Ιω. Π. Πυρσογιάννη

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΕΝ ΤΟΙΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΙΣ ΜΑΘΗΤΕΥΟΝΤΩΝ

ΥΠΟ

ΑΝΤΩΝΙΟΥ Β. ΔΑΜΑΣΚΗΝΟΥ

ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΡΙΤΗ

Ἐπεξειργασμένη.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ,

ΤΥΠΟΙΣ ΤΗΣ «ΠΡΟΟΔΟΥ».

1880.

Ω,

ΣΕΒΑΣΤΩ ΜΟΙ ΚΥΡΙΩ

ΙΩΑΝΝΗ, ΠΑΠΑΔΑΚΗ,

ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΤΟΥ ΕΘΝΙΚΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ

ΚΤΛ. ΚΤΛ. ΚΤΛ.

ΤΗΝΔΕ ΤΗΝ ΣΥΓΓΡΑΦΗΝ

ΕΙΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ ΤΕΚΜΗΡΙΟΝ

ΙΣΟΒΙΟΥ ΜΑΘΗΤΙΚΗΣ ΕΥΓΝΩΜΟΣΥΝΗΣ

ΑΝΑΤΙΘΗΜΙ.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.

Ἡ παροῦσα ἔκδοσις συνετάχθη μὲν ἐπὶ τῇ βάσει τῆς προηγουμένης καὶ πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπόν, ἵνα δηλ. κατασταθῇ δι' αὐτῆς ὅσον ἔνεστιν εὐχερεστέρα καὶ τελειοτέρα ἡ ἐκμάθησις τῆς Θεωρητικῆς Ἀριθμητικῆς εἰς τοὺς ἐν τοῖς ἡμετέροις Γυμνασίοις διδασκομένους τὰ Μαθηματικά, διαφέρει ὅμως οὐσιωδῶς τῆς πρώτης κατά τινα ἄλλα, πρὸ πάντων δὲ κατὰ τὴν ἔκθεσιν τῶν καθέκαστα.

Διδάξαντες ἐπὶ πενταετίαν ὅλην εἰς ἰδίους μαθητὰς τὴν πρώτην τοῦ παρόντος ἔργου ἔκδοσιν, ἐτύχομεν καταλλήλου εὐκαιρίας, ἵνα ἴδωμεν εἰς ποῖα μέρη τοῦ κειμένου ἀπαντῶσι συνήθως δυσκολίας οἱ μαθηταί, καὶ ἐξεθέσαμεν ἐν τῇ παρούσῃ αὐτὰ οὕτως, ὅπως ἐκ πείρας ἐπείσθημεν ὅτι διδασκόμενα καθίσταντο εὐνοητότερα καὶ εὐκολώτερα πρὸς ἐκμάθησιν· αὕτη δὲ εἶναι ἡ κυριωτέρα καὶ οὐσιωδεστέρα τελειοποίησις τοῦ ἔργου ἡμῶν τούτου, περὶ ἧς ἐνομίσαμεν ἀναγκαῖον νὰ κάμωμεν ἰδιαιτέρως λόγον ἐνταῦθα. Καθόσον δ' ἀφορᾷ τὰς λοιπὰς τοῦ κειμένου μεταβολάς, ἁπλῆ παραβολὴ τῶν δύο ἐκδόσεων ἀρκεῖ νὰ καταστήσῃ αὐτὰς γνωστὰς εἰς τοὺς ἀξιοτίμους ἡμῶν συναδέλφους, πρὸς οὓς σπεύδομεν, δραττόμενοι εὐχαρίστως τῆς παρούσης εὐκαιρίας, νὰ ἐκφράσωμεν τὰς εἰλικρινεῖς ἡμῶν εὐχαριστίας δι' ἣν παρέσχον καὶ παρέχουσιν ἡμῖν πρόθυμον καὶ ἐνθαῤῥυντικὴν ὑποστήριξιν πρὸς αἰσίαν ἀποπεράτωσιν τοῦ δυσχεροῦς καὶ πολυδαπάνου ἔργου τῆς ἐκδόσεως πλήρους καὶ εὐλήπτου Μαθηματικοῦ συστήματος, εἰς ὃ ἀπό τινων ἐτῶν ἀνενδότως καταγινόμεθα καὶ ὅπερ ἐλπίζομεν νὰ φέρωμεν εἰς πέρας προσεχῶς.

Ἐν Ἀθήναις, τῇ 3 Μαΐου 1873.

Α. ΔΑΜΑΣΚΗΝΟΣ.

Σ Σ. Μετὰ πλείστης ὅσης εὐχαριστήσεως εἴδομεν, ὅτι αἱ εἰς τὴν πρώτην ἔκδοσιν ἐπενεχθεῖσαι τροποποιήσεις, περὶ ὧν ἀνωτέρω ἐν τῷ προλόγῳ λόγον ποιούμεθα, ἔτυχον τῆς γενικῆς ἐπιδοκιμασίας πάντων ἡμῶν τῶν συναδέλφων, καὶ ἀπόδειξις τούτου εἶναι ὅτι αὕτη ἐξηντλήθη ὁλοσχερῶς ἐντὸς δύο ἐτῶν, ἐνῷ διὰ τὴν πρώτην ἐχρειάσθησαν πρὸς τοῦτο πέντε ὅλα ἔτη. Τούτου δ' ἕνεκεν ἡ παροῦσα τρίτη ἔκδοσις ἀφέθη, ἐκτὸς μικρῶν τινων βελτιώσεων, ἐντελῶς ὁμοία τῇ προηγουμένῃ, εὐελπιζόμεθα δὲ ὅτι οὕτως ἔχουσα θέλει τυγχάνει παρὰ τῶν ἀξιοτίμων συναδέλφων ἡμῶν τῆς αὐτῆς πάντοτε ὑποστηρίξεως.

ΠΙΝΑΞ

ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΔ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΕ'.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ.

ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ.

1. Ὅταν παρατηρῶμεν ἀντικείμενα φαινόμενα ὅμοια καὶ ἡ προσοχὴ ἡμῶν φέρεται κατὰ πρῶτον ἐπὶ ἑκάστου τούτων κατὰ μέρος, ἔπειτα ἐπὶ τοῦ συνόλου αὐτῶν, σχηματίζομεν τὴν ἰδέαν ἑνὸς πράγματος καὶ *πολλῶν* πραγμάτων. Μεταχειριζόμεθα τὴν λέξιν *μονὰς* πρὸς παράστασιν ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἐκ τῶν ὁμοίων ἡμῖν φαινομένων ἀντικειμένων, παραβλεπομένων οὕτω τῶν μερικῶν ἰδιοτήτων αὐτοῦ, διὰ δὲ τῆς γενικῆς λέξεως *ἀριθμὸς* παριστῶμεν τὸ ἄθροισμα πλειοτέρων ὁμοίων μονάδων ἢ καὶ μόνην τὴν μονάδα.

Παραδείγματος χάριν, τὰ ἔν τινι κήπῳ περιεχόμενα δένδρα ἀποτελοῦσιν ἀριθμόν τινα καὶ ἕκαστον δένδρον εἶναι μία μονάς. Ἐὰν τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος δένδρα ἦναι διατεθειμένα καθ' ὁμοίας σειράς, αἱ σειραὶ αὗται θέλουσιν ἀποτελέσει ὡσαύτως ἀριθμόν τινα, λαμβανομένης ἑκάστης ὁμοίας σειρᾶς ὡς μονάδος.

Ἐν τῇ τοιαύτῃ ἀριθμήσει παρεβλέψαμεν ὅλας τὰς μερικὰς ἰδιότητας τῶν ἀντικειμένων, (διότι τὰ δένδρα ἠδύναντο νὰ ἦναι διάφορα ἢ αἱ σειραὶ νὰ σύγκηνται ἐκ διαφόρων δένδρων), καὶ ἐλάβομεν ἁπλῶς ὡς μονάδα τὸ *δένδρον* ἢ τὴν ταῖς ἄλλαις σειραῖς ὁμοίαν σειράν, ὁμοίαν κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀποτελούντων αὐτὴν δένδρων.

Ἐὰν προσθέσωμεν μίαν μονάδα εἴς τινα ἀριθμόν, σχηματίζομεν τὸν *ἀκόλουθον* αὐτοῦ, ὅστις καλεῖται καὶ *διαδοχικὸς* τοῦ πρώτου. Ἕπεται δὲ ἐντεῦθεν ὅτι ἡ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀτελεύτητος.

Ἀριθμητικὴ λέγεται ἡ ἐπιστήμη, ἡ περὶ τῶν ἀριθμῶν πραγματευομένη. Κύριον αὐτῆς ἀντικείμενον εἶναι αἱ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν δυνάμεναι νὰ ἐκτελεσθῶσι διάφοροι πράξεις. Τὸ σύνολον τῶν διαφόρων τούτων πράξεων ἀποτελεῖ τὸν καλούμενον *ὑπολογισμόν*.

Τῆς ἀριθμήσεως ἀντικείμενον εἶναι ἡ *ἀπαγγελία* καὶ ἡ *γραφὴ* τῶν ἀριθμῶν.

ΑΠΑΓΓΕΛΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

2. Εἰς τοὺς ἐννέα ἀρχικοὺς ἀριθμοὺς ἐδόθησαν ὀνόματα ἀνεξάρτητα ἀλλήλων, εἶναι δὲ τὰ ἑξῆς·

ἕν, δύω, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα.

Ἕκαστος τῶν δι' αὐτῶν παριστωμένων ἀριθμῶν εἶναι ὁ ἀκόλουθος τοῦ διὰ τοῦ προηγουμένου παριστωμένου. Οὕτως ὁ δύο εἶναι ὁ ἀκόλουθος τοῦ ἑνός, ὁ τρία τοῦ δύο, ὁ ἕξ τοῦ πέντε, ὁ ἑπτὰ τοῦ ἕξ κτλ. Ὁ ἀκόλουθος τοῦ ἐννέα, ὅστις ἔχει μεγίστην σημασίαν εἰς τὴν ἐν χρήσει ἀρίθμησιν ὠνομάσθη

δέκα ἢ μία δεκάς.

Ὁ σχηματιζόμενος ἀριθμὸς ἐκ τῆς ἑνώσεως δέκα δεκάδων ὠνομάσθη

ἑκατὸν ἢ μία ἑκατοντάς.

Ὁ ἐκ τῆς ἑνώσεως δέκα ἑκατοντάδων ἀποτελούμενος ὠνομάσθη

χίλια ἢ μία χιλιάς.

Τὰ ὀνόματα τῶν οὕτω σχηματιζομένων ἀριθμῶν περιέχονται ἐν τῷ ἑξῆς πίνακι·

	ἐκ τῆς ἑνώσεως
δέκα χιλιάδες ἢ μία δεκὰς χιλιάδων. . . .	δέκα μονάδων χιλιάδων
ἑκατὸν χιλιάδες ἢ μία ἑκατοντὰς χιλιάδων..	δέκα δεκάδων χιλιάδων
ἓν ἑκατομμύριον ἢ μία μονὰς ἑκατομμυρίων	δέκα ἑκατοντάδων χιλιάδων
δέκα ἑκατομμύρια ἢ μία δεκὰς ἑκατομμυρίων	δέκα μονάδων ἑκατομμυρίων
ἑκατὸν ἑκατομ. ἢ μία ἑκατοντὰς ἑκατομμ.	δέκα δεκάδων ἑκατομμυρίων
ἓν δισεκατομμύρ. ἢ μία μονὰς δισεκατομμυρίων	δέκα ἑκατοντάδων ἑκατομμ.
δέκα δισεκατομμύρ. ἢ μία δεκὰς δισεκατομ.	δέκα μονάδων δισεκατομμυρ.
ἑκατὸν δισεκατομ. ἢ μία ἑκατοντὰς δισεκατ.	δέκα δεκάδων δισεκατομμυρ.
ἓν τρισεκατομ. ἢ μία μονὰς τρισεκατομμυρ.	δέκα ἑκατοντάδων δισεκατ.
κτλ. κτλ.	κτλ. κτλ.

Οἱ ἀριθμοὶ

δέκα, ἑκατόν, χίλια, δέκα χιλιάδες, ἑκατὸν χιλιάδες, ἓν ἑκατομμύριον κτλ.

ὀνομάζονται συνήθως μονάδες *δευτέρας, τρίτης, τετάρτης, πέμπτης, ἕκτης, ἑβδόμης κτλ. τάξεως*. Ὁ ἀριθμὸς *ἕν*, ἢ ἡ *μονάς*, ὀνομάζεται ὡσαύτως *μονὰς πρώτης τάξεως*, ἢ *ἁπλῆ μονάς*.

3. Διὰ τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τούτων τάξεων δυνάμεθα εὐκολώτατα ν' ἀπαγγείλωμεν πάντα ἀριθμόν.

Ἔστω π. χ. ἀριθμός τις ὁποιοσδήποτε μεγαλείτερος τοῦ *ἐννέα*.

Ἂς λάβωμεν ἀνὰ δέκα ἐκ τῶν μονάδων αὐτοῦ τοσάκις, ὁσάκις τοῦτο εἶναι δυνατόν. Θέλομεν οὕτω σχηματίσει ἓν ἢ πλειότερα μέρη ἐκ δέκα μονάδων ἕκαστον, καὶ ἂν ἔμειναν καὶ μονάδες τινὲς ἐκ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, μὴ δυνάμεναι ν' ἀποτελέσωσιν ἕτερον μέρος, ὁ ἀριθμὸς τούτων θέλει εἶναι προφανῶς μικρότερος τοῦ δέκα. Ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος λοιπὸν ἀριθμὸς θέλει σύγκεισθαι ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων. Ὡσαύτως, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων ὑπερβαίνῃ τὰς ἐννέα, καὶ λάβωμεν ἀνὰ δέκα δεκάδας τοσάκις, ὁσάκις τοῦτο εἶναι δυνατόν, θέλομεν οὕτω σχηματίσει ἓν ἢ πλειότερα μέρη ἐκ δέκα δεκάδων ἕκαστον, καὶ ἂν ἔμειναν καὶ δεκάδες τινές, μὴ δυνάμεναι ν' ἀποτελέσωσιν ἕτερον μέρος, ὁ ἀριθμὸς τούτων θέλει εἶναι προφανῶς μικρότερος τοῦ δέκα. Ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος λοιπὸν ἀριθμὸς θέλει σύγκεισθαι ἐξ ἑκατοντάδων, δεκάδων καὶ μονάδων. Ἐξακολουθοῦντες οὕτω βλέπομεν ὅτι

Πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποτελούμενος ἐκ τῆς ἑνώσεως πλειοτέρων μερῶν, διαφόρων τάξεων μονάδων, ὧν ὁ ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ δέκα.

Ἕπεται λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι πρὸς ἀπαγγελίαν ἀριθμοῦ τινος ἀρκεῖ νὰ ἐκφράσωμεν πόσας μονάδας ἑκάστης τάξεως περιέχει οὗτος. Παραδείγματος χάριν, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι δεδομένος τις ἀριθμὸς περιέχει *πέντε χιλιάδας*, *ὀκτὼ δεκάδας* καὶ *τρεῖς μονάδας*, ὁ ἀριθμὸς οὗτος θέλει μᾶς εἶναι ἐντελῶς γνωστός.

Τὸ σύνολον τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τούτων τάξεων ἀποτελεῖ τὸ *σύστημα* τῆς ἡμετέρας ἀριθμήσεως. Ὁ ἀριθμὸς δέκα, ὁ ἐκφράζων πόσαι μονάδες τάξεώς τινος ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ὠνομάσθη *βάσις* τοῦ συστήματος, τὸ δὲ περὶ οὗ ὁ λόγος σύστημα ἐκλήθη *δεκαδικόν*.

ΣΗΜ. Ἀντὶ τοῦ ἀριθμοῦ *δέκα* ἠδυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς βάσιν ὁποιονδήποτε ἄλλον ἀριθμόν, π. χ. τὸν *ὀκτώ*, καὶ τότε ὀκτὼ μονάδες τάξεώς τινος ἤθελον ἀποτελεῖ μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, πᾶς δὲ ἀριθμὸς ἤθελε θεωρεῖσθαι *ὡς ἀποτελούμενος ἐκ τῆς ἑνώσεως πλειοτέρων μερῶν, διαφόρων τάξεων μονάδων, ὧν ὁ ἀριθμὸς ἤθελεν εἶναι μικρότερος τοῦ ὀκτώ.*

4. Κύριον σκοπὸν ἐν τοῖς προηγουμένοις εἴχομεν νὰ καταστήσωμεν φανερὰν τὴν ἐφ' ἧς στηρίζεται ἡ ἀρίθμησις θεμελιώδη ἀρχήν, μᾶς μένει δὲ τώρα νὰ προσθέσωμεν μερικότητάς τινας πρὸς συμπλήρωσιν τῆς ἐκθέσεως τῶν περὶ ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν.

Τὰ ὀνόματα τῶν διαδοχικῶν δεκάδων ἀπὸ δύο μέχρις ἐννέα δεκάδων εἶναι τὰ ἑξῆς·

εἴκοσι, τριάκοντα, τεσσαράκοντα, πεντήκοντα, ἑξήκοντα, ἑβδομήκοντα, ὀγδοήκοντα, ἐννενήκοντα,

σχηματίζονται δέ, ἐκτὸς τοῦ εἴκοσιν, ἐκ τῶν ὀνομάτων τρία, τέσσαρα, πέντε, κτλ. διὰ τῆς προσθέσεως τῆς καταλήξεως *κοντα*, ἐκτός τινων μικρῶν ἐξαιρέσεων.

Πρὸς ἀπαγγελίαν τῶν μεταξὺ τοῦ *δέκα* καὶ τοῦ *ἑκατὸν* περιεχομένων ἀριθμῶν, ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων αὐτῶν, ἔπειτα τὸν ἀριθμὸν τῶν ἁπλῶν μονάδων, τῶν ἐμπεριεχομένων εἰς αὐτούς. Οὕτω λέγοντες *δέκα ἑπτά*, *εἴκοσι τρία*, *ἐννενήκοντα πέντε*, ἐκφράζομεν ἀμοιβαίως τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ἀποτελουμένους ἐκ *μιᾶς δεκάδος* καὶ *ἑπτὰ μονάδων*, ἐκ *δύο δεκάδων* καὶ *τριῶν μονάδων*, ἐξ *ἐννέα δεκάδων* καὶ *πέντε μονάδων*.

Ὑπάρχει μικρά τις ἐξαίρεσις· οἱ ἀριθμοί, οἱ συγκείμενοι ἐκ *μιᾶς δεκάδος* καὶ *μιᾶς μονάδος*, ἢ ἐκ *μιᾶς δεκάδος* καὶ *δύο μονάδων*, ἀντὶ νὰ ἀπαγγέλλωνται

δέκα ἕν, δέκα δύο,

λέγονται ἕνδεκα, δώδεκα.

Πρὸς ἀπαγγελίαν τῶν μεταξὺ τοῦ *ἑκατὸν* καὶ τοῦ *χίλια* περιεχομένων ἀριθμῶν ἀπαγγέλλομεν ἐν πρώτοις τὸν ἀριθμὸν τῶν περιεχομένων εἰς αὐτοὺς ἑκατοντάδων, ἔπειτα τὸν μικρότερον τοῦ ἑκατὸν ἀριθμόν, τὸν συμπληροῦντα τούτους. Π. χ. ὁ ἀριθμός, ὁ συγκείμενος ἐκ *τεσσάρων ἑκατοντάδων*, *πέντε δεκάδων* καὶ *τριῶν μονάδων*, ἀπαγγέλλεται *τετρακόσια πεντήκοντα τρία*.

Οἱ μεταξὺ τοῦ *χίλια* καὶ τοῦ *ἑνὸς ἑκατομμυρίου* περιεχόμενοι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ σύγκηνται ἐξ *ἑκατοντάδων χιλιάδων*, *δεκάδων χιλιάδων*, *μονάδων χιλιάδων*, ἔπειτα καὶ ἐξ *ἑκατοντάδων*, *δεκάδων* καὶ *μονάδων*. Ἀπαγγέλλονται δὲ οὗτοι ἀπαγγελλομένου ἐν πρώτοις τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐμπεριεχομένων εἰς αὐτοὺς χιλιάδων, ἔπειτα τοῦ μικροτέρου τοῦ χίλια ἀριθμοῦ, τοῦ συμπληροῦντος τούτους· Οὕτως ὁ ἀποτελούμενος ἀριθμὸς ἀπὸ *πέντε ἑκατοντάδας χιλιάδων*, *δύο δεκάδας χιλιάδων*, *ἑπτὰ μονάδας χιλιάδων*, *τρεῖς ἑκατοντάδας*, *πέντε δεκάδας* καὶ *ὀκτὼ μονάδας*, ἀπαγγέλλεται *πεντακόσιαι εἴκοσιν ἑπτὰ χιλιάδες* καὶ *τριακόσιαι πεντήκοντα ὀκτὼ μονάδες*.

Ὡσαύτως ἀπαγγέλλομεν ἅπαντας τοὺς μεταξὺ τοῦ *ἑνὸς ἑκατομμυρίου* καὶ τοῦ *ἑνὸς δισεκατομμυρίου* περιεχομένους ἀριθμούς, ἀπαγ-

-γέλλοντες κατὰ πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν περιεχομένων εἰς αὐτοὺς ἑκατομμυρίων, ἔπειτα τὸν μικρότερον τοῦ ἑκατομμυρίου ἀριθμόν, τὸν συμπληροῦντα τούτους. Παραδείγματος χάριν ὁ ἀριθμός, ὁ συγκείμενος ἐκ *δύο ἑκατοντάδων ἑκατομμυρίων, τριῶν δεκάδων ἑκατομμυρίων, πέντε μονάδων ἑκατομμυρίων* καὶ πρὸς τούτοις ἀπὸ *πεντακοσίας εἴκοσι δύο χιλιάδας καὶ τριακοσίας τεσσαράκοντα πέντε μονάδας*, ἀπαγγέλλεται διακόσια τριάκοντα πέντε ἑκατομμύρια, *πεντακόσιαι εἴκοσι δύο χιλιάδες καὶ τριακόσιαι τεσσαράκοντα πέντε μονάδες*.

Εἶναι φανερὸν ὅτι δι' ὁμοίου τρόπου ἠθέλομεν ἀπαγγείλει ἅπαντας τοὺς μεταξὺ τοῦ *ἑνὸς δισεκατομμυρίου* καὶ *ἑνὸς τρισεκατομμυρίου* κτλ. περιεχομένους ἀριθμούς.

Ἐκ τοῦ προεκτεθέντος περὶ ἀπαγγελίας τῶν διαφόρων ἀριθμῶν τρόπου πᾶς τις βλέπει εὐκόλως ὅτι ἐννοοῦμεν τούτους ἀποσυντεθειμένους εἰς μέρη, ἀποτελούμενα τὸ μὲν ἐξ ἁπλῶν μονάδων ἢ μονάδων *πρώτης τάξεως*, τὸ δὲ ἐκ χιλιάδων ἢ μονάδων *τετάρτης τάξεως*, τὸ δὲ ἐξ ἑκατομμυρίων ἢ μονάδων *ἑβδόμης τάξεως*, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Αἱ μονάδες αὗται,

ἕν, χίλια, ἓν ἑκατομμύριον, ἓν δισεκατομμύριον, κτλ.

καλοῦνται *ἀρχικαὶ μονάδες*. Ἑκάστη δὲ τούτων εἶναι *χιλιάκις* μεγαλειτέρα τῆς προηγουμένης.

Ἐν μὲν τῇ ἀπαγγελίᾳ τῶν ἀριθμῶν αἱ ἀρχικαὶ αὗται μονάδες εἶναι αἱ μόναι λαμβανόμεναι ὑπ' ὄψιν, ἀλλ' ἐν τῇ γραφῇ, ἐφ' ἧς οἱ κανόνες τοῦ ὑπολογισμοῦ στηρίζονται, ἡ σημασία τούτων εἶναι ὅλως δευτερεύουσα.

ΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

5. Ἐπειδὴ κατὰ τὰ λεχθέντα ἐν τῇ § 3 ἕκαστον τῶν μερῶν ἀριθμοῦ τινος ἀποτελεῖται ἐκ μονάδων τάξεώς τινος, ὧν ὁ ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ δέκα, ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἅπαντας τοὺς ἀριθμοὺς διὰ δέκα μόνον χαρακτήρων. Οἱ χαρακτῆρες οὗτοι καλοῦνται *ψηφία*. Ἐννέα τούτων, τὰ παριστῶντα τοὺς ἐννέα ἀρχικοὺς ἀριθμούς, καλοῦνται *σημαντικὰ ψηφία*, καὶ εἶναι τὰ ἐξῆς·

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
ἕν,	δύο,	τρία,	τέσσαρα,	πέντε,	ἕξ,	ἑπτά,	ὀκτώ,	ἐννέα.

Τὸ δέκατον ψηφίον εἶναι τὸ ἑξῆς 0, ὅπερ καλεῖται *μηδὲν* καὶ χρησιμεύει πρὸς παράστασιν τῶν ἐλλειπουσῶν μονάδων τάξεώς τινος.

Ἵνα δὲ παραστήσωμεν διὰ ψηφίων ἀριθμόν τινα μεγαλείτερον τοῦ 9, φανταζόμεθα αὐτὸν ἀποσυντεθειμένον εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων, καὶ γράφομεν πρῶτον τὸ ψηφίον, τὸ παριστῶν τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης τάξεως, ἔπειτα πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ γράφομεν τὸ παριστῶν τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ἐὰν ὁ περὶ οὗ πρόκειται ἀριθμὸς περιέχῃ τοιαύτας· ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει γράφομεν *ἓν μηδενικόν*. Πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ δευτέρου ψηφίου γράφομεν τὸ παριστῶν τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας αὐτοῦ τάξεως, ἐὰν ὑπάρχωσιν, εἰ δὲ μή, γράφομεν *ἓν* μηδενικόν, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ὁ τρόπος, καθ' ὃν διὰ τῶν ἀνωτέρω δέκα ψηφίων ἐκτελεῖται ἡ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν, συνίσταται εἰς τὸ νὰ γράφωμεν διαδοχικῶς ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τὰ ψηφία, τὰ παριστῶντα τὰς μονάδας τῶν διαφόρων ἐν τῷ ἀριθμῷ περιεχομένων τάξεων, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς ἀνωτέρας καὶ θέτοντες ἓν μηδενικὸν εἰς τὴν θέσιν τῶν ἐλλειπουσῶν μονάδων τάξεώς τινος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.—1ον. Αἱ μονάδες τῆς δευτέρας, τρίτης, τετάρτης, πέμπτης κτλ. τάξεως γράφονται ὡς ἑξῆς· 10, 100, 1000, 10000, κτλ.

2ον. Ὁ ἀριθμός, ὁ ἀποτελούμενος ἐκ *τριῶν ἑκατοντάδων*, *ἑπτὰ δεκάδων καὶ ὀκτὼ μονάδων*, γράφεται οὕτω 378. Ἐγράψαμεν πρῶτον τὸ ψηφίον 8, τὸ παριστῶν τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης τάξεως, ἤτοι τὰς ἑκατοντάδας· πρὸς τὰ δεξιὰ τούτου ἐγράψαμεν 7, ψηφίον παριστῶν τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ἤτοι τὰς δεκάδας, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ δευτέρου τὸ 8, ὅπερ παριστᾷ τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἑπομένης τῶν δεκάδων τάξεως, ἤτοι ἁπλᾶς μονάδας. Ἂν δὲν ὑπῆρχον δεκάδες, τῶν ἀριθμῶν τῶν ἑκατοντάδων καὶ μονάδων ὑποτιθεμένων τῶν αὐτῶν, ἠθέλομεν γράψει 308, ἤτοι 0 μετὰ τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων.

Ἡ γραφὴ λοιπὸν τῶν ἀριθμῶν στηρίζεται ἐπὶ τῆς θεμελιώδους ἀρχῆς τῆς § 3 καὶ ἐπὶ τῆς ἑξῆς συνθήκης·

Πᾶν ψηφίον γεγραμμένον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου τινὸς παριστᾷ μονάδας τάξεως, ἀμέσως ἀνωτέρας ἐκείνης, ἣν τὸ πρὸ αὐτοῦ παριστᾷ, τοῦ πρώτου πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίου παριστῶντος πάντοτε ἁπλᾶς μονάδας.

Ἡ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν συγκεφαλαιοῦται διὰ τῶν ἑπομένων κανόνων, δι' ὧν δυνάμεθα ν' ἀπαγγείλωμεν πάντα διὰ ψηφίων παριστώμενον ἀριθμόν, καὶ ἀντιστρόφως, νὰ παραστήσωμεν διὰ ψηφίων πάντα ἀριθμὸν ἀπαγγελλόμενον κατὰ τὰ περὶ ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν λεχθέντα.

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΡΟΣ ΑΠΑΓΓΕΛΙΑΝ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΙΝΟΣ ΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΥ ΔΙΑ ΨΗΦΙΩΝ.

6. **ΚΑΝΩΝ** 1ος.—*Πρὸς ἀπαγγελίαν ἀριθμοῦ τινος μὴ περιέχοντος περισσότερα τῶν τριῶν ψηφίων, ἀπαγγέλλομεν διαδοχικῶς ἕκαστον σημαντικὸν αὐτοῦ ψηφίον, ἀρχόμενοι ἐξ ἀριστερῶν, μετὰ τοῦ ὀνόματος τῶν ὑπ' αὐτοῦ παριστωμένων μονάδων.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 437 ἀπαγγέλλεται τετρακόσια (ἤτοι τέσσαρες ἑκατοντάδες) τριάκοντα (τρεῖς δεκάδες) ἑπτὰ (ἤτοι ἑπτὰ μονάδες).

ΚΑΝΩΝ 2ος.—*Πρὸς ἀπαγγελίαν ἀριθμοῦ τινος, παριστωμένου διὰ περισσοτέρων τῶν τριῶν ψηφίων, ἀποσυνθέτομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα, ἀρχόμενοι ἐκ τῶν δεξιῶν, (τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα δυνατὸν νὰ περιέχῃ δύο ἢ καὶ ἓν μόνον ψηφίον), καὶ ἔπειτα ἀπαγγέλλομεν ἀρχόμενοι ἐξ ἀριστερῶν ἕκαστον τμῆμα ὡς εἰ ἦτο μόνον, προφέροντες μετὰ τοῦτο καὶ τὸ ὄνομα τῆς τάξεως τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου αὐτοῦ ψηφίου.*

Παραδείγματος χάριν ὁ ἀριθμὸς 37043025 ἀπαγγέλλεται τριάκοντα ἑπτὰ ἑκατομμύρια, τεσσαράκοντα τρεῖς χιλιάδες καὶ εἴκοσι πέντε μονάδες.

Βλέπομεν δὲ ὅτι ἕκαστον τῶν τμημάτων τῶν κατὰ τὸν 2ον κανόνα ἀποσυντεθειμένων ἀριθμῶν παριστᾷ μονάδας ἀρχικῆς τινος τάξεως. Τὸ πρῶτον πρὸς τὰ δεξιὰ τμῆμα παριστᾷ ἁπλᾶς μονάδας, τὸ δεύτερον χιλιάδας, τὸ τρίτον ἑκατομμύρια κτλ.

ΚΑΝΩΝ ΠΡΟΣ ΓΡΑΦΗΝ ΑΠΑΓΓΕΛΛΟΜΕΝΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ.

7. *Πρὸς γραφὴν ἀριθμοῦ, ἀπαγγελλομένου κατὰ τὰ περὶ ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν λεχθέντα, γράφομεν διαδοχικῶς τὸν ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου καὶ ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἀπαγγελθεισῶν ἀρχικῶν μονάδων.*

Ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν τούτων πρέπει νὰ περιέχῃ μονάδας τριῶν τάξεων, πρέπει νὰ γράφωμεν ἓν μηδενικὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἐκείνων, οἵτινες γράφονται διὰ δύο ψηφίων, καὶ δύο μηδενικὰ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν δι' ἑνὸς ψηφίου γραφομένων, ἐὰν δὲ ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος ἀριθμὸς δὲν περιέχῃ ἀρχικὰς μονάδας τάξεώς τινος, τότε γράφομεν τρία μηδενικὰ πρὶν ἢ μεταβῶμεν εἰς τὴν παράστασιν τῶν ἀρχικῶν μονάδων τῆς ἀκολούθου τάξεως.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς *τριάκοντα* δισεκατομμύρια, *εἴκοσι πέντε* χιλιάδες καὶ ἑπτὰ μονάδες γράφεται 30 000 025 007. Ἐθέσαμεν τρία μηδενικὰ εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατομμυρίων, διότι ὁ ἀπαγγελθεὶς ἀριθμὸς δὲν περιέχει τοιαῦτα· ἓν μηδενικὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 25, διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν χιλιάδων τῶν ἐμπεριεχομένων ἐν τῷ ἀπαγγελθέντι ἀριθμῷ γράφεται διὰ δύο ψηφίων, καὶ δύο μηδενικὰ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 7, διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τοῦ ἀπαγγελθέντος ἀριθμοῦ παρίσταται δι' ἑνὸς ψηφίου.

ΣΗΜ. Ἂν ἀντὶ τοῦ δέκα ἐλαμβάνετο ὡς βάσις ἕτερός τις ἀριθμός, ὁ ὀκτὼ π. χ., οἱ ἀνωτέρω περὶ γραφῆς καὶ ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν δοθέντες κανόνες ἤθελον εἶναι οἱ αὐτοὶ μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι μόνον ὀκτὼ ψηφία ἤθελον τότε ἀρκεῖ πρὸς γραφὴν παντὸς ἀριθμοῦ, καὶ ὅτι κατὰ τὸ νέον τοῦτο σύστημα ὁ ἀριθμὸς 10 ἤθελεν εἶναι ἴσος μὲ 8 μονάδας τοῦ πρώτου συστήματος, ὁ 100 ἤθελεν εἶναι ἴσος μὲ 64 τοῦ πρώτου, ὁ 1000 μὲ 512, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐλήφθη φαίνεται ὡς βάσις ὁ ἀριθμὸς *δέκα*, διότι κατ' ἀρχὰς οἱ ἄνθρωποι ἐμέτρουν ἐπὶ τῶν δακτύλων αὐτῶν, ὧν ὁ ἀριθμὸς εἶναι δέκα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμὸς 23 000 586 307;

II. Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμὸς 2 000 000 050 008;

III. Νὰ γραφῇ διὰ ψηφίων ὁ ἀριθμὸς *ἑπτὰ τρισεκατομμύρια εἴκοσιν ὀκτὼ χιλιάδες καὶ δέκα ἑπτὰ μονάδες.*

IV. Νὰ γραφῇ διὰ ψηφίων ὁ ἀριθμὸς *πέντε ἑπτάκις ἑκατομμύρια καὶ τρεῖς μονάδες.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ.

ΠΕΡΙ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ.

8. *Ἡ πρόσθεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκομεν ἀριθμὸν περιέχοντα τόσας μονάδας ὅσαι περιέχονται εἰς δύο ἢ πλειοτέρους δεδομένους ἀριθμούς.*

Οἱ μὲν δεδομένοι ἀριθμοὶ καλοῦνται *προσθετέοι*, ὁ δὲ ζητούμενος *ἄθροισμα* ἢ *κεφάλαιον*.

Ἡ πρόσθεσις παρίσταται διὰ τοῦ σημείου +, ὅπερ τίθεται μεταξὺ τῶν προσθετέων ἀριθμῶν καὶ ἀπαγγέλλεται *πλέον* ἢ *σύν*. Οὕτως $8+3$ παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 3, ἀπαγγέλλεται δὲ *ὀκτὼ πλέον τρία* ἢ *ὀκτὼ σὺν τρία*.

ΑΠΛΑΙ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ.

9. Ἂς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν δύο μονοψηφίους ἀριθμούς, 8 καὶ 4 παραδείγματος χάριν. Εἶναι φανερὸν ὅτι θέλομεν εὕρει τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, ἐὰν προσθέσωμεν διαδοχικῶς εἰς τὸν 8 τοσάκις τὴν μονάδα, ὁσάκις αὕτη περιέχεται εἰς τὸν 4· θέλομεν λοιπὸν εἴπει, κατὰ τὰ περὶ ἀριθμήσεως λεχθέντα, 8 καὶ 1...9, 9 καὶ 1....10, 10 καὶ 1...11, 11 καὶ 1...12. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ἄθροισμα εἶναι 12, διότι 12 εὕρομεν ἀφοῦ προσεθέσαμεν εἰς τὸν 8 τετράκις τὴν μονάδα, ἤτοι ὁσάκις αὕτη περιέχεται εἰς τὸν προσθετέον ἀριθμὸν 4.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου προσθέτομεν εἰς πολυψήφιον ἀριθμὸν δεδομένον μονοψήφιον. Π. χ., ἂν εἴχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 85 καὶ 3, ἠθέλομεν εἴπει 85 καὶ 1...86, 86 καὶ 1..,87, 87 καὶ 1...88. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 88.

Εὐκόλως ἀποκτᾷ τις ἀρκετὴν ἄσκησιν, ὥστε νὰ δύνηται νὰ ἐκτελῇ ἀμέσως τὰς τοιούτου εἴδους προσθέσεις καὶ νὰ εὑρίσκῃ ἐν τῷ νῷ αὐτοῦ τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, λέγων 8 καὶ 4....12, 85 καὶ 3....88.

10. Τέλος, ἂν εἴχομεν νὰ προσθέσωμεν τρεῖς, τέσσαρας κτλ. μο-

νοψηφίους ἀριθμούς, ἠθέλομεν εὕρει τὸ ζητούμενον αὐτῶν ἄθροισμα προσθέτοντες πρῶτον τοὺς δύο πρώτους, ἔπειτα εἰς τὸ εὑρεθησόμενον ἄθροισμα αὐτῶν τὸν τρίτον, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ., ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν 8, 4, 9, 5 καὶ 7.. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων εἶναι 12, ἔπειτα λέγομεν 12 καὶ 9....21, 21 καὶ 5....26, 26 καὶ 7...33. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 33.

ΓΕΝΙΚΗ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ.

11. Ἡ γενικὴ τῆς προσθέσεως περίπτωσις, ἤτοι ἡ πρόσθεσις ὁσωνδήποτε πολυψηφίων ἀριθμῶν, ἀνάγεται εἰς τὴν μερικὴν τῆς προηγουμένης § 10 διὰ τῆς ἑξῆς ἀρχῆς·

Τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε καὶ ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν εὑρίσκεται προστιθεμένων διαδοχικῶς τῶν ἁπλῶν αὐτῶν μονάδων, τῶν δεκάδων, τῶν ἑκατοντάδων, κτλ. καὶ ζητουμένου ἔπειτα τοῦ ἀθροίσματος τῶν οὕτως εὑρεθησομένων μερικῶν ἀθροισμάτων. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, *ἐὰν ἔχωμεν πλειοτέρους ἀριθμούς, ἀποσυνθέσωμεν αὐτοὺς εἰς ὁμοειδῆ μέρη καὶ εὕρωμεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοειδῶν αὐτῶν μερῶν, ἔπειτα τὸ ἄθροισμα τῶν οὕτως εὑρεθησομένων μερικῶν ἀθροισμάτων, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ τελευταῖον εὑρεθησόμενον ἄθροισμα θέλει εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.*

Ἔστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ

9507, 939, 6028,

ὧν ζητεῖται τὸ ἄθροισμα. Πρὸς τοῦτο ἀποσυνθέτομεν αὐτοὺς εἰς μονάδας δεκάδας, ἑκατοντάδας κτλ. προσθέτομεν ἔπειτα πρῶτον τὰς μονάδας αὐτῶν, ἔπειτα τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας, κτλ. καὶ ζητοῦμεν ἀκολούθως τὸ ἄθροισμα τῶν εὑρεθέντων ἀθροισμάτων τῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, κτλ. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι τὸ τελευταῖον εὑρεθησόμενον ἄθροισμα θέλει εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

Καθ' ὃν τρόπον ἐκτελοῦμεν συνήθως τὴν πρόσθεσιν τῶν πολυψηφίων ἀριθμῶν συγχωνεύομεν, οὕτως εἰπεῖν, τὰς δύο πράξεις εἰς μίαν, καὶ ἐνῷ ἀφ' ἑνὸς εὑρίσκομεν ἓν μερικὸν ἄθροισμα, συγχρόνως προσθέτομεν τοῦτο εἰς τὸ εὑρεθησόμενον μερικὸν ἄθροισμα τῶν μονάδων τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, καὶ οὕτω καθεξῆς. Π.χ., ἂν ἠθέλομεν νὰ ἐφαρμόσωμεν κατὰ γράμμα εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀριθμῶν

9507, 939, 6028 τὴν ἀνωτέρω ἀρχήν, ἔπρεπε νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων αὐτῶν 24, δεύτερον τὸ ἄθροισμα τῶν δεκάδων αὐτῶν 5, τρίτον τὸ ἄθροισμα τῶν ἑκατοντάδων αὐτῶν 14, τέταρτον τὸ ἄθροισμα τῶν χιλιάδων αὐτῶν 15, καὶ τελευταῖον νὰ προσθέσωμεν 24 μονάδας, 5 δεκάδας, 14 ἑκατοντάδας καὶ 15 χιλιάδας. Ἵνα δὲ ἐκτελέσωμεν τὴν δευτέραν ταύτην πρόσθεσιν, ἐπειδὴ τὰ εὑρεθέντα μερικὰ ἀθροίσματα περιέχουσι καὶ πολυψηφίους ἀριθμούς, ἔπρεπε καὶ ἐπὶ τούτων νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν αὐτὴν ἀρχήν, καὶ οὕτω καθεξῆς, τοῦθ' ὅπερ καθιστᾷ λίαν ἐπίπονον τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως. Συντομεύομεν λοιπὸν τὴν πρόσθεσιν τῶν δεδομένων πολυψηφίων ἀριθμῶν προσθέτοντες ἀμέσως ἕκαστον τῶν ἑκάστοτε εὑρισκομένων μερικῶν ἀθροισμάτων εἰς τὸ μερικὸν ἄθροισμα τῶν μονάδων τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 9507 \\ 939 \\ 6028 \\ \hline 16474 \end{array}$$

Γράφομεν τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου στήλης, ἄγομεν γραμμὴν ὑπὸ τὸν τελευταῖον προσθετέον ἀριθμὸν καὶ ὑπ' αὐτὴν γράφομεν τὰ ψηφία τοῦ ζητουμένου ἀθροίσματος καθόσον εὑρίσκομεν αὐτά. Πρὸς τοῦτο δὲ προσθέτομεν πρῶτον τὰς ἁπλᾶς μονάδας κατὰ τὰ περὶ προσθέσεως τῶν μονοψηφίων λεχθέντα, λέγοντες 7 καὶ 9....16 καὶ 8....24. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν μονάδων εἶναι 24 μονάδες. Ἀλλ' ἐπειδὴ 24 μονάδες περιέχουσι 2 δεκάδας καὶ 4 μονάδας, γράφομεν 4 μονάδας ὑπὸ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων καὶ *κρατοῦμεν* τὰς 2 δεκάδας, ἵνα προσθέσωμεν αὐτὰς εἰς τὰς δεκάδας τῶν δεδομένων ἀριθμῶν· εἰς τοῦτο δὲ συνίσταται ἡ σύγχρονος εὕρεσις τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων καὶ ἡ προσθήκη ἑκάστου τούτων εἰς τὸ ἀμέσως ἑπόμενον μερικὸν ἄθροισμα πρὸς ἄμεσον εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ὁλικοῦ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν ἀθροίσματος.

Λέγομεν λοιπὸν μεταβαίνοντες εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων· 2 αἱ *κρατούμεναι* καὶ 3....5 καὶ 2....7. Τὸ ψηφίον λοιπὸν τῶν δεκάδων τοῦ ζητουμένου ἀθροίσματος εἶναι 7, ὅπερ γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων.

Μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων καὶ λέγομεν 5 καὶ 9....14 καὶ 0....14. Ἀλλ' ἐπειδὴ 14 ἑκατοντάδες περιέχουσι 1 χιλιάδα καὶ 4 ἑκατοντάδας, γράφομεν 4 εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ζητουμένου ἀθροίσματος καὶ *κρατοῦμεν* 1 χιλιάδα, ἵνα προσθέσωμεν αὐτὴν εἰς τὰς χιλιάδας τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

Μεταβαίνοντες λοιπὸν εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων λέγομεν 1 ἡ *κρατουμένη* καὶ 9....10 καὶ 6....16. Ἐπειδὴ δὲ αἱ 16 αὗται χιλιάδες σύγκεινται ἐξ 6 χιλιάδων καὶ 1 δεκάδος χιλιάδων, γράφομεν 6 εἰς τὴν θέσιν τῶν χιλιάδων τοῦ ζητουμένου ἀθροίσματος καὶ 1 πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 6, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν ὡς ἄθροισμα τῶν δεδομένων ἀριθμῶν τὸν ἀριθμὸν 16474.

Ἐν τῇ ἐκτελέσει τῆς πράξεως ἡ πρόσθεσις ἐκτίθεται συντομώτατα ὡς ἑξῆς· λέγομεν *7 καὶ 9....16 καὶ 8....24, γράφομεν 4 καὶ κρατοῦμεν 2· 2 τὰ κρατούμενα καὶ 3....5 καὶ 2....7, γράφομεν 7· 5 καὶ 9....14, γράφομεν 4 καὶ κρατοῦμεν 1· 1 τὸ κρατούμενον καὶ 9....10 καὶ 6....16, γράφομεν 16.*

12. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἐξάγομεν εὐκόλως τὸν ἑξῆς τῆς προσθέσεως γενικὸν κανόνα·

Ἵνα προσθέσωμεν πλειοτέρους ἀριθμούς, γράφομεν τοὺς μὲν ὑπὸ τοὺς δὲ οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου στήλης, καὶ ἄγομεν γραμμὴν ὑπὸ τὸν τελευταῖον ἀριθμόν. Προσθέτομεν τὰ ψηφία τῆς πρώτης πρὸς τὰ δεξιὰ στήλης, καὶ ἐὰν τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα ἦναι μικρότερον τοῦ 10, γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἐν τῇ πρώτῃ στήλῃ, ἐὰν δὲ ἦναι μεγαλείτερον τοῦ 9, γράφομεν μόνον τὰς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος, τὰς δὲ δεκάδας αὐτοῦ προσθέτομεν εἰς τὰς δεκάδας τῆς δευτέρας στήλης. Ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρι τῆς τελευταίας στήλης καὶ γράφομεν τὸν ἀριθμόν, τὸν παριστῶντα τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς στήλης ταύτης καὶ τῶν κρατουμένων τῆς προηγουμένης, οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τοῦ ἀθροίσματος νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς τελευταίας καθέτου στήλης. Ὁ οὕτως ὑπὸ τὴν γραμμὴν εὑρεθεὶς ἀριθμὸς θέλει παριστᾷ τὸ ζητούμενον ἄθροισμα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἠδυνάμεθα, ἀντὶ ν' ἀρχίζωμεν τὴν πρόσθεσιν ἐκ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, νὰ προσθέτωμεν πρῶτον τὰ ἐν τῇ πρώτῃ πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλῃ ὑπάρχοντα ψηφία, ἔπειτα τὰ ἐν τῇ ἀκολούθῳ κτλ., ἀλλ' οὕτως ἠθέλομεν ἐνίοτε ἀναγκάζεσθαι ἕνεκα τῶν κρατουμένων τῶν ἀκολούθων στηλῶν νὰ μεταβάλλωμεν τὸ προγραφὲν ψηφίον, προσθέτοντες εἰς τοῦτο τὰ εὑρεθέντα κρατούμενα, τοῦθ' ὅπερ εἶναι λίαν ἐπίπονον. Τότε μόνον εἶναι ἀδιάφορος ἡ κατὰ τοῦτον ἢ ἐκεῖνον τὸν τρόπον ἐκτέλεσις τῆς πράξεως, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῶν διαφόρων τάξεων τῶν δεδομένων ἀριθμῶν δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν 9, ὡς π. χ. ὅταν ἔχωμεν πρὸς πρόσθεσιν τοὺς ἑξῆς ἀριθμούς· 32021, 54324, 10532.

ΒΑΣΑΝΟΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ.

13. *Βάσανος πράξεώς τινος καλεῖται ἑτέρα τις πρᾶξις, δι' ἧς βεβαιούμεθα περὶ τῆς ἀληθείας τῶν ἐξαγομένων τῆς πρώτης.*

Κατὰ δύο τρόπους ἐκτελοῦμεν τὴν βάσανον τῆς προσθέσεως· ἢ γράφομεν τοὺς προσθετέους ἀριθμοὺς καὶ κατ' ἄλλην τινὰ τάξιν καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὴν πρᾶξιν, ἢ, ἂν εὕρομεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν προσθέτοντες τὰ ψηφία τῶν διαφόρων στηλῶν ἀρχόμενοι ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἐπαναλαμβάνομεν τὴν πρόσθεσιν τῶν αὐτῶν ψηφίων ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς·

Πολλάκις συμβαίνει προσθέτοντες δύο μονοψηφίους ἀριθμοὺς ἢ εἴς τινα ἀριθμὸν ἕτερον μονοψήφιον νὰ ἀπατώμεθα εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἔκ τινος ἀπροσεξίας· νὰ λέγωμεν π. χ. 5 καὶ 8....11, καὶ νὰ κάμωμεν τὸ αὐτὸ λάθος κατ' ἐπανάληψιν ἐν τῇ αὐτῇ πράξει. Μεταβάλλοντες τώρα ἢ τὴν τάξιν τῶν προσθετέων ἀριθμῶν ἢ τὸν τρόπον τῆς εὑρέσεως τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων, δὲν θέλομεν ἔχει τοὺς αὐτοὺς πρὸς πρόσθεσιν ἀριθμούς, ἐφ' ὧν ἐξ ἀπροσεξίας ἐσφάλαμεν, ἑπομένως *πολὺ πιθανὸν* νὰ μὴ ὑποπέσωμεν εἰς τὸ *αὐτὸ λάθος*, καὶ οὕτω θέλομεν παρατηρήσει ἐκεῖνο, εἰς ὃ προηγουμένως ὑπεπέσαμεν. Π. χ. ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ προσθέτων λέγει 5 καὶ 8....11, καὶ ὅτι εἶχε πρὸς πρόσθεσιν τοὺς ἑξῆς ἀριθμούς·

$$\begin{array}{r} 23565 \\ 56078 \\ 39576 \\ \hline 119217 \end{array}$$

οὓς προσθέτει ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω. Τὸ πρῶτον λοιπὸν ψηφίον 7 ἤθελεν εἶναι λανθασμένον. Τώρα, ἐὰν ἐπαναλάβῃ τὴν πρόσθεσιν αὐτῶν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, θέλει εἴπει 6 καὶ 8....14 καὶ 5....19. Ἤθελε λοιπὸν ἀμέσως παρατηρήσει τὸ λάθος του, καὶ ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι καὶ κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον τοῦ προσθέτειν ἤθελε σφάλει, εἶναι *πολὺ πιθανὸν* τὸ γενόμενον λάθος νὰ ἦναι διάφορον οὗ πρώτου, ὅπερ φέρει εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, εἰς τὸ νὰ καταδείξῃ δηλαδὴ ὅτι τὸ γραφὲν ψηφίον 7 δὲν εἶναι ὀρθόν, καὶ ἑπομένως νὰ ἐπιστήσῃ τὴν προσοχὴν τοῦ προσθέτοντος εἰς τοῦτο.

ΠΕΡΙ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ.

14. *Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς ἐλαττοῦμεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας περιέχει ἕτερός τις ἐπίσης δεδομένος ἀριθμός.*

Ὁ πρῶτος τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, ὁ ἐλαττούμενος, καλεῖται *μειωτέος*· ὁ δεύτερος, ὁ δεικνύων πόσαι μονάδες πρέπει νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τοῦ πρώτου, *ἀφαιρετέος*, καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως *ὑπόλοιπον*, ἢ *διαφορὰ* ἢ *ὑπεροχή*.

Ἡ ἀφαίρεσις παρίσταται διὰ τοῦ σημείου —, ὅπερ ἀπαγγέλλεται *μεῖον* ἢ *πλὴν* καὶ τίθεται μεταξὺ τοῦ μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου, προτασσομένου τοῦ πρώτου. Π. χ. ἵνα παραστήσωμεν τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν 12 καὶ 5, γράφομεν 12—5, ὅπερ ἀναγινώσκομεν *δώδεκα πλὴν πέντε*, ἢ *δώδεκα μεῖον πέντε*.

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ μειωτέος εἶναι ἴσος τῷ ἀθροίσματι τῶν μονάδων τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τοῦ ὑπολοίπου· ἑπομένως, ἐὰν θεωρήσωμεν τοῦτον οὕτως, ὡς ἄθροισμα δηλαδὴ δύο μερῶν, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν καὶ ὡς ἑξῆς·

Ὅτι εἶναι πρᾶξις δι' ἧς, δοθέντος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν καὶ ἑνὸς τούτων, εὑρίσκομεν τὸν ἕτερον.

ΑΠΛΗ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ.

15. Ἄς θεωρήσωμεν ἐν πρώτοις τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ ἀφαιρετέος εἶναι μονοψήφιος, τοῦ μειωτέου ὄντος μονοψηφίου, ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι πρόκειται ν' ἀφαιρέσωμεν 3 ἀπὸ 9. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ὑπολοίπου πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν διαδοχικῶς ἀπὸ τοῦ μειωτέου 9 τοσάκις τὴν μονάδα, ὁσάκις αὕτη ἐμπεριέχεται εἰς τὸν ἀφαιρετέον 3· θέλομεν λοιπὸν εἴπει κατὰ τὰ περὶ ἀριθμήσεως· 1 ἀπὸ 9...8, 1 ἀπὸ 8....7, 1 ἀπὸ 7....6. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ὑπόλοιπον εἶναι 6.

Ὡσαύτως, ἂν εἴχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν 4 ἀπὸ 23, ἠθέλομεν εἴπει 1 ἀπὸ 23....22, 1 ἀπὸ 22....21, 1 ἀπὸ 21....20, 1 ἀπὸ 20....19. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ὑπόλοιπον εἶναι 19.

Ἀποκτᾷ τις εὐκόλως τὴν ἀπαιτουμένην ἄσκησιν, ὥστε νὰ ἐκτελῇ ἀμέσως τὰς τοιούτου εἴδους ἀφαιρέσεις καὶ νὰ εὑρίσκῃ ἀμέσως τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον χωρὶς ν' ἀφαιρῇ διαδοχικῶς ἀπὸ τοῦ μειωτέου ἀνὰ μίαν ἁπάσας τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΔΥΟ ΠΟΛΥΨΗΦΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΕΝ ΤΙΝΙ ΜΕΡΙΚῌ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙ.

16. Ἡ ἀφαίρεσις δύο πολυψηφίων ἀριθμῶν ἀνάγεται ἀμέσως εἰς τὴν ἀνωτέρω περίπτωσιν, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ ἦναι τοιοῦτοι, ὥστε πᾶν ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου νὰ ἦναι μικρότερον τοῦ ψηφίου τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ μειωτέου. Τότε, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν τοῦ μειωτέου, τὰς δεκάδας τοῦ πρώτου ἀπὸ τῶν δεκάδων τοῦ δευτέρου, τὰς ἑκατοντάδας ἀπὸ τῶν ἑκατοντάδων, κτλ. καὶ προσθέσωμεν τὰς οὕτως εὑρεθησομένας μερικὰς ταύτας διαφοράς, θέλομεν προφανῶς εὕρει τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον. Ἔστω π. χ. ν' ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 2074 ἀπὸ τοῦ 16097. Διατάσσομεν τὰ τῆς πράξεως ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 16097 \\ 2074 \\ \hline 14023 \end{array}$$

Γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ἄγομεν γραμμὴν ὑπὸ τὸν ἀφαιρετέον, καὶ ὑπὸ τὴν γραμμὴν γράφομεν τὰ ψηφία τῆς διαφορᾶς καθόσον εὑρίσκομεν αὐτά.

Ἀφαιροῦμεν ἐν πρώτοις τὰς ἁπλᾶς μονάδας, ἤτοι 4 ἀπὸ 7, καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 3, ὅπερ γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων. Ἔπειτα μεταβαίνομεν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων, καὶ ἀφαιροῦντες ἀπὸ 9 δεκάδων 7 δεκάδας εὑρίσκομεν διαφορὰν 2, ἣν γράφομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 3, εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων. Ἐπειδὴ δὲ οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ δὲν περιέχουσιν ἑκατοντάδας, ἡ διαφορὰ τούτων εἶναι μηδέν. Γράφομεν λοιπὸν 0 εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων καὶ μεταβαίνομεν εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων. Ἡ διαφορὰ τούτων εἶναι 4, ὅπερ γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων, καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀφαιρετέος δὲν περιέχει δεκάδας χιλιάδων καὶ ὁ μειωτέος περιέχει 1, γράφομεν 1 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων χιλιάδων τοῦ ζητουμένου ὑπολοίπου, ὅπερ εἶναι 14023.

Ὁ ἀνωτέρω τρόπος τοῦ ἐκτελεῖν τὴν ἀφαίρεσιν στηρίζεται ὡς προείπομεν ἐπὶ τῆς ἑξῆς ἀρχῆς·

Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται, ἐὰν ἀφαιρεθῶσιν αἱ μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες, κτλ. τοῦ μικροτέρου ἀπὸ τῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, κτλ. τοῦ μεγαλειτέρου, καὶ προστεθῶσιν ἔπειτα αἱ οὕτως εὑρεθεῖσαι μερικαὶ διαφοραί.

ΓΕΝΙΚΗ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ.

17. Ἡ ἀφαίρεσις δύο ὁποιωνδήποτε πολυψηφίων ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὴν ἀνωτέρω μερικὴν περίπτωσιν διὰ τῆς ἑξῆς φανερᾶς ἀρχῆς·

Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται αὐξανομένων ἀμφοτέρων κατὰ τὸν αὐτὸν τρίτον ἀριθμόν.

Παραδείγματος χάριν, ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν 12 καὶ 5 εἶναι 7. Ἐὰν δὲ αὐξήσωμεν ἀμφοτέρους κατὰ τὸν αὐτὸν τρίτον ἀριθμόν, κατὰ 8 π. χ., ἡ διαφορὰ τῶν οὕτως ἀποτελουμένων ἀριθμῶν 20 καὶ 13 θέλει εἶναι πάλιν ἡ αὐτή, τουτέστιν 7.

18. Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἔχομεν ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 176382 ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 205634.

$$\begin{array}{r} 205634 \\ 176382 \\ \hline 29252 \end{array}$$

Γράφομεν αὐτοὺς ὡς ἀνωτέρω καὶ εὑρίσκομεν ἀμέσως τὴν διαφορὰν τῶν μονάδων, ἥτις εἶναι 2. Γράφομεν λοιπὸν 2 εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων καὶ μεταβαίνομεν εἰς τὴν ἑπομένην στήλην τῶν δεκάδων, ἐπειδὴ δὲ αἱ 8 δεκάδες τοῦ ἀφαιρετέου δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τῶν 3 τοῦ μειωτέου, ἵνα ἡ ἀφαίρεσις κατασταθῇ δυνατή, προσθέτομεν 10 δεκάδας εἰς τὰς 3 δεκάδας, καὶ τότε εὑρίσκομεν ἄθροισμα 13 δεκάδας, ἀφ' οὗ ἀφαιροῦντες 8 λαμβάνομεν διαφορὰν 5 δεκάδας, ἃς γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων. Ἀλλὰ προσθέσαντες 10 δεκάδας εἰς τὰς 3, ηὐξήσαμεν οὕτω τὸν μειωτέον κατὰ ἑκατοντάδα· ἵνα μὴ λοιπὸν μεταβληθῇ ἡ ζητουμένη διαφορά, πρέπει ν' αὐξήσωμεν καὶ τὸν ἀφαιρετέον κατὰ μίαν ἑκατοντάδα. Διὰ τοῦτο ἀντὶ ν' ἀφαιρέσωμεν, μεταβαίνοντες εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων, 3 ἑκατοντάδας ἀπὸ 6, ἀφαιροῦμεν 4 ἀπὸ 6 καὶ εὑρίσκομεν διαφορὰν 2, ἣν γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων.

Προχωροῦντες εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων βλέπομεν ὅτι δὲν δυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν 6 χιλιάδας ἀπὸ 5. Προσθέτομεν λοιπὸν 10 χιλιάδας εἰς τὰς 5, καὶ ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τούτων 6, εὑρίσκομεν διαφορὰν 9, ἣν γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων. Ἐπειδὴ δὲ πάλιν ηὐξήσαμεν τὸν μειωτέον κατὰ 10 χιλιάδας ἢ κατὰ 1 δεκάδα χιλιάδων, πρέπει, ἵνα μὴ μεταβληθῇ ἡ ζητουμένη διαφορά, ν' αὐξήσωμεν καὶ τὸν ἀφαιρετέον κατὰ μίαν δεκάδα χιλιάδων. Ἀντὶ λοιπὸν ν' ἀφαιρέσωμεν, μεταβαίνοντες εἰς τὴν ἀκόλουθον στήλην, 7 δεκάδας χιλιάδων ἀπὸ τῶν 0 τοῦ μειωτέου, πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν 8. Ἀλλ' ἐπειδὴ πάλιν 8 δεκάδες χιλιάδων δὲν δύνανται νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ 0 δεκάδων χιλιάδων, προσθέτομεν 10 δεκάδας χιλιάδας εἰς τὸν μειωτέον, ἤτοι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, καὶ τότε ἡ ἀφαίρεσις καθίσταται δυνατή. Εὑρίσκομεν οὕτω διαφορὰν 2, ἣν γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων χιλιάδων. Ἵνα δὲ πάλιν μὴ μεταβληθῇ ἡ ζητουμένη διαφορά, πρέπει νὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 10 δεκάδας χιλιάδων, ἤτοι μίαν ἑκατοντάδα χιλιάδων. Ἀντὶ λοιπὸν ν' ἀφαιρέσωμεν μεταβαίνοντες εἰς τὴν ἀμέσως ἑπομένην στήλην 1 ἀπὸ 2, πρέπει νὰ προσθέσωμεν 1 εἰς τὸ ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τὸ εὑρεθησόμενον ἄθροισμα ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ 2. Εὑρίσκομεν οὕτω διαφορὰν 0, ὅπερ καὶ δὲν γράφομεν, μὴ ὑπαρχόντων ἄλλων πρὸς ἀφαίρεσιν ψηφίων. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν διαφορὰ εἶναι 29252.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, ὁσάκις ἡ ἀφαίρεσις ψηφίου τινὸς τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου τοῦ μειωτέου δὲν δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ, ἀρκεῖ νὰ αὐξήσωμεν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ψηφίον τοῦ μειωτέου κατὰ 10 καὶ νὰ προσθέσωμεν 1 μονάδα εἰς τὸ ἀμέσως ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου. Οὕτως ἡ ἀφαίρεσις καθίσταται δυνατὴ καὶ ἡ ζητουμένη διαφορά, κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἀρχήν, δὲν μεταβάλλεται.

19. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πoριζόμεθα τὸν ἑξῆς τῆς ἀφαιρέσεως γενικὸν κανόνα.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, καὶ ἄγομεν γραμμὴν ὑπὸ τὸν ἀφαιρετέον. Μετὰ ταῦτα ἀφαιροῦμεν ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν δεξιῶν ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου τοῦ μειωτέου, καὶ γράφομεν τὴν εὑρεθησομένην διαφορὰν ἐν τῇ τῶν ἀφαιρουμένων ψηφίων στήλῃ. Ὁσάκις δὲ τὸ πρὸς ἀφαίρεσιν ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ὑπερέχει τὸ ἀντίστοιχον τοῦ μειωτέου, *αὐξάνομεν τοῦτο κατὰ 10 καὶ ἀπὸ τοῦ εὑρεθησομένου ἀθροίσματος, ὅπερ θέλει εἶναι πάντοτε μεγαλείτερον τοῦ ψηφίου τοῦ ἀφαιρετέου, ἀφαιροῦμεν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου. Ἀλλ' ἵνα μὴ μεταβληθῇ ἡ ζητουμένη διαφορά, πρέπει, μεταβαίνοντες εἰς τὴν ἀμέσως ἀκόλουθον στήλην, ν' αὐξάνωμεν κατὰ 1 τὸ ὑπάρχον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ οὕτω καθεξῆς.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. — Ἀρχόμεθα τῆς πράξεως ἀπὸ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ ὄχι ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά· διότι τότε ἠθέλομεν ἀναγκάζεσθαι νὰ μεταβάλλωμεν εὑρεθέν τι ψηφίον τῆς διαφορᾶς, ὁσάκις τὸ πρὸς ἀφαίρεσιν ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἤθελεν εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τοῦ μειωτέου. Ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρου λ. χ. παραδείγματος, ἂν ἠρχόμεθα τῆς πράξεως ἐξ ἀριστερῶν, ἔπρεπε νὰ γράψωμεν 1 ὡς πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης διαφορᾶς, καὶ ἐπειδὴ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 7 τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου 0 τοῦ μειωτέου καὶ ἡ ἀφαίρεσις δὲν ἐκτελεῖται, πρέπει νὰ μεταβάλωμεν τὸ εὑρεθὲν ψηφίον 1 τῆς διαφορᾶς, ἵνα ἡ ἀφαίρεσις κατασταθῇ δυνατή. Ἠθέλομεν λοιπὸν ἀναγκάζεσθαι νὰ ἐκτελῶμεν δὶς ἐπὶ τῶν τῆς αὐτῆς στήλης ψηφίων τὴν πρᾶξιν, ὅπερ ἐπίμοχθον. Μόνον ὅταν τὰ ψηφία τοῦ ἀφαιρετέου ἦναι μικρότερα τῶν ἀντιστοίχων ψηφίων τοῦ μειωτέου, δυνάμεθα ν' ἀρχίζωμεν ἀδιαφόρως τὴν πρᾶξιν.

ΒΑΣΑΝΟΣ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ.

20. Ἡ τῆς ἀφαιρέσεως βάσανος γίνεται διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ ὑπολοίπου εἰς τὸν ἀφαιρετέον. Ἐὰν οὕτως εὕρωμεν ὡς ἄθροισμα τὸν μειωτέον, τότε ἡ ἀφαίρεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 8543, 962004, 578000, 83002, 21, 1305.

II. Ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀνωτέρω δύο πρώτων ἀριθμῶν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τελευταίων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ.

ΠΕΡΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ.

21. *Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς δοδομένων δύο ἀριθμῶν σχηματίζομεν ἐκ τοῦ πρώτου τρίτον, ὅπως ὁ δεύτερος ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος, ἐν ἄλλαις λέξεσιν.*

Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκομεν ἀριθμόν, συγκείμενον ἐκ τοσούτων μερῶν ἴσων δεδομένῳ τινὶ ἀριθμῷ, ὅσας μονάδας ἔχει ἕτερός τις ἐπίσης δεδομένος ἀριθμός.

Ὁ πρῶτος τῶν δεδομένων ἀριθμῶν καλεῖται *πολλαπλασιαστέος*, ὁ δεύτερος *πολλαπλασιαστὴς* καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως ἢ ὁ εὑρισκόμενος τρίτος *γινόμενον*. Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς καλοῦνται καὶ *παράγοντες* τοῦ γινομένου.

Νὰ πολλαπλασιάσωμεν 5 ἐπὶ 3 σημαίνει νὰ εὕρωμεν τρίτον ἀριθμόν, περιέχοντα τοσάκις τὸν 5, ὁσάκις ὁ 3 περιέχει τὴν μονάδα, καὶ ἐπειδὴ ὁ 3 περιέχει τρὶς τὴν μονάδα, πρέπει πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου τρίτου ἀριθμοῦ νὰ προσθέσωμεν τὸν 5 τρίς. Εὑρίσκομεν οὕτως ἄθροισμα 15, ὅπερ εἶναι *τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 3*. Ἐν τῷ παραδείγματι τούτῳ 5 εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος, 3 ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ 15 τὸ γινόμενον.

Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι ἴσος τῇ μονάδι, τὸ γινόμενον θέλει εἶναι προφανῶς ἴσον τῷ πολλαπλασιαστέῳ. *Τὸ γινόμενον λοιπὸν παντὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ 1 εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός.*

Ὁ πολλαπλασιαστὴς παρίσταται διὰ τοῦ σημείου $\times$, ὅπερ καλεῖται *ἐπὶ* καὶ τίθεται μεταξὺ τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ πολλαπλασιαστοῦ, προτασσομένου πάντοτε τοῦ πολλαπλασιαστέου. Οὕτως ἡ παράστασις 5×3 ἀπαγγέλλεται 5 *νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 3*, ἢ ἁπλῶς 5 *ἐπὶ 3*, τοῦ 5 παριστῶντος τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ τοῦ 3 τὸν πολλαπλασιαστήν.

ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΙΝΕΣ ΚΑΙ ΧΡΗΣΙΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΙΝΩΝ.

22. *Θεώρημα* λέγεται ἀλήθεια καθισταμένη φανερὰ διά τινος συλλογισμοῦ, καλουμένου ἀπόδειξις.

Πόρισμα καλεῖται ἡ ἔκ τινος ἀποδειχθέντος θεωρήματος προκύπτουσα συνέπεια.

Πρόβλημα λέγεται ζήτημα, ἐν ᾧ ζητεῖταί τι ἄγνωστον, ὡρισμένας ἔχον σχέσεις πρὸς γνωστοὺς καὶ δεδομένους ἀριθμούς.

Τὸ σημεῖον $=$ ἀπαγγέλλεται *ἴσον*, καὶ σημαίνει ὅτι αἱ ἑκατέρωθεν αὐτοῦ ὑπάρχουσαι παραστάσεις εἶναι ἴσαι. Π. χ. ἀντὶ νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν 17 καὶ 8 εἶναι ἴση μὲ 9, ἐκφράζομεν αὐτὸ τοῦτο γράφοντες $17-8=9$.

Τὰ διὰ τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος συνδεόμενα μέρη καλοῦνται *μέλη* τῆς ἰσότητος. Τὸ μὲν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καλεῖται *πρῶτον* μέλος τῆς ἰσότητος, τὸ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ *δεύτερον* μέλος αὐτῆς.

Ὁσάκις θέλομεν νὰ παραστήσωμεν ὅτι πρᾶξίς τις πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ ἐπὶ ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι τὰ ἐξαγόμενα ἄλλων πράξεων, ἃς δὲν ἐξετελέσαμεν, γράφομεν τὰς παραστάσεις τῶν ἐκτελεστέων πράξεων ἐντὸς παρενθέσεων. Π. χ. ἐὰν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 9 ἐπὶ τὴν διαφορὰν $8-3$ χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν, γράφομεν τὴν διαφορὰν $8-3$ ἐντὸς παρενθέσεων οὕτως $(8-3)$, καὶ τότε τὸ ζητούμενον γινόμενον παρίσταται ὡς ἑξῆς $(8-3)\times 7$. Ὡσαύτως, ἐὰν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος $5+2$ ἐπὶ τὴν διαφορὰν $8-3$ χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς σεσημειωμένας ταύτας πράξεις, θέλομεν γράψει $(5+2)\times(8-3)$.

Μεταχειριζόμεθα καὶ τὸ σημεῖον $>$ ἢ $<$ ὅπερ καλεῖται σημεῖον *ἀνισότητος*, ὁσάκις θέλομεν νὰ παραστήσωμεν ὅτι ποσότης τις εἶναι μεγαλειτέρα ἢ μικροτέρα ἄλλης τινός. Οὕτως, ἐὰν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν ὅτι τὸ 7 εἶναι μεγαλείτερον τοῦ 5, ἢ τὸ 8 μικρότερον τοῦ 9, θέλομεν γράφει $7>5$, ἢ $8<9$· θέτομεν δηλαδὴ μεταξὺ τῶν δύο ποσοτήτων τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος καὶ τὴν μεγαλειτέραν ποσότητα εἰς τὸ ἄνοιγμα τῆς γωνίας αὐτοῦ.

ΠΙΝΑΞ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ.

23. Ἐπειδὴ κατὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἡ ἐκτέλεσις αὐτοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν πολλῶν ἴσων ἀριθμῶν, ἠδυνάμεθα νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ζητούμενον γινόμενον ἀκο-

λουθοῦντες τὸν ἐν τῇ § 21 περὶ προσθέσεως δοθέντα γενικὸν κανόνα. Ὁ τρόπος οὗτος τοῦ πολλαπλασιάζειν δύο δεδομένους ἀριθμούς, ὅστις ἤθελεν εἶναι σχεδὸν ἀκατόρθωτος προκειμένου περὶ ἀριθμῶν ἀρκούντως μεγάλων, εἶναι πράγματι ἐκεῖνος, ὃν μεταχειρίζονται πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν, καὶ ἀνάγουσιν ἔπειτα, ὡς θέλομεν ἰδεῖ παρακατιόντες, τὰς λοιπὰς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ περιπτώσεις εἰς ταύτην.

Ἕκαστος ἐννοεῖ τώρα πόσον εἶναι ἀναγκαῖον, πρὸς ταχεῖαν τῆς πράξεως ἐκτέλεσιν, νὰ γνωρίζωμεν ἐκ στήθους ὅλα τὰ γινόμενα, ἅτινα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν πολλαπλασιάζοντες ἀνὰ δύο καθ' ἅπαντας τοὺς δυνατοὺς τρόπους τοὺς ἐννέα ἀρχικοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς. Τὰ γινόμενα ταῦτα εὑρίσκονται ἐν τῷ ἑξῆς τοῦ Πυθαγόρου πίνακι, ὃν κατασκευάζομεν ὡς ἑξῆς·

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Γράφομεν ἐπὶ τῆς πρώτης ὁριζοντίου σειρᾶς τοὺς ἐννέα ἀρχικοὺς ἀριθμούς. Ἡ σειρὰ αὕτη κατὰ τὰ ἐν τῷ τέλει τῆς § 21 λεχθέντα θέλει παριστᾷ τὰ γινόμενα τῶν ἐννέα ἀρχικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ 1.

Πρὸς σχηματισμὸν τῆς δευτέρας ὁριζοντίου σειρᾶς προσθέτομεν ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς πρώτης εἰς ἑαυτόν, καὶ γράφομεν τὸ ἐξαγόμενον ὑπ' αὐτόν. Ἡ δευτέρα λοιπὸν σειρὰ περιέχει τὰ γινόμενα τῶν ἐννέα ἀρχικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ 2.

Πρὸς σχηματισμὸν τῆς τρίτης σειρᾶς προσθέτομεν εἰς ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς δευτέρας τὸν ἀντίστοιχον αὐτοῦ τῆς πρώτης, καὶ γράφομεν τὰ εὑρεθησόμενα ἀθροίσματα ὑπ' αὐτούς, ἕκαστον ἐν τῇ καθέτῳ στήλῃ τῶν παρασχόντων αὐτὸ ἀριθμῶν. Οὕτως ἡ τρίτη ὁριζόντιος σειρὰ θέλει περιέχει τὰ γινόμενα τῶν ἐννέα ἀρχικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ 3.

Ὡσαύτως, πρὸς σχηματισμὸν τῆς τετάρτης προσθέτομεν εἰς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τῆς τρίτης τὸν ἀντίστοιχον αὐτοῦ τῆς πρώτης, καὶ γράφομεν τὰ εὑρεθησόμενα ἀθροίσματα ὑπ' αὐτούς, ἕκαστον ἐν τῇ καθέτῳ στήλῃ τῶν παρασχόντων αὐτὸ ἀριθμῶν. Ἡ τετάρτη λοιπὸν σειρὰ θέλει περιέχει τὰ γινόμενα τῶν ἐννέα ἀρχικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ 4.

Παρομοίως, ἑκάστη τῶν ἑπομένων ὁριζοντίων σειρῶν σχηματίζεται προστιθεμένων τῶν ἀριθμῶν τῆς προηγουμένης σειρᾶς μετὰ τῶν ἀντιστοίχων τῆς πρώτης καὶ γραφομένων ἀμοιβαίως τῶν εὑρισκομένων ἀθροισμάτων ὑπ' αὐτοὺς ἐν τῇ καθέτῳ στήλῃ, ἐν ᾗ εὑρίσκονται οἱ προστεθέντες ἀριθμοί. Ἕπεται λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι ἐννέα ὁριζόντιοι σειραὶ περιέχουσι ἀμοιβαίως τὰ γινόμενα τῶν ἐννέα ἀρχικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ 1, 2, 3, 4.... 9.

Διὰ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος δυνάμεθα λίαν εὐκόλως νὰ εὑρίσκωμεν τὸ γινόμενον δύο ὁποιωνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς. Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ γινόμενον τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν 5 καὶ 7. Καθ' ὃν τρόπον ἐσχηματίσθη ὁ ἀνωτέρω πίναξ, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ζητούμενον γινόμενον πρέπει νὰ εὑρίσκηται ἐν τῇ πέμπτῃ καθέτῳ στήλῃ, ἥτις περιέχει ὅλα τὰ γινόμενα τοῦ 5 ἐπὶ τοὺς ἐννέα ἀρχικοὺς ἀριθμούς, καὶ ἐν τῇ ἑβδόμῃ ὁριζοντίῳ, ἥτις περιέχει τὰ γινόμενα τῶν ἐννέα ἀρχικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ 7. Θέλει λοιπὸν εἶναι ὁ ἀριθμὸς 35, ὅστις *μόνος* εἶναι κοινὸς καὶ εἰς τὰς δύο ταύτας στήλας. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 7 εἶναι ὁ οὕτως εὑρεθεὶς ἀριθμὸς 35.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΟΛΥΨΗΦΙΟΥ ΕΠΙ ΜΟΝΟΨΗΦΙΟΝ.

24. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι προτιθέμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολυψήφιον ἀριθμὸν 2096 ἐπὶ τὸν μονοψήφιον 7. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ γινόμενον θέλει σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου 2096, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστὴς 7 παρήχθη ἐκ τῆς μονάδος. Ἀλλ' ὁ πολλαπλασιαστὴς 7 παρήχθη ἐκ τῆς μονάδος, ἀφοῦ αὕτη ἐπανελήφθη ἑπτάκις. Λοιπὸν καὶ τὸ ζητούμενον γινόμενον θέλει σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου 2096, ἀφοῦ οὗτος ἐπαναληφθῇ ἑπτάκις. Ἐὰν τώρα γράψωμεν τὸν 2096 ἑπτάκις κατὰ τὸν περὶ προσθέσεως γενικὸν κανόνα καὶ ἐκτελέσωμεν τὴν πρόσθεσιν τῶν οὕτω γεγραμμένων ἀριθμῶν, θέλομεν ἰδεῖ ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εὑρίσκεται ἑπταπλασιαζομένου ἑνὸς ἑκάστου τῶν ψηφίων τοῦ 2096;

ἢ ἑνὸς ἑκάστου τῶν μερῶν αὐτοῦ, θεωρουμένου ὡς ἴσου τῷ ἀθροίσματι $2000+000+90+6$.

Ἀντὶ νὰ γράψωμεν ἑπτάκις τὸν πολλαπλασιαστέον 2096, συντομεύομεν τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως διατάσσοντες αὐτὴν ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 2096 \\ 7 \\ \hline 14672 \end{array}$$

Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ ἄγομεν ὑπ' αὐτὸν ὁριζόντιον γραμμήν, ὑπὸ τὴν ὁποίαν γράφομεν τὰ ψηφία τοῦ γινομένου καθόσον εὑρίσκομεν αὐτά.

Πολλαπλασιάζομεν ἐν πρώτοις τὰς μονάδας 6 τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 7, καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 42 μονάδας, ἤτοι 2 μονάδας καὶ 4 δεκάδας. Γράφομεν τὰς 2 μονάδας ὑπὸ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων καὶ κρατοῦμεν τὰς 4 δεκάδας, ἵνα προσθέσωμεν αὐτὰς εἰς τὸ γινόμενον τῶν δεκάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 7.

Τὸ νέον τοῦτο γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ 63 δεκάδας, εἰς ἃς προσθέτοντες καὶ τὰς κρατουμένας 4 εὑρίσκομεν ἄθροισμα 67 δεκάδας, ἤτοι 7 δεκάδας καὶ 6 ἑκατοντάδας. Γράφομεν λοιπὸν 7 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων τοῦ γινομένου καὶ κρατοῦμεν τὰς 6 ἑκατοντάδας, ἵνα προσθέσωμεν αὐτὰς εἰς τὸ γινόμενον τῶν 0 ἑκατοντάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν.

Ἀλλὰ 0 ἑκατοντάδες ἐπὶ 7 πολλαπλασιασθεῖσαι δίδουσι γινόμενον 0 ἑκατοντάδας. Εἰς ταύτας προσθέτοντες καὶ τὰς κρατουμένας 6 εὑρίσκομεν ἄθροισμα 6 ἑκατοντάδας, ἃς γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων τοῦ γινομένου.

Μεταβαίνοντες ἔπειτα εἰς τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἤτοι εἰς τὰς χιλιάδας αὐτοῦ, καὶ πολλαπλασιάζοντες αὐτὰς ἐπὶ 7 εὑρίσκομεν γινόμενον 14 χιλιάδας, ἤτοι 4 χιλιάδας καὶ 1 δεκάδα χιλιάδων. Γράφομεν λοιπὸν 4 εἰς τὴν θέσιν τῶν χιλιάδων τοῦ γινομένου καὶ 1 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων χιλιάδων αὐτοῦ. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν γινόμενον εἶναι ὁ ἀριθμὸς 14672.

Ἡ πρᾶξις συνήθως ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς· λέγομεν *6 ἐπὶ 7....42, γράφομεν 2 καὶ κρατοῦμεν 4· 9 ἐπὶ 7....63 καὶ 4 τὰ κρατούμενα 67, γράφομεν 7 καὶ κρατοῦμεν 6· 0 ἐπὶ 7....0 καὶ 6....6, γράφομεν 6· 2 ἐπὶ 7....14, γράφομεν 14.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἂν ἠθέλομεν νὰ παραστήσωμεν τοὺς ἀνωτέρω πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου συλλογισμοὺς διὰ τῶν γνωστῶν σημείων, ἠθέλομεν γράψει

$$2096\times7=(2000+000+90+6)\times7.$$

Ἀλλὰ $(2000+000+90+6)\times7=1400+000+630+42 \quad (a)$

καὶ $14000+000+630+42=14672.$

Ἄρα $2096\times7=14672.$

Ἡ ἰσότης (a) δεικνύει ὅτι, *ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος ἦναι ἄθροισμα πολλῶν μερῶν, τὸ γινόμενον εὑρίσκεται πολλαπλασιαζομένου ἑνὸς ἑκάστου τῶν μερῶν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν καὶ προστιθεμένων τῶν μερικῶν γινομένων.*

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα $3+5+6$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 4, ἠθέλομεν εὕρει γινόμενον τὸ ἄθροισμα $3\times4+5\times4+6\times4$, ἤτοι ἠθέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα·

$$(3+5+6)\times4=3\times4+5\times4+6\times4.$$

Εὐκολώτατα δύναταί τις, ἐπαναλαμβάνων τοὺς ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς παρούσης παραγράφου ἐκτεθέντας συλλογισμούς, ν' ἀποδείξῃ τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα, ἐὰν νομίζῃ ὅτι ἔχει ἀνάγκην ἰδιαιτέρας τινὸς ἀποδείξεως.

25. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων πορίζόμεθα τὸν ἑξῆς κανόνα·

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ μονοψήφιον, γράφομεν τὸν μονοψήφιον πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ πολλαπλασιάζομεν διαδοχικῶς ἕκαστον τῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν δεξιῶν. Γράφομεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ εὑρεθησομένου πρώτου γινομένου ἐν τῇ στήλῃ τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ κρατοῦμεν τὰς δεκάδας αὐτοῦ, ἐὰν ὑπάρχωσιν, ἵνα προσθέσωμεν αὐτὰς εἰς τὸ ἀμέσως ἀκόλουθον μερικὸν γινόμενον. Τοῦ οὕτως εὑρεθησομένου ἀθροίσματος γράφομεν τὰς μὲν μονάδας πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ προγραφέντος πρώτου ψηφίου τοῦ γινομένου, τὰς δὲ δεκάδας, ἐὰν ὑπάρχωσιν, προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΙΝΟΣ ΕΠΙ ΑΡΙΘΜΟΝ ΑΠΟΤΕΛΟΥΜΕΝΟΝ ΕΚ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΥ ΨΗΦΙΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΜΕΝΟΥ ΥΠΟ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ.

26. 1ον. *Ἀριθμός τις πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ., ἐὰν γραφῶσιν 1, 2, 3, κτλ. μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ.*

Διότι κατὰ τὰ περὶ ἀριθμήσεως λεχθέντα ἕκαστον τῶν ψηφίων αὐτοῦ θέλει παριστᾷ τότε μονάδας 10κις, 100κις, 1000κις, κτλ. μεγαλειτέρας ἐκείνων, ἃς παρίστα πρότερον. Ἕκαστον λοιπὸν τῶν μερῶν αὐτοῦ θέλει γίνει οὕτω 10κις, 100κις, 1000κις, κτλ. μεγαλείτερον, ἐπομένως καὶ ὅλος ὁ ἀριθμός.

Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 237 ἐπὶ 100. Ἐὰν γράψωμεν δύο μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ, οὗτος γίνεται 23700, τότε δὲ τὸ ψηφίον αὐτοῦ 7, ὅπερ παρίστα πρότερον ἁπλᾶς μονάδας, θέλει παριστᾷ ἑκατοντάδας. Ἄρα ἑκατονταπλασιάσθη. Ὡσαύτως τὸ ψηφίον αὐτοῦ 3, ὅπερ παρίστα πρότερον δεκάδας, παριστᾷ τώρα χιλιάδας. Ἄρα ἑκατονταπλασιάσθη. Παρομοίως καὶ τὸ ψηφίον αὐτοῦ 2 παριστᾷ μονάδας ἑκατοντάκις μεγαλειτέρας ἐκείνων, ἃς πρότερον παρίστα. Ἀφοῦ λοιπὸν ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ ἀριθμοῦ 237 ἑκατονταπλασιάσθη, ἕπεται ὅτι καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς ἐγένετο ἑκατοντάκις μεγαλείτερος.

2ον. *Ἀριθμός τις πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἀποτελούμενον ὑφ᾽ ἑνὸς σημαντικοῦ ψηφίου ἀκολουθουμένου ὑπὸ μηδενικῶν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ πρῶτον ἐπὶ μόνον τὸ σημαντικὸν ψηφίον καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου γραφῶσι τόσα μηδενικά, ὑφ᾽ ὅσων ἀκολουθεῖται τὸ σημαντικὸν ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.*

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 3564 ἐπὶ 300. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ γινόμενον πρέπει νὰ σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου 3564, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστὴς 300 ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος. Ἀλλὰ ὁ 300 σχηματίζεται προφανῶς ἐκ τῆς μονάδος, ἀφοῦ αὕτη ἐπαναληφθῇ πρῶτον τρὶς καὶ τὸ τριπλάσιον αὐτῆς 3 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 100. Ἄρα καὶ τὸ ζητούμενον γινόμενον θέλει σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἀφοῦ οὗτος ἐπαναληφθῇ πρῶτον *τρίς*, ἤτοι πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 3, καὶ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ, ὅπερ εἶναι 10692, πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 100, τοῦθ᾽ ὅπερ γίνεται γραφομένων 2 μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ. Λοιπὸν ἀπεδείχθη ὅτι ἀριθμός τις πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἀποτελούμενον ὑφ' ἑνὸς σημαντικοῦ ψηφίου ἀκολουθουμένου ὑπὸ μηδενικῶν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ πρῶτον ἐπὶ μόνον τὸ σημαντικὸν αὐτοῦ ψηφίον κτλ.

ΓΕΝΙΚΗ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ.

27. Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν ἀνάγεται εὐκόλως εἰς τὰς μερικὰς περιπτώσεις, περὶ ὧν προηγουμένως ἐπραγματεύθημεν, εὑρίσκομεν δὲ τὸ γινόμενον αὐτῶν κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα·

Ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο πολυψηφίων ἀριθμῶν γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, καὶ ἄγομεν γραμμὴν ὑπ' αὐτούς. Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐφ' ἕκαστον τῶν σημαντικῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ γράφομεν τὰ εὑρεθησόμενα μερικὰ γινόμενα οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον ἑκάστου νὰ εὑρίσκηται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ἐν ᾗ καὶ τὸ παρασχὸν αὐτὸ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Προσθέτοντες ἀκολούθως τὰ οὕτω διατεταγμένα μερικὰ γινόμενα θέλομεν εὕρει τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν.

Ἂν εἴχομεν π. χ. νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 2096 ἐπὶ 347, ἠθέλομεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα γράψει τὸν πολλαπλασιαστὴν 347 ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον 2096 οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ὡς φαίνεται κάτωθεν,

$$
\begin{array}{r}
2096 \\
347 \\
\hline
14672 \\
8384 \\
6288 \\
\hline
727312
\end{array}
$$

ἔπειτα πολλαπλασιάζει τὸν πολλαπλασιαστέον 2096 ἐφ' ἕκαστον τῶν σημαντικῶν ψηφίων 7, 4, 3 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 347, καὶ γράφει τὰ εὑρεθησόμενα μερικὰ γινόμενα 14672, 8384, 6288 οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες 2 τοῦ πρώτου νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ἐν ᾗ καὶ τὸ παρασχὸν τὸ γινόμενον 14672 ψηφίον 7 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 347· αἱ μονάδες 4 τοῦ δευτέρου γινομένου 8384 νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ, ἐν ᾗ καὶ τὸ παρασχὸν τὸ γινόμενον τοῦτο ψηφίον 4 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 347, καὶ αἱ μονάδες 8 τοῦ τρίτου γινομένου 6288 ἐν τῇ καθέτῳ στήλῃ, ἐν ᾗ καὶ τὸ παρασχὸν τὸ γινόμενον τοῦτο ψηφίον 3 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Προσθέτοντες ἀκολούθως τὰ οὕτω διαταχθέντα μερικὰ γιγόμενα, θέλομεν εὕρει ἄθροισμα τὸν ἀριθμὸν 727312, ὅστις θέλει παριστᾷ τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν δεδομένων.

28. Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ ἀνωτέρου κανόνος σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ γινόμενον θέλει σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου 2096, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστὴς 347 ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος. Ἀλλ' ὁ 347 σχηματίζεται ἐκ τῆς μονάδος, ἀφοῦ αὕτη ἐπαναληφθῇ 7κις, 40κις καὶ 300κις, καὶ εἰς τὸ ἑπταπλάσιον αὐτῆς προστεθῇ τὸ τεσσαρακονταπλάσιον καὶ τὸ τριακοσιαπλάσιον. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον 2096 ἑπτάκις, τεσσαρακοντάκις καὶ τριακοσιάκις, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ εὑρεθησόμενα μερικὰ γινόμενα. Ἀλλὰ τὸ μὲν ἑπταπλάσιον τοῦ 2096 παρίσταται διὰ τοῦ γινομένου 2096×7 καὶ εἶναι 14672, τὸ δὲ τεσσαρακονταπλάσιον αὐτοῦ παρίσταται διὰ τοῦ γινομένου 2096×40 καὶ εἶναι 83840, εὑρίσκεται δὲ κατὰ τὰ ἐν τῇ § 26 λεχθέντα πολλαπλασιαζομένου τοῦ 2096 ἐπὶ 4 καὶ γραφομένου ἑνὸς μηδενικοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου 8384· καὶ τελευταῖον τὸ τριακοσιαπλάσιον αὐτοῦ παρίσταται διὰ τοῦ γινομένου 2096×300 καὶ εἶναι 628800, εὑρίσκεται δὲ πολλαπλασιαζομένου τοῦ 2096 ἐπὶ 3 καὶ γραφομένων δύο μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου 6288. Πρέπει λοιπὸν πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου 2096×347 νὰ προσθέσωμεν τὰ εὑρεθέντα μερικὰ γινόμενα 14672, 83840, 628800. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τούτων 727312 εὑρίσκεται γραφομένων αὐτῶν ὡς ἑξῆς

$$\begin{array}{r} 14672 \\ 83840 \\ 628800 \\ \hline 727312 \end{array}$$

καὶ προστιθεμένων κατὰ τὸν περὶ προσθέσεως δοθέντα γενικὸν κανόνα. Βλέπομεν λοιπόν, παραβάλλοντες τὰ ἐνταῦθα προστεθέντα μερικὰ γινόμενα μὲ τὰ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ παραδείγματι κατὰ τὸν περὶ πολλαπλασιασμοῦ δοθέντα κανόνα γραφέντα, ὅτι ταῦτα εἶναι τὰ αὐτά, τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ ἀληθὲς τοῦ κανόνος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 1.—"Αν ὁ πολλαπλασιαστὴς περιεῖχε ψηφία τινὰ ἴσα τῷ μηδενί, ἂν π. χ. ἦτο 30047, ἠθέλομεν διατάξει ἐπίσης ὡς

$$\begin{array}{r} 2096 \\ 30047 \\ \hline 14672 \\ 8384 \\ 6288 \\ \hline 62978512 \end{array}$$

ἀνωτέρω τὴν πρᾶξιν, ἀλλὰ μετὰ τὸν ἐπὶ 7 καὶ 4 πολλαπλασιασμὸν τοῦ πολλαπλασιαστέου ἠθέλομεν μεταβῆ ἀμέσως εἰς τὸν ἐπὶ 3 πολλαπλασιασμὸν αὐτοῦ καὶ γράψει κατὰ τὸν δοθέντα κανόνα τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον 6288 οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες αὐτοῦ 8 νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ἐν ᾗ καὶ τὸ παρασχὸν αὐτὸ ψηφίον 3 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὡς φαίνεται ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 2.—"Αν ἠθέλομεν νὰ παραστήσωμεν δι' ἰσοτήτων τὰ ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς § 27 λεχθέντα, ἠθέλομεν ἔχει

$$2096\times347=2096\times(300+40+7).$$

Ἀλλὰ $2096\times(300+40+7)=2096\times300+2096\times40+2096\times7.\ (a)$

Ἄρα $2096\times347=2096\times300+2096\times40+2096\times7.$

Ἡ ἰσότης (a) δεικνύει ὅτι, *ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς 347 ἦναι ἄθροισμα πολλῶν μερῶν 300, 40 καὶ 7, τὸ γινόμενον 2096×347 εὑρίσκεται πολλαπλασιαζομένου τοῦ πολλαπλασιαστέου 2096 ἐφ' ἕκαστον τῶν μερῶν 300, 40 καὶ 7 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ προστιθεμένων τῶν εὑρεθησομένων μερικῶν γινομένων. Οὕτως, ἂν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 5 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα 3+4+6, ἠθέλομεν ἔχει*

$$5\times(3+4+6)=5\times3+5\times4+5\times6.$$

Εὐκολώτατα δὲ δύναταί τις νὰ ἀποδείξῃ ἀπ' εὐθείας τοῦτο ἐφαρμόζων τὸν περὶ πολλαπλασιασμοῦ ὁρισμόν, ἐὰν νομίζῃ ὅτι ἔχει ἀνάγκην ἰδιαιτέρας τινὸς ἀποδείξεως.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΚΑΘ' ΗΝ Ο ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΕΟΣ ΚΑΙ Ο ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝΤΑΙ ΥΠΟ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ.

29. *Ὅταν οἱ παράγοντες τοῦ γινομένου ἀκολουθῶνται ὑπὸ*

μηδενικῶν, πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ ἀποκόπτομεν τὰ μηδενικὰ καὶ πολλαπλασιάζομεν τοὺς οὕτω προκύπτοντας ἀριθμούς, ἔπειτα γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου αὐτῶν τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο ὁμοῦ παράγοντες.

Ἔστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 27000, 4300. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου αὐτῶν ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 27 ἐπὶ 43 καὶ νὰ γράψωμεν 5 μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου.

Τῷ ὄντι, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ § 26, πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου τοῦ 27000 ἐπὶ 4300 πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 27000 ἐπὶ 43 καὶ νὰ γράψωμεν δύο μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ οὕτως εὑρεθησομένου γινομένου. Ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ ὁ 27000 εἶναι ἴσος μὲ 27 μονάδας χιλιάδων, τὸ γινόμενον τοῦ 27000 ἐπὶ 43 θέλει εἶναι ἴσον μὲ 43 φορὰς 27 μονάδας χιλιάδων, ἐν ἄλλαις λέξεσι, θέλει περιέχει τόσας χιλιάδας, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ γινόμενον τοῦ 27 ἐπὶ 43. Λοιπόν, ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 27000 ἐπὶ 43, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 27 ἐπὶ 43 καὶ νὰ γράψωμεν 3 μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν. Ἀλλ' εἴπομεν προηγουμένως ὅτι, ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 27000 ἐπὶ 4300, πρέπει νὰ γράψωμεν 2 μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου τοῦ 27000 ἐπὶ 43. Ἄρα βλέπομεν ὅτι εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον 27000×4300, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν 27 ἐπὶ 43 καὶ γράψωμεν ἐν ὅλῳ 5 μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου αὐτῶν.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΨΗΦΙΩΝ ΤΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ.

30. *Ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσος τῷ ἀθροίσματι τῶν ψηφίων αὐτῶν ἢ τῷ αὐτῷ ἀθροίσματι ἠλαττωμένῳ κατὰ μονάδα.*

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν τετραψήφιον ἀριθμὸν 2096 ἐπί τινα τριψήφιον. Ἐπειδὴ πᾶς τριψήφιος ἀριθμὸς εἶναι τοὐλάχιστον ἴσος τῷ 100, ὅστις εἶναι ὁ μικρότερος τῶν τριψηφίων ἀριθμῶν, καὶ μικρότερος τοῦ 1000, ὅστις εἶναι ὁ πρῶτος τετραψήφιος μετὰ τὸν μεγαλείτερον τριψήφιον, τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου 2096 ἐπὶ τὸν δεδομένον τριψήφιον πολλαπλασιαστὴν θέλει εἶναι τοὐλάχιστον ἴσον τῷ γινομένῳ αὐτοῦ ἐπὶ 100 καὶ μικρότερον τοῦ γινομένου αὐτοῦ ἐπὶ 1000, ἤτοι θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 209600 καὶ 2096000. Ἀλλ' ὁ μὲν 209600 ἔχει προφανῶς τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ πολλαπλασιαστέος 2096 καὶ ὁ τριψήφιος πολλαπλασιαστὴς πλὴν ἑνός, ὁ δὲ 2096000 ὅσα ἔχουσιν ἀμφότεροι. Λοιπὸν ἀπεδείχθη ὅτι τὸ γινόμενον δύο παραγόντων ἔχει τόσα ψηφία, ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο αὐτοῦ παράγοντες ἢ τόσα πλὴν ἑνός.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ὅταν τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἦναι ἀριθμὸς διψήφιος, τότε τὸ γινόμενον αὐτῶν θέλει ἔχει τόσα ψηφία, ὅσα ἔχουσιν ἀμφότεροι. Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 4568 ἐπὶ 359, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον 12 τῶν πρώτων πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίων αὐτῶν 4 καὶ 3 εἶναι ἀριθμὸς διψήφιος, τὸ γινόμενον αὐτῶν θέλει ἔχει προφανῶς τόσα ψηφία, ὅσα ἔχουσιν ἀμφότεροι οἱ παράγοντες αὐτοῦ, ἤτοι 7. Ὅταν δὲ τὸ γινόμενον τῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ πρώτων ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ πολλαπλασιαστοῦ ἦναι ἀριθμὸς μονοψήφιος, τότε δὲν δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν μετά τινος βεβαιότητος, ἂν τὸ ζητούμενον γινόμενον αὐτῶν θέλει ἔχει τόσα ψηφία ὅσα ἔχουσιν ἀμφότεροι πλὴν ἑνός, ἢ ὅσα ἔχουσιν ἀμφότεροι· διότι πιθανὸν τὰ κρατούμενα τῶν προηγουμένων μερικῶν γινομένων προστιθέμενα εἰς τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος γινόμενον νὰ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διψήφιον. Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 2964 ἐπὶ 435, δὲν δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον 2×4 τῶν πρώτων πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίων αὐτῶν 2 καὶ 4 εἶναι ἀριθμὸς μονοψήφιος, τὸ γινόμενον αὐτῶν θέλει ἔχει τόσα ψηφία, ὅσα ἔχουσιν ἀμφότεροι πλὴν ἑνός· διότι τὸ μετὰ τὸ πρῶτον ψηφίον 2 δεύτερον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου εἶναι 9, ὅπερ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 4 δίδει γινόμενον 36, καὶ ἠθέλομεν ἔχει ἐν τῇ ἐκτελέσει τοῦ πολλαπλασιασμοῦ 3 τὰ κρατούμενα, ἅτινα προτιθέμενα εἰς τὸ γινόμενον τοῦ 2 ἐπὶ 4 δίδουσιν ἄθροισμα 11, ἤτοι ἀριθμὸν διψήφιον, ὅτε κατὰ τὰ προλεχθέντα τὸ γινόμενον αὐτῶν ἔχει τόσα ψηφία, ὅσα ἔχουσιν ἀμφότεροι οἱ παράγοντες αὐτοῦ.

ΒΑΣΑΝΟΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ.

31. Ἡ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γίνεται ἐπαναλαμβανομένης τῆς πράξεως λαμβανομένου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὡς πολλαπλασιαστέου, καὶ ἀντιστρόφως. Ἐὰν οὕτως εὑρεθῇ τὸ αὐτὸ γινόμενον, εἶναι βέβαιον ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι σχεδὸν κατὰ πάντα ὅμοιος ἐκείνῳ, ὃν ἐδώσαμεν καὶ διὰ τὴν βάσανον τῆς πρόσθεσεως. Ἀλλὰ πρὸς τοῦτο πρέπει ν' ἀποδείξωμεν καὶ τὸ ἑξῆς θεώρημα.

32. **ΘΕΩΡΗΜΑ**. *Τὸ γινόμενον δύο παραγόντων δὲν μεταβάλλεται μεταβαλλομένης τῆς τάξεως τῶν παραγόντων αὐτοῦ.*

Λέγω π. χ. ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 4 εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τοῦ 4 ἐπὶ 5. Διότι, ἐὰν γράψωμεν ἐπί τινος ὁριζοντίου γραμμῆς τόσας μονάδας, ὅσας περιέχει ὁ 5, καὶ ἐπαναλάβωμεν τόσας τοιαύτας γραμμάς, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ 4, θέλομεν σχηματίσει τὸν ἑξῆς πίνακα·

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

ὅστις, καθ' ὃν τρόπον κατεσκευάσθη, περιέχει τόσας μονάδας, ὅσας καὶ τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 4. Ἀλλ' ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν τὰς ἐν ἑκάστῃ καθέτῳ αὐτοῦ στήλῃ περιεχομένας μονάδας, βλέπομεν ὅτι ὑπάρχουσι 4 μονάδες, καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσι 5 τοιαῦται ὅμοιαι στῆλαι, ἕπεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν αὐτῶν μονάδων εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ 4 ἐπὶ 5. Τὰ δύο λοιπὸν γινόμενα 5×4 καὶ 4×5 εἶναι ἴσα, ὡς παριστῶντα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν τῷ αὐτῷ πίνακι περιεχομένων μονάδων. Τὸ γινόμενον λοιπὸν δύο παραγόντων δὲν μεταβάλλεται μεταβαλλομένης τῆς τάξεως τῶν παραγόντων αὐτοῦ.

ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ.

33. *Γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν ἢ πολλῶν παραγόντων* καλεῖται τὸ ἐξαγόμενον, ὅπερ εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸν πρῶτον ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν δεύτερον, τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν τρίτον, καὶ οὕτω καθεξῆς. Π. χ. τὸ γινόμενον $7 \times 4 \times 5 \times 6$ παριστᾷ τὸ ἐξαγόμενον, ὅπερ εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸν 7 ἐπὶ 4, τὸ γινόμενον 28 ἐπὶ 5, τὸ δεύτερον τοῦτο γινόμενον 140 ἐπὶ 6.

34. **ΘΕΩΡΗΜΑ**. *Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται ὁπωσδήποτε καὶ ἂν μεταβληθῇ ἡ τάξις αὐτῶν.*

Παραδείγματος χάριν, τὸ ἀνωτέρω γινόμενον $7 \times 4 \times 5 \times 6$ εἶναι ἴσον τῷ $5 \times 7 \times 6 \times 4$, ὅπερ περιέχει τοὺς αὐτούς, οὓς καὶ τὸ πρῶτον, παράγοντας, ἀλλὰ κατ' ἄλλην τινὰ τάξιν.

Ἵνα ἀποδείξωμεν τὸ ἀνωτέρω θεώρημα θέλομεν ἀποδείξει τρία τινά

1ον. *Τὸ γινόμενον τριῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται ἐναλλασσομένης τῆς τάξεως τῶν δύο τελευταίων.*

Λέγω π. χ. ὅτι τὰ δύο γινόμενα 6×5×4 καὶ 6×4×5, ἅτινα δὲν διαφέρουσι εἰμὴ κατὰ τὴν τάξιν τῶν δύο τελευταίων αὐτῶν παραγόντων 5 καὶ 4, εἶναι ἴσα.

Τῷ ὄντι, ἐὰν γράψωμεν ἐπί τινος ὁριζοντίου γραμμῆς πεντάκις τὸν πρῶτον παράγοντα 6 τοῦ γινομένου 6×5×4 καὶ ἐπαναλάβωμεν 4 τοιαύτας γραμμάς, θέλομεν σχηματίσει τὸν ἑξῆς πίνακα·

6	6	6	6	6
6	6	6	6	6
6	6	6	6	6
6	6	6	6	6

Ἐπειδὴ δὲ ἡ πρώτη τοῦ πίνακος τούτου ὁριζόντιος σειρὰ περιέχει πεντάκις τὸν 6, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν αὐτῇ περιεχομένων ἀριθμῶν θέλει κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ 6×5, καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσι 4 ὅμοιαι σειραί, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θέλει εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τοῦ 6×5 ἐπὶ 4, ἤτοι θέλει εἶναι 6×5×4. Ἀλλ' ἐὰν θεωρήσωμεν τὸν αὐτὸν πίνακα ὡς ἀποτελούμενον ἐξ ὁμοίων καθέτων στηλῶν, βλέπομεν ὅτι ἑκάστη κάθετος στήλη περιέχει τετράκις τὸν 6, ἤτοι εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ 6×4, καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσι 5 τοιαῦται, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν αὐταῖς ἀριθμῶν θέλει εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τοῦ 6×4 ἐπὶ 5, ἤτοι θέλει εἶναι 6×4 ×5. Τὰ δύο λοιπὸν γινόμενα 6×5×4, 6×4×5 εἶναι ἴσα, ὡς παριστῶντα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν τῷ αὐτῷ πίνακι περιεχομένων ἀριθμῶν, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ἐν πρώτοις ν' ἀποδείξωμεν.

2ον. *Τὸ γινόμενον πλειοτέρων παραγόντων δὲν μεταβάλλεται ἐναλλασσομένης τῆς τάξεως δύο διαδοχικῶν αὐτοῦ παραγόντων.*

Λέγω, παραδείγ. χάριν, ὅτι τὰ δύο γινόμενα 5×3×7×6×9, 5×3×6×7×9, ἅτινα δὲν διαφέρουσιν εἰμὴ κατὰ τὴν τάξιν τῶν δύο διαδοχικῶν παραγόντων 7 καὶ 6, εἶναι ἴσα.

Τῷ ὄντι, πρὸς εὕρεσιν τῶν ἴσων μὲ τὰ ἀνωτέρω γινόμενα ἀριθμῶν πρέπει διὰ μὲν τὸ πρῶτον νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 5 ἐπὶ 3, τὸ γινόμενον αὐτῶν 15 ἐπὶ 7, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ 6, καὶ τὸ ἐντεῦθεν προκύπτον γινόμενον ἐπὶ 9, διὰ δὲ τὸ δεύτερον θέλομεν πολλαπλασιάσει τὸν 5 ἐπὶ 3, τὸ γινόμενον αὐτῶν 15 ἐπὶ 6, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ 7 καὶ τὸ ἐντεῦθεν προκύπτον ἐπὶ 9. Ἀλλὰ κατὰ τὰ προαποδειχθέντα τὰ γινόμενα 15×7×6 καὶ 15×6×7, ἅτινα ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς τρεῖς παράγοντας καὶ δὲν διαφέρουσιν εἰμὴ κατὰ τὴν τάξιν τῶν δύο τελευταίων, εἶναι ἴσα. Ἄρα καὶ τὰ γινόμενα τούτων ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 9 θέλουσιν εἶναι ἴσα. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἰσότητα,

$$15\times7\times6\times9=15\times6\times7\times9,$$

ἢ τὴν ἑξῆς $\quad 5\times3\times7\times6\times9=5\times3\times6\times7\times9,$

δι' ἧς ἀποδεικνύεται τὸ ἀνωτέρω 2ον θεώρημα.

3ον *Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται μεταβαλλομένης ὁπωσδήποτε τῆς τάξεως τῶν παραγόντων αὐτοῦ.*

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι τὰ γινόμενα $5\times2\times3\times7\times6$ καὶ $7\times3\times6\times5\times2$, ἅτινα ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς παράγοντας, ἀλλὰ κατ' ἄλλην τινὰ ὅλως αὐθαίρετον τάξιν, εἶναι ἴσα.

Διότι ἐν τῷ δευτέρῳ γινομένῳ $7\times3\times6\times5\times2$ δυνάμεθα κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα νὰ μεταβάλωμεν τὴν τάξιν τῶν δύο διαδοχικῶν αὐτοῦ παραγόντων 6 καὶ 5, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία αὐτοῦ. Οὕτως ὁ 5 θέλει προχωρήσει μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ θέλει γίνει διαδοχικὸς τοῦ 3, οὗτινος τὴν θέσιν δύναται νὰ καταλάβῃ ἐναλλασσόμενος μετ' αὐτοῦ, ὅτε γίνεται διαδοχικὸς τοῦ 7, οὗτινος πάλιν τὴν θέσιν δύναται νὰ καταλάβῃ ἐναλλασσόμενος μετ' αὐτοῦ, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ γινόμενον. Τὸ νέον λοιπὸν γινόμενον $5\times7\times3\times6\times2$ θέλει εἶναι ἴσον τῷ $7\times3\times6\times5\times2$. Ἀλλ' ὅπως ἐδώσαμεν εἰς τὸν παράγοντα 5 τοῦ δευτέρου γινομένου $7\times3\times6\times5\times2$ τὴν πρώτην θέσιν, χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὴν ἀξίαν αὐτοῦ, δυνάμεθα ὁμοιοτρόπως νὰ δώσωμεν εἰς τὸν παράγοντα αὐτοῦ 2 τὴν δευτέραν, εἰς τὸν 3 τὴν τρίτην, εἰς τὸν 7 τὴν τετάρτην κτλ., ἐν ἄλλαις λέξεσι, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τοὺς παράγοντας τοῦ δευτέρου γινομένου $7\times3\times6\times5\times2$ τὴν αὐτὴν θέσιν, ἣν ἔχουσι καὶ ἐν τῷ πρώτῳ $5\times2\times3\times7\times6$, καὶ τὸ προκύπτον τελικὸν γινόμενον νὰ ἦναι ἴσον αὐτῷ. Τὰ δύο λοιπὸν γινόμενα $5\times2\times3\times7\times6$ καὶ $7\times3\times6\times5\times2$, ἅτινα δὲν διαφέρουσιν εἰμὴ κατὰ τὴν τάξιν τῶν παραγόντων αὐτῶν, εἶναι ἴσα.

35. **ΘΕΩΡΗΜΑ**. *Ἀριθμός τις πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ διαδοχικῶς ἐφ' ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου.*

Λέγω π. χ. ὅτι ὁ ἀριθμὸς 3 πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ γινόμενον $2\times5\times6$, ἤτοι ἐπὶ 60, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν πρῶτον αὐτοῦ παράγοντα 2, τὸ ἐντεῦθεν προκύπτον γινόμενον ἐπὶ τὸν δεύτερον

5 καὶ τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον παράγοντα 6. Διότι τὸ γινόμενον 3×60 εἶναι ἴσον τῷ 60×3. Ἀλλ' ἐὰν ἀντὶ 60 θέσωμεν τὸ ἴσον αὐτῷ $2\times5\times6$, θέλομεν ἔχει $60\times3=2\times5\times6\times3$, ἤ, δίδοντες εἰς τὸν 3 τὴν πρώτην θέσιν, $60\times3=3\times2\times5\times6$, τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ ἀνωτέρω θεώρημα.

36. Ἐκ τῶν ἐν ταῖς §§ 34 καὶ 35 ἀποδειχθέντων θεωρημάτων πορίζόμεθα διαφόρους συνεπείας μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν τὰς ἑξῆς δύο, ὧν γίνεται συχνοτέρα χρῆσις.

1ον. *Εἰς γινόμενον πολλῶν παραγόντων δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ὁσουσδήποτε παράγοντας διὰ τοῦ ἐκτελεσθέντος γινομένου αὐτῶν.*

Παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ γινόμενον $2\times5\times7\times4\times6\times9$ δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν κατ' ἀρέσκειαν τοὺς παράγοντας αὐτοῦ 2, 7 καὶ 6 διὰ τοῦ ἐκτελεσθέντος γινομένου αὐτῶν 84, καὶ τὸ οὕτω προκύπτον νέον γινόμενον $5\times4\times9\times84$ θέλει εἶναι ἴσον τῷ δεδομένῳ $2\times5\times7\times4\times6\times9$.

Διότι δυνάμεθα νὰ μεταβάλωμεν οὕτω τὴν θέσιν τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου $2\times5\times7\times4\times6\times9$, ὥστε οἱ παράγοντες αὐτοῦ 2, 7 καὶ 6 νὰ ἦναι πρῶτοι, καὶ θέλομεν ἔχει

$$2\times5\times7\times4\times6\times9=2\times7\times6\times5\times4\times9,$$

ἢ $$2\times5\times7\times4\times6\times9=84\times5\times4\times9,$$

ἢ $$2\times5\times7\times4\times6\times9=5\times4\times9\times84,$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

2ον. *Γινόμενον πολλῶν παραγόντων πολλαπλασιάζεται ἐπί τινα ἀριθμόν, ἐὰν εἷς ὁποιοσδήποτε τῶν παραγόντων αὐτοῦ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.*

Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον $2\times3\times7\times6\times4$ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 5, ἐὰν ὁποιοσδήποτε τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ὁ 3 καθ' ὑπόθεσιν, πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5.

Διότι τὸ γινόμενον $2\times3\times7\times6\times4$ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 5, ἐὰν συγκαταριθμηθῇ καὶ ὁ 5 μεταξὺ τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ὅτε ἔχομεν τὸ γινόμενον $2\times3\times7\times6\times4\times5$. Ἀλλὰ κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα προηγουμένως δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἐν τῷ γινομένῳ $2\times3\times7\times6\times4\times5$ τοὺς παράγοντας 5 καὶ 3 αὐτοῦ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 15, καὶ θέλομεν ἔχει $2\times15\times7\times6\times4$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τὸ γινόμενον $2\times3\times7\times6\times4$ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 5, ἑνὰ εἰς τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ὁ 3 καθ' ὑπόθεσιν, πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5.

ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ.

37. Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἴσων ἀριθμῷ τινι καλεῖται *δύναμις* αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἴσων παραγόντων ἀποτελεῖ τὸν *βαθμὸν* τῆς δυνάμεως καὶ καλεῖται *ἐκθέτης*. Π. χ. τὸ γινόμενον $3\times3\times3\times3$ καλεῖται δύναμις τοῦ 3. ὁ δὲ ἀριθμὸς 4 τῶν ἴσων αὐτοῦ παραγόντων παριστᾷ τὸν βαθμὸν τῆς δυνάμεως.

Πρὸς παράστασιν δυνάμεώς τινος δεδομένου ἀριθμοῦ γράφομεν ἅπαξ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ὀλίγον ἄνωθεν τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως αὐτοῦ. Οὕτως 7^2, 5^7, 6^3 παριστῶσι τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ 7, τὴν ἑβδόμην τοῦ 5, τὴν τρίτην τοῦ 6. Ἡ πρώτη δύναμις ἀριθμοῦ τινος γράφεται ἄνευ ἐκθέτου, οἷον 5, 3, ἀντὶ 5^1, 3^1. Ὠνομάσθη δὲ ὁ 3, ὁ 5 πρώτη δύναμις τοῦ 5, τοῦ 3 ἐξ ἀναλογίας, διότι πράγματι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι δὲν εἶναι δυνάμεις, ὡς μὴ ὄντες γινόμενα πολλῶν παραγόντων ἴσων τῷ 5, τῷ 3.

Ὕψωσις εἰς δυνάμεις καλεῖται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς σχηματίζομεν τὰς δυνάμεις ἀριθμοῦ τινος.

38. **ΘΕΩΡΗΜΑ**. *Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων ἀριθμοῦ τινος εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν δύο παραγόντων.*

Ἔστω τὸ γινόμενον $5^3\times5^4$. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἐν τῇ § 35 τὸ γινόμενον $5^3\times5^4$ εἶναι ἴσον τῷ $5^3\times5\times5\times5\times5$, καὶ τοῦτο πάλιν κατὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα τῆς δυνάμεως ὁρισμὸν ἴσον τῷ 5^7, ἤτοι 5^{3+4}.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἠθέλομεν ἀποδείξει ὅτι *τὸ γινόμενον πλειοτέρων δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων.*

Ἔστω π. χ. τὸ γινόμενον $3^2\times3^3\times3^5\times3^7$. Θέλομεν ἔχει διαδοχικῶς $3^2\times3^3\times3^5\times3^7=3^5\times3^5\times3^7=3^{10}\times3^7=3^{17}=3^{2+3+5+7}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐπειδὴ $10=10^1$, θέλομεν ἔχει $100=10^2$, $1000=10^3$,..., τουτέστιν ὁ ἀριθμός, ὁ ἀποτελούμενος ἐκ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑφ' ὁσωνδήποτε μηδενικῶν, εἶναι ἴσος μὲ δύναμίν τινα τοῦ 10, ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκολουθούντων τὴν μονάδα μηδενικῶν. Οὕτως, ἐὰν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν τὸν ὑπὸ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ 8 μηδενικῶν ἀποτελούμενον ἀριθμόν, θέλομεν γράψει 10^8, ἐὰν δὲ τὸν ὑπὸ ν, θέλομεν γράψει 10^ν.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΙΝΟΣ ΕΠΙ ΤΙΝΑ ΔΙΑΦΟΡΑΝ.

39. Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 8 ἐπὶ τὴν διαφορὰν 5—3, ἤτοι νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $8\times(5-3)$ χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ ἀφαίρεσις. Λέγομεν ὅτι τὸ ζητούμενον γινόμενον εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος 8 ἐπὶ τὸν μειωτέον 5 καὶ ἀφαιρετέον 3 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 5—3, καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου 8×5 ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον γινόμενον 8×3, ἤτοι ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$8\times(5-3)=8\times5-8\times3.$$

Διότι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὸ γινόμενον θέλει σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου 8, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστὴς 5—3 ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος. Ἀλλὰ προφανῶς ὁ πολλαπλασιαστὴς 5—3 ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος, ἀφοῦ ἐπανελήφθη αὕτη πρῶτον πεντάκις, ἔπειτα τρίς, καὶ ἀφῃρέθη ἀπὸ τοῦ πενταπλασίου τὸ τριπλάσιον αὐτῆς. Λοιπὸν καὶ τὸ γινόμενον θέλει σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου 8 ἀφοῦ ἐπαναληφθῇ οὗτος πρῶτον πεντάκις, ἤτοι 8×5, ἔπειτα τρίς, ἤτοι 8×3, καὶ ἀπὸ τοῦ πενταπλασίου αὐτοῦ 8×5 ἀφαιρεθῇ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ 8×3. Θέλομεν λοιπὸν ἐν ἄλλαις λέξεσιν ἔχει τὴν ἰσότητα $8\times(5-3)=8\times5-8\times3$, ἧς τὸ ἀληθὲς ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Τὰ δύο γινόμενα $2\times3\times7\times5$, $3\times14\times5$, εἶναι ἴσα;

II. Τὰ τρία γινόμενα $3\times5\times2\times7\times9$, $5\times9\times7\times6$, $9\times30\times7$ εἶναι ἴσα;

III. Πῶς παρίσταται τὸ γινόμενον τῆς διαφορᾶς 11—5 ἐπὶ 7 χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις;

IV. Πῶς παρίσταται τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 3 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $2\times5+4\times7$ χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις;

V. Πῶς παρίσταται τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος $2\times5+4\times7$ ἐπὶ τὴν διαφορὰν 8—4 χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις;

VI. Ποῖον εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο γινομένων $2\times3^2\times7$, $5\times7^2\times8$, καὶ πῶς σημειόνεται ἁπλούστερον;

VII. Τὰ δύο γινόμενα $2\times3^2\times7\times5\times7^2$, $2\times3^2\times7^3\times5$ εἶναι ἴσα;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ.

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

40. *Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς δεδομένων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκομεν τρίτον, δεικνύοντα ποσάκις ὁ δεύτερος τῶν δεδομένων ἀριθμῶν ἐμπεριέχεται ἐν τῷ πρώτῳ.*

Ὁ πρῶτος τῶν δεδομένων ἀριθμῶν καλεῖται *διαιρετέος*, ὁ δεύτερος *διαιρέτης* καὶ ὁ ζητούμενος τρίτος *πηλίκον*.

Ἡ διαίρεσις παρίσταται διὰ τοῦ σημείου :, ὅπερ ἀπαγγέλλεται *νὰ διαιρεθῇ διὰ* ἢ ἁπλῶς *διά*. Οὕτως ἡ παράστασις 8 : 2 ἀπαγγέλλεται 8 *νὰ διαιρεθῇ διὰ* 2 ἢ ἁπλῶς 8 *διὰ* 2.

41. Ἵνα εὕρωμεν ποσάκις ἀριθμός τις ἐμπεριέχεται ἐν ἄλλῳ τινί, ἀρκεῖ νὰ ἴδωμεν ποσάκις ὁ πρῶτος δύναται ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ δευτέρου. Ἐὰν θέλωμεν π. χ. νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 14 διὰ 4, ἀφαιροῦμεν τὸν 4 ἀπὸ τοῦ 14 καὶ εὑρίσκομεν διαφορὰν 10· ἀπὸ τῆς εὑρεθείσης διαφορᾶς 10 ἀφαιροῦμεν πάλιν τὸν 4, καὶ εὑρίσκομεν νέαν διαφορὰν 6· ἀπὸ ταύτης ἀφαιροῦμεν πάλιν τὸν 4, καὶ εὑρίσκομεν διαφορὰν 2, ἀφ' ἧς ὁ διαιρέτης 4 δὲν δύναται ν' ἀφαιρεθῇ. Ἡ μὲν διαφορὰ 2, ἀφ' ἧς δὲν δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν διαιρέτην 4, καλεῖται *ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως*, ὁ δὲ ἀριθμὸς 3, ὅστις δεικνύει ποσάκις ὁ διαιρέτης 4 ἀφῃρέθη ἀπὸ τοῦ διαιρετέου 14, εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Ὅταν τὸ ὑπόλοιπον ἦναι *μηδέν*, τότε λέγομεν ὅτι *ἡ διαίρεσις ἐκτελεῖται ἀκριβῶς*.

Ὁ διὰ διαδοχικῶν τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρέσεων πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου τρόπος, ὃν πορίζόμεθα ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς διαιρέσεως, ἤθελεν εἶναι σχεδὸν ἀκατόρθωτος, ὅταν οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ καὶ τὸ πηλίκον αὐτῶν ἦναι ἀρκούντως μεγάλοι, ὅπως, προκειμένου καὶ περὶ πολλαπλασιασμοῦ, ἡ διαδοχικὴ τοῦ πολλαπλασιαστέου εἰς ἑαυτὸν πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου πρόσθεσις ἤθελεν εἶναι λίαν ἐπίπονος, ὅταν οἱ παράγοντες τοῦ γινομένου ἦναι ἀρκούντως μεγάλοι. Ἀλλὰ καθὼς τότε εὕρομεν τρόπον, δι' οὗ εὑρίσκομεν εὐκόλως τὸ γινόμενον δύο ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν, θέλομεν, ἀκολουθοῦντες ὁμοίαν τινὰ ὁδόν, πορισθῇ μετ' ὀλίγον καὶ διὰ τὴν διαίρεσιν κανόνα, δι' οὗ εὑρίσκομεν λίαν εὐκόλως τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν.

42. Κατὰ τὸν περὶ διαιρέσεως ὁρισμόν, *ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ.* Ὁ διαιρετέος 14, παραδείγματος χάριν, εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου 4 ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον 3 σὺν τῷ εὑρεθέντι ὑπολοίπῳ 2, τοῦθ' ὅπερ παρίσταται διὰ τῆς ἰσότητος $14=4\times3+2$.

Ὅταν τὸ ὑπόλοιπον ἦναι μηδέν, τότε ὁ διαιρετέος θέλει εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, ἤ, ὅπερ ταὐτό, ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην (32). Ἐπομένως ἐν τῇ μερικῇ ταύτῃ περιπτώσει δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν διαίρεσιν ὡς *πρᾶξιν, δι' ἧς δοθέντα ἀριθμὸν (τὸν διαιρετέον) διαιροῦμεν εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας μονάδας ἔχει δεύτερός τις δεδομένος ἀριθμὸς (ὁ διαιρέτης).* Τότε τὸ πηλίκον θέλει εἶναι τὸ ἓν τῶν ἴσων τούτων μερῶν.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου παρήχθησαν αἱ ὀνομασίαι *διαίρεσις, διαιρετέος* καὶ *διαιρέτης.*

ΜΕΡΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ, ΚΑΘ' ΗΝ ΤΟ ΠΗΛΙΚΟΝ ΕΙΝΑΙ ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΟΝΟΨΗΦΙΟΣ.

43. Τὸ πηλίκον διαιρέσεώς τινος εἶναι ἀριθμὸς μονοψήφιος, ὅταν ὁ ἀποτελούμενος ἀριθμὸς γραφομένου ἑνὸς μηδενικοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου ἦναι μεγαλείτερος τοῦ διαιρετέου· διότι τότε ὁ διαιρετέος δὲν περιέχει δεκάκις τὸν διαιρέτην, ὡς μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ.

Ἡ περίπτωσις αὕτη περιλαμβάνει τὰς ἑξῆς δύο· ὅταν ὁ διαιρέτης ἦναι ἀριθμὸς μονοψήφιος, καὶ ὅταν οὗτος ἦναι ἀριθμὸς πολυψήφιος.

Ἂς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις τὸν διαιρέτην μονοψήφιον. Εἶναι φανερὸν ὅτι τότε, ἵνα τὸ πηλίκον ᾖ ἀριθμὸς μονοψήφιος, ὁ διαιρετέος δὲν δύναται νὰ ἔχῃ περισσότερα τῶν δύο ψηφίων. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον διὰ τοῦ πίνακος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς ἑξῆς. Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι προτιθέμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸν 59 διὰ 8. Μεταβαίνομεν εἰς τὴν ὀγδόην κάθετον τοῦ πίνακος στήλην, καὶ ζητοῦμεν τὸν ἐν αὐτῷ μεγαλείτερον ἀριθμόν, τὸν ἐμπεριεχόμενον εἰς τὸν δεδομένον διαιρετέον 59. Οὗτος εἶναι ὁ 56, ὅςις εἶναι γινόμενον τοῦ 8 ἐπὶ 7. Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς 7 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον, ἡ δὲ μεταξὺ τοῦ 59 καὶ 56 διαφορὰ 3 τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως. Πράγματι, ἐπειδὴ γνωρίζομεν ἐκ στήθους τὸν πίνακα τοῦ Πυθαγόρου, δὲν καταφεύγομεν εἰς αὐτὸν, ἀλλὰ σχηματίζομεν ἐν τῷ νῷ ἡμῶν τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς ἐννέα ἀρχικοὺς ἀριθμούς, καὶ βλέπομεν συνάμα, ἂν ὁ διαιρετέος ἦναι ἴσος μέ τι τούτων ἢ περιέχεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν γινομένων. Τότε τὸ πηλίκον θέλει εἶναι ὁ ἀριθμός, ἐφ' οὗ πολλαπλασιασθεὶς ὁ διαιρέτης δίδει τὸν διαιρετέον, ἢ τὸ μικρότερον τῶν δύο διαδοχικῶν γινομένων, μεταξὺ τῶν ὁποίων εὑρέθη περιεχόμενος οὗτος.

44. Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα τὸν διαιρέτην πολυψήφιον. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον διά τινων δοκιμῶν, ὡς ἑξῆς.

Ἔστω π.χ. νὰ διαιρεθῇ ὁ 5905 διὰ τοῦ 859. Ἐὰν ἀντὶ τοῦ διαιρέτου 859 λάβωμεν ὡς τοιοῦτον τὸν 800, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 5905 διὰ 800 θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μεγαλείτερον τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ αὐτοῦ διαιρετέου 5905 διὰ τοῦ δεδομένου διαιρέτου 859. Ἀλλ', ἵνα ἴδωμεν ποσάκις ὁ διαιρέτης 800 περιέχεται εἰς τὸν διαιρετέον 5905, ἀρκεῖ προφανῶς νὰ ἴδωμεν ποσάκις αἱ 8 ἑκατοντάδες αὐτοῦ περιέχονται εἰς τὰς 59 ἑκατοντάδας τοῦ διαιρετέου, ἤτοι ποσάκις ὁ 8 περιέχεται εἰς τὸν 59. Εὑρίσκομεν δὲ οὕτω πηλίκον 7, ὅπερ, ὡς προείπομεν, θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μεγαλείτερον τοῦ ζητουμένου. Ἵνα βεβαιωθῶμεν περὶ τούτου, δοκιμάζομεν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον 7 πολλαπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην 859 ἐπὶ τοῦτο καὶ παραβάλλοντες τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον αὐτῶν 6013 πρὸς τὸν δεδομένον διαιρετέον 5905. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον 6013 εἶναι μεγαλείτερον τοῦ διαιρετέου 5905, τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 7. Τούτου ἕνεκα δοκιμάζομεν τὸν ἀμέσως μικρότερον τοῦ 7 ἀριθμὸν 6, καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ 859 ἐπὶ 6 εἶναι 5154, τουτέστιν ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ διαιρέτου 5905, συμπεραίνομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 6 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

45. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ποριζόμεθα εὐκόλως τὸν ἑξῆς κανόνα.

Ἵνα διαιρέσωμεν δύο ὁποιουσδήποτε ἀριθμούς, ὅταν τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι ἀριθμὸς μονοψήφιος, διαιροῦμεν διὰ τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίου τοῦ διαιρέτου τὸν ἀριθμόν, τὸν ἀποτελούμενον ὑπὸ τῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίων τοῦ διαιρετέου, τῶν παριστώντων μονάδας τῆς αὐτῆς τῷ πρώτῳ ψηφίῳ τοῦ διαιρέτου τάξεως. Τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον πηλίκον αὐτῶν θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ ζητουμένου. Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον, καὶ ἐὰν τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον ἦναι μικρότερον τοῦ διαιρετέου, τὸ εὑρεθὲν πηλίκον θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον, εἰ δὲ μὴ δοκιμάζομεν τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον ἀριθμόν, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν ἀριθμόν, ἐφ' ὃν πολλαπλασιασθεὶς ὁ διαιρέτης νὰ δίδῃ γινόμενον μικρότερον τοῦ διαιρετέου. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν πηλίκον.

Διατάσσομεν συνήθως τὰ τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 5905 & 859 \\ \cline{2-2} \underline{5154} & \quad 6 \\ 751 & \end{array}$$

Γράφομεν τὸν διαιρέτην πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου καὶ χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ καθέτου γραμμῆς. Γράφομεν γραμμὴν ὑπὸ τὸν διαιρέτην καὶ ὑπὸ τὴν γραμμὴν ταύτην τὸ ἀκριβὲς ψηφίον τοῦ πηλίκου, ὅταν εὕρωμεν αὐτό. Ὑπὸ τὸν διαιρετέον γράφομεν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ ἀκριβὲς ψηφίον τοῦ πηλίκου, ἄγομεν γραμμὴν ὑποκάτω, καὶ ὑπ' αὐτὴν γράφομεν τὴν μεταξὺ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ ὑπ' αὐτὸν γραφέντος γενομένου διαφοράν, ἥτις θέλει εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως.

46. Ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἀποφεύγομεν τοῦ νὰ γράφωμεν ὑπὸ τὸν διαιρετέον τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ ἀκριβὲς ψηφίον τοῦ πηλίκου. Τότε πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὑπολοίπου ἀφαιροῦμεν διαδοχικῶς τὰ γινόμενα τῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, κτλ. τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον ἀπὸ τῶν τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, κτλ. τοῦ διαιρετέου, καθόσον εὑρίσκομεν αὐτά. Ἵνα δὲ καταστήσωμεν τὰς διαφόρους ταύτας ἀφαιρέσεις δυνατάς, ποιοῦμεν χρῆσιν τῆς ἐν τῇ § 17 ἐκτεθείσης ἀρχῆς, ἐφ' ἧς στηρίζεται καὶ ὁ γενικὸς τῆς ἀφαιρέσεως κανών. Κατὰ τὴν περὶ ἧς ὁ λόγος ἀρχὴν προσθέτομεν εἰς ἕκαστον ψηφίον τοῦ διαιρετέου ἀναγκαῖον καὶ ἐπαρκοῦντα ἀριθμὸν δεκάδων, ἵνα ἡ πρὸς ἐκτέλεσιν προκειμένη ἀφαίρεσις κατασταθῇ δυνατή; προσθέτομεν δὲ ἀκολούθως, ἵνα μὴ ἡ ζητουμένη διαφορὰ μεταβληθῇ, ἴσον ἀριθμὸν μονάδων εἰς τὸ πρὸς ἀφαίρεσιν ἑπόμενον γινόμενον.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 5905 διὰ τοῦ 859. Ἀφοῦ εὕρωμεν ὡς προεξεθέσαμεν τὸ ἀληθὲς ψηφίον 6 τοῦ ζητουμένου πηλίκου, γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὸν διαιρέτην καὶ ἔπειτα λέγομεν· 9 ἐπὶ 6....54 ἀπὸ 55....1· γράφομεν 1 ὑπὸ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ διαιρετέου καὶ κρατοῦμεν 5· 5 ἐπὶ 6....30 καὶ 5 τὰ κρατούμενα 35 ἀπὸ 40....5· γράφομεν 5 ὑπὸ τὸ ψηφίον 0 τῶν δεκάδων τοῦ διαιρετέου καὶ κρατοῦμεν 4· 8 ἐπὶ 6....48 καὶ 4 τὰ κρατούμενα 52 ἀπὸ 59....7· γράφομεν 7 ὑπὸ τὸ ψηφίον 9 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ διαιρετέου, ὁ δὲ οὕτω γραφεὶς ἀριθμὸς 751 θέλει παριστᾷ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Πᾶς τις βλέπει εὐκόλως ὅτι, ἵνα καταστήσωμεν δυνατὴν τὴν πρώτην ἀφαίρεσιν, προσεθέσαμεν 5 δεκάδας εἰς τὰς 5 μονάδας τοῦ διαιρετέου· διὰ τὴν δευτέραν προσεθέσαμεν 4 δεκάδας, καὶ διὰ τὴν τρίτην ἐδανείσθημεν τὰς 5 δεκάδας τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίου τοῦ διαιρετέου· ἵνα δὲ μὴ μεταβληθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως προσεθέσαμεν εἰς τὸ δεύτερον γινόμενον τόσας μονάδας, ὅσας δεκάδας εἴχομεν προσθέσει εἰς τὰς μονάδας τοῦ διαιρετέου, ἤτοι 5, καὶ εἰς τὸ τρίτον γινόμενον, ὅσας δεκάδας εἴχομεν προσθέσει εἰς τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, ἤτοι 4.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. — Διὰ τοῦ ἀνωτέρω τοῦ ἐκτελεῖν τὴν διαίρεσιν τρόπου δυνάμεθα νὰ δοκιμάζωμεν ψηφίον τι χωρὶς νὰ γράφωμέν τι ὑπὸ τὸν διαιρετέον. Συνήθως αἱ δοκιμαὶ αὗται γίνονται ἐν τῇ πράξει ἐξ ὄψεως, ἀρκεῖ δὲ ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον, καὶ νὰ συγκρίνωμεν τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον πρὸς τὰς τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδας τοῦ διαιρετέου.

ΓΕΝΙΚΗ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ.

47. Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἔχομεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν δύο ἀριθμῶν, ὧν τὸ πηλίκον εἶναι ἀριθμὸς πολυψήφιος. Πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Ἵνα διαιρέσωμεν δύο ἀριθμούς, ὧν τὸ πηλίκον εἶναι ἀριθμὸς πολυψήφιος, γράφομεν τὸν διαιρέτην πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου καὶ χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ καθέτου γραμμῆς. Ἄγομεν γραμμὴν ὑπὸ τὸν διαιρέτην καὶ ὑπ' αὐτὴν γράφομεν τὰ διάφορα ψηφία τοῦ πηλίκου, καθόσον εὑρίσκομεν αὐτά.

Πρὸς τοῦτο χωρίζομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα ἀπαιτοῦνται, ἵνα σχηματισθῇ ἀριθμὸς μεγαλείτερος μὲν τοῦ διαιρέτου, μικρότερος ὅμως τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ. Ὁ οὕτως ἀποτελούμενος ἀριθμὸς καλεῖται πρῶτος μερικὸς διαιρετέος, τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ διαιρέτου θέλει εἶναι τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ ζητουμένου πηλίκου, καὶ θέλει παριστᾷ μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως, ἣν καὶ τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου. Ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον τοῦ πηλίκου ἀπὸ τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς εὑρεθησομένης διαφορᾶς καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον τῶν λοιπῶν ψηφίων τοῦ δεδομένου διαιρετέου, ἤτοι τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν πρὸς σχηματισμὸν τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου ἀποκοπέντων.

Διαιροῦμεν ἔπειτα τὸν οὕτω σχηματισθέντα ἀριθμόν, ὅστις καλεῖται δεύτερος μερικὸς διαιρετέος, διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου. Γράφομεν αὐτὸ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τοῦτο, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον ἀπὸ τοῦ δευτέρου μερικοῦ διαιρετέου.

Πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς εὑρεθησομένης διαφορᾶς γράφομεν τὸ δεύτερον τῶν ἀποκοπέντων ψηφίων τοῦ διαιρετέου. Σχηματίζομεν οὕτω τὸν καλούμενον τρίτον μερικὸν διαιρετέον, ὃν διαιροῦμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ καταβιβάσωμεν καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀποτελεσθησομένου μερικοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ εὑρεθησόμενον ψηφίον τοῦ πηλίκου. Ὁ οὕτως ὑπὸ τὸν διαιρέτην γραφεὶς ἀριθμὸς θέλει παριστᾷ τὸ ζητούμενον πηλίκον, ἡ δὲ τελευταία διαφορὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν πολυψήφιον ἀριθμὸν 590649 διὰ τοῦ 859. Ἐκτελοῦμεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς·

590649	859	590649	859
5154	687	7524	687
7524		6529	
6872		516	
6529			
5013			
516			

Χωρίζομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τὸν ἀριθμὸν 5906 ὅστις εἶναι μεγαλείτερος μὲν τοῦ διαιρέτου 859, μικρότερος δὲ τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ 8590, καὶ διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ διαιρέτου 859. Εὑρίσκομεν οὕτω τὸ πρῶτον ψηφίον 6 τοῦ ζητουμένου πηλίκου, ὅπερ θέλει παριστᾷ μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως, ἣν καὶ τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον 6 τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου 5906. Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὸν διαιρέτην 859 ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον 6 καὶ τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον 5154 ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου 5906. Εὑρίσκομεν οὕτω διαφορὰν 752, πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ὁποίας καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον μετὰ τὸ τελευταῖον ψηφίον 6 τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου 5906 ψηφίον 4 τοῦ δεδομένου διαιρετέου 590649, καὶ διαιροῦμεν πάλιν τὸν οὕτω σχηματιζόμενον δεύτερον μερικὸν διαιρετέον 7524 διὰ τοῦ διαιρέτου 859. Εὑρίσκομεν οὕτω τὸ δεύτερον τοῦ ζητουμένου πηλίκου ψηφίον 8, ὅπερ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου 6 καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπ' αὐτό. Ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ δευτέρου μερικοῦ διαιρετέου 7524 τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον 6872 εὑρίσκομεν διαφορὰν 652, πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ὁποίας καταβιβάζομεν καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον 9 τοῦ διαιρετέου. Σχηματίζομεν οὕτω τὸν τρίτον μερικὸν διαιρετέον 6529, ὃν διαιροῦντες πάλιν διὰ τοῦ διαιρέτου εὑρίσκομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον 7 τοῦ ζητουμένου πηλίκου 687. Γράφομεν τοῦτο πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν δύο πρώτων, καὶ ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ τρίτου μερικοῦ διαιρετέου 6529 τὸ γινόμενον 6013 τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον 7 τοῦ πηλίκου εὑρίσκομεν διαφορὰν 516, ἥτις θέλει παριστᾷ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Συνήθως, ἀντὶ νὰ διατάττωμεν τὰ τῆς πράξεως ὡς ἀνωτέρω ἐξεθέσαμεν, γράφομεν μόνον ὑπὸ τὸν δεδομένον διαιρετέον τοὺς διαφόρους μερικοὺς διαιρετέους ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἐφεξῆς. Τότε ἐκτελοῦμεν τὰς πρὸς εὕρεσιν τῶν διαφόρων ψηφίων τοῦ πηλίκου μερικὰς διαιρέσεις ὡς εἴπομεν ἐν τῇ § 46, καὶ διατάσσομεν τὰ τῆς πράξεως ὡς φαίνεται πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀνωτέρω ἐκτεθέντος παραδείγματος.

48. Ἵνα ἀποδείξωμεν τὸ ἀληθὲς τοῦ ἀνωτέρω κανόνος, συλλογιζόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρέτην 859 διαδοχικῶς ἐπὶ 10, 100, 1000, κτλ. μέχρις οὗ εὕρωμεν δύο διαδοχικὰ γινόμενα 85900, 859000, μεταξὺ τῶν ὁποίων νὰ περιέχηται ὁ δεδομένος διαιρετέος 590649, θέλομεν συμπεράνει ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 590649 διὰ τοῦ 859 πρέπει νὰ περιέχηται μεταξὺ τοῦ 100 καὶ τοῦ 1000· διότι ὁ διαιρετέος 590649 εὑρέθη μεγαλείτερος μὲν τοῦ 85900, τουτέστι τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου 859 ἐπὶ 100, μικρότερος δὲ τοῦ 859000, τουτέστι τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου 859 ἐπὶ 1000. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν πηλίκον, ὡς περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ 100 καὶ 1000, θέλει σύγκεισθαι ἐξ ἑκατοντάδων, δεκάδων καὶ μονάδων, καὶ εὑρίσκεται προφανῶς, ἐὰν εὑρεθῶσι τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων αὐτοῦ, τὸ τῶν δεκάδων καὶ τὸ τῶν μονάδων.

Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος 590649 θέλει εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου 859 ἐπὶ τὰς ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας τοῦ πηλίκου σὺν τῷ εὑρεθησομένῳ ὑπολοίπῳ, ἐὰν ὑπάρχῃ (42), τὸ δὲ γινόμενον τοῦ διαιρέτου 859 ἐπὶ *ἑκατοντάδας* εἶναι *ἑκατοντάδες*, πρέπει προφανῶς πρὸς εὕρεσιν τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου νὰ ἴδωμεν ποσάκις αἱ 859 ἑκατοντάδες περιέχονται εἰς τὰς ἑκατοντάδας 5906 τοῦ διαιρετέου, ἤτοι ποσάκις ὁ 859 περιέχεται ἐν τῷ ἀριθμῷ 5906, ὅστις ὡς βλέπομεν εἶναι μεγαλείτερος μὲν τοῦ διαιρέτου 859, μικρότερος δὲ τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ. Διαιροῦντες λοιπὸν τὸν πρῶτον μερικὸν διαιρετέον 5906 διὰ τοῦ διαιρέτου 859 θέλομεν εὕρει τὸ πρῶτον ψηφίον 6 τοῦ πηλίκου, ὅπερ θέλει παριστᾷ ἑκατοντάδας, ἤτοι μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως, ἣν καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον 6 τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου 5906.

Πολλαπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην 859 ἐπὶ τὰς εὑρεθείσας 6 ἑκατοντάδας καὶ ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ δεδομένου διαιρετέου 590649 τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον 515400, θέλομεν εὕρει διαφορὰν 75249, ἥτις θέλει εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὰς δεκάδας καὶ μονάδας τοῦ πηλίκου σὺν τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως, ἐὰν ὑπάρχῃ. Ἀλλὰ πάλιν, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου 859 ἐπὶ *δεκάδας* εἶναι *δεκάδες*, πρέπει προφανῶς πρὸς εὕρεσιν τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων τοῦ πηλίκου νὰ ἴδωμεν ποσάκις αἱ 859 δεκάδες περιέχονται εἰς τὰς 7524 δεκάδας τῆς εὑρεθείσης διαφορᾶς 75249, ἤτοι ποσάκις ὁ 859 περιέχεται ἐν τῷ ἀριθμῷ 7524, ὃν ἐκαλέσαμεν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον, καὶ ὅστις, ὡς εὐκόλως παρατηρεῖ τις, εὑρίσκεται γραφομένου τοῦ ψηφίου 4 τοῦ διαιρετέου πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς διαφορᾶς 752, ἣν εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου 5096 τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου 859 ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον 6 τοῦ πηλίκου. Διαιροῦντες λοιπὸν τὸν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον 7524 διὰ τοῦ διαιρέτου 859 θέλομεν εὕρει τὸ δεύτερον ψηφίον 8 τοῦ πηλίκοῦ, ὅπερ πρέπει νὰ γράψωμεν, ἐπειδὴ παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τοῦ προηγουμένου τάξεως, πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου.

Πολλαπλασιάζοντες πάλιν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὰς εὑρεθείσας 8 δεκάδας καὶ ἀφαιροῦντες τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον 68720 ἀπὸ τῆς πρώτης διαφορᾶς 75249, θέλομεν εὕρει διαφορὰν 6529, ἥτις θέλει εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὰς μονάδας τοῦ πηλίκου σὺν τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως, ἐὰν ὑπάρχῃ. Διαιροῦντες λοιπὸν τὸν τρίτον μερικὸν διαιρετέον 6529, ὅστις σχηματίζεται γραφομένου τοῦ ψηφίου 9 τοῦ διαιρετέου πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς διαφορᾶς 652, ἣν εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ δευτέρου μερικοῦ διαιρετέου 7524 τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου 859 ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον 8 τοῦ ζητουμένου πηλίκου, διὰ τοῦ διαιρέτου 859 θέλομεν εὕρει τὸ τρίτον ψηφίον 7 τοῦ πηλίκου, ὅπερ πρέπει νὰ γράψωμεν, ἐπειδὴ παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τῆς τοῦ προηγουμένου τάξεως, πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ προγραφέντος 8.

Πολλαπλασιάζοντες τέλος τὸν διαιρέτην 859 ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον 7 καὶ ἀφαιροῦντες τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον 6013 ἀπὸ τοῦ τρίτου μερικοῦ διαιρετέου 6529 εὑρίσκομεν διαφορὰν 516, ἥτις θέλει παριστᾷ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι καθ' ὃν τρόπον εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τοσάκις τὸν διαιρέτην, ὅσας μονάδας περιέχει τοῦτο, τουτέστιν ἐφαρμόζομεν κατὰ γράμμα τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως, τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ ἀληθὲς τοῦ ἀνωτέρω δοθέντος κανόνος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 1.—Ἐπειδὴ τὸ εὑρισκόμενον ἑκάστης μερικῆς διαιρέσεως ὑπόλοιπον εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου, ὁ σχηματιζόμενος ἐκ τῆς καταβιβάσεως ἑκάστου ἐκ τῶν ἀποκοπέντων ψηφίων τοῦ διαιρετέου μερικὸς διαιρετέος θέλει εἶναι προφανῶς μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου. Συμβαίνει ὅμως ἐνίοτε μερικός τις διαιρετέος νὰ ἦναι μικρότερος πάλιν τοῦ διαιρέτου. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ἀντιστοιχοῦν ψηφίον τοῦ πηλίκου εἶναι 0. Γράφομεν λοιπὸν τότε 0 εἰς τὸ πηλίκον, καὶ καταβιβάζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ μερικοῦ τούτου διαιρετέου τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 2.—Ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου εἶναι ἴσος τῇ διαφορᾷ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ψηφίων τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου, ἢ τῇ διαφορᾷ ταύτῃ αὐξηθείσῃ κατὰ μονάδα. Εἶναι δὲ ἴσος τῇ περὶ ἧς ὁ λόγος διαφορᾷ, ὅταν ὁ πρῶτος μερικὸς διαιρετέος ἔχῃ ἓν ψηφίον περισσότερον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ψηφίων τοῦ διαιρέτου, καὶ ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ ταύτῃ αὐξηθείσῃ κατὰ μονάδα, ὅταν ὁ πρῶτος μερικὸς διαιρετέος ἔχῃ ὅσα καὶ ὁ διαιρέτης ψηφία.

49. Ὅταν ὁ διαιρέτης ἦναι μονοψήφιος, τότε συνήθως δὲν γράφομεν οὔτε τοὺς μερικοὺς διαιρετέους. Ἔστω π. χ. νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 54802 διὰ 7. Διατάσσομεν ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 54802 & 7 \\ \hline 6 & 7828 \end{array}$$

Λέγομεν· *ὁ 7 εἰς τὸ 54 εἰσέρχεται 7κις· 7 ἐπὶ 7..49 ἀπὸ 54..5*
ὁ 7 εἰς τὸ 58 εἰσέρχεται 8κις· 7 ἐπὶ 8..56 ἀπὸ 58..2
ὁ 7 εἰς τὸ 20 εἰσέρχεται 2ις· 7 ἐπὶ 2..14 ἀπὸ 20..6
ὁ 7 εἰς τὸ 62 εἰσέρχεται 8κις· 7 ἐπὶ 8..56 ἀπὸ 62..6
γράφομεν δὲ μόνον τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον 6.

ΒΑΣΑΝΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

50. Ἡ βάσανος τῆς διαιρέσεως γίνεται πολλαπλασιαζομένου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ προστιθεμένου τοῦ ὑπολοίπου εἰς τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον. Ἐὰν τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον ἄθροισμα ἦναι ἴσον τῷ διαιρετέῳ, ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΙΝΟΣ ΔΙΑ ΤΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ.

51. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων, ἐὰν διαιρεθῇ πρῶτον διά τινος τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου, τὸ εὑρεθησόμενον πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου, τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ τρίτου καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ ληφθῶσιν οὕτως ὡς διαιρέται ἅπαντες οἱ παράγοντες τοῦ δεδομένου γινομένου.*

Τῷ ὄντι, ἔστω ὁ 192 νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 24, ὅστις εἶναι τὸ γινόμενον τῶν τριῶν παραγόντων 2, 3 καὶ 4. Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 192 διὰ 24 εἶναι 8, θέλομεν ἔχει τὴν ἑξῆς ἰσότητα $192=24\times8$. Ἐὰν δὲ ἐν αὐτῇ ἀντὶ τοῦ 24 θέσωμεν τὸ ἴσον αὐτῷ γινόμενον $2\times3\times4$, θέλομεν ἔχει τὴν ἑξῆς $192=2\times3\times4\times8$, ἥτις γράφεται καὶ οὕτω $192=8\times2\times3\times4$. Διαιροῦντες τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος διὰ 4 εὑρίσκομεν τὴν ἐπομένην:

$192 : 4 = 8\times2\times3$, (διότι τὸ γινόμενον τοῦ $8\times2\times3$ ἐπὶ 4 εἶναι $8\times2\times3\times4$). Διαιροῦντες πάλιν τὰ δύο μέλη τῆς εὑρεθείσης ἰσότητος διὰ 3 θέλομεν ἔχει $(192 : 4) : 3 = 8\times2$. Καὶ διαιροῦντες ἐκ νέου διὰ 2 τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας εὑρίσκομεν $(192 : 4 : 3) : 2 = 8$. Εὕρομεν λοιπὸν πάλιν τὸ αὐτὸ πηλίκον 8. Ἄρα ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου κτλ.

Παρατηρητέον ὅτι ὁ ἀνωτέρω συλλογισμὸς καθὼς καὶ τὸ θεώρημα ὑποθέτει ὅτι ὁ διαιρετέος 192 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ γινομένου $2\times3\times4$. Οὐχ ἧττον ὅμως ἡ ἀνωτέρω πρότασις ὑπάρχει καὶ καθ' ἣν περίπτωσιν ἡ διαίρεσις δὲν ἐκτελεῖται ἀκριβῶς, φθάνει μόνον ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ νὰ παραλείπωμεν τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαφόρων διαιρέσεων, ὁ δὲ σκοπός, ὃν προτιθέμεθα, νὰ ἦναι ἡ εὕρεσις ἁπλῶς τοῦ πηλίκου.

Παραδείγματος χάριν, ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητοῦμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 257 διὰ 24, ὅστις εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ $2\times3\times4$. Διαιροῦντες τὸν 257 διὰ 24 εὑρίσκομεν πηλίκον 10 καὶ ὑπόλοιπον 17. Τὸ αὐτὸ πηλίκον 10 ἠθέλομεν εὕρει ἂν διῃροῦμεν τὸν 257 διὰ τοῦ παράγοντος 4, τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον πηλίκον 64, παραβλεπομένου τοῦ ὑπολοίπου 1 τῆς πρώτης διαιρέσεως, διὰ τοῦ παράγοντος 3, καὶ τὸ νέον πηλίκον 21 διὰ τοῦ παράγοντος 2.

Διότι, ἐπειδὴ $257 = 24\times10+17$, ὁ 257 εἶναι μικρότερος τοῦ γινομένου 24×11. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν 257 περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο γινομένων 24×10 καὶ 24×11, ἤ, ὅπερ ταὐτό, μεταξὺ τῶν γινομένων $10\times2\times3\times4$ καὶ $11\times2\times3\times4$. Ἕπεται λοιπὸν ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ τοιούτου ἀριθμοῦ πρῶτον διὰ 4, ἔπειτα διὰ 3, ἔπειτα διὰ 2, παραβλεπομένων τῶν ὑπολοίπων ἑκάστης διαιρέσεως, ἀφ' ἑνὸς μὲν δὲν θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ 10, καὶ ἀφ' ἑτέρου θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ 11. Θέλει λοιπὸν εἶναι ἀκριβῶς ἴσον τῷ 10.

52. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πορίζόμεθα ὅτι *τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ἔχων ἐκθέτην τὸν ἀριθμόν, τὸν παριστῶντα τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου.*

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι προτιθέμεθα νὰ διαιρέσωμεν 5^7 διὰ 5^3. Κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἀρκεῖ πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου νὰ διαιρέσωμεν τὸν 5^7 διαδοχικῶς τρὶς διὰ 5. Θέλομεν λοιπὸν εὕρει οὕτω διὰ πηλίκον 5^4, ἤ, ὅπερ ταὐτό, 5^{7-3}.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου $2\times3\times5\times7$ διὰ 5;

II. Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου $2\times3\times5\times7$ διὰ 10;

III. Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου $2^5\times5\times7$ διὰ 2^3;

IV. Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου $2^5\times5\times7$ διὰ $2^3\times7$;

V. Πόσα ψηφία θέλει ἔχει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 5832546 διὰ τοῦ 432;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε.

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΣ.

—

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΤΑΙ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

53. Ὅταν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος δι' ἑτέρου ἦναι μηδέν, τότε ὁ μὲν πρῶτος καλεῖται *διαιρετὸς* διὰ τοῦ δευτέρου, ὁ δὲ δεύτερος λέγεται ὅτι *διαιρεῖ* τὸν πρῶτον ἢ καὶ *διαιρέτης* τοῦ πρώτου. Παραδείγματος χάριν, ὁ 12 διαιρούμενος διὰ 4 δίδει ὑπόλοιπον μηδέν. Λοιπὸν κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁ μὲν 12 εἶναι *διαιρετὸς* διὰ 4, ὁ δὲ τέσσαρα *διαιρεῖ* τὸν 12 ἢ εἶναι *διαιρέτης* τοῦ 12.

Πολλαπλάσιον ἀριθμοῦ τινος καλεῖται τὸ γινόμενον αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ ἐφ' ὁποιονδήποτε ἄλλον. Οὕτως ὁ 12 εἶναι *πολλαπλάσιον* τοῦ 4, ὡς γινόμενον τοῦ 4 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3. Βλέπομεν δὲ ὅτι πᾶν πολλαπλάσιον 12, 20 ἀριθμοῦ τινος 4 εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου· καὶ ἀντιστρόφως, πᾶς ἀριθμὸς 12, 20, διαιρετὸς δι' ἄλλου τινὸς 4, εἶναι ἓν τῶν πολλαπλασίων αὐτοῦ.

Ὑποπολλαπλάσιον ἢ *παράγων* ἀριθμοῦ τινος καλεῖται πᾶς ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὁ πρῶτος εἶναι πολλαπλάσιον. Π. χ. ὁ 4 εἶναι ὑποπολλαπλάσιον ἢ παράγων τοῦ 12, διότι ὁ 12 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4. Ὡσαύτως ὁ 3 εἶναι ὑποπολλαπλάσιον ἢ παράγων τοῦ 12, διότι ὁ 12 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3. Αἱ λέξεις λοιπὸν ὑπο*πολλαπλάσιον*, *παράγων* καὶ *διαιρέτης* ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἔννοιαν, τουτέστι σημαίνουσιν ὅτι διαιροῦσιν ἄνευ ὑπολοίπου τὸν πρὸς ὃν ἀναφέρονται ἀριθμόν.

54. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Πᾶς διαιρέτης πολλῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.*

Ἔστωσαν π. χ. ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ 20, 24, 32, κτλ. διαιρετοὶ διὰ 4. Ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν δεδομένων ἀριθμῶν 20, 24, 32, κτλ. σύγκειται ἐκ μερῶν ἴσων ἁπάντων τῷ 4, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 20+24+32 κτλ. θέλει ἀποτελεῖσθαι ἐκ μερῶν ἴσων ἁπάντων τῷ 4. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν 20+24+32 κτλ. θέλει εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4, ἢ ὁ 4 διαιρέτης τοῦ ἀθροίσματος.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Πᾶς διαιρέτης ἀριθμοῦ τινος εἶναι διαιρέτης καὶ τῶν πολλαπλασίων αὐτοῦ.*

Ἔστω π. χ. ὁ 6 διαιρέτης τοῦ 18. Ἐπειδὴ πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ 18 σύγκειται ἐκ μερῶν ἴσων ἁπάντων τῷ 18, τουτέστι διαιρετῶν διὰ 6, κατὰ τὰ προαποδειχθέντα καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, ἤτοι τὸ πολλαπλάσιον τοῦ 18, θέλει εἶναι διαιρετὸν διὰ 6. Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον 18×5, ὅπερ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 18, εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι $18+18+18+18+18$, ὅπερ σύγκειται ἐκ μερῶν διαιρετῶν ἁπάντων διὰ 6.

55. **ΘΕΩΡΗΜΑ**. *Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν δύο ἄλλους διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.*

Ἔστωσαν π. χ. δύο ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 5. Ἐπειδὴ ἑκάτερος τούτων σύγκειται ἐκ μερῶν ἴσων ἁπάντων τῷ 5, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν θέλει ἀποτελεῖσθαι ἐκ μερῶν ἴσων ἁπάντων τῷ 5, καὶ θέλει ἑπομένως εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5. Ὁ 5 λοιπὸν, ὁ διαιρῶν τοὺς περὶ ὧν ὁ λόγος δύο ἀριθμούς, θέλει διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

Ἐπειδὴ ὁ μειωτέος πάσης ἀφαιρέσεως ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς, τὸ αὐτὸ θεώρημα ἐκτίθεται καὶ ὡς ἑξῆς·

Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων καὶ ἕνα τούτων, διαιρεῖ ἀναγκαίως καὶ τὸν ἕτερον.

56. **ΘΕΩΡΗΜΑ**. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος δι' ἑτέρου δὲν μεταβάλλεται, ὅταν εἰς τὸν πρῶτον προστεθῇ ἢ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ πολλαπλάσιόν τι τοῦ δευτέρου.*

Διότι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὑπολοίπου πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τοσάκις τὸν διαιρέτην, ὁσάκις ἡ τοιαύτη ἀφαίρεσις εἶναι δυνατή· ἑπομένως, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸν πρῶτον ἢ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' αὐτοῦ πολλαπλάσιόν τι τοῦ δευτέρου, τὸ ὑπόλοιπον θέλει προφανῶς μείνει τὸ αὐτό. Διότι οὕτω μόνον ὁ ἀριθμὸς τῶν πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου γενησομένων ἀφαιρέσεων τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ διαιρετέου μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον θέλει μείνει ἀμετάβλητον.

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα δύναται νὰ ἐκφωνηθῇ καὶ ὡς ἑξῆς·

Ἐὰν ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν ἦναι πολλαπλάσιον τρίτου τινὸς καὶ διαιρεθῶσιν οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοὶ δι' αὐτοῦ τοῦ τρίτου, τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων θέλουσιν εἶναι ἴσα· ἤ, ὅπερ ταὐτό·

Ἐὰν δύο ἀριθμοί, διαιρούμενοι διὰ τρίτου τινός, δίδωσιν ὑπόλοιπα ἴσα, ἡ διαφορὰ αὐτῶν θέλει εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ τρίτου·

57. **ΘΕΩΡΗΜΑ**. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου δύο παραγόντων διὰ τρίτου τινὸς ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται αὐξανομένου ἢ ἐλαττομένου ἑνὸς ὁποιουδήποτε τῶν παραγόντων αὐτοῦ κατὰ πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου.*

Παραδείγματος χάριν, τὸ ὑπόλοιπον 4 τοῦ γινομένου 13×8 τῶν δύο παραγόντων 13 καὶ 8 διὰ τοῦ τρίτου 5 μένει τὸ αὐτό, ἐὰν εἷς ὁποιοσδήποτε τῶν παραγόντων 13 καὶ 8 αὐξηθῇ ἢ ἐλαττωθῇ κατά τι πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου 5.

Διότι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὅταν ὁ εἷς τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται κατά τι πολλαπλάσιον τρίτου τινὸς ἀριθμοῦ, τὸ γινόμενον αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται κατὰ πολλαπλάσιόν τι τοῦ αὐτοῦ τρίτου, ἑπομένως, κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ νέου γινομένου διὰ τοῦ αὐτοῦ τρίτου ἀριθμοῦ θέλει μείνει τὸ αὐτό.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν τὸν παράγοντα 8 τοῦ γινομένου 13×8 αὐξήσωμεν κατὰ 5 ἢ ἐλαττώσωμεν κατὰ 5, τὸ γινόμενον 13×8 αὐξάνει κατὰ 13×5 ἢ ἐλαττοῦται κατὰ 13×5, ἤτοι κατὰ πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου 5, ἑπομένως τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 5 θέλει μείνει τὸ αὐτό, ἤτοι θέλει εἶναι πάλιν 4.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον δὲν μεταβάλλεται αὐξανομένου ἢ ἐλαττουμένου τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων κατὰ πολλαπλασιόν τι τοῦ διαιρέτου, ἕπεται ὅτι μένει πάλιν τὸ αὐτό, ἐὰν καὶ οἱ δύο μεταβληθῶσι κατὰ πολλαπλασιόν τι τοῦ διαιρέτου. Εὐκόλως δὲ παρατηρεῖ τις ὅτι ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἀληθὴς ἐξ ὁσωνδήποτε παραγόντων καὶ ἂν σύγκηται γινόμενόν τι. Παραδείγματος χάριν, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου $13\times9\times17\times28$ διὰ 5 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου $3\times4\times2\times3$ διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου 5· διότι, ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν παραγόντων τοῦ νέου τούτου γινομένου $3\times4\times2\times3$ διαφέρει κατὰ πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου 5, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν θέλει διαφέρει πάλιν κατὰ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 5.

ΥΠΟΛΟΙΠΑ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΙΝΟΣ ΔΙΑ 2 Η 5, ΔΙΑ 4 Η 25 ΚΑΙ ΔΙΑ 8 Η 125.

Συνθῆκαι διαιρετότητος διὰ τῶν ἀνωτέρω διαιρετῶν.

58. **ΘΕΩΡΗΜΑ**. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 2 ἢ διὰ 5 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων αὐτοῦ διὰ 2 ἢ διὰ 5.*

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 73469, ὃν παριστῶμεν πρὸς συντομίαν διὰ τοῦ γράμματος Α. λέγω ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 2 ἢ διὰ 5 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ ψηφίου 9 τῶν μονάδων αὐτοῦ διὰ 2 ἢ διὰ 5. Διότι θέλομεν ἔχει προφανῶς τὴν ἰσότητα

$$A=73460+9,$$

ἤ, ὅπερ ταὐτό,

$$A=7346\times10+9.$$

Ἀλλά, ἐπειδὴ ὁ 10 εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον 2×5, ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τοῦ 10 τὸ ἴσον αὐτῷ γινόμενον 2×5, θέλομεν ἔχει τὴν ἑξῆς·

$$A=7346\times2\times5+9.$$

Ἀφαιροῦντες δὲ ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος τὸ γινόμενον $7346\times2\times5$, θέλομεν ἔχει τὴν νέαν ἰσότητα $A-7346\times2\times5=9$. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $7346\times2\times5$ εἶναι προφανῶς πολλαπλάσιον ἑκατέρου τῶν παραγόντων αὐτοῦ 2 καὶ 5, καὶ γνωρίζομεν ὅτι, ἐὰν ἀπό τινος ἀριθμοῦ Α ἀφαιρέσωμεν πολλαπλάσιόν τι $7346\times2\times5$ τοῦ διαιρέτου 2 ἢ 5, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τῶν διαιρετῶν 2 ἢ 5 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τῆς εὑρεθησομένης διαφορᾶς $A-7346\times2\times5$ διὰ 2 ἢ 5. Ἀλλ' ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι ἴση τῷ ψηφίῳ 9 τῶν μονάδων τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος ἀριθμοῦ 73469. Ἄρα τὸ ὑπόλοιπον κτλ.

59. Ἀριθμός τις λέγεται *ἄρτιος*, ὅταν ἦναι διαιρετὸς διὰ 2, καὶ *περιττὸς* ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει. Ἐπομένως, κατὰ τὰ προαποδειχθέντα·

Ἀριθμός τις εἶναι ἄρτιος ἢ περιττὸς καθόσον τὸ ψηφίον τῶν μονάδων αὐτοῦ εἶναι ἄρτιον ἢ περιττόν. Τὸ 0 θεωρεῖται ὡς ψηφίον ἄρτιον, διότι διαιρούμενον διὰ 2 δίδει πηλίκον 0 καὶ ὑπόλοιπον 0.

Πάντες οἱ ἄρτιοι ἀριθμοὶ περιλαμβάνονται ἐν τῇ παραστάσει $2\times\mu$, τοῦ μ παριστῶντος ὁποιονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμόν, ἄρτιον ἢ περιττόν, οἱ δὲ περιττοὶ ἐν τῇ ἑξῆς· $2\times\mu+1$. Διότι, ὁποιονδήποτε καὶ ἂν ἦναι τὸ μ, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ $2\times\mu+1$ διὰ 2 εἶναι 1.

Ἐπειδὴ τὰ μόνα διαιρετὰ διὰ 5 ψηφία εἶναι τὸ 5 καὶ τὸ 0, ἕπεται ὅτι, *ἵνα ἀριθμός τις ᾖ διαιρετὸς διὰ 5, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων αὐτοῦ νὰ ἦναι ἢ 0 ἢ 5.*

60. Δι' ὁμοίου τινὸς τρόπου ἠθέλομεν ἀποδείξει καὶ τὸ ἑξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 4 ἢ 25 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως διὰ 4 ἢ 25 τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν δύο πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίων αὐτοῦ.*

Ἄς λάβωμεν π. χ. τὸν ἀριθμὸν 34568, ὃν παριστῶμεν διὰ A. Θέλομεν ἔχει προφανῶς

$$A=34500+68,$$

ἤ, ὅπερ ταὐτό, $$A=345\times100+68.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ 100 εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ 4×25, ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τοῦ 100 τὸ ἴσον αὐτῷ γινόμενον 4×25, θέλομεν ἔχει τὴν ἑξῆς

$$A=345\times4\times25+68.$$

Ἀφαιροῦντες δὲ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος τὸ γινόμενον 345×4×25, ὅπερ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4 καὶ 25, θέλομεν ἔχει τὴν ἑξῆς

$$A-345\times4\times25=68,$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ A διὰ 4 ἢ 25 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τῆς διαφορᾶς 68 διὰ 4 ἢ 25, τουτέστι τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν δύο πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίων τοῦ A.

Συμπεραίνομεν πρὸς τούτοις ὅτι,

Ἵνα ἀριθμός τις ᾖ διαιρετὸς διὰ 4 ἢ 25, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ ὑπὸ τῶν δύο τελευταίων αὐτοῦ ψηφίων ἀποτελούμενος ἀριθμὸς νὰ ἦναι διαιρετὸς διὰ 4 ἢ 25.

61. Ὁ ἐννοήσας καλῶς τὰ ἀνωτέρω δύναται εὐκόλως ν' ἀποδείξῃ ὅτι

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 8 ἢ 125, ὧν τὸ γινόμενον εἶναι 1000, εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως διὰ 8 ἢ 125 τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν τριῶν πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίων αὐτοῦ, καὶ θέλει συμπεράνει ἀμέσως ὅτι

Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 8 ἢ 125, ἐὰν τὰ τρία τελευταῖα πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφία αὐτοῦ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 8 ἢ 125.

ΥΠΟΛΟΙΠΑ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΙΝΟΣ ΔΙΑ 9 ΚΑΙ ΔΙΑ 3

Συνθῆκαι διαιρετότητος διὰ τῶν ἀνωτέρω διαιρετῶν.

62. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν διὰ 9 τὴν διαίρεσιν ἀριθμοῦ τινος 1000.., ἀποτελουμένου ἐκ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑφ' ὁσωνδήποτε μηδενικῶν, βλέπομεν εὐκολώτατα ὅτι θέλομεν εὑρίσκει εἰς ἑκάστην μερικὴν διαίρεσιν ὑπόλοιπον τὴν μονάδα.

$$\begin{array}{l|l} 10000\ldots & 9 \\ \cline{2-2} 10 & 1111\ldots \\ \;\;10 & \\ \;\;\;10 & \\ \;\;\;\;1 & \\ \;\;\;\;\;. & \\ \;\;\;\;\;\;. & \\ \;\;\;\;\;\;1 & \end{array}$$

Ἕπεται λοιπὸν ἐντεῦθεν κατὰ τὰ ἐν τῇ *παρατηρήσει* τῆς § 38 λεχθέντα ὅτι *ὁ ἀριθμός, ὁ ἀποτελούμενος ἐκ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑφ' ἑνὸς ἢ πλειοτέρων μηδενικῶν, εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 9 ηὐξημένον κατὰ μονάδα*, τουτέστιν ὅτι θέλομεν ἔχει πάντοτε τὴν ἑξῆς ἰσότητα

$$10^{\nu} = \text{πολ. } 9+1,$$

τοῦ ν παριστῶντος ὁποιονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ τῆς συντετμημένης παραστάσεως *πολ.9* ἐκφραζούσης *πολλαπλάσιόν τι τοῦ 9*.

Ἔστω τώρα ἀριθμός τις, π. χ. ὁ 7000...., ἀποτελούμενος ἐξ ἑνὸς σημαντικοῦ ψηφίου 7 ἀκολουθουμένου ὑφ' ὁσωνδήποτε μηδενικῶν· λέγω ὅτι *οὗτος θέλει εἶναι ἴσος πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 9, ηὐξημένῳ κατὰ τὸ σημαντικὸν αὐτοῦ ψηφίον*, τουτέστιν ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν ἑξῆς ἰσότητα·

$$7000\ldots = \text{πολ. } 9+7.$$

Διότι ἔχομεν προφανῶς

$$7000\ldots = 7\times1000\ldots \qquad (1)$$

Ἀλλὰ κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἔχομεν

$$1000\ldots = \text{πολ. } 9+1,$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα (1) ἀντὶ τοῦ 1000.., τὸ ἴσον αὐτῷ πολ.9+1, θέλομεν ἔχει

$$7000\ldots = 7\times(\text{πολ. } 9+1).$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ σεσημειωμένου πολλαπλασιασμοῦ εὑρίσκομεν

$$7000....=\text{πολ}.9+7,$$

τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

63. Τούτων τεθέντων, λέγω ὅτι *πᾶς ἀριθμός, ὁ ἀριθμὸς 34768 π.χ., εἶναι ἴσος πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 9, ηὐξημένῳ κατὰ τὸ ἄθροισμα 3+4+7+6+8 τῶν σημαντικῶν αὐτοῦ ψηφίων 3 ,4 ,7, 6, 8.*

Διότι ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος ἀριθμὸς 34768 ἀποσυντίθεται προφανῶς εἰς 30000, 4000, 700, 60 καὶ 8. Ἀλλὰ κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἔχομεν

$$30000=\text{πολ}.9+3,$$
$$4000=\text{πολ}.9+4,$$
$$700=\text{πολ}.9+7,$$
$$60=\text{πολ}.9+7,$$
$$8=8$$

Προσθέτοντες δὲ κατὰ μέλη τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας καὶ παρατηροῦντες ὅτι τὸ ἄθροισμα πολλαπλασίων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάλιν πολλαπλάσιόν τι αὐτοῦ, θέλομεν ἔχει

$$34768=\text{πολ}.9+3+4+7+6+8, \qquad (5)$$

τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

64. Ἐπειδὴ ὁ 3 εἶναι διαιρέτης τοῦ 9, πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ 9 εἶναι καὶ πολλαπλάσιον τοῦ 3, ἑπομένως δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὡσαύτως ὅτι

Πᾶς ἀριθμὸς εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 3, ηὐξημένον κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν σημαντικῶν ψηφίων αὐτοῦ·

65. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πορίζόμεθα εὐκόλως

1ον. *Ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος 34768 διὰ 9 ἢ διὰ 3 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως διὰ 9 ἢ διὰ 3 τοῦ ἀθροίσματος 3+4+7+6+8 τῶν σημαντικῶν ψηφίων αὐτοῦ.*

Διότι, ἐὰν λάβωμεν ὡς διαιρέτην τὸν 9 καὶ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος (2) ἀφαιρέσωμεν τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ, τὸ διὰ 9 ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 34768 δὲν δὲν θέλει μεταβληθῆ, τουτέστιν ἡ διαφορὰ 3+4+7+6+8 διαιρεθεῖσα διὰ 9 θέλει δώσει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ καὶ ὁ ἀριθμὸς 34768.

Ὅ,τι δὲ εἴπομεν περὶ τοῦ 9 ἐφαρμόζεται καὶ διὰ τὸ 3, διότι πᾶν πολ. 9 εἶναι καὶ πολ. 3. Ἐντεῦθεν ἕπεται προσέτι ὅτι

2ον. *Ἵνα ἀριθμός τις, ὁ 34768 π. χ., ἦ διαιρετὸς διὰ 9 ἢ διὰ 3, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα 3+4+7+6+8 τῶν σημαντικῶν ψηφίων αὐτοῦ νὰ ἦναι διαιρετὸν διὰ 9 ἢ διὰ 3.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ὁσάκις ποιοῦμεν χρῆσιν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὑπολοίπου τῆς διὰ 9 διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος, ἐφαρμόζομεν τὸ αὐτὸ θεώρημα καὶ ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ σχηματιζομένου ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν σημαντικῶν ψηφίων αὐτοῦ, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ 9, ὅπερ θέλει παριστᾷ προφανῶς τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον. Π. χ. ἔστω ὁ ἀριθμὸς 3489763580432. Τὸ ἄθροισμα τῶν σημαντικῶν ψηφίων αὐτοῦ ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν 62, τὸ ἄθροισμα τῶν σημαντικῶν ψηφίων τοῦ 62 εἶναι 8. Ἄρα 8 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ διὰ 9. Ἐνίοτε δέ, ὅπερ προτιμότερον,, ἐνῷ σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν σημαντικῶν ψηφίων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ ἀφαιροῦμεν τὸν 9 ὁσάκις εὑρίσκομεν μερικὸν ἄθροισμα μεγαλείτερον τοῦ 9. Οὕτως ἠθέλομεν εἴπει ἐπὶ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ 3 καὶ 4....7 καὶ 8.... 15· ἀφαιροῦντες 9....6 καὶ 9....15· ἀφαιροῦντες 9....6 καὶ 7....13· ἀφαιροῦντες 9....4 καὶ 6....10· 1 καὶ 3....4 καὶ 5...9· 0 καὶ 8....8 καὶ 4....12· 3 καὶ 3....6 καὶ 2....8 ὅπε θέλει παριστᾷ τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον.

ΥΠΟΛΟΙΠΟΝ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΙΝΟΣ ΔΙΑ 11.

66. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑφ' ὁσωνδήποτε μηδενικῶν διὰ 11

$$\begin{array}{r|l} 1000000.... & 11 \\ \cline{2-2} 100 & 90909.... \\ 100 & \\ 1 & \end{array}$$

εὑρίσκομεν ἐναλλὰξ ὡς ὑπόλοιπα τῶν γενομένων μερικῶν διαιρέσεων ἢ 1 ἢ 10, καὶ παρατηροῦμεν εὐκόλως ὅτι εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 1, ὁσάκις τὰ ληφθέντα τοῦ διαιρετέου μηδενικὰ εἶναι ἄρτια τὸν ἀριθμόν, καὶ 10, ὁσάκις τὰ ληφθέντα τοῦ διαιρετέου μηδενικὰ εἶναι περιττὰ τὸν ἀριθμόν.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ἐντεῦθεν σκεπτόμενοι ὅπως καὶ ἐν τῇ § 62

1ον. *Ὅτι ὁ ἀριθμός, ὁ ἀποτελούμενος ἐκ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μηδενικῶν, εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 11 ηὐξημένον κατὰ 1*, τοῦθ' ὅπερ παρίσταται διὰ τῆς ἰσότητος $10^{2\mu}$=πολ. 11+1.

2ον. *Ὅτι ὁ ἀριθμός, ὁ ἀποτελούμενος ἐκ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ περιττοῦ ἀριθμοῦ μηδενικῶν, εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 11 ηὐξημένον κατὰ 10*, τοῦθ' ὅπερ παρίσταται διὰ τῆς ἰσότητος $10^{2\mu+1}$=πολ. 11+10. Ἀλλ' ἐπειδὴ 10=11—1, ἡ τελευταία αὕτη ἰσότης γράφεται καὶ οὕτω $10^{2\mu+1}$=πολ. 11+11-1, ἢ ἁπλούστερον $10^{2\mu+1}$=πολ. 11—1. Ἡ δευτέρα λοιπὸν αὕτη συνέπεια ἐκφράζεται προτιμότερον οὕτως·

Ὁ ἀριθμός, ὁ ἀποτελούμενος ἐκ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ περιττοῦ ἀριθμοῦ μηδενικῶν, εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 11 ἠλαττωμένον κατὰ μονάδα.

67. Ἕπεται δὲ πάλιν ἐκ τῶν προηγουμένων ὅτι *πᾶς ἀριθμὸς ἀποτελούμενος ὑφ' ἑνὸς σημαντικοῦ ψηφίου ἀκολουθουμένου ὑπὸ μηδενικῶν, εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 11 ηὐξημένον ἢ ἠλαττωμένον κατὰ τὸ σημαντικὸν τοῦ ἀριθμοῦ ψηφίον, καθόσον ὁ ἀριθμὸς τῶν ὑφ' ὧν ἀκολουθεῖται μηδενικῶν εἶναι ἄρτιος ἢ περιττός*. Τῷ ὄντι, ἔστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 800 καὶ 8000. Ὁ 800 ἰσοῦται τῷ γινομένῳ 8×100. Ἐπειδὴ δὲ 100=πολ. 11+1. Ἄρα 800=8×100=8×(πολ. 11+1)=πολ. 11+8, διότι τὸ γινόμενον 8×πολ. 11 εἶναι πάλιν πολ. 11.

Ὡσαύτως ὁ 8000 ἰσοῦται τῷ γινομένῳ 8×1000. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ 1000=πολ. 11—1. Ἄρα 8000=8×1000=8×(πολ. 11—1)=πολ. 11—8.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ὁ μὲν 800, ὅστις ἀποτελεῖται ἔκ τινος σημαντικοῦ ψηφίου 8 ἀκολουθουμένου ὑπ' ἀρτίου ἀριθμοῦ μηδενικῶν, εὑρέθη ἴσος πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 11, ηὐξημένῳ κατὰ τὸ σημαντικὸν αὐτοῦ ψηφίον 8, ὁ δὲ 8000, ὅστις ἀποτελεῖται ἔκ τινος σημαντικοῦ ψηφίου ἀκολουθουμένου ὑπὸ περιττοῦ ἀριθμοῦ μηδενικῶν, εὑρέθη ἴσος πολλαπλασίῳ τινὶ τοῦ 11, ἠλαττωμένῳ κατὰ τὸ σημαντικὸν αὐτοῦ ψηφίον.

68. **ΘΕΩΡΗΜΑ**. *Πᾶς ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 11 ηὐξημένον κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ, τῶν κατεχόντων τάξιν περιττὴν ἐκ δεξιῶν, καὶ ἠλαττωμένον κατὰ τὸ*

ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ, τῶν κατεχόντων τάξιν ἀρτίαν.

Παραδείγματος χάριν, λέγω ὅτι ὁ ἀριθμὸς 74852 εἶναι ἴσος μὲ πολλαπλασιόν τι τοῦ 11 ηὐξημένον κατὰ τὸ ἄθροισμα 2+8+7 τῶν ψηφίων αὐτοῦ 2, 8 καὶ 7, ἅτινα κατέχουσι τάξιν περιττήν, καὶ ἠλαττωμένον κατὰ τὸ ἄθροισμα 5+4 τῶν ψηφίων αὐτοῦ 5 καὶ 4, ἅτινα κατέχουσι τάξιν ἀρτίαν.

Τῷ ὄντι, ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος ἀριθμὸς 74852 εἶναι προφανῶς ἴσος τῷ ἀθροίσματι 70000+4000+800+50+2. Ἀλλὰ κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἔχομεν

$$70000 = \text{πολ.}11 + 7.$$
$$4000 = \text{πολ.}11 - 4.$$
$$800 = \text{πολ.}11 + 8.$$
$$50 = \text{πολ.}11 - 5.$$
$$2 = 2.$$

Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα 70000+4000+800+50+2 τῶν πρώτων μελῶν τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς 74852, θέλει εἶναι ἴσος τῷ ἀθροίσματι τῶν δευτέρων μελῶν τῶν αὐτῶν ἰσοτήτων. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$74852 = \text{πολ.}11 + 2 + 8 + 7 - 4 - 5,$$

δι' ἧς ἀποδεικνύεται τὸ ἀνωτέρω θεώρημα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 11 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως διὰ 11 τῆς διαφορᾶς, ἣν εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων αὐτοῦ, τῶν κατεχόντων τάξιν ὡς πρὸς τὰ δεξιὰ περιττήν, τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῶν κατεχόντων τάξιν ἀρτίαν.*

Διότι γνωρίζομεν (56) ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου 74852 ἀφαιρεθῇ πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου 11, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τῆς διαφορᾶς 2+8+7−4−5 διὰ 11 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ διαιρετέου 74852 διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου 11.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τάξεως περιττῆς ψηφίων ἦναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τάξεως ἀρτίας, ἡ ἀνωτέρω ἀφαίρεσις δὲν εἶναι δυνατή. Τότε προσθέτομεν εἰς τὸ πρῶτον ἄθροισμα τοσάκις τὸν 11, ὁσάκις εἶναι ἀναγκαῖον, ὅπως ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος ἀφαίρεσις κατασταθῇ δυνατή. Εἶναι δὲ φανερὸν (56) ὅτι οὕτω τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 11 δὲν μεταβάλλεται.

Παραδείγματος χάριν, ἔστω ὁ ἀρ.θμὸς 728192. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα 2+1+2, ἤτοι 5, εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος 9+8+7, ἤτοι τοῦ 24, ἡ ἀφαίρεσις τοῦ 24 ἀπὸ 5 εἶναι ἀδύνατος. Προσθέτομεν τότε εἰς τὸν 5 δὶς τὸν 11, ἤτοι 22, καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν 27 ἀφαιροῦμεν τὸν 24. Εὑρίσκομεν οὕτω διαφορὰν 3, ἥτις θέλει παριστᾷ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 11 διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 728192.

ΠΟΡΙΣΜΑ. 2ον. *Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 11, ἐὰν ἡ περὶ ἧς ἀνωτέρω ὁ λόγος διαφορὰ ἦναι ἢ 0 ἢ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 11.*

ΒΑΣΑΝΟΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΔΙΑ ΤΟΥ 9 ΚΑΙ 11.

69. Ἐπειδὴ εὑρίσκομεν εὐκολώτατα τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 9 καὶ διὰ 11, ποριζόμεθα ἐντεῦθεν ἁπλούστατόν τινα τρόπον, δι' οὗ ἐκτελοῦμεν τὴν βάσανον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν.

Πολλαπλασιασμός. Ἵνα ὁρίσωμέν πως τὰς ἰδέας, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 2096 ἐπὶ 347 καὶ ὅτι ἐκτελέσαντες τὸν πολλαπλασιασμὸν εὕρομεν γινόμενον 727312.

Ἐπειδὴ 2096=πολ. 9+8 καὶ 347=πολ. 9+5, τὸ γινόμενον 2096×347 θέλει εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ (πολ.9+8)×(πολ.9+5). Ἀλλὰ γνωρίζομεν (57) ὅτι, ἐὰν ἀπό τινος παράγοντος ἢ καὶ ἀπὸ τῶν δύο γινομένου τινὸς ἀφαιρέσωμεν πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου τῶν νέων παραγόντων διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου μένει τὸ αὐτό. Λοιπόν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ παράγοντος 2096 ἀφαιρέσωμεν πολ. 9 καὶ ἀπὸ τοῦ παράγοντος 347 ἐπίσης πολ. 9, τὸ γινόμενον 8×5 τῶν ὑπολοίπων 8 καὶ 5 διαιρούμενον διὰ τοῦ 9 θέλει δώσει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ καὶ τὸ γινόμενον 2096×347. Ἀλλὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 9 τοῦ γινομένου 8×5 εὑρίσκεται εὐκόλως καὶ εἶναι 4. Λοιπὸν 4 πρέπει νὰ ἦναι καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 9 τοῦ εὑρεθέντος γινομένου 727312, ἂν ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους, ἢ ἐὰν τὸ λάθος ἦναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου 9, διότι γνωρίζομεν ὅτι τότε δὲν μεταβάλλεται τὸ ὑπόλοιπον (56). Λοιπὸν

Ἡ διὰ τοῦ 9 βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς. Εὑρίσκομεν τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως διὰ 9 τῶν παραγόντων, σχηματίζομεν ἔπειτα τὸ γινόμενον αὐτῶν καὶ ζητοῦμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 9 διαιρέσεως τοῦ γινομένου τούτου. Ἐὰν *τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο δὲν διαφέρῃ τοῦ διὰ 9 ὑπολοίπου τοῦ εὑρεθέντος γινομένου τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους, ἤ, ἐὰν ὑπάρχῃ λάθος, ὅτι τοῦτο εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου 9.*

Διαίρεσις. Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ εὑρεθέντι ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως, ἕπεται ὅτι, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τὸ εὑρεθὲν ὑπόλοιπον, ἡ προκύπτουσα διαφορὰ θέλει εἶναι ἴση τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον. Ἐπομένως ἡ διὰ τοῦ 9 βάσανος τῆς διαιρέσεως ἀνάγεται εἰς τὴν διὰ τοῦ 9 βάσανον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον.

70. Ὅ,τι εἴπομεν περὶ τοῦ 9 διὰ τὴν βάσανον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως, τὸ αὐτὸ ἐφαρμόζεται καὶ ἐπὶ παντὸς διαιρέτου καὶ μερικώτερον ἐπὶ τοῦ 11, οὗτινος τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως εὑρίσκονται εὐκολώτατα, ὡς προελέχθη. Κρίνομεν λοιπὸν περιττὸν νὰ ἐπαναλάβωμεν περὶ τοῦ διαιρέτου τούτου τοὺς αὐτοὺς συλλογισμούς, διότι καὶ οἱ ἐκ τούτων εὑρεθησόμενοι κανόνες θέλουσιν εἶναι ἀπαραλλάκτως οἱ αὐτοί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Τὸ ἄθροισμα 321+132+213 εἶναι διαιρετὸν διὰ 3;

II. Ἡ διαφορὰ 76511—25672 εἶναι διαιρετὴ διὰ 9;

III. Τὰ δύο γινόμενα 33×17 καὶ 23×17 διαιρούμενα διὰ 5 θὰ δώσωσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον;

IV. Τὰ δύο γινόμενα 55×27 καὶ 37×18 διαιρούμενα διὰ 9 θὰ δώσωσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

ΠΕΡΙ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΥ.

ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΡΩΤΟΙ.

71. Ἀριθμός τις λέγεται *πρῶτος*, ὅταν δὲν ἔχῃ ἄλλον τινὰ διαιρέτην εἰμὴ τὸν ἑαυτόν του καὶ τὴν μονάδα. Π. χ. ὁ 7 εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, διότι δὲν διαιρεῖται εἰμὴ μόνον διὰ τῆς μονάδος καὶ διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του 7. Ὡσαύτως καὶ ὁ 11. Ὁ 8 δὲν εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, διότι διαιρεῖται ὄχι μόνον διὰ τῆς μονάδος καὶ διὰ τοῦ 8, ἀλλὰ καὶ διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 4.

72. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Πᾶς μὴ πρῶτος ἀριθμὸς ἔχει τοὐλάχιστον ἕνα διαιρέτην ἀριθμὸν πρῶτον.*

Διότι, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, πᾶς μὴ πρῶτος ἀριθμὸς ἔχει καὶ ἄλλους τινὰς διαιρέτας ἐκτὸς τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς μονάδος. Ἔστω τώρα Α ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος ἀριθμὸς καὶ δ ὁ μικρότερος τῶν ἄλλων διαιρετῶν αὐτοῦ· λέγω ὅτι ὁ δ θέλει εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος. Διότι, ἂν ὁ δ δὲν ἦτο ἀριθμὸς πρῶτος, ἤθελεν ἔχει διαιρέτην τινὰ δ' μικρότερον αὐτοῦ, ὅστις ἤθελεν εἶναι καὶ διαιρέτης τοῦ Α (54, πόρ). Ὁ μικρότερος λοιπὸν τῶν διαιρετῶν τοῦ Α δὲν ἤθελεν εἶναι ὁ δ, ἀλλά τις μικρότερος αὐτοῦ δ', ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Λοιπὸν κτλ.

73. Πολλάκις εἶναι χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν ἂν δεδομένος τις ἀριθμὸς ἦναι ἢ μὴ πρῶτος, πρέπει δὲ πρὸς τοῦτο νὰ βεβαιωθῶμεν διὰ τῆς διαιρέσεως, νὰ ἴδωμεν δηλαδὴ ἂν δὲν διαιρῆται δι' οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ. Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ ἀπαιτούμεναι δοκιμαὶ εἶναι πολλάκις λίαν ἐκτεταμέναι, μάλιστα ὅταν ὁ δεδομένος ἀριθμὸς ἦναι ὁπωσοῦν μέγας, κατεσκεύασαν πίνακας τῶν πρώτων ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρις ὁρίου τινός. Οἱ πίνακες τοῦ **Burckhardt** ἐκτείνονται μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ 3036000, καὶ κατασκευάζομεν αὐτοὺς ὡς ἑξῆς.

Γράφομεν κατὰ σειρὰν τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι ὁρίου τινὸς κατ' ἀρέσκειαν, π. χ. μέχρι 3036000. Ἐπειδὴ οἱ τρεῖς πρῶτοι τῆς σειρᾶς ἀριθμοὶ 1, 2, 3 εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι, δὲν διαγράφομεν αὐτούς. Ἔπειτα ἀρχίζομεν νὰ διαγράφωμεν πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2, εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαγράψωμεν μετὰ τὸν 2 ἕκαστον δεύτερον· οἷον τὸν 4, ὅστις εἶναι δεύτερος μετὰ τὸν 2· τὸν 6, ὅστις εἶναι δεύτερος μετὰ τὸν διαγραφέντα 4· τὸν 8, ὅστις εἶναι δεύτερος μετὰ τὸν διαγραφέντα 6, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Διαγράψαντες οὕτω πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2 μεταβαίνομεν εἰς τὴν διαγραφὴν τῶν πολλαπλασίων τοῦ ἀμέσως μετὰ τὸν 2 ἑπομένου πρώτου ἀριθμοῦ, ἤτοι τοῦ 3. Αὕτη δὲ γίνεται διὰ τῆς διαγραφῆς ἑκάστου τρίτου μετὰ τὸν 3.

Μετὰ τὴν διαγραφὴν τῶν πολλαπλασίων τοῦ 3 ὁ πρῶτος τῶν μὴ διαγραφέντων ἀριθμῶν, ὁ 5, θέλει εἶναι ἀναγκαίως ἀριθμὸς πρῶτος, ὡς μὴ ὢν πολλαπλάσιον οὐδενὸς τῶν προηγουμένων, ἄλλως ἤθελε διαγραφῆ.

Διαγράφομεν ἔπειτα μετὰ τὸν 5 ἕκαστον πέμπτον, καὶ ὁ πρῶτος τῶν μὴ διαγραφέντων ἀριθμῶν, ὁ 7, θέλει εἶναι ἐπίσης ἀριθμὸς πρῶτος. Διαγράφομεν, ἔπειτα μετὰ τὸν 7 ἕκαστον ἕβδομον, ἔπειτα δὲ ἕκαστον κατέχοντα τὴν αὐτὴν τάξιν τῷ πρώτῳ μὴ διαγραφέντι ἀριθμῷ κτλ. Οὕτω θέλομεν διαγράψει πάντας τοὺς μὴ πρώτους ἀριθμούς, καὶ οἱ μὴ διαγραφέντες θέλουσιν εἶναι οἱ ζητούμενοι πρῶτοι ἀριθμοί.

Οἱ ἑκάστοτε διαγραφόμενοι ἀριθμοὶ θεωροῦνται ὡς κατέχοντες τὴν φυσικὴν αὐτῶν τάξιν ἐν τῇ πρὸς διαγραφὴν ἀριθμήσει· τουτέστιν, ἵνα διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ, π. χ. τοῦ 5, λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν ἐν τῇ πρὸς διαγραφὴν ἀριθμήσει καὶ τοὺς μετὰ τὸν 5 προδιαγραφέντας ἀριθμοὺς 6, 8, 7, κτλ.

Ὡσαύτως διαγραφεὶς τις ἀριθμὸς δύναται νὰ διαγραφῇ καὶ πάλιν, ὡς ὁ 15, ὅστις διεγράφη ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 3, διαγράφεται δὲ καὶ πάλιν ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 5.

74. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι διεγράψαμεν πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 13· λέγω ὅτι *πᾶς μὴ διαγραφεὶς ἀριθμὸς 107, 211, 227, κτλ., μικρότερος τοῦ τετραγώνου 289 τοῦ ἀμέσως ἑπομένου πρώτου ἀριθμοῦ 17, θέλει εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.*

Διότι, ἂν ὁ 227 π. χ. δὲν ἦτο ἀριθμὸς πρῶτος, ἤθελεν ἔχει διαιρέτην τινὰ ἀριθμὸν πρῶτον. Ὁ πρῶτος οὗτος διαιρέτης τοῦ 227 δὲν δύναται νὰ ἦναι μικρότερος τοῦ 17· διότι, ἂν ἦτο μικρότερος, ὁ 227 ἤθελεν ὑπάρχει διαγεγραμμένος ἔν τινι τῶν προηγουμένως γενομένων διαγραφῶν. Ἀλλ' οὔτε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 227 διὰ τοῦ πρώτου τούτου διαιρέτου δύναται νὰ ἦναι μικρότερον τοῦ 17, διότι καὶ τοῦτο θέλει εἶναι ἀναγκαίως εἷς τῶν διαιρετῶν αὐτοῦ. Λοιπὸν ὁ 227 πρέπει νὰ ἦναι τοὐλάχιστον ἴσος τῷ γινομένῳ 17×17. Ἀλλ' εἶναι μικρότερος αὐτοῦ. Ἄρα εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.

Ἕπεται λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι, ἵνα ἴδωμεν ἂν ἀριθμός τις Α ἦναι ἢ μὴ πρῶτος, ἀρκεῖ νὰ δοκιμάσωμεν διαδοχικῶς πάντας τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς 2, 3, 5, 7..., μέχρις ἐκείνου τοῦ πρώτου, οὗτινος τὸ τετράγωνον εἶναι μεγαλείτερον τοῦ Α. Ἐὰν δὲν διαιρῆται δι' οὐδενὸς τούτων, ὁ ἀριθμὸς Α θέλει εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.

Δὲν εἶναι δὲ καὶ ἀνάγκη νὰ σχηματίσωμεν προηγουμένως τὰ τετράγωνα τῶν πρώτων διαιρετῶν 2, 3, 5, 7..., ἵνα ἴδωμεν ἂν ταῦτα ἦναι ἢ μὴ μικρότερα τοῦ Α. Ἐὰν τὸ πηλίκον, ὅπερ εὑρίσκομεν δοκιμάζοντες διαιρέτην τινά, ἦναι μικρότερον τοῦ δοκιμαζομένου διαιρέτου, ἕπεται ὅτι ὁ δοκιμαζόμενος ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ τετραγώνου τοῦ διαιρέτου.

Παραδείγματος χάριν, ἔστω 463 ἀριθμός τις. Ἵνα ἴδωμεν ἂν ἦναι ἢ μὴ πρῶτος, δοκιμάζομεν τοὺς διαιρέτας, 2, 3, 5, 7 .., μέχρι τοῦ διαιρέτου, οὗτινος τὸ τετράγωνον εἶναι μεγαλείτερον τοῦ 463. Ἐπειδὴ τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τοῦ 463 διὰ τῶν διαιρετῶν 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 εἶναι μεγαλείτερα τοῦ εἰς ἕκαστον τούτων ἀντιστοιχοῦντος διαιρέτου, ἕπεται ὅτι τὰ τετράγωνα τοῦ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 εἶναι μικρότερα τοῦ 463. Ἐπειδὴ δὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 463 διὰ τοῦ ἀκολούθου πρώτου, ἤτοι τοῦ 23, εὑρίσκεται μικρότερον τοῦ 23, ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 463 εἶναι μικρότερος τοῦ τετραγώνου τοῦ διαιρέτου 23, καὶ ἐπειδὴ δὲν διαιρεῖται δι' οὐδενὸς τῶν προηγουμένων πρώτων ἀριθμῶν, οὗτος θέλει εἶναι ἀναγκαίως ἀριθμὸς πρῶτος.

75. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἡ σειρὰ τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι ἀτελεύτητος.*

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἀρκεῖ προφανῶς ν' ἀποδείξωμεν ὅτι ὑπάρχει πάντοτε πρῶτος ἀριθμὸς μεγαλείτερος τοῦ ὑποτεθέντος μεγαλειτέρου πρώτου.

Ἔστω π. χ. Ν ὁ καθ' ὑπόθεσιν μεγαλείτερος τῶν πρώτων ἀριθμῶν. Ἂς σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον $2\times3\times5\times7\ldots\times N$ πάντων νῶτ πρὸ τοῦ Γ πρώτων ἀριθμῶν μέχρι τοῦ τελευταίου Ν, συμπεριλαμβανομένου καὶ τούτου, καὶ ἂς προσθέσωμεν εἰς τοῦτο καὶ μίαν μονάδα. Καλοῦντες Α τὸ προκύπτον ἄθροισμα, θέλομεν ἔχει

$$A=2\times3\times5\times7\times....\times N+1.$$

Τώρα ὁ Α ἢ εἶναι ἢ δὲν εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος. Ἐὰν ὁ Α ἦναι ἀριθμὸς πρῶτος, θέλει εἶναι προφανῶς μεγαλείτερος τοῦ Ν, ἐπομένως ὁ καθ' ὑπόθεσιν μεγαλείτερος πάντων τῶν πρώτων ἀριθμῶν Ν θέλει εἶναι μικρότερος τοῦ Α. Ἄρα Ν δὲν εἶναι ὁ μεγαλείτερος πάντων.

Ἐὰν ὁ Α δὲν ἦναι ἀριθμὸς πρῶτος, θέλει κατὰ προαποδειχθὲν θεώρημα ἔχει διαιρέτην τινὰ ἀριθμὸν πρῶτον. Ἀλλ' ὁ πρῶτος οὗτος διαιρέτης δὲν δύναται νὰ ἦναι ἴσος οὐδενὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν, τῶν ἐν τῷ γινομένῳ 2×3×5×7×....×Ν περιεχομένων. Διότι, ἂν ἦτο ἴσος μέ τινα τούτων, ἤθελεν ἀναγκαίως διαιρεῖ τὸ γινόμενον 2×3×5×7×....×Ν, ὡς παράγων αὐτοῦ, καὶ ἐπειδὴ καθ' ὑπόθεσιν διαιρεῖ καὶ τὸ Α, ἔπρεπε κατὰ τὸ θεώρημα 55 νὰ διαιρῇ ἀναγκαίως καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, ἤτοι τὴν μονάδα, ὅπερ ἀδύνατον. Ἕπεται λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι ὁ πρῶτος διαιρέτης τοῦ Α θέλει εἶναι διάφορος τῶν ἐν τῷ γινομένῳ 2×3×5×7....Ν× ἐμπεριεχομένων πρώτων ἀριθμῶν. Θέλει λοιπὸν εἶναι ἀναγκαίως μεγαλείτερος τοῦ Ν. Ἄρα Ν δὲν δύναται νὰ ἦναι κατὰ τὴν γενομένην ὑπόθεσιν ὁ μεγαλείτερος τῶν ὑπαρχόντων πρώτων ἀριθμῶν. Ἡ σειρὰ λοιπὸν τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι ἀτελεύτητος.

ΠΕΡΙ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ.

76. *Κοινοὶ διαιρέται* δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν καλοῦνται οἱ ἀριθμοί, οἱ διαιροῦντες ἀκριβῶς ἕκαστον τούτων. Π. χ., ὁ 2 καὶ ὁ 3 εἶναι κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν 30 καὶ 18, διότι καὶ ὁ 2 καὶ ὁ 3 διαιροῦσι καὶ τὸν 30 καὶ τὸν 18. Οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 5 εἶναι κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν 10, 50, 120, διότι ἕκαστος τούτων διαιρεῖται καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 5.

Δύο ἢ πλειότεροι ἀριθμοὶ καλοῦνται *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους*, ὅταν δὲν ἔχωσι κανένα κοινὸν διαιρέτην εἰμὴ μόνον τὴν μονάδα. Π. χ. ὁ 8 καὶ 15 εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, διότι δὲν ὑπάρχει οὐδεὶς ἀριθμὸς ἐκτὸς τῆς μονάδος, ὅστις νὰ διαιρῇ ἀμφοτέρους. Οἱ ἀριθμοὶ 8, 24 καὶ 35 εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, διότι δὲν ἔχουσιν οὐδένα ἄλλον κοινὸν διαιρέτην ἐκτὸς τῆς μονάδος.

Μεταξὺ τῶν κοινῶν διαιρετῶν δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν ὑπάρχει ἀναγκαίως εἷς μεγαλείτερος πάντων τῶν ἄλλων. Οὗτος καλεῖται μέγιστος κοινὸς διαιρέτης. Εἶναι δὲ πολλάκις χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν πῶς εὑρίσκεται οὗτος, καὶ περὶ τούτου πραγματευόμεθα ἀμέσως.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΦ' ΩΝ ΣΤΗΡΙΖΕΤΑΙ Η ΑΝΑΖΗΤΗΣΙΣ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ.

77. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν δὲν δύναται νὰ ἦναι μεγαλείτερος τοῦ μικροτέρου τούτων· ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἐὰν ὁ μικρότερος τούτων διαιρῇ τὸν μεγαλείτερον, οὗτος θέλει εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν.*

Ἔστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 54 καὶ 9, διαιρετοὶ ὁ πρῶτος διὰ τοῦ δευτέρου. Ὁ 9 εἶναι προφανῶς εἷς τῶν κοινῶν διαιρετῶν αὐτῶν, καὶ ὁ μέγιστος πάντων, διότι ἀριθμός τις μεγαλείτερος τοῦ 9 δὲν δύναται νὰ διαιρῇ τὸν 9, ἑπομένως δὲν θέλει εἶναι κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν. Λοιπὸν ὁ μικρότερος 9 τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν 54 καὶ 9, ὁ διαιρῶν τὸν μεγαλείτερον 54, θέλει εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν.

78. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἐὰν ὁ μικρότερος τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν δὲν διαιρῇ τὸν μεγαλείτερον, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν εἶναι ὁ αὐτὸς τῷ μεγίστῳ κοινῷ διαιρέτῃ τοῦ μικροτέρου καὶ τοῦ εὑρεθησομένου ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως τοῦ μεγαλειτέρου διὰ τοῦ μικροτέρου.*

Ἔστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 7524 καὶ 918. Ἐπειδὴ ὁ μικρότερος 918 δὲν διαιρεῖ τὸν μεγαλείτερον 7524, λέγω ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 7524 καὶ 918 εἶναι ὁ αὐτὸς τῷ μεγίστῳ κοινῷ διαιρέτῃ τοῦ μικροτέρου 918 καὶ τοῦ ὑπολοίπου 180 τῆς διαιρέσεως τοῦ μεγαλειτέρου 7524 διὰ τοῦ μικροτέρου. Διότι, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ 7524 διὰ τοῦ 918, θέλομεν ἐκ ταύτης πορισθῇ τὴν ἰσότητα

$$7524 = 918 \times 8 + 180,$$

ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι

1ον. Πᾶς κοινὸς διαιρέτης τοῦ 7524 καὶ 918, εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου 180. Διότι πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν τὸν 918 διαιρεῖ καὶ τὸ γινόμενον 918×8, ἐὰν δὲ διαιρῇ καὶ τὸν 7524, θέλει διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν $7524 - 918 \times 8$, ἤτοι τὸ ὑπόλοιπον 180.

2ον. Πᾶς κοινὸς διαιρέτης τοῦ 918 καὶ τοῦ ὑπολοίπου 180 εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ διαιρετέου 7524. Διότι πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν τὸν 918 διαιρεῖ καὶ τὸ γινόμενον 918×8, ἐὰν δὲ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον 180, θέλει ἀναγκαίως διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $918 \times 8 + 180$, ἤτοι τὸν διαιρετέον 7524.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ἐκ τούτων ὅτι

Πάντες οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν δεδομένων ἀριθμῶν 7524 καὶ 918 εἶναι διαιρέται καὶ τοῦ ὑπολοίπου 180, ἑπομένως εἶναι κοινο διαιρέται τῶν ἀριθμῶν 918 καὶ 180, προσέτι δὲ ὅτι

Πάντες οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν 918 καὶ 180 εἶναι διαιρέται καὶ τοῦ 7524, ἑπομένως εἶναι κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν 7524 καὶ 918.

Ἕπεται λοιπὸν ἐκ τούτων ὅτι οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν 7524 καὶ 918 εἶναι οἱ αὐτοὶ μὲ τοὺς κοινοὺς διαιρέτας τῶν ἀριθμῶν 918 καὶ 180, καὶ ἀντιστρόφως. Λοιπὸν ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο τελευταίων εἶναι ἀναγκαίως ὁ αὐτὸς τῷ μεγίστῳ κοινῷ διαιρέτῃ τῶν δύο πρώτων 7524 καὶ 918, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΑΝΑΖΗΤΗΣΙΣ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ.

79. *Πρὸς εὕρεσιν λοιπὸν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν διαιροῦμεν τὸν μεγαλείτερον διὰ τοῦ μικροτέρου. Ἐὰν εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0, ὁ μικρότερος θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν. Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον ἦναι διάφορον τοῦ 0, ἐπειδὴ ἀπεδείχθη ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι ὁ αὐτὸς τῷ μεγίστῳ κοινῷ διαιρέτῃ τοῦ μικροτέρου καὶ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου, διαιροῦμεν τὸν μικρότερον διὰ τοῦ εὑρεθέντος πολοίπου. Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον τῆς δευτέρας ταύτης διαιρέσεως ἦναι 0, τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον, ἤτοι ὁ διαιρέτης ταύτης, θέλει εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν. Ἐὰν δὲ καὶ τῆς διαιρέσεως ταύτης τὸ ὑπόλοιπον δὲν ἦναι 0, διαιροῦμεν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον διὰ τοῦ εὑρεθέντος δευτέρου ὑπολοίπου, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ μία τῶν διαιρέσεων μᾶς δώσῃ ὑπόλοιπον 0. Τότε ὁ διαιρέτης ταύτης θέλει εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.*

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἐξακολουθοῦντες ὡς προείπομεν τὴν πρᾶξιν θέλομεν ἀναγκαίως εὕρει ὑπόλοιπόν τι διαιροῦν ἀκριβῶς τὸ ἀμέσως προηγούμενον αὐτοῦ· διότι τὰ ὑπόλοιπα εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ βαίνουσιν ἐλαττούμενοι, ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς τούτων δὲν δύναται νὰ ἦναι ἀτελεύτητος.

80. Διατάσσομεν συνήθως ὡς ἑξῆς τὰ καθέκαστα τῶν πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν ἐκτελουμένων πράξεων.

Γράφομεν τὸν μικρότερον 918 πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ μεγαλειτέρου 7524, καὶ τὸ μὲν εὑρεθησόμενον πηλίκον 8 τῆς διαιρέσεως αὐτῶν

	8	5	10
7524	918	180	18
180	18	0	

ὑπεράνω τοῦ διαιρέτου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 180 ὑπὸ τὸν διαιρετέον. Ἔπειτα γράφομεν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον 180, ὅπερ λαμβάνομεν ὡς διαιρέτην, ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντίου σειρᾶς καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου διαιρέτου 918, ὃν λαμβάνομεν ὡς διαιρετέον, καὶ τὸ μὲν πηλίκον 5 τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως γράφομεν πάλιν ὑπεράνω τοῦ νέου διαιρέτου 180, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 18 ὑπὸ τὸν νέον διαιρετέον 918, καὶ οὕτω καθεξῆς, ὡς φαίνεται ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι, κτλ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι δύο διαδοχικὰ ὑπόλοιπα ἔχουσι τὸν αὐτὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην, ὃν καὶ οἱ δεδομένοι ἀριθμοί. Ἐὰν λοιπὸν συμβῇ νὰ παρατηρήσωμεν ὡς ἐκ τῆς πρὸς τὸ ὑπολογίζειν κτηθείσης ἡμῶν ἀσκήσεως τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο διαδοχικῶν ὑπολοίπων, εἶναι περιττὸν νὰ παρατείνωμεν τὴν πρᾶξιν, διότι οὗτος θέλει εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν. Πρὸς τούτοις, ἐὰν ἓν τῶν εὑρισκομένων ὑπολοίπων ἦναι *ἀριθμὸς πρῶτος*, ὅστις δὲν διαιρεῖ τὸ ἀμέσως προηγούμενον ὑπόλοιπον, θέλομεν συμπεράνει ἀμέσως ὅτι οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τουτέστι θέλουσιν ἔχει μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν τὴν μονάδα.

Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ἐδόθησαν οἱ ἀριθμοὶ 756 καὶ 535. Διατάσσοντες τὰ τῆς πράξεως ὡς προηγουμένως

	1	2	2	2
756	535	221	93	35
221	93	35	23	

εὑρίσκομεν μεταξὺ τῶν ὑπολοίπων *τὸν πρῶτον ἀριθμὸν* 23 ὅστις εἶναι πρῶτος πρὸς τὸ προηγούμενον ὑπόλοιπον 35. Ὁ μέγιστος λοι πὸν κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν θέλει εἶναι ἡ μονάς, ἤτοι οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ θέλουσιν εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι, ἐπειδὴ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς 23 δὲν ἔχει ἄλλον τινὰ διαιρέτην εἰμὴ τὸν ἑαυτόν του καὶ τὴν μονάδα, αὐτὸς δὲ εὑρέθη μὴ διαιρῶν τὸ προηγούμενον ὑπόλοιπον, ἕπεται ὅτι δὲν μένει ἢ ἡ μονάς, ἥτις δύναται νὰ διαιρῇ ἀμφοτέρους.

81. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Πᾶς ἀριθμός, διαιρῶν δύο ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν.*

Ἂς θεωρήσωμεν π. χ. τοὺς ἀριθμοὺς 7524 καὶ 918. Ἀπεδείχθη ὅτι οἱ κοινοὶ διαιρέται αὐτῶν εἶναι διαιρέται καὶ τοῦ ὑπολοίπου 180. Ὡσαύτως οἱ κοινοὶ διαιρέται τοῦ 918 καὶ τοῦ ὑπολοίπου 180 θέλουσιν εἶναι καὶ διαιρέται τοῦ ἑπομένου ὑπολοίπου 18, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἀλλ' ἓν τῶν ὑπολοίπων τούτων εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης. Ἄρα πᾶς ἀριθμός, διαιρῶν δύο ἄλλους, διαιρεῖ ἀναγκαίως καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν.

82. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο ἀριθμοί, Μ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν, Π δὲ καὶ Ρ τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ Μ. Θέλομεν ἔχει τὰς ἰσότητας (42)

$$\mathrm{A}=\mathrm{M}\times\Pi,\quad \mathrm{B}=\mathrm{M}\times\mathrm{P}. \qquad (1)$$

Λέγω τώρα ὅτι τὰ πηλίκα Π καὶ Ρ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι, ἂν δὲν ἦσαν ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἤθελον ἔχει κοινόν τινα διαιρέτην Δ. Καλοῦντες τότε Π' καὶ Ρ' τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ Δ, θέλομεν ἔχει ὡσαύτως καὶ τὰς ἑξῆς ἰσότητας

$$\Pi=\Delta\times\Pi',\quad \mathrm{P}=\Delta\times\mathrm{P}' \qquad (2)$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς ἰσότητας (1) ἀντὶ τοῦ Π καὶ Ρ τὰ ἴσα αὐτοῖς Δ×Π' καὶ Δ×Ρ', θέλομεν ἔχει

$$\mathrm{A}=\mathrm{M}\times\Delta\times\Pi',\quad \mathrm{B}=\mathrm{M}\times\Delta\times\mathrm{P}'. \qquad (3)$$

Εἶναι τώρα φανερὸν ἐκ τῶν ἰσοτήτων (3) ὅτι τὸ Α καὶ Β διαιροῦνται διὰ τοῦ γινομένου Μ×Δ, ἑπομένως Μ δὲν εἶναι μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν, ἀλλά τις ἀριθμὸς μεγαλείτερος τοῦ Μ, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Λοιπόν, ἐὰν Μ ἦναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ Α καὶ τοῦ Β, τὰ πηλίκα Π καὶ Ρ τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ Μ πρέπει νὰ ἦναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

83. **ΘΕΩΡΗΜΑ**. *Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀριθμοὺς ἐπί τινα τρίτον, τὰ προκύπτοντα γινόμενα θέλουσιν ἔχει μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸ γινόμενον τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν τρίτον.*

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο ἀριθμοὶ καὶ Μ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν. Λέγω ὅτι, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β πολλαπλασιασθῶσιν ἐπί τινα ἀριθμὸν Δ, τὰ γινόμενα αὐτῶν $\mathrm{A}\times\Delta$ καὶ $\mathrm{B}\times\Delta$ θέλουσιν ἔχει μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸ γινόμενον $\mathrm{M}\times\Delta$.

Διότι, ἐὰν καλέσωμεν Π καὶ Ρ τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τοῦ Α καὶ Β διὰ Μ, θέλομεν ἔχει τὰς ἰσότητας

$$\mathrm{A}=\mathrm{M}\times\Pi,\quad \mathrm{B}=\mathrm{M}\times\mathrm{P}. \qquad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) ἐπὶ Δ θέλομεν ἔχει τὰς ἑπομένας

$$\mathrm{A}\times\Delta=\mathrm{M}\times\Delta\times\Pi,\quad \mathrm{B}\times\Delta=\mathrm{M}\times\Delta\times\mathrm{P}. \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ τώρα κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα τὰ πηλίκα Π καὶ Ρ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ τὰ γινόμενα $\mathrm{M}\times\Delta\times\Pi$ καὶ $\mathrm{M}\times\Delta\times\mathrm{P}$ διαιροῦνται προφανῶς διὰ τοῦ γινομένου $\mathrm{M}\times\Delta$, ἕπεται ὅτι $\mathrm{M}\times\Delta$ θέλει εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο γινομένων $\mathrm{A}\times\Delta$ καὶ $\mathrm{B}\times\Delta$, τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

ΠΟΡΙΣΜΑ.—Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι, ἐὰν δύο ἀριθμοὶ Α καὶ Β ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπί τινα τρίτον ἀριθμὸν Δ, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν γινομένων $\mathrm{A}\times\Delta$ καὶ $\mathrm{B}\times\Delta$ θέλει εἶναι ὁ τρίτος οὗτος ἀριθμὸς Δ.

Διότι, ἐπειδὴ Α καὶ Β εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν εἶναι ἡ μονάς, ἑπομένως κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν γινομένων $\mathrm{A}\times\Delta$ καὶ $\mathrm{B}\times\Delta$ θέλει εἶναι τὸ γινόμενον τῆς μονάδος ἐπὶ Δ, ἤτοι Δ.

84. **ΘΕΩΡΗΜΑ**. *Ἐὰν ἀριθμός τις Π διαιρῇ τὸ γινόμενον $A\times B$ δύο ἄλλων Α καὶ Β καὶ ἦναι πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα τούτων, πρὸς τὸν Α λόγου χάριν, πρεπει ἀναγκαίως νὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον Β.*

Διότι, ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Π εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν τὴν μονάδα. Ἐὰν τώρα πολλαπλασιάσωμεν αὐτοὺς ἐπὶ Β, τὰ γινόμενα $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$, καὶ $\Pi\times\mathrm{B}$

θέλουσιν ἔχει κατὰ τὸ προηγούμενον πόρισμα μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν τὸν Β. Ἀλλ' ὁ Π διαιρεῖ καθ' ὑπόθεσιν τὸ γινόμενον Α×Β, διαιρεῖ δὲ προφανῶς καὶ τὸ γινόμενον Π×Β, ὡς παράγων αὐτοῦ, θέλει λοιπὸν διαιρεῖ κατὰ τὰ προαποδειχθέντα (81) καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν ὅστις εἶναι ὁ Β. Λοιπὸν ὁ Π, ὁ καθ' ὑπόθεσιν διαιρῶν τὸ γινόμενον Α×Β καὶ πρῶτος ὑποτεθεὶς πρὸς τὸν Α, εὑρέθη διαιρέτης τοῦ Β.

ΑΠΟΣΥΝΘΕΣΙΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΙΝΟΣ ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΠΡΩΤΟΥΣ ΑΥΤΟΥ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ.

85. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Πᾶς μὴ πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον παραγόντων πρώτων·* ἐν ἄλλαις λέξεσι, *πᾶς μὴ πρῶτος ἀριθμὸς ἀποσυντίθεται εἰς παράγοντας πρώτους.*

Ἔστω Α ἀριθμός τις μὴ πρῶτος. Ἐπειδὴ ὁ Α δὲν εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, ὁ μικρότερος τῶν διαιρετῶν αὐτοῦ Δ θέλει εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος (72), ἐὰν δὲ παραστήσωμεν διὰ Π τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διὰ Δ, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$Α = Δ \times Π \qquad (1)$$

Τώρα, ἐὰν ὁ Π ἦναι ἀριθμὸς πρῶτος, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη· διότι ὁ Α εἶναι τὸ γινόμενον δύο πρώτων ἀριθμῶν Δ καὶ Π. Ἐὰν δ' ὁ Π δὲν ἦναι ἀριθμὸς πρῶτος, ὁ μικρότερος τῶν διαιρετῶν αὐτοῦ Δ' θέλει εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, καὶ παριστῶντες διὰ Π' τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Π διὰ Δ' θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$Π = Δ' \times Π'.$$

Ἀντικαθιστῶντες τώρα εἰς τὴν ἰσότητα (1) ἀντὶ τοῦ Π τὸ ἴσον αὐτῷ Δ'×Π', θέλομεν ἔχει

$$Α = Δ \times Δ' \times Π'. \qquad (2)$$

Πάλιν, ἐὰν τὸ Π' ἦναι ἀριθμὸς πρῶτος, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη, τοῦ Α ὄντος τότε γινομένου τριῶν πρώτων ἀριθμῶν, ἐὰν δὲ μή, ὁ μικρότερος τῶν διαιρετῶν Δ'' τοῦ Π' θέλει εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, καὶ παριστῶντες διὰ Π'' τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Π' διὰ Δ'', θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$Π' = Δ'' \times Π''.$$

Ἀντικαθιστῶντες πάλιν εἰς τὴν ἰσότητα (2) ἀντὶ τοῦ Π' τὸ ἴσον αὐτῷ Δ''×Π'', θέλομεν ἔχει

$$Α = Δ \times Δ' \times Δ'' \times Π''$$

Περὶ τοῦ Π'' δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅ,τι εἴπομεν προηγουμένως περὶ τοῦ Π', καὶ θέλομεν ἐξακολουθήσει οὕτω μέχρις οὗ εὕρωμεν ἓν τῶν μερικῶν πηλίκων Π, Π', Π'', κτλ. ἀριθμὸν πρῶτον. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι θέλομεν φθάσει εἰς ἓν τοιοῦτο πηλίκον μετά τινα ἀριθμὸν διαιρέσεων, διότι τὰ πηλίκα Π, Π', Π'', κτλ. εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι καὶ βαίνουσιν ἐλαττούμενοι, ἄλλως ἤθελον σχηματίσει σειρὰν ἀτελεύτητον, ὅπερ ἀδύνατον.

Λοιπὸν πᾶς μὴ πρῶτος ἀριθμὸς Α εἶναι γινόμενον παραγόντων πρώτων, ἢ ἀποσυντίθεται εἰς πρώτους παράγοντας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀποδείξει οἱ διὰ Δ, Δ', Δ'', κτλ. παρασταθέντες διαιρέται ὑπετέθησαν ἁπλῶς οἱ μικρότεροι τῶν διαιρετῶν τοῦ Α, Π, Π', κτλ, οὐχὶ δὲ καὶ διάφοροι, διότι ὁ αὐτὸς πρῶτος παράγων δυνατὸν νὰ ἐπαναλαμβάνηται πολλάκις ἐν τῷ γινομένῳ. Παραδείγματος χάριν, ἂν ἐπρόκειτο ν' ἀποσυνθέσωμεν τὸν 60 εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, ἠθέλομεν εὕρει συλλογιζόμενοι ὡς ἀνωτέρω

$$60 = 2 \times 30$$

Ἀλλὰ $30 = 2 \times 15$. Ἄρα

$$60 = 2 \times 2 \times 15,$$

καὶ ἐπειδὴ $15 = 3 \times 5$, ἄρα

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5.$$

Ἐπειδὴ ὁ 5 εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, ὁ 60 εὑρίσκεται οὕτως ἀποσυντεθειμένος εἰς πρώτους παράγοντας, καὶ βλέπομεν ὅτι ὁ διαιρέτης 2 ἐπαναλαμβάνεται δὶς ἐν τῷ παριστῶντι αὐτὸν γινομένῳ $2^2 \times 3 \times 5$.

86. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Καθ' ἕνα μόνον τρόπον ἀριθμός τις μὴ πρῶτος ἀποσυντίθεται εἰς πρώτους παράγοντας· ἐν ἄλλαις λέξεσι, δύο γινόμενα πρώτων παραγόντων δὲν δύναται νὰ ἦναι ἴσα χωρὶς νὰ περιέχωσι τοὺς αὐτοὺς πρώτους παράγοντας μὲ τοὺς αὐτοὺς ἀμοιβαίως ἐκθέτας.*

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν ἀποσυνθέτωμεν πάντοτε ἀριθμόν τινα εἰς πρώτους παράγοντας ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω, ζητοῦντες δηλαδὴ τὸν μικρότερον τῶν διαιρετῶν αὐτοῦ τε καὶ ἑκάστου τῶν εὑρισκομένων διαδοχικῶν πηλίκων, θέλομεν εὑρίσκει πάντοτε τοὺς αὐτοὺς διαιρέτας καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, ἑπομένως τὸ θεώρημα, οὕτω θεωρούμενον, ὑπάρχει ἤδη ἀποδεδειγμένον.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἀκολουθοῦντες ἄλλον τινὰ τρόπον ἀποσυνθέσεως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν γινόμενον πρώτων παραγόντων ἴσον τῷ A καὶ διάφορον τοῦ διὰ τοῦ πρώτου τῆς ἀποσυνθέσεως τρόπου εὑρισκομένου. Ὅτι δὲ ὑπάρχει καὶ ἄλλος τρόπος ἀποσυνθέσεως εὐκόλως δύναταί τις νὰ πεισθῇ περὶ τούτου, ἀρκεῖ, ἀντὶ νὰ ὑποθέσῃ τὸν Δ ὡς τὸν μικρότερον τῶν διαιρετῶν τοῦ A, νὰ ὑποθέσῃ τοῦτον ὥς τινα τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ, τοῦτ' αὐτὸ δὲ καὶ διὰ τοὺς διαιρέτας Δ', Δ'', κτλ.

Ἔστω λοιπὸν A ὁ δεδομένος ἀριθμός, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν, ἵνα ὁρίσωμέν πως τὰς ἰδέας, ὅτι οὗτος, ἀποσυντεθεὶς κατὰ δύο διαφόρους τρόπους εἰς πρώτους παράγοντας, εὑρέθη ἀμοιβαίως ἴσος μὲ τὰ γινόμενα $2^3 \times 3 \times 7^2 \times 11 \times 13$, $11^2 \times 2^2 \times 5 \times 13 \times 3$. Θέλομεν ἔχει τότε τὰς ἑξῆς δύο ἰσότητας·

$$A = 2^3 \times 3 \times 7^2 \times 11 \times 13 \text{ καὶ } A = 11^2 \times 2^2 \times 5 \times 13 \times 3,$$

ἐξ ὧν πορίζόμεθα ἀμέσως, ἐπειδὴ A=A, τὴν ἐπομένην

$$2^3 \times 3 \times 7^2 \times 11 \times 13 = 11^2 \times 2^2 \times 5 \times 13 \times 3.$$

Ἐὰν τώρα ἀπὸ τῶν δύο τελευταίων ἴσων γινομένων ἐξαλείψωμεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας 2^2, 3, 11, 13, τὰ γινόμενα τῶν μενόντων παραγόντων θέλουσιν εἶναι ἴσα, καὶ θέλομεν ἔχει

$$2 \times 7^2 = 11 \times 5,$$

τουτέστιν ὅτι τὰ δύο διάφορα γινόμενα 2×7^2 καὶ 11×5 παριστῶσι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τοῦθ'ὅπερ εἶναι ἀδύνατον. Διότι, ἐπειδὴ ὁ παράγων 2 τοῦ πρώτου γινομένου 2×7^2 διαιρεῖ προφανῶς αὐτὸ τὸ γινόμενον, πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἴσον αὐτῷ 11×5. Ἀλλ' εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 5, ὡς διάφορος αὐτοῦ. Ἄρα πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν 11 (84). Ἀλλὰ εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸν 11, ὡς διάφορος αὐτοῦ. Ἄρα δὲν δύναται νὰ διαιρῇ τὸ γινόμενον 11×5, ὅπερ ἄτοπον, διότι τὸ γινόμενον 11×5 εὑρέθη ἴσον τῷ 2×7^2. Τὸ ἄτοπον τοῦτο προέρχεται ἐκ τῆς ὑποθέσεως ὅτι δύο διάφορα γινόμενα πρώτων παραγόντων δύνανται νὰ ἦναι ἴσα χωρὶς νὰ περιέχωσι τοὺς αὐτοὺς πρώτους παράγοντας καὶ μὲ τοὺς αὐτοὺς ἀμοιβαίως ἐκθέτας.

Ὅ,τι εἴπομεν περὶ τοῦ παράγοντος 2 τὸ αὐτὸ θέλομεν ἐπαναλάβει καὶ περὶ παντὸς παράγοντος τοῦ πρώτου γινομένου, μὴ ἐμπεριεχομένου ἐν τῷ δευτέρῳ.

Λοιπὸν δύο γινόμενα πρώτων παραγόντων δὲν δύνανται νὰ ἦναι ἴσα χωρὶς νὰ περιέχωσι κτλ.

87. Ἡ πρᾶξις τῆς ἀποσυνθέσως ἀριθμοῦ τινὸς εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας διατάσσεται συνήθως ὡς ἑξῆς·

12936	2	
6468	2	
3234	2	
1617	3	$12936 = 2^3 \times 3 \times 7^2 \times 11$
539	7	
77	7	
11	11	

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ ἀποσυνθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 12936 εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας. Πρὸς τοῦτο γράφομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ ἄγομεν κάθετον γραμμήν. Δοκιμάζομεν ἔπειτα τὸν μικρότερον τῶν πρώτων ἀριθμῶν 2, καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 12936 διαιρεῖται διὰ 2, γράφομεν 2 πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ καὶ ὑπ' αὐτὸν τὸ πηλίκον 6468 τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 2.

Ἐπειδὴ καὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον 6468 διαιρεῖται πάλιν διὰ 2, γράφομεν 2 πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πηλίκου τούτου καὶ ὑπ' αὐτὸ τὸ πηλίκον 3234 τῆς διὰ 2 διαιρέσεως αὐτοῦ. Ἐξακολουθοῦμεν δὲ δοκιμάζοντες τὸν 2 μέχρις οὗ εὕρωμεν πηλίκον τι 1617 μὴ διαιρετὸν διὰ 2.

Δοκιμάζομεν τότε τὸν ἀμέσως μετὰ τὸν 2 ἑπόμενον πρῶτον ἀριθμὸν 3, καὶ ἐπειδὴ ὁ 1617 διαιρεῖται διὰ 3, γράφομεν 3 πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ καὶ ὑπ' αὐτὸν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον 539.

Ἐπειδὴ ὁ 539 δὲν διαιρεῖται διὰ 3 δοκιμάζομεν τὸν ἀμέσως μεγαλείτερον τοῦ 3 πρῶτον ἀριθμὸν 5. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 539 δὲν διαιρεῖται διὰ 5, δοκιμάζομεν τὸν ἀμέσως ἑπόμενον αὐτῷ πρῶτον ἀριθμὸν 7, καὶ ἐπειδὴ διαιρεῖται διὰ τούτου, γράφομεν 7 πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ καὶ ὑπ' αὐτὸν τὸ πηλίκον 77 τῆς διαιρέσεως. Δοκιμάζοντες πάλιν τὸν 7 εὑρίσκομεν πηλίκον 11, ὅπερ εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.

Εὐκόλως βλέπει τις ὅτι, καθ' ὃν τρόπον ἐξετελέσθη ἡ πρᾶξις, ὁ πρὸς ἀποσύνθεσιν δεδομένος ἀριθμὸς 12936 θέλει εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 \times 11$ τῶν ἐν τῇ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ καθέτῳ στήλῃ γεγραμμένων πρώτων ἀριθμῶν. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$12936 = 2^3 \times 3 \times 7^2 \times 11.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 1.—Εἴπομεν ἀνωτέρω ὅτι δοκιμάζομεν τοσάκις διαιρέτην τινά, ὁσάκις ἡ δι' αὐτοῦ διαίρεσις τῶν διαδοχικῶς εὑρισκομένων πηλίκων εἶναι δυνατή. Ἀλλ' ἀφοῦ εὕρωμεν πηλίκον τι μὴ διαιρετὸν διὰ τοῦ δοκιμαζομένου πρώτου ἀριθμοῦ, πρέπει νὰ παύσωμεν εἰς τὸ μετὰ ταῦτα τὴν δι' αὐτοῦ πρὸς διαίρεσιν δοκιμὴν τῶν ἀκολούθων πηλίκων. Διότι, ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν εὑρισκομένων πηλίκων εἶναι προφανῶς πολλαπλάσιόν τι τῶν πρὸ αὐτοῦ γεγραμμένων, ἐὰν πρῶτός τις ἀριθμὸς δὲν διαιρῇ πηλίκον τι τῶν πρὸ αὐτοῦ, οὔτε τὰ ὑποπολλαπλάσια αὐτοῦ δύναται νὰ διαιρέσῃ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 2.—Ἡ ἀποσύνθεσις ἀριθμοῦ τινος εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας ἐκτελεῖται ταχύτερον, ὅταν δυνάμεθα ν' ἀποσυνθέσωμεν ἀμέσως αὐτὸν εἰς γινόμενον δύο παραγόντων. Διότι τότε, ἀποσυνθέτοντες ἑκάτερον τῶν παραγόντων τούτων ὡς ἀνωτέρω ἐῤῥέθη εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας καὶ σχηματίζοντες τὸ γινόμενον τῶν εὑρεθησομένων παραγόντων, θέλομεν εὕρει τὸ ἴσον τῷ δεδομένῳ ἀριθμῷ γινόμενον τῶν πρώτων αὐτοῦ παραγόντων.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν ν' ἀποσυνθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 2400 εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, ἐπειδὴ ὁ 2400 εἶναι προφανῶς ἴσος τῷ γινομένῳ 24×100, καὶ ὁ μὲν 24, ἀποσυντεθεὶς εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, εὑρίσκεται ἴσος τῷ γινομένῳ $2^3 \times 3$, ὁ δὲ 100 ἴσος τῷ $2^2 \times 5^2$, ὁ 2400 θέλει προφανῶς εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τῶν εὑρεθέντων δύο γινομένων $2^3 \times 3$ καὶ $2^2 + 5^2$, τουτέστι θέλομεν ἔχει

$$2400 = 2^3 \times 3 \times 2^2 \times 5^2 = 2^5 \times 3 \times 5^2.$$

88. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἀριθμός τις A εἶναι διαιρετὸς δι' ἑτέρου τινὸς B, ὅταν οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ B εὑρίσκωνται μεταξὺ τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ A καὶ ἔχωσιν ἐκθέτας μικροτέρους ἢ τὸ πολὺ ἴσους μὲ τοὺς ἀντιστοίχους ἐκθέτας τῶν αὐτῶν παραγόντων τοῦ A.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς Α, ὁ παριστώμενος διὰ τοῦ γινομένου $2^3 \times 3 + 5^4 \times 7$, θέλει εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ Β, τοῦ διὰ τοῦ γινομένου $2^2 \times 5^2 \times 7$ παριστωμένου, ἐὰν οἱ πρῶτοι τοῦ Β παράγοντες 2, 5, 7 εὑρίσκωνται μεταξὺ τῶν πρώτων παραγόντων 2, 3, 5, 7 τοῦ Α καὶ οἱ ἐκθέται αὐτῶν 2, 2, 1 ἦναι μικρότεροι ἢ τὸ πολὺ ἴσοι μὲ τοὺς ἀντιστοίχους ἐκθέτας 3, 4, 1 τῶν αὐτῶν παραγόντων τοῦ Α.

Διότι, ἐὰν ὑποθέσωμεν τὴν διαίρεσιν ἐκτελεσθεῖσαν καὶ καλέσωμεν Π τὸ πηλίκον, θέλομεν ἔχει

$$A = B \times \Pi.$$

Τώρα, ὁποιονδήποτε καὶ ἂν ὑποτεθῇ τὸ Π, ἐὰν τὸ Β περιέχῃ παράγοντά τινα μὴ περιεχόμενον ἐν τῷ Α, ἡ ἀνωτέρω ἰσότης εἶναι ἀδύνατος κατὰ τὰ ἐν τῇ § 86 ἀποδειχθέντα· ἐὰν δὲ πάλιν παράγων τις τοῦ Α ὑπάρχῃ καὶ ἐν τῷ Β, ἀλλ' ἔχει ἐκθέτην μεγαλείτερον ἐν τῷ Β ἢ ἐν τῷ Α, εἶναι ἐπίσης φανερὸν ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἰσότης εἶναι ἀδύνατος διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ὅταν δὲ οἱ παράγοντες τοῦ Β εὑρίσκωνται μεταξὺ τῶν παραγόντων τοῦ Α καὶ ἔχωσιν ἐκθέτας μικροτέρους ἢ τὸ πολὺ ἴσους μὲ τοὺς ἀντιστοίχους ἐκθέτας τῶν αὐτῶν παραγόντων τοῦ Α, εἶναι καταφανὲς ὅτι ἡ διαίρεσις εἶναι πάντοτε δυνατή. Διότι τότε δυνάμεθα ν' ἀποσυνθέσωμεν τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων τοῦ Α εἰς δύο μερικὰ γινόμενα, ὧν τὸ ἕτερον νὰ ἦναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων τοῦ Β, τὸ δὲ ἕτερον θέλει παριστᾷ προφανῶς τὸ διὰ Π παρασταθὲν πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διὰ Β.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι $A=2^3\times3\times5^2\times7$ καὶ $B=2^2\times5^2\times7$, δυνάμεθα νὰ ἀποσυνθέσωμεν τὸ Α εἰς δύο μέρη $2^2\times5^2\times7$ καὶ 2×3, ὧν τὸ πρῶτον $2^2\times5^2\times7$ νὰ ἦναι ἴσον τῷ Β· Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ἕτερον 2×3 θέλει εἶναι ἴσον τῷ ζητουμένῳ πηλίκῳ Π, διότι τὸ γινόμενον $B\times\Pi$, ἤτοι τὸ $(2^2\times5^2\times7)\times(2\times3)$, εἶναι ἴσον τῷ Α, ἤτοι $2^3\times3\times5^2\times7$.

*89. Ἐπὶ τοῦ προαποδειχθέντος θεωρήματος στηριζόμενοι δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εὕρωμεν ἅπαντας τοὺς διαιρέτας ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ ἀποσυντεθειμένου εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας. Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 504, ὅστις ἀποσυντεθεὶς εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας εὑρίσκεται ἴσος τῷ γινομένῳ $2^3\times3^2\times7$. Ἄς σχηματίσωμεν τὸν ἑξῆς πίνακα

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 2^2, & 2^3, \\ 1, & 3, & 3^2, & \\ 1, & 7, & & \end{array} \qquad (1)$$

ὅστις περιέχει τόσας ὁριζοντίους σειράς, ὅσοι εἶναι οἱ διάφοροι παράγοντες τοῦ γινομένου $2^3\times3^2\times7$, καὶ ἑκάστη τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἐκ τῆς 1 ἀκολουθουμένης ὑπὸ πασῶν τῶν δυνάμεων ἑκάστου τῶν παραγόντων αὐτοῦ ἀπὸ τῆς πρώτης δυνάμεως μέχρι τῆς ἐν τῷ γινομένῳ $2^3\times3^2\times7$ περιεχομένης. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον τῶν ὅρων τῆς πρώτης σειρᾶς ἐφ' ἕκαστον τῶν τῆς δευτέρας, ἔπειτα ἕκαστον τῶν ὅρων τῶν εὑρεθησομένων γινομένων

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 2^2 & 2^3 \\ 3, & 2\times3, & 2^2\times3, & 2^3\times3 \\ 3^2, & 2\times3^2, & 2^2\times3^2, & 2^3\times3^2 \end{array} \qquad (2)$$

ἐφ' ἕκαστον τῶν ὅρων τῆς τρίτης σειρᾶς, εἶναι φανερὸν α') ὅτι ἕκαστον τῶν οὕτως εὑρεθησομένων γινομένων

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 2^2, & 2^3 \\ 3, & 2\times3, & 2^2\times3, & 2^3\times3 \\ 3^2, & 2\times3^2, & 2^2\times3^2, & 2^3\times3^2 \\ 7 & 2\times7, & 2^2\times7, & 2^3\times7 \\ 3\times7, & 2\times3\times7, & 2^2\times3\times7, & 2^3+3\times7 \\ 3^2\times7, & 2\times3^2\times7, & 2^2\times3^2\times7, & 2^3\times3^2\times7, \end{array} \qquad (3)$$

θέλει εἶναι διαιρέτης τοῦ γινομένου $2^3\times3^2\times7$, τοῦ παριστῶντος τὸν δεδομένον ἀριθμὸν 504, καὶ β') ὅτι πᾶς διαιρέτης τοῦ 504 θέλει εἶναι ἴσος τινὶ τῶν ἀνωτέρω γινομένων· διότι πρέπει οἱ πρῶτοι παράγοντες αὐτοῦ νὰ περιέχωνται μεταξὺ τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ γινομένου $2^3\times3^2\times7$ καὶ νὰ ἔχωσιν ἐκθέτας ἀμοιβαίως μικροτέρους ἢ τὸ πολὺ ἴσους, καθ' ὃν δὲ τρόπον εὑρέθησαν τὰ ἀνωτέρω γινόμενα, ὁ ὑπ' αὐτῶν ἀποτελούμενος πίναξ (3) περιέχει πάντα τὰ δυνατὰ γινόμενα τῶν ἐν τῷ πίνακι (1) ἀριθμῶν, συνδυαζομένων ἀνὰ τρεῖς καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.

90. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἐὰν ἔχωμεν δύο ἢ πλειοτέρους ἀριθμοὺς ἀποσυντεθειμένους εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας καὶ σχηματίσωμεν γινόμενον ἐκ τῶν κοινῶν εἰς αὐτοὺς παραγόντων, δίδοντες εἰς ἕκαστον τούτων ἐκθέτην τὸν μικρότερον τῶν ἐν τοῖς δεδομένοις γινομένοις ἐκθετῶν αὐτῶν, τὸ οὕτω σχηματισθησόμενον γινόμενον θέλει εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.*

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν

$$A=2^2\times3^2\times5\times7,$$
$$B=2^2\times3^3\times7^2\times11,$$
$$\Gamma=2\times3^3\times7^5\times13.$$

Ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον τῶν κοινῶν παραγόντων 2, 3 καὶ 7, δίδοντες εἰς ἕκαστον τὸν μικρότερον τῶν ἐν αὐτοῖς ἐκθετῶν, τὸ οὕτω σχηματισθησόμενον γινόμενον $2\times3^2\times7$ θέλει εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν Α, Β καὶ Γ. Διότι

1ον. Τὸ γινόμενον $2\times3^2\times7$ εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν. Διότι καθ' ὃν τρόπον ἐσχηματίσθη, οἱ παράγοντες αὐτοῦ περιέχονται μεταξὺ τῶν πρώτων παραγόντων τῶν δεδομένων ἀριθμῶν καὶ ἔχουσιν ἐκθέτας μικροτέρους ἢ τὸ πολὺ ἴσους μὲ τοὺς τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

2ον. Εἶναι ὁ μέγιστος πάντων. Διότι πρῶτον δὲν δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ παριστῶν αὐτὸν γινόμενον $2\times3^2\times7$ οὐδένα ἄλλον μὴ κοινὸν παράγοντα· διότι τότε δὲν ἤθελε διαιρεῖ τὸν ἀριθμὸν ἢ τοὺς ἀριθμούς, οἵτινες δὲν ἤθελον ἔχει τὸν προστεθέντα εἰς τὸ γινόμενον $2\times3^2\times7$ μὴ κοινὸν παράγοντα. δεύτερον δὲν δυνάμεθα οὔτε ν' αὐξήσωμεν τὸν ἐκθέτην κοινοῦ τινος παράγοντος τοῦ γινομένου $2\times3^2\times7$, διότι τότε ὁ ἀριθμός, ὁ ἔχων τὸν αὐτὸν παράγοντα μὲ ἐκθέτην μικρότερον, δὲν ἤθελε διαιρεῖσθαι διὰ τοῦ νέου γινομένου, ἑπομένως τὸ νέον γινόμενον δὲν ἤθελεν εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

Λοιπὸν τὸ ὡς προείπομεν σχηματιζόμενον γινόμενον $2\times3^2\times7$ εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεδομένων ἀριθμῶν Α, Β καὶ Γ.

Δὲν δυνάμεθα, λόγου χάριν, νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ ἀνωτέρω γινόμενον $2\times3^2\times7$ τὸν παράγοντα 5· διότι τότε τὸ προκύπτον γινόμενον $2+3^2\times7\times5$ δὲν ἤθελε διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς Β καὶ Γ, τοὺς μὴ περιέχοντας τὸν παράγοντα τοῦτον. Δὲν δυνάμεθα οὔτε ν' αὐξήσωμεν τὸν ἐκθέτην τινὸς τούτων, λόγου χάριν τοῦ 7· διότι τότε τὸ νέον γινόμενον $2\times3^2\times7^2$ δὲν ἤθελε διαιρεῖ τὸν ἀριθμὸν Α, ἐν ᾧ ὁ 7 ἔχει ἐκθέτην μικρότερον.

ΠΕΡΙ ΚΟΙΝΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΥ ΔΥΟ Η ΠΛΕΙΟΤΕΡΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

91. Ἀριθμός τις λέγεται *κοινὸν πολλαπλάσιον* δύο ἢ πλειοτέρων ἄλλων, ὅταν ἦναι διαιρετὸς δι' ἑκάστου τούτων. Παραδείγματος χάριν, ὁ 60 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τοῦ 4 καὶ 5, διότι διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 4 καὶ διὰ 5. Ὁ 30 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 5, διότι διαιρεῖται δι' ἑνὸς ἑκάστου αὐτῶν.

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ κοινὰ πολλαπλάσια δύο ἢ πλειοτέρων ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρα. Διότι πᾶν γινόμενον κοινοῦ τινος πολλαπλασίου ἐπί τινα ἀριθμὸν θέλει εἶναι νέον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, ὧν ἦτο κοινὸν πολλαπλάσιον (54). Μεταξὺ ὅμως τῶν κοινῶν πολλαπλασίων ὑπάρχει ἓν μικρότερον πάντων, ὅπερ καλεῖται *ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον*.

Εἰς πολλὰς περιστάσεις ἡ εὕρεσις τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου δεδομένων ἀριθμῶν εὐκολύνει μεγάλως τὴν ταχεῖαν ἐκτέλεσιν ἀριθμητικῶν τινων πράξεων, εὑρίσκεται δὲ τοῦτο διὰ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος ἢ κανόνος.

92. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἐὰν ἔχωμεν δύο ἢ πλειοτέρους ἀριθμοὺς ἀποσυντεθειμένους εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν εὑρίσκεται σχηματιζομένου τοῦ γινομένου πάντων τῶν κοινῶν τε καὶ μὴ εἰς τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς παραγόντων, λαμβανομένου ἑκάστου κοινοῦ τε καὶ μὴ μὲ τὸν μεγαλείτερον τῶν ἐν τοῖς δεδομένοις ἀριθμοῖς ἐκθετῶν αὐτοῦ.*

Παραδείγματος χάριν, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας ἀποσυντεθειμένων ἀριθμῶν

$$A = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7.$$
$$B = 2^2 \times 3^3 \times 7^2 \times 11^2.$$
$$\Gamma = 2 \times 3^5 \times 7^3 \times 13$$

εἶναι τὸ γινόμενον $2^3 \times 3^5 \times 5 \times 7^3 \times 11^2 \times 13$, ὅπερ σχηματίζομεν λαμβάνοντες ὅλους τοὺς κοινούς τε καὶ μὴ παράγοντας τῶν δεδομένων ἀριθμῶν Α, Β, Γ, καὶ δίδοντες εἰς ἕκαστον κοινόν τε καὶ μὴ παράγοντα τὸν μεγαλείτερον τῶν ἐν αὐτοῖς ἐκθετῶν αὐτοῦ. Εἰς τὸν 2 λόγου χάριν ἐδώσαμεν τὸν ἐκθέτην 3, διότι εἶναι ὁ μεγαλείτερος πάντων τῶν ἐκθετῶν 1, 2, 3 αὐτοῦ· εἰς τὸν 3 τὸν ἐκθέτην 5, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον· εἰς τὸν 11 τὸν ἐκθέτην 2 κτλ.

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ ἀνωτέρου θεωρήματος ἢ κανόνος πρέπει ν' ἀποδείξωμεν δύο τινά·

1ον. Ὅτι τὸ σχηματιζόμενον γινόμενον $2^3 \times 3^5 \times 5 \times 7^3 \times 11^2 \times 13$ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, καὶ

2ον. Ὅτι εἶναι τὸ ἐλάχιστον πάντων.

1ον. Τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος γινόμενον εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν Α, Β καὶ Γ, διότι περιέχει ὅλους τοὺς παράγοντας ἑκάστου τούτων μὲ τὸν μεγαλείτερον τῶν ἐν αὐτοῖς ἐκθετῶν. Ἐπομένως διαιρεῖται δι' ἑκάστου αὐτῶν (88).

2ον. Εἶναι τὸ ἐλάχιστον πάντων. Διότι δὲν δυνάμεθα οὔτε ν'ἀφαιρέσωμεν μὴ κοινόν τινα παράγοντα, (διότι τότε δὲν ἤθελε διαιρεῖσθαι διὰ τοῦ ἀριθμοῦ ἢ διὰ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐμπεριεχόντων τὸν ἐξαλειφθέντα παράγοντα), οὔτε νὰ ἐλαττώσωμεν τὸν ἐκθέτην παράγοντός τινος, (διότι τότε δὲν ἤθελε διαιρεῖσθαι διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ἔχοντος τὸν παράγοντα τοῦτον εἰς ἀνωτέραν δύναμιν). Λοιπὸν τὸ οὕτω σχηματιζόμενον γινόμενον θέλει εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

Λόγου χάριν, δὲν ἠδυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ γινομένου $2^3 \times 3^5 \times 5 \times 7^3 \times 11^2 \times 13$ τὸν μὴ κοινὸν παράγοντα 11^2, διότι τότε τὸ γινόμενον $2^3 \times 3^5 \times 5 \times 7^3 \times 13$ δὲν ἤθελε διαιρεῖσθαι διὰ τοῦ ἀριθμοῦ Β, τοῦ περιέχοντος τὸν ἐξαλειφθέντα παράγοντα 11^2. Δὲν δυνάμεθα ὡσαύτως νὰ ἐλαττώσωμεν τὸν ἐκθέτην κοινοῦ τινος παράγοντος, τοῦ 3 λόγου χάριν, διότι τότε τὸ νέον γινόμενον $2^3 \times 3^4 \times 5 \times 7^3 \times 11^2 \times 13$ δὲν ἤθελε διαιρεῖσθαι διὰ τοῦ Γ, τοῦ ἔχοντος τὸν παράγοντα 3 μὲ ἀνώτερον ἐκθέτην.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Διὰ πόσων πρώτων ἀριθμῶν, ἀρχόμενοι τῆς διαιρέσεως ἀπὸ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ 2, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 4111, ὅπως ἀποφανθῶμεν μετὰ βεβαιότητος ἐὰν ἦναι ἢ μὴ πρῶτος;

II. Ποῖος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν 308 καὶ 280;

III. Ποῖος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν 1540 καὶ 3643;

IV. Νὰ ἀποσυντεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 630, 650 καὶ 924 εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας.

V. Νὰ εὑρεθῇ τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν 630, 650 καὶ 924 ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης καὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.

VI. Ποῖος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 10, 25, 27, καὶ ποῖον τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

ΚΛΑΣΜΑΤΑ.

ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ.

93. *Μέγεθος* καλεῖται πᾶν τὸ ἐπιδεκτικὸν αὐξήσεως ἢ ἐλαττώσεως. Παραδείγματος χάριν, τὰ *μήκη*, αἱ *ἐπιφάνειαι*, τὰ *βάρη* τῶν σωμάτων εἶναι μεγέθη.

Ὅταν μέγεθός τι περιέχῃ ἀκριβῶς δεύτερόν τι μέγεθος τοῦ αὐτοῦ εἴδους δίς, τρίς, τετράκις, κτλ., τὸ πρῶτον λέγεται τότε *πολλαπλάσιον* τοῦ δευτέρου. Ἀντιστρόφως τὸ δεύτερον μέγεθος καλεῖται *ὑποπολλαπλάσιον* ἢ *πολλοστὸν μέρος* τοῦ πρώτου.

Μονὰς καλεῖται μέγεθός τι κατ' ἀρέσκειαν ληφθέν, ἀλλ' ἐντελῶς ὡρισμένον, δι' οὗ μετροῦμεν τὰ τοῦ αὐτοῦ εἴδους μεγέθη. Μετροῦμεν δὲ μέγεθός τι, ὅταν προσδιορίζωμεν πόσας μονάδας καὶ πόσα πολλοστὰ μέρη τῆς μονάδος περιέχει τοῦτο.

Πρὸς τὸ παρὸν δὲν θέλομεν θεωρήσει εἰμὴ τὰς δύο ἁπλουστέρας τῆς καταμετρήσεως τῶν μεγεθῶν περιπτώσεις· τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ πρὸς καταμέτρησιν μέγεθος εἶναι πολλαπλάσιόν τι τῆς μονάδος, καὶ ἐκείνην, καθ' ἣν εἶναι πολλαπλάσιον πολλοστοῦ τινος μέρους αὐτῆς.

1ον. *Ὅταν τὸ πρὸς καταμέτρησιν μέγεθος ἦναι πολλαπλάσιόν τι τῆς μονάδος.* Ἐὰν ὑποθέσωμεν, π. χ., ὅτι πρόκειται περὶ μήκους, περιέχοντος τετράκις τὴν ὁρισθεῖσαν μονάδα, τότε ὁ ἀριθμὸς 4 θέλει ἐκφράζει τὸ *μέτρον* τοῦ μήκους τούτου· ἐν ἄλλαις λέξεσι, τὸ μῆκος θέλει παρίστασθαι διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 4.

2ον. *Ὅταν τὸ πρὸς καταμέτρησιν μέγεθος ἦναι πολλαπλάσιόν τι πολλοστοῦ τινος μέρους τῆς μονάδος.* Ἄς λάβωμεν ὡς προηγουμένως μῆκός τι, καὶ ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι, τῆς μονάδος διαιρεθείσης εἰς 7 ἴσα μέρη, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος μῆκος περιέχει 5 ἐκ τῶν ἴσων τούτων μερῶν. Λέγομεν τότε ὅτι τὸ μῆκος περιέχει κλάσμα τι τῆς μονάδος ἴσον μὲ τὰ 5 ἕβδομα αὐτῆς, ἢ ὅτι μέτρον αὐτοῦ εἶναι τὸ κλάσμα 5 *ἕβδομα*. Ἂς θεωρήσωμεν πρὸς τούτοις χρονικόν τι διάστημα, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι, τῆς χρονικῆς μονάδος διαιρεθείσης εἰς 12 ἴσα μέρη, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος χρονικὸν διάστημα περιέχει 35 τοιαῦτα. Τότε μέτρον τοῦ ληφθέντος χρονικοῦ διαστήματος θέλει εἶναι τὸ κλάσμα 35 *δωδέκατα*.

Καθ' ὅλας τὰς περιπτώσεις τὸ ἐξαγόμενον τῆς καταμετρήσεως μεγέθους τινὸς καλεῖται *ἀριθμός*.

Ὅταν μέγεθός τι ἦναι πολλαπλάσιον τῆς μονάδος, ὁ ἐκφράζων τὸ μέτρον αὐτοῦ ἀριθμὸς λέγεται *ἀριθμὸς ἀκέραιος* ἢ ἁπλῶς *ἀκέραιος*. Μέχρι τοῦδε ἐγένετο ἀποκλειστικῶς λόγος περὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, οὓς ἐθεωρήσαμεν ὡς ἐκφράζοντας συλλογὴν ὁμοίων καὶ διακεκριμένων ἀντικειμένων.

Ὅταν μέγεθός τι ἦναι πολλαπλάσιόν τι πολλοστοῦ τινος μέρους τῆς μονάδος, ὁ τὸ μέτρον αὐτοῦ ἐκφράζων ἀριθμὸς καλεῖται *κλασματικὸς ἀριθμὸς* ἢ ἁπλῶς *κλάσμα*.

Ὅταν τὰ μεγέθη παρίστανται δι' ἀριθμῶν, τότε καλοῦνται μερικώτερον *ποσότητες*. Ἡ λέξις λοιπὸν *ποσότης* ὑποθέτει καταμετρηθὲν μέγεθος, ἢ ὡς τοιοῦτο θεωρούμενον.

Οἱ ἀριθμοὶ εἶναι *ἀφηρημένοι* ἢ *συγκεκριμένοι*. Ἀφηρημένος ἀριθμὸς καλεῖται ὁ τὸ μέτρον μεγέθους τινὸς ἢ ποσοῦ τινος παριστῶν χωρὶς νὰ ἐκφράζῃ καὶ τὸ εἶδος τοῦ ὑπ' αὐτοῦ παριστωμένου μεγέθους ἢ ποσοῦ· ὡς ὅταν λέγωμεν π. χ. ὁ ἀριθμὸς 5, ὁ ἀριθμὸς 12, χωρὶς νὰ ἐκφράζωμεν καὶ *τί 5* καὶ *τί 12*. Συγκεκριμένος δὲ λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ἐκφράζων συνάμα καὶ τὸ εἶδος τοῦ μεγέθους ἢ τοῦ ποσοῦ, οὗτινος παριστᾷ τὸ μέτρον. Π. χ. ὅταν λέγωμεν 5 *πήχεις*, 8 *ὧραι*, 3 *ἄνθρωποι*.

Αἱ μαθηματικαὶ ἐπιστῆμαι, ὧν τὸ πρῶτον μέρος ἀπετελεῖ ἡ Ἀριθμητική, ἀντικείμενον ἔχουσι τὰ μεγέθη.

ΠΕΡΙ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.

94. Κατὰ τὰ προλεχθέντα πρὸς σχηματισμὸν κλάσματός τινος διαιροῦμεν τὴν μονάδα εἰς ἀριθμόν τινα ἴσων μερῶν καὶ λαμβάνομεν ἓν ἢ πλειότερα τῶν μερῶν τούτων. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἴσων μερῶν, εἰς ἃ διῃρέσαμεν τὴν μονάδα, καλεῖται *παρονομαστὴς* τοῦ κλάσματος, ὁ δὲ ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων πόσα τῶν ἴσων τούτων μερῶν ἐλάβομεν, *ἀριθμητής*. Ὁ ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστής, ὁμοῦ λαμβανόμενοι, καλοῦνται *ὅροι* τοῦ κλάσματος. Τοῦ κλάσματος λοιπὸν 5 *ἕβδομα*

παρονομαστὴς εἶναι ὁ 7, ἀριθμητὴς ὁ 5, καὶ οἱ δύο ὁμοῦ, 5 καὶ 7, ὅροι αὐτοῦ.

Πρὸς γραφὴν κλάσματός τινος γράφομεν τὸν παρονομαστὴν ὑπὸ τὸν ἀριθμητὴν καὶ χωρίζομεν αὐτοὺς δι' ὁριζοντίου γραμμῆς. Οὕτω $\frac{5}{7}$ παριστᾷ τὸ κλάσμα, τὸ ἔχον παρονομαστὴν 7 καὶ ἀριθμητὴν 5.

Πρὸς ἀπαγγελίαν κλάσματός τινος ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ, ἔπειτα τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ ὡς τακτικὸν ἀριθμόν. Οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ ἀπαγγέλλεται *πέντε ἕβδομα*· τὸ κλάσμα $\frac{8}{11}$ ἀπαγγέλλεται *ὀκτὼ ἑνδέκατα*. Μία μόνη ἐξαίρεσις ὑπάρχει· τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ λέγεται καὶ *ἓν δεύτερον* καὶ *ἥμισυ*.

95. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν κλασμάτων εἶναι φανερὸν ὅτι κλάσμα τι εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ ἦναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ· εἶναι ἴσον τῇ μονάδι, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ ἦναι ἴσος τῷ παρονομαστῇ, καὶ μεγαλείτερον τῆς μονάδος, ὅταν ὁ μὲν ἦναι μεγαλείτερος τοῦ δέ. Ἐν τῇ τελευταίᾳ ταύτῃ περιπτώσει εἶναι ἀναγκαῖον πολλάκις νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἐν τῷ κλάσματι περιεχομένας ἀκεραίας μονάδας, ἢ ὡς λέγουσιν ἁπλούστερον, τὸν ἐν τῷ κλάσματι περιεχόμενον ἀκέραιον.

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{33}{7}$. Ἐπειδὴ ἡ μονὰς περιέχῃ 7 ἕβδομα, πρέπει πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ κλάσματι $\frac{33}{7}$, νὰ ζητήσωμεν ποσάκις τὰ 33 ἕβδομα περιέχουσιν 7 ἕβδομα, ἤ, ὅπερ ταὐτό, ποσάκις ὁ 33 περιέχει τὸν 7. Διαιροῦντες πρὸς τοῦτο τὸν 33 διὰ τοῦ 7 εὑρίσκομεν πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 5. Λοιπὸν τὰ 33 ἕβδομα τῆς μονάδος περιέχουσι τετράκις 7 ἕβδομα καὶ 5 ἕβδομα ἀκόμη, τοῦθ' ὅπερ παριστῶμεν διὰ τῆς ἑξῆς ἰσότητος

$$\frac{33}{7}=4+\frac{5}{7}.$$

Ἐγράψαμεν ἁπλῶς 4, διότι ὑπεννοεῖται ἡ λέξις μονάς, ἥτις ὡς προείπομεν εἶναι ἴση μὲ 7 ἕβδομα.

Τὸ ἄθροισμα $4+\frac{5}{7}$ καλεῖται καὶ *μικτὸς ἀριθμός*, ὡς συγκείμενος ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος.

Λοιπόν, *πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐν τινι κλάσματι περιεχομένου ἀκεραίου ἀρκεῖ νὰ ζητήσωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθ-*

μητοῦ αὐτοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ. Προσθέτοντες δὲ εἰς τὸ εὑρεθησόμενον πηλίκον κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως καὶ παρονομαστὴν τὸν τοῦ δεδομένου κλάσματος, θέλομεν ἔχει ἄθροισμα ἴσον τῷ περὶ οὗ ὁ λόγος κλάσματι· ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἀναπαριστῶμεν οὕτω τὴν ἀξίαν τοῦ αὐτοῦ κλάσματος.

96. Ἀντιστρόφως, ὅταν ἔχωμεν μικτόν τινα ἀριθμόν, πολλάκις εἶναι ἀναγκαῖον νὰ *τρέψωμεν αὐτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν.* Ἔστω π. χ. ὁ μικτὸς $4+\frac{5}{7}$. Ἐπειδὴ ἑκάστη μονὰς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς περιέχουσα 7 ἕβδομα, αἱ 4 μονάδες θέλουσι περιέχει τετράκις 7 ἕβδομα, ἢ 4×7 ἕβδομα. Λοιπὸν ὑπάρχουσιν ἐν τῷ δεδομένῳ μικτῷ $4+\frac{5}{7}$ τετράκις 7 ἕβδομα, ἤτοι 28 ἕβδομα, καὶ 5 ἕβδομα ἀκόμη, τὸ ὅλον 33 ἕβδομα. Θέλομεν ἔχει λοιπὸν τὴν ἰσότητα

$$4+\frac{5}{7}=\frac{33}{7},$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα τὸν ἑξῆς κανόνα·

Πρὸς τροπὴν δεδομένου μικτοῦ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματός του, εἰς τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ αὐτοῦ κλάσματος, καὶ ὑπὸ τὸ εὑρεθησόμενον ἄθροισμα γράφομεν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ὁ κανών, δι' οὗ ἐξάγομεν τὸν ἔν τινι κλάσματι περιεχόμενον ἀκέραιον, παρέχει τὴν ἑξῆς οὐσιώδη συνέπειαν· *Διὰ νὰ δύναται κλάσμα τι νὰ ἀναχθῇ εἰς ἀκέραιον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ νὰ ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ.* Εὑρίσκομεν π. χ. ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{28}{7}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀκέραιον 4, διότι ὁ ἀκέραιος ἀριθμητὴς αὐτοῦ 28 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ 7.

97. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματός τινος γίνεται δίς, τρίς, τετράκις, κτλ. μεγαλείτερος ἢ μικρότερος, τὸ κλάσμα γίνεται δίς, τρίς, τετράκις, κτλ. μεγαλείτερον ἢ μικρότερον.*

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{7}{9}$. Πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ ἐπὶ 3, τὸ κλάσμα γίνεται $\frac{7\times3}{9}$. λέγω δὲ ὅτι τὸ νέον τοῦτο κλάσμα εἶναι τρὶς μεγαλείτερον τοῦ πρώτου. Διότι τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος δύο κλάσματα συντίθενται ἀμφότερα ἐξ ἐνάτων τῆς μονάδος, ἀλλὰ τὸ μὲν πρῶτον περιέχει 7 τοιαῦτα, τὸ δὲ δεύτερον 7×3, τουτέστι τρὶς περισσότερα τοῦ πρώτου. Λοιπὸν τὸ δεύτερον κλάσμα εἶναι προφανῶς τριπλάσιον τοῦ πρώτου.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ κλάσμα $\frac{7}{9}$ γίνεται τρὶς μεγαλείτερον τριπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ, ἕπεται ὅτι καὶ ἀντιστρόφως, τὸ οὕτω προκύπτον κλάσμα $\frac{7\times3}{9}$ γίνεται τρὶς μικρότερον διαιρουμένου τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ 7×3 διὰ 3.

98. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Διπλασιαζομένου, τριπλασιαζομένου, κτλ. τοῦ παρονομαστοῦ κλάσματός τινος, τὸ κλάσμα γίνεται δίς, τρίς, κτλ. μικρότερον, καὶ ἀντιστρόφως· διαιρουμένου τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ διὰ 2, 3, 4, κτλ. τὸ κλάσμα γίνεται δίς, τρίς, τετράκις, κτλ. μεγαλείτερον.*

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$. Πολλαπλασιαζομένου τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ ἐπὶ 3, τὸ κλάσμα γίνεται $\frac{5}{7\times3}$· λέγω δὲ ὅτι τὸ νέον τοῦτο κλάσμα εἶναι τρὶς μικρότερον τοῦ πρώτου. Διότι προφανῶς, ἵνα διαιρέσωμεν τὴν μονάδα εἰς 7×3 ἴσα μέρη, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὴν πρῶτον εἰς 7 ἴσα μέρη καὶ ἔπειτα ἓν ἕκαστον τῶν 7 τούτων ἴσων μερῶν εἰς 3 ἴσα μέρη· ἕπεται λοιπὸν ὅτι τὸ $\frac{1}{7}$ τῆς μονάδος περιέχει τρὶς τὸ $\frac{1}{7\times3}$ αὐτῆς. Λοιπὸν ὡσαύτως καὶ τὰ $\frac{5}{7}$ τῆς μονάδος θέλουσι περιέχει τρὶς τὰ $\frac{5}{7\times3}$ αὐτῆς. Ἐν ἄλλαις λοιπὸν λέξεσι τὸ νέον κλάσμα $\frac{5}{7\times3}$ θέλει εἶναι τὸ τρίτον τοῦ $\frac{5}{7}$.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ γίνεται τρὶς μικρότερον τριπλασιαζομένου τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ, ἕπεται ὅτι καὶ ἀντιστρόφως, τὸ οὕτω προκύπτον κλάσμα $\frac{5}{7\times3}$ γίνεται τρὶς μεγαλείτερον διαιρουμένου τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ διὰ 3.

99. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Κλάσμα τι δὲν μεταβάλλεται πολλαπλασιαζομένων ἢ διαιρουμένων καὶ τῶν δύο αὐτοῦ ὅρων διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$. Πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ ἐπὶ 3, τὸ νέον κλάσμα $\frac{5\times3}{7}$ εἶναι τρὶς μεγαλείτερον τοῦ $\frac{5}{7}$, πολλαπλασιαζομένου δὲ ἀφ' ἑτέρου τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δευτέρου τούτου κλάσματος $\frac{5\times3}{7}$ ἐπὶ 3, τὸ νέον κλάσμα $\frac{5\times3}{7\times3}$ γίνεται τρὶς μικρότερον τοῦ $\frac{5\times3}{7}$. Ἄρα τὸ νέον κλάσμα $\frac{5\times3}{7\times3}$ εἶναι ἴσον τῷ πρώτῳ $\frac{5}{7}$, ὅπερ εἶναι ἐπίσης τὸ τρίτον τοῦ αὐτοῦ κλάσματος $\frac{5\times3}{7}$.

Λοιπὸν τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ δὲν μεταβάλλεται πολλαπλασιαζομένων καὶ τῶν δύο αὐτοῦ ὅρων ἐπὶ 3. Καὶ ἀντιστρόφως τὸ κλάσμα $\frac{5\times3}{7\times3}$ μένει τὸ αὐτὸ διαιρουμένων καὶ τῶν δύο αὐτοῦ ὅρων διὰ 3.

ΑΝΑΓΩΓΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΤΙΝΟΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΠΛΟΥΣΤΑΤΗΝ ΑΥΤΟΥ ΜΟΡΦΗΝ.

100. Κλάσμα τι λέγεται *ἀνάγωγον*, ὅταν δὲν δύναται νὰ ἦναι ἴσον ἑτέρῳ τινὶ κλάσματι, ἔχοντι ὅρους μικροτέρους.

Ἀνάγομεν κλάσμα τι εἰς τὴν ἁπλουστάτην αὐτοῦ μορφήν, ὅταν εὑρίσκωμεν τὸ ἴσον αὐτῷ ἀνάγωγον κλάσμα.

101. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἐὰν κλάσμα τι, οὗτινος οἱ ὅροι εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἦναι ἴσον δευτέρῳ τινὶ κλάσματι, οἱ δύο ὅροι τοῦ δευτέρου τούτου κλάσματος θέλουσιν εἶναι τὰ αὐτὰ πολλαπλάσια τῶν δύο ὅρων τοῦ πρώτου.*

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$, οὗτινος οἱ δύο ὅροι εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, εἶναι ἴσον ἑτέρῳ τινὶ κλάσματι, ἔχοντι ἀριθμητὴν ἀκέραιόν τινα ἀριθμὸν **N** καὶ παρονομαστὴν ἕτερον Δ. Λέγω ὅτι οἱ ὅροι N καὶ Δ τοῦ δευτέρου τούτου κλάσματος θέλουσιν εἶναι ἰσοπολλαπλάσια τῶν ὅρων 7 καὶ 8 τοῦ πρώτου.

Διότι πολλαπλασιάζοντες τοὺς ἀριθμητὰς 7 καὶ N τῶν δύο ἴσων κλασμάτων $\frac{7}{8}$ καὶ $\frac{N}{\Delta}$ ἐπὶ Δ, θέλομεν ἔχει δύο νέα ἴσα κλάσματα $\frac{7\times\Delta}{8}$ καὶ $\frac{N\times\Delta}{\Delta}$. Ἀλλ' ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος $\frac{N\times\Delta}{\Delta}$ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ Δ καὶ δίδει πηλίκον N. Λοιπὸν τὸ νέον κλάσμα $\frac{7\times\Delta}{8}$ εἶναι ἴσον τῷ ἀκεραίῳ ἀριθμῷ N. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$N=\frac{7\times\Delta}{8}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ N εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος, ὁ ἀριθμητὴς 7×Δ τοῦ κλάσματος $\frac{7\times\Delta}{8}$ πρέπει νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ 8.

Ἀλλ' ὁ 8 εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν παράγοντα 7 τοῦ γινομένου

$7\times\Delta$. Ἄρα πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν Δ (84). Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ Δ διὰ 8 εἶναι 13, θέλομεν ἔχει $\Delta=8\times13$, καὶ ἑπομένως, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν προηγουμένην ἰσότητα (1) ἀντὶ τοῦ Δ τὸ ἴσον αὐτῷ 8×13, θέλομεν ἔχει

$$N=\frac{7\times\Delta}{8}=\frac{7\times8\times13}{8}=7\times13.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι οἱ ὅροι N καὶ Δ τοῦ κλάσματος $\frac{N}{\Delta}$, ὅπερ ὑπετέθη ἴσον τῷ $\frac{7}{8}$, τῷ ἔχοντι τοὺς ὅρους αὐτοῦ πρώτους πρὸς ἀλλήλους, εἶναι ἀμοιβαίως τὰ γινόμενα τοῦ 7 καὶ 8 ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 13, τοῦθ' ὅπερ ἐκφράζομεν συντομώτερον λέγοντες ὅτι N καὶ Δ εἶναι *ἰσοπολλαπλάσια τοῦ 7 καὶ 8*.

102. Ἐκ τοῦ προαποδειχθέντος θεωρήματος ἕπεται ὅτι

Τὸ κλάσμα, τὸ ἔχον τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ πρώτους πρὸς ἀλλήλους, εἶναι ἀνάγωγον.

Διότι, κατὰ τὰ προηγούμενα, ὅταν κλάσμα τι ἦναι ἴσον ἑτέρῳ κλάσματι, ἔχοντι τοὺς ὅρους αὐτοῦ πρώτους πρὸς ἀλλήλους, οἱ ὅροι αὐτοῦ εἶναι ἀριθμοὶ ἀμοιβαίως μεγαλείτεροι τῶν ὅρων τοῦ ἑτέρου κλάσματος. Λοιπὸν τὸ κλάσμα, τὸ ἔχον τοὺς ὅρους αὐτοῦ πρώτους πρὸς ἀλλήλους, εἶναι τὸ ἁπλούστερον πάντων τῶν ἴσων αὐτῷ ἤτοι εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον.

Ἀντιστρόφως, *οἱ δύο ὅροι ἀναγώγου τινὸς κλάσματος εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Διότι, ἂν οἱ δύο ὅροι τοῦ ἀναγώγου κλάσματος δὲν ἦσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, διαιροῦντες αὐτοὺς διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, ἠθέλομεν εὕρει οὕτω κλάσμα ἴσον τῷ πρώτῳ καὶ ἁπλούστερον αὐτοῦ, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

Βλέπομεν ἐντεῦθεν ὅτι, *ἵνα ἀναγάγωμεν κλάσμα τι εἰς τὴν ἁπλουστάτην αὐτοῦ μορφήν, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.*

Διότι οὕτω θέλομεν εὕρει κλάσμα ἴσον τῷ δεδομένῳ καὶ ἔχον ὅρους ἀριθμοὺς πρώτους πρὸς ἀλλήλους, ἑπομένως ἀνάγωγον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.—Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{252}{396}$. Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ὅρων αὐτοῦ 252 καὶ 396 εἶναι ὁ 36. Διαιροῦντες δὲ τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ 252 καὶ 396 διὰ 36 εὑρίσκομεν ἀμοιβαίως πηλίκα 7 καὶ 11, ἅτινα εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Τὸ δεδομένον λοιπὸν κλάσμα $\frac{252}{396}$ θέλει εἶναι ἴσον τῷ ἀναγώγῳ $\frac{7}{11}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 1.—Ἐνίοτε ἐν τῇ πράξει καθιστῶμεν κλάσμα τι ἀνάγωγον ἀπαλείφοντες διαδοχικῶς ἀπὸ τῶν ὅρων αὐτοῦ τοὺς κοινοὺς παράγοντας, οὓς ἐκ πρώτης ὄψεως δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν. Ὅταν διὰ τῶν διαδοχικῶν τούτων ἀπαλείψεων φθάσωμεν εἰς κλάσμα, ἔχον ὅρους ἀριθμοὺς πρώτους πρὸς ἀλλήλους, τότε τὸ κλάσμα τοῦτο θέλει εἶναι τὸ ἴσον τῷ δεδομένῳ ἀνάγωγον κλάσμα.

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{252}{396}$. Βλέπομεν ἀμέσως ὅτι οἱ δύο αὐτοῦ ὅροι ὡς ἄρτιοι διαιροῦνται διὰ τοῦ 2. Διαιροῦμεν λοιπὸν ἀμέσως διὰ 2 καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἴσον αὐτῷ νέον κλάσμα $\frac{126}{198}$. Ἐπειδὴ καὶ τοῦ δευτέρου τούτου κλάσματος οἱ ὅροι διαιροῦνται πάλιν διὰ 2, διαιροῦμεν αὐτοὺς ἐκ νέου διὰ 2 καὶ εὑρίσκομεν τὸ νέον κλάσμα $\frac{63}{99}$. Τέλος, ἐπειδὴ τοῦ εὑρεθέντος τρίτου κλάσματος $\frac{63}{99}$ οἱ ὅροι διαιροῦνται διὰ 9, ἐκτελοῦμεν καὶ τὴν διαίρεσιν ταύτην καὶ εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{7}{11}$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ ὅροι 7 καὶ 11 τοῦ εὑρεθέντος κλάσματος $\frac{7}{11}$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ δοθὲν κλάσμα $\frac{252}{396}$ ἀνήχθη οὕτως εἰς τὴν ἁπλουστάτην αὐτοῦ μορφήν, ἥτις εἶναι $\frac{7}{11}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 2.—Ὅταν ἀνάγοντες κλάσμα τι εἰς τὴν ἁπλουστάτην αὐτοῦ μορφὴν εὕρωμεν διὰ παρονομαστὴν αὐτοῦ τὴν μονάδα, εἶναι περιττὸν νὰ γράψωμεν αὐτήν. Π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{28}{7}$ ἀναγόμενον εἰς τὴν ἁπλουστάτην αὐτοῦ μορφὴν γίνεται $\frac{4}{1}$, ὅπερ παριστῶμεν ἁπλῶς διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ 4.

ΑΝΑΓΩΓΗ ΔΥΟ Η ΠΛΕΙΟΤΕΡΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΤΟΝ ΑΥΤΟΝ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗΝ.

103. *Ἀνάγομεν κλάσματά τινα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν*, ὅταν εὑρίσκωμεν ἄλλα κλάσματα ἴσα ἀμοιβαίως μὲ τὰ πρῶτα καὶ ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

1ον. *Δύο κλάσματα ἀνάγονται εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι ἑκατέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἑτέρου.*

Διότι τὰ οὕτω σχηματιζόμενα νέα κλάσματα θέλουσιν εἶναι ἀμοιβαίως ἴσα μὲ τὰ πρῶτα (99), καὶ θέλουσιν ἔχει παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν πρώτων.

Ἔστωσαν π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{3}{4}$. Πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 4 τοῦ δευτέρου, καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 7 τοῦ πρώτου, εὑρίσκομεν τὰ κλάσματα

$$\frac{5\times4}{7\times4} \text{ καὶ } \frac{3\times7}{4\times7},$$

ἅτινα εἶναι ἴσα ἀμοιβαίως μὲ τὰ δεδομένα καὶ ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν 4×7, ἤτοι τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν 7 καὶ 4 αὐτῶν.

2ον. *Τρία ἢ πλειότερα κλάσματα ἀνάγονται εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν πολλαπλασιαζομένων τῶν ὅρων ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν λοιπῶν κλασμάτων.*

Διότι τὰ οὕτως εὑρισκόμενα νέα κλάσματα εἶναι ἴσα ἀμοιβαίως μὲ τὰ τὰ δεδομένα καὶ ἕκαστον τοῦτον ἔχει παρονομαστὴν τὸ γινόμενον ἁπάντων τῶν παρονομαστῶν τῶν δεδομένων κλασμάτων.

Ἐὰν π. χ. ἐφαρμόσωμεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα εἰς τὰ τρία κλάσματα

$$\frac{5}{7},\ \frac{3}{4},\ \frac{13}{14}$$

θέλομεν εὕρει τὰ ἑξῆς·

$$\frac{5\times4\times14}{7\times4\times14},\quad \frac{3\times7\times14}{4\times7\times14},\quad \frac{13\times7\times4}{14\times7\times4},$$

ἅτινα εἶναι ἴσα ἀμοιβαίως μὲ τὰ δεδομένα καὶ ἔχουσι κοινὸν παρονομαστὴν τὸ γινόμενον $7\times4\times14$ τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἵνα συγκρίνωμεν πρὸς ἄλληλα δύο κλάσματα, πρέπει νὰ ἀναγάγωμεν αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, τουτέστι νὰ τὰ ἀναφέρωμεν εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα. Παραδείγματος χάριν, ἐὰν θέλωμεν νὰ ἴδωμεν ποῖον τῶν δύο κλασμάτων $\frac{333}{106}$ καὶ $\frac{355}{112}$ εἶναι μεγαλείτερον, φέρομεν αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ εὑρίσκομεν τὰ νέα κλάσματα $\frac{37296}{11872}$ καὶ $\frac{37630}{11872}$, ὧν τὸ δεύτερον εἶναι προφανῶς μεγαλείτερον τοῦ πρώτου, ὡς ἔχον μεγαλείτερον ἀριθμητήν.

ΑΝΑΓΩΓΗ ΠΛΕΙΟΤΕΡΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΤΟΝ ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ ΚΟΙΝΟΝ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗΝ.

104. Ὅταν, προκειμένου νὰ ἀναγάγωμεν δύο ἢ πλειότερα κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἐφαρμόζωμεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα, τὰ εὑρισκόμενα νέα κλάσματα δὲν ἔχουσιν ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον

τὸν ἁπλούστερον κοινὸν παρονομαστήν. Ἀλλ' ὑπάρχει τρόπος τις, δι' οὗ δύο ἢ πλειότερα κλάσματα ἀνάγονται εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν, τοῦτον δ' εὑρίσκομεν σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς·

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ δεδομένα κλάσματα εἶναι ἀνάγωγα, ἤ, ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, ὅτι λαμβάνομεν ἀντὶ τῶν δεδομένων τὰ ἴσα αὐτοῖς ἀνάγωγα. Πᾶν κλάσμα, ἴσον τινὶ τῶν δεδομένων, εὑρίσκεται πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο ὅρων αὐτοῦ ἐπί τινα ἀκέραιον ἀριθμόν. Λοιπὸν πᾶς κοινὸς παρονομαστής, εἰς ὃν δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὰ δεδομένα κλάσματα, εἶναι κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῶν δεδομένων κλασμάτων. Ἀφ' ἑτέρου, πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῶν δεδομένων κλασμάτων δύναται νὰ γείνῃ κοινὸς παρονομαστὴς αὐτῶν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ κοινοῦ τούτου πολλαπλασίου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πολλαπλασιασθησομένου κλάσματος. Ἕπεται ἐντεῦθεν ὅτι, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομοστῶν τῶν δεδομένων κλασμάτων δι' ἑνὸς ἑκάστου αὐτῶν καὶ μὲ τὸ εἰς ἑκάστην μερικὴν διαίρεσιν εὑρισκόμενον πηλίκον πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ ἀντιστοίχου κλάσματος, θέλομεν οὕτως εὕρει κλάσματα ἴσα ἀμοιβαίως μὲ τὰ δεδομένα καὶ ἔχοντα κοινὸν παρονομαστὴν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι προτιθέμεθα νὰ ἀναγάγωμεν εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστὴν τὰ ἑξῆς κλάσματα

$$\frac{113}{360}, \quad \frac{317}{540}, \quad \frac{229}{648},$$

ἅτινα, ἂν δὲν ἦσαν ἀνάγωγα, ἔπρεπε πρῶτον νὰ καταστήσωμεν ἀνάγωγα.

Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν 360, 540 καὶ 648 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3240. Διαιροῦμεν τοῦτον δι' ἑνὸς ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν 360, 540 καὶ 648 τῶν δεδομένων κλασμάτων, καὶ εὑρίσκομεν τὰ πηλίκα 9, 6 καὶ 5. Ἔπειτα μὲ τὸ πηλίκον 9 πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ἐκείνου τοῦ κλάσματος, μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ὁποίου διαιρέσαντες τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον 3240 εὕρομεν πηλίκον τὸν ἐφ' ὃν πολλαπλασιάζομεν ἀριθμὸν 9. Ὡσαύτως μὲ τὸ πηλίκον 6 πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ ἀντιστοίχου δευτέρου κλάσματος, καὶ μὲ τὸ πηλίκον 5 τοὺς ὅρους τοῦ ἀντιστοίχου τρίτου κλάσματος, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὰ νέα κλάσματα

$$\frac{1047}{3240},\quad \frac{1902}{3240},\quad \frac{1145}{3240},$$

ἅτινα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ τὸν ἐλάχιστον πάντων.

105. Ἐντεῦθεν πορίζόμεθα τὸν ἑξῆς κανόνα·

Ἵνα ἀναγάγωμεν δύο ἢ πλειότερα κλάσματα εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν, καθιστῶμεν πρῶτον αὐτὰ ἀνάγωγα, ἔπειτα εὑρίσκομεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῶν εὑρεθέντων ἀναγώγων κλασμάτων, καὶ πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, τὸν δεικνύοντα ποσάκις ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ ἐμπεριέχεται εἰς τὸ εὑρεθὲν ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῶν κατασταθέντων ἀναγώγων κλασμάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.—Ἔστωσαν π. χ. τὰ τρία ἀνάγωγα κλάσματα

$$\frac{15}{28},\quad \frac{77}{120},\quad \frac{56}{495}.$$

Ἀναλύοντες τοὺς παρονομαστὰς αὐτῶν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας εὑρίσκομεν

$$28=2^2\times 7,$$
$$120=2^3\times 3\times 5.$$
$$495=3^2\times 5\times 11.$$

Τὸ ἐλάχιστον δὲ κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν εἶναι κατὰ τὸν κανόνα τῆς § 92

$$2^3\times 3^2\times 5\times 7\times 11 \text{ ἢ } 27720.$$

Διαιροῦντες αὐτὸ δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν

$$2^2\times 7,\quad 2^3\times 3\times 5,\quad 3^2\times 5\times 11$$

εὑρίσκομεν τὰ πηλίκα

$$2\times 3^2\times 5\times 11,\quad 3\times 7\times 11,\quad 2^3\times 7,$$

ἢ $\quad 990,\quad 231,\quad 56,$

ἐφ' ἃ πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους τῶν ἀντιστοιχούντων κλασμάτων εὑρίσκομεν τὰ ἑξῆς κλάσματα

$$\frac{15\times 2\times 3^2\times 5\times 11}{27720},\quad \frac{77\times 3\times 7\times 11}{27720},\quad \frac{56\times 2^3\times 7}{27720},$$

ἤ, διὰ τῆς ἐκτελέσεως τῶν σεσημειωμένων πολλαπλασιασμῶν, τὰ ἑξῆς

$$\frac{14850}{27720},\quad \frac{17787}{27720},\quad \frac{3136}{27720}.$$

ἅτινα εἶναι ἴσα ἀμοιβαίως μὲ τὰ δεδομένα καὶ ἔχουσι τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν.

Ἔστωσαν πρὸς τούτοις τὰ ἀνάγωγα κλάσματα

$$\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{12},\ \frac{7}{24}.$$

Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν εἶναι 24, καὶ ἀκολουθοῦντες τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὑρίσκομεν τὰ νέα κλάσματα

$$\frac{16}{24},\ \frac{18}{24},\ \frac{10}{24},\ \frac{7}{24},$$

ἅτινα εἶναι ἴσα ἀμοιβαίως μὲ τὰ δεδομένα καὶ ἔχουσι κοινὸν παρονομαστὴν τὸν ἁπλούστερον πάντων τῶν δυνατῶν κοινῶν παρονομαστῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Ποῖος εἶναι ὁ ἐν τῷ κλάσματι $\frac{37}{9}$ περιεχόμενος ἀκέραιος;

II. Ποῖον εἶναι τὸ ἀνάγωγον κλάσμα, τὸ ἰσοδύναμον τῷ κλάσματι $\frac{630}{934}$;

III. Ποῖος εἶναι ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστὴς τῶν κλασμάτων $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$ $\frac{7}{18}$;

IV. Ποῖος εἶναι ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστὴς τῶν κλασμάτων $\frac{8}{9}$, $\frac{8}{21}$, $\frac{14}{39}$, $\frac{11}{24}$;

V. Ποῖος εἶναι ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστὴς τῶν κλασμάτων $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{13}{11}$, $\frac{17}{29}$, $\frac{35}{41}$;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ'.

ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

123. Εἴδομεν ἐν τοῖς προηγουμένοις ὅτι πρὸς καταμέτρησιν δεδομένου τινὸς ποσοῦ ἢ μεγέθους λαμβάνομεν ὡρισμένον τι ποσὸν ἢ μέγεθος ὡς μονάδα καὶ πρὸς τοῦτο συγκρίνομεν τὸ πρὸς καταμέτρησιν δεδομένον, καὶ ὅτι, ἐὰν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ποσὸν ἢ μέγεθος περιέχῃ ἅπαξ ἢ πολλάκις τὴν μονάδα ἄνευ τινὸς ὑπολοίπου, τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως εἶναι ἀριθμὸς *ἀκέραιος*· ἐὰν δὲ περιέχῃ ἅπαξ ἢ πολλάκις πολλοστόν τι ταύτης, τότε ὁ προκύπτων ἀριθμὸς καλεῖται *κλασματικός*.

Διὰ τὰς ἀνάγκας ὅμως τοῦ κοινωνικοῦ βίου ἡ ἐκτίμησις τῶν ποσῶν γίνεται κατά τινα τρόπον διαφέροντά πως τοῦ ἀνωτέρω. Εἶναι μὲν ἀληθὲς ὅτι ἡ κατ' ἀρχὰς ληφθεῖσα μονὰς εἶναι ὅλως αὐθαίρετος, ἀλλ' ἀφοῦ ἅπαξ ληφθῇ, μένει ἡ *αὐτὴ* πάντοτε διὰ τὰ τοῦ αὐτοῦ εἴδους ποσά. Ἔπειτα, ἐὰν τὸ πρὸς καταμέτρησιν ποσὸν ἢ μέγεθος περιέχῃ πολλάκις τὴν μονάδα, λαμβάνουσιν ὡς *νέαν μονάδα* πολλαπλάσιόν τι τῆς ἀρχικῆς, κατ' ἀρέσκειαν καὶ τοῦτο, ἀλλὰ πάντοτε *τὸ αὐτό*. Τρίτον, ἐὰν τὸ πρὸς καταμέτρησιν ποσὸν περιέχῃ ἅπαξ ἢ πολλάκις τὴν μονάδα μετά τινος ὑπολοίπου, πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ ὑπολοίπου τούτου δὲν λαμβάνουσιν ὡς νέαν μονάδα ὁτὲ μὲν τοῦτο, ὁτὲ δὲ ἄλλο πολλοστὸν τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ἀλλὰ πάντοτε *τὸ αὐτό*. Τελευταῖον, ἐὰν πάλιν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον περιέχῃ ἅπαξ ἢ πολλάκις τὸ ὡρισμένον τοῦτο καὶ πάντοτε τὸ αὐτὸ μένον πολλοστὸν τῆς ἀρχικῆς μονάδος μετά τινος ὑπολοίπου, πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ ὑπολοίπου τούτου λαμβάνουσιν ὡς νέαν μονάδα πολλοστόν τι, πάντοτε τὸ αὐτό, τῆς προηγουμένης, πρὸς ὃ συγκρίνουσι τὸ νέον ὑπόλοιπον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ ἡ τελευταία μονὰς κατασταθῇ τόσῳ μικρά, ὥστε τὸ παραλειπόμενον ὑπόλοιπον νὰ ἦναι ποσὸν ἢ μέγεθος ὅλως ἀσήμαντον.

Ἵνα προσθέσωμεν κλάσματα διαφόρων παρονομαστῶν, ἀνάγωμεν πρῶτον αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ ἐκτελοῦμεν ἔπειτα τὴν πρόσθεσιν τῶν εὑρεθησομένων νέων κλασμάτων ὡς προελέχθη.

108. *Πρόσθεσις μικτῶν.* Ἔστωσαν πρὸς πρόσθεσιν οἱ τρεῖς μικτοὶ ἀριθμοὶ $4+\frac{3}{5}$, $3+\frac{7}{10}$ καὶ $8+\frac{2}{3}$. Τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ἐν αὐτοῖς κλασμάτων $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{3}$ εὑρίσκεται κατὰ τὰ προηγούμενα καὶ εἶναι $\frac{59}{30}$ ἢ $1+\frac{29}{30}$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἐν αὐτοῖς ἀκεραίων εἶναι $4+3+8$ ἢ 15, ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων μικτῶν θέλει εἶναι ὁ μικτὸς $15+\frac{59}{30}$, ἢ $16+\frac{29}{30}$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι,

Ἵνα προσθέσωμεν μικτοὺς ἀριθμούς, προσθέτομεν πρῶτον τὰ κλασματικὰ αὐτῶν μέρη, ἔπειτα τοὺς ἐν αὐτοῖς ἀκεραίους καὶ τελευταῖον προσθέτομεν τὰ οὕτως εὑρεθησόμενα δύο ἀθροίσματα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἠδυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρόσθεσιν τῶν μικτῶν τρέποντες πρῶτον αὐτοὺς εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικοὺς καὶ προσθέτοντες ἔπειτα τὰ οὕτως εὑρεθησόμενα κλάσματα κατὰ τὸν περὶ προσθέσεως τῶν κλασμάτων ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα, ἀλλ' ὁ προηγούμενος τρόπος εἶναι προτιμητέος ὡς ἁπλούστερος.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ.

109. *Ἀφαίρεσις ἐν γένει καλεῖται ἐκείνη ἡ πρᾶξις, δι' ἧς ἐλαττοῦμεν δοθέντα τινὰ ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας καὶ μέρη μονάδος, ὅσα περιέχει ἕτερός τις ἐπίσης δεδομένος ἀριθμός.*

Καθ' ὅλας τὰς δυνατὰς περιπτώσεις ὁ ἐλαττούμενος ἀριθμὸς καλεῖται *μειωτέος*, ὁ δεικνύων κατὰ πόσον ὁ πρῶτος πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ *ἀφαιρετέος*, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως *ὑπόλοιπον*, *ὑπεροχὴ* ἢ *διαφορά*.

Ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἀφαιρέσεως, ὡς παρετηρήσαμεν καὶ ὅτε ἐπρόκειτο περὶ ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἕπεται ὅτι ὁ μειωτέος θέλει εἶναι ἴσος τῷ ἀθροίσματι τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τοῦ εὑρεθησομένου ὑπολοίπου. Διὰ τοῦτο ὁρίζουσιν ἐνίοτε τὴν ἀφαίρεσιν καὶ ὡς

Πρᾶξιν, δι' ἧς δοθέντος τοῦ ἀθροίσματος δύο μερῶν καὶ ἑνὸς τούτων εὑρίσκεται τὸ ἕτερον.

110. *Ἀφαίρεσις δύο κλασμάτων.* Ἂς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι τὰ πρὸς ἀφαίρεσιν δεδομένα κλάσματα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρο-

νομαστήν, καὶ ἔστω π. χ. ν' ἀφαιρεθῇ τὸ κλάσμα $\frac{3}{13}$ ἀπὸ τοῦ $\frac{8}{13}$. Πρέπει κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως νὰ ἐλαττώσωμεν τὸν μειωτέον 8 δέκατα τρίτα κατὰ 3 δέκατα τρίτα. Θέλομεν δὲ προφανῶς εὕρει διαφορὰν 8—3 δέκατα τρίτα, ἢ $\frac{8-3}{13}$, ἢ $\frac{5}{13}$. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι

Ἡ ἀφαίρεσις δύο κλασμάτων ἐχόντων τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ἐκτελεῖται ἀφαιρουμένου ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μειωτέου κλάσματος τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ ἀφαιρετέου καὶ γραφομένου τοῦ κοινοῦ αὐτῶν παρονομαστοῦ ὑπὸ τὴν εὑρεθησομένην διαφοράν.

Ἄς ὑποθέσωμεν κατὰ δεύτερον λόγον ὅτι τὰ πρὸς ἀφαίρεσιν κλάσματα $\frac{11}{10}$, $\frac{3}{4}$ ἔχουσι διαφόρους παρονομαστάς. Ἀνάγοντες τὰ κλάσματα εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν αὐτῶν παρονομαστήν, ὅστις ἐνταῦθα εἶναι ὁ 20, εὑρίσκομεν ἀντὶ τῶν δεδομένων κλασμάτων τὰ ἀμοιβαίως ἰσοδύναμα τούτοις $\frac{22}{20}$ καὶ $\frac{15}{20}$. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν διαφορὰ αὐτῶν θέλει εἶναι κατὰ τὰ προλεχθέντα $\frac{22-15}{20}$, ἢ $\frac{7}{20}$. Λοιπὸν

Ἡ ἀφαίρεσις δύο κλασμάτων ἐχόντων διαφόρους παρονομαστὰς ἐκτελεῖται ἀναγομένων πρῶτον αὐτῶν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ ἀφαιρουμένων τῶν οὕτως εὑρεθησομένων κλασμάτων ὡς προεῤῥέθη.

111. *Ἀφαίρεσις δύο μικτῶν.* Ἔστω ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ μικτοῦ $11+\frac{9}{10}$ ὁ μικτὸς $5+\frac{3}{4}$. Ἀφαιροῦμεν πρῶτον ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου 11 τὸν ἀκέραιον 5 καὶ εὑρίσκομεν διαφορὰν 6, ἔπειτα ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{9}{10}$ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ καὶ εὑρίσκομεν διαφορὰν $\frac{3}{20}$. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν διαφορὰ τῶν δεδομένων μικτῶν θέλει εἶναι προφανῶς ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν εὑρεθεισῶν μερικῶν διαφορῶν 6 καὶ $\frac{3}{20}$, ἤτοι $6+\frac{3}{20}$. Ἐντεῦθεν δὲ ἕπεται ὅτι

Μικτὸς ἀφαιρεῖται ἀπὸ μικτοῦ ἀφαιρουμένων πρῶτον κατὰ μέρος τῶν ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν αὐτῶν μερῶν καὶ προσθετομένων τῶν οὕτως εὑρεθησομένων μερικῶν διαφορῶν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Δυνατὸν νὰ συμβῇ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου μικτοῦ νὰ ἦναι μεγαλείτερον τοῦ κλάσματος τοῦ μειωτέου καὶ οὕτως ἡ δευτέρα μερικὴ ἀφαίρεσις νὰ ἦναι ἀδύνατος. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ λαμβάνομεν μίαν μονάδα ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου τοῦ μειωτέου μικτοῦ καὶ προσθέτομεν αὐτὴν εἰς τὸ κλάσμα αὐτοῦ, καὶ οὕτως ἡ μὲν ἀπὸ τοῦ προκύπτοντος κλάσματος ἀφαίρεσις τοῦ κλάσματος τοῦ ἀφαιρετέου καθίσταται δυνατή, ἡ δὲ τελικὴ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.

Ἔστω π. χ. ν' ἀφαιρεθῇ ὁ μικτὸς $6+\frac{5}{7}$ ἀπὸ τοῦ μικτοῦ $12+\frac{2}{13}$. Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου $\frac{5}{7}$ εἶναι μεγαλείτερον τοῦ κλάσματος $\frac{2}{13}$ τοῦ μειωτέου καὶ δὲν δύναται ν' ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ, λαμβάνομεν μίαν μονάδα ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου 12 τοῦ μειωτέου καὶ τὴν τρέπομεν εἰς δέκατα τρίτα, ἅπερ προσθέτομεν εἰς τὸ κλάσμα $\frac{2}{13}$ αὐτοῦ, ὅστις οὕτω γίνεται $11+\frac{15}{13}$. Τώρα, ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{15}{13}$, ἡ ἀφαίρεσις αὐτῶν εἶναι δυνατή, εὑρίσκομεν δέ, ἐκτελοῦντες αὐτὴν ὡς προελέχθη, διαφορὰν $5+\frac{40}{91}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἠδυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν τῶν μικτῶν τρέποντες πρῶτον αὐτοὺς εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικοὺς καὶ ἀφαιροῦντες ἔπειτα κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα ἀπὸ τοῦ κλασματικοῦ τοῦ μειωτέου τὸν τοῦ ἀφαιρετέου ἀλλ' ὁ ἀνωτέρω ἐκτεθεὶς τρόπος εἶναι προτιμητέος ὡς ἁπλούστερος.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ.

112. Εἴπομεν ὅτι ὁ *πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν σχηματίζομεν ἐκ τοῦ πρώτου τρίτον, ὅπως ὁ δεύτερος ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος*, καὶ ἐκαλέσαμεν τὸν πρῶτον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν *πολλαπλασιαστέον*, τὸν δεύτερον *πολλαπλασιαστὴν* καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως *γινόμενον*. Ἐφαρμόζοντες τώρα τὸν αὐτὸν ὁρισμὸν ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν θέλομεν εὐκόλως εὕρει κατὰ ποίους κανόνας εὑρίσκεται τὸ γινόμενον αὐτῶν καθ' ἁπάσας τὰς δυνατὰς περιπτώσεις. Καὶ ἐν πρώτοις·

113. *Πολλαπλασιασμὸς κλάσματός τινος ἐπὶ ἀκέραιον*. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{5}{7}$ ἐπὶ 4. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ γινόμενον θέλει σχηματισθῇ ἐκ τοῦ

πολλαπλασιαστέου $\frac{5}{7}$, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστὴς 4 ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος. Ἀλλ' ὁ 4 ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος ἀφοῦ ἐπανελήφθη αὕτη τετράκις. Λοιπὸν καὶ τὸ γινόμενον θέλει σχηματισθῆ ἐκ τοῦ $\frac{5}{7}$ ἀφοῦ ἐπαναληφθῇ τοῦτο τετράκις. Ὁ πολλαπλασιαστέος $\frac{5}{7}$ τετράκις ἐπαναλαμβανόμενος γίνεται $\frac{5}{7}+\frac{5}{7}+\frac{5}{7}+\frac{5}{7}$, ἢ $\frac{5+5+5+5}{7}$, ἢ $\frac{5\times4}{7}$. Ἕπεται λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι

Κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ ὑπὸ τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον γραφῇ ὡς παρονομαστὴς ὁ τοῦ δεδομένου κλάσματος παρονομαστής.

144. *Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα.* Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ 4 ἐπὶ $\frac{5}{7}$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ γινόμενον θέλει σχηματισθῆ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου 4, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστὴς $\frac{5}{7}$ ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος. Ἀλλὰ τὰ $\frac{5}{7}$ σχηματίζονται ἐκ τῆς μονάδος ἀφοῦ διαιρεθῇ αὕτη εἰς 7 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν 5 τοιαῦτα. Λοιπὸν καὶ τὸ γινόμενον θέλει σχηματισθῆ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου 4, ἐὰν λάβωμεν πεντάκις τὸ ἕβδομον αὐτοῦ. Ἀλλὰ τὸ ἕβδομον τοῦ 4 ἢ τοῦ $\frac{4}{1}$ εἶναι $\frac{4}{7}$ (98), καὶ πεντάκις τὸ $\frac{4}{7}$ ληφθὲν δίδει κατὰ τὰ προλεχθέντα ἄθροισμα $\frac{4\times5}{7}$. Λοιπὸν

Ἀκέραιος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλάσμα, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ οὗτος ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον γραφῇ ὡς παρονομαστὴς ὁ τοῦ κλάσματος παρονομαστής.

145. *Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα.* Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ $\frac{5}{7}$ ἐπὶ $\frac{4}{9}$. Πρέπει κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ νὰ λάβωμεν τὰ τέσσαρα ἔνατα τοῦ $\frac{5}{7}$. Ἀλλὰ τὸ ἔνατον τοῦ $\frac{5}{7}$ εἶναι $\frac{5}{7\times9}$ (98), ἐπομένως τὰ τέσσαρα ἔνατα τοῦ $\frac{5}{7}$ θέλουσιν εἶναι $\frac{5\times4}{7\times9}$. Ἐντεῦθεν λοιπὸν πορίζόμεθα ὅτι

Κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιαζομένων τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστῶν αὐτῶν καὶ ὑπὸ τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν γραφομένου ὡς παρονομαστοῦ τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου τῶν παρονομαστῶν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐκ τῶν προηγουμένων ἔπεται ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου πλειοτέρων κλασμάτων πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ κλάσματα ταῦτα ὅρον ἐφ' ὅρον· ἐν ἄλλαις λέξεσι, νὰ σχηματίσωμεν πρῶτον τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν, ἔπειτα τὸ τῶν παρονομαστῶν καὶ ὑπὸ τὸ πρῶτον νὰ γράψωμεν ὡς παρονομαστὴν τὸ δεύτερον. Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον τῶν κλασμάτων $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{11}{13}$ εἶναι $\frac{2\times5\times8\times11}{3\times7\times9\times13}$, ἀπαγγέλλεται δὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{5}{7}$ τῶν $\frac{8}{9}$ τοῦ $\frac{11}{13}$ ἢ τὰ $\frac{11}{13}$ τῶν $\frac{8}{9}$ τῶν $\frac{5}{7}$ τοῦ $\frac{2}{3}$. Διότι, ἵνα σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\times\frac{8}{9}\times\frac{11}{13}$, πρέπει κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ γινομένου πλειοτέρων παραγόντων (33) νὰ πολλαπλασιάσωμεν πρῶτον τὸ $\frac{2}{3}$ ἐπὶ $\frac{5}{7}$, ἔπειτα τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον αὐτῶν $\frac{2\times5}{3\times7}$ ἐπὶ $\frac{8}{9}$, ἔπειτα τὸ νέον γινόμενον $\frac{2\times5\times8}{3\times7\times9}$ ἐπὶ $\frac{11}{13}$.

Ἐπειδὴ τὸ εὑρεθὲν γινόμενον $\frac{2\times5\times8\times11}{3\times7\times9\times13}$ δὲν μεταβάλλεται, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν μεταβληθῇ ἡ τάξις τῶν παραγόντων τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ αὐτοῦ, ἔπεται ὅτι τὸ γινόμενον πολλῶν κλασμάτων μένει τὸ αὐτό, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν μεταβληθῇ ἡ τάξις, καθ' ἣν ταῦτα πολλαπλασιάζονται. Παραδείγματος χάριν τὰ τρία γινόμενα $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\times\frac{8}{9}\times\frac{11}{13}$, $\frac{5}{7}\times\frac{11}{13}\times\frac{2}{3}\times\frac{8}{9}$, $\frac{11}{13}\times\frac{8}{9}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}$ εἶναι ἴσα, διότι τὰ γινόμενα τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστῶν αὐτῶν διὰ τῶν γενομένων μεταθέσεων τῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλονται.

116. *Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ μικτόν.* Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον τῶν δύο μικτῶν $4+\frac{3}{7}$ καὶ $8+\frac{4}{9}$. Τρέποντες τοὺς μικτοὺς εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικοὺς εὑρίσκομεν τὰ κλάσματα $\frac{31}{7}$ καὶ $\frac{76}{9}$, ὧν τὸ γινόμενον εἶναι $\frac{31\times76}{7\times9}$. Λοιπὸν

Μικτὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ μικτὸν τρεπομένων τῶν μικτῶν εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικοὺς καὶ πολλαπλασιαζομένων τῶν οὕτως εὑρεθησομένων κλασμάτων ὡς προελέχθη.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ.

117. *Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντος τοῦ γινομένου δύο παραγόντων καὶ ἑνὸς τούτων εὑρίσκομεν τὸν ἕτερον· ἢ εἶναι*

πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν δεύτερον νὰ παράγῃ τὸν πρῶτον.

Τὸ δεδομένον γινόμενον καλεῖται *διαιρετέος*, ὁ δεδομένος παράγων *διαιρέτης* καὶ ὁ ζητούμενος *πηλίκον*.

Ἡ διαίρεσις σημειοῦται διὰ σημείου : , ὅπερ τίθεται μεταξὺ τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου, προτασσομένου τοῦ πρώτου, ἀπαγγέλλεται δὲ ὡς εἴπομεν καὶ ἐν τῇ § 40 *διά*.

118. *Διαίρεσις τῶν ἀκεραίων.* Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς τῆς διαιρέσεως φαίνεται ἐκ πρώτης ὄψεως διάφορος ἐκείνου, ὃν ἐδώσαμεν ἐν τῷ IV Κεφαλαίῳ. Εἶναι λοιπὸν ἀναγκαῖον νὰ ἴδωμεν ἂν οὗτοι διαφέρωσι καί, ἐὰν ὑπάρχῃ διαφορά τις, εἰς τί αὕτη συνίσταται. Πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιπτώσεως τοὺς φαινομένους διαφόρους δύο τούτους τῆς διαιρέσεως ὁρισμοὺς καὶ νὰ παραβάλωμεν πρὸς ἄλληλα τὰ εὑρεθησόμενα καθ' ἑκάτερον τούτων ἐξαγόμενα. Ἂς ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν δύο ἀκεραίους ἀριθμούς, τὸν 33 διὰ τοῦ 7, παραδείγματος χάριν.

Λέγω ἐν πρώτοις ὅτι κατὰ τὸν νέον τῆς διαιρέσεως ὁρισμὸν

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν δύο τούτων ἀκεραίων θέλει εἶναι ἴσον μὲ κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον 33 καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην 7.

Διότι τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου $\frac{33}{7}$ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 7 πρέπει νὰ δώσῃ τὸν διαιρετέον 33· καὶ τῷ ὄντι, τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{33}{7}$ ἐπὶ 7 κατὰ τὰ περὶ πολλαπλασιασμοῦ λεχθέντα εἶναι $\frac{33\times7}{7}$, ἤ, ἐξαλειφομένου τοῦ κοινοῦ παράγοντος 7, ὁ διαιρετέος 33. Λοιπὸν ἔχομεν

$$33 : 7 = \frac{33}{7}.$$

Ἐὰν τώρα ἐξαγάγωμεν τὸν ἐν τῷ $\frac{33}{7}$ περιεχόμενον ἀκέραιον, εὑρίσκομεν ὅτι ὁ 7 ἐμπεριέχεται τετράκις εἰς τὸν 33 μετά τινος ὑπολοίπου 5, παριστῶντος τὴν διαφορὰν τοῦ γινομένου 7×4 ἀπὸ τοῦ 33. Ἐπομένως ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γράφεται καὶ οὕτω

$$33 : 7 = 4 + \frac{5}{7}.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ 33 διὰ 7 κατὰ τὸν νέον τῆς διαιρέσεως ὁρισμὸν σύγκειται ἐκ δύο μερῶν· ἐκ τοῦ ἀκεραίου 4, ὅστις δεικνύει ποσάκις ὁ 7 ἐμπεριέχεται ἐν τῷ διαιρετέῳ 33, καὶ ἔκ τινος κλάσματος $\frac{5}{7}$ μικροτέρου τῆς μονάδος.

Ἀλλ' ἐὰν τώρα ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν αὐτῶν κατὰ τὸ ἐν τῇ § 38 δοθέντα ὁρισμόν, θέλομεν ἐπίσης εὕρει πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 5, καὶ θέλομεν εἴπει ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι 4 καὶ μένει καὶ ὑπόλοιπόν τι 5. Λοιπὸν οἱ δύο ὁρισμοὶ δὲν διαφέρουσιν οὐδόλως, εἰμὴ μόνον καθότι ἐν τῷ Κεφαλαίῳ IV ἐζητοῦμεν ἁπλῶς τὸ *ἀκέραιον μέρος* τοῦ πηλίκου, καὶ ὁ περὶ διαιρέσεως γνωστὸς κανὼν τότε μόνον ἤθελε δώσει τὸ *πλῆρες πηλίκον*, ὅταν ὁ διαιρετέος ἦτο πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι, ἂν τότε εἰς τὸ εὑρεθὲν πηλίκον προσεθέτομεν καὶ *συμπληρωτικόν τι κλάσμα*, ἔχον ἀριθμητὴν τὸ εὑρεθὲν ὑπόλοιπον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην, ἠθέλομεν καὶ διὰ τοῦ πρώτου ὁρισμοῦ εὕρει τὸ πλῆρες πηλίκον. Λοιπὸν οἱ δύο ὁρισμοὶ εἶναι οἱ αὐτοὶ μὲ μόνην τὴν μικρὰν ὑποδειχθεῖσαν παράλειψιν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐπειδὴ αἱ δύο παραστάσεις 33: 7 καὶ $\frac{33}{7}$ εὑρέθησαν παριστῶσαι τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ μεταχειριζώμεθα ἀδιαφόρως τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην.

Ἕπεται πρὸς τούτοις ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 1 εἶναι ἴσον αὐτῷ τῷ ἀριθμῷ· διότι τὸ γινόμενον τοῦ 1 ἐπὶ τὸν παριστῶντα τὸ πηλίκον ἀριθμὸν θέλει εἶναι προφανῶς ἴσον τῷ δεδομένῳ διαιρετέῳ. Λοιπὸν ἐξ ἀναλογίας δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν πάντα ἀκέραιον ἀριθμὸν ὡς κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν αὐτὸν τοῦτον τὸν ἀριθμὸν καὶ παρονομαστὴν τὴν μονάδα. Οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{5}{1}$ παριστᾷ ὅ,τι καὶ ὁ 5.

119. *Διαίρεσις κλάσματος δι' ἀκεραίου.* Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν $\frac{5}{7}$ διὰ 4. Πρέπει νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ 4 νὰ ἦναι ἴσον τῷ διαιρετέῳ $\frac{5}{7}$. Τὸ τετραπλάσιον λοιπὸν τοῦ ζητουμένου πηλίκου πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ $\frac{5}{7}$. Ἄρα τὸ πηλίκον αὐτὸ θέλει εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ διαιρετέου $\frac{5}{7}$, Ἀλλὰ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ $\frac{5}{7}$ εἶναι $\frac{5}{7\times4}$ (98). Λοιπὸν

Κλάσμα διαιρεῖται δι' ἀκεραίου ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—"Αν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ πρὸς διαίρεσιν κλάσματος ἦτο πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου, ἠθέλομεν ἐπίσης εὕρει τὸ ζητούμενον πηλίκον, διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ διαιρέτου.

Παραδείγματος χάριν, τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{12}{7}$ διὰ 4 εἶναι κατὰ τὰ ἀνωτέρω $\frac{12}{7\times4}$, διαιροῦντες δὲ τοὺς δύο ὅρους τοῦ εὑρεθέντος κλάσματος $\frac{12}{7\times4}$ διὰ 4 εὑρίσκομεν $\frac{3}{7}$, ὅπερ εὑρίσκεται διαιρουμένου τοῦ ἀριθμητοῦ 12 τοῦ διαιρετέου $\frac{12}{7}$ διὰ τοῦ διαιρέτου 4.

Οἱ ἀνωτέρω συλλογισμοί, δι' ὧν ἐφθάσαμεν εἰς τὸν εὑρεθέντα κανόνα, καθίστανται καταφανέστεροι ἐὰν παρασταθῶσι δι' ἰσοτήτων. "Ας ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ διὰ 4, καὶ ἄς παραστήσωμεν διὰ Π τὸ ζητούμενον πηλίκον. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως πρέπει τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου 4 ἐπὶ τὸ πηλίκον Π νὰ ἦναι ἴσον τῷ διαιρετέῳ $\frac{5}{7}$, ἐν ἄλλαις λέξεσι, πρέπει ἡ ἑξῆς νὰ ὑπάρχῃ ἰσότης

$$4\times\Pi=\frac{5}{7}.$$

Κατὰ τὴν ἰσότητα ταύτην, ἐπειδὴ τὸ τετραπλάσιον τοῦ Π πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ $\frac{5}{7}$, ἕπεται ὅτι αὐτὸ τὸ Π θέλει εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ $\frac{5}{7}$, ἤτοι ὅτι θέλομεν ἔχει

$$\Pi=\frac{1}{4}\times\frac{5}{7}=\frac{5}{7\times4}.$$

Ἠδυνάμεθα καὶ ἁπλούστερον νὰ ἀποδείξωμεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα λέγοντες, ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ κλάσματος $\frac{5}{7}$ διὰ 4 εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{5}{7\times4}$, ὅπερ εὑρίσκομεν ὡς προείπομεν· διότι τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 4 εἶναι $\frac{5\times4}{7\times4}$ ἢ $\frac{5}{7}$, τουτέστιν ἴσον τῷ δεδομένῳ διαιρετέῳ.

150. *Διαίρεσις ἀκεραίου διὰ κλάσματος.* "Ας ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 5 διὰ $\frac{3}{4}$. Τὸ γινόμενον τοῦ ζητουμένου πηλίκου ἐπὶ $\frac{3}{4}$ πρέπει νὰ ἦναι ἴσον τῷ διαιρετέῳ 5. Τὰ

$\frac{3}{4}$ λοιπὸν τοῦ πηλίκου θέλουσιν εἶναι ἴσα μὲ 5. Ἄρα τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ πηλίκου θέλει εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ 5, ἤτοι $\frac{5}{3}$, καὶ ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ πηλίκου εἶναι ἴσον τῷ $\frac{5}{3}$, ἕπεται ὅτι αὐτὸ τὸ πηλίκον θέλει εἶναι τετραπλάσιον τοῦ $\frac{5}{3}$, ἤτοι $\frac{5\times 4}{3}$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι

Ἀκέραιος διαιρεῖται διὰ κλάσματος ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ διαιρέτης ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸ ζητούμενον πηλίκον διὰ Π, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\frac{3}{4}\times \Pi = 5.$$

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν ἰσότητα ταύτην τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ Π εἶναι ἴσα μὲ 5, ἕπεται ὅτι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ Π θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίτον τοῦ 5, ἤτοι ὅτι θέλομεν ἔχει

$$\frac{1}{4}\times \Pi = \frac{5}{3}.$$

Καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὴν τελευταίαν ἰσότητα τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ Π εἶναι ἴσον μὲ $\frac{5}{3}$, ἕπεται ὅτι αὐτὸ τὸ Π θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ $\frac{5}{3}$, ἤτοι ὅτι θέλομεν ἔχει

$$\Pi = \frac{5}{3}\times 4 = \frac{5\times 4}{3},$$

τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα.

Τὸν αὐτὸν κανόνα ἠδυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν εὐκολώτερον λέγοντες ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου 5 διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$ εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{5\times 4}{3}$, ὅπερ εὑρίσκομεν ὡς προείπομεν. Διότι τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου $\frac{5\times 4}{3}$, ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{5\times 4\times 3}{3\times 4}$, ἤτοι αὐτὸς ὁ διαιρετέος 5.

122. *Διαίρεσις δύο κλασμάτων.* Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{5}{7}$ διὰ $\frac{3}{4}$. Καλοῦντές τὸ ζητούμενον πηλίκον Π θέλομεν ἔχει κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως

$$\frac{3}{4}\times \Pi = \frac{5}{7}.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πηλίκου Π ἰσοῦνται μὲ $\frac{5}{7}$, ἔπεται ὅτι

$$\frac{1}{4}\times\Pi=\frac{5}{7\times3}$$

τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ Π θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν $\frac{5}{7}$, ἤτοι μὲ $\frac{5}{7\times3}$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ Π εἶναι ἴσον μὲ $\frac{5}{7\times3}$, ἔπεται ὅτι αὐτὸ τὸ

$$\Pi=\frac{5\times4}{7\times3}$$

Π θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ $\frac{5}{7\times3}$ ἤτοι $\frac{5\times4}{7\times3}$. Λοιπὸν *Κλάσμα διαιρεῖται διὰ κλάσματος ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τὸ πρὸς διαίρεσιν κλάσμα ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀντεστραμμένον.*

122. *Διαίρεσις μικτοῦ διὰ μικτοῦ.* Ἡ διαίρεσις μικτοῦ διὰ μικτοῦ ἀνάγεται ἀμέσως εἰς τὴν διαίρεσιν κλάσματος διὰ κλάσματος, τρεπομένων τῶν μικτῶν εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικούς.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν μικτὸν ἀριθμὸν $24+\frac{3}{8}$ διὰ τοῦ μικτοῦ $5+\frac{7}{12}$, ἠθέλομεν τρέψει αὐτοὺς εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικοὺς $\frac{195}{8}$, $\frac{67}{12}$, καὶ διαιρέσει τὸ κλάσμα τοῦ διαιρετέου $\frac{195}{8}$ διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{67}{12}$ τοῦ διαιρέτου κατὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Ποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{9}$;

II. Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ κλάσματος $\frac{5}{7}$ ἀπὸ τοῦ $\frac{7}{6}$;

III. Ποῖον εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{5}{11}$ ἐπὶ 3;

IV. Ποῖα εἶναι τὰ γινόμενα τοῦ $\frac{5}{11}$ ἐπὶ $\frac{7}{9}$ καὶ $4+\frac{2}{5}$;

V. Πῶς παρίστανται τὰ *πέντε ἕκτα τῶν τριῶν ἑβδόμων*;

VI. Πῶς παρίστανται τὰ *δύο τρίτα τῶν ἑπτὰ ἐνάτων τοῦ δώδεκα*;

VII. Ποῖον τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{6}{7}$ διὰ 3;

VIII. Ποῖα τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{11}{12}$ διὰ 5, 7 καὶ $\frac{2}{3}$;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η΄.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.

Προσθεσις
Ενωρίτερα

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ.

106. *Πρόσθεσις ἐν γένει καλεῖται ἐκείνη ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκομεν ἀριθμὸν περιέχοντα ἁπάσας τὰς μονάδας καὶ τὰ μέρη τῆς μονάδος, τὰ ἐμπεριεχόμενα εἰς πλειοτέρους δεδομένους ἀριθμούς.*

Οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ καλοῦνται *προσθετέοι*, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως *ἄθροισμα* ἢ *κεφάλαιον*.

107. *Πρόσθεσις πλειοτέρων κλασμάτων*. Ἂς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι τὰ προσθετέα κλάσματα $\frac{3}{13}$, $\frac{7}{13}$, $\frac{8}{13}$ ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν. Τὸ ζητούμενον ἄθροισμα θέλει προφανῶς περιέχει τόσα δέκατα τρίτα, ὅσα ἐμπεριέχονται εἰς ἅπαντα τὰ δεδόμενα κλάσματα ὁμοῦ. Θέλει λοιπὸν περιέχει $3+7+8$ δέκατα τρίτα· ἐν ἄλλαις λέξεσι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα θέλει εἶναι $\frac{3+7+8}{13}$, ἢ $\frac{18}{13}$, ἢ $1+\frac{5}{13}$, ἐξαγομένου τοῦ ἐν τῷ κλάσματι $\frac{18}{13}$ περιεχομένου ἀκεραίου. Πορίζόμεθα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι,

Ἵνα προσθέσωμεν κλάσματα ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν καὶ ὑπὸ τὸ εὑρεθησόμενον ἄθροισμα γράφομεν τὸν αὐτὸν κοινὸν παρονομαστήν.

Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ δεύτερον λόγον ὅτι τὰ προσθετέα κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{3}$ ἔχουσι διαφόρους παρονομαστάς. Ἀνάγοντες αὐτὰ εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν αὐτῶν παρονομαστήν, ὅστις εἶναι 30, εὑρίσκομεν ἀντὶ τῶν δεδομένων κλασμάτων τὰ ἴσα ἀμοιβαίως τούτοις $\frac{18}{30}$, $\frac{21}{30}$, $\frac{20}{30}$. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ἄθροισμα αὐτῶν κατὰ τὰ προλεχθέντα θέλει εἶναι $\frac{18+21+20}{30}$, ἢ $\frac{59}{30}$, ἢ $1+\frac{29}{30}$, ἐξαγομένου τοῦ ἐν τῷ κλάσματι περιεχομένου ἀκεραίου. Ἕπεται λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι, Εἰς τὰ ὡρισμένα ταῦτα πολλαπλάσια καὶ ὑποπολλαπλάσια τῆς ἀρχικῆς μονάδος ἔδωσαν νέα ὀνόματα, καὶ τοὺς οὕτως εὑρισκομένους ὡς μέτρον τῶν πρὸς καταμέτρησιν δεδομένων ποσῶν ἢ μεγεθῶν ἀριθμοὺς ἐκάλεσαν *συμμιγεῖς*, ὡς συγκειμένους ἐκ διαφόρων ἀκεραίων ἀριθμῶν διαφόρων μονάδων, ἐχουσῶν ὡρισμένην τινὰ σχέσιν πρὸς τὴν ἀρχικήν.

124. *Συμμιγὴς λοιπὸν ἀριθμὸς καλεῖται ὁ συγκείμενος ἐκ διαφόρων ἀκεραίων ἀριθμῶν διαφόρων μονάδων, αἵτινες εἶναι ὡρισμένα πολλαπλάσια ἢ ὑποπολλαπλάσια τῆς ἀρχικῆς.*

Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ προσδιορίσωμεν μῆκός τι. Λαμβάνομεν πρὸς καταμέτρησιν τῶν μηκῶν ὡς μονάδα ἕτερόν τι μῆκος κατ' ἀρέσκειαν, ἀλλὰ ἀφοῦ ἅπαξ ὁρισθῇ, πάντοτε τὸ αὐτό. Ἡ μονὰς αὕτη ὠνομάσθη *ὀργυιά*. Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι τὸ προσδιοριστέον μῆκος περιέχει τετράκις τὴν *ὀργυιὰν* μετά τινος ὑπολοίπου. Διὰ τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο λαμβάνομεν *πάντοτε* ὡς νέα μονάδα τὸ *ἕκτον* τῆς ὀργυιᾶς, ὅπερ ἐκλήθη *πούς*, καὶ πρὸς τοῦτο συγκρίνομεν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ὑπόλοιπον. Ἐὰν ἡ νέα μονὰς περιέχηται καθ' ὑπόθεσιν πεντάκις εἰς τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο καὶ μένῃ καὶ ὑπόλοιπόν τι μικρότερον τοῦ ποδός, πρὸς καταμέτρησιν τοῦ ὑπολοίπου τούτου λαμβάνομεν *πάντοτε* ὡς νέαν μονάδα τὸ *δωδέκατον* τῆς προηγουμένης, ἤτοι τοῦ ποδός, ὅπερ ἐκλήθη *δάκτυλος*, καὶ πρὸς τοῦτο συγκρίνομεν τὸ νέον ὑπόλοιπον. Ἐὰν τὸ νέον ὑπόλοιπον περιέχῃ λόγου χάριν ἑπτάκις τὸν δάκτυλον μετά τινος ὑπολοίπου μικροτέρου τοῦ δακτύλου, πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ ὑπολοίπου τούτου λαμβάνομεν ὡς νέαν μονάδα *πάντοτε* τὸ *δωδέκατον* τοῦ δακτύλου, ὅπερ ἐκλήθη *γραμμή*, καὶ πρὸς τοῦτο συγκρίνομεν αὐτό. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τοῦτο περιέχεται ἀκριβῶς ἐννεάκις εἰς τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον, τὸ πρὸς καταμέτρησιν δοθὲν μῆκος θέλει περιέχει

4 ὀργυιάς, 5 πόδας, 7 δακτύλους καὶ 9 γραμμάς,

καὶ τότε λέγομεν ὅτι τὸ μέτρον τοῦ δεδομένου μήκους εἶναι ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς

4 ὀργυιαί, 5 πόδες, 7 δάκτυλοι καὶ 9 γραμμαί,

ὅστις, ὡς βλέπομεν, σύγκειται ἐκ διαφόρων ἀκεραίων ἀριθμῶν 4, 5, 7, 9, διαφόρων μονάδων, *ὀργυιᾶς*, *ποδός*, *δακτύλου*, *γραμμῆς*, αἵτινες εἶναι ὡρισμένα ὑποπολλαπλάσια τῆς ἀρχικῆς, ἥτις ἐνταῦθα εἶναι ἡ ὀργυιά.

Ὅταν λαμβάνεται ἡ ὀργυιὰ ὡς ἀρχικὴ μονάς, ὁ ποὺς εἶναι τὸ $\frac{1}{6}$ αὐτῆς· ὁ δάκτυλος τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ποδός, ἑπομένως τὸ $\frac{1}{72}$ τῆς ὀργυιᾶς· ἡ γραμμὴ τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ δακτύλου, ἑπομένως τὸ $\frac{1}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς.

125. Ὁ ἀνωτέρω συμμιγὴς γράφεται πρὸς συντομίαν καὶ ὡς ἑξῆς

4ὀρ. 5ποδ. 7δακ. 9γραμ.

Ἐὰν δὲ θέλωμεν ν' ἀναφέρωμεν ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτοῦ πρὸς τὴν ὀργυιὰν ὡς μονάδα, πρέπει νὰ γράψωμεν αὐτὸν ὡς ἑξῆς

$(4+\frac{5}{6}+\frac{7}{72}+\frac{9}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς·

ἤ, ἐκτελουμένης τῆς προσθέσεως τῶν διαφόρων αὐτοῦ μερῶν, ὡς ἑξῆς

$\frac{4269}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τὸ αὐτὸ μῆκος ἔχει ὡς μέτρον ἢ τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν

4ὀρ. 5ποδ. 7δακ. 9γραμ.,

ἢ τὸν ἰσοδύναμον αὐτῷ κλασματικὸν

$\frac{4269}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς.

126. Εἶναι πολλάκις χρήσιμον, ἐνίοτε δὲ καὶ ἀναγκαῖον, πρὸς ἐκτέλεσιν διαφόρων ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμητικῶν πράξεων δοθέντα συμμιγῆ ν' ἀντικαθιστῶμεν δι' ἰσοδυνάμου κλασματικοῦ μιᾶς ὁποιασδήποτε μονάδος αὐτοῦ, ὡς ἀνωτέρω ἐτρέψαμεν τὸν εὑρεθέντα συμμιγῆ 4ὀρ. 5ποδ. 7δακ. 9γραμ. εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν $\frac{5269}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς· καὶ ἀντιστρόφως, κλασματικόν τινα ἀριθμὸν μονάδος τινὸς ν' ἀντικαθιστῶμεν διὰ τοῦ ἰσοδυνάμου αὐτῷ συμμιγοῦς. Πρὸς τοῦτο ὑπάρχουσιν ἁπλούστατοί τινες κανόνες, οὓς ποριζόμεθα ἐξ αὐτοῦ τοῦ τρόπου τῆς συνθέσεως τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ πρὸς ἐφαρμογὴν αὐτῶν πρέπει ἀναγκαίως νὰ γνωρίζωμεν τὰς πρὸς ἄλληλα σχέσεις τῶν διαφόρων μερῶν τῶν διαφόρων συμμιγῶν· ἐν ἄλλαις λέξεσι, ποῖον πολλαπλάσιον ἢ ὑποπολλαπλάσιον τῆς ἀρχικῆς μονάδος εἶναι ἕκαστον τῶν διαφόρων μερῶν τοῦ δεδομένου συμμιγοῦς.

Ἐπειδὴ κύριον σκοπὸν ἐν τῷ κεφαλαίῳ τούτῳ προτιθέμεθα νὰ δείξωμεν ἁπλῶς πῶς ἐκτελοῦνται ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν αἱ διάφοροι ἀριθμητικαὶ πράξεις καὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν θεωρίαν ἑκάστης εἴς τινα μόνον παραδείγματα, νομίζομεν ὅλως ἀπὸ σκοποῦ νὰ ἐκθέσωμεν ἐνταῦθα κατάλογον διαφόρων μονάδων καὶ τῶν πρὸς ἀλλήλας σχέσεων ἑκάστου ἔθνους, οὔτε τὰς σχέσεις τῶν διαφόρων μονάδων, ἃς τὸ αὐτὸ ἔθνος κατὰ διαφόρους καιροὺς παρεδέχθη. Θέλομεν μόνον περιορισθῇ εἴς τινας τούτων, τὰς μᾶλλον παρ' ἡμῖν ἐν χρήσει.

ΜΟΝΑΔΕΣ ΒΑΡΟΥΣ.

Ὀκάς, ἀρχικὴ μονάς. *Στατὴρ*=44 ὀκάσι. *Δράμιον*=$\frac{1}{400}$ τῆς ὀκάδος. Ἑπομένως θέλομεν ἔχει

1στατ.=44ὀκ.=17600δρ.
1 = 400.

ΜΟΝΑΔΕΣ ΧΡΟΝΟΥ.

Ἡμέρα, ἀρχικὴ μονάς. *Ὥρα*=$\frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας. *Λεπτὸν πρῶτον* $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας. *Λεπτὸν δεύτερον* =$\frac{1}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ. Ἑπομένως θέλομεν ἔχει

1ἡμ.=24ὥρ.=1440λ.π.=86400λ.δ.
1 = 60 = 3600
1 = 60

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΗΚΟΥΣ.

Ὀργυιά, ἀρχικὴ μονάς. *Ποὺς*=$\frac{1}{6}$ τῆς ὀργυιᾶς. *Δάκτυλος*=$\frac{1}{12}$ τοῦ ποδός. *Γραμμὴ*=$\frac{1}{12}$ τοῦ δακτύλου. Ἑπομένως θέλομεν ἔχει

1ὀρ=6πόδ.=72δακ.=864γραμ.
1 =12 =144.
1 = 12.

ΜΟΝΑΔΕΣ ΝΟΜΙΣΜΑΤΩΝ.

Δραχμή, ἀρχικὴ μονάς. *Πεντάδραχμον*=5 δραχμαῖς. *Ὀθώνειον*=4πενταδράχμοις. *Λεπτὸν*=$\frac{1}{100}$ τῆς δραχμῆς. Λοιπὸν ἔχομεν

1ὀθ.=4πεντ.=20δραχ.=2000λεπ.
1 = 5 = 500.
1 = 100.

Πρὸς καταμέτρησιν τῶν τόξων διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν τοῦ εἰς ὃν ταῦτα ἀνήκουσι κύκλου εἰς 360 ἴσα μέρη, ἅτινα καλοῦσι *μοίρας*· τὴν μοῖραν εἰς 60 λεπτὰ πρῶτα (ἐννοεῖται τῆς μοίρας), καὶ τὸ πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα λεπτά. Τὰς μοίρας, λεπτὰ πρῶτα καὶ λεπτὰ δεύτερα σημειοῦσι διὰ τῶν σημείων °, ′, ″, ἅτινα θέτουσι πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ὀλίγον ἄνωθεν τῶν ἀριθμῶν. Οὕτως ἔχομεν

$$\begin{array}{rcrcr} 360^{\circ} & = & 21600' & = & 1296000'' \\ 1 & = & 60 & = & 3600 \\ & & 1 & = & 60. \end{array}$$

ΚΑΝΩΝ ΔΙ' ΟΥ ΤΡΕΠΟΜΕΝ ΔΟΘΕΝΤΑ ΣΥΜΜΙΓΗ ΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΝ ΜΙΑΣ ΟΠΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΜΟΝΑΔΟΣ ΑΥΤΟΥ.

127. *Ἵνα τρέψωμεν δοθέντα συμμιγῆ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν μιᾶς ὁποιασδήποτε μονάδος αὐτοῦ, τρέπομεν τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτῷ τῷ συμμιγεῖ περιεχομένης κατωτάτης ὑποδιαιρέσεως καὶ ὑπὸ τὸν εὑρεθέντα ἀριθμόν, ληφθέντα ὡς ἀριθμητήν, γράφομεν παρονομαστὴν τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς αὐτῆς κατωτάτης ὑποδιαιρέσεως περιέχει ἐκείνη ἡ μονάς, τῆς ὁποίας κλασματικὸς ἀριθμὸς θέλομεν νὰ ἦναι ὁ δεδομένος συμμιγής.*

Παραδείγματος χάριν, ἵνα τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ

4ὀρ. 5πόδ. 7δάκ. 9γραμ.

εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὀργυιᾶς, τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτῷ κατωτάτης ὑποδιαιρέσεως, ἤτοι εἰς γραμμάς, καὶ ὑπὸ τὸν εὑρεθησόμενον ἀριθμὸν 4269 τῶν ἐν αὐτῷ περιεχομένων γραμμῶν γράφομεν παρονομαστὴν τὸν ἀριθμὸν 864, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς *αὐτῆς* κατωτάτης ὑποδιαιρέσεως, ἤτοι πόσας γραμμάς, περιέχει ἐκείνη ἡ *μονάς*, ἤτοι ἡ ὀργυιά, τῆς ὁποίας κλασματικὸς ἀριθμὸς θέλομεν νὰ ἦναι ὁ δοθεὶς συμμιγής.

Ὡσαύτως, ἂν εἴχομεν νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ

3ἡμ. 5ὥρ. 18λ.π.

εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὥρας, ἠθέλομεν τρέψει πρῶτον αὐτὸν εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτῷ κατωτάτης ὑποδιαιρέσεως, ἤτοι εἰς λεπτὰ πρῶτα, καὶ ὑπὸ τὸν εὑρεθησόμενον ἀριθμὸν 4638 τῶν ἐν αὐτῷ περιεχομένων πρώτων λεπτῶν ἠθέλομεν γράψει παρονομαστὴν τὸν ἀριθμὸν 1440, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς αὐτῆς κατωτάτης ὑποδιαιρέσεως, ἤτοι πόσα λεπτὰ πρῶτα, περιέχει ἐκείνη ἡ μονάς, ἤτοι ἡ ὥρα, τῆς ὁποίας κλασματικὸς ἀριθμὸς θέλομεν νὰ ἦναι ὁ δεδομένος συμμιγής.

128. Καθόσον δ' ἀφορᾷ τὴν εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτῷ κατωτάτης ὑποδιαιρέσεως τροπὴν συμμιγοῦς, αὕτη γίνεται ὡς ἑξῆς·

4όρ. 5πόδ. 7δάκ. 9γραμ.

6
24 πόδ.
5
29
12
58
29
348 δάκ.
7
355
12
710
355
4260 γραμ.
9
4269

Γράφομεν τὸν δεδομένον συμμιγῆ ὡς συνήθως, καὶ τρέπομεν πρῶτον τὰς μονάδας τῆς ἐν αὐτῷ ἀνωτάτης ὑποδιαιρέσεως, ἤτοι τὰς ὀργυιάς, εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας, ἤτοι εἰς πόδας, πολλαπλασιάζοντες αὐτὰς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 6, ὅστις δεικνύει πόσους πόδας περιέχει μία ὀργυιά. Εἰς τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον γινόμενον 24, ὅπερ παριστᾷ πόδας, προσθέτομεν καὶ τοὺς ἐν τῷ δεδομένῳ συμμιγεῖ περιεχομένους 5 πόδας, καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα 29 πόδας, οὓς τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας ὑποδιαιρέσεως, ἤτοι εἰς δακτύλους, πολλαπλασιάζοντες αὐτοὺς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 12, ὅστις δεικνύει ἐκ πόσων δακτύλων σύγκειται εἷς πούς. Εὑρίσκομεν οὕτω γινόμενον 348 δακτύλους, εἰς οὓς προσθέτομεν καὶ τοὺς ἐν τῷ συμμιγεῖ περιεχομένους 7, καὶ ἔχομεν οὕτως ἄθροισμα 355 δακτύλους, οὓς τρέπομεν εἰς γραμμὰς πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 12, ὅστις δεικνύει πόσας γραμμὰς περιέχει εἷς δάκτυλος. Εἰς τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον γινόμενον τῶν 4260 γραμμῶν προσθέτομεν καὶ τὰς ἐν τῷ δεδομένῳ συμμιγεῖ περιεχομένας 9, καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα 4269, ὅπερ προφανῶς δεικνύει ἐκ πόσων γραμμῶν σύγκειται ὁ δεδομένος συμμιγής.

Τούτου δὲ γενομένου, ἐὰν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν τὸν δοθέντα συμμιγῆ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὀργυιᾶς, ἐπειδὴ μία ὀργυιὰ περιέχει ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν, ἢ ὡς διὰ τοῦ ἀνωτέρω ἐκτεθέντος τρόπου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν, 864 γραμμάς, ἕπεται ὅτι ὁ δοθεὶς συμμιγὴς θέλει περιέχει τοσάκις τὴν ὀργυιάν, ὁσάκις αἱ ἐν αὐτῷ περιεχόμεναι 4269 *γραμμαὶ* περιέχουσι τὰς ἐν τῇ μιᾷ ὀργυιᾷ περιεχομένας 864 *γραμμάς*· ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὁ δοθεὶς συμμιγὴς εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὰ $\frac{4269}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς.

Ἂν ἠθέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν αὐτὸν συμμιγῆ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τοῦ *ποδός*, ἔπρεπε νὰ γράψωμεν ὑπὸ τὸν ἀριθμὸν

4269 τῶν ἐν αὐτῷ περιεχομένων γραμμῶν παρονομαστὴν 144· διότι εἷς ποὺς περιέχει 144 γραμμάς.

Ἂν δὲ ἠθέλομεν νὰ τρέψωμεν αὐτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τοῦ *δακτύλου* ἔπρεπε νὰ γράψωμεν παρονομαστὴν 12· διότι εἷς δάκτυλος περιέχει 12 γραμμάς.

Ἂν ἀντὶ τοῦ ἀνωτέρω συμμιγοῦς μᾶς ἐδίδετο ὁ συμμιγὴς

4ὀρ. 5πόδ. 7δάκ.,

καὶ ἐπρόκειτο νὰ τρέψωμεν αὐτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὀργυιᾶς, ἠθέλομεν κατὰ τὸν δεδομένον κανόνα τρέψει τὸν αὐτὸν συμμιγῆ εἰς *δακτύλους*, διότι αἱ μονάδες τῆς ἐν αὐτῷ κατωτάτης ὑποδιαιρέσεως εἶναι δάκτυλοι, καὶ ὑπὸ τοὺς εὑρεθησομένους 355 δακτύλους γράψει παρονομαστὴν 72, διότι μία ὀργυιὰ περιέχει 72 δακτύλους. Ἂν δὲ ἠθέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν αὐτὸν συμμιγῆ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τοῦ ποδός, ἠθέλομεν γράψει ὑπὸ τοὺς εὑρεθησομένους 355 δακτύλους παρονομαστὴν 12, διότι εἷς ποὺς περιέχει 12 δακτύλους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Ἂν εἴχομεν νὰ τρέψωμεν τοὺς ἑξῆς συμμιγεῖς

5ἡμ. 3ὥρ. 0λ.π. 8λ.δ.,
3° 0′ 28″,
3τάλ. 2δρ. 25λεπ.,
28στατ. 5ὀκ.,

τὸν μὲν πρῶτον εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς *ὥρας*, τὸν δεύτερον εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τοῦ *πρώτου λεπτοῦ*, τὸν τρίτον εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τοῦ *ὀθωνείου* καὶ τὸν τέταρτον εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τοῦ *στατῆρος*, ἠθέλομεν εὕρει ἀκολουθοῦντες κατὰ γράμμα τὸν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα

5ἡμ. 3ὥρ. 0λ.π. 8λ.δ. $= \frac{442803}{3600}$ τῆς ὥρας.
3° 0′ 28″ $= \frac{10828}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ.
3τάλ. 2δρ. 25λ.π. $= \frac{1725}{2000}$ τοῦ ὀθωνείου.
28στ. 5ὀκ. $= \frac{1237}{44}$ τοῦ στατῆρος.

ΤΡΟΠΗ ΔΕΔΟΜΕΝΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΥ ΔΕΔΟΜΕΝΗΣ ΜΟΝΑΔΟΣ ΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΝ ΣΥΜΜΙΓΗ.

129. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν κλασματικὸν

ἀριθμὸν $\frac{23}{9}$ τῆς ἡμέρας εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ. Ἐπειδὴ ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{23}{9}$ εἶναι μεγαλείτερος τῆς μονάδος, αἱ ἐν αὐτῷ περιεχόμεναι ἀκέραιαι μονάδες θέλουσι παριστᾷ ἡμέρας, ἐξάγοντες δὲ ταύτας θέλομεν ἔχει

$$\frac{23}{9} \text{ τῆς ἡμέρας} = 2\text{ἡμ.} + \frac{5}{9} \text{ τῆς ἡμέρας.}$$

Μᾶς μένει τώρα πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου νὰ τρέψωμεν τὸν μικρότερον τῆς ἡμέρας κλασματικὸν $\frac{5}{9}$ εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ. Πρὸς τοῦτο δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ μία ἡμέρα περιέχει 24 ὥρας, τὰ $\frac{5}{9}$ τῆς ἡμέρας θέλουσι περιέχει $\frac{5}{9}\times 24$ ὥρας, ἤτοι τὰ $\frac{5}{9}$ τῆς ἡμέρας θέλουσιν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὰ $\frac{120}{9}$ τῆς ὥρας. Ἀλλὰ τὰ $\frac{120}{9}$ τῆς ὥρας, περιέχουσι 13 ὥρας καὶ $\frac{3}{9}$ τῆς ὥρας. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα ἀντὶ τῶν $\frac{5}{9}$ τῆς ἡμέρας τὸ ἰσοδύναμον αὐτῷ 13 ὥρας καὶ $\frac{3}{9}$ ἢ $\frac{1}{3}$ τῆς ὥρας, τὴν ἰσότητα

$$\frac{23}{9} \text{ τῆς ἡμέρας} = 2\text{ἡμ. } 13\text{ὥρ.} + \frac{1}{3} \text{ τῆς ὥρας.}$$

Ὅπως ἐτρέψαμεν τὸν κλασματικὸν ἀριθμὸν $\frac{5}{9}$ τῆς ἡμέρας εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν ἀριθμὸν τῆς ὥρας, πολλαπλασιάσαντες αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 24, ὅστις δεικνύει πόσας ὥρας περιέχει μία ἡμέρα, οὕτω θέλομεν τρέψει τὸ κλάσμα $\frac{1}{3}$ τῆς ὥρας εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν ἀριθμὸν τῆς ἀμέσως ἑπομένης ὑποδιαιρέσεως πολλαπλασιάζοντες αὐτὸ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 60, ὅστις δεικνύει πόσα πρῶτα λεπτὰ περιέχει μία ὥρα. Θέλομεν οὕτως ἔχει

$$\frac{1}{3} \text{ τῆς ὥρας} = \frac{60}{3} \text{ τοῦ πρώτου λεπτοῦ} = 20 \text{ πρῶτα λεπτά.}$$

Ἀντικαθιστῶντες λοιπὸν εἰς τὴν προηγουμένην ἰσότητα ἀντὶ τοῦ $\frac{1}{3}$ τῆς ὥρας τὸ ἴσον αὐτῷ 20 πρῶτα λεπτά, θέλομεν ἔχει

$$\frac{23}{9} \text{ τῆς ἡμέρας} = 2\text{ἡμ.} \quad 13\text{ὥρ.} \quad 20\text{λ.π.}$$

Οὕτως ἐτράπη ὁ δεδομένος κλασματικὸς $\frac{23}{9}$ τῆς ἡμέρας εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ 2ἡμ. 13ὥρ. 20λ.π., πορίζόμεθα δὲ εὐκόλως ἐκ τοῦ τρόπου, δι' οὗ ἐφθάσαμεν εἰς τὸν σκοπόν, τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

130. *Ἵνα τρέψωμεν κλασματικὸν ἀριθμὸν μονάδος τινὸς εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ, ἐξάγομεν πρῶτον τὰς ἐν τῷ κλασματικῷ περιεχομένας ἀκεραίας μονάδας, ἐὰν ὑπάρχωσιν. Αὗται θέλουσι παριστᾷ μονάδας τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὰς μονάδας τοῦ δοθέντος κλασματικοῦ. Τρέπομεν ἔπειτα τὸ μένον μικρότερον τῆς μονάδος κλάσμα εἰς κλασματικὸν ἀριθμὸν τῆς ἀμέσως κατωτέρας ὑποδιαιρέσεως πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς ὑποδιαιρέσεως ταύτης περιέχει ἡ μονὰς τοῦ κλασματικοῦ. Ἐξάγομεν ἀκολούθως τὰς ἐν τῷ εὑρεθησομένῳ οὕτω κλασματικῷ περιεχομένας ἀκεραίας μονάδας, ἐὰν ὑπάρχωσιν. Αἱ μονάδες αὗται θέλουσιν εἶναι μονάδες τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὰς τοῦ κλασματικοῦ. Τρέπομεν πάλιν τὸ μένον μικρότερον τῆς μονάδος κλάσμα, ἐὰν μείνῃ τοιοῦτον, εἰς κλασματικὸν ἀριθμὸν τῆς ἀμέσως κατωτέρας ὑποδιαιρέσεως, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἀνωτέρω μέχρις οὗ ἢ εὕρωμεν ὡς ὑπόλοιπον διαιρέσεώς τινος μηδέν, ἢ φθάσωμεν εἰς τὴν κατωτάτην τοῦ συμμιγοῦς ὑποδιαίρεσιν μετά τινος ὑπολοίπου. Δίδομεν τότε εἰς τὸ τελευταῖον τοῦτο ὑπόλοιπον τὸν παρονομαστὴν τοῦ τελευταίου κλάσματος, καὶ προσθέτομεν τὸ προκύπτον κλάσμα εἰς τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως τοῦ εὑρεθέντος συμμιγοῦς.*

Εἰς τὸ ἀνωτέρω ἐκτελεσθὲν παράδειγμα εὕρομεν ὑπόλοιπον 0 φθάσαντες μόνον μέχρι τῶν πρώτων λεπτῶν. Ἂν δὲ εἴχομεν νὰ τρέψωμεν τὰ $\frac{3}{7}$ τῆς ἡμέρας εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ, ἠθέλομεν εὕρει διαδοχικῶς ἀκολουθοῦντες τὸν ἀνωτέρω κανόνα

$\frac{3}{7}$ τῆς *ἡμέρας*$=$0ἡμ.$+\frac{72}{7}$ τῆς *ὥρας*.

$\frac{72}{7}$ τῆς *ὥρας*$=$10ὥρ.$+\frac{120}{7}$ τοῦ *πρώτου λεπτοῦ*.

$\frac{120}{7}$ τοῦ *πρώτου λεπτοῦ*$=$17λ.π.$+\frac{60}{7}$ τοῦ *δευτέρου λεπτοῦ*.

$\frac{60}{7}$ τοῦ *δευτέρου λεπτοῦ*$=$8λ.δ.$+\frac{4}{7}$ τοῦ *δευτέρου λεπτοῦ*.

Ἑπομένως

$\frac{3}{7}$ τῆς *ἡμέρας*$=$10ὥρ. 17λ.π. 8λ.δ.$+\frac{4}{7}$ τοῦ *δευτερολέπτου*.

Ἀφοῦ ἐφθάσαμεν μέχρι τῆς τελευταίας τοῦ συμμιγοῦς ὑποδιαιέσεως χωρίς νὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0, ἵνα ἔχωμεν ἀκριβῶς τὴν ἀξίαν τῶν $\frac{3}{7}$ τῆς ἡμέρας προσεθέσαμεν εἰς τὰ εὑρεθέντα δεύτερα λεπτὰ καὶ τὰ μείναντα $\frac{4}{7}$ τοῦ δευτέρου λεπτοῦ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.—Ἂν εἴχομεν νὰ τρέψωμεν εἰς ἰσοδυνάμους συμμιγεῖς τοὺς ἑξῆς κλασματικοὺς ἀριθμοὺς

$\frac{17}{8}$ *τῆς ὀργυιᾶς*, $\frac{5}{7}$ *τοῦ ὀθωνείου*, $\frac{13}{17}$ *τῆς μοίρας*, $\frac{12}{11}$ *τοῦ στατῆρος*, ἠθέλομεν εὕρει

$\frac{17}{8}$ *τῆς ὀργυιᾶς*=2όρ. 0πόδ. 9δάκ,

$\frac{5}{7}$ *τοῦ ὀθωνείου*=2τάλ. 4δρ. 28λεπ. + $\frac{4}{7}$ *τοῦ λεπτοῦ*,

$\frac{13}{17}$ *τῆς μοίρας*=40′ 35″+$\frac{5}{17}$ *τοῦ δευτερολέπτου*,

$\frac{12}{11}$ *τοῦ στατῆρος*=1στατ. 4όκ.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ.

131. Ἐπειδὴ οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοὶ εἶναι ἀριθμοὶ συγκεκριμένοι, πρέπει ἀναγκαίως οἱ προσθετέοι νὰ ἦναι ὁμοειδεῖς, ἤτοι νὰ παριστῶσι μονάδας τοῦ αὐτοῦ εἴδους. Ἵνα δὲ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ὁσοιδήποτε καὶ ἂν ἦναι,

Γράφομεν αὐτοὺς τοὺς μὲν ὑπὸ τοὺς δὲ οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς ὑποδιαιρέσεως νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ἄγομεν ὑποκάτω γραμμὴν καὶ προσθέτομεν πρῶτον τὰς μονάδας τῆς κατωτάτης τῶν συμμιγῶν ὑποδιαιρέσεως. Ἐὰν εὕρωμεν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς ὑποδιαιρέσεως ταύτης περιέχει ἡ μονὰς τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας ὑποδιαιρέσεως, γράφομεν τοῦτο ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ. Ἐὰν δὲ τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα ἦναι μεγαλείτερον τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος ἀριθμοῦ, ἐξάγομεν τὰς ἐν αὐτῷ περιεχομένας μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας ὑποδιαιρέσεως, καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον γράφομεν ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ, τὰς δὲ ἐξαχθείσας μονάδας προσθέτομεν εἰς τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας ὑποδιαιρέσεως, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὴν πρώτην πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλην τῶν προσθετέων συμμιγῶν, ἧς τὸ ἄθροισμα γράφομεν ὁλόκληρον ὑπ' αὐτήν.

Ἡ ὀρθότης τοῦ ἀνωτέρω κανόνος εἶναι προφανής. Ἔστωσαν π. χ. πρὸς πρόσθεσιν οἱ ἑξῆς συμμιγεῖς.

23ἡμ.	17ὥρ.	25λ.π.	36λ.δ.
5	0	53	28
	21	20	3
29	20	39	7

Ἀκολουθοῦντες τὸν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα εὕρομεν ὡς ἄθροισμα τῶν δευτέρων λεπτῶν 67, καὶ ἐπειδὴ ὁ 67 εἶναι μεγαλείτερος τοῦ ἀριθμοῦ 60, ὅστις δεικνύει πόσα λεπτὰ δεύτερα ἀποτελοῦσιν ἓν λεπτὸν πρῶτον, ἐγράψαμεν 7 ἐν τῇ στήλῃ τῶν δευτερολέπτων καὶ *ἐκρατήσαμεν 1 πρῶτον λεπτόν*, ὅπερ προσεθέσαμεν εἰς τὴν στήλην τῶν πρώτων λεπτῶν, ἧς τὸ ἄθροισμα εἶναι τότε 99 πρῶτα λεπτά. Ἐπειδὴ πάλιν 99 πρῶτα λεπτὰ περιέχουσι μίαν ὥραν καὶ 39 λεπτὰ πρῶτα, ἐγράψαμεν 39 ὑπὸ τὰ πρῶτα λεπτὰ καὶ ἐκρατήσαμεν τὴν *μίαν ὥραν*, ἣν προσεθέσαμεν εἰς τὴν στήλην τῶν ὡρῶν, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐὰν οἱ συμμιγεῖς ἦναι μὲν ὁμοειδεῖς, ἀλλ' οὐχὶ καὶ ὁμοιοτρόπως, οὕτως εἰπεῖν, ἐκπεφρασμένοι, ἂν ἔχωμεν π. χ. νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰ $\frac{12}{7}$ τῆς ὀργυιᾶς τὸν συμμιγῆ 3ποδ. 8δακ. 11γρ., πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ἀθροίσματος πρέπει ἢ νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς αὐτῆς μονάδος, ἤτοι τῆς ὀργυιᾶς, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ τῆς αὐτῆς μονάδος κλάσματα, ἤ, ὅπερ προτιμότερον, νὰ τρέψωμεν τὸν κλασματικὸν εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ, καὶ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρόσθεσιν τῶν συμμιγῶν ὡς ἀνωτέρω ἐῤῥέθη.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ.

132. Καὶ οἱ πρὸς ἀφαίρεσιν συμμιγεῖς πρέπει νὰ ἦναι ὁμοειδεῖς, ἵνα δὲ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν αὐτῶν,

Γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον συμμιγῆ ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ἄγομεν ὁριζόντιον γραμμὴν ὑποκάτω καὶ ἀρχόμεθα τῆς ἀφαιρέσεως ἀπὸ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά. Ἐὰν συμβῇ αἱ μονάδες τάξεώς τινος τοῦ ἀφαιρετέου νὰ ἦναι περισσότεραι τῶν τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ μειωτέου, λαμβάνομεν μίαν μονάδα ἀπὸ τῶν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως τοῦ μειωτέου καὶ τρέπομεν αὐτὴν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ἃς προσθέτομεν εἰς τὰς ὑπαρχούσας τοῦ μειωτέου καὶ ἀπὸ τοῦ εὑρεθησομένου ἀθροίσματος, ὅπερ προφανῶς θέλει εἶναι μεγαλείτερον τῶν ἀντιστοίχων *μονάδων τοῦ ἀφαιρετέου, ἀφαιροῦμεν τὰς μονάδας τούτου. Ἵνα δὲ μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορά, αὐξάνομεν κατὰ μίαν μονάδα τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τὸ εὑρεθησόμενον ἄθροισμα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς αὐτῆς ὑποδιαιρέσεως τοῦ μειωτέου, καὶ οὕτω καθεξῆς.*

Καὶ ὁ κανὼν οὗτος εἶναι φανερός. Ἔστω π. χ. ν'ἀφαιρεθῇ ὁ συμμιγὴς 3όρ. 0πόδ. 5δάκ. 9γρ. ἀπὸ τοῦ συμμιγοῦς 4όρ. 2πόδ. 4δάκ. 7γρ.

Ἀφοῦ γράψωμεν αὐτοὺς ὡς προείπομεν, ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν ὡς ἑξῆς·

4όρ.	2πόδ.	4δάκ.	7γραμ.
3	0	5	9
1	1	10	10

Ἐπειδὴ 9 γραμμαὶ δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ 7 γραμμῶν, λαμβάνομεν ἕνα δάκτυλον, ὃν τρέπομεν εἰς 12 γραμμὰς καὶ προσθέτομεν αὐτὰς εἰς τὰς ὑπαρχούσας 7· εὑρίσκομεν οὕτως ἄθροισμα 19, ἀφ'οὗ ἀφαιροῦμεν 9 καὶ εὑρίσκομεν διαφορὰν 10, ἣν γράφομεν ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ. Ἵνα δὲ μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορὰ τῶν συμμιγῶν, προσθέτομεν ἕνα δάκτυλον εἰς τοὺς 5 τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῶν 4 τοῦ μειωτέου. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ἡ ἀφαίρεσις αὕτη δὲν εἶναι δυνατή, πράττομεν ὡς ἀνωτέρω κλπ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐὰν οἱ πρὸς ἀφαίρεσιν συμμιγεῖς δὲν ἦναι ὁμοιοτρόπως ἐκπεφρασμένοι, ἂν εἴχομεν π. χ. ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ συμμιγοῦς 23στατ. 30όκ. 250δρ. τὸν συμμιγῆ 3στατ. καὶ $\frac{5}{7}$ τοῦ στατῆρος, ἔπρεπεν ἢ νὰ τρέψωμεν καὶ τοὺς δύο εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικοὺς τῆς αὐτῆς μονάδος, ἢ νὰ τρέψωμεν τὸ κλασματικὸν μέρος τοῦ δευτέρου εἰς συμμιγῆ καὶ ἐκτελέσωμεν ἔπειτα ὡς ἀνωτέρω τὴν ἀφαίρεσιν. Ὁ δεύτερος οὗτος τρόπος εἶναι πάντοτε προτιμότερος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.—Εὐκόλως παρατηρεῖ τις τὴν μεγίστην ἀναλογίαν, ἥτις ὑπάρχει εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀνωτέρω πράξεων ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων. Καὶ τῷ ὄντι, οὐδεμία διαφορὰ πραγματικὴ μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχει· ἡ μόνη φαινομένη, οὕτως εἰπεῖν, διαφορὰ προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι, εἰς μὲν τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς αἱ μονάδες τάξεώς τινος ὁποιασδήποτε εἶναι δεκαπλάσιαι τῶν τῆς ἀμέσως ἑπομένης, ἐνῷ εἰς τοὺς συμμιγεῖς ἡ μεταξὺ αὐτῶν σχέσις μεταβάλλεται αὐθαιρέτως ἀπὸ τάξεως εἰς τάξιν, ἢ ἀπὸ ὑποδιαιρέσεως εἰς ὑποδιαίρεσιν, καὶ πρὸς τούτοις εἰς τὴν γραφὴν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἡ τάξις τῶν διαφόρων μονάδων δεικνύεται ἀμέσως ἐκ τῆς πρὸς ἄλληλα θέσεως τῶν διαφόρων ψηφίων αὐτῶν, ἐνῷ εἰς τοὺς συμμιγεῖς, διὰ τὸν ἀνωτέρω λόγον, πρέπει ἀναγκαίως νὰ τίθηται πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ὀλίγον ἄνωθεν καὶ τὸ ὄνομα τούτων.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΕΠΙ ΑΚΕΡΑΙΟΝ.

133. Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγὴς 5όρ. 4πόδ. 8δάκ. 10γρ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 8. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ζητούμενον γινόμενον θέλει εὑρεθῆ ὀκταπλασιαζομένου τοῦ πολλαπλασιαστέου 5όρ. 4πόδ. 8δάκ. 10γραμ. Ὀκταπλασιάζεται δὲ οὗτος, ἐὰν ὀκταπλασιασθῇ ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτοῦ. Διὰ τοῦτο ἡ πρᾶξις ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς·

5όρ.	4πόδ.	8δάκ.	10γραμ.
			8
46	1	10	8

Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὰς μονάδας τῆς κατωτέρας τάξεως τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ ἄγομεν ὑποκάτω ὁριζόντιον γραμμήν. Πολλαπλασιάζομεν ἐν πρώτοις τὰς μονάδας 10 τῆς κατωτάτης τοῦ συμμιγοῦς ὑποδιαιρέσεως ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 8, καὶ εὑρίσκομεν οὕτω γινόμενον 80 γραμμάς. Ἐπειδὴ δὲ 80 γραμμαὶ περιέχουσιν 6 δακτύλους καὶ 8 γραμμάς, γράφομεν 8 ἐν τῇ καθέτῳ στήλῃ τῶν γραμμῶν, καὶ κρατοῦμεν τοὺς 6 δακτύλους, ἵνα προσθέσωμεν αὐτοὺς εἰς τὸ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν γινόμενον τῶν δακτύλων τοῦ συμμιγοῦς. Τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι 64 δάκτυλοι καὶ 6 οἱ κρατούμενοι γίνονται 70. Ἐπειδὴ πάλιν 70 δάκτυλοι περιέχουσι 5 πόδας καὶ 10 δακτύλους, γράφομεν τοὺς 10 δακτύλους εἰς τὴν στήλην τῶν δακτύλων καὶ κρατοῦμεν τοὺς 5 πόδας, ἵνα προσθέσωμεν αὐτοὺς εἰς τὸ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν γινόμενον τῶν ποδῶν τοῦ συμμιγοῦς. Εὑρίσκομεν οὕτως ἄθροισμα 37 πόδας, οἵτινες περιέχουσιν 6 ὀργυιὰς καὶ 1 πόδα. Γράφομεν λοιπὸν 1 εἰς τὴν στήλην τῶν ποδῶν καὶ προσθέτομεν τὰς 6 ὀργυιὰς εἰς τὸ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν γινόμενον τῶν ὀργυιῶν τοῦ συμμιγοῦς. Εὑρίσκομεν οὕτως ἄθροισμα 46 ὀργυιάς, ἃς γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ὀργυιῶν. Οὕτως ὀκταπλασιάσαντες ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ δεδομένου συμμιγοῦς εὕρομεν τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ 8, ὅπερ εἶναι ὁ ὑπὸ τὴν γραμμὴν γραφεὶς συμμιγὴς 46όρ. 1πούς. 10 δάκ. 8γραμ.

134. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πορίζόμεθα εὐκόλως τὸν ἑξῆς κανόνα.

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον πολλαπλα-

σιάζομεν πρῶτον ἐπὶ τὸν ἀκέραιον τὰς ἐν τῷ συμμιγεῖ μονάδας τῆς κατωτάτης αὐτοῦ ὑποδιαιρέσεως, ἐξάγομεν ἔπειτα τὰς ἐν τῷ εὑρεθησομένῳ γινομένῳ περιεχομένας μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας ὑποδιαιρέσεως, ἐὰν ὑπάρχωσι, καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον γράφομεν ὑποκάτω εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, εἰς ἣν καὶ αἱ παρασχοῦσαι αὐτὸ μονάδες τοῦ συμμιγοῦς, τὰς δὲ ἐξαχθείσας μονάδας προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἐπὶ τὰς μονάδας τῆς αὐτῆς ὑποδιαιρέσεως τοῦ πολλαπλασιαστέου συμμιγοῦς. Ἐπὶ τοῦ οὕτως εὑρεθέντος γινομένου πράττομεν ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν μοναδων τῆς ἀνωτάτης τοῦ δεδομένου συμμιγοῦς ὑποδιαιρέσεως, ὅπερ μετὰ τῶν κρατουμένων τοῦ προηγουμένου γράφομεν ὁλόκληρον εἰς τὴν αὐτὴν στήλην. Ὁ οὕτως ὑπὸ τὴν γραμμὴν γραφεὶς συμμιγὴς ἀριθμὸς θέλει παριστᾷ τὸ γινόμενον τοῦ δεδομένου συμμιγοῦς ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΔΙ' ΑΚΕΡΑΙΟΥ.

135. Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ συμμιγὴς 25ἡμ. 21ὥρ. 27λ π. 36λ.δ. διὰ τοῦ ἀκεραίου 6. Ἵνα λάβωμεν τὸ ἕκτον τοῦ διαιρετέου, διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς·

25ἡμ. 21ὥρ. 27λ π. 36λ.δ.	6
	4ἡμ. 7ὥρ. 34λ.π. 36λ.δ.

```
  1
 24
 24ὥρ.
 21
 45
  3
 60
180λ.π.
 27
207
 27
  3
 60
180λ δ.
 36
216
 36
  0
```

Γράφομεν τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν καὶ εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τὸν ἀκέραιον χωρίζοντες αὐτοὺς διὰ καθέτου γραμμῆς κτλ., ἀρχόμεθα δὲ τῆς διαιρέσεως ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τοῦ δεδομένου συμμιγοῦς ὑποδιαιρέσεως. Διαιροῦντες τὰς 25 ἡμέρας τοῦ συμμιγοῦς διὰ 6 εὑρίσκομεν πηλίκον 4 ἡμέρας, ἃς γράφομεν ὑπὸ τὸν διαιρέτην, καὶ ὑπόλοιπον 1 ἡμέραν. Τρέπομεν ταύτην εἰς ὥρας πολλαπλασιάζοντες αὐτὴν ἐπὶ 24, καὶ εἰς τὸ γινόμενον 24 ὥρας προσθέτομεν καὶ τὰς 21 ὥρας τοῦ συμμιγοῦς. Εὑρίσκομεν οὕτως ἄθροισμα 45 ὥρας, ὧν τὸ ἕκτον εἶναι 7 ὧραι μετὰ τοῦ ὑπολοίπου 3. Γράφομεν 7 ὥρας ὑπὸ τὸν διαιρέτην καὶ τρέπομεν τὰς 3 ὥρας τοῦ ὑπολοίπου εἰς λεπτὰ πρῶτα. Εὑρίσκομεν οὕτω γινόμενον 180 λεπτὰ πρῶτα, εἰς ἃ προσθέτομεν καὶ τὰ ἐν τῷ δεδομένῳ συμμιγεῖ ὑπάρχοντα 27 λεπτὰ πρῶτα. Λαμβάνομεν ἐπίσης τὸ ἕκτον τοῦ ἀθροίσματος 207 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 34 λεπτὰ πρῶτα καὶ ὑπόλοιπον 3. Γράφομεν τὰ 34λ.π. ὑπὸ τὸν διαιρέτην καὶ τρέπομεν τὰ μείναντα 3 εἰς λεπτὰ δεύτερα, κτλ.

Ἡ ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος ἔκθεσις τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως, γενικῶς λαμβανομένη, ἀποτελεῖ τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου, ὥστε νομίζομεν ὅλως περιττὸν νὰ ἐπαναλάβωμεν γενικῶς τὰ αὐτά.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΕΠΙ ΣΥΜΜΙΓΗ.

136. Τρεῖς περιπτώσεις δυνατὸν νὰ παρουσιασθῶσιν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

1ον. *Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος ἦναι συμμιγὴς καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς ἀκέραιος.*

2ον. *Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος ἦναι συμμιγὴς καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς κλασματικός, ἢ μικτός.*

3ον. *Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦναι ἀμφότεροι συμμιγεῖς.*

Εἴδομεν προηγουμένως πῶς ἐκτελεῖται ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει.

Καθόσον δ' ἀφορᾷ τὴν δευτέραν, εἶναι φανερὸν ὅτι συμμιγὴς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλασματικόν, ὅπως καὶ ἀκέραιος ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιαζομένου δηλ. τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ διαιρουμένου τοῦ οὕτως εὑρεθησομένου γινομένου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν πῶς πολλαπλασιάζεται συμμιγὴς ἐπὶ ἀκέραιον καὶ πῶς διαιρεῖται συμμιγὴς δι' ἀκεραίου, ἡ κατὰ τὴν δευτέραν ταύτην περίπτωσιν εὕρεσις τοῦ γινομένου δὲν μᾶς περιέχει οὐδεμίαν δυσκολίαν.

Ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦτο μικτός, ἠθέλομεν τρέψει αὐτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν καὶ ἐκτελέσει τὴν πρᾶξιν ὡς προεξεθέσαμεν.

137. Μᾶς μένει λοιπὸν νὰ ἴδωμεν πῶς πολλαπλασιάζεται συμμιγὴς ἐπὶ συμμιγῆ.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ 3ὢρ. 5λ.π. 8λ.δ. ἐπὶ τὸν συμμιγῆ 5όρ. 4πόδ. 0δάκ. 3γραμ.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ ζητούμενον γινόμενον πρέπει νὰ περιέχῃ τοσάκις τὸν πολλαπλασιαστέον 3ὢρ. 5λ.π. 8λ.δ., ὁσάκις ὁ πολλαπλασιαστὴς 5όρ 4πόδ. 0δάκ. 3γραμ. περιέχει τὴν μονάδα, πρὸς ἣν ὁ πολλαπλασιαστέος ἀναφέρεται. Ἂν π. χ. ἔχωμεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Κινητόν τι ἰσοταχῶς κινούμενον διατρέχει εἰς 3ὥρ. 5λ.π. 8λ.δ. *μίαν ὀργυιάν, εἰς πόσον χρόνον θέλει διατρέξει* 5ὀρ. 4πόδ. 0δάκ. 3γρ.; πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου πρέπει προφανῶς νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον 3ὥρ. 5λ.π. 8λ.δ. τοσάκις, ὁσάκις ἡ μονὰς *μία ὀργυιά*, πρὸς ἣν οὗτος ἀναφέρεται, περιέχεται ἐν τῷ πολλαπλασιαστῇ 5ὀρ. 4πόδ. 0δάκ. 3γραμ. Ἀλλ' εἶναι φανερὸν ὅτι 1ὀρ. περιέχεται τοσάκις ἐν τῷ συμμιγεῖ 5ὀρ. 4πόδ. 0δάκ. 3γραμ., ὁσάκις αἱ 864 γραμμαί, ἃς μία ὀργυιὰ περιέχει, περιέχονται ἐν ταῖς 4899 γραμμαῖς, ἃς εὑρίσκομεν τρέποντες τὸν συμμιγῆ 5ὀρ. 4πόδ. 0δακ. 3γραμ. εἰς γραμμάς, ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὁσάκις ὁ 864 περιέχεται ἐν τῷ 4899, ἤ, ὅπερ ταὐτό, ὁσάκις ἡ μονὰς περιέχεται ἐν τῷ κλάσματι $\frac{4899}{864}$. Πρέπει λοιπὸν πρὸς λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ 3ὥρ. 5λ.π. 8λ.δ. ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{4899}{864}$, ὅπερ παριστᾷ τὸν συμμιγῆ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τραπέντα εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν ἐκείνης αὐτοῦ τῆς μονάδος, πρὸς ἣν ὁ πολλαπλασιαστέος ἀναφέρεται.

Ἂν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα,

Κινητόν τι ἰσοταχῶς κινούμενον διατρέχει εἰς 3ὥρ. 5λ.π. 8λ.δ. *ἕνα πόδα· εἰς πόσον χρόνον θέλει διατρέξει* 5ὀρ. 4πόδ. 0δάκ. 3γρ.; ἔπρεπε πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου νὰ ἐπαναλάβωμεν τοσάκις τὸν πολλαπλασιαστέον 3ὥρ. 5λ.π. 8λ.δ., ὁσάκις ὁ πολλαπλασιαστὴς 5ὀρ. 4πόδ. 0δάκ. 3γραμ. περιέχει τὴν μονάδα 1πόδ., πρὸς ἣν ὁ πολλαπλασιαστέος ἀναφέρεται· ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἔπρεπε νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τοῦ ποδὸς καὶ ἐπὶ τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον κλάσμα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον. Ἐντεῦθεν πορίζόμεθα εὐκόλως τὸν ἑξῆς τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος περιπτώσεως γενικὸν κανόνα.

Συμμιγὴς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ συμμιγῆ, ἐὰν τραπῇ ὁ συμμιγὴς τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν ἐκείνης αὐτοῦ τῆς ὑποδιαιρέσεως, πρὸς τὴν μονάδα τῆς ὁποίας ἀναφέρεται ὁ πολλαπλασιαστέος, καὶ πολλαπλασιασθῇ οὗτος ἐπὶ τὸ εὑρεθησόμενον κλάσμα ὡς πολλαπλασιάζεται συμμιγὴς ἐπὶ κλάσμα.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον, ἂν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα,

Κινητόν τι ἰσοταχῶς κινούμενον διατρέχει 1δάκ. *εἰς* 3ὥρ. 5λπ.

8λ.δ.· *εἰς πόσον χρόνον θέλει διατρέξει* 5ὀρ. 4ποδ. 0δακ. 3γραμ.; ἔπρεπε νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τοῦ *δακτύλου* καὶ ἐπὶ τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον κλάσμα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι διὰ τὴν λύσιν ἑκάστου τῶν ἀνωτέρω τριῶν προβλημάτων ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς *αὐτοὺς* συμμιγεῖς, ἀλλ' ὅτι διὰ μὲν τὴν λύσιν τοῦ πρώτου ἔπρεπε νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν *τῆς ὀργυιᾶς*, διὰ δὲ τὴν τοῦ δευτέρου εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν *τοῦ ποδός*, καὶ διὰ τὴν τοῦ τρίτου εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν *τοῦ δακτύλου*.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΔΙΑ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ.

138. Καὶ ἐν τῇ διαιρέσει τῶν συμμιγῶν τρεῖς διακρίνονται περιπτώσεις. Τοῦ διαιρετέου ὄντος πάντοτε συμμιγοῦς, ὁ διαιρέτης δυνατὸν νὰ ἦναι *ἢ ἀκέραιος, ἢ κλασματικός, ἢ συμμιγής*.

1ον. Εἴδομεν πῶς διαιρεῖται συμμιγὴς δι' ἀκεραίου.

2ον. Ὅταν ὁ διαιρέτης ἦναι κλάσμα, ἡ διαίρεσις προφανῶς ἐκτελεῖται πολλαπλασιαζομένου τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀντεστραμμένον. Ἐὰν δὲ ὁ διαιρέτης ἦναι μικτός, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω.

3ον. Μᾶς μένει λοιπὸν νὰ ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι συμμιγής.

139. Ἡ περίπτωσις αὕτη ὑποδιαιρεῖται εἰς τὰς ἑξῆς δύο·

1ον. *Ὅταν ὁ διαιρέτης καὶ ὁ διαιρετέος ἦναι συμμιγεῖς ὁμοειδεῖς*, καὶ

2ον. *Ὅταν ὁ διαιρέτης ἦναι συμμιγὴς ἑτεροειδὴς πρὸς τὸν συμμιγῆ τοῦ διαιρετέου.*

1ον. *Ὅταν ὁ διαιρέτης ἦναι ὁμοειδὴς μὲ τὸν διαιρετέον, τότε τὸ πηλίκον θέλει εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸ ζητούμενον*· ἐν ἄλλαις λέξεσι, τὸ ζήτημα, διὰ τὴν λύσιν τοῦ ὁποίου ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, θέλει προσδιορίσει τὸ εἶδος τοῦ ζητουμένου πηλίκου. Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Διὰ 35ὀρ. 5ποδ. 4δακ. 9γραμ. *ὑφάσματός τινος ἐπληρώσαμεν* 1τάλ., *πόσον ἠθέλομεν πληρώσει, ἂν ἠγοράζομεν* 125ὀργ. 4ποδ. *ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ;*

εἶναι φανερὸν ὅτι ἠθέλομεν πληρώσει τοσάκις ἓν τάλληρον, ὁσάκις ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 35όρ. 5πόδ. 4δακ. 9γραμ. ἐμπεριέχεται ἐν τῷ συμμιγεῖ 125όρ. 4πόδ. Πρὸς εὕρεσιν λοιπὸν τοῦ ζητουμένου πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν συμμιγῆ 125όρ. 4πόδ. διὰ τοῦ ὁμοειδοῦς αὐτῷ 35όρ. 5πόδ. 4δάκ. 9γραμ. καὶ τὸ πηλίκον θέλει παριστᾷ *τάληρα*, διότι τὸ ζητούμενον εἶναι τάληρα. Ἂν δὲ εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς ζήτημα,

Ἵνα διατρέξῃ κινητόν τι ἰσοταχῶς κινούμενον 35όρ. 5πόδ. 4δακ. 9γραμ. *χρειάζεται* 1ὥρ., *πόσας ὥρας θέλει χρειασθῆ, ἵνα διατρέξῃ* 125όρ. 4πόδ.;

εἶναι φανερὸν ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν συμμιγῆ 125όρ. 4πόδ. διὰ τοῦ συμμιγοῦς 35όρ. 5πόδ. 4δάκ. 9γρ. Ἠθέλομεν λοιπὸν ἔχει πρὸς διαίρεσιν καὶ διὰ τὴν λύσιν τοῦ δευτέρου τούτου προβλήματος τοὺς αὐτοὺς συμμιγεῖς, ἀλλὰ τὸ πηλίκον ἐνταῦθα θέλει εἶναι συμμιγὴς ἀριθμὸς *ὡρῶν*, ἐνῷ τὸ πηλίκον τῶν αὐτῶν συμμιγῶν ἀνωτέρω ἔπρεπε νὰ παριστᾷ *τάληρα*.

140. Τούτων δὲ τεθέντων, εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ διαιρετέος θέλει περιέχει τοσάκις τὸν διαιρέτην, ὁσάκις αἱ παριστῶσαι τὴν ἀξίαν τοῦ διαιρετέου μονάδες τάξεώς τινος περιέχουσι τὰς μονάδας τῆς *αὐτῆς* τάξεως, τὰς παριστώσας τὴν ἀξίαν τοῦ διαιρέτου. Ἐντεῦθεν ὁ κανών.

Ἵνα διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ συμμιγοῦς ὁμοειδοῦς, τρέπομεν καὶ τοὺς δύο εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτοῖς κατωτάτης ὑποδιαιρέσεως, καὶ διαιροῦμεν τὰς μονάδας τοῦ διαιρετέου διὰ τῶν μονάδων τοῦ διαιρέτου. Τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον πηλίκον θέλει εἶναι κλασματικὸς ἀριθμὸς ὁμοειδὴς τῷ ζητουμένῳ.

Παραδείγματος χάριν, πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ συμμιγοῦς 125όρ. 4πόδ. διὰ τοῦ συμμιγοῦς 35όρ. 5πόδ. 4δάκ. 9γραμ., τρέπομεν αὐτοὺς εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτοῖς κατωτάτης ὑποδιαιρέσεως, ἤτοι εἰς γραμμάς, καὶ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν 108576 τῶν γραμμῶν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ 31017 τῶν γραμμῶν τοῦ διαιρέτου, ἀλλὰ τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον πηλίκον $\frac{108576}{31017}$ θέλει παριστᾷ *τάληρα*, ἂν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ πρῶτον ζήτημα, καὶ *ὥρας*, ἂν τὸ δεύτερον· ἐν ἄλλαις λέξεσι, τὸ κλάσμα $\frac{108576}{31017}$ θέλει εἶναι κλασματικὸς ἀριθμὸς τοῦ ζητουμένου. Οὕτως ἠθέλομεν εὕρει διὰ τὴν λύσιν τοῦ πρώτου προβλήματος

$\frac{108576}{31017}$ τοῦ ταλήρου $=$ 3τάλ. 2δρ. 40λεπ. $+\frac{6140}{10339}$ τοῦ λεπτοῦ, καὶ διὰ τὴν λύσιν τοῦ δευτέρου

$\frac{108576}{31017}$ τῆς ὥρας $=$ 3ὥρ. 30λ.π. 1λ.δ. $+\frac{9461}{10339}$ τοῦ δευτερολέπτου.

141. 2ον. *Ὅταν οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοὶ ἦναι ἑτεροειδεῖς, τότε τὸ πηλίκον πρέπει ἀναγκαίως νὰ ἦναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον.*

Διότι πρέπει τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον νὰ ἦναι ὁμοειδὲς καὶ ἴσον τῷ διαιρετέῳ, καὶ ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης εἶναι ἑτεροειδὴς πρὸς τὸν διαιρετέον, ἀναγκαίως τὸ πηλίκον πρέπει νὰ ἦναι ὁμοειδὲς αὐτῷ.

Ἵνα δὲ ἴδωμεν πῶς θέλομεν εὕρει πάντοτε τὸ πηλίκον, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς ζήτημα·

Κινητόν τι ἰσοταχῶς κινούμενον διέτρεξεν 125ὀρ. 5πόδ. 8δακ. 9γραμ. εἰς 5ὥρ. 8λ.π. 13λ.δ., πόσας ὀργυιὰς κτλ. διέτρεχεν εἰς ἑκάστην ὥραν;

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου πρέπει προφανῶς νὰ διαιρέσωμεν τὸν συμμιγῆ 125ὀρ. 5πόδ. 8δακ. 9γραμ. διὰ τοῦ συμμιγοῦς 5ὥρ. 8λ.π. 13λ.δ. Ἀλλὰ τίνι τρόπῳ θέλομεν ἐκτελέσει τὴν τοιαύτην διαίρεσιν;

Ἂς παραστήσωμεν διὰ Δ τὸν δεδομένον διαιρετέον, διὰ Α τὸν διαιρέτην καὶ διὰ Π τὸ ζητούμενον πηλίκον. Ἐπειδὴ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως πρέπε. νὰ εὕρωμεν τρίτον ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην νὰ δίδῃ τὸν διαιρετέον, θέλομεν ἔχει τὴν ἑξῆς ἰσότητα

$$\Delta = \mathrm{A} \times \Pi,$$

ἥτις πρέπει νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς

$$\Delta = \Pi \times \mathrm{A}, \qquad (1)$$

διότι ἀπεδείξαμεν ἀνωτέρω ὅτι τὸ πηλίκον Π πρέπει νὰ ἦναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον Δ, ἑπομένως πρέπει νὰ κατέχῃ τὴν θέσιν τοῦ πολλαπλασιαστέου, πρὸς ὃν τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε ὁμοειδές. Λοιπὸν ὁ συμμιγὴς τοῦ ζητουμένου πηλίκου Π πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν συμμιγῆ Α τοῦ διαιρέτου πρέπει νὰ δώσῃ γινόμενον τὸν διαιρετέον Δ. Ἀλλ' εἴπομεν ὅτι συμμιγὴς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ συμμιγῆ, ἐὰν τραπῇ ὁ συμμιγὴς τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὑπὸ τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ ζητήματος προσδιοριζομένης μονάδος, καὶ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγὴς τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον κλάσμα, κατὰ τὰ ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν συμμιγῶν ἐπὶ τῆς περιπτώσεως ταύτης λεχθέντα.

Πρέπει λοιπὸν πρὸς λύσιν τοῦ ἀνωτέρω ζητήματος νὰ τρέψωμεν τὸν διαιρέτην Α εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὥρας, διότι πρὸς τὴν ὥραν ὡς μονάδα ἀναφέρεται ὁ πολλαπλασιαστέος Π, καὶ τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου Π ἐπὶ τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ θέλει εἶναι ὁμοειδὲς καὶ ἴσον τῷ διαιρετέῳ· ἐν ἄλλαις λέξεσι, θέλομεν ἔχει ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα (1) ἀντὶ τοῦ Α τὸ ἴσον αὐτῷ $\frac{\alpha}{\beta}$, τὴν ἑξῆς ἰσότητα

$$\Delta = \Pi \times \frac{\alpha}{\beta}, \tag{2}$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα ἀμέσως διαιροῦντες τὰ δύο αὐτῆς μέλη διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$,

$$\Delta : \frac{\alpha}{\beta} = \Pi, \text{ ἢ } \Pi = \Delta : \frac{\alpha}{\beta}.$$

Λοιπὸν τὸ πηλίκον Π εὑρίσκεται, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ διαιρετέος διὰ τοῦ διαιρέτου Α τραπέντος εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς ὥρας. Θέλομεν ἔχει λοιπὸν πρὸς διαίρεσιν τὸν συμμιγῆ 125όρ. 5πόδ. 8δακ. 9γραμ. διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{18493}{3600}$, πρᾶξιν ἀναγομένην εἰς τὴν δευτέραν τῆς διαιρέσεως τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν περίπτωσιν.

Ἂν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς ζήτημα·

Κινητόν τι ἰσοταχῶς κινούμενον διέτρεξεν 125όρ. 5πόδ. 8δακ. 9γραμ. *εἰς* 5ὥρ. 8λ.π. 13λ.δ., *πόσας ὀργυιὰς κτ.λ. διέτρεχεν εἰς ἕκαστον λεπτόν ;*

ἠθέλομεν εὕρει ἀκολουθοῦντες κατὰ γράμμα τὸν ἀνωτέρω τρόπον τοῦ σκέπτεσθαι, ὅτι, ἵνα εὕρωμεν τὸ ζητούμενον πηλίκον, πρέπει καὶ ἐνταῦθα νὰ διαιρέσωμεν τὸν συμμιγῆ 125όρ. 5πόδ. 8δακ. 9γραμ. διὰ τοῦ συμμιγοῦς 5ὥρ. 8λ.π. 13λ.δ., τραπέντος εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν οὐχὶ πλέον τῆς ὥρας, ὡς προηγουμένως, ἀλλὰ τοῦ *πρώτου λεπτοῦ*.

Ὡσαύτως, ἂν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα

Κινητόν τι ἰσοταχῶς κινούμενον διέτρεξεν 125όρ. 5πόδ. 8δακ. 9γραμ. *εἰς* 5ὥρ. 8λ.π. 13λ.δ., *πόσας ὀργυιὰς κτ.λ. διατρέχει εἰς* 1ἡμ. ; ἠθέλομεν εὕρει σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω ὅτι, ἵνα εὕρωμεν τὸ ζητούμενον πηλίκον, πρέπει καὶ ἐνταῦθα νὰ διαιρέσωμεν τοὺς αὐτοὺς συμμιγεῖς, ἀλλὰ πρὸς τοῦτο, ὁ συμμιγὴς τοῦ διαιρέτου πρέπει νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν οὐχὶ τῆς ὥρας, οὔτε τοῦ *πρώτου λεπτοῦ*, ἀλλὰ τῆς *ἡμέρας*.

142. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πορίζόμεθα εὐκόλως τὸν ἑξῆς περὶ τῆς διαιρέσεως τῶν συμμιγῶν ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ γενικὸν κανόνα.

Συμμιγὴς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ συμμιγοῦς ἑτεροειδοῦς, ἐὰν *τραπῇ ὁ συμμιγὴς τοῦ διαιρέτου εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν ἐκείνης αὐτοῦ τῆς ὑποδιαιρέσεως, πρὸς τὴν μονάδα τῆς ὁποίας ἀναφέρεται τὸ ζητούμενον πηλίκον, καὶ διαιρεθῇ ὁ συμμιγὴς τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ οὕτως εὑρεθησομένου κλάσματος κατὰ τὰ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ περὶ διαιρέσεως τῶν συμμιγῶν λεχθέντα.*

Οὕτω, διὰ τὴν λύσιν τοῦ πρώτου ζητήματος εἴπομεν ὅτι πρέπει νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ τοῦ διαιρέτου 5ὣρ. 8λ.π. 13λ.δ. εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν *τῆς ὥρας*, διότι πρὸς τὴν μονάδα τῆς *ὥρας* ἀνεφέρετο τὸ ζητούμενον πηλίκον. Διὰ τὴν λύσιν τοῦ δευτέρου εὑρέθη ὅτι ὁ αὐτὸς συμμιγὴς ἔπρεπε νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τοῦ *πρώτου λεπτοῦ*, διότι πρὸς τὸ *πρῶτον λεπτόν*, ὡς μονάδα, ἀνεφέρετο τὸ ζητούμενον πηλίκον. Καὶ τέλος διὰ τὴν λύσιν τοῦ τελευταίου, εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν τῆς *ἡμέρας*, διότι πρὸς τὴν *ἡμέραν*, ὡς μονάδα, ἀνεφέρετο τὸ ζητούμενον πηλίκον.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΕΠΙ ΑΚΕΡΑΙΟΝ Η ΣΥΜΜΙΓΗ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟΝ ΤΩΝ ΥΠΟΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΩΝ.

143. Ὁ πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ ἢ ἐπὶ ἀκέραιον, ὅταν οὗτος ἦναι ἀριθμὸς ὁπωσοῦν μέγας, ἐκτελεῖται καὶ κατ' ἄλλον τινὰ τρόπον· κατὰ τὴν καλουμένην μέθοδον τῶν *ὑποπολλαπλασίων*. Ἵνα ἴδωμεν εἰς τί αὕτη συνίσταται, ἂς ἐφαρμόσωμεν αὐτὴν ἐπί τινων παραδειγμάτων· καὶ ἐν πρώτοις ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 35ὀρ. 4πόδ. 10δάκ. 7γραμ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 284. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

	35ὀρ.	4πόδ.	10δάκ.	7γραμ.
	284			
	140			
	280			
	70			
3ποδ....	142			
1	47	2		
6δάκ ...	23	4		
3	11	5		
1	3	—5	8	
4γρ.	1	1	10	8
3	0	5	11	
	10171	0	5	8.

καὶ ἐκτελεῖται οὕτω·

Πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης τοῦ δεδομένου συμμιγοῦς ὑποδιαιρέσεως, ἐνταῦθα τὰς 35όρ., ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 284, καὶ γράφομεν τὰ μερικὰ γινόμενα 140, 280, 70 οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ. Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν 35 όρ. ἐπὶ 284 θέλει παριστᾷ ὀργυιάς, πρέπει νὰ γραφῇ ὡς φαίνεται ἐν τῷ ὄπισθεν ἢ ἐν τῷ κατωτέρω ἐπαναλαμβανομένῳ παραδείγματι, ἐν τῇ στήλῃ τῶν ὀργυιῶν.

	35όρ.	4πόδ.	10δάκ.	7γραμ.
	284			
	140			
	280			
	70			
3πόδ...	142			
1	47	2		
6δάκ....	23	4		
3	11	5		
1	3	5	8	
4γρ.... ..	1	1	10	8
3	0	5	11	
	10171	0	5	8

Μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὰς μονάδας 4πόδ. τῆς ἀμέσως κατωτέρας ὑποδιαιρέσεως τοῦ δεδομένου συμμιγοῦς, καὶ ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 284, ἀποσυνθέτομεν αὐτοὺς εἰς 3πόδ. καὶ 1πόδ., ἤτοι εἰς μέρη, ὧν τὸ πρῶτον νὰ ἦναι πολλοστόν τι μέρος τῆς μονάδος τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, τὰ δὲ ἑπόμενα πολλοστὰ ἢ τῆς αὐτῆς μονάδος ἤ τινος τῶν προηγουμένων μερῶν. Ἐνταῦθα ἀποσυνεθέσαμεν τοὺς 4 πόδας εἰς 3 πόδ., διότι 3 πόδες εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὀργυιᾶς, καὶ 1πόδ., ὅστις εἶναι τὸ τρίτον τῶν 3 ποδῶν. Μετὰ ταῦτα λέγομεν·

Ἂν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 1όρ. ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 284, ἠθέλομεν εὕρει γινόμενον 284 ὀργυιάς, τώρα, ὅτε ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 3πόδ., ἤτοι $\frac{1}{2}$ τῆς ὀργυιᾶς, ἐπὶ 284, θέλομεν προφανῶς εὕρει γινόμενον τὸ ἥμισυ τῶν 284 ὀργυιῶν, ἤτοι 142 ὀργυιάς. Γράφομεν λοιπὸν 3πόδ. καὶ ἀπέναντι τούτων ἐν τῇ στήλῃ τῶν ὀργυιῶν 142.

Πρέπει πρὸς τούτοις νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν 1πόδ. ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 284. Ἐπειδὴ δὲ 1 ποὺς εἶναι τὸ τρίτον τῶν 3 ποδῶν, τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 284 θέλει εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ γινομένου αὐτοῦ ἐπὶ 3 πόδας. Πρέπει λοιπὸν νὰ λάβωμεν τὸ τρίτον τῶν 142 ὀργυιῶν, ὅπερ εἶναι 47 ὀργυιαὶ καὶ 2 πόδες. Γράφομεν λοιπὸν ὡς προελέχθη 1πόδ. ὑπὸ τοὺς 3πόδ. καὶ ἀπέναντι τούτων τὸν ἀριθμὸν 47 ἐν τῇ στήλῃ τῶν ὀργυιῶν καὶ τὸν ἀριθμὸν 2 ἐν τῇ στήλῃ τῶν ποδῶν.

Μεταβαίνομεν ἀκολούθως εἰς τὰς μονάδας 10δακ. τῆς ἀμέσως κατωτέρας ὑποδιαιρέσεως τοῦ δεδομένου συμμιγοῦς καί, ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 284, ἀποσυνθέτομεν τοὺς 10δακ. εἰς 6δακ., οἵτινες εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ποδός, 3δακ., οἵτινες εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 6δακ., καὶ 1δάκ., ὅστις εἶναι τὸ τρίτον τῶν 3δακ. Γράφομεν λοιπόν, ὡς φαίνεται ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι, 6δακ., 3, 1 ἐν τῇ στήλῃ, ἐν ᾗ ὑπάρχουσι καὶ 3πόδ., 1, καὶ ἀπέναντι τούτων τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, ἅτινα εὑρίσκομεν σκεπτόμενοι πάλιν ὡς ἑξῆς·

Ἐπειδὴ 6δάκ. εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 12δακ., ἤτοι τοῦ 1 ποδός, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν θέλει εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ 1 ποδὸς ἐπὶ τὸν αὐτὸν πολλαπλασιαστήν, ὅπερ γινόμενον εὑρέθη προηγουμένως καὶ εἶναι 47όρ. 2πόδ. Λαμβάνομεν λοιπὸν τὸ ἥμισυ τῶν 47όρ. 2ποδ. καὶ εὑρίσκομεν 23όρ. 4πόδ., ὅπερ γράφομεν οὕτως, ὥστε αἱ 23 ὀργυιαὶ νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ στήλῃ τῶν ὀργυιῶν καὶ οἱ 4 πόδες ἐν τῇ στήλῃ τῶν ποδῶν.

Ἐπειδὴ πάλιν 3δάκ. εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 6δακ., τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 284 θέλει εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν 6δακ. ἐπ' αὐτόν, ἤτοι τὸ ἥμισυ τῶν 23όρ. 4ποδ. Λαμβάνομεν λοιπὸν τὸ ἥμισυ τῶν 23όρ. 4ποδ. καὶ εὑρίσκομεν τὸν συμμιγῆ 11όρ. 5πόδ., ὃν γράφομεν καταλλήλως, ὡς ὑπάρχει ἐν τῇ διατάξει τῆς πράξεως.

Μᾶς μένει νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ 1δάκ. ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν. Ἐπειδὴ δὲ 1δάκ. εἶναι τὸ τρίτον τῶν 3δακ., πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ τρίτον τοῦ προηγουμένου γινομένου, ὅπερ εἶναι 3όρ. 5πόδ. 8δάκ. Γράφομεν τοῦτο ἀπέναντι τοῦ 1δακ. ὡς ὑπάρχει γεγραμμένον καὶ μεταβαίνομεν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ γινομένου τῶν ἑπομένων 7γρ. τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν δεδομένον πολλαπλασιαστήν.

Πρὸς τοῦτο ἀποσυνθέτομεν τὰς 7γραμ. εἰς 4γραμ., αἵτινες εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ δακτύλου, καὶ 3γραμ., αἵτινες εἶναι τὸ τέρτον τοῦ δακτύλου.

Ἵνα λοιπὸν εὕρωμεν τὰ ἀντίστοιχα μερικὰ γινόμενα, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ τρίτον καὶ τὸ τέταρτον τοῦ εὑρεθέντος γινομένου τοῦ 1δακ. ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν. Τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι ἴσον τῷ συμμιγεῖ 3ὀρ. 5πόδ. 8δάκ., οὗτινος τὸ μὲν τρίτον εἶναι 1ὀρ. 1ποὺς 10δάκ. 8γραμ., τὸ δὲ τέταρτον ὁ συμμιγὴς 0ὀρ. 5πόδ. 11δάκ. Γράφομεν ταῦτα ὡς ὑπάρχουσι γεγραμμένα, καὶ ἐπειδὴ ἐπολλαπλασιάσαμεν οὕτως ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ πολλαπλασιαστέου 35ὀρ. 4πόδ. 10δάκ. 7γραμ. ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 284, ἐὰν ἀθροίσωμεν τὰ εὑρεθέντα μερικὰ γινόμενα, θέλομεν εὕρει τὸ ζητούμενον. Ἡ πρόσθεσις τῶν μερικῶν τούτων γινομένων ἐκτελεῖται ἀμέσως, διότι ταῦτα εἶναι γεγραμμένα ὡς ἀπαιτεῖ ὁ περὶ προσθέσεως τῶν συμμιγῶν κανών, εὑρίσκομεν δὲ οὕτως ἄθροισμα 10171ὀρ. 0πόδ. 5δακ. 8γραμμ., ὅπερ παριστᾷ τὸ ζητούμενον γινόμενον, εὑρεθὲν κατὰ τὴν λεγομένην μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων.

144. Ἡ ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρου παραδείγματος λεπτομερὴς ἔκθεσις τοῦ τρόπου τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως, γενικῶς λαμβανομένη, δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς γενικὸς κανὼν τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων. Ἀλλ' ἀντὶ νὰ ἐκθέσωμεν ἐνταῦθα τὸν κανόνα τοῦτον, νομίζομεν προτιμότερον διὰ τοὺς μαθητὰς νὰ ἐκτελέσωμεν συντόμως τὴν πρᾶξιν ἐπὶ ἑτέρου τινὸς ὁμοίου παραδείγματος, τοῦ ἑξῆς·

		24ἡμ.	19ὧρ.	48λ.π.	40λ.δ.
		56			
		144			
		120			
12ὧρ.	.....	28			
6	.....	14			
1	.....	2	8		
30λ.π..	.....	1	4		
15	.....	0	14		
3	.....	0	2	24	
30λ.δ.	.....	0	0	24	
10	.....	0	0	8	
		1390	4	56	

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ 24ἡμ. 19ὧρ. 48λ.π. 40λ.δ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 56.

Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὰς 24ἡμ. τοῦπολλαπλασιαστέου ἐπὶ

56, καὶ ἀποσυνθέτομεν ἔπειτα τὰς 19ὧρ. αὐτοῦ εἰς 12, 6, καὶ 1 ὥρας. Ἐπειδὴ 12ὧρ. εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἡμέρας, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ 28 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 56, ὅπερ γράφομεν ἐν τῇ στήλῃ τῶν ἡμερῶν. Ἐπειδὴ δὲ 6ὧρ. εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 12ὡρ., λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ 14 τοῦ 28, ὅπερ ὑπάρχει γεγραμμένον ἀπέναντι τῶν 12ὡρ., καὶ γράφομεν αὐτὸ ὑποκάτω ἐν τῇ στήλῃ τῶν ἡμερῶν. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ 1ὡρ. εἶναι τὸ ἕκτον τῶν 6ὡρ., λαμβάνομεν τὸ ἕκτον τοῦ 14, ὅπερ ὑπάρχει γεγραμμένον ἀπέναντι τῶν 6ὡρ., καὶ εὑρίσκομεν 2ἡμ. καὶ 8ὧρ., καὶ τὰς μὲν 2ἡμ. γράφομεν ὑπὸ τὰς ἡμέρας, τὰς δὲ 8ὧρ. ἐν τῇ στήλῃ τῶν ὡρῶν.

Τὰ 48 λεπτὰ πρῶτα τοῦ πολλαπλασιαστέου ἀποσυντίθενται εἰς 30, 15 καὶ 3 λεπτὰ πρῶτα. Ἐπειδὴ δὲ τὰ 30λ.π. εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὥρας, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τῶν 2ἡμ. 8ὡρ., ὅπερ εἶναι 1ἡμ. 4ὧρ., καὶ γράφομεν αὐτὸ ἀπέναντι τῶν 30λ.π. Ἐπειδὴ δὲ τὰ 15λ.π. εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 30λ.π., λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τῶν 1ἡμ. 4ὡρ., ὅπερ εἶναι 0ἡμ. 14ὧρ., καὶ γράφομεν αὐτὸ ἀπέναντι τῶν 15λ.π., ὡς φαίνεται ἐν τῷ ἀπέναντι παραδείγματι. Καὶ πάλιν, ἐπειδὴ τὰ 3λ.π. εἶναι τὸ πέμπτον τῶν 15λ.π. λαμβάνομεν τὸ πέμπτον τῶν 0ἡμ. 14ὡρ. ὅπερ εἶναι 0ἡμ. 2ὧρ. 24λ.π., καὶ γράφομεν αὐτὸ ὅπως ὑπάρχει γεγραμμένον ἀντικρύ.

Μεταβαίνομεν εἰς τὰ 40λ.δ. τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἅτινα ἀποσυνθέτομεν εἰς 30λ.δ. καὶ 10λ.δ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ 30λ.δ. εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ 1λ.π., ἤ, ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει γεγραμμένον τὸ γινόμενον τοῦ 1λ.π. ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, τὸ ἕκτον τῶν 3λ.π., οὗτινος τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν εὑρέθη προηγουμένως, λαμβάνομεν τὸ ἕκτον τοῦ γινομένου τούτου, ἤτοι τοῦ 0ἡμ. 2ὧρ. 24λ.π., ὅπερ εἶναι 0ἡμ. 0ὧρ. 24λ.π., καὶ γράφομεν αὐτὸ καταλλήλως. Ἐπειδὴ τέλος τὰ μένοντα 10λ.δ. εἶναι τὸ τρίτον τῶν 30λ.π. πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ τρίτον τοῦ προηγουμένου γινομένου ὅπερ εἶναι 0ἡμ. 0ὧρ. 8λ.π.

Τὸ ἄθροισμα 1390ἡμ. 4ὧρ. 56λ.π. τῶν οὕτως εὑρεθέντων καὶ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον διαταχθέντων μερικῶν γινομένων θέλει παριστᾷ τὸ ζητούμενον γινόμενον, εὑρεθὲν κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων.

145. Ἂς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι μᾶς ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς 5όρ. 5πόδ. 8δάκ. 9γραμ. ἐπὶ τὸν συμμιγῆ 7ἡμ. 7ὧρ. 25λ.π. κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων.

Ἐν πρώτοις τὸ ζητούμενον γινόμενον, ὡς ὁμοειδὲς τῷ πολλαπλασιαστέῳ, θέλει εἶναι ὀργυιαί, πόδες, δάκτυλοι κτλ. Ἐὰν τώρα ἡ μονάς, πρὸς ἣν ἀναφέρεται ὁ συμμιγὴς τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἦναι ἡ ἡμέρα, εἶναι φανερὸν ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου τούτου πρέπει νὰ λάβωμεν τοσάκις τὸν πολλαπλασιαστέον, ὅσας ἀκεραίας μονάδας περιέχει ὁ πολλαπλασιαστής, ἤτοι ἑπτάκις, καὶ νὰ λάβωμεν ἔπειτα τοσοῦτο μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὅσον πολλοστὸν μέρος τῆς μιᾶς ἡμέρας εἶναι αἱ 7 ὧραι καὶ τὰ 25 λεπτὰ πρῶτα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

	5όρ.	5πόδ.	8δάκ.	9γραμ.
	7ήμ.	7ὥρ.	25λ.π.	
	35			
3πόδ. ...	3	3		
2 ...	2	2		
6δάκ. ...	0	3	6	
2 ...	0	1	2	
6γραμ. ...	0	0	3	6
3 ...	0	0	1	9
6ὥρ. ...	1	2	11	$2+\frac{1}{4}$
1 ...	0	1	5	$10+\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$
20λ.π. ...	0	0	5	$11+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{72}$
5 ...	0	0	1	$5+\frac{3}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{288}$
	43	3	1	$7+\frac{83}{96}$

Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν ἐν πρώτοις τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ 7 κατὰ τὴν προεκτεθεῖσαν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων, ἔπειτα ἵνα λάβωμεν τοσοῦτο μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὅσον πολλοστὸν τῆς 1 ἡμέρας εἶναι αἱ 7 ὧραι καὶ τὰ 25 λεπτὰ πρῶτα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, πράττομεν καὶ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ἀναλύομεν τὰς 7ὥρ. τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἰς 6ὥρ. καὶ 1ὥρ. καὶ λέγομεν ὅτι, ἐπειδὴ 6ὥρ. εἶναι τὸ τέταρτον τῆς 1ἡμ., τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ 6ὥρ. θέλει εἶναι τὸ τέταρτον αὐτοῦ, διότι πρὸς τὴν ἡμέραν ὡς μονάδα ὑπεθέσαμεν ὅτι ἀναφέρεται οὗτος. Λαμβάνομεν λοιπὸν τὸ τέταρτον τοῦ πολλαπλασιαστέου 5όρ. 5πόδ. 8δκ. 9γραμ., καὶ εὑρίσκομεν 1όρ. 2πόδ. 11δακ. 2γραμ.$+\frac{1}{4}$ τῆς γραμμῆς, ὅπερ γράφομεν ὡς ὑπάρχει γεγραμμένον ἐν τῷ ἀντικρὺ παραδείγματι.

Πάλιν, ἐπειδὴ 1ὥρ. εἶναι τὸ ἕκτον τῶν 6ὡρ., πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ ἕκτον τοῦ γινομένου τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ 6ὥρ., ἤτοι τὸ ἕκτον τοῦ ἀπέναντι τῶν 6ὡρ. γεγραμμένου συμμιγοῦς. Εὑρίσκομεν δ' οὕτως ὡς γινόμενον 0ὁρ. 1ποδ. 5δακ. 10γραμ.$+\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$ τῆς γραμμῆς, ὅπερ γράφομεν ὡς ὑπάρχει γεγραμμένον.

Μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὰ 25λ.π. τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἅπερ ἀποσυνθέτομεν εἰς 20λ.π. καὶ 5λ.π. Λέγομεν δέ, ἐπειδὴ τὰ 20λ.π. εἶναι τὸ τρίτον τῆς ὥρας, τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ 20λ.π. θέλει εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου αὐτοῦ ἐπὶ 1ὥρ. Πρὸς εὕρεσιν λοιπὸν τούτου πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ τρίτον τοῦ συμμιγοῦς 0ὁρ. 1ποδ. 5δακ. 10γραμ.$+\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$ τῆς γραμμῆς, ὅπερ εἶναι 0ὁρ. 0ποδ. 5δάκ. 11γραμ.$+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{72}$ τῆς γραμμῆς.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ μένοντα 5λ.π. εἶναι τὸ τέταρτον τῶν 20λ.π., πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ τέταρτον τοῦ ἀντιστοίχου γινομένου, ὅπερ εἶναι 0ὁρ. 0ποδ. 1δάκ. 5γραμ.$+\frac{3}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{288}$ τῆς γραμμῆς. Γράφομεν τοῦτο ὡς ὑπάρχει γεγραμμένον, ἄγομεν γραμμὴν ὑποκάτω καὶ προσθέτομεν πρῶτον τὰ κλασματικὰ μέρη τῆς γραμμῆς, ἔπειτα τοὺς συμμιγεῖς κατὰ τὰ περὶ προσθέσεως αὐτῶν λεχθέντα. Εὑρίσκομεν οὕτως ἄθροισμα 43ὁρ. 3ποδ. 1δάκ. 7γραμ.$+\frac{83}{96}$ τῆς γραμμῆς, ὅπερ παριστᾷ τὸ γινόμενον τῶν δύο συμμιγῶν, εὑρεθὲν κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων.

Ἂν ἡ μονάς, πρὸς ἣν ἀνεφέρετο ὁ πολλαπλασιαστέος, ἦτο ἡ ὥρα, ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον ὡς προηγουμένως οὐχὶ ἐπὶ τὸν συμμιγῆ 7ἡμ. 7ὥρ. 25λ.π., ἀλλ' ἐπὶ τὸν ἰσοδύναμον αὐτῷ 175ὥρ. καὶ 25λ.π. Ἠθέλομεν λοιπὸν πρῶτον εὕρει τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ 175, καὶ ἔπειτα λάβει τοσοῦτο μέρος αὐτοῦ, ὅσον πολλοστὸν μέρος τῆς μιᾶς ὥρας εἶναι τὰ 25 πρῶτα λεπτά.

146. Ἡ ἀνωτέρω ἔκθεσις, γενικῶς λαμβανομένη, ἀποτελεῖ τὸν κανόνα τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων, νομίζομεν δὲ προτιμότερον, ἀντὶ νὰ ἐπαναλάβωμεν γενικῶς τὰ αὐτά, νὰ ἐκθέσωμεν συντόμως τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως ἐπὶ ἑτέρου τινὸς παραδείγματος.

Ἔστω π. χ. νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγὴς 25στατ. 37ὀκ. 220δρ. ἐπὶ τὸν συμμιγῆ 3τάλ. 2δραχ. 30λεπ., καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μονάς, πρὸς ἣν ἀναφέρεται ὁ συμμιγὴς τοῦ πολλαπλασιαστέου, εἶναι τὸ *ὀθώνειον*. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου πρέπει νὰ λάβωμεν τοσοῦτο μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὅσον πολλοστὸν μέρος τοῦ ἑνὸς ὀθωνείου εἶναι ὁ συμμιγὴς 3τάλ. 2δραχ. 30λεπ. Θέλομεν δὲ εὕρει τὸ ζητούμενον πράττοντες καὶ σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς·

	25στατ.	37ὀκ.	220δράμ.
	3τάλ.	2δρ.	30λεπ.
2τάλ.	12	40	310
1	6	20	155
1δραχ.	1	12	351
1	1	12	351
25λεπ.	0	14	$87+\frac{3}{4}$
5	0	2	$337+\frac{2}{5}+\frac{3}{20}$
	22	15	$92+\frac{3}{10}$

Ἀποσυνθέτομεν τὰ 3τάλ. εἰς 2τάλ. καὶ 1τάλ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ 2τάλ. εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀθωνείου λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ εὑρίσκομεν 12στατ. 40ὀκ. 310δράμ., ὅπερ γράφομεν ἀπέναντι τοῦ 2τάλ. Ἐπειδὴ δὲ πάλιν τὸ 1τάλ. εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 2ταλ., λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ ἀντιστοίχου γινομένου, ὅπερ εἶναι 6στατ. 20ὀκ. 155δράμ., καὶ γράφομεν αὐτὸ ὡς ὑπάρχει γεγραμμένον.

Μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὰς 2δραχ. τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἃς ἀποσυνθέτομεν εἰς 1δραχ. καὶ 1δραχ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ 1δραχ. εἶναι τὸ πέμπτον τοῦ ἑνὸς ταλήρου, λαμβάνομεν τὸ πέμπτον τοῦ ἀντιστοίχου γινομένου, ὅπερ εἶναι 1στατ. 12ὀκ. 351δράμ. Γράφομεν αὐτὸ ἀπέναντι τῆς 1δραχ. καὶ ὑπ' αὐτὸ ἐπαναλαμβάνομεν τὸ αὐτὸ γινόμενον διὰ τὴν ἑτέραν δραχμὴν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

Τελευταῖον ἀποσυνθέτομεν τὰ 30λεπ. τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἰς 25λεπ. καὶ 5λεπ., καὶ σκεπτόμενοι ὡς προηγουμένως εὑρίσκομεν τὰ ἀντίστοιχα γινόμενα 0στατ. 14ὀκ. 87δράμ.$+\frac{3}{4}$, 0στατ. 2ὀκ. 337δράμ.$+\frac{2}{5}+\frac{3}{20}$, ἅπερ γράφομεν ὡς ὑπάρχουσι γεγραμμένα. Ἄγομεν γραμμὴν ὑποκάτω, καὶ προσθέτοντες τὰ οὕτω διατεταγμένα μερικὰ γινόμενα εὑρίσκομεν ἄθροισμα 22στατ. 15ὀκ. 92δράμ.$+\frac{3}{10}$

τοῦ δραμίου, ὅπερ παριστᾷ τὸ ζητούμενον γινόμενον, εὑρεθὲν κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Νὰ προστεθῇ εἰς τὰ $\frac{5}{11}$ τῆς ἡμέρας ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 5ἡμ. 8ὧρ. 3λ.π. 8λ.δ.

II. Νὰ προσθέσωμεν τὰ $\frac{5}{7}$ τῆς ὀργυιᾶς, τὰ $\frac{8}{9}$ τοῦ δακτύλου καὶ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ποδός.

III. Ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῶν $\frac{15}{7}$ τοῦ ὀθωνείου ὁ συμμιγὴς 3τάλ. 4δρ. 28λεπ.

IV. Ν' ἀφαιρεθῶσι τὰ $\frac{12}{7}$ τῆς ἡμέρας ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν συμμιγῶν 6ἡμ. 5ὧρ. 7λ.π., 3ὧρ. 0λ.π. 5λ.δ.

V. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς 3ὀρ. 4ποδ. 5δακ. 3γρ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 25 κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων.

VI. Ποῖον εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς 5ὧρ. 7λ.π. 37λ.δ. ἐπὶ τὸν συμμιγῆ 4ὀρ. 5ποδ. 7δακ. 9γραμ., ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ μονάς, πρὸς ἣν ἀναφέρεται ὁ πολλαπλασιαστέος, εἶναι ἡ ὀργυιά ;

VII. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν αὐτῶν συμμιγῶν ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ μονάς, πρὸς ἣν ἀναφέρεται ὁ πολλαπλασιαστέος, εἶναι ὁ δάκτυλος.

VIII. Νὰ εὑρεθῶσι καὶ κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις τὰ γινόμενα τῶν αὐτῶν συμμιγῶν κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ὑποπολλαπλασίων.

IX. Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ συμμιγοῦς 3ὀθ. 2τάλ. 2δραχ. 27λεπ. διὰ 35 ;

X. Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ συμμιγοῦς 7ἡμ. 5ὧρ. 27λ.π. 28λ.δ. διὰ τοῦ ὁμοειδοῦς αὐτῷ 15ὧρ. 0λ.π. 8λ.δ., ὑποτιθεμένου ὅτι τοῦτο θέλει παριστᾷ *ὀθώνεια* κτλ., ἢ *ὀργυιάς*, κτλ..

XI. Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ συμμιγοῦς 5ὀρ. 4ποδ. διὰ τοῦ συμμιγοῦς 3ποδ. 0δάκ. 9γραμ., ὑποτιθεμένου ὅτι θέλει παριστᾷ *ἡμέρας* κτλ. ;

XII. Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ συμμιγοῦς 45στατ. 8ὀκ. 55δράμ. διὰ τοῦ συμμιγοῦς 5ὀθ. 3τάλ. 0δραχ. 8λεπ., ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ μονάς, πρὸς ἣν τοῦτο ἀναφέρεται, εἶναι τὸ ὀθώνειον ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι΄.

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ.

—

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

147. Περὶ τριῶν διαφόρων, οὕτως εἰπεῖν, εἰδῶν ἀριθμῶν μέχρι τοῦδε ἐγένετο λόγος· περὶ τῶν ἀκεραίων, τῶν κλασματικῶν καὶ τῶν συμμιγῶν. Εἴδομεν δὲ κατὰ ποίους κανόνας ἐκτελοῦνται αἱ διάφοροι ἀριθμητικαὶ πράξεις ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, κατὰ ποίους αἱ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν καὶ κατὰ ποίους αἱ ἐπὶ τῶν συμμιγῶν.

Δὲν διέφυγε βεβαίως τὴν προσοχὴν οὐδενός, ὅτι αἱ μὲν ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἐκτελούμεναι πράξεις καὶ ταχύτερον καὶ καθ' ἁπλουστέρους κανόνας ἐκτελοῦνται, αἱ δὲ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ὅτι εἶναι συνθετώτεραι τῶν πρώτων, καὶ τελευταῖον αἱ ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν ὄχι μόνον πολυπλοκώτεραι τῶν πρώτων εἶναι, ἀλλὰ καὶ πρὸς ἐκτέλεσιν αὐτῶν πρέπει νὰ γνωρίζομεν ἐκ στήθους τὰς διαφόρους πρὸς ἀλλήλας σχέσεις τῶν διαφόρων αὐτῶν μονάδων.

Ἐὰν τώρα θελήσῃ τις νὰ ζητήσῃ τὸν λόγον τούτου, θέλει ἀμέσως παρατηρήσει ὅτι οἱ κανόνες τῆς ἐκτελέσεως τῶν διαφόρων ἀριθμητικῶν πράξεων ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἁπλούστεροι τῶν ἐπὶ τῶν κλασματικῶν καὶ συμμιγῶν ἕνεκα τοῦ τρόπου τῆς γραφῆς αὐτῶν καὶ τῆς σταθερᾶς σχέσεως, ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ μονάδος τινὸς ὁποιασδήποτε αὐτῶν τάξεως καὶ τῆς μονάδος τῆς ἀμέσως προηγουμένης ἢ ἑπομένης, ἐνῷ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ὄχι μόνον αἱ μονάδες αὐτῶν εἶναι συνήθως διάφοροι, ἀλλὰ καὶ διὰ δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν ἕκαστος τούτων γράφεται. Καθόσον δ' ἀφορᾷ τοὺς συμμιγεῖς ἡ δυσκολία εἶναι μεγαλειτέρα, διότι αἱ μοναδες τῶν διαφόρων ὑποδιαιρέσεων τῆς ἀρχικῆς ὄχι μόνον εἶναι ὅλως αὐθαίρετα καὶ διάφορα πολλαπλάσια ἢ ὑποπολλαπλάσια τῆς ἀρχικῆς, ἀλλὰ φέρουσι καὶ ἴδιον ὄνομα, καὶ πρὸς τούτοις γράφονται καὶ κατὰ μέρη.

Ἀλλ' ἐὰν πρὸς καταμέτρησιν τῶν ποσῶν, ἀντὶ νὰ διαιρῶμεν τὴν μονάδα ὡς εἴπομεν ἐν τοῖς περὶ κλασματικῶν καὶ συμμιγῶν ἀριθμῶν

Κεφαλαίοις, λαμβάνωμεν διὰ ποσὰ μικρότερα τῆς μονάδος ὡς νέαν μονάδα τὸ *δέκατον* τῆς πρώτης, καὶ διὰ ποσὰ μικρότερα τοῦ δεκάτου τὸ *δέκατον* αὐτοῦ, ἤτοι τὸ *ἑκατοστὸν* τῆς μονάδος, δι' ἔτι δὲ μικρότερα ποσὰ τὸ *δέκατον* τοῦ ἑκατοστοῦ, ἤτοι τὸ *χιλιοστὸν* τῆς ἀρχικῆς, καὶ οὕτω καθεξῆς, τὰ διάφορα μέρη, ἐξ ὧν ἤθελε σύγκεισθαι ἀριθμός τις οὕτως εὑρεθεὶς ὡς μέτρον ποσοῦ τινος ἢ μεγέθους, θέλουσιν ἔχει πρὸς ἄλληλα τὴν αὐτὴν σχέσιν, ἣν καὶ τὰ διάφορα ψηφία ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ· ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἑκάστη μονὰς τάξεώς τινος θέλει εἶναι τὸ δέκατον τῆς προηγουμένης καὶ δεκαπλασία τῆς ἑπομένης. Ἐπομένως ὁ ἐκφράζων τὸ μέτρον ποσοῦ τινος ἢ μεγέθους ἀριθμὸς δύναται νὰ γραφῇ καθ' ὃν τρόπον καὶ οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί.

148. *Τὰ δέκατα, ἑκατοστά, χιλιοστά*, κτλ. τῆς μονάδος καλοῦνται *δεκαδικὰ* αὐτῆς μέρη, ὁ δὲ ἐκ τοιούτων ἀποτελούμενος ἀριθμός, εἴτε περιέχει εἴτε μὴ ἀκεραίας μονάδας, καλεῖται *δεκαδικὸς ἀριθμός*.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς *35 μονάδες* καὶ *5 δέκατα, 4 ἑκατοστά, 7 χιλιοστά*, εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμός, διότι περιέχει δεκαδικὰ μέρη τῆς μονάδος, θέλει δὲ γραφῆ οὕτω

35,547.

Ἐτέθη πρῶτον *ὑποδιαστολὴ* μετὰ τὰς 35 ἀκεραίας μονάδας πρὸς διάκρισιν αὐτῶν ἀπὸ τῶν δεκαδικῶν τοῦ ἀριθμοῦ μερῶν. Μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν ἐγράφη ἔπειτα ὁ ἀριθμὸς 5, ὅστις παριστᾷ *δέκατα*· διότι ἓν δέκατον εἶναι τὸ δέκατον τῆς μονάδος, καὶ οὕτως ἡ τάξις τῶν μονάδων, ἃς παριστᾷ, εἶναι τὸ δέκατον τῆς προηγουμένης. Μετὰ τὰ 5 δέκατα ἐγράφησαν τὰ 4 *ἑκατοστὰ* καὶ μετὰ τὰ ἑκατοστὰ τὰ 7 *χιλιοστά*· διότι τὸ μὲν χιλιοστὸν εἶναι τὸ δέκατον τοῦ ἑκατοστοῦ, τὸ δὲ ἑκατοστὸν τὸ δέκατον τοῦ δεκάτου.

Ἂν ὁ ἀνωτέρω δεκαδικὸς δὲν περιεῖχεν ἑκατοστά, ἠθέλομεν γράψει 0 εἰς τὴν θέσιν τοῦ 4, οὕτω 35,507. Ἂν δὲ δὲν περιεῖχεν οὔτε ἀκεραίας μονάδας, ἠθέλομεν γράψει 0 πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων, οὕτω 0,507.

Τὰ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν γεγραμμένα ψηφία καλοῦνται *δεκαδικὰ ψηφία* τοῦ ἀριθμοῦ.

ΠΩΣ ΑΠΑΓΓΕΛΛΕΤΑΙ ΔΕΔΟΜΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΑΙ ΠΩΣ ΓΡΑΦΕΤΑΙ ΑΠΑΓΓΕΛΛΟΜΕΝΟΣ.

149. Κατὰ τέσσαρας διαφόρους τρόπους δύναται ν' ἀπαγγελθῇ γεγραμμένος δεκαδικὸς ἀριθμός.

1ον. *Ἀπαγγέλλεται πρῶτον ὁ πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς ἀκέραιος ἀριθμός, ἔπειτα ἓν ἕκαστον τῶν δεκαδικῶν ψηφίων αὐτοῦ μετὰ τοῦ ὀνόματος τῆς τάξεως τῶν μονάδων, ἃς παριστᾷ.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς

357,52064

ἀπαγγέλλεται *τριακόσιαι πεντήκοντα ἑπτὰ μονάδες, 5 δέκατα, 2 ἑκατοστά, 0 χιλιοστά, 6 δεκάκις χιλιοστὰ καὶ 4 ἑκατοντάκις χιλιοστά.*

Γράφεται δ' ὁ οὕτως ἀπαγγελλόμενος δεκαδικὸς ἀριθμός, *γραφομένου πρῶτον τοῦ ἀκεραίου αὐτοῦ μέρους, ἔπειτα τῆς ὑποδιαστολῆς καὶ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν ἑνὸς ἑκάστου τῶν ἀπαγγελλομένων κατὰ τάξιν ψηφίων οὕτως, ὥστε νὰ κατέχῃ ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολὴν τὴν θεσιν τῶν μονάδων, ἃς παριστᾷ.*

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν νὰ γράψωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν *3 δέκατα, 6 χιλιοστὰ καὶ 8 ἑκατομμυριοστά*, ἠθέλομεν γράψει

0,306008.

Ἐγράψαμεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν ἀκεραίων μονάδων, ἔπειτα ὑποδιαστολήν, καὶ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν 3, ὅπερ παριστᾷ δέκατα· μετὰ τοῦτο 0, διότι ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν περιέχει ἑκατοστά· μετὰ τὸ 0 ἐγράψαμεν 6, διότι οὕτω γραφὲν τὸ 6 παριστᾷ ὡς ἐκ τῆς θέσεως αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολὴν *χιλιοστά·* ἔπειτα δύο 0, διότι ὁ ἀπαγγελθεὶς δεκαδικὸς δὲν περιεῖχεν οὔτε *δεκάκις χιλιοστά*, οὔτε *ἑκατοντάκις χιλιοστά·* καὶ μετὰ τὰ τελευταῖα δύο μηδενικὰ 8 πρὸς παράστασιν τῶν *ἑκατομμυριοστῶν* τοῦ δεδομένου δεκαδικοῦ.

2ον. *Ἀπαγγέλλονται πρῶτον αἱ ἀκέραιαι μονάδες τοῦ δεκαδικοῦ, ἔπειτα ὁλόκληρος ὁ ὑπὸ τῶν δεκαδικῶν αὐτοῦ ψηφίων ἀποτελούμενος ἀριθμὸς μετὰ τοῦ ὀνόματος τῶν μονάδων τῆς τάξεως τοῦ τελευταίου πρὸς τὰ δεξιὰ δεκαδικοῦ αὐτοῦ ψηφίου.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς

3,00567

ἀπαγγέλλεται *τρεῖς μονάδες, καὶ πεντακόσια ἑξήκοντα ἑπτὰ ἑκατοντάκις χιλιοστά.* Διότι ἔχομεν πρῶτον 7 *ἑκατοντάκις χιλιοστά*, ἔπειτα *6 δεκάκις χιλιοστὰ ἢ 60 ἑκατοντάκις χιλιοστά*, καὶ τελευταῖον *5 χιλιοστὰ ἢ 50 δεκάκις χιλιοστὰ ἢ 500 ἑκατοντάκις χιλιοστά*. Τὸ ὅλον λοιπὸν τῶν *ἑκατοντάκις χιλιοστῶν* τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι *πεντακόσια ἑξήκοντα ἑπτά.*

Γράφεται δὲ ὁ οὕτως ἀπαγγελλόμενος δεκαδικὸς ἀριθμός, γραφομένου *πρῶτον τοῦ ἀκεραίου αὐτοῦ μέρους, ἔπειτα τῆς ὑποδιαστολῆς καὶ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δεκαδικοῦ αὐτοῦ μέρους οὕτως, ὥστε ἡ θέσις τοῦ τελευταίου αὐτοῦ ψηφίου νὰ παριστᾷ μονάδας τῆς ἀπαγγελθείσης δεκαδικῆς τάξεως.*

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν νὰ γράψωμεν τὸν δεκαδικὸν *73 μονάδες καὶ 306 ἑκατομμυριοστά*, ἠθέλομεν γράψει

73,000306.

Ἐγράψαμεν τρία μηδενικὰ πρὸ τοῦ ἀριθμοῦ 306, ἵνα τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτοῦ 6 λάβῃ τὴν ἕκτην θέσιν μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, καὶ ἑπομένως παραστήσῃ οὕτως ἑκατομμυριοστά.

3ον. *Ἀπαγγέλλεται ὁλόκληρος ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς ὡς ἁπλοῦς ἀκέραιος, καὶ εἰς τὸ τέλος συναπαγγέλλεται καὶ τὸ ὄνομα τῆς τάξεως τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου αὐτοῦ δεκαδικοῦ ψηφίου.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς

76,22

ἀπαγγέλλεται *7622 ἑκατοστά*. Διότι αἱ μὲν 76 ἀκέραιαι αὐτοῦ μονάδες ἰσοῦνται προφανῶς μὲ *7600 ἑκατοστά*· ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν ἀφ' ἑτέρου καὶ 22 τοιαῦτα, θέλομεν ἔχει ἐν ὅλῳ *7622 ἑκατοστά*.

Γράφεται δὲ ὁ οὕτως ἀπαγγελλόμενος δεκαδικὸς ἀριθμός, γραφομένου *τοῦ ἀπαγγελθέντος ἀριθμοῦ ὡς ἁπλοῦ ἀκεραίου καὶ τιθεμένης ἔπειτα τῆς ὑποδιαστολῆς οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτοῦ νὰ παριστᾷ μονάδας τῆς ἀπαγγελθείσης δεκαδικῆς τάξεως.*

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν νὰ γράψωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν *352 ἑκατομμυριοστά*, ἠθέλομεν γράψει

0,000352.

Ἐγράψαμεν πρῶτον 352, καὶ ἵνα τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτοῦ 2 παριστᾷ ἑκατομμυριοστά, ἔπρεπε νὰ κατέχῃ τὴν ἕκτην ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολὴν θέσιν. Τούτου δ' ἕνεκα ἐγράψαμεν 4 μηδενικὰ πρὸ τοῦ 352 καὶ ἐχωρίσαμεν διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς τὸ πρῶτον.

Ἂν εἴχομεν νὰ γράψωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν *47 τρισεκατομμύρια 200 χιλιάδες καὶ 73 ἑκατοντάκις χιλιοστά*, ἠθέλομεν γράψει

470000002,00073.

Ἐγράψαμεν πρῶτον ἁπλῶς τὸν ἀριθμὸν 47 τρισεκατομμύρια 200 χιλιάδες καὶ 73 μονάδες ἔπειτα, ἐθέσαμεν τὴν ὑποδιαστολὴν οὕτως, ὥςε τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον 3 νὰ παριστᾷ *ἑκατοντάκις χιλιοστά*.

4ον. *Τελευταῖον, ὅταν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ περιέχῃ πολλὰ ψηφία, χωρίζομεν αὐτὰ εἰς τμήματα τριψήφια ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς ὑποδιαστολῆς καὶ προχωροῦντες πρὸς τὰ δεξιά, (τὸ τελευταῖον τμῆμα δυνατὸν νὰ περιέχῃ 2 ἢ καὶ 1 μόνον ψηφίον). Ἀπαγγέλλομεν ἔπειτα πρῶτον τὰς ἀκεραίας αὐτοῦ μονάδας, ἔπειτα ἓν ἕκαστον τῶν τμημάτων μετὰ τοῦ ὀνόματος τῆς τάξεως τῶν μονάδων, τῆς παριστωμένης ὑπὸ τοῦ τελευταίου αὐτοῦ ψηφίου.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς

237,306 873 254 639 251 08

ἀπαγγέλλεται *237 μονάδες, 306 χιλιοστά, 873 ἑκατομμυριοστά, 254 δισεκατομμυριοστά, 639 τρισεκατομμυριοστά, 251 τετράκις ἑκατομμυριοστὰ* καὶ *8 ἑκατοστὰ* τοῦ *τετράκις ἑκατομμυριοστοῦ*.

Γράφεται δὲ ὁ οὕτως ἀπαγγελλόμενος δεκαδικὸς ἀριθμός, *γραφομένων πρῶτον τῶν ἀκεραίων αὐτοῦ μονάδων, ἔπειτα ἑνὸς ἑκάστου τριψηφίου τμήματος οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον νὰ κατέχῃ τὴν θέσιν τῶν σὺν αὐτῷ ἀπαγγελλομένων δεκαδικῶν μονάδων.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς *3 μονάδες, 53 χιλιοστά, 207 τρισεκατομμυριοστὰ* καὶ *37 ἑκατοστὰ* τοῦ *πεντάκις ἑκατομμυριοστοῦ*, γράφεται

2,053 000 000 207 000 000 37.

Ἐγράψαμεν δύο τριψήφια τμήματα μηδενικῶν μετὰ τὰ *χιλιοστά*, διότι ὁ ἀπαγγελθεὶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν περιέχει οὔτε *ἑκατομμυριοστὰ* οὔτε *δισεκατομμυριοστά*, ἔπειτα ἕτερα δύο τριψήφια τμήματα μηδενικῶν μετὰ τὰ *τρισεκατομμυριοστά*, διότι ἐλλείπουσι τὰ *τετράκις* καὶ *πεντάκις ἑκατομμυριοστά*.

150. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἡ ἀξία δεκαδικοῦ τινος ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται γραφομένου ἑνὸς ἢ πλειοτέρων μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ.*

Παραδείγματος χάριν, οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ

3,56, 3,560, 3,560000, κτλ.

εἶναι ἰσοδύναμοι. Διότι ἡ τάξις τῶν μονάδων, τῶν ὑπό τινος ψηφίου παριστωμένων, ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολὴν θέσεως αὐτοῦ, αὕτη δὲ δὲν μεταβάλλεται προφανῶς ὁσαδήποτε μηδενικὰ καὶ ἂν γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ.

Δυνάμεθα οὕτω νὰ θεωρήσωμεν πάντα ἀκέραιον ἀριθμὸν ὡς δεκαδικόν, οὗτινος τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶναι 0. Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 31 γράφεται καὶ ὡς δεκαδικὸς 31,0 ἢ 31,00, κτλ.

151. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Δεκαδικὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, 100, 1000, κτλ. ἐὰν μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ αὐτοῦ 1, 2, 3, κτλ. θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, διαιρεῖται δὲ διὰ 10, 100, 1000, κτλ., ἐὰν αὕτη μετατεθῇ 1, 2, 3, κτλ. θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ.*

Ἔστω π. χ. ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς

3567,1023.

Ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ μίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιά, ἕκαστον τῶν ψηφίων αὐτοῦ θέλει παριστᾷ μονάδας *δεκάκις* μεγαλειτέρας ἢ πρότερον, (ἤτοι τὰ *δέκατα* θέλουσι παριστᾷ *μονάδας*, τὰ *ἑκατοστὰ* θέλουσι γίνει *δέκατα*, κτλ.), ἑπομένως καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς θέλει γίνει *δεκάκις* μεγαλείτερος. Ἐὰν μεταθέσωμεν αὐτὴν δύο, τρεῖς, κτλ. θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ἕκαστον τῶν ψηφίων αὐτοῦ θέλει παριστᾷ μονάδας 100κις, 1000κις κτλ. μεγαλειτέρας, ἑπομένως καὶ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς θέλει γίνει *ἑκατοντάκις, χιλιάκις*, κτλ. μεγαλείτερος.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν, δύο, τρεῖς, κτλ. θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά, ἕκαστον τῶν ψηφίων αὐτοῦ θέλει παριστᾷ μονάδας 10κις, 100κις, 1000κις, κτλ. μικροτέρας, ἑπομένως καὶ ὁλόκληρος ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς θέλει γίνει *δεκάκις, ἑκατοντάκις, χιλιάκις*, κτλ. μικρότερος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Δυνατὸν νὰ συμβῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός, τὸν ὁποῖον προτιθέμεθα ἢ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἢ νὰ διαιρέσωμεν διὰ 10, 100, 1000, κτλ. νὰ μὴ περιέχῃ ἀρκετὰ ψηφία εἰς τὸ δεκαδικὸν ἢ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος, ὥστε ἡ πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ μετάθεσις τῆς ὑποδιαστολῆς νὰ ἦναι ἀδύνατος. Τότε, ἐὰν ἐλλείπωσι ψηφία ἀπὸ τοῦ δεκαδικοῦ αὐτοῦ μέρους, προσθέτομεν πρὸς τὰ δεξιὰ ἐπαρκῆ ἀριθμὸν μηδενικῶν, ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου, γράφομεν τοιαῦτα πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ἀριθμοῦ, καὶ τόσα, ὅσα ἀπαιτοῦνται πρὸς τὸν σκοπόν. Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 35,23 ἐπὶ 10000, ἔπρεπε νὰ μεταθέσωμεν 4 θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τὴν ὑποδιαστολήν, ἐπειδὴ δὲ ὁ δεδομένος δεκαδικὸς 35,23 δὲν ἔχει εἰμὴ δύο μόνον δεκαδικὰ ψηφία, γράφομεν πρῶτον πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ 2 μηδενικά, ἔπειτα μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ οὕτω προκύπτοντος ἀριθμοῦ

35,2300 τέσσαρας θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, καὶ εὑρίσκομεν ὡς γινόμενον τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 352300. Ἂν εἴχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ 10000, ἔπρεπε νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ 4 θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά, ἐπειδὴ δὲ ὁ δεδομένος δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν ἔχει εἰμὴ δύο μόνον ψηφία πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς, γράφομεν πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ 3 μηδενικά, καὶ μεταθέτοντες ἔπειτα τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ οὕτω προκύπτοντος ἀριθμοῦ 00035,23 τέσσαρας θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά, εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 0,003523.

ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΔΕΔΟΜΕΝΟΥ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΔΙΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ.

152. Ἔστω ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 37,563, οὗτινος τὸ τελευταῖον ψηφίον παριστᾷ *χιλιοστά*. Ἐπειδὴ ὁ δεκαδικὸς οὗτος ἀριθμὸς σύγκειται ἐκ 37563 *χιλιοστῶν* (149, 3ον), θέλει προφανῶς εἶναι ἴσος κλάσματι, ἔχοντι ἀριθμητὴν 37563 καὶ παρονομαστὴν 1000. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει $37,563 = \frac{37563}{1000}$. Λοιπὸν ἐν γένει

Ἵνα παραστήσωμεν διὰ κοινοῦ κλάσματος δεδομένον δεκαδικὸν ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ καὶ ὑπὸ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμόν, ὡς ἀριθμητήν, νὰ γράψωμεν παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑπὸ τόσων μηδενικῶν, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχει εἰς τὸ δεκαδικὸν αὐτοῦ μέρος.

Καὶ ἀντιστρόφως·

Ἵνα παραστήσωμεν διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κλάσμα, ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑπὸ μηδενικων, ἀρκεῖ νὰ χωρίσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ κλάσματος τόσα ψηφία ὡς δεκαδικά, ὑφ' ὅσων μηδενικῶν ἀκολουθεῖται ἡ μονὰς τοῦ παρονομαστοῦ.

Διὰ τὸν ἀνωτέρω λόγον οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ καλοῦνται συνήθως καὶ *δεκαδικὰ κλάσματα*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ

$$0,0056, \quad 3,25801, \quad 847,689$$

παρίστανται κατὰ τὰ ἀνωτέρω διὰ τῶν κλασμάτων

$$\frac{56}{10000}, \quad \frac{325801}{100000}, \quad \frac{847689}{1000},$$

καὶ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα

$$\frac{3}{1000000}, \quad \frac{1897}{100}, \quad \frac{8765}{1000000000}$$

διὰ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

0,00003 18,97, 0,00008765.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

153. Ἐπειδὴ οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ γράφονται ὡς καὶ οἱ ἀκέραιοι μὲ μόνην ἁπλῶς τὴν προσθήκην τῆς ὑποδιαστολῆς, καὶ τοῦτο ὡς προείπομεν πρὸς διάκρισιν τῶν ἀκεραίων μονάδων ἀπὸ τῶν δεκαδικῶν αὐτῆς μερῶν, ἡ πρόσθεσις αὐτῶν ἐκτελεῖται ἀπαραλλάκτως ὅπως καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων, τουτέστι

Γράφομεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ἤ, ὅπερ ταὐτό, αἱ ὑποδιαστολαὶ αὐτῶν νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, καὶ προσθέτομεν αὐτοὺς ὡς εἰ ἦσαν ἀκέραιοι. Θέτομεν μετὰ ταῦτα ὑποδιαστολὴν εἰς τὸ εὑρεθησόμενον ἄθροισμα ἐν τῇ καθέτῳ τῶν ὑποδιαστολῶν τῶν προσθετέων δεκαδικῶν ἀριθμῶν στήλῃ καὶ ὁ οὕτω προκύπτων δεκαδικὸς ἀριθμὸς θέλει παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς 31415, 98,69 καὶ 3,183, ἠθέλομεν γράψει αὐτοὺς ὡς ἑξῆς

$$\begin{array}{r} 31,415 \\ 98,69 \\ 3,183 \\ \hline 133,288 \end{array}$$

καὶ εἰς τὸ εὑρεθησόμενον ἄθροισμα 133288 θέσει τὴν ὑποδιαστολὴν ἐν τῇ καθέτῳ τῶν ὑποδιαστολῶν στήλῃ. Ὁ οὕτω δὲ προκύπτων δεκαδικὸς ἀριθμὸς 133,288 θέλει προφανῶς παριστᾷ τὸ ζητούμενον ἄθροισμα τῶν δεδομένων.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

154. Δι' ὃν προεξεθέσαμεν ἀνωτέρω λόγον καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν ἐκτελεῖται ὡς καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων, τουτέστι

Γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως ὥστε αἱ ὑποδιαστολαὶ αὐτῶν νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, ἀφαιροῦμεν τοὺς οὕτω γεγραμμένους ἀριθμοὺς ὡς εἰ ἦσαν ἀκέραιοι, καὶ θέτομεν εἰς τὴν εὑρεθησομένην διαφορὰν ὑποδιαστολὴν ἐν τῇ καθέτῳ τῶν ὑποδιαστολῶν στήλῃ.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 376,235 ἀπὸ τοῦ δεκαδικοῦ 2897,483, ἠθέλομεν διατάξει τὰ τῆς πράξεως ὡς ἑξῆς,

$$\begin{array}{r} 2897,483 \\ 376,235 \\ \hline 2521,248 \end{array}$$

ἐκτελέσει τὴν ἀφαίρεσιν ὡς εἰ ἦσαν ἀκέραιοι, καὶ εἰς τὴν εὑρεθησομένην διαφορὰν 2521248 θέσει τὴν ὑποδιαστολὴν ἐν τῇ καθέτῳ τῶν ὑποδιαστολῶν στήλῃ, ὁ οὕτω δὲ προκύπτων δεκαδικὸς ἀριθμὸς 2521,248 θέλει προφανῶς παριστᾷ τὴν τῶν δεδομένων δεκαδικῶν διαφοράν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐὰν οἱ πρὸς ἀφαίρεσιν δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχωσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων, ἀναπληροῦμεν τὰ ἐλλείποντα τοῦ ἑνὸς διὰ μηδενικῶν. Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 35,0236 ἀπὸ τοῦ 3768,37, ἠθέλομεν γράψει

$$\begin{array}{r} 3768,3700 \\ 35,0236 \\ \hline 3733,3464 \end{array}$$

ἀντὶ τοῦ 3798,37 τὸν ἴσον αὐτῷ 3768,3700, καὶ ἐκτελέσει μετὰ τοῦτο τὴν ἀφαίρεσιν ὡς προείπομεν.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

155. *Πολλαπλασιασμὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἀκέραιον.* Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 3,141 ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 25. Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστέος σύγκειται ἐκ 3141 *χιλιοστῶν*, ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ 25 θέλει περιέχει 25κις τὸν πολλαπλασιαστέον 3141 *χιλιοστά*. Πρέπει λοιπὸν πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου τούτου νὰ πολλαπλασιάσωμεν 3141 ἐπὶ 25, καὶ νὰ γράψωμεν τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον οὕτως, ὥστε νὰ παριστᾷ *χιλιοστά*, τοῦθ' ὅπερ κατορθοῦται χωριζομένων δι' ὑποδιαστολῆς πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τριῶν ψηφίων ὡς δεκαδικῶν. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς

$$\begin{array}{r} 3,141 \\ 25 \\ \hline 15,705 \\ 62,82 \\ \hline 78.525 \end{array}$$

πορίζόμεθα δὲ ἀμέσως τὸν ἑπόμενον κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἀκέραιον.

Δεκαδικὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ ἡ ὑποδιαστολὴ καὶ πολλαπλασιασθῇ ὁ οὕτω γεγραμμένος ἀκέραιος ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, πρὸς δὲ τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου χωρισθῶσι τόσα ψηφία ὡς δεκαδικά, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία περιέχει ὁ δεδομένος δεκαδικὸς ἀριθμός.

Οὕτω τὰ γινόμενα τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

0,0005, 0,00103, 83,001080

ἐπὶ 25 θέλουσιν εὑρεθῆ, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ

5, 103, 83,001080

ἐπὶ 25 καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν εὑρεθησομένων γινομένων

125, 2575, 2075027000

χωρισθῶσι 4, 5, 6 ψηφία ὡς δεκαδικά, ὅτε θέλομεν εὑρει τοὺς ἑξῆς δεκαδικοὺς ἀριθμούς, παριστῶντας τὰ ζητούμενα γινόμενα

0,0125, 0,02575, 2075,027000.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Τὸν ἀνωτέρω κανόνα δυνάμεθα ὡσαύτως νὰ ἀποδείξωμεν, ἐὰν λάβωμεν ἀντὶ τοῦ πολλαπλασιαστέου τὸ ἰσοδύναμον αὐτῷ δεκαδικὸν κλάσμα, πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον πολλαπλασιαστήν, καὶ παραστήσωμεν τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ. Παραδείγματος χάριν, ὁ πολλαπλασιαστέος 3,141 εἶναι $=\frac{3141}{1000}$, καὶ τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ 25 εἶναι $\frac{3141\times25}{1000}=\frac{78525}{1000}=78,525$.

156. *Πολλαπλασιασμὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ δεκαδικόν.* Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 3,141 ἐπὶ τὸν 9,86. Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἴσος τῷ κλάσματι $\frac{986}{100}$, θέλομεν εὑρει τὸ ζητούμενον γινόμενον, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον 3,141 ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν 986 τοῦ κλάσματος καὶ διαιρέσωμεν τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ 100. Τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου 3,141 ἐπὶ 986 εὑρίσκεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα καὶ εἶναι 3097,026, τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 100 εὑρίσκεται μετατιθεμένης τῆς ὑποδιαστολῆς αὐτοῦ δύο θέσεις πρὸς τὰ ἀρι-

στερά. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον 3141 ἐπὶ τὸν 986 καὶ νὰ χωρίσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου 3097026 τὸ ὅλον 5 ψηφία ὡς δεκαδικά, τουτέστιν ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο ὁμοῦ παράγοντες 3,141 καὶ 9,86. Ἐντεῦθεν ὁ ἑξῆς γενικὸς κανών.

$$\begin{array}{r} 3,141 \\ 9,86 \\ \hline 18\ 846 \\ 251\ 28 \\ 2826\ 9 \\ \hline 30,97026. \end{array}$$

Δεκαδικὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ δεκαδικόν, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οὗτοι ὡς εἰ ἦσαν ἀκέραιοι, καὶ χωρισθῶσι πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου αὐτῶν τόσα ψηφία ὡς δεκαδικά, ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο ὁμοῦ παράγοντες.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. — Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἀποδεικνύεται ὡσαύτως λαμβανομένων ἀντὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν τῶν ἴσων αὐτοῖς δεκαδικῶν κλασμάτων, ἐκτελουμένου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τούτων κατὰ τὸν περὶ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων δοθέντα κανόνα, καὶ παριστωμένου τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ. Παραδείγματος χάριν, πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου τοῦ 3,141 ἐπὶ τὸν 9,86 ἠθέλομεν πολλαπλασιάσει τὸ δεκαδικὸν κλάσμα $\frac{3141}{1000}$ ἐπὶ τὸ $\frac{986}{100}$ καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν $\frac{3141\times986}{100000}$ ἢ τὸ $\frac{3097026}{100000}$ παραστήσει διὰ τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 30,97026, ὅστις βλέπομεν ὅτι ἔχει τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος $\frac{3097026}{100000}$, ἤτοι ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχουσι καὶ οἱ δύο ὁμοῦ παράγοντες 3,141 καὶ 9,86.

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

157. *Διαίρεσις δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δι' ἀκεραίου.* Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 31,415 διὰ τοῦ ἀκεραίου 12. Πρέπει πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου νὰ λάβωμεν τὸ δωδέκατον τῶν 31415 *χιλιοστῶν*. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ζητούμενον πηλίκον, ὡς ὁμοειδὲς τῷ διαιρετέῳ, πρέπει νὰ παριστᾷ *χιλιοστά*, θέλομεν προφανῶς εὕρει τὸ αὐτὸ πηλίκον, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀκέραιον

31415 διὰ τοῦ 12 καὶ γράψωμεν τὸ εὑρεθησόμενον πηλίκον αὐτῶν οὕτως, ὥστε νὰ παριστᾷ *χιλιοστά*. Ἡ μὲν ἐκτέλεσις τῆς πράξεως διατάσσεται ὡς ἑξῆς

31,415	12
74	2,617
21	
95	
11	

τὸ δὲ ζητούμενον πηλίκον εὑρίσκεται ἴσον μὲ 2617 *χιλιοστά*, ἢ τῷ δεκαδικῷ ἀριθμῷ 2,617, ηὐξημένῳ κατὰ $\frac{11}{12}$ τοῦ *χιλιοστοῦ*, βλέπομεν δὲ ὅτι εὑρίσκεται διαιρουμένου τοῦ ἀκεραίου 31415 διὰ 12 καὶ γραφομένου τοῦ εὑρισκομένου ἀκεραίου μέρους τοῦ πηλίκου 2617 οὕτως, ὥστε νὰ παριστᾷ *χιλιοστά*.

Ἐὰν παραβλέψωμεν τὸ κλάσμα $\frac{11}{12}$ τοῦ *χιλιοστοῦ*, τὸ πλῆρες πηλίκον ἐλαττοῦται κατ' ἀριθμὸν μικρότερον ἑνὸς *χιλιοστοῦ*, ἤτοι μικρότερον τοῦ 0,001, καὶ τότε λέγομεν, ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ 31,415 διὰ 12 εἶναι 2,617 *κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ*. Ἐὰν ἀντὶ νὰ παραβλέψωμεν τὸ κλάσμα $\frac{11}{12}$ τοῦ *χιλιοστοῦ*, ἀντικαταστήσωμεν αὐτὸ διὰ 0,001, τὸ σφάλμα θέλει εἶναι καὶ τότε μικρότερον ἑνὸς *χιλιοστοῦ*, ὁ δὲ ἀριθμὸς 2,618, ὃν θέλομεν τότε εὕρει, θέλει παριστᾷ πάλιν τὸ ζητούμενον πηλίκον *κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ*.

Ὁ μὲν ἀριθμὸς 2,617 παριστᾷ τὴν προσεγγίζουσαν τιμὴν τοῦ ζητουμένου πηλίκου *κατ' ἔλλειψιν*, ὁ δὲ 2,618 *τὴν καθ' ὑπεροχήν*.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι

Δεκαδικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' ἀκεραίου, ἐὰν θεωρηθῇ οὗτος ὡς ἀκέραιος, εὑρεθῇ τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ χωρισθῶσι πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τόσα ψηφία ὡς δεκαδικά, ὅσα ἔχει ὁ δεδομένος διαιρετέος. Τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον πηλίκον θέλει παριστᾷ τὴν ἀξίαν τοῦ ζητουμένου κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονάδος τῆς τάξεως τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου τοῦ διαιρετέου κατ' ἔλλειψιν ἢ καθ' ὑπεροχήν, καθόσον λαμβάνομεν αὐτὸ παραβλέποντες τὸ κλασματικὸν μέρος, ἐὰν ὑπάρχῃ, ἢ ἀντικαθιστῶντες τοῦτο διὰ μιᾶς μονάδος τῆς τάξεως τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ πηλίκου.

158. Ἐπειδὴ ἡ ἀξία δεκαδικοῦ τινος ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται

γραφομένων ὁσωνδήποτε μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δεκαδικοῦ τινος ἀριθμοῦ δι' ἀκεραίου μεθ' ὅσης θέλομεν προσεγγίσεως, γράφοντες πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου κατάλληλον ἀριθμὸν μηδενικῶν καὶ ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 32,9 διὰ 12 κατὰ προσέγγισιν *ἑνὸς δεκάκις χιλιοστοῦ*, γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ 3 μηδενικὰ καὶ διαιροῦμεν ὡς προεξεθέσαμεν τὸν οὕτω προκύπτοντα δεκαδικὸν ἀριθμὸν 32,9000, ὅστις εἶναι ἴσος τῷ δεδομένῳ 32,9, διὰ 12. Εὑρίσκομεν οὕτω πηλίκον 2,7416, ὅπερ θέλει παριστᾷ τὸ ζητούμενον κατὰ προσέγγισιν *ἑνὸς δεκάκις χιλιοστοῦ*.

Συνήθως διατάσσομεν τὰ τῆς πράξεως ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 32,9 & 12 \\ \cline{2-2} 8\ 9 & \quad 2,7416 \\ \ \ 50 & \\ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ 80 & \\ \ \ \ \ 8 & \end{array}$$

Γράφομεν τὸν διαιρετέον 32, 9 ὡς μᾶς ἐδόθη, καὶ ἔπειτα ἀνὰ ἓν τὰ τρία μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου 5 καὶ τῶν δύο ἀκολούθων 2 καὶ 8, ὅταν δὲν ἔχωμεν ἄλλα ψηφία τοῦ διαιρετέου νὰ γράψωμεν ἢ καταβιβάσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ τελευταίου ὑπολοίπου 5 τοῦ διαιρετέου 32,9 διὰ τοῦ διαιρέτου 12.

159. *Διαίρεσις δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ διὰ δεκαδικοῦ.* Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 3,14159 διὰ τοῦ 9,86. Ὁ διαιρέτης 9,86 εἶναι ἴσος τῷ δεκαδικῷ κλάσματι $\frac{986}{100}$, καὶ ἵνα διαιρέσωμεν τὸν διαιρετέον 3,14159 διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{986}{100}$, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{100}{986}$· ἐν ἄλλαις λέξεσι, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 3,14159 ἐπὶ 100, καὶ τὸ εὑρεθησόμενον αὐτῶν γινόμενον 314, 159 νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀκεραίου 986. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει οὕτω πρὸς διαίρεσιν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 314,159 διὰ τοῦ ἀκεραίου 986, πρᾶξιν, ἣν ἐκτελοῦμεν κατὰ τὸν προηγουμένως δοθέντα κανόνα καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 0,318 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ.

314,159	986
18 35	0,318
8 499	
611	

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι

Δεκαδικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ δεκαδικοῦ παραβλεπομένων τῶν ὑποδιαστολῶν αὐτῶν καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ πηλίκου τῶν οὕτω προκυπτόντων ἀριθμῶν χωριζομένων τόσων ψηφίων ὡς δεκαδικῶν, καθ' ὅσα ὁ διαιρετέος ὑπερέχει τὸν διαιρέτην.

Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ὁ διαιρετέος εἶχε 5 δεκαδικὰ ψηφία καὶ ὁ διαιρέτης 2, τὸ δὲ πηλίκον τὴν διαφορὰν αὐτῶν 3. Ἂν ὁ διαιρετέος εἶχεν ὀλιγώτερα δεκαδικὰ ψηφία ἢ ὁ διαιρέτης, τότε φαίνεται ὅτι ὁ ἀνωτέρω κανὼν δὲν δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ. Ἀλλὰ τότε

Γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου τόσα μηδενικά, ὅσα ἀπαιτοῦνται, ἵνα οὗτος ἔχῃ ἰσάριθμα μὲ τὸν διαιρέτην δεκαδικὰ ψηφία, καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμόν, παραβλεπομένης τῆς ὑποδιαστολῆς, διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου θεωρουμένου ὡς ἀκεραίου. Π. χ. ἂν εἴχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 9,86 διὰ τοῦ 31,15679, ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ $\frac{100000}{3115679}$, ἐν ἄλλαις λέξεσι, νὰ μεταθέσωμεν 5 θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν 986000 νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 3115679, τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸν ἀνωτέρω δοθέντα κανόνα.

ΤΡΟΠΗ ΤΩΝ ΚΟΙΝΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΔΕΚΑΔΙΚΑ.

160. Εἴδομεν ὅτι αἱ ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν διάφοροι ἀριθμητικαὶ πράξεις ἐκτελοῦνται ὡς καὶ αἱ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων, καὶ δὲν διαφέρουσι τούτων εἰμὴ κατὰ τοῦτο, ὅτι μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν αὐτῶν πρέπει νὰ διακρίνωμεν δι' ὑποδιαστολῆς ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ ἐξαγομένου, πρὸς ὃ ἔχομεν ἁπλουστάτους καὶ γενικοὺς κανόνας, οὓς ἐφαρμόζομεν καθ' ὅλας τὰς δυνατὰς περιπτώσεις. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἐπὶ τῶν κλασμάτων ὑπολογισμὸς εἶναι πολὺ τοῦ ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν πολυπλοκώτερος, διὰ τοῦτο εἰς τοὺς ὑπολογισμούς, ὅταν παρουσιάζωνται καὶ κοινὰ κλάσματα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ἰσοδυνάμους δεκαδικοὺς ἀριθμούς, ἢ ἀκριβῶς, ἐὰν τοῦτο ἦναι δυνατόν, ἢ κατὰ προσέγγισιν.

Ἡ τροπὴ τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικὰ καὶ ἡ διαίρεσις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν, περὶ ἧς ἐπραγματεύθημεν προηγουμένως, εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πρόβλημα. Διότι κοινόν τι κλάσμα παριστᾷ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ, ἐπομένως, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην κατὰ τὸν ἐν τῇ § 158 ἐκτεθέντα τρόπον, ἡ τροπὴ αὐτοῦ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐγένετο ἤδη διὰ ταύτης.

161. Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι πρόκειται περὶ τοῦ κλάσματος $\frac{2}{7}$ καὶ ὅτι θέλομεν νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν ἀξίαν αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν *ἑνὸς δεκάτου*, ἢ *ἑνὸς ἑκατοστοῦ*, ἢ *ἑνὸς χιλιοστοῦ*, ἢ κτλ. Πρέπει κατὰ τὸν κανόνα τῆς § 158 νὰ διαιρέσωμεν κατὰ τὰς διαφόρους ταύτας ὑποθέσεις διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 7 τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 2,0, ἢ τὸν 2,00, ἢ τὸν 2,000, ἢ κτλ.

$$\begin{array}{l|l} 20 & 7 \\ \cline{2-2} \;60 & 0,2857 \\ \;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;50 & \\ \;\;\;\;\;\;\;1 & \end{array}$$

καὶ θέλομεν εὕρει ὅτι ἡ ἀξία αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,1, ἢ 0,01, ἢ 0,001, ἢ κτλ. κτλ. εἶναι

0,2, ἢ 0,28, ἢ 0,285, ἢ κτλ.

Ἐκτελοῦντες ὡς προεῤῥέθη τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος εὑρίσκομεν ἐνίοτε μετά τινα ἀριθμὸν μερικῶν διαιρέσεων ὑπόλοιπον μηδέν· ἡ πρᾶξις τότε περατοῦται ἀφ' ἑαυτῆς καὶ τὸ κλάσμα λέγεται ὅτι *τρέπεται ἀκριβῶς εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν*. Ἀλλ' ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον δὲν εὑρίσκομεν, ὅσῳ καὶ ἂν παρατείνωμεν τὴν τοιαύτην διαίρεσιν, ὑπόλοιπον μηδέν, καὶ τότε τὸ κλάσμα δὲν δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν, εὑρίσκομεν δὲ μόνον οὕτω διὰ δεκαδικῶν ἀριθμῶν τὴν ἀξίαν αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν, ἥτις ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γενομένων μερικῶν διαιρέσεων. Δυνάμεθα ὅμως πάντοτε νὰ προΐδωμεν διὰ τοῦ ἑπομένου θεωρήματος, ἐὰν κοινόν τι κλάσμα δύναται νὰ τραπῇ ἢ μὴ εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν ἀριθμόν, καὶ ἐκ πόσων δεκαδικῶν ψηφίων θέλει σύγκεισθαι οὗτος, ὅταν ἡ τροπὴ αὕτη ἦναι δυνατή.

162. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ τινος ἀναγώγου κλάσματος, ἀποσυντεθεὶς εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας δὲν περιέχῃ εἰμὴ μόνον τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5, ἢ καὶ μόνον τὸν*

ἕνα τούτων, μεθ' ὁποιωνδήποτε ἐκθετῶν, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος κλάσμα τρέπεται ἀκριβῶς εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν ἀριθμόν, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκαδικῶν ψηφίων θέλει εἶναι ἴσος τῷ μεγαλειτέρῳ τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων αὐτοῦ 2 καὶ 5.

Ἔστω π. χ. τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{7}{40}$, οὗτινος ὁ παρονομαστὴς 40, ἀποσυντεθεὶς εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ $2^3 \times 5$, ὅπερ δὲν περιέχει εἰμὴ μόνον τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5 καὶ οὐδένα ἄλλον. Λέγω ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{7}{40}$ τρέπεται ἀκριβῶς εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν ἀριθμόν, καὶ πρὸς τούτοις ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκαδικῶν αὐτοῦ ψηφίων θέλει εἶναι ἴσος τῷ μεγαλειτέρῳ 3 τῶν ἐκθετῶν 3 καὶ 1 τῶν παραγόντων αὐτοῦ 2 καὶ 5.

Διότι, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ 1000, ὅπερ εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ $2^3 \times 5^3$, τὸ κλάσμα $\frac{7}{40}$ θέλει γίνει $\frac{7 \times 2^3 \times 5^3}{2^3 \times 5}$, καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ (88), θέλομεν εὕρει πηλίκον τὸ γινόμενον 7×5^2, ἢ 175, ὅπερ διαιροῦντες διὰ 1000, ἵνα μὴ μεταβληθῇ ἡ ἀξία τοῦ δεδομένου κλάσματος $\frac{7}{40}$, θέλομεν ἔχει 0,175. Εὕρομεν λοιπὸν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{7}{40}$ εἶναι ἴσον τῷ δεκαδικῷ ἀριθμῷ 0,175, καὶ βλέπομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκαδικῶν αὐτοῦ ψηφίων εἶναι ἴσος τῷ μεγαλειτέρῳ τῶν ἐκθετῶν 3 τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ 40.

Τώρα, ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{7}{2^3 \times 5}$ ὑπετέθη ἀνάγωγον, ὁ 7, ὅστις εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, εἶναι διάφορος τῶν παραγόντων τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ, ἑπομένως, ἂν ἐπολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ δύναμίν τινα τοῦ 10 μικροτέραν τῆς τρίτης, ἐπὶ 100 π. χ., ὁ παρονομαστὴς $2^3 \times 5$ δὲν ἤθελε διαιρεῖ τὸ γινόμενον $7 \times 2^2 \times 5^2$ τοῦ ἀριθμητοῦ 7 ἐπὶ 100, διότι ὁ παράγων 2 ἔχει μεγαλείτερον ἐκθέτην εἰς τὸν παρονομαστὴν $2^3 \times 5$ ἢ εἰς τὸν ἀριθμητὴν $7 \times 2^2 \times 5^2$. Ἀφ' ἑτέρου ἡ διαίρεσις ἤθελεν εἶναι ἀδύνατος, ἂν ὁ παρονομαστὴς 40 περιεῖχε πρῶτόν τινα παράγοντα διάφορον τοῦ 2 καὶ 5· διότι ὁ πρῶτος οὗτος παράγων δὲν ἤθελεν εἰσαχθῇ ἐν τῷ γινομένῳ τοῦ ἀριθμητοῦ 7 ἐφ' ὁποιανδήποτε δύναμιν τοῦ 10 καὶ ἂν ἐπολλαπλασιάζομεν αὐτόν. Πρὸς τούτοις βλέπομεν ὅτι ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν 7 ἐπὶ δύναμίν τινα τοῦ 10, ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν μεγαλείτερον τῶν ἐκθετῶν τῶν πρώτων παραγόντων 2 καὶ 5 τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ ἡ διαίρεσις ἐκτελεῖται ἀμέσως. Λοιπόν, ἵνα ἀνάγωγόν τι τραπῇ ἀκριβῶς εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν ἀριθμόν, πρέπει ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ, ἀποσυντεθεὶς εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, νὰ μὴ περιέχῃ ἄλλους ἐκτὸς τοῦ 2 καὶ 5, καὶ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκαδικῶν αὐτοῦ ψηφίων θέλει εἶναι ἴσος τῷ μεγαλειτέρῳ τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων αὐτοῦ 2 καὶ 5, ἢ μόνον τοῦ 2 ἢ μόνον τοῦ 5, ἐὰν δὲν περιέχῃ εἰμὴ τὸν ἕνα τούτων.

Ἀπεδείξαμεν κατὰ πρῶτον τὸ ἀνωτέρω θεώρημα μερικῶς πως ἐπί τινος παραδείγματος πρὸς εὐκολωτέραν κατάληψιν τῆς γενικῆς αὐτοῦ ἀποδείξεως, ἥτις γίνεται ὡς ἑξῆς.

Ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα καὶ Δ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός, ὁ ἰσοδύναμος αὐτῷ. Θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\Delta=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ Δ ἔχει ν δεκαδικὰ ψηφία, καὶ ἂς πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος ἐπὶ 10^ν, θέλομεν ἔχει

$$\Delta\times10^\nu=\frac{\alpha\times10^\nu}{\beta}.$$

Τώρα, κατὰ τὰ ἐν ταῖς §§ 39 καὶ 151 λεχθέντα, τὸ γινόμενον $\Delta\times10^\nu$ παριστᾷ ἀκέραιον ἀριθμόν. Ἄρα ὁ ἀριθμητὴς $\alpha\times10^\nu$ τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha\times10^\nu}{\beta}$ θέλει εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ β. Ἀλλ' ὁ β ὑπετέθη πρῶτος πρὸς τὸν α. Ἄρα πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν παράγοντα 10^ν (84). Ἀλλ' οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ 10^ν εἶναι οἱ πρῶτοι παράγοντες 2 καὶ 5 τοῦ 10, διότι ἔχομεν $10=2\times5$ καὶ ἑπομένως $10^\nu=2^\nu\times5^\nu$ (37). Ἄρα οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ β δὲν δύνανται νὰ ἦναι διάφοροι τοῦ 2 καὶ 5 (88). Πρὸς τούτοις, ἵνα ὁ 10^ν ᾖ διαιρετὸς διὰ β, ἀρκεῖ ὁ ν νὰ ἦναι ἴσος τῷ μεγαλειτέρῳ τῶν ἐκθετῶν τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ (88). Ἀλλ' ὁ ν παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ Δ, τοῦ ὑποτεθέντος ἴσου τῷ ἀναγώγῳ κλάσματι $\frac{\alpha}{\beta}$. Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς οὗτος τῶν δεκαδικῶν ψηφίων εἶναι ἴσος τῷ μεγαλειτέρῳ τῶν ἐκθετῶν τῶν πρώτων παραγόντων 2 καὶ 5 τοῦ β.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ὅταν ὁ παρονομαστὴς τοῦ δεδομένου ἀναγώγου κλάσματος περιέχῃ καὶ πρῶτόν τινα παράγοντα διάφορον τοῦ 2 καὶ 5, τὸ κλάσμα δὲν δύναται κατὰ τὰ ἀνωτέρω νὰ τραπῇ ἀκριβῶς εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐφ' ὁποιανδήποτε δύναμιν τοῦ 10 καὶ ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ ἤ, ὅπερ ταὐτό, ὁσονδήποτε καὶ ἂν παραταθῇ ἡ πρὸς τροπὴν αὐτοῦ εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν γινομένη διαίρεσις (158). Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει λέγουσι συνήθως ὅτι τὸ *κοινὸν κλάσμα τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν ἀπροσδιορίστου ἢ ἀτελευτήτου ἀριθμοῦ ψηφίων*, ἢ κάλλιον, *εἰς συνεχὲς δεκαδικόν*.

Ἐὰν λάβωμεν ἓν δεκαδικὸν ψηφίον, δύο, τρία, κτλ. ἐκ τοῦ ἀτελευτήτου τούτου δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, θέλομεν ἔχει ἀριθμοὺς παριστῶντας τὴν ἀξίαν τοῦ κοινοῦ κλάσματος μετὰ προσεγγίσεως ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον μεγαλειτέρας· ἐν ἄλλαις λέξεσι, τὸ ἐλλεῖπον πρὸς συμπλήρωσιν τῆς πραγματικῆς ἀξίας αὐτοῦ εἶναι ἀριθμὸς βαίνων ἐλαττούμενος ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον, καθόσον λαμβάνομεν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον πλειότερα δεκαδικὰ ψηφία ἐκ τοῦ συνεχοῦς δεκαδικοῦ, τοῦ παριστῶντος τὴν πραγματικὴν ἀξίαν αὐτοῦ. Ἐκφράζουσι συνήθως τοῦτο λέγοντες, ὅτι τὸ κοινὸν κλάσμα εἶναι τὸ *ὅριον*, πρὸς ὃ τείνει τὸ συνεχὲς δεκαδικόν, καθόσον ὁ ἀριθμὸς τῶν λαμβανομένων ψηφίων αὐτοῦ βαίνει ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον αὐξανόμενος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.— Ἔστωσαν τὰ ἀνάγωγα κλάσματα

$$\tfrac{3}{8},\ \tfrac{11}{50},\ \tfrac{7}{45},\ \tfrac{113}{30},$$

ἅτινα προτιθέμεθα νὰ τρέψωμεν εἰς ἰσοδύναμα δεκαδικά. Ἀποσυνθέτομεν πρὸς τοῦτο τοὺς παρονομαστὰς αὐτῶν

$$8,\quad 50,\quad 45,\quad 30$$

εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας καὶ εὑρίσκομεν

$$2^3,\ 2\times5^2,\ 3^2\times5,\ 2\times3\times5.$$

Ἐπειδὴ τῶν δύο πρώτων κλασμάτων οἱ παρονομασταὶ 8 καὶ 50 περιέχουσι μόνον τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5, ἕπεται, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ὅτι ταῦτα δύνανται νὰ τραπῶσιν ἀκριβῶς εἰς ἰσοδύναμα δεκαδικά, ὧν ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκαδικῶν ψηφίων θέλει εἶναι διὰ μὲν τὸ πρῶτον 3, διὰ δὲ τὸ δεύτερον 2. Καὶ τῷ ὄντι, ἐκτελοῦντες τὴν πρᾶξιν κατὰ τὰ λεχθέντα ἐν τῇ § 158 εὑρίσκομεν

$$\tfrac{3}{8}=0,375,\quad \tfrac{11}{50}=0,22.$$

Ἐπειδὴ δὲ τῶν δύο τελευταίων κλασμάτων οἱ παρονομασταὶ 45 καὶ 30 περιέχουσιν, ἐκτὸς τῶν παραγόντων 2 καὶ 5, καὶ τὸν παρά γοντα 3, ἔπεται ὅτι ταῦτα δὲν δύνανται νὰ τραπῶσιν ἀκριβῶς εἰς ἰσοδύναμα δεκαδικά. Ἐὰν λοιπὸν ἐφαρμόσωμεν καὶ ἐπ' αὐτῶν τὸν πρὸς εὕρεσιν τῶν ἰσοδυνάμων αὐτοῖς δεκαδικῶν δοθέντα κανόνα, θέλομεν εὕρει σειρὰν ἀτελεύτητον,

$$\tfrac{7}{45}=0,15555\ldots\ldots,\quad \tfrac{113}{30}=3,76666\ldots\ldots$$

ΠΕΡΙ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.

163. *Δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα* καλεῖται τὸ συνεχὲς δεκαδικόν, οὗτινος τὰ δεκαδικὰ ψηφία ἐπαναλαμβάνονται περιοδικῶς τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ἀπό τινος ψηφίου τάξεώς τινος μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν. Παραδείγματος χάριν, τὸ δεκαδικὸν κλάσμα

0,256256256......

εἶναι δεκαδικὸν περιοδικόν, διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶναι ἀτελεύτητος καὶ τὰ δεκαδικὰ ψηφία αὐτοῦ 2, 5 καὶ 6 ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Τὸ σύνολον τῶν περιοδικῶς ἐπαναλαμβανομένων ψηφίων καλεῖται *περίοδος*. Οὕτως, ἐν τῷ ἀνωτέρω παραδείγματι, 256 εἶναι ἡ περίοδος τοῦ περιοδικοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος 0,256 256 256....

Τὸ δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα καλεῖται *ἁπλοῦν περιοδικόν*, ὅταν ἡ περίοδος αὐτοῦ ἄρχηται ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, καὶ *μικτὸν περιοδικόν*, ὅταν ἡ περίοδος αὐτοῦ ἄρχηται μετά τινα ψηφία ἀπ' αὐτῆς. Τὸ προηγούμενον δεκαδικὸν κλάσμα εἶναι ἁπλοῦν περιοδικόν, διότι ἡ περίοδος αὐτοῦ 256 ἄρχεται ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, ἐνῷ τὸ

0,354 278 6278 62786......

εἶναι μικτὸν περιοδικόν, διότι ἡ περίοδος αὐτοῦ 2786 δὲν ἄρχεται ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν.

Τὰ πρὸ τῆς περιόδου δεκαδικὰ ψηφία τοῦ μικτοῦ περιοδικοῦ ἀποτελοῦσι τὸ *μὴ περιοδικὸν αὐτοῦ μέρος*. Ἐν τῷ ἀνωτέρῳ παραδείγματι τοῦ μικτοῦ περιοδικοῦ ὁ ἀριθμὸς 354 ἀποτελεῖ τὸ μὴ περιοδικὸν αὐτοῦ μέρος.

164. **ΘΕΩΡΗΜΑ**. *Ὅταν κοινόν τι κλάσμα τρέπηται εἰς συνεχὲς δεκαδικόν, τὸ συνεχὲς τοῦτο εἶναι ἀναγκαίως περιοδικόν.*

Ἔστω τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{5}{7}$. Ἵνα τρέψωμεν αὐτὸ εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν, πράττομεν ὡς ἑξῆς·

Διαιροῦμεν τὸν 5 διὰ 7, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 0 καὶ ὑπόλοιπον 5. Γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ὑποδιαστολήν, ἔπειτα 0 πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου 5, καὶ διαιροῦμεν τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν 50 πάλιν διὰ 7. Εὑρίσκομεν πηλίκον 7, ὅπερ γράφομεν μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, καὶ ὑπόλοιπον 1, πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὁποίου γράφομεν πάλιν 0. Διαιροῦμεν ὡσαύτως τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν 10 πάλιν διὰ 7, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον 3. Γράφομεν 1 εἰς τὸ πηλίκον μετὰ τὸ 7 καὶ ἓν μηδενικὸν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 3, καὶ οὕτω καθεξῆς, ὡς φαίνεται κάτωθι.

50	7
10	0,71428571......
30	
20	
60	
40	
50	
10	
3	

Καθ' ὃν λοιπὸν τρόπον ἐκτελεῖται ἡ πρὸς τροπὴν κοινοῦ τινος κλάσματος εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν πρᾶξις, βλέπομεν ὅτι ἔχομεν ἀφ' ἑνὸς τὸν αὐτὸν πάντοτε διαιρέτην 7, καὶ ἀφ' ἑτέρου οἱ δι' αὐτοῦ ἑκάστοτε διαιρούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι ἐκεῖνοι, οὓς εὑρίσκομεν γράφοντες πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου ἑκάστης μερικῆς διαιρέσεως 0. Γνωρίζομεν τώρα, ὅτι, ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ δίδει συνεχὲς δεκαδικόν, ἡ διαίρεσις ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον, καὶ πρὸς τούτοις ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν *διαφόρων* ὑπολοίπων, ἅτινα κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως εὑρίσκομεν, δὲν δύναται νὰ ἦναι μεγαλείτερος τοῦ 6. Διότι ἕκαστον ὑπόλοιπον ὡς μικρότερον τοῦ διαιρέτου 7 θέλει εἶναι ἀναγκαίως εἷς τῶν ἓξ ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5, 6. Λοιπὸν μετὰ 7 τὸ πολὺ διαιρέσεις θέλομεν εὕρει ἓν τῶν προηγουμένων ὑπολοίπων, καὶ θέλομεν οὕτως ἀναχωρήσει ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ, οὕτως εἰπεῖν, σημείου, ἀφ' οὗ καὶ ὅταν κατ' ἀρχὰς εὕρομεν αὐτὸ τὸ ὑπόλοιπον. Λοιπὸν τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου θέλουσιν ἐπανέρχεσθαι ἀπὸ τῆς στιγμῆς ταύτης τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν. Λοιπὸν τὸ συνεχὲς δεκαδικόν, εἰς ὃ τρέπεται τὸ κοινὸν $\frac{5}{7}$, θέλει εἶναι ἀναγκαίως περιοδικόν.

ΑΝΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ, ΤΟΥ ΠΑΡΑΓΑΓΟΝΤΟΣ ΔΕΔΟΜΕΝΟΝ ΔΕΚΑΔΙΚΟΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΝ.

165. Θέλομεν ἐν τοῖς ἑπομένοις ζητήσει τὸ κοινὸν κλάσμα, ὅπερ τραπὲν εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν, δίδει δεδομένον περιοδικόν, καὶ δὲν θέλομεν θεωρήσει εἰμὴ τὰ περιοδικὰ δεκαδικά, τὰ μὴ ἔχοντα ἀκέραιον μέρος. Διότι, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸ κοινὸν κλάσμα, τὸ παραγαγὸν τὸ δεδομένον περιοδικὸν θεωρούμενον ἄνευ τοῦ ἀκεραίου αὐτοῦ μέρους, τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ἐντεῦθεν προκύπτον κλάσμα, τραπὲν εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν, θέλει δώσει τὸ δεδομένον περιοδικὸν μετὰ τοῦ ἀκεραίου αὐτοῦ μέρους.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν εὕρωμεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ δίδει τὸ περιοδικὸν δεκαδικὸν

$$0,714285714285....,$$

εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ κοινὸν κλάσμα, ὅπερ τραπὲν εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν θέλει δώσει τὸ περιοδικὸν

$$38,714285714285....,$$

εὑρίσκεται, ἐὰν εἰς τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ προστεθῇ ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 38.

Ἄς λάβωμεν λοιπὸν ἐν πρώτοις ἁπλοῦν δεκαδικὸν περιοδικὸν ἄνευ ἀκεραίου μέρους, παραδείγματος χάριν, τὸ ἑξῆς,

$$0,267267267267....., \qquad (1)$$

τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος ἔχει τρία ψηφία.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ κοινοῦ κλάσματος, ὅπερ, τραπὲν εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν, ἤθελε δώσει τὸ περιοδικὸν (1) πράττομεν ὡς ἑξῆς.

Λαμβάνομεν ἐν πρώτοις τὴν προσεγγίζουσαν τιμὴν τοῦ περιοδικοῦ (1), τὴν ἀποτελουμένην ἐξ ὡρισμένου τινὸς ἀριθμοῦ περιόδων, ἐκ τριῶν λόγου χάριν. Ἡ προσεγγίζουσα αὕτη τιμὴ θέλει εἶναι

$$0,267267267. \qquad (2)$$

Μεταθέτομεν ἀκολούθως τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ δεκαδικοῦ (2) καὶ θέλομεν ἔχει τὸν νέον δεκαδικὸν ἀριθμὸν

$$267,267267, \qquad (3)$$

ὅστις θέλει εἶναι χιλιάκις μεγαλείτερος τοῦ (2).

Ἐπειδὴ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς (3) εἶναι χιλιάκις μεγαλείτερος τοῦ (2), ἐὰν ἀπὸ τοῦ (3) ἀφαιρέσωμεν τὸν (2), ἡ εὑρεθησομένη διαφορὰ

$$267—0,000\ 000\ 267$$

θέλει προφανῶς περιέχει 999κις τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν (2). Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$0,267267267 \times 999 = 267 - 0,000000267,$$

ἥτις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$267 = 0,267267267 \times 999 + 0,000000267.$$

Διαιροῦντες τώρα ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης διὰ 999 λαμβάνομεν

$$\tfrac{267}{999} = 0,267267267 + \tfrac{267}{999} \text{ τῆς 9ης δεκαδικῆς τάξεως.}$$

Ἕπεται λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς (2) παριστᾷ τὴν τιμὴν τοῦ κοινοῦ κλάσματος $\frac{267}{999}$ κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονάδος τῆς 9ης δεκαδικῆς τάξεως.

Ἀλλ' ἐάν, ἀντὶ νὰ λάβωμεν τὴν ἐκ τριῶν περιόδων ἀποτελουμένην κατὰ προσέγγισιν τιμὴν τοῦ περιοδικοῦ (1), ἐλαμβάνομεν τὴν ἐκ τεσσάρων, πέντε, ἕξ, κτλ., ἠθέλομεν εὕρει συλλογιζόμενοι ὡς ἀνωτέρω, ὅτι οἱ ἐκ τῶν περιόδων τούτων ἀποτελούμενοι δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ θέλουσι παριστᾷ τὴν τιμὴν τοῦ αὐτοῦ κοινοῦ κλάσματος $\frac{267}{999}$ κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονάδος τῆς 12ης, 15ης, 18ης, κτλ. δεκαδικῆς τάξεως.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{267}{999}$, ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ ἀνάγωγον, εἶναι τὸ παρασχὸν τὸ δεδομένον περιοδικόν· διότι ἡ ἀξία τούτου διαφέρει ὅσῳ ὀλίγον θέλομεν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν (2), οὓς σχηματίζομεν λαμβάνοντες ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον πλειοτέρας περιόδους ἐκ τοῦ δεδομένου περιοδικοῦ (1).

Ἐντεῦθεν ὁ ἑξῆς κανών·

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ κοινοῦ κλάσματος, τοῦ παραγαγόντος δεδομένον ἁπλοῦν περιοδικὸν ἄνευ ἀκεραίου μέρους, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸν ὑπὸ μιᾶς αὐτοῦ περιόδου ἀποτελούμενον ἀριθμὸν καὶ παρονομαστὴν ἀριθμὸν συγκείμενον ἐκ τόσων ψηφίων ἴσων ἁπάντων τῷ 9, ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς περιόδου.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον τὰ ἴσα τοῖς περιοδικοῖς

0,253253253..., 0,1212121212..., 0,764576457645

κοινὰ κλάσματα εἶναι ἀμοιβαίως τὰ ἑξῆς

$$\frac{253}{999},\quad \frac{12}{99} \text{ ἢ } \frac{4}{33},\quad \frac{7645}{9999}.$$

166. Ἔστω τώρα τὸ μικτὸν περιοδικὸν

$$0,38\,562\,562\,562\,562...... \qquad (1)$$

ἄνευ ἀκεραίου μέρους. Ἵνα εὕρωμεν τὸ παραγαγὸν αὐτὸ κοινὸν κλάσμα, πράττομεν ὡς ἑξῆς·

Λαμβάνομεν ἐν πρώτοις τὴν ἔκ τινος ὡρισμένου ἀριθμοῦ περιόδον ἐκ 2, παραδείγματος χάριν, ἀποτελουμένην κατὰ προσέγγισιν τιμὴν αὐτοῦ, ἥτις εἶναι ἡ ἑξῆς

$$0,38\,562\,562. \qquad (2)$$

Μεταθέτομεν ἀκολούθως πρῶτον δύο καὶ ἔπειτα πέντε θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ, καὶ ἔχομεν τοὺς δύο δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς

$$38,562\,562, \qquad (3)$$
$$38562,562, \qquad (4)$$

ἐξ ὧν ὁ μὲν πρῶτος θέλει εἶναι 100κις, ὁ δὲ δεύτερος 100000κις μεγαλείτερος τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ (2). Ἡ διαφορὰ λοιπὸν (4)—(3) θέλει περιέχει 100000κις—100κις, ἤτοι 99900 τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν (2)· ἐν ἄλλαις λέξεσι, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$38562,562-38,562562=0,38\,562\,562\times99900,$$

ἢ, ἐκτελουμένης τῆς ἀφαιρέσεως κατὰ μέρη, τὴν ἑξῆς

$$38562-38-0,000\,562=0,38\,562\,562\times99900,$$

ἐξ ἧς ποριζόμεθα τὴν ἀκόλουθον

$$38562-38=0,38\,562\,562\times99900+0,000\,562.$$

Διαιροῦντες τώρα ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος διὰ 99900 θέλομεν ἔχει τὴν ἑξῆς

$$\frac{38562-38}{99900}=0,38562562+\frac{562}{99900} \text{ τῆς 6ης δεκαδικῆς τάξεως,}$$

ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς (2) εἶναι ἴσος τῷ κοινῷ κλάσματι $\frac{38552-38}{99900}$ κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονάδος τῆς 6ης δεκαδικῆς τάξεως.

Ἀλλ' ἐάν, ἀντὶ νὰ λάβωμεν ἐκ τοῦ περιοδικοῦ (1) δύο μόνον περιόδους, ἐλαμβάνομεν τρεῖς, τέσσαρας, πέντε, κτλ., ἠθέλομεν εὕρει συλλογιζόμενοι ὡς ἀνωτέρω ὅτι οἱ ἐκ τῶν περιόδων τούτων ἀποτελούμενοι δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ θέλουσι παριστᾷ τὴν τιμὴν τοῦ αὐτοῦ κοινοῦ κλάσματος $\frac{38562-38}{99900}$ κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονάδος τῆς 9ης, 12ης, 15ης, κτλ. δεκαδικῆς τάξεως. Ἕπεται λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{38562-38}{999000}$, ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ ἀνάγωγον, τραπὲν εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν, θέλει δώσει τὸ δεδομένον μικτὸν περιοδικόν (1), διότι διαφέρει ὅσῳ ὀλίγον θέλομεν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν (2), οὓς σχηματίζομεν λαμβάνοντες ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον περισσοτέρας περιόδους ἐκ τοῦ δεδομένου μικτοῦ περιοδικοῦ (1).

Πορίζόμεθα λοιπὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω τὸν ἑξῆς κανόνα.

Ἵνα εὕρωμεν τὸ κοινὸν κλάσμα, ὅπερ τραπὲν εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν ἀναπαράγει δεδομένον μικτὸν περιοδικόν, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὴν διαφοράν, ἣν εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τοῦ μὴ περιοδικοῦ αὐτοῦ μέρους μετὰ μιᾶς περιόδου τὸν ἀριθμόν, τὸν ἀποτελούμενον ἐκ τοῦ μὴ περιοδικοῦ αὐτοῦ μέρους, παρονομαστὴν δὲ ἀριθμὸν ἀρχόμενον ἐκ τόσων ψηφίων ἴσων τῷ 9, ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς περιόδου, καὶ ἀκολουθούμενον ὑπὸ τόσων μηδενικῶν, ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ μὴ περιοδικοῦ αὐτοῦ μέρους.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θέλομεν εὕρει διὰ τὰ μικτὰ περιοδικὰ
0,35 264726472647...., 0,4682315623156231 56....
τὰ κοινὰ κλάσματα

$$\frac{352647-35}{999900}, \qquad \frac{46823156-468}{99999000}.$$

167. Εἴδομεν ὅτι, ὅταν τὸ δεδομένον περιοδικὸν ἦναι ἁπλοῦν, ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἰσοδυνάμου αὐτῷ κοινοῦ κλάσματος ἀποτελεῖται ἐκ ψηφίων ἴσων ἁπάντων τῷ 9. Ἕπεται λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι οὗτος δὲν θέλει διαιρεῖσθαι οὔτε διὰ τοῦ 2, διότι δὲν εἶναι ἄρτιος, οὔτε διὰ τοῦ 5, διότι δὲν λήγει εἰς 0 ἢ 5, ἐπομένως κατ' ἰσχυρότερον λόγον τὸ ἴσον αὐτῷ ἀνάγωγον κλάσμα δὲν θέλει περιέχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5. Λοιπὸν

Ὅταν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ τινος ἀναγώγου κλάσματος δὲν περιέχῃ οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5, τὸ κλάσμα τοῦτο τραπὲν εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν παρέχει ἁπλοῦν περιοδικόν.

Γνωρίζομεν πρὸς τούτοις, ὅτι, ὅταν τὸ δεδομένον περιοδικὸν ἦναι μικτόν, ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἰσοδυνάμου αὐτῷ κοινοῦ κλάσματος περατοῦται ὑπὸ τόσων μηδενικῶν, ὅσα ψηφία περιέχει τὸ μὴ περιοδικὸν αὐτοῦ μέρος, ἐπομένως περιέχει τοσάκις τοὺς παράγοντας 2 καὶ

5, ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ αὐτοῦ. Ἀφ' ἑτέρου ὁ ἀριθμητὴς τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος κλάσματος δὲν δύναται νὰ περιέχῃ ἅπαξ ἢ πολλάκις ἢ ἕνα μόνον τῶν παραγόντων 2 καὶ 5. Διότι ἂν περιεῖχε, λόγου χάριν, συγχρόνως καὶ τὸν 2 καὶ τὸν 5, ἤθελε διαιρεῖσθαι διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 10, ἤτοι ἤθελε λήγει εἰς μηδέν. Τὸ τελευταῖον τότε ψηφίον τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους ἤθελεν εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ τελευταίῳ ψηφίῳ τῆς περιόδου, ἄλλως ἡ διαφορὰ τοῦ ἀριθμητοῦ δὲν ἤθελε λήγει εἰς μηδέν. Ἡ περίοδος λοιπὸν ἤθελεν ἄρχεσθαι πρὸ μιᾶς τάξεως, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Λοιπὸν ἕπεται ἐκ τῶν προηγουμένων ὅτι, ἐὰν ἀναγάγωμεν τὸ κοινὸν κλάσμα, τὸ ἰσοδύναμον τῷ μικτῷ περιοδικῷ, εἰς τὴν ἁπλουστάτην αὐτοῦ μορφήν, εἰς μόνον τῶν δύο παραγόντων 2 καὶ 5 τοῦ παρονομαστοῦ δυνατὸν νὰ ἐκλείψῃ ἅπαξ ἢ πολλάκις, οὐδέποτε δὲ καὶ οἱ δύο ὁμοῦ. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι,

Τὸ κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα, τὸ ἰσοδύναμον δεδομένῳ μικτῷ περιοδικῷ, περιέχει εἰς τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ τοσάκις τὸν ἕνα τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων 2 καὶ 5, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους τοῦ δεδομένου μικτοῦ περιοδικοῦ, ἐν ἄλλαις λέξεσιν·

Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ τινος ἀναγώγου κλάσματος περιέχῃ μετὰ καὶ ἄλλων παραγόντων ἅπαξ ἢ πολλάκις ἕνα τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 ἢ καὶ ἀμφοτέρους, τὸ κοινὸν τοῦτο κλάσμα, τραπὲν εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν, θέλει δώσει μικτὸν περιοδικόν, ἔχον τόσα ψηφία εἰς τὸ μὴ περιοδικὸν αὐτοῦ μέρος, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ μεγαλείτερος τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ.

Παραδείγματος χάριν, τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{11}{2^3\times3\times5}$, ἐὰν τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν, θέλει δώσει μικτὸν περιοδικόν, ἔχον 3 ψηφία εἰς τὸ μὴ περιοδικὸν αὐτοῦ μέρος, διότι 3 εἶναι ὁ μεγαλείτερος τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ.

Τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{25}{2^7\times7}$ θέλει δώσει μικτὸν περιοδικόν, ἔχον 7 ψηφία εἰς τὸ μὴ περιοδικὸν αὐτοῦ μέρος.

Τὰ ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{2}{3\times7}$, $\frac{5}{3^2\times11}$ θέλουσι δώσει ἁπλᾶ περιοδικά, διότι οὐδεὶς τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν 3×7, $3^2\times11$ περιέχει τὸν παράγοντα 2 ἢ 5.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Νὰ ἀπαγγελθῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 37,0250046008 καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.

II. Νὰ γραφῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς *τριάκοντα ὀκτὼ ἑκατομμύρια καὶ ὀκτὼ δεκάκις χιλιοστά.*

III. Νὰ προστεθῶσιν οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ 3,0025, 8,9000263 καὶ 386,01.

IV. Νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ δεκαδικοῦ 87,6254 ὁ 3,27.

V. Νὰ τραπῶσιν εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς τὰ κοινὰ κλάσματα $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{8}{17}$ κατὰ προσέγγισιν *ἑνὸς δεκάτου τοῦ ἑκατομμυριοστοῦ.*

VI. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τοῦ 0,01325 ἐπὶ 0,00013.

VII. Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 35,0008 διὰ 17 κατὰ προσέγγισιν *ἑνὸς χιλιοστοῦ;*

VIII. Ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ 37,80006 διὰ τοῦ 3,002 κατὰ προσέγγισιν *ἑνὸς ἑκατοντάκις χιλιοστοῦ;*

IX. Τὰ κλάσματα $\frac{5}{12}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{11}{23}$ τρέπονται ἀκριβῶς εἰς ἰσοδύναμα δεκαδικά;

X. Τὰ ἀνωτέρω κλάσματα, ἐὰν τραπῶσιν εἰς περιοδικά, ποῖα θέλουσι δώσει *ἁπλᾶ περιοδικὰ* καὶ ποῖα *μικτά*, καὶ ἐκ πόσων ψηφίων θέλει σύγκεισθαι τὸ μὴ περιοδικὸν μέρος ἑκάστου;

XI. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κοινὰ κλάσματα, τὰ ἰσοδύναμα τοῖς περιοδικοῖς 37,002002002002....., 253,34012012012.....

XII. Τὰ κοινὰ κλάσματα $\frac{37}{99}$, $\frac{3737}{9999}$ τραπέντα εἰς περιοδικὰ θέλουσι δώσει τὰ αὐτὰ ἢ διάφορα περιοδικά;

XIII. Τὰ κλάσματα $\frac{13}{89}$, $\frac{1313}{9999}$, τραπέντα εἰς δεκαδικά, θέλουσι δώσει τὰ αὐτὰ ἢ διάφορα περιοδικά;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ΄.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ.

ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ.

168. *Τετράγωνον* ἀριθμοῦ τινος καλεῖται ἡ δευτέρα αὐτοῦ δύναμις ἢ τὸ γινόμενον δύο ἴσων αὐτῷ παραγόντων (37). Π. χ. τὸ τετράγωνον τοῦ 5 εἶναι τὸ γινόμενον 5×5 ἢ 25.

Τὸ τετράγωνον κλάσματός τινος $\frac{2}{3}$ κατὰ τὰ ἀνωτέρω θέλει εἶναι τὸ γινόμενον $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$, ἢ $\frac{4}{9}$. Ἐν ἄλλαις λέξεσι, *τὸ τετράγωνον κλάσματός τινος εὑρίσκεται ἐὰν ὑψωθῶσιν οἱ ὅροι αὐτοῦ εἰς τὸ τετράγωνον καὶ διαιρεθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ παρονομαστοῦ.*

Τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος παρίσταται γραφομένου τοῦ ἐκθέτου 2 πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ὀλίγον ἄνωθεν αὐτοῦ (37). Οὕτως αἱ παραστάσεις 5^2, $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ ἐκφράζουσι τὰ τετράγωνα τοῦ 5 καὶ $\frac{2}{3}$.

Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ τινος καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὅστις ὑψούμενος εἰς τὸ τετράγωνον παράγει τὸν πρῶτον. Π. χ., τοῦ 25 ὄντος τοῦ τετραγώνου τοῦ 5, ὁ 5 θέλει εἶναι ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ $\frac{4}{9}$ εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{2}{3}$, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{4}{9}$ θέλει εἶναι $\frac{2}{3}$.

Πρὸς παράστασιν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ τινος γράφομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ὑπὸ τὸ σημεῖον $\sqrt{}$, ὅπερ καλεῖται *ῥιζικόν*. Π. χ. αἱ παραστάσεις $\sqrt{25}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$ ἐκφράζουσιν ἀμοιβαίως τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τοῦ 25 καὶ $\frac{4}{9}$.

Ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ τινος, καλεῖται *ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης*.

169. Τὸ τετράγωνον γινομένου τινὸς εὑρίσκεται κατὰ τὸν ἀνωτέρω τοῦ τετραγώνου ὁρισμόν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ αὐτὸ ἐφ' ἑαυτό, ἢ ἐὰν διπλασιασθῶσιν οἱ ἐκθέται τῶν παραγόντων αὐτοῦ. Οὕτω, τὸ τετράγωνον τοῦ $2\times3^2\times5$ εἶναι τὸ γινόμενον

$$2\times3^2\times5\times2\times3^2\times5, \text{ ἢ τὸ } 2^2\times3^4\times5^2.$$

Ἐπίσης τὸ τετράγωνον τοῦ γινομένου $2^2\times3^5\times7$ εἶναι τὸ γινόμενον

$$2^2\times3^5\times7\times2^2\times3^5\times7, \text{ ἢ τὸ } 2^4\times3^{10}\times7^2,$$

καὶ βλέπομεν ὅτι ταῦτα εὑρίσκονται ἐκ τῶν γινομένων $2\times3^2\times5$, $2^2\times3^5\times7$ διπλασιαζομένων τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων 2, 3, 5 ἢ 2, 3, 7 αὐτῶν. Ἕπεται ἐντεῦθεν ὅτι,

1ον. Ἐὰν οἱ παράγοντες γινομένου τινὸς ἦναι ἀριθμοὶ πρῶτοι, τὸ τετράγωνον αὐτοῦ θέλει περιέχει τοὺς αὐτοὺς πρώτους παράγοντας· ἐν ἄλλαις λέξεσιν, οὐδεὶς νέος πρῶτος παράγων εἰσάγεται ἐν τῷ τετραγώνῳ τοῦ γινομένου. Τὸ τετράγωνον π. χ. τοῦ $2\times3\times5$ εἶναι τὸ $2^2\times3^2\times5^2$, ὅπερ περιέχει τοὺς πρώτους παράγοντας 2, 3, 5 τοῦ πρώτου γινομένου $2\times3\times5$ καὶ οὐδένα ἄλλον.

2ον. Ἵνα γινόμενον πρώτων παραγόντων ἦ τετράγωνον ἑτέρου τινὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ, πρέπει οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ νὰ ἦναι ἄρτιοι. Διότι τότε, ἐὰν λάβωμεν τὸ γινόμενον τῶν αὐτῶν πρώτων παραγόντων μὲ ἀμοιβαίους ἐκθέτας τὸ ἥμισυ τῶν ἐκθετῶν τοῦ πρώτου γινομένου, θέλομεν κατὰ τὰ προλεχθέντα σχηματίσει ἀριθμόν, οὗτινος τὸ τετράγωνον θέλει εἶναι ἴσον τῷ δεδομένῳ γινομένῳ, οὐδεὶς δὲ ἕτερος ἀκέραιος ἀριθμός, ὑψούμενος εἰς τὸ τετράγωνον, δύναται νὰ παραγάγῃ τὸ δεδομένον γινόμενον· διότι εἴπομεν ἐν τῇ § 86 ὅτι καθ' ἕνα μόνον τρόπον δεδομένος τις ἀριθμὸς ἀποσυντίθεται εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ.

170. Ἔστω νὰ ὑψωθῇ τὸ ἄθροισμα $7+5$ εἰς τὸ τετράγωνον. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν $7+5$ ἐπὶ $7+5$, ἤτοι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, πρέπει πρῶτον νὰ λάβωμεν 7 ἀριθμοὺς ἴσους τῷ ἀθροίσματι $7+5$, ἔπειτα 5 τοιούτους καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο ταῦτα ἐξαγόμενα· διότι ὁ πολλαπλασιαστὴς $7+5$ ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος, ἀφοῦ ἐπανελήφθη αὕτη πρῶτον 7κις, ἔπειτα 5κις, καὶ εἰς τὸ ἑπταπλάσιον αὐτῆς προσετέθη τὸ πενταπλάσιον. Ἀλλὰ τὸ μὲν ἄθροισμα 7 ἀριθμῶν ἴσων τῷ $7+5$ ἰεναι $7\times7+5\times7$, τὸ δὲ ἄθροισμα 5 ἀριθμῶν ἴσων τῷ $7+5$ εἶνα

$7\times5+5\times5$. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν δύο τούτων ἀθροισμάτων θέλει εἶναι

$$7\times7+5\times7+7\times5+5\times5,$$

ἤ, ἐπειδὴ $5\times7=7\times5$, τὸ ἑξῆς

$$7^2+2\times7\times5+5^2.$$

Λοιπὸν θέλομεν ἔχει

$$(7+5)^2=7^2+2\times7\times5+5^2, \qquad (1)$$

τουτέστι, *τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος* $7+5$ *δύο ἀριθμῶν* 7 *καὶ* 5 *σύγκειται ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου, ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, καὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου.*

Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα (1) θέσωμεν a ἀντὶ τοῦ 7 καὶ b ἀντὶ τοῦ 5, *θέλομεν ἔχει*

$$(a+b)^2=a^2+2\times a\times b+b^2. \qquad (2)$$

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ a παριστᾷ τὰς δεκάδας ἀριθμοῦ τινος καὶ τὸ b τὰς μονάδας αὐτοῦ, ἡ ἰσότης (2) δεικνύει ὅτι,

Τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος συγκειμένου ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων, πλέον τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, πλέον τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων.

171. Ἐὰν τὸ b τῆς ἰσότητος (2) ὑποτεθῇ ἴσον τῇ μονάδι, αὕτη γίνεται

$$(a+1)^2=a^2+2\times a\times1+1^2,$$

ἤ, ὅπερ ταὐτό,

$$(a+1)^2=a^2+2\times a+1.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι,

Ἐὰν ἀριθμός τις a *αὐξηθῇ κατὰ μονάδα, τὸ τετράγωνον αὐτοῦ* a^2 *αὐξάνεται κατὰ τὸ διπλάσιον αὐτοῦ* $2\times a$ *καὶ κατὰ μίαν μονάδα ἀκόμη. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν*

Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ διπλασίῳ τοῦ μικροτέρου, ηὐξημένῳ κατὰ μονάδα.

Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν διαφερόντων κατὰ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς μονάδος, πρέπει ἐν τῇ ἰσότητι (2) νὰ θέσωμεν $\frac{1}{2}$ ἀντὶ τοῦ b, καὶ θέλομεν ἔχει

$$(a+\tfrac{1}{2})^2=a^2+2\times a\times\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{2})^2,$$

ἤ, ἐκτελουμένων τῶν πράξεων,

$$\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2=\alpha^2+\alpha+\frac{1}{4}.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, *τοῦ α αὐξηθέντος κατὰ* $\frac{1}{2}$, *τὸ τετράγωνον αὐτοῦ* α^2 *ηὐξήθη κατὰ τὸ ἄθροισμα* $\alpha+\frac{1}{4}$ *τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ α καὶ τοῦ* $\frac{1}{4}$.

ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

172. Ἐὰν γράψωμεν κατὰ σειρὰν τοὺς δέκα ἀρχικοὺς ἀριθμοὺς

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (1)

καὶ ὑπ' αὐτοὺς τὰ τετράγωνα αὐτῶν

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, (2)

οἱ ἀριθμοὶ τῆς πρώτης σειρᾶς θέλουσιν εἶναι κατὰ τὰ προλεχθέντα αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν τῆς δευτέρας. Οὕτω τοῦ 81 ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι ὁ ἀντίστοιχος αὐτοῦ 9, τοῦ 36 εἶναι ὁ 6, τοῦ 64 ὁ 8, κτλ.

Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 1, 4, 9, κτλ., οἱ ὄντες τετράγωνα ἄλλων ἀκεραίων, καλοῦνται *τέλεια τετράγωνα* ἢ μερικώτερον *ἀκέραια τετράγωνα*, βλέπομεν δὲ ὅτι πάντες οἱ μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 100 περιεχόμενοι ἀκέραιοι δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα. Π. χ. ὁ 53, ὁ μεταξὺ τοῦ 49 καὶ 64 περιεχόμενος, δὲν εἶναι ἀκέραιον τετράγωνον· διότι ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα εἶναι προφανῶς μεγαλειτέρα τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 49, ἤτοι τοῦ 7, καὶ μικροτέρα τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 64, ἤτοι τοῦ 8, καὶ ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ 8 διαφέρουσι κατὰ μονάδα, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 53 θέλει διαφέρει τοῦ 7 ἢ 8 ὀλιγώτερον μιᾶς μονάδος, ἐπομένως δὲν δύναται νὰ ἦναι ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐὰν λάβωμεν, ἀντὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 53, τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν 7 τοῦ 49, ὅστις εἶναι τὸ μεγαλείτερον ἀκέραιον τετράγωνον, τὸ ἐμπεριεχόμενον ἐν τῷ ἀριθμῷ 53, θέλομεν ἔχει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 53 *κατὰ προσέγγισιν μονάδος*.

Ἂν ἐλαμβάνομεν καὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν 8 τοῦ 64, ἠθέλομεν ἐπίσης ἔχει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 53 *κατὰ προσέγγισιν μονάδος*. Πρὸς διάκρισιν αὐτῶν ἡ μὲν πρώτη καλεῖται τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος *κατ' ἔλλειψιν*, ἡ δὲ δευτέρα τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος *καθ' ὑπεροχήν*. Συνήθως λέγοντες ἁπλῶς τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ τινος κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἐννοοῦμεν τὴν κατ' ἔλλειψιν μονάδος τετραγωνικὴν αὐτοῦ ῥίζαν. Καὶ ἐν γένει

Τετραγωνικὴ ῥίζα ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος καλεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου, τοῦ ἐμπεριεχομένου ἐν αὐτῷ. Παραδείγματος χάριν, ὁ 11 εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 130, διότι εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου 121, τοῦ ἐμπεριεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 130.

173. Ἄς ἴδωμεν τώρα πῶς θέλομεν προσδιορίσει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ, ἢ τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅταν οὗτος δὲν ἦναι τέλειον τετράγωνον.

Ἐὰν ὁ δεδομένος ἀριθμὸς ἦναι μικρότερος τοῦ 100, εὑρίσκομεν ἀμέσως τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ῥίζαν ἢ τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος διὰ τῶν σειρῶν (1) καὶ (2), ἃς εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἐνθυμώμεθα. Βλέπομεν δὲ ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παντὸς ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ 100, ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, θέλει εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 10, ἑπομένως μονοψήφιος, καὶ ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, παντὸς ἀριθμοῦ μεγαλειτέρου τοῦ 100, θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ 10, ἑπομένως σύγκεισθαι ἐκ *δεκάδων* καὶ *μονάδων*.

174. Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ὁ ἀριθμὸς Α, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, εἶναι μεγαλείτερος τοῦ 100. Ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα θέλει σύγκεισθαι ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων, καὶ ἑπομένως εὑρίσκεται, ἐὰν εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων αὐτῆς. Ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων αὐτῆς εὑρίσκεται διὰ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ τινος Α μεγαλειτέρου τοῦ 100 εὑρίσκεται, ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ τῶν ἑκατοντάδων αὐτοῦ.*

Ἐὰν π. χ. ὁ Α ἦναι ἴσος τῷ 8763, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 8763 πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν 9 τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου 81, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 87 τῶν ἑκατοντάδων αὐτοῦ.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἂς παραστήσωμεν διὰ **Δ** τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ Α καὶ διὰ Μ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων αὐτῆς. Ἐπειδὴ Μ μονάδες εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος μιᾶς δεκάδος, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ Α θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ Δ δεκάδων καὶ Δ+1 δεκάδων, ἤ, ὅπερ ταὐτό, μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν

$$\Delta\times10 \text{ καὶ } (\Delta+1)\times10.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ Α περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $\Delta\times10$ καὶ $(\Delta+1)\times10$, ὁ Α αὐτὸς θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ τῶν τετραγώνων αὐτῶν, ἅτινα εἶναι

$$\Delta^2\times100 \text{ καὶ } (\Delta+1)^2\times100.$$

Ἐν τοῖς ἀνωτέρω γινομένοις οἱ παράγοντες Δ^2 καὶ $\Delta+1)^2$ παριστῶσιν ἑκατοντάδας ὡς πολλαπλασιαζόμενοι ἐπὶ 100. Λοιπόν, ἐπειδὴ ὁ Α περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν

$$\Delta^2\times100 \text{ καὶ } (\Delta+1)^2\times100,$$

ἕπεται ὅτι αἱ ἑκατοντάδες τοῦ Α θέλουσι περιέχεσθαι μεταξὺ τῶν ἑκατοντάδων αὐτῶν, ἤτοι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν

$$\Delta^2 \text{ καὶ } (\Delta+1)^2,$$

ἐν ἄλλαις λέξεσι, Δ^2 εἶναι τὸ μεγαλείτερον ἀκέραιον τετράγωνον, τὸ ἐμπεριεχόμενον εἰς τὰς ἑκατοντάδας τοῦ Α· ἐπομένως ὁ ἀριθμὸς Δ τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ Α εἶναι ἴσος τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου Δ^2, τοῦ ἐμπεριεχομένου εἰς τὰς ἑκατοντάδας αὐτοῦ, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδειχθῇ.

175. Εὑρεθέντος τοῦ ἀριθμοῦ Δ τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ Α, μᾶς μένει νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν Μ τῶν μονάδων αὐτῆς. Εὑρίσκεται δὲ οὗτος διὰ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος·

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἐὰν ἀπό τινος ἀριθμοῦ Α ἀφαιρεθῇ τὸ τετράγωνον Δ^2 τῶν εὑρεθεισῶν δεκάδων Δ τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ῥίζης, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων αὐτῆς Μ ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς εὑρεθείσης διαφορᾶς διὰ τοῦ διπλασίου $2\times\Delta$ τῶν εὑρεθεισῶν δεκάδων Δ. Τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον πηλίκον θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ῥίζης.*

Διότι, παρασταθέντος διὰ Δ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ Α καὶ διὰ Μ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων αὐτῆς, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ, ἀκριβῶς, ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, θέλει εἶναι ἴση τῷ ἀριθμῷ ἢ τῷ ἀθροίσματι

$$\Delta\times10+\text{M}.$$

Ἕπεται λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι ὁ Α θέλει εἶναι ἢ ἴσος ἢ μεγαλείτερος τοῦ τετραγώνου τοῦ $\Delta\times10+\text{M}$, ἤτοι τοῦ

$$(\Delta\times10+M)^2,$$

ἢ τοῦ ἴσου αὐτῷ (170)

$$\Delta^2\times100+2\times\Delta\times M\times10+M^2,$$

τουτέστιν ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν ἑξῆς ἰσότητα ἢ ἀνισότητα

$$A = \text{ἢ} > \Delta^2\times100+2\times\Delta\times M\times10+M^2,$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα ἀμέσως ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ A ἀφαιρεθῇ $\Delta^2\times100$, ἤτοι τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ῥίζης, ἡ εὑρεθησομένη διαφορὰ $A-\Delta^2\times100$ θέλει εἶναι ἴση ἢ μεγαλειτέρα τοῦ ἀθροίσματος

$$2\times\Delta\times M\times10+M^2.$$

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $2\times\Delta\times M$, ἐπειδὴ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, παριστᾷ δεκάδας, καὶ ἀφ' ἑτέρου καὶ τὸ τετράγωνον M^2 τῶν μονάδων M δυνατὸν νὰ περιέχῃ τοιαύτας. Λοιπὸν ὁ ἐν τῇ εὑρεθησομένῃ διαφορᾷ $A-\Delta^2\times100$ περιεχόμενος ἀριθμὸς δεκάδων θέλει εἶναι τοὐλάχιστον ἴσος τῷ ἀριθμῷ

$$2\times\Delta\times M,$$

ἐπομένως, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς εὑρεθείσης ῥίζης διαιρεθῇ διὰ τοῦ διπλασίου $2\times\Delta$ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, τὸ εὑρεθησόμενον πηλίκον θέλει εἶναι ἢ M ἢ ἀριθμὸς μεγαλείτερος τοῦ M, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

Ἵνα δὲ βεβαιωθῶμεν, ἂν τὸ οὕτως εὑρεθὲν πηλίκον M ἦναι ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ A, ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον τὸν ἀριθμὸν $\Delta\times10+M$, καὶ ἐὰν εὕρωμεν ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ A, M θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν μονάδων· ἐὰν δὲ εὕρωμεν ἀριθμὸν μεγαλείτερον τοῦ A, ἐλαττοῦμεν τὸν M κατὰ μίαν, δύο, κτλ. μονάδας, μέχρις οὗ εὕρωμεν ἀριθμόν, οὗτινος τὸ τετράγωνον νὰ ἦναι μικρότερον τοῦ A. Ὁ οὕτως εὑρεθεὶς ἀριθμὸς θέλει παριστᾷ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ A, ἐὰν εὕρωμεν διαφορὰν 0, ἐν ἐναντίᾳ δὲ περιπτώσει, τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

176. Ἂς ἐφαρμόσωμεν τώρα τὰ ἀνωτέρω ἐπί τινος παραδείγματος. Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ζητοῦμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 8763. Λέγομεν πρὸς τοῦτο ὅτι

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 8763 εἶναι μεγαλείτερος τοῦ 100, ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ 10, ἐπομένως περιέχει δεκάδας καὶ μονάδας. Τώρα κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 174 πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ῥίζης πρέπει νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 87 τῶν ἑκατοντάδων αὐτοῦ.

Τὸ μεγαλείτερον ἀκέραιον τετράγωνον, τὸ ἐμπεριεχόμενον ἐν τῷ 87, εἶναι 81 καὶ ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα 9. Λοιπὸν 9 εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ 8763.

Μᾶς μένει νὰ εὕρωμεν τὰς μονάδας αὐτῆς. Πρὸς τοῦτο δὲ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 8763 τὸ τετράγωνον 8100 τῶν εὑρεθεισῶν 9 δεκάδων, ἤτοι τοῦ 90, καὶ τὰς δεκάδας 66 τῆς εὑρεθείσης διαφορᾶς 663 διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου 18 τῶν εὑρεθεισῶν δεκάδων 9. Εὑρίσκομεν οὕτω πηλίκον 3, ὅπερ κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 175 θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ῥίζης. Ἵνα δὲ βεβαιωθῶμεν περὶ τούτου, ὑψοῦμεν τὸν ἀριθμὸν 93 εἰς τὸ τετράγωνον καὶ εὑρίσκομεν 8649, ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ δεδομένου 8763. Λοιπὸν 93 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Ἡ μεταξὺ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ 8763 καὶ τοῦ τετραγώνου 8649 τῆς εὑρεθείσης τετραγωνικῆς ῥίζης 93 διαφορὰ 114 καλεῖται *ὑπόλοιπον* τῆς πράξεως.

177. Συνήθως, ὅταν δοκιμάζωμεν εὑρεθέν τι ψηφίον ἂν ἦναι ἢ μὴ τὸ τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, ἀντὶ νὰ ὑψόνωμεν ὁλόκληρον τὸν ἀριθμὸν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης εἰς τὸ τετράγωνον καὶ παραβάλλωμεν τοῦτο πρὸς τὸν δεδομένον ἀριθμόν, συντομεύομεν τὴν δοκιμὴν ἐκτελοῦντες αὐτὴν διά τινος ἰδιαιτέρου τρόπου. Ἵνα δὲ ἴδωμεν εἰς τί οὗτος συνίσταται καὶ πορισθῶμεν μετὰ περισσοτέρας εὐκολίας τὸν περὶ ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης γενικὸν κανόνα, ἂς λάβωμεν παράδειγμά τι, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 77387.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 77387 εἶναι μείζων τοῦ 100, ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ῥίζης εἶναι ἴσος τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 773 τῶν ἑκατοντάδων αὐτοῦ. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ὁ ἀριθμὸς 773 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ 77387 εἶναι μεγαλείτερος τοῦ 100, ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ 10, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων αὐτῆς ἰσοῦται τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 7 τῶν ἑκατοντάδων αὐτοῦ.

Τὸ μεγαλείτερον ἀκέραιον τετράγωνον, τὸ ἐμπεριεχόμενον ἐν τῷ 7, εἶναι τὸ 4, οὗτινος ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι 2. Λοιπὸν 2 εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 773.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν μονάδων αὐτῆς ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 773 τὸ τετράγωνον 400 τῶν 2 δεκάδων, ἤτοι τοῦ 20, καὶ τὰς δεκάδας 37 τῆς εὑρεθησομένης διαφορᾶς 373 διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου 4 τοῦ ψηφίου 2 τῶν εὑρεθεισῶν δεκάδων αὐτῆς. Εὑρίσκομεν οὕτω πηλίκον 9, ὅπερ θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ ζητουμένου ψηφίου τῶν μονάδων.

Εἴπομεν δὲ ὅτι, ἵνα πεισθῶμεν περὶ τούτου, πρέπει νὰ ὑψώσωμεν τὸν ἀριθμὸν 29 εἰς τὸ τετράγωνον, καὶ ἐὰν μὲν εὕρωμεν ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ 773, τότε 9 θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον ψηφίον, ἐὰν δὲ εὕρωμεν ἀριθμὸν μεγαλείτερον, ὅτι πρέπει νὰ δοκιμάσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου τὰ ψηφία 8, 7, κτλ., μέχρις οὗ εὕρωμεν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ ἦναι μικρότερον τοῦ 773. Ἰδοὺ τώρα εἰς τί συνίσταται ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος συντόμευσις τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως.

Ἀποσυνθέτομεν τὸν ἀριθμὸν 29, ὃν προτιθέμεθα νὰ ὑψώσωμεν εἰς τετράγωνον, εἰς 20 καὶ 9, καὶ σχηματίζομεν τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος 20+9, ὅπερ εἶναι

$$20^2+2\times20\times9+9^2. \qquad (1)$$

Πρέπει λοιπὸν τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα νὰ παραβάλωμεν πρὸς τὸν ἀριθμὸν 773, ἵνα ἴδωμεν ἂν τὸ 9 ἦναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης αὐτοῦ. Τώρα ἄν, ἀντὶ νὰ ἐκτελέσωμεν τοὺς ἐν τῷ ἀθροίσματι (1) σεσημειωμένους πολλαπλασιασμούς, εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν οὕτως εὑρεθησομένων ἀριθμῶν καὶ παραβάλωμεν τοῦτο πρὸς τὸν ἀριθμὸν 773, θέλομεν φθάσει προφανῶς εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν πρῶτον ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 773 τὸ τετράγωνον τοῦ 20, ὅπερ εἶναι 400, καὶ πρὸς τὴν οὕτως εὑρεθησομένην διαφορὰν 373 παραβάλωμεν τὸ μένον ἄθροισμα $2\times20\times9+9^2$, ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ $40\times9+9^2$, ἤ, ἐξαγομένου ἐκτὸς παρενθέσεων τοῦ κοινοῦ παράγοντος 9 τῶν δύο μερῶν 40×9 καὶ 9^2, τὸ $(40+9)\times9$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον 49×9 εἶναι ἀριθμὸς 441 μεγαλείτερος τοῦ 373, ἕπεται ὅτι τὸ 9 δὲν εἶναι τὸ ζητούμενον ψηφίον τῶν μονάδων, ἀλλὰ ἢ τὸ 8, ἢ τὸ 7, ἢ κτλ. Τώρα, ἵνα δοκιμάσωμεν τὸ 8, εἶναι περιττὸν νὰ ὑψώσωμεν τὸν 28 εἰς τὸ τετράγωνον· βλέπομεν σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω, ὅτι ἀρκεῖ νὰ παραβάλωμεν πρὸς τὴν διαφορὰν 373 τὸ γινόμενον 48×8, τουτέστιν ἐκεῖνο, ὅπερ ἠθέλομεν εὕρει, ἂν εἰς τὸ ἄθροισμα (1) ἐθέτομεν ἀντὶ τοῦ δοκιμασθέντος ψηφίου 9 τὸ δοκιμαζόμενον 8 καὶ μετετρέπομεν τὸ ἄθροισμα $2\times20\times8+8^2$ εἰς τὸ ἴσον αὐτῷ γινόμενον 48×8.

Ἐπειδὴ πάλιν τὸ γινόμενον 48×8 εἶναι ἀριθμὸς μεγαλείτερος τῆς διαφορᾶς 373, δοκιμάζομεν τὸ ψηφίον 7 σχηματίζοντες διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ γινόμενον 47×7 καὶ παραβάλλοντες τοῦτο πρὸς τὴν διαφορὰν 373. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον 47×7 εἶναι 329, ἀριθμὸς μικρότερος τῆς διαφορᾶς 373 κατὰ 44, ἔπεται ὅτι 7 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 773.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι πρὸς δοκιμὴν ψηφίου τινὸς 9, 8, 7, κτλ. ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τοῦτο πρὸς τὰ δεξιὰ 4 τοῦ διπλασίου τῶν εὑρεθεισῶν δεκάδων 2 τῆς ῥίζης καὶ τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν 49, 48, 47 κτλ. νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' αὐτὸ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον 9, 8, 7, κτλ., καὶ ἐὰν μὲν τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον γινόμενον ἦναι μικρότερον τῆς διαφορᾶς, ἣν εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, οὗτινος ζητοῦμεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, τὸ τετράγωνον τῶν εὑρεθεισῶν δεκάδων αὐτῆς, τότε τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον εἶναι τὸ ζητούμενον· ἐὰν δὲ μεγαλείτερον, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἄς ἐπανέλθωμεν μετὰ ταῦτα εἰς τὸν δεδομένον ἀριθμὸν 77387. Εὕρομεν ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου, τοῦ ἐμπεριεχομένου εἰς τὰς ἑκατοντάδας 773 αὐτοῦ, εἶναι 27. Λοιπὸν 27 εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 77387. Μᾶς μένει δὲ τώρα νὰ εὕρωμεν τὰς μονάδας αὐτῆς.

Πρὸς τοῦτο κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 176 πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 77387 τὸ τετράγωνον τῶν 27 δεκάδων, καὶ τὰς δεκάδας τῆς εὑρεθησομένης διαφορᾶς νὰ διαιρέσωμεν κτλ.

Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τῶν 27 δεκάδων, ἤτοι τοῦ 27×10, περιέχει 27^2 ἑκατοντάδας, ἤτοι εἶναι $27^2\times100$, εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην διαφοράν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 773 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ ἀφαιρέσωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ 27. Ἀλλ' ἀφαιρέσαντες προηγουμένως ἀπὸ τοῦ 773 πρῶτον τὸ τετράγωνον τοῦ 20, ἔπειτα ἀπὸ τῆς εὑρεθείσης διαφορᾶς 373 τὸ γινόμενον 27×7, ἀφῃρέσαμεν οὕτως αὐτὸ τὸ τετράγωνον τοῦ 27. Λοιπὸν ἡ εὑρεθεῖσα τότε διαφορὰ 44 θέλει παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑκατοντάδων τῆς μεταξὺ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ 77387 καὶ τοῦ τετραγώνου τῶν εὑρεθεισῶν 27 δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης διαφοράν, ἑπομένως ἡ διαφορὰ αὕτη θέλει εἶναι 4487, τουτέστιν εὑρίσκεται, ἐὰν πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς προηγουμένης εὑρεθείσης διαφορᾶς 44 καταβιβασθῶσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία 87 τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ. *Δευτέρα ἁπλοποίησις αὕτη.*

Διαιροῦντες τώρα τὰς δεκάδας 448 τῆς εὑρεθείσης διαφορᾶς 4487 διὰ τοῦ διπλασίου 54 τῶν εὑρεθεισῶν δεκάδων 27 τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, εὑρίσκομεν πηλίκον 8, ὅπερ θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ ζητουμένου ψηφίου τῶν μονάδων αὐτῆς. Ἀντὶ πάλιν πρὸς δοκιμὴν αὐτοῦ νὰ ὑψώσωμεν τὸν ἀριθμὸν 278 εἰς τὸ τετράγωνον καὶ παραβάλωμεν τὸν οὕτως εὑρεθησόμενον ἀριθμὸν πρὸς τὸν δεδομένον 77387, ἀποσυνθέτομεν αὐτὸν εἰς 270 καὶ 8 καὶ ὑψοῦμεν τὸ ἄθροισμα $270+8$ εἰς τὸ τετράγωνον.

Εὑρίσκομεν οὕτω κατὰ τὰ λεχθέντα ἐν τῇ § 170

$$270^2+2\times270\times8+8^2,$$

ἢ

$$270^2+540\times8+8^2,$$

ἢ

$$270^2+(540+8)\times8,$$

ἢ

$$270^2+548\times8,$$

καὶ παραβάλλομεν τὸ τελευταῖον ἄθροισμα $270^2+548\times8$ πρὸς τὸν δεδομένον ἀριθμὸν 77387. Ἀλλ' ἀφαιρέσαντες προηγουμένως ἀπ' αὐτοῦ 270^2, εὕρομεν διαφορὰν 4487. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ παραβάλωμεν τὸ γινόμενον 548×8 πρὸς τὴν διαφορὰν 4487, ἐν ἄλλαις λέξεσι, νὰ γράψωμεν ὡς προηγουμένως πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διπλασίου 54 τοῦ εὑρεθέντος ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων 27 τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον 8, τὸν οὕτω σχηματιζόμενον ἀριθμὸν 548 νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' αὐτὸ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον καὶ νὰ παραβάλωμεν τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον 4384 πρὸς τὴν διαφορὰν 4487.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον 4384 εἶναι μικρότερον τῆς διαφορᾶς 4487, τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ θέλει εἶναι 8. Ἑπομένως ὁ μὲν ἀριθμὸς 278 παριστᾷ τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἡ δὲ μεταξὺ τοῦ 4487 καὶ τοῦ γινομένου 4384 διαφορὰ 103 εἶναι τὸ *ὑπόλοιπον* τῆς πράξεως.

Τὰ καθέκαστα τῆς πράξεως διατάσσονται καθ' ἕνα τῶν δύο ἑπομένων τρόπων.

77387	278	
4	47	548
373	7	8
329		
4487		
4384		
103		

77387	278	
373	47	548
4487	7	8
103		

ἐξ ὧν ὁ δεύτερος δὲν διαφέρει τοῦ πρώτου εἰμὴ κατὰ τοῦτο, ὅτι ἐκτελοῦμεν τὰς ἀφαιρέσεις ἀφαιροῦντες τὸ τετράγωνον τοῦ 2 καὶ τὰ γινόμενα 47×7 καὶ 548×8 χωρὶς νὰ γράψωμεν αὐτά.

178. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πορίζόμεθα τώρα εὐκόλως τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα·

Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ, χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τμήματα διψήφια ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν δεξιῶν. Ὁ ἀριθμὸς τῶν τμημάτων τούτων, ὧν τὸ πρῶτον δυνατὸν νὰ ἔχῃ ἓν μόνον ψηφίον, θέλει εἶναι ἴσος τῷ ἀριθμῷ τῶν ψηφίων τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ῥίζης.

Ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου, τοῦ ἐμπεριεχομένου ἐν τῷ πρώτῳ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματι, καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ῥίζης.

Ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου ἀπὸ τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς εὑρεθησομένης διαφορᾶς γράφομεν τὸ ἀκόλουθον διψήφιον τμῆμα. Χωρίζομεν τὸ πρῶτον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον αὐτοῦ, καὶ διαιροῦμεν τὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἐκ τῶν λοιπῶν ψηφίων ἀποτελούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης. Τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον ἀκέραιον πηλίκον θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ δευτέρου ψηφίου τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ῥίζης. Ἵνα δοκιμάσωμεν τὸ ψηφίον τοῦτο, γράφομεν αὐτὸ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν ἐπ' αὐτὸ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον. Ἐὰν τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ σχηματιζομένου ἐκ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου μετὰ τοῦ δευτέρου πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ γραφέντος τμήματος, τότε τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ζητουμένης τετραγωνικῆς ῥίζης. Ἐὰν δὲν ἀφαιρῆται, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον, μέχρις οὗ εὕρωμεν γι-

νόμενον μικρότερον τοῦ προῤῥηθέντος ἀριθμοῦ. Ἀφαιροῦμεν τοῦτο ἀπ' αὐτοῦ, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς εὑρεθησομένης διαφορᾶς γράφομεν τὸ τρίτον διψήφιον τμῆμα.

Χωρίζομεν πάλιν τὸ πρῶτον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον τοῦ οὕτως ἀποτελουμένου ἀριθμοῦ, διπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀποτελούμενον ὑπὸ τῶν δύο εὑρεθέντων ψηφίων τῆς ῥίζης, καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου αὐτοῦ τὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ χωρισθέντος ψηφίου γεγραμμένον ἀριθμόν. Τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ τρίτου ψηφίου τῆς ῥίζης. Δοκιμάμάζομεν αὐτὸ γράφοντες τοῦτο πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διπλασίου τῶν δύο πρώτων ψηφίων τῆς ῥίζης, πολλαπλασιάζοντες τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν ἐπ' αὐτὸ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον, καὶ παραβάλλοντες τὸ εὑρεθησόμενον γινόμενον πρὸς τὸν ἀριθμόν, τὸν σχηματισθέντα ἐκ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὁποίου ἐγράψαμεν τὸ τρίτον διψήφιον τμῆμα. Ἐὰν τὸ γινόμενον τοῦτο ἀφαιρῆται ἀπ' αὐτοῦ, γράφομεν τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον ὡς τρίτον ψηφίον τῆς ῥίζης, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν τότε διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον ἀριθμόν.

Ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρις οὗ καταβιβάσωμεν ὅλα τὰ διψήφια τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ τμήματα. Τὸ τελευταῖον εὑρεθὲν ὑπόλοιπον θέλει εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 1.—Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω κανόνος συνάγομεν ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ τινος σύγκειται ἐκ τόσων ψηφίων, εἰς ὅσα τμήματα ἀποσυντίθεται οὗτος. Ἑπομένως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν ἀριθμῶν, τῶν ἐχόντων 1 ἢ 2, 3 ἢ 4, 5 ἢ 6, 7 ἢ 8,...., $2\nu-1$ ἢ 2ν ψηφία, θέλει ἔχει 1, 2, 3, 4,...., ν ψηφία.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 2.—Ἐνίοτε αἱ δεκάδες ὑπολοίπου τινός, ἢ μερικοῦ τινος οὕτως εἰπεῖν διαιρετέου, διαιρούμεναι διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εὑρεθέντων ψηφίων τῆς ῥίζης, δίδουσι πηλίκον 0. Ἐν τῇ τοιαύτῃ περιπτώσει τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τῆς ῥίζης εἶναι 0. Γράφομεν λοιπὸν 0 εἰς τὴν ῥίζαν, καὶ καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἀκόλουθον τμῆμα πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ προηγουμένου ὑπολοίπου καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 3.—Δυνατὸν νὰ συμβῇ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων ὑπολοίπου τινὸς διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εὑρεθέντων ψηφίων τῆς ῥίζης νὰ ἦναι ἀριθμὸς μεγαλείτερος τοῦ 9. Τότε, ἐπειδὴ γνωρίζομεν ὅτι ψηφίον τι ἀριθμοῦ τινος δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν 9, ἀρχόμεθα τῶν δοκιμῶν ἀπ' αὐτοῦ τοῦ 9. Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 381, ἠθέλομεν, διαιροῦντες τὰς δεκάδας 28 τοῦ πρώτου ὑπολοίπου 281 διὰ τοῦ διπλασίου 2 τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου 1 τῆς ῥίζης, εὕρει πηλίκον 14, ὅπερ εἶναι ἀριθμὸς μεγαλείτερος τοῦ 9. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἀρχόμεθα τῶν δοκιμῶν ἀπ' αὐτοῦ τοῦ 9 καὶ εὑρίσκομεν ὅτι 9 εἶναι τὸ ζητούμενον ψηφίον.

179. Ἅπαντα τὰ ψηφία τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ τινος, ἐκτὸς τοῦ πρώτου ψηφίου αὐτῆς, εὑρίσκονται διά τινος διαιρέσεως, ἥτις συνήθως δίδει ψηφία μεγαλείτερα τῶν ἀληθῶν. Ἐλαττοῦντες διαδοχικῶς κατὰ μονάδα τὸ δοκιμαζόμενον μεγαλείτερον τοῦ ἀληθοῦς ψηφίον, θέλομεν βεβαίως εὕρει αὐτὸ τὸ ἀληθές. Ἀλλὰ συνήθως, πρὸς συντομίαν, ἐλαττοῦμεν ἀμέσως αὐτὸ κατὰ πλειοτέρας μονάδας, καὶ οὕτω δυνατὸν νὰ γράψωμεν ὡς ψηφίον τῆς ῥίζης ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ ἀληθοῦς. Δυνάμεθα τότε εὐκόλως νὰ βεβαιωθῶμεν ἂν τοιοῦτό τι συνέβη παραβάλλοντες τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ψηφίων τῆς ῥίζης ἀποτελούμενον ἀριθμόν. Ἐὰν τοῦτο ἦναι μικρότερον τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης, ηὐξημένου κατὰ μονάδα, τὰ ψηφία τῆς ῥίζης εἶναι ἀκριβῆ, ἐὰν τοὐναντίον ἦναι μεγαλείτερον, τότε ἡ ζητουμένη ῥίζα εἶναι μεγαλειτέρα τῆς εὑρεθείσης (171).

Τῷ ὄντι, γνωρίζομεν ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ μικροτέρου, ηὐξημένον κατὰ μονάδα, καὶ ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως παριστᾷ τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης. Τώρα, ἐὰν ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ διπλασίου τῆς ῥίζης, ηὐξημένου κατὰ μονάδα, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ κατὰ μονάδα μεγαλειτέρου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης ἀριθμοῦ θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ δεδομένου, οὗ ζητεῖται ἡ ῥίζα· ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἡ εὑρεθεῖσα ῥίζα δὲν εἶναι ἡ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ δεδομένῳ ἀριθμῷ.

Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εὕρομεν 563 διὰ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου, τοῦ περιεχομένου ἔν τινι δεδομένῳ ἀριθμῷ καὶ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως ἀριθμὸν ἴσον ἢ μεγαλείτερον τοῦ ἀθροίσματος $2\times563+1$. Τότε ὁ δεδομένος ἀριθμὸς ἤθελεν εἶναι ἴσος ἢ μεγαλείτερος τοῦ ἀθροίσματος

$$563^2+2\times563+1,$$

ὅπερ εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος $563+1$, ἤτοι τοῦ 564

Λοιπὸν τοὐλάχιστον 564 θέλει εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ ῥίζα καὶ ὄχι 563, ὡς ὑπετέθη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.—Ἐξάγοντες κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν ἀριθμῶν 650426, 3976254, καὶ διατάσσοντες τὰ τῶν πράξεων κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, θέλομεν εὕρει τοὺς ἀριθμοὺς 806 καὶ 1994, ὑπόλοιπα δὲ 790 καὶ 218.

65,04,26	806	
1 0,426	16	1606
7 90		6

3,9 7,62,54	1994		
2 9,7	29	389	3984
3 6 6,2	9	9	4
1 6 15,4			
21 8			

Ἐπειδὴ ἐν τῷ πρώτῳ παραδείγματι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων 10 τοῦ 104 ἦτο μικρότερος τοῦ διπλασίου 16 τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου 8 τῆς ῥίζης, ἐγράψαμεν 0 εἰς τὴν ῥίζαν καὶ κατεβιβάσαμεν ἀμέσως πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ 104 καὶ τὸ ἑπόμενον τμῆμα 26. Ὡσαύτως, εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα, ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τῶν 29 δεκάδων τοῦ ὑπολοίπου 297 διὰ τοῦ διπλασίου 2 τοῦ ψηφίου 1 τῆς ῥίζης ὑπερέβαινε τὸν 9, ἠρχίσαμεν δοκιμάζοντες ἀμέσως τὸν 9.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΟΝΤΩΝ ΤΕΛΕΙΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΑΡΙΘΜΩΝ.

180. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἐὰν ὑψώσωμεν ἀνάγωγον κλάσμα εἰς τὸ τετράγωνον, τὸ εὑρεθησόμενον νέον κλάσμα θέλει εἶναι ἀνάγωγον.*

Διότι, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ δεδομένου ἀναγώγου κλάσματος εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ, οἱ πρῶτοι παράγοντες αὐτοῦ θέλουσιν εἶναι διάφοροι τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ παρονομαστοῦ, ἑπομένως καὶ οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμητοῦ θέλουσιν εἶναι διάφοροι τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ τετραγώνου τοῦ παρονομαστοῦ· διότι κατὰ τὰ ἐν τῇ § 169 λεχθέντα τὰ τετράγωνα ταῦτα περιέχουσι τοὺς αὐτοὺς πρώτους παράγοντας μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι οὗτοι ἔχουσι ἐκθέτας διπλασίους. Λοιπὸν τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμητοῦ θέλει εἶναι ἐπίσης πρῶτον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ ἑπομένως τὸ νέον κλάσμα θέλει εἶναι ἀνάγωγον.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι

1ον. *Ἀκέραιος ἀριθμός, ἐὰν δὲν ἦναι τετράγωνον ἑτέρου ἀκεραίου, δὲν δύναται νὰ ἦναι τετράγωνον οὔτε κλασματικοῦ.* Διότι τὸ τετράγωνον ὁποιουδήποτε κλάσματος, ὅπερ πάντοτε δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ἀνάγωγον, θέλει εἶναι καὶ αὐτὸ κλάσμα ἀνάγωγον.

2ον. *Κλάσμα τι ἀνάγωγον δὲν δύναται νὰ ἦναι τετράγωνον ἑτέρου κλάσματος, ἐὰν οἱ ὅροι αὐτοῦ δὲν ἦναι ἀκέραια τετράγωνα.* Διότι τὸ τετράγωνον τοῦ νέου κλάσματος, τοῦ παριστῶντος καθ' ὑπόθεσιν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου, ἢ θέλει εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον ἢ δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς κλάσμα ἀνάγωγον ἔχον ὅρους ἀκέραια τετράγωνα, ἐπειδὴ δὲ θέλει εἶναι ἴσον τῷ δεδομένῳ ἀναγώγῳ, ἕπεται ὅτι οἱ ὅροι αὐτῶν πρέπει ἀναγκαίως νὰ ἦναι ἴσοι.

Τέλεια τετράγωνα καλοῦνται οἱ ἀριθμοί, οἱ ὄντες τετράγωνα ἄλλων ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν ἀριθμῶν. Παραδείγματος χάριν, ὁ 16, ὁ $\frac{4}{9}$, ὁ $\frac{49}{16}$ εἶναι τέλεια τετράγωνα, ὡς τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 4, $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{7}{4}$.

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τελείου τινὸς τετραγώνου εὑρίσκεται, ἐὰν τοῦτο ἦναι ἀριθμὸς ἀκέραιος, διὰ τοῦ κανόνος τῆς § 178· ἐὰν δὲ κλασματικός, καθιστῶμεν πρῶτον αὐτὸν ἀνάγωγον, ἐξάγομεν ἔπειτα τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν δύο ὅρων αὐτοῦ, οἵτινες κατὰ τὰ προλεχθέντα πρέπει νὰ ἦναι τέλεια τετράγωνα, διὰ τοῦ κανόνος τῆς § 178 καὶ διαιροῦντες τὴν τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τῆς τοῦ παρονομαστοῦ, θέλομεν ἔχει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ δεδομένου κλασματικοῦ.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΤΩΝ ΜΗ ΤΕΛΕΙΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ.

181. Εἴπομεν προηγουμένως ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν μὴ ὄντων τέλεια τετράγωνα ἀκεραίων ἀριθμῶν δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ οὔτε δι' ἀκεραίου οὔτε διὰ κλασματικοῦ· προτιθέμεθα δὲ ἐνταῦθα νὰ δώσωμεν τὸν ἀκριβῆ ὁρισμὸν *τῆς τετραγωνικῆς αὐτῶν ῥίζης.*

Πρὸς τοῦτο ἂς λάβωμεν ἀκέραιόν τινα ἀριθμὸν μὴ τέλειον τετράγωνον, τὸν 7 παραδείγματος χάριν. Λέγω ὅτι *δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν δύο κλάσματα, ἔχοντα κοινὸν παρονομαστὴν δεδομένον τινὰ ἀριθμὸν ν, ἀριθμητὰς δὲ δύο διαδοχικοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς μ καὶ $\mu+1$, μεταξὺ των ὁποίων νὰ περιέχηται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 7.*

Τῷ ὄντι, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ διαιρέσωμεν τὸν 7 διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ν^2, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$7=\frac{7\times\nu^2}{\nu^2}.$$

Ἡ τετραγωνικὴ λοιπὸν ῥίζα τοῦ 7 θέλει εἶναι ἴση τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ ἴσου αὐτῷ κλάσματος $\frac{7\times\nu^2}{\nu^2}$. Ἀλλ' ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{7\times\nu^2}{\nu^2}$ εὑρίσκεται, ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ $7\times\nu^2$ καὶ διαιρεθῇ αὕτη διὰ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ν τοῦ παρονομαστοῦ ν^2. Ἐπειδὴ τώρα τὸ γινόμενον $7\times\nu^2$ δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον (169,2ον), ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν μ καὶ $\mu+1$, τοῦ μ παριστῶντος τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ γινομένῳ $7\times\nu^2$.

Λοιπὸν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{7\times\nu^2}{\nu^2}$, ἤτοι τοῦ 7, θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ τῶν δύο κλασματικῶν ἀριθμῶν

$$\frac{\mu}{\nu} \text{ καὶ } \frac{\mu+1}{\nu},$$

οἵτινες σχηματίζονται ὡς προείπομεν.

Τούτου δὲ ἀποδειχθέντος, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι πολλαπλασιάζομεν καὶ διαιροῦμεν τὸν 7 διὰ τῶν τετραγώνων ν^2, ν'^2, ν''^2, ν'''^2.. τῶν ἀριθμῶν ν, ν', ν'', ν''',.., οἵτινες καθ' ὑπόθεσιν βαίνουσιν αὐξανόμενοι. Ἐξάγοντες ὡς ἀνωτέρω τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν εὑρεθησομένων ἴσων τῷ 7 κλασμάτων

$$\frac{7\times\nu^2}{\nu^2},\quad \frac{7\times\nu'^2}{\nu'^2},\quad \frac{7\times\nu''^2}{\nu''^2},\quad \frac{7\times\nu'''^2}{\nu'''^2},\ldots$$

θέλομεν εὕρει τὰς ἑξῆς δύο σειρὰς

$$\frac{\mu}{\nu},\quad \frac{\mu'}{\nu'},\quad \frac{\mu''}{\nu''},\quad \frac{\mu'''}{\nu'''},\ldots \qquad (1)$$

$$\frac{\mu+1}{\nu},\quad \frac{\mu'+1}{\nu'},\quad \frac{\mu''+1}{\nu''},\quad \frac{\mu'''+1}{\nu'''},\ldots \qquad (2)$$

μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν τῶν ὁποίων θέλει περιέχεσθαι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 7. Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ τῆς πρώτης σειρᾶς (1) διαφέρουσι τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν τῆς (2) κατὰ τὰ κλάσματα $\frac{1}{\nu}$, $\frac{1}{\nu'}$, $\frac{1}{\nu''}$, $\frac{1}{\nu'''}$, ..., ὧν οἱ παρονομάσται ν, ν', ν'', ν''', ... ὑπετέθησαν βαίνοντες αὐξανόμενοι, ἕπεται ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 7 θέλει διαφέρει τῶν ἀριθμῶν μιᾶς ὁποιασδήποτε τῶν σειρῶν (1) καὶ (2) ὀλιγώτερον ἢ τὰ κλάσματα $\frac{1}{\nu}$, $\frac{1}{\nu'}$, $\frac{1}{\nu''}$, $\frac{1}{\nu'''}$, .., ἅτινα καθ' ὑπόθεσιν βαίνουσιν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐλαττούμενα. Ἡ πρώτη λοιπὸν σειρὰ (1) καὶ ἡ δευτέρα (2) θέλουσι βαίνει προσεγγίζουσαι ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον καὶ περιέχει πάντοτε μεταξὺ αὐτῶν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 7.

Τὸ ὅριον τώρα, πρὸς ὃ ἑκατέρα τῶν ἀνωτέρω σειρῶν τείνει, εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 7.

182. Ὁ τὸ ὅριον τοῦτο παριστῶν ἀριθμός, ἐπειδὴ ὡς προείπομεν ἐν τῇ § 180 δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ οὔτε δι' ἀκεραίου οὔτε διὰ κλασματικοῦ, καλεῖται *ἀσύμμετρος ἀριθμός*. Λοιπὸν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν μὴ τελείων τετραγώνων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι, οἵτινες ὡς προείπομεν εἶναι τὰ ὅρια, πρὸς ἃ τείνουσιν αἱ σειραὶ (1) καὶ (2), μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχονται πάντοτε αὗται. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἐὰν θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν σειρῶν (1) καὶ (2) ὡς παριστῶντας μεγέθη, μήκη π. χ., τὰ μήκη ταῦτα, μετρούμενα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, θέλουσι τείνει ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον πρός τι μῆκος, ὅπερ θέλει εἶναι κοινὸν ὅριον τούτων. Τὸ ὅριον τοῦτο εἶναι μῆκος *μετρούμενον ἀκριβῶς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ* $\sqrt{7}$. Ὁ ἀριθμὸς δὲ $\sqrt{7}$ καλεῖται ἀσύμμετρος, διότι τὸ μῆκος, οὗτινος εἶναι μέτρον, δὲν εἶναι οὔτε πολλαπλάσιον τῆς μονάδος, οὔτε πολλοστοῦ τινος μέρους αὐτῆς, ὅσον μικρὸν καὶ ἂν ὑποτεθῇ τοῦτο.

ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΟΠΟΙΟΥΔΗΠΟΤΕ ΑΡΙΘΜΟΥ ΚΑΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΗΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΙΝ.

183. Εἴδομεν μέχρι τοῦδε πῶς ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ τινος ἀκεραίου κατὰ προσέγγισιν μονάδος, κατ' ἔλλειψιν ἢ καθ' ὑπεροχήν. Ἂν εἴχομεν ἀντὶ ἀκεραίου κλασματικὸν ἀριθμόν, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ θέλει εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ δεδομένῳ κλασματικῷ.

Διότι, ἐὰν ὑποθέσωμεν, ἵνα ὁρίσωμέν πως τὰς ἰδέας, ὅτι ὁ δεδομένος κλασματικὸς εἶναι ὁ $\frac{425}{7}$ ἢ ὁ ἴσος αὐτῷ ἀριθμὸς $60+\frac{5}{7}$, εἶναι φανερὸν ὅτι οὗτος θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ τῶν αὐτῶν ἀκεραίων τετραγώνων 49 καὶ 64, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται καὶ ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 60, ὅστις θέλει διαφέρει κατὰ μίαν *τοὐλάχιστον* μονάδα τοῦ ἑνὸς τῶν δύο τετραγώνων 49 καὶ 64. Λοιπόν, ἐπειδὴ ὁ $60+\frac{5}{7}$ περιέχεται μεταξὺ τῶν αὐτῶν ἀκεραίων τετραγώνων, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ὁ μέγιστος ἐν αὐτῷ περιεχόμενος ἀκέραιος 60, ἐπεται ὅτι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα θέλει εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ 60, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

184. Ἔστω τώρα νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ καθ' οἱανδήποτε προσέγγισιν. Δυνάμεθα εὐκόλως διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου, δι' οὗ ἐπορίσθημεν τὸν ὁρισμὸν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν μὴ τελείων τετραγώνων ἀριθμῶν, νὰ περιλάβωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ μεταξὺ δύο κλασμάτων, ὧν ἡ διαφορὰ νὰ ἦναι ὅσῳ θέλομεν μικρά. Παραδείγματος χάριν, ἂς λάβωμεν τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 7. Εἴδομεν ἐν τῇ § 181 ὅτι ἐάν, τοῦ ν παριστῶντος ὁποιονδήποτε ἀκέραιον, παραστήσωμεν διὰ μ τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου $7\times\nu^2$, ἤτοι τὴν τιμὴν $\sqrt{7\times\nu^2}$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, τὰ κλάσματα $\frac{\mu}{\nu}$ καὶ $\frac{\mu+1}{\nu}$ θέλουσι περιέχει μεταξὺ αὐτῶν τὸν ἀσύμμετρον ἀριθμὸν $\sqrt{7}$, ἐπομένως παριστῶσι τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 7, κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, ὡς διαφέροντα ἀλλήλων κατὰ $\frac{1}{\nu}$. Λοιπόν,

Πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκεραίου τινὸς ἢ κλασματικοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, ἀρκεῖ νὰ ἐξαγάγωμεν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ ἐπὶ ν^2 καὶ νὰ διαιρέσωμεν ταύτην διὰ ν.

Παραδείγματος χάριν, ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 7 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{12}$, πολλαπλασιάζομεν τὸν 7 ἐπὶ 12^2, ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν 21 τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου 7×12^2, ἢ τοῦ 1008, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, καὶ διαιροῦμεν ταύτην διὰ 12. Τὰ κλάσματα λοιπὸν $\frac{31}{12}$ καὶ $\frac{32}{12}$ θέλουσι παριστᾷ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 7 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{12}$, τὸ μὲν πρῶτον τὴν κατ' ἔλλειψιν, τὸ δὲ δεύτερον τὴν καθ' ὑπεροχήν.

Ἂν εἴχομεν νὰ ἐξαγάγωγεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ κλάσματος $\frac{22}{7}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{12}$, ἠθέλομεν πολλαπλασιάσει τὸ κλάσμα $\frac{22}{7}$ ἐπὶ 12^2, ἐξαγάγει τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου $\frac{22\times12^2}{7}$, ἢ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου 452 τοῦ περιεχομένου ἐν αὐτῷ, τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν 21 κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ ταύτην διαιρέσει διὰ 12. Ἠθέλομεν οὕτως εὕρει τὰ κλάσματα $\frac{21}{12}$ καὶ $\frac{22}{12}$, ἅτινα παριστῶσι τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ $\frac{22}{7}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{12}$, τὸ μὲν πρῶτον τὴν κατ' ἔλλειψιν, τὸ δὲ δεύτερον τὴν καθ' ὑπεροχήν.

185. Ὁ προηγούμενος κανὼν καθίσταται ἁπλούστερος, ὅταν πρόκηται νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κλάσματός τινος, οὗτινος ὁ παρονομαστὴς εἶναι ὁ αὐτὸς τῷ παρονομαστῇ τοῦ παριστῶντος τὴν ζητουμένην προσέγγισιν κλάσματος. Ἂν εἴχομεν π. χ. νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ $\frac{17}{11}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{11}$, ἠθέλομεν πολλαπλασιάσει κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα $\frac{17}{11}$ ἐπὶ 11^2, τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου $\frac{17\times 11^2}{11}$, ἢ τοῦ 17×11, ἐξαγάγει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν 13 κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ ταύτην, ἢ τὴν κατὰ μονάδα μεγαλειτέραν αὐτῆς 14, διαιρέσει διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δεδομένου κλάσματος 11.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι

Πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης κλασματικοῦ τινος ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν πολλοστοῦ τινος τῆς μονάδος, ἔχοντος παρονομαστὴν τὸν τοῦ δεδομένου κλασματικοῦ, πολλαπλασιάζομεν ἐπ' ἀλλήλους τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ, ἐξάγομεν τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ εὑρεθησομένου γινομένου καὶ ταύτην διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δεδομένου κλασματικοῦ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐὰν συμβῇ τὸ κλάσμα, ἐφ' οὗ ἐφαρμόζομεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα, νὰ ἦναι τέλειον τετράγωνον, θέλομεν οὕτως εὕρει ἀκριβῶς τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ῥίζαν. Λοιπόν,

Ἵνα ἡ κλάσμα τι τέλειον τετράγωνον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ γινόμενον τῶν δύο ὅρων αὐτοῦ νὰ ἦναι τέλειον τετράγωνον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.—Ἐφαρμόζοντες καταλλήλως τοὺς ἀνωτέρω εὑρεθέντας κανόνας θέλομεν εὕρει τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν ἀριθμῶν

$$213,\ \frac{156}{12},\ \frac{123}{9},\ \frac{23}{15},$$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$ ἢ $\frac{1}{15}$, ζητοῦντες τὰς κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν ἀκεραίων

$$10437,\ 1045,\ 669,\ 75,$$

ἢ τῶν

$$47952,\ 4800,\ 3075,\ 347,$$

καὶ διαιροῦντες τὰς μὲν πρώτας διὰ 7, τὰς δὲ δευτέρας διὰ 15.

ΕΚΤΙΜΗΣΙΣ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΟΠΟΙΟΥΔΗΠΟΤΕ ΑΡΙΘΜΟΥ ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΙΝ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΤΙΝΟΣ ΠΟΛΛΟΣΤΟΥ ΤΗΣ ΜΟΝΑΔΟΣ.

186. Πολλάκις, ὅταν ἐξάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ τινος, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἔχωμεν τὴν τιμὴν αὐτῆς διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ παριστωμένην· τότε τὸ κλάσμα, ὅπερ παριστᾷ τὸν βαθμόν, οὕτως εἰπεῖν, τῆς ζητουμένης προσεγγίσεως, εἶναι *δεκαδικόν τι πολλοστὸν τῆς μονάδος*. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει καὶ ὁ προηγούμενος γενικὸς κανὼν τῆς § 184 δύναται νὰ ἐκφωνηθῇ ἁπλούστερον καὶ οἱ πρὸς εὕρεσιν αὐτῆς ἀναγκαῖοι ὑπολογισμοὶ ἐκτελοῦνται συντομώτερον.

Ἂς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι πρόκειται περὶ ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ. Ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος κανὼν δύναται τότε νὰ ἐκφωνηθῇ ὡς ἑξῆς·

Πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκεραίου τινὸς κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, *ἢ* $\frac{1}{100}$, *ἢ* $\frac{1}{1000}$, *ἢ κτλ. γράφομεν δύο, ἢ τέσσαρα, ἢ ἕξ, ἢ κτλ. μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ, ἐξάγομεν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ οὕτως ἀποτελεσθησομένου ἀριθμοῦ, καὶ χωρίζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῆς ἕν, ἢ δύο, ἢ τρία, ἢ κτλ., ψηφία ὡς δεκαδικά.*

Διότι γνωρίζομεν ὅτι δεδομένος ἀκέραιος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10^2, ἢ ἐπὶ 100^2, ἢ ἐπὶ 1000^2, ἢ κτλ., ἐὰν γραφῶσι 2, ἢ 4, ἢ 6, ἢ κτλ. μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ, διαιρεῖται δὲ διὰ 10, ἢ 100, ἢ 1000 ἢ κτλ., ἐὰν χωρισθῶσι πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ, 1, ἢ 2, ἢ 3, ἢ κτλ. ψηφία ὡς δεκαδικά.

Ὅταν ἐφαρμόζωμεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα, ἀντὶ νὰ γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ τὸν κατάλληλον ἀριθμὸν μηδενικῶν καὶ ἐξαγάγωμεν τοῦ οὕτως ἀποτελεσθησομένου ἀριθμοῦ τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴν ῥίζαν κτλ., ἐξάγομεν πρῶτον τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος αὐτοῦ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, μετὰ ταῦτα γράφομεν δύο μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ τελευταίου ὑπολοίπου, ὑποδιαστολὴν μετὰ τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς εὑρεθείσης ῥίζης, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν προσθέτοντες πάντοτε δύο μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ ἑκάστου ὑπολοίπου, μέχρις οὗ ὁ ἀριθμὸς τῶν γραφέντων εἰς τὴν ῥίζαν δεκαδικῶν ψηφίων κατασταθῇ ἴσος τῷ ἀριθμῷ τῶν μηδενικῶν, ὑφ' ὧν ἀκολουθεῖται ἡ μονὰς τοῦ παρονομαστοῦ, τοῦ παριστῶντος τὴν ζητουμένην προσέγγισιν δεκαδικοῦ κλάσματος.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 7 κατὰ προσέγγισιν δεκαδικοῦ τινος πολλοστοῦ τῆς μονάδος. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

7	2,6457				
300	46	524	5285	52907	...
2400	6	4	5	7	
30400					
397500					
27151					

Ἀφοῦ εὕρομεν τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴν ῥίζαν 2 τοῦ δεδομένου ἀκεραίου 7 καὶ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως 3, ἐγράψαμεν δύο μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ, καὶ ὑποδιαστολὴν μετὰ τὸ ψηφίον 2 τῆς εὑρεθείσης ῥίζης, καὶ ἐξηκολουθήσαμεν τὴν πρᾶξιν γράφοντες πρὸς μὲν τὰ δεξιὰ τῶν ἀκολούθων ὑπολοίπων 24, 304,3975,... δύο μηδενικά, τὰ δὲ εὑρισκόμενα ψηφία τῆς ῥίζης πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν ἤδη εὑρεθέντων.

Παρατηρητέον πρὸς τούτοις ὅτι ἡ πρᾶξις εἶναι ἀτελεύτητος, ἤτοι τὸ δεκαδικὸν μέρος τῆς ῥίζης δὲν δύναται νὰ ἦναι περιοδικόν. Διότι τότε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα θὰ ἠδύνατο νὰ ἐκφρασθῇ διὰ κοινοῦ κλάσματος (165), ὅπερ ἄτοπον· διότι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 7 δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, καὶ γνωρίζομεν ὅτι ἀκέραιος ἀριθμός, ὅστις δὲν εἶναι τετράγωνον ἑτέρου ἀκεραίου, δὲν δύναται νὰ ἦναι οὔτε κλασματικοῦ.

187. Ἔστω τώρα νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κλασματικοῦ τινος ἀριθμοῦ, τοῦ $\frac{22}{7}$ π. χ., κατὰ προσέγγισιν δεκαδικοῦ τινος πολλοστοῦ τῆς μονάδος, κατὰ προσέγγισιν 0,001 παραδείγματος χάριν. Κατὰ τὸν κανόνα τῆς § 186 πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν πρῶτον τὸ κλάσμα $\frac{22}{7}$ ἐπὶ 1000000, νὰ ἐξαγάγωμεν ἔπειτα τὸν ἐν τῷ γινομένῳ $\frac{22\times1000000}{7}$ περιεχόμενον ἀκέραιον ἀριθμόν, νὰ εὕρωμεν ἀκολούθως τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴν ῥίζαν τούτου, καὶ ταύτην νὰ διαιρέσωμεν διὰ 1000. Ἀλλὰ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐν τῷ γινομένῳ $\frac{22\times1000000}{7}$ περιεχομένου ἀκεραίου, ἀρκεῖ

προφανῶς νὰ τρέψωμεν τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{22}{7}$ εἰς δεκαδικόν, περιέχον ἓξ δεκαδικὰ ψηφία, καὶ νὰ ἐξαλείψωμεν μετὰ ταῦτα τὴν ὑποδιαστολήν. Λοιπὸν ὁ κανὼν τῆς § 186 ἐν τῇ παρούσῃ περιπτώσει δύναται νὰ ἀπαγγελθῇ ἁπλούστερον ὡς ἑξῆς·

Πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης κλασματικοῦ τινος ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τινὸς δεδομένης δεκαδικῆς τάξεως, τρέπομεν τὸν δεδομένον κλασματικὸν εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν διπλασίου ἀριθμοῦ δεκαδικῶν ψηφίων, ἐξαλείφομεν ἔπειτα τὴν ὑποδιαστολήν, ἐξάγομεν ἀκολούθως κατὰ προσέγγισιν μονάδος τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ οὕτως ἀποτελεσθησομένου ἀκεραίου, καὶ χωρίζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ ταύτης τόσα ψηφία ὡς δεκαδικά, ὅσα ἀπαιτοῦνται, ἵνα τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον αὐτῆς παριστᾷ μονάδας τῆς δεκαδικῆς τάξεως τῆς ζητουμένης προσεγγίσεως.

Οὕτως, ἐν τῷ περὶ οὗ ἀνωτέρω ὁ λόγος παραδείγματι εὑρίσκομεν $\frac{22}{7}=3,142857$ καὶ ἡ μὲν τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ ἀκεραίου 3142857 εἶναι 1772, ἡ δὲ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{22}{7}$ κατὰ προσέγγισιν 0,001 θέλει εἶναι 1,772.

Ἡ πρᾶξις συνήθως διατάσσεται ὡς ἑξῆς,

22	7	3,142857	1,772		
10	3,142857	2 14	27	347	3542
30		2528	7	7	2
20		9957			
60		2873			
40					
50					
1					

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Δυνατὸν νὰ συμβῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός, εἰς ὃν τρέπομεν τὸν δεδομένον κλασματικόν, νὰ μὴ περιέχῃ δίς τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα πρέπει κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα νὰ ἔχῃ ἡ κατὰ προσέγγισιν ζητουμένη τετραγωνικὴ ῥίζα. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἀναπληροῦμεν τὰ ἐλλείποντα διὰ μηδενικῶν. Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 2,718 κατὰ προσέγγισιν 0,001, ἠθέλομεν ἐφαρμόσει τὸν ἀνωτέρω κανόνα ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ 2,718000, ὅστις ἔχει ἓξ δεκαδικὰ ψηφία, τουτέστι διπλάσια τῶν τριῶν, ἅτινα ζητοῦνται διὰ τὴν κατὰ προσέγγισιν 0,001 τετραγωνικὴν αὐτοῦ ῥίζαν, καὶ εὕρει

2,718	1,648		
1 71	26	324	3288
1580	6	4	8
28400			
2096			

1,648 διὰ τὴν ζητουμένην κατὰ προσέγγισιν 0,001 ῥίζαν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.—Ἂν ἠθέλομεν νὰ εὕρωμεν τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν ἀριθμῶν

37,23, 0,0026, 0,0000000027

κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, ἢ $\frac{1}{100}$, ἢ $\frac{1}{1000}$, ἔπρεπε κατὰ τοὺς ἀνωτέρω δοθέντας κανόνας νὰ ἐξαγάγωμεν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν ἀριθμῶν

3723, 0,26, 0,00000027,

ἢ τῶν ἀριθμῶν

372300, 26, 0,000027,

ἢ τῶν ἀριθμῶν

37230000, 2600, 0,0027,

καὶ ταύτας νὰ διαιρέσωμεν διὰ 10, ἢ 100, ἢ 1000. Ἠθέλομεν δὲ εὕρει διὰ μὲν τὰς κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, κατ' ἔλλειψιν ἢ καθ' ὑπεροχήν,

6,1 ἢ 6,2 0 ἢ 0,1, 0 ἢ 0,1,

διὰ δὲ τὰς κατὰ προσέγγισιν 0,01 κατ' ἔλλειψιν ἢ καθ' ὑπεροχὴν

6,10 ἢ 6,11, 0,05 ἢ 0,06, 0 ἢ 0,01,

καὶ διὰ τὰς κατὰ προσέγγισιν 0,001 κατ' ἔλλειψιν ἢ καθ' ὑπεροχήν,

6,101 ἢ 6,102 0,050 ἢ 0,051, 0 ἢ 0,001.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Ποῖαι εἶναι αἱ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀριθμῶν 12345, 4893297, 25678932 ;

II. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀριθμῶν 19, $\frac{27}{5}$, $\frac{13}{11}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$.

III. Νὰ εὑρεθῇ κατὰ προσέγγισιν 0,01 ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀθροίσματος $5+\frac{3}{5}+\frac{2}{7}+\frac{4}{9}$.

IV. Ποία ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῆς διαφορᾶς $\frac{2}{7}-\frac{3}{11}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{111}$;

V. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ γινομένου $(5+\frac{2}{3})\times 17$ κατὰ προσέγγισιν 0,001.

VI. Νὰ εὑρεθῇ κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ πηλίκου $(2+\frac{3}{7}):(5+\frac{2}{11})$.

VII. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀριθμῶν 0,003, 0,056, 3,0025 κατὰ προσέγγισιν 0,00001.

VIII. Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 5όρ. 0πόδ. 3δάκ. κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{13}$ τῆς γραμμῆς.

IX. Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν 5ἡμ. 2ὧρ. 0λ.π. 8λ.δ. κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{15}$ τοῦ 1λ.π.

X. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν 38° 2′ 37″ κατὰ προσέγγισιν 0,01 τῆς μοίρας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ'.

ΚΥΒΙΚΗ ΡΙΖΑ.

ΠΕΡΙ ΚΥΒΟΥ ΚΑΙ ΚΥΒΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ.

188. Κύβος καλεῖται ἡ τρίτη δύναμις ἀριθμοῦ τινος, ἢ τὸ γινόμενον τριῶν ἴσων αὐτῷ παραγόντων (38). Π. χ. ὁ κύβος τοῦ 5 εἶναι τὸ γινόμενον $5\times5\times5$ ἢ ὁ 125· ὁ κύβος τοῦ κλάσματος $\frac{3}{7}$ εἶναι τὸ γινόμενον $\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}$, ἢ τὸ κλάσμα $\frac{27}{343}$. Λοιπὸν

Πρὸς σχηματισμὸν τοῦ κύβου κλάσματός τινος πρέπει νὰ ὑψώσωμεν εἰς τὸν κύβον καὶ τοὺς δύο αὐτοῦ ὅρους.

Ὁ κύβος ἀριθμοῦ τινος παρίσταται γραφομένου τοῦ ἐκθέτου 3 πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ὀλίγον ἄνωθεν αὐτοῦ. Οὕτω 5^3 καὶ $\left(\frac{3}{7}\right)^3$ παριστῶσι τοὺς κύβους τοῦ 5 καὶ $\frac{3}{7}$.

Κυβικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ τινος καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὅστις ὑψούμενος εἰς τὸν κύβον παράγει τὸν δεδομένον. Οὕτω, τοῦ κύβου τοῦ 5 ὄντος 125, ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 125 θέλει εἶναι 5. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{27}{343}$ εἶναι ὁ κύβος τοῦ $\frac{3}{7}$, τὸ $\frac{3}{7}$ εἶναι ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα.

Πρὸς παράστασιν τῆς κυβικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ τινος γράφομεν αὐτὸν ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν καὶ εἰς τὸ ἄνοιγμα τῆς γωνίας αὐτοῦ τὸν ἀριθμὸν 3, ὅστις καλεῖται *δείκτης* τῆς ῥίζης. Οὕτως αἱ παραστάσεις $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{\frac{27}{343}}$ παριστῶσιν ἀμοιβαίως τὰς κυβικὰς ῥίζας τοῦ 125 καὶ $\frac{27}{343}$.

Ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκομεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ τινος καλεῖται *ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς αὐτοῦ ῥίζης*.

189. Πρὸς σχηματισμὸν τοῦ κύβου γινομένου τινὸς πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐφ' ἑαυτὸ τρίς, ἢ ὅπερ ταὐτό, νὰ τριπλασιάσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν παραγόντων αὐτοῦ. Οὕτως, ὁ κύβος τοῦ γινομένου $2\times3\times5$ εἶναι τὸ γινόμενον

$$(2\times3\times5)\times(2\times3\times5)\times(2\times3\times5),$$

ἤ, τὸ ἴσον αὐτῷ $2^3\times3^3\times5^3$· ὁ τοῦ γινομένου $2^2+5^3\times7$ κύβος θέλει εἶναι τὸ γινόμενον $2^6\times5^9\times7^3$, καὶ βλέπομεν ὅτι σχηματίζονται ἐκ τῶν γινομένων $2\times3\times5$, $2^2\times5^3\times7$ τριπλασιαζομένων τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων 2, 3, 5 καὶ 2, 5, 7 αὐτῶν.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι, ἐὰν οἱ παράγοντες γινομένου τινὸς ἦναι ἀριθμοὶ πρῶτοι, ὁ κύβος αὐτοῦ θέλει περιέχει τοὺς αὐτοὺς πρώτους παράγοντας καὶ οὐδένα ἄλλον· ἑπομένως, ἐὰν δύο ἀριθμοὶ A καὶ B ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ οἱ κύβοι αὐτῶν A^3 καὶ B^3 θέλουσιν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι, ἐπειδὴ οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ A εἶναι διάφοροι τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ B, οἱ κύβοι αὐτῶν A^3 καὶ B^3, ὡς περιέχοντες τοὺς αὐτοὺς πρώτους παράγοντας, θέλουσι σύγκεισθαι ἐκ πρώτων παραγόντων διαφόρων.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΤΟΥ ΚΥΒΟΥ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ.

190. Ἔστω νὰ ὑψωθῇ τὸ ἄθροισμα $7+5$ εἰς τὸν κύβον. Πρέπει πρὸς τοῦτο νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον $(7+5)\times(7+5)\times(7+5)$, ἤτοι νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ $7+5$ ἐπὶ $7+5$. Γνωρίζομεν τώρα ἐκ τῶν προηγουμένων ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ $7+5$ εἶναι

$$7^2+2\times7\times5+5^2,$$

τὸ δὲ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ $7+5$ θέλει εὑρεθῇ, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτοῦ πρῶτον ἐπὶ 7, ἔπειτα ἐπὶ 5, καὶ προστεθῶσι τὰ δύο εὑρεθησόμενα μερικὰ γινόμενα. Τὸ μὲν γινόμενον τοῦ τετραγώνου $7^2+2\times7\times5+5^2$ ἐπὶ 7 εἶναι

$$7^3+2\times7^2\times5+5^2\times7,$$

τὸ δὲ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ 5 εἶναι

$$7^2\times5+2\times7\times5^2+5^3,$$

ἑπομένως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θέλει εἶναι

$$7^3+2\times7^2\times5+5^2\times7+7^2\times5+2\times7\times5^2+5^3,$$

ἤ, ἐπειδὴ $2\times7^2\times5+7^2\times5=3\times7^2\times5$ καὶ $5^2\times7+2\times7\times5^2=3\times7\times5^2$,

$$7^3+3\times7^2\times5+3\times7\times5^2+5^3.$$

Λοιπὸν θέλομεν ἔχει

$$(7+5)^3=7^3+3\times7^2\times5+3\times7\times5^2+5^3, \qquad (1)$$

τουτέστιν, *ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος* $7+5$ *δύο ἀριθμῶν* 7 *καὶ* 5 *σύγκειται ἐκ τοῦ κύβου 7^3 τοῦ πρώτου 7, ἐκ τοῦ τριπλασίου γινομένου τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, ἐκ τοῦ τριπλασίου γινομένου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου καὶ ἐκ τοῦ κύβου 5^3 τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ 5.*

Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα (1) θέσωμεν a ἀντὶ τοῦ 7 καὶ b ἀντὶ τοῦ 5, αὕτη γίνεται

$$(a+b)^3 = a^3+3\times a^2\times b+3\times a\times b^2+b^3. \qquad (2).$$

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ a παριστᾷ τὰς δεκάδας ἀριθμοῦ τινος καὶ τὸ b τὰς μονάδας αὐτοῦ, ἡ ἀνωτέρω ἰσότης (2) δεικνύει ὅτι,

Ὁ κύβος ἀριθμοῦ τινος, συγκειμένου ἐκ δεκάδων a καὶ μονάδων b, σύγκειται ἐκ τοῦ κύβου a^3 τῶν δεκάδων αὐτοῦ a, ἐκ τοῦ τριπλασίου γινομένου τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας $3\times a^2\times b$, ἐκ τοῦ τριπλασίου γινομένου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων $3\times a\times b^2$, καὶ ἐκ τοῦ κύβου b^3 τῶν μονάδων αὐτοῦ b.

ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΚΥΒΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

191. Ἐὰν γράψωμεν κατὰ σειρὰν τοὺς δέκα ἀρχικοὺς ἀριθμοὺς

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

καὶ ὑπ' αὐτοὺς τοὺς κύβους αὐτῶν

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000,

οἱ ἀριθμοὶ τῆς πρώτης σειρᾶς θέλουσιν εἶναι κατὰ τὰ προλεχθέντα αἱ κυβικαὶ ῥίζαι τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν τῆς δευτέρας. Οὕτω τοῦ 125 ἡ κυβικὴ ῥίζα εἶναι ὁ ἀντίστοιχος αὐτοῦ 5· τοῦ 512 εἶναι ὁ ἀντίστοιχος αὐτοῦ 8, κτλ.

Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 1, 8, 216 κτλ., οἱ ὄντες κύβοι ἄλλων ἀκεραίων, καλοῦνται *τέλειοι κύβοι* ἢ μερικώτερον *ἀκέραιοι κύβοι*· βλέπομεν δὲ ὅτι πάντες οἱ μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 1000 περιεχόμενοι ἀκέραιοι δὲν εἶναι ἀκέραιοι κύβοι. Π. χ. ὁ 352, ὁ μεταξὺ τοῦ 343 καὶ 512 περιεχόμενος δὲν εἶναι ἀκέραιος κύβος· διότι ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα εἶναι μικροτέρα τῆς κυβικῆς ῥίζης 8 τοῦ 512 καὶ μεγαλειτέρα τῆς κυβικῆς ῥίζης 7 τοῦ 343, καὶ ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 8 καὶ 7 διαφέρουσι κατὰ μονάδα, ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 352 θέλει διαφέρει τοῦ 7 ἢ 8 ὀλιγώτερον μιᾶς μονάδος, ἑπομένως δὲν δύναται νὰ ἦναι ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐὰν λάβωμεν ἀντὶ τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ 352 τὴν κυβικὴν ῥίζαν 7 τοῦ 343, ὅστις εἶναι ὁ μεγαλείτερος ἀκέραιος κύβος, ὁ ἐμπεριεχόνος ἐν αὐτῷ, ὁ 7 καλεῖται κυβικὴ ῥίζα τοῦ 352 *κατὰ προσέγγισιν μονάδος*.

Ἂν ἐλαμβάνομεν καὶ τὴν κυβικὴν ῥίζαν 8 τοῦ 512, ἠθέλομεν ἐπίσης ἔχει τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ 352 *κατὰ προσέγγισιν μονάδος*. Πρὸς διάκρισιν αὐτῶν ἡ μὲν πρώτη καλεῖται κυβικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος *κατ' ἔλλειψιν*, ἡ δὲ δευτέρα *καθ' ὑπεροχήν*. Συνήθως, λέγοντες ἁπλῶς κυβικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ τινος κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἐννοοῦμεν τὴν κατ' ἔλλειψιν μονάδος κυβικὴν αὐτοῦ ῥίζαν. Καὶ ἐν γένει

Κυβικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ τινος κατὰ προσέγγισιν μονάδος καλεῖται ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κύβου, τοῦ ἐμπεριεχομένου ἐν τῷ δεδομένῳ ἀριθμῷ.

Ἐπειδὴ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 1000 εἶναι 10, ἕπεται ὅτι ἡ κυβικὴ ῥίζα παντὸς ἀριθμοῦ μεγαλειτέρου τοῦ 1000 θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ 10· ἐν ἄλλαις λέξεσι, θέλει σύγκεισθαι ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων. Πρὸς εὕρεσιν λοιπὸν ταύτης πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων αὐτῆς.

192. Ἔστω τώρα ἀκέραιός τις ἀριθμὸς Α, οὗτινος ζητεῖται ἡ κυβικὴ ῥίζα, ἐὰν ἦναι ἀκέραιος κύβος, ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἐὰν δὲν ἦναι τέλειος κύβος.

Ἐὰν ὁ Α ἦναι μικρότερος τοῦ 1000, ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα θέλει εἶναι μικροτέρα τοῦ 10, ἑπομένως παραβάλλοντες τὸν ἀριθμὸν Α πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς δευτέρας τῶν ἀνωτέρω σειρῶν, θέλομεν εὐκόλως προσδιορίσει ταύτην ἀκριβῶς, ἐὰν ὁ Α ἦναι εἷς ἐκ τῶν ἐν τῇ δευτέρᾳ σειρᾷ περιεχομένων, ἢ τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅταν περιέχηται μεταξὺ δύο ἐκ τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σειρᾷ γεγραμμένων.

193. Ὅταν ὁ Α ἦναι μεγαλείτερος τοῦ 1000, ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα, ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, θέλει εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ 10, καὶ θέλει σύγκεισθαι ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων. Τὰς δεκάδας ταύτης εὑρίσκομεν διὰ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος·

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ τινὸς Α μεγαλειτέρου τοῦ 1000 ἰσοῦται τῇ κυβικῇ ῥίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κύβου, τοῦ ἐμπεριεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ τῶν χιλιάδων αὐτοῦ.*

Τῷ ὄντι, ἔστω δ ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων καὶ μ ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τῆς ζητουμένης κυβικῆς ῥίζης τοῦ Α. Ἐπειδὴ 1 δεκὰς εἶναι πάντοτε μεγαλειτέρα τῶν μ μονάδων, ἕπεται ὅτι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ

Α θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ δ καὶ $\delta+1$ δεκάδων, ἤτοι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν

$$\delta\times10 \text{ καὶ } (\delta+1)\times10.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ Α περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $\delta\times10$ καὶ $(\delta+1)\times10$, ἕπεται ὅτι ὁ Α θέλει περιέχεσθαι μεταξὺ τῶν κύβων αὐτῶν

$$\delta^3\times1000 \text{ καὶ } (\delta+1)^3\times1000.$$

Ἐπειδὴ τὸ δ^3 καὶ $(\delta+1)^3$ πολλαπλασιάζονται ἐπὶ 1000, ἕπεται ὅτι παριστῶσι χιλιάδας, καὶ ἐπειδὴ τὸ Α περιέχεται μεταξὺ τοῦ $\delta^3\times1000$ καὶ $(\delta+1)^3\times1000$, ἕπεται ὅτι αἱ χιλιάδες τοῦ Α θέλουσι περιέχεσθαι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν δ^3 καὶ $(\delta+1)^3$· ἐν ἄλλαις λέξεσι, δ^3 θέλει εἶναι ὁ μεγαλείτερος ἀκέραιος κύβος, ὁ περιεχόμενος ἐν τῷ ἀριθμῷ τῶν χιλιάδων τοῦ Α, ἑπομένως δ, τουτέστιν ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς αὐτοῦ ῥίζης, θέλει εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κύβου δ^3, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ τῶν χιλιάδων τοῦ Α, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

194. Μᾶς μένει τώρα νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ Α. Αὗται εὑρίσκονται διὰ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος·

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἐὰν ἀπό τινος ἀριθμοῦ Α ἀφαιρεθῇ ὁ κύβος τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς αὐτοῦ ῥίζης καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ὑπολοίπου διαιρεθῇ διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων αὐτῆς, τὸ εὑρεθησόμενον πηλίκον θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων τῆς κυβικῆς αὐτοῦ ῥίζης.*

Τῷ ὄντι, ἔστω δ ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ Α καὶ μ ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων αὐτῆς. Τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ Α θέλει εἶναι $\delta\times10+\mu$, ἑπομένως ὁ Α θέλει εἶναι ἀριθμὸς ἢ ἴσος ἢ μεγαλείτερος τοῦ κύβου τοῦ $\delta\times10+\mu$, ἤτοι τοῦ

$$\delta^3\times1000+3\times\delta^2\times\mu\times100+3\times\delta\times\mu^2\times10+\mu^3,$$

κατὰ τὰ ἐν τῇ § 190 λεχθέντα.

Τώρα, ἐὰν ἀπὸ τοῦ Α ἀφαιρεθῇ $\delta^3\times1000$, ἤτοι ὁ κύβος τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς αὐτοῦ ῥίζης, ἡ διαφορὰ $A-\delta^3\times1000$ θέλει εἶναι ἢ ἴση ἢ μεγαλειτέρα τοῦ ἀθροίσματος

$$3\times\delta^2\times\mu\times100+3\times\delta\times\mu^2\times10+\mu^3.$$

Ἐν τῷ ἀθροίσματι τούτῳ τὸ γινόμενον $3\times\delta^2\times\mu$, ἐπειδὴ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 100, παριστᾷ ἑκατοντάδας, ἀφ' ἑτέρου τὰ γινόμενα $3\times\delta\times\mu^2\times10$ καὶ μ^3 δυνατὸν νὰ παράσχωσιν ἑκατοντάδας. Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑκατοντάδων τῆς διαφορᾶς $A-\delta^3\times1000$ εἶναι ἢ ἴσος ἢ μείζων τοῦ $3\times\delta^2\times\mu$· ἐπομένως, ἐὰν διαιρεθῇ οὗτος διὰ τοῦ $3\times\delta^2$, τὸ πηλίκον θέλει εἶναι ἢ μ ἢ ἀριθμὸς μείζων τοῦ μ, τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ ἀνωτέρω θεώρημα.

195. Ἄς ἐφαρμόσωμεν τώρα τὰ ἀνωτέρω ἐπί τινος παραδείγματος, καὶ ἔστω νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 72627.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 72627 εἶναι μεγαλείτερος τοῦ 1000, ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα θέλει περιέχει δεκάδας καὶ μονάδας, καὶ γνωρίζομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων αὐτῆς ἰσοῦται τῇ κυβικῇ ῥίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κύβου, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 72 τῶν χιλιάδων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ 72627. Ἐπειδὴ τώρα ὁ 72 εἶναι μικρότερος τοῦ 1000, ἐν μὲν τῇ δευτέρᾳ τῶν δύο σειρῶν τῆς § 191 βλέπομεν ὅτι ὁ μέγιστος ἀκέραιος κύβος, ὁ περιεχόμενος ἐν αὐτῷ, εἶναι 64, ἐν δὲ τῇ πρώτῃ σειρᾷ ὅτι 4 εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ 72627 εἶναι 4.

Μᾶς μένει τώρα νὰ εὕρωμεν τὰς μονάδας αὐτῆς. Πρὸς τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ 72627 τὸν κύβον 64000 τῶν 4 δεκάδων, ἤτοι τοῦ 40, καὶ διαιροῦμεν τὰς ἑκατοντάδας 86 τῆς εὑρεθησομένης διαφορᾶς 8627 διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων 4, ἤτοι διὰ τοῦ 48, καὶ τὸ πηλίκον 1, ὅπερ εὑρίσκομεν θέλει εἶναι ἢ ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ ψηφίου τῶν ζητουμένων μονάδων. Ἵνα βεβαιωθῶμεν περὶ τούτου, ὑψοῦμεν τὸν ἀριθμὸν 41 εἰς κύβον, καὶ παραβάλλομεν αὐτὸν πρὸς τὸν δεδομένον ἀριθμόν. Ἐπειδὴ ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος κύβος εἶναι 68921, ἀριθμὸς δηλ. μικρότερος τοῦ δεδομένου 72627, ἡ μονὰς εἶναι τὸ ἀληθὲς ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ζητουμένης κυβικῆς αὐτοῦ ῥίζης, ἥτις ἐπομένως εἶναι 41.

Ἡ διαφορὰ 3706, ἡ ὑπάρχουσα μεταξὺ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ 72627 καὶ τοῦ κύβου 68921 τῆς εὑρεθείσης κατὰ προσέγγισιν μονάδος κυβικῆς ῥίζης, καλεῖται *ὑπόλοιπον* τῆς πράξεως.

196. Ἵνα πορισθῶμεν μετὰ περισσοτέρας εὐκολίας τὸν γενικὸν περὶ ἐξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ῥίζης κανόνα, ἂς λάβωμεν καὶ δεύτερον παράδειγμα. Ἔστω π. χ. νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ 51254673.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 51254673 εἶναι μεγαλείτερος τοῦ 1000, ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ 10 καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων αὐτῆς ἰσοῦται τῇ κυβικῇ ῥίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κύβου, τοῦ ἐμπεριεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 51254 τῶν χιλιάδων αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ πάλιν ὁ ἀριθμὸς 51254 εἶναι μεγαλείτερος τοῦ 1000, ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς αὐτοῦ ῥίζης εἶναι ἴσος τῇ κυβικῇ ῥίζῃ τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κύβου, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 51 τῶν χιλιάδων αὐτοῦ.

Ὁ μέγιστος ἀκέραιος κύβος, ὁ περιεχόμενος ἐν τῷ 51, εἶναι 27, ἑπομένως ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα θέλει εἶναι 3. Λοιπὸν 3 εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ 51254.

Ἀφαιροῦμεν τὸν κύβον 27000 τῶν 3 δεκάδων, ἤτοι τοῦ 30, καὶ διαιροῦμεν τὰς ἑκατοντάδας 242 τῆς εὑρεθησομένης διαφορᾶς 24254 διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν τριῶν δεκάδων, ἤτοι διὰ τοῦ 27. Εὑρίσκομεν οὕτω πηλίκον 8, ὅπερ εἶναι ἢ ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ 51254. Δοκιμάζομεν τοῦτο ὑψοῦντες τὸν ἀριθμὸν 38 εἰς τὸν κύβον. Ἐπειδὴ ὁ κύβος τοῦ 38 εἶναι 54872, ἀριθμὸς δηλαδὴ μεγαλείτερος τοῦ 51254, δοκιμάζομεν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου τὸν 37, καὶ ἐπειδὴ ὁ κύβος αὐτοῦ 50653 εἶναι μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ 51254, ἕπεται ὅτι 37 εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κύβου 50653, τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀριθμῷ 51254 τῶν χιλιάδων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ 51254673.

Εὕρομεν λοιπὸν μέχρι τοῦδε τὸν ἀριθμὸν 37 τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ 51254673.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν μονάδων αὐτῆς ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτοῦ τὸν κύβον 50653000 τῶν εὑρεθεισῶν 37 δεκάδων, ἤτοι τοῦ 370, καὶ διαιροῦμεν τὰς ἑκατοντάδας 6016 τῆς εὑρεθησομένης διαφορᾶς 601673 διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν εὑρεθεισῶν 37 δεκάδων, ἤτοι διὰ τοῦ 4107. Εὑρίσκομεν οὕτω πηλίκον 1, ὅπερ εἶναι ἢ ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς ζητουμένης κυβικῆς ῥίζης.

Ἐπειδὴ ὁ κύβος τοῦ 371 εἶναι 51064811, δηλ. μικρότερος τοῦ δεδομένου 51254673, ἡ μονὰς εἶναι τὸ ζητούμενον ψηφίον τῶν μονάδων, καὶ 371 ἡ ζητουμένη κυβικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Τὰ καθέκαστα τῶν ὑπολογισμῶν διατάσσονται ὡς ἑξῆς·

51254673	371	37	371
27	$27=3\times3^2$	37	371
242	$4107=3\times37^2$	259	371
		111	2597
		1369	1113
51254		37	137641
50653		9583	371
6016		4107	137641
		50653	963587
51254673			412923
51064811			51064811
189862			

197. Ἐντεῦθεν πορίζόμεθα τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν αὐτὸν εἰς τμήματα τριψήφια, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν δεξιῶν. Τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα δυνατὸν νὰ περιέχῃ δύο ἢ καὶ ἓν μόνον ψηφίον. Ὁ ἀριθμὸς τῶν οὕτως ἀποτελουμένων τμημάτων θέλει εἶναι ἴσος τῷ ἀριθμῷ τῶν ψηφίων τῆς ζητουμένης ῥίζης.

Ἐξάγομεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κύβου, τοῦ ἐμπεριεχομένου ἐν τῷ πρώτῳ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματι. Εὑρίσκομεν οὕτω τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ. Ἀφαιροῦμεν τὸν κύβον τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου ἀπὸ τοῦ πρώτου τμήματος καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς εὑρεθησομένης διαφορᾶς καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ δευτέρου τριψηφίου τμήματος. Διαιροῦμεν τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου, γράφομεν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης καὶ ὑψοῦμεν τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν εἰς τὸν κύβον. Ἐὰν εὕρωμεν ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν δύο πρώτων τμημάτων, τὸ εὑρεθὲν πηλίκον εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ζητουμένης κυβικῆς ῥίζης. Ἐὰν ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς ἦναι μεγαλείτερος τοῦ ὑπὸ τῶν δύο πρώτων τμημάτων ἀποτελουμένου, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν τὸ ἀκριβὲς ψηφίον.

Εὑρεθέντος οὕτω καὶ τοῦ δευτέρου ψηφίου τῆς ῥίζης, ἀφαιροῦ-

μεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν δύο πρώτων τμημάτων, τὸν κύβον τοῦ ὑπὸ τῶν δύο ψηφίων τῆς ῥίζης ἀποτελουμένου ἀριθμοῦ, καταβιβάζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς εὑρεθησομένης διαφορᾶς τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ τρίτου τμήματος, καὶ διαιροῦμεν τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ ὑπὸ τῶν δύο ψηφίων τῆς ῥίζης ἀποτελουμένου ἀριθμοῦ. Γράφομεν τὸ εὑρεθησόμεμον πηλίκον πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν εὑρεθέντων δύο ψηφίων τῆς ῥίζης καὶ ὑψοῦμεν τὸν οὕτως ἀποτελούμενον ἀριθμὸν εἰς τὸν κύβον. Ἐὰν εὕρωμεν ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ ὑπὸ τῶν τριῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμημάτων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ ἀποτελουμένου, τὸ γραφὲν ὡς τρίτον ψηφίον τῆς ῥίζης εἶναι ἀκριβές, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν τὸ ἀληθὲς ψηφίον.

Ἐξακολουθοῦμεν δὲ οὕτω μέχρις οὗ κάμωμεν χρῆσιν ὅλων τῶν τμημάτων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ.

Ἡ μεταξὺ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ κύβου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης διαφορὰ θέλει παριστᾷ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

ΓΕΝΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ὅ,τι εἴπομεν προκειμένου περὶ τετραγωνικῆς ῥίζης ἀπὸ τῆς § 179 μέχρι τῆς 189, ταὐτὰ σχεδὸν ἠδυνάμεθα νὰ ἐπαναλάβωμεν καὶ ἐνταῦθα προκειμένου περὶ κυβικῆς ῥίζης. Νομίζομεν ὅμως περιττὸν νὰ χρονοτριβήσωμεν ἐπὶ τούτων, καθόσον ὁ ἐννοήσας καλῶς τὰ ἐκεῖ λεχθέντα δύναται ἀφ' ἑαυτοῦ ν' ἀναπληρώσῃ ἄνευ οὐδεμιᾶς δυσκολίας τὴν ἑκουσίαν ἡμῶν ταύτην παράλειψιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τῶν ἀριθμῶν 3546257,246286254.

II. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τῶν ἀριθμῶν $251, \frac{36}{11}, \frac{5}{12}$, κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{3}$.

III. Ποία εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀθροίσματος $7+\frac{2}{3}+\frac{5}{9}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{9}$;

IV. Ποία εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τῆς διαφορᾶς $3-\frac{5}{11}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{11}$;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ΄.

ΠΕΡΙ ΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ.

ΠΕΡΙ ΛΟΓΩΝ.

198. Εἴπομεν ὅτι πρὸς καταμέτρησιν μεγέθους τινὸς συγκρίνομεν αὐτὸ πρὸς ἕτερόν τι μέγεθος τοῦ αὐτοῦ εἴδους, καὶ ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως, τὸ παριστῶν τὸ μέτρον τοῦ πρὸς καταμέτρησιν μεγέθους, καλεῖται *ἀριθμός*, ἀκέραιος μέν, ὅταν τὸ συγκρινόμενον μέγεθος περιέχῃ ἀκριβῶς ἅπαξ ἢ πολλάκις τὸ ὡς μονάδα ληφθὲν μέγεθος, κλασματικὸς δέ, ὅταν περιέχῃ ἅπαξ ἢ πολλάκις πολλοστόν τι μέρος τούτου.

Ἐὰν τώρα λάβωμεν δύο ὁποιαδήποτε ὁμοειδῆ μεγέθη Α καὶ Β, καὶ συγκρίνωμεν τὸ πρῶτον Α πρὸς τὸ δεύτερον Β, τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως θέλει εἶναι ἐπίσης ἀριθμός, ἀκέραιος ἢ κλασματικός, ὅστις θέλει παριστᾷ τὸ μέτρον τοῦ πρώτου Α, ὅταν τὸ μέγεθος Β λαμβάνηται ὡς μονάς. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ καλεῖται μερικώτερον *λόγος* τοῦ μεγέθους Α πρὸς τὸ μέγεθος Β. Λοιπὸν

Λόγος ποσοῦ τινος ἢ μεγέθους πρὸς ἕτερον ὁμοειδὲς ποσὸν ἢ μέγεθος καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὁ ἐκφράζων τὸ μέτρον τοῦ πρώτου, ὅταν τὸ δεύτερον λαμβάνηται ὡς μονάς.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν τὸ μέγεθος Α περιέχῃ τετράκις τὸ μέγεθος Β, ὁ 4 θέλει παριστᾷ τὸν λόγον τοῦ Α πρὸς τὸ Β· ἐὰν δὲ τὸ μέγεθος Α περιέχῃ ἑπτάκις τὸ ἑνδέκατον τοῦ Β, ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Β θέλει εἶναι $\frac{7}{11}$, καὶ βλέπομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 4, $\frac{7}{11}$ παριστῶσι τὸ μέτρον τοῦ Α, ὅταν τὸ Β λαμβάνηται ὡς μονάς.

Κατ' ἀναλογίαν καλεῖται λόγος δύο ἀριθμῶν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου· διότι τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου τούτου ἐπὶ τὸν δεύτερον παράγει τὸν πρῶτον, τουτέστι, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος πηλίκον παριστᾷ τὸ μέτρον τοῦ πρώτου, ὅταν ὁ δεύτερος λαμβάνηται ὡς μονάς.

Παραδείγματος χάριν, ὁ $\frac{7}{11}$ παριστᾷ τὸν λόγον τοῦ 7 πρὸς τὸν 11, διότι τὸ γινόμενον $11\times\frac{7}{11}$ δίδει τὸν πρῶτον ἀριθμὸν 7.

199. Πολλάκις ἀντὶ νὰ συγκρίνωσιν ἀπ' εὐθείας τὸ μέγεθος Α πρὸς τὸ Β, συγκρίνουσι πρῶτον ταῦτα πρὸς τὸ ὡς μονάδα ληφθὲν μέγεθος, καὶ εὑρίσκουσιν ἔπειτα τὸν λόγον τοῦ Α πρὸς τὸ Β διαιροῦντες τὸν ἀριθμόν, τὸν παριστῶντα τὸ μέτρον τοῦ Α, διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ παριστῶντος τὸ μέτρον τοῦ Β, ἐν ἄλλαις λέξεσιν.

Ὁ λόγος δύο μεγεθῶν Α καὶ Β ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β, τῶν παριστώντων τὰ μέτρα αὐτῶν, συγκρινομένων πρός τι ὡς μονάδα ληφθὲν μέγεθος μ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ Α περιέχει α φορὰς τὴν μονάδα μ καὶ τὸ Β περιέχει β φορὰς τὴν αὐτὴν μονάδα μ, θέλομεν ἔχει τὰς ἰσότητας

$$A=\alpha\times\mu,$$
$$B=\beta\times\mu.$$

Διαιροῦντες αὐτὰς κατὰ μέλη, θέλομεν ἔχει τὴν ἑπομένην

$$\frac{A}{B}=\frac{\alpha\times\mu}{\beta\times\mu},$$

ἤ, ἐξαλειφομένου ἐκ τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος τοῦ κοινοῦ παράγοντος μ, τὴν ἑξῆς

$$\frac{A}{B}=\frac{\alpha}{\beta},$$

τουτέστιν, ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Β εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ τοῦ ἀριθμοῦ α, τοῦ παριστῶντος τὸ μέτρον τοῦ Α πρὸς τὴν μονάδα μ, πρὸς τὸν ἀριθμὸν β, τὸν παριστῶντα τὸ μέτρον τοῦ Β πρὸς τὴν αὐτὴν μονάδα μ.

Ὁ εὑρεθεὶς λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ τῶν ποσῶν Α καὶ Β δυνατὸν νὰ ἦναι ἀκέραιος ἢ κλασματικός, καθόσον ὁ α εἶναι πολλαπλάσιόν τι ἢ μὴ τοῦ β.

Ἐπειδὴ οἱ λόγοι δύο ποσῶν ἢ μεγεθῶν εἶναι οἱ αὐτοὶ μὲ τοὺς λόγους τῶν παριστώντων τὰ ποσὰ ταῦτα ἢ μεγέθη ἀριθμῶν, τοῦ λοιποῦ πρὸς εὕρεσιν τοῦ λόγου τῶν ποσῶν ἢ μεγεθῶν θέλομεν θεωρεῖ ἀντὶ τούτων τοὺς ἐκφράζοντας τὰ μέτρα αὐτῶν ἀριθμούς.

200. Ἐὰν ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Β εἶναι $\frac{7}{11}$, τουτέστιν, ἐὰν τὸ μέγεθος Α περιέχῃ 7κις τὸ $\frac{1}{11}$ τοῦ Β, ἕπεται ὅτι τὸ Β θέλει περιέχει 11κις τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ Α· ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὁ λόγος τοῦ Β πρὸς τὸ Α θέλει εἶναι $\frac{11}{7}$.

Οἱ δύο λόγοι $\frac{7}{11}$ καὶ $\frac{11}{7}$, οἱ ἐκ τῶν αὐτῶν ὅρων 7 καὶ 11, ἀλλ' ἀντιστρόφως γεγραμμένων, συγκείμενοι, καλοῦνται *ἀντίστροφοι.* Βλέπομεν δὲ πρὸς τούτοις ὅτι τὸ γινόμενον $\frac{7}{11}\times\frac{11}{7}$ δύο ἀντιστρόφων λόγων $\frac{7}{11}$ καὶ $\frac{11}{7}$ εἶναι ἴσον τῇ μονάδι. Ἕνεκα τῆς ἰδιότητος αὐτῶν ταύτης λέγουσιν ἐνίοτε ὅτι ἀντίστροφοι λόγοι εἶναι ἐκεῖνοι, ὧν τὸ γινόμενον ἰσοῦται τῇ μονάδι.

ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΑΥΤΩΝ.

201. Ἔστωσαν δύο ὁμοειδῆ μεγέθη Α καὶ Β, παριστώμενα διὰ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β, Γ καὶ Δ δύο ἕτερα μεγέθη ἐπίσης ὁμοειδῆ, παριστώμενα διὰ τῶν ἀριθμῶν γ καὶ δ· ἐὰν ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ τοῦ α πρὸς τὸν β ἦναι ἴσος τῷ λόγῳ $\frac{\gamma}{\delta}$ τοῦ γ πρὸς τὸν δ, τὰ τέσσαρα μεγέθη Α, Β, Γ, Δ λέγεται ὅτι *ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν.* Τουτέστι

Τέσσαρα μεγέθη ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν, ὅταν ὁ λόγος τῶν δύο πρώτων ἦναι ἴσος τῷ λόγῳ τῶν δύο τελευταίων, ἢ ὅταν ὁ λόγος τῶν ἀριθμῶν, τῶν παριστώντων τὰ δύο πρῶτα, ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν ἀριθμῶν, τῶν παριστώντων τὰ δύο τελευταῖα.

202. Ὅταν τέσσαρες ἀριθμοὶ α, β, γ, δ ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν, παριστῶσι τοῦτο καθ' ἕνα τῶν ἑξῆς δύο τρόπων

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta},\quad \alpha:\beta=\gamma:\delta.$$

Ὅταν ἡ ἀναλογία ἦναι γεγραμμένη κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον, ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς·

α πρὸς β ὡς γ πρὸς δ,

ὅπερ ἐκφράζει συντόμως ὅτι, *ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ τοῦ γ πρὸς τὸν δ.*

Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ καλοῦνται ὅροι τῆς ἀναλογίας. Οἱ μὲν δύο πρῶτοι α καὶ β καλοῦνται ὅροι τοῦ *πρώτου λόγου*, οἱ δὲ δύο τελευταῖοι γ καὶ δ, ὅροι τοῦ *δευτέρου λόγου*. Ὁ α καὶ γ λέγονται *ἡγούμενοι*, καὶ ὁ μὲν α ἡγούμενος τοῦ πρώτου λόγου, ὁ δὲ γ ἡγούμενος τοῦ δευτέρου. Ὁ β καὶ δ *ἑπόμενοι*, καὶ ὁ μὲν β ἑπόμενος τοῦ πρώτου λόγου, ὁ δὲ δ ἑπόμενος τοῦ δευτέρου. Πρὸς τούτοις οἱ μὲν α καὶ δ καλοῦνται *ἄκροι* τῆς ἀναλογίας, οἱ δὲ β καὶ γ *μέσοι.*

Ὅταν ἀναλογίας τινὸς οἱ δύο μέσοι ἦναι οἱ αὐτοί, τότε ἡ ἀναλογία λέγεται *συνεχὴς* καὶ οἱ ἴσοι μέσοι καλοῦνται *μέσοι ἀνάλογοι* τῶν δύο ἄκρων.

Παραδείγματος χάριν, ἐν τῇ συνεχῇ ἀναλογίᾳ

$$9 : 6 = 6 : 4$$

ὁ 6 εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν δύο ἄκρων 9 καὶ 4.

203. **ΘΕΩΡΗΜΑ**. *Ὅταν δύο ἀναλογίαι ἔχωσιν ἕνα λόγον κοινόν, οἱ δύο ἄλλοι λόγοι σχηματίζουσιν ἀναλογίαν.*

Ἔστωσαν αἱ δύο ἀναλογίαι

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta \text{ καὶ } \alpha : \beta = \varepsilon : \zeta.$$

Ἐπειδὴ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ καὶ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$, ἕπεται ὅτι $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$, τουτέστι

$$\gamma : \delta = \varepsilon : \zeta,$$

τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ἔχωμεν τὰς δύο ἀναλογίας

$$5 : 9 = 15 : 27, \qquad 5 : 9 = 35 : 63$$

θέλομεν πορισθῆ, ἕνεκα τοῦ κοινοῦ αὐτῶν λόγου 5 : 9, τὴν ἑξῆς

$$15 : 27 = 35 : 63.$$

204. **ΘΕΩΡΗΜΑ**. *Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄκρων εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν δύο μέσων.*

Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta.$$

Αὕτη γράφεται καὶ οὕτω

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ δευτέρου δ, καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ πρώτου β, θέλομεν ἔχει τὴν νέαν ἰσότητα

$$\frac{\alpha \times \delta}{\beta \times \delta} = \frac{\beta \times \gamma}{\beta \times \delta},$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα ἀμέσως ὅτι $\alpha \times \delta = \beta \times \gamma$· διότι τὰ κλάσματα $\frac{\alpha \times \delta}{\beta \times \delta}$, $\frac{\beta \times \gamma}{\beta \times \delta}$, εὑρέθησαν ἴσα καὶ ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν. Λοιπὸν ἀπεδείχθη ὅτι τὸ γινόμενον $\alpha \times \delta$ τῶν δύο ἄκρων α καὶ δ εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ $\beta \times \gamma$ τῶν δύο μέσων β καὶ γ.

205. **ΘΕΩΡΗΜΑ**. *Τέσσαρες ἀριθμοὶ α, β, γ, δ ἀποτελοῦσιν, ὅπως εὑρίσκονται γεγραμμένοι, ἀναλογίαν, ὅταν τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄκρων α καὶ δ ἦναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν δύο μέσων β καὶ γ.*

Διότι, ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς δεδομένης ἰσότητος

$$\alpha \times \delta = \beta \times \gamma$$

διὰ τοῦ γινομένου $\beta\times\delta$, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\frac{\alpha\times\delta}{\beta\times\delta}=\frac{\beta\times\gamma}{\beta\times\delta}$$

ἤ, ἐξαλειφομένων τῶν κοινῶν παραγόντων δ καὶ β, τὴν ἰσότητα

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta},$$

ἥτις ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα, διότι αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\alpha:\beta=\gamma:\delta.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπειδή, ὅταν τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄκρων ἦναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν δύο μέσων, οἱ τέσσαρες οὗτοι ἀριθμοί, ὅπως ὑπάρχουσι γεγραμμένοι, ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν, ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ μεταβάλλωμεν ὁπωσδήποτε τὴν τάξιν τῶν ὅρων ἀναλογίας τινός, φθάνει μόνον νὰ διατηρῶμεν τοὺς αὐτοὺς ἄκρους καὶ τοὺς αὐτοὺς μέσους, ἢ νὰ θέτωμεν τοὺς ἄκρους μέσους καὶ τοὺς μέσους ἄκρους, καὶ θέλομεν ἔχει πάντοτε νέας διατάξεις, ἀποτελούσας ἀναλογίας. Πράττοντες οὕτω βλέπομεν ὅτι οἱ ὅροι ἀναλογίας τινὸς δύναται νὰ γραφῶσι κατὰ τοὺς ἑξῆς ὀκτὼ διαφόρους τρόπους, καὶ νὰ ἀποτελῶσι πάντοτε ἀναλογίαν.

$$\begin{array}{ll}
\alpha:\beta=\gamma:\delta, & \beta:\alpha=\delta:\gamma,\\
\alpha:\gamma=\beta:\delta, & \beta:\delta=\alpha:\gamma,\\
\delta:\beta=\gamma:\alpha, & \gamma:\alpha=\delta:\beta,\\
\delta:\gamma=\beta:\alpha, & \gamma:\delta=\alpha:\beta.
\end{array}$$

Διότι οὕτως ἡ ἀναγκαία καὶ ἐπαρκὴς συνθήκη τῆς ἰσότητος τῶν γινομένων τῶν ἄκρων καὶ μέσων ὑπάρχει δι' ἑκάστην τούτων.

206. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** *Γνωστῶν ὄντων τῶν τριῶν ὅρων ἀναλογίας τινὸς νὰ εὑρεθῇ ὁ τέταρτος.*

Δύο περιπτώσεις δυνατὸν νὰ συμβῶσιν· ὁ ζητούμενος τέταρτος δυνατὸν νὰ ἦναι ἢ ἄκρος ἢ μέσος.

Ἐὰν ἦναι εἷς τῶν ἄκρων, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο μέσους καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου. Ἐὰν ἦναι εἷς τῶν μέσων, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ἄκρους καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου. Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ἔχωμεν τὰς δύο ἀναλογίας

$$\alpha:\beta=\gamma:\chi \text{ καὶ } \alpha:\beta=\chi:\delta,$$

θέλομεν ορισθῇ ἐκ μὲν τῆς πρώτης $\chi=\dfrac{\beta\times\gamma}{\alpha}$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας

$\chi=\frac{\alpha\times\delta}{\beta}$, διότι κατὰ τὸ παραδεχθὲν θεώρημα ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο ἀναλογιῶν πορίζόμεθα τὰς ἰσότητας

$$\alpha\times\chi=\beta\times\gamma \text{ καὶ } \alpha\times\delta=\beta\times\chi,$$

ἐξ ὧν εὑρίσκομεν τὰς ἀνωτέρω δύο τιμὰς τοῦ ἀγνώστου ὅρου χ διαιροῦντες τὰ δύο μέλη τῆς πρώτης διὰ α καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δευτέρας διὰ β.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.—Ἂν ἡ ἀναλογία ἦτο συνεχὴς καὶ ὁ ζητούμενος ἄγνωστος χ ἦναι ὁ μέσος ἀνάλογος τῶν δύο ἄκρων, ἠθέλομεν ἔχει

$$\alpha:\chi=\chi:\delta,$$

ἐξ ἧς $\chi^2=\alpha\times\delta$, καὶ ἐξάγοντες τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν δύο μελῶν αὐτῆς θέλομεν ἔχει $\chi=\sqrt{\alpha\times\delta}$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, ὅταν ἡ ἀναλογία ἦναι συνεχής, ὁ μέσος ἀνάλογος ἰσοῦται τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄκρων.

207. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν ἕνα τῶν ἄκρων καὶ ἕνα τῶν μέσων ἀναλογίας τινὸς διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, θέλομεν ἔχει νέαν ἀναλογίαν.*

Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$\alpha:\beta=\gamma:\delta.$$

Ἐξ αὐτῆς πορίζόμεθα τὴν ἰσότητα

$$\alpha\times\delta=\beta\times\gamma.$$

Τώρα, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μ, ἡ ἰσότης αὕτη δὲν μεταβάλλεται. Οὕτω θέλομεν ἔχει πάλιν τὰς ἰσότητας

$$\mu\times\alpha\times\delta=\mu\times\beta\times\gamma, \text{ ἢ } \frac{\alpha\times\delta}{\mu}=\frac{\beta\times\gamma}{\mu},$$

ἐξ ὧν δυνάμεθα νὰ πορισθῶμεν τὰς ἀναλογίας

$$\alpha\times\mu:\beta\times\mu=\gamma:\delta, \qquad \alpha:\beta=\gamma\times\mu:\delta\times\mu,$$

$$\frac{\alpha}{\mu}:\frac{\beta}{\mu}=\gamma:\delta, \qquad \alpha:\beta=\frac{\gamma}{\mu}:\frac{\delta}{\mu}.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι πολλαπλασιαζομένου ἑνὸς τῶν ἄκρων α ἢ δ καὶ ἑνὸς τῶν μέσων β ἢ γ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μ, τὰ γινόμενα τῶν νέων ἄκρων καὶ μέσων τῆς πρώτης ἀναλογίας θέλουσιν εἶναι πάλιν ἴσα. Ἄρα οἱ νέοι αὐτῆς ὅροι ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν. Ὡσαύτως καὶ διαιρουμένου ἑνὸς τῶν ἄκρων α ἢ δ καὶ ἑνὸς τῶν μέσων β ἢ γ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μ, ἡ ἰσότης τῶν γινομένων τῶν νέων ἄκρων καὶ μέσων δὲν μεταβάλλεται, ἑπομένως οἱ νέοι ὅροι τῆς προηγουμένης ἀναλογίας ἀποτελοῦσι καὶ πάλιν νέαν ἀναλογίαν.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν εἴχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$8 : 10 = 16 : 20$$

καὶ ἐπολλαπλασιάζομεν τὸν 8 καὶ 16 ἐπὶ 3 ἢ διῃροῦμεν τὸν 10 καὶ 20 διὰ 2, ἠθέλομεν ἔχει τὰς νέας ἀναλογίας

$$24 : 10 = 48 : 20, \text{ καὶ } 8 : 5 = 16 : 10.$$

Διότι τὰ γινόμενα τῶν ἄκρων καὶ μέσων τῶν νέων ἀναλογιῶν εἶναι καὶ πάλιν ἴσα.

208. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων ἔχει λόγον πρὸς τὸν δεύτερον, ὃν λόγον ἔχει καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν τέταρτον.*

Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta.$$

Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει

$$\alpha + \beta : \beta = \gamma + \delta : \delta.$$

Διότι ὁ λόγος $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$ τῶν δύο πρώτων αὐτῆς ὅρων εἶναι προφανῶς κατὰ μονάδα μεγαλείτερος τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$ τῆς δεδομένης ἀναλογίας, διότι ἔχομεν $\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} + 1$. Ὡσαύτως ὁ λόγος $\frac{\gamma+\delta}{\delta}$ τῶν δύο τελευταίων αὐτῆς ὅρων εἶναι κατὰ μονάδα μεγαλείτερος τοῦ λόγου $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν δύο τελευταίων τῆς δεδομένης ἀναλογίας, διότι πάλιν ἔχομεν $\frac{\gamma+\delta}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} + 1$. Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ λόγοι $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$ τῆς ἀναλογίας $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ εἶναι ἴσοι, ἕπεται ὅτι καὶ οἱ κατὰ μονάδα μεγαλείτεροι αὐτῶν λόγοι $\frac{\alpha+\beta}{\beta}, \frac{\gamma+\delta}{\delta}$ θέλουσιν εἶναι ἴσοι, ἤτοι ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$\alpha + \beta : \beta = \gamma + \delta : \delta,$$

δι' ἧς ἀποδεικνύεται τὸ περὶ οὗ ἀνωτέρω ὁ λόγος θεώρημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.—Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$6 : 8 = 18 : 24.$$

Θέλομεν ἔχει ἐφαρμόζοντες ἐπὶ ταύτης τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα τὴν ἑξῆς·

$$6+8 : 8 = 18+24 : 24,$$
$$14 : 8 = 42 : 24.$$

209. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ἔχει λόγον πρὸς τὸν δεύτερον, ὃν λόγον ἔχει καὶ ἡ διαφορὰ τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν τέταρτον.*

Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta.$$

Λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει ὡσαύτως

$$\alpha - \beta : \beta = \gamma - \delta : \delta.$$

Διότι ὁ λόγος $\frac{\alpha-\beta}{\beta}$, ὅστις εἶναι ἴσος τῷ $\frac{\alpha}{\beta}-1$, εἶναι κατὰ μονάδα μικρότερος τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$, καὶ ὁ λόγος $\frac{\gamma-\delta}{\delta}$, ὅστις εἶναι ἴσος τῷ $\frac{\gamma}{\delta}-1$, εἶναι κατὰ μονάδα μικρότερος τοῦ $\frac{\gamma}{\delta}$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ λόγοι $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ τῆς δεδομένης ἀναλογίας $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ εἶναι ἴσοι, ἕπεται ὅτι καὶ οἱ κατὰ μονάδα μικρότεροι αὐτῶν λόγοι $\frac{\alpha-\beta}{\beta}$, $\frac{\gamma-\delta}{\gamma}$ θέλουσιν εἶναι ἴσοι, τουτέστιν ὅτι ἡ ἀναλογία

$$\alpha - \beta : \beta = \gamma - \delta : \delta$$

εἶναι ἀληθής, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.—Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$35 : 7 = 15 : 3.$$

Θέλομεν ἔχει ἐφαρμόζοντες ἐπὶ ταύτης τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα τὴν ἑξῆς·

$$35 - 7 : 7 = 15 - 3 : 3.$$

$$28 : 7 = 12 : 3.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα ὑποτίθεται ὅτι ὁ α εἶναι μεγαλείτερος τοῦ β, καὶ ἑπομένως ὁ γ μεγαλείτερος τοῦ δ. Ἂν εἶχεν ἄλλως, τότε ἠθέλομεν γράψει ἀντὶ τῆς δεδομένης ἀναλογίας τὴν ἑξῆς

$$\beta : \alpha = \delta : \gamma,$$

ἣν πορίζόμεθα ἐκ τῆς δεδομένης διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν ὅρων, καὶ ἐν ᾗ θέλομεν ἔχει $\beta > \alpha$ καὶ $\delta > \gamma$. Τὸ προηγούμενον λοιπὸν θεώρημα ἐφαρμόζεται εἰς ταύτην ἄνευ τινὸς δυσκολίας.

210. Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὰ ἐν ταῖς §§ 208 καὶ 209 ἀποδειχθέντα θεωρήματα εἰς ἑκάστην τῶν ὀκτὼ ἀναλογιῶν (205), ἃς πορίζόμεθα ἔκ τινος δεδομένης ἀναλογίας διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν ὅρων αὐτῆς, θέλομεν πορισθῇ πλεῖστα θεωρήματα, μεταξὺ τῶν ὁποίων θέλομεν ἀναφέρει μόνον τὰ ἑξῆς·

1ον. Ἐὰν ἀντὶ τῆς ἀναλογίας

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta$$

λάβωμεν τὴν ἑξῆς, ἣν εὑρίσκομεν μεταθέτοντες τοὺς μέσους τῆς δεδομένης,

$$\alpha : \gamma = \beta : \delta.$$

καὶ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ ταύτης τὰ προαποδειχθέντα θεωρήματα 208 καὶ 209, θέλομεν ἔχει

$$\alpha+\gamma : \gamma = \beta+\delta : \delta \text{ καὶ } \alpha-\gamma : \gamma = \beta-\delta : \delta,$$

ἐξ ὧν, διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν μέσων, πορίζόμεθα

$$\alpha+\gamma : \beta+\delta = \gamma : \delta \text{ καὶ } \alpha-\gamma : \beta-\delta = \gamma : \delta$$

τουτέστιν ὅτι *εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα* $\alpha+\gamma$, *ἢ ἡ διαφορὰ* $\alpha-\gamma$ *τῶν δύο ἡγουμένων εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα* $\beta+\delta$ *ἢ τὴν διαφορὰν* $\beta-\delta$ *τῶν δύο ἑπομένων, ὡς εἷς ἡγούμενος* γ *πρὸς τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ* δ.

Ἡ ἀναλογία

$$\alpha-\gamma : \beta-\delta = \gamma : \delta$$

ὑποθέτει ὅτι $\alpha > \gamma$, καὶ ἑπομένως $\beta > \delta$. Ἂν εἶχεν ἄλλως, ἠθέλομεν ἀντὶ τῆς ἀναλογίας

$$\alpha : \gamma = \beta : \delta$$

λάβει τὴν ἐκ ταύτης προκύπτουσαν

$$\gamma : \delta = \alpha : \beta,$$

ἐξ ἧς θέλομεν πορισθῇ ὡς προηγουμένως

$$\gamma-\alpha : \delta-\beta = \gamma : \delta.$$

2ον. Ἀπεδείξαμεν προηγουμένως ὅτι δοθείσης τῆς ἀναλογίας

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta$$

πορίζόμεθα ἐκ ταύτης τὰς ἑξῆς

$$\alpha+\beta : \beta = \gamma+\delta : \delta \text{ καὶ } \alpha-\beta : \beta = \gamma-\delta : \delta.$$

Μεταθέτοντες τώρα τοὺς μέσους τῶν δύο τελευταίων τούτων ἀναλογιῶν, θέλομεν ἔχει

$$\alpha+\beta : \gamma+\delta = \beta : \delta \text{ καὶ } \alpha-\beta : \gamma-\delta = \beta : \delta.$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο τελευταῖαι ἀναλογίαι ἔχουσιν ἕνα λόγον $\beta : \delta$ κοινόν, οἱ δύο ἄλλοι αὐτῶν λόγοι $\alpha+\beta : \gamma+\delta$ καὶ $\alpha-\beta : \gamma-\delta$ θέλουσιν ἀποτελεῖ ἀναλογίαν (203), ἤτοι θέλομεν ἔχει

$$\alpha+\beta : \gamma+\delta = \alpha-\beta : \gamma-\delta$$

αὕτη δὲ διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν μέσων γράφεται καὶ οὕτω

$$\alpha+\beta : \alpha-\beta = \gamma+\delta : \gamma-\delta.$$

τουτέστιν, εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ τῶν δύο πρώτων ὅρων εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν $\alpha-\beta$, ὡς τὸ ἄθροισμα $\gamma+\delta$ τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν $\gamma-\delta$.

3ον. Ὡσαύτως ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο ἀναλογιῶν

$$\alpha+\gamma : \beta+\delta = \gamma : \delta \text{ καὶ } \alpha-\gamma : \beta-\delta = \gamma : \delta$$

πορίζόμεθα τὴν ἑξῆς

$$\alpha+\gamma : \beta+\delta = \alpha-\gamma : \beta-\delta,$$

ἥτις διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν μέσων γράφεται καὶ οὕτω

$$\alpha+\gamma : \alpha-\gamma = \beta+\delta : \beta-\delta\cdot$$

τουτέστιν, εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\gamma$ τῶν ἡγουμένων εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν $\alpha-\gamma$, ὡς τὸ ἄθροισμα $\beta+\delta$ τῶν ἑπομένων πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν $\beta-\delta$.

211. **ΘΕΩΡΗΜΑ**. *Ἐὰν ἔχωμεν πλειοτέρας ἀναλογίας γεγραμμένας οὕτως, ὥστε οἱ τῆς αὐτῆς τάξεως ὅροι νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ καθέτῳ στήλῃ, τὰ γινόμενα τῶν ὁμοταγῶν αὐτῶν ὅρων θέλουσιν ἀποτελέσει νέαν ἀναλογίαν.*

Ἔστωσαν π. χ. αἱ ἀναλογίαι

$$\begin{aligned} \alpha &: \beta = \gamma : \delta, \\ \alpha' &: \beta' = \gamma' : \delta', \\ \alpha'' &: \beta'' = \gamma'' : \delta'', \end{aligned}$$

γεγραμμέναι ὡς προεῤῥέθη· λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει

$$\alpha\times\alpha'\times\alpha'' : \beta\times\beta'\times\beta'' = \gamma\times\gamma'\times\gamma'' : \delta\times\delta'\times\delta''.$$

Διότι αἱ δεδομέναι ἀναλογίαι γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta},$$
$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\gamma}{\delta''},$$
$$\frac{\alpha''}{\beta''} = \frac{\gamma''}{\delta''},$$

καὶ ἐπειδὴ τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἰσοτήτων τούτων εἶναι ἴσα μὲ τὰ δεύτερα, ἀναγκαίως τὸ γινόμενον τῶν πρώτων μελῶν θέλει εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν δευτέρων, τουτέστι θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\alpha'}{\beta'}\times\frac{\alpha''}{\beta''} = \frac{\gamma}{\delta}\times\frac{\gamma'}{\delta'}\times\frac{\gamma''}{\delta''},$$

ἢ τὴν
$$\frac{\alpha\times\alpha'\times\alpha''}{\beta\times\beta'\times\beta''} = \frac{\gamma\times\gamma'\times\gamma''}{\delta\times\delta'\times\delta''}$$

ἥτις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\alpha\times\alpha'\times\alpha'' : \beta\times\beta'\times\beta'' = \gamma\times\gamma'\times\gamma'' : \delta\times\delta'\times\delta'',$$

τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.—Ἐκ τῶν ἀναλογιῶν.

$$8 : 3 = 24 : 9$$
$$7 : 5 = 14 : 10$$
$$2 : 1 = 16 : 8$$

πορίζόμεθα κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα τὴν ἑξῆς·

$$8\times7\times2 : 3\times5\times1 = 24\times14\times16 : 9\times10\times8,$$

ἤτοι

$$112 : 15 = 5376 : 720.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ δεδομέναι ἀναλογίαι εἶναι αἱ αὐταί, τότε τὰ γινόμενα τῶν ὁμοταγῶν αὐτῶν ὅρων θέλουσιν εἶναι αἱ αὐταὶ δυνάμεις τῶν ὅρων τῆς πρώτης. Λοιπόν,

Ἐὰν ὑψώσωμεν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν τοὺς ὅρους ἀναλογίας τινὸς θέλομεν σχηματίσει νέαν ἀναλογίαν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.—Ἐκ τῆς ἀναλογίας

$$2 : 3 = 8 : 12$$

πορίζόμεθα τὴν ἑξῆς

$$2^\nu : 3^\nu = 8^\nu : 12^\nu,$$

τοῦ ν πορίστῶντος ἀκέραιόν τινα ἀριθμόν. Π. χ., ἐὰν τὸ ν ὑποτεθῇ ἴσον μὲ 2, θέλομεν ἔχει

$$4 : 9 = 64 : 144.$$

212. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Εἰς πᾶσαν σειρὰν ἴσων λόγων τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων, ὡς εἷς ἡγούμενος πρὸς τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ.*

Ἔστω π. χ. ἡ σειρὰ τῶν ἴσων λόγων

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta = \varepsilon : \zeta = \eta : \theta,$$

λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει

$$\alpha+\gamma+\varepsilon+\eta : \beta+\delta+\zeta+\theta = \alpha : \beta, \text{ ἢ} = \gamma : \delta, \text{ ἢ} = \varepsilon : \zeta, \text{ ἢ κτλ.}$$

Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν δύο λόγων $\alpha : \beta$ καὶ $\gamma : \delta$ πορίζόμεθα τὴν ἀναλογίαν

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta,$$

ἐξ ἧς κατὰ τὰ ἐν τῇ § 210, 1ον λεχθέντα πορίζόμεθα

$$\alpha+\gamma : \beta+\delta = \alpha : \beta.$$

Ἀλλὰ $\alpha : \beta = \varepsilon : \zeta$. Ἄρα, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν τελευταίαν ἀναλογίαν ἀντὶ τοῦ λόγου $\alpha : \beta$ τὸν ἴσον αὐτῷ $\varepsilon : \zeta$, θέλομεν ἔχει τὴν ἑξῆς·

$$\alpha+\gamma : \beta+\delta = \varepsilon : \zeta,$$

ἐξ ἧς κατὰ τὸ αὐτὸ θεώρημα πορίζόμεθα

$$\alpha+\gamma+\varepsilon : \beta+\delta+\zeta = \varepsilon : \zeta.$$

Ἀλλὰ $\varepsilon : \zeta = \eta : \theta$. Ἄρα καὶ

$$\alpha+\gamma+\varepsilon : \beta+\delta+\zeta = \eta : \theta,$$

ἐξ ἧς

$$\alpha+\gamma+\varepsilon+\eta : \beta+\delta+\zeta+\theta = \eta : \theta.$$

Ἀλλὰ $\eta : \theta = \alpha : \beta = \varepsilon : \zeta = \gamma : \delta$. Ἄρα καὶ $\alpha+\gamma+\varepsilon+\eta : \beta+\delta+\zeta+\theta = \alpha : \beta$, ἢ $= \gamma : \delta$, ἢ $= \varepsilon : \zeta$, ἢ $= \eta : \theta$, τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ ἀνωτέρω θεώρημα.

213. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Αἱ τετραγωνικαὶ καὶ κυβικαὶ ῥίζαι τῶν ὅρων ἀναλογίας τινὸς σχηματίζουσιν ἀναλογίαν.*

Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta,$$

λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει ὡσαύτως

$$\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} = \sqrt{\gamma} : \sqrt{\delta} \text{ καὶ } \sqrt[3]{\alpha} : \sqrt[3]{\beta} = \sqrt[3]{\gamma} : \sqrt[3]{\delta}.$$

Διότι, ἐπειδὴ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, αἱ τετραγωνικαὶ καὶ κυβικαὶ ῥίζαι τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ θέλουσιν εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τετραγωνικὰς καὶ κυβικὰς ῥίζας τοῦ $\frac{\gamma}{\delta}$, τουτέστι θέλομεν ἔχει

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\delta}} \text{ καὶ } \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt[3]{\frac{\gamma}{\delta}}$$

καὶ κατὰ τοὺς περὶ ἐξαγωγῆς τῶν τετραγωνικῶν καὶ κυβικῶν τῶν κλασμάτων ῥιζῶν κανόνας, θέλομεν ἔχει

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\delta}} \text{ καὶ } \frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\beta}} = \frac{\sqrt[3]{\gamma}}{\sqrt[3]{\delta}},$$

ἢ, ὅπερ ταὐτό,

$$\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} = \sqrt{\gamma} : \sqrt{\delta} \text{ καὶ } \sqrt[3]{\alpha} : \sqrt[3]{\beta} = \sqrt[3]{\gamma} : \sqrt[3]{\delta},$$

τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐὰν τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ δὲν ἦναι τέλεια τετράγωνα ἢ τέλειοι κύβοι, αἱ τετραγωνικαὶ ἢ κυβικαὶ αὐτῶν ῥίζαι θέλουσιν εἶναι ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τέσσαρες ἀσύμμετροι πρὸς τὴν μονάδα ἀριθμοὶ ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν, ὅταν ὁ λόγος τῶν δύο εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ τῶν ἄλλων δύο. Τώρα ὁ λόγος δύο ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν θέλει εἶναι ἀσύμμετρος ἢ σύμμετρος, καθόσον τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν εἶναι ἢ μὴ ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν τὴν ἀναλογίαν,

$$3 : 12 = 6 : 24,$$

ἐξάγοντες τὰς τετραγωνικὰς τῶν ὅρων αὐτῆς ῥίζας, θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν

$$\sqrt{3} : \sqrt{12} = \sqrt{6} : \sqrt{24},$$

ἧς οἱ ὅροι $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{24}$ εἶναι ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι, ἀλλ' ὁ λόγος αὐτῶν $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$ ἢ $\sqrt{\frac{1}{4}}$ εἶναι ἀριθμὸς σύμμετρος.

Ἐξάγοντες τὰς κυβικὰς ῥίζας τῆς προηγουμένης ἀναλογίας θέλομεν ἔχει

$$\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{6} : \sqrt[3]{24}$$

καὶ βλέπομεν ὅτι ὄχι μόνον οἱ ὅροι αὐτῆς εἶναι ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι, ἀλλὰ καὶ ὁ λόγος αὐτῶν $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{12}}$ ἢ $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

I. Οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ 2, 5, 6, 15, ὅπως εἶναι γεγραμμένοι, ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν;

II. Πῶς πρέπει νὰ γράψωμεν τοὺς τέσσαρας παράγοντας 3, 4, 2, 6 τῆς ἰσότητος $3 \times 4 = 2 \times 6$, ἵνα σχηματίσωμεν ἀναλογίαν;

III. Ἐκ τῆς ἰσότητος $8 = 2 \times 4$ ποία ἀναλογία προκύπτει;

IV. Οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{15}{84}$, ὅπως εἶναι γεγραμμένοι, δύνανται νὰ σχηματίσωσιν ἀναλογίαν;

V. Ποῖος ἀριθμὸς μετὰ τῶν τριῶν δεδομένων $\frac{5}{12}$, $1+\frac{2}{3}$, $7+\frac{3}{7}$, σχηματίζει ἀναλογίαν, ἧς οἱ ἡγούμενοι νὰ ἦναι ὁ δεύτερος καὶ τρίτος τῶν δεδομένων ἀριθμῶν;

VI. Ποῖος ὅρος ληφθεὶς ὡς μέσος ἀνάλογος ἀποτελεῖ ἀναλογίαν, ἧς ἄκροι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ 11;

VII. Ἐκ τῆς ἀναλογίας $2 : 7 = 6 : 21$ δυνάμεθα νὰ πορισθῶμεν τὴν ἑξῆς $8 : 28 = 4 : 14$, καὶ πῶς;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΔ.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ.

ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΠΟΣΩΝ.

214. Ἐὰν ἔχωμεν δύο ὁμοειδῆ ἢ ἑτεροειδῆ ποσὰ ἢ μεγέθη, καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι ταῦτα εἶναι οὕτω πως συνδεδεμένα πρὸς ἄλληλα, ὥστε, ὅταν τὸ πρῶτον λάβῃ δύο ὁποιασδήποτε τιμὰς A', A'', τὸ δεύτερον νὰ λαμβάνῃ δύο ἄλλας B', B'' ἀντιστοίχους καὶ τοιαύτας, ὥστε ὁ λόγος $\frac{A'}{A''}$ τῶν δύο ὁποιωνδήποτε τιμῶν A', A'' τοῦ πρώτου νὰ ἦναι ἴσος τῷ λόγῳ $\frac{B'}{B''}$ ἢ τῷ $\frac{B''}{B'}$ τῶν δύο ἀντιστοίχων τιμῶν B',B'' τοῦ δευτέρου, τότε τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος ποσὰ λέγονται *ἀνάλογα*. Καὶ ὅταν μὲν ἔχωμεν τὴν ἰσότητα

$$\frac{A'}{A''}=\frac{B'}{B''}$$

τὰ ποσὰ καλοῦνται *κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα*. Ὅταν δ' ἔχωμεν τὴν ἰσότητα

$$\frac{A'}{A''}=\frac{B''}{B'},$$

τὰ ποσὰ λέγονται *ἀντιστρόφως ἀνάλογα*. Λοιπόν,

Δύο ὁποιαδήποτε ποσὰ ἢ μεγέθη εἶναι ἀνάλογα, ὅταν ἦναι οὕτω πως συνδεδεμένα πρὸς ἄλληλα, ὥστε δύο ὁποιαιδήποτε τιμαὶ τοῦ ἑνὸς νὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν ἢ ἀντίστροφον λόγον μὲ τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τοῦ ἑτέρου.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν τὸ πληρονόμενον χρηματικὸν ποσὸν διά τι ὕφασμα ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους αὐτοῦ οὕτως, ὥστε δύο ὁποιαιδήποτε τιμαὶ τοῦ πρώτου νὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ δευτέρου, τὰ ποσά, *πληρονομένη τιμὴ καὶ λαμβανόμενον μῆκος ὑφάσματος,* θέλουσιν εἶναι *ἀνάλογα καὶ κατ' εὐθεῖαν.*

Ὡσαύτως, δι' ἀριθμόν τινα ἐργατῶν πληρόνομεν εἰς μίαν ἡμέραν χρηματικόν τι ποσόν. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν γείνῃ διπλάσιος ἢ τριπλάσιος, ἢ κτλ. καὶ τὸ διὰ τὴν αὐτὴν ἡμέραν πληρωθησόμενον χρηματικὸν ποσὸν γίνεται διπλάσιον, ἢ τριπλάσιον, ἢ κτλ., τότε ὁ λόγος δύο ὁποιωνδήποτε τιμῶν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν θέλει εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τοῦ πληρονομένου χρηματικοῦ ποσοῦ, καὶ τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος ποσά, *ἀριθμὸς ἐργατῶν* καὶ *πληρονόμενον ἡμερομίσθιον*, θέλουσιν εἶναι *ἀνάλογα* καὶ *κατ' εὐθεῖαν*.

Ἂν εἴχομεν ποσότητά τινα τροφῶν πρὸς τροφοδότησιν ἀριθμοῦ τινος στρατιωτῶν διά τινα χρόνον, καὶ ὁ χρόνος τῆς διαρκείας τῶν τροφῶν ἐξηρτᾶτο ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τρεφομένων στρατιωτῶν οὕτως, ὥστε, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν γείνῃ διπλάσιος, ἢ τριπλάσιος, ἢ κτλ., ὁ χρόνος τῆς διαρκείας τῶν τροφῶν νὰ γίνηται τὸ ἥμισυ, ἢ τὸ τρίτον, ἢ κτλ., τότε ὁ λόγος δύω ὁποιωνδήποτε τιμῶν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στρατιωτῶν θέλει εἶναι ἴσος τῷ ἀντιστρόφῳ λόγῳ τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τῆς τῶν τροφῶν διαρκείας, καὶ τὰ δύο ποσά, *ἀριθμὸς στρατιωτῶν* καὶ *χρόνος διαρκείας τῶν τροφῶν*, θέλουσιν εἶναι *ἀνάλογα* καὶ *ἀντιστρόφως*.

215. Σπανίως μέγεθός τι ἐξαρτᾶται μόνον ἐξ ἑνὸς ἄλλου· ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἡ τιμὴ ποσοῦ τινος ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν τιμῶν διαφόρων ἄλλων. Παραδείγματος χάριν, ἡ ἀξία ὑφάσματός τινος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους αὐτοῦ, ἐκ τοῦ πλάτους καὶ ἐκ τῆς ποιότητος αὐτοῦ. Ὡσαύτως, ὁ ἀπαιτούμενος ἀριθμὸς ἐργατῶν πρὸς ἀποπεράτωσιν ἔργου τινὸς ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργασίμων καθ' ἑκάστην ὡρῶν καὶ ἐκ τοῦ ὁρισθησομένου χρόνου πρὸς ἀποπεράτωσιν αὐτοῦ. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει

Τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ποσὸν λέγεται ἀνάλογον πρὸς τὰ ἐξ ὧν ἐξαρτᾶται, ὅταν μεταβαλλομένης μόνον τῆς τιμῆς ἑνὸς ὁποιουδήποτε τούτων καὶ τῶν τιμῶν τῶν λοιπῶν μενουσῶν τῶν αὐτῶν, δύο ὁποιαιδήποτε τιμαὶ τοῦ πρώτου εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τοῦ μεταβαλλομένου.

Παραδείγματος χάριν, ἡ ἀξία ὑφάσματός τινος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους αὐτοῦ, τοῦ πλάτους καὶ τῆς ποιότητός του. Λοιπὸν κατὰ τὰ προλεχθέντα ἡ *ἀξία τοῦ ὑφάσματος* θέλει εἶναι ἀνάλογος τοῦ *μήκους*, ἐάν, μεταβαλλομένου τοῦ μήκους, τοῦ πλάτους δὲ καὶ τῆς ποιότητος ὑποτιθεμένων τῶν αὐτῶν, δύο ὁποιαιδήποτε τιμαὶ τῆς ἀξίας αὐτοῦ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τοῦ μήκους.

Ὡσαύτως ἡ *ἀξία τοῦ ὑφάσματος* θέλει εἶναι ἀνάλογος *τοῦ πλάτους*, ἐάν, μεταβαλλομένου τοῦ πλάτους, τοῦ μήκους δὲ καὶ τῆς ποιότητος ὑποτιθεμένων τῶν αὐτῶν, δύο ὁποιαιδήποτε τιμαὶ τῆς ἀξίας αὐτοῦ ἦναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τοῦ πλάτους αὐτοῦ. Καὶ τελευταῖον ἡ *ἀξία τοῦ ὑφάσματος* θέλει εἶναι ἀνάλογος *τῆς ποιότητος αὐτοῦ*, ἐὰν μεταβαλλομένης μόνον ταύτης, τοῦ μήκους δὲ καὶ τοῦ πλάτους ὑποτιθεμένων τῶν αὐτῶν, δύο ὁποιαιδήποτε τιμαὶ τῆς ἀξίας αὐτοῦ ἦναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τῆς ποιότητος αὐτοῦ.

Ὅταν ποσόν τι ἐξαρτᾶται ἐκ πολλῶν ἄλλων καὶ ἦναι ἀνάλογον πρὸς ταῦτα, ἡ τιμὴ αὐτοῦ δυνατὸν νὰ ἦναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος πρός τινα τούτων καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς ἕτερα. Ἐν τοῖς ἑπομένοις θέλομεν ἐκθέσει τρόπον, δι' οὗ θέλομεν ἀναγνωρίζει πότε δύο ποσὰ εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα καὶ πότε ἀντιστρόφως.

ΤΡΟΠΟΣ ΔΙ ΟΥ ΑΝΑΓΝΩΡΙΖΟΜΕΝ ΑΝ ΔΥΟ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΠΟΣΑ ΗΝΑΙ ΑΝΑΛΟΓΑ.

216. Ἐν τοῖς προηγουμένοις *ὡρίσαμεν* μόνον πότε δύο ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, δὲν *ἀπεδείξαμεν* δὲ καὶ ὅτι τοῦτο ἢ ἐκεῖνο τὸ ποσὸν εἶναι ἀνάλογον πρὸς τοῦτο ἢ ἐκεῖνο. Ἡ ἀπόδειξις τούτου εἶναι κυρίως ἀντικείμενον ἐκείνης τῆς ἐπιστήμης, ἥτις ἰδίᾳ περὶ τῶν συγκρινομένων ποσῶν πραγματεύεται. Ἡμεῖς ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ οὐδέποτε εἴμεθα ἠναγκασμένοι νὰ *ἀποδείξωμεν* ὅτι δύο ὁποιαδήποτε ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, *παραδεχόμεθα* ἁπλῶς τοῦτο ὡς ὑπάρχον, καὶ τοῦτο πρὸς λύσιν τῶν προβλημάτων, τῶν ἀναφερομένων εἰς τὰ ποσὰ ταῦτα.

Ἀλλ' ὑπάρχουσι καὶ ποσά τινα, περὶ ὧν οὐδεμία ἰδιαιτέρως ἐπιστήμη πραγματεύεται, καὶ τοιαῦτα εἶναι ἐκεῖνα, περὶ ὧν ἐπραγματεύθημεν εἰς τὰ προηγουμένως δοθέντα παραδείγματα. Περὶ τῶν ποσῶν τούτων, ὁσάκις ταῦτα περιέχωνται εἰς τὰ πρὸς λύσιν προτεινόμενα προβλήματα, πρέπει ἢ οὕτως ἢ ἄλλως νὰ ἀποφανθῶμεν κατά τινα τρόπον, ἂν ἦναι ἢ μὴ ἀνάλογα· διότι ἄλλως ἡ λύσις τῶν ἐξ αὐτῶν ἐξαρτωμένων ζητημάτων ἀποβαίνει ἀδύνατος. Πρὸς τοῦτο δὲ μεταχειριζόμεθα τὸν ἑξῆς τρόπον τοῦ σκέπτεσθαι.

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο ὁποιαδήποτε ἐξαρτώμενα ἀπ' ἀλλήλων ποσά. Ἵνα ἴδωμεν ἂν ταῦτα ἦναι ἢ μὴ ἀνάλογα, θεωροῦμεν μίαν τινὰ τιμὴν Α' τοῦ πρώτου Α καὶ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν Β' τοῦ δευτέρου Β, ἔπειτα ὑποθέτομεν ὅτι ἡ τιμὴ Α' γίνεται διπλασία, τριπλασία, τετραπλασία, κτλ., ἢ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον, κτλ. αὐτῆς, καὶ παρατηροῦμεν ἂν ἡ μεταξὺ τῶν ποσῶν Α καὶ Β ὑπάρχουσα ἐξάρτησις ἦναι τοιαύτη, ὥστε ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ Β' τοῦ Β νὰ γίνηται διπλασία, τριπλασία, τετραπλασία, κτλ., ἢ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον, κτλ. αὐτῆς. *Ἐὰν* τοῦτο ὑπάρχῃ, παραδεχόμεθα καὶ δυνάμεθα νὰ *ἀποδείξωμεν*, ὅτι τὰ ποσὰ Α καὶ Β εἶναι ἀνάλογα, τουτέστιν, ὅτι δύο *ὁποιαιδήποτε* τιμαὶ τοῦ Α ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἢ ἀντίστροφον λόγον πρὸς τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τοῦ Β.

Ἄς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι διπλασιαζομένου, τριπλασιαζομένου, κτλ., ἢ γινομένου δίς, τρίς, τετράκις κτλ. μικροτέρου τοῦ Α, τὸ Β διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, κτλ., ἢ γίνεται δίς, τρίς, τετράκις, κτλ. μικρότερον· λέγω ὅτι τότε

Δύο ὁποιαιδήποτε τιμαὶ τοῦ Α θέλουσιν ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ Β, καὶ ἐπομένως ὅτι τὰ ποσὰ Α καὶ Β θέλουσιν εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ἵνα ὁρίσωμέν πως τὰς ἰδέας, ὅτι τὸ Α ἔλαβε τὰς τιμὰς Α' καὶ $\frac{3}{5}$ Α'. Λέγω ὅτι κατὰ τὰ προϋποτεθέντα καὶ τὸ Β θέλει λάβει τὰς τιμὰς Β' καὶ $\frac{3}{5}$ Β', εἰς τρόπον ὥστε ὁ λόγος τοῦ $\frac{3}{5}$ Α' πρὸς τὸ Α' νὰ ἦναι ἴσος τῷ λόγῳ τοῦ $\frac{3}{5}$ Β' πρὸς τὸ Β'.

Διότι δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ Α' ἔγεινε πρῶτον 3Α', ἤτοι ἐτριπλασιάσθη, καὶ ἔπειτα τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ 3Α' ἔγεινε τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ, ἤτοι $\frac{3}{5}$ Α'. Ὅταν τριπλασιασθῇ τὸ Α' καὶ τὸ Β' θέλει καθ' ὑπόθεσιν τριπλασιασθῆ καὶ γίνει 3Β'. Ἐπειδὴ πάλιν τὸ 3Α' ἔγεινε τὸ πέμπτον αὐτοῦ, ἤτοι $\frac{3}{5}$ Α', καὶ τὸ 3Β' θέλει γίνει τὸ πέμπτον αὐτοῦ, ἤτοι $\frac{3}{5}$ Β'. Λοιπὸν $\frac{3}{5}$ Β' θέλει εἶναι ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ Β' εἰς τὴν τιμὴν $\frac{3}{5}$ Α' τοῦ Α', ἐπομένως ὁ λόγος $\frac{3}{5}$ τῶν δύο τιμῶν $\frac{3}{5}$ Α', Α' τοῦ πρώτου ποσοῦ Α θέλει εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ $\frac{3}{5}$ τῶν δύο ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν $\frac{3}{5}$ Β', Β' τοῦ δευτέρου ποσοῦ Β. Τὰ ποσὰ λοιπὸν Α καὶ Β εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα, τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὸ ζητούμενον.

Ἄς ὑποθέσωμεν κατὰ δεύτερον λόγον ὅτι διπλασιαζομένου, τριπλασιαζομένου, κτλ. τοῦ Α', τὸ Β' γίνεται τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, κτλ.

καὶ ἀντιστρόφως· γινομένου τοῦ A′ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, κτλ., τὸ B′ γίνεται διπλάσιον, τριπλάσιον, κτλ. λέγω ὅτι τότε

Δύο ὁποιαιδήποτε τιμαὶ τοῦ Α θέλουσιν ἔχει λόγον ἀντίστροφον πρὸς τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τοῦ Β, ἑπομένως ὅτι τὰ ποσὰ Α καὶ Β θέλουσιν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ἵνα ὁρίσωμεν πάλιν τὰς ἰδέας, ὅτι τὸ A′ ἔλαβε τὴν τιμὴν $\frac{3}{5}$A′. Λέγω ὅτι κατὰ τὰ προϋποτεθέντα καὶ τὸ B′ θέλει λάβει τὴν τιμὴν $\frac{5}{3}$B′, εἰς τρόπον ὥστε ὁ λόγος τοῦ $\frac{3}{5}$A′ πρὸς τὸ A′ νὰ ἦναι ἀντίστροφος τοῦ λόγου τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν $\frac{5}{3}$B′ καὶ B′.

Διότι δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ A′ ἔγεινε πρῶτον 3A′, ἤτοι ἐτριπλασιάσθη, καὶ ἔπειτα τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ 3A′ ἔγεινε τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ, ἤτοι $\frac{3}{5}$A′. Ὅταν τριπλασιασθῇ τὸ A′, τὸ B′ θέλει γείνει κατὰ τὴν προηγουμένην ὑπόθεσιν $\frac{B'}{3}$, ὅταν δὲ τὸ 3A′ γείνῃ $\frac{3}{5}$A′, ἡ ἀντίστοιχος αὐτῷ τιμὴ $\frac{B'}{3}$ θέλει γείνει κατὰ τὴν αὐτὴν ὑπόθεσιν $\frac{5}{3}$B′. Λοιπὸν $\frac{5}{3}$B′ θέλει εἶναι ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ B′ εἰς τὴν τιμὴν $\frac{3}{5}$A′ τοῦ A′. Ὁ λόγος λοιπὸν τῶν δύο τιμῶν $\frac{3}{5}$A′ καὶ A′ τοῦ πρώτου εἶναι ἀντίστροφος τοῦ λόγου τῶν δύο ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν $\frac{5}{3}$B′ καὶ B′ τοῦ δευτέρου. Τὰ ποσὰ λοιπὸν Α καὶ Β εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, τοῦθ' ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Παραδείγματος χάριν, *ἐὰν παραδεχθῶμεν* ὅτι χρειαζόμεθα πρὸς τροφὴν διπλασίου, τριπλασίου..., ἢ δίς, τρίς... μικροτέρου ἀριθμοῦ στρατιωτῶν, διπλασίαν, τριπλασίαν... ἢ δίς, τρίς... ὀλιγωτέραν ποσότητα ἄρτου, θέλομεν *συμπεράνει* ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν εἶναι ἀνάλογος τῆς ποσότητος τοῦ ἀπαιτουμένου πρὸς τροφὴν αὐτῶν ἄρτου.

Ὡσαύτως, *ἐὰν παραδεχθῶμεν* ὅτι πρὸς ἀγορὰν διπλασίου, τριπλασίου..., ἢ δίς, τρίς... ὀλιγωτέρου ἀριθμοῦ πήχεων, χρειαζόμεθα διπλασίαν, τριπλασίαν... ἢ δίς, τρίς... μικροτέραν ποσότητα χρημάτων, θέλομεν *συμπεράνει* ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων ὑφάσματός τινος εἶναι ἀνάλογος τῆς πρὸς ἀγορὰν αὐτοῦ ἀπαιτουμένης ποσότητος χρημάτων.

Παρομοίως, *ἐὰν παραδεχθῶμεν* ὅτι χρειαζόμεθα διπλάσιον, τριπλάσιον..., ἢ δίς, τρίς... ὀλιγώτερον ἀριθμὸν ἐργατῶν, ἵνα ἀποπερατώσωσιν οὗτοι ἔργον τι εἰς δίς, τρίς... ὀλιγώτερον ἀριθμὸν ἡμερῶν, ἢ εἰς διπλάσιον, τριπλάσιον..., θέλομεν *συμπεράνει* ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν εἶναι ἀνάλογος τοῦ ἀπαιτουμένου πρὸς ἀποπεράτωσιν τοῦ ἔργου ἀριθμοῦ ἡμερῶν.

Τὰ τῶν δύο πρώτων παραδειγμάτων ποσὰ εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα, τὰ δὲ τοῦ τρίτου ἀντιστρόφως.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἡ μεταξὺ τῶν θεωρουμένων ποσῶν ὑπάρχουσα σχέσις εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον τοιαύτης φύσεως, ὥστε δὲν διστάζομεν νὰ παραδεχθῶμεν ἀμέσως ὅτι ὑπάρχει μεταξὺ αὐτῶν ἡ ἀπαιτουμένη συνθήκη, ἵνα ταῦτα ὦσιν ἀνάλογα. Εἴς τινας ὅμως περιπτώσεις χρειάζεται οὐκ ὀλίγη προσοχὴ πρὸς τοῦτο, καθότι εἶναι εὔκολον νὰ ἀπατηθῶμεν, καὶ ἑπομένως νὰ εὕρωμεν λίαν ἐσφαλμένα ἐξαγόμενα ὡς ἐκ τούτου.

Παραδείγματος χάριν, εἴπομεν προηγουμένως ὅτι ἡ ἀξία ὑφάσματός τινος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους, τοῦ πλάτους καὶ τῆς ποιότητος αὐτοῦ. Τώρα δυνάμεθα μετ' εὐκολίας νὰ πεισθῶμεν ὅτι αὕτη εἶναι ἀνάλογος τοῦ μήκους καὶ τοῦ πλάτους αὐτοῦ, ἀλλ' ἐὰν παραδεχθῶμεν ὅτι εἶναι ἀνάλογος καὶ τῆς ποιότητος αὐτοῦ, θέλομεν σφάλει, ἂν καὶ μετά τινος δυσκολίας δυνάμεθα νὰ πεισθῶμεν περὶ τοῦ σφάλματός μας τούτου. Ἵνα δὲ γείνωμεν καταληπτότεροι, ἂς μερικεύσωμεν τὸ ζήτημα. Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι 3 πήχεις ὑφάσματός τινος ὡρισμένης ποιότητος τιμῶνται ἀντὶ 15 δραχμῶν, καὶ ὅτι ἔχομεν 3 πήχεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ἀλλὰ διπλασίας, ἐὰν μᾶς ἐπιτρέπηται χάριν συντομίας νὰ ἐκφρασθῶμεν οὕτω, ποιότητος. Ἐὰν παραδεχθῶμεν ὅτι αὗται πρέπει νὰ τιμῶνται ἀντὶ 30 δραχμῶν, θέλομεν σφάλει, καὶ ἰδοὺ διατί·

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀξία τῆς ὕλης, ἐξ ἧς κατεσκευάσθησαν οἱ 3 πήχεις τοῦ πρώτου ὑφάσματος, ἦτο 5 δραχμῶν καὶ τὰ πρὸς κατασκευὴν αὐτῶν ἔξοδα 10, ὥστε τὸ ὅλον τῆς ἀξίας τῶν 3 πήχεων εἶναι δραχμαὶ 15. Ἵνα κατασκευάσωμεν τὰς 3 πήχεις τῆς διπλασίας, οὕτως εἰπεῖν, ποιότητος, πρέπει προφανῶς νὰ πληρώσωμεν 10 δραχμὰς διὰ τὴν ἀναγκαίαν ὕλην, τὴν ἔχουσαν καθ' ὑπόθεσιν διπλασίαν ἀξίαν, καὶ ἄλλας 10 διὰ τὴν κατασκευὴν αὐτῶν, ἥτις εἶναι ἡ αὐτή. Θέλομεν λοιπὸν ἐξοδεύσει εἰς τὴν δευτέραν ταύτην περίπτωσιν δραχμὰς μόνον 20 καὶ οὐχὶ 30. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι διπλασιασθείσης, οὕτως εἰπεῖν, τῆς ποιότητος τοῦ ὑφάσματος, ἡ ἀξία αὐτοῦ πραγματικῶς δὲν διπλασιάζεται, ἐπομένως ἡ ἀξία τοῦ ὑφάσματος ἐξαρτᾶται μὲν ἐκ τῆς ποιότητος αὐτοῦ, ἀλλὰ καὶ δὲν εἶναι ἀνάλογος ταύτης, ὥστε ἠθέλομεν σφάλει πολὺ ἂν ἐλύομεν πρόβλημά τι στηριζόμενοι ἐπὶ τῆς ἐσφαλμένης ταύτης ὑποθέσεως.

ΑΠΛΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ.

217. Διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν λύονται ἐκεῖνα τὰ ζητήματα, ἐν οἷς μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ ποσοῦ τινος καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ ἑτέρου τινὸς ποσοῦ, πρὸς ὃ τὸ πρῶτον *ὑποτίθεται* ἀνάλογον καὶ μᾶς ζητεῖται ποία θέλει εἶναι ἡ νέα τιμὴ τοῦ δευτέρου ποσοῦ, ὅταν τὸ πρῶτον λάβῃ ἑτέραν τινὰ δεδομένην τιμήν.

Παραδείγματος χάριν, τὸ ἑξῆς πρόβλημα

Διὰ 5 πήχεις ὑφάσματός τινος ἐπληρώθησαν 20 δραχμαί· πόσαι δραχμαὶ ἤθελον πληρωθῆ διὰ 7 πήχεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος; ἐν ᾧ τὰ δύο δεδομένα ποσὰ εἶναι *ἀριθμὸς πήχεων καὶ δραχμαί*, καὶ μᾶς ἐδόθη μία τιμὴ 5 τοῦ πρώτου καὶ ἑτέρα τις τιμὴ 20 τοῦ δευτέρου, ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τοῦ πρώτου, καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ νέα τιμὴ τοῦ δευτέρου, ἤτοι τῶν δραχμῶν, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν δευτέραν τιμὴν 7 τοῦ πρώτου, τὸ ἀνωτέρω, λέγομεν, ζήτημα εἶναι πρόβλημα τῆς καλουμένης *ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν*.

Πρὸς λύσιν αὐτοῦ ἂς παραστήσωμεν διὰ χ τὴν νέαν τιμὴν τοῦ δευτέρου ποσοῦ, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν τιμὴν 7 τοῦ πρώτου. Ἐπειδὴ τὰ δεδομένα ποσὰ *ὑποτίθενται* ἀνάλογα, εἶναι δὲ προφανῶς κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα, διότι, αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πήχεων, ἡ ποσότης τῶν δραχμῶν αὐξάνει, ὁ λόγος $\frac{5}{7}$ τῶν δύο τιμῶν 5 καὶ 7 τοῦ πρώτου θέλει εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ $\frac{20}{\chi}$ τῶν δύο ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν 20 καὶ χ τοῦ δευτέρου, τουτέστι θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\frac{5}{7}=\frac{20}{\chi}$$

ἢ τὴν ἀναλογίαν $\quad 5 : 7 = 20 : \chi.$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα (206)

$$\chi=\frac{7\times20}{5}=28.$$

Λοιπὸν 28 εἶναι ἡ νέα τιμὴ τῶν δραχμῶν, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν νέαν τιμὴν 7 τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πήχεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.—*Πρὸς ἐνδυμασίαν 25 στρατιωτῶν ἐχρειάσθησαν 53 πήχεις ὑφάσματός τινος· πόσοι πήχεις θέλουσιν ἐπαρκέσει διὰ 40 στρατιώτας;*

Ἐνταῦθα τὰ δύο δεδομένα ποσὰ εἶναι *ἀριθμὸς στρατιωτῶν* καὶ *ἀριθμὸς πήχεων*, μᾶς ἐδόθη δὲ ἡ τιμὴ 25 τοῦ πρώτου καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς ταύτην τιμὴ 53 τοῦ δευτέρου, καὶ μᾶς ζητεῖται ποία θέλει εἶναι ἡ νέα τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πήχεων, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν ὑποτεθῇ 40.

Ἔστω χ ἡ ζητουμένη αὕτη νέα τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πήχεων. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ *ὑποτίθενται ἀνάλογα* καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων πήχεων πρὸς ἐνδυμασίαν περισσοτέρου ἀριθμοῦ στρατιωτῶν πρέπει νὰ ἦναι μεγαλείτερος, τὰ ποσὰ εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα. Ὁ λόγος λοιπὸν $\frac{25}{40}$ τῶν δύο τιμῶν 25 καὶ 40 τοῦ πρώτου θέλει εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ $\frac{53}{\chi}$ τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τοῦ δευτέρου, τουτέστι θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\frac{25}{40}=\frac{53}{\chi},$$

ἢ τὴν ἀναλογίαν

$$25 : 40=53 : \chi,$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα (206)

$$\chi=\frac{53\times40}{25}=84+\frac{4}{5}.$$

Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν τῶν ἀπαιτουμένων πήχεων εἶναι 84 καὶ $\frac{4}{5}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.=*28 ἐργάται ἐτελείωσαν ἔργον τι εἰς 15 ἡμέρας· πόσοι ἐργάται ἤθελον τελειώσει τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 10 ἡμέρας;*

Ἐνταῦθα τὰ δύο δεδομένα ποσὰ εἶναι *ἀριθμὸς ἡμερῶν* καὶ *ἀριθμὸς ἐργατῶν*, μᾶς ἐδόθη δὲ ἡ τιμὴ 28 τοῦ δευτέρου, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν 15 τοῦ πρώτου, καὶ μᾶς ζητεῖται ποία θέλει εἶναι ἡ νέα τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν λάβῃ τὴν νέαν τιμὴν 10.

Ἔστω χ ἡ νέα τιμὴ τοῦ δευτέρου, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν νέαν τιμὴν 10 τοῦ πρώτου. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ ὑποτίθενται ἀνάλογα καί, αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν πρέπει προφανῶς νὰ ἐλαττωθῇ, τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Ὁ λόγος λοιπὸν $\frac{15}{10}$ τῶν δύο τιμῶν 15 καὶ 10 τοῦ πρώτου εἶναι ἴσος τῷ ἀντιστρόφῳ λόγῳ $\frac{\chi}{28}$ τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν 28 καὶ χ τοῦ δευτέρου. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\frac{15}{10}=\frac{\chi}{28},$$

ἢ τὴν ἀναλογίαν

$$15:10=\chi:28,$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα

$$\chi=\frac{15\times 28}{10}=42.$$

Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν τῶν ἀναγκαίων ἐργατῶν πρὸς ἀποπεράτωσιν τοῦ αὐτοῦ ἔργου εἰς 10 ἡμέρας εἶναι 42.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.—*Ποσότης τις τροφῶν ἐπήρκεσεν εἰς 50 στρατιώτας 27 ἡμέρας· πόσος πρέπει νὰ ἦναι ὁ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν, ἵνα ἡ αὐτὴ τῶν τροφῶν ποσότης ἐπαρκέσῃ 35 ἡμέρας;*

Ἐνταῦθα τὰ δύο δεδομένα καὶ *ὑποτιθέμενα* ἀνάλογα ποσὰ εἶναι *ὁ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν* καὶ *ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν*, μᾶς ἐδόθη δὲ ἡ τιμὴ 50 τοῦ πρώτου, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν 27 τοῦ δευτέρου, καὶ μᾶς ζητεῖται ποία θέλει εἶναι ἡ νέα τιμὴ τοῦ πρώτου, ὅταν τὸ δεύτερον λάβῃ τὴν τιμὴν 35.

Ἔστω χ ἡ νέα τιμὴ τοῦ πρώτου, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν νέαν τιμὴν 35 τοῦ δευτέρου. Ἐπειδή, αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στρατιωτῶν, ὁ ἀναγκαῖος πρὸς κατανάλωσιν ποσοῦ τινος τροφῶν ἀριθμὸς ἡμερῶν προφανῶς ἐλαττοῦται, τὰ ὑποτεθέντα ἀνάλογα ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Ὁ λόγος λοιπὸν $\frac{27}{35}$ τῶν δύο τιμῶν 27 καὶ 35 τοῦ δευτέρου εἶναι ἴσος τῷ ἀντιστρόφῳ λόγῳ $\frac{\chi}{50}$ τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν 50 καὶ χ τοῦ πρώτου. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$\frac{27}{35}=\frac{\chi}{50},$$

ἢ τὴν ἀναλογίαν

$$27:35=\chi:50,$$

ἐξ ἧς

$$\chi=\frac{50\times 27}{35}=38+\frac{4}{7}.$$

Ὁ ἀπαιτούμενος λοιπὸν ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν εἶναι 38 καὶ $\frac{4}{7}$ τοῦ στρατιώτου· τουτέστι, διὰ μὲν 38 στρατιώτας περισσεύει καί τι ἐκ τῶν τροφῶν, διὰ δὲ 39 ἐλλείπει τι ἐξ αὐτῶν.

218. Συνήθως πρὸς λύσιν τῶν ἀναγομένων εἰς τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν ζητημάτων πράττομεν ὡς ἑξῆς·

Γράφομεν ἐπὶ καθέτου στήλης τὴν μίαν ὑπὸ τὴν ἄλλην τὰς *δύο τιμὰς τοῦ ἑνὸς τῶν δεδομένων ποσῶν καὶ ἐπὶ τῆς κορυφῆς αὐτῆς τὸ εἶδος τοῦ ποσοῦ τούτου. Ὡσαύτως ἐπὶ δευτέρας καθέτου στήλης γράφομεν τὰς δύο τιμὰς τοῦ ἑτέρου τῶν δεδομένων ποσῶν οὕτως, ὥστε αἱ ἀντιστοιχοῦσαι νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντίου γραμμῆς, καὶ ἐπὶ τῆς κορυφῆς αὐτῆς τὸ εἶδος τοῦ δευτέρου ποσοῦ. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ ὑποτίθενται ἀνάλογα, παρατηροῦμεν ἐὰν ταῦτα ἦναι κατ' εὐθεῖαν ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, καί, ἐὰν μὲν ἦναι κατ' εὐθεῖαν, σχηματίζομεν ἀμέσως τὴν ἀναλογίαν, ἐξ ἧς θέλομεν πορισθῆ τὴν ζητουμένην τιμὴν τῆς ἀγνώστου, γράφοντες ἡγουμένους ἢ ἑπομένους αὐτῆς τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς ποσοῦ καὶ τὴν ἀντίστοιχον αὐτῷ τιμὴν τοῦ ἑτέρου· ἐὰν δὲ ἀντιστρόφως, τότε σχηματίζομεν τὴν ἀπαιτουμένην πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ἀναλογίαν γράφοντες τὴν μίαν τιμὴν τοῦ ἑνὸς καὶ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τοῦ ἑτέρου ἄκρους ἢ μέσους.*

Παραδείγματος χάριν, διὰ τὴν λύσιν τοῦ πρώτου ζητήματος ἠθέλομεν, κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα, διατάξει τὰ δεδομένα οὕτω·

πήχεις	δραχμαὶ
5	20
7	x

καὶ ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα, σχηματίζομεν τὴν ἀναλογίαν

$$5 : 7 = 20 : x$$

γράφοντες τὰς δύο ἀντιστοίχους τιμὰς 5 καὶ 20 τῶν δύο δεδομένων ποσῶν, πήχεων καὶ δραχμῶν, ἡγουμένους αὐτῆς, ἢ ἑπομένους οὕτω

$$7 : 5 = x : 20,$$

ἐξ ὧν ποριζόμεθα διὰ τὴν ἄγνωστον x τὴν αὐτὴν τιμὴν

$$x = \frac{7 \times 20}{5} = 28.$$

Ὡσαύτως διὰ τὴν λύσιν τοῦ δευτέρου παραδείγματος ἠθέλομεν γράψει

στρατιῶται	πήχεις
25	53
40	x

καὶ ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα, ἠθέλομεν σχηματίσει ἀμέσως τὴν ἀναλογίαν

$$25 : 40 = 53 : x,$$

ἐν ᾗ αἱ δύο ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ 25 καὶ 53 ἐτέθησαν ἡγούμενοι, ἢ τὴν ἑξῆς

$$40 : 25 = x : 53,$$

ἐν ᾗ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ 25 καὶ 53 ἐτέθησαν ἑπόμενοι.

Διὰ τὴν λύσιν τοῦ τρίτου ἠθέλομεν κατὰ τὸν αὐτὸν κανόνα γράψει

ἡμέραι	ἐργάται
15	28
10	x

καὶ ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἠθέλομεν σχηματίσει τὴν ἀναλογίαν

$$10 : 15 = 28 : x,$$

ἐν ᾗ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ 15 καὶ 28 ἐτέθησαν μέσοι.

Διὰ τὴν λύσιν τοῦ τετάρτου προβλήματος ἠθέλομεν γράψει

ἡμέραι	στρατιῶται
27	50
35	x,

καὶ ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἠθέλομεν σχηματίσει τὴν ἀναλογίαν

$$27 : 35 = x : 50,$$

ἐν ᾗ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ 27 καὶ 50 ἐτέθησαν ἄκροι, ἢ τὴν

$$35 : 27 = 50 : x,$$

ἐν ᾗ αἱ αὐταὶ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ ἐτέθησαν μέσοι.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 1.—Ἐπειδὴ διὰ τὴν λύσιν τῶν τοιούτου εἴδους προβλημάτων ὑπάρχει γενικός τις τρόπος πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀγνώστου x, καὶ αὕτη προσδιορίζεται πάντοτε διὰ τῶν τριῶν δεδομένων ἀριθμῶν, ὁ γενικὸς οὗτος τρόπος ὠνομάσθη *μέθοδος τῶν τριῶν*, καὶ προσετέθη καὶ ἡ λέξις *ἁπλῆ* πρὸς διάκρισιν τῆς *συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν*, περὶ ἧς θέλομεν ἀμέσως πραγματευθῇ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 2.— Ἀφοῦ σχηματίσωμεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον τὴν ἀναλογίαν, δι' ἧς εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς ἀγνώστου x, συνήθως ἀντὶ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἀμέσως τοὺς δύο μέσους ἢ τοὺς δύο ἄκρους καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ διαιρῶμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου ἢ μέσου, *ἁπλοποιοῦμεν* τὴν ἀναλογίαν καθιστῶντες τοὺς δύο μέσους αὐτῆς ὅρους πρώτους πρὸς τὸν γνωστὸν ἄκρον, ἢ τοὺς δύο ἄκρους πρώτους πρὸς τὸν γνωστὸν μέσον. Ἐὰν δὲ ἡ ἀναλογία ἔχῃ καὶ κλασματικοὺς ὅρους, ἐξαλείφομεν πρῶτον τοὺς παρονομαστὰς αὐτῶν πολλαπλασιάζοντες καταλλήλως ἕνα ἄκρον καὶ ἕνα μέσον τῆς ἀναλογίας, καὶ ἔπειτα καθιστῶμεν τοὺς ἄκρους αὐτῆς πρώτους πρὸς τοὺς μέσους.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$15 : 24 = 35 : \chi, \qquad (1)$$

ἀντὶ νὰ πορισθῶμεν ἀμέσως ἐξ αὐτῆς τὴν τιμὴν τῆς χ

$$\chi = \frac{24 \times 35}{15}$$

ἁπλοποιοῦμεν αὐτὴν καθιστῶντες τοὺς μέσους αὐτῆς 24 καὶ 35 πρώτους πρὸς τὸν γνωστὸν ἄκρον 15 διὰ τῆς ἐξαλείψεως τῶν κοινῶν εἰς αὐτοὺς παραγόντων. Οὕτως, ἐπειδὴ ὁ 24 καὶ 15 ἔχουσι κοινὸν παράγοντα τὸν 3, διαιροῦντες αὐτοὺς διὰ 3 θέλομεν ἔχει ἀντὶ τῆς ἀναλογίας (1) τὴν ἑξῆς

$$5 : 8 = 35 : \chi, \qquad (2)$$

καὶ ἐπειδὴ πάλιν ὁ ἄκρος 5 καὶ ὁ μέσος 35 ἔχουσι κοινὸν παράγοντα τὸν 5, ἐξαλείφομεν αὐτὸν διαιροῦντες αὐτοὺς διὰ 5, καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἀναλογίαν

$$1 : 8 = 7 : \chi, \qquad (3)$$

ἥτις δίδει διὰ χ τὴν αὐτὴν τιμὴν 56, ἣν καὶ ἡ ἀναλογία (1)· διότι ἀπεδείξαμεν προηγουμένως ὅτι διαιροῦντες ἕνα τῶν ἄκρων καὶ ἕνα τῶν μέσων ἀναλογίας τινὸς διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ θέλομεν ἔχει νέαν ἀναλογίαν (207).

Ὡσαύτως, ἂν εἴχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\tfrac{12}{5} : 3 = 14 : \chi, \qquad (1)$$

ἠθέλομεν ἐξ αὐτῆς πορισθῇ διαδοχικῶς τὰς ἑξῆς

$$12 : 3 \times 5 = 14 : \chi,$$
$$4 : 5 = 14 : \chi,$$
$$2 : 5 = 7 : \chi,$$

πολλαπλασιάζοντες πρῶτον τὸν ἄκρον $\frac{12}{5}$ καὶ τὸν μέσον 3 ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 5 καὶ διαιροῦντες ἀκολούθως τὸν ἄκρον 12 καὶ τὸν μέσον 3×5 τῆς νέας ἀναλογίας $12 : 3 \times 5 = 14 : \chi$ διὰ 3, ἔπειτα τὸν νέον ἄκρον 4 καὶ τὸν ἕτερον μέσον 14 τῆς προκυπτούσης ἀναλογίας $4 : 5 = 14 : \chi$ διὰ 2, καὶ ἐπειδὴ οἱ μέσοι 5 καὶ 7 τῆς τελευταίας ἀναλογίας $2 : 5 = 7 : \chi$ εἶναι πρῶτοι πρὸς τὸν 2, ἡ ἀναλογία

(1) ἔλαβε τὴν ἁπλουστέραν αὐτῆς μορφήν, ἐξ ἧς πορίζόμεθα εὐκολώτερον καὶ συντομώτερον τὴν τιμὴν τῆς ἀγνώστου χ.

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ.

219. Διὰ τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν λύονται ἐκεῖνα τὰ ζητήματα ἐν οἷς μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ ποσοῦ τινος καθὼς καὶ αἱ τιμαὶ πολλῶν ἄλλων, ἀφ' ὧν ἐξαρτᾶται τὸ πρῶτον καὶ πρὸς ἃ ὑποτίθεται ἀνάλογον, καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ νέα τιμὴ αὐτοῦ, ὅταν ἅπαντα τὰ ἄλλα λάβωσι νέας τιμάς.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα· *25 ἐργάται ἐργαζόμενοι 11 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς 18 ἡμέρας κατεσκεύασαν τεῖχος 5 μέτρων τὸ ὕψος, 125 τὸ μῆκος καὶ 3 τὸ πλάτος· πόσοι ἐργάται, ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς 20 ἡμέρας θέλουσι κατασκευάσει τεῖχος 9 μέτρων τὸ ὕψος, 75 τὸ μῆκος καὶ 4 τὸ πλάτος;*
ἐν ᾧ μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ 25 τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν, καθὼς καὶ αἱ τιμαὶ 11, 18, 5, 125, 3 τῶν ἐργασίμων *ὡρῶν*, τῶν *ἡμερῶν*, τοῦ *ὕψους*, τοῦ *μήκους* καὶ τοῦ *πλάτους* τοῦ ὑπ' αὐτῶν κατασκευασθέντος τείχους, ἀφ' ὧν ποσῶν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν ἐξαρτᾶται καὶ πρὸς ἃ ὑποτίθεται ἀνάλογος, καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ νέα τιμὴ τῶν ἐργατῶν, ὅταν πάντα τὰ ἄλλα λάβωσιν ἀμοιβαίως τὰς νέας τιμὰς 10, 20, 9, 75, 4, ἂν εἴχομεν, λέγομεν, πρὸς λύσιν τὸ ἀνωτέρω ζήτημα, ὁ γενικὸς τρόπος, δι' οὗ εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν ἐργατῶν, καλεῖται *σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν*. Καὶ ἰδοὺ διατί.

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ ποσὰ *ὧραι*, *ἡμέραι*, *ὕψος*, *μῆκος* καὶ *πλάτος*, πρὸς ἃ τὸ δεδομένον *ἐργάται* ὑποτίθεται ἀνάλογον, μεταβάλλονται πρῶτον τὸ ἕν, ἔπειτα καὶ τὸ δεύτερον, εἶτα καὶ τὸ τρίτον, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι καὶ τοῦ τελευταίου, λαμβάνοντα τὰς νέας αὐτῶν τιμάς, καὶ εὕρωμεν τὰς εἰς ἑκάστην νέαν μεταβολὴν τῶν δεδομένων ἀντιστοιχούσας τιμὰς τοῦ ζητουμένου, ἡ εὑρεθησομένη τελευταῖον τιμὴ αὐτοῦ μετὰ τὴν μεταβολὴν ἁπάντων τῶν ἀφ' ὧν τοῦτο ἐξαρτᾶται ποσῶν θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν διαφόρων διαδοχικῶν τιμῶν τοῦ ζητουμένου διατάσσομεν τὰ δεδομένα τοῦ ζητήματος ὡς ἑξῆς;

ἐργάται	ὧραι	ἡμέραι	ὕψη	μήκη	πλάτη
25	11	18	5	125	3
χ	10	20	9	75	4

παριστῶντες διὰ χ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν ἐργατῶν.

Ἄς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα ὅτι μόνον ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργασίμων ὡρῶν ἀπὸ 11 γίνεται 10, αἱ δὲ ἡμέραι, τὸ μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος μένουσιν ἀμετάβλητα. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν 25 θέλει μεταβληθῆ ἀναλόγως, καὶ ἐὰν καλέσωμεν υ τὴν νέαν αὐτοῦ τιμήν, θέλομεν εὕρει αὐτὴν διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν λύοντες τὸ ἑξῆς ζήτημα·

1ον.—*25 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 11 ὥρας τὴν ἡμέραν, κατεσκεύασαν τὸ τεῖχος εἰς 18 ἡμέρας· πόσοι ἐργάται, ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν, ἤθελον κατασκευάσει τὸ αὐτὸ τεῖχος εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἡμερῶν;*

ἐργάται	ὧραι
25	11
υ	10

δι' οὗ εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν υ τῶν ἐργατῶν.

Γνωστοῦ ὄντος τοῦ υ, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι καὶ ὁ ἀριθμὸς 18 τῶν καθ' ἃς εἰργάσθησαν ἡμερῶν ἔγεινεν 20, ἐνῷ τὸ ὕψος, μῆκος καὶ πλάτος ἔμειναν τὰ αὐτά, καὶ ἂς ζητήσωμεν ποίαν μεταβολὴν θέλει λάβει ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς υ τῶν ἐργατῶν. Εἶναι φανερὸν ὅτι πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ λύσωμεν διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν τὸ ἑξῆς ζήτημα·

2ον.—*υ ἐργάται, ἐργαζόμενοι 18 ἡμέρας, κατεσκεύασαν τὸ τεῖχος· πόσοι ἐργάται, ἐργαζόμενοι 20 ἡμέρας, θέλουσι κατασκευάσει τὸ αὐτὸ τεῖχος;*

ἐργάται	ἡμέραι
υ	18
φ	20

δι' οὗ εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν φ τῶν ἐργατῶν.

Τοῦ φ ὄντος ἀριθμοῦ γνωστοῦ, ἂς ὑποθέσωμεν πάλιν ὅτι καὶ τὸ ὕψος 5 τοῦ τείχους ἔγεινεν 6, τοῦ μήκους καὶ πλάτους μεινάντων τῶν αὐτῶν, καὶ ἂς ζητήσωμεν ποίαν μεταβολὴν ὡς ἐκ τούτου θέλει λάβει ὁ ἀριθμὸς φ τῶν ἀπαιτουμένων ἐργατῶν. Πρὸς τοῦτο εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ λύσωμεν διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν τὸ ἑξῆς ζήτημα·

3ον.—*φ ἐργάται χρειάζονται πρὸς κατασκευὴν τείχους ἔχοντος 5 μέτρων ὕψος· πόσοι θέλουσι χρειασθῆ πρὸς κατασκευὴν τοῦ αὐτοῦ τείχους, ἀλλ' ἔχοντος 9 μέτρων ὕψος;*

ἐργάται	ὕψη
φ	5
ψ	9

δι' οὗ εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν ψ τῶν ἀπαιτουμένων ἐργατῶν.

Τοῦ ψ ὄντος ἀριθμοῦ γνωστοῦ, ἂς ὑποθέσωμεν πρὸς τούτοις ὅτι καὶ τὸ μῆκος 125 τοῦ τείχους ἔγεινεν 75, τοῦ πλάτους μείναντος ἀμεταβλήτου, καὶ ἂς ζητήσωμεν ποίαν μεταβολὴν ὡς ἐκ τούτου θέλει λάβει ὁ ἀριθμὸς ψ τῶν ἀπαιτουμένων ἐργατῶν. Εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει πρὸς τοῦτο νὰ λύσωμεν διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν τὸ ἑξῆς ζήτημα·

4ον.—*ψ ἐργάται ἀπαιτοῦνται, ἵνα κατασκευάσωσι τεῖχος ἔχον 125 μέτρων μῆκος· πόσοι ἐργάται θέλουσι χρειασθῆ, ἵνα κατασκευάσωσι τεῖχος 75 μέτρων τὸ μῆκος;*

ἐργάται	μήκη
ψ	125
ω	75

δι' οὗ εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν ω τῶν ἀναγκαίων ἐργατῶν.

Γνωστοῦ ὄντος τοῦ ω, ἂς ὑποθέσωμεν τέλος ὅτι καὶ τὸ πλάτος 3 τοῦ τείχους ἔγεινε 4, καὶ ἂς ζητήσωμεν ποίαν μεταβολὴν θέλει λάβει ὁ ἀριθμὸς ω τῶν ἀπαιτουμένων πρὸς κατασκευὴν αὐτοῦ ἐργατῶν. Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν παραστήσωμεν ὡς προείπομεν διὰ χ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν ἐργατῶν, πρέπει πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ νὰ λύσωμεν πάλιν διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν τὸ ἑξῆς ζήτημα·

5ον.—*ω ἐργάται κατεσκεύασαν τεῖχος 3 μέτρων τὸ πλάτος· πόσοι ἐργάται θέλουσι κατασκευάσει τὸ αὐτὸ τεῖχος, ἀλλ' ἔχον πλάτος 4 μέτρων;*

ἐργάται	πλάτη
ω	3
χ	4

δι' οὗ εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν χ τῶν ἐργατῶν.

Ὁ εὑρεθεὶς λοιπὸν ἀριθμὸς χ θέλει προφανῶς παριστᾷ τὴν μεταβολὴν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν 25 ἐργατῶν, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν σύγχρονον μεταβολὴν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργασίμων ὡρῶν, τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν, τοῦ ὕψους, τοῦ μήκους καὶ πλάτους τοῦ τείχους. Θέλει λοιπὸν εἶναι ὁ ζητούμενος.

Ἐπειδὴ τώρα οὗτος εὑρίσκεται διὰ τῶν ἀριθμῶν υ, φ, ψ, ω, οὓς εὑρίσκομεν διὰ τῆς λύσεως ζητημάτων ἀναγομένων εἰς τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν, ὁ τρόπος τῆς εὑρέσεως αὐτοῦ ἐκλήθη *σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.*

220. Ἐν τῇ πράξει δὲν εὑρίσκουσι πραγματικῶς τὰς τιμὰς τῶν $υ$, $φ$, $ψ$, $ω$, δι' ὧν φθάνομεν εἰς τὴν ζητουμένην τιμὴν $χ$, ἀλλὰ διατάττουσι τὰς δι' ὧν αὗται προσδιορίζονται ἀναλογίας οὕτως, ὥστε αἱ μὲν ἄγνωστοι, $υ$, $φ$, $ψ$, $ω$ νὰ ἐξαλείφωνται ἀφ' ἑαυτῶν, ἡ δὲ ζητουμένη τιμὴ τῆς $χ$ νὰ εὑρίσκηται ἀμέσως. Παραδείγματος χάριν, ἰδοὺ πῶς ἠθέλομεν διατάξει διὰ τὴν λύσιν τοῦ προηγουμένου ζητήματος ἑκάστην τῶν μερικῶν ἀναλογιῶν, ἃς εὑρίσκομεν λύοντες ἕκαστον τῶν μερικῶν ζητημάτων 1ον, 2ον, 3ον, 4ον, 5ον, εἰς ἃ τὸ δεδομένον ἀναλύεται,

$10 : 11 = 25 : υ$ (ἀναλογία τοῦ 1ου ζητήματος).
$20 : 18 = υ : φ$ (ἀναλογία τοῦ 2ου ζητήματος).
$5 : 9 = φ : ψ$ (ἀναλογία τοῦ 3ου ζητήματος).
$125 : 75 = ψ : ω$ (ἀναλογία τοῦ 4ου ζητήματος).
$3 : 4 = ω : χ$ (ἀναλογία τοῦ 5ου ζητήματος).

Ἐπειδὴ τώρα κατὰ τὰ ἐν τῇ § 211 λεχθέντα τὰ γινόμενα τῶν ὁμοταγῶν ὅρων δύο ἢ πλειοτέρων ἀναλογιῶν ἀποτελοῦσι νέαν ἀναλογίαν, θέλομεν ἔχει ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀναλογιῶν τὴν ἑξῆς·

$$10\times20\times5\times125\times3 : 11\times18\times9\times75\times4$$
$$=$$
$$25\times υ\times φ\times ψ\times ω : υ\times φ\times ψ\times ω\times χ,$$

ἧς διαιροῦντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ τελευταίου λόγου διὰ τοῦ κοινοῦ γινομένου $υ\times φ\times ψ\times ω$, εὑρίσκομεν τὴν ἑπομένην·

$$10\times20\times5\times125\times3 : 11\times18\times9\times75\times4 = 25 : χ,$$

ἐξ ἧς προσδιορίζομεν ἀμέσως τὴν τιμὴν τῆς $χ$, καὶ βλέπομεν ὅτι αὕτη εὑρίσκεται χωρὶς νὰ προϋπολογισθῶσιν αἱ τιμαὶ τοῦ $υ$, $φ$, $ψ$, καὶ $ω$, δι' ὧν εἴχομεν φθάσει εἰς αὐτήν. Ἐν ἄλλαις λέξεσι,

221. Πρὸς συντομωτέραν λύσιν τῶν ζητημάτων, τῶν λυομένων διὰ τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, παραλείπομεν ὅλους τοὺς διὰ μέσου συλλογισμούς, καὶ διατάττομεν τὰ τῆς πράξεως σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς·

$$\left.\begin{array}{r} 10 : 11 \\ 20 : 18 \\ 5 : 9 \\ 125 : 75 \\ 3 : 4 \end{array}\right\} = 25 : χ.$$

Γράφομεν τὸν $χ$ τέταρτον ὅρον καὶ τὸν σύστοιχον αὐτοῦ 25 τρίτον καὶ πρὸ τούτου τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος, καὶ μετὰ τοῦτο τὸ σημεῖον } ἔπειτα λέγομεν· ἐπειδὴ αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὡρῶν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν ἐλαττοῦται, ἕπεται ὅτι τὰ ποσὰ ἐργάται καὶ ἐργάσιμοι ὧραι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἑπομένως ὁ ὅρος χ καὶ ὁ ἀντίστοιχος αὐτοῦ 10 πρέπει νὰ ἦναι ἄκροι. Ἐπειδή, αὐξανομένου καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν ἐλαττοῦται, ἕπεται ὅτι τὰ ποσὰ *ἐργάται* καὶ *ἐργάσιμοι ἡμέραι* εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἑπομένως ὁ χ καὶ ὁ ἀντίστοιχος αὐτοῦ 20 πρέπει νὰ ἦναι ἄκροι. Ἐπειδὴ πάλιν, αὐξανομένου καὶ τοῦ ὕψους τοῦ τείχους, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν αὐξάνει, ἕπεται ὅτι τὰ ποσὰ *ἐργάται* καὶ *ὕψη* εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα, ἑπομένως ὁ χ καὶ ὁ ἀντίστοιχος αὐτοῦ 9 πρέπει νὰ ἦναι ἑπόμενοι. Ἐπειδὴ τέλος, αὐξανομένου τοῦ μήκους καὶ τοῦ πλάτους, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν αὐξάνει, ὁ χ καὶ οἱ ἀντίστοιχοι αὐτοῦ 75 καὶ 4 πρέπει νὰ ἦναι ἑπόμενοι. Οὕτω γράφομεν ἀμέσως τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον τοὺς λόγους 10 : 11, 20 : 18, 5 : 9, 125 : 75, 3 : 4, καὶ πολλαπλασιάζοντες αὐτοὺς κατὰ τάξιν πορίζόμεθα τὴν ἀναλογίαν

$$10\times20\times5\times125\times3 : 11\times18\times9\times75\times4 = 25 : \chi,$$

ἐξ ἧς προσδιορίζομεν ἀμέσως τὴν ζητουμένην τιμὴν τῆς χ.

222. Πρὸς περισσοτέραν τῶν ἀνωτέρω κατάληψιν ἂς λύσωμεν ὁμοιοτρόπως καὶ τὸ ἑπόμενον πρόβλημα.

Εἰς 20 ἡμέρας 8 βόες ἔφαγον 1000 μνᾶς χόρτου, 3 ὥρας βόσκοντες καθ' ἑκάστην· εἰς πόσας ἡμέρας 12 βόες θέλουσι φάγει 450 μνᾶς χόρτου, 2 ὥρας βόσκοντες καθ' ἑκάστην;

Διατάσσομεν πρῶτον τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος κατὰ τὸν συνήθη τρόπον

ἡμέραι	βόες	μναῖ	ὧραι
20	8	1000	3
χ	12	450	2

παριστῶντες διὰ χ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν.

Ἐνταῦθα μᾶς ἐδόθη ἡ τιμὴ τοῦ ποσοῦ *ἡμέραι* καθὼς καὶ αἱ τιμαὶ 8, 1000 καὶ 3 τῶν *βοῶν*, *μνῶν* καὶ *ὡρῶν τῆς βοσκῆς*, ἀφ' ὧν ἡ τιμὴ αὐτοῦ 20 ἐξαρτᾶται, καὶ πρὸς ἃ ὑποτίθεται ἀνάλογος, καὶ μᾶς ζητεῖται ποία θέλει εἶναι ἡ νέα αὐτοῦ τιμὴ χ, ὅταν τὰ ἀφ' ὧν ἐξαρτᾶται ποσὰ λάβωσιν ἀμοιβαίως τὰς νέας τιμὰς 12, 450 καὶ 2.

Ὑποθέτομεν κατ' ἀρχὰς ὅτι μόνον ὁ ἀριθμὸς τῶν βοῶν γίνεται 12 ἀπὸ 8, καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν υ τῶν ἀπαιτουμένων ἡμερῶν, λύοντες διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν τὸ ἑξῆς ζήτημα.

8 βόες ἐχρειάσθησαν 20 ἡμέρας, 12 βόες πόσας ἡμέρας θέλουσι χρειασθῆ;

βόες	ἡμέραι
8	20
12	$υ$

Εὑρεθέντος τοῦ $υ$, ὑποθέτομεν ὅτι καὶ ὁ ἀριθμὸς 1000 τῶν μνῶν τοῦ χόρτου ἔγεινε 450, καὶ ζητοῦμεν τὴν νέαν τιμὴν $φ$ τοῦ εὑρεθέντος ἀριθμοῦ $υ$ τῶν ἡμερῶν, λέγοντες

Ἐχρειάσθησαν υ ἡμέρας, ἵνα φάγωσι 1000 μνᾶς, πόσας ἡμέρας θέλουσι χρειασθῆ, ἵνα φάγωσι 450;

μναῖ	ἡμέραι
1000	$υ$
450	$φ$

Εὑρεθέντος καὶ τοῦ $φ$, ὑποθέτομεν τελευταῖον ὅτι καὶ ὁ ἀριθμὸς 3 τῶν ὡρῶν τῆς βοσκῆς ἔγεινε 2, καὶ ζητοῦμεν τὴν ζητουμένην νέαν τιμὴν $χ$ τοῦ εὑρεθέντος ἀριθμοῦ $φ$ τῶν ἡμερῶν λέγοντες

Ἐχρειάσθησαν φ ἡμέρας 3 ὥρας βόσκοντες καθ' ἑκάστην, πόσας ἡμέρας ἤθελον χρειασθῆ, ἂν ἔβοσκον 2 ὥρας;

ὧραι	ἡμέραι
3	$φ$
2	$χ$

Διατάσσοντες τώρα τὰς τρεῖς μερικὰς ἀναλογίας, τὰς διὰ τὴν λύσιν τῶν ἀνωτέρω τριῶν προβλημάτων τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν κατασκευαζομένας, κατὰ τὸν ἐν τῇ § 220 ἐκτεθέντα τρόπον, θέλομεν ἔχει

$$12 : 8 = 20 : υ$$
$$1000 : 450 = υ : φ$$
$$2 : 3 = φ : χ$$

Ἁπλοποιοῦντες ταύτας διὰ τῆς ἐξαλείψεως τῶν βοηθητικῶν ἀγνώστων $υ$ καὶ $φ$ καὶ τῶν κοινῶν εἰς τοὺς γνωστοὺς ἄκρους καὶ μέσους παραγόντων, καὶ πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὁμοταγεῖς αὐτῶν ὅρους, θέλομεν ἔχει τὴν τελικὴν ἀναλογίαν

$$1 : 9 = 1 : χ,$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν ἀμέσως $χ = 9$.

Ἂν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς ζήτημα,

Πρὸς ἱματισμὸν 225 στρατιωτῶν ἐχρειάσθησαν 1000 πήχεις τσόχας $1+\frac{1}{2}$ πήχεως τὸ πλάτος· πόσον πλάτος πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ τσόχα, ἵνα 900 πήχεις ἐπαρκέσωσι διὰ τὸν ἱματισμὸν 200 στρατιωτῶν;

ἠθέλομεν διατάξει τὰ δεδομένα αὐτοῦ ὡς ἑξῆς·

στρατιῶται	πήχεις	πλάτη
225	1000	$1+\frac{1}{2}$
200	900	x

καὶ εὕρει σκεπτόμενοι ὡς ἐξεθέσαμεν ἀνωτέρω τὰς ἑξῆς μερικὰς ἀναλογίας

$$225:\ 200=1+\tfrac{1}{2}:\ y$$
$$900:\ 1000=v:x,$$

ἐξ ὧν ἠθέλομεν πορισθῆ τὴν τελικὴν

$$27:\ 40=1:x$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα ἀμέσως

$$x=\tfrac{40}{27}=1+\tfrac{13}{27}.$$

ΓΕΝΙΚΗ ΤΙΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐπαναλαμβάνομεν διὰ τελευταίαν φορὰν ὅτι τὰ ποσά, ἐξ ὧν ἡ τιμὴ τοῦ ζητουμένου ἐξαρτᾶται, ὑποτίθενται ἀνάλογα. Ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον τοῦτο δὲν ὑπάρχει. Παραδείγματος χάριν, ἐκ τοῦ ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν ἐκ 300 ἔγεινε 5, ἤτοι τὸ $\frac{1}{60}$, δὲν ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν ἐκτελεσθησομένη ἐργασία θέλει γείνει τὸ $\frac{1}{60}$· διότι πολὺ πιθανὸν ὄχι μόνον τοῦτο νὰ μὴ ὑπάρχῃ, ἀλλὰ καὶ οἱ 5 ἐργάται νὰ μὴ δύνανται ἄνευ τῆς βοηθείας ἄλλων, ὡς ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ἔργου, νὰ παραγάγωσί τι ἀποτέλεσμα. Ὡσαύτως δὲν ἕπεται ὅτι, ἐὰν οἱ βόες βοσκήσωσιν διπλάσιον ἀριθμὸν ὡρῶν, θέλουσι φάγει καὶ διπλασίαν ποσότητα χόρτου. διότι προφανῶς οἱ βόσκοντες βόες δὲν καταναλίσκουσι διαρκῶς τὴν αὐτὴν ποσότητα χόρτου.

ΓΕΝΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ.

223. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ποσόν τι M ἐξαρτᾶται, ἐκ τῶν ποσῶν $A, B, \Gamma, \ldots$, πρὸς ἃ εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον, καὶ ἐκ τῶν ποσῶν $\Pi, K, P, \ldots$ πρὸς ἃ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον, καὶ ὅτι μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ μ τοῦ M, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὰς τιμὰς $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$,

$\pi, \varkappa, \varrho, \ldots$ τῶν ἀφ' ὧν τοῦτο ἐξαρτᾶται ποσῶν $A, B, \Gamma, \ldots, \Pi, K, P, \ldots$, καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ νέα αὐτοῦ τιμὴ χ, ὅταν τὰ ποσὰ $A, B, \Gamma, \ldots \Pi, K, P\ldots$ λάβωσι τὰς νέας τιμὰς $\acute{\alpha}, \beta', \gamma', \ldots, \pi', \varkappa', \varrho', \ldots$

Εἰς τὸ ἀνωτέρω γενικὸν ζήτημα, εἰς ὃ ἀνάγεται πᾶν ζήτημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, ἕξ τινα γενικῶς διάφορα διακρίνομεν.

1ον. Τὴν δεδομένην τιμὴν μ τοῦ ποσοῦ M.

2ον. Τὰς τιμὰς $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ τῶν ποσῶν A, B, Γ, .., πρὸς ἃ τὸ M ὑποτίθεται κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον, τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὴν τιμὴν αὐτοῦ μ.

3ον. Τὰς τιμὰς π, $\varkappa$, $\varrho, \ldots$ τῶν ποσῶν Π, K, $P, \ldots$, πρὸς ἃ τὸ M ὑποτίθεται ἀντιστρόφως ἀνάλογον, τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὴν αὐτὴν τιμὴν αὐτοῦ μ.

4ον. Τὰς νέας τιμὰς $\acute{\alpha}, \beta', \gamma', \ldots$ τῶν κατ' εὐθεῖαν ἀναλόγων ποσῶν $A, B, \Gamma, \ldots$

5ον. Τὰς νέας τιμὰς $\pi', \varkappa', \varrho', \ldots$ τῶν ἀντιστρόφως ἀναλόγων ποσῶν $\Pi, K, P, \ldots$

6ον. Τὴν ζητουμένην τιμὴν χ τοῦ ποσοῦ M, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὰς νέας τιμὰς $\acute{\alpha}, \beta', \gamma', \ldots \pi', \varkappa', \varrho', \ldots$ τῶν ἀφ' ὧν ἐξαρτᾶται ποσῶν $A, B, \Gamma \ldots, \Pi, K, P\ldots$

Εἶναι τώρα φανερὸν ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ χ θέλει ἐξαρτᾶσθαι κατά τινα τρόπον ἐκ τῶν τιμῶν $\mu, \alpha, \beta, \gamma \ldots \pi, \varkappa, \varrho \ldots \acute{\alpha}, \beta', \gamma', \ldots \pi', \varkappa', \varrho', \ldots$ καὶ οὕτως ὥστε, ἐὰν ἀντὶ τοῦ $\mu, \alpha, \beta, \gamma, \ldots \pi, \varkappa, \varrho, \ldots \acute{\alpha}, \beta', \gamma', \ldots \pi', \varkappa', \varrho', \ldots$ θέσωμεν τὰς ἀναφερομένας εἴς τι ζήτημα τιμὰς αὐτῶν, θέλομεν εὕρει τὴν ἀναφερομένην εἰς τὸ ζήτημα τοῦτο τιμὴν τοῦ ζητουμένου.

Ἡ γενικὴ αὕτη σχέσις, ἡ μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω ποσοτήτων ὑπάρχουσα, δι' ἧς εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην τιμὴν παντὸς ζητήματος, ἀναγομένου εἰς τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν, καλεῖται *γενικὸς τύπος τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.*

224. Ἄς ἴδωμεν τώρα πῶς θέλομεν εὕρει τοῦτον, καὶ πρὸς τοῦτο ἄς διατάξωμεν τὰ δεδομένα τοῦ ζητήματος κατὰ τὸν ἀνωτέρω ἐκτεθέντα τρόπον,

$$\begin{array}{ccccccc} M & A & B & \Gamma \ldots \Pi & K & P \ldots \\ \mu & \alpha & \beta & \gamma \ldots \pi & \varkappa & \varrho \ldots \\ \chi & \acute{\alpha} & \beta' & \gamma' \ldots \pi' & \varkappa' & \varrho' \ldots \end{array}$$

Ἐπειδὴ ὑποτίθεται ὅτι τὸ ποσὸν Μ εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον τῶν ποσῶν Α, Β, Γ,... καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῶν Π, Κ, Ρ,..., κατὰ τὰ λεχθέντα ἐν τῇ § 221 θέλομεν ἔχει τὴν ἑξῆς πρὸς λύσιν τοῦ ἀνωτέρω γενικοῦ ζητήματος διάταξιν·

$$\left.\begin{array}{l} \alpha : \alpha' \\ \beta : \beta' \\ \gamma : \gamma' \\ \cdot : \cdot \\ \cdot : \cdot \\ \pi' : \pi \\ \varkappa' : \varkappa \\ \rho' : \rho \\ \cdot : \cdot \end{array}\right\} = \mu : \chi$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα ἀμέσως

$$\chi = \frac{\mu\times\alpha'\times\beta'\times\gamma' \ldots \times\pi\times\varkappa\times\rho\times\ldots}{\alpha\times\beta\times\gamma \ldots \times\pi'\times\varkappa'\times\rho'\times\ldots} \qquad (21)$$

Λοιπὸν βλέπομεν ὅτι *ἡ γενικὴ τιμὴ τοῦ ζητουμένου χ εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἡ πρώτη αὐτοῦ τιμὴ μ ἐπὶ τὸ γινόμενον $\alpha'\times\beta'\times\gamma'\times\ldots$ τῶν νέων τιμῶν τῶν ποσῶν Α, Β, Γ, . . ., πρὸς ἃ τοῦτο ὑποτίθεται κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον, καὶ ἐπὶ τὸ γινόμενον $\pi\times\varkappa\times\rho\times\ldots$ τῶν πρώτων τιμῶν τῶν ποσῶν Π, Κ, Ρ,.., πρὸς ἃ ὑποτίθεται ἀντιστρόφως ἀνάλογον, καὶ τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ γινομένου $\alpha\times\beta\times\gamma\times\ldots$ τῶν πρώτων τιμῶν τῶν ποσῶν Α, Β, Γ,.., πρὸς ἃ εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον, ἐπὶ τὸ γινόμενον $\pi'\times\varkappa'+\rho'\times\ldots$ τῶν νέων τιμῶν τῶν ποσῶν Π, Κ, Ρ.... πρὸς ἃ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον.*

Παραδείγματος χάριν, διὰ τὸ ἐν τῇ § 219 πρόβλημα ἠθέλομεν εὕρει θέτοντες 25 ἀντὶ τοῦ μ, 9 ἀντὶ τοῦ α', 75 ἀντὶ τοῦ β', 4 ἀντὶ τοῦ γ', 11 ἀντὶ τοῦ π, 18 ἀντὶ τοῦ $\varkappa$, 5 ἀντὶ τοῦ α, 125 ἀντὶ τοῦ β, 3 ἀντὶ τοῦ γ, 10 ἀντὶ τοῦ π', καὶ 20 ἀντὶ τοῦ $\varkappa'$, διὰ τιμὴν τῆς χ

$$\chi = \frac{25\times9\times75\times4\times11\times18}{5\times125\times3\times10\times20}$$

ὅπως καὶ ἐν τῇ § 221.

Ὡσαύτως, διὰ τοῦ αὐτοῦ τύπου (1) ἠθέλομεν εὕρει

$$\chi = \frac{20\times8\times450\times3}{12\times1000\times2}$$

διὰ τὰς ζητουμένας ἡμέρας τοῦ προβλήματος τῆς § 222.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΟΝΑΔΑ.

225. Πολλάκις ἀντὶ νὰ εὕρωμεν ἀπ' εὐθείας, ὡς προείπομεν, διὰ τῆς ἁπλῆς ἢ συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν τὰς λύσεις τῶν εἰς αὐτὰς ἀναγομένων ζητημάτων, μεταχειριζόμεθα ὡς ἁπλουστέραν τὴν καλουμένην *μέθοδον τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα*.

Ἵνα δείξωμεν καταληπτότερον εἰς τί αὕτη συνίσταται, θέλομεν ἀμέσως ἐφαρμόσει αὐτὴν εἴς τινα τῶν προηγουμένων ζητημάτων, ἢ εἴς τινα ὅμοια τούτοις. Ἄς ὑποθέσωμεν δὲ ἐν πρώτοις ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

1ον. *Εἰς 15 ἡμέρας 25 ἐργάται κατεσκεύασαν ἔργον τι· εἰς πόσας ἡμέρας 17 ἐργάται θέλουσι κατασκευάσει τὸ αὐτὸ ἔργον ;*

ἐργάται	ἡμέραι
25	15
17	x

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου λέγομεν· ἐπειδὴ 25 ἐργάται ἐχρειάσθησαν 15 ἡμέρας πρὸς κατασκευὴν τοῦ ἔργου, ἵνα κατασκευάσῃ αὐτὸ 1 ἐργάτης, θέλει χρειασθῇ 25κις περισσότερον χρόνον, ἤτοι 15×25 ἡμέρας. Ἐπειδὴ δὲ 1 ἐργάτης χρειάζεται 15×25 ἡμέρας, οἱ 17 ἐργάται θέλουσι χρειασθῇ 17κις ὀλιγώτερον χρόνον, ἤτοι $\frac{15\times25}{17}$ ἡμέρας. Λοιπὸν $x=\frac{15\times25}{17}$ ἡμέραι, τοῦθ' ὅπερ ἠθέλομεν εὕρει καὶ διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

2ον. *Διὰ 17 πήχεις ὑφάσματος ἐπληρώσαμεν 29 δραχμάς· πόσους πήχεις ἠθέλομεν ἀγοράσει ἀντὶ 53 δραχμῶν ;*

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου λέγομεν, ἐπειδὴ ἀντὶ 29 δραχμῶν ἠγοράσαμεν 17 πήχεις, ἀντὶ 1 δραχμῆς ἠθέλομεν ἀγοράσει $\frac{17}{29}$ τοῦ πήχεως, ἑπομένως ἀντὶ 53 δραχμῶν ἠθέλομεν ἀγοράσει $\frac{17\times53}{29}$ πήχεις. Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγορασθησομένων πήχεων x εἶναι $\frac{17\times53}{29}$, ὅπερ ἠθέλομεν εὕρει καὶ διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Βλέπομεν δὲ ὅτι *ἡ μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν πρῶτον τῆς τιμῆς τοῦ ζητουμένου, ὅταν τὸ ἐξ οὗ ἐξαρτᾶται ποσὸν ὑποτεθῇ ἴσον τῇ μονάδι, καὶ ἔπειτα ἐκ τῆς εὑρεθείσης τιμῆς νὰ πορισθῶσι τὴν ζητουμένην τοῦ ζητήματος·*

226. Ἔστω τώρα πρὸς λύσιν καὶ τὸ ἑξῆς ζήτημα·

Εἰς 18 ἡμέρας 25 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 11 ὥρας τὴν ἡμέραν, *κατεσκεύασαν τεῖχος 5 μέτρων τὸ ὕψος, 125 τὸ μῆκος καὶ 3 τὸ πλάτος· πόσοι ἐργάται, ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς 20 ἡμέρας, θέλουσι κατασκευάσει τεῖχος 9 μέτρων τὸ ὕψος, 75 τὸ μῆκος καὶ 4 τὸ πλάτος;*

ἐργάται	ὧραι	ἡμέραι	ὕψη	μήκη	πλάτη
25	11	18	5	125	3
x	10	20	9	75	4

Ἡ μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα πρὸς λύσιν τοῦ ἀνωτέρω ζητήματος συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν πρῶτον τοῦ ἀπαιτουμένου ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν, ὅταν τὰ δεδομένα *ὧραι, ἡμέραι, ὕψος, μῆκος, καὶ πλάτος*, ἐξ ὧν οὗτος ἐξαρτᾶται, ὑποτεθῶσιν ἴσα τῇ *μονάδι*, τουτέστιν εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσοι ἐργάται θέλουσι χρειασθῇ, ἵνα κατασκευάσωσιν εἰς μίαν ἡμέραν, 1 ὥραν ἐργαζόμενοι καθ' ἑκάστην, τεῖχος 1 μέτρου τὸ ὕψος, 1 μέτρου τὸ μῆκος καὶ 1 μέτρου τὸ πλάτος, καὶ ἐκ τοῦ οὕτως εὑρεθησομένου ἀριθμοῦ νὰ ορισθῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀπαιτουμένου ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν, ὅταν αἱ ὧραι ἀντὶ 1 γείνωσι 10, αἱ ἡμέραι ἀντὶ 1 γείνωσιν 20, τὸ ὕψος ἀντὶ 1 γείνῃ 9, τὸ μῆκος ἀντὶ 1 γείνῃ 75 καὶ τὸ πλάτος ἀντὶ 1 γείνῃ 4.

Πρὸς τοῦτο δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

25 εἶναι ὁ ἀπαιτούμενος ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν, ὅταν οὗτοι ἐργάζωνται 11 ὥρας τὴν ἡμέραν, ἂν εἰργάζοντο 1 ὥραν καθ' ἑκάστην, ἠθέλομεν προφανῶς χρειασθῆ 25×11 ἐργάτας.

25×11 ἐργάται εἶναι ἀναγκαῖοι, ἵνα κατασκευάσωσι τὸ ἔργον εἰς 18 ἡμέρας· πρὸς κατασκευὴν αὐτοῦ εἰς 1 μόνην ἡμέραν ἠθέλομεν χρειασθῆ $25\times11\times18$ ἐργάτας.

$25+11\times18$ ἐργάτας ἠθέλομεν χρειασθῆ, ὅταν τὸ ὕψος τοῦ τείχους ἦναι 5 μέτρων, ἂν τὸ ὕψος ἦτο 1 μέτρου, ἠθέλομεν χρειασθῆ 5κις ὀλιγωτέρους ἐργάτας, ἤτοι $\frac{25\times11\times18}{5}$.

$\frac{25\times11\times18}{5}$ ἐργάτας ἠθέλομεν χρειασθῆ, ὅταν τὸ μῆκος ἦναι 125 μέτρων, ἂν ἦτο 1 μέτρου, ἠθέλομεν χρειασθῆ 125κις ὀλιγωτέρους, ἤτοι $\frac{25\times11\times18}{5\times125}$.

$\frac{25\times11\times18}{5\times125}$ ἐργάτας ἠθέλομεν χρειασθῆ, ὅταν τὸ πλάτος ἦναι 3 μέτρων, ἂν ἦτο 1 μέτρου, ἠθέλομεν χρειασθῆ 3κις ὀλιγωτέρους, ἤτοι $\frac{25\times11\times18}{5\times125\times3}$.

Λοιπὸν $\frac{25\times11\times18}{5\times125\times3}$ εἶναι ὁ ἀπαιτούμενος ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν ὅταν ἐργάζωνται 1 ὥραν τὴν ἡμέραν πρὸς κατασκευὴν εἰς μίαν ἡμέραν τείχους 1 μέτρου ὕψους, 1 μέτρου μήκους καὶ 1 μέτρου πλάτους.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν τώρα τὰς ἐργασίμους ὥρας 10, ὁ ἀπαιτούμενος ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν θέλει 10κις μικρότερος, ἤτοι

$$\frac{25\times11\times18}{5\times125\times3\times10}.$$

Ἐὰν οἱ ἐργάται ἀντὶ 1 ἡμέρας ἐργασθῶσιν 20, ὁ ἀπαιτούμενος ἀριθμὸς αὐτῶν θέλει εἶναι 20κις μικρότερος, ἤτοι

$$\frac{25\times11\times18}{5\times125\times3\times10\times20}.$$

Ἐὰν τὸ ὕψος ἀντὶ 1 μέτρου ὑποτεθῇ 9 μέτρων ὁ ἀπαιτούμενος ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν θέλει εἶναι 9κις μεγαλείτερος, ἤτοι

$$\frac{25\times11\times18\times9}{5\times125\times3\times10\times20}.$$

Ἐὰν τέλος τὸ μῆκος καὶ πλάτος, ἀντὶ νὰ ὦσιν 1 καὶ 1 μέτρων, ὑποτεθῶσιν 75 καὶ 4, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων ἐργατῶν θέλει εἶναι

$$\frac{25\times11\times18\times9\times75\times4}{5\times125\times3\times10\times20}.$$

Βλέπομεν δ' ὅτι εὕρομεν οὕτω τὴν αὐτὴν τιμήν, ἣν καὶ ἐν τῇ § 221 διὰ τὴν λύσιν τοῦ αὐτοῦ ζητήματος.

227. Ἐν γένει, ἂν μᾶς ἐδίδετο ἡ τιμὴ μ ποσοῦ τινος M καθὼς καὶ αἱ τιμαὶ α, β, γ, δ, ε, ζ,... τῶν ποσῶν A, B, Γ, Δ, E, Z,... ἀφ' ὧν τὸ M ἐξαρτᾶται, καὶ μᾶς ἐζητεῖτο ἡ νέα τιμὴ τοῦ M, ὅταν τὰ ποσὰ A, B, Γ, Δ, E, Z,... γείνωσιν α', β', γ', δ', ε', ζ',..., ἡ μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα συνίσταται εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὴν τιμὴν φ τοῦ M, ὅταν τὰ ποσὰ A, B, Γ, Δ, E, Z,..., ὑποτεθῶσιν ὅλα ἴσα τῇ 1, καὶ ἔπειτα ἐκ ταύτης τὴν τιμὴν αὐτοῦ χ, ὅταν ταῦτα γείνωσιν α', β', γ', δ', ε', ζ',..., τουτέστιν εἰς τὸ νὰ λύσωμεν πρῶτον τὸ ἑξῆς ζήτημα·

M	A	B	Γ	Δ	E	Z...
μ	α	β	γ	δ	ε	ζ...
φ	1	1	1	1	1	1...

καὶ μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ φ τὸ ἀκόλουθον

M	A	B	Γ	Δ	E	Z...
φ	1	1	1	1	1	1...
χ	α'	β'	γ'	δ'	ε'	ζ'...

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι δι' αὐτῆς, ἀνθ' ἑνὸς ἔχομεν νὰ λύσωμεν δύο ὁμοειδῆ, οὕτως εἰπεῖν, ζητήματα. Ἀλλὰ συντομεύεται ἐπαισθητῶς ἡ ἐκτέλεσις τῶν πράξεων, διότι εὑρίσκομεν *ἀμέσως* τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τοῦ ζητουμένου δι' ἑκάστην νέαν μεταβολὴν τῶν δεδομένων, χωρὶς νὰ ἤμεθα ἠναγκασμένοι νὰ σχηματίσωμεν οὐδεμίαν πρὸς τοῦτο ἀναλογίαν.

ΟΔΗΓΙΑΙ ΤΙΝΕΣ ΠΕΡΙ ΚΑΤΑΤΑΞΕΩΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ.

228. Εἴπομεν ὅτι πρὸς λύσιν τῶν ἀναγομένων εἰς τὴν ἁπλῆν ἢ σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν προβλημάτων γράφομεν ἐπί τινος ὁριζοντίου σειρᾶς τὰ ὀνόματα τῶν διαφόρων εἰδῶν τῶν ποσῶν, τῶν περιεχομένων εἰς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ ζητήματος, ἔπειτα ὑπὸ τὴν πρώτην σειρὰν γράφομεν τὴν δεδομένην τιμὴν τοῦ ζητουμένου καθὼς καὶ τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς αὐτὴν τιμὰς τῶν ἄλλων ποσῶν, ἑκάστην ὑπὸ τὸ τῆς αὐτῆς φύσεως ποσόν, καὶ τελευταῖον ὑπὸ τὴν δεδομένην τιμὴν τοῦ ζητουμένου γράφομεν χ πρὸς παράστασιν τῆς ζητουμένης αὐτοῦ τιμῆς, καὶ ὑπὸ τὰ λοιπὰ ποσὰ τὰς δεδομένας τιμὰς αὐτῶν, τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὴν ζητουμένην τιμὴν τοῦ πρώτου χ. Τούτου δὲ γενομένου, ἡ λύσις τοῦ προβλήματος ηὑρίσκετο ἀμέσως κατὰ τὰ ἐκεῖσε λεχθέντα.

Ἡ τοιαύτη τῶν δεδομένων καὶ ζητουμένων κατάταξις καλεῖται *κατάταξις τοῦ ζητήματος πρὸς λύσιν*.

Εἰς τὰ προηγούμενα ζητήματα οὐδεμίαν ἐδοκιμάσαμεν δυσκολίαν πρὸς τὴν τοιαύτην τῶν προβλημάτων κατάταξιν, καὶ τοῦτο ἕνεκα τοῦ ἁπλουστάτου καὶ φυσικωτάτου τρόπου τῆς ἐκφωνήσεως αὐτῶν. Ἀλλ' ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ αἱ ἐκφωνήσεις τῶν εἰς τὰς ἀνωτέρω μεθόδους ἀναφερομένων ζητημάτων δὲν εἶναι τόσον ἁπλαῖ· πολλάκις ἀντὶ τῶν δεδομένων, τόσῳ τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς δεδομένην τιμὴν τοῦ ζητουμένου, ὅσῳ καὶ τῶν ἀναφερομένων εἰς τὴν τοῦ ζητουμένου, μᾶς δίδονται ἁπλῶς συνθῆκαί τινες κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον ἁπλαῖ, ἃς πρέπει τινὰ τούτων νὰ ἐκπληρῶσιν, ἤ, ἀντὶ τῆς τιμῆς τοῦ ζητουμένου, μᾶς ζητεῖται ἔμμεσός τις συνθήκη, πρὸς ἣν αὕτη νὰ ἀναφέρηται, κτλ. Ἐν τῇ τοιαύτῃ περιπτώσει θέλομεν δώσει ἐνταῦθα γενικάς τινας ὁδηγίας, (διότι τοῦτο μόνον εἶναι δυνατόν), δι' ὧν ὁ μαθητής, ὁ ἐπιχειρῶν τὴν λύσιν τοιούτου τινὸς ζητήματος, νὰ δύνηται νὰ χαράξῃ δρόμον τινά, δι' οὗ θέλει φθάσει εἰς τὴν ἀπαιτουμένην πρὸς ἄμεσον λύσιν τοῦ προβλήματος κατάταξιν. Αὗται δὲ εἶναι αἱ ἑξῆς τρεῖς.

1ον. *Πρέπει διὰ τῆς ἐπανειλημμένης καὶ μετ' ἐπιστασίας ἀναγνώσεως τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ ζητήματος νὰ ζητήσῃ νὰ διακρίνῃ τὰ διάφορα εἴδη τῶν ἐν αὐτῇ περιεχομένων ἀναλόγων ποσῶν, ἄνευ διακρίσεως τῶν δεδομένων καὶ ζητουμένων, καὶ τὰ ὀνόματα τούτων νὰ γράψῃ ἐπί τινος ὁριζοντίου γραμμῆς.*

2ον. *Νὰ ζητήσῃ νὰ διακρίνῃ ποῖον εἶναι τὸ ποσόν, πρὸς ὃ ἀναφέρεται τὸ ζητούμενον τοῦ προβλήματος καὶ ὑπ' αὐτὸ νὰ θέσῃ τὸ γράμμα x ὑπὸ τὴν δεδομένην τιμὴν αὐτοῦ, ἐὰν αὕτη ὑπάρχῃ ἀμέσως δεδομένη ὑπὸ τῆς ἐκφωνήσεως.*

3ον. *Ἐὰν ἡ τιμὴ αὐτοῦ, ὡς καὶ αἱ τῶν ἄλλων ποσῶν, πρὸς ἃς αὕτη καθὼς καὶ ἡ ζητουμένη ἀντιστοιχοῦσι, δὲν δίδωνται ἀμέσως ὑπὸ τῆς ἐκφωνήσεως, ἀλλὰ συνθῆκαί τινες, ἃς αὗται πρέπει νὰ ἐκπληρῶσι, τότε πρέπει νὰ ζητήσῃ τὰς εἰς τὰς συνθήκας ταύτας ἀντιστοιχούσας τιμὰς τῶν δεδομένων καὶ ταύτας νὰ γράψῃ κατὰ τὸν συνήθη τρόπον.*

Τούτων γινομένων, ἡ λύσις τοῦ ζητήματος ἀνάγεται εἰς τὰ προλεχθέντα καὶ δὲν παρουσιάζει οὐδεμίαν δυσκολίαν.

229. Πρὸς περισσοτέραν τῶν ἀνωτέρω ὁδηγιῶν κατάληψιν ἂς ἐφαρμόσωμεν ταύτας εἰς τὰς ἐκφωνήσεις προβλημάτων τινῶν.

1ον. *Ὡρολόγιον καθυστερεῖ 3 πρῶτα λεπτὰ εἰς 4 ὥρας καὶ δεικνύει ἀκριβῶς μεσημβρίαν· μετὰ πόσον χρόνον θέλει δείξει πάλιν τὸν ἀληθῆ χρόνον;*

Ἐνταῦθα διακρίνομεν δύο τινὰ ὁμοειδῆ μέν, ἀλλὰ διαφόρου σημασίας ποσά, *ὥρας* καὶ *χρόνον καθυστερήσεως*. Βλέπομεν δὲ ὅτι μᾶς ἐδόθη τιμή τις 4 ὧραι τοῦ πρώτου καὶ ἑτέρα τις τιμὴ *3 πρῶτα λεπτὰ* τοῦ δευτέρου, ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τοῦ πρώτου, καὶ ἀντὶ νὰ μᾶς ζητηθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου, ἥτις ἤθελεν ἀντιστοιχεῖ εἰς δεδομένην τινὰ τιμὴν τοῦ δευτέρου, μᾶς ζητεῖται ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ πρῶτον, ἵνα ἡ ἑξῆς δεδομένη συνθήκη ὑπάρχῃ· *τὸ ὡρολόγιον νὰ δεικνύῃ πάλιν τὸν ἀληθῆ χρόνον*.

Πρέπει λοιπὸν νὰ εὕρωμεν ὡς ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ζητήματος ποία πρέπει νὰ ἦναι ἡ *καθυστέρησις*, ἡ ἐκπληροῦσα τὴν δεδομένην συνθήκην. Πρὸς τοῦτο δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ἐπειδή, ἐὰν εἴς τινα στιγμὴν στρέψωμεν ἐν ἀκαρεῖ τοὺς ὡροδείκτας *12 ὥρας*, τὸ ὡρολόγιον θέλει δεικνύει πάλιν τὸν ἀληθῆ χρόνον, ἂν ὅτε ἠρχίσαμεν τὴν στροφὴν ἐδείκνυε τοῦτον, ἕπεται ὅτι ἡ τιμὴ τῆς καθυστερήσεως, ἡ ἐκπληροῦσα τὴν δεδομένην συνθήκην, τοῦ νὰ δεικνύῃ δηλαδὴ τὸ ὡρολόγιον πάλιν τὸν ἀληθῆ χρόνον, εἶναι 12 ὧραι· ἐν ἄλλαις λέξεσι, θέλομεν γράψει τὴν ἑπομένην διάταξιν·

ὧραι	καθυστερήσεις
4	3λ.π.
x	12ὥρ.

ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἑξῆς ἐκφώνησιν·

Ὡρολόγιον, δεικνύον ἀκριβῶς μεσημβρίαν, καθυστερεῖ 3λ.π. εἰς 4 ὥρας· μετὰ πόσας ὥρας θέλει καθυστερήσει 12 ὥρας;

2ον. *Πεζὸς διανύει 10 στάδια τὴν ὥραν καὶ προτίθεται νὰ διατρέξῃ ἀπόστασίν τινα εἰς 13 ὥρας. Μετὰ 5 ὡρῶν ὁδοιπορίαν παρετήρησεν ὅτι εἶχε διανύσει τὰ $\frac{2}{7}$ τῆς ἀποστάσεως, ζητεῖ δὲ νὰ πεισθῇ ἂν βαδίζων μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα θέλει δυνηθῆ νὰ διατρέξῃ τὸ λοιπὸν τῆς ἀποστάσεως ἐντὸς τῶν λοιπῶν 8 ὡρῶν καί, ἐὰν τοῦτο δὲν ἦναι δυνατόν, κατὰ πόσον πρέπει νὰ αὐξήσῃ τὴν ταχύτητα αὐτοῦ πρὸς τοῦτο.*

Τὸ ζήτημα ἐνταῦθα εἶναι διπλοῦν. Πρέπει πρῶτον νὰ ἴδωμεν, ἐὰν ἡ μεθ' ἧς βαδίζει ταχύτης ἦναι ἐπαρκής, ἵνα φθάσῃ εἰς τὸν σκοπὸν αὐτοῦ ἐντὸς τῶν λοιπῶν 8 ὡρῶν, αἵτινες τῷ μένουσι πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν 13, καὶ δεύτερον, ἐὰν εὕρωμεν ὅτι αὕτη εἶναι ἀνεπαρκής, νὰ ζητήσωμεν κατὰ πόσον ἀκριβῶς αὕτη πρέπει νὰ αὐξηθῇ πρὸς τοῦτο.

Ἵνα ἴδωμεν, ἂν ἡ ταχύτης τῶν 10 σταδίων ἦναι ἐπαρκής, ὅπως ἐντὸς 8 ὡρῶν διατρέξῃ τὸ λοιπὸν τῆς ἀποστάσεως, ἀρκεῖ νὰ ζητήσωμεν πόσον μέρος τῆς ἀποστάσεως θέλει διατρέξει ἐντὸς 8 ὡρῶν, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἐντὸς 5 ὡρῶν διήνυσε τὰ $\frac{2}{7}$ αὐτῆς, ἢ εἰς πόσον χρόνον θὰ διανύσῃ τὰ μένοντα $\frac{5}{7}$ τῆς ἀποστάσεως, ἀφοῦ διήνυσε τὰ $\frac{2}{7}$ αὐτῆς εἰς 5 ὥρας, τουτέστι νὰ λύσωμεν ἓν τῶν δύο ζητημάτων,

ὧραι	ἀποστάσεις		ὧραι	ἀποστάσεις
5	$\frac{2}{7}$		5	$\frac{2}{7}$
8	x	ἢ	x	$\frac{5}{7}$

καὶ ἐὰν εὕρωμεν ἢ ὅτι ἡ τιμὴ τῆς x τοῦ πρώτου ζητήματος εἶναι μικροτέρα τῶν $\frac{5}{7}$, ἢ ὅτι ἡ τιμὴ τῆς x τοῦ δευτέρου εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ 8, θέλομεν συμπεράνει ὅτι ἡ μεθ' ἧς βαδίζει ταχύτης τῶν 10 σταδίων εἶναι ἀνεπαρκής.

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων εὑρίσκομεν διὰ τὴν χ τὰς τιμὰς $\frac{16}{35}$ καὶ $\frac{25}{2}$, ἐξ ὧν ἡ μὲν $\frac{16}{36}$ εἶναι μικροτέρα τοῦ $\frac{5}{7}$, ἡ δὲ $\frac{25}{2}$ εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ 8, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ μεθ' ἧς ὁ πεζὸς ὁδεύει ταχύτης εἶναι ἀνεπαρκής.

Ἵνα λύσωμεν τὸ δεύτερον μέρος τοῦ προβλήματος, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ταχύτης ἐξαρτᾶται καὶ ἐκ τῶν ὑπολοίπων 8 ὡρῶν καὶ ἐκ τῆς μεινάσης πρὸς διάνυσιν ἀποστάσεως $\frac{5}{7}$. Γράφομεν λοιπὸν

ταχύτητες	ὧραι	ἀποστάσεις
10	5	$\frac{2}{7}$
χ	8	$\frac{5}{7}$,

ἐπειδὴ μᾶς ἐδόθη ὅτι μὲ ταχύτητα 10 σταδίων ὁδεύων διήνυσε τὰ $\frac{2}{7}$ τῆς ὁδοῦ εἰς 5 ὥρας, καὶ ἡ ζητουμένη ταχύτης πρέπει νὰ ἦναι τοιαύτη, ὥστε εἰς τὰς λοιπὰς 8 ὥρας νὰ διανύσῃ τὰ λοιπὰ $\frac{5}{7}$ τῆς ἀποστάσεως.

Λύοντες τώρα τὸ ἀνωτέρω ζήτημα εὑρίσκομεν

$$\chi = 15 + \frac{5}{8}.$$

Λοιπὸν ἡ ταχύτης 10 τοῦ πεζοῦ πρέπει νὰ αὐξηθῇ κατὰ 5 στάδια καὶ $\frac{5}{8}$ τοῦ σταδίου, ἵνα δυνηθῇ οὗτος νὰ διανύσῃ τὰ λοιπὰ $\frac{5}{7}$ τῆς ἀποστάσεως εἰς τὸ τέλος τῶν λοιπῶν 8 ὡρῶν.

Πᾶς τις βλέπει εὐκόλως ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι πρὸς λύσιν τοῦ 2ου ζητήματος ἀντικατεστήσαμεν τὰς δεδομένας συνθήκας καὶ τὰ ζητούμενα τοῦ προβλήματος δι' ἄλλων, ἅτινα ἐξ αὐτῆς τῆς φύσεως τοῦ ζητήματος καὶ ἐκ τῶν ὑπεννοουμένων σχέσεων ἔπρεπε νὰ ὑπάρχωσιν εἰς ἐκπλήρωσιν αὐτῶν. Π. χ. ἵνα ἴδωμεν, ἂν ἡ ταχύτης αὐτοῦ ἦναι ἐπαρκής, ἵνα φθάσῃ πρὸς τὸν σκοπὸν ἐντὸς τῶν λοιπῶν 8 ὡρῶν, ἐζητήσαμεν εἰς πόσας ὥρας ἤθελε διανύσει τὰ λοιπὰ $\frac{5}{7}$ τῆς ἀποστάσεως, ἢ εἰς 8 ὥρας τί μέρος τῆς ἀποστάσεως ἤθελε διανύσει, ἀφοῦ εἰς 5 ὥρας διήνυσε τὰ $\frac{2}{7}$. Πρὸς τούτοις ἀντὶ νὰ ζητήσωμεν κατὰ πόσον πρέπει νὰ αὐξηθῇ ἡ ταχύτης αὐτοῦ, ἐζητήσαμεν πόση πρέπει νὰ ἦναι ἡ ταχύτης αὐτοῦ, ἵνα εἰς 8 ὥρας διανύσῃ τὰ λοιπὰ $\frac{5}{7}$ τῆς ἀποστάσεως, ἀφοῦ μὲ ταχύτητα 10 σταδίων διήνυσε τὰ $\frac{2}{7}$ αὐτῆς ἐντὸς 5 ὡρῶν.

3ον. *Φρουρὰ 400 στρατιωτῶν πολιορκουμένη εἶχε τὴν 2 Ἀπριλίου τροφὰς δι' ὅλον τὸν μῆνα τοῦτον. Τὴν 9ην Ἀπριλίου ἔφθασεν εἰς αὐτὴν ἐπικουρία 120 στρατιωτῶν ἔχουσα τροφὰς διὰ 5 ἡμε-*

ρας. Ἐὰν ἑνώσωσιν οὗτοι τὰς τροφὰς αὐτῶν μετὰ τῶν τροφῶν τῶν πρώτων στρατιωτῶν, πόσον μέρος τοῦ ὡρισμένου σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος στρατιώτης, ἵνα αἱ ὑπάρχουσαι τροφαὶ ἐπαρκέσωσιν εἰς αὐτοὺς μέχρι τέλους τοῦ μηνός;

Σιτηρέσιον δὲ καλεῖται τὸ ποσὸν τῶν τροφῶν, ἃς λαμβάνει ἕκαστος στρατιώτης διὰ μίαν ἡμέραν, τοῦτο δὲ παριστῶσι συνήθως διὰ τῆς μονάδος.

Ἐκ τῆς ἑπομένης ἐκθέσεως τῆς λύσεως τοῦ προκειμένου προβλήματος ἕκαστος θέλει ἰδεῖ πῶς ἐφαρμόζομεν τὰς ἀνωτέρω δοθείσας ὁδηγίας.

Ἐπειδὴ οἱ 400 στρατιῶται εἶχον τροφὰς τὴν 2 Ἀπριλίου μέχρι τέλους τοῦ μηνὸς καὶ τὴν 9ην Ἀπριλίου ἔφθασεν εἰς αὐτοὺς ἡ ἐπικουρία τῶν 120 στρατιωτῶν, ἕπεται ὅτι τὴν 9ην Ἀπριλίου οἱ 400 στρατιῶται εἶχον τροφὰς διὰ 21 ἡμέρας.

Ὅταν ἔφθασεν εἰς αὐτοὺς ἡ ἐξ 120 στρατιωτῶν ἐπικουρία, ὁ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν ἔγεινε 520. Ἂν οἱ 120 δὲν εἶχον διόλου τροφὰς καὶ τὸ σιτηρέσιον ἔμενε τὸ αὐτό, ἵνα εὕρωμεν ἐπὶ πόσας ἡμέρας ἤθελον ἐπαρκέσει εἰς αὐτοὺς αἱ τροφαὶ τῶν 400 στρατιωτῶν, πρέπει νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς ζήτημα.

Ἐὰν 400 στρατιῶται εἶχον τροφὰς διὰ 21 ἡμέρας, αἱ τροφαὶ αὗται ἐπὶ πόσας ἡμέρας ἤθελον διαρκέσει εἰς 520 στρατιώτας;

στρατιῶται	ἡμέραι
400	21
520	x

ἐξ οὗ πορίζόμεθα

$$x=\frac{210}{13}=16+\frac{2}{13}.$$

Λοιπὸν ἐπὶ 16 ἡμέρας καὶ $\frac{2}{13}$ τῆς ἡμέρας ἤθελον ἐπαρκέσει εἰς τοὺς 520 στρατιώτας αἱ ἐπὶ 21 ἡμέρας τροφαὶ τῶν 400 στρατιωτῶν, ἐὰν οἱ προστεθέντες 120 δὲν εἶχον διόλου τροφάς. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἔφερον καὶ αὐτοὶ τροφὰς διὰ 5 ἡμέρας, πρέπει νὰ εὕρωμεν ἐπὶ πόσας ἡμέρας ἤθελον διαρκέσει αὗται εἰς τοὺς 520 στρατιώτας, τοῦ σιτηρεσίου ὑποτιθεμένου πάντοτε 1. Πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει προφανῶς νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς ζήτημα·

Ἐὰν 120 στρατιῶται εἶχον τροφὰς διὰ 5 ἡμέρας, ἐπὶ πόσας *ἡμέρας θέλουσιν ἐπαρκέσει αἱ τροφαὶ αὐτῶν εἰς 520 στρατιώτας;*

στρατιῶται	ἡμέραι
120	5
520	x

ἐξ οὗ πορίζόμεθα $x=\frac{15}{13}=1+\frac{2}{13}$.

Λοιπὸν αἱ ὑπάρχουσαι τροφαί, ἂν τὸ σιτηρέσιον ἔμενεν 1, ἤθελον ἐπαρκέσει εἰς τοὺς 520 στρατιώτας $(16+\frac{2}{13}+1+\frac{2}{13})$ ἡμέρας, ἤτοι 17 ἡμέρας καὶ $\frac{4}{13}$ τῆς ἡμέρας. Ἵνα τώρα ἴδωμεν πόσον μέρος τοῦ ὡρισμένου σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος, ἵνα αἱ ὑπάρχουσαι τροφαὶ ἐπαρκέσωσι μέχρι τέλους τοῦ μηνός, ἤτοι ἐπὶ 21 ἡμέρας, πρέπει προφανῶς νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς ζήτημα.

Ἐὰν 520 στρατιῶται λαμβάνοντες 1 σιτηρέσιον, εἶχον τροφὰς διὰ $17+\frac{4}{13}$ ἡμέρας· οἱ αὐτοὶ στρατιῶται πόσον σιτηρέσιον πρέπει νὰ λαμβάνωσιν, ἵνα αἱ τροφαὶ αὐτῶν ἐπαρκέσωσιν ἐπὶ 21 ἡμέρας;

ἡμέραι	σιτηρέσια
$17+\frac{4}{13}$	1
21	x

ἐξ οὗ πορίζόμεθα $x=\frac{75}{93}$.

Τὰ $\frac{75}{91}$ λοιπὸν τοῦ ὡρισμένου σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος ἀπὸ τῆς 9ης Ἀπριλίου ἵνα αἱ ὑπάρχουσαι τροφαὶ ἐπαρκέσωσι μέχρι τέλους τοῦ μηνός.

229. Νομίζομεν ὅτι τὰ προηγούμενα τρία παραδείγματα ἀρκοῦσι νὰ δείξωσι τὴν ὠφέλειαν τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἀνωτέρω δοθεισῶν ὁδηγιῶν πρὸς λύσιν τῶν ἀναγομένων εἰς τὴν ἁπλῆν καὶ σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν ζητημάτων, ἀλλ' οὐχ ἧττον οἱ μαθηταὶ πρέπει νὰ ἐφαρμόσωσι ταύτας εἰς οὐκ ὀλίγα ζητήματα, ἵνα δύνανται νὰ κάμωσιν εὐκολώτερον καὶ καταλλήλως χρῆσιν αὐτῶν. Πρὸς τὴν τοιαύτην ἄσκησιν θέλουσιν εὕρει κατάλληλα προβλήματα ἐν τῷ τέλει τοῦ παρόντος συγγράμματος, ἐν τῇ συλλογῇ τῶν πρὸς ἄσκησιν ζητημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΕ'.

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΙΝΩΝ.

—

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ.

230. Ἄς ἐφαρμόσωμεν τὰς προηγουμένας περὶ ἀναλόγων ποσῶν θεωρίας εἰς τὴν λύσιν μερικῶν τινων προβλημάτων, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν τοῦ τόκου.

Ἐπιτόκιον καλεῖται τὸ κέρδος, ὅπερ λαμβάνει ὁ δανείζων 100 δραχμὰς μετὰ ἓν ἔτος. Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι λαμβάνει 4 δραχμάς, τοῦτο παρίσταται πρὸς συντομίαν ὡς ἑξῆς 4 $^0/_0$, καὶ ἀπαγγέλλεται *τέσσαρα ταῖς ἑκατόν*.

Τόκος καλεῖται τὸ κέρδος, ὅπερ λαμβάνει ὁ δανείζων ἐπί τινα χρόνον ὁποιονδήποτε χρηματικὸν ποσόν, καλούμενον *κεφάλαιον*, πρὸς ὡρισμένον τι ἐπιτόκιον.

Ὁ τόκος προφανῶς ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ποσοῦ τοῦ δανειζομένου κεφαλαίου, ἐκ τοῦ χρόνου, καθ' ὃν τοῦτο ἔμεινεν εἰς τόκον, καὶ ἐκ τοῦ συμφωνηθέντος μεταξὺ τοῦ δανειστοῦ καὶ δανειζομένου ἐπιτοκίου, εἶναι δὲ *ἁπλοῦς* καὶ *σύνθετος*.

Ὁ τόκος λέγεται *ἁπλοῦς*, ὅταν τὸ δανειζόμενον κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ'ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος τοῦ κεφαλαίου, τοῦ χρόνου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου.

Σύνθετος λέγεται ὁ τόκος, ὅταν εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους, ἢ εἰς τὸ τέλος ὁποιασδήποτε ἄλλης συμφωνηθείσεις ἐποχῆς, προστίθενται εἰς τὰ κεφάλαια οἱ μὴ πληρωθέντες τόκοι αὐτῶν, ἵνα ἀποτελέσωσι νέον κεφάλαιον, ἀποφέρον νέον τόκον.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ἔχωμεν τοκίσει 200 δραχμάς, αἵτινες καθ' ὑπόθεσιν εἰς ἓν ἔτος φέρουσι τόκον 20, καὶ προσθέσωμεν τὸν μὴ πληρωθέντα τόκον 20 εἰς τὸ κεφάλαιον 200, ὥστε νὰ λάβωμεν εἰς τὸ ἑπόμενον ἔτος τόκον ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν 220 δραχμῶν, καὶ οὕτω καθεξῆς, τότε ὁ τόκος καλεῖται σύνθετος, ὡς συγκείμενος ἐκ τοῦ πραγματικοῦ τόκου καὶ ἐκ τοῦ τόκου τῶν τόκων.

Ἡμεῖς ἐνταῦθα θέλομεν πραγματευθῆ μόνον περὶ τοῦ ἁπλοῦ τόκου.

231. Εἰς πᾶν πρόβλημα τόκου τέσσαρά τινα διακρίνομεν· τὸ *κεφάλαιον*, ἤτοι τὸ δανειζόμενον ποσόν, τὸν *τόκον*, ἤτοι τὸ ληφθὲν κέρδος, τὸν *χρόνον*, ἐφ' ὃν τὸ κεφάλαιον ἔμεινεν εἰς τόκον, καὶ τὸ *ἐπιτόκιον*, ἤτοι τὸ ἐπὶ πόσον ταῖς 100 ἐδανείσθη τὸ κεφάλαιον. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τέσσαρα ταῦτα εἶναι οὕτω πως συνδεδεμένα πρὸς ἄλληλα, ὥστε, δοθέντων τῶν τριῶν, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν δι' αὐτῶν τὴν τιμὴν τοῦ τετάρτου, ἕπεται ὅτι πᾶν πρόβλημα τόκου ἀνάγεται εἰς ἓν τῶν ἑξῆς τεσσάρων γενικῶν προβλημάτων.

1ον. *Δοθέντος κεφαλαίου τινὸς* $\varkappa$, *τοῦ χρόνου* μ, *ἐφ' ὃν τοῦτο ἔμεινεν εἰς τόκον, καὶ τοῦ ἐπιτοκίου* ε, *νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος* τ.

2ον. *Δοθέντος κεφαλαίου τινὸς* $\varkappa$, *τοῦ χρόνου* μ, *ἐφ' ὃν τοῦτο ἔμεινεν εἰς τόκον καὶ τοῦ τόκου* τ, *νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον* ε.

3ον. *Δοθέντος κεφαλαίου τινὸς* $\varkappa$, *τοῦ τόκου αὐτοῦ* τ *καὶ τοῦ ἐπιτοκίου* ε, *νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος* μ, *ἐφ' ὃν τοῦτο ἔμεινεν εἰς τόκον*.

4ον. *Δοθέντος τοῦ τόκου* τ *κεφαλαίου τινὸς* $\varkappa$, *τοῦ χρόνου* μ, *ἐφ' ὃν τοῦτο ἔμεινεν εἰς τόκον, καὶ τοῦ ἐπιτοκίου* ε, *νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον* $\varkappa$.

Κατατάσσοντες τὰ δεδομένα κατὰ τὸν ἐν τῇ συνθέτῳ μεθόδῳ τῶν τριῶν ἐκτεθέντα τρόπον καὶ παριστῶντες τὸ ζητούμενον διὰ τοῦ γράμματος χ, θέλομεν ἔχει διὰ τὴν λύσιν τοῦ πρώτου προβλήματος

κεφάλαια	ἔτη	τόκοι
100	1	ε
$\varkappa$	μ	χ,

τουτέστιν, *100 δραχμαὶ εἰς ἓν ἔτος φέρουσι τόκον* ε, $\varkappa$ *δραχμαὶ εἰς* μ *χρόνον πόσον τόκον θέλουσι φέρει;*

Ἐπειδὴ δὲ ὁ τόκος χ εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος τοῦ κεφαλαίου $\varkappa$ καὶ τοῦ χρόνου μ, θέλομεν ἔχει, σκεπτόμενοι ὡς εἴπομεν ἐν τῇ συνθέτῳ μεθόδῳ τῶν τριῶν, τὰς ἑξῆς μερικὰς ἀναλογίας

$$\begin{aligned} 100 : \varkappa &= \varepsilon : v \\ 1 : \mu &= v : \chi, \end{aligned} \qquad \text{ἢ} \qquad \left.\begin{aligned} 100 &: \varkappa \\ 1 &: \mu \end{aligned}\right\} = \varepsilon : \chi,$$

αἵτινες μᾶς δίδουσι τὴν τιμὴν τοῦ χ, ἤτοι τοῦ ζητουμένου τόκου τ

$$\tau = \frac{\varkappa \times \mu \times \varepsilon}{100} \qquad (1)$$

Ὡσαύτως διὰ τὴν λύσιν τοῦ δευτέρου, ἐν ᾧ ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον, θέλομεν ἔχει

κεφάλαια	ἔτη	τόκοι
$\varkappa$	μ	τ
100	1	χ

τουτέστι, *κ δραχμαὶ εἰς μ ἔτη φέρουσι τόκον τ, 100 δραχμαὶ εἰς 1 ἔτος πόσον τόκον θέλουσι φέρει ;*

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐπιτόκιον, ὡς τόκος θεωρούμενον, εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον τοῦ κεφαλαίου 100 καὶ τοῦ χρόνου 1, θέλομεν ἔχει τὰς μερικὰς ἀναλογίας

$$\begin{aligned} \varkappa : 100 &= \tau : \upsilon \\ \mu : 1 &= \upsilon : \chi, \end{aligned} \quad \text{ἢ} \quad \left.\begin{aligned} \varkappa &: 100 \\ \mu &: 1 \end{aligned}\right\} = \tau : \chi,$$

ἐξ ὧν πορίζόμεθα διὰ τὴν τιμὴν χ, ἤτοι τοῦ ζητουμένου ἐπιτοκίου ε

$$\varepsilon = \frac{100 \times \tau}{\varkappa \times \mu} \qquad (2)$$

Διὰ τὴν λύσιν τοῦ τρίτου θέλομεν κατατάξει τὰ δεδομένα ὡς ἑξῆς, παριστῶντες διὰ χ τὸν ζητούμενον χρόνον μ

κεφάλαια	ἔτη	τόκοι
100	1	ε
$\varkappa$	χ	τ

τουτέστιν, *100 δραχμαὶ εἰς 1 ἔτος φέρουσι τόκον ε, κ δραχμαὶ εἰς πόσα ἔτη θέλουσι φέρει τόκον τ ;*

Ἐπειδὴ δὲ ὁ χρόνος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ κεφαλαίου $\varkappa$ καὶ κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος τοῦ τόκου τ, θέλομεν ἔχει τὰς ἑξῆς μερικὰς ἀναλογίας

$$\begin{aligned} \varkappa : 100 &= 1 : \upsilon \\ \varepsilon : \tau &= \upsilon : \chi, \end{aligned} \quad \text{ἢ} \quad \left.\begin{aligned} \varkappa &: 100 \\ \varepsilon &: \tau \end{aligned}\right\} = 1 : \chi,$$

ἐξ ὧν πορίζόμεθα διὰ τὴν τιμὴν τοῦ χ, ἤτοι τοῦ ζητουμένου χρόνου μ

$$\mu = \frac{100 \times \tau}{\varkappa \times \varepsilon} \qquad (3)$$

Καὶ τελευταῖον διὰ τὴν λύσιν τοῦ τετάρτου θέλομεν ἔχει

κεφάλαια	ἔτη	τόκοι
100	1	ε
χ	μ	τ

τουτέστιν, *100 δραχμαὶ εἰς 1 ἔτος φέρουσι τόκον ε, πόσαι δραχμαὶ εἰς μ ἔτη θέλουσι φέρει τόκον τ ;*

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ ζητουμένου κεφαλαίου, ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ χρόνου μ καὶ κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον τοῦ τόκου τ, θέλομεν σχηματίσει τὰς ἀναλογίας

$$\begin{matrix} \mu : 1 = 100 : \upsilon \\ \varepsilon : \tau = \upsilon : \chi, \end{matrix} \quad \text{ἢ} \quad \left.\begin{matrix} \mu : 1 \\ \varepsilon : \tau \end{matrix}\right\} = 100 : \chi,$$

ἐξ ὧν πορίζόμεθα διὰ τὴν τιμὴν τοῦ ζητουμένου κεφαλαίου $\varkappa$

$$\varkappa = \frac{100 \times \tau}{\mu \times \varepsilon} \tag{4}$$

232. Αἱ ἰσότητες (1), (2), (3), (4) καλοῦνται τύποι. Δι' αὐτῶν εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν ζητουμένων θέτοντες ἀντὶ τριῶν τῶν τεσσάρων γραμμάτων $\varkappa$, τ, μ, ε τὰς δεδομένας τιμὰς αὐτῶν. Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς ζήτημα·

Πόσον τόκον θέλουσι φέρει 1500 δραχμαὶ εἰς 3 ἔτη τοκιζόμεναι πρὸς 5 $^0/_0$; ἠθέλομεν θέσει ἐν τῷ τύπῳ (1)

$$\tau = \frac{\varkappa \times \mu \times \varepsilon}{100}$$

1500 ἀντὶ τοῦ $\varkappa$, 3 ἀντὶ τοῦ μ καὶ 5 ἀντὶ τοῦ ε, καὶ ἠθέλομεν ἔχει

$$\tau = \frac{1500 \times 3 \times 5}{100} = 225,$$

τουτέστιν ὁ ζητούμενος τόκος εἶναι 225 δραχμαί.

Ὡσαύτως, ἂν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς ζήτημα·

Πρὸς πόσον ἐπιτόκιον 1500 τοκιζόμεναι ἐπὶ 3 ἔτη θέλουσι φέρει τόκον 225 δραχμάς;
ἠθέλομεν θέσει εἰς τὸν τύπον (2)

$$\varepsilon = \frac{100 \times \tau}{\varkappa \times \mu}$$

225 ἀντὶ τοῦ τ, 1500 ἀντὶ τοῦ $\varkappa$ καὶ 3 ἀντὶ τοῦ μ, καὶ ἠθέλομεν εὕρει

$$\varepsilon = \frac{100 \times 225}{1500 \times 3} = 5,$$

τουτέστι τὸ ζητούμενον ἐπιτόκιον εἶναι 5.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐὰν ἐξαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς ἑκάστης τῶν ἰσοτήτων (1), (2), (3), (4), θέλομεν εὕρει τὴν αὐτὴν ἰσότητα

$$\varkappa \times \mu \times \varepsilon = 100 \times \tau, \tag{α}$$

τοῦτο δὲ ἠδύνατό τις νὰ προΐδῃ. Διότι ἑκάστη τῶν ἰσοτήτων (1), (2), (3), (4) παριστᾷ τὴν ὑπάρχουσαν σχέσιν μεταξὺ τοῦ δανειζομένου κεφαλαίου, τοῦ χρόνου ἐφ' ὃν μένει τοῦτο πρὸς τόκον, τοῦ τόκου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου, καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ συνδέουσα τὰ ποσὰ ταῦτα σχέσις πρέπει νὰ ἦναι μία καὶ ἡ αὐτή.

Ἀντιστρόφως ἐκ τῆς ἰσότητος (α) ποριζόμεθα ἑκάστην τῶν τεσσάρων (1), (2), (3), (4) θεωροῦντες διαδοχικῶς ὡς ἄγνωστον ἢ τὸ τ, ἢ τὸ ε, ἢ τὸ μ, ἢ τὸ κ καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς διὰ 100, ἢ διὰ $\kappa\times\mu$, ἢ διὰ $\kappa\times\varepsilon$, ἢ διὰ $\mu\times\varepsilon$. Ἐν ἄλλαις λέξεσι, διὰ τῆς ἰσότητος (α) δυνάμεθα νὰ λύσωμεν πᾶν ζήτημα τόκου θέτοντες ἀντὶ τριῶν ἐκ τῶν τεσσάρων γραμμάτων κ, μ, ε, τ τὰς δεδομένας τιμὰς αὐτῶν καὶ ζητοῦντες τὴν τιμὴν τοῦ τετάρτου, τὴν ταὐτοποιοῦσαν τὴν ἰσότητα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.—Ἐπειδὴ πᾶν ζήτημα τόκου ἀνάγεται εἰς τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν, ἐνομίσαμεν περιττὸν νὰ ἐπαναλάβωμεν ἐνταῦθα τὰ καθέκαστα τῶν συλλογισμῶν, δι' ὧν σχηματίζομεν τὰς μερικὰς ἀναλογίας, ἐξ ὧν ποριζόμεθα τὴν τελικήν, τὴν δίδουσαν τὴν τιμὴν τοῦ ζητουμένου. Τούτου δ' ἕνεκα καὶ ἐγράψαμεν ἁπλῶς τὰς μερικὰς ταύτας ἀναλογίας. Νομίζομεν ὅμως ἀναγκαῖον νὰ συμβουλεύσωμεν τοὺς μαθητὰς νὰ ἐφαρμόσωσι τὰ γενικῶς ἐνταῦθα λεχθέντα ἐπὶ τῶν ἑξῆς ζητημάτων πρὸς ἀπόκτησιν ἀσκήσεως καὶ ἄμεσον ἐφαρμογὴν τῶν ἐν τῇ συνθέτῳ μεθόδῳ τῶν τριῶν ἐκτεθέντων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.—*Ἐδάνεισέ τις 2500 δραχμὰς πρὸς 5 $^0/_0$ ἐπὶ 3 ἔτη καὶ 7 μῆνας· πόσον τόκον ἔλαβε;*

κεφάλαια	ἔτη	τόκοι
100	1	5
2500	$3+\frac{7}{12}$	x.

$$x=447,91$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.—*Δανείσας τις 3500 δραχμὰς ἔλαβε τόκον μετὰ 17 μῆνας 225· πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐδάνεισε;*

κεφάλαια	ἔτη	τόκοι
3500	$\frac{17}{12}$	225
100	1	x

$$x=4,53.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. —*Δανείσας τις κεφαλαιόν τι πρὸς 5 0/0 μετὰ 8 μῆνας ἔλαβε τόκον 173 δραχμάς· ἐκ πόσων δραχμῶν συνέκειτο τὸ κεφάλαιον;*

κεφάλαια	ἔτη	τόκοι
100	1	5
x	$\frac{8}{12}$	175

$$x=5250.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. — *Δανείσας τις 4000 δραχμὰς πρὸς 7,43 % ἔλαβε τόκον μετά τινα χρόνον 150· ἐπὶ πόσον χρόνον ἔμεινε τὸ κεφάλαιον αὐτοῦ εἰς τόκον;*

κεφάλαια	ἔτη	τόκοι
100	1	7,43
4000	x	150

$$x=\frac{375}{743} \text{ τοῦ ἔτους.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ.

234. Πολλάκις οἱ κάτοχοι γραμματίων ἢ συναλλαγματικῶν, πληρωτέων μετά τινα ὡρισμένον χρόνον, ὅταν λαμβάνωσιν ἀνάγκην χρημάτων πωλοῦσι ταῦτα πρὸς ἄλλους. Ἡ τοιαύτη πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας αὐτῶν πώλησις καλεῖται *προεξόφλησις*, καὶ οἱ ἀγοράζοντες ταῦτα *προεξοφληταί*.

Οἱ προεξοφληταὶ ζητοῦσι κέρδος τι, ὅπερ ὑπολογίζουσι πρὸς ὡρισμένον τι ἐκ συμφώνου μετὰ τοῦ προεξοφλοῦντος τὸ γραμμάτιον ἐπιτόκιον, καὶ τὸ ὁποῖον ἐξαρτᾶται προφανῶς ἐκ τοῦ πληρωτέου κεφαλαίου καὶ ἐκ τοῦ χρόνου, ὅστις θέλει παρέλθει, ἀφ' ἧς ἡμέρας προεξοφλεῖται μέχρι τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας αὐτοῦ. Τὸ ποσὸν τοῦτο ἀφαιροῦσιν ἀπὸ τοῦ πληρωτέου ἐν τῇ λήξει τῆς προθεσμίας κεφαλαίου, καὶ πληρόνουσιν εἰς τοὺς πωλητὰς τὸ ὑπόλοιπον αὐτοῦ. Τούτου ἕνεκα τὸ ποσὸν τοῦτο, καθ' ὃ ἐλαττοῦται ἡ ἀξία τοῦ γραμματίου ἢ τοῦ συναλλάγματος, καλεῖται ὑφαίρεσις.

235. Ἡ ὑφαίρεσις ὑπολογίζεται συνήθως κατὰ δύο διαφόρους τρόπους· ἢ ἐπὶ τοῦ πληρωτέου κεφαλαίου, τουτέστι ζητοῦσι πόσον τόκον θέλει φέρει τὸ πληρωτέον κεφάλαιον, τοκιζόμενον πρὸς τὸ συμφωνηθὲν ἐπιτόκιον, ἀφ' ἧς ἡμέρας προεξοφλεῖται τὸ γραμμάτιον μέχρι τῆς λήξεως τῆς ἐν αὐτῷ ὁριζομένης προθεσμίας, ἢ ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου ἐκείνου, ὅπερ ἂν ὁ πωλῶν τὸ γραμμάτιον ἐτόκιζεν ἀμέσως πρὸς τὸ συμφωνηθὲν ἐπιτόκιον, ἤθελε λάβει μέχρι τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας τόσον τόκον, ὅσον πρὸς προεξόφλησιν αὐτοῦ κέρδος ἔλαβεν ὁ προεξοφλητής· ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἡ δευτέρα αὕτη ὑφαίρεσις εἶ-

ναι ὁ τόκος, ὃν ἤθελε φέρει ἡ πρὸς προεξόφλησιν τοῦ γραμματίου πληρονομένη ποσότης, ἀφ' ἧς ἡμέρας πληρόνεται αὕτη μέχρι τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας τοῦ γραμματίου.

Ἡ μὲν πρώτη ὑφαίρεσις καλεῖται *ἐξωτερική*, ἡ δὲ δευτέρα *ἐσωτερική*.

Ἐπειδὴ ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος τοῦ πληρωτέου κεφαλαίου πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον καὶ εἰς ὡρισμένον χρόνον, ἡ εὕρεσις ταύτης εἶναι ἁπλοῦν ζήτημα τόκου, περὶ οὗ ἐπραγματεύθημεν προηγουμένως.

Παραδείγματος χάριν, ἂν εἴχομεν πρὸς προεξόφλησιν γραμμάτιόν τι 1000 δραχμῶν, πληρωτέων μετὰ 1 ἔτος, καὶ ὁ προεξοφλητὴς μᾶς ἐζήτει τόκον 12 %. ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις ἤθελεν εἶναι ὁ τόκος τῶν 1000 δραχμῶν εἰς 1 ἔτος πρὸς 12 %, ἤτοι δραχμαὶ 120.

235. Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως πρέπει, ὡς προείπομεν, νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, ὅπερ τοκισθὲν πρὸς τὸ ὁρισθὲν ἐπιτόκιον θέλει φέρει τόκον, ἀφ' ἧς ἡμέρας προεξοφλεῖται τὸ γραμμάτιον μέχρι τῆς λήξεως τῆς ἐν αὐτῷ προθεσμίας, ὅσον κέρδος ἔλαβεν ὁ προεξοφλητής, καὶ τοῦτο ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ γραμματίῳ κεφαλαίου. Ἡ εὑρεθησομένη διαφορὰ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις.

Ἵνα δείξωμεν πῶς εὑρίσκεται αὕτη, ἂς λάβωμεν παράδειγμά τινα. Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν γραμμάτιον 1000 δραχμῶν πληρωτέων μετὰ 1 ἔτος καὶ ζητοῦμεν τὴν γενησομένην ἐπ' αὐτοῦ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν πρὸς 10 %.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς· Λέγομεν, ἂν εἴχομεν γραμμάτιον 110 δραχμῶν, πληρωτέων μετὰ ἓν ἔτος, ὁ προεξοφλητὴς ἔπρεπε νὰ μᾶς πληρώσῃ τώρα 100 δραχμάς, (διότι 100 δραχμαὶ μετὰ 1 ἔτος πρὸς 10 % τοκιζόμεναι θέλουσι γείνει 110, τουτέστιν, ὅση εἶναι ἡ ἀξία τοῦ προεξοφληθέντος γραμματίου)· διὰ γραμμάτιον ἀξίας 1000 δραχμῶν πόσον πρέπει νὰ λάβωμεν; Πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει προφανῶς νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν

$$110 : 1000 = 100 : x,$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν

$$x = \frac{1000 \times 100}{110} = 909{,}09 \text{ ὡς ἔγγιστα.}$$

Ἀφαιροῦντες τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τῆς x ἀπὸ τοῦ 1000 εὑρίσκομεν διαφορὰν 90,91 περίπου, ἥτις παριστᾷ τὴν ζητουμένην ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν. Καὶ τῷ ὄντι, ἐὰν τοκίσωμεν τὰς 909,09 δραχμὰς πρὸς 10 $^0/_0$, θέλομεν εὕρει τόκον δι' ἓν ἔτος 90,91 περίπου.

Ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν λέγοντες· ἐπὶ γραμματίου ἀξίας 110 δραχμῶν, πληρωτέων μετὰ 1 ἔτος, ἡ γενησομένη πρὸς 10 $^0/_0$ ἐσωτερικὴ αὐτοῦ ὑφαίρεσις εἶναι 10 δραχμαί· ἐπὶ γραμματίου ἀξίας 1000 δραχμῶν, πληρωτέων ὡσαύτως μετὰ ἓν ἔτος, πόση θέλει εἶναι αὕτη; Πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει προφανῶς νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν

$$110 : 1000 = 10 : x,$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $x = 90,91$ περίπου.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἔχομεν γραμμάτιον ἀξίας 1000 δραχμῶν, πληρωτέων μετὰ 16 μῆνας, καὶ ζητοῦμεν τὴν πρὸς προεξόφλησιν αὐτοῦ γενησομένην ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν πρὸς 9 $^0/_0$.

Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν τόκον 12 τῶν 100 δραχμῶν πρὸς 9 $^0/_0$ μετὰ 16 μῆνας, καὶ προσθέτομεν τοῦτον εἰς τὰς 100 δραχμάς, ἔπειτα λέγομεν·

Διὰ 112 δραχμάς, πληρωτέας μετὰ 16 μῆνας, πρέπει νὰ λάβωμεν 100, (διότι αἱ 100 δραχμαὶ τοκιζόμεναι πρὸς 9 $^0/_0$ μετὰ 16 μῆνας θέλουσι γείνει 112)· πόσας πρέπει νὰ λάβωμεν διὰ 1000 δραχμὰς πληρωτέας ὡσαύτως μετὰ 16 μῆνας πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον 9 $^0/_0$; ἢ διὰ γραμμάτιον ἀξίας 112 δραχμῶν, πληρωτέων μετὰ 16 μῆνας, ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι 12 δραχμαί, πόση θέλει εἶναι αὕτη διὰ γραμμάτιον ἀξίας 1000 δραχμῶν, πληρωτέων μετὰ 16 ὡσαύτως μῆνας; Πρὸς εὕρεσιν δὲ τῶν ζητουμένων θέλομεν σχηματίσει τὰς ἑξῆς δύο ἀναλογίας

$$112 : 1000 = 100 : x,$$
$$112 : 1000 = 12 : x',$$

ὧν ἡ μὲν πρώτη δίδει διὰ x τὸ ὑπὸ τοῦ προεξοφλητοῦ πληρωθησόμενον κεφάλαιον, ἡ δὲ δευτέρα διὰ x' τὸ ὑπ' αὐτοῦ κρατηθησόμενον κέρδος. Βλέπομεν δὲ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τιμῶν

$$x = \frac{1000 \times 100}{112} \text{ καὶ } x' = \frac{1000 \times 12}{112}$$

εἶναι
$$\frac{1000 \times 100}{112} + \frac{1000 \times 12}{112} = \frac{1000 \times 112}{112} = 1000,$$

τουτέστιν αὐτὴ ἡ ἀξία τοῦ γραμματίου ὡς ἦτο τοῦτο ἑπόμενον.

236. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πορίζόμεθα εὐκόλως τὸν ἑξῆς πρὸς εὑρε-

ρεσιν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον κανόνα·

Ζητοῦμεν πρῶτον τὸν τόκον, ὃν φέρουσιν 100 δραχμαὶ τοκιζόμεναι πρὸς τὸ ὁρισθὲν ἐπιτόκιον, ἀφ' ἧς ἡμέρας γίνεται ἡ προεξόφλησις τοῦ γραμματίου μέχρι τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας αὐτοῦ, καὶ προσθέτομεν τοῦτον εἰς τὰς 100 δραχμάς. Σχηματίζομεν ἔπειτα ἀναλογίαν, ἧς οἱ μὲν δύο πρῶτοι ὅροι νὰ ἦναι τὸ εὑρεθησόμενον ἄθροισμα καὶ ἡ ἀξία τοῦ γραμματίου, οἱ δὲ δύο τελευταῖοι ὁ εὑρεθεὶς τόκος τῶν 100 δραχμῶν καὶ ἡ ζητουμένη ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις x.

Παραδείγματος χάριν, ἂν ἐπρόκειτο νὰ εὕρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν γραμματίου 4000 δραχμῶν, πληρωτέων μετὰ 27 μῆνας, πρὸς 8 $^0/_0$, ἠθέλομεν πρῶτον εὕρει τὸν τόκον 18 τῶν 100 δραχμῶν πρὸς 8$^0/_0$ εἰς 27 μῆνας, ἔπειτα σχηματίσει τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν

$$118 : 4000 = 18 : x, \qquad (1)$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα τὴν ζητουμένην τιμὴν τῆς x, ἥτις θέλει παριστᾷ τὴν ἐπὶ τοῦ γραμματίου τῶν 4000 δραχμῶν πρὸς 8 $^0/_0$ γενησομένην ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 1.—Ἐὰν ἐν τῷ ἀνωτέρω παραδείγματι ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀξία τοῦ γραμματίου 4000 ἐδιπλασιάσθη καὶ ὅτι τὰ λοιπὰ ἔμειναν τὰ αὐτά, θέλομεν εὕρει ἀντὶ τῆς ἀναλογίας (1) τὴν ἑξῆς

$$118 : 8000 = 18 : x, \qquad (2)$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν διὰ τιμὴν τῆς x ἀριθμὸν διπλάσιον. Λοιπὸν ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος τῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου, ἢ τοῦ εἰς τὴν λῆξιν αὐτοῦ πληρωτέου κεφαλαίου.

Ἂν εἴχομεν ὑποθέσει ὅτι ὁ χρόνος 27 *μῆνες* ἐδιπλασιάσθη καὶ ὅτι τὰ λοιπὰ ἔμειναν ἀμετάβλητα, ἠθέλομεν σχηματίσει πρὸς εὕρεσιν τῆς ζητουμένης ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως, ἀντὶ τῆς ἀναλογίας (1) τὴν ἀναλογίαν

$$136 : 4000 = 36 : x. \qquad (3)$$

Τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν (3) ἠθέλομεν εὕρει καὶ ἂν ὑπεθέτομεν ὅτι τὸ ἐπιτόκιον μόνον εἶχε διπλασιασθῆ καὶ ὅτι τὰ λοιπὰ τοῦ προβλήματος ἔμειναν ἀμετάβλητα.

Βλέπομεν λοιπὸν ἐκ τῆς ἀναλογίας (3) ὅτι, διπλασιαζομένου τοῦ χρόνου ἢ τοῦ ἐπιτοκίου, ἡ τιμὴ τῆς x αὐξάνει μέν, ἀλλὰ δὲν διπλασιάζεται. Διότι ἔπρεπεν ὁ πρῶτος ὅρος 118 τῆς ἀναλογίας (1) νὰ μείνῃ ἀμετάβλητος, ἵνα ἡ τιμὴ τῆς x τῆς ἀναλογίας (3) γείνῃ διπλασία τῆς ἐν τῇ ἀναλογίᾳ (1), ὅπερ δὲν συνέβη, διότι ἔγεινε καὶ κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις 136.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος τοῦ πληρωτέου κεφαλαίου, καὶ ὅτι ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ χρόνου τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας καθὼς καὶ ἐκ τοῦ ἐπιτοκίου οὕτως, ὥστε συναυξάνεται μὲν καὶ συνελαττοῦται μετ' αὐτῶν, ἀλλ' οὐχὶ καὶ ἀναλόγως.

Ἰδοὺ λοιπὸν ἓν παράδειγμα συμμεταβαλλομένων ποσῶν, ἀλλ' οὐχὶ καὶ ἀναλόγως, ὡς ἴσως τις ἐκ πρώτης ὄψεως ἤθελεν ὑποθέσει. Διὰ τοῦτο ἐλέγομεν ἐν τῇ παρατηρήσει τῆς 216 παραγράφου, ὅτι χρειάζεται μεγάλη προσοχή, ὅπως ἀποφανθῶμεν μετὰ βεβαιότητος, ἂν δύο ποσὰ ἦναι ἢ μὴ ἀνάλογα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 2. — Τὰ τέσσαρα ποσά: *πληρωτέον κεφάλαιον, χρόνος τῆς λήξεως, ἐπιτόκιον καὶ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις*, ἂν καὶ δὲν εἶναι ἅπαντα ἀνάλογα πρὸς ἄλληλα, ἐξαρτῶνται ὅμως οὕτως ἀπ' ἀλλήλων, ὥστε, ἐὰν ὑποτεθῶσι τρία τούτων ὁποιαδήποτε ὡς γνωστά, ἡ τιμὴ τοῦ τετάρτου εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη. Ἕπεται ἐντεῦθεν ὅτι πᾶν πρόβλημα ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως θέλει ἀνάγεσθαι εἰς ἓν τῶν ἑξῆς τεσσάρων γενικῶν·

1ον. Δοθέντος τοῦ πληρωτέου κεφαλαίου, τοῦ χρόνου τῆς λήξεως καὶ τοῦ ἐπιτοκίου, νὰ εὑρεθῇ ἡ γενησομένη ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις.

2ον. Δοθέντος τοῦ πληρωτέου κεφαλαίου, τοῦ χρόνου τῆς λήξεως καὶ τῆς γενομένης ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως, νὰ εὑρεθῇ τὸ πρὸς ὃ αὕτη ἐγένετο ἐπιτόκιον.

3ον. Δοθέντος τοῦ πληρωτέου κεφαλαίου, τοῦ ἐπιτοκίου καὶ τῆς γενομένης ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως, νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος τῆς λήξεως.

4ον. Δοθέντος τοῦ χρόνου τῆς λήξεως, τοῦ ἐπιτοκίου καὶ τῆς γενομένης ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως, νὰ εὑρεθῇ τὸ πληρωτέον κεφάλαιον.

Εἴδομεν δὲ προηγουμένως πῶς λύεται τὸ 1ον ζήτημα. Ἂς ζητήσωμεν ἐνταῦθα χάριν ἀσκήσεως τὸν τρόπον τῆς λύσεως ἑκάστου τῶν λοιπῶν λαμβάνοντες πρὸς τοῦτο μερικά τινα παραδείγματα.

2ον. Διὰ κεφάλαιον 5000 δραχμῶν πληρωτέων μετὰ 10 μῆνας ἐγένετο ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις 600 δραχμῶν, πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ὑπελογίσθη αὕτη;

Ἐπειδὴ ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι 600 δραχμαὶ καὶ ἡ ἀξία τοῦ γραμματίου 5000, ἕπεται ὅτι τὸ πρὸς προεξόφλησιν αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ προεξοφλητοῦ πληρωθὲν κεφάλαιον εἶναι 4,400 δραχμῶν, καί, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως, τοῦτο, τοκισθὲν πρὸς τὸ ζητούμενον ἐπιτόκιον, πρέπει νὰ φέρῃ τόκον μετὰ 18 μῆνας 600 δραχμάς· ἐν ἄλλαις λέξεσι, πρέπει πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τοῦ τόκου.

Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον τοκιζόμεναι 4,400 δραχμαὶ μετὰ 18 μῆνας θέλουσι φέρει τόκον 600 δραχμάς;

κεφάλαια	ἔτη	τόκοι
4400	$\frac{18}{12}$	600
100	1	x

ὅπερ δὲν παρέχει οὐδεμίαν δυσκολίαν.

3. *Διὰ κεφάλαιον 4,500 δραχμῶν ἐγένετο πρὸς 10 % ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις 700 δραχμῶν· μετὰ πόσον χρόνον ἔπρεπεν αὗται νὰ πληρωθῶσιν;*

Ἐπειδὴ ἡ γενομένη ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι 700 δραχμῶν, τὸ πληρωθὲν πρὸς προεξόφλησιν τοῦ γραμματίου ὑπὸ τοῦ προεξοφλητοῦ ποσὸν εἶναι 3,800. Πρὸς εὕρεσιν λοιπὸν τοῦ ζητουμένου πρέπει νὰ λύσωμεν προφανῶς τὸ ἑξῆς ζήτημα τοῦ τόκου.

Μετὰ πόσον χρόνον 3,800 δραχμαί, τοκιζόμεναι πρὸς 10 %, θέλουσι φέρει τόκον 700 δραχμάς;

κεφάλαια	ἔτη	τόκοι
100	1	10
3800	x	700

4.—*Διὰ κεφάλαιόν τι, πληρωτέον μετὰ 15 μῆνας, ἐγένετο ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις 500 δραχμῶν πρὸς 8 %· ἐκ πόσων δραχμῶν συνέκειτο τοῦτο;*

Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν τόκον 10 τῶν 100 δραχμῶν εἰς 15 μῆνας πρὸς τὸ ὡρισμένον ἐπιτόκιον 8, ἔπειτα λέγομεν·

10 δραχμαὶ εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις κεφαλαίου 110 δραχμῶν πληρωτέων μετὰ 15 μῆνας· ὅταν ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις ἦναι 500 δραχμῶν, ἐκ πόσων δραχμῶν θέλει σύγκεισθαι τὸ πληρωτέον μετὰ τὸν αὐτὸν χρόνον κεφάλαιον;

Καὶ ἐπειδὴ τὰ ποσὰ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ *κεφάλαιον* εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα, σχηματίζομεν πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν

$$10 : 500 = 110 : x,$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα τὴν ζητουμένην τιμὴν τοῦ πληρωτέου κεφαλαίου χ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.—Οἱ ἔμποροι πρὸς εὐκολίαν ὑπολογίζουσι συνήθως τὴν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν, ὅταν προεξοφλῶσι τὰ γραμμάτια αὐτῶν ἢ τὰ τῶν ἄλλων, ἐπειδὴ δέ, ὡς εἴδομεν, αὕτη εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ τόκου, ὃν ἤθελε φέρει τὸ ληφθὲν πρὸς ἐξόφλησιν ποσόν, τοκισθὲν πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον μέχρι τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας, λέγουσί τινες ὅτι αὕτη εἶναι *ἄδικος*. Ἡμεῖς νομίζομεν ὅτι δὲν γίνεται οὐδεμία ἀδικία, διότι τοῦτο εἶναι ἐν γνώσει ἀμφοτέρων τῶν συμβαλλομένων, καὶ ἐπειδὴ τὸ ἐπιτόκιον ὁρίζεται ἐκ συμφώνου ὑπ' αὐτῶν, δύναται νὰ τὸ ὁρίσωσιν οὕτως, ὥστε ἡ παραγομένη διαφορὰ νὰ ἐκλείψῃ. Παραδείγματος χάριν, ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις τῶν 1000 δραχμῶν, πληρωτέων μετὰ ἓν ἔτος, πρὸς 10 $^0/_0$ εἶναι 100 δραχμαί, καὶ ὄχι 90, 09 ὡς εὕρομεν ζητοῦντες τὴν ἐσωτερικὴν αὐτῶν ὑφαίρεσιν. Ἀλλ' ἐὰν συμφωνηθῇ τὸ ἐπιτόκιον πρὸς 9 $^0/_0$, ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις τῶν 1000 δραχμῶν θέλει εἶναι μόνον 90, περίπου ὅση καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις πρὸς 10 $^0/_0$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, ὁσάκις ὑπολογίζουσιν ἐξωτερικῶς τὴν ὑφαίρεσιν, ἀρκεῖ νὰ ἐλαττώσωσι καταλλήλως τὸ ἐπιτόκιον καὶ θέλουσιν εὕρει τὸ αὐτὸ περίπου ἐξαγόμενον.

ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΠΟΣΟΥ ΤΙΝΟΣ ΕΙΣ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ.

237. Ἂς παραστήσωμεν διὰ Α δεδομένον τι ποσὸν ἢ μέγεθος. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τοῦτο ἐμερίσθη εἰς ἀριθμόν τινα μερῶν, π. χ. εἰς τέσσαρα μέρη

$$\chi,\ \psi,\ \upsilon,\ \varphi$$

τοιαῦτα, ὥστε ὁ λόγος ὁποιουνδήποτε ἐξ αὐτῶν νὰ ἦναι ἴσος τῷ λόγῳ τῶν ἀντιστοίχων ποσῶν

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,$$

τότε λέγεται ὅτι *τὸ ποσὸν Α ἐμερίσθη εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν δεδομένων ποσῶν* α, β, γ, δ.

Ἐπειδὴ δὲ ἀπεδείξαμεν, ὅτι ὁ λόγος δύο ποσῶν εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ τῶν παριστώντων αὐτὰ ἀριθμῶν, ἐν τοῖς ἑπομένοις θέλομεν διὰ τῶν γραμμάτων A, α, β, γ, δ, χ, ψ, υ, φ παριστᾷ ἀδιαφόρως ἢ αὐτὰ τὰ ποσὰ ἢ τοὺς ἀριθμούς, τοὺς παριστῶντας τὰ μέτρα αὐτῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. — *Νὰ μερισθῇ τὸ δεδομένον ποσὸν Α εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν δεδομένων ἀριθμῶν* α, β, γ, δ.

Ἔστωσαν χ, ψ, υ, φ τὰ ζητούμενα μέρη τοῦ Α. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τοῦ μερισμοῦ ποσοῦ τινος εἰς μέρη ἀνάλογα θέλομεν ἔχει, συνδυάζοντες καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους τοὺς ἴσους λόγους, τὰς ἑξῆς ἓξ ἀναλογίας

$$\chi:\psi=\alpha:\beta,\quad \chi:\upsilon=\alpha:\gamma,\quad \chi:\varphi=\alpha:\delta,$$
$$\psi:\upsilon=\beta:\gamma,\quad \psi:\varphi=\beta:\delta,\quad \upsilon:\varphi=\gamma:\delta.$$

Ἐὰν δὲ μεταθέσωμεν τοὺς μέσους τῶν ἓξ τούτων ἀναλογιῶν, θέλομεν ἔχει τὰς ἀναλογίας

$$\chi:\alpha=\psi:\beta,\quad \chi:\alpha=\upsilon:\gamma,\quad \chi:\alpha=\varphi:\delta,$$
$$\psi:\beta=\upsilon:\gamma,\quad \psi:\beta=\varphi:\delta,\quad \upsilon:\gamma=\varphi:\delta,$$

αἵτινες παριστῶσι τὴν πρὸς ἀλλήλους ἰσότητα τῶν ἑξῆς τεσσάρων λόγων $\chi:\alpha$, $\psi:\beta$, $\upsilon:\gamma$, $\varphi:\delta$, συνδυαζομένων ἀνὰ δύο καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους. Θέλομεν λοιπὸν ἔχει τὴν ἑξῆς σειρὰν τῶν ἴσων λόγων

$$\chi:\alpha=\psi:\beta=\upsilon:\gamma=\varphi:\delta. \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ εἰς πᾶσαν σειρὰν ἴσων λόγων τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων εἶναι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων, ὡς τις ἡγούμενος πρὸς τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ, ποριζόμεθα ἐκ τῆς σειρᾶς (1) τὰς ἑξῆς τέσσαρας ἀναλογίας

$$\chi+\psi+\upsilon+\varphi \text{ ἢ } A:\alpha+\beta+\gamma+\delta=\chi:\alpha,$$
$$\chi+\psi+\upsilon+\varphi \text{ ἢ } A:\alpha+\beta+\gamma+\delta=\psi:\beta,$$
$$\chi+\psi+\upsilon+\varphi \text{ ἢ } A:\alpha+\beta+\gamma+\delta=\upsilon:\gamma,$$
$$\chi+\psi+\upsilon+\varphi \text{ ἢ } A:\alpha+\beta+\gamma+\delta=\varphi:\delta.$$

Ἐκ τῆς πρώτης τούτων εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ χ

$$\chi=\frac{A\times\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

καὶ ἐξ ἑκάστης τῶν τριῶν ἄλλων τὰς τιμὰς τῶν λοιπῶν μερῶν ψ, υ, φ,

$$\psi=\frac{A\times\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta},\qquad \upsilon=\frac{A\times\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta},\qquad \varphi=\frac{A\times\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι

Ἵνα εὕρωμεν ἕκαστον τῶν μερῶν χ, ψ, υ, φ τοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ μεριστέου ποσοῦ A, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐφ' ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ, καὶ νὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν εὑρεθησομένων γινομένων διὰ τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta+\gamma+\delta$. Ἕκαστον τῶν οὕτως εὑρεθησομένων πηλίκων θέλει παριστᾷ τὸ μέρος, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν ἀριθμόν, ἐφ' ὃν ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸ δεδομένον A.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 1.—"Αν τὸ δεδομένον ποσὸν Α ἐπρόκειτο νὰ μερισθῇ εἰς ὁσαδήποτε μέρη, ἀνάλογα ἰσαρίθμων δεδομένων ἀριθμῶν, ἠθέλομεν εὕρει ἀκολουθοῦντες κατὰ γράμμα τοὺς ἀνωτέρω συλλογισμοὺς ὅτι ὁ προηγούμενος κανὼν εἶναι γενικός.

Παραδείγματος χάριν, ἂν ἐζητεῖτο νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 1000 εἰς πέντε μέρη χ, ψ, υ, φ, ω ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 5, 7, 11 καὶ 13, ἠθέλομεν εὕρει σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω ὅτι

$$\chi=\frac{1000\times2}{2+5+7+11+13},\qquad \psi=\frac{1000\times5}{2+5+7+11+13},$$

$$\upsilon=\frac{1000\times7}{2+5+7+11+13},\qquad \varphi=\frac{1000\times11}{2+5+7+11+13},$$

καὶ

$$\omega=\frac{1000\times13}{2+5+7+11+13}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ 2.—'Εὰν διαιρέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς α, β, γ, δ,.. διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, οἱ μεταξὺ αὐτῶν λόγοι δὲν θέλουσι μεταβληθῇ. Ὁσάκις λοιπὸν ἔχομεν νὰ μερίσωμεν ποσόν τι Α εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ,.., ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ,.. δὲν ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀντ' αὐτῶν τὰ πηλίκα α', β', γ', δ', ... τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν καὶ ἀναλόγως πρὸς ταῦτα νὰ μερίσωμεν ἀκολούθως τὸ δεδομένον ποσὸν Α.

238. Ἔστω ποσόν τι Μ καὶ Α καὶ Β δύο ἕτερα ποσά, πρὸς ἃ τὸ Μ ὑποτίθεται κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον, καὶ ἂς παραστήσωμεν διὰ χ, ψ, ω, κτλ. τὰς τιμὰς τοῦ Μ, τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὰς τιμὰς α καὶ β, α' καὶ β', α'' καὶ β'', κτλ, τῶν ποσῶν Α καὶ Β. Ἐὰν ζητήσωμεν νὰ προσδιορίσωμεν διὰ τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, ἢ διὰ τοῦ ἐν τῇ § 221 δοθέντος κανόνος, ἑκάστην τῶν τιμῶν χ, ψ, ω, κτλ. διά τινος τούτων, ὡς γνωστῆς λαμβανομένης, θέλομεν ἔχει τὰς ἑξῆς ἰσότητας

$$\psi=\frac{\chi\times\alpha'\times\beta'}{\alpha\times\beta},\qquad \omega=\frac{\chi\times\alpha''\times\beta''}{\alpha\times\beta},\qquad \psi=\frac{\omega\times\alpha'\times\beta'}{\alpha''\times\beta''},$$

$$\omega=\frac{\psi\times\alpha''\times\beta''}{\alpha'\times\beta'},\qquad \chi=\frac{\psi\times\alpha\times\beta}{\alpha'\times\beta'},\qquad \chi=\frac{\omega\times\alpha\times\beta}{\alpha''\times\beta''},\ \text{κτλ.}$$

ἐξ ὧνποριζόμεθα διαιροῦντες τὰ δύο μέλη τῆς μὲν 1ης καὶ 3ης διὰ τοῦ γινομένου $\alpha'\times\beta'$, τῆς δὲ 2ας καὶ 4ης διὰ τοῦ γινομένου $\alpha''\times\beta''$ καὶ τῆς 5ης καὶ 6ης διὰ τοῦ γινομένου $\alpha\times\beta$, κτλ. τὴν ἰσότητα τῶν ἑξῆς λόγων

$$\frac{\chi}{\alpha\times\beta}, \quad \frac{\psi}{\alpha'\times\beta'}, \quad \frac{\omega}{\alpha''\times\beta''}, \text{ κτλ.}$$

ἢ τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων

$$\chi : \alpha\times\beta = \psi : \acute{\alpha}\times\beta' = \omega : \acute{\alpha}'\times\beta'' = \text{κτλ.}$$

Ἐκ τῆς σειρᾶς ταύτης τῶν ἴσων λόγων πορίζόμεθα τὰς ἑξῆς ἀναλογίας (212)

$$\chi+\psi+\omega+\text{κτλ.} : \alpha\times\beta\times\acute{\alpha}+\beta' + \acute{\alpha}'\times\beta''\text{κτλ.} = \chi : \alpha\times\beta,$$
$$\chi+\psi+\omega+\text{κτλ.} : \alpha\times\beta+\acute{\alpha}\times\beta'+\acute{\alpha}'\times\beta''+\text{κτλ.} = \psi : \acute{\alpha}\times\beta',$$
$$\chi+\psi+\omega+\text{κτλ.} : \alpha\times\beta+\acute{\alpha}\times\beta'+\acute{\alpha}'\times\beta''+\text{κτλ.} = \omega : \acute{\alpha}'\times\beta'',$$
$$\ldots\ldots : \ldots\ldots\ldots = \ : \ .$$

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα $\chi+\psi+\omega+$κτλ. εἶναι γνωστόν τι ποσὸν Π, αἱ ἀνωτέρω ἀναλογίαι γράφονται καὶ οὕτω

$$\Pi : \alpha\times\beta\times\acute{\alpha}+\beta'+\acute{\alpha}'\times\beta''+\text{κτλ.} = \chi : \alpha\times\beta,$$
$$\Pi : \alpha\times\beta+\acute{\alpha}\times\beta'+\acute{\alpha}'\times\beta''+\text{κτλ.} = \psi : \acute{\alpha}\times\beta',$$
$$\Pi : \alpha\times\beta+\acute{\alpha}\times\beta'+\acute{\alpha}'\times\beta''+\text{κτλ.} = \omega : \acute{\alpha}'\times\beta'',$$
$$. : \ldots\ldots +\text{κτλ.} = \ : \ .$$

Ἐκ τῶν ἀναλογιῶν τούτων, τῶν περιεχουσῶν μίαν μόνην ἄγνωστον, θέλομεν πορισθῇ τὰς τιμὰς τοῦ χ, ψ, ω, κτλ., ἐὰν ὑποθέσωμεν γνωστὰς τὰς τιμὰς τοῦ Π, α καὶ β, $\acute{\alpha}$ καὶ β', $\acute{\alpha}'$ καὶ β'', κτλ., πρὸς ἕκαστον ζεῦγος τῶν ὁποίων ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς ἀγνώστου εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος· ἐν ἄλλαις λέξεσιν

Ἂν εἴχομεν νὰ μερίσωμεν ποσόν τι Π εἰς μέρη χ, ψ, ω, κτ.λ. κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα συγχρόνως δύο διαφόρων τιμῶν α καὶ β, $\acute{\alpha}$ καὶ β', $\acute{\alpha}'$ καὶ β'', κτ.λ. δύο δεδομένων ποσῶν Α καὶ Β, πρέπει πρὸς τοῦτο νὰ μερίσωμεν τὸ δεδομένον ποσὸν Π ἀναλόγως τῶν γινομένων $\alpha\times\beta$, $\acute{\alpha}\times\beta'$, $\acute{\alpha}'\times\beta''$, κτ.λ. τῶν ἀντιστοιχούντων ζευγῶν κατὰ τὸν προηγουμένως δοθέντα κανόνα.

Παραδείγματος χάριν, ἂν ἐπρόκειτο νὰ μερίσωμεν τὸ Π εἰς τρία μέρη χ, ψ, ω, ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ ἦναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον τῶν δύο ἀριθμῶν 2 καὶ 3, 5 καὶ 7, 6 καὶ 9, ἔπρεπε πρὸς εὕρεσιν ἀντιστοιχούντων μερῶν νὰ μερίσωμεν τὸ Π εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν γινομένων 2×3, 5×7, 6×9 κατὰ τὸν ἐν τῇ προηγουμένῃ παραγράφῳ δοθέντα κανόνα

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΙΑΣ.

239. Ἐπειδὴ πολλάκις τὰ κεφάλαια, ἅτινα δύναται νὰ διαθέσῃ τις διά τινα ἐπιχείρησιν, ἢ δὲν εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἐπαρκῆ πρὸς

ἐπιτυχίαν τοῦ τῆς ἐπιχειρήσεως σκοποῦ, ἢ δὲν θέλει νὰ κινδυνεύσῃ μόνος αὐτὸς ἐν περιπτώσει ἀποτυχίας, προσκαλεῖ καὶ ἄλλους, ἵνα συμμετάσχωσι τῆς ἐπιχειρήσεως καταβάλλοντες ἕκαστος ὡρισμένον χρηματικὸν ποσὸν ἢ ἅπαξ καὶ συγχρόνως ἢ κατὰ διαφόρους ἐποχάς. Μετὰ τὸ πέρας τῆς ἐπιχειρήσεως, ἢ πολλάκις καὶ ἐν τῷ μεταξύ, ὅταν αὕτη ἦναι διαρκής, πρέπει νὰ συμμετάσχωσι πάντες οἱ καταβαλόντες τῶν ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως προκυψάντων κερδῶν ἢ νὰ πληρώσωσι τὴν προκύψασαν ἐξ αὐτῆς ζημίαν.

Ἐντεῦθεν δυνατὸν νὰ προκύψωσι διάφορα πρὸς λύσιν ζητήματα, ἅτινα καλοῦνται *προβλήματα τῆς ἑταιρίας*. Ἡμεῖς ἐνταῦθα θέλομεν ἐξετάσει μόνον τὰς ἑξῆς δύο ἁπλᾶς περιπτώσεις.

1ον. *Ὅταν οἱ συνέταιροι κατέβαλον ἅπαξ καὶ συγχρόνως ὡρισμένον ἕκαστος κεφάλαιον, καὶ πρόκειται μετά τινα χρόνον νὰ μερίσωσιν ἀναλόγως τοῦ ὑφ' ἑκάστου καταβληθέντος ποσοῦ κέρδος τι ἢ ζημίαν τινὰ Α.*

2ον. *Ὅταν οἱ συνέταιροι κατέβαλον ἅπαξ μέν, ἀλλ' εἰς διαφόρους ἕκαστος ἐποχάς, διάφορα κεφάλαια καὶ μετὰ παρέλευσιν χρόνου τινὸς ζητοῦσι τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἕκαστον κέρδος ἢ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν ζημίαν, ἀναλόγως τοῦ ὑφ' ἑκάστου καταβληθέντος χρηματικοῦ ποσοῦ καὶ τοῦ χρόνου, καθ' ὃν τοῦτο εἶχε μείνει κατατεθειμένον.*

Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι

Τρεῖς συνέταιροι κατέβαλον ὁ μὲν ***10000*** *δραχμάς, ὁ δὲ* ***15000*** *καὶ ὁ τρίτος* ***25000****, καὶ προέκυψε κέρδος ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως αὐτῶν δραχμαὶ* ***19000****· ζητεῖται πόσον θέλει λάβει ἕκαστος.*

Εἶναι φανερὸν ὅτι πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ μερισθῇ τὸ κέρδος 19000 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 10000, 15000, 25000, ἢ ὅπερ ταὐτό, ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 5, τῶν παριστώντων τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν 5000. Θέλομεν εὕρει λοιπὸν παριστῶντες διὰ α τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου, διὰ β δὲ καὶ γ τὸ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου (237)

$$\alpha=\frac{19000\times 2}{2+3+5}=3800,\quad \beta=\frac{19000\times 3}{2+3+5}=5700,\quad \gamma=\frac{19000\times 5}{2+3+5}=9500.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.—*Τέσσαρες ἔμποροι ἠγόρασαν φορτίον τι σίτου καταβαλόντες ὁ μὲν* ***2000*** *δραχμάς, ὁ δὲ* ***5000****, ὁ τρίτος* ***7000*** *καὶ ὁ τέταρτος* ***12000****, ἐκέρδισαν δὲ ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτοῦ* *δραχμὰς 1650· πόσον κέρδος θέλει λάβει ἕκαστος ἀναλόγως τοῦ ὑπ' αὐτοῦ κατατεθέντος κεφαλαίου;*

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ χ, ψ, υ, φ τὰ μερίδια ἑνὸς ἑκάστου, θέλομεν εὕρει μερίζοντες τὸ κέρδος 1560 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν κεφαλαίων 2000, 5000, 7000 καὶ 12000 ἢ τῶν ἀριθμῶν 2, 5, 7 καὶ 12 (237 *Παρατήρησις* 2)

$$\chi=\frac{1560\times2}{2+5+7+12},\qquad \psi=\frac{1560\times5}{2+5+7+12},$$
$$\upsilon=\frac{1560\times7}{2+5+7+12},\qquad \varphi=\frac{1560\times12}{2+5+7+12},$$

240. Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι μᾶς ἐδόθη πρὸς λύσιν καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν ὁ μὲν 10000 δραχμάς, ὁ δὲ 20000 καὶ ὁ τρίτος 50000 διά τινα ἐπιχείρησιν, καὶ πρὸς τούτοις ὅτι τὰ κεφάλαια τοῦ πρώτου ἔμειναν 13 ἔτη, τὰ τοῦ δευτέρου 7 καὶ τὰ τοῦ τρίτου 3, προέκυψε δὲ κέρδος ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως 42000 δραχμῶν. Ζητεῖται τί μέρος τοῦ κέρδους θέλει λάβει ἕκαστος ἀναλόγως τοῦ ὑπ' αὐτοῦ καταβληθέντος κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου, ἐφ' ὃν τοῦτο ἔμεινεν ἐν τῇ ἐπιχειρήσει.

Ἐνταῦθα ἕκαστον τῶν ζητουμένων μερῶν χ, ψ, ω εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον τῶν τιμῶν 10000 καὶ 13, 20000 καὶ 7, 50000 καὶ 3. Πρέπει λοιπὸν κατὰ τὰ λεχθέντα ἐν τῇ § 238 νὰ μερίσωμεν τὸ κέρδος 42000 ἀναλόγως τῶν γινομένων 10000×13, 20000×7, 50000×3 ἤ, ὅπερ ταὐτό, τῶν ἀριθμῶν 13, 14 καὶ 15. Θέλομεν δὲ οὕτως εὕρει

$$\chi=\frac{42000\times13}{13+14+15},\qquad \psi=\frac{42000\times14}{13+14\times15},\qquad \omega=\frac{42000\times15}{13+14+15},$$
$$\text{ἢ}\quad \chi=13000,\qquad \psi=14000,\qquad \omega=15000.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΙΞΕΩΣ.

241. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.**—*Ἔμπορός τις ἔχει τριῶν ποιοτήτων σίτους. Λαμβάνει ἐκ τῆς πρώτης, ἧς ἡ ἀξία τοῦ κοιλοῦ εἶναι 5 δραχμῶν, 100 κοιλά, ἐκ τῆς δευτέρας, ἧς ἡ ἀξία εἶναι 6 δραχμῶν, 150 κοιλά, καὶ ἐκ τῆς τρίτης, ἧς ἡ ἀξία εἶναι 8 δραχμῶν, 200 κοιλά, καὶ σχηματίζει ἐκ τούτων ἓν μίγμα. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ τιμήσῃ ἕκαστον κοιλὸν τοῦ μίγματος, ἵνα λάβῃ τὴν αὐτὴν ποσότητα χρημάτων, ἣν ἤθελε λάβει, ἂν ἐπώλει τὰ 100 κοιλὰ πρὸς 5 δραχμάς, τὰ 150 πρὸς 6 δραχμάς, καὶ τὰ 200 πρὸς 8 δραχμάς.*

Ὁ ἀριθμὸς τῶν κοιλῶν τοῦ μίγματος θέλει εἶναι ἴσος τῷ ἀθροίσματι 100+150+200, ἤτοι 450. Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν διὰ χ τὴν ζητουμένην ἀξίαν τοῦ κοιλοῦ τοῦ μίγματος, ὁ ἔμπορος θέλει λάβει ἐκ τῆς πωλήσεως τῶν 150 κοιλῶν πρὸς χ δραχμὰς ἕκαστον $150\times\chi$ δραχμάς. Ἀλλ' ἐὰν ἐπώλει τὰ 100 πρὸς 5 δραχμάς, ἤθελε λάβει 500 δραχμάς. Ὡσαύτως ἐκ τῆς πωλήσεως τῶν 150 καὶ 200 πρὸς 6 καὶ 8 δραχμὰς ἤθελε λάβει 900 καὶ 1600 δραχμάς. Ἤθελε λάβει λοιπὸν τὸ ὅλον 500+900+1600, ἤτοι 3000.

Κατὰ τὰ ζητούμενα τοῦ προβλήματος θέλομεν ἔχει λοιπὸν τὴν ἑξῆς ἰσότητα $450\times\chi=3000$, ἐξ ἧς, διαιροῦντες τὰ δύο μέλη αὐτῆς διὰ 450, πορίζόμεθα

$$\chi=\frac{3000}{450}=6,66....$$

Λοιπὸν πρὸς 6 δραχμὰς καὶ 66 σχεδὸν λεπτὰ ἔπρεπε νὰ πωλήσῃ ἕκαστον κοιλὸν τοῦ μίγματος, ἵνα λάβῃ τὴν αὐτὴν ποσότητα χρημάτων, ἣν ἤθελε λάβει καὶ ἂν ἐπώλει χωριστὰ τὰς διαφόρους ποσότητας τῶν κοιλῶν πρὸς τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς ἕκαστον εἶδος τιμὰς αὐτῶν.

Ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι μᾶς ἐδόθησαν αἱ ποσότητες διαφόρων ποιοτήτων πράγματός τινος, καθὼς καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς ἑκάστην ποιότητα τιμὴ μονάδος τινός, καὶ μᾶς ἐζητήθη νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τῆς αὐτῆς μονάδος τοῦ μίγματος τῶν δοθεισῶν ποσοτήτων οὕτως, ὥστε ἡ ὁλικὴ ἀξία αὐτοῦ νὰ ἦναι ἴση τῷ ἀθροίσματι τῶν τιμῶν τῶν ὁλικῶν ποσοτήτων ἑκάστης ποιότητος. Εἴδομεν δὲ ὅτι πρὸς εὕρεσιν τῆς ζητουμένης τιμῆς

Πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων ἑκάστης ποιότητος ἐπὶ τὴν ὁρισθεῖσαν τιμὴν αὐτῆς, νὰ προσθέσωμεν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὰ οὕτως εὑρεθησόμενα γινόμενα, καὶ ἀφ' ἑτέρου τοὺς ἀριθμοὺς τῶν μονάδων τῶν διαφόρων ποιοτήτων, καὶ νὰ διαιρέσωμεν ἔπειτα τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν τῶν μονάδων τῶν διαφόρων ποιοτήτων. Τὸ οὕτως εὑρεθησόμενον πηλίκον θέλει παριστᾷ τὴν ζητουμένην τιμὴν τῆς μονάδος τοῦ μίγματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.— *Ἔχομεν οἴνους τριῶν ποιοτήτων· 100 ὀκάδας τῆς πρώτης ποιότητος πρὸς 60 λεπτὰ τὴν ὀκάδα, 75 ὀκάδας τῆς δευτέρας ποιότητος πρὸς 50 λεπτὰ τὴν ὀκάδα, καὶ 125 ὀκάδας τῆς τρίτης ποιότητος πρὸς 90 λεπτὰ τὴν ὀκάδα. Ἐὰν ἑνώσωμεν* *πάσας ταύτας τὰς ποσότητας, ποία θέλει εἶναι ἡ ἀξία μιᾶς ὀκάδος τοῦ κράματος;*

Τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων 100×60, 75×50 καὶ 125×90 εἶναι 21000, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δεδομένων ποσοτήτων 100, 75 καὶ 125 εἶναι 300. Λοιπὸν ἡ τιμὴ χ τῆς μιᾶς ὀκάδος τοῦ κράματος θέλει εἶναι

$$\chi=\frac{21000}{300}=70$$

ἤτοι 70 λεπτά.

242. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.**—*Ἔμπορός τις ἔχει δύο ποιοτήτων σταφίδας. Ἡ μὲν πρώτη ποιότης εἶναι ἀξίας 33 ταλήρων ἡ χιλιάς, ἡ δὲ δευτέρα 45 ταλήρων, καὶ θέλει νὰ σχηματίσῃ μίγμα 600 χιλιάδων λιτρῶν ἀξίας 38 ταλήρων ἡ χιλιάς. Πόσας χιλιάδας ἐξ ἑκατέρας ποιότητος πρέπει νὰ λάβῃ πρὸς τοῦτο;*

Ἔστωσαν χ καὶ ψ ὁ ἀριθμὸς τῶν χιλιάδων, ἃς πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρας ποιότητος. Τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $\chi+\psi$ πρέπει νὰ ἦναι ἴσον τῷ 600. Ἵνα δὲ εὕρωμεν ποῖα μέρη τοῦ 600 θέλουσιν εἶναι τὸ χ καὶ ψ, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ὁ ἔμπορος, πωλῶν ἑκάστην χιλιάδα τοῦ μίγματος πρὸς 38 τάληρα, κερδίζει ἀφ' ἑνὸς 5 τάληρα τὴν χιλιάδα διὰ τὴν ἔχουσαν ἀξίαν 33 ταλήρων, καὶ ζημιοῦται ἀφ' ἑτέρου 7 τάληρα τὴν χιλιάδα διὰ τὴν ἔχουσαν ἀξίαν 45 ταλήρων. Ἐπειδὴ δὲ λαμβάνει χ χιλιάδας ἀπὸ τῶν τῆς πρώτης ποιότητος καὶ ψ ἀπὸ τῶν τῆς δευτέρας, θέλει προφανῶς κερδίσει $5\times\chi$ τάληρα καὶ ζημιωθῇ $7\times\psi$. Ἵνα λοιπὸν μὴ ζημιωθῇ μήτε ὠφεληθῇ τι πλέον, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν γινομένων $5\times\chi$ καὶ $7\times\psi$, τῶν παριστώντων τὸ κέρδος καὶ τὴν ζημίαν, ἡ ἑξῆς ἰσότης

$$5\times\chi=7\times\psi.$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος πορίζόμεθα τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν (205)

$$\chi:\psi=7:5,$$

ἐν ᾗ βλέπομεν ὅτι πρὸς εὕρεσιν τῶν μερῶν χ καὶ ψ πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸν 600 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 7 καὶ 5. Εὑρίσκομεν δὲ οὕτω (237)

$$\chi=\frac{600\times7}{7+5}=350 \quad \text{καὶ} \quad \psi=\frac{600\times5}{7+5}=250$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ λάβῃ 350 χιλιάδας ἀπὸ τῶν τιμωμένων 33 τάληρα ἡ χιλιὰς καὶ 250 ἀπὸ τῶν τιμωμένων 45.

Ἐν τῷ ἀνωτέρω προβλήματι μᾶς ἐδόθησαν αἱ τιμαὶ δύο ποιοτήτων πράγματός τινος καὶ μᾶς ἐζητήθη πόσον μέρος ἔπρεπε νὰ λάβωμεν ἀφ' ἑκατέρας ποιότητος, ἵνα ἀποτελέσωμεν ὡρισμένον μίγμα δεδομένης τιμῆς. Εἴδομεν δ' ὅτι πρὸς λύσιν τοῦ ζητήματος τούτου

Πρέπει νὰ μερίσωμεν τὴν ὁρισθεῖσαν ποσότητα τοῦ μίγματος εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες παριστῶσι τὰς διαφορὰς τῶν δύο δεδομένων τιμῶν καὶ τῆς τιμῆς τοῦ μίγματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.—*Ἔχομεν δύο ποιοτήτων οἴνους. Ἡ τιμὴ τῆς ὀκάδος τῆς πρώτης ποιότητος εἶναι 80 λεπτῶν, ἡ δὲ τῆς δευτέρας 40 λεπτῶν. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβωμεν ἀφ' ἑκατέρας ποιότητος, ἵνα σχηματίσωμεν κρᾶμα 400 ὀκάδων, ἀξίας 65 λεπτῶν ἡ ὀκά;*

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 400 εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 15 καὶ 25, οἵτινες παριστῶσι τὰς διαφορὰς 80—65, 65—40 τῶν δύο δεδομένων τιμῶν 80 καὶ 40 καὶ τῆς τιμῆς 65 τοῦ κράματος. Εὑρίσκομεν δὲ οὕτω

$$x=\frac{400\times 15}{15+25}=150 \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{400\times 25}{15+25}=250$$

243. Τὰ προβλήματα, ἐν οἷς μᾶς δίδονται αἱ ποσότητες πράγματός τινος καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τῶν διαφόρων αὐτοῦ ποιοτήτων καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ μίγματος, καλοῦνται *προβλήματα ἀναμίξεως τοῦ πρώτου εἴδους*. Ἐκεῖνα δέ, ἐν οἷς μᾶς ζητεῖται πόσας ποσότητας πρέπει νὰ λάβωμεν ἀφ' ἑκάστης ποιότητος δεδομένης ἀξίας πράγματός τινος, ἵνα σχηματίσωμεν δεδομένην ποσότητα ὡρισμένης ἀξίας, καλοῦνται *προβλήματα ἀναμίξεως τοῦ δευτέρου εἴδους*.

Ἡ λύσις τῶν προβλημάτων τοῦ πρώτου εἴδους εἶναι δυνατὴ διὰ τῆς Ἀριθμητικῆς ὁσοσδήποτε καὶ ἂν ἦναι ὁ ἀριθμὸς τῶν διαφόρων ποιοτήτων τοῦ πρὸς ἀνάμιξιν πράγματος, ἀλλ' ἡ λύσις τῶν τοῦ δευτέρου εἴδους δὲν εἶναι δυνατή, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πρὸς ἀνάμιξιν ποιοτήτων ἦναι μεγαλείτερος τοῦ 2.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἂν εἰς τὰ προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους δὲν μᾶς ἐδίδετο ἡ ποσότης τοῦ ζητουμένου μίγματος, ἀλλὰ μᾶς ἐζητεῖτο ἁπλῶς νὰ κατασκευάσωμεν μίγμα ὁσωνδήποτε δεδομένων ποιοτήτων, ἔχον δεδομένην ἀξίαν, δυνάμεθα τότε διὰ τῆς Ἀριθμητικῆς νὰ λύσωμεν τὸ ζήτημα τοῦτο κατ' ἀπείρους τρόπους.

Παραδείγματος χάριν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς ζήτημα·

Ἔμπορος ἔχει πέντε εἰδῶν οἴνους. Ἡ ὀκὰ τοῦ πρώτου εἴδους τιμᾶται 220 λεπτά, ἡ τοῦ δευτέρου 180, ἡ τοῦ τρίτου 150, ἡ τοῦ τετάρτου 100 καὶ ἡ τοῦ πέμπτου 70. Ζητεῖ δὲ ν' ἀποτελέσῃ κρᾶμά τι, οὗτινος ἡ ὀκὰ νὰ ἦναι ἀξίας 130 λεπτῶν· πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀφ' ἑκάστης ποιότητος;

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσας ὀκάδας ἐκ τῶν τιμωμένων 200 καὶ 110 λεπτῶν, τῶν περιλαμβανόντων τὴν τιμὴν 130 τοῦ ζητουμένου κράματος, πρέπει νὰ λάβωμεν, ἵνα ἀποτελέσωμεν κρᾶμά τι ἀξίας 130 λεπτῶν, ἔπειτα πόσας ἐκ τῶν τιμωμένων 180 καὶ 110, καὶ τρίτον πόσας ἐκ τῶν τιμωμένων 150 καὶ 70, πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπόν. Ἐὰν τώρα ἑνώσωμεν τὰ τρία ταῦτα μερικὰ κράματα, θέλομεν ἔχει κρᾶμά τι ἀξίας 130 λεπτῶν καὶ περιέχον πάντα τὰ εἴδη τῶν οἴνων.

Ἀλλ' ἀντὶ νὰ συνδυάσωμεν, ἀνὰ δύο ὡς ἀνωτέρω, τὰ εἴδη τῶν δεδομένων οἴνων, δυνάμεθα προφανῶς νὰ συνδυάσωμεν αὐτὰ καὶ ἄλλως. Π. χ. νὰ ζητήσωμεν πρῶτον πόσον πρέπει νὰ λάβωμεν ἐκ τῶν τιμωμένων 200 καὶ 70, πόσον ἐκ τῶν 200 καὶ 110, πόσον ἐκ τῶν 180 καὶ 110, ἢ πόσον ἐκ τῶν 150 καὶ 70, κτλ. διὰ νὰ ἀποτελέσωμεν μερικὰ κράματα ἀξίας 130 λεπτῶν. Ἐὰν τώρα ἑνώσωμεν τὰ μερικὰ ταῦτα κράματα, θέλομεν σχηματίσει κρᾶμά τι ἐκ πάντων τῶν εἰδῶν τῆς ζητουμένης ἀξίας 130.

Πάλιν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου μερικοῦ κράματος τῆς ζητουμένης ἀξίας 130 ταύτην ἢ ἐκείνην τὴν ποσότητα χωρὶς ἡ ἀξία τοῦ ὁλικοῦ κράματος νὰ μεταβληθῇ, κτλ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν πᾶς τις βλέπει, ὅτι τὸ ζήτημα ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει λύεται κατ' ἀπείρους τρόπους, ἤ, ὡς λέγουσιν οἱ Μαθηματικοί, εἶναι *ἀπροσδιόριστον*.

ΣΥΝΕΖΕΥΓΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ.

244. Πολλάκις μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ ποσοῦ τινος καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ ἑτέρου τινὸς ποσοῦ καί, ἀντὶ νὰ μᾶς δοθῇ τιμή τις τοῦ πρώτου ἀντιστοιχοῦσα εἰς δεδομένην τινὰ τιμὴν τοῦ δευτέρου, μᾶς δίδεται τιμή τις αὐτοῦ ἀντιστοιχοῦσα πρός τινα τιμὴν ἄλλου τινὸς ποσοῦ, ἔπειτα τιμή τις τούτου ἀντιστοιχοῦσα πρός τινα τιμὴν τετάρτου τινός, κτλ. καὶ τελευταῖον τιμή τις τοῦ τελευταίου ἀντιστοιχοῦσα πρός τινα δεδομένην τιμὴν τοῦ ζητουμένου. Παραδείγματος χάριν.

Μὲ πόσας δραχμὰς ἰσοδυναμοῦσιν 85 λίραι ἀγγλικαί, δοθέντος ὅτι 20 λίραι ἰσοδυναμοῦσι μὲ 95 δίστηλα, 58 δίστηλα μὲ 60 γερμανικὰ τάληρα καὶ 5 γερμανικὰ τάληρα μὲ 29 δραχμάς;

Ἐνταῦθα μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ 85 τῶν ἀγγλικῶν λιρῶν καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς ταύτας τιμὴ τῶν δραχμῶν καί, ἀντὶ νὰ μᾶς δοθῇ τιμή τις τῶν λιρῶν ἀντιστοιχοῦσα εἴς τινα τιμὴν τῶν δραχμῶν, μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ 20 τῶν λιρῶν, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν 95 τῶν διστήλων, ἔπειτα ἡ τιμὴ 58 τῶν διστήλων, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν 60 τῶν γερμανικῶν ταλήρων, καὶ τελευταῖον ἡ τιμὴ 5 τῶν γερμανικῶν ταλήρων, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν δεδομένην τιμὴν 29 τῶν δραχμῶν.

Πρὸς λύσιν τοῦ ἀνωτέρω ζητήματος διατάσσομεν τὰ δεδομένα ὡς ἑξῆς:

$$20 \text{ λίραι} = 95 \text{ δίστηλα} \qquad (1)$$

$$58 \text{ δίστηλα} = 60 \text{ γερ. τάλ.} \qquad (2)$$

$$5 \text{ γερ. τάλ.} = 29 \text{ δραχμάς,} \qquad (3)$$

τουτέστιν οὕτως, ὥστε τὸ εἶδος τῶν μονάδων, ἃς τὸ δεύτερον μέλος ἰσότητός τινος παριστᾷ, νὰ εὑρίσκηται ἐν τῷ πρώτῳ μέλει τῆς ἀμέσως ἑπομένης.

Ἐὰν τώρα εὕρωμεν μὲ πόσας δραχμὰς ἰσοδυναμοῦσιν 20 λίραι, θέλομεν ἔχει μίαν τιμὴν τοῦ δεδομένου *λίραι* καὶ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τοῦ ζητουμένου *δραχμαί*, ἑπομένως πρὸς λύσιν τοῦ ζητήματος ἠθέλομεν σχηματίσει, ὑποθέτοντες ὅτι εὕρομεν ὅτι 20 λίραι ἰσοδυναμοῦσι μὲ Α δραχμάς, τὴν ἀναλογίαν

$$20:85 = A:x, \qquad (\alpha)$$

ἐξ ἧς θέλομεν πορισθῇ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν

$$x = \frac{85 \times A}{20}.$$

Εὐκόλως τώρα διὰ τῶν ἰσοτήτων (1), (2), (3) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ποσότητα Α τῶν δραχμῶν, τὴν παριστῶσαν τὸ ἰσοδύναμον τῆς τιμῆς τῶν 20 λιρῶν. Διότι, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ 58 καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δευτέρας ἐπὶ 95, θέλομεν ἔχει

$$20 \times 58 \text{ λίραι} = 95 \times 58 \text{ δίστηλα,}$$

$$58 \times 95 \text{ δίστηλα} = 60 \times 95 \text{ γερμ. τάληρα,}$$

καὶ ἐπειδὴ 58×95 δίστηλα $= 95 \times 58$ δίστηλα, θέλομεν ἐκ τούτων πορισθῇ τὴν ἰσότητα

$$20\times 58 \text{ λίραι} = 60\times 95 \text{ γερμ. τάληρα.} \qquad (4)$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη ταύτης ἐπὶ 5 καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (3) ἐπὶ τὸ γινόμενον 60×95, θέλομεν ἔχει τὰς ἰσότητας

$$20\times 58\times 5 \text{ λίραι} = 60\times 95\times 5 \text{ γερμ. τάληρα,}$$

$$5\times 60\times 95 \text{ γερμ. τάληρα} = 29\times 60\times 95 \text{ δραχμάς,}$$

ἐξ ὧν πορίζόμεθα σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω

$$20\times 58\times 5 \text{ λίραι} = 29\times 60\times 95 \text{ δραχμάς.}$$

Ἐκ ταύτης δὲ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῶν 20 λιρῶν εἰς δραχμὰς καὶ διὰ τῆς ἀναλογίας (α) τὴν ζητουμένην τιμὴν τῶν 85 λιρῶν.

Αἱ ἰσότητες (1), (2), (3) καλοῦνται *ζεύγη*, ἡ δὲ τοιαύτη αὐτῶν διάταξις, ὥστε τὸ εἶδος τοῦ δευτέρου μέλους μιᾶς ὁποιασδήποτε ἐξ αὐτῶν νὰ εὑρίσκηται ἐν τῷ πρώτῳ μέλει τῆς ἑπομένης, καλεῖται *σύζευξις*.

245. Ὅταν διατάσσωμεν τὰ δεδομένα τοῦ ζητήματος ὡς ἀνωτέρω ἐῤῥέθη, καὶ προσθέσωμεν ἐν τῷ τέλει καὶ ἕτερον ζεῦγος, περιέχον τὴν δεδομένην τιμὴν 85 τῶν λιρῶν καὶ τὴν ζητουμένην τιμὴν χ τῶν ἀντιστοιχουσῶν δραχμῶν, ἡ ζητουμένη τιμὴ τῆς ἀγνώστου εὑρίσκεται ἀμέσως ὡς ἑξῆς. Ἔστωσαν π. χ. τὰ ζεύγη

$$20 \text{ λίραι} = 95 \text{ δίστηλα,}$$
$$58 \text{ δίστηλα} = 60 \text{ γερμ. τάληρα,}$$
$$5 \text{ γερ. τάλ.} = 29 \text{ δραχμάς,}$$
$$\chi \text{ δραχμαὶ} = 85 \text{ λίρας,}$$

καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐξετιμήσαμεν διά τινος νομίσματος τὴν ἀξίαν τῆς λίρας, τοῦ διστήλου, τοῦ γερμανικοῦ ταλήρου καὶ τῶν δραχμῶν, καὶ εὕρομεν ὅτι ἡ λίρα περιέχει α μονάδας τοῦ νέου νομίσματος, τὸ δίστηλον β, τὸ γερμανικὸν τάληρον γ καὶ ἡ δραχμὴ δ. Τὰ ἀνωτέρω ζεύγη γράφονται τότε ὡς ἑξῆς·

$$20\times\alpha = 95\times\beta,$$
$$58\times\beta = 60\times\gamma,$$
$$5\times\gamma = 29\times\delta,$$
$$\chi\times\delta = 85\times\alpha.$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰ νέα ταῦτα ζεύγη, θέλομεν ἔχει τὴν ἰσότητα

$$20\times 58\times 5\times\chi\times\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta = 95\times 60\times 29\times 85\times\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta,$$

ἧς διαιροῦντες τὰ δύο μέλη διὰ τοῦ γινομένου $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta$, θέλομεν ἔχει τὴν ἑξῆς·

$$20\times58\times5\times\chi=95\times60\times29\times85,$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα ἀμέσως

$$\chi=\frac{95\times60\times29\times85}{20\times58\times5}=2422,50.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, ἀφοῦ διατάξωμεν τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον τοῦ προβλήματος, ὡς ἀνωτέρω ἐῤῥέθη,

Ἡ τιμὴ χ τοῦ ζητουμένου εὑρίσκεται, ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον 95×60×29×85 τῶν ἀριθμῶν τῶν δευτέρων μελῶν καὶ ζευγῶν καὶ διαιρέσωμεν αὐτὸ διὰ τοῦ γινομένου 20×58×5 τῶν γνωστῶν πρώτων μελῶν αὐτῶν.

Ὁ τρόπος, δι' οὗ λύομεν ἀμέσως τὰ τοῦ τοιούτου εἴδους προβλήματα, καλεῖται *συνεζευγμένη μέθοδος*, καὶ τὰ προβλήματα αὐτὰ *προβλήματα τῆς συνεζευγμένης μεθόδου.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. — *Μὲ πόσας δραχμὰς ἰσοδυναμοῦσιν 97 ῥούβλια, δοθέντος ὅτι 34 δίστηλα ἰσοδυναμοῦσι μὲ 100 ῥούβλια, 25 δίστηλα μὲ 26 γερμ. τάληρα, 48 γερμ. τάληρα μὲ 10 λίρας καὶ 1 λίρα μὲ 28,12 δραχμάς ;*

Διατάσσοντες τὰ ζεύγη κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον θέλομεν ἔχει

100 ῥούβλια = 34 δίστηλα
25 δίστηλα = 26 γερμ. τάληρα
48 γερμ. τάλ. = 10 λίρας
1 λίρα = 28,12 δραχμὰς
χ δραχμαὶ = 97 ῥούβλια,

ἑπομένως

$$\chi=\frac{34\times26\times10\times28,12\times97}{100\times25\times48}=200,95.$$

246. Εἰς τὰ ἀνωτέρω προβλήματα τῆς συνεζευγμένης μεθόδου καὶ τὰ ζεύγη καθὼς καὶ ἡ σύζευξις αὐτῶν ἦτο, οὕτως εἰπεῖν, φανερά. Ἀλλὰ πολλάκις αἱ συνθῆκαι τῆς ἐκφωνήσεως τῶν διὰ τῆς μεθόδου ταύτης λυομένων προβλημάτων δὲν εἶναι τόσῳ ἁπλαῖ, ὥστε νὰ δυνάμεθα νὰ σχηματίζωμεν καὶ συζευγνύωμεν ἀμέσως τὰ ὑπάρχοντα ζεύγη. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει χρειάζεται ἰδιαιτέρα τις πρὸς τοῦτο ἄσκησις, ἥτις ἀποκτᾶται διὰ τῆς λύσεως διαφόρων προβλημάτων τοιαύτης φύσεως. Πρὸς τὸν σκοπὸν δὲ τοῦτον ἐκθέτομεν τὰς λύσεις τῶν ἑπομένων δύο προβλημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.—*Ἠγόρασέ τις ἐν Πάτραις κορινθιακὴν σταφίδα πρὸς 180 δραχμὰς τὰς 1000 ἐνετικὰς λίτρας καὶ ἀπέστειλεν αὐτὴν πρὸς πώλησιν εἰς Τεργέστην πληρώσας πρὸς τούτοις ἐν Ἑλλάδι μὲν 20 %₀ διὰ δασμὸν καὶ ναῦλον, ἐν Τεργέστῃ δὲ εἰς τὸν παραγγελιοδόχον αὐτοῦ 2 %₀. Ζητεῖται ἀντὶ πόσων φιορινίων πρέπει νὰ ὑπολογίσῃ ἐν Τεργέστῃ τὴν ἀξίαν τοῦ 1 στατῆρος, γνωστοῦ ὄντος ἀφ' ἑνὸς μὲν ὅτι 1000 ἐνετικαὶ λίτραι ἰσοδυναμοῦσι μὲ 375 ὀκάδας καὶ 44 ὀκάδες μὲ 1 στατῆρα, ἀφ' ἑτέρου δέ, ὅτι κατὰ τὸ τρέχον συνάλλαγμα 38 φιορίνια ἰσοδυναμοῦσι μὲ 18 γερμανικὰ τάληρα, καὶ 1 γερμανικὸν τάληρον μὲ 5,78 δραχμάς.*

Πρὸς λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος εὑρίσκομεν εἰς δραχμὰς ἐν πρώτοις τὴν ἐν Τεργέστῃ ἀξίαν τῶν 1000 ἐνετικῶν λιτρῶν, προσθέτοντες εἰς τὰς 180 δραχμὰς 20 %₀, καὶ εἰς τὸ εὑρεθησόμενον ἐξαγόμενον τῶν 216 δραχμῶν προσέτι 2 %₀, καὶ ἔχομεν 220,32 δραχμάς. Ἔπειτα σχηματίζομεν εὐκόλως κατὰ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος τὴν ἑξῆς ἄλυσιν.

1 στατὴρ = 44 ὀκάδας
375 ὀκάδες = 1000 ἐνετικὰς λίτρας
1000 ἐνετ. λίτραι = 220,32 δραχμὰς
5,78 δραχμαὶ = 1 γερμανικὸν τάληρον
18 γερ. τάληρα = 38 φιορίνια,
x φιορίνια = 1 στατῆρα,

ἐξ ἧς πορίζόμεθα τὴν ζητουμένην τιμὴν x τῶν φιορινίων

$$x=\frac{44\times1000\times220,32\times38}{375\times1000\times5.78\times18}=9,45 \text{ περίπου.}$$

Ἠδυνάμεθα, ἀντὶ νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὴν ἐν Τεργέστῃ ἀξίαν τῶν 1000 ἐνετικῶν λιτρῶν καὶ ἔπειτα νὰ σχηματίσωμεν πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου τὴν ἀνωτέρω ἄλυσιν, νὰ σχηματίσωμεν μίαν μόνην ἄλυσιν καλοῦντες *ἁπλᾶς* δραχμὰς τὰς κατ' ἀρχὰς πληρωθείσας, *βεβαρημένας* τὴν ἀξίαν αὐτῶν μετὰ τὴν πληρωμὴν τῶν 20 %₀ διὰ δασμὸν καὶ ναῦλον, καὶ *ἐπιβεβαρημένας* τὴν ἀξίαν τῶν βεβαρημένων μετὰ τὴν πληρωμὴν τῶν 2 %₀ εἰς τὸν ἐν Τεργέστῃ παραγγελιοδόχον. Διότι τότε προφανῶς 100 ἐπιβεβαρημέναι δραχμαὶ θέλουσιν ἰσοδυναμεῖ μὲ 102 βεβαρημένας, καὶ 100 βεβαρημέναι μὲ 120 *ἁπλᾶς*, ἑπομένως θέλομεν ἔχει τὴν ἑξῆς ἄλυσιν.

1 στατὴρ=44 ὀκάδας
375 ὀκάδας=1000 ἐνετικὰς λίτρας
1000 ἐνετ. λίτραι=180 ἐπιβεβαρημένας δραχμὰς
100 ἐπιβεβαρ. δραχμαὶ=102 βεβαρημένας
100 βεβαρ. δραχμαὶ=120 ἁπλᾶς
5,78 ἁπλαῖ δραχ.=1 γερμανικὸν τάληρον
18 γερ. τάληρα=38 φιορίνια
x φιορίνια=1 στατῆρα,

ἐξ ἧς πορίζόμεθα ἀμέσως τὴν ζητουμένην τιμὴν x τῶν φιορινίων

$$x=\frac{44\times1000\times180\times102\times120\times38}{375\times1000\times100\times100\times5,78\times18}=9,45 \text{ περίπου.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.—*Ἔμπορος ἐκ Καλαμῶν ἀποστέλλει εἰς ἔμπορον τῆς πόλεως Λυῶνος μέταξαν ἀγορασθεῖσαν κατὰ παραγγελίαν τοῦ δευτέρου ἐν Καλάμαις πρὸς 50 δραχμὰς τὴν ὀκάδα. Ὁ ἐν Καλάμαις ἔμπορος ἐπλήρωσε πρὸς τούτοις ἐν Ἑλλάδι μὲν 15 %₀ διὰ διάφορα ἔξοδα, ἐν Γαλλίᾳ δὲ 3 %₀, μέχρις οὗ παραδώσῃ αὐτὴν τῷ ἐν Λυῶνι παραγγελιοδότῃ αὐτοῦ. Οὗτος δὲ γράφει εἰς τὸν ἐν Τεργέστῃ ἀνταποκριτὴν αὐτοῦ νὰ ἐμβάσῃ διὰ συναλλαγματικῆς εἰς τὸν ἐν Καλάμαις ἔμπορον τὸ ἀντίτιμον τοῦ πρὸς αὐτὸν χρέος αὐτοῦ καὶ πληρόνει καὶ εἰς τὸν δεύτερον 1 %₀ διὰ προμήθειαν τοῦ συναλλάγματος. Ζητεῖται πρὸς πόσα φράγκα ἀναλογεῖ ἐν Λυῶνι ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς χιλιογράμμου τῆς μετάξης, γνωστοῦ ὄντος ἀφ' ἑνὸς μὲν ὅτι ἐν Λυῶνι τὸ φράγκον ἐπωλεῖτο τότε πρὸς 1,12 δραχμάς, καὶ ἐν Τεργέστῃ τὸ μὲν φράγκον πρὸς 21 καραντάνια, τὸ δὲ φιορίνιον, ὅπερ ἰσοῦται μὲ 60 καραντάνια, πρὸς 3,10 δραχμάς, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὅτι 1 χιλιόγραμμον ἰσοδυναμεῖ μὲ 319+$\frac{1}{6}$ δράμια.*

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου θέλομεν σχηματίσει κατὰ τὰς δεδομένας συνθήκας αὐτοῦ τὴν ἑξῆς ἅλυσιν, καλοῦντες *ἁπλᾶς* μὲν δραχμὰς τὰς τῆς ἀγορᾶς τῆς μετάξης, *βεβαρημένας* δὲ τὰς μετὰ τὴν αὔξησιν τῶν 15 %₀, *ἐπιβεβαρημένας* τὰς μετὰ τὴν αὔξησιν τῶν 3 %₀ καὶ *βεβαρημένα* φιορίνια τὰ μετὰ τὴν πληρωμὴν τοῦ 1 %₀,

1 φράγκον=21 καραντάνια
60 καραντάνια=1 ἁπλοῦν φιορίνιον
101 ἁπλᾶ φιορίνια=100 βεβαρημένα φιορίνια
1 βεβαρ. φιορίνιον=3,10 ἁπλᾶς δραχμὰς

115 ἁπλαῖ δραχ. = 100 βεβαρημένας
103 βεβαρ. δραχ. = 100 ἐπιβεβαρημένας
50 ἐπιβεβαρ. δρ. = 1 ὀκᾶ μετάξης
1 ὀκά = 400 δράμια
$319 \times \frac{1}{6}$ δράμια = 1 χιλιόγραμμον
1 χιλιόγραμμον = x φράγκα,

ἐξ ἧς πορίζόμεθα

$$x = \frac{(319+\frac{1}{6}) \times 50 \times 103 \times 115 \times 101 \times 60}{400 \times 100 \times 100 \times 3{,}10 \times 100 \times 21}$$

ΣΥΛΛΟΓΗ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ ΖΗΤΗΜΑΤΩΝ.

1. Δοθέντων ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτῶν ὑπερέχει κατὰ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 9 τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

2. Νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι, ἐὰν προσθέσωμεν 11 εἴς τινα ἀριθμόν, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων αὐτοῦ, τῶν κατεχόντων τάξιν περιττήν, καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων, τῶν κατεχόντων τάξιν ἀρτίαν, δὲν δύναται νὰ μεταβληθῇ εἰ μὴ κατὰ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 11.

3. Ἔκ τινος κρουνοῦ ῥέουσι 53 ὀκάδες ὕδατος ἀνὰ πᾶν πρῶτον λεπτόν· πόσαι θέλουσι ῥεύσει εἰς 3ὥρ. 25λ.π.; (10865).

4. Ἔμπορός τις ἠγόρασε τεμάχιον τσόχας 60 πήχεων τὸ μῆκος πρὸς 23 δραχμὰς τὸν πῆχυν. Ἐξ αὐτοῦ ἐπώλησε 42 πήχεις πρὸς 16 δραχμὰς τὸν πῆχυν, ἀλλ' ἠναγκάσθη νὰ πωλήσῃ τοὺς λοιποὺς πρὸς 9. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδησε; (54).

5. Νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ γινόμενον δύο μὴ διαδοχικῶν παραγόντων αὐξάνει, ὅταν αὐξάνωμεν τὸν μικρότερον καὶ ἐλαττοῦμεν τὸν μεγαλείτερον κατὰ μίαν μονάδα.

6. Δοθέντος ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ Ποσειδῶνος ἀπὸ τοῦ Ἡλίου εἶναι 30κις μεγαλειτέρα τῆς ἀπὸ τοῦ Ἡλίου ἀποστάσεως τῆς Γῆς, ὅτι ἡ τελευταία αὕτη εἶναι ἴση μὲ 24000 ἀκτῖνας τῆς Γῆς καὶ ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς περιέχει 6370 χιλιόμετρα, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπὸ τοῦ Ἡλίου ἀπόστασις τοῦ Ποσειδῶνος. (4586400000 χιλιόμετρα).

7. Ἀτμάμαξά τις διατρέχει 850 μέτρα ἀνὰ πᾶν πρῶτον λεπτόν· πόσα μέτρα θέλει διατρέξει εἰς 2ὥρ. 17λ.π.; (116450).

8. Τὸ φῶς χρειάζεται 8 λεπτὰ πρῶτα καὶ 13 δεύτερα, ἵνα φθάσῃ ἀπὸ τοῦ Ἡλίου εἰς τὴν Γῆν. Πόσα μέτρα διατρέχει ἀνὰ πᾶν δευτε-

ρόλεπτον, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ἡλίου ἀπόστασις τῆς Γῆς εἶναι ἴση μὲ 24000 γηΐνους ἀκτῖνας καὶ ὅτι ἑκάστη γηΐνος ἀκτὶς περιέχει 6370 χιλιόμετρα; (310101000).

9. Δύο ἀτμάμαξαι ἀναχωροῦσι συγχρόνως ἀπὸ δύο διαφόρους σταθμοὺς ἀπέχοντας ἀλλήλων 270000 μέτρα, καὶ διευθύνονται ἡ μία ἐναντίον τῆς ἄλλης. Ἡ πρώτη διατρέχει 730 μέτρα ἀνὰ πᾶν πρῶτον λεπτὸν καὶ ἡ δευτέρα 470. Ζητεῖται μετὰ πόσον χρόνον θέλουσι συναντηθῆ καὶ πόσα μέτρα ἤθελε διατρέξει ἑκατέρα;

(Ἡ συνάντησις θέλει γίνει μετὰ 3 ὥρας καὶ 45 λεπτὰ πρῶτα, καὶ ἡ μὲν πρώτη διέτρεξεν 164250, ἡ δὲ δευτέρα 105750 μέτρα).

10. Νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων αὐτοῦ καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων ἀποτελῇ ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4.

11. Πῶς ἀναγνωρίζομεν ὅτι τὰ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ἀναχθέντα κλάσματα ἔχουσι τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν;

12. Ἐν ποίᾳ περιπτώσει δεδομένον κλάσμα δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα, ἔχον δεδομένον παρονομαστήν; Παραδείγματος χάριν, τὸ κλάσμα $\frac{3}{3}\frac{2}{5}\frac{3}{7}$ δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα, ἔχον παρονομαστὴν 441;

13. Ἐλαστικὴ σφαῖρα ἀναπηδᾷ εἰς τὴν πρώτην αὐτῆς ἀνύψωσιν εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ὕψους, ἀφ' οὗ ἀφέθη, εἰς δὲ τὰς λοιπὰς εἰς τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ἐξ οὗ καταπίπτει Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὴν τρίτην αὐτῆς ἀναπήδησιν ὑψώθη εἰς ὕψος 5 μέτρων, ἐκ πόσων μέτρων ὕψους ἀφέθη κατ' ἀρχάς; (135 μέτρα.)

14. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον μεταξὺ τῆς περιφερείας καὶ τοῦ τόξου 35° 33′ 52″. (32″).

15. Ἔμπορος ἠγόρασε 35στατ. 27ὀκ. καὶ 352δράμ. μετάξης ἀντὶ 2112 ὀθ. 3τάλ. καὶ 4δραχ. Ζητεῖται πρὸς πόσον ὑπελογίσθη ἡ ὀκά;

(1ὀθ. 1τάλ. 1δραχ. 95λεπ. ὡς ἔγγιστα).

16. Ἀντὶ 15,53 δραχμῶν ἠγοράσαμεν $2+\frac{3}{8}$ πήχεις ὑφάσματός τινος· πρὸς πόσον ἠγοράσαμεν τὸν πῆχυν; (6,54 περίπου).

17. Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\alpha:\beta=\gamma:\delta$ πῶς θέλομεν πορισθῇ τὴν ἑξῆς:

$$\alpha\times\beta:\gamma\times\delta=(\alpha+\beta)^2:(\gamma+\delta)^2.$$

18. Ἐν ποίᾳ περιπτώσει προσθέτοντες τοὺς ἀντιστοίχους ὅρους δύο ἀναλογιῶν πορίζόμεθα νέαν ἀναλογίαν;

19. Πῶς ἐκ τῆς ἀναλογίας $\alpha:\beta=\gamma:\delta$ δυνάμεθα νὰ πορισθῶμεν τὴν ἑξῆς

$$\mu\times\alpha+\nu\times\gamma:\mu\times\beta+\nu\times\delta=\alpha:\beta\ ;$$

20. Φρουρὰ 700 στρατιωτῶν πολιορκουμένη εἶχε τροφὰς τὴν 1ην Ἀπριλίου μέχρι 15 Ἰουνίου, ἤτοι διὰ 75 ἡμέρας. Τὴν 12ην Ἀπριλίου ἔκαμεν ἔξοδον, ἐν ᾗ ἀπώλεσε 241 ἄνδρας. Ζητεῖται ἐπὶ πόσον χρόνον θέλουσιν ἐπαρκέσει αἱ ὑπάρχουσαι τροφαί; (95 ἡμέρας).

21. Φρουρὰ 1200 στρατιωτῶν πολιορκουμένη εἶχε τροφὰς τὴν 17ην Ἰανουαρίου μέχρι τέλους Μαρτίου, ἤτοι διὰ 73 ἡμέρας. Τὴν 1ην Φεβρουαρίου ἔκαμεν ἔξοδον, ἐν ᾗ ἀπώλεσε 150 ἄνδρας καὶ τὴν 2 Μαρτίου ἦλθεν αὐτῇ ἐπικουρία 500 στρατιωτῶν. Ἐπὶ πόσον χρόνον θέλουσιν ἐπαρκέσει αἱ ὑπάρχουσαι τροφαί; (25 ἡμ. περίπου).

22. Ἀνέλαβον τὴν οἰκοδομὴν οἰκίας τινὸς 50 ἐργάται εἰς 45 ἡμέρας, οἵτινες καὶ ἔκτισαν τὰ $\frac{5}{9}$ εἰς 33 ἡμέρας. Ζητεῖται κατὰ πόσον πρέπει νὰ αὐξηθῇ ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν, ἵνα τελειώσωσι τὴν οἰκίαν ἐντὸς τῆς ὁρισθείσης προθεσμίας. (Κατὰ 60 ἐργάτας).

23. Εἰς 15 ἡμέρας 27 ἐργάται, 10 ὥρας ἐργαζόμενοι τὴν ἡμέραν, ἔσκαψαν τάφρον 25 μέτρων τὸ μῆκος, 5 τὸ βάθος καὶ 8 τὸ πλάτος. Ἵνα 20 ἐργάται, 12 ὥρας ἐργαζόμενοι τὴν ἡμέραν, εἰς 18 ἡμέρας σκάψωσι τάφρον 25 μέτρων τὸ μῆκος καὶ 9 τὸ πλάτος, πόσων μέτρων βάθος πρέπει νὰ ἔχῃ αὕτη; (11,85 περίπου).

24. Ἠγοράσαμεν ἀντὶ 250 δραχμῶν 5 μέτρα ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος 1,50. Μετὰ 5 μῆνας ὁ αὐτὸς ἔμπορος μᾶς ἐπώλησε ἀντὶ 500 δραχμῶν 18 μέτρα τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος, ἀλλ' ἔχοντος πλάτος 1,25. Ζητεῖται πότε μᾶς ἐπώλησε εὐθηνότερον τὸ τετραγωνικὸν μέτρον καὶ κατὰ πόσον;

(Ὁ ἔμπορος μᾶς ἐπώλησε τὴν δευτέραν φορὰν εὐθηνότερον καὶ κατὰ 11 δραχμὰς καὶ 11 σχεδὸν λεπτά.)

25. Ἑκάστη σελὶς βιβλίου τινός, συγκειμένου ἐκ 40 τυπογραφικῶν φύλλων, περιέχει 36 στίχους καὶ ἕκαστος στίχος 53 γράμματα. Ζητεῖται ἐκ πόσων τυπογραφικῶν φύλλων θὰ συνέκειτο τὸ βιβλίον, ἂν ἑκάστη σελὶς αὐτοῦ περιεῖχε 38 στίχους καὶ ἕκαστος στίχος 56 γράμματα; (Ἐκ 35 τυπ. φύλλων, 13 σελ., 31 στίχ. καὶ 40 γραμ.

26. Ἐτόκισέ τις 2500 δραχμὰς πρὸς 5,25 %· πόσον τόκον θέλει λάβει μετὰ 2 ἔτη καὶ 8 μῆνας; (350 δραχμάς).

26. Ἔμπορος ἠγόρασε 400 κοιλὰ σίτου πρὸς 6,25 τὸ κοιλόν. Με-

τὰ 5 δὲ μῆνας ἐπώλησεν ἕκαστον κοιλὸν πρὸς 6,50· πόσον τοῖς $^0/_0$ ὠφελήθη; (9 δραχμὰς καὶ 60 λεπτά).

27. Συνάλλαγμα 8000 δραχμῶν προεξοφλήθη ἀντὶ 7000, τοῦ ἐπιτοκίου συμφωνηθέντος πρὸς 5 $^0/_0$· μετὰ πόσον χρόνον ἔπρεπε νὰ πληρωθῇ εἰς τὴν ἀληθῆ αὐτοῦ ἀξίαν; (Μετὰ 2ἔτ. 10μῆν. καὶ 3ἡμ.)

28. Διὰ γραμμάτιον 4525 δραχμῶν, πληρωτέων μετὰ 2 ἔτη καὶ 3 μῆνας, ἐγένετο ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις 477, 85· πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ὑπελογίσθη αὕτη;

29. Δύο ἔμποροι δι' ἐπιχείρησίν τινα κατέβαλον ὁ μὲν 1000 δραχμάς, ὁ δὲ 1500. Μετὰ 6 μῆνας παρέλαβον καὶ τρίτον συνέταιρον καταβαλόντα 2000 καὶ μετὰ 17 μῆνας καὶ τέταρτον καταβαλόντα 3000. Μετὰ 5 ἔτη ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως προέκυψε κέρδος 1800. Πόσον θέλει λάβει ἕκαστος ἀναλόγως τοῦ ὑπ' αὐτοῦ κατατεθέντος κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου, ἐφ' ὃν ἔμεινεν ἐν τῇ ἐπιχειρήσει;

(Ὁ καταβαλὼν τὰς 1000 δραχμὰς θέλει λάβει 279,08, ὁ τὰς 1500 θέλει λάβει 418,60, ὁ τρίτος 502,32 καὶ ὁ τέταρτος 600).

30. Ἔχομεν τριῶν ποιοτήτων σίτους. Ἡ ἀξία τῆς πρώτης ποιότητος εἶναι 8,75 δραχμὰς τὸ κοιλόν, ἡ τῆς δευτέρας 7,25 καὶ ἡ τῆς τρίτης 5,45. Ἐὰν ἀποτελέσωμεν μίγμα λαμβάνοντες 100 κοιλὰ ἀπὸ τῆς πρώτης ποιότητος, 150 ἀπὸ τῆς δευτέρας καὶ 200 ἀπὸ τῆς τρίτης, ποία θέλει εἶναι ἡ ἀξία τοῦ κοιλοῦ τοῦ μίγματος; (6,25).

31. Ἔχομεν δύο μίγματα ἀργύρου. Εἰς τὰ 1000 δράμια τοῦ πρώτου περιέχονται 875 δράμια καθαροῦ ἀργύρου, εἰς δὲ τὰ 1000 τοῦ δευτέρου 945. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβωμεν ἀφ' ἑκατέρου, ἵνα ἀποτελέσωμεν 300 ὀκάδων μίγμα οὗτινος τὰ χίλια δράμια νὰ περιέχωσιν 900 δράμια καθαροῦ ἀργύρου;

(Ἀπὸ τοῦ ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος 0,875 πρέπει νὰ λάβωμεν 192 ὀκάδας καὶ 343 δράμια, ἀπὸ δὲ τοῦ ἔχοντος 0,945 βαθμὸν καθαρότητος 107 ὀκάδας καὶ 57 δράμια).

ΤΕΛΟΣ.

3334