ΩΝΟ

ΡΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ,

ΕΡΑΝΙΣΘΕΝΤΑ

ΥΠΟ

ΤΟΥ ΣΥΝΤΑΓΜΑΤΑΡΧΟΥ ΤΟΥ ΠΥΡΟΒΟΛΙΚΟΥ

ΜΙΧΑΗΛ ΣΟΦΙΑΝΟΥ,

ΑΡΧΑΙΟΥ ΜΑΘΗΤΟΥ ΤΗΣ ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΗΣ
ΤΩΝ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ ΣΧΟΛΗΣ.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ,

ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ Κ. ΑΝΤΩΝΙΑΔΟΥ.
(Ὁδὸς Περικλέους. Ἀριθ. 23.)

1871.

Κ. Α. Κανελλόπουλος
δόκιμος 1888

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ.

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΝ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ.
ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΔΙ' ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ.

1. ΕΝ παντὶ τριγώνῳ, εὐθυγράμμῳ ἢ σφαιρικῷ, διακρίνομεν ἓξ μέρη, τρεῖς γωνίας καὶ τρεῖς πλευράς. Ἵνα ὦσι δὲ ἅπαντα τὰ μέρη ταῦτα ὡρισμένα, ἀρκεῖ, ἐν γένει, νὰ γνωρίζωμεν τρία ἐξ αὐτῶν, ἐν οἷς ὅμως πρέπει (καὶ τοῦτο μόνον εἰς τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα) νὰ ὑπάρχῃ τοὐλάχιστον μία πλευρά.

Ἡ Γεωμετρία χορηγεῖ κατασκευὰς ἁπλουστάτας δι' ἑκάστην τῶν περιπτώσεων καθ' ἃς ἓν τρίγωνον δύναται νὰ ὁρισθῇ διὰ μέσου τινῶν ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ· ἀλλ' αἱ γραφικαὶ μέθοδοι δίδουσι προσέγγισιν μετριωτάτην, καὶ πολλάκις ἀνεπαρκῆ, ἕνεκα τῆς ἀτελείας τῶν ἐργαλείων· διὰ τοῦτο οἱ Μαθηματικοὶ ἐζήτησαν ν' ἀντικαταστήσωσι τὰς κατασκευὰς ταύτας διὰ λογισμῶν, δι' ὧν πάντοτε λαμβάνομεν τὸν ἀναγκαῖον βαθμὸν ἀκριβείας.

Ὁ κύριος σκοπὸς τῆς ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ *εἶναι ἡ ἐξήγησις τῶν μεθόδων δι' ὧν λογίζονται τὰ μέρη ἑνὸς τριγώνου, ἤγουν* ΕΠΙΛΥΕΤΑΙ *ἓν τρίγωνον, ὅταν ὑπάρχωσι δεδομένα ἱκανὰ πρὸς ὁρισμὸν αὐτοῦ.*

2. Τὰ μήκη τῶν γραμμῶν ἐκφράζονται εἰς ἀριθμοὺς διά τινος μονάδος· τότε ἑκάστη πλευρὰ ἰσοῦται ἀριθμῷ τινι μονάδων μετρικῶν.

3. Αἱ γωνίαι παριστάνονται διὰ τῶν τόξων δι' ὧν μετροῦνται. Πρὸς τοῦτο, ἡ περιφέρεια, οἱαδήποτε ἦναι ἡ ἀκτὶς αὐτῆς, διαιρεῖται εἰς ἀριθμὸν μερῶν ἴσων ὀνομαζομένων *μοιρῶν*, καὶ οὕτω μία γωνία ἢ ἓν τόξον ἐκφράζεται διά τινος ἀριθμοῦ μοιρῶν.

Οἱ ἀρχαῖοι Γεωμέτραι διῄρουν τὴν περιφέρειαν εἰς 360 μοίρας, τὴν μοίραν εἰς 60 λεπτὰ πρῶτα, τὸ πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 λεπτὰ δεύτερα, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Πρὸς ἀποφυγὴν ὅμως τοῦ πολυπλόκου τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, οἱ νεώτεροι ἐφήρμοσαν τὴν δεκαδικὴν διαίρεσιν καὶ εἰς τὸ τῶν γωνιῶν μέτρον. Οὕτω, διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν εἰς 400 μοίρας, τὴν μοίραν εἰς 100 λεπτὰ πρῶτα, τὸ πρῶτον λεπτὸν εἰς 100 λεπτὰ δεύτερα, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Αἱ μοῖραι, τὰ λεπτὰ πρῶτα, δεύτερα, ... διακρίνονται διὰ τῶν σημείων $^{\circ}$, $'$, $''$, ... Οὕτως ἵνα παραστήσωμεν 24 μοίρας, 15 λεπτὰ πρῶτα, 45 δεύτερα, 10 τρίτα, ... γράφομεν $24^{\circ}\ 15'\ 45''\ 10'''$ . . . . . Ἐὰν αἱ μοῖραι ἀνήκωσιν εἰς τὴν νέαν διαίρεσιν, θέλωμεν δὲ ν' ἀναφέρωμεν τὸ τόξον εἰς τὸ τεταρτοκύκλιον ὡς μονάδα λαμβανόμενον, γράφομεν 0^{r}, 24154510 . . . ., διότι κατὰ τὴν διαίρεσιν ταύτην, αἱ μοῖραί εἰσιν ἑκατοστὰ τοῦ τεταρτοκυκλίου, τὰ πρῶτα λεπτὰ, μυριοστὰ, κ.τ.έ.

ΣΗΜ. Ἂν καὶ ἡ νέα διαίρεσις παρέχει πλεῖστα πλεονεκτήματα, τῆς παλαιᾶς ὅμως ἡ χρῆσις διατηρεῖται ἀκόμη, ὅθεν ταύτην καὶ ἡμεῖς ἐνταῦθα παρεδέχθημεν.

ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ. ΧΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ + ΚΑΙ — ΠΡΟΣ ΔΙΑΚΡΙΣΙΝ ΘΕΣΕΩΝ ΑΝΤΙΘΕΤΩΝ.

4. Οἱ Γεωμέτραι πολὺν χρόνον ἐδυσκολεύθησαν ἵνα καταστρώσωσι τὰς ὑπαρχούσας σχέσεις τῶν γωνιῶν καὶ τῶν πλευρῶν τῶν τριγώνων πρὸς ἀλλήλας. Πρωτίστη αὐτῶν ἰδέα ὑπῆρξεν ἀναμφιβόλως νὰ εἰσάξωσιν ἀντὶ τῶν γωνιῶν τὰ μετροῦντα ταύτας τόξα· ἀλλ' εὑρόντες ἐπίσης δύσκολον τὴν εἰς τοὺς λογισμοὺς εἰσαγωγὴν τῶν τόξων, ὡδηγήθησαν φυσικῶς εἰς τὸ ν' ἀντικαταστήσωσι καὶ τὰ τόξα ταῦτα δι' εὐθειῶν, αἵτινες νὰ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τούτων οὕτως, ὥστε νὰ ἦναι ὡρισμέναι ὅταν τὸ τόξον ἦναι γνωστὸν, καὶ ἀντιστρόφως.

Αἱ εὐθεῖαι αὗται ὀνομάζονται *γραμμαὶ τριγωνομετρικαί*.

5. Ἕπονται οἱ ὁρισμοὶ τῶν τριγωνομετρικῶν τούτων γραμμῶν, οὓς ἐφαρμόσομεν συγχρόνως ἐπὶ τοῦ Σχ. 1.

Τὸ ΗΜΙΤΟΝΟΝ *τοῦ τόξου* ΑΜ, *ἢ τῆς ὑπ' αὐτοῦ μετρουμένης γωνίας* ΑΟΜ, *εἶναι ἡ ἀγομένη κάθετος* ΜΠ, *ἢ* ΑΓ, *ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τοῦ τόξου ἐπὶ τὴν διὰ τοῦ ἑτέρου ἄκρου διερχομένην διά-*

μετρον. Δῆλον δὲ ὅτι αἱ δύο κάθετοι αὗται ΜΠ, ΑΓ, εἰσὶν ἴσαι ἀλλήλαις.

Ἡ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ *τοῦ τόξου* ΑΜ, *ἢ τῆς ἀντιστοιχούσης αὐτῷ γωνίας* ΑΟΜ, *εἶναι τὸ μέρος* ΑΤ, *ἢ* ΜΔ, *τῆς ἀγομένης ἀπεριορίστου ἐφαπτομένης ἐφ' ἑνὸς τῶν ἄκρων τοῦ τόξου, τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τοῦ ἄκρου τούτου καὶ τῆς ἐπεκτάσεως τῆς ἀκτῖνος τῆς διὰ τοῦ ἑτέρου ἄκρου διερχομένης.* Δῆλον δὲ ὅτι αἱ δύο γραμμαὶ αὗται ΑΤ, ΔΜ, εἰσὶν ἴσαι ἀλλήλαις.

Ἡ ΤΕΜΝΟΥΣΑ *τοῦ τόξου* ΑΜ, *ἢ τῆς γωνίας* ΑΟΜ, *εἶναι τὸ μέρος* ΟΤ, *ἢ* ΟΔ, *τῆς ἀκτῖνος ἐπεκτεινομένης, τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἐφαπτομένης.*

Καλοῦντες τ τὸ τόξον ΑΜ, τὸ ἡμίτονον, ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ τέμνουσα αὐτοῦ δηλοῦνται συντόμως οὕτω·

$$\text{ΜΠ} = \text{ἡμ}\tau, \quad \text{ΑΤ} = \text{ἐφ}\tau, \quad \text{ΟΤ} = \text{τέμ}\tau.$$

Προάγομεν ΜΠ ἕως οὗ τμήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς Ν· ἡ χορδὴ ΜΝ εἶναι διπλασία τῆς ΜΠ, καὶ τὸ τόξον ΜΑΝ διπλάσιον τοῦ τόξου ΑΜ.

Λοιπὸν, *τὸ ἡμίτονον ἑνὸς τόξου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς τῆς ὑποτεινούσης τόξον διπλάσιον.*

Καλοῦντες ρ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἔχομεν τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου ἴσην $\rho\sqrt{2}$· ἀλλὰ τὸ ὑποτεινόμενον τόξον εἶναι 90°· ἄρα $\text{ἡμ}\, 45^\circ = \frac{1}{2}\rho\sqrt{2}$.

Ὡσαύτως, ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου ἰσοῦται ρ, τὸ δὲ ὑποτεινόμενον τόξον εἶναι 60°, ἔπεται ὅτι $\text{ἡμ}30^\circ = \frac{1}{2}\rho$.

6. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ *τόξου τινὸς (ἢ γωνίας) ὀνομάζεται ἡ διαφορὰ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ τεταρτοκυκλίου.*

Τὸ συμπλήρωμα τόξου τινὸς εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν, καθ' ὅσον τὸ τόξον τοῦτο εἶναι ἔλαττον ἢ μεῖζον 90°.

Ὀνομάζεται ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΝ, ΣΥΝΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ, ΣΥΝΔΙΑΤΕΜΝΟΥΣΑ *ἑνὸς τόξου, τὸ ἡμίτονον, ἡ ἐφαπτομένη, ἡ τέμνουσα τοῦ συμπληρώματος αὐτοῦ.* Αἱ νέαι αὗται γραμμαὶ σημειοῦνται οὕτω· συν, συνεφ, συνδ. Ἔχομεν λοιπόν·

$$\text{συν}\tau = \text{ἡμ}\,(90^\circ - \tau), \quad \text{συνεφ}\tau = \text{ἐφ}\,(90^\circ - \tau),$$
$$\text{συνδ}\tau = \text{τέμ}\,(90^\circ - \tau).$$

Ἄγομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΒ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ, καὶ τὰς ΜΚ, ΒΣ, καθέτους ἐπὶ τὴν ΟΒ. Τοῦ τόξου ΒΜ, τὸ μὲν ἡμίτονον εἶναι ΜΚ, ἡ δὲ ἐφαπτομένη ΒΣ, καὶ ἡ τέμνουσα ΟΣ. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι τὸ τόξον ΒΜ εἶναι τὸ συμπλήρωμα τοῦ τόξου ΑΜ, τὸ ὁποῖον ἐκαλέσαμεν τ, ἄρα·

$$ΜΚ = συν\tau, \quad ΒΣ = συνεφ\tau, \quad ΟΣ = συνδ\tau.$$

Παρατηρητέον ὅτι, *τὸ συνημίτονον ἰσοῦται τῷ περιλαμβανομένῳ μέρει τῆς ἀκτῖνος μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τοῦ ποδὸς τοῦ ἡμιτόνου.*

7. Ἡ ἀπόστασις ΑΠ, ἡ περιλαμβανομένη μεταξὺ τῆς ἀρχῆς τοῦ τόξου καὶ τοῦ ποδὸς τοῦ ἡμιτόνου, ὀνομάζεται ΠΑΡΗΜΙΤΟΝΟΝ, καὶ ἡ ἀπόστασις ΒΚ, ΠΑΡΑΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΝ, τοῦ τόξου ΑΜ.

Τῶν δύο τούτων γραμμῶν ἡ χρῆσις εἶναι σπανιωτάτη.

ΣΗΜ. Περιττὸν ἴσως νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι π α ρ α σ υ ν η μ ί τ ο ν ο ν ἑνὸς τόξου εἶναι τ ὸ π α ρ η μ ί τ ο ν ο ν τοῦ συμπληρώματος τοῦ τόξου τούτου.

8. Δίδοντες εἰς τὸ σημεῖον Μ πᾶσαν θέσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ λαμβάνουσι θέσεις ὅλως ἀντιθέτους ἐκείνων ἃς ἔχουσιν ὅταν τὸ τόξον ΑΜ ἦναι ἔλαττον 90°. Π. χ. ἐὰν πρόκηται περὶ τοῦ τόξου ΑΜ′, περιλαμβανομένου μεταξὺ 90° καὶ 180°, καὶ τοῦ ὁποίου τὸ συμπλήρωμα εἶναι ἀρνητικὸν καὶ ἴσον τῷ ΒΜ′, τὸ συνημίτονον ΚΜ′, ἢ ΟΠ′, κεῖται πρὸς ἀριστερὰν τοῦ σημείου Ο, ἐνῷ πρότερον ἦτο πρὸς τὰ δεξιά.

Τοιαῦται μεταβολαὶ τῆς θέσεως τῶν γραμμῶν ἐπιφέρουσιν ἐν γένει εἰς τοὺς λογισμοὺς δυσκολίας τινὰς, ἃς ἡ ἑξῆς ἁπλουστάτη πρότασις καθιστᾷ ἐπαισθητάς.

(Σχ. 2.) Ἔστω ΑΒΧ γραμμή τις ἐφ᾽ ἧς δίδονται δύω σημεῖα Α καὶ Β ἐν ἀποστάσει $ΑΒ = α$ ἀπ᾽ ἀλλήλων. Ὑποθέτομεν γνωστὴν τὴν ἀπόστασιν x τοῦ σημείου Β ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου Μ οἱουδήποτε τῆς γραμμῆς ΑΒΧ, καὶ θέλομεν νὰ λάβωμεν τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου Α ἀπὸ τοῦ τελευταίου τούτου σημείου. Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν διὰ τοῦ ω, φανερὸν ὅτι θέλομεν ἔχει,

$$ω = α + x, \quad ἢ \quad ω = α - x·$$

καθ᾽ ὅσον τὸ σημεῖον Μ κεῖται πρὸς τὸ μέρος ΒΧ ἢ πρὸς τὸ ΒΑ· ὥστε πρέπει νὰ μεταχειρισθῶμεν δύω διαφόρους τύπους διὰ τὰς δύω ταύτας θέσεις τοῦ σημείου Μ. Τοῦτο ἀποφεύγομεν, εἰς δὲ μόνος τύπος ἐπαρκεῖ, ἐὰν προσέχωμεν νὰ δίδωμεν σημεῖα διάφορα εἰς τὰς ἀποστάσεις αἵτινες ἔχουσι θέσεις ἀντιθέτους ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Β. Τῷ ὄντι, ἐὰν εἰς τὸν πρῶτον τύπον $\omega = \alpha + x$ κάμωμεν διαδοχικῶς $x = + BM$ καὶ $x = - BM$, θέλομεν ἔχει πρῶτον $\omega = \alpha + BM$ καὶ ἔπειτα $\omega = \alpha - BM$. Τοιουτοτρόπως ὁ πρῶτος τύπος ἁρμόζει εἰς ἁπάσας τὰς θέσεις τοῦ σημείου Μ, ὁ δ' ἕτερος καθίσταται περιττός.

Ἠδυνάμεθα ὡσαύτως νὰ λάβωμεν x θετικὸν πρὸς τὸ μέρος ΒΑ καὶ ἀρνητικὸν πρὸς τὸ ΒΧ· τότε ἔπρεπε νὰ διατηρήσωμεν τὸν 2ον τύπον.

Τὸ παράδειγμα μόνον τοῦτο ἀρκεῖ ἵνα ἐννοήσωμεν τὸ ἄξιον λόγου τοῦ ἑπομένου κανόνος τοῦ ΚΑΡΤΕΣΙΟΥ.

Ἐὰν ἐπί τινος γραμμῆς οἱασδήποτε, εὐθείας ἢ καμπύλης, θεωρῶμεν διαφόρους ἀποστάσεις, μετρουμένας ἀπό τινος κοινῆς ἀρχῆς σταθερᾶς ἐπὶ ταύτης τῆς γραμμῆς, θέλομεν εἰσάγει εἰς τοὺς λογισμοὺς τὰς ἀποστάσεις τὰς ἐχούσας θέσεις ἀντιθέτους ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν, δίδοντες εἰς τὰς μὲν τὸ σημεῖον + εἰς τὰς δὲ τὸ σημεῖον —.

Ἡ διεύθυνσις τῶν θετικῶν ἀποστάσεων εἶναι πάντη ἀδιάφορος· ἀλλ' ἅπαξ προσδιορισθεῖσα, αἱ ἀρνητικαὶ ἀποστάσεις πρέπει νὰ λαμβάνωνται πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος.

Ὅσον ἀφορᾷ τὰς τριγωνομετρικὰς γραμμὰς, συνήθως θεωροῦσιν αὐτὰς ὡς θετικὰς εἰς ἣν κατέχουσι θέσιν, ὅταν τὸ τόξον ἦναι θετικὸν καὶ ἔλαττον 90^o, ὡς ἀρνητικὰς δὲ εἰς τὴν ἀντίθετον θέσιν.

Οὕτω, δίδομεν τὸ σημεῖον + εἰς τὰ ἡμίτονα καὶ εἰς τὰς ἐφαπτομένας ὅταν αἱ γραμμαὶ αὗται κῆνται ἄνωθεν τῆς διαμέτρου ΑΑ', τὸ δὲ σημεῖον —, ὅταν κῆνται κάτωθεν τῆς αὐτῆς διαμέτρου. Τὰ συνημίτονα καὶ αἱ συνεφαπτόμεναι προσλαμβάνουσι τὸ + ἢ τὸ —, καθ' ὅσον αἱ γραμμαὶ αὗται διευθύνονται δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ τῆς διαμέτρου ΒΒ'. Τέλος, ἡ τέμνουσα προσλαμβάνει τὸ + ἢ τὸ —, καθ' ὅσον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἀγομένης ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὸ ἄκρον τοῦ τόξου, ἢ ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης ἐκτεινομένης κατὰ τὴν ἀντίθετον διεύθυνσιν.

Μετ' οὐ πολὺ ἀπαντήσομεν ἀπείρους ἐφαρμογὰς τοῦ ἡγουμένου κανόνος, ἐφ' οὗ θέλομεν ἐπανέλθει κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς Ἀλγέβρας εἰς τὴν Γεωμετρίαν. Κρίνομεν μόνον ἀναγκαῖον νὰ προσθέσωμεν ἐνταῦθα, ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ἀρχὴ δὲν εἶναι θεώρημα ἐπιδεκτικὸν ἀρχικῆς ἀποδείξεως, ἀλλὰ κυρίως ἁπλῆ τις συνθήκη, ἣν πρέπει νὰ προσέχωμεν νὰ μὴ παραβαίνωμεν, καὶ τῆς ὁποίας ἡ χρησιμότης καταδείκνυται διὰ τῶν ἐφαρμογῶν.

ΠΡΟΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ. ΠΩΣ ΑΓΟΝΤΑΙ ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΚΥΚΛΙΟΝ.

9. Μέχρι τοῦδε ἐθεωρήσαμεν τὰς διαφόρους τριγωνομετρικὰς γραμμὰς ἑνὸς τόξου ΑΜ (Σχ. 1) ἐλάσσονος τοῦ τεταρτοκυκλίου. Ναὶ μὲν αἱ γωνίαι ἑνὸς τριγώνου εἰσὶν ἑκάστη ἐλάσσων δύο ὀρθῶν, ἑπομένως καὶ τὰ μετροῦντα αὐτὰς τόξα ἕκαστόν ἐστιν ἔλαττον ἡμιπεριφερείας· ἀλλ' ἡ ἐφαρμογὴ τῶν τριγωνομετρικῶν τύπων δὲν περιορίζεται εἰς μόνην τὴν ἐπίλυσιν τῶν τριγώνων, ἀλλ' ἐκτείνεται εἰς πλεῖστα ζητήματα ἐν οἷς θεωροῦνται τόξα μείζονα περιφερείας καὶ οὐχ ἧττον ἐπιδεκτικὰ αὐξήσεως ἀπὸ τοῦ 0 ἐπ' ἄπειρον θετικῶς τε καὶ ἀρνητικῶς. Ἀνάγκη λοιπὸν νὰ ἐρευνήσωμεν τὰς μεταβολὰς εἰς ἃς ὑπόκεινται τὰ μεγέθη καὶ τὰ σημεῖα τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν ἑνὸς τόξου τ αὐξάνοντος μὲ τρόπον συνεχῆ ἀπὸ τοῦ 0 ἐπ' ἄπειρον.

10. (Σχ. 1) Ὅταν ἡ ἀκτὶς ΟΜ κῆται ἐπὶ τῆς ΟΑ, δῆλον ὅτι τὸ τόξον εἶναι μηδέν, ὡς καὶ τὸ ἡμίτονον καὶ ἡ ἐφαπτομένη· ἡ τέμνουσα καὶ τὸ συνημίτονον ἰσοῦνται τῇ ἀκτῖνι ΟΑ· ἡ δὲ συνεφαπτομένη καὶ ἡ συνδιατέμνουσα καταντῶσιν ἄπειροι.

Οὕτω, ρ οὔσης τῆς ἀκτῖνος, ἔχομεν·

$$\text{ἡμ}\, 0^\circ = 0, \qquad \text{ἐφ}\, 0^\circ = 0. \qquad \text{τέμ}\, 0^\circ = \rho$$
$$\text{συν}\, 0^\circ = \rho, \quad \text{συνεφ}\, 0^\circ = \infty, \quad \text{συνδ}\, 0^\circ = \infty.$$

Τῆς ἀκτῖνος προχωρούσης πρὸς τὴν θέσιν ΟΒ, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἡμίτονον, ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ τέμνουσα αὐξάνουσιν, ἐνῷ τὸ συνημίτονον, ἡ συνεφαπτομένη καὶ ἡ συνδιατέμνουσα ἐλαττοῦνται.

Ὅταν τὸ σημεῖον Μ φθάσῃ ἐν τῷ μέσῳ τοῦ τόξου ΑΒ, τὸ μὲν τόξον ΑΜ εἶναι 45°, τὸ δὲ ἡμίτονον ἰσοῦται τῷ συνημιτόνῳ. Ἀλλὰ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΟΠΜ δίδει $\text{ΜΠ} = \frac{1}{2}\rho\sqrt{2}$, λοιπόν,

$$\text{ἡμ}\, 45^\circ = \text{συν}\, 45^\circ = \tfrac{1}{2}\,\rho\sqrt{2}.$$

Τὰ ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα τρίγωνα ΟΑΤ, ΟΒΣ, δεικνύουσιν ὅτι·

$$\text{ἐφ}\, 45^\circ = \text{συνεφ}\, 45^\circ = \rho.$$

Τέλος, ἡ τέμνουσα καὶ ἡ συνδιατέμνουσα εἰσὶν ἴσαι, καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΑΤ συνάγομεν ὅτι·

$$\text{τέμ } 45^\circ = \text{συνδ } 45^\circ = \rho\sqrt{2}.$$

Ὅταν τὸ σημεῖον Μ φθάσῃ εἰς Β, ἤτοι ὅταν τὸ τόξον αὐξηθῇ μέχρις 90°, τὸ ἡμίτονον εἶναι ΒΟ, ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ τέμνουσα γίνονται ἄπειροι, τὸ συνημίτονον καὶ ἡ συνεφαπτομένη μηδενίζονται, ἡ δὲ συνδιατέμνουσα ἰσοῦται τῇ ἀκτῖνι ΟΒ. Ἔχομεν λοιπόν·

$$\text{ἡμ } 90^\circ = \rho, \quad \text{ἐφ } 90^\circ = \infty, \quad \text{τέμ } 90^\circ = \infty,$$
$$\text{συν } 90^\circ = 0, \quad \text{συνεφ } 90^\circ = 0, \quad \text{συνδ } 90^\circ = \rho.$$

Ἄλλως τε, αἱ τιμαὶ αὗται εἶναι συνέπειαι τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὸ 0° τόξον, διότι τὰ τόξα 0° καὶ 90° εἶναι συμπληρωματικά.

11. Ὑποτεθείσθω ἤδη ὅτι ἡ ἀκτὶς ΟΜ, ἐξακολουθοῦσα τὴν περιστροφὴν αὐτῆς, λαμβάνει τὴν θέσιν ΟΜ′. Τότε τὸ τόξον εἶναι ΑΜ′, ἤτοι κεῖται μεταξὺ 90° καὶ 180°, καὶ τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ Μ′Π′. Ἄγομεν τὴν ΜΜ′ παράλληλον τῆς ΑΑ′ καὶ κατασκευάζομεν ἁπάσας τὰς τριγωνομετρικὰς γραμμὰς τοῦ τόξου ΑΜ′. Κατὰ πρῶτον εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ ἡμίτονα ΜΠ καὶ Μ′Π′ εἰσὶν ἴσα· ἄρα·

$$\text{ἡμ ΑΜ}' = \text{ἡμ ΑΜ}.$$

Ἵνα λάβωμεν τὴν ἐφαπτομένην τοῦ τόξου ΑΜ′, πρέπει νὰ ἐπεκτείνωμεν τὴν ἀκτῖνα ΟΜ′ ὑπὸ τὴν διάμετρον ΑΑ′· ὅθεν προκύπτει ὅτι ἡ ἐφαπτομένη αὕτη, ἥτις εἶναι ἡ ΑΤ′, κεῖται εἰς θέσιν ἀντίθετον ἐκείνης ἣν εἶχε τὸ πρῶτον, ἑπομένως εἶναι ἀρνητική. Ἀλλὰ ΑΤ′ = ΑΤ, διότι τὰ τρίγωνα ΟΑΤ καὶ ΟΑΤ′ εἰσὶν ἴσα· ἄρα·

$$\text{ἐφ ΑΜ}' = -\text{ ἐφ ΑΜ}.$$

Κατὰ § 5, ἡ τέμνουσα τοῦ τόξου ΑΜ′ εἶναι ἡ ΟΤ′. Ἡ γραμμὴ αὕτη δὲν κατευθύνεται πλέον ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΜ′, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου πρὸς ὃ καὶ τὸ περιστρεφόμενον σημεῖον Μ′, ἀλλὰ πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος, καὶ ἕνεκα τούτου εἶναι ἀρνητική· ἐπειδὴ δὲ ΟΤ′ = ΟΤ, ἔχομεν κατὰ συνέπειαν·

$$\text{τέμ ΑΜ}' = -\text{ τέμ ΑΜ}.$$

Τὸ συνημίτονον, ἡ συνεφαπτομένη καὶ ἡ συνδιατέμνουσα δίδουσι χώραν εἰς παρατηρήσεις ἀναλόγους. Ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΜ′ ὑπερβαίνει τὰς 90°, τὸ συμπλήρωμα αὐτοῦ εἶναι ἀρνητικόν· προσέτι, ἐπειδὴ τὸ συνημίτονον ΚΜ', ἢ ΟΠ', εὑρίσκεται ἀριστερὰ τοῦ σημείου Ο, πρέπει νὰ λάβωμεν καὶ τοῦτο ἀρνητικῶς. Ὁμοίως συλλογιζόμεθα καὶ διὰ τὴν συνεφαπτομένην ΒΣ'. Ὅσον διὰ τὴν συνδιατέμνουσαν ΟΣ', δὲν ὑπάρχει λόγος ἵνα προσλάβῃ αὕτη τὸ σημεῖον —, διότι κεῖται ἐπὶ τῆς ΟΜ', πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος μετὰ τοῦ περιστρεφομένου σημείου, ὡς ἐν τῷ πρώτῳ τεταρτοκυκλίῳ. Τὰ ἴσα τρίγωνα ΟΒΣ καὶ ΟΒΣ' δίδουσι, ΚΜ' = ΚΜ, ΒΣ' = ΒΣ, ΟΣ', = ΟΣ' λοιπόν,

συνΑΜ' = — συνΑΜ, συνεφΑΜ' = — συνεφΑΜ, συνδΑΜ' = συνδΑΜ.

12. ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑ *τόξου τινὸς (ἢ γωνίας) ὀνομάζεται ἡ διαφορὰ αὐτοῦ ἀπὸ* 180°· οὕτω, τὸ τόξον Α'Μ', ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ ΑΜ, εἶναι τὸ παραπλήρωμα τοῦ τόξου ΑΜ'· ἄρα αἱ προηγούμεναι ἰδιότητες δύνανται νὰ ἐκφωνηθῶσιν ὡς ἑξῆς·

Δύω τόξα παραπληρωματικὰ ἔχουσιν ἴσας τριγωνομετρικὰς γραμμὰς μετὰ σημείων ἐναντίων, πλὴν τοῦ ἡμιτόνου καὶ τῆς συνδιατεμνούσης, ὧν τὸ σημεῖον δὲν μεταβάλλεται.

Αἱ ἰδιότητες αὗται ἐκφράζονται καὶ δι' ἐξισώσεων ὡς ἑξῆς. Διὰ τοῦ τ παριστάνομεν τὸ τόξον ΑΜ', ἑπομένως ΑΜ = Α'Μ' = 180° — τ.

$$
(1)\quad \left|\begin{aligned}
\text{ἡμ}\tau &= \text{ἡμ}\,(180^0 - \tau),\\
\text{ἐφ}\tau &= -\,\text{ἐφ}\,(180^0 - \tau),\\
\text{τέμ}\tau &= -\,\text{τέμ}\,(180^0 - \tau),\\
\text{συν}\tau &= -\,\text{συν}\,(180^0 - \tau),\\
\text{συνεφ}\tau &= -\,\text{συνεφ}\,(180^0 - \tau),\\
\text{συνδ}\tau &= \text{συνδ}\,(180^0 - \tau).
\end{aligned}\right.
$$

Φανερὸν ὅτι, ἀπὸ 90° μέχρι 180° τὸ ἡμίτονον, ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ τέμνουσα ἐλαττοῦνται, τὸ δὲ συνημίτονον, ἡ συνεφαπτομένη καὶ ἡ συνδιατέμνουσα αὐξάνουσι.

Ὅταν ἡ ἀκτὶς ΟΑ φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν ΟΑ', τότε ἔχομεν·

$$
\text{ἡμ}\,180^0 = 0,\qquad \text{ἐφ}\,180^0 = 0,\qquad \text{τέμ}\,180^0 = -\rho,
$$
$$
\text{συν}\,180^0 = -\rho,\qquad \text{συνεφ}\,180^0 = -\infty,\qquad \text{συνδ}\,180^0 = \infty.
$$

Τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα ποριζόμεθα καὶ ἐκ τῶν σχέσεων (1), ποιοῦντες $\tau = 180^0$.

Διὰ συλλογισμῶν ὁμοίων τοῖς ἡγουμένοις, συνάγομεν τὴν ὕπαρξιν καὶ τῶν ἑξῆς ἐξαγομένων·

$$
\begin{array}{lll}
\text{ἡμ}\, 270^0 = -\rho, & \text{ἐφ}\, 270^0 = \infty, & \text{τέμ}\, 270^0 = \infty, \\
\text{συν}\, 270^0 = 0, & \text{συνεφ}\, 270^0 = 0, & \text{συνδ}\, 270^0 = -\rho, \\
\text{ἡμ}\, 360^0 = 0, & \text{ἐφ}\, 360^0 = 0, & \text{τέμ}\, 360^0 = \rho, \\
\text{συν}\, 360^0 = \rho, & \text{συνεφ}\, 360^0 = \infty, & \text{συνδ}\, 360^0 = \infty,
\end{array}
$$

13. Εἴπομεν [10] ὅτι ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς τῆς ἀναλύσεως εἰς τὴν Γεωμετρίαν καταντῶμεν πολλάκις εἰς τόξα περιέχοντα πολλὰς ἡμιπεριφερείας. Ἀπαιτεῖται λοιπὸν νὰ δώσωμεν τύπους δι' ὧν νὰ ἄγωνται καὶ τὰ τοιαῦτα τόξα εἰς τὸ πρῶτον τεταρτοκύκλιον. Πρὸς συντομίαν, θέλομεν ἀσχοληθῆ ἰδίως εἰς τὸ ἡμίτονον καὶ εἰς τὸ συνημίτονον, ὡς οὐσῶν συνηθεστέρων τῶν γραμμῶν τούτων· ἐπειδὴ δὲ πᾶν τόξον μεῖζον τῶν 180^0, σύγκειται ἐκ τόξου τινος ἐλάσσονος 180^0, πλέον ἅπαξ ἢ πολλάκις 180^0, θέλομεν ἐξετάσει κατὰ πρῶτον τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ $(180^0 + \tau)$ τόξου, τοῦ τ ὄντος ἐλάσσονος 180^0.

Ἔστω τὸ τόξον $\text{AM} = \tau$, ὅπερ δύναται κατ' ἀρέσκειαν νὰ ληφθῇ μεταξὺ 0^0 καὶ 180^0· προσθέτομεν εἰς αὐτὸ τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΜΑ'Ν' καὶ ἔχομεν $\text{AMA'N'} = 180^0 + \tau$. Τὰ δύω ταῦτα τόξα ἔχουσιν ἡμίτονα ἴσα, ἤτοι τὰ ΜΠ καὶ Ν'Π' (ἢ τὰ ΟΚ καὶ ΟΚ'), πλὴν μετὰ σημείων ἐναντίων. Τὰ συνημίτονα ΟΠ καὶ ΟΠ' εἰσὶν ἐπίσης ἴσα καὶ ἔχουσι σημεῖα ἐναντία· ἄρα·

$$(2)\qquad \text{ἡμ}\,(180^0 + \tau) = -\,\text{ἡμ}\tau, \quad \text{συν}\,(180^0 + \tau) = -\,\text{συν}\tau.$$

Προσθέσωμεν ἤδη 360^0 εἰς τὸ τόξον ΑΜ· φανερὸν ὅτι ἐπανερχόμεθα εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ τῆς περιφερείας, καὶ ἐπομένως ὅτι ἅπασαι αἱ τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ ἐπανέρχονται αἱ αὐταί· λοιπόν·

$$(3)\qquad \text{ἡμ}\,(360^0 + \tau) = \text{ἡμ}\tau, \quad \text{συν}\,(360^0 + \tau) = \text{συν}\tau.$$

Ἐν γένει, οἱονδήποτε μέγεθος ὑποθέσωμεν διὰ τὸ τόξον τ, ἐὰν εἰς αὐτὸ προσθέσωμεν 180^0, ἢ περιττόν τινα ἀριθμὸν ἡμιπεριφερειῶν, τὸ ἄκρον αὐτοῦ εὑρεθήσεται μετατεθειμένον ἀπὸ τῆς κορυφῆς μιᾶς διαμέτρου ἐν τῇ ἀντιθέτῳ κορυφῇ· φανερὸν δὲ ὅτι τότε τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου τὰ σημεῖα μόνον μεταβάλλονται. Ἀλλ' ἐὰν εἰς τὸ τόξον τ προσθέσωμεν 360^0, ἢ ἄρτιόν τινα ἀριθμὸν ἡμιπεριφερειῶν, οὐδεμία τριγωνομετρικὴ γραμμὴ μεταβάλλεται, διότι ἐπανερχόμεθα εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ κύκλου.

14. Ὑπολείπεται νὰ ὁμιλήσωμεν περὶ τῶν ἀρνητικῶν τόξων, ἤγουν περὶ τῶν τόξων τὰ ὁποῖα ἡ ἀκτὶς (ἥτις κατ' ἀρχὰς ἔκειτο ἐπὶ τῆς ΟΑ) διαγράφει κινουμένη κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΑΒ'Α', ἀντίθετον ἐκείνης ἣν πρότερον ἠκολούθησε.

Ἔστωσαν δύω τόξα ΑΜ καὶ ΑΝ ἴσα καὶ ἀντίθετα, παριστανόμενα διὰ τοῦ τ καὶ τοῦ $-\tau$. Σαφὲς ὅτι τὰ ἡμίτονα αὐτῶν ΜΠ καὶ ΝΠ εἰσὶν ἴσα καὶ ἀντίθετα. Ἵνα λάβωμεν τὰ συνημίτονα, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ συμπληρώματα $(90^0 - \tau)$ καὶ $(90^0 + \tau)$ παριστάνονται διὰ τῶν τόξων ΒΜ καὶ ΒΜΝ, τῶν ὁποίων τὰ ἡμίτονα ΜΚ καὶ ΝΚ' εἰσὶν ἴσα καὶ ὁμοίως κείμενα. Ὅθεν ἔχομεν·

(4) $$\text{ἡμ}(-\tau) = -\text{ἡμ}\tau, \qquad \text{συν}(-\tau) = \text{συν}\tau.$$

Ὡσαύτως εὑρίσκομεν ὅτι·

$$\text{ἐφ}(-\tau) = -\text{ἐφ}\tau, \qquad \text{τέμ}(-\tau) = \text{τέμ}\tau,$$
$$\text{συνεφ}(-\tau) = -\text{συνεφ}\tau, \qquad \text{συνδ}(-\tau) = -\text{συνδ}\tau.$$

15. Ἂν καὶ ἐπὶ τοῦ σχήματος τὰ τόξα ΑΜ καὶ ΑΝ ἐλήφθησαν ἐλάσσονα 90^0, οὐχ ἧττον ὅμως οἱ τύποι (4) εἶναι γενικοί. Κατὰ πρῶτον φανερὸν ὅτι, αὐξανομένων κατ' ἀρέσκειαν τῶν δύο τόξων, ἀλλ' ἴσων διατηρουμένων, τὰ ἡμίτονα ΜΠ καὶ ΝΠ ἔσονται πάντοτε ἴσα καὶ ἀντίθετα· λοιπὸν ἔχομεν πάντοτε $\text{ἡμ}(-\tau) = -\text{ἡμ}\tau$. Ὅσον περὶ τοῦ ἑτέρου τύπου, ὑποτεθείσθω ὅτι τίθενται εἰς αὐτὸν τόξα μείζονα 90^0, ὡς π. χ. τὰ ΑΒΜ' καὶ ΑΒ'Ν'· ὑποθέτομεν

$$\tau = \text{ABM}', \quad \text{καὶ} \quad -\tau = -\text{AB}'\text{N}'.$$

Τὸ τοῦ πρώτου τόξου συμπλήρωμα $(90^0 - \tau)$ εἶναι ἀρνητικὸν καὶ παριστάνεται ἐπὶ τοῦ σχήματος διὰ τοῦ τόξου ΒΜ' κειμένου ἀριστερὰ τοῦ σημείου Β. Τὸ τοῦ δευτέρου τόξου συμπλήρωμα $(90^0 + \tau)$ ἰσοῦται τῷ ΒΑΝ', καὶ κεῖται πάντοτε δεξιὰ τοῦ σημείου Β. Ἀλλὰ τὰ ἡμίτονα Μ'Κ καὶ Ν'Κ' τῶν συμπληρωματικῶν τούτων τόξων εἰσὶν ἴσα καὶ τὴν αὐτὴν θέσιν ἔχουσιν ὡς πρὸς τὴν διάμετρον ΒΒ'· λοιπὸν ἔχομεν πάντοτε $\text{συν}(-\tau) = \text{συν}\tau$.

Ἄρα, οἱ τύποι (4) εἰσὶν ἄνευ ἐξαιρέσεως γενικοί.

16. Καλὸν εἶναι νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι οἱ ἡγούμενοι τύποι (1), (2), (3), (4), δύνανται νὰ ἐφαρμοσθῶσιν εἰς παντὸς μεγέθους τόξα, θετικά τε καὶ ἀρνητικά. Πρὸς συντομίαν θέλομεν ἀσχοληθῆ μόνον εἰς τὸ ἡμίτονον καὶ εἰς τὸ συνημίτονον.

1ον. Λαμβάνομεν τοὺς δύω τύπους $\text{ἡμ}\tau = \text{ἡμ}(180^0 - \tau)$, $\text{συν}\tau = -\text{συν}(180^0 - \tau)$, οἵτινες ἀπεδείχθησαν διὰ μόνα τὰ θετικὰ τόξα τὰ μεταξὺ 0^0 καὶ 180^0.

Τρέποντες εἰς αὐτοὺς τ εἰς $180^0 + \tau$, λαμβάνομεν·

$$\etaμ(180^0+\tau)=\etaμ(-\tau), \qquad συν(180^0+\tau)=-συν(-\tau),$$

ἰσότητας προφανεῖς, συνεπείᾳ τῶν σχέσεων (2) καὶ (4)·

Φανερὸν ὅτι τὸ τόξον δύναται ἀκόμη ν' αὐξηθῇ κατὰ 180^0, καὶ οὕτω καθεξῆς ἐπ' ἄπειρον. Θέτοντες $-\tau$ ἀντὶ τ, βλέπομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὅτι οἱ δύω τύποι εἶναι καὶ αὖθις ἀληθεῖς. Ἄρα ἁρμόζουσιν εἰς πᾶν τόξον.

2ον. Οἱ τύποι (2), οἵτινες ἀπεδείχθησαν δι' ἅπαντα τὰ θετικὰ τόξα, ἐφαρμόζονται ἐπίσης καὶ εἰς τ' ἀρνητικά.

Τῷ ὄντι, τρέποντες εἰς αὐτοὺς τ εἰς $-\tau$, λαμβάνομεν·

$$\etaμ(180^0-\tau)=-\etaμ(-\tau)=\etaμ\tau,$$
$$συν(180^0-\tau)=-συν(-\tau)=-συν\tau,$$

ἐμπεριέχονται δὲ τότε εἰς τοὺς τύπους (1).

3ον. Ἐπειδὴ ἡ προσθήκη 180^0 εἰς ἓν τόξον οἱονδήποτε $+\tau$ ἢ $-\tau$ δὲν μεταβάλλει εἰμὴ τὰ σημεῖα τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου, ἕπεται ὅτι ἡ προσθήκη 360^0 οὐδεμίαν ἐπιφέρει μεταβολήν, καὶ ἑπομένως οἱ τύποι (3) ἁρμόζουσιν ἐπίσης εἰς τ' ἀρνητικὰ τόξα.

4ον. Οἱ τύποι (4) οὐδεμιᾶς δείξεως χρήζουσι, διότι εἶναι φανερὸν ὅτι δυνάμεθα νὰ θέσωμεν εἰς αὐτοὺς $-\tau$ ἀντὶ τ.

17. Ἐκ τῆς προηγουμένης διασκοπήσεως προκύπτει ὅτι·

Τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον μεταβάλλονται ἀπὸ $+\rho$ μέχρι $-\rho$. Τὸ σημεῖον τῶν δύω τούτων γραμμῶν μεταβάλλεται διαβαινουσῶν αὐτῶν διὰ τοῦ μηδενός.

Ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη μεταβάλλονται ἀπὸ τοῦ $+\infty$ μέχρι τοῦ $-\infty$. Τὸ σημεῖον αὐτῶν ἀλλάσσει διερχομένων διὰ τοῦ μηδενὸς καὶ διὰ τοῦ ἀπείρου.

Τέλος, ἡ τέμνουσα καὶ ἡ συνδιατέμνουσα λαμβάνουσι πᾶσαν τιμὴν μεταξὺ $+\rho$ καὶ $+\infty$, καὶ μεταξὺ $-\rho$ καὶ $-\infty$ περιλαμβανομένην. Τὸ σημεῖον τῶν γραμμῶν τούτων μεταβάλλεται διαβαινουσῶν αὐτῶν διὰ τοῦ ἀπείρου.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν προσέτι ὅτι, ἐὰν λάβωμεν τὴν ἀκτῖνα ἴσην τῇ μονάδι, πᾶς ἀριθμός, θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς μικρότερος τῆς μονάδος, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ ἡμίτονον ἢ τὸ συνημίτονον ἑνὸς τόξου. Πᾶς ἀριθμὸς πραγματικός, θετικὸς ἢ ἀρνητικός, παριστᾷ τὴν ἐφαπτομένην ἢ τὴν συνεφαπτομένην ἑνὸς τόξου. Τέλος, πᾶς ἀριθμός, θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς, οὗτινος ἡ ἀπόλυτος τιμὴ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος, δύναται νὰ παραστήσῃ τὴν τέμνουσαν ἢ τὴν συνδιατέμνουσαν ἑνὸς τόξου.

18. Ἐπὶ τῶν σημείων τῶν ἀπείρων τιμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν κρίνομεν ἀξίαν λόγου καὶ τὴν ἀκόλουθον παρατήρησιν.

Ἡ ἄπειρος τιμὴ τῆς ἐφαπτομένης τοῦ 90° τόξου, πρέπει νὰ λαμβάνηται μετὰ τοῦ διπλοῦ σημείου $\pm$, διότι αὕτη εἶναι ταὐτοχρόνως τὸ ὅριον τῶν θετικῶν ἐφαπτομένων τῶν τόξων τῶν ἀπὸ 0° μέχρι 90° αὐξανόντων, καὶ τὸ ὅριον τῶν ἀρνητικῶν ἐφαπτομένων τῶν ἀπὸ 180° μέχρι 90° μειουμένων τόξων.

Ἡ αὐτὴ παρατήρησις ἐφαρμόζεται καὶ εἰς ἁπάσας τὰς τριγωνομετρικὰς γραμμὰς, τὰς ἐπιδεκτικὰς νὰ γίνωσιν ἄπειροι.

19. Εὐκολώτατον εἶναι ἤδη νὰ ἀγάγωμεν εἰς τὸ πρῶτον τεταρτοκύκλιον τὰς τριγωνομετρικὰς γραμμὰς οἱουδήποτε τόξου.

Ἔστω $\tau = 1029^\circ$ τόξον τοῦ ὁποίου ζητεῖται τὸ ἡμίτονον. Ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτοῦ 360° ὁσάκις δυνατὸν, καὶ μένουσι 309°· ὅθεν κατὰ τοὺς τύπους (3), $\text{ἡμ}\tau = \text{ἡμ}\ 309^\circ$. Ἀφαιροῦμεν ἀκόμη 180° ἐκ τῶν 309°, καὶ ἐκ τῶν τύπων (2) ἔχομεν, $\text{ἡμ}\tau = -\text{ἡμ}\ 129^\circ$. Τέλος, λαμβάνομεν τὸ παραπλήρωμα τῶν 129°, τὸ ὁποῖον εἶναι 51°, καὶ, κατὰ § 12, ἔχομεν $\text{ἡμ}\tau = -\text{ἡμ}\ 51^\circ$.

Δυνάμεθα ἔτι νὰ προχωρήσωμεν τὴν μείωσιν, διότι·
$\text{ἡμ}\ 51^\circ = \text{συν}(90^\circ - 51^\circ) = \text{συν}\ 39^\circ$· ἄρα, $\text{ἡμ}\tau = -\text{συν} 39^\circ$.

Ἐὰν τὸ δοθὲν τόξον ἦτο $\tau = -1029^\circ$, τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ ἤθελεν ἔχει σημεῖον ἐναντίον τοῦ ἡγουμένου [14], ($\text{ἡμ}\tau = \text{συν}\ 39^\circ$).

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥΝΤΩΝ ΤΟΞΩΝ ΕΙΣ ΤΙΝΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗΝ ΓΡΑΜΜΗΝ ΔΕΔΟΜΕΝΗΝ.

20. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἀναπτύξεων προκύπτει ἡ παρατήρησις, ὅτι ὑπάρχουσιν ἄπειρα τόξα ἔχοντα τὰς αὐτὰς τριγωνομετρικὰς γραμμάς. Τεθείσθω ὅτι, δίδεται μία τῶν γραμμῶν τούτων καὶ ζητοῦνται τὰ ἀντιστοιχοῦντα αὐτῇ διάφορα τόξα.

21. (Σχ. 1) Ἔστω $\text{ἡμ}\ x = \beta$. Ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΒ, καθέτου ἐπὶ τὴν ΟΑ, λαμβάνομεν $\text{ΟΚ} = \beta$, καὶ διὰ τοῦ σημείου Κ ἄγομεν τὴν ΜΜ′ παράλληλον τῇ ΟΑ. Φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ λάβωμεν ὡς τιμὴν τοῦ x ὅλα τὰ τόξα τὰ περατούμενα εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′. Καλοῦμεν τ τὸ τόξον ΑΜ, καὶ Π τὴν ἡμιπεριφέρειαν.

Τὸ μὲν τόξον $AM' = (\Pi - \tau)$, τὰ δὲ θετικὰ τόξα τὰ περατούμενα εἰς τὰ σημεῖα M καὶ M′ συμπεριλαμβάνονται ἐν ταῖς δυσὶν ἑπομέναις σειραῖς·

$$\tau,\quad 2\Pi + \tau,\quad 4\Pi + \tau,\quad 6\Pi + \tau,\quad \ldots\ldots$$
$$\Pi - \tau,\quad 3\Pi - \tau,\quad 5\Pi - \tau,\quad 7\Pi - \tau,\quad \ldots\ldots$$

Ἔχομεν $AB'A'M = 2\Pi - \tau$ καὶ $AB'A'M' = \Pi + \tau$. Εἰς τὰ τόξα ταῦτα προσθέτομεν ἀριθμὸν οἱονδήποτε περιφερειῶν, εἶτα λαμβάνομεν ἀρνητικῶς τὰ προκύπτοντα τόξα, καὶ ἔξομεν ἅπαντα τὰ ἀρνητικὰ τόξα τὰ εἰς τὸ δεδομένον ἡμίτονον ἀντιστοιχοῦντα, ἤτοι·

$$-2\Pi + \tau,\quad -4\Pi + \tau,\quad -6\Pi + \tau,\quad \ldots\ldots$$
$$-\Pi - \tau,\quad -3\Pi - \tau,\quad -5\Pi - \tau,\quad \ldots\ldots$$

Τὰ τόξα τῶν τεσσάρων τούτων σειρῶν δύνανται νὰ συμπεριληφθῶσιν εἰς δύω τύπους ἁπλουστάτους. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὰς δύω ἐκ τῶν σειρῶν τούτων τὸ τόξον τ προστίθεται εἰς ἄρτιόν τι πολλαπλάσιον τοῦ Π θετικόν τε καὶ ἀρνητικόν, καὶ ὅτι εἰς τὰς ἑτέρας δύω ἀφαιρεῖται ἀπό τινος περιττοῦ πολλαπλασίου τοῦ Π. Παριστάνοντες λοιπὸν διὰ τοῦ k ἀριθμόν τινα ἀκέραιον οἱονδήποτε, θετικόν, ἢ ἀρνητικόν, ἢ καὶ ἴσον μηδενί, ἅπαντα τὰ ζητούμενα τόξα δύνανται νὰ παρασταθῶσι διὰ τῶν τύπων·

$$(1)\qquad x = 2k\Pi + \tau,\qquad x = (2k + 1)\Pi - \tau.$$

Ὑπεθέσαμεν β θετικόν· ἀλλ' ἐὰν ἔχωμεν ἡμ $x = -\beta$, πρέπει νὰ λάβωμεν $OK' = \beta$ πρὸς τὸ μέρος OB′. Τότε αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶναι τὰ περατούμενα τόξα εἰς τὰ σημεῖα N′ καὶ N. Καλοῦμεν $ABN' = \tau$, καὶ ἔχομεν $ABN = 3\Pi - \tau$, $AB'N' = 2\Pi - \tau$, καὶ $AN = \tau - \Pi$. Ἐπομένως αἱ τιμαὶ τοῦ τ, θετικαί τε καὶ ἀρνητικαί, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὸ ἡμίτονον OK′, εἶναι·

$$\tau,\quad 2\Pi + \tau,\quad 4\Pi + \tau,\quad 6\Pi + \tau,\quad \ldots\ldots$$
$$3\Pi - \tau,\quad 5\Pi - \tau,\quad 7\Pi - \tau,\quad 9\Pi - \tau,\quad \ldots\ldots$$
$$-2\Pi + \tau,\quad -4\Pi + \tau,\quad -6\Pi + \tau,\quad -8\Pi + \tau,\quad \ldots\ldots$$
$$\Pi - \tau,\quad -\Pi - \tau,\quad -3\Pi - \tau,\quad -5\Pi - \tau,\quad \ldots\ldots$$

Φανερὸν δὲ ὅτι ἐμπεριέχονται ἐπίσης εἰς τοὺς τύπους (1).

22. Ἔστω συν $x = \beta$. Ἐὰν β ἦναι θετικόν, λαμβάνομεν $O\Pi = \beta$ πρὸς τὸ μέρος OA, ἄγομεν εἰς τὸ σημεῖον Π τὴν κάθε-

τον MN, καὶ αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶναι τὰ διάφορα τόξα, θετικά τε καὶ ἀρνητικὰ, τὰ περατούμενα εἰς τὰ σημεῖα M καὶ N. Καλοῦμεν AM $= \tau$· εὐκόλως δὲ βλέπομεν ὅτι τὰ τόξα ταῦτά εἰσι τὰ τῶν τεσσάρων ἀκολούθων σειρῶν·

$$\begin{array}{llll} \tau, & 2\Pi + \tau, & 4\Pi + \tau, & 6\Pi + \tau, \ldots \\ 2\Pi - \tau, & 4\Pi - \tau, & 6\Pi - \tau, & 8\Pi - \tau, \ldots \\ -\tau, & -2\Pi - \tau, & -4\Pi - \tau, & -6\Pi - \tau, \ldots \\ -2\Pi + \tau, & -4\Pi + \tau, & -6\Pi + \tau, & -8\Pi + \tau, \ldots \end{array}$$

τὰ ὁποῖα ἅπαντα ἐμπεριέχονται εἰς τοὺς τύπους τούτους,

$$(2) \qquad x = 2k\Pi + \tau, \qquad x = 2k\Pi - \tau,$$

ἐν οἷς k παριστᾷ ἀριθμὸν οἱονδήποτε ἀκέραιον, θετικὸν, ἢ ἀρνητικὸν, ἢ καὶ ἴσον μηδενί.

Ἀλλ' ἐὰν *συν* x $= -\beta$, τότε λαμβάνομεν β πρὸς τὸ μέρος OA', καὶ παριστάνομεν διὰ τοῦ τ τὸ τόξον AMM', φθάνομεν δὲ εἰς τὰ αὐτὰ ἀνωτέρω ἐξαγόμενα.

23. Ἔστω προσέτι *ἐφ* x $= \beta$. Ὑποθέτομεν β θετικὸν, καὶ λαμβάνομεν τὴν ἐφαπτομένην AT $= \beta$ ἄνω τῆς OA. Ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν TMN' διὰ τοῦ κέντρου, ἥτις τέμνει τὸν κύκλον εἰς M καὶ N'· Αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶναι τὰ τόξα, θετικά τε καὶ ἀρνητικὰ, τὰ ὁποῖα περατοῦνται εἰς τὰ αὐτὰ σημεῖα M καὶ N'. Καλοῦμεν τὸ τόξον AM $= \tau$, καὶ ἔχομεν AMN' $= \Pi + \tau$, AN'M $= 2\Pi - \tau$, AN' $= \Pi - \tau$· Τὰ ζητούμενα τόξα εἰσὶ τὰ ἐν ταῖς ἐφεξῆς σειραῖς περιέχόμενα·

$$\begin{array}{llll} \tau, & 2\Pi + \tau, & 4\Pi + \tau, & \ldots \\ \Pi + \tau, & 3\Pi + \tau, & 5\Pi + \tau, & \ldots \\ -2\Pi + \tau, & -4\Pi + \tau, & -6\Pi + \tau, & \ldots \\ -\Pi + \tau, & -3\Pi + \tau, & -5\Pi + \tau, & \ldots \end{array}$$

Εἰς τὰς τέσσαρας ταύτας σειρὰς τὸ τόξον τ προστίθεται εἰς πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ Π, θετικά τε καὶ ἀρνητικά· λοιπὸν, ὁ γενικὸς τύπος τῶν ζητουμένων τόξων εἶναι·

$$(3) \qquad x = k\Pi + \tau,$$

Ὅταν ἡ δοθεῖσα ἐφαπτομένη β ἦναι ἀρνητική, ἄγομεν αὐτὴν κατὰ τὴν AT' ὑπὸ τὴν OA. Τὸ τ παριστᾷ τότε τόξον περιλαμβανόμενον μεταξὺ 90^0 καὶ 180^0, ὡς τὸ ABM'.

24. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι·

$$\begin{array}{llll} \textit{συνεφ}\ x = \beta, & \delta\acute{\iota}\delta\varepsilon\iota & x = k\pi + \tau, & \\ \textit{τέμ}\ x = \beta, & \text{»} & x = 2k\pi \pm \tau, & \\ \textit{συνδ}\ x = \beta, & \text{»} & x = 2k\pi + \tau, & x = (2k+1)\pi - \tau. \end{array}$$

Ἄλλως, σαφὲς ὅτι τὰ τόξα τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ὅμοιον ἡμίτονον, ἢ ὅμοιον συνημίτονον, ἢ ὁμοίαν ἐφαπτομένην, ἔχουσιν ἐπίσης ὁμοίαν συνδιατέμνουσαν, ἢ ὁμοίαν τέμνουσαν, ἢ ὁμοίαν συνεφαπτομένην. Τοῦτο θέλομεν ἰδεῖ καὶ ἀκολούθως, ὅταν γνωρίσωμεν τὰς σχέσεις τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν πρὸς ἀλλήλας:

ΠΩΣ ΑΓΟΝΤΑΙ ΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΓΡΑΜΜΑΙ ΕΙΣ ΑΠΛΟΥΣ ΛΟΓΟΥΣ.

25. Εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν, ἐπειδὴ πᾶν τόξον χρησιμεύει ὡς μέτρον γωνίας τινὸς, δὲν θεωροῦμεν τὸ ἀπόλυτον μέγεθος αὐτοῦ, ἀλλὰ μόνον τὸν λόγον του πρὸς τὴν περιφέρειαν εἰς ἣν ἀνήκει. Ἰδίως δὲ ὁ λόγος οὗτος δείκνυται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου· φανερὸν δ' ἐστὶν ὅτι ἀρκεῖ εἰς προσδιορισμὸν γωνίας τινὸς, διότι ἅπαντα τὰ τόξα τὰ περιλαμβανόμενα ἐν μιᾷ καὶ τῇ αὐτῇ γωνίᾳ, ὡς ἔχοντα κοινὸν κέντρον τὴν κορυφὴν αὐτῆς καὶ ἀκτῖνας οἱασδήποτε, περιέχουσιν ἕκαστον ἴσον ἀριθμὸν μοιρῶν.

Οἱ λόγοι οἵτινες ὑπάρχουσι μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν τῶν τόξων τούτων καὶ τῶν ἀκτίνων τῶν κύκλων εἰς οὓς ταῦτα ἀνήκουσιν, ἐξαρτῶνται ἐπίσης ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου τῶν μοιρῶν. Π. χ. (Σχ. 3) $M\Pi$, $M'\Pi'$, $M''\Pi''$, ... εἰσὶν ἡμίτονα τόξων ὁμοίων, ἔχομεν δέ·

$$\frac{M\Pi}{OM} = \frac{M'\Pi'}{OM'} = \frac{M''\Pi''}{OM''} = \ldots\ldots$$ Ὅθεν, οἱ λόγοι οὗτοι εἰσὶν ὡρισμένοι, οὐχὶ δὲ τὰ ἡμίτονα, ὅταν δίδηται μία γωνία. Τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ περὶ τῶν λοιπῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν.

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι εἰς τοὺς λογισμοὺς δὲν πρέπει νὰ εἰσάγωμεν τὰ ἀπόλυτα μήκη τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν, ἀλλὰ τοὺς λόγους αὐτῶν πρὸς τὴν ἀκτῖνα. Πρὸς τοῦτο ὁ τρόπος εἶναι εὐκολώτατος· ἀρκεῖ νὰ λαμβάνωμεν ὡς μονάδα τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ἐν ᾧ θεωροῦμεν τὰς τριγωνομετρικὰς γραμμάς· διότι τότε αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῶν γραμμῶν τούτων ἔσονται ἀκριβῶς οἱ αὐτοὶ οὗτοι λόγοι.

Ἐνίοτε οἱ λόγοι οὗτοι ὀνομάζονται ΗΜΙΤΟΝΑ ΦΥΣΙΚΑ, ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΑ ΦΥΣΙΚΑ, κ. τ. ἑ.

Τοιουτοτρόπως αἱ τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ ἄγονται εἰς ἁπλοῦς λόγους, καὶ ὑπὸ τὴν ἔποψιν ταύτην ἤθελεν εἶσθαι ἁρμοδιώτερον νὰ παρουσιάζωνται κατ' ἀρχάς. Ἀλλ' ἵν' ἀκολουθήσωμεν τὰς ἕξεις τῆς διδασκαλίας, εἰς τοὺς θεμελιώδεις τύπους θέλομεν παριστᾷ πάντοτε τὴν ἀκτῖνα διὰ τοῦ ρ.

26. Ὅταν ὅμως λογισμός τις ἔγινε ληφθείσης τῆς ἀκτῖνος ἴσης μονάδι, εἶναι πάντοτε εὔκολον νὰ τροποποιηθῶσι τὰ ἐξαγόμενα, ὥστε νὰ ἐφαρμόζωνται εἰς πᾶσαν ἑτέραν ὑπόθεσιν. Τῷ ὄντι, κατὰ τὰ εἰρημένα, φανερὸν ὅτι, εἰς τὴν δευτέραν ὑπόθεσιν, οἱ λόγοι τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν πρὸς τὴν ἀκτῖνα ἰσοῦνται πρὸς τὰς τριγωνομετρικὰς γραμμὰς τῆς πρώτης· ἐπομένως, ἀρκεῖ εἰς τὰ ἐξαγόμενα, περὶ ὧν πρόκειται, νὰ τρέψωμεν τὰς ποσότητας ἡμτ, ἐφτ, συντ, ... εἰς $\frac{\text{ἡμτ}}{\rho}$, $\frac{\text{ἐφτ}}{\rho}$, $\frac{\text{συντ}}{\rho}$, ...

Π. χ. Τεθείσθω ὅτι εὑρέθη κατ' ἀρχὰς μεταξὺ τῶν τόξων τ καὶ τ' ἡ σχέσις, $\text{ἐφτ} = \frac{1 - \text{συντ}'}{1 + \text{ἡμτ}'}$. Αἱ ῥηθεῖσαι ἀντεισαγωγαὶ δίδουσιν, ἄνευ οὐδεμιᾶς ὑποθέσεως ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος,

$$\frac{\text{ἐφτ}}{\rho} = \frac{1 - \frac{\text{συντ}'}{\rho}}{1 + \frac{\text{ἡμτ}'}{\rho}}, \quad \text{ἢ} \quad \text{ἐφτ} = \frac{\rho(\rho - \text{συντ}')}{\rho + \text{ἡμτ}'}.$$

Πρὸ πάντων δὲν πρέπει νὰ νομίσωμεν ὅτι ὑπάρχει μῆκός τι ἀπόλυτον τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ ἀκτὶς 1, καὶ ἕτερον τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ ἀκτὶς ρ, ὡς ὑπάρχουσιν ἀποστάσεις 1, 2, 3, ... μέτρων· ἡ ἀκτὶς μένει πραγματικῶς ἀόριστος. Ναὶ μὲν ἑκάστη τριγωνομετρικὴ γραμμὴ γωνίας τινὸς δεδομένης ἐκφράζεται δι' ἀριθμῶν διαφόρων κατὰ τὴν ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ὑπόθεσιν, ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἔχουσι πάντοτε τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸν παριστάνοντα τὴν ἀκτῖνα ἀριθμόν, μόνος δὲ ὁ λόγος οὗτος εἰσάγεται εἰς τοὺς λογισμούς.

ΣΗΜ. Αἱ νέαι μορφαὶ τῶν σχέσεων ἃς λαμβάνομεν μετὰ τὴν εἰσαγωγήν, ὡς εἴρηται, τῆς ἀκτῖνος ρ, εἰσὶν ἀναγκαίως ὁμογενεῖς, διότι οἱ ὅροι αὐτῶν εἰσιν ἐκθέσεις κλασματικαὶ ἐν αἷς ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τὸν αὐτὸν ἔχουσι βαθμόν. Ἵνα ἀφανίσωμεν τοὺς παρονομαστάς, πολλαπλασιάζομεν ὅλους τοὺς ὅρους ἐπὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα, ἑπομένως ἡ ὁμογένεια διατηρηθήσεται καὶ αὖθις. Ὅθεν συνάγομεν τὸν κανόνα τοῦτον. « Ἵνα εἰσαγάγωμεν τὴν ἀκτῖνα εἰς τύπον εἰς ὃν αὕτη ὑπετέθη τὸ πρῶτον ἴση τῇ μονάδι, ἀρκεῖ νὰ καταστήσωμεν τὸν τύπον τοῦτον ὁμογενῆ, πολλαπλασιάζοντες τοὺς διαφόρους αὐτοῦ ὅρους ἐπὶ δυνάμεις τῆς ἀκτῖνος ρ, προσηκόντως ἐκλεγομένας ».

Διὰ τοῦ κανόνος τούτου εὑρήσομεν ὅτι ὁ τύπος·

$$\text{ἐφτ} + \text{ἐφτ}' + \text{ἐφτ}'' = \text{ἐφτ}\,\text{ἐφτ}'\,\text{ἐφτ}'',$$

ἐν ᾧ οἱ δηλούμενοι ἀριθμοὶ ὑπὸ ἐφτ, ἐφτ′, ἐφτ″, εἰσὶν οἱ λόγοι τῶν ἐφαπτομένων τῶν τόξων τ, τ′, τ″, πρὸς τὴν ἀκτῖνα $=1$ τοῦ κύκλου εἰς ὃν ἀνήκουσι, μεταβαλλομένης τῆς ἀκτῖνος εἰς ρ, λαμβάνει τὴν μορφήν·

$$\frac{\text{ἐφτ}}{\rho} + \frac{\text{ἐφτ}'}{\rho} + \frac{\text{ἐφτ}''}{\rho} = \frac{\text{ἐφτ}\,\text{ἐφτ}'\,\text{ἐφτ}''}{\rho^3},$$

ἢ προσέτι τὴν ἑξῆς·

$$\rho^2\,\text{ἐφτ} + \rho^2\,\text{ἐφτ}' + \rho^2\,\text{ἐφτ}'' = \text{ἐφτ}\,\text{ἐφτ}'\,\text{ἐφτ}''.$$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑΣ.

27. Ἐκ τῶν ἐν τῷ Σχ. 1 τριγώνων πορίζόμεθα τὰς σχέσεις αἵτινες ὑπάρχουσι μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν.

Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΜΠ, δίδει·

$$\overline{\text{ΜΠ}}^2 + \overline{\text{ΟΠ}}^2 = \overline{\text{ΟΜ}}^2.$$

Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΜΠ, ΟΤΑ, δίδουσι·

$$\text{ΑΤ} : \text{ΜΠ} :: \text{ΟΑ} : \text{ΟΠ}, \qquad \text{ΟΤ} : \text{ΟΜ} :: \text{ΟΑ} : \text{ΟΠ}.$$

Ἐπίσης ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΚΜ, ΟΣΒ, ἔχομεν·

$$\text{ΒΣ} : \text{ΜΚ} :: \text{ΟΒ} : \text{ΟΚ}, \qquad \text{ΟΣ} : \text{ΟΜ} :: \text{ΟΒ} : \text{ΟΚ};$$

Καλοῦμεν τ τὸ τόξον ΑΜ, καὶ ρ τὴν ἀκτῖνα· ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἀναλογίας τὰς γραμμὰς διὰ τῶν τριγωνομετρικῶν ὀνομασιῶν αὐτῶν καὶ λαμβάνομεν τὰς σχέσεις·

$$(1) \qquad \text{ἡμ}^2\tau + \text{συν}^2\tau = \rho^2,$$

$$(2) \qquad \text{ἐφ}\tau = \frac{\rho\,\text{ἡμ}\tau}{\text{συν}\tau}, \qquad (3) \qquad \text{τέμ}\tau = \frac{\rho^2}{\text{συν}\tau},$$

$$(4) \qquad \text{συνεφ}\tau = \frac{\rho\,\text{συν}\tau}{\text{ἡμ}\tau}, \qquad (5) \qquad \text{συνδ}\tau = \frac{\rho^2}{\text{ἡμ}\tau}.$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) χρησιμεύει πρὸς ὁρισμὸν τοῦ ἡμιτόνου διὰ τοῦ συνημιτόνου, καὶ ἀντιστρόφως. Ἡ αὐτὴ δεικνύει ὅτι, εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ἡμίτονον, ἢ συνημίτονον, ἀντιστοιχοῦσι δύω συνημίτονα, ἢ δύω ἡμίτονα, ἴσα μετὰ σημείων ἐναντίων. Οἱ ἕτεροι τύποι δίδουσι τὰς τιμὰς τῶν λοιπῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν, ὅταν αἱ τιμαὶ τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου ἦναι γνωσταί.

28. Πρὸς ἐφαρμογὴν ἔστω· ἡμ $30^\circ = \frac{1}{2}\rho$ [5]. Διὰ τῆς τιμῆς ταύτης εὐκόλως λογίζονται ἅπασαι αἱ λοιπαὶ τριγωνομετρικαὶ γραμμαί. Ἕπονται τὰ ἐξαγόμενα.

$$\text{ἡμ}\ 30^\circ = \text{συν}\ 60^\circ = \frac{\rho}{2}, \qquad \text{συν}\ 30^\circ = \text{ἡμ}\ 60^\circ = \frac{\rho\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{ἐφ}\ 30^\circ = \text{συνεφ}\ 60^\circ = \frac{\rho\sqrt{3}}{3}, \qquad \text{συνεφ}\ 30^\circ = \text{ἐφ}\ 60^\circ = \rho\sqrt{3},$$

$$\text{τέμ}\ 30^\circ = \text{συνδ}\ 60^\circ = \frac{2\rho\sqrt{3}}{3}, \qquad \text{συνδ}\ 30^\circ = \text{τέμ}\ 60^\circ = 2\rho.$$

29. Ἂν καὶ ἐπορίσθημεν τοὺς ἐν ἐδαφίῳ 27 τύπους ὑποθέσαντες ἐπὶ τοῦ σχήματος τὸ τόξον τ ἔλαττον 90°, οὐχ ἧττον ὅμως οἱ τύποι οὗτοί εἰσι γενικοί. Τοῦτο ἤθελεν εἶσθαι φανερὸν ἐὰν ἐθεωρῶμεν τὰς ἀπολύτους μόνον τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν, διότι αἱ γραμμαὶ αὗται σχηματίζουσι πάντοτε τρίγωνα ὀρθογώνια καὶ ὅμοια, ἐξ ὧν λαμβάνομεν τὰ αὐτὰ ὡς ἀνωτέρω ἐξαγόμενα.

Κατὰ πρῶτον εἶναι φανερὸν ὅτι, καὶ ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὰ σημεῖα τῶν γραμμῶν, ὁ τύπος (1) δὲν ἀλλοιοῦται, ἀλλ' οἱαδήποτε ἦναι τὰ σημεῖα τοῦ ἡμτ καὶ τοῦ συντ, ὁ τύπος ἀληθεύει ἀναγκαίως καθὸ περιέχων τετράγωνα μόνα.

Μένει νὰ ἐξετάσωμεν ἐάν, συνεπείᾳ τῶν ἄλλων τύπων, αἱ λοιπαὶ τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ λαμβάνωσι πάντοτε σημεῖα συμφώνως πρὸς τὰς θέσεις αὐτῶν.

Ἐν τῷ πρώτῳ τεταρτοκυκλίῳ, ἤτοι ἀπὸ 0° μέχρι 90°, ἐπειδὴ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον εἶναι θετικά, οἱ τέσσαρες τύποι δίδουσιν, ὡς εἰκός, τιμὰς θετικάς.

Ἐν τῷ δευτέρῳ τεταρτοκυκλίῳ, ἤτοι ἀπὸ 90° μέχρι 180°, τὸ ἡμίτονον εἶναι θετικὸν καὶ τὸ συνημίτονον ἀρνητικόν· ἄρα, αἱ τιμαὶ τῆς ἐφαπτομένης, τῆς τεμνούσης καὶ τῆς συνεφαπτομένης εἰσὶν ἀρνητικαί, ἐνῷ ἡ τῆς συνδιατεμνούσης μένει θετική· τὰ αὐτὰ δεικνύει καὶ τὸ σχῆμα.

Ἐν τῷ τρίτῳ τεταρτοκυκλίῳ, τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονόν εἰσιν ἀρνητικά· ἄρα, αἱ μὲν τιμαὶ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς συνεφαπτομένης εἰσὶ θετικαί, ἀρνητικαὶ δὲ αἱ τῆς τεμνούσης καὶ τῆς συνδιατεμνούσης, καὶ οὕτως ὑπάρχει, συνεπείᾳ τῆς θέσεως ἣν λαμβάνουσι τότε αἱ τέσσαρες αὗται γραμμαί.

Ἐν τῷ τετάρτῳ τεταρτοκυκλίῳ, ἐν ᾧ τὸ μὲν ἡμίτονον εἶναι ἀρνητικὸν τὸ δὲ συνημίτονον θετικόν, αἱ τιμαὶ τῆς ἐφαπτομένης, τῆς συνεφαπτομένης καὶ τῆς συνδιατεμνούσης εἰσὶν ἀρνητικαί, ἀλλ' ἡ τῆς τεμνούσης εἶναι θετική· ταῦτα βλέπομεν καὶ ἐπὶ τοῦ σχήματος.

Πέραν τῶν 360^0 τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τόξου οἱουδήποτε $360^0+\tau$, ἀναλαμβάνουσι τὰ αὐτὰ μεγέθη καὶ σημεῖα ὁποῖα εἶχον διὰ τὸ τόξον τ. Ἄρα, οἱ τέσσαρες τύποι δίδουσι τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα.

Ὑποθέσωμεν ἤδη τὸ τόξον τ ἀρνητικόν. Ἐπειδὴ [14]

$$\text{ἡμ}(-\tau)=-\text{ἡμ}\tau \quad \text{καὶ} \quad \text{συν}(-\tau)=\text{συν}\tau,$$

ἕπεται ὅτι, μεταβαλλομένου τοῦ σημείου τοῦ τόξου, αἱ διδόμεναι ἐκ τῶν τύπων τιμαὶ τῆς ἐφαπτομένης, τῆς συνεφαπτομένης καὶ τῆς συνδιατεμνούσης λαμβάνουσι σημεῖα ἐναντία χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ μέγεθος αὐτῶν, ἐνῷ ἡ τέμνουσα μένει ἀκριβῶς ἡ αὐτή. Τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα συμφωνοῦσι πρὸς τὰς παραστάσεις τοῦ σχήματος.

Τέλος, δυνάμεθα προσέτι νὰ βεβαιωθῶμεν ὅτι οἱ τύποι δίδουσιν ἐξαγόμενα ἀκριβῆ καὶ διὰ τὰ 0^o, 90^o, 180^o, 270^o, ... τόξα, εἰ καὶ τὰ τρίγωνα τότε δὲν ὑπάρχουσι. Ποιοῦντες $\tau=0^o$, 90^o, 180^0, ... λαμβάνομεν τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα, ὡς ἐν ἐδαφίοις 10, 11 καὶ 13, καὶ διὰ τὰ 0^o, 90^o, 180^o, 270^o, 360^o τόξα.

30. Ἡ δεῖξις τῆς γενικότητος τῶν τύπων (2) καὶ (3) πείθει καὶ περὶ τῆς τῶν τύπων (4) καὶ (5), διότι οἱ τελευταῖοι παράγονται ἐκ τῶν πρώτων, τρεπομένου τοῦ τόξου τ εἰς $(90^o-\tau)$.

Καὶ ὄντως, ἔχομεν ἐκ τῶν αὐτῶν τύπων·

$$\text{ἐφ}(90^o-\tau)=\frac{\rho\,\text{ἡμ}(90^o-\tau)}{\text{συν}(90^o-\tau)}, \quad \text{ἢ} \quad \text{συνεφτ}=\frac{\rho\,\text{συν}\tau}{\text{ἡμ}\tau},$$

$$\text{τέμ}(90^o-\tau)=\frac{\rho^2}{\text{συν}(90^o-\tau)}, \quad \text{ἢ} \quad \text{συνδτ}=\frac{\rho^2}{\text{ἡμ}\tau}.$$

Ἐν γένει, ὁσάκις σχέσις τις μεταξὺ τριγωνομετρικῶν γραμμῶν ἀποδειχθῇ ὀρθὴ δι' ἁπάσας τὰς τιμὰς ἃς δύνανται νὰ λάβωσι τὰ τόξα, εἶναι ἐπιτετραμμένον ν' ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὴν τὰ τόξα, διὰ τῶν συμπληρωμάτων αὐτῶν, ἤτοι νὰ τρέψωμεν τὰ ἡμίτονα, τὰς ἐφαπτομένας, τὰς τεμνούσας, εἰς συνημίτονα, συνεφαπτομένας, συνδιατεμνούσας, καὶ τ' ἀνάπαλιν.

31. Αἱ πέντε σχέσεις (1) . . . . . (5) χρησιμεύουσι πρὸς εὕρεσιν ἑτέρων. Ἕπονται αἱ κυριώτεραι.

1) Τὸ γινόμενον τῶν τύπων (2) καὶ (4) δίδει·

$$\text{εφτ συνεφτ} = \rho^2. \tag{6}$$

Ἤτοι, *ἡ ἀκτὶς εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς συνεφαπτομένης*. Τὸ αὐτὸ θεώρημα πορίζόμεθα ἀμέσως καὶ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΤΑ, ΟΣΒ.

2) Ὁ τύπος (2) δίδει·

$$\rho^2 + \text{εφ}^2\tau = \rho^2 + \frac{\rho^2 \text{ημ}^2\tau}{\text{συν}^2\tau} = \frac{\rho^2(\text{ημ}^2\tau + \text{συν}^2\tau)}{\text{συν}^2\tau}.$$

Ἀλλά, $\text{ημ}^2\tau + \text{συν}^2\tau = \rho^2$, καὶ $\text{τεμ}^2\tau = \dfrac{\rho^4}{\text{συν}^2\tau}$,

ἄρα,

$$\rho^2 + \text{εφ}^2\tau = \text{τεμ}^2\tau, \tag{7}$$

σχέσις διδομένη καὶ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΤ.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν καὶ τὸν τύπον,

$$\rho^2 + \text{συνεφ}^2\tau = \text{συνδ}^2\tau, \tag{8}$$

ὅστις προκύπτει ἀμέσως ἐκ τοῦ προηγουμένου, ἐὰν ἀντὶ τ θέσωμεν τὸ συμπλήρωμα $(90^0 - \tau)$.

3) Ἐκ τῶν τύπων (3) καὶ (5) λαμβάνομεν,

$$\frac{1}{\text{τέμτ}} = \frac{\text{συντ}}{\rho^2}, \qquad \frac{1}{\text{συνδτ}} = \frac{\text{ημτ}}{\rho^2},$$

καὶ ἑπομένως, ἀθροίζοντες τὰ τετράγωνα·

$$\frac{1}{\text{τέμ}^2\tau} + \frac{1}{\text{συνδ}^2\tau} = \frac{1}{\rho^2}. \tag{9}$$

32. Ἐν γένει, δοθείσης μιᾶς τῶν ἓξ τριγωνομετρικῶν γραμμῶν, αἱ λοιπαὶ προσδιορίζονται διὰ τῶν τύπων (1) . . . . (5)· πρὸς τοῦτο ἁπλῆ ἐπίλυσις ἐξισώσεων ἀρκεῖ. Ἕπονται παραδείγματα.

Εὑρεῖν τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον συνεκθέσει τῆς ἐφαπτομένης. Πρέπει νὰ λύσωμεν τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2). Ἡ (2) δίδει, $\rho^2 ἡμ^2 \tau = ἐφ^2 \tau\ συν^2 \tau$. Εἶτα διὰ τῆς (1) λαμβάνομεν·

$$(10) \qquad ἡμ\tau = \frac{\pm \rho\, ἐφ\tau}{\sqrt{\rho^2 + ἐφ^2\tau}}, \qquad συν\tau = \frac{\pm \rho^2}{\sqrt{\rho^2 + ἐφ^2\tau}}.$$

Τὸ διπλοῦν σημεῖον δεικνύει ὅτι ὑπάρχουσι δύω ἡμίτονα καὶ δύω συνημίτονα ἴσα καὶ ἀντίθετα, ἀντιστοιχοῦντα εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην· τὸ αὐτὸ δεικνύει καὶ τὸ σχῆμα. Πρέπει δὲ νὰ λαμβάνωμεν τ' ἀνώτερα σημεῖα ὁμοῦ καὶ τὰ κατώτερα ὁμοῦ, διότι ἄλλως δὲν εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν $\frac{\rho ἡμ\tau}{συν\tau} = ἐφ\tau$.

Ὡσαύτως εὑρίσκομεν συνεκθέσει τῆς ἐφαπτομένης καὶ τὰς τιμὰς τῶν λοιπῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν·

$$συνεφ\tau = \frac{\rho^2}{ἐφ\tau}, \qquad τέμ\tau = \pm \sqrt{\rho^2 + ἐφ^2\tau},$$

$$συνδ\tau = \pm \frac{\rho\sqrt{\rho^2 + ἐφ^2\tau}}{ἐφ\tau}.$$

Ζητήσωμεν προσέτι συνεκθέσει τοῦ ἡμιτόνου, τὰς τιμὰς τῶν λοιπῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν.

Δι' ἁπλουστάτων λογισμῶν λαμβάνομεν τὰ κάτωθι ἐξαγόμενα.

$$συν\tau = \pm \sqrt{\rho^2 - ἡμ^2\tau}, \qquad ἐφ\tau = \pm \frac{\rho ἡμ\tau}{\sqrt{\rho^2 - ἡμ^2\tau}},$$

$$τέμ\tau = \pm \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 - ἡμ^2\tau}}, \qquad συνεφ\tau = \pm \frac{\rho\sqrt{\rho^2 - ἡμ^2\tau}}{ἡμ\tau},$$

προσέτι δ' ἔχομεν $\qquad συνδ\tau = \frac{\rho^2}{ἡμ\tau}.$

Πλὴν τῆς συνδιατεμνούσης, ὁ λογισμὸς δίδει, ὡς βλέπομεν, δύω τιμὰς ἴσας μετὰ σημείων ἐναντίων δι' ἑκάστην τῶν λοιπῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν. Καὶ ὄντως, ἐνὶ ἡμιτόνῳ ΟΚ δεδομένῳ (Σχ. 1) συστοιχοῦσι τὰ συνημίτονα ΟΠ, ΟΠ′, ἴσα μετὰ σημείων ἐναντίων· ὡσαύτως καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΤ, ΑΤ′, αἱ συνεφαπτόμεναι ΒΣ, ΒΣ′, αἱ τέμνουσαι ΟΤ, ΟΤ′, αἵτινες σύνδυο εἰσὶν ἴσαι μετὰ σημείων·

ἐναντίων. Ἀλλ' αἱ συνδιατέμνουσαι ΟΣ, ΟΣ', εἰσὶν ἴσαι τὸ αὐτὸ ἔχουσαι σημεῖον.

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΗΜΙΤΟΝΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΥ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΔΥΟ ΤΟΞΩΝ, ΣΥΝΕΚΘΕΣΕΙ ΤΩΝ ΗΜΙΤΟΝΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ ΤΩΝ ΤΟΞΩΝ ΤΟΥΤΩΝ.

33. (Σχ. 4) Ἔστωσαν δεδομένα τὰ τόξα $AB = \tau$ καὶ $B\Gamma = B\Delta = \tau'$. Ἄγομεν τὴν χορδὴν ΓΔ, διὰ τοῦ μέσου ταύτης Κ τὴν ἀκτῖνα ΟΒ, καὶ τὰς ΒΠ, ΓΡ, ΔΣ, καθέτους ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ. Ἔχομεν·

$$B\Pi = \text{ἡμ}\tau, \quad O\Pi = \text{συν}\tau, \quad \Gamma K = \text{ἡμ}\tau' \quad OK = \text{συν}\tau',$$
$$A\Gamma = \tau + \tau', \quad \Gamma P = \text{ἡμ}(\tau + \tau'), \quad OP = \text{συν}(\tau + \tau'),$$
$$A\Delta = \tau - \tau', \quad \Delta\Sigma = \text{ἡμ}(\tau - \tau'), \quad O\Sigma = \text{συν}(\tau - \tau').$$

Ἄγομεν τὴν ΚΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ, καὶ τὰς ΚΖ, ΔΗ παραλλήλους τῆς ΟΑ. Τὰ τρίγωνα ΓΚΖ, ΚΔΗ, εἰσὶν ἴσα, ἄρα·

$\Delta H = KZ$, καὶ $HK = \Gamma Z$. Τούτων τεθέντων, ἔχομεν·

$$\text{ἡμ}(\tau + \tau') = \Gamma P = ZP + \Gamma Z = KE + \Gamma Z,$$
$$\text{συν}(\tau + \tau') = OP = OE - PE = OE - ZK,$$
$$\text{ἡμ}(\tau - \tau') = \Delta\Sigma = KE - KH = KE - \Gamma Z,$$
$$\text{συν}(\tau - \tau') = O\Sigma = OE + \Delta H = OE + KZ,$$

Τὸ τρίγωνον ΟΒΠ εἶναι ὅμοιον τῷ ΟΚΕ ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΒΠ, ΚΕ, ὡς καὶ τῷ τριγώνῳ ΓΚΖ ἕνεκα τῶν καθέτων πλευρῶν· ἑπομένως ἔχομεν τὰς ἀναλογίας·

$$KE : B\Pi :: OK : OB, \quad \text{ἢ} \quad KE : \text{ἡμ}\tau :: \text{συν}\tau' : \rho,$$
$$OE : O\Pi :: OK : OB, \quad \text{ἢ} \quad OE : \text{συν}\tau :: \text{συν}\tau' : \rho,$$
$$\Gamma Z : O\Pi :: \Gamma K : OB, \quad \text{ἢ} \quad \Gamma Z : \text{συν}\tau :: \text{ἡμ}\tau' : \rho,$$
$$KZ : B\Pi :: \Gamma K : OB, \quad \text{ἢ} \quad KZ : \text{ἡμ}\tau :: \text{ἡμ}\tau' : \rho.$$

Ἐκ τῶν ἀναλογιῶν τούτων συνάγομεν·

$$KE = \frac{\text{ἡμ}\tau \ \text{συν}\tau'}{\rho}, \quad OE = \frac{\text{συν}\tau \ \text{συν}\tau'}{\rho},$$

$$\Gamma Z = \frac{\text{συν}\tau \ \text{ἡμ}\tau'}{\rho}, \quad KZ = \frac{\text{ἡμ}\tau \ \text{ἡμ}\tau'}{\rho};$$

Ἀντεισάγοντες τὰς τιμὰς ταύτας τῶν γραμμῶν εἰς τὰς τῶν ἡμ $(\tau + \tau')$, συν $(\tau + \tau')$, ἡμ $(\tau - \tau')$, συν $(\tau - \tau')$, λαμβάνομεν·

$$(1)\qquad \text{ἡμ}\,(\tau + \tau') = \frac{\text{ἡμ}\tau\,\text{συν}\tau' + \text{συν}\tau\,\text{ἡμ}\tau'}{\rho}$$

$$(2)\qquad \text{συν}\,(\tau + \tau') = \frac{\text{συν}\tau\,\text{συν}\tau' - \text{ἡμ}\tau\,\text{ἡμ}\tau'}{\rho},$$

$$(3)\qquad \text{ἡμ}\,(\tau - \tau') = \frac{\text{ἡμ}\tau\,\text{συν}\tau' - \text{συν}\tau\,\text{ἡμ}\tau'}{\rho},$$

$$(4)\qquad \text{συν}\,(\tau - \tau') = \frac{\text{συν}\tau\,\text{συν}\tau' + \text{ἡμ}\tau\,\text{ἡμ}\tau'}{\rho}.$$

34. Εἰς τὴν δεῖξιν τῶν τύπων τούτων ὑπεθέσαμεν τὰ τόξα τ καὶ τ' θετικὰ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $(\tau + \tau') < 90^\circ$, εἰς τοὺς δύω δὲ τελευταίους, $\tau > \tau'$. Ἀλλά, τροποποιοῦντες τὰς γεωμετρικὰς κατασκευὰς καὶ προσέχοντες εἰς τὰ σημεῖα τῶν γραμμῶν, δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν τὴν ὀρθότητα τῶν τύπων καὶ δι' ἄλλας περιπτώσεις. Διὰ τοῦ ἑπομένου ὅμως τρόπου δεικνύεται ἁπλούστερον ἡ γενικότης τῶν αὐτῶν τύπων.

1ον. Ὁ περιορισμὸς τοῦ $\tau > \tau'$ δύναται ν' ἀποβληθῇ ἀπὸ τῶν τύπων (3) καὶ (4). Καὶ ὄντως, ὅταν $\tau < \tau'$, ἠξεύρομεν ὅτι ἡμ $(\tau - \tau') = -$ ἡμ $(\tau' - \tau)$, καὶ συν $(\tau - \tau') =$ συν $(\tau' - \tau)$. Ἀλλά, τ' ὄντος μείζονος τ, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἡμ $(\tau' - \tau)$ καὶ συν $(\tau' - \tau)$ ἐκ τῶν τύπων (3) καὶ (4), τρέποντες εἰς αὐτοὺς τ εἰς τ' καὶ τ' εἰς τ· τότε εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ μὲν πρῶτος κατὰ τὸ σημεῖον μόνον μεταβάλλεται, ὁ δὲ δεύτερος μένει ὁ αὐτός· Λοιπὸν θέλομεν ἔχει ἀκόμη διὰ ἡμ $(\tau - \tau')$ καὶ συν $(\tau - \tau')$ τοὺς αὐτοὺς τύπους, ὡς καὶ ὅταν $\tau > \tau'$. Ἄρα, οἱ τέσσαρες περὶ ὧν ὁ λόγος τύποι ὑπάρχουσι δι' ὅλας τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς τὰ τόξα τ καὶ τ' εἰσὶ θετικὰ καὶ ἀποτελοῦσιν ἄθροισμα ἔλαττον 90°· ἑπομένως δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν εἰς ἕκαστον τῶν τόξων τούτων τιμὴν οἱανδήποτε μεταξὺ 0° καὶ 45°.

2ον. Ἐπειδὴ οἱ τύποι (3) καὶ (4) δύνανται νὰ προκύψωσιν ἐκ τῶν (1) καὶ (2), τρεπομένου εἰς τούτους τ' εἰς $-\tau'$, ἕπεται ὅτι οἱ τύποι (1) καὶ (2) εἰσὶν ἀληθεῖς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ τ μεταξὺ

0^0 καὶ 45^0 καὶ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ τ' μεταξὺ -45^0 καὶ $+45^0$. Ἀλλὰ θέλομεν δείξει ὅτι οἱ αὐτοὶ τύποι ἁρμόζουσι καὶ εἰς τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς τοῦ τ, τὰς μεταξὺ 0^0 καὶ -45^0.

Ἔστω $\alpha < 45^0$. Ποιοῦμεν $\tau = -\alpha$, καὶ ἔχομεν·

$$\text{ἡμ}\,(\tau + \tau') = \text{ἡμ}\,(-\alpha + \tau') = -\,\text{ἡμ}\,(\alpha - \tau'),$$
$$\text{συν}\,(\tau + \tau') = \text{συν}\,(-\alpha + \tau') = \quad \text{συν}\,(\alpha - \tau').$$

Τὰ τόξα α καὶ $-\tau'$ εἰσὶν ἐντὸς τῶν ὁρίων διὰ τὰ ὁποῖα οἱ τύποι (1) καὶ (2) ἀπεδείχθησαν ὀρθοί. Λοιπόν·

$$\text{ἡμ}\,(\tau + \tau') = -\,\text{ἡμ}\,(\alpha - \tau') = \frac{-\,\text{ἡμ}\alpha\;\text{συν}\tau' + \text{συν}\alpha\;\text{ἡμ}\tau'}{\rho},$$

$$\text{συν}\,(\tau + \tau') = \quad \text{συν}\,(\alpha - \tau') = \frac{\text{συν}\alpha\;\text{συν}\tau' + \text{ἡμ}\alpha\;\text{ἡμ}\tau'}{\rho}.$$

Ἐπειδὴ $\tau = -\alpha$, ἔχομεν $\text{ἡμ}\alpha = -\,\text{ἡμ}\tau$, $\text{συν}\alpha = \text{συν}\tau$· ἑπομένως οἱ τύποι οὗτοι ἄγονται εἰς τοὺς (1) καὶ (2).

3ον. Δείξωμεν ἤδη ὅτι δυνάμεθα νὰ προαγάγωμεν ἀπεριορίστως τὰ θετικὰ καὶ τὰ ἀρνητικὰ ὅρια τῶν τόξων τ καὶ τ' εἰς τοὺς τύπους (1) καὶ (2).

Ποιοῦμεν $\tau = 90^0 + \alpha$, τοῦ α ὄντος τόξου μεταξὺ -45^0 καὶ $+45^0$. Λαμβάνοντες τὰ συμπληρώματα ἔχομεν·

$$\text{ἡμ}(\tau + \tau') = \text{ἡμ}(90^0 + \alpha + \tau') = \text{συν}(-\alpha - \tau') = \text{συν}(\alpha + \tau')$$
$$= \frac{\text{συν}\alpha\;\text{συν}\tau' - \text{ἡμ}\alpha\;\text{ἡμ}\tau'}{\rho},$$

$$\text{συν}(\tau + \tau') = \text{συν}(90^0 + \alpha + \tau') = \text{ἡμ}(-\alpha - \tau') = -\,\text{ἡμ}(\alpha + \tau')$$
$$= \frac{-\,\text{ἡμ}\alpha\;\text{συν}\tau' - \text{συν}\alpha\;\text{ἡμ}\tau'}{\rho}.$$

Ἀλλά, διὰ γνωστῶν ἀναγωγῶν ἔχομεν·

$$\text{ἡμ}\tau = \text{ἡμ}\,(90^0 + \alpha) = \text{συν}(-\alpha) = \quad \text{συν}\alpha,$$
$$\text{συν}\tau = \text{συν}\,(90^0 + \alpha) = \text{ἡμ}\,(-\alpha) = -\,\text{ἡμ}\alpha.$$

Ἄρα, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ἡμτ ἀντὶ συνα καὶ — συντ ἀντὶ ἡμα, ὅπερ ἄγει καὶ αὖθις εἰς τοὺς τύπους (1) καὶ (2). Ἀλλ' ἐὰν λάβωμεν τὸ α μεταξὺ -45^0 καὶ $+45^0$, τὸ τόξον $90^0 + \alpha$, ἢ τ, λαμβάνει πᾶν μέγεθος ἀπὸ 45^0 μέχρις 135^0. Λοιπόν, τὸ θετικὸν ὅριον τοῦ τ ἤχθη μέχρις 135^0. Ἐπαναλαμβανομένου τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ, φανερὸν ὅτι τὸ ὅριον τοῦτο δύναται ἀκόμη νὰ προχωρήσῃ κατὰ 90^0, καὶ οὕτω καθεξῆς ἐπ' ἄπειρον.

Ἡ δεῖξις ἥτις ἀνωτέρω (2ον) ἔγινεν ἵνα βεβαιωθῶμεν ὅτι οἱ τύποι (1) καὶ (2), ὄντες ἀληθεῖς διὰ τὰς θετικὰς τιμὰς τοῦ τ, τὰς κατωτέρας 45^0, εἰσὶν ἐπίσης ἀληθεῖς διὰ τὰς αὐτὰς ἀρνητικῶς λαμβανομένας, φανερὸν ὅτι ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ θετικὸν ὅριον τοῦ τ διαφέρει τῶν 45^0. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐγνωρίσαμεν ὅτι οἱ τύποι εἰσὶν ὀρθοὶ δι' ἁπάσας τὰς θετικὰς τιμὰς τοῦ τ, εἰσὶν ἐπίσης ὀρθοὶ καὶ δι' ἁπάσας τὰς ἀρνητικάς.

Οἱ αὐτοὶ συλλογισμοὶ οἵτινες ἔγιναν ἐπὶ τοῦ τόξου τ, ἐφαρμόζονται καὶ ἐπὶ τοῦ τ', καὶ δυνάμεθα ἐπίσης νὰ προαγάγωμεν ἐπ' ἄπειρον ἕκαστον τῶν ὁρίων τοῦ τελευταίου τούτου τόξου.

Λοιπόν, οἱ τύποι (1) καὶ (2), καὶ κατὰ συνέπειαν οἱ (3) καὶ (4), ἀπεδείχθησαν ὀρθοὶ διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν τόξων τ καὶ τ'.

ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΤΩΝ ΤΟΞΩΝ.

35. Τοῦ λοιποῦ θέλομεν ὑποθέτει τὴν ἀκτῖνα ἴσην μονάδι, καὶ οὕτως αἱ τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ θέλουν θεωρεῖσθαι [25] ὡς ἁπλοῖ λόγοι.

Διὰ τῆς ὑποθέσεως ταύτης $\rho = 1$, οἱ ἐν ἐδαφίοις 27 καὶ 33 τύποι ἀποκαθίστανται οἱ ἑξῆς·

$$\text{ἡμ.}^2\tau + \text{συν}^2\tau = 1,$$

$$\text{ἐφ}\tau = \frac{\text{ἡμ}\tau}{\text{συν}\tau}, \qquad \text{συνεφ}\tau = \frac{\text{συν}\tau}{\text{ἡμ}\tau},$$

$$\text{τέμ}\tau = \frac{1}{\text{συν}\tau}, \qquad \text{συνδ}\tau = \frac{1}{\text{ἡμ}\tau}.$$

$$\text{ἡμ.}(\tau \pm \tau') = \text{ἡμ}\tau\ \text{συν}\tau' \pm \text{συν}\tau\ \text{ἡμ}\tau',$$
$$\text{συν}(\tau \pm \tau') = \text{συν}\tau\ \text{συν}\tau' \mp \text{ἡμ}\tau\ \text{ἡμ}\tau'.$$

36. Εἰς τοὺς τύπους τῶν ἡμ.$(\tau + \tau')$ καὶ συν$(\tau + \tau')$ ποιοῦμεν $\tau = \tau'$, καὶ ἔχομεν·

(1) $$\text{ἡμ. } 2\tau = 2\,\text{ἡμ}\tau\ \text{συν}\tau,$$

(2) $$\text{συν } 2\tau = \text{συν}^2\tau - \text{ἡμ.}^2\tau.$$

Οἱ τύποι οὗτοι χρησιμεύουσι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου τοῦ διπλασίου τόξου τινός, ὅταν δίδονται τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου τούτου.

37. Ἔστω $\tau' = 2\tau$. Οἱ αὐτοὶ τύποι δίδουσιν·

$$\text{ἡμ}\, 3\tau = \text{ἡμ}\tau\ \text{συν}\, 2\tau + \text{συν}\tau\ \text{ἡμ}\, 2\tau,$$
$$\text{συν}\, 3\tau = \text{συν}\tau\ \text{συν}\, 2\tau - \text{ἡμ}\tau\ \text{ἡμ}\, 2\tau.$$

Θέτοντες ἀντὶ ἡμ 2τ καὶ συν 2τ τὰς ἀνωτέρω τιμὰς αὐτῶν καὶ ἁπλοποιοῦντες τὰ ἐξαγόμενα, λαμβάνομεν·

$$(3)\qquad \text{ἡμ}\, 3\tau = 3\, \text{ἡμ}\tau - 4\, \text{ἡμ}^3\tau,$$
$$(4)\qquad \text{συν}\, 3\tau = 4\, \text{συν}^3\tau - 3\, \text{συν}\tau.$$

Δι' ὁμοίων λογισμῶν λαμβάνομεν καὶ τὰς τιμὰς τῶν ἡμ 4τ, συν 4τ, ἡμ 5τ, συν 5τ, ...

38. Εἰς τοὺς τύπους (1), (2), θέτομεν $\frac{1}{2}\tau$ ἀντὶ τ καὶ ἔχομεν·

$$(5)\ 2\, \text{ἡμ}\tfrac{1}{2}\tau\ \text{συν}\tfrac{1}{2}\tau = \text{ἡμ}\tau, \qquad (6)\ \text{συν}^2\tfrac{1}{2}\tau - \text{ἡμ}^2\tfrac{1}{2}\tau = \text{συν}\tau.$$

Προσέτι·

$$(7)\qquad \text{ἡμ}^2\tfrac{1}{2}\tau + \text{συν}^2\tfrac{1}{2}\tau = 1.$$

Ἐὰν ἦναι δεδομένον τὸ συντ, δι' ἀπαλοιφῆς ἐκ τῶν ἐξισώσεων (6) καὶ (7) λαμβάνομεν·

$$(8)\quad \text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\tau = \pm\sqrt{\frac{1-\text{συν}\tau}{2}},\quad \text{συν}\,\tfrac{1}{2}\tau = \pm\sqrt{\frac{1+\text{συν}\tau}{2}}.$$

Οἱ τύποι οὗτοι χρησιμεύουσι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἡμ $\frac{1}{2}\tau$ καὶ τοῦ συν $\frac{1}{2}\tau$, ὅταν τὸ συντ ἦναι γνωστόν.

Ὁ λόγος δι' ὃν λαμβάνομεν δύω τιμὰς ἴσας μετὰ σημείων ἐναντίων δι' ἑκάτερον τῶν ἀγνώστων ἡμ $\frac{1}{2}\tau$ καὶ συν $\frac{1}{2}\tau$, εὑρίσκεται εὐκόλως.

Πρῶτον παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ αὗται δίδονται συνεκθέσει μόνου τοῦ συνημιτόνου τοῦ τόξου· λοιπὸν πρέπει νὰ δίδωσι ταὐτοχρόνως τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ ἡμίσεως ἁπάντων τῶν τόξων τῶν ἐχόντων τὸ αὐτὸ συνημίτονον. Ἀλλά, κατὰ ἐδάφιον 22, τὰ τόξα ταῦτα ἐμπεριέχονται εἰς τὸν τύπον·

$$x = 2k\Pi \pm \tau,$$

ὅθεν πρέπει νὰ εὕρωμεν διὰ ἡμ $\frac{1}{2}\tau$ καὶ συν $\frac{1}{2}\tau$ τὰς ἐμπεριεχομένας τιμὰς εἰς τοὺς τύπους·

$$\text{ἡμ}\,(k\Pi \pm \tfrac{1}{2}\tau), \qquad \text{καὶ} \qquad \text{συν}\,(k\Pi \pm \tfrac{1}{2}\tau).$$

Ὅταν k ἦναι ἀριθμὸς ἄρτιος, ὁ ὅρος kΠ θέλει εἶναι πολλαπλάσιόν τι τῶν 360^{o}· ἄρα δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν αὐτὸν χωρὶς διὰ τούτου νὰ μεταβληθῇ τὸ ἡμίτονον ἢ τὸ συνημίτονον [13], καὶ τότε θέλομεν ἔχει·

$$\text{ἡμ}\,(\pm \tfrac{1}{2}\tau) = \pm\, \text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\tau, \qquad \text{συν}\,(\pm \tfrac{1}{2}\tau) = \text{συν}\,\tfrac{1}{2}\tau.$$

Ὅταν ὅμως k ἦναι ἀριθμὸς περιττὸς, παραλείπομεν καὶ αὖθις τὸν ὅρον kΠ, ἀλλὰ τότε πρέπει ν' ἀλλάσσωμεν τὰ σημεῖα τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου [13], καὶ ἔχομεν·

$$-\,\text{ἡμ}\,(\pm \tfrac{1}{2}\tau) = \mp\, \text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\tau, \qquad -\,\text{συν}\,(\pm \tfrac{1}{2}\tau) = -\,\text{συν}\,\tfrac{1}{2}\tau.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἔπρεπεν ὄντως νὰ λάβωμεν δύω τιμὰς ἴσας μετὰ σημείων ἐναντίων διὰ ἡμ $\frac{1}{2}\tau$ καὶ συν $\frac{1}{2}\tau$.

39. Ἐὰν, ἀντὶ τοῦ συνημιτόνου, δοθῇ τὸ ἡμίτονον, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν εἰς τοὺς τύπους (8) ἀντὶ τοῦ συντ τὴν τιμὴν αὐτοῦ $\pm\sqrt{1-\text{ἡμ}^2\tau}$· ἕνεκα δὲ τοῦ διπλοῦ αὐτῆς σημείου λαμβάνομεν τέσσαρας τιμὰς δι' ἕκαστον τῶν ἀγνώστων ἡμ $\frac{1}{2}\tau$ καὶ συν $\frac{1}{2}\tau$, ἤτοι·

$$\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\tau = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{ἡμ}^2\tau}},$$

$$\text{συν}\,\tfrac{1}{2}\tau = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{ἡμ}^2\tau}}.$$

Ἀλλὰ τὰς τιμὰς ταύτας καὶ ὑπὸ ἑτέραν λαμβάνομεν μορφήν. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (5) καὶ (7) ἐξάγομεν τὰς τιμὰς τοῦ ἡμ $\frac{1}{2}\tau$ καὶ τοῦ συν $\frac{1}{2}\tau$. Πρὸς τοῦτο, προσθέτομεν τὴν πρώτην εἰς τὴν δευτέραν καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς δευτέρας τὴν πρώτην, εἶτα ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν, καὶ ἔχομεν·

$$\text{συν}\,\tfrac{1}{2}\tau + \text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\tau = \pm\sqrt{1+\text{ἡμ}\tau},$$

$$\text{συν}\,\tfrac{1}{2}\tau - \text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\tau = \pm\sqrt{1-\text{ἡμ}\tau},$$

ὅθεν,

$$\text{(9)} \qquad \text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\tau = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{ἡμ}\tau} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{ἡμ}\tau},$$

$$\text{(10)} \qquad \text{συν}\,\tfrac{1}{2}\tau = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{ἡμ}\tau} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{ἡμ}\tau}.$$

Δι' ἕκαστον τῶν ἀγνώστων λαμβάνομεν τέσσαρας τιμάς· διότι αἱ τιμαί, περὶ ὧν πρόκειται, πρέπει νὰ δίδωσι τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ ἡμίσεως ὅλων τῶν τόξων τῶν ἐχόντων τὸ αὐτὸ ἡμίτονον· ἀλλά, κατὰ ἐδάφιον 21, τὰ τόξα ταῦτα ἐμπεριέχονται εἰς τοὺς τύπους·

$$x = 2k\Pi + \tau, \qquad x = (2k+1)\Pi - \tau,$$

Ἄρα αἱ τιμαὶ τῶν ἡμ $\frac{1}{2}\tau$ καὶ συν $\frac{1}{2}\tau$ πρέπει νὰ δίδωσι τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τῶν τόξων

$$k\Pi + \tfrac{1}{2}\tau, \quad \text{καὶ} \quad (k+\tfrac{1}{2})\Pi - \tfrac{1}{2}\tau.$$

Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν ἀπὸ τῶν τύπων τούτων τὸν ὅρον $k\Pi$, φροντίζοντες νὰ διατηρῶμεν ἢ ν' ἀλλάσωμεν τὰ σημεῖα τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου, καθόσον k εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος ἢ περιττός. Ἑπομένως θέλομεν ἔχει διὰ ἡμ $\frac{1}{2}\tau$ καὶ διὰ συν $\frac{1}{2}\tau$ τέσσαρας τιμάς, ἤτοι·

$$\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\tau = \pm\,\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\tau, \qquad \text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\tau = \pm\,\text{ἡμ}\,(\tfrac{1}{2}\Pi - \tfrac{1}{2}\tau),$$

$$\text{συν}\,\tfrac{1}{2}\tau = \pm\,\text{συν}\,\tfrac{1}{2}\tau, \qquad \text{συν}\,\tfrac{1}{2}\tau = \pm\,\text{συν}\,(\tfrac{1}{2}\Pi - \tfrac{1}{2}\tau).$$

Βλέπομεν προσέτι ὅτι αἱ τιμαὶ αὗται εἰσὶν ἴσαι ἀνὰ δύω μετὰ σημείων ἐναντίων. Ἐὰν $\tau = 90^0$, ἔχομεν $\frac{1}{2}\tau = 45^0$, $\frac{1}{2}\Pi - \frac{1}{2}\tau = 45^0$, αἱ τέσσαρες δὲ τιμαὶ ἄγονται εἰς δύω.

Παρατήρησις. Τὰ δύο τόξα $\frac{1}{2}\tau$ καὶ $\frac{1}{2}\Pi - \frac{1}{2}\tau$ εἶναι συμπληρώματα ἀλλήλων, ἑπομένως αἱ ἀνωτέρω τιμαὶ ἄγονται εἰς τὰς ἑξῆς·

$$\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\tau = \pm\,\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\tau, \qquad \text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\tau = \pm\,\text{συν}\,\tfrac{1}{2}\tau,$$

$$\text{συν}\,\tfrac{1}{2}\tau = \pm\,\text{συν}\,\tfrac{1}{2}\tau, \qquad \text{συν}\,\tfrac{1}{2}\tau = \pm\,\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\tau,$$

ἤτοι, αἱ τιμαὶ τοῦ ἡμ $\frac{1}{2}\tau$ καὶ τοῦ συν $\frac{1}{2}\tau$ εἰσὶν αἱ αὐταί· τοῦτο δὲ δεικνύουσι καὶ οἱ τύποι (9) καὶ (10).

Ὑπολείπεται ἤδη νὰ σαφηνίσωμεν πῶς διακρίνομεν, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ τόξον τ καὶ τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ, τὴν ἁρμόζουσαν ἐκ τῶν τεσσάρων τιμῶν εἰς τὸ ἡμ $\frac{1}{2}\tau$ καὶ εἰς τὸ συν $\frac{1}{2}\tau$· διότι, ἐννοοῦμεν καλῶς, ὅτι μία μόνη τιμὴ πρέπει νὰ ὑπάρχῃ. Πρὸς συντομίαν, ἐξετάσωμεν μόνον τὸ ἡμ $\frac{1}{2}\tau$. Γράφομεν τὰς τέσσαρας τιμὰς ὡς ἑξῆς·

$$\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\tau = \pm\,\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\text{ἡμ}\tau} - \sqrt{1-\text{ἡμ}\tau}\right),$$

$$\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\tau = \pm\,\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\text{ἡμ}\tau} + \sqrt{1-\text{ἡμ}\tau}\right),$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ δύω πρῶταί εἰσιν ἴσαι μετὰ σημείων ἐναντίων, ὡς καὶ αἱ δύω τελευταῖαι. Ἐὰν τετραγωνίσωμεν αὐτὰς εὑρίσκομεν ἐξαγόμενα τὸ μὲν ἔλαττον $\frac{1}{2}$, τὸ δὲ μεῖζον. Ἀλλὰ [10] $ἡμ^2 45^0 = συν^2 45^0 = \frac{1}{2}$, ἄρα, πλὴν τῶν σημείων, αἱ μὲν δύω πρῶται τιμαὶ ἐλάσσονές εἰσι τοῦ ἡμ. 45^0, αἱ δὲ δύω τελευταῖαι μείζονες.

Ἀλλ' ὅταν ἓν τόξον δίδηται, εὔκολον πάντοτε εἶναι νὰ γνωρίσωμεν ἐὰν τὸ ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεως αὐτοῦ ἦναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, ἐὰν ἔλαττον ἢ μεῖζον τοῦ ἡμ. 45^0· παύει λοιπὸν πᾶσα ἀβεβαιότης.

Οἱ αὐτοὶ συλλογισμοὶ ἐφαρμόζονται καὶ εἰς τὸ συνημίτονον.

Π. χ. Ἐὰν $τ < 90^0$, τὸ ἡμ $\frac{1}{2}τ$ εἶναι θετικὸν καὶ ἔλαττον τοῦ ἡμ. 45^0· τὸ συν $\frac{1}{2}τ$ εἶναι ἐπίσης θετικόν, ἀλλὰ μεῖζον τοῦ συν 45^0· πρέπει λοιπὸν νὰ λάβωμεν τὰς τιμὰς (9) καὶ (10) μὲ τὰ ἐν αὐταῖς φαινόμενα σημεῖα.

Ἔστω $τ = 280^0$. Ἔχομεν $\frac{1}{2}τ = 140^0$, οὗτινος τὸ παραπλήρωμα εἶναι 40^0· λοιπόν,

$$ἡμ\, 140^0 = ἡμ\, 40^0 = -\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1 + ἡμ\, 280^0} - \sqrt{1 - ἡμ\, 280^0}\right).$$

Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι πραγματικῶς θετική, διότι, τοῦ ἡμ 280^0 ὄντος ἀρνητικοῦ, τὸ δεύτερον ῥιζικὸν μεῖζόν ἐστι τοῦ πρώτου.

Οἱ περὶ ὧν ὁ λόγος τύποι εἰσὶ παρεσκευασμένοι διὰ τὰς περιπτώσεις τῶν κατωτέρω τῶν 90^0 τόξων. Τὴν αὐτὴν φροντίδα λαμβάνομεν καὶ ὡς πρὸς ἅπαντας τοὺς τριγωνομετρικοὺς τύπους, διότι κυρίως αἱ περιπτώσεις αὗται εἰσὶν αἱ συνηθέστεραι.

40. Μεταβῶμεν ἤδη εἰς τὴν τριχοτομίαν τῶν τόξων.

Εἰς τοὺς ἐν ἐδαφίῳ 37 τύπους (3) καὶ (4) τρέπομεν τ εἰς $\frac{1}{3}τ$, καὶ λαμβάνομεν·

$$ἡμτ = 3\, ἡμ\, \tfrac{1}{3}τ - 4\, ἡμ^3 \tfrac{1}{3}τ,$$
$$συντ = 4\, συν^3 \tfrac{1}{3}τ - 3\, συν \tfrac{1}{3}τ.$$

Τεθείσθω ὅτι δίδεται τὸ συντ καὶ ζητεῖται τὸ συν $\frac{1}{3}τ$. Καλοῦμεν $συντ = β$, $συν \frac{1}{3}τ = x$, καὶ ἡ δευτέρα ἐξίσωσις γίνεται·

$$x^3 - \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{4}β = 0. \qquad (11)$$

Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως ταύτης δίδει τὸ συν $\frac{1}{3}τ$. Ἐκ τῆς Ἀλγέβρας μανθάνομεν ὅτι ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις ἔχει καὶ τὰς τρεῖς αὐτῆς ῥίζας πραγματικὰς, ὅταν $\beta < 1$. Τὴν πρότασιν δὲ ταύτην δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν καὶ διὰ τῆς Τριγωνομετρίας, ὡς ἑξῆς·

Τὸ δοθὲν συνημίτονον ἀντιστοιχεῖ [22] εἰς τὰ τόξα $2k\Pi \pm \tau$· λοιπὸν ἅπασαι τῆς ἐξισώσεως (11) αἱ ῥίζαι εἰσὶν αἱ περιεχόμεναι τιμαὶ εἰς τὸν τύπον·

$$x = \text{συν}\,\frac{2k\Pi \pm \tau}{3}.$$

Ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς k ὑπὸ μίαν τῶν τριῶν τούτων μορφῶν δύναται νὰ παρουσιασθῇ, 3ν, $3\nu + 1$, $3\nu - 1$ (ν ὄντος ἀριθμοῦ ἀκεραίου). Ποιοῦμεν διαδοχικῶς $k = 3\nu$, $k = 3\nu + 1$, $k = 3\nu - 1$, καὶ λαμβάνομεν, παραλείποντες τὰς ἀχρήστους περιφερείας,

$$x = \text{συν}\,\frac{3\nu\,.\,2\Pi \pm \tau}{3} = \text{συν}(2\nu\Pi \pm \tfrac{1}{3}\tau) = \text{συν}(\pm \tfrac{1}{3}\tau) = \text{συν}\tfrac{1}{3}\tau,$$

$$x = \text{συν}\,\frac{(3\nu + 1)\,2\Pi \pm \tau}{3} = \text{συν}\,(2\nu\Pi + \tfrac{2}{3}\Pi \pm \tfrac{1}{3}\tau)$$
$$= \text{συν}\,(\tfrac{2}{3}\Pi \pm \tfrac{1}{3}\tau),$$

$$x = \text{συν}\,\frac{(3\nu - 1)\,2\Pi \pm \tau}{3} = \text{συν}\,(-\tfrac{2}{3}\Pi \pm \tfrac{1}{3}\tau)$$
$$= \text{συν}\,(\tfrac{2}{3}\Pi \pm \tfrac{1}{3}\tau).$$

Αἱ δύω τελευταῖαι τιμαὶ καὶ αἱ δύω προτελευταῖαι εἰσὶν αἱ αὐταί. Ἄρα ὑπάρχουσι τὸ ὅλον τρεῖς τιμαὶ διάφοροι, ἤτοι·

$$x = \text{συν}\,\tfrac{1}{3}\tau, \qquad x = \text{συν}\,(\tfrac{2}{3}\Pi + \tfrac{1}{3}\tau), \qquad x = \text{συν}\,(\tfrac{2}{3}\Pi - \tfrac{1}{3}\tau).$$

Συμβαίνει ὅμως δύω τῶν τιμῶν τούτων νὰ ὦσιν ἴσαι· π. χ. ἡ πρώτη ἴση τῇ τρίτῃ ὅταν $\tau = \Pi$.

41. Ἐὰν ἀντὶ τοῦ συντ ἐδίδετο τὸ ἡμτ $= \beta$, τότε καλοῦντες καὶ αὖθις ἡμ $\frac{1}{3}\tau = x$, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ τρίτου βαθμοῦ·

$$(12) \qquad x^3 - \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{4}\beta = 0,$$

ἧς ἡ ἄγνωστος βεβαιούμεθα, διὰ συλλογισμῶν ὁμοίων τοῖς πρὸς τὴν ἐξίσωσιν (11), ὅτι ἔχει τὰς τρεῖς τιμάς·

$$\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{3}\tau, \qquad \text{ἡμ}\,(\tfrac{1}{3}\tau + \tfrac{2}{3}\Pi), \qquad \text{ἡμ}\,(\tfrac{1}{3}\tau + \tfrac{4}{3}\Pi),$$

ἢ τὰς ἰσοδυνάμους ταύτας·

$$\text{ἡμ}\,(\Pi - \tfrac{1}{3}\tau), \qquad \text{ἡμ}\,(\tfrac{1}{3}\Pi - \tfrac{1}{3}\tau), \qquad -\,\text{ἡμ}\,(\tfrac{1}{3}\Pi + \tfrac{1}{3}\tau).$$

Παρατηρήσεις. 1η. Ἔστω ΑΒ $= \frac{1}{3}\tau$. Εἰς τὸν κύκλον (Σχ. 5) οὗτινος ἡ ἀκτὶς ΟΑ $= 1$, ἐγγράφομεν τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ μία κορυφὴ νὰ κῆται εἰς τὸ σημεῖον Β. Αἱ ἀγόμεναι κάθετοι ΒΕ, ΓΖ, ΔΗ, ἀπὸ τῶν κορυφῶν Β, Γ, Δ, τοῦ τριγώνου τούτου ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΑ', εἰσὶν αἱ τρεῖς ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (12), καθότι εἶναι τὰ ἡμίτονα τῶν τόξων,

$$\frac{1}{3}\tau, \qquad \left(\frac{1}{3}\tau + \frac{2}{3}\Pi\right), \qquad \left(\frac{1}{3}\tau + \frac{4}{3}\Pi\right).$$

2α. Ὅταν τὸ δοθὲν ἡμίτονον β ἦναι θετικὸν καὶ ἔλαττον μονάδος, ἔχομεν $\tau < 90^\circ$, $\frac{1}{3}\tau < 30^\circ$, καὶ ἑπομένως ἡμ $\frac{1}{3}\tau < \frac{1}{2}$. Τὸ τόξον $(\frac{1}{3}\tau + \frac{2}{3}\Pi)$ περιλαμβάνεται μεταξὺ 120° καὶ 150°· ἄρα ἡμ $(\frac{1}{3}\tau + \frac{2}{3}\Pi)$ εἶναι θετικὸν καὶ μεῖζον $\frac{1}{2}$. Τὸ τρίτον τόξον $(\frac{1}{3}\tau + \frac{4}{3}\Pi)$ κεῖται μεταξὺ 240° καὶ 270°, τὸ ἡμ$(\frac{1}{3}\tau + \frac{4}{3}\Pi)$ εἶναι ἀρνητικόν, ἡ δὲ ἀπόλυτος αὐτοῦ τιμὴ μείζων $\frac{1}{2}$.

Ὅταν τὸ δοθὲν ἡμίτονον β ἦναι ἀρνητικόν, ἔχομεν $\tau > 180^\circ$, καὶ $\tau < 270^\circ$, ἑπομένως $\frac{1}{3}\tau > 60^\circ$ καὶ $\frac{1}{3}\tau < 90^\circ$· ἄρα, ἡμ $\frac{1}{3}\tau$ ἔσεται θετικὸν καὶ μεῖζον $\frac{1}{2}$. Τὰ ἡμίτονα τῶν δύο ἑτέρων τόξων $(\frac{1}{3}\tau + \frac{2}{3}\Pi)$ καὶ $(\frac{1}{3}\tau + \frac{4}{3}\Pi)$ εἰσὶ τότε ἀρνητικά· ἡ μὲν ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πρώτου ἐλάσσων $\frac{1}{2}$, ἡ δὲ τοῦ δευτέρου, τοὐναντίον, μείζων $\frac{1}{2}$.

Διὰ τῆς παρατηρήσεως ταύτης εὐκόλως διακρίνομεν ὁποίαν ἐκ τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως (12) πρέπει νὰ λάβωμεν ὡς τιμὴν τοῦ ἡμ $\frac{1}{3}\tau$, ὅταν δίδηται τὸ τόξον τ· διότι, πρῶτον δυνάμεθα νὰ γνωρίσωμεν τὸ σημεῖον τοῦ ἡμ $\frac{1}{3}\tau$, εἶτα, ἄγοντες τὸ τόξον $\frac{1}{3}\tau$ ἐν τῷ πρώτῳ τεταρτοκυκλίῳ, βλέπομεν ἐὰν ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἡμιτόνου τούτου ἦναι μεγαλειτέρα ἢ μικροτέρα τοῦ κλάσματος $\frac{1}{2}$, ὅπερ εἶναι τὸ ἡμίτονον τῶν 30°.

Ἔστω, π. χ., $\tau = 390^\circ$. Ἔχομεν $\frac{1}{3}\tau = 130^\circ$ οὗτινος τὸ παραπλήρωμα εἶναι 50°. Τοῦ ἡμ 130° ὄντος θετικοῦ καὶ μείζονος $\frac{1}{2}$, πρέπει νὰ λάβωμεν ὡς τιμὴν τοῦ ἡμιτόνου τούτου τὴν θετικὴν ῥίζαν τῆς ἐξισώσεως (12) περιλαμβανομένην μεταξὺ $\frac{1}{2}$ καὶ 1.

42. Τὰς αὐτὰς προτάσεις δυνάμεθα ἐπιλῦσαι καὶ πρὸς τὴν ἐφαπτομένην.

Ζητήσωμεν τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς δύω τόξων τ, τ', δεδομένων οὐσῶν τῶν ἐφαπτομένων τῶν τόξων τούτων.

Ἐκ τῆς ἐν ἐδαφίῳ 27 σχέσεως (2) ἔχομεν·

$$\dot{\epsilon}\varphi(\tau+\tau')=\frac{\dot{\eta}\mu\,(\tau+\tau')}{\sigma\upsilon\nu\,(\tau+\tau')}=\frac{\dot{\eta}\mu\tau\,\sigma\upsilon\nu\tau'+\sigma\upsilon\nu\tau\,\dot{\eta}\mu\tau'}{\sigma\upsilon\nu\tau\,\sigma\upsilon\nu\tau'-\dot{\eta}\mu\tau\,\dot{\eta}\mu\tau'}.$$

Ἵνα ἔχωμεν μόνον ἐφαπτομένας, διαιροῦμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος τούτου διὰ συντ συντ' καὶ λαμβάνομεν·

$$\dot{\epsilon}\varphi\,(\tau+\tau')=\frac{\dfrac{\dot{\eta}\mu\tau}{\sigma\upsilon\nu\tau}+\dfrac{\dot{\eta}\mu\tau'}{\sigma\upsilon\nu\tau'}}{1-\dfrac{\dot{\eta}\mu\tau}{\sigma\upsilon\nu\tau}\cdot\dfrac{\dot{\eta}\mu\tau'}{\sigma\upsilon\nu\tau'}},\quad \text{ἢ}$$

(1) $$\dot{\epsilon}\varphi\,(\tau+\tau')=\frac{\dot{\epsilon}\varphi\tau+\dot{\epsilon}\varphi\tau'}{1-\dot{\epsilon}\varphi\tau\,\dot{\epsilon}\varphi\tau'}.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν·

(2) $$\dot{\epsilon}\varphi\,(\tau-\tau')=\frac{\dot{\epsilon}\varphi\tau-\dot{\epsilon}\varphi\tau'}{1+\dot{\epsilon}\varphi\tau\,\dot{\epsilon}\varphi\tau'}.$$

43. Ἔστω $\tau=\tau'$, ὁ τύπος (1) δίδει·

(3) $$\dot{\epsilon}\varphi\,2\tau=\frac{2\,\dot{\epsilon}\varphi\tau}{1-\dot{\epsilon}\varphi^2\tau}.$$

Ποιοῦντες $\tau'=2\tau$, εὑρίσκομεν·

$$\dot{\epsilon}\varphi\,3\tau=\frac{\dot{\epsilon}\varphi\tau+\dot{\epsilon}\varphi2\tau}{1-\dot{\epsilon}\varphi\tau\,\dot{\epsilon}\varphi2\tau},$$

καὶ θέτοντες ἀντὶ ἐφ 2τ τὴν τιμὴν (3)·

(4) $$\dot{\epsilon}\varphi\,3\tau=\frac{3\,\dot{\epsilon}\varphi\tau-\dot{\epsilon}\varphi^3\tau}{1-3\,\dot{\epsilon}\varphi^2\tau}.$$

Ὅμοιαι ἐργασίαι δίδουσι τὰς τιμὰς τῶν ἐφ 4τ, ἐφ 5τ, ... συνεκθέσει τῆς ἐφτ.

44. Ἵνα προσδιορίσωμεν τὴν ἐφ $\frac{1}{2}\tau$, συνεκθέσει τῆς ἐφτ, θέτομεν εἰς τὸν (3) τύπον $\frac{1}{2}\tau$ ἀντὶ τ καὶ λαμβάνομεν·

$$\dot{\epsilon}\varphi\tau=\frac{2\,\dot{\epsilon}\varphi\,\frac{1}{2}\tau}{1-\dot{\epsilon}\varphi^2\,\frac{1}{2}\tau}.$$

Ἀφανίζοντες δὲ τὸν παρονομαστὴν, λαμβάνομεν τὴν δευτεροβάθμιον ταύτην ἐξίσωσιν·

$$(5)\qquad \text{ἐφ}^2\,\tfrac{1}{2}\tau + \frac{2}{\text{ἐφ}\tau}\,\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\tau - 1 = 0,$$

ἣν ἐπιλύοντες, ἔχομεν·

$$\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\tau = \frac{1}{\text{ἐφ}\tau}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \text{ἐφ}^2\tau}\right).$$

Ἡ ἐξίσωσις (5) δεικνύει ὅτι αἱ δύω τιμαὶ τῆς ἐφ $\frac{1}{2}\tau$ εἰσὶ πραγματικαὶ καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἰσοῦται -1.

Λοιπὸν, ἐὰν αἱ AT καὶ AT′ (Σχ. 1) παριστάνωσι τὰς τιμὰς ταύτας, κατὰ τὴν ἁρμόζουσαν εἰς τὰ σημεῖα αὐτῶν θέσιν, πρέπει νὰ ἔχωμεν $AT \times AT' = \overline{OA}^2$· ἄρα ἡ γωνία TOT′ εἶναι ὀρθὴ, ἑπομένως τὸ τόξον $MN = 90^\circ$.

Εὐκόλως δεικνύεται καὶ διὰ τῆς Τριγωνομετρίας ὅτι ἡ ἐφ $\frac{1}{2}\tau$ ἔχει δύω τιμὰς πραγματικὰς, ὧν τὸ γινόμενον ἰσοῦται μονάδι.

Διὰ τὴν ἄγνωστον ἐφ $\frac{1}{2}\tau$ πρέπει νὰ εὕρωμεν [23] τὰς ἐφαπτομένας ὅλων τῶν τόξων $\frac{k\Pi + \tau}{2}$. Ἀλλὰ, καθ' ὅσον k εἶναι ἄρτιος ἢ περιττὸς ἀριθμὸς, ἔχομεν·

$$\text{ἐφ}\,\frac{k\Pi + \tau}{2} = \text{ἐφ}\,\frac{\tau}{2}, \quad \text{ἢ} \quad \text{ἐφ}\,\frac{k\Pi + \tau}{2} = \text{ἐφ}\,\frac{\Pi + \tau}{2}.$$

Λοιπὸν, αἱ δύω τιμαὶ τῆς ἐφ $\frac{1}{2}\tau$, εἶναι ἐφ $\frac{1}{2}\tau$, καὶ ἐφ $(90^\circ + \frac{1}{2}\tau)$.

Ἀλλὰ, $\quad$ ἐφ $(90^\circ + \frac{1}{2}\tau) = -$ ἐφ $(90^\circ - \frac{1}{2}\tau) = -$ συνεφ $\frac{1}{2}\tau$.

Ἑπομένως·

$$\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\tau \times \text{ἐφ}\,(90^\circ + \tfrac{1}{2}\tau) = \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\tau \times -\,\text{συνεφ}\,\tfrac{1}{2}\tau = -1.$$

45. Ἵνα προσδιορίσωμεν τὴν ἐφ $\frac{1}{3}\tau$, δεδομένης οὔσης ἐφτ, μεταχειριζόμεθα τὴν ἐξίσωσιν (4), ἐν ᾗ θέτομεν $\frac{1}{3}\tau$ ἀντὶ τ· καλοῦμεν ἐφ $\frac{1}{3}\tau = x$, ἐφτ $= 6$ καὶ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν·

$$6 = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}.$$

ἥτις, μετὰ τὴν ἀφάνισιν τοῦ παρονομαστοῦ καὶ μετάθεσιν τῶν ὅρων, ἄγεται εἰς ταύτην·

$$(6) \qquad x^3 - 3\beta x^2 - 3x + \beta = 0\,,$$

δίδουσαν τρεῖς τιμὰς διὰ ἐφ $\frac{1}{3}\tau$.

Καὶ ὄντως, ἡ δεδομένη ἐφαπτομένη β ἀντιστοιχεῖ [23] εἰς τὰ τόξα $(k\Pi + \tau)$ ἄρα, ὁ λογισμὸς πρέπει νὰ δίδῃ διὰ τὴν ἄγνωστον x τὰς ἐφαπτομένας τῶν τόξων $\dfrac{k\Pi + \tau}{3}$. Ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν ἐν τῷ τύπῳ τούτῳ, ἀντὶ k, π. χ. 0, 1, 2· διότι, ἐπειδὴ τὰ οὕτω λαμβανόμενα τόξα συνιστῶσι πρόοδον ἀριθμητικὴν ἧς ὁ λόγος ἐστὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἡμιπεριφερείας, εὑρήσομεν, καθιστῶντες ἀντὶ k τοὺς ἀκολούθους ἀκεραίους διαδοχικοὺς ἀριθμούς, τὰ αὐτὰ τόξα ηὐξημένα ἢ ἠλαττωμένα κατὰ ἀριθμὸν ἀκέραιον ἡμιπεριφερειῶν. Λοιπόν, αἱ ἀντεισαγωγαὶ 0, 1, 2, ἀντὶ k, δίδουσιν ὡς τιμὰς τῆς x·

$$\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{3}\tau, \qquad \text{ἐφ}\,(\tfrac{1}{3}\tau + \tfrac{1}{3}\Pi), \qquad \text{ἐφ}\,(\tfrac{1}{3}\tau + \tfrac{2}{3}\Pi).$$

Παρατήρησις. Ὅταν ἡ δεδομένη ἐφαπτομένη β ἦναι θετικὴ καὶ πεπερασμένη, ἔχομεν, $\tau < 90^\circ$, $\frac{1}{3}\tau < 30^\circ$. Τὰ τοξα $(\frac{1}{3}\tau + \frac{1}{3}\Pi)$, $(\frac{1}{3}\tau + \frac{2}{3}\Pi)$, θέλουν συμπεριλαμβάνεσθαι τὸ μὲν μεταξὺ 60° καὶ 90°, τὸ δὲ μεταξὺ 120° καὶ 150°. Ὅθεν ἕπεται ἀμέσως ὅτι·

$$\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{3}\tau < 1, \qquad \text{ἐφ}\,(\tfrac{1}{3}\tau + \tfrac{1}{3}\Pi) > 1.$$

Ἡ δὲ $\quad$ ἐφ $(\frac{1}{3}\tau + \frac{2}{3}\Pi)$ $\quad$ ἔσεται ἀρνητική.

Ἐὰν β ἦναι ἀρνητικὴ καὶ πεπερασμένη, ἔχομεν·

$\tau > 90^\circ$ καὶ $\tau < 180^\circ$, ὅθεν $\frac{1}{3}\tau > 30^\circ$ καὶ $\frac{1}{3}\tau < 60^\circ$.

Ἡ ἐφαπτομένη $\frac{1}{3}\tau$ ἔσεται θετική. Τὸ τόξον $(\frac{1}{3}\tau + \frac{1}{3}\Pi)$ κείμενον μεταξὺ 90° καὶ 120° ἕξει ἐφαπτομένην ἀρνητικὴν μείζονα μονάδος, ἐν ἀπολύτῳ τιμῇ. Τὸ τρίτον τόξον $(\frac{1}{3}\tau + \frac{2}{3}\Pi)$ θέλει συμπεριλαμβάνεσθαι μεταξὺ 150° καὶ 180°, ἡ ἐφαπτομένη αὐτοῦ ἔσεται ἀρνητικὴ καὶ ἐλάσσων μονάδος, ἐν τιμῇ ἀπολύτῳ.

Ἑπομένως δυνάμεθα διακρῖναι, ὁποίαν ἐκ τῶν τριῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως (6) πρέπει νὰ λάβωμεν ὅταν ἦναι δεδομένον τὸ τόξον τ. Διότι, ὑποθέτοντες $\beta > 0$ καὶ πεπερασμένην, ἡ ἐξίσωσις (6) ἕξει, ὡς εἴδομεν, μίαν ῥίζαν ἀρνητικὴν καὶ δύο ῥίζας θετικάς, τὴν μὲν ἐλάσσονα, τὴν δὲ μείζονα μονάδος. Ἐὰν ἡ ἐφ$\frac{1}{3}\tau$ ἦναι ἀρνητική, αὕτη θέλει ἀντιστοιχεῖ προφανῶς τῇ ἀρνητικῇ ῥίζῃ τῆς ἐξισώσεως. Ἐὰν ἐφ $\frac{1}{3}\tau$ ἦναι θετική, ἄγομεν τὸ τόξον $\frac{1}{3}\tau$ εἰς τὸ πρῶτον τεταρτοκύκλιον, καὶ ἐφ᾽ ὅσον τὸ ληφθησόμενον τόξον ἔσεται ἔλαττον ἢ μεῖζον 45°, πρέπει νὰ λάβωμεν διὰ ἐφ $\frac{1}{3}\tau$ τὴν ἐλάσσονα ἢ τὴν μείζονα μονάδος ῥίζαν.

Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον εὑρήσομεν εἰς τίνα ῥίζαν ἀντιστοιχεῖ ἐφ $\frac{1}{3}\tau$, ὅταν β ἦναι ἀρνητική.

46. Συχνότατα ἀπαντῶμεν τοὺς τύπους·

$$\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\tau = \sqrt{\frac{1-\text{συν}\tau}{1+\text{συν}\tau}},$$

$$\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\tau = \frac{\text{ἡμ}\tau}{1+\text{συν}\tau},$$

$$\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\tau = \frac{1-\text{συν}\tau}{\text{ἡμ}\tau},$$

οἵτινες παράγονται ἐκ γνωστῶν τύπων, ὡς ἑξῆς [36, 38]·

$$\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\tau = \frac{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\tau}{\text{συν}\frac{1}{2}\tau} = \sqrt{\frac{1-\text{συν}\tau}{1+\text{συν}\tau}},$$

$$\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\tau = \frac{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\tau\ \text{συν}\,\frac{1}{2}\tau}{\text{συν}^2\frac{1}{2}\tau} = \frac{\text{ἡμ}\tau}{1+\text{συν}\tau},$$

$$\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\tau = \frac{\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\tau}{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\tau\ \text{συν}\,\frac{1}{2}\tau} = \frac{1-\text{συν}\tau}{\text{ἡμ}\tau}.$$

ΠΕΡΙ ΕΤΕΡΩΝ ΤΙΝΩΝ ΤΥΠΩΝ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΗΣΕΩΣ.

47. Ἐκ τῶν ἐν ἐδαφίῳ 33 τύπων (1), (2), (3), (4), παράγονται πλεῖστοι ἕτεροι λίαν εὔχρηστοι παρὰ τοῖς ἀστρονόμοις. Δείξωμεν τοὺς κυριωτέρους ἐξ αὐτῶν.

Συνδυάζοντες τοὺς εἰρημένους τύπους διὰ προσθέσεως καὶ δι᾽ἀφαιρέσεως, ἔχομεν τοὺς ἑξῆς, δι᾽ ὧν τρέπομεν τὸ γινόμενον ἡμιτόνου τινὸς ἐπί τι συνημίτονον, ἢ ἐκεῖνο δύω συνημιτόνων, ἢ δύω ἡμιτόνων, εἰς ἄθροισμα ἢ εἰς διαφορὰν δύω τριγωνομετρικῶν γραμμῶν.

$$2\,\text{ἡμ}\tau\;\text{συν}\tau' = \text{ἡμ}\,(\tau+\tau') + \text{ἡμ}\,(\tau-\tau'),$$
$$2\,\text{συν}\tau\;\text{ἡμ}\tau' = \text{ἡμ}\,(\tau+\tau') - \text{ἡμ}\,(\tau-\tau'),$$
$$2\,\text{συν}\tau\;\text{συν}\tau' = \text{συν}(\tau-\tau') + \text{συν}\,(\tau+\tau'),$$
$$2\,\text{ἡμ}\tau\;\text{ἡμ}\tau' = \text{συν}(\tau-\tau') - \text{συν}\,(\tau+\tau').$$

48. Ἔστωσαν σ καὶ $\varkappa$ δύω τόξα· καλοῦμεν $\tau+\tau'=\sigma$, $\tau-\tau'=\varkappa$, ὅθεν $\tau=\frac{1}{2}(\sigma+\varkappa)$, $\tau'=\frac{1}{2}(\sigma-\varkappa)$.

Θέτομεν τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τοὺς προηγουμένους τύπους, ἀλλάσσομεν τὴν τάξιν τῶν μελῶν καὶ ἔχομεν·

$$\text{ἡμ}\sigma + \text{ἡμ}\varkappa = 2\,\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}(\sigma+\varkappa)\,\text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\sigma-\varkappa),$$
$$\text{ἡμ}\sigma - \text{ἡμ}\varkappa = 2\,\text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\sigma+\varkappa)\,\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}(\sigma-\varkappa),$$
$$\text{συν}\sigma + \text{συν}\varkappa = 2\,\text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\sigma+\varkappa)\,\text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\sigma-\varkappa),$$
$$\text{συν}\varkappa - \text{συν}\sigma = 2\,\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}(\sigma+\varkappa)\,\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}(\sigma-\varkappa).$$

Τῶν τύπων τούτων χρῆσις γίνεται συνεχῶς, κυρίως ἐν τοῖς λογαριθμικοῖς λογισμοῖς· δι' αὐτῶν μεταβάλλεται ἓν ἄθροισμα, ἢ μία διαφορὰ, εἰς γινόμενον.

49. Συμπλέκοντες διὰ τῆς διαιρέσεως τοὺς τελευταίους τύπους καὶ παρατηροῦντες ὅτι ἐν γένει·

$$\frac{\text{ἡμ}A}{\text{συν}A} = \text{ἐφ}A = \frac{1}{\text{συνεφ}A},$$

λαμβάνομεν τοὺς ἀκολούθους, ὧν ἐπίσης ἡ χρῆσίς ἐστι συνήθης. Ἄξιος σημειώσεως ἰδίως εἶναι ὁ πρῶτος, ὅστις ἐκφωνεῖται διὰ τοῦ ἑπομένου θεωρήματος.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡμιτόνων δύω τόξων ἔχει λόγον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν αὐτῶν ἡμιτόνων, ὃν λόγον ἔχει ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν αὐτῶν τόξων πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἡμιδιαφορᾶς αὐτῶν.

$$\frac{\text{ἡμ}\sigma+\text{ἡμ}\varkappa}{\text{ἡμ}\sigma-\text{ἡμ}\varkappa} = \frac{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}(\sigma+\varkappa)\,\text{συν}\,\frac{1}{2}(\sigma-\varkappa)}{\text{συν}\,\frac{1}{2}(\sigma+\varkappa)\,\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}(\sigma-\varkappa)} = \frac{\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}(\sigma+\varkappa)}{\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}(\sigma-\varkappa)},$$

$$\frac{\text{ἡμ}\sigma+\text{ἡμ}\varkappa}{\text{συν}\sigma+\text{συν}\varkappa} = \frac{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}(\sigma+\varkappa)}{\text{συν}\,\frac{1}{2}(\sigma+\varkappa)} = \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(\sigma+\varkappa),$$

$$\frac{\text{ἡμ}\sigma + \text{ἡμ}\varkappa}{\text{συν}\varkappa - \text{συν}\sigma} = \frac{\text{συν}\,\frac{1}{2}(\sigma - \varkappa)}{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}(\sigma - \varkappa)} = \text{συνεφ}\,\frac{1}{2}(\sigma - \varkappa),$$

$$\frac{\text{ἡμ}\sigma - \text{ἡμ}\varkappa}{\text{συν}\sigma + \text{συν}\varkappa} = \frac{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}(\sigma - \varkappa)}{\text{συν}\,\frac{1}{2}(\sigma - \varkappa)} = \text{ἐφ}\,\frac{1}{2}(\sigma - \varkappa),$$

$$\frac{\text{ἡμ}\sigma - \text{ἡμ}\varkappa}{\text{συν}\varkappa - \text{συν}\sigma} = \frac{\text{συν}\,\frac{1}{2}(\sigma + \varkappa)}{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}(\sigma + \varkappa)} = \text{συνεφ}\,\frac{1}{2}(\sigma + \varkappa),$$

$$\frac{\text{συν}\sigma + \text{συν}\varkappa}{\text{συν}\varkappa - \text{συν}\sigma} = \frac{\text{συν}\,\frac{1}{2}(\sigma + \varkappa)\ \text{συν}\,\frac{1}{2}(\sigma - \varkappa)}{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}(\sigma + \varkappa)\ \text{ἡμ}\,\frac{1}{2}(\sigma - \varkappa)} = \frac{\text{συνεφ}\,\frac{1}{2}(\sigma + \varkappa)}{\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}(\sigma - \varkappa)}.$$

50. Εἰς τὰ μαθηματικὰ συγγράμματα ἀπαντῶμεν πολλάκις τριγωνομετρικοὺς μετασχηματισμούς, ὧν δυσκόλως ἐξιχνεύομεν τὴν καταγωγήν. Ἐν ταῖς τοιαύταις περιπτώσεσι προτιμότερον εἶναι καὶ εὐκολώτερον πάντοτε, νὰ περιοριζώμεθα εἰς τὸ νὰ ἐπαληθεύωμεν τοὺς προκειμένους μετασχηματισμούς.

Π. χ. Ἵνα ἐπαληθεύσωμεν τὴν σχέσιν·

$$\text{ἡμ}\,(\tau + \tau')\,\text{ἡμ}\,(\tau - \tau') = \text{ἡμ}^2\tau - \text{ἡμ}^2\tau',$$

πρῶτον θέτομεν ἀντὶ $\text{ἡμ}\,(\tau + \tau')$ καὶ $\text{ἡμ}\,(\tau - \tau')$ τὰς ἐν ἐδαφίῳ 33 τιμὰς αὐτῶν, καὶ ἔχομεν·

$$\text{ἡμ}\,(\tau + \tau')\,\text{ἡμ}\,(\tau - \tau') = \text{ἡμ}^2\tau\ \text{συν}^2\tau' - \text{συν}^2\tau\ \text{ἡμ}^2\tau'.$$

Εἶτα θέτομεν, ἀντὶ $\text{συν}^2\tau$ καὶ $\text{συν}^2\tau'$, τὰ ἴσα αὐτοῖς $1 - \text{ἡμ}^2\tau$ καὶ $1 - \text{ἡμ}^2\tau'$, μετὰ δὲ τὰς ἀναγωγὰς εὑρίσκομεν τὴν προτεθεῖσαν ἐξίσωσιν.

Ἔστω προσέτι ἡ σχέσις·

$$\text{συν}\tau = \frac{1 - \text{ἐφ}^2\,\frac{1}{2}\tau}{1 + \text{ἐφ}^2\,\frac{1}{2}\tau}.$$

Θέτομεν εἰς τὸ δεύτερον μέλος ἀντὶ $\text{ἐφ}\frac{1}{2}\tau$, τὴν τιμὴν αὐτῆς $\dfrac{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\tau}{\text{συν}\,\frac{1}{2}\tau}$, καὶ λαμβάνομεν $\dfrac{\text{συν}^2\,\frac{1}{2}\tau - \text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\tau}{\text{συν}^2\,\frac{1}{2}\tau + \text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\tau}$.

Ἀλλὰ [27, 38]

$$\text{ἡμ}^2\,\tfrac{1}{2}\tau + \text{συν}^2\,\tfrac{1}{2}\tau = 1 \quad \text{καὶ} \quad \text{συν}^2\,\tfrac{1}{2}\tau - \text{ἡμ}^2\,\tfrac{1}{2}\tau = \text{συν}\tau.$$

Ἄρα, ἡ ἔκφρασις αὕτη ἄγεται εἰς $\text{συν}\tau$.

52. Ἕπονταί τινες τριγωνομετρικοὶ τύποι, ὧν προτείνομεν, πρὸς ἄσκησιν, νὰ εὑρεθῇ ὁ σχηματισμός.

1) $\sigma\upsilon\nu(\tau+\tau')\,\sigma\upsilon\nu(\tau-\tau')=\sigma\upsilon\nu^2\tau-\acute{\eta}\mu^2\tau'$.

2) $\acute{\eta}\mu(\tau+\tau')\,\acute{\eta}\mu(\tau-\tau')=\acute{\eta}\mu^2\tau-\acute{\eta}\mu^2\tau'$.

3) $$\grave{\varepsilon}\varphi\,(45^\circ+\tau)=\frac{1+\grave{\varepsilon}\varphi\tau}{1-\grave{\varepsilon}\varphi\tau}.$$

4) $$\sigma\upsilon\nu\tau=\frac{1}{1+\grave{\varepsilon}\varphi\tau\;\grave{\varepsilon}\varphi\frac{1}{2}\tau}.$$

5) $$\grave{\varepsilon}\varphi\tau\pm\grave{\varepsilon}\varphi\tau'=\frac{\acute{\eta}\mu\,(\tau\pm\tau')}{\sigma\upsilon\nu\tau\;\sigma\upsilon\nu\tau'}.$$

6) $$\tau\acute{\varepsilon}\mu\tau+\tau\acute{\varepsilon}\mu\tau'=\frac{2\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\tau+\tau'}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\tau-\tau'}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\tau\;\sigma\upsilon\nu\tau'}.$$

7) $$\tau\acute{\varepsilon}\mu\tau-\tau\acute{\varepsilon}\mu\tau'=\frac{2\,\acute{\eta}\mu\left(\frac{\tau+\tau'}{2}\right)\acute{\eta}\mu\left(\frac{\tau-\tau'}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\tau\;\sigma\upsilon\nu\tau'}.$$

8) $$\acute{\eta}\mu\tau+\sigma\upsilon\nu\tau'=2\,\acute{\eta}\mu\left(45^\circ+\frac{\tau-\tau'}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\tau+\tau'}{2}-45^\circ\right).$$

9) $$\sigma\upsilon\nu\tau=\frac{1-\grave{\varepsilon}\varphi^2\frac{1}{2}\tau}{1+\grave{\varepsilon}\varphi^2\frac{1}{2}\tau}.$$

10) $$\sigma\upsilon\nu\tau+\sigma\upsilon\nu(\tau+\lambda)+\sigma\upsilon\nu(\tau+2\lambda)+\ldots+\sigma\upsilon\nu[\tau+(\nu-1)\lambda]$$
$$=\frac{\acute{\eta}\mu\,\frac{1}{2}\nu\lambda\,.\,\sigma\upsilon\nu\left[\tau+\frac{1}{2}(\nu-1)\lambda\right]}{\acute{\eta}\mu\,\frac{1}{2}\lambda}.$$

11) $$\acute{\eta}\mu\tau+\acute{\eta}\mu(\tau+\lambda)+\acute{\eta}\mu(\tau+2\lambda)+\ldots+\acute{\eta}\mu[\tau+(\nu-1)\lambda]$$
$$=\frac{\acute{\eta}\mu\,\frac{1}{2}\nu\lambda\,.\,\acute{\eta}\mu\left[\tau+\frac{1}{2}(\nu-1)\lambda\right]}{\acute{\eta}\mu\,\frac{1}{2}\lambda},$$

12) $\Pi\alpha\rho\eta\mu\,\tau=2\,\acute{\eta}\mu^2\,\frac{1}{2}\tau=1-\sigma\upsilon\nu\tau$.

13) *Μορφῶσαι τὴν ἐξίσωσιν·*

$$16\,\sigma\upsilon\nu^6\tau-24\,\sigma\upsilon\nu^4\tau+9\,\sigma\upsilon\nu^2\tau-1+\acute{\eta}\mu^2 3\tau=0,$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα συν $\frac{1}{3}\tau$ *συνεκθέσει τοῦ ἡμτ. Δεῖξαι ὅτι ἡ ἄγνωστος ἔχει τὰς ἓξ διαφόρους ταύτας τιμάς*·

$$\pm \text{συν}\,\tfrac{1}{3}\tau,\quad \pm\,\text{συν}\left(\tfrac{1}{3}\Pi - \tfrac{1}{3}\tau\right),\quad \pm\,\text{συν}\left(\tfrac{1}{3}\Pi + \tfrac{1}{3}\tau\right).$$

14) *Ζητήσωμεν τὸ* ἡμ $\frac{1}{3}\tau$ *συνεκθέσει τοῦ* συντ. (Τὸ ζήτημα τοῦτο ἀνάλογόν ἐστι τῷ ἡγουμένῳ).

15) $\text{συν}^2\tau + \text{συν}^2\tau' + \text{συν}^2\tau'' + 2\,\text{συν}\tau\,\text{συν}\tau'\,\text{συν}\tau'' = 1.$

16) $\text{ἡμ}\tau + \text{ἡμ}\tau' + \text{ἡμ}\tau'' = 4\,\text{συν}\frac{\tau}{2}\,\text{συν}\frac{\tau'}{2}\,\text{συν}\frac{\tau''}{2}.$

17) $\text{ἐφ}\tau + \text{ἐφ}\tau' + \text{ἐφ}\tau'' = \text{ἐφ}\tau\,\text{ἐφ}\tau'\,\text{ἐφ}\tau''.$

Οἱ τρεῖς τελευταῖοι τῶν τύπων τούτων ὑποθέτουσιν ὅτι $\tau + \tau' + \tau'' = 180^0$. Ἐκ τοῦ τελευταίου συνάγομεν ὅτι· *δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν κατ' ἀπείρους τρόπους τρεῖς ποσότητας, ὧν τὸ ἄθροισμα νὰ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ αὐτῶν.*

Οἱ τύποι (10), (11), ἐπιλύουσι τὸ ἑξῆς διπλοῦν ζήτημα· *εὑρεῖν τὸ κεφάλαιον τῶν συνημιτόνων, ἢ τῶν ἡμιτόνων, ν τόξων ἐν προόδῳ ἀριθμητικῇ ὄντων.*

53. Ἐν γένει, ἵνα ἐφαρμόσωμεν τοὺς λογαρίθμους εἰς τοὺς τριγωνομετρικοὺς λογισμούς, ἀπαιτεῖται νὰ ἦναι μονώνυμα, ἀκέραια ἢ κλασματικά, αἱ ἐκθέσεις ἐφ' ὧν πρόκειται νὰ ἐργασθῶμεν. Δείξωμεν τίνι τρόπῳ δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν εἰς μονώνυμον τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα πολλῶν ὅρων.

Ἔστω διώνυμόν τι $\alpha + \beta$, οὗ τινος οἱ ὅροι α καὶ β περιέχουσι γραμμὰς τριγωνομετρικάς. Θέτομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)$. Προσδιορίζομεν γωνίαν τινὰ βοηθητικὴν φ, τοιαύτην ὥστε, $\text{ἐφ}\,\varphi = \frac{\beta}{\alpha}$, καὶ ἔχομεν·

$$\alpha + \beta = \alpha(1 + \text{ἐφ}\varphi) = \alpha\left(1 + \frac{\text{ἡμ}\varphi}{\text{συν}\varphi}\right) = \frac{\alpha}{\text{συν}\varphi}\,(\text{συν}\varphi + \text{ἡμ}\varphi).$$

Ἀλλά,

$$\text{συν}\varphi + \text{ἡμ}\varphi = \text{ἡμ}\,(90^0 - \varphi) + \text{ἡμ}\varphi = 2\,\text{ἡμ}\,45^0\,\text{συν}\,(45^0 - \varphi).$$

Ἄρα· $$\alpha + \beta = \frac{2\alpha\,\text{ἡμ}\,45^0\,\text{συν}\,(45^0 - \varphi)}{\text{συν}\varphi} = \frac{\alpha\sqrt{2}\,\text{συν}\,(45^0 - \varphi)}{\text{συν}\varphi}.$$

Δι' ὁμοίου λογισμοῦ τρέπομεν εἰς μονώνυμον καὶ τὸ διώνυμον $\alpha - \beta$.

Ἔστω ἤδη ἔκφρασίς τις $\alpha - \beta + \gamma - \delta + \ldots\ldots$ περιέχουσα ὁσουςδήποτε ὅρους. Δυνάμεθα, κατὰ τὰ προηγούμενα, νὰ τρέψωμεν δύω τῶν ὅρων τούτων εἰς ἕνα. Ἐν ἑκάστῃ ὁμοίᾳ ἐργασίᾳ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων ἐλαττοῦται κατὰ μονάδα, ὥστε ἐν τέλει καταντήσομεν εἰς ἔκθεσιν μονώνυμον.

Ἐφαρμόσωμεν τοὺς προηγουμένους μετασχηματισμοὺς εἰς τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν $x^2 + \pi x - \varkappa = 0$, ἧς αἱ ῥίζαι

$$x = -\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \varkappa} \quad \text{εἰσὶ πραγματικαί.}$$

Θέτομεν αὐτὰς ὑπὸ τὴν μορφήν,

$$x = \frac{\pi}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\varkappa}{\pi^2}}\right).$$

Ἔστω φ βοηθητική τις γωνία, ὁριζομένη ἐκ τῆς σχέσεως

$$\grave{\varepsilon}\varphi^2\varphi = \frac{4\varkappa}{\pi^2}. \qquad \text{Ἔχομεν·}$$

$$x = \frac{\pi}{2}(-1 \pm \text{τέμ}\varphi) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{-\text{συν}\varphi \pm 1}{\text{συν}\varphi}\right).$$

Εἰ μὲν λάβωμεν τὸ ῥιζικὸν μὲ τὸ σημεῖον $+$, ἕξομεν·

$$x' = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1 - \text{συν}\varphi}{\text{συν}\varphi}\right) = \frac{\pi\,\text{ἡμ}^2\frac{\varphi}{2}}{\text{συν}\varphi},$$

εἰ δὲ λάβωμεν αὐτὸ μὲ τὸ σημεῖον $-$,

$$x'' = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{1 + \text{συν}\varphi}{\text{συν}\varphi}\right) = -\frac{\pi\,\text{συν}^2\frac{\varphi}{2}}{\text{συν}\varphi}.$$

Ἡ ἐξίσωσις $x^2 + \pi x + \varkappa = 0$ δίδει·

$$x = \frac{\pi}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\varkappa}{\pi^2}}\right).$$

Ἵνα ὦσιν αἱ ῥίζαι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, ἀπαιτεῖται νὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν
$$\frac{4\varkappa}{\pi^2} < 1.$$

Θέτομεν $\frac{4\varkappa}{\pi^2} = \text{ἡμ}^2\varphi$, καὶ ἔχομεν $x = \frac{\pi}{2}(-1 \pm \text{συν}\varphi)$·

ὅθεν, $x' = -\pi\,\text{ἡμ}^2\frac{\varphi}{2}$, $x'' = -\pi\,\text{συν}^2\frac{\varphi}{2}$.

Αἱ ἐξισώσεις
$$x^2 - \pi x - \varkappa = 0,$$
$$x^2 - \pi x + \varkappa = 0,$$
δίδουσι διὰ x' καὶ x'' τιμὰς ἴσας μετὰ σημείων ἐναντίων ταῖς ἀνωτέρω εὑρεθείσαις.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΩΝ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ ΤΥΠΩΝ.

54. Παρετηρήσαμεν ὅτι, ἀφοῦ ἐδείξαμεν γεωμετρικῶς τοὺς τύπους ἡμ.$(\tau \pm \tau')$ καὶ συν$(\tau \pm \tau')$, ἐπορίσθημεν τοὺς λοιποὺς διὰ τοῦ λογισμοῦ· ἑπόμενον ἄρα ὅτι, ἀφοῦ ἐδείχθησαν ἀληθεῖς οἱ πρῶτοι διὰ τόξα οἱαδήποτε, οἱ τελευταῖοι ἀναμφιβόλως ἔχουσι τὸν αὐτὸν βαθμὸν γενικότητος· ἐν τούτῳ δὲ κυρίως συνίσταται ὁ οὐσιώδης χαρακτὴρ τῶν ἀναλυτικῶν μεθόδων. Τοὐναντίον, ὅταν μεταχειριζώμεθα γεωμετρικὰς κατασκευάς, ὑπάρχει πάντοτε ὑποψία μὴ αἱ συνέπειαι δὲν ἁρμόζωσιν ἢ εἰς μόνας τὰς περιπτώσεις τὰς ἐπὶ τῶν σχημάτων παρισταμένας.

Δείξωμεν καὶ διὰ τοῦ τρόπου τούτου τὰ κυριώτερα τῶν προλαβόντων ἐξαγομένων· διότι αἱ γεωμετρικαὶ δείξεις ἔχουσι τὸ πλεονέκτημα νὰ καθιστῶσι τὴν ἀλήθειαν ἐπαισθητοτέραν.

55. *Δοθέντων τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου τόξου τινὸς εὑρεῖν τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ διπλασίου τόξου.*

(Σχ. 6) Ἔστω τὸ τόξον ΑΒ $=$ ΒΓ $= \tau$. Ἐκτελοῦμεν τὰς ἐπὶ τοῦ σχήματος κατασκευὰς καὶ ἔχομεν·

$$\text{ἡμ}\tau = \text{ΑΠ},\quad \text{συν}\tau = \text{ΟΠ},\quad \text{ἡμ}\,2\tau = \text{ΓΚ} = 2\text{ΠΘ},$$
$$\text{συν}\,2\tau = \text{ΟΚ} = \text{ΟΘ} - \text{ΚΘ} = \text{ΟΘ} - \text{ΑΘ}.$$

Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΠΑ δίδει·

$$\text{ΠΘ} = \frac{\text{ΑΠ} \times \text{ΟΠ}}{\text{ΟΑ}},\qquad \text{ΟΘ} = \frac{\overline{\text{ΟΠ}}^2}{\text{ΑΟ}},\qquad \text{ΑΘ} = \frac{\overline{\text{ΑΠ}}^2}{\text{ΟΑ}}.$$

Θέτομεν τῶν διαφόρων γραμμῶν τὰς τριγωνομετρικὰς ὀνομασίας, ὑποθέτομεν τὴν ἀκτῖνα $ΟΑ = 1$, καὶ λαμβάνομεν τοὺς ἐν ἐδαφίῳ 36 εὑρεθέντας τύπους (1), (2).

56. *Δοθέντος* συντ, *εὑρεῖν* ἡμ. $\frac{1}{2}\tau$ *καὶ* συν $\frac{1}{2}\tau$.

(Σχ. 7) Λαμβάνομεν τὸ τόξον $ΑΓ = \tau$, ἄγομεν, ΓΠ κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ, τὰς χορδὰς ΑΓ, ΒΓ, καὶ τὰς ἐπὶ τὸ μέσον τούτων καθέτους ἀκτῖνας ΟΔ καὶ ΟΕ. Ὑποθέτομεν $ΟΑ = 1$, καὶ ἔχομεν·

$$ΟΠ = \text{συν}\tau, \quad ΑΠ = 1 - \text{συν}\tau, \quad ΒΠ = 1 + \text{συν}\tau,$$
$$ΑΓ = 2\,\text{ἡμ}\tfrac{1}{2}\tau, \quad ΒΓ = 2\,\text{συν}\tfrac{1}{2}\tau.$$

Ἐκ γνωστοῦ γεωμετρικοῦ θεωρήματος ἔχομεν·

$$\overline{ΑΓ}^2 = ΑΒ \times ΑΠ, \quad \text{ἢ} \quad 4\,\text{ἡμ}^2\tfrac{1}{2}\tau = 2\,(1 - \text{συν}\tau),$$
$$\overline{ΒΓ}^2 = ΑΒ \times ΒΠ, \quad \text{ἢ} \quad 4\,\text{συν}^2\tfrac{1}{2}\tau = 2\,(1 + \text{συν}\tau).$$

Ἐντεῦθεν λαμβάνομεν τοὺς ἐν ἐδαφίῳ 38 τύπους (8).

57. *Δοθέντων τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου τόξου τινός, εὑρεῖν τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ τριπλασίου τόξου.*

(Σχ. 8) Ἔστω τὸ τόξον $ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = \tau$, Τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΟΔ καὶ τὸ ὅμοιον αὐτῷ ΒΔΖ δίδουσι, $ΒΖ : ΒΔ :: ΒΔ : ΟΒ$, ὅθεν, $ΒΖ = 4\,\text{ἡμ}^2\tau$. Ἄγομεν ΠΗ παράλληλον τῇ ΒΖ. Ἔχομεν·

$$ΠΗ = ΒΖ = 4\,\text{ἡμ}^2\tau.$$

Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΚΗΠ, ΟΒΠ, δίδουσι·

$$ΚΗ : ΒΠ :: ΠΗ : ΟΒ, \quad \text{ὅθεν}, \quad ΚΗ = 4\,\text{ἡμ}^3\tau,$$
$$ΠΚ : ΟΠ :: ΠΗ : ΟΒ, \quad \text{»} \quad ΠΚ = 4\,\text{ἡμ}^2\tau\;\text{συν}\tau.$$

Ἀλλά·

$$\text{ἡμ}3\tau = ΔΚ = ΔΖ + ΖΗ - ΚΗ = ΒΔ + ΒΠ - ΚΗ = 3\,\text{ἡμ}\tau - ΚΗ,$$
$$\text{συν}3\tau = ΟΚ = ΟΠ - ΠΚ = \text{συν}\tau - ΠΚ.$$

Ἀντεισάγοντες τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν ΚΗ καὶ ΠΚ, λαμβάνομεν τοὺς ἐν ἐδαφίῳ 37 τύπους (3) καὶ (4).

58. *Δοθεισῶν τῶν ἐφαπτομένων δύω τόξων, εὑρεῖν τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἀθροίσματος καὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.*

(Σχ. 9) Ἔστωσαν, $ΟΑ = 1$, $ΑΒ = \tau$, $ΓΒ = \tau'$.

Εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων ΟΑ, ΟΒ, ἄγομεν τὰς ἐφαπτομένας ΑΤ καὶ ΒΣ, ἃς περατοῦμεν ὡς παριστᾷ τὸ σχῆμα, καὶ τὴν ΣΘ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ.

Κατὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος, δίδονται $\mathrm{BP} = \text{ἐφ}\tau$, $\mathrm{B\Sigma} = \text{ἐφ}\tau'$, καὶ ζητεῖται $\mathrm{AT} = \text{ἐφ}\,(\tau + \tau')$.

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΑΤ, ΟΘΣ, ἔχομεν·

$$\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{\Sigma\Theta}}{\mathrm{O\Theta}}, \quad \text{ὅθεν} \quad \text{ἐφ}\,(\tau + \tau') = \frac{\mathrm{\Sigma\Theta}}{\mathrm{O\Theta}}.$$

Καὶ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΣΘΡ καὶ ΟΒΡ,

$$\mathrm{\Sigma\Theta} = \frac{\mathrm{OB} \times \mathrm{\Sigma P}}{\mathrm{OP}} = \frac{\text{ἐφ}\tau + \text{ἐφ}\tau'}{\mathrm{OP}}.$$

Ἵνα εὕρωμεν ΟΘ, παρατηροῦμεν ὅτι, κατὰ γνωστὸν θεώρημα ἔχομεν·

$$\overline{\mathrm{\Sigma P}}^2 = \overline{\mathrm{OP}}^2 + \overline{\mathrm{O\Sigma}}^2 - 2\mathrm{OP} \times \mathrm{O\Theta}.$$

Ἀλλά,

$$\overline{\mathrm{\Sigma P}}^2 = (\mathrm{BP} + \mathrm{B\Sigma})^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{B\Sigma}}^2 + 2\mathrm{B\Sigma} \times \mathrm{BP},$$

λοιπόν,

$$\overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{B\Sigma}}^2 + 2\mathrm{BP} \times \mathrm{B\Sigma} = \overline{\mathrm{OP}}^2 + \overline{\mathrm{O\Sigma}}^2 - 2\mathrm{OP} \times \mathrm{O\Theta}.$$

Ἐντεῦθεν λαμβάνομεν,

$$2\mathrm{OP} \times \mathrm{O\Theta} = \overline{\mathrm{OP}}^2 - \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{O\Sigma}}^2 - \overline{\mathrm{B\Sigma}}^2 - 2\mathrm{BP} \times \mathrm{B\Sigma}$$

$$= 2\overline{\mathrm{OB}}^2 - 2\mathrm{BP} \times \mathrm{B\Sigma} = 2 - 2\,\text{ἐφ}\tau\,\text{ἐφ}\tau'.$$

Ἑπομένως $$\mathrm{O\Theta} = \frac{1 - \text{ἐφ}\tau\,\text{ἐφ}\tau'}{\mathrm{OP}}.$$

Θέτομεν ἤδη εἰς τὴν τιμὴν τῆς $\text{ἐφ}\,(\tau + \tau')$ τὰς τιμὰς τῶν ΣΘ, ΟΘ, καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἐν ἐδαφίῳ 42 τύπον (1).

Ὁμοιοτρόπως λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τῆς $\text{ἐφ}\,(\tau - \tau')$. Τότε (Σχ. 10) τὸ τόξον $\mathrm{A\Gamma} = \tau - \tau'$. Οἱ αὐτοὶ λογισμοὶ ἐκτελοῦνται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, πλὴν ὅτι ἀλλάσσει τὸ σημεῖον τοῦ δευτέρου ὅρου τῶν ἀριθμητῶν τῶν ΣΘ καὶ ΟΘ, διότι ΡΣ ἰσοῦται $\text{ἐφ}\tau - \text{ἐφ}\tau'$.

59. *Δεικτέον γεωμετρικῶς τοὺς τύπους·*

$$\text{ἡμ}\sigma + \text{ἡμ}\varkappa = 2\,\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}(\sigma + \varkappa)\,\text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\sigma - \varkappa),$$

$$\text{ἡμ}\sigma - \text{ἡμ}\varkappa = 2\text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\sigma + \varkappa)\,\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}(\sigma - \varkappa).$$

(Σχ. 11) Λαμβάνομεν ΑΒ = σ καὶ ΑΓ = κ· ἄγομεν τὴν χορδὴν ΒΓ καὶ τὴν ἐπὶ τὸ μέσον αὐτῆς Ε κάθετον ἀκτῖνα ΟΔ. Ἄγομεν ἐπὶ τὴν ΟΑ τὰς καθέτους ΒΠ, ΓΚ, ΔΡ, ΕΖ, καὶ τὴν ΕΗ παράλληλον τῇ ΟΑ. Ἔχομεν·

$$\text{ΒΠ} = \text{ἡμ}\sigma,\quad \text{ΓΚ} = \text{ἡμ}\varkappa,\quad \text{ΕΖ} = \frac{\text{ἡμ}\sigma + \text{ἡμ}\varkappa}{2},\quad \text{ΒΗ} = \frac{\text{ἡμ}\sigma - \text{ἡμ}\varkappa}{2},$$

$$\text{ΑΔ} = \tfrac{1}{2}(\sigma + \varkappa),\quad \text{ΔΡ} = \text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}(\sigma + \varkappa),\quad \text{ΟΡ} = \text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\sigma + \varkappa),$$

$$\text{ΒΔ} = \tfrac{1}{2}(\sigma - \varkappa),\quad \text{ΒΕ} = \text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}(\sigma - \varkappa),\quad \text{ΟΕ} = \text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\sigma - \varkappa).$$

Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΕΖ, ΟΔΡ, ΒΗΕ, δίδουσι·

$$\text{ΕΖ} : \text{ΔΡ} :: \text{ΟΕ} : \text{ΟΔ},\qquad \text{ΒΗ} : \text{ΟΡ} :: \text{ΒΕ} : \text{ΟΔ},$$

ὅθεν,
$$\text{ΕΖ} = \frac{\text{ΔΡ} \times \text{ΟΕ}}{\text{ΟΔ}},\qquad \text{ΒΗ} = \frac{\text{ΟΡ} \times \text{ΒΕ}}{\text{ΟΔ}}.$$

Θέτομεν ἀντὶ τῶν γραμμῶν τὰς τιμὰς αὐτῶν, διπλασιάζομεν τὰς ἐκφράσεις ταύτας, ποιοῦμεν ΟΔ = 1 καὶ λαμβάνομεν τοὺς ζητουμένους τύπους.

Τὰ αὐτὰ τρίγωνα δίδουσι καὶ τὰς τιμὰς τῶν συνσ + συνκ, καὶ συνκ — συνσ.

60. *Δεικτέον γεωμετρικῶς τὸ ἐν ἐδαφίῳ 49 θεώρημα.*

(Σχ. 11) Ἐκτελοῦμεν τὴν προηγουμένην κατασκευὴν καὶ ἄγομεν εἰς τὸ σημεῖον Δ τὴν ἐφαπτομένην ΣΤ, ἣν περατοῦμεν εἰς τὰ σημεῖα Σ καὶ Τ ἐπὶ τῶν ἀκτίνων ΟΑ καὶ ΟΒ προαγομένων. Ἐπεκτείνομεν ΒΓ μέχρι Θ. Ἕνεκα τῶν παραλλήλων ἔχομεν·

$$\frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΒΗ}} = \frac{\text{ΕΘ}}{\text{ΕΒ}} = \frac{\text{ΔΣ}}{\text{ΔΤ}}.$$

Ἀλλά·

$$2\text{ΕΖ} = \text{ἡμ}\sigma + \text{ἡμ}\varkappa,\qquad 2\text{ΒΗ} = \text{ἡμ}\sigma - \text{ἡμ}\varkappa,$$

$$\text{ΔΣ} = \text{ἐφ}\,\text{ΑΔ} = \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(\sigma + \varkappa),\qquad \text{ΔΤ} = \text{ἐφ}\,\text{ΔΒ} = \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(\sigma - \varkappa).$$

Ἐπομένως·
$$\frac{\text{ἡμ}\sigma + \text{ἡμ}\varkappa}{\text{ἡμ}\sigma - \text{ἡμ}\varkappa} = \frac{\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(\sigma + \varkappa)}{\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(\sigma - \varkappa)}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΠΙΝΑΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ.

61. Εἴδομεν ὅτι ἐν τοῖς λογισμοῖς πρέπει νὰ εἰσάγωμεν ἀντὶ τῶν γωνιῶν, ἢ τῶν τόξων, τὰς τριγωνομετρικὰς γραμμὰς αὐτῶν. Πρὸς τοῦτο ἀπαιτεῖται, δοθέντος τόξου τινὸς, νὰ προσδιορίζωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς ἐκφράζοντας τοὺς λόγους τούτους, καὶ ἀντιςρόφως. Τὸ εὐκολώτερον μέσον δι' οὗ ἐπιτυγχάνομεν τὸν σκοπὸν τοῦτον εἶναι, νὰ κατασκευάσωμεν πίνακας ἐν οἷς οἱ περὶ ὧν ὁ λόγος ἀριθμοὶ νὰ ὑπάρχωσι γεγραμμένοι πλησίον τῶν ἀντιστοιχούντων τόξων. Πρόκειται λοιπὸν νὰ δείξωμεν τίνι τρόπῳ λογίζονται αἱ τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ ὅλων τῶν τόξων, προχωρούντων κατὰ $10''$ τῆς ἀρχαίας ὑποδιαιρέσεως τῆς περιφερείας. Τοιαύτη ἐστὶν ἡ τάξις καθ' ἣν τὰ τόξα προοδεύουσιν ἐν τοῖς πίναξι τοῦ ΚΑΛΛΕΤΟΥ.

Περὶ τῆς νέας ὑποδιαιρέσεως κρίνομεν περιττὸν νὰ ὁμιλήσωμεν, διότι ἡ αὐτὴ μέθοδος ἐφαρμόζεται καὶ εἰς ταύτην.

Ζητήσωμεν πρῶτον τὸ ἡμίτονον τοῦ $10''$ τόξου. Γνωρίζομεν ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι·

$$\Pi = 3,\ 14159\ 26535\ 89793\ldots\ldots$$

Ὅταν ἡ ἀκτὶς ὑποτίθηται ἴση τῇ μονάδι, ὁ ἀριθμὸς οὗτος παριστᾷ τὴν ἡμιπεριφέρειαν. Ἐπειδὴ δὲ $180^0 = 648000''$, ἔχομεν εἰς μέρη τῆς ἀκτῖνος·

$$(1)\qquad \text{τόξ. } 10'' = \frac{\Pi}{64800} = 0,00004\ 84813\ 68110\ldots\ldots$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἐλάχιστόν τι τόξον ἰσοῦται ὡς ἔγγιστα τῷ ἡμιτόνῳ αὐτοῦ, ὁ ἀνωτέρω ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τιμὴ παραπλησία τοῦ ἡμιτόνου τοῦ $10''$ τόξου.

Ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου ὅμως ἀπαιτοῦνται ἀναπτύξεις τινὲς, ὧν προτάσσομεν τὴν δεῖξιν τῶν ἑξῆς δύω προτάσεων.

62. *Ἐν τῷ πρώτῳ τεταρτοκυκλίῳ, πᾶν τόξον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμιτόνου αὐτοῦ καὶ ἔλαττον τῆς ἐφαπτομένης αὐτοῦ.*

(Σχ. 12) Ἔστωσαν, ΑΠ τὸ ἡμίτονον καὶ ΑΤ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου ΑΒ. Στρέφομεν τὸ σχῆμα περὶ τὴν ΟΠ ἕως οὗ τὸ σημεῖον Α ταὐτισθῇ τῷ Γ, καὶ ἔχομεν *τόξον* ΑΓ $>$ *χορδῆς* ΑΓ, ἑπομένως *τόξον* ΑΒ $>$ ΑΠ. Λοιπόν, τὸ τόξον εἶναι μεῖζον τοῦ ἡμιτόνου αὐτοῦ.

Ἔχομεν ἐπίσης *τόξον* ΑΓ $<$ ΑΤ $+$ ΓΤ, ἢ *τόξον* ΑΒ $<$ ΑΤ. Ἄρα, τὸ τόξον εἶναι ἔλαττον τῆς ἐφαπτομένης αὐτοῦ.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, ἐὰν $\dfrac{\text{ἐφτ}}{\text{ἡμτ}}$ μικρὸν διαφέρῃ τῆς μονάδος, ὁ λόγος $\dfrac{\tau}{\text{ἡμτ}}$ θέλει διαφέρει ταύτης ἔτι ὀλιγώτερον.

63. *Καθ' ὅσον τόξον τι, ἔλαττον* 90^0, *ἐλαττοῦται, ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὸ ἡμίτονόν του ἐλαττοῦται ἐπίσης· τὸ ὅριον δὲ τοῦ λόγου τούτου ἐστὶν ἡ μονάς.*

Πρόκειται πρῶτον νὰ δείξωμεν ὅτι·

$$\frac{\tau+\tau'}{\text{ἡμ}\,(\tau+\tau')} > \frac{\tau}{\text{ἡμ}\tau}.$$

Ἡ ἀνισότης αὕτη τρέπεται εἰς τὴν ἑξῆς·

$$(\tau+\tau')\,\text{ἡμ}\tau - \tau\,\text{ἡμ}\,(\tau+\tau') > 0,$$

ἢ εἰς ταύτην,

$$(\tau+\tau')\,\text{ἡμ}\tau - \tau\,(\text{ἡμ}\tau\,\text{συν}\tau' + \text{ἡμ}\tau'\,\text{συν}\tau) > 0,$$

ἣν γράφομεν οὕτω,

$$\tau\,\text{ἡμ}\tau\,(1-\text{συν}\tau') + \tau'\,\text{ἡμ}\tau - \tau\,\text{ἡμ}\,\tau'\,\text{συν}\tau > 0.$$

Ἀλλ' ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι θετικός· ἄρα μένει νὰ δείξωμεν τὴν ὀρθότητα τῆς ἀνισότητος·

$$\tau'\,\text{ἡμ}\tau - \tau\,\text{ἡμ}\tau'\,\text{συν}\tau > 0.$$

Διαιροῦμεν διὰ συντ, ὅπερ εἶναι θετικόν, καὶ ἔχομεν·

$$\tau'\,\text{ἐφ}\tau - \tau\,\text{ἡμ}\tau' > 0,$$

ἀνισότητα ἀκριβῆ, διότι $\tau' > \text{ἡμ}\tau'$ καὶ $\text{ἐφ}\tau > \tau$.

Μεταβῶμεν ἤδη εἰς τὴν δεῖξιν τοῦ δευτέρου μέρους τῆς προκειμένης προτάσεως.

Ὁ τύπος $\text{ἐφ}\tau = \dfrac{\text{ἡμ}\tau}{\text{συν}\tau}$, δίδει, $\dfrac{\text{ἐφ}\tau}{\text{ἡμ}\tau} = \dfrac{1}{\text{συν}\tau}$.

Ἐλαττουμένου τοῦ τόξου τ, τὸ συνημίτονον αὐξάνει, δυνάμενον προσεγγίσαι ὅσον θέλομεν τὴν μονάδα· λοιπὸν, ὁ λόγος $\dfrac{1}{\text{συν}\tau}$, ἢ ὁ ἴσος αὐτῷ $\dfrac{\text{ἐφ}\tau}{\text{ἡμ}\tau}$, ἐλαττοῦται βαθμηδὸν καὶ ἔχει ὅριον τὴν μονάδα.

Ἐπειδὴ τὸ τόξον εἶναι μεῖζον τοῦ ἡμιτόνου καὶ ἔλαττον τῆς ἐφαπτομένης, ὁ λόγος $\dfrac{\tau}{\text{ἡμ}\tau}$ δὲν γίνεται ποτὲ οὔτε ἐλάσσων τῆς μονάδος, οὔτε μείζων τοῦ $\dfrac{\text{ἐφ}\tau}{\text{ἡμ}\tau}$. ἐπειδὴ δὲ ὁ τελευταῖος οὗτος λόγος δύναται προσεγγίσαι ὅσον θέλομεν τὴν μονάδα, τὸ αὐτὸ ὑπάρχει καὶ διὰ τὸν πρῶτον. Τοῦτο ἐπρόκειτο νὰ δείξωμεν καὶ διὰ τοῦτο λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ τόξου $10''$ ἀντ' ἐκείνης τοῦ ἡμ $10''$.

64. Ὁρίσωμεν ἤδη τὸν βαθμὸν τῆς προσεγγίσεως, ἵνα παραλείψωμεν τὰ περιττὰ δεκαδικά. Ἔχομεν·

$$\text{ἡμ}\tau = 2\text{ἡμ}\tfrac{1}{2}\tau\ \text{συν}\tfrac{1}{2}\tau.$$

Ἀλλ' ἡ ἀνισότης $\text{ἐφ}\tfrac{1}{2}\tau > \tfrac{1}{2}\tau$, ἢ $\dfrac{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\tau}{\text{συν}\,\frac{1}{2}\tau} > \tfrac{1}{2}\tau$,

δίδει $2\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\tau > \tau\ \text{συν}\,\tfrac{1}{2}\tau$· λοιπὸν, $\text{ἡμ}\tau > \tau\ \text{συν}^2\tfrac{1}{2}\tau$.

Ἀλλά·

$\text{συν}^2\tfrac{1}{2}\tau = 1 - \text{ἡμ}^2\tfrac{1}{2}\tau$, καὶ ἑπομένως $\text{συν}^2\tfrac{1}{2}\tau > 1 - (\tfrac{1}{2}\tau)^2$.

Λοιπὸν, $\text{ἡμ}\tau > \tau - \dfrac{\tau^3}{4}$, ἢ $\dfrac{\tau^3}{4} > \tau - \text{ἡμ}\tau$.

Ἄρα, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ τόξου καὶ τοῦ ἡμιτόνου, ἐλαττουμένου τοῦ τόξου, ἐλαττοῦται, εἶναι δὲ ἐλάσσων τοῦ τεταρτημορίου τοῦ κύβου τοῦ τόξου.

Ἐφαρμόσωμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἰς τὸ $10''$ τόξον.

Αὐξάνοντες κατὰ μονάδα τὸ πέμπτον δεκαδικὸν τῆς τιμῆς (I) [61], ἔχομεν, τόξον $10'' < 0{,}00005$, ἄρα·

$$\tfrac{1}{4}\,(\text{τόξον } 10'')^3 < 0{,}00000\ 00000\ 00032,$$

$$\text{καὶ}\qquad \text{ἡμ } 10'' > \left\{\begin{array}{l} 0{,}00004\ 84813\ 68110\ \ldots \\ -\ 0{,}00000\ 00000\ 00032, \end{array}\right.$$

$$\text{ἢ}\qquad \text{ἡμ } 10'' > 0{,}00004\ 84813\ 68078\ \ldots$$

Βλέπομεν ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ ἡμιτόνου τούτου ἀπὸ τοῦ $10''$ τόξου ἄρχεται ἀπὸ τοῦ 13^ου^ δεκαδικοῦ, καὶ μάλιστα, ἐν τῷ τόξῳ, τὸ 13^ον^ τοῦτο δεκαδικὸν μίαν μόνην μονάδα ἔχει περισσότερον.

Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι λαμβάνοντες·

$$\text{ἡμ } 10'' = 0{,}00004\ 84813\ 681,$$

εἴμεθα βέβαιοι ὅτι τὸ σφάλμα ἔσεται ἔλαττον μιᾶς μονάδος τῆς 13^ης^ τάξεως. Φανερὸν ὄντως, ὅτι ἡ προηγουμένη τιμὴ καθίσταται πολὺ μικρὰ ἐὰν ἀφαιρέσωμεν μίαν μονάδα ἀπὸ τοῦ τελευταίου ψηφίου αὐτῆς, καὶ τὸ ἐναντίον, ἐὰν προσθέσωμεν μίαν μονάδα, διότι τότε θέλει ὑπερβῆ τὸ τόξον.

Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ ἡμ $10''$ εἰς τὸν τύπον $\sqrt{1 - \text{ἡμ}^2\, 10''}$, λαμβάνομεν·

$$\text{συν } 10'' = 0{,}99999\ 99988\ 248.$$

Μετὰ ταῦτα, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν διαδοχικῶς τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα τῶν $20''$, $30''$, $40''$, ... μέχρι 45^0, διὰ τῶν γνωστῶν τύπων.

65. Οἱ λογισμοὶ καθίστανται ἁπλούστεροι διὰ τοῦ ἑξῆς τρόπου. Οἱ ἐν ἐδαφίῳ 47 τύποι δίδουσι·

$$\text{ἡμ}\,(\tau + \tau') = 2\text{συν}\tau'\ \text{ἡμ}\tau - \text{ἡμ}\,(\tau - \tau'),$$
$$\text{συν}\,(\tau + \tau') = 2\text{συν}\tau'\ \text{συν}\tau - \text{συν}\,(\tau - \tau').$$

Θεωρήσωμεν τὰ τόξα $\tau - \tau'$, τ, $\tau + \tau'$, ὡς τρεῖς ὅρους διαδοχικοὺς ἀριθμητικῆς τινος προόδου ἧς τ' εἶναι ὁ λόγος· καλοῦμεν κ, κ', κ'', τοὺς τρεῖς τούτους ὅρους καὶ ἔχομεν τοὺς τύπους·

$$(*)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{ἡμ}\kappa'' = 2\text{συν}\tau'\ \text{ἡμ}\kappa' - \text{ἡμ}\kappa, \\ \text{συν}\kappa'' = 2\text{συν}\tau'\ \text{συν}\kappa' - \text{συν}\kappa. \end{array}\right.$$

(*) Οἱ τύποι οὗτοί εἰσι τοῦ Θωμᾶ Σίμψωνος, Γεωμέτρου Ἄγγλου.

Ἐκ τοῦ πρώτου δῆλον ὅτι, ἀφοῦ λογισθῶσι δύω διαδοχικὰ ἡμίτονα, τὸ ἀκόλουθον λογίζεται πολλαπλασιαζομένου τοῦ μὲν τελευταίου ἐπὶ 2 συντ΄, τοῦ δὲ προτελευταίου ἐπὶ —1 καὶ προσιθεμένων τῶν γινομένων. Ὁ αὐτὸς κανὼν ὑπάρχει καὶ διὰ τὰ συνημίτονα.

Ἑπομένως, ἵνα λάβωμεν τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα τόξων προχωρούντων κατὰ 10″, ποιοῦμεν $\tau' = 10''$, καλοῦμεν α καὶ β τὰς γνωστὰς τιμὰς τοῦ ἡμ 10″ καὶ τοῦ συν 10″, καὶ ἔχομεν·

$\text{ἡμ}\ 0'' = 0,$	$\text{συν}\ 0'' = 1,$
$\text{ἡμ}\ 10'' = \alpha,$	$\text{συν}\ 10'' = \beta,$
$\text{ἡμ}\ 20'' = 2\beta\ \text{ἡμ}\ 10'',$	$\text{συν}\ 20'' = 2\beta\ \text{συν}\ 10'' - 1,$
$\text{ἡμ}\ 30'' = 2\beta\ \text{ἡμ}20'' - \text{ἡμ}10'',$	$\text{συν}\ 30'' = 2\beta\ \text{συν}\ 20'' - \text{συν}10'',$
$\text{ἡμ}\ 40'' = 2\beta\ \text{ἡμ}\ 30'' - \text{ἡμ}20'',$	$\text{συν}\ 40'' = 2\beta\ \text{συν}\ 30'' - \text{συν}20'',$
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .

Οἱ λογισμοὶ συντέμνονται ἔτι μᾶλλον ἕνεκα τῆς μικρᾶς διαφορᾶς ἀπὸ 2 μονάδων τοῦ παράγοντος 2β. Καλοῦμεν k τὴν διαφορὰν ταύτην καὶ ἔχομεν $k = 0,00000\ 00023\ 504$ καὶ $2\beta = 2 - k$. Ἑπομένως ἡ τιμὴ τοῦ ἡμκ″ γίνεται,

$$\text{ἡμ}\kappa'' = 2\text{ἡμ}\kappa' - k\ \text{ἡμ}\kappa' - \text{ἡμ}\kappa,$$

ὅθεν

$$\text{ἡμ}\kappa'' - \text{ἡμ}\kappa' = (\text{ἡμ}\kappa' - \text{ἡμ}\kappa) - k\ \text{ἡμ}\kappa'.$$

Ἀφ' οὗ λογίσωμεν τὴν διαφορὰν ἡμκ″ — ἡμκ′, προσθέτομεν αὐτὴν εἰς τὸ ἡμκ′ καὶ λαμβάνομεν τὸ ἡμκ″. Ἀλλά, κατὰ τὸν τελευταῖον τύπον, ἡ διαφορὰ αὕτη ἰσοῦται τῇ ἡμκ′— ἡμκ, ἣν ἐλογίσαμεν ἤδη πρὶν φθάσωμεν εἰς τὸ τόξον κ″, πλὴν τοῦ γινομένου kἡμκ′. Μόνη λοιπὸν ἐπίπονος ἐργασία παρουσιαζομένη ἐν ἑκάστῳ ἡμιτόνῳ εἶναι ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ τελευταίου ἡμιτόνου ἐπὶ τὴν σταθερὰν k. Ἀλλὰ καὶ ταύτην τὴν ἐργασίαν καθιστῶμεν εὔκολον, ἐὰν σχηματίσωμεν προηγουμένως τὰ γινόμενα τοῦ 23504 ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, ... μέχρις 9. Διὰ τοῦ μέσου τούτου θέλομεν εὑρίσκει ἕτοιμα πρὸς ἄθροισιν τὰ μερικὰ γινόμενα ἐξ ὧν συντίθεται ἕκαστον γινόμενον ὡς τὸ k ἡμκ′.

Λογισμοὶ ὅμοιοι γίνονται καὶ διὰ τὰ συνημίτονα.

66. Ἐπειδὴ μετὰ τοσοῦτον ἐκτεταμένην σειρὰν ἐργασιῶν τὰ σφάλματα πιθανὸν νὰ πολλαπλασιασθῶσιν, ἐννοοῦμεν τὸ ἀδύνατον τοῦ νὰ διατηρήσωμεν δεκατρία δεκαδικὰ ἀκριβῆ μέχρι τέλους. Ἵνα ὁρίσωμεν τὸν βαθμὸν ἀκριβείας εἰς ὃν πρέπει νὰ στηριχθῶμεν, ζητήσομεν μετ' οὐ πολὺ [69] διὰ μεθόδου διδούσης ἀκριβῆ προσέγγισιν, τὰς τιμὰς πολλῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων· τὰ κοινὰ δὲ δεκαδικὰ ταῖς διὰ τῶν δύω διαφόρων μεθόδων εὑρεθησομέναις τιμαῖς, δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἀκριβῆ ἐν τοῖς ἐμμέσοις ἐξαγομένοις.

Ἐπιτυγχάνομεν ἔτι μείζονα προσέγγισιν ἐκλέγοντες ὡς σημεῖον ἀναχωρήσεως ἓν τόξον ἔλαττον $10''$, ὡς π. χ. τὸ $1''$, καὶ ἐπαναλαμβάνοντες τοὺς αὐτοὺς λογισμούς.

67. Ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς ἀσυγκρίτως συμφερώτερον εἶναι νὰ ἔχωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἢ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς. Ἕνεκα τούτου οἱ πίνακες δίδουσιν ἀμέσως τοὺς λογαρίθμους τούτους. Ἀλλ' ἐὰν διετηρεῖτο ἡ ὑπόθεσις τῆς ἀκτῖνος $= 1$, τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα, ὡς κλάσματα, ἤθελον ἔχει λογαρίθμους ἀρνητικούς. Ἵνα καταστήσωσιν αὐτοὺς θετικοὺς ὑπέθεσαν τὴν ἀκτῖνα $\rho = 10^{10}$, ἤτοι διῄρεσαν αὐτὴν εἰς 10 000 000 000 μέρη ἴσα. Τότε ὁ λογάριθμος ἡμιτόνου ἢ συνημιτόνου τινὸς δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι ἀρνητικός, εἰμὴ διὰ τόξον τοσοῦτον ὀλίγον διαφέρον τοῦ 0 ἢ τῶν 90^0, ὥστε ἡ διαφορὰ νὰ θεωρῆται ὡς ἀποῤῥιπτέα. (*)

Εὐκόλως ὅμως μεταφέρομεν τὰ ἐξαγόμενα τῆς πρώτης ὑποθέσεως εἰς τὴν δευτέραν. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν αὐτὰ ἐπὶ 10^{10}, ἤτοι προσθέτομεν 10 μονάδας εἰς τοὺς λογαρίθμους αὐτῶν.

68. Λογισθέντων τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων, οἱ λογάριθμοι τῶν ἐφαπτομένων προσδιορίζονται διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου $\text{ἐφ}\tau = \dfrac{\rho\,\text{ἡμ}\tau}{\text{συν}\tau}$, διδόντος·

$$\text{λογ ἐφ}\tau = \text{λογ ἡμ}\tau + \overline{10 - \text{λογ συν}\tau}\,.$$

(*) Ὅταν ἡ ἀκτὶς τῶν πινάκων ἰσοῦται 10^{10}, ηὑξεύρομεν ὅτι·

$$\text{ἡμ } 10'' > 484813,68078 \;.\;.\;.\;.\;.\; [61]$$

Καλοῦμεν $\tau = \text{τόξ ἡμ } 1$. Κατὰ ἐδάφιον 63 ἔχομεν·

$$\frac{\tau}{1} < \frac{\text{τόξ } 10''}{\text{ἡμ } 10''}, \quad \text{καὶ ἔτι μᾶλλον} \quad \tau < \frac{\text{τόξ } 10''}{100000}.$$

Λοιπὸν, «ἐὰν ὁ λογάριθμος ἡμιτόνου τινὸς ἦναι ἀρνητικὸς, ὅταν $\rho = 10^{10}$, τὸ ἀντιστοιχοῦν τόξον ἔσεται ἔλαττον ἑκατοστοῦ χιλιοστοῦ τοῦ $10''$ τόξου.»

Ἤτοι, ὁ λογάριθμος τῆς ἐφαπτομένης ἰσοῦται τῷ λογαρίθμῳ τοῦ ἡμιτόνου, σὺν τῷ ἀριθμητικῷ συμπληρώματι τοῦ λογαρίθμου τοῦ συνημιτόνου.

Τοὺς λογαρίθμους τῶν συνεφαπτομένων λαμβάνομεν διὰ τῆς σχέσεως ἐφτ συνεφτ$=\rho^2$, ἐξ ἧς λογ συνεφτ $= 10 + \overline{10 - \text{λογ ἐφτ}}$.

Πίνακές τινες δὲν περιέχουσι τὰς συνεφαπτομένας· ἡ ἀναπλήρωσις ὅμως αὐτῶν εἶναι εὔκολος, διότι *ἀρκεῖ νὰ προσθέτωμεν* 10 *μονάδας εἰς τὸ ἀριθμητικὸν συμπλήρωμα τοῦ λογαρίθμου τῆς ἐφαπτομένης.*

Οἱ πίνακες ποσῶς δὲν κάμνουσι μνείαν τῶν τεμνουσῶν καὶ τῶν συνδιατεμνουσῶν, διότι οἱ λογάριθμοι αὐτῶν λογίζονται εὐκόλως διὰ τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων.

Οἱ πίνακες δὲν προχωροῦσι πέραν τῶν 45°. Διὰ τόξα μείζονα, λαμβάνομεν τὰ ἡμίτονα καὶ τὰς ἐφαπτομένας διὰ τῶν συνημιτόνων καὶ τῶν συνεφαπτομένων, καὶ τ' ἀνάπαλιν· π. χ. ὅταν $\tau > 45^\circ$, ἔχομεν ἡμτ $=$ συν $(90^\circ - \tau)$. Ἡ διάταξις μάλιστα τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων ἀπαλλάττει τῆς εὑρέσεως τοῦ συμπληρώματος τούτου.

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΗΜΙΤΟΝΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ ΤΟΞΩΝ ΠΡΟΧΩΡΟΥΝΤΩΝ ΚΑΤΑ 9°, ΠΡΟΣ ΕΞΑΚΡΙΒΩΣΙΝ ΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ.

69. Ἔστω, ἡμ $18^\circ = x$· $2x$ εἶναι ἡ χορδὴ τοῦ 36° τόξου, ἤτοι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου. Ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $1 : 2x :: 2x : 1 - 2x$, ἐξ ἧς, $x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$·

Ἐπιλύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, παραλείπομεν τὴν ἀρνητικὴν τιμὴν τῆς x καὶ λαμβάνομεν·

$$x = \text{ἡμ}\ 18^\circ = \text{συν}\ 72^\circ = \tfrac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}).$$

Διὰ τῆς τιμῆς ταύτης εὑρίσκομεν·

$$\sqrt{1 - x^2} = \text{συν}\ 18^\circ = \text{ἡμ}\ 72^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Θέτομεν τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ ἡμ 18° καὶ τοῦ συν 18° ἀντὶ τοῦ ἡμτ καὶ τοῦ συντ εἰς τοὺς ἐν ἐδαφίῳ 36 τύπους (1), (2), καὶ λαμβάνομεν·

$$\text{ἡμ}\ 36^\circ = \text{συν}\ 54^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

$$\text{συν}\ 36^\circ = \text{ἡμ}\ 54^\circ = \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{5}).$$

Θέτομεν τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ ἡμ 18° εἰς τοὺς ἐν χωρίῳ 39 τύπους (9), (10), καὶ ἔχομεν·

$$\text{ἡμ}\ 9^{\circ} = \text{συν}\ 81^{\circ} = \tfrac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}.$$

$$\text{συν}\ 9^{\circ} = \text{ἡμ}\ 81^{\circ} = \tfrac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}.$$

Τέλος, ἐὰν εἰς τοὺς αὐτοὺς τύπους θέσωμεν ἀντὶ ἡμτ τὴν τιμὴν τοῦ ἡμ $54^{\circ} = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$, λαμβάνομεν·

$$\text{ἡμ}\ 27^{\circ} = \text{συν}\ 63^{\circ} = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

$$\text{συν}\ 27^{\circ} = \text{ἡμ}\ 63^{\circ} = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

Ἐνθυμούμενοι προσέτι ὅτι ἡμ $45^{0} =$ συν $45^{0} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς πίνακα·

$$\text{ἡμ}\ 0^{0} = \text{συν}\ 90^{0} = 0.$$

$$\text{ἡμ}\ 9^{0} = \text{συν}\ 81^{0} = \tfrac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}.$$

$$\text{ἡμ}\ 18^{0} = \text{συν}\ 72^{0} = \tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5}).$$

$$\text{ἡμ}\ 27^{0} = \text{συν}\ 63^{0} = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

$$\text{ἡμ}\ 36^{0} = \text{συν}\ 54^{0} = \tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

$$\text{ἡμ}\ 45^{0} = \text{συν}\ 45^{0} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

$$\text{ἡμ}\ 54^{0} = \text{συν}\ 36^{0} = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{5}).$$

$$\text{ἡμ}\ 63^{0} = \text{συν}\ 27^{0} = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

$$\text{ἡμ}\ 72^{0} = \text{συν}\ 18^{0} = \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

$$\text{ἡμ}\ 81^{0} = \text{συν}\ 9^{0} = \tfrac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}.$$

$$\text{ἡμ}\ 90^{0} = \text{συν}\ 0^{0} = 1.$$

Αἱ τοιαῦται ἐκφράσεις εἰσὶν ἁπλούσταται, καθὸ περιέχουσαι μόνον τετραγωνικὰς ῥίζας· εὔκολον εἶναι νὰ λάβωμεν τὰς τιμὰς αὐτῶν πρὸς ὁσαδήποτε δεκαδικὰ ἀκριβῆ θέλομεν. Δυνάμεθα προσέτι νὰ καταβῶμεν εἰς τὰ $4^o\ 30'$ καὶ $2^o\ 15'$ τόξα, ἔπειτα ν' ἀναβῶμεν εἰς τὰ διαδοχικὰ πολλαπλάσια τῶν $2^o\ 15'$, κ.τ.έ.

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΥ ΔΕΚΑΠΕΝΤΑΓΩΝΟΥ.

70. Γινώσκομεν ὅτι τὸ ἐκ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαπενταγώνου ὑποτεινόμενον τόξον ἰσοῦται τῇ ἀπ' ἀλλήλων διαφορᾷ τῶν τόξων ἅτινα ὑποτείνουσιν αἱ πλευραὶ τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου· διότι $\frac{2\Pi}{15} = \frac{2\Pi}{6} - \frac{2\Pi}{10}$.

Ἔστω x ἡ τοῦ δεκαπενταγώνου πλευρά. Ἔχομεν·

$$x = 2\acute{\eta}\mu\,\frac{\Pi}{15},\quad \text{καὶ ἑπομένως·}$$

$$x = 2\acute{\eta}\mu\left(\frac{\Pi}{6} - \frac{\Pi}{10}\right) = 2\acute{\eta}\mu\,\frac{\Pi}{6}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\Pi}{10} - 2\acute{\eta}\mu\,\frac{\Pi}{10}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\Pi}{6}.$$

Ἀλλὰ [28, 69]

$$\acute{\eta}\mu\,\frac{\Pi}{6} = \frac{1}{2},\qquad \acute{\eta}\mu\,\frac{\Pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$

$$\sigma\upsilon\nu\,\frac{\Pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \sigma\upsilon\nu\,\frac{\Pi}{10} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

Ἄρα·

$$x = \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\,(-1+\sqrt{5}).$$

Παρατήρησις. Τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου οὔσης διπλασίας τοῦ $\acute{\eta}\mu\,\frac{\Pi}{5}$, ἔχομεν, δηλοῦντες α τὴν πλευρὰν ταύτην καὶ β τὴν τοῦ δεκαγώνου·

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}},\qquad \beta = \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5}).$$

Ὅθεν προκύπτει·

$$\alpha^2 - \beta^2 = \tfrac{1}{4}(10-2\sqrt{5}) - \tfrac{1}{4}(6-2\sqrt{5}) = 1,$$

καὶ $$\alpha^2 = \beta^2 + 1^2.$$

Οὕτω· τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου ἰσοῦται τῷ κεφαλαίῳ τῶν τετραγώνων τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου.

ΔΙΑΤΑΞΙΣ ΚΑΙ ΧΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ ΤΟΥ ΚΑΛΛΕΤΟΥ.

71. Οἱ πίνακες οὗτοι ἐν ἀρχῇ περιέχουσι τοὺς λογαρίθμους τῶν ἡμιτόνων καὶ ἐφαπτομένων τῶν τόξων ἀπὸ $1''$ εἰς $1''$ μέχρι 5^{0}, καί, κατὰ συνέπειαν, τοὺς λογαρίθμους τῶν συνημιτόνων καὶ τῶν συνεφαπτομένων τῶν μεταξὺ 90^{0} καὶ 85^{0} τόξων.

Αἱ μοῖραί εἰσι γεγραμμέναι ἄνω καὶ κάτω ἐν τῷ περιθωρίῳ ἑκάστης σελίδος, τὰ πρῶτα λεπτὰ ἐν τῇ πρώτῃ καὶ ἐν τῇ τελευταίᾳ ὁριζοντίῳ γραμμῇ, τὰ δεύτερα λεπτὰ ἐν τῇ πρώτῃ καὶ ἐν τῇ τελευταίᾳ στήλῃ.

Εἶτα ἀκολουθοῦσιν οἱ λογάριθμοι τῶν ἡμιτόνων, συνημιτόνων, ἐφαπτομένων καὶ συνεφαπτομένων ἀπὸ $10''$ εἰς $10''$ ὅλων τῶν τόξων ἀπὸ 0^{0} μέχρι 90^{0}. Αἱ μοῖραί εἰσι γεγραμμέναι ὡς ἀνωτέρω. Τὰ μὲν ἐν τῇ πρώτῃ καὶ δευτέρᾳ στήλῃ λεπτὰ πρῶτα καὶ δεύτερα ἀναφέρονται πρὸς τὰς εἰς τ' ἄνω τῆς σελίδος μοίρας, τὰ δ' ἐν τῇ τελευταίᾳ καὶ προτελευταίᾳ στήλῃ ἀναφέρονται πρὸς τὰς εἰς τὰ κάτω τῆς σελίδος μοίρας. Ἐν τῇ τρίτῃ στήλῃ περιέχονται οἱ λογάριθμοι τῶν ἡμιτόνων τῶν τόξων, ὧν αἱ μὲν μοῖραί εἰσι γεγραμμέναι ἄνω, τὰ δὲ πρῶτα καὶ δεύτερα λεπτὰ ἐν τῇ πρώτῃ καὶ δευτέρᾳ στήλῃ. Ἡ τετάρτη στήλη περιέχει τὰς διαφορὰς τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων. Ἡ πέμπτη, τοὺς λογαρίθμους τῶν συνημιτόνων τῶν αὐτῶν τόξων, καὶ ἡ ἕκτη τὰς διαφορὰς αὐτῶν. Ἡ ἑβδόμη καὶ ἡ ἐννάτη τοὺς λογαρίθμους τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν συνεφαπτομένων, καὶ ἡ ὀγδόη τὰς κοινὰς αὐτῶν διαφοράς.

Ἐάν τις θεωρήσῃ μόνον τὰς ἄνω ἐν ἑκάστῃ σελίδι μοίρας, νομίζει ὅτι οἱ πίνακες ἐκτείνονται μόνον μέχρι 45^{0}. Ἀλλ' ἑκάστη στήλη ἔχει δύω ἐπιγραφάς, ἄνω μέν, *ἡμ*, *συν*, *ἐφ*, *συνεφ*, κάτω δέ, *συν*, *ἡμ*, *συνεφ*, *ἐφ*. Λοιπόν, ὅταν ἡ γωνία ὑπερβαίνῃ 45^{0}, πρέπει νὰ προστρέχωμεν εἰς τὰς κάτω τῆς σελίδος μοίρας καὶ εἰς τὰς δύω τελευταίας πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς αὐτῆς σελίδος στήλας·

Κατὰ τὴν ἑρμηνείαν ταύτην, εὑρίσκομεν ἀμέσως·

λογ ἡμ $23^0\ 16'\ 20'' = 9,5967072,$

λογ συνεφ $63^0\ 42'\ 30'' = 9,6937708.$

Ὅταν εἰς τοὺς πίνακας τὸ χαρακτηριστικόν τινος λογαρίθμου ἐφαπτομένης, ἢ λογαρίθμου συνεφαπτομένης εἶναι 0 ἢ 1, αὐξάνομεν αὐτὸ κατὰ μίαν δεκάδα, ἥτις ἐν τοῖς πίναξι παρελήφθη.

72. Ἡ χρῆσις τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων συνίσταται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν ἑξῆς δύω προβλημάτων.

1ον. *Γωνίας δοθείσης, εὑρεῖν τὸν λογάριθμον τοῦ ἡμιτόνου, ἢ τοῦ συνημιτόνου, ἢ τῆς ἐφαπτομένης, ἢ τῆς συνεφαπτομένης αὐτῆς.*

Ὅταν ἡ δεδομένη γωνία περιέχῃ μόνον μοίρας, λεπτὰ πρῶτα καὶ δεκάδας δευτέρων, εὑρίσκομεν ἀμέσως εἰς τοὺς πίνακας τὸν ζητούμενον λογάριθμον. Ἀλλ' ὅταν περιέχῃ καὶ μονάδας λεπτῶν δευτέρων, ἢ καὶ κλάσματα τούτων, τότε προστρέχομεν εἰς τὰς διαφορὰς, ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν. Παραδεχόμεθα τότε, ὅτι αἱ διαφοραὶ τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν ἀνάλογοί εἰσι τῶν διαφορῶν τῶν τόξων. Ἡ ἀναλογία αὕτη δὲν εἶναι μὲν ἀκριβὴς, χορηγεῖ ὅμως προσέγγισιν ἱκανήν.

Πρὸς ἄσκησιν χρησιμεύσουσι τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

1) *Εὑρεθήτω ὁ λογ ἡμ* $6^0\ 32'\ 37'', 8.$

Λογ ἡμ $6^0\ 32'\ 30''$	$= 9,0566218$		(Διαφ. 1836)
διὰ	$7''$	1285 2	
»	$0'', 8$	146 88	

λογ ἡμ $6^0\ 32'\ 37'', 8 = 9,0567650.$

2) *Εὑρεθήτω ὁ λογ συν* $83^0\ 27'\ 22'', 2.$

Λογ συν $83^0\ 27'\ 30''$	$= 9,0566218$		(Διαφ. 1836)
διὰ	$-7''$	1285 2	
»	$-0'',8$	146 88	

λογ συν $83^0\ 27'\ 22'',4 = 9,0567650.$

3) *Εὑρεθήτω ὁ λογ ἐφ* $8^0\ 13'\ 52'', 76$.

Λογ ἐφ $8^0\ 13'\ 50''$	$=$ 9,1603083		(Διαφ. 1486)
διὰ $2''$		297 2	
» $0'',7$		104 02	
» $0'',06$		8 916	

λογ ἐφ $8^0\ 13'\ 52'',76 = 9,1603493$.

4) *Εὑρεθήτω ὁ λογ συνεφ* $81^0\ 46'\ 7'', 24$.

Λογ συνεφ $81^0\ 46'\ 10''$	$=$ 9,1603083		(Διαφ. 1486)
διὰ $-2''$		297 2	
» $-0'',7$		104 02	
» $-0'',06$		8 916	

λογ συνεφ $81^0\ 46'\ 7'',24 = 9,1603493$.

5) Λογ ἡμ $32^0\ 25'\ 36'',4 = 9,7293441$.

6) Λογ συν $57^0\ 34'\ 23'',6 = 9,7293441$.

7) Λογ ἐφ $26^0\ 24'\ 35',7 = 9,6960243$.

8) Λογ συνεφ $63^0\ 35'\ 24'',3 = 9,6960243$.

2ον. *Δοθέντος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου, ἢ τοῦ συνημιτόνου, ἢ τῆς ἐφαπτομένης, ἢ τῆς συνεφαπτομένης γωνίας τινός, εὑρεῖν τὴν γωνίαν ταύτην.*

Ἔστω π. χ. λογ ἡμ $x = 9,7293441$.

Ἐπειδὴ ὁ λογάριθμος οὗτος εἶναι ἐλάσσων τοῦ λογ ἡμ 45^0, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία x εἶναι ἐλάσσων 45^0· λοιπόν, πρέπει νὰ ζητήσωμεν τὸν δεδομένον λογάριθμον ἐν τῇ στήλῃ ἄνω τῆς ὁποίας εἶναι γεγραμμένον *ἡμ*. Μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων, ἐλασσόνων τοῦ δεδομένου, ὁ μᾶλλον προσεγγίζων εἶναι 9,7293229, ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς $32^0\ 25'\ 30''$. Ἡ ὑπεροχὴ τοῦ δεδομένου λογαρίθμου ἐπὶ τὸν λογάριθμον τοῦ πίνακος εἶναι 212, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν πινάκων 331· ἑπομένως, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν 212 διὰ 331, λαμβάνοντες τὰ δέκατα τοῦ πηλίκου ὡς λεπτὰ δεύτερα.

Ἡ διαίρεσις αὕτη δίδει $6'',4$, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰς $32^0\ 25'\ 30''$.

Ἄρα, $x = 32^0\ 25'\ 36'',4$.

Ἕπονται λογισμοὶ διαφόρων παραδειγμάτων.

1) Λογ ἡμ x = 9,7293441.

διὰ		9,7293229	32° 25′ 30″	(Διαφ. 331)
1ον	ὑπόλ.	2120	6″	
2ον	»	1340	0″,4	
			x = 32° 25′ 36″,4.	

2) Λογ συν x = 9,7293441.

διὰ		9,7293560	57° 34′ 20″	(Διαφ. 332)
1ον	ὑπόλ.	1190	3″	
2ον	»	1940	0″,6	
			x = 57° 34′ 23″,6.	

3) Λογ ἐφ x = 9,6960243.

διὰ		9,6959941	26° 24′ 30″	(Διαφ. 529)
1ον	ὑπόλ.	3020	5″	
2ον	»	5750	0″,7	
			x = 26° 24′ 35″,7.	

4) Λογ συνεφ x = 9,6960243.

διὰ		9,6960470	63° 35′ 20″	(Διαφ. 528)
1ον	ὑπόλ.	2270	4″	
2ον	»	1580	0″,3	
			x = 63° 35′ 24″,3.	

73. Οἱ τύποι οἱ περιέχοντες τριγωνομετρικὰς γραμμὰς ὑποθέτουσι σχεδὸν πάντοτε τὴν ἀκτῖνα ἴσην τῇ μονάδι. Δύω διαφόρους τρόπους μεταχειριζόμεθα ἵνα ἐφαρμόσωμεν τοὺς πίνακας εἰς αὐτούς. Κατὰ μὲν τὸν πρῶτον, εἰσάγομεν [26] τὴν ἀκτῖνα ρ εἰς τοὺς τύπους, εἶτα ποιοῦμεν χρῆσιν τῶν λογαρίθμων ὥς εἰσιν ἐν τοῖς πίναξι, λαμβάνοντες λογ $\rho = 10$.

Κατὰ δὲ τὸν δεύτερον τρόπον, δὲν μεταβάλλομεν ποσῶς τοὺς τύπους, ἤγουν διατηροῦμεν τὴν ὑπόθεσιν τῆς ἀκτῖνος $\rho = 1$, ἀλλ᾽

ἀφαιροῦμεν 10 μονάδας ἀφ' ἑκάστου λογαρίθμου. Καλὸν εἶναι νὰ ἐκτελῶμεν τὴν ἀφαίρεσιν ταύτην ἀπὸ τοῦ χαρακτηριστικοῦ μόνου, τὸ ὁποῖον ὡς ἐκ τούτου δυνατὸν νὰ γίνῃ ἀρνητικὸν, ἢ κάλλιον νὰ μεταχειριζώμεθα τοὺς λογαρίθμους ὡς ὑπάρχουσιν ἐν τοῖς πίναξι, νὰ κρατῶμεν δὲ λογαριασμὸν τῆς δεκάδος ταύτης ἐν τῷ τέλει. Ἡ τοιαύτη ἐπιδιόρθωσις εἶναι πάντοτε εὔκολος, διότι ἐν τοῖς λογισμοῖς μόνον προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις λογαρίθμων ἐκτελοῦμεν. Ὅθεν φανερὸν ὅτι ἕκαστος λογάριθμος προσθετέος, λαμβανόμενος ἀπὸ τοὺς τριγωνομετρικοὺς πίνακας, δίδει εἰς τὸ ἐξαγόμενον πλεόνασμα μιᾶς δεκάδος, ἕκαστος δὲ λογάριθμος ἀφαιρετέος δίδει μίαν δεκάδα ὀλιγώτερον.

Πρὸς συντομίαν, πρέπει πάντοτε ν' ἀντικαθιστῶμεν τὴν ἀφαίρεσιν λογαρίθμου τινὸς διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ *ἀριθμητικοῦ συμπληρώματος* αὐτοῦ. Τότε ἡ δεκὰς ἣν πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τούτου, ἕνεκα τῆς ὑποθέσεως $\rho = 1$, ἐξισοῦται διὰ τῆς δεκάδος ἣν ἐπροσθέσαμεν, λαβόντες τὸ συμπλήρωμα.

Πρὸς διασάφησιν τούτων χρησιμεύουσι τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

1) Ἔστω $x = 419 \times \text{ἡμ}^2\, 40^\circ$. Ἔχομεν·

$$\text{λογ}\, x = \text{λογ}\, 419 + 2\, \text{λογ ἡμ}\, 40^\circ.$$

Λαμβανομένου τοῦ λογ ἡμ 40° ἐκ τοῦ πίνακος, ὁ λογ x θέλει περιέχει 2 δεκάδας περισσότερον, ἃς πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἐξαγομένου·

$$\begin{array}{lr} \text{λογ}\, 419 & 2{,}6222140 \\ \underline{2\text{λογ ἡμ}\, 40^\circ} & \underline{19{,}6161350} \\ \text{λογ}\, x & 2{,}2383490. \end{array}$$

καὶ $x = 173{,}12$, κατὰ προσέγγισιν 0,01.

2) Ἔστω $\text{ἡμ}\, x = \dfrac{314 \times \text{ἡμ}\, 30^\circ}{411 \times \text{συν}^2 15^\circ}$. Ἔχομεν·

$$\text{Λογ ἡμ}x = \text{λογ}\, 314 - \text{λογ}\, 411 + \text{λογ ἡμ}30^\circ - 2\text{λογ συν}15^\circ.$$

Ἐργαζόμενοι διὰ τῶν συμπληρωμάτων, αἱ 2 δεκάδες ἃς πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ 2 λογ συν 15°, ἐξισοῦνται διὰ τῶν 2 δεκάδων ἐφ' ὧν λαμβάνομεν τὸ συμπλήρωμα. Ὁ λογ ἡμ 30° καὶ τὸ συμπλήρωμα τοῦ λογ 411 εἰσάγουσι 2 δεκάδας περισσότερον· ἀλλ' ἐπειδὴ πρέπει νὰ ζητήσωμεν τὴν γωνίαν x διὰ τῶν πινάκων, μίαν μόνην δεκάδα πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἐξαγομένου.

σ. λογ 314	2,4969296 5
σ. λογ 411	7,3861581 8
λογ ἡμ 30°	9,6989700
2σ. λογ συν 15°	0,0301124
λογ ἡμ x	9,6121702.

Ὁ λογάριθμος οὗτος εἶναι παρεσκευασμένος ὡς πρέπει νὰ ζητηθῇ ἐν τοῖς πίναξιν. Εὑρίσκομεν, τέλος· $x = 24^\circ 10' 7''$.

ΤΡΟΠΗ ΤΩΝ ΝΕΩΝ ΜΟΙΡΩΝ ΕΙΣ ΠΑΛΑΙΑΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΑΛΑΙΩΝ ΕΙΣ ΝΕΑΣ.

74. Ἵνα τρέψωμεν νέας μοίρας εἰς παλαιὰς καὶ τ' ἀνάπαλιν, ἀπαιτεῖται νὰ γνωρίζωμεν τὸν λόγον τῆς παλαιᾶς μοίρας πρὸς τὴν νέαν. Ἐκ τῆς διττῆς ὑποδιαιρέσεως τῆς περιφερείας γνωστόν ἐστιν, ὅτι 100° νέαι ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 90° παλαιάς. Ὅθεν ἡ νέα μοῖρα εἶναι τὸ ἑκατοστημόριον 90° παλαιῶν, ἢ τὰ $\frac{9}{10}$ μιᾶς παλαιᾶς μοίρας.

Λοιπόν, *ἵνα τρέψωμεν νέας μοίρας εἰς παλαιάς, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὰ* $\frac{9}{10}$ *αὐτῶν, ἤγουν ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπ' αὐτῶν τὸ δέκατον.*

Οὕτως, 70° νέαι ἰσοδυναμοῦσιν 63° παλαιαῖς.

Ἔστωσαν αἱ νέαι μοῖραι $72^\circ\ 27'\ 10''$, ἢ $72^\circ,2710$.

Ἀφαιροῦμεν τὸ δεκατημόριον αὐτῶν $7^\circ,22710$, καὶ τὸ ὑπόλοιπον $65^\circ,0439$ εἶναι ἡ τιμὴ τῶν νέων μοιρῶν εἰς παλαιάς. Ἵνα τρέψωμεν δὲ τὸ δεκαδικὸν μέρος $0^\circ,0439$ εἰς λεπτά, ἀρκεῖ νὰ τρέψωμεν τὸν δεκαδικὸν τοῦτον ἀριθμὸν εἰς συμμιγῆ τῆς παλαιᾶς ὑποδιαιρέσεως. Εὑρίσκομεν τέλος ὅτι $72^\circ,2710$ νέαι ἰσοδυναμοῦσι πρὸς $65^\circ\ 2'\ 38'',04$ παλαιάς.

Ἀντιστρόφως, *ἵνα τρέψωμεν παλαιὰς μοίρας εἰς νέας, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς αὐτὰς τὸ ἔννατον μέρος αὐτῶν.*

Ὅταν ὑπάρχωσι λεπτὰ πρῶτα, δεύτερα, . . . : τρέπομεν αὐτὰ πρῶτον εἰς δεκαδικὰ μέρη τῆς παλαιᾶς μοίρας.

Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $65^\circ\ 2'\ 38'',04$ παλαιαὶ ἰσοδυναμοῦσιν $72^\circ\ 27'\ 10''$ νέαις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΠΕΡΙ ΤΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΡΙΓΩΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΕΡΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΤΙΝΟΣ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑ.

75. Ἐν τοῖς ἑπομένοις θέλομεν παριστᾷ παντὸς τριγώνου τὰς μὲν γωνίας διὰ Α, Β, Γ, τὰς δὲ ὑπὸ τὰς γωνίας ταύτας ὑποτεινούσας πλευρὰς διὰ α, ϐ, γ. Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις Α παριστᾷ τὴν ὀρθὴν γωνίαν καὶ α τὴν ὑποτείνουσαν.

Προσέτι, θέλομεν ὀνομάζει *τριγωνομετρικὰς γραμμὰς* γωνίας τινὸς, τὰς τριγωνομετρικὰς γραμμὰς τοῦ περιλαμβανομένου τόξου ὑπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ταύτης, ἔχοντος κέντρον τὴν κορυφὴν αὐτῆς καὶ ἀκτῖνα ἴσην τῇ μονάδι.

76. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Παντὸς τριγώνου ὀρθογωνίου, ἑκάστη πλευρὰ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς ὑποτεινούσης ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀντικειμένης τῇ πλευρᾷ ταύτῃ γωνίας.*

(Σχ. 13) Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Λαμβάνοντες κέντρον τὸ σημεῖον Β, ἀκτῖνα δὲ οἱανδήποτε, γράφομεν τὸ τόξον ΔΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ε ἄγομεν ἐπὶ ΑΒ τὴν κάθετον ΕΖ. Τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας Β εἶναι ὁ λόγος τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΒΕ [25].

Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΒΓΑ, ΒΕΖ, δίδουσιν·

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΒΕ}}, \quad \text{ἄρα} \quad \frac{ϐ}{α} = \text{ἡμ. Β}, \quad \text{ἢ}$$

$$(1) \qquad ϐ = α \text{ ἡμ. Β}.$$

Ἡ γωνία Β εἶναι τὸ συμπλήρωμα τῆς Γ· λοιπὸν ἔχομεν προσέτι, $ϐ = α$ συν Γ· ἄρα, *ἑκάστη πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς ὑποτεινούσης ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς προσκειμένης τῇ πλευρᾷ ταύτῃ ὀξείας γωνίας.*

77. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Παντὸς τριγώνου ὀρθογωνίου, ἑκάστη πλευρὰ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀντικειμένης τῇ πρώτῃ γωνίας.*

(Σχ. 13) Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Γράφομεν τὸ τόξον ΔΕ καὶ ἄγομεν ΔΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ὁ λόγος τῆς ΔΗ πρὸς τὴν ΒΔ εἶναι [25] ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας Β. Ἔχομεν δέ·

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΔΗ}}{\text{ΒΔ}}, \quad \text{ἄρα} \quad \frac{\beta}{\gamma} = \text{ἐφ Β}, \quad \text{ἢ}$$

(2) $$\beta = \gamma \text{ ἐφ Β}.$$

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον πορίζόμεθα καὶ ἐκ τοῦ 1ου θεωρήματος, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν αὐτὸ εἰς ἑκατέραν τῶν πλευρῶν β, γ, καὶ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡμ Γ = συν Β· διότι·

$$\beta = \alpha \text{ ἡμ Β}, \qquad \gamma = \alpha \text{ συν Β},$$

ἄρα· $$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\text{ἡμ Β}}{\text{συν Β}}, \quad \text{ἢ} \quad \beta = \gamma \text{ ἐφ Β}.$$

ΣΗΜ. Τὰ δύω ταῦτα θεωρήματα χρησιμεύουσι πρὸς ἐπίλυσιν τῶν ὀρθογωνίων εὐθυγράμμων τριγώνων. Τὰ ἑπόμενα θεωρήματα ἀφορῶσι τὴν ἐπίλυσιν τῶν εὐθυγράμμων πλαγιογωνίων τριγώνων.

78. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αἱ πλευραὶ παντὸς εὐθυγράμμου τριγώνου, λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὃν τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν τῶν ὑπ' αὐτῶν ὑποτεινομένων.*

(Σχ. 14) Ἔστωσαν, Α, Β, δύω γωνίαι οἱαιδήποτε τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ ΓΔ ἡ ἀγομένη κάθετος ἀπὸ τῆς κορυφῆς Γ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ. Ἐὰν ἡ κάθετος αὕτη κῆται ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ δίδουσι [76],

$$\text{ΓΔ} = \beta \text{ ἡμ Α}, \quad \text{ΓΔ} = \alpha \text{ ἡμ Β· ἤτοι } \beta \text{ ἡμ Α} = \alpha \text{ ἡμ Β},$$

ὅθεν $$\text{ἡμ Α} : \text{ἡμ Β} :: \alpha : \beta.$$

(Σχ. 15) Ἐὰν ἡ κάθετος ΓΔ πίπτῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τὸ τρίγωνον ΑΓΔ δίδει, ΓΔ = β ἡμ ΓΑΔ. Ἀλλ' ἡ γωνία ΓΑΔ εἶναι παραπλήρωμα τῆς ΓΑΒ, ἄρα ἡμ ΓΑΔ = ἡμ ΓΑΒ = ἡμ Α· ἑπομένως·

(3) $$\text{ἡμ Α} : \text{ἡμ Β} :: \alpha : \beta.$$

79. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Παντὸς εὐθυγράμμου τριγώνου, τὸ τετράγωνον μιᾶς πλευρᾶς ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν δύω ἑτέρων, πλὴν τοῦ διπλασίου ὀρθογωνίου τῶν δύω τούτων πλευρῶν, ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας πολλαπλασιαζομένου,* ἤτοι·

(4) $$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \text{ συν Α}.$$

(Σχ. 14) Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἄγομεν τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ὅταν ἡ γωνία Α ἦναι ὀξεῖα, ἔχομεν, κατὰ γεωμετρικὸν γνωστὸν θεώρημα·

$$\overline{\Gamma B}^2 = \overline{A\Gamma}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB \times A\Delta,$$

ἢ

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma \times A\Delta.$$

Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΔ δίδει, $A\Delta = \beta$ συν Α [76]· θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην τῆς ΑΔ, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν (4).

(Σχ. 15) Ὅταν ἡ γωνία Α ἦναι ἀμβλεῖα, ἔχομεν·

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\gamma \times A\Delta.$$

Τὸ τρίγωνον ΑΓΔ δίδει, $A\Delta = \beta \times$ συν ΓΑΔ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ γωνία ΓΑΔ εἶναι παραπλήρωμα τῆς Α, ἔχομεν [12],

$$\text{συν}\,\Gamma A\Delta = -\,\text{συν}\,A, \quad \text{ἄρα} \quad A\Delta = -\,\beta\ \text{συν}\,A.$$

Θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν τοῦ α^2, εὑρίσκομεν τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν (4).

80. Τὸ ἡγούμενον θεώρημα μόνον ἐπαρκεῖ πρὸς ἐπίλυσιν παντὸς τριγώνου εὐθυγράμμου. Καὶ ὄντως, φανερὸν ὅτι, ἐφαρμοζόμενον διαδοχικῶς πρὸς ἑκάστην τῶν πλευρῶν, δίδει τρεῖς ἐξισώσεις δι' ὧν προσδιορίζονται τρία τῶν ἓξ μερῶν τοῦ τριγώνου ὅταν τὰ ἕτερα τρία ἦναι γνωστὰ (ἐξαιρέσει τῶν περιπτώσεων καθ' ἃς τὸ τρίγωνον εἶναι ἀδύνατον, ἢ ἀόριστον).

81. Τὸ ἐν ἐδαφίῳ 78 θεώρημα, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει σχέσιν τινὰ δύω πλευρῶν καὶ τῶν ὑπ' αὐτῶν ὑποτεινομένων δύω γωνιῶν πρὸς ἀλλήλας, εἶναι συνέπεια τοῦ ἐν ἐδαφίῳ 79 θεωρήματος.

Καὶ ὄντως, ἡ ἐξίσωσις (4) δίδει·

$$\text{συν}\,A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}.$$

Ὅθεν·

$$\text{ἡμ.}^2 A = 1 - \text{συν}^2 A = \frac{4\beta^2\gamma^2 - (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)^2}{4\beta^2\gamma^2}$$

$$= \frac{2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4}{4\beta^2\gamma^2},$$

Ἐπομένως·

$$\frac{\text{ἡμ.}\,A}{\alpha} = \frac{\sqrt{2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4}}{2\alpha\beta\gamma}.$$

Αἱ ἕτεραι δύω ἐξισώσεις, αἱ ὅμοιαι τῇ (4), δίδουσι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, $\frac{ἡμB}{β}$ καὶ $\frac{ἡμΓ}{γ}$. Τοὺς λόγους τούτους εὑρίσκομεν καὶ συντομώτερον, τρέποντες εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς προηγουμένης ἰσότητος, α εἰς β καὶ β εἰς α, εἶτα α εἰς γ καὶ γ εἰς α. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι τὸ δεύτερον τοῦτο μέλος εἶναι συνέκθεσις συμμετρικὴ τῶν γραμμάτων α, β, γ, ἤγουν μένει τὸ αὐτό, τιθεμένου α ἀντὶ β καὶ β ἀντὶ α, ἢ α ἀντὶ γ καὶ γ ἀντὶ α, ἢ β ἀντὶ γ καὶ γ ἀντὶ β: ἄρα ἔχομεν [78], $\frac{ἡμA}{α}=\frac{ἡμB}{β}=\frac{ἡμΓ}{γ}$.

82. Ἀμοιβαίως, ὁ τύπος·

$$α^2=β^2+γ^2-2βγ\ συν\ A,$$

παράγεται, διὰ τοῦ ἑξῆς λογισμοῦ, ἐκ τοῦ ἐν ἐδαφίῳ 78 θεωρήματος.

Ἡ σχέσις $A+B+Γ=180^\circ$ δίδει·

(1) $ἡμ\ Γ=ἡμ\ (A+B)=ἡμ\ A\ συν\ B+ἡμ\ B\ συν\ A.$

Ἐκ τῶν ἀναλογιῶν·

$ἡμ\ A : α :: ἡμ\ Γ : γ,\qquad ἡμ\ A : α :: ἡμ\ B : β,$

ἔχομεν· $ἡμΓ=\frac{γἡμA}{α},\quad ἡμB=\frac{βἡμA}{α},$

ἑπομένως, $συν\ B=\frac{\pm\sqrt{α^2-β^2\ ἡμ^2\ A}}{α}.$

Θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), ἀντὶ ἡμ Γ, ἡμ B, συν B, τὰς τιμὰς αὐτῶν καὶ ἔχομεν·

$$\frac{γ\ ἡμ\ A}{α}=\pm\frac{ἡμ\ A\sqrt{α^2-β^2\ ἡμ^2\ A}}{α}+\frac{β\ ἡμ\ A\ συν\ A}{α},$$

ἢ
$$γ=\pm\sqrt{α^2-β^2\ ἡμ^2\ A}+β\ συν\ A.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν·

$$α^2-β^2\ ἡμ^2\ A=β^2\ συν^2\ A-2βγ\ συν\ A+γ^2,$$

ὅθεν, $$α^2=β^2+γ^2-2βγ\ συν\ A.$$

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.

83. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 1η. *Δοθεισῶν τῆς ὑποτεινούσης α σὺν μιᾷ ὀξείᾳ γωνίᾳ Β, εὑρεῖν τὴν γωνίαν Γ καὶ τὰς πλευρὰς β, γ.*

Πρῶτον ἔχομεν $\Gamma = 90^\circ - B.$

Εἶτα δέ, διὰ τοῦ ἐν ἐδαφίῳ 76 θεωρήματος·

$$\beta = \alpha \text{ ἡμ } B, \qquad \gamma = \alpha \text{ συν } B.$$

Ἐννοεῖται ὅτι οἱ λογισμοὶ πρέπει νὰ γίνωνται διὰ λογαρίθμων· Ἡ ἐφαρμογὴ τούτων δίδει, τῆς ἀκτῖνος εἰσαγομένης,

$$\text{λογ } \beta = \text{λογ } \alpha + \text{λογ ἡμ } B - 10,$$
$$\text{λογ } \gamma = \text{λογ } \alpha + \text{λογ συν } B - 10.$$

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ β, γ, λογίζονται ἀπ' εὐθείας, ἔχομεν τὴν ἐξακρίβωσιν

$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2.$$

84. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 2α. *Δοθεισῶν τῆς πλευρᾶς β σὺν μιᾷ ὀξείᾳ γωνίᾳ Β, εὑρεῖν τὴν γωνίαν Γ, τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὴν πλευρὰν γ.*

Ἔχομεν $\Gamma = 90^\circ - B$. Ἐκ δὲ τοῦ ἐν ἐδαφίῳ 76 θεωρήματος·

$$\beta = \alpha \text{ ἡμ } B, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \alpha = \frac{\beta}{\text{ἡμ } B},$$

καὶ κατὰ τὸ ἐν ἐδαφίῳ 77 θεώρημα·

$$\gamma = \beta \text{ ἐφ } \Gamma, \qquad \text{ἢ} \qquad \gamma = \beta \text{ συνεφ } B.$$

Ἐφαρμόζοντες τοὺς λογαρίθμους, λαμβάνομεν·

$$\text{λογ } \alpha = \text{λογ } \beta + \sigma \,.\, \text{λογ ἡμ } B,$$
$$\text{λογ } \gamma = \text{λογ } \beta + \text{λογ συνεφ } B - 10.$$

85. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 3η. *Δοθείσης τῆς ὑποτεινούσης α σὺν μιᾷ πλευρᾷ β, εὑρεῖν τὴν πλευρὰν γ καὶ τὰς γωνίας Β, Γ.*

Κατὰ τὴν ἰδιότητα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχομεν·

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2, \qquad \text{ἢ} \qquad \gamma = \sqrt{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}$$

καὶ $$\text{λογ } \gamma = \tfrac{1}{2} \text{ λογ } (\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2} \text{ λογ } (\alpha - \beta).$$

Ἡ γωνία Β προσδιορίζεται [76] ἐκ τῆς σχέσεως·

$$\text{ἡμ } B = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{ἐξ ἧς,} \quad \text{λογ ἡμ } B = \text{λογ } \beta + \sigma \,.\, \text{λογ } \alpha.$$

Τέλος, $$\Gamma = 90^\circ - B.$$

ΣΗΜ. Ἐν περιπτώσει καθ' ἣν ὁ λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ μιᾶς πλευρᾶς τῆς ὀρθῆς γωνίας πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν, ὀλίγον διαφέρει τῆς μονάδος, τότε ἡ γωνία Β ὀλίγον διαφέρει 90^0· παρὰ τῷ ὁρίῳ τούτῳ ἐν τοῖς πίναξι βλέπομεν ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν ἡμιτόνων εἰσὶν οἱ αὐτοὶ μέχρι τοῦ ἑβδόμου δεκαδικοῦ εἰς πολλὰ τόξα διάφορα, ὅπερ ἐμποδίζει τὸν ὁρισμὸν τῆς ζητουμένης γωνίας μεθ' ἱκανῆς προσεγγίσεως. Ἐν τῇ τοιαύτῃ περιπτώσει πρέπει νὰ λογίζωμεν πρῶτον τὴν γωνίαν Γ, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ εἶναι σμικροτάτη. Γινώσκομεν ὅτι·

$$\text{ἡμ}\,\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{1-\text{συν}\,\Gamma}{2}}=\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{2\alpha}},$$

καθιστάντες ἀντὶ συν Γ τὴν τιμὴν αὐτοῦ $\frac{\beta}{\alpha}$. Διὰ τοῦ τύπου τούτου λογίζομεν $\frac{\Gamma}{2}$, καὶ ἑπομένως λαμβάνομεν Γ, Β.

Ἐὰν εὑρεθῶσι πρῶτον αἱ γωνίαι, τότε ἡ πλευρὰ γ προσδιορίζεται ἐκ τῆς σχέσεως·

$$\gamma=\alpha\ \text{ἡμ}\,\Gamma,\qquad \text{ἢ}\qquad \text{λογ}\,\gamma=\text{λογ}\,\alpha+\text{λογ}\ \text{ἡμ}\,\Gamma-10.$$

86. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 4^{η}. *Δοθεισῶν τῶν δύο πλευρῶν β, γ, εὑρεῖν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὰς γωνίας* Β, Γ.

Λογίζομεν τὴν γωνίαν Β ἐκ τῆς σχέσεως $\beta=\gamma\ \text{ἐφ}\,B$ [77], διδούσης

$$\text{ἐφ}\,B=\frac{\beta}{\gamma},$$

καὶ

$$\text{λογ ἐφ}\,B=\text{λογ}\,\beta+\sigma\,.\,\text{λογ}\,\gamma.$$

Εἶτα ἔχομεν

$$\Gamma=90^\circ-B,$$

καὶ [76]

$$\alpha=\frac{\beta}{\text{ἡμ}\,B},$$

ὅθεν,

$$\text{λογ}\,\alpha=\text{λογ}\,\beta+\sigma\,.\,\text{λογ ἡμ}\,B.$$

Πρὸς ἐξακρίβωσιν τῶν ἡγουμένων λογισμῶν δυνάμεθα λογίσαι α διὰ τοῦ τύπου

$$\alpha=\sqrt{\beta^2+\gamma^2}.$$

ΣΗΜ. Παρατηροῦντες τὰς προηγουμένας ἐπιλύσεις τῶν περὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα προβλημάτων, συνάγομεν ὅτι ὀρθογώνιόν τι τρίγωνον εἶναι πάντοτε δυνατὸν, πλὴν ἐν τῇ τρίτῃ περιπτώσει. Ἐν ταύτῃ πρέπει ἡ δεδομένη πλευρὰ νὰ ἦναι ἐλάσσων τῆς ὑποτεινούσης.

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΠΛΑΓΙΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.

87. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 1η. *Δοθεισῶν μιᾶς πλευρᾶς α καὶ δύω γωνιῶν, εὑρεῖν τὰ λοιπὰ μέρη.*

Τὴν ἄγνωστον γωνίαν εὑρίσκομεν ἀφαιρέσει ἀπὸ 180° τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύω δεδομένων. Εἶτα λογίζομεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ κατὰ τὸ ἐν ἐδαφίῳ 78 θεώρημα·

$$\beta = \frac{\alpha \text{ ἡμ. B}}{\text{ἡμ. A}}, \qquad \gamma = \frac{\alpha \text{ ἡμ. Γ}}{\text{ἡμ. A}}.$$

Αἱ ἐκφράσεις αὗται λογίζονται διὰ τῶν λογαρίθμων.

88. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 2α. *Δοθεισῶν δύω πλευρῶν* α, β, *σὺν τῇ ἀντικειμένῃ τῇ ἑτέρᾳ αὐτῶν γωνίᾳ* Α, *εὑρεῖν τὴν τρίτην πλευρὰν* γ *καὶ τὰς δύω ἑτέρας γωνίας* Β, Γ.

Πρῶτον εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν Β, τὴν ἀντικειμένην τῇ πλευρᾷ β, ἐκ τῆς ἀναλογίας [78]·

$$\alpha : \beta :: \text{ἡμ. A} : \text{ἡμ. B}.$$

Γνωρίζοντες τὰς γωνίας Α, Β, ἔχομεν·

$$\Gamma = 180^\circ - (\text{A} + \text{B}).$$

Τέλος, ἡ πλευρὰ γ εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἀναλογίας·

$$\text{ἡμ. A} : \text{ἡμ. Γ} :: \alpha : \gamma. \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \gamma = \frac{\alpha \text{ ἡμ. Γ}}{\text{ἡμ. A}}.$$

89. Ἡ περίπτωσις αὕτη χρήζει σαφηνείας. Ἡ 1η ἀναλογία δίδει·

$$\text{ἡμ. B} = \frac{\beta \text{ ἡμ. A}}{\alpha}.$$

Ἐν τοῖς πίναξιν εὑρίσκεται ὡς τιμὴ τῆς Β γωνία τις ὀξεῖα. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ἡμίτονον ἀντιστοιχεῖ καὶ εἰς παραπληρωματικήν τινα γωνίαν ἀμβλεῖαν· καλοῦμεν Β′ τὴν γωνίαν τῶν πινάκων καὶ ἔχομεν διὰ τὴν Β τὰς δύω τιμὰς $\text{B} = \text{B}'$, $\text{B} = 180^\circ - \text{B}' = \text{B}''$.

Λοιπὸν φαίνεται ὅτι ὑπάρχουσι δύω τρίγωνα. Πρὸς ὁδηγίαν μας χρησιμεύουσιν αἱ ἑξῆς παρατηρήσεις.

(Σχ. 16) Ἐὰν ἡ δεδομένη γωνία Α ἦναι ἀμβλεῖα, ἢ ὀρθή, αἱ δύω ἕτεραι ἔσονται ὀξεῖαι· τότε λαμβάνομεν μόνον τὴν $\text{B} = \text{B}'$. Ἵνα δὲ τὸ τρίγωνον ἦναι δυνατόν, πρέπει ἡ πλευρὰ α νὰ ἦναι μείζων τῆς πλευρᾶς β. Ἀλλ' ἡ συνθήκη αὕτη μόνη ἀρκεῖ.

(Σχ. 17) Ἐὰν ἡ γωνία Α ἦναι ὀξεῖα, ἡ δὲ πλευρὰ α μείζων τῆς ϐ, πρέπει νὰ ἔχωμεν καὶ Α μείζονα τῆς Β, καὶ πάλιν ἀποῤῥίπτομεν τὴν τιμὴν Β''. Τότε τὸ τρίγωνον εἶναι πάντοτε δυνατόν.

(Σχ. 18) Ἀλλ' ἐὰν Α ἦναι ὀξεῖα καὶ α ἐλάσσων τῆς ϐ, λαμϐάνομεν ἀδιαφόρως Β', ἢ Β''. Καὶ ὄντως, ἔστω ἡ ὀξεῖα γωνία Β'ΑΓ = Α καὶ ΑΓ = ϐ. Ὁ γραφόμενος κύκλος κέντρῳ τῷ Γ καὶ ἀκτῖνι ἴσῃ α, δυνατόν ἐστιν, ἔν τισι περιπτώσεσι, νὰ τμήσῃ τὴν ΑΒ' κατὰ δύω σημεῖα Β' καὶ Β'', καὶ τότε ἔχομεν δύω τρίγωνα ΑΓΒ'', ΑΓΒ', περιέχοντα τὰ δεδομένα μέρη καὶ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ΑΒ''Γ, ΑΒ'Γ, εἰσὶ παραπληρωματικαί. Ἵνα ὑπάρχωσι δύω λύσεις ἀπαιτεῖται ἡ πλευρὰ α, ἥτις ὑποτίθεται ἐλάσσων τῆς ϐ, νὰ ἦναι μείζων τῆς καθέτου ΓΔ τῆς ἀγομένης ἐπὶ τὴν ΑΒ'. Ἐὰν α = ΓΔ, ὁ κύκλος ἅπτεται τῆς ΑΒ', αἱ δύω δὲ λύσεις ἄγονται εἰς μόνον τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΔ. Τέλος, ἐὰν ἡ πλευρὰ α ἦναι ἐλάσσων τῆς ΓΔ. δὲν ὑπάρχει τρίγωνον. Τὸ ἀνύπαρκτον τοῦτο τοῦ τριγώνου καταδείκνυται καὶ ἐκ τῆς τιμῆς αὐτῆς τοῦ ἡμ. Β, ὡς ἑξῆς.

Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΔ δίδει·

$\Gamma\Delta = \beta$ ἡμ. Α. Ἀλλά, καθ' ὑπόθεσιν, $\alpha < \Gamma\Delta$, ἄρα,

$$\alpha < \beta \text{ ἡμ. } A, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\beta \text{ ἡμ. } A}{\alpha} > 1.$$

Ἤτοι ἔχομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἡμ Β μείζονα μονάδος, ὅπερ ἄτοπον.

90. Ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει ἐλογίσαμεν τὴν πλευρὰν γ μετὰ τὰς γωνίας Β, Γ. Προσδιορίσομεν αὐτὴν καὶ ἀμέσως διὰ μόνων τῶν δεδομένων α, β, Α, ὡς ἀκολούθως.

Κατὰ ἐδάφιον 79 ἔχομεν·

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \text{ συν } A, \quad \text{ἢ} \quad \gamma^2 - 2\beta \text{ συν } A \,.\, \gamma = \alpha^2 - \beta^2.$$

Ἐπιλύοντες τὴν δευτεροβάθμιον ταύτην ἐξίσωσιν, λαμβάνομεν·

$$\gamma = \beta\text{συν}A \pm\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 + \beta^2\text{συν}^2A} = \beta\text{συν}A \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2\text{ἡμ}^2A}.$$

Αἱ τιμαὶ τῆς γ πρέπει νὰ ἦναι πραγματικαὶ καὶ θετικαί· πρὸς τοῦτο ἀπαιτεῖται α^2 νὰ ἰσοῦται τοὐλάχιστον β^2ἡμ.^{2}Α.

Λοιπὸν ἔχομεν τὰς ἑξῆς δύω συνθήκας·

$$\frac{\beta \text{ ἡμ. } A}{\alpha} < 1, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\beta \text{ ἡμ. } A}{\alpha} = 1:$$

Ἐὰν ὑποτεθῇ ὑπάρχουσα ἡ πρώτη, αἱ δύω τιμαὶ τῆς γ ἔσονται πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι. Ὑπολείπεται νὰ ἐξετάσωμεν ἐν τίσι περιπτώσεσιν αὗταί εἰσι θετικαί.

Ὅταν $A > 90^0$, τὸ συν A εἶναι ἀρνητικόν· τότε τὸ ῥιζικὸν πρέπει νὰ ληφθῇ μετὰ τοῦ σημείου $+$ μόνου.

Ἡ ἀνισότης $\beta \text{ συν } A + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \text{ ἡμ}^2 A} > 0$ δίδει·

$$\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \text{ ἡμ}^2 A} > -\beta \text{ συν } A,\quad \alpha^2 - \beta^2 \text{ ἡμ}^2 A > \beta^2 \text{ συν}^2 A,$$

$$\alpha^2 > \beta^2,\quad \alpha > \beta.$$

Ὅταν $A = 90^0$, ἔχομεν·

$$\text{συν}A = 0,\quad \text{ἡμ}A = 1,\quad \text{καὶ } \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2},\quad \text{ὅθεν}\quad \alpha > \beta.$$

Ὅταν $A < 90^0$, τότε $\text{συν}A > 0$, καὶ ἡ τιμὴ

$$\beta \text{ συν } A + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \text{ἡμ}^2 A},$$

εἶναι ἡ εἰς τὸ πρόβλημα ἁρμόζουσα. Ἵνα ἁρμόζῃ καὶ ἡ δευτέρα

$$\beta \text{ συν } A - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \text{ ἡμ}^2 A},\qquad \text{ἀπαιτεῖται·}$$

$$\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \text{ ἡμ}^2 A} < \beta \text{ συν } A,\quad \text{ἢ}\quad \alpha^2 - \beta^2 \text{ ἡμ}^2 A < \beta^2 \text{ συν}^2 A,$$

$$\text{ὅθεν}\quad \alpha^2 < \beta^2 (\text{ἡμ}^2 A + \text{συν}^2 A),\quad \text{ἤτοι}\quad \alpha < \beta.$$

Λοιπὸν εὑρίσκομεν καὶ αὖθις τὰς ἐν τῇ πρώτῃ διασκοπήσει τοῦ προβλήματος συνθήκας.

91. Ἵνα ἐφαρμόσωμεν τοὺς λογαρίθμους εἰς τὸν τύπον·

$$\gamma = \beta \text{ συν } A \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \text{ ἡμ}^2 A},$$

πρέπει νὰ τρέψωμεν τὸ δεύτερον μέλος εἰς μονώνυμον, [53].

Ὁ τύπος οὗτος τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν·

$$(1)\qquad \gamma = \beta \text{ συν } A \pm \alpha \sqrt{1 - \frac{\beta^2 \text{ ἡμ}^2 A}{\alpha^2}}.$$

Ἐπειδὴ τὸ ῥιζικὸν ὑποτίθεται πραγματικόν, ἡ ποσότης $\dfrac{\beta^2 \text{ ἡμ}^2 A}{\alpha^2}$ εἶναι ἐλάσσων τῆς μονάδος· δυνάμεθα λοιπὸν νὰ προσδιορίσωμεν γωνίαν τινὰ φ βοηθητικήν, ὥστε·

$$\text{ἡμ}\,\varphi = \frac{\beta \text{ ἡμ } A}{\alpha}.$$

Ἑπομένως $\sqrt{1-\frac{\beta^2\,\text{ἡμ}^2 A}{\alpha^2}}=\sqrt{1-\text{ἡμ}^2\varphi}=\text{συν}\,\varphi\cdot$

Ἀλλ' ἡ ἰσότης $\text{ἡμ}\,\varphi=\frac{\beta\,\text{ἡμ}\,A}{\alpha}$, δίδει $\beta=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}\,\varphi}{\text{ἡμ}\,A}$.

Θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) ἀντὶ β καὶ $\sqrt{1-\frac{\beta^2\,\text{ἡμ}^2 A}{\alpha^2}}$ τὰς τιμὰς αὐτῶν καὶ λαμβάνομεν·

$$\gamma=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}\,\varphi\,\text{συν}\,A}{\text{ἡμ}\,A}\pm\alpha\,\text{συν}\,\varphi=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}\,\varphi\,\text{συν}\,A\pm\alpha\,\text{συν}\,\varphi\,\text{ἡμ}\,A}{\text{ἡμ}\,A},$$

ἢ $$\gamma=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}\,(\varphi\pm A)}{\text{ἡμ}\,A},$$

ἔκφρασιν εἰς ἣν οἱ λογάριθμοι ἐφαρμόζονται.

Παρατηρητέον ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς βοηθητικῆς γωνίας φ, αἱ ἐλάσσονες 180°, προσδιοριζόμεναι διὰ τῆς σχέσεως $\text{ἡμ}\,\varphi=\frac{\beta\,\text{ἡμ}\,A}{\alpha}$, εἰσὶν ἀκριβῶς αἱ τῆς γωνίας Β τοῦ τριγώνου ὅπερ πρόκειται νὰ ἐπιλύσωμεν, διότι $\text{ἡμ}\,B=\frac{\beta\,\text{ἡμ}\,A}{\alpha}$. Λοιπόν, διὰ τὴν βοηθητικὴν γωνίαν φ ἔξομεν δύω τιμάς, B', B''. Εἰς τὴν ἰσότητα $\gamma=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}\,(\varphi\pm A)}{\text{ἡμ}\,A}$ θέτομεν διαδοχικῶς τὰς τιμὰς ταύτας, ἀντὶ φ, καὶ λαμβάνομεν·

$$\gamma=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}\,(B'\pm A)}{\text{ἡμ}\,A},\quad\text{καὶ}\quad\gamma=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}\,(B''\pm A)}{\text{ἡμ}\,A}.$$

Ἀλλά,

$\text{ἡμ}(B'-A)=\text{ἡμ}(B''+A)$, διότι $(B'-A)+(B''+A)=180^\circ$,

καὶ $\text{ἡμ}\,(B''-A)=\text{ἡμ}\,(B'+A)$.

Ἑπομένως ἔχομεν δύω μόνον τιμὰς διαφόρους, τὰς ἑξῆς·

$$\gamma=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}\,(B'+A)}{\text{ἡμ}\,A},\quad\gamma=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}(B''+A)}{\text{ἡμ}\,A}.$$

Τὰ παραπληρώματα τῶν γωνιῶν $B'+A$, $B''+A$, εἰσὶν αἱ τιμαὶ Γ', Γ'', τῆς γωνίας Γ τοῦ ζητουμένου τριγώνου [88]. Λοιπὸν

$$\gamma=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}\,\Gamma'}{\text{ἡμ}\,A}\quad\text{καὶ}\quad\gamma=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}\,\Gamma''}{\text{ἡμ}\,A}.$$

Ἐκ τῆς διασκοπήσεως ταύτης συνάγομεν ὅτι ἡ δευτέρα αὕτη λύσις, ἡ διὰ τῆς βοηθητικῆς γωνίας φ εὑρεθεῖσα, ποσῶς δὲν διαφέρει τῆς πρώτης, ἐν ᾗ ὡρίσθησαν πρῶτον αἱ γωνίαι Β, Γ.

92. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 3η. *Δοθεισῶν δύω πλευρῶν α, ϐ, σὺν τῇ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένῃ γωνίᾳ Γ, εὑρεῖν τὰ λοιπὰ μέρη γ, Α, Β.*

Ἐκ τῆς ἀναλογίας· [78]

$$\alpha : \beta :: \text{ἡμ}\,A : \text{ἡμ}\,B,$$

συνάγομεν·

$$\alpha + \beta : \alpha - \beta :: \text{ἡμ}\,A + \text{ἡμ}\,B : \text{ἡμ}\,A - \text{ἡμ}\,B.$$

Ἀλλὰ κατὰ χωρίον 49·

$$\text{ἡμ}\,A + \text{ἡμ}\,B : \text{ἡμ}\,A - \text{ἡμ}\,B :: \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(A + B) : \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(A - B)\cdot$$

ἄρα·

$$(1)\quad \alpha + \beta : \alpha - \beta :: \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(A + B) : \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(A - B).$$

Ἀλλά, $\tfrac{1}{2}(A + B) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \Gamma) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\Gamma$,

καὶ $$\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(A + B) = \text{συνεφ}\,\tfrac{1}{2}\Gamma.$$

Τῶν τριῶν πρώτων ὅρων τῆς ἀναλογίας (1) ὄντων γνωστῶν, ἐκ τῆς αὐτῆς πορίζόμεθα τὴν τιμὴν τοῦ $\tfrac{1}{2}(A - B)$.

Γνωστῶν ὄντων τοῦ ἡμιαθροίσματος καὶ τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν γωνιῶν Α, Β, ἑκατέρα τούτων εἶναι γνωστή, διότι·

$$A = \frac{A + B}{2} + \frac{A - B}{2}, \qquad B = \frac{A + B}{2} - \frac{A - B}{2}.$$

Ἀφοῦ προσδιορισθῶσιν αἱ γωνίαι Α, Β, ἡ ἀναλογία

$$(2)\qquad \text{ἡμ}\,A : \text{ἡμ}\,\Gamma :: \alpha : \gamma,$$

δίδει τὴν πλευρὰν γ.

93. Ἡ ἀναλογία (2) ἀπαιτεῖ νὰ ζητήσωμεν τρεῖς νέους λογαρίθμους. Κατὰ τὴν ἑξῆς ὅμως μέθοδον ζητήσομεν δύω μόνον.

Ἡ σειρὰ τῶν ἴσων λόγων·

$$\text{ἡμ}\,A : \text{ἡμ}\,B : \text{ἡμ}\,\Gamma :: \alpha : \beta : \gamma,$$

δίδει $$\text{ἡμ}\,A + \text{ἡμ}\,B : \text{ἡμ}\,\Gamma :: \alpha + \beta : \gamma,$$

καὶ $$\gamma = \frac{(\alpha + \beta)\,\text{ἡμ}\,\Gamma}{\text{ἡμ}\,A + \text{ἡμ}\,B}.$$

Ἀλλά, [48, 36]·

$$\eta\mu\, A + \eta\mu\, B = 2\,\eta\mu\, \tfrac{1}{2}(A+B)\, \sigma\upsilon\nu\, \tfrac{1}{2}(A-B),$$

$$\eta\mu\, \Gamma = 2\,\eta\mu\, \tfrac{1}{2}\Gamma\, \sigma\upsilon\nu\, \tfrac{1}{2}\Gamma.$$

Προσέτι, $\eta\mu\, \tfrac{1}{2}(A+B) = \eta\mu\,(90^\circ - \tfrac{1}{2}\Gamma) = \sigma\upsilon\nu\, \tfrac{1}{2}\Gamma$·
λοιπόν·

(3) $$\gamma = \frac{(\alpha+\beta)\,\eta\mu\, \tfrac{1}{2}\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\, \tfrac{1}{2}(A-B)}.$$

Ἐν τῷ τύπῳ τούτῳ δύω μόνον λογαρίθμων ἔχομεν χρείαν, διότι ὁ τοῦ ἀθροίσματος $(\alpha+\beta)$ εἶναι ἤδη γνωστός.

94. Προσδιορίζομεν προσέτι τὴν πλευρὰν γ κατ' εὐθεῖαν, διὰ μόνων τῶν δεδομένων α, β, Γ. Κατὰ χωρίον 79 ἔχομεν·

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\, \sigma\upsilon\nu\, \Gamma}.$$

Ἵνα ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸν τύπον τοῦτον τοὺς λογαρίθμους, ἐκτελοῦμεν τὸν ἑξῆς μετασχηματισμόν·

Κατὰ χωρία 27, 36, ἔχομεν,

$$\sigma\upsilon\nu^2 \tfrac{1}{2}\Gamma + \eta\mu^2 \tfrac{1}{2}\Gamma = 1, \qquad \sigma\upsilon\nu^2 \tfrac{1}{2}\Gamma - \eta\mu^2 \tfrac{1}{2}\Gamma = \sigma\upsilon\nu\,\Gamma.$$

Ἑπομένως·

$$\gamma = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\sigma\upsilon\nu^2\tfrac{1}{2}\Gamma + \eta\mu^2\tfrac{1}{2}\Gamma) - 2\alpha\beta\,(\sigma\upsilon\nu^2\tfrac{1}{2}\Gamma - \eta\mu^2\tfrac{1}{2}\Gamma)}$$

$$= \sqrt{(\alpha+\beta)^2\,\eta\mu^2\tfrac{1}{2}\Gamma + (\alpha-\beta)^2\,\sigma\upsilon\nu^2\tfrac{1}{2}\Gamma}$$

$$= (\alpha+\beta)\,\eta\mu\tfrac{1}{2}\Gamma \sqrt{1 + \frac{(\alpha-\beta)^2\,\sigma\upsilon\nu\varepsilon\varphi^2\tfrac{1}{2}\Gamma}{(\alpha+\beta)^2}}.$$

Καλοῦμεν φ βοηθητικήν τινα γωνίαν, ὥστε·

$$\varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{(\alpha-\beta)\,\sigma\upsilon\nu\varepsilon\varphi\,\tfrac{1}{2}\Gamma}{\alpha+\beta}.$$

τότε τὸ τελευταῖον ῥιζικὸν γίνεται·

$$\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\varphi} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\,\varphi},$$

ἑπομένως $$\gamma = \frac{(\alpha+\beta)\,\eta\mu\,\tfrac{1}{2}\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\,\varphi}.$$

Ἡ δευτέρα αὕτη λύσις δὲν διαφέρει τῆς (3) ἐν ἐδαφίῳ 93, διότι ἡ ἐφ $\frac{1}{2}$(Α + Β) ἰσοῦται τῇ συνεφ $\frac{1}{2}$ Γ· ἡ τιμὴ τῆς ἐφ φ εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ τῆς ἐφ $\frac{1}{2}$ (Α — Β) διδομένη ἐκ τῆς ἀναλογίας (1)· ἑπομένως αἱ δύω τιμαὶ τῆς γ κατὰ μορφὴν μόνον διαφέρουσι.

95. Πολλάκις ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς συμβαίνει αἱ πλευραὶ νὰ δίδωνται διὰ τῶν λογαρίθμων αὐτῶν. Τεθείσθω ὅτι τὸ τοιοῦτον ὑπάρχει ὡς πρὸς τὰς α, β, ὅτι ἡ γωνία Γ εἶναι δεδομένη καὶ ὅτι αἱ γωνίαι Α, Β, εἰσὶ τὰ μόνα ἄγνωστα μέρη ὧν χρείαν ἔχομεν.

Ἵνα προσδιορίσωμεν τὴν $\frac{1}{2}$ (Α — Β) διὰ τῆς ἀναλογίας (1), πρέπει νὰ ζητήσωμεν προηγουμένως τὰς πλευρὰς α, β, ἐν τοῖς πίναξιν· ἀλλ' ἀποφεύγομεν τοῦτο τῇ χρήσει γωνίας τινὸς βοηθητικῆς ψ, τοιαύτης ὥστε, $\quad \text{ἐφ}\,\psi = \frac{\beta}{\alpha}.$

Κατὰ χωρίον 42 ἔχομεν·

$$\text{ἐφ}(45^\circ - \psi) = \frac{\text{ἐφ}\,45^\circ - \text{ἐφ}\,\psi}{1 + \text{ἐφ}\,45^\circ\,\text{ἐφ}\,\psi} = \frac{1 - \text{ἐφ}\,\psi}{1 + \text{ἐφ}\,\psi} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta},$$

καὶ ἐκ τῆς ἀναλογίας (1)·

$$\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\,(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\,\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\,(\mathrm{A} + \mathrm{B}).$$

Λοιπόν·

$$\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\,(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \text{ἐφ}\,(45^\circ - \psi)\,\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\,(\mathrm{A} + \mathrm{B}).$$

Διὰ τοῦ τρόπου τούτου ὁ ἀριθμὸς τῶν ζητητέων λογαρίθμων ἐλαττοῦται κατὰ δύω.

96. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 4η. *Δοθεισῶν τῶν τριῶν πλευρῶν α, β, γ, εὑρεῖν τὰς γωνίας Α, Β, Γ.*

Κατὰ χωρίον 79 ἔχομεν·

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}\,\mathrm{A}, \qquad \text{ἢ} \qquad \text{συν}\,\mathrm{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}.$$

Ὁμοίως προσδιορίζονται καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι.

Ἀλλ' ὑπάρχουσιν ἕτεροί τινες τύποι διὰ λογαρίθμων λογιζόμενοι.

Εἰς τὸν τύπον [38] $2\,ἡμ^2\,\frac{1}{2}A = 1 - συν\,A$, ἀντεισάγομεν τὴν ἀνωτέρω τιμὴν τοῦ συν Α καὶ ἔχομεν·

$$2\,ἡμ^2\,\tfrac{1}{2}A = 1 - \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\beta\gamma}{2\beta\gamma}$$

$$= \frac{\alpha^2-(\beta-\gamma)^2}{2\beta\gamma} = \frac{(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)}{2\beta\gamma}.$$

Ἄρα, $ἡμ\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)}{4\beta\gamma}}$.

Καλοῦμεν τὴν περίμετρον $\alpha+\beta+\gamma = 2s$· ἐπομένως ἔχομεν·
$\alpha+\beta-\gamma = 2(s-\gamma)$, $\alpha-\beta+\gamma = 2(s-\beta)$.
Ἡ δὲ ἀνωτέρω ἔκφρασις γίνεται·

$$ἡμ\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-\beta)(s-\gamma)}{\beta\gamma}}.$$

Ἂν καὶ ἡ γωνία $\frac{1}{2}A$ ὡρίσθη διὰ τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς, οὐδόλως ὅμως εἶναι ἀμφίβολος· διότι $A < 180°$ καὶ $\frac{1}{2}A < 90°$, ἤτοι τὸ $ἡμ\,\frac{1}{2}A$ εἶναι θετικόν.

Ἐπίσης εὐκόλως εὑρίσκομεν τοὺς τύπους δι' ὧν προσδιορίζονται τὸ $συν\,\frac{1}{2}A$ καὶ ἡ $ἐφ\,\frac{1}{2}A$.

Κατὰ χωρίον 38, $2\,συν^2\,\frac{1}{2}A = 1 + συν\,A$· διὰ μετασχηματισμῶν ὁμοίων τοῖς ἡγουμένοις λαμβάνομεν·

$$συν\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{s(s-\alpha)}{\beta\gamma}}.$$

Διαιρέσει δὲ τοῦ $ἡμ\,\frac{1}{2}A$ διὰ τοῦ $συν\,\frac{1}{2}A$·

$$ἐφ\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-\beta)(s-\gamma)}{s(s-\alpha)}}.\quad (*)$$

(*) Ὅταν πρόκηται νὰ προσδιορίσωμεν μίαν μόνην γωνίαν, ἀδιάφορόν ἐστιν οἱονδήποτε τῶν τύπων τούτων μεταχειρισθῶμεν, διότι ἕκαστος ἀπαιτεῖ τὴν ζήτησιν τεσσάρων λογαρίθμων. Ὅταν ὅμως πρόκηται νὰ λογίσωμεν δύω ἢ καὶ τὰς τρεῖς γωνίας, προτιμητέα εἶναι ἡ χρῆσις τοῦ τελευταίου τύπου, διότι ἀρκεῖ νὰ ζητήσωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν τεσσάρων ποσοτήτων s, $s-\alpha$, $s-\beta$, $s-\gamma$· ἐνῷ, ἵνα μεταχειρισθῶμεν τοὺς δύω πρώτους τύπους, ἔχομεν χρείαν ἓξ λογαρίθμων διὰ τὸν πρῶτον, ἢ ἑπτὰ διὰ τὸν δεύτερον.

Ἕκαστος τῶν ὄπισθεν τριῶν τύπων, τῶν διδόντων τὰς τιμὰς τοῦ ἡμ $\frac{1}{2}$A, τοῦ συν $\frac{1}{2}$A, καὶ τῆς ἐφ $\frac{1}{2}$A, ἐμφαίνει κανόνα καθ' ὃν λογίζεται μία οἱαδήποτε ἐκ τῶν τριῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου, οὗτινος αἱ τρεῖς πλευραὶ εἰσὶ γνωσταί.

Ἐφαρμόζοντες τοὺς λογαρίθμους εἰς τοὺς αὐτοὺς τρεῖς τύπους, λαμβάνομεν·

$$\lambda o\gamma\ \acute{\eta}\mu\tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\left[\lambda o\gamma\,(s-\beta)+\lambda o\gamma(s-\gamma)+\sigma.\,\lambda o\gamma\,\beta+\sigma.\,\lambda o\gamma\,\gamma\right],$$

$$\lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\left[\lambda o\gamma\,s+\lambda o\gamma\,(s-\alpha)+\sigma.\,\lambda o\gamma\,\beta+\sigma.\,\lambda o\gamma\,\gamma\right],$$

$$\lambda o\gamma\ \acute{\epsilon}\varphi\tfrac{1}{2}\ A = \tfrac{1}{2}\left[\lambda o\gamma(s-\beta)+\lambda o\gamma(s-\gamma)+\sigma.\lambda o\gamma s+\sigma.\lambda o\gamma(s-\alpha)\right].$$

97. Ἠξεύρομεν ὅτι δὲν εἶναι πάντοτε δυνατὸν νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τριῶν πλευρῶν λαμβανομένων κατ' ἀρέσκειαν. Τὸ ἀδύνατον τοῦτο δείκνυται καὶ διὰ τοῦ λογισμοῦ. Θεωρήσωμεν τὸν τύπον·

$$\acute{\eta}\mu\ \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-\beta)(s-\gamma)}{\beta\gamma}}.$$

Ὅταν τὸ τρίγωνον ἦναι δυνατόν, ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ ἡμ. $\frac{1}{2}$A ἔσεται πραγματικὴ καὶ ἐλάσσων τῆς μονάδος· ὅταν ὅμως ἀδύνατον, ἡ τιμὴ αὕτη ἔσεται ἢ φανταστική, ἢ μείζων μονάδος. Ἵνα ὑπάρχῃ τὸ ἀδύνατον, πρέπει ἑκάστη πλευρὰ νὰ ἦναι μείζων τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύω ἑτέρων.

Ἐξετάσωμεν ὁποῖα ἐξαγόμενα δίδει τότε ὁ τύπος.

1) Ἔστω $\beta>\alpha+\gamma$· ἔχομεν $2\beta>\alpha+\beta+\gamma$· ἄρα $2\beta>2s$ καὶ $s-\beta<0$. Ἀλλὰ $\alpha+\beta>\gamma$· λοιπὸν $\alpha+\beta+\gamma$ ἢ $2s>2\gamma$ καὶ $s-\gamma>0$. Ἄρα ἡ τιμὴ τοῦ ἡμ $\frac{1}{2}$A εἶναι φανταστική.

2) Ἔστω $\gamma>\alpha+\beta$· εὑρίσκομεν $s-\gamma<0$ καὶ $s-\beta>0$, δηλ. τὸ ἡμ $\frac{1}{2}$A εἶναι φανταστικόν.

3) Ἔστω $\alpha>\beta+\gamma$· ἔχομεν $\alpha+\beta+\gamma$, ἢ $2s>2\beta+2\gamma$·

ἄρα, $s>\beta+\gamma$ καὶ $s-\beta>\gamma$, $s-\gamma>\beta$,

καὶ $(s-\beta)(s-\gamma)>\beta\gamma$.

Ἐπομένως ἡ τιμὴ του ἡμ $\frac{1}{2}$ A ἔσεται μείζων τῆς μονάδος, ὅπερ ἀδύνατον.

Ἀνάλογοι διασκοπήσεις, ἃς παρελίπομεν χάριν συντομίας, ἐφαρμόζονται καὶ πρὸς τοὺς δύω ἑτέρους τύπους, τοῦ συν $\frac{1}{2}$Α καὶ τῆς εφ $\frac{1}{2}$Α.

98. Ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ δεικνύεται ὅτι τὸ ἑξῆς πρόβλημα· *δοθεισῶν τῶν τριῶν γωνιῶν τριγώνου τινός, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ*, εἶναι ἀόριστον, καὶ ὅτι εὑρίσκομεν μόνον τὸν λόγον ὃν πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν αἱ πλευραί. Δείξομεν ὅτι εἰς τὰς αὐτὰς συνεπείας καταντῶμεν διὰ τῶν θεμελιωδῶν τύπων·

$$(1) \qquad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \text{ συν Α},$$
$$(2) \qquad \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \text{ συν Β},$$
$$(3) \qquad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \text{ συν Γ}.$$

Προσθέτομεν σύνδυο τὰς ἐξισώσεις ταύτας καὶ ἔχομεν·

$$0 = \gamma^2 - \gamma\,(\beta \text{ συν Α} + \alpha \text{ συν Β}),$$
$$0 = \beta^2 - \beta\,(\alpha \text{ συν Γ} + \gamma \text{ συν Α}),$$
$$0 = \alpha^2 - \alpha\,(\beta \text{ συν Γ} + \gamma \text{ συν Β}).$$

Τὸ σύστημα τῶν λύσεων $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, ἐτυμοποιεῖ μὲν τὰς τρεῖς ταύτας ἐξισώσεις, πλὴν δὲν ἁρμόζει εἰς τὸ πρόβλημα περὶ οὗ πρόκειται· δι' ὃ ἀποβάλλομεν αὐτὸ καὶ λαμβάνομεν τὰς ἑξῆς πρωτοβαθμίους ἐξισώσεις·

$$(4) \qquad \alpha \text{ συν Β} + \beta \text{ συν Α} - \gamma = 0,$$
$$(5) \qquad \alpha \text{ συν Γ} - \beta + \gamma \text{ συν Α} = 0,$$
$$(6) \qquad \alpha - \beta \text{ συν Γ} - \gamma \text{ συν Β} = 0.$$

Ἐπειδὴ εἰς ταύτας οἱ γνωστοὶ ὅροι εἰσὶ 0, ἠξεύρομεν ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων, ἐν γένει, εἰσὶν ἀόριστοι, εἰ ὁ κοινὸς αὐτῶν παρονομαστὴς ἰσοῦται 0. Ἀλλ' ἡ συνθήκη αὕτη ἐκπληροῦται, διότι, ἐὰν σχηματίσωμεν τὸν κοινὸν τοῦτον παρονομαστήν, κατὰ τὸν ἀλγεβρικὸν κανόνα, εὑρίσκομεν τὴν ἑξῆς ἔκθεσιν, ἴσην 0 οὖσαν κατὰ χωρίον 52. [Παράδ. 15].

$$\text{συν}^2 \text{ Α} + \text{συν}^2 \text{ Β} + \text{συν}^2 \text{ Γ} + 2 \text{ συν Α συν Β συν Γ} - 1.$$

Ἄρα, τὸ σύστημα τῶν προτεθεισῶν ἐξισώσεων ἐπιδεκτικόν ἐστιν ἀπείρου ἀριθμοῦ λύσεων διαφόρων.

Ἵνα εὕρωμεν τοὺς λόγους δύω πλευρῶν πρὸς τὴν τρίτην, π. χ. τῶν α, β, πρὸς γ, διαιροῦμεν διὰ γ τὰς ἐξισώσεις (4), (5), (6) καὶ λαμβάνομεν·

$$(7)\qquad \frac{\alpha}{\gamma}\,\text{συν}\,B + \frac{\beta}{\gamma}\,\text{συν}\,A = 1,$$

$$(8)\qquad \frac{\alpha}{\gamma}\,\text{συν}\,\Gamma - \frac{\beta}{\gamma} = -\,\text{συν}\,A,$$

$$(9)\qquad \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma}\,\text{συν}\,\Gamma = \text{συν}\,B.$$

Αἱ ἐξισώσεις (7), (8), δίδουσιν·

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{1 - \text{συν}^2 A}{\text{συν}\,B + \text{συν}\,A\,\text{συν}\,\Gamma},\quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\text{συν}\,A\,\text{συν}\,B + \text{συν}\,\Gamma}{\text{συν}\,B + \text{συν}\,A\,\text{συν}\,\Gamma}.$$

Φέρομεν τὰς τιμὰς ταύτας τῶν $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$, εἰς τὴν ἐξίσωσιν (9) καὶ ἔχομεν τὴν γνωστὴν σχέσιν·

$$1 - \text{συν}^2 A - \text{συν}^2 B - \text{συν}^2 \Gamma - 2\,\text{συν}\,A\,\text{συν}\,B\,\text{συν}\,\Gamma = 0.$$

Ὅθεν συνάγομεν, ὅτι ἡ τρίτη ἐξίσωσις ἐτυμοποιεῖται διὰ τῶν ἐκ τῶν δύω πρώτων ἐξαγομένων τιμῶν.

Ἐν τῇ σχέσει $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{1 - \text{συν}^2 A}{\text{συν}\,B + \text{συν}\,A\,\text{συν}\,\Gamma}$ θέτομεν $\text{ἡμ}^2 A$ ἀντὶ $1 - \text{συν}^2 A$, καὶ $-\,\text{συν}\,(A + \Gamma)$, ἢ τὸ ἴσον τούτῳ $-\,\text{συν}\,A\,\text{συν}\,\Gamma + \text{ἡμ}\,A\,\text{ἡμ}\,\Gamma$, ἀντὶ $\text{συν}\,B$; καὶ λαμβάνομεν·

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\text{ἡμ}^2 A}{\text{ἡμ}\,A\,\text{ἡμ}\,\Gamma} = \frac{\text{ἡμ}\,A}{\text{ἡμ}\,\Gamma};$$

Ἐπίσης ἐν τῇ $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\text{συν}\,A\,\text{συν}\,B + \text{συν}\,\Gamma}{\text{συν}\,B + \text{συν}\,A\,\text{συν}\,\Gamma}$ θέτομεν ἀντὶ $\text{συν}\,\Gamma$ καὶ $\text{συν}\,B$ τὰς τιμάς·

$$-\,\text{συν}\,A\,\text{συν}\,B + \text{ἡμ}\,A\,\text{ἡμ}\,B,\quad -\,\text{συν}\,A\,\text{συν}\,\Gamma + \text{ἡμ}\,A\,\text{ἡμ}\,\Gamma\text{·}$$

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\text{ἡμ}\,A\,\text{ἡμ}\,B}{\text{ἡμ}\,A\,\text{ἡμ}\,\Gamma} = \frac{\text{ἡμ}\,B}{\text{ἡμ}\,\Gamma};$$

Ἀλλ' αἱ ἰσότητες $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\text{ἡμ. Α}}{\text{ἡμ. Γ}}$, $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\text{ἡμ. Β}}{\text{ἡμ. Γ}}$, δίδουσιν

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\text{ἡμ. Α}}{\text{ἡμ. Β}}.$$

Λοιπόν, *αἱ πλευραὶ λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὃν τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν τῶν ὑπ' αὐτῶν ὑποτεινομένων.*

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΠΡΟΕΚΤΕΘΕΝΤΩΝ. (*)

99. *Τριγώνου ὀρθογωνίου δοθεισῶν τῆς ὑποτεινούσης* $\alpha = 1785^{\mu.},395$, *καὶ τῆς γωνίας* $\text{Β} = 59^\circ\, 37'\, 42''$, *εὑρεῖν τὰ λοιπὰ μέρη* Γ, β, γ, [83].

Ἀφαιρέσει τῆς Β ἀπὸ 90°, εὑρίσκομεν $\Gamma = 30^\circ\, 22'\, 18''$.

Λογισμὸς τῆς β.	$\beta = \alpha$ ἡμ. Β.
λογ ἡμ. $59^\circ\, 37'\, 42''$	9,9358919
λογ 1785,395	3,2517343
λογ β	3,1876262.

$$\beta = 1540^{\mu.},374.$$

Λογισμὸς τῆς γ.	$\gamma = \alpha$ συν Β.
λογ συν $59^\circ\, 37'\, 42''$	9,7038132
λογ 1785,395	3,2517343
λογ γ	2,9555475.

$$\gamma = 902^{\mu.},708.$$

100. (Σχ. 19) *Τριγώνου οἱουδήποτε* ΑΒΓ, *δοθεισῶν* $\alpha = 2597^{\mu.},845$, $\beta = 3084^{\mu.},327$, $\text{Α} = 56^\circ\, 12'\, 47''$, *εὑρεῖν* Β, Γ, γ, [88].

Λογισμὸς τῆς Β,	$\alpha : \beta :: \text{ἡμ. Α} : \text{ἡμ. Β}$.
λογ ἡμ. $56^\circ\, 12'\, 47''$	9,9196592
λογ 3084,327	3,4891604
λογ 2597,845	6,5853868
λογ ἡμ. Β	9,9942064.

(*) Αἱ τριγωνομετρικαὶ ἐργασίαι ἀπαιτοῦσι διάφορα ἐργαλεῖα, ὧν ἡ περιγραφὴ δὲν εἶναι ἡμέτερον καθῆκον ἐνταῦθα.

Ὑπάρχουσι δύω λύσεις.

1η. $B = 80^0\,39'\,43''$.

Λογισμὸς τῆς Γ.

$Γ = 180^0 - A - B.$

$$\begin{array}{l} 180^0 \\ A = 56^0\,12'\,47'' \\ \underline{B = 80^0\,39'\,43''} \\ Γ = 43^0\;\;7'\,30''. \end{array}$$

Λογισμὸς τῆς γ.

ἡμ A : ἡμ Γ : : α : γ.

λογ 2597,845	3,4146132
λογ ἡμ 43° 7′ 30″	9,8347972
σ λογἡμ 56°12′47″	0,0803408
λογ γ	3,3297512

$γ = 2136^μ,737.$

2α. $B = 99^0\,20'\,17''$.

Λογισμὸς τῆς Γ.

$Γ = 180^0 - A - B.$

$$\begin{array}{l} 180^0 \\ A = 56^0\,12'\,47'' \\ \underline{B = 99^0\,20'\,17''} \\ Γ = 24^0\,26'\,56'' \end{array}$$

Λογισμὸς τῆς γ.

ἡμ A : ἡμ Γ : : α : γ.

λογ 2597,845	3,4146132
λογ ἡμ 24° 26′56″	9,6168759
σ λογἡμ 56°12′47″	0,0803408
λογ γ	3,1118299

$γ = 1293^μ,689.$

101. *Δοθέντων τῶν ἀποστημάτων α, ϐ, σημείου τινὸς Γ ἀπὸ δύο σημείων Α, Β, γνωστῶν, εὑρεῖν τὸ σημεῖον Γ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.* (Σχ. 19)

Μετροῦμεν τὸ ἀπόστημα ΑΒ. Γνωρίζομεν οὕτω τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ εὐκόλως λογίζομεν τὴν γωνίαν Α [87]. Τῆς διευθύνσεως τῆς πλευρᾶς ΑΓ ὁρισθείσης οὕτω, ἀρκεῖ πρὸς εὕρεσιν τοῦ σημείου Γ, νὰ προϐῶμεν ἐπὶ τῆς διευθύνσεως ταύτης κατὰ τὸ δεδομένον ἀπόστημα $ΑΓ = ϐ$. Ἔστωσαν·

$α = 9459^μ,31, \quad ϐ = 8032^μ,29, \quad γ = 8242^μ,58.$

Ἔχομεν· $2s = 25734,18, \quad s = 12867,09,$

$s - ϐ = 4834,80, \quad s - γ = 4624,51.$

$$ἡμ\,\tfrac{1}{2}A = \rho\sqrt{\frac{(s-ϐ)\,(s-γ)}{ϐγ}}.$$

λογ (s — β)	3,6843785
λογ (s — γ)	3,6650657
σ. λογ β	6,0951606
σ. λογ γ	6,0839368
2 λογ ἡμ $\frac{1}{2}$ Α	19,5285416
λογ ἡμ $\frac{1}{2}$ Α	9,7642708.
$\frac{1}{2}$ Α = 35° 31′ 47″	Α = 71° 3′ 34″.

102. *Προσιτοῦ κτιρίου εὑρεῖν τὸ ὕψος* ΑΒ. (Σχ. 20)

Ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, ὑποτιθεμένου ἐπιπέδου καὶ ὁριζοντείου, μετροῦμεν μίαν βάσιν, τὴν ΒΓ, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ποδὸς τοῦ κτιρίου, ἧς τὸ μῆκος κανονίζομεν πρὸς τὸ ὕψος ΑΒ οὕτως ὥστε ν' ἀποφύγωμεν τὰς μικρὰς γωνίας. Τοποθετοῦμεν εἰς Γ τὸ ἐργαλεῖον δι' οὗ μετροῦμεν τὴν γωνίαν ΕΔΑ, τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς ΔΑ καὶ τῆς ὁριζοντείου ΔΕ, παραλλήλου τῆς ΓΒ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΕΔ, γνωστῶν οὐσῶν τῆς πλευρᾶς ΔΕ καὶ τῆς γωνίας Δ, εὑρεθήσεται ἡ ΑΕ [84]. Προστιθεμένου εἰς ταύτην τοῦ ὕψους ΓΔ, λαμβάνομεν τὸ ζητούμενον ΑΒ.

Ἔστωσαν·

ΓΔ = 1^{μ},10; ΔΕ = 61^{μ},28, Δ = 41° 31′ 25″.

Ἔχομεν, ΑΕ = 61,28 × εφ 41° 31′ 25″.

λογ εφ 41° 31′ 25″	9,9471690
λογ 61,28	1,7873188
λογ ΑΕ	1,7344878.

ΑΕ = 54^{μ},261, ΑΒ = 55^{μ},361.

103. (Σχ. 21) Ὅταν ἡ βάσις τοῦ κτιρίου ἦναι ἀπρόσιτος, ἢ ὅταν ΑΒ ἦναι τὸ ὕψος λόφου τινός, ὁ ποῦς τῆς καθέτου ταύτης εἶναι ἄγνωστος καὶ δὲν δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν τὸ ἀπόστημα ΒΓ. Ἀλλὰ τότε μετροῦμεν τὴν γωνίαν ΑΔΕ, χωρὶς νὰ βλέπωμεν τὴν γραμμὴν ΑΒ. Πρὸς τοῦτο διαθέτομεν τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου τοῦ ἐργαλείου, ὥστε νὰ διέρχηται διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κτιρίου. Προσέτι, εὑρίσκομεν τὸ ἀπόστημα ΑΔ, ὡς ἐν τῷ ἑξῆς προβλήματι, ἐπομένως καὶ τὸ ὕψος ΑΕ. [83]

104. *Εὑρεῖν τὸ ἀπόστημα μεταξὺ δύω σημείων Α, Π, ὧν τὸ πρῶτον μόνον εἶναι προσιτόν.* (Σχ. 22)

Μετροῦμεν βάσιν τινά, τὴν ΑΒ, καὶ τὰς γωνίας ΠΑΒ, ΠΒΑ· καὶ κατὰ ἐδάφιον 87 προσδιορίζομεν ΑΠ.

Ἔστωσαν δεδομένα· ΑΒ $= 247^{\mu}.{,}49$, Α $= 62^{\circ}\ 41'$, Β $= 59^{\circ}\ 42'$. Εὑρίσκομεν Π $= 57^{\circ}\ 37'$, καὶ ὡς ἑξῆς τὴν ΑΠ.

ἡμ Π : ἡμ Β : : ΑΒ : ΑΠ.

λογ ΑΒ	2,3935577
λογ ἡμ Β	9,9362098
σ. λογ ἡμ Π	0,0734087
λογ ΑΠ	2,4031762.

Ἀπόστημα ζητούμενον ΑΠ $= 253^{\mu}{,}032$.

105. *Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν* ΠΚ *δύω σημείων ἀμφοτέρων ἀπροσίτων.* (Σχ. 23)

Μετροῦμεν βάσιν τινά, τὴν ΑΒ, καὶ τὰς γωνίας ΒΑΠ, ΒΑΚ, ΑΒΠ, ΑΒΚ· εἶτα προσδιορίζομεν, ὡς εἴρηται, τὴν πλευρὰν ΑΠ τοῦ τριγώνου ΑΒΠ, καὶ τὴν ΑΚ τοῦ τριγώνου ΑΒΚ. Ἡ γωνία ΠΑΚ εἶναι γνωστή· διότι, ἐὰν μὲν τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Π, Κ, κῆνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἔχομεν ΠΑΚ $=$ ΒΑΠ $-$ ΒΑΚ· ἐν πάσει δὲ περιπτώσει, λαμβάνομεν ἀμέσως τὴν γωνίαν ταύτην.

Οὕτω, τοῦ τριγώνου ΠΑΚ γνωσταί εἰσι δύω πλευραὶ καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία· ἄρα εὐκόλως εὑρίσκομεν [92] τὴν πλευρὰν ΠΚ.

Ἔστωσαν δεδομένα·

ΑΒ $= 345^{\mu}.{,}29$, ΒΑΠ $= 69^{0}\ 26'$, ΒΑΚ $= 44^{0}\ 31'$,

ΠΑΚ $= 25^{0}\ 41'$, ΑΒΠ $= 48^{0}\ 15'$, ΑΒΚ $= 102^{0}\ 14'$.

Ἐκ τούτων συνάγομεν ἀμέσως·

ΑΠΒ $= 62^{0}\ 19'$, ΑΚΒ $= 33^{0}\ 15'$.

Εἶτα ἐκτελοῦμεν τοὺς ἑξῆς λογισμούς.

1) *Λογισμὸς τῆς* ΑΠ, ἡμ. ΑΠΒ : ἡμ. ΑΒΠ : : ΑΒ : ΑΠ.

λογ ΑΒ	2,5381840
λογ ἡμ. ΑΒΠ	9,8727722
σ. λογ ἡμ. ΑΠΒ	0,0527973
λογ ΑΠ	2,4637535.

ΑΠ $=$ 290μ.,907.

2) *Λογισμὸς τῆς* ΑΚ, ἡμ. ΑΚΒ : ἡμ. ΑΒΚ : : ΑΒ : ΑΚ.

λογ ΑΒ	2,5381840
λογ ἡμ. ΑΒΚ	9,9900247
σ. λογ ἡμ. ΑΚΒ	0,2609871
λογ ΑΚ	2,7891958.

ΑΚ $=$ 615μ.,454.

3) *Λογισμὸς τῶν γωνιῶν* Π καὶ Κ.

Ἔστω ΑΚ $= \pi$, ΑΠ $= \varkappa$, ΑΠΚ $=$ Π, ΑΚΠ $=$ Κ.

Εὑρίσκομεν· $\pi + \varkappa = 906{,}361$,

$\pi - \varkappa = 324{,}547$, $\frac{1}{2}(\Pi + K) = 77^0\ 9'\ 30''$.

Εἶτα καθιστῶμεν τὴν ἀναλογίαν·

$\pi + \varkappa : \pi - \varkappa : :$ ἐφ $\frac{1}{2}(\Pi + K)$: ἐφ $\frac{1}{2}(\Pi - K)$.

λογ ἐφ $\frac{1}{2}(\Pi + K)$	10,6421427
λογ $(\pi - \varkappa)$	2,5112776
σ. λογ $(\pi + \varkappa)$	7,0426988
λογ ἐφ $\frac{1}{2}(\Pi - K)$	10,1961191.

Ἐπομένως· $\frac{1}{2}(\Pi - K) = 57^0\ 31'\ 6''$.

$\Pi = 134^0\ 40'\ 36''$, $K = 19^0\ 38'\ 24''$.

4) *Λογισμὸς τῆς* ΠΚ, ἡμ Κ : ἡμ. ΠΑΚ : : $\varkappa$: ΠΚ.

λογ $\varkappa$	2,4637535
λογ ἡμ. ΠΑΚ	9,6368859
σ. λογ ἡμ. Κ	0,4735196
λογ ΠΚ	25741590.

ΠΚ $=$ 375μ.,11.

106. ΕΤΕΡΑ ΛΥΣΙΣ. Τ' ἀποστήματα ΑΠ καὶ ΑΚ εὕρομεν διὰ τῶν λογαρίθμων αὐτῶν· ἐνταῦθα λοιπὸν ποιοῦμεν χρῆσιν τῆς βοηθητικῆς γωνίας ψ, περὶ ἧς λόγος ἐν ἐδαφίῳ 95.

Ἀφοῦ εὕρομεν λογ ΑΠ καὶ λογ ΑΚ, ζητοῦμεν τὰς γωνίας Π, Κ, ὡς ἑξῆς.

Λογισμὸς τῆς ψ. $\qquad$ $\text{ἐφ}\,\psi = \dfrac{\text{ΑΠ}}{\text{ΑΚ}}$.

λογ ΑΠ	2,4637535
σ. λογ ΑΚ	7,2108042
λογ ἐφ ψ	9,6745577.

$\psi = 25^0\ 17'\ 55''$ $\qquad$ $45^0 - \psi = 19^0\ 42'\ 5''$.

Λογισμὸς τῶν Π *καὶ* Κ.

$$\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(\Pi - \text{K}) = \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(\Pi + \text{K}) \times \text{ἐφ}\,(45^0 - \psi).$$

λογ ἐφ $\frac{1}{2}$ (Π + Κ)	10,6421427
λογ ἐφ ($45^0 - \psi$)	9,5539790
λογ ἐφ $\frac{1}{2}$ (Π — Κ)	10,1961217.

$$\tfrac{1}{2}(\Pi - \text{K}) = 57^0\ 31'\ 6''.$$

Αἱ λοιπαὶ ἐργασίαι ἐκτελοῦνται ὡς ἀνωτέρω.

107. *Εὑρεῖν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους σημεῖον, τὸ* Μ, *ἀφ' οὗ ἐθεωρήθησαν τ' ἀποστήματα* ΑΒ, ΑΓ, *τριῶν σημείων* Α, Β, Γ, *κειμένων ἐπὶ ἐδάφους ὁμαλοῦ, ὑπὸ γωνίας δεδομένας.* (Σχ. 24)

Τὸ ζητούμενον σημεῖον ὑποτίθεται ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΑΓ. Κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ προβλήματος γνωσταί εἰσιν αἱ γωνίαι ΑΜΒ καὶ ΑΜΓ. Γράφομεν ἐπὶ μὲν τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου ἱκανὸν τῆς πρώτης γωνίας, ἐπὶ δὲ τῆς ΑΓ τμῆμα ἱκανὸν τῆς δευτέρας· τὰ τόξα ἕξουσι κοινὰ τὰ σημεῖα Μ, Α, ὧν τὸ πρῶτον ἔσεται τὸ ζητούμενον (*). Ἀλλὰ τῆς κατασκευῆς ταύτης ἡ χρῆσις εἶναι ἀδύνατος ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, δι' ὃ προσδιορίσομεν διὰ τοῦ λογισμοῦ τὴν γωνίαν ΒΑΜ καὶ τὸ ἀπόστημα ΑΜ. Ἡ ἑξῆς μέθοδος, καθ' ἣν ζητοῦνται πρῶτον αἱ γωνίαι ΑΒΜ, ΑΓΜ, εἶναι ἴσως ἡ ἁπλουστέρα.

(*) Ἐὰν τὰ τόξα, περὶ ὧν ὁ λόγος, ταὐτίζωνται, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον. Ἡ μερικὴ αὕτη περίπτωσις συμβαίνει ὅταν αἱ δοθεῖσαι γωνίαι ΑΜΒ, ΑΜΓ, ἰσοῦνται ἀμοιβαίως ταῖς γωνίαις ΒΓΑ, ΓΒΑ, τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἐὰν τὰ τόξα ἔχωσι μόνον τὸ σημεῖον Α κοινόν, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον ὡς ἐξεφωνήθη, διότι τὸ σημεῖον Μ πρέπει νὰ κῆται ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΑΓ.

Καλοῦμεν τὰ δεδομένα $AB = \alpha$, $A\Gamma = \beta$, $BA\Gamma = A$, $AMB = a$, $AM\Gamma = \beta$, καὶ τὰ ἄγνωστα $ABM = x$, $A\Gamma M = \psi$.

Ἐν τῷ τετραπλεύρῳ ΑΒΜΓ ἔχομεν·

$$x + \psi = 360^o - (A + a + \beta).$$

Οὕτως εἶναι γνωστὸν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν x, ψ· ζητήσωμεν τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΜ καὶ ΑΓΜ δίδουσι,

(1) $\quad ἡμ\, a : ἡμ\, x :: \alpha : AM, \quad ἡμ\, \beta : ἡμ\, \psi :: \beta : AM.$

Ἐξισοῦμεν τὰς τιμὰς τῆς ΑΜ καὶ λαμβάνομεν·

$$\frac{\alpha\, ἡμ\, x}{ἡμ\, a} = \frac{\beta\, ἡμ\, \psi}{ἡμ\, \beta}, \quad ἢ \quad \frac{\beta\, ἡμ\, a}{\alpha\, ἡμ\, \beta} = \frac{ἡμ\, x}{ἡμ\, \psi}.$$

Καλοῦμεν $\varphi = \dfrac{\alpha\, ἡμ\, \beta}{ἡμ\, a}$ (ἡ ποσότης φ λογίζεται διὰ λογαρίθμων) καὶ ἔχομεν·

$$\frac{\beta}{\varphi} = \frac{ἡμ\, x}{ἡμ\, \psi}, \quad ὅθεν \quad \frac{\beta + \varphi}{\beta - \varphi} = \frac{ἡμ\, x + ἡμ\, \psi}{ἡμ\, x - ἡμ\, \psi}.$$

Λοιπὸν [49]·

$$\frac{\beta + \varphi}{\beta - \varphi} = \frac{ἐφ\, \frac{1}{2}(x + \psi)}{ἐφ\, \frac{1}{2}(x - \psi)}.$$

Τοῦ κεφαλαίου $x + \psi$ ὄντος γνωστοῦ, ἡ διαφορὰ $x - \psi$ προσδιορίζεται διὰ τῆς τελευταίας ταύτης ἐξισώσεως, εἶτα δὲ εὑρίσκονται εὐκόλως αἱ x, ψ.

Τότε ἡ γωνία $BAM = 180^0 - (\alpha + x)$, τὸ δὲ ἀπόστημα ΑΜ δίδεται ὑπὸ μιᾶς τῶν ἀναλογιῶν (1).

108. (Σχ. 17) *Μὲ τὰς δεδομένας πλευρὰς* $A\Gamma = \beta$ *καὶ* $AB = \gamma$, *κατασκευάσωμεν τρίγωνον, τὸ ΑΒΓ, ἐν ᾧ ἡ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τούτων περιεχομένη γωνία Α νὰ ἦναι τοιαύτη, ὥστε τὸ τμῆμα ΓΔ νὰ ἰσοῦται τῇ ἀπό τινος σημείου, τοῦ Ζ, ἐπὶ τῆς ΑΒ διδομένου, ἀγομένῃ καθέτῳ ΖΕ ἐπὶ τὴν ΑΓ.*

Καλοῦμεν $AZ = \nu$, καὶ τὴν γωνίαν $A = x$. Μορφοῦμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος·

(1) $$\nu\, ἡμ\, x + \gamma\, συν\, x = \beta,$$

ἐξ ἧς ἐξάγομεν τὴν τιμὴν τῆς x διὰ βοηθητικῆς τινος γωνίας.

Θέτομεν τὴν σχέσιν $\text{ἐφ}\,\varphi = \frac{\gamma}{\nu}$. λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τῆς γ, φέρομεν αὐτὴν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) καὶ ἔχομεν·

$$\text{ἡμ}\,(\varphi + x) = \frac{\beta\;\text{συν}\,\varphi}{\nu}.$$

109. (Σχ. 30) *Νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον, τὸ ΑΒΓ, οὗτινος δίδονται ἡ βάσις ΑΒ = γ, καὶ ὁ λόγος α : β = μ τῶν δύω ἑτέρων πλευρῶν ΑΓ, ΒΓ. Ἀφαιρέσει δὲ ἀπὸ τῶν πρὸς τὴν βάσιν ἀγνώστων γωνιῶν Α, Β, ἀμοιβαίως, τῶν δεδομένων γωνιῶν k καὶ λ, προκύπτει ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τὸ ΑΒΔ.*

Καλοῦμεν x τὴν ἄγνωστον γωνίαν ΔΑΒ = ΔΒΑ. Διὰ τῆς ὑπαρχούσης ἀναλογίας μεταξὺ τῶν ἡμιτόνων τῶν γωνιῶν ΓΑΒ = x + k, ΓΒΑ = x + λ καὶ τῶν ὑποτεινουσῶν πλευρῶν α, β, ὧν ὁ λόγος μ γνωστός, μορφοῦμεν τὴν ἐξίσωσιν·

$$\text{ἡμ}\,(x + k) = \mu\;\text{ἡμ}\,(x + \lambda),$$

πρὸς ἐπίλυσιν τῆς ὁποίας θέτομεν τὴν σχέσιν·

$$(\alpha) \qquad x + \tfrac{1}{2}(k + \lambda) = \psi\cdot$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τῆς x, ἀντεισάγομεν αὐτὴν ἐν τῇ ἐξισώσει τοῦ προβλήματος καὶ ἔχομεν·

$$\frac{\text{ἡμ}\,[\psi + \frac{1}{2}(k - \lambda)]}{\text{ἡμ}\,[\psi - \frac{1}{2}(k - \lambda)]} = \mu = \frac{\text{ἐφ}\,\psi - \text{ἐφ}\,\frac{1}{2}(\lambda - k)}{\text{ἐφ}\,\psi + \text{ἐφ}\,\frac{1}{2}(\lambda - k)},$$

$$\text{ἐφ}\,\psi = \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(\lambda - k).$$

Ἐὰν καλέσωμεν $\text{ἐφ}\,\varphi = \mu$, ἡ τιμὴ τῆς ἐφ ψ ἄγεται ὑπὸ τὴν ἁπλουστέραν μορφὴν ταύτην·

$$\text{ἐφ}\,\psi = \text{ἐφ}\,(45^\circ + \varphi)\;\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(\lambda - k).$$

Μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς βοηθητικῆς γωνίας ψ, λαμβάνομεν ἀμέσως ἐκ τῆς σχέσεως (α) τὴν τιμὴν τῆς x.

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ.

1) (Σχ. 25) *Νὰ μετρήσωμεν τὸ πλάτος χάσματός τινος, διὰ τοποθετήσεως τοῦ ἐργαλείου εἰς* Α, *χωρὶς νὰ μεταβῶμεν εἰς τὴν ἀπέναντι ὄχθην.*

2) (Σχ. 26) *Νὰ μετρήσωμεν τριγωνομετρικῶς τὴν περιεχομένην γωνίαν ὑπὸ δύω ὀπτικῶν ἀκτίνων* ΑΒ, ΑΓ, *ἀγομένων πρὸς δύω ἀντικείμενα* Μ, Ν, *ἄνευ γωνιομετρικοῦ ἐργαλείου.*

3) (Σχ. 27) *Ὑπονομοποιοὶ σκάπτουσι κατὰ τὴν διεύθυνσιν* ΑΔ. *Ζητεῖται νὰ ὁρίσωμεν τὴν διεύθυνσιν ἣν πρέπει νὰ λάβωσιν ἕτεροι ὑπονομοποιοὶ ἐκ τοῦ ἀντιθέτου μέρους τοῦ ὄρους, ὥστε νὰ ὦσιν ἐν εὐθυγραμμίᾳ μετὰ τῶν πρώτων.*

4) (Σχ. 28) *Δίδονται δύω σημεῖα* Α, Β, *ἑκατέρωθεν ὄρους τινὸς καὶ ζητεῖται νὰ ὁρίσωμεν τὴν διεύθυνσιν καθ' ἣν πρέπει νὰ ἐργασθῶσιν οἱ ὑπονομοποιοί, ὥστε νὰ συναντηθῶσι κατὰ τὴν εὐθυγραμμίαν* ΑΒ.

5) (Σχ. 29) *Ἀπὸ σημείου* Α *ἐπί τινος λόφου, νὰ ὁρισθῇ τὸ πλάτος* ΓΖ *ποταμοῦ ἀπροσίτου, ἀλλ' ὁρατοῦ.*

6) *Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν* ε *τριγώνου, γνωστῶν οὐσῶν·*

α') *Δύω πλευρῶν* α, ϐ, *σὺν τῇ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένῃ γωνίᾳ* Γ.

Ἀπ. $$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\,\alpha\beta\ \text{ἡμ.}\ \Gamma.$$

ϐ') *Δύω γωνιῶν* Β, Γ, *σὺν μιᾷ πλευρᾷ* α.

Ἀπ. $$\varepsilon = \frac{\alpha^2\ \text{ἡμ.}\ B\ \text{ἡμ.}\ \Gamma}{2\ \text{ἡμ.}\,(B + \Gamma)}.$$

γ') *Τῶν τριῶν πλευρῶν* α, ϐ, γ.

Ἀπ. $$\varepsilon = \sqrt{s\,(s-\alpha)\,(s-\beta)\,(s-\gamma)}.$$

δ') *Δύω πλευρῶν* α, γ, *σὺν τῇ ἀντικειμένῃ τῇ ἑτέρᾳ αὐτῶν γωνίᾳ* Γ.

Ἀπ. $$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\,\alpha\ \text{ἡμ.}\ \Gamma\left(\alpha\ \text{συν}\ \Gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2\ \text{ἡμ.}^2\ \Gamma}\right).$$

Γινώσκομεν ἤδη [90,91] ἐν τίσι περιπτώσεσιν αἱ δύω λαμβανόμεναι αὗται τιμαὶ ἁρμόζουσιν εἰς τὸ ζήτημα καὶ πῶς ἀποκαθίστανται ἀριθμηταὶ διὰ λογαρίθμων.

7) *Εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ΄ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τρίγωνον οὗτινος γνωσταί εἰσιν αἱ πλευραὶ α, β, γ.*

Ἀπ.
$$\left\{\begin{array}{l} \rho = \dfrac{\varepsilon}{s} = \sqrt{\dfrac{(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)}{s}}. \\[2ex] \rho' = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4\varepsilon} = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4\sqrt{s(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)}}. \end{array}\right.$$

8) *Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τετραπλεύρου ἰσοῦται τῷ ἡμιγινομένῳ τῶν δύω διαγωνίων αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.*

9) *Ἐν παντὶ πολυγώνῳ, τὸ τετράγωνον μιᾶς πλευρᾶς ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν λοιπῶν πλευρῶν, πλὴν τοῦ διπλασίου γινομένου σύνδυο τῶν πλευρῶν τούτων ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.*

10) *Δοθεισῶν τῶν τριῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου, εὑρεῖν τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὴν στερεότητα τῆς σφαίρας ἧς μέγιστος κύκλος ἐστὶν ὁ εἰς τὸ τρίγωνον περιγεγραμμένος.*

11) *Μετασχηματισθήτω ὁ τύπος*

$$\text{ἐφ}\, x = \frac{\alpha\, \text{ἡμ}\, \tau}{1 + \alpha\, \text{συν}\, \tau},$$

εἰς ἕτερον διὰ λογαρίθμων λογιζόμενον.

Ἀπ. $$\text{ἐφ}\left(\tfrac{1}{2}\tau - x\right) = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) \text{ἐφ}\, \tfrac{1}{2}\tau.$$

12) *Ἐπιλυθήτω ἡ ἐξίσωσις·*

$$\alpha\, \text{συν}\, x = \beta\, \text{ἡμ}\, (\tau - x).$$

Ἀπ. $$\text{συνεφ}\, x = \frac{\beta\, \text{συν}\, \tau}{\beta\, \text{ἡμ}\, \tau - \alpha}.$$

13) *Γνωστῶν οὐσῶν τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς συνεφαπτομένης τοῦ ἡμίσεως γωνίας τινὸς τ, εὑρεῖν τὸ ἡμίτονον αὐτῆς.*

Ἀπ.
$$\text{ἡμ}\,\tau = \frac{2}{\text{ἐφ}\frac{1}{2}\tau + \text{συνεφ}\frac{1}{2}\tau}.$$

14) *Δοθείσης τῆς κατὰ τὴν κορυφὴν τριγώνου τινὸς γωνίας,* $A = 113^\circ\, 20'\, 54''$, *γνωστῶν δὲ ὄντων τῶν δύω τῆς βάσεως αὐτοῦ τμημάτων,* $\mu = 247^{\mu.}$, $\nu = 53^{\mu.}$, *τῶν σχηματιζομένων διὰ τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀγομένης καθέτου, ἐπιλῦσαι τὸ τρίγωνον.*

Ἀπ. $B = 15^\circ\, 6'\, 55'',37$, $\Gamma = 51^\circ\, 32'\, 10'',63$, κ. τ. ἑ.

15) *Εὐθέος ὄντος τοῦ πρώτου φατνώματος ἀνταν ακλαστικοῦ τινος πυροβολείου, εὑρεῖν τὴν κλίσιν τοῦ ἑβδόμου φατνώματος, ἤτοι τὴν περιεχομένην γωνίαν ὑπὸ τῆς γραμμῆς τῆς ῥιπῆς καὶ τοῦ προπετάσματος ἐν τῷ ἑβδόμῳ φατνώματι, τῇ ὑποθέσει ὅτι ἅπαντα τὰ τηλεβόλα τοῦ πυροβολείου κατευθύνονται πρὸς σημεῖον ἀποστάσεως ὡρισμένης.*

16) *Δεικτέον τὰς ἑξῆς σχέσεις, ὑπαρχούσας μεταξὺ τῶν ἓξ μερῶν ἑνὸς τριγώνου καὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ ε.*

$$\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}A\ \text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}B\ \text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\Gamma = \frac{(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)}{\alpha\beta\gamma} = \frac{\varepsilon^2}{s\alpha\beta\gamma}.$$

$$\text{συν}\,\tfrac{1}{2}A\ \text{συν}\,\tfrac{1}{2}B\ \text{συν}\,\tfrac{1}{2}\Gamma = \frac{s\sqrt{s(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)}}{\alpha\beta\gamma} = \frac{s\,.\,\varepsilon}{\alpha\beta\gamma};$$

$$\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}A\ \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}B\ \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\Gamma = \frac{\varepsilon}{s^2}.$$

17) *Ἐπιλῦσαι τρίγωνον, κατὰ τὰς ἑξῆς διαφόρους περιπτώσεις, καθ' ἃς δίδονται·*

ά) Μία πλευρά, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ γωνία καὶ τὸ κεφάλαιον, ἢ ἡ διαφορά, τῶν δύω ἑτέρων πλευρῶν.

β') Μία πλευρά, μία τῶν προσκειμένων αὐτῇ γωνιῶν καὶ τὸ κεφάλαιον, ἢ ἡ διαφορά, τῶν δύω ἑτέρων πλευρῶν.

γ') Ἡ ἐπιφάνεια καὶ αἱ γωνίαι.

δ') Ἡ περίμετρος καὶ αἱ γωνίαι.

ἑ) Ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ αἱ γωνίαι.

18) Ὁποία πρέπει νὰ ἦναι ἡ ἀκτὶς Ρ ἑνὸς κύκλου, ὅπως ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἑνὸς τόξου $10^{\mu.}$ καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ νὰ ἦναι ἐλάσσων $0^{\mu.},001$.

Ἀπ. $$\text{Ρ} = \text{ἢ} > 250^{\mu.}.$$

19) Ὁ λόγος $\frac{\text{ἡμ}\,\tau}{\tau}$ τὸ ὅριόν ἐστι πρὸς ὃ συγκλίνει τὸ γινόμενον $\text{συν}\frac{\tau}{2}\,\text{συν}\frac{\tau}{4}\,\text{συν}\frac{\tau}{8}\ldots\ldots\text{συν}\frac{\tau}{2^{\nu}}$, ὅταν ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς ν αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον.

20) Ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἑνὸς τόξου ἐλάσσονος 90° καὶ τοῦ ἡμιτόνου αὐτοῦ, ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ἑκτημορίου τοῦ κύβου τοῦ τόξου τούτου, ἤτοι

$$\tau - \text{ἡμ}\,\tau < \frac{\tau^3}{6}.$$

21) Ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἑνὸς τόξου ἐλάσσονος 90° καὶ τῆς ἐφαπτομένης αὐτοῦ, μείζων ἐστὶ τοῦ τριτημορίου τοῦ κύβου τοῦ τόξου τούτου, ἤτοι

$$\text{ἐφ}\,\tau - \tau > \frac{\tau^3}{3}.$$

22) Πᾶν τόξον, μεταξὺ 0° καὶ 90° ἀπολαμβανόμενον, ἔλαττόν ἐστι τοῦ τριτημορίου τῆς ἐφαπτομένης αὐτοῦ, αὐξανομένου κατὰ τὰ δύο τρίτα τοῦ ἡμιτόνου αὐτοῦ, ἤτοι

$$\tau < \frac{1}{3}\,\text{ἐφ}\,\tau + \frac{2}{3}\,\text{ἡμ}\,\tau.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΣΦΑΙΡΙΚΗ.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΕΡΩΝ ΟΙΟΥΔΗΠΟΤΕ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑ.

110. Τὰ μέρη τριγώνου τινὸς σφαιρικοῦ, γεγραμμένου ἐπὶ σφαίρας δεδομένης, εἰσὶ γνωστὰ ὅταν γνωρίζωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐν ἑκάστῳ αὐτῶν περιεχομένων μοιρῶν. Ἡ ἐπίλυσις τῶν περὶ τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα προβλημάτων ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν πρὸς ἀλλήλας σχέσεων τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν τῶν μερῶν τοῦ τριγώνου.

Πρῶτον δείξομεν τύπον τινὰ ἐνῷ συμπλέκονται μία γωνία οἱαδήποτε μετὰ τῶν τριῶν πλευρῶν. Τὸν τύπον τοῦτον καλοῦσι *θεμελιώδη*, διότι ἐξ αὐτοῦ παράγεται ἡ ἐπίλυσις ἁπάντων τῶν περὶ τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα προβλημάτων.

(Σχ. 31) Ἔστω Ο τὸ κέντρον σφαίρας, ἐφ' ἧς ὑπάρχει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἄγομεν τὰς ἀκτῖνας ΘΑ, ΟΒ, ΟΓ, καὶ ἐπὶ τὴν ΟΑ τὰς καθέτους ΑΔ, ΑΕ, τὴν μὲν κειμένην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΟΑΒ, τὴν δὲ, ἐν τῷ ΟΑΓ, συμπιπτούσας κατὰ τὰ σημεῖα Δ, Ε, ταῖς ἀκτῖσι ΟΒ, ΟΓ, προαγομέναις. Ἡ γωνία ΔΑΕ ἰσοῦται τῇ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου γωνίᾳ Α. Λαμβάνοντες ΟΑ ὡς μονάδα, ἔχομεν·

$$\text{ΑΔ} = \text{εφ}\,\gamma,\quad \text{ΟΔ} = \text{τέμ}\,\gamma,\quad \text{ΑΕ} = \text{εφ}\,\beta,\quad \text{ΟΕ} = \text{τέμ}\,\beta.$$

Τὰ τρίγωνα ΔΑΕ, ΔΟΕ, δίδουσιν [79]·

$$\overline{\text{ΑΔ}}^2 + \overline{\text{ΑΕ}}^2 - 2\text{ΑΔ} \times \text{ΑΕ} \times \text{συν}\,\text{Α} = \overline{\text{ΔΕ}}^2,$$

$$\overline{\text{ΟΔ}}^2 + \text{ΟΕ}^2 - 2\text{ΟΔ} \times \text{ΟΕ} \times \text{συν}\,\alpha = \overline{\text{ΔΕ}}^2.$$

Ἀπὸ τῆς δευτέρας ἰσότητος ἀφαιροῦμεν τὴν πρώτην, καθιστῶμεν ἀντὶ τῶν γραμμῶν τὰς τριγωνομετρικὰς αὐτῶν ὀνομασίας καί, μετά τινας ἁπλοποιήσεις, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν·

$$1 - \text{τέμ}\,\beta\,\text{τέμ}\,\gamma\,\text{συν}\,\alpha + \text{εφ}\,\beta\,\text{εφ}\,\gamma\,\text{συν}\,\text{Α} = 0,$$

ἣν εὐκόλως μετασχηματίζομεν εἰς τὴν ἑξῆς·

$$(1)\qquad \text{συν}\,\alpha = \text{συν}\,\beta\,\text{συν}\,\gamma + \text{ἡμ}\,\beta\,\text{ἡμ}\,\gamma\,\text{συν}\,\text{Α}.$$

Τοιοῦτός ἐστιν ὁ *θεμελιώδης τύπος* τῆς σφαιρικῆς τριγωνομετρίας.

111. Ἐν τῇ ἡγουμένῃ δείξει ὑπεθέσαμεν τὰς πλευρὰς β, γ, ἐλάσσονας 90°, ἀλλ' εὐκόλως πληροφορούμεθα περὶ τῆς γενικότητος τοῦ τύπου (1) ἐν πάσει περιπτώσει.

Τεθείσθω (Σχ. 32) ὅτι πλευρά τις, ἡ β, ὑπερβαίνει 90°. Ἀποπερατοῦμεν τὰς ἡμιπεριφερείας ΓΑΓ', ΓΒΓ', καὶ ἔχομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ', οὗτινος αἱ μὲν πλευραὶ α', β', ἢ ΒΓ', ΑΓ', εἰσὶ παραπληρώματα τῶν α, β, ἡ δὲ γωνία ΒΑΓ' παραπλήρωμα τῆς Α. Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ β', γ, εἰσὶν ἐλάσσονες 90°, ὁ τύπος (1) ἐφαρμόζεται εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ' καὶ δίδει·

$$\text{συν}\,\alpha' = \text{συν}\,\beta'\ \text{συν}\,\gamma + \text{ἡμ}\,\beta'\ \text{ἡμ}\,\gamma\ \text{συν}\,\mathrm{BA\Gamma'}.$$

Ἀλλὰ $\alpha' = 180^\circ - \alpha$, $\beta' = 180^\circ - \beta$, $\mathrm{BA\Gamma'} = 180^\circ - \mathrm{A}$.

Θέτομεν τὰς τιμὰς ταύτας, ἀλλάσσομεν τὰ σημεῖα ἀμφοτέρων τῶν μελῶν, καὶ ἐπανερχόμεθα εἰς τὸν τύπον (1). Ἄρα ὁ τύπος οὗτος ἁρμόζει καὶ ὅταν $\beta > 90^\circ$.

Τεθείσθωσαν (Σχ. 33) αἱ δύω πλευραὶ β, γ, ὑπερβαίνουσαι τὰς 90°. Προάγομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, μέχρισοῦ συμπέσωσιν εἰς Α'. Σχηματίζεται οὕτω τὸ τρίγωνον ΒΓΑ', ἐν ᾧ ἡ μὲν γωνία Α' ἰσοῦται τῇ Α, αἱ δὲ πλευραὶ β', γ', παραπληρώματά εἰσι τῶν β, γ. Ὁ τύπος (1) ἐφαρμοζόμενος εἰς τὸ τρίγωνον τοῦτο, ὑπάρχει καὶ ἐὰν ἀντὶ β', γ', θέσωμεν $180^\circ - \beta$, $180^\circ - \gamma$· ἀλλ' αἱ ἀντεισαγωγαὶ αὗται οὐδόλως μεταβάλλουσιν αὐτόν.

Ἡ ὀρθότης τοῦ τύπου (1) δεικνύεται ἀμέσως καὶ ὅταν $\gamma = 90^\circ$ καὶ $\beta = 90^\circ$, διότι τότε ἄγεται εἰς συν α = συν Α. Καὶ ὄντως, ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει, ἡ πλευρὰ α εἶναι τὸ μέτρον τῆς ἀντικειμένης αὐτῇ γωνίας Α.

Τέλος, ὁ τύπος (1) ὑπάρχει καὶ ὅταν ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν, ἡ γ, ἰσοῦται 90°, ἡ δ' ἑτέρα, ἡ β, μείζων ἢ ἐλάσσων (Σχ. 34). Πρὸς δεῖξιν, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΓ τὸ τόξον $\mathrm{A\Delta} = 90^\circ$, καὶ γράφομεν τὸ τόξον μεγίστου κύκλου ΒΔ. Ἐὰν τὸ τόξον $\mathrm{B\Delta} = 90^\circ$, τὸ σημεῖον Β ἔσεται ὁ πόλος τοῦ ΑΓ, καὶ θέλομεν ἔχει $\alpha = 90^\circ$, $\mathrm{A} = 90^\circ$. Ὁ τύπος (1) τότε ἐτυμοποιεῖται, διότι ἄγεται εἰς $0 = 0$.

Ἐὰν τὸ τόξον ΒΔ ἦναι μεῖζον ἢ ἔλαττον 90°, ἐφαρμόζομεν τὸν περὶ οὗ ὁ λόγος τύπον εἰς τὸ τρίγωνον ΒΔΓ καὶ ἔχομεν·

$$\text{συν}\,\alpha = \text{συν}\,\mathrm{B\Delta}\ \text{συν}\,\mathrm{\Delta\Gamma} + \text{ἡμ}\,\mathrm{B\Delta}\ \text{ἡμ}\,\mathrm{\Delta\Gamma}\ \text{συν}\,\mathrm{B\Delta\Gamma}.$$

Η ἰσότης αὕτη ἄγεται εἰς $\sigma\upsilon\nu\,\alpha = \sigma\upsilon\nu\,A\,\dot{\eta}\mu\,\beta$, διότι $\sigma\upsilon\nu\,B\Delta\Gamma = 0$, $\sigma\upsilon\nu\,B\Delta = \sigma\upsilon\nu\,A$, $\sigma\upsilon\nu\,\Delta\Gamma = \dot{\eta}\mu\,\beta$. Ἀλλ' ἡ ἰσότης

$$\sigma\upsilon\nu\,\alpha = \sigma\upsilon\nu\,A\,\dot{\eta}\mu\,\beta,$$

δεικνύει ὅτι ὁ τύπος (1) ἁρμόζει καὶ εἰς τὸ προτεθὲν τρίγωνον ΑΒΓ, διότι, ἐν τῇ μερικῇ περιπτώσει τοῦ $\gamma = 90^0$, ἡ σχέσις $\sigma\upsilon\nu\,\alpha = \sigma\upsilon\nu\,\beta\,\sigma\upsilon\nu\,\gamma + \dot{\eta}\mu\,\beta\,\dot{\eta}\mu\,\gamma\,\sigma\upsilon\nu\,A$, ἄγεται καὶ αὕτη εἰς·

$$\sigma\upsilon\nu\,\alpha = \sigma\upsilon\nu\,A\,\dot{\eta}\mu\,\beta.$$

Ἄρα, ὁ τύπος (1) *εἶναι γενικός.*

112. Ἐφαρμόζοντες τὸν θεμελιώδη τύπον εἰς ἑκάστην τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, λαμβάνομεν τρεῖς ἐξισώσεις, δι' ὧν πάντοτε ὁρίζονται τρία οἱαδήποτε μέρη ἑνὸς τριγώνου σφαιρικοῦ, ὅταν τὰ ἕτερα τρία δοθῶσιν. Ἀλλ' ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς πρέπει νὰ ἔχωμεν χωριστὰ τὰς διαφόρους σχέσεις τεσσάρων οἱωνδήποτε μερῶν τοῦ τριγώνου πρὸς ἄλληλα.

Τῶν τοιούτων σχέσεων ὑπάρχουσι τέσσαρες συνδυασμοὶ διακεκριμένοι, περὶ ὧν διαδοχικῶς ὁμιλήσομεν κατωτέρω.

113. 1ον. *Σχέσις τῶν τριῶν πλευρῶν καὶ μιᾶς γωνίας πρὸς ἀλλήλας.*

Αὕτη εἶναι ἡ ἤδη εὑρεθεῖσα ἐξίσωσις (1), ἥτις, μεταθέσει τῶν γραμμάτων, δίδει τὰς τρεῖς ταύτας·

$$(1)\qquad \sigma\upsilon\nu\,\alpha = \sigma\upsilon\nu\,\beta\,\sigma\upsilon\nu\,\gamma + \dot{\eta}\mu\,\beta\,\dot{\eta}\mu\,\gamma\,\sigma\upsilon\nu\,A,$$

$$(2)\qquad \sigma\upsilon\nu\,\beta = \sigma\upsilon\nu\,\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\gamma + \dot{\eta}\mu\,\alpha\,\dot{\eta}\mu\,\gamma\,\sigma\upsilon\nu\,B,$$

$$(3)\qquad \sigma\upsilon\nu\,\gamma = \sigma\upsilon\nu\,\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\beta + \dot{\eta}\mu\,\alpha\,\dot{\eta}\mu\,\beta\,\sigma\upsilon\nu\,\Gamma.$$

114. 2ον. *Σχέσις δύο πλευρῶν καὶ τῶν ἀντικειμένων αὐταῖς γωνιῶν πρὸς ἀλλήλας.*

Ἵνα λάβωμεν, π. χ, τὴν κατὰ τὸν συνδυασμὸν α, β, A, B, σχέσιν, ἀπαλείφομεν γ εἰς τὰς ἐξισώσεις (1), (2). Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ἐξ αὐτῶν τὰς τιμὰς τοῦ $\dot{\eta}\mu\,\gamma$ καὶ τοῦ $\sigma\upsilon\nu\,\gamma$ καὶ ν' ἀντεισαγάγωμεν αὐτὰς εἰς τὴν σχέσιν $\dot{\eta}\mu^2\gamma + \sigma\upsilon\nu^2\gamma = 1$. Ἀλλ' ἡ ἑξῆς μέθοδος, ὁμοία τῇ ἐν ἐδαφίῳ 81, εἶναι ἁπλουστέρα.

Ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει· $\sigma\upsilon\nu\, A = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\, \alpha - \sigma\upsilon\nu\, \beta\, \sigma\upsilon\nu\, \gamma}{\eta\mu\, \beta\, \eta\mu\, \gamma}$.

Ἐπομένως· $\eta\mu^2 A = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 A = 1 - \dfrac{(\sigma\upsilon\nu\, \alpha - \sigma\upsilon\nu\, \beta\, \sigma\upsilon\nu\, \gamma)^2}{\eta\mu^2 \beta\, \eta\mu^2 \gamma}$

$$= \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu^2 \beta)(1 - \sigma\upsilon\nu^2 \gamma) - (\sigma\upsilon\nu\, \alpha - \sigma\upsilon\nu\, \beta\, \sigma\upsilon\nu\, \gamma)^2}{\eta\mu^2 \beta\, \eta\mu^2 \gamma}$$

$$= \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 \alpha - \sigma\upsilon\nu^2 \beta - \sigma\upsilon\nu^2 \gamma + 2\, \sigma\upsilon\nu\, \alpha\, \sigma\upsilon\nu\, \beta\, \sigma\upsilon\nu\, \gamma}{\eta\mu^2 \beta\, \eta\mu^2 \gamma}.$$

Ἄρα·

$$\frac{\eta\mu\, A}{\eta\mu\, \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2 \alpha - \sigma\upsilon\nu^2 \beta - \sigma\upsilon\nu^2 \gamma + 2\, \sigma\upsilon\nu\, \alpha\, \sigma\upsilon\nu\, \beta\, \sigma\upsilon\nu\, \gamma}}{\eta\mu\, \alpha\, \eta\mu\, \beta\, \eta\mu\, \gamma},$$

Τὸ ῥιζικὸν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον $+$, διότι αἱ γωνίαι καὶ αἱ πλευραί εἰσιν ἐλάσσονες 180°.

Τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος ὄντος συμμετρικοῦ [81] πρὸς τὰ γράμματα α, β, γ, ἕπεται ὅτι·

$$(4) \qquad \frac{\eta\mu\, A}{\eta\mu\, \alpha} = \frac{\eta\mu\, B}{\eta\mu\, \beta} = \frac{\eta\mu\, \Gamma}{\eta\mu\, \gamma}.$$

Λοιπόν, παντὸς τριγώνου σφαιρικοῦ, τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν ἀνάλογά εἰσι τοῖς ἡμιτόνοις τῶν ὑποτεινουσῶν πλευρῶν.

115. 3ον. *Σχέσις πρὸς ἀλλήλας δύω πλευρῶν, τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας καὶ τῆς ἀντικειμένης τῇ ἑτέρᾳ τῶν πλευρῶν τούτων γωνίας.*

Ἔστω ὁ συνδυασμὸς α, β, Α, Γ. Πρῶτον ἀπαλείφομεν $\sigma\upsilon\nu\, \gamma$ ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (3), καὶ ἔχομεν·

$$\sigma\upsilon\nu\, \alpha = \sigma\upsilon\nu\, \alpha\, \sigma\upsilon\nu^2 \beta + \sigma\upsilon\nu\, \beta\, \eta\mu\, \alpha\, \eta\mu\, \beta\, \sigma\upsilon\nu\, \Gamma + \eta\mu\, \beta\, \eta\mu\, \gamma\, \sigma\upsilon\nu A.$$

Μεταθέτομεν τὸν ὅρον $\sigma\upsilon\nu\, \alpha\, \sigma\upsilon\nu^2 \beta$, παρατηροῦμεν ὅτι·

$$\sigma\upsilon\nu\, \alpha - \sigma\upsilon\nu\, \alpha\, \sigma\upsilon\nu^2 \beta = \sigma\upsilon\nu\, \alpha\, \eta\mu^2 \beta,$$

διαιροῦμεν τὸ ὅλον διὰ $\eta\mu\, \beta\, \eta\mu\, \alpha$, καὶ εὑρίσκομεν·

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\, \alpha\, \eta\mu\, \beta}{\eta\mu\, \alpha} = \sigma\upsilon\nu\, \beta\, \sigma\upsilon\nu\, \Gamma + \frac{\eta\mu\, \gamma\, \sigma\upsilon\nu\, A}{\eta\mu\, \alpha}.$$

Ἀλλά, $\frac{\text{ἡμ}\ \gamma}{\text{ἡμ}\ \alpha} = \frac{\text{ἡμ}\ \Gamma}{\text{ἡμ}\ A}$. ὅθεν·

$$\text{συνεφ}\ \alpha\ \text{ἡμ}\ \beta = \text{συν}\ \beta\ \text{συν}\ \Gamma + \text{ἡμ}\ \Gamma\ \text{συνεφ}\ A.$$

Ἐν τῷ τύπῳ τούτῳ, ὅστις εἶναι ἡ ζητουμένη σχέσις, ἐκτελοῦντες τὰς μεταθέσεις τῶν γραμμάτων, λαμβάνομεν τὸ ὅλον ἓξ ἐξισώσεις, ἤτοι·

$$(5)\quad \text{συνεφ}\ \alpha\ \text{ἡμ}\ \beta = \text{συν}\ \beta\ \text{συν}\ \Gamma + \text{ἡμ}\ \Gamma\ \text{συνεφ}\ A,$$

$$(6)\quad \text{συνεφ}\ \beta\ \text{ἡμ}\ \alpha = \text{συν}\ \alpha\ \text{συν}\ \Gamma + \text{ἡμ}\ \Gamma\ \text{συνεφ}\ B,$$

$$(7)\quad \text{συνεφ}\ \alpha\ \text{ἡμ}\ \gamma = \text{συν}\ \gamma\ \text{συν}\ B + \text{ἡμ}\ B\ \text{συνεφ}\ A,$$

$$(8)\quad \text{συνεφ}\ \gamma\ \text{ἡμ}\ \alpha = \text{συν}\ \alpha\ \text{συν}\ B + \text{ἡμ}\ B\ \text{συνεφ}\ \Gamma,$$

$$(9)\quad \text{συνεφ}\ \beta\ \text{ἡμ}\ \gamma = \text{συν}\ \gamma\ \text{συν}\ A + \text{ἡμ}\ A\ \text{συνεφ}\ B,$$

$$(10)\quad \text{συνεφ}\ \gamma\ \text{ἡμ}\ \beta = \text{συν}\ \beta\ \text{συν}\ A + \text{ἡμ}\ A\ \text{συνεφ}\ \Gamma.$$

116. 4ον. *Σχέσις μιᾶς πλευρᾶς καὶ τῶν τριῶν γωνιῶν πρὸς ἀλλήλας.*

Ἀπαλείφομεν β καὶ γ εἰς τὰς ἐξισώσεις (1), (2), (3). Πρὸς τοῦτο, θέτομεν πρῶτον εἰς τὴν σχέσιν (1) τὴν τιμὴν τοῦ συν γ ἐκ τῆς (3), καὶ ἔχομεν, ὡς ἀνωτέρω·

$$\frac{\text{συν}\ \alpha\ \text{ἡμ}\ \beta}{\text{ἡμ}\ \alpha} = \text{συν}\ \beta\ \text{συν}\ \Gamma + \frac{\text{ἡμ}\ \gamma\ \text{συν}\ A}{\text{ἡμ}\ \alpha};$$

Ἡ σχέσις αὕτη, συνεπείᾳ τῶν ἰσοτήτων·

$$\frac{\text{ἡμ}\ \beta}{\text{ἡμ}\ \alpha} = \frac{\text{ἡμ}\ B}{\text{ἡμ}\ A}, \qquad \frac{\text{ἡμ}\ \gamma}{\text{ἡμ}\ \alpha} = \frac{\text{ἡμ}\ \Gamma}{\text{ἡμ}\ A},$$

τρέπεται εἰς τὴν ἑξῆς·

$$\text{συν}\ \alpha\ \text{ἡμ}\ B = \text{συν}\ \beta\ \text{ἡμ}\ A\ \text{συν}\ \Gamma + \text{συν}\ A\ \text{ἡμ}\ \Gamma.$$

Τοὺς αὐτοὺς λογισμοὺς ἐκτελοῦμεν ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως (2), ἢ κάλλιον τρέπομεν ἐν τῇ ἀνωτέρω α, Α, εἰς β, Β, καὶ ἀντιστρόφως, καὶ ἔχομεν·

$$\text{συν}\ \beta\ \text{ἡμ}\ A = \text{συν}\ \alpha\ \text{ἡμ}\ B\ \text{συν}\ \Gamma + \text{συν}\ B\ \text{ἡμ}\ \Gamma.$$

Ὑπολείπεται ἤδη ν' ἀπαλείψωμεν συν β ἐκ τῶν δύω ἡγουμένων ἐξισώσεων. Εὑρίσκομεν οὕτω, μετὰ τὰς ἀναγωγάς, τὴν ζητουμένην σχέσιν, ἣν ἐφαρμόζοντες εἰς ἑκάστην πλευρὰν, λαμβάνομε τὰς τρεῖς ταύτας·

$$(11)\qquad \text{συν}\, A = -\text{συν}\, B\, \text{συν}\, \Gamma + \text{ἡμ}\, B\, \text{ἡμ}\, \Gamma\, \text{συν}\, \alpha,$$

$$(12)\qquad \text{συν}\, B = -\text{συν}\, A\, \text{συν}\, \Gamma + \text{ἡμ}\, A\, \text{ἡμ}\, \Gamma\, \text{συν}\, \beta,$$

$$(13)\qquad \text{συν}\, \Gamma = -\text{συν}\, A\, \text{συν}\, B + \text{ἡμ}\, A\, \text{ἡμ}\, B\, \text{συν}\, \gamma,$$

117. Προφανεστάτη ὑπάρχει ἡ ὁμοιότης τῶν ἐν τῷ ἡγουμένῳ ἐδαφίῳ ἐξισώσεων πρὸς τὸν θεμελιώδη τύπον, ὅθεν συνάγομεν ἀξιοπαρατήρητόν τινα συνέπειαν.

Φαντασθῶμεν ἕτερον σφαιρικὸν τρίγωνον, τὸ $A'B'\Gamma'$, οὗτινος αἱ πλευραὶ α', β', γ', νὰ ἦναι τὰ παραπληρώματα τῶν γωνιῶν A, B, Γ, τοῦ πρώτου. Κατὰ τὸν τύπον (1) ἔχομεν·

$$\text{συν}\, \alpha' = \text{συν}\, \beta'\, \text{συν}\, \gamma' + \text{ἡμ}\, \beta'\, \text{ἡμ}\, \gamma'\, \text{συν}\, A',$$

ἤ, ἕνεκα τῶν παραπληρωμάτων,

$$-\text{συν}\, A = \text{συν}\, B\, \text{συν}\, \Gamma + \text{ἡμ}\, B\, \text{ἡμ}\, \Gamma\, \text{συν}\, A'.$$

Αἱ ἐκ ταύτης τῆς ἐξισώσεως καὶ αἱ ἐκ τῆς (11) λαμβανόμεναι τιμαὶ διὰ συν A' καὶ συν α, εἰσὶν ἴσαι, μὲ σημεῖον ἐναντίον. Ἄρα, $\alpha = 180^\circ - A'$. Ὡσαύτως, $\beta = 180^\circ - B'$, $\gamma = 180^\circ - \Gamma'$.

Λοιπόν· *Τριγώνου σφαιρικοῦ δοθέντος, ἐὰν κατασκευάσωμεν ἕτερον τρίγωνον οὗτινος αἱ πλευραὶ νὰ ἦναι τὰ παραπληρώματα τῶν γωνιῶν τοῦ πρώτου, ἀμοιβαίως, αἱ πλευραὶ τοῦ πρώτου ἔσονται τὰ παραπληρώματα τῶν γωνιῶν τοῦ δευτέρου.*

Ἕνεκα τῆς ἰδιότητος ταύτης τὰ δύω ταῦτα τρίγωνα καλοῦνται *παραπληρωματικά*· ἑκάτερον δὲ τούτων καλεῖται καὶ *πολικὸν* τοῦ ἑτέρου, δι' ἄλλην τινὰ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ δεικνυομένην κοινὴν αὐτοῖς ἰδιότητα.

ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ ΤΟΥ ΝΕΠΕΡΟΥ.

118. Ἡ ἐπίλυσις τῶν περὶ τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα προβλημάτων ἁπλοποιεῖται διά τινων τύπων, ὧν ἕπεται ἡ δεῖξις.

Αἱ ἐξισώσεις (1), (2), δίδουσι·

$$\text{συν}\, \alpha - \text{συν}\, \beta\; \text{συν}\, \gamma = \text{ἡμ}\, \beta\; \text{ἡμ}\, \gamma\; \text{συν}\, A,$$
$$\text{συν}\, \beta - \text{συν}\, \alpha\; \text{συν}\, \gamma = \text{ἡμ}\, \alpha\; \text{ἡμ}\, \gamma\; \text{συν}\, B.$$

Διαιροῦντες τὴν δευτέραν διὰ τῆς πρώτης καὶ ὑπ' ὄψιν ἔχοντες τὴν σχέσιν $\frac{\text{ἡμ}\, \alpha}{\text{ἡμ}\, \beta} = \frac{\text{ἡμ}\, A}{\text{ἡμ}\, B}$, συνάγομεν·

$$\frac{\text{συν}\, \beta - \text{συν}\, \alpha\; \text{συν}\, \gamma}{\text{συν}\, \alpha - \text{συν}\, \beta\; \text{συν}\, \gamma} = \frac{\text{ἡμ}\, A\; \text{συν}\, B}{\text{ἡμ}\, B\; \text{συν}\, A}.$$

Τὴν ἰσότητα ταύτην γράφομεν ὑπὸ μορφὴν ἀναλογίας· συγκρίνομεν τὴν διαφορὰν τῶν ὅρων ἑκάστου λόγου πρὸς τὸ κεφάλαιον τῶν αὐτῶν· μετά τινας δὲ μετασχηματισμοὺς εὐδιακρίτους εὑρίσκομεν·

$$\frac{\text{συν}\, \beta - \text{συν}\, \alpha}{\text{συν}\, \beta + \text{συν}\, \alpha} \times \frac{1 + \text{συν}\, \gamma}{1 - \text{συν}\, \gamma} = \frac{\text{ἡμ}\, (A - B)}{\text{ἡμ}\, (A + B)}.$$

Ἀλλά, [49, 46, 38] ἔχομεν τὰς σχέσεις·

$$\frac{\text{συν}\, \beta - \text{συν}\, \alpha}{\text{συν}\, \beta + \text{συν}\, \alpha} = \text{ἐφ}\, \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\; \text{ἐφ}\, \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

$$\frac{1 + \text{συν}\, \gamma}{1 - \text{συν}\, \gamma} = \frac{1}{\text{ἐφ}^2\, \frac{1}{2}\gamma}$$

$$\text{ἡμ}\, (A + B) = 2\; \text{ἡμ}\, \tfrac{1}{2}(A + B)\; \text{συν}\, \tfrac{1}{2}(A + B),$$
$$\text{ἡμ}\, (A - B) = 2\; \text{ἡμ}\, \tfrac{1}{2}(A - B)\; \text{συν}\, \tfrac{1}{2}(A - B),$$

δι' ὧν ἡ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσα ἰσότης ἄγεται εἰς ταύτην·

$$(\alpha)\quad \text{ἐφ}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\text{ἐφ}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \text{ἐφ}^2\, \tfrac{1}{2}\gamma\; \frac{\text{ἡμ}\tfrac{1}{2}(A-B)\; \text{συν}\tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{ἡμ}\tfrac{1}{2}(A+B)\; \text{συν}\tfrac{1}{2}(A+B)}.$$

Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις $\frac{\text{ἡμ}\, \alpha}{\text{ἡμ}\, \beta} = \frac{\text{ἡμ}\, A}{\text{ἡμ}\, B}$ δίδει·

$$\frac{\text{ἡμ}\, \alpha + \text{ἡμ}\, \beta}{\text{ἡμ}\, \alpha - \text{ἡμ}\, \beta} = \frac{\text{ἡμ}\, A + \text{ἡμ}\, B}{\text{ἡμ}\, A - \text{ἡμ}\, B},$$

αὕτη δὲ τρέπεται εἰς τὴν ἑξῆς [49, 48]·

$$\frac{\text{ἐφ}\, \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\text{ἐφ}\, \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{\text{ἡμ}\, \frac{1}{2}(A + B)\; \text{συν}\, \frac{1}{2}(A - B)}{\text{συν}\frac{1}{2}(A + B)\; \text{ἡμ}\, \frac{1}{2}(A - B)}.$$

Πολλαπλασιαζομένης τῆς ἐξισώσεως (α) ἐπὶ τὴν τελευταίαν ταύτην, εἶτα διαιρουμένης τῆς μιᾶς διὰ τῆς ἄλλης, μενοῦσι τετράγωνα μόνον, ὧν ἐξάγοντες τὰς ῥίζας καὶ παρατηροῦντες ὅτι, συνεπείᾳ τῆς ἐξισώσεως (α), $\text{ἐφ}\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ καὶ $\text{συν}\ \frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ πρέπει νὰ ἔχωσι τὸ αὐτὸ σημεῖον, εὑρίσκομεν·

$$(14)\qquad \text{ἐφ}\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\text{ἐφ}\ \tfrac{1}{2}\gamma\,\frac{\text{συν}\ \frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\text{συν}\ \frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})},$$

$$(15)\qquad \text{ἐφ}\ \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\text{ἐφ}\ \tfrac{1}{2}\gamma\,\frac{\text{ἡμ.}\ \frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\text{ἡμ.}\ \frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})}.$$

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τοὺς τύπους τούτους εἰς τὸ πολικὸν τρίγωνον (πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ νὰ τρέψωμεν α, β, γ, A, B, ἀμοιβαίως εἰς $180^\circ-\mathrm{A}$, $180^\circ-\mathrm{B}$, $180^\circ-\Gamma$, $180^\circ-\alpha$, $180^\circ-\beta$) λαμβάνομεν τοὺς ἑπομένους·

$$(16)\qquad \text{ἐφ}\ \tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\text{συνεφ}\ \tfrac{1}{2}\Gamma\,\frac{\text{συν}\ \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\text{συν}\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$

$$(17)\qquad \text{ἐφ}\ \tfrac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})=\text{συνεφ}\ \tfrac{1}{2}\Gamma\,\frac{\text{ἡμ.}\ \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\text{ἡμ.}\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}.$$

Οἱ ἀνωτέρω τέσσαρες τύποι, ὑπὸ μορφὴν ἰσοτήτων, εἰσὶν αἱ τοῦ ΝΕΠΕΡΟΥ ἀναλογίαι.

Τοὺς μὲν δύο πρώτους αὐτῶν μεταχειριζόμεθα ὅταν ἦναι γνωσταὶ μία πλευρὰ καὶ αἱ ταύτῃ παρακείμεναι γωνίαι, τοὺς δὲ δύω τελευταίους, ὅταν ἦναι γνωσταὶ δύω πλευραὶ καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία.

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.

119. Τρίγωνόν τι σφαιρικὸν καλεῖται ὀρθογώνιον, ὅταν ἔχῃ μίαν τοὐλάχιστον γωνίαν ὀρθήν. Ἀλλ' ἠξεύρομεν ὅτι ὑπάρχουσι τρίγωνα ἐν οἷς δύω ἢ καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι εἰσὶν ὀρθαί. Ἐν τοῖς δισορθογωνίοις τριγώνοις αἱ μὲν δύω, κάθετοι ἐπὶ τὴν τρίτην, πλευραί εἰσι τεταρτοκύκλια, ἡ τρίτη δὲ αὐτη πλευρὰ εἶναι τὸ μέτρον τῆς ὑπὸ τῶν δύω πρώτων περιεχομένης γωνίας. Ἐν τοῖς τρισορθογωνίοις τριγώνοις ἑκάστη πλευρὰ ἰσοῦται τεταρτοκυκλίῳ. Ἑπομένως αἱ τελευταῖαι αὗται δύω περιπτώσεις εἰς οὐδὲν πρόβλημα χωροῦσι.

Ὅθεν θέλομεν ἀσχοληθῇ ἐφεξῆς περὶ τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ὀρθογώνια τὰ μίαν μόνην γωνίαν ὀρθὴν περιέχοντα.

120. Ἵνα λάβωμεν τοὺς καταλλήλους τύπους πρὸς ἐπίλυσιν τῶν περὶ τὰ σφαιρικὰ ὀρθογώνια τρίγωνα προβλημάτων, ἀρκεῖ νὰ κάμωμεν $A = 90^\circ$ εἰς ἐκείνας τῶν ἤδη εὑρεθεισῶν γενικῶν σχέσεων, ἐν αἷς περιέχεται ἡ γωνία αὕτη. Οὕτω λαμβάνομεν·

(α)	συν α = συν β συν γ.		[113]
(β)	ἡμ. β = ἡμ. α ἡμ. Β,	ἡμ. γ = ἡμ. α ἡμ. Γ.	[114]
(γ)	ἐφ β = ἐφ α συν Γ,	ἐφ γ = ἐφ α συν Β.	[115]
(δ)	ἐφ β = ἡμ γ ἐφ Β,	ἐφ γ = ἡμ. β ἐφ Γ.	»
(ε)	συν Β = ἡμ. Γ συν β,	συν Γ = ἡμ. Β συν γ,	[116]
(ζ)	συν α = συνεφ Β συνεφ Γ.		»

Οἱ ἓξ οὗτοι διακεκριμένοι τύποι λογίζονται διὰ τῶν λογαρίθμων. Ἕκαστος ἐκφράζει μίαν σχέσιν τριῶν μερῶν ἑνὸς τριγώνου σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου πρὸς ἄλληλα. Γνωστῶν λοιπὸν ὄντων δύω τῶν πέντε μερῶν ἑνὸς τριγώνου τοιούτου, ἔχομεν τύπον δι' οὗ εὑρίσκομεν οἱονδήποτε ἕτερον μέρος αὐτοῦ.

121. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. 1η. Κατὰ τὸν τύπον (α), τὸ συν α πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου συν β συν γ· ἀλλὰ πρὸς τοῦτο ἀπαιτεῖται, ἢ καὶ τὰ τρία ταῦτα συνημίτονα νὰ ἦναι θετικὰ, ἢ τὸ ἓν μόνον. Ἄρα·

Ἐν παντὶ τριγώνῳ σφαιρικῷ ὀρθογωνίῳ, ἢ ἅπασαι αἱ πλευραὶ εἰσὶν ἐλάσσονες 90°, ἢ αἱ δύω μείζονες 90° καὶ ἡ ἄλλη ἐλάσσων 90°.

2α. Κατὰ τοὺς τύπους (δ), ἐπειδὴ τὰ ἡμίτονα τῶν πλευρῶν β, γ, εἰσὶ πάντοτε θετικὰ, πρέπει ἐφ β, ἐφ Β, νὰ ἔχωσι τὸ αὐτὸ σημεῖον· ἐπίσης, ἐφ γ, ἐφ Γ, τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ἄρα·

Ἑκάστη πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς τὴν ὑπ' αὐτῆς ὑποτεινομένην γωνίαν· ἤγουν, ἡ γωνία καὶ ἡ πλευρὰ ἀμφότεραι εἰσὶν, ἢ ἐλάσσονες, ἢ μείζονες 90°.

122. Πᾶν τρίγωνον ὀρθογώνιον ἐπιλύεται εἰ δύω τῶν πέντε μερῶν αὐτοῦ εἰσὶ γνωστά· ἑπομένως ὑπάρχουσιν ἓξ περιπτώσεις διακεκριμέναι, ἃς ἐφεξῆς θεωρήσομεν.

123. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 1η. *Δοθεισῶν τῆς ὑποτεινούσης α σὺν μιᾷ πλευρᾷ β τῆς ὀρθῆς γωνίας, εὑρεῖν τὴν πλευρὰν γ καὶ τὰς γωνίας Β, Γ.*

Αἱ σχέσεις (α), (β), (γ), δίδουσι·

$$\text{συν}\,\gamma = \frac{\text{συν}\,\alpha}{\text{συν}\,\beta}, \quad \text{ἡμ}\,\mathrm{B} = \frac{\text{ἡμ}\,\beta}{\text{ἡμ}\,\alpha}, \quad \text{συν}\,\Gamma = \frac{\text{ἐφ}\,\beta}{\text{ἐφ}\,\alpha}.$$

Ἐπειδὴ πρόκειται περὶ τόξων καὶ γωνιῶν ἐλασσόνων τῶν 180°, ἐντὸς δὲ τοῦ ὁρίου τούτου πᾶν συνημίτονον δεδομένον εἰς ἓν μόνον τόξον ἀντιστοιχεῖ, ἕπεται ὅτι εἰς τὸν ὁρισμὸν τῶν γ, Γ, οὐδεμία ὑπάρχει ἀμφιβολία. Περὶ τοῦ εἴδους τῆς γωνίας Β, εἰ καὶ διδομένης διὰ τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς, ἐπίσης δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία· διότι, κατὰ τὴν ἐν χωρίῳ **121**, $2^{\alpha\nu}$ παρατήρησιν, ἡ περὶ ἧς λόγος γωνία καὶ ἡ δεδομένη πλευρὰ β πρέπει νὰ ἦναι ὁμοειδεῖς.

124. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 2^{α}. *Δοθεισῶν τῶν δύω πλευρῶν β, γ, τῆς ὀρθῆς γωνίας, εὑρεῖν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὰς γωνίας Β, Γ.*

Ἐκ τῶν σχέσεων (α), (δ), ἔχομεν·

$$\text{συν}\,\alpha = \text{συν}\,\beta\;\text{συν}\,\gamma, \quad \text{ἐφ}\,\mathrm{B} = \frac{\text{ἐφ}\,\beta}{\text{ἡμ}\,\gamma}, \quad \text{ἐφ}\,\Gamma = \frac{\text{ἐφ}\,\gamma}{\text{ἡμ}\,\beta}.$$

Προφανὲς δὲ ὅτι αἱ τιμαὶ αὗταί εἰσιν ἀναμφισβήτητοι.

125. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 3η. *Δοθείσης τῆς ὑποτεινούσης α καὶ μιᾶς γωνίας Β, εὑρεῖν τὰς πλευρὰς β, γ, καὶ τὴν γωνίαν Γ.*

Ἐκ τῶν σχέσεων (β), (γ), (ζ), λαμβάνομεν·

$$\text{ἡμ}\,\beta = \text{ἡμ}\,\alpha\;\text{ἡμ}\,\mathrm{B}, \quad \text{ἐφ}\,\gamma = \text{ἐφ}\,\alpha\;\text{συν}\,\mathrm{B}, \quad \text{συνεφ}\,\Gamma = \text{συν}\,\alpha\;\text{ἐφ}\mathrm{B}.$$

Αἱ μὲν τιμαὶ τῶν γ, Γ, εἰσὶν ἀναμφισβήτητοι, ἡ δὲ πλευρὰ β πρέπει νὰ ἦναι ὁμοειδὴς τῇ γωνίᾳ Β [121].

126. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 4η. *Δοθείσης μιᾶς πλευρᾶς β τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ τῆς ὑποτεινομένης γωνίας Β, εὑρεῖν α, γ, Γ.*

Ἐκ τῶν σχέσεων (β), (δ), (ε), ἔχομεν·

$$\text{ἡμ}\,\alpha = \frac{\text{ἡμ}\,\beta}{\text{ἡμ}\,\mathrm{B}}, \quad \text{ἡμ}\,\gamma = \frac{\text{ἐφ}\,\beta}{\text{ἐφ}\,\mathrm{B}}, \quad \text{ἡμ}\,\Gamma = \frac{\text{συν}\,\mathrm{B}}{\text{συν}\,\beta}.$$

Ἐνταῦθα ὑπάρχει ἀμφιβολία ἕνεκα τῶν ἡμιτόνων· εὐκόλως δὲ πληροφορούμεθα περὶ τούτου. (Σχ. 35)

Καὶ ὄντως, ἐὰν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΑΓ ἐτυμοποιῇ τὸ ζήτημα, προάγομεν ΒΑ, ΒΓ, μέχρις οὗ συμπέσωσι κατὰ τὸ Δ, εἶτα λαμβάνομεν $\text{ΔΑ}' = \text{ΒΑ}$, $\text{ΔΓ}' = \text{ΒΓ}$. Τὰ τρίγωνα ΒΑΓ, Δ$\text{Α}'\text{Γ}'$, εἰσὶν ἴσα καθ' ἅπαντα τὰ μέρη αὐτῶν· ἄρα ἡ γωνία $\text{Α}'$ εἶναι ὀρθὴ καὶ $\text{Γ}'\text{Α}' = \text{ΓΑ} = \beta$. Ὅθεν τὸ τρίγωνον Β$\text{Α}'\text{Γ}'$ εἶναι ὀρθογώνιον, περιέχον ἐπίσης τὰ δύω δεδομένα μέρη Β, β. Λοιπὸν, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν κατὰ θέλησιν τὴν πλευρὰν α ἐλάσσονα ἢ μείζονα 90°· ἀλλ' ἀφοῦ ἡ ἐκλογὴ γίνῃ, τὸ εἶδος τῆς γ δείκνυται ἐκ τῆς σχέσεως $\text{συν}\,\alpha = \text{συν}\,\beta\ \text{συν}\,\gamma$. Τοῦ αὐτοῦ εἴδους ἔσεται καὶ ἡ Γ.

Ἓν μόνον τρίγωνον ὑπάρχει, δισορθογώνιον, ὅταν $\beta = \text{Β}$, διότι τότε οἱ ἀνωτέρω τρεῖς λόγοι γίνονται ἴσοι μονάδι, ἐπομένως δίδουσιν, $\alpha = 90^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\text{Γ} = 90^\circ$.

Δὲν ὑπάρχει τρίγωνον ὅταν $\text{ἡμ}\,\beta > \text{ἡμ}\,\text{Β}$.

127. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 5η. *Δοθείσης τῆς πλευρᾶς β σὺν τῇ προσκειμένῃ γωνίᾳ Γ, εὑρεῖν τὰς α, γ, Β.*

Ἐκ τῶν σχέσεων (γ), (δ), (ε), λαμβάνομεν·

$$\text{ἐφ}\,\alpha = \frac{\text{ἐφ}\,\beta}{\text{συν}\,\text{Γ}}, \quad \text{ἐφ}\,\gamma = \text{ἡμ}\,\beta\ \text{ἐφ}\,\text{Γ}, \quad \text{συν}\,\text{Β} = \text{συν}\,\beta\ \text{ἡμ}\,\text{Γ}.$$

Αἱ τιμαὶ αὗται τῶν, α, γ, Β, εἰσὶν ἀναμφισβήτητοι, δι' ὃ τὸ πρόβλημα μίαν μόνην λύσιν ἔχει.

128. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 6η. *Δοθεισῶν τῶν δύω γωνιῶν Β, Γ, εὑρεῖν τὰς πλευρὰς α, β, γ.*

Αἱ ἐξισώσεις (ζ), (ε), δίδουσι·

$$\text{συν}\,\alpha = \text{συνεφ}\,\text{Β}\ \text{συνεφ}\,\text{Γ}, \quad \text{συν}\,\beta = \frac{\text{συν}\,\text{Β}}{\text{ἡμ}\,\text{Γ}}, \quad \text{συν}\,\gamma = \frac{\text{συν}\,\text{Γ}}{\text{ἡμ}\,\text{Β}}.$$

Αἱ τιμαὶ αὗταί εἰσιν ἀναμφισβήτητοι, δεικνύουσαι πότε τὸ τρίγωνον εἶναι ἀδύνατον.

129. *Παρατηρήσεις.* Πλεῖσται περιπτώσεις ἄγονται εἰς τὰς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

1ον. Ὅταν ἔν τινι σφαιρικῷ τριγώνῳ δίδωνται τρία μέρη, ἐν οἷς ὑπάρχει μία πλευρὰ ἴση 90°, ἡ ἀντιστοιχοῦσα γωνία ἐν τῷ πολικῷ τριγώνῳ εἶναι ὀρθή. Προσέτι γνωστά εἰσι δύω τῶν πέντε ἑτέρων στοιχείων τοῦ τελευταίου τούτου τριγώνου, ἄρα ἐπιλύεται κατὰ τὰ προηγούμενα. Φανερὸν δὲ ὅτι ἡ ἐπίλυσις τοῦ τριγώνου τούτου καθιστᾷ γνωστὸν τὸ πρῶτον.

2^{ov}. Ὅταν τρίγωνόν τι ἦναι ἰσοσκελὲς, αἱ δύω ἴσαι αὐτοῦ πλευραὶ λογίζονται ὡς ἓν στοιχεῖον, ὡς καὶ αἱ ὑπ' αὐτῶν ὑποτεινόμεναι γωνίαι. Τότε, δύω στοιχεῖα ἀρκοῦσιν ἵνα ὁρισθῇ τὸ τρίγωνον. Ἀλλὰ, διὰ τόξου μεγίστου κύκλου, ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ μέσον τῆς βάσεως, χωρίζομεν αὐτὸ εἰς δύω τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσα καθ' ἅπαντα αὐτῶν τὰ μέρη, ἑκάστου τῶν ὁποίων τριγώνων ἔσονται γνωστὰ δύω μέρη καὶ σὺν τούτοις ἡ ὀρθὴ γωνία. Ἄρα, τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα δύνανται νὰ ἐπιλυθῶσι διὰ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.

3^{ov}. (Σχ. 36) Ἔστω τρίγωνόν τι σφαιρικὸν ΑΒΓ, ἐν ᾧ $\alpha + \beta = 180^\circ$. Προάγομεν α, γ, μεχρισοῦ συμπέσωσι κατὰ τὸ Δ, καὶ ἔχομεν $\alpha + \Gamma\Delta = 180^\circ$· ἄρα, $\Gamma\Delta = \beta$. Ἀλλ' ἕκαστον στοιχεῖον γνωστὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καθιστᾷ γνωστὸν ἓν ςοιχεῖον τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΓΔ, καὶ ἀντιστρόφως. Λοιπὸν, ἡ ἐπίλυσις τοῦ τριγώνου, ἐν ᾧ τὸ ἄθροισμα δύω πλευρῶν ἰσοῦται 180°, ἄγεται εἰς ἐκείνην τριγώνου τινὸς ἰσοσκελοῦς καὶ, κατὰ συνέπειαν, εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἑνὸς τριγώνου ὀρθογωνίου.

4^{ov}. Τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ περὶ τριγώνου τινὸς σφαιρικοῦ, ἐν ᾧ δύω γωνίαι εἰσὶ παραπληρώματα ἀλλήλων· διότι, δὲν ὑπάρχει ἡ σχέσις $\alpha + \beta = 180^\circ$, ἄνευ τῆς $A + B = 180^\circ$, καὶ ἀντιστρόφως. Τῷ ὄντι, ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ ΑΓΔ, ἡ γωνία $\Gamma A\Delta = \Delta = B$· ἀλλὰ $\Gamma A\Delta + \Gamma AB = 180^\circ$· ἄρα, εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρέπει ἐπίσης $A + B = 180^\circ$.

130. Ἐν τοῖς ἡγουμένοις λογισμοῖς συμβαίνει πολλάκις μία ἢ πλείονες τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ τῶν δεδομένων τοῦ ζητήματος νὰ ἔχωσι τιμὰς ἀρνητικάς. Τοῦτο δὲ συμβαίνει ὅταν αἱ διδόμεναι πλευραὶ ἢ γωνίαι ὑπερβαίνωσιν 90° καὶ εἰσέρχονται εἰς τοὺς τύπους διὰ συνημιτόνου, ἐφαπτομένης, ἢ συνεφαπτομένης. Ἵνα ἐφαρμόσωμεν τότε τοὺς λογαρίθμους εἰς τὰς λαμβανομένας ἐκφράσεις, ἀλλάσσομεν τὸ σημεῖον τῶν ἀρνητικῶν δεδομένων. Ἐὰν μὲν, μετὰ τοῦτο, ἡ ἄγνωστος γραμμὴ λάβῃ σημεῖον ἐναντίον τοῦ προτέρου, τότε εἰς τὸ πρόβλημα ἁρμόζει τὸ παραπλήρωμα τῆς εὑρεθείσης τιμῆς τῆς ἀγνώστου γωνίας, ἢ πλευρᾶς· ἐὰν δὲ ἡ ἄγνωστος γραμμὴ διατηρήσῃ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἡ τιμὴ αὕτη ἔσεται ἡ ἁρμόζουσα.

Ἔστω ὅτι δίδονται αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας β, γ, ἀμφότεραι μείζονες 90°. Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ συν β, συν γ, εἰσὶν ἀρνητικαί, ἀλλάσσομεν τὰ σημεῖα αὐτῶν ἵνα εὕρωμεν τοὺς λογαρίθμους. Ἐπειδὴ συν α μένει θετικόν, εἰς τὸ πρόβλημα ἁρμόζει ἡ ἐλάσσων τιμὴ ἣν εὑρίσκομεν διὰ τὴν ὑποτείνουσαν α.

Περὶ δὲ τῆς τιμῆς τῆς Β, τῆς διδομένης ὑπὸ τοῦ τύπου·

$$\text{ἐφ}\, B = \frac{\text{ἐφ}\, \beta}{\text{ἡμ}\, \gamma},$$

ὅταν μεταβάλλωμεν τὸ σημεῖον τῆς ἐφ β, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ παραπλήρωμα αὐτῆς, διότι μεταβαλλομένου τοῦ σημείου τῆς ἐφ β, μεταβάλλεται καὶ τὸ τῆς ἐφ Β.

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΠΛΑΓΙΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.

131. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 1η. *Δοθεισῶν τῶν τριῶν πλευρῶν α, β, γ, εὑρεῖν τὰς τρεῖς γωνίας* Α, Β, Γ.

Ἐκ τῶν τύπων (1), (2), (3), ἐξάγομεν ἀμέσως τὰς τιμὰς τῶν ζητουμένων γωνιῶν. Ἀλλὰ ζητήσομεν ἑτέρους τύπους καταλλήλους πρὸς τὸν διὰ λογαρίθμων λογισμόν, ἀκολουθοῦντες μέθοδον ἀνάλογον τῇ ἐν τῇ ὁμοίᾳ περιπτώσει τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων ἐκτεθείσῃ.

Εἰς τὸν τύπον [38] $\quad 2\,\text{ἡμ}^2 \tfrac{1}{2} A = 1 - \text{συν}\, A,$

θέτομεν τὴν τιμὴν τοῦ συν Α, ἐκ τοῦ θεμελιώδους τύπου·

$$2\,\text{ἡμ}^2 \tfrac{1}{2} A = 1 - \frac{\text{συν}\,\alpha - \text{συν}\,\beta\,\text{συν}\,\gamma}{\text{ἡμ}\,\beta\,\text{ἡμ}\,\gamma} = \frac{\text{συν}\,(\beta - \gamma) - \text{συν}\,\alpha}{\text{ἡμ}\,\beta\,\text{ἡμ}\,\gamma}.$$

Ἐκ δὲ τοῦ τελευταίου ἐν ἐδαφίῳ 48 τύπου, ποιοῦντες ἐν αὐτῷ·

$\kappa = \beta - \gamma, \quad \sigma = \alpha,$ λαμβάνομεν·

$$\text{συν}\,(\beta - \gamma) - \text{συν}\,\alpha = 2\,\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)\,\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma).$$

Λοιπόν·

$$\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)\,\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma)}{\text{ἡμ}\,\beta\,\text{ἡμ}\,\gamma}}.$$

Καλοῦντες $\alpha + \beta + \gamma = 2s,$ ἔχομεν·

$$\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{ἡμ}\,(s - \beta)\,\text{ἡμ}\,(s - \gamma)}{\text{ἡμ}\,\beta\,\text{ἡμ}\,\gamma}}.$$

Ἐπίσης εὑρίσκομεν δι' ὁμοίου λογισμοῦ·

$$\text{συν}\ \tfrac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{\text{ἡμ}\ s\ \text{ἡμ}\ (s-\alpha)}{\text{ἡμ}\ \beta\ \text{ἡμ}\ \gamma}},$$

καὶ ἑπομένως·

$$\text{ἐφ}\ \tfrac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{\text{ἡμ}\ (s-\beta)\ \text{ἡμ}\ (s-\gamma)}{\text{ἡμ}\ s\ \text{ἡμ}\ (s-\alpha)}}.$$

Ἀνάλογοι ἐργασίαι δίδουσι τὰς τιμὰς τῶν λοιπῶν γωνιῶν Β, Γ.

Οἱ τρεῖς οὗτοι τύποι εἰσίν, ὡς βλέπομεν, ἀνάλογοι τοῖς ληφθεῖσι διὰ τὴν ἐπίλυσιν ἑνὸς τριγώνου εὐθυγράμμου οὗτινος δίδονται αἱ τρεῖς πλευραί. (*)

Οἱ αὐτοὶ τύποι ὑπόκεινται εἰς διασκόπησιν, ἐξ ἧς καταδείκνυνται αἱ περιστάσεις καθ' ἃς τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον εἶναι ἀδύνατον.

Ἀσχοληθῶμεν περὶ τοῦ τύπου τοῦ δίδοντος τὴν τιμὴν τῆς ἐφ $\frac{1}{2}$Α. Οἱ αὐτοὶ δὲ συλλογισμοὶ ἐφαρμοζόμενοι καὶ ἐπὶ τῶν δύο πρώτων τύπων, ἄγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς συνεπείας.

132. Ἐν τῷ περὶ οὗ ὁ λόγος τύπῳ, τὰ δεδομένα α, β, γ, εἰσὶ τόξα θετικά, ἕκαστον ἔλαττον ἡμιπεριφερείας. Ἵνα ἁρμόζῃ εἰς τὸ ζήτημα ἡ τιμὴ τῆς ἐφ $\frac{1}{2}$ Α, ἡ διὰ τοῦ τύπου τούτου ὁριζομένη, πρέπει ἡ ὑπόρριζος ἔκθεσις νὰ ἦναι θετικὴ καὶ πεπερασμένη. Οὕτως, οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος πρέπει νὰ ἔχωσι τὸ αὐτὸ σημεῖον, οὐδεὶς δὲ αὐτῶν δύναται εἶναι 0, διότι ἡ γωνία $\frac{1}{2}$ Α ἀναγκαίως κεῖται μεταξὺ 0^0 καὶ 90^0.

Λέγομεν ἤδη ὅτι οἱ ὅροι τοῦ αὐτοῦ κλάσματος ἀδύνατον νὰ ἦναι ἀμφότεροι ἀρνητικοί, διότι, ἐν τῇ τοιαύτῃ περιπτώσει, πρέπει ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων τοῦ ἀριθμητοῦ, π. χ. ἡμ $(s-\beta)$, νὰ ἦναι ἀρνητικός, ἐπίσης νὰ ὑπάρχῃ εἷς παράγων ἀρνητικὸς ἐν τῷ παρονομαστῇ. Λοιπόν, ἠθέλομεν ἔχει συγχρόνως·

$$\text{ἡμ}\ (s-\beta)<0,\quad \text{ἡμ}\ s<0,\quad \text{ἢ}\quad \text{ἡμ}\ (s-\beta)<0,\ \text{ἡμ}\ (s-\alpha)<0.$$

Ἀλλ' οὐδεμίαν τῶν δύω τούτων ὑποθέσεων δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν.

(*) Ὅταν πράκηται νὰ λογιασθῶσι καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι ἑνὸς τριγώνου σφαιρικοῦ, προτιμοτέρα ἐςὶν ἡ χρῆσις τοῦ τύπου τῆς ἐφ $\frac{1}{2}$ Α, δι' ὃν λόγον εἴδομεν καὶ ἐν τῇ ὁμοίᾳ περιπτώσει τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων. [96*]

Καὶ ὄντως, $\eta\mu\,(s-\beta)+\eta\mu\,s=2\,\eta\mu\,\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{1}{2}\,\beta.$

Ἀλλὰ, $\eta\mu\,\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)>0,$ διότι $\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)<180^0.$

προσέτι $\sigma\upsilon\nu\,\frac{1}{2}\,\beta>0,$ διότι $\frac{1}{2}\beta<90^0.$

Λοιπὸν, $\eta\mu\,(s-\beta)+\eta\mu\,s>0.$

Ἑπομένως, αἱ ἀνισότητες, $\eta\mu\,(s-\beta)<0,\ \eta\mu\,s<0,$ ἀδύνατον νὰ συνυπάρξωσιν. Ὡσαύτως ἔχομεν·

$$\eta\mu\,(s-\beta)+\eta\mu\,(s-\alpha)=2\,\eta\mu\,\tfrac{1}{2}\gamma\,\sigma\upsilon\nu\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Ὁ παράγων $\eta\mu\,\frac{1}{2}\gamma$ εἶναι προφανῶς θετικός· προσέτι, αἱ ἀνισότητες $\alpha<180^{\circ},\quad \beta<180^{\circ},$ δίδουσιν·

$$\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)<90^{\circ},\qquad \sigma\upsilon\nu\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)>0.$$

Ἄρα, τὸ κεφάλαιον $\eta\mu\,(s-\beta)+\eta\mu\,(s-\alpha)$ εἶναι θετικόν. Λοιπὸν, ἀδύνατον νὰ ἔχωμεν συγχρόνως·

$$\eta\mu\,(s-\beta)<0,\qquad \eta\mu\,(s-\alpha)<0.$$

Ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι, οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος·

$$\frac{\eta\mu\,(s-\beta)\,\eta\mu\,(s-\gamma)}{\eta\mu\,s\,\eta\mu\,(s-\alpha)},$$ πρέπει νὰ ἦναι θετικοί.

Ἡ ἀνισότης $\eta\mu\,(s-\beta)\,\eta\mu\,(s-\gamma)>0,$ δίδει·

$$\eta\mu\,(s-\beta)>0,\qquad \eta\mu\,(s-\gamma)>0,$$

διότι πρὸ ὀλίγου ἐδείχθη ὅτι δύο ἐκ τῶν τεσσάρων ἡμιτόνων ἅτινα ὑπάρχουσιν ἐν τῇ ἀνωτέρω κλασματικῇ ἐκθέσει, ἀδύνατον νὰ ἦναι συγχρόνως ἀρνητικά.

Ὁμοίως, ἐκ τῆς ἀνισότητος $\eta\mu\,s\,\eta\mu\,(s-\alpha)>0,$ πορίζόμεθα ὅτι· $\eta\mu\,s>0,$ καὶ $\eta\mu\,(s-\alpha)>0.$

Οὕτως, ἡ ἀνισότης $$\frac{\eta\mu\,(s-\beta)\,\eta\mu\,(s-\gamma)}{\eta\mu\,s\,\eta\mu\,(s-\alpha)}>0,$$

ἀπαιτεῖ νὰ ἔχωμεν·

$$\eta\mu\,s>0,\ \eta\mu\,(s-\alpha)>0,\ \eta\mu\,(s-\beta)>0,\ \eta\mu\,(s-\gamma)>0.$$

Τούτου τεθέντος, τῆς ἡμιπεριμέτρου s οὔσης ἀναγκαίως ἐλάσσονος 270°, ἡ συνθήκη ἡμ $s > 0$ δίδει·

$$s < 180^\circ, \quad \text{ἢ} \quad 2s < 360^\circ. \quad \text{Ἤγουν·}$$

$1^{ον}$. *Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πλευρῶν πρέπει νὰ ἦναι ἔλαττον περιφερείας μεγίστου κύκλου.*

Προσέτι, τὰ τόξα $(s - \alpha)$, $(s - \beta)$, $(s - \gamma)$, πρέπει νὰ ἦναι θετικά· διότι, εἰ ἓν τούτων, π. χ. $(s - \alpha)$, ἦτο ἀρνητικὸν, ἤθελε προκύψει, ἐν τιμῇ ἀπολύτῳ, $(\alpha - s) > 180^\circ$, διότι ἡμ $(s - \alpha) > 0$· τότε ἡ πλευρὰ α ἤθελεν εἶναι μείζων 180°, ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει. Λοιπὸν ἔχομεν·

$$s - \alpha > 0, \qquad s - \beta > 0, \qquad s - \gamma > 0,$$

ὅθεν· $\alpha < \beta + \gamma, \qquad \beta < \alpha + \gamma, \qquad \gamma < \alpha + \beta.$ Ἤτοι·

$2^{ον}$. *Ἑκάστη πλευρὰ πρέπει νὰ ἦναι ἐλάσσων τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἑτέρων.*

Αὗταί εἰσιν αἱ δύο *ἀναγκαῖαι καὶ ἱκαναὶ* συνθῆκαι, ὅπως ἓν τρίγωνον σφαιρικὸν ᾖ δυνατόν.

133. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ $2^α$. *Δοθεισῶν δύο πλευρῶν, α, β, σὺν τῇ ὑπὸ τῆς ἑτέρας τούτων ὑποτεινομένῃ γωνίᾳ A, εὑρεῖν τὴν τρίτην πλευρὰν γ καὶ τὰς γωνίας B, Γ.*

Πρῶτον εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν B, διὰ τῆς ἀναλογίας·

$$\text{ἡμ}\, \alpha \;:\; \text{ἡμ}\, \beta \;::\; \text{ἡμ}\, A \;:\; \text{ἡμ}\, B,$$

ἐξ ἧς,
$$\text{ἡμ}\, B = \frac{\text{ἡμ}\, A \;\text{ἡμ}\, \beta}{\text{ἡμ}\, \alpha}.$$

Μετὰ ταῦτα, ὁ καλλίτερος τρόπος τοῦ νὰ ὁρίσωμεν γ, Γ, εἶναι ὁ διὰ τῶν ἀναλογιῶν τοῦ Νεπέρου, διδουσῶν·

$$\text{ἐφ}\, \tfrac{1}{2}\gamma = \text{ἐφ}\, \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\, \frac{\text{ἡμ}\, \frac{1}{2}(A + B)}{\text{ἡμ}\, \frac{1}{2}(A - B)},$$

$$\text{συνεφ}\, \tfrac{1}{2}\Gamma = \text{ἐφ}\, \tfrac{1}{2}(A - B)\, \frac{\text{ἡμ}\, \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\text{ἡμ}\, \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}.$$

Ἐπειδὴ ἡ γωνία B ὁρίζεται διὰ τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς, δυνατὸν νὰ ἦναι ὀξεῖα, ἢ ἀμβλεῖα. Περὶ τὴν διασκόπησιν τῆς περιπτώσεως ταύτης θέλομεν ἀσχοληθῇ ἰδιαιτέρως μετ᾽ οὐ πολύ.

Τὴν γωνίαν Γ εὑρίσκομεν καὶ ἀμέσως διὰ τῆς ἐξισώσεως (5) [115].

$$\text{συνεφ } A \text{ ἡμ } \Gamma + \text{συν } \beta \text{ συν } \Gamma = \text{συνεφ } \alpha \text{ ἡμ } \beta.$$

Πρὸς τοῦτο, λογίζομεν πρῶτον τὴν βοηθητικὴν γωνίαν φ, ὥστε·

$$\text{συνεφ } A = \text{συν } \beta \text{ συνεφ } \varphi, \quad \text{ἢ} \quad \text{συνεφ } \varphi = \frac{\text{συνεφ } A}{\text{συν } \beta}.$$

Εἶτα, ἐν τῇ ἀνωτέρω ἐξισώσει ἀντεισάγομεν τὴν τιμήν·

$$\text{συνεφ } A = \text{συν } \beta \text{ συνεφ } \varphi = \frac{\text{συν } \beta \text{ συν } \varphi}{\text{ἡμ } \varphi},$$

καὶ ἔχομεν·

$$\text{συν } \beta \,(\text{ἡμ } \Gamma \text{ συν } \varphi + \text{συν } \Gamma \text{ ἡμ } \varphi) = \text{συνεφ } \alpha \text{ ἡμ } \beta \text{ ἡμ } \varphi,$$

ἢ

$$\text{ἡμ } (\Gamma + \varphi) = \frac{\text{εφ } \beta \text{ ἡμ } \varphi}{\text{εφ } \alpha}.$$

Ἡ τελευταία αὕτη ἰσότης δίδει τὸ ἄθροισμα $(\Gamma + \varphi)$, ἐξ οὗ, ἀφαιρέσει τῆς φ, λαμβάνομεν τὴν γωνίαν Γ.

Μετὰ τὴν γωνίαν Γ, προσδιορίζομεν τὴν πλευρὰν γ ἐκ τῆς ἀναλογίας·

$$\text{ἡμ } A : \text{ἡμ } \Gamma :: \text{ἡμ } \alpha : \text{ἡμ } \gamma,$$

ἢ καὶ ἀμέσως, ὡς ἑξῆς. Τοῦ τύπου (1), [113]·

$$\text{συν } \beta \text{ συν } \gamma + \text{συν } A \text{ ἡμ } \beta \text{ ἡμ } \gamma = \text{συν } \alpha,$$

τρέπομεν, ὡς ἀνωτέρω, τὸ πρῶτον μέλος εἰς μονώνυμον διὰ βοηθητικῆς τινος γωνίας φ, ὥστε·

$$\text{συν } A \text{ ἡμ } \beta = \text{συν } \beta \text{ συνεφ } \varphi, \quad \text{ἢ} \quad \text{συνεφ } \varphi = \text{συν } A \text{ εφ } \beta,$$

καὶ ἔχομεν·

$$\text{συν } \beta \,(\text{ἡμ } \varphi \text{ συν } \gamma + \text{συν } \varphi \text{ ἡμ } \gamma) = \text{συν } \alpha \text{ ἡμ } \varphi.$$

ἢ

$$\text{ἡμ } (\gamma + \varphi) = \frac{\text{συν } \alpha \text{ ἡμ } \varphi}{\text{συν } \beta}.$$

134. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 3η. *Δοθεισῶν δύω πλευρῶν α, β, σὺν τῇ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένῃ γωνίᾳ Γ, εὑρεῖν τὴν πλευρὰν γ καὶ τὰς γωνίας Α, Β.*

Οἱ τύποι (5) καὶ (6) [115] δίδουσι·

$$\text{συνεφ } A = \frac{\text{συνεφ } \alpha \text{ ἡμ } \beta - \text{συν } \beta \text{ συν } \Gamma}{\text{ἡμ } \Gamma},$$

$$\text{συνεφ } B = \frac{\text{συνεφ } \beta \text{ ἡμ } \alpha - \text{συν } \alpha \text{ συν } \Gamma}{\text{ἡμ } \Gamma}.$$

Διὰ γωνίας τινὸς βοηθητικῆς εὐκόλως τρέπεται εἰς μονώνυμον ἕκαστον μέλος τῶν τιμῶν τούτων.

Ἐργασθῶμεν ἐπὶ τῆς πρώτης.

Θέτομεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφήν,

$$\text{συνεφ } A = \frac{\text{συνεφ } \alpha}{\text{ἡμ } \Gamma}\left(\text{ἡμ } \beta - \frac{\text{συν } \Gamma \text{ συν } \beta}{\text{συνεφ } \alpha}\right).$$

Καθιστῶμεν τὴν σχέσιν·

$$\frac{\text{συν } \Gamma}{\text{συνεφ } \alpha} = \text{ἐφ } \varphi = \frac{\text{ἡμ } \varphi}{\text{συν } \varphi},$$

καὶ λαμβάνομεν·

$$\text{συνεφ } A = \frac{\text{συνεφ } \alpha}{\text{ἡμ } \Gamma}\left(\frac{\text{ἡμ } \beta \text{ συν } \varphi - \text{ἡμ } \varphi \text{ συν } \beta}{\text{συν } \varphi}\right)$$

$$= \frac{\text{συνεφ } \alpha \text{ ἡμ } (\beta - \varphi)}{\text{συν } \varphi \text{ ἡμ } \Gamma}.$$

Ὡσαύτως εὑρίσκομεν διὰ τὴν γωνίαν B·

$$\text{συνεφ } B = \frac{\text{συνεφ } \beta \text{ ἡμ } (\alpha - \varphi)}{\text{συν } \varphi \text{ ἡμ } \Gamma},$$

τῆς γωνίας φ διδομένης ὑπὸ τοῦ τύπου $\text{ἐφ } \varphi = \dfrac{\text{συν } \Gamma}{\text{συνεφ } \beta}$.

Ἁπλούστερον ὅμως εἶναι προστρέξωμεν εἰς τὰς ἀναλογίας τοῦ *Νεπέρου*·

$$\text{ἐφ } \tfrac{1}{2}(A + B) = \text{συνεφ } \tfrac{1}{2}\Gamma \frac{\text{συν } \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\text{συν } \frac{1}{2}(\alpha + \beta)},$$

$$\text{ἐφ } \tfrac{1}{2}(A - B) = \text{συνεφ } \tfrac{1}{2}\Gamma \frac{\text{ἡμ } \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\text{ἡμ } \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}.$$

Δι' αὐτῶν προσδιορίζομεν $\frac{1}{2}(A+B)$, $\frac{1}{2}(A-B)$, ἑπομένως καὶ τὰς γωνίας A, B.

Μετὰ τὰς γωνίας ταύτας εὑρίσκομεν τὴν πλευρὰν γ διὰ τῆς ἀναλογίας·

$$\text{ἡμ}\,A : \text{ἡμ}\,\Gamma :: \text{ἡμ}\,\alpha : \text{ἡμ}\,\gamma.$$

Ἀλλὰ λογίζομεν τὴν πλευρὰν γ καὶ ἀμέσως, ἐκ τοῦ τύπου (3).

$$\text{συν}\,\gamma = \text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta + \text{ἡμ}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\beta\,\text{συν}\,\Gamma,$$

εἰς ὃν ποιοῦντες·

$$\text{ἡμ}\,\beta\,\text{συν}\,\Gamma = \frac{\text{συν}\,\beta\,\text{συν}\,\varphi}{\text{ἡμ}\,\varphi} = \text{συν}\,\beta\,\text{συνεφ}\,\varphi,$$

συνάγομεν ἀναμφισβητήτως·

$$\text{συνεφ}\,\varphi = \text{ἐφ}\,\beta\,\text{συν}\,\Gamma, \quad \text{συν}\,\gamma = \frac{\text{συν}\,\beta\,\text{ἡμ}\,(\alpha+\varphi)}{\text{ἡμ}\,\varphi}.$$

135. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ **4η**. *Δοθεισῶν δύω γωνιῶν* A, B, *σὺν τῇ προσκειμένῃ πλευρᾷ* γ, *εὑρεῖν τὰς πλευρὰς* α, β, *καὶ τὴν γωνίαν* Γ.

Τὰς πλευρὰς α, β, εὑρίσκομεν διὰ τῶν τύπων (7), (9), [115]

$$\text{συνεφ}\,\alpha = \frac{\text{συνεφ}\,A\,\text{ἡμ}\,B + \text{συν}\,B\,\text{συν}\,\gamma}{\text{ἡμ}\,\gamma},$$

$$\text{συνεφ}\,\beta = \frac{\text{συνεφ}\,B\,\text{ἡμ}\,A + \text{συν}\,A\,\text{συν}\,\gamma}{\text{ἡμ}\,\gamma}.$$

Ἐργασθῶμεν ἐπὶ τοῦ πρώτου.

Ἔχομεν· $$\text{συνεφ}\,\alpha = \frac{\text{συν}\,\gamma}{\text{ἡμ}\,\gamma}\left(\text{συν}\,B + \frac{\text{ἡμ}\,B\,\text{συνεφ}\,A}{\text{συν}\,\gamma}\right).$$

Ἔστω· $$\frac{\text{συνεφ}\,A}{\text{συν}\,\gamma} = \text{συνεφ}\,\varphi = \frac{\text{συν}\,\varphi}{\text{ἡμ}\,\varphi}.$$ Ἕπεται ὅτι·

$$\text{συνεφ}\,\alpha = \frac{\text{συν}\,\gamma\,\text{ἡμ}\,(B+\varphi)}{\text{ἡμ}\,\gamma\,\text{ἡμ}\,\varphi} = \frac{\text{συνεφ}\,\gamma\,\text{ἡμ}\,(B+\varphi)}{\text{ἡμ}\,\varphi}.$$

Ὡσαύτως εὑρίσκομεν· $$\text{συνεφ}\,\beta = \frac{\text{συνεφ}\,\gamma\,\text{ἡμ}\,(A+\varphi)}{\text{ἡμ}\,\varphi},$$

καθιστάντες, $$\text{συνεφ}\,B = \text{συνεφ}\,\varphi\,\text{συν}\,\gamma.$$

Κάλλιον ὅμως νὰ λογίσωμεν τὰς πλευρὰς α, β, διὰ τῶν ἀναλογιῶν τοῦ *Νεπέρου*·

$$\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\gamma\,\frac{\text{συν}\,\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{\text{συν}\,\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})},$$

$$\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\gamma\,\frac{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})}.$$

Εἶτα εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν Γ διὰ τῆς ἀναλογίας·

$$\text{ἡμ}\,\alpha : \text{ἡμ}\,\gamma :: \text{ἡμ}\,\text{A} : \text{ἡμ}\,\Gamma .$$

Εἰ δὲ θέλομεν εὑρεῖν Γ ἀμέσως, λαμβάνομεν τὸν τύπον [116]·

$$\text{συν}\,\Gamma = \text{ἡμ}\,\text{A}\;\text{ἡμ}\,\text{B}\;\text{συν}\,\gamma - \text{συν}\,\text{A}\;\text{συν}\,\text{B}.$$

Ποιοῦμεν· $\quad \text{ἡμ}\,\text{B}\;\text{συν}\,\gamma = \text{συν}\,\text{B}\;\text{συνεφ}\,\varphi,$

ἤτοι $\quad \text{συνεφ}\,\varphi = \text{ἐφ}\,\text{B}\;\text{συν}\,\gamma,$

καὶ ἔχομεν, $\quad \text{συν}\,\Gamma = \dfrac{\text{συν}\,\text{B}\;\text{ἡμ}\,(\text{A}-\varphi)}{\text{ἡμ}\,\varphi}.$

Ἡ περίπτωσις αὕτη, ἀνάλογος τῇ 3ῃ, οὐδεμίαν ἀμφιβολίαν παρουσιάζει.

136. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 5η. *Δοθεισῶν δύω γωνιῶν* Α, Β, *σὺν τῇ ὑπὸ τὴν ἑτέραν τούτων ὑποτεινούσῃ πλευρᾷ* α, *εὑρεῖν τὰς πλευρὰς* β, γ, *καὶ τὴν γωνίαν* Γ.

Ἡ περίπτωσις αὕτη, ἀνάλογος τῇ 2α, ἐπιλύεται ὡς ἐκείνη καὶ τὰς αὐτὰς παρουσιάζει ἀμφιβολίας, περὶ τὴν διασκόπησιν τῶν ὁποίων ἀκολούθως θέλομεν ἀσχοληθῆ.

Τὴν πλευρὰν β πορίζόμεθα ἐκ τῆς ἀναλογίας·

$$\text{ἡμ}\,\text{A} : \text{ἡμ}\,\text{B} :: \text{ἡμ}\,\alpha : \text{ἡμ}\,\beta\cdot$$

Τὰς δὲ γ, Γ, ἐκ τῶν τύπων [118] τοῦ *Νεπέρου*.

$$\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\frac{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})}{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})},$$

$$\text{συνεφ}\,\tfrac{1}{2}\Gamma = \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B})\,\frac{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Ἡ πλευρὰ γ εὑρίσκεται καὶ διὰ τῆς ἐξισώσεως (7), [115]·

$$\text{συνεφ}\ \alpha\ \text{ἡμ}\ \gamma - \text{συν}\ B\ \text{συν}\ \gamma = \text{συνεφ}\ A\ \text{ἡμ}\ B,$$

εἰν ἣν ποιοῦντες $$\text{συνεφ}\ \alpha = \text{συν}\ B\ \text{συνεφ}\ \varphi,$$

συνάγομεν·

$$\text{συνεφ}\ \varphi = \frac{\text{συνεφ}\ \alpha}{\text{συν}\ B}, \quad \text{ἡμ}\ (\gamma - \varphi) = \frac{\text{ἐφ}\ B\ \text{ἡμ}\ \varphi}{\text{ἐφ}\ A}.$$

Τέλος, προσδιορίζομεν τὴν γωνίαν Γ καὶ ἐκ τῆς ἀναλογίας·

$$\text{ἡμ}\ \alpha : \text{ἡμ}\ \gamma :: \text{ἡμ}\ A : \text{ἡμ}\ \Gamma,$$

ἢ ἀκόμη [116] ἐκ τῆς ἐξισώσεως (11)·

$$\text{συν}\ \alpha\ \text{ἡμ}\ B\ \text{ἡμ}\ \Gamma - \text{συν}\ B\ \text{συν}\ \Gamma = \text{συν}\ A,$$

ἧς τρέπομεν τὸ πρῶτον μέλος εἰς μονώνυμον, καθιζάντες τὴν σχέσιν·

$$\text{συν}\ \alpha\ \text{ἡμ}\ B = \text{συν}\ B\ \text{συνεφ}\ \varphi,$$

ἐξ ἧς, $$\text{συνεφ}\ \varphi = \text{συν}\ \alpha\ \text{ἐφ}\ B, \quad \text{ἡμ}\ (\Gamma - \varphi) = \frac{\text{συν}\ A\ \text{ἡμ}\ \varphi}{\text{συν}\ B}.$$

137. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 6η. *Δοθεισῶν τῶν τριῶν γωνιῶν* Α, Β, Γ, *εὑρεῖν τὰς τρεῖς πλευρὰς* α, β, γ.

Οἱ λογισμοὶ δι' ὧν ἐπιλύεται ἡ τελευταία περίπτωσις αὕτη, εἰσὶν ὅμοιοι πρὸς τοὺς τῆς πρώτης. Π. χ. ἵνα λάβωμεν τὴν πλευρὰν α, μεταχειριζόμεθα τὴν ἐξίσωσιν (11), [116], δίδουσαν·

$$\text{συν}\ \alpha = \frac{\text{συν}\ A + \text{συν}\ B\ \text{συν}\ \Gamma}{\text{ἡμ}\ B\ \text{ἡμ}\ \Gamma}.$$

Ἀλλ' ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν τύπους ἐφ' ὧν νὰ ἐφαρμόζωνται οἱ λογάριθμοι. Ἔχομεν·

$$\text{ἡμ}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \text{συν}\ \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\text{ἡμ}B\ \text{ἡμ}\Gamma - \text{συν}B\ \text{συν}\Gamma - \text{συν}A}{2\ \text{ἡμ}\ B\ \text{ἡμ}\ \Gamma}},$$

ὅθεν, $$\text{ἡμ}\ \tfrac{1}{2}\ \alpha = \sqrt{\frac{-\text{συν}\ (B + \Gamma) - \text{συν}\ A}{2\ \text{ἡμ}\ B\ \text{ἡμ}\ \Gamma}},$$

Ἀλλά·

$$\text{συν}(\text{B}+\Gamma) + \text{συν}\,\text{A} = 2\,\text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}+\Gamma)\,\text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\text{B}+\Gamma-\text{A})\text{·}$$

ἄρα·

$$\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{-\,\text{συν}\,\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B}+\Gamma)\,\text{συν}\,\frac{1}{2}(\text{B}+\Gamma-\text{A})}{\text{ἡμ}\,\text{B}\,\text{ἡμ}\,\Gamma}}.$$

Καλοῦμεν 2S τὴν διαφορὰν $\text{A}+\text{B}+\Gamma-180^{\circ}$, (ἣν ὑποθέτομεν θετικήν, ὡς κατωτέρω δειχθήσεται) καὶ ἔχομεν·

$$\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}+\Gamma) = \text{S}+90^{0},\quad \tfrac{1}{2}(\text{B}+\Gamma-\text{A}) = \text{S}+90^{0}-\text{A},$$

$$-\,\text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}+\Gamma) = \text{ἡμ}\,\text{S},\quad \text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\text{B}+\Gamma-\text{A}) = \text{ἡμ}(\text{A}-\text{S}),$$

καὶ ἑπομένως·

$$\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{\text{ἡμ}\,\text{S}\,\text{ἡμ}\,(\text{A}-\text{S})}{\text{ἡμ}\,\text{B}\,\text{ἡμ}\,\Gamma}}.$$

Δι' ὁμοίων λογισμῶν εὑρίσκομεν καὶ τοὺς ἑξῆς τύπους·

$$\text{συν}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{\text{ἡμ}\,(\text{B}-\text{S})\,\text{ἡμ}\,(\Gamma-\text{S})}{\text{ἡμ}\,\text{B}\,\text{ἡμ}\,\Gamma}},$$

$$\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{\text{ἡμ}\,\text{S}\,\text{ἡμ}\,(\text{A}-\text{S})}{\text{ἡμ}\,(\text{B}-\text{S})\,\text{ἡμ}\,(\Gamma-\text{S})}}.$$

Δι' ἁπλῆς ἀνταλλαγῆς τῶν γραμμάτων λαμβάνομεν καὶ τοὺς τύπους τοὺς ὁρίζοντας τὰς δύο ἑτέρας πλευρὰς β, γ, τοῦ τριγώνου.

138. Θεωρήσωμεν τὸν δίδοντα τὴν τιμὴν τοῦ $\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\,\alpha$ ἀνωτέρω εὑρεθέντα τύπον. Ἐν αὐτῷ πρέπει τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμητοῦ $\text{συν}\,\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B}+\Gamma)\,\text{συν}\,\frac{1}{2}(\text{B}+\Gamma-\text{A})$ νὰ ἦναι ἀρνητικόν, διότι ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἀναγκαίως θετικός, ἑκάστης τῶν δεδομένων πλευρῶν ὑποτιθεμένης ἐλάσσονος 180^{0}. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἔχωμεν·

$$\text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}+\Gamma) > 0 \quad \text{καὶ} \quad \text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\text{B}+\Gamma-\text{A}) < 0,$$

$$\text{ἢ} \quad \text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}+\Gamma) < 0 \quad \text{καὶ} \quad \text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\text{B}+\Gamma-\text{A}) > 0.$$

Ἀλλ' αἱ δύο πρῶται ἀνισότητες ἀδύνατον νὰ συνυπάρξωσι· διότι ἑκάστης τῶν γωνιῶν A, B, Γ, οὔσης ἐλάσσονος 180^{0}, ἔχομεν ἀναγκαίως $\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B}+\Gamma) < 270^{0}$, καί, ἑπομένως, ἡ ἀνισότης

$$\text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}+\Gamma) > 0,\quad \text{δίδει}\quad \tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}+\Gamma) < 90^{0}.$$

Ἡ δευτέρα ἀνισότης $\text{συν}\frac{1}{2}(Β + Γ - Α) < 0$ ἀπαιτεῖ νὰ ἦναι θετικὴ ἡ γωνία $\frac{1}{2}(Β + Γ - Α)$ καὶ μείζων 90^0· διότι, ἐὰν $\frac{1}{2}(Β + Γ - Α)$ ἦτον ἀρνητική, ἔπρεπε, συνεπείᾳ τῆς ἀνισότητος $\text{συν}\frac{1}{2}(Β + Γ - Α) < 0$, νὰ ἔχωμεν·

$$\frac{1}{2}(Α - Β - Γ) > 90^0, \quad \text{ὅθεν} \quad Α > 180^0 + Β + Γ.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἀδύνατον νὰ ἔχωμεν συγχρόνως·

$$\text{συν}\frac{1}{2}(Α + Β + Γ) > 0 \quad \text{καὶ} \quad \text{συν}\frac{1}{2}(Β + Γ - Α) < 0;$$

διότι ἐντεῦθεν προκύπτουσιν αἱ ἀντιφατικαὶ ἀνισότητες αὗται·

$$\frac{1}{2}(Α + Β + Γ) < 90^0, \quad \frac{1}{2}(Β + Γ - Α) > 90^0.$$

Λοιπόν, ἀπαιτεῖται·

$$\text{συν}\frac{1}{2}(Α + Β + Γ) < 0 \quad \text{καὶ} \quad \text{συν}\frac{1}{2}(Β + Γ - Α) > 0.$$

Ἡ ἀνισότης $\text{συν}\frac{1}{2}(Α + Β + Γ) < 0$,

δίδει·

$$\frac{1}{2}(Α + Β + Γ) > 90^0, \quad \text{ἢ} \quad Α + Β + Γ > 180^0.$$

Ἤτοι·

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου μεῖζόν ἐστι δύω γωνιῶν ὀρθῶν,

Ἐκ τῆς δευτέρας ἀνισότητος·

$$\text{συν}\frac{1}{2}(Β + Γ - Α) > 0,$$

συνάγομεν·

$$\frac{1}{2}(Β + Γ - Α) < 90^0, \quad \text{ἢ} \quad Α > Β + Γ - 180^0.$$

Ἤτοι·

Μία οἱαδήποτε τῶν τριῶν γωνιῶν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου μείζων ἐστὶ τῆς ὑπεροχῆς τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἑτέρων γωνιῶν ἐπὶ δύω ὀρθῶν.

Παρατήρησις. Μεγίστη ὁμοιότης ὑπάρχει τῶν τριῶν τελευταίων περιπτώσεων πρὸς τὰς τρεῖς πρώτας· ἤγουν, τῆς $6^{ης}$ πρὸς τὴν $1^{ην}$, τῆς $5^{ης}$ πρὸς τὴν $2^{αν}$, τῆς $4^{ης}$ πρὸς τὴν $3^{ην}$. Τοῦτο δὲ συνέπειά ἐστι τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολικοῦ τριγώνου.

ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ ΔΕΛΑΜΒΡΟΥ.

139. Κατὰ ἐδάφιον **137** ἔχομεν·

$$ἡμ\ \tfrac{1}{2}\ A = \sqrt{\frac{ἡμ\ (s-\beta)\ ἡμ\ (s-\gamma)}{ἡμ\ \beta\ ἡμ\ \gamma}},$$

$$συν\ \tfrac{1}{2}\ A = \sqrt{\frac{ἡμ\ s\ ἡμ\ (s-\alpha)}{ἡμ\ \beta\ ἡμ\ \gamma}},$$

$$ἡμ\ \tfrac{1}{2}\ B = \sqrt{\frac{ἡμ\ (s-\alpha)\ ἡμ\ (s-\gamma)}{ἡμ\ \alpha\ ἡμ\ \gamma}},$$

$$συν\ \tfrac{1}{2}\ B = \sqrt{\frac{ἡμ\ s\ ἡμ\ (s-\beta)}{ἡμ\ \alpha\ ἡμ\ \gamma}},$$

$$ἡμ\ \tfrac{1}{2}\ \Gamma = \sqrt{\frac{ἡμ\ (s-\alpha)\ ἡμ\ (s-\beta)}{ἡμ\ \alpha\ ἡμ\ \beta}},$$

$$συν\ \tfrac{1}{2}\ \Gamma = \sqrt{\frac{ἡμ\ s\ ἡμ\ (s-\gamma)}{ἡμ\ \alpha\ ἡμ\ \beta}}.$$

Ἐὰν ἐν τοῖς τύποις·

$$ἡμ\ \tfrac{1}{2}\ (A \pm B) = ἡμ\ \tfrac{1}{2}\ A\ συν\ \tfrac{1}{2}\ B \pm συν\ \tfrac{1}{2}\ A\ ἡμ\ \tfrac{1}{2}\ B,$$

$$συν\ \tfrac{1}{2}\ (A \pm B) = συν\ \tfrac{1}{2}\ A\ συν\ \tfrac{1}{2}\ B \mp ἡμ\ \tfrac{1}{2}\ A\ ἡμ\ \tfrac{1}{2}\ B,$$

καταστήσωμεν τὰς ἀνωτέρω τιμάς, λαμβάνομεν·

$$ἡμ\ \tfrac{1}{2}\ (A \pm B) = \frac{ἡμ\ (s-\beta) \pm ἡμ\ (s-\alpha)}{ἡμ\ \gamma}\sqrt{\frac{ἡμ\ s\ ἡμ(s-\gamma)}{ἡμ\ \alpha\ ἡμ\ \beta}}$$

$$= \frac{ἡμ\ (s-\beta) \pm ἡμ\ (s-\alpha)}{ἡμ\ \gamma}\ συν\ \tfrac{1}{2}\ \Gamma.$$

$$συν\ \tfrac{1}{2}\ (A \pm B) = \frac{ἡμ\ s \mp ἡμ\ (s-\gamma)}{ἡμ\ \gamma}\sqrt{\frac{ἡμ\ (s-\alpha)\ ἡμ\ (s-\beta)}{ἡμ\ \alpha\ ἡμ\ \beta}}$$

$$= \frac{ἡμ\ s \mp ἡμ\ (s-\gamma)}{ἡμ\ \gamma}\ ἡμ\ \tfrac{1}{2}\ \Gamma.$$

Ἀλλά·

$$ἡμ\,(s-\alpha)+ἡμ\,(s-\beta)=2\,ἡμ\,\tfrac{1}{2}\gamma\,συν\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$
$$ἡμ\,(s-\beta)-ἡμ\,(s-\alpha)=2\,συν\,\tfrac{1}{2}\gamma\,ἡμ\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$
$$ἡμ\,s+ἡμ\,(s-\gamma)=2\,ἡμ\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,συν\,\tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$ἡμ\,s-ἡμ\,(s-\gamma)=2\,συν\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,ἡμ\,\tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$ἡμ\,\gamma=2\,ἡμ\,\tfrac{1}{2}\gamma\,συν\,\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Οὕτω, μορφοῦμεν τοὺς προαγγελθέντας τύπους, ἤτοι·

$$\frac{ἡμ\,\frac{1}{2}(A+B)}{συν\,\frac{1}{2}\Gamma}=\frac{συν\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{συν\,\frac{1}{2}\gamma},$$
$$\frac{ἡμ\,\frac{1}{2}(A-B)}{συν\,\frac{1}{2}\Gamma}=\frac{ἡμ\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{ἡμ\,\frac{1}{2}\gamma},$$
$$\frac{συν\,\frac{1}{2}(A+B)}{ἡμ\,\frac{1}{2}\Gamma}=\frac{συν\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{συν\,\frac{1}{2}\gamma},$$
$$\frac{συν\,\frac{1}{2}(A-B)}{ἡμ\,\frac{1}{2}\Gamma}=\frac{ἡμ\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{ἡμ\,\frac{1}{2}\gamma}.$$

ΣΗΜ. Διαιρουμένων, τῆς πρώτης τῶν ἀνωτέρω τελευταίων ἐξισώσεων διὰ τῆς τρίτης, τῆς δευτέρας διὰ τῆς τετάρτης, τῆς τετάρτης διὰ τῆς τρίτης καὶ τῆς δευτέρας διὰ τῆς πρώτης, προκύπτουσιν αἱ ἀναλογίαι τοῦ ΝΕΠΕΡΟΥ.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΑΜΦΙΣΒΗΤΗΣΙΜΩΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ ΤΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.

140. Μόναι περιπτώσεις ἐν αἷς ὑπάρχει ἀμφιβολία περὶ τοῦ εἴδους τῶν ἀγνώστων στοιχείων κατὰ τὴν ἐπίλυσιν ἑνὸς τριγώνου σφαιρικοῦ, εἰσὶν ἡ $2^α$ καὶ ἡ $5^η$. Ἐξετάσωμεν πῶς ἀνακαλύπτομεν τὴν ὕπαρξιν δύω λύσεων, ἢ μιᾶς, ἢ τοῦ τριγώνου τὸ ἀδύνατον.

Ἡ διασκόπησις αὕτη στηρίζεται ἐπί τινων προτάσεων γεωμετρικῶν, ἃς πρῶτον ἐκθέσομεν.

(Σχ. 37). Ἔστω ἐπὶ σφαίρας τινὸς ἓν ἡμικύκλιον ΔΓΔ′, κάθετον ἐπὶ τὸν κύκλον ΔΘΔ′. Λαμβάνομεν τὸ τόξον $ΓΔ < 90^0$, καὶ γράφομεν τόξα μεγίστου κύκλου ΓΒ, ΓΒ′, ΓΘ, . . . ἀπὸ τοῦ σημείου Γ πρὸς διάφορα σημεῖα τῆς περιφερείας ΔΘΔ′. Προάγομεν ΓΔ κατὰ ΔΓ′ = ΓΔ, καὶ ζευγνύομεν Γ′Β. Τὰ τρίγωνα ΓΔΒ, Γ′ΔΒ, ἔχουσι μίαν γωνίαν ὀρθὴν περιεχομένην ὑπὸ πλευρῶν ἴσων, ἄρα, ΓΒ $=$ Γ′Β· ἀλλὰ ΓΔΓ′ $<$ ΓΒ $+$ ΒΓ′, ἄρα ΓΔ $<$ ΓΒ. Λοιπόν·

1ον. *Ἁπάντων τῶν ἀπὸ τοῦ σημείου Γ πρὸς τὴν περιφέρειαν ΔΘΔ′ ἀγομένων τόξων, ἐλάχιστον μὲν ἐστὶ τὸ ΓΔ, μέγιστον δὲ, τὸ παραπλήρωμα τούτου ΓΔ′.*

Ἔστω ΔΒ′ $=$ ΔΒ. Τὰ τρίγωνα ΓΔΒ, ΓΔΒ′, ἔχουσι μίαν γωνίαν ὀρθὴν ὑπὸ πλευρῶν ἴσων περιεχομένην· ἄρα, ΓΒ′ $=$ ΓΒ.

2ον. *Τὰ ἰσάκις ἀφιστάμενα τοῦ καθέτου τόξου ΓΔ, ἢ ΓΔ′, πλάγια τόξα, εἰσὶν ἴσα.*

Τέλος, ἔστω ΔΘ $>$ ΔΒ. Ζευγνύομεν Γ′Θ, καὶ προάγομεν τὸ τόξον ΓΒ μεχρισοῦ συμπέσῃ τῷ Γ′Θ εἰς Ι. Ἐπειδὴ τὸ τόξον ΓΓ′ εἶναι ἔλαττον ἡμιπεριφερείας, τὸ αὐτὸ συμπίπτει τῇ ἐπεκτάσει τοῦ ΓΒ πέραν τοῦ σημείου Γ′, ἄρα ἀπαιτεῖται ἡ τομὴ Ι νὰ γίνῃ μεταξὺ Θ καὶ Γ′. Λοιπὸν ἔχομεν, Γ′Β $<$ Γ′Ι $+$ ΙΒ, καὶ

$$\text{Γ′Β} + \text{ΒΓ} < \text{Γ′Ι} + \text{ΙΓ}\cdot \quad \text{ἀλλὰ} \quad \text{ΙΓ} < \text{ΙΘ} + \text{ΘΓ},$$

ἑπομένως, $$\text{Γ′Ι} + \text{ΙΓ} < \text{Γ′Θ} + \text{ΘΓ},$$

ἄρα, ἔτι μᾶλλον, $$\text{Γ′Β} + \text{ΒΓ} < \text{Γ′Θ} + \text{ΘΓ}.$$

Ἀλλὰ, Γ′Β $=$ ΒΓ, Γ′Θ $=$ ΘΓ· ἄρα, ΒΓ $<$ ΘΓ.

3ον. *Τὰ πλάγια τόξα τοσούτῳ μείζονά εἰσιν, ὅσῳ μᾶλλον ἀφίστανται τοῦ καθέτου τόξου ΓΔ, ἢ ὅσῳ πλησιέστερον κεῖνται τῷ ΓΔ′.*

141. Τεθείσθω ὅτι πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον σφαιρικὸν οὗτινός εἰσι δεδομέναι δύω πλευραὶ α, β, σὺν τῇ ἀντικειμένῃ τῇ ἑτέρᾳ τούτων γωνίᾳ Α.

Πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι, τινὲς ἀδύνατοι περιπτώσεις δείκνυνται διὰ τοῦ λογισμοῦ αὐτοῦ. (Σχ. 38, 39). Ἵνα γνωρίσωμεν αὐτὰς, ποιοῦμεν τὴν γωνίαν ΓΑΒ $=$ Α καὶ λαμβάνομεν ΑΓ $=$ β· προάγομεν ΑΓ καὶ ΑΒ μεχρισοῦ συμπέσωσιν εἰς Ε, εἶτα γράφομεν τὸ τόξον ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὸ ΑΒ. Τὸ τόξον ΓΔ ἔσεται ὁμοειδὲς πρὸς τὴν γωνίαν Α [121]· λοιπὸν, ὅταν Α ἦναι ὀξεία, ΓΔ ἔσεται τὸ βραχύτερον ἀπόστημα τοῦ σημείου Γ ἀπὸ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΕ, ἔσεται δὲ τὸ μακρότερον, ὅταν Α ἦναι ἀμβλεῖα [140]. Κατὰ τὴν πρώτην ὑπόθεσιν, τὸ τρίγωνον ἔσεται ἀδύνατον ἐὰν α ἦναι ἐλάσσων τοῦ ΓΔ, ἤτοι, ἡμ. α $<$ ἡμ. ΓΔ, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν, ἔσεται ἀδύνατον ἐὰν α ἦναι μείζων τοῦ ΓΔ, ὅτε καὶ αὖθις ἔχομεν $\eta\mu\, \alpha < \eta\mu\, \Gamma\Delta$.

Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΔ, δίδει·

$$1 : \eta\mu\, \beta :: \eta\mu\, A : \eta\mu\, \Gamma\Delta = \eta\mu\, \beta\, \eta\mu\, A.$$

Λοιπὸν, κατ' ἀμφοτέρας τὰς ὑποθέσεις·

$$\eta\mu\, \alpha < \eta\mu\, \beta\, \eta\mu\, A.$$

Ἀλλ' ὅταν ζητῆται ἡ γωνία Β τοῦ ἀγνώστου τριγώνου, τότε

$$\eta\mu\, \alpha : \eta\mu\, A :: \eta\mu\, \beta : \eta\mu\, B = \frac{\eta\mu\, \beta\, \eta\mu\, A}{\eta\mu\, \alpha}.$$

Λοιπὸν, ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ $\eta\mu\, B$ ἔσεται μείζων μονάδος, ὅπερ ἀδύνατον.

Ὅταν $\alpha = \Gamma\Delta$, μόνον τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΔ ἔσεται δυνατόν. Τοῦτο δεικνύει καὶ ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ $\eta\mu\, B$, ἥτις γίνεται ἴση μονάδι.

142. Παραλείποντες τὰς περιπτώσεις ταύτας, ἐξετάσομεν τὰς διαφόρους σχέσεις μεγέθους ἃς δύνανται νὰ παρουσιάσωσι τὰ διδόμενα α, β, Α.

(Σχ. 38) Ἔστω $A < 90^0$ καὶ $\beta < 90^0$.

Ἐπειδὴ Α, β, εἰσὶν ἐλάσσονες 90^0, ΑΔ εἶναι ἐπίσης ἐλάσσων 90^0 [121]· λοιπὸν $A\Delta < \Delta E$. Τούτου τεθέντος, ἐὰν ἔχωμεν καὶ $\alpha < \beta$, φανερὸν ὅτι ἔσεται δυνατὸν νὰ θέσωμεν μεταξὺ ΓΑ καὶ ΓΔ τόξον τι $\Gamma B = \alpha$, καὶ ὅτι πρὸς τὸ ἄλλο μέρος, μεταξὺ ΓΔ καὶ ΓΕ, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ἓν ἕτερον τόξον $\Gamma B' = \Gamma B = \alpha$· λοιπὸν, ὑπάρχουσι δύω τρίγωνα ΑΓΒ, ΑΓΒ', περιέχοντα τὰ αὐτὰ δεδομένα α, β, Α. Ὅταν $\alpha = \beta$, τὸ τρίγωνον ΑΓΒ ἐκλείπει καὶ μένει μόνον τὸ ΑΓΒ'. Ὅταν $\alpha > \beta$ καὶ $\alpha + \beta = 180^0$, ἢ $\alpha + \beta > 180^0$, τὸ σημεῖον Β' συμπίπτει τῷ Ε, ἢ προβαίνει τούτου, καὶ τότε δὲν ὑπάρχει τρίγωνον.

Τέλος, ὅταν $\alpha > \beta$ καὶ $\alpha + \beta < 180^0$, ὑπάρχει μία μόνη λύσις.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐξετάζομεν καὶ τὰς λοιπὰς ὑποθέσεις. Τὰ ἐξαγόμενα ἅπαντα περιέχονται ἐν τῷ ἑξῆς πίνακι.

			ΛΥΣΕΙΣ.
$A<90^0$	$\beta<90^0$	$\alpha<\beta$	δύω.
		$\alpha=\beta$	μία.
		$\alpha>\beta$, καὶ $\alpha+\beta<180^\circ$	μία.
		$\alpha>\beta$, καὶ $\alpha+\beta=180^\circ$, ἢ $\alpha+\beta>180^\circ$	οὐδεμία.
	$\beta=90^0$	$\alpha<\beta$	δύω.
		$\alpha=\beta$, ἢ $\alpha>\beta$	οὐδεμία.
	$\beta>90^0$	$\alpha<\beta$, καὶ $\alpha+\beta<180^\circ$	δύω.
		$\alpha<\beta$, καὶ $\alpha+\beta=180^\circ$, ἢ $\alpha+\beta>180^\circ$	μία.
		$\alpha=\beta$, ἢ $\alpha>\beta$	οὐδεμία.
$A=90^0$	$\beta<90^0$	$\alpha<\beta$, ἢ $\alpha=\beta$	οὐδεμία.
		$\alpha>\beta$, καὶ $\alpha+\beta<180^\circ$	μία.
		$\alpha>\beta$, καὶ $\alpha+\beta=180^\circ$, ἢ $\alpha+\beta>180^\circ$	οὐδεμία.
	$\beta=90^0$	$\alpha<\beta$, ἢ $\alpha>\beta$	οὐδεμία.
		$\alpha=\beta$	ἀπειρία.
	$\beta>90^0$	$\alpha<\beta$, καὶ $\alpha+\beta>180^\circ$	μία.
		$\alpha<\beta$, καὶ $\alpha+\beta<180^\circ$, ἢ $\alpha+\beta=180^\circ$	οὐδεμία.
		$\alpha=\beta$, ἢ $\alpha>\beta$	οὐδεμία.
$A>90^0$	$\beta<90^0$	$\alpha<\beta$, ἢ $\alpha=\beta$	οὐδεμία.
		$\alpha>\beta$, καὶ $\alpha+\beta>180^\circ$. . . .	δύω.
		$\alpha>\beta$, καὶ $\alpha+\beta=180^\circ$, ἢ $\alpha+\beta<180^\circ$	μία.
	$\beta=90^0$	$\alpha<\beta$, ἢ $\alpha=\beta$	οὐδεμία.
		$\alpha>\beta$	δύω.
	$\beta>90^0$	$\alpha<\beta$, καὶ $\alpha+\beta>180^\circ$	μία.
		$\alpha<\beta$, καὶ $\alpha+\beta=180^\circ$, ἢ $\alpha+\beta<180^\circ$	οὐδεμία.
		$\alpha=\beta$, καὶ $\alpha+\beta>180^\circ$	μία.
		$\alpha=\beta$, καὶ $\alpha+\beta=180^\circ$, ἢ $\alpha+\beta<180^\circ$	οὐδεμία.
		$\alpha>\beta$	δύω.

143. Ἡ ἰδιότης τοῦ πολικοῦ τριγώνου ἐπιτρέπει τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ἐξαγομένων τούτων εἰς τὸ τρίγωνον οὗ τινος δίδονται τὰ μέρη Α, Β, α (Περίπτ. $5^η$), ἀρκεῖ νὰ τρέψωμεν πανταχοῦ α, β, Α, εἰς Α, Β, α, τὰ σημεῖα $>$ καὶ $<$, εἰς $<$ καὶ $>$.

Ὅταν τὰ δεδομένα συμπίπτωσί τινι τῶν περιπτώσεων καθ' ἃς πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μία λύσις, ὁ λογισμὸς καὶ αὖθις δεικνύει δύω λύσεις. Ἵνα διακρίνωμεν ὁποίαν πρέπει νὰ λάβωμεν, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αἱ μείζονες πλευραὶ τὰς μείζονας ὑποτείνουσι γωνίας, καὶ ἀντιστρόφως.

Ἔστωσαν $A = 112^0$, $\quad \alpha = 102^0$, $\quad \beta = 106^0$.
Ἐν τῷ ἡγουμένῳ πίνακι, ἐκ τῶν ἀντιστοιχουσῶν περιπτώσεων εἰς $A > 90^0$, θεωροῦμεν τὰς τῆς $\beta > 90^0$, ἐκ δὲ τούτων ἐκείνην ἐν ᾗ $\alpha < \beta$, ἢ $\alpha = \beta$. Παρατηροῦμεν προσέτι ὅτι ἔχομεν $\alpha + \beta = 208^0$· ἄρα $\alpha + \beta > 180^0$. Συνάγομεν λοιπόν, κατὰ τὸν πίνακα, ὅτι μία λύσις ὑπάρχει· ἐπειδὴ δὲ $\beta > \alpha$, ἕπεται ὅτι καὶ $B > A$. Ἄρα, ἡ γωνία Β εἶναι ἀμβλεῖα.

144. Ἡ προεκτεθεῖσα διασκόπησις γίνεται καὶ διὰ τῆς ἑξῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου.

Τῶν δεδομένων τῆς $2^{ας}$ περιπτώσεως ὄντων α, β, Α, τὰ τρία ἄγνωστα μέρη Β, Γ, γ, δίδονται ἐκ τῶν ἑξῆς ἐξισώσεων·

$$(1) \qquad \text{ἡμ}\, B = \frac{\text{ἡμ}\, A\ \text{ἡμ}\, \beta}{\text{ἡμ}\, \alpha},$$

$$(2) \qquad \text{συνεφ}\, \frac{\Gamma}{2} = \frac{\text{ἐφ}\, \frac{1}{2}(A - B)\ \text{ἡμ} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\text{ἡμ}\, \frac{1}{2}(\alpha - \beta)},$$

$$(3) \qquad \text{ἐφ}\, \frac{\gamma}{2} = \frac{\text{ἐφ}\, \frac{1}{2}(\alpha - \beta)\ \text{ἡμ}\, \frac{1}{2}(A + B)}{\text{ἡμ}\, \frac{1}{2}(A - B)}.$$

Ὑποθέσωμεν πρῶτον $\alpha = \beta$. Τότε $A = B$· οἱ δὲ τύποι (2), (3), δίδουσι·

$$\text{συνεφ}\, \frac{\Gamma}{2} = \frac{0}{0}, \qquad \text{ἐφ}\, \frac{\gamma}{2} = \frac{0}{0}.$$

Ἵνα λάβωμεν τὰς τιμὰς τῶν συνεφ $\frac{1}{2}$ Γ, ἐφ $\frac{1}{2}$ γ, προστρέχομεν εἰς τὰς σχέσεις·

$$\text{συν}\, A = -\text{συν}\, B\, \text{συν}\, \Gamma + \text{ἡμ}\, B\, \text{ἡμ}\, \Gamma\, \text{συν}\, \alpha,$$

$$\text{συν}\, \alpha = \text{συν}\, \beta\, \text{συν}\, \gamma + \text{ἡμ}\, \beta\, \text{ἡμ}\, \gamma\, \text{συν}\, A,$$

αἵτινες, τῇ ὑποθέσει $(\alpha = \beta,\ A = B)$, καθίστανται·

$$\text{συν}\, A = -\text{συν}\, A\, \text{συν}\, \Gamma + \text{ἡμ}\, A\, \text{ἡμ}\, \Gamma\, \text{συν}\, \alpha,$$

$$\text{συν}\, \alpha = \text{συν}\, \alpha\, \text{συν}\, \gamma + \text{ἡμ}\, \alpha\, \text{ἡμ}\, \gamma\, \text{συν}\, A.$$

Ἐκ τῆς πρώτης συνάγομεν διαδοχικῶς·

$$\text{συν}\, A\, (1 + \text{συν}\, \Gamma) = \text{ἡμ}\, A\, \text{ἡμ}\, \Gamma\, \text{συν}\, \alpha,$$

$$\text{συν}\, A\, \text{συν}\, \tfrac{1}{2}\Gamma = \text{ἡμ}\, A\, \text{συν}\, \alpha\, \text{ἡμ}\, \tfrac{1}{2}\Gamma,$$

(4) $$\text{συνεφ}\, \tfrac{1}{2}\Gamma = \text{ἐφ}\, A\, \text{συν}\, \alpha.$$

Ἐπίσης εὑρίσκομεν·

(5) $$\text{ἐφ}\, \tfrac{1}{2}\gamma = \text{ἐφ}\, \alpha\, \text{συν}\, A.$$

Ἐὰν, προσέτι, εἴχομεν συγχρόνως $A = 90^0$, $\alpha = 90^0$, οἱ τύποι (4), (5), καὶ αὖθις ἤθελον δώσει·

$$\text{συνεφ}\, \frac{\Gamma}{2} = \frac{0}{0}, \quad \text{ἐφ}\, \frac{\gamma}{2} = \frac{0}{0}.$$

Ἀλλ' ἐν τῇ δε τῇ περιπτώσει, τὸ πρόβλημα πραγματικῶς ἐστιν ἀόριστον, ὡς εὐκόλως δυνάμεθα γνωρίσαι τὸ τοιοῦτον.

Τέλος, ἐὰν, παραδεχόμενοι πάντοτε ὅτι $\alpha = \beta$, ἓν μόνον τῶν δεδομένων A, ἢ α, ὑποτεθῇ ἴσον 90^0, κατὰ τοὺς τύπους (4), (5), ἔξομεν·

$$\text{συνεφ}\, \tfrac{1}{2}\Gamma = \infty, \quad \text{ἢ} \quad \text{ἐφ}\, \tfrac{1}{2}\gamma = \infty.$$

Ἐπομένως, $$\Gamma = 0, \quad \text{ἢ} \quad \gamma = 180^0,$$

τὸ δὲ ζήτημα οὐδεμίαν ἐπιδέχεται λύσιν. Τὸ τοιοῦτον καὶ αὖθις βεβαιούμεθα διὰ τῆς Γεωμετρίας εὐκόλως.

Παραλείποντες τὰς τελευταίας ταύτας ὑποθέσεις, θεωρήσωμεν τὴν γενικοτέραν περίπτωσιν, καθ' ἣν οὐδέτερον τῶν δύο δεδομένων A, α, ἰσοῦται 90^0. Ὅπως ᾖ δυνατὸν τὸ πρόβλημα, πρέπει ἐφ A καὶ συν α νὰ ἔχωσι τιμὰς τοῦ αὐτοῦ σημείου. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ἄγνωστος Γ πρέπει νὰ ἦναι ἐλάσσων 180^0, ἡ τιμὴ τῆς συνεφ $\frac{1}{2}$ Γ πρέπει νὰ ἦναι θετική. Οὕτω, μία ἀναγκαία συνθήκη συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἦναι ἡ γωνία Α καὶ ἡ πλευρὰ α ὁμοειδεῖς. Ἄλλως ἡ συνθήκη αὕτη ἐστὶν ἱκανή· ἐκπληρουμένης δὲ αὐτῆς, τὸ πρόβλημα μιᾶς μόνης λύσεως ἔσεται ἐπιδεκτικόν.

Ὑποθέσωμεν ἤδη τὰς δεδομένας πλευρὰς α, β, ἀνίσους.

Ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει τὴν τιμὴν τοῦ ἡμ Β· καὶ ὅταν ἔχωμεν

$$\frac{\text{ἡμ}\, A\ \text{ἡμ}\, \beta}{\text{ἡμ}\, \alpha} < 1, \quad \text{ἢ} \quad \text{λογ ἡμ}\, A + \text{λογ ἡμ}\, \beta - \text{λογ ἡμ}\, \alpha < 10,$$

οἱ Πίνακες δίδουσι, διὰ τὴν ζητουμένην γωνίαν Β, μίαν τιμὴν $B' < 90^0$. Ἀλλά, ἐπειδὴ τὸ παραπλήρωμα $180^0 - B'$, ἢ B'', ἔχει τὸ αὐτὸ σὺν τῇ B' ἡμίτονον, δύω γωνίαι B', B'', παραπληρωματικαὶ θέλουσιν ἀντιστοιχεῖ τῷ ἡμ Β.

Καθιστάντες διαδοχικῶς B' καὶ B'', ἀντὶ Β, ἐν ταῖς ἐξισώσεσι (2), (3), προκύψουσιν ἐκ τούτων δύο τιμαὶ δι' ἑκάστην τῶν ἀγνώστων Γ, γ. Ἐπειδὴ ἡ γωνία Γ καὶ ἡ πλευρὰ γ πρέπει νὰ ἦναι ἐλάσσονες 180^0, πρέπει συνεφ $\frac{1}{2}$ Γ, ἐφ $\frac{1}{2}$ γ, νὰ ἔχωσι τιμὰς θετικάς· ὅθεν συνάγομεν, συνεπείᾳ τῶν τύπων (2), (3), ὅτι αἱ ποσότητες $(A - B)$, $(\alpha - \beta)$, πρέπει νὰ ἦναι ἀμφότεραι ἢ θετικαί, ἢ ἀρνητικαί. Ἡ συνθήκη δὲ αὕτη ἱκανή ἐστιν.

Ἀλλά, τὸ σημεῖον τῆς $(\alpha - \beta)$ ἐστὶ γνωστόν, διότι αἱ δύο πλευραὶ α, β, δίδονται· εὐκόλως ἄρα διακρίνομεν, ἐν ἑκάστῃ περιπτώσει μερικῇ, ἐὰν αἱ τιμαὶ B', B'', ἁρμόζωσιν εἰς τὸ ζήτημα. Ὁ κανὼν ὃν πρὸς τοῦτο πρέπει ν' ἀκολουθῶμεν ἐστὶν ἁπλούστατος. Καὶ ὄντως, ἐκ τῆς δοθείσης γωνίας Α ἀφαιροῦμεν διαδοχικῶς ἑκάστην τῶν γωνιῶν B', B'', τῶν διὰ τῆς ἐξισώσεως (1) ὁριζομένων, καὶ ἔχομεν τὰς διαφορὰς $(A - B')$, $(A - B'')$. Ἐὰν αἱ δύο αὗται διαφοραὶ ἔχωσι τὸ σημεῖον τῆς $(\alpha - \beta)$, αἱ γωνίαι B', B'', ἁρμόζουσιν ἀμφότεραι εἰς τὸ ζήτημα· τότε ὑπάρχουσι δύο λύσεις. Ὅταν ἡ μία μόνη τῶν διαφορῶν $(A - B')$, $(A - B'')$, ἔχῃ τὸ σημεῖον τῆς $(\alpha - \beta)$, π. χ. ἡ $(A - B')$, ἡ τιμὴ B' τῆς Β ἔσεται ἁρμόζουσα, ἡ δ' ἑτέρα B'' ἀποῤῥιπτέα· τὸ δὲ πρόβλημα μοναδικῆς λύσεως ἔσεται ἐπιδεκτικόν. Τέλος, ἐὰν οὐδεμία τῶν διαφορῶν $(A - B')$, $(A - B'')$, ἔχῃ τὸ σημεῖον τῆς $(\alpha - \beta)$, τὸ ζήτημα οὐδεμίαν λύσιν ἐπιδέχεται.

Ἵνα δείξωμεν ἐφαρμογὰς τοῦ γενικοῦ τούτου κανόνος, ὑποθέσωμεν *ὀξεῖαν* τὴν δεδομένην γωνίαν Α.

Τρεῖς περιπτώσεις διακρίνομεν, ἤτοι·

$$\beta < 90^0, \quad \beta = 90^0, \quad \beta > 90^0.$$

1ον. Ἔστω $\quad A < 90^0, \quad \beta < 90^0.$

Ὅταν $\alpha < \beta$, ὁ τύπος (1) δίδει $B' > A$.

Ἔχομεν δὲ $\quad B'' > 90^0 > A.$

Αἱ διαφοραὶ $(A - B')$, $(A - B'')$, ἔχουσι τὸ σημεῖον τῆς $(\alpha - \beta)$. Ἄρα, δύω λύσεις ὑπάρχουσι.

Ἐὰν $\alpha > \beta$, δυνατὸν νὰ ἔχωμεν·

$$\alpha + \beta < 180^0, \quad \alpha + \beta = 180^0, \quad \alpha + \beta > 180^0.$$

Ἔστω $\quad \alpha + \beta < 180^0$· τότε $\beta < 180^0 - \alpha$, ἡμ $\beta <$ ἡμ α· καί, κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1), $B' < A$. Ἡ διαφορὰ $(A - B')$ ἔχει τὸ σημεῖον τῆς $(\alpha - \beta)$, καὶ ἑπομένως ἡ γωνία B' ἁρμόζει εἰς τὸ ζήτημα. Ἄλλως, ἡ γωνία B'' ἐστὶν ἀποῤῥιπτέα, διότι $(A - B'')$, $(\alpha - \beta)$, ἔχουσι σημεῖα ἐναντία.

Ἡ ὑπόθεσις $\alpha + \beta = 180^0$, δίδει·

$$B' = A, \quad A - B' = 0, \quad A - B'' < 0.$$

Τὸ ζήτημα οὐδεμίαν ἐπιδέχεται λύσιν. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ὅταν $\alpha + \beta > 180^0$· διότι $\beta > 180^0 - \alpha$, ἡμ $\beta >$ ἡμ α· ἑπομένως $\quad$ ἡμ $B' >$ ἡμ A, $\quad$ ὅθεν $B' > A$,

καὶ $\quad A - B' < 0, \quad A - B'' < 0, \quad$ ἐν ᾧ $\quad \alpha - \beta > 0.$

2ον Ἔστω $\quad A < 90^0, \quad \beta = 90^0.$

Ὁ τύπος (1) ἄγεται εἰς $\quad$ ἡμ $B = \dfrac{\text{ἡμ } A}{\text{ἡμ } \alpha}$.

Ἔστω $\alpha < \beta$, ἢ $\alpha - \beta < 0$. Ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει $B' > A$, ἄρα· $\quad A - B' < 0, \quad A - B'' < 0$. Δύω ὑπάρχουσι λύσεις. Ἐὰν $\alpha > \beta$, ἢ $\alpha - \beta > 0$, ἐπειδὴ καὶ αὖθις ἔχομεν $\quad A - B' < 0, \quad A - B'' < 0$, τὸ τρίγωνον οὐδεμίαν λύσιν ἐπιδέχεται.

3ον. Ἔστω $\quad A < 90^0, \quad \beta > 90^0.$

Ἐὰν $\alpha < \beta$, δυνατὸν νὰ ἔχωμεν·

$$\alpha + \beta < 180^0, \quad \alpha + \beta = 180^0, \quad \alpha + \beta > 180^0.$$

Ὅταν $\alpha + \beta < 180^\circ$, ἕπεται ὅτι $\beta < 180^\circ - \alpha$, τῆς β δὲ ἀμβλείας οὔσης, $\eta\mu\, \beta > \eta\mu\, \alpha$· ὅθεν

$$\eta\mu\, B' > \eta\mu\, A,\quad B' > A,\quad A - B' < 0,\quad A - B'' < 0.$$

Ἄρα, ὑπάρχουσι δύω λύσεις.

Ἡ ὑπόθεσις $\alpha + \beta = 180^\circ$, ἄγει εἰς $A - B' = 0$, $A - B'' < 0$.

Ἡ μὲν τιμὴ B' πρέπει ν' ἀποῤῥιφθῇ, ἡ δὲ B'' ἁρμόζει.

Τότε ὑπάρχει μία λύσις.

Ἡ ἀνισότης $\alpha + \beta > 180^\circ$ δίδει·

$$\beta > 180^\circ - \alpha,\quad \eta\mu\, \beta < \eta\mu\, \alpha,\quad \eta\mu\, B' < \eta\mu\, A,$$

ἑπομένως $B' < A$, $A - B' > 0$. Ἄρα, τὸ τρίγωνον μοναδικὴν λύσιν ἐπιδέχεται, ὁριζομένην ἐκ τῆς τιμῆς B' τῆς B.

Ὑποθέτοντες $\alpha > \beta$, ἕξομεν, ἐπειδὴ α καὶ β ὑπερβαίνουσιν 90°, $\eta\mu\, \alpha < \eta\mu\, \beta$, ὅθεν $\eta\mu\, A < \eta\mu\, B$, $A < B'$· καὶ $A - B' < 0$, $A - B'' < 0$. Τότε τὸ πρόβλημα οὐδεμίαν λύσιν ἐπιδέχεται.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐξετάζοντες τὰς δύο ὑποθέσεις $A = 90^\circ$, $A > 90^\circ$, μορφοῦμεν τὸν ἤδη ἐκτεθέντα πίνακα ἐν χωρίῳ **142.**

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ.

145. *Εὑρεῖν τὸ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστημα δύω σημείων Α, Β, τῆς ὑδρογείου σφαίρας, ὧν γνωστά εἰσι τὰ γεωγραφικὰ μήκη καὶ πλάτη.*

(Σχ. 40) Ἔστω ΚΡ ὁ Ἰσημερινὸς, Γ ὁ βόρειος πόλος, καὶ ΓΕΔ, ΓΖΔ, οἱ ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β διερχόμενοι μεσημβρινοί· τεθείσθω δὲ ὅτι τὰ γεωγραφικὰ μήκη μετρῶνται ἀπὸ τοῦ σημείου Π, κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΠΕΖ.

Ἡ ἀπ' ἀλλήλων διαφορὰ τῶν δύω μηκῶν (ΠΖ — ΠΕ) ἰσοῦται τῷ τόξῳ ΕΖ, ἤτοι τῇ ὑπὸ τῶν δύω μεσημβρινῶν περιεχομένῃ γωνίᾳ Γ. Τὰ τόξα ΑΓ, ΒΓ, εἰσὶ συμπληρώματα τῶν δεδομένων πλατῶν ΑΕ, ΒΖ.

Λοιπὸν, ἐν τῷ σφαιρικῷ τριγώνῳ ΑΒΓ, γνωστά εἰσιν, ἡ γωνία Γ καὶ αἱ δύω πλευραὶ αὐτῆς· ζητεῖται δὲ ἡ τρίτη πλευρὰ ΑΒ.

Κατὰ ἐδάφιον **134**, ΑΒ, ἢ γ, λογίζεται διὰ τῶν τύπων·

$$\sigma\upsilon\nu\epsilon\varphi\, \varphi = \epsilon\varphi\, \beta\ \sigma\upsilon\nu\, \Gamma,\qquad \sigma\upsilon\nu\, \gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu\, \beta\ \eta\mu\, (\alpha + \varphi)}{\eta\mu\, \varphi}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Εὑρεῖν τὸ μεταξὺ Βρέστης καὶ Καϋένης ἀπόστημα, κατὰ τὰ ἑξῆς διδόμενα·*

ΒΡΕΣΤΗΣ, μῆκ. δυτ. $6^\circ\ 49'$, πλ. βόρ. $48^\circ\ 23'\ 14''$.
ΚΑΥΕΝΗΣ, » » $54^\circ\ 35'$, » » $4^\circ\ 56'\ 15''$.

$$\Gamma = 54^\circ 35' - 6^\circ 49' = 47^\circ 46',$$
$$\alpha = 90^\circ - 48^\circ 23' 14'' = 41^\circ 36' 46'',$$
$$\beta = 90^\circ - 4^\circ 56' 15'' = 85^\circ\ 3'\ 45''.$$

Λογισμὸς τῆς γωνίας φ.

λογ συν Γ	9,8274671
λογ ἐφ β	11,0635386
λογ συνεφ φ	10,8910057.

$$\varphi = 7^\circ\ 19'\ 26'', \quad \alpha + \varphi = 48^\circ\ 56'\ 12''.$$

Λογισμὸς τῆς πλευρᾶς γ.

λογ συν β	8,9348468
λογ ἡμ (α + φ)	9,8773621
σ. λογ ἡμ φ	0,8945642
λογ συν γ	9,7067731,

$$\gamma = 59^\circ\ 23'\ 54'',38.$$

Λοιπὸν, τὸ μετροῦν τὸ ζητούμενον ἀπόστημα τόξον, ἰσοῦται $59^\circ\ 23'\ 54'',38$. Ἵνα τρέψωμεν αὐτὸ εἰς μυριόμετρα (*), καθιστῶμεν τὴν ἀναλογίαν·

$$90^\circ : 59^\circ\ 23'\ 54'',38 :: 1000 : x,$$

ἐξ ἧς, $$x = \frac{213834,38 \times 1000}{324000} = 659^{\mu\rho\mu.},983.$$

ΣΗΜ. Ἡ τελευταία αὕτη διατίμησις εἶναι εὐκολωτέρα, ὅταν τὸ τόξον ἐκφράζηται εἰς μοίρας νέας. Ἔστω, π. χ. κατὰ τὴν νέαν διαίρεσιν, τὸ τόξον $37^0\ 45'\ 69''$, ἤτοι $0\tau,374569$. Πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐπὶ τὴν ἀξίαν τοῦ τεταρτοκυκλίου εἰς μυριόμετρα, εὑρίσκομεν ἀμέσως 374μρμ.,569.

146. *Γωνίαν ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα ἀναγαγεῖν.*

(Σχ. 41) Ἔστω ΒΑΓ γωνία τις κειμένη ἐπὶ ἐπιπέδου κεκλιμμένου. Ἔστω προσέτι ΑΔ ἡ διὰ τῆς κορυφῆς Α διερχομένη κατα-

(*) Τὸ τέταρτον τοῦ γηΐνου μεσημβρινοῦ ἰσοῦται 1000μρμ. = 10 000 000μ.

κόρυφο; Ἄγομεν κατ' ἀρέσκειαν τὸ ὁριζόντειον ἐπίπεδον ΜΝ, τὸ ὁποῖον διαπερῶσιν αἱ γραμμαὶ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η. Ἡ γωνία ΕΗΖ εἶναι ἡ ὁριζόντειος προβολὴ τῆς ΒΑΓ, ἣν πρόκειται νὰ εὕρωμεν διὰ τοῦ λογισμοῦ, ὑποτιθεμένων γνωστῶν τῶν γωνιῶν ΒΑΓ, ΒΑΔ, ΓΑΔ.

Ἡ γραφικὴ ἐπίλυσις τοῦ ζητήματος εἶναι εὔκολος· διότι, λαμβάνοντες κατ' ἀρέσκειαν τὴν γραμμὴν ΑΗ, ἔξομεν δεδομένα ἱκανὰ πρὸς κατασκευὴν τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΕΑΗ, ΖΑΗ, τοῦ τριγώνου ΕΑΖ, καὶ τέλος τοῦ ΕΗΖ.

Ἐπίσης εὔκολός ἐστιν ὁ λογισμὸς τῆς γωνίας ΕΗΖ. Φανταζόμεθα σφαῖραν, ἧς Α ἔστω τὸ κέντρον καὶ ἡ ἀκτὶς οἱαδήποτε. Τὰ ἐπίπεδα ΕΑΖ, ΕΑΗ, ΖΑΗ, ὁρίζουσι τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΒΓΔ, οὗτινος, αἱ μὲν πλευραί εἰσι γνωσταὶ εἰς μοίρας, ἕνεκα τῶν δεδομένων γωνιῶν, ἡ δὲ γωνία ΒΔΓ εἶναι ἴση τῇ ζητουμένῃ ΕΗΖ.

Λοιπόν, τὸ πρόβλημα ἐπιλύεται διὰ τῆς 1ης περιπτώσεως τῶν σφαιρικῶν πλαγιογωνίων τριγώνων, [131] ἤτοι διὰ τοῦ τύπου·

$$\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{A} = \sqrt{\frac{\text{ἡμ}\,(s-\beta)\;\text{ἡμ}\,(s-\gamma)}{\text{ἡμ}\,\beta\;\text{ἡμ}\,\gamma}}.$$

Ποιοῦμεν·

$$\alpha = \mathrm{ΒΑΓ},\quad \beta = \mathrm{ΒΑΔ},\quad \gamma = \mathrm{ΓΑΔ},\quad s = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma).$$

Ἔστωσαν, πρὸς ἐφαρμογήν·

$$\alpha = 47^0\,45'\,39'',\quad \beta = 69^0\,49'\,19'',\quad \gamma = 80^0\,17'\,36'',$$

Ἔχομεν·

$$2s = 197^0\,52'\,34'',\qquad s = 98^0\,56'\,17'',$$
$$s-\beta = 29^0\,6'\,58'',\qquad s-\gamma = 18^0\,38'\,41''.$$

Ἐκτελοῦμεν τὰς ἑξῆς ἐργασίας·

λογ ἡμ $(s-\beta)$	9,6871552
λογ ἡμ $(s-\gamma)$	9,5047412
σ. λογ ἡμ β	0,0275078
σ. λογ ἡμ γ	0,0062623
2 λογ ἡμ $\frac{1}{2}$ A	19,2256665
λογ ἡμ $\frac{1}{2}$ A	9,6128332.

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{A} = 24^0\,12'\,27'',9$$
$$\mathrm{A} = 48^0\,24'\,56''.$$

147. *Τριγώνου σφαιρικοῦ δοθέντος, λογίσαι τὸ ἐμβαδόν.*

Παντὸς τριγώνου σφαιρικοῦ τὸ ἐμβαδὸν $2E$ δίδεται, ὡς γνωρίζομεν, συνεκθέσει τῶν γωνιῶν αὐτοῦ, ὑπὸ τοῦ τύπου·

$$2E = A + B + \Gamma - 180^0,$$

ἐξ οὗ,

$$\tfrac{1}{2}(A + B) = 90 - (\tfrac{1}{2}\Gamma - E).$$

Ἐν τῷ 3ῳ καὶ ἐν τῷ 1ῳ τῶν τύπων τοῦ Delambre [139], καθιστῶμεν, ἀντὶ $\frac{1}{2}(A + B)$, τὴν ἄνω τιμήν, καὶ λαμβάνομεν·

$$(1)\qquad \frac{\text{ἡμ}\,(\frac{1}{2}\Gamma - E)}{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\Gamma} = \frac{\text{συν}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\text{συν}\,\frac{1}{2}\gamma},$$

$$(2)\qquad \frac{\text{συν}\,(\frac{1}{2}\Gamma - E)}{\text{συν}\,\frac{1}{2}\Gamma} = \frac{\text{συν}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\text{συν}\,\frac{1}{2}\gamma}.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) πορίζόμεθα ταύτην·

$$\frac{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\Gamma - \text{ἡμ}\,(\frac{1}{2}\Gamma - E)}{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\Gamma + \text{ἡμ}\,(\frac{1}{2}\Gamma - E)} = \frac{\text{συν}\,\frac{1}{2}\gamma - \text{συν}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\text{συν}\,\frac{1}{2}\gamma + \text{συν}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$

ἥτις, συνεπείᾳ τοῦ 1ου καὶ τοῦ 6ου τῶν ἐν ἐδαφίῳ 49 τύπων, (τιθεμένου $\alpha + \beta + \gamma = 2s$) ἄγεται εἰς τὴν ἑξῆς·

$$(3)\qquad \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}E\ \text{συνεφ}\,\tfrac{1}{2}(\Gamma - E) = \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}s\ \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(s-\gamma).$$

Ἡ ἐξίσωσις (2), διὰ μετασχηματισμῶν ἀναλόγων, δίδει·

$$(4)\qquad \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}E\ \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(\Gamma - E) = \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(s-\alpha)\ \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(s-\beta).$$

Πολλαπλασιάζομεν μέλος ἐπὶ μέλος τὰς ἐξισώσεις (3), (4), ἐξάγομεν τοῦ γινομένου τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, καὶ ἔχομεν·

$$(5)\qquad \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}E = \sqrt{\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}s\ \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(s-\alpha)\ \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(s-\beta)\ \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(s-\gamma)}.$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου λογίζεται τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου σφαιρικοῦ, συνεκθέσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

148. Οἱ τύποι (1), (2), γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$(6)\qquad \text{ἡμ}\,\frac{\Gamma}{2}\,\text{συν}\,E - \text{συν}\,\frac{\Gamma}{2}\,\text{ἡμ}\,E = \frac{\text{συν}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\text{συν}\,\frac{1}{2}\gamma}\,\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\Gamma,$$

$$(7)\qquad \text{συν}\,\frac{\Gamma}{2}\,\text{συν}\,E + \text{ἡμ}\,\frac{\Gamma}{2}\,\text{ἡμ}\,E = \frac{\text{συν}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\text{συν}\,\frac{1}{2}\gamma}\,\text{συν}\,\tfrac{1}{2}\Gamma.$$

Πολλαπλασιαζομένων τῶν δύω τούτων ἐξισώσεων ἀμοιβαίως, ἐπὶ ἡμ $\frac{1}{2}$ Γ καὶ συν $\frac{1}{2}$ Γ, εἶτα προστιθεμένων, προκύπτει·

$$\text{συν Ε} = \frac{\text{συν } \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\ \text{ἡμ}^2 \frac{1}{2}\ \Gamma + \text{συν } \frac{1}{2}(\alpha - \beta)\ \text{συν}^2 \frac{1}{2}\ \Gamma}{\text{συν } \frac{1}{2}\ \gamma},$$

ἢ,

$$(8) \qquad \text{συν Ε} = \frac{\text{συν } \frac{1}{2}\ \alpha\ \text{συν } \frac{1}{2}\ \beta + \text{ἡμ } \frac{1}{2}\ \alpha\ \text{ἡμ } \frac{1}{2}\ \beta\ \text{συν Γ}}{\text{συν } \frac{1}{2}\ \gamma}.$$

Καθισταμένης, ἀντὶ συν Γ, τῆς τιμῆς αὐτοῦ συνεκθέσει τῶν πλευρῶν, λαμβάνομεν, μετά τινας ἀναγωγὰς εὐκόλους·

$$(9) \qquad \text{συν Ε} = \frac{1 + \text{συν } \alpha + \text{συν } \beta + \text{συν } \gamma}{4\ \text{συν } \frac{1}{2}\ \alpha\ \text{συν } \frac{1}{2}\ \beta\ \text{συν } \frac{1}{2}\ \gamma}.$$

Ἐπιλυομένων ὁμοίως τῶν ἐξισώσεων (6) καὶ (7) πρὸς ἡμ Ε, ἔξομεν πρῶτον·

$$(10) \qquad \text{ἡμ Ε} = \frac{\text{ἡμ } \frac{1}{2}\ \alpha\ \text{ἡμ } \frac{1}{2}\ \beta\ \text{ἡμ Γ}}{\text{συν } \frac{1}{2}\ \gamma},$$

εἶτα, καθισταμένης, ἀντὶ ἡμ Γ, τῆς τιμῆς αὐτοῦ, συνεκθέσει τῶν πλευρῶν·

$$(11) \qquad \text{ἡμ Ε} = \frac{\sqrt{\text{ἡμ } s\ \text{ἡμ } (s - \alpha)\ \text{ἡμ } (s - \beta)\ \text{ἡμ } (s - \gamma)}}{2\ \text{συν } \frac{1}{2}\ \alpha\ \text{συν } \frac{1}{2}\ \beta\ \text{συν } \frac{1}{2}\ \gamma}.$$

149. Διαιρουμένης, μέλος διὰ μέλους, τῆς ἐξισώσεως (8) διὰ τῆς ἐξισώσεως (10), προκύπτει ὁ τύπος·

$$(12) \qquad \text{συνεφ Ε} = \frac{\text{συνεφ } \frac{1}{2}\ \alpha\ \text{συνεφ } \frac{1}{2}\ \beta + \text{συν Γ}}{\text{ἡμ Γ}}$$

ὅστις δίδει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου, συνεκθέσει δύω πλευρῶν καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.

150. Ἐντεῦθεν προκύπτει τὸ θεώρημα τοῦτο.

Δύο τρίγωνα σφαιρικὰ ΑΒΓ, Α'Β'Γ', *ὅταν ἔχωσι μίαν γωνίαν* Γ *κοινήν, ἕξουσιν ἐπίσης τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, ἐάν·*

$$\text{ἐφ } \tfrac{1}{2}\ \alpha\ \text{ἐφ } \tfrac{1}{2}\ \beta = \text{ἐφ } \tfrac{1}{2}\ \alpha'\ \text{ἐφ } \tfrac{1}{2}\ \beta'.$$

Ἤγουν, ἐὰν αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν ἡμίσεων τῶν πλευρῶν, τῶν περιλαμβανουσῶν τὴν κοινὴν γωνίαν, ἦναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι.

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ.

1) *Εἰς τόπον δεδομένον, εὑρεῖν τὴν ὥραν καθ' ἣν ἀνατέλλει καὶ δύει ὁ ἥλιος, τὸ μῆκος τῆς ἡμέρας καὶ τῆς νυκτός, ἡμέρας δεδομένης.*

2) *Εὑρεῖν τὴν μεγίστην καὶ τὴν ἐλαχίστην ἡμέραν καὶ νύκτα τόπου δεδομένου.*

3) *Ἐπὶ ἡλιακοῦ τινος ὁριζοντείου ὡρολογίου, νὰ ὁρισθῶσιν αἱ ὡριαῖαι καὶ αἱ ἡμιωριαῖαι γραμμαί.*

Ἀπ. $$\text{ἐφ}\,\psi = \text{ἐφ}\,H \times \text{ἡμ}\,\tau.$$

[ψ *παριστᾷ τὴν ζητουμένην γωνίαν,* $H = 15^0$, $\eta = 7^0\,30'$, *καθ' ὅσον πρόκειται περὶ ὡριαίων, ἢ ἡμιωριαίων γωνιῶν,* τ *τὸ γεωγραφικὸν πλάτος τοῦ τόπου*].

4) *Εὑρεῖν τὸ μέγεθος μιᾶς μοίρας γεωγραφικοῦ μήκους ἐπὶ παραλλήλου πλάτους δεδομένου.*

5) *Σφαιρικῆς ζώνης τὴν ἐπιφάνειαν* E *εὑρεῖν.*

Ἀπ. $$E = 4\pi\rho^2\,\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}(\tau - \tau')\,\text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\tau + \tau').$$

[ρ *ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας·* τ, τ', *τὰ γεωγραφικὰ πλάτη τῶν βάσεων τῆς ζώνης*].

6) *Εὑρεῖν τὴν ταχύτητα μεθ' ἧς οἱ κάτοικοι τόπου τινός, δεδομένου διὰ τοῦ πλάτους αὐτοῦ* τ, *φέρονται ἐν τῷ διαστήματι καθ' ἕκαστον λεπτὸν δεύτερον τῆς ὥρας, συνεπείᾳ τῆς περιστροφῆς τῆς γῆς.*

Ἀπ. $$464^{\mu} \times \text{συν}\,\tau.$$

ΤΕΛΟΣ.

ΠΙΝΑΞ
ΤΩΝ ΕΜΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Θεωρία τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

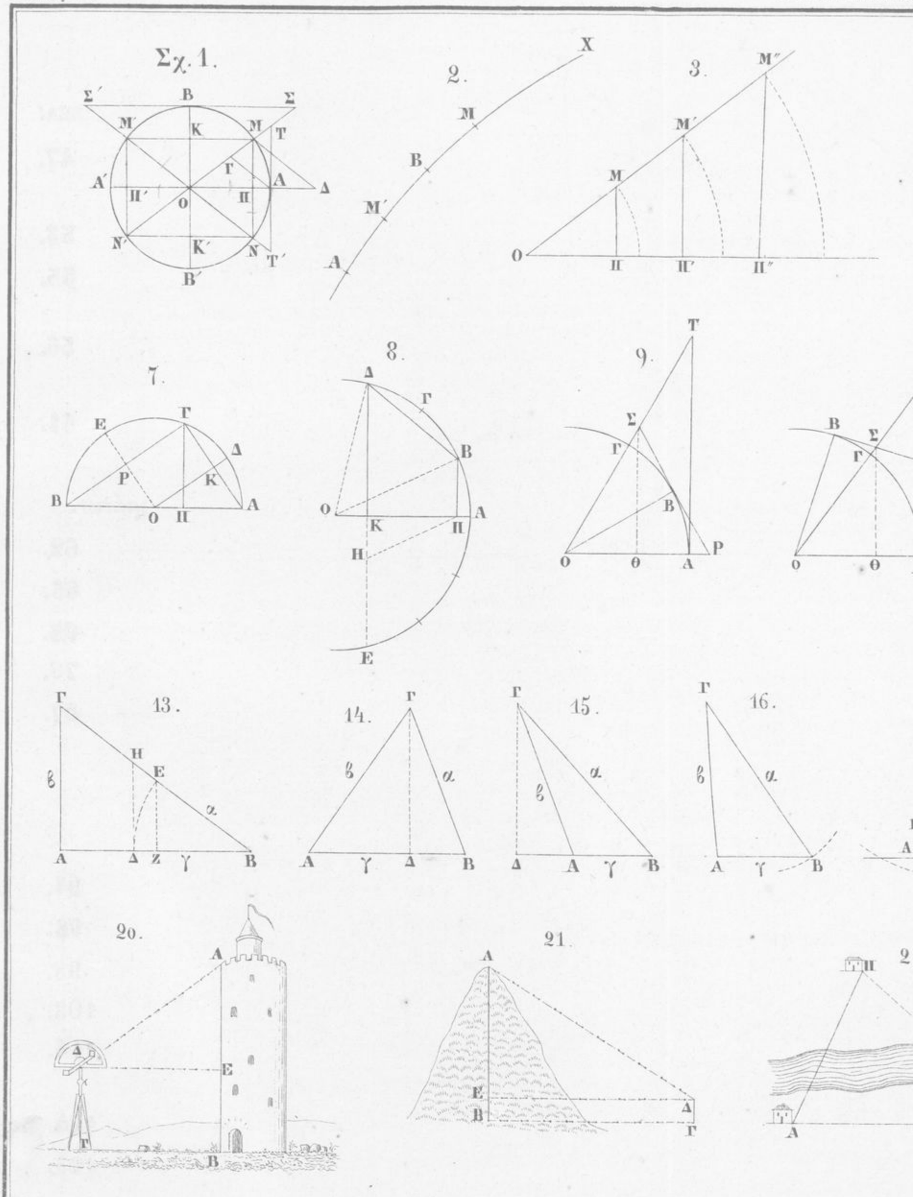
Πίνακες τριγωνομετρικοί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

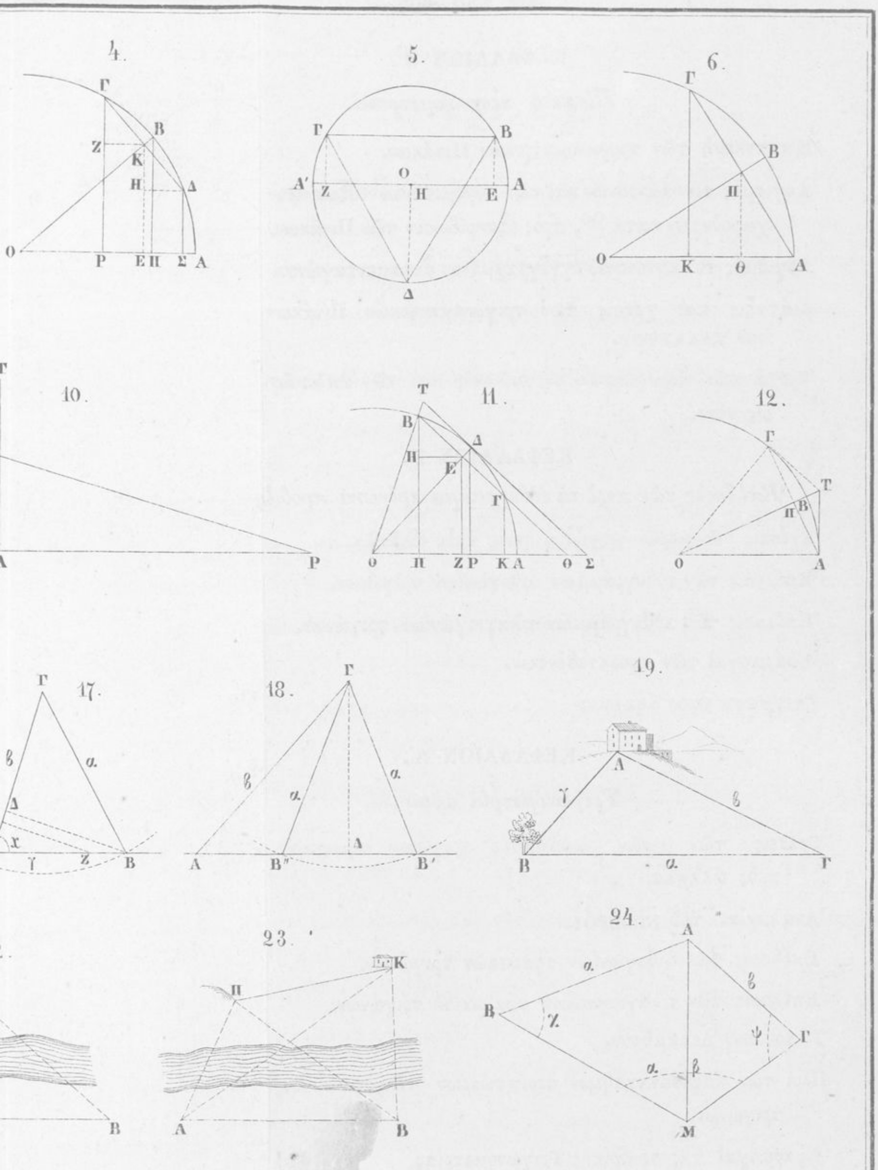
Ἐπίλυσις τῶν περὶ τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα προβλημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

Τριγωνομετρία σφαιρική.

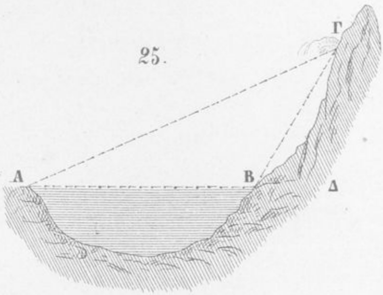

Σχ. 1.
2.
3.
7.
8.
9.
13.
14.
15.
16.
20.
21.

ΜΕΤΡΙΑ

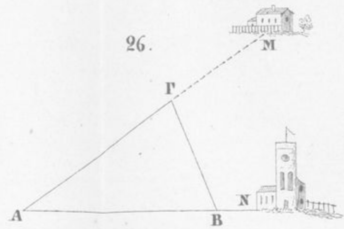


Λιθογραφία Κ. Κόλμαν. Αθήναι.

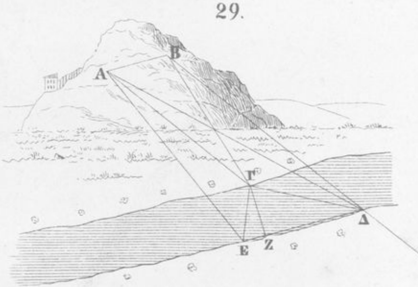
25.



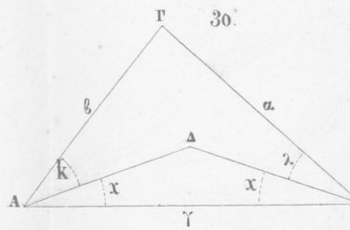
26.



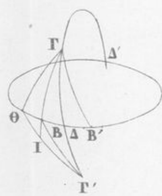
29.



30.

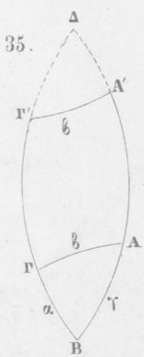


37.

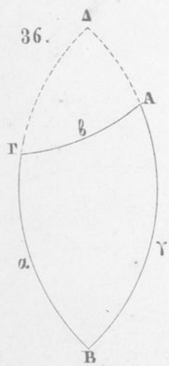


39.

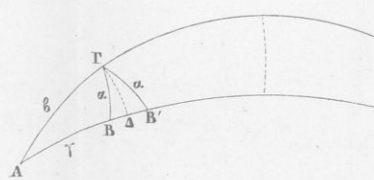
35.

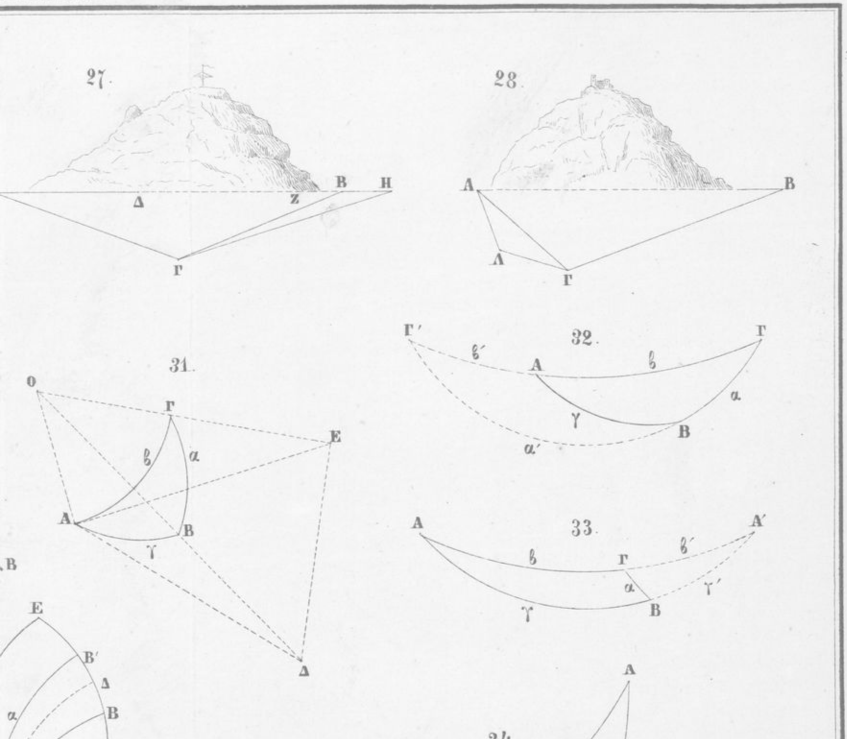


36.



38.





Λιθογραφία Κ. Κόλμαν.

10