ΣΕΙΡΑΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΟΜΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΣ.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

Πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητευόντων εἰς τὰ γυμνάσια.

ΥΠΟ

Χ. ΒΑΦΑ.

Κατὰ πάντα σχεδὸν μετεῤῥυθμημένον ἐκδίδεται τὸ δεύτερον.

ΑΘΗΝΗΣΙΝ

ΤΥΠΟΙΣ Φ. ΚΑΡΑΜΠΙΝΟΥ ΚΑΙ Κ. ΒΑΦΑ.

(Παρὰ τῇ ὁδῷ Ἀδριανοῦ)

1848.

Πᾶν ἀντίτυπον τοῦ βιβλίου τούτου μὴ ἔχον τὴν κάτωθι ἰδιόχειρόν μου ὑπογραφὴν εἶναι παρατυπωμένον, ὁ δὲ παρατυπώσας θέλει καταδιωχθῇ κατὰ τὸν νόμον. Πᾶν δ' ὅ,τι συντείνει πρὸς ἀνακάλυψιν αὐτοῦ θέλει δραστηρίως ἐνεργηθῇ.

Βάφας

Πρὸς τὸν ἀναγινώσκοντα.

Τὸ τρίτον τοῦτο μέρος τῆς Ἀριθμητικῆς ἐμπεριλαμβάνει πλὴν τῶν λογαρίθμων ὅλα τἄλλα τῆς στοιχειώδους Ἀριθμητικῆς καὶ ὅσα θεωροῦνται ὡς εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Ἄλγεβραν. Τὰ δὲ περὶ τῶν λογαρίθμων θέλουσιν ἐκτεθῆ ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ, διότι ἐκεῖ σπουδάζονται ἀκριβέστερα καὶ εὐκολώτερα μετά τιν' ἄσκησιν εἰς τὴν λύσιν τῶν τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ προβλημάτων.

Διαφέρει δὲ τῆς πρώτης αὐτοῦ ἐκδόσεως ἡ δευτέρα αὕτη, καθότι σαφηνείας καὶ ἁπλότητος χάριν εἶναι πολλὰ ἐν ταύτῃ ἢ ἄλλως διατεταγμένα ἢ ἱκανῶς ἀνεπτυγμένα· ἔτι δὲ τὰ μὲν εἶναι νέα, τὰ δὲ τῆς πρώτης καὶ παρελείφθησαν. Οὕτω δὲ κατέστη τὸ βιβλίον, νομίζω, πολὺ τελειότερον, ὡς ἡ παράθεσις δύναται νὰ δείξῃ.

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ.

Σελ.	Στιχ.	
75	10	839285714 ἀντὶ 389 . . .
76	εἰς τὸ τέλος,	$\frac{159}{493}$ ἀντὶ $\frac{159}{932}$.
94	1	16 ἀντὶ 1,6.
	9	κάτωθεν, ἂν ὁ 226576 δὲν ἦναι, ἀντὶ τοῦ ἂν ὁ 226576 ἦναι.
118	2	κάτωθεν, δεκάδας ἀντὶ μονάδας.
128	2	$\frac{825}{3^3.5^3}$ ἀντὶ $\frac{825}{3^3.5^2}$.

Αἱ εἰς τ' ἄλλα μέρη τῆς Ἀριθμητικῆς παραπομπαὶ γίνονται εἰς τὴν τρίτην ἔκδοσιν τῆς Π. Α. καὶ εἰς τὴν πρώτην τῆς Θ. Α.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΕΜΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΟΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΝΕΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΤΟΥ ΘΕΩΡΕΙΝ ΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ.

Πολλάκις ἐσημειώσαμεν ἐν τῇ Θεωρητικῇ Ἀριθμητικῇ ὅτι ἄλλα τινὰ μέρη τῆς στοιχειώδους Ἀριθμητικῆς δὲν ἦτον δυνατὸν ἐκεῖ νὰ ἐκτεθῶσι, καὶ ὅτι θέλουσιν ἐξηγηθῇ ἐν τῷ Συμπληρώματι τῆς Ἀριθμητικῆς. Καὶ αὐτὰ δὲ καὶ ὅσα ἄλλα τῆς στοιχειώδους Ἀριθμητικῆς λείπονται ἀκόμη θέλουσιν ἐκτεθῇ ἐν τῷ βιβλίῳ τούτῳ.

Ὅτι εἶναι δυνατὰ διάφορα συστήματα ἀριθμήσεως.

1. Ἕκαστος ἀριθμὸς ἀνάγκη νὰ ἔχῃ ὄνομα ἴδιον, ἵνα διακρίνηται παντὸς ἄλλου ἀριθμοῦ, ἔτι δὲ ἀνάγκη νὰ ἐκληφθῶσιν ἀριθμοί τινες ὡς μονάδες, ἵνα χρειασθῶσιν ὀλιγώταται λέξεις διάφοροι εἰς ἀπαρτισμὸν τῶν ὀνομάτων ὅλων τῶν ἀριθμῶν· ἀλλὰ δὲν εἶναι ἀναγκαῖον ὁ δέκα (ὅστις κατὰ σύμπτωσιν ἐξελήφθη, Θ. Α. σελ. 3) καὶ ὁ ἑκατὸν κτλ νὰ ἦναι αὐτοὶ οἱ ὡς μονάδες θεωρούμενοι ἀριθμοί, διότι εἶναι δυνατὸν καὶ ἄλλων ἀριθμῶν ἐκλαμβανομένων ὡς μονάδων νὰ ὀνομασθῶσιν ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ δἰ ὀλιγωτάτων λέξεων.

2. Π. χ. ἂς ἐκλάβωμεν τὸν ἀριθμὸν ἓξ πρῶτον ὡς μονάδα δευτέρας τάξεως ἀντὶ τοῦ δέκα, διατηροῦντες τὰ αὐτὰ μὲν ὀνόματα τῶν μικροτέρων τοῦ ἓξ ἀριθμῶν, τὴν αὐτὴν δὲ κατάληξιν ακοντα διὰ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς ἑξάδος. Οἱ μὲν πολλαπλάσιοι τοῦ ἓξ ἤθελον ὀνομασθῇ οὕτω

12	18	24	30	36
δύο ἑξάδες,	τρεῖς ἑξάδ.	τέσσαρες ἑξάδ.	πέντε ἑξάδ.	ἓξ ἑξάδ.
ἢ διάκοντα,	τριάκοντα,	τεσσαράκοντα,	πεντήκοντα,	ἑξήκοντα.

Οἱ δὲ λοιποὶ μέχρι τοῦ τριάκοντα ἕξ ἤθελον ὀνομάζεσθαι ἕξ ἕν (7), ἕξ δύο (8), ἕξ τρία (9), ἕξ τέσσαρα (10), ἕξ πέντε (11), δύο ἑξάδες ἕν ἢ διάκοντα ἕν (13), δύο ἑξάδες δύο ἢ διάκοντα δύο (14) . . . . πέντε ἑξάδες πέντε ἢ πεντήκοντα πέντε (35).

Ἐκλαμβάνοντες δὲ τὸν ἕξ ἑξάδες (36) ὡς μονάδα τρίτης τάξεως, ὡς τὸν 100, ὅστις εἶναι δέκα δεκάδες, καὶ ὀνομάζοντές τον ἢ ἑκατὸν ἢ ῥόντιον π. χ. , τοὺς μὲν πολλαπλασίους αὐτοῦ ἠθέλαμεν ὀνομάζει
δύο ῥοντιάδας (72), τρεῖς ῥοντιάδας (108). . . . . ἕξ ῥοντιάδας (216), ἢ ἂν ἠθέλαμεν μεταχειρισθῇ τὴν κατάληξιν ακοσια, διακόσια, τριακόσια. . . . . . , ἑξακόσια (216) τοὺς δὲ λοιποὺς ῥόντιον ἕν (37), ῥόντιον δύο (38), ῥόντιον τρία (39). . . . . . . ῥόντιον πεντήκοντα πέντε (71), δύο ῥοντιάδας ἕν ἢ διακόσια ἕν (73), δύο ῥοντιάδας δύο ἢ διακόσια δύο (74) . . . . . διακόσια πεντήκοντα πέντε (107), καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ πέντε ῥοντιάδας πεντήκοντα πέντε ἢ πεντακόσια πεντήκοντα πέντε (215).

Ἐκλαμβάνοντες δὲ τὸν 216 ἤτοι τὸν ἕξ ῥοντιάδας ὡς μονάδα τετάρτης τάξεως καὶ πρωτεύουσαν μονάδα, ὡς τὸν χίλια, ὀνομάζοντές τον δὲ πρωτόλιον (ἰδὲ Θ. Α σελ. 5), τοὺς μὲν πολλαπλασίους αὐτοῦ ἠθέλαμεν ὀνομάζει
δύο πρωτόλια (432), τρία πρωτόλια (648) . . . . . . πεντακόσια πεντήκοντα πέντε πρωτόλια (46440), τοὺς δὲ λοιποὺς τοὺς μεταξὺ τούτων διὰ ἑκάστου τῶν ὀνομάτων τούτων συνωδευμένου ὑφ᾽ ἑκάστου τῶν ὀνομάτων ἕν, δύο, ... πεντακόσια πεντήκοντα πέντε, ὡς συνθέτους ἐξ ἀριθμοῦ πρωτολίων καὶ ἐξ ἀριθμοῦ ἁπλῶν μονάδων ἤτοι μικροτέρου τοῦ πρωτολίου. Τὸν δὲ πρωτόλια πρωτολιάδες (ὡς τὸν χίλιαι χιλιάδες), ὅστις εἶναι ὁ νῦν 46656, ἠθέλαμεν ὀνομάζει δευτερόλιον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἐκ δὲ τούτων δῆλον ὅτι, καὶ ὁ πέντε καὶ ὁ ἑπτὰ καὶ ὁ ὀκτὼ κτλ ἐὰν ἤθελεν ἐκληφθῇ δευτέρας τάξεως μονάς, δυνατὸν κατὰ τὰ ἐν τῇ Θεωρητικῇ Ἀριθμητικῇ εἰρημένα (4,5,6) καὶ ἤδη ἐπανειλημμένα νὰ ὀνομασθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ διάφορα ὀνόματα, πάντοτε δὲ δἰ ὀλιγωτάτων λέξεων. Ὥστε ὁ νῦν π. χ. καλούμενος ἐννενήκοντα ἕξ, ἐὰν μὲν μονὰς δευτέρας τάξεως ἤθελεν ἐκληφθῆ ὁ πέντε, ἤθελε θεωρηθῆ σύνθετος ἐκ τριῶν 25 τεσσάρων 5 καὶ 1· ἐὰν δὲ ὁ ἕξ, ἤθελεν εἶσθαι δύο 36 καὶ τέσσαρα 6· ἐὰν δὲ ὁ ἑπτὰ, ἤθελεν εἶσθαι ἅπαξ 49, ἓξ 7 καὶ πέντε μονάδες· ἐὰν ὁ ὀκτὼ, ἤθελεν εἶσθαι ἅπαξ 64 καὶ τέσσαρα 8, κτλ, ἤθελε δὲ ὀνομασθῆ διὰ τῶν ὀνομάτων τῶν ἐξ ὧν σύγκειται ἑκάστοτε ἁπλῶν ἀριθμῶν τῶν διαφόρων τάξεων μονάδων.

Ὡς δὲ τώρα οἱ ἀριθμοὶ λέγονται δεκαδικοὶ, διότι δευτέρας τάξεως μονὰς εἶναι ὁ δέκα κτλ, οὕτως ἤθελαν ὀνομάζεσθαι πενταδικοὶ, ἑξαδικοὶ κτλ, ἂν μονὰς δευτέρας τάξεως ἤθελεν εἶσθαι ὁ πέντε, ὁ ἕξ, κτλ.

3. Ἵνα γράφωμεν δὲ τοὺς πενταδικοὺς, ἑξαδικοὺς κτλ, ἀριθμοὺς ἠθέλαμεν χρειασθῆ μόνον πέντε ἢ ἓξ ἢ ἑπτὰ κτλ ψηφία, ὧν τὸ ἓν ἤθελεν εἶσθαι 0. Διότι οἱ μὲν ἁπλοῖ δὲν ἤθελον ἔχει πλειοτέρας τῶν πέντε ἢ ἕξ κτλ μονάδων, καὶ ἤθελον χρειασθῆ πέντε σημαντικὰ ψηφία ἢ ἓξ κτλ, ἔτι δὲ καὶ τὸ 0, ἵνα δύνηταί τις νὰ παριστάνῃ διὰ τῆς θέσεως ἑκάστου σημαντικοῦ ψηφίου τὰς τῶν διαφόρων τάξεων μονάδας· οἱ δὲ σύνθετοι ἤθελον γράφεσθαι διὰ πολλῶν σημαντικῶν καὶ μηδενικῶν, τιθεμένων εἰς τὰς ἁρμοδίας θέσεις, ἵνα παριστάνωσι τὰς τῶν διαφόρων τάξεων μονάδας.

Οἱ μέχρι τοῦ 216 ἑξαδικοὶ π. χ. ἀριθμοὶ ἤθελον γραφθῆ οὕτω

		1	2	3	4	5	
6	10	11	12	13	14	15	
12	20	21	22	23	24	25	
18	30	31	32	33	34	35	
24	40	41	42	43	44	45	
30	50	51	52	53	54	55	35
36	100	101	. . .	. . .	. . .	155	
72	200	201	. . .	. . .	. . .	255	
108	300	301	. . .	. . .	. . .	355	
144	400	401	. . .	. . .	. . .	455	
180	500	501	. . .	. . .	. . .	555	215

Οἱ αὐτοὶ δὲ μὲ τρία μηδενικὰ δεξιά των ἤθελον παριστάνει τοὺς ἀριθμοὺς τῆς δευτέρας πρωτευούσης μονάδος, μὲ 000000 δὲ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς τρίτης πρωτευούσης μονάδος, κτλ.

Μὲ τὰ αὐτὰ ὀνόματα ἤθελαν ὀνομάζεσθαι καὶ οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ ἄλλοι τε καὶ οἱ ἐξαδικοί, καὶ κατὰ τὰς αὐτὰς ἀρχάς, καθ' ἃς οἱ ἐν χρήσει κλασματικοί, ἤθελον γράφεσθαι. Ὁ δὲ συνειθισμένος ν' ἀπαγγέλλῃ γραμμένον διὰ ψηφίων ἐξαδικὸν ἢ ἄλλον ἀριθμόν, ἢ νὰ γράφῃ ἀπαγγελλόμενον, ἤθελεν ἐκτελεῖ τὰς ἐπὶ ὅλων τῶν ἐξαδικῶν ἢ ἄλλων ἀριθμῶν πράξεις κατὰ τοὺς αὐτοὺς κανόνας, καθ' οὓς ἐκτελοῦνται ἐπὶ τῶν ἤδη ἐν χρήσει δεκαδικῶν.

Σημ. ά. Τὸ ἐκλαμβάνειν ὡς μονάδας ἀριθμοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς ἀλλήλους καὶ ὀνομάζειν δι' ἰδίας λέξεως καὶ αὐτῶν ἕκαστον καὶ τῶν μικροτέρων τῆς μονάδος τῆς δευτέρας τάξεως ἕκαστον, διὰ τούτων δὲ τῶν λέξεων ἔπειτα ὀνομάζειν ὅλους τοὺς λοιποὺς ἀριθμούς, τοῦτο καλεῖται κοινῶς σύστημα ἀριθμήσεως, βάσις δὲ αὐτοῦ ὁ ἀριθμός, ὅστις εἶναι δευτέρας τάξεως μονάς. Ἐκ δὲ τῶν ἤδη προειρημένων δῆλον ὅτι εἶναι δυνατὰ διάφορα συστήματα ἀριθμήσεως, τὸ τετραδικόν, τὸ πενταδικὸν κτλ, διακρινόμενα ἐκ τῆς βάσεως αὐτῶν, ἐξ ἧς ἐξαρτῶνται τὰ λοιπά. Ἀναγκαῖον δὲ κυρίως εἶναι μόνον ἓν σύστημα, ἐν χρήσει δὲ γενικῇ σχεδὸν εἶναι τὸ δεκαδικόν, εἰς παραδοχὴν δὲ αὐτοῦ εἴδομεν (Θε. Α. σελ. 3) τί ἔδωκεν ἀφορμήν. Ἀλλ' ἀφοῦ εἶναι διάφορ' ἀριθμήσεως συστήματα δυνατά, δικαίως ἠδύνατό τις νὰ ζητήσῃ ποῖον αὐτῶν εἶναι τὸ προτιμητέον καὶ διατί· ἤθελε δ' εὑρεῖ ὅτι προτιμητέον εἶναι τὸ ἔχον βάσιν διαιρετὴν διὰ πλειοτέρων ἀριθμῶν, καὶ τοιοῦτον εἶναι τὸ δωδεκαδικόν, καὶ ὄχι τὸ δεκαδικόν. Ἀλλ' εἰς ἀνάπτυξιν τούτων δὲν ἐμβαίνομεν ἐδῶ, καὶ διότι ἀδύνατον ἀντὶ τοῦ δεκαδικοῦ τώρα νὰ εἰσάξωμεν τὸ προτιμητέον, καὶ διότι χρειάζονται πολλαὶ ἄλλαι ἀριθμητικαὶ γνώσεις, αἵτινες τώρα μᾶς λείπουσιν.

Σημ. β'. Τὸ δεκαδικὸν σύστημα παρά τισιν ἔθνεσι διαφέρει τοῦ ἰδικοῦ μας (ἰδὲ Πρ. καὶ Θ. Αρ.), ὅπερ καλεῖται Γαλλικόν, κατὰ τοῦτο, ὅτι ὁ λόγος τῶν ἀριθμῶν μιλιόνιον, διλιόνιον, τριλιόνιον κτλ δὲν εἶναι ὁ χίλια, ἀλλὰ τὸ μιλιόνιον, ἤτοι τὸ διλιόνιον εἶναι ἓν μιλιόνιον μιλιόνια, τὸ τριλιόνιον εἶναι ἓν μιλιόνιον διλιόνια κτλ. Ὥστε κατὰ τοῦτο καὶ οἱ μικρότεροι τοῦ μιλιονίου ἀριθμοὶ καὶ οἱ ἀριθμοὶ τοῦ μιλιονίου, οἱ τοῦ διλιονίου κτλ ἀποτελοῦσι δύο περιόδους, μίαν τῶν ἁπλῶν ἀριθμῶν τῆς μονάδος, τοῦ μιλιονίου, τοῦ διλιονίου κτλ, καὶ ἄλλην τῶν ἀριθμῶν τῆς χιλιάδος αὐτῶν· (ἰδὲ καὶ ἐν τῷ τέλει τῆς Θ. Α. περὶ τοῦ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων δεκαδικοῦ συστήματος). Ἐκ δὲ τούτου συμβαίνει νὰ ἔχωσιν ἄλλα ὀνόματα οἱ μεγαλήτεροι τοῦ χίλια μιλιόνια ἀριθμοί· οἷον ὁ 45678901234567890 ὀνομάζεται κατ' αὐτοὺς 45 χιλιάδες 678 διλιόνια 901 χιλιάδες 234 μιλιόνια 567 χιλιάδες 890 μονάδες. Τοῦτο καλεῖται Γερμανικὸν σύστημα, ὅπερ δὲν εἶναι προτιμότερον τοῦ Γαλλικοῦ, διότι εἶναι πολυπλοκώτερον, ἐκεῖνο δ' ἁπλούστερον.

Περὶ θετικῶν καὶ ἀντιθετικῶν ἀριθμῶν.

4. Α'. Ἐὰν ἡ γραμμὴ ΑΒ παριστάνη ὁδόν τινα, ὡς πρὸς

Α Γ Β

τὸ σημεῖόν της Γ τὸ μὲν αὐτῆς μέρος κεῖται *δεξιὰ* τοῦ Γ, τὸ δὲ *ἀριστερὰ* αὐτοῦ. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ Γ ὁρμώμενοι δύο ταχυδρόμοι διευθύνωνται ὁ μὲν πρὸς τὸ Β, ὁ δὲ πρὸς τὸ Α, οὗτοι ἔχουσιν *ἐναντίαν* διεύθυνσιν, καὶ ἐν ἑκάστῃ στιγμῇ ἀπομακρύνονται τοῦ Γ βαθμηδὸν 1,2,3,4 κτλ μέτρα ὁ μὲν *δεξιὰ* τοῦ Γ, ὁ δὲ *ἀριστερὰ* αὐτοῦ.

Ὅταν λοιπὸν τὰ μέρη τῆς ΑΒ νοῶνται δεξιὰ καὶ ἀριστερὰ τοῦ Γ, αἱ δὲ διευθύνσεις τῶν ταχυδρόμων ἐναντίαι, ἐὰν ἦναι ἀνάγκη νὰ προσδιορίσωμεν πόσον μακρὰν τοῦ Γ εἶναι π. χ. τὰ σημεῖα Β καὶ Α, ὡς σημεῖα ἁπλῶς ἢ ὡς σημεῖα, ὅπου εὑρίσκονται οἱ ταχυδρόμοι μετά τινα χρόνον, δὲν ἀρκεῖ νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ μὲν Β ἀπέχει τοῦ Γ π. χ. 30 στάδια, τὸ δὲ Α 35, ἀλλὰ πρέπει νὰ προσθέσωμεν καὶ τὸ *δεξιὰ* τοῦ Γ ἢ *ἀριστερὰ* αὐτοῦ· εἰδεμὴ δὲν θέλουσιν εἶσθαι ἀκριβῶς προσδιωρισμένα.

Ὡσαύτως καὶ πρός τινα θέσιν, ὅπου ἵσταταί τις, ά. τὸ μὲν εἶναι *δεξιὰ* αὐτῆς, τὸ δὲ *ἀριστερὰ*, β'. τὸ μὲν εἶναι *ἔμπροσθεν* της, τὸ δὲ *ὀπίσω*, γ'. τὸ μὲν εἶναι *ἄνω* αὐτῆς, τὸ δὲ *κάτω*· εἰς δὲ προσδιορισμὸν τοῦ πόσον μακρὰν αὐτῆς τῆς θέσεως κεῖται ἀντικείμενόν τι δὲν ἀρκεῖ νὰ εἴπωμεν ὅτι ἀπέχει π. χ. 12 μέτρα, ἀλλὰ πρέπει νὰ προσθέσωμεν καὶ τὸ δεξιὰ ἢ ἀριστερά, ἐμπρὸς ἢ ὀπίσω, ἄνω ἢ κάτω.

Β'. Ὡς πρός τινα στιγμὴν τοῦ χρόνου ὁ μὲν τοῦ ἄλλου χρόνου νοεῖται ὡς *μέλλων*, ὁ δὲ ὡς *παρελθών*, ὁ μὲν ὡς ὢν *μετὰ* τὴν στιγμὴν ἐκείνην, ὁ δὲ ὡς ὢν *πρὸ* αὐτῆς· καὶ ἂν ἦναι χρόνος συμβάντος τινός, οἷον τῆς ἀνακαλύψεως τῆς Ἀμερικῆς ἢ τῆς ἐν Σαλαμῖνι ναυμαχίας, ἡ δὲ στιγμὴ εἶναι ἡ γέννησις τοῦ Χριστοῦ, εἰς προσδιορισμὸν αὐτοῦ τοῦ χρόνου δὲν ἀρκεῖ νὰ εἴπωμεν ὅτι ἀνεκαλύφθη ἡ Ἀμερικὴ τὸ 1492 καὶ ὅτι ἡ ἐν Σαλαμῖνι ναυμαχία ἔγεινε τὸ 480, ἀλλὰ πρέπει νὰ προσθέσωμεν καὶ τὸ *μετὰ* Χ καὶ τὸ *πρὸ* Χ· εἰδεμὴ δὲν θέλει εἶσθαι ἀκριβῶς προσδιωρισμένος.

Γ'. Τὸ θερμόμετρον διὰ τῆς συστολῆς καὶ διαστολῆς τοῦ ὄγκου τοῦ ῥευστοῦ τοῦ ἐν τῷ σωλῆνι αὐτοῦ δεικνύει τοὺς διαφόρους βαθμοὺς τῆς θερμοκρασίας. Ὡς πρός τινα δὲ ὄγκον ὡρισμένον τοῦ ῥευστοῦ ἄλλοι μὲν ὄγκοι αὐτοῦ εἶναι μεγαλήτεροι, ὅτε ἀναβαίνει ἐν τῷ σωλῆνι τὸ ῥευστὸν, ἄλλοι δὲ μικρότεροι, ὅτε καταβαίνει. Εἰς δὲ προςδιορισμὸν τοῦ ὄγκου τοῦ ῥευστοῦ ἤτοι τοῦ βαθμοῦ τῆς θερμοκρασίας δὲν ἀρκεῖ νὰ εἴπωμεν ὅτι εἶναι εἷς βαθμὸς ἢ 2 ἢ 3 κτλ, ἀλλὰ πρέπει νὰ προςθέσωμεν καὶ τὸ *ὑπὲρ* τὸν ὡρισμένον ὄγκον ἢ *ὑπό*.

Δ'. Ὡς πρὸς τὴν κατάστασιν τοῦ μήτε ἔχοντός τι μήτε χρεωστοῦντός τι ἡ κατάστασις τοῦ ἔχοντος καὶ μὴ χρεωστοῦντός τι εἶναι ἐναντία τῆς τοῦ χρεωστοῦντος καὶ μὴ ἔχοντός τι. Εἰς δὲ προςδιορισμὸν τῆς τοῦ ἑτέρου ἢ τῆς τοῦ ἄλλου δὲν ἀρκεῖ νὰ εἴπωμεν 1,2,3 κτλ, ἀλλὰ πρέπει νὰ προσθέσωμεν καὶ τὸ *ἔχει* ἢ τὸ *χρεωστεῖ*, τὸ *εἶναί του* ἢ *τὸ χρέος*.

Ἀρκοῦσι ταῦτα ἵνα δείξωσιν ὅτι τὸ αὐτὸ ποσὸν, θεωρούμενον πρός τι κατὰ συνθήκην ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἐκλαμβανόμενον, νοεῖται κατὰ δύο ἐννοίας ἐναντίας πρὸς ἀλλήλας, καὶ ὅτι εἰς προςδιορισμὸν αὐτοῦ οὕτω νοουμένου δὲν ἀρκεῖ μόνον ὁ ἀριθμὸς, ἤτοι νὰ ἠξεύρωμεν μὲ πόσας μονάδας εἶναι ἴσον τὸ ποσὸν, ἀλλ' ἀνάγκη νὰ δεικνύηται διὰ τῆς ἐπιτηδείας λέξεως καὶ ἡ ἑτέρα ἔννοια καθ' ἣν νοεῖται.

5. Ἐκεῖνο, πρὸς ὃ θεωρούμενον τὸ ποσὸν νοεῖται κατὰ δύο ἐναντίας ἐννοίας, οἷον ἀνωτέρω τὸ σημεῖον Γ, ἡ στιγμὴ, ὁ ὡρισμένος ὄγκος κτλ, καλεῖται *ἀρχὴ*, καθότι ἐκεῖθεν ἀρχίζομεν νὰ προςδιορίζωμεν τὸ ποσόν. Τὸ δὲ πρῶτον νοούμενον πρὸς τὴν ἀρχὴν ποσὸν, εἴτε τὸ πρὸς δεξιὰν εἶναι, εἴτε τὸ πρὸς ἀριστερὰν κτλ, εἴτε τὸ μέλλον εἴτε τὸ παρελθὸν, εἴτε τὸ ὑπὲρ εἴτε τὸ ὑπὸ κτλ, γενικῶς ὀνομάζεται *θετικὸν*, τὸ δὲ δεύτερον νοούμενον, ὁποιονδήποτε καὶ ἂν ἦναι, ὀνομάζομεν *ἀντιθετικόν*. Καὶ τὸ μὲν θετικὸν, ὅταν ἦναι προσδιωρισμένον παρίσταται δι' ἀριθμοῦ ἔχοντος πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον +, καλούμενον *θετικὸν*, τὸ δὲ ἀντιθετικὸν προσδιωρισμένον ὂν ἐμφαίνεται δι' ἀριθμοῦ ἔχοντος πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον —, καλούμενον *ἀντιθετικόν*. Ἀλλὰ καὶ ὁ ἀριθμὸς, ὅςτις ἔχει πρὸ αὐτοῦ τὸ +, καλεῖται *θε-*

τικός, ὁ δὲ ἔχων πρὸ αὐτοῦ τὸ — *ἀντιθετικός*. Η δὲ ἀρχὴ πάντοτε δεικνύεται διὰ τοῦ 0.

Ἐὰν λοιπὸν τῆς ἀνωτέρω γραμμῆς νοηθῇ πρῶτον τὸ δεξιὰ τοῦ Γ μέρος καὶ ἔπειτα τὸ ἀριστερὰ αὐτοῦ, θέλομεν εἰπεῖ ὅτι τὸ μὲν Β σημεῖον ἀπέχει τοῦ Γ+30 στάδια, τοῦ μὲν 30 παριστάνοντος πόσον εἶναι τὸ διάστημα, τοῦ δὲ+ὅτι εἶναι δεξιὰ τοῦ Γ, ὅπερ νοεῖται πρῶτον, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι θετικόν· τὸ δὲ Α ἀπέχει τοῦ Γ—35 στάδια, τοῦ μὲν 35 σημαίνοντος προςδιωρισμένον τὸ διάστημα, τοῦ δὲ—ὅτι εἶναι ἀριστερὰ τοῦ Γ, ὅπερ εἶναι ἀντίθετον τοῦ δεξιὰ, τοῦ πρῶτον νοηθέντος, καὶ διὰ τοῦτο ἀντιθετικόν. Ὡσαύτως ἡ Ἀμερικὴ ἀνεκαλύφθη τὸ+1492, ἡ δὲ ἐν Σαλαμῖνι ναυμαχία ἔγεινε τὸ —480 ἀντὶ 1492 μετὰ Χ καὶ 480 πρὸ Χ, κτλ.

Σημ. ά. Ὅταν μόνον τὸ ἕτερον τῶν ἐναντίως νοουμένων ποσῶν ἔχωμεν κατὰ νοῦν, ὁπότερον ὅμως ἂν τύχῃ, ὄχι δὲ καὶ τὸ δεύτερον, τότε συνήθως πρὸ τοῦ παριστάνοντος αὐτὸ ἀριθμοῦ δὲν προτάσσομεν τὸ+, ἂν καὶ ἦναι θετικὸν, ἀλλ' ἀντὶ+5, +8 κτλ γράφομεν ἁπλῶς 5,8 κτλ, ὅπως μέχρι τοῦδ' ἐγράφομεν. Ἂν ὅμως ἦναι ἀνάγκη νὰ ἔχωμεν κατὰ νοῦν ἀμφότερα τὰ ποσὰ, τότε τοῦ δεύτερον νοουμένου ἐξ ἀνάγκης πρέπει νὰ ἔχῃ ὁ ἀριθμὸς τὸ—, ἵνα δείξῃ τοῦτο ὅτι ὁ ἀριθμὸς παριστάνει ποσὸν ἀντίθετον ἄλλου πρότερον νοηθέντος.

Σημ. β'. Κατὰ συνθήκην ὁ παριστάνων μετὰ Χριστὸν χρόνον ἀριθμὸς ἔχει τὸ+, ὁ δὲ τὸν πρὸ Χριστοῦ τὸ—, ὡσαύτως καὶ ἐν τῷ θερμομέτρῳ οἱ ἄνω τοῦ 0 βαθμοὶ ἔχουσι πρὸ αὐτῶν τὸ+, οἱ δὲ ὑπὸ τὸ 0 τὸ—.

Σημ. γ'. Δύο ἢ πλειοτέρους ἀριθμοὺς παριστάνοντας ποσὰ ἢ θετικὰ ἢ ἀντιθετικὰ, ὁποιουδήποτε εἴδους καὶ ἂν ἦναι, καλοῦμεν *ὁμοσήμους*, ὡς ἔχοντας πρὸ αὐτῶν τὸ αὐτὸ σημεῖον, οἷον τοὺς+8,+20 κτλ ἢ τοὺς—7,—38, κτλ· δύο δὲ ἀριθμοὺς, ὧν ὁ μὲν εἶναι θετικὸς, ὁ δὲ ἀντιθετικὸς, οἷον τοὺς+12, —9, ὀνομάζομεν *ἀντισήμους*. Ἐὰν δ' ἀντίσημοι ὄντες ἦναι ὁμοειδεῖς ἤτοι παριστάνουσι τοῦ αὐτοῦ εἴδους ποσὸν (Θ. Α. ἀρ. 23) ~~καὶ ἔχωσι τὴν αὐτὴν ἀρχὴν~~, τούτους ὀνομάζομεν *ἀντιθέτους*.

Σημ. δ'. Ὁ Διόφαντος (α) ὠνόμαζε τοὺς μὲν θετικοὺς ἀριθμοὺς *ὕπαρξιν σημαίνοντας*, τοὺς δὲ ἀντιθετικοὺς *λεῖψιν*, οἱ δὲ νεώτεροι ἰδικοί μας τοὺς μὲν πρώτους ὀνομάζουσι καὶ *ὑπαρκτικοὺς καὶ καταφατικοὺς*, τοὺς δὲ *λειπτικοὺς καὶ ἀποφατικοὺς καὶ ἀποθετικοὺς καὶ ἀρνητικούς*, μεταφράσαντες τὸ négatifs τῶν Γάλλων. Ὅλα δὲ τὰ ὀνόματα ταῦτα προέρχονται ἐκ τῆς Δ'. περιπτώσεως τοῦ ἀρ 4, ὅπου τὸ ἔχειν ἐκλαμβάνεται ὡς ὕπαρξις, κατάφασις, τὸ δὲ χρέος ὡς λεῖψις, ἀπόφασις, ἄρνησις. Ἀλλ' εἶναι βέβαιον νομίζω ὅτι καὶ τὰ θετικὰ καὶ τ' ἀντιθετικὰ ποσὰ ὑπάρχουσι, καὶ ὅτι γενικὸν εἶναι ὅτι τ' ἀντιθετικὰ νοοῦνται ἀντιθέτως τῶν θετικῶν ὡς πρὸς τὴν ἀρχήν· ἂν δὲ ὀνομάσωμεν θετικὰ τὰ πρῶτον νοούμενα, τὰ δεύτερον νοούμενα ἁρμόζει καλλίτερα νὰ ὀνομάζωμεν ἀντιθετικά.

Περὶ τῶν ἐγγραμμάτων ἀριθμῶν.

6. Ἀφοῦ ἤρχισαν νὰ τοκισθῶσι χρήματα μέχρι τοῦδε καὶ ἔτι εἰς τὸ μέλλον ἄλλος εἰς ἄλλο μέρος τοῦ κόσμου ἐτόκισε καὶ θέλει τοκίζει καὶ ἄλλο κεφάλαιον καὶ πρὸς ἄλλο ἐπιτόκιον καὶ ἐπὶ ἄλλον χρόνον. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν τῶν τοκισθέντων καὶ τοκισθησομένων χρημάτων δυνατὸν νὰ ἦναι καὶ 10, καὶ 50, καὶ 700, καὶ 6400, καὶ διάφοροι ἄλλοι ἀριθμοὶ δραχμῶν ἢ ἄλλων νομισματικῶν μονάδων· ὡσαύτως καὶ ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστάνων τὸ ἐπιτόκιον δυνατὸν νὰ ἦναι καὶ 2, καὶ 3, καὶ 5, καὶ 12 κτλ· ὡσαύτως καὶ ὁ χρόνος.

Ἐὰν παραβλέψωμεν τὸ πόσας μονάδας ἔχει ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ νοήσωμεν μόνον αὐτὸν ὡς ἀριθμὸν τοῦ τοκιζομένου ποσοῦ, ὅστις ἄλλοτε εἶναι ἄλλος, ἢ ὡς ἀριθμὸν τοῦ ἐπιτοκίου ἢ τοῦ χρόνου, οὕτω νοοῦμεν κυρίως πολλοὺς καὶ διαφόρους ἀριθμούς, ὅσοι σημαίνουσι τὰ τοκιζόμενα χρήματα, ἀλλ' ὄχι ἕνα *ὡρισμένον*, *μερικόν*, τὸν 10, ἢ τὸν 50 κτλ. Ὁ οὕτω νοούμενος ἀριθμὸς καλεῖται *γενικός*. Ὁ 10 ἢ ὁ 50 ἢ ὁ

(α) Διόφαντος Ἀλεξανδρινός, ἀκμάσας ἴσως τὸν τέταρτον ἀπὸ Χ. αἰῶνα, εἶναι ὁ ἀρχαιότερος τῆς σωζομένης Ἀλγέβρας συγγραφεύς, ἐπιγραφομένης Ἀριθμητικῶν βιβλία ΙΓ, ὧν ἓξ μόνον σώζονται καὶ ἕτερον περὶ πολυγωνικῶν ἀριθμῶν.

700 κτλ, εἶναι μερικὸς ἀριθμὸς, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν τοκισθέντων χρημάτων εἰς ὅλους τοὺς αἰῶνας καὶ εἰς ὅλα τὰ μέρη τοῦ κόσμου εἶναι γενικός. Ὡσαύτως καὶ τοῦ ἐπιτοκίου καὶ τοῦ χρόνου ὁ ἀριθμός.

Ὅταν λέγωμεν, *ὁ 12 διαιρέτης ὢν τοῦ 36 εἶναι διαιρέτης καὶ ὁποιουδήποτε πολλασίου αὐτοῦ*, ὁ μὲν 12 καὶ ὁ 36 εἶναι μερικοὶ ἀριθμοὶ, ὁ δὲ πολλαπλάσιος τοῦ 36 εἶναι γενικὸς ἀριθμὸς, διότι δὲν εἶναι εἷς, ἀλλὰ πολλοὶ καὶ διάφοροι. Ἐὰν δὲ εἴπωμεν, *ὁ διαιρέτης τοῦ 36 εἶναι διαιρέτης καὶ ὁποιουδήποτε πολλαπλασίου αὐτοῦ*, νοοῦμεν ὅτι καὶ ὁ διαιρέτης τοῦ 36 εἶναι γενικὸς ἀριθμὸς, διότι νοῦμεν καὶ τὸν 2 καὶ τὸν 3 καὶ τὸν 4 καὶ τὸν 6 καὶ τὸν 9 καὶ τὸν 12 καὶ τὸν 18. Ἐὰν δὲ εἴπωμεν, *ὁ διαιρέτης ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ εἶναι διαιρέτης καὶ ὁποιουδήποτε πολλαπλασίου αὐτοῦ*, νοοῦμεν καὶ τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς γενικῶς.

Ταῦτα ἐξαρκοῦσι νὰ δείξωσι τί σημαίνει γενικὸς ἀριθμός.

7. Εἰς γραφὴν δὲ τοιούτων γενικῶν ἀριθμῶν δὲν χρησιμεύουσι τ' ἀραβικὰ ψηφία, διότι ἔχουσι μερικὴν σημασίαν, οἷον ὁ 4 σημαίνει πάντοτε ἕνα ἀριθμὸν, τὸν τέσσαρα, καὶ ὁ 75 ὡσαύτως κτλ, ἀλλὰ χρειάζονται ἄλλα. Τὰ δὲ κοινῶς ἤδη παραδεδεγμένα πρὸς τοῦτο εἶναι τ' ἀλφαβητικὰ γράμματα, *α*, *β*, *γ*, κτλ. Συνήθως δὲ τοὺς ἀγνώστους ἀριθμοὺς, εἴτε μερικοὶ εἶναι εἴτε γενικοὶ, σημειόνουσι διὰ τῶν τελευταίων *χ*,*ψ*,*ω*.

Μετὰ δὲ ταύτην τὴν συνθήκην, *τοὺς γενικοὺς ἀριθμοὺς νὰ γράφωμεν διὰ τῶν ἀλφαβητικῶν γραμμάτων*, ἑκάστοτε πρέπει νὰ γείνῃ καὶ ἄλλη, *τὸ δεῖνα γράμμα νὰ σημαίνῃ τὸν δεῖνα γενικὸν ἀριθμὸν*, καὶ τότε μεταχειρίζεταί τις ἢ ὅποιον ἂν θέλῃ γράμμα, ἢ τὸ ἀρκτικὸν τῆς λέξεως τῆς παριστανούσης τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀριθμοῦ· οἷον ἀνωτέρω, τὸ κεφάλαιον σημειόνεται ἢ διὰ τοῦ *α* ἢ διὰ τοῦ *ε* κτλ, ἢ διὰ τοῦ *κ*· τὸ ἐπιτόκιον ἢ διὰ τοῦ *β* ἢ διὰ τοῦ *θ* κτλ, ἢ διὰ τοῦ *ε*· ὁ χρόνος ἢ διὰ τοῦ *γ* ἢ διὰ τοῦ *μ* κτλ, ἢ διὰ τοῦ *χ*· ὡσαύτως καὶ ὁ ἄγνωστος τόκος σημειόνεται ἢ διὰ τοῦ *ω* ἢ τοῦ *χ* κτλ, ἢ διὰ τοῦ *τ*.—Ὁ διαιρέτης σημειοῦται διὰ τοῦ *δ*, ὁ ἀριθμὸς διὰ τοῦ *α*, ὁ πολλαπλάσιος διὰ τοῦ *π*.

Ἐνίοτε δὲ μεταχειριζόμεθα τ' αὐτὰ γράμματα πρὸς παράστασιν διαφόρων μὲν ἀριθμῶν, ἀλλ' ἐχόντων τὴν αὐτὴν ἰδιότητα· καὶ τότε πρὸς διάκρισιν τονίζεται τὸ δεύτερον δι' ἑνὸς τόνου, τὸ τρίτον διὰ δύο τόνων κτλ, οἷον $\acute{α}$, $α''$, $α'''$, λέγονται δὲ α *μονότονον*, α *δίτονον*, α *τρίτονον* κτλ. Π. χ. ἐὰν τριῶν συνεταίρων ὁ μὲν κατέθεσεν $α$, ὁ δεύτερος λέγομεν ὅτι κατέθεσεν $\acute{α}$, ὁ τρίτος $α''$· καὶ ἐὰν ὁ χρόνος τῆς διαμονῆς ἐν τῇ ἑταιρίᾳ τοῦ πρώτου ἦναι $β$, τοῦ δευτέρου ἦναι $β'$, τοῦ τρίτου $β''$, κτλ.

Τοὺς γενικοὺς ἀριθμοὺς, ὅταν παριστάνωνται διὰ γραμμάτων, ὀνομάζομεν *ἐγγραμμάτους*.

Παρατηρητέον δὲ ὅτι ἡ διὰ τῶν γραμμάτων σημείωσις τῶν ἀριθμῶν ἐκτὸς τῆς γενικότητος παρέχει καὶ συντομίαν ἄλλην· διότι διὰ τοῦ $α$ π. χ. παρίσταται καὶ ἀριθμὸς πολυσύνθετος, ὅστις ἀπαγγελόμενος ἢ γραφόμενος ἤθελε χρειασθῆ χρόνον πολὺν ἢ καὶ τόπον πολύν. Ἄλλοτε δὲ θέλομεν ἰδεῖ καὶ ἄλλην ἀρετὴν τῶν γραμμάτων.

Σημ. ά. Εἶναι ἤδη πρόδηλον ὅτι τὰ γράμματα ἐνταῦθα δὲν εἶναι παραστατικὰ ἤχων, καὶ ὅτι οὐδὲν αὐτῶν ἔχει ὡρισμένην σημασίαν, ἀλλ' ἑκάστοτε κατὰ πᾶσαν ἰδιαιτέραν συνθήκην σημαίνει ὅτι χρειαζόμεθα καὶ ἐνόσῳ χρειαζόμεθα αὐτὸ, ἔπειτα χάνει τὴν σημασίαν ταύτην καὶ ἄλλοτε λαμβάνει ἄλλην.

Σημ. β'. Ἂν ὁ γενικὸς ἀριθμὸς ἦναι θετικὸς ἢ ἀντιθετικὸς, πρὸ τοῦ παριστάνοντος αὐτὸν γράμματος τίθεται τὸ $+$ ἢ τὸ $-$, ὡς ἐν ἀρ. 5 σημ. ά. εἴπομεν, οἷον $+α$ ἢ ἁπλῶς $α$, $-β$ κτλ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΤΕ ΟΜΟΣΗΜΩΝ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΕΓΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Περὶ τοῦ λογισμοῦ τῶν ὁμοσήμων τε καὶ ἀντισήμων.

Περὶ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

8. Τίς λογισμὸς εἶναι ἡ πρόσθεσις ἀριθμοῦ εἰς ἄλλον καὶ τίς ἡ ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ ἀπ' ἄλλου μεγαλητέρου, ὅτι ἡ μὲν ἐκτε-

λεῖται πρὸς εὕρεσιν τοῦ κεφαλαίου δύο ἀριθμῶν, ἡ δὲ πρὸς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν, ὅτι οἱ δύο ἀριθμοὶ ἀνάγκη νὰ ἦναι ὁμώνυμοι, ἂν δὲ ἦναι συγκεκριμένοι, ἀνάγκη νὰ ἦναι καὶ ὁμοειδεῖς, πάντα ταῦτα ἐξηγήθησαν ἐν τῇ Θεωρητικῇ Ἀριθμητικῇ (37,38,45,49)· ἐνταῦθα δὲ προςθέτομεν τὰ ἑξῆς.

Πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πρόσθεσις, ἣν ἐκτελοῦμεν πρὸς εὕρεσιν τοῦ κεφαλαίου δύο ἀριθμῶν, καὶ ἡ ἀφαίρεσις, ἣν ἐκτελοῦμεν πρὸς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν, εἶναι *ἐναντίαι* πράξεις, καθότι, ὅταν ἐκτελῶμεν ἑκατέραν, *ἀρχίζομεν* ἀπὸ τοῦ τέλους τοῦ ἑτέρου ἀριθμοῦ καὶ *ἀριθμοῦμεν* τόσους ἀριθμοὺς κατὰ σειρὰν, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἄλλος ἀριθμὸς, ἀλλ' ὅταν μὲν προςθέτωμεν, *προβαίνομεν βαθμηδὸν εἰς τοὺς μεγαλητέρους ἀριθμοὺς*, ὅταν δὲ ἀφαιρῶμεν, ἀντιστρόφως *ὀπισθοδρομοῦμεν βαθμηδὸν εἰς τοὺς μικροτέρους* (Θε. Α, 37, 38). Καὶ οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν, ὧν τὸν μὲν προςθέτομεν, τὸν δὲ ἀφαιροῦμεν, εἶναι ἀντίθετοι, διότι ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἀρχὴν, τὸ τέλος ἀριθμοῦ τινος, πρὸς ταύτην δὲ νοοῦνται ἀντιθέτως· ὥστε ὁ μὲν θέλει εἶσθαι θετικὸς, ὁ δὲ ἀντιθετικός. Ἀλλὰ πότερος θέλει εἶσθαι θετικός; Ὁ μέλλων νὰ προςτεθῇ, διότι αὐτὸς σημαίνει τὴν πρῶτον νοουμένην πρᾶξιν. Τοῦτο δὲ γίνεται δῆλον οὕτως.

Ἐν ἑκατέρᾳ πράξει πρῶτον νοούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ εἰς ὃν προςθέτομεν ἢ ὁ ἀφ' οὗ ἀφαιροῦμεν, διότι ἔχει ἀρχὴν *τὸ μηδὲν*, ἐκεῖθεν δὲ διὰ *προςθέσεως* μονάδων, ἥτις εἶναι πρώτη πρᾶξις, γίνεται αὐτὸς, ὁ δὲ μέλλων νὰ προςτεθῇ ἢ ν' ἀφαιρεθῇ εἶναι ὁ δεύτερον νοούμενος, διότι ἑκάτερος ἔχει ἀρχὴν ὄχι τὸ μηδὲν, ἀλλὰ τὸ τέλος τοῦ πρώτου, ὅπερ εἶναι δευτέρα ἀρχή. Ὁπότερος λοιπὸν τούτων νοεῖται ὡς ὁ πρῶτος, αὐτὸς θέλει εἶσθαι θετικός. Ἀλλ' ὁ χρησιμεύων εἰς πρόσθεσιν νοεῖται ὡς ὁ πρῶτος, διότι ἡ πρόσθεσις, δι' ἧς γίνεται ὁ πρῶτος, εἶναι ἡ πρώτη πρᾶξις, ἐνῷ τοῦ εἰς ἀφαίρεσιν αἱ μονάδες λογίζονται ἀντιστρόφως, εἰς ἐλάττωσιν τοῦ πρώτου καὶ πλησίασιν εἰς τὴν ἀρχήν του, τὸ μηδέν· ἄρα ὁ εἰς πρόςθεσιν εἶναι θετικός· ἐπομένως ὁ εἰς ἀφαίρεσιν εἶναι ἀντιθετικός.

Ἂν λοιπὸν πρόκηται νὰ προστεθῇ ὁ 12 εἰς τὸν 20 ἢ ν' ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ, θέλωμεν δὲ νὰ δείξωμεν τοῦτον τὸν τρόπον τοῦ νοεῖν τὸν 12 ὡς πρὸς τὴν ἀρχήν του, ἤτοι τὸ τέλος τοῦ 20, πρέπει νὰ τὸν γράψωμεν +12 κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν καὶ —12 κατὰ τὴν δευτέραν. Τὸ + δεικνύει ὅτι αἱ μονάδες τοῦ 12 πρέπει νὰ λογίζωνται εἰκοστὴ πρώτη, εἰκοστὴ δευτέρα κτλ, ἐνῷ τὸ — δεικνύει ὅτι πρέπει νὰ λογίζωνται δεκάτη ἐνάτη, δεκάτη ὀγδόη, κτλ.

Σημ. Εἶναι μὲν ἡ πρόςθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἐναντίαι πράξεις, ὁ δὲ μέλλων νὰ προστεθῇ καὶ ὁ μέλλων ν' ἀφαιρεθῇ ἀντίσημοι ἀριθμοί, ὡς τὰ ἐν ἀριθ. 4 ἀναφερθέντα ποσὰ καὶ οἱ ἀριθμοὶ οἱ παριστάνοντες αὐτὰ προςδιωρισμένα, διαφέρουσιν ὅμως ἐκείνων κατὰ τοῦτο, ὅτι ἡ ἀρχή των δὲν εἶναι ἡ πρῶτον θεωρουμένη ἀρχή, ὡς ἐκεῖ ὑποτίθεται, ἀλλὰ τὸ τέλος ἀριθμοῦ τινος, ὅπερ εἶναι δευτέρα ἀρχή, ἡ δὲ τοῦ εἰς ὃν προςθέτομεν ἢ ἀφ' οὗ ἀφαιροῦμεν ἀριθμοῦ ἀρχὴ εἶναι ἡ ἐκεῖ ὑποτιθεμένη πρώτη ἀρχή.

9. Ἐνθυμούμενός τις α) ὅτι, ὅταν μὲν χρειαζώμεθα τὸ κεφάλαιον δύο ἀριθμῶν, τότε ἐκτελοῦμεν πρόςθεσιν τοῦ ἑτέρου εἰς τὸν ἄλλον, ὅταν δὲ χρειαζώμεθα τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν, τότε ἐκτελοῦμεν ἀφαίρεσιν τοῦ ἑτέρου ἀπὸ τοῦ ἄλλου, β) ὅτι ἡ πρόςθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις εἶναι ἐναντίαι πράξεις, γ') ὅτι ὁ μέλλων νὰ προστεθῇ ἀριθμὸς καὶ ὁ μέλλων ν' ἀφαιρεθῇ εἶναι ἀντίσημοι, ἔχοντες ἀρχὴν τὸ τέλος τοῦ ἄλλου ἀριθμοῦ, δ') ὅτι ὁ μέλλων νὰ προστεθῇ καὶ ὁ εἰς ὃν μέλλει νὰ προστεθῇ νοοῦνται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἀλλ' ἔχουσι διάφορον ἀρχήν, ὁ δὲ μέλλων ν' ἀφαιρεθῇ καὶ ὁ ἀφ' οὗ μέλλει ν' ἀφαιρεθῇ νοοῦνται ἀντιθέτως, ἔχουσι δὲ καὶ διάφορον ἀρχήν, ε) ὅτι τὸ κεφάλαιον καὶ ἡ διαφορὰ ἔχει ἀρχὴν τὴν τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ· ταῦτα πάντα ἐνθυμούμενός τις εὐκόλως θέλει καταλάβει τὰ περὶ προςθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ παριστάνωσιν ἄλλα ὡρισμένα ποσὰ νοούμενα κατὰ τὰς δύο ἐναντίας ἐννοίας, ἤτοι ὅταν ἦναι ὁμόσημοι ἢ ἀντίσημοι οἱ ἀριθμοί.

Δηλαδὴ ὅταν δύο ἀριθμοὶ θετικοὶ ἢ ἀντιθετικοὶ ἢ ὁ μὲν θετικός, ὁ δὲ ἀντιθετικός, οἷον +20 καὶ +12, —20 καὶ —12, +20 καὶ —12, —20 καὶ +12, πρόκηνται νὰ προστεθῶσιν ἢ ν' ἀφαιρεθῶσιν, πρῶτον ἀπαιτεῖται ἀναγκαίως νὰ ἦναι ὁμώνυμοι, καὶ δεύτερον, ἂν ἦναι συγκεκριμένοι, νὰ ἦναι ὁμοειδεῖς. Ἀλλ' ἐκτὸς τούτων, ἐπειδὴ εἶναι θετικοὶ ἢ ἀντιθετικοὶ ἢ ἀντίθετοι (5), τουτέστιν ἀναγκαίως νοοῦνται ὅτι παριστάνουσι ποσὰ πρός τιν' ἀρχὴν προςδιωρισμένα καὶ νοούμενα κατὰ τὴν αὐτὴν ἢ κατὰ τὴν ἐναντίαν ἔννοιαν, ἀνάγκη νὰ λογιζώμεθα καὶ τὴν ἀρχὴν ἑκατέρου, καὶ τὴν καθ' ἣν νοοῦνται ἔννοιαν πρὸς ταύτην ὁμοῦ μὲ τὸν τῆς προςθέσεως καὶ τὸν τῆς ἀφαιρέσεως σκοπόν.

10. Δύο ἀριθμοὶ ἢ ὁμόσημοι, θετικοὶ ἢ ἀντιθετικοί, ἢ ἀντίθετοι ἔχουσι ά) τὴν αὐτὴν ἀρχήν, β') ὁ ἕτερος ἔχει ἀρχὴν τὸ τέλος τοῦ ἄλλου, γ') ὁ ἕτερος ἔχει ἀρχὴν ἄλλην παρὰ τὰς δύο προειρημένας· οἷον ἐπὶ τῆς ὄπισθεν γραμμῆς, ά) ὁ μὲν παριστάνει τὸ ΑΒ διάστημα, ὁ δὲ τὸ ΑΓ, ἢ ὁ μὲν τὸ ΑΔ, ὁ δὲ τὸ ΑΗ, ἢ ὁ μὲν τὸ ΑΒ, ὁ δὲ τὸ ΑΔ —· β') ὁ μὲν παριστάνει τὸ ΑΒ, ὁ δὲ τὸ ΒΓ ἢ τὸ ΒΖ, ἢ ὁ μὲν τὸ ΑΔ, ὁ δὲ τὸ ΔΕ ἢ τὸ ΔΗ— γ') ὁ μὲν παριστάνει τὸ ΑΒ, ὁ δὲ τὸ ΖΓ, ἢ τὸ ΓΜ, ἢ τὸ ΔΕ.

Τοιούτων δ' ὄντων τῶν δύο ὁμοσήμων ἢ ἀντισήμων ἀριθμῶν ὡς πρὸς τὴν ἀρχήν των, ὁ σκοπὸς ἡμῶν, ὅταν μέλλωμεν νὰ προςθέσωμεν τὸν ἕτερον εἰς τὸν ἄλλον, ἢ ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἄλλου, ἢ εἶναι ἁπλῶς νὰ εὕρωμεν πόσας μονάδας ἔχουσιν οἱ δύο ὁμοῦ ἢ πόσας ὁ ἕτερος ἔχει πλειότερον τοῦ ἄλλου, ἢ νὰ εὕρωμεν πρὸς τούτοις καὶ πρὸς ὡρισμένην ἀρχὴν πῶς πρέπει νὰ νοηθῶσι τὸ κεφάλαιον ἢ ἡ διαφορά, βιαζόμενοι εἰς τοῦτο ἐκ τῆς χρείας, ἣν ἔχομεν εἰς ὡρισμένας μερικὰς περιστάσεις. Ἂς ἐξετάσωμεν ταῦτα πάντα καθ' ὅλας τὰς διαφόρους περιπτώσεις.

11. *Πρῶτον*. Ὅταν ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ ἦναι ἢ θετικοὶ ἢ ἀντιθετικοί, οἷον $+20$ καὶ $+12$, ἢ -20 καὶ -12, παριστάνωσι δὲ ποσά, ὧν τὸ ἕτερον ἀρχίζει ὅπου τελειόνει τὸ ἄλλο, ζητῆται δὲ ἀριθμός, ὅςτις νὰ παριστάνῃ τὸ ποσὸν τὸ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ πρώτου μέχρι τοῦ τέλους τοῦ δευτέρου, τότε δῆλον ὅτι, ὡς τὸ ποσόν, ὅπερ θέλει παριστάνει ὁ ζητούμενος ἀριθμός, σύγκειται ἐκ τῶν δύο ἄλλων τῶν παριστανομένων ὑπὸ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, οὕτω καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ σύγκηται ἐκ τῶν δύο δεδομένων, ἤτοι πρέπει νὰ ἦναι κεφάλαιον τῶν δύο δεδομένων, καὶ διὰ τοῦτο ἐξ ἀνάγκης πρέπει νὰ προστεθῇ ὁ δεύτερος εἰς τὸν πρῶτον, ἵνα εὑρεθῇ ὁ ζητούμενος,

ὅςτις θέλει εἶσθαι $+32$, ἢ -32, ὧν τὸ 32 σημαίνει τὸ ποσὸν πόσον εἶναι, τὸ δὲ $+$ ἢ $-$ ὅτι ἀρχίζει τὸ ποσὸν ὅθεν τὸ ὑπὸ τοῦ $+20$ ἢ -20 παριστανόμενον ποσὸν, καὶ νοεῖται ὡς ἐκεῖνο.

Παραδείγματα.

N M

E Δ H A Z B Γ

Ἐὰν τῆς γραμμῆς NM τὸ A σημεῖον ἦναι ἀρχὴ, τὰ δὲ πρὸς τὸ M μέρη αὐτῆς ἦναι θετικὰ, τὰ δὲ πρὸς τὸ N ἀντιθετικὰ, καὶ τὸ μὲν AB ἦναι $+20$ μονάδες, τὸ δὲ BΓ $+12$, ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ μὲν AΔ ἦναι -20, τὸ δὲ ΔE -12, ζητῆται δὲ πόσον μακρὰν τοῦ A εἶναι τὸ Γ ἢ τὸ E, τὸ μὲν θέλει εἶσθαι $+32$, τὸ δὲ -32. Τοῦτο ἔχει χώραν, ὅταν τις ὁρμώμενος ἀπὸ τοῦ A βαδίζῃ τὴν πρώτην ἡμέραν ἕως εἰς τὸ B ἢ τὸ Δ, καὶ τὴν ἀκόλουθον ὁδεύσῃ ἀπὸ τοῦ B ἕως εἰς τὸ Γ ἢ ἀπὸ τοῦ Δ ἕως εἰς τὸ E.

Ὡσαύτως, ἐὰν, ἐνῷ ἡ ἅλωσις τῆς Κωνσταντινουπόλεως ὑπὸ τῶν Τούρκων ἔγεινε τὸ $+1453$, ἡ δὲ ἀνακάλυψις τῆς Ἀμερικῆς 39 ἔτη ὑςερώτερα ἤτοι $+39$, ζητῆται πότε ἀνεκαλύφθη ἡ Ἀμερικὴ, δῆλον ὅτι τοῦτο ἔγεινε τὸ $+1492$. Ἐὰν δὲ, ἐνῷ ἡ μὲν ἐν Σαλαμῖνι ναυμαχία ἔγεινε τὸ -480, ἡ δὲ ἐν Μαραθῶνι πεζομαχία 10 ἔτη πρότερον ἤτοι -10, ζητῆται πότε ἔγεινεν ἡ ἐν Μαραθῶνι μάχη, δῆλον ὅτι αὕτη ἔγεινε τὸ -490.

Παρόμοιον εἶναι καὶ τοῦτο· ἔχων τις 68 δρ, ἤτοι $+68$, κερδίσας δὲ καὶ 25 ἤτοι $+25$, πόσας ἔχει; δῆλον ὅτι ἔχει 93 ἤτοι $+93$. Χρεωστῶν δὲ 68, ἤτοι -68, χάσας δὲ καὶ 25, ἤτοι -25, πόσας χρεωςεῖ; δῆλον ὅτι χρεωςεῖ 93, ἤτοι -93 κτλ.

12. *Δεύτερον*. Ὅταν τῶν ἀριθμῶν ὁ μὲν ἦναι θετικὸς, ὁ δὲ ἀντιθετικὸς, οἷον $+20$ καὶ -12, ἢ -20 καὶ $+12$, παριστάνωσι δὲ ποσὰ, ὧν τὸ ἕτερον ἀρχίζει ὅπου τελειόνει τὸ ἄλλο, ζητῆται δὲ ἀριθμὸς, ὅςτις νὰ παριστάνῃ τὸ ποσὸν τὸ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ πρώτου μέχρι τοῦ τέλους τοῦ δευτέρου, τότε δῆλον ὅτι, ὡς τὸ ποσὸν, ὅπερ θέλει παριστάνει ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, εἶναι διαφορὰ τῶν ποσῶν τῶν παριστανομένων ὑπὸ τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν, οὕτω καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἦναι διαφορὰ τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν, καὶ διὰ τοῦτο ἀνάγκη ν' ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τοῦ $+20$ ὅσαι μονάδας εἶναι ἐν τῷ

—12, ἢ ἀπὸ τοῦ—20 ὅσαι εἶναι ἐν τῷ+12, ἵνα εὑρεθῇ ὁ ζητούμενος, ὅστις θέλει εἶσθαι +8 ἢ—8, ὧν τὸ μὲν 8 σημαίνει πόσον εἶναι τὸ ποσὸν, τὸ δὲ+ἢ—ὅτι ἀρχίζει ὅθεν τὸ ὑπὸ τοῦ +20 ἢ—20 παριστανόμενον ποσὸν, καὶ νοεῖται ὡς ἐκεῖνο.

Παραδείγματα.

Ἐὰν ὁ +20 παριστάνῃ ὡς ἀνωτέρω τὸ ΑΒ, ὁ δὲ—12 τὸ ΒΖ, ἢ ὁ—20 παριστάνῃ τὸ ΑΔ, ὁ δὲ+12 τὸ ΔΗ, ζητῆται δὲ πόσον μακρὰν τοῦ Α ἦναι τὸ Ζ ἢ τὸ Η, τὸ μὲν θέλει εἶσθαι +8, τὸ δὲ—8. Τοῦτο ἔχει χώραν, ὅταν τις ὁρμώμενος ἀπὸ τοῦ Α ὁδεύσῃ τὴν πρώτην ἡμέραν ἕως εἰς τὸ Β ἢ τὸ Δ καὶ τὴν ἀκόλουθον ὀπισθοδρομήσῃ ἀπὸ τοῦ Β ἕως εἰς τὸ Ζ, ἢ ἀπὸ τοῦ Δ ἕως εἰς τὸ Η.

Ὡσαύτως ἀνακαλυφθείσης τῆς Ἀμερικῆς τὸ+1492, τῆς δὲ Κωνσταντινουπόλεως ἁλωθείσης 39 ἔτη πρότερον, ἤτοι—39, ἐὰν ζητῆται πότε ἔγεινεν ἡ ἅλωσις ταύτης, δῆλον ὅτι ἔγεινε τὸ+1453. Ἐὰν δὲ γενομένης τῆς ἐν Μαραθῶνι μάχης τὸ—490, τῆς δ' ἐν Σαλαμῖνι ναυμαχίας 10 ἔτη μετέπειτα, ἤτοι+10, ζητῆται πότε ἔγεινεν ἡ ἐν Σαλαμῖνι ναυμαχία, δῆλον ὅτι αὕτη ἔγεινε τὸ—480.

Παρομοίως, ἐὰν ζητῆται πόσας δρ. ἔχει ἐκεῖνος, ὅστις εἶχε μὲν 68 ἤτοι+68, ἔχασε δὲ 25, ἤτοι—25, ἢ πόσας δρ. χρεωστεῖ ὅστις ἐχρεώστει μὲν 68 ἤτοι—68, ἀπέκτησε δὲ 25 ἤτοι +25, δῆλον ὅτι θέλει ἔχει 43 ἤτοι+43, ἢ θέλει χρεωστεῖ 43 ἤτοι—43. κτλ.

Κατὰ τὰς δύο προηγουμένας περιπτώσεις βλέπει τις ὅτι δύο ὁμόσημοι ἀριθμοὶ προςθέτονται καὶ δύο ἀντίθετοι ἀφαιροῦνται.

13. *Τρίτον.* Ὅλων τῶν ἄλλων μενόντων τῶν αὐτῶν ὡς κατὰ τὰς δύο προηγουμένας περιπτώσεις, ἐὰν ζητῆται ἀριθμὸς ὅστις νὰ παριστάνῃ, ὄχι τὸ ποσὸν ὅπερ ἐκεῖ παρίστανεν, ἀλλ' ἁπλῶς τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν+20καὶ+12,ἢ—20καὶ—12,καὶ ἁπλῶς τὸ κεφάλαιον τῶν+20καὶ—12,ἢ—20καὶ+12, ἐπειδὴ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς δὲν θέλει παριστάνει ποσὸν ἔχον ὡρισμένην ἀρχὴν καὶ νοούμενον πρὸς αὐτὴν κατὰ τὴν ἑτέραν ἢ

τὴν ἐναντίαν ἔννοιαν, ἵνα ὡς ἀνωτέρω δἰ αὐτοῦ δειχθῇ πόσον μακρὰν τῆς ἀρχῆς εἶναί τι καὶ πρὸς ποῖον μέρος αὐτῆς, ἀλλ᾽ ἁπλῶς πόσας μονάδας ὁ ἕτερος ἔχει πλειότερον τοῦ ἄλλου, ἢ πόσας μονάδας ἔχουσιν οἱ δύο ὁμοῦ, οὔτε αὐτὸς εἶναι ἀνάγκη νὰ θεωρῆται θετικὸς ἢ ἀντιθετικὸς, οὔτε οἱ δεδομένοι ὁποῖοι εἶναι θετικοὶ καὶ ἀντιθετικοὶ, ἀλλ᾽ ἁπλῶς ὡς ἀριθμοὶ ἀφῃρημένοι, καὶ διὰ τοῦτο θέλει ἀφαιρεθῇ ὁ 12 ἀπὸ τοῦ 20 ἢ θέλει προςτεθῇ εἰς αὐτὸν πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ· καὶ τότε ὁ 12 θέλει εἶσθαι ἀντιθετικὸς ἢ θετικὸς ὡς σημαίνων τὸν μέλλοντα ν᾽ ἀφαιρεθῇ ἢ νὰ προςτεθῇ, ἀπαράλλακτα ὡς ἐν ἀρ. 8.

Παραδείγματα.

Ὁ ὁδεύσας πρὸς τὸ ἕτερον ἢ τὸ ἀντίθετον μέρος σημείου τινὸς τὴν μὲν πρώτην ἡμέραν 80 στάδια, τὴν δὲ δευτέραν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος 60 στάδια (ὁπότε οἱ ἀριθμοὶ κυρίως εἶναι $+80$ καὶ $+60$ ἢ -80 καὶ -60), πόσον τὴν πρώτην ὥδευσε περισσότερον παρὰ τὴν δευτέραν; Ἢ ἂν τὴν δευτέραν ὀπισθοδρόμησεν 60 στάδια (ὁπότε οἱ ἀριθμοὶ εἶναι κυρίως $+80$ καὶ -60 ἢ -80 καὶ $+60$), πόσον ὥδευσε τὰς δύο ἡμέρας; Δῆλον ὅτι ὥδευσε περισσότερον 20στ, ἀλλ᾽ οὔτε $+20$ οὔτε -20, διότι δὲν παριστάνει τὸ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς διάστημα πρὸς τὸ ἕτερον ἢ τὸ ἄλλο μέρος, ἀλλ᾽ ἁπλῶς τὸ ποσὸν τῆς διαφορᾶς· ἢ ὥδευσε τὰς δύο ἡμέρας 140 σταδ, ἀλλ᾽ ὄχι $+140$ ἢ -140 διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

Ὡσαύτως, ἂν ζητῆται τὰ 1453 ἔτη τὰ παρελθόντα ἀπὸ Χ μέχρι τῆς ἁλώσεως τῆς Κωνσταντινουπόλεως πόσον περισσότερα εἶναι τῶν 39 τῶν ἀπὸ τῆς ἁλώσεως τῆς Κωνσταντ. μέχρι τῆς ἀνακαλύψεως τῆς Ἀμερικῆς, ἢ πόσα εἶναι τὰ 1492 ἔτη τὰ ἀπὸ Χ. μέχρι τῆς ἀνακαλύψεως τῆς Ἀμερικῆς καὶ τὰ 39 τὰ πρὸ τούτου τοῦ χρόνου μέχρι τῆς ἁλώσεως τῆς Κωνσταντινουπόλεως, δῆλον ὅτι, ἂν καὶ οἱ ἀριθμοὶ εἶναι $+1453$ καὶ $+39$, ἢ $+1492$ καὶ -39, τὰ ζητούμενα εἶναι 1492 καὶ 1531, ἄλλ᾽ ὄχι $+1492$ καὶ $+1531$, διότι δὲν ἔχουσιν ἀρχὴν τὴν Χριστοῦ γέννησιν, οὐδ᾽ εἶναι ἀνάγκη νὰ νοῶνται ὡς θετικὰ ἢ ἀντιθετικά.

Ὡσαύτως, ὁ ἔχων 24 τάλ. καὶ ἀποκτήσας 15 δῆλον ὅτι εἶχεν 9 πλειότερον· ἢ ὁ χρεωςῶν 24 καὶ χάσας 15 δῆλον ὅτι ἐχρεώςει 9 περισσότερον τῶν ὅσα ἔχασε· τοῦ δ' ἔχοντος 24 καὶ χάσαντος 15 ὅλα ὅσα εἶχε καὶ ἔχασε συμποσοῦνται εἰς 39, ἀλλὰ ταῦτα δὲν εἶναι ὅσα ἔχει, οὐδ' ὅσα ἔχασεν, ἀλλ' ἁπλῶς δραχμαί. κτλ.

14. *Τέταρτον.* Ὅταν οἱ δύο ἀριθμοὶ ἀντίθετοι ὄντες, οἷον +20 καὶ —12, παριστάνωσι ποσὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν ἀρχὴν, ζητῆται δὲ ἀριθμὸς, ὅςτις νὰ παριστάνῃ τὸ ποσὸν τὸ ἀπὸ τοῦ τέλους τοῦ πρώτου μέχρι τοῦ τέλους τοῦ δευτέρου, τότε δῆλον μὲν ὅτι, ὡς τὸ ποσὸν, ὅπερ θέλει παριστάνει ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, σύγκειται ἐκ τῶν ποσῶν τῶν παριστανομένων ὑπὸ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, οὕτω καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι κεφάλαιον τῶν δύο δεδομένων, καὶ ἀνάγκη νὰ προςτεθῇ ὁ ἕτερος εἰς τὸν ἄλλον, ἵνα εὑρεθῇ αὐτός· ἀλλ' ἐνταυτῷ εἶναι φανερὸν ὅτι, ὡς τὸ ποσὸν, ὅπερ θέλει παριστάνει ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, δὲν ἔχει πλέον ἀρχὴν τὴν τῶν δεδομένων ποσῶν, ἀλλὰ τὸ τέλος τοῦ ἑτέρου ἢ τοῦ ἄλλου, καὶ ἑπομένως θέλει εἶσθαι ὅλον ἢ θετικὸν ἢ ἀντιθετικὸν ἀδιαφόρως, οὕτω καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι ὄχι ὡρισμένως θετικὸς ἢ ἀντιθετικὸς, ἀλλ' ἀδιάφορος· ἑπομένως δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ λογίζωνται οὐδ' οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ ὁποῖοι εἶναι, ἤτοι ὁ μὲν θετικὸς, ὁ δὲ ἀντιθετικὸς, ἀλλ' ἁπλῶς ὡς ἀριθμοί. Ἄλλως δὲ, ἀριθμὸς, ὅςτις νὰ ἔχῃ καὶ θετικὰς καὶ ἀντιθετικὰς μονάδας, δὲν εἶναι οὐδεὶς καὶ διὰ τοῦτο δὲν εὑρίσκεται, ἤτοι ἀδύνατον νὰ προςτίθηται ἀριθμὸς εἰς ἄλλον ἀντίθετόν του, εἰμὴ ὅταν θεωρῶνται ἁπλῶς ὡς ἀριθμοί.

Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ὁρμώμενοι δύο ταχυδρόμοι καὶ ἀντιθέτως διευθυνόμενοι ὥδευσαν ἐν μιᾷ ἡμέρᾳ ὁ μὲν 80 στάδια, ὁ δὲ 70, πόσον μακρὰν ἀλλήλων εἶναι εἰς τὸ τέλος τῆς ἡμέρας; Δῆλον ὅτι 150 στάδια, ἀλλ' εἰς τὴν πρόσθεσιν δὲν λογίζονται ὡς ἀντίθετοι, ἀλλ' ἁπλῶς ὡς ἀριθμοὶ, διότι δὲν ζητεῖται ἀριθμὸς θετικὸς ἢ ἀντιθετικὸς, ἀλλ' ἁπλῶς τὸ ποσόν. Ὡσαύτως, πόσα ἔτη εἶναι ἀπὸ τῆς ἐν Σαλαμῖνι ναυμαχίας μέχρι σήμερον; Θέλουσι προστεθῆ τοῦ —480 αἱ μονάδες εἰς τὰς τοῦ +1848, καὶ τὸ ζητούμενον θέλει εἶσθαι 2328.

Ἐάν τις ἔχῃ 20 δρ καὶ χρεωστῇ 15, πόσαι εἶναι ὅλαι; Εἶναι 35, ἀλλ' οὔτε χρέος οὔτε τὸ ἔχειν του εἶναι, ἀλλ' ἁπλῶς τὸ κεφάλαιον τῶν δύο ἀριθμῶν, διότι δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς, ὅςτις νὰ παριστάνῃ μονάδας θετικὰς καὶ ἀντιθετικάς.

15. *Πέμπτον*. Ὅταν τῶν κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν ἀριθμῶν ζητῆται ἡ διαφορὰ, ἢ τῶν ὁμοσήμων καὶ ἐχόντων τὴν αὐτὴν ἀρχὴν ζητῆται τὸ κεφάλαιον ἢ ἡ διαφορὰ, ἢ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ ὁμόσημοι ὄντες ἢ ἀντίθετοι ἔχωσι διάφορον ἀρχὴν παρὰ τὰς προειρημένας, καὶ ζητῆται τὸ κεφάλαιον αὐτῶν ἢ ἡ διαφορὰ, καθ' ὅλας ταύτας τὰς διαφόρους περιπτώσεις τὸ ποσὸν, ὅπερ θέλει παριστάνει ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἔχῃ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἑτέρου τῶν ἀριθμῶν, οὐδὲ θέλει εἶσθαι θετικὸν ἢ ἀντιθετικὸν ὡρισμένως, ἀλλ' ἁπλῶς ἀριθμὸς, ὅςτις νὰ παριστάνῃ ἢ πόσας μονάδας ἔχουσιν οἱ δύο, ἢ πόσας ὁ ἕτερος ἔχει πλειότερον τοῦ ἄλλου· διὰ τοῦτο καὶ οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ, ἂν καὶ παραςατικοὶ ὡρισμένων ποσῶν κατὰ τὸ εἶδος αὐτῶν, τὴν ἀρχήν των καὶ τὴν ἔννοιαν καθ' ἣν πρὸς αὐτὴν νοοῦνται, ἀλλ' ἐκ τοῦ σκοποῦ, ὃν ἔχομεν, τῆς εὑρέσεως τοῦ ποσοῦ ἁπλῶς τοῦ κεφαλαίου των ἢ τῆς διαφορᾶς των, καταλαμβάνομεν ὅτι δὲν χρειάζεται νὰ λογιζώμεθα αὐτοὺς ὡς θετικοὺς, ἢ ἀντιθετικοὺς, ἀλλ' ἁπλῶς ὡς ἀριθμούς· καὶ τότε, ἐὰν μέλλωμεν νὰ προςθέσωμεν τὸν ἕτερον εἰς τὸν ἄλλον, γίνεται θετικὸς, ἐὰν δὲ ν' ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν, γίνεται ἀντιθετικὸς, ὡς ἐν ἀρ. 8 εἴπομεν.

16. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἁπάντων συμπεραίνεται ὅτι, ὅταν ἔχωμεν δύο ἀριθμοὺς ὁμοσήμους ἢ ἀντιθέτους, καὶ διὰ τοῦτο παριστάνοντας ἤδη ποσὰ νοούμενα πρός τιν' ἀρχὴν κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν ἢ τὴν ἐναντίαν, ἐὰν μὲν ζητῶμεν ἁπλῶς ποσὸν, ὅσον εἶναι τὸ παριστανόμενον ὑπὸ τῶν δύο ἀριθμῶν, ἢ ὅσον ἔχει ὁ ἕτερος πλειότερον τοῦ ἄλλου, τοῦτο εὑρίσκομεν πάντοτε προςθέτοντες μὲν τὸν ἕτερον ἀριθμὸν εἰς τὸν ἄλλον κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, ἀφαιροῦντες δὲ ἀπὸ τοῦ μεγαλητέρου ὅσας μονάδας ἔχει ὁ μικρότερος ἀριθμὸς κατὰ τὴν δευτέραν, χωρὶς νὰ δίδωμεν προσοχὴν εἰς τὰ σημεῖά των, καὶ τὸ κεφάλαιόν των ἢ ἡ διαφορά των ἄνευ σημείου θέλει παρι-

στάνει τὸ ζητούμενον ποσόν. Ἐὰν δ' ἐκτὸς τούτων τοῦ ζητουμένου ποσοῦ θέλωμεν νὰ ἠξεύρωμεν καὶ τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ πῶς νοεῖται πρὸς ταύτην, ἀριθμὸς παριστάνων τοιοῦτον τὸ ζητούμενον ποσὸν τότε μόνον εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ, ὅταν τὰ ὑπὸ τῶν δύο ἀριθμῶν παριστανόμενα ποσὰ ἦναι ὁποῖα τὰ κατὰ τὴν προηγουμένην πρώτην καὶ δευτέραν περίπτωσιν, καὶ θέλει εὑρεθῆ διὰ προςθέσεως μὲν τοῦ δευτέρου εἰς τὸν πρῶτον, ὅταν οἱ δύο ἀριθμοὶ ἦναι ὁμόσημοι, δι' ἀφαιρέσεως δ' ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δεύτερος, ὅταν οἱ δύο ἀριθμοὶ ἦναι ἀντίθετοι, διότι συμβιβάζεται τὸ ζητούμενον μὲ τὸ διὰ τῆς προσθέσεως ἢ διὰ τῆς ἀφαιρέσεως εὑρισκόμενον· τὸ δὲ κεφάλαιον θέλει εἶσθαι ὁμόσημον μὲ τοὺς δεδομένους, ἡ δὲ διαφορὰ θέλει εἶσθαι ὁμόσημος μὲ τὸν μεγαλήτερον τῶν δύο, ὡς εὐθὺς θέλομεν τὸ πληροφορηθῆ. Κατὰ πᾶσαν δ' ἄλλην περίπτωσιν ἂν ζητῆται ὄχι μόνον ὁ ἀριθμὸς τοῦ κεφαλαίου ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν δεδομένων, ἀλλὰ καὶ ὁ τρόπος καθ' ὃν πρέπει νὰ νοῶνται πρὸς ὡρισμένην ἀρχὴν τὰ ποσά των, τοῦτο ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ, ὡς μὴ συμβιβαζομένου τοῦ τρόπου καθ' ὃν νοοῦνται οἱ δύο ἀριθμοὶ μὲ τὸν τρόπον, καθ' ὃν νοοῦνται οἱ δύο κατὰ τὴν πρόσθεσιν ἢ τὴν ἀφαίρεσιν ἀριθμοί· ἐκτὸς μόνον ἐὰν ἀλλάξῃ τὸ ὑπὸ τοῦ ἑτέρου ἀριθμοῦ παριστανόμενον ποσὸν, ὥστε νὰ καταντήσωσι τοιαῦτα τὰ δύο δεδομένα ποσὰ, ὁποῖα εἶναι τὰ κατὰ τὴν πρώτην καὶ δευτέραν περίπτωσιν.

Ἐπειδὴ δ' ἐν τοῖς ἑξῆς θέλομεν ἔχει χρείαν νὰ ἠξεύρωμεν ὄχι μόνον τὸ πόσον εἶναι ἕκαστον ποσὸν, ἀλλὰ καὶ τὸ πῶς πρέπει νὰ νοῆται πρὸς ὡρισμένην ἀρχὴν, τουτέστι καὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ τὸ σημεῖόν του, καὶ ἐπειδὴ ταῦτα μόνον εἰς τὰ κατὰ τὴν πρώτην καὶ τὴν δευτέραν περίπτωσιν ποσὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ἠξεύρωμεν, κατ' ἐκείνας δὲ δύο ὁμόσημοι ἀριθμοὶ προςθέτονται, δύο δὲ ἀντίθετοι ἀφαιροῦνται διὰ ταῦτα ἐξάγεται ὁ γενικὸς οὗτος κανὼν, ὅτι *δύο ὁμοσήμων ἀριθμῶν ὁ ἕτερος πρέπει νὰ προστίθηται εἰς τὸν ἄλλον, καὶ δύο ἀντιθέτων πρέπει ὁ ἕτερος ν' ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ ἄλλου*, ἵνα οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ παριστάνωσιν θετικὰ καὶ ἀντιθετικὰ ποσὰ, ὁποῖα ἀπαιτοῦσιν αἱ χρεῖαι κατὰ τὰς μερικὰς περιπτώσεις.

17. Κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν (12) ὁ δεύτερος ἀριθμὸς, ὁ ἔχων ἀρχὴν τὸ τέλος τοῦ πρώτου, δυνατὸν νὰ ἦναι μεγαλήτερος τοῦ πρώτου· οἷον ἐπὶ τῆς τοῦ ἀριθ. 11 γραμμῆς ὁ ὁδεύσας τὴν πρώτην ἡμέραν ἀπὸ τοῦ Α ἕως εἰς τὸ Β (+20 μονάδας) τὴν ἐπιοῦσαν ὀπισθοδρόμησεν ἀπὸ τοῦ Β ἕως εἰς τὸ Η (—28), ἢ ὁ ὁδεύσας πρῶτον ἀπὸ τοῦ Α ἕως εἰς τὸ Δ ἔπειτα ὀπισθοδρόμησεν ἀπὸ τοῦ Δ μέχρι τοῦ Ζ (—20 καὶ + 28)· ἢ ὁ ἔχων 20 δρ ἐζημιώθη 28, καὶ ὁ χρεωστῶν 20 ἐκέρδισεν 28, κτλ. Τότε βλέπει τις ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον ἢ ἡ κατάστασις κτλ δὲν εἶναι κατὰ τὸ μέρος τῆς ἀρχῆς ὅπου εἶναι τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ, ἀλλὰ κατὰ τὸ ἀντίθετον, καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἦναι ἀντίθετος τοῦ πρώτου καὶ ὁμόσημος μὲ τὸν δεύτερον, τὸν μεγαλήτερον. Πρὸς εὕρεσιν δὲ αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ ἀφαιροῦνται ἀπὸ τοῦ μικροτέρου ὅλαι αἱ μονάδες του ἤτοι μέρος τῶν μονάδων τοῦ μεγαλητέρου, καὶ οὕτω καταντῶμεν εἰς τὴν ἀρχήν του τὸ 0, τὰς δὲ λοιπὰς μονάδας τοῦ μεγαλητέρου λογιζόμεθα ὡς ἀριθμὸν ἀντίθετον τοῦ μικροτέρου ἤτοι ὁμόσημον μὲ τὸν μεγαλήτερον. Ὁ ἀριθμὸς δὲ οὗτος εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ ὁ εὑρισκόμενος ἂν ἀπὸ τοῦ μεγαλητέρου ἀφαιρεθῶσιν ὅσαι μονάδας εἶναι αἱ τοῦ μικροτέρου, ὁπότε ἡ διαφορὰ εἶναι ὁμόσημος μὲ τὸν μεγαλήτερον.

Ὥστε πάντοτε ἡ *διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι ὁμόσημος μὲ τὸν μεγαλήτερον, εὑρίσκεται δὲ πάντοτε διὰ τῆς ἀφαιρέσεως ἀπὸ τοῦ μεγαλητέρου τόσων μονάδων, ὅσας ἔχει ὁ μικρότερος*, καὶ ὅταν ἀπαιτῆται ν' ἀφαιρεθῇ ὁ μεγαλήτερος ἀπὸ τοῦ μικροτέρου.

Σημ. ά. Ὅταν ἀφαιρῶμεν ἀπὸ τοῦ μεγαλητέρου ἀριθμοῦ ὅσας μονάδας ἔχει ὁ μικρότερος, σκοπὸν ἔχομεν νὰ εὕρωμεν πόσας μονάδας ἔχει *πλειότερον* ὁ μεγαλήτερος τοῦ μικροτέρου· ὅταν δὲ θέλωμεν ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ μικροτέρου ὅσας μονάδας ἔχει ὁ μεγαλήτερος, βέβαια ἂν ζητῶμεν νὰ εὕρωμεν πόσας μονάδας ἔχει ὁ μικρότερος *πλειότερον* τοῦ μεγαλητέρου, ζητοῦμεν τὸ ἐναντίον τοῦ ὀρθοῦ, τὸ δὲ σημεῖον τοῦ ὑπολοίπου τὸ ἀντίθετον τοῦ σημείου τοῦ ἀφαιρετέου δεικνύει τὸ ἄτοπον τοῦτο, καὶ ἔτι ὅτι τὸ ὀρθὸν εἶναι τὸ ἀντίθετον τοῦ ζητουμένου, δηλ. ὅτι ὅσας μονάδας ἔχει τὸ ὑπόλοιπον, τόσας ἔχει *ὀλιγώτερον* καὶ ὄχι *περισσότερον* ὁ ἀφαιρετέος τοῦ ἀφαιρέτου, ὁ μικρότερος τοῦ μεγαλητέρου.

Σημ. β'. Ἐννοεῖται εὐκόλως ὅτι κατὰ ταύτην τὴν περίπτωσιν ὁ ἀφαιρετέος, ἤτοι ὁ μικρότερος, δὲν εἶναι ἴσος μὲ τὸ κεφάλαιον τοῦ ἀφαιρέτου καὶ τοῦ ὑπολοίπου, ἀλλὰ μὲ τὴν διαφοράν.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως.

18. Ἐκ τριῶν ἀριθμῶν, ὧν ὁ πρῶτος νοεῖται πρὸς τὸν δεύτερον, ὡς ὁ τρίτος πρὸς τὴν μονάδα του, ὅστις εἶναι ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸν δεύτερον, ἐὰν μὲν ἦναι ἄγνωστος ὁ πρῶτος καὶ οἱ δύο ἄλλοι γνωστοί, αὐτὸς εὑρίσκεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον, ἤτοι κατασκευάζεται ἐκ τοῦ δευτέρου, ὅπως ὁ τρίτος ἐκ τῆς μονάδος· ἐὰν δὲ ἦναι ἄγνωστος ὁ δεύτερος καὶ οἱ δύο ἄλλοι γνωστοί, εὑρίσκεται αὐτὸς διὰ διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ τρίτου, ἤτοι κατατασκευάζεται τοιοῦτος ἀριθμὸς πρὸς τὸν πρῶτον, ὁποία εἶναι ἡ μονὰς τοῦ τρίτου πρὸς αὐτόν· διὰ τῆς διαιρέσεως δὲ τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου εὑρίσκεται καὶ ὁ τρίτος, ἤτοι ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸν δεύτερον (Θεω. Αρ. τὰ περὶ πολλαπλ. καὶ διαιρέσ, ἔτι καὶ 99). Ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος εἶναι πάντοτε ὁμοειδεῖς, ὁ δὲ τρίτος εἶναι πάντοτε ἑτεροειδὴς πρὸς τοὺς δύο ἄλλους.

Ἐκ τούτων δ' ἐννοεῖται εὐκόλως ὅτι πρὶν ἐπιχειρήσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον, πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν πρῶτον πῶς ὁ τρίτος ἤτοι ὁ πολλαπλασιαστὴς γίνεται ἐκ τῆς μονάδος του, ἵνα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἔπειτα κατασκευάσωμεν τὸν πρῶτον ἐκ τοῦ δευτέρου, τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου. Ὡσαύτως δὲ καὶ πρὶν ἐπιχειρήσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ πρώτου διὰ τοῦ τρίτου, πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν ὁποία εἶναι ἡ μονὰς τοῦ τρίτου ἤτοι τοῦ διαιρέτου πρὸς αὐτόν, ἵνα ἐκ τούτου ὁδηγούμενοι κατασκευάσωμεν τὸν δεύτερον ἐκ τοῦ πρώτου, τὸ πηλίκον ἐκ τοῦ διαιρετέου.

Ἐνταῦθα δὲ χρειάζεται νὰ ἐξετάσωμεν μόνον πῶς γίνεται ἀντιθετικὸς ἀριθμὸς ἐκ τῆς μονάδος τῆς ἀρχικῆς, ἥτις εἶναι ἡ θετικὴ, διότι πῶς γίνεται θετικὸς ἐξ αὐτῆς εἶναι ἤδη γνωστόν. Ἀρκεῖ δὲ νὰ προσδιορίσωμεν ἕνα τινὰ τρόπον, καθ' ὃν νὰ νοῆται ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρίσκηται ὁ ἀντιθετικὸς ἀριθμὸς ἐκ τῆς θετικῆς μονάδος.

19. Ἐὰν ἀπὸ τῆς 1 ἀφαιρέσωμεν 2, ἤτοι τὸ διπλάσιον τῆς μονάδος, ἡ διαφορὰ θέλει εἶσθαι —1 (ἀρ 17)· ἐκ δὲ τοῦ —1 ἐπαναλαμβανομένου γίνονται ὅλοι οἱ ἀντιθετικοὶ ἀριθμοὶ —2, —3, —4, κτλ, ὡς ἐκ τοῦ 1 γίνονται ὅλοι οἱ θετικοί. Ὥστε *πᾶς ἀντιθετικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ νοῆται ὅτι γίνεται ἐκ τῆς θετικῆς μονάδος διὰ δύο πράξεων, διὰ τῆς ἀφαιρέσεως πρῶτον 2 μονάδων ἀπ' αὐτῆς, καὶ ἔπειτα δι' ἐπαναλήψεως τῆς διαφορᾶς —1.*

Ἐκ δὲ τούτου εἶναι δῆλον καὶ πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ νοῆται ἡ θετικὴ μονὰς πρὸς ὁποιονδήποτε ἀντιθετικὸν ἀριθμόν. Τοῦ —8 π. χ. τὸ —1 εἶναι ὄγδοον, διότι τὸ —1 ὀκτάκις λαμβανόμενον ἀποτελεῖ τὸν —8· τὸ δὲ 1 εἶναι τὸ ἴσον μὲν κατὰ τὸ ποσὸν μὲ τὸ —1, ἀντίθετον δέ. Ὥστε τὸ 1 εἶναι τὸ ἴσον ἀλλ' ἀντίθετον τοῦ ὀγδόου τοῦ —8. Ὡσαύτως καὶ τοῦ —12 τὸ 1 εἶναι τὸ ἴσον ἀλλ' ἀντίθετον τοῦ —1 ἤτοι τοῦ δωδεκάτου του.

20. Ἔστω τώρα νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ +24 ἢ ὁ —24 πρῶτον ἐπὶ +6, καὶ ἔπειτα ἐπὶ —6.

α) Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς +6 γίνεται ἐκ τῆς μονάδος δι' ἐπαναλήψεως αὐτῆς, διὰ τοῦτο καὶ τὸ γινόμενον πρέπει νὰ γείνῃ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου +24 ἢ —24 δι' ἐπαναλήψεως αὐτοῦ· ἤτοι *πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι θετικὸς, πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ πρὸ τοῦ γινομένου των νὰ προτεθῇ τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιαστέου.* Οὕτως εὑρίσκεται γινόμενον +144 ἢ —144.

β) Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς —6 γίνεται ἐκ τῆς μονάδος 1, ἐὰν ἀπ' αὐτῆς ἀφαιρεθῇ τὸ 2 καὶ ἡ προκύπτουσα διαφορὰ —1 ἐπαναληφθῇ ἑξάκις, διὰ τοῦτο καὶ τὸ γινόμενον θέλει γείνει ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου +24 ἢ —24, ἐὰν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθῶσι δὶς τόσαι μονάδες, ὅσας ἔχει αὐτὸς ἤτοι 48 (17), καὶ ἡ προκύπτουσα διαφορὰ —24 ἢ +24 νὰ ἐπαναληφθῇ ἑξάκις· ἤτοι *πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι ἀντιθετικὸς, πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ πρὸ τοῦ γινομένου των νὰ τεθῇ σημεῖον τὸ ἀντίθετον τοῦ σημείου τοῦ πολλαπλασιαστέου.* Οὕτως εὑρίσκεται γινόμενον —144 ἢ +144.

Ἀφοῦ τὸ γινόμενον θέλει εἶσθαι πάντοτε ὁμόσημον μὲν μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι θετικὸς, ἀντίσημον δὲ αὐτοῦ, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι ἀντιθετικὸς, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὸ προειρημένον περὶ τοῦ σημείου τοῦ γινομένου καὶ οὕτως, ὅτι *τὸ γινόμενον θέλει εἶσθαι θετικὸν μὲν, ὅταν οἱ δύο παράγοντες ἦναι ὁμόσημοι, ἀντιθετικὸν δὲ, ὅταν αὐτοὶ ἦναι ἀντίσημοι.*

21. Ἂς διαιρεθῇ ὁ +24 ἢ ὁ —24 πρῶτον διὰ +6, καὶ ἔπειτα διὰ —6.

α') Ἐπειδὴ ἡ 1 εἶναι τὸ ἕκτον τοῦ +6, διὰ τοῦτο καὶ τὸ πηλίκον τοῦ +24 ἢ —24 διὰ +6 θέλει εἶσθαι τὸ ἕκτον τοῦ +24 ἢ τοῦ —24, ὅπερ εἶναι +4 ἢ —4, ἤτοι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι *τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ* 24 *διὰ τοῦ ἀριθμοῦ* 6 *ὁμόσημον μὲ τὸν διαιρετέον.*

β') Ἐπειδὴ ἡ 1 εἶναι ἴση μὲν κατὰ τὸ ποσὸν μὲ τὸ —1, τὸ ἕκτον τοῦ διαιρέτου —6, ἀντίθετος δὲ, διὰ τοῦτο καὶ τὸ πηλίκον τοῦ +24 ἢ —24 διὰ τοῦ —6 θέλει εἶσθαι ἴσον μὲν κατὰ τὸ ποσὸν μὲ τὸ ἕκτον τοῦ διαιρετέου, ἀντίθετον δὲ αὐτοῦ. Ἀλλὰ τὸ ἕκτον τοῦ +24 ἢ —24 εἶναι +4 ἢ — 4· λοιπὸν τὸ πηλίκον τοῦ 24 διὰ —6 θέλει εἶσθαι —4, τὸ δὲ τοῦ —24 διὰ —6 θέλει εἶσθαι +4, ἤτοι τ' ἀντίθετα τῶν ἕκτων +4 καὶ —4 τῶν διαιρετέων.

Ὥστε πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου, πρέπει νὰ διαιρῆται ὁ ἀριθμὸς τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ διαιρέτου (Θεωρ. καὶ Πρ. Ἀριθ), *πρὸ δὲ τοῦ πηλίκου νὰ τίθηται τὸ σημεῖον τοῦ διαιρετέου, ὅταν ὁ διαιρέτης ἦναι θετικὸς, τὸ ἀντίθετον* *δὲ αὐτοῦ, ὅταν ὁ διαιρέτης ἦναι ἀντιθετικός.* Τὸ αὐτὸ δὲ τοῦτο περὶ τοῦ σημείου τοῦ πηλίκου ἐκφράζεται καὶ οὕτω, *τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι θετικὸν μὲν, ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἦναι ὁμόσημοι, ἀντιθετικὸν δὲ, ὅταν αὐτοὶ ἦναι ἀντίσημοι.*

Σημ. ά. Ἐὰν παραβάλῃ τις τὸν πολλαπλασιασμὸν, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι ἀντιθετικὸς, πρὸς τὸν πολλαπλασιασμὸν, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι κλασματικὸς, βλέπει ὅτι κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις αὐτὸς συνίσταται εἰς δύο πράξεις, ὧν ἡ μία εἶναι διαίρεσις μὲν τοῦ πολλαπλασιαστέου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὅταν ἦναι οὗτος κλασματικὸς, ἀφαίρεσις δὲ ἀπὸ τοῦ πολλαπλασιαστέου δὶς τόσων μονάδων ὅσας αὐτὸς ἔχει, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι ἀντιθετικὸς, ἡ δὲ ἄλλη εἶναι καὶ κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις πολλαπλασιασμὸς τοῦ προκύπτοντος ἐκ τῆς πρώτης πράξεως ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· διότι διὰ δύο τοιούτων πράξεων γίνεται ὁ πολλαπλασιαστὴς ἐκ τῆς μονάδος, αὗται δὲ προςδιορίζουσιν ἑκάστοτε τὸν πολλαπλασιασμόν. Ἀλλ' ἡ προειρημένη ἀφαίρεσις, ἂν καὶ φαίνεται ὅτι δὲν ἐκτελεῖται, ὅταν πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ ἀντιθετικὸν, μολοντοῦτο λογίζεται πάντοτε, ὅτε θέτομεν πρὸ τοῦ γινομένου τὸ ἀντίθετον τοῦ σημείου τοῦ πολλαπλασιαστέου· διότι ἡ τοιαύτη ἀφαίρεσις ἄλλο ἀποτέλεσμα δὲν ἔχει εἰμὴ τὴν ἀλλαγὴν τοῦ σημείου τοῦ πολλαπλασιαστέου, μεθ' ἣν πρέπει αὐτὸς νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

Σημ. β΄. Εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν προειρημένων (20) ὅτι ὁπότερος δύο ἀριθμῶν ὁμοσήμων ἢ ἀντισήμων ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἄλλον, παράγει γινόμενον τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ἐπομένως ἂν τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἑτέρου παράγοντός του, θέλει προκύψει πηλίκον ὁ ἄλλος παράγων. Ἀλλ' ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων εἶναι ὁ λόγος τοῦ γινομένου πρὸς τὸν ἄλλον παράγοντά του· ἄρα καὶ ὁ λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον εὑρίσκεται διὰ τῆς διαιρέσεως (21) τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου. Οὕτως ὁ λόγος τοῦ $+36$ διὰ $+9$, ἢ τοῦ -36 διὰ -9 εἶναι $+4$· ὁ δὲ λόγος τοῦ $+36$ διὰ -9, ἢ τοῦ -36 διὰ $+9$ εἶναι -4, καὶ δεικνύει ὅτι ὁ $+36$ εἶναι τετραπλάσιος τοῦ ἀντιθέτου τοῦ -9, ὡς ὁ -4 εἶναι τετράκις ἡ ἀντίθετος τῆς θετικῆς μονάδος μονὰς, ἢ ὅτι ὁ -36 κτλ.

Περὶ τοῦ λογισμοῦ τῶν ἐγγραμμάτων ἀριθμῶν.

Περὶ σημειώσεως τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων.

22. Ὅταν ἀριθμῶν γενικῶς νοουμένων καὶ γραμμένων διὰ τῶν γραμμάτων ἦναι χρεία νὰ εὑρεθῇ ἢ τὸ κεφάλαιον ἢ ἡ διαφορὰ ἢ τὸ γινόμενον ἢ τὸ πηλίκον, ταῦτα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῶσι διὰ τῆς ἐπ' αὐτῶν ἐκτελέσεως τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων κατὰ τοὺς ἤδη γνωστοὺς κανόνας τῆς Ἀριθμητικῆς. Διότι πρὸς ἐκτέλεσιν αὐτῶν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ γνωρίζωμεν

πόσας μονάδας διαφόρων τάξεων ἔχουσιν οἱ ἀριθμοί, οἱ δὲ γενικοὶ ἀριθμοὶ κατὰ τοῦτο εἶναι ἀπροσδιόριστοι. Δύναται μέν τις νὰ μεταχειρίζηται κατὰ συνθήκην ἄλλο γράμμα πρὸς παράστασιν τοῦ κεφαλαίου δύο ἀριθμῶν ἢ τῆς διαφορᾶς των κτλ, ἀλλὰ τότε τίποτε δὲν δεικνύει τὴν σχέσιν τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ πρὸς τοὺς δύο ἄλλους, καὶ εὐκόλως λησμονεῖται, μάλιστα ὅταν ἦναι ἀνάγκη νὰ γείνωσι πολλοὶ λογισμοί, ὁπότε θέλει μεταχειρισθῇ τις πολλὰ γράμματα. Ὅ,τι δ' ἀπεδείχθη ὠφέλιμον πρὸς τοῦτο εἶναι ἡ χρῆσις ἰδιαιτέρων σημείων, ἅτινα θέτονται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν, ἵνα σημάνωσι τὴν πρᾶξιν, ἥτις εἶναι χρεία νὰ ἐκτελεσθῇ ἐπ' αὐτῶν, καὶ ἥτις θέλει ἐκτελεσθῇ τότε μόνον, ὅταν μερικοποιηθῶσιν οἱ γενικοὶ ἀριθμοί. Περὶ τῶν σημείων τούτων καὶ τῆς χρήσεώς των λέγομεν εὐθὺς τὰ δέοντα.

23. Ὅταν δύο ἀριθμοὶ θεωρῶνται ἁπλῶς ὡς ἀριθμοί, καὶ ὄχι ὡς παριστάνοντες ποσὰ προσδιωρισμένα ὡς θετικὰ καὶ ἀντιθετικά, οἷον α καὶ β, ἐὰν θέλωμεν νὰ σημειώσωμεν τὴν πρόσθεσιν τοῦ β εἰς τὸν α, ἢ τὴν ἀφαίρεσιν αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ α, ἐπειδὴ ὁ β θέλει εἶσθαι θετικὸς ἢ ἀντιθετικὸς (8), πρῶτον προτάσσομεν πρὸ αὐτοῦ τὸ $+$ ἢ τὸ $-$, καὶ ἔπειτα γράφομεν τὸ $+\beta$ ἢ τὸ $-\beta$ κατόπιν τοῦ α· οὕτω θέλομεν ἔχει $\alpha+\beta$ ἢ $\alpha-\beta$, ὧν τὸ μὲν πρῶτον εἶναι παραστατικὸν τοῦ κεφαλαίου τῶν δύο ἀριθμῶν, τὸ δὲ δεύτερον τῆς διαφορᾶς αὐτῶν. Διὰ τῆς θέσεως τοῦ β κατόπιν τοῦ α δεικνύεται ὅτι ὁ β ἔχει ἀρχὴν τὸ τέλος τοῦ α, διὰ δὲ τοῦ $+$ ἢ τοῦ $-$ ὅτι νοεῖται ὡς ὁ α ἢ κατὰ τὴν ἐναντίαν αὐτοῦ ἔννοιαν (8).

24. Ὅταν δὲ οἱ δύο ἀριθμοὶ παριστάνωσι ποσὰ θετικὰ καὶ ἀντιθετικὰ ἔχοντες πρὸ αὐτῶν ἤδη τὸ $+$ ἢ τὸ $-$, οἷον $+\alpha$ καὶ $+\beta$, $-\alpha$ καὶ $-\beta$, $+\alpha$ καὶ $-\beta$, $-\alpha$ καὶ $+\beta$, τότε ἡ πρᾶξις, ἥτις πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου, ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν σημείων αὐτῶν (16), καὶ ἄλλο δὲν χρειάζεται εἰμὴ νὰ γράφωμεν τὸν ἕτερον κατόπιν τοῦ ἄλλου μὲ τὰ σημεῖά των, οὕτω $+\alpha+\beta$, $-\alpha-\beta$, $+\alpha-\beta$, $-\alpha+\beta$, ὧν τὰ μὲν δύο πρῶτα σημαίνουσι τὸ κεφάλαιον τῶν δύο ἀριθμῶν, διότι οὗτοι εἶναι ὁμόσημοι, τὰ δὲ δύο τελευταῖα τὴν διαφορὰν αὐτῶν, διότι εἶναι ἀντίθετοι.

Ἐὰν ὅμως θέλωμεν νὰ σημειώσωμεν τὴν ἐναντίαν πρᾶξιν ἐκείνης, ἥτις ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν σημείων τῶν ἀριθμῶν, τότε δῆλον ὅτι πρέπει νὰ γράφωμεν τὸν δεύτερον ἀριθμὸν κατόπιν τοῦ πρώτου μὲ τὸ ἀντίθετον σημεῖον, οἷον

$$+a-b,\ -a+b,\ +a+b,\ -a-b,$$

ὧν τὰ πρῶτα δύο εἶναι τὰ αὐτὰ καὶ τὰ δύο ἀνωτέρω τελευταῖα, καὶ τἀνάπαλιν.

Σημ. ά. Ἴδιον σημεῖον προςθέσεως καὶ ἴδιον σημεῖον ἀφαιρέσεως δὲν ὑπάρχουσι, καθότι τὸ + καὶ τὸ − εἶναι σημεῖα γενικὰ παριστάνοντα τὴν ἑτέραν ἢ τὴν ἐναντίαν ἔννοιαν, καθ' ἣν νοοῦνται τὰ ποσὰ πρὸς ἀρχήν τινα, καὶ ὄχι ἴδια τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως. Ἂν δὲ σημαίνουσι καὶ πρόςθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν, τοῦτο συμβαίνει ὅτε οἱ ἀριθμοὶ θεωροῦνται ἁπλῶς ὡς ἀριθμοί, διὰ τοῦτο δέ, ὅτι αἱ πράξεις αὗται εἶναι ἐναντίαι ἀλλήλων, καὶ ἡ πρόςθεσις εἶναι ἡ συμβιβαζομένη μὲ τὴν καθ' ἣν γίνεται ὁ πρῶτος ἀριθμός, ἡ δ' ἀφαίρεσις ἡ ἐναντία ἐκείνης. Ὅταν δὲ ἦναι ἤδη οἱ ἀριθμοὶ θετικοὶ ἢ ἀντιθετικοὶ ἢ ἀντίσημοι, τότε ἐκ τῶν σημείων τῶν δύο προςδιορίζεται ἡ πρόςθεσις ἢ ἡ ἀφαίρεσις (16). Ὥστε δὲν χρειάζεται ἄλλο σημεῖον, ἀλλ' ἀρκεῖ κατὰ τὴν συνθήκην νὰ γράφηται ὁ ἕτερος ἀριθμὸς κατόπιν τοῦ ἄλλου μὲ τὰ σημεῖά των. Ἐκ τοῦ ὅτι ἀνωτέρω κεῖται ὁ ἕτερος ἀριθμὸς κατόπιν τοῦ ἄλλου καταλαμβάνομεν μόνον ὅτι πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ πρόςθεσις ἢ ἀφαίρεσις, ὅταν ἀντὶ a καὶ b ληφθῶσι μερικοὶ ἀριθμοί· ἐκ δὲ τοῦ ὅτι ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἢ ἀντίθετα καταλαμβάνομεν ὅτι πρέπει ὡρισμένως νὰ ἐκτελέσωμεν πρόςθεσιν ἢ ἀφαίρεσιν.

Σημ. β΄. Ἐπειδὴ σημεῖα ἰδιαίτερα τῆς προςθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως δὲν ὑπάρχουσι, διότι τὰ γενικὰ σημεῖα + καὶ − τὰ πρὸ τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἱκανὰ νὰ προςδιορίζωσι τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν αὐτῶν, ὡς σημείωσις αὐτῶν πρέπει νὰ θεωρῆται ἡ θέσις τοῦ ἑτέρου ἀριθμοῦ κατόπιν τοῦ ἄλλου μὲ τὰ σημεῖά των. Ἀλλὰ τότε συμβαίνει ὥστε διὰ τῆς αὐτῆς πράξεως, τῆς θέσεως τοῦ ἑτέρου κατόπιν τοῦ ἄλλου, νὰ σημειόνωνται δύο πράξεις ἐναντίαι, καὶ ἡ σημείωσις τῆς πράξεως νὰ μὴν ἀντιστοιχῇ ὡρισμένως εἰς ἑκατέραν τὴν πρᾶξιν, ἀλλ' εἰς τὰς δύο ἐναντίας ἀορίστως. Αὕτη δὲ ἡ πρᾶξις, δι' ἧς σημειοῦται ἀορίστως ἡ πρόςθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις, καλεῖται κοινῶς πρόςθεσις τοῦ ἑτέρου ἀριθμοῦ εἰς τὸν ἄλλον, ἀλλὰ κατὰ ταύτην τὴν ἔννοιαν, ὅτι εἶναι θέσις ἢ γραφὴ τοῦ ἑτέρου ἀριθμοῦ πλησίον τοῦ ἄλλου ἢ κατόπιν αὐτοῦ, καὶ ὄχι καθ' ἣν μέχρι τοῦδε εἴχομεν ἰδέαν αὐτῆς. Ὥστε ἐν τοῖς ἑξῆς ἀντὶ νὰ λέγωμεν γράφομεν ἀριθμόν τινα κατόπιν ἄλλου μὲ τὸ σημεῖόν του, θέλομεν λέγει προσθέτομεν αὐτὸν εἰς τὸν ἄλλον, νοοῦντες ὅτι σημειόνομεν τὴν πρόσθεσιν ἢ τὴν ἀφαίρεσιν αὐτῶν κατὰ τὰ σημεῖά των.

Ἐπειδὴ δ', ὅταν γράφωμεν τὸν δεύτερον ἀριθμὸν κατόπιν τοῦ πρώτου μὲ τὸ ἐναντίον σημεῖόν του, σημειόνεται ἡ ἐναντία πρᾶξις ἐκείνης, ἥτις σημειόνεται, ὅταν γράφωμεν αὐτὸν μὲ τὸ σημεῖόν του, ἀφοῦ ὠνομάσαμεν ταύτην πρόςθεσιν, θέλομεν ὀνομάζει ἐκείνην πρόςθεσιν τοῦ ἀντιθέτου, ἢ συντομώτερα, ἀντιπρόσθεσιν.

Σημ. γ'. Πάντες οἱ γράψαντες περὶ τῶν πράξεων τούτων ὀνομάζουσι τὴν ἀντιπρόσθεσιν ἀφαίρεσιν, τὴν δὲ πρόσθεσιν πρόσθεσιν μὲν, ὄχι ὅμως καθ' ἣν ἀνωτέρω εἴπομεν σημασίαν, ἀλλ' ἐκλαμβάνοντες αὐτὴν σημαίνουσαν καὶ τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν τὴν ἀριθμητικὴν, ὁπότε ἡ ἀντιπρόσθεσις, ἡ καλουμένη ὑπ' αὐτῶν ἀφαίρεσις, σημαίνει καὶ τὴν ἀφαίρεσιν καὶ τὴν πρόσθεσιν τὴν ἀριθμητικήν. Καὶ λέγουσιν ὅτι προστίθεται καὶ ὁ $+ \beta$ εἰς τὸν $+ \alpha$ ἢ ὁ $- \beta$ εἰς τὸν $- \alpha$, καὶ ὁ $- \beta$ εἰς τὸν $+ \alpha$ καὶ ὁ $+ \beta$ εἰς τὸν $- \alpha$, ἀλλὰ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς προσθέσεως ταύτης προσθέτουσι μὲν τῷ ὄντι τοὺς ὁμοσήμους, ἀφαιροῦσι δὲ τοὺς ἀντιθέτους. Ὡσαύτως λέγουσιν ὅτι τῶν αὐτῶν προηγουμένων ἀριθμῶν ἀφαιρεῖται ὁ ἕτερος ἀπὸ τοῦ ἄλλου, ἀλλὰ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἀφαιρέσεως ταύτης ἀφαιροῦσι μὲν τῷ ὄντι τοὺς ἀντιθέτους, προσθέτουσι δὲ τοὺς ὁμοσήμους. Ἡ σύγχυσις δ' αὕτη προέρχεται νομίζω ἐκ τῆς μὴ ἀκριβοῦς διακρίσεως τῆς σημειώσεως τῶν πράξεων καὶ τῆς ἐκτελέσεως αὐτῶν. Πρόσθεσις ὡς σημείωσις εἶναι ἄλλο, κατὰ δὲ τὴν ἐκτέλεσιν ἄλλο, ἂν καὶ ἦναι ἡ αὐτὴ λέξις· ἀφαίρεσις δὲ κατὰ τὴν σημείωσιν δὲν ἁρμόζει, ἀλλὰ μᾶλλον ἁρμόζει νὰ λέγηται ἀντιπρόσθεσις.

Σημ. δ'. Ἡ θέσις τῶν δύο ἀριθμῶν δύναται ν' ἀνταλλαχθῇ, ἤτοι νὰ γραφθῇ ὁ δεύτερος πρῶτος καὶ τἀνάπαλιν· διότι ἐκ τούτου δὲν γίνεται οὐδεμία μεταβολὴ εἰς τὸν σημειούμενον ἀριθμὸν, τὸ κεφάλαιον ἢ τὴν διαφορὰν τῶν δύο δεδομένων, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἢ ὁ πρῶτος προστεθῇ εἰς τὸν δεύτερον ἢ ὁ δεύτερος εἰς τὸν πρῶτον, τὸ αὐτὸ κεφάλαιον προκύπτει, καὶ ὅτι πάντοτε ἀπὸ τοῦ μεγαλητέρου ἀφαιροῦνται ὅσαι μονάδες εἶναι αἱ τοῦ μικροτέρου καὶ πρὸ τοῦ ὑπολοίπου τίθεται τὸ σημεῖον τοῦ μεγαλητέρου. Οὕτω, τὸ $+ \alpha + \beta$ καὶ τὸ $+ \beta + \alpha$, ἢ τὸ $- \alpha - \beta$ καὶ τὸ $- \beta - \alpha$, ἢ τὸ $- \alpha + \beta$ καὶ τὸ $+ \beta - \alpha$, ἢ τὸ $+ \alpha - \beta$ καὶ τὸ $- \beta + \alpha$, παριστάνουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Σημ. ε'. Ἐπειδὴ ἐκλαμβάνεται τὸ μὲν $+$ σημεῖον προσθέσεως, τὸ δὲ $-$ σημεῖον ἀφαιρέσεως, εἰς τὴν ὁμιλουμένην γλῶσσαν ἀντ' αὐτῶν μεταχειρίζονται οἱ μὲν τὰς λέξεις πλέον καὶ μεῖον ἀντὶ τοῦ $+$ καὶ $-$, οἱ δὲ τὰς σὺν καὶ πλὴν, ὡς δηλωτικὰ τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως. Ἀλλ' ἡμεῖς κρίνομεν περιττὰς αὐτὰς, χρησιμώτερα δὲ τὰ ὀνόματά των (5) θετικὸν καὶ ἀντιθετικὸν, ἀφοῦ εἴδομεν ὅτι δὲν εἶναι σημεῖα προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως· ἐκτὸς μόνον ἂν θέλῃ τις συντόμους λέξεις, καὶ τότε εἶναι προτιμητέαι αἱ σὺν καὶ πλὴν, ἀλλ' ὡς ἐμφατικαὶ ἁπλῶς τῶν ἐναντίων ἐννοιῶν, καὶ ὄχι ὡρισμένως ἡ μὲν τῆς προσθέσεως, ἡ δὲ τῆς ἀφαιρέσεως.

25. Σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι τὸ $\times$, τιθέμενον μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν, οὕτω

$$+\alpha\times+\beta,\quad -\alpha\times+\beta,\quad +\alpha\times-\beta,\quad -\alpha\times-\beta,$$
$$\text{ἢ}\quad \alpha\times\beta\quad \text{ἢ}\quad -\alpha\times\beta\quad \text{ἢ}\quad \alpha\times-\beta,$$

ἀπαγγελλόμενον δ' ἐπί.

Ἐνίοτε ἀντὶ τοῦ $\times$ μεταχειριζόμεθα μίαν στιγμὴν, οὕτω $\alpha.\beta$ κτλ, καὶ συνηθέστατα δὲν μεταχειριζόμεθα κανὲν σημεῖον, ὅταν ὁ δεύτερος παράγων ἦναι θετικός, οὕτω $αβ$, $-αβ$. Ἂν δὲ ἦναι ἀντιθετικός, μεταχειριζόμεθα πάντοτε τὸ $\times$.

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθ. 20 τὸ γινόμενον δύο ὁμοσήμων ἀριθμῶν εἶναι θετικόν, τὸ δὲ δύο ἀντισήμων εἶναι ἀντιθετικόν, εἰμποροῦμεν πάντοτε νὰ σημειόνωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἄνευ σημείου μεταξὺ τῶν παραγόντων, ἀλλὰ προσέχοντες νὰ θέτωμεν πρὸ τοῦ γινομένου τὸ $+$ ἢ τὸ $-$ συμφώνως μὲ τὸν κανόνα. Ὥστε
ἀντὶ μὲν $+α\times+β$ καὶ $-α\times-β$ θέλομεν γράφει $+αβ$ ἢ $αβ$,
ἀντὶ δὲ $+α\times-β$ καὶ $-α\times+β$ θέλομεν γράφει $-αβ$.

Καὶ ἀντιστρόφως, ἀντὶ $αβ$ ἢ $+αβ$ εἰμποροῦμεν νὰ γράψωμεν ἢ $+α\times+β$ ἢ $-α\times-β$, ἀντὶ δὲ $-αβ$ οὕτω $+α\times-β$ ἢ $-α\times+β$· διότι, ὅταν τὸ γινόμενον ἦναι θετικόν, οἱ δύο παράγοντές του εἶναι ὁμόσημοι, ὅταν δὲ ἦναι ἀντιθετικόν, οἱ παράγοντες εἶναι ἀντίσημοι.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον σημειόνεται καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς πολλῶν παραγόντων, οἷον $α\times-β\times+γ$ ἢ $α\times-βγ$, ἢ $-αβγ$, ἢ καὶ οὕτω $-β.α.γ$.

Εἶναι δὲ ἤδη γνωστὸν (Θ. Α. 82 καὶ 84 καὶ ἀνωτέρ. ἀρ. 20) ὅτι ὁποιανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχωσιν οἱ παράγοντες, τὸ γινόμενον θέλει εἶσθαι πάντοτε τὸ αὐτό. Ὥστε εἰμπορεῖ τις νὰ γράφῃ $α\times β$ ἢ $β\times α$, $-α\times β$ ἢ $β\times-α$, $-αβγ$ ἢ $-βγα$ ἢ $-γαβ$, κτλ.

Τελευταῖον παρατηροῦμεν ὅτι γινομένου δύο παραγόντων ἀλλάσσει τὸ $+$ εἰς $-$ ἢ τὸ $-$ εἰς $+$, ἂν ἀλλάξῃ τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων τὸ $+$ εἰς $-$ ἢ τὸ $-$ εἰς $+$. Ἂν δὲ ἀλλάξωσι καὶ τῶν δύο παραγόντων τὰ σημεῖα, τότε τοῦ γινομένου τὸ σημεῖον δὲν ἀλλάσει. Τοῦτο εἶναι δῆλον ἐκ τῶν ἀνωτέρω.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαδοχικὴ πρόσθεσις ἀριθμοῦ εἰς ἑαυτόν, εἰς τὸ διπλάσιόν του κτλ, οἷον $α+α+α+α+α$ ἢ $-α-α-α-α-α$, εἶναι κυρίως πολλαπλασιασμὸς αὐτοῦ ἐπὶ ἀριθμὸν ἔχοντα τόσας μονάδας, ὁσάκις εἶναι γραμμένος αὐτὸς ὁ ἀριθμός, διὰ τοῦτο τ' ἀνωτέρω κυρίως παριστάνουσι γινόμενα τοῦ $α$ ἢ τοῦ $-α$ ἐπὶ 5, ἤτοι τὰ πενταπλάσια αὐτῶν. Ὥστε δυνατὸν συντομώτερα νὰ γράφωνται καὶ οὕτω $+5α$ ἢ $-5α$. Ὡσαύτως τὸ $\beta+\beta+\beta$ γράφεται οὕτω $+3\beta$ ἢ 3β. Τὸ $-\gamma-\gamma-\gamma-\gamma$ οὕτω -4γ. Καὶ ἀντιστρόφως, τὸ $+2\delta$ εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ τὸ $\delta+\delta$. Τὸ -3α εἶναι τὸ τριπλάσιον τοῦ $-\alpha$ ἤτοι $-\alpha-\alpha-\alpha$.

Ὁ πολλαπλασιαστὴς 5, 3, 4 κτλ ὁ κείμενος πρό τινος γράμματος ὀνομάζεται *συνεργός*. Ὅταν ἦναι μονὰς ὁ συνεργὸς, δὲν γράφεται.

26. Σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶναι τὸ ἤδη γνωστὸν —, ἐφ' οὗ γράφεται ὁ διαιρετέος, καὶ ὑφ' ὃ τίθεται ὁ διαιρέτης, οὕτω

$$\frac{+\alpha}{+\beta},\quad \frac{-\alpha}{+\beta},\quad \frac{+\alpha}{-\beta},\quad \frac{-\alpha}{-\beta},$$

ἀπαγγέλλεται δὲ *διά*.

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθ. 21 τὸ πηλίκον δύο ὁμοσήμων ἀριθμῶν εἶναι θετικὸν, τὸ δὲ δύο ἀντισήμων εἶναι ἀντιθετικὸν, εἰμποροῦμεν νὰ μὴ γράφωμεν τὰ σημεῖα τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου, ἀλλὰ νὰ θέτωμεν ἓν μόνον πρὸ τῆς γραμμῆς, ὅπερ θέλει εἶσθαι σημεῖον τοῦ πηλίκου. Ἀντὶ λοιπὸν τοῦ $\frac{+\alpha}{+\beta}$ καὶ $\frac{-\alpha}{-\beta}$ θέλομεν γράφει $+\frac{\alpha}{\beta}$, ἀντὶ δὲ τοῦ $\frac{-\alpha}{+\beta}$ καὶ $\frac{+\alpha}{-\beta}$ τὸ $-\frac{\alpha}{\beta}$.

Καὶ ἀντιστρόφως, ἀντὶ μὲν τοῦ $+\frac{\alpha}{\beta}$ εἰμποροῦμεν νὰ γράφωμεν $\frac{+\alpha}{+\beta}$ ἢ $\frac{-\alpha}{-\beta}$, ἀντὶ δὲ τοῦ $-\frac{\alpha}{\beta}$ νὰ γράφωμεν $\frac{-\alpha}{+\beta}$ ἢ $\frac{+\alpha}{-\beta}$.

Ἐνίοτε γράφουσι δεξιὰ τοῦ διαιρετέου τὸν διαιρέτην καὶ μεταξύ των θέτουσι τὸ $\vdots$, οἷον $\alpha\vdots\beta$, ὅπερ εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ $\frac{\alpha}{\beta}$. Ἀλλ' ἡ σημείωσις αὕτη εἶναι καλὸν τότε νὰ ἦναι εἰς χρῆσιν, ὅταν θέλωμεν νὰ νοηθῇ ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β.

27. Τὸ γινόμενον πολλῶν ἴσων παραγόντων λέγεται *δύναμις* τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων, καὶ ἀντιστρόφως, ὁ εἷς τῶν πολλῶν ἴσων παραγόντων γινομένου τινὸς λέγεται *ῥίζα* τοῦ γινομένου ἢ τῆς δυνάμεως. Π. χ. τὸ $\alpha\alpha\alpha$ εἶναι δύναμις τοῦ α, καὶ ἀντιστρόφως, τὸ α εἶναι ῥίζα τοῦ $\alpha\alpha\alpha$.

Καὶ τὸ μὲν γινόμενον δύο ἴσων παραγόντων, οἷον $αα$, εἶναι *δευτέρα δύναμις* τοῦ $α$ ἢ *τετράγωνον* τοῦ $α$, τὸ δὲ $α$ ἀντιστρόφως *δευτέρα ῥίζα* τοῦ $αα$ ἢ *τετραγωνικὴ ῥίζα* αὐτοῦ. Τὸ δὲ γινόμενον τριῶν ἴσων ἀριθμῶν, οἷον $ααα$, εἶναι *τρίτη δύναμις* τοῦ $α$ ἢ *κύβος* τοῦ $α$, ἀντιστρόφως δὲ, τὸ $α$ εἶναι *τρίτη ῥίζα* τοῦ $ααα$ ἢ *κυβικὴ ῥίζα* αὐτοῦ. Τὸ $αααα$ εἶναι *τετάρτη δύναμις* τοῦ $α$, τὸ δὲ $α$ *τετάρτη ῥίζα* τοῦ $αααα$, κτλ.

28. Αἱ δυνάμεις $αα$, $ααα$, $αααα$, κτλ σημειόνονται ἁπλούστερα οὕτω, γράφεται δηλ. ἅπαξ τὸ γράμμα $α$, ἐπ' αὐτοῦ δὲ πρὸς δεξιὰν καὶ ὀλίγον ὑψηλὰ τίθεται ἀριθμὸς ἔχων τόσας μονάδας, ὅσοι εἶναι οἱ παράγοντες· οἷον τὸ $αα$ γράφεται οὕτω $α^2$, τὸ $ααα$ οὕτω $α^3$, τὸ $αααα$ οὕτω $α^4$ κτλ. Τὸ $β^5$ εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ τὸ $βββββ$.

Ὁ ἀριθμὸς 2, 3, 4, 5 κτλ ὁ οὕτω κείμενος, ὅστις δεικνύει τὸν ἀριθμὸν τῶν ἴσων παραγόντων, ἢ ἄλλως τὸν *βαθμὸν* τῆς δυνάμεως, λέγεται *δείκτης τῆς δυνάμεως* ἢ ἁπλῶς *δείκτης*.

Τὸ $α^2$ ἀπαγγέλλεται *δευτέρα δύναμις τοῦ α*, ἢ *τετράγωνον τοῦ α*, ἢ *α μὲ δείκτην* 2, ἢ *α δύο*. Τὸ $α^3$ ὡσαύτως ἀπαγγέλλεται *τρίτη δύναμις τοῦ α*, ἢ *κύβος τοῦ α*, ἢ *α μὲ δείκτην* 3, ἢ *α τρία*, κτλ.

Σημ. Ὡς πρώτη δύναμις ἀριθμοῦ τινος θεωρεῖται αὐτὸς ὁ ἴδιος ἀριθμὸς, ὅςτις εἶναι ὄχι γινόμενον ἴσων ἀριθμῶν, ἀλλὰ γινόμενον ἑαυτοῦ καὶ τῆς μονάδος, οἷον ὁ $α$ εἶναι $1 \times α$. Ὅταν ὁ δείκτης ἦναι 1, δὲν γράφεται, ἀλλ' ἀντὶ $α^1$ γράφεται ἁπλῶς $α$.

29. Τὸ $\sqrt{}$ προτάσσεται πρὸ τῶν ἀριθμῶν, ὧνπερ πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ῥίζα τις. Καὶ μόνον του μὲν προτάσσεται, ἵνα σημειόνῃ ἐξακτέαν τετραγωνικὴν ῥίζαν, μὲ τὸν ἀριθμὸν δὲ 3 ἢ 4 κτλ εἰς τὸ ἄνω ἄνοιγμα, ἵνα σημειόνῃ τρίτην ῥίζαν ἐξακτέαν ἢ τετάρτην κτλ. Καὶ τὸ μὲν 3, 4 κτλ λέγεται *δείκτης τῆς ῥίζης*, τὸ δὲ $\sqrt{}$ *ῥιζικόν*.

Τὸ $\sqrt{α}$ ἀπαγγέλλεται *τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ α*, τὸ $\sqrt[3]{β}$ *τρίτη ἢ κυβικὴ ῥίζα τοῦ β*.

30. Ἐκτὸς τῶν προειρημένων σημείων εἶναι ἐν χρήσει καὶ

τὰ δύο ταῦτα, τὸ $=$ καὶ τὸ $>$ ἢ τὸ $<$, ὧν τὸ μὲν $=$ εἶναι σημεῖον ἰσότητος, τὸ δὲ $>$ ἀνισότητος. Ὅταν λοιπὸν ἦναι γνωστὸν ὅτι δύο ἀριθμοὶ ὁπωσδήποτε σημειωμένοι εἶναι ἴσοι, τίθεται μεταξὺ αὐτῶν τὸ $=$, ὅταν δὲ ἦναι ἄνισοι, τίθεται μεταξὺ αὐτῶν τὸ $>$ οὕτως, ὥστε τὸ ἄνοιγμα νὰ ἦναι ἐστραμμένον πρὸς τὸν μεγαλήτερον, οἷον

$$3a+2a=5a,\quad a+b=\gamma,\quad a-b=\delta,\quad a\times b=ab.$$

$$a>b,\quad 5b>3b,\quad 6a<9b.$$

Τὸ $=$ ἀπαγγέλλεται *εἶναι ἴσον* ἢ ἁπλῶς *ἴσον*, τὸ δὲ $>$ ἢ $<$ *μεγαλήτερον* ἢ *μικρότερον*.

Τὸ $3a+2a=5a$, καὶ τὰ ὅμοια, ἔνθα εἶναι σημειωμένον ὅτι ἀριθμός τις εἶναι ἴσος μὲ ἄλλον, λέγεται *ἰσότης*· καὶ τὸ μὲν ἀριστερὰ τοῦ $=$ μέρος λέγεται *πρῶτον μέλος* τῆς ἰσότητος, τὸ δὲ δεξιὰ *δεύτερον μέλος* αὐτῆς. Τὸ δὲ $a>b$, καὶ τὰ ὅμοια, ὀνομάζεται *ἀνισότης*, ἧς πρῶτον μέλος εἶναι τὸ ἀριστερὰ καὶ δεύτερον τὸ δεξιὰ τοῦ $>$.

Σημ. Ὅταν καὶ τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος ἦναι κατὰ πάντα τὸ αὐτό, οἷον $a=a$, $b-a=b-a$, κτλ, τότε ἡ ἰσότης ὀνομάζεται ἰδίως *ταυτότης*.

31. Τὰ προηγούμενα σημεῖα, ἅπερ ἐξ ἀνάγκης μεταχειριζόμεθα εἰς τοὺς ἐγγραμμάτους ἀριθμούς, εἰμποροῦμεν νὰ μεταχειριζώμεθα καὶ εἰς τοὺς διὰ ψηφίων γραμμένους ἀριθμούς, ὅταν δὲν θέλωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν εὐθὺς τὰς πράξεις, ἀλλὰ μόνον νὰ τὰς σημειώσωμεν, ἵνα ἐνθυμώμεθα ἔπειτα, ὅταν ἦναι ἀνάγκη νὰ τὰς ἐκτελέσωμεν. Π. χ. εἰμποροῦμεν νὰ γράψωμεν

$8-4$, 7×6, $\frac{35}{7}$, 2^3, $\sqrt{16}$· ἢ ἀφοῦ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις

$$8-4=4,\quad 7\times6=42,\quad \frac{35}{7}=5,\quad 2^3=8,\quad \sqrt{16}=4.$$

Σημ. Τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀριθμῶν γραμμένων διὰ ψηφίων πρέπει νὰ σημειόνωμεν πάντοτε ἢ διὰ τοῦ $\times$ ἢ διὰ τῆς., οὕτως 7×6 ἢ 7.6, καὶ ὄχι ποτὲ οὕτω 76, ἄνευ σημείου, ὡς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἐγγραμμάτων ἀριθμῶν· διότι θέλει εἶσθαι ἄδηλον τότε ἂν ὁ 76 παριστάνῃ τὸ γινόμενον τοῦ 7 καὶ 6, ἢ ἦναι ὁ ἀριθμὸς 76.

Περὶ ὅρων καὶ πολυόρων.

32. Ἐκ τοῦ ὅτι ἐπὶ τῶν ἐγγραμμάτων ἀριθμῶν ἀδύνατον νὰ ἐκτελῶνται αἱ ἀριθμητικαὶ πράξεις, ἀνάγκη δὲ νὰ σημειόνωνται, πηγάζει νέος τρόπος τοῦ παριστάνειν γενικὸν ἀριθμὸν, ὄντα ὄχι ἐκ τῶν πρῶτον δεδομένων, ἀλλ' ἐκ τῶν προκυπτόντων ἐκ πράξεων, ἤτοι παριστάνειν αὐτὸν ὄχι ἁπλῶς δἰ ἑνὸς γράμματος, ἀλλὰ δἰ ἑνὸς ἢ πλειοτέρων καὶ ἐνταυτῷ διὰ διαφόρων ἄλλων σημείων. Τοιοῦτοι εἶναι οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ, οὕςτινας θέλομεν ὀνομάζει μὲν καὶ ἐγγραμμάτους, ἀλλὰ κυρίως *συμβολικοὺς*, ὡς παριστανομένους ὄχι μόνον διὰ γραμμάτων, ἀλλὰ καὶ διὰ συμβόλων ἄλλων.

$\alpha \times \beta$ ἢ $\alpha\beta$, $-\alpha\beta \times -\gamma$ ἢ $+\alpha\beta\gamma$, α^2, β^3, γ^4, $5\alpha^3\beta^4\gamma^2$,

$-9\beta^2\gamma^3\delta^4$, $\frac{\alpha^3}{\beta^2}$, $-\frac{\gamma^2}{\delta^3}$, $\sqrt{\alpha^3}$, $-\sqrt{\beta^2\gamma^4}$, $\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\delta^2}}$ κτλ.

$\alpha-\beta$, $\alpha+\beta-\gamma$, $7\alpha^3\beta^2-4\alpha^2\beta^3+3\alpha\beta^4-6\beta^5$,

$\frac{4\alpha^2\beta}{5\gamma^2}-\frac{7\beta^2\gamma}{3\delta^2}+\frac{9\alpha\gamma^2}{4\alpha\delta^3}$, $\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{3\alpha^2\beta}$, κτλ.

Εἶναι δὲ ἀναγκαῖον νὰ ἐξασκηθῶσιν οἱ ἀρχάριοι εἰς τὸ ν' ἀπαγγέλλωσι τοιούτους ἀριθμοὺς καὶ νὰ γράφωσιν ἀπαγγελλομένους αὐτοὺς κατὰ τὰ προεξηγηθέντα.

33. *Ὅρος* ὀνομάζεται πᾶς ἐγγράμματος ἀριθμὸς, ἐν ᾧ πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις δὲν εἶναι σημειωμένη, οἷον οἱ τῶν ἀνωτέρω δύο πρώτων γραμμῶν, ἢ ὁ δἰ ἑνὸς μόνου γράμματος παριστανόμενος, οἷον ὁ α, β, κτλ. *Πολύορος* δὲ ἢ *πολύορον* ὀνομάζεται ὁ συμβολικὸς, ὁ συγκείμενος ἐκ πολλῶν ὁμοσήμων ἢ ἀντισήμων ὅρων ἀκολουθούντων ἀλλήλους, οἷον οἱ τῶν ἀνωτέρω δύο τελευταίων γραμμῶν. Ἰδίως δὲ ὁ συγκείμενος ἐκ δύο ὅρων λέγεται *δίορος*, ὁ ἐκ τριῶν *τρίορος*, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Σημ. Τὰ μέχρι τοῦδε ἐν χρήσει μονώνυμον καὶ πολυώνυμον ὡς ἀκατάλληλα κρίνομεν παραμελητέα.

34. *Προσδιόρισμα* συμβολικοῦ ἀριθμοῦ ὀνομάζομεν τὸ προκύπτον ἐξ αὐτοῦ, ἀφοῦ μερικοποιηθῶσιν οἱ δἰ ἑκάστου ἐν αὐτῷ γράμματος παριστανόμενοι γενικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τῶν μερικῶν αἱ σημειωμέναι πράξεις· ὅταν δὲ τοῦτο

κάμνωμεν, θέλομεν λέγει ὅτι *προσδιορίζομεν τὸν συμβολικὸν ἀριθμόν*. Τὸ δὲ προσδιόρισμα συνηθέστατα εἶναι ἀριθμὸς μερικός, ἐνίοτε δὲ εἶναι ἄλλο τι, ὅπερ κατωτέρω θέλομεν ἀπαντήσει (ἰδὲ ἐν κεφ. δ').

Ὅςτις καλῶς ἐννοεῖ ὅσα προηγουμένως εἴπομεν περὶ τῆς σημειώσεως τῶν πράξεων, δὲν θέλει ἀπαντήσει κάμμίαν δυσκολίαν εἰς τὸν προςδιορισμὸν συμβολικοῦ τινος ἀριθμοῦ, ἐν ᾧ ῥίζης ἐξαγωγὴ δὲν εἶναι σημειωμένη.

Ἐὰν πρόκηται νὰ προςδιορισθῇ τὸ τρίορον

$$2\alpha^2\beta^3-4\alpha^3\beta^2+3\alpha^2\beta\gamma^2,$$

ὑποτεθέντος $\alpha=4$, $\beta=3$, καὶ $\gamma=5$, πρῶτον προςδιορίζονται οἱ ὅροι· δηλ. τετραγωνίζεται ὁ 4, εὑρίσκεται δὲ καὶ ὁ κύβος τοῦ 3, πολλαπλασιάζεται ὁ 16 ἐπὶ 27 καὶ διπλασιάζεται τὸ γινόμενόν των 432, καὶ οὕτως ἔχομεν προςδιόρισμα τοῦ πρώτου ὅρου τὸν 864. Ὡσαύτως εὑρίσκεται προςδιόρισμα τοῦ δευτέρου ὅρου ὁ — 2304, καὶ προςδιόρισμα τοῦ τρίτου ὁ +3600. Ὥστε τὸ τρίορον τρέπεται εἰς τὸ

$$864-2304+3600.$$

Τώρα ἐκτελεῖται ἡ ἀφαίρεσις τοῦ 864 ἀπὸ τοῦ 2304, ἡ δὲ διαφορὰ οὖσα ἀντιθετικὴ — 1440 ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 3600, καὶ οὕτω προκύπτει προςδιόρισμα τοῦ τριόρου ὁ ἀριθμὸς +2160.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι, ἂν $\alpha=7$, $\beta=2$, $\gamma=3$, ἢ ἂν ἄλλως ἤθελον μερικοποιηθῆ τὰ γράμματα α, β καὶ γ, τὸ προςδιόρισμα τοῦ τριόρου ἤθελεν εἶσθαι ἄλλος καὶ ἄλλος ἀριθμός.

35. Ἀλλ' ἐπειδή, ὅταν μὲν ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ πολυόρου ἦναι ὁμόσημοι, εἶναι φανερὸν ὅτι *προςδιόρισμα αὐτοῦ εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν προςδιορισμάτων ὅλων τῶν ὅρων του*, ὅταν δὲ οἱ ὅροι του ἦναι ἀντίσημοι, ἀποδεικνύεται ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ ὅτι *προςδιόρισμα αὐτοῦ εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν προςδιορισμάτων τῶν θετικῶν ὅρων καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν προςδιορισμάτων τῶν ἀντιθετικῶν ὅρων, ὁμόσημος μὲ τὸ μεγαλήτερον ἄθροισμα*· διὰ ταῦτα πρὸς εὕρεσιν τοῦ προςδιορίσματος πολυόρου τινός, ἀφοῦ προςδιορισθῶσιν οἱ ὅροι του ὅλοι, ἢ προσθέτονται τὰ προςδιορίσματα αὐτῶν, ἂν ἦναι

ὁμόσημα, ἢ, ἂν ἦναι ἀντίσημα, προςθέτονται πρῶτον τὰ ὁμόσημα θετικά τε καὶ ἀντιθετικὰ, καὶ ἔπειτα ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ μεγαλητέρου ἀθροίσματος τὸ μικρότερον, ἡ δὲ διαφορὰ αὕτη ὁμόσημος μὲ τὸ μεγαλήτερον ἄθροισμα θέλει εἶσθαι τὸ τοῦ πολυόρου προςδιόρισμα. Οὕτω δ' εὑρίσκεται συντομώτερα τοῦ πολυόρου τὸ προςδιόρισμα, ὅταν μάλιστα ἔχῃ πολλοὺς ὅρους, οἷον τὸ

$$3\alpha^4-6\alpha^3\beta-7\alpha^2\beta^2+9\alpha\beta^3+12\beta^4 \text{ κτλ.}$$

36. Παρατηρητέον δὲ ὅτι, *ὅπως καὶ ἂν μετατεθῶσιν οἱ ὅροι πολυόρου ὁποιουδήποτε, ἂν μόνον διατηρηθῇ ἑκάστου τὸ σημεῖον* + *ἢ* —, *τὸ ὁποῖον ἔτυχε νὰ ἔχῃ, τὸ προσδιόρισμα τοῦ πολυόρου θέλει διαμείνει τὸ αὐτό.* Διότι οἱ πρότερον θετικοὶ ἢ ἀντιθετικοὶ ὅροι καὶ μετὰ τὴν μετάθεσιν αὐτῶν θέλουσι διαμείνει ὡς ἦσαν θετικοὶ ἢ ἀντιθετικοί· ἑπομένως τὸ κεφάλαιον καὶ τῶν θετικῶν ὅρων καὶ τῶν ἀντιθετικῶν θέλει διαμείνει τὸ αὐτὸ, ἔτι δὲ καὶ ἡ διαφορὰ τῶν δύο κεφαλαίων. Ἀλλὰ τὸ κεφάλαιον, ὅταν οἱ ὅροι ἦναι ὅλοι ὁμόσημοι, ἡ δὲ διαφορὰ, ὅταν ἦναι ἀντίσημοι, εἶναι προςδιόρισμα τοῦ πολυόρου· ἄρα τὸ προσδιόρισμα τοῦ πολυόρου θέλει διαμείνει τὸ αὐτό.

Ὥστε τῶν ἀκολούθων πολυόρων τὰ προσδιορίσματα εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, διότι ὅλα ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς ὅρους, πλὴν ὅτι εἶναι ἄλλως εἰς ἄλλο τεθειμένοι.

$$5\alpha^3\beta-4\alpha^2\beta^2+6\alpha\beta^3+3\beta^4$$
$$6\alpha\beta^3+5\alpha^3\beta+3\beta^4-4\alpha^2\beta^2$$
$$-4\alpha^2\beta^2+3\beta^4+5\alpha^3\beta+6\alpha\beta^3 \text{ κτλ.}$$

37. *Ἐὰν δὲ μεταβληθῶσι τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων πολυόρου εἰς τ' ἀντίθετά των, ἤτοι τὰ* + *εἰς* — *καὶ τὰ* — *εἰς* +, *τὸ προσδιόρισμα τοῦ νέου πολυόρου θέλει εἶσθαι τὸ αὐτὸ μὲν καὶ τὸ τοῦ πρώτου κατὰ τὸν ἀριθμὸν, ἀντίθετον δὲ κατὰ τὸ σημεῖον.* Π. χ. τὸ $4\alpha^3\beta^2-6\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4-3\beta^5$, ἂν μεταβληθῶσι τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων, τρέπεται εἰς τὸ $-4\alpha^3\beta^2+6\alpha^2\beta^3-5\alpha\beta^4+3\beta^5$, τούτου δὲ τὸ προσδιόρισμα εἶναι αὐτὸ τὸ τοῦ πρώτου, ἀλλ' ἀντίσημον. Διότι διὰ τῆς ἀλλαγῆς τῶν σημείων ὅλων τῶν ὅρων οὔτ' αὐξάνει οὔτ' ἐλαττοῦται τὸ κεφά-

λαιον τῶν θετικῶν καὶ τὸ τῶν ἀντιθετικῶν ὅρων· ἐπομένως οὐδ' ἡ διαφορά των. Ἀλλὰ διὰ τῆς ἀλλαγῆς τῶν σημείων ὅλων ἑκάτερον κεφάλαιον μεταβάλλεται εἰς τὸ ἀντίσημόν του· ἄρα, ὅταν ὅλοι οἱ ὅροι ἦναι ὁμόσημοι, δῆλον ὅτι τοῦ προςδιορίσματος μόνον τὸ σημεῖον ἀλλάσσει· ὅταν δὲ ἦναι ἀντίσημοι οἱ ὅροι, ἀφοῦ καὶ τῶν δύο κεφαλαίων ἀλλάσσουσι τὰ σημεῖα, τὸ μεγαλήτερον θέλει εἶσθαι ἀντίσημον, ἐπομένως καὶ ἡ διαφορά των, ἥτις ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ μεγαλητέρου κεφαλαίου· αὕτη δὲ εἶναι τὸ προσδιόρισμα τοῦ πολυόρου.

38. Ὀνομάζονται *ὅμοιοι* δύο ἢ πλειότεροι ὅροι, ἐὰν ἕκαςος ἔχῃ τὰ αὐτὰ γράμματα καὶ τὸ αὐτὸ γράμμα μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην, οἷον οἱ $+3a^2\beta^3$ καὶ $+7a^2\beta^3$, $-5a\beta^2\gamma^3$ καὶ $+9a\beta^2\gamma^3$ κτλ. Δυνατὸν δὲ οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ ἦναι ὁμόσημοι ἢ ἀντίσημοι, νὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν ἢ διάφορον συνεργόν.

Ἐὰν πολύορον ἔχῃ ὁμοίους ὅρους, ἀνθ' ὅλων αὐτῶν εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ εἷς μόνος ἰσοδύναμος, καὶ οὕτω νὰ ἐλαττωθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων του καὶ νὰ γείνῃ ἁπλούστερον αὐτὸ, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ προσδιόρισμά του. Π. χ. τοῦ πολυόρου

$$6a^3\beta-9\gamma^2-5a^3\beta+7\beta^2+8a^3\beta-4a^3\beta+2\gamma^3\delta,$$

ὅπερ ἔχει ὁμοίους ὅρους, ἐὰν μετατεθῶσιν οἱ ὅροι οὕτως

$$6a^3\beta+8a^3\beta-5a^3\beta-4a^3\beta-9\gamma^2+7\beta^2+2\gamma^3\delta,$$

ὥστε ὄχι μόνον νὰ ἦναι πρῶτοι ὅλοι οἱ ὅμοιοι ὅροι, ἀλλὰ νὰ ἦναι τούτων πρῶτον οἱ θετικοὶ καὶ ἔπειτα οἱ ἀντιθετικοί, νοουμένου τοῦ $a^3\beta$ ὡς μονάδος, καὶ ὅτι ὁ πρῶτος ἔχει 6 τοιαύτας μονάδας, ὁ δὲ δεύτερος 8, δῆλον ὅτι τὸ κεφάλαιον τῶν δύο θέλει εἶσθαι 14 τοιαῦται μονάδες, ἤτοι $14a^3\beta$· ὡσαύτως δὲ καὶ ὁ τρίτος καὶ ὁ τέταρτος ἰσοδυναμοῦσι μὲ τὸν $-9a^3\beta$· καὶ οὕτως οἱ τέσσαρες ὅμοιοι καταντῶσιν εἰς τοὺς δύο $14a^3\beta-9a^3\beta$. Ὡσαύτως δὲ, νοουμένου τοῦ $a^3\beta$ ὡς μονάδος, τὸ $14a^3\beta-9a^3\beta$ καταντᾷ εἰς $14-9$ ἤτοι εἰς $+5$ τοιαύτας μονάδας ἢ $+5a^3\beta$, ὅςτις παριστάνει ἁπλούστερα τὸν παριστανόμενον ἀριθμὸν ὑπὸ τοῦ $6a^3\beta+8a^3\beta-5a^3\beta-4a^3\beta$. Ἐπομένως τὸ ἑπτάορον καταντᾷ εἰς τὸ τετράορον

$$5a^3\beta-9\gamma^2+7\beta^2+2\gamma^3\delta,$$

οὗτινος τὸ προσδιόρισμα δῆλον ὅτι εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ τὸ τοῦ επταόρου.

Τὴν πρᾶξιν ταύτην, δἰ ἧς εὑρίσκεται εἷς ὅρος ἰσοδύναμος μὲ πολλοὺς ἄλλους ὁμοίους ὅρους, καλοῦμεν *συστολὴν ὁμοίων ὅρων*. Δῆλον δ' ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι *συνίσταται εἰς πρόςθεσιν τῶν συνεργῶν τῶν ὁμοίων ὅρων, ὅταν οὗτοι ἦναι ὁμόσημοι, εἰς ἀφαίρεσιν δ' αὐτῶν, ὅταν ἦναι οἱ ὅροι ἀντίσημοι, καὶ εἰς γραφὴν τῶν αὐτῶν γραμμάτων τῶν ὅρων δεξιὰ τοῦ προκύπτοντος κεφαλαίου ἢ διαφορᾶς*.

Ἡ πρᾶξις αὕτη δὲν πρέπει νὰ παραμελῆταί ποτε ἐν τοῖς ἑξῆς, ὅταν τύχῃ νὰ ἔχῃ ὁμοίους ὅρους πολύορόν τι.

$$2\beta-3\beta+4\beta=3\beta,\ 4a^2\beta-7a^2\beta-9a^2\beta+6a^2\beta=-6a^2\beta,$$
$$-8\beta^3+7a^3+3\beta^3-5\beta^3-a\beta^2+4\beta^3=-6\beta^3+7a^3-a\beta^2.$$

Περὶ προςθέσεως καὶ ἀντιπροςθέσεως τῶν πολυόρων.

39. Ἀποδεικνύεται ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ ὅτι, ὅταν μὲν πολύορον γράφηται κατόπιν ἄλλου ὅπως εἶναι, ἢ προςτίθεται τὸ προςδιόρισμά του εἰς τὸ τοῦ ἄλλου, ὅταν ἦναι ὁμόσημα, ἢ ἀφαιρεῖται, ὅταν ἦναι ἀντίσημα· ἑπομένως τοῦ προκύπτοντος τρίτου πολυόρου τὸ προςδιόρισμα εἶναι ἢ κεφάλαιον ἢ διαφορὰ τῶν προςδιορισμάτων τῶν δύο πολυόρων. Ὅταν δὲ γράφηται τὸ δεύτερον πολύορον κατόπιν τοῦ πρώτου, ἀφοῦ ἀλλαχθῶσι τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του (37), τότε συμβαίνει τὸ ἐναντίον, ἢ ἀφαιρεῖται τὸ προςδιόρισμα τοῦ ἑτέρου ἀπὸ τοῦ ἄλλου ἢ προςτίθεται, καὶ τοῦ προκύπτοντος τρίτου πολυόρου τὸ προςδιόρισμα εἶναι διαφορὰ ἢ κεφάλαιον τῶν προςδιορισμάτων τῶν δύο ἄλλων.

Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἕκαστος βλέπει ὅτι ἡ γραφὴ πολυόρου ὅπως εἶναι κατόπιν ἄλλου συμβιβάζεται μὲ τὴν γραφὴν ὅρου κατόπιν ἄλλου ὅρου, ἡ δὲ γραφὴ αὐτοῦ μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖα τῶν ὅρων του συμβιβάζεται μὲ τὴν γραφὴν τοῦ ὅρου κατόπιν ἄλλου μὲ τ' ἀντίθετον σημεῖόν του (24). Διὰ ταῦτα ἐν τοῖς ἑξῆς θέλομεν ὀνομάζει *πρόσθεσιν πολυόρου εἰς ἄλλο* τὸ γράφειν αὐτὸ ὅπως ἔχει κατόπιν τοῦ ἄλλου, *ἀντιπρόσθεσιν δὲ πολυόρου εἰς ἄλλο* τὸ γράφειν αὐτὸ κατόπιν τοῦ ἄλλου, ἀφοῦ ἀλλαχθῶσι τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του.

Ἐνίοτε δὲ, ὅταν θέλωμεν καὶ μετὰ τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀντιπρόσθεσιν νὰ διακρίνηται τὸ δεύτερον πολύορον τοῦ πρώτου, γράφομεν τὸ δεύτερον πολύορον ὅπως εἶναι ἐντὸς παρενθέσεων, καὶ οὕτως ἔχον τὸ προςθέτομεν κατόπιν τοῦ πρώτου προτάσσοντες τὸ + μὲν πρὸ τῆς πρώτης παρενθέσεως εἰς πρόςθεσιν, τὸ — δὲ εἰς ἀντιπρόσθεσιν. Τοῦτο δὲ καλεῖται *σημείωσις τῆς προσθέσεως* ἢ *τῆς ἀντιπροςθέσεως*. Ἐὰν δ' ἔπειτα θέλωμεν νὰ προςθέσωμεν ἢ ν' ἀντιπροσθέσωμεν, παραμελοῦμεν τὰς παρενθέσεις καὶ τὸ πρὸ τῆς πρώτης + ἢ —, καὶ γράφομεν τὸ πολύορον κατόπιν τοῦ ἄλλου ὅπως ἔχει ἢ μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖά του. Οὕτως ἔχομεν

$$3\alpha^2-4\alpha\beta+(2\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2)=3\alpha^2-4\alpha\beta+2\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2$$
$$3\alpha^2-4\alpha\beta-(2\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2)=3\alpha^2-4\alpha\beta-2\alpha^2+3\alpha\beta-\beta^2.$$

Μετὰ δὲ τὴν συστολὴν τῶν ὁμοίων ὅρων τὸ μὲν πρῶτον πεντάορον καταντᾷ εἰς τὸ τρίορον $5\alpha^2-7\alpha\beta+\beta^2$, τὸ δὲ δεύτερον εἰς τὸ $\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2$.

Πολύορα εἰς πρόςθεσιν ἢ εἰς ἀντιπρόςθεσιν.

$$\begin{array}{ll} 7\alpha+5\beta+3\gamma & 5\alpha+4\beta-3\gamma-7\delta+8 \\ 2\alpha-3\beta-7\gamma & 3\alpha-12\beta+7\gamma-10\delta-4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 3\chi-2\alpha+6 & 12\alpha-\beta+9\gamma-3\delta \\ 2\chi-7\alpha-3 & 7\alpha-5\beta+9\gamma-10\delta+12 \end{array}$$

$$12\beta-3\gamma-7\mu+3\nu,\quad -3\beta+8\gamma-2\mu-9\nu+5\pi.$$

$$-7\zeta+3\mu-8\chi,\quad -6\zeta-5\mu-2\chi+3\delta+8.$$

$$15\alpha-5\beta+10\gamma-9\delta,\quad 3\alpha+18\beta-5\gamma-7\delta+3\varepsilon,$$
$$-7\alpha-2\beta-3\delta+5\varepsilon-9\zeta,\quad 11\alpha-3\beta+2\gamma+8\delta+7\zeta.$$

$$5\alpha^3-3\alpha^2\beta-4\alpha\beta^2+8\beta^3,\quad 2\alpha^3-5\alpha^2\beta-6\alpha\beta^2+\beta^3.$$

Σημ. Ὅταν τὰ πολύορα ἔχωσιν ὁμοίους ὅρους, συνήθως γράφεται τὸ ἕτερον ὑπὸ τὸ ἄλλο ὅπως ἔχει ἢ μὲ τ' ἀντίθετα σημεῖά του, καὶ μετὰ τοῦτο συστέλ- ... ὅμοιοι ὅροι· διότι οὕτως ἡ συστολὴ γίνεται εὐκολώτερα.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ πολυγραμμάτων ὅρων καὶ πολυόρων.

40. Σημειοῦται ὁ πολλαπλασιασμὸς ὅρου ἐπὶ ἄλλον ὅρον, ἐπομένως καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν, ὡς εἴπομεν ἐν ἀριθ. 25, οἷον $3\alpha^2\beta\times5\alpha\beta'\gamma$ κτλ, τιθεμένου πάντοτε τοῦ $\times$ μεταξὺ τῶν ὅρων. Ἐνταῦθα διακρίνονται ἀπ' ἀλλήλων οἱ δύο ὅροι· ἀλλ' εἶναι δυνατὸν τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ παριστάνηται καὶ δἰ ἑνὸς ὅρου, ἐν ᾧ νὰ μὴ διακρίνωνται οἱ δύο παράγοντες, οὗτος δ' εὑρίσκεται κατὰ τοὺς ἑξῆς κανόνας·

Διάφοροι δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος πολλαπλασιάζονται ἐπ' ἀλλήλας, ἐὰν προστεθῶσιν οἱ δεῖκταί των καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν τεθῇ ἐπ' αὐτοῦ τοῦ γράμματος δείκτης. Τὸ γινόμενον τοῦ α^3 ἐπὶ α^2 εἶναι α^5· τὸ δὲ τοῦ β^4 ἐπὶ β^3 εἶναι β^7, κτλ.

Ὅρος δὲ πολυγράμματος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλον ὅρον, ἐὰν προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀρ. 20, ἔπειτα πολλαπλασιασθῶσιν οἱ συνεργοὶ ἐπ' ἀλλήλους, μετὰ ταῦτα πολλαπλασιασθῶσιν αἱ δυνάμεις τοῦ κοινοῦ εἰς τοὺς δύο ὅρους γράμματος ὡς ἤδη εἴπομεν, καὶ γραφθῶσι τὰ μὴ κοινὰ εἰς τοὺς δύο ὅρους γράμματα ὡς εἶναι εἰς ἑκάτερον αὐτῶν.

Κατὰ τοῦτον τὸν κανόνα τὸ γινόμενον τοῦ $-3\alpha^3\beta\gamma^2$ ἐπὶ $+5\alpha^2\beta^3\delta$ εἶναι $-15\alpha^5\beta^4\gamma^2\delta$.

Ὡσαύτως $4\alpha^2\beta^3\gamma^4\times-6\alpha^3\gamma^2\delta^3=-24\alpha^5\beta^3\gamma^6\delta^3$.

$-3\beta^2\gamma^3\times-2\alpha^3=+6\alpha^3\beta^2\gamma^3$, $-2\alpha^2\beta\times4\alpha^3\gamma^2\times-5\beta^2\delta=+40\alpha^5\beta^3\gamma^2\delta$.

Σημ. Συνήθως τὸν περὶ τῶν σημείων κανόνα ἐκφράζουσιν οὕτω $+$ ἐπὶ $++$, $-$ ἐπὶ $+-$, $+$ ἐπὶ $--$, $-$ ἐπὶ $-+$.

41. Σημειοῦται ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο πολυόρων, ἐπομένως καὶ τὸ γινόμενόν των, *ἐὰν γραφθῇ ἑκάτερον ἐντὸς παρενθέσεων τοιούτων ( ) ἢ τοιούτων [ ], καὶ τεθῇ τὸ δεύτερον κατόπιν τοῦ πρώτου,* οἷον

$$(\alpha+\beta)(\beta-\gamma) \text{ ἢ } [\alpha+\beta][\beta-\gamma].$$

Ἐνταῦθα διακρίνονται ἀπ' ἀλλήλων τὰ δύο πολύορα. Ἀλλὰ πολλαπλασιάζεται πολύορον ἐπὶ ἄλλο πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου, ἐν ᾧ νὰ μὴ διακρίνωνται τὰ δύο πολύορα, καὶ κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα.

Πολύορον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλο πολύορον, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὡς ἤδη εἴπομεν εἷς ἕκαστος ὅρος τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ ἕνα ἕκαστον ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ τὰ μερικὰ γινόμενα προστεθῶσιν ὡς ἀνωτέρω [39] εἴπομεν. Ἀρχίζομεν δὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐξ ἀριστερῶν. Ἰδοὺ δὲ παραδείγματα πολλαπλασιασμοῦ.

$$\begin{array}{r} \alpha+\beta \\ \alpha+\beta \\ \hline \alpha^2+\alpha\beta \quad\quad \\ +\alpha\beta+\beta^2 \\ \hline \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \alpha-\beta \\ \alpha-\beta \\ \hline \alpha^2-\alpha\beta \quad\quad \\ -\alpha\beta+\beta^2 \\ \hline \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \alpha+\beta \\ \alpha+\beta \\ \hline \alpha^2+\alpha\beta \quad\quad \\ -\alpha\beta-\beta^2 \\ \hline \alpha^2-\beta^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4\alpha^3-5\alpha^2\beta-8\alpha\beta^2 \\ 2\alpha^2-3\alpha\beta \\ \hline 8\alpha^5-10\alpha^4\beta-16\alpha^3\beta^2 \\ \quad -12\alpha^4\beta+15\alpha^3\beta^2+24\alpha^2\beta^3 \\ \hline 8\alpha^5-22\alpha^4\beta-\alpha^3\beta^2+24\alpha^2\beta^3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5\alpha^2\beta^3-4\alpha\beta^2\gamma \\ 2\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta\gamma \\ \hline 10\alpha^4\beta^5-8\alpha^3\beta^4\gamma \\ \quad\quad -20\alpha^3\beta^4\gamma+16\alpha^2\beta^3\gamma^2 \\ \hline 10\alpha^4\beta^5-28\alpha^3\beta^4\gamma+16\alpha^2\beta^3\gamma^2 \end{array}$$

Εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα πολλαπλασιάζεται ἀριθμὸς ἐφ' ἑαυτὸν, τὸ κεφάλαιον $\alpha+\beta$, ἤτοι τετραγωνίζεται τὸ $\alpha+\beta$· διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ εἶναι τετράγωνον τοῦ κεφαλαίου $\alpha+\beta$. *Τὸ τετράγωνον τοῦτο εἶναι τρίορον, ὁ πρῶτος ὅρος του εἶναι τετράγωνον τοῦ α, ὁ δεύτερος εἶναι διπλάσιον τοῦ γινομένου αβ, καὶ ὁ τρίτος τετράγωνον τοῦ β, ὅλοι δὲ οἱ ὅροι εἶναι θετικοί.* Ἐκ δὲ τούτου δῆλον ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ κεφαλαίου δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται εὐκολώτερα, *ἐὰν τετραγωνισθῇ ἑκάτερος τῶν δύο ἀριθμῶν, διπλασιασθῇ τὸ γινόμενόν των καὶ προστεθῶσιν οἱ τρεῖς εὑρεθέντες ἀριθμοί.* Ἀντὶ λοιπὸν νὰ τετραγωνίσωμεν τὸ $8+5$ ὡς ἀνωτέρω, τετραγωνίζομεν τὸν 8, τὸν 5, διπλασιάζομεν τὸ γινόμενον τοῦ 8 καὶ 5, καὶ προσθέτοντες τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς 64, 25 καὶ 80 ἔχομεν τετράγωνον τοῦ $8+5$ ἤτοι τοῦ 13 τὸν 169.

Εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα σχηματίζεται τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς $\alpha-\beta$, ὅπερ μόνον κατὰ τοῦτο διαφέρει τοῦ τετραγώνου τοῦ κεφαλαίου αὐτῶν ὅτι τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου τοῦ α καὶ β εἶναι ἀντιθετικόν.

Εἰς τὸ τρίτον πολλαπλασιάζεται τὸ κεφάλαιον $\alpha+\beta$ ἐπὶ τὴν διαφορὰν $\alpha-\beta$, καὶ βλέπει τις ὅτι *τὸ γινόμενον τοῦ κεφαλαίου δύο ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφοράν των εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων των.* Ἀντὶ λοιπὸν νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ κεφάλαιον τοῦ $8+5$ ἐπὶ τὴν διαφοράν των $8-5$ κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα, τετραγωνίζεται ὁ 8 καὶ ὁ 5, καὶ ἀφαιρουμένου τοῦ τετραγώνου 25 ἀπὸ τοῦ 64 εὑρίσκεται γινόμενον τοῦ $8+5$ ἐπὶ $8-5$ ὁ ἀριθμὸς 39.

Πολύορα εἰς πολλαπλασιασμόν.

$(6\alpha+2\beta-8\gamma)7\alpha$. $(-5\alpha^2+3\alpha\beta-8\beta)(-9\alpha\beta)$.
$(2\alpha-3\beta-8\gamma-\delta+9\varepsilon)(7\zeta+25-\theta)$. $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)$.
$(\alpha\beta+3\alpha\gamma-4\beta\gamma)(7\alpha\beta-18\alpha\gamma+2\beta\gamma+\delta)$.
$(7\alpha^3-5\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-2\beta^2)(3\alpha^4-4\alpha^3\beta+16\alpha^2\beta^2)$.

Περὶ διαιρέσεως πολυγραμμάτων ὅρων καὶ πολυόρων.

42. Σημειοῦται ἡ διαίρεσις καὶ πολυγραμμάτων ὅρων καὶ πολυόρων ὡς ἐν ἀρ. 26 εἴπομεν. Ἀλλ' εὑρίσκεται τὸ πηλίκον καὶ κατὰ τοὺς ἑξῆς κανόνας·

Διαιρεῖται δύναμίς τις γράμματός τινος δι' ἄλλης κατωτέρας δυνάμεως τοῦ αὐτοῦ γράμματος, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ δείκτου τοῦ διαιρετέου ὁ δείκτης τοῦ διαιρέτου, καὶ ἡ διαφορά των τεθῇ δείκτης ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ γράμματος. Τὸ πηλίκον τοῦ α^5 δι' α^3 εἶναι α^2· τὸ τοῦ β^3 διὰ β^2 εἶναι β.

Τὸ δὲ τοῦ α^3 δι' α^3 κατὰ τὸν αὐτὸν κανόνα εἶναι α^0, ὅπερ σημαίνει τὴν μονάδα· διότι ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ἴσοι. Οὕτω καὶ β^2 διὰ β^2 εἶναι $\beta^0=1$.

Πρὸς διαίρεσιν ὅρου πολυγραμμάτου δι' ἄλλου τοιούτου, *προσδιορίζεται πρῶτον τὸ σημεῖον κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀρ. 21, ἔπειτα διαιρεῖται ὁ συνεργὸς τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ συνεργοῦ τοῦ διαιρέτου καὶ τὸ πηλίκον τίθεται δεξιὰ τοῦ σημείου, ἔπειτα ὅποιον μὲν γράμμα εἶναι κοινὸν εἰς τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην γράφεται δεξιὰ τοῦ συνεργοῦ τοῦ* *πηλίκον μὲ δείκτην ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δεικτῶν τοῦ ἐν τῷ διαιρετέῳ καὶ τοῦ ἐν τῷ διαιρέτῃ, ὅσα δὲ εἶναι εἰς τὸν διαιρετέον μόνον γράφονται εἰς τὸ πηλίκον ὅπως εἶναι εἰς τὸν διαιρετέον.* Τοῦ $24\alpha^3\beta^3\gamma^2\delta$ διὰ τοῦ $-6\alpha^2\beta\gamma^2$ τὸ πηλίκον εἶναι ὁ $-4\alpha\beta^2\delta$. $-8\alpha^2\beta^3\gamma$ διὰ $-2\beta^2\gamma$ δίδει $+4\alpha^2\beta$.

Ἐὰν δὲ ἢ ὁ συνεργὸς τοῦ διαιρετέου δὲν ἦναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ συνεργοῦ τοῦ διαιρέτου, ἢ ὁ διαιρετέος ἔχῃ γράμμα τι μὲ δείκτην μικρότερον παρὰ τὸν δείκτην, ὃν ἔχει αὐτὸ εἰς τὸν διαιρέτην, ἢ ὁ διαιρέτης ἔχῃ γράμμα, ὅπερ δὲν εἶναι εἰς τὸν διαιρετέον, τότε ὁ διαιρετέος δὲν εἶναι διαιρέσιμος διὰ τοῦ διαιρέτου, διότι τὸ πηλίκον εἶναι κλασματικόν· οἷον τοῦ $3\alpha^2\beta\gamma^3$ διὰ $4\alpha^3\beta\gamma^2\delta$ τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{3\alpha^2\beta\gamma^3}{4\alpha^3\beta\gamma^2\delta}$ ἢ $\frac{3\alpha\alpha\beta\gamma\gamma\gamma}{4\alpha\alpha\alpha\beta\gamma\gamma\delta}$, ὅπερ γίνεται ἁπλούστερον, ἐὰν ἐξαλειφθῶσιν οἱ κοινοὶ τῶν δύο ὅρων παράγοντες $\alpha\alpha$, β, $\gamma\gamma$, ἤτοι καταντᾷ εἰς $\frac{3\gamma}{4\alpha\delta}$.

Σημ. Συνήθως τὸν περὶ τῶν σημείων κανόνα ἐκφράζουσιν οὕτω

$+$ διὰ $++$, $-$ διὰ $+-$, $+$ διὰ $--$, $-$ διὰ $-+$.

$$\frac{8\alpha^7}{4\alpha^2},\quad \frac{-48\delta^7\varepsilon^3\zeta^2}{6\delta^4\varepsilon^3},\quad \frac{35\alpha^6\chi}{-7\alpha^3\beta^2\chi^2},\quad \frac{-24\beta^3\gamma\chi^3}{-5\alpha^2\beta\chi^2}.$$

43. *Πολύορον δὲ διαιρεῖται διὰ ὅρου, ἐὰν διαιρεθῇ δι' αὐτοῦ ἕκαστος ὅρος τοῦ πολυόρου κατὰ τὸν προειρημένον κανόνα·* οἷον

$$8\alpha^4\beta-12\alpha^3\beta^2 \left|\frac{4\alpha^2\beta}{2\alpha^2-3\alpha\beta}\right. \qquad 42\alpha^2+14\alpha\beta-56\alpha\gamma \left|\frac{7\alpha}{6\alpha+2\beta-8\gamma}\right.$$

$$3\alpha^2\beta-6\alpha\beta^2+9\beta^3 \left|\frac{3\beta}{\quad},\right. \qquad 12\gamma^3\delta-6\gamma^2\delta^2-18\gamma\delta^3 \left|\frac{-6\gamma\delta}{\quad}.\right.$$

Ἐκ δὲ τούτων δῆλον ὅτι, *ὅταν πολυόρου ἕκαστος ὅρος ἦναι διαιρετὸς δι' ἄλλου ὅρου, ἢ ὅπερ ταὐτὸν, ὅταν ὅρος τις ἦναι κοινὸς παράγων ὅλων τῶν ὅρων πολυόρου, τὸ πολύορον αὐτὸ εἶναι γινόμενον δύο παραγόντων, τοῦ κοινοῦ παράγοντος ὅλων τῶν ὅρων καὶ τοῦ μένοντος πολυόρου μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τοῦ κοινοῦ παράγοντος, ἢ μετὰ τὴν διαίρεσιν ἑκάστου ὅρου διὰ τοῦ κοινοῦ παράγοντος.*

Τοῦ $\alpha^2-\alpha\beta$ ἔχουσιν οἱ ὅροι κοινὸν παράγοντα τὸ α· λοιπὸν τὸ $\alpha^2-\alpha\beta=(\alpha-\beta)\alpha$, ἢ ἂν ὁ κοινὸς παράγων ἐκληφθῇ ἀντιθετικός, $-\alpha(-\alpha+\beta)$.

Τὸ $\beta^2-\beta=\beta(\beta-1)$, $\alpha^2\beta-\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha-\beta)$ ἢ $-\alpha\beta(-\alpha+\beta)$.

Ὅταν δέ τις τῶν ὅρων δὲν ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ διαιρέτου, ἢ ὅλοι οἱ ὅροι δὲν ἦναι διαιρετοί, τὸ πηλίκον θέλει ἔχει καὶ ὅρους κλασματικούς, ἢ θέλει εἶσθαι ὅλον κλασματικόν.

Σημ. Περὶ τῶν ἄλλων περιπτώσεων τῆς διαιρέσεως καὶ περὶ τῆς θεωρίας ὅλων τῶν προηγουμένων κανόνων παραπέμπομεν εἰς τὴν Ἄλγεβραν, ὅπου ἐκθέτονται αὐτὰ ἐντελέστερα· διότι ὅσα ἤδη εἴπομεν ἀρκοῦσιν εἰς τὴν περαιτέρω σπουδὴν τοῦ βιβλίου τούτου.

Περὶ κλασματικῶν συμβολικῶν ἀριθμῶν.

44. Τοιοῦτόν τι, $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta}$ κτλ, ἢ νοεῖται ὅτι παριστάνει κλασματικὸν ἀριθμόν, ἤτοι ἀριθμὸν πολλοστῶν μονάδος τινός, τοῦ μὲν ἀριθμητοῦ σημαίνοντος τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων, τοῦ δὲ παρονομαστοῦ τὸ τί πολλοστὸν τῆς ἄλλης μονάδος εἶναι ἡ κλασματικὴ μονάς· ἢ νοεῖται παραστατικὸν τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, ἤτοι πολλοστοῦ τινος τοῦ ἀριθμητοῦ· ἢ τέλος νοεῖται ἰδίως παραστατικὸν τοῦ λόγου τοῦ ἀριθμητοῦ πρὸς τὸν παρονομαστήν.

Αἱ ἐπὶ τοιούτων δὲ συμβολικῶν, νοουμένων ὡς κλασματικῶν ἀριθμῶν, πράξεις ἐκτελοῦνται κατὰ τοὺς ἐν τῇ Πρ. καὶ Θεω. Ἀριθμητικῇ ἐκτεθέντας κανόνας περὶ κλασματικῶν, καὶ κατὰ τοὺς ἐν τῷ βιβλίῳ τούτῳ προεκτεθέντας. Ὥστε ὁ ἐνθυμούμενος τοὺς κανόνας ἐκείνους δὲν θέλει ἀπαντήσει οὐδεμίαν δυσκολίαν εἰς τὴν ἐφαρμογὴν αὐτῶν ἐπὶ τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος κλασματικῶν.

Ἡ τροπὴ ἀκεραίου ἢ μικτοῦ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν καὶ τἀνάπαλιν ἐκτελεῖται κατὰ τὰ ἐν τῇ Θ. Α. ἀρ. 116 καὶ 117. Ὥστε $\alpha=\frac{\alpha\gamma}{\gamma}$ ἢ $\frac{\alpha\gamma}{\gamma}=\alpha$, $\alpha\beta-\gamma=\frac{\alpha\beta\delta-\gamma\delta}{\delta}$ ἢ

$$\frac{\alpha\beta\delta-\gamma\delta}{\delta}=\alpha\beta-\gamma,\ \alpha+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\gamma+\beta}{\gamma}\ \text{ἢ}\ \frac{\alpha\gamma+\beta}{\gamma}=\alpha+\frac{\beta}{\gamma},$$

$$\alpha-\beta+\frac{\gamma^2}{\delta^3}=\frac{\alpha\delta^3-\beta\delta^3+\gamma^2}{\delta^3}\ \text{ἢ}\ \frac{\alpha\delta^3-\beta\delta^3+\gamma^2}{\delta^3}=\alpha-\beta+\frac{\gamma^2}{\delta^3}.$$

Ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων εἰς ἰσοδυνάμους ὁμωνύμους ἐκτελεῖται κατὰ τὰ ἐν τῇ Θ. Α. ἀριθ 120 καὶ 121. Ὥστε

α καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ τρέπονται εἰς $\frac{\alpha\gamma}{\gamma}$ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ εἰς $\frac{\alpha\delta}{\beta\delta}$ καὶ $\frac{\beta\gamma}{\beta\delta}$,

$\frac{\alpha}{\beta\gamma}$ καὶ $\frac{\delta}{\beta\varepsilon}$ εἰς $\frac{\alpha\varepsilon}{\beta\gamma\varepsilon}$ καὶ $\frac{\delta\gamma}{\beta\gamma\varepsilon}$, κτλ.

Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἐκτελεῖται κατὰ τὰ ἐν τῇ Θ. Α. ἀρ. 45—53. Ὥστε

$$\alpha+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\gamma+\beta}{\gamma},\ \alpha-\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\gamma-\beta}{\gamma},\ \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta},$$

$$\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta\delta},\ \frac{\varepsilon}{\zeta}-\frac{\eta}{\theta}+\frac{\varkappa}{\lambda}=\frac{\varepsilon\theta\lambda-\eta\zeta\lambda+\varkappa\zeta\theta}{\zeta\theta\lambda},\ \text{κτλ.}$$

Ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις ἐκτελεῖται κατὰ τὰ ἐν τῇ Θ. Α. ἀρ. 55, 62, 78, 79, 80, 82, 84, 89, 95, 96.

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\gamma=\gamma\times\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta},\quad \frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta},\quad \frac{\varepsilon}{\zeta}\times\frac{\zeta}{\theta}=\frac{\varepsilon}{\theta},$$

$$\left(\alpha+\frac{\beta}{\gamma}\right)\delta=\alpha\delta+\frac{\beta\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\gamma\delta+\beta\delta}{\gamma},\ \left(\alpha-\frac{\beta}{\gamma}\right)\frac{\delta}{\varepsilon}=\frac{\alpha\delta}{\varepsilon}-\frac{\beta\delta}{\gamma\varepsilon},$$

$$\left(\frac{\theta}{\varkappa}-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\alpha-\frac{\delta}{\varepsilon}\right)=\frac{\alpha\theta}{\varkappa}-\frac{\alpha.\lambda}{\mu}-\frac{\delta\theta}{\varepsilon\varkappa}+\frac{\delta\lambda}{\varepsilon\mu},\ \text{κτλ.}$$

Ἡ δὲ διαίρεσις μετὰ τὴν ἀναστροφὴν τῶν ὅρων τοῦ διαιρέτου καταντᾷ εἰς πολλαπλασιασμόν.

Παραδείγματα πρὸς ἄσκησιν.

$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=$ μὲ τί; $\quad \gamma-2\alpha\beta-\frac{\beta^2\gamma+\alpha^3}{\beta^2-\beta\gamma}=$ μὲ τί;

$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$ μὲ τί; (ἰδὲ αρ. 41).

$\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}}{\frac{\varepsilon}{\zeta}+\frac{\eta}{\theta}}=$ μὲ τί; $\quad \dfrac{\left(\gamma-\frac{\delta^2}{2\gamma}\right)\left(\gamma-\frac{\gamma^2+\delta^2}{\gamma+\delta}\right)}{1-\frac{\gamma}{\gamma+\delta}}=\gamma^2-\gamma\delta-\frac{\delta^2}{2}+\frac{\delta^3}{2\gamma}.$

Περὶ μεταβολῶν τινων τῶν μελῶν ἰσότητος.

45. Καλεῖται ἀξίωμα πᾶσα πρότασις αὐταπόδεικτος. Τὰ ἑξῆς τέσσαρα εἶναι ἀριθμητικὰ ἀξιώματα.

ά. *Ἐὰν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προςτεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, τὰ προκύπτοντα κεφάλαια θέλουσιν εἶσθαι ἴσα.*

β'. *Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἀριθμῶν ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, τὰ προκύπτοντα ὑπόλοιπα θέλουσιν εἶσθαι ἴσα.*

γ'. *Ἐὰν ἴσοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, τὰ προκύπτοντα γινόμενα θέλουσιν εἶσθαι ἴσα.*

δ'. *Ἐὰν ἴσοι ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὰ προκύπτοντα πηλίκα θέλουσιν εἶσθαι ἴσα.*

46. Ἐκ μὲν τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ἕπεται ὅτι *δυνάμεθα νὰ μεταθέτωμεν ὅρον τινὰ ἐκ τοῦ ἑτέρου μέλους ἰσότητος εἰς τὸ ἄλλο, ἐὰν μόνον ἀλλάξωμεν αὐτοῦ τὸ σημεῖον.* Διότι γράφοντες ὅρον τινὰ εἰς ἑκάτερον μέλος τῆς ἰσότητος μὲ τὸ ἀντίθετον σημεῖον ἐκείνου, ὅπερ ἔχει ἐν τῷ μέλει, ὅπου εἶναι, τουτέστι προςθέτοντες ἢ ἀφαιροῦντες αὐτὸν ἀπὸ τῶν δύο μελῶν, θέλομεν ἔχει δύο ἄλλα μέλη ἴσα. Ἀλλὰ μετὰ τοῦτο ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος ὅρος ἐν τῷ ἑτέρῳ μέλει εἶναι καὶ θετικὸς καὶ ἀντιθετικὸς καὶ διὰ τῆς συστολῆς ἀφανίζεται, ἐν δὲ τῷ ἄλλῳ μέλει κεῖται ἀντίσημος· ἄρα *δυνάμεθα* κτλ.

Π. χ. ἐκ τῆς $2\alpha - 3\beta = \gamma - 4\delta$ πορίζεται

ἡ $2\alpha - 3\beta + 4\delta = \gamma$, ἐὰν μετατεθῇ ὁ 4δ εἰς τὸ πρῶτον μέλος,

ἡ $2\alpha = \gamma - 4\delta + 3\beta$, ἐὰν μετατεθῇ ὁ 3β εἰς τὸ δεύτερον,

ἡ $2\alpha - \gamma - 3\beta = -4\delta$, κτλ, ἐὰν ὁ γ εἰς τὸ πρῶτον.

47. Ἐκ δὲ τοῦ τρίτου ἕπεται ὅτι *ἰσότητα μὲ ὅρους κλασματικοὺς δυνάμεθα νὰ τρέπωμεν εἰς ἄλλην μὲ ὅρους ἀκεραίους.*

Π. χ. τῆς $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} + \varepsilon$ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν $\beta\delta$, ἔχομεν

$$\frac{\alpha\beta\delta}{\beta} = \frac{\gamma\beta\delta}{\delta} + \beta\delta\varepsilon,$$

ἐξαλείφοντες δὲ τοὺς κοινοὺς ἀριθμοὺς β καὶ δ ἐκ τῶν δύο ὅρων ἔχομεν $\alpha\delta = \beta\gamma + \beta\delta\varepsilon$.

48. Ἐκ δὲ τοῦ τετάρτου ἕπεται ὅτι *δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ καθισταίνωμεν ἁπλουστέρους τοὺς ὅρους ἰσότητος, ὅταν ἦναι ὅλοι διαιρετοὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Π. χ. ἡ $9a^3-3ab=6a^2+9a$, ἧς ὅλοι οἱ ὅροι εἶναι διαιρετοὶ διὰ $3a$, μετὰ τὴν διαίρεσιν τρέπεται εἰς τὴν ἁπλουστέραν ταύτην $3a^2-b=2a+3$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

49. Ἐν τῷ κεφαλαίῳ τούτῳ θέλομεν ἐκθέσει ὅσα συμπληρόνουσι τὸ παράρτημα τοῦ δευτέρου κεφαλαίου τῆς Θ. Α, καὶ διὰ τοῦτο προτρέπομεν τοὺς μαθητὰς νὰ ἐπαναλάβωσι πρῶτον ἐκεῖνο καὶ τὰ ἀπὸ τοῦ 88 ἀριθμοῦ μέχρι τέλος τοῦ 6ου κεφαλαίου, ὥστε νὰ ἐνθυμῶνται τὰς ἐκεῖ ἐξηγηθείσας σημασίας διαφόρων λέξεων, καὶ τὰς διαφόρους προτάσεις.

Πρὸς δὲ τούτοις καλεῖται *θεώρημα* πᾶσα πρότασις ἀληθινὴ μέν, ὄχι δ' αὐταπόδεικτος ὡς τὸ ἀξίωμα (45), ἀλλ' ἔχουσα χρείαν ἀποδείξεως, ἤτοι λόγου ἄλλου, ὅςτις νὰ πείθῃ ὅτι εἶναι ἀληθινή. Ἐὰν δὲ ἡ πρότασις ἐκθέτῃ δεδομένων ἀριθμῶν ἰδιότητας, τὸ θεώρημα καλεῖται *ἀριθμητικὸν* (ἰδὲ Θ. Α. 92, 94, 105, 107, 108, 128, κτλ). Ἐὰν δὲ ἡ ἀλήθεια τοῦ θεωρήματος ἐξάγηται ἀμέσως καὶ συντόμως ἔκ τινος προηγουμένου, τότε λέγεται κυρίως *πόρισμα* ἡ πρότασις, ἀλλ' ὄχι θεώρημα (ἰδὲ κατωτέρω).

Περὶ ἰσοδυνάμων κλασματικῶν καὶ μή.

50. Εἶναι ἤδη γνωστὸν (Θ. Α. 90, 115) ὅτι ὁ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν δύο ὅρων κλασματικοῦ ἀριθμοῦ δι' ἀκεραίου προκύπτων κλασματικὸς εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν ἐξ οὗ προκύπτει. Τοῦτο δὲ συμβαίνει διότι ὁ ἀριθμὸς καὶ ἡ μονὰς λαμβάνουσιν ἀντίστροφον μεταβολήν, ἤτοι ὁ τοῦ

δευτέρου κλασματικοῦ ἀριθμὸς γίνεται τοιουτον πολλαπλάσιον ἢ πολλοστὸν τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ πρώτου, ὁποῖον πολλοστὸν ἢ πολλαπλάσιον τῆς τοῦ πρώτου κλασματικῆς μονάδος γίνεται ἡ τοῦ δευτέρου.

Ἀλλὰ *καὶ ἐπὶ τὸν αὐτὸν κλασματικὸν ἂν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι κλασματικοῦ ἀριθμοῦ ἢ ἂν διαιρεθῶσιν, ὁ προκύπτων οὕτω κλασματικὸς θέλει εἶσθαι ἰσοδύναμος μὲ τὸν ἐξ οὗ προκύπτει.* Διότι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἢ ἡ διαίρεσις τῶν δύο ὅρων ἐπὶ κλασματικὸν συνίσταται εἰς πολλαπλασιασμὸν τῶν δύο ὅρων ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον, τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλασματικοῦ ἢ τὸν παρονομαστὴν, καὶ εἰς διαίρεσιν τῶν προκυπτόντων ὅρων διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ, τοῦ παρονομαστοῦ ἢ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ κλασματικοῦ.

Π. χ. τοῦ $\frac{24}{36}$, ἵνα πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι ἐπὶ $\frac{3}{4}$, πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσιν αὐτοὶ ἐπὶ 3, τοῦ δὲ προκύπτοντος ἰσοδυνάμου $\frac{72}{108}$ νὰ διαιρεθῶσιν οἱ δύο ὅροι διὰ 4, καὶ οὕτω προκύπτει ὁ $\frac{18}{27}$ ἰσοδύναμος μὲ τὸν $\frac{24}{36}$. Ἵνα διαιρεθῶσι δὲ οἱ δύο ὅροι του διὰ $\frac{3}{4}$, πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ $\frac{4}{3}$.

Ὥστε, ἐπὶ ὁποιονδήποτε τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσιν οἱ δύο ὅροι κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, ὁ προκύπτων θέλει εἶσθαι ἰσοδύναμος μὲ τὸν ἐξ οὗ προκύπτει.

Ἔτι δὲ δῆλον ὅτι *μόνον* οὕτως εὑρίσκεται κλασματικὸς ἰσοδύναμος. Διότι, ἂν πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ ἐπὶ ἄλλον ἀριθμὸν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ἐπὶ ἄλλον ὁ παρονομαστὴς, ὁ προκύπτων δὲν θέλει εἶσθαι ἰσοδύναμος μὲ τὸν ἐξ οὗ προκύπτει, ἀλλὰ μεγαλήτερος ἢ μικρότερος αὐτοῦ.

51. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι, *ἐὰν προστεθῇ ἢ ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτὸς ἀκέραιος ἀριθμὸς εἰς τοὺς δύο ὅρους κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, ὁ προκύπτων οὕτω κλασματικὸς θέλει εἶσθαι ὄχι ἰσοδύναμος μὲ τὸν πρῶτον, ἀλλὰ μεγαλήτερος ἢ μικρότερος αὐτοῦ.* Διότι ἡ πρόσθεσις ἢ ἡ ἀφαίρεσις τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἰς τοὺς δύο ὅρους κλασματικοῦ δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ ὡς πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἄλλον μὲν κλασματικὸν ἀριθμὸν τοῦ ἀριθμητοῦ, ἐπὶ ἄλλον δὲ κλασματικὸν τοῦ παρονομαστοῦ· τοῦτο δὲ φέρει εἰς κλασματικὸν ἄνισον μὲ τὸν

πρῶτον. Π. χ. ἡ πρόσθεσις ἢ ἡ ἀφαίρεσις τοῦ 1, 2, 3, 4 κτλ εἰς τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{5}{7}$, ὥστε νὰ προκύψωσιν οἱ $\frac{6}{8}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{9}{11}$ κτλ, ἢ οἱ $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{3}$, ἄλλο δὲν εἶναι εἰμὴ πολλαπλασιασμὸς τοῦ μὲν ἀριθμητοῦ 5 ἐπὶ $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{8}{5}$ κτλ, ἢ ἐπὶ $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$, τοῦ δὲ παρονομαστοῦ 7 ἐπὶ $\frac{8}{7}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{10}{7}$ κτλ, ἢ ἐπὶ $\frac{6}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{7}$ κτλ, οἵτινες δὲν εἶναι οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί, οὐδὲ ἰσοδύναμοι μὲ τοὺς $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$ κτλ· λοιπὸν οἱ προκύπτοντες $\frac{6}{8}$, $\frac{7}{9}$ κτλ, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἦναι ἰσοδύναμοι μὲ τὸν $\frac{5}{7}$.

Θέλει εἶσθαι δὲ μεγαλήτερος ὁ προκύπτων, ἐὰν ὁ πρῶτος ἦναι κλάσμα καὶ προςτίθηται εἰς τοὺς ὅρους του ὁ αὐτὸς ἀκέραιος ἀριθμός, ἢ ἂν ἦναι μεγαλήτερος τῆς μονάδος καὶ ἀφαιρῆται ἀπὸ τῶν δύο ὅρων του ὁ αὐτὸς ἀκέραιος ἀριθμός. Θέλει εἶσθαι δὲ μικρότερος ὁ προκύπτων κατὰ τὰς ἐναντίας περιπτώσεις, ἤτοι ἂν ἦναι μεγαλήτερος τῆς μονάδος ὁ πρῶτος καὶ προςτίθηται ὁ αὐτὸς ἀκέραιος ἀριθμός, ἢ ἂν ἦναι κλάσμα καὶ ἀφαιρῆται ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἀπὸ τῶν δύο του ὅρων.

Ταῦτα δὲ γίνονται δῆλα καὶ ἄλλως μέν, ἀλλὰ καὶ οὕτως. Ἀφοῦ εἰς τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλασματικοῦ $\frac{a}{b}$ προστεθῇ ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς r, ἢ ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτός, τρέπεται τῶν προκυπτόντων $\frac{a+r}{b+r}$ καὶ $\frac{a-r}{b-r}$ ἑκάτερος καὶ ὁ $\frac{a}{b}$ εἰς ὁμωνύμους καὶ ἔχομεν

$$\frac{a}{b}=\frac{ab+ar}{b^2+br},\quad \frac{a+r}{b+r}=\frac{ab+br}{b^2+br}.$$

$$\frac{a}{b}=\frac{ab-ar}{b^2-br},\quad \frac{a-r}{b-r}=\frac{ab-br}{b^2-br}$$

Οἱ δὲ ὁμώνυμοι ἔχουσι τὸν ἕνα ὅρον τῶν ἀριθμητῶν των τὸν αὐτὸν ab, τοῦ δὲ ἄλλου ὁ ἕτερος παράγων r εἶναι ὁ αὐτός· ὥςε δῆλον ὅτι ἡ ἀνισότης των ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς ἀνισότητος τῶν a καὶ b. Ἂν λοιπὸν $b>a$ καὶ προςτίθηται ὁ r, ὁ $\frac{a+r}{b+r}$ εἶναι μεγαλήτερος τοῦ $\frac{a}{b}$. ἂν δὲ $b<a$, τότε ὁ $\frac{a+r}{b+r}$ εἶναι

μικρότερος τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$. Ὁ δὲ $\frac{\alpha-\nu}{\beta-\nu}$ κατὰ τὰς αὐτὰς περιπτώσεις εἶναι μικρότερος ἢ μεγαλήτερος τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$. διότι ὁ ὅρος $\alpha\nu$ καὶ $\beta\nu$ μέλλει ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ $\alpha\beta$, καὶ ὅταν ἀφαιρῆται μεγαλήτερος, ἡ διαφορὰ εἶναι μικροτέρα, καὶ *τἀνάπαλιν*. *Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

52. *Ἀλλὰ καὶ ἀνίσους ἀριθμοὺς ἂν προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν εἰς τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλασματικοῦ, ἀλλ' ὄχι τοιούτους, ὥστε νὰ καταντᾷ εἰς πολλαπλασιασμὸν ἢ διαίρεσιν τῶν δύο ὅρων διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἡ πρόςθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις, ὁ προκύπτων κλασματικὸς δὲν θέλει εἶσθαι ἰσοδύναμος μὲ τὸν πρῶτον.* Οἷον ἐὰν προςθέσωμεν 3 εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ $\frac{9}{13}$ καὶ 2 ἢ 4 ἢ 5 εἰς τὸν παρονομαστὴν, οἱ προκύπτοντες $\frac{12}{15}$, $\frac{12}{17}$, $\frac{12}{18}$ εἶναι οἱ αὐτοὶ, οἵτινες προκύπτουσι καὶ ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ μὲν ἀριθμητὴς 9 ἐπὶ $\frac{12}{9}$, ὁ δὲ παρονομαστὴς 13 ἐπὶ $\frac{15}{13}$, $\frac{17}{13}$, $\frac{18}{13}$, ὧν οὐδεὶς εἶναι ὁ αὐτὸς ἢ ἰσοδύναμος μὲ τὸν $\frac{12}{9}$. διὰ τοῦτο οὐδεὶς τῶν $\frac{12}{15}$, $\frac{12}{17}$, $\frac{12}{18}$ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν $\frac{9}{13}$.

53. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἁπάντων λοιπὸν δῆλον ὅτι *κλασματικὸς ἰσοδύναμος μὲ ἄλλον κλασματικὸν εὑρίσκεται μόνον διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διὰ διαιρέσεως τῶν δύο ὅρων τοῦ δευτέρου διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Πορίσματα. ά. Ἐὰν δύο κλασματικοὶ ἦναι ἰσοδύναμοι, οἱ ὅροι τοῦ ἑτέρου οἱ μεγαλήτεροι ἀνάγκη νὰ ἦναι ἢ ταυτοπλάσιοι τῶν ὅρων τοῦ ἄλλου, ἢ ταυτοπλάσιοι τῶν αὐτῶν πολλοστῶν αὐτῶν. Διότι μόνον διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δύο ὅρων ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἶναι δυνατὸν νὰ προκύψῃ κλασματικὸς ἰσοδύναμος μὲ ἄλλον, ὁ δὲ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιασμὸς παράγει οἵους εἴπομεν τοὺς ὅρους τοῦ ἑτέρου. Λέγω μόνον διὰ πολλαπλασιασμοῦ, διότι ἡ διαίρεσις διὰ κλάσματος, ἥτις ἤθελε δώσει ὅρους μεγαλητέρους, καταντᾷ εἰς πολλαπλασιασμὸν μετὰ τὴν ἀναστροφὴν τῶν ὅρων.

β'. Κλασματικὸς μὲ ἀσυνδιαιρέτους ὅρους ἀδύνατον νὰ ἦναι ἰσοδύναμος μὲ ἄλλον κλασματικὸν, ὅστις νὰ ἔχῃ ὅρους *μικροτέρους*. Διότι ἰσοδύναμος μὲ μικροτέρους ὅρους *μόνον* διὰ διαιρέσεως τῶν δύο ὅρων δἰ ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ, οἱ δὲ ἀσυνδιαίρετοι ὅροι δὲν εἶναι διαιρετοὶ δἰ οὐδενὸς ἀριθμοῦ.

Σημ. Ὁ κλασματικὸς, ὅστις παριστάνει ποσόν τι διὰ τῶν ἐλαχίστων ὅρων δἰ ὧν εἶναι δυνατὸν αὐτὸ νὰ παριστάνηται, καλεῖται *ἀνάγωγος*. Εἶναι δὲ ἤδη φανερὸν ὅτι ὁ ἔχων τοὺς ὅρους του ἀσυνδιαιρέτους εἶναι ἀνάγωγος κλασματικός· καὶ ἀντιστρόφως, ὁ ἀνάγωγος ἔχει τοὺς ὅρους του ἀσυνδιαιρέτους.

γ'. *Ἀδύνατον δύο κλασματικοὶ μὲ διαφόρους ἀσυνδιαιρέτους ὅρους ἑκάτερος νὰ ἦναι ἰσοδύναμοι*. Διότι ἀδύνατον νὰ προκύπτωσιν οἱ ὅροι τοῦ ἑτέρου ἐκ τῶν ὅρων τοῦ ἄλλου διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διαιρέσεως αὐτῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἰσοδύναμος δὲ κλασματικὸς μόνον κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον εὑρίσκεται ἐξ ἄλλου. +

Διάφοροι προτάσεις περὶ τοῦ διαιρετοῦ τῶν ἀριθμῶν καὶ μή.

+ 54. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ πρωτοτύπου ἀριθμοῦ ἕπεται ὅτι

ά. *Οὐδεὶς πρωτότυπος ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δἰ ἄλλου ἀριθμοῦ ἀκεραίου*. Διότι πᾶς πρωτότυπος ἀριθμὸς ἄλλον διαιρέτην παρ' ἑαυτὸν καὶ τὴν μονάδα του δὲν ἔχει.

β'. *Πᾶς πρωτότυπος ἀριθμὸς, ὅστις νὰ μὴ ἦναι διαιρέτης ἄλλου ἀριθμοῦ, εἶναι ἀσυνδιαίρετος μὲ αὐτόν*. Διότι μὴ ἔχοντος τοῦ πρωτοτύπου ἄλλον διαιρέτην παρ' ἑαυτὸν καὶ τὴν μονάδα, οἱ δύο ἀριθμοὶ ἀδύνατον νὰ ἔχωσιν ἄλλους κοινοὺς διαιρέτας εἰμὴ τὸν πρωτότυπον καὶ τὴν μονάδα. Ἀλλ' ὁ πρωτότυπος μὴ ὢν διαιρέτης τοῦ ἄλλου δὲν εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο· ἄρα μόνον κοινὸν διαιρέτην αὐτοὶ ἔχουσι τὴν μονάδα· ἄρα εἶναι ἀσυνδιαίρετοι· ἄρα πᾶς κτλ.

Ἐκ δὲ τούτων ἕπεται γ'. ὅτι *δύο ἢ πλειότεροι πρωτότυποι ἀριθμοὶ εἶναι ἀσυνδιαίρετοι*. Διότι οὐδεὶς αὐτῶν εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἄλλων, ἑπομένως μόνον κοινὸν διαιρέτην ὅλοι ἔχουσι τὴν μονάδα· ἄρα εἶναι ἀσυνδιαίρετοι.

55. *Θεώρημα. Τὸ γινόμενον διαφόρων δυνάμεων δύο ἢ πλειοτέρων πρωτοτύπων ἀριθμῶν δὲν εἶναι διαιρετὸν δἰ ἄλλου πρωτοτύπου ἀριθμοῦ διαφόρου τῶν παραγόντων του.*

ά. Ἔστω ὁ ἀριθμὸς Γ γινόμενον δύο πρωτοτύπων ἀριθμῶν α καὶ β, ἤτοι $\Gamma = \alpha\beta$· λέγω ὅτι ὁ Γ δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ πρωτοτύπου δ, διαφόρου ὄντος τοῦ α καὶ τοῦ β. Διότι ἂν ὑποτεθῇ διαιρετὸς, καὶ ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιαιρέσεως αὐτοῦ διὰ δ εἶναι π, ἀνάγκη νὰ ἔχωμεν $\Gamma = \delta\pi$· ἀλλ᾽ ἔχομεν καὶ $\Gamma = \alpha\beta$· ἄρα $\delta\pi = \alpha\beta$· ἄρα (Θ. Α. 128) $\delta : \alpha :: \beta : \pi$, ἢ ὅπερ ταὐτὸν, $\frac{\delta}{\alpha} = \frac{\beta}{\pi}$. Ἀλλ᾽ ὁ $\frac{\beta}{\pi}$ ἀδύνατον νὰ ἦναι ἴσος μὲ τὸν $\frac{\delta}{\alpha}$ διότι οἱ ὅροι τοῦ $\frac{\delta}{\alpha}$ εἶναι ἀσυνδιαίρετοι ὡς πρωτότυποι (54, γ'), ὁ δὲ β διάφορος ὢν τοῦ δ δὲν εἶναι διαιρετὸς δἰ αὐτοῦ ὡς πρωτότυπος (54 ά)· ἐνῷ, ἂν ἦσαν ἴσοι, ἔπρεπεν ὁ β νὰ ἦναι διαιρετὸς διὰ δ (53). Ἄρα *ἀδύνατον ὁ Γ νὰ ἦναι διαιρετὸς δἰ ἄλλου πρωτοτύπου δ διαφόρου τῶν πρωτοτύπων παραγόντων του α καὶ β.*

β'. Ἂν δὲ ὁ $\Gamma = \alpha\beta\gamma$, ὑποτεθῇ δὲ διαιρετὸς διὰ δ ὡς ἀνωτέρω, καὶ ὅτι τὸ ἀκέραιον πηλίκον ἦναι π, ἀνάγκη νὰ ἔχωμεν $\delta\pi = \alpha\beta\gamma$, ἢ $\delta\pi = \alpha\beta \times \gamma$· ἐπομένως $\delta : \gamma :: \alpha\beta : \pi$, ἢ $\frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\pi}$, ὅπερ ἀδύνατον· διότι οἱ ὅροι τοῦ $\frac{\delta}{\gamma}$ εἶναι ἀσυνδιαίρετοι ὡς πρωτότυποι, ὁ δὲ $\alpha\beta$ δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ δ ὡς ἤδη ἀπεδείχθη. Ἄρ᾽ *ἀδύνατον ὁ Γ νὰ ἦναι διαιρετὸς δἰ ἄλλου πρωτοτύπου δ διαφόρου τῶν πρωτοτύπων παραγόντων του α, β καὶ γ.*

γ'. Ἐκ δὲ τούτων δῆλον ὅτι, *ὁσωνδήποτε καὶ ὁποιωνδήποτε πρωτοτύπων παραγόντων γινόμενον ἂν ἦναι ἀριθμός τις Γ, ἀδύνατον νὰ ἦναι διαιρετὸς διὰ πρωτοτύπου ἀριθμοῦ διαφόρου ἑκάστου τῶν παραγόντων του.*

δ'. Ἐκ δὲ τούτου ἕπεται καὶ ὅτι, ἂν ὁ Γ ἦναι γινόμενον πολλῶν ἴσων πρωτοτύπων παραγόντων, ἤτοι δύναμίς τις πρωτοτύπου τινὸς ἀριθμοῦ, καὶ ὁ τοιοῦτος ἀδύνατον νὰ ἦναι διαιρετὸς δἰ ἄλλου πρωτοτύπου παράγοντος. Ἐκφράζεται δὲ οὕτω, *οὐδεμία δύναμις πρωτοτύπου τινὸς ἀριθμοῦ εἶναι διαιρετὴ δι' ἄλλου πρωτοτύπου ἀριθμοῦ.*

έ. Τελευταῖον, ἂν ὁ Γ ἦναι γινόμενον διαφόρων δυνάμεων δύο ἢ πλειοτέρων πρωτοτύπων ἀριθμῶν, οἷον $Γ = α^3 β^2 γ^4$, ἀποδεικνύεται ὡς ἀνωτέρω ὅτι ἀδύνατον νὰ ἦναι διαιρετὸς ὁ Γ δι' ἄλλου πρωτοτύπου ἀριθμοῦ παρὰ τὸν $α$, $β$, $γ$. . . Ο. Ε. Δ.

Πορίσματα. ά. Ὁ πρωτότυπος ὁ διάφορος τῶν πρωτοτύπων παραγόντων γινομένου τινὸς εἶναι ἀσυνδιαίρετος μὲ τὸ γινόμενον αὐτό. Διότι δὲν εἶναι διαιρέτης αὐτοῦ, ὁ δὲ πρωτότυπος ὁ μὴ διαιρέτης αὐτοῦ εἶναι ἀσυνδιαίρετος μὲ αὐτὸν (54, β').

β'. *Πᾶς πρωτότυπος ἀριθμὸς εἶναι διαιρέτης μόνον ἑαυτοῦ καὶ τῶν πολλαπλασίων του,* ἤτοι τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἔχουσιν αὐτὸν παράγοντα. Διότι εἶναι γνωςὸν ἤδη ὅτι αὐτὸς εἶναι διαιρέτης τῶν πολλαπλασίων του· τώρα δὲ εἴδομεν ὅτι ἄλλων ἀριθμῶν, οἵτινες δὲν ἔχουσιν αὐτὸν παράγοντα, δὲν εἶναι διαιρέτης· ἄρα μόνον ἑαυτοῦ καὶ τῶν πολλαπλασίων του εἶναι διαιρέτης πᾶς πρωτότυπος.

56. *Θεώρημα. Πᾶς ἀριθμὸς, ὅςτις εἶναι γινόμενον δυνάμεων πρωτοτύπων τινῶν ἀριθμῶν, ἀδύνατον νὰ ἦναι καὶ γινόμενον δυνάμεων ἄλλων πρωτοτύπων ἀριθμῶν, ὅλων ἢ τινῶν μόνον.*

ά. Ἔστω ὁ ἀριθμὸς $Α = αβγδ$· λέγω ὅτι ἀδύνατον νὰ ἦναι ὁ $Α = κλμν$, τῶν $κ, λ, μ, ν$ ὄντων πρωτοτύπων διαφόρων τῶν $α, β, γ, δ$. Διότι ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν $α, β, γ, δ$, ὅςτις εἶναι διαιρέτης τοῦ Α, ἔπρεπε νὰ ἦναι διαιρέτης καὶ τοῦ $κλμν$. Ἀλλ' οὐδεὶς αὐτῶν εἶναι διαιρέτης τοῦ $κλμν$, διότι εἶναι ἕκαστος αὐτῶν διάφορος τῶν $κ, λ, μ, ν$ (ἀριθ 55)· ἄρα, ἐνόσῳ οἱ $κ, λ, μ, ν$ εἶναι διάφοροι τῶν $α, β, γ, δ$ ἀδύνατον ὁ Α, ὅςτις εἶναι ἴσος μὲ τὸ $αβγδ$, νὰ ἦναι ἴσος καὶ μὲ τὸ $κλμν$.

β'. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι ὁ Α, ὅςτις εἶναι ἴσος μὲ $αβγδ$, εἶναι ἴσος καὶ μὲ $αβκλ$, τοῦ $κ$ καὶ $λ$ μόνον ὄντος διαφόρου τοῦ $γ$ καὶ $δ$, ἀποδεικνύεται ὡς ἀνωτέρω ὅτι καὶ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον· διότι, ἐνῷ ὁ Α εἶναι διαιρετὸς διὰ $γ$ καὶ $δ$, ὁ $αβκλ$ δὲν εἶναι, ὡς τοῦ $γ$ καὶ τοῦ $δ$ ὄντος διαφόρου τοῦ $α, β, κ, λ$· ἄρα ὁ Α δὲν εἶναι ἴσος μὲ τὸ $αβκλ$.

γ'. Ὡσαύτως ἀποδεικνύεται καὶ ὅτι, ἂν ὁ Α ἦναι ἴσος μὲ $\alpha^4\beta^1\gamma^2\delta$, ἀδύνατον νὰ ἦναι ἴσος καὶ μὲ τὸ γινόμενον δυνάμεων ἄλλων πρωτοτύπων· διότι πάντοτε τὸ γινόμενον αὐτὸ δὲν εἶναι διαιρετὸν δὶ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, ἐνῷ, ἂν αὐτὸ παράγῃ τὸν Α, ἔπρεπε νὰ ἦναι διαιρετὸν δὶ α,β κτλ.

Ἄρα παράγωγος ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον πάντοτε μόνον τῶν αὐτῶν δυνάμεων τῶν αὐτῶν πρωτοτύπων ἀριθμῶν.

Πορίσματα. ά. Ἐκ τούτου ἕπεται ά. *Ἂν ὁ ἀριθμὸς* $A=\alpha^4\beta^3\gamma^2$, *τῶν* α,β *καὶ* γ *ὄντων πρωτοτύπων, μόνοι διαιρέται τοῦ A εἶναι οἱ μόνοι διαιρέται τοῦ* $\alpha^4\beta^3\gamma^2$, *οἵτινες εἶναι* (42) *ἑκάστη δύναμις ἑκάστου πρωτοτύπου παράγοντος μέχρι καὶ τῆς ἀνωτάτης αὐτοῦ*, δηλ. οἱ $\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\alpha^4$, β,β^2,β^3, γ,γ^2, *καὶ ἕκαστον γινόμενον αὐτῶν ἀνὰ δύο ἢ τρεῖς πολλαπλασιασθέντων*, οἷον $\alpha\beta$, $\alpha\beta^2$, $\alpha\beta^3$, $\alpha\gamma$, $\alpha\gamma^2$, $\beta\gamma$, $\beta\gamma^2$ κτλ, ἢ $\alpha\beta\gamma$ $\alpha^2\beta\gamma$, $\alpha^2\beta^2\gamma$, $\alpha^3\beta\gamma^2$ κτλ. Διότι μόνον τούτων τῶν δυνάμεων τούτων τῶν πρωτοτύπων ἀριθμῶν εἶναι γινόμενον, ἤτοι μόνον $A=\alpha^4\beta^3\gamma^2$, τοῦ δὲ $\alpha^4\beta^3\gamma^2$ μόνον αὐτοὶ εἶναι διαιρέται.

β'. *Ἂν ἀριθμός τις A ἦναι γινόμενον πολλῶν ἄλλων παραγώγων ἀριθμῶν B, Γ, Δ κτλ, ὁ A ἔχει πρωτοτύπους παράγοντας μόνον τοὺς πρωτοτύπους παράγοντας τῶν παραγόντων του B, Γ, Δ κτλ.* Διότι, ἂν ὁ $B=\alpha^2\beta\gamma$, ὁ $\Gamma=\alpha\delta^2\varepsilon$, ὁ $\Delta=\beta^2\varepsilon\zeta^3\eta$, κτλ, ἐπειδὴ ὁ Β, ὁ Γ, ὁ Δ κτλ μόνον τούτων τῶν πρωτοτύπων παραγόντων εἶναι γινόμενον, ὁ Α ὁ ἴσος μὲ τὸ γινόμενον ΒΓΔ. . . . θέλει εἶσθαι γινόμενον μόνον τούτων ἤτοι $A=\alpha^2\beta\gamma\times\alpha\delta^2\varepsilon\times\beta^2\varepsilon\zeta^3\eta\times\ldots=\alpha^3\beta^3\gamma\delta^2\varepsilon^2\zeta^3\eta\ldots$ (40), τουτέστιν ὁ Α ἔχει πρωτοτύπους παράγοντας ἢ διαιρέτας μόνον τοὺς τῶν παραγόντων του Β, Γ κτλ πρωτοτύπους παράγοντας ἢ διαιρέτας.

γ'. *Πᾶς πρωτότυπος διαιρέτης* δ *τοῦ γινομένου A πολλῶν ἄλλων ἀριθμῶν B, Γ, Δ κτλ, εἶναι ἀναγκαίως διαιρέτης καὶ ἑνὸς τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων του.* Διότι ὡς ἤδη εἴδομεν ὁ Α πρωτοτύπους διαιρέτας ἔχει μόνον τοὺς τῶν παραγόντων του πρωτοτύπους διαιρέτας· ὥστε ὁ δ, ὅστις εἶναι διαιρέτης τοῦ Α, ἀνάγκη νὰ ἦναι διαιρέτης ἑνὸς τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων του, εἰδεμὴ δὲν ἤθελεν εἶσθαι διαιρέτης οὐδὲ τοῦ Α·

Ἰδίως δὲ, *ὁ πρωτότυπος διαιρέτης ὁποιασδήποτε δυνάμεως ἀριθμοῦ τινος εἶναι διαιρέτης καὶ αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ*· διότι ἡ δύναμις εἶναι γινόμενον πολλῶν ἴσων ἀριθμῶν μὲ αὐτὸν, κτλ.

δ'. *Ὁ ἀσυνδιαίρετος ἀριθμὸς δ μὲ ἕκαστον τῶν παραγόντων Β, Γ, Δ κτ.λ γινομένου τινὸς Α εἶναι ἀσυνδιαίρετος καὶ μὲ τὸ γινόμενόν των.* Διότι τὸ γινόμενον Α ἄλλους πρωτοτύπους παράγοντας παρὰ τοὺς τῶν παραγόντων του Β, Γ, Δ κτλ δὲν ἔχει, ὁ δὲ ἀσυνδιαίρετος δ, εἴτε πρωτότυπος εἶναι εἴτε γινόμενον πρωτοτύπων, ἔχει πρωτοτύπους παράγοντας διαφόρους τῶν πρωτοτύπων τῶν τοῦ γινομένου παραγόντων Β, Γ, Δ κτλ, ὡς ἀσυνδιαίρετος μὲ ἕκαστον αὐτῶν· ἄρα ὁ ἀσυνδιαίρετος μὲ ἕκαστον τῶν παραγόντων δὲν ἔχει κανένα πρωτότυπον παράγοντα κοινὸν μὲ τὸ γινόμενον Α, ἐπομένως οὐδὲ παράγωγον· ἄρα εἶναι ἀσυνδιαίρετος καὶ μὲ τὸ γινόμενον Α.

έ. *Ὅταν ἕκαστος τῶν παραγόντων γινομένου τινὸς αβγδε ἦναι ἀσυνδιαίρετος μὲ ἕκαστον τῶν παραγόντων ἄλλου γινομένου ΑΒΓΔ, τὰ δύο γινόμενα εἶναι ἀσυνδιαίρετα.* Διότι ἕκαστος τῶν παραγόντων τοῦ δευτέρου γινομένου ΑΒΓΔ, ὢν ἀσυνδιαίρετος μὲ ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου *αβγδε*, εἶναι ἀσυνδιαίρετος καὶ μὲ τὸ πρῶτον γινόμενον, ἢ ἀντιστρόφως, τὸ πρῶτον γινόμενον *αβγδε* εἶναι ἀσυνδιαίρετον μὲ ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ δευτέρου γινομένου ΑΒΓΔ· ἄρα τὸ πρῶτον γινόμενον εἶναι ἀσυνδιαίρετον μὲ τὸ δεύτερον, ἀφοῦ εἶναι ἀσυνδιαίρετον μὲ ἕκαστον τῶν παραγόντων του.

Ἰδίως δὲ, *αἱ δυνάμεις δύο ἀσυνδιαιρέτων ἀριθμῶν εἶναι καὶ αὐταὶ ἀσυνδιαίρετοι*· οἷον ἂν α καὶ β ἦναι ἀσυνδιαίρετοι, ἀσυνδιαίρετοι εἶναι καὶ αἱ δυνάμεις α^{ν} καὶ β^{π}.

57. *Θεώρημα. Πᾶς διαιρέτης τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν, ὅςτις εἶναι ἀσυνδιαίρετος μὲ τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων του, εἶναι ἀναγκαίως διαιρέτης τοῦ ἄλλου παράγοντος.*

Ἔστω Α$=$ΒΓ, ὁ δὲ δ διαιρέτης τοῦ Α, ἀσυνδιαίρετος δὲ μὲ τὸν Β· λέγω ὅτι ὁ δ εἶναι ἀναγκαίως διαιρέτης τοῦ Γ. Διότι ὁ Α ὢν διαιρετὸς διὰ δ εἶναι γινόμενον τοῦ $\delta\pi$, π παριστάνοντος τὸ πηλίκον τοῦ Α διὰ δ· ἐπομένως ΒΓ$=\delta\pi$, καὶ ὁ δ, ὅςτις εἶναι ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει, ἀνάγκη νὰ εὑρίσκηται καὶ ἐν τῷ πρώτῳ, διότι οἱ πρωτότυποι παράγοντες τοῦ δ εἶναι ἐκ τῶν πρωτοτύπων παραγόντων τοῦ Β καὶ τοῦ Γ (ἀρ 56 Πορ. 6'.). Ἀλλ' ὁ Β καὶ ὁ δ εἶναι ἀσυνδιαίρετοι· ἀνάγκη λοιπὸν ὁ δ νὰ ἦναι διαιρέτης τοῦ Γ. Ἄρα *πᾶς διαιρέτης τοῦ γινομένου* κτλ.

Ἂν δὲ ὁ δ δὲν ἦναι ἀσυνδιαίρετος μὲ τὸν ἕτερον παράγοντα, τότε εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ δ, καίτοι διαιρέτης τοῦ γινομένου Α, δυνατὸν νὰ μὴ ἦναι διαιρέτης μηδετέρου τῶν παραγόντων αὐτοῦ· διότι δυνατὸν τῶν πρωτοτύπων παραγόντων τοῦ δ ὁ μὲν νὰ ἦναι παράγων τοῦ Β, ὁ δὲ τοῦ Γ, καὶ ὄχι ὅλοι παράγοντες τοῦ Γ μόνον, ὅπερ συμβαίνει ὅταν ὁ δ καὶ ὁ Β ἦναι ἀσυνδιαίρετοι.

Εἶναι δὲ φανερὸν καὶ τὸ γενικώτερον τοῦτο, *ὅτι πᾶς διαιρέτης τοῦ γινομένου πολλῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτης καὶ ἑνός τινος τῶν παραγόντων του, ἂν ἦναι ἀσυνδιαίρετος μὲ ἕκαστον τῶν ἄλλων.*

Πόρισμα. Ἀριθμὸς Α διαιρετὸς διὰ δύο ἢ πλειοτέρων ἄλλων ἀσυνδιαιρέτων δ, δ', δ'' *κτλ εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.* Διότι ὡς διαιρετὸς ὁ Α διὰ δ εἶναι γινόμενον τοῦ δ καὶ τοῦ ἀκεραίου πηλίκου π, ἤτοι $A=\delta\pi$, ὁ δὲ δ' διαιρέτης ὢν τοῦ Α καὶ ἀσυνδιαίρετος μὲ τὸν δ εἶναι διαιρέτης τοῦ πηλίκου π, ἤτοι ὁ $\pi=\delta'\pi'$, π' παριστάνοντος τὸ ἀκέραιον πηλίκον τοῦ π διὰ δ'· ὥστε ὁ $A=\delta\pi=\delta\delta'\pi'$, καὶ ἐπομένως *ὁ Α εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ γινομένου* $\delta\delta'$. Ὡσαύτως ὁ δ'' διαιρέτης ὢν τοῦ Α καὶ ἀσυνδιαίρετος μὲ τὸν δ καὶ δ', εἶναι διαιρέτης τοῦ π', ἤτοι $\pi'=\delta''\pi''$· ὥστε ὁ $A=\delta\delta'\delta''\pi''$, καὶ ἐπομένως *ὁ Α εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ γινομένου* $\delta\delta'\delta''$. κτλ.

58. *Πρόβλημα. Εὑρεῖν ὅλους τοὺς πρωτοτύπους ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ 2 μέχρι ὁρίου τινός*, οἷον τοῦ 10000.

Πρῶτον παρατηρητέον ὅτι οὐδεὶς ἄρτιος ἀριθμὸς εἶναι πρωτότυπος ἐκτὸς τοῦ 2, διότι ὅλοι εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 2. Ἐκ δὲ τῶν περιττῶν οἱ μὲν εἶναι πρωτότυποι, οἱ δὲ εἶναι πολλαπλάσιοι πρωτοτύπων· ὥστε, ἂν παραλειφθῶσιν οἱ πολλαπλάσιοι, οἱ μένοντες θέλουσιν εἶσθαι πρωτότυποι. Ἔπειτα παρατηρητέον ὅτι τῶν πολλαπλασίων τοῦ 3 οἱ μὲν εἶναι ἄρτιοι ἀριθμοί, οἱ ἀρτιοπλάσιοι τοῦ 3, δηλ. ὁ διπλάσιος, ὁ τετραπλάσιος κτλ, οἱ δὲ εἶναι περιττοὶ ἀριθμοί, οἱ περιττοπλάσιοι, δηλ. ὁ τριπλάσιος, ὁ πενταπλάσιος κτλ· καὶ ὅτι ἀπὸ τοῦ 4 μέχρι καὶ τοῦ τριπλασίου τοῦ 3 ἤτοι τοῦ 9 εἶναι ἓξ ἀριθμοί, καὶ ἀπὸ τοῦ 10 μέχρι καὶ τοῦ πενταπλασίου τοῦ 3 ἤτοι τοῦ 15 εἶναι πάλιν ἕξ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· τούτων δὲ τῶν ἓξ οἱ μὲν τρεῖς εἶναι ἄρτιοι, οἱ δὲ ἄλλοι τρεῖς εἶναι περιττοί. Ἐὰν λοιπὸν γραφθῶσι κατὰ σειρὰν μόνον οἱ περιττοὶ ἀριθμοὶ μέχρι τοῦ 9999, τότε δῆλον ὅτι ἀπὸ τοῦ 5 μέχρι καὶ τοῦ 9 εἶναι τρεῖς ἀριθμοί, καὶ ἀπὸ τοῦ 11 μέχρι καὶ τοῦ 15 ἄλλοι τρεῖς, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὁ δὲ τρίτος εἶναι πολλαπλάσιος τοῦ 3. Ὥστε, ἄντις ἀριθμῇ ἀπὸ τοῦ 5 μέχρι τοῦ 9999 ἀνὰ τρεῖς τοὺς περιττοὺς ἀριθμοὺς καὶ διαγράφῃ τὸν τρίτον, οὕτω θέλει ἔχει σημειωμένους ὅλους τοὺς περιττοὺς ἀριθμούς, ὅσοι εἶναι πολλαπλάσιοι τοῦ 3.

Παρομοία παρατήρησις πείθει ὅτι, ἂν ἀριθμῇ τις ἀπὸ τοῦ 7 μέχρι τοῦ 9999 ἀνὰ πέντε τοὺς αὐτοὺς περιττοὺς ἀριθμοὺς ὅλους καὶ διαγράφῃ τὸν πέμπτον, θέλει ἔχει σημειωμένους ὅλους τοὺς περιττοὺς ἀριθμούς, ὅσοι εἶναι πολλαπλάσιοι τοῦ 5.

Ὡσαύτως πείθεταί τις ὅτι, ἂν ἀριθμῇ ἀπὸ τοῦ 9 μέχρι τοῦ 9999 ὅλους τοὺς περιττοὺς ἀριθμοὺς ἀνὰ ἑπτὰ καὶ διαγράφῃ τὸν ἕβδομον, οὕτω θέλει ἔχει σημειωμένους καὶ ὅλους τοὺς πολλαπλασίους τοῦ 7· καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Οἱ δὲ μετὰ ταύτας τὰς πράξεις μένοντες μὴ διαγεγραμμένοι ἀριθμοί, ὡς μὴ πολλαπλάσιοι οὐδενὸς ἀριθμοῦ, εἶναι ὅλοι οἱ πρωτότυποι οἱ μικρότεροι τοῦ 10000.

Σημ. ά. Ἐκτελεῖται συντομώτερα ἡ προειρημένη πρᾶξις, ἐὰν ἀρχίζωμεν ἀπὸ τοῦ νὰ διαγράφωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ 5, τοῦ 7, τοῦ 11 κτλ, καὶ ἔπειτ' ἀριθμῶμεν ἀπὸ τοῦ ἀκολούθου τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ ἀνὰ πέντε, ἀνὰ ἑπτὰ κτλ. Διότι οἱ πολλαπλάσιοι ἑκάστου τούτων οἱ μικρότεροι τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ θέλουσιν εἶσθαι ἤδη διαγεγραμμένοι, ὡς πολλαπλάσιοι καὶ τῶν μικροτέρων ἑκάστου ἀριθμῶν. Π. χ. ὁ τριπλάσιος τοῦ 7 ὡς ἑπταπλάσιος τοῦ 3 εἶναι διαγεγραμμένος· ὡσαύτως καὶ ὁ πενταπλάσιος τοῦ 7, ὅστις εἶναι καὶ ἑπταπλάσιος τοῦ 5· ὥστε πρῶτον πολλαπλάσιον τοῦ 7 διαγραπτέον εἶναι τὸ ἑπταπλάσιόν του ἤτοι τὸ τετράγωνόν του. Οὕτως εὑρέθησαν οἱ ἐν τῷ τέλει τοῦ βιβλίου τούτου μικρότεροι τοῦ 1000 πρωτότυποι ἀριθμοί.

Σημ. 6'. Ἡ μέθοδος αὕτη τοῦ προσδιορίζειν τοὺς πρωτοτύπους ἀριθμούς, ἧς ἡ ἐφεύρεσις ἀποδίδεται εἰς τὸν ἐν Ἀλεξανδρείᾳ ἀκμάσαντα περὶ τὸ 250 ἔτος π. Χ. Κυρηναῖον Ἐρατοσθένην, ὀνομάζεται κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους.

Διότι φαίνεται ὅτι αὐτὸς ἀντὶ νὰ διαγράφῃ ἐτρύπα τοὺς ἀριθμοὺς, καὶ οὕτω πρὸς σημείωσιν τῶν πολλαπλασίων καὶ εὕρεσιν ἑπομένως τῶν πρωτοτύπων ἀπετέλεσε κόσκινον.

Σημ. γ'. Ὁ Λέγενδρος (ἐν τῷ περὶ θεωρίας τῶν ἀριθμῶν) μνημονεύει ἰδίως τοὺς πίνακας τοῦ Σχερνάκου, ἐν οἷς ἐμπεριέχονται ὅλοι οἱ μικρότεροι τοῦ 1000000 πρωτότυποι ἀριθμοὶ, καὶ τοὺς τοῦ Βυρχάρδου, ἐν οἷς εἶναι οἱ μικρότεροι τοῦ 3036000.

59. Ὀνομάζομεν *ἀναγωγὴν ἀριθμοῦ εἰς τοὺς πρωτοτύπους παράγοντάς του* τὴν πρᾶξιν, δι' ἧς εὑρίσκομεν τίνων δυνάμεων τίνων πρωτοτύπων ἀριθμῶν γινόμενον εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός· κατὰ ταύτην δὲ τὴν σημασίαν ἐκλαμβάνομεν καὶ τὸ *ἀνάγω*, ἐναντίαν οὖσαν τοῦ *παράγω*.

Ἡ ἀναγωγὴ συνίσταται εἰς τὸ νὰ διαιρῆται ὁ ἀριθμὸς διὰ τοῦ μικροτάτου πρωτοτύπου διαιρέτου αὐτοῦ, δηλ τοῦ 2, ἂν ἦναι ἄρτιος, ἢ τοῦ 3 κτλ (ἰδὲ Θ. Α. 108), ἔπειτα τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ αὐτοῦ πρωτοτύπου, ἂν ἦναι διαιρετὸν, καὶ τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ αὐτοῦ, ἂν ἦναι διαιρετὸν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ἐὰν δὲ δὲν ἦναι διαιρετὸν δι' αὐτοῦ, νὰ διαιρῆται τὸ πηλίκον δι' ἄλλου πρωτοτύπου διαιρέτου μὲν αὐτοῦ, μικροτάτου δὲ ὅλων τῶν ἄλλων πρωτοτύπων, καὶ πάλιν τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ αὐτοῦ, ἂν ἦναι διαιρετόν· ἐὰν δὲ μὴ, δι' ἄλλου πρωτοτύπου διαιρέτου μὲν αὐτοῦ, μικροτάτου δὲ ὅλων τῶν ἄλλων πρωτοτύπων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι οὕτως ἐξακολουθοῦντες, ἐπειδὴ τὰ πηλίκα βαθμηδὸν σμικρύνονται, θέλομεν καταντήσει τέλος εἰς ἓν πρωτότυπον πηλίκον, ὅπερ διαιρεθὲν δι' ἑαυτοῦ θέλει δώσει πηλίκον τὴν μονάδα καὶ αὐτοῦ τελειόνει ἡ πρᾶξις. Τὸ δὲ γινόμενον ὅλων τῶν εὑρεθέντων κατὰ σειρὰν διαιρετῶν εἶναι ὁ ἀριθμὸς ἀνηγμένος εἰς τοὺς πρωτοτύπους παράγοντάς του. Ἐν τῇ πράξει ὁ ἀριθμὸς καὶ τὰ προκύπτοντα κατὰ σειρὰν πηλίκα γράφονται ἀριστερὰ καθέτου εὐθείας, ὁ δὲ πρωτόπυπος διαιρέτης ἑκάστου δεξιὰ τῆς αὐτῆς γραμμῆς καὶ αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ, ὡς ἐδῶ φαίνεται.

$$\begin{array}{r|l} 2520 & 2 \\ 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Ἐκ τῆς πράξεως ταύτης δῆλον ὅτι ὁ 2520 εἶναι κατὰ σειρὰν

$$2520=2\times1260=2.2\times630=2.2.2\times315=$$
$$2.2.2.3\times105=2.2.2.3.3\times35=$$
$$2.2.2.3.3.5.7$$

ὥστε $2520=2^3.3^2.5.7.$

Ὡσαύτως εὑρίσκεται ὅτι $1008=2^4.3^2.7$, ὁ $5880=2^3.3.5.7^2$, ὁ $1665=3^2.5.37$, ὁ $30527=7^3.89$.

Εἶναι δὲ ἤδη γνωστὸν (ἀρ. 56 Θεώρ.) ὅτι ὁ 2520 μόνον αὐτῶν τῶν δυνάμεων αὐτῶν τῶν πρωτοτύπων ἀριθμῶν εἶναι γινόμενον· ὡσαύτως δὲ καὶ οἱ ἄλλοι.

Σημ. α΄. Τίνες ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2, 3, καὶ 5 ἐξηγήθη (Θεω. Ἀρ. 108)· ἂν δέ τις ἀριθμὸς ἦναι διαιρετὸς διὰ 7, 11 (ἰδὲ κατωτέρω), 13, 17 κτλ, ἢ ὄχι, τὸ μανθάνει τις διαιρῶν αὐτὸν δι' ἑκάστου τούτων. Εἶναι δὲ ὠφέλιμον πρῶτον νὰ βλέπῃ ἐν τῷ πίνακι τῶν πρωτοτύπων μήπως ἦναι πρωτότυπος ὁ ἀριθμὸς, διότι τότε τελειόνει ἐκεῖ ἡ πρᾶξις.

Σημ. β΄. Ὅταν, δοκιμάσαντες ὅλους τοὺς πρωτοτύπους ἀριθμοὺς τοὺς μικροτέρους τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ τινος ἂν ἦναι διαιρέται αὐτοῦ, δὲν εὕρωμεν κἀνένα τούτων διαιρέτην αὐτοῦ, τοῦτο εἶναι σημεῖον ὅτι ὁ ἀριθμὸς εἶναι πρωτότυπος καὶ εἶναι περιττὸν νὰ δοκιμάζωμεν ἄλλους μεγαλητέρους. Διότι, ἂν ὑπῆρχέ τις διαιρέτης μεγαλήτερος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἔπρεπε νὰ ἦναι μικρότερον αὐτῆς, τὸ δὲ πηλίκον τοῦτο εἶναι πάντοτε καὶ διαιρέτης· ἤτοι ἂν ὑπῆρχέ τις διαιρέτης μεγαλήτερος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ, ἔπρεπε νὰ ὑπάρχῃ καὶ μικρότερος αὐτῆς διαιρέτης. Ὅταν λοιπὸν μικρότερος δὲν εὑρίσκηται οὐδεὶς, εἶναι βέβαιον ὅτι οὐδὲ μεγαλήτερος εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ. Ἄρα ὁ ἀριθμὸς, ὅστις δὲν ἔχει διαιρέτην μικρότερον τῆς τετραγωνικῆς του ῥίζης, εἶναι πρωτότυπος.

60. *Πρόβλημα. Εὑρεῖν πάντας τοὺς διαιρέτας παραγώγου ἀριθμοῦ.*

Ἐξηγήθη μὲν τρόπος τις τοὺς εὑρίσκειν πάντας τοὺς διαιρέτας ἀριθμοῦ ἐν τῇ Θεω. Ἀρ. (106), ἀλλ' εἶναι πολὺ συντομώτερος ὁ ἑξῆς. Πρῶτον ἀνάγεται ὁ ἀριθμὸς εἰς τοὺς πρωτοτύπους παράγοντάς του, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι $A=\alpha^4\beta^3\gamma^2$. Μετὰ δὲ τοῦτο ἄλλο δὲν μένει εἰμὴ νὰ κατασκευάσωμεν τοὺς διαιρέτας τοῦ Α διὰ πολλαπλασιασμοῦ καθὰ εἴδομεν ἐν τῷ ἀ. πορίσματι τοῦ ἀριθ. 56. Ἵνα δὲ μὴ εὑρεθῇ ὁ αὐτὸς διαιρέτης δὶς καὶ τρὶς μηδὲ παραλειφθῇ τις αὐτῶν, πράττομεν οὕτως.

Γράφομεν κατὰ σειρὰν τὰς διαφόρους δυνάμεις μέχρι καὶ τῆς ἀνωτάτης τοῦ παράγοντος, ὅστις ἔχει τὸν μεγαλήτερον δείκτην, ἤτοι τοῦ α, προτάσσοντες τὴν μονάδα, οὕτω

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4.$$

ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν ἕνα ἕκαστον αὐτῶν ἐπὶ ἑκάστην τῶν δυνάμεων ἄλλου παράγοντος, ἤτοι ἐπὶ β, β^2, β^3

$$\beta,\ \alpha\beta,\ \alpha^2\beta,\ \alpha^3\beta,\ \alpha^4\beta,$$
$$\beta^2,\ \alpha\beta^2,\ \alpha^2\beta^2,\ \alpha^3\beta^2,\ \alpha^4\beta^2,$$
$$\beta^3,\ \alpha\beta^3,\ \alpha^2\beta^3,\ \alpha^3\beta^3,\ \alpha^4\beta^3\cdot$$

μετέπειτα πολλαπλασιάζομεν ἕνα ἕκαστον ὅλων τῶν προηγουμένων ἀριθμῶν ἐπὶ ἑκάστην τῶν δυνάμεων τοῦ ἄλλου παράγοντος, ἤτοι ἐπὶ γ, γ^2,

$$\gamma,\ \alpha\gamma,\ \alpha^2\gamma,\ \alpha^3\gamma,\ \alpha^4\gamma,$$
$$\beta\gamma,\ \alpha\beta\gamma,\ \alpha^2\beta\gamma,\ \alpha^3\beta\gamma,\ \alpha^4\beta\gamma,$$
$$\beta^2\gamma,\ \alpha\beta^2\gamma,\ \alpha^2\beta^2\gamma,\ \alpha^3\beta^2\gamma,\ \alpha^4\beta^2\gamma,$$
$$\beta^3\gamma,\ \alpha\beta^3\gamma,\ \alpha^2\beta^3\gamma,\ \alpha^3\beta^3\gamma,\ \alpha^4\beta^3\gamma,$$
$$\gamma^2,\ \alpha\gamma^2,\ \alpha^2\gamma^2,\ \alpha^3\gamma^2,\ \alpha^4\gamma^2,$$
$$\beta\gamma^2,\ \alpha\beta\gamma^2,\ \alpha^2\beta\gamma^2,\ \alpha^3\beta\gamma^2,\ \alpha^4\beta\gamma^2,$$
$$\beta^2\gamma^2,\ \alpha\beta^2\gamma^2,\ \alpha^2\beta^2\gamma^2,\ \alpha^3\beta^2\gamma^2,\ \alpha^4\beta^2\gamma^2,$$
$$\beta^3\gamma^2,\ \alpha\beta^3\gamma^2,\ \alpha^2\beta^3\gamma^2,\ \alpha^3\beta^3\gamma^2,\ \alpha^4\beta^3\gamma^2\cdot$$

καὶ οὕτως ἐφεξῆς ἂν ἦσαν καὶ ἄλλοι πρωτότυποι παράγοντες.

Οὕτως εὑρίσκεται ὅτι ὅλοι οἱ διαιρέται τοῦ 2520 εἶναι 1, 2, 4, 8 — 3, 6, 12, 24· 9, 18, 36, 72 — 5, 10, 20, 40· 15, 30, 60, 120· 45, 90, 180, 360 — 7, 14, 28, 56· 21, 42, 84, 168· 63, 126, 252, 504· 35, 70, 140, 280· 105, 210, 420, 840· 315, 630, 1260, 2520.

61. *Θεώρημα. Ὅλοι οἱ διαιρέται ἀριθμοῦ τινος εἶναι τόσοι, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τῶν κατὰ μονάδα μεγαλητέρων τῶν δεικτῶν τῶν πρωτοτύπων παραγόντων του.* Π. χ. ἂν $A = \alpha^4\beta^3\gamma^2\delta$, ὅλοι οἱ διαιρέται αὐτοῦ εἶναι 5.4.3.2 ἤτοι 120. Διότι ἐκ τοῦ προηγουμένου τρόπου τοῦ εὑρίσκειν ὅλους τοὺς διαιρέτας βλέπει τις ὅτι ὁ μὲν πρῶτος παράγων 5 παριστάνει τοὺς 1, α, α^2, α^3, α^4, ἐκ δὲ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἑκάστου τούτων ἐπὶ β, β^2, β^3 παράγονται τρὶς 5 διαιρέται, καὶ 5 οἱ πρῶτοι γίνονται ὅλοι τετράκις 5 ἤτοι 5.4. Ἔπειτα ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἑκάστου τούτων ἐπὶ γ, γ^2 παράγονται δὶς 5.4 διαιρέται, καὶ 5.4 οἱ πρῶτοι γίνονται ὅλοι τρὶς 5.4, ἤτοι 5.4.3. Πάλιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἑκάστου τούτων ἐπὶ δ παράγονται 5.4.3 διαιρέται, καὶ 5.4.3 οἱ πρῶτοι γίνονται ὅλοι δὶς 5.4.3, ἤτοι 5.4.3.2. Οὕτω καὶ περὶ παντὸς ἄλλου ἀριθμοῦ· ἄρα ὅλοι οἱ διαιρέται κτλ.

Κατὰ τοῦτο οἱ τοῦ 2520 διαιρέται πρέπει νὰ ἦναι 48, οἱ τοῦ 1008 πρέπει νὰ ἦναι 30, οἱ τοῦ 5880 πρέπει νὰ ἦναι 48, κτλ.

62. Εἴδομεν (Θ. Α. 107) ὅτι πᾶς κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ κεφαλαίου αὐτῶν καὶ τῆς διαφορᾶς των· ἐδῶ προσθέτομεν καὶ τὰ ἑξῆς.

Θεώρημα. Ἐὰν ἀριθμός τις A ἦναι κεφάλαιον ἢ διαφορὰ δύο ἄλλων B καὶ Γ, τέταρτος δέ τις ἀριθμὸς Δ ἦναι μὲν διαιρέτης τοῦ B, ὄχι δὲ καὶ τοῦ Γ, ὁ Δ δὲν θέλει εἶσθαι διαιρέτης οὐδὲ τοῦ A· τὸ δὲ κατάλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ A διὰ Δ θέλει εἶσθαι τὸ κατάλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Γ διὰ Δ, ἂν $A=B+\Gamma$, θέλει εἶσθαι δὲ ἡ διαφορὰ τοῦ καταλοίπου τοῦ Γ διὰ Δ ἀπὸ τοῦ Δ, ἂν $A=B-\Gamma$.

Διότι, ἂν τὸ πηλίκον τοῦ Β διὰ Δ σημειωθῇ διὰ Π, τὸ δὲ πηλίκον καὶ τὸ κατάλοιπον τοῦ Γ διὰ Δ σημειωθῇ διὰ Π′ καὶ διὰ Κ, ἔχομεν $\mathrm{B}=\Pi\Delta$ καὶ $\Gamma=\Pi'\Delta+\mathrm{K}$· ἂν δὲ ἀντὶ Β καὶ Γ μεταχειρισθῶμεν τὰ ἴσα των, θέλομεν ἔχει ἀντὶ μὲν

$\mathrm{A}=\mathrm{B}+\Gamma$ τὴν ἰσότητα $\mathrm{A}=\Pi\Delta+\Pi'\Delta+\mathrm{K}$,

ἀντὶ δὲ $\mathrm{A}=\mathrm{B}-\Gamma$ ταύτην $\mathrm{A}=\Pi\Delta-\Pi'\Delta-\mathrm{K}$(39).

Οἱ δύο πρῶτοι ὅροι ἑκατέρου δευτέρου μέλους ἔχουσι κοινὸν παράγοντα τὸν Δ καὶ διὰ τοῦτο δυνατὸν (43) νὰ γραφθῶσι καὶ οὕτω $(\Pi+\Pi')\Delta$ καὶ $(\Pi-\Pi')\Delta$· ἐὰν δὲ τὸ κεφάλαιον $\Pi+\Pi'$ σημειωθῇ διὰ Μ, ἡ δὲ διαφορὰ $\Pi-\Pi'$ διὰ Ν, τότε $(\Pi+\Pi')\Delta=\mathrm{M}\Delta$, καὶ $(\Pi-\Pi')\Delta=\mathrm{N}\Delta$, αἱ δὲ ἀνωτέρω ἰσότητες καταντῶσιν εἰς

$\mathrm{A}=\mathrm{M}\Delta+\mathrm{K}$, $\mathrm{A}=\mathrm{N}\Delta-\mathrm{K}$.

Εἰς δὲ τὸ δεύτερον μέλος τῆς δευτέρας ἐὰν γραφθῇ ὁ Δ ἀντιθετικὸς καὶ θετικὸς, δὲν ἀλλάσσει τὸ ποσόν του· ὥστε θέλομεν ἔχει $\mathrm{N}\Delta-\mathrm{K}=\mathrm{N}\Delta-\Delta+\Delta-\mathrm{K}$. Ἀντὶ δὲ τῶν δύο πρώτων ὅρων, οἵτινες ἔχουσι κοινὸν παράγοντα τὸν Δ, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸ ἰσοδύναμόν των $(\mathrm{N}-\mathrm{I})\Delta$, ἢ σημειόνοντες διὰ Ξ τὴν διαφορὰν $\mathrm{N}-\mathrm{I}$, τὸ ΞΔ· ὥστε $\mathrm{N}\Delta-\mathrm{K}=\Xi\Delta+\Delta-\mathrm{K}$. Τελευταῖον ἡ διαφορὰ τῶν δύο τελευταίων ὅρων $+\Delta-\mathrm{K}$, ἥτις εἶναι θετικὴ, διότι ὁ διαιρέτης Δ εἶναι μεγαλήτερος τοῦ κατα-

λοίπου Κ, δύναται νὰ σημειωθῇ διὰ Η, καὶ ἔχομεν ΝΔ—Κ=
ΞΔ+Η=Α. Ὥστε
ἀντὶ μὲν Α=Β+Γ ἔχομεν Α=ΜΔ+Κ,
ἀντὶ δὲ Α=Β—Γ ἔχομεν Α=ΞΔ+Η.
Ἐπειδὴ δὲ ὁ Α ἀνεδείχθη κεφάλαιον τοῦ Κ ἢ Η καὶ τοῦ γινομένου τοῦ Δ ἐπὶ ἀριθμόν τινα Μ ἢ Ξ, ἐκ τούτου εἶναι δῆλον πρῶτον ὅτι ὁ Α δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ Δ· ἔπειτα ὅτι τὸ κατάλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ Δ, ὅταν μὲν ἦναι κεφάλαιον τοῦ Β καὶ τοῦ Γ, εἶναι τὸ κατάλοιπον Κ τοῦ Γ διὰ Δ· ὅταν δὲ ἦναι διαφορὰ τοῦ Β καὶ Γ, εἶναι τὸ Η, ὅπερ εἶναι διαφορὰ τοῦ Δ καὶ τοῦ καταλοίπου Κ τοῦ Γ διὰ Δ. Ἄρα *ἐὰν ἀριθμός τις Α ἦναι κεφάλαιον ἢ διαφορὰ* κτλ.

Σημ. Εἴδομεν (Θ. Α. 108) ὅτι ἡ ἀπόδειξις τοῦ διαιρετοῦ τῶν ἀριθμῶν διὰ 2, 3, 4, 5, 9, 25 συνίσταται εἰς τὸ νὰ χωρισθῇ ἕκαστος ἀριθμὸς εἰς δύο ἄλλους, ὧν ὁ ἕτερος νὰ ἦναι πάντοτε διαιρετὸς διά τινος αὐτῶν· καὶ τότε δῆλον (107) ὅτι, ὅταν ἦναι καὶ ὁ ἄλλος διαιρετὸς διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, εἶναι διαιρετὸς καὶ ὁ δεδομένος ἀριθμός. Τώρα δ' ἐπληροφορήθημεν ὅτι, ὅταν ὁ ἄλλος δὲν ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ αὐτοῦ, δι' οὗ εἶναι ὁ ἕτερος διαιρετὸς, τότε οὐδὲ ὁ δεδομένος θέλει εἶσθαι διαιρετὸς δι' αὐτοῦ, καὶ ὅτι, ἂν μᾶς χρειάζηται τὸ κατάλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ δεδομένου διά τινος τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν 2, 3 κτλ, τὸ εὑρίσκομεν συντομώτερα διαιροῦντες τὸ μὴ διαιρετὸν μέρος διὰ τοῦ 2, 3 κτλ. Π. χ. τοῦ 5678 τὸ ἄθροισμα τῶν 5, 6, 7, 8 εἶναι 26 μὴ διαιρετὸν διὰ τοῦ 9· λοιπὸν ὁ 5678 δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 9· τὸ δὲ κατάλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 5678 διὰ 9 εἶναι κατάλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 26 διὰ 9· Οὐδὲ διὰ 4 εἶναι διαιρετὸς ὁ 5678· διότι ὁ 78 δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, τὸ δὲ κατάλοιπον εἶναι 2 κτλ.

63. *Θεώρημα. Πᾶς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 11, ἐὰν ἦναι 0 ἢ διαιρετὴ διὰ 11 ἡ προκύπτουσα διαφορὰ, ἀφοῦ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐν ταῖς περιτταῖς θέσεσι ψηφίων, ἐκ δεξιῶν γενομένης ἀρχῆς, ἀφαιρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν ταῖς ἀρτίαις θέσεσι ψηφίων.*

Παρατηρητέον πρῶτον ὅτι οἱ κατὰ μονάδα μικρότεροι ἀριθμοὶ τῶν ἀρτίων δυνάμεων τοῦ 10, ἤτοι τοῦ 100, τοῦ 10000, τοῦ 1000000 κτλ, οἵτινες εἶναι 99,9999,999999 κτλ, εἶναι διαιρετοὶ διὰ 11. Διότι ὁ μὲν 99 εἶναι ἐννεαπλάσιος τοῦ 11, ἤτοι 99=11×9, ὁ δὲ εἶναι 9900+99, ὁ δὲ 990000 +9900+99, κτλ, οἵτινες εἶναι φανερὰ (43) διαιρετοὶ διὰ 11. Ἐκ δὲ τούτων δῆλον ὅτι οἱ κατὰ 2 μονάδας μικρότεροι τῶν

200, 20000, 2000000 κτλ, οἱ κατὰ 3 μονάδας μικρότεροι τῶν 300, 30000 κτλ, εἶναι διαιρετοὶ καὶ αὐτοὶ διὰ 11.

Ἐκ δὲ τούτων γίνεται δῆλον ὅτι καὶ οἱ κατὰ μονάδα μεγαλήτεροι ἀριθμοὶ τῶν 10, 1000, 100000 κτλ, οἵτινες εἶναι 11, 1001, 100001 κτλ, εἶναι διαιρετοὶ διὰ 11. Διότι ὁ μὲν 1001=990+11, ὁ δὲ 100001=99990+11, κτλ· ἀλλ' ὁ 990, ὁ 99990 κτλ ὡς δεκαπλάσιοι τοῦ 99, τοῦ 9999 κτλ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 11, ὡς καὶ ὁ 11· ἄρα καὶ οἱ 1001, 100001 κτλ, εἶναι διαιρετοὶ διὰ 11. Ἐκ δὲ τούτων ἕπεται ὅτι εἶναι διαιρετοὶ διὰ 11 καὶ οἱ κατὰ 2 μονάδας μεγαλήτεροι τῶν 20, 2000, 200000 κτλ, καὶ οἱ κατὰ 3 μονάδας μεγαλήτεροι τῶν 30, 3000, 300000, κτλ.

Μετὰ ταῦτα εἶναι εὔκολον νὰ νοηθῇ ὅτι, ἐὰν ἀφ' ἑκάστου τῶν ἐν περιττῇ θέσει ἁπλῶν ἀριθμῶν παντὸς ἀριθμοῦ A ἀφαιρεθῶσι τόσαι μονάδες πρώτης τάξεως, ὅσας ἔχει αὐτὸς τῆς τάξεώς του, εἰς ἕκαστον δὲ τῶν ἐν ἀρτίᾳ θέσει προστεθῶσιν ὡσαύτως τόσαι μονάδες, ὅσας ἔχει αὐτὸς τῆς τάξεώς του, οἱ προκύψοντες ἀριθμοὶ ἐκ τῶν πράξεων τούτων θέλουσιν εἶσθαι ὅλοι διαιρετοὶ διὰ 11, ἐπομένως καὶ τὸ κεφάλαιόν των, ὅπερ σημειοῦμεν διὰ B. Ἐὰν ἔπειτα προσθέσωμεν εἰς τὸ B ὅσας μονάδας πρότερον ἀφηρέσαμεν ἀπὸ τῶν ἐν περιττῇ θέσει ἀριθμῶν τοῦ A, ὧν τὸ κεφάλαιον σημειοῦμεν δι' a, ἀφαιρέσωμεν δὲ ὅσας προσεθέσαμεν πρότερον εἰς τοὺς ἐν ἀρτίᾳ θέσει ἀριθμοὺς τοῦ A, ὧν τὸ κεφάλαιον σημειοῦμεν διὰ b, εἶναι φανερὸν ὅτι θέλομεν ἐξαναευρεῖ τὸν A, ἤτοι $A=B+a-b$, ἢ ἐὰν τὴν διαφορὰν $+a-b$ σημειώσωμεν διὰ $+\delta$ ἢ $-\delta$, ἔχομεν $A=B+\delta$, ἢ $A=B-\delta$. Ἀλλ' ὁ B εἶναι διαιρετὸς διὰ 11· ἄρα τὸ διαιρετὸν τοῦ A διὰ 11 δῆλον ὅτι ἐξαρτᾶται ἀπὸ τοῦ διαιρετοῦ ἢ μὴ τῆς διαφορᾶς δ διὰ 11. Ἀλλὰ δ εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος a τῶν ἐν ταῖς περιτταῖς θέσεσιν ἀριθμῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος b τῶν ἐν ταῖς ἀρτίαις θέσεσιν ἀριθμῶν· ἄρα *πᾶς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ* 11 *κτλ.*

Κατὰ τοῦτο ὁ ἀριθμὸς 856394627 εἶναι διαιρετὸς διὰ 11. Διότι, ἀφοῦ ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου 36 τῶν ἀριθμῶν 7, 6, 9, 6, 8 ἀφαιρεθῇ τὸ κεφάλαιον 14 τῶν ἀριθμῶν 2, 4, 3, 5, προκύπτει διαφορὰ 22, ἥτις εἶναι διαιρετὴ διὰ 11. Εἶναι δὲ ὁ 856394627=856394605+22, ὧν ὁ μὲν εἶναι κεφάλαιον τῶν 594, 89991, 5999994, 799999992, 22, 4004, 300003, 50000005, οἵτινες εἶναι ὅλοι διαιρετοὶ διὰ 11, ὁ δὲ 22 εἶναι ἡ προειρημένη διαφορά.

Ὡσαύτως καὶ ὁ 968275 εἶναι διαιρετὸς διὰ 11, διότι εἶναι 968275=968286—11, ὧν ὁ πρῶτος εἶναι κεφάλαιον τῶν 198, 59994, 77, 8008, 900009, ὅλων διαιρετῶν διὰ 11, ὁ δὲ —11=13—24.

Σημ. Ὅταν δὲ ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος διαφορὰ μήτε 0 ἦναι μήτε διαιρετὴ διὰ 11, τότε οὐδ' ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 11, ἀλλὰ μένει κατάλοιπον, ὅπερ εἶναι ἢ τὸ κατάλοιπον τῆς διαιρέσεως τῆς διαφορᾶς διὰ 11, ἂν αὐτὴ ἦναι θετική, ἢ τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως ἀπὸ τοῦ 11 τοῦ καταλοίπου τῆς διαφορᾶς διὰ 11, ἂν ἦναι αὐτὴ ἀντιθετική. Ὁ ἀριθμὸς 473894 δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 11, διότι ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος διαφορὰ εἶναι 3· ἐπειδὴ δὲ ὁ 473894 =473891+3 ἤτοι εἶναι ἡ διαφορὰ 3 θετική, τὸ κατάλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 473894 διὰ 11 εἶναι αὐτὸς ὁ 3. Ὡσαύτως καὶ ὁ 689453 δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 11, διότι ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος διαφορὰ εἶναι 5. Ἀλλ' ἐπειδὴ αὕτηεἶναι ἀντιθετική, διότι ὁ 689453=689458—5, τὸ κατάλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 689453 διὰ 11 εἶναι ἡ διαφορὰ 11—5 ἤτοι 6 (Θεώρ. τοῦ ἀρ. 62).

64. *Θεώρημα. Εἶναι διαιρετὸς διὰ 8 καὶ διὰ 125 πᾶς ἀριθμός, οὗ τινος εἶναι διαιρετὸς διὰ 8 καὶ διὰ 125 ὁ ἐκ τῶν τριῶν δεξιῶν ψηφίων ἀποτελούμενος ἀριθμός*, οἷον ὁ 4589384 καὶ ὁ 768375. Διότι ὁ 4589384=4589000+384, καὶ ὁ 768375=768000+375, ὧν ὁ πρῶτος εἶναι διαιρετὸς διὰ 8 καὶ διὰ 125, διότι εἶναι πολλαπλάσιος τοῦ 1000, ὁ δὲ 1000 εἶναι διαιρετὸς διὰ 8 καὶ διὰ 125. Ἂν λοιπὸν καὶ ὁ δεύτερος, ὁ τριψήφιος 384 ἢ ὁ 375, ἦναι διαιρετὸς διὰ 8 ἢ διὰ 125, ὡς ἐδῶ συμβαίνει, εἶναι διαιρετὸς καὶ ὁ 4589384 διὰ 8, καὶ ὁ 768375 διὰ 125. Ἂν δὲ ὁ δεύτερος δὲν ἦναι διαιρετὸς διὰ 8 ἢ διὰ 125, τότε οὐδὲ ὁ προκείμενος ἀριθμός, οἷον ὁ 478354.

65. Κατὰ τὸ πόρισμα τὸ ἐν ἀριθ. 57 *διὰ 6 εἶναι διαιρετὸς πᾶς ἀριθμὸς ἄρτιος, ὅστις εἶναι διαιρετὸς διὰ 3*· διότι ὁ διαιρετὸς διὰ 2 καὶ διὰ 3, οἵτινες εἶναι ἀσύνδιαίρετοι, εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ γινομένου των 6. *Διὰ 12 δ' εἶναι διαιρετὸς πᾶς ἀριθμός, ὅστις εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 καὶ διὰ 4,*

οἵτινες εἶναι παράγοντες τοῦ 12 ἀσυνδιαίρετοι. *Διὰ* 15 *δ' εἶναι διαιρετὸς πᾶς ἀριθμὸς, ὅςτις εἶναι διαιρετὸς διὰ* 3 *καὶ διὰ* 5, οἵτινες εἶναι παράγοντες τοῦ 15 ἀσυνδιαίρετοι. *Διὰ* 18 *δ' εἶναι διαιρετὸς ὁ ἄρτιος ὁ διαιρετὸς διὰ* 9, διότι ὁ 18 εἶναι 2.9. *Διὰ* 20 *δ' εἶναι διαιρετὸς ὁ διαιρετὸς διὰ* 4 *καὶ διὰ* 5. Οὕτω καὶ περὶ ἄλλων.

Σημ. Ἠξεύρομεν τώρα τίνες ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 18, 20, 22 καὶ πολλῶν ἄλλων ἔτι· διὰ δὲ 7, 13, 17, 19 κτλ μανθάνομεν ἂν ἀριθμός τις ἦναι διαιρετὸς διαιροῦντες αὐτὸν δι' ἑκάστου τούτων, διότι αὐτὸς ὁ τρόπος εἶναι ὁ ἁπλούστερος.

66. *Θεώρημα. Ὁ μ.κ.δ. δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν εἶναι γινόμενον τῶν κοινῶν εἰς αὐτοὺς δυνάμεων τῶν πρωτοτύπων παραγόντων των.* Διότι πρῶτον εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος γινόμενον εἶναι κοινὸς διαιρέτης ὅλων τῶν ἀριθμῶν, εἷς τῶν διαιρετῶν ἑκάστου ὂν (56· πόρ ά). Ἔπειτα οὐδεὶς ἄλλος ἀριθμὸς μεγαλήτερος αὐτοῦ εἶναι κοινὸς διαιρέτης ὅλων τῶν ἀριθμῶν· διότι ἀριθμὸς μεγαλήτερος τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος γινομένου ἢ θέλει εἶσθαι γινόμενον πρωτοτύπων παραγόντων ὅλων διαφόρων τῶν πρωτοτύπων παραγόντων τῶν ἀριθμῶν ἢ τινῶν μόνων, καὶ τοιοῦτος ἀριθμὸς δὲν εἶναι διαιρέτης οὐδενὸς τῶν ἀριθμῶν, ἢ θέλει εἶσθαι γινόμενον τῶν πρωτοτύπων μὲν παραγόντων τῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ τινῶν μὴ κοινῶν, ἢ ὅλων μὲν τῶν κοινῶν, ἀλλὰ εἰς δύναμιν ἀνωτέραν τινὸς ὑψωμένου, καὶ τοιοῦτος ἀριθμὸς δυνατὸν νὰ ἦναι διαιρέτης ἑνός τινος τῶν ἀριθμῶν ἢ δύο, ἀλλ' ὄχι κοινὸς διαιρέτης ὅλων. Ἀφοῦ δ' οὐδεὶς ἄλλος ἀριθμὸς μεγαλήτερος τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος γινομένου εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν, δῆλον ὅτι τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος γινόμενον εἶναι ὁ μέγιστος τῶν κοινῶν διαιρετῶν τῶν ἀριθμῶν· *ἄρα ὁ μ.κ.δ. δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν κτλ.*

Πορίσματα. ά. Δύναταί τις νὰ εὑρίσκῃ τὸν μ.κ.δ. δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν καὶ ἂν ἀναγάγῃ ἕκαστον εἰς τοὺς πρωτοτύπους παράγοντάς του, ἔπειτα πολλαπλασιάσῃ τὰς δυνάμεις τῶν πρωτοτύπων παραγόντων τὰς κοινὰς εἰς αὐτοὺς τοὺς ἀριθμούς. Οὕτως εὑρίσκεται μ.κ.δ. τοῦ 2520 καὶ τοῦ 1008 ὁ $2^3.3^2.7$ ἤτοι ὁ 504. Τοῦ δὲ 2520 καὶ τοῦ 1008 καὶ τοῦ 5880 μ.κ.δ. εἶναι ὁ $2^3.3.7$ ἤτοι ὁ 168.

β΄. *Πᾶς κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν.* Διότι ὁ κοινὸς διαιρέτης ἄλλο δὲν εἶναι εἰμὴ γινόμενον τινῶν μόνον παραγόντων τοῦ μ.κ.δ αὐτῶν ἢ παράγων τις αὐτοῦ.

γ΄. *Ὅλοι οἱ διαιρέται τοῦ μ.κ.δ. δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν εἶναι οἱ μόνοι κοινοὶ διαιρέται ὅλων αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.* Διότι ἕκαστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν πρέπει νὰ ἦναι διαιρέτης τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν.

Πρὸς εὕρεσιν λοιπὸν ὅλων τῶν κοινῶν διαιρετῶν δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν πρῶτον εὑρίσκεται ὁ μ.κ.δ. αὐτῶν, ἔπειτα τούτου εὑρίσκονται ὅλοι οἱ διαιρέται (60)· αὐτοὶ δὲ θέλουσιν εἶσθαι οἱ ζητούμενοι.

Σημ. ά. Εὐκόλως τις καταλαμβάνει ὅτι ἡ μέχρι τοῦδε γνωστὴ πρᾶξις τοῦ εὑρίσκειν τὸν μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν ἐκτελεῖται συντομώτερα παρὰ τὴν ἤδη ἐκτεθεῖσαν ἐν τῷ πρώτῳ πορίσματι, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι προτιμητέα. Ἡ δὲ ἤδη ἀποδειχθεῖσα ἰδιότης τοῦ μ.κ.δ. δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν συντελεῖ εἰς τὸ νὰ καταστήσῃ ἔτι ἁπλουστέραν ἐκείνην τὴν πρᾶξιν, ὡς ἐπὶ μικροτέρων ἀριθμῶν παρὰ τοὺς δεδομένους ἐκτελεσθησομένην, ἐὰν ὁ ἕτερος αὐτῶν ἔχων ἴδιόν τινα διαιρέτην διαιρεθῇ δι' αὐτοῦ, ἢ ἂν ἀμφότεροι ἔχοντες κοινόν τινα διαιρέτην διαιρεθῶσι δι' αὐτοῦ, ἐκτελεσθῇ δὲ ἡ πρᾶξις ἐκείνη ἐπὶ τῶν προκυψόντων πηλίκων, ὁ δὲ τούτων μ.κ.δ. πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν δι' οὗ διῃρέθησαν ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ κοινὸν διαιρέτην.

Ἵνα εὑρεθῇ π. χ. ὁ μ.κ.δ. τῶν 2150 καὶ 3612, δὲν ἐκτελεῖται ἀμέσως ἡ γνωστὴ πρᾶξις, ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ μὲν 2150 ἔχῃ ἴδιον διαιρέτην τὸν 25, ὁ δὲ 3612 ὡσαύτως τὸν 3, οἵτινες, ὡς μὴ κοινοὶ διαιρέται, δὲν εἶναι παράγοντες τοῦ μ.κ.δ. τῶν 2150 καὶ 3612, διαιρεῖται ἑκάτερος διὰ τοῦ ἰδίου διαιρέτου καὶ προκύπτουσι πηλίκα 86 καὶ 1204, καὶ ἐπὶ τούτων ἤθελεν ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις ἐκείνη· δῆλον δὲ ὅτι ὁ μ.κ.δ. τούτων ἤθελεν εἶσθαι καὶ ὁ μ.κ.δ. τῶν 2150 καὶ 3612. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ οἱ 86 καὶ 1204 ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην τὸν 2, ὅστις εἶναι παράγων τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν, διαιροῦνται ἀμφότεροι δι' αὐτοῦ, καὶ ζητεῖται ὁ μ.κ.δ. τῶν πηλίκων των 43 καὶ 602, οἵτινες εἶναι πολὺ μικρότεροι ἀριθμοὶ τῶν 2150 καὶ 3612. Εἶναι δὲ αὐτὸς 43, τῶν δὲ 86 καὶ 1204 δῆλον ὅτι εἶναι ὁ 43×2 ἤτοι ὁ 86, ὅστις εἶναι καὶ ὁ ζητούμενος.

Σημ. β΄. Ἐὰν διὰ τῆς αὐτῆς ταύτης πράξεως θελήσῃ τις νὰ εὕρῃ τὸν μ.κ.δ. πλειοτέρων ἀριθμῶν Α,Β,Γ,Δ κτλ, πρέπει νὰ εὕρῃ πρῶτον τὸν μ.κ.δ. τοῦ Α καὶ τοῦ Β, ὃν σημειοῦμεν διὰ Μ, ἔπειτα τὸν μ.κ.δ. τοῦ Γ καὶ τοῦ Μ, ὃν σημειοῦμεν διὰ Μ΄, μετέπειτα τὸν μ.κ.δ. τοῦ Δ καὶ τοῦ Μ΄, ὃν σημειοῦμεν διὰ Μ΄΄, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Διότι πρὸς εὕρεσιν τοῦ μ.κ.δ. τῶν τριῶν Α, Β καὶ Γ, ἄλλο δὲ ἀπαιτεῖται εἰμὴ νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς, ὅστις εἶναι γινόμενον τῶν κοινῶν εἰς αὐτοὺς δυνάμεων τῶν πρωτοτύπων παραγόντων. ~~Ἐπειδὴ δὲ ὁ Μ εἶναι γινόμενον τῶν κοινῶν εἰς αὐτοὺς δυνάμεων τῶν πρωτοτύπων παραγόν-~~

Ἐπειδὴ δὲ ὁ Μ εἶναι γινόμενον τῶν κοινῶν εἰς τὸ Α καὶ τὸ Β δυνάμεων τῶν πρωτοτύπων παραγόντων των, τούτου καὶ τοῦ Γ πρέπει νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ, διότι αὐτὸς θέλει εἶσθαι γινόμενον τῶν κοινῶν εἰς τοὺς τρεῖς Α, Β καὶ Γ ἀριθμοὺς δυνάμεων τῶν πρωτοτύπων παραγόντων των. Ἐκ δὲ τούτου δῆλον καὶ ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. τῶν τεσσάρων Α, Β, Γ, Δ πρέπει νὰ ευρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τοῦ Δ καὶ τοῦ μ. κ. δ. Μ' τῶν τριῶν Α, Β, Γ· κτλ.

Οὕτως εὑρίσκεται μ. κ. δ. τῶν 504, 756, 1260, 2058 ὁ ἀριθμὸς 42. Ἐὰν δ' ἐφαρμοσθῶσι τὰ ἐν τῇ προτέρᾳ σημειώσει εἰρημένα, εὑρίσκεται ἁπλούστατα.

67. *Θεώρημα. Ὁ ἐλάχιστος διαιρετὸς ἀριθμὸς δι' ἑκάστου πολλῶν ἄλλων ἀριθμῶν εἶναι γινόμενον τῶν ἀνωτάτων δυνάμεων ὅλων τῶν διαφόρων πρωτοτύπων παραγόντων αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.*

Ἐὰν π. χ. $A = a^4 b^2 \gamma$, $B = b^2 \gamma^3$, $\Gamma = a^2 \gamma \delta^2$, $\Delta = a^3 b^2 \gamma^2 \delta$, τῶν a, b, κτλ ὄντων πρωτοτύπων ἀριθμῶν, ἐπειδὴ ὅλοι οἱ διάφοροι παράγοντες εἶναι τέσσαρες a, b, γ, δ, ἀνωτάτη δ' ἑκάστου δύναμις εἶναι ἡ $a^4, b^2, \gamma^3, \delta^2$, λέγω ὅτι τὸ γινόμενον τούτων $a^4 b^2 \gamma^3 \delta^2$ εἶναι ὁ ἐλάχιστος διαιρετὸς δι' ἑκάστου τῶν Α,Β,Γ,Δ. Διότι πρῶτον ὁ ἀριθμὸς $a^4 b^2 \gamma^3 \delta^2$ εἶναι φανερὰ διαιρετὸς δι' ἑκάστου τῶν $a^4 b^2 \gamma$, $b^2 \gamma^3$; $a^2 \gamma \delta^2$ καὶ $a^3 b^2 \gamma^2 \delta$ ἤτοι τῶν Α,Β,Γ,Δ (42). Ἔπειτα οὐδεὶς ἄλλος ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ $a^4 b^2 \gamma^3 \delta^2$ εἶναι διαιρετὸς δι' ἑκάστου τῶν Α,Β,Γ,Δ· διότι πᾶς ἀριθμὸς, ἂν δὲν ἔχῃ ὅλους τοὺς πρωτοτύπους a, b, γ, δ παράγοντας, καὶ μάλιστα ἂν δὲν ἔχῃ τὰς δυνάμεις αὐτῶν $a^4, b^2, \gamma^3, \delta^2$, δὲν θέλει εἶσθαι διαιρετὸς δι' ἑκάστου τῶν Α,Β,Γ,Δ (42)· ἀλλ' ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ $a^4 b^2 \gamma^3 \delta^2$ ἀδύνατον νὰ ἔχῃ ὅλας τὰς δυνάμεις $a^4, b^2, \gamma^3, \delta^2$· ἄρα ὁ $a^4 b^2 \gamma^3 \delta^2$ εἶναι ὁ ἐλάχιστος διαιρετὸς δι' Α,Β, Γ,Δ· ἄρα *ὁ ἐλάχιστος διαιρετὸς* κτλ.

Πόρισμα. Ἐκ δὲ τοῦ ἀποδεδειγμένου ἐξάγεται καὶ ἄλλος τρόπος διάφορος τοῦ ἐν τῇ Θ. Α. ἐκτεθέντος (114), καθ' ὃν εὑρίσκεται ὁ ἐλάχιστος διαιρετὸς διὰ πολλῶν ἄλλων ἀριθμῶν· δηλ. *Πρῶτον ἀνάγονται οἱ ἀριθμοὶ εἰς τοὺς πρωτοτύπους παράγοντάς των, ἔπειτα πολλαπλασιάζονται ἐπ' ἀλλήλας αἱ ἀνώταται δυνάμεις ὅλων τῶν διαφόρων πρωτοτύπων παραγόντων αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν,* καὶ τὸ γινόμενόν των θέλει εἶσθαι ὁ ζητούμενος ἐλάχιστος δι' ἑκάστου αὐτῶν διαιρετός.

Π. χ. ἀνηγμένοι εἰς τοὺς πρωτοτύπους παράγοντάς των οἱ ἀριθμοὶ

$$240, \quad 490, \quad 720, \quad 1125 \text{ εἶναι}$$
$$2^4.3.5, \quad 2.5.7^2, \quad 2^4.3^2.5, \quad 3^2.5^3,$$

αἱ δὲ ἀνώταται δυνάμεις ὅλων τῶν διαφόρων πρωτοτύπων παραγόντων των εἶναι $2^4, 3^2, 5^3, 7^2$· τὸ γινόμενον λοιπὸν αὐτῶν $2^4.3^2.5^3.7^2 = 16 \times 9 \times 125 \times 49 = 882000$ εἶναι ὁ ἐλάχιστος διαιρετὸς ἀριθμὸς δι' ἑκάστου τῶν 240, 490, 720 καὶ 1125.

Ὁ δὲ δι' ἑκάστου τῶν 60, 28, 225 ἐλάχιστος διαιρετὸς εἶναι $2^2.3^2.5^2.7 = 6300$· ὁ δὲ δι' ἑκάστου τῶν 20, 48, 280, 960, 1800, 5040, 6860 ἐλάχιστος διαιρετὸς εἶναι $2^6.3^2.5^2.7^3 = 4939200$· ὁ δὲ δι' ἑκάστου τῶν $40\beta^2\gamma$, $18\alpha^3\gamma^2$, $28\beta\delta$ ἐλάχιστος διαιρετὸς εἶναι $2^3.3^2.5.7\ \alpha^3\beta^2\gamma^2\delta = 2520\alpha^3\beta^2\gamma^2\delta$.

Περὶ τροπῆς τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικὰ καὶ τἀνάπαλιν.

68. Δεκαδικὸν κλάσμα ἢ ἔχει ὡρισμένον ἀριθμὸν ψηφίων, οἷον 0,7, 0,32, 0,478, 0,9435 κτλ, ἢ ἔχει ἀπειράριθμα ψηφία. Τοῦ δ' ἀπειραριθμοψηφίου τὰ ψηφία ἢ ἐπανέρχονται τὰ αὐτὰ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, οἷον 0,46932|46932|46932... ἢ ἀκολουθοῦσιν ἀτάκτως, οἷον 0,9724789527608... Τὰ ἐπανερχόμενα κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ψηφία ὀνομάζονται *περιοδικὰ*, ὅλα δὲ ὁμοῦ τὰ περιοδικὰ, οἷον ἀνωτέρω τὰ 46932, ὀνομάζονται *περίοδος*, τὸ δὲ κλάσμα, οὗτινος τὰ ψηφία εἶναι περιοδικὰ, λέγεται *περιοδικὸν* ἢ κάλλιον *ἐμπερίοδον*. Καὶ ἂν μὲν ἡ περίοδος ἀρχίζῃ ἀπὸ τοῦ πρώτου μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν ψηφίου ἤτοι ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν δεκατημορίων, οἷον εἶναι τὸ ἀνωτέρω, τὸ ἐμπερίοδον καλεῖται *ἁπλοῦν*· ἐὰν δὲ ἡ περίοδος ἀρχίζῃ ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἢ ἀπὸ τοῦ τρίτου ἢ ἀπὸ τοῦ τετάρτου κτλ, οἷον 0,8454545.., 0,72|5678|5678... 0,473585858... κτλ, τὸ ἐμπερίοδον καλεῖται *σύνθετον* ἢ *μικτὸν* ἐξ ἐμπεριόδου ἁπλοῦ καὶ μὴ περιοδικῶν ψηφίων.

69. Εἶναι ἤδη γνωστὴ ἡ πρᾶξις, δι' ἧς τρέπεται κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἰσοδύναμον (Π. Α. 84), καὶ ὅτι ἡ τροπὴ

αὕτη στηρίζεται εἰς τὸ ὅτι πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων ἤτοι ὁ ἀριθμητὴς ἐπὶ 10, ἢ ἐπὶ 100, ἢ ἐπὶ 1000 κτλ, τοῦ δὲ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ 10, ἢ 100, κτλ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ ἡ μονὰς νοεῖται ὅτι εἶναι τὸ δέκατον ἢ τὸ ἑκατοστὸν, ἢ χιλιοστὸν κτλ (Θ. Α. 117). Ἐπειδὴ δὲ ὁ μὲν $10=2.5$, ὁ δὲ $100=2^2.5^2$, ὁ δὲ $1000=2^3.5^3$, κτλ, ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν πρώτων ἢ τῶν δευτέρων ἢ τῶν τρίτων κτλ δυνάμεων τῶν πρωτοτύπων παραγόντων 2 καὶ 5.

Τούτων δ' οὕτως ἐχόντων, εἶναι εὔκολον νὰ πληροφορηθῶμεν περὶ τῶν ἑξῆς δύο θεωρημάτων.

70. *Κλάσμα κοινὸν ἀνάγωγον, οὗτινος ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἢ ἁπλῶς δύναμίς τις τοῦ 2 ἢ τοῦ 5 ἢ γινόμενον δυνάμεών τινων τοῦ 2 καὶ τοῦ 5, οἷον τὸ $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{25}$, $\frac{11}{40}$ κτλ, τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν ἔχον τόσα ψηφία, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἐν τῷ παρονομαστῇ δείκτης τοῦ 2 ἢ τοῦ 5, ἢ ὁ μεγαλήτερος τῶν δεικτῶν αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.* Διότι, τῆς τροπῆς ταύτης γινομένης διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ 2.5, ἢ ἐπὶ $2^2.5^2$, ἢ ἐπὶ $2^3.5^3$ κτλ, εἶναι φανερὸν ὅτι, ὄντων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος ἀσυνδιαιρέτων, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς ἐπὶ τὸ γινόμενον τοιούτων δυνάμεων τοῦ 2 καὶ τοῦ 5, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἐν τῷ παρονομαστῇ δείκτης τοῦ 2 ἢ τοῦ 5, ἢ ὁ μεγαλήτερος τῶν δεικτῶν αὐτῶν, τὸ προκύπτον γινόμενον θέλει εἶσθαι διαιρετὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τότε μόνον, ὄχι δ' ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς ἐπὶ τὸ γινόμενον κατωτέρων δυνάμεων τοῦ 2 καὶ τοῦ 5. Τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης θέλει εἶσθαι κλάσμα δεκαδικὸν ἔχον τόσα ψηφία, ὅσαι μερικαὶ διαιρέσεις γίνονται· αἱ δὲ διαιρέσεις αὗται εἶναι τόσαι, ὅσας μονάδας ἔχουσιν οἱ δεῖκται τῶν δυνάμεων τοῦ 2 καὶ τοῦ 5, ἐφ' ἃς ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν ἀριθμητὴν, ἤτοι ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δείκτης τοῦ ἐν τῷ παρονομαστῇ 2 ἢ τοῦ 5, ἢ ὁ μεγαλήτερος τῶν δεικτῶν τοῦ 2 καὶ τοῦ 5. Ἄρα *κλάσμα κοινὸν ἀνάγωγον κτλ.*

Οὕτω τὸ $\frac{7}{8}$, ὅπερ εἶναι $\frac{7}{2^3}$, τρέπεται εἰς τὸ ἰσοδύναμον 0,875. Διότι, ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 1000 ἤτοι $2^3.5^3$, γίνεται $\frac{7.2^3.5^3}{2^3}=7.5^3=875$, ἢ $\frac{7000}{8}=875$· τὰ δὲ 875 πρέπει νὰ ἦναι χιλιοστημόρια, ἤτοι 0,875, ὡς τοῦ ἀριθμοῦ 7 πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ 1000.

Ὡσαύτως τὸ $\frac{13}{25}$ τρέπεται εἰς τὸ ἰσοδύναμον 0,52— τὸ δὲ $\frac{11}{40}$ ἤτοι $\frac{11}{2^3.5}$ εἰς τὸ ἰσοδύναμον 0,275— τὸ δὲ $\frac{317}{1250}$ ἤτοι $\frac{317}{2.5^4}$ εἰς τὸ ἰσοδύναμον 0,2536.

71. *Κλάσμα κοινὸν ἀνάγωγον, οὗτινος ὁ παρονομαστὴς ἔχει παράγοντα πρωτότυπον διάφορον τοῦ 2 καὶ τοῦ 5, εἴτε ἔχει καί τινα τούτων ἢ τοὺς δύο εἴτε μή, οἷον τὸ $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{37}{44}$, $\frac{17}{21}$ κτλ, τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἐμπερίοδον.* Διότι ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ τὸ γινόμενον οἱωνδήποτε δυνάμεων τοῦ 2 καὶ τοῦ 5 δὲν καθιστάνει διαιρετὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τὸ προκύπτον γινόμενον, ὡς τοῦ παρονομαστοῦ ἔχοντος πρωτότυπον παράγοντα, ὃν ἀδύνατον νὰ ἔχῃ αὐτὸ τὸ γινόμενον (55)· καὶ ἀπειράριθμα δὲ μηδενικὰ ἂν θέσῃ τις δεξιὰ τοῦ ἀριθμητοῦ, θέλει ἐκτελέσει ἀπειραρίθμους μερικὰς διαιρέσεις καὶ θέλει εὑρεῖ μ' ἀπειράριθμα ψηφία δεκαδικὸν κλάσμα. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ κατάλοιπα τῶν μερικῶν διαιρέσεων ἀνάγκη νὰ ἦναι μικρότερα τοῦ διαιρέτου, τὸ πολὺ διάφορα κατάλοιπα θέλουσιν εὑρίσκεσθαι παρὰ ἓν τόσα, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ διαιρέτης ἤτοι ὁ παρονομαστής, μετὰ δὲ ταῦτα θέλει εὑρίσκεσθαί ἓν τῶν ἤδη προευρημένων καταλοίπων, ἑπομένως καὶ ἓν τῶν προευρημένων ἤδη ψηφίων τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος, διότι διαιρετέος θέλει εἶσθαι τὸ κατάλοιπον μὲ ἓν 0 δεξιάτου, ὅπερ ἦτον καὶ πρότερον, διαιρέτης δὲ ὁ αὐτός. Ἐκ δὲ τούτου δῆλον ὅτι τὰ ἐφεξῆς κατάλοιπα καὶ οἱ διαιρετέοι θέλουσιν ἐπανέρχεσθαι τὰ αὐτὰ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν,

ἑπομένως καὶ τὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος, ἅπερ εἶναι τὰ πηλίκα, θέλουσιν ἐπανέρχεσθαι τὰ αὐτὰ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, ἤτοι τὸ δεκαδικὸν κλάσμα θέλει εἶσθαι ἐμπερίοδον. Ἄρα *κλάσμα κοινὸν* κτλ.

Τὸ $\frac{4}{7}$ τρέπεται εἰς τὸ 0,571428|571428|571428...

Τὸ $\frac{3}{11}$ εἰς τὸ 0,272727.. Τὸ $\frac{17}{21}$ εἰς τὸ 0,809523|809523...

Τὸ $\frac{11}{15}$ εἰς τὸ 0,7333 .... Τὸ $\frac{37}{44}$ εἰς τὸ 0,84090909...

72. Ἐκ τῶν παραδειγμάτων τούτων βλέπει τις ὅτι τὰ κλάσματα, ὧν οἱ παρονομασταὶ δὲν ἔχουσι παράγοντα τὸν 2 ἢ τὸν 5, ἀλλ' ἄλλους πρωτοτύπους ἀριθμοὺς, τρέπονται εἰς ἁπλᾶ ἐμπερίοδα δεκαδικά· ἐκεῖνα δὲ, ὧν οἱ παρονομασταὶ ἔχουσι καὶ τὸν 2 ἢ τὸν 5 παράγοντα, τρέπονται εἰς μικτὰ ἐμπερίοδα. Ταῦτα εἶναι γενικὰ, ἐκφράζονται δὲ καὶ ἀποδεικνύονται ὡς ἐφεξῆς λέγομεν.

Θεώρημα. Κλάσμα ἀνάγωγον, οὗ τινος ὁ παρονομαστὴς δὲν ἔχει παράγοντα οὔτε τὸν 2 οὔτε τὸν 5, τρέπεται εἰς ἁπλοῦν ἐμπερίοδον.

Ἔσω κοινὸν κλάσμα τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$, οὗτινος ὁ παρονομαστὴς β δὲν ἔχει παράγοντα οὔτε τὸν 2 οὔτε τὸν 5, καὶ ὅπερ τρεπόμενον εἰς δεκαδικὸν δίδει πηλίκα μὲν ἤτοι ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ $\mu, \nu, \xi, o, \pi, \rho$, κτλ, κατάλοιπα δὲ $\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$ κτλ· λέγω ὅτι τὸ πρῶτον κατάλοιπον, ὅπερ θέλει εἶσθαι ἓν τῶν προτέρων α, β, γ...., θέλει εἶσθαι ὁ ἀριθμητὴς α τοῦ κλάσματος, καὶ ὄχι ἓν τῶν προευρημένων καταλοίπων γ ἢ δ κτλ. Διότι, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι τὸ ἕκτον κατάλοιπον θέλει εἶσθαι τὸ πρῶτον τῶν προηγουμένων καὶ ὅτι θέλει εἶσθαι ἴσον

$$\begin{array}{l|l} 10\alpha & \beta \\ \hline 10\gamma & o,\mu\nu\xi o\pi\rho\ldots \\ 10\delta & \\ 10\varepsilon & \\ 10\zeta & \\ 10\eta & \\ \delta & \end{array}$$

μὲ τὸ δ καὶ ὄχι ἴσον μὲ τὸ α, ἐπειδὴ ἐκ μὲν τῆς δευτέρας διαιρέσεως ἔχομεν $10\gamma = \beta.\nu + \delta$, ἐκ δὲ τῆς ἕκτης κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ἔχομεν $10\eta = \beta.\rho + \delta$, πρέπει καὶ ἡ διαφορὰ τῶν πρώτων μελῶν καὶ ἡ τῶν δευτέρων μελῶν αὐτῶν τῶν ἰσοτήτων νὰ ἦναι ἴση (45, 6'), ἤτοι

$10\gamma - 10\eta = \beta.\nu - \beta.\rho$, ἢ ἄλλως (43) $10(\gamma - \eta) = \beta(\nu - \rho)$. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον· διότι τὸ πρῶτον μέλος ἔχει παράγοντα τὸν 10 ἤτοι τὸν 2 καὶ τὸν 5, τοῦ δὲ δευτέρου μέλους οὔτε ὁ β ἔχει αὐτούς, οὔτε ἡ διαφορὰ $\nu - \rho$, ἥτις παριστάνει ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ 10, ὡς διαφορὰ μονοψηφίων ἀριθμῶν. Ἄρα ἀδύνατος καὶ ἡ ὑπόθεσις ὅτι τὸ πρῶτον κατάλοιπον, ὅπερ θέλει εἶσθαι ἕν τι τῶν προηγουμένων, εἶναι τὸ δ. Ὡσαύτως δ' ἀποδεικνύεται καὶ ὅτι ἀδύνατον αὐτὸ τὸ κατάλοιπον νὰ ἦναι τὸ γ· ἢ τὸ ε ἢ τὸ ζ ἢ τὸ η. Ἀλλ' ἀνάγκη νὰ ἦναί τι τῶν προηγουμένων· ἄρα θέλει εἶσθαι τὸ α, ἤτοι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος.

Τοῦτο δὲ γίνεται καὶ ἄλλως φανερόν, ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι τότε μόνον ἀληθεύει ἡ ἰσότης $10(\gamma - \eta) = \beta(\nu - \rho)$, ὅτε τὸ $\rho = \nu$. Διότι, ὄντος $\rho = \nu$, ἡ διαφορὰ $\nu - \rho = 0$, τὸ δὲ γινόμενον τοῦ β ἐπὶ 0 εἶναι 0, ἤτοι $\beta(\nu - \rho) = 0$. Ἀλλὰ καὶ τὸ πρῶτον μέλοςτῆς ἰσότητος τότε εἶναι ἴσον μὲ τὸ 0, ἤτοι $10(\gamma - \eta) = 0$· διότι τῶν ἀνωτέρω

$$10\gamma = \beta.\nu + \delta$$
$$10\eta = \beta.\rho + \delta$$

τὰ δεύτερα μέλη εἶναι ἴσα, ὡς $\nu = \rho$, ἐπομένως καὶ τὰ πρῶτα· ἄρα ἡ διαφορά των $10\gamma - 10\eta$ ἢ $10(\gamma - \eta) = 0$. Ἄρα $\gamma = \eta$. Ἐκ δὲ τούτου μανθάνομεν ὅτι, ἵνα ἦναι τὸ ἕκτον κατάλοιπον ἴσον μὲ τὸ δ, ἀνάγκη νὰ ἦναι τὸ πέμπτον η ἴσον μὲ τὸ γ, ἤτοι πρὶν εὑρεθῇ κατάλοιπον ἴσον μὲ τὸ δ, ἀνάγκη νὰ εὑρεθῇ ἄλλο ἴσον μὲ τὸ γ· τὸ πρὸ τοῦ δ. Ὡσαύτως δ' ἀποδεικνύεται ὅτι πρὶν εὑρεθῇ τὸ κατάλοιπον γ, ἀνάγκη νὰ εὑρεθῇ τὸ α· ἤτοι τὸ πρῶτον κατάλοιπον, ὅπερ θέλει εἶσθαί τι τῶν προηγουμένων, θέλει εἶσθαι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαίρεσις τοῦ 10α διὰ β θέλει δώσει πηλίκον μ καὶ κατάλοιπον γ· ὡς πρότερον, καὶ ἐπομένως θέλουσιν ἐπανέρχεσθαι τὰ αὐτὰ ὡς πρότερον, διὰ τοῦτο τὸ δεκαδικὸν κλάσμα θέλει εἶσθαι ἁπλοῦν ἐμπερίοδον. Ἄρα *κλάσμα ἀνάγωγον* κτλ.

Ἰδοὺ καὶ ἄλλα παραδείγματα πρὸς τοῖς ἀνωτέρω.

$\frac{1}{13}=0{,}076923|076923\ldots$ $\frac{19}{27}=0{,}703|703\ldots$

$\frac{1}{17}=0{,}0588235294117647|05\ldots$ $\frac{13}{37}=0{,}351351\ldots$

$\frac{1}{19}=0{,}052631578947368421|052\ldots$

$\frac{38}{111}=0{,}342|342\ldots$ $\frac{1}{41}=0{,}02439|02439\ldots$

Τὰ ἑξῆς θέλουσι μᾶς χρησιμεύσει μετ' ὀλίγον. $\frac{1}{9}=0{,}111\ldots$

$\frac{1}{99}=0{,}0101\ldots$ $\frac{1}{999}=0{,}001001\ldots$

Ταῦτα δὲ εἶναι περίεργα

$\frac{1}{81}=0{,}012345679|012345679|012\ldots$

$\frac{80}{81}=0{,}987654320|987654320\ldots$

73. *Θεώρημα. Κλάσμα κοινὸν ἀνάγωγον, οὗτινος ὁ παρονομαστὴς ἔχει παράγοντας καὶ ἄλλους μὲν πρωτοτύπους ἀριθμούς, ἀλλὰ καὶ τὸν 2 ἢ τὸν 5 ἢ ἀμφοτέρους, τρέπεται εἰς μικτὸν ἐμπερίοδον, ἔχον τόσα μὴ περιοδικὰ ψηφία, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δείκτης τοῦ 2 ἢ τοῦ 5 τοῦ ἐν τῷ παρονομαστῇ, ἢ ὁ μεγαλήτερος τῶν δεικτῶν αὐτῶν.*

Ἔστω κοινὸν κλάσμα τὸ $\frac{47}{56}=\frac{47}{2^3.7}$, οὗπερ ὁ παρονομαστὴς ἔχει παράγοντα τὸν 7 καὶ τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ 2· τοῦτο τρέπεται εἰς μικτὸν ἐμπερίοδον ἔχον τρία μὴ περιοδικὰ ψηφία, ὡς ἐδῶ φαίνεται.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτων λέγομεν πρῶτον ὅτι μετὰ τρεῖς διαιρέσεις, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἐν τῷ παρονομαστῇ δείκτης τοῦ 2, θέλει προκύψει τρίτον κατάλοιπον, ὅπερ θέλει ἔχει παράγοντα τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ 2, τὸ δὲ πρῶτον κατάλοιπον θέλει ἔχει τὴν πρώτην δύναμιν τοῦ 2 καὶ τὸ δεύτερον τὴν δευτέραν. Διότι ἐκ τῶν τριῶν πρώτων διαιρέσεων ἔχομεν τὰς ἰσότητας

```
470 | 56
220 | 0,839|285714285....
 520
  160
   480
    320
     400
       80
       240
        160
```

$470=56.8+22$, $220=56.3+52$, $520=56.9+16$

Καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης μανθάνομεν ὅτι τὸ πρῶτον κατάλοιπον 22 ἔχει παράγοντα τὴν πρώτην δύναμιν τοῦ 2, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας ὅτι τὸ δεύτερον κατάλοιπον 52 ἔχει παράγοντα τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ 2, ἐκ δὲ τῆς τρίτης ὅτι τὸ τρίτον κατάλοιπον 16 ἔχει παράγοντα τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ 2. Διότι, τοῦ 47 μὴ ἔχοντος παράγοντα τὸν 2, ὁ 470 εἶναι διαιρετὸς μόνον διὰ 2· ἀλλὰ καὶ ὁ 56 εἶναι διαιρετὸς διὰ 2, ἑπομένως καὶ τὸ 56.8· ἄρα καὶ τὸ πρῶτον κατάλοιπον 22, ὅπερ εἶναι διαφορὰ τοῦ 470 καὶ τοῦ 56.8, εἶναι διαιρετὸν διὰ 2, καὶ μόνον διὰ 2· ἄρα *τὸ πρῶτον κατάλοιπον ἔχει παράγοντα μόνον τὴν πρώτην δύναμιν τοῦ 2*. Ἐκ δὲ τούτου ἕπεται ὅτι ὁ 220 εἶναι διαιρετὸς διὰ τῆς δευτέρας δυνάμεως τοῦ 2, ὄχι δὲ καὶ δι' ἀνωτέρας· ἀλλὰ καὶ ὁ 56 εἶναι διαιρετὸς διὰ τῆς δευτέρας δυνάμεως τοῦ 2· ἄρα καὶ τὸ δεύτερον κατάλοιπον 52, ὅπερ εἶναι διαφορὰ τοῦ 220 καὶ τοῦ 56.3, εἶναι διαιρετὸν διὰ τῆς δευτέρας δυνάμεως τοῦ 2, ὄχι δὲ καὶ δι' ἀνωτέρας. Ἄρα *τὸ δεύτερον κατάλοιπον ἔχει παράγοντα τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ 2, ὄχι δὲ καὶ ἀνωτέραν*. Ἐκ δὲ τούτου ἕπεται ὅτι ὁ 520 εἶναι διαιρετὸς διὰ τῆς τρίτης δυνάμεως τοῦ 2, ὄχι δὲ καὶ δι' ἀνωτέρας· ἀλλὰ καὶ ὁ 56 εἶναι διαιρετὸς διὰ τῆς τρίτης δυνάμεως τοῦ 2, ὄχι δὲ καὶ δι' ἀνωτέρας· ἄρα καὶ τὸ τρίτον κατάλοιπον 16, ὅπερ εἶναι διαφορὰ τοῦ 520 καὶ τοῦ 56.9, ἀνάγκη νὰ ἦναι διαιρετὸν διὰ τῆς τρίτης δυνάμεως τοῦ 2· ἄρα *τὸ τρίτον κατάλοιπον ἔχει παράγοντα τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ 2*.

Τώρα δὲ παρατηροῦμεν ὅτι ὅλα τὰ μετὰ ταῦτα κατάλοιπα ἀπὸ τοῦ τρίτου θέλουσιν ἔχει παράγοντα τοὐλάχιστον τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ 2. Διότι καὶ ὁ διαιρέτης 56 ἔχει τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ 2 παράγοντα καὶ οἱ διαιρετέοι 160, 480, κτλ· ἑπομένως καὶ τὰ κατάλοιπα.

Ἐκ δὲ τούτων ἕπεται ὅτι κανὲν τῶν ἀπὸ τοῦ τρίτου καταλοίπου καὶ ἑξῆς δὲν εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, μὲ τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον κατάλοιπον· διότι ταῦτα δὲν ἔχουσι παράγοντα τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ 2, ἀλλὰ κατωτέραν (56, Θεώρημα).

Μετὰ ταῦτα παρατηρητέον ὅτι μετὰ τὰς τρεῖς πρώτας διαιρέσεις τὸ κλάσμα $\frac{47}{56}$ τρέπεται εἰς τὸ ἰσοδύναμον $0,839\frac{16}{56}$. Ἀλλὰ τοῦ $\frac{16}{56}$ οἱ δύο ὅροι εἶναι διαιρετοὶ διὰ τῆς τρίτης δυνάμεως τοῦ 2, καὶ μετὰ τὴν διαίρεσίν των εὑρίσκεται $\frac{16}{56}=\frac{2}{7}$· ἄρα τὸ δεκαδικὸν τὸ ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{16}{56}$ θέλει εἶσθαι τὸ αὐτὸ καὶ τὸ ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{2}{7}$. Ἀλλὰ τὸ $\frac{2}{7}$ τρέπεται εἰς ἁπλοῦν ἐμπερίοδον (72)· ἄρα καὶ τὸ $\frac{16}{56}$ τρέπεται εἰς ἁπλοῦν ἐμπερίοδον τὸ 285714|285714.... Ὥστε δῆλον τώρα ὅτι *τὸ $\frac{47}{56}$ τρέπεται εἰς δεκαδικὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ 0,839 καὶ ἐξ ἁπλοῦ ἐμπεριόδου.*

Ἐὰν δ' ἔτι πληροφορηθῶμεν ὅτι τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς πρώτης περιόδου, ἤτοι ἐδῶ τὸ 4, ἀδύνατον νὰ ἦναι τὸ αὐτὸ καὶ τὸ ἀμέσως πρὸ τοῦ πρώτου αὐτῆς, ἤτοι ἐδῶ τὸ 9, τότε θέλει εἶσθαι φανερὸν ὅτι τὰ τρία πρῶτα ψηφία 839 δὲν εἶναι περιοδικά, ἀλλ' ὅτι ἡ περίοδος ἀρχίζει ἀπὸ τοῦ τετάρτου, τὸ δὲ θεώρημα ἐντελῶς ἀποδεδειγμένον. Τοῦτο δὲ τώρα εἶναι εὐαπόδεικτον. Διότι, ἂν ἦτον δυνατὸν τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς πρώτης περιόδου νὰ ἦναι τὸ αὐτὸ καὶ τὸ ἀμέσως πρὸ τῆς περιόδου, τὸ 9, τότε ἀνάγκη καὶ ὁ διαιρετέος, ὅστις διαιρούμενος διὰ τοῦ διαιρέτου 56 θέλει δώσει πηλίκον αὐτὸ τὸ ψηφίον, ἤτοι ὁ 240, νὰ ἦτον ἴσος μὲ τὸν τρίτον διαιρετέον, τὸν 520, καθότι ὁ διαιρέτης εἶναι ὁ αὐτὸς 56, τὸ κατάλοιπον εἶναι τὸ αὐτὸ 16, ὑποτίθεται δὲ καὶ τὸ πηλίκον τὸ αὐτὸ 9. Ἀλλ' οἱ διαιρετέοι αὐτοὶ ἀδύνατον νὰ ἦναι ἴσοι, διότι εἶναι δεκαπλάσιοι δύο καταλοίπων, ἅτινα εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ἀδύνατον νὰ ἦναι ἴσα· ἄρα ἀδύνατος καὶ ἡ ὑπόθεσις ὅτι τὰ πηλίκα ἤτοι τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ εἶναι τὰ αὐτά· ἄρα ἀδύνατον ν' ἀρχίζῃ ἡ περίοδος ἀπὸ τοῦ τρίτου ψηφίου· ἄρα τὰ τρία πρῶτα ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ δὲν εἶναι περιοδικά. Ἄρα τὸ δεκαδικὸν, εἰς ὃ τρέπεται τὸ $\frac{47}{56}$, εἶναι μικτὸν ἐμπερίοδον ἔχον τρία ψηφία μὴ περιοδικὰ, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δείκτης τοῦ ἐν τῷ παρονομαστῇ 2.

Ἀλλ' ὡσαύτως ἀποδεικνύεται τὸ θεώρημα καὶ ὅταν ὁ παρονομαστὴς ἔχῃ παράγοντα ἄλλην δύναμιν τοῦ 2, ἢ δύναμίν τινα τοῦ 5 ἢ τοῦ 2 καὶ τοῦ 5· ἄρα *κλάσμα κοινὸν ἀνάγωγον* κτλ.

Ἰδοὺ καὶ ἄλλα παραδείγματα.

$\frac{5}{6}=0{,}833\ldots \quad \frac{24}{35}=0{,}6857142|857\ldots \quad \frac{132}{225}=0{,}58666\ldots$

$\frac{145}{176}=\frac{145}{2^4.11}=0{,}82386363\ldots$

$\frac{435}{592}=\frac{435}{2^4.37}=0{,}7347972|972\ldots$

74. Ἀντιστρόφως πᾶν δεκαδικὸν κλάσμα δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κοινόν.

ά. Τὰ ἔχοντα εὐάριθμα ψηφία εἶναι ἤδη γνωστὸν πῶς τρέπονται εἰς ἰσοδύναμα κοινά. Π. χ. τὸ $0{,}784=\frac{784}{1000}=\frac{98}{125}$, τὸ $0{,}52=\frac{52}{100}=\frac{13}{25}$, τὸ $0{,}275=\frac{275}{1000}=\frac{11}{40}$, κτλ.

β΄. *Ἁπλοῦν δ' ἐμπερίοδον δεκαδικὸν ἰσοδυναμεῖ μὲ κοινὸν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὰ μιᾶς περιόδου ψηφία, παρονομαστὴν δὲ τόσα 9, ὅσα εἶναι τὰ τῆς περιόδου ψηφία.* Διότι δύναται πάντοτε νὰ θεωρῆται γινόμενον δύο παραγόντων, ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἀποτελουμένου ἀπὸ τῶν μιᾶς περιόδου ψηφίων καὶ δεκαδικοῦ κλάσματος ἰσοδυναμοῦντος μὲ κλασματικὴν μονάδα ἔχουσαν παρονομαστὴν τόσα 9, ὅσα εἶναι τὰ τῆς περιόδου ψηφία. Οἷον τὸ $0{,}2727\ldots=27\times0{,}0101\ldots$ Ἀλλὰ τὸ $0{,}0101\ldots\cancel{=27\times0{,}0101}\ldots$ εἴδομεν ἀνωτέρω (72) ὅτι ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ $\frac{1}{99}$· ἄρα $0{,}2727\ldots=27\times\frac{1}{99}=\frac{27}{99}=\frac{3}{11}$.

Ὡσαύτως τὸ $0{,}703703\ldots=703\times0{,}001001\ldots$ Ἀλλὰ τὸ $0{,}001001\ldots=\frac{1}{999}$. ἄρα $0{,}703703\ldots=703\times\frac{1}{999}$ $=\frac{703}{999}=\frac{19}{27}$.

Τὸ $0{,}571428|5714\ldots=571428\times0{,}000001000001\ldots$ $=571428\times\frac{1}{999999}=\frac{571428}{999999}=\frac{4}{7}$.

Τὸ $0{,}03960396\ldots = 396 \times \frac{1}{9999} = \frac{396}{9999} = \frac{4}{101}$.

Τὸ $0{,}999\ldots = \frac{9}{9} = 1$ ἔχει χρείαν ἐξηγήσεως.

75. γʹ. *Μικτὸν ἐμπερίοδον δεκαδικὸν ἰσοδυναμεῖ μὲ κοινὸν κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μὴ περιοδικῶν ψηφίων ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν μὴ περιοδικῶν καὶ τῆς πρώτης περιόδου, παρονομαστὴν δὲ τόσα ἐννέα, ὅσα εἶναι τὰ τῆς περιόδου ψηφία, ἔχοντα δεξιάτων τόσα μηδενικὰ, ὅσα εἶναι τὰ μὴ περιοδικὰ ψηφία.* Οἷον τὸ ἀνωτέρω

$0{,}839285714|285714\ldots = \frac{389285714-839}{999999000} =$

$\frac{839284875}{999999000} = \frac{47}{56}$, ἀφοῦ διαιρεθῶσιν οἱ δύο ὅροι διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν 17857125.

Διότι, ἐὰν μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ πρὸς δεξιὰν μεταξὺ τοῦ τελευταίου τῶν μὴ περιοδικῶν ψηφίου καὶ τοῦ πρώτου τῆς πρώτης περιόδου, ἤτοι μεταξὺ τοῦ 9 καὶ τοῦ 2, οὕτω τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται μὲν ἐπὶ 1000, τρέπεται δὲ εἰς μικτὸν ἀριθμὸν ἐκ τοῦ ἀκεραίου 839 καὶ τοῦ ἁπλοῦ ἐμπεριόδου $0{,}285714|285\ldots$ ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ $\frac{285714}{999999}$. Τώρα τρέπεται ὁ μικτὸς εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν πολλαπλασιζομένου τοῦ 839 ὄχι ἐπὶ 999999, ἀλλὰ ἐπὶ τὸν ἰσοδύναμόν του 1000000—1, καὶ ἔχομεν 839000000—839· προσθέτοντες δὲ καὶ τὸν ἀριθμητὴν 285714 εἰς τὸν 839000000 ἔχομεν ἀριθμητὴν 839285714—839, ὁ δὲ μικτὸς εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν κλασματικὸν $\frac{839285714-839}{999999}$. Ἀλλ' ὁ μικτὸς εἶναι χιλιοπλάσιος τοῦ δεκαδικοῦ $0{,}839285714\ldots$, ἑπομένως καὶ ὁ ἰσοδύναμος μὲ αὐτὸν κλασματικός· ἂν λοιπὸν διαιρεθῇ ὁ κλασματικὸς διὰ 1000, πολλαπλασιαζομένου τοῦ παρονομαστοῦ του ἐπὶ 1000, θέλει προκύψει τέλος πάντων

$$\frac{839285714-839}{999999000}=0,839285714285714....$$

Ἐπειδὴ δ' ἐκ τούτου ἐννοεῖται ὁ τρόπος τῆς ἀποδείξεως καὶ περὶ παντὸς ἄλλου μικτοῦ ἐμπεριόδου, διὰ τοῦτο εἶναι ἀποδεδειγμένον ὅτι *μικτὸν ἐμπερίοδον δεκαδικὸν κτλ.*

$$0,58666...\times 100=58,666...=58\frac{6}{9}=\frac{580-58+6}{9}$$

$$=\frac{586-58}{9},$$ διαιρέσει δὲ διὰ 100 ἔχομεν

$$0,5866...=\frac{586-58}{900}=\frac{528}{900}=\frac{132}{225}.$$

Ἰδὲ καὶ τἄλλα ἀνωτέρω παραδείγματα, ἔτι δὲ καὶ τὰ ἑξῆς, 0,34|523809|523... 0,52|027|027... 0,319|3067|306. ....

Σημ. Ἐὰν ὁμοῦ μὲ κλάσμα ἤθελεν εἶσθαι καὶ ἀκέραιος, οἷον $12\frac{5}{7}$, τρέπεται τὸ κλάσμα εἰς δεκαδικὸν καὶ πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς προτάσσεται ὁ ἀκέραιος· καὶ ἀντιστρόφως, τοῦ 32,543543 τρέπεται τὸ δεκαδικὸν εἰς κοινὸν κλάσμα καὶ προτάσσεται αὐτοῦ τὸ 32.

Περὶ συνεχῶν κλασμάτων.

76. Ἐὰν τοῦ κλάσματος $\frac{159}{493}$, οὗτινος οἱ ὅροι εἶναι μεγάλοι καὶ ἀσυνδιαίρετοι, διαιρέσωμεν αὐτοὺς διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ 159, καὶ γράψωμεν τὸ πηλίκον $3+\frac{16}{159}$ τοῦ παρονομαστοῦ ὑπὸ τὸ πηλίκον 1 τοῦ ἀριθμητοῦ, προκύπτει

$\frac{159}{493}=\frac{1}{3+\frac{16}{159}}$. Καὶ πάλιν, ἐὰν διαιρέσωμεν τοῦ $\frac{16}{159}$ τοὺς δύο ὅρους διὰ 16, καὶ γράψωμεν τὰ πηλίκα τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἄλλο, προκύπτει $\frac{159}{493}=\frac{1}{3+\frac{16}{159}}=\frac{1}{3+\frac{1}{9+\frac{15}{16}}}$.

Τελευταῖον διαιροῦντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{15}{16}$ διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ 15 κτλ, ἔχομεν

$$\frac{159}{932}=\frac{1}{3+\frac{16}{159}}=\frac{1}{3+\cfrac{1}{9+\frac{15}{16}}}=\frac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\frac{1}{15}}}}$$

Ἐκ τούτου βλέπει τις ὅτι διὰ τῆς τοιουτοτρόπου διαδοχικῆς διαιρέσεως κοινὸν κλάσμα τρέπεται εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον *κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν* 1, *παρονομαστὴν δὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν* 1, *παρονομαστὴν δὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν* 1, *παρονομαστὴν δὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν κτλ.* Τὸ τοιουτόμορφον κλάσμα ὀνομάζεται *συνεχές*, διὰ δὲ τὸ σχῆμά του δύναται νὰ ὀνομασθῇ *κλιμακωτόν*.

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι ἡ μορφὴ τοῦ συνεχοῦς κλάσματος εἶναι ἤδη γνωστή, ὅτι ἀριθμηταὶ τῶν μερικῶν κλασμάτων $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{15}$ εἶναι ἡ 1, παρονομασταὶ δὲ τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τοῦ 493 διὰ 159, τοῦ 159 διὰ τοῦ καταλοίπου 16, τοῦ 16 διὰ τοῦ δευτέρου καταλοίπου 15, τοῦ 15 διὰ τοῦ τρίτου καταλοίπου 1, ἤτοι τὰ κατὰ σειρὰν πηλίκα τῆς πράξεως, δι' ἧς εὑρίσκεται ὁ *μ. κ. δ.* τοῦ 493 καὶ τοῦ 159, δυνάμεθα νὰ τρέπωμεν κλάσμα κοινὸν εἰς συνεχὲς οὕτω· *Πρῶτον ἐκτελοῦμεν τὴν πρὸς εὕρεσιν τοῦ* μ.κ.δ. *τῶν δύο ὅρων τοῦ κλάσματος πρᾶξιν, ἔπειτα θέτομεν τὰ πηλίκα ταύτης τῆς πράξεως κατὰ σειρὰν παρονομαστὰς ὑπὸ τὴν* 1, *καὶ γράφομεν μὲ τὸ* + *τὸ δεύτερον προκύπτον κλάσμα εἰς τὸν παρονομαστὴν τοῦ πρώτου, τὸ τρίτον εἰς τὸν τοῦ δευτέρου κτλ.* Οὕτω θέλομεν ἔχει τὸ συνεχὲς τὸ ἰσοδύναμον μὲ τὸ κοινὸν κλάσμα.

Ἰδοὺ καὶ παραδείγματα πρὸς γύμνασιν.

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} & 3 & 9 & 1 & 15, \\ \hline 493 & 159 & 16 & 15 & 1 \\ 16 & 15 & 1 & 0 & \end{array} \qquad \text{ὅθεν} \qquad \frac{159}{493}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15}}}}.$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c}
 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2, \\
149 & 65 & 19 & 8 & 3 & 2 & 1 \\
19 & 8 & 3 & 2 & 1 & 1 &
\end{array} \quad \text{ὅθεν} \quad \frac{65}{149}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}.$$

Ὁ δὲ κλασματικὸς ὁ μεγαλήτερος τῆς μονάδος τρέπεται πρῶτον εἰς μικτὸν, καὶ ἔπειτα τὸ κλάσμα εἰς συνεχὲς, οἷον $\frac{829}{347}=2+\frac{135}{347}$,

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c}
 & 2 & 1 & 1 & 3 & 19, \\
347 & 135 & 77 & 58 & 19 & 1 \\
77 & 58 & 19 & 1 & 0 &
\end{array} \quad \text{ὅθεν} \quad \frac{829}{347}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\frac{1}{19}}}}}$$

Τὰ κλάσματα $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{15}$ ὀνομάζονται *συστατικὰ*, οἱ δὲ παρονομαςαὶ τῶν συςατικῶν λέγονται *ἀκέραια πηλίκα*, ἕκαστος δὲ παρονομαςὴς ὁμοῦ μὲ τὸ λοιπὸν τοῦ συνεχοῦς κλάσματος, οἷον $1+\frac{1}{15}$, $9+\cfrac{1}{1+\frac{1}{15}}$, κτλ *πλῆρες πηλίκον*.

77. Ἀντιστρόφως, τὸ συνεχὲς $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\frac{1}{15}}}}$ δύναται νὰ ἐξανατραπῇ εἰς κοινὸν κλάσμα κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. *Πρῶτον τὸ τελευταῖον πλῆρες πηλίκον* $1+\frac{1}{15}$ *τρέπεται εἰς κλασματικὸν* $\frac{16}{15}$, *διὰ τούτου διαιρεῖται ὁ ἀριθμητὴς* 1 *καὶ ἔχομεν* $\cfrac{1}{1+\frac{1}{15}}=\frac{15}{16}$. *Ἔπειτα τὸ* $9+\frac{15}{16}$ *τρέπεται εἰς κλασματικὸν* $\frac{159}{16}$, *διὰ τούτου διαιρεῖται ὁ ἀριθμητὴς* 1

καὶ ἔχομεν $\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15}}}=\frac{16}{159}$. *Τελευταῖον τρέπεται τὸ πλῆρες πηλίκον* $3+\frac{16}{159}$ *εἰς τὸν κλασματικὸν* $\frac{493}{159}$, *διὰ τούτου διαιρεῖται ὁ ἀριθμητὴς* 1 *καὶ ἔχομεν* $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15}}}}=\frac{159}{493}$.

Ὡσαύτως τρέπεται εἰς κοινὸν κλάσμα καὶ μέρος τοῦ συνεχοῦς, οἷον τὸ $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9}}$, τὸ $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1}}}$, καὶ εὑρίσκεται τὸ πρῶτον $=\frac{9}{28}$, καὶ τὸ δεύτερον $=\frac{10}{31}$.

Κλάσμα κοινὸν, οἷον τὸ $\frac{1}{3}$, $\frac{9}{28}$, $\frac{10}{31}$ καὶ εἴτι τοιοῦτον, προερχόμενον ἐκ μέρους συνεχοῦς κλάσματος, οἷον τοῦ $\frac{1}{3}$, τοῦ $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9}}$, τοῦ $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1}}}$ καὶ τῶν τοιούτων, ὀνομάζεται *ἡγμένον*.

Τὰ ἡγμένα εἶναι χρήσιμα διὰ τὰς ἰδιότητάς των· διὰ τοῦτο ἐκθέτομεν αὐτῶν τινας πρῶτον, καὶ ἔπειτα λέγομεν περὶ τῆς χρήσεως τῶν ἡγμένων.

78 Τοῦ $\frac{65}{149}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}$

τὰ ἡγμένα προκύπτουσιν ἐκ τῶν $\frac{1}{2}$, $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}$, $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}$ κτλ· ἐὰν τραπῶσι ταῦτα εἰς κοινὰ κλάσματα ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν, καὶ εὑρίσκονται

$\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{7}{16}, \frac{17}{39}, \frac{24}{55}, \frac{65}{146}$, ὧν τελευταῖον εἶναι τὸ ἀρχικὸν κοινὸν κλάσμα. Ἀλλ' ἀπὸ τοῦ τρίτου καὶ ἔμπρὸς σχηματίζεται ἁπλούστερα ἕκαστον ἐκ τῶν δύο πρὸ αὐτοῦ, ἤτοι τοῦ *τρίτου γίνεται ὁ μὲν ἀριθμητὴς, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς* 3 *τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ τρίτον ἀκέραιον πηλίκον* 2 *καὶ προστεθῇ εἰς τὸ γινόμενον ὁ ἀριθμητὴς* 1 *τοῦ πρώτου, ὁ δὲ παρονομαστὴς, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστὴς* 7 *τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ τρίτον ἀκέραιον πηλίκον* 2 *καὶ εἰς τὸ γινόμενον προστεθῇ ὁ παρονομαστὴς* 2 *τοῦ πρώτου.* Ὡσαύτως τὸ τέταρτον γίνεται ἐκ τοῦ τρίτου καὶ τοῦ δευτέρου, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸ τέταρτον ἀκέραιον πηλίκον 2 καὶ εἰς τὰ γινόμενα προστεθῶσιν οἱ δύο ὅροι τοῦ δευτέρου, ἀριθμητὴς εἰς ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴς εἰς παρονομαστὴν κτλ. Τοῦτο φαίνεται εἰς τὰ ἀνωτέρω καὶ ἀληθεύει περὶ ὁποιωνδήποτε ἄλλων· ἀλλὰ τὴν τούτων ἀπόδειξιν δὲν κρίνομεν ἀναγκαῖον νὰ ἐκθέσωμεν ἐνταῦθα διὰ τὸ πολύπλοκόν της, παρατηροῦμεν δὲ μόνον ὅτι κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον προκύπτουσι τὰ αὐτὰ ἡγμένα, ἅπερ καὶ κατὰ τὸν ἐν ἀρ. 77 ἀποδεδειγμένον.

79. Θ. *Τὸ κοινὸν κλάσμα* $\frac{65}{149}$ *εἶναι τοῦ μὲν ἑτέρου δύο παρακειμένων ἡγμένων μεγαλήτερον, τοῦ δὲ ἄλλου μικρότερον, ἤτοι μικρότερον τοῦ πρώτου, μεγαλήτερον τοῦ δευτέρου, μικρότερον τοῦ τρίτου, μεγαλήτερον τοῦ τετάρτου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.* Διότι τὸ πρῶτον ἡγμένον $\frac{1}{2}$ ἔχον παρονομαστὴν μικρότερον τοῦ συνεχοῦς κατὰ $\frac{1}{3+\frac{1}{2}}$ κτλ. εἶναι μεγαλήτερον αὐτοῦ, ἑπομένως μεγαλήτερον καὶ τοῦ $\frac{65}{149}$ τοῦ ἰσοδυνάμου μὲ τὸ συνεχές. Τὸ δὲ δεύτερον $\frac{3}{7}$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{1}{2+\frac{1}{3}}$, ὅπερ εἶναι μικρότερον τοῦ συνεχοῦς διότι τὸ $\frac{1}{3}$ ἔχον παρονομαστὴν 3 μικρότερον τοῦ ὅλου παρονομαστοῦ $3+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$ κτλ. εἶναι μεγαλήτερον τοῦ $\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$ κτλ.

ἄρα ὁ παρονομαστὴς $2+\frac{1}{3}$ τοῦ $\frac{1}{2+\frac{1}{3}}$ εἶναι μεγαλήτερος τοῦ ὅλου παρονομαστοῦ $2+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}$ κτλ. ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{1}{2+\frac{1}{3}}$ ἤτοι τὸ δεύτερον ἡγμένον $\frac{3}{7}$ εἶναι μικρότερον τοῦ ὅλου συνεχοῦς κλάσματος, ἤτοι τοῦ $\frac{65}{149}$. Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τοῦτον τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ὅτι τὸ τρίτον ἡγμένον εἶναι μεγαλήτερον τοῦ $\frac{65}{149}$, τὸ δὲ τέταρτον μικρότερον, ἕως εἰς τὸ τελευταῖον, ὅπερ εἶναι αὐτὸ τὸ $\frac{65}{149}$.

Σημ. Κλασματικὸς δὲ μεγαλήτερος τῆς μονάδος, οἷος ὁ $\frac{829}{347}$ τοῦ ἀριθ. 76, εἶναι μεγαλήτερος τοῦ ἀκεραίου μέρους 2, μικρότερος τοῦ πρώτου κλασματικοῦ ἡγμένου $\frac{5}{2}$, μεγαλήτερος τοῦ δευτέρου κτλ. Ἂν δὲ παραμεληθῇ τὸ ἀκέραιον καὶ πρῶτον θεωρηθῇ τὸ κλασματικὸν ἡγμένον, τότε τὰ περιττῆς θέσεως, τὸ πρῶτον, τὸ τρίτον, τὸ πέμπτον κτλ εἶναι μεγαλήτερα, τὰ δὲ ἀρτίας θέσεως, τὸ δεύτερον, τὸ τέταρτον κτλ εἶναι μικρότερα τοῦ ἰσοδυνάμου μὲ τὸ συνεχὲς κοινοῦ κλάσματος.

80. Θ. *Ἡ διαφορὰ δύο ὁποιωνδήποτε παρακειμένων ἡγμένων εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὴν μονάδα, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος ἡγμένων.*

Τοῦτο γίνεται φανερὸν, ἐὰν τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα τὰ ἡγμένα καὶ ἀφαιρεθῇ τὸ ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου. Οὕτως εὑρίσκεται ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{3}{7}$ εἶναι $\frac{1}{14}$, ἡ τοῦ $\frac{3}{7}$ καὶ $\frac{7}{16}$ εἶναι $\frac{1}{112}$, κτλ.

Σημ. ά. Ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἀφαιροῦνται τὰ ἀρτίας θέσεως ἀπὸ τῶν τῆς περιττῆς θέσεως, ἡ διαφορὰ θέλει εἶσθαι θετικὴ, διότι ἀφαιροῦνται μικρότερα ἀπὸ μεγαλητέρων· ἂν δ' ἀφαιρῶνται τὰ περιττῆς ἀπὸ τῶν τῆς ἀρτίας θέσεως, τότε ἡ διαφορὰ θέλει εἶσθαι ἀντιθετική. Ἂν δ' ἀφαιρῆται ἕκαστον ἀπὸ τοῦ προηγουμένου του, τὸ δεύτερον ἀπὸ τοῦ πρώτου, τὸ τρίτον ἀπὸ τοῦ δευτέρου κτλ, ἡ διαφορὰ εἶναι ἐναλλὰξ θετικὴ καὶ ἀντιθετικὴ, κτλ.

Σημ. β'. Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ δύο παρακειμένων ἡγμένων εἶναι κλασματικὴ μονὰς ἔχουσα παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἡγμένων, δῆλον ὅτι ἡ διαφορὰ ἑκάστου ἡγμένου καὶ τοῦ ἰσοδυνάμου μὲ τὸ συνεχὲς κοινοῦ κλάσματος εἶναι ἔτι μικρότερα. Π. χ. τοῦ $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{3}{7}$ ἡ διαφορὰ εἶναι $\frac{1}{14}$· ἐπειδὴ δὲ τὸ $\frac{65}{149}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2}$ καὶ μεγαλήτερον τοῦ $\frac{3}{7}$, διαφέρει ἑκατέρου ὀλιγώτερον παρὰ $\frac{1}{14}$, ἢ τὸ $\frac{1}{2}$ εἶναι μεγαλήτερον, τὸ δὲ $\frac{3}{7}$ μικρότερον τοῦ $\frac{65}{149}$ μεῖον $\frac{1}{14}$. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ τοῦ $\frac{3}{7}$ καὶ τοῦ $\frac{7}{16}$ εἶναι $\frac{1}{112}$, τὸ $\frac{3}{7}$ εἶναι μικρότερον, τὸ δὲ $\frac{7}{16}$ μεγαλήτερον τοῦ $\frac{65}{149}$ μεῖον $\frac{1}{112}$.

81. Θ. *Πᾶν ἡγμένον εἶναι ἀνάγωγον κλάσμα, ἤτοι ἔχει ἀσυνδιαιρέτους τοὺς ὅρους του.* Π. χ. τὸ $\frac{7}{16}$ ἔχει ἀσυνδιαιρέτους τοὺς ὅρους του. Διότι, ἂν οἱ ὅροι του ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην δ, καὶ ζητηθῇ ἡ διαφορὰ αὐτοῦ τοῦ ἡγμένου καὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ (ἢ καὶ τοῦ μετ' αὐτὸ), ἀλλὰ σημειωθῶσι μόνον

αἱ πράξεις, ἔχομεν $\frac{3.16-7.7}{7.16}$, ἧς ὁ ἀριθμητὴς 3.16—7.7 εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι εἶναι ἴσος μὲ τὴν 1 θετικὴν ἢ ἀντιθετικήν. Ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν οἱ ὅροι τοῦ $\frac{7}{16}$ ἔχουσι κοινόν τινα διαιρέτην δ· ἄρα καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτῶν 3.16 καὶ 7.7 πρέπει νὰ ἦναι διαιρέσιμα διὰ δ, ἐπομένως καὶ ἡ διαφορά των 3.16—7.7. Ἀλλ' ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι 1 καὶ δὲν εἶναι διαιρετὴ διὰ δ· ἄρα τὸ 3.16καὶ τὸ 7.7 δὲν ἔχουσι κοινὸν διαιρετην· ἄρα οἱ ὅροι τοῦἡγμένου $\frac{7}{16}$ εἶναι ἀσυνδιαίρετοι.

Σημ. Ἐκ τούτου δῆλον ὅτι, ἂν εἰς συνεχὲς τραπῇ κλάσμα τι μὲ συνδιαιρετοὺς ὅρους, καὶ ἔπειτα τὸ συνεχὲς ἐξανατραπῇ εἰς κοινὸν κλάσμα, τοῦτο ὡς ἀνάγωγον δὲν θέλει ἔχει τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου, ἂν καὶ ἰσοδύναμον μὲ αὐτό, ἀλλὰ τὰ πηλίκα αὐτῶν διῃρημένων διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου των, ἅτινα εἶναι ἀσυνδιαίρετα. Π. χ. τὸ $\frac{348}{924}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{9}}}}}$, τὸ δὲ συνεχὲς ἐξανατρέπεται εἰς τὸ ἀνάγωγον $\frac{29}{77}$, ὅπερ προκύπτει καὶ ἂν διαιρεθῶσιν οἱ δύο ὅροι τοῦ $\frac{348}{924}$ διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν 12.

82. Θ. *Πᾶν ἡγμένον προσεγγίζει εἰς τὸ ἰσοδύναμον μὲ τὸ συνεχὲς κλάσμα πλειότερον παντὸς ἄλλου προηγουμένου.* Π. χ. τὸ $\frac{7}{16}$ προσεγγίζει εἰς τὸ $\frac{65}{149}$ πλειότερον τοῦ $\frac{3}{7}$. Τοῦτο γίνεται φανερὸν, ἂν εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τοῦ $\frac{65}{149}$ καὶ τοῦ $\frac{7}{16}$, καὶ ἡ διαφορὰ τοῦ $\frac{65}{149}$ καὶ τοῦ $\frac{3}{7}$, καὶ παραβληθῶσιν αἱ δύο διαφοραί. Ἡ πρώτη διαφορὰ εἶναι $\frac{3}{2384}$, ἡ δευτέρα εἶναι $\frac{8}{1043}$. Ἀλλ' ἡ πρώτη εἶναι μικροτέρα τῆς δευτέρας, καὶ διότι ὁ ἀριθμητής της εἶναι μικρότερος τοῦ τῆς δευτέρας, καὶ διότι ὁ παρονομαστής της εἶναι μεγαλήτερος τοῦ τῆς δευτέρας· ἄρα τὸ $\frac{7}{16}$ προσεγγίζει εἰς τὸ $\frac{65}{149}$ πλειότερον τοῦ προηγουμένου του $\frac{3}{7}$· ἐπομένως καὶ παντὸς ἄλλου προηγουμένου. Ὡσαύτως βεβαιοῦταί τις ὅτι τὸ ἀκόλουθον τοῦ $\frac{7}{16}$ ἡγμένον $\frac{17}{39}$ εἶναι ἔτι πλησιέστερον εἰς τὸ $\frac{65}{149}$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Σημ. Ὅσον μακρύτερα τοῦ πρώτου ἡγμένου εἶναι ἄλλο τι ἡγμένον, ἢ ἄλλως ὅσον πλησιέστερα εἰς τὸ ἰσοδύναμον κλάσμα μὲ τὸ συνεχὲς εἶναι, τόσον μεγαλητέρους ἔχει τοὺς ὅρους του, καὶ τόσον πλειότερον τὸ ποσόν του προσεγγίζει εἰς τὸ ποσὸν τοῦ ἰσοδυνάμου μὲ τὸ συνεχές. Καὶ τὰ μὲν περιττῆς θέσεως, μεγαλήτερα ὄντα (79 σημ.), προβαίνουσιν ἐλαττούμενα καὶ προσεγγίζοντα ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον εἰς τὸ ἰσοδύναμον μὲ τὸ συνεχές· τὰ δὲ ἀρτίας θέσεως, μικρότερα ὄντα, προβαίνουσιν αὐξάνοντα καὶ προσεγγίζοντα ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον. Ἰδοὺ δὲ διὰ τῆς θέσεως ἐξεικονισμένη ἡ προσέγγισις τῶν ἡγμένων.

$$\frac{3}{7} \quad \frac{17}{39} \quad \frac{65}{149} \quad \frac{24}{55} \quad \frac{7}{16} \quad \frac{1}{2}$$

Ἀριστερὰ τοῦ $\frac{65}{149}$ εἶναι τὰ μικρότερα, δεξιὰ τὰ μεγαλήτερα· τὸ $\frac{3}{7}$ εἶναι τὸ μικρότατον πάντων, τὸ δὲ $\frac{1}{2}$ εἶναι τὸ μέγιστον.

Διὰ δὲ ταύτην τὴν ἰδιότητα τὰ ἡγμένα δύνανται νὰ ἐπονομάζωνται καὶ *προσιόντα* ἢ *προσχωροῦντα*.

83. Θ. *Πᾶν ἡγμένον προσεγγίζει εἰς τὸ ἰσοδύναμον κλάσμα μὲ τὸ συνεχὲς πλειότερον καὶ παντὸς ἄλλου κλάσματος ἔχοντος παρονομαστὴν μικρότερον παρὰ τὸν τοῦ ἡγμένου.* Διότι, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{a}{\beta}$ προσεγγίζει εἰς τὸ $\frac{65}{149}$ πλειότερον τοῦ $\frac{3}{7}$ ἢ τοῦ $\frac{7}{16}$, ὄντος τοῦ $\frac{65}{149}$ μεταξὺ τοῦ $\frac{3}{7}$ καὶ τοῦ $\frac{7}{16}$, ἀνάγκη καὶ τὸ $\frac{a}{\beta}$ ὡς πλησιέστερον εἰς τὸ $\frac{65}{149}$ νὰ ἦναι μεταξὺ τῶν αὐτῶν, ἤτοι μεγαλήτερον τοῦ ἑτέρου καὶ μικρότερον τοῦ ἄλλου. Ὥστε ἡ διαφορὰ τοῦ $\frac{a}{\beta}$ καὶ τοῦ $\frac{3}{7}$ ἤτοι ἡ $\frac{7a-3\beta}{7\beta}$ ἀνάγκη νὰ ἦναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς $\frac{1}{7.16}$ τῶν δύο ἡγμένων $\frac{3}{7}$ καὶ $\frac{7}{16}$. Καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς $7a-3\beta$ εἶναι *τοὐλάχιστον* ἴσος μὲ τὴν μονάδα, διότι εἶναι διαφορὰ ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἀνάγκη ὁ 7β νὰ ἦναι μεγαλήτερος τοῦ 7.16 ἤτοι ὁ $\beta>16$, ἵνα ἡ διαφορὰ $\frac{7a-3\beta}{7\beta}$ ἦναι μικροτέρα τῆς $\frac{1}{7.16}$, ὅ ἐστιν ἵνα προσεγγίζῃ τὸ $\frac{a}{\beta}$ πλειότερον τοῦ $\frac{3}{7}$. Λοιπὸν κλάσμα προσεγγίζον εἰς τὸ $\frac{65}{149}$ πλειότερον τοῦ ἡγμένου $\frac{3}{7}$ ἀνάγκη νὰ ἔχῃ παρονομαστὴν μεγαλήτερον, ὄχι

μόνον τοῦ παρονομαστοῦ 7 αὐτοῦ τοῦ ἡγμένου, ἀλλὰ καὶ τοῦ ἀκολούθου του 16. Λοιπὸν *πᾶν ἡγμένον προσεγγίζει* κτλ.

84. Ἐπειδὴ κλάσμα μὲ ὅρους μεγάλους καὶ ἀσυνδιαιρέτους δὲν ἔχει ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ μικροτέρους ὅρους (53. 6.), καὶ ἐπειδὴ τὰ μὲ μικροὺς ὅρους παρέχουσι πολλὴν εὐκολίαν καὶ εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς καὶ εἰς τὸ νὰ νοῶνται, τὰ δὲ μὲ μεγάλους ὅρους τὸ ἐναντίον φέρουσι δυσκολίαν, διὰ ταῦτα προτιμᾶται συνήθως κλάσμα μὲ μικροὺς ὅρους ἀντ' ἄλλου μὲ μεγάλους ὅρους, ἂν καὶ ὄχι ἰσοδύναμον μὲ αὐτὸ, ἀλλὰ προσεγγίζον μόνον κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον, ἤτοι ὂν ὀλίγον μεγαλήτερον ἢ μικρότερον. Κατὰ ταύτην τὴν περίπτωσιν εἶναι εἰς χρῆσιν τὰ ἡγμένα τῶν συνεχῶν κλασμάτων. Ἂν θέλωμεν κλάσμα μὲ μικροὺς ὅρους προσεγγίζον εἰς τὸ $\frac{1143}{2684}$, ζητοῦμεν τὸν μ.κ.δ. τῶν δύο ὅρων τούτου πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀκεραίων πηλίκων, καὶ ἔχομεν

	2	2	1	6	1	4	10
2684	1143	398	347	51	41	10	1
398	347	51	41	10	1	0	

Ἔπειτα χωρὶς νὰ μορφώσωμεν τὸ συνεχὲς κλάσμα σχηματίζομεν τὰ δύο πρῶτα ἡγμένα ὡς ἐν ἀρ. 77, τὰ δὲ λοιπὰ ὡς ἐν 78, καὶ ἔχομεν

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{20}{47},\ \frac{23}{54},\ \frac{112}{263},\ \frac{1143}{2684}.$$

Ἐὰν θέλῃ τις μικρότερον τοῦ δεδομένου, μεταχειρίζεταί τι τῶν ἐν ἀρτίᾳ θέσει $\frac{2}{5}$, $\frac{20}{47}$ κτλ· ἐὰν δε μεγαλήτερον, τῶν ἐν περιττῇ θέσει $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{7}$ κτλ. Τὸ $\frac{20}{47}$, ὅπερ ἔχει πολὺ μικροτέρους ὅρους τοῦ $\frac{1143}{2684}$, γνωρίζομεν ὅτι διαφέρει αὐτοῦ ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{47.54}=\frac{1}{2538}$, μικρότερον ὄν· τὸ δὲ $\frac{23}{54}$, τὸ ἔχον ὀλίγον μεγαλητέρους ὅρους τοῦ $\frac{20}{47}$, εἶναι μεγαλήτερον τοῦ $\frac{1143}{2684}$

ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{54.263}=\frac{1}{14202}$. Ἔχομεν δὲ βεβαιότητα ὅτι τὸ $\frac{23}{54}$ προσεγγίζει εἰς τὸ $\frac{1143}{2684}$ πλειότερον παντὸς ἄλλου κλάσματος μὲ μικρότερον παρονομαστήν.

Σημ. Δύναταί τις νὰ τρέψῃ τὸ κοινὸν καὶ εἰς δεκαδικὸν κλάσμα καὶ νὰ μεταχειρισθῇ μέρος αὐτοῦ προσεγγίζον εἰς τὸ κοινόν· ἀλλ' ἁπλούστερον ἡγμένου τινὸς δεκαδικὸν δὲν προσεγγίζει πλειότερον αὐτοῦ. Διὰ τοῦτο μάλιστα καὶ δεκαδικὰ πολυψήφια τρέπουσιν εἰς συνεχῆ καὶ μεταχειρίζονται ἡγμένον τι, διότι τοῦτο ἔχον μικροὺς ὅρους προσεγγίζει πολὺ περισσότερον. Τοιοῦτον προτείνομεν πρὸς γύμνασιν τὸ $\frac{314159}{100000}$ ἢ $3\,\frac{14159}{100000}$, ὅπερ παριστάνει κατὰ προσέγγισιν τὸν λόγον ἑκάστης περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρόν της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΚΑΙ ΤΡΙΤΗΣ ΔΥΝΑΜΕΩΣ ΚΑΙ ΡΙΖΗΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Α'. ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ.

Διάκρισις τῶν ἀριθμῶν εἰς τετραγώνους καὶ μή, καὶ διάφορα εἴδη τετραγωνικῶν ῥιζῶν.

85. Εἶναι ἤδη γνωστὸν (ἀρ. 27 καὶ Π. Α. 89) ὅτι ἀριθμός τις λέγεται *δευτέρα δύναμις* ἄλλου ἢ *τετράγωνον* αὐτοῦ, ἐὰν νοῆται γινόμενον δύο ἴσων παραγόντων μὲ τὸν ἄλλον ἢ γινόμενον τοῦ ἄλλου ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος· καὶ ἀντιστρόφως, ὁ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιασθεὶς ἐφ' ἑαυτὸν παράγει ἄλλον ἀριθμόν, καλεῖται *δευτέρα ῥίζα* ἢ *τετραγωνικὴ ῥίζα* τοῦ ἄλλου. Ὥστε ὁ τετράγωνος γίνεται ἐκ τῆς ῥίζης του, ὅπως αὐτὴ γίνεται ἐκ τῆς μονάδος της, καὶ ἀντιστρόφως, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι τοιαύτη πρὸς τὸ τετράγωνόν της, ὁποία πρὸς αὐτὴν εἶναι ἡ μονάς της.

Σημ. Τὸ ὄνομα τετράγωνον εἶναι εἰλημμένον ἐκ τῆς Γεωμετρίας, ὁ δὲ ἄλλος ἀριθμὸς ὠνομάσθη ῥίζα, καθότι ἐθεωρήθη ὅτι ἐξ αὐτοῦ ἀναφύεται τὸ τετράγωνον καὶ ἄνευ αὐτοῦ ἀδύνατον τὸ τετράγωνον νὰ ὑπάρχῃ.

86. Πρῶτον μὲν εἶναι εὔκολον νὰ πληροφορηθῶμεν ὅτι *τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν οἱ μὲν εἶναι τετράγωνοι ἄλλων ἀκεραίων, οἱ δὲ πλεῖστοι δὲν εἶναι τετράγωνοι οὐδενὸς ἀριθμοῦ*. Διότι, ἐάν τις πολλαπλασιάσῃ ἐφ' ἑαυτὸν ἕκαστον τῶν ἀκεραίων 1, 2, 3, κτλ, οὕτω θέλει ἔχει τοὺς τετραγώνους ὅλων τῶν κατὰ σειρὰν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἤτοι 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 κτλ· οἱ δὲ μεταξὺ τούτων ὄντες ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 2, 3, 5, 6, 7, 8, κτλ, οἵτινες εἶναι οἱ πλεῖστοι, δῆλον ὅτι τετράγωνοι ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀδύνατον νὰ ἦναι. Ἀλλ' οὐδὲ ἄλλου μὴ ἀκεραίου ἀριθμοῦ δύναται νὰ ἦναι τετράγωνος ἕκαστος αὐτῶν. Διότι πᾶς ἄλλος μὴ ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται πάντοτε νὰ παρασταθῇ ὡς κλασματικός, καὶ μάλιστα μὲ ἀσυνδιαιρέτους τοὺς ὅρους του, ἀφοῦ διαιρεθῶσιν αὐτοὶ διὰ τοῦ μ. κ. δ. των· τοιούτου δὲ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνον ἀδύνατον νὰ ἦναι ἀκέραιος ἀριθμός. Οἷον, ἐὰν ὁ τοιοῦτος κλασματικὸς σημειωθῇ γενικῶς δἰ $\frac{a}{b}$, τὸ τετράγωνόν του θέλει εἶσθαι $\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}$, οὗτινος ὁ ἀριθμητὴς a^2 δὲν εἶναί ποτε διαιρετὸς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ b^2, ὡς τοῦ a^2 καὶ τοῦ b^2 ὄντων ἀσυνδιαιρέτων (56, Πόρ. ε.), ἐνῷ, ἵνα ἦναι διαιρετὸς ὁ a^2 διὰ b^2, ἀνάγκη ὄχι μόνον νὰ ἦναι συνδιαιρετοὶ αὐτοί, ἀλλὰ καὶ νὰ ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην τὸν b^2. Ἄρα ὁ $\frac{a^2}{b^2}$, ἤτοι τὸ τετράγωνον παντὸς μὴ ἀκεραίου ἀριθμοῦ, δὲν εἶναί ποτε ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐκ τούτων λοιπὸν συμπεραίνεται ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἀκέραιος Α, ὅστις δὲν εἶναι τετράγωνος ἄλλου ἀκεραίου ἀριθμοῦ, δὲν δύναται νὰ ἦναι οὐδενὸς ἄλλου μὴ ἀκεραίου ἀριθμοῦ τετράγωνος. Διότι τὸ τετράγωνον μὴ ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἀδύνατον νὰ ἦναι ἀκέραιον, ἐνῷ ὁ Α ἦναι ἀκέραιος, καὶ ἐπομένως διάφορος τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ μὴ ἀκεραίου. Ἄρα *τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν* κτλ.

Σημ. Κατωτέρω θέλομεν ἰδεῖ ὅτι καὶ τῶν ἄλλων τῶν μὴ ἀκεραίων ἀριθμῶν οἱ μὲν εἶναι τετράγωνοι ἄλλων, οἱ δὲ ὄχι.

87. Ἔπειτα *πᾶς τετράγωνος θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο ῥίζας τετραγωνικὰς, ἴσας μὲν κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων, ἀντισήμους δέ.* Διότι, ἐὰν τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ Α ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἦναι ὁ ἀριθμὸς a, τοῦ $+A$ τετραγωνικὴ ῥίζα δῆλον ὅτι εἶναι καὶ ὁ $+a$, καὶ ὁ $-a$, καθότι ἑκάτερος αὐτῶν πολλλαπλασιασθεὶς ἐφ' ἑαυτὸν παράγει τὸ $+A$. Ἀλλ' ὁ ἔχων τὴν ἰδιότητα ταύτην ἀριθμὸς εἶναι τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $+A$· ἄρα *πᾶς τετράγωνος* κτλ.

Τὸ ἐναντίον δὲ, *πᾶς ἀντιθετικὸς ἀριθμὸς δὲν εἶναι τετράγωνος οὐδενὸς ἀριθμοῦ.* Διότι οὐδέτερος ἀριθμὸς οὔτε θετικὸς οὔτε ἀντιθετικὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐφ' ἑαυτὸν παράγει ποτὲ ἀντιθετικὸν ἀριθμόν· ὥστε ὁ ἀντιθετικὸς ἀδύνατον νὰ ἦναι γινόμενον ἀριθμοῦ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος, ἤτοι τετράγωνος ἀριθμοῦ τινος.

88. Ἀριθμὸς μὴ τετράγωνος θετικὸς κεῖται πάντοτε μεταξὺ δύο ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον προσεγγιζόντων εἰς αὐτὸν τετραγώνων, τοῦ μὲν μικροτέρου αὐτοῦ, τοῦ δὲ μεγαλητέρου. Οἷον ὁ 20 πρῶτον μὲν κεῖται μεταξὺ τοῦ 16 καὶ 25, τῶν τετραγώνων τῶν 4 καὶ 5, οἵτινες διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων κατὰ μονάδα· ἔπειτα κεῖται ἔτι καὶ μεταξὺ τοῦ 19,36 καὶ τοῦ 20,25, τῶν τετραγώνων τῶν 4,4 καὶ 4,5, οἵτινες διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων κατὰ ἓν δέκατον· μετέπειτα κεῖται προσέτι καὶ μεταξὺ τοῦ 19,9809 καὶ τοῦ 20,0704, τῶν τετραγώνων τῶν 4,47 καὶ 4,48, τῶν διαφερόντων ἀπ' ἀλλήλων κατὰ ἓν ἑκατοστόν· καὶ οὕτως ἐφεξῆς, μεταξὺ ἄλλων ἔτι πλειότερον βαθμηδὸν προσεγγιζόντων εἰς αὐτὸν, ὧν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι διαφέρουσι βαθμηδὸν ἀπ' ἀλλήλων ἔτι ὀλιγώτερον, ἤτοι ἓν χιλιοστὸν, ἓν δέκατον χιλιοστοῦ κτλ. Ὡς δὲ ὁ 20 κεῖται μεταξὺ τοῦ 16 καὶ τοῦ 25, ἢ τοῦ 19,36 καὶ τοῦ 20,25 κτλ, οὕτω συνειθίζουσι νὰ θεωρῶσιν ὅτι καὶ μεταξὺ τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν αὐτῶν 4 καὶ 5, ἢ 4,4 καὶ 4,5, ἢ 4,47, καὶ 4,48 κτλ κεῖταί τι, ὅπερ δύναται νὰ ἐκλαμβάνηται ὡς τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 20· ἀλλ' εἴδομεν ἀνωτέρω (86) ὅτι αὐτὸ δὲν εἶναι ἀριθμὸς, καὶ μέλλει λοιπὸν νὰ θεωρῆται ὥς τι, εἰς ὃ τείνουσι μόνον βαθμηδὸν προσεγγίζοντες οἱ μικρότεροι αὐτοῦ ἀριθμοὶ 4, 4,4, 4,47 κτλ, ἢ

οἱ μεγαλήτεροι αὐτοῦ 5, 4,5, 4,48, κτλ, διαφέρον τοῦ 4 καὶ τοῦ 5 ἢ τοῦ 4,4 καὶ τοῦ 4,5 κτλ ὀλιγώτερον παρ' ὅσον αὐτοὶ ἀπ' ἀλλήλων.

Ὅσα δὲ εἴπομεν περὶ τοῦ 20 ἁρμόζουσι λεγόμενα καὶ περὶ παντὸς ἄλλου μὴ τετραγώνου θετικοῦ ἀριθμοῦ. Αὐτὸ λοιπὸν τὸ θεωρούμενον ὡς τετραγωνικὴ ῥίζα μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ ἄλλοι ἄλλως ὠνόμασαν, ἡμεῖς δὲ προκρίνομεν νὰ τὸ ὀνομάζωμεν *ἀνάριθμον*, ὥς τι δηλ. μὴ δυνάμενον νὰ παρασταθῇ δι' ἀριθμοῦ. Ἕκαστος δὲ τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν τῶν προσεγγιζόντων ὁσονδήποτε εἰς αὐτὸ, ὄντων δὲ τετραγωνικῶν ῥιζῶν ἀριθμῶν μικροτέρων ἢ μεγαλητέρων τοῦ μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ, καλεῖται *τετραγωνικὴ προσεγγίζουσα ῥίζα* αὐτοῦ.

Σημ. α΄. Τὸ ὄνομα ἀσύμμετρον εἶναι ἁρμόδιον μὲν εἰς τὴν Γεωμετρίαν νὰ σημαίνῃ ποσὸν μὴ ἔχον κοινὸν μέτρον μὲ ἄλλο τι, ὄχι δὲ καὶ ἐνταῦθα νὰ σημαίνῃ ἕν τι ἀδύνατον νὰ προσδιορισθῇ πρός τινα μονάδα, νὰ παρασταθῇ δι' ἀριθμοῦ. Ἄλογα δὲ ἁρμόζει νὰ λέγωνται δύο τινὰ, ὅταν ἦναι ἀδύνατον νὰ νοῆται τὸ ἕτερον πρὸς τὸ ἄλλο ὡρισμένως κατὰ λόγον, διὰ τὸ νὰ μὴ ἦναι μηδεὶς ἀριθμὸς, ὅστις νὰ παριστάνῃ τὸν λόγον αὐτῶν, καὶ ὄχι ἕν, ὁποῖον εἶναι τὸ ἀνάριθμον. Τὸ δὲ ἄρρητον εἶναι πολὺ γενικόν.

Σημ. β΄. Καὶ τῶν ἤδη εἰρημένων ἀριθμός τις δὲν εἶναι τετράγωνος καὶ πᾶς ἀντιθετικὸς δὲν εἶναι τετράγωνος· διότι ἑκάτερος δὲν ἔχει ἀριθμόν τινα ῥίζαν, τετράγωνον δὲ ἄνευ τετραγωνικῆς ῥίζης εἶναι ἀδύνατον. Ἀλλὰ τῆς μὲν τοῦ πρώτου ῥίζης τὸ ποσὸν, ἂν καὶ ἀδύνατον ἀκριβῶς νὰ παρασταθῇ δι' ἀριθμοῦ, νοεῖται πάντοτε ὅτι κεῖται μεταξὺ δύο ἀριθμῶν, ὅσον ἂν θέλωμεν ἀπ' ἀλλήλων διαφερόντων, καὶ διὰ τοῦτο ἀντὶ τοῦ ἀναρίθμου μεταχειριζόμεθα ἀριθμὸν προσεγγίζοντα εἰς αὐτό· τοῦ δὲ ἀντιθετικοῦ ῥίζα παντάπασι δὲν ὑπάρχει, ὄχι διότι τὸ ποσὸν αὐτῆς ἀδύνατον ἐνίοτε νὰ παρασταθῇ δι' ἀριθμοῦ, ἀλλὰ διότι δὲν δύναται νὰ νοηθῇ οὔτε ὡς θετικὸν οὔτε ὡς ἀντιθετικὸν, τὸ δ' οὔτε θετικὸν οὔτε ἀντιθετικὸν ἀναγκαίως δὲν ὑπάρχει. Συνήθως δὲ γράφουσι κατὰ τὰ ἐν ἀρ. 29 εἰρημένα πρὸ τοῦ ἀντιθετικοῦ τὸ $\sqrt{\ }$, καὶ θεωροῦσι τὸ οἷον τοῦτο $\sqrt{--25}$ ἢ $\sqrt{--39}$ κτλ σύμβολον ὡς παραστατικὸν τῆς ἀνυπάρκτου τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ —25, ἢ τοῦ —39 κτλ· ὥστε τὸ μὴ ὑπάρχον ἔχει σημεῖον παραστατικὸν αὐτοῦ.

Σημ. γ΄. Πρὸς εὕρεσιν μὲν τοῦ τετραγώνου ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ ἄλλο δὲν χρειάζεται εἰμὴ νὰ πολλαπλασιάζηται κατὰ τοὺς γνωστοὺς ἤδη κανόνας αὐτὸς ἐφ' ἑαυτὸν, ὅπερ εἶναι γνωστὸν ἤδη· πρὸς εὕρεσιν δὲ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ οὐδεὶς τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν λογισμῶν χρησιμεύει ὁποῖος μας εἶναι ἤδη γνωστός. Ὥστε ἀνάγκη νὰ ἐκθέσωμεν ἐν τοῖς ἑξῆς τὰ δέοντα καὶ περὶ αὐτοῦ περιοριζόμενοι εἰς τὴν θετικὴν ἀκριβῆ τετραγωνικὴν ῥίζαν τῶν τετραγώνων καὶ τὴν προσεγγίζουσαν τῶν θετικῶν μὴ τετραγώνων, ἀφοῦ τὸ ἀνάριθμον ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ, παραπέμποντες δὲ εἰς τὴν Ἄλγεβραν περὶ τοῦ τῆς ἀνυπάρκτου συμβόλου.

Προκαταρκτικὰ θεωρήματα.

89. *Τὰ τετράγωνα δύο κατὰ σειρὰν ἀκεραίων ἀριθμῶν διαφέρουσι καθ' ὅσας μονάδας ἔχει τὸ διπλάσιον τοῦ μικροτέρου τῶν κατὰ σειρὰν ἀριθμῶν καὶ μίαν.* Διότι τὰ τετράγωνα δύο κατὰ σειρὰν ἀκεραίων ἀριθμῶν a καὶ $a+1$ εἶναι a^2 καὶ a^2+2a+1 (41), ἡ δὲ διαφορὰ τούτων εἶναι $2a+1$. Π. χ. ἡ διαφορὰ τοῦ 36 καὶ 25 εἶναι $2.5+1=11$, τοῦ 81 καὶ 64 εἶναι $2.8+1=17$, κτλ.

Ἐκ τούτου βλέπει τις ὅτι οἱ ἀκέραιοι οἱ μεταξὺ τῶν τετραγώνων δύο κατὰ σειρὰν ἀκεραίων ἀριθμῶν ὄντες μὴ τετράγωνοι εἶναι τόσοι, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ διπλάσιον τοῦ μικροτέρου τῶν δύο κατὰ σειρὰν ἀριθμῶν· ἐπομένως αὐτῶν ἔχει ὁ μὲν 1, ὁ δὲ 2,... ὁ δὲ τὸ πολὺ $2a$ μονάδας πλειότερον τοῦ μικροτέρου τετραγώνου. Ὅσον λοιπὸν μεγαλήτεροι εἶναι οἱ δύο κατὰ σειρὰν ἀριθμοί, τόσον πλειότεροι μὴ τετράγωνοι εἶναι μεταξὺ τῶν τετραγώνων των.

90. Ἐὰν παρατηρήσῃ τις ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν

	10	100	1000	10000 κτλ,
εἶναι	100	10000	1000000	100000000 κτλ,

καταλαμβάνει ὅτι ἀριθμοῦ διψηφίου τὸ τετράγωνον εἶναι μεταξὺ τοῦ 100 καὶ τοῦ 10000, ἤτοι τριψήφιον ἢ τετραψήφιον· ὅτι ἀριθμοῦ τριψηφίου τὸ τετράγωνον εἶναι μεταξὺ τοῦ 10000 καὶ τοῦ 1000000, ἤτοι πενταψήφιον ἢ ἑξαψήφιον· ὅτι ἀριθμοῦ τετραψηφίου τὸ τετράγωνον εἶναι ἑπταψήφιον ἢ ὀκταψήφιον, κτλ. Καὶ ἀντιστρόφως λοιπὸν, τριψηφίου ἢ τετραψηφίου ἀριθμοῦ, ὄντος μεταξὺ τοῦ 100 καὶ 10000, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι μεταξὺ 10 καὶ 100 ἤτοι διψήφιος· πενταψηφίου δὲ ἢ ἑξαψηφίου, ὄντος μεταξὺ 10000 καὶ 1000000, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι μεταξὺ 100 καὶ 1000 ἤτοι τριψήφιος, κτλ. Γενικῶς, *ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ὁποιουδήποτε ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἔχει τόσα ψηφία, εἰς ὅσα τμήματα διψήφια χωρίζεται ὁ ἀριθμός· τὸ τελευταῖον τμῆμα ὅμως δύναται νὰ ἦναι καὶ μονοψήφιον.*

91. Τὸ τετράγωνον διψηφίου ἢ τριψηφίου κτλ ἀριθμοῦ δυνατὸν νὰ νοηθῇ ὅτι σύγκειται ἐκ διαφόρων ἄλλων ἀριθμῶν.

Ἐὰν γενικῶς σημειώσωμεν διὰ μ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων, διὰ δ τὸν τῶν δεκάδων, διὰ ε τὸν τῶν ἑκατοντάδων κτλ, ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς διψήφιος παριστάνεται διὰ $\delta+\mu$, τριψήφιος δὲ διὰ $\varepsilon+\delta+\mu$, τετραψήφιος δὲ διὰ $\chi+\varepsilon+\delta+\mu$, κτλ. Τὰ τετράγωνα τούτων εἶναι (41).

$$\begin{array}{l}\delta+\mu\\ \delta+\mu\\ \hline \delta^2+\delta\mu\\ \quad+\delta\mu+\mu^2\\ \hline \delta^2+2\delta\mu+\mu^2\end{array}\qquad\begin{array}{l}\varepsilon+\delta+\mu\\ \varepsilon+\delta+\mu\\ \hline \varepsilon^2+\varepsilon\delta+\varepsilon\mu\\ \quad+\varepsilon\delta+\delta^2+\delta\mu\\ \qquad\quad+\varepsilon\mu+\delta\mu+\mu^2\\ \hline \varepsilon^2+2\varepsilon\delta+\delta^2+2\varepsilon\mu+2\delta\mu+\mu^2\end{array}\qquad\begin{array}{r}37\\ 37\\ \hline 49\\ 21\\ 21\\ 9\\ \hline 1369\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\chi+\varepsilon+\delta+\mu\\ \chi+\varepsilon+\delta+\mu\\ \hline \chi^2+\chi\varepsilon+\chi\delta+\chi\mu\\ \quad+\chi\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon\delta+\varepsilon\mu\\ \qquad\quad+\chi\delta+\varepsilon\delta+\delta^2+\delta\mu\\ \qquad\qquad\quad+\chi\mu+\varepsilon\mu+\delta\mu+\mu^2\\ \hline \chi^2+2\chi\varepsilon+\varepsilon^2+2\chi\delta+2\varepsilon\delta+\delta^2+2\chi\mu+2\varepsilon\mu+2\delta\mu+\mu^2.\text{κτλ.}\end{array}$$

Ἐκ τούτων βλέπει τις ὅτι *τὸ τετράγωνον διψηφίου ἀριθμοῦ σύγκειται ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν δεκάδων καὶ τῶν μονάδων, καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας· τὸ τετράγωνον τριψηφίου σύγκειται ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν ἑκατοντάδων, τῶν δεκάδων καὶ τῶν μονάδων, καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ τὰς δεκάδας, τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ τὰς μονάδας καὶ τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας· κλτ.*

92. Εἶναι ἤδη γνωστὸν ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν μονάδων

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
εἶναι μονάδες	1	4	9	16	25	36	49	64	81,

ἀλλὰ τὰ τετράγωνα τῶν δεκάδων 10, 20, 30, ... 90
δὲν εἶναι δεκάδες, ἀλλ' ἑκατοντάδες 100 400 900 ... 8100,
τὰ δὲ τετράγωνα τῶν ἑκατοντάδων 100, 200, ... 900
εἶναι δεκάδες χιλιάδος 10000 40000 .... 810000·
καὶ γενικῶς τὰ τετράγωνα μονάδων 1, 2, 3, ... 9

ὁποιασδήποτε τάξεως εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1 4 9 .... 81 μὲ δὶς τόσα μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος, ὅσα ἔχουσιν αἱ ῥίζαι. Π. χ. τοῦ 5 χιλιάδες, ὅστις ἔχει 000, τὸ τετράγωνον εἶναι 25 μὲ 000000, κτλ.

Τὸ δὲ διπλάσιον ἀριθμοῦ μονάδων 1, 2, 3,...9 ὁποιασδήποτε τάξεως ἐπὶ μὲν ἀριθμὸν μονάδων ἁπλῶν 1, 2, 3,....9 εἶναι ἀριθμὸς μονάδων αὐτῆς τῆς ἰδίας τάξεως, ἤτοι ἔχει δεξιὰ ὅσα μηδενικὰ ὁ πολλαπλασιαστέος, ἐπὶ δὲ ἀριθμὸν δεκάδων εἶναι ἀριθμὸς μονάδων ἀμέσως ἀνωτέρων, ἤτοι ἔχει ἓν 0 πλειότερον τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἐπὶ δὲ ἀριθμὸν ἑκατοντάδων εἶναι ἀριθμὸς μονάδων ἔτι ἀνωτέρων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Οἷον 2.60 ἤτοι $120\times4=480$, 2.600 ἤτοι $1200\times4=4800$,κτλ· 2,600 ἤτοι 1200×40 εἶναι 48000, 2.4000 ἤτοι 8000×700 $=5600000$, κτλ.

Περὶ ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

93. Ἐὰν ἦτον δυνατὸν νὰ διακρίνωμεν δἰ ἁπλοῦ τινος μέσου δεδομένον ἀριθμὸν ὅτι εἶναι τετράγωνος ἢ ὅτι δὲν εἶναι, τότε ἠθέλαμεν πρῶτον ἐκθέσει πῶς εὑρίσκεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τετραγώνου ἀριθμοῦ, καὶ ἔπειτα πῶς προσεγγίζουσά τις ῥίζα μὴ τετραγώνου. Ἀλλὰ μόνον δυνατὸν εἶναι ἔκ τινων χαρακτήρων (ἰδὲ ἀρ. 97) νὰ γνωρίζωμεν ὅτι τινὲς μόνον ἀριθμοὶ δὲν εἶναι τετράγωνοι. Καὶ ὅταν μὲν ἦναι ἤδη γνωστὸν ἔκ τινος τῶν χαρακτήρων αὐτῶν ὅτι δεδομένος ἀριθμὸς, οὗτινος ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, δὲν εἶναι τετράγωνος, θέλομεν εἰπεῖ κατωτέρω πῶς αὐτοῦ εὑρίσκεται ἡ προσεγγίζουσα ῥίζα. Ὅταν δὲ ἦναι ἄδηλον ἂν ὁ ἀριθμὸς ἦναι ἢ δὲν ἦναι τετράγωνος, τότε πρὸς εὕρεσιν τῆς τετραγωνικῆς του ῥίζης ὑποθέτομεν αὐτὸν τετράγωνον, καὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην προβαίνομεν εἰς τὴν ἀνακάλυψιν τοῦ τρόπου τοῦ εὑρίσκειν αὐτὴν τὴν ῥίζαν ὡς εὐθὺς λέγομεν, θεωροῦντες κατὰ πρῶτον ἀκεραίους ἀριθμούς.

Περὶ ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ ὑποτιθεμένου τετραγώνου.

94. Ἄς εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 226576, ὅστις εἶ-

ναι ἄδηλον ἂν ἦναι τετράγωνος ἢ ὄχι (97), καὶ ἐπομένως ὑποτίθεται τετράγωνος.

Πρῶτον εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα εἶναι τριψήφιος ἀριθμὸς, διότι αὐτὸς χωρίζεται εἰς τρία τμήματα διψήφια (90). Ἐπομένως (91) αὐτὸς δύναται νὰ θεωρῆται ὅτι σύγκειται ἐκ μερῶν ἕξ, ἤτοι ἐκ τριῶν τετραγώνων, τοῦ τῶν ἑκατοντάδων, τοῦ τῶν δεκάδων καὶ τοῦ τῶν μονάδων, καὶ ἐκ τριῶν γινομένων, τοῦ διπλασίου τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ τὰς δεκάδας, τοῦ διπλασίου τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ τὰς μονάδας καὶ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας. Κατὰ δὲ τὰ ἐν ἀρ. 92 εἰρημένα δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εἴπωμεν εἰς ποῖον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἐμπεριέχεται ἕκαστον τῶν ἕξ μερῶν του, ἀλλ' ἀκριβῶς ἠξεύρομεν μόνον τὸ τετράγωνον τῶν ἑκατοντάδων ποῦ ἐνυπάρχει καὶ ποῖος ἀριθμὸς εἶναι, τὰ δὲ ἄλλα ὄχι προςδιωρισμένως. Π. χ. τὸ διπλάσιον τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ τὰς δεκάδας εἶναι ἀριθμὸς ἔχων 000 δεξιὰ, ἀριστερὰ δὲ ἢ ἓν ἢ δύο σημαντικὰ ψηφία, διὰ τοῦτο ἐμπεριέχεται ἢ εἰς τὰς 6 μονάδας χιλιάδος τοῦ 226576, ἢ εἰς τὰς μονάδας καὶ δεκάδας χιλιάδος του ἤτοι τὸν 26· ὡσαύτως καὶ περὶ τῶν λοιπῶν. Τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ ἀριστεροῦ ψηφίου τῆς ῥίζης ἤτοι τῶν ἑκατοντάδων εἶναι εὔκολον νὰ πληροφορηθῶμεν ὄχι μόνον ὅτι *ἐμπεριέχεται ὡρισμένως εἰς τὸν ἀριστερὸν ἀριθμὸν* 22, *ἀλλ' ὅτι εἶναι ἀκριβέστατα ὁ* 16, *ἤτοι ὁ ἀμέσως μικρότερος τοῦ* 22 *τεράγωνος ἀριθμὸς, μὲ τέσσαρα μηδενικὰ δεξιά του· ἂν δὲ ἀντὶ* 22 *ἦτον τετράγωνός τις ἀριθμὸς, ὅτι αὐτὸς εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριστεροῦ ψηφίου τῆς ῥίζης.*

Διότι πρῶτον τὸ τετράγωνον τῶν ἑκατοντάδων τῆς ῥίζης ἔχει τὰ τέσσαρα δεξιά του ψηφία μηδενικὰ, τὰ δὲ ἄλλα ἓν ἢ δύο σημαντικά (92)· ὁ δὲ ὑπὸ τούτου ἢ ὑπὸ τούτων παρισταμένος ἀριθμὸς, ὅστις εἶναι δεκάδες χιλιάδος, ἀδύνατον νὰ ἦναι μεγαλήτερος τῶν 22 δεκάδων χιλιάδος τοῦ ἀριθμοῦ, ἤτοι ἀδύνατον νὰ ἦναι 25 ἢ 36 κτλ· διότι μόνον τὸ τετράγωνον τότε τῶν ἑκατοντάδων τῆς ζητουμένης ῥίζης ἤθελεν εἶσθαι πολὺ μεγαλήτερον ὅλου τοῦ 226576.

Ἔπειτα τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου τὰ σημαντικὰ ψηφία ἀδύνατον νὰ παριστάνωσιν ἄλλο τετράγωνον μικρότερον τοῦ 16 = 16 οἷον τὸ 9 ἢ τὸ 4. Διότι τοῦ 226576 αἱ 22 δεκάδες χιλιάδος ἐξ ἀνάγκης εἶναι κεφάλαιον τοῦ τετραγώνου τῶν ἑκατοντάδων τῆς ῥίζης, τοῦ ἀριστεροῦ ψηφίου τοῦ διπλασίου τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ τὰς δεκάδας, ἂν αὐτὸ τὸ διπλάσιον ἔχῃ δύο ψηφία, καὶ τὸ πολὺ μιᾶς δεκάδος χιλιάδος προερχομένης ἐκ τοῦ κεφαλαίου τῶν χιλιάδων τῶν ἄλλων μερῶν τοῦ 226576 (α)· ἂν δὲ τὸ τετράγωνον τῶν ἑκατοντάδων ὑποτεθῇ 9, ἀνάγκη τἆλλα δύο μέρη νὰ ἦναι 13, ὅπερ ἀδύνατον. Διότι, καὶ ἂν αἱ δεκάδες τῆς ῥίζης ὑποτεθῶσι τὸ πολὺ 9, τὸ διπλάσιον τῶν 3 ἑκατοντάδων τῆς ῥίζης ἐπὶ τὰς 9 δεκάδας θέλει εἶσθαι τὸ πολὺ 54 χιλιάδες, ἤτοι θέλει ἔχει τὸ πολὺ 5 δεκάδας χιλιάδος· καὶ 1 τὸ πολὺ δεκὰς χιλιάδος ἐκ τοῦ κεφαλαίου τῶν χιλιάδων, γίνεται κεφάλαιον τῶν δύο μερῶν τὸ πολὺ 6, ὄχι μόνον τοῦ 13 μικρότερον, ἀλλὰ καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων 16 καὶ 9, ἥτις εἶναι 7. Ἄρα ἀδύνατον τὸ τετράγωνον τῶν ἑκατοντάδων τῆς ῥίζης νὰ ἦναι μικρότερον τοῦ 16, ἤτοι τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀμέσως μικροτέρου τοῦ 22. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ἀδύνατον νὰ ἦναι καὶ μεγαλήτερον τοῦ 16, διότι ἔπρεπε νὰ ἦναι μεγαλήτερον καὶ τοῦ 22, ὅπερ ἀνωτέρω εἴδομεν ὅτι εἶναι ἀδύνατον. Ἄρα ὁ 16, ἤτοι τὸ τετράγωνον τὸ ἀμέσως μικρότερον τοῦ ἐν ἀριστερᾷ τμήματος 22, εἶναι τὸ τετράγωνον τῶν ἑκατοντάδων τῆς ῥίζης, ἤτοι τοῦ ἀριστεροῦ ψηφίου τῆς ῥίζης. Ἐπομένως αἱ ἑκατοντάδες τῆς ῥίζης, ἤτοι τὸ ἀριστερὸν ψηφίον της, εἶναι 4.

Ὅταν δὲ ὁ τοῦ ἐν ἀριστερᾷ τμήματος ἀριθμὸς ἦναι τετράγωνος, τότε αὐτὸς εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριστεροῦ ψηφίου

(α). Ἂν ὁ 226576 δὲν ἦναι τετράγωνος, ὁπότε κεῖται μεταξὺ δύο τετραγώνων δύο κατὰ σειρὰν ἀριθμῶν, τότε εἶναι κεφάλαιον τοῦ μικροτέρου τούτων τῶν τετραγώνων καὶ τὸ πολὺ τοῦ διπλασίου τῆς ῥίζης του (89)· ὅπερ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι τὸ τετράγωνον τῶν ἑκατοντάδων εἶναι 9, καὶ ἐπομένως αἱ ἑκατοντάδες τῆς ῥίζης 3, τῆς ὅλης ῥίζης δυναμένης νὰ ἦναι τὸ πολὺ 399, θέλει εἶσθαι τὸ πολὺ 798 μονάδες, αἵτινες φανερὸν ὅτι δὲν ἐπηρεάζουσι τὰς 22 δεκάδας χιλιάδος. Ἀλλὰ καὶ 999 ἂν ἦτον ἡ ῥίζα, τὸ διπλάσιόν της 1998 δὲν ἐπηρεάζει τὰς δεκάδας χιλιάδος τοῦ ὑποτεθειμένου τετραγώνου ἀριθμοῦ. Ἰδοὺ διατὶ ἀνωτέρω δὲν ἐλογίσθημεν αὐτὴν τὴν περίπτωσιν.

τῆς ῥίζης καὶ ὄχι ὁ ἀμέσως μικρότερος αὐτοῦ τετράγωνος, ὅπερ ἀποδεικνύεται ὡς ἀνωτέρω (α).

Ἐπειδὴ δ᾽ οἱ προηγούμενοι συλλογισμοὶ ἀπαραλλάκτως δυνατὸν νὰ γείνωσι καὶ ἐπὶ παντὸς ἄλλου παραδείγματος, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς γενικῶς ἀποδεδειγμένον ὅτι *εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρίσκωμεν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκεραίου ριθμοῦ τὸ ἀριστερὸν ψηφίον πρῶτον, καὶ μόνον αὐτὸ πρῶτον. Πρὸς τοῦτο δὲ διαχωρίζομεν διά τινος σημείου, οἷον στιγμῆς, ἐκ δεξιῶν ἀρχίζοντες, τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα διψήφια, εὑρίσκομεν δὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀμέσως μικροτέρου τοῦ ἐν ἀριστερᾷ διψηφίου ἢ μονοψηφίου τμήματος, ἂν αὐτὸ δὲν ἦναι τετράγωνον, ἢ αὐτοῦ τοῦ τμήματος τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἂν ἦναι τετράγωνον. Ἡ δὲ ῥίζα αὕτη θέλει εἶσθαι τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ψηφίον τῆς ῥίζης.*

Τὰ δὲ ἄλλα ψηφία τῆς ῥίζης ὅλα εὑρίσκονται πάντοτε διὰ διαιρέσεως καὶ δοκιμῆς τοῦ πηλίκου αὐτῆς ὡς λέγομεν ἐφεξῆς.

Ἀφοῦ ἀπὸ τῶν 22 δεκάδων χιλιάδος τοῦ 226576 ἀφαιρεθῇ τὸ ἤδη γνωστὸν τετράγωνον τῶν ἑκατοντάδων, ἤτοι ὁ 16 δεκάδες χιλιάδος, μένει 66576, ἐν ᾧ ἐμπεριέχονται τἄλλα πέντε μέρη τοῦ τετραγώνου τῆς ζητουμένης ῥίζης. Τούτων δὲ τὸ διπλάσιον τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ τὰς δεκάδας ἐνυπάρχει ἐν τῷ 66, διότι εἶναι ἀριθμὸς χιλιάδων. Ἀλλ᾽ ἐκτὸς τούτου ἐν τῷ 66 δυνατὸν νὰ ἐμπεριέχηται καὶ μέρος τι τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων, καὶ μέρος τι τοῦ διπλασίου τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, διότι τὰ μέρη ταῦτα δυνατὸν νὰ ἔχωσι καὶ ἀριθμόν τινα

(α) Ἁπλούστερα πειθόμεθα ὅτι 4 εἶναι αἱ ἑκατοντάδες τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 226576 οὕτως. Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος κεῖται μεταξὺ τῶν δύο τούτων 160000 καὶ 250000· λοιπὸν καὶ ἡ τετραγωνική του ῥίζα πρέπει νὰ κῆται μεταξὺ τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν ἤτοι μεταξὺ τῶν 400 καὶ 500. Ἐπειδὴ δὲ ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεταξὺ τῶν 400 καὶ 500 ἔχουσιν 4 ἑκατοντάδας, διὰ τοῦτο καὶ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 226576, ἥτις εἶναι μεταξὺ αὐτῶν, ἔχει 4 ἑκατοντάδας.

Ἐκ δὲ τούτου συμπεραίνεται ὅτι τὸ τετράγωνον τῶν ἑκατοντάδων τῆς ῥίζης εἶναι ὁ 16 μὲ 0000, ὡς ἀνωτέρω, καὶ ἑπομένως ἐμπεριέχεται ἐν τῷ 22.

Κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον πρῶτον εὑρίσκονται αἱ ἑκατοντάδες τῆς ῥίζης καὶ ἔπειτα τὸ τετράγωνόν των, κατὰ δὲ τὸν ἀνωτέρω ἀντιστρόφως.

χιλιάδων (92), ἔτι δὲ καὶ μέρος τι τοῦ κεφαλαίου τῶν ἑκατοντάδων ὅλων αὐτῶν τῶν μερῶν, ἂν ἦναι μεγαλήτερον τοῦ 9· [ἐνίοτε δὲ, ἂν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἦναι τετράγωνος, ὁπότε σύγκειται ἐκ τετραγώνου καὶ ἄλλου τινὸς ἀριθμοῦ (ἰδὲ τὴν προηγουμένην ὑποσημείωσιν), καὶ μία μονὰς τούτου τοῦ ἀριθμοῦ]. Ὥστε ὁ 66 δυνατὸν νὰ ἦναι κατὰ πολλὰς μονάδας μεγαλήτερος τοῦ διπλασίου τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ τὰς δεκάδας τῆς ζητουμένης ῥίζης. Ἂν ὅμως ἦτον ὁ 66 ἀκριβῶς τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος διπλάσιον τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ τὰς δεκάδας, ὡς γινόμενον δὲ δύο παραγόντων διῃρεῖτο διὰ τοῦ ἑτέρου παράγοντος, τοῦ διπλασίου τῶν ἑκατοντάδων, ὅστις εἶναι ἤδη γνωστὸς 8, τὸ πηλίκον ταύτης τῆς διαιρέσεως ἤθελεν εἶσθαι ἀκριβῶς ὁ ἄλλος παράγων, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 66 δυνατὸν νὰ ἦναι κάμποσον μεγαλήτερος τοῦ διπλασίου τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ τὰς δεκάδας, ἂν διαιρεθῇ διὰ τοῦ 8, τοῦ διπλασίου τῶν ἤδη γνωστῶν ἑκατοντάδων, τὸ προκύπτον πηλίκον 8 δυνατὸν νὰ ἦναι κατὰ μίαν ἢ πλειοτέρας μονάδας μεγαλήτερον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης. Ἀλλ' ὑπάρχει τρόπος, καθ' ὃν δυνάμεθα νὰ πληροφορηθῶμεν ἂν ἦναι μεγαλήτερον ἢ σωστόν. Δηλαδὴ ἐν τῷ 665, ὅπερ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον 6 τοῦ 16 ἀπὸ 22 ὁμοῦ μετὸ δεύτερον τμῆμα 65, ἐμπεριέχονται τὰ τρία ταῦτα μέρη, ἤτοι τὸ διπλάσιον τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ τὰς δεκάδας, τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων καὶ τὸ διπλάσιον τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ τὰς μονάδας τῆς ῥίζης (92), ἂν ἔχῃ μονάδας ἡ ῥίζα, ἴσως δ' ἔτι καὶ μέρος τι τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας τῆς ῥίζης, καὶ μέρος τι ἄλλου ἀριθμοῦ, ἂν ὁ 226576 δὲν ἦναι τετράγωνος, καὶ μέρος τοῦ κεφαλαίου τῶν δεκάδων αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν. Ἂν λοιπὸν τὸ προειρημένον πηλίκον ἦναι αἱ δεκάδες τῆς ῥίζης, τὸ τετράγωνόν του καὶ τὸ γινόμενον αὐτοῦ καὶ τοῦ διπλασίου τῶν ἑκατοντάδων, ὁμοῦ τὰ δύο ταῦτα δὲν πρέπει ν' ἀποτελέσωσιν ἀριθμὸν μεγαλήτερον τοῦ 665, ἀλλὰ μικρότερον ἢ ἴσον. Ἂν δὲ ἀποτελέσωσιν ἀριθμὸν μεγαλήτερον τοῦ 665, φανερὸν ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων· ὅπερ ἐνταῦθα συμβαίνει, διότι ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος ἀριθμὸς εἶναι 704. Αἱ δεκάδες τῆς ῥίζης λοιπὸν εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν 8, ἤτοι τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ 66 διὰ 8. Ὡςαύτως δὲ τώρα δοκιμάζεται ὁ 7, καὶ ἐπειδὴ ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 609 εἶναι ὄχι μεγαλήτερος τοῦ 665, λέγω ὅτι 7 εἶναι αἱ δεκάδες τῆς ῥίζης. Διότι, ἂν ὑποτεθῶσιν 6 ἢ 5 κτλ, ἤτοι ὀλιγώτεραι τῶν 7, καὶ λογισθῶσιν ὅλα τὰ μέρη τὰ δυνάμενα νὰ ἐμπεριέχωνται ἐν τῷ 665, θέλομεν ἰδεῖ ὅτι ἀδύνατόν ποτε ν' ἀποτελέσωσι κεφάλαιον τὸν 665, ἀλλὰ θέλουσιν ἀποτελέσει κεφάλαιον πολὺ μικρότερον ἀριθμὸν, ἐνῷ, ἂν ἦσαν 6 αἱ δεκάδες, ἔπρεπε νὰ ἀποτελῆται ὁ ἀριθμὸς 665.

Ἰδοὺ ὁ λογισμός.

Διπλάσιον 4 ἑκατοντάδων ἐπὶ 6 δεκάδας . .	48χιλιά.
Τετράγωνον τῶν 6 δεκάδων.	36ἑκτ.
Διπλάσιον 4 ἑκατοντάδων ἐπὶ 9 τὸ πολὺ μονάδας	72ἑκ.
Ἑκατοντάδες τοῦ διπλασίου 6 δεκάδων ἐπὶ 9 μονάδας	10ἑκ.
Ἂν ὁ 226576 δὲν ἦναι τετράγωνος, τὸ διπλάσιον τῆς ὑποθετικῆς ῥίζης 469 εἶναι 938, ὅπερ ἔχει	9ἑκ.
Τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν δεκάδων τῶν μερῶν, ἐξ ὧν σύγκειται ὁ 226576, τὸ πολὺ δυνατὸν νὰ ἔχῃ	2ἑκ.
	609

Ὥστε ὅλαι αἱ ἑκατοντάδες κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι 6 εἶναι αἱ δεκάδες τῆς ῥίζης τὸ πολὺ δυνατὸν νὰ φθάσωσι τὰς 609, ὄχι δέ ποτε τὰς 665. Ἄρ' ἀδύνατον αἱ δεκάδες τῆς ῥίζης νὰ ἦναι ὀλιγώτεραι τῶν 7. Ἀλλ' εἴδομεν ἤδη ὅτι οὐδὲ περισσότεραι τῶν 7 δυνατὸν νὰ ἦναι· ἄρα εἶναι σωστὰ 7.

Οἱ αὐτοὶ προηγούμενοι συλλογισμοὶ ἁρμόζουσι καὶ εἰς πᾶν ἄλλο παράδειγμα· διὰ τοῦτο πειθόμεθα γενικῶς ὅτι *πρὸς εὕρεσιν τοῦ δευτέρου ψηφίου τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀριστεροῦ τμήματος τοῦ ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνον τοῦ ἤδη εὑρεθέντος ψηφίου τῆς ῥίζης, δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου γράφομεν τὸ δεύτερον ἐξ ἀριστερῶν διψήφιον τμῆμα, παραιτοῦντες δὲ τὸ δεξιὸν ψηφίον τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ διαιροῦμεν τὸ ἄλλο μέρος του διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῆς ῥίζης, γράφομεν τὸ πηλίκον δεξιὰ τοῦ διπλασίου αὐτῆς τῆς ῥίζης καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν προκύπτοντα*

7

ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ πηλίκον. Καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον δὲν ἦναι μεγαλήτερον τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελεσθέντος ἐκ τοῦ ὑπολοίπου καὶ τοῦ δευτέρου τμήματος, αὐτὸ παριστάνει τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης· εἰδεμή, δοκιμάζομεν ὡσαύτως τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον τοῦ πηλίκου, ἢ ἂν χρειασθῇ, τὸν κατὰ 2 μονάδας κτλ, ἑωσοῦ νὰ προκύψῃ γινόμενον ὄχι μεγαλήτερον τοῦ ἤδη εἰρημένου ἀριθμοῦ· ὁ δὲ παράγων τοιοῦτο γινόμενον ἀριθμὸς εἶναι αἱ δεκάδες τῆς ῥίζης.

Αἱ δὲ μονάδες τῆς ῥίζης εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῶσιν, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ὁ 609 ἀπὸ τοῦ 665 καὶ διαιρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον 56 διὰ τοῦ διπλασίου τῶν ἑκατοντάδων ἤτοι τοῦ 8, τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαφέσεως 7 δοκιμασθῇ, ἤτοι κατασκευασθῇ τὸ διπλάσιον τῶν 4 ἑκατοντάδων ἐπὶ 7, τὸ διπλάσιον τῶν 7 δεκάδων ἐπὶ 7 καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 7, τὰ τρία ἄλλα μέρη τοῦ τετραγώνου, ἅτινα ἐμπεριέχονται ἐν τῷ ἀποτελουμένῳ ἀριθμῷ 5676, ἀφοῦ δεξιὰ τοῦ 56 γραφθῇ καὶ τὸ τελευταῖον τμῆμα 76. Καὶ ἂν μὲν τὸ κεφάλαιον τῶν τριῶν αὐτῶν μερῶν δὲν ἦναι μεγαλήτερον τοῦ 5676, 7 εἶναι αἱ μονάδες τῆς ῥίζης· εἰδεμή, θέλουσιν εἶσθαι ὀλιγώτεραι κατὰ μίαν ἢ δύο κτλ. Ἐνταῦθα δὲν εἶναι 7, ἀλλὰ 6. Διότι

Τὸ διπλάσιον τῶν 4 ἑκατοντάδων ἐπὶ 7 εἶναι	56ἑκ
Τὸ διπλάσιον τῶν 7 δεκάδων ἐπὶ 7 μονάδας	98δεκ
Τετράγωνον τῶν 7 μονάδων	49μον
	6629

Ὁ δὲ 6629 εἶναι μεγαλήτερος τοῦ 5676.

Τὸ δὲ διπλάσιον τῶν 4 ἑκατ. ἐπὶ 6 μονάδας εἶναι	48ἑκ
Τὸ διπλάσιον τῶν 7 δεκάδων ἐπὶ 6 μονάδας	84δεκ
Τὸ τετράγωνον τῶν 6 μονάδων	36μον
	5676

Τὸ δὲ κεφάλαιον εἶναι ἴσον μὲ τὸν 5676.

Ὁ δὲ λόγος τῆς πράξεως ταύτης εἶναι φανερὸς ἐκ τῶν προηγουμένων. Δηλ. ἐν τῷ ὑπολοίπῳ 56 ἐμπεριέχεται τὸ διπλάσιον τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ τὰς μονάδας τῆς ῥίζης, ἔτι δὲ καὶ μέρος ἴσως τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας κτλ (ἰδὲ ἀνωτέρω)· ὥστε, ἂν διαιρεθῇ ὁ 56 διὰ τοῦ 8, τοῦ διπλασίου τῶν ἑκατοντάδων τῆς ῥίζης, τὸ πηλίκον δυνατὸν νὰ ἦναι ἢ αἱ μονάδες τῆς ῥίζης, ἢ κατὰ μίαν ἢ δύο μονάδας μεγαλήτερον αὐτῶν. Περὶ τούτου δὲ πληροφορούμεθα διὰ τῆς δοκιμῆς τῆς προειρημένης, ἠξεύροντες ὅτι αἱ μονάδες τῆς ῥίζης πρέπει νὰ ἦναι τόσαι, ὥστε ἀφοῦ κατασκευασθῶσι τὰ τρία προειρημένα μέρη καὶ προστεθῶσι, τὸ κεφάλαιόν των νὰ μὴ ἦναι μεγαλήτερον τοῦ 5676, ἀλλ' ἴσον ἢ μικρότερον.

Ἀλλὰ τὸ τρίτον ψηφίον τῆς ῥίζης, ἤτοι ἐδῶ αἱ μονάδες, εἶναι δυνατὸν καὶ προτιμότερον νὰ εὑρεθῇ καὶ οὕτω. Δηλ. ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ ὁ 609 ἀπὸ τοῦ 665, δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου γράφεται καὶ τὸ τρίτον τμῆμα 76, ἐν δὲ τῷ ἀριθμῷ 5676 ἐμπεριέχονται τὰ λοιπὰ τρία μέρη τοῦ τετραγώνου, ἴσως δὲ καὶ ἄλλος τις ἀριθμὸς, ἂν ὁ 226576 δὲν ἦναι τετράγωνος. Τὰ δὲ δύο μέρη ἤτοι τὸ διπλάσιον τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ τὰς μονάδας καὶ τὸ διπλάσιον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας ἐμπεριέχονται ἐν τῷ ἀριστερῷ 567, διότι τὰ δύο ταῦτα μέρη μονάδας δὲν ἔχουσιν, ἀλλὰ δεκάδας, ἑκατοντάδας καὶ χιλιάδας. Ἀλλ' ἐν τῷ 567 δυνατὸν νὰ ἐμπεριέχηται καὶ μέρος τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων, καὶ ἄλλος τις ἀριθμὸς, ἂν ὁ 227576 δὲν ἦναι τετράγωνος. Ἐὰν ὅμως τὸν θεωρήσωμεν πρὸς ὥραν ὅτι ἐμπεριέχει μόνον τὰ δύο προειρημένα μέρη, τότε δύναται νὰ νοηθῇ *γινόμενον τοῦ διπλασίου τοῦ κεφαλαίου τῶν ἑκατοντάδων καὶ τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης ἐπὶ τὰς μονάδας αὐτῆς*. Διότι, ἐὰν ε σημαίνῃ τὰς ἑκατοντάδας, δ δὲ τὰς δεκάδας καὶ μ τὰς μονάδας τῆς ῥίζης, $2\varepsilon\mu$ εἶναι τὸ διπλάσιον τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, καὶ $2\delta\mu$ τὸ διπλάσιον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, $2\varepsilon\mu+2\delta\mu$ δὲ σημαίνει τὸ κεφάλαιον τῶν δύο αὐτων μερῶν, καὶ παριστάνει ἐδῶ τὸν ἀριθμὸν 567. Ἀλλὰ $2\varepsilon\mu+2\delta\mu$ γράφεται καὶ οὕτω $(2\varepsilon+2\delta)\mu$ ἢ ἔτι $2(\varepsilon+\delta)\mu$ (43), διότι ὁ μ καὶ ὁ 2 εἶναι κοινοὶ τῶν δύο ὅρων παράγοντες· ἄρα τὸ κεφάλαιον τοῦ διπλασίου τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ τὰς μονάδας καὶ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας δύναται νὰ θεωρηθῇ γινόμενον τοῦ διπλασίου τοῦ κεφαλαίου τῶν ἑκατοντάδων καὶ τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας. Οὕτω λοιπὸν θεωροῦντες τὸν 567, ἐὰν τὸν διαιρέσωμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ κεφαλαίου τῶν ἑκατοντάδων καὶ τῶν δεκάδων τῶν ἤδη γνωστῶν, ἤτοι τοῦ ἀριθμοῦ 94, θέλομεν εὑρεῖ πηλίκον τὰς μονάδας τῆς ῥίζης ἢ ἀριθμὸν ὀλίγον μεγαλήτερον· διότι εἴδομεν ὅτι ὁ 567 δυνατὸν νὰ ἐμπεριέχῃ καὶ ἄλλους ἀριθμοὺς ἐκτὸς τῶν δύο προειρημένων μερῶν. Δοκιμάζομεν δὲ τὸ πηλίκον αὐτὸ ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν. Ἐδῶ τὸ πηλίκον τοῦ 567 διὰ τοῦ 94 εἶναι 6, ὅπερ ἀνωτέρω εἴδομεν ὅτι εἶναι σωστὰ αἱ μονάδες τῆς ῥίζης. Ἰδοὺ δὲ διατὶ εἴπομεν ἀνωτέρω ὅτι εἶναι προτιμότερον νὰ εὑρίσκηται τὸ τρίτον ψηφίον ὡς ἤδη εἴπομεν, καὶ ὄχι διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ 56 διὰ 8· διότι ἐδῶ εὑρήκαμεν εὐθὺς πηλίκον τὰς 6 μονάδας τῆς ῥίζης, ἐνῷ ἐκεῖ εὑρήκαμεν πηλίκον 7 μεγαλήτερον. Τοῦτο συμβαίνει συχνότατα καὶ διὰ τοῦτο πάντοτε εἶναι ἐν χρήσει οὗτος ὁ δεύτερος τρόπος πρὸς εὕρεσιν τοῦ τρίτου ψηφίου τῆς ῥίζης· παρόμοιος δὲ πρὸς εὕρεσιν καὶ τοῦ τετάρτου κτλ, ἂν ἦναι χρεία.

Μετὰ δὲ τὰ ἤδη εἰρημένα ἕκαστος δύναται νὰ ἐκθέσῃ γενικῶς τὰ περὶ τῆς εὑρέσεως τοῦ τρίτου ψηφίου τῆς ῥίζης, καὶ τοῦ τετάρτου, ἂν τύχῃ, κτλ. Ὥστε δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ἀκριβέστατα (α) γνωστὰ ὅσα σχεδὸν χρειάζεται νὰ ἠξεύρωμεν περὶ τῆς εὑρέσεως τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ ὑποτεθειμένου τετραγώνου.

95. Συνήθως συμβαίνει, ὅταν διαιρῶμεν ἕνα ἀριθμὸν διὰ τοῦ διπλασίου τῆς ἤδη εὑρεθείσης ῥίζης πρὸς εὕρεσιν ἄλλου ψηφίου τῆς ῥίζης, νὰ ἦναι τὸ πηλίκον ἢ μεγαλήτερον τοῦ 9 ἢ μικρότερον μιᾶς μονάδος τάξεώς τινος. Κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν δὲν δοκιμάζομεν αὐτὸ τὸ πηλίκον, ἀλλὰ τὸν 9, ὄντες βέβαιοι ἐκ τῶν προειρημένων ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς διὰ τῆς διαιρέσεως δὲν εἶναί ποτε μεγαλήτερος τοῦ 9. Κατὰ δὲ τὴν δευτέραν δὲν ἔχει ἡ ῥίζα οὐδὲ μίαν μονάδα τῆς ζητουμένης τάξεως, καὶ διὰ τοῦτο γράφεται 0 ἐν τῇ ἁρμοδίᾳ θέσει τῆς ῥίζης.

(α) Εὐφυέστατοι μαθηταὶ παρετήρησα πολλάκις ὅτι ἐδυσκολεύοντο νὰ πεισθῶσι περὶ ὅλων, ὅσα ἐν ταῖς μελέταις αὐτῶν ἀπήντων ἄπορα, ἐνῷ διεσάφιζον αὐτὰ κατὰ τὰ ἐν τῇ πρώτῃ ἐκδόσει. Πρὸς ἀφαίρεσιν λοιπὸν ὅλων τῶν δυνατῶν δυσκολιῶν ἔκρινα ἀναγκαῖον νὰ ἐκθέσω διὰ μακροτέρων ἐν ταύτῃ τῇ ἐκδόσει καὶ ἄλλα μὲν μέρη τοῦ βιβλίου τούτου καὶ τὰ περὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

α΄. Τοῦ ἀριθμοῦ 841 ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἔχει μονάδας καὶ δεκάδας, αἱ δὲ δεκάδες εἶναι 2· ἀφοῦ δ' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 8 τὸ τετράγωνον τοῦ 2, μένουσι 4, καὶ τώρα πρὸς εὕρεσιν τῶν μονάδων πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 44 διὰ τοῦ διπλασίου τῶν 2 δεκάδων ἤτοι διὰ 4. Τὸ πηλίκον ταύτης τῆς διαιρέσεως εἶναι 11, ἐνῷ αἱ ζητούμεναι μονάδες ἀδύνατον νὰ ἦναι πλειότεραι τῶν 9· διότι, ἂν ἦσαν 10 ἢ 11, αὗται ἀποτελοῦσι μίαν δεκάδα, καὶ τότε ἡ ζητουμένη ῥίζα ἔπρεπε νὰ ἔχῃ ὄχι 2 δεκάδας, ἀλλὰ 3, ὅπερ ἀδύνατον, διότι ἔχομεν βεβαιότητα ὅτι αἱ δεκάδες εἶναι 2. Ἄρα πρέπει νὰ δοκιμάσωμεν πρῶτον τὸν 9 καὶ ὄχι τὸ πηλίκον 11. Καὶ τῷ ὄντι εἶναι 9 αἱ μονάδες.

β΄. Τοῦ ἀριθμοῦ 36699639 ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἔχει τέσσαρα ψηφία, αἱ δὲ χιλιάδες της εἶναι 6· ἀφοῦ δ' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 36 τὸ τετράγωνον τοῦ 6, δὲν μένει τίποτε, καὶ πρὸς εὕρεσιν τῶν ἑκατοντάδων πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 6 διὰ τοῦ διπλασίου 12 τῆς εὑρεθείσης ῥίζης 6. Τὸ πηλίκον τοῦτο δὲν εἶναι οὐδὲ μία μονάς, ἀλλὰ κλάσμα τῆς μονάδος· ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ ζητουμένη τετραγωνικὴ ῥίζα ἑκατοντάδα δὲν ἔχει οὐδὲ μίαν. Διότι τῷ ὄντι, ἂν εἶχε καὶ μίαν μόνην, τὸ διπλάσιον τῶν 6 χιλιάδων της ἐπὶ μίαν ἑκατοντάδα ἔπρεπε νὰ ἦναι 12 ἑκατοντάδες χιλιάδος, ἐνῷ ὁ ἀριθμὸς 699636 δὲν ἔχει 12, ἀλλὰ μόνον 6 ἑκατοντάδας χιλιάδος. Διὰ τοῦτο γράφεται 0 ἑκατοντάδες δεξιὰ τῶν 6 χιλιάδων τῆς ῥίζης, ἔπειτα διαιρεῖται διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ 60 ἤτοι τοῦ 120 ὁ ἀριθμὸς 699 πρὸς εὕρεσιν τῶν δεκάδων του, κτλ, ὡς ἐδῶ φαίνεται.

36699639	6058	
6.9	1205	12108
699.6	5	8
6025	6025	96864
9713.9		
96864		
275		

96. Μόνον εἰς τὸ τέλος τῆς πράξεως, δι' ἧς εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ, εἶναι δυνατὸν νὰ μάθωμεν ὅτι αὐτὸς εἶναι τετράγωνος ἢ ὄχι, ἐὰν μηδεὶς τῶν ἑπομένων

χαρακτήρων ἔχῃ χώραν, ὥστε νὰ πεισθῶμεν εὐθὺς κατ' ἀρχὰς ἐκ τῆς ὄψεως τοῦ ἀριθμοῦ ὅτι δὲν εἶναι τετράγωνος. Καὶ εἶναι μέν τις ἀριθμὸς τετράγωνος, ἐὰν μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν μονάδων τῆς ῥίζης του καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπ' αὐτὰς καὶ τοῦ διπλασίου τῆς ἤδη εὑρεθείσης ῥίζης καὶ αὐτῶν προκύπτῃ ἀριθμὸς ἴσος μὲ τὸ ἐπίλοιπον μέρος τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, ὅπερ μένει μετὰ τὰς προηγουμένας ἀφαιρέσεις, ὡς συνέβη ἐν ἀρ. 94, ὅπου εὑρέθη ὁ ἀριθμὸς 5676· δὲν εἶναι δὲ τετράγωνος, ἐὰν ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος ἀριθμος εἶναι μικρότερος, ὡς ἀνωτέρω, ὅπου ὁ 96864 εἶναι μικρότερος τοῦ 97139.

Διότι καὶ κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις μόνον ἐκ τοῦ τελευταίου ἀριθμοῦ γίνεται φανερὸν ὅτι ὁ δεδομένος σύγκειται ἀκριβῶς ἐκ τῶν μερῶν τοῦ ἤδη εὑρεθέντος, ἐξ ὧν κατ' ἀρχὰς ὑποτίθεται, ἢ ἐξ αὐτῶν καὶ ἄλλου ἔτι ἀριθμοῦ. Δηλαδὴ μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀριστεροῦ ψηφίου τῆς ῥίζης ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ τοῦ ψηφίου, μετὰ τὴν εὕρεσιν δὲ καὶ τοῦ δευτέρου ψηφίου ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ δεύτερον, μετὰ δὲ τὴν εὕρεσιν τοῦ τρίτου ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ νέου ὑπολοίπου τὸ τετράγωνον τοῦ τρίτου καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ τρίτον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον ἄλλο δὲν πρέπει νὰ ἐμπεριέχῃ, εἰμὴ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων καὶ τὸ διπλάσιον τῆς ἤδη εὑρεθείσης ῥίζης ἐπὶ τὰς μονάδας, ἂν ἦναι ὁ δεδομένος τετράγωνος, ἢ καὶ ἄλλον τιν' ἀριθμὸν, ἂν δὲν ἦναι, μετὰ δὲ τὴν εὕρεσιν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων κατασκευάζονται αὐτὰ τὰ μέρη τοῦ τετραγώνου, εἶναι φανερὸν ὅτι, ἂν αὐτὰ τὰ μέρη ἀποτελῶσιν ἀκριβῶς τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον, ὁ δεδομένος ἀριθμὸς σύγκειται ἀκριβῶς ἐκ τῶν μερῶν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἤδη εὑρεθέντος ἀριθμοῦ, ἤτοι εἶναι τετράγωνος αὐτοῦ, καὶ ἑπομένως οὗτος εἶναι ἀκριβῶς ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ δεδομένου· ἂν δὲ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν μικρότερον, ὁ δεδομένος δὲν εἶναι τετράγωνος τοῦ εὑρεθέντος, ἀλλὰ μεγαλήτερος αὐτοῦ τοῦ τετραγώνου, καὶ ἑπομένως ὁ εὑρεθεὶς δὲν εἶναι ὅλη ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ δεδομένου, ἀλλὰ τὸ ἀκέραιον μόνον μέρος αὐτῆς.

97. Ἰδοὺ μετὰ ταῦτα καὶ οἱ χαρακτῆρες, δι' ὧν γνωρίζεται ἀριθμὸς ἀκέραιος ὅτι δὲν εἶναι τετράγωνος.

α'. *Δὲν εἶναι τετράγωνος ὁ ἀριθμὸς, οὗτινος τὸ τῶν μονάδων ψηφίων εἶναι* 2 ἢ 3 ἢ 7 ἢ 8. Διότι παντὸς τετραγώνου ἀριθμοῦ τὸ τῶν μονάδων ψηφίον παριστάνει τὰς μονάδας τοῦ τετραγώνου τῶν τῆς ρίζης του μονάδων (91), αἱ δὲ μονάδες τοῦ τετραγώνου τούτου εἶναι 1 μὲν, ἂν τῆς ρίζης αἱ μονάδες ἦναι 1 ἢ 9, 4 δὲ, ἂν αἱ τῆς ρίζης ἦναι 2 ἢ 8, 9 δὲ ἂν ἦναι 3 ἢ 7, 6 δὲ, ἂν ἦναι 4 ἢ 6, 5 δὲ, ἂν ἦναι 5, ὄχι δέ ποτε 2, 3, 7, 8. Ἀφοῦ δὲ οὐδεὶς τετράγωνος ἀριθμὸς ἔχει μονάδας 2 ἢ 3 ἢ 7 ἢ 8, δῆλον ὅτι ὁ ἔχων τοσαύτας δὲν εἶναι τετράγωνος· οἷον οἱ 5642, 793, 847, 2468, κτλ.

β'. *Δὲν εἶναι τετράγωνος ὁ ἀριθμὸς, οὗτινος τὸ τῶν μονάδων ψηφίον εἶναι* 5, *τὸ δὲ τῶν δεκάδων εἶναι ἄλλο παρὰ τὸ* 2. Διότι εἴδομεν ἤδη ὅτι τετραγώνου ἀριθμοῦ αἱ μονάδες εἶναι 5, ἐὰν καὶ τῆς ρίζης του αἱ μονάδες ἦναι 5, ὧν τὸ τετράγωνον 25 ἔχει 2 δεκάδας. Ἀλλὰ τότε τὸ διπλάσιον τῶν δεκάδων, ὁσαιδήποτε καὶ ἂν ἦναι, ἐπὶ τὰς 5 μονάδας εἶναι ἀριθμὸς ἑκατοντάδων, καὶ δὲν ἔχει οὐδὲ μίαν δεκάδα ($2.10.5=100$, $2.20.5=200 \ldots 2.90.5=900$). Ὥστε τοῦ τετραγώνου αἱ δεκάδες ἐξ ἀνάγκης εἶναι 2, ὅταν αἱ μονάδες ἦναι 5. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν, ὅστις ἔχων 5 μονάδας δὲν ἔχει 2 δεκάδας, δὲν εἶναι τετράγωνος· οἷον οἱ 455, 3875 κτλ.

γ'. *Δὲν εἶναι τετράγωνος ὁ ἀριθμὸς, οὗτινος τὸ τῶν μονάδων ψηφίον εἶναι* 6, *τὸ δὲ τῶν δεκάδων εἶναι ἄρτιος ἀριθμός*. Διότι εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι τετραγώνου ἀριθμοῦ αἱ μονάδες εἶναι 6, ἐὰν τῆς ρίζης του αἱ μονάδες ἦναι 4 ἢ 6, ὧν τὰ τετράγωνα 16 καὶ 36 ἔχουσι περιττὸν ἀριθμὸν δεκάδων 1 καὶ 3. Τὸ δὲ διπλάσιον τῶν δεκάδων, ὁσαιδήποτε καὶ ἂν ἦναι, ἐπὶ 4 ἢ 6 μονάδας εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς δεκάδων, αἵτινες προστιθέμεναι εἰς τὴν 1 ἢ τὰς 3 δεκάδας τοῦ 16 ἢ τοῦ 36 ἀποτελοῦσι πάντοτε ἀριθμὸν δεκάδων τοῦ τετραγώνου περιττόν. Ὥστε τοῦ τετραγώνου αἱ δεκάδες εἶναι περιττάριθμοι, ὅταν αἱ μονάδες του ἦναι 6. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν, ὅστις ἔχων 6 μονάδας δὲν ἔχει δεκάδας περιτταρίθμους, δὲν εἶναι τετράγωνος· οἷον οἱ 57846, 386 κτλ. (α)

δ'. *Δὲν εἶναι τετράγωνος ὁ ἀριθμὸς, οὗτινος τὰ τελευταῖα ψηφία εἶναι περιττάριθμα μηδενικὰ, ἤτοι 0 ἢ 000 ἢ 00000. κτλ.* Διότι τετραγώνου ἀριθμοῦ μὲ μηδενικὰ τὰ δεξιά του ψηφία καὶ ἡ ῥίζα ἀνάγκη νὰ ἔχῃ μηδενικὰ τὰ δεξιά της ψηφία. Ἀλλ' ὅταν μὲν ἡ ῥίζα ἔχῃ ἓν 0, τὸ τετράγωνον ἔχει 00, ὅταν δὲ 00, τὸ τετράγωνον ἔχει 0000, κτλ, τουτέστι τὸ τετράγωνον ἔχει πάντοτε ἀρτιάριθμα τὰ ἐν δεξιᾷ μηδενικὰ, ἂν ἔχῃ. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν ὁ ἔχων τὰ δεξιά του ψηφία περιττάριθμα μηδενικὰ δὲν εἶναι τετράγωνος· οἷον ὁ 640, 841000 κτλ.

έ. *Δὲν εἶναι τετράγωνος περιττὸς ἀριθμὸς, ἐὰν ὁ κατὰ μονάδα μικρότερος αὐτοῦ δὲν ἦναι διαιρετὸς διὰ 4.* Διότι ἐκ τῶν ἀνωτέρω (ά) εἶναι φανερὸν ὅτι περιττοῦ τετραγώνου καὶ ἡ ῥίζα εἶναι περιττὸς ἀριθμός· ἐὰν δὲ δὶ a σημειώσωμεν πάντα περιττὸν ἢ ἄρτιον ἀριθμὸν, ὁ μὲν $2a$ παριστάνει πάντας τοὺς ἀρτίους, ὁ δὲ $2a+1$ πάντας τοὺς περιττοὺς, τὸ δὲ τετράγωνον $4a^2+4a+1$ τοῦ $2a+1$ (41 ἢ 91) περιττὸν ὂν παριστάνει τὸ τετράγωνον παντὸς περιττοῦ ἀριθμοῦ. Ἀλλ' ὁ κατὰ μονάδα μικρότερος $4a^2+4a$ τοῦ τετραγώνου τούτου εἶναι διαιρετὸς διὰ 4· ἄρα, ἐὰν ὁ κατὰ μονάδα μικρότερος περιττοῦ ἀριθμοῦ δὲν ἦναι διαιρετὸς διὰ 4, ὁ περιττὸς δὲν εἶναι τετράγωνος.

ς'. *Δὲν εἶναι τετράγωνος ἄρτιος ἀριθμὸς, ὅςτις δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 4.* Διότι ἀρτίου τετραγώνου εἶναι καὶ ἡ ῥίζα ἄρτιος ἀριθμὸς (ά), ὅςτις παριστάνεται διὰ $2a$ γενικῶς· τὸ δὲ τετράγωνον τούτου $4a^2$ εἶναι διαιρετὸν διὰ 4. Ἄρα, ἐὰν ὁ ἄρτιος ἀριθμὸς δὲν ἦναι διαιρετὸς διὰ 4, δὲν εἶναι τετράγωνος (ἰδὲ καὶ κατωτέρω 98 καὶ 99).

Σημ. Ἐὰν δὲ συμβαίνῃ τὸ ἐναντίον τῶν ἤδη εἰρημένων, οἷον ἐὰν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων ἦναι 1, 4, 9, ἢ ἐὰν ἦναι τὰ δύο τελευταῖα 25, ἢ 16, 36, 56, 76, 96, κτλ, δὲν ἕπεται ἐκ τούτου ὅτι ὁ ἀριθμὸς τότε εἶναι τετράγωνος, ἀλλ' ὅτι δυνατὸν νὰ ἦναι, δυνατὸν καὶ νὰ μὴ ἦναι· καὶ τότε πράττομεν ὅ,τι εἴπομεν ἐν ἀρ. 94. Ἐὰν δὲ διά τινος τῶν προειρημένων χαρακτήρων γνωρίζω-

(α) Τὸν χαρακτῆρα τοῦτον ἐθέσαμεν λαβόντες ἀφορμὴν παρὰ τοῦ μαθητοῦ Ξάντου Καρύδη.

μεν ὅτι δὲν εἶναι τετράγωνος ὁ ἀριθμὸς, θέλωμεν δὲ τῆς ῥίζης αὐτοῦ μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος, πράττομεν ὡς ἐν ἀρ. 94 καὶ 96 εἴπομεν· ἐὰν δὲ θέλωμεν καὶ κλάσμα τι, πράττομεν ὡς κατωτέρω λέγομεν.

98. Ἀριθμοῦ, ὅςτις εἶναι γινόμενον δύο ἢ πλειοτέρων ἄλλων ἀριθμῶν, οἷον ὁ 4.9.15 ἢ ὁ $4\alpha^2\beta^4\gamma^6$ κτλ, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ὡς ἐδῶ λέγομεν.

Πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι *τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ, ὅςτις εἶναι γινόμενον ἄλλων, οἷος ὁ αβγ, εἶναι γινόμενον τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν παραγόντων του.* Διότι

$$\alpha\beta\gamma\times\alpha\beta\gamma=\alpha^2\beta^2\gamma^2 \ (40).$$

Ἔπειτα ὅτι *τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ ἔχει δείκτην διπλάσιον τοῦ δείκτου τοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ἐπομένως πάντοτε ἄρτιον.* Διότι $\alpha^3\times\alpha^3=\alpha^6$, $\beta^2\times\beta^2=\beta^4$, κτλ.

Ἐκ δὲ τούτων ἕπεται ὅτι *ἀριθμὸς, ὅςτις εἶναι γινόμενον ἄλλων, εἶναι μὲν τετράγωνος, ἐὰν ἕκαστος τῶν παραγόντων του ἦναι τετράγωνος, ἢ ἄλλως, ἐὰν ἕκαστος τῶν παραγόντων του ἔχῃ δείκτην ἄρτιον· δὲν εἶναι δὲ τετράγωνος, ἐάν τινες τῶν παραγόντων του ἢ εἷς μόνος δὲν ἦναι τετράγωνος, ἢ ἄλλως, ἐὰν ἔχῃ δείκτην περιττόν.*

Ἐκ δὲ τούτου καταλαμβάνομεν ὅτι *ἀριθμὸς, ὅςτις εἶναι μὲν διαιρετὸς διὰ πρωτοτύπου τινὸς ἀριθμοῦ, ὄχι δὲ καὶ διὰ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ, δὲν εἶναι τετράγωνος.* Διότι τοῦ τετραγώνου ὅλοι οἱ παράγοντες εἶναι τετράγωνοι, καὶ διὰ τοῦτο, ἂν ἦναι αὐτὸς διαιρετὸς διά τινος πρωτοτύπου, εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ τετραγώνου του. Ὁ μὴ ἔχων λοιπὸν ταύτην τὴν ἰδιότητα ἀριθμὸς, ἤτοι ὁ ἔχων ἕνα πρωτότυπον ἀριθμὸν παράγοντα, μὴ ἔχων δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ πρωτοτύπου παράγοντα, δὲν εἶναι τετράγωνος· οἷον οἱ 526 καὶ 4839 κτλ, ὧν ὁ μὲν διαιρετὸς ὢν διὰ 2 δὲν εἶναι καὶ διὰ 4, ὁ δὲ διαιρετὸς ὢν διὰ 3 δὲν εἶναι καὶ διὰ τοῦ τετραγώνου του 9 (ἰδὲ καὶ 97, ϛ'.).

Γνωρίζοντες λοιπὸν ἐκ τούτων ὅτι ἀριθμὸς, ὅςτις νὰ ἦναι γινόμενον ἄλλων ἀριθμῶν, εἶναι τετράγωνος, ἐὰν ἕκαστος τῶν παραγόντων του ἦναι τετράγωνος, συμπεραίνομεν καὶ τὸ ἀντίστροφον, ὅτι *τετραγώνου τοιούτου ἀριθμοῦ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι γινόμενον τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν ὅλων τῶν παραγόντων του*· καὶ διὰ τοῦτο *πρὸς εὕρεσιν αὐτῆς ἐξάγομεν* *τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἑκάστου τῶν παραγόντων τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ τὰ ἐν ἀρ.* 94, *ἂν δ' ἔχωσιν οὗτοι δείκτας, διαιροῦντες ἑκάστου τὸν δείκτην διὰ* 2, *καὶ πολλαπλασιάζομεν τὰς οὕτως εὑρημένας ῥίζας τῶν παραγόντων του.* Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 4.9.16 εἶναι ὁ 2.3.4, τοῦ $4\alpha^2\beta^4\gamma^6$ εἶναι ὁ $2\alpha\beta^2\gamma^3$, τοῦ $2^4.5^2.7^2$ εἶναι $2^2.5.7$, κτλ.

Περὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης κλασματικοῦ καὶ ἄλλου μὴ ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

99. *Κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, οἷον τοῦ* $\frac{\alpha}{\beta}$, *τὸ τετράγωνον* $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ *εἶναι κλασματικόν, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμητοῦ, παρονομαστὴν δὲ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πρώτου κλασματικοῦ.*

Ἐντεῦθεν δὲ δῆλον ὅτι *κλασματικὸς ἀριθμός, οὗτινος ὁ ἕτερος ὅρος δὲν εἶναι τετράγωνος ἢ ἀμφότεροι, δὲν εἶναι οὐδ' αὐτὸς τετράγωνος· ἂν δὲ οἱ δύο του ὅροι ἦναι τετράγωνοι, εἶναι καὶ αὐτὸς τετράγωνος. Δῆλον δ' ἔτι ὅτι τετραγώνου κλασματικοῦ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εὑρίσκεται, ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμητοῦ του καὶ ἡ τοῦ παρονομαστοῦ του, τεθῇ δὲ ἡ δευτέρα παρονομαστὴς ὑπὸ τὴν πρώτην.* Διότι ὁ οὕτω προκύπτων κλασματικὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐφ' ἑαυτὸν ἐξαναπαράγει τὸν πρῶτον. Τοῦ $\frac{36}{81}$ π. χ. ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι $\frac{6}{9}$, ἡ τοῦ $\frac{25}{49}$ εἶναι $\frac{5}{7}$ κτλ. Τοῦ δὲ μὴ τετραγώνου κλασματικοῦ πῶς εὑρίσκεται προσεγγίζουσά τις τετραγωνικὴ ῥίζα λέγομεν κατωτέρω.

Σημ. Εἶναι ἀρκετὰ δῆλον ὅτι κλάσματος τὸ τετράγωνον εἶναι μικρότερον αὐτοῦ, καὶ ἀντιστρόφως, κλάσματος ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι μεγαλητέρα αὐτοῦ.

Δεκαδικὸς δέ, ὅστις ἔχει περιττὰ τὸν ἀριθμὸν ψηφία δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, δὲν εἶναι τετράγωνος. Διότι ἀριθμοῦ δεκαδικοῦ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι καὶ αὐτὴ μικτὸς δεκαδικός· παντὸς δὲ τοιούτου δεκαδικοῦ τὸ τετράγωνον ἔχει δὶς τόσα ψηφία δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, ὅσα ἔχει ὁ ἀριθμός, ἤτοι ἄρτιον ἀριθμὸν ψηφίων. Ἄρα ὁ ἔχων περιττὸν ἀριθμὸν ψηφίων δὲν εἶναι τετράγωνος.

Ὁ δὲ ἔχων ἄρτια τὸν ἀριθμὸν ψηφία δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς δυνατὸν νὰ ἦναι τετράγωνος, δυνατὸν καὶ ὄχι, καὶ αὐτοῦ ἡ ῥίζα εὑρίσκεται ὡς εἴπομεν ἐν ἀρ. 94 ἢ ὡς λέγομεν ἐφεξῆς.

Πᾶς δ' ἄλλος ἀριθμὸς τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν καὶ ἐξάγεται τότε αὐτοῦ ἡ ῥίζα.

Περὶ εὑρέσεως προσεγγιζούσης τετραγωνικῆς ῥίζης παντὸς μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ.

100. Ἐνταῦθα ὑποτίθεται γνωστὸν ὅτι ὁ ἀριθμὸς, οὗτινος χρειαζόμεθα τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, δὲν εἶναι τετράγωνος, καὶ πρόκειται νὰ εὕρωμεν προσεγγίζουσάν τινα ῥίζαν τετραγωνικὴν αὐτοῦ.

Πρῶτον, σημειοῦντες γενικῶς δὶ a τὸν μὴ τετράγωνον ἀριθμὸν, εἴτε ἀκέραιος εἶναι εἴτε κλασματικὸς κτλ, δυνάμεθα προσεγγίζουσάν τιν' αὐτοῦ τετραγωνικὴν ῥίζαν νὰ παραστήσωμεν πάντοτε διὰ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ· διότι πᾶς ἄλλος ἀριθμὸς ἰσοδυναμεῖ μὲ κλασματικόν τινα (Θ. Α. 116—118).

Ἔπειτα, ἐνῷ τῆς προσεγγιζούσης ταύτης κλασματικῆς ῥίζης εἶναι καὶ οἱ δύο ὅροι ἄγνωστοι, ἤτοι καὶ ἡ κλασματικὴ μονὰς καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων, δυνάμεθα πάντοτε τὸν ἕτερον νὰ ἐκλαμβάνωμεν ὅσον ἂν θέλωμεν, ἀρκεῖ μόνον ὁ ἄλλος νὰ προσδιορισθῇ τοσοῦτος, ὥστε νὰ ἔχωμεν βεβαιότητα ὅτι ἡ ἀνάριθμος ῥίζα τοῦ a κεῖται μεταξὺ αὐτοῦ καὶ ἄλλου τινὸς ἀριθμοῦ, διαφέρουσα ἑκατέρου ὀλιγώτερον παρ' ὅσον αὐτοὶ ἀπ' ἀλλήλων (88). Π. χ. ἐὰν μὲν κλασματικὴ μονὰς ἐκληφθῇ τὸ $\frac{1}{12}$, ἐπειδὴ δωδέκατα εἶναι ἓν, δύο, τρία . . . . . ἓν μιλιόνιον κτλ, εὐκόλως τις καταλαμβάνει ὅτι ἡ ἀνάριθμος ῥίζα τοῦ a ἐξ ἀνάγκης κεῖται μεταξὺ ἑνὸς τούτων τῶν ἀριθμῶν δωδεκάτων καὶ τοῦ ἀκολούθου του, καὶ ἄλλο δὲν μένει εἰμὴ νὰ προσδιορισθῶσιν οἱ δύο ἀριθμοὶ, ὧν μεταξὺ κεῖται. Ἐὰν δὲ ἀριθμὸς ἐκληφθῇ ὁ 35, εἶναι ἐπίσης φανερὸν ὅτι ἡ ἀνάριθμος ῥίζα τοῦ a κεῖται μεταξὺ 35 τινῶν κλασματικῶν μονάδων καὶ 35 ἄλλων τινῶν κλασματικῶν μονάδων, καὶ τότε πρόκειται μόνον νὰ προσδιορισθῶσιν αἱ μονάδες αὗται τίνες εἶναι.

Ἐν τοῖς ἑξῆς ὑποθέτομεν πάντοτε τὴν κλασματικὴν μονάδα ὡρισμένην κατ' ἀρχὰς, καὶ θέλομεν δείξει πῶς εὑρίσκεται ὁ μικρότερος τῶν ἀριθμῶν, ὧν μεταξὺ κεῖται ἡ ἀνάριθμος τοῦ α ῥίζα· διότι ὁ ἄλλος θέλει εἶσθαι πάντοτε ὁ ἀμέσως μετ' αὐτόν. (ἰδὲ καὶ 104).

101. Ἔστω λοιπὸν γενικῶς $\frac{1}{\nu}$ ἡ ἐξ ἀρχῆς ὡρισμένη κλασματικὴ μονάς. Ἐὰν δὲ πρὸς ὥραν ὑποθέσωμεν γνωστὸν καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων καὶ σημειώσωμεν αὐτὸν διὰ ω, ἡ προσεγγίζουσα τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ α θέλει παρασταθῆ διὰ τοῦ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\omega}{\nu}$· ἐὰν δὲ καὶ ἡ ἀνάριθμος ῥίζα τοῦ α σημειωθῆ διὰ ρ, δῆλον ὅτι αὕτη πρέπει νὰ κῆται μεταξὺ τοῦ $\frac{\omega}{\nu}$ καὶ τοῦ ἀκολούθου του $\frac{\omega+1}{\nu}$, ὧν ἡ διαφορὰ εἶναι $\frac{1}{\nu}$. Ὡς δὲ τὸ ρ κεῖται μεταξὺ τοῦ $\frac{\omega}{\nu}$ καὶ τοῦ $\frac{\omega+1}{\nu}$, οὕτω καὶ ὁ α, τὸ τετράγωνον τοῦ ρ, κεῖται ἀναγκαίως μεταξὺ τοῦ $\frac{\omega^2}{\nu^2}$ καὶ τοῦ $\frac{(\omega+1)^2}{\nu^2}$, τῶν τετραγώνων τοῦ $\frac{\omega}{\nu}$ καὶ $\frac{\omega+1}{\nu}$. Ἀλλ' ὁ α εἶναι ἴσος μὲ τὸν $\frac{\alpha\nu^2}{\nu^2}$ (Θ. Α. 95)· ἄρα καὶ ὁ $\frac{\alpha\nu^2}{\nu^2}$ κεῖται μεταξὺ τοῦ $\frac{\omega^2}{\nu^2}$ καὶ τοῦ $\frac{(\omega+1)^2}{\nu^2}$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ τρεῖς οὗτοι κλασματικοὶ εἶναι ὁμώνυμοι, δῆλον ὅτι καὶ ὁ ἀριθμητὴς μόνος $\alpha\nu^2$ κεῖται μεταξὺ τῶν ἀριθμητῶν ω^2 καὶ $(\omega+1)^2$. Ἐκ δὲ τούτου δῆλον ὅτι, ὄντων τῶν ω^2 καὶ $(\omega+1)^2$ τετραγώνων δύο κατὰ σειρὰν ἀκεραίων ἀριθμῶν ω καὶ $\omega+1$, ὁ $\alpha\nu^2$ ὁ μεταξὺ αὐτῶν κείμενος δὲν εἶναι τετράγωνος, ἀλλ' ὅτι σύγκειται ἐκ τοῦ ω^2, τοῦ μικροτέρου τῶν δύο τετραγώνων ω^2 καὶ $(\omega+1)^2$, καὶ ἐκ μονάδων ὀλιγωτέρων τῶν 2ω (89). Ὥστε βλέπομεν ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ ζητουμένου ἀριθμητοῦ ω εἶναι τὸ τετράγωνον τὸ ἀμέσως μικρότερον τοῦ γνωστοῦ ἀριθμοῦ $\alpha\nu^2$· ἐπομένως ὁ ζητούμενος ἀριθμητὴς ω εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀμέσως μικροτέρου τοῦ $\alpha\nu^2$, ἤτοι τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης τοῦ $\alpha\nu^2$.

Ἐκ τούτου λοιπὸν μανθάνομεν ὅτι *πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ τῆς προσεγγιζούσης ῥίζης πρέπει πρῶτον νὰ τετραγωνίζωμεν τὸν παρονομαστὴν ν τῆς ὡρισμένης κλασματικῆς μονάδος· δεύτερον ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦτο νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν α, οὗτινος ζητεῖται ἡ προσεγγίζουσα τετραγωνικὴ ῥίζα· τρίτον τοῦ γινομένου νὰ ἐξάγωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς τετραγωνικῆς του ῥίζης* (94 καὶ 96). Ὑπὸ ταύτην δὲ τὴν ῥίζαν γράφοντες παρονομαστὴν τὸν τῆς κλασματικῆς μονάδος ἤτοι τὸν ν θέλομεν ἔχει τὴν ζητουμένην προσεγγίζουσαν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ α.

Σημ. Ἡ κλασματικὴ μονὰς $\frac{1}{\nu}$ παριστάνει τότε τὸν βαθμὸν τῆς προσεγγίσεως, ἤτοι ὅτι ἡ προσεγγίζουσα ῥίζα $\frac{\omega}{\nu}$ διαφέρει τῆς ἀναρίθμου τοῦ α ῥίζης ὀλιγώτερον $\frac{1}{\nu}$ ἤτοι ἑνὸς νιτοῦ, ἢ συντομώτερα, ἡ $\frac{\omega}{\nu}$ εἶναι προσεγγίζουσα ῥίζα τοῦ α μ ε ῖ ο ν ν ι τ ο ῦ· διότι τὸ $\frac{\omega}{\nu}$ καὶ τὸ $\frac{\omega+1}{\nu}$ διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων $\frac{1}{\nu}$, ἑκάτερον δὲ τούτων διαφέρει τῆς ἀναρίθμου ῥίζης τοῦ α, ἥτις κεῖται μεταξὺ αὐτῶν, ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{\nu}$.

Διὰ τοῦτο εἶναι συνειθισμένον νὰ λέγωσι κατ' ἀρχάς, Ν ὰ ε ὑ ρ ε θ ῇ π ρ ο σ ε γ γ ί ζ ο υ σ α τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ὴ ῥ ί ζ α τ ο ῦ α μ ε ῖ ο ν ν ι τ ο ῦ, ἀ ν τ ὶ τ ο ῦ Ν ὰ ε ὑ ρ ε θ ῇ π ρ ο σ ε γ γ ί ζ ο υ σ α τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ὴ ῥ ί ζ α τ ο ῦ α, ἥ τ ι ς ν ὰ ἔ χ ῃ π α ρ ο ν ο μ α σ τ ὴ ν ν, κ α ὶ ν ὰ δ ι α φ έ ρ ῃ τ ῆ ς ἀ ν α ρ ί θ μ ο υ ῥ ί ζ η ς τ ο ῦ α ὀ λ ι γ ώ τ ε ρ ο ν ἑ ν ὸ ς ν ι τ ο ῦ.

102. Ἐφεξῆς λέγομεν πῶς τροποποιεῖται ὁ ἀνωτέρω γενικὸς κανὼν κατὰ τὰς μερικὰς περιπτώσεις, καθ' ἃς ὁ μὲν ἀριθμὸς α εἶναι ἀκέραιος, κλασματικὸς ὁποιοσδήποτε ἢ δεκαδικός, καὶ μικτός, ἡ δὲ κλασματικὴ μονὰς $\frac{1}{\nu}$, ἡ παριστάνουσα τὸν βαθμὸν τῆς προσεγγίσεως, εἶναι ὁποιαδήποτε ἢ δεκαδική.

Α'. Ὁ μὲν ἀριθμὸς ἀκέραιος, ἡ δὲ κλασματικὴ μονὰς ά. ὁποιαδήποτε, β'. δεκαδική.

ά. Ἂς εὑρεθῇ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 12 μεῖον $\frac{1}{7}$. Ἐνταῦθα δὲν λαμβάνει οὐδεμίαν τροποποίησιν ὁ κανών, ἀλλὰ τετραγωνίζεται ὁ 7, ἐπὶ τὸ τετράγωνον 49 πολλαπλασιάζεται ὁ 12, τοῦ γινομένου 588 ἐξάγεται τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, ὅπερ εἶναι 24, οὗτος δὲ εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τῆς ζητουμένης ῥίζης, ὑφ' ὃν τίθεται ὁ παρονομαστὴς 7· ὥστε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 12 μεῖον $\frac{1}{7}$ εἶναι $\frac{24}{7}$ ἢ $3\frac{3}{7}$. Ὅτι δὲ τοῦτο ἀληθεύει, τώρα τὸ πληροφορούμεθα καὶ οὕτως. Ὁ $12=\dfrac{12\times49}{49}$ $=\dfrac{588}{49}$, τὰ δὲ τετράγωνα τοῦ $\dfrac{24}{7}$ καὶ τοῦ $\dfrac{25}{7}$ εἶναι $\dfrac{576}{49}$ καὶ $\dfrac{625}{49}$· ὡς δὲ ὁ $\dfrac{588}{49}$ ἤτοι ὁ 12 κεῖται μεταξὺ τοῦ $\dfrac{576}{49}$ καὶ τοῦ $\dfrac{625}{49}$, οὕτω καὶ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 12 κεῖται μεταξὺ τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν $\dfrac{24}{7}$ καὶ $\dfrac{25}{7}$ τῶν $\dfrac{576}{49}$ καὶ $\dfrac{625}{49}$. Ἀλλ' ὁ $\dfrac{24}{7}$ διαφέρει τοῦ $\dfrac{25}{7}$ κατὰ $\dfrac{1}{7}$· ἄρα ὁ $\dfrac{24}{7}$ διαφέρει τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 12 ὀλιγώτερον $\dfrac{1}{7}$.

β'. Ἂς εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 12 μεῖον $\frac{1}{100}$ ἢ 0,01. Ἐδῶ ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ 100 καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ 12 ἐπὶ τὸ τετράγωνον 10000 τοῦ 100 καταντᾷ εἰς τὸ νὰ γραφθῶσι 0000 δεξιὰ τοῦ 12. Ἡ δὲ ἐξαγωγὴ τοῦ ἀκεραίου μέρους τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 120000 γίνεται, ἐὰν πρῶτον ἐξαχθῇ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης τοῦ 12, ἔπειτα δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 3 γραφθῶσι 00 καὶ διαιρεθῇ ὁ 30 διὰ τοῦ διπλασίου 6 τῆς ῥίζης 3, καὶ μετέπειτα πάλιν δεξιὰ τοῦ νέου ὑπολοίπου 44 γραφθῶσι τἄλλα 00, κτλ. Τὸ δ' εὑρεθὲν ἀκέραιον μέρος 346 τῆς ῥίζης τοῦ 120000 πρέπει νὰ λάβῃ παρονομαστὴν 100, ἤτοι πρέπει νὰ ἦναι 3,46, ὅπου τὸ 4 τὸ εὑρεθὲν μετὰ τὴν γραφὴν τῶν δύο πρώτων μηδενικῶν δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 3 εἶναι δεκατημόρια, τὸ δὲ 6 τὸ εὑρεθὲν μετὰ τὴν γραφὴν τῶν δύο ἄλλων μηδενικῶν δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 44 εἶναι ἑκατοστημόρια. Ὥστε ἀντὶ τοῦ γενικοῦ κανόνος εἶναι ἁπλούστερος ὁ ἑξῆς·

Εὗρε τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ δο-

θέντος ἀκεραίου ἀριθμοῦ, δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου γράψε 00 καὶ ἐκτέλεσε τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸ σύνηθες, τὸ δ' εὑρεθὲν ψηφίον τῆς ῥίζης λογίσθητι δεκατημόρια, ἔπειτα δεξιὰ τοῦ νέου ὑπολοίπου γράψε πάλιν 00, τὸ δ' εὑρεθὲν νέον ψηφίον λογίσθητι ἑκατοστημόρια, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.(α)

(α). Ὅταν ἡ ζητουμένη τετραγωνικὴ ῥίζα ἔχῃ πολλὰ ψηφία, ἀφοῦ εὑρεθῶσιν ὑπὲρ τὰ ἡμίσεα κατὰ τὸν ἤδη γνωστὸν κανόνα, τὰ λοιπὰ εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρίσκωνται δι' ἁπλῆς διαιρέσεως.

Ἔστω Α ὁ ἀριθμὸς, οὗτινος ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, α δὲ τὸ ἤδη εὑρεθὲν μέρος τῆς ῥίζης μὲ τόσα μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ, ὅσα εἶναι τὰ μὴ εὑρεθέντα ἔτι ψηφία, β δὲ τὸ μὴ εὑρεθὲν μέρος, ὅπερ ἔχει ὀλιγώτερα ψηφία παρὰ τὰ ἡμίσεα τῶν τοῦ α. Ἡ ζητουμένη ῥίζα εἶναι $\alpha+\beta$, καὶ ὁ Α εἶναι ἴσος μὲ τὸ τετράγωνον αὐτῆς, ἤτοι $A=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$. Μετατεθέντος δὲ τοῦ α^2 εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ διαιρεθέντων ἔπειτα τῶν δύο μελῶν διὰ 2α, ἔχομεν $\frac{A-\alpha^2}{2\alpha}=\beta+\frac{\beta^2}{2\alpha}$. Ἀλλὰ τὸ $\frac{\beta^2}{2\alpha}$ εἶναι κλάσμα· διότι ἔχοντος τοῦ β ὀλιγώτερα ψηφία παρὰ τὰ ἡμίσεα τῶν τοῦ α, τοῦ δὲ β^2 ἔχοντος τὸ πολὺ δὶς τόσα, ὅσα τὸ β (90), δῆλον ὅτι τὸ α, ὅπερ ἔχει πλειότερα παρὰ δὶς τόσα, ὅσα τὸ β ψηφία, ἀποτελεῖ ἀριθμὸν μεγαλήτερον τοῦ β^2, πολὺ δὲ περισσότερον τὸ 2α. Ἂν λοιπὸν παραμεληθῇ τὸ κλάσμα $\frac{\beta^2}{2\alpha}$, καὶ θεωρηθῇ τὸ $\beta=\frac{A-\alpha^2}{2\alpha}$ μεῖον μονάδος, βλέπει τις ὅτι τὸ β ἤτοι τ ὰ λ ο ι π ὰ ψ η φ ί α τ ῆ ς ῥ ί ζ η ς ε ὑ ρ ί σ κ ο ν τ α ι, ἐ ὰ ν δ ι ὰ τ ο ῦ δ ι π λ α σ ί ο υ τ ο ῦ π ρ ο ε υ ρ η μ έ ν ο υ μ έ ρ ο υ ς τ ῆ ς ῥ ί ζ η ς ἔ χ ο ν τ ο ς δ ε ξ ι ά τ ο υ μ η δ ε ν ι κ ὰ τ ό σ α, ὅ σ α τ ὰ μ έ λ λ ο ν τ α ν ὰ ε ὑ ρ ε θ ῶ σ ι ψ η φ ί α, δ ι α ι ρ ε θ ῇ ἡ δ ι α φ ο ρ ὰ τ ο ῦ ἀ ρ ι θ μ ο ῦ Α κ α ὶ τ ο ῦ τ ε τ ρ α γ ώ ν ο υ τ ο ῦ π ρ ο ε υ ρ η μ έ ν ο υ μ έ ρ ο υ ς τ ῆ ς ῥ ί ζ η ς, ἤ τ ο ι τ ὸ κ α τ ά λ ο ι π ο ν τ ὸ μ ε τ ὰ τ ὴ ν ε ὕ ρ ε σ ι ν τ ῶ ν ὑ π ὲ ρ τ ὰ ἡ μ ί σ ε α ψ η φ ί ω ν τ ῆ ς ῥ ί ζ η ς.

Ἂς εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 4735678956 μεῖον μονάδος.

Αὕτη ἡ ῥίζα θέλει ἔχει πέντε ψηφία. Ἀφοῦ λοιπὸν εὕρωμεν τὰ τρία της ψηφία 688 κατὰ τὸν κοινὸν κανόνα, ἵνα εὕρωμεν τἆλλα της δύο 16, διαιροῦμεν τὸ κατάλοιπον τῆς προηγουμένης πράξεως, τὸν 2238956, διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ 688 ἔχοντος 00 εἰς τὸ τέλος, ἤτοι διὰ τοῦ 137600. Ἡ ῥίζα λοιπὸν τοῦ ἀνωτέρω ἀριθμοῦ μεῖον μονάδος εἶναι 68816, διότι τῷ ὄντι τὸ τετράγωνον 4735641856 τοῦ 68816 ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ ἀνωτέρω ἀριθμοῦ ἀφίνει κατάλοιπον 37100 μικρότερον τοῦ διπλασίου τοῦ 68816 (ἰδὲ 89).

Τώρα δύναταί τις νὰ εὕρῃ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἄλλα τέσσαρα ψηφία τῆς ῥίζης, ἤγουν διαιρῶν τὸ κατάλοιπον τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ τὸ τετράγωνον τῆς ῥίζης 68816, ἤτοι τὸν 37100 ἀκολουθούμενον ἀπὸ ὀκτὼ μηδενικὰ, διὰ τοῦ διπλασίου τῆς ῥίζης 68816 ἀκολουθουμένου ἀπὸ τέσσαρα μηδενικὰ, τουτέστι διαιρῶν 3710000000000 διὰ τοῦ 1376320000, ἢ τὸν 371000000 διὰ τοῦ 137632, καὶ εὑρίσκει 2695· λοιπὸν ἡ ῥίζα τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ μεῖον 0,0001 εἶναι 68816,2695.

Ἰδοὺ κατὰ ταῦτα ἡ πρὸς εὕρεσιν τῆς ῥίζης τοῦ 12 μεῖον 0,01 πρᾶξις.

```
12  |3,46    686
 9    64       6
----        ----
30.0   4    4116
256  256
-----
 440.0
 4116
 ----
  284
```

103. *Β'. Ὁ ἀριθμὸς κλασματικὸς ὁποιοσδήποτε ἢ δεκαδικὸς, καὶ ἡ κλασματικὴ δὲ μονὰς ὁποιαδήποτε ἢ δεκαδική.*

ά. Ἂς εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{5}{7}$ μεῖον $\frac{1}{9}$. Ἐνταῦθα μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ $\frac{5}{7}$ ἤτοι τοῦ ἀριθμητοῦ 5 ἐπὶ τὸ τοῦ 9 τετράγωνον 81, *δὲν ἐξάγομεν τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης τοῦ κλασματικοῦ γινομένου* $\frac{405}{7}$, *ἀλλὰ τρέπομεν τοῦτο εἰς ἰσοδύναμον μικτὸν* 57 $\frac{6}{7}$ *καὶ παραιτοῦμεν τὸ κλάσμα* $\frac{6}{7}$, τοῦ δὲ ἀκεραίου 57 εὑρίσκομεν τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης, ὅπερ εἶναι 7, καὶ ἑπομένως ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ $\frac{5}{7}$ μεῖον $\frac{1}{9}$ εἶναι $\frac{7}{9}$. Δὲν ἐξάγομεν δὲ τοῦ κλασματικοῦ γινομένου τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης, ἀλλὰ τὸ τρέπομεν εἰς ἰσοδύναμον μικτὸν, διότι εἰς ταύτην τὴν μορφὴν εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης του, ὄχι δὲ καὶ εἰς τὴν κλασματικὴν ὄντος αὐτοῦ· παραιτοῦμεν δὲ τὸ κλάσμα, διότι μόνον ἐκ τοῦ ἀκεραίου μέρους του προκύπτει τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης, ὄχι δὲ καὶ ἐκ τοῦ κλάσματος· μάλιστα οὐδὲ τὸ ἀκέραιον ὅλον χρειάζεται, ὅταν δὲν ἦναι τετράγωνον, καὶ διὰ τοῦτο παραιτοῦνται καὶ ἀκέραιαι μονάδες πολλαὶ, ὡς ἀνωτέρω τοῦ 57 αἱ 8 μονάδες αἱ ὑπὲρ τὰς 49. Ὡσαύτως εὑρίσκεται καὶ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 0,478 μεῖον $\frac{1}{5}$, ἂν καὶ συνειθίζεται δεκαδικὴ μονὰς, ὅταν ὁ ἀριθμὸς ἦναι δεκαδικὸν κλάσμα (ἰδὲ τὸ ἀκόλουθον).

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 μὲ 8 ψηφία δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς. Πρῶτον εὑρίσκονται τὰ τρία ταῦτα 1,41 κατὰ τὸν κοινὸν κανόνα, ἔπειτα εὑρίσκονται τὰ δύο ταῦτα 42 δι' ἁπλῆς διαιρέσεως τοῦ 11900 διὰ 282, καὶ τελευταῖον εὑρίσκονται τὰ τέσσαρα ταῦτα 1356 δι' ἁπλῆς διαιρέσεως τοῦ 38360000 διὰ 28284. Ὥστε τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 μεῖον 0,00000001 θέλει εὑρεθῆ ὁ 1,41421356.

β'. Ἂς εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{5}{7}$ μεῖον 0,01. Νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ $\frac{5}{7}$ ἐπὶ τὸ τετράγωνον 10000 τοῦ 100, καὶ τὸ γίνομενον $\frac{50000}{7}$ νὰ τραπῇ εἰς τὸν ἰσοδύναμον μικτὸν $7142\frac{6}{7}$ ἄλλο δὲν εἶναι κυρίως εἰμὴ νὰ τραπῇ τὸ $\frac{5}{7}$ εἰς δεκαδικὸν, ἔχοντα δὶς τόσα ψηφία, ὅσα θέλει ἔχει ἡ ῥίζα, ἤτοι ἐνταῦθα τέσσαρα 7142, διότι ἡ ῥίζα θέλει ἔχει δύο, ἀριθμὸς ἑκατοστῶν οὖσα. Ἀφοῦ δ' εὑρεθῇ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης τοῦ 7142, ὅπερ εἶναι 84, τοῦτο θέλει λογισθῇ ἑκατοστὰ $\frac{84}{100}$ ἢ 0,84, τουτέστι πρὸ τοῦ ἀκεραίου μέρους τῆς ῥίζης τοῦ 7142 ἀνάγκη νὰ τεθῇ ὑποδιαστολὴ καὶ 0. Διὰ ταῦτα ἐνταῦθα ἐκφράζεται οὕτως ὁ γενικὸς κανών· *Τρέψε τὸν κλασματικὸν εἰς δεκαδικὸν ἔχοντα δὶς τόσα ψηφία, ὅσα θέλει ἔχει ἡ ζητουμένη ῥίζα, εὑρὲ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης τούτου, καὶ πρὸ αὐτοῦ γράψε ὑποδιαστολὴν καὶ 0.*

Ὡςαύτως σχεδὸν εὑρίσκεται καὶ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 0,478 μεῖον 0,001 ἢ 0,1. Δηλ. τὸ 0,478 τρέπεται εἰς 478000, θεωρούμενον τὸ 0,478 ἀκέραιον καὶ παραλαμβάνον δεξιὰ 000, ὥστε νὰ ἔχῃ ἓξ ψηφία, ὅταν ἡ ῥίζα θέλῃ εἶσθαι χιλιοστημόρια· διότι ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ 0,478 ἐπὶ τὸ τετράγωνον 1000000 τοῦ 1000 εἰς τοῦτο φέρει. Παραλείπεται δὲ τὸ δεξιὸν ψηφίον 8 καὶ τὸ 47 θεωρεῖται ἀκέραιον, ὥστε νὰ ἔχῃ δύο ψηφία, ὅταν ἡ ῥίζα θέλῃ εἶσθαι δεκατημόρια· κτλ κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα. Εὑρίσκεται δὲ τοῦ 0,478 ῥίζα μεῖον μὲν 0,001 τὸ 0,691, μεῖον δὲ 0,1 τὸ 0,6.

Ἐὰν δὲ ἦτον 0,4789 καὶ ἐζητεῖτο ἡ ῥίζα μεῖον 0,01, ἄλλο δὲν ἐχρειάζετο εἰμὴ νὰ θεωρηθῇ ἀκέραιον 4786 τὸ κλάσμα 0,4789, κτλ.

Σημ. Πᾶς μικτὸς ἀριθμὸς τρέπεται πρῶτον εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν καὶ ἐξάγεται ἔπειτα αὐτοῦ ἡ ῥίζα ὡς ἤδη εἴπομεν.

γ'. Συνήθως ἡ κλασματικὴ μονὰς, ὁποιαδήποτε ἢ δεκαδικὴ, λαμβάνεται σχετικῶς πρὸς τὸν παρονομαστὴν τοῦ δεδομένου κλασματικοῦ καὶ ὄχι ὁποιαδήποτε ἄσχετος ὡς ἀνωτέρω.

Τότε τροποποιεῖται ἄλλως πως ὁ γενικὸς κανὼν, ὡς ἐδῶ λέγομεν.

1. *Ὁ μὲν παρονομαστὴς τοῦ κλασματικοῦ εἶναι τετράγω-*

νος, ἡ δὲ κλασματικὴ μονὰς ἔχει παρονομαστὴν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ παρονομαστοῦ· οἷον ἂς εὑρεθῇ ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ $\frac{29}{36}$ μεῖον $\frac{1}{9}$. Ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ $\frac{29}{36}$ ἐπὶ 36 τὸ τετράγωνον τοῦ 6, γινόμενος διὰ διαιρέσεως τοῦ παρονομαστοῦ διὰ 36, παρέχει γινόμενον τὸν ἀριθμητὴν 29· ὥστε *ἄλλο δὲν ἀπαιτεῖται εἰμὴ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμητοῦ* 29, *καὶ ὑπ' αὐτὸ νὰ τεθῇ παρονομαστὴς ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ παρονομαστοῦ.* Οὕτως ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ $\frac{29}{36}$ μεῖον $\frac{1}{6}$ εἶναι $\frac{5}{6}$.

2. *Ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλασματικοῦ εἶναι πρωτότυπος ἢ γινόμενον πρωτοτύπων ἀριθμῶν,* οἷον $\frac{7}{11}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{9}{35}$. Ἐνταῦθα πρῶτον *πολλαπλασιάζονται οἱ δύο ὅροι τοῦ κλασματικοῦ ἐπὶ τὸν παρονομαστήν, ὥστε νὰ τραπῇ ὁ κλασματικὸς εἰς ἰσοδύναμον ἔχοντα παρονομαστὴν τετράγωνον, ἔπειτα ἐκτελοῦνται τὰ λοιπὰ ὡς ἤδη εἴπομεν.* Οὕτως εὑρίσκεται τετρ. ῥίζα τοῦ $\frac{7}{11}$ μεῖον $\frac{1}{11}$ ὁ $\frac{8}{11}$, τοῦ δὲ $\frac{8}{15}$ μεῖον $\frac{1}{15}$ ὁ $\frac{10}{15}$, κτλ.

3. *Ὁ παρονομαστὴς εἶναι γινόμενον δύο ἢ πλειοτέρων παραγόντων, τῶν μὲν πρωτοτύπων, τῶν δὲ τετραγώνων πρωτοτύπων,* οἷον $\frac{17}{20}$ ἢ $\frac{17}{4.5}$. *Πολλαπλασιάζονται οἱ δύο ὅροι τοῦ* $\frac{17}{20}$ *ἐπὶ τὸν μὴ τετράγωνον παράγοντα* 5, *καὶ τρέπεται εἰς τὸ ἰσοδύναμον* $\frac{85}{100}$, *οὗτινος ὁ παρονομαστὴς εἶναι τετράγωνος, τὰ δὲ λοιπὰ ὡς ἀνωτέρω,* καὶ ἔχομεν ῥίζαν τοῦ $\frac{17}{20}$ μεῖον $\frac{1}{10}$ τὸ $\frac{9}{10}$.

Ἐκ τούτων δῆλον ὅτι ὁ γενικὸς κανὼν τροποποιεῖται κατὰ ταύτας τὰς περιπτώσεις οὕτως· *Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλασματικοῦ ἦναι τετράγωνος, εὑρὲ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ ὑπ' αὐτὸ γράψε παρονομαστὴν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ παρονομαστοῦ· ἐὰν δὲ ὁ παρονομαστὴς δὲν ἦναι τετράγωνος, πολλαπλασίασε πρῶτον τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλασματικοῦ ἐπὶ ἀριθμόν, ὅστις νὰ κατασταίνῃ τὸν παρονομαστὴν τετράγωνον, καὶ ἔπειτα πρᾶξε ὡς ἤδη εἴπομεν.*

Σημ. ά. Ὁ δεκαδικὸς κλασματικός, ὅστις ἔχει ἄρτια τὸν ἀριθμὸν ψηφία δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, ἔχει παρονομαστὴν τετράγωνον, ἤτοι τὸν 100, τὸν 10000, τὸν 1000000 κτλ· τοῦ δ' ἔχοντος περιττὸν ἀριθμὸν ψηφίων δεξιὰ τῆς ὑποδιαςολῆς ἀρκεῖ νὰ γραφθῇ 0 δεξιά, ὥστε νὰ γείνωσι τὰ ψηφία ἀρτιάριθμα.

Σημ. β'. Ἐάν τις θέλῃ ἀριθμὸν προσεγγίζοντα ἔτι πλειότερον παρ' ὅσον ἤδη εἴπομεν, ἐξάγει ὄχι τὸ ἀκέραιον μόνον μέρος τῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμητοῦ, ἀλλ' εὑρίσκει αὐτὴν μεῖον 0,1, ἢ 0,01 κτλ, καὶ ἔπειτα θέτει παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ παρονομαστοῦ ἐπὶ 10 ἢ ἐπὶ 100 κτλ. Οἷον τοῦ $\frac{7}{11}$, ἀφοῦ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι ἐπὶ 11, ἐξάγεται τοῦ 77 ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα μεῖον 0,01 καὶ ἔχομεν 8,77 ἢ $\frac{877}{100}$, ὅπερ πρέπει νὰ ἔχῃ παρονομαστὴν 11, ἤτοι πρέπει νὰ διαιρεθῇ διὰ 11· ὥστε ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ $\frac{7}{11}$ εἶναι $\frac{877}{1100}$ μεῖον $\frac{1}{1100}$.

104. Ἠξεύροντες ἤδη πῶς εὑρίσκεται ὁ μικρότερος τῶν προσεγγιζόντων ἀριθμῶν εἰς τὸ ἀνάριθμον, ἑπομένως καὶ ὁ μεγαλήτερος, μεταχειριζόμεθα ἐκ τῶν δύο ἐκεῖνον, ὅστις προσεγγίζει πλειότερον. Τοῦτο δὲ τὸ καταλαμβάνομεν ἐκ τῆς παραθέσεως τοῦ καταλοίπου, ὅπερ μένει μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀκεραίου μέρους τῆς ῥίζης, πρὸς αὐτὸ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης. Καὶ ὅταν μὲν τὸ κατάλοιπον ἦναι μικρότερον τοῦ ἀκεραίου μέρους τῆς ῥίζης, ὁ μικρότερος προσεγγίζει περισσότερον· ὅταν δὲ ἦναι μεγαλήτερον, ὁ μεγαλήτερος προσεγγίζει περισσότερον, καὶ αὐτὸν τότε μεταχειριζόμεθα. Διότι εἴδομεν ἐν ἀρ. 101 ὅτι ὁ ἀριθμός, οὗτινος πρέπει νὰ ἐξάγωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης, εἶναι γενικῶς $\alpha\nu^2$, κεῖται δὲ μεταξὺ τῶν κατὰ σειρὰν τετραγώνων ω^2 καὶ $(\omega+1)^2$ εἰς ὧν τῶν μεταξὺ αὐτῶν μὴ τετραγώνων ἀριθμῶν 2ω (89), εἶναι δ' ἑπομένως κεφάλαιον τοῦ ω^2 καὶ τοῦ καταλοίπου τοῦ μένοντος μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀκεραίου μέρους τῆς ῥίζης ἤτοι τοῦ ω· σημειοῦντες δὲ τὸ κατάλοιπον τοῦτο διὰ $\varkappa$, ἔχομεν $\alpha\nu^2=\omega^2+\varkappa$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡ ἀνάριθμος ῥίζα τοῦ $\alpha\nu^2$ κεῖται μεταξὺ τῶν ω καὶ $\omega+1$, εἶναι φανερὸν ὅτι, ὅταν τὸ ω^2 προσεγγίζῃ πλειότερον τοῦ $(\omega+1)^2$ εἰς τὸ $\alpha\nu^2$, τότε καὶ τὸ ω προσεγγίζει πλειότερον τοῦ $\omega+1$ εἰς τὴν ἀνάριθμον ῥίζαν τοῦ $\alpha\nu^2$, καὶ *τἀνάπαλιν*. Προσεγγίζει δὲ τὸ ω^2 εἰς τὸ $\alpha\nu^2$ πλειότερον, ἐὰν τὸ $\alpha\nu^2$ ἦναι κεφάλαιον τοῦ ω^2 καὶ 1, 2, 3 . . . . ω

τὸ πολὺ μονάδων· προσεγγίζει δὲ τὸ $(\omega+1)^2$ πλειότερον, ἐὰν ὁ $\alpha\nu^2$ ἦναι κεφάλαιον τοῦ ω^2 καὶ $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3\ldots 2\omega$ μονάδων. Ἀλλ' $\alpha\nu^2=\omega^2+\varkappa$· ἄρα, ἂν τὸ $\varkappa$ ἦναι 1, 2, 3..... ω τὸ πολὺ, ἤτοι μικρότερον τοῦ εὑρεθέντος ἀκεραίου μέρους τῆς ω ῥίζης, τότε ὁ μικρότερος ω^2 προσεγγίζει πλειότερον· ἂν δὲ τὸ $\varkappa$ ἦναι $\omega+1$, $\omega+2$,..2ω, ἤτοι μεγαλήτερον τοῦ ἀκεραίου μέρους ω τῆς ῥίζης, τότε ὁ μεγαλήτερος $(\omega+1)^2$ προσεγγίζει πλειότερον. Τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ εἰς τὰς ῥίζας των ω καὶ $\omega+1$ ὡς πρὸς τὴν ἀνάριθμον ῥίζαν τοῦ $\alpha\nu^2$· ἑπομένως καὶ πρὸς τὴν ἀνάριθμον τοῦ α.

Π. χ. τῶν κατὰ σειρὰν τετραγώνων 64 καὶ 81 ὁ μὲν 64 προσεγγίζει πλειότερον τοῦ 81 εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 65, 66, 67, 68..... 71· ὅθεν καὶ ἡ ῥίζα 8 τοῦ 64 προσεγγίζει πλειότε-τῆς 9 τοῦ 81 εἰς τὰς ἀναρίθμους ῥίζας τοῦ 65, 66,..71. Ὁ δὲ 81 προσεγγίζει πλειότερον τοῦ 64 εἰς τοὺς 73, 74...80· διὰ τοῦτο καὶ ἡ ῥίζα του 9 εἰς τὰς ἀναρίθμους ῥίζας τῶν 73, 74...80. Κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν τὰ κατάλοιπα τῶν 65...71 εἶναι 1, 2, 3...7, μικρότερα τῆς ῥίζης 8 τοῦ μικροτέρου τετραγώνου 64, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν τὰ κατάλοιπα τῶν 73...80 εἶναι 9, 10....16, μεγαλήτερα τῆς ῥίζης 8 τοῦ 64.

Παραδείγματα διάφορα πρὸς ἄσκησιν.

Ἡ $\sqrt{11}$ εἶναι $\frac{49}{15}$ ἢ $3\frac{4}{15}$ μεῖον $\frac{1}{15}$· ἢ 3,317 μεῖον 0,001.

$\sqrt{223}$ εἶναι $\frac{597}{40}$ ἢ $14\ \frac{37}{40}$ μεῖον $\frac{1}{40}$· ἢ 14,93 μεῖον 0,01.

$\sqrt{59}$ εἶναι $7\frac{2}{3}$ μεῖον $\frac{1}{12}$· ἢ 7,68 μεῖον 0,01.

$\sqrt{\frac{7}{13}}$ εἶναι $\frac{11}{15}$ μεῖον $\frac{1}{30}$· ἢ 0,73 μεῖον 0,01 ·ἢ $\frac{9}{13}$ μεῖον $\frac{1}{13}$ ἢ $\frac{954}{1300}$ μεῖον $\frac{1}{1300}$.

$\sqrt{79\frac{8}{11}}$ εἶναι $8\frac{9}{10}$ μεῖον $\frac{1}{20}$· ἢ 8,93 μεῖον 0,01· ἢ $8\frac{10}{11}$ μεῖον $\frac{1}{11}$.

$\sqrt{31,027}$ εἶναι 5,570 μεῖον 0,001· ἢ $5\frac{5}{9}$ μεῖον $\frac{1}{9}$.

$\sqrt{0,01001}$ εἶναι 0,10004 μεῖον 0,00001.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ

$\sqrt{29}$ μεῖον $\frac{1}{9}$, ἢ μεῖον 0,001.

$\sqrt{227}$ μεῖον $\frac{1}{17}$, ἢ μεῖον 0,01.

$\sqrt{\frac{11}{14}}$ μεῖον $\frac{1}{11}$, ἢ μεῖον 0,01, ἢ μεῖον $\frac{1}{14}$, ἢ μεῖον $\frac{1}{140}$.
$\sqrt{\frac{35}{48}}$ μεῖον $\frac{1}{19}$, ἢ μεῖον 0,001, ἢ μεῖον $\frac{1}{12}$.
$\sqrt{31\frac{4}{25}}$ μεῖον $\frac{1}{23}$, ἢ μεῖον 0,01, ἢ μεῖον $\frac{1}{25}$, ἢ μεῖον $\frac{1}{250}$.
$\sqrt{2\frac{13}{15}}$ μεῖον $\frac{1}{24}$, ἢ μεῖον 0,0001, ἢ μεῖον $\frac{1}{15}$.
$\sqrt{5,345}$ μεῖον ἢ 0,1, ἢ 0,01, ἢ 0,001.
$\sqrt{84,7938}$ μεῖον 0,01, ἢ μεῖον 0,001, ἢ μεῖον 0,0001.

Β'. ΠΕΡΙ ΚΥΒΟΥ ΚΑΙ ΚΥΒΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ.

Θεωρήματα καὶ ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης ἀκεραίων ἀριθμῶν ὑποτιθεμένων κύβων (α).

105. Ἀριθμὸς, ὅστις δύναται νὰ θεωρῆται γινόμενον τριῶν ἄλλων ἴσων ἀριθμῶν, λέγεται *κύβος τοῦ ἑνὸς τούτων*· ἀντιστρόφως δὲ ὁ εἷς τούτων λέγεται *κυβικὴ ῥίζα τοῦ πρώτου.* Οἷον ὁ 8, θεωρούμενος ὡς 2.2.2, εἶναι κύβος τοῦ 2, ὁ δὲ 2 εἶναι κυβικὴ ῥίζα τοῦ 8· ὁ 27 ὡς 3.3.3 εἶναι κύβος τοῦ 3, ὁ δὲ 3 κυβικὴ ῥίζα τοῦ 27· ὁ $\frac{8}{27}$ ὡς $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$ εἶναι κύβος τοῦ $\frac{2}{3}$, ὁ δὲ $\frac{2}{3}$ κυβικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{8}{27}$.

Σημ. Τὸ ὄνομα κύβος εἶναι ἐκ τῆς Γεωμετρίας εἰλημμένον.

106. Ἐὰν τῶν κατὰ σειρὰν ἀκεραίων ἀριθμῶν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστος ἐφ' ἑαυτὸν καὶ τὸ τετράγωνον ἔπειτα πάλιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν, εὑρίσκονται οἱ κύβοι ὅλων τῶν ἀριθμῶν, καὶ ἔχομεν κύβους τῶν

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 κτλ
τοὺς	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000 κτλ.

Ἐντεῦθεν δὲ βλέπομεν ὅτι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ οἱ μεταξὺ τῶν κύβων δύο κατὰ σειρὰν ἀκεραίων ἀριθμῶν, οἷον οἱ 3, 4, ...7, 9, 10... 26 κτλ, δὲν εἶναι κύβοι ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἀλλὰ δὲν εἶναι δυνατὸν οἱ αὐτοὶ νὰ ἦναι κύβοι οὐδὲ μικτῶν ἢ κλασματι-

(α) Τὰ περὶ τῆς κυβικῆς ῥίζης θέλομεν πραγματευθῆ συντομώτερα, διότι ὁμοιάζουσι πολὺ μὲ τὰ περὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, ὅπου παραπέμπομεν.

κῶν, διότι τούτων οἱ κύβοι δὲν εἶναι ἀκέραιοι. (Ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὡς ἐν ἀριθ. 86). Λοιπὸν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν οἱ μὲν εἶναι *κύβοι*, οἱ δὲ δὲν εἶναι *κύβοι*· τῶν πρώτων αἱ κυβικαὶ ῥίζαι εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι, τῶν δευτέρων εἶναι *ἀνάριθμοι*, ἤτοι δὲν δύνανται νὰ παρασταθῶσι δι' ἀριθμῶν· ἐμπεριλαμβάνονται ὅμως μεταξὺ δύο ἀριθμῶν, οἵτινες νὰ διαφέρωσιν ἀπ' ἀλλήλων ὅσον ἂν θέλωμεν (ἰδὲ ἐν ἀριθ. 88).

107. Ἐπειδὴ οἱ κύβοι τῶν ἀριθμῶν

10 100 1000 κτλ

εἶναι 1000 1000000 1000000000 κτλ,

δῆλον ὅτι ἀριθμοῦ διψηφίου ὁ κύβος δυνατὸν νὰ ἦναι τετραψήφιος ἢ πενταψήφιος ἢ ἑξαψήφιος, ἀριθμοῦ δὲ τριψηφίου ὁ κύβος δυνατὸν νὰ ἦναι ἑπταψήφιος ἢ ὀκταψήφος ἢ ἐννεαψήφιος κτλ. Καὶ ἀντιστρόφως λοιπὸν ἀριθμοῦ τετραψηφίου ἢ πενταψηφίου ἢ ἑξαψηφίου ἡ κυβικὴ ῥίζα εἶναι διψήφιος ἀριθμός, ἀριθμοῦ δὲ ἑπταψηφίου ἢ ὀκταψηφίου ἢ ἐννεαψηφίου ἡ κυβικὴ ῥίζα εἶναι τριψήφιος ἀριθμός, καὶ γενικῶς, ἡ κυβικὴ ῥίζα ὁποιουδήποτε ἀκεραίου κύβου ἔχει τόσα ψηφία, εἰς ὅσα τμήματα τριψήφια δύναται νὰ χωρισθῇ αὐτός, ἐξαιρουμένου τοῦ ἀριστεροῦ, ὅπερ δύναται νὰ ἔχῃ καὶ ἓν καὶ δύο μόνον ψηφία.

108. Ἐὰν μ παριστάνῃ μονάδας καὶ δ δεκάδας, ἀριθμὸς διψήφιος σημειόνεται οὕτω $\delta+\mu$, καὶ ὁ κύβος του, ὅστις εὑρίσκεται ἀφοῦ πολλαπλασιασθῇ (41) τὸ τετράγωνόν του $\delta^2+2\delta\mu+\mu^2$ (91) ἐπὶ $\delta+\mu$ *δύναται νὰ νοηθῇ συγκείμενος ἐκ τεσσάρων ἀριθμῶν, δηλ. ἐκ τῶν κύβων τῶν δεκάδων καὶ τῶν μονάδων, ἐκ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας καὶ ἐκ τοῦ τριπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων.*

$$\begin{array}{r}
\delta^2+2\delta\mu+\mu^2 \\
\delta+\mu \\
\hline
\delta^3+2\delta^2\mu+\delta\mu^2 \\
+\delta^2\mu+2\delta\mu^2+\mu^3 \\
\hline
\delta^3+3\delta^2\mu+3\delta\mu^2+\mu^3
\end{array}$$

Ὡσαύτως δὲ καὶ ἀριθμοῦ ἑκατοντάδων καὶ δεκάδων, οἷον τοῦ $\varepsilon+\delta$, ὁ κύβος σύγκειται ἐκ τῶν κύβων τῶν ἑκατοντάδων καὶ τῶν δεκάδων, ἐκ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ τὰς μονάδας καὶ ἐκ τοῦ τριπλασίου τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων.

109. Ο κύβος ἀριθμοῦ μονάδων 1, 2, ... 9 εἶναι ἀριθμὸς μονοψήφιος ἢ διψήφιος ἢ τριψήφιος (106)· ὁ κύβος ἀριθμοῦ δεκάδων 1, 2,... 9, ἢ 10, 20,... 90 εἶναι εἷς τῶν κύβων τοῦ 1, 2, ... 9 μὲ τρία μηδενικὰ δεξιά, ἤτοι ἀριθμός τις χιλιάδων· ὁ κύβος δὲ ἀριθμοῦ ἑκατοντάδων 1, 2, ... 9 εἷς τῶν αὐτῶν κύβων μὲ ἓξ μηδενικὰ δεξιά, ἤτοι ἀριθμός τις ἑκατομμυρίων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Τὸ δὲ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας εἶναι ἀριθμὸς ἑκατοντάδων, διότι τὸ τετράγωνον δεκάδων εἶναι ἑκατοντάδες, αἵτινες πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ μονάδας παράγουσιν ἀριθμὸν ἑκατοντάδων. Τὸ δὲ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου ἑκατοντάδων ἐπὶ δεκάδας εἶναι ἀριθμὸς ἑκατοντάδων χιλιάδος, διότι τὸ τετράγωνον ἑκατοντάδων εἶναι δεκάδες χιλιάδος, αἵτινες πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ δεκάδας ἀποβαίνουσιν ἑκατοντάδες χιλιάδος, κτλ.

110. Ὁ κύβος ἀριθμοῦ τινος a εἶναι a^3, ὁ δὲ τοῦ κατόπιν του $a+1$ εἶναι a^3+3a^2+3a+1, ἡ δὲ διαφορά των εἶναι $3a^3+3a+1$, ἤτοι τῶν κύβων δύο κατὰ σειρὰν ἀριθμῶν ἡ διαφορὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ κεφάλαιον τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου καὶ τοῦ τριπλασίου αὐτοῦ τοῦ μικροτέρου καὶ 1. Ἕκαστος λοιπὸν τῶν μὴ κύβων ἀριθμῶν τῶν κειμένων μεταξὺ τῶν κύβων δύο κατὰ σειρὰν ἀριθμῶν διαφέρει τοῦ μικροτέρου κύβου ὀλιγώτερον τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῆς ῥίζης του καὶ τοῦ τριπλασίου αὐτῆς.

111. Ἂς ἐξαχθῇ τώρα ἡ κυβικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ τετραψηφίου ἢ πενταψηφίου ἢ ἑξαψηφίου, οἷον τοῦ 97336, ὑποτιθεμένου κύβου.

Κατὰ τὰ προηγούμενα ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου εἶναι διψήφιος, ἤτοι ἔχει μονάδας καὶ δεκάδας. Διὰ τοῦτο αὐτὸς σύγκειται ἐκ τεσσάρων ἀριθμῶν ἐκ τῶν κύβων τῶν δεκάδων καὶ τῶν μονάδων τῆς ῥίζης, ἐκ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας καὶ ἐκ τοῦ τριπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης. Ὁ δὲ κύβος τῶν δεκάδων εἶναι ἀριθμὸς χιλιάδων καὶ διὰ τοῦτο ἐνυπάρχει εἰς τὰς 97 χιλιάδας τοῦ 97336. Εἶναι δὲ ὁ κύβος ὁ ἀμέσως μικρότερος τοῦ 97 ἤτοι ὁ 64, καὶ ἐπομένως αἱ δε-

κάδες τῆς ῥίζης εἶναι 4. Διότι ὁ 97336 εἶναι μεταξὺ τῶν κύβων 125000 καὶ 64000 τῶν ἀριθμῶν 50 καὶ 40, καὶ ἡ κυβικὴ ῥίζα του πρέπει νὰ ἦναι μεταξὺ 50 καὶ 40 ἤτοι νὰ ἔχῃ 4 δεκάδας, ὧν ὁ κύβος εἶναι 64000 ἢ 64 χιλιάδες, ἤτοι εἶναι ὁ ἀμέσως μικρότερος τοῦ 97 κύβος. Γράφομεν λοιπὸν 4
δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ἀφαιροῦντες τὸν
κύβον του 64 ἀπὸ τοῦ 97 ἔχομεν ὑπό-
λοιπον 33. Μετὰ τοῦτο γράφομεν δε-
ξιὰ τοῦ 33 καὶ τὰς 3 ἑκατοντάδας τοῦ
ἀριθμοῦ, εἰς δὲ τὰς 333 ἑκατοντάδας
ἐνυπάρχει τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώ-
νου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας καὶ
μέρος ἴσως τοῦ τριπλασίου τῶν δεκά-
καὶ δων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῶν μονά-
δων μέρος τι τοῦ κύβου τῶν μονάδων.

```
97336|46
64   |48     46
---          46
333         ---
            276
           184
           ----
           2116
             46
          -----
          12696
          8464
          -----
          97336
```

Ἂν ὅμως ὁ 333 ἑκατοντάδες ἦτον ἀκριβῶς ἴσος μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, διαιρούμενος διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν ἤδη γνωστῶν 4 δεκάδων, ἤτοι διὰ τοῦ 48, ἤθελε δώσει πηλίκον ἀκριβῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς ῥίζης. Τώρα ὅμως τὸ πηλίκον ταύτης τῆς διαιρέσεως, ὅπερ εἶναι 6, πρέπει νὰ δοκιμασθῇ, διότι εἱμπορεῖ νὰ ἦναι κατὰ μίαν ἢ δύο ἢ καὶ πλειοτέρας μονάδας μεγαλήτερον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων τῆς ῥίζης. Δοκιμάζεται δὲ ἀφοῦ γραφθῇ δεξιὰ τῶν 4 δεκάδων τῆς ῥίζης καὶ σχηματισθῇ ὁ κύβος τοῦ 46. Καὶ ἂν μὲν ἦναι οὗτος ἴσος ἢ μικρότερος τοῦ 97336, τὸ πηλίκον εἶναι αἱ μονάδες τῆς ῥίζης· ἐὰν δὲ ἦναι μεγαλήτερος, δὲν εἶναι, καὶ πρέπει νὰ δοκιμασθῇ ὡσαύτως μικρότερος ἀριθμὸς, ἕως νὰ εὑρεθῇ κύβος ἴσος ἢ μικρότερος τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ. Ἐδῶ ὁ κύβος τοῦ 46 εἶναι σωστὰ 97336· λοιπὸν 6 εἶναι αἱ μονάδες τῆς ῥίζης, καὶ γράφεται δεξιὰ τῶν 4 δεκάδων, ἡ δὲ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 97336 εἶναι 46.

Ὡσαύτως εὑρίσκει καὶ πληροφορεῖταί τις ὅτι ἡ μὲν κυβικὴ ῥίζα τοῦ 857375 εἶναι 95, ἡ δὲ τοῦ 8000 εἶναι 20.

112. Ἐπειδὴ εἶναι ἀδύνατον νὰ γνωρίσῃ τις ἂν ἀριθμὸς, οὗτινος ζητεῖται ἡ κυβικὴ ῥίζα, ἦναι κύβος, ὑποτίθεται ὅτι

εἶναι κύβος καὶ προάγεται ἡ ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης ὡς ἤδη εἴπομεν. Ἀφοῦ δ' εὑρεθῇ τὸ πηλίκον, ὅπερ δυνατὸν νὰ ἦναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τῆς ῥίζης, καὶ σχηματισθῇ ὁ κύβος τοῦ διψηφίου ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων καὶ αὐτῶν τῶν μονάδων, ἐὰν μὲν ὁ κύβος οὗτος ἦναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν, οὗτινος ζητεῖται ἡ ῥίζα, τότε μόνον γίνεται δῆλον ὅτι αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς εἶναι κύβος, καὶ κυβική του ῥίζα εἶναι ὁ εἰς τὴν θέσιν τῆς ῥίζης γραμμένος ἀριθμός· ἐὰν δὲ ἦναι μικρότερος αὐτοῦ, καὶ ἀφαιρεθεὶς ἀφίνῃ κατάλοιπον μικρότερον τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ γραμμένου εἰς τὴν θέσιν τῆς ῥίζης ἀριθμοῦ καὶ τοῦ τριπλασίου τοῦ αὐτοῦ (110), τότε δῆλον ὅτι ὁ ἀριθμὸς, οὗτινος ζητεῖται ἡ ῥίζα, δὲν εἶναι κύβος, ἀλλ' εἶναι ἀριθμὸς τῶν μεταξὺ τοῦ κύβου τοῦ εἰς τὴν θέσιν τῆς ῥίζης γραμμένου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ κύβου τοῦ κατὰ μονάδα μεγαλητέρου του ἀριθμοῦ. Ὁ δὲ εἰς τὴν θέσιν τῆς ῥίζης ὢν ἀριθμὸς εἶναι κυβικὴ ῥίζα τοῦ κύβου τοῦ ἀμέσως μικροτέρου τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, ἥτις διαφέρει τῆς ἀναρίθμου κυβικῆς ῥίζης τοῦ δεδομένου ὀλιγώτερον μονάδος ἀκεραίας. Ἰδοὺ παραδείγματα τούτου.

$$\begin{array}{r|l} 23.196 & 28 \\ \hline 151 & 12 \end{array} \qquad 29.29.29=24389$$

$$\begin{array}{r} 23196 \\ 21952 \\ \hline 1244 \end{array} \qquad 28.28.28=21952.$$

Παρατηρητέον πρῶτον ὅτι πρὸς εὕρεσιν τῶν μονάδων τῆς ῥίζης ἔπρεπε, διαιρεθέντος τοῦ 151 διὰ 12, τὸ πηλίκον 12 νὰ δοκιμασθῇ. Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ μονάδες τῆς ῥίζης πρέπει νὰ ἦναι ὀλιγώτεραι τῶν 10, τὸ δὲ πηλίκον τοῦ 151 διὰ 12 εἶναι 12, μεγαλήτερον τοῦ 10, δὲν δοκιμάζομεν αὐτὸ, ἀλλ' ἀρχίζομεν ἀπὸ τοῦ 9 νὰ δοκιμάζωμεν. Ἐπειδὴ δὲ ὁ κύβος τοῦ 29 εἶναι μεγαλήτερος τοῦ 23196, δοκιμάζομεν τὸν 28. Ὄντος δὲ τοῦ κύβου τοῦ 28 μικροτέρου τοῦ 23196 κατὰ 1244, ὅστις εἶναι μικρότερος τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ 28 καὶ τοῦ τριπλασίου τοῦ 28, ἤτοι τοῦ ἀριθμοῦ 2436, δῆλον ὅτι ὁ 23196 εἶναι μεταξὺ τοῦ κύβου τοῦ 28 καὶ 29, ἡ δὲ ἀνάριθμος ῥίζα του μεταξὺ τοῦ 28 καὶ 29, διαφέρουσα ἑκατέρου μεῖον 1. Ὁ δὲ 28 εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ 23196.

113. Ἂς ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα καὶ τοῦ 58863869, ὑποτιθεμένου κύβου.

Ἡ ῥίζα τούτου εἶναι τριψήφιος ἀριθμὸς, ὅςτις δυνατὸν νὰ θεωρῆται ὅτι σύγκειται μόνον ἐκ μονάδων καὶ δεκάδων πλειοτέρων τῶν 9 (ὁ 475 π. χ. εἶναι 47 δεκάδες καὶ 5 μονάδες)· ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν δύναται νὰ νοῆται συγκείμενος ἐκ τοῦ κύβου τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης, ἐκ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης ἐπὶ τὰς μονάδας κτλ (108). Ὁ δὲ κύβος τῶν δεκάδων εἶναι χιλιάδες (109), καὶ διὰ τοῦτο ἐμπεριέχεται εἰς τὸν ἀριθμὸν 58863 χιλιάδας. Εἶναι δὲ ὁ κύβος ὁ ἀμέσως μικρότερος τοῦ 58863, καὶ ἑπομένως αἱ δεκάδες τῆς ζητουμένης ῥίζης εἶναι τόσαι, ὅσας μονάδας ἔχει ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ κύβου τοῦ ἀμέσως μικροτέρου τοῦ 58863. Διότι τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ κύβου τοῦ ἀμέσως μικροτέρου τοῦ 58863 οὔσης 38 (εὑρισκομένης ὡς ἀνωτέρω, διότι εἶναι πενταψήφιος ὁ ἀριθμὸς), θεωρουμένων τῶν 38 ὡς δεκάδων ἤτοι 380, ὁ κύβος των εἶναι 54872000, ὁ δὲ κύβος τῶν 39 δεκάδων ἤτοι τῶν 390 εἶναι 59319000. Καθὼς λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς 58863869 εἶναι μεταξὺ τῶν δύο τελευταίων ἤτοι τῶν κύβων τοῦ 380 καὶ 390, οὕτω καὶ ἡ κυβικὴ ῥίζα αὐτοῦ εἶναι μεταξὺ τῶν 380 καὶ 390· λοιπὸν αὔτη ἔχει 38 δεκάδας, ὅσας μονάδας ἔχει ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ κύβου τοῦ ἀμέσως μικροτέρου τοῦ 58863 ἤτοι τοῦ 54872, ὁ δὲ κύβος τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ 58863869 εἶναι ὁ κύβος ὁ ἀμέ-

58.863.869	389	
27	27	39.39.39=59319
318		
	4332	38.38.38=54872
58863		
54872		389.389.389=58863869
39918		
58863869		
58863869		
0		

σως μικρότερος τοῦ 58863. Διὰ ταῦτα λοιπὸν, ἵνα εὑρεθῶσιν αἱ δεκάδες τῆς ῥίζης τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, ἀνάγκη νὰ ἐξαχθῇ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις μένει πρὸς ἀριστερὰν, ἀφοῦ ἀποχωρισθῶσι τὰ τρία τοῦ δεδομένου δεξιὰ ψηφία.

Γενομένης δὲ τῆς ἐξαγωγῆς ταύτης, εὑρέθη 38· ἀφαιρεθέντος δὲ τοῦ κύβου τοῦ 38 ἀπὸ τοῦ 58863, μένει ὑπόλοιπον ὁ 3991, δεξιὰ δὲ τούτου γράφομεν καὶ τὸ ψηφίον 8, τὸ ἀριστερὸν τῶν τριῶν πρότερον ἀποχωρισθέντων, καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν 39918 ἐνυπάρχει τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῶν 38 δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας (108). Ἐὰν δὲ εἰς αὐτὸν δὲν ἦτον καὶ μέρος τι τοῦ τριπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων καὶ μέρος τι τοῦ κύβου τῶν μονάδων, διαιρούμενος διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν 38 δεκάδων ἤθελε δώσει πηλίκον ἀκριβῶς τὰς μονάδας τῆς ζητουμένης ῥίζης. Ἀλλὰ τώρα τοῦτο ειναι ἀμφίβολον, καὶ διὰ τοῦτο διαιρεῖται μὲν ὁ 39918 διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ 38 ἤτοι τοῦ 4332, ἀλλὰ τὸ πηλίκον 9 πρέπει νὰ δοκιμασθῇ καὶ ὄχι νὰ γείνῃ παραδεκτὸν ἁπλῶς· διότι δυνατὸν νὰ ἦναι μεγαλήτερον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων τῆς ῥίζης κατὰ μίαν ἢ δύο ἢ καὶ πλειοτέρας μονάδας. Δοκιμάζεται δὲ οὕτω· τίθεται δεξιὰ τοῦ 38, τοῦ δὲ 389 σχηματίζεται ὁ κύβος. Καὶ ἂν μὲν ὁ κύβος οὗτος ἦναι ἴσος ἢ μικρότερος τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, 9 εἶναι αἱ μονάδες τῆς ῥίζης· ἐὰν δὲ ἦναι μεγαλήτερος, δὲν εἶναι 9, ἀλλ' ὀλιγώτεραι, καὶ δοκιμάζεται ὡσαύτως ὁ 8. Ἐδῶ εἶναι ὁ 9, διότι ὁ κύβος τοῦ 389 εἶναι σωστὰ ὁ δεδομένος ἀριθμός.

Ὡσαύτως εὑρίσκεται ὅτι κυβικὴ ῥίζα τοῦ 596947688 εἶναι 842, κυβικὴ δὲ ῥίζα τοῦ 3944312 εἶναι ὁ 158. Τοῦ δὲ 66923416 ἡ κυβικὴ ῥίζα εἶναι 406, ἤτοι ἔχει 0 δεκάδας. Διότι, ἀφοῦ εὑρεθῶσιν αἱ τέσσαρες ἑκατοντάδες τῆς ῥίζης καὶ ἀφαιρεθῇ ὁ κύβος των ἀπὸ τοῦ 66, εἰς δὲ τὸ ὑπόλοιπον 2 γραφθῇ ὁ 9, γίνεται ὁ ἀριθμὸς 29, μικρότερος τοῦ 48 ἤτοι τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν 4 ἑκατοντάδων τῆς ῥίζης. Τοῦτο δὲ εἶναι σημεῖον ὅτι ἡ ῥίζα δὲν ἔχει δεκάδας· διότι ἂν εἶχε μίαν μόνην δεκάδα, ἔπρεπε νὰ μὴ ἀποτελεσθῇ ὁ 29, μικρότερος τοῦ 48, ἀλλ' ἀριθμὸς τοὐλάχιστον ἴσος μὲ 48. Διὰ ταῦτα τίθεται 0 δεξιὰ τῶν 4 ἑκατοντάδων, δεξιὰ δὲ τοῦ 29 γράφονται τἄλλα τρία ψηφία 234, καὶ ὁ 29234 διαιρούμενος διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ 40, ἤτοι τοῦ 4800, δίδει τὰς 6 μονάδας τῆς ῥίζης.

114. Ἐκ τῶν εἰρημένων καταλαμβάνει τις διατὶ ἡ κυβικὴ ῥίζα ὁποιουδήποτε ἀκεραίου ἀριθμοῦ θεωρουμένου ὡς κύβου ἐξάγεται οὕτω· *Πρῶτον χωρίζεται διὰ στιγμῆς ὁ ἀριθμὸς ἐκ δεξιῶν πρὸς ἀριστερὰ εἰς τμήματα τριψήφια, ὧν τὸ ἀριστερὸν δυνατὸν νὰ ἦναι καὶ διψήφιον καὶ μονοψήφιον· ἔπειτα ἐξάγεται ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ κύβου τοῦ ἀμέσως μικροτέρου τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀριστεροῦ τμήματος, γράφεται δεξιὰ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ καὶ ὁ κύβος αὐτῆς ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ ἀριστεροῦ τμήματος, μετὰ ταῦτα δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς ἀφαιρέσεως γράφεται τὸ ἀκόλουθον τοῦ ἀριστεροῦ τμήματος ψηφίον τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ. Καὶ ἂν μὲν ὁ ἀποτελούμενος ἀριθμὸς ἦναι μικρότερος παρὰ τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ προευρημένου μέρους τῆς ῥίζης, γράφεται 0 δεξιὰ τοῦ ψηφίου τῆς ῥίζης, γράφονται δ' ἄλλα τρία ψηφία δεξιὰ καὶ διαιρεῖται ὁ ἀποτελούμενος ἀριθμὸς διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ προευρημένου μέρους τῆς ῥίζης. Ἂν δὲ ὁ ἀποτελούμενος ἀριθμὸς ἦναι ἴσος ἢ μεγαλήτερος παρὰ τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ προευρημένου μέρους τῆς ῥίζης, διαιρεῖται διὰ τούτου τοῦ τριπλασίου, τὸ πηλίκον δοκιμάζεται ἂν γραμμένον δεξιὰ τοῦ προευρημένου μέρους τῆς ῥίζης ἀποτελῇ ἀριθμὸν, οὗτινος ὁ κύβος νὰ ἦναι ἴσος ἢ μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν δύο ἀριστερῶν τμημάτων τοῦ δεδομένου. Καὶ ἂν μὲν τοῦτο ὑπάρχῃ, γράφεται δεξιὰ τοῦ προευρημένου μέρους τῆς ῥίζης, εἰδεμὴ, δοκιμάζεται ὡσαύτως ἄλλο μικρότερον. Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ κύβου ὅλου τοῦ εὑρημένου μέρους τῆς ῥίζης ἀπὸ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ γράφεται δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τὸ ἀκόλουθον ψηφίον; διαιρεῖται ὁ ἀποτελούμενος ἀριθμὸς διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ προευρημένου*

μέρους τῆς ῥίζης, τὸ πηλίκον δοκιμάζεται καὶ γράφεται δεξιὰ τῶν εὑρημένων ψηφίων τῆς ῥίζης, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Καὶ ἂν μὲν δὲν μείνῃ κατάλοιπον εἰς τὸ τέλος, ὁ ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι κύβος, καὶ ὁ εἰς τὴν θέσιν τῆς ῥίζης γραμμένος ἀριθμὸς κυβικὴ ῥίζα του· εἰδεμή, δὲν εἶναι κύβος, καὶ ἡ εὑρημένη ῥίζα εἶναι τὸ ἀκέραιον μόνον μέρος τῆς ῥίζης του.

Οὕτως εὑρίσκεται ὅτι κυβικὴ μὲν ῥίζα τοῦ 91632508641 μεῖον 1 εἶναι ὁ 4508, διότι μένει κατάλοιπον 20644129, κυβικὴ δὲ ῥίζα τοῦ 32977340218432 εἶναι ὁ 32068.

Σημ. Παρόμοια μὲ τὰ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς 87, 98 ἐκθεμένα εἰμποροῦσέ τις νὰ εἴπῃ καὶ ἐνταῦθα· ἀλλὰ τὰ μὲν ὡς εὔκολα νὰ νοηθῶσιν ἐξ ἐκείνων, τὰ δὲ ὡς μὴ ἀναγκαῖα, παραλείπονται.

115. *Κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, οἷον τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$, ὁ κύβος εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^3}{\beta^3}$, ἤτοι ἄλλος κλασματικὸς ἔχων ἀριθμητὴν μὲν τὸν κύβον τοῦ ἀριθμητοῦ τῆς ῥίζης, παρονομαστὴν δὲ τὸν κύβον τοῦ παρονομαστοῦ αὐτῆς. Λοιπόν, ἵνα εὑρεθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα κλασματικοῦ ἔχοντος τοὺς δύο του ὅρους κύβους, πρέπει νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ ἡ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ νὰ τεθῇ ἡ δευτέρα παρονομαστὴς ὑπὸ τὴν πρώτην.*

Οὕτως εὑρίσκεται ὅτι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{216}{729}$ εἶναι $\frac{6}{9}$, ἡ τοῦ $\frac{64}{343}$ εἶναι $\frac{4}{7}$.

Ἂν δὲ ὁ ἕτερος τῶν ὅρων κλασματικοῦ δὲν ἦναι κύβος ἢ καὶ οἱ δύο, δῆλον ὅτι καὶ ὁ κλασματικὸς δὲν εἶναι κύβος, καὶ εὑρίσκεται ἡ κυβική του ῥίζα κατὰ προσέγγισιν ὡς λέγομεν ἐφεξῆς.

Περὶ εὑρέσεως προσεγγιζούσης κυβικῆς ῥίζης παντὸς μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ.

116. Ἂς ἐξαχθῇ μεῖον $\frac{1}{\nu}$ ἡ κυβικὴ ῥίζα ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ μὴ κύβου (ἰδὲ ἀρ. 100).

Ἡ κυβικὴ αὕτη ῥίζα θέλει εἶσθαι κλασματικὸς ἀριθμὸς ἔχων παρονομαστὴν μὲν τὸν ν, ἀριθμητὴν δὲ ἀριθμὸν, ὅντινα πρέπει νὰ εὕρωμεν. Τὸν σημειοῦμεν διὰ ω, καὶ ἡ ἀνάριθμος κυβικὴ ῥίζα τοῦ α θέλει εἶσθαι μεταξὺ $\frac{\omega}{\nu}$ καὶ $\frac{\omega+1}{\nu}$, ὁ δὲ α ἢ ὁ ἰσοδύναμος μὲ αὐτὸν $\frac{\alpha\nu^3}{\nu^3}$ θέλει εἶσθαι μεταξὺ τῶν κύβων των $\frac{\omega^3}{\nu^3}$ καὶ $\frac{(\omega+1)^3}{\nu^3}$· ἑπομένως ὁ $\alpha\nu^3$ εἶναι μεταξὺ τῶν ω^3 καὶ $(\omega+1)^3$, ἤτοι μεταξὺ τῶν κύβων δύο κατὰ σειρὰν ἀριθμῶν ω καὶ $\omega+1$. λοιπὸν ω^3 εἶναι ὁ κύβος ὁ ἀμέσως μικρότερος τοῦ $\alpha\nu^3$· λοιπὸν ω, *ἤτοι ὁ ζητούμενος ἀριθμητὴς, εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ κύβου τοῦ ἀμέσως μικροτέρου τοῦ* $\alpha\nu^3$, *ἤτοι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ* $\alpha\nu^3$ *μεῖον* 1.

Ὥστε, *ἵνα εὑρεθῇ ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ ἡ κυβικὴ ῥίζα μεῖον κλασματικῆς τινος μονάδος, πρέπει νὰ πολλαπλασιάζηται ὁ ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν κύβον τοῦ παρονομαστοῦ τῆς κλασματικῆς μονάδος, τοῦ γινομένου νὰ ἐξάγηται ἡ κυβικὴ ῥίζα μεῖον* 1, *καὶ ὑπὸ ταύτην νὰ τίθηται ὁ παρονομαστὴς τῆς κλασματικῆς μονάδος*. Ὁ προκύπτων οὕτως ἀριθμὸς θέλει εἶσθαι ἡ ζητουμένη προσεγγίζουσα ῥίζα. Οὗτος δὲ ὁ κανὼν τροποποιεῖται εἴς τινας μερικὰς περιπτώσεις ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον ὡς ἐφεξῆς λέγομεν.

117. α'. Ἂς ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 7 μεῖον $\frac{1}{5}$.

Πολλαπλασιάζεται ὁ 7 ἐπὶ τὸν κύβον 125 τοῦ 5, τοῦ γινομένου 875 ἡ κυβικὴ ῥίζα μεῖον 1 εἶναι 9· λοιπὸν ἡ ζητουμένη κυβικὴ ῥίζα μεῖον $\frac{1}{5}$ εἶναι $\frac{9}{5}$ ἢ $1\frac{4}{5}$. Ὡσαύτως ἡ τοῦ 15 μεῖον $\frac{1}{12}$ εἶναι $\frac{29}{12}$ ἢ $2\frac{5}{12}$. Ἡ τοῦ 47 μεῖον $\frac{1}{20}$ εἶναι $3\frac{12}{20}$ ἢ $3\frac{4}{5}$.

β'. Ἂς ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 25 μεῖον 0,001.

Πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 25 ἐπὶ τὸν κύβον τοῦ 1000, ἤτοι νὰ τεθῶσιν ἐννέα μηδενικὰ δεξιά του (γενικῶς, *πρέπει νὰ θέτωνται τρὶς τόσα μηδενικὰ, ὅσα ψηφία θέλει ἔχει ἡ ῥίζα δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς*), τοῦ ἀριθμοῦ δὲ 25000000000 νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα μεῖον 1, ἥτις εἶναι 2924, ὑπ' αὐτὴν δὲ νὰ τεθῇ ὁ 1000 ἤτοι νὰ χωρισθῶσιν τὰ τρία τελευταῖα ψηφία δι ὑποδιαστολῆς, καὶ ἔχομεν 2,924 κυβικὴν ῥίζαν τοῦ 25 μεῖον 0,001 (*γενικῶς, χωρίζονται δι ὑποδιαστολῆς ὅσα ψηφία θέλει ἔχει ἡ ζητουμένη κυβικὴ ῥίζα*). Ὡσαύτως ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 79 μεῖον 0,0001 εὑρίσκεται ὅτι εἶναι 4,2908.

Σημ. Τὰ μηδενικὰ εἰμποροῦν νὰ θέτωνται ὄχι ὅλα διαμιᾶς εἰς τὴν ἀρχὴν, ἀλλ' ἀνὰ τρία ἔπειτα, ὅταν χρειάζωνται, καὶ ἀνὰ ἓν δεξιὰ τῶν καταλοίπων.

118. α. Ἂς ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{5}{7}$ μεῖον $\frac{1}{30}$.

Πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμητὴς 5 ἐπὶ τὸν κύβον 27000 τοῦ 30· τὸ γινόμενον $\frac{135000}{7}$ τρέπεται εἰς μικτὸν 19285 $\frac{5}{7}$ ἤτοι διαιρεῖται τὸ γινόμενον 135000 τοῦ 5 ἐπὶ 27000 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 7 (103)· τοῦ ἀκεραίου μέρους 19285 ἐξάγεται ἡ κυβικὴ ῥίζα μεῖον 1, καὶ ὑπ' αὐτὴν οὖσαν 26 τίθεται ὁ 30· οὕτως ἔχομεν $\frac{26}{30}$ ἢ $\frac{13}{15}$ κυβικὴν ῥίζαν τοῦ $\frac{5}{7}$ μεῖον $\frac{1}{30}$. Ὡσαύτως ἡ κυβικὴ ῥίζα του $\frac{7}{9}$ μεῖον $\frac{1}{12}$ εἶναι $\frac{11}{12}$.

Ἂς ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 37 $\frac{8}{13}$ μεῖον $\frac{1}{20}$. Πρῶτον τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν $\frac{489}{13}$, καὶ ἔπειτα εὑρίσκεται τούτου ἡ ῥίζα ὡς ἤδη εἴπομεν ἴση μὲ $\frac{67}{20}$. Ἡ τοῦ 23 $\frac{7}{8}$ μεῖον $\frac{1}{13}$ εἶναι $\frac{37}{13}$ ἢ 2 $\frac{11}{13}$.

β'. Ἂς ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{9}{13}$ μεῖον 0,01.

Τρέπεται τὸ $\frac{9}{13}$ εἰς δεκαδικὸν ἔχον τρὶς τόσα ψηφία δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, ὅσα θέλει ἔχει ἡ ῥίζα, δηλ. ἓξ ψηφία· διότι ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ 9 ἐπὶ τὸν κύβον 1000000 τοῦ 100 καὶ ἡ διαίρεσις τοῦ 9000000 διὰ 13 εἰς τοῦτο καταντᾷ· καὶ εὑρίσκεται 692307· ἐξάγεται τοῦ 692307 ἡ κυβικὴ ῥίζα μεῖον 1, ἥτις εἶναι 88, καὶ ἡ ζητουμένη ῥίζα τοῦ $\frac{9}{13}$ μεῖον 0,01 εἶναι 0,88. Ὡσαύτως εὑρίσκεται κυβικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{14}{25}$ μεῖον 0,001 τὸ 0,824.

Ἂς ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 3,1415 μεῖον 0,01. Θέτονται δεξιὰ 00, ὥστε νὰ ἔχῃ τρὶς τόσα ψηφία δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, ὅσα θέλει ἔχει ἡ ῥίζα, καὶ ἀφαιρεῖται ἡ ὑποδιαστολὴ, διότι ὁ πολλαπλασιασμὸς αὐτοῦ ἐπὶ τὸν κύβον 1000000 τοῦ 100 εἰς τοῦτο καταντᾷ· ἔπειτα ἐξάγεται ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 3141500 μεῖον 1, ἥτις εἶναι 146, καὶ χωρίζονται δι ὑποδιαστολῆς τὰ δύο δεξιὰ ψηφία· λοιπὸν ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ

3,1415 μεῖον 0,01 εἶναι 1,46. Ὡσαύτως εὑρίσκεται κυβικὴ ῥίζα τοῦ μὲν 3,00415 μεῖον 0,0001 ὁ 1,4429, τοῦ δὲ 0,00101 μεῖον 0,01 τὸ 0,10. Ἂν ὁ δεκαδικὸς ἔχῃ πλειότερα ψηφία τῶν δεόντων δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, παραμελοῦνται, οἷον ἂν ζητῆται ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 9,47856 μεῖον 0,1, τὰ δύο δεξιὰ ψηφία 56 παραμελοῦνται.

γ΄. *Ὅταν μὲν ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλασματικοῦ ἦναι κύβος, ἐξάγεται τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμητοῦ τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ ὑπ' αὐτὸ τίθεται παρονομαστὴς ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ παρονομαστοῦ. Ὅταν δὲ ὁ παρονομαστὴς δὲν ἦναι κύβος, πρῶτον πολλαπλασιάζονται οἱ δύο ὅροι τοῦ κλασματικοῦ ἐπὶ ἀριθμόν, ὅστις νὰ καθισταίνῃ κύβον τὸν παρονομαστήν, ἔπειτα ἐκτελοῦνται τὰ λοιπὰ ὡς ἤδη εἴπομεν* (103, γ΄).

Ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{485}{512}$ ἤτοι τοῦ $\frac{485}{8^3}$ εἶναι $\frac{7}{8}$ μεῖον $\frac{1}{8}$.

Ὅταν ὁ παρονομαστὴς ἦναι πρωτότυπος ἢ γινόμενον πρωτοτύπων, πολλαπλασιάζονται οἱ δύο ὅροι ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ. Οἷον τοῦ $\frac{3}{7}$ πολλαπλασιάζονται οἱ ὅροι ἐπὶ 49, καὶ γίνεται $\frac{147}{343}$, ἡ δὲ κυβική του ῥίζα εἶναι $\frac{5}{7}$ μεῖον $\frac{1}{7}$. τοῦ $\frac{11}{15}$ ἢ $\frac{11}{3.5}$ πολλαπλασιάζονται ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 15 ἤτοι ἐπὶ 225, καὶ γίνεται $\frac{2475}{3375}$, ἡ δὲ κυβική του ῥίζα εἶναι $\frac{13}{15}$ μεῖον $\frac{1}{15}$.

Ὅταν ὁ παρονομαστὴς ἦναι τετράγωνος ἢ γινόμενον ἀριθμῶν, τῶν μὲν τετραγώνων ἢ κύβων, τῶν δὲ μή, τότε δυνατὸν νὰ πολλαπλασιάζωνται οἱ δύο ὅροι τοῦ κλασματικοῦ ἐπὶ ἄλλον ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ τετραγώνου τοῦ παρονομαστοῦ, ὅστις νὰ καθισταίνῃ κύβον τὸν παρονομαστήν. Π. χ. τοῦ $\frac{11}{45}$ ἢ $\frac{11}{3^2.5}$ πολλαπλασιάζονται οἱ ὅροι ἐπὶ 3.5^2 ἤτοι ἐπὶ 75, καὶ γίνεται $\frac{825}{3^3.5^2}$, ἡ δὲ κυβικὴ ῥίζα του εἶναι $\frac{9}{15}$ μεῖον $\frac{1}{15}$. Τοῦ $\frac{14}{297}$ ἢ $\frac{14}{3^3.11}$ πολλαπλασιάζονται ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 11 ἤτοι ἐπὶ 121, καὶ εὑρίσκεται κυβικὴ ῥίζα $\frac{11}{33}$ μεῖον $\frac{1}{33}$.

Δεκαδικοῦ δὲ, μὴ ἔχοντος δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς τρία ἢ ἓξ ἢ ἐννέα κτλ ψηφία, τίθενται εἰς τὸ τέλος μηδενικὰ ἓν ἢ δύο, ὥστε νὰ ἦναι τρία ἢ ἓξ κτλ ψηφία δεξιὰ τῆς ὑποδιαςολῆς, διότι τότε ὁ παρονομαστὴς γίνεται 1000 ἢ 1000000 κτλ, οἵτινες εἶναι κύβοι· ἔπειτα παραμελεῖται ἡ ὑποδιαστολὴ, ἐξάγεται ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀκεραίου μεῖον 1 καὶ τίθεται ἡ ὑποδιαστολὴ ὅπου ἁρμόζει. Π. χ. εἰς τοῦ 9,48 τὸ τέλος τίθεται 0, εἰς τοῦ 18,9432 τίθενται 00, καὶ ἐξαγομένης τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ 9480 καὶ τοῦ 18943200 μεῖον 1, ἔχομεν 21 καὶ 265· αἱ δὲ κυβικαὶ ῥίζαι εἶναι 2,1 μεῖον 0,1 καὶ 2,65 μεῖον 0,01 (ἰδὲ 103 καὶ 104).

Σημ. Μὲ παρόμοιον τρόπον εὑρίσκεται καὶ ἡ τετάρτη καὶ ἡ πέμπτη ῥίζα κτλ τῶν ἀριθμῶν· ἀλλ' εἰς ἡμᾶς ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὰ περὶ τετραγωνικῆς καὶ κυβικῆς ῥίζης, διότι τῶν ἄλλων ῥιζῶν δὲν θέλομεν ἔχει σχεδὸν χρείαν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΙΣΟΔΙΑΦΟΡΑΣ, ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ, ΤΥΠΟΥ ΚΑΙ ΠΡΟΟΔΩΝ.

Περὶ διαφορᾶς καὶ ἰσοδιαφορᾶς.

119. Ἐὰν πρὸς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ α πρὸς β συμφωνηθῇ (Θ. Α. 140) ν' ἀφαιρῆται πάντοτε ὁ δεύτερος ἢ ὁ ἑπόμενος ἀπὸ τοῦ ἡγουμένου, ὁ β ἀπὸ τοῦ α, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ διαφορὰ $\alpha.\beta$ ἢ $\alpha-\beta$ τότε θέλει εἶσθαι ἢ θετικὴ, ἂν $\beta<\alpha$, ἢ ἀντιθετικὴ, ἂν $\beta>\alpha$, ἢ 0, ἂν $\beta=\alpha$. Καὶ ἂν, ὅταν δὲν ἦναι 0, σημειωθῇ διὰ δ ἡ διαφορὰ, θέλει εἶσθαι $+\delta$ ἢ $-\delta$, ὧν ἡ μὲν $+\delta$ σημαίνει ὅτι ὁ α ἔχει *πλειότερον* τοῦ β δ μονάδας, ἡ δὲ $-\delta$ ὅτι ἔχει ὁ α *ὀλιγώτερον* τοῦ β δ μονάδας (4 καὶ 17). Κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ὁ $\alpha=\beta+\delta$, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν $\alpha=\beta-\delta$.

Σημ. Εἶναι εὔκολον νὰ νοηθῇ ὁποῖά τινα συμβαίνουσιν, ἂν ἀφαιρῆται ὁ πρῶτος ἀπὸ τοῦ δευτέρου, ὁ α ἀπὸ τοῦ β, πρὸς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς.

120. Ἐὰν δὲ ἡ αὐτὴ μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ α πρὸς τὸ β ἦναι καὶ ἡ διαφορὰ τοῦ γ πρὸς τὸ ε, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ $\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$ εἶναι ἰσοδιάφοροι, καὶ ἔχομεν $\alpha.\beta\,\dot{:}\,\gamma.\varepsilon$, ἢ ἄλλως, $\alpha-\beta=\gamma-\varepsilon$. Ταύτης δὲ τὸ κεφάλαιον $\alpha+\varepsilon$ τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον $\beta+\gamma$ τῶν μέσων. Διότι, ὄντος τοῦ $\alpha=\beta+\delta$ ἢ $\beta-\delta$, καὶ τοῦ $\gamma=\varepsilon+\delta$ ἢ $\varepsilon-\delta$, τρέπεται ἡ ἰσοδιαφορὰ εἰς

$$\beta+\delta.\beta\,\dot{:}\,\varepsilon+\delta.\varepsilon \text{ ἢ } \beta-\delta.\beta\,\dot{:}\,\varepsilon-\delta.\varepsilon$$

ὅθεν δῆλον ὅτι τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων $\beta+\delta+\varepsilon$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τῶν μέσων $\beta+\varepsilon+\delta$, ἢ $\beta-\delta+\varepsilon=\beta+\varepsilon-\delta$, διότι τῶν δύο τριόρων τὰ προσδιορίσματα εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς (36). Ἢ ἐκ τῆς $\alpha-\beta=\gamma-\varepsilon$ μεταθέσει τοῦ ε εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τοῦ β εἰς τὸ δεύτερον (46) ἔχομεν $\alpha+\varepsilon=\gamma+\beta$.

Σημ. Εἶναι εὔκολον μετὰ ταῦτα ν' ἀποδειχθῶσιν ἐπὶ τῆς γενικῆς ἰσοδιαφορᾶς $\alpha.\beta:\gamma.\varepsilon$ αἱ διάφοραι ἄλλαι ἰδιότητες τῆς ἰσοδιαφορᾶς (Θ. Α. 143), καὶ διὰ τοῦτο προτρέπομεν τοὺς μαθητὰς ν' ἀσχοληθῶσιν εἰς τοῦτο πρὸς γύμνασίν των.

Περὶ λόγου καὶ ἀναλογίας.

121. Εἶναι ἤδη γνωστὸν (Θ. Α. 99) ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ λόγου ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ α πρὸς β, ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν κτλ, πρέπει νὰ διαιρῆται ὁ πρῶτος διὰ τοῦ δευτέρου, ὁ ἡγούμενος α διὰ τοῦ ἑπομένου β, καὶ ὅτι ὁ λόγος $\alpha\,\dot{:}\,\beta$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$ θέλει εἶσθαι ἀκέραιος μέν, ἂν $\alpha>\beta$ καὶ διαιρέσιμος δἰ αὐτοῦ, κλασματικὸς δέ, ἂν δὲν ἦναι διαιρετὸς ἢ ἂν $\alpha<\beta$, ἴσος δὲ μὲ τὸ 1, ἂν $\alpha=\beta$. Καὶ ἄν, ὅταν δὲν ἦναι 1, σημειωθῇ διὰ λ ὁ λόγος, δῆλον ὅτι $\alpha=\beta\lambda$.

Σημ. Τὰ αὐτὰ συμβαίνουσι καὶ ἂν οἱ ὅροι α καὶ β τοῦ λόγου ἦναι ὁμόσημοι ἢ ἀντίθετοι (21 σημ. β), ἔτι δὲ καὶ ἂν διαιρῆται ὁ β δἰ α πρὸς εὕρεσιν τοῦ λόγου τοῦ β πρὸς α.

122. *Ὁ λόγος* $\frac{\alpha-\beta}{\beta}$ *τῆς διαφορᾶς* $\alpha-\beta$ *πρὸς τὸν δεύτερον* β *εἶναι κατὰ μονάδα μικρότερος τοῦ λόγου* $\frac{\alpha}{\beta}$, *εἴτε θετικὴ εἶναι ἡ διαφορὰ* $\alpha-\beta$ *εἴτε ἀντιθετική*. Διότι ἂν ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις τοῦ $\alpha-\beta$ διὰ β ὡς ἐν ἀρ. 43 εἴπομεν, θέλομεν

ἔχει $\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}-1$, ἤτοι ὅτι ὁ λόγος τοῦ $\alpha-\beta$ πρὸς τὸν β εἶναι κατὰ μονάδα μικρότερος τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$ (ἰδὲ Θ. Α. 123, γ΄.)

123. Ἐὰν δὲ ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ α πρὸς τὸν β ἦναι καὶ ὁ λόγος τοῦ γ πρὸς τὸν δ, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ εἶναι ἀνάλογοι, καὶ ἔχομεν $\alpha:\beta::\gamma:\delta$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$. Ταύτης δὲ τὸ γινόμενον $\alpha\delta$ τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον $\beta\gamma$ τῶν μέσων. Διότι ὄντος $\alpha=\beta\lambda$ καὶ $\gamma=\delta\lambda$, ἡ ἀναλογία τρέπεται εἰς ταύτην

$$\beta\lambda:\beta::\delta\lambda:\delta\cdot$$

ὅθεν δῆλον ὅτι τὸ γινόμενον $\beta\lambda\delta$ τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον $\beta\delta\lambda$ τῶν μέσων, διότι εἶναι γινόμενα τῶν αὐτῶν τριῶν παραγόντων β,δ καὶ λ. Ἢ τῆς $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἂν πολλαπλασιασθῶσι τὰ δύο μέλη ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν, ἔχομεν $\frac{\alpha\beta\delta}{\beta}=\frac{\gamma\beta\delta}{\delta}$, ἐξαλειφομένου δὲ τοῦ κοινοῦ β καὶ δ εἰς τοὺς δύο ὅρους, ἔχομεν $\alpha\delta=\beta\gamma$.

124. Εἶναι ἐπίσης εὔκολον ν' ἀποδειχθῶσι καὶ αἱ λοιπαὶ ἰδιότητες τῆς ἀναλογίας, ὅταν οἱ ὅροι της ἦναι ὁποιοιδήποτε ἀριθμοὶ, ἀκέραιοι ἢ κλασματικοὶ κτλ, παριστανόμενοι διὰ γραμμάτων, οἷον

$$\alpha:\beta::\gamma:\delta.$$

ά. (Ἰδὲ ἀρ. 132 καὶ 133 τῆς Θ. Α). *Ἐὰν τῆς ἀναλογίας* $\alpha:\beta::\gamma:\delta$ *πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο πρῶτοι ὅροι ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμὸν* μ., *τὰ προκύπτοντα γινόμενα* $\alpha\mu$. *καὶ* $\beta\mu$. *εἶναι ἀνάλογα τῶν* γ *καὶ* δ, *ἤτοι* $\alpha\mu.:\beta\mu.::\gamma:\delta$. Διότι τὸ γινόμενον $\alpha\mu\delta$ τῶν ἄκρων ταύτης καὶ τὸ $\beta\mu\gamma$ τῶν μέσων της εἶναι ἴσα, καθότι ἄλλο δὲν εἶναι εἰμὴ τὰ γινόμενα $\alpha\delta$ καὶ $\beta\gamma$, ἅπερ εἶναι ἴσα, πολλαπλασιασμένα ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μ.

Ὡσαύτως δ' ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι ἀνάλογοι οἱ ἀριθμοὶ, καὶ ὅταν διαιρεθῶσιν οἱ δύο πρῶτοι ὅροι διὰ τοῦ μ ἢ οἱ δύο τελευταῖοι, ἢ οἱ δύο ἡγούμενοι ἢ οἱ δύο ἑπόμενοι πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μ.

β΄. (ἰδὲ 134, 135 καὶ 136 τῆς Θ. Α). *Ἐκ τῆς ἀναλογίας* $\alpha:\beta::\gamma:\delta$ *πορίζεται ἡ*

$$\alpha+\beta:\beta::\gamma+\delta:\delta, \text{ ἢ ἡ } \alpha-\beta:\beta::\gamma-\delta:\delta.$$

Διότι ὡς ἤδη εἴδομεν (122) καὶ ὁ λόγος $\alpha+\beta:\beta$ εἶναι κατὰ μονάδα μεγαλήτερος τοῦ λόγου $\alpha:\beta$, καὶ ὁ $\gamma+\delta:\delta$ τοῦ $\gamma:\delta$, ὁ δὲ $\alpha:\beta$ εἶναι ἴσος μὲ τὸν $\gamma:\delta$. Ὡσαύτως δὲ καὶ ὁ $\alpha-\beta:\beta$ εἶναι κατὰ μονάδα μικρότερος τοῦ $\alpha:\beta$ καὶ ὁ $\gamma-\delta:\delta$ τοῦ $\gamma:\delta$, ὁ δὲ $\alpha:\beta$ εἶναι ἴσος μὲ τὸν $\gamma:\delta$. Ἐκ δὲ τούτων ἕπεται ὅτι ἀληθεύουσι γενικῶς καὶ τὰ ἐν ἀρ. 135 καὶ 136 τῆς Θ. Α.

γ΄. *Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ἦναι ἀνάλογοι, θέλουσιν εἶσθαι ἀνάλογα καὶ τὰ τετράγωνά των καὶ οἱ κύβοι των.* Διότι, ἂν γραφθῇ δὶς ἡ ἀναλογία $\alpha:\beta::\gamma:\delta$ ἢ τρὶς οὕτως,

$$\begin{array}{lcl} \alpha:\beta::\gamma:\delta & & \alpha:\beta::\gamma:\delta \\ \alpha:\beta::\gamma:\delta & \text{ἢ} & \alpha:\beta::\gamma:\delta \\ & & \alpha:\beta::\gamma:\delta \end{array}$$

καὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπ' ἀλλήλους οἱ ὅμοιοι τὴν θέσιν ὅροι, τὰ γινόμενα θέλουσιν εἶσθαι ἀνάλογα (Θ. Α. 137). Ἀλλὰ τὰ γινόμενα εἶναι τετράγωνα ἢ κύβοι τῶν ὅρων τῆς ἀναλογίας· ἄρα ἔχομεν $\alpha^2:\beta^2::\gamma^2:\delta^2$, ἢ $\alpha^3:\beta^3::\gamma^3:\delta^3$.

Ἐκ δὲ τούτου ἕπεται καὶ τὸ ἀντίστροφον τοῦτο, ὅτι, ἂν τέσσαρα τετράγωνα ἢ τέσσαρες κύβοι ἦναι ἀνάλογα, καὶ αἱ τετραγωνικαὶ ἢ αἱ κυβικαὶ ῥίζαι των θέλουσιν εἶσθαι ἀνάλογοι. Οἷον ἂν οἱ ἀριθμοὶ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ἦναι τετράγωνοι καὶ ἀνάλογοι, θέλομεν ἔχει ἔτι $\sqrt{\alpha}:\sqrt{\beta}::\sqrt{\gamma}:\sqrt{\delta}$· ὡσαύτως καὶ ἂν ἦναι κύβοι.

Σημ. Ἂν ὅμως οἱ ἀριθμοὶ ἀνάλογοι ὄντες δὲν ἦναι τετράγωνοι ἢ κύβοι, ὅλοι ἢ τινὲς μόνον, τότε δὲν δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν ὅτι καὶ αἱ τετραγωνικαὶ καὶ αἱ κυβικαὶ ῥίζαι των εἶναι ἀνάλογοι. Διότι αὗται εἶναι ἀνάριθμοι, ἂν δὲ νοηθῶσι κατὰ λόγον, οἱ λόγοι αὐτῶν ἀδύνατον νὰ ἦναι ἀριθμοί· καὶ ὅταν οἱ λόγοι δὲν ἦναι ἀριθμοί, ἀδύνατον νὰ νοηθῇ ὅτι αὐτοὶ εἶναι ἴσοι, ἢ ὅτι αἱ τετραγωνικαὶ καὶ αἱ κυβικαὶ ἀνάριθμοι ῥίζαι εἶναι ἀνάλογοι.

Ἐὰν ὅμως μεταχειρισθῶμεν κατὰ συνθήκην σύμβολα παραστατικὰ τῶν ἀναρίθμων, οἷον τὰ $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$, $\sqrt{\delta}$, τότε κατὰ ταύτην τὴν συνθήκην τὰ α, β, γ, δ εἶναι τούτων ἀκριβῆ τετράγωνα, τῶν δὲ $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt[3]{\beta}$, $\sqrt[3]{\gamma}$, $\sqrt[3]{\delta}$ ἀκριβεῖς κύβοι· ὥστε δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι, ἂν ἔχωμεν $\alpha:\beta::\gamma:\delta$, θέλομεν ἔχει καὶ $\sqrt{\alpha}:\sqrt{\beta}::\sqrt{\gamma}:\sqrt{\delta}$, ἢ $\sqrt[3]{\alpha}:\sqrt[3]{\beta}::\sqrt[3]{\gamma}:\sqrt[3]{\delta}$. Ἀλλὰ τὰ μόνον συμβολικὰ ἐξετάζονται ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ.

Ἐνταῦθα προσθέτομεν ὅτι, ἐπειδὴ ἀντὶ τῶν ἀναρίθμων ῥιζῶν μεταχειριζόμεθα ἀριθμοὺς προσεγγίζοντας εἰς αὐτάς, τούτους ἀκριβῶς ἀναλόγους νὰ ἐκλαμβάνωμεν, ὅταν οἱ μὴ τετράγωνοι καὶ οἱ μὴ κύβοι ἦναι ἀνάλογοι, δὲν εἶναι ἐντελῶς ὀρθὸν, ὡς ἔγγιστα δὲ ἀναλόγους, τοῦτο εἶναι τὸ σωστόν· ἡ δὲ προσέγγισις εἰς τὸ ὀρθὸν θέλει εἶσθαι τόσον μεγαλητέρα, ὅσον περισσότερον προσεγγίζοντας ἀριθμοὺς εἰς τὰς ἀναρίθμους ῥίζας μεταχειριζόμεθα. Ἑπομένως ὡς ἔγγιστα ἀληθεύουσι καὶ αἱ ἄλλαι ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν, ὧν οἱ ὅροι εἶναι προσεγγίζοντες εἰς τὰς ἀναρίθμους ῥίζας ἀριθμοί.

Τί εἶναι γενικὸν πρόβλημα καὶ τί τύπος τοῦ ἀγνώστου του.

125. Ὀνομάζομεν *ὅμοια* προβλήματα ἐκεῖνα, ὧν οἱ ἀριθμοὶ, διάφοροι ὄντες τὸ πλῆθος, εἶναι συσχετισμένοι ὁλωςδιόλου κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἤτοι ἔχουσι τὰς αὐτὰς σχέσεις, *διάφορα* δὲ, τὰ ἔχοντα ὁποιουςδήποτε τοὺς ἀριθμοὺς, ἀλλὰ τὰς σχέσεις διαφόρους. Ὅμοια προβλήματα εἰμποροῦν νὰ ἦναι πολυάριθμα· π. χ. τὰ τοῦ τόκου, ὅμοια ὄντα, εἶναι πολυάριθμα, ἐὰν νοηθῇ ὅτι μεταβάλλονται μόνον οἱ ἀριθμοὶ, δηλ. ὅτι τὸ κεφάλαιον εἶναι 400 δρ, ἔπειτα 1000, ἄλλοτε 2500 κτλ· οὕτω καὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ὁ χρόνος καὶ ὁ τόκος (ἰδὲ ἀριθ. 6). Ὡσαύτως τὰ τῆς ἑταιρίας, ὅμοια ὄντα ἂν διαφέρωσι μὲν οἱ ἀριθμοὶ, διατηρῶνται δὲ αἱ αὐταὶ σχέσεις, εἶναι πολυάριθμα· εἶναι δὲ διάφορα τῶν τοῦ τόκου, διότι διαφέρουσιν αἱ σχέσεις.

Γενικὸν πρόβλημα λέγεται τὸ ἔχον γενικοὺς τοὺς ἀριθμοὺς, σημειωμένους διὰ γραμμάτων, καὶ ἐμπεριλαμβάνον ἑπομένως ὅλα τὰ ὅμοια. Π. χ. *Δανείσας τις κ δραχ πρὸς ε τὰς 0/0 τὴν μονάδα τοῦ χρόνου, εἰς χ μονάδας χρόνου πόσον τόκον θέλει λάβει;* εἶναι γενικὸν πρόβλημα τόκου, διότι οἱ ἀριθμοί του εἶναι γενικοὶ καὶ ἀόριστοι παριστανόμενοι διὰ γραμμάτων, ἐμπεριλαμβάνει δὲ ὅλα τὰ ὅμοια τοῦ τόκου.

126. Ἡ λύσις γενικοῦ προβλήματος δὲν συνίσταται εἰς τὴν ἀνακάλυψιν καὶ ἐκτέλεσιν ὅλων τῶν πράξεων πρὸς εὕρεσιν μερικοῦ τινος ἀριθμοῦ, ὅστις νὰ παριστάνῃ τὸν ζητούμενον, ἀλλ' εἰς μόνην τὴν εὕρεσιν καὶ σημείωσιν τῶν πράξεων, αἵτινες πρέπει νὰ γείνωσιν ἐπὶ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν τοῦ προβλήματος, ἵνα προκύψῃ ὁ ζητούμενος. Οὗτος δὲ τότε παριστάνεται δι' ἐγγραμμάτου ἀριθμοῦ, ἐν ᾧ εἶναι ὅλοι οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ τοῦ προβλήματος καὶ ἔτι σημειωμέναι ὅλαι αἱ πράξεις, αἵτινες πρέ-

πει νὰ γείνωσιν ἐπ' αὐτῶν. Ὁ τοιοῦτος δ' ἐγγράμματος ὀνομάζεται *τύπος τοῦ ἀγνώστου.*

Ἐδῶ θέτομεν τύπους τινὰς παριστάνοντας ἁπλούστατα τὰ πρὸς εὕρεσιν διαφόρων ἀγνώστων.

ά. Ἐκ τῆς ἰσοδιαφορᾶς $\alpha.\beta\dot{:}\gamma.\chi$, ἧςπερ ὁ τέταρτος ὅρος εἶναι ἄγνωστος, ἐξάγεται ὁ τύπος $\chi=\beta+\gamma-\alpha$, ὅςτις παριστάνει ἁπλούστατα τὸν τοῦ ἀρ. 144 τῆς Θ. Α. κανόνα.

β'. Ἐκ τῆς ταυτομέσου ἰσοδιαφορᾶς $\alpha.\chi\dot{:}\chi.\beta$ προκύπτει ὁ τύπος $\chi=\frac{\alpha+\beta}{2}$ (αὐτόθι), ὅστις παριστάνει μέσον ἰσοδιάφορον.

γ'. Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\alpha\dot{:}\beta\dot{:}\dot{:}\gamma\dot{:}\chi$ πορίζεται ὁ τύπος $\chi=\frac{\beta\gamma}{\alpha}$, ὅςτις παριστάνει τέταρτον ἀνάλογον (ἴδε Θ. Α. ἀριθ. 139).

δ'. Ἐκ τῆς ταυτομέσου ἀναλογίας $\alpha\dot{:}\chi\dot{:}\dot{:}\chi\dot{:}\beta$ προκύπτει ὁ τύπος $\chi=\sqrt{\alpha\beta}$, ὅστις παριστάνει μέσον ἀνάλογον (αὐτόθι).

έ. Ὁ $\frac{\beta\gamma}{\alpha}$ παριστάνει γενικῶς τὸν ἄγνωστον προβλήματος λυομένου κατὰ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν. Ὁ δὲ τύπος ὁ παριστάνων γενικῶς τὸν ἄγνωστον προβλήματος λυομένου κατὰ τὴν πολλαπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν εἶναι οὗτος $\chi=\frac{\beta\delta\zeta...\times\kappa}{\alpha\gamma\varepsilon...}$, ὅστις προκύπτει ἀφοῦ διαταχθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ ὡς ἐδῶ φαίνεται, πολλαπλασιασθῶσιν ὅλοι οἱ μέσοι καὶ τὸ γινόμενονον διαιρεθῇ διὰ τοῦ γινομένου τῶν πρώτων ὅρων (Θ. Α. 152 καὶ 153).

$$\begin{array}{l} \alpha\dot{:}\beta\dot{:}\dot{:}\kappa\dot{:}\chi \\ \gamma\dot{:}\delta \\ \varepsilon\dot{:}\zeta \end{array}$$

ς'. Ὁ τύπος ὁ παριστάνων τὸν τόκον εἶναι $\tau=\frac{\kappa\varepsilon\chi}{100}$, ἐν ᾧ τ παριστάνει τὸν τόκον, κ τὸ κεφάλαιον, ε τὸ ἐπιτόκιον καὶ χ τὸν χρόνον. Ἐκ δὲ τούτου πορίζονται οἱ ἐφεξῆς τρεῖς, ἀφοῦ τῆς ἰσότητος $\tau=\frac{\kappa\varepsilon\chi}{100}$ πολλαπλασιασθῶσι τὰ δύο μέλη ἐπὶ 100, τῆς δὲ προκυπτούσης ἰσότητος $\kappa\varepsilon\chi=100\tau$ διαιρεθῶσι τὰ δύω μέλη διὰ $\varepsilon\chi$ ἢ διὰ

$$\left\{\begin{array}{l} \kappa=\frac{100\tau}{\varepsilon\chi} \\ \varepsilon=\frac{100\tau}{\kappa\chi} \\ \chi=\frac{100\tau}{\kappa\varepsilon}, \end{array}\right.$$

$\kappa\chi$ ἢ διὰ $\kappa\varepsilon$. Ὁ πρῶτος τῶν τριῶν παριστάνει τὰ πρὸς εὕρεσιν τοῦ κεφαλαίου, ὁ δεύτερος τὰ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐπιτοκίου καὶ ὁ τρίτος τὰ πρὸς εὕρεσιν τοῦ χρόνου (Θ. Α· 154). Ὁ αὐτὸς τύπος παριστάνει καὶ τὴν ὑπέρτοκον ὑφαίρεσιν.

ζ'. Ὁ τύπος, ὅςις παριστάνει γενικῶς ἓν ἕκαστον τῶν μερῶν μεριστέου ἀριθμοῦ ἀναλόγως ἄλλων δεδομένων, εἶναι $\chi=\frac{\mu\alpha}{\kappa}$, τοῦ μ παριστάνοντος τὸν μεριστέον ἀριθμὸν, τοῦ α ἕνα ὁποιονδήποτε τῶν δεδομένων ἀναλόγων, κ τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν δεδομένων ἀναλόγων καὶ χ ἕνα τῶν ζητουμένων, τὸν ἀντίστοιχον τοῦ α (Θ· Α. 155).

Ὡσαύτως καὶ ἐκ τοῦ $\chi=\frac{\mu\alpha}{\kappa}$ πορίζεται ὁ $\kappa=\frac{\mu\alpha}{\chi}$, ὁ $\mu=\frac{\kappa\chi}{\alpha}$, καὶ ὁ $\alpha=\frac{\kappa\chi}{\mu}$, ἀφοῦ πολλαπλασιασθῶσι τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος $\chi=\frac{\mu\alpha}{\kappa}$ ἐπὶ κ, καὶ τῆς προκυπούσης ἰσότητος $\kappa\chi=\mu\alpha$ διαιρεθῶσι τὰ δύο μέλη διὰ χ ἢ δι' α ἢ διὰ μ.

ή. Τῆς ἀντιτόκου ὑφαιρέσεως ὁ τύπος εἶναι $\upsilon=\frac{\alpha\varepsilon\chi}{100+\varepsilon\chi}$, τῆς δὲ παρούσης ἀξίας τοῦ ὁμολόγου ὁ τύπος εἶναι $\pi=\frac{100\alpha}{100+\varepsilon\chi}$, ὅπου α παριςάνει τὸ προεξοφλούμενον ποσὸν τῶν χρημάτων, ε τὸ ἐπιτόκιον, χ τὸν χρόνον, υ τὴν ὑφαίρεσιν καὶ π τὴν παροῦσαν ἀξίαν τοῦ ὁμολόγου (Θ. Α. 158).

Ἐκ τοῦ δευτέρου, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι τὰ δύο μέλη του ἐπὶ $100+\varepsilon\chi$, ἔχομεν $100\pi+\pi\varepsilon\chi=100\alpha$. Ἐὰν δὲ διαιρεθῶσι τὰ δύο μέλη διὰ 100, ἔχομεν $\alpha=\frac{100\pi+\pi\varepsilon\chi}{100}$.

Ἐὰν δὲ μετατεθῇ ὁ 100π εἰς τὸ δεύτερον μέλος, ἔπειτα διαιρεθῶσι τὰ δύο μέλη διὰ $\pi\chi$ ἢ $\pi\varepsilon$, ἔχομεν $\left\{\begin{array}{l}\varepsilon=\frac{100\alpha-100\pi}{\pi\chi}.\\[2ex] \chi=\frac{100\alpha-100\pi}{\pi\varepsilon}\end{array}\right.$

Δύναταί τις καὶ ἐκ τοῦ πρώτου νὰ εὕρῃ τὸν τύπον τοῦ α, ε καὶ χ.

127. Ὅταν πρόκηται νὰ λυθῇ μερικὸν πρόβλημα ὅμοιον μέ τι τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος, ἀφοῦ προσδιορισθῇ τί εἶναι ἄγνωστον καὶ τίνα γνωστά, ἤτοι μὲ τίνα τῶν ἰδιαιτέρων περιπτώσεων τοῦ γενικοῦ προβλήματος ὁμοιάζει αὐτό, ἐκτελοῦνται ἀμέσως ἐπὶ τῶν γνωστῶν αἱ εἰς τὸν τύπον τοῦ ἀγνώστου σημειωμέναι πράξεις, καὶ οὕτως εὑρίσκεται ὁ μερικὸς ζητούμενος ἀριθμός.

Π. χ. *Τοκίσας τις κάμποσας δραχμὰς πρὸς* 12 τὰ 0/0 *τὸ ἔτος εἰς* 3 *ἔτη ἔλαβε τόκον* 340 *δρ, πόσας ἐτόκισεν;* εἶναι πρόβλημα τόκου, ὁμοιάζον μὲ τὰ τῆς ἰδιαιτέρας περιπτώσεως, ὧν ὁ τύπος εἶναι $\varkappa=\frac{100\tau}{\varepsilon\chi}$. Καὶ ἐπειδὴ $\tau=340$, $\varepsilon=12$, $\chi=3$, γενομένων τῶν πράξεων εὑρίσκεται ὅτι ἐτόκισε δρ. 944,44 περίπου.

Ὡσαύτως, *Ἀντὶ* 9495 *δρ ἐξοφλητέων εἰς ἓν ἔτος ἔδωκέ τις μόνον* 9000 *προεξοφλήσας αὐτὰς* 5 *μῆνας πρότερον, πρὸς πόσον τὰ* 100 *ἔγεινεν ἡ προεξόφλησις;* (Θ. Α. πρόβλ. 80), εἶναι πρόβλημα ὑφαιρέσεως, οὗτινος ὁ ἄγνωστος ἔχει τύπον τὸν $\varepsilon=\frac{100\alpha-100\pi}{\pi\chi}$, ὑποτιθεμένης ἀντιτόκου τῆς ὑφαιρέσεως. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha=9495$, $\pi=9000$, καὶ $\chi=5$, ἐκτελέσαντες τὰς σημειωμένας πράξεις εὑρίσκομεν $\varepsilon=1,10$, ἤτοι ἔγεινεν ἡ προεξόφλησις πρὸς δρ. 1,10 τὰ 100 τὸν μῆνα.

Περὶ προόδων ἀριθμῶν.

128. *Πρόοδος ἀριθμῶν* λέγονται ἀριθμοὶ κατὰ σειρὰν ἔχοντες ἕκαστος πρὸς τὸν πλησίον του (τὸν ἀμέσως πρὸ αὐτοῦ ἢ μετ' αὐτὸν) ἢ τὴν αὐτὴν διαφορὰν ἢ τὸν αὐτὸν λόγον. Καὶ ἂν μὲν ἔχῃ ἕκαστος πρὸς τὸν πλησίον του τὴν αὐτὴν διαφοράν, τὴν πρόοδον αὐτῶν ὀνομάζομεν *πρόοδον ἰσοδιαφόρων*, ἂν δὲ τὸν αὐτὸν λόγον, *πρόοδον ἀναλόγων*.

Πρόοδοι μὲν ἰσοδιαφόρων εἶναι αὗται

(α) 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26 κτλ·

(β) 50, 45, 40, 35, 30, 25, 20, 15, 10, κτλ·

διότι ἕκαστος μὲν τῆς (α) ὑπερέχει τὸν ἀμέσως πρὸ αὐτοῦ κατὰ 3, ἕκαστος δὲ τῆς (β) ὑπερέχει τὸν ἀμέσως μετ' αὐτὸν κατὰ 5. Ὁ δὲ ἀριθμὸς 3, ὅστις εἶναι διαφορὰ τῶν ὅρων τῆς προόδου (α), λέγεται συντομώτερα *διαφορὰ τῆς προόδου* (α)· ὡσαύτως καὶ ὁ 5 λέγεται *διαφορὰ τῆς προόδου* (β).

Πρόοδοι δὲ ἀναλόγων εἶναι αὗται

(γ) 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, κτλ·

(δ) 243, 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, κτλ·

διότι ἕκαστος μὲν τῆς (γ) πρὸς τὸν ἀμέσως πρὸ αὐτοῦ ἔχει λόγον 2, ἕκαστος δὲ τῆς (δ) πρὸς τὸν ἀμέσως μετ' αὐτὸν ἔχει λόγον 3. Ὁ δὲ 2 ἢ ὁ 3, ὅστις εἶναι λόγος τῶν ὅρων τῆς προόδου, λέγεται συντομώτερα *λόγος τῆς προόδου*, ὁ μὲν 2, τῆς (γ), ὁ δὲ 3, τῆς (δ).

Σημ. Κοινῶς ἡ μὲν (α) καὶ (β) ὀνομάζεται πρόοδος ἀριθμητική, ἡ δὲ (γ) καὶ (δ) πρόοδος γεωμετρική, ὡς λέγουσι καὶ ἀναλογίαν ἀριθμητικὴν καὶ γεωμετρικήν. Ἀλλ' ὡς ἀσήμαντα τὰ ὀνόματα ταῦτα εἶναι καλὸν νομίζω νὰ τὰ ἐγκαταλείψωμεν (ἴδε Θ. Α. 144, σημ. β.).

129. Ἕκαστος ἀριθμὸς τῆς προόδου καλεῖται *ὅρος* αὐτῆς. Οἱ δὲ ὅροι τῆς προόδου δυνατὸν μὲν νὰ ἦναι εὐάριθμοι ἤτοι ὄχι ἀπειράριθμοι, οἷον δέκα, πεντήκοντα, χίλια, κτλ, δυνατὸν ὅμως νὰ ἦναι καὶ ἀπειράριθμοι. Τὴν πρώτην πρόοδον, ἥτις ἔχει ἀρχὴν καὶ τέλος, ὀνομάζομεν *πεπερασμένην*, τὴν δὲ ἀπειραρίθμους ἔχουσαν ὅρους, ὀνομάζομεν *ἄπειρον*. Τῆς πεπερασμένης ὁ μὲν εἰς τ' ἀριστερὰ ὅρος λέγεται *πρῶτος*, ὁ δὲ εἰς τὰ δεξιὰ *τελευταῖος*, οἱ δύο δὲ ὁμοῦ *ἄκροι*.

130. Τὴν πρόδον, ἧς οἱ ὅροι ἐξ ἀριστερῶν πρὸς δεξιὰ προβαίνουσιν αὐξάνοντες, ὀνομάζομεν *αὔξορον*, οἵα ἡ (α) καὶ (γ)· ἐκείνην δὲ, ἧς οἱ ὅροι ὡσαύτως προχωροῦσιν ἐλαττούμενοι, καλοῦμεν *μείορον*, οἵα ἡ (β) καὶ (δ).

Σημ. Ἡ αὔξορος θέλει εἶσθαι μείορος καὶ τ' ἀνάπαλιν, ἂν οἱ ὅροι θεωρηθῶσι προβαίνοντες ἐκ δεξιῶν πρὸς ἀριστερά.

131. Ἵνα δείξωμεν ὅτι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦσι πρόοδον ἰσοδιαφόρων, πρὸ τοῦ πρώτου αὐτῶν τάσσομεν τὸ ÷, μεταξὺ δὲ δύο παρακειμένων μίαν στιγμήν· ἵνα δείξωμεν δὲ ὅτι ἀποτελοῦσι πρόοδον ἀναλόγων, πρὸ τοῦ πρώτου αὐτῶν τάσσομεν τὸ ∺, μεταξὺ δὲ δύο παρακειμένων δύο στιγμάς, οὕτω

÷2.5.8.11.14.17.20.23 κτλ, πρόοδος ἰσοδιαφόρων.

∺2:4:8:16:32:64:128 κτλ, πρόοδος ἀναλόγων.

Ἀπαγγέλλεται δὲ ἑκατέρα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, οὕτως
ὡς 2 πρὸς 5, οὕτω 5 πρὸς 8, οὕτως 8 πρὸς 11 κτλ·
ὡς 2 πρὸς 4, οὕτω 4 πρὸς 8, οὕτως 8 πρὸς 16 κτλ·
ἀλλὰ νοεῖται εἰς μὲν τὴν πρώτην ἡ διαφορὰ, εἰς δὲ τὴν δευτέραν ὁ λόγος ὁ αὐτός.

Σημ. Η γραφὴ αὕτη προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι κυρίως ἡ πρώτη πρόοδος εἶναι σειρὰ ταυτομέσων ἰσοδιαφορῶν, δηλαδὴ 2.5:5.8:8.11 κτλ, καὶ ἡ δευτέρα σειρὰ ταυτομέσων ἀναλογιῶν, δηλαδὴ 2:4::4:8::8:16 κτλ· ὅθεν συντομίας χάριν δὲν ἐπαναλαμβάνεται ἕκαστος αὐτῶν τῶν ὅρων, τὰ δὲ σημεῖα : ἢ τὰ :: θέτονται ἅπαξ εἰς τὴν ἀρχὴν, γράφεται δὲ μεταξύ των τὸ —, ἵνα δείξη τὴν ἐπανάληψιν αὐτῶν. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι μόνον ἡγούμενος, ὁ δὲ τελευταῖος ὅρος τῆς προόδου μόνον ἑπόμενος, ἕκαστος δὲ τῶν λοιπῶν εἶναι καὶ ἡγούμενος καὶ ἑπόμενος.

132. Προόδου ἰσοδιαφόρων ἡ διαφορὰ εὑρίσκεται ἂν ἀφαιρεθῇ ὅρος τις ἀπὸ τοῦ πλησίον του. Καὶ ἂν μὲν συμφωνηθῇ ν' ἀφαιρῆται πάντοτε ὅρος τις ἀπὸ τοῦ ἀμέσως κατόπιν του, τότε ἡ μὲν τῆς αὐξόρου διαφορὰ θέλει εἶσθαι θετικὴ, ἡ δὲ τῆς μειόρου ἀντιθετική· καὶ ἕκαστος μὲν ὅρος τῆς πρώτης θέλει εἶσθαι ἴσος μὲ τὸν ἀμέσως πρὸ αὐτοῦ σὺν τῇ διαφορᾷ, ἕκαστος δὲ τῆς δευτέρας ἴσος μὲ τὸν πρὸ αὐτοῦ πλὴν τῆς διαφορᾶς. Ἂν δὲ συμφωνηθῇ ν' ἀφαιρῆται ὅρος τις ἀπὸ τοῦ πρὸ αὐτοῦ, τότε συμβαίνουσι τ' ἀντίθετα (ἰδὲ τὰς (α) καὶ (β) προόδους).

Ὡσαύτως καὶ προόδου ἀναλόγων ὁ λόγος εὑρίσκεται, ἂν διαιρεθῇ ὅρος τις διὰ τοῦ πλησίον του. Καὶ ἂν μὲν συμφωνηθῇ νὰ διαιρῆται πάντοτε ὅρος τις διὰ τοῦ ἀμέσως πρὸ αὐτοῦ, τότε τῆς μὲν αὐξόρου ὁ λόγος θέλει εἶσθαι ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς μεγαλήτερος τῆς μονάδος, τῆς δὲ μειόρου κλάσμα, ἕκαστος δὲ ὅρος ἑκατέρας εἶναι γινόμενον τοῦ πρὸ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν λόγον. Ἂν δὲ συμφωνηθῇ νὰ διαιρῆται ὅρος τις διὰ τοῦ μετ' αὐτὸν, τότε συμβαίνουσιν ὡς πρὸς τὸν λόγον ἐν μέρει τὰ ἐναντία (ἰδὲ τὰς (γ) καὶ (δ) προόδους).

Ἐφεξῆς θέλομεν ἐκθέσει ἰδιότητάς τινας, ὑποθέτοντες τὰς προόδους πεπερασμένας καὶ ὅτι πρὸς εὕρεσιν μὲν τῆς διαφορᾶς ἀφαιρεῖται ὅρος τις ἀπὸ τοῦ κατόπιν του, πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ λόγου διαιρεῖται ὅρος τις διὰ τοῦ πρὸ αὐτοῦ.

Ἰδιότητες προόδων ἰσοδιαφόρων.

133. Θ. *Ἕκαστος ὅρος αὐξόρου προόδου ἰσοδιαφόρων εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου ὅρου καὶ τοσάκις τῆς διαφορᾶς, ὅσοι εἶναι οἱ πρὸ αὐτοῦ ὅροι.*

Ἔστω αὔξορος πρόοδος ἡ γενικὴ $\div \alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon.\zeta....$ ἧς ἡ διαφορὰ εἶναι d. Ἔχομεν κατὰ τὰ προειρημένα

$$\beta = \alpha + d,$$
$$\gamma = \beta + d = \alpha + d + d = \alpha + 2d,$$
$$\delta = \gamma + d = \alpha + 2d + d = \alpha + 3d,$$
$$\varepsilon = \delta + d = \alpha + 3d + d = \alpha + 4d,$$

. . . .

. . . .

Ἐὰν λοιπὸν ο παριστάνῃ ὁποιονδήποτε ὅρον, πιτὸν τὴν θέσιν, ἤτοι ἔχοντα πρὸ αὐτοῦ $\pi-1$ ὅρους, φανερὸν ὅτι

$$o = \alpha + (\pi - 1)d \ldots . (1).$$

Ἐὰν δὲ ἡ γενικὴ πρόοδος ὑποτεθῇ μείορος, τότε δῆλον ὅτι $\beta = \alpha - d$, $\gamma = \alpha - 2d$, $\delta = \alpha - 3d$, καὶ γενικῶς

$$o = \alpha - (\pi - 1)d \ldots . (2).$$

Ἵνα εὕρωμεν λοιπὸν τῆς (α) προόδου τὸν πεντηκοστὸν ὅρον, θέτομεν εἰς τὸν (1) τύπον ἀντὶ α τὸν 2, ἀντὶ π τὸν 50, καὶ ἀντὶ d τὸν 3 (127), καὶ ἔχομεν

$$o = 2 + (50 - 1) \times 3 = 2 + 49 \times 3 = 149.$$

Ὡσαύτως εὑρίσκεται ὁ δέκατος ὅρος τῆς (β), ἀφοῦ εἰς τὸν (2) τύπον τεθῇ $\alpha = 50$, $\pi = 10$ καὶ $d = 5$, καὶ ἔχομεν

$$o = 50 - (10 - 1) \times 5 = 50 - 9 \times 5 = 5.$$

Ὁ δὲ ἑνδέκατος αὐτῆς εἶναι 0, ὁ δὲ εἰκοστὸς αὐτῆς εἶναι -45. Τῆς μειόρου λοιπὸν οἱ ὅροι ἐλαττοῦνται μέχρι τοῦ μηδενός, καὶ ἔπειτ' αὐξάνουσιν ἀντιθέτως, ἂν ἔχῃ πολλούς.

Σημ. Ἐπειδὴ ἐν τοῖς τύποις (1) καὶ (2) ὑπάρχουσι τέσσαρες διάφοροι ἀριθμοί, ὁ πρῶτος ὅρος α τῆς προόδου, ἄλλος τις ὅρος αὐτῆς o, ὁ ἀριθμὸς π ὁ παριστάνων τὴν θέσιν τούτου καὶ ἡ διαφορὰ d τῆς προόδου, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἕνα τούτων γνωρίζοντες τοὺς ἄλλους τρεῖς, καὶ οὕτω νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα κατὰ τὰς τέσσαρας διαφόρους περιπτώσεις του.

Διότι ἐκ τοῦ $o=a+(\pi-1)d$, μεταθέσει μὲν τοῦ $(\pi-1)d$ εἰς τὸ ἄλλο μέλος, ἔχομεν

$$o-(\pi-1)d=a \text{ ἢ } a=o-(\pi-1)d,$$

τὸν τύπον τοῦ πρώτου ὅρου τῆς προόδου.

Μεταθέσει δὲ τοῦ a εἰς τὸ ἄλλο μέλος καὶ διαιρέσει ἑκατέρου μέλους διὰ $\pi-1$, ἔχομεν $\frac{o-a}{\pi-1}=d$ ἢ $d=\frac{o-a}{\pi-1}$, τὸν τύπον τῆς διαφορᾶς τῆς προόδου.

Πολλαπλασιασθέντος δὲ τοῦ $\pi-1$ ἐπὶ d, ἔχομεν $o=a+\pi d-d$, μεταθέσει δὲ τοῦ a καὶ $-d$ εἰς τὸ ἄλλο μέλος καὶ διαιρέσει ἑκατέρου μέλους διὰ d, ἔχομεν $\frac{o-a+d}{d}=\pi$ ἢ $\pi=\frac{o-a+d}{d}$, τὸν τύπον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων.

Ἐκ δὲ τοῦ $o=a-(\pi-1)d$ εὑρίσκομεν ὡσαύτως $\left\{\begin{array}{l} a=o+(\pi-1)d \\ d=\frac{a-o}{\pi-1} \\ \pi=\frac{a-o+d}{d}. \end{array}\right.$

Πρὸς γύμνασιν ὅλοι οὗτοι οἱ τύποι νὰ μεταφρασθῶσιν εἰς τὴν κοινὴν γλῶσσαν καὶ νὰ προσδιορισθῶσι διαφόρους προσδιορισμοὺς (34 καὶ 35).

134. Πρόβλ. *Νὰ ἐμβληθῶσι μεταξὺ δύο δεδομένων ἀριθμῶν a καὶ o σ ἰσοδιάφοροι ἀριθμοί*, ἤτοι ἀριθμοί, οἵτινες ὁμοῦ μὲ τὸν a ὡς πρῶτον καὶ τὸν o ὡς τελευταῖον ν' ἀποτελῶσι πρόοδον ἰσοδιαφόρων.

Ἐπειδὴ οἱ ἐμβόλιμοι ὅροι εἶναι σ τὸν ἀριθμόν, οἱ ἐμβόλιμοι ὁμοῦ μὲ τοὺς δεδομένους a καὶ o, ἤτοι ὅλοι οἱ ὅροι τῆς μελλούσης νὰ σχηματισθῇ προόδου, θέλουσιν εἶσθαι $\sigma+2$. Ἀλλ' εἴδομεν ἤδη ὅτι $d=\frac{o-a}{\pi-1}$, ἤτοι ἡ διαφορὰ προόδου ἰσοδιαφόρων, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι a, ὁ τελευταῖος o καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων π, εἶναι ἴση μὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῆς διαφορᾶς τῶν ἄκρων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων πλὴν 1. Ἄρα καὶ τῆς μελλούσης νὰ σχηματισθῇ προόδου ἡ διαφορὰ θέλει εἶσθαι

$d=\frac{o-a}{\sigma+1}$, ἢ, ἂν ἦναι μείορος ἡ μέλλουσα νὰ σχηματισθῇ πρόοδος, $d=\frac{a-o}{\sigma+1}$· διότι ἄκροι ὅροι εἶναι ὁ a καὶ ὁ o, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν ὅρων πλὴν 1 εἶναι $\sigma+2-1=\sigma+1$. Τώρα προσθέτοντες ἢ ἀφαιροῦντες, καθότι ἡ πρόοδος θέλει εἶσθαι αὔξορος ἢ μείορος, εἰς τὸν πρῶτον ὅρον a τὴν διαφορὰν, εὑρίσκομεν τὸν δεύτερον, ἐκ δὲ τούτου ὡσαύτως εὑρίσκομεν τὸν τρίτον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς τοὺς ἄλλους, ὧν τελευταῖος θέλει εἶσθαι ὁ o.

Π. χ. ἂν μεταξὺ 5 καὶ 49 πρόκηται νὰ παρεντεθῶσι 10 ἰσοδιάφοροι, ἐπειδὴ $o=49$, $a=5$, $\sigma+1=11$, ὁ τύπος $d=\frac{o-a}{\sigma+1}$ γίνεται $\frac{49-5}{11}=\frac{44}{11}=4$, ἡ δὲ προκύπτουσα αὔξορος πρόοδος θέλει εἶσθαι

$\div 5.9.13.17.21.25.29.33.37.41.45.49.$

Ἂν δὲ μεταξὺ 73 καὶ 9 πρόκηται νὰ παρενείρωμεν 7 ἰσοδιαφόρους, ἐπειδὴ $a=73$, $o=9$, $\sigma+1=8$, ὁ τύπος $d=\frac{a-o}{\sigma+1}$ γίνεται $\frac{73-9}{8}=8$, προκύπτει δὲ ἡ μείορος πρόοδος

$\div 73.65.57.49.41.33.25.17.9.$

135. Θ. *Ἐὰν μεταξὺ ἑκάστου ὅρου προόδου ἰσοδιαφόρων καὶ τοῦ ἀμέσως μετ' αὐτὸν παρεντεθῶσιν ἰσάριθμοι ἰσοδιάφοροι, ὅλαι αἱ προκύψουσαι μερικαὶ πρόοδοι κατὰ σειρὰν τεθειμέναι θέλουσιν ἀποτελεῖ μίαν πρόοδον ἰσοδιαφόρων.*

Ἔστω πρόοδος ἡ γενικὴ $\div a.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon\ldots$, οἱ δὲ ἐμβόλιμοι ὅροι σ τὸν ἀριθμόν. Τῆς πρώτης μερικῆς προόδου ἡ διαφορὰ θέλει εἶσθαι $\frac{\beta-a}{\sigma+1}$, τῆς δευτέρας $\frac{\gamma-\beta}{\sigma+1}$, τῆς τρίτης $\frac{\delta-\gamma}{\sigma+1}$, κτλ· ὅλαι δὲ αὗται εἶναι ἴσαι, διότι παρονομαστὴς ὅλων εἶναι ὁ αὐτὸς $\sigma+1$, οἱ δὲ ἀριθμηταὶ ὡς διαφοραὶ τῶν ὅρων τῆς προόδου εἶναι ἴσοι. Ὅλων λοιπὸν τῶν μερικῶν προόδων διαφορὰ εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός. Ἀλλ' ὁ τελευταῖος ὅρος ἑκάστης μερικῆς προόδου εἶναι καὶ πρῶτος τῆς ἑπομένης της· λοιπὸν, ἂν παραιτηθῇ ὁ τελευταῖος ὅρος ἑκάστης καὶ ἔπειτα τεθῶσιν ὅλαι κατὰ σειρὰν, θέλουσιν ἀποτελέσει μίαν πρόοδον ἰσοδιαφόρων.

Ἐκ τῆς $\div$ 1.2.3.4.5.6.....20, ἐὰν παρενείρωμεν 10 ὅρους μεταξὺ ἑκάστου ὅρου της καὶ τοῦ ἀμέσως μετ' αὐτὸν, οὔσης τῆς διαφορᾶς $\frac{1}{11}$, προκύπτει ἡ

$$\div 1.\tfrac{12}{11}.\tfrac{13}{11}.\tfrac{14}{11}\ldots\tfrac{21}{11}.2.\tfrac{23}{11}.\tfrac{24}{11}\ldots\tfrac{32}{11}.3.\tfrac{34}{11}\ldots\tfrac{219}{11}.20.$$

136. Θ. *Πάσης προόδου ἰσοδιαφόρων τὸ κεφάλαιον δύο ὁποιωνδήποτε ὅρων, ἴσον ἀπεχόντων τοῦ μὲν ἀπὸ τοῦ πρώτου, τοῦ δὲ ἀπὸ τοῦ τελευταίου, εἶναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων ἤτοι τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τελευταίου*. Διότι, οὔσης d τῆς διαφορᾶς τῆς αὐξόρου προόδου

$$\div \alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon.\ldots\ldots\ldots\lambda.\mu.\nu.\xi.o,$$

ἔχομεν $\beta = \alpha + d$, $\gamma = \beta + d$, $\delta = \gamma + d$ κτλ.

ἔτι δὲ καὶ $\xi = o - d$, $\nu = \xi - d$, $\mu = \nu - d$ κτλ.

Προσθέτοντες δὲ τὰ πρῶτα καὶ τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων, αἵτινες εἶναι ἡ μία ὑπὸ τὴν ἄλλην, ἔχομεν

$\beta + \xi = \alpha + o$, $\gamma + \nu = \beta + \xi$, καὶ ἐπομένως $\gamma + \nu = \alpha + o$,

$\delta + \mu = \gamma + \nu$, καὶ ἐπομένως $\delta + \mu = \alpha + o$, κτλ.

Σημ. β'. Ἐὰν οἱ ὅροι τῆς προόδου ἦναι περιττάριθμοι, τοῦ ἐν τῷ μέσῳ τῆς προόδου ὅρου τὸ διπλάσιον εἶναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων, αὐτὸς δὲ εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων. Π. χ. τῆς $\div$3.6.9.12.15.18.21.24.27, ἧς οἱ ὅροι εἶναι 9, ὁ ἐν τῷ μέσῳ 15 εἶναι ἴσος μὲ τὸ $\frac{3+27}{2}$.

Σημ. β'. Ἐὰν ἡ πρόοδος ἦτον μείορος, ἠθέλαμεν ἔχει

$\beta = \alpha - d$, $\gamma = \beta - d$, κτλ,

καὶ $\xi = o + d$, $\nu = \xi + d$, κτλ,

ὅθεν $\alpha + o = \beta + \xi = \gamma + \nu$, κτλ.

137. Θ. *Τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ὅρων προόδου ἰσοδιαφόρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου τῶν ἄκρων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὅρων.*

Ἔστω Κ τὸ κεφάλαιον τῶν ὅρων τῆς προόδου $\div \alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon.\ldots\mu.\nu.\xi.o$, καὶ π ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων της. Ἔχομεν λοιπὸν $K = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon\ldots\ldots + \mu + \nu + \xi + o$,

ἔτι δὲ καὶ οὕτω $K = o + \xi + \nu + \mu + \lambda\ldots\ldots + \delta + \gamma + \beta + \alpha$.

Προσθέτοντες δὲ τὰ μέλη τῶν δύο ἰσοτήτων, ἀλλὰ τῶν δευτέρων μελῶν τοὺς ὑπ' ἀλλήλλους ὅρους, καὶ παρατηροῦντες ὅτι $\beta+\xi=\alpha+o$, $\gamma+\nu=\alpha+o$, $\delta+\mu=\alpha+o$ κτλ, θέλομεν ἔχει 2K ἴσον μὲ τοσάκις $\alpha+o$, ὅσοι εἶναι οἱ ὅροι τῆς προόδου, ἤτοι $2K=(\alpha+o)\pi$· διαιρέσει δὲ διὰ 2 ἑκατέρου μέλους,

$$K=\frac{(\alpha+o)\pi}{2}.$$

Ἐὰν ζητῆται τὸ κεφάλαιον τῶν 100 πρώτων ὅρων τῆς προόδου $\div 1.2.3.4.5.6 ....$, ἐπειδὴ $\alpha=1$, $o=100$ καὶ $\pi=100$, ἔχομεν $K=\frac{(1+100)100}{2}=101\times50=5050$. Τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν 500 ὅρων τῆς $\div 1.3.5.7.9.11.....$ εὑρίσκεται ὅτι εἶναι 250000· διότι $\alpha=1$, $o=\alpha+(\pi-1)d=999$, $d=2$ καὶ $\pi=500$. Τελευταῖον τὸ κεφάλαιον τῶν 1000 πρώτων ὅρων τῆς προόδου $\div 2.4.6.8.10.....$ εἶναι 1001000· διότι $\alpha=2$, $o=\alpha+(\pi-1)d=2000$, $d=2$ καὶ $\pi=1000$.

Σημ. Καὶ ἐκ τοῦ τύπου $K=\frac{(\alpha+o)\pi}{2}$ εὑρίσκεται $\left\{\begin{array}{l}\pi=\frac{2K}{\alpha+o}\\ \alpha=\frac{2K}{\pi}-o\\ o=\frac{2K}{\pi}-\alpha.\end{array}\right.$

Ἰδιότητες προόδων ἀναλόγων.

138. Θ. *Ἕκαστος ὅρος προόδου ἀναλόγων εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου αὐτῆς ὅρου ἐπὶ τοιαύτην δύναμιν τοῦ λόγου, ὅσοι εἶναι οἱ πρὸ αὐτοῦ ὅροι.*

Ἔστω πρόοδος ἡ γενικὴ $\div\!\!:\alpha:\beta:\gamma:\delta:\varepsilon:\zeta......$ ἧς ὁ λόγος εἶναι l. Ἔχομεν κατὰ τὰ προειρημένα (132)

$$\beta=\alpha l,$$
$$\gamma=\beta l=\alpha l^2,$$
$$\delta=\gamma l=\alpha l^3,$$
$$\varepsilon=\delta l=\alpha l^4,$$

. . . . .

. . . . .

Ἐὰν λοιπὸν ο παριστάνῃ ὁποιονδήποτε ὅρον, πιτὸν τὴν θέσιν, ἤτοι ἔχοντα πρὸ αὐτοῦ $\pi-1$ ὅρους, φανερὸν ὅτι $o=a\mathrm{l}^{\pi-1}$.

Ἵνα εὕρωμεν λοιπὸν τῆς $\div 2:4:8:16:32\ldots$ τὸν εἰκοστὸν ὅρον, θέτομεν εἰς τὸν τύπον $o=a\mathrm{l}^{\pi-1}$ ἀντὶ τοῦ a τὸν 2, ἀντὶ τοῦ l τὸν 2, ἀντὶ τοῦ $\pi-1$ τὸν 19, καὶ ἔχομεν

$$o=2\times 2^{19}=524288.$$

Ἵνα εὕρωμεν δὲ τὸν δέκατον ὅρον τῆς $\div 12:6:3:\frac{3}{2}:\frac{3}{4}\ldots$, θέτομεν εἰς τὸν τύπον $a=12$, $\mathrm{l}=\frac{1}{2}$, $\pi-1=9$, καὶ ἔχομεν $o=12(\frac{1}{2})^9$. Οὔσης δὲ τῆς ἐννάτης δυνάμεως τοῦ $\frac{1}{2}$ ἴσης μὲ $\frac{1}{512}$, ὁ δέκατος ζητούμενος ὅρος εἶναι $\frac{12}{512}=\frac{3}{128}$.

Σημ. ά. Ἡ ἐπίπονος αὕτη πρᾶξις, ἤτοι ἡ εὕρεσις δυνάμεως ὀλίγον μεγάλης δἰ ἀλληλαλλήλων πολλαπλασιασμῶν, καθὼς καὶ ἄλλαι ἔτι δυσκολώτεραι, εὐκολύνονται διὰ τῶν λογαρίθμων, ὡς ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ θέλομεν ἰδεῖ.

Σημ. β΄. Ἐκ τοῦ τύπου $o=a\mathrm{l}^{\pi-1}$ πορίζεται ὁ $a=\frac{o}{\mathrm{l}^{\pi-1}}$,

ἀφοῦ διαιρεθῇ ἑκάτερον αὐτοῦ μέλος διὰ $\mathrm{l}^{\pi-1}$, ὁ δὲ $\mathrm{l}=\sqrt[\pi-1]{\frac{o}{a}}$,

ἀφοῦ διαιρεθῇ ἑκάτερον αὐτοῦ μέλος διὰ a, καὶ ἔπειτα ἐξαχθῇ ἡ $\pi-1$ ῥίζα ἑκατέρου μέλους. Παρατηρητέον δὲ ὅτι, ἂν ὁ π ἦναι μεγαλήτερος τοῦ 4, ἤτοι ἡ ἐξακτέα ῥίζα ὑπὲρ τὴν κυβικὴν, ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε δὲν ἠξεύρομεν νὰ τὴν εὕρωμεν. Οὐδὲ τὸ π ἐκ τοῦ τύπου $o=a\mathrm{l}^{\pi-1}$ ἠξεύρομεν νὰ προσδιορίσωμεν. Ἀλλὰ τώρα ἀρκεῖ μόνον νὰ μάθωμεν τί πρέπει νὰ κάμωμεν πρὸς εὕρεσίν τινων, ἐν δὲ τῇ Ἀλγέβρᾳ θέλομεν ἰδεῖ καὶ πῶς γίνονται αἱ ἀδύνατοι νὰ ἐκτελεσθῶσι τώρα πράξεις, καὶ πῶς προσδιορίζονται οἱ δεῖκται, ὅταν ἦναι ἄγνωστοι.

139. Πρόβλ. *Νὰ παρεντεθῶσι μεταξὺ δύο ἀριθμῶν α καὶ ο δεδομένων σ ἀνάλογοι ἀριθμοί*, ἤτοι ἀριθμοί, οἵτινες ὁμοῦ μὲ τὸν a ὡς πρῶτον καὶ τὸν ο ὡς τελευταῖον ν' ἀποτελῶσι πρόοδον ἀναλόγων.

Καὶ ἐδῶ, ὡς ἐν ἀρ. 134, ἀπαιτεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς μελλούσης νὰ σχηματισθῇ προόδου, καὶ ἔπειτα διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πρώτου ἐπ' αὐτὸν καὶ τῶν ἐφεξῆς προκυπτόντων θέλουσιν εὑρεθῇ ὅλοι οἱ λοιποὶ ὅροι τῆς προόδου. Ἀλλ' ὁ λόγος $\sqrt[\pi-1]{\frac{o}{\alpha}}$ προόδου ἀναλόγων, ἧς πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ α, τελευταῖος ὁ o, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων π, εἶναι ἴσος μὲ τὴν $\pi-1$ ῥίζαν τοῦ λόγου $\frac{o}{\alpha}$ τῶν ἄκρων, ἤτοι μὲ ῥίζαν κατὰ μονάδα κατωτέραν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων· ἄρα καὶ ὁ ζητούμενος λόγος θέλει εἶσθαι $1=\sqrt[\sigma+1]{\frac{o}{\alpha}}$, διότι οἱ ἄκροι ὅροι καὶ ἐνταῦθα εἶναι οἱ αὐτοὶ α καὶ o, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν ὅρων εἶναι $\sigma+2-1=\sigma+1$. Τώρα πολλαπλασιαζομένου τοῦ α ἐπὶ τοῦτον τὸν λόγον, ἔπειτα τοῦ προκύπτοντος γινομένου ἐπὶ τὸν αὐτὸν καὶ οὕτως ἐφεξῆς, θέλουσιν εὑρεθῇ ὅλοι οἱ ὅροι τῆς προόδου, ὧν τελευταῖος θέλει εἶσθαι ὁ o.

140. Θ. *Ἐὰν μεταξὺ ἑκάστου ὅρου προόδου ἀναλόγων καὶ τοῦ μετ' αὐτὸν παρεντεθῶσιν ἰσάριθμοι ἀνάλογοι, ὅλαι αἱ προκύψουσαι μερικαὶ πρόδοι τεθειμέναι κατὰ σειρὰν θέλουσιν ἀποτελέσει μίαν πρόοδον ἀναλόγων.*

Ἔστω πρόοδος ἡ γενικὴ $\div\!\div \alpha:\beta:\gamma:\delta\ldots\ldots:\mu:\nu:\xi:o$, καὶ σ τὸν ἀριθμὸν οἱ ἐμβόλιμοι ὅροι. Τῆς πρώτης προόδου ὁ λόγος θέλει εἶσθαι $\sqrt[\sigma+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$, τῆς δευτέρας $\sqrt[\sigma+1]{\frac{\gamma}{\beta}}$, τῆς τρίτης $\sqrt[\sigma+1]{\frac{\delta}{\gamma}}$ κτλ· οὗτοι δὲ εἶναι ὅλοι ἴσοι, διότι $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\beta}$, $\frac{\delta}{\gamma}$ κτλ, ὡς λόγος ἕκαστος τῶν ὅρων τῆς προόδου, εἶναι ἴσοι· ἑπομένως καὶ αἱ $\sigma+1$ ῥίζαι των εἶναι ἴσαι. Ὅλων λοιπὸν τῶν μερικῶν προόδων λόγος εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός. Ἀλλ' ὁ τελευταῖος ὅρος ἑκάστης μερικῆς προόδου εἶναι καὶ πρῶτος τῆς ἑπομένης της· ἄρα, ἂν ἀφεθῇ ὁ τελευταῖος ὅρος ἑκάστης, καὶ ἔπειτα τεθῶσιν ὅλαι κατὰ σειρὰν, θέλουσιν ἀποτελέσει ὅλαι μίαν πρόοδον ἀναλόγων.

141. Θ. *Πάσης προόδου ἀναλόγων τὸ γινόμενον δύο ὁποιωνδήποτε ὅρων, ἴσον ἀπεχόντων τοῦ μὲν ἀπὸ τοῦ πρώτου, τοῦ δὲ ἀπὸ τοῦ τελευταίου, εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἤτοι τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τελευταίου.* Διότι ὄντος

l τοῦ λόγου τῆς προόδου $\div a : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon : \ldots\ldots : \lambda : \mu : \nu : \xi : o$,

ἔχομεν $\beta = al$, $\gamma = \beta l$, $\delta = \gamma l$ κτλ,

ἔτι δὲ καὶ οὕτω $\xi = \frac{o}{l}$, $\nu = \frac{\xi}{l}$, $\mu = \frac{\nu}{l}$ κτλ.

Πολλαπλασιάζοντες δὲ τὰ δύο μέλη τῶν ὑπ' ἀλλήλας ἰσοτήτων, ἔχομεν $\beta\xi = ao$, $\gamma\nu = \beta\xi$, καὶ ἐπομένως $\gamma\nu = ao$, $\delta\mu = \gamma\nu = ao$ κτλ.

Σημ. Ἐὰν τῆς προόδου οἱ ὅροι ἦναι περιττοὶ τὸν ἀριθμὸν, τοῦ ἐν τῷ μέσῳ τῆς προόδου ὅρου τὸ τετράγωνον εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων, καὶ ἐπομένως αὐτὸς εἶναι ἴσος μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου τῶν ἄκρων.

142. Θ. *Τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ὅρων προόδου ἀναλόγων εὑρίσκεται, ἂν ἀπὸ τοῦ γινομένου τοῦ τελευταίου της ὅρου ἐπὶ τὸν λόγον ἀφαιρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος της, ἡ δὲ προκύπτουσα διαφορὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ κατὰ μονάδα ἠλαττωμένου λόγου.*

Ἔστω K τὸ κεφάλαιον τῶν ὅρων τῆς προόδου

$\div a : \beta : \gamma : \delta : \ldots\ldots \mu : \nu : \xi : o$ · θέλομεν ἔχει

$$K = a + \beta + \gamma + \delta + \ldots\ldots + \mu + \nu + \xi + o \ldots\ldots (1)$$

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν (41) ἑκάτερον μέλος τῆς ἰσότητος ἐπὶ τὸν λόγον l τῆς προόδου, ἔχομεν

$$Kl = al + \beta l + \gamma l + \delta l \ldots\ldots + \mu l + \nu l + \xi l + ol.$$

Ἀλλ' $al = \beta$, $\beta l = \gamma$, ... $\xi l = o$· ἄρ', ἂν ἀντὶ al τεθῇ τὸ β, ἀντὶ βl τὸ γ, κτλ, θέλομεν ἔχει

$$Kl = \beta + \gamma + \delta \ldots\ldots \nu + \xi + o + ol.$$

Ἀφαιρουμένων δὲ ἀπὸ τῶν μελῶν ταύτης τῶν μελῶν τῆς (1), ἔχομεν $Kl - K = ol - a$. Ἀλλὰ $Kl - K = (l-1)K$ (43)· ἄρα $(l-1)K = ol - a$, διαιρέσει δ' ἑκατέρου μέλους διὰ $(l-1)$ ἔχομεν

$$K = \frac{ol - a}{l - 1}.$$

Π. χ. τὸ κεφάλαιον τῶν 10 πρώτων ὅρων τῆς

$\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 \ldots$

εὑρίσκεται κατὰ τὸν τύπον ὅτι εἶναι $K = \frac{512 \times 2 - 1}{2 - 1} = 1023$,

διότι $a = 1$, $l = 2$, $o = al^{\pi-1} = 1 \times 2^9 = 512$, $\pi = 10$.

Τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν 64 πρώτων ὅρων τῆς αὐτῆς εἶναι

$$\mathrm{K}=\frac{2^{63}\times 2-1}{2-1}=2^{64}-1=18446\;744073\;709\;551\;615$$

Σημ. ά. Ἐκ τῆς $\mathrm{K}l-\mathrm{K}=ol-a$ εὑρίσκονται καὶ
$$\left\{\begin{array}{l} a=ol+\mathrm{K}-\mathrm{K}l \\ o=\dfrac{\mathrm{K}l-\mathrm{K}+a}{l} \\ l=\dfrac{\mathrm{K}-a}{\mathrm{K}-o}. \end{array}\right.$$

Σημ. β΄. Δὲν ἐξετάζομεν τὰ συμβαίνοντα, ὅταν ὁ ὅρος ο ἀπέχῃ ἀπείρως πολὺ τοῦ πρώτου, κατὰ τὰς ὑποθέσεις $l>1$, $l<1$ καὶ $l=1$, διότι ἀπ' ἀρχῆς ὑπεθέσαμεν ὅτι ὁ λόγος θέλει εἶσθαι περὶ τῶν πεπερασμένων προόδων· ἂν καὶ εὐκόλως νοεῖται ὅτι, ὅταν ὁ ο ἀπέχῃ ἀπείρως πολὺ τοῦ α, αὐτὸς μὲν εἶναι ἀπείρως μέγας, ἐὰν $l>1$, ἀπείρως δὲ μικρὸς, ἐὰν $l<1$, ἴσος δὲ μὲ τὸν πρῶτον, ἂν $l=1$, τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν ὅρων εἶναι ἄπειρον κατὰ τὴν πρώτην καὶ τρίτην ἔτι περίπτωσιν, τείνει δὲ νὰ ἰσωθῇ μὲ ὡρισμένον τινὰ ἀριθμὸν κατὰ τὴν δευτέραν.

143. Θ. *Πάντων τῶν ὅρων προόδου ἀναλόγων τὸ γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοιαύτης δυνάμεως τοῦ γινομένου τῶν ἄκρων τῆς προόδου, ὁποίαν παριστάνει ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων της.*

Ἔστω Γ τὸ γινόμενον πάντων τῶν π ὅρων τῆς προόδου
$$\div\!\!\div\, a:\beta:\gamma:\delta:\ldots\ldots\mu:\nu:\xi:o$$
ἐπ' ἀλλήλους πολλαπλασιασμένων· θέλομεν ἔχει
$$\Gamma=a\beta\gamma\delta\ldots\ldots\mu\nu\xi o,\ \text{ἢ καὶ }\ \Gamma=o\xi\nu\mu\ldots\ldots\delta\gamma\beta a.$$
Πολλαπλασιάζοντες δὲ τῶν ἰσοτήτων τούτων τὰ πρῶτα μέλη ἐπ' ἄλληλα καὶ τὰ δεύτερα ὡσαύτως, θέλομεν ἔχει
$$\Gamma^2=a\beta\gamma\delta\ldots\ldots\mu\nu\xi o\times o\xi\nu\mu\ldots\ldots\delta\gamma\beta a,$$
ἢ ἀλλάσσοντες τὴν θέσιν τῶν παραγόντων (Θ. Α. 94)
$$\Gamma^2=ao\times\beta\xi\times\gamma\nu\times\delta\mu\ldots\ldots\mu\delta\times\nu\gamma\times\xi\beta\times oa.$$
Ἀλλ' εἴδομεν ἤδη (141) ὅτι $ao=\beta\xi=\gamma\nu=\delta\mu$ κτλ· ἄρα
$$\Gamma^2=ao\times ao\times ao\times ao\ldots\ldots ao\times ao\times ao\times ao,$$
ἢ ἁπλούστερα $\Gamma^2=(ao)^\pi$,

διότι εἶναι τὸ δεύτερον μέλος γινόμενον π ἴσων μὲ τὸ ao παραγόντων. Ἐξάγοντες δ' ἑκατέρου μέλους τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἔχομεν τελευταῖον $\Gamma=\sqrt{(ao)^\pi}$.

144. Ἐὰν παραβάλωμεν τοὺς ἀκολούθους τύπους πρὸς ἀλλήλους, ἤτοι

Προόδ. ἰσοδιαφ. *Προόδ. ἀναλογ.*

τὸν $o=a+(\pi-1)d$ ...(133) πρὸς τὸν $o=al^{\pi-1}$... (138)

τὸν $d=\frac{o-a}{\pi-1}$ (133, σημ.) πρὸς τὸν $l=\sqrt[\pi-1]{\frac{o}{a}}$ (138, σημ. 6')

τὸν $K=\frac{(a+o)\pi}{2}$....(137) πρὸς τὸν $\Gamma=\sqrt{(ao)^{\pi}}$ ... (143),

βλέπομεν τὸ ἑξῆς περίεργον, ὅτι αἱ πράξεις αἱ πρὸς εὕρεσιν τοῦ τελευταίου ὅρου o, τῆς διαφορᾶς d καὶ τοῦ κεφαλαίου K προόδου ἰσοδιαφόρων ἐκτελοῦνται μὲν ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἢ ὁμοίων ποσῶν, ἐφ' ὧν καὶ αἱ πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀντιστοιχούντων ποσῶν προόδου ἀναλόγων, ἀλλ' εἶναι ἁπλούστεραι, ἤτοι *πρόσθεσις ἀντὶ πολλαπλασιασμοῦ, ἀφαίρεσις ἀντὶ διαιρέσεως, πολλαπλασιασμὸς ἀντὶ ὑψώσεως εἰς δύναμιν, καὶ διαίρεσις ἀντὶ ἐξαγωγῆ ῥίζης.* Ἡ δὲ παρατήρησις αὕτη ὑπῆρξεν ἀφορμὴ τῆς ἐφευρέσεως τῶν λογαρίθμων, δι' ὧν τὰ ἐξαγόμενα δυσκολωτέρων πράξεων εὑρίσκονται ἐκτελουμένων ἄλλων πράξεων ἁπλουστέρων, καὶ εὐκολύνονται οὕτω τὰ μέγιστα οἱ λογισμοί. Περὶ τῶν τοσοῦτον ὠφελίμων λογαρίθμων θέλομεν εἰπεῖ τὰ δέοντα ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ.

Προβλήματα εἰς λύσιν.

145. Θέτομεν ἐφεξῆς προβλημάτων τινῶν τὰς ἐκθέσεις, ἀφίνοντες τὴν φροντίδα εἰς τὸν μαθητὴν νὰ τὰ λύσῃ, ἐνθυμούμενον ὅσα εἴδη εἴπομεν περὶ προόδων, δι' ὧν λύονται.

1. Σφαῖραι πυροβόλων εἶναι διαμοιρασμέναι εἰς 18 σωροὺς οὕτως, ὥστε ἐν ἑκάστῳ αὐτῶν εἶναι 2 πλειότεραι ἢ ἐν τῷ πρὸ αὐτοῦ, τοῦ πρώτου σωροῦ συγκειμένου ἐκ 3 σφαιρῶν· πόσαι εἶναι αἱ ἐν τῷ τελευταίῳ σωρῷ σφαῖραι; καὶ πόσαι αἱ ὅλων ὁμοῦ τῶν σωρῶν;

2. Συμφωνεῖ τις νὰ ὑπηρετῇ παρά τινι οἰκοδεσπότῃ λαμβάνων μισθὸν τὸ μὲν πρῶτον ἔτος δρ 240, καθ' ἕκαστον δὲ τῶν ἀκολούθων ἐτῶν, ἂν εὐχαριστήσῃ διὰ τῆς ὑπηρεσίας του, 36 δρ πλειότερον ἢ κατὰ τὸ προηγούμενον ἔτος. Καλῶς δ' ὑπηρετήσας 17 ἔτη πόσας δρ ἔλαβε τὸ τελευταῖον ἔτος; καὶ πόσας ἀπ' ἀρχῆς μέχρι καὶ τοῦ τελευταίου ἔτους;

3. Πόσα κτυπήματα κτυπᾷ ὡρολόγιον ἕως νὰ τελειώσῃ ὁ ὡροδείκτης ἕνα γύρον ὁλόκληρον ἀρχίζων εὐθὺς μετὰ τὴν δωδεκάτην ὥραν;

4. Λίθος ῥιφθεὶς κατὰ γῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς πύργου ἔπεσεν εἰς 5 δεύτερα λεπτὰ χρόνου· πόσων πήχεων ὑψηλὸς ἦτον ὁ πύργος;

Ἡ Φυσικὴ διδάσκει ὅτι τὸ καταπίπτον σῶμα διανύει πήχεις 4,9 ἐπὶ τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον, τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ ἐπὶ τὸ δεύτερον, τὸ πενταπλάσιον αὐτοῦ ἐπὶ τὸ τρίτον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἐὰν δὲ ὁ λίθος διήνυσε πήχεις 284, εἰς πόσα δευτερόλεπτα ἔπεσεν;

5. Ὄντος 5 μὲν τοῦ πρώτου ὅρου προόδου ἰσοδιαφόρων, 205 δὲ τοῦ τελευταίου, 3 δὲ τοῦ λόγου αὐτῆς, εὑρεῖν ὁπόσους αὐτὴ ἔχει ὅρους.

6. Ἐργάται εἰς μεταλλορυχεῖον ἐργαζόμενοι, πρὸς διόρυξιν τῆς μὲν πρώτης ὀργυιᾶς τοῦ ὀρύγματος λαμβάνουσι 10 δραχμάς, τῆς δὲ δευτέρας 11 δραχ., ὡς δυσκολωτέρου ὄντος τοῦ ἔργου, τῆς τρίτης 12 δρ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τῆς τελευταίας, ἀνθ' ἧς λαμβάνουσιν 109 δραχ· πόσων ὀργυιῶν ὄρυγμα διώρυξαν; καὶ πόσας δραχμὰς ἔλαβον ὅλας;

7. Τοκισθεισῶν 3500 δρ πρὸς 4 τὰ 100 καὶ ἐπὶ 24 ἔτη κατὰ σειρὰν προστεθεισῶν 300 δρ εἰς τὸ ἑκάστου προηγουμένου ἔτους κεφάλαιον, πόσον εἶναι ὅλοι οἱ τόκοι;

8. Πόσον λαμβάνει ἐτήσιον μισθὸν, ἐρωτηθείς τις ὑπηρέτης, ἀπεκρίθη, Τώρα μὲν λαμβάνω δρ 550, τὸ δὲ πρῶτον ἔτος μ' ἔδωκαν μόνον 100, ἀλλὰ μ' ηὔξανον κατὰ 30 δρ τὸν μισθὸν καθ' ἕκαστον τῶν ἀκολούθων ἐτῶν· πόσα ἔτη ὑπηρετεῖ ὁ ὑπηρέτης;

9. Τὸν μῆνα τοῦτον ᾠκονόμησα 78 δρ, ἔλεγεν ἐργάτης τις, ἀφ' οὗ δὲ ἤρχισα τὴν οἰκονομίαν μέχρι τοῦδε ᾠκονομημένας ἔχω δρ 1350, 2 δρ ἕκαστον μῆνα πλειότερον παρὰ τὸν προηγούμενον οἰκονομῶν· πόσοι μῆνες εἶναι ἀφ' οὗ ἤρχισε τὸ οἰκονομεῖν; καὶ πόσας δρ ᾠκονόμησε τὸν πρῶτον μῆνα;

10. Καταδικασθείς τις νὰ πληρώσῃ 800 δρ πληρόνων μέρος αὐτῶν κατὰ μῆνα, ἤγουν 20 δρ τὸν πρῶτον μῆνα, καθ' ἕκαστον δὲ τῶν ἐφεξῆς μηνῶν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν δραχ. πλειότερον ἢ κατὰ τὸν προηγούμενον, ὥστε ἡ τελευταία πληρωμὴ νὰ ἦναι 80 δρ, εἰς τὸ τέλος πόσων μηνῶν θέλει πληρώσει τὴν τελευταίαν; καὶ πόσον πλειότερον καθ' ἕκαστον μῆνα θέλει δίδει;

11. Ἤρχισέ τις ἐμπόριον μὲ 3 τάλληρα, ἅπερ εἶχε κερδίσει, ἐπὶ 11 δ' ἔτη κατὰ σειρὰν ἐδιπλασιάζοντο καθ' ἕκαστον ἔτος τὰ τοῦ προηγουμένου ἔτους χρήματά του· πόσα τάλληρα εἶχεν εἰς τὸ τέλος τῶν 11 ἐτῶν;

12. Ἐν Πετρουπόλει Γάλλος τις ἐστοιχημάτισεν ὅτι ὁ ποταμὸς Νέβας θέλει παγώσει τὴν 8 νοεμβρίου, ἂν δὲ παγώσῃ πρότερον ἢ ὕστερον, νὰ λαμβάνῃ ἢ νὰ δίδῃ καθ' ἡμέραν τὸ τριπλάσιον τοῦ κατὰ τὴν προηγουμένην, τὴν πρώτην ἡμέραν λαμβάνων ἢ δίδων 5 λεπτά. Παγώσαντος δὲ τοῦ Νέβα τὴν 20 νοεμβρίου, πόσον ἔδωκε τὴν τελευταίαν ἡμέραν; καὶ πόσον ἔχασε τὸ ὅλον;

13. Ἐπώλησέ τις τὸν ἵππον του λαβὼν ἓν λεπτὸν διὰ τὸ πρῶτον καρφίον τοῦ ἑνὸς πετάλου του, 2 διὰ τὸ δεύτερον, 4 διὰ τὸ τρίτον καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ τριακοστοῦ δευτέρου καὶ τελευταίου καρφίου τοῦ τετάρτου πετάλου· πόσον ἐξετιμήθη οὕτως ὁ ἵππος του;

14. Λέγεται ὅτι παρὰ τοῦ βασιλέως εἰς ὃν προσέφερε τὸ παιγνίδιον τὸ καλούμενον σιὰχ ἢ σαντρίκιον (jeu des échecs) ὁ ἐφευρετὴς αὐτοῦ Σήσας ἐζήτησε πρὸς ἀνταμοιβὴν κόκκους σίτου, ἕνα μὲν διὰ τὸ πρῶτον τετραγωνίδιον τοῦ ἀβακίου τοῦ σιὰχ, 2 δὲ διὰ τὸ δεύτερον, 4 δὲ διὰ τὸ τρίτον, 8 δὲ διὰ τὸ τέταρτον καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ ἑξηκοστοῦ τετάρτου, ὡς τοῦ ἀβακίου τοῦ σιὰχ ἔχοντος 64 τετραγωνίδια· πόσους κόκκους ἐζήτησεν;

Ἐζήτησε πόσους, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ κεφάλαιον τῶν 64 ὅρων τῆς προόδου ∺1:2:4:8:16:32: . . . . . (ἴδε ἀνωτέρω ἀρ. 142). Τόσον δὲ σῖτον μόλις ἤθελε παραγάγει εἰς 13 θερισμοὺς ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς γῆς, ἐὰν ἦτον ξηρὰ καὶ ἐσπείρετο σῖτον. Πρὸς ἐναποταμίευσιν δὲ κατὰ τὸν ἐν τῇ Γαλλικῇ ἐγκυκλοπαιδείᾳ ὑπολογισμὸν ἤθελον χρειασθῇ 91522 ἀποθῆκαι ἔχουσαι ἑκάστη βάσιν τετραγωνικὴν, ἧς ἡ περίμετρος 14400 ποδῶν, καὶ ὕψος 20 ποδῶν, ὑποτεθέντος ὅτι εἰς κύβος δακτύλου χωρεῖ 450 κόκκους σίτου.

15. Ἀπὸ τῆς 8 μέχρι τῆς 19 ἰουνίου ἔτους τινὸς παρετήρησε φυσικός τις ὅτι τὸ θερμόμετρόν του ἀνέβαινε τακτικῶς καθ' ἡμέραν ἓν ἡμίβαθμον, καὶ ὅτι ὁ μέσος ἰσοδιάφορος ὅρος ὅλων τῶν παρατηρηθέντων ἀπέβαινε $18^0\,\frac{3}{4}$· ποίαν θερμοκρασίαν ἐδείκνυε τὸ θερμόμετρόν του τὴν 8 ἰουνίου;

16. Τῶν κατοίκων τόπου τινὸς ὁ ἀριθμὸς κατ' ἔτος αὐξάνων κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον κατήντησεν εἰς 4 ἔτη ἀπὸ 10000 εἰς 14641· τίς ὁ λόγος τῶν κατοίκων ἔτους τινὸς πρὸς τοὺς τοῦ προηγουμένου του;

ΤΕΛΟΣ

μικροτέρων τοῦ 1000 πρωτοτύπων ἀριθμῶν.

2	3	5	7	11	13	17
19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73
79	83	89	97	101	103	107
109	113	127	131	137	139	149
151	157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223	229
233	239	241	251	257	263	269
271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353
359	367	373	379	383	389	397
401	409	419	421	431	433	439
443	449	457	461	463	467	479
487	491	499	503	509	521	523
541	547	557	563	569	571	577
587	593	599	601	607	613	617
619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709
719	727	733	739	743	751	757
761	769	773	783	787	797	809
811	821	823	827	829	839	857
859	863	877	881	883	887	907
911	919	929	937	941	947	953
967	971	977	991	997.		

8