ, κτλ. ὡς ἔχουσαι τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσεις τὰ τρίγωνα ΑΕΒ, κτλ., ἡμίση τῶν ἀντιστοιχούντων ὀρθογωνίων ΑΜΙΒ, κτλ. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων, τῶν προστιθεμένων εἰς τὴν ἀρχικὴν ἐγγεγραμμένην πυραμίδα ΣΑΒΓΔ πρὸς σχηματισμὸν τῆς δευτέρας ἐγγεγραμμένης πυραμίδος ΣΑΕΒΖ κτλ., εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀθροίσματος τῶν κυρτεπιπέδων ὄγκων ΣΑΒ, κτλ.

Ἐξακολουθοῦντες οὕτω θέλομεν ἀποδείξει ὡς ἀνωτέρω ὅτι ἡ μεταξὺ τοῦ ὄγκου τοῦ κώνου καὶ τοῦ τῆς ἐγγεγραμμένης πυραμίδος, ἧς ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν αὐξάνει ἀρκούντως, διαφορὰ δύναται νὰ κατασταθῇ μικροτέρα παντὸς δεδομένου ποσοῦ. Λοιπὸν ὁ ὄγκος κώνου τινὸς εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει κτλ.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ἡ κυρτὴ τοῦ κώνου ἐπιφάνεια εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ἐγγεγραμμένης τινὸς πυραμίδος, ἧς ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ὁ ὄγκος κυλίνδρου τινὸς ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἂς ἐγγράψωμεν εἰς τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου κανονικόν τι πολύγωνον, καὶ ἂς κατασκευάσωμεν ἐπὶ τοῦ πολυγώνου τούτου ὀρθὸν πρίσμα, ἰσοϋψὲς μὲ τὸν κύλινδρον.

Ἔστω Β ἡ βάσις τοῦ πρίσματος, Ο ὁ ὄγκος αὐτοῦ καὶ Η τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ προτάσει 13 τοῦ Ϛ' βιβλίου ἔχομεν

$$\mathrm{O} = \mathrm{B} \times \mathrm{H}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ὁ ὄγκος Ο τοῦ ἐγγεγραμμένου πρίσματος, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον, καὶ ὅριον τοῦ ὄγκου Ο εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ γινόμενον Β$\times$Η, ἕπεται ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου ἔχει διὰ μέτρον τὸ ὅριον τοῦ γινομένου Β$\times$Η. Ἀλλὰ τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον πολύγωνον Β ἔχει δι' ὅριον τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, ὁ δὲ παράγων Η εἶναι ἀμετάβλητος. Ἄρα

$$\text{ὄγκ. κυλίνδρου} = \text{κύκλ. βάσεως} \times \mathrm{H}.$$

Πόρισμα 1. Οἱ τοῦ αὐτοῦ ὕψους κύλινδροι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν, οἱ δὲ τῆς αὐτῆς βάσεως ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

Πόρισμα 2. Οἱ ὅμοιοι κύλινδροι Κ καὶ κ εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ κύβοι τῶν ὑψῶν αὐτῶν ἢ ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων αὐτῶν. Διότι, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Β καὶ ϐ τὰς βάσεις τῶν ὁμοίων κυλίνδρων, διὰ Δ καὶ δ τὰς διαμέτρους αὐτῶν καὶ διὰ Υ καὶ υ τὰ ὕψη, θέλομεν ἔχει ἀφ' ἑνὸς (πρότ. 10, Δ')

$$B : \beta = \Delta^2 : \delta^2 \qquad (1)$$

καὶ ἀφ' ἑτέρου, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν κυλίνδρων (ὁρισμ. 8)

$$\Upsilon : \upsilon = \Delta : \delta. \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντες δὲ τοὺς ὁμοταγεῖς ὅρους τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) θέλομεν ἔχει

$$B\times\Upsilon : \beta\times\upsilon = \Delta^3 : \delta^3$$

ἢ, ὅπερ ταὐτὸ

$$K : \kappa = \Delta^3 : \delta^3.$$

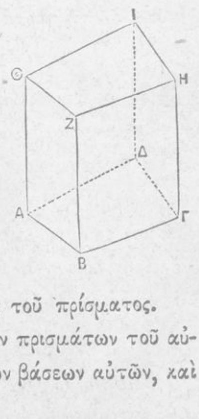
Ἀλλὰ $\Delta^3 : \delta^3 = \Upsilon^3 : \upsilon^3$

Ἄρα $K : \kappa = \Upsilon^3 : \upsilon^3.$

Σχόλιον. Ἔστω Ρ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κυλίνδρου τινὸς καὶ Η τὸ ὕψος αὐτοῦ. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ θέλει εἶναι πP^2, τὸ δὲ μέτρον τοῦ ὄγκου αὐτοῦ $\pi P^2 \times H$, ἢ $\pi P^2 H$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ὀρθοῦ τινος πρίσματος ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.



Διότι ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων ΘΖΒΑ, ΖΗΒΓ, κτλ., ἐξ ὧν συντίθεται. Ἀλλὰ τὰ μὲν ὕψη ΑΘ, ΒΖ, κτλ. τῶν ὀρθογωνίων εἶναι ἴσα μὲ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος, αἱ δὲ βάσεις αὐτῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κτλ. ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἀποτελοῦσι τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος. Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων τούτων, ἢ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.

Πόρισμα. Αἱ παράπλευροι ἐπιφάνειαι δύο ὀρθῶν πρισμάτων τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ περίμετροι τῶν βάσεων αὐτῶν, καὶ ἀντιστρόφως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ κυρτὴ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἂς ἐγγράψωμεν εἰς τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου κανονικόν τι πολύγωνον, καὶ ἂς κατασκευάσωμεν ἐπ' αὐτοῦ ὀρθὸν πρίσμα, ἰσοϋψὲς μὲ τὸν κύλινδρον.

Ἔστω Π ἡ περίμετρος τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος, Ε ἡ παράπλευρος αὐτοῦ ἐπιφάνεια καὶ Η τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου. Κατὰ τὰ προαποδειχθέντα θέλομεν ἔχει

$$\mathrm{E}=\Pi\times\mathrm{H}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἀφ' ἑνὸς ἡ κυρτὴ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια Ε τοῦ ἐγγεγραμμένου πρίσματος, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον, καὶ ὅριον τῆς ἐπιφανείας Ε εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ γινόμενον Π×Η, καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ μὲν περίμετρος Π τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἔχει δι' ὅριον τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὁ δὲ παράγων Η εἶναι σταθερὸς, θέλομεν ἔχει

$$\text{κυρ. ἐπιφ. κυλίνδρου} = \text{περιφ. βάσεως} \times \mathrm{H}.$$

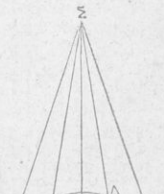
Πόρισμα. Αἱ κυρταὶ δύο κυλίνδρων τοῦ αὐτοῦ ὕψους ἐπιφάνειαι εἶπρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ περιφέρειαι τῶν βάσεων αὐτῶν, καὶ ἀντιστρόφως.

Σχόλιον. Ἔστω Ρ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καὶ Η τὸ ὕψος αὐτοῦ. Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως αὐτοῦ θέλει εἶναι $2\pi\mathrm{P}$, ἡ δὲ κυρτὴ αὐτοῦ ἐπιφάνεια $2\pi\mathrm{P}\times\mathrm{H}$, ἢ $2\pi\mathrm{PH}$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους αὐτοῦ.

Ἂς ἐγγράψωμεν εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου κανονικόν τι πολύγωνον, καὶ ἂς κατασκευάσωμεν ἐπ' αὐτοῦ πυραμίδα, ἔχουσαν κορυφὴν τὴν τοῦ κώνου κορυφὴν Σ.



Ἔστω Β ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, Ο ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος καὶ Η τὸ ὕψος τοῦ κώνου. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ προτάσει 16 τοῦ Ζ' βιβλίου θέλομεν ἔχει

$$\mathrm{O}=\mathrm{B}\times\frac{\mathrm{H}}{3}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ὁ ὄγκος Ο τῆς ἐγγεγραμμένης πυραμίδος, ἧς ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον, καὶ ὅριον τοῦ ὄγκου Ο εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ γινόμενον $B \times \frac{H}{3}$, ἕπεται ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ἔχει διὰ μέτρον τὸ ὅριον τοῦ γινομένου $B \times \frac{H}{3}$. Ἀλλὰ ἡ μὲν ἐπιφάνεια Β τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἔχει δι' ὅριον τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου, ὁ δὲ παράγων $\frac{H}{3}$ εἶναι ἀμετάβλητος. Ἄρα

$$\text{ὄγκ. κώνου} = \text{κύκλ. βάσεως} \times \frac{H}{3}.$$

Πόρισμα. Πᾶς κῶνος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ κυλίνδρου τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους. Ὅθεν ἕπεται

1ον. Ὅτι οἱ τοῦ αὐτοῦ ὕψους κῶνοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.

2ον. Ὅτι οἱ τῆς αὐτῆς βάσεως κῶνοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

3ον. Ὅτι δύο ὅμοιοι κῶνοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων αὐτῶν, ἢ ὡς οἱ κύβοι τῶν ὑψῶν αὐτῶν (πρότ. 5, πόρ. 2).

Σχόλιον. Ἔστω Ρ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κώνου τινὸς καὶ Η τὸ ὕψος αὐτοῦ. Τὸ μέτρον τοῦ ὄγκου τοῦ κώνου θέλει εἶναι $\pi P^2 \times \frac{1}{3} H$, ἢ $\frac{1}{3} \pi P^2 H$.

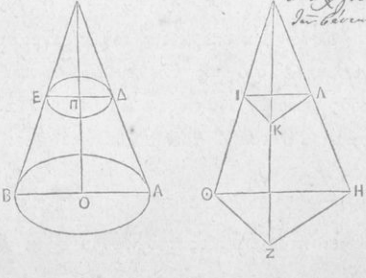
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ὁ κολοβὸς κῶνος ΑΔΕΒ, οὗτινος ΑΟ καὶ ΔΠ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων καὶ ΠΟ τὸ ὕψος, ἔχει διὰ μέτρον

$$\frac{1}{3} \pi \cdot O\Pi \left(\overline{AO}^2 + \overline{\Delta\Pi}^2 + AO \times \Delta\Pi\right).$$

Ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου ἔχει διὰ μέτρον τὸ 1/3 τοῦ γινομένου τοῦ ὕψους ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων αὐτοῦ καὶ τῆς μέσης γεωμετρικῆς ἀναλόγου μεταξὺ τῶν βάσεων αὐτοῦ

Ἔστω ΤΘΖΗ τριγωνική τις πυραμὶς ἔχουσα ὕψος τὸ τοῦ κώνου ΣΑΒ καὶ βάσιν τὸ τρίγωνον ΖΘΗ, ὅπερ ὑποθέτομεν ἰσοδύναμον μὲ τὸν κύκλον ΑΟ τῆς βάσεως τοῦ κώνου ΣΑΒ. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ βάσεις τοῦ κώνου καὶ τῆς πυραμίδος κεῖν-



ται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, αἱ κορυφαὶ αὐτῶν Σ καὶ Τ θέλουσιν ἀπέχει ἰσάκις τοῦ ἐπιπέδου τῶν βάσεων, τὸ δ' ἐπίπεδον ΕΠΔ προεκβαλλόμενον θέλει τμήσει τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΤΘΖΗ κατὰ τὸ τρίγωνον ΙΚΛ, ὅπερ θέλει εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὴν ἄνω βάσιν ΔΕ τοῦ κολοβοῦ κώνου ΑΔΕΒ. Διότι αἱ βάσεις ΑΒ, ΔΕ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων ΑΟ, ΔΠ, ἢ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὑψῶν ΣΟ, ΣΠ. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΘΖΗ, ΙΚΛ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν αὐτῶν ὑψῶν (πρότ. 14, βιβ. ϛ. πόρ. ϛ'). Ἄρα

$$\text{κύκλ. ΑΟ} : \text{κύκλ. ΔΠ} = \text{τρίγ. ΘΖΗ} : \text{τρίγ. ΙΚΛ}.$$

Ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, τὸ τρίγωνον ΘΖΗ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸν κύκλον ΑΟ. Ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΙΚΛ θέλει εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸν κύκλον ΠΔ.

Τούτου τεθέντος, λέγω ὅτι ὁ κολοβὸς κῶνος ΑΒΕΔ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν κορμὸν ΘΖΗΛΚΙ τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ΤΘΖΗ. Διότι ἀφ' ἑνὸς ἔχομεν

$$\text{κολ. κῶν. ΑΒΕΔ} = \text{κών. ΣΑΒ} - \text{κών. ΣΔΕ}$$
$$= \text{κύκλ. ΑΟ} \times \frac{1}{3}\,\text{ΣΟ} - \text{κύκλ. ΔΠ} \times \frac{1}{3}\,\text{ΣΠ},$$

καὶ ἀφ' ἑτέρου

$$\text{κορ. ΘΖΗΛΚΙ} = \text{πυρ. ΤΖΗΘ} - \text{πυρ. ΤΙΚΛ}$$
$$= \text{ΖΗΘ} \times \frac{1}{3}\,\text{ΣΟ} - \text{ΙΚΛ} \times \frac{1}{3}\,\text{ΣΠ}.$$

Ἀλλὰ κατὰ τὰ προϋποτεθέντα κύκλ. $\text{ΑΟ} \times \frac{1}{3}\text{ΣΟ} = \text{ΖΗΘ} \times \frac{1}{3}\,\text{ΣΟ}$ καὶ κύκλ. $\text{ΔΠ} \times \frac{1}{3}\,\text{ΣΠ} = \text{ΙΚΛ} \times \frac{1}{3}\,\text{ΣΠ}$. Ἄρα ὁ κολοβὸς κῶνος ΑΒΕΔ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν κορμὸν ΖΗΘΙΚΛ.

Ἀλλὰ κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ προτάσει 18 τοῦ ϛ' βιβλίου.

$$\text{κορ. ΘΖΗΛΙΚ} = \text{ΖΗΘ} \times \frac{1}{3}\,\text{ΠΟ} + \text{ΙΚΛ} \times \frac{1}{3}\,\text{ΠΟ} + \frac{1}{3}\,\text{ΠΟ}\sqrt{\text{ΖΘΗ} \times \text{ΙΚΛ}}.$$

Ἄρα

$$\text{κολ. κῶν. ΑΒΕΔ} = \pi.\overline{\text{ΑΟ}}^2 \times \frac{1}{3}\,\text{ΠΟ} + \pi.\overline{\text{ΔΠ}}^2 \times \frac{1}{3}\,\text{ΠΟ} + \frac{1}{3}\,\text{ΠΟ} \times \text{ΑΟ} \times \text{ΔΠ},$$

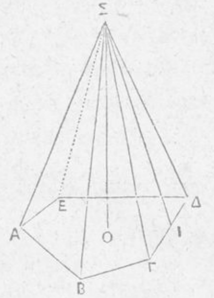
ἢ, ὅπερ ταὐτό,

$$\text{κολ. κῶν. ΑΒΕΔ} = \frac{1}{3}\,\pi.\text{ΠΟ}\,(\overline{\text{ΑΟ}}^2 + \overline{\text{ΔΠ}}^2 + \text{ΑΟ} \times \text{ΔΠ}).$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ παράπλευρος κανονικῆς τινος πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ ἐπιφάνεια ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀποστήματος ΣΙ.

Τῷ ὄντι, ἡ παράπλευρος τῆς κανονικῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ ἐπιφάνεια συντίθεται ἐξ ἴσων ἰσοσκελῶν τριγώνων ΣΔΓ, ΣΒΓ, ΣΑΒ κτλ., ὧν ἕκαστον ἔχει διὰ μέτρον τὴν βάσιν αὐτοῦ ΕΔ, ΒΓ, ΑΒ, κτλ. ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους αὐτοῦ ΣΙ πολλαπλασιασθεῖσαν, ἤτοι $\Sigma\Gamma\Delta = \Gamma\Delta \times \frac{\Sigma I}{2}$, $\Sigma B\Gamma = B\Gamma \times \frac{\Sigma I}{2}$, $\Sigma AB = BA \times \frac{\Sigma I}{2}$, κτλ. Λοιπὸν



τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $\Sigma\Gamma\Delta + \Sigma B\Gamma + \Sigma AB +$ κτλ., ἢ ἡ παράπλευρος τῆς κανονικῆς πυραμίδος ἐπιφάνεια, θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον $(\Gamma\Delta + B\Gamma + AB + \text{κτλ.}) \times \frac{\Sigma I}{2}$, ἤτοι τὴν περίμετρον τῆς βάσεως αὐτῆς, ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀποστήματος ΣΙ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ κυρτὴ τοῦ κώνου ἐπιφάνεια ἔχει διὰ μέτρον τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ πολλαπλασιασθεῖσαν.

Ἂς ἐγγράψωμεν εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου κανονικόν τι πολύγωνον, καὶ ἂς κατασκευάσωμεν τὴν κανονικὴν πυραμίδα, τὴν ἔχουσαν βάσιν τὸ ἐγγραφὲν κανονικὸν πολύγωνον καὶ κορυφὴν τὴν τοῦ κώνου κορυφὴν Σ.

Ἔστω Π ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, Ε ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος καὶ ΣΙ τὸ ἀπόστημα αὐτῆς. Θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ προαποδειχθέντα.

$$E = \Pi \times \frac{\Sigma I}{2}.$$

Ἀλλ' Ε ἔχει δι' ὅριον τὴν κυρτὴν τοῦ κώνου ἐπιφάνειαν, Π τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου, καὶ ΣΙ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΣΕ

Διότι ΣΕ—ΣΙ$<$ΕΙ, καὶ εἴδομεν ἐν τῷ πορίσματι 3 τῆς 9 προτάσεως τοῦ Δ' βιβλίου ὅτι ΕΙ δύναται νὰ κατασταθῇ μικροτέρα παντὸς δεδομένου ποσοῦ, αὐξανομένου ἀρκούντως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. Ἄρα

$$\text{κυρ. ἐπιφ. κών.} = \text{περιφ.}ΟΕ \times \frac{ΣΕ}{2}.$$

Πόρισμα. Αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι δύο κώνων τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ πλευραὶ αὐτῶν, καὶ ἀντιστρόφως.

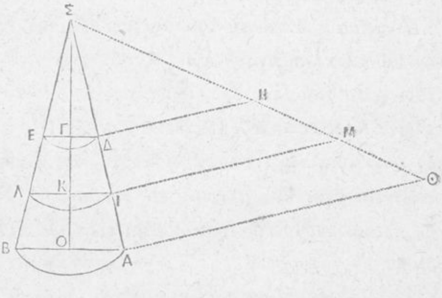
Σχόλιον. Ἔστω Π ἡ τοῦ κώνου πλευρὰ καὶ Ρ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως αὐτοῦ. Ἡ τοῦ κώνου ἐπιφάνεια θέλει ἔχει διὰ μέτρον $2\pi Ρ \times \frac{1}{2}Π$, ἢ $\pi ΡΠ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ κυρτὴ τοῦ κολοβοῦ κώνου ΑΔΕΒ ἐπιφάνεια ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ΑΔ ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων αὐτοῦ ΑΒ, ΔΕ, ἤτοι

$$ΑΔ \times \left(\frac{\text{περιφ. } ΑΟ + \text{περιφ. } ΔΓ}{2}\right).$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἄγομεν διὰ τοῦ ἄξονος ΣΟ τὸ ἐπίπεδον ΣΟΑΘ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Α τὴν ΑΘ κάθετον ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΣΑ τοῦ κώνου, καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τὴν ἀπόστασιν ΑΘ=περιφ. ΑΟ. Ἑνόνομεν ἀκολούθως ΣΘ καὶ ἄγομεν τὴν ΔΗ παράλληλον τῇ ΑΘ.



Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΣΑΟ, ΣΔΓ εἶναι ὅμοια, ἔχομεν

$$ΑΟ : ΔΓ = ΣΑ : ΣΔ, \qquad (1)$$

καὶ, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΣΑΘ : ΣΔΗ εἶναι ὅμοια,

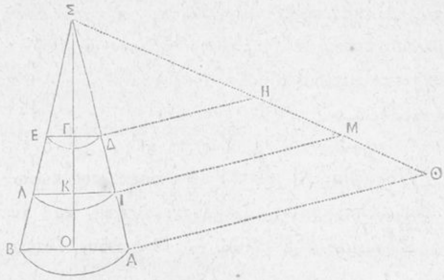
$$ΑΘ : ΔΗ = ΣΑ : ΣΔ. \qquad (2)$$

Λοιπὸν, ἕνεκα τοῦ κοινοῦ λόγου ΣΑ : ΣΔ τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2), θέλομεν ἔχει

$$ΑΘ : ΔΗ = ΑΟ : ΔΓ, \text{ ἢ} = \text{περιφ.}ΑΟ : \text{περιφ.}ΔΓ.$$

Ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς ΑΘ=περιφ. ΑΟ. Ἄρα καὶ ΔΗ=περιφ. ΔΓ.

Τούτου τεθέντος, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΣΑΘ, τὸ ἔχον διὰ μέτρον τὸ γινόμενον $\text{ΑΘ}\times\frac{1}{2}\,\text{ΣΑ}$, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὴν κυρτὴν τοῦ κώνου ἐπιφά-



νειαν, ἥτις ἔχει διὰ μέτρον $\text{περιφ.ΑΟ}\times\frac{1}{2}\,\text{ΣΑ} = \text{ΑΘ}\times\frac{1}{2}\,\text{ΣΑ}$.

Δι' ὅμοιόν δέ τινα λόγον τὸ τρίγωνον ΕΔΗ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὴν κυρτὴν τοῦ κώνου ΣΔΕ ἐπιφάνειαν. Ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ κολοβοῦ κώνου εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν τοῦ τραπεζίου ΑΔΗΘ, ὅπερ ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον.

$$\text{ΑΔ}\times\left(\frac{\text{ΑΘ}+\text{ΔΗ}}{2}\right)=\text{ΑΔ}\times\left(\frac{\text{περιφ ΑΟ}+\text{περιφ.ΔΓ}}{2}\right)$$

Λοιπὸν ἡ τοῦ κολοβοῦ κώνου ΑΔΕΒ ἐπιφάνεια ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ΑΔ ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων.

Πόρισμα. Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Ι, μέσου τῆς πλευρᾶς ΑΔ, ἄξωμεν τὴν ΙΜ παράλληλον τῇ ΑΘ καὶ τὸ ἐπίπεδον ΙΚΛ παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒ, θέλομεν ἔχει ὡς ἀνωτέρω ΙΜ=περιφ.ΙΚ. Ἀλλὰ τὸ τραπέζιον ΑΔΗΘ=ΑΔ×ΙΜ=ΑΔ×περιφ.ΙΚ (πρότ. 7, σχόλ. Γ') Λοιπὸν δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὡσαύτως ὅτι *ἡ κυρτὴ τοῦ κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς ἰσάκις ἀπὸ τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων ἀπεχούσης τομῆς.*

Σχόλιον. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΔ, ἡ ὁλόκληρος πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΟΓ καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένη, στραφῇ περὶ τὴν ΟΓ μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀφ' ἧς ἀνεχώρησε θέσιν, ἡ ἐκ τῆς περιστροφῆς τῆς εὐθείας ταύτης ΑΔ παραγομένη ἐπιφάνεια θέλει ἔχει διὰ μέτρον $\text{ΑΔ}\times\left(\frac{\text{περιφ.ΑΟ}+\text{περιφ.ΔΓ}}{2}\right)$, ἢ ΑΔ×περιφ.ΙΚ, ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΟ, ΔΓ, ΙΚ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΓ, καταβιβασθεῖσαι ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Δ καὶ τοῦ μέσου Ι τῆς εὐθείας ΑΔ.

καὶ σε μέχρι οὗ συναντήσῃ [illegible]

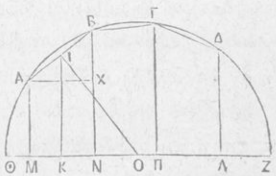
Διότι, ἐὰν προεκβληθῇ ἡ ΑΔ μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὸν ἄξονα ΟΓ εἰς τὸ σημεῖον Σ, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ὑπὸ τῆς ΑΔ παραγομένη ἐπιφάνεια θέλει εἶναι ἡ τοῦ κολοβοῦ κώνου, οὗτινος ΑΟ, ΔΓ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῆς βάσεως καὶ Σ ἡ κορυφὴ τοῦ εἰς ὃν ἀνήκει κώνου. Λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἀνωτέρω γινόμενον.

Ἂν τὸ σημεῖον Δ συνέπιπτε μὲ τὸ σημεῖον Σ, ἢ ἂν ἡ ΑΔ ἦτο παράλληλος τῇ ΟΓ, ἡ ἐκ τῆς περιστροφῆς τῆς ΑΔ περὶ τὸν ἄξονα ΟΓ παραγομένη ἐπιφάνεια ἤθελεν εἶναι, εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν, ἐπιφάνεια κώνου, εἰς δὲ τὴν δευτέραν, ἐπιφάνεια κυλίνδρου. Εἰς ἀμφοτέρας δὲ τὰς περιπτώσεις ὁ τύπος $\text{ΑΔ}\times\left(\dfrac{\text{περιφ. ΑΟ}+\text{περιφ ΔΓ}}{2}\right)$ μᾶς δίδει πάντοτε τὸ μέτρον τῆς ὑπὸ τῆς ΑΔ παραγομένης ἐπιφανείας, ἀρκεῖ μόνον νὰ δώσωμεν εἰς τὴν κάθετον ΔΓ τὰς ἀνηκούσας εἰς ἑκατέραν τῶν περιπτώσεων τιμὰς, αἵτινες προφανῶς εἶναι εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν μηδὲν, εἰς δὲ τὴν δευτέραν ΑΟ. [illegible] ΔΓ = ΑΟ [illegible] ΙΚ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ παραγομένη ἐπιφάνεια ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ μέρους ΑΒΓΔ κανονικοῦ τινος πολυγώνου περὶ τὴν διάμετρον ΘΖ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ κανονικὸν πολύγωνον περιφερείας ἐπὶ τὴν προβολὴν ΜΛ τῆς περιμέτρου ΑΒΓΔ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΖΘ.

Διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Ι, μέσου τῆς πλευρᾶς ΑΒ, καταβιβάσωμεν τὴν ΙΚ κάθετον ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΖΘ, καὶ ἄξωμεν τὴν ἀκτῖνα ΟΙ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ πολύγωνον κύκλου, θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ προαποδειχθέντα



(*) ἐπιφ.ΑΒ $=$ ΑΒ $\times$ περιφ.ΙΚ.

Ἀλλ' ΑΒ $\times$ περιφ.ΙΚ $=$ ΜΝ $\times$ περιφ.ΟΙ. Διότι, ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΑΧ παράλληλος τῇ ΜΝ, τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΧ, ΟΙΚ θέλουσιν εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα προφανῶς τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθέτους, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

(*) Διὰ τῶν συντετμημένων ἐκφράσεων ἐπιφ. ΑΒ, ἐπιφ. ΒΓ κτλ. ἐννοοῦμεν τὰς ἐν τῇ περιστροφικῇ κινήσει ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ παραγομένας ἐπιφανείας.

$$AB : AX \text{ ἢ } MN = OI : IK \text{ ἢ } = \text{περιφ.}OI : \text{περιφ.}IK,$$

ἐξ ἧς ποριζόμεθα τὴν ἰσότητα $AB \times$ περιφ. $IK = MN \times$ περιφ.OI. Λοιπὸν

$$\text{ἐπιφ. } AB = MN \times \text{περιφ.}OI. \quad (1)$$

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι

$$\text{ἐπιφ. } B\Gamma = N\Pi \times \text{περιφ.}OI, \quad (2)$$

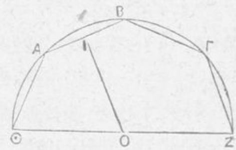
καὶ

$$\text{ἐπιφ. } \Gamma\Delta = \Pi\Lambda \times \text{περιφ.}OI \quad (3)$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1), (2) καὶ (3) εὑρίσκομεν

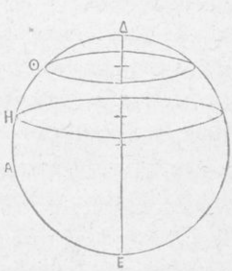
$$\text{ἐπιφ. } AB\Gamma\Delta = (MN + N\Pi + \Pi\Lambda) \times \text{περιφ.}OI = M\Lambda \times \text{περιφ.}OI$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.



Πόρισμα. Ἐὰν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος κανονικὸν πολύγωνον ἔχῃ ἄρτιον ἀριθμὸν πλευρῶν καὶ ὁ ἄξων ΘΖ διέρχηται διὰ δύο ἀντικειμένων κορυφῶν Θ καὶ Ζ, ἡ ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ ἡμιπολυγώνου ΘΑΒΓΖ περὶ τὴν διάμετρον ΘΖ παραγομένη ἐπιφάνεια θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ πολύγωνον κύκλου ἐπὶ τὴν διάμετρον ΘΖ τοῦ περιγεγραμμένου.

ΟΡΙΣΜΟΙ.



1. *Σφαιρικὴ ζώνη* καλεῖται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμενον. Αἱ κυκλικαὶ τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων καλοῦνται *βάσεις* τῆς ζώνης, ἡ δ' ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις *ὕψος* αὐτῆς.

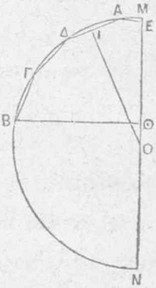
Ἂν τὸ ἕτερον τῶν ἐπιπέδων τούτων ἐφάπτηται τῆς σφαίρας, ἡ ζώνη τότε ἔχει μίαν μόνην βάσιν.

2. Ἐὰν φαντασθῶμεν ὅτι ἡ ἡμιπεριφέρεια ΔΑΕ, περιστρεφομένη περὶ τὴν διάμετρον ΔΕ, παράγει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, τόξον τι αὐτῆς ΘΗ θέλει παράγει συγχρόνως σφαιρικήν τινα ζώνην.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικῆς τινος ζώνης ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους αὐτῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου.

Ἔστω ἡ σφαιρικὴ ζώνη, ἡ ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τόξου ΑΒ περὶ τὴν διάμετρον ΜΝ παραγομένη.



Ἐὰν ἐγγράψωμεν εἰς τὸ τόξον ΑΒ μέρος κανονικοῦ πολυγώνου ΑΔΓΒ, καὶ παραστήσωμεν δι' Ε τὴν ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ μέρους ΑΔΓΒ περὶ τὴν διάμετρον ΜΝ παραγομένην ἐπιφάνειαν, θέλομεν ἔχει κατὰ τὰ προαποδειχθέντα

$$\text{Ε} = \text{περιφ.}\,\text{ΟΙ} \times \text{ΕΘ}.$$

Ἀλλὰ τὸ τόξον ΑΒ εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου μέρους ΑΔΓΒ οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον. Λοιπὸν ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος ζώνη εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ ἐπιφάνεια Ε, ἢ τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ γινόμενον περιφ. ΟΙ$\times$ΕΘ.

Ἀλλ' ἡ μὲν περιφ. ΟΙ ἔχει δι' ὅριον περιφ. ΟΜ, ὁ δὲ παράγων ΕΘ εἶναι σταθερός. Ἄρα

$$\text{ζώνη ΑΒ} = \text{περιφ.}\,\text{ΟΜ} \times \text{ΕΘ}.$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Πόρισμα 1. Αἱ εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἢ εἰς ἴσας σφαίρας ἀνήκουσαι ζῶναι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

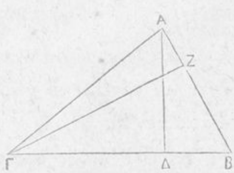
Πόρισμα 2 Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ζώνη, ἔχουσα ὕψος τὴν διάμετρον αὐτῆς Λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου ἐπὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ.

Ἔστω Ρ ἡ τῆς σφαίρας ἀκτίς Ἡ τοῦ μεγίστου κύκλου περιφέρεια θέλει εἶναι $2\pi\text{Ρ}$, ἑπομένως τὸ μέτρον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας $2\pi\text{Ρ}\times 2\text{Ρ} = 4\pi\text{Ρ}^2$. Ἀλλὰ $\pi\text{Ρ}^2$ παριστᾷ τὴν ἐπιφάνειαν μεγίστου κύκλου Λοιπὸν ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τέσσαρας μεγίστους κύκλους, ἑπομένως δύναται νὰ συγκριθῇ μὲ ἐπιπέδους ἐπιφανείας, π. χ. μὲ τὸ ἐπὶ τῆς γραμμικῆς μονάδος κατασκευαζόμενον τετράγωνον, ὡς καὶ ὁ κύκλος, τὰ πολύγωνα κτλ.

Πόρισμα 3. Γνωστοῦ ὄντος τοῦ λόγου τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς γραμμικῆς μονάδος κατασκευαζόμενον τετράγωνον, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον τῶν ἀτράκτων, τῶν σφαιρικῶν τριγώνων καὶ πολυγώνων πρὸς τὸ αὐτὸ τετράγωνον, διότι εὕρομεν ἐν τῷ Ζ' βιβλίῳ τὸν λόγον αὐτῶν πρὸς τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον, ὅπερ εἶναι τὸ ὄγδοον μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Ἐὰν ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ὁ λόγος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς γραμμικῆς μονάδος κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι 11 καὶ ὁ λόγος τῆς ἀτράκτου πρὸς τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον $\frac{1}{2}$, ἡ ἄτρακτος, οὖσα τὸ ἥμισυ τρισορθογωνίου τριγώνου, θέλει εἶναι $\frac{1}{16}$ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἢ τὰ $\frac{11}{16}$ τοῦ τετραγώνου. Ὁ λόγος λοιπὸν τῆς ἀτράκτου πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς γραμμικῆς μονάδος κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι $\frac{11}{16}$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ὁ παραγόμενος ὄγκος ἐκ τῆς περιστροφῆς τριγώνου τινὸς περί τινα εὐθεῖαν, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου τούτου κειμένην καὶ διά τινος τῶν κορυφῶν αὐτοῦ διερχομένην, ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς παραγομένης ἐπιφανείας ὑπὸ τῆς ἀπέναντι τῆς κορυφῆς ταύτης πλευρᾶς ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς καθέτου, τῆς καταβιβαζομένης ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς ἐπὶ τῆς ἀντικειμένης αὐτῇ πλευρᾶς.



1ον. Ἂς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΑΒ στρέφεται περί τινα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ΒΓ. Ὁ ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τριγώνου ΓΑΒ παραγόμενος ὄγκος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν κώνων, τῶν παραγομένων ἐκ τῆς περιστροφῆς τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΓΑΔ, ΑΔΒ. Λοιπὸν θέλομεν ἔχει

$$(*)\ \text{ὄγκ. ΓΑΒ} = \frac{1}{3}\pi.\overline{\text{ΑΔ}}^2.\text{ΓΔ} + \frac{1}{3}\pi.\overline{\text{ΑΔ}}^2.\text{ΒΔ} = \frac{1}{3}\pi\ \overline{\text{ΑΔ}}^2.\text{ΓΒ}. \quad (1)$$

Ἀλλ', ἐὰν καταβιβασθῇ ἡ ΓΖ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ, τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΖΒ, ΑΔΒ θέλουσιν εἶναι ὅμοια, καὶ θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$\text{ΓΖ} : \text{ΑΔ} = \text{ΓΒ} : \text{ΑΒ},$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα $\quad \text{ΓΖ} \times \text{ΑΒ} = \text{ΑΔ} \times \text{ΒΓ}.$

(*) Παριστῶμεν πρὸς συντομίαν διὰ τῆς συντετμημένης παραστάσεως ὄγκ. ΓΑΒ τὸν ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τριγώνου ΓΑΒ περὶ τὴν ΓΒ παραγόμενον ὄγκον.

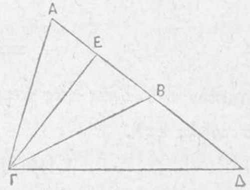
Ἀντεισάγοντες εἰς τὴν ἰσότητα (1) ΓΖ$\times$ΑΒ ἀντὶ τοῦ ΑΔ$\times$ΒΓ, θέλομεν ἔχει

$$\text{ὄγκ. ΓΑΒ} = \frac{1}{3}\,\pi.\ \text{ΑΔ. ΓΖ. ΑΒ} = \frac{1}{3}\,\text{ΓΖ}\times\pi.\ \text{ΑΔ. ΑΒ.}$$

Ἀλλὰ π. ΑΔ. ΑΒ μετρεῖ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐκ τῆς περιστροφῆς τῆς ΑΒ παραγομένου κώνου (πρότ. 11, σχόλ.). Ἄρα

$$\text{ὄγκ. ΓΑΒ} = \text{ἐπιφ. ΑΒ}\times\frac{1}{3}\,\text{ΓΖ.}$$

2ον. Ἂς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΑΒ στρέφεται περί τινα εὐθεῖαν ΓΔ, διερχομένην διά τινος τῶν κορυφῶν αὐτοῦ Γ. Ἐὰν προεκβάλωμεν τὴν ΑΒ μέχρις οὗ συναπαντήσῃ τὸν ἄξονα ΓΔ, καὶ καταβιβάσωμεν ἐκ τῆς κορυφῆς Γ τὴν ΓΕ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ, θέλομεν προφανῶς ἔχει



$$\text{ὄγκ. ΓΑΒ} = \text{ὄγκ. ΓΑΔ} - \text{ὄγκ. ΓΒΔ.}$$

Ἀλλὰ κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἔχομεν

$$\text{ὄγκ. ΓΑΔ} = \text{ἐπιφ. ΑΔ}\times\frac{1}{3}\,\text{ΓΕ,}$$

καὶ

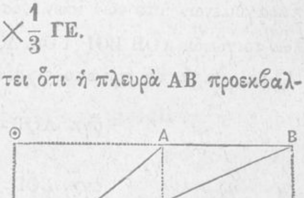
$$\text{ὄγκ. ΓΒΔ} = \text{ἐπιφ. ΒΔ}\times\frac{1}{3}\,\text{ΓΕ.}$$

Ἄρα

$$\text{ὄγκ. ΓΑΒ} = (\text{ἐπιφ. ΑΔ} - \text{ἐπιφ. ΒΔ})\times\frac{1}{3}\,\text{ΓΕ}$$

$$= \text{ἐπιφ. ΑΒ}\times\frac{1}{3}\,\text{ΓΕ.}$$

3ον. Ἡ προηγηθεῖσα ἀπόδειξις ὑποθέτει ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ προεκβαλλομένη συναπαντᾷ τὸν ἄξονα ΓΔ. Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα καὶ τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.



Ἐὰν καταβιβάσωμεν ΑΕ καὶ ΒΔ καθέτους ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΓΔ, καὶ ΓΘ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ, θέλομεν ἔχει προφανῶς

$$\text{ὄγκ. ΓΑΒ} = \text{ὄγκ. ΓΑΕ} + \text{ὄγκ. ΑΒΔΕ} - \text{ὄγκ. ΓΒΔ.}$$

Ἀλλὰ

$$\text{ὄγκ. ΓΑΕ} = \frac{1}{3}\,\pi.\ \overline{\text{ΑΕ}}^2.\ \text{ΓΕ.}$$

$$\text{ὄγκ. ΑΒΔΕ} = \pi.\ \overline{\text{ΑΕ}}^2.\ \text{ΕΔ},$$

$$\text{ὄγκ. ΓΒΔ} = \frac{1}{3}\pi.\ \overline{\text{ΑΕ}}^2.\ \text{ΓΔ}.$$

Ἄρα $$\text{ὄγκ. ΓΑΒ} = \frac{1}{3}\pi.\ \overline{\text{ΑΕ}}^2.\ \text{ΓΕ} + \pi.\ \overline{\text{ΑΕ}}^2.\ \text{ΕΔ} - \frac{1}{3}\pi.\ \overline{\text{ΑΕ}}^2\ \text{ΓΔ}.$$

$$= \pi.\ \overline{\text{ΑΕ}}^2 \times \left(\frac{1}{3}\text{ΓΕ} + \text{ΕΔ} - \frac{1}{3}\text{ΓΔ}\right).$$

Καὶ ἐπειδὴ ΓΔ=ΓΕ+ΕΔ, ἡ προηγουμένη ἰσότης τρέπεται εἰς τὴν ἑξῆς

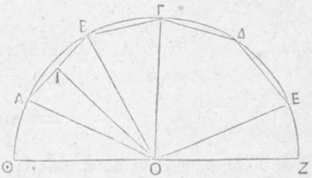
$$\text{ὄγκ. ΓΑΒ} = \pi.\ \overline{\text{ΑΕ}}^2 \times \frac{2}{3}\text{ΕΔ} = \frac{1}{3}\text{ΑΕ}.\ 2\pi.\ \text{ΑΕ}.\ \text{ΕΔ}$$

$$= \text{ἐπιφ. ΑΒ} \times \frac{1}{3}\text{ΓΘ}.$$

Λοιπὸν καθ' ὅλας τὰς περιπτώσεις ὁ παραγόμενος ὄγκος ἐκ τῆς περιστροφῆς κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἔστω ΑΒΓΔΕ μέρος τι κανονικοῦ πολυγώνου. Ὁ παραγόμενος ὄγκος ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως ΑΟΕ περί τινα ἐκτὸς αὐτοῦ κειμένην διάμετρον ΖΘ ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ὑπὸ τῆς περιμέτρου ΑΒΓΔΕ παραγομένης ἐπιφανείας ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ἀποστήματος ΟΙ τοῦ πολυγώνου.



Διότι ὁ ὑπὸ τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως ΑΟΕ παραγόμενος ὄγκος εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων, τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν ἴσων ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, ΔΟΕ. Ἀλλὰ κατὰ τὰ προαποδειχθέντα

$$\text{ὄγκ. ΑΟΒ} = \text{ἐπιφ. ΑΒ}.\ \frac{1}{3}\text{ΟΙ},$$

$$\text{ὄγκ. ΒΟΓ} = \text{ἐπιφ. ΒΓ}.\ \frac{1}{3}\text{ΟΙ},$$

$$\text{ὄγκ. ΓΟΔ} = \text{ἐπιφ. ΓΔ}.\ \frac{1}{3}\text{ΟΙ},$$

$$\text{ὄγκ. ΔΟΕ} = \text{ἐπιφ. ΔΕ}\ \frac{1}{3}\text{ΟΙ}.$$

Ἄρα $$\text{ὄγκ. ΑΟΕ} = \frac{1}{3}\text{ΟΙ} \times (\text{ἐπιφ. ΑΒ} + \text{ἐπιφ. ΒΓ} + \text{ἐπιφ. ΓΔ} + \text{ἐπιφ. ΔΕ})$$

$$= \frac{1}{3}\text{ΟΙ, ἐπιφ. ΑΒΓΔΕ}.$$

ΟΡΙΣΜΟΙ.

1. Ἐνῷ τὸ ἡμικύκλιον ΔΓΕ περιστρεφόμενον περὶ τὴν διάμετρον ΔΕ παράγει τὴν σφαῖραν, πᾶς κυκλικὸς τομεὺς ΘΓΗ παράγει στερεόν τι καλούμενον *σφαιρικὸς τομεύς*.

Ὁ σφαιρικὸς τομεὺς περατοῦται ὑπὸ τῆς ζώνης, τῆς ὑπὸ τοῦ τόξου ΘΗ παραγομένης.

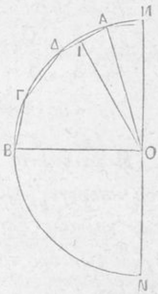
2. Τὸ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμενον μέρος τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας ὀνομάζεται *σφαιρικὸν τμῆμα*.

Ἡ μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἀπόστασις καλεῖται ὕψος τοῦ τμήματος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶς σφαιρικὸς τομεὺς ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ὑφ' ἧς περατοῦται ζώνης ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.

Ἔστω ΑΟΒ ὁ κυκλικὸς τομεύς, ὅστις περὶ τὸν ἄξονα ΜΝ στρεφόμενος παράγει τὸν σφαιρικὸν τομέα.



Ἂς ἐγγράψωμεν εἰς τὸ τόξον ΑΒ μέρος κανονικοῦ πολυγώνου ΑΔΓΒ, καὶ παραστήσωμεν δι' Ο τὸν ὑπὸ τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως ΑΔΓΒΟ παραγόμενον ὄγκον. Κατὰ τὰ προαποδειχθέντα θέλομεν ἔχει,

$$\text{Ο} = \text{ἐπιφ. ΑΔΓΒ} \cdot \frac{1}{3}\,\text{ΟΙ}.$$

Ἀλλὰ τὸ τόξον ΑΒ εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ μέρος τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ΑΔΓΒ, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον. Ἄρα ὁ ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΟΒ παραγόμενος σφαιρικὸς τομεὺς εἶναι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ὁ ὑπὸ τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως ΑΔΓΒΟ παραγόμενος ὄγκος Ο. Ἀλλὰ τὸ ὅριον τοῦ ὄγκου Ο εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὅριον τοῦ γινομένου ἐπιφ. ΑΔΓΒ$\times\frac{1}{3}$ ΟΙ, καὶ τὸ μὲν ὅριον τῆς ἐπιφ. ΑΔΓΒ εἶναι ἡ ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΒ παραγομένη ζώνη, τὸ δὲ ὅριον τοῦ παράγοντος $\frac{1}{3}$ ΟΙ εἶναι $\frac{1}{3}$ΟΜ. Ἄρα

$$\text{ὄγκ. σφαιρικοῦ τομέως} = \text{ζώνην ΑΒ} \times \frac{1}{3}\,\text{ΟΜ}.$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

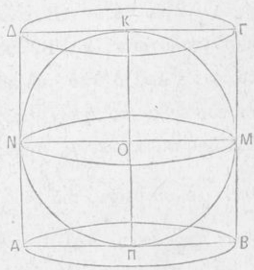
Σχόλιον 1. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ παράγων τὸν σφαιρικὸν τομέα κυκλικὸς τομεὺς εἶναι ἴσος μὲ ἡμικύκλιον, ὁ ὑπ' αὐτοῦ παραγόμενος ὄγκος ἤθελεν εἶναι ὁ τῆς σφαίρας ὄγκος. Ἀλλὰ τότε ἡ ζώνη, ἡ τὸν σφαιρικὸν τομέα περατοῦσα, ἤθελεν εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Λοιπὸν ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος.

Σχόλιον 2. Ἔστω Ρ ἡ τῆς σφαίρας ἀκτὶς καὶ Η τὸ ὕψος τῆς ζώνης, τῆς περατούσης τὸν σφαιρικὸν τομέα. Ἡ ζώνη ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον $2\pi Ρ.Η$. Ὁ σφαιρικὸς λοιπὸν τομεὺς θέλει ἔχει διὰ μέτρον $2\pi Ρ.Η.\frac{1}{3}Ρ$, ἢ $\frac{2}{3}\pi Ρ^2 Η$, ἡ δὲ σφαῖρα $4\pi Ρ^2.\frac{1}{3}Ρ$, ἢ $\frac{4}{3}\pi Ρ^3$.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Δ τὴν τῆς σφαίρας διάμετρον, θέλομεν ἔχει $Ρ=\frac{Δ}{2}$, ἑπομένως $Ρ^3=\frac{Δ^3}{8}$. Ἀντικαθιστῶντες δὲ εἰς τὴν παράστασιν $\frac{4}{3}\pi Ρ^3$ ἀντὶ τοῦ $Ρ^3$ τὸ ἴσον αὐτῷ $\frac{Δ^3}{8}$ θέλομεν ἔχει διὰ μέτρον τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας $\frac{4}{3}\pi\frac{Δ^3}{8}$ ἢ $\frac{1}{6}\pi Δ^3$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι πρὸς ὁλόκληρον τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὴν κυλίνδρου (συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων) ὡς 2 πρὸς 3. Οἱ ὄγκοι τῶν δύο τούτων σωμάτων ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους τὸν αὐτὸν λόγον.



1ον. Ἔστω ΜΠΝΚ ὁ μέγιστος τῆς σφαίρας κύκλος καὶ ΑΒΓΔ τὸ περιγεγραμμένον εἰς αὐτὸν τετράγωνον. Ἐὰν συγχρόνως τὸ ἡμικύκλιον ΠΝΚ καὶ τὸ ἡμιτετράγωνον ΠΑΔΚ περιστραφῶσι περὶ τὴν διάμετρον ΠΚ, τὸ μὲν ἡμικύκλιον θέλει παραγάγει τὴν σφαῖραν, τὸ δὲ ἡμιτετράγωνον τὸν περιγεγραμμένον εἰς αὐτὴν κύλινδρον.

Τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ κυλίνδρου εἶναι προφανῶς ἴσον μὲ τὴν διάμετρον ΠΚ, καὶ ἡ βάσις αὐτοῦ εἶναι ἴση μὲ τὸν μέγιστον κύκλον ΠΝΚΜ, διότι ἔχει διάμετρον τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ, καὶ

ΑΒ=ΜΝ=ΠΚ. Λοιπὸν ἡ κυρτὴ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου ἐπὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ, τουτέστιν εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τέσσαρας μεγίστους κύκλους, ὡς καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια (πρότ. 14, πόρ. 2). Λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὴν κυλίνδρου.

Ἀλλ' ἡ ὁλικὴ τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου ἐπιφάνεια εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας καὶ τῆς τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων, τουτέστιν εἶναι ἰσοδύναμος μὲ ἓξ μεγίστους κύκλους, ἐνῷ ἡ τῆς σφαίρας εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τέσσαρας μεγίστους κύκλους. Λοιπὸν

ὁλ. ἐπιφ. περιγ. κυλίνδρου : ἐπιφ. ἐγγεγ. σφαίρας$=6:4$ ἢ $=3:2$.

2ον. Τὸ μέτρον τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Λοιπὸν ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν κυλίνδρου ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ τὴν βάσιν αὐτοῦ ἀποτελοῦντος μέγιστου κύκλου ἐπὶ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας. Ἀλλ' ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τέσσαρων μεγίστων κύκλων ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς (πρότ. 17, σχόλ. 1), ἢ ὅπερ αὐτὸ, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον μεγίστου κύκλου ἐπὶ τὰ $\frac{4}{3}$ τῆς ἀκτῖνος ἢ ἐπὶ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέτρου αὐτῆς. Λοιπὸν ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι πρὸς τὸν ὄγκον τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸν σφαίρας ὡς 1 πρὸς $\frac{2}{3}$, ἢ ὡς 3 πρὸς 2.

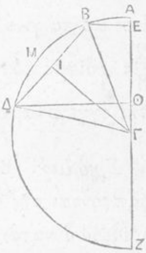
Σχόλιον. Ἐὰν φαντασθῶμεν πολύεδρον, οὗτινος ὅλαι αἱ ἕδραι ἐφάπτονται τῆς σφαίρας, τὸ εἰς τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένον τοῦτο πολύεδρον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποτελούμενον ἐκ πυραμίδων, ἐχουσῶν κοινὴν κορυφὴν τὸ τῆς σφαίρας κέντρον καὶ βάσεις τὰς τοῦ πολυέδρου ἕδρας. Ἑκάστη τῶν πυραμίδων τούτων θέλει ἔχει ὕψος τὴν τῆς σφαίρας ἀκτῖνα (πρότ. 2, Ζ'), ἐπομένως διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ἕδρας τοῦ πολυέδρου, ἥτις χρησιμεύει εἰς αὐτὴν ὡς βάσις, ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας. Λοιπὸν ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν πολυέδρου ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας. Ἀλλὰ καὶ ὁ τῆς σφαίρας ὄγκος ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος. Ἄρα ὁ ὄγκος παντὸς περιγεγραμμένου εἴς τινα σφαῖραν πολυέδρου εἶναι πρὸς τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας, ὡς ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Ἡ διὰ τὸν περιγεγραμμένον λοιπὸν κύλινδρον προαποδειχθεῖσα ἰδιότης εἶναι κοινὴ καὶ εἰς ἄπειρα ἄλλα σώματα.

Βλέπομεν πρὸς τούτοις ὅτι οἱ ὄγκοι δύο περιγεγραμμένων εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἢ εἰς ἴσας σφαίρας πολυέδρων εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν.

Παρομοίως, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου εἰς κύκλον τινὰ πολυγώνου εἶναι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου ὡς ἡ περίμετρος αὐτοῦ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, καὶ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν εἰς αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους περιγεγραμμένων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ περίμετροι αὐτῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ παραγόμενον στερεὸν ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΒΜΔ περὶ τὴν ἐκτὸς αὐτοῦ κειμένην διάμετρον ΑΓΖ ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ ἕκτου μέρους τοῦ κύκλου, τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν χορδὴν ΒΔ τοῦ τμήματος ΒΜΔ, ἐπὶ τὴν προβολὴν ΕΘ τῆς χορδῆς ΒΔ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΖ.



Διότι ἔχομεν προφανῶς

$$\text{ὄγκ. ΒΜΔ} = \text{ὄγκ. ΓΔΜΒ} - \text{ὄγκ. ΓΔΒ}.$$

Ἀλλ' $\quad \text{ὄγκ. ΓΔΜΒ} = \frac{2}{3}\pi.\ \overline{\text{ΓΒ}}^2.\ \text{ΕΘ},$

καὶ $\quad \text{ὄγκ. ΓΔΒ} = \frac{1}{3}\text{ΓΙ. ἐπιφ. ΒΔ},$

πρὸς τούτοις $\quad \text{ἐπιφ. ΒΔ} = 2\pi.\ \text{ΓΙ. ΕΘ}.$

Ἄρα $\quad \text{ὄγκ. ΒΜΔ} = \frac{2}{3}\pi.\ \overline{\text{ΓΒ}}^2.\ \text{ΕΘ} - \frac{1}{3}\text{ΓΙ}.\ 2\pi.\ \text{ΓΙ. ΕΘ}$

$$= \frac{2}{3}\pi\ \text{ΕΘ} \times (\overline{\text{ΓΒ}}^2 - \overline{\text{ΓΙ}}^2).$$

Ἀφ' ἑτέρου εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΙΒ ἔχομεν

$$\overline{\text{ΓΒ}}^2 - \overline{\text{ΓΙ}}^2 = \overline{\text{ΒΙ}}^2 = \frac{\overline{\text{ΔΒ}}^2}{4}.$$

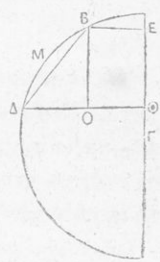
Λοιπὸν $\quad \text{ὄγκ. ΒΜΔ} = \frac{2}{3}\pi.\ \text{ΕΘ}.\ \frac{\overline{\text{ΒΔ}}^2}{4} = \frac{1}{6}\pi.\ \overline{\text{ΒΔ}}^2,\ \text{ΕΘ}.$

Λοιπὸν τὸ παραγόμενον στερεὸν κτλ.

Σχόλιον. Τὸ ὑπὸ τοῦ τμήματος ΒΜΔ παραγόμενον στερεὸν εἶναι πρὸς τὴν σφαῖραν, τὴν ἔχουσαν διάμετρον τὴν χορδὴν ΒΔ, ὡς $\frac{1}{6}\pi\ \overline{\text{ΒΔ}}^2.\ \text{ΕΘ}$ πρὸς $\frac{1}{6}\pi.\ \overline{\text{ΒΔ}}^3$, ἢ ὡς ΕΘ : ΒΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 20. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πᾶν τμῆμα σφαίρας μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμενον ἔχει διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν βάσεων αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ, αὐξηθὲν κατὰ τὸ μέτρον τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας, τῆς ἐχούσης διάμετρον τὸ ὕψος τοῦ τμήματος.



Ἔστωσαν ΒΕ, ΔΘ αἱ τῶν βάσεων τοῦ τμήματος ἀκτῖνες καὶ ΕΘ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος σφαιρικὸν τμῆμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς παραγόμενον ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ κυκλικοῦ χωρίου ΒΜΔΘΕ περὶ τὸν ἄξονα ΕΘ. Λοιπὸν

$$\text{ὄγκ. ΒΜΔΘΕ} = \text{ὄγκ. ΒΜΔ} + \text{ὄγκ. ΒΔΘΕ}.$$

Ἀλλ'
$$\text{ὄγκ. ΒΜΔ} = \frac{1}{6}\pi.\ \overline{\text{ΒΔ}}^2\ \text{ΕΘ},$$

καὶ
$$\text{ὄγκ. ΒΔΘΕ} = \frac{1}{3}\pi.\ \text{ΕΘ}\times(\overline{\text{ΒΕ}}^2 + \overline{\text{ΔΘ}}^2 + \text{ΒΕ}.\text{ΔΘ}).$$

Ἄρα
$$\text{ὄγκ. ΒΜΔΕΘ} = \frac{1}{6}\pi.\ \text{ΕΘ}\times(2\overline{\text{ΒΕ}}^2 + 2\overline{\text{ΔΘ}}^2 + 2\text{ΒΕ}.\ \text{ΔΘ} + \overline{\text{ΒΔ}}^2). \quad (1)$$

Ἀλλ', ἐὰν ἄξωμεν τὴν ΒΟ παράλληλον τῇ ΕΘ, θέλομεν ἔχει

$$\text{ΔΟ} = \text{ΔΘ} - \text{ΒΕ} \text{ καὶ } \overline{\text{ΔΟ}}^2 = \overline{\text{ΔΘ}}^2 + \overline{\text{ΒΕ}}^2 - 2\text{ΔΘ}\times\text{ΒΕ},$$

ἐπομένως
$$\overline{\text{ΒΔ}}^2 = \overline{\text{ΒΟ}}^2 + \overline{\text{ΔΟ}}^2 = \overline{\text{ΕΘ}}^2 + \overline{\text{ΔΘ}}^2 + \overline{\text{ΒΕ}}^2 - 2\text{ΒΕ}\times\text{ΔΘ}.$$

Ἀντεισάγοντες εἰς τὴν ἰσότητα (1) ἀντὶ τοῦ $\overline{\text{ΒΔ}}^2$ τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν αὐτοῦ τιμὴν καὶ ἁπλοποιοῦντες, θέλομεν ἔχει

$$\text{ὄγκ. ΒΜΔΕΘ} = \frac{1}{6}\pi.\ \text{ΕΘ}\ (3\overline{\text{ΒΕ}}^2 + 3\overline{\text{ΔΘ}}^2 + \overline{\text{ΕΘ}}^2),$$

ἤ, ὅπερ ταὐτό, $\text{ὄγκ. ΒΜΔΕΘ} = \frac{1}{6}\pi.\ \overline{\text{ΕΘ}}^3 + \text{ΕΘ}\times\left(\frac{\pi.\ \overline{\text{ΒΕ}}^2 + \pi.\ \overline{\text{ΔΘ}}^2}{2}\right)$.

Λοιπὸν πᾶν τμῆμα σφαίρας μεταξὺ δύο παραλλήλων κτλ.

Πόρισμα. Ἂν ἡ μία τῶν βάσεων αὐτοῦ ἦτο μηδὲν, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος σφαιρικὸν τμῆμα ἤθελεν ἔχει μίαν μόνην βάσιν. Λοιπὸν *πᾶν τμῆμα σφαίρας, μίαν μόνην ἔχον βάσιν, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἡμίσεος τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ τῆς σφαίρας, τῆς ἐχούσης διάμετρον τὸ ὕψος τοῦ τμήματος.*

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΟΓΔΟΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΤΟΥ Δ' ΒΙΒΛΙΟΥ.

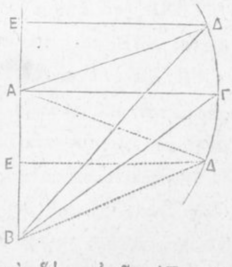
ΟΡΙΣΜΟΙ.

1. *Μέγιστον* καλεῖται τὸ ποσὸν ἢ μέγεθος, τὸ παντὸς ἄλλου τοῦ αὐτοῦ εἴδους μεγαλείτερον, *ἐλάχιστον* δὲ τὸ μικρότερον. Οὕτω π. χ. ἡ τοῦ κύκλου διάμετρος εἶναι μεγαλειτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας, τὰς ἑνονούσας δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα τῆς περιφερείας, ἡ δὲ ἔκ τινος σημείου ἐπί τινος δεδομένης εὐθείας καταβιβαζομένη κάθετος εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας, τὰς ἑνονούσας τὸ δεδομένον σημεῖον μὲ ἓν ὁποιονδήποτε σημεῖον τῆς δεδομένης εὐθείας. Ἡ τοῦ κύκλου λοιπὸν διάμετρος εἶναι *μέγιστον*, ἡ δ' ἔκ τινος σημείου ἐπί τινος εὐθείας καταβιβαζομένη κάθετος *ἐλάχιστον*.

2. *Ἰσοπερίμετρα σχήματα* ὀνομάζονται τὰ ἴσας περιμέτρους ἔχοντα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐξ ὅλων τῶν σχηματιζομένων τριγώνων μὲ δύο δεδομένας πλευρὰς καὶ τρίτην κατ' ἀρέσκειαν μέγιστον εἶναι ἐκεῖνο, ἐν ᾧ αἱ δεδομέναι πλευραὶ σχηματίζουσιν ὀρθὴν γωνίαν.



Ἔστωσαν ΒΑΓ, ΒΑΔ δύο τρίγωνα ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΑΒ κοινὴν καὶ τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΔ ἴσας. Ἐὰν ἡ γωνία ΒΑΓ ἦναι ὀρθή, λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΑΓ εἶναι μεγαλείτερον τοῦ τριγώνου ΒΑΔ, οὗτινος ἡ ἔχουσα κορυφὴν τὸ σημεῖον Α γωνία εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα.

Διότι τὰ τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ ἔχοντα τρίγωνα ΒΑΓ, ΒΑΔ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν ΑΓ, ΔΕ.

Ἀλλ' ἡ κάθετος ΔΕ εἶναι μικροτέρα τῆς πλαγίας ΑΔ, ἢ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΓ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΑΔ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου ΒΑΓ. Λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΑΓ, τὸ ἔχον τὴν γωνίαν Α, τὴν ὑπὸ τῶν δύο δεδομένων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ σχηματιζομένην, ὀρθὴν, εἶναι μέγιστον.

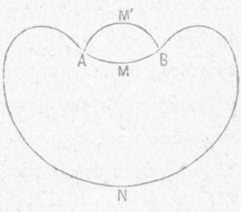
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. ΘΕΩΡΗΜΑ·

Ἐξ ὅλων τῶν ἰσοπεριμέτρων σχημάτων ὁ κύκλος εἶναι μεγαλείτερος.

1^{ον}. Ἐν πρώτοις εἶναι φανερὸν ὅτι ὑπάρχουσιν ἄπειρα ἰσοπερίμετρα σχήματα διαφόρων μορφῶν καὶ ἐμβαδῶν, καὶ ὅτι τὰ ἐμβαδὰ ταῦτα δὲν δύναται ν' αὐξάνωσιν ἐπ' ἄπειρον.

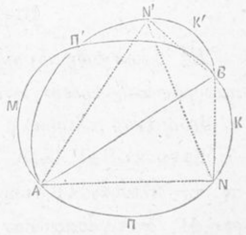
Μεταξὺ λοιπὸν τῶν σχημάτων, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν περίμετρον, ὑπάρχουσιν ἓν ἢ πλειότερα μέγιστα.

2^{ον}. Πᾶν μέγιστον σχῆμα δεδομένης περιμέτρου εἶναι κυρτόν.



Διότι ἔστω ΑΜΒΝ κεκλεισμένη τις γραμμὴ μὴ κυρτή. Ἐὰν στρέψωμεν τὸ εἰσέχον μέρος ΑΜΒ περὶ τὴν διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β διερχομένην εὐθεῖαν μέχρις οὗ λάβῃ τὴν θέσιν ΑΜ'Β, συμμετρικὴν τῆς ΑΜΒ, τὸ σχῆμα ΑΜ'ΒΝ θέλει ἔχει τὴν αὐτὴν περίμετρον μὲ τὸ πρῶτον, τὸ δ' ἐμβαδὸν αὐτοῦ θέλει εἶναι προφανῶς μεγαλείτερον τοῦ ΑΜΒΝ.

3^{ον}. Ἔστω ΑΜΒΝ μέγιστόν τι σχῆμα δεδομένης περιμέτρου. Λέγω ὅτι πᾶσα εὐθεῖα ΑΒ, διαιροῦσα τὴν περίμετρον αὐτοῦ εἰς δύο ἴσα μέρη, διαιρεῖ ὡσαύτως καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα. Διότι, ἂν τὸ μέρος ΑΝΒ ἦτο μεγαλείτερον τοῦ ΑΜΒ, τὸ σχῆμα ΑΝ'ΒΝΠ, τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τοῦ σχήματος ΑΝΒ καὶ τοῦ συμμετρικοῦ αὐτοῦ ΑΝ'Β, ἤθελεν ἔχει τὴν αὐτὴν μὲ τὸ ΑΜΒΝ περίμετρον καὶ ἐμβαδὸν μεγαλείτερον. Λοιπὸν ΑΜΒΝ δὲν ἤθελεν εἶναι μέγιστον. Λοιπὸν πᾶσα εὐθεῖα ΑΒ, διαιροῦσα τὴν περίμετρον κτλ.



Ἐντεῦθεν ἕπεται πρὸς τούτοις ὅτι, ἐὰν ΑΜΒΝ ἦναι μέγιστον, ΑΝ'ΒΝ θέλει εἶναι ὡσαύτως μέγιστον.

Ἔστω τώρα Ν' τὸ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ συμμετρικὸν τοῦ σημείου Ν σημεῖον. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΝ'Β, ΑΝΒ θέλουσιν εἶναι ἴσα.

Τούτου δὲ τεθέντος, ἐὰν αἱ γωνίαι ΑΝ'Β, ΑΝΒ δὲν ἦναι ὀρθαί, δυνάμεθα ν' αὐξήσωμεν ταυτοχρόνως τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΝΒ, ΑΝ'Β, χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὸ μέγεθος τῶν πλευρῶν αὐτῶν ΑΝ, ΒΝ, ΑΝ', ΒΝ' οὔτε τὸ τῶν τμημάτων ΑΠΝ, ΑΠ'Ν, ΒΚΠ, ΒΚ'Ν, μεταβάλλοντες τὴν κοινὴν αὐτῶν βάσιν ΑΒ οὕτως, ὥστε αἱ γωνίαι ΑΝΒ, ΑΝ'Β νὰ καταστάθωσιν ὀρθαί. Ἀλλὰ τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ νέου σχήματος θέλει αὐξήσει χωρὶς ἡ περίμετρος αὐτοῦ νὰ μεταβληθῇ, τοῦθ' ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Λοιπὸν αἱ γωνίαι Ν, Ν' εἶναι ὀρθαί. Ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου τὸ σημεῖον Ν ἐλήφθη κατ' ἀρέσκειαν ἐπὶ τῆς καμπύλης ΑΠΒ. Λοιπὸν ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι ἡμιπεριφέρεια, ἐπομένως ἡ ὅλη καμπύλη ΑΝ'ΒΝ' θέλει εἶναι περιφέρεια κύκλου. Λοιπὸν ἐξ ὅλων κτλ.

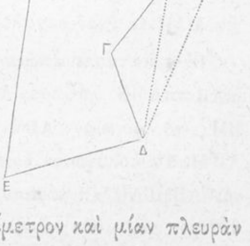
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐξ ὅλων τῶν τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν ἐχόντων ἐπιπέδων σχημάτων ὁ κύκλος ἔχει τὴν μικροτέραν περίμετρον.

Διότι, ἂν ἡ περίμετρος σχηματός τινος, οὗτινος τὸ ἐμβαδὸν Α εἶναι ἴσον μὲ τὸ τοῦ κύκλου, ἦτο μικροτέρα τῆς τοῦ κύκλου, ἠδυνάμεθα νὰ μεταβάλωμεν αὐτὴν εἰς περιφέρειαν κύκλου, καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ Β ἤθελεν εἶναι τότε κατὰ τὰ προαποδειχθέντα μεγαλείτερον τοῦ Α· Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τοῦ δευτέρου τούτου κύκλου ἤθελεν εἶναι μεγαλείτερον τοῦ πρώτου, ἡ δὲ περίμετρος αὐτοῦ μικροτέρα τῆς τοῦ πρώτου, ὅπερ ἄτοπον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΛΗΜΜΑ.

Πᾶν πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, ἔχον μίαν εἰσέχουσαν γωνίαν, δύναται νὰ μεταβληθῇ εἰς κυρτὸν πολύγωνον, ἔχον τὴν αὐτὴν περίμετρον, μεγαλειτέραν ἐπιφάνειαν καὶ μίαν πλευρὰν ὀλιγώτερον.

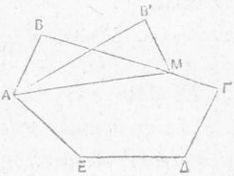


Διότι, ἐὰν προεκβάλωμεν τὴν ΑΒ καὶ ἑνώσωμεν ὅλα τὰ σημεῖα τῆς προεκβολῆς ταύτης μετὰ τοῦ σημείου Δ, τὸ ἄθροισμα ΒΙ+ΙΔ, κατ' ἀρχὰς ἴσον μὲ τὴν ΒΔ, θέλει αὐξάνεσθαι βαθμηδὸν μέχρι τοῦ ἀπείρου. Ὑπάρχει λοιπὸν σημεῖόν τι Ι τοιοῦτον, ὥστε ΒΙ+ΙΔ=ΒΓ+ΓΔ. Τὸ πολύγωνον λοιπὸν ΑΒΙΔΕ εἶναι προφανῶς μεγαλείτερον τοῦ ΑΒΓΔΕ, ἔχει τὴν αὐτὴν περίμετρον καὶ μίαν πλευρὰν ὀλιγώτερον. Λοιπὸν κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. ΘΕΩΡΗΜΑ.

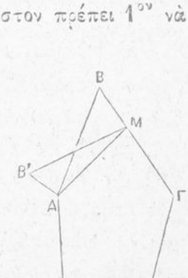
Ἐξ ὅλων τῶν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων τὸ κανονικὸν πολύγωνον εἶναι τὸ μεγαλείτερον.

Ἐπειδὴ πᾶν κανονικὸν πολύγωνον ἔχει τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας καὶ τὰς γωνίας του ἴσας, ἀρκεῖ πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος ν' ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν πολύγωνόν τι δὲν ἔχῃ ὅλας αὐτοῦ τὰς πλευρὰς καὶ ὅλας αὐτοῦ τὰς γωνίας ἴσας, δὲν δύναται νὰ ἦναι μέγιστον μεταξὺ τῶν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων.



1ον. Ἔστω μ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ΑΒ < ΒΓ. Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΒΓ σημεῖόν τι Μ ἀρκετὰ πλησίον τοῦ σημείου Γ ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἀκόμη ἡ ἀνισότης ΑΒ < ΒΜ, ἂς κατασκευάσωμεν τὴν γωνίαν ΑΜΒ′=ΒΑΜ, λάβωμεν ΜΒ′=ΑΒ καὶ ἄξωμεν τὴν ΑΒ′.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΜ εἶναι προφανῶς ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒ′Μ. Τὸ πολύγωνον λοιπὸν ΑΒ′ΜΓΔΕ ἔχει τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ΑΒΓΔΕ ἐμβαδὸν, την αὐτὴν περίμετρον, μίαν πλευρὰν περισσότερον καὶ μίαν γωνίαν εἰσέχουσαν· διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΜ, ἡ γωνία ΒΜΑ εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΑΜ ἢ τῆς ἴσης αὐτῇ Β′ΜΑ. Ἀλλὰ κατὰ τὰ προαποδειχθέντα τὸ πολύγωνον τοῦτο δύναται νὰ μεταβληθῇ εἰς ἕτερον ἰσοπερίμετρον πολύγωνον μ ἀριθμοῦ πλευρῶν καὶ μεγαλειτέρας ἐπιφανείας. Λοιπὸν τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ διὰ νὰ ἦναι μέγιστον πρέπει 1ον νὰ ἔχῃ ὅλας αὐτοῦ τὰς πλευρὰς ἴσας.



2ον. Ἂς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι εἰς τὸ μ πλευρὰς ἔχον πολύγωνον ΑΒΓΔΗ ἡ γωνία Α εἶναι μεγαλειτέρα τῆς Β, καὶ ἂς λάβωμεν σημεῖόν τι Μ ἀρκετὰ πλησίον τοῦ σημείου Β, ὥστε ἡ γωνία ΜΑΗ νὰ ἦναι μεγαλειτέρα τῆς ΑΜΓ.

Ἐὰν κατασκευάσωμεν ὡσαύτως τὴν γωνίαν ΜΑΒ′=ΑΜΒ, λάβωμεν ΑΒ′=ΑΒ καὶ ἄξωμεν τὴν ΒΜ′, τὸ τρίγωνον ΑΒΜ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΑΒ′Μ. Τὸ πολύγωνον λοιπὸν ΑΒ′ΜΓΔΗ ἔχει τὴν αὐτὴν μὲ τὸ πολύγωνον ΑΒΜΓΔΗ ἐπιφάνειαν, τὴν αὐτὴν περίμετρον μίαν πλευρὰν περισσότερον καὶ μίαν γωνίαν εἰσέχουσαν· διότι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΜΓ καὶ ΑΜΒ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν

ΜΑΗ, ΜΑΒ' θέλει ἀναγκαίως εἶναι μεγαλείτερον δύο ὀρθῶν, διότι ἡ γωνία ΑΜΗ ὑπετέθη μεγαλειτέρα τῆς ΑΜΓ.

Ἀλλὰ τὸ πολύγωνον τοῦτο δύναται νὰ μεταβληθῇ εἰς ἕτερον ἰσοπερίμετρον πολύγωνον, ἔχον μ πλευρὰς καὶ μεγαλειτέραν ἐπιφάνειαν. Λοιπὸν τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΗ διὰ νὰ ἦναι μέγιστον πρέπει 2ον νὰ ἔχῃ ὅλας αὐτοῦ τὰς γωνίας ἴσας.

Ἀπεδείχθη λοιπὸν ὅτι ἐξ ὅλων τῶν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων τὸ κανονικὸν πολύγωνον εἶναι τὸ μεγαλείτερον.

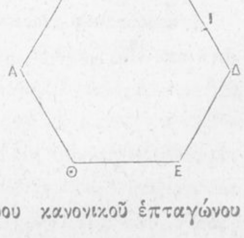
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐξ ὅλων τῶν πολυγώνων, τῶν ἐχόντων τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν, τὸ κανονικὸν πολύγωνον ἔχει τὴν μικροτέραν περίμετρον.

Διότι, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι πολύγωνόν τι, ἔχον μ πλευρὰς καὶ ἐμβαδὸν Α, ἔχῃ μικροτέραν περίμετρον τῆς τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἔχοντος τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν, δυνάμεθα νὰ μετατρέψωμεν αὐτὸ εἰς ἰσοπερίμετρον κανονικὸν πολύγωνον μ πλευρῶν, καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ Β ἤθελεν εἶναι, κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, μεγαλείτερον τοῦ Α. Τὸ δεύτερον λοιπὸν τοῦτο κανονικὸν πολύγωνον ἤθελεν ἔχει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν μὲ τὸ πρῶτον, μικροτέραν περίμετρον καὶ ἐμβαδὸν μεγαλείτερον, ὅπερ ἄτοπον. Λοιπὸν ἐξ ὅλων τῶν τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν ἐχόντων πολυγώνων τὸ κανονικὸν πολύγωνον ἔχει τὴν μικροτέραν περίμετρον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 7. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐκ δύο κανονικῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων τὸ ἔχον μεγαλείτερον ἀριθμὸν πλευρῶν εἶναι μεγαλείτερον.



Ἔστω ΑΒΓΔΕΘ κανονικόν τι ἑξάγωνον. Ἐὰν λάβωμεν σημεῖόν τι Ι ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ κανονικὸν τοῦτο ἑξάγωνον ὡς ἑπτάπλευρον πολύγωνον, ἐν ᾧ αἱ πλευραὶ ΙΓ, ΙΔ σχηματίζουσι δύο γωνίας ὀρθάς. Ἀλλὰ τὸ μὴ κανονικὸν τοῦτο ἑπτάγωνον εἶναι μικρότερον τοῦ ἰσοπεριμέτρου κανονικοῦ ἑπταγώνου (πρότ. 6). Λοιπὸν τὸ κανονικὸν ἑπτάγωνον, τὸ ἰσοπερίμετρον τῷ κανονικῷ ἑξαγώνῳ, εἶναι μεγαλείτερον. Λοιπὸν ἐκ δύο ἰσοπεριμέτρων κανονικῶν πολυγώνων τὸ ἔχον μεγαλείτερον ἀριθμὸν πλευρῶν εἶναι μεγαλείτερον.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΤΟΥ Ϛ΄ ΚΑΙ Ζ΄ ΒΙΒΛΙΟΥ.

ΠΕΡΙ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πέντε μόνον κανονικὰ πολύεδρα δυνατὸν νὰ ὑπάρξωσι.

Διότι κανονικὰ πολύεδρα ὠνομάσαμεν ἐκεῖνα, ὧν ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι κανονικὰ ἴσα πολύγωνα καὶ ὅλαι αἱ στερεαὶ γωνίαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Ἀλλ᾽ αἱ συνθῆκαι αὗται εἴς τινας μόνον περιπτώσεις δυνατὸν νὰ ἐκπληρωθῶσι

1ον. Ἐὰν αἱ ἕδραι ἦναι ἰσόπλευρα τρίγωνα, ἑκάστη στερεὰ γωνία τοῦ πολυέδρου δυνατὸν νὰ σχηματισθῇ μὲ τρεῖς, ἢ μὲ τέσσαρας ἢ μὲ πέντε γωνίας τῶν ἰσοπλεύρων τούτων τριγώνων. Ἐντεῦθεν προκύπτουσι τρία κανονικὰ πολύεδρα, ταῦτα δὲ εἶναι τὸ *τετράεδρον*, τὸ *ὀκτάεδρον* καὶ τὸ *εἰκοσάεδρον*. Δὲν δυνάμεθα δὲ νὰ σχηματίσωμεν πλειότερα κανονικὰ πολύεδρα μὲ ἰσόπλευρα τρίγωνα, διότι δυο ἐπίπεδοι γωνίαι δὲν σχηματίζουσι στερεὰν γωνίαν, καὶ ἓξ γωνίαι ἰσοπλεύρων τριγώνων ἰσοδυναμοῦσι μὲ τέσσαρας ὀρθάς, ἑπομένως δὲν δύνανται νὰ σχηματίσωσι στερεὰν γωνίαν (πρότ. 38, Ε΄).

2ον. Ἐὰν αἱ ἕδραι ἦναι τετράγωνα, ἑκάστη στερεὰ γωνία τοῦ πολυέδρου δύναται νὰ σχηματισθῇ μὲ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας τετραγώνων· ἐντεῦθεν προκύπτει τὸ κανονικὸν *ἑξάεδρον* ἢ ὁ *κύβος*. Τέσσαρες γωνίαι τῶν τετραγώνων ἰσοδυναμοῦσι μὲ τέσσαρας ὀρθάς, ἑπομένως δὲν δύνανται ν᾽ ἀποτελέσωσι στερεὰν γωνίαν.

3ον. Τελευταῖον, ἐὰν αἱ ἕδραι ἦναι κανονικὰ πεντάγωνα, ἑκάστη στερεὰ γωνία τοῦ πολυέδρου δύναται νὰ σχηματισθῇ μὲ τρεῖς γωνίας τῶν πενταγώνων τούτων· ἐντεῦθεν προκύπτει τὸ κανονικὸν *δωδεκάε* δρον. Τέσσαρες γωνίαι τῶν κανονικῶν πενταγώνων ἰσοδυναμοῦσι μὲ $4\times\frac{6}{5}$ τῆς ὀρθῆς, ἤτοι μὲ 4 ὀρθὰς πλέον $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς, ἑπομένως δὲν δύνανται ν' ἀποτελέσωσι στερεὰν γωνίαν.

Δὲν δυνάμεθα νὰ προβῶμεν περαιτέρω, διότι τρεῖς γωνίαι κανονικῶν ἑξαγώνων ἰσοδυναμοῦσι μὲ 4 ὀρθάς, τρεῖς δὲ κανονικῶν ἑπταγώνων μὲ ἔτι περισσοτέρας.

Λοιπὸν πέντε μόνον κανονικὰ πολύεδρα δυνατὸν νὰ ὑπάρξωσι, τρία ἀποτελούμενα ἐξ ἰσοπλεύρων τριγώνων, ἓν ἐξ ἴσων τετραγώνων καὶ ἓν ἐξ ἴσων κανονικῶν πενταγώνων.

Σχόλιον. Ἐν τῇ ἑπομένῃ προτάσει θέλομεν ἀποδείξει ὅτι τὰ πέντε ταῦτα κανονικὰ πολύεδρα ὑπάρχουσι πραγματικῶς, καὶ ὅτι δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ὅλας αὐτῶν τὰς διαστάσεις, ὅταν γνωρίζωμεν μίαν μόνην ἕδραν αὐτῶν.

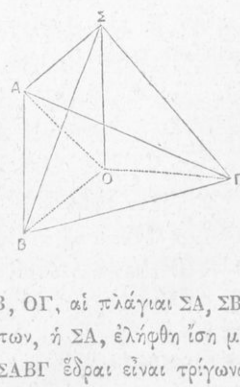
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 2. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δεδομένης μιᾶς τῶν ἑδρῶν κανονικοῦ τινος πολυέδρου ἢ μόνον τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ, νὰ κατασκευάσωμεν τὸ πολύεδρον.

Ἐπειδὴ ὑπάρχουσι πέντε κανονικὰ πολύεδρα, πέντε λύσεις ἐπιδέχεται τὸ γενικὸν τοῦτο πρόβλημα, τὰς ἑξῆς·

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΥ.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ δεδομένον ἰσόπλευρον τρίγωνον, ὅπερ πρόκειται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς ἕδρα τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου.

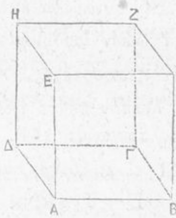


Εἰς τὸ σημεῖον Ο, κέντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὑψόνομεν τὴν ΟΣ κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, προεκβάλλομεν αὐτὴν μέχρι τοῦ σημείου Σ εἰς τρόπον ὥστε ΣΑ=ΑΒ, καὶ ἑνόνομεν ΣΒ καὶ ΣΓ. Λέγω ὅτι ἡ οὕτω σχηματιζομένη πυραμὶς ΣΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον κανονικὸν τετράεδρον.

Διότι, ἕνεκα τῶν ἴσων ἀποστάσεων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, αἱ πλάγιαι ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ εἶναι ἴσαι (πρότ. 6, Ε΄). Ἀλλ' ἡ μία τούτων, ἡ ΣΑ, ἐλήφθη ἴση μὲ τὴν ΑΒ. Ἄρα αἱ τέσσαρες τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ ἕδραι εἶναι τρίγωνα ἴσα μὲ τὸ δεδομένον ΑΒΓ. Ἀφ' ἑτέρου αἱ στερεαὶ γωνίαι τῆς πυραμίδος ταύτης εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, διότι ἑκάστη τούτων ἀποτελεῖται ἐκ τριῶν ἴσων ἐπιπέδων γωνιῶν. Λοιπὸν ἡ πυραμὶς αὕτη εἶναι τὸ ζητούμενον κανονικὸν τετράεδρον.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΕΞΑΕΔΡΟΥ.

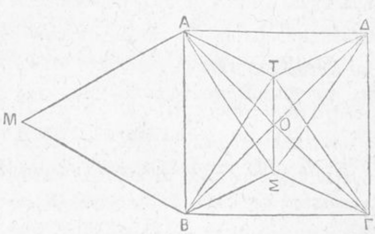
Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ δεδομένον τετράγωνον. Ἐὰν ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΓΔ κατασκευάσωμεν ὀρθὸν πρίσμα, ἔχον ὕψος ΑΕ ἴσον μὲ τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ δεδομένου τετραγώνου, λέγω ὅτι τὸ ὀρθὸν τοῦτο πρίσμα θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον κανονικὸν ἑξάεδρον.



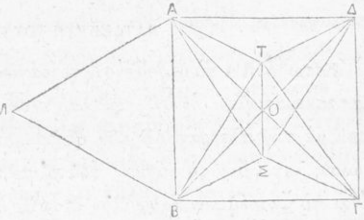
Διότι εἶναι φανερὸν ὅτι ὅλαι αἱ ἕδραι αὐτοῦ εἶναι τετράγωνα ἴσα καὶ ὅλαι αἱ στερεαὶ αὐτοῦ γωνίαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ὡς ἀποτελούμεναι ἐκ τριῶν ὀρθῶν γωνιῶν. Λοιπὸν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος πρίσμα εἶναι τὸ ζητούμενον κανονικὸν ἑξάεδρον, ὅπερ ἐκαλέσαμεν καὶ *κύβον*.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΟΚΤΑΕΔΡΟΥ.

Ἔστω ΑΜΒ τὸ δεδομένον ἰσόπλευρον τρίγωνον. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ κατασκευάζομεν τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ· εἰς τὸ σημεῖον Ο, κέντρον τοῦ τετραγώνου τούτου, ὑψόνομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ τὴν κάθετον ΣΤ, καὶ προεκβάλλομεν αὐτὴν ἑκατέρωθεν μέχρι τῶν σημείων Τ καὶ Σ εἰς τρόπον ὥστε ΤΟ=ΣΟ=ΑΟ. Ἐὰν μετὰ ταῦτα ἄξωμεν τὰς εὐθείας ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, ΣΔ, ΤΑ, ΤΒ, κτλ., θέλομεν οὕτω σχηματίσει στερεόν τι ΣΑΒΓΔΤ, συντιθέμενον ἐκ δύο τετραγωνικῶν πυραμίδων ΣΑΒΓΔ, ΤΑΒΓΔ, ἐχουσῶν τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒΓΔ. Λέγω δὲ ὅτι τὸ στερεὸν τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον κανονικὸν ὀκτάεδρον.



Διότι, ἐπειδὴ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΟΣ, ΑΟΔ, εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην (ΑΟΔ=ΑΟΣ=1^{op}) περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων (ΑΟ=ΟΔ=ΟΣ), ἡ πλευρὰ ΑΣ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΔ ἢ ΑΒ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι καὶ τὰ λοιπὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΟΤ, ΒΟΣ, ΓΟΤ, κτλ. εἶναι ἴσα μὲ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΟΔ. Λοιπὸν ὅλαι αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΣ, ΒΣ, ΑΤ, ΒΤ, κτλ. εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ἑπομένως τὸ στερεὸν ΣΑΒΓΔΤ περατοῦται ὑπὸ ὀκτὼ ἰσοπλεύρων τριγώνων ἴσων μὲ τὸ δεδομένον ΑΜΒ. Λέγω πρὸς τούτοις ὅτι αἱ στερεαὶ γωνίαι τοῦ πολυέδρου τούτου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, παραδείγματος χάριν, ἡ στερεὰ γωνία Σ εἶναι ἴση μὲ τὴν Β.

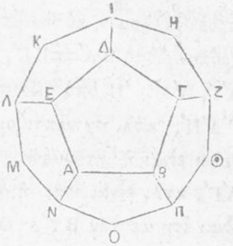


Διότι, ἐπειδὴ προφανῶς τὸ τρίγωνον ΣΑΓ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΔΑΓ, ἡ γωνία ΑΣΓ εἶναι ὀρθὴ, καὶ ἑπομένως τὸ σχῆμα ΣΑΤΓ εἶναι τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ΑΒΓΔ. Τούτου τεθέντος, ἐὰν παραβάλωμεν τὰς δύο τετραγωνικὰς πυραμίδας ΣΑΒΓΔ, ΒΑΣΓΤ, ἡ βάσις ΑΣΓΤ τῆς δευτέρας δύναται νὰ ἐπιτεθῇ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΒΓΔ βάσεως τῆς πρώτης, καὶ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ο εἶναι κοινὸν κέντρον τῶν δύο βάσεων ΑΒΓΔ, ΑΣΓΤ, τὸ ὕψος ΟΒ τῆς δευτέρας θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ ὕψους ΟΣ τῆς πρώτης, καὶ ἐπειδὴ ΟΒ=ΟΣ, τὸ σημεῖον Β θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ σημείου Σ. Λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες θέλουσι ταὐτισθῆ. Ἄρα ἡ στερεὰ γωνία Β εἶναι ἴση μὲ τὴν Σ. Λοιπὸν τὸ στερεὸν ΣΑΒΓΔΤ εἶναι κανονικὸν ὀκτάεδρον.

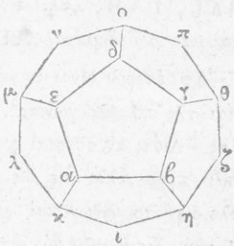
Σχόλιον. Ἐὰν τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΔ, ΣΤ ἦναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλων καὶ τέμνωνται εἰς τὸ μέσον αὐτῶν, τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν τούτων θέλουσιν εἶναι αἱ κορυφαὶ κανονικοῦ τινος ὀκταέδρου.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΔΩΔΕΚΑΕΔΡΟΥ.

Ἔστω ΑΒΓΔΕ τὸ δεδομένον κανονικὸν πεντάγωνον· ἔστωσαν προσέτι ΑΒΠ, ΓΒΠ, δύο ἐπίπεδοι γωνίαι ἴσαι μὲν τὴν γωνίαν ΑΒΓ. Μὲ τὰς τρεῖς ταύτας ἐπιπέδους γωνίας ἂς σχηματίσωμεν τὴν στερεὰν γωνίαν Β, καὶ ἔστω Κ ἡ ἀμοιβαία κλίσις δύο τῶν ἐπιπέδων τούτων, ἢ, ὅπερ ταὐτὸ, τὸ μέτρον μιᾶς τῶν διέδρων γωνιῶν ΑΒΠΓ, ΠΒΓΑ, ΓΒΑΠ. Ἂς σχηματίσωμεν ὡσαύτως εἰς τὰ σημεῖα Γ, Δ, Ε, Α στερεὰς γωνίας ἴσας μὲ τὴν στερεὰν γωνίαν Β καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔΕ κειμένας, πρὸς ὃ καὶ ἡ Β. Ἐπειδὴ αἱ δίεδροι γωνίαι ΠΒΓΑ, ΖΓΒΔ εἶναι ἴσαι, τὰ δύο ἐπίπεδα ΓΒΠ, ΒΓΖ, ἀποτελοῦσιν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Δυνάμεθα λοιπὸν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΒΓΖ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ πεντάγωνον ΒΓΖΘΠ ἴσον μὲ τὸ δεδομένον ΑΒΓΔΕ. Ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων ΖΓΔ, ΙΔΕ, κτλ. κατασκευάσωμεν πεντάγωνα ἴσα μὲ τὸ δεδομένον ΑΒΓΔΕ, θέλομεν σχηματίσει οὕτω κυρτήν τινα ἐπιφάνειαν ΠΘΖΗΙΚ.. ΑΒΓΔΕ συνισταμένην ἐξ ἕξ ἴσων κανονικῶν πενταγώνων, ἐχόντων τὴν αὐτὴν ἀμοιβαίαν κλίσιν Κ.



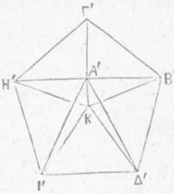
Ἔστω πρὸς τούτοις πθζηικ.. αβγδε δευτέρα τις ἐπιφάνεια ἴση μὲ τὴν ΠΘΖΗΙΚ.. ΑΒΓΔΕ. Λέγω ὅτι αἱ δύο αὗται ἐπιφάνειαι δύνανται νὰ ἑνωθῶσιν εἰς τρόπον ὥστε ν' ἀποτελέσωσι μίαν μόνην κυρτὴν καὶ συνεχῆ ἐπιφάνειαν.

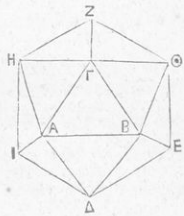


Διότι ἡ γωνία οπθ, παραδείγματος χάριν, δύναται νὰ ἑνωθῇ μετὰ τῶν δύο ἐπιπέδων γωνιῶν ΟΠΒ, ΒΠΘ καὶ ν' ἀποτελέσῃ στερεάν τινα γωνίαν Π ἴσην μὲ τὴν Β, ἡ δὲ τοιαύτη ἕνωσις οὐδόλως μεταβάλλει τὴν ἀμοιβαίαν κλίσιν τῶν δύο ἐπιπέδων ΒΠΘ, ΒΠΟ, διότι τὰ δύο ταῦτα ἐπίπεδα ἔχουσι τὴν ἀπαιτουμένην ἀμοιβαίαν κλίσιν πρὸς χρηματισμὸν τῆς στερεᾶς γωνίας. Ἀλλ' ἐνῷ ἡ στερεὰ γωνία Π σχηματίζεται, ἡ πλευρὰ πθ θέλει ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΠΘ, εἰς δὲ τὸ σημεῖον Θ θέλουσι συνέλθει τρεῖς ἐπείπεδοι γωνίαι ΠΘΖ, πθγ, γθζ, αἵτινες θέλουσι σχηματίσει στερεάν τινα γωνίαν ἴσην μὲ ἑκάστην τῶν ἤδη ἐσχηματισμένων, καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἕνωσις αὕτη δὲν θέλει μεταβάλει ποσῶς οὔτε τὴν γωνίαν Π οὔτε τὴν ἐπιφάνειαν γθζη κτλ., διότι τὰ ἤδη ἑνωθέντα εἰς τὸ σημεῖον Π ἐπίπεδα ΠΒΘ, ΟΠΒ, γθπ ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὴν ἀπαιτουμένην κλίσιν Κ, ὡς καὶ τὰ ἐπίπεδα γθζ, γθπ. Ἐξακολουθοῦντες οὕτω, βλέπομεν ὅτι αἱ δύο κυρταὶ ἐπιφάνειαι θέλουσι συναρμοσθῆ καὶ ἀποτελέσει μίαν μόνην συνεχῆ ἐπιφάνειαν. Τὸ ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας δὲ ταύτης περατούμενον στερεὸν θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον κανονικὸν δωδεκάεδρον, ὡς συντιθέμενον ἐκ δώδεκα κανονικῶν ἴσων πενταγώνων, καὶ ἔχον τὰς στερεὰς αὐτοῦ γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΕΙΚΟΣΑΕΔΡΟΥ.

Ἔστω ΑΒΓ μία τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ. Πρέπει ἐν πρώτοις νὰ σχηματίσωμεν στερεὰν γωνίαν μὲ πέντε τρίγωνα ἴσα μὲ τὸ ΑΒΓ, καὶ τῆς ὁποίας αἱ δίεδροι γωνίαι νὰ ἦναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Πρὸς τοῦτο ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Β'Γ', ἴσης μὲ τὴν ΒΓ, κατασκευάζομεν τὸ κανονικὸν πεντάγωνον Β'Γ'Η'Ι'Δ', εἰς τὸ σημεῖον Κ, κέντρον τοῦ πενταγώνου, ὑψόνομεν τὴν ΚΑ' κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Β'Γ'Δ', προεκβάλλομεν αὐτὴν μέχρι τοῦ σημείου Α', εἰς τρόπον ὥστε Β'Α'=Β'Γ', καὶ ἑνόνομεν Α'Γ', Α'Η', Α'Ι', Α'Δ'. Ἡ ὑπὸ τῶν πέντε ἐπιπέδων Β'Α'Γ', Γ'Α'Η', κτλ. σχηματιζομένη στερεὰ γωνία Α' θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη. Διότι αἱ πλάγιαι Α'Η', Α'Γ', κτλ. εἶναι ἴσαι, ἡ δὲ μία τούτων, ἡ Α'Β', εἶναι ἴση μὲ τὴν Β'Γ'. Ὅλα λοιπὸν τὰ τρίγωνα Β'Α'Γ', Γ'Α'Η', κτλ. εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα καὶ μὲ τὸ δεδομένον ΑΒΓ.





Ἀφ' ἑτέρου εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ δίεδροι γωνίαι τῆς στερεᾶς γωνίας Α' εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Διότι αἱ στερεαὶ γωνίαι Β', Γ', κτλ. εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ὡς ἀποτελουμένη ἑκάστη ἐκ δύο γωνιῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων καὶ μιᾶς κανονικοῦ πενταγώνου. Ἐὰν καλέσωμεν Π τὴν κλίσιν τῶν δύο ἐπιπέδων, ἐφ' ὧν αἱ ἴσαι γωνίαι κεῖνται, ἡ γωνία Π θέλει παριστᾷ συγχρόνως τὴν κλίσιν δύο προσκειμένων ἑδρῶν τῆς στερεᾶς γωνίας Α'.

Τούτων τεθέντων, ἐὰν εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ κατασκευάσωμεν στερεὰς γωνίας ἴσας μὲ τὴν Α', θέλομεν οὕτω σχηματίσει κυρτήν τινα ἐπιφάνειαν ΔΕΘΖΗΙΑΒΓ, ἀποτελουμένην ἐκ δέκα ἰσοπλεύρων τριγώνων, ἐξ ὧν ἕκαστον κλίνει ἐπὶ τοῦ προσκειμένου κατὰ τὴν αὐτὴν ποσότητα Π, καὶ παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὰς κορυφὰς Δ, Ε, Θ, κτλ. τῆς τεθλασμένης, οὕτως εἰπεῖν, γραμμῆς ΔΕΘΖΗΙ συνέρχονται ἐναλλὰξ τρεῖς καὶ δύο γωνίαι ἰσοπλεύρων τριγώνων.

Ἐὰν φαντασθῶμεν τώρα δευτέραν τινὰ ἐπιφάνειαν ἴσην μὲ τὴν ΔΕΘΖΗΙΑΒΓ, καὶ ἑνώσωμεν ἑκάστην τριπλῆν γωνίαν τῆς μιᾶς μὲ ἑκάστην διπλῆν τῆς ἑτέρας, αἱ περίμετροι τῶν δύο τούτων ἐπιφανειῶν θέλουσι ταὐτισθῆ. Καὶ ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν γωνιῶν αὐτῶν ἔχουσιν ἤδη πρὸς ἄλληλα τὴν ἀπαιτουμένην κλίσιν Π πρὸς σχηματισμὸν πενταπλῆς στερεᾶς γωνίας ἴσης μὲ τὴν Α', ἡ τοιαύτη αὐτῶν ἕνωσις οὐδόλως θέλει μεταβάλει τὴν κατάστασιν οὐδεμιᾶς τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος ἐπιφανειῶν, ἑπομένως αἱ ἐπιφάνειαι αὗται θέλουσιν ἀποτελέσει μίαν μόνην συνεχῆ ἐπιφάνειαν, ἀποτελουμένην ἐξ εἴκοσιν ἰσοπλεύρων τριγώνων. Τὸ ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας λοιπὸν ταύτης περατούμενον στερεὸν θέλει εἶναι τὸ κανονικὸν εἰκοσάεδρον, διότι σύγκειται ἐξ εἴκοσι ἴσων ἑδρῶν, καὶ ἔχει ὅλας αὐτοῦ τὰς στερεὰς γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 3. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἑδρῶν κανονικοῦ τινος πολυέδρου.

Ἐκ τῆς προηγουμένως δοθείσης κατασκευῆς τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων καὶ τῆς 41 προτάσεως τοῦ πέμπτου βιβλίου πορίζόμεθα εὐκόλως τὴν ζητουμένην κλίσιν. Οὕτω, π. χ.

Εἰς τὸ τετράεδρον ἑκάστη στερεὰ γωνία σχηματίζεται ἐκ τριῶν γωνιῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων. Πρέπει λοιπὸν διὰ τῆς 41 προτάσεως τοῦ πέμπτου βιβλίου νὰ εὕρωμεν τὴν ἀμοιβαίαν κλίσιν δύο τῶν τριῶν ἐπιπέδων, τῶν σχηματιζόντων τὴν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν. Ἡ οὕτως εὑρεθησομένη γωνία θέλει παριστᾷ τὴν ἀμοιβαίαν κλίσιν δύο ὁποιωνδήποτε προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου.

Εἰς τὸ ἑξάεδρον ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἑδρῶν εἶναι γωνία ὀρθή.

Εἰς τὸ ὀκτάεδρον πρὸς εὕρεσιν τῆς ζητουμένης κλίσεως πρέπει νὰ κατασκευάσωμεν στερεὰν γωνίαν ἐκ δύο γωνιῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων καὶ μιᾶς ὀρθῆς. Ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων, ἐφ' ὧν αἱ ἴσαι αὗται γωνίαι κεῖνται, θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη κλίσις δύο προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ ὀκταέδρου.

Εἰς τὸ δωδεκάεδρον ἑκάστη στερεὰ γωνία σχηματίζεται ἐκ τριῶν γωνιῶν κανονικῶν πενταγώνων. Ἡ κλίσις λοιπὸν τῶν ἐπιπέδων, ἐφ' ὧν δύο τῶν γωνιῶν τούτων κεῖνται, θέλει εἶναι ἡ ἀμοιβαία κλίσις δύο προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ δωδεκαέδρου.

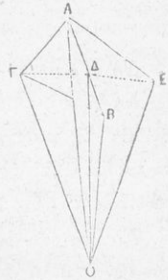
Εἰς τὸ εἰκοσάεδρον πρὸς εὕρεσιν τῆς ζητουμένης κλίσεως πρέπει νὰ σχηματίσωμεν στερεὰν γωνίαν ἐκ δύο γωνιῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων καὶ μιᾶς κανονικοῦ πενταγώνου. Ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων, ἐφ' ὧν αἱ τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων γωνίαι κεῖνται, θέλει παριστᾷ τὴν ἀμοιβαίαν κλίσιν δύο ὁποιωνδήποτε προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ εἰκοσαέδρου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Δεδομένης τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ τινος πολυέδρου, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης εἰς τὸ πολύεδρον σφαίρας.

Πρέπει ἐν πρώτοις ν' ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶν κανονικὸν πολύεδρον ἐγγράφεται καὶ περιγράφεται εἰς σφαῖραν.

Ἔστω ΑΒ ἡ κοινὴ πλευρὰ δύο προσκειμένων ἑδρῶν, Γ καὶ Ε τὰ κέντρα αὐτῶν, καὶ ΓΔ, ΕΔ αἱ ἐκ τῶν κέντρων τούτων ἐπὶ τῆς κοινῆς πλευρᾶς ΑΒ καταβιβαζόμεναι κάθετοι, αἵτινες συναπαντῶνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Δ, μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΒ. Ἡ ὑπὸ τῶν καθέτων τούτων σχηματιζομένη γωνία ΓΔΕ εἶναι γνωστὴ καὶ ἴση μὲ τὴν ἀμοιβαίαν κλίσιν δύο προσκειμένων ἑδρῶν (πρότ. 3).



Τούτων τεθέντων, ἐὰν ἄξωμεν εἰς τὸ ἐπίπεδον ΓΔΕ, τὸ ἐπὶ τῆς ΑΒ κάθετον, τὰς εὐθείας ΓΟ ΕΟ καθέτως ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΓΔ, ΕΔ, καὶ προεκβάλωμεν αὐτὰς μέχρις οὗ συναντηθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Ο, λέγω ὅτι τὸ σημεῖον Ο θέλει εἶναι τὸ κέντρον τῆς τε ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης εἰς τὸ πολύεδρον σφαίρας, ΟΓ ἡ ἀκτὶς τῆς πρώτης, καὶ ΟΑ ἡ τῆς δευτέρας.

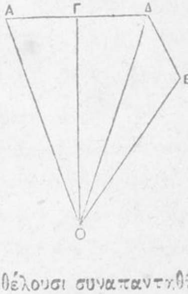
Διότι, ἐπειδὴ τὰ ἀποστήματα ΓΔ, ΕΔ εἶναι ἴσα καὶ ἡ ὑποτείνουσα ΔΟ εἶναι κοινή, τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΔΟ, ΕΔΟ εἶναι ἴσα, ἐπομένως ΓΟ=ΕΟ. Ἀλλ', ἐπειδὴ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔΕ, τὸ δι' αὐτῆς διερχόμενον ἐπίπεδον ΑΒΓ εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔΕ. καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ ἡ ΓΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΓΔ τῶν καθέτων ἐπιπέδων ΑΒΓ, ΓΔΕ καὶ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τούτων, τοῦ ΓΔΕ, αὕτη θέλει εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ (πρότ. 29, Ε'). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΕΟ θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΕ. Λοιπὸν αἱ δύο κάθετοι ΓΟ, ΕΟ, αἱ ἐκ τῶν κέντρων δύο προσκειμένων ἑδρῶν ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν ὑψούμεναι, συναπαντῶνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο καὶ εἶναι ἴσαι.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ΑΒΓ καὶ ΑΒΕ παριστῶσι δύο ἄλλας ὁποιασδήποτε προσκειμένας τοῦ πολυέδρου ἕδρας, τὸ ἀπόστημα ΓΔ θέλει εἶναι τὸ αὐτό, καθὼς καὶ ἡ γωνία ΓΔΟ, ἥμισυ τῆς ἐπιπέδου γωνίας ΓΔΕ, τῆς μετρούσης τὴν δίεδρον γωνίαν ΑΒ τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου. Τὸ ὀρθογώνιον λοιπὸν τρίγωνον ΓΔΟ θέλει εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ὅλας τὰς τοῦ πολυέδρου ἕδρας, ἐπομένως ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ΓΟ θέλει εἶναι σταθερὰ τὸ μέγεθος. Λοιπόν, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Ο, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ΟΓ γράψωμεν σφαῖραν, ἡ σφαῖρα αὕτη θέλει ἅπτεσθαι ὅλων τῶν ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου εἰς τὰ κέντρα αὐτῶν Γ, Ε, κτλ., διότι ἀπεδείχθη ὅτι ἑκάστη τούτων εἶναι κάθετος εἰς τὰ ἄκρα Γ, Ε κτλ. τῶν ἀκτίνων αὐτῆς ΟΓ, ΟΕ, κτλ. Ἡ σφαῖρα λοιπὸν αὕτη θέλει εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ πολύεδρον καὶ τὸ πολύεδρον περιγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν.

Ἄς ἄξωμεν δεύτερον τὰς εὐθείας ΟΑ καὶ ΟΒ. Ἐπειδὴ ΓΑ=ΓΒ, αἱ δύο πλάγιαι ΟΑ, ΟΒ θέλουσιν εἶναι ἴσαι, ὡς ἰσάκις ἀφιστάμεναι τοῦ ποδὸς Γ τῆς καθέτου ΟΓ. Καὶ ἐπειδὴ ΓΟ, ΓΒ εἶναι ποσὰ σταθερὰ τὸ μέγεθος, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΓΒ θέλει εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ὅλας τὰς ἕδρας τοῦ πολυέδρου, ἐπομένως καὶ ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ ΟΒ θέλει εἶναι ἡ αὐτὴ τὸ μέγεθος, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ἦναι ἡ πλευρὰ ΑΒ τοῦ πολυέδρου. Ἐὰν λοιπὸν μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ ἢ ΟΒ γράψωμεν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν, ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θέλει διέλθει δι' ὅλων τῶν κορυφῶν τῶν στερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου. Ἡ σφαῖρα λοιπὸν αὕτη θέλει εἶναι περιγεγραμμένη εἰς τὸ πολύεδρον καὶ τὸ πολύεδρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν.

Τούτων ἀποδειχθέντων, ἡ λύσις τοῦ προβληθέντος προβλήματος εἶναι εὐκολωτάτη καὶ ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς·



Ἐπὶ τῆς δεδομένης πλευρᾶς ΑΒ τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου κατασκευάζομεν τὴν ἕδραν ταύτην, καὶ ἔστω ΓΔ τὸ ἀπόστημα αὐτῆς. Εὑρίσκομεν ἀκολούθως διὰ τοῦ προλυθέντος προβλήματος τὴν ἀμοιβαίαν κλίσιν δύο προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου, κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ΓΔΕ ἴσην μὲ τὴν εὑρεθεῖσαν κλίσιν, λαμβάνομεν ΔΕ=ΓΔ καὶ ἄγομεν ΓΟ, ΕΟ καθέτως ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΓΔ, ΔΕ. Αἱ δύο αὗται κάθετοι θέλουσι συναπαντηθῆ εἰς τὸ σημεῖον Ο, καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι ΟΓ ἢ ΟΕ θέλει εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ πολύεδρον σφαίρας.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγγεγραμμένης εἰς τὸ πολύεδρον σφαίρας λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΔΓ τὴν ἀπόστασιν ΓΑ ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ ἐπὶ τῆς δεδομένης πλευρᾶς ΑΒ κατασκευασθὲν κανονικὸν πολύγωνον καὶ ἑνόνομεν ΟΑ. Εἶναι φανερὸν ὅτι ΟΑ θέλει εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ πολύεδρον σφαίρας.

Σχόλιον. Ἐκ τῆς ἀποδειχθείσης προτάσεως ἀποῤῥέουσι πλεῖσται συνέπειαι.

1ον. Πᾶν κανονικὸν πολύεδρον ἀποσυντίθενται εἰς τόσας κανονικὰς πυραμίδας, ὅσας ἕδρας ἔχει. Κοινὴ κορυφὴ τῶν πυραμίδων τούτων εἶναι τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης ἢ περιγεγραμμένης σφαίρας, ὅπερ καὶ *κέντρον τοῦ πολυέδρου* καλεῖται.

2ον. Ὁ ὄγκος κανονικοῦ τινος πολυέδρου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας.

3ον. Δύο κανονικὰ τοῦ αὐτοῦ ὀνόματος πολύεδρα εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν διαστάσεις ἀνάλογοι. Αἱ ἀκτῖνες λοιπὸν τῶν ἐγγεγραμμένων ἢ περιγεγραμμένων εἰς τὰ πολύεδρα σφαιρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ πλευραὶ τῶν ὁμοίων πολυέδρων.

4ον. Ἐὰν ἐγγράψωμεν ἢ περιγράψωμεν κανονικὸν εἰς σφαῖραν πολύεδρον, τὰ διὰ τοῦ κέντρου καὶ τῶν διαφόρων τοῦ πολυέδρου πλευρῶν διερχόμενα ἐπίπεδα θέλουσι διαιρέσει τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν εἰς τόσα σφαιρικὰ ἴσα πολύγωνα, ὅσας ἕδρας ἔχει τὸ πολύεδρον.

ΣΥΛΛΟΓΗ

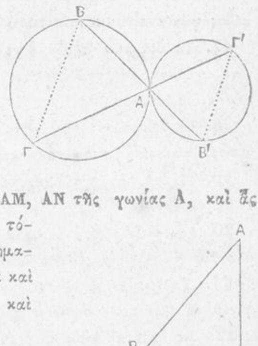
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΙΝΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΙΝ ΚΑΙ ΛΥΣΙΝ.

---

1. Τὸ ἐκ τῆς ἑνώσεως τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου τινὸς προκῦπτον σχῆμα εἶναι παραλληλόγραμμον.

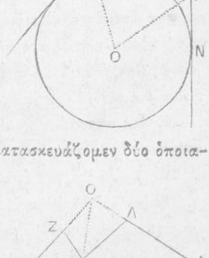
2. Τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων, τῶν καταβιβαζομένων ἔκ τινος ὁποιουδήποτε ἐντὸς ἰσοπλεύρου τινὸς τριγώνου κειμένου σημείου ἐπὶ τῶν τριῶν αὐτοῦ πλευρῶν, εἶναι σταθερόν.

3. Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Α τῆς ἐπαφῆς δύο κύκλων ἄξωμεν δύο κατ' ἀρέσκειαν τεμνούσας ΒΒ′, ΓΓ′, καὶ τὰς χορδὰς ΓΒ, Γ′Β′, αἱ χορδαὶ αὗται θέλουσιν εἶναι παράλληλοι.



4. Τὰ ἀθροίσματα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν περιγεγραμμένου τινὸς εἰς κύκλον τετραπλεύρου εἶναι ἴσα.

5. Ἔστω ὁ κύκλος Ο ἐφαπτόμενος τῶν πλευρῶν ΑΜ, ΑΝ τῆς γωνίας Α, καὶ ἂς ἄξωμεν τὴν ΒΕΓ ἐφαπτομένην εἴς τι σημεῖον Ε τοῦ τόξου ΜΝ· ν' ἀποδειχθῇ 1ον ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου ΑΒΓ εἶναι σταθερὰ, ὁποιονδήποτε καὶ ἂν ἦναι τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Ε τοῦ τόξου ΜΝ, καὶ 2ον ὅτι καὶ ἡ γωνία ΒΟΓ εἶναι σταθερά.



6. Δοθέντος τετραπλεύρου τινὸς, ἐὰν κατασκευάσωμεν κύκλους ἐφαπτομένους τριῶν διαδοχικῶν τοῦ τετραπλεύρου πλευρῶν, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ τέσσαρα αὐτῶν κέντρα εὑρίσκονται ἐπὶ περιφερείας κύκλου.

7. Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἐγγεγραμμένου τινὸς τετραπλεύρου τέμνονται κατ' ὀρθὴν γωνίαν.

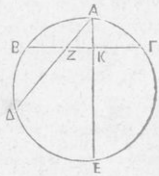
8. Ἐπὶ τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ τριγώνου τινὸς ΑΒΓ κατασκευάζομεν δύο ὁποιαδήποτε παραλληλόγραμμα ΑΕΖΒ, ΒΓΔΛ, προεκβάλλομεν τὰς πλευρὰς ΕΖ, ΔΛ μέχρις οὗ συναντηθῶσιν εἴς τι σημεῖον Ο, ἄγομεν τὴν ΒΟ καὶ κατασκευάζομεν ἐπὶ τῆς τρίτης πλευρᾶς ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ παραλληλόγραμμον ΑΓΗΚ, οὗτινος ἡ προκειμένη τῇ ΑΓ πλευρὰ ΑΚ νὰ ἦναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΟΒ· ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων δύο.

9. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ἑνώνουσαι τὰς κορυφὰς μὲ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τριγώνου τινὸς, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

10. Ἐὰν ἐξ ἑκάστης κορυφῆς τριγώνου τινὸς καταβιβάσωμεν κάθετον ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς καὶ ἑνώσωμεν ἀνὰ δύο τοὺς πόδας τῶν τριῶν καθέτων, τὸ οὕτω προκύπτον τρίγωνον θέλει ἔχει διὰ διχοτομούσας τὰ ὕψη τοῦ πρώτου τριγώνου.

11. Τὰ τρία ὕψη τριγώνου τινὸς τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

12. Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Α, μέσου τοῦ τόξου ΒΓ, ἄξωμεν κατ' ἀρέσκειαν δύο τεμνούσας ΑΖΔ, ΑΚΕ, τὰ τέσσαρα σημεῖα Ε, Κ, Ζ, Δ θέλουσιν κεῖσθαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.



13. Ἐὰν ἔκ τινος σημείου, ἐντὸς κύκλου τινὸς κειμένου, ἄξωμεν κατ' ἀρέσκειαν δύο καθέτους ἐπ' ἀλλήλων εὐθείας, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων τοῦ κύκλου χορδῶν θέλει εἶναι σταθερόν.

14. Ἐὰν εὐθεῖά τις ἦναι κάθετος ἐπί τινος ἐπιπέδου, πᾶν ἐπίπεδον παράλληλον τῇ καθέτῳ εὐθείᾳ θέλει εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

15. Ἐὰν δύο τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τριέδρου τινὸς γωνίας ἦναι ἴσαι, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν δίεδροι γωνίαι θέλουσιν εἶναι ἴσαι, καὶ ἀντιστρόφως.

16. Εἰς πᾶσαν τρίεδρον γωνίαν ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλειτέρας διέδρου γωνίας ἐπίπεδος γωνία εἶναι μεγαλειτέρα, καὶ ἀντιστρόφως.

17. Τὰ διὰ τῶν τριῶν διχοτομουσῶν τὰς ἐπιπέδους γωνίας τριέδρου τινὸς γωνίας ἀγόμενα κάθετα ἐπὶ τῶν ἀντιστοιχουσῶν ἑδρῶν ἐπίπεδα τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

18. Τὰ διὰ τῶν τριῶν κόψεων τριέδρου τινὸς γωνίας ἐπὶ τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν καθέτως ἀγόμενα ἐπίπεδα τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

19. Τὰ διὰ τῶν τριῶν κόψεων καὶ τῶν διχοτομουσῶν τὰς ἀπέναντι ἕδρας τριέδρου τινὸς γωνίας διερχόμενα ἐπίπεδα τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

20. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ἑνόνουσαι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι κόψεων τετραέδρου τινὸς, τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη.

21. Τὰ ἔχοντα μίαν στερεὰν γωνίαν ἴσην τετράεδρα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ γινόμενα τῶν περιεχουσῶν τὰς ἴσας στερεὰς γωνίας κόψεων.

22. Τὰ ἔχοντα μίαν δίεδρον γωνίαν ἴσην τετράεδρα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ γινόμενα τῶν περιεχουσῶν τὰς ἴσας διέδρους γωνίας ἑδρῶν.

23. Τὸ διχοτομοῦν διέδρόν τινα γωνίαν τριγωνικῆς τινος πυραμίδος ἐπίπεδον διαιρεῖ τὴν ἀπέναντι τῆς διέδρου γωνίας ἕδραν εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν προσκειμένων αὐτῇ ἑδρῶν τῆς διχοτομηθείσης διέδρου γωνίας.

24. Πᾶν ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τῶν μέσων δύο ἀντικειμένων κόψεων τετραέδρου τινὸς, διαιρεῖ τὸ τετράεδρον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

25. Διὰ τεσσάρων μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένων σημείων διέρχεται πάντοτε ἐπιφάνεια σφαίρας καὶ μία μόνη.

26. Ἐν παντὶ τετραέδρῳ ἐγγράφεται σφαῖρά τις καὶ μία μόνη.

27. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ὧν αἱ ἀπὸ δύο δεδομένων καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένων εὐθειῶν ἀποστάσεις νὰ ἔχωσι δεδομένον ἄθροισμα.

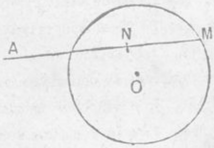
28. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ὧν αἱ ἀπὸ δύο δεδομένων καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένων εὐθειῶν ἀποστάσεις νὰ ἔχωσι δεδομένην διαφοράν.

29. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων τῶν διερχομένων διὰ δύο δεδομένων σημείων.

30. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου διερχομένων χορδῶν κύκλου τινός.

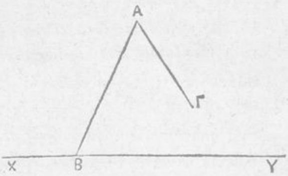
31. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ὧν αἱ ἀπὸ δύο δεδομένων εὐθειῶν ἀποστάσεις νὰ ἔχωσι δεδομένον τινὰ λόγον.

32. Ἔκ τινος σημείου Α ἄγομεν εὐθεῖαν τινὰ ΑΜ περατουμένην εἰς τὴν περιφέρειαν Ο, καὶ διαιροῦμεν τὴν εὐθεῖαν ταύτην εἰς τὸ σημεῖον Ν οὕτως, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ πάντοτε ἡ ἑξῆς ἀναλογία ΑΜ : ΑΝ=μ : ν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Ν.



33. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΜ λαμβάνομεν τὸ σημεῖον Ν οὕτως, ὥστε τὸ γινόμενον ΑΜ × ΑΝ νὰ ἦναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ δεδομένον τετράγωνον K^2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Ν.

34. Ἔκ τινος σημείου Α ἄγομεν εὐθεῖάν τινα ΑΒ, περατουμένην ἐπί τινος δεδομένης εὐθείας ΧΥ, καὶ τὴν ΑΓ οὕτως, ὥστε ἡ μὲν γωνία ΒΑΓ νὰ ἦναι ἴση μὲ δεδομένην τινὰ γωνίαν Κ, τὸ δὲ μέγεθος τῆς ΑΓ τοιοῦτον, ὥστε ΑΒ : ΑΓ=μ : ν, ἢ ΑΒ × ΑΓ=K^2. Ποῖος θέλει εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Γ κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, καὶ ποῖος κατὰ τὴν δευτέραν;



35. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἀφ' ὧν δύο δεδομένοι κύκλοι φαίνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν.

36. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἰσάκις ἀπεχόντων ἀπὸ δύο δεδομένων ἐπιπέδων.

37. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ἰσάκις ἀπεχέντων ἀπὸ τριῶν δεδομένων ἐπιπέδων.

38. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ διαστήματος, τῶν ἰσάκις ἀπεχόντων ἀπὸ δύο δεδομένων καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένων εὐθειῶν.

39. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ὧν αἱ ἀπὸ δύο δεδομένων ἐπιπέδων ἀποστάσεις νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα ἢ διαφορὰν σταθεράν.

40. Δοθέντων δύο σημείων Α καὶ Β καί τινος εὐθείας ΣΤ, νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας σημεῖόν τι Ρ τοιοῦτον, ὥστε αἱ γωνίαι ΑΡΣ, ΒΡΤ νὰ ἦναι ἴσαι.

41. Ἔκ τινος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα συναπαντῶσα δύο δεδομένας παραλλήλους καὶ οὕτως, ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν παραλλήλων περιεχόμενον μέρος αὐτῆς νὰ ἦναι ἴσον μὲ δεδομένην εὐθεῖαν.

42. Νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον γνωρίζοντες τὴν μεταξὺ τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου διαφοράν.

43. Νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον δεδομένων τῆς βάσεως αὐτοῦ, τῆς ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνίας καὶ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων αὐτοῦ πλευρῶν.

44. Νὰ κατασκευάσωμεν κύκλον δεδομένης ἀκτῖνος 1ον διερχόμενον διὰ δύο δεδομένων σημείων· 2ον διερχόμενον διὰ δεδομένου σημείου καὶ ἐφαπτόμενον εἰς δεδομένην εὐθεῖαν· 3ον ἐφαπτόμενον εἰς δύο δεδομένας εὐθείας· 4ον ἐφαπτόμενον εἰς εὐθεῖαν καὶ κύκλον δεδομένον· 5ον διερχόμενον διὰ δεδομένου σημείου καὶ ἐφαπτόμενον εἰς δεδομένον κύκλον· 6ον ἐφαπτόμενον εἰς δύο δεδομένους κύκλους.

45. Ἔκ τινος δεδομένου σημείου νὰ ἄξωμεν εἴς τινα κύκλον εὐθεῖαν τοιαύτην, ὥστε ἡ ἐν τῷ κύκλῳ περιλαμβανομένη χορδὴ νὰ ἦναι ἴση μὲ δεδομένην εὐθεῖαν.

46. Νὰ κατασκευάσωμεν κύκλον ἐφαπτόμενον ἑτέρου καὶ μιᾶς εὐθείας εἰς δεδομένον σημεῖον αὐτῆς.

47. Νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον ἴσον μὲ δεδομένον καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ διέρχωνται διὰ τριῶν δεδομένων σημείων.

48. Νὰ προσδιορίσωμεν ἐντὸς δεδομένου τριγώνου σημεῖόν τι τοιοῦτον, ὥστε τὰ ἐκ τῆς ἑνώσεως αὐτοῦ μετὰ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου προκύπτοντα τρία τρίγωνα νὰ ἦναι ἰσοδύναμα.

49. Νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον ὅμοιον μὲ δεδομένον καὶ ἔχον τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἐπὶ τριῶν δεδομένων παραλλήλων.

50. Νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον ὅμοιον μὲ δεδομένον καὶ ἔχον τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἐπὶ τριῶν ὁμοκέντρων περιφερειῶν.

51. Νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν παραγόμενον ὄγκον ἐκ τῆς περιστροφῆς κανονικοῦ τινος ἑξαγώνου περί τινα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

52. Νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν παραγόμενον ὄγκον ἐκ τῆς περιστροφῆς δεδομένου κανονικοῦ ἡμιδεκαγώνου περὶ τὴν διάμετρον τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου.

53. Αἱ τρεῖς γωνίαι σφαιρικοῦ τινος τριγώνου εἶναι ἡ μὲν $58^{o}\ 18'$, ἡ δὲ $64^{o}\ 8'$ καὶ ἡ τρίτη $82^{o}\ 4'$· ἐκ πόσων τετραγωνικῶν μέτρων θέλει σύγκεισθαι ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ, ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς εἰς ἣν ἀνήκει σφαίρας εἶναι 6 μέτρα;

54. Νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ὄγκον σφαιρικοῦ τινος τμήματος, ἔχοντος μίαν μόνην βάσιν, ὕψος 4 μέτρα καὶ ἀνήκοντος εἰς σφαῖραν 9 μέτρων ἀκτῖνος.

55. Νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸν ὄγκον κολοβοῦ τινος κώνου, οὗτινος αἱ μὲν ἀκτῖνες τῶν βάσεων εἶναι 3 καὶ 5 μέτρα, ἡ δὲ πλευρὰ αὐτοῦ 7 μέτρα.

Στοιχειοθεσία ΙΩ. Γ. ΡΟ

12